ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΗΛΕΚΤΡΙΚΩΝ ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΔΙΑΤΑΞΕΩΝ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ

ΠΑΙΓΝΙΑ ΑΤΕΛΟΥΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ ΚΑΙ ΧΡΗΣΗ ΤΟΥΣ ΣΕ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ ΑΠΟΦΑΣΕΙΣ ΕΠΕΝΔΥΣΕΩΝ. ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΗ.

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΧΡΗΣΤΟΣ Α. ΗΛΙΟΠΟΥΛΟΣ

Επιβλέπων : Δημήτριος Ασκούνης
Αναπληρωτής Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Ιούλιος 2015

Η σελίδα αυτή είναι σκόπιμα λευκή.

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΗΛΕΚΤΡΙΚΩΝ ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΔΙΑΤΑΞΕΩΝ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ

ΠΑΙΓΝΙΑ ΑΤΕΛΟΥΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ ΚΑΙ ΧΡΗΣΗ ΤΟΥΣ ΣΕ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ ΑΠΟΦΑΣΕΙΣ ΕΠΕΝΔΥΣΕΩΝ. ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΗ.

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΧΡΗΣΤΟΣ Α. ΗΛΙΟΠΟΥΛΟΣ

Επιβλέπων : Δημήτριος Ασκούνης
Αναπληρωτής Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 9η Ιουλίου 2015.

....	....	....
Δ. Ασκούνης	Ι. Ψαρράς	Β. Ασημακόπουλος
Αναπληρωτής Καθηγητής Ε.Μ.Π.	Καθηγητής Ε.Μ.Π.	Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π

Αθήνα, Ιούλιος 2015

....
ΧΡΗΣΤΟΣ Α. ΗΛΙΟΠΟΥΛΟΣ
Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

Η σελίδα αυτή είναι σκόπιμα λευκή.

Περίληψη

Στην παρούσα διπλωματική εργασία μελετάμε την λήψη στρατηγικών αποφάσεων επενδύσεων στηριζόμενοι στην θεωρία παιγνίων. Επικεντρωνόμαστε στα δυναμικά παίγνια ατελούς πληροφόρησης και συγκεκριμένα αναλύουμε την περίπτωση που μία εταιρεία εξετάζει την είσοδό της σε μία αγορά στην οποία κυριαρχεί ένα μονοπώλιο. Καθορίζουμε την πιο αντιπροσωπευτική περίπτωση της πραγματικότητας όπου η εταιρεία παρατηρεί πρώτα το επίπεδο παραγωγής του μονοπωλίου σε μία πρώτη περίοδο και έπειτα αποφασίζει αν θα εισέλθει στην αγορά σε μία δεύτερη περίοδο, χωρίς να γνωρίζει αν αντιμετωπίζει εταιρεία με χαμηλά κόστη παραγωγής ή μία με υψηλά.

Για αυτή την περίπτωση, αφού οπτικοποιήσουμε την ανάλυσή μας μέσω του Gambit, λογισμικού ανοικτού κώδικα, καταλήγουμε στην κατασκευή αλγορίθμου σε ψευδοκώδικα που παροτρύνει ή αποθαρρύνει την εταιρεία για είσοδο, εξάγοντας την "ισορροπία" της κατάστασης αυτής. Αυτό το κάνει βάση των αναλυτικών μαθηματικών μοντέλων της θεωρίας παιγνίων και της υπόθεσης ότι αν εισέλθει η εταιρεία στην αγορά, ανταγωνίζεται με την άλλη σε ένα πασίγνωστο οικονομικό μοντέλο, αυτό του δυοπωλίου Cournot. Τέλος, προσθέτουμε υπολογιστικό φύλλο σε Excel που προσομοιώνει τα παραπάνω και προσαρμόζει τους εκάστοτε υπολογισμούς στα δεδομένα που εισάγει ο χρήστης.

Η μεθοδολογία αυτή μπορεί να γίνει οδηγός για την λήψη αποφάσεων από εταιρείες που εξετάζουν την είσοδό τους σε μονοπωλιακές αγορές, σε παρόμοιες περιπτώσεις ύπαρξης ατελούς πληροφόρησης. Η γενικότητα του αλγορίθμου και του υπολογιστικού φύλλου Excel έγκειται στο γεγονός ότι έχουν καταγραφεί όλα τα βήματα και οι περιπτώσεις, από τις εξεταζόμενες στρατηγικές και πεποιθήσεις των εταιρειών και προσαρμογές ποσοτήτων παραγωγής βέλτιστα σε μοντέλο Cournot ανάλογα με τα κόστη τους, μέχρι αναλυτικά όλες τις περιπτώσεις εξαγωγής ισορροπίας με γνώμονα την μεγιστοποίηση των αναμενόμενων κερδών τους, τις οποίες επαληθεύει το λογισμικό ανοικτού κώδικα Gambit.

Λέξεις κλειδιά

<<Θεωρία Παιγνίων, Στρατηγικές Αποφάσεις Επενδύσεων, Δυναμικά Παίγνια, Ατελούς Πληροφόρησης, Είσοδος σε Αγορά, Μονοπώλιο, Πρώτη Περίοδος, Δεύτερη Περίοδος, Επίπεδο Παραγωγής, Χαμηλά Κόστη, Υψηλά Κόστη, Gambit, Cournot, Στρατηγικές, Πεποιθήσεις, Εξαγωγή ισορροπίας>>

Abstract

In this thesis we study strategic investment decision-making relying on game theory. We focus on sequential games with imperfect information and analyze a specific case, where a company considers to enter a market on which a monopoly prevails. We determine the most representative case of reality, where the company in the first period observes the production level of the monopoly and in the second period decides whether to enter the market or not, without knowing whether is facing a company with low production costs or one with high production costs.

For this case, after we visualize our analysis through Gambit, an open source software, we construct an algorithm in pseudocode that encourages or discourages the company to enter, extracting the "equilibrium" of the situation. This is accomplished according to analytical mathematical models of game theory and the assumption that if the company enters the market, she competes with the other in the basis of a well-known economic model, the Cournot duopoly. Finally, we add an Excel spreadsheet that simulates the above and adjusts the respective calculations on data entered by the user.

This methodology can be used as a guide to decision making, by companies who consider to enter monopolistic markets, in similar cases with incomplete information. The usefulness of the algorithm and the Excel spreadsheet is the specification of the procedure of the equilibrium in steps. From the proposed strategies and beliefs of each company, as well as optimal adaptations in production volumes depending on their costs, up to the detailed calculation of equilibrium, we extract all results. In each case, companies are driven by the maximization of their expected profits and results are verified by the open source software Gambit.

Key Words

<< Game Theory, Strategic Investment Decision Making, Sequential Games, Imperfect Information, Entry in Market, Monopoly, First Period, Second Period, Production Volume, Low Costs, High Costs, Gambit, Cournot, Strategies, Beliefs, Extracting an Equilibrium>>

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Για την ολοκλήρωση της παρούσας διπλωματικής εργασίας χρειάστηκαν αρκετοί μήνες σοβαρής ενασχόλησης. Όλους αυτούς τους μήνες, η καθοδήγηση και συμπαράσταση του επιβλέποντα καθηγητή μου, κου Δημήτριου Ασκούνη, ήταν ιδιαίτερα σημαντική και αμέριστη και για αυτό θα ήθελα να τον ευχαριστήσω θερμά. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον κο Γεώργιο Ρηγόπουλο, συνεργάτη του εργαστηρίου, για την πολύτιμη βοήθειά του. Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα την δεσποινίδα Αγγελική Νικητάκου και την οικογένειά μου, που όλα αυτά τα χρόνια ήταν δίπλα μου στις σπουδές μου και με στήριξαν με κάθε τρόπο σε κάθε μου βήμα.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Contents

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

List of Figures

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

List of Tables

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ

List of Algorithms

Η σελίδα αυτή είναι σκόπιμα λευκή.

1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 Θεωρία Παιγνίων σε Στρατηγικές Αποφάσεις Επενδύσεων και Ατελής Πληροφόρηση

Μόλις 70 χρόνια πριν εκδόθηκε το πρώτο βιβλίο που καταπιάστηκε με την θεωρία παιγνίων, εισάγοντας την επιστήμη αυτή που αναλύει το πώς οι εμπλεκόμενοι λαμβάνουν αποφάσεις σε καταστάσεις στρατηγικής αλληλεξάρτησης, προσπαθώντας να προσεγγίσει την καλύτερη δυνατή λύση. Η προσέγγιση αυτή γίνεται μέσα από μαθηματικά μοντέλα, τα οποία ποσοτικοποιούν τα αποτελέσματα κάθε παίκτη και προσομοιώνουν συμπεριφορές. Αυτή η πρωτοπορία της θεωρίας παιγνίων, η επίλυση μη μαθηματικών προβλημάτων με χρήση μαθηματικών, οδήγησε στην ραγδαία ανάπτυξη του κλάδου αυτού και στην ευρεία εφαρμογή του, από εταιρείες, μέχρι ολόκληρα κράτη. Η ενοποίηση μαθηματικών, οικονομικών και ψυχολογίας-κοινωνικών επιστημών υπό ένα κοινό πρίσμα στην θεωρία παιγνίων, έχει αποτελέσει εφαλτήριο για πολλές αναλύσεις και τρόπους επίλυσης σε στρατηγικές αποφάσεις επενδύσεων.

Στην εξέταση και προσπάθεια αναπαράστασης τέτοιων καταστάσεων, αν επικεντρωθούμε σε επιχειρήσεις που δρουν στην αγορά, το στοιχείο που υπεισέρχεται ως κοινός παράγοντας για ρεαλιστική αντιπροσώπευση της πραγματικότητας, είναι η ατελής πληροφόρηση που μπορεί να έχουν οι επιχειρήσεις. Στον πραγματικό κόσμο, είναι αδύνατο να γνωρίζει κάποιος όλες τις πληροφορίες για κάποιον άλλο όταν εξετάζει μία κατάσταση στην οποία αλληλεπιδρά στρατηγικά μαζί του, πόσο μάλλον για περιπτώσεις ανταγωνισμού και για συμπεριφορές, προτιμήσεις και "πιστεύω" που χαρακτηρίζουν τον άλλο. Αυτά υπεισέρχονται και είναι απαραίτητα να προσδιορισθούν ρεαλιστικά και ορθολογικά ως ένα βαθμό στην θεωρία παιγνίων. Παρ' ότι όμως έχουν αναλυθεί τρόποι προσέγγισης, αντιμετώπισης και επίλυσης παιγνίων ατελούς πληροφόρησης, δεν υπάρχει κάποια ξεκάθαρη μεθοδολογία εύρεσης ισορροπίας σε μία τέτοια περίπτωση.

Υπάρχει το σκεπτικό και το πλαίσιο στο οποίο τίθεται η ισορροπία που βελτιστοποιεί τις στρατηγικές των παικτών, αλλά δεν έχει ενσωματωθεί περαιτέρω η ατελής πληροφόρηση σε στρατηγικές αποφάσεις επενδύσεων, σε βαθμό που να προσφέρει μία μεθοδολογική προσέγγιση για λήψη αποφάσεων και καθορισμό βέλτιστων κινήσεων και στρατηγικών ανά περίπτωση.

1.2 Αντικείμενο Διπλωματικής

Σκοπός λοιπόν της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι να επιλύσει ως ένα βαθμό το πρόβλημα της ατελούς πληροφόρησης στην λήψη στρατηγικών αποφάσεων επενδύσεων, επιτυγχάνοντας μία μεθοδολογική προσέγγιση βάση της θεωρίας παιγνίων και μετατρέποντας αυτή την μεθοδολογία σε αλγόριθμο για χρηστικότητα και αμεσότητα. Συγκεκριμένα αναλύουμε την περίπτωση ενός δυναμικού παιγνίου ατελούς πληροφόρησης στο οποίο μία εταιρεία εξετάζει την είσοδό της σε μία αγορά στην οποία κυριαρχεί ένα μονοπώλιο. Ξεκινάμε από την βασική περίπτωση όπου όλα συμβαίνουν σε μία περίοδο, προχωράμε στην περίπτωση που η εταιρεία που εξετάζει είσοδο μπορεί να κάνει διαφήμιση και φτάνουμε στην πιο αντιπροσωπευτική περίπτωση της πραγματικότητας όπου η εταιρεία παρατηρεί πρώτα το επίπεδο παραγωγής του μονοπωλίου σε μία πρώτη περίοδο και έπειτα αποφασίζει αν θα εισέλθει στην αγορά σε μία δεύτερη περίοδο, χωρίς να γνωρίζει αν αντιμετωπίζει εταιρεία με χαμηλά κόστη παραγωγής ή μία με υψηλά.

Έτσι καλύπτουμε ένα ευρύ φάσμα υποπεριπτώσεων, ενδεχόμενων, εναλλακτικών και προσεγγίσεων μίας ενεργής ανταγωνιστικής οικονομικής μονάδας. Για την τελευταία περίπτωση, αφού οπτικοποιήσουμε την ανάλυσή μας μέσω του Gambit, λογισμικού ανοικτού κώδικα, καταλήγουμε στην κατασκευή αλγορίθμου σε ψευδοκώδικα που παροτρύνει ή αποθαρρύνει την εταιρεία για είσοδο, εξάγοντας την "ισορροπία" της κατάστασης αυτής. Αυτό το κάνει βάση των αναλυτικών μαθηματικών μοντέλων της θεωρίας παιγνίων και της υπόθεσης ότι αν εισέλθει η εταιρεία στην αγορά, ανταγωνίζεται με την άλλη σε ένα πασίγνωστο οικονομικό μοντέλο, αυτό του δυοπωλίου Cournot. Με την χρήση του μοντέλου κάνουμε πολύ καλή προσομοίωση της αγοράς αφού μας δίνεται η δυνατότητα καθορισμού βέλτιστων ποσοτήτων παραγωγής ανάλογα με τα διαφορετικά κόστη κάθε εταιρείας και ξεπερνάμε το πρόβλημα της στατικότητας και δυσκολίας υπολογισμού της έκβασης αν συνυπάρξουν στην αγορά οι εταιρείες. Ξεπερνάμε ουσιαστικά ένα κομμάτι της ατελούς πληροφόρησης.

Τέλος, προσθέτουμε υπολογιστικό φύλλο σε Excel που προσομοιώνει τα παραπάνω και προσαρμόζει τους εκάστοτε υπολογισμούς στα δεδομένα που εισάγει ο χρήστης, καθιστώντας την εφαρμογή μας χρήσιμο εργαλείο με ευρύ φάσμα εφαρμογής, αφού έχει δυναμικό χαρακτήρα και προσαρμόζεται στα διαφορετικά δεδομένα κάθε κατάστασης.

Να σημειώσουμε ότι σκοπός μας δεν είναι η τοποθέτηση των καταστάσεων σε αυστηρούς κανόνες και ανελαστικά πλαίσια, αλλά το να φτάσουμε σε ένα βοηθητικό εργαλείο για την συγκεκριμένη και μόνο περίπτωση υπό το πρίσμα που την εισάγουμε και την αναλύουμε, ώστε να γίνει αντιληπτή η δυναμική που προσφέρει η θεωρία παιγνίων σε περιπτώσεις όπου έχουμε ατελή ή ελλιπή πληροφόρηση και άλλες προσεγγίσεις αδυνατούν να δώσουν λύση. Η ανάλυση αυτή καθ' αυτή είναι πολύ σημαντική γιατί περιγράφει ένα τρόπο σκέψης και αντιμετώπισης καταστάσεων όπου βάση αυτού μπορούμε να δράσουμε στρατηγικά σε οποιαδήποτε περίπτωση χρησιμοποιώντας την θεωρία παιγνίων, άσχετα από το αν τελικά μπορεί να προσομοιωθεί με αλγόριθμο ή όχι (ή αν θα είμαστε νικητές ή όχι του παιγνίου).

1.3 Οργάνωση κειμένου

Η διπλωματική χωρίζεται σε δύο κύρια μέρη. Το πρώτο, είναι θεωρητικής φύσεως και επεξηγεί αναλυτικά τις αρχές της θεωρίας παιγνίων, καθορίζοντας τί είναι παίγνιο και πώς με την χρήση του λαμβάνουμε στρατηγικές αποφάσεις, θέτοντας το πλαίσιο στο οποίο πραγματοποιείται η ανάλυση μεταξύ ανταγωνιστριών εταιρειών. Αναλύονται τα βασικά χαρακτηριστικά τους και γίνεται διαχωρισμός και ταξινόμηση βάση αυτών, ενώ παραθέτονται οι βασικότεροι τρόποι διαχείρισης και επίλυσής τους ανάλογα με τον τύπο τους. Καταπιανόμαστε με χαρακτηριστικά παραδείγματα και εφαρμογές σε βάθος, που αποσαφηνίζουν πώς η θεωρία παιγνίων μπορεί να προσομοιώσει πραγματικές καταστάσεις και να γίνει χρήσιμο εργαλείο αντιμετώπισής τους.

Το δεύτερο μέρος, κάνει μία προσπάθεια εκτενούς ανάλυσης ενός παιγνίου διαδοχικών κινήσεων ατελούς πληροφόρησης, που αποτελεί την πιο δύσκολη, αλλά και πιο ρεαλιστική κατάσταση, για μία πραγματική περίπτωση στην οποία μία εταιρεία επιθυμεί να εισέλθει σε μία αγορά που κυριαρχεί ένα μονοπώλιο. Αναλύονται διάφορες εκδοχές όπου δείχνουμε σε κάθε μία πώς επηρεάζεται η θεώρηση από την μεριά των παικτών και η λύση, κάνοντας αναλύσεις ευαισθησίας για διαφοροποίηση μεταβλητών που παίζουν καθοριστικό ρόλο στο παίγνιο. Τέλος, καταλήγουμε στην πιο αντιπροσωπευτική μορφή της πραγματικότητας, θεωρώντας ότι η πρώτη εταιρεία παρατηρεί στην αρχή μία κίνηση του μονοπωλίου, προσπαθώντας να αποσπάσει κάποια πληροφορία και καθορίζουμε τα οικονομικά μεγέθη που κινητοποιούν τους παίκτες μέσω του οικονομικού μοντέλου Cournot. Για αυτό το παίγνιο, βρίσκουμε τις μεταβλητές που υπεισέρχονται στους υπολογισμούς κάθε φορά στην γενική περίπτωση και τροποποιούν την έκβαση του παιγνίου και κατασκευάζουμε αλγόριθμο που εξάγει την ισορροπία του παιγνίου βάση των μεταβλητών αυτών, πληροφορώντας μας ταυτόχρονα για το αν προτείνεται εισαγωγή ή όχι της εταιρείας στην αγορά στην ισορροπία αυτή.

Το Κεφάλαιο 2 κάνει εισαγωγή στις βασικές έννοιες και τα χαρακτηριστικά της θεωρίας παιγνίων. Το Κεφάλαιο 3 αναλύει συγκεκριμένα τα στατικά παίγνια και τους τρόπους επίλυσής τους με χαρακτηριστικά παραδείγματα και εφαρμογές. Στο Κεφάλαιο 4 αναπτύσσουμε τα δυναμικά παίγνια και βλέπουμε τις δυσκολίες που εμφανίζονται στα ατελούς πληροφόρησης, ενώ παρουσιάζουμε επίσης αναλυτικές εφαρμογές. Στο Κεφάλαιο 5 αναλύουμε σε βάθος την περίπτωση εξέτασης από μία εταιρεία εισόδου σε μία αγορά όπου δραστηριοποιείται ένα μονοπώλιο. Στο Κεφάλαιο 6 κάνουμε αναγωγή στην γενική περίπτωση και κατασκευάζουμε έναν αλγόριθμο υπολογισμού των αποδόσεων του παιγνίου αυτού καθ' αυτού αλλά και της ισορροπίας του παιγνίου και ένα υπολογιστικό φύλλο σε Excel που οπτικοποιεί τους υπολογισμούς.

2 ΘΕΩΡΙΑ ΠΑΙΓΝΙΩΝ

2.1 Εισαγωγή

Ένα διάσημο Λατινικό ρητό λέει : «η νίκη αγαπά την προετοιμασία». Η θεωρία παιγνίων προσφέρει σε κάποιον ακριβώς αυτή την προετοιμασία τόσο σε σχέση με τον εαυτό του, όσο και σε σχέση με τον αντίπαλό του / ανταγωνιστή του. Αναλύει και προβλέπει στρατηγικές κινήσεις ανταγωνιστών, προσομοιώνοντας στρατηγικές καταστάσεις όπου η επιτυχία του κάθε ατόμου για τις επιλογές του εξαρτάται και από τις επιλογές των άλλων. Η θεωρία παιγνίων μελετά το πώς λαμβάνονται οι αποφάσεις από αλληλοεξαρτώμενες μονάδες λήψης αποφάσεων όταν υφίσταται σύγκρουση συμφερόντων. Βρίσκει πληθώρα εφαρμογών όπως πολιτικές επιστήμες, οικονομικές, κοινωνικές, computer science, εξελικτική βιολογία. Καταλαβαίνουμε λοιπόν ότι οι παίκτες μπορεί να είναι δύο επιχειρήσεις, δύο ανταγωνιστικά πολιτικά κόμματα, ένας εργοδότης και ένας υπάλληλος, δύο παίκτες σκάκι ή ακόμα και δύο αντίπαλοι στρατοί. Προϋπόθεση είναι κάθε παίχτης να είναι ορθολογικός, δηλαδή να επιδιώκει το συμφέρον του, θέλοντας να μεγιστοποιήσει το κέρδος του στο παιχνίδι, αλλά και λειτουργικά ορθολογικός, δηλαδή να θεωρεί ότι αδιαμφισβήτητα το ίδιο κάνει και ο αντίπαλός του.

Η θεωρία παιγνίων τεκμηριώνει επιστημονικά αυτή την ορθολογική συμπεριφορά, παρέχοντας κάποιες γενικές αρχές με τις οποίες αναλογίζονται οι στρατηγικές αλληλεπιδράσεις και δημιουργώντας θεωρητικά μοντέλα μέσα από κάθε στρατηγική ανάλυση, τα οποία αποτελούν την βάση των στρατηγικών καταστάσεων. Με μεθοδικό και ακριβή τρόπο ανάλυσης περιγράφει τις στρατηγικές καταστάσεις ανάλογα με την περίσταση και τις παραμέτρους, δημιουργώντας μία σταθερή βάση. Με την επαναλαμβανόμενη εφαρμογή στρατηγικών τρόπων επίλυσης ανταγωνιστικών προβλημάτων, εντοπίζονται κοινοί παράγοντες και ομοιότητες στις ανταγωνιστικές αναλύσεις, το οποίο οδηγεί σε στρατηγικό πλεονέκτημα. Αυτή ακριβώς είναι και η πεμπτουσία της θεωρίας παιγνίων. Δεν ισχυριζόμαστε ότι μπορούμε νομοτελειακά να επιλύσουμε με βέλτιστο τρόπο κάθε στρατηγική κατάσταση και να πούμε ότι αυτή είναι μία ακριβής πρόβλεψη του τί πρόκειται να συμβεί στο μέλλον αλλά ότι η τεκμηρίωση και εμπέδωση αυτών των θεωρητικών μοντέλων μας προσφέρει στρατηγικό τρόπο αντιμετώπισης. Έχοντας για παράδειγμα υποθέσει το α και το β, να γνωρίζουμε ότι απαλείφοντας το α, το επιχείρημά μας για την στρατηγική μας συμπεριφορά συνεχίζει να ισχύει και απαλείφοντας το β έχουμε εντοπίσει και γνωρίζουμε σε ποιό σημείο επηρεάζει την στρατηγική μας και πώς αλλάζει, τόσο ποσοτικά όσο και ποιοτικά.

Η θεωρία παιγνίων είναι εντέλει ένα αναλυτικό όργανο, ανεπτυγμένο σε αυστηρά επιστημονικό πλαίσιο, που όμως δεν καταλήγει όλες τις φορές (όπως τα μαθηματικά) σε οριστικά συμπεράσματα. Αυτό είναι λογικό καθώς είναι αδύνατο να αναλυθούν και προβλεφθούν όλες οι πτυχές, όλες οι διαφορετικές περιπτώσεις και υποθέσεις σε μία σχέση αντιπαράθεσης. Μην θεωρήσει όμως κάποιος ότι απλά παραθέτει τα αυτονόητα με τεχνική γλώσσα, αφού με την εφαρμογή της αποκαλύπτονται πλευρές μίας αντιπαράθεσης, που η καθαρά μαθηματική προσέγγιση αδυνατεί να συλλάβει. Δεν γίνεται για παράδειγμα να εφευρεθεί στο σκάκι ένας αλγόριθμος νικηφόρας στρατηγικής, χωρίς να αναρωτηθούμε το κατά πόσο μπορεί να εφαρμοστεί από τους παίκτες δεδομένων των δεξιοτήτων τους και αυτό έρχεται να κάνει η θεωρία παιγνίων. Θεωρία παιγνίων και μαθηματικά λοιπόν ουσιαστικά συμπληρώνει το ένα το άλλο.

2.2 Ιστορική Αναδρομή

Ανάμεσα στο 0 και το 500 μ.Χ. το Βαβυλώνιο Ταλμούδ, που αποτελεί την βάση της Εβραϊκής θρησκείας, θέτει το πρόβλημα «Συμβόλαιο Γάμου» : Ένας άντρας έχει τρεις γυναίκες των οποίων τα συμβόλαια γάμου καθορίζουν πως όταν αποβιώσει θα λάβουν 100, 200 και 300 αντίστοιχα. Το Ταλμούδ δίνει αντιφατικές προτάσεις. Αν όταν πεθάνει κατέχει περιουσία των 100, προτείνει ισομοίρασμα. Αν όμως κατέχει 300 προτείνει μοιρασιά 50, 100, 150 αναλογικά ενώ στην περίπτωση που έχει 200, η πρόταση για 50, 75, 75 αποτελεί ένα μυστήριο. Το 1985 αναγνωρίστηκε ότι το Ταλμούδ προβλέπει την σύγχρονη θεωρία των συνεργατικών παιγνίων. Κάθε λύση αντιστοιχεί στον πυρήνα ενός κατάλληλα ορισμένου παιγνίου! Σε ένα γράμμα που χρονολογείται στις 13 Νοεμβρίου του 1973, ο James Waldergrave παρείχε την πρώτη, γνωστή minimax λύση μεικτής στρατηγικής σε ένα παίγνιο δύο ατόμων του παιχνιδιού με κάρτες le Her. To 1838 ο Augustin Cournot εξέτασε ένα δυοπώλιο και κατέληξε σε ένα πλαίσιο λύσης που είναι μία πιο αυστηρή εκδοχή της ισορροπίας Nash. Εν συνεχεία, το 1871 ο Charles Darwin δίνει έμμεσα την πρώτη σχέση αλληλεξάρτησης βάση θεωρίας παιγνίων στην εξελικτική βιολογία και το 1881 ο Francis Ysidro Edgeworth αναλύει μία εφαρμογή των μαθηματικών στις ανθρωπιστικές επιστήμες. Προχωρώντας στον 20ο αιώνα βρίσκουμε το 1913 το πρώτο θεώρημα θεωρίας παιγνίων από τον Ernst Zermelo που λέει ότι ένα παιχνίδι σκάκι μπορεί οποτεδήποτε να οδηγηθεί σε λύση είτε από τα άσπρα είτε από τα μαύρα ή τουλάχιστον σε ισοπαλία από αμφότερους.

Προάγγελος όμως της θεωρίας παιγνίων ώστε να νοείται ως επιστήμη, θεωρείται ο Ούγγρος φυσικομαθηματικός John von Neumann ο οποίος το 1928 δημοσίευσε το θεμελιώδες θεώρημα για παίγνια μηδενικού αθροίσματος δύο ατόμων και απέδειξε το θεώρημα minimax, εισάγοντας επίσης για πρώτη φορά το εκτεταμένης μορφής παίγνιο. Η συνεργασία του με τον Oskar Morgenstern θα οδηγήσει το 1944 στο μνημειώδες βιβλίο "Theory of Games and Economic Behavior", όπου ανέλυσαν διεξοδικά την στρατηγική αντιμετώπιση παιγνίων μηδενικού αθροίσματος δύο ατόμων για την εύρεση αμοιβαία αποδεκτών λύσεων, εισήγαγαν τα συνεργατικά παίγνια και όρισαν αξιωματικά τη θεωρία χρησιμότητας για τους παίκτες˙ τα οποία αναγνωρίστηκαν ευρέως και εφαρμόστηκαν τόσο στην οικονομική όσο και στην κοινωνική επιστήμη. Το 1950 ο Αμερικανός μαθηματικός John Nash εισάγει την έννοια της ισορροπίας στα παίγνια, γνωστή πλέον ως ισορροπία Nash, η οποία είναι η πιο ευρέως χρησιμοποιούμενη έννοια στη θεωρία παιγνίων. Η ισορροπία Nash είναι μια έκβαση (ένα ζεύγος στρατηγικών) του παιγνίου από την οποία κανένας από τους παίκτες δεν έχει κίνητρο να παρεκκλίνει, αφού, με δεδομένο το τί κάνει ο άλλος παίκτης, η στρατηγική της ισορροπίας Nash είναι η βέλτιστη για ένα παίκτη. Δηλαδή κανένας παίκτης δεν μπορεί να βελτιώσει την απόδοσή του αλλάζοντας την στρατηγική του, αν οι άλλοι παίκτες δεν αλλάξουν την δική τους. Το 1965 ο Reinhard Selten εξευγένισε και εξέλιξε την ισορροπία Nash με την έννοια της τέλειας ισορροπίας στα υποπαίγνια δυναμικών παιγνίων. Ακολούθως, το 1967 ο John Harsanyi συνέταξε την θεωρία για παίγνια ατελούς πληροφόρησης και έθεσε τις γνωστικές οικονομικές βάσεις πάνω στις οποίες αναπτύχθηκε η σύγχρονη θεωρία παιγνίων για τις προτιμήσεις και επιλογές αντίπαλων παικτών σε παίγνια ατελούς πληροφόρησης.

Το 1994 απονεμήθηκε το βραβείο Nobel στους John Nash, John C. Harsanyi και Reinhard Selten "για την πρωτοποριακή ανάλυση ισορροπίας στην θεωρία μη συνεργατικών παιγνίων". Τους ακολούθησαν οι Robert J. Aumann και Thomas C. Schelling κερδίζοντας το Nobel το 2005 επειδή "εμπλούτισαν την αντίληψή μας σχετικά με την σχέση αντιπαράθεσης και συνεργασίας μέσα από την ανάλυση της θεωρίας παιγνίων". Με το ίδιο βραβείο τιμήθηκαν το 2007 οι Leonid Hurwicz, Eric S. Maskin και Roger B. Myerson επειδή "θεμελίωσαν τις βάσεις της θεωρίας σχεδιασμού μηχανισμών" και το νεότερο βραβείο Nobel απονεμήθηκε στους Alvin E. Roth και Lloyd S. Shapley το 2012 για "την θεωρία των σταθερών κατανομών και την πρακτική του σχεδιασμού της αγοράς".

2.3 Ορισμός

Ένα παίγνιο είναι κάθε κατάσταση στην οποία τα αποτελέσματα, οι καταστάσεις που προκύπτουν εξαρτώνται όχι μόνο από τις δικές μας πράξεις αλλά και από τις πράξεις κάποιου άλλου. Η θεωρία παιγνίων είναι η λογική ανάλυση αυτών των στρατηγικών καταστάσεων ανταγωνισμού και συνεργασίας. Υπάρχουν πολλοί τύποι παιγνίων (παιχνιδιών), παιχνίδια καρτών, επιτραπέζια, βιντεοπαιχνίδια, ποδόσφαιρο κτλ. Στην θεωρία παιγνίων πιο συγκεκριμένα, παίγνιο ορίζεται κάθε κατάσταση στην οποία :

(i) Υπάρχουν τουλάχιστον δύο παίκτες.

(ii) Κάθε παίκτης έχει ένα αριθμό τρόπων δράσης τους οποίους μπορεί να επιλέξει να ακολουθήσει, για τους οποίους η στρατηγική μετράει.

(iii) Το παίγνιο έχει τουλάχιστον μία έκβαση, ένα αποτέλεσμα το οποίο καθορίζεται συνδυαστικά από τις επιλεγμένες στρατηγικές των παικτών, δηλαδή υπάρχει στρατηγική αλληλεπίδραση.

(iv) Συσχετισμένο με κάθε πιθανή έκβαση του παιγνίου είναι ένα σύνολο αποδόσεων (αριθμητικά μετρήσιμο), μία για κάθε παίκτη. Αυτές οι αποδόσεις αντιπροσωπεύουν την αξία / χρησιμότητα του αποτελέσματος για κάθε παίκτη.

Αυτός ο ορισμός αυτομάτως αποκλείει

(i) Παιχνίδια καθαρής τύχης όπως λοταρίες, μηχανήματα “κουλοχέρη” κτλ αφού εκεί η στρατηγική δεν παίζει ρόλο.

(ii) Παιχνίδια χωρίς αλληλεπίδραση / αλληλεξάρτηση στρατηγικών μεταξύ παικτών, όπως η πασιέντζα.

Συνοψίζοντας, σύμφωνα με τον Martin J. Osborn και τον Ariel Rubinstein “η θεωρία παιγνίων είναι μία βαλίτσα αναλυτικών εργαλείων σχεδιασμένων για να μας βοηθήσουνε να καταλάβουμε τα φαινόμενα που παρατηρούμε όταν λήπτες αποφάσεων αλληλεπιδρούν”. Ένα παίγνιο λοιπόν εξετάζει καταστάσεις σύγκρουσης, ανταγωνισμού, αλλά και συνεργασίας αντίπαλων παικτών.

2.4 Βασικές έννοιες και χαρακτηριστικά

Σύμφωνα με την παραπάνω τελευταία ανάλυση, , η θεωρία παιγνίων δεν είναι ένα σύνολο θεωρημάτων, αλλά ένα “κουτί εργαλείων”. Χρήση της θεωρίας παιγνίων σημαίνει όχι τόσο πολύ να γνωρίζουμε ποια θεωρήματα εφαρμόζονται σε ένα συγκεκριμένο πρόβλημα, αλλά περισσότερο ποια εργαλεία από την εργαλειοθήκη μας μπορούν να χρησιμοποιηθούν παραγωγικά ώστε να μοντελοποιήσουν αποδοτικά ιδιαίτερα συμπεριφοριστικά χαρακτηριστικά. Μαθαίνοντας θεωρία παιγνίων, σημαίνει να μαθαίνεις να λύνεις μία ποικιλία εξεζητημένων, πολύπλοκων προβλημάτων. Θα αναλύσουμε τα κύρια χαρακτηριστικά της θεωρίας παιγνίων ώστε να εξοικειωθούμε και να κατανοήσουμε καλύτερα τα προαναφερθέντα.

Ένας παίκτης, στην περίπτωσή μας ένας παίκτης οικονομικών, είναι εξ’ ορισμού, μία οντότητα με προτιμήσεις. Αυτό περιγράφεται με την αφηρημένη έννοια της χρησιμότητας. Από όταν ο ορισμός επαναδιατυπώθηκε από τον Samuelson την δεκαετία του 50, εδραιώθηκε πως, όταν λέμε ότι ένας παίκτης δρα έτσι ώστε να μεγιστοποιήσει την χρησιμότητά του, εννοούμε με τον όρο χρησιμότητα απλά οτιδήποτε είναι αυτό που η συμπεριφορά του παίκτη του προτείνει να λειτουργήσει με συνέπεια ώστε να το κάνει πιο πιθανό. Αναφέρεται σε μία καθορισμένη κλίμακα της υποκειμενικής ευημερίας που ο παίκτης αντλεί από ένα αντικείμενο ή ένα γεγονός. Η ευημερία αυτή είναι η απόδοση που προαναφέραμε. Η απόδοση είναι η ποσοτική έκφραση του οφέλους για τον παίκτη είτε αυτό είναι χρηματική αξία κτλ είτε εκφράζει κάποια προτίμηση.

Κάθε παίκτης λοιπόν θα ήθελε το παίγνιο να τελειώσει σε μία κατάσταση που του δίνει όσο το δυνατόν μεγαλύτερη απόδοση. Η έκβαση αυτή δεν καθορίζεται μόνο από τις επιλογές του, αλλά επίσης βασίζεται και στις επιλογές όλων των άλλων παικτών και εδώ ακριβώς υπεισέρχεται ο ανταγωνισμός και η συνεργασία. Τα παίγνια χωρίζονται σε δύο κύριες κατηγορίες, τα μη-συνεργατικά παίγνια και τα συνεργατικά. Τα μη συνεργατικά παίγνια πραγματεύονται το πώς νοήμων μονάδες αλληλεπιδρούν μεταξύ τους σε μία προσπάθεια να πετύχει έκαστος τους δικούς του στόχους. Δεν προβαίνουν σε δεσμεύσεις, σε συνεργασίες μεταξύ τους. Στα συνεργατικά παίγνια αντιθέτως, οι συμφωνίες μεταξύ παικτών είναι δυνατές και αναλύεται το πώς μπορούν να τις συνάψουν λαμβάνοντας από κοινού ορθολογικές αποφάσεις. Διευκρινίζουμε ότι η μη-συνεργατική θεωρία παιγνίων δεν απαγορεύει την συνεργασία, απλά έχει πάντα ως γνώμονα να ικανοποιείται το ατομικό συμφέρον και όταν υπαγορεύεται από αυτό η συνεργασία μπορεί να εξεταστεί.

Στην πραγματικότητα, κατά την γνώμη μου, η θεωρία παιγνίων δεν είναι για το πόσο ανταγωνίζονται οι άνθρωποι, όσο για το πόσο συνεργάζονται. Δεν φτάσαμε εδώ που είμαστε ως είδος επειδή είμαστε κυρίως σπουδαίοι ανταγωνιστές, αλλά επειδή είμαστε σπουδαίοι συνεργάτες. Στο ερώτημα αν η ανθρώπινη φύση είναι περισσότερο εγωιστική ή αλτρουιστική, αν η φύση είναι βάρβαρη ή τρυφερή και αν αγάπη και συντροφικότητα ή μίσος και έχθρα υπαγορεύουν την ανθρώπινη συμπεριφορά, η απάντηση σε όλες τις περιπτώσεις είναι και τα δύο, σε περίπλοκη και ταυτόχρονα άκρως αποκαλυπτική αλληλεπίδραση. Ο διαχωρισμός της θεωρίας παιγνίων σε συνεργατικά και μη, εισάγει υπεραπλουστεύσεις για να γίνουν τα υπολογιστικά μοντέλα πιο βολικά και αυτό δεν πρέπει να το ξεχνάμε.

Τα μοντέλα που μελετάει η θεωρία παιγνίων υποθέτουν ότι οι παίκτες έχουν ορθολογικότητα, βασικότατη προϋπόθεση όπως αναφέραμε και παραπάνω. Με την έννοια ότι γνωρίζουν τις εναλλακτικές τους, συγκροτούν εκτιμήσεις / προσδοκίες για τις άγνωστες, έχουν ξεκάθαρες προτιμήσεις και επιλέγουν τις πράξεις τους εσκεμμένα μετά από κάποια διαδικασία βελτιστοποίησης. Πιο συγκεκριμένα, ένας οικονομικά ορθολογικός παίκτης είναι κάποιος που μπορεί.

(i) Να εκτιμήσει αποτελέσματα / εκβάσεις, με την έννοια ταξινόμησής τους με σεβασμό στην συνεισφορά τους στην ευημερία του, την χρησιμότητά του.

(ii) Να υπολογίζει μονοπάτια προς τα αποτελέσματα, με την έννοια να διακρίνει ποια αλληλουχία ενεργειών οδηγεί σε ποιες εκβάσεις.

(iii) Να επιλέξει δράσεις από ένα σύνολο εναλλακτικών που αποφέρουν τις προτιμότερές του εκβάσεις, δεδομένων και των ενεργειών των άλλων παικτών.

Μπορούμε να συνοψίσουμε λέγοντας ότι ένας παίκτης είναι οικονομικά ορθολογικός όταν έχει εναλλακτικές και επιλέγει μεταξύ αυτών με ένα τρόπο που υποδεικνύει αξιόπιστα κίνητρα από ό,τι φαίνεται καλύτερο για τους σκοπούς του. Ο φιλόσοφος Daniel Dennett θα έλεγε : μπορούμε να προβλέψουμε την συμπεριφορά του από "την εσκεμμένη στάση".

Και αυτή η βασική υπόθεση της ορθολογικότητας αποτελεί ένα απλουστευτικό εργαλείο. Η λύση ορισμένων παιγνίων (ακόμα και όταν είναι μοναδική) είναι συνήθως τόσο περίπλοκη που είναι σχεδόν αδύνατο ένας συνηθισμένος άνθρωπος να ήταν πρόθυμος να επενδύσει τα μέσα για να την ανακαλύψει. Ακόμα, έχει αποδειχθεί ότι η πλήρης ορθολογικότητα τίθεται υπό ερώτημα στην πραγματική ζωή, τόσο λόγω εξαιρετικής πολυπλοκότητας αρκετών αποφάσεων, όσο και των διαφορών μεταξύ ανθρώπων σε επίπεδο γνώσεων για μία κατάσταση αλλά και σε επίπεδο ικανοτήτων, κυρίως αναλυτικών σε σχέση με μία κατάσταση.

Αξίζει να σημειωθεί όμως ότι η υπόθεση της ορθολογικότητας απλουστεύει πάλι τα υπολογιστικά μοντέλα, αλλά με τρόπο που να μας οδηγεί προς την σωστή κατεύθυνση, αφού μέσω αυτής διακρίνουμε απλά ότι ένας τρόπος δράσης επιλέχθηκε, ενώ κάποια εναλλακτική δράση ήταν διαθέσιμη. Κατανοούμε δηλαδή πώς θα κινιόντουσαν οι παίκτες αν ήταν πλήρως ορθολογικοί και όταν μπορούμε να αναπτύξουμε μία γενική θεωρία του πώς να αντιμετωπίσουμε τα παίγνια ορθολογικά, παρέχουμε σημαντικά και ευρέως χρήσιμα εργαλεία. Η χρησιμότητα της θεωρίας αυτής είναι που έχει σημασία και όταν τα πορίσματα δεν διαφέρουν από εκβάσεις πραγματικών καταστάσεων, από εμπειρικά συμπεράσματα, τότε η παραδοχή της ορθολογικότητας λειτουργεί, παρ' ότι γνωρίζουμε ότι είναι αδύνατο να μοντελοποιήσουμε όλες τις πτυχές της περίπλοκης πραγματικότητας.

Τέλος, κάθε παίκτης σε ένα παίγνιο καλείται να επιλέξει ανάμεσα από δύο ή περισσότερες στρατηγικές. Μία στρατηγική είναι ένα προκαθορισμένο "πλάνο παιξίματος" που λέει στον παίκτη τί δράσεις να αναλάβει ως αντίδραση / απάντηση σε κάθε πιθανή στρατηγική που μπορεί να χρησιμοποιήσουν οι άλλοι παίκτες. Οι παίκτες δηλαδή έχουν αλληλεξάρτηση και για αυτό πρέπει να λάβουν αποφάσεις στρατηγικά. Καλούνται να αποφασίσουν ποια είναι η βέλτιστη για αυτούς στρατηγική που οδηγεί στο επιθυμητό αποτέλεσμα, δρώντας σε ένα μοντέλο στρατηγικής αλληλεπίδρασης.

2.5 Διαχωρισμός και Ταξινόμηση Παιγνίων

Μία βασικότατη παράμετρος προσδιορισμού των παιγνίων εμπεριέχει την πληροφόρηση που οι παίκτες έχουν όταν επιλέγουν στρατηγικές. Έτσι έχουμε τον διαχωρισμό σε παίγνια πλήρους πληροφόρησης και μη πλήρους πληροφόρησης. Στα πλήρους πληροφόρησης, σε κάθε σημείο που η στρατηγική ενός παίκτη του υπαγορεύει να αναλάβει μία δράση, γνωρίζει τα πάντα που έχουν συμβεί στο παιχνίδι μέχρι εκείνο το σημείο. Ένα επιτραπέζιο διαδοχικών κινήσεων στο οποίο οι δύο παίκτες παρακολουθούν όλη την δράση (και γνωρίζουν βέβαια από κοινού τους κανόνες), όπως το τάβλι, είναι ένα τέτοιο παίγνιο. Αντιθέτως, στα παίγνια μη πλήρους πληροφόρησης, ο παίκτης δεν γνωρίζει ακριβώς ποιες επιλογές έχουν γίνει στο παίγνιο ως την στιγμή που πρέπει να κάνει μια επιλογή. Είτε δεν μπορεί να δει κάποιες από τις επιλογές που έγιναν στα προηγούμενα στάδια του παιγνίου, είτε παίκτες που έπαιζαν στα στάδια αυτά προτιμούν να μην αποκαλύπτουν την πληροφορία στους παίκτες επόμενων σταδίων. Ένα παράδειγμα είναι το πόκερ.

Η διαφορά μεταξύ παιγνίων πλήρους και μη πλήρους πληροφόρησης είναι στενά συνδεδεμένη με τον διαχωρισμό αναπαράστασης παιγνίων που βασίζεται στην σειρά παιξίματος. Έτσι έχουμε τα δυναμικά παίγνια ή παίγνια διαδοχικών κινήσεων όπου η σειρά με την οποία λαμβάνονται οι αποφάσεις παίζει ρόλο, δηλαδή κάποιος παίζει στο πρώτο στάδιο, κάποιος στο δεύτερο κ.ο.κ. και τα στατικά παίγνια, στα οποία οι παίκτες κινούνται ταυτόχρονα και δεν παίζει ρόλο με ποια σειρά ο παίκτης λαμβάνει αποφάσεις.

Επίσης έχοντας ορίσει το σύνολο παικτών, μπορούμε να κάνουμε άλλη μια κύρια διάκριση. Αυτά στα οποία το σύνολο πιθανών ενεργειών μεμονωμένων παικτών είναι τα θεμελιώδη στοιχεία και αυτά στα οποία το σύνολο κοινών δράσεων group παικτών είναι τα θεμελιώδη στοιχεία. Τα πρώτα αναφέρονται ως μη-συνεργατικά παίγνια ενώ τα δεύτερα αναφέρονται ως συνεργατικά παίγνια.

Ακόμα ταξινόμηση υφίσταται με βάση τις αποδόσεις κάθε έκβασης παιγνίου, τις συναρτήσεις αμοιβής ή απώλειας. Όταν η αμοιβή ενός παίκτη ισούται με την απώλεια του άλλου (παίγνια δύο παικτών), τότε έχουμε να κάνουμε με παίγνια μηδενικού αθροίσματος, αφού το άθροισμα των συνολικών αμοιβών είναι μηδενικό και δεν τίθεται θέμα συνεργασίας αφού ό,τι κερδίζει ο ένας, χάνει ο άλλος. Όταν δεν ισχύει αυτό, έχουμε παίγνια μη-μηδενικού αθροίσματος.

Για όλα τα παραπάνω υπάρχουν δύο βασικές μορφές περιγραφής, ανάλυσης παιγνίων, που κάθε μία χρησιμοποιεί ένα βασικό μαθηματικό εργαλείο για να αναπαραστήσει τα παίγνια.

Η πρώτη αναφέρεται στα παίγνια κανονικής μορφής ή παίγνια στρατηγικής μορφής. Ένα παίγνιο στρατηγικής μορφής αποτελείται από ένα σύνολο παικτών, για κάθε παίκτη υπάρχει ένα σύνολο στρατηγικών και για κάθε έκβαση (ή συνδυασμό στρατηγικών) του παιγνίου υπάρχει κάποια απόδοση για κάθε παίκτη. Το μαθηματικό εργαλείο που βοηθάει στην περιγραφή είναι ο πίνακας (μήτρα). Οι πίνακες δείχνουν τις αποδόσεις των παικτών, για κάθε πιθανό συνδυασμό (ζεύγος) στρατηγικών που οι παίκτες μπορούν να επιλέξουν, αντιστοιχίζοντας τις στρατηγικές του ενός παίκτη στις στήλες και του άλλου στις γραμμές, οπότε κάθε κελί παραθέτει ένα αποτέλεσμα καθορισμένο σε όρους αμοιβών των παικτών. Γενικά χρησιμοποιούνται για αναπαράσταση στατικών παιγνίων, όπου οι παίκτες δρουν μία φορά και ταυτόχρονα.

Η δεύτερη μορφή είναι τα εκτεταμένης μορφής παίγνια. Αναπαριστούνται με το μαθηματικό εργαλείο : δέντρα παιγνίου. Αυτό είναι ένας κατευθυνόμενος γράφος, ένα σύνολο συνδεδεμένων κόμβων που έχει διακριτή κατεύθυνση. Στους κόμβους αντιστοιχίζεται ο εκάστοτε παίκτης που έχει σειρά να παίξει, ενώ στους κλάδους οι διαθέσιμες κινήσεις. Στο τέλος του δέντρου παριστάνονται οι αποδόσεις των παικτών, οι τελικές αμοιβές ή απώλειες. Τα δέντρα και άρα η εκτεταμένη μορφή παιγνίου, χρησιμοποιούνται για να αναπαραστήσουν παίγνια διαδοχικών κινήσεων, επειδή δείχνουν την σειρά με την οποία οι ενέργειες λαμβάνονται από τους παίκτες.

Τα δύο είδη παιγνίων προφανώς δεν είναι ισοδύναμα , γιατί τα εκτεταμένης μορφής παίγνια περιέχουν πληροφορίες σχετικά με ακολουθίες παιξίματος και τα επίπεδα πληροφόρησης των παικτών σχετικά με τη δομή του παιγνίου, ενώ τα στρατηγικής μορφής παίγνια δεν το κάνουν. Σε γενικές γραμμές , ένα παίγνιο στρατηγικής μορφής θα μπορούσε να αντιπροσωπεύει οποιαδήποτε από διάφορα παίγνια εκτεταμένης μορφής. Έτσι, ένα παίγνιο στρατηγικής μορφής είναι καλύτερο να θεωρείται ως ένα σύνολο παιγνίων εκτεταμένης μορφής. Όταν η σειρά παιξίματος είναι άσχετη με την έκβαση του παιχνιδιού, τότε θα πρέπει να μελετάμε την στρατηγική μορφή του, δεδομένου ότι είναι το σύνολο που μας ενδιαφέρει. Όπου η σειρά του παιξίματος παίζει ρόλο, η εκτεταμένη μορφή πρέπει υποχρεωτικά να καθορίζεται αλλιώς τα συμπεράσματά μας θα είναι αναξιόπιστα.

Εδώ κατανοούμε καλύτερα και αυτό που προείπαμε, ότι η διαφορά μεταξύ παιγνίων πλήρους και μη πλήρους πληροφόρησης είναι στενά συνδεδεμένη με τον διαχωρισμό αναπαράστασης παιγνίων που βασίζεται στην σειρά παιξίματος. Θα αναλυθούν όλα αυτά παρακάτω και θα γίνουν κατανοητά, παραθέτοντας και παραδείγματα. Για την περαιτέρω ανάλυσή μας, θα διακρίνουμε τέσσερις βασικές κατηγορίες παιγνίων :

(i) Στατικά παίγνια πλήρους πληροφόρησης

(ii) Στατικά παίγνια μη πλήρους πληροφόρησης

(iii) Δυναμικά παίγνια πλήρους πληροφόρησης

(iv) Δυναμικά παίγνια ατελούς πληροφόρησης

3 ΣΤΑΤΙΚΑ ΠΑΙΓΝΙΑ

3.1 Στατικά παίγνια πλήρους πληροφόρησης

3.1.1 Ορισμός

Στατικό παίγνιο σημαίνει ότι οι παίκτες παίζουν ταυτόχρονα. Πλήρους πληροφόρησης σημαίνει ότι οι πληροφορίες για τις στρατηγικές και τις αποδόσεις των παικτών για κάθε πιθανό συνδυασμό στρατηγικών είναι πάντα γνωστές σε όλους. Δεν σημαίνει ότι ένας παίκτης γνωρίζει τί θα παίξει ο άλλος, αλλιώς δεν θα είχε νόημα το ότι παίζουν ταυτόχρονα. Απεναντίας, το ότι δεν παίζει ρόλο η σειρά λήψης αποφάσεων σημαίνει ακριβώς αυτό, ότι οι παίκτες δεν γνωρίζουν τις επιλογές των άλλων, αφού παίζουν ταυτόχρονα.

Δεδομένου ότι εξετάζουμε στατικά παίγνια, η ανάλυσή μας θα γίνει με την στρατηγική μορφή του παιγνίου, όπου προσδιορίζονται :

(i) Οι παίκτες / αντίπαλοι του παιγνίου

(ii) Οι διαθέσιμες στρατηγικές κάθε παίκτη (ξεκάθαρες στρατηγικές, δηλαδή απλές κινήσεις).

(iii) Η απόδοση κάθε παίκτη για κάθε πιθανή έκβαση του παιγνίου, δηλαδή για κάθε δυνατό συνδυασμό στρατηγικών

Ένας ακόμα πιο αυστηρός ορισμός των παιγνίων στρατηγικής μορφής είναι

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.1
Ένα παίγνιο στρατηγικής μορφής (ή ένα παίγνιο σε κανονική μορφή) είναι απλά ένα σύνολο n ατόμων που προσδιορίζονται από τους αριθμούς 1,2,. . . ,n (και αναφέρονται ως παίκτες του παιγνίου), τέτοιο ώστε κάθε παίκτης i έχει :
Ένα σύνολο επιλογών S (επίσης γνωστό ως το σύνολο στρατηγικών του παίκτη

(i) Τα στοιχεία του συνόλου ονομάζονται στρατηγικές του παίκτη i), και

(ii) Μία συνάρτηση απόδοσης u_i: $S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n \to \mathbb{R}$

Το παίγνιο παίζεται ως εξής: Κάθε παίκτης k επιλέγει ταυτόχρονα μια στρατηγική $s_k \epsilon S_k$ και αφού γίνει αυτό, κάθε παίκτης i λαμβάνει την απόδοση $u_i\left(s_1, s_2, \ldots, s_n\right)$. Ένα παίγνιο στρατηγικής μορφής με n παίκτες, σύνολα στρατηγικών $S_1, \ldots, S_n$ και συναρτήσεις απόδοσης $u_i, \ldots, u_n$ θα συμβολίζεται με $G = \{S_1, \ldots, S_n, u_1, \ldots, u_n\}$.

Το καρτεσιανό γινόμενο $S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n$ των συνόλων στρατηγικών καλείται σύνολο οριζόντων στρατηγικής και τα στοιχεία του$(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ ονομάζονται ορίζοντες στρατηγικής. Η απόδοση $u_i\left(s_1, s_2, \ldots, s_n\right)$ ενός παίκτη δύναται να αναπαριστά χρηματικό κέρδος, ζημία και γενικά οποιοδήποτε άλλο είδος "ικανοποίησης" που έχει σημασία για τον παίκτη.

Για να γίνουν όλα τα παραπάνω κατανοητά και να εισάγουμε βασικές τεχνικές επίλυσης αυτών των παιγνίων, παραθέτουμε ένα από τα γνωστότερα παραδείγματα της θεωρίας παιγνίων, το δίλλημα των φυλακισμένων. Το παίγνιο απεικονίζει ένα κοινωνικό φαινόμενο. Περιγράφει μία κατάσταση, στην οποία οι παίκτες θα ήταν σε καλύτερη κατάσταση αν συνεργάζονταν κι ωστόσο φαίνεται πως έχουν κάποιο κίνητρο να μην συνεργαστούν!

3.1.2 Το Δίλλημα των Φυλακισμένων

Η κατάσταση του παιγνίου έχει ως εξής : Η αστυνομία έχει συλλάβει δύο άτομα που ξέρει ότι διέπραξαν μαζί ένα έγκλημα, μία ληστεία. Δεν διαθέτουν επαρκή αποδεικτικά στοιχεία για να επιτύχουν ετυμηγορία καταδίκης στο δικαστήριο. Έχουν όμως αρκετά για να στείλουν τον καθένα τους δύο χρόνια φυλακή για την κλοπή του αυτοκινήτου διαφυγής. Ο αρχιεπιθεωρητής κάνει λοιπόν την ακόλουθη πρόταση σε κάθε φυλακισμένο : Αν ομολογήσεις την ληστεία, υποδεικνύοντας τον συνεργάτη σου και αυτός δεν ομολογήσει, τότε θα αφεθείς ελεύθερος και αυτός θα καταδικαστεί σε δεκαετή φυλάκιση. Αν ομολογήσετε και οι δύο, θα καταδικαστείτε και οι δύο σε πέντε χρόνια φυλάκιση. Αν δεν ομολογήσει κανείς, τότε θα καταδικαστείτε σε δύο χρόνια φυλάκισης ο καθένας για κλοπή αυτοκινήτου.

- Άρα στο παίγνιό μας έχουμε δύο παίκτες και κάθε ένας έχει δύο στρατηγικές.

  Φυλακισμένος 1 : Μη ομολογία, Ομολογία

  Φυλακισμένος 2 : Μη ομολογία, Ομολογία

  Οι αποδόσεις δίνονται από τα ζεύγη (α,β) (σε κάθε κελί του πίνακα) για κάθε έκβαση, με α την απόδοση για τον παίκτη 1 (πρώτος αριθμός κελιού) και β την απόδοση για τον παίκτη 2 (δεύτερος αριθμός κελιού) και ποσοτικοποιούνται σε χρόνια φυλάκισης. (Περισσότερα = χειρότερη αμοιβή)

- Οι στρατηγικές επιλέγονται από τους δύο παίκτες ταυτόχρονα και χωρίς να υπάρχει επικοινωνία μεταξύ τους. Αναπαριστώντας λοιπόν το παίγνιο σε μορφή πίνακα έχουμε

		Παίκτης 2	
		μη ομολογία	ομολογία
Παίκτης 1	μη ομολογία	(-2,-2)	(-10,0)
	ομολογία	(0,-10)	(-5,-5)

Table 1: Το δίλλημα των φυλακισμένων

Ο πίνακας περιγράφει εξ' ολοκλήρου το παίγνιο σε στρατηγική μορφή, συλλαμβάνοντας τον τρόπο με τον οποίο οι ξεχωριστές τους επιλογές αλληλεπιδρούν. Οι αποδόσεις είναι προφανώς αρνητικές γιατί είναι ποινές. Είναι προφανές πως

(i) Και οι δύο παίκτες έχουν συμφέρον να σιωπήσουν αφού τότε επιβάλλεται και στους δύο η ελάχιστη ποινή φυλάκισης 2 χρόνων

(ii) Αν ο ένας παίκτης δεν ομολογήσει, ο άλλος έχει κίνητρο να το κάνει αφού τότε αφήνεται ελεύθερος

Πιο λεπτομερώς, κάθε παίκτης αξιολογεί τις δύο πιθανές του ενέργειες συγκρίνοντας την προσωπική του αμοιβή σε κάθε στήλη, αφού αυτό φανερώνει ποια ενέργειά του είναι προτιμότερη, για τον ίδιο, για κάθε πιθανή ενέργεια του συνεργού του. Οπότε παρατηρούμε : Αν ο παίκτης 2 ομολογήσει, τότε ο παίκτης 1 καταδικάζεται σε 5 χρόνια φυλακή αν ομολογήσει και σε 10 αν δεν ομολογήσει. Ενώ αν ο παίκτης 2 δεν ομολογήσει, τότε ο παίκτης 1 καταδικάζεται σε 2 χρόνια φυλακή αν δεν ομολογήσει και αφήνεται ελεύθερος αν ομολογήσει. Οπότε ο παίκτης 1 έχει συμφέρον να ομολογήσει, ανεξαρτήτως του τί θα πράξει ο συνεργός του. Αντίστοιχα, ο παίκτης 2 αξιολογεί τις δράσεις του, συγκρίνοντας τις αποδόσεις του προς τα κάτω σε κάθε γραμμή και καταλήγει ακριβώς στο ίδιο συμπέρασμα με τον παίκτη 1.

Αυτό σημαίνει ότι, ανεξάρτητα από την επιλογή του παίκτη 2 είναι καλύτερα για τον παίκτη 1 να επιλέξει την στρατηγική της ομολογίας. Όποτε μία δράση ενός παίκτη είναι αποδοτικότερη όλων των υπόλοιπων δράσεών του, για κάθε πιθανή ενέργεια του αντιπάλου, τότε λέμε ότι η πρώτη δράση κυριαρχεί αυστηρά τις άλλες. Την ονομάζουμε αυστηρά κυρίαρχη στρατηγική. Εδώ λοιπόν, η στρατηγική της ομολογίας είναι μια αυστηρά κυρίαρχη στρατηγική του παίκτη 1. Παρόμοια εξέταση (αφού έχουν ίδιες στρατηγικές) αποκαλύπτει ότι η στρατηγική της ομολογίας είναι επίσης μια αυστηρά κυρίαρχη στρατηγική για τον παίκτη 2.

Άρα η λύση αυτού του στατικού παιγνίου πλήρους πληροφόρησης αν οι παίκτες παίζανε ορθολογικά (παίζοντας την στρατηγική που έχει κατηγορηματικά καλύτερη απόδοση) είναι το ζεύγος (ομολογία, ομολογία). Αυτή η λύση είναι η λύση που προκύπτει χρησιμοποιώντας αυστηρά κυρίαρχες στρατηγικές.

Η διαδικασία ώστε να φτάσουμε στην ισορροπία του παιγνίου είναι μηχανοποιημένη και είναι γνωστή ως επαναλαμβανόμενη απάλειψη κυριαρχούμενων στρατηγικών. Ο παίκτης 1 διακρίνει εξετάζοντας τον πίνακα ότι οι αποδόσεις του σε κάθε κελί της κάτω σειράς είναι υψηλότερες (μικρότερες ποινές) από τις αποδόσεις του στο κάθε αντίστοιχο κελί της πάνω σειράς. Συνεπώς, δεν είναι ποτέ συμφέρον γι' αυτόν να παίξει την στρατηγική του της πάνω σειράς, δηλαδή να μην ομολογήσει, ανεξαρτήτως του τί κάνει ο παίκτης 2 (στρατηγική μη ομολογίας κυριαρχείται από στρατηγική ομολογίας). Ο παίκτης 2 τώρα, γνωρίζοντας ότι ο παίκτης 1 είναι ορθολογικός και δεν θα παίξει μια κυριαρχούμενη στρατηγική, μπορεί απλά να απαλείψει την πάνω σειρά και να θεωρήσει ότι πλέον πρέπει να αποφασίσει την στρατηγική του βάση στο εναπομένον παίγνιο.

		Παίκτης 2	
		μη ομολογία	ομολογία
Παίκτης 1	ομολογία	(0, -10)	(-5, -5)

Table 2: Πίνακας εναπομένοντος παιγνίου

Εδώ είναι πλέον προφανές ότι η στρατηγική "μη ομολογία" του παίκτη 2 κυριαρχείται από την στρατηγική "ομολογία" (-5>-10), οπότε η πρώτη στήλη απαλείφεται και καταλήγουμε στο τελευταίο κελί, στην ισορροπία (ομολογία, ομολογία), η οποία αποτελεί την λύση μας όπως περιμέναμε από τα προηγούμενα.

Από την στιγμή που το σκεπτικό που μας οδήγησε στο να διαγράψουμε όλες τις άλλες πιθανές εκβάσεις βασιζόταν σε κάθε βήμα μόνο στην παραδοχή ότι και οι δύο παίκτες είναι οικονομικά ορθολογικοί (επιλέγουν στρατηγικές που οδηγούν σε υψηλότερες αποδόσεις έναντι στρατηγικών που οδηγούν σε χαμηλότερες), έχουμε πολύ ισχυρές βάσεις να βλέπουμε την κοινή ομολογία ως την λύση του παιγνίου, το αποτέλεσμα δηλαδή στο οποίο πρέπει να συγκλίνει το παίγνιο στον βαθμό που η οικονομική ορθολογικότητα ερμηνεύει ορθά τα κίνητρα των παικτών. Να αναφέρουμε εδώ ότι η σειρά με την οποία οι κυριαρχούμενες σειρές και στήλες διαγράφονται δεν παίζει κανένα ρόλο. Αν είχαμε ξεκινήσει διαγράφοντας την αριστερή στήλη και μετά την από πάνω σειρά (δηλαδή εκίνηση από τον παίκτη 2), θα καταλήγαμε στην ίδια λύση.

Παρατηρούμε ότι η επίλυση με χρήση αυστηρά κυρίαρχων στρατηγικών οδηγεί σε 5ετή φυλάκιση και για τους δύο, την ώρα που αν και οι δύο δεν ομολογήσουν πετυχαίνουν μεγαλύτερη χρησιμότητα, αφού θα πάνε 2 χρόνια φυλακή έκαστος. Δηλαδή, είναι χειρότερη έκβαση από εκείνη που θα υπήρχε αν κάθε φυλακισμένος ήταν βέβαιος ότι ο άλλος δεν θα ομολογούσε. Εάν λοιπόν οι συλληφθέντες είχαν τρόπο να συνεργασθούν και να συμφωνήσουν από κοινού σε μη ομολογία, θα βελτίωναν και οι δύο σημαντικά την θέση τους. Οπότε τίθεται το ερώτημα, μπορεί η επικοινωνία να βοηθήσει;

Ας υποθέσουμε ότι οι φυλακισμένοι έχουν αναγνωρίσει το παίγνιο και μπορούν να μιλήσουν / συνεννοηθούν προκαταβολικά πριν ανακριθούν χωριστά και υπόσχονται να μην ομολογήσει κανείς. Αν αυτές οι υποσχέσεις είναι μη δεσμευτικές ή υπάρχουν μικρές συνέπειες για την αθέτησή τους τότε η ικανότητα των φυλακισμένων να επικοινωνήσουν πριν κληθούν να επιλέξουν στρατηγικές δεν παίζει κανένα ρόλο : Κάθε κρατούμενος αναγνωρίζει ότι είναι προς το συμφέρον του αντιπάλου του να υπόσχεται να μην ομολογήσει ανεξάρτητα από ποια στρατηγική ο αντίπαλος σχεδιάζει να παίξει. Για αυτό το λόγο, δεν θεωρούμε την προ-παιγνίου επικοινωνία σημαντική στην μη συνεργατική θεωρία παιγνίων, αφού περί αυτής πρόκειται το δίλλημα των φυλακισμένων.

Σημασία δεν έχει να συμφωνήσουν οι φυλακισμένοι να μην ομολογήσουν, αλλά το κατά πόσο πόσο μπορεί αυτή η συμφωνία να εφαρμοστεί. Αν ο παίκτης 1 είναι πεπεισμένος ότι ο συνεργός του θα τηρήσει την συμφωνία τους να μην ομολογήσουν, τότε μπορεί να εκμεταλλευτεί την ευκαιρία για να αφεθεί ελεύθερος (τί πιο δελεαστικό), ομολογώντας. Συνειδητοποιεί βέβαια ότι ο ίδιος πειρασμός θα κατακλύσει και τον παίκτη 2. Σε αυτή την περίπτωση όμως, πάλι θα θελήσει να ομολογήσει για να αποφύγει την χειρότερη πιθανή για αυτόν έκβαση. (10 χρόνια φυλακή). Η συμφωνία μεταξύ τους λοιπόν χάνει κάθε αξία γιατί δεν έχουν κανένα τρόπο να την επιβάλλουν. Οι υποσχέσεις που δίνει ο ένας στον άλλο αποτελούν αυτό που οι αναλυτές της θεωρίας παιγνίων καλούν "φθηνά λόγια".

Συνοψίζοντας, όταν αναπαριστούμε το δίλλημα των φυλακισμένων σε στρατηγική μορφή (και κάθε στατικό παίγνιο πλήρους πληροφόρησης), υποθέτουμε έμμεσα ότι οι φυλακισμένοι δεν μπορούν να επιδιώξουν συμπαιγνιακή συμφωνία αφού επιλέγουν τις ενέργειές τους ταυτόχρονα. Οπότε κάθε παίκτης θα επιλέξει (ορθολογικά) την αποδοτικότερη για αυτόν στρατηγική, ανεξαρτήτως του τί θα επιλέξει ο συνεργός του και η μη-συνεργατική λύση αποτελεί ουσιαστικά αυστηρά κυρίαρχη στρατηγική.

Έχει ειπωθεί ότι το δίλλημα των φυλακισμένων δεν είναι ένα τυπικό παίγνιο από πολλές απόψεις. Ένα από αυτά τα σημεία, είναι ότι όλες οι γραμμές και οι στήλες του είτε κυριαρχούνται αυστηρά είτε κυριαρχούν αυστηρά. Σε κάθε παίγνιο στρατηγικής μορφής, όπου αυτό ισχύει, η επαναλαμβανόμενη εξάλειψη των αυστηρά κυριαρχούμενων στρατηγικών είναι εγγυημένο ότι θα καταλήξει σε μια μοναδική λύση. Αργότερα, όμως, θα δούμε ότι για πολλά παίγνια αυτή η συνθήκη δεν ισχύει, και έτσι η αναλυτική μας διαδικασία είναι λιγότερο άμεση.

Αυτό δεν αναιρεί την σημασία του παιγνίου αυτού η οποία έχει ευρεία εφαρμογή στην θεωρία παιγνίων. Κατ΄ αρχάς, είναι μια απλή αναπαράσταση μίας πληθώρας σημαντικών καταστάσεων. Θα μπορούσαμε αντί για "ομολογία" / "μη ομολογία" να ονομάσουμε τις στρατηγικές "συνείσφερε στο κοινό καλό" ή "φέρσου εγωιστικά". Αυτό συλλαμβάνει μία ποικιλία καταστάσεων που στα οικονομικά περιγράφονται ως "παίγνια δημοσίου καλού". Ένα παράδειγμα είναι η κατασκευή μιας γέφυρας. Είναι καλύτερα για όλους αν η γέφυρα χτιστεί, αλλά καλύτερα για κάθε παίκτη μεμονωμένα αν κάποιος άλλος την χτίσει. Αντίστοιχα, το παίγνιο θα μπορούσε να περιγράφει τις εναλλακτικές δύο εταιρειών που ανταγωνίζονται στην ίδια αγορά, με στρατηγικές "θέσε μια υψηλή τιμή" και "θέσε μια χαμηλή τιμή". Κανονικά είναι πιο συμφέρον και για τις δύο εταιρείες να θέσουν αμφότεροι υψηλές τιμές, αλλά πιο συμφέρον για κάθε εταιρεία μεμονωμένα να θέσει χαμηλή τιμή ενώ ο αντίπαλος θέτει υψηλή τιμή.

Ένα δεύτερο σημαντικό χαρακτηριστικό, είναι ότι είναι αυτονόητο το πώς ένα νοήμων άτομο θα έπρεπε να συμπεριφερθεί. Αποδείξαμε ότι ασχέτως του τί πιστεύει κάθε φυλακισμένος πως ο συνεργός του θα κάνει, είναι πάντα καλύτερο να ομολογήσει. Αυτή η διαμάχη ανάμεσα στο κυνήγι ατομικών στόχων και το "κοινό καλό" είναι η καρδιά πολλών παιγνίων.

Τρίτο σημαντικό πόρισμα είναι ότι το παίγνιο αυτό αλλάζει σημαντικά αν είναι επαναλαμβανόμενο, ή αν οι παίκτες αλληλεπιδράσουν ξανά στο μέλλον. Αν για παράδειγμα στο μέλλον (μετά τα 5 χρόνια φυλακή και την απελευθέρωσή τους) διέπρατταν νέο έγκλημα και κατέληγαν πάλι στο ίδιο παίγνιο. Δεν μπορούμε ποτέ να είμαστε σίγουροι ότι δεν θα ομολογήσει κανείς, αλλά σίγουρα η επανάληψη θέτει τις βάσεις για "ανταμοιβή" ή "τιμωρία" στο μέλλον για συγκεκριμένη συμπεριφορά στο παρών. Πολλοί αναλυτές της θεωρίας παιγνίων εξ' άλλου έχουν παράσχει μία πληθώρα θεωριών για να εξηγήσουν την προφανή "διαίσθηση" πως αν το παίγνιο επαναλαμβάνεται αρκετά συχνά, οι παίκτες θα όφειλαν να συνεργαστούν.

Ένα είναι σίγουρο, "αν ήμασταν όλοι καλύτεροι άνθρωποι ο κόσμος θα ήταν ένα καλύτερο μέρος". Αυτό το συμπέρασμα-δήλωση φανερώνει μερική από την δύναμη και το νόημα της θεωρίας παιγνίων όταν αξιολογηθεί μέσω αυτής, γιατί όχι, δεν είναι σίγουρο! Μπορεί σε κάποιους να φαίνεται αυταπόδεικτο ή αυτονόητο αλλά η θεωρία παιγνίων μπορεί να δώσει ακριβές νόημα στο τί σημαίνει η δήλωση είμαστε καλύτεροι άνθρωποι αλλά και τί σημαίνει για τον κόσμο να είναι καλύτερο μέρος και βάση αυτών να αποδείξει ή καταρρίψει την αρχική δήλωση.

Συγκεκριμένα, σύμφωνα με τον David K. Levine είναι ψευδής και το αποδεικνύει χρησιμοποιώντας μία παραλλαγή του διλλήματος των φυλακισμένων που καλεί "Το παίγνιο της περηφάνιας" σε συνδυασμό με το "Αλτρουιστικό παίγνιο περηφάνιας" στα οποία προστίθεται μια νέα στρατηγική, αυτή του να είναι ο παίκτης περήφανος και να μην ομολογεί ποτέ παρά μόνο ως αντίποινα σε έναν αντίπαλο παίκτη που τον κατέδωσε ομολογώντας.

3.1.3 Παίγνιο Πίνακα

Μπορούμε τώρα να ορίσουμε αυστηρά με μαθηματικό προσδιορισμό το παίγνιο πίνακα, που είναι ουσιαστικά μορφοποίηση παιγνίου στρατηγικής μορφής.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.2
Ένα παίγνιο πίνακα είναι ένα παίγνιο δύο παικτών τέτοιο ώστε:

(i) Ο παίκτης 1 έχει ένα πεπερασμένο σύνολο στρατηγικών S_1 με m στοιχεία

(ii) Ο παίκτης 2 έχει ένα πεπερασμένο σύνολο στρατηγικών S_2 με n στοιχεία

(iii) Τα αποτελέσματα για τους παίκτες είναι συναρτήσεις $u_1(s_1, s_2)$ και $u_2(s_1, s_2)$ των εκβάσεων

Προφανώς $u(.,.)$ οι συναρτήσεις χρησιμότητας των παικτών και το παίγνιο παίζεται ως εξής: Ο παίκτης 1 σε δεδομένη στιγμή επιλέγει μία στρατηγική $s_1 \epsilon S_1$και ταυτόχρονα ο παίκτης 2 επιλέγει μία στρατηγική $s_2 \epsilon S_2$, και όταν αυτό πραγματοποιηθεί ο παίκτης i έχει την απόδοση $u_i(s_1, s_2)$. Αν $S_1 = \left\{s_1^1, s_2^1, \ldots, s_m^1\right\}$, $S_2 = \left\{s_1^2, s_2^2, \ldots, s_n^2\right\}$ και θέσουμε $\alpha_{ij} = u_1\left(s_i^1, s_j^2\right)$ και $\beta_{ij} = u_2\left(s_i^1, s_j^2\right)$ τότε οι αποδόσεις μπορούν να παρουσιαστούν με $m \times n$ πίνακα. Αντίστοιχα οι έννοιες της κυριαρχίας και της αυστηρής κυριαρχίας μπορούν να οριστούν για κάθε παίγνιο πίνακα ως εξής:

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.3
Μια στρατηγική s_i του παίκτη 1 σε ένα παίγνιο πίνακα λέμε ότι:

(i) κυριαρχεί επί μιας άλλης στρατηγικής s_j του παίκτη 1 αν
$u_1(s_i, s) \geq u_1(s_j, s)$ για κάθε στρατηγική s του παίκτη 2

Παρόμοια ορίζονται και οι κυρίαρχες και αυστηρά κυρίαρχες στρατηγικές για τον παίκτη 2.

Η μέθοδος επαναλαμβανόμενης απάλειψης αυστηρά κυριαρχούμενων στρατηγικών δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για πολλά παίγνια για τον απλούστατο λόγο ότι κάποιο παίγνιο μπορεί να μην έχει κυρίαρχες στρατηγικές (πόσο μάλλον αυστηρά κυρίαρχες σε κάθε γραμμή ή στήλη όπως το δίλλημα των φυλακισμένων). Εξ' άλλου, η απαίτηση μια στρατηγική να είναι αυστηρά κυρίαρχη είναι μάλλον αυστηρή και δύσκολο να συναντηθεί. Οπότε πρέπει να είμαστε σε θέση να επιλύσουμε παίγνια χωρίς ύπαρξη αυστηρά κυρίαρχων στρατηγικών. Εδώ έρχεται η έννοια της ισορροπίας Nash να δώσει την λύση, που στον πυρήνα της φιλοσοφίας της βρίσκεται το τί θα πράξει ο κάθε παίκτης, σε αντίθεση με την μέθοδο επαναλαμβανόμενης απάλειψης αυστηρά κυριαρχούμενων στρατηγικών που δείχνει βήμα βήμα τί δεν θα πράξει ο παίκτης.

3.1.4 Ισορροπία Nash

Το ακόλουθο παίγνιο που θα φέρουμε ως παράδειγμά μας δεν έχει ούτε αυστηρά κυρίαρχες ούτε αυστηρά κυριαρχούμενες στρατηγικές

		Παίκτης 2		
		N	K	R
	M	(5,1)	(2,0)	(2,2)
Παίκτης 1	L	(0,4)	(1,5)	(4,4)
	T	(2,4)	(3,6)	(1,0)

Table 3: Παράδειγμα ισορροπίας Nash

Η ισορροπία Nash επιτυγχάνεται όταν οι στρατηγικές των διαφόρων παικτών είναι οι καλύτερες απαντήσεις σε κάθε άλλο παίκτη. Δεδομένων των στρατηγικών των άλλων παικτών, κάθε παίκτης ενεργεί βέλτιστα, δηλαδή παίζει σύμφωνα με τα κίνητρά του, μεγιστοποιώντας το δικό του κέρδος. Ισοδύναμα, κανένας παίκτης δεν μπορεί να ωφεληθεί παραπάνω αν αποκλίνει μόνος του, δηλαδή αλλάζοντας την στρατηγική του. Οπότε, προσπαθώντας κάθε παίκτης να μεγιστοποιήσει την απόδοσή του έχουμε:

Για τον παίκτη 1: Αν ο παίκτης 2 παίξει N, τότε ο παίκτης 1 συγκρίνει τις αποδόσεις των στρατηγικών του στην πρώτη στήλη και αφού 5>2>0, επιλέγει να παίξει M. Αν ο παίκτης 2 παίξει K, τότε ο παίκτης 1 βλέπει στην δεύτερη στήλη 3>1>2 και επιλέγει T. Αν πάλι ο παίκτης 2 παίξει R τότε ο παίκτης 1 παίζει L αφού 4>2>1.

Για τον παίκτη 2: Αν ο παίκτης 1 παίξει M, τον συμφέρει να επιλέξει R καθώς 2>0>1. Αν παίξει L, ευνοϊκότερο για τον παίκτη 2 είναι να παίξει K αφού 5>4=4. Τέλος, αν ο παίκτης 1 επιλέξει T, ο παίκτης 2 μεγιστοποιεί την απόδοσή του παίζοντας K, αφού στην τρίτη γραμμή 6>4>0.

Μια "μεθοδολογική συντόμευση" των προαναφερθέντων είναι η εξής: Υπογραμμίζουμε βήμα βήμα κάθε βέλτιστη απάντηση κάθε παίκτη και όποιο κουτί περιέχει και τα δύο νούμερά του υπογραμμισμένα είναι η ισορροπία Nash του παιγνίου. (Για ευκολία οι επιλογές του παίκτη 1 φαίνονται με μονή υπογράμμιση ενώ του παίκτη 2 με διπλή). Έτσι, καταλήγουμε

		Παίκτης 2		
		N	K	R
	M	$(\underline{5},1)$	(2,0)	$(2,\underline{\underline{2}})$
Παίκτης 1	L	(0,4)	$(1,\underline{\underline{5}})$	$(\underline{4},4)$
	T	(2,4)	$(\underline{3},\underline{\underline{6}})$	(1,0)

Table 4: Μεθοδολογία εύρεσης ισορροπίας Nash

Η ισορροπία Nash του παιγνίου μας είναι ο συνδυασμός (T,K). Αυτό επαληθεύεται ελέγχοντας την ισχύ της ισορροπίας Nash, ότι δηλαδή κανένας παίκτης δεν μπορεί να ωφεληθεί περισσότερο αποκλίνοντας μόνος του από την ισορροπία και αλλάζοντας στρατηγική. Πράγματι, ο παίκτης 1, δεδομένου ότι ο παίκτης 2 θα επιλέξει K, δεν μπορεί να κερδίσει κάτι παραπάνω αλλάζοντας σε M ή L αφού 1<2<3. Αντίστοιχα, ο παίκτης 2, δεδομένου ότι ο παίκτης 1 θα παίξει T, δεν έχει συμφέρον να παίξει ούτε R ούτε N, αφού 0<4<6.

Ορίζουμε τώρα την ισορροπία Nash σε παίγνιο πίνακα

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.4
Ένα ζεύγος στρατηγικών $(s_1^*, s_2^*) \epsilon S_1 \times S_2$ είναι ισορροπία Nash ενός παιγνίου πίνακα αν

(i) $u_1(s_1^*, s_2^*) \geq u_1(s, s_2^*)$ για κάθε $s \epsilon S_1$

(ii) $u_2(s_1^*, s_2^*) \geq u_2(s_1^*, s)$ για κάθε $s \epsilon S_2$

Με άλλα λόγια, το σημείο ισορροπίας Nash είναι μια λύση σταθερή, με την έννοια ότι κανένας από τους παίκτες δεν βελτιώνει την απόδοσή του αν αποκλίνει μονομερώς από αυτό το σημείο ισορροπίας, οπότε δεν τον συμφέρει να αλλάξει στρατηγική. Με αυτή την έννοια, μια ισορροπία Nash έχει την ιδιότητα να είναι αυτοεπιβαλλόμενη. Δηλαδή, αν οι παίκτες ήξεραν ότι καθένας έχει καταλήξει να επιλέξει μια ισορροπία Nash, τότε καθένας θα ήθελε πράγματι να επιλέξει την στρατηγική της ισορροπίας Nash, αφού πολύ απλά αυτή είναι η βέλτιστη επιλογή.

Γενικεύοντας, λαμβάνοντας υπόψη και τον ορισμό 1.1, μπορούμε να ορίσουμε την ισορροπία Nash σε ένα παίγνιο στρατηγικής μορφής, ανεξάρτητα του αν έχουμε πίνακα ή όχι. Ο αντικειμενικός στόχος κάθε παίκτη σε ένα παίγνιο στρατηγικής μορφής είναι να μεγιστοποιήσει την απόδοσή του. Ένας τέτοιος ορίζοντας στρατηγικής, όπου κάθε παίκτης αναζητά την μεγιστοποίηση της απόδοσής του με δεδομένες τις επιλογές των άλλων, ονομάζεται ισορροπία Nash και ορίζεται ως εξής:

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.5
Μια ισορροπία Nash ενός παιγνίου στρατηγικής $G = \{S_1, \ldots, S_n, u_1, \ldots, u_n\}$ είναι ένας ορίζοντας στρατηγικής $(s_1^*, s_2^*, \ldots, s_n^*)$ τέτοιος ώστε για κάθε παίκτη i έχουμε $u_1\left(s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_i^*, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*\right) \geq u_i\left(s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_i^*, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*\right)$ για κάθε $s \epsilon S_i$.

Παρατηρήστε πόσο στενά η ιδέα σχετίζεται με την ιδέα της αυστηρής κυριαρχίας: καμία στρατηγική δεν θα μπορούσε να είναι μια στρατηγική ισορροπίας Nash αν είναι αυστηρά κυριαρχούμενη. Ως εκ τούτου, εάν η επαναλαμβανόμενη εξάλειψη των αυστηρά κυριαρχούμενων στρατηγικών μας οδηγεί σε ένα μοναδικό αποτέλεσμα, γνωρίζουμε ότι το διάνυσμα των στρατηγικών που οδηγεί σε αυτό είναι η μοναδική ισορροπία Nash του παιγνίου. Δηλαδή, αν ένα παίγνιο μπορεί να επιλυθεί με χρήση της επαναλαμβανόμενης εξάλειψης των αυστηρά κυριαρχούμενων στρατηγικών, τότε το παίγνιο έχει μια μοναδική ισορροπία Nash που είναι ακριβώς το ζεύγος στρατηγικών το οποίο προκύπτει μέσω της απαλοιφής των αυστηρά κυριαρχούμενων στρατηγικών. Προφανώς, και μια λύση κυρίαρχης στρατηγικής είναι ένα σημείο ισορροπίας Nash. Επιπλέον όμως, αν η λύση είναι αυστηρά κυρίαρχη, αποτελεί το μοναδικό σημείο ισορροπίας Nash του παιγνίου.

Υπάρχει ένα χρήσιμο εργαλείο εύρεσης ισορροπίας Nash σε παίγνια στρατηγικής μορφής. Διακρίνουμε ότι αν ο ορίζοντας στρατηγικής $(s_1^*, s_2^*, \ldots, s_n^*)$ είναι ισορροπία Nash του παιγνίου, τότε πρέπει να είναι λύση του συστήματος εξισώσεων $\frac{\partial u_i(s_1^*,\ldots,s_n^*)}{\partial s_i} = 0,\ i = 1,2,\ldots,n$. Άρα οι ισορροπίες Nash ανήκουν στις λύσεις του συστήματος αυτού και ουσιαστικά με αυτό τον τρόπο ελέγχουμε την ύπαρξη ισορροπίας Nash σε ένα παίγνιο στρατηγικής μορφής. Συγκεντρωτικά λοιπόν με μαθηματικούς όρους για έλεγχο ισορροπίας Nash έχουμε:

Αν ο ορίζοντας στρατηγικής $(s_1^*, s_2^*, \ldots, s_n^*)$ ικανοποιεί τις

- $\frac{\partial u_i(s_1^*,\ldots,s_n^*)}{\partial s_i} = 0$ για κάθε παίκτη i
- Κάθε για κάθε s_i^* είναι το μόνο στάσιμο σημείο της συνάρτησης $u_i\left(s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, s^*, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*\right)$, $s \epsilon S_i$.
- $\frac{\partial^2 u_i(s_1^*,\ldots,s_n^*)}{\partial s_i^2} < 0$ για κάθε i

Τότε ο ορίζοντας στρατηγικής $(s_1^*, s_2^*, \ldots, s_n^*)$ είναι μια ισορροπία Nash του παιγνίου

Στην πράξη, βρίσκουμε συνήθως τη λύση του συστήματος $\frac{\partial u_i(s_1^*,\ldots,s_n^*)}{\partial s_i} = 0$, $i = 1,2,\ldots,n$ και έπειτα χρησιμοποιούμε τις εκάστοτε διαθέσιμες και πιο απλά εφαρμόσιμες οικονομικές θεωρήσεις για να επαληθεύσουμε ότι η λύση είναι η ισορροπία Nash του παιγνίου. Ακολουθεί ένα από τα πρώτα παίγνια που αναλύθηκαν στα οικονομικά από τον Γάλλο μαθηματικό Augustin Cournot τον 18ο αιώνα, στο οποίο θα χρησιμοποιήσουμε τον έλεγχο ισορροπίας Nash για την εύρεση της ισορροπίας Nash του παιγνίου.

3.1.5 Το μοντέλο του δυοπωλίου Cournot

Πρόκειται για ένα οικονομικό μοντέλο που περιγράφει δύο εταιρείες οι οποίες ανταγωνίζονται στην αγορά και πρέπει να αποφασίσουν ποιο θα είναι το μέγεθος της παραγωγής τους ώστε να μεγιστοποιήσουν τα κέρδη τους. Οι εταιρείες αποφασίζουν ταυτόχρονα και ανεξάρτητα η μία από την άλλη και η αγορά καθορίζει την τιμή στην οποία πωλείται. Τα βασικότερα χαρακτηριστικά είναι:

- Οι εταιρείες παράγουν πανομοιότυπα προϊόντα
- Οι εταιρείες δεν συνεργάζονται
- Η απόφαση κάθε εταιρείας για την ποσότητα προϊόντος που θα παράγει, επηρεάζει την τιμή του
- Οι εταιρείες ανταγωνίζονται σε ποσότητες και τις επιλέγουν ταυτόχρονα

Το μοντέλο του δυοπωλίου (μια κατάσταση στην οποία δύο εταιρείες ελέγχουν την αγορά για ένα συγκεκριμένο εμπόρευμα / προϊόν) είναι ένα στρατηγικό παίγνιο (όπου φυσικά ισχύει η ορθολογικότητα και η στρατηγική σκέψη) στο οποίο:

- Οι παίκτες είναι οι εταιρείες
- Οι ενέργειες κάθε εταιρείας είναι το σύνολο των δυνατών ποσοτήτων παραγωγής (μη αρνητικές)
- Η ανταμοιβή κάθε εταιρείας είναι το κέρδος της

Η τιμή είναι κοινώς γνωστή φθίνουσα συνάρτηση της συνολικής παραγωγής. Κάθε εταιρεία θεωρεί το μέγεθος παραγωγής της άλλης δεδομένο. Η τιμή της αγοράς τίθεται στο επίπεδο που η ζήτηση ισούται με την συνολική ποσότητα προϊόντος που τελικά παράγεται από τις εταιρείες. Κάθε εταιρεία λαμβάνει την ποσότητα του ανταγωνιστή της ως δεδομένη, αξιολογεί την υπολειμματική ζήτηση που της αναλογεί, και στη συνέχεια συμπεριφέρεται ως μονοπώλιο.

Παρατηρήστε μια ουσιώδης διαφορά μεταξύ αυτών των προδιαγραφών των εσόδων των επιχειρήσεων και εκείνων για μια ανταγωνιστική επιχείρηση ή για ένα μονοπώλιο. Τα έσοδα τόσο μιας ανταγωνιστικής επιχείρησης όσο και ενός μονοπωλίου εξαρτώνται μόνο από την δική τους παραγωγή: για μια ανταγωνιστική επιχείρηση υποθέτουμε ότι η παραγωγή της επιχείρησης δεν επηρεάζει την τιμή και για μια μονοπωλιακή δεν υπάρχουν άλλες επιχειρήσεις στην αγορά. Για ένα δυοπώλιο, ωστόσο, τα έσοδα εξαρτώνται τόσο από τη δική της παραγωγή όσο και από την παραγωγή της άλλης επιχείρησης.

Η εταιρεία 1 παράγει ποσότητα q_1 και η εταιρεία 2 παράγει ποσότητα q_2 , ομοιογενούς όπως είπαμε προϊόντος. Η συνολική παραγωγή των δύο εταιρειών ανέρχεται σε $q_t = q_1 + q_2$. Άρα η τιμή στην οποία κάθε μονάδα προϊόντος πωλείται είναι $p\left(q_t\right)$, όπου p είναι η αντίστροφη συνάρτηση ζήτησης. Έστω $p\left(q_t\right) = p_1 = p_2 = S - q_t$, όπου S ένας σταθερός αριθμός. Επίσης το συνολικό κόστος της εταιρείας 1 δίνεται από την συνάρτηση κόστους $TC_1\left(q\right) = c_1 \cdot q_1$ και της εταιρείας 2 από την συνάρτηση κόστους $TC_2\left(q\right) = c_2 \cdot q_2$, όπου c_1, c_2 θετικές σταθερές. Μπορούμε τώρα να επαναδιατυπώσουμε το παίγνιο σε στρατηγική μορφή ως εξής:

- Οι παίκτες είναι οι εταιρείες
- Το σύνολο στρατηγικών κάθε εταιρείας είναι το σύνολο θετικών ποσοτήτων παραγωγής που δύναται να επιλέξει, δηλαδή το $(0, \infty)$
- Η συνάρτηση απόδοσης κάθε εταιρείας i είναι η συνάρτηση κέρδους: $\Pi_i = (S - q_1 - q_2) \cdot q_i - c_i \cdot q_i = q_i \left(p\left(q_1 + q_2\right) - c_i\right)$

Δηλαδή τα έσοδα της εταιρείας 1 όταν ο συνδυασμός ποσοτήτων παραγωγής που επιλέγουν οι εταιρείες είναι (q_1, q_2) , είναι $p\left(q_1 + q_2\right) q_1$ και άρα το συνολικό κέρδος της είναι $p\left(q_1 + q_2\right) q_1 - TC_1\left(q_1\right)$ και αντίστοιχα τα έσοδα της εταιρείας 2 είναι $p\left(q_1 + q_2\right) q_2$, οπότε το συνολικό κέρδος της ανέρχεται σε $p\left(q_1 + q_2\right) q_2 - TC_2\left(q_2\right)$.

Εδώ είναι εμφανές ότι στο πρόβλημα καθορισμού των ποσοτήτων παραγωγής, αφού κάθε εταιρεία θεωρεί σταθερή την ποσότητα που παράγει ο ανταγωνιστής της, έχει νόημα η μερική παραγώγιση και ο μηδενισμός της συνάρτησης κέρδους κάθε εταιρείας. Είναι επίσης εμφανές ότι το κέρδος κάθε εταιρείας εξαρτάται όχι μόνο από την δική της επιλογή για το ύψος παραγωγής της αλλά και από το ύψος παραγωγής της άλλης. Στα πλαίσια της μεγιστοποίησης του κέρδους κάθε εταιρείας λοιπόν, από την στιγμή που οι ποσότητες παραγωγής επιλέγονται ταυτόχρονα και ανεξάρτητα, η ισορροπία Nash μας εξυπηρετεί πολύ και θα την βρούμε μαθηματικά, χρησιμοποιώντας τον έλεγχο ισορροπίας Nash.

Έχουμε $\Pi_1 = (S - q_1 - q_2)\, q_1 - c_1 q_1 = -q_1^2 + (-q_2 + S - c_1)\, q_1$
και $\Pi_2 = (S - q_1 - q_2)\, q_2 - c_2 q_2 = -q_2^2 + (-q_1 + S - c_2)\, q_2$.

Άρα σύμφωνα με τον έλεγχο ισορροπίας Nash, η ισορροπία προκύπτει από την λύση του συστήματος

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial q_1} = -2q_1 - q_2 + S - c_1 = 0 \Rightarrow 2q_1 + q_2 = S - c_1$$

$$\frac{\partial \Pi_2}{\partial q_2} = -q_1 - 2q_2 + S - c_2 = 0 \Rightarrow q_1 + 2q_2 = S - c_2$$

Λύνοντας ως προς q_1, q_2 το σύστημα παίρνουμε: $q_1^* = \frac{S+c_2-2c_1}{3}$ και $q_2^* = \frac{S+c_1-2c_2}{3}$ που αποτελεί την ισορροπία Nash (q_1^*, q_2^*) του παιγνίου. Επίσης $\frac{\partial^2 \Pi_1(q_1^*, q_2^*)}{\partial q_1^2} = -2 < 0$ και $\frac{\partial^2 \Pi_2(q_1^*, q_2^*)}{\partial q_2^2} = -2 < 0$ οπότε επαληθεύεται η ισορροπία Nash. Ακόμη, παρατηρούμε πως αν $S > c_1 + c_2$ τότε και οι δύο εταιρείες παράγουν θετικές ποσότητες προϊόντων, που είναι και το θεμιτό για να υπάρχει λογική συνέχεια.

Φυσικά, όπως παρουσιάζεται το μοντέλο δυοπωλίου Cournot, εισάγει σε αρκετά σημεία απλουστεύσεις. Αυτό δεν αναιρεί το γεγονός ότι συλλαμβάνει και αναλύει κάποια από τα σημαντικότερα χαρακτηριστικά ανταγωνισμού που λαμβάνουν χώρα μεταξύ εταιρειών και για αυτό συναντάται ως βάση και σημείο αναφοράς στην ευρύτερη θεωρία βιομηχανικής οργάνωσης.

Εμβαθύνοντας ακόμα περισσότερο εξετάζουμε: Το δυοπώλιο περιγράφει μια αγορά, οπότε ουσιαστικά αυτό που αναζητούμε είναι γενικότερα η ισορροπία της αγοράς. Άρα πρέπει τα $\left(q_1^{'}, q_2^{'}\right)$ και η τιμή $p^{'}$ που προκύπτει βάση αυτών να ικανοποιούν τις λογικές συνθήκες ισορροπίας της αγοράς, δηλαδή

- Δεδομένης της τιμής p, η συνολική απαιτούμενη ποσότητα παραγωγής $q\left(p^{'}\right)$ σε αυτή την τιμή είναι $q_1^{'} + q_2^{'}$
- $q_1^{'} + q_2^{'}$ είναι η επιθυμητή συνολική παραγωγή των εταιρειών με τιμή $p^{'}$

Τα (q_1^*, q_2^*) που συντελούν ισορροπία Nash μας δίνουν ταυτόχρονα την παραγωγή ισορροπίας της αγοράς. Όντως, η τιμή που εφαρμόζεται στο δυοπώλιο όταν οι εταιρείες τελικά παράγουν q_1^* και q_2^* είναι

$$p^* = S - q_1^* - q_2^* = S - \frac{S+c_2-2c_1}{3} - \frac{S+c_1-2c_2}{3} = \frac{S+c_1+c_2}{3}$$

Η απαιτούμενη ποσότητα παραγωγής σε αυτή την τιμή είναι

$$q\,(p^*) = S - p^* = \frac{2S-c_1-c_2}{3}$$

Όμως

$$q_1^* + q_2^* = \frac{S+c_2-2c_1}{3} + \frac{S+c_1-2c_2}{3} = \frac{2S-c_1-c_2}{3}$$

Συμπεραίνουμε ότι

$$q\left(p^*\right) = q_1^* + q_2^*$$

Δηλαδή η απαιτούμενη ποσότητα παραγωγής στην τιμή p^* είναι πράγματι αυτή που παράγουν οι εταιρείες στην ισορροπία Nash. Μάλιστα, οι εταιρείες δεν θα ήθελαν να παράγουν σε άλλη τιμή, αφού πουλώντας σε αυτή την τιμή, η παραγωγή κάθε εταιρείας (με βάση την ισορροπία Nash) είναι ακριβώς αυτή που μεγιστοποιεί τα κέρδη της. Το σημαντικότατο πόρισμα που προκύπτει είναι:

- Η ισορροπία Nash του μοντέλου του δυοπωλίου Cournot δίνει ακριβώς αυτό που θέλουμε για το δυοπώλιο που δεν είναι άλλο από την ισορροπία της αγοράς του δυοπωλίου.

Θα αναρωτηθεί κανείς: Γιατί να ενδιαφερθεί κάποιος για την ισορροπία Nash; Και εγώ ρωτάω, γιατί όχι; Σύμφωνα με τον Ken Binmore, γνωστό Βρετανό μαθηματικό-οικονομολόγο, καθηγητή Οικονομικών στο UCL, στο πρόσφατο βιβλίο του Playing For Real, υπάρχουν τουλάχιστον δύο λόγοι.

Ο πρώτος είναι ότι ένα βιβλίο θεωρίας παιγνίων δεν μπορεί έγκυρα και αλάθητα να υποδείξει ένα ζευγάρι στρατηγικών (σ, τ) ως λύση ενός παιγνίου εκτός αν είναι ισορροπία Nash. Ας υποθέσουμε, για παράδειγμα (έχοντας δύο παίκτες, τον Χρήστο και την Αγγελική), ότι το τ δεν ήταν η καλύτερη απάντηση στο σ. Η Αγγελική τότε θα σκεφτόταν ότι αν ο Χρήστος ακολουθήσει την συμβουλή του βιβλίου και παίξει σ, τότε καλά θα έκανε να μην παίξει τ. Αλλά ένα βιβλίο δεν μπορεί να είναι ακριβές στο τί είναι λογικό, αν οι ορθολογικοί άνθρωποι δεν παίζουν όπως προβλέπει.

Ο δεύτερος λόγος για τον οποίο πρέπει να μας ενδιαφέρει η ισορροπία Nash είναι πως αν οι αποδόσεις σε ένα παίγνιο αντιστοιχούν στην καταλληλότητα των παικτών, (στο πόσο ταιριαστοί / ικανοί είναι για το παίγνιο), τότε οι διαδικασίες προσαρμογής που ευνοούν τον πιο κατάλληλο σε βάρος του λιγότερο κατάλληλου , θα σταματήσουν να λειτουργούν όταν φτάσουμε σε ισορροπία Nash επειδή όλοι οι εναπομείναντες θα είναι τότε όσο πιο υγιείς / ταιριαστοί μπορούν να είναι δεδομένων των συνθηκών.

Παρά ταύτα, ένα σημείο ισορροπίας Nash μπορεί να μην είναι μοναδικό για το παίγνιο. Δεν υπάρχει καμία εγγύηση ότι η ισορροπία Nash του παιγνίου θα είναι μοναδική. Μάλιστα, δεν υπάρχει εγγύηση ούτε καν για την ύπαρξή της! Η ύπαρξη άνω της μίας ισορροπιών Nash απλών στρατηγικών σημαίνει αδιαφορία των παικτών ως προς ποια στρατηγική (εξ' αυτών που μετέχουν στις ισορροπίες Nash) να προτιμήσουν και άρα αβεβαιότητα για το τί θα παίξει ο αντίπαλος. Εξάλλου, το σημείο ισορροπίας Nash δεν είναι απαραίτητα βέλτιστο από πλευράς απόδοσης (όπως στο δίλλημα των φυλακισμένων), και σε παίγνια με πολλαπλά σημεία ισορροπίας μπορεί τα κέρδη των παικτών να διαφέρουν σημαντικά ανάμεσα στα σημεία αυτά.

Αν στο παράδειγμά μας στον πίνακα 3, στον συνδυασμό στρατηγικών (L,R) είχαμε (4,5) τότε K και R είναι και οι δύο βέλτιστες απαντήσεις του παίκτη 2 όταν ο παίκτης 1 παίζει L! Σε αυτή την περίπτωση θα καταλήγαμε

		Παίκτης 2		
		N	K	R
	M	($\underline{5}$,1)	(2,0)	(2,$\underline{\underline{2}}$)
Παίκτης 1	L	(0,4)	(1,$\underline{\underline{5}}$)	($\underline{4}$,$\underline{\underline{5}}$)
	T	(2,4)	($\underline{3}$,$\underline{\underline{6}}$)	(1,0)

Table 5: Διπλή ισορροπία Nash

Τώρα λοιπόν έχουμε δύο εκβάσεις ισορροπίας του παιγνίου. Πλέον οι ισορροπίες Nash είναι ο συνδυασμός (T,K) και ο (L,R). Εδώ λοιπόν εισάγεται ο προβληματισμός του τί θα πράξουν οι παίκτες. Όπως αντίστοιχα και στην περίπτωση απουσίας ισορροπίας Nash σε ένα παίγνιο, όπου υπάρχει ένας κύκλος με τους παίκτες να θέλουν να αλλάζουν στρατηγικές. Αυτούς τους προβληματισμούς έρχεται να επιλύσει η εισαγωγή των λεγόμενων μικτών στρατηγικών.

3.1.6 Μικτές στρατηγικές και μικτό σημείο ισορροπίας Nash

Στα παίγνια που αναπαραστίσαμε μέχρι τώρα οι παίκτες επέλεγαν ξεκάθαρα μόνο μία στρατηγική, η οποία καθόριζε μία μόνο βέλτιστη πορεία ενεργειών που αποτελούσε την καλύτερη δυνατή απάντηση σε κάθε ενέργεια των άλλων παικτών. Επέλεγαν δηλαδή μεταξύ αγνών στρατηγικών. Οι μικτές στρατηγικές εισάγονται όταν καμία αγνή στρατηγική δεν μπορεί να μεγιστοποιήσει την χρησιμότητα του παίκτη έναντι όλων των στρατηγικών των αντιπάλων και έχουν ως γνώμονα την αναμενόμενη απόδοση.

Το σκεπτικό είναι το εξής. Από την στιγμή που οι παίκτες είναι αδιάφοροι ως προς την επιλογή μεταξύ στρατηγικών, είτε γιατί έχουμε παραπάνω της μίας ισορροπίας Nash είτε γιατί δεν έχουμε καθόλου, θα χρησιμοποιήσουν μια διάταξη που επιλέγει με τυχαίο τρόπο ανάμεσα στις στρατηγικές. Αυτή η διάταξη θα μπορούσε να είναι ένα ζυγισμένο νόμισμα (αλλιώς θα είχαμε π.χ πάντα πιθανότητα 50-50 ανάμεσα σε δύο στρατηγικές, οπότε και παραμένει η αδιαφορία) που ο παίκτης γυρνάει όταν πρέπει να αποφασίσει ποια ενέργεια να ακολουθήσει.

Οπότε όταν ένας παίκτης εξετάζει τί θα πράξει ο αντίπαλός του, δεν διακρίνει ότι εκείνος θα επιλέξει την μία αγνή στρατηγική ή την άλλη, αλλά ότι μπορεί να επιλέξει την μία στρατηγική με πιθανότητα π και την άλλη με πιθανότητα 1-π (αφού πάντα το άθροισμα των πιθανοτήτων πρέπει να κάνει 1). Ορίζουμε τώρα λοιπόν την μικτή στρατηγική ως εξής

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.6
Η μικτή στρατηγική (ή ορίζοντας πιθανότητας) είναι μια κατανομή πιθανοτήτων, όπου για N διαθέσιμες στρατηγικές ενός παίκτη i με n=1,2,...,N έχουμε ένα διάνυσμα $\pi = (\pi_{i1}, \pi_{i2}, \ldots, \pi_{iN})$ τέτοιο ώστε $\pi_n \geq 0$ για κάθε στρατηγική n και $\sum_{n=1}^{N} \pi_n = 1$.

Η Μάχη των φύλων

Ας παραθέσουμε εδώ άλλο ένα πολύ γνωστό παίγνιο (στο οποίο έχουμε δύο ισορροπίες Nash) για να γίνουν όλα κατανοητά, που καλείται η μάχη των φύλων και παίζεται μεταξύ ενός ζευγαριού όπου η κοπέλα (ας την πούμε Αγγελική) προτιμάει για την έξοδό τους να πάνε στο θέατρο, ενώ ο άντρας (ας τον πούμε Χρήστο) προτιμάει να πάνε στον Κινηματογράφο.

		Χρήστος	
		θέατρο	cinema
Αγγελική	θέατρο	(2,1)	(0,0)
	cinema	(0,0)	(1,2)

Table 6: Η μάχη των φύλων

Υποθέτουμε ότι ανεξαρτήτως των προτιμήσεών τους, αυτό που οι δύο παίκτες θέλουν πάνω απ' όλα είναι να είναι μαζί, αφού εξάλλου μιλάμε για ένα ζευγάρι και την κοινή τους έξοδο. Στον πίνακα, αυτό απεικονίζεται με τις αποδόσεις των ζευγών (cinema,θέατρο) και (θέατρο,cinema) οι οποίες είναι και για τους δύο μηδενικές (0,0). Και οι δύο όμως αποφασίζουν ταυτόχρονα, οπότε δεν είναι εγγυημένο ότι θα καταλήξουν μαζί. (Ας φανταστούμε για παράδειγμα ότι είναι καθένας στον χώρο εργασίας του και πρέπει απλά να πάνε μετά την εργασία τους σε ένα από τα δύο μέρη και να περιμένουν τον άλλο στα εκδοτήρια).

Τα σημεία ισορροπίας Nash του παιγνίου είναι (θέατρο,θέατρο) και (cinema,cinema) και προφανώς οποιαδήποτε μονομερής απόκλιση από αυτά είναι ζημιογόνα αφού οδηγεί στην έκβαση (0,0). Για να φτάσουμε όμως σε κάποιο από αυτά τα σημεία ισορροπίας θα έπρεπε ο ένας να μαντέψει τί θα παίξει ο άλλος. Αν ο Χρήστος επέλεγε τελικά θέατρο για να κάνει την χάρη στην Αγγελική και ταυτόχρονα η Αγγελική επέλεγε cinema για χάρη του Χρήστου, θα κατέληγαν χώρια και δεν θα είχαμε ισορροπία.

Υπάρχει λοιπόν μια άλλη ισορροπία Nash, που πιθανώς να είναι λίγο καλύτερη στο να απεικονίζει την πραγματικότητα, αυτή των μικτών στρατηγικών. Η προτίμηση κάθε παίκτη ενός τρόπου ψυχαγωγίας, είναι απλά αυτό, μια προτίμηση ανάμεσα σε δύο τρόπους ψυχαγωγίας. Για το παίγνιό μας δεν έχει καμία στρατηγική σημασία. Από την στιγμή που οι παίκτες μας είναι στρατηγικά αδιάφοροι ως προς τις δύο επιλογές, αφού οδηγούμαστε σε ισορροπία Nash ό,τι και να επιλέξουν, θα διαλέξουν τυχαία ανάμεσα σε αυτές, αλλά με τρόπο που να καταδεικνύει αυτή τους την αδιαφορία, δηλαδή οι αναμενόμενες αποδόσεις τους θα πρέπει να είναι ίσες.

Αν π_1 η πιθανότητα η Αγγελική (παίκτης 1) να επιλέξει θέατρο, τότε $1-\pi_1$ η πιθανότητα να επιλέξει cinema. Αντίστοιχα, αν π_2 η πιθανότητα ο Χρήστος να επιλέξει θέατρο, τότε $1-\pi_2$ η πιθανότητα να επιλέξει cinema. Αν τώρα U_i η αναμενόμενη απόδοση του παίκτη i, τότε για κάθε έναν ισχύει U_i(θέατρο)$=U_i$(cinema) και αυτή η σχέση δείχνει την αδιαφορία ως προς την επιλογή στρατηγικής.

Για την Αγγελική (παίκτης 1) η παραπάνω ισότητα δίνει: $2\cdot\pi_2+0\cdot(1-\pi_2)=0\cdot\pi_2+1\cdot(1-\pi_2)\implies \pi_2^N=\frac{1}{3}$

Για τον Χρήστο (παίκτης 2) η παραπάνω ισότητα δίνει: $1\cdot\pi_1+0\cdot(1-\pi_1)=0\cdot\pi_1+2\cdot(1-\pi_1)\implies \pi_1^N=\frac{2}{3}$

Άρα η ισορροπία Nash μικτών στρατηγικών είναι οι συνδυασμοί: $\left(\pi_1^N,1-\pi_1^N\right)=\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$ και $\left(\pi_2^N,1-\pi_2^N\right)=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$. Το αποτέλεσμα λοιπόν μιας μικτής ισορροπίας Nash είναι οι πιθανότητες με τις οποίες οι παίκτες παίζουν τις στρατηγικές τους. Στο παίγνιό μας δηλαδή, η πιθανότητα ο Χρήστος και η Αγγελική να συναντηθούν τόσο στον Κινηματογράφο όσο και στο θέατρο είναι $\frac{2}{9}$, ενώ η πιθανότητα να καταλήξουν χώρια είναι $\frac{5}{9}$.

Αυτό φαίνεται στον παρακάτω πίνακα

		Χρήστος	
		θέατρο$\left(\pi_2^N\right)$	cinema$\left(1-\pi_2^N\right)$
Αγγελική	θέατρο$\left(\pi_1^N\right)$	(2,1)$\left(\pi_1^N\cdot\pi_2^N=\frac{2}{9}\right)$	(0,0)$\left(\pi_1^N\cdot\left(1-\pi_2^N\right)=\frac{5}{9}\right)$
	cinema$\left(1-\pi_1^N\right)$	(0,0)$\left(\left(1-\pi_1^N\right)\cdot\pi_2^N=\frac{5}{9}\right)$	(1,2)$\left(\left(1-\pi_1^N\right)\cdot\left(1-\pi_2^N\right)=\frac{2}{9}\right)$

Table 7: Πίνακας πιθανοτήτων εκβάσεων στην Μάχη των φύλων

Η ισορροπία Nash μικτών στρατηγικών τελικά υποδεικνύει την πιθανότητα εμφάνισης κάθε συνδυασμού στρατηγικών (κάθε κελιού πίνακα), όταν οι παίκτες δεν έχουν ξεκάθαρη προτίμηση κάποιας στρατηγικής (όταν δεν επιλέγουν αγνές στρατηγικές). Οι πιθανότητες με τις οποίες προσδιορίσαμε ότι οι παίκτες επιλέγουν στρατηγικές, αποτελούν αμοιβαίες βέλτιστες αντιδράσεις / απαντήσεις.

Υπάρχει όμως ακόμα πιο γενικευμένη μεθοδολογία για την εύρεση ισορροπίας Nash σε μικτές στρατηγικές. Ένα παίγνιο πίνακα μπορεί να περιγραφεί με ένα $m\times n$ πίνακα όπου α_{ij} και b_{ij} είναι οι αποδόσεις του παίκτη 1 και 2 αντίστοιχα. Μπορούμε να διαμερίσουμε τον πίνακα σε δύο πίνακες απόδοσης A και B. Οι γραμμές αντιστοιχούν στις αγνές στρατηγικές του παίκτη 1 και οι στήλες του παίκτη 2. Τώρα καλούμε τον παίκτη 1 ως "παίκτη-γραμμή" και τον παίκτη 2 ως "παίκτη-στήλη". Άρα, οι στρατηγικές του "παίκτη-γραμμή" συμβολίζονται με το i (i=1,...,m) και αυτές του "παίκτη-στήλη" με το j (j=1,...,n).

Μπορούμε τώρα να περιγράψουμε ένα στρατηγικό συνδυασμό ως ζεύγος (i,j) και μια ισορροπία Nash ως ορίζοντα στρατηγικής (i,j) τέτοιο ώστε

(i) Το α_{ij} είναι το μεγαλύτερο στοιχείο της στήλης j του πίνακα A, ήτοι $\alpha_{ij} = max_{1\leq k\leq m}\alpha_{kj}$

(ii) Το b_{ij} είναι το μεγαλύτερο στοιχείο της γραμμής i του πίνακα B, ήτοι $b_{ij} = max_{1\leq s\leq m}\alpha_{is}$

Μια μικτή στρατηγική για τον παίκτη-γραμμή είναι απλά κάθε διάνυσμα $p = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$ τέτοιο ώστε $p_i \geq 0$ για κάθε στρατηγική i και $\sum_{\mathrm{i}=1}^{m} p_i = 1$. Ομοίως, μια μικτή στρατηγική για τον παίκτη στήλη είναι ένα διάνυσμα $q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$ τέτοιο ώστε $q_j \geq 0$ για κάθε στρατηγική j και $\sum_{\mathrm{j}=1}^{n} q_j = 1$. Μια μικτή στρατηγική p για τον παίκτη-γραμμή ονομάζεται αγνή στρατηγική αν για κάποια στρατηγική i έχουμε $p_i = 1$ και $p_k = 0$ για $k \neq i$. Είναι δηλαδή η στρατηγική που επιλέγει ο παίκτης-γραμμή με πιθανότητα 1 (οπότε κάθε άλλη με πιθανότητα 0) και αποτελούν τις αρχικές στρατηγικές του. Αντίστοιχα για τον παίκτη-στήλη.

Παίζοντας λοιπόν οι παίκτες με αυτές τις μικτές στρατηγικές, κανείς δεν μπορεί να προβλέψει τί θα παίξει ο άλλος αφού δεν επιλέγει αγνές στρατηγικές, οπότε κοιτάει να μεγιστοποιήσει την αναμενόμενη απόδοσή του. Παρατηρούμε ότι αν ο παίκτης-στήλη επιλέξει την στρατηγική j τότε ο παίκτης-γραμμή, παίζοντας τον συνδυασμό πιθανότητας p, μπορεί να αναμένει μια απόδοση $\sum_{\mathrm{i}=1}^{m} p_i\alpha_{ij}$. Τώρα, λαμβάνοντας υπόψη ότι ο παίκτης-στήλη επίσης επιλέγει τις στρατηγικές του σύμφωνα με τον ορίζοντα πιθανότητας q, προκύπτει ότι ο παίκτης-γραμμή μπορεί να αναμένει μια απόδοση $q_j \sum_{\mathrm{i}=1}^{m} p_i\alpha_{ij}$ από τον παίκτη-στήλη που θα επιλέξει την στρατηγική j. Αυτό σημαίνει ότι η αθροιστική αναμενόμενη απόδοση του παίκτη-γραμμή είναι $U_1(p,q) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_i q_j \alpha_{ij}$. Ομοίως, η αναμενόμενη απόδοση του παίκτη-στήλη είναι $U_2(p,q) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_i q_j b_{ij}$.

Τώρα έχουμε ένα παίγνιο στρατηγικής μορφής στο οποίο τα σύνολα στρατηγικών των παικτών έχουν αντικατασταθεί με ορίζοντες πιθανότητας πάνω στις στρατηγικές. Ένα τέτοιο παίγνιο λέγεται παίγνιο σε μικτές στρατηγικές. Έχει το παίγνιο πίνακα μια ισορροπία Nash σε μικτές στρατηγικές; Η απάντηση είναι ναι! Και αυτό είναι ένα θαυμάσιο αποτέλεσμα της θεωρίας παιγνίων. Το παραθέτουμε ως θεώρημα:

Κάθε παίγνιο πίνακα έχει μια ισορροπία Nash σε μικτές στρατηγικές.

Μια γενικευμένη εκδοχή αυτού του θεωρήματος αποδείχτηκε το 1951 από τον John Nash για παίγνια n παικτών στο βιβλίο του Annals of Mathematics.

Είναι εύκολο να διακρίνουμε ότι οι ισορροπίες Nash σε αγνές στρατηγικές (όταν υφίστανται) ενός παιγνίου πίνακα μπορούν να γραφούν ως ισορροπίες μικτών στρατηγικών (p, q) στις οποίες οι στρατηγικές (p, q) έχουν την μορφή $p = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ και $q = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, αφού όπως προείπαμε μια αγνή στρατηγική μπορεί να εκφραστεί ως μικτή αν για κάποια στρατηγική i έχουμε $p_i = 1$ και $p_k = 0$ για $k \neq i$ και αντίστοιχα για το q. Το παραθέτουμε ως θεώρημα:

Ένας ορίζοντας στρατηγικής (i, j) για ένα παίγνιο πίνακα είναι ισορροπία Nash αν και μόνο αν η αγνή στρατηγική (i, j) είναι επίσης ισορροπία Nash για το παίγνιο σε μικτές στρατηγικές.

Με άλλα λόγια, κάθε ισορροπία Nash σε αγνές στρατηγικές είναι επίσης ισορροπία Nash του παιγνίου σε μικτές στρατηγικές. Αν υπάρχουν ισορροπίες Nash, τότε είναι επίσης ισορροπίες για το παίγνιο σε μικτές στρατηγικές. Η διαφορά έγκειται στο ότι ενώ το παίγνιο μπορεί να μην έχει ισορροπία Nash σε αγνές στρατηγικές, έχει πάντα μια ισορροπία μικτών στρατηγικών. Δεδομένων όλων των παραπάνω, η μεθοδολογία για τον υπολογισμό της ισορροπίας Nash σε μικτές στρατηγικές είναι η εξής:

(i) Γράφουμε το παίγνιο πίνακα σε μορφή δύο πινάκων A=$[\alpha_{ij}]$, B=$[b_{ij}]$.

(ii) Υπολογίζουμε τις δύο συναρτήσεις απόδοσης $U_1(p, q) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_i q_j \alpha_{ij}$ και $U_2(p, q) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_i q_j b_{ij}$.

(iii) Θέτουμε $p_m = 1 - \sum_{i=1}^{m-1} p_i$ και $q_n = 1 - \sum_{j=1}^{n-1} q_j$ στους τύπους για την απόδοση και εκφράζουμε (μετά από τους υπολογισμούς) τις συναρτήσεις απόδοσης U_1 και U_2 ως συναρτήσεις των μεταβλητών $p_1, \ldots, p_{m-1}, q_1, \ldots, q_{n-1}$.

(iv) Υπολογίζουμε τις μερικές παραγώγους $\frac{\partial U_1}{\partial p_i}$ και $\frac{\partial U_2}{\partial q_j}$ και θεωρούμε το σύστημα $\frac{\partial U_1}{\partial p_i} = 0\,(i = 1, \ldots, m-1)$ και $\frac{\partial U_2}{\partial q_j} = 0\,(j = 1, \ldots, n-1)$.

Κάθε λύση αυτού του συστήματος $p_1, \ldots, p_{m-1}, q_1, \ldots, q_{n-1}$με $p_i \geq 0$ και $q_j \geq 0$ για κάθε i και j, $\sum_{i=1}^{m-1} p_i \leq 1$ και $\sum_{j=1}^{n-1} q_j \leq 1$ είναι μια ισορροπία μικτών στρατηγικών.

Επανερχόμαστε στην "μάχη των φύλων" και χρησιμοποιούμε τώρα την μεθοδολογία που περιγράψαμε για να υπολογίσουμε την ισορροπία Nash μικτών στρατηγικών

		Χρήστος	
		θέατρο	cinema
Αγγελική	θέατρο	(2,1)	(0,0)
	cinema	(0,0)	(1,2)

Ουσιαστικά A= $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ και B= $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Πάλι ορίζουμε p την πιθανότητα η Αγγελική (παίκτης 1) να επιλέξει θέατρο, οπότε $1-p$ η πιθανότητα να επιλέξει cinema. Αντίστοιχα, ορίζουμε q την πιθανότητα ο Χρήστος να επιλέξει θέατρο, οπότε $1-q$ η πιθανότητα να επιλέξει cinema. Άρα η αναμενόμενη απόδοση του παίκτη 1 είναι

$U_1 = p \cdot [q \cdot 2 + (1-q) \cdot 0] + (1-p) \cdot [q \cdot 0 + (1-q) \cdot 1] = 2pq + (1-p)(1-q)$.

Παρομοίως, η αναμενόμενη απόδοση του παίκτη 2 είναι

$U_2 = q \cdot [p \cdot 1 + (1-p) \cdot 0] + (1-q) \cdot [p \cdot 0 + (1-p) \cdot 2] = pq + (1-q) \cdot 2 \cdot (1-p)$.

Παραγωγίζοντας και θέτοντας τις μερικές παραγώγους ίσες με μηδέν παίρνουμε:

$\frac{\partial U_1}{\partial p} = 0 \Rightarrow 2q - (1-q) = 0 \Rightarrow 3q = 1 \Rightarrow q = \frac{1}{3}$
$\frac{\partial U_2}{\partial q} = 0 \Rightarrow p - 2(1-p) = 0 \Rightarrow 3p = 2 \Rightarrow p = \frac{2}{3}$.

Μια ισορροπία (p, q) ονομάζεται εσωτερική ισορροπία αν $p_i \geq 0$ και $q_j \geq 0$ για όλα τα i και j. Οι εσωτερικές ισορροπίες του παιγνίου αντιστοιχούν ακριβώς στις λύσεις $p_1, \ldots, p_{m-1}, q_1, \ldots, q_{n-1}$ του συστήματος $\frac{\partial U_1}{\partial p_i} = 0\, (i = 1, \ldots, m-1)$ και $\frac{\partial U_2}{\partial q_j} = 0\, (j = 1, \ldots, n-1)$ με $p_i \geq 0$ και $q_j \geq 0$ για όλα τα i και j, $\sum_{i=1}^{m-1} p_i \leq 1$ και $\sum_{j=1}^{n-1} q_j \leq 1$.

Επομένως, το $\left(\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)\right)$ είναι μια ισορροπία μικτών στρατηγικών, η οποία είναι επίσης εσωτερική ισορροπία. Η επιλογή του παίκτη 1 $0 < p < 1$ είναι η βέλτιστη απάντηση όσο $q = \frac{1}{3}$. Αντίστοιχα, η επιλογή του παίκτη 2 $0 < q < 1$ είναι η βέλτιστη απάντηση όσο $p = \frac{2}{3}$. Οπότε οι στρατηγικές των παικτών είναι αμοιβαίες βέλτιστες απαντήσεις αν $q = \frac{1}{3}$ και $p = \frac{2}{3}$. Όπως αναμέναμε καταλήξαμε σε ίδια αποτελέσματα.

Το σκεπτικό είναι το έξης. Ο παίκτης 1 θέλει να επιλέξει ένα p που να μεγιστοποιεί την $U_1 = 2pq + (1-p)(1-q)$. Κάθε p που μεγιστοποιεί αυτή την εξίσωση είναι είτε μια αγνή στρατηγική ($p = 1$ή $p = 0$) είτε μια εσωτερική λύση με $0 < p < 1$, όπου η μερική παράγωγος ως προς p πρέπει να είναι 0. Έτσι, το $q = \frac{1}{3}$ που προκύπτει μας λέει ότι οποιαδήποτε εσωτερική τιμή του p είναι υποψήφια ως μέγιστη όσο $q = \frac{1}{3}$. Από μαθηματική σκοπιά, αυτό έχει νόημα γιατί αν $q = \frac{1}{3}$, τότε η αναμενόμενη απόδοση του παίκτη 1 (ανεξαρτήτως του τί p επιλέγει) είναι πάντα: $U_1 = 2pq + (1-p)(1-q) = \frac{2}{3}p + \frac{2}{3}(1-p) = \frac{2}{3}$.

Τελικά η στρατηγική του παίκτη 1 είναι: Αν ο παίκτης 2 επιλέξει $q = \frac{1}{3}$, τότε οποιαδήποτε επιλογή p είναι μια βέλτιστη απάντηση για τον παίκτη 1. Αλλά αν ο παίκτης 2 επιλέξει $q \neq \frac{1}{3}$, τότε η βέλτιστη απάντηση του παίκτη 1 είναι επιλογή αγνής στρατηγικής: αν $q > \frac{1}{3}$, τότε η καλύτερη αντίδραση του παίκτη 1 είναι να επιλέγει πάντα θέατρο και αν $q < \frac{1}{3}$, τότε η καλύτερη αντίδραση του παίκτη 1 είναι να επιλέγει πάντα cinema.

Αντίστοιχα καταλήγουμε ότι η στρατηγική του παίκτη 2 είναι: Αν ο παίκτης 1 επιλέξει $p = \frac{2}{3}$, τότε οποιαδήποτε επιλογή q είναι μια βέλτιστη απάντηση για τον παίκτη 2. Αλλά αν ο παίκτης 1 επιλέξει $p \neq \frac{2}{3}$, τότε η βέλτιστη απάντηση του παίκτη 2 είναι επιλογή αγνής στρατηγικής: αν $p > \frac{2}{3}$, τότε η καλύτερη αντίδραση του παίκτη 2 είναι να επιλέγει πάντα θέατρο και αν $p < \frac{2}{3}$, τότε η καλύτερη αντίδραση του παίκτη 2 είναι να επιλέγει πάντα cinema.

Συνοψίζοντας και λαμβάνοντας υπόψη και τις δύο αρχικές ισορροπίες Nash σε αγνές στρατηγικές (θέατρο,θέατρο) και (cinema,cinema) συμπεραίνουμε ότι το παίγνιο έχει συνολικά τρεις ισορροπίες Nash: δύο σε αγνές στρατηγικές και μία σε μικτές.

Ας επανέλθουμε τώρα στον πίνακα 5, ο οποίος είναι 3×3 πίνακας με δύο ισορροπίες Nash για να εφαρμόσουμε την μεθοδολογία εύρεσης ισορροπίας Nash σε μικτές στρατηγικές, ώστε να φανεί η χρησιμότητά της όσο επεκτεινόμαστε σε παίγνια πίνακα μεγαλύτερων διαστάσεων

		Παίκτης 2		
		N	K	R
	M	(5,1)	(2,0)	(2,2)
Παίκτης 1	L	(0,4)	(1,5)	(4,5)
	T	(2,4)	(3,6)	(1,0)

Για ευκολία στους υπολογισμούς δείχνουμε τους δύο πίνακες A= $\begin{bmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ και B= $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & 5 \\ 4 & 6 & 0 \end{bmatrix}$. Έστω ότι ο παίκτης 1 επιλέγει M με πιθανότητα p_1, L με πιθανότητα p_2 και T με πιθανότητα p_3, όπου $p_3 = 1 - p_1 - p_2$. Αντίστοιχα, έστω ότι ο παίκτης 2 επιλέγει N με πιθανότητα q_1, K με πιθανότητα q_2 και R με πιθανότητα q_3, όπου $q_3 = 1 - q_1 - q_2$. Άρα η αναμενόμενη απόδοση του παίκτη 1 είναι:

$U_1 = p_1 \cdot [5 \cdot q_1 + 2 \cdot q_2 + 2 \cdot (1 - q_1 - q_2)] + p_2 \cdot [0 \cdot q_1 + 1 \cdot q_2 + 4 \cdot (1 - q_1 - q_2)] + (1 - p_1 - p_2) \cdot [2 \cdot q_1 + 3 \cdot q_2 + 1 \cdot (1 - q_1 - q_2)] = \ldots = 2p_1q_1 - 2p_1q_2 - 5p_2q_1 - 5p_2q_2 + p_1 + 3p_2 + q_1 + 2q_2 + 1$

Παρομοίως, η αναμενόμενη απόδοση του παίκτη 2 είναι:

$U_2 = q_1 \cdot [1 \cdot p_1 + 4 \cdot p_2 + 4 \cdot (1 - p_1 - p_2)] + q_2 \cdot [0 \cdot p_1 + 5 \cdot p_2 + 6 \cdot (1 - p_1 - p_2)] + (1 - q_1 - q_2) \cdot [2 \cdot p_1 + 5 \cdot p_2 + 0 \cdot (1 - q_1 - q_2)] = \ldots = -5q_1p_1 - 5q_1p_2 - 8q_2p_1 - 6q_2p_2 + 4q_1 + 6q_2 + 2p_1 + 5p_2$

Παραγωγίζοντας και θέτοντας τις μερικές παραγώγους ίσες με μηδέν παίρνουμε τα συστήματα:

(i) $\frac{\partial U_1}{\partial p_1} = 0 \Rightarrow 2q_1 - 2q_2 + 1 = 0$ και $\frac{\partial U_1}{\partial p_2} = 0 \Rightarrow -5q_1 - 5q_2 + 3 = 0$

(ii) $\frac{\partial U_2}{\partial q_1} = 0 \Rightarrow -5p_1 - 5p_2 + 4 = 0$ και $\frac{\partial U_2}{\partial q_2} = 0 \Rightarrow -8p_1 - 6p_2 + 6 = 0$

Από την 1. λύνοντας ως προς τα q_1,q_2 παίρνουμε $q_1 = \frac{1}{20} = 0,05$, $q_2 = \frac{11}{20} = 0,55$ και $q_3 = 1 - q_1 - q_2 = 0,4$.

Από την 2. λύνοντας ως προς τα p_1, p_2 παίρνουμε $p_1 = \frac{3}{5} = 0,6$, $p_2 = \frac{1}{5} = 0,2$ και $p_3 = 1 - p_1 - p_2 = 0,2$.

Επομένως, το $\left(\left(\frac{1}{20}, \frac{11}{20}, \frac{8}{20}\right), \left(\frac{3}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right)\right)$ είναι μια ισορροπία μικτών στρατηγικών, η οποία είναι επίσης εσωτερική ισορροπία και μας υποδεικνύει την πιθανότητα με την οποία οι παίκτες επιλέγουν ανάμεσα στις επιμέρους αγνές στρατηγικές τους, "λέγοντας σε κάθε παίκτη πώς να ζυγίσει το ζάρι του πριν το ρίξει".

3.1.7 Παίγνια μηδενικού αθροίσματος

Εξετάζουμε τώρα χωριστά μια κατηγορία παιγνίων στην οποία το κέρδος ενός παίκτη ισούται με / προέρχεται από την απώλεια του άλλου. Δηλαδή το άθροισμα των αποδόσεων των δύο αντίπαλων παικτών για κάθε πιθανή έκβαση του παιγνίου είναι μηδενικό. Για αυτό τον λόγο τα ονομάζουμε παίγνια μηδενικού αθροίσματος. Αφού το άθροισμα των συνολικών αμοιβών σε κάθε πιθανή έκβαση (σε κάθε κελί πίνακα όπως θα δούμε αφού μιλάμε ακόμα για παίγνια στρατηγικής μορφής) είναι μηδενικό, δεν τίθεται θέμα συνεργασίας και τα παίγνια αυτά αναπαριστούν καταστάσεις καθαρής σύγκρουσης / αντιπαλότητας μεταξύ δύο παικτών.

Το πόκερ είναι ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα παιγνίου μηδενικού αθροίσματος, αφού το άθροισμα των κερδών ορισμένων παικτών, ισούται με και ουσιαστικά πηγάζει από τις συνολικές απώλειες των υπολοίπων. Στις χρηματοπιστωτικές αγορές, τα λεγόμενα "options" (δικαιώματα αγοράς) και "futures" (συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης), εξαιρουμένων των "transaction costs" (κόστη συναλλαγής) είναι παραδείγματα παιγνίων μηδενικού αθροίσματος. Για κάθε άτομο που κερδίζει ένα συμβόλαιο, υπάρχει κάποιος αντισυμβαλλόμενος που χάνει. Ωστόσο, η χρηματιστηριακή αγορά δεν είναι παίγνιο μηδενικού αθροίσματος. Χάριν απλούστευσης, θα εξετάσουμε παίγνια δύο παικτών μηδενικού αθροίσματος.

Ταίριασμα Δεκάρας

Ας δούμε το γνωστό παράδειγμα "ταίριασμα δεκάρας" για να απεικονίσουμε τα χαρακτηριστικά των παιγνίων μηδενικού αθροίσματος και να γίνουν κατανοητά. Το παίγνιο περιλαμβάνει δύο παίκτες (παίκτης 1 και παίκτης 2), κάθε ένας από τους οποίους κρατάει ένα πλήθος νομισμάτων στο χέρι του κάτω από το τραπέζι ώστε να μην είναι ορατό από τον άλλο. Οι παίκτες τοποθετούν ταυτόχρονα ένα νόμισμα στο τραπέζι. Η αμοιβή βασίζεται στο αν τα νομίσματα ταιριάζουν ή όχι. Αν τα νομίσματα είναι είτε κορώνα και τα δύο είτε γράμματα και τα δύο, τότε κερδίζει ο παίκτης 1 και κρατάει την δεκάρα του παίκτη 2. Αν δεν ταιριάζουν, κερδίζει ο παίκτης 2 και κρατάει αυτός την δεκάρα του παίκτη 1. Αναπαριστούμε το παίγνιο στον παρακάτω πίνακα, όπου κατά τα γνωστά το πρώτο νούμερο σε κάθε κελί αντιστοιχεί στον παίκτη 1 και το δεύτερο στον παίκτη 2.

		Παίκτης 2	
		κορώνα	γράμματα
Παίκτης 1	κορώνα	(1,-1)	(-1,1)
	γράμματα	(-1,1)	(1,-1)

Όπως διακρίνουμε, το συνδυαστικό όφελος για τον παίκτη 1 και τον παίκτη 2 και στα τέσσερα κελιά του πίνακα είναι 0. Οι αποδόσεις αναπαριστούν "ποσότητα νομισμάτων", δηλαδή κάθε φορά κάποιος κερδίζει μία δεκάρα και κάποιος χάνει μία. Θα μπορούσε να είναι ένα ευρώ, ένα δίευρο, ένα πενηντάευρο, οτιδήποτε. Οι αποδόσεις του παίκτη 2 είναι πάντα σε όλα τα παίγνια μηδενικού αθροίσματος αντίθετες από αυτές του παίκτη 1, οπότε μπορούν να παραληφθούν και να ξαναγράψουμε το παίγνιο πίνακα σε πιο απλή μορφή, ως προς τις αποδόσεις του παίκτη 1.

		Παίκτης 2	
		κορώνα	γράμματα
Παίκτης 1	κορώνα	1	-1
	γράμματα	-1	1

Table 8: Παίγνιο "ταίριασμα δεκάρας"

Θα παραθέσουμε τώρα τους βασικότερους τρόπους επίλυσης των παιγνίων μηδενικού αθροίσματος και θα δούμε το περίφημο θεώρημα minimax του John Von Neumann, ο οποίος απέδειξε ότι αυτά τα παίγνια μπορούν όλα να επιλυθούν με τον ίδιο τρόπο.

Κριτήριο minimax

Η μέθοδος της επαναλαμβανόμενης απάλειψης κυριαρχούμενων στρατηγικών είναι ακριβώς η ίδια που αναλύσαμε γενικότερα για τα στατικά παίγνια πλήρους πληροφόρησης και μπορεί να εφαρμοστεί φυσικά και εδώ, όταν κάποια στρατηγική κυριαρχεί χαλαρά ή αυστηρά κάποια ή κάποιες άλλες. Χρειαζόμαστε όμως μία πιο αποτελεσματική και γενική μέθοδο καθώς δύσκολα συναντάμε παίγνια που οδηγούνται σε ισορροπία χρησιμοποιώντας κυρίαρχες στρατηγικές. Την έχουμε χάρη στον John Von Neumann, ο οποίος πρότεινε η λύση να βασίζεται στην ιδέα ότι κάθε παίκτης θα έπρεπε να μεγιστοποιεί την αξία του χειρότερου δυνατού αποτελέσματος.

Θεωρούμε το ακόλουθο παίγνιο μηδενικού αθροίσματος

		Τάσος			
		α	β	γ	δ
Γιάννα	α	4	3	-1	5
	β	-10	2	0	-1
	γ	7	5	2	3
	δ	0	8	-4	-5

Σύμφωνα με την ιδέα αυτή λοιπόν, αν η Γιάννα διαλέξει α, η χειρότερη δυνατή αμοιβή είναι το -1, το οποίο συμβαίνει όταν ο Τάσος επιλέξει γ. Αν διαλέξει β, το χειρότερο αποτέλεσμα είναι το -10, όταν ο Τάσος επιλέγει α. Αν διαλέξει γ, στην χειρότερη περίπτωση λαμβάνει 2, όταν ο Τάσος επιλέξει γ. Τέλος, αν διαλέξει δ, το χειρότερο αποτέλεσμα φτάνει το -5, όταν ο Τάσος επιλέγει δ. Από αυτά τα "κακά" αποτελέσματα, το καλύτερο είναι το 2, το οποίο επέρχεται αν επιλέξει την στρατηγική γ. Αυτή καλείται η maximin στρατηγική της, δηλαδή αυτή που μεγιστοποιεί (maxi-mises) τα ελάχιστά της (min-imum). Εξετάζοντας τις στρατηγικές του Τάσου από την ίδια οπτική γωνία, καταλήγουμε στην στρατηγική γ ως την maximin στρατηγική του με απόδοση -2.

Οι παίκτες λοιπόν αποφασίζουν με τρόπο που να ελαχιστοποιούν τις μέγιστες απώλειές τους. Οι στρατηγικές γ της Γιάννας και γ του Τάσου που καταλήγουμε με αυτή την προσέγγιση, είναι οι πιο "σίγουρες", οι πιο "προσεκτικές" για τους παίκτες και στην ισορροπία που μας οδηγούν παρατηρούμε ότι κανένας από τους δύο δεν γίνεται να βελτιώσει το ελάχιστο κέρδος του (την καλύτερη, από τις χειρότερες των περιπτώσεων). Η Γιάννα επιλέγοντας γ, είναι βέβαιη ότι θα κερδίσει τουλάχιστον 2, όταν με οποιαδήποτε άλλη στρατηγική μπορεί εν δυνάμει να χάσει. Ο Τάσος από την μεριά του, επιλέγοντας γ, είναι εξασφαλισμένο ότι θα χάσει όχι περισσότερα από 2 (ότι η Γιάννα λοιπόν δεν θα κερδίσει παραπάνω από 2), ενώ με οποιαδήποτε άλλη στρατηγική η χασούρα του μπορεί να είναι μεγαλύτερη. Αν η Γιάννα κερδίσει λιγότερα από 2, θα μπορούσε να τα είχε καταφέρει καλύτερα παίζοντας γ. Αν η Γιάννα κερδίσει περισσότερα από 2, ο Τάσος θα μπορούσε να τα έχει πάει καλύτερα παίζοντας γ.

Αν οι παίκτες τελικά δεν παίζουν τις στρατηγικές ισορροπίας, ο ένας ή ο άλλος γνωρίζει ότι αυτή ή αυτός θα μπορούσαν να έχουν επιτύχει καλύτερο αποτέλεσμα. Και είναι στρατηγικές ισορροπίας, αφού αυτό που μόλις περιγράψαμε είναι ότι αν και οι δύο παίκτες παίζουν αυτές τις στρατηγικές, κανείς δεν έχει κίνητρο να μετακινηθεί σε άλλη στρατηγική. Ναι, η maximin λύση του παιγνίου αυτού είναι η ίδια με την ισορροπία Nash! Μάλιστα, αυτό ισχύει πάντα στα παίγνια μηδενικού αθροίσματος, δηλαδή ισορροπία Nash και maximin λύση ταυτίζονται, αλλά όχι στα μη μηδενικού.

Τα επιχειρήματα λοιπόν ουσιαστικά πηγάζουν από το γεγονός ότι η αμοιβή στο κελί που αντιστοιχεί στις στρατηγικές (Γιάννα γ - Τάσος γ) είναι ταυτόχρονα ο μικρότερος αριθμός στην γραμμή του και ο μεγαλύτερος στην στήλη του. Αυτό σημαίνει ότι οι στρατηγικές που οδηγούν σε αυτό το αποτέλεσμα είναι βέλτιστες απαντήσεις του ενός στον άλλο και ότι και οι δύο παίκτες εγγυημένα δεν πρόκειται να καταλήξουν σε κάτι χειρότερο από αυτή την απόδοση. Η απόδοση αυτή καλείται saddle point (σταθερή λύση) στην θεωρία παιγνίων. Γενικά:

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.7
Ένα αποτέλεσμα σε ένα παίγνιο πίνακα (με τις αποδόσεις να αναφέρονται στον παίκτη-γραμμή) καλείται saddle point αν η απόδοση αυτού του αποτελέσματος είναι ταυτόχρονα μικρότερη ή ίση με οποιαδήποτε άλλη στην γραμμή της, και μεγαλύτερη ή ίση με οποιαδήποτε άλλη στην στήλη της.

Ως πόρισμα και αρχή παίρνουμε: Αν ένα παίγνιο πίνακα έχει saddle point και οι δύο παίκτες θα έπρεπε να παίξουν μία στρατηγική που να το περιέχει. Γενικά:

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.8
Για οποιοδήποτε παίγνιο πίνακα, αν υπάρχει κάποιος αριθμός ξ , τέτοιος ώστε ο παίκτης 1 έχει μια στρατηγική που εγγυάται ότι θα κερδίσει τουλάχιτον ξ , και ο παίκτης 2 έχει μια στρατηγική που εγγυάται ότι ο παίκτης 1 δεν θα κερδίσει παραπάνω από ξ . τότε το ξ καλείται η αξία του παιγνίου.

Αν ένα παίγνιο έχει saddle point, η απόδοση του saddle point είναι η αξία του παιγνίου.

Υπάρχει τρόπος για να αποφανθούμε σχετικά με την ύπαρξη ή μη saddle point σε ένα παίγνιο και την εύρεσή του. Η μεθοδολογία βασίζεται σε όσα αναλύσαμε παραπάνω σχετικά με τον τρόπο που παίζουν οι παίκτες και αποτελεί την μεθοδολογία προσέγγισης ενός παιγνίου μηδενικού αθροίσματος με το κριτήριο minimax. Η Γιάννα θέλει να επιλέξει στρατηγική που της εγγυάται τουλάχιστον την μέγιστη από τις ελάχιστες αποδόσεις της (maximin), έτσι ώστε η ελάχιστη τιμή απόδοσης της επιλεγμένης στρατηγικής της να είναι μεγαλύτερη από την ελάχιστη των υπόλοιπων στρατηγικών . Ο Τάσος θέλει να επιλέξει στρατηγική που του εγγυάται ότι η Γιάννα δεν θα κερδίσει παραπάνω από την ελάχιστη από τις μέγιστες αποδόσεις της (mnimax), έτσι ώστε η μέγιστη τιμή απόδοσης (για την Γιάννα) της επιλεγμένης στρατηγικής του να είναι μικρότερη από την μέγιστη των υπόλοιπων στρατηγικών. Η μεθοδολογία είναι απλή και έχει ως εξής:

(i) Γράφουμε στα δεξιά την μικρότερη / ελάχιστη τιμή κάθε σειράς

(ii) Κυκλώνουμε την μεγαλύτερη από αυτές τις ελάχιστες τιμές

(iii) Γράφουμε από κάτω την μεγαλύτερη / μέγιστη τιμή κάθε στήλης

(iv) Κυκλώνουμε την μικρότερη από αυτές τις μέγιστες τιμές

Έτσι, το παίγνιό μας μηδενικού αθροίσματος με τον Τάσο και την Γιάννα επιλύεται ως εξής:

		Τάσος				
		α	β	γ	δ	Ελάχιστο γραμμής
Γιάννα	α	4	3	1	5	1
	β	-10	2	0	-1	-10
	γ	7	5	2	3	2← *maximin*
	δ	0	8	-4	-5	-5
Μέγιστο στήλης		7	8	2 ↑ *minimax*	5	

Table 9: Κριτήριο minimax-ύπαρξη saddle point

Λόγω της ύπαρξης saddle point, η ισορροπία που μας δίνει το κριτήριο minimax είναι σταθερή, με την ίδια έννοια της ισορροπίας Nash (αφού είναι και ισορροπία Nash), ότι δηλαδή κανένας παίκτης δεν μπορεί να βελτιώσει την απόδοσή του αλλάζοντας στρατηγική και άρα δεν έχει κίνητρο να επιλέξει κάποια από τις εναλλακτικές του. Πρόκειται δηλαδή για μία σταθερή λύση (εξού και το saddle point) όπου οι δύο παίκτες θα παίξουν την maximin και minimax στρατηγική τους αντίστοιχα.

Τί συμβαίνει όμως όταν δεν υπάρχει saddle point σε ένα παίγνιο μηδενικού αθροίσματος; Με το κριτήριο minimax, ο παίκτης γραμμή χρησιμοποιεί την maximin στρατηγική του και ο παίκτης στήλη την minimax στρατηγική του, αλλά αυτό δεν σημαίνει ότι συμπίπτουν. Ας αλλάξουμε λίγο τις αποδόσεις του πίνακα 8. Τότε, για τον παρακάτω πίνακα, η μεθοδολογία του κριτηρίου minimax δίνει:

		Τάσος				
		α	β	γ	δ	Ελάχιστο γραμμής
Γιάννα	α	5	3	6	4	3← *maximin*
	β	-10	2	0	-1	-10
	γ	7	5	4	1	1
	δ	0	1	-4	-5	-5
Μέγιστο στήλης		7	5	6	4 ↑ *minimax*	

Table 10: Κριτήριο minimax-μη ύπαρξη saddle point

Πλέον, σε αυτή την περίπτωση, maximin τιμή (3) της στρατηγικής α της Γιάννας και minimax τιμή (4) της στρατηγικής δ του Τάσου δεν συμπίπτουν, οπότε και δεν υπάρχει saddle point στο παίγνιο. Αν παίξουν αυτό το συνδυασμό στρατηγικών (α,δ), θα κερδίσει η Γιάννα 4 από τον Τάσο. Η Γιάννα προφανώς δεν θα ενοχληθεί, αφού θα κερδίσει περισσότερα από αυτά που τουλάχιστον της εξασφαλίζει η maximin στρατηγική της. Ο Τάσος όμως, θεωρώντας πάντα ότι πράττει ορθολογικά, προβλέπει αυτή την έκβαση, η οποία δεν τον ικανοποιεί και έτσι προσπαθεί να επωφεληθεί παραπάνω, επιλέγοντας να παίξει β, ώστε να έχει μικρότερη ζημία ($3<4$). Η Γιάννα τώρα από την μεριά της, η οποία είναι επίσης ορθολογική, συλλογιζόμενη τα παραπάνω, σκέφτεται γιατί να μην κερδίσει παραπάνω από 3, οπότε αλλάζει την στρατηγική της στην γ, προσδοκώντας όφελος 5, αντί για 3. Ο Τάσος αλλάζει στρατηγική εκ νέου σε δ, για να έχει την ελάχιστη απώλεια 1 αντί για 5 και η Γιάννα με την σειρά της αλλάζει πάλι στην α, για να επιτύχει όφελος 4. Βλέπουμε ότι οι παίκτες επανήλθαν στις αρχικές επιλογές τους, οπότε και δεν μπορούν να καταλήξουν σε μία ισορροπία, για τον απλούστατο λόγο ότι κάθε φορά κάποιος από τους δύο, έχει κίνητρο να αποκλίνει μονομερώς, αναγνωρίζοντας ότι μπορεί να βελτιώσει την απόδοσή του. Οπότε το κριτήριο minimax μας δίνει σε αυτή την περίπτωση μία ασταθής λύση (εξού και η μη ύπαρξη saddle point).

Την λύση έρχονται να δώσουν οι μικτές στρατηγικές, ακριβώς όπως έχουν ορισθεί προηγούμενα και με το ίδιο σκεπτικό και την ίδια μεθοδολογία.

Μικτές στρατηγικές σε παίγνια μηδενικού αθροίσματος

Εφαρμογή Παίγνιο Πέναλτι

Ας εξετάσουμε ένα παράδειγμα στο ποδόσφαιρο ώστε να προσομοιάσουμε μία πραγματική κατάσταση και να δούμε πώς ένα παίγνιο μηδενικού αθροίσματος αντιπροσωπεύει καθαρό ανταγωνισμό. Έστω λοιπόν ότι έχει δοθεί πέναλτι σε ένα παιχνίδι και ο παίκτης γραμμή είναι ο εκτελεστής, ενώ ο παίκτης στήλη είναι ο τερματοφύλακας της αντίπαλης ομάδας (πιο ανταγωνιστική κατάσταση δεν γίνεται). Ο εκτελεστής μπορεί να σουτάρει είτε προς τα αριστερά είτε προς τα δεξιά (παραλείπουμε το κέντρο χάριν απλούστευσης). Ο τερματοφύλακας αντίστοιχα μπορεί να πέσει στην αριστερή ή την δεξιά γωνία του για να αποκρούσει το σουτ.

Είναι λογικό να θεωρήσουμε ότι ο εκτελεστής είναι καλύτερος στο χτύπημα πέναλτι προς την μία πλευρά απ' ότι στην άλλη και ακόμα ότι έχει προφανώς επίγνωση αυτού και μπορεί να καθορίσει προς ποια κατεύθυνση σκοράρει συχνότερα (εκτελεί πιο εύστοχα δηλαδή). Ο τερματοφύλακας αντίστοιχα αποκρούει καλύτερα πέφτοντας στην μία πλευρά απ' ότι στην άλλη. Δεδομένων όλων αυτών θα εκφράσουμε τις αποδόσεις αυτών των στρατηγικών σε όρους προσδοκώμενων κερδών.

Υποθέτουμε ότι ο παίκτης σειρά θα σκοράρει στο 80% των προσπαθειών, αν εκτελέσει αριστερά και ο τερματοφύλακας πέσει δεξιά αλλά μόνο στο 50% των προσπαθειών αν ο τερματοφύλακας "μαντέψει" σωστά και πέσει αριστερά. Αν ο παίκτης χτυπήσει το πέναλτι δεξιά, θα σκοράρει στο 90% των προσπαθειών (πιο εύστοχος από αυτή την μεριά) αν ο τερματοφύλακας πέσει αριστερά, αλλά μόνο στο 20% των προσπαθειών (πολύ καλός στις αποκρούσεις δεξιά) αν ο τερματοφύλακας πέσει δεξιά. Απεικονίζουμε το παίγνιό μας στον παρακάτω πίνακα

		Τερματοφύλακας	
		Απόκρουση αριστερά	Απόκρουση δεξιά
Εκτελεστής	Σουτ αριστερά	50	80
	Σουτ δεξιά	90	20

Table 11: Παίγνιο Πέναλτι-Μικτές Στρατηγικές

Εφαρμόζοντας το κριτήριο minimax παίρνουμε

		Τερματοφύλακας		
		Απόκρουση αριστερά	Απόκρουση δεξιά	Ελάχιστο γραμμής
Εκτελεστής	Σουτ αριστερά	50	80	50$\leftarrow$ *maximin*
	Σουτ δεξιά	90	20	20
	Μέγιστο στήλης	90	80	
			$\uparrow$ *minimax*	

Η μη ύπαρξη saddle point λοιπόν μας οδηγεί στο να ακολουθήσουν οι παίκτες μία μικτή στρατηγική έκαστος. Στο παίγνιό μας μπορούμε να το ερμηνεύσουμε ως εξής: Προφανώς, αν ο τερματοφύλακας ξέρει προς ποια κατεύθυνση θα σουτάρει ο αντίπαλος, θα έχει μεγάλο πλεονέκτημα. Ο εκτελεστής, επειδή το γνωρίζει, προσπαθεί να κάνει ουσιαστικά τον τερματοφύλακα να μαντέψει. Οπότε, θα εκτελέσει μερικές φορές στην "καλή του" πλευρά και μερικές στην "αδύναμη" πλευρά.

Υπενθυμίζουμε ότι η αθροιστική αναμενόμενη απόδοση του παίκτη-γραμμή είναι $U_1(p,q) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_i q_j \alpha_{ij}$ και του παίκτη-στήλη είναι $U_2(p,q) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_i q_j b_{ij}$ όπου εδώ έχουμε $\alpha_{ij} = -b_{ij}$, αφού είναι παίγνιο μηδενικού αθροίσματος, με p την πιθανότητα ο εκτελεστής να χτυπήσει αριστερά, οπότε $1-p$ η πιθανότητα να χτυπήσει δεξιά και q την πιθανότητα ο τερματοφύλακας να πέσει αριστερά, οπότε $1-q$ η πιθανότητα να πέσει δεξιά. Άρα η αναμενόμενη απόδοση του εκτελεστή είναι

$U_1 = p\cdot[q\cdot 50 + (1-q)\cdot 80] + (1-p)\cdot[q\cdot 90 + (1-q)\cdot 20] = -30pq + 80p + (1-p)(70q+20)$.

Παρομοίως, η αναμενόμενη απόδοση του τερματοφύλακα είναι

$U_2 = q\cdot[p\cdot(-50) + (1-p)\cdot(-90)] + (1-q)\cdot[p\cdot(-80) + (1-p)\cdot(-20)] = 40pq - 90q + (1-q)(-60p-20)$.

Παραγωγίζοντας και θέτοντας τις μερικές παραγώγους ίσες με μηδέν παίρνουμε:

$\frac{\partial U_1}{\partial p} = 0 \Rightarrow -30q + 80 - 70q - 20 = 0 \Rightarrow -100q + 60 = 0 \Rightarrow q = 0,6$
$\frac{\partial U_2}{\partial q} = 0 \Rightarrow 40p - 90 + 60p + 20 = 0 \Rightarrow 100p = 70 \Rightarrow p = 0,7.$

Επομένως, το $((0.7, 0.6), (0.3, 0.4))$ είναι μια ισορροπία μικτών στρατηγικών, η οποία είναι επίσης εσωτερική ισορροπία. Η επιλογή του παίκτη γραμμή $0 < p < 1$ είναι η βέλτιστη απάντηση όσο $q = 0,6$. Αντίστοιχα, η επιλογή του παίκτη στήλη $0 < q < 1$ είναι η βέλτιστη απάντηση όσο $p = 0,7$. Οπότε οι στρατηγικές των παικτών είναι αμοιβαίες βέλτιστες απαντήσεις αν $p = 0,7$ και $q = 0,6$.

Ας προσεγγίσουμε τώρα την λύση μικτών στρατηγικών υπό το σκεπτικό του κριτηρίου minimax αλλά και γραφικά ώστε να δούμε και να αντιληφθούμε πώς φτάνουμε στο ίδιο αποτέλεσμα που μας έδωσε η μαθηματική μεθοδολογία της ισορροπίας Nash μικτών στρατηγικών που μόλις χρησιμοποιήσαμε.

Αν ο παίκτης εκτελέσει αριστερά με πιθανότητα p, θα έχει προσδοκώμενη απόδοση $50p + 90(1-p)$ όταν ο τερματοφύλακας πέσει αριστερά και $80p + 20(1-p)$ όταν ο τερματοφύλακας πέσει δεξιά. Ο εκτελεστής θέλει να μεγιστοποιήσει αυτή την προσδοκώμενη απόδοση, ενώ ο τερματοφύλακας ταυτόχρονα θέλει να την ελαχιστοποιήσει.

Στο σχήμα Σ1 απεικονίζεται η προσδοκώμενη απόδοση του εκτελεστή για διαφορετικές τιμές (επιλογές ουσιαστικά) του p, μέσω των γραφικών παραστάσεων των δύο συναρτήσεών του προσδοκώμενης απόδοσης $50p + 90(1-p)$ και $80p + 20(1-p)$. Πρόκειται για γραμμικές συναρτήσεις του p, οπότε τα γραφήματα αποτελούνται από ευθείες γραμμές.

Ο εκτελεστής γνωρίζει ότι ο τερματοφύλακας θα προσπαθεί να ελαχιστοποιήσει την προσδοκώμενη απόδοσή του (του εκτελεστή). Οπότε, για οποιοδήποτε p, η καλύτερη απόδοση την οποία μπορεί να προσδοκεί, είναι η ελάχιστη των αποδόσεων που δίνει κάθε φόρα έκαστη εκ των δύο στρατηγικών του. Αυτό φαίνεται στο σχήμα μας μέσω της σκιασμένης γραμμής. Το σημείο λοιπόν που θέλει να βρει είναι το μέγιστο σημείο αυτών των ελάχιστων αποδόσεων (και μόλις φτάσαμε στο σημείο maximin του παίκτη γραμμή), το οποίο βρίσκεται προφανώς στο κορυφαίο σημείο της σκιασμένης γραμμής, ή, αντίστοιχα, στο σημείο τομής των δύο γραμμών.

Πλέον βλέπουμε και γραφικά την εφαρμογή του κριτηρίου minimax, ενώ αλγεβρικά μπορούμε να υπολογίσουμε αυτή την αξία επιλύοντας την σχέση $50p + 90(1-p) = 80p + 20(1-p)$ ως προς p. Έτσι παίρνουμε $p = 0,7$, επαληθεύοντας την λύση μας (όπως αναμενόταν) που βρήκαμε πριν.

Figure 1: Προσδοκώμενη απόδοση εκτελεστή βάση p

Επομένως, αν ο παίκτης σουτάρει αριστερά στο 70% των προσπαθειών του και ο τερματοφύλακας αντιδράσει με τον καλύτερο δυνατό τρόπο, ο εκτελεστής θα έχει συνολικά εν τέλει προσδοκώμενη απόδοση $50 \cdot 0,7 + 90 \cdot 0,3 = 62$.

Ας δούμε τώρα την αντιμετώπιση της κατάστασης από την μεριά του τερματοφύλακα. Θα αναλύσει με παρόμοιο τρόπο τις επιλογές του: Αν πέσει αριστερά με πιθανότητα q, βλέπει ότι ο εκτελεστής θα έχει προσδοκώμενη απόδοση $50q + 80(1-q)$, ενώ αν πέσει δεξιά με πιθανότητα 1-q, βλέπει ότι ο εκτελεστής προσδοκεί $90p+20(1-q)$. Ο τερματοφύλακας για κάθε q, θέλει να ελαχιστοποιήσει την προσδοκώμενη απόδοση του εκτελεστή, ενώ ταυτόχρονα αναγνωρίζει ότι ο αντίπαλος θέλει να την μεγιστοποιήσει.

Σε αναλογία με το προηγούμενο διάγραμμα, στο σχήμα Σ2 απεικονίζεται η προσδοκώμενη απόδοση του εκτελεστή για διαφορετικές τιμές του q, μέσω των γραφικών παραστάσεων των $50q + 80(1-q)$ και $90q + 20(1-q)$. Εδώ ενδιαφέρει τον τερματοφύλακα το μέγιστο από τις δύο γραμμές, αυτό δηλαδή που εκφράζει την βέλτιστη επιλογή του εκτελεστή για κάθε επιλογή του q και το απεικονίζουμε με σκιασμένη γραμμή πάλι. Βρίσκει λοιπόν το βέλτιστο για αυτόν q, το σημείο που ελαχιστοποιεί τις μέγιστες αποδόσεις του εκτελεστή (και μόλις φτάσαμε στο σημείο minimax του παίκτη στήλη).

Παρατηρείστε ότι λόγω του σκεπτικού του κριτηρίου minimax, ο παίκτης στήλη προσεγγίζει το παίγνιο με βάση την ελαχιστοποίηση της απόδοσης του αντιπάλου (που του εξασφαλίζει μεγιστοποίηση της δικιάς του). Στον τερματοφύλακα, αναζητώντας το βέλτιστο q για μικτές στρατηγικές, εξετάζουμε πάλι την προσδοκώμενη απόδοση του εκτελεστή και όχι του τερματοφύλακα, απλά από την οπτική γωνία του τερματοφύλακα και η γραφική μας επίλυση αναφέρεται πάλι στην προσδοκώμενη απόδοση του εκτελεστή ως συνάρτηση του q.

Άρα το βέλτιστο q συμβαίνει όταν $50q+80(1-q) = 90q+20(1-q) \Rightarrow q = 0,6$ επαληθεύοντας πάλι την λύση.

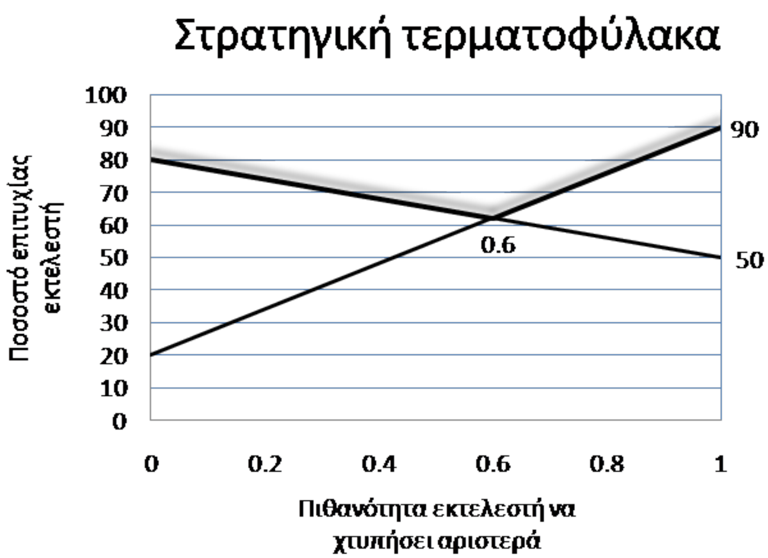

Figure 2: Προσδοκώμενη απόδοση εκτελεστή βάση q

Έχουμε τώρα υπολογίσει τις στρατηγικές ισορροπίας για κάθε παίκτη. Ο εκτελεστής πρέπει να σουτάρει αριστερά με πιθανότητα 0,7 και ο τερματοφύλακας πρέπει να πέσει αριστερά με πιθανότητα 0,6. Μην ξεχνάμε ότι αυτές οι αξίες επιλέχτηκαν έτσι ώστε οι αποδόσεις των δύο παικτών να είναι οι ίδιες, ό,τι κι αν κάνει ο άλλος παίκτης, αφού βρήκαμε τις τιμές εξισώνοντας τις αποδόσεις των δύο στρατηγικών που θα μπορούσε να επιλέξει ο αντίπαλος παίκτης.

Έτσι, όταν ο εκτελεστής επιλέξει 0,7, ο τερματοφύλακας είναι αδιάφορος μεταξύ τού να πέσει αριστερά ή δεξιά και συγκεκριμένα είναι απόλυτα ικανοποιημένος με το να πέφτει αριστερά με πιθανότητα 0,6. Αν ας πούμε συναντούσε τον ίδιο παίκτη σε 10 πέναλτι, θα έπεφτε 6 φορές αριστερά και 4 δεξιά, χωρίς να κοιτάει με ποια σειρά.

Αντίστοιχα, αν ο τερματοφύλακας πέφτει αριστερά με πιθανότητα 0,6, ο εκτελεστής είναι αδιάφορος μεταξύ τού να σουτάρει αριστερά ή δεξιά και συγκεκριμένα είναι ευχαριστημένος με το να σουτάρει αριστερά με πιθανότητα 0,7. Συνεπώς, δείξαμε πάλι ότι αυτές οι επιλογές αποτελούν ισορροπία κατά Nash: Κάθε παίκτης μεγιστοποιεί τις πιθανότητές του, με δεδομένες τις επιλογές του άλλη παίκτη. Σε κατάσταση ισορροπίας, ο παίκτης σκοράρει στο 62% των προσπαθειών και αποτυγχάνει με ποσοστό 38%. Αυτό είναι και το καλύτερο που μπορεί να κάνει, αν ο άλλος παίκτης αντιδράσει με βέλτιστο τρόπο.

3.2 Στατικά παίγνια μη πλήρους πληροφόρησης

3.2.1 Ορισμός

Θα εξετάσουμε τώρα στατικά παίγνια στα οποία οι παίκτες αντιμετωπίζουν ένα είδος αβεβαιότητας, τα λεγόμενα παίγνια μη πλήρους πληροφόρησης. Ένα παίγνιο μη πλήρους πληροφόρησης, είναι ένα παίγνιο στο οποίο οι παίκτες δεν έχουν κοινή γνώση επί των πάντων για το παίγνιο που διαδραματίζεται. Δεν κατέχουν δηλαδή όλοι οι παίκτες όλες τις πληροφορίες που σχετίζονται με τις αποφάσεις τους. Η απεικόνιση των αλληλεπιδράσεων υπό αυτό το πρίσμα είναι μάλλον πιο ρεαλιστική από τα παίγνια πλήρους πληροφόρησης και συλλαμβάνει πολλές οικονομικές καταστάσεις, όπου μία πληθώρα παραγόντων του περιβάλλοντος μπορεί να μην είναι από κοινού γνωστοί σε όλους τους παίκτες.

Μεταξύ των στοιχείων για τα οποία οι παίκτες είναι αβέβαιοι διακρίνουμε:

- Αποδόσεις
- Ποιοί ή πόσοι είναι οι άλλες παίκτες
- Ποιες κινήσεις είναι πιθανές
- Πώς σχετίζεται το αποτέλεσμα με τις πράξεις
- Τί γνωρίζει ο αντίπαλός μου και τί γνωρίζει ότι γνωρίζω

Οπότε την στιγμή που οι παίκτες μπορούν να ξεκινήσουν να παίζουν τις κινήσεις τους στην στρατηγική αυτή αλληλεπίδραση, ορισμένοι παίκτες έχουν ήδη κάποιες ιδιωτικές πληροφορίες για το παίγνιο που κάποιοι άλλοι δεν έχουν.

Για παράδειγμα,

- Σε ένα μοντέλο Cournot: Πόσο αξιόπιστα μπορεί μία εταιρεία να εκτιμήσει τα κόστη μίας άλλης?
- Η κυβέρνηση μπορεί να φτιάχνει το φορολογικό νομοσχέδιο χωρίς να προβλέπει τί "απατεωνιές" θα σκεφτούν κάποιοι άνθρωποι για να αποφύγουν φόρους.
- Οι χώρες μπορεί να διαπραγματεύονται συμφωνίες για την κλιματική αλλαγή έχοντας διαφορετικές πεποιθήσεις και πιστεύω για τα κόστη και τα οφέλη της παγκόσμιας κλιματικής αλλαγής.
- Οι ενάγοντες μπορεί να προσφέρουν συμβιβασμούς / συμφωνίες στους συνήγορους υπεράσπισης χωρίς να ξέρουν τί είδους υπόθεση ο συνήγορος θα μπορεί να φέρει στο δικαστήριο ή τί είδους υπόθεση ο συνήγορος πιστεύει ότι ο ενάγων είναι ικανός να φέρει.

Στην ανάλυση των παιγνίων αυτών φαντάζει ρεαλιστικότερο να υποθέτουμε αβεβαιότητα ως προς τις αποδόσεις, εννοώντας ότι οι παίκτες ίσως να μην γνωρίζουν καθένας την απόδοση του αντιπάλου του. Μάλιστα, η ανάλυση που επέκτεινε σε τέτοιου είδους αβέβαιες αλληλεπιδράσεις αυτή του Nash και αποτελεί ίσως την σπουδαιότερη για αυτά τα παίγνια , στηρίζεται όπως θα δούμε παρακάτω σε αυτή ακριβώς την προσέγγιση.

Άλλωστε, ποιος γνωρίζει ακριβώς τί κινητοποιεί ένα άλλο άτομο. Στην καλύτερη περίπτωση, όταν κάποιος γνωρίζει κάποιον άλλο πολύ καλά, κάνει μία μελετημένη μαντεψιά για το τί τον ωθεί στο να επιλέξει κάτι (και ως εκ τούτου πώς αξιολογεί κάθε πιθανό αποτέλεσμα). Πλέον, περιγράφουμε μία κατάσταση στην οποία οι παίκτες δεν έχουν απόλυτη επίγνωση για το τί αξία έχει για τους αντιπάλους τους ένα συγκεκριμένο αποτέλεσμα. Ένας δηλαδή τουλάχιστον παίκτης έχει αβεβαιότητα ως προς την συνάρτηση απόδοσης ενός τουλάχιστον άλλου παίκτη.

3.2.2 Ανάλυση

Ας δούμε τώρα την προσέγγιση του John Harsanyi, που όπως είπαμε είναι ό,τι πιο παρεμφερές με την ισορροπία Nash, αλλά σε παίγνια μη πλήρους πληροφόρησης. Έστω το ακόλουθο παίγνιο μη πλήρους πληροφόρησης

		Παίκτης Β	
		B_1	B_2
Παίκτης Α	A_1	0 ή 3, -1	2 ή 5, 0
	A_2	2,1	3,0

Table 12: Παίγνιο μη πλήρους πληροφόρησης ως προς τις αποδόσεις του Α

Οι αποδόσεις του Α δεν είναι ξεκάθαρες στον Β αν επιλέξει την στρατηγική A_1. Που σημαίνει ότι ο παίκτης Β είναι αβέβαιος οι εκβάσεις $(\mathrm{A}_1, \mathrm{B}_1)$και $(\mathrm{A}_1, \mathrm{B}_2)$ τί χρησιμότητα, τί απόδοση έχουν για τον αντίπαλό του, τον παίκτη Α. Ένας άλλος τρόπος να διατυπώσουμε το ίδιο πράγμα είναι να πούμε ότι η έκβαση $(\mathrm{A}_1, \mathrm{B}_1)$ αποδίδει 0 στον Α αν είναι του τύπου A_a και 3 αν είναι του τύπου A_b. Παρόμοια εκφράζουμε και την έκβαση $(\mathrm{A}_1, \mathrm{B}_2)$ κατά την οποία ο Α λαμβάνει είτε 2 είτε 5, αναλόγως με τον "τύπο" του. Ταυτόχρονα όμως, ό,τι τύπος και αν είναι, ο Α (που φυσικά ξέρει τον εαυτό του, άρα τον τύπο του), γνωρίζει ακριβώς τί αξία έχει για τον Β κάθε ένα εκ των τεσσάρων δυνατών αποτελεσμάτων.

Ο παίκτης Β μπορεί εύκολα να επιλέξει τον βέλτιστο τρόπο αντίδρασής του στις στρατηγικές A_1και A_2. Είναι αντίστοιχα οι B_2 και B_1. Δεν μπορεί βέβαια να προβλέψει αν ο παίκτης Α θα επιλέξει A_1 λόγω της αβεβαιότητάς του σχετικά με το με τί τύπο παίκτη παίζει. Αν ο Β παίζει με έναν τύπου A_a παίκτη Α, τότε ξέρει ότι ο A έχει μία αυστηρά κυρίαρχη στρατηγική, την A_2 . Αλλά, αν παίζει με έναν τύπου A_b , τότε ξέρει ότι ο A έχει μία άλλη αυστηρά κυρίαρχη στρατηγική, την A_1 .

Η πρόταση του Harsanyi σε τέτοιες περιπτώσεις είναι ότι θα έπρεπε να υποθέσουμε πως ο B θεωρεί κάποιες πιθανότητες σχετικά με το αν ο παίκτης A είναι του ενός τύπου ή του άλλου. O B προσδίδει πιθανότητα p στο να εμπλακεί σε ανταγωνισμό με τύπου A_a παίκτη και 1-p με τύπου A_b. O B τώρα αναλύει τις βέλτιστες ενέργειές του δεδομένων:

- των αποδόσεων σε κάθε μία από τις περιπτώσεις ανταγωνισμού
- τις πιθανοτικές του πεποιθήσεις/πιστεύω που αφορούν το πόσο πιθανό είναι να συναντήσει A_a και A_b τύπο αντίπαλου παίκτη.

Αυτό που έκανε στην πραγματικότητα ο Harsanyi, ήταν να μετατρέψει ένα παίγνιο μη πλήρους πληροφόρησης, σε ένα πλήρους πληροφόρησης, στο οποίο όμως ορισμένες πληροφορίες είναι πιθανοτικές (για παράδειγμα ως προς τον "τύπο" ενός εκ των παικτών). Για να γίνει αυτό πιο ξεκάθαρο, ξαναγράφουμε το παίγνιο του πίνακα 11 παρακάτω:

<table>
<tr><td></td><td></td><td></td><td colspan="4">Παίκτης B</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td colspan="2">B_1</td><td colspan="2">B_2</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Παίκτης A</td><td rowspan="2">A_1</td><td>Τύπος A_a(p)</td><td>0</td><td rowspan="2">-1</td><td>2</td><td rowspan="2">0</td></tr>
<tr><td>Τύπος A_b(1-p)</td><td>3</td><td>5</td></tr>
<tr><td>A_2</td><td>Και οι δύο τύποι A</td><td colspan="2">2,1</td><td colspan="2">3,0</td></tr>
</table>

Table 13: Επαναδιατύπωση πίνακα 11 στο πνεύμα της μετατροπής Harsanyi

Η πρόταση του Harsanyi για τον παίκτη B είναι: Αν $p > 1/2$ τότε ο B θα επιλέξει B_1 , ειδάλλως θα επιλέξει B_2. Αυτό αποδεικνύεται ως εξής: Από την στιγμή που η A_2 είναι μία αυστηρά κυρίαρχη στρατηγική για τον τύπου A_a παίκτη, ο B αναμένει ότι ο A θα παίξει την στρατηγική A_2 με πιθανότητα p. Επίσης, αφού η A_1 είναι η αυστηρά κυρίαρχη στρατηγική για τον τύπου A_b παίκτη, ο B αναμένει η στρατηγική A_1 να παιχτεί με πιθανότητα 1-p. Λαμβάνοντας τα παραπάνω υπόψη:

- Αν ο B παίξει B_1 , περιμένει να λάβει (μέσο όρο) -1 με πιθανότητα 1-p και 1 με πιθανότητα p. Άρα, η αναμενόμενη απόδοσή του είναι $U(B_1) = -1 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = -1 + 2p$.
- Αν ο B παίξει B_2 , θα λάβει 0 ανεξάρτητως του τί τύπος είναι ο A και ανεξαρτήτως βέβαια και της επιλογής του A. Δηλαδή τώρα ο B βλέπει πως $U(B_2) = 0$.

Αφαιρώντας την $U(B_2)$ από την $U(B_1)$ βρίσκουμε τα αναμενόμενα καθαρά κέρδη / οφέλη από την προτίμηση της στρατηγικής B_1 αντί της B_2 . Οπότε ο B θα προτιμήσει την B_1 όταν $K^B_{1-2} = -1 + 2p > 0$, ή όταν $p > 1/2$.

Συνοψίζοντας,

- Ο τύπου A_a παίκτης θα παίζει πάντα A_2 (αφού αυτή είναι αυστηρά κυρίαρχη στρατηγική για αυτό τον τύπο παίκτη και επομένως δεν τον απασχολεί ποιες είναι οι ενέργειες του Β).
- Ο τύπου A_b παίκτης θα παίζει πάντα A_1 (αφού αυτή είναι αυστηρά κυρίαρχη στρατηγική για αυτό τον τύπο παίκτη και επομένως δεν τον απασχολεί ποιες είναι οι ενέργειες του Β).
- Ο παίκτης Β (ο οποίος είναι ενός πιθανού τύπου σε αυτό το παίγνιο), θα παίξει ανάλογα με:
  - την αντίληψή του για τις διαφορετικές στρατηγικές που οι δύο τύποι του παίκτη Α θα προσαρμόσουν / εφαρμόσουν
  - τις προσδοκίες του σχετικά με το ποιος εκ των δύο τύπων του Α είναι πιο πιθανός. Πιο συγκεκριμένα, ο Β θα επιλέξει B_1 αν $p > 1/2$, B_2 αν $p < 1/2$, ενώ θα είναι αδιάφορος ανάμεσα στις δύο στρατηγικές του αν $p = 1/2$.

Οι παραπάνω στρατηγικές για κάθε τύπο του Α και για τον Β συγκροτούν μια ισορροπία Nash με την έννοια ότι και οι δύο τύποι του Α υιοθετούν μία βέλτιστη απάντηση στην στρατηγική του Β και ο Β υιοθετεί μία βέλτιστη απάντηση στην στρατηγική του Α, δεδομένων των προσδοκιών του για τον τύπο του Α. Αυτός ο τύπος ισορροπίας Nash είναι γνωστός ως Bayesian ισορροπία Nash (Bayesian Nash Equilibrium-BNE).

Η μετατροπή του Harsanyi αποτελείται από δύο βήματα:

(i) Μοντελοποίησε όλες τις μη συμμετρικές πληροφορίες σχετικά με τις στρατηγικές αποφάσεις, ως μη συμμετρικές πληροφορίες σχετικά με το πώς οι αναμενόμενες αποδόσεις εξαρτώνται από τους τύπους των παικτών

(ii) Μετέτρεψε τις μη συμμετρικές πληροφορίες σχετικά με το πώς οι αναμενόμενες αποδόσεις εξαρτώνται από τους τύπους των παικτών σε μη συμμετρικές πληροφορίες σχετικά με την "πραγματοποίηση" των τυχαίων μεταβλητών όπου η εκ των προτέρων κατανομή πιθανότητας είναι κοινή γνώση μεταξύ όλων των παικτών

Τα δύο αυτά βήματα, (που όσο περίπλοκα κι αν ακούγονται είναι στην πραγματικότητα πολύ απλά), μετασχηματίζουν την κατάσταση μη πλήρους πληροφόρησης σε ένα παίγνιο ατελούς πληροφόρησης, γνωστό ως παίγνιο Bayesian. (η λύση του Harsanyi είναι αυτή ουσιαστικά: μοντελοποίησε την μη πλήρη πληροφόρηση ως παίγνιο ατελούς πληροφόρησης).

Σε ένα παίγνιο Bayesian:

- Η φύση κάνει την πρώτη κίνηση (παίζει πρώτη), επιλέγοντας την "πραγματοποίηση" των τυχαίων μεταβλητών (μία για κάθε παίκτη), γνωστές ως "τύποι" (οι τύποι παικτών που προαναφέραμε). Αυτές οι τυχαίες μεταβλητές χαρακτηρίζουν την συνάρτηση απόδοσης κάθε παίκτη.

- Κάθε παίκτης παρατηρεί μόνο την πραγματοποίηση της δικιάς του τυχαίας μεταβλητής (του τύπου του). Αυτή η μεταβλητή συνοψίζει όλη την ιδιωτική / προσωπική πληροφόρηση (οτιδήποτε γνωρίζει που δεν είναι κοινή γνώση).

Στα στατικά παίγνια Bayesian οι παίκτες, αφού έχουν παρατηρήσει την πραγματοποίηση των τύπων τους, επιλέγουν ταυτόχρονα ενέργειες και μετά το παίγνιο τελειώνει με τις αποδόσεις να βασίζονται στους τύπους των παικτών και τις επιλογές τους.

Ο Harsanyi ισχυρίστηκε ότι μπορούμε να μοντελοποιήσουμε όλα τα στοιχεία για τα οποία οι παίκτες είναι αβέβαιοι (έχουν μη πλήρη πληροφόρηση) ως αβεβαιότητα για το πώς οι αποδόσεις (οι συναρτήσεις χρησιμότητας) βασίζονται στα "προφίλ ενεργειών", στους τύπους των παικτών. Για παράδειγμα:

- Είναι κάποιος παίκτης μέσα στο παίγνιο; ⇒ Μετασχημάτισε αυτή την αβεβαιότητα σε αβεβαιότητα σχετικά με το σύνολο των εφικτών δράσεων, επιτρέποντας στον παίκτη μόνο μία εφικτή κίνηση ("εκτός") όταν υποτίθεται ότι βρίσκεται εκτός παιγνίου.

- Είναι μία συγκεκριμένη ενέργεια εφικτή για ένα δοσμένο παίκτη; ⇒Μετασχημάτισε αυτή την αβεβαιότητα σε αβεβαιότητα σχετικά με το πώς η έκβαση εξαρτάται από τις ενέργειες, αναθέτοντας στον παίκτη μία πολύ κακή έκβαση όταν επιλέγει μία ενέργεια που υποτίθεται ότι είναι ανέφικτη.

- Πώς οι εκβάσεις στηρίζονται στις ενέργειες και πώς οι παίκτες αξιολογούν τις εκβάσεις; ⇒ Στην αναπαράσταση σε κανονική μορφή αυτή είναι μία και η ίδια αβεβαιότητα, επειδή οι αποδόσεις είναι είναι συναρτήσεις προφίλ ενεργειών.

Στο δεύτερο βήμα, εργαζόμαστε όπως είδαμε στο παράδειγμα προηγούμενα, σκεπτόμενοι ότι όπως οι παίκτες πρέπει να σχηματίσουν πεποιθήσεις / πιστεύω για το πώς θα παίξουν οι αντίπαλοί τους, πρέπει επίσης να σχηματίσουν πεποιθήσεις για το ποιο παίγνιο παίζουν (ανάλογα με τον τύπο του παίκτη).

Υπό το πρίσμα: Η φύση παίζει πρώτη→Κοινή γνώση για την αρχική κατανομή των "τύπων" παικτών (το πώς παίζει η φύση) →Η πραγματοποίηση των τύπων είναι ιδιωτική / προσωπική πληροφορία, οδηγούμαστε όπως προείπαμε στο (στατικό) Bayesian παίγνιο. Τα στατικά παίγνια μη πλήρους πληροφόρησης καλούνται λοιπόν Bayesian παίγνια και ορίζονται ως εξής:

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.9
Ένα παίγνιο μη πλήρους πληροφόρησης G=(Θ,S,P,U) αποτελείται από:

(i) Ένα σύνολο $\Theta = \Theta_1 \times \ldots \Theta_I$, όπου Θ_i είναι το σύνολο (πεπερασμένο) των πιθανών "τύπων" του παίκτη i

(ii) Ένα σύνολο $S = S_1 \times \ldots S_I$, όπου S_i είναι το σύνολο των πιθανών στρατηγικών του παίκτη i

(iii) Μία από κοινού κατανομή πιθανότητας $p(\theta_1, \ldots, \theta_I)$ πάνω στους τύπους παικτών. Για πεπερασμένο χώρο τύπων, υποθέτουμε πως $p(\theta_i) > 0$ για όλα τα $\theta_i \epsilon \Theta_i$

(iv) Συναρτήσεις αναμενόμενης απόδοσης $U_i : S \times \Theta \to \mathbb{R}$

Σημειώνουμε εδώ ότι οι αποδόσεις μπορούν να εξαρτώνται όχι μόνο από τον δικό μας τύπο, αλλά και από αυτούς των αντιπάλων μας. Αν η U_i εξαρτάται από την θ_i , αλλά όχι από την θ_{-i}, λέμε ότι το παίγνιο έχει "προσωπικές αξίες".

Έχοντας ορίσει αυτά, παραθέτουμε την θεμελιώδη (και κάτοχο βραβείου Nobel) παρατήρηση του Harsanyi:

Τα παίγνια μη πλήρους πληροφόρησης μπορούν να θεωρηθούν ως παίγνια πλήρους, αλλά ατελούς πληροφόρησης όπου η φύση κάνει την πρώτη κίνηση (επιλέγοντας $\theta_1, \ldots \theta_I$), αλλά δεν παρατηρούν όλοι την κίνησή της (π.χ ο παίκτης i μαθαίνει για το θ_i αλλά όχι για το θ_{-i}).

Φανταστείτε την φύση σαν άλλο ένα παίκτη, με τη διαφορά ότι αντί να προσπαθεί να μεγιστοποιήσει κάποια απόδοση, χρησιμοποιεί απλά μία "στάνταρ" σταθερή / προκαθορισμένη μικτή στρατηγική.

Αυτή η διατύπωση βοηθάει στο να φανούν οι ακόλουθοι ορισμοί προφανείς, με την έννοια ότι για να αναλύσουμε ένα παίγνιο μη πλήρους πληροφόρησης, μπορούμε να κοιτάξουμε την ισορροπία Nash του παιγνίου όπου η φύση είναι παίκτης.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.9
Μία Bayesian αγνή στρατηγική για ένα παίκτη i σε ένα παίγνιο G είναι μία συνάρτηση $f_i : \Theta_i \to \Sigma_i$. Γράφουμε S^{Θ_i} για το σύνολο των Bayesian αγνών στρατηγικών.

Μπορούμε τώρα να ορίσουμε την Bayesian ισορροπία Nash (BNE) που ήδη είδαμε στο πρώτο παράδειγμα:

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.10
Ένα Bayesian στρατηγικό προφίλ $(f_1, \ldots, f_I)$ είναι μία Bayesian ισορροπία Nash αν για όλα τα i:
$f_i \epsilon arg \max_{f_i' \epsilon S_i^{\Theta_i}} \sum_{\theta \epsilon \Theta} U_i \left(f_i'(\theta_i), f_{-i}(\theta_{-i}), \theta_i, \theta_{-i} \right) p(\theta_i, \theta_{-i})$.
ή εναλλακτικά, για όλα τα i, θ_i, s_i:
$\sum_{\theta_{-i} \epsilon \Theta_{-i}} U(f_i(\theta_i), f_{-i}(\theta_{-i}), \theta_i, \theta_{-i}) p(\theta_i|\theta_{-i}) \geq$
$\sum_{\theta_{-i} \epsilon \Theta_{-i}} U(s_i, f_{-i}(\theta_{-i}), \theta_i, \theta_{-i}) p(\theta_i|\theta_{-i})$

Η δεύτερη πρόταση του ορισμού λέει απλά ότι για να μεγιστοποιήσεις την αναμενόμενη απόδοσή σου δεδομένου του τί γνωρίζεις για τους τύπους σου, η στρατηγική που επιλέγεις για κάθε τύπο πρέπει να μεγιστοποιεί την απόδοσή σου υπό τον όρο του να έχεις αυτό τον τύπο. Μία πρόταση που συνοψίζει τα παραπάνω είναι:

Μία Bayesian ισορροπία Nash είναι απλά μία ισορροπία Nash του παιγνίου όπου η φύση κάνει την πρώτη κίνηση, επιλέγει $\theta \epsilon \Theta$ από μία κατανομή με πιθανότητα $p(\theta)$και αποκαλύπτει το θ_i στον παίκτη i.

Εφαρμογή Παιγνίου Μη Πλήρους Πληροφόρησης για πρόσληψη εργαζόμενου

Ας δούμε τώρα ένα παράδειγμα. Δύο διοικητικά στελέχη οικονομικών τμημάτων θέλουν αμφότεροι να προσλάβουν έναν (τον ίδιο) κορυφαίο απόφοιτο στο τμήμα τους. Κάθε στέλεχος μπορεί να εξασφαλίσει ότι ο απόφοιτος θα δεχθεί την προσφορά καλώντας τον στον τηλέφωνο και προωθώντας το δικό τους "πρόγραμμα αποφοίτων". Υπάρχει όμως κάποιο κόστος για την πραγματοποίηση αυτής της κλήσης. Ας υποθέσουμε ότι οι αποδόσεις αναπαριστώνται όπως δείχνει ο πίνακας

		Στέλεχος Β	
		Κλήση	Όχι Κλήση
Στέλεχος Α	Κλήση	1-c_1, 1-c_2	1-c_2, 1
	Όχι Κλήση	1, 1-c_1	0,0

Table 14: Παίγνιο μη πλήρους πληροφόρησης για πρόσληψη εργαζόμενου

Τα στελέχη επιλέγουν τις ενέργειές τους ταυτόχρονα και έχουν προσωπική / ιδιωτική πληροφόρηση για τα κόστη τους αν κάνουν την κλήση. Αυτό σημαίνει ότι το στέλεχος i ξέρει το c_i και πιστεύει ότι το c_j είναι μία τυχαία επιλογή από μια ομοιόμορφη κατανομή των $[\underline{c}, \overline{c}]$. Η πεποίθηση του i στελέχους για το c_j είναι κοινώς γνωστή.

Μία εναλλακτική θεώρηση αυτού του προβλήματος είναι ότι το στέλεχος Α λέει ανοικτά τα πάντα σε όλους, δηλαδή όλοι γνωρίζουν το κόστος του $c_1 = 1/2$. Απεναντίας, το κόστος $c_2 \epsilon \, [\underline{c}, \overline{c}]$ είναι γνωστό μόνο στο στέλεχος Β.

Ή, θα μπορούσαμε να υποθέσουμε ότι το στέλεχος Α είναι ένα υψηλόβαθμο στέλεχος το οποίο γνωρίζει λόγω μακροχρόνιας εμπειρίας ότι $c_1 = 1/2$ και $c_2 = 2/3$. Ωστόσο, το στέλεχος Β είναι πιο άπειρο και η πεποίθησή του είναι ότι $c_1, c_2 \sim U\,[0, 2]$ και είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους.

Ο ορισμός που δώσαμε πρότιστα για το Bayesian παίγνιο σχετίζεται με το παράδειγμά μας ως εξής: $\Theta_1 = \Theta_2 = [\underline{c}, \overline{c}]$. Ας επιλύσουμε τώρα δύο εκδοχές του παιγνίου αυτού.

Εκδοχή 1η

- Το στέλεχος Α έχει ένα γνωστό κόστος $c_1 < 1/2$
- Το στέλεχος Β έχει κόστος $\underline{c}$ με πιθανότητα p και $\overline{c}$ με πιθανότητα 1-p.

Υποθέτουμε ότι $0 < \underline{c} < 1 < \overline{c}$ και $p < 1/2$. Η μοναδική Bayesian Nash ισορροπία είναι $f_1 =$Κλήση και $f_2\,(c) =$ Όχι Κλήση για όλα τα c. Για να το αποδείξουμε, έχουμε πάντα στο μυαλό μας ότι κάθε τύπος παίκτη πρέπει να παίξει μία βέλτιστη απάντηση.

Όταν το στέλεχος Β είναι τύπου $\overline{c}$, τότε το να κάνει την κλήση είναι αυστηρά κυριαρχούμενη στρατηγική:

$$U_2\,(s_1, \text{Κλήση}; \overline{c}) < U_2\,(s_1, \text{Όχι Κλήση}; \overline{c}) \forall s_1$$

Επομένως, $f_2\,(\overline{c}) =$ Όχι Κλήση

Για το στέλεχος Α έχουμε:

$$U_1\,(\text{Κλήση}, f_2; c_1) = 1 - c_1$$

$$U_1\,(\text{Όχι Κλήση}, f_2; c_1) =$$
$$p \cdot U_1\,(\text{Όχι Κλήση}, f_2\,(\underline{c})\,; c_1) + (1-p) U_1\,(\text{Όχι Κλήση}, f_2\,(\overline{c})\,; c_1)$$

το οποίο είναι

$$\leq p \cdot 1 + (1-p) \cdot 0 = p$$

Και αφού $1 - c_1 > p$, τότε $f_1\,(c_1) =$ Κλήση.

Όταν το στέλεχος Β όμως είναι τύπου $\underline{c}$, τότε

$$U_2\,(f_1, \text{Κλήση}; \underline{c}) = 1 - \underline{c}$$

$$U_2\left(f_1, \text{Όχι Κλήση}; \underline{c}\right) = 1$$

οπότε $f_2\left(\underline{c}\right) =$ Όχι Κλήση

Ουσιαστικά η διαδικασία εδώ δουλεύει παρόμοια με την επαναλαμβανόμενη απάλειψη κυριαρχούμενων στρατηγικών.

Εκδοχή 2η

- Τα κόστη c_1και c_2 είναι ανεξάρτητες τυχαίες επιλογές από μία ομοιόμορφη κατανομή στο $[0, 2]$

Η μοναδική (κατ' ουσία) Bayesian Nash ισορροπία είναι

$$f_i\left(c_i\right) = \begin{cases} \text{Κλήση} & \alpha\nu\ c_i \leq 2/3 \\ \text{Όχι κλήση} & \alpha\nu\ c_i > 2/3 \end{cases}$$

Για να το αποδείξουμε μπορούμε απλά να εξετάσουμε ότι κάθε εικαζόμενη στρατηγική ενός παίκτη, είναι μια βέλτιστη απάντηση στου αλλουνού. Συγκεκριμένα, η στρατηγική κάθε παίκτη είναι μια βέλτιστη απάντηση δεδομένου ότι ο αντίπαλός του θα κάνει την κλήση με πιθανότητα $1/3$ και δεν θα την κάνει με πιθανότητα $2/3$
.

Παρατηρούμε ότι : αν $f_i\left(c_i\right) =$ Κλήση τότε $f_i\left(c_i^{'}\right) =$ Κλήση για όλα τα $c_i^{'} < c_i$. Για να φανεί αυτό, διακρίνουμε ότι αν $f_i\left(c_i\right) =$ Κλήση , τότε:

$$U_i\left(\text{Κλήση}, f_2\left(c_{-i}\right); c_i\right) \geq U_i\left(\text{Όχι Κλήση}, f_2\left(c_{-i}\right); c_i\right)$$

που σημαίνει ότι:

$$1 - c_i \geq k_{-i}$$

όπου k_{-i} υποδηλώνει την αμοιβή του να μην κάνει την κλήση. Άρα $\forall c_i^{'} < c_i$:

$$1 - c_i^{'} \geq k_{-i}$$

ή ισοδύναμα

$$U_i\left(\text{Κλήση}, f_2\left(c_{-i}\right); c_i^{'}\right) \geq U_i\left(\text{Όχι Κλήση}, f_2\left(c_{-i}\right); c_i^{'}\right)$$

Διαισθητικά, το να πραγματοποιηθεί η κλήση είναι πιο ελκυστικό αν τα κόστη είναι χαμηλότερα.

Η Bayesian ισορροπία Nash πρέπει να είναι της μορφής

$$f_1\left(c_1\right) = \begin{cases} \text{Κλήση} & \alpha\nu\ c_1 \leq c_1^{"} \\ \text{Όχι κλήση} & \alpha\nu\ c_i > c_1^{"} \end{cases}$$

$$f_2\left(c_2\right) = \begin{cases} \text{Κλήση} & \alpha\nu\ c_2 \leq c_2^{"} \\ \text{Όχι κλήση} & \alpha\nu\ c_2 > c_2^{"} \end{cases}$$

για κάποια κόστη "αποκοπής" $c_1^{"}$, $c_2^{"}$. (Σημειώνουμε ότι θα προκύψει πως όταν το c_i είναι ακριβώς ίσο με το $c"_i$, τότε το στέλεχος i είναι αδιάφορο ως προς το να καλέσει ή όχι. Για αυτό το λόγο η ισορροπία είναι "κατ' ουσία" μοναδική).

Ας είναι

$$k_j = \Pi[i \text{ θα κάνει κλήση δεδομένου κόστους αποκοπής } c_j^{"}]{=}\Pi[c_j \leq c_j^{"}]{=}\tfrac{1}{2}c_j^{"}$$

Για να είναι αυτές οι στρατηγικές Bayesian ισορροπία Nash, θέλουμε:

$$1 - c_i \geq k_{-i} \text{ για όλα τα } c_i \leq c_i^{"}$$

$$1 - c_i < k_{-i} \text{ για όλα τα } c_i > c_i^{"}$$

ή αντίστοιχα ότι $1 - c_i^{"} = k_{-i}$. Οπότε, για i=1,2:

$$1 - c_i^{"} = \tfrac{1}{2}c_i^{"}$$

Ως εκ τούτου, η μοναδική ισορροπία είναι να γίνει η κλήση όποτε $c_i < 2/3$

Παρατηρούμε ότι για άλλη μια φορά το αποτέλεσμα της ισορροπίας είναι μη αποδοτικό. Δηλαδή, είναι πάντα αποδοτικό για κάποιον να καλέσει και παρ' όλα αυτά με πιθανότητα 4/9 κανείς δεν καλεί. Επιπλέον, καλούν και τα δύο στελέχη με πιθανότητα 1/9 παρ' ότι αυτό είναι μη αποδοτικό.

4 ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΠΑΙΓΝΙΑ

4.1 Δυναμικά παίγνια πλήρους και τέλειας πληροφόρησης

4.1.1 Το λογισμικό Gambit

Για να συνεχίσουμε την ανάλυσή μας, θα χρησιμοποιήσουμε για την αναπαράσταση των παιγνίων το λογισμικό Gambit. Το λογισμικό αυτό είναι ένα εργαλείο κατασκευής, αναπαράστασης και ανάλυσης πεπερασμένων μη συνεργατικών παιγνίων τόσο σε εκτεταμένη όσο και σε στρατηγική μορφή. Είναι γραμμένο πλέον σε γλώσσα C, ενώ αρχικά ήταν σε Basic και αποτελεί λογισμικό ανοιχτού κώδικα που διατίθεται προς χρήση στο ευρύ κοινό από το 1991.

Λόγω του απλού και προσεγμένου γραφικού του περιβάλλοντος, μπορεί να χρησιμοποιηθεί ακόμα κι από νέους χρήστες ή που γνωρίζουν λίγα για την θεωρία παιγνίων, ενώ διαθέτει πληθώρα χρήσιμων εργαλείων για την ορθή προσομοίωση καταστάσεων στρατηγικής αλληλεπίδρασης.

Βασικά χαρακτηριστικά

Τα χαρακτηριστικά του Gambit εξυπηρετούν εκπαιδευτικούς αλλά και ερευνητικούς σκοπούς και τα βασικότερα είναι :

Ευέλικτο Γραφικό Περιβάλλον

Το γραφικό περιβάλλον του Gambit είναι συμβατό με πληθώρα λειτουργικών συστημάτων (όπως Mac και Windows) και σε αυτό προσφέρονται προς χρήση και εξερεύνηση όλα τα εργαλεία του. Έχει ευελιξία στην δημιουργία είτε στρατηγικής είτε εκτεταμένης μορφής παιγνίων, δίνοντας την δυνατότητα να εξετάσουμε ακόμα και ατελή πληροφόρηση, πεποιθήσεις παικτών, πιθανότητες με τις οποίες επιλέγουν στρατηγικές κ.α. Δυνατό του σημείο είναι ο υπολογισμός ισορροπίας Nash του παιγνίου αλλά και η οπτικοποίηση των στρατηγικών προφίλ-οριζόντων συμπεριφοράς που προκύπτουν από την εκάστοτε ισορροπία. Επίσης, παρέχεται δυνατότητα εύρεσης των αυστηρά κυρίαρχων στρατηγικών.

Υπολογισμός Ισορροπίας μέσω Πολλαπλών Αλγορίθμων

Το Gambit έχει την δυνατότητα υπολογισμού της ισορροπίας του παιγνίου μέσω επιλογής από πολλούς διαθέσιμους αλγόριθμους, όπου κατά περίπτωση ανάλογα με τον τύπο και τις παραμέτρους του παιγνίου, εξυπηρετεί και διαφορετικός. Η επιλογή παρέχεται μέσω απλής εντολής που μπορεί να επιλέξει ο χρήστης στην αναζήτηση του αλγόριθμου που βρίσκει την ισορροπία.

Λειτουργικότητα-Συνδεσιμότητα-Επεκτασιμότητα

Τα αρχεία του Gambit μπορούν να αποθηκευτούν σε διάφορες μορφές ώστε να μεταφερθούν μεταξύ διαφορετικών συστημάτων και να επεξεργασθούν με την χρήση άλλων εργαλείων. Οπότε οι δυνατότητες του Gambit μπορούν να διευρυνθούν, να βελτιωθεί μία μέθοδος υπολογισμού ισορροπίας, να προστεθεί μία νέα, ή να δημιουργηθούν εργαλεία για την παραμετροποίηση, ανάλυση, αναπαράσταση και χειρισμό παιγνίων σε προγραμματιστικό περιβάλλον.

Μειονεκτήματα Gambit

Βέβαια, κανείς δεν είναι τέλειος και το ίδιο ισχύει και για το Gambit, οπότε αναφέρουμε κάποια μειονεκτήματά του

Ανάλυση μόνο Πεπερασμένων Παιγνίων

Το Gambit μπορεί να αναπαραστήσει και αναλύσει μόνο πεπερασμένα παίγνια. Δεδομένου του σημείου που τελειώνουν, εξάγει την ισορροπία μέσα από μαθηματικά εργαλεία και κατάλληλους αλγόριθμους που κινούνται στο καθορισμένο πεπερασμένο πλαίσιο. Για μη πεπερασμένα παίγνια, που μπορούν φυσικά να συναντηθούν στην καθημερινότητα, όπου οι επιλογές των παικτών φαντάζουν χωρίς κάποιο τελικό σημείο και έχουν μία συνέχεια, το λογισμικό Gambit δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί.

Ανάλυση μόνο Μη Συνεργατικών Παιγνίων

Το λογισμικό καταπιάνεται μόνο με μη συνεργατικά παίγνια και δεν παρέχεται η δυνατότητα αναπαράστασης και ανάλυσης καταστάσεων που υπάγονται στην συνεργατική θεωρία παιγνίων.

Αδυναμία σε παίγνια μεγάλου μεγέθους

Μπορεί να δύναται να κάνει σχεδόν πάντα εύρεση ισορροπίας όσο πολύπλοκο κι αν είναι ένα παίγνιο ακόμα κι αν υπάρχει ελλιπής πληροφόρηση, μέσω της ευελιξίας των αλγορίθμων που χρησιμοποιεί, αλλά όταν αντιμετωπίζει παίγνια πολύ μεγάλου μεγέθους μπορεί να υπάρξει πρόβλημα, όπως υψηλός χρόνος απόκρισης ή και αδυναμία εύρεσης ισορροπίας.

Πέρα από την αναπαράσταση των παιγνίων σε εκτεταμένη μορφή, θα μας χρησιμεύσει το Gambit ως επαληθευτικός μηχανισμός, στην εύρεση ισορροπιών που θα πραγματοποιήσουμε στην εφαρμογή μας στο δεύτερο κομμάτι της διπλωματικής και θα αποτελέσει πειστήριο για την ορθότητα της ανάλυσής μας και τα αποτελέσματα που θα πάρουμε.

4.1.2 Ορισμός

Εδώ πλέον αναλύουμε τα δυναμικά παίγνια ή παίγνια διαδοχικών κινήσεων όπου η σειρά με την οποία λαμβάνονται οι αποφάσεις παίζει ρόλο, δηλαδή κάποιος παίζει στο πρώτο στάδιο, κάποιος στο δεύτερο κ.ο.κ. Μάλιστα, τα παίγνια αυτά δεν είναι απλά πλήρους πληροφόρησης (δηλαδή να γνωρίζουμε όλες τις αποδόσεις του παιγνίου), αλλά και τέλειας πληροφόρησης.

Τέλεια, όπως ο χαρακτηρισμός υπαγορεύει, σημαίνει ότι κάθε παίκτης έχει τέλεια πληροφόρηση, δηλαδή γνωρίζει ακριβώς τί έχει παιχτεί στο παίγνιο μέχρι το σημείο που καλείται αυτός να παίξει. Όλοι οι παίκτες δηλαδή παρακολουθούν τί έχει παιχτεί μέχρι το σημείο που έχει φτάσει το παίγνιο ή αντίστοιχα κανείς δεν ξεχνάει ποτέ τί έχει παιχτεί πριν και πού έχουμε οδηγηθεί.

4.1.3 Ανάλυση

Διευκολύνει η ανάλυση με τα εκτεταμένης μορφής παίγνια τα οποία όπως έχουμε πει αναπαριστούνται με το μαθηματικό εργαλείο : δέντρα παιγνίου. Υπενθυμίζουμε ότι είναι ένας κατευθυνόμενος γράφος, ένα σύνολο συνδεδεμένων κόμβων που έχει διακριτή κατεύθυνση. Στους κόμβους αντιστοιχίζεται ο εκάστοτε παίκτης που έχει σειρά να παίξει, ενώ στους κλάδους οι διαθέσιμες κινήσεις. Στο τέλος του δέντρου παριστάνονται οι αποδόσεις των παικτών, οι τελικές αμοιβές ή απώλειες. Τα δέντρα και άρα η εκτεταμένη μορφή παιγνίου, χρησιμοποιούνται για να αναπαραστήσουν παίγνια διαδοχικών κινήσεων, επειδή πολύ απλά δείχνουν την σειρά με την οποία οι ενέργειες λαμβάνονται από τους παίκτες. Η μορφή του δέντρου έχει ως ακολούθως:

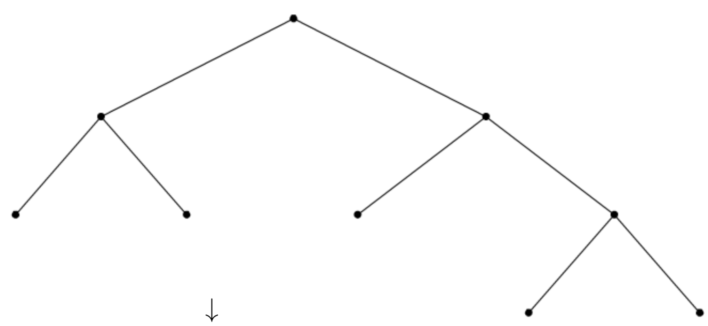

Figure 3: Μορφή δέντρου

Τα εκτεταμένης μορφής παίγνια περιέχουν πληροφορίες σχετικά με ακολουθίες παιξίματος και τα επίπεδα πληροφόρησης των παικτών σχετικά με τη δομή του παιγνίου. Όπου η σειρά του παιξίματος παίζει ρόλο, η εκτεταμένη μορφή πρέπει υποχρεωτικά να καθορίζεται αλλιώς τα συμπεράσματά μας θα είναι αναξιόπιστα.

Στα δέντρα υπάρχει πάντα διακεκριμένη κορυφή R, η οποία καλείται ρίζα του δέντρου και δεν έχει πλευρές να καταλήγουν σε αυτήν. Συνήθως, όπως θα δούμε, η ρίζα του δέντρου ταυτίζεται με τον αρχικό κόμβο απόφασης του παίκτη που στο παίγνιο παίζει πρώτος. Για κάθε άλλο κόμβο του γραφήματος υπάρχει ακριβώς μια διαδρομή από την ρίζα R σε αυτόν.

Ορίζουμε τώρα το “δέντρο παιγνίου” (n παικτών):

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.11
Ένα δέντρο T καλείται δέντρο παιγνίου n παικτών αν

(i) κάθε μη τερματικός κόμβος του δέντρου ανήκει σε έναν ακριβώς από τους παίκτες

(ii) σε κάθε τερματικό κόμβο αντιστοιχεί ένα n-διάστατο διάνυσμα απόδοσης

$$p(v) = (p_1(v), p_2(v), \ldots, p_n(v))$$

Να σημειώσουμε εδώ ότι σε κανένα παίκτη δεν πρέπει να ανήκει κανένας τερματικός κόμβος (οι τερματικοί αναπαριστούν αυστηρά αποδόσεις). Επιπροσθέτως, δεν είναι απαραίτητο ότι κάθε παίκτης κατέχει έναν τουλάχιστον μη τερματικό κόμβο. Μπορούν κάλλιστα να υπάρχουν (σε παίγνιο n παικτών) παίκτες που δεν κατέχουν κανένα μη τερματικό κόμβο στο δέντρο παιγνίου.

Πριν συνεχίσουμε ας αναφέρουμε συγκεντρωτικά τις βασικές έννοιες που θα φανούν χρήσιμες στην ανάλυση των δέντρων παιγνίων:

Κόμβος: Ένα σημείο στο οποίο ένας παίκτης επιλέγει μία ενέργεια
Ρίζα: το σημείο στο οποίο η πρώτη ενέργεια του παιγνίου συμβαίνει
Τερματικός κόμβος: κάθε κόμβος ο οποίος, αν φτάσουμε, τερματίζει το παίγνιο. Κάθε τερματικός κόμβος αντιστοιχίζεται σε μία έκβαση.
Αμοιβή/Απόδοση: Ένας τακτικός αριθμός χρησιμότητας που προσδίδεται σε έναν παίκτη σε κάποια έκβαση

Οπισθοβατική Επαγωγή

Στα παίγνια πλήρους πληροφόρησης, δεδομένου ότι είναι πεπερασμένα (τελειώνουν δηλαδή μετά από γνωστό αριθμό ενεργειών) οι παίκτες μπορούν να χρησιμοποιήσουν μία απλή, άμεση και ευθεία διαδικασία για να προβλέψουν εκβάσεις. Ένας παίκτης σε ένα τέτοιο παίγνιο διαλέγει την πρώτη του κίνηση / ενέργεια λαμβάνοντας υπόψη και αξιολογώντας κάθε σειρά απαντήσεων και ανταπαντήσεων σε αυτές, που θα προκύψουν από κάθε ενέργεια ανοικτή προς επιλογή σε αυτόν. Μετά διερωτάται ποια από τις διαθέσιμες τελικές εκβάσεις του αποφέρει την μεγαλύτερη χρησιμότητα, και διαλέγει την ενέργεια που ξεκινάει την “αλυσίδα” που οδηγεί σε αυτό το αποτέλεσμα . Αυτή η διαδικασία είναι ευρέως γνωστή και καλείται οπισθοβατική επαγωγή, καθώς η λογική λειτουργεί προς τα πίσω, αρχίζοντας από ενδεχόμενα αποτελέσματα για να αναπαραστήσει προβλήματα επιλογής.

Τα δέντρα παιγνίου βοηθάνε στην εφαρμογή και "οπτικοποίηση" της οπισθοβατικής επαγωγής που είναι το κυριότερο και πιο ευρέως χρησιμοποιούμενο εργαλείο για εύρεση ισορροπίας στα επαναλαμβανόμενα / δυναμικά παίγνια.

Επιστρέφουμε τώρα για να γίνουν αυτά σιγά σιγά κατανοητά στο γνωστό παίγνιο "Το δίλλημα των Φυλακισμένων", αλλά τώρα ας υποθέσουμε ότι οι φυλακισμένοι δεν κινούνται ταυτόχρονα. Έστω ότι πρώτα ενεργεί ο παίκτης 1 και ο παίκτης 2 μπορεί να επιλέξει την κίνησή του αφού παρατηρήσει την επιλογή του παίκτη 1. Παρ' όλα αυτά, όπως θα δείξουμε αναπαριστώντας το παίγνιο πλέον στην εκτεταμένη μορφή του με δέντρο παιγνίου, αυτό δεν αλλάζει τίποτα!

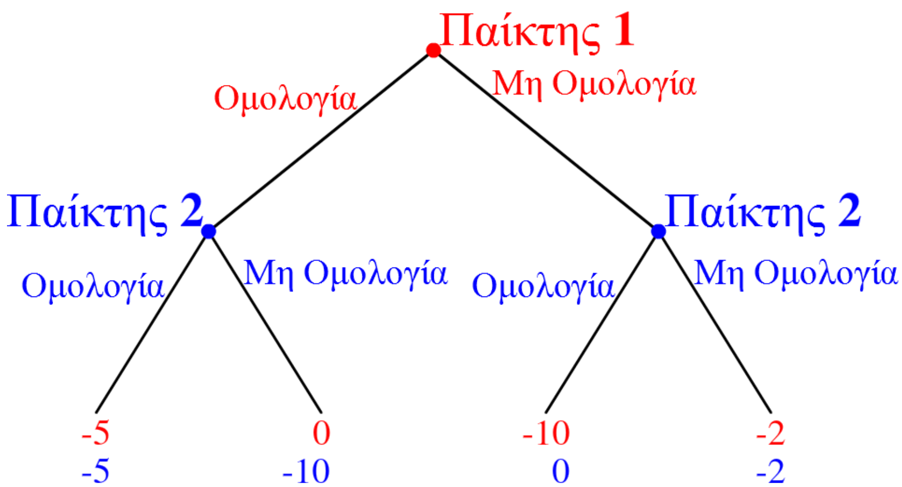

Figure 4: Εκτεταμένη μορφή-Δίλλημα φυλακισμένων χωρίς ταυτόχρονη κίνηση

Ας δούμε την οπισθοβατική επαγωγή. Ο παίκτης 1 εξετάζει ξεκινώντας από το τέλος του παιγνίου τις αντιδράσεις του παίκτη 2 στις δικές του κινήσεις. Οπότε διακρίνει πως αν ο παίκτης 2 βρεθεί στον κόμβο δεξιά όπως κοιτάμε το δέντρο, δηλαδή ο παίκτης 1 να παίξει Μη Ομολογία, έχει να επιλέξει μεταξύ απόδοσης 0 και -2. (Το δεύτερο νούμερο, όπως και στην αναπαράσταση με πίνακα αντιπροσωπεύει τις αμοιβές του παίκτη 2). Οπότε ο παίκτης 2 κερδίζει την μέγιστη απόδοση 0>-2 παίζοντας Ομολογία.

Αντίστοιχα, βλέπει πως αν ο παίκτης 2 κληθεί να παίξει στον άλλο κόμβο, αντιμετωπίζει μια επιλογή ανάμεσα σε -5 και -10, οπότε και θα παίξει Ομολογία για να λάβει την μεγαλύτερη εκ των δύο χρησιμότητα, -5>-10.

Τώρα, έχοντας γνώση αυτών, ο παίκτης 1 έρχεται πιο πίσω (στον δικό του κόμβο) και βλέπει ουσιαστικά στους κόμβους του παίκτη 2 τις αποδόσεις (-5,-5) και (-10,0). Οπότε, θέλοντας να μεγιστοποιήσει την δική του απόδοση, δηλαδή τα πρώτα νούμερα σε κάθε δυάδα, επιλέγει Ομολογία, ώστε να πάρει -5>-10.

Τελικά, ο παίκτης 1 ομολογεί και μετά (πλέον γνωρίζοντάς το) ομολογεί επίσης ο παίκτης 2, δίνοντάς μας το ίδιο ακριβώς αποτέλεσμα με το αντίστοιχο παίγνιο στρατηγικής μορφής.

Πολύ απλά, ο παίκτης 1 συνειδητοποιεί (ακόμα κι αν θεωρήσουμε ότι έχουν συμφωνήσει από πριν να μην ομολογήσει κανείς) πως αν δεν ομολογήσει στον αρχικό κόμβο, ο παίκτης 2 που παίζει ύστερα από αυτόν βλέποντας τί έχει επιλέξει, μπορεί κάλλιστα να οδηγηθεί στην ελευθερία ομολογώντας και ο παίκτης 1 να πάει το μέγιστο των 10 χρόνων φυλακή. Εδώ ουσιαστικά έχει πλεονέκτημα ο παίκτης 2 αφού πρώτα βλέπει τί έπαιξε ο παίκτης 1 (τέλεια πληροφόρηση) και μετά διαλέγει τη δική του κίνηση.

Στο δίλλημα των φυλακισμένων, το στατικό και το δυναμικό παίγνιο δίνουν ίδιο αποτέλεσμα, αλλά αυτό δεν σημαίνει ότι ισχύει γενικά για όλα τα παίγνια. Το να μην γίνεται ταυτόχρονα η επιλογή στρατηγικών μπορεί να οδηγήσει σε τελείως διαφορετική έκβαση του ίδιου παιγνίου.

Σύνολο πληροφοριών

Εξετάσαμε το δίλλημα των φυλακισμένων ως δυναμικό παίγνιο τέλειας πληροφόρησης, θεωρώντας ότι ο παίκτης 2 κινείται αφού λάβει γνώση για την κίνηση του παίκτη 1. Δεν σημαίνει όμως ότι ήταν αναγκαία η αναγωγή σε δυναμικό παίγνιο για να δούμε την εκτεταμένη του μορφή. Οποιοδήποτε παίγνιο μπορεί να περιγραφεί με οποιαδήποτε μορφή (απλά συγκεκριμένες μορφές εξυπηρετούν συγκεκριμένα παίγνια) και η εκτεταμένη μορφή του στατικού διλλήματος των φυλακισμένων, όπως το πρωτοείδαμε με τους παίκτες να κινούνται ταυτόχρονα, είναι η παρακάτω:

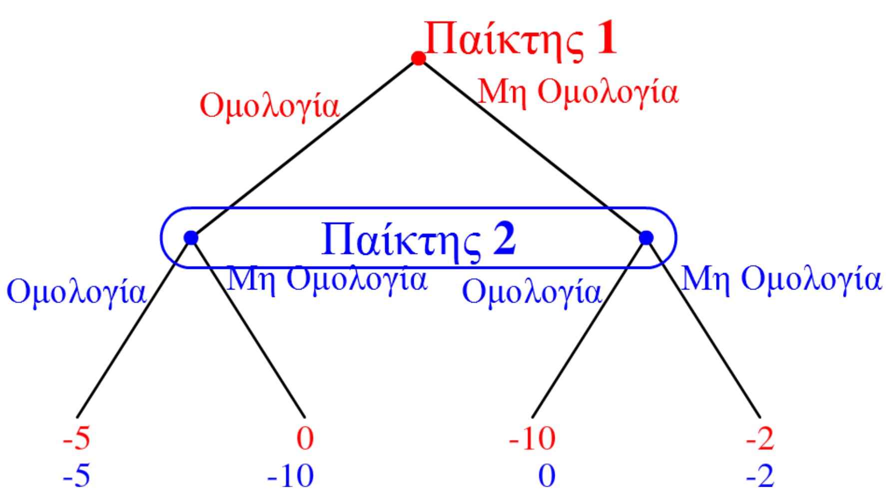

Figure 5: Εκτεταμένη μορφή-Στατικό δίλλημα φυλακισμένων

Το οβάλ σχέδιο (χρησιμοποιείται και διακεκομμένη γραμμή συχνά) που περιβάλλει τους δύο κόμβους απόφασης αναπαριστά ουσιαστικά ταυτόχρονες κινήσεις σε ένα παίγνιο που κατά τα άλλα είναι δυναμικό. Αυτό σημαίνει ότι σε αυτούς τους κόμβους, ο παίκτης δεν μπορεί να αποσαφηνίσει το μονοπάτι από το οποίο έφτασε εκεί, οπότε δεν ξέρει τελικά σε ποιον από τους δύο κόμβους θα κληθεί να αποφασίσει. Άρα, στην εκτεταμένη μορφή παιγνίου, η στατικότητα αναπαρίσταται υπό την μορφή ατελούς πληροφόρησης. Όταν ο παίκτης 2 επιλέγει, δεν ξέρει τί έχει επιλέξει ο παίκτης 1 στον πρώτο κόμβο.

Το οβάλ σχέδιο λοιπόν δείχνει ότι οι κόμβοι τους οποίους εμπεριέχει ανήκουν σε ένα κοινό σύνολο πληροφοριών. Αυτή είναι η και η ορολογία που χρησιμοποιείται. Ο αριθμός των κόμβων απόφασης (μη λαμβάνοντας υπόψη τη ρίζα του δέντρου) ενός παίκτη που συνδέονται με οβάλ σχέδιο ή με διακεκομμένη γραμμή είναι το σύνολο πληροφοριών του παίκτη.

Το σκεπτικό έχει ως εξής: Σε κάποιο στάδιο ο παίκτης πρέπει να αποφασίσει την επόμενή του κίνηση. Λόγω έλλειψης πληροφοριών όμως για την ιστορία του παιγνίου, ενώ γνωρίζει ότι το σημείο από το οποίο θα αποφασίσει είναι ένας κόμβος ενός συνόλου πληροφοριών, δεν γνωρίζει ποιος. Ο αριθμός επιλογών σε κάθε του κόμβο είναι όμως ταυτόσημος, δηλαδή σε κάθε κόμβο του αντιλαμβάνεται t ταυτόσημες επιλογές 1,2,...,t. Τελικά ο παίκτης παίρνει μια απόφαση από τις επιλογές αυτές, βασισμένος μόνο στις t επιλογές και όχι στην πραγματική θέση του κόμβου, στον οποίο ελήφθη η απόφαση.

Δύο κόμβοι K_1 και K_2 ενός δέντρου που ανήκουν σε ένα παίκτη ονομάζονται ισοδύναμοι για τον παίκτη αν

- Υπάρχει ο ίδιος αριθμός πλευρών, έστω t, που αρχίζουν από τους K_1 και K_2 και
- οι πλευρές που αρχίζουν από τους K_1 και K_2 μπορούν να "αναδιαταχθούν" έτσι ώστε οι να θεωρούνται ίδιες από τον παίκτη.

Ορίζουμε τώρα πιο αυστηρά το σύνολο πληροφοριών:

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.12
Σε ένα δέντρο παιγνίου το σύνολο κόμβων $\{K_1, \ldots, K_n\}$ καλείται σύνολο πληροφοριών ενός παίκτη αν

(i) Όλοι οι κόμβοι του $\{K_1, \ldots, K_n\}$ είναι μη τερματικοί και ανήκουν στον παίκτη

(ii) Κανένας κόμβος του $\{K_1, \ldots, K_n\}$ δεν συσχετίζεται με οποιοδήποτε άλλο κόμβο του $\{K_1, \ldots, K_n\}$, δηλαδή κανένας δεν είναι πρόγονος ή διάδοχος του άλλου

(iii) Όλοι οι κόμβοι του $\{K_1, \ldots, K_n\}$ είναι ισοδύναμοι για τον παίκτη, δηλαδή, υπάρχει μια αναδιάταξη των t πλευρών που ξεκινούν από κάθε κόμβο K_i τέτοια ώστε να θεωρούνται ίδιες

Ένα δυναμικό παίγνιο ή παίγνιο διαδοχικών κινήσεων είναι ένα δέντρο παιγνίου n παικτών τέτοιο ώστε οι κορυφές αποφάσεων να έχουν διαμεριστεί σε σύνολα πληροφοριών που ανήκουν στους παίκτες.

Στα δυναμικά παίγνια τέλειας πληροφόρησης, όλα τα σύνολα πληροφοριών απαρτίζονται από έναν μόνο κόμβο, που σημαίνει ότι στο δέντρο παιγνίου δεν εμφανίζονται πουθενά οβάλ διασυνδέσεις-διακεκομμένες γραμμές. Οπότε και ο παίκτης γνωρίζει ακριβώς ποιες ενέργειες έχουν παιχτεί στο παίγνιο ώς την στιγμή που καλείται να κάνει μία επιλογή. Ορίζουμε:

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.13
Ένα δυναμικό παίγνιο (διαδοχικών κινήσεων) είναι παίγνιο με πλήρη πληροφόρηση αν κάθε σύνολο πληροφοριών είναι μονομελές

Στα παίγνια διαδοχικών κινήσεων, η έννοια της στρατηγικής διαφέρει από αυτή των παιγνίων στρατηγικής μορφής και είναι πιο πολύπλοκη.

Μία επιλογή ενός παίκτη που κατέχει έναν κόμβο Κ είναι μια πλευρά που ξεκινάει από τον κόμβο Κ. Μια συνάρτηση επιλογών τώρα ενός παίκτη που κατέχει ένα σύνολο κόμβων K δείχνεται με την συνάρτηση $x : K \to V$, όπου V το σύνολο των κόμβων του δέντρου, έτσι ώστε η $x\left(\mathrm{K}\right)$ να είναι παιδί της Κ για κάθε κόμβο Κ του K. Μπορούμε λοιπόν να ταυτίσουμε την $x\left(\mathrm{K}\right)$ με μια πλευρά του δέντρου που ξεκινάει από τον κόμβο Κ, αφού ένα παιδί του κόμβου Κ προσδιορίζεται πλήρως από την πλευρά που τα ενώνει. Επίσης μπορούμε να συμβολίζουμε τη συνάρτηση επιλογών x με ένα σύνολο πλευρών, όπου το σύνολο αυτό περιέχει ακριβώς μία πλευρά με αρχή κάθε κόμβο του K.

Μια συνάρτηση επιλογών x ενός παίκτη θα καλείται σύμφωνη με ένα σύνολο πληροφοριών του αν $x\left(\mathrm{K}_1\right) \approx x\left(\mathrm{K}_2\right)$ για κάθε ζεύγος κόμβων $\mathrm{K}_1, \mathrm{K}_2$που ανήκει στο σύνολο πληροφοριών. Άρα, οι επιλογές στους κόμβους που ανήκουν στο ίδιο σύνολο πληροφοριών είναι ταυτόσημες.

Με βάση αυτά, η στρατηγική ορίζεται ως εξής:

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.13
Έστω K το σύνολο κόμβων που ανήκουν σε ένα παίκτη σε ένα δέντρο παιγνίου και το K έχει διαμεριστεί σε σύνολα πληροφοριών για τον παίκτη. Τότε η συνάρτηση επιλογών $s : K \to V$ είναι μια στρατηγική για τον παίκτη αν είναι σύμφωνη με κάθε σύνολο πληροφοριών.

Η στρατηγική ενός παίκτη σε ένα δυναμικό παίγνιο, αναλύει τις ενέργειες που θα λάβει ο παίκτης σε κάθε σύνολο πληροφοριών του και όχι μεμονωμένα. Αποτελεί δηλαδή ένα περιγραφικό σχέδιο, μία πλήρη προετοιμασία σχετικά με το πώς να παίξει το παίγνιο, προδιαγράφοντας τις κινήσεις του σε κάθε σύνολο πληροφοριών. Άρα εξ' αρχής, πριν την αρχή του παιγνίου, η στρατηγική του παίκτη έχει προετοιμάσει τις κινήσεις του για κάθε σύνολο πληροφοριών του (σύνολο επιλογών του ουσιαστικά), σε περίπτωση που το παίγνιο κατά την εξέλιξή του φτάσει σε κάποιο από αυτά.

Παίζοντας το παίγνιο και εποπτεύοντάς το συνολικά λοιπόν, έχουμε έναν ορίζοντα στρατηγικής για το παίγνιο, που δεν είναι άλλο από μία n-άδα $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$, όπου κάθε s_i είναι μια στρατηγική για τον παίκτη i. Δεδομένου λοιπόν του ορίζοντα στρατηγικής σε ένα παίγνιο, οδηγούμαστε αυτομάτως σε ένα τερματικό κόμβο του δέντρου.

Έχοντας τώρα ορίσει τόσο την έννοια της στρατηγικής όσο και τον ορίζοντα στρατηγικής σε ένα παίγνιο διαδοχικών κινήσεων αντιλαμβανόμαστε ότι η έννοια της οπισθοβατικής επαγωγής δεν αποτελεί απαραίτητα την λύση του παιγνίου. Δηλαδή, προσφέρει πάντοτε μια διαδρομή ισορροπίας, αλλά αυτό δεν σημαίνει ότι δίνει όλες τις διαδρομές ισορροπίας. Από την στιγμή που η στρατηγική κάθε παίκτη είναι ένα προσχεδιασμένο πλάνο κινήσεων σε κάθε κόμβο του δέντρου, αυτό σημαίνει ότι καθορίζουν τις βέλτιστες κινήσεις τους ακόμα κι αν για κάποιο λόγο κληθούν να παίξουν σε κάποιο κόμβο που δεν ανήκει στην καθορισμένη δια της οπισθοβατικής επαγωγής διαδρομή ισορροπίας. Αν για κάποιο λόγο ο παίκτης που κινείται πρώτος παρέκκλινε από την στρατηγική ισορροπίας, ο παίκτης που κινείται δεύτερος πρέπει να έχει συμπεριλάβει αυτό το ενδεχόμενο στον καθορισμό της στρατηγικής του ακόμα κι αν δεν φτάσει ποτέ εκεί το παίγνιο.

Ας δούμε για παράδειγμα το ακόλουθο παίγνιο διαδοχικών κινήσεων πλήρους πληροφόρησης

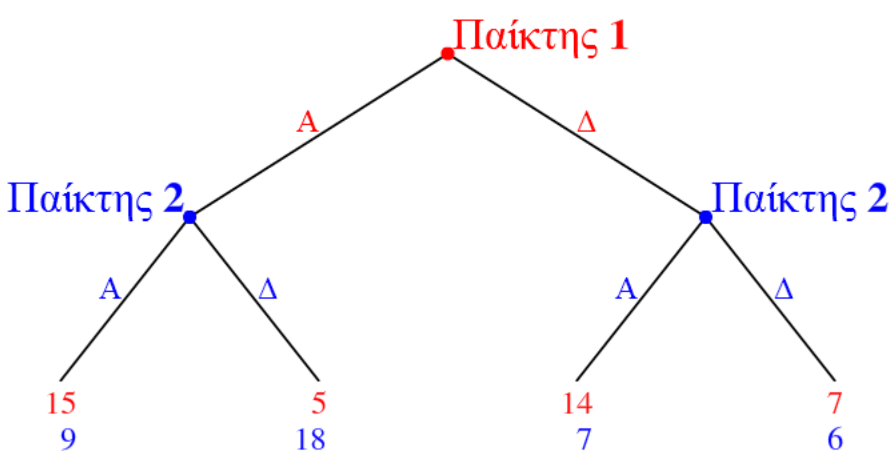

Figure 6: Παράδειγμα παιγνίου διαδοχικών κινήσεων πλήρους πληροφόρησης

Εφαρμόζοντας την οπισθοβατική επαγωγή, στον κόμβο που κινείται ο παίκτης 2 αν ο παίκτης 1 επιλέξει Δ, διακρίνουμε ότι η βέλτιστη επιλογή του παίκτη 2 είναι Α, αφού έτσι λαμβάνει απόδοση 7 αντί για 6. Στον άλλο κόμβο επιλογής του, ο παίκτης 2 μεγιστοποιεί την αμοιβή του επιλέγοντας Δ αφού 18>9. Οπότε πηγαίνοντας πιο πίσω, συμφέρει τον παίκτη 1 να παίξει Δ και να λάβει 14 αφού μετά ο παίκτης 2 παίζει Α (αντί 5 αν έπαιζε Α και ακολουθούσε ο παίκτης 2 παίζοντας Δ).

Οπότε το αποτέλεσμα της οπισθοβατικής επαγωγής, η διαδρομή επίλυσης που παίρνουμε, είναι Δ→Α που καταλήγει στον τερματικό κόμβο με απόδοση $(14, 7)$για τους παίκτες.

Ας δούμε όμως τώρα το αποτέλεσμα υπό το πρίσμα των στρατηγικών κάθε παίκτη. Για τον παίκτη 1, δεδομένου ότι κατέχει ένα κόμβο απόφασης (τον αρχικό), έχει να επιλέξει ανάμεσα σε δύο επιλογές, Α και Δ, οι οποίες ταυτίζονται με τις στρατηγικές του. Έχει δηλαδή δύο στρατηγικές ως πλάνο παιξίματος για όλο το παίγνιο, την επιλογή είτε Α είτε Δ και το οπισθοβατικό αποτέλεσμα του υποδεικνύει την αποδοτικότερη εξ' αυτών, την Δ.

Ο παίκτης 2 αντιθέτως, αντιμετωπίζει δίλλημα απόφασης σε δύο κόμβους και σύμφωνα με όσα αναλύσαμε περί στρατηγικής, η στρατηγική του είναι μια συνάρτηση από τους δύο κόμβους έστω $\{K_A, K_\Delta\}$ στο {Α,Δ,Α,Δ} με τον περιορισμό ότι από τον κόμβο K_A έχει την δυνατότητα να διαλέξει μόνο Α ή Δ και αντίστοιχα μόνο Α ή Δ από τον κόμβο K_Δ . Οι στρατηγικές του παίκτη 2 είναι δηλαδή τέσσερις: $\{\mathrm{A}, \mathrm{A}\}$, $\{\mathrm{A}, \Delta\}$, $\{\Delta, \mathrm{A}\}$, $\{\Delta, \Delta\}$.

Το αποτέλεσμα της οπισθοβατικής επαγωγής δεν προτάσσει καμία εκ ων τεσσάρων στρατηγικών. Η λύση πρέπει να εμπεριέχει και την στρατηγική του παίκτη 2, δηλαδή το αποδοτικότερο από τα παραπάνω ζεύγη κινήσεων. Πρέπει λοιπόν να καθορίσει την βέλτιστη κίνησή του αν ο παίκτης 1 έπαιζε Α. Αυτή είναι η Δ όπως πάλι υπαγορεύει η οπισθοβατική επαγωγή, καθώς 18>9 και τελικά η βέλτιστη στρατηγική του παίκτη 2 είναι (Δ,Α). Τελικά η στρατηγική [Δ,(Δ,Α)] είναι μια ισορροπία Nash του παιγνίου, αφού αποτελεί ένα ορίζοντα στρατηγικής τέτοιο ώστε κανένας παίκτης να μη μπορεί να βελτιώσει την απόδοσή του αλλάζοντας στρατηγική, αν οι υπόλοιποι δεν αλλάξουν την δική τους (όπως στα παίγνια στρατηγικής μορφής).

Εισάγουμε τώρα την έννοια του υποπαιγνίου για να προχωρήσουμε στην ανάλυσή μας. Σημειώνουμε ότι κλάδος T_K ενός δέντρου είναι το διατεταγμένο γράφημα με κόμβους που ξεκινάνε στον κόμβο Κ και εμπεριέχουν όλους τους απογόνους τους μαζί τις αρχικές πλευρές. (Οπότε και το T_K είναι δέντρο που έχει ως ρίζα το Κ). Ένα υποπαίγνιο είναι κάθε συνδεδεμένο σύνολο κόμβων και κλάδων που "αναπτύσσεται" αποκλειστικά και μόνο από ένα γνωστό κόμβο. Το ορίζουμε αυστηρά ως εξής:

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.13
Ενα υποπαίγνιο ενός παιγνίου διαδοχικών κινήσεων είναι ένα άλλο παίγνιο διαδοχικών κινήσεων τέτοιο ώστε:

(i) Το δέντρο του αποτελεί κλάδο του αρχικού δέντρου παιγνίου

(ii) Τα σύνολα πληροφοριών του κλάδου ταυτίζονται με αυτά του αρχικού παιγνίου και δεν εμπεριέχουν κόμβους που βρίσκονται εκτός του κλάδου.

(iii) Οι αποδόσεις των τερματικών κόμβων του κλάδου είναι ίδιες με τις αποδόσεις του αρχικού παιγνίου σε αυτούς τους τερματικούς κόμβους

Η δεύτερη πρόταση υπαγορεύει ότι η ρίζα του υποπαιγνίου πρέπει να είναι κόμβος που ανήκει σε μονομελές σύνολο πληροφοριών, οπότε και δεν μπορεί να καταστεί υποπαίγνιο ένας κλάδος που ξεκινάει από κάποιο κόμβο ο οποίος ανήκει σε κάποιο σύνολο πληροφοριών μαζί με άλλους. Προφανώς στα δυναμικά παίγνια πλήρους και τέλειας πληροφόρησης κάθε κλάδος του δέντρου είναι ένα υποπαίγνιο αφού όλοι οι κόμβοι είναι μονομελή σύνολα πληροφοριών.

Subgame Perfect Nash Equilibrium

Επεκτείνουμε τώρα την έννοια της ισορροπίας Nash χρησιμοποιώντας τα υποπαίγνια με τρόπο που να ορίζει λύση στα παίγνια διαδοχικών κινήσεων πλήρους πληροφόρησης. Η έννοια αυτή αποκαλείται τέλεια ισορροπία Nash υποπαιγνίων (subgame perfect Nash equilibrium-SPNE) και την εισήγαγε ο καθηγητής R. Selten

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.14
Ένας ορίζοντας στρατηγικής σε ένα δυναμικό παίγνιο είναι μια τέλεια ισορροπία Nash υποπαιγνίων (SPNE) αν είναι ισορροπία Nash για κάθε υποπαίγνιο του αρχικού παιγνίου.

Από την στιγμή που κάθε παίγνιο μπορεί να θεωρηθεί υποπαίγνιο, η τέλεια ισορροπία Nash υποπαιγνίων αποτελεί αυτόματα και ισορροπία Nash του αρχικού παιγνίου. Δηλαδή έχουμε ισορροπία Nash στο παίγνιο διαδοχικών κινήσεων όταν οι στρατηγικές που παίζουν οι παίκτες είναι ισορροπία Nash σε κάθε υποπαίγνιο μελετώντας το σαν εξατομικευμένο πρόβλημα απόφασης. Πιο αυστηρά, ένας ορίζοντας στρατηγικής αποτελεί τέλεια ισορροπία Nash υποπαιγνίων αν, εκτός του ότι είναι ισορροπία Nash, είναι επίσης ισορροπία Nash για κάθε υποπαίγνιο.

Εφαρμογή SPNE

Θα επεξηγηθούν όλα με το παράδειγμα που ακολουθεί

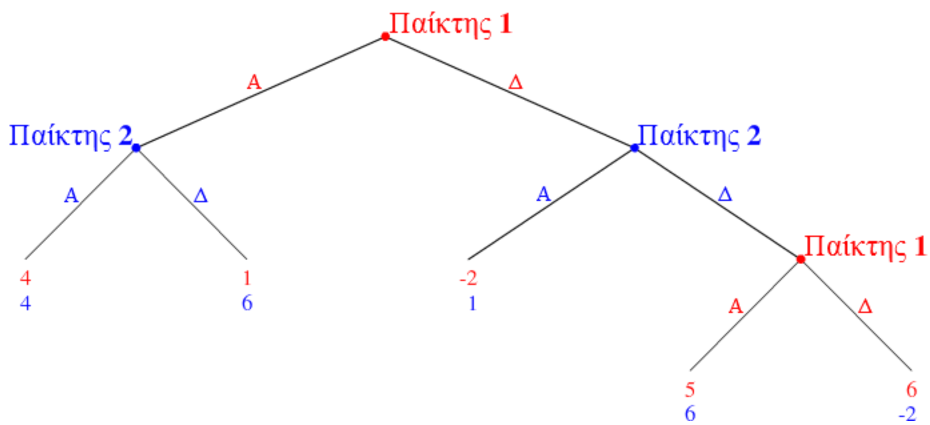

Figure 7: Δυναμικό παίγνιο τέλειας πληροφόρησης-Εύρεση SPNE

Μπορούμε να δούμε και την στρατηγική μορφή του παιγνίου

		Παίκτης 2			
		ΑΑ	ΑΔ	ΔΑ	ΔΔ
Παίκτης 1	ΑΑ	4,4	4,4	1,6	1,6
	ΑΔ	4,4	4,4	1,6	1,6
	ΔΑ	-2,1	5,6	-2,1	5,6
	ΔΔ	-2,1	6,-2	-2,1	6,-2

Table 15: Στρατηγική μορφή παιγνίου

Με την στρατηγική μορφή παιγνίου, οπτικοποιούμε το τί σημαίνει η στρατηγική κάθε παίκτη σε ένα δυναμικό παίγνιο, δηλαδή να του υπαγορεύει τί να κάνει σε κάθε σύνολο πληροφοριών του στο οποίο έχει δυνατή ενέργεια. Και προφανώς εδώ κάθε παίκτης έχει δύο σύνολα πληροφοριών με την δυνατότητα επιλογής δύο ενεργειών σε κάθε ένα από αυτά, άρα συνολικά έχει τέσσερις στρατηγικές έκαστος. Το πρώτο γράμμα αναφέρεται στην επιλογή τους αν βρεθούν στο πρώτο σύνολο πληροφοριών τους, ενώ το δεύτερο αν φτάσουν στο δεύτερο σύνολο πληροφοριών.

Από τον πίνακα, (μέσω επαναλαμβανόμενης απάλειψης κυριαρχούμενων στρατηγικών), βλέπουμε ότι έχουμε δύο ισορροπίες Nash, (αφού οι δύο πρώτες γραμμές είναι ίδιες και αναφέρονται στην επιλογή Α του παίκτη 1 στον αρχικό κόμβο οπότε και δεν φτάνει στο δεύτερο σύνολο πληροφοριών του), τις (ΑΑ,ΔΑ) και (ΑΔ,ΔΑ). Οπότε έχουμε την στρατηγική (ΑΑ,ΔΑ) ως ισορροπία Nash, το οποίο είναι λίγο παράδοξο, αφού αν ο παίκτης 1 έφτανε στο δεύτερο σύνολο πληροφοριών του στο παίγνιο διαδοχικών κινήσεων, δεν θα επιθυμούσε να παίξει Α εκεί, καθώς λαμβάνει μεγαλύτερη απόδοση παίζοντας Δ, 6>5. Η απλή ισορροπία Nash δεν το αναγνωρίζει αυτό, γιατί αδιαφορεί για το τί συμβαίνει "έξω από το μονοπάτι ισορροπίας, το μονοπάτι παιξίματος". Εννοώντας έξω από το μονοπάτι ισορροπίας ότι όπως είπαμε, ο παίκτης 1 επιλέγοντας Α στον αρχικό κόμβο, εξασφαλίζει ότι δεν θα φτάσει στο δεύτερο σύνολο πληροφοριών του και η απλή ισορροπία Nash δεν εμβαθύνει περαιτέρω.

Όταν όμως αναλύουμε δυναμικά παίγνια, πρέπει να μας ενδιαφέρει για το τί συμβαίνει εκτός του μονοπατιού ισορροπίας, αφού αυτό είναι βαρύνουσας σημασίας για το τί τελικά συμβαίνει εντός αυτού. Για παράδειγμα, το γεγονός ότι ο παίκτης 1 θα έπαιζε Δ αν έφτανε στο δεύτερο σύνολο πληροφοριών του, είναι αυτό που ωθεί τον παίκτη 2 να παίξει Α αν φτάσει στον δεξιά κόμβο απόφασής του και γι' αυτό ο παίκτης 1 δεν επιλέγει Δ στον αρχικό κόμβο.

Εφαρμόζουμε τώρα την οπισθοβατική επαγωγή, όπου πλέον μπορούμε να την αναλύσουμε αλλά και απλοποιήσουμε περαιτέρω, αφού απλά ξεκινάμε από τα υποπαίγνια που υπάρχουν στην τελευταία σειρά παιξίματος (κόμβοι που οδηγούν σε τερματικούς και μπορούν να θεωρηθούν υποπαίγνια), και τα επιλύουμε ένα προς ένα προς τα πίσω μέχρι να φτάσουμε στην ρίζα του δέντρου. Ουσιαστικά αυτό που κάνουμε με οπισθοβατική επαγωγή (έχοντας ορίσει τα υποπαίγνια) είναι να τα εξετάζουμε σαν εξατομικευμένα προβλήματα απόφασης και επιλύοντάς τα βέλτιστα (βρίσκοντας τις αποδοτικότερες επιλογές σε κάθε ένα), καταλήγουμε να βρούμε την ισορροπία όλου του αρχικού παιγνίου.

Ξεκινάμε λοιπόν στην εκτεταμένη μορφή του παιγνίου μας διαδοχικών κινήσεων, από το τελευταίο υποπαίγνιο, αυτό που αναπτύσσεται από τον δεξιότερο κόμβο, εκεί που ο παίκτης 1 παίζει στο δεύτερο σύνολο πληροφοριών του. Θα επέλεγε Δ, προτιμώντας την απόδοση 6 αντί 5 που λαμβάνει παίζοντας Α. Οπότε στον κόμβο αυτό αποδίδουμε πλέον την απόδοση $(6, -2)$. Τώρα στο από πάνω υποπαίγνιο, στον δεξιά κόμβο του παίκτη 2, αυτός αντιμετωπίζει μια επιλογή ανάμεσα στο $(-2, 1)$και $(6, -2)$, οπότε και διαλέγει Α για να λάβει 1>-2. Στον υποπαίγνιο που ξεκινάει στον αριστερό κόμβο απόφασής του τώρα, ο παίκτης 2 επιλέγει Δ αφού 6>4. Φτάνουμε τώρα στον αρχικό κόμβο όπου πλέον ο παίκτης 1 στο υποπαίγνιο αντικρίζει $(1, 6)$στην επιλογή Α και $(-2, 1)$στην επιλογή Δ, οπότε παίζει Α.

Να σημειώσουμε εδώ ότι υπάρχει αποτέλεσμα σε τερματικό κόμβο, το $(5, 6)$ με την επιλογή Α του παίκτη 1 (αν βέβαια έφτανε εκεί το παίγνιο) που είναι πιο αποδοτικό από την ισορροπία Nash, όπως ακριβώς είχαμε δει και στο δίλλημα των φυλακισμένων. Η δυναμική όμως του παιγνίου αποτρέπει εντέλει αυτή την έκβαση.

Είναι λοιπόν ο ορίζοντας στρατηγικής (ΑΔ,ΔΑ) ισορροπία Nash σε κάθε υποπαίγνιο του αρχικού παιγνίου; Φυσικά, αφού πλέον οι κινήσεις των παικτών μετά την ανάλυσή μας είναι οι βέλτιστες απαντήσεις στην καλύτερη κίνηση των καλύτερων κινήσεων του αντιπάλου. Άρα το ζεύγος στρατηγικών (ΑΔ,ΔΑ) αποτελεί SPNE και ισορροπία Nash όλου του παιγνίου. Η μοναδική SPNE (ΑΔ,ΔΑ) που λαμβάνουμε από την εφαρμογή της οπισθοβατικής επαγωγής σε κάθε υποπαίγνιο, αποδίδει κάτι περισσότερο και διαφορετικό από μια απλή ισορροπία Nash. Έχουμε ένα αποτέλεσμα που δίνει ισορροπία Nash όχι απλά σε όλο το παίγνιο αλλά και σε κάθε υποπαίγνιο. Αυτό είναι αρκετά πειστικό ως λύση, αφού δεν απαιτεί επιπλέον ορθολογικότητα από τους παίκτες, περιμένοντας από αυτούς να έχουν και να χρησιμοποιούν φιλοσοφικές διαισθήσεις για το "τί βγάζει νόημα". Υποθέτει βέβαια, ότι οι παίκτες γνωρίζουν τα πάντα που σχετίζονται στρατηγικά με την κατάστασή τους και επιπροσθέτως χρησιμοποιούν όλες αυτές τις πληροφορίες.

Ο παίκτης που παίζει μία SPNE τέλεια ισορροπία Nash υποπαιγνίων επιλέγει, σε κάθε κόμβο που φτάνει, το μονοπάτι που του αποφέρει την μέγιστη απόδοση στο υποπαίγνιο που ξεκινάει και κατέρχεται από αυτό τον κόμβο. Η SPNE πάλι προβλέπει το αποτέλεσμα ενός παιγνίου, στην περίπτωση που κατά την επίλυσή του, οι παίκτες προβλέπουν ότι όλοι θα κάνουν ακριβώς αυτό.

Μία βασική αξία που προβάλλει η SPNE στην ανάλυση δυναμικών παιγνίων είναι ότι μπορεί να μας βοηθήσει να εντοπίσουμε διαρθρωτικά εμπόδια στην βελτιστοποίηση της κοινωνικής ευαισθησίας. Ενώ είπαμε υπάρχει πιο αποδοτική κατάληξη $(5,6)$ από την SPNE, η οικονομική ορθολογικότητα του παίκτη 1 και το γεγονός ότι ο παίκτης 2 το γνωρίζει αυτό, εμποδίζει το να πάρουμε την κοινωνικά αποτελεσματική κατάληξη (δηλαδή αυτό που είναι μέγιστο για καθ' ένα ξεχωριστά, που προσφέρει το καλύτερο στην κοινωνία, δηλαδή τους παίκτες). Αν οι παίκτες θέλουν να καταφέρουν αυτή την έκβαση, πρέπει να επανασχεδιάσουν τους θεσμούς τους ώστε να αλλάξει η δομή του παιγνίου. Η επιχείρηση αλλαγής θεσμικών και πληροφοριακών δομών ώστε να κάνουμε την εμφάνιση των αποδοτικών εκβάσεων πιο πιθανή σε παίγνια που οι παίκτες (άνθρωποι, επιχειρήσεις, κυβερνήσεις, κτλ) όντως παίζουν είναι γνωστή ως σχεδιαστικός μηχανισμός και είναι μία από τις ηγετικές περιοχές της εφαρμογής της θεωρίας παιγνίων.

Ακολουθεί ένα πολύ γνωστό παράδειγμα οικονομικών. Θα εξετάσουμε το δυοπώλιο που συναντήσαμε στο μοντέλο Cournot, με την διαφορά ότι εδώ οι εταιρείες δεν κινούνται ταυτόχρονα, αλλά τουλάχιστον μία (ακριβώς μία στο δυοπώλιο) καθορίζει πρώτη την ποσότητα παραγωγής της και ύστερα αποφασίζει η άλλη. Επειδή βάση αυτής της εταιρείας που κινείται πρώτη καθορίζει την κίνησή της η άλλη, η εταιρεία που ανακοινώνει την ποσότητα προϊόντος που θα διαθέσει στην αγορά, καλείται ηγέτης της αγοράς (market leader) και η άλλη ακόλουθος (follower). Αυτή η διαφορά τροποποιεί όλο το παίγνιο και πλέον μιλάμε για δυναμικό παίγνιο πλήρους πληροφόρησης. Το εν λόγω μοντέλο αναλύθηκε για πρώτη φορά από τον Stackelberg.

4.1.4 Το μοντέλο δυοπωλίου Stackelberg

Πρόκειται για ένα οικονομικό μοντέλο όμοιο με αυτό του μοντέλου Cournot που περιγράφει δύο εταιρείες οι οποίες ανταγωνίζονται στην αγορά και παράγουν πανομοιότυπα προϊόντα με την εταιρεία 1 να ορίζει την παραγωγή μιας ποσότητας

$q_1 \geq 0$ και την εταιρεία 2, λαβαίνοντας γνώση της ποσότητας αυτής, να αποφασίζει για την παραγωγή της δικής της ποσότητας q_2. Η εκτεταμένη μορφή του φαίνεται στο παρακάτω δέντρο παιγνίου:

Η συνάρτηση απόδοσης κάθε εταιρείας i είναι η συνάρτηση κέρδους: $\Pi_i = q_i\left(p\left(q_t\right) - c_i\right)$ όπως έχουμε ξαναδεί, με την συνολική παραγωγή των δύο εταιρειών να ανέρχεται σε $q_t = q_1 + q_2$ και $p\left(q_t\right) = p_1 = p_2 = S - q_t$ είναι η τιμή εκκαθάρισης της αγοράς όταν διατίθεται συνολικά στην αγορά ποσότητα q_t (όπου S ένας σταθερός αριθμός) και όπου το οριακό κόστος παραγωγής προϊόντος της εταιρείας i.

Εφαρμόζοντας την οπισθοβατική επαγωγή, καθορίζουμε πρώτα από το τέλος του παιγνίου την βέλτιστη αντίδραση της εταιρείας 2 (ακόλουθου) σε κάθε επιλογή ποσότητας της εταιρείας 1 (ηγέτης). Αναζητούμε λοιπόν την επιλογή q_2^* της εταιρείας 2 που μεγιστοποιεί τα κέρδη της, δεδομένης της επιλογής q_1 της εταιρείας 1 :

Έχουμε

$$\Pi_2 = \left(S - q_1 - q_2\right) q_2 - c_2 q_2 = -q_2^2 + \left(-q_1 + S - c_2\right) q_2\ .$$

Άρα

$$\frac{\partial \Pi_2}{\partial q_2} = -q_1 - 2q_2 + S - c_2 = 0 \Rightarrow q_1 + 2q_2 = S - c_2 \Rightarrow q_2^* = \frac{S-q_1-c_2}{2} \text{ και}$$
$$\frac{\partial^2 \Pi_2}{\partial q_2^2} = -2 < 0$$

$$\text{οπότε } q_2^* = \frac{S-q_1-c_2}{2} = \max \text{ είναι η λύση της εξίσωσης.}$$

Τώρα λοιπόν η εταιρεία 1 αναμένει ότι για επιλογή ποσότητας q_1, δηλαδή ό,τι και να επιλέξει, η εταιρεία 2 θα επιλέξει την βέλτιστη ανταπάντηση που καθόρισε, q_2^*. Άρα στα πλαίσια αυτά και προσπαθώντας να μεγιστοποιήσει τα δικά της κέρδη, θα επιδιώξει παραγωγή ποσότητας q_1 για την μεγιστοποίηση της:

$$\Pi_1\left(q_1, q_2^*\right) = \left(S - q_1 - q_2^*\right) q_1 - c_1 q_1 = q_1\left(S - q_1 - \frac{S-q_1-c_2}{2} - c_1\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left[\left(S + c_2 - 2c_1\right) q_1 - \left(q_1\right)^2\right]$$

Άρα, με περιορισμό $q_1 \geq 0$

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial q_1} = -q_1 + \frac{S+c_2-2c_1}{2} - c_1 = 0 \Rightarrow q_1 = \frac{S+c_2-2c_1}{2} \text{ και } \frac{\partial^2 \Pi_1(q_1,q_2^*)}{\partial q_1^2} = -1 < 0$$

οπότε $q_1^* = \frac{S+c_2-2c_1}{2}$ είναι η βέλτιστη ποσότητα παραγωγής της εταιρείας 1.

Ο παίκτης 1 έχει τώρα την SPNE του και δεδομένης αυτής, αντικαθιστούμε στο q_2^* που καθορίσαμε για τον παίκτη 2 και παίρνουμε $q_2^* = \frac{S-2c_1-3c_2}{4}$. Αυτή είναι η λύση του παιγνίου Stackelberg που προκύπτει από την οπισθοβατική επαγωγή και η SPNE του παιγνίου.

Αναλύοντας το αποτέλεσμα, σε σχέση με αυτό του μοντέλου Cournot, παρατηρούμε ότι το κέρδος της εταιρείας 1 είναι αυξημένο σημαντικά, ενώ το κέρδος της εταιρείας 2 είναι μειωμένο. Η εταιρεία ηγέτης ουσιαστικά καθορίζει μία ποσότητα παραγωγής που θα της δώσει μεγάλο μερίδιο αγοράς και οριακά προσπαθεί να συμπεριφερθεί ως μονοπώλιο. Το γεγονός δηλαδή ότι κινείται πρώτη της έδωσε πλεονέκτημα, ενώ η εταιρεία ακόλουθος προσαρμόζοντας την παραγωγή της σύμφωνα με την παραγωγή που καθορίζει η πρώτη, βρέθηκε εντέλει σε δυσμενέστερη κατάσταση με λιγότερα κέρδη.

Αυτό συναντάται συχνά στα παίγνια διαδοχικών κινήσεων και καλείται πλεονέκτημα πρώτης κίνησης. Η εταιρεία ακόλουθος μπορεί απλά να αντιδρά σε μια δέσμευση της εταιρείας ηγέτη, την ώρα που η τελευταία κινούμενη πρώτη, επιλέγει την πιο κερδοφόρα για την ίδια στρατηγική, με αποτέλεσμα να υπερτερεί.

4.1.5 Η ιδιότητα της μιας απόκλισης

Η τέλεια ισορροπία Nash υποπαιγνίων έχει μια ιδιότητα που κατονομάστηκε το 1994 από τους Osborn και Rubinstein, την ιδιότητα μιας απόκλισης. Υποθέτουμε ότι ένας παίκτης από τον κόμβο απόφασης του οποίου ξεκινάει ένα υποπαίγνιο, αλλάζει την πρώτη του κίνηση, αυτή που έχει καθοριστεί από την SPNE. Αποκλίνει δηλαδή από την SPNE (όπως αυτή έχει προκύψει δια της οπισθοβατικής επαγωγής), στο αρχικό παίξιμο στο υποπαίγνιο. Για να ικανοποιείται η ιδιότητα μιας απόκλισης πρέπει οι εναπομείναντες στρατηγικές της SPNE (αν υπάρχουν) στο υποπαίγνιο, να συνεχίζουν να συνθέτουν SPNE. Είναι προφανές ότι ισχύει εξ' ορισμού της οπισθοβατικής επαγωγής. Οπότε αν κάποιος παίκτης σε κάποιο σημείο του παιγνίου, στην αρχή ενός υποπαιγνίου, παρεκκλίνει από την SPNE, οι στρατηγικές που απομένουν μέχρι το τέλος του υποπαιγνίου συνεχίζουν να αποτελούν τις αποδοτικότερες επιλογές όλων των παικτών που θα παίξουν στο υποπαίγνιο και άρα διατηρείται η SPNE και δεν χρειάζεται κανείς να αναθεωρήσει και να αλλάξει τίποτα. Ας δούμε την χρησιμότητά της με ένα παράδειγμα:

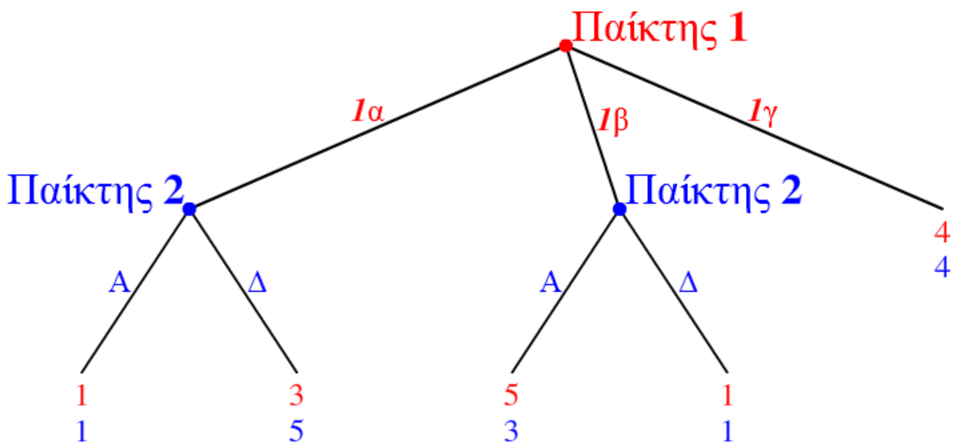

Figure 8: Έλεγχος ιδιότητας της μιας απόκλισης

Η οπισθοβατική επαγωγή δίνει:

- Αν ο παίκτης 1 επέλεγε 1α, ο παίκτης 2 θα διάλεγε Δ, καθ' ότι 5>1 και άρα ο παίκτης 1 θα λάβαινε απόδοση 3.
- Αν ο παίκτης 1 επέλεγε 1β, ο παίκτης 2 θα διάλεγε Α, καθ' ότι 3>1 και άρα ο παίκτης 1 θα λάβαινε απόδοση 5.
- Αν ο παίκτης 1 επέλεγε 1γ, ο παίκτης 2 δεν θα έπαιζε καθόλου και άρα θα λάβαιναν και οι δύο απόδοση 4.

Οπότε ο παίκτης 1 μεγιστοποιεί την απόδοσή του παίζοντας 1β, για να ακολουθήσει παίκτης 2 επιλέγοντας Α και έχουμε έτσι το $(1_\beta, A)$ ως πόρισμα από την εφαρμογή της οπισθοβατικής επαγωγής. Αναζητούμε τώρα την βέλτιστη αντίδραση του παίκτη 2 και εκτός μονοπατιού ισορροπίας, στα υποπαίγνια που ξεκινούν από τους υπόλοιπους κόμβους απόφασής του, για να καθοριστεί η αποδοτικότερη στρατηγική του και τελικά η SPNE του παιγνίου. Αν για κάποιο λόγο ο παίκτης 1 παίξει 1α, ο παίκτης 2 οφείλει να είναι προετοιμασμένος να ανταπαντήσει αποδοτικά και αυτό γίνεται παίζοντας Δ, για να λάβει 5>1. Εδώ όμως ο παίκτης 1 δεν έχει μόνο δύο επιλογές που να αντιστοιχούν στις στρατηγικές του όπως στο σχήμα 6 που αναλύσαμε πριν και άρα βλέπουμε ότι πλέον αυτή η ανταπάντηση του παίκτη 2 σε αυτή την περίπτωση, δεν συνθέτει μια SPNE με την ήδη υπάρχουσα. Πολύ απλά και ο παίκτης 1 έχει δυνατότητα ανταπάντησης αν παρεκκλίνει ο παίκτης 2 από το μονοπάτι ισορροπίας της οπισθοβατικής επαγωγής. Στην ανάλυση εύρεσης στρατηγικής του παίκτη 2 για κίνηση σε υποπαίγνια λόγω απόκλισης από το οπισθοβατικό αποτέλεσμα, αποκλίνει εν δυνάμει και αυτός και την ίδια ανάλυση κάνει τώρα και ο παίκτης 1 για να καθορίσει την δικιά του αποδοτικότερη στρατηγική για όπου κληθεί να παίξει στο παίγνιο!

Αν λοιπόν ο παίκτης 2 παίξει Δ, αποκλίνει από το μονοπάτι οπισθοβατικής επαγωγής και ο παίκτης 1 μπορεί να παίξει 1γ, που είναι η δικιά του βέλτιστη ανταπάντηση, εξασφαλίζοντας 4>3 (και 4 για τον παίκτη 2 αντί για 5). Μόλις εξάγαμε μια δεύτερη SPNE. Το οπισθοβατικό αποτέλεσμα $(1_\beta, A)$συνθέτει αυτούσιο μια SPNE αφού δεν συνδυάζεται με κινήσεις που αποκλίνουν από αυτό και το $(1_\gamma, \Delta)$είναι μια δεύτερη SPNE που πηγάζει πάλι από την οπισθοβατική επαγωγή και περιγράφει την επιλογή 1_γ του παίκτη 1, συν μια κίνηση από τον παίκτη 2, την

Δ. Αυτό δείχνει ότι ακόμα κι αν δεν παίξει ποτέ ο παίκτης 2 αφού ο παίκτης 1 θα παίξει 1_γ και το παίγνιο θα τελειώσει με απόδοση 4 και για τους δύο, η κίνηση αυτή του παίκτη 1 θα προκύψει από την τάση αυτή του παίκτη 2 να αποκλίνει από το οπισθοβατικό αποτέλεσμα και αμφότεροι καθορίζουν τις βέλτιστες κινήσεις τους, εξασφαλίζοντας την ισχύ της ιδιότητας μιας απόκλισης. Τότε η βέλτιστη ανταπάντηση του παίκτη 1 στο ενδεχόμενο ο παίκτης 2 να μην παίξει Α, είναι η επιλογή 1_γ και του παίκτη 2 η Δ, αν και δεν θα μπορέσει ποτέ να την παίξει!

Η SPNE του παιγνίου λοιπόν είναι δύο SPNE, μία από κάθε οπισθοβατικό αποτέλεσμα και έτσι τηρείται η ιδιότητα της μίας απόκλισης.

4.2 Δυναμικά παίγνια ατελούς πληροφόρησης

4.2.1 Ορισμός

Στα παίγνια διαδοχικών κινήσεων με ελλιπή πληροφόρηση δεν είναι όλα τα σύνολα πληροφοριών μονομελή, αλλά υπάρχει τουλάχιστον ένα σύνολο πληροφοριών ενός παίκτη που έχει περισσότερους από έναν κόμβους. Σε αυτό το πολυμελές σύνολο πληροφοριών, ο παίκτης δεν γνωρίζει σε ποιο κόμβο απόφασης μπορεί να καταλήξει να παίξει, αφού δεν έχει πλήρη πληροφόρηση για την ιστορία του παιγνίου.

Διευκρινίζουμε ότι αυτή η αβεβαιότητα επηρεάζει την θεώρηση των στρατηγικών από την μεριά του παίκτη που έχει ατελή πληροφόρηση.

4.2.2 Ανάλυση

Παράδειγμα δυναμικού παιγνίου ατελούς πληροφόρησης

Στο παρακάτω παράδειγμα, μια κατασκευαστική εταιρεία προσλαμβάνει έναν εργολάβο με σκοπό την επιτέλεση συγκεκριμένων εργασιών. Η εταιρεία αποφασίζει αν θα επιθεωρεί ή όχι τον εργολάβο κατά την εργασία του. Υποθέτουμε ότι η επιθεώρηση είναι κοστοβόρα και επιπλέον ο εργολάβος (όπως είναι φυσικό), γνωρίζει αν επιθεωρείται ή όχι.

Ο εργολάβος αποφασίζει αντίστοιχα αν θα "τα δώσει όλα" για να τελειώσει τις εργασίες ή αν θα πορευθεί ¨χαλαρά". Χρησιμοποιούμε δύο άκρα για να δείξουμε την αντίφαση, η οποία θα εκφραστεί αντίστοιχα στις αποδόσεις. Αν τελικά η εταιρεία επιθεωρήσει τον εργολάβο, είναι σε θέση να καθορίσει το επίπεδο προσπάθειάς του, το πόσο σκληρά εργάζεται. Ακολούθως, όταν ολοκληρωθούν οι εργασίες, η κατασκευαστική πληρώνει τον εργολάβο είτε με χαμηλό είτε με υψηλό μισθό. Το παίγνιο φαίνεται στο σχήμα.

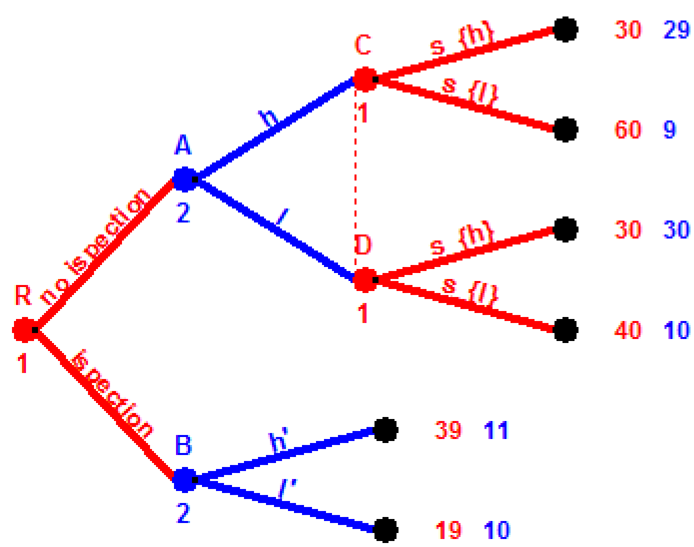

Figure 9: Παίγνιο ατελούς πληροφόρησης για καταβολή μισθού σε εργολάβο

Οι αγνές στρατηγικές του παίκτη 1 λοιπόν, που έχει ατελή πληροφόρηση, είναι (επιθεώρηση), (όχι επιθεώρηση,s_l), (όχι επιθεώρηση,s_h). Δηλαδή στο δεύτερο σύνολο πληροφοριών του που είναι διμελές και συνδέεται με διακεκομμένη γραμμή, οι αγνές στρατηγικές του είναι $(s_l)\,,(s_h)$αφού δεν γνωρίζει σε ποιο κόμβο απόφασης εκ των δύο θα κληθεί να παίξει. Διαφορετικά, αν είχαμε πλήρη πληροφόρηση, οι αγνές στρατηγικές του εκεί θα απαρτίζονταν από τις $(s_l, s_l)\,,(s_l, s_h)\,,(s_h, s_l)\,,(s_h, s_h)$και έτσι οι αγνές στρατηγικές του παίκτη 1 θα ήταν (επιθεώρηση), (όχι επιθεώρηση,s_l,s_l), (όχι επιθεώρηση, s_l,s_h), (όχι επιθεώρηση,s_h,s_l), (όχι επιθεώρηση, s_h,s_h).

Στην αρχή, η κατασκευαστική (παίκτης 1) αποφασίζει αν θα επιθεωρεί ή όχι τον εργολάβο και το επιτελείο του. Ακολούθως, ο εργολάβος (παίκτης 2) επιλέγει αν θα εργαστεί σκληρά (h) ή όχι (l). Στην συνέχεια, η κατασκευαστική επιλέγει τί μισθό θα δώσει, υψηλό (s_h) ή χαμηλό (s_l). Το i αντιπροσωπεύει το κόστος επιθεώρησης για την εταιρεία, υποθέτοντας $20 < i < 30$ και το e το κόστος της προσπάθειας που καταβάλλει ο εργολάβος, υποθέτοντας $0 < e < 10$.

Από τον κόμβο C, έχουμε απόδοση (30,30-e) με s_h και (60,10-e) με s_l , απλά δείχνουμε την καλύτερη δυνατή περίπτωση (για να συγκρίνουμε με τον κόμβο D) θεωρώντας $e = 1 \approx 0$. Αντίστοιχα από τον κόμβο B, έχουμε απόδοση (60-i,20-e) με h' και (40-i,10) με l' και επιπροσθέτως στην χειρότερη δυνατή περίπτωση τώρα $e = 9 \approx 10$ ενώ στην καλύτερη $i = 29 \approx 30$.

Στο υποπαίγνιο που ξεκινάει από τον κόμβο A, η οπισθοβατική επαγωγή δίνει την διαδρομή ισορροπίας (s_l, l) καθώς ο παίκτης 1 σε όποιο κόμβο από τους C,D κι αν κληθεί να παίξει, μεγιστοποιεί την απόδοσή του παίζοντας s_l αφού 60>30 και 40>30. Ο παίκτης 2 δεδομένου αυτού επιλέγει l, αφού 10>10-e πάντα. Στο υποπαίγνιο που ορίζει ο κόμβος B, η ισορροπία είναι h', αφού για τον παίκτη 2 είναι 20-e>10 πάντα. Οπότε πάλι δια οπισθοβατικής επαγωγής ο παίκτης 1 έρχεται στην ρίζα του δέντρου και πλέον συγκρίνει 40 με 60-i και επιλέγει όχι επιθεώρηση καθώς 40>60-i πάντα.

Άρα η SPNE αυτού του παιγνίου είναι $\{(\text{όχι επιθεώρηση}, s_l), (l, h')\}$ που δίνει την διαδρομή ισορροπίας $R \to A \to D \to (40, 10)$. Τί θα γινόταν όμως αν από τον κόμβο D, παίζοντας s_l καταλήγαμε σε δυάδα αποδόσεων (5,10) αντί (40,10); Τώρα δεν είναι ξεκάθαρη στον παίκτη 1 η επιλογή της αγνής στρατηγικής s_h ή s_l αφού σε κάθε κόμβο απόφασης μεγιστοποιεί την απόδοσή του παίζοντας αλλιώτικά, ήτοι s_l στον κόμβο C αφού 60>30 και s_h στον κόμβο D αφού 30>5. Η διακεκομμένη γραμμή που αναπαριστά την ατελή πληροφόρηση, σημαίνει ότι ο παίκτης 1 δεν μπορεί να ξεχωρίσει αν βρίσκεται στον κόμβο C ή στον κόμβο D. Αυτοί συντελούν το σύνολο πληροφοριών του και καλείται να παίξει επιλέγοντας στρατηγική s_h ή s_l.

Στην περίπτωση της ατελούς πληροφόρησης λοιπόν, η SPNE δεν παρέχει επαρκή στοιχεία για την "καθοδήγηση" των παικτών σε βέλτιστες επιλογές και την επίτευξη ισορροπίας. Η επιλογή βέλτιστης στρατηγικής σε κάθε υποπαίγνιο είχαμε πει ότι εξασφαλίζει οι παίκτες να παίζουν ισορροπίες Nash σε όλη την έκταση του παιγνίου, σε όποιο κόμβο κι αν κληθούν να παίξουν και ακόμα και εκτός μονοπατιού ισορροπίας. Αυτό λοιπόν περιγράφει μια ισορροπία Nash που ικανοποιεί μία απαίτηση διαδοχικής ορθολογικότητας.

Στα παίγνια διαδοχικών κινήσεων με ελλιπή πληροφόρηση λοιπόν, αυτή η διαδοχική ορθολογικότητα δεν ικανοποιείται πάντα επαρκώς από την SPNE και πόσο μάλλον σε αυτά που δεν διαθέτουν υποπαίγνια. Έχουμε ελλιπή πληροφόρηση, άρα πολυμελή σύνολα πληροφοριών για τους παίκτες (τουλάχιστον ένα) και κάλλιστα μπορούμε να συναντήσουμε παίγνιο χωρίς καθόλου υποπαίγνια (αφού αυτά όπως έχουμε πει δεν μπορούν να ορίζονται από κόμβο που ανήκει σε πολυμελές σύνολο πληροφοριών και μπορεί να έχουμε μόνο τέτοιους). Εκεί η SPNE δεν προσφέρει καμία πληροφορία σχετικά με την διαδοχική ορθολογικότητα.

Αυτή την ικανοποίηση της διαδοχικής ορθολογικότητας, ανεξαρτήτως ύπαρξης υποπαιγνίων, μας δίνει η έννοια της διαδοχικής ισορροπίας και είναι εφικτό μια ισορροπία Nash να είναι διαδοχικά ορθολογική σε δυναμικά παίγνια ατελούς πληροφόρησης. Θα ορίσουμε την διαδοχική ισορροπία βήμα βήμα, ξεκινώντας με ένα παράδειγμα που είναι μια εκδοχή του "παιγνίου αγοράς λεμονιών", στο οποίο ένας εκ των παικτών έχει ελλιπή πληροφόρηση, ενώ ταυτόχρονα δεν υφίστανται υποπαίγνια. Το "παίγνιο αγοράς λεμονιών" παρουσιάστηκε από τον George Akerlof το 1970 στην εργασία "The Market for lemons: Quality Uncertainty and the Market Mechanism".

4.2.3 Εφαρμογή "Παιγνίου Αγοράς Λεμονιών"-Αγορά αυτοκινήτου

Έχουμε μία αγορά στην οποία συναντάμε δύο ειδών αυτοκίνητα: αυτοκίνητα καλής ποιότητας και αυτοκίνητα κακής ποιότητας, ενώ θεωρούμε ότι βρίσκονται σε ίδια αναλογία. Υπάρχει ο πωλητής αυτοκινήτων, ο οποίος καθορίζει τόσο για ένα καλής ποιότητας αυτοκίνητο την ελάχιστη τιμή που προτίθεται να δεχθεί, t_g , όσο και για ένα κακής ποιότητας αυτοκίνητο, t_b. Ο αγοραστής αντίστοιχα, καθορίζει από μέρους του σύμφωνα με τα οικονομικά του την μέγιστη τιμή που προτίθεται να δώσει για ένα καλής ποιότητας αυτοκίνητο, M_g, αλλά και την μέγιστη τιμή που θα δεχθεί να πληρώσει για ένα κακής ποιότητας αυτοκίνητο, M_b. Υποθέτουμε βέβαια $M_g > t_g$ και $M_b > t_b$ ώστε να έχει νόημα η αγοραπωλησία που εξετάζουμε και να είναι εφικτή η αγορά κάποιου αυτοκινήτου. Ακόμα, όλες οι τιμές M_g, t_g,M_b, t_b αποτελούν κοινή γνώση όλων των παικτών, πράγμα λογικό αφού πάντα ακούμε την έκφραση "δεν μπορώ να πέσω πιο χαμηλά" ή "αυτή είναι η καλύτερη τιμή που μπορώ να κάνω" και αντίστοιχα "δεν μπορώ να δώσω περισσότερα" ή "τόσα το πολύ μου επιτρέπουν τα οικονομικά μου να διαθέσω". Θεωρούμε επίσης ορθολογικά πως $t_g > t_b$ και $M_g > M_b$, διαφορετικά ο διαχωρισμός σε καλής και κακής ποιότητας αυτοκίνητα είναι άτοπος και ανούσιος.

Ο πωλητής (παίκτης 1) φέρνει ένα μεταχειρισμένο αυτοκίνητο προς πώληση στην αγορά, η κατάσταση του οποίου είναι καθορισμένη από πριν. Δηλαδή αν το συντηρούσε σωστά ο προηγούμενος ιδιοκτήτης είναι καλής ποιότητας αυτοκίνητο, διαφορετικά είναι κακής. Άρα η ποιότητα του αυτοκινήτου προσδιορίζεται από την φύση και έτσι ο πωλητής λαμβάνει πληροφόρηση για το αν έχει στα χέρια του καλής ποιότητας αυτοκίνητο G, ή κακής ποιότητας αυτοκίνητο B. Εν συνεχεία, ο πωλητής αποφασίζει τί τιμή θα ζητήσει για το αυτοκίνητο, υψηλή t_g, ή χαμηλή t_b. Ο αγοραστής (παίκτης 2) έχει ελλιπή πληροφόρηση, αφού δεν γνωρίζει τί ποιότητας είναι το αυτοκίνητο και καλείται να αποφασίσει αν θα προβεί σε αγορά ή όχι μαθαίνοντας την τιμή t που ζητάει ο πωλητής. Το παίγνιο φαίνεται παρακάτω

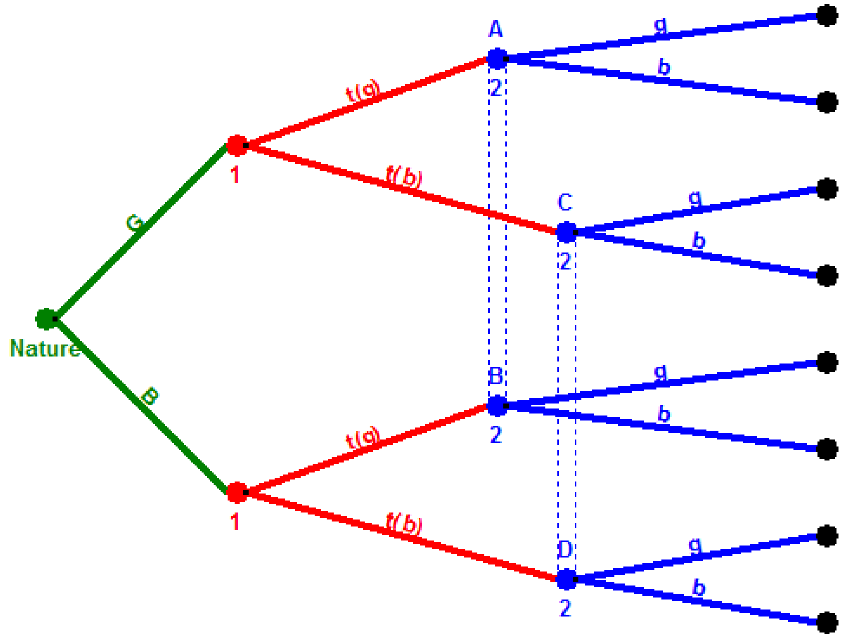

Figure 10: Εκδοχή "παιγνίου αγοράς λεμονιών"-Αγορά αυτοκινήτου

Παρατηρούμε πως όταν ο παίκτης 2 κληθεί να παίξει σε κάποιο από τα σύνολα πληροφοριών του, δεν μπορούμε να αποσαφηνίσουμε τί είναι πιο πιθανό να επιλέξει, τί είναι ορθολογικό να παίξει, καθότι έχει ελλιπή πληροφόρηση σχετικά με την ποιότητα του αυτοκινήτου. Αυτό λοιπόν που θα καθορίσει την επιλογή του, είναι οι πεποιθήσεις του σχετικά με την ποιότητα του αυτοκινήτου. Το τί και σε τί βαθμό πιστεύει ότι ισχύει όταν αποφασίζει σε κάποιο από τα σύνολα πληροφοριών του. Έχει μπροστά του ένα καλής ποιότητας αυτοκίνητο ή το αντίθετο; Πράττει στηριζόμενος στις πεποιθήσεις του, άρα πρέπει να καθορίσουμε ποιες είναι οι πεποιθήσεις αυτές που θα διακατείχαν έναν ορθολογικό παίκτη, αν έπαιζε στα σύνολα πληροφοριών του παίκτη 2.

Όποιες κι αν είναι, οφείλουν να είναι ορθολογικές. Παρατηρώντας το παίγνιό μας, φαίνεται λογικό για τον παίκτη 2 (αγοραστή) η πεποίθηση πως το αυτοκίνητο είναι καλής ποιότητας, όταν αυτός διαπιστώνει ότι η τιμή t που ανακοινώνει ο πωλητής είναι κοντά στην t_g. Αν αντιθέτως διαπιστώνει ότι η τιμή t είναι κοντά στην t_b , τότε φαίνεται λογικό να πιστεύει ότι το αυτοκίνητο είναι κακής ποιότητας.

Έστω τώρα ότι ο πωλητής (παίκτης 1) ενστερνίζεται αυτή την θεώρηση. Τότε αναμένουμε να βάλει υψηλή τιμή σε ένα καλής ποιότητας αυτοκίνητο και χαμηλή σε ένα κακής ποιότητας; Μα φυσικά όχι. Ανεξαρτήτως ποιότητας του αυτοκινήτου και πεποιθήσεων του αγοραστή, συμφέρει τον πωλητή να ζητάει υψηλή τιμή για κάθε αυτοκίνητο. Άρα οι πεποιθήσεις του αγοραστή δεν συμβαδίζουν με τις κινήσεις του πωλητή με δεδομένες τις πεποιθήσεις αυτές του αγοραστή.

Επιπροσθέτως, ο αγοραστής ακούγοντας μια υψηλή τιμή, δεν θα έπρεπε να θεωρήσει ότι αυτή αντιστοιχεί μόνο σε ένα καλής ποιότητας αυτοκίνητο. Ο αγοραστής οπότε πρέπει να πιστεύει ότι η πιθανότητα να είναι το αυτοκίνητο καλής ή κακής ποιότητας όταν ζητείται υψηλή τιμή, είναι ίδια. Δεδομένης αυτής της πεποίθησης, ο ορθολογικός παίκτης θα προβεί σε αγορά αυτοκινήτου αν το αναμενόμενο κέρδος του, η προσδοκώμενη αξία της αγοράς, είναι μεγαλύτερη από αυτή της μη αγοράς. Αν δηλαδή $\frac{1}{2}(M_g - t) + \frac{1}{2}(M_b - t) \geq 0 \Rightarrow t \leq \frac{1}{2}(M_g + M_b)$.

Αυτή είναι, σύμφωνα με τις ορθολογικές του πεποιθήσεις, η μέγιστη των τιμών που αν δει ο αγοραστής θα προβεί σε αγορά αυτοκινήτου. Σε περίπτωση που ο πωλητής ζητήσει υψηλότερη τιμή t, από την στιγμή που ο αγοραστής θεωρεί ότι είναι εξίσου πιθανό το αυτοκίνητο που έχει μπροστά του να είναι κακής ή καλής ποιότητας, δεν θα πραγματοποιήσει την αγορά. Για $t \geq t_g$οπότε, ο αγοραστής δεν ξεχωρίζει κάποια ως πιο πιθανή πορεία στο παίγνιο, αφού πιστεύει ότι κατά 50% παίζει στον κόμβο απόφασής του A και κατά 50% στον κόμβο B.

Ως πόρισμα έχουμε τώρα τις πεποιθήσεις του παίκτη 2 οι οποίες διέπονται από ορθολογικότητα και είναι οι πιθανότητες: $P\{A\} = P\{B\} = \frac{1}{2}$ στους κόμβους που απαρτίζουν το σύνολο πληροφοριών του παίκτη 2 $H_1 = \{A, B\}$.

Για $t_g > t \geq t_b$ τώρα, ο αγοραστής υποπτεύεται (ξέρει ουσιαστικά) ότι πωλούνται μόνο κακής ποιότητας αυτοκίνητα και δεν υπάρχουν τα καλής ποιότητας στην αγορά. Άρα για $t < t_g$ ο αγοραστής ξεχωρίζει μια εξέλιξη στο παίγνιο και πιστεύει με σιγουριά ότι βρίσκεται στον κόμβο D. Εδώ οι ορθολογικές πεποιθήσεις του αγοραστή είναι: $P\{C\} = 0$, $P\{D\} = 1$ στους κόμβους που απαρτίζουν το σύνολο πληροφοριών του παίκτη 2 $H_2 = \{C, D\}$.

Διακρίνουμε δηλαδή δύο περιπτώσεις. Η πρώτη υφίσταται όταν $t_g \leq \frac{1}{2}(M_g + M_b)$, όπου η τιμή $p = \frac{1}{2}(M_g + M_b)$είναι ίση ή μεγαλύτερη από την ελάχιστη τιμή t_g που προτίθεται ο πωλητής να δεχθεί για ένα καλής ποιότητας αυτοκίνητο και διαθέτει τελικά και τους δύο τύπους αυτοκινήτων σε αυτή την τιμή. Η προσδοκώμενη αξία του αγοραστή είναι μηδενική, ενώ πιστεύει πως είναι εξίσου πιθανό να είναι καλής ή κακής ποιότητας το αυτοκίνητο και αγοράζει αυτοκίνητο σε αυτή την τιμή t.

Η δεύτερη υφίσταται όταν $t_g > \frac{1}{2}(M_g + M_b)$, όπου ο πωλητής δεν διαθέτει στην αγορά κανένα καλής ποιότητας αυτοκίνητο. Ο αγοραστής είναι βέβαιος εδώ ότι παίζει στον κόμβο D και είναι διατεθειμένος να δώσει το πολύ M_b ευρώ. Έτσι, η τιμή p τίθεται ανάμεσα σε t_b και M_b και η αγοραπωλησία περιλαμβάνει μόνο κακής ποιότητας αυτοκίνητα.

Αντιλαμβανόμαστε την βαρύνουσα σημασία των πεποιθήσεων που διακατέχουν τους παίκτες και την ανάγκη οι πεποιθήσεις αυτές να έχουν νόημα και να θέτουν ένα πλαίσιο στο οποίο θα κινηθούν οι παίκτες. Εδώ, δεδομένης της τιμής t:

- Οι πεποιθήσεις του παίκτη 2 (αγοραστής) συμβαδίζουν με τα κίνητρα του παίκτη 1 (πωλητή).

- Η στρατηγική του αγοραστή καθίσταται βέλτιστη βάση των πεποιθήσεων που έχει όσο αφορά την βέλτιστη στρατηγική του πωλητή

Μόλις περιγράψαμε μία διαισθητική ισορροπία, που πηγάζει από ένα σύστημα συμβαδιζόντων πεποιθήσεων. Πεποιθήσεων δηλαδή που συμβαδίζουν με τις βέλτιστες στρατηγικές πωλητή και αγοραστή. Που είναι συνεπείς με αυτές. Αυτή η ισορροπία που προέρχεται από αυτές τις πεποιθήσεις, είναι η διαδοχική ισορροπία για το παίγνιο της αγοράς λεμονιών.

4.2.4 Παίγνιο ατελούς πληροφόρησης-σημασία πεποιθήσεων

Ας δούμε ένα άλλο παράδειγμα. Το παίγνιο αυτό ατελούς πληροφόρησης τριών παικτών καλείται "Selten's Horse" λόγω του σχήματος του δέντρου παιγνίου και εισήχθη από τον Nobel Laureate Reinhard Selten και το σχήμα είναι παρμένο από τον Kreps (1990), A Course in Microeconomic Theory :

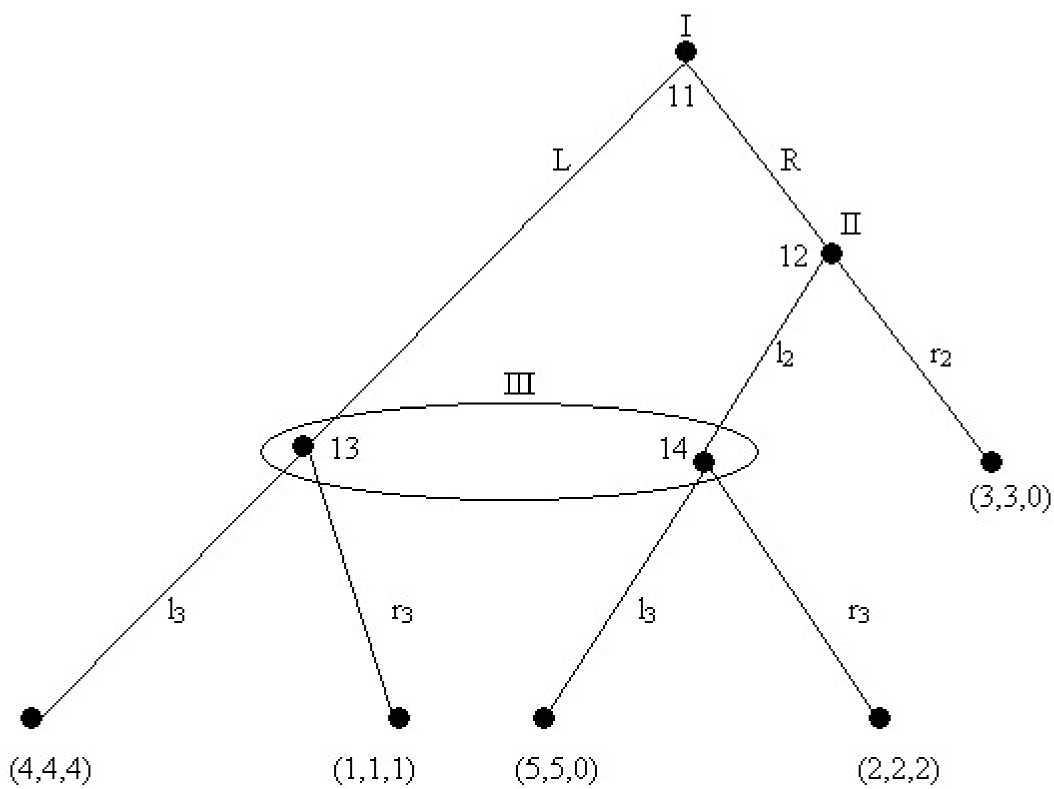

Figure 11: “Selten's Horse”

Το παίγνιο αυτό έχει τέσσερις ισορροπίες Nash: (L, l_2, l_3), (L, r_2, l_3), (R, r_2, l_3) και (R, r_2, r_3). Εξετάζοντας την τέταρτη ισορροπία Nash, βλέπουμε ότι προκύπτει επειδή όταν ο παίκτης 1 παίζει R και ο παίκτης 2 παίζει r_2, δεν δίνεται η ευκαιρία στον παίκτη 3 να παίξει καθόλου. Το σύνολο πληροφοριών του βρίσκεται εκτός του μονοπατιού ισορροπίας, οπότε και δεν έχει καμία επίδραση στην έκβαση του παιγνίου το τί θα επιλέξει. Αν βέβαια ο παίκτης 3 μπορούσε να ξεχωρίσει σε ποιο κόμβο καλείται να παίξει ανάμεσα από τους 13 και 14, αν γνώριζε όταν ερχόταν η σειρά του σε ποιον βρίσκεται, τότε ο παίκτης 1 δεν θα έπαιζε R. Θα είχαμε ένα παίγνιο πλήρους πληροφόρησης, του οποίου η λύση θα ήταν η SPNE (L, r_2, l_3).

Ένα σύστημα πεποιθήσεων που θα οδηγούσε σε αυτή την λύση σε κάθε περίπτωση, ανεξαρτήτως ελλιπούς πληροφόρησης, είναι αυτό που θέλουμε. Όταν ο παίκτης 3 επιλέγει στρατηγική, όπως ο αγοραστής αυτοκινήτου πριν δεν γνώριζε τί ποιότητας αυτοκίνητο αντικρίζει, αναρωτιέται αν στο σύνολο πληροφοριών του έφτασε από τον κόμβο 11 ή 12. Δεδομένου δηλαδή ότι βρίσκεται στο σύνολο πληροφοριών του, πόσο πιθανό είναι να βρίσκεται στον κόμβο 13 και πόσο πιθανό στον κόμβο 14;

Ο παίκτης 3 στηρίζεται στις υποκειμενικές του εκτιμήσεις και αντιλήψεις περί πιθανοτήτων. Αυτές ακριβώς οι "υπό συνθήκη" πιθανότητες απασχολούν τον παίκτη 3 και οι πεποιθήσεις που έχει για αυτές απασχολούν τους παίκτες 1 και 2, οι οποίοι με τη σειρά τους κάνουν εικασίες για τις πεποιθήσεις αυτές όταν επιλέγουν την δική τους στρατηγική.

Έτσι, ο παίκτης 1 εικάζει ποιες είναι πεποιθήσεις του παίκτη 2 για τις πεποιθήσεις του παίκτη 3 και ποιες είναι οι πεποιθήσεις του παίκτη 3 για τις πεποιθήσεις του παίκτη 2 κ.ο.κ. Διευκρινίζουμε ότι οι πεποιθήσεις δεν συνδέονται αποκλειστικά με στρατηγικές, όπως συνέβαινε σε παίγνια πλήρους πληροφόρησης, αφού δεν αφορούν απλά το τί θα πράξουν οι παίκτες δεδομένων των αποδόσεων και δομών του παιγνίου, αλλά το με τί αντίληψη των υπό συνθήκη πιθανοτήτων αναμένουν τους άλλους παίκτες να λειτουργήσουν.

Ο τύπος του Bayes

Ένας συνηθισμένος τρόπος για να καθορίσουμε σε ποιό κόμβο έχει φτάσει το παίγνιο, με γνώμονα τις ορθολογικές πεποιθήσεις για τις "υπό συνθήκη" πιθανότητες που αναμένει ο ένας από τον άλλο να έχει, είναι ο πολύ γνωστός τύπος του Bayes.

Ευρέως χρησιμοποιούμενος και χρήσιμος στην θεωρία πιθανοτήτων, ο τύπος του Bayes υποδεικνύει ποια είναι η πιθανότητα να συμβεί ένα ενδεχόμενο A, δεδομένου ότι έχει πραγματοποιηθεί ένα άλλο ενδεχόμενο B;

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.15
Τύπος του Bayes
Αν A και B δύο ενδεχόμενα σε ένα χώρο πιθανοτήτων , τότε

$$P\left(A/B\right) = \frac{P(B/A)P(A)}{P(B/A)P(A)+P\left(B/\bar{A}\right)P\left(\bar{A}\right)}$$

Το ενδεχόμενο $\bar{A}$ είναι το συμπληρωματικό του A, με $P\left(\bar{A}\right) = 1 - P\left(A\right)$. Κάθε μη αρνητικός αριθμός $P\left(X/Y\right)$στον τύπο του Bayes καλείται υπό συνθήκη πιθανότητα. Άρα, με την προϋπόθεση $P\left(B\right) > 0$, ο τύπος του Bayes δίνει την υπό συνθήκη πιθανότητα του ενδεχομένου Α με δεδομένο ότι έχει πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο Β.

Επομένως, αν $P(K)$ η πιθανότητα να έχουμε φτάσει στον κόμβο Κ και $P(K/H)$ η δεσμευμένη πιθανότητα να έχουμε φτάσει στον κόμβο Κ, δεδομένου ότι βρισκόμαστε στο σύνολο πληροφοριών Η, τότε η τελευταία είναι:

$$P(K/H) = \frac{P(H/K)P(K)}{P(H/K)P(K)+P\left(H/\bar{K}\right)P\left(\bar{K}\right)} \; .$$

Με αυτή την σχέση θα διαμόρφωνε πεποιθήσεις ο παίκτης 3 σχετικά με το αν το παίγνιο έχει φτάσει στον κόμβο 13 ή 14, δεδομένου ότι βρίσκεται στο σύνολο πληροφοριών του. Αυτό τον αυστηρό τρόπο περιγραφής ενός συστήματος πεποιθήσεων θα καθορίσουμε τώρα.

Ένα σύστημα πεποιθήσεων μ για κάθε παίκτη, είναι μια συνάρτηση που προσδίδει στους κόμβους κάθε συνόλου πληροφοριών του Η μια κατανομή πιθανότητας. Οπότε το $\mu_H(K_i)$αντιπροσωπεύει την πεποίθηση του παίκτη ότι το παίγνιο έχει φτάσει στον κόμβο K_i.
Μια συμπεριφορική στρατηγική s ενός παίκτη είναι μια συνάρτηση η οποία προσδίδει στις πλευρές κάθε κόμβου που ανήκει στον παίκτη μια κατανομή πιθανότητας και είναι σύμφωνη με το σύνολο πληροφοριών του. Οπότε το $s_E(i)$ είναι η πιθανότητα ένας παίκτης να επιλέξει την πλευρά i όταν φτάσει στο σύνολο πληροφοριών Η. Όπου $E \to [0,1]$.
Ένας ορίζοντας στρατηγικής συμπεριφοράς είναι μια n-άδα $s = (s_1, \ldots, s_n)$, όπου το s_i είναι η στρατηγική συμπεριφοράς του παίκτη i.
Ένας ορίζοντας στρατηγικής συμπεριφοράς s ονομάζεται πλήρως αναμεμιγμένος αν κάθε επιλογή σε κάθε κόμβο έχει θετική πιθανότητα.

Σύστημα πεποιθήσεων

Η γνώση του αναμεμιγμένου ορίζοντα στρατηγικής οδηγεί στην δόμηση ενός συστήματος πεποιθήσεων. Θεωρούμε το ακόλουθο παίγνιο

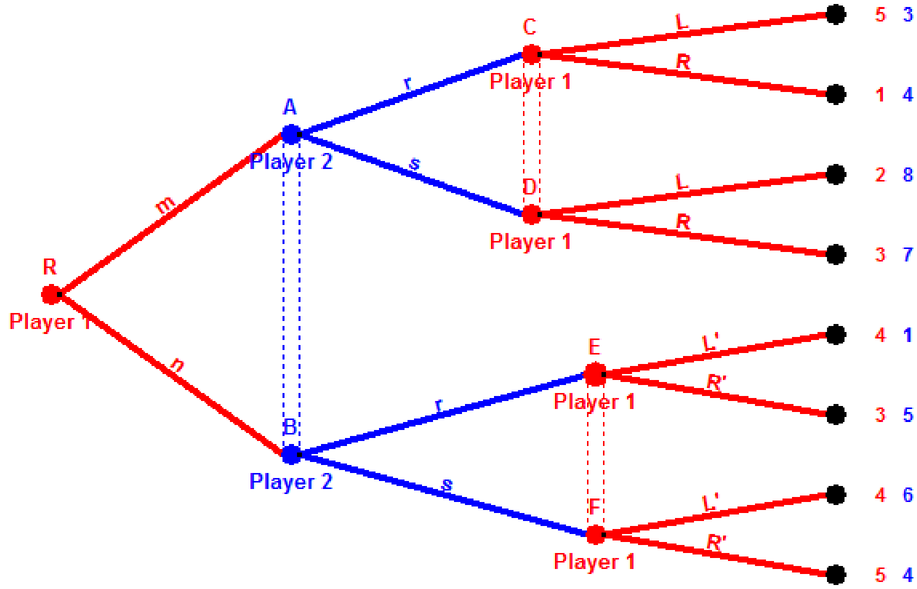

Figure 12: Παίγνιο ατελούς πληροφόρησης-Σημασία και καθορισμός πεποιθήσεων

Ένας πλήρως αναμεμιγμένος ορίζοντας στρατηγικής s εδώ καθορίζεται ως ακολούθως:

Ο παίκτης 1 παίζει m με πιθανότητα 0,2 και n με πιθανότητα 0,8. Ο παίκτης 2 στο σύνολο πληροφοριών του επιλέγει: r με πιθανότητα 0,2 και s με πιθανότητα 0,8. Ο παίκτης 1, όταν φτάσει τώρα στα δικά του σύνολα πληροφοριών, παίζει τόσο L όσο και L' με πιθανότητα 0,2 ενώ R και R' με πιθανότητα 0,8.

Οι πεποιθήσεις του παίκτη 2 είναι προφανείς, πιστεύοντας ότι βρίσκεται στον κόμβο A με πιθανότητα 0,2 (και στον B με πιθανότητα 0,8). Αφού παίξει ο παίκτης 2, ο παίκτης 1 τί πεποιθήσεις πρέπει να έχει σχετικά με το πού έχει φτάσει το παίγνιο; Ποια είναι η πιθανότητα να βρίσκεται στο σύνολο πληροφοριών του $H_2 = \{C, D\}$και ποια να βρίσκεται στο $H_3 = \{E, F\}$; Ποιες είναι εντέλει οι πεποιθήσεις του σε αυτά τα σύνολα πληροφοριών του;

Ο τύπος του Bayes θα δώσει εδώ τις απαντήσεις και ο παίκτης 1 αναλογιζόμενος σε ποιο σύνολο πληροφοριών του φτάνει, συνυπολογίζει φυσικά την αρχική του επιλογή στην ρίζα του δέντρου.

Άρα, αν $P(C)$ είναι η πιθανότητα να έχουμε φτάσει στον κόμβο C αρχίζοντας από την ρίζα του δέντρου και $P(C/H_2)$ είναι η δεσμευμένη πιθανότητα να έχουμε φτάσει στον κόμβο C, δεδομένου ότι βρισκόμαστε στο σύνολο πληροφοριών H_2, τότε η πιθανότητα αυτή είναι:

$$P\left(C/H_2\right) = \frac{P(H_2/C)P(C)}{P(H_2/C)P(C)+P\left(H_2/\bar{C}\right)P\left(\bar{C}\right)} = \frac{P(C)}{P(C)+P(D)} \ ,$$

όπου $\bar{C} = D$, αφού το σύνολο πληροφοριών του παίκτη 1 H_2 έχει δύο κόμβους, οπότε αν δε βρισκόμαστε στον ένα, δεδομένου ότι είμαστε στο σύνολο πληροφοριών αυτό, θα βρισκόμαστε στον άλλο. Οπότε

$$P\left(C/H_2\right) = \frac{1 \cdot 0{,}04}{1 \cdot 0{,}04 + 1 \cdot 0{,}16} = 0,2$$

Ο παίκτης 1 βρίσκει ουσιαστικά ότι η πιθανότητα να βρίσκεται στον κόμβο C στο σύνολο πληροφοριών H_2 είναι 0,2, ενώ στην αρχή του παιγνίου η πιθανότητα που έβλεπε για να φτάσει εκεί ήταν 0,2*0,2=0,04. Αναθεώρησε τις πεποιθήσεις του βασιζόμενος στις πληροφορίες που έλαβε από την στρατηγική s. Αν το κάνει αυτό σύμφωνα με τον τύπο του Bayes για όλους τους κόμβους στα σύνολα πληροφοριών του, τότε οι πεποιθήσεις του προκύπτουν:

$$P\left(C/H_2\right) = 0,2 \ , \ P\left(D/H_2\right) = 0,8$$

$$P\left(E/H_3\right) = 0,2 \ , \ P\left(F/H_3\right) = 0,8$$

Αυτές οι πεποιθήσεις συμβαδίζουν με τον ορίζοντα στρατηγικής συμπεριφοράς s και δεδομένου αυτού του ορίζοντα, είναι οι μοναδικές που δείχνουν ορθολογικές. Οπότε, ένας πλήρως αναμεμιγμένος ορίζοντας στρατηγικής s, παράγει ένα σύστημα πεποιθήσεων. Δηλαδή, αν $H = \{K_1, \ldots K_m\}$ ένα σύνολο πληροφοριών, τότε $\mu\left(K_j\right) = P\left(K_j/H\right) = \frac{s(K_j)}{\sum\limits_{i=1}^{m} s(K_i)}$, για κάθε $j = 1, 2, \ldots, m$ το σύστημα πεποιθήσεων που παράγεται από το s. Εδώ παρήγαγε το

$$\mu\left(C\right) = 0,2 \ , \ \mu\left(D\right) = 0,8$$

$$\mu\left(E\right) = 0,2 \ , \ \mu\left(F\right) = 0,8$$

Όταν λοιπόν οι πεποιθήσεις των παικτών είναι πάντα συνεπείς με τον τύπο του Bayes στον τρόπο εξαγωγής τους, τότε μπορούμε να ορίσουμε την διαδοχική ισορροπία. Συγκεντρωτικά, παραθέτουμε τον ακόλουθο ορισμό:

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.16
Ένας σύστημα πεποιθήσεων μ καλείται συνεπές κατά Bayes σχετικά με έναν πλήρως αναμεμιγμένο ορίζοντα στρατηγικής συμπεριφοράς s αν το μ παράγεται από το s

Διαδοχική ισορροπία

Ορίζουμε τώρα την έννοια της διαδοχικής ισορροπίας

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.17
Μια διαδοχική ισορροπία ενός παιγνίου διαδοχικών κινήσεων n παικτών είναι ένας συνδυασμός (s,μ), όπου s ένας ορίζοντας στρατηγικής συμπεριφοράς και μ ένα σύστημα πεποιθήσεων συνεπές με το s, τέτοια ώστε κανένας παίκτης να μην μπορεί να επωφεληθεί περαιτέρω αποκλίνοντας από το s σε οποιοδήποτε από τα σύνολα πληροφοριών του.

Η διαδοχική ισορροπία είναι ένας ορίζοντας στρατηγικής συμπεριφοράς s και ένα σύστημα πεποιθήσεων μ συνεπές με τον τύπο του Bayes, έτσι ώστε ξεκινώντας από κάθε σύνολο πληροφοριών Η στο δέντρο, ο παίκτης που του ανήκει το εκάστοτε σύνολο πληροφοριών, παίζει βέλτιστα από εκεί και πέρα στο παίγνιο, δεδομένου πως τί πιστεύει ότι έχει συμβεί στο παίγνιο προηγουμένως προκύπτει από το μ και τί πρόκειται να συμβεί στις κινήσεις που έπονται προκύπτει από το s.

Ξεκινώντας δηλαδή από όποιο σύνολο πληροφοριών του παιγνίου θέλουμε, ο ορίζοντας στρατηγικής που παίζουμε εξακολουθεί να είναι ορίζοντας στρατηγικής ισορροπίας δεδομένου του συστήματος πεποιθήσεων με το οποίο είναι συνεπής.

Ας δούμε σιγά σιγά την εφαρμογή της διαδοχικής ισορροπίας, επιστρέφοντας στο παίγνιο “Selten’s Horse” . Ας εξετάσουμε πάλι την ισορροπία Nash (R, r_2, r_3). Υποθέτουμε τώρα ότι ο παίκτης 3 πιστεύει ότι αν κληθεί να παίξει (στο σύνολο πληροφοριών του φυσικά), βρίσκεται σίγουρα στον κόμβο 13. Δηλαδή $P\left(13/\mathrm{III}\right)=1$ που σημαίνει ότι έχει ένα σύστημα πεποιθήσεων που δίνει πιθανότητα 1 να βρίσκεται στον κόμβο 13 δεδομένου του συνόλου πληροφοριών του III. Τότε ο παίκτης 1, ακολουθώντας ένα συνεπές σύστημα πεποιθήσεων μ, πρέπει να πιστεύει ότι ο παίκτης 3 θα παίξει l_3, δηλαδή $s_3\left(l_3\right)=1$. Σε αυτή την περίπτωση η μόνη στρατηγική του διαδοχικής ισορροπίας είναι να παίξει L. Οπότε, ενώ το (R, r_2, r_3) είναι ισορροπία Nash, δεν είναι διαδοχική ισορροπία.

Γίνεται αναθεώρηση των πεποιθήσεων καθώς το παίγνιο προχωράει, δεδομένου ότι είναι συνεπείς με τον ορίζοντα στρατηγικής. Με δεδομένα αυτά, ο παίκτης χρησιμοποιεί στρατηγικές συμπεριφοράς που μεγιστοποιούν τελικά την αναμενόμενη απόδοσή του σε κάθε σύνολο πληροφοριών του. Η αναμενόμενη απόδοση είναι και πάλι ο γνώμονας για την έκβαση του παιγνίου όπως ακριβώς την γνωρίσαμε και ορίσαμε προηγούμενα, τόσο σε αγνές, όσο και σε μικτές στρατηγικές.

Αν $T_1, T_2, \ldots, T_k$ οι τερματικές κορυφές του παιγνίου n παικτών με αντίστοιχες αποδόσεις $u\left(T_1\right), \ldots, u\left(T_k\right)$ και έχουμε καθορίσει έναν ορίζοντα στρατηγικής συμπεριφοράς s και το συνεπές σύστημα πεποιθήσεων μ, τότε η αναμενόμενη απόδοση αρχίζοντας από έναν κόμβο K είναι:

$$U\left(K,s\right)=\sum_{i=1}^{k} s\left(KT_i\right)u\left(T_i\right)$$

Αν επίσης $H = \{K_1, \dots K_m\}$ το σύνολο πληροφοριών για αυτό το παίγνιο, τότε η αναμενόμενη απόδοση του παίκτη j, με δεδομένο ότι βρισκόμαστε στο παίγνιο στο σύνολο πληροφοριών H, είναι:

$$U(H, s, \mu) = \sum_{r=1}^{m} \mu(K_r) \sum_{i=1}^{k} s(K_r T_i) \, u_j(T_i)$$

Ας επιστρέψουμε στο παίγνιο του σχήματος 12 για να υπολογίσουμε τις αναμενόμενες αποδόσεις των παικτών. Έχουμε:

$$U(C, s) = 0.2(5,3) + 0.8\,(1,4) = (1.8, 3.8)$$

$$U(D, s) = 0.2(2,8) + 0.8\,(3,7) = (2.8, 7.2)$$

$$U(E, s) = 0.2(4,1) + 0.8\,(3,5) = (3.2, 4.2)$$

$$U(F, s) = 0.2(4,6) + 0.8\,(5,4) = (4.8, 4.4)$$

$$U(A, s) = 0.2U(C, s) + 0.8U(D, s) = (2.6, 6.52)$$

$$U(B, s) = 0.2U(E, s) + 0.8U(F, s) = (4.48, 4.36)$$

$$U(R, s) = 0.2U(A, s) + 0.8U(B, s) = (4.104, 4.792)$$

Δεδομένου ότι $H_1 = \{A, B\}$, $H_2 = \{C, D\}$, $H_3 = \{E, F\}$και του συστήματος πεποιθήσεων που έχουμε προσδιορίσει ($\mu(A) = \mu(C) = \mu(E) = 0,2$ και $\mu(B) = \mu(D) = \mu(F) = 0,8$) έχουμε:

$$U(H_1, s, \mu) = \mu(A)\, U(A, s) + \mu(B)\, U(B, s) = \\ 0.2\,(2.6, 6.52) + 0.8\,(4.48, 4.36) = (4.104, 4.792)$$

$$U(H_2, s, \mu) = \mu(C)\, U(C, s) + \mu(D)\, U(D, s) = 0.2\,(1.8, 3.8) + 0.8\,(2.8, 7.2) = \\ (2.6, 6.52)$$

$$U(H_3, s, \mu) = \mu(E)\, U(E, s) + \mu(F)\, U(F, s) = 0.2\,(3.2, 4.2) + 0.8\,(4.8, 4.4) = \\ (4.48, 4.36)$$

Έχουμε λοιπόν καθορίσει μια διαδοχική ισορροπία στο παίγνιο του σχήματος 12, με ορίζοντα στρατηγικής συμπεριφοράς $s = (s_1, s_2)$ που δίνεται από

$s_1(m) = 0.2$, $s_1(n) = 0.8$, $s_1(L) = 0.2$, $s_1(R) = 0.8$, $s_1(L') = 0.2$, $s_1(R') = 0.8$

και $s_2(r) = 0.2$, $s_2(s) = 0.8$

και το σύστημα πεποιθήσεων μ που είναι συνεπές με αυτόν και δίνεται από

$\mu(C) = 0.2$, $\mu(D) = 0.8$, $\mu(E) = 0.2$, $\mu(F) = 0.8$, $\mu(A) = 0.2$, $\mu(B) = 0.8$

Ας ελέγξουμε αν όντως σε κάθε σύνολο πληροφοριών η στρατηγική συμπεριφοράς s, δεδομένου του συστήματος πεποιθήσεων π, μεγιστοποιεί την αναμενόμενη απόδοση των παικτών.

Για το σύνολο πληροφοριών $H_2 = \{C, D\}$ είναι $\mu_1(C) = 0.2$, $\mu_1(D) = 0.8$. Μια στρατηγική συμπεριφοράς $P(L) = p$ και $P(R) = 1 - p$, με $0 \leq p \leq 1$ παρέχει στον παίκτη 1 αναμενόμενη απόδοση $U(p, H_2) = 0,2\,[5p + 1 \cdot (1-p)] + 0,8\,[2p + 3(1-p)] = 2,6$, η οποία είναι ανεξάρτητη του p, οπότε ο παίκτης 1 δεν έχει λόγο, δεν θα επωφεληθεί παραπάνω αποκλίνοντας από την στρατηγική συμπεριφοράς $s_1(L) = 0.2$, $s_1(R) = 0.8$ και παίζοντας κάτι άλλο.

Για το σύνολο πληροφοριών $H_3 = \{E, F\}$ είναι $\mu_1(E) = 0.2$, $\mu_1(F) = 0.8$. Μια στρατηγική συμπεριφοράς $P(L') = p$ και $P(R') = 1 - p$, με $0 \leq p \leq 1$ παρέχει στον παίκτη 1 αναμενόμενη απόδοση $U(p, H_3) = 0,2\,[4p + 3 \cdot (1-p)] + 0,8\,[4p + 5 \cdot (1-p)] = 4,6 - 0,6p$. Η σχέση αυτή μεγιστοποιείται για p=0, όπου η απόδοση είναι 4.6, οπότε η στρατηγική συμπεριφοράς που το επιτυγχάνει είναι να παίξει L' με πιθανότητα 0 και R' με πιθανότητα 1.

Για το σύνολο πληροφοριών $H_1 = \{A, B\}$ είναι $\mu_1(A) = 0.2$, $\mu_1(B) = 0.8$. Μια στρατηγική συμπεριφοράς $P(r) = p$ και $P(s) = 1 - p$, με $0 \leq p \leq 1$ παρέχει στον παίκτη 2 αναμενόμενη απόδοση

$$U(H_1, p, \mu) =$$
$$0.2\,\{0,2 \cdot [0,2 \cdot p \cdot 3 + 0,8 \cdot (1-p) \cdot 4] + 0,8 \cdot [0,2 \cdot p \cdot 8 + 0,8 \cdot (1-p) \cdot 7]\} +$$
$$0,8\,\{0,2 \cdot [0,2 \cdot p \cdot 1 + 0,8 \cdot (1-p) \cdot 5] + 0,8 \cdot [0,2 \cdot p \cdot 6 + 0,8 \cdot (1-p) \cdot 4]\}$$

$= 3,712 - 2,344p$. Η σχέση αυτή μεγιστοποιείται για p=0, όπου η απόδοση είναι 3.712, οπότε η στρατηγική συμπεριφοράς που το επιτυγχάνει είναι να παίξει r με πιθανότητα 0 και s με πιθανότητα 1.

Για το σύνολο πληροφοριών που ορίζει η ρίζα του δέντρου, μια στρατηγική συμπεριφοράς $P(m) = p$ και $P(n) = 1 - p$, με $0 \leq p \leq 1$ παρέχει στον παίκτη 1 αναμενόμενη απόδοση $U(p, R) = 3,712 - 2,344p$. Ομοίως με πριν, η στρατηγική μεγιστοποίησης της απόδοσης είναι m με πιθανότητα 0 και n με πιθανότητα 1.

Βρήκαμε όμως ότι η στρατηγική συμπεριφοράς που μεγιστοποιεί την αναμενόμενη απόδοση των παικτών, με αυτό το σύστημα πεποιθήσεων, είναι όπου είχαμε πιθανότητα 0,8 να έχουμε 1 και όπου 0,2 να έχουμε 0 (και στο H_2 αδιάφορο ό,τι και να παίξουμε). Αυτό σημαίνει ότι ο πλήρως αναμεμιγμένος ορίζοντας στρατηγικής θα μεταβληθεί διαδοχικά και οι κινήσεις που επιλέγονται με πιθανότητα 0,8 θα συγκλίνουν τελικά όλο και πιο πολύ στην μονάδα, αφού έτσι μεγιστοποιούνται οι αναμενόμενες αποδόσεις. Δεν σημαίνει ότι αυτό που είχαμε εξάγει με τον τύπο του Bayes ήταν λάθος, απλά εδώ βλέπουμε το βέλτιστο πλέον ώστε κανένας παίκτης να μην μπορεί να βελτιώσει παραπάνω την θέση του.

Οπότε και το συνεπές σύστημα πεποιθήσεων μεταβάλλεται σιγά σιγά σε κάθε βήμα και προκύπτει εύκολα (αν και δεν μπορεί να υπολογιστεί άμεσα με την εφαρμογή του τύπου του Bayes λόγω των μηδενικών πιθανοτήτων):

Για τα σύνολα πληροφοριών του παίκτη 1:

$\mu(C/H_2) = \mu(E/H_3) = 0$ και $\mu(D/H_2) = \mu(F/H_3) = 1$

Για το σύνολο πληροφοριών του παίκτη 2:

$\mu(A/H_1) = 0$ και $\mu(B/H_1) = 1$

Δεδομένου αυτού του συστήματος πεποιθήσεων, οδηγούμαστε στην διαδρομή $R \to B \to F \to (5, 4)$η οποία υποστηρίζεται από τον ορίζοντα στρατηγικής $(\{n, R, R'\}, s)$.

Προχωράμε σε ένα άλλο παράδειγμα παρόμοιο με το "Selten's Horse" αλλά λίγο πιο περίπλοκο, για να δούμε πάλι την έννοια της διαδοχικής ισορροπίας. Το σχήμα είναι πάλι παρμένο από τον Kreps (1990), A Course in Microeconomic Theory :

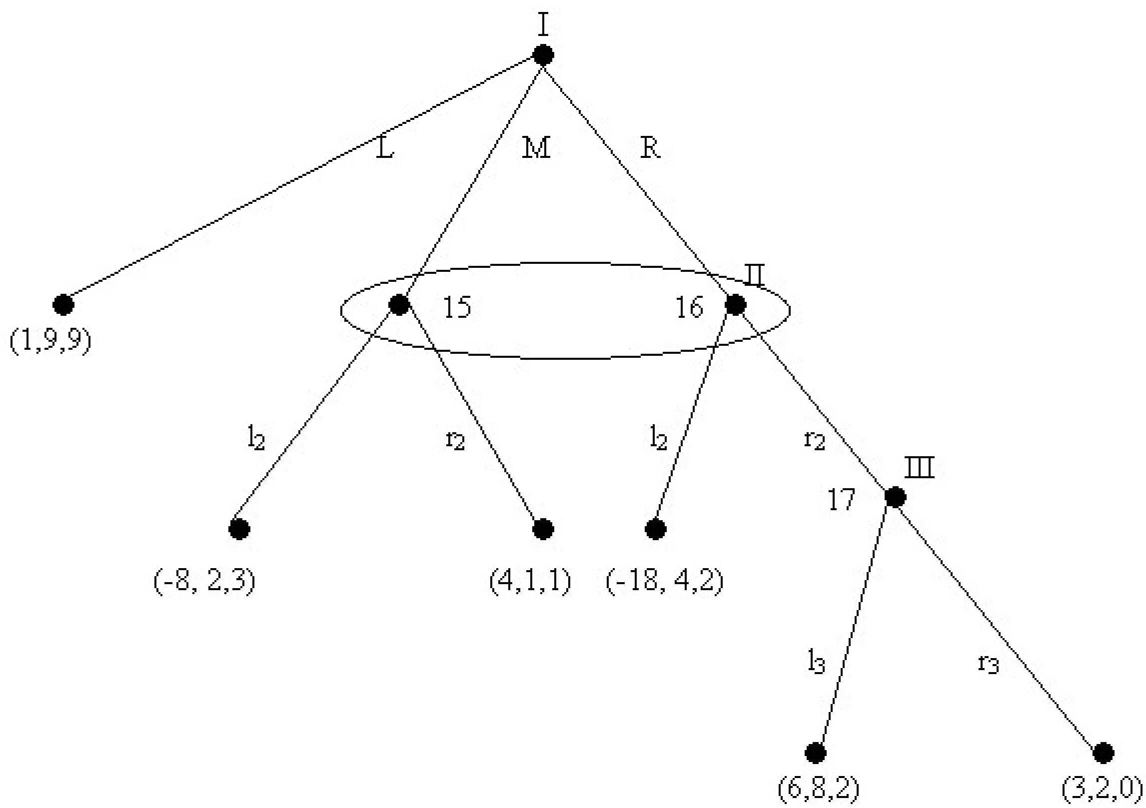

Figure 13: Διαδοχική ισορροπία σε παίγνιο τριών παικτών

Έστω ότι έχει προσδιοριστεί η στρατηγική συμπεριφοράς των παικτών

$s_1(L) = 1$, $s_1(M) = 0$,$s_1(R) = 0$, $s_2(1_2) = 1$, $s_2(r_2) = 0$, $s_3(1_3) = 1$, $s_3(r_3) = 0$,

δηλαδή ο παίκτης 1 παίζει L, ο παίκτης 2 παίζει 1_2 και ο παίκτης 3 παίζει 1_3.

Αν το συνεπές σύστημα πεποιθήσεων προσδίδει πιθανότητα 0,3 να βρεθούμε στον κόμβο 16, δηλαδή $\mu(16) = 0.3$ και $\mu(15) = 0.7$, τότε το παίξιμο 1_2 δεν είναι στρατηγική διαδοχικής ισορροπίας για τον παίκτη 2. Γιατί; Επειδή η στρατηγική $s_2(1_2) = 1$, $s_2(r_2) = 0$ του παίκτη 2 στο σύνολο πληροφοριών του II, δίνει αναμενόμενη απόδοση $U(l_2, \mathrm{II}) = 0,7 \cdot 2 + 0,3 \cdot 4 = 2,6$ ενώ το παίξιμο r_2, δηλαδή στρατηγική $s_2(1_2) = 0$, $s_2(r_2) = 1$, δίνει αναμενόμενη απόδοση $U(r_2, \mathrm{II}) = 0,7 \cdot 1 + 0,3 \cdot 1 \cdot 8 = 3,1 > 2,6$.

Ο παίκτης 3 τώρα, αν απέκλινε μονομερώς για κάποιο λόγο, αν άλλαζε την στρατηγική συμπεριφοράς του από την $s_3(1_3) = 1$ ενώ όλα τα άλλα μένουν ίδια, στην $s_3(1_3) = 0.5$, $s_3(r_3) = 0.5$, τότε η αρχική στρατηγική συμπεριφοράς του παίκτη 2 θα προσέφερε διαδοχική ισορροπία αφού παίζοντας κάτι διαφορετικό από 1_2 δεν θα κέρδιζε παραπάνω από 2,6. Αν άλλαζε σε r_2 θα είχε τώρα αναμενόμενη απόδοση $U(r_2, \mathrm{II}) = 0,7 \cdot 1 + 0,3 \cdot [(0,5 \cdot 8 + 0,5 \cdot 2)] = 2,2 < 2,6$. Έτσι ο ορίζοντας στρατηγικής $(L, 1_2, 1_3)$ είναι διαδοχική ισορροπία.

Βλέπουμε λοιπόν πόσο λεπτές είναι οι ισορροπίες και πώς αναπροσαρμόζονται ανάλογα με τις στρατηγικές συμπεριφορές των παικτών και τις πεποιθήσεις που είναι ορθολογικά συνεπείς με αυτές, μέχρι να οδηγηθούμε στην διαδοχική ισορροπία. Όπως προείπαμε, γίνεται αναθεώρηση των πεποιθήσεων καθώς το παίγνιο προχωράει, δεδομένου ότι είναι συνεπείς με τον ορίζοντα στρατηγικής. Με δεδομένα αυτά, ο παίκτης χρησιμοποιεί στρατηγικές συμπεριφοράς που μεγιστοποιούν τελικά την αναμενόμενη απόδοσή του σε κάθε σύνολο πληροφοριών του.

Συνεπώς, καθώς το παίγνιο προχωράει, ο παίκτης δεν έχει λόγο να αποκλίνει από την στρατηγική του σε κανένα εκ των συνόλων πληροφοριών του. Μόλις περιγράψαμε μία ευρύτερη έννοια της SPNE, αφού είναι το ίδιο αποτέλεσμα και κριτήριο, αλλά στην SPNE επαφίεται στο εκάστοτε υποπαίγνιο, στους κόμβους που ορίζουν την αρχή του και είναι μονοσύνολα πληροφοριών. Η διαδοχική ισορροπία λοιπόν ανάγει την τελειότητα υποπαιγνίου παντού στα δυναμικά παίγνια, ανεξαρτήτως ύπαρξης υποπαιγνίων.

Κλείνουμε λοιπόν με αυτό το βαρυσήμαντο πόρισμα:

Κάθε διαδοχική ισορροπία είναι μια τέλεια ισορροπία Nash υποπαιγνίου-SPNE

Ως προς την ύπαρξη ή όχι διαδοχικής ισορροπίας και την εφικτότητα προσδιορισμού της, να σημειώσουμε εδώ ότι ο D. Kreps και ο R. Wilson απέδειξαν ότι κάθε δυναμικό παίγνιο ατελούς πληροφόρησης έχει μια διαδοχική ισορροπία, στο άρθρο "Sequential Equilibrium" όπου ορίστηκε πρώτη φορά η έννοια της διαδοχικής ισορροπίας.

5 ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΘΕΩΡΙΑΣ ΠΑΙΓΝΙΩΝ ΣΕ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ ΑΠΟΦΑΣΕΙΣ ΕΠΕΝΔΥΣΕΩΝ. ΘΕΩΡΙΑ-ΑΝΑΛΥΣΗ-ΕΞΑΓΩΓΗ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ

5.1 ΕΙΣΟΔΟΣ ΣΤΗΝ ΑΓΟΡΑ

Θα συνδυάσουμε όλα τα προηγούμενα για την εξέταση μιας υποθετικής περίπτωσης που μπορεί να βρει εφαρμογή σε πραγματικές καταστάσεις. Θα ξεκινήσουμε από την βασική δομή ενός παιγνίου και σιγά σιγά θα το εμπλουτίσουμε μέχρι να φτάσουμε στην πιο αντιπροσωπευτική, ρεαλιστική και περίπλοκη δομή του, αναλύοντάς το σε βάθος με πραγματικά δεδομένα και εξετάζοντάς το στις προεκτάσεις του.

Σε πολλές ολιγοπωλιακές αγορές, οι καθιερωμένες στην αγορά εταιρείες αντιμετωπίζουν την απειλή εισόδου μίας νέας εταιρείας. Πριν 50 χρόνια, ένας πολύ μικρός αριθμός εγχώριων αυτοκινητοβιομηχανιών μεσουρανούσε στην Ιταλική αγορά αυτοκινήτων. Πλέον, έχουν εισέλθει δυναμικά πληθώρα ξένων εταιρειών.

5.1.1 Βασική-Απλή περίπτωση

Υποθέτουμε ότι μία εταιρεία που ασχολείται με την επισκευή μηχανών εσωτερικής καύσης για βιομηχανική και ναυπηγική χρήση, εξετάζει να εισέλθει σε μία μονοπωλιακή αγορά, όπου κυριαρχεί μία άλλη εταιρεία. Για παράδειγμα, η δεύτερη χρησιμοποιεί μία πρωτοποριακή καινοτόμο μέθοδο για την επιδιόρθωση των ανταλλακτικών και επιμέρους εξαρτημάτων των μηχανών, αυτήν της "επίστρωσης-επένδυσης με σκόνη laser" (Laser Powder Cladding). Έτσι, σε τοπικό επίπεδο, ανταγωνιζόμενες στην εγχώρια αγορά, η δεύτερη μπορεί να θεωρηθεί μονοπώλιο.

Η εταιρεία που εξετάζει να εισέλθει, την οποία θα καλούμε παίκτη 2, πρέπει να σχηματίσει πεποιθήσεις που να αφορούν την ισορροπία πριν την είσοδό της. Αυτό που επηρεάζει αδιαμφισβήτητα την απόφαση του παίκτη 2, είναι το κόστος παραγωγής της καθιερωμένης εταιρείας, παίκτη 1, εννοώντας οτιδήποτε εκφράζει το κόστος του, οριακό, παραγωγής, κ.ο.κ, αφού αυτό επηρεάζει άμεσα τις αποδόσεις του παίκτη 1, οπότε και την επιλογή της βέλτιστης στρατηγικής του σε περίπτωση εισόδου του παίκτη 2. Η καθιερωμένη στην αγορά εταιρεία γνωρίζει φυσικά το κόστος της, αλλά η υποψήφια προς είσοδο όχι. Οπότε ο παίκτης 2 έχει ατελή πληροφόρηση σχετικά με το αν ο παίκτης 1 έχει υψηλό ή χαμηλό κόστος.

Η ελλιπής πληροφόρηση αυτή του παίκτη 2, αποδίδεται με το να θεωρήσουμε ότι η φύση κάνει την πρώτη κίνηση, επιλέγοντας το κόστος του παίκτη 1. Η επιλογή αυτή της φύσης δεν παρατηρείται από τον παίκτη 2, οπότε και η αβεβαιότητά του για το κόστος του παίκτη 1 εμφανίζεται με την μορφή ατελούς πληροφόρησης. Να διευκρινίσουμε ότι η κίνηση αυτή γίνεται από την φύση, όχι από τον παίκτη

1. Η φύση δεν μπορεί να βελτιστοποιήσει την στρατηγική της. Αντιπροσωπεύει ουσιαστικά την εκτίμηση του παίκτη 2 για το πώς είναι ο παίκτης 1.

Τα p και 1-p, τα καθορίζει ο παίκτης 2 και είναι οι πεποιθήσεις του για την συνάρτηση κόστους του παίκτη 1, για το πόσο πιθανό είναι η φύση να προσέδωσε υψηλό ή χαμηλό κόστος παραγωγής. Ο παίκτης 1 παρατηρεί το κόστος παραγωγής του φυσικά, αφού όμως ολοκληρώσει την παραγωγή. Γνωρίζει ότι θα είναι είτε υψηλό είτε χαμηλό, αλλά δεν το καθορίζει αυτός αφού υπάρχουν αστάθμητοι παράγοντες και μακάρι να μπορούσε κάθε εταιρεία να εξασφαλίσει χαμηλά κόστη σαν να ήταν κίνησή της. Για αυτό λέμε ότι το κανονίζει η φύση και αποκαλύπτει την έκβαση στον παίκτη 1, δεν είναι κίνηση του παίκτη 1.

Εν συνεχεία, ο παίκτης 1, αφού παρατηρήσει την ενέργεια του παίκτη 2, αν δηλαδή εισέρχεται ή όχι στην αγορά, αποφασίζει για την ποσότητα παραγωγής του. Το αν θα κάνει υψηλή ή χαμηλή παραγωγή, εξαρτάται φυσικά από τις αναμενόμενες αποδόσεις, δεδομένου του κόστους παραγωγής του σε συνδυασμό με την είσοδο ή όχι του παίκτη 2 στην αγορά.

Συγκεντρωτικά έχουμε

- Παίκτες : παίκτης 1 : Monopol , παίκτης 2 : Entrant
- Στρατηγικές Monopol : S_1^m: high output , S_2^m: low output
- Στρατηγικές Entrant : S_1^e: Enter , S_2^e: Stay out

Το δυναμικό παίγνιο ατελούς πληροφόρησης φαίνεται παρακάτω στην εκτατική μορφή του.

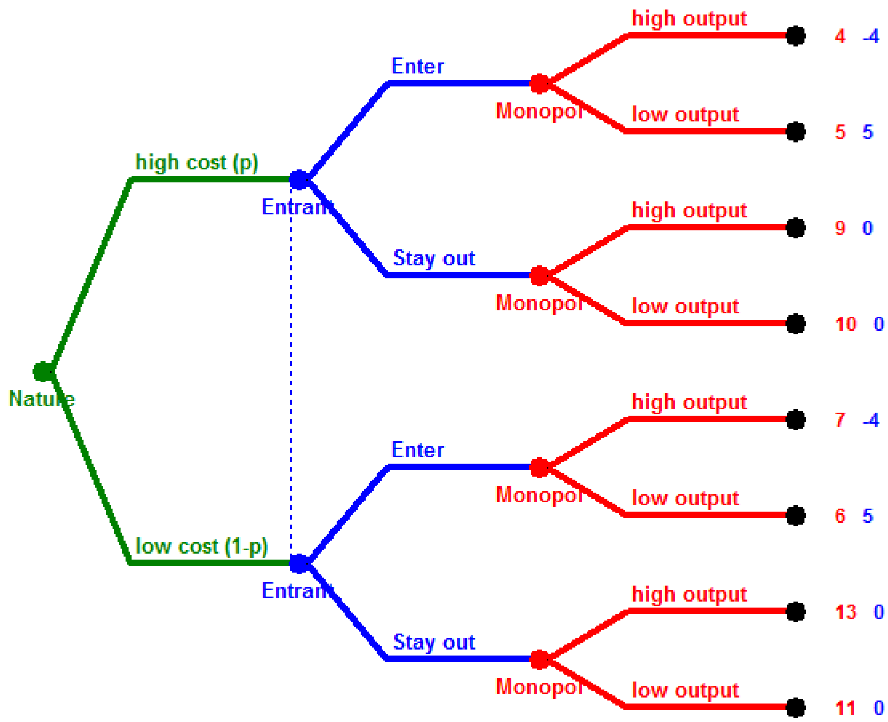

Figure 14: Είσοδος στην αγορά-Βασική περίπτωση

Ο παίκτης 2 θα στηρίξει την επιλογή του για είσοδο στην αγορά στις πεποιθήσεις του για το αν ο παίκτης 1 έχει υψηλά ή χαμηλά κόστη. Παρατηρεί, μέσω οπισθοβατικής επαγωγής, θεωρώντας πάντα ότι η άλλη εταιρεία δρα ορθολογικά με βάση την μεγιστοποίηση των δικών της κερδών, ότι αν εισέλθει στην αγορά ενώ ο παίκτης 1 είναι υψηλού κόστους, αυτός θα επιλέξει χαμηλή παραγωγή για να αποκομίσει 5 αντί 4 εκατομμύρια και ο ίδιος θα κερδίσει επίσης 5 εκατομ.

Αντιθέτως, αν είναι χαμηλού κόστους, θα επιλέξει υψηλή παραγωγή, επιδιώκοντας κέρδη ύψους 7 αντί 6 εκατομμυρίων. Σε αυτή την περίπτωση οι απώλειες για τον παίκτη 2 είναι μεγάλες, δηλαδή 4 εκατ. Το p είναι η πιθανότητα με την οποία πιστεύει ο παίκτης 2 ότι ο παίκτης 1 έχει υψηλά κόστη, η πεποίθησή του. Το 1-p αντίστοιχα η πεποίθηση για χαμηλά κόστη.

Άρα, αξιολογώντας την είσοδό του στην αγορά, η αναμενόμενη απόδοσή του από την είσοδο είναι $p \cdot 5 + (1-p) \cdot (-4) = 9p - 4$. Η αναμενόμενη απόδοση από την παραμονή της εταιρείας εκτός αγοράς είναι $p \cdot 0 + (1-p) \cdot 0 = 0$. Οπότε ο παίκτης 2 εισέρχεται αν $9p - 4 \geq 0 \Rightarrow p \geq 4/9 = 0,4444$. Βλέπουμε ότι για να εισέλθει πρέπει να έχει πολύ ισχυρή πεποίθηση ότι ο ανταγωνιστής του έχει υψηλά κόστη (σχεδόν 50%). Αν είναι αρκετά αισιόδοξος ότι ο ανταγωνιστής έχει υψηλά κόστη και δεν θα είναι δυνατός αντίπαλος στην αγορά, τότε επιλέγει την είσοδο στην αγορά αυτή.

Ουσιαστικά βλέπουμε ο παίκτης 2 αν είχε πλήρη πλήρη πληροφόρηση θα εισερχόταν στην αγορά αν και μόνο αν ο μονοπωλητής ήταν εταιρεία υψηλού κόστους και στο ίδιο πόρισμα κατέληξε και τώρα. Δεν θα ήθελε να ανταγωνιστεί μία εταιρεία με χαμηλά κόστη και βέβαιη υψηλή παραγωγή που περιορίζει τα δικά του περιθώρια κέρδους. Θα δούμε και παρακάτω ότι αυτό αποτελεί καθοριστικό παράγοντα για το παίξιμο του παιγνίου.

Άρα το παίγνιό μας έχει τέσσερις διαδρομές ισορροπίας

Αν ο παίκτης 1 έχει υψηλά κόστη και $p \geq 0,44$ τότε enter→low output→(5,5)

Αν ο παίκτης 1 έχει υψηλά κόστη και $p \leq 0,44$ τότε stay out→low output→(10,0)

Αν ο παίκτης 1 έχει χαμηλά κόστη και $p \geq 0,44$ τότε enter→high output→ (7,-4)

Αν ο παίκτης 1 έχει χαμηλά κόστη και $p \leq 0,44$ τότε stay out→high output→(13,0)

5.1.2 Ανάλυση Ευαισθησίας

Η επιλογή τελικά του παίκτη 2 ανάγεται στο p, το οποίο επηρεάζεται από τις αποδόσεις. Πόσο όμως; Αν διπλασιάζαμε τις αποδόσεις των παικτών τόσο στα κέρδη όσο και στην χασούρα, αν δηλαδή ήταν εταιρείες με ακόμα μεγαλύτερο κύκλο εργασιών και είχαν κι άλλα περιθώρια κέρδους, ο παίκτης 2 θα εισερχόταν αν $p \cdot 10 + (1-p) \cdot (-8) = 18p - 8 \geq 0 \Rightarrow p \geq {}^{8}/_{18} = 0,4444$. Βλέπουμε ότι δεν άλλαξε τίποτα, αφού η σχέση και αναλογία μεταξύ των αποδόσεων, που είναι αυτή που καθορίζει τον σχηματισμό πεποιθήσεων, παρέμεινε ίδια.

Αν αλλάζαμε όμως αυτή την σχέση; Μπορούμε, αλλά σε ρεαλιστική βάση. Δηλαδή, μία εταιρεία νεοεισερχόμενη σε σχέση με ένα μονοπώλιο καθιερωμένο που παρέχει ικανοποίηση για τις υπηρεσίες του, είναι σχεδόν αδύνατο να το ξεπεράσει σε κέρδη αρχικά. Άρα για υψηλού κόστους εταιρεία που μετά από είσοδο άλλης επιλέγει χαμηλή παραγωγή, στον τερματικό κόμβο με απόδοση (5,5) δεν μπορούμε να αποκλίνουμε και πολύ.

Αν μπορούμε να αλλάξουμε κάτι είναι να θεωρήσουμε ότι ο παίκτης 2 έχει λίγο μικρότερα κέρδη ακόμα και σε αυτή την καλή περίπτωση και όχι όσα ο ανταγωνιστής του, οπότε να είχαμε (5,4). Αυτό κάνει ακόμα πιο δύσκολη την είσοδο στην αγορά του παίκτη 2, αφού ο παρονομαστής του κλάσματός μας μικραίνει και εισέρχεται αν $p \geq {}^{4}/_{8} = 0,5$. Πρέπει να έχει ακόμα πιο ισχυρή πεποίθηση ότι ο παίκτης 1 έχει υψηλά κόστη, σε ποσοστό 50%.

Αντίστοιχα στον τερματικό κόμβο (7,-4) μπορούμε κρατώντας σταθερά τώρα όλα τα υπόλοιπα να εξετάσουμε την περίπτωση που ο παίκτης 2 έχει μικρότερες απώλειες -3εκ αντί για -4εκ οπότε (7,-3). Τώρα $p \geq {}^{3}/_{8} = 0,375$ και βλέπουμε ότι εδώ μειώθηκε η πιθανότητα που τουλάχιστον πρέπει να πιστεύει ο παίκτης 2 ότι έχει ο παίκτης 1 για υψηλά κόστη, ώστε να μπει στην αγορά. Αν λοιπόν έχει μικρότερη χασούρα (-3<-4) στην περίπτωση που μπει στην αγορά ενώ ο παίκτης 1 έχει χαμηλά κόστη και κάνει τελικά υψηλή παραγωγή, αυξάνεται η πιθανότητα να εισέλθει στην αγορά αφού χρειάζεται λιγότερη αισιοδοξία για υψηλά κόστη του παίκτη 1. Μπορεί όχι δραματικά, αφού το 0,375 είναι κοντά στο 0,444, αλλά η θετική επίδραση που έχει είναι μεγαλύτερη από την αρνητική του να είχε μικρότερη απόδοση στην περίπτωση (5,5).

Τέλος αν αλλάξουμε και τα δύο ταυτόχρονα έχουμε $p \geq 3/7 = 0,42857$ που είναι πολύ κοντά στην αρχική μας λύση και ελάχιστα πιο πιθανό να εισέλθει ο παίκτης 2 στην αγορά. Ενδεικτικά, ο μέσος όρος όλων των παραπάνω p είναι 0,43699.

5.1.3 Είσοδος με δυνατότητα διαφήμισης

Ας εμπλουτίσουμε ακόμη πιο πολύ το παίγνιό μας. Ο παίκτης 2 θα ήθελε να αυξήσει κι άλλο τα κέρδη του σε περίπτωση εισόδου του στην αγορά με έναν υψηλού κόστους αντίπαλο που θα παράγει λίγο και να μειώσει την χασούρα του με έναν χαμηλού κόστους αντίπαλο που θα παράγει πολύ. Προσθέτει λοιπόν στις επιλογές του την δυνατότητα διαφήμισης. Ο παίκτης 2 πρέπει να αποφασίσει αν θα κάνει διαφήμιση σε περίπτωση που αποφασίσει να μπει στην αγορά, χωρίς όμως να ξέρει αν αυτή θα είναι επιτυχής ή όχι. Πάλι θα σχηματίσει πεποιθήσεις σχετικά με την πιθανότητα να πάει καλά η διαφήμιση και να αυξήσει τα κέρδη του ακόμα και πάνω από την ανταγωνίστρια εταιρεία ή να αποτύχει και να ζημιωθεί παραπάνω από το να μην είχε κάνει καθόλου. Το παίγνιο φαίνεται παρακάτω.

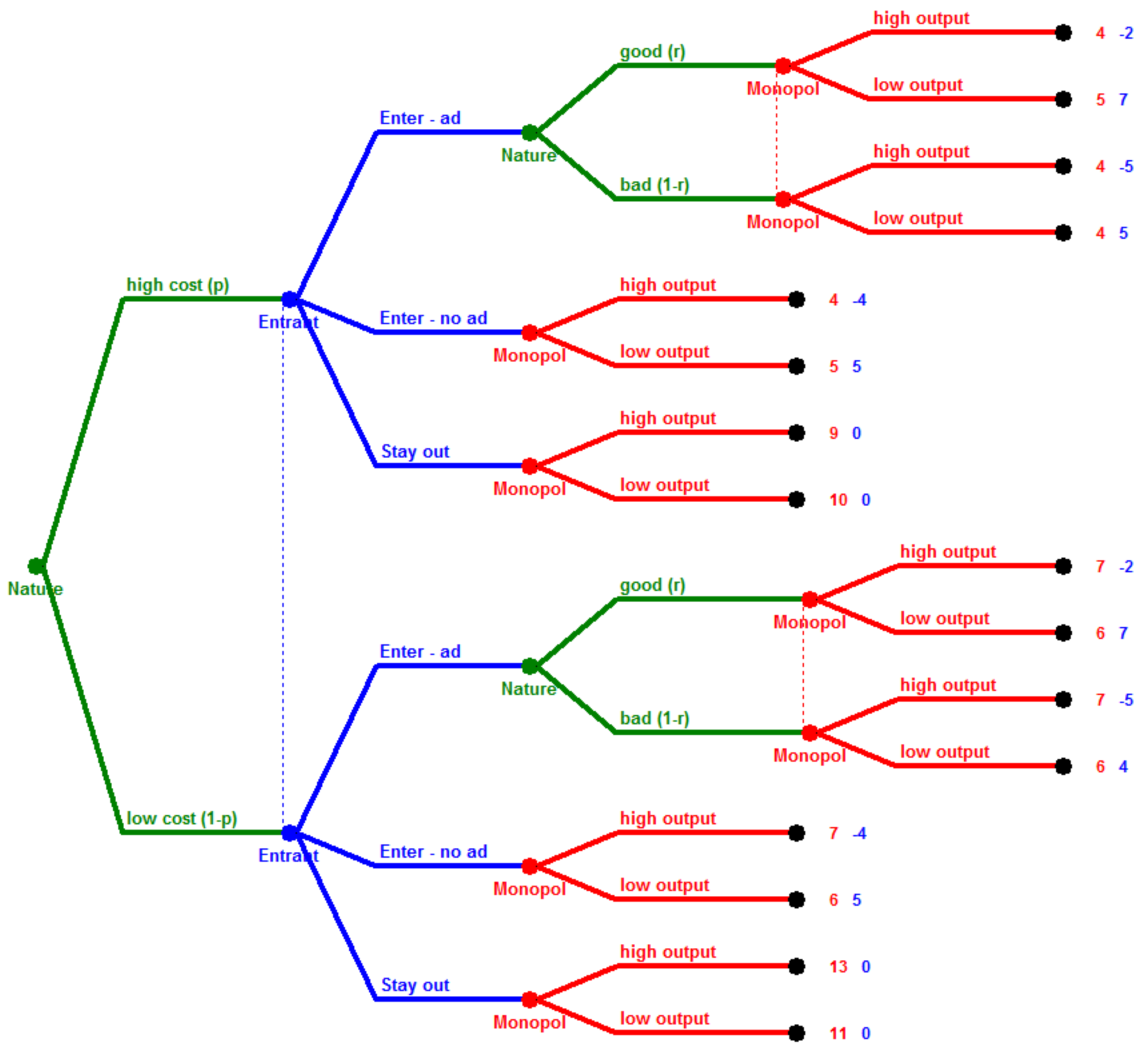

Figure 15: Είσοδος στην αγορά με δυνατότητα διαφήμισης

Όπως βλέπουμε από τις αποδόσεις, υποθέτουμε ότι αν η διαφήμιση πάει καλά, επιφέρει επιπλέον 2εκ κέρδος σε όλες τις περιπτώσεις, ενώ αν αποτύχει, επιφέρει μικρότερη ζημία, ένα εκατομμύριο. Δηλαδή το κόστος της διαφήμισης δεν αντισταθμίζεται από τις πωλήσεις και υπάρχει ζημία 1εκ, αλλά σε περίπτωση επιτυχίας μπορεί να "εκτοξεύσει" τις πωλήσεις, οπότε και τα κέρδη, στα 2εκ επιπλέον του αναμενόμενου. Η εταιρεία που εξετάζει την είσοδό της έχει λοιπόν επιπλέον ατελή πληροφόρηση σχετικά με την έκβαση της διαφήμισης.

Ατελή πληροφόρηση έχει και η καθιερωμένη στην αγορά εταιρεία όταν πλέον αποφασίζει για υψηλή ή χαμηλή παραγωγή, αλλά δεν αλλάζει τίποτα, καθώς οι αποδόσεις της παραμένουν ίδιες. Αυτό είναι σημαντικό, γιατί δεν έχουμε ένα παίγνιο μηδενικού αθροίσματος με συγκεκριμένο περιθώριο κέρδους. Το μερίδιο στην αγορά μοιράζεται ανάμεσα στις εταιρείες αλλά δεν είναι προκαθορισμένο και στάσιμο. Ο παίκτης 1 μπορεί να έχει τα ίδια κέρδη με την στρατηγική του ανάλογα με τα κόστη του και το επίπεδο παραγωγής του και ταυτόχρονα ο νεοεισερχόμενος να διευρύνει τα δικά του, χωρίς να σημαίνει ότι θα πάρει πελάτες από τον παίκτη 1 και θα επιφέρει μείωση της απόδοσής του. Απλά με επιτυχημένη πολιτική marketing και διαφήμιση μπορεί ο παίκτης 2 να καταφέρει σημαντικά αυξημένα κέρδη και να προσεγγίσει μεγάλο πελατολόγιο.

Εδώ λοιπόν ο παίκτης 2 πρέπει να αξιολογήσει πότε συμφέρει να κάνει διαφήμιση μπαίνοντας στην αγορά. Σε κάθε περίπτωση, η αναμενόμενη απόδοση από την είσοδο με διαφήμιση είναι μεγαλύτερη από αυτή της απλής εισόδου όταν $-2r - 5(1-r) \geq -4$ ή αντίστοιχα $7r + 4\,(1-r) \geq 5$ δηλαδή $r \geq 1/3 = 0,3333$. Αν ο παίκτης 2 πιστεύει ότι με πιθανότητα $>1/3$ θα είναι επιτυχημένη η διαφήμιση, τότε κάνει διαφημιστική καμπάνια όταν εισέρχεται στην αγορά.

Βρήκαμε λοιπόν πότε συμφέρει να κάνει διαφήμιση ο παίκτης 2 για να βελτιστοποιήσει την στρατηγική του. Αυτό όμως δεν είναι και η συνθήκη που θα τον οδηγήσει σε απόφαση για είσοδο στην αγορά ή όχι. Για να εισέλθει στην αγορά πρέπει η αναμενόμενη απόδοσή του να είναι μεγαλύτερη από την μη είσοδο όπως πριν. Δηλαδή $p\,[7r + (1-r)\,4] + (1-p)\,[-2r + (1-r)\,(-5)] \geq 0 \Rightarrow 9p + 3r - 5 \geq 0 \Rightarrow p \geq {}^{5-3r}/{9}$.

Το αποτέλεσμα δείχνει ότι πλέον η απόφαση θα παρθεί σε συνδυασμό με την πεποίθηση για την έκβαση της διαφήμισης. Αν r=1/3 ο παίκτης είναι αδιάφορος ως προς την διαφήμιση ή όχι και η απόφαση ανάγεται αντικαθιστώντας στο κλάσμα στο $p \geq 4/9 = 0,4444$, δηλαδή στην ίδια συνθήκη που υπολογίσαμε πριν. Αν όμως $r \geq 1/3 = 0,3333$ έχουμε ένα σημαντικό αποτέλεσμα, αφού όσο μεγαλύτερη αισιοδοξία έχει για το ότι θα πάει καλά η διαφήμιση, τόσο μειώνεται η τιμή του p που πρέπει να έχει ως πεποίθηση για υψηλά κόστη του παίκτη 1.

Μία εταιρεία που έχει επενδύσει στην διαφήμιση με τα χρόνια και έχει επιτυχημένη και αποδοτική πολιτική marketing σε βάθος χρόνων, θα μπορούσε να πιστεύει ότι με πιθανότητα 0,6, δηλαδή πάνω από 50% η διαφήμισή της θα έχει θετική έκβαση. Τότε χρειάζεται για να εισέλθει στην αγορά $p \geq 3{,}2/9 = 0,3555$ το οποίο είναι σημαντικά μειωμένο από το αρχικό 0,4444.

Ο παράγοντας r αντισταθμίζει το p και αντίστροφα. Η πεποίθηση για επιτυχημένη διαφήμιση αυξάνει την πιθανότητα για είσοδο στην αγορά, "αποδυναμώνοντας" στα μάτια του νεοεισερχόμενου ακόμα και μια εταιρεία χαμηλού κόστους.

5.1.4 Δύο περίοδοι παραγωγής του Monopol-Παρατήρηση της πρώτης επιλογής

Πηγαίνουμε ακόμα ένα βήμα παραπέρα, εξετάζοντας την περίπτωση που η υποψήφια για είσοδο εταιρεία παρατηρεί πρώτα το επίπεδο παραγωγής της άλλης εταιρείας και έπειτα αποφασίζει ποια θα είναι η δικιά της απάντηση. Αφού αυτό που φάνηκε στα παραπάνω ότι ενδιαφέρει τον παίκτη 2 και αποτελεί τον καθοριστικό παράγοντα για την απόφασή του, είναι ποιά είναι τα κόστη του παίκτη 1, αν περιμένει και παρατηρήσει κάποια ενέργεια της καθιερωμένης εταιρείας πριν αποφασίσει για είσοδο ή όχι, ίσως να μπορούσε να λάβει κάποια πληροφόρηση σχετικά με τα κόστη της δεύτερης, βασιζόμενος στο επίπεδο παραγωγής που θα διαπιστώσει.

Εδώ πλέον το παίγνιο χωρίζεται σε δύο περιόδους και σε κάθε μία ο παίκτης 1 αποφασίζει ποιο θα είναι το μέγεθος παραγωγής του. Την αρχική του επιλογή παρατηρεί ο παίκτης 2 και μετά κινείται αυτός μπαίνοντας στην αγορά ή μένοντας έξω, χωρίς βέβαια να ξέρει αν αντιμετωπίζει υψηλού ή χαμηλού κόστους εταιρεία, αλλά βασιζόμενος όπως προείπαμε στο επίπεδο παραγωγής που βλέπει. Αφού λοιπόν πάρει την απόφασή του ο παίκτης 2, ο μονοπωλητής αποφασίζει στο δεύτερο στάδιο το επίπεδο παραγωγής του. Έχουμε περιγράψει το πιο ρεαλιστικό σενάριο και το δέντρο παιγνίου ακολουθεί στο σχήμα. Θα δώσουμε το σκεπτικό της ισορροπίας και μια περιγραφική λύση και μετά θα εξετάσουμε πιο αναλυτικά τέσσερις υποπεριπτώσεις καθορίζοντας πεποιθήσεις και διαδοχική ισορροπία, σε ένα πλαίσιο που γνωρίσαμε νωρίτερα στην διπλωματική.

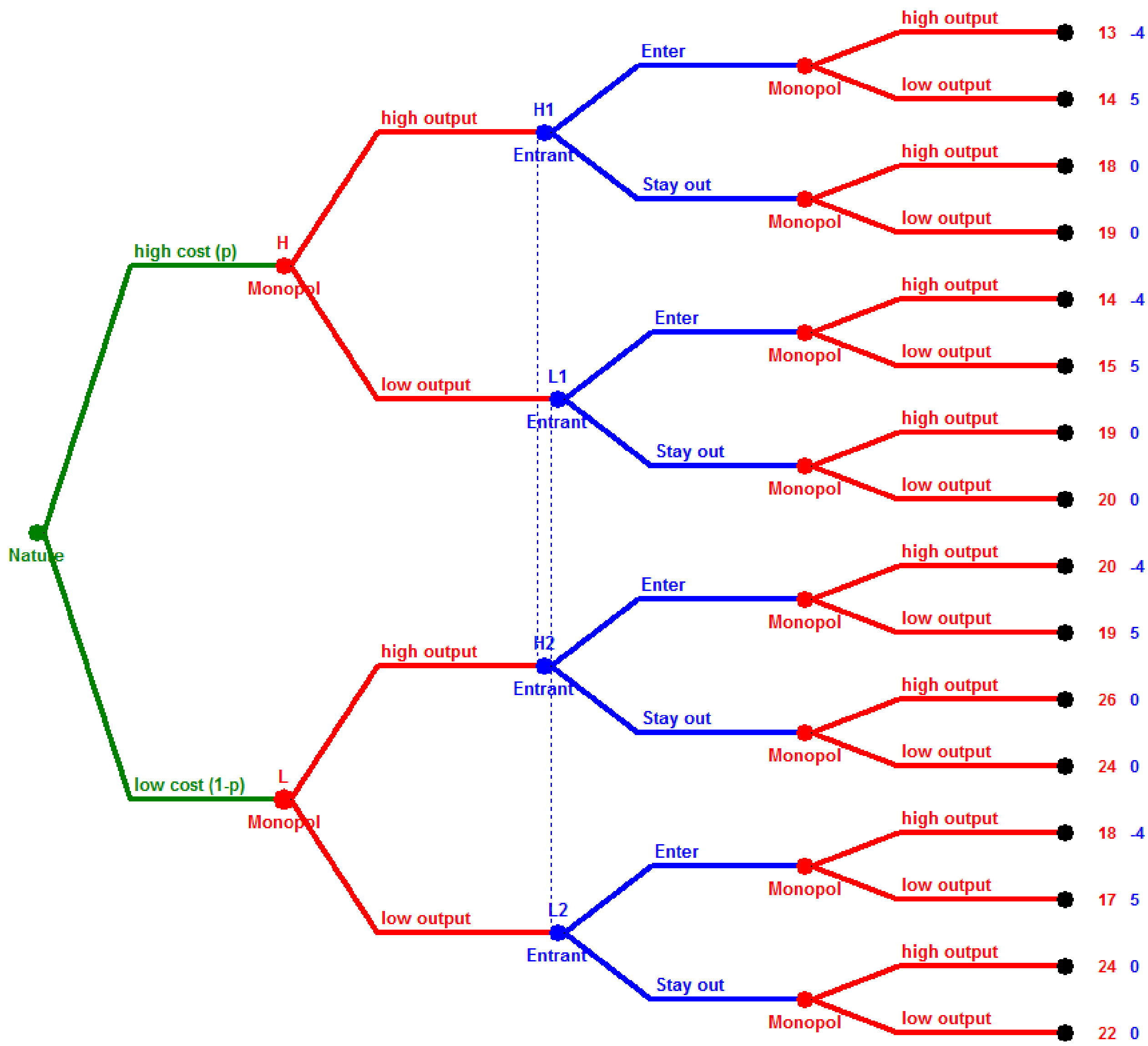

Figure 16: Δύο περίοδοι παραγωγής Monopol-Παρατήρηση πρώτης επιλογής από Entrant

Οι αποδόσεις είναι ίδιες με πριν. Έχουμε όμως δύο περιόδους. Οι αποδόσεις της πρώτης περιόδου του μονοπωλητή είναι προφανώς οι ίδιες με την περίπτωση του να ήταν μόνος του στην αγορά και να επέλεγε το επίπεδο παραγωγής του, άρα ίδιες με το πρώτο μας παίγνιο στο σχήμα 14. Οπότε στις ήδη υπάρχουσες προσθέτουμε: Αν ο παίκτης 1 είναι high cost και επέλεξε στην αρχή high output (κόμβος H_1) +9. Αν ο παίκτης 1 είναι high cost και επέλεξε στην αρχή low output (κόμβος L_1) +10. Αν ο παίκτης 1 είναι low cost και επέλεξε στην αρχή high output (κόμβος H_2) +13 και αν ο παίκτης 1 είναι low cost και επέλεξε στην αρχή low output (κόμβος L_2) +11, οπότε οι αποδόσεις διαμορφώνονται όπως βλέπουμε στο δέντρο.

Αν υποθέταμε ότι ο παίκτης 2 αγνοεί το επίπεδο παραγωγής του μονοπωλητή στην πρώτη περίοδο και επίσης πίστευε ότι αντιμετωπίζει εταιρεία υψηλού κόστους με $p = 2/7$, τότε (όπως είδαμε στο παίγνιο του σχήματος 14 αφού εκπίπτει σε αυτό) δε θα εισερχόταν στην αγορά. Γνωρίζοντάς το αυτό, ένας χαμηλού κόστους μονοπωλητής, θα μεγιστοποιούσε τις αποδόσεις του παίζοντας high output σε κάθε περίοδο, ενώ ένας υψηλού κόστους παίζοντας low output σε κάθε περίοδο.

Ο παίκτης 2 βέβαια δεν αγνοεί αυτή την πρώτη κίνηση επιπέδου παραγωγής του μονοπωλητή, αφού από αυτή προσπαθεί να αποκομίσει στοιχεία για τα πραγματικά κόστη του μονοπωλητή. Πιστεύοντας ο παίκτης 2 ότι ο μονοπωλητής θα ακολουθήσει ορθολογικά την στρατηγική που μόλις περιγράψαμε, τότε η δικιά του στρατηγική ανταπάντησης είναι: "Είσοδος στην αγορά μόνο αν ο μονοπωλητής επιλέξει low output στην πρώτη περίοδο".

Αντίστοιχα όμως με τη σειρά του ο μονοπωλητής περιμένει τον υποψήφιο νεοεισερχόμενο να κάνει αυτή την ανάλυση και να προσπαθεί να καταλάβει το επίπεδο κόστους του παρατηρώντας το επίπεδο παραγωγής. Αν λοιπόν είτε είναι υψηλού κόστους είτε χαμηλού, επιλέγει πάντα στην πρώτη περίοδο high output, ο παίκτης 2 δεν θα μπορούσε να βγάλει κάποιο συμπέρασμα για τα κόστη του παίκτη 1. (Προφανώς όχι low output αφού αυτό δείχνει σχεδόν σίγουρα υψηλά κόστη και παρακινεί τον παίκτη 2 να μπει στην αγορά). Έτσι, δεδομένης και της χαμηλής πεποίθησης $p = 2/7$, ο παίκτης 2 θα έμενε εκτός αγοράς.

Δηλαδή, μία καθιερωμένη εταιρεία με υψηλά κόστη, όταν καλείται να αποφασίσει για την παραγωγή της στην πρώτη περίοδο, συγκρίνει την απόδοση στον τερματικό κόμβο από την διαδρομή low output$\rightarrow$Enter$\rightarrow$low output (15) με αυτή του τερματικού κόμβου high output$\rightarrow$Stay out$\rightarrow$low output (19) και αφού 19>15, είναι πιο συμφέρον να επιλέξει high output στην πρώτη περίοδο παρά low output μεγιστοποιώντας την αναμενόμενη απόδοσή της.

Οι στρατηγικές ισορροπίας λοιπόν που πηγάζουν ως πόρισμα είναι:

Monopol: Παρήγαγε high output στην πρώτη περίοδο και στην δεύτερη high output αν τα κόστη είναι χαμηλά και low output αν τα κόστη είναι υψηλά (ανεξάρτητα του αν θα εισέλθει στην αγορά ο παίκτης 2).

Entrant: Είσελθε στην αγορά αν και μόνο αν ο μονοπωλητής παράγει low output στην πρώτη περίοδο.

Ο υψηλού κόστους μονοπωλητής λοιπόν ουσιαστικά προσπαθεί να αποκρύψει τα πραγματικά επίπεδα κόστους του από τον υποψήφιο νεοεισερχόμενο. Δεν σημαίνει ότι απαραίτητα προσπαθεί να "ξεγελάσει" τον νεοεισερχόμενο ώστε να πιστεύει ότι ο μονοπωλητής είναι μία εταιρεία χαμηλού κόστους (εξάλλου μπορεί να είναι!).

Ο ορθολογικός υποψήφιος για είσοδο στην αγορά αναμένει έτσι κι αλλιώς ότι ένας υψηλού κόστους μονοπωλητής θα το κάνει αυτό. Η αξία και το κέρδος για το μονοπωλητή δεν είναι ότι εξαπατάει τον υποψήφιο νεοεισερχόμενο ώστε να πιστέψει ότι ο αντίπαλός του έχει χαμηλά κόστη. Είναι το γεγονός ότι ο παίκτης 2 αποτρέπεται από το να συλλέξει την πληροφορία για τα κόστη του παίκτη 1 που θα ήθελε και δεδομένης της ελλιπούς πληροφόρησης επιλέγει να μείνει εκτός αγοράς.

Να αναφέρουμε εδώ ότι αυτή η πρακτική που μόλις περιγράψαμε, όπου θέτει κάποιος πρώτος ένα υψηλό επίπεδο παραγωγής (ή αντίστοιχα μία χαμηλή τιμή) για να αποτρέψει την είσοδο κάποιου άλλου είναι γνωστή ως limit pricing.

5.1.5 Δύο περίοδοι παραγωγής Monopol-Δυοπώλιο Cournot αν εισέλθει Entrant

Είδαμε ότι στην δεύτερη περίοδο, ο μονοπωλητής, που εκεί γνωρίζει τα κόστη του (από την πρώτη ήδη περίοδο), δεν έχει πραγματικά λόγο να εξετάσει αν θα πραγματοποιήσει high output ή low output. Αν έχει χαμηλά κόστη, το high output είναι αυστηρά κυρίαρχη στρατηγική σε σχέση με το low output. Δηλαδή στο υποπαίγνιο που ξεκινάει από τον κόμβο L, σε όλους τους τερματικούς κόμβους για τον μονοπωλητή είναι 20>19, 26>24, 18>17, 24>22.Αν έχει υψηλά κόστη, το low output είναι αυστηρά κυρίαρχη στρατηγική σε σχέση με το high output. Δηλαδή στο υποπαίγνιο που ξεκινάει από τον κόμβο H, σε όλους τους τερματικούς κόμβους για τον μονοπωλητή είναι 14>13, 19>18, 15>14, 20>19.

Οπότε δεν χρειαζόμαστε δύο επιλογές εκεί αλλά μία ακόμα πιο ρεαλιστική και αντιπροσωπευτική θεώρηση που θα επιτρέπει τον καθορισμό ισορροπίας στην ποσότητα παραγωγής που βελτιστοποιεί τα κέρδη και όχι το αν θα είναι υψηλή ή χαμηλή. Έστω λοιπόν στην τελική εκδοχή του παιγνίου μας, ότι οι εταιρείες στην δεύτερη περίοδο, ανταγωνίζονται στο περίφημο δυοπώλιο Cournot που αναλύσαμε πρωτύτερα στην διπλωματική. Παίζουν δηλαδή ανταγωνιστικό παίγνιο καθορισμού ποσοτήτων σε μοντέλο Cournot.

Τώρα δεν θα τοποθετήσουμε απλά αποδόσεις στους τερματικούς κόμβους συναφείς με την λογική, αλλά θα τις υπολογίσουμε επακριβώς δίνοντας την πιο ρεαλιστική αντιπροσωπευτική εικόνα με πραγματικά νούμερα.

Περιγραφή παιγνίου

Το παίγνιό μας έχει ως εξής:

- Έχουμε δύο περιόδους και ένα προϊόν στην αγορά (υπηρεσία Laser Powder Cladding) με αντίστροφη συνάρτηση ζήτησης $p(q_t) = p_1 = p_2 = M - q_t$, όπου M ένας σταθερός αριθμός, στην περίπτωσή μας M=14 και $q_t = q_1 + q_2$ η συνολική παραγωγή των δύο εταιρειών
- Έχουμε δύο εταιρείες, Monopol (Μονοπωλητής) , Entrant (Υποψήφιος νεοεισερχόμενος)

- Ο Monopol έχει συνάρτηση κόστους $TC_1(q) = c_1 \cdot q_1$ και το c_1 μπορεί να είναι high cost (c_H) ή low cost (c_L) , δηλαδή $c_1 \epsilon \{c_H, c_L\}$ και στην περίπτωσή μας $c_H = 8$ και $c_L = 6$

- Ο Entrant έχει συνάρτηση κόστους $TC_2(q) = c_2 \cdot q_2$ και το c_2 είναι σταθερό και στην περίπτωσή μας $c_2 = 7$

- Ο Monopol είναι μόνος του στην αγορά την πρώτη περίοδο και θέτει την ποσότητά του παραγωγής q_1η οποία μπορεί να είναι high output (q_L) ή low output (q_H) , δηλαδή $q_1 \epsilon \{q_L, q_H\}$ (όπου τα H και L αναφέρονται στα κόστη)

- Ο Entrant παρατηρεί το q_1 και αποφασίζει αν θα εισέλθει ή όχι στην αγορά.

- Αν εισέλθει, οι εταιρείες ανταγωνίζονται σε οικονομικό μοντέλο Cournot στη δεύτερη περίοδο. Αν όχι, ο Monopol ενεργεί πάλι ως μονοπώλιο στην δεύτερη περίοδο.

- Το κόστος εισόδου στην αγορά δίνεται από την σταθερά F, στην περίπτωσή μας F=6. (Αυτό μπορούσε να εισαχθεί και στην συνάρτηση κόστους του Entrant ουσιαστικά ως ένα επιπλέον σταθερό κόστος, δηλαδή $TC_2(q) = 6 + c_2 \cdot q_2$, αλλά δεν αλλάζει κάτι στους υπολογισμούς και για διευκόλυνση το αναφέρουμε χωριστά)

Όλα τα νούμερα είναι σε εκατομμύρια ευρώ, δηλαδή x1000000 εκτός των μονάδων των q.

Καθορισμός-Υπολογισμός αποδόσεων

Πρέπει τώρα να καθορίσουμε τις αποδόσεις των εταιρειών για κάθε περίπτωση. Οι αποδόσεις τους όμως είναι τα κέρδη τους. Η συνάρτηση απόδοσης κάθε εταιρείας i είναι η συνάρτηση κέρδους: $\Pi_i = (M - q_1 - q_2) \cdot q_i - c_i \cdot q_i = q_i(p(q_1 + q_2) - c_i)$. Στην περίπτωση που ο μονοπωλητής είναι μόνος του στην αγορά λοιπόν (πρώτη περίοδος και δεύτερη περίοδος χωρίς είσοδο του ανταγωνιστή), το $q_2 = 0$ και όλη η παραγωγή ανήκει στο μονοπώλιο οπότε $q_t = q_1$. Η συνάρτηση κέρδους του μονοπωλητή τότε είναι: $\Pi_1 = (M - q_1) \cdot q_1 - c_1 \cdot q_1 = Mq - q_1^2 - c_1 q_1$. Απλά τώρα επιλέγει την ποσότητα που θα μεγιστοποιήσει το κέρδος του. Παραγωγίζουμε και θέτουμε ίσο με μηδέν: $\frac{\partial \Pi_1}{\partial q_1} = M - 2q_1 - c_1 = 0 \Rightarrow q_1^* = {}^{M-c_1}/_2$

Αντικαθιστούμε στο Π_1και παίρνουμε: $\Pi_1^* = \frac{M-c_1}{2}\left(M - \frac{M-c_1}{2} - c_1\right) = \frac{(M-c_1)^2}{4}$. Οπότε

Αν ο Monopol έχει υψηλά κόστη, η απόδοσή του είναι $\frac{(M-c_H)^2}{4} = \frac{(14-8)^2}{4} =$ 9εκ€

Αν ο Monopol έχει χαμηλά κόστη, η απόδοσή του είναι $\frac{(M-c_L)^2}{4} = \frac{(14-6)^2}{4} =$ 16εκ€

Αυτές είναι οι αποδόσεις που βελτιστοποιούν-μεγιστοποιούν το κέρδος, άρα η περίπτωση που ο high cost Monopol κάνει low output και ο low cost Monopol κάνει high output, δηλαδή θέτει την ποσότητα παραγωγής ανάλογα με τον τύπο του. Πρέπει όμως να βρούμε και τις αποδόσεις όταν παράγει σαν να είχε διαφορετικού τύπου κόστη (όπως είδαμε ότι ο high cost Monopol επιλέγει high output για να αποκρύψει πληροφορία για τα κόστη του στον Entrant).

Είδαμε ότι η ποσότητα παραγωγής που μεγιστοποιεί τα κέρδη του μονοπωλητή ανάλογα με την περίσταση είναι $q_1^* = {}^{M-c_1}/_2$.

Άρα το high output που παράγει ο low cost μονοπωλητής είναι $q_L = {}^{14-c_L}/_2 = {}^{14-6}/_2 = 4$

Άρα το low output που παράγει ο high cost μονοπωλητής είναι $q_H = {}^{14-c_H}/_2 = {}^{14-8}/_2 = 3$

Χρησιμοποιούμε λοιπόν απλά την συνάρτηση κέρδους του μονοπωλητή, βάζοντας αντίθετα τις ποσότητες παραγωγής με τα σωστά κόστη:

Αν είναι high cost και παράγει high output $\Pi_1 = (M - q_L) \cdot q_L - c_H \cdot q_L = 14 \cdot 4 - 4^2 - 8 \cdot 4 = 56 - 48 = 8$εκ€

Αν είναι low cost και παράγει low output $\Pi_1 = (M - q_H) \cdot q_H - c_L \cdot q_H = 14 \cdot 3 - 3^2 - 6 \cdot 3 = 42 - 27 = 15$εκ€

Πάμε στην περίπτωση εισόδου στην αγορά του παίκτη 2, οπότε θυμίζουμε την ισορροπία στο μοντέλο Cournot, που καθορίζει τις ποσότητες παραγωγής που μεγιστοποιούν το κέρδος κάθε εταιρείας.

Έχουμε $\Pi_1 = (M - q_1 - q_2)\, q_1 - c_1 q_1 = -q_1^2 + (-q_2 + M - c_1)\, q_1$
και $\Pi_2 = (M - q_1 - q_2)\, q_2 - c_2 q_2 = -q_2^2 + (-q_1 + M - c_2)\, q_2$.

Άρα σύμφωνα με τον έλεγχο ισορροπίας Nash, η ισορροπία προκύπτει από την λύση του συστήματος

$$\tfrac{\partial \Pi_1}{\partial q_1} = -2q_1 - q_2 + M - c_1 = 0 \Rightarrow 2q_1 + q_2 = M - c_1$$

$$\tfrac{\partial \Pi_2}{\partial q_2} = -q_1 - 2q_2 + M - c_2 = 0 \Rightarrow q_1 + 2q_2 = M - c_2$$

Λύνοντας ως προς q_1, q_2 το σύστημα παίρνουμε: $q_1^* = \frac{M+c_2-2c_1}{3}$ και $q_2^* = \frac{M+c_1-2c_2}{3}$ που αποτελεί την ισορροπία Nash (q_1^*, q_2^*) του παιγνίου. Επίσης $\frac{\partial^2 \Pi_1(q_1^*, q_2^*)}{\partial q_1^2} = -2 < 0$ και $\frac{\partial^2 \Pi_2(q_1^*, q_2^*)}{\partial q_2^2} = -2 < 0$ οπότε επαληθεύεται η ισορροπία Nash. Ακόμη, παρατηρούμε πως αν $M > c_1 + c_2$ τότε και οι δύο εταιρείες παράγουν θετικές ποσότητες προϊόντων, που είναι και το θεμιτό για να υπάρχει λογική συνέχεια.

Αντικαθιστούμε τα q_1^*, q_2^* στην συνάρτηση κέρδους του μονοπωλητή και

$\Pi_1 = -q_1^2 + (-q_2 + M - c_1)\, q_1 = -\left(\frac{M+c_2-2c_1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{M+c_1-2c_2}{3} + M - c_1\right) \cdot \frac{M+c_2-2c_1}{3} = -\frac{(M+c_2-2c_1)^2}{9} - \frac{(M+c_1-2c_2)(M+c_2-2c_1)}{9} + \frac{M^2+Mc_2-2c_1M}{3} - c_1\frac{M+c_2-2c_1}{3}$

$= -\frac{M^2+c_2^2+4c_1^2+2c_2M-4c_1c_2-4c_1M}{9} - \frac{M^2+Mc_2-2c_1M+Mc_1+c_1c_2-2c_1^2-2c_2M-2c_2^2+4c_1c_2+3M^2+3c_2M-6c_1M-3c_1M+3c_1c_2-6c_1^2}{9} =$

$= \frac{-M^2-c_2^2-4c_1^2-2c_2M+4c_1c_2+4c_1M-M^2+Mc_2+Mc_1-5c_1c_2+2c_2^2+2c_1^2+3M^2+3c_2M-9c_1M-3c_1c_2+6c_1^2}{9} = \frac{M^2+c_2^2+4c_1^2+2c_2M-4c_1c_2-4c_1M}{9} = \frac{(M+c_2-2c_1)^2}{9} = \frac{(14+7-2c_1)^2}{9}$

Αντίστοιχα προκύπτει $\Pi_2 = \frac{(M+c_1-2c_2)^2}{9} - F = \frac{(14+c_1-14)^2}{9} - 6$. Οπότε:

Αν ο Monopol είναι high cost και εισέλθει στην αγορά ο Entrant, ο Monopol έχει απόδοση $\Pi_1 = \frac{(21-2c_H)^2}{9} = \frac{(21-2\cdot 8)^2}{9} = \frac{25}{9} = 2,7777$εκ€

Αν ο Monopol είναι high cost και εισέλθει στην αγορά ο Entrant, ο Entrant έχει απόδοση $\Pi_2 = \frac{c_H^2}{9} - 6 = \frac{8^2}{9} - 6 = 1,1111$εκ€

Αν ο Monopol είναι low cost και εισέλθει στην αγορά ο Entrant, ο Monopol έχει απόδοση $\Pi_1 = \frac{(21-2c_L)^2}{9} = \frac{(21-2\cdot 6)^2}{9} = \frac{81}{9} = 9$εκ€

Αν ο Monopol είναι low cost και εισέλθει στην αγορά ο Entrant, ο Entrant έχει απόδοση $\Pi_2 = \frac{c_L^2}{9} - 6 = \frac{6^2}{9} - 6 = -2$εκ€

Μπορούμε πλέον να κατασκευάσουμε το δέντρο του παιγνίου έχοντας όλες τις αποδόσεις. Ακολουθεί στο σχήμα

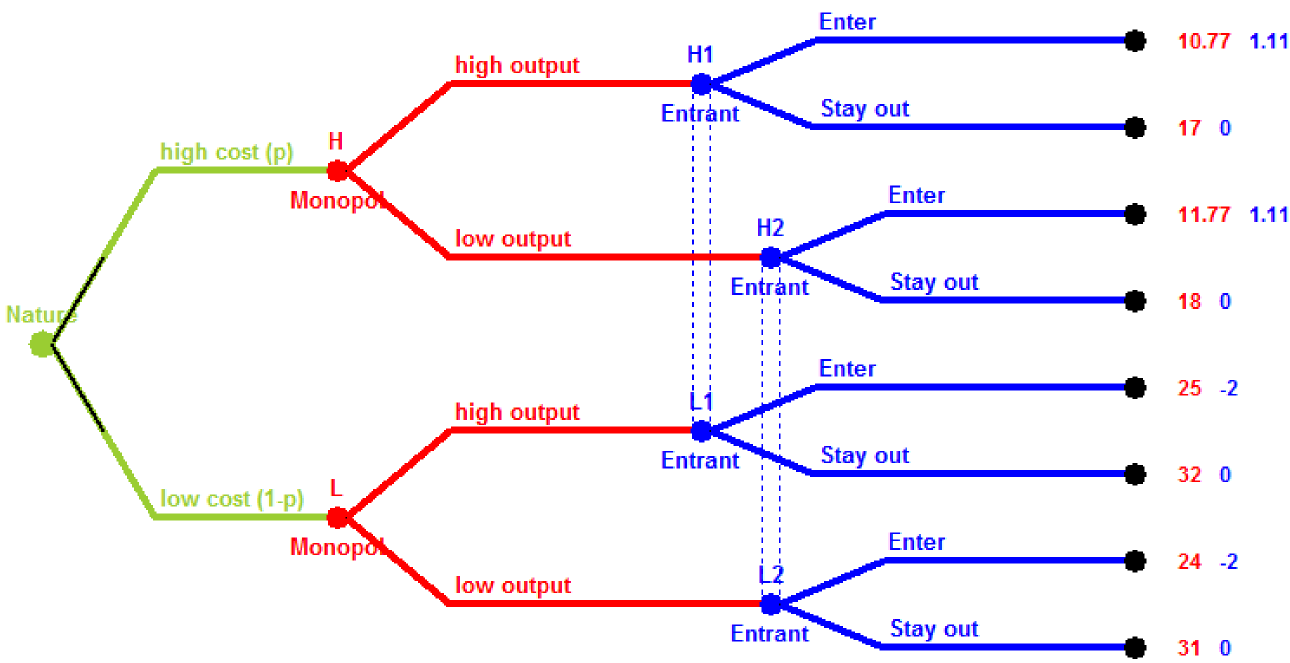

Figure 17: Δύο περίοδοι παραγωγής Monopol-Δυοπώλιο Cournot αν εισέλθει Entrant

Αναζητούμε ισορροπία στο παίγνιό μας. Το σκεπτικό μας είναι ότι έχουμε τρεις εκδοχές με τις οποίες μπορεί να ενεργήσει ο παίκτης 1 και βάση αυτών των προφίλ θα αναζητήσουμε την διαδοχική μας ισορροπία που είναι και Bayesian Nash Equilibrium και SPNE όπως έχουμε δει.

- Πρώτο σκεπτικό: Ο Monopol, ανάλογα αν είναι high cost ή low cost θα ενστερνιστεί και εκτελέσει διαφορετικές ενέργειες (low output ή high output), θα "διαχωρίσει" δηλαδή μέσω των πράξεών του τους τύπους του και τότε εφόσον υφίσταται ισορροπία μιλάμε για "διαχωριστική ισορροπία" (separating equilibrium).
- Δεύτερο σκεπτικό: Ο Monopol, είτε είναι high cost είτε low cost θα ενστερνιστεί και εκτελέσει την ίδια ενέργεια (είτε low output είτε high output), θα "συγκεντρώσει" δηλαδή μέσω των πράξεών του τους τύπους του και τότε εφόσον υφίσταται ισορροπία μιλάμε για "συγκεντρωτική ισορροπία" (pooling equilibrium).
- Τρίτο σκεπτικό: Ο Monopol, θα εκτελέσει σίγουρα κάποια ενέργεια για έναν τύπο του (όπως στο πρώτο σκεπτικό) και θα παίξει με μία συγκεκριμένη πιθανότητα ανάμεσα στις πιθανές ενέργειες για τον άλλο του τύπο. Θα "ημι-διαχωρίσει" δηλαδή μέσω των πράξεών του τους τύπους του και τότε εφόσον υφίσταται ισορροπία μιλάμε για "ημιδιαχωριστική ισορροπία" (semi-separating equilibrium).

Τα παραπάνω σκεπτικά συλλαμβάνουν όλες τις πιθανές εναλλακτικές του παίκτη άρα και όλου του παιγνίου. Επίσης μπορούν να υφίστανται όλες ή κάποιες ή κάποια από αυτές τις ισορροπίες. Μην ξεχνάμε ότι αντιμετωπίζουμε δυναμικό παίγνιο ατελούς πληροφόρησης με την φύση επίσης να κινείται οπότε η ισορροπία πηγάζει μέσω πεποιθήσεων και οριζόντων στρατηγικών συνεπών με αυτές τις πεποιθήσεις οπότε δεν υπάρχει κάποια "πεπατημένη" ή μεθοδολογία για την εύρεση ισορροπίας. Αναζητούμε διαδοχική ισορροπία και ένα πλαίσιο στο οποίο θα ενεργήσουν οι παίκτες το οποίο μεταβάλλεται όταν μεταβάλλονται οι πεποιθήσεις και ειδικά η βασική πεποίθηση για όλο το παίγνιο που είναι αυτή του παίκτη 2 για τα επίπεδα κόστους του παίκτη 1, τα p και 1-p τα οποία προσέδωσε η φύση.

Θα καθορίσουμε ένα γενικό πλαίσιο και μετά θα δούμε ειδικά για p=0.1, p=0.3, p=0.7 και p=0.8 την ισορροπία του παιγνίου.

Separating equilibrium

Ξεκινάμε αναζητώντας γενικά separating equilibrium. Στα πλαίσια του πρώτου σκεπτικού που παραθέσαμε, ξέρουμε με βεβαιότητα ότι ο Monopol έχει μόνο δύο πιθανές στρατηγικές: Είτε και οι δύο τύποι του Monopol παράγουν βάση του τύπου τους, είτε αντίθετα από αυτόν. Είναι και τα δύο πιθανά, αλλά εφόσον ακολουθούμε ορθολογική σκέψη, άρα και οι παίκτες μας, το πιο λογικό είναι να αναζητήσουμε ισορροπία για την περίπτωση στην οποία ο hig cost Monopol επιλέγει low output ενώ ο low cost Monopol επιλέγει high output. Δείξαμε και πριν ότι ένας χαμηλού κόστους μονοπωλητής, θα μεγιστοποιούσε τις αποδόσεις του παίζοντας high output σε κάθε περίοδο, ενώ ένας υψηλού κόστους παίζοντας low output σε κάθε περίοδο. Οπότε είναι λογικό και μεγιστοποιεί την αναμενόμενη απόδοση να παράγουν βάση του τύπου τους και όχι αντίθετα. Εξάλλου το high output είναι αυστηρά κυρίαρχη στρατηγική για τον low cost μονοπωλητή σε κάθε περίπτωση και δεν έχει ποτέ κανένα λόγο να κάνει low output στην πρώτη περίοδο.

Δεδομένων αυτών για τον Monopol, τί πεποιθήσεις πρέπει να έχει ο Entrant για το τί τύπο εταιρείας έχει απέναντί του, όταν παρατηρεί την επιλογή επιπέδου παραγωγής του παίκτη 1; Έπειτα, δεδομένων αυτών των πεποιθήσεων, ποιές επιλογές του Entrant συντελούν τώρα την καλύτερη απάντηση; Πρέπει λοιπόν να εξάγουμε τις πεποιθήσεις ώστε να είναι συνεπείς με την στρατηγική του Monopol. Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Bayes θα βρούμε φυσικά τα ζητούμενα.

Η πεποίθηση του υποψήφιου νεοεισερχόμενου σχετικά με την πιθανότητα ότι ο Monopol είναι high cost εταιρεία, δεδομένου ότι έχει παρατηρήσει low output βρίσκεται από την προτεινόμενη στρατηγική του Monopol παίρνοντας την πιθανότητα ένας high cost μονοπωλητής να επιλέξει low output (1) επί την πιθανότητα ο μονοπωλητής να είναι high cost (p) και όλο αυτό διά το ποσοστό του συνόλου των μονοπωλητών (τύπων) που επιλέγουν low output. Το ποσοστό αυτό είναι ο αριθμητής συν το ποσοστό των μονοπωλητών low cost που επιλέγουν low output (0) επί το ποσοστό των μονοπωλητών που είναι low cost (1-p). Αν ονομάσουμε τα σύνολα πληροφοριών μας στο δέντρο $A = \{H_1, L_1\}$, $B = \{H_2, L_2\}$ λοιπόν είναι $P\left({}^{high\ cost}/_{low\ output}\right) = P\left(H_2/B\right) = \frac{P(B/H_2)p}{P(B/H_2)p+P(B/L_2)(1-p)} = \frac{1\cdot p}{1\cdot p+0\cdot(1-p)} = \frac{p}{p} = 1$

Εδώ βέβαια που εξετάζουμε separating equilibrium είναι πολύ απλό να εξάγουμε αυτήν και όλες τις πεποιθήσεις διαισθητικά, αφού στην βάση της ισορροπίας βρίσκεται η παραδοχή ότι μόνο οι high cost μονοπωλητές επιλέγουν low output. Οπότε ποια είναι η πιθανότητα ο Monopol να είναι high cost δεδομένου ότι παρατηρήθηκε να επιλέγει low output; Προφανώς 1.

Αντίστοιχα αφού καμία high cost εταιρεία δεν επιλέγει high output, έχουμε $P\left({}^{high\ cost}/_{high\ output}\right) = 0$

Ουσιαστικά αφού ο Monopol επιλέγει διαφορετικές ενέργειες ανάλογα με τον τύπο του, ο Entrant μπορεί με σιγουριά να συμπεράνει τον τύπο του Monopol από την ενέργεια που παρατηρεί. Τώρα, δεδομένων αυτών των πεποιθήσεων καθορίζουμε τις επιλογές του Entrant.

Αν παρατηρήσει low output, συμπεραίνει ότι ο παίκτης 1 έχει υψηλά κόστη οπότε και βρίσκεται στον κόμβο επιλογής του H_2. Συγκρίνοντας την αναμενόμενη απόδοση από την είσοδο στην αγορά (1,11) με αυτήν της παραμονής εκτός (0), αφού 1,11>0 εισέρχεται στην αγορά.

Αν παρατηρήσει high output, συμπεραίνει ότι ο παίκτης 1 έχει χαμηλά κόστη οπότε και βρίσκεται στον κόμβο επιλογής του L_1. Συγκρίνοντας την αναμενόμενη απόδοση από την είσοδο στην αγορά (-2) με αυτήν της παραμονής εκτός (0), αφού -2<0 δεν εισέρχεται στην αγορά.

Αν ονομάσουμε τις επιλογές του Monopol: από τον κόμβο $H \to \{hoH, loH\}$, $L \to \{hoL, loL\}$ και

τις επιλογές του Entrant: από το σύνολο πληροφοριών $A = \{H_1, L_1\}$,$A \to$

$\{enA, saA\}$, από το σύνολο πληροφοριών $B = \{H_2, L_2\}$, $B \to \{enB, saB\}$

έχουμε τώρα τον ορίζοντα στρατηγικής συμπεριφοράς $s = (s_1, s_2)$ που δίνεται από

$s_1(hoH) = 0$, $s_1(loH) = 1$, $s_1(hoL) = 1$, $s_1(loL) = 0$ και $s_2(enA) = 0$, $s_2(saA) = 1$, $s_2(enB) = 1$, $s_2(saB) = 0$

και το σύστημα πεποιθήσεων μ που είναι συνεπές με αυτό και δίνεται από

$\mu(H) = p$, $\mu(L) = 1 - p$, $\mu(H_1) = 0$, $\mu(H_2) = 1$, $\mu(L_1) = 1$, $\mu(L_2) = 0$

τα οποία δομούν την προτεινόμενη ισορροπία. Δηλαδή

$$Monopol \begin{cases} low\ output\ \alpha\nu & high\ cost \\ high\ output\ \alpha\nu & low\ cost \end{cases}$$

$$Entrant \begin{cases} Stay\ out\ \alpha\nu\ \delta\varepsilon\iota\varsigma & high\ output \\ Enter\quad \alpha\nu\ \delta\varepsilon\iota\varsigma & low\ output \end{cases}$$

με πεποίθηση σχετικά με το αν αντιμετωπίζει high cost εταιρεία $\mu\left({}^{high\ cost}/_{high\ output}\right) = 0$, $\mu\left({}^{high\ cost}/_{low\ output}\right) = 1$

Δεν έχουμε βρει ακόμα ισορροπία, για αυτό λέμε προτεινόμενη. Αυτός είναι ο ορίζοντας στρατηγικής με τον οποίο ο Entrant αντιδρά βέλτιστα στον Monopol, δεδομένων των πεποιθήσεων που εξάγονται από την αρχική υπόθεση για την στρατηγική του Monopol, για separating equilibrium. Για τον Monopol όμως ο ορίζοντας στρατηγικής είναι ακόμα αυτό που προτείναμε, δηλαδή μια υπόθεση, μια πιθανότητα στην αναζήτηση separating equilibrium. Πρέπει τώρα να πιστοποιήσουμε ότι και ο Monopol αντιδρά βέλτιστα στις ενέργειες του Entrant. O low cost μονοπωλητής επιλέγει προφανώς την βέλτιστη επιλογή του (high output) όπως προείπαμε και δεν έχει ποτέ λόγο να αποκλίνει από αυτή. O high cost Monopol όμως έχει την επιλογή που έχουμε παραθέσει, δηλαδή να κάνει low output, να εισέλθει στην αγορά ο Entrant και να λάβει τελικά απόδοση 11,77 και την επιλογή να κάνει high output, να μείνει εκτός αγοράς ο Entrant και να αποκομίσει τελικά 17. Προφανώς ο high cost Monopol θα προτιμούσε να αποκλίνει από την προτεινόμενη στρατηγική.

Αυτό όμως θα σήμαινε ότι παράγει αντίθετα από τον τύπο του αφού εξετάζουμε το σκεπτικό separating equilibrium, άρα θα σήμαινε ότι ο low cost Monopol επιλέγει να κάνει low output, το οποίο επίσης δεν μπορεί να υποστηρίξει την δόμηση διαδοχικής ισορροπίας. Οπότε, δεν μπορούμε να συντάξουμε ισορροπία. Η εκδοχή για ύπαρξη separating equilibrium απορρίπτεται (και μάλιστα ανεξάρτητα από το p, την πεποίθηση για high ή low cost), οπότε η αναζήτηση ισορροπίας πρέπει να γίνει στα άλλα δύο σκεπτικά σε κάθε εκδοχή του παιγνίου.

Θα μπορούσαμε να καταλήξουμε σε separating equilibrium για το παίγνιο που εξετάζουμε γενικότερα, αλλά θα έπρεπε ο low cost μονοπωλητής να παράγει ακόμα υψηλότερα στην πρώτη περίοδο από την βέλτιστη ποσότητα παραγωγής που μεγιστοποιεί τα κέρδη του, για να "διαχωρίσει" τον εαυτό του από έναν υψηλού κόστους Monopol. Αυτό θα απαιτούσε ένα συνεχές ευρύ φάσμα ποσοτήτων παραγωγής για την πρώτη περίοδο και όχι τον περιορισμό σε δύο επιλογές high output ή low output που έχουμε εδώ. Δεν σημαίνει ότι θα είχε κάποιο όφελος να το κάνει αυτό, αλλά θα μπορούσαμε σε τεχνικό επίπεδο να φτάσουμε σε ισορροπία.

Separating equilibrium-Γενική περίπτωση

Μάλιστα, θα δείξουμε τώρα όλα τα παραπάνω εξετάζοντας separating equilibrium στην γενική περίπτωση δίνοντας εύρος στην δυνατότητα επιλογής ποσοτήτων παραγωγής, χρησιμοποιώντας τους γενικούς τύπους που καθορίσαμε στο μοντέλο Cournot. Για αυτό και ο καθορισμός των ποσοτήτων παραγωγής στην ισορροπία Cournot έγινε αναλυτικά και καταλήξαμε σε γενικούς τύπους. Αν συγκεντρώσουμε τους υπολογισμούς μας για τα κέρδη στην περίπτωση μονοπωλίου και στην περίπτωση ανταγωνισμού σε μοντέλο Cournot έχουμε:

	Είσοδος Entrant κ' $c_1 = c_L$	Είσοδος Entrant κ' $c_1 = c_H$	Entrant εκτός
Κέρδος Monop.c_L	$(M + c_2 - 2c_L)^2/9$		$(M - c_L)^2/4$
Κέρδος Monop.c_H		$(M + c_2 - 2c_H)^2/9$	$(M - c_H)^2/4$
Κέρδος Entrant	$(M + c_L - 2c_2)^2/9 \; - F$	$(M + c_H - 2c_2)^2/9 \; - F$	0

Table 17: Αποδόσεις παιγνίου αναλυτικά βάση κόστους

Έχουμε πει και δείξει ορθολογικά ότι υπό πλήρη, τέλεια πληροφόρηση ο Entrant θα εισερχόταν στην αγορά μόνο αν ο Monopol ήταν high cost εταιρεία. Αυτό εκφράζεται ως $(M + c_H - 2c_2)^2/9 > F > (M + c_L - 2c_2)^2/9$. Σε separating equilibrium, ο Entrant εισέρχεται πάλι μόνο αν ο Monopol είναι high cost αφού όπως είδαμε μπορεί να αντιληφθεί τον τύπο του. Έστω $q_{H'}$ και $q_{L'}$ οι ποσότητες παραγωγής που επιλέγονται από τον high cost Monopol και τον low cost Monopol αντίστοιχα. Άρα, απαραίτητη προϋπόθεση είναι:

$(M - q_{L'} - c_L)\, q_{L'} + \frac{(M-c_L)^2}{4} \geq (M - q_{H'} - c_L)\, q_{H'} + \frac{(M+c_2-2c_L)^2}{9}$ (1)

$(M - q_{H'} - c_H)\, q_{H'} + \frac{(M+c_2-2c_H)^2}{9} \geq (M - q_{L'} - c_H)\, q_{L'} + \frac{(M-c_H)^2}{4}$ (2)

Η σχέση (1) υποδηλώνει ότι μία low cost εταιρεία δεν θα έπρεπε να επιλέξει την ποσότητα μίας high cost εταιρείας ενώ η σχέση (2) το αντίθετο. Ακριβώς αυτό που υποθέτουμε αναζητώντας separating equilibrium δηλαδή και το δείχνουμε σε περιγραφική σχέση βάση ποσοτήτων παραγωγής και κόστους.

Επίσης, βλέπουμε (όπως δείξαμε πριν ότι η ποσότητα παραγωγής που μεγιστοποιεί τα κέρδη του μονοπωλητή ανάλογα με την περίσταση είναι $q_1^* = {}^{M-c_1}/_2$) ότι $q_{H'} = {}^{M-c_H}/_2$ σε κάθε τέλεια Bayesian ισορροπία. Αυτό γιατί στην χειρότερη περίπτωση για ένα high cost Monopol θα εισέλθει στην αγορά ο Entrant. Θα υπάρξει σίγουρα είσοδος σε separating equilibrium μετά από την παρατήρηση $q_{H'}$από την μεριά του Entrant. Ως εκ τούτου αν $q_{H'} \neq {}^{M-c_H}/_2$ θα υπήρχε ευκαιρία για επωφελή μονομερή απόκλιση για έναν high cost Monopol, το οποίο δεν συμβαδίζει με την ύπαρξη τέλειας ισορροπίας σε κάθε υποπαίγνιο.

Σε μία απλή ισορροπία Nash ωστόσο δεν είναι απαραίτητα $q_{H'} = {}^{M-c_H}/_2$. Σε μία ισορροπία Nash, ο Entrant θα μπορούσε να παίξει κάτι διαφορετικό από την ισορροπία δυοπωλίου Cournot, εκτός του μονοπατιού ισορροπίας (έχουμε δει αναλυτικά ότι η ισορροπία Nash δεν εξετάζει τί συμβαίνει εκτός μονοπατιού ισορροπίας). Για παράδειγμα, έστω $q^*_{H'}$, $q^*_{L'}$ οι ποσότητες ισορροπίας της πρώτης περιόδου και θεωρούμε μια στρατηγική όπου ο Entrant δεν εισέρχεται στην αγορά μόνο αν $q = q^*_{L'}$, εισέρχεται στην αγορά και παίζει την ποσότητα ισορροπίας Cournot αν $q = q^*_{H'}$ (μέχρι εδώ όλα καλά) και τέλος εισέρχεται στην αγορά και παίζει $q_2 = M$ αν $q \neq \{q^*_{L'}, q^*_{H'}\}$. Ουσιαστικά έχουμε μία μη αξιόπιστη απειλή από τον Entrant ότι θα "πλημμυρίσει" την αγορά σε περίπτωση που το μονοπώλιο επιλέξει "λάθος" ποσότητα στην πρώτη περίοδο. Αυτή η στρατηγική θα έδινε αναμενόμενο κέρδος 0 στον Monopol αν $q \neq \{q^*_{L'}, q^*_{H'}\}$ και υπονοεί ότι μπορεί σε αυτό το πλαίσιο να υποστηρίξει ένα εύρος τιμών για το $q_{H'}$.

Αντίστοιχα με το $q_{H'}$, το $(M + c_2 - 2c_L)^2/9$ είναι η χειρότερη δυνατή απόδοση δεύτερης περιόδου για έναν low cost Monopol. Συνεπώς, αν η low cost εταιρεία επέλεγε την βέλτιστη ποσότητα μονοπωλίου την πρώτη περίοδο, θα πάρει απόδοση τουλάχιστον

$\frac{(M-c_L)^2}{4} + \frac{(M+c_2-2c_L)2}{9} \geq (M - q_{H'} - c_L)\, q_{H'} + \frac{(M+c_2-2c_L)^2}{9}$ (3)

Συγκεντρώνοντας τα παραπάνω, τις απαραίτητες προϋποθέσεις που διατυπώσαμε και τις ελάχιστες αποδόσεις των δύο τύπων μονοπωλίων, οδηγούμαστε σε δύο περιορισμούς ώστε τα κίνητρα των παικτών να είναι ορθολογικά, να έχουν νόημα και δυνατότητα επίτευξης ωφέλειας, απόδοσης:

$(M - q_{L'} - c_L)\, q_{L'} + \frac{(M-c_L)^2}{4} \geq \frac{(M-c_L)^2}{4} + \frac{(M+c_2-2c_L)^2}{9}$

και

$\frac{(M-c_H)^2}{4} + \frac{(M+c_2-2c_H)^2}{9} \geq (M - q_{L'} - c_H)\, q_{L'} + \frac{(M-c_H)^2}{4}$

όπου αντικαταστήσαμε στην (1) το δεξί μέλος της μέσω της (3) για την low cost εταιρεία και αφαιρέσαμε το $q_{H'} = {}^{M-c_H}/_2$ στην (2) για την high cost εταιρεία.

Έστω V_L και V_H η επιπλέον αξία (απόδοση) του να κρατήσει η low cost και high cost εταιρεία αντίστοιχα τον Entrant εκτός αγοράς. Αυτές είναι σύμφωνα με το πινακάκι μας

$V_L = \frac{(M-c_L)^2}{4} - \frac{(M+c_2-2c_L)2}{9}$, $V_H = \frac{(M-c_H)^2}{4} - (M + c_2 - 2c_H)^2$

Εδώ βλέπουμε ότι μπορεί να έχουμε $V_L < V_H$ αλλά και $V_L > V_H$ ανάλογα με το κόστος του παίκτη 2 c_2. Ουσιαστικά όσο το c_2 αυξάνεται, κάποια στιγμή φτάνει οριακά σε ένα σημείο όπου το κέρδος του δυοπωλίου ισούται με το κέρδος του μονοπωλίου για την low cost εταιρεία. Εκεί, σε αυτό το κόστος, ο Entrant θα συνεχίσει να παράγει μία θετική ποσότητα ανταγωνιζόμενος την high cost εταιρεία, οπότε η high cost εταιρεία έχει ακόμα ένα καθαρό κέρδος από την παραμονή του Entrant εκτός αγοράς. Βέβαια, για $c_2 = c_L$ είναι $V_L > V_H$, οπότε η μεγαλύτερη απόδοση σε περίπτωση μονοπωλίου υπερτερεί. (Εμείς έχουμε θεωρήσει $c_2 = 7 > c_L = 6$, το οποίο είναι μεν λίγο μεγαλύτερο αλλά προφανώς όχι σε βαθμό που το low cost μονοπώλιο να έχει μικρότερο κέρδος).

Επιλύουμε ορθολογικά και από οικονομικής πλευράς, θεωρώντας $V_L \geq V_H$. Η αναμενόμενη απόδοση για κάθε τύπο Monopol σε περίπτωση που είναι μόνος στην αγορά ως μονοπώλιο και γενικά από την συνάρτηση κέρδους του συναρτήσει της ποσότητας παραγωγής q είναι

$\Pi_L^{Mnp} = \frac{(M-c_L)^2}{4}$, $\Pi_H^{Mnp} = \frac{(M-c_H)^2}{4}$, $\Pi_L(q) = (M - q - c_L)\, q$, $\Pi_H(q) = (M - q - c_H)\, q$

οπότε απαραίτητοι ορθολογικοί περιορισμοί εδώ είναι

$V_H \leq \Pi_H^{Mnp} - \Pi_H(q_L)$, $V_L \geq \Pi_L^{Mnp} - \Pi_L(q_L)$

Στα πλαίσια αυτών των δύο ανισοτήτων θα μπορούσαμε να καθορίσουμε ποσότητα ή και ποσότητες q_L σε ένα εύρος που δίνουν separating equilibrium. Οι πεποιθήσεις δεν αλλάζουν, δηλαδή αν ο Entrant παρατηρήσει κάποιο $q \neq q_L$πιστεύει με σιγουριά ότι η εταιρεία είναι high cost, οπότε κάθε απόκλιση q για την low cost εταιρεία δίνει απόδοση

$(M - q - c_L)\, q_H + \frac{(M+c_2-2c_L)2}{9} \leq \frac{(M-c_L)^2}{4} + \frac{(M+c_2-2c_L)^2}{9}$ οπότε η απόκλιση στο επίπεδο παραγωγής του μονοπωλίου (μόνο του στην αγορά) είναι η βέλτιστη απόκλιση δεδομένων αυτών των πεποιθήσεων.

Επίσης, από την πλευρά μίας high cost εταιρείας κάθε $q = q_L$ δίνει κέρδος

$(M - q - c_H)\, q + \frac{(M+c_2-2c_L)2}{9}$ με αυτές τις πεποιθήσεις, το οποίο προφανώς μεγιστοποιείται για $q = q_H$.

Με άλλα λόγια, αν η μόνη ποσότητα που αποτρέπει την είσοδο στην αγορά του Entrant είναι η q_L, τότε η βέλτιστη ποσότητα της πρώτης περιόδου για μία high cost εταιρεία είναι είτε q_L, είτε η ποσότητα μονοπωλίου όταν είναι μόνο του στην αγορά.

Μόλις δείξαμε ότι εν δυνάμει θα μπορούσε να δομηθεί separating equilibrium, αλλά στην περίπτωσή μας που έχουμε δύο ξεκάθαρα αντίθετες επιλογές χωρίς εύρος, είναι αδύνατον, αφού η low cost θα επιλέξει ξεκάθαρα το βέλτιστο q που μεγιστοποιεί τα κέρδη της σαν μονοπώλιο στην πρώτη περίοδο, δηλαδή $(M - c_L)^2/4$ και αυτό δεν μπορεί να είναι κάποιο q_L που θα προσφέρει separating equilibrium, ενώ η high cost εταιρεία είδαμε ότι έχει κίνητρο να αποκλίνει σε αυτή την περίπτωση και να παράγει σαν να ήταν low cost το οποίο επιβεβαιώνει όσα είπαμε και οδηγεί στην αναζήτηση pooling equilibrium.

Pooling equilibrium

Θα εξετάσουμε τώρα την περίπτωση που ο Monopol εκτελεί την ίδια ενέργεια, θέτει το ίδιο επίπεδο παραγωγής ανεξαρτήτως του κόστους του (του τύπου του), αναζητώντας την ύπαρξη pooling equilibrium. Αυτό σημαίνει ότι κάποιος εκ των δύο τύπων μονοπωλίου πρέπει να παράγει αντίθετα από τον τύπο του την πρώτη περίοδο. Το ορθολογικό είναι να το πράξει ο high cost Monopol όπως έχουμε δει, αφού αν κάποια εταιρεία είναι low cost δε θα ήθελε ποτέ να παράγει σαν να ήταν high cost, αφού έτσι απλά θα αύξανε την πιθανότητα να εισέλθει ο Entrant, κάνοντας ακριβώς αυτό που προσπαθεί να αποφύγει. Ο high cost από την άλλη παράγοντας σαν low cost μπορεί να αποτρέψει την είσοδο του Entrant. Θα παράγει ένα μέγεθος που δεν μεγιστοποιεί το βραχυπρόθεσμο κέρδος του αν αυτό τελικά αποθαρρύνει τον Entrant από το να εισέλθει και μεγιστοποιεί στο τέλος το μακροπρόθεσμο κέρδος του.

Ξεκινάμε οπότε με αυτή την ορθολογική υπόθεση, ο Monopol είτε είναι low cost είτε είναι high cost, επιλέγει high output. Θα βρούμε την βέλτιστη απάντηση του Entrant σε αυτή την στρατηγική. Ας δούμε ποιες είναι τώρα οι πεποιθήσεις του δεδομένων των προαναφερθέντων. Αν παρατηρήσει high output, ποια είναι η ορθολογική πεποίθησή του για την πιθανότητα ο παίκτης 1 να είναι high cost; Ο κανόνας του Bayes δίνει:

$P\left({}^{high\ cost}/_{high\ output}\right) = P\left(H_1/B\right) = \frac{P(B/H_1)p}{P(B/H_1)p+P(B/L_1)(1-p)} = \frac{1\cdot p}{1\cdot p+1\cdot(1-p)} = \frac{p}{1} = p.$

Δηλαδή εδώ βλέπουμε καθαρά πλέον αυτό που είπαμε, ότι ο Entrant δεν αποσπά κάποια πληροφορία σχετικά με τα κόστη του Monopol αν και ο high cost κάνει high output, αφού η πεποίθηση p που είχε στην αρχή ο παίκτης 2 παρέμεινε ίδια. Ο τύπος του Bayes θυμόμαστε και από προηγούμενα παραδείγματά μας ότι προσφέρει μία καλύτερη εικόνα, δεδομένου ότι κάτι συνέβη, αναπροσαρμόζει τις πεποιθήσεις των παικτών ώστε εκεί που θεωρούσαν ότι κάτι θα συμβεί με πιθανότητα p, να έχουν μετά μία άλλη πιο αντιπροσωπευτική. Εδώ όμως η πεποίθηση είναι ίδια με την αρχική.

Εξάγουμε και ορθολογικά το ίδιο συμπέρασμα χωρίς τον τύπο του Bayes. Αν ποσοστό p των Monopol είναι high cost και κάθε τύπος Monopol, δηλαδή όλοι, κάνουν high output, τότε ποσοστό p των μονοπωλίων που κάνουν high output πρέπει να είναι high cost. Αντίστοιχα το $P\left({}^{low\ cost}/_{high\ output}\right) = 1 - p$ φυσικά.

Περίπτωση p=0,1

Πάμε στην πρώτη ειδική περίπτωση όπου p=0,1 (άρα 1-p=0,9) για να υπολογίσουμε αναμενόμενα κέρδη και να δούμε την ισορροπία σε αυτή την περίπτωση, συνεχίζοντας την ανάλυσή μας σε pooling equilibrium. Το παίγνιό μας έχει ως εξής

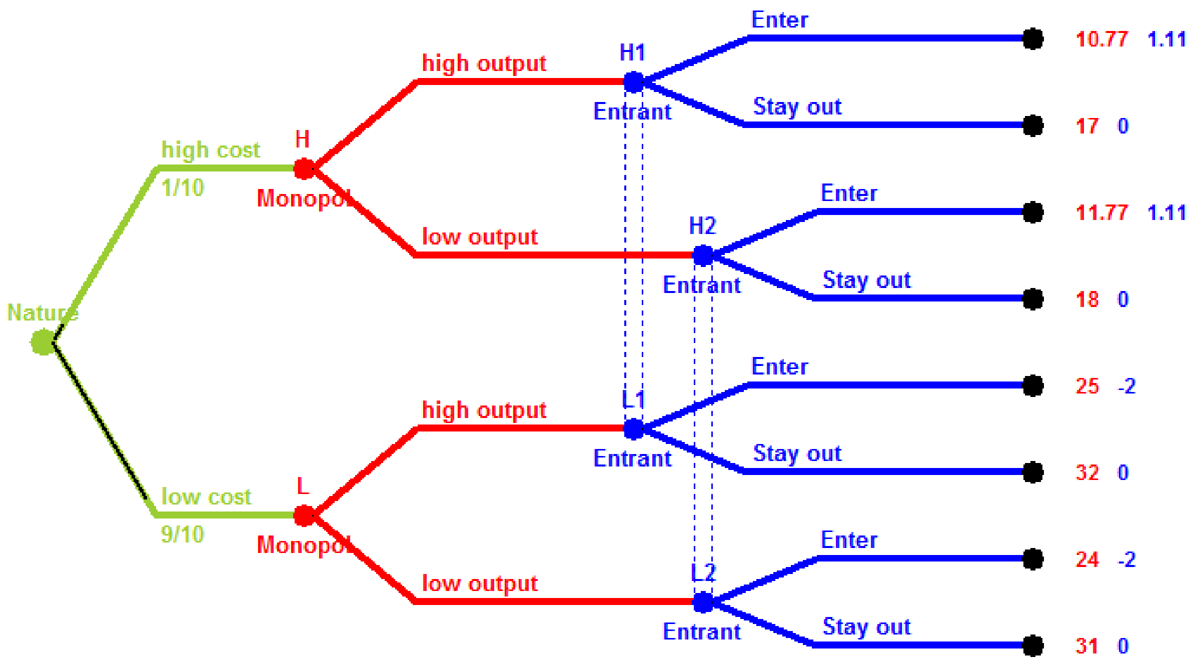

Figure 18: Περίπτωση p=0,1

Έχουμε $P\left({}^{high\ cost}/_{high\ output}\right) = p = 0,1$ και $P\left({}^{low\ cost}/_{high\ output}\right) = 1 - p = 0,9$

Ο Entrant στηριζόμενος στις πεποιθήσεις αυτές συγκρίνει την αναμενόμενη απόδοση της εισόδου του στην αγορά με αυτήν της παραμονής εκτός αγοράς από το σύνολο πληροφοριών του $A = \{H_1, L_1\}$. Έχουμε

$U\left(Enter\right) = 0,1 \cdot 1,11 + 0,9 \cdot (-2) = -1,689$

$U\left(Enter\right) = 0,1 \cdot 0 + 0,9 \cdot 0 = 0$

οπότε προφανώς δεν εισέρχεται στην αγορά αν παρατηρήσει high output στην πρώτη περίοδο αφού -1,689<0.

Τί γίνεται αν ο παίκτης 2 παρατηρήσει low output στην πρώτη περίοδο; Σύμφωνα με την στρατηγική ισορροπίας, κανένας Monopol δεν θα έπρεπε να επιλέγει low output και δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο του Bayes αφού έχουμε μηδέν στον παρονομαστή μας. Εδώ δεν μπορούμε να εξάγουμε ακριβώς κάποια πεποίθηση που να είναι συνεπής με την προτεινόμενη στρατηγική. Μπορούμε όμως τεχνικά να επιλέξουμε πεποιθήσεις όπως θέλουμε, αφού αυτό σημαίνει για την ισορροπία μας. Η ελεύθερη επιλογή πεποιθήσεων σε αυτή την περίπτωση είναι ουσιαστικά συνεπής με τον ορίζοντα στρατηγικής συμπεριφοράς και θα το κάνουμε ορθολογικά, όχι αόριστα.

Κάποιος Monopol που επιλέγει low output, μπορεί να εκφραστεί ως μία εταιρεία που έκανε "λάθος" όσο αφορά την στρατηγική ισορροπίας. Και το πιο πιθανό είναι το λάθος αυτό να γίνει από έναν high cost μονοπωλητή. Οπότε μία ορθολογική πεποίθηση σε αυτή την περίπτωση είναι:

$P\left({}^{high\ cost}/_{low\ output}\right) = 1$

Ένα εναλλακτικό σενάριο είναι να χρησιμοποιήσουμε την αρχική πεποίθηση του παίκτη 2 (p=0,1), που ουσιαστικά υποθέτει ότι είναι εξίσου πιθανό να έχει κάνει το λάθος οποιοσδήποτε από τους δύο τύπους του Monopol.

Κρατάμε την πρώτη μας προσέγγιση με $P\left({}^{high\ cost}/_{low\ output}\right) = 1$ οπότε ο παίκτης 2 βρίσκεται με βεβαιότητα στον κόμβο απόφασής του H_2 και 1,11>0 άρα εισέρχεται στην αγορά.

Έχουμε τώρα τον ορίζοντα στρατηγικής συμπεριφοράς $s = (s_1, s_2)$ που δίνεται από

$s_1\left(hoH\right) = 1$, $s_1\left(loH\right) = 0$, $s_1\left(hoL\right) = 1$, $s_1\left(loL\right) = 0$ και $s_2\left(enA\right) = 0$, $s_2\left(saA\right) = 1$, $s_2\left(enB\right) = 1$, $s_2\left(saB\right) = 0$

και το σύστημα πεποιθήσεων μ που είναι συνεπές με αυτό και δίνεται από

$\mu\left(H\right) = 0,1$, $\mu\left(L\right) = 0,9$, $\mu\left(H_1\right) = 0,1$, $\mu\left(H_2\right) = 1$, $\mu\left(L_1\right) = 0,9$, $\mu\left(L_2\right) = 0,$

τα οποία δομούν την προτεινόμενη ισορροπία. Δηλαδή

$$Monopol \begin{cases} high\ output\ \alpha\nu & high\ cost \\ high\ output\ \alpha\nu & low\ cost \end{cases}$$

$$Entrant \begin{cases} Stay\ out\ \alpha\nu\ \delta\varepsilon\iota\varsigma & high\ output \\ Enter\quad \alpha\nu\ \delta\varepsilon\iota\varsigma & low\ output \end{cases}$$

με πεποίθηση σχετικά με το αν αντινετωπίζει high cost εταιρεία $\mu\left({}^{high\ cost}/_{high\ output}\right) = 0,1$, $\mu\left({}^{high\ cost}/_{low\ output}\right) = 1$

Δεν έχουμε βρει ακόμα ισορροπία όπως πριν. Πρέπει τώρα να πιστοποιήσουμε ότι και ο Monopol αντιδρά βέλτιστα στις ενέργειες του Entrant. Ο low cost μονοπωλητής επιλέγει προφανώς την βέλτιστη επιλογή του (high output) όπως προείπαμε και δεν έχει ποτέ λόγο να αποκλίνει από αυτή. Ο high cost Monopol επίσης ανταπαντάει βέλτιστα με την επιλογή να κάνει high output, αφού μένει εκτός αγοράς ο Entrant και κερδίζει τελικά 17 αντί 10,77.

Έχουμε λοιπόν και μόλις την περιγράψαμε, μία έγκυρη διαδοχική ισορροπία όπου σε κάθε σύνολο πληροφοριών ο ορίζοντας στρατηγικής συμπεριφοράς s, δεδομένου του συστήματος πεποιθήσεων μ που είναι συνεπές με αυτόν , μεγιστοποιεί την αναμενόμενη απόδοση των παικτών. Έχουμε pooling equilibrium. Υπολογίζουμε την ισορροπία του παιγνίου και μέσω του λογισμικού Gambit, επιλέγοντας να εμφανιστούν σε κάθε κόμβο οι πεποιθήσεις των παικτών και σε κάθε ενέργεια η πιθανότητα με την οποία επιλέγεται από τους παίκτες και βλέπουμε ότι τα αποτελέσματα είναι ακριβώς αυτά που υπολογίσαμε

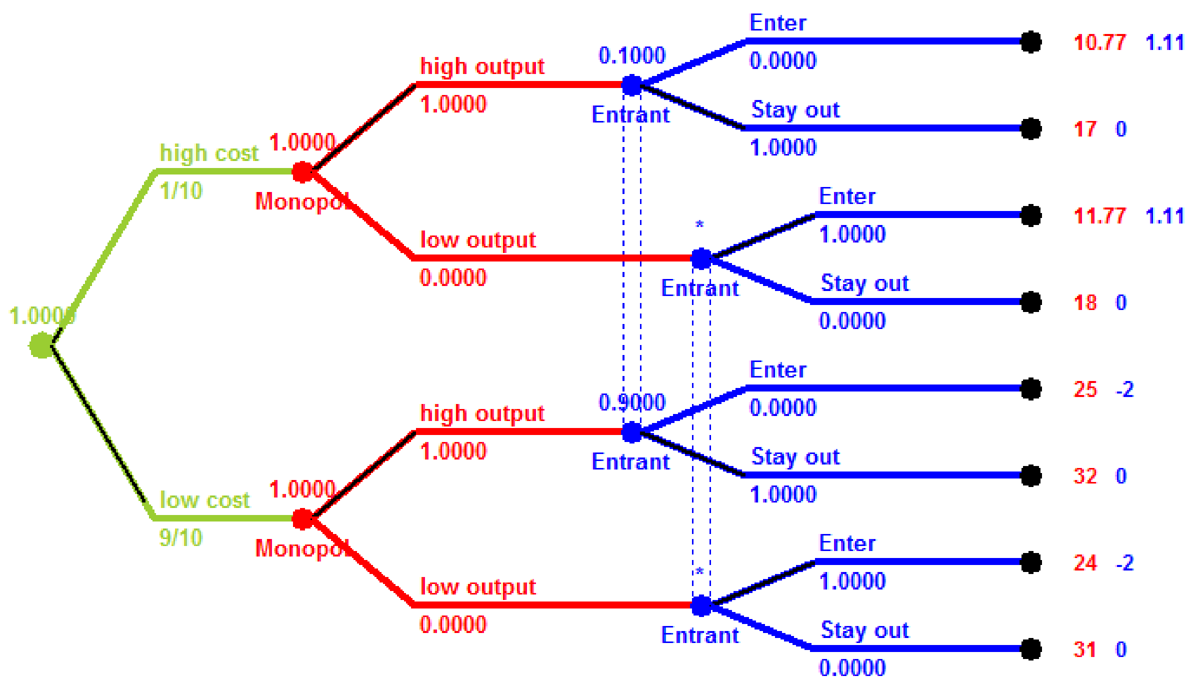

Figure 19: Ισορροπία Gambit περίπτωση p=0,1

Η πεποίθηση του Monopol για το αν βρίσκεται στο H ή L (αν είναι υψηλού ή χαμηλού κόστους) είναι προφανώς 1 όπως βλέπουμε στο σχήμα γιατί ο παίκτης 1 παρατηρεί και γνωρίζει φυσικά το κόστος του. Τα $\mu(H) = 0,1$, $\mu(L) = 0,9$ που υπολογίσαμε πριν απευθύνονται στον παίκτη 2, στην πεποίθησή του σχετικά με τα κόστη του 1. Όλα τα υπόλοιπα δείχνουν ακριβώς την ισορροπία που περιγράψαμε και τους παίκτες να παίζουν με τις πιθανότητες που υπολογίσαμε τις ενέργειές τους για την ύπαρξη ισορροπίας. Τα * αντιπροσωπεύουν τον καθορισμό όποιας πεποίθησης θέλουμε, με την ορθολογικότερη να είναι αυτή που υποθέσαμε, δηλαδή $P\left({}^{high\ cost}/_{low\ output}\right) = 1$ για αυτό και εκεί βλέπουμε τον παίκτη 1 να εισέρχεται στην αγορά με πιθανότητα 1. Να σημειώσουμε ότι η συνολική αναμενόμενη απόδοση του παίκτη 1 στην ισορροπία είναι $U_1 = 0,1 \cdot 17 + 0,9 \cdot 32 = 30,5$ ενώ του παίκτη 2 είναι 0 αφού μένει εκτός αγοράς.

Περίπτωση p=0,3

Ας δούμε τώρα την περίπτωση όπου p=0,3 και 1-p=0,7. Αλλάζει πραγματικά κάτι; Ποια είναι τώρα η ισορροπία; Η μεγαλύτερη αισιοδοξία του παίκτη 2 για ύπαρξη υψηλού κόστους εταιρείας θα τον οδηγήσει σε είσοδο ή όχι; Ας δούμε το παίγνιό μας παρακάτω

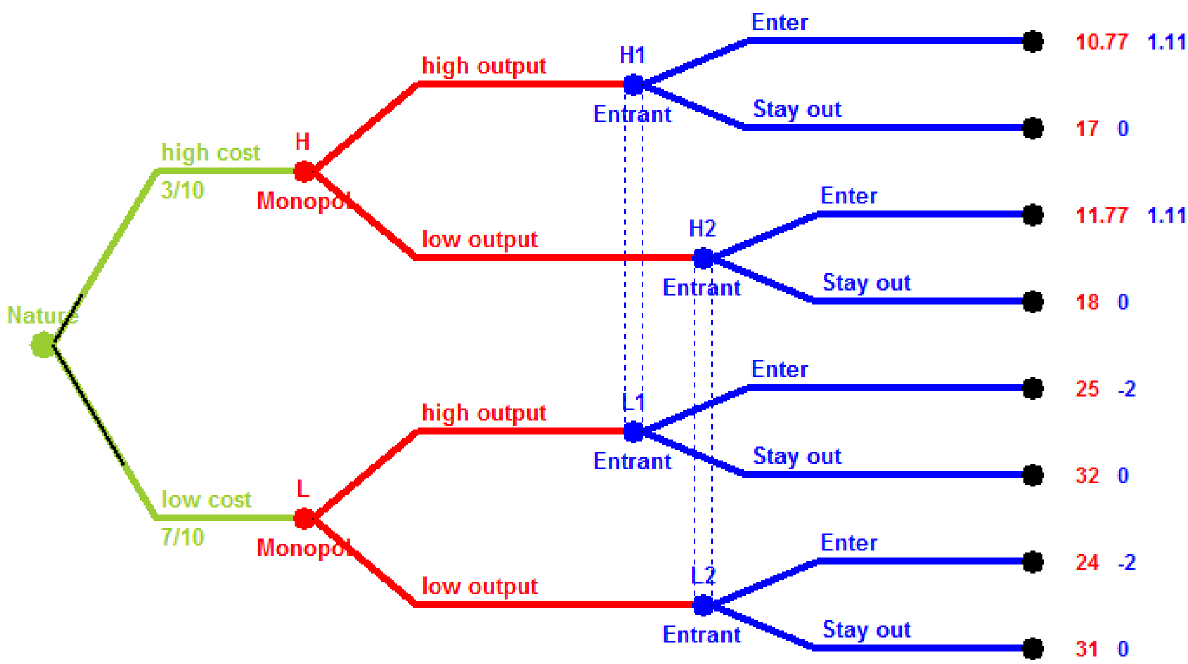

Figure 20: Περίπτωση p=0,3

Δεν αλλάζει κάτι στην ανάλυσή μας για pooling equilibrium μέχρι το σημείο που δείξαμε ότι $P\left({}^{high\ cost}/_{high\ output}\right) = p = 0,3$ τώρα και $P\left({}^{low\ cost}/_{high\ output}\right) = 1 - p = 0,7$. Ο Entrant στηριζόμενος στις πεποιθήσεις αυτές συγκρίνει την αναμενόμενη απόδοση της εισόδου του στην αγορά με αυτήν της παραμονής εκτός αγοράς από το σύνολο πληροφοριών του $A = \{H_1, L_1\}$. Έχουμε

$U\left(Enter\right) = 0,3 \cdot 1,11 + 0,7 \cdot (-2) = -1,067$

$U\left(Enter\right) = 0,1 \cdot 0 + 0,9 \cdot 0 = 0$

οπότε προφανώς πάλι δεν εισέρχεται στην αγορά αν παρατηρήσει high output στην πρώτη περίοδο αφού -1,067<0.

Η αναμενόμενη απόδοση του Entrant βάση των πεποιθήσεων είναι ακόμα αρνητική, οπότε με τον high cost Monopol να παράγει high output επιτυγχάνεται ο σκοπός του Monopol μέσω απόκρυψης πληροφορίας για τα κόστη του και παραμένει μόνος στην αγορά. Ας δούμε και ταυτόχρονα να επιβεβαιώσουμε την διαδοχική μας ισορροπία μέσω του Gambit.

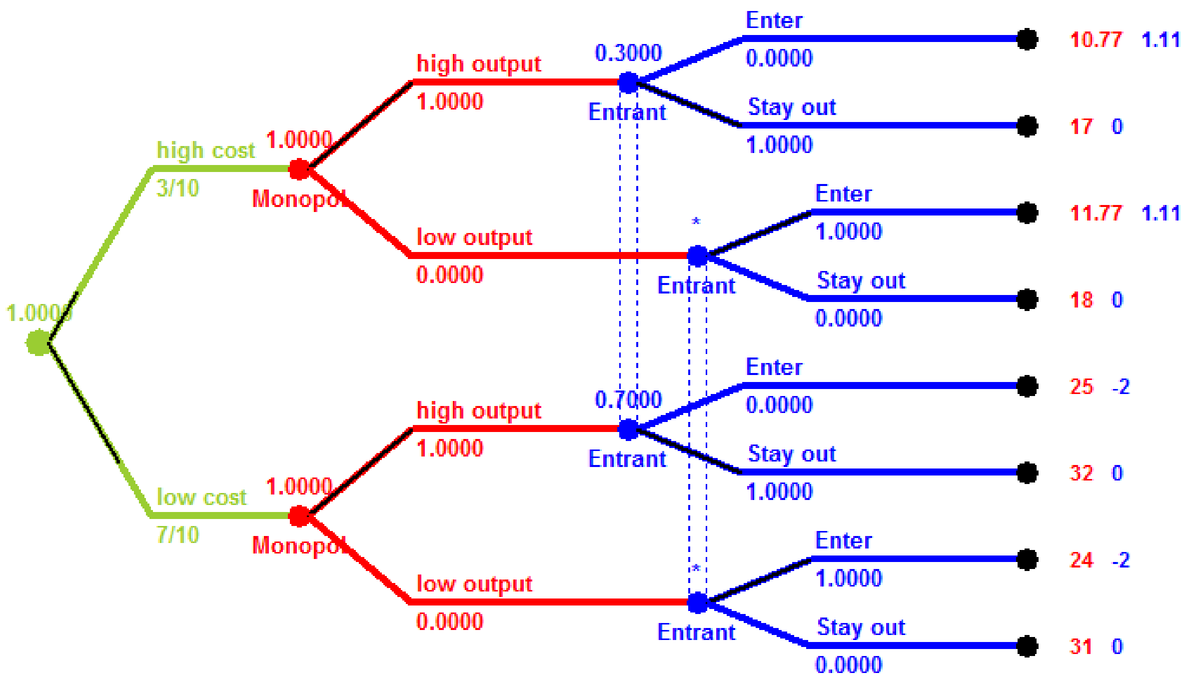

Figure 21: Ισορροπία Gambit p=0,3

Έχουμε τον ορίζοντα στρατηγικής συμπεριφοράς $s = (s_1, s_2)$ που δίνεται από

$s_1\,(hoH) = 1$, $s_1\,(loH) = 0$, $s_1\,(hoL) = 1$, $s_1\,(loL) = 0$ και $s_2\,(enA) = 0$, $s_2\,(saA) = 1$, $s_2\,(enB) = 1$, $s_2\,(saB) = 0$

και το σύστημα πεποιθήσεων μ που είναι συνεπές με αυτό και δίνεται από

$\mu\,(H) = 0,3$, $\mu\,(L) = 0,7$, $\mu\,(H_1) = 0,3$, $\mu\,(H_2) = 1$, $\mu\,(L_1) = 0,7$, $\mu\,(L_2) = 0$,

τα οποία δομούν την προτεινόμενη ισορροπία. Δηλαδή

$$Monopol \begin{cases} high\ output\ \alpha\nu & high\ cost \\ high\ output\ \alpha\nu & low\ cost \end{cases}$$

$$Entrant \begin{cases} Stay\ out\ \alpha\nu\ \delta\varepsilon\iota\varsigma & high\ output \\ Enter\quad \alpha\nu\ \delta\varepsilon\iota\varsigma & low\ output \end{cases}$$

με πεποίθηση σχετικά με το αν αντιμετωπίζει high cost εταιρεία $\mu\left({}^{high\ cost}/_{high\ output}\right) = 0,3$, $\mu\left({}^{high\ cost}/_{low\ output}\right) = 1$

Η συνολική αναμενόμενη απόδοση του παίκτη 1 στην ισορροπία είναι $U_1 = 0,3 \cdot 17 + 0,7 \cdot 32 = 27,5$ ενώ του παίκτη 2 είναι 0 αφού μένει πάλι εκτός αγοράς.

Βλέπουμε λοιπόν ότι η ισορροπία μας με το σκεπτικό pooling equilibrium, στηρίζεται στο ότι $P\left({}^{high\ cost}/_{high\ output}\right) = p$ και $P\left({}^{low\ cost}/_{high\ output}\right) = 1 - p$. Όσο δεδομένης της πεποίθησης p η αναμενόμενη απόδοση του παίκτη 2 παραμένει αρνητική, ο παίκτης 1 δεν έχει λόγο να αλλάξει την στρατηγική του και διατηρείται η ισορροπία. Ο Monopol παίζει high output με πιθανότητα 1 και ο Entrant μένει εκτός αγοράς και αυτός ο ορίζοντας στρατηγικής συμπεριφοράς δίνει τις βέλτιστες ανταπαντήσεις των παικτών μεταξύ τους, δεδομένων των συνεπών με αυτόν πεποιθήσεων που έχουν καθοριστεί στα πλαίσια pooling equilibrium. Έχουμε εξετάσει ήδη την ισορροπία για p=0,1 και p=0,3. Μέχρι ποιο σημείο όμως όσο αυξάνεται το p, (όσο έχουμε πιο "αισιόδοξους" Entrants), αυτή διατηρείται με συνέπεια οι στρατηγικές που περιγράψαμε να είναι βέλτιστες και οι πεποιθήσεις που παράγαμε συνεπείς με αυτές;

Περίπτωση p=0,7

Παίρνουμε τώρα την περίπτωση ενός αρκετά αισιόδοξου Entrant με p=0,7 και το δείχνουμε στο σχήμα μας

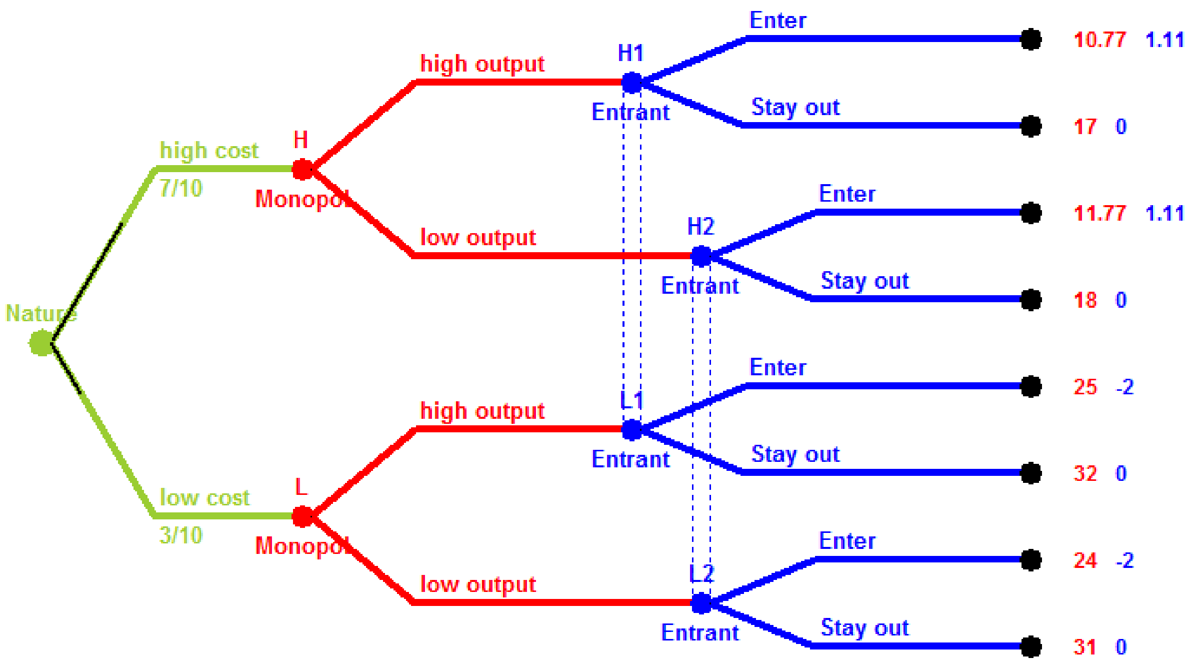

Figure 22: Περίπτωση p=0,7

Η ανάλυσή μας στην αναζήτηση pooling equilibrium είναι ίδια μέχρι το σημείο που $P\left({}^{high\ cost}/_{high\ output}\right) = p = 0,7$ τώρα και $P\left({}^{low\ cost}/_{high\ output}\right) = 1 - p = 0,3$. Ο Entrant στηριζόμενος στις πεποιθήσεις αυτές συγκρίνει την αναμενόμενη απόδοση της εισόδου του στην αγορά με αυτήν της παραμονής εκτός αγοράς από το σύνολο πληροφοριών του $A = \{H_1, L_1\}$. Έχουμε

$U\left(Enter\right) = 0,7 \cdot 1,11 + 0,3 \cdot (-2) = 0,177$

$U\left(Enter\right) = 0,1 \cdot 0 + 0,9 \cdot 0 = 0$

οπότε τώρα εισέρχεται τελικά στην αγορά. Αν παρατηρήσει high output στην πρώτη περίοδο θα εισέλθει αφού 0,177>0 οπότε πλέον παίζει Enter με πιθανότητα 1 από το σύνολο πληροφοριών του $A = \{H_1, L_1\}$ και Stay out με πιθανότητα 0. Δηλαδή $s_2\left(enA\right) = 1$, $s_2\left(saA\right) = 0$, αντίθετα με πριν.

Είναι τώρα όμως αντίστοιχα η προτεινόμενη στρατηγική του Monopol βέλτιστη απάντηση στις ενέργειες του Entrant; Είναι το σύστημα πεποιθήσεων που έχουμε (το ίδιο που καθορίσαμε στις δύο προηγούμενες περιπτώσεις με p=0,1 και p=0,3) συνεπές με τον ορίζοντα στρατηγικής συμπεριφοράς;

Ο Monopol παράγοντας high output κάθε φορά, με πιθανότητα 1 δηλαδή, αν είναι high cost έχει τώρα αναμενόμενη απόδοση

$U_1 = 0,7 \cdot 10,77 = 7,539$ ενώ αν έκανε low output θα είχε $U_1 = 1 \cdot 11,77 = 11,77$. Άρα δεν παίζει την βέλτιστη στρατηγική του. Δεν μπορούμε πλέον να συντάξουμε ισορροπία (pooling equilibrium) με αυτό τον ορίζοντα στρατηγικής συμπεριφοράς. Δεν έχουμε τώρα διαδοχική ισορροπία και σίγουρα δεν έχουμε όπως δείξαμε separating equilibrium. Μπορούμε να δούμε και αλλιώς, αναλυτικά ότι ο παίκτης 1 δεν βελτιστοποιεί την στρατηγική του.

Για το σύνολο πληροφοριών H (μονομελές, ένας κόμβος) είναι $\mu_1(H) = 1$, από την πλευρά του παίκτη 1 που βλέπει τα κόστη του. Μια στρατηγική συμπεριφοράς $P(high\ output) = p'$ και $P(low\ output) = 1 - p'$, με $0 \leq p' \leq 1$ παρέχει στον παίκτη 1 αναμενόμενη απόδοση $U(p', H) = 1 \cdot \{[p' \cdot 0,7 \cdot (1 \cdot 10,77 + 0 \cdot 17)] + [(1 - p') \cdot 1 \cdot (1 \cdot 11,77 + 0 \cdot 18)]\} = 7,539p' + 11,77 - 11,77p' = 11,77 - 4,321p'$, η οποία όχι απλά δεν μεγιστοποιείται για p'=1 (high output), αλλά το ακριβώς αντίθετο.

Semi-separating equilibrium

Περίπτωση p=0,7

Πρέπει λοιπόν να βρούμε πώς θα αλλάξει ο ορίζοντας στρατηγικής συμπεριφοράς και πώς θα αναθεωρηθούν οι πεποιθήσεις ώστε αν είναι συνεπείς με τον νέο αυτό ορίζοντα να φτάσουμε σε ισορροπία. Απορρίψαμε pooling equilibrium, έχουμε απορρίψει και separating equilibrium, άρα είναι ορθολογικό να αναζητήσουμε semi-separating equilibrium. Έτσι ο παίκτης 1 ίσως μπορεί να καθορίσει βέλτιστη στρατηγική και να δομηθεί ένα συνεπές με αυτήν σύστημα πεποιθήσεων.

Ουσιαστικά ο παίκτης 1, αφού πλέον δεδομένης της ισχυρής πεποίθησης p του παίκτη 2 για την πιθανότητα ο παίκτης 1 να είναι high cost, δεν μπορεί να αποτρέψει την είσοδο παίζοντας high output αν είναι high cost και να αποκρύψει πληροφορία και αφού το να παράγει σύμφωνα με τον τύπο του επίσης δεν συμφέρει όπως δείξαμε, θα παίξει κάποιες ενέργειές του με κάποια συγκεκριμένη πιθανότητα.

Οι ενέργειες αυτές θα είναι φυσικά αυτές του high cost Monopol. Ο Monopol, θα εκτελέσει σίγουρα κάποια ενέργεια για έναν τύπο του, (high output για τύπο low cost όπως δείξαμε ότι πάντα μεγιστοποιεί τα κέρδη του ως αυστηρά κυρίαρχη στρατηγική οπότε και εδώ) και θα παίξει με μία συγκεκριμένη πιθανότητα ανάμεσα στις πιθανές ενέργειες για τον άλλο του τύπο, high cost, ώστε να επιτευχθεί ισορροπία. Κινούμαστε πλέον για semi-separating equilibrium.

Ο παίκτης 1 δεν θέλει να αποκαλύψει τον τύπο του στον παίκτη 2 και ο τρόπος να το επιτύχει αφού δεδομένου του p δεν μπορεί παίζοντας high output ως αγνή στρατηγική, είναι να παίζει με κάποια πιθανότητα κάθε επίπεδο παραγωγής. Με ποια όμως; Μα φυσικά με αυτή που κάνει τον παίκτη 2 αδιάφορο ως προς την είσοδο ή όχι στην αγορά. Με αυτή με την οποία ο παίκτης 2, δεδομένων των πεποιθήσεών του που πλέον του προσφέρουν μεγαλύτερη αναμενόμενη απόδοση από την είσοδο παρά από την παραμονή εκτός αγοράς, θα οδηγούταν στο να μην έχει τόσο ξεκάθαρη εικόνα για τα κόστη του παίκτη 1. Αυτό ταυτόχρονα είναι και το μόνο που μπορεί να κάνει ο παίκτης 2 στην ισορροπία, δηλαδή δεδομένου πλέον ότι ο παίκτης 1 χρησιμοποιεί μικτή στρατηγική, χρησιμοποιεί και αυτός μικτή με τρόπο που να εξουδετερώνει το δίλλημα Enter, Stay out και να επωφελείται από την επιλογή Enter.

Η πεποίθηση $\mu_2 = \mu(H_1)$ που κάνει αδιάφορο τον Entrant για είσοδο ή όχι στην αγορά, δηλαδή την αναμενόμενη απόδοσή του ίδια με την παραμονή εκτός αγοράς (=0) είναι $\mu_2 \cdot 1,11 + (1-\mu_2) \cdot (-2) = 0 \Rightarrow \mu_2 = \frac{2}{3,11} = 0,64308$. Οπότε οι πεποιθήσεις του παίκτη 2 πρέπει να ικανοποιούν το $\mu_2 = 0,64308$. Δεδομένης αυτής της πεποίθησης, των $P\left({}^{high\ cost}/_{high\ output}\right) = 0,7$ και $P\left({}^{low\ cost}/_{high\ output}\right) = 0,3$ και του ότι ο Monopol κάνει πάντα high output όταν είναι low cost και παίζει μικτή στρατηγική με πιθανότητα p^H να κάνει high output όταν είναι high cost, διατυπώνουμε τον κανόνα του Bayes για να βρούμε ποια μικτή στρατηγική χρησιμοποιεί ο παίκτης 1 που υποστηρίζει αυτή την πεποίθηση:

$\mu_2 = \frac{2}{3,11} = \frac{0,7 \cdot p^H}{0,7 \cdot p^H + 0,3 \cdot 1} \Rightarrow 2,177p^H = 1,4p^H + 0,6 \Rightarrow p^H = 0,7722$ και $1 - p^H = 0,2278$. Έχουμε λοιπόν την μικτή στρατηγική του παίκτη 1. Παίζει high output με πιθανότητα $p^H = 0,7722$ όταν είναι high cost (άρα low output με $1 - p^H = 0,2278$) και παίζει high output με πιθανότητα 1 (αγνή στρατηγική όταν είναι low cost).

Ουσιαστικά στο παίγνιό μας γενικά η αναμενόμενη απόδοση του παίκτη 2 βάση των πεποιθήσεών του είναι $\mu_2 \cdot 1,11 + (1-\mu_2) \cdot (-2)$. Αν αυτή είναι <0, ο Entrant μένει εκτός αγοράς και αυτό γίνεται σε pooling equilibrium με την ισορροπία που είδαμε πρωτύτερα. Αν $\mu_2 \cdot 1,11 + (1-\mu_2) \cdot (-2) > 0$ ο Entrant εισέρχεται στην αγορά. Αυτό όλο ανάγεται στο αν $\mu_2 < 0,64308$ άρα παραμονή εκτός ή $\mu_2 > 0,64308$ άρα είσοδο στην αγορά. Στην δεύτερη περίπτωση όμως δεν έχουμε pooling equilibrium και αφού ο παίκτης 2 θα εισέλθει σίγουρα, ο high cost παίκτης 1 δεν μπορεί να παράγει high output σταθερά για ισορροπία, ούτε low output σταθερά όπως δείξαμε. Άρα η βελτιστοποίηση της στρατηγικής του και μεγιστοποίηση αναμενόμενης απόδοσής του, θα επέλθει από το να προσαρμόσει τον τρόπο που επιλέγει τα επίπεδα παραγωγής του έτσι που ο παίκτης 2 ενώ αρχικά είχε πεποίθηση $\mu_2 > 0,64308$, αναθεωρώντας πεποιθήσεις να φτάσει οριακά στο $\mu_2 = 0,64308$ και εκεί έχουμε ισορροπία βάση στρατηγικών και πεποιθήσεων όπου κανείς δεν μπορεί να βελτιώσει την θέση του και είναι και οι δύο οριακά αδιάφοροι για το αν θα μπει ή όχι ο Entrant αν δει high output και για το αν θα κάνει high ή low output ο Monopol αν είναι high cost. Κάθε φορά λοιπόν που $\mu_2 > 0,64308$ ο Monopol αναπροσαρμόζει την στρατηγική του βάση των πεποιθήσεων του Entrant και ο Entrant εκ νέου βάση της στρατηγικής που παίζει ο high cost Monopol τα επίπεδα παραγωγής, οπότε και φτάνουμε σε διαδοχική ισορροπία, semi-separating equilibrium με $\mu_2 \to 0,64308$.

Έχουμε καθορίσει την στρατηγική του παίκτη 1 οπότε τώρα πώς αναπροσαρμόζει ο παίκτης 2 την δική του στρατηγική; Όταν δει low output παίζει είσοδο στην αγορά με πιθανότητα 1 και αυτό δεν αλλάζει. Όταν δει high output είδαμε ότι πλέον εισέρχεται επίσης στην αγορά με πιθανότητα 1, αλλά αυτό θα συνέβαινε αν ο high cost Monopol έπαιζε high output με πιθανότητα 1. Βάση της νέας στρατηγικής high output με πιθανότητα $p^H = 0,7722$ όταν είναι high cost και low output με $1 - p^H = 0,2278$ και high output με πιθανότητα 1 (αγνή στρατηγική όταν είναι low cost), ποια είναι αντίστοιχα η πιθανότητα του παίκτη 2 να εισέλθει στην αγορά (έστω e) που κάνει τον παίκτη 1 αδιάφορο μεταξύ επιλογής high ή low output όταν είναι high cost; Αυτή για την οποία ισχύει

$U_1\left({}^{high\ output}/_{high\ cost}\right) = U_1\left({}^{high\ output}/_{high\ cost}\right) \Rightarrow e \cdot 10,77 + (1-e) \cdot 17 = 11,77 \Rightarrow e = \frac{5,23}{6,23} = 0,839486$

Άρα ο παίκτης 2, παρατηρώντας high output στην πρώτη περίοδο εισέρχεται στην αγορά με πιθανότητα e=0,8395 και μένει εκτός με πιθανότητα 1-e=0,1605

Έχουμε πλέον καθορίσει semi-separating equilibrium διαδοχική ισορροπία στο παίγνιό μας η οποία είναι

Έχουμε τον ορίζοντα στρατηγικής συμπεριφοράς $s = (s_1, s_2)$ που δίνεται από

$s_1(hoH) = 0,7722$, $s_1(loH) = 0,2278$, $s_1(hoL) = 1$, $s_1(loL) = 0$ και $s_2(enA) = 0,8395$, $s_2(saA) = 0,1605$, $s_2(enB) = 1$, $s_2(saB) = 0$

και το σύστημα πεποιθήσεων μ που είναι συνεπές με αυτό και δίνεται από

$\mu(H) = 0,7$, $\mu(L) = 0,3$, $\mu(H_1) = 0,6431$, $\mu(H_2) = 1$, $\mu(L_1) = 0,3569$, $\mu(L_2) = 0$,

τα οποία δομούν την προτεινόμενη ισορροπία. Δηλαδή

$$Monopol \begin{cases} high\ output\ \mu\varepsilon\, p^H = 0,7722\, \alpha\nu & high\ cost \\ high\ output & \alpha\nu \quad low\ cost \end{cases}$$

$$Entrant \begin{cases} Enter\ \mu\varepsilon\, e = 0,8395\ \alpha\nu\ \delta\varepsilon\iota\varsigma & high\ output \\ Enter & \alpha\nu\ \delta\varepsilon\iota\varsigma \quad low\ output \end{cases}$$

με πεποίθηση σχετικά με το αν αντιμετωπίζει high cost εταιρεία $\mu\left({}^{high\ cost}/_{high\ output}\right) = 0,6431$, $\mu\left({}^{high\ cost}/_{low\ output}\right) = 1$

Η συνολική αναμενόμενη απόδοση του παίκτη 1 στην ισορροπία είναι

$U_1 = 0,7 \cdot \{0,7722 \cdot [(0,8395 \cdot 10,77) + (0,1605 \cdot 17)] + (0,2278 \cdot 1 \cdot 11,77)\} + \{0,3 \cdot 1 \cdot [(0,8395 \cdot 25) + (0,1605 \cdot 32)]\} = 16,0761$

ενώ του παίκτη 2 είναι

$U_2 = 0,7 \cdot \{0,7722 \cdot [(0,8395 \cdot 1,11) + (0,1605 \cdot 0)] + (0,2278 \cdot 1 \cdot 1,11)\} + \{0,3 \cdot 1 \cdot [(0,8395 \cdot (-2)) + (0,1605 \cdot 0)]\} = 0,177$

Ας δούμε πάλι την ισορροπία που υπολογίζει το λογισμικό Gambit.

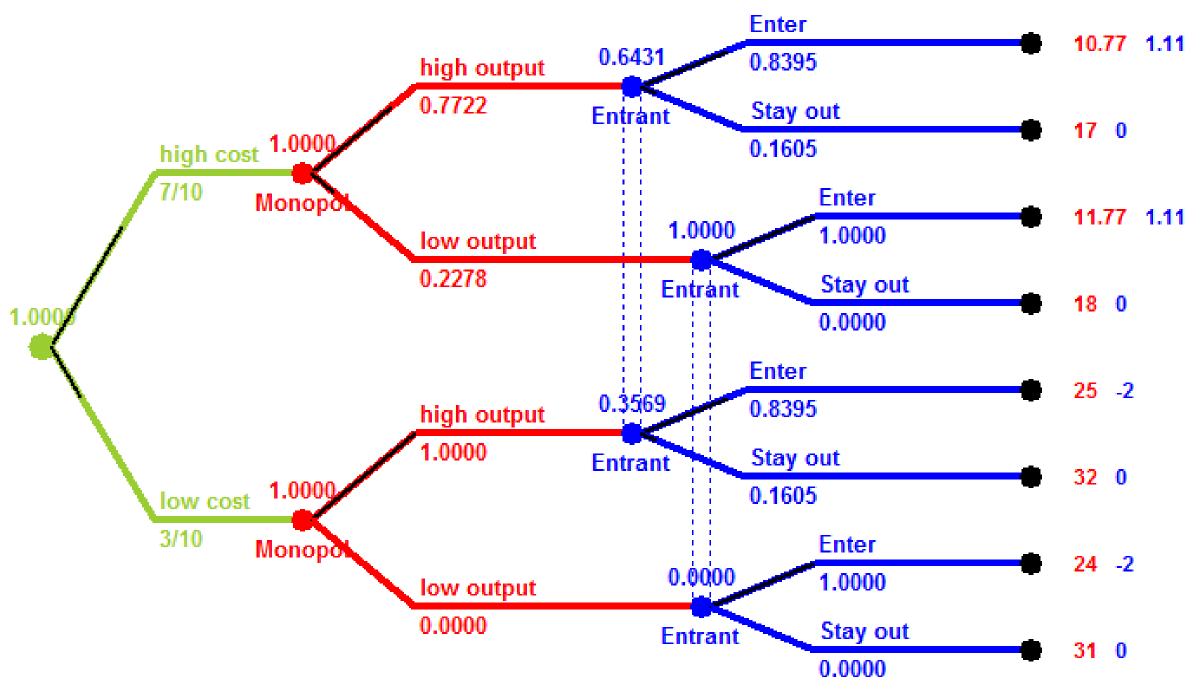

Figure 23: Ισορροπία gambit περίπτωση p=0,7

Είναι ακριβώς αυτή που υπολογίσαμε. Βλέπουμε πάνω από τους κόμβους τις πεποιθήσεις του παίκτη 2 που εξάγαμε, τον παίκτη 1 να παίζει με πιθανότητα 0,7722 high output αν είναι high cost και τον παίκτη 2 έπειτα να εισέρχεται στην αγορά με πιθανότητα 0,8395.

Περίπτωση p=0,8

Θα εξετάσουμε τώρα το τελευταίο μας σενάριο, στο οποίο είναι p=0,8 και 1-p=0,2. Προφανώς οδηγούμαστε πάλι σε μικτές στρατηγικές (αναζήτηση semi-separating equilibrium) αφού δεν μπορεί να υποστηριχτεί κάτι άλλο.

Η πεποίθηση $\mu_2 = \mu\left(H_1\right)$ που κάνει αδιάφορο τον Entrant για είσοδο ή όχι στην αγορά είναι πάντα η ίδια $\mu_2 \cdot 1,11 + (1-\mu_2)\cdot(-2) = 0 \Rightarrow \mu_2 = \frac{2}{3,11} = 0,64308$. . Δεδομένης πάλι αυτής της πεποίθησης, των $P\left({}^{high\ cost}/_{high\ output}\right) = 0,8$ τώρα και $P\left({}^{low\ cost}/_{high\ output}\right) = 0,2$ και του ότι ο Monopol κάνει πάντα high output όταν είναι low cost και παίζει μικτή στρατηγική με πιθανότητα p^H να κάνει high output όταν είναι high cost, διατυπώνουμε τον κανόνα του Bayes για να βρούμε ποια μικτή στρατηγική χρησιμοποιεί ο παίκτης 1 που υποστηρίζει αυτή την πεποίθηση:

$\mu_2 = \frac{2}{3,11} = \frac{0,8 \cdot p^H}{0,8 \cdot p^H + 0,2 \cdot 1} \Rightarrow 2,488p^H = 1,6p + 0,4 \Rightarrow p^H = 0,4505$ και $1 - p^H = 0,5495$. Έχουμε λοιπόν την μικτή στρατηγική του παίκτη 1. Παίζει high output με πιθανότητα $p^H = 0,4505$ όταν είναι high cost (άρα low output με $1 - p^H = 0,5495$) και παίζει high output με πιθανότητα 1 (αγνή στρατηγική όταν είναι low cost).

Βάση λοιπόν της στρατηγικής high output με πιθανότητα $p^H = 0,4505$ όταν είναι high cost και low output με $1 - p^H = 0,5495$ και high output με πιθανότητα 1 (αγνή στρατηγική όταν είναι low cost), ποια είναι αντίστοιχα η πιθανότητα του παίκτη 2 να εισέλθει στην αγορά (έστω e) που κάνει τον παίκτη 1 αδιάφορο μεταξύ επιλογής high ή low output όταν είναι high cost; Αυτή για την οποία ισχύει

$U_1 \left({}^{high\ output}/_{high\ cost} \right) = U_1 \left({}^{high\ output}/_{high\ cost} \right) \Rightarrow e \cdot 10,77 + (1 - e) \cdot 17 = 11,77 \Rightarrow e = \frac{5,23}{6,23} = 0,839486$

δηλαδή ίδια με πριν, αφού ο παίκτης 1 αναπροσάρμοσε την στρατηγική του ώστε να φτάσουμε στο οριακό αυτό σημείο ισορροπίας όπου οι επιλογές φαντάζουν όμοιες. Οι πεποιθήσεις του παίκτη 2 και η πιθανότητα που επιλέγει ανάμεσα σε είσοδο ή όχι στην αγορά παραμένουν ίδιες στην ισορροπία και είναι αυτές που οριακά κάνουν ίση την αναμενόμενη απόδοση από την είσοδο ή όχι στην αγορά βάση των αναθεωρημένων στρατηγικών του παίκτη 1. Αυτός χάνει την χρήση βέλτιστης στρατηγικής όταν δεν συντάσσεται pooling equilibrium και αλλάζει την μικτή στρατηγική του όταν είναι high cost βάση των αρχικών πεποιθήσεων p του παίκτη 2, οπότε και φτάνουμε στην μοναδική ισορροπία όπου $\mu_2 = 0,64308$

Άρα ο παίκτης 2, παρατηρώντας high output στην πρώτη περίοδο εισέρχεται στην αγορά πάλι με πιθανότητα e=0,8395 και μένει εκτός με πιθανότητα 1-e=0,1605

Έχουμε πλέον καθορίσει semi-separating equilibrium διαδοχική ισορροπία στο παίγνιό μας η οποία είναι

Έχουμε τον ορίζοντα στρατηγικής συμπεριφοράς $s = (s_1, s_2)$ που δίνεται από

$s_1 (hoH) = 0,4505$, $s_1 (loH) = 0,5495$, $s_1 (hoL) = 1$, $s_1 (loL) = 0$ και $s_2 (enA) = 0,8395$, $s_2 (saA) = 0,1605$, $s_2 (enB) = 1$, $s_2 (saB) = 0$

και το σύστημα πεποιθήσεων μ που είναι συνεπές με αυτό και δίνεται από

$\mu (H) = 0,8$, $\mu (L) = 0,2$, $\mu (H_1) = 0,6431$, $\mu (H_2) = 1$, $\mu (L_1) = 0,3569$, $\mu (L_2) = 0$,

τα οποία δομούν την προτεινόμενη ισορροπία. Δηλαδή

$$Monopol \begin{cases} high\ output\ \mu\varepsilon\, p^H = 0,4505\, \alpha\nu & high\ cost \\ high\ output \qquad\qquad \alpha\nu & low\ cost \end{cases}$$

$$Entrant \begin{cases} Enter\ \mu\varepsilon\, e = 0,8395\ \alpha\nu\ \delta\varepsilon\iota\varsigma & high\ output \\ Enter \qquad\qquad \alpha\nu\ \delta\varepsilon\iota\varsigma & low\ output \end{cases}$$

με πεποίθηση σχετικά με το αν αντιμετωπίζει high cost εταιρεία $\mu \left({}^{high\ cost}/_{high\ output} \right) = 0,6431$, $\mu \left({}^{high\ cost}/_{low\ output} \right) = 1$

Η συνολική αναμενόμενη απόδοση του παίκτη 1 στην ισορροπία είναι

$U_1 = 0,8 \cdot \{0,4505 \cdot [(0,8395 \cdot 10,77) + (0,1605 \cdot 17)] + (0,5495 \cdot 1 \cdot 11,77)\} + \{0,2 \cdot 1 \cdot [(0,8395 \cdot 25) + (0,1605 \cdot 32)]\} = 14,6407$

ενώ του παίκτη 2 είναι

$U_2 = 0,8 \cdot \{0,4505 \cdot [(0,8395 \cdot 1,11) + (0,1605 \cdot 0)] + (0,5495 \cdot 1 \cdot 1,11)\} + \{0,2 \cdot 1 \cdot [(0,8395 \cdot (-2)) + (0,1605 \cdot 0)]\} = 0,488$

Το λογισμικό Gambit επιβεβαιώνει την ισορροπία μας και τις μεταβολές που επέρχονται μόνο στην μικτή στρατηγική του high cost Monopol

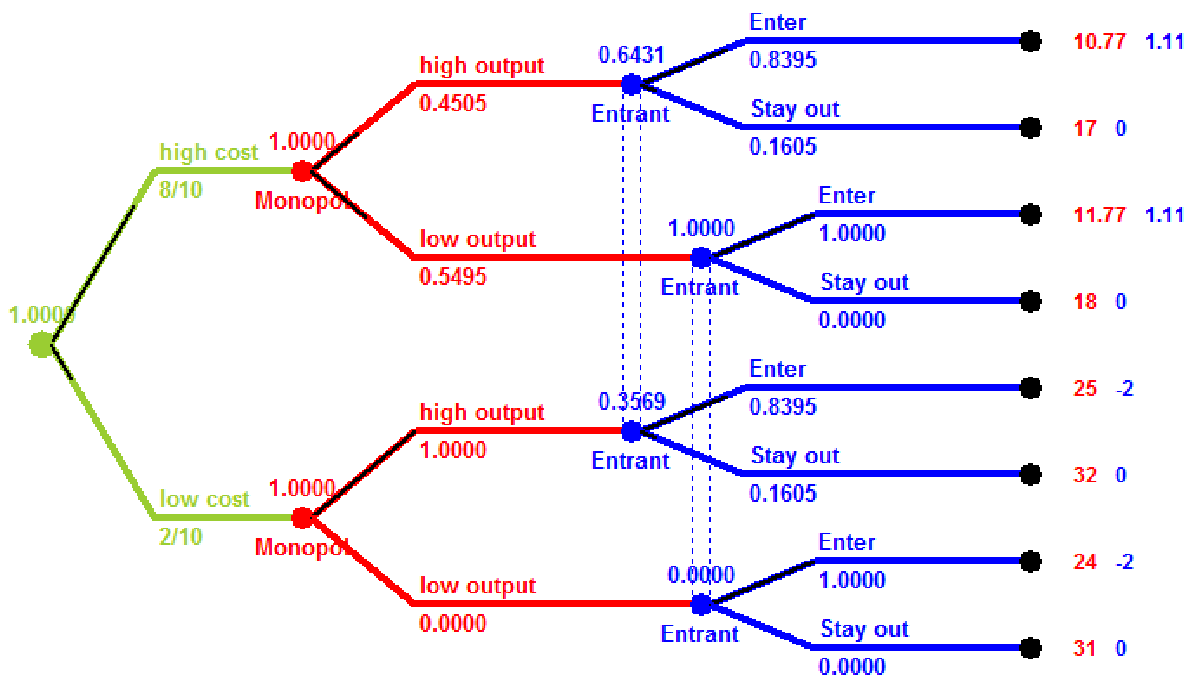

Figure 24: Ισορροπία Gambit περίπτωση p=0,8

Έχουμε τα συγκεντρωτικά αποτελέσματα για την περιγραφή διαδοχικής ισορροπίας του παιγνίου της εξέτασης από μία εταιρεία εισόδου σε αγορά που κυριαρχεί ένα μονοπώλιο και αν τελικά εισέλθει ανταγωνίζονται σε δυοπώλιο ποσοτήτων Cournot με τις αποδόσεις του σχήματος 17.

Αν $p \leq 0,6431$ η ισορροπία είναι

$$Monopol \begin{cases} high\ output\ \alpha\nu & high\ cost \\ high\ output\ \alpha\nu & low\ cost \end{cases}$$

$$Entrant \begin{cases} Stay\ out\ \alpha\nu\ \delta\varepsilon\iota\varsigma & high\ output \\ Enter\ \ \ \alpha\nu\ \delta\varepsilon\iota\varsigma & low\ output \end{cases}$$

με πεποίθηση σχετικά με το αν αντιμετωπίζει high cost εταιρεία $\mu\left({}^{high\ cost}/_{high\ output}\right) = p$, $\mu\left({}^{high\ cost}/_{low\ output}\right) = 1$,

με πεποίθηση σχετικά με το αν αντιμετωπίζει low cost εταιρεία $\mu\left({}^{low\ cost}/_{high\ output}\right) = 1 - p$, $\mu\left({}^{low\ cost}/_{low\ output}\right) = 0$

Η συνολική αναμενόμενη απόδοση του παίκτη 1 στην ισορροπία είναι

$U_1 = p \cdot 17 + (1-p) \cdot 32$

ενώ του παίκτη 2 είναι $U_2 = 0$ αφού μένει εκτός αγοράς

Έχουμε pooling equilibria

Αν $p \geq 0,6431$ η ισορροπία είναι

$$Monopol \begin{cases} high\ output\ \mu\varepsilon\ \pi\iota\theta\alpha\nu\text{ότητα}\ p^H\ \alpha\nu\ high\ cost \\ high\ output\ \qquad \alpha\nu\ low\ cost \end{cases} \quad \text{όπου } p^H = \tfrac{2-2p}{1,11p}$$

(αφού $\mu_2 = \frac{2}{3,11} = \frac{p \cdot p^H}{p \cdot p^H + (1-p) \cdot 1} \Rightarrow 2p \cdot p^H + 2 \cdot (1-p) = 3,11p \cdot p^H \Rightarrow 1,11p \cdot p^H = 2 - 2p \Rightarrow p^H = \frac{2-2p}{1,11p}$)

$$Entrant \begin{cases} Enter\ \mu\varepsilon\ \pi\iota\theta\alpha\nu\text{ότητα}\ e = 0,8395\ \alpha\nu\ \delta\varepsilon\iota\varsigma & high\ output \\ Enter\ \qquad\qquad\qquad \alpha\nu\ \delta\varepsilon\iota\varsigma & low\ output \end{cases}$$

με πεποίθηση σχετικά με το αν αντιμετωπίζει high cost εταιρεία $\mu\left({}^{high\ cost}/_{high\ output}\right) = 0,6431$, $\mu\left({}^{high\ cost}/_{low\ output}\right) = 1$,

με πεποίθηση σχετικά με το αν αντιμετωπίζει low cost εταιρεία $\mu\left({}^{low\ cost}/_{high\ output}\right) = 0,3569$, $\mu\left({}^{low\ cost}/_{low\ output}\right) = 0$

Η συνολική αναμενόμενη απόδοση του παίκτη 1 στην ισορροπία είναι

$U_1 = p \cdot \{p^H \cdot [(0,8395 \cdot 10,77) + (0,1605 \cdot 17)] + ((1-p^H) \cdot 1 \cdot 11,77)\} + \{(1-p) \cdot 1 \cdot [(0,8395 \cdot 25) + (0,1605 \cdot 32)]\}$

ενώ του παίκτη 2 είναι

$U_2 = p \cdot \{p^H \cdot [(0,8395 \cdot 1,11) + (0,1605 \cdot 0)] + ((1-p^H \cdot 1 \cdot 1,11)\} + \{(1-p) \cdot 1 \cdot [(0,8395 \cdot (-2)) + (0,1605 \cdot 0)]\}$

Έχουμε semi-separating equilibria

6 ΑΝΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΓΕΝΙΚΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΚΑΙ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ ΣΕ ΨΕΥΔΟΚΩΔΙΚΑ ΓΙΑ ΚΑΘΟΡΙΣΜΟ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ ΣΕ LIMIT PRICING ΠΑΙΓΝΙΟ ΜΕ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΩΝ ΣΕ ΦΥΛΛΟ EXCEL

6.1 Περιγραφή αλγορίθμου για εφαρμογή στην γενική περίπτωση

Βλέπουμε ότι ο καθορισμός διαδοχικής ισορροπίας ανάγεται ουσιαστικά στην αρχική πεποίθηση του Entrant p για την πιθανότητα να αντιμετωπίζει high cost Monopol, αφού αυτή μεταφέρεται αυτούσια στον κόμβο H1 και αν $\mu_2 < \frac{2}{3{,}11} = 0{,}64308$ έχουμε pooling equilibrium με τον Entrant να μένει στην ισορροπία εκτός αγοράς, ενώ αν $\mu_2 > \frac{2}{3{,}11} = 0{,}64308$ έχουμε semi-separating equilibrium με τον Entrant στην ισορροπία να εισέρχεται στην αγορά παίζοντας μικτή στρατηγική σε αντιστοιχία με τον παίκτη 1 με σχηματισμό πεποίθησης οριακά $\mu_2 = \frac{2}{3{,}11} = 0{,}64308$.

Αφού επίσης και ο υπολογισμός αποδόσεων ανάγεται σε standard σχέσεις τόσο στην ισορροπία Cournot όσο και στην μεγιστοποίηση κέρδους μονοπωλίου που δρα μόνο του, μπορούμε να κατασκευάσουμε αλγόριθμο που θα παίρνει ως δεδομένα τα κόστη των εταιρειών, την σταθερά στην αντίστροφη συνάρτηση ζήτησης, το κόστος εισόδου του παίκτη 2 στην αγορά και θα υπολογίζει τις αποδόσεις στους τερματικούς κατασκευάζοντας ουσιαστικά το παίγνιο, ενώ εν συνεχεία θα εισάγουμε την αρχική πεποίθηση του Entrant p για την πιθανότητα να αντιμετωπίζει high cost Monopol και ο αλγόριθμος θα εξάγει την ισορροπία του παιγνίου, λέγοντάς μας φυσικά σ' αυτήν αν πρέπει ή όχι να εισέλθει ο Entrant στην αγορά.

Η πεποίθηση αυτή του παίκτη 2 προκύπτει όπως είδαμε από την σχέση $\mu_2 \cdot 1{,}11 + (1-\mu_2)\cdot(-2) = 0$. Αν ονομάσουμε τους τερματικούς κόμβους με την σειρά από πάνω προς τα κάτω H1_E, H1_S.o , H2_E, H2_S.o, L1_E, L1_S.o, L2_E, L2_S.o όπως φαίνεται στο σχήμα, η σχέση γίνεται $\mu_2 \cdot \Pi_2\left(H1\_E\right) + \left(1-\mu_2\right)\cdot \Pi_2\left(L1\_E\right) = 0 \Rightarrow \mu_2 = \frac{-\Pi_2(L1\_E)}{-\Pi_2(L1\_E)+\Pi_2(H1\_E)}$ στην γενική περίπτωση και τότε ο καθορισμός ισορροπίας στην γενική περίπτωση και αφού το μ_2 παίρνει την τιμή του p, ανάγεται στο αν $p\cdot\Pi_2\left(H1\_E\right) + (1-p)\cdot\Pi_2\left(L1\_E\right) <$ ή >0.

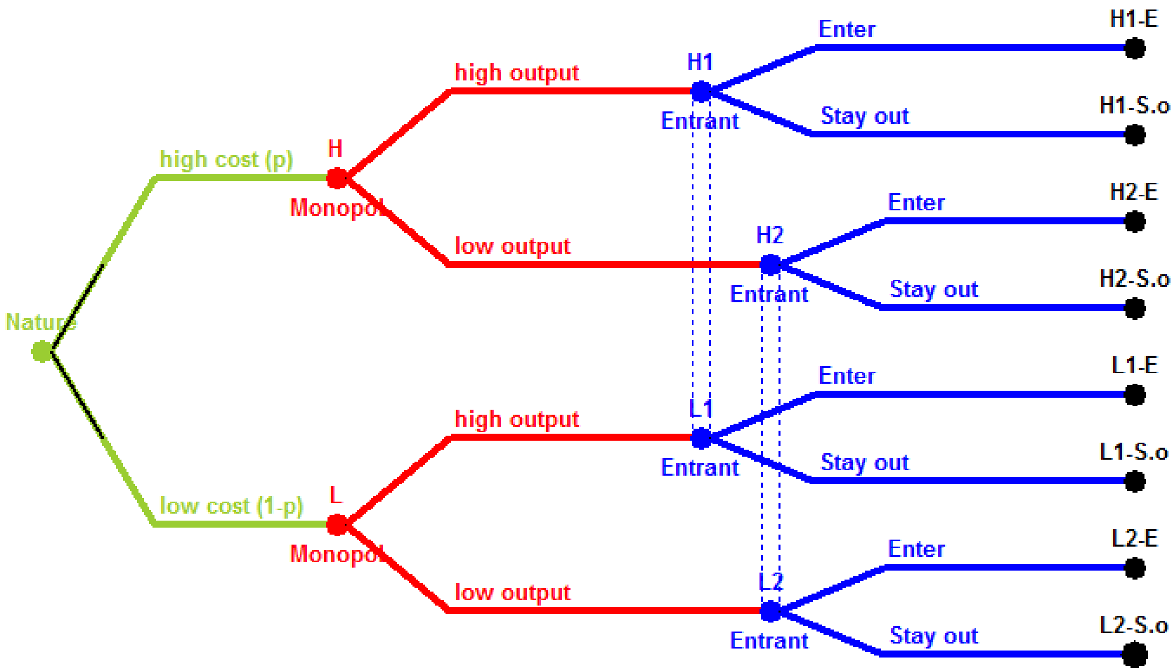

Figure 25: Γενική περίπτωση παιγνίου για κατασκευή αλγορίθμου

Φυσικά θα έχουμε λογικούς περιορισμούς . Αυτοί είναι:
$q_1^* = \frac{M+c_2-2c_1}{3} \geq 0$ και $q_2^* = \frac{M+c_1-2c_2}{3} \geq 0$ ώστε και οι δύο εταιρείες παράγουν θετικές ποσότητες προϊόντων, που είναι και το θεμιτό για να υπάρχει λογική συνέχεια.

$c_1 > 0$ και $c_2 > 0$, ενώ $c_H > c_L$ αφού το κόστος του high cost Monopol είναι προφανώς μεγαλύτερο από του low cost.

Τέλος $(M + c_H - 2c_2)^2 /9 > F > (M + c_L - 2c_2)^2 /9$ δηλαδή αυτό που είπαμε και δείξαμε, ότι ορθολογικά, υπό πλήρη, τέλεια πληροφόρηση, ο Entrant θα εισερχόταν στην αγορά μόνο αν ο Monopol ήταν high cost εταιρεία.

Χρησιμοποιώντας τον πίνακα για τις αποδόσεις που έχουμε παραθέσει νωρίτερα, τον οποίο υπενθυμίζουμε εδώ

	Είσοδος Entrant κ' $c_1 = c_L$	Είσοδος Entrant κ' $c_1 = c_H$	Entrant εκτός
Κέρδος Monop.c_L	$(M + c_2 - 2c_L)^2 / 9$		$(M - c_L)^2 / 4$
Κέρδος Monop.c_H		$(M + c_2 - 2c_H)^2 / 9$	$(M - c_H)^2 / 4$
Κέρδος Entrant	$(M + c_L - 2c_2)^2 / 9 \ - F$	$(M + c_H - 2c_2)^2 / 9 \ - F$	0

Table 18: Αποδόσεις παιγνίου αναλυτικά βάση κόστους

και το ότι στην γενική περίπτωση για την πρώτη περίοδο:

Αν είναι high cost και παράγει high output $\Pi_1 = (M - q_L) \cdot q_L - c_H \cdot q_L$ με $q_L = {}^{M - c_L}/_2$

Αν είναι low cost και παράγει low output $\Pi_1 = (M - q_H) \cdot q_H - c_L \cdot q_H$ με $q_H = {}^{M - c_H}/_2$

(Αφού είδαμε ότι η ποσότητα παραγωγής που μεγιστοποιεί τα κέρδη του μονοπωλητή ανάλογα με την περίσταση είναι $q_1^* = {}^{M - c_1}/_2$).

Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε σε κάθε περίπτωση τις αποδόσεις στους τερματικούς κόμβους για την γενική περίπτωση:

	Π_1 (Monopol)	Π_2 (Entrant)
H1_E	$[(M - q_L) \cdot q_L - c_H \cdot q_L] + (M + c_2 - 2c_H)^2 / 9$	$(M + c_H - 2c_2)^2 / 9 \ - F$
H1_S.o	$[(M - q_L) \cdot q_L - c_H \cdot q_L] + (M - c_H)^2 / 4$	0
H2_E	$[(M - c_H)^2 / 4] + [(M + c_2 - 2c_H)^2 / 9]$	$(M + c_H - 2c_2)^2 / 9 \ - F$
H2_S.o	$[(M - c_H)^2 / 4] + [(M - c_H)^2 / 4] = 2(M - c_H)^2 / 4$	0
L1_E	$[(M - c_L)^2 / 4] + [(M + c_2 - 2c_L)^2 / 9]$	$(M + c_L - 2c_2)^2 / 9 \ - F$
L1_S.o	$[(M - c_L)^2 / 4] + [(M - c_L)^2 / 4] = 2(M - c_L)^2 / 4$	0
L2_E	$[(M - q_H) \cdot q_H - c_L \cdot q_H] + (M + c_2 - 2c_L)^2 / 9$	$(M + c_L - 2c_2)^2 / 9 \ - F$
L2_S.o	$[(M - q_H) \cdot q_H - c_L \cdot q_H] + (M - c_L)^2 / 4$	0

Table 19: Αποδόσεις στους τερματικούς κόμβους για κατασκευή παιγνίου

Αν $p{\cdot}\Pi_2 (H1\_E) + (1 - p) \cdot \ \Pi_2 (L1\_E) \ \leq \ 0$ έχουμε pooling equilibrium, όπου ο Entrant δεν εισέρχεται στην αγορά και

Η πεποίθηση σχετικά με το αν αντιμετωπίζει high cost εταιρεία σε pooling equilibrium είναι$\mu \left({}^{high\ cost}/_{high\ output} \right) = p$, $\mu \left({}^{high\ cost}/_{low\ output} \right) = 1$, Η πεποίθηση σχετικά με το αν αντιμετωπίζει low cost εταιρεία σε pooling equilibrium είναι $\mu\left({}^{low\ cost}/_{high\ output}\right) = 1-p$, $\mu\left({}^{low\ cost}/_{low\ output}\right) = 0$

Η συνολική αναμενόμενη απόδοση του παίκτη 1 σε pooling equilibrium είναι
$U_1 = p{\cdot}\Pi_1\left(H1\_S.o\right) + (1-p)\cdot\Pi_1\left(L1\_S.o\right)$
ενώ του παίκτη 2 είναι
$U_2 = 0$

Αν $p{\cdot}\Pi_2\left(H1\_E\right) + (1-p)\cdot\Pi_2\left(L1\_E\right) \geq 0$ έχουμε semi-separating equilibrium, όπου ο Entrant εισέρχεται στην αγορά με πιθανότητα e=$[\Pi_1\left(H2\_E\right) - \Pi_1\left(H1\_S.o\right)]$ / $[\Pi_1\left(H1\_E\right) - \Pi_1\left(H1\_S.o\right)]$ που πηγάζει από την απαίτηση $e\cdot\Pi_1\left(H1\_E\right) + (1-e){\cdot}\Pi_1\left(H1\_S.o\right) = \Pi_1\left(H2\_E\right)$ και είναι η γενική περίπτωση ώστε $U_1\left({}^{high\ output}/_{high\ cost}\right) = U_1\left({}^{high\ output}/_{high\ cost}\right)$ που είδαμε ότι εξετάζουμε. Ενώ ο Monopol κάνει high output με πιθανότητα p^H, όπου $p^H = \frac{-\Pi_2(L1\_E)-(-\Pi_2(L1\_E)\cdot p)}{\Pi_2(H1\_E)\cdot p}$ αφού $\mu_2 = \frac{-\Pi_2(L1\_E)}{-\Pi_2(L1\_E)+\Pi_2(H1\_E)} = \frac{p\cdot p^H}{p\cdot p^H+(1-p)\cdot 1}$.

Η πεποίθηση σχετικά με το αν αντιμετωπίζει high cost εταιρεία σε semi-separating equilibrium είναι$\mu\left({}^{high\ cost}/_{high\ output}\right) = \frac{-\Pi_2(L1_E)}{-\Pi_2(L1_E)+\Pi_2(H1_E)}$, $\mu\left({}^{high\ cost}/_{low\ output}\right) = 1$,

Η πεποίθηση σχετικά με το αν αντιμετωπίζει low cost εταιρεία σε semi-separating equilibrium είναι $\mu\left({}^{low\ cost}/_{high\ output}\right) = 1 - \frac{-\Pi_2(L1\_E)}{-\Pi_2(L1\_E)+\Pi_2(H1\_E)}$, $\mu\left({}^{low\ cost}/_{low\ output}\right) = 0$

Η συνολική αναμενόμενη απόδοση του παίκτη 1 στην semi-separating equilibrium είναι

$U_1 = p\cdot\{p^H\cdot[(e\cdot\Pi_1\left(H1\_E\right)) + ((1-e)\cdot\Pi_1\left(H1\_S.o\right))] + ((1-p^H)\cdot 1\cdot \Pi_1\left(H2\_E\right))\} + \{(1-p)\cdot 1\cdot[(e\cdot\Pi_1\left(L1\_E\right)) + ((1-e)\cdot\Pi_1\left(L1\_S.o\right)]\}$

ενώ του παίκτη 2 είναι

$U_2 = p\cdot\{p^H\cdot[(e\cdot\Pi_2\left(H1\_E\right)) + ((1-e)\cdot\Pi_2\left(H1\_S.o\right))] + ((1-p^H)\cdot 1\cdot \Pi_2\left(H2\_E\right))\} + \{(1-p)\cdot 1\cdot[(e\cdot\Pi_2\left(L1\_E\right)) + ((1-e)\cdot\Pi_2\left(L1\_S.o\right)]\}$

Είμαστε πλέον έτοιμοι να φτιάξουμε τον αλγόριθμό μας σε ψευδοκώδικα. Ακολουθεί στο επόμενο τμήμα

6.2 Ψευδοκώδικας αλγορίθμου κατασκευής παιγνίου εξέτασης εισόδου σε μονοπωλιακή αγορά, μετά από παρατήρηση πρώτου επιπέδου παραγωγής του μονοπωλίου και όπου θα ανταγωνιστούν σε Cournot.

Algorithm 1 ΕΥΡΕΣΗ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ ΕΙΣΟΔΟΥ ΣΤΗΝ ΑΓΟΡΑ ΜΕ ΑΝΤΑΓΩΝΙΣΜΟ COURNOT

program Εισαγωγή_στην_αγορά
variables
real: $costhc$, $costlc$, $costen$, M, c_H, c_L, c_2, F, p, e, q_L, q_H, p^H,
μ_{hh}, μ_{lh}, q^*_{1h}, q^*_{2h}, q^*_{1l}, q^*_{2l},
real: $\Pi_1\left(H1\_E\right)$, $\Pi_1\left(H1\_S.o\right)$,$\Pi_1\left(H2\_E\right)$, $\Pi_1\left(H2\_S.o\right)$
real: $\Pi_1\left(L1\_E\right)$,$\Pi_1\left(L1\_S.o\right)$, $\Pi_1\left(L2\_E\right)$, $\Pi_1\left(L2\_S.o\right)$
real: $\Pi_2\left(H\_E\right)$,$\Pi_2\left(H\_S.o\right)$, $\Pi_2\left(L\_E\right)$, $\Pi_2\left(L\_S.o\right)$
begin
$costhc \leftarrow 1$
$costlc \leftarrow 2$
$costen \leftarrow 0$
$q^*_{1h} \leftarrow -1$
$q^*_{1l} \leftarrow -1$
$q^*_{2h} \leftarrow -1$
$q^*_{1l} \leftarrow -1$
while $(q^*_{1h} < 0)$ or $(q^*_{1l} < 0)$ or $(q^*_{2h} < 0)$ or $(q^*_{2l} < 0)$
{
  Εμφάνισε 'Δώσε σταθερά αντίστροφης συνάρτησης : '
  Διάβασε M
  while $(M \leq 0)$ or $(M = "char")$
  {
   Εμφάνισε 'Παρακαλώ εισάγετε θετικό αριθμό για σταθερά
   αντίστροφης συνάρτησης ζήτησης : '
   Διάβασε M
  }
 while $(costhc \leq costlc)$
 {
  Εμφάνισε 'Δώσε σταθερά κόστους του high cost Monopol : '
  Διάβασε c_H
  while $(c_H \leq 0)$ or $(c_H = "char")$ {
    Εμφάνισε 'Παρακαλώ εισάγετε θετικό αριθμό για την σταθερά
    κόστους του high cost Monopol'
    Διάβασε c_H }
    $costhc \leftarrow c_H$

Εμφάνισε 'Δώσε σταθερά κόστους του low cost Monopol : '
Διάβασε c_L
while $(c_L \leq 0)$ or $(c_L = "char")$ {
Εμφάνισε 'Παρακαλώ εισάγετε θετικό αριθμό για την σταθερά κόστους του low cost Monopol : '
Διάβασε c_L }
$costlc \leftarrow c_L$
if $(costhc \leq costlc)$
{
Εμφάνισε 'O low cost δεν μπορεί να έχει υψηλότερα κόστη από τον high cost Monopol'
}
}
Εμφάνισε ' Δώσε σταθερά κόστους του Entrant : '
Διάβασε c_2
while $(c_2 \leq 0)$ or $(c_2 = "char")$
{
Εμφάνισε 'Παρακαλώ εισάγετε θετικό αριθμό για κόστη του Entrant : '
Διάβασεc_2
}
$costen \leftarrow c_2$
$q^*_{1h} \leftarrow (M + costen - 2 * costhc)/3$
$q^*_{1l} \leftarrow (M + costen - 2 * costlc)/3$
$q^*_{2h} \leftarrow (M + costhc - 2 * costen)/3$
$q^*_{2l} \leftarrow (M + costlc - 2 * costen)/3$
if $((q^*_{1h} < 0)$ or $(q^*_{1l} < 0)$ or $(q^*_{2h} < 0)$ or $(q^*_{2l} < 0))$
Εμφάνισε 'Πρέπει να έχουμε θετικές ποσότητες, θα βάλουμε τις μεταβλητές από την αρχή '
}
repeat
Εμφάνισε 'Δώσε κόστος εισόδου Entrant : '
Διάβασε F
if not $(((M + c_H - 2c_2)^2/9 > F)$ and $(F > (M + c_L - 2c_2)^2/9))$
Εμφάνισε 'Μη έγκυρο κόστος εισόδου Entrant, δεν έχει νόημα, θα τον κατατροπώσει σίγουρα ο low cost Monopol! '
until $(((M + c_H - 2c_2)^2/9 > F)$ and $(F > (M + c_L - 2c_2)^2/9)$)
$q_L \leftarrow (M - c_L)/2$
$q_H \leftarrow (M - c_H)/2$
$\Pi_1 (H1\_E) \leftarrow [(M - q_L) \cdot q_L - c_H \cdot q_L] + [(M + c_2 - 2c_H)^2/9]$
$\Pi_1 (H1\_S.o) \leftarrow [(M - q_L) \cdot q_L - c_H \cdot q_L] + (M - c_H)^2/4$
$\Pi_1 (H2\_E) \leftarrow [(M - c_H)^2/4] + [(M + c_2 - 2c_H)^2/9]$
$\Pi_1 (H2\_S.o) \leftarrow 2(M - c_H)^2/4$
$\Pi_1 (L1\_E) \leftarrow [(M - c_L)^2/4] + [(M + c_2 - 2c_L)^2/9]$
$\Pi_1 (L1\_S.o) \leftarrow 2(M - c_L)^2/4$
$\Pi_1 (L2\_E) \leftarrow [(M - q_H) \cdot q_H - c_L \cdot q_H] + (M + c_2 - 2c_L)^2/9$

$\Pi_1\left(L2\_S.o\right) \leftarrow [(M-q_H)\cdot q_H - c_L\cdot q_H] + (M-c_L)^2/4$
$\Pi_2\left(H\_E\right) \leftarrow (M+c_H-2c_2)^2/9\ -F$
$\Pi_2\left(H\_S.o\right) \leftarrow 0$
$\Pi_2\left(L\_E\right) \leftarrow (M+c_L-2c_2)^2/9\ -F;$
$\Pi_2\left(L\_S.o\right) \leftarrow 0$
$p^H \leftarrow (-\Pi_2\left(L\_E\right) - (-\Pi_2\left(L\_E\right)\cdot p))/(\Pi_2\left(H\_E\right)\cdot p)$
Εμφάνισε
{
'Οι αποδόσεις έχουν ως εξής στο παίγνιό μας : '
'Αν είναι high cost ο Monopol, ' ;
'...και επιλέξει high output στην πρώτη περίοδο, '
'......αν ο Entrant μπει στην αγορά : '
'..........Απόδοση Monopol= ' $\Pi_1\left(H1\_E\right)$
'..........Απόδοση Entrant= ' $\Pi_2\left(H\_E\right)$
'......αν ο Entrant δεν μπει στην αγορά : '
'..........Απόδοση Monopol= ' $\Pi_1\left(H1\_S.o\right)$
'..........Απόδοση Entrant= ' $\Pi_2\left(H\_S.o\right)$
'Αν είναι high cost ο Monopol, '
'...και επιλέξει low output στην πρώτη περίοδο, '
'......αν ο Entrant μπει στην αγορά : '
'..........Απόδοση Monopol= ' $\Pi_1\left(H2\_E\right)$
'..........Απόδοση Entrant= ' $\Pi_2\left(H\_E\right)$
'......αν ο Entrant δεν μπει στην αγορά : '
'..........Απόδοση Monopol= ' $\Pi_1\left(H2\_S.o\right)$
'..........Απόδοση Entrant= '$\Pi_2\left(H\_S.o\right)$
'Αν είναι low cost ο Monopol, '
'...και επιλέξει high output στην πρώτη περίοδο, '
'......αν ο Entrant μπει στην αγορά : '
'..........Απόδοση Monopol= ' $\Pi_1\left(L1\_E\right)$
'..........Απόδοση Entrant= ' $\Pi_2\left(L\_E\right)$
'......αν ο Entrant δεν μπει στην αγορά : '
'..........Απόδοση Monopol= ' $\Pi_1\left(L1\_S.o\right)$
'..........Απόδοση Entrant= '$\Pi_2\left(L\_S.o\right)$
'Αν είναι low cost ο Monopol, '
'...και επιλέξει low output στην πρώτη περίοδο (δεν το νομίζω βέβαια), '
'......αν ο Entrant μπει στην αγορά : '
'..........Απόδοση Monopol= ' $\Pi_1\left(L2\_E\right)$
'..........Απόδοση Entrant= ' $\Pi_2\left(L\_E\right)$
'......αν ο Entrant δεν μπει στην αγορά'
'..........Απόδοση Monopol= ' $\Pi_1\left(L2\_S.o\right)$
'..........Απόδοση Entrant= ' $\Pi_2\left(L\_S.o\right)$
}
Εμφάνισε 'Παρακαλώ εισάγετε πιθανότητα p για πεποίθηση ο Monopol να είναι high cost : '
Διάβασε p

while ($p < 0$ or $p > 1$ or $p = "char"$)
{
Εμφάνισε 'Παρακαλώ εισάγετε θετική πιθανότητα $0 \leq p \leq 1$ για πεποίθηση ο Monopol να είναι high cost : '
Διάβασε p
}
if $((p \cdot \Pi_2 (H1\_E) + (1-p) \cdot \Pi_2 (L1\_E)) \leq 0$) then
{
Εμφάνισε
{
'Entrant Stays Out! '
'Our pooling equilibrium is : '
$'Monopol \begin{cases} high\ output\ \alpha\nu \quad high\ cost, \\ high\ outout\ \alpha\nu \quad low\ cost \end{cases}$
$'Entrant \begin{cases} Stay\ out\ \alpha\nu\ \delta\varepsilon\iota\varsigma \quad high\ output, \\ Enter \quad \alpha\nu\ \delta\varepsilon\iota\varsigma \quad low\ output \end{cases}$
'με πεποίθηση σχετικά με αν αντιμετωπίζει high cost εταιρεία : '
$'\mu \left({}^{high\ cost}/_{high\ output} \right) =' \ p$ ',$\mu \left({}^{high\ cost}/_{low\ output} \right) =' \ 1$
'με πεποίθηση σχετικά με αν αντιμετωπίζει low cost εταιρεία : '
$'\mu \left({}^{low\ cost}/_{high\ output} \right) =' \ 1-p$ ', $\mu \left({}^{low\ cost}/_{low\ output} \right) =' \ 0$
'Η συνολική αναμενόμενη απόδοση του παίκτη 1 στην ισορροπία είναι : '
$'U_1 =' \ p \cdot (H1\_S.o) + (1-p) \cdot (L1\_S.o)$
'ενώ του παίκτη 2 είναι : '
$'U_2 =' \ 0$
}
else
{
$\mu_{hh} \leftarrow [(-\Pi_2 (L\_E))/(-\Pi_2 (L\_E) + \Pi_2 (H\_E))]$
$\mu_{lh} \leftarrow \{1 - [(-\Pi_2 (L\_E))/(-\Pi_2 (L\_E) + \Pi_2 (H\_E))]\}$
Εμφάνισε
'Entrant Enters the market! '
'Our semi-separating equilibrium is : '
$'Monopol \begin{cases} high\ output\ \mu\varepsilon\, \pi\iota\theta\alpha\nu\acute{o}\tau\eta\tau\alpha\ p^H =' \ p^H\,'\alpha\nu\ high\, cost \\ high\ outout \qquad \alpha\nu\ low\, cost' \end{cases},$
$e \leftarrow [\Pi_1 (H2\_E) - \Pi_1 (H1\_S.o)] \ / \ [\Pi_1 (H1\_E) - \Pi_1 (H1\_S.o)]$
$'Entrant \begin{cases} Enter\ \mu\varepsilon\, \pi\iota\theta\alpha\nu\acute{o}\tau\eta\tau\alpha\ e =' \ e\,'\alpha\nu\ \delta\varepsilon\iota\varsigma \quad high\ output' \\ Enter \qquad \alpha\nu\ \delta\varepsilon\iota\varsigma \quad low\ output' \end{cases}$
'με πεποίθηση σχετικά με αν αντιμετωπίζει high cost εταιρεία : '
$'\mu \left({}^{high\ cost}/_{high\ output} \right) =' \ \mu_{hh}$ ', $\mu \left({}^{high\ cost}/_{low\ output} \right) =' \ 1$
'με πεποίθηση σχετικά με το αν αντιμετωπίζει low cost εταιρεία : '
$'\mu \left({}^{low\ cost}/_{high\ output} \right) =' \ \mu_{lh}$ ', $\mu \left({}^{low\ cost}/_{low\ output} \right) =' \ 0$
' Η συνολική αναμενόμενη απόδοση του παίκτη 1 στην ισορροπία είναι : '
$'U_1 =' \ p \cdot \{p^H \cdot [(e \cdot \Pi_1 (H1\_E)) + ((1-e) \cdot \Pi_1 (H1\_S.o))] +$

$((1-p^H)\cdot 1\cdot \Pi_1\,(H2\_E))\} + \{(1-p)\cdot 1\cdot [(e\cdot \Pi_1\,(L1\_E)) + ((1-e)\cdot \Pi_1\,(L1\_S.o)]\}$
'ενώ του παίκτη 2 είναι : '
$'U_2 =' \ p\cdot \{p^H\cdot [(e\cdot \Pi_2\,(H\_E)) + ((1-e)\cdot \Pi_2\,(H\_S.o))]+$
$((1-p^H)\cdot 1\cdot \Pi_2\,(H\_E))\} + \{(1-p)\cdot 1\cdot [(e\cdot \Pi_2\,(L\_E)) + ((1-e)\cdot \Pi_2\,(L\_S.o)]\}$
}
}
end.

6.3 Προσομοίωση υπολογισμών και ισορροπίας σε Excel

Προσθέτουμε εδώ υπολογιστικό φύλλο Excel, το οποίο χρησιμοποιεί τους τύπους ακριβώς όπως τους εξάγαμε στο υποκεφάλαιο 6.1 και οπτικοποιεί τις εκάστοτε αποδόσεις του παιγνίου αλλά και την ισορροπία αυτού. Ο χρήστης εισάγει πρώτα τα δεδομένα στην στήλη B (από B1 μέχρι B5) και συγκεκριμένα την σταθερά στην αντίστροφη συνάρτηση ζήτησης, τα σταθερά κόστη των παικτών-εταιρειών και το κόστος εισόδου του παίκτη 2. Έπειτα εισάγει την αρχική πεποίθηση του παίκτη 2, p, για την πιθανότητα να αντιμετωπίζει υψηλού κόστους παίκτη 1 στο B12 και εμφανίζονται όλα τα αποτελέσματα.

Θα δείξουμε τους υπολογισμούς και τα αποτελέσματα, εξετάζοντας επίσης την ανταπόκρισή στους λογικούς περιορισμούς που έχει ο αλγόριθμός μας. Η αρχική εικόνα που βλέπει ο χρήστης είναι η ακόλουθη

Δώσε M :		q_L=	Εισάγετε ορθά δεδομένα						Π_1 (Monopol)		Π_2 (Entrant)	
Δώσε c_H :		q_H=	Εισάγετε ορθά δεδομένα					H1_E	#TIMH!		0	
Δώσε c_L :					Π_1_hc_ho=	Εισάγετε ορθά δεδομένα		H1_S.o	#TIMH!		0	
Δώσε c_2 :					Π_1_lc_lo=	Εισάγετε ορθά δεδομένα		H2_E	0		0	
Δώσε F :					.			H2_S.o	0		0	
		Cournot						L1_E	0		0	
	Είσοδος και c_L		Είσοδος και c_H		Όχι είσοδος			L1_S.o	0		0	
Π_1_c_L	0				0			L2_E	#TIMH!		0	
Π_1_c_H			0		0			L2_S.o	#TIMH!		0	
Π_2	0		0		0							
									q_1_h*=	0	q_1_l*=	0
Δώσε p :			pH=	0		e=	0		q_2_h*=	0	q_2_l*=	0
	.											
	.		0		.		U_1=	0	U_2=	0		
with belief that Monopol is high cost given a high output :						0						
with belief that Monopol is high cost given a low output :						0						
with belief that Monopol is low cost given a high output :						0						
with belief that Monopol is low cost given a low output :						0						
If Monopol is high cost, produces high output :					0		0					
If Monopol is low cost, produces high output :					0							

Figure 26: Αρχική εικόνα Excel πριν την εισαγωγή δεδομένων

Εισάγουμε τα δεδομένα για τα οποία επιλύσαμε το παίγνιό μας, δηλαδή $M = 14$, $c_H = 8$, $c_L = 6$, $c_2 = 7$ και $F = 6$ και πατάμε Enter. Το αποτέλεσμα που παίρνουμε είναι

Δώσε M :	14	q_L=	4						Π_1 (Monopol)		Π_2 (Entrant)	
Δώσε c_H :	8	q_H=	3					H1_E	10.77777778		1.111111111	
Δώσε c_L :	6				Π_1_hc_ho=		8	H1_S.o	17		0	
Δώσε c_2 :	7				Π_1_lc_lo=		15	H2_E	11.77777778		1.111111111	
Δώσε F :	6				.			H2_S.o	18		0	
		Cournot						L1_E	25		-2	
	Είσοδος και c_L		Είσοδος και c_H		Όχι είσοδος			L1_S.o	32		0	
Π_1_c_L	9				16			L2_E	24		-2	
Π_1_c_H			2.777777778		9			L2_S.o	31		0	
Π_2	-2		1.111111111		0							
									q_1_h*=	1.666666667	q_1_l*=	3
Δώσε p :			pH=	0		e=	0		q_2_h*=	2.666666667	q_2_l*=	2
	.											
	.		0		.		U_1=	0	U_2=	0		
with belief that Monopol is high cost given a high output :						0						
with belief that Monopol is high cost given a low output :						0						
with belief that Monopol is low cost given a high output :						0						
with belief that Monopol is low cost given a low output :						0						
If Monopol is high cost, produces high output :					0		.					
If Monopol is low cost, produces high output :					0							

Figure 27: Αποτέλεσμα για εισαγωγή ορθών δεδομένων εκτός p

Βλέπουμε ότι παίρνουμε ακριβώς τα αποτελέσματα στα οποία καταλήξαμε με αναλυτικές πράξεις προηγουμένως και έχουμε καθολική εικόνα, καθώς φαίνονται ποσότητες παραγωγής του high και low cost Monopol πρώτης περιόδου, κέρδη του high cost Monopol που κάνει high output και του low cost Monopol που κάνει low output στην πρώτη περίοδο, βέλτιστες ποσότητες παραγωγής σε ισορροπία Cournot αν εισέλθει ο Entrant στην αγορά και όλες οι αποδόσεις του παιγνίου. Οι ποσότητες παραγωγής είναι θετικές, το οποίο είναι και κριτήριο λογικής συνέχειας. Θα δούμε παρακάτω ότι ακόμα και για ορθά κόστη και σταθερά ζήτησης, αν τα q είναι αρνητικά το Excel δεν προχωράει σε υπολογισμό.

Δεν έχουμε εισάγει ακόμα την πεποίθηση p του Entrant οπότε και τα αποτελέσματα που εξαρτώνται από αυτή είναι προς το παρόν 0. Ας θέσουμε $p = 0,3$ και να δούμε το αποτέλεσμα.

Δώσε M :	14	q_L=		4					Π_1 (Monopol)		Π_2 (Entrant)	
Δώσε c_H :	8	q_H=		3				H1_E	10.77777778		1.111111111	
Δώσε c_L :	6			Π_1_hc_ho=			8	H1_S.o	17		0	
Δώσε c_2 :	7			Π_1_lc_lo=			15	H2_E	11.77777778		1.111111111	
Δώσε F :	6				.			H2_S.o	18		0	
		Cournot						L1_E	25		-2	
	Είσοδος και c_L		Είσοδος και c_H		Όχι είσοδος			L1_S.o	32		0	
Π_1_c_L	9				16			L2_E	24		-2	
Π_1_c_H			2.777777778		9			L2_S.o	31		0	
Π_2	-2		1.111111111		0							
									q_1_h*=	1.666666667	q_1_l*=	3
Δώσε p :	0.3		pH=	0		e=	0		q_2_h*=	2.666666667	q_2_l*=	2
	.											
Entrant stays out of the market!		0		Pooling Equilibrium			U_1=	27.5	U_2=	0		
with belief that Monopol is high cost given a high output :						0.3						
with belief that Monopol is high cost given a low output :						0.7						
with belief that Monopol is low cost given a high output :						1						
with belief that Monopol is low cost given a low output :						0						
If Monopol is high cost, produces high output :					always		.					
If Monopol is low cost, produces high output :					always							

Figure 28: Αποτέλεσμα για εισαγωγή ορθών δεδομένων και p=0,3

Έχουμε τώρα την ισορροπία μας. Βλέπουμε την υπόδειξη 'Entrant stays out of the market!' , την αναφορά Pooling Equilibrium, όλες τις πεποιθήσεις στην ισορροπία αυτή υπολογισμένες ορθά όπως τις είχαμε εξάγει και τις πιθανότητες με τις οποίες ο Monopol κάνει high ή low output (εδώ always αφού είναι Pooling Equilibrium). Ακόμα, τις αναμενόμενες αποδόσεις των παικτών στην ισορροπία (πάλι με ίδια νούμερα που πιστοποιούν την ορθότητα). Οι πιθανότητες p^H και e είναι 0 καθώς δεν υπεισέρχονται στην ισορροπία αυτή.

Ας κάνουμε τον πρώτο μας λογικό έλεγχο. Το p πρέπει να είναι $0 \leq p \leq 1$ αφού είναι πιθανότητα. Αν εισάγουμε αρνητικό p, για παράδειγμα -1, έχουμε

Δώσε M :	14	q_L=		4					Π_1 (Monopol)		Π_2 (Entrant)	
Δώσε c_H :	8	q_H=		3				H1_E	10.77777778		1.111111111	
Δώσε c_L :	6			Π_1_hc_ho=			8	H1_S.o	17		0	
Δώσε c_2 :	7			Π_1_lc_lo=			15	H2_E	11.77777778		1.111111111	
Δώσε F :	6				.			H2_S.o	18		0	
		Cournot						L1_E	25		-2	
	Είσοδος και c_L		Είσοδος και c_H		Όχι είσοδος			L1_S.o	32		0	
Π_1_c_L	9				16			L2_E	24		-2	
Π_1_c_H			2.777777778		9			L2_S.o	31		0	
Π_2	-2		1.111111111		0							
									q_1_h*=	1.666666667	q_1_l*=	3
Δώσε p :	-1		pH=	0		e=	0		q_2_h*=	2.666666667	q_2_l*=	2
	Πρέπει 0<p<1											
	.		0		.		U_1=	0	U_2=	0		
with belief that Monopol is high cost given a high output :						0						
with belief that Monopol is high cost given a low output :						0						
with belief that Monopol is low cost given a high output :						0						
with belief that Monopol is low cost given a low output :						0						
If Monopol is high cost, produces high output :					0		.					
If Monopol is low cost, produces high output :					0							

Figure 29: Αποτέλεσμα (λογικός έλεγχος) για p<0

Το Excel μας αντιδρά σωστά και ειδοποιεί τον χρήστη ότι πρέπει $0 \leq p \leq 1$ ενώ τα υπόλοιπα πεδία δεν υπολογίζονται αλλιώς θα έχουμε λάθος αποτελέσματα, στηριζόμενοι σε κάτι που είναι άτοπο.

Θέτουμε τώρα $p = 2$ και αναμένουμε την ίδια αντίδραση από το πρόγραμμά μας, την οποία και παίρνουμε όπως βλέπουμε παρακάτω

Δώσε M :	14	q_L=		4					Π_1 (Monopol)		Π_2 (Entrant)	
Δώσε c_H :	8	q_H=		3				H1_E	10.77777778		1.111111111	
Δώσε c_L :	6			Π_1_hc_ho=			8	H1_S.o	17		0	
Δώσε c_2 :	7			Π_1_lc_lo=			15	H2_E	11.77777778		1.111111111	
Δώσε F :	6				.			H2_S.o	18		0	
		Cournot						L1_E	25		-2	
	Είσοδος και c_L		Είσοδος και c_H		Όχι είσοδος			L1_S.o	32		0	
Π_1_c_L	9				16			L2_E	24		-2	
Π_1_c_H			2.777777778		9			L2_S.o	31		0	
Π_2	-2		1.111111111		0							
									q_1_h*=	1.666666667	q_1_l*=	3
Δώσε p :	2		pH=	0		e=	0		q_2_h*=	2.666666667	q_2_l*=	2
	Πρέπει 0<p<1											
	.		0		.		U_1=	0	U_2=	0		
with belief that Monopol is high cost given a high output :						0						
with belief that Monopol is high cost given a low output :						0						
with belief that Monopol is low cost given a high output :						0						
with belief that Monopol is low cost given a low output :						0						
If Monopol is high cost, produces high output :					0		0					
If Monopol is low cost, produces high output :					0							

Figure 30: Αποτέλεσμα (λογικός έλεγχος) για p>1

Αλλάζουμε τώρα το p σε 0,1 για να δούμε αν συμβαίνει ορθή αναπροσαρμογή.

Δώσε M :	14	q_L=		4					Π_1 (Monopol)		Π_2 (Entrant)	
Δώσε c_H :	8	q_H=		3				H1_E	10.77777778		1.111111111	
Δώσε c_L :	6			Π_1_hc_ho=			8	H1_S.o	17		0	
Δώσε c_2 :	7			Π_1_lc_lo=			15	H2_E	11.77777778		1.111111111	
Δώσε F :	6				.			H2_S.o	18		0	
		Cournot						L1_E	25		-2	
	Είσοδος και c_L		Είσοδος και c_H		Όχι είσοδος			L1_S.o	32		0	
Π_1_c_L	9				16			L2_E	24		-2	
Π_1_c_H			2.777777778		9			L2_S.o	31		0	
Π_2	-2		1.111111111		0							
									q_1_h*=	1.666666667	q_1_l*=	3
Δώσε p :	0.1		pH=	0		e=	0		q_2_h*=	2.666666667	q_2_l*=	2
	.											
Entrant stays out of the market!			0	Pooling Equilibrium			U_1=	30.5	U_2=	0		
with belief that Monopol is high cost given a high output :						0.1						
with belief that Monopol is high cost given a low output :						0.9						
with belief that Monopol is low cost given a high output :						1						
with belief that Monopol is low cost given a low output :						0						
If Monopol is high cost, produces high output :					always		.					
If Monopol is low cost, produces high output :					always							

Figure 31: Αποτέλεσμα για εισαγωγή ορθών δεδομένων και p=0,1

Βλέπουμε ότι εξάγει πάλι την σωστή ισορροπία αναπροσαρμόζοντας όπως πρέπει τα αποτελέσματα, με πεποίθηση πλέον για αντιμετώπιση high cost Monopol δεδομένου high output, 0,1. Επίσης η αναμενόμενη απόδοση του παίκτη 1 είναι υπολογισμένη σωστά, όπως ακριβώς καταλήξαμε στην ανάλυσή μας σε $U_1 = 30,5$.

Αυξάνουμε τώρα το p σε $p = 0,7$, το οποίο αλλάζει τελείως την ισορροπία όπως έχουμε δει. Η υπολογιστική μας εφαρμογή δίνει το εξής

Δώσε M :	14	q_L=		4					Π_1 (Monopol)		Π_2 (Entrant)	
Δώσε c_H :	8	q_H=		3				H1_E	10.77777778		1.111111111	
Δώσε c_L :	6			Π_1_hc_ho=			8	H1_S.o	17		0	
Δώσε c_2 :	7			Π_1_lc_lo=			15	H2_E	11.77777778		1.111111111	
Δώσε F :	6				.			H2_S.o	18		0	
		Cournot						L1_E	25		-2	
	Είσοδος και c_L		Είσοδος και c_H		Όχι είσοδος			L1_S.o	32		0	
Π_1_c_L	9				16			L2_E	24		-2	
Π_1_c_H			2.777777778		9			L2_S.o	31		0	
Π_2	-2		1.111111111		0							
									q_1_h*=	1.666666667	q_1_l*=	3
Δώσε p :	0.7		pH=	0.378		e=	0.839285714		q_2_h*=	2.666666667	q_2_l*=	2
	.											
Entrant enters market with prob e=			0.839286	Semi-separating equilibrium			U_1=	16.08194	U_2=	0.226956349		
with belief that Monopol is high cost given a high output :						0.642857						
with belief that Monopol is high cost given a low output :						1						
with belief that Monopol is low cost given a high output :						0.357143						
with belief that Monopol is low cost given a low output :						0						
If Monopol is high cost, produces high output :					with prob. pH=		0.378					
If Monopol is low cost, produces high output :					always							

Figure 32: Αποτέλεσμα για εισαγωγή ορθών δεδομένων και p=0,7

Τώρα οι πιθανότητες p^H και e είναι υπολογισμένες και χρησιμοποιούνται για τον καθορισμό της ισορροπίας. Βλέπουμε χαρακτηριστικά ότι πλέον 'Entrant enters the market with prob e' και την αναφορά 'Semi-separating equilibrium'. Οι πεποιθήσεις είναι υπολογισμένες ορθά καθώς και οι αναμενόμενες αποδόσεις, ενώ εδώ ο high cost Monopol δεν κάνει 'always' high output αλλά με πιθανότητα p^H.

Η μικρή απόκλιση στα αποτελέσματα από τους αρχικούς μας υπολογισμούς έχει να κάνει με την ακρίβεια δεκαδικών ψηφίων. Είχαμε χρησιμοποιήσει δύο δεκαδικά ψηφία, επειδή αυτό κάνει και το Gambit, για να επαληθεύσουμε τα αποτελέσματά μας. Εδώ χρησιμοποιούμε ακόμα μεγαλύτερη ακρίβεια μέσω του Excel, οπότε τα αποτελέσματα είναι ακόμα πιο ακριβή. Η πεποίθηση ότι ο Monopol είναι high cost δεδομένου high output είναι $\mu_2 = 0,642857$ ενώ εμείς, χρησιμοποιώντας στα κέρδη δύο δεκαδικά, δηλαδή 2.77 , 1.11 , 10.77 , 11.77 την είχαμε υπολογίσει $\mu_2 = 0,64308$ σε αντιστοιχία με το Gambit που την εμφανίζει 0,6431. Αντίστοιχα για όλα τα υπόλοιπα. Τα αποτελέσματα λοιπόν είναι πάλι σωστά και μάλιστα ακόμα πιο ακριβή.

Η τελευταία μας δοκιμή θα είναι με $p = 0,8$. Ακολουθεί παρακάτω

Δώσε M :	14	q_L=	4						Π_1 (Monopol)		Π_2 (Entrant)	
Δώσε c_H :	8	q_H=	3					H1_E	10.77777778		1.111111111	
Δώσε c_L :	6			Π_1_hc_ho=		8		H1_S.o	17		0	
Δώσε c_2 :	7			Π_1_lc_lo=		15		H2_E	11.77777778		1.111111111	
Δώσε F :	6				.			H2_S.o	18		0	
		Cournot						L1_E	25		-2	
	Είσοδος και c_L		Είσοδος και c_H		Όχι είσοδος			L1_S.o	32		0	
Π_1_c_L	9				16			L2_E	24		-2	
Π_1_c_H			2.777777778		9			L2_S.o	31		0	
Π_2	-2		1.111111111		0							
									q_1_h*=	1.666666667	q_1_l*=	3
Δώσε p :	0.8		pH=	0.288		e=	0.839285714		q_2_h*=	2.666666667	q_2_l*=	2
	.											
Entrant enters market with prob e=			0.839286	Semi-separating equilibrium			U_1=	14.64722	U_2=	0.512031746		
with belief that Monopol is high cost given a high output :						0.642857						
with belief that Monopol is high cost given a low output :						1						
with belief that Monopol is low cost given a high output :						0.357143						
with belief that Monopol is low cost given a low output :						0						
If Monopol is high cost, produces high output :					with prob. pH=		0.288					
If Monopol is low cost, produces high output :					always							

Figure 33: Αποτέλεσμα για εισαγωγή ορθών δεδομένων και p=0,8

Η εφαρμογή μας ορθά αναπροσαρμόζει την πιθανότητα p^H με την οποία ο high cost Monopol κάνει high output, με τις πεποιθήσεις του Entrant να μένουν ίδιες όπως έχουμε δει σε semi-separating equilibrium και τις αναμενόμενες αποδόσεις των παικτών φυσικά να αλλάζουν.

Θα δείξουμε τώρα την ορθολογική συμπεριφορά του για όλους τους υπόλοιπους περιορισμούς, καθώς θα εισάγουμε ένα-ένα δεδομένα που οδηγούν σε άτοπο. Ξεκινάμε π.χ για την τελευταία περίπτωση με $p = 0,8$ βάζοντας αρνητικό c_H, ας πούμε -8. Παίρνουμε

Δώσε M :	14	q_L=	Εισάγετε ορθά δεδομένα						Π_1 (Monopol)		Π_2 (Entrant)	
Δώσε c_H :	-8	q_H=	Εισάγετε ορθά δεδομένα					H1_E	Εισάγετε ορθά δεδομένα		Εισάγετε ορθά δεδομένα	
Δώσε c_L :	6			Π_1_hc_ho=		Εισάγετε ορθά δεδομένα		H1_S.o	Εισάγετε ορθά δεδομένα		0	
Δώσε c_2 :	7			Π_1_lc_lo=		Εισάγετε ορθά δεδομένα		H2_E	Εισάγετε ορθά δεδομένα		Εισάγετε ορθά δεδομένα	
Δώσε F :	6	Ορθά c_H,c_L,c_2>0/c_H>c_L/q_1_h*,q_1_l*,q_2_g*,q_2_l*>0(Βάση M,F)						H2_S.o	Εισάγετε ορθά δεδομένα		0	
		Cournot						L1_E	Εισάγετε ορθά δεδομένα		Εισάγετε ορθά δεδομένα	
	Είσοδος και c_L		Είσοδος και c_H		Όχι είσοδος			L1_S.o	Εισάγετε ορθά δεδομένα		0	
Π_1_c_L	0				0			L2_E	Εισάγετε ορθά δεδομένα		Εισάγετε ορθά δεδομένα	
Π_1_c_H			0		0			L2_S.o	Εισάγετε ορθά δεδομένα		0	
Π_2	0		0		0							
									q_1_h*=	12.33333333	q_1_l*=	3
Δώσε p :	0.8		pH=	#ΤΙΜΗ!		e=	#ΤΙΜΗ!		q_2_h*=	-2.666666667	q_2_l*=	2
	.											
#ΤΙΜΗ!			#ΤΙΜΗ!	#ΤΙΜΗ!			U_1=	#ΤΙΜΗ!	U_2=	#ΤΙΜΗ!		
with belief that Monopol is high cost given a high output :						#ΤΙΜΗ!						
with belief that Monopol is high cost given a low output :						#ΤΙΜΗ!						
with belief that Monopol is low cost given a high output :						#ΤΙΜΗ!						
with belief that Monopol is low cost given a low output :						#ΤΙΜΗ!						
If Monopol is high cost, produces high output :					#ΤΙΜΗ!		#ΤΙΜΗ!					
If Monopol is low cost, produces high output :					#ΤΙΜΗ!							

Figure 34: Αποτέλεσμα (λογικός έλεγχος) για $c_H < 0$

Η εφαρμογή δεν προχωράει σε υπολογισμούς, εκτός από τα q που είναι μέρος του λογικού ελέγχου και ζητάει από τον χρήστη να εισάγει σωστά δεδομένα, ενώ εμφανίζεται ένα παράθυρο που δείχνει ποια δεδομένα γίνονται δεκτά βάση λογικής, αναφέροντας όλους τους περιορισμούς.

Για αρνητικό $c_L = -6$ έχουμε

Δώσε M :	14	q_L=	Εισάγετε ορθά δεδομένα						Π_1 (Monopol)		Π_2 (Entrant)	
Δώσε c_H :	8	q_H=	Εισάγετε ορθά δεδομένα					H1_E	Εισάγετε ορθά δεδομένα		Εισάγετε ορθά δεδομένα	
Δώσε c_L :	-6			Π_1_hc_ho=		Εισάγετε ορθά δεδομένα		H1_S.o	Εισάγετε ορθά δεδομένα		0	
Δώσε c_2 :	7			Π_1_lc_lo=		Εισάγετε ορθά δεδομένα		H2_E	Εισάγετε ορθά δεδομένα		Εισάγετε ορθά δεδομένα	
Δώσε F :	6	Ορθά c_H,c_L,c_2>0/c_H>c_L/q_1_h*,q_1_l*,q_2_g*,q_2_l*>0(Βάση M,F)						H2_S.o	Εισάγετε ορθά δεδομένα		0	
		Cournot						L1_E	Εισάγετε ορθά δεδομένα		Εισάγετε ορθά δεδομένα	
	Είσοδος και c_L		Είσοδος και c_H		Όχι είσοδος			L1_S.o	Εισάγετε ορθά δεδομένα		0	
Π_1_c_L	0				0			L2_E	Εισάγετε ορθά δεδομένα		Εισάγετε ορθά δεδομένα	
Π_1_c_H			0		0			L2_S.o	Εισάγετε ορθά δεδομένα		0	
Π_2	0		0		0							
									q_1_h*=	1.666666667	q_1_l*=	11
Δώσε p :	0.8		pH=	#ΤΙΜΗ!		e=	#ΤΙΜΗ!		q_2_h*=	2.666666667	q_2_l*=	-2
	.											
#ΤΙΜΗ!			#ΤΙΜΗ!	#ΤΙΜΗ!			U_1=	#ΤΙΜΗ!	U_2=	#ΤΙΜΗ!		
with belief that Monopol is high cost given a high output :						#ΤΙΜΗ!						
with belief that Monopol is high cost given a low output :						#ΤΙΜΗ!						
with belief that Monopol is low cost given a high output :						#ΤΙΜΗ!						
with belief that Monopol is low cost given a low output :						#ΤΙΜΗ!						
If Monopol is high cost, produces high output :					#ΤΙΜΗ!		#ΤΙΜΗ!					
If Monopol is low cost, produces high output :					#ΤΙΜΗ!							

Figure 35: Αποτέλεσμα (λογικός έλεγχος) για $c_L < 0$

και για αρνητικό $c_2 = -7$ έχουμε

Δώσε M :	14	q_L=	Εισάγετε ορθά δεδομένα						Π_1 (Monopol)		Π_2 (Entrant)	
Δώσε c_H :	8	q_H=	Εισάγετε ορθά δεδομένα					H1_E	Εισάγετε ορθά δεδομένα		Εισάγετε ορθά δεδομένα	
Δώσε c_L :	6			Π_1_hc_ho=		Εισάγετε ορθά δεδομένα		H1_S.o	Εισάγετε ορθά δεδομένα		0	
Δώσε c_2 :	-7			Π_1_lc_lo=		Εισάγετε ορθά δεδομένα		H2_E	Εισάγετε ορθά δεδομένα		Εισάγετε ορθά δεδομένα	
Δώσε F :	6	Ορθά c_H,c_L,c_2>0/c_H>c_L/q_1_h*,q_1_l*,q_2_g*,q_2_l*>0(Βάση M,F)						H2_S.o	Εισάγετε ορθά δεδομένα		0	
		Cournot						L1_E	Εισάγετε ορθά δεδομένα		Εισάγετε ορθά δεδομένα	
	Είσοδος και c_L		Είσοδος και c_H		Όχι είσοδος			L1_S.o	Εισάγετε ορθά δεδομένα		0	
Π_1_c_L	0				0			L2_E	Εισάγετε ορθά δεδομένα		Εισάγετε ορθά δεδομένα	
Π_1_c_H			0		0			L2_S.o	Εισάγετε ορθά δεδομένα		0	
Π_2	0		0		0							
									q_1_h*=	-3	q_1_l*=	-1.666666667
Δώσε p :	0.8		pH=	#ΤΙΜΗ!		e=	#ΤΙΜΗ!		q_2_h*=	12	q_2_l*=	11.33333333
	.											
#ΤΙΜΗ!			#ΤΙΜΗ!	#ΤΙΜΗ!			U_1=	#ΤΙΜΗ!	U_2=	#ΤΙΜΗ!		
with belief that Monopol is high cost given a high output :						#ΤΙΜΗ!						
with belief that Monopol is high cost given a low output :						#ΤΙΜΗ!						
with belief that Monopol is low cost given a high output :						#ΤΙΜΗ!						
with belief that Monopol is low cost given a low output :						#ΤΙΜΗ!						
If Monopol is high cost, produces high output :					#ΤΙΜΗ!		#ΤΙΜΗ!					
If Monopol is low cost, produces high output :					#ΤΙΜΗ!							

Figure 36: Αποτέλεσμα (λογικός έλεγχος) για $c_2 < 0$

Άρα σε όλες τις περιπτώσεις εισαγωγής αρνητικών σταθερών κόστους, η εφαρμογή ζητάει ορθά δεδομένα και δεν πραγματοποιεί υπολογισμούς.

Έχουμε όμως και τον περιορισμό $c_H > c_L$. Ας αντιστρέψουμε τις τιμές του παραδείγματός μας. Για $c_H = 6$, $c_L = 8$ παίρνουμε

Δώσε M :	14	q_L=	Εισάγετε ορθά δεδομένα						Π_1 (Monopol)		Π_2 (Entrant)	
Δώσε c_H :	6	q_H=	Εισάγετε ορθά δεδομένα					H1_E	Εισάγετε ορθά δεδομένα		Εισάγετε ορθά δεδομένα	
Δώσε c_L :	8			Π_1_hc_ho=			#ΤΙΜΗ!	H1_S.o	Εισάγετε ορθά δεδομένα		0	
Δώσε c_2 :	7			Π_1_lc_lo=			#ΤΙΜΗ!	H2_E	Εισάγετε ορθά δεδομένα		Εισάγετε ορθά δεδομένα	
Δώσε F :	6	Ορθά c_H,c_L,c_2>0/c_H>c_L/q_1_h*,q_1_l*,q_2_g*,q_2_l*>0(Βάση M,F)						H2_S.o	Εισάγετε ορθά δεδομένα		0	
		Cournot						L1_E	Εισάγετε ορθά δεδομένα		Εισάγετε ορθά δεδομένα	
	Είσοδος και c_L		Είσοδος και c_H		Όχι είσοδος			L1_S.o	Εισάγετε ορθά δεδομένα		0	
Π_1_c_L	0				0			L2_E	Εισάγετε ορθά δεδομένα		Εισάγετε ορθά δεδομένα	
Π_1_c_H			0		0			L2_S.o	Εισάγετε ορθά δεδομένα		0	
Π_2	0		0		0							
									q_1_h*=	3	q_1_l*=	1.666666667
Δώσε p :	0.8		pH=	#ΤΙΜΗ!		e=	#ΤΙΜΗ!		q_2_h*=	2	q_2_l*=	2.666666667
	.											
#ΤΙΜΗ!			#ΤΙΜΗ!	#ΤΙΜΗ!			U_1=	#ΤΙΜΗ!	U_2=	#ΤΙΜΗ!		
with belief that Monopol is high cost given a high output :						#ΤΙΜΗ!						
with belief that Monopol is high cost given a low output :						#ΤΙΜΗ!						
with belief that Monopol is low cost given a high output :						#ΤΙΜΗ!						
with belief that Monopol is low cost given a low output :						#ΤΙΜΗ!						
If Monopol is high cost, produces high output :					#ΤΙΜΗ!		#ΤΙΜΗ!					
If Monopol is low cost, produces high output :					#ΤΙΜΗ!							

Figure 37: Αποτέλεσμα (λογικός έλεγχος) για $c_L > c_H$

οπότε πάλι έχουμε σωστή ανταπάντηση και μήνυμα για εισαγωγή ορθών δεδομένων.

Έχουν μείνει ο περιορισμός για θετικές ποσότητες παραγωγής q, ο οποίος καλύπτει την λογική σχέση ανάμεσα σε M, c_1 και c_2 συμπεριλαμβανόμενης της περίπτωσης εισαγωγής αρνητικού M και ο περιορισμός $(M + c_H - 2c_2)^2 / 9 > F > (M + c_L - 2c_2)^2 / 9$ δηλαδή ορθολογικά υπό πλήρη, τέλεια πληροφόρηση ο Entrant θα εισερχόταν στην αγορά μόνο αν ο Monopol ήταν high cost εταιρεία.

Για τον έλεγχο του πρώτου περιορισμού, εισάγουμε πρώτα ένα αρνητικό M, ας πούμε $M = -3$ και έπειτα εισάγουμε ορθά θετικά κόστη με $c_H > c_L$ και θετικό M για τα οποία $(M + c_H - 2c_2)^2 / 9 > F > (M + c_L - 2c_2)^2 / 9$ αλλά τέτοια που οδηγούν σε αρνητικά q.

Για $M = -3$

Δώσε M :	-3	q_L=	Εισάγετε ορθά δεδομένα						Π_1 (Monopol)		Π_2 (Entrant)	
Δώσε c_H :	8	q_H=	Εισάγετε ορθά δεδομένα					H1_E	Εισάγετε ορθά δεδομένα		Εισάγετε ορθά δεδομένα	
Δώσε c_L :	6			Π_1_hc_ho=		Εισάγετε ορθά δεδομένα		H1_S.o	Εισάγετε ορθά δεδομένα		0	
Δώσε c_2 :	7			Π_1_lc_lo=		Εισάγετε ορθά δεδομένα		H2_E	Εισάγετε ορθά δεδομένα		Εισάγετε ορθά δεδομένα	
Δώσε F :	6	Ορθά c_H,c_L,c_2>0/c_H>c_L/q_1_h*,q_1_l*,q_2_g*,q_2_l*>0(Βάση M,F)						H2_S.o	Εισάγετε ορθά δεδομένα		0	
		Cournot						L1_E	Εισάγετε ορθά δεδομένα		Εισάγετε ορθά δεδομένα	
	Είσοδος και c_L		Είσοδος και c_H		Όχι είσοδος			L1_S.o	Εισάγετε ορθά δεδομένα		0	
Π_1_c_L	0				0			L2_E	Εισάγετε ορθά δεδομένα		Εισάγετε ορθά δεδομένα	
Π_1_c_H			0		0			L2_S.o	Εισάγετε ορθά δεδομένα		0	
Π_2	0		0		0							
									q_1_h*=	-4	q_1_l*=	-2.666666667
Δώσε p :	0.8		pH=	#TIMH!		e=	#TIMH!		q_2_h*=	-3	q_2_l*=	-3.666666667
	.											
#TIMH!			#TIMH!	#TIMH!			U_1=	#TIMH!	U_2=	#TIMH!		
with belief that Monopol is high cost given a high output :						#TIMH!						
with belief that Monopol is high cost given a low output :						#TIMH!						
with belief that Monopol is low cost given a high output :						#TIMH!						
with belief that Monopol is low cost given a low output :						#TIMH!						
If Monopol is high cost, produces high output :					#TIMH!		#TIMH!					
If Monopol is low cost, produces high output :					#TIMH!							

Figure 38: Αποτέλεσμα (λογικός έλεγχος) για $M < 0$

Ορθά δεν έχουμε υπολογισμό αποδόσεων και ισορροπίας.

Για $M = 12$, $c_H = 9 > c_L = 5$, $c_2 = 5,5$ και $F = 6$ με $(M + c_H - 2c_2)^2 / 9 = 11,11 > F = 6 > (M + c_L - 2c_2)^2 / 9 = 4$, που φαινομενικά είναι παίγνιο με αποδεκτά δεδομένα για τις εταιρείες, έχουμε

Δώσε M :	12	q_L=	Εισάγετε ορθά δεδομένα						Π_1 (Monopol)		Π_2 (Entrant)	
Δώσε c_H :	9	q_H=	Εισάγετε ορθά δεδομένα					H1_E	Εισάγετε ορθά δεδομένα		Εισάγετε ορθά δεδομένα	
Δώσε c_L :	5			Π_1_hc_ho=		Εισάγετε ορθά δεδομένα		H1_S.o	Εισάγετε ορθά δεδομένα		0	
Δώσε c_2 :	5.5			Π_1_lc_lo=		Εισάγετε ορθά δεδομένα		H2_E	Εισάγετε ορθά δεδομένα		Εισάγετε ορθά δεδομένα	
Δώσε F :	6	Ορθά c_H,c_L,c_2>0/c_H>c_L/q_1_h*,q_1_l*,q_2_g*,q_2_l*>0(Βάση M,F)						H2_S.o	Εισάγετε ορθά δεδομένα		0	
		Cournot						L1_E	Εισάγετε ορθά δεδομένα		Εισάγετε ορθά δεδομένα	
	Είσοδος και c_L		Είσοδος και c_H		Όχι είσοδος			L1_S.o	Εισάγετε ορθά δεδομένα		0	
Π_1_c_L	0				0			L2_E	Εισάγετε ορθά δεδομένα		Εισάγετε ορθά δεδομένα	
Π_1_c_H			0		0			L2_S.o	Εισάγετε ορθά δεδομένα		0	
Π_2	0		0		0							
									q_1_h*=	-0.166666667	q_1_l*=	2.5
Δώσε p :	0.8		pH=	#TIMH!		e=	#TIMH!		q_2_h*=	3.333333333	q_2_l*=	2
	.											
#TIMH!			#TIMH!	#TIMH!			U_1=	#TIMH!	U_2=	#TIMH!		
with belief that Monopol is high cost given a high output :						#TIMH!						
with belief that Monopol is high cost given a low output :						#TIMH!						
with belief that Monopol is low cost given a high output :						#TIMH!						
with belief that Monopol is low cost given a low output :						#TIMH!						
If Monopol is high cost, produces high output :					#TIMH!		#TIMH!					
If Monopol is low cost, produces high output :					#TIMH!							

Figure 39: Αποτέλεσμα (λογικός έλεγχος) για δεδομένα που δίνουν $q < 0$

Το γεγονός ότι $q_{1h}^* = -0,1666 < 0$ αναστέλλει τους υπολογισμούς και ζητά ορθά δεδομένα. Εδώ ουσιαστικά κρατώντας σταθερά τα υπόλοιπα δεδομένα, το F θα μπορούσε να είναι οποιοδήποτε ανάμεσα σε $11,11 > F > 4$ και να είναι δεκτό, αλλά από την στιγμή που για αυτά τα δεδομένα έχουμε $q_{1h}^* = -0,1666 < 0$, σωστά η εφαρμογή δεν υπολογίζει τίποτα.

Επανερχόμαστε στα δεδομένα του αρχικού μας παιγνίου και έχει απομείνει ο έλεγχος του περιορισμού $(M + c_H - 2c_2)^2 /9 = 7,11 > F > (M + c_L - 2c_2)^2 /9 = 4$. Κρατώντας σταθερά τα υπόλοιπα εισάγουμε απλά ένα F που δεν ικανοποιεί την σχέση, $F = 3$ και έχουμε

Δώσε M :	14	q_L=	Εισάγετε ορθά δεδομένα						Π_1 (Monopol)		Π_2 (Entrant)	
Δώσε c_H :	8	q_H=	Εισάγετε ορθά δεδομένα					H1_E	Εισάγετε ορθά δεδομένα		Εισάγετε ορθά δεδομένα	
Δώσε c_L :	6			Π_1_hc_ho=			#TIMH!	H1_S.o	Εισάγετε ορθά δεδομένα		0	
Δώσε c_2 :	7			Π_1_lc_lo=			#TIMH!	H2_E	Εισάγετε ορθά δεδομένα		Εισάγετε ορθά δεδομένα	
Δώσε F :	3	Ορθά c_H,c_L,c_2>0/c_H>c_L/q_1_h*,q_1_l*,q_2_g*,q_2_l*>0(Βάση M,F)						H2_S.o	Εισάγετε ορθά δεδομένα		0	
		Cournot						L1_E	Εισάγετε ορθά δεδομένα		Εισάγετε ορθά δεδομένα	
	Είσοδος και c_L		Είσοδος και c_H		Όχι είσοδος			L1_S.o	Εισάγετε ορθά δεδομένα		0	
Π_1_c_L	0				0			L2_E	Εισάγετε ορθά δεδομένα		Εισάγετε ορθά δεδομένα	
Π_1_c_H			0		0			L2_S.o	Εισάγετε ορθά δεδομένα		0	
Π_2	0		0		0							
									q_1_h*=	1.666666667	q_1_l*=	3
Δώσε p :	0.8		pH=	#TIMH!		e=	#TIMH!		q_2_h*=	2.666666667	q_2_l*=	2
	.											
#TIMH!			#TIMH!	#TIMH!			U_1=	#TIMH!	U_2=	#TIMH!		
with belief that Monopol is high cost given a high output :						#TIMH!						
with belief that Monopol is high cost given a low output :						#TIMH!						
with belief that Monopol is low cost given a high output :						#TIMH!						
with belief that Monopol is low cost given a low output :						#TIMH!						
If Monopol is high cost, produces high output :					#TIMH!		#TIMH!					
If Monopol is low cost, produces high output :					#TIMH!							

Figure 40: Αποτέλεσμα (λογικός έλεγχος) για F που δεν ικανοποιεί $(M + c_H - 2c_2)^2/9 > F > (M + c_L - 2c_2)^2/9$

Έχουμε πλέον δείξει ότι η εφαρμογή μας σε υπολογιστικό φύλλο Excel υπολογίζει σωστά τις αποδόσεις του εκάστοτε παιγνίου που κατασκευάζεται από τα δεδομένα που εισάγει ο χρήστης και εξάγει αναλυτικά την ισορροπία αυτού, λαμβάνοντας ταυτόχρονα υπόψη και καλύπτοντας όλους τους λογικούς περιορισμούς που πρέπει.

6.4 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Έγινε μία σοβαρή προσπάθεια περιγραφής της θεωρίας παιγνίων και των αξιών που την διέπουν. Στο πρώτο κομμάτι, παρ' ότι θεωρητικό, παρουσιάστηκαν αρκετά αριθμητικά παραδείγματα και εφαρμογές, προσομοιώνοντας στην πλειονότητά τους πραγματικές καταστάσεις και επεξηγώντας λεπτομερώς το σκεπτικό αλλά και τις μεθόδους ανάλυσης, αντιμετώπισης και επίλυσης των διάφορων τύπων παιγνίων, ανάλογα με τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά τους. Ο αναγνώστης έλαβε μια σφαιρική εικόνα σχετικά με την χρησιμοποίηση των παιγνίων ως εργαλείο ανάλυσης στρατηγικών αποφάσεων επενδύσεων και ευελπιστώ να είναι σε θέση τόσο να τα διαχωρίσει βάση των πληροφοριών που παρέχονται και της σειράς παιξίματος κατά κύριο λόγο, όσο και να τα θεωρήσει χρήσιμο σύμμαχο και να τα χρησιμοποιήσει στην λήψη αποφάσεων σε καταστάσεις που αλληλεπιδρά στρατηγικά με άλλους και προσδοκά κάποιο όφελος. Φυσικά ο πραγματικός κόσμος είναι πιο περίπλοκος, αλλά η δυναμική προσέγγιση και δυναμική εξέταση που παρέχει η θεωρία παιγνίων σε στρατηγικές αποφάσεις, είναι το μεγάλο τους πλεονέκτημα και αυτό φάνηκε στην ανάλυση στο δεύτερο κομμάτι της διπλωματικής.

Υπήρχαν μειονεκτήματα καθώς η ανάλυση περιορίστηκε σε δύο παίκτες και έπρεπε να γίνουν παραδοχές για την δόμηση κάποιων πεποιθήσεων. Παρ' όλες όμως τις παραδοχές και απλουστεύσεις που εισήχθησαν, ο δυναμικός τρόπος επίλυσης και η αναπαράσταση σε εκτεταμένη μορφή, έδωσε μία αντιπροσωπευτική, ρεαλιστική εικόνα που προσεγγίζει την πραγματικότητα. Η αναγωγή δε στην γενική περίπτωση και η δυνατότητα υπολογισμού μέσω του αλγόριθμού μας κάθε φορά ανάλογα με τις μεταβλητές εισόδου, όχι μόνο της ισορροπίας αλλά και του παιγνίου αυτού καθ' αυτού με τις αποδόσεις του βάση του μοντέλου Cournot, πιστοποιεί την χρηστική αξία των αποτελεσμάτων μας και την σύνδεση με την πραγματικότητα. Αναλύθηκε σε βάθος και στις προεκτάσεις του το παίγνιο εισόδου εταιρείας στην αγορά και εντοπίστηκαν οι καθοριστικοί παράγοντες που επηρεάζουν κάθε φορά και στους οποίους τελικά ανάγεται τόσο οι αποδόσεις όσο και η ισορροπία του παιγνίου. Αυτοί είναι

- τα κόστη των εταιρειών $c_1 \epsilon \{c_H, c_L\}$ και c_2
- Το κόστος εισόδου του Entrant στην αγορά F

- Η σταθερά M στην αντίστροφη συνάρτηση ζήτησης
- αρχική πεποίθηση του Entrant p για την πιθανότητα να αντιμετωπίζει high cost Monopol

Βάση αυτών δομήθηκε ο αλγόριθμος υπολογισμού και επίλυσης του παιγνίου . Το ότι φτάσαμε σε αλγόριθμο είναι ευτύχημα και ίσως σε απλουστευμένο επίπεδο να μπορεί να βοηθήσει κάποια εταιρεία να λάβει μία απόφαση μέσω της χρήσης του φύλλου excel που άμεσα οπτικοποιεί τους υπολογισμούς, τις αποδόσεις, τα αποτελέσματα και την ισορροπία, αν θεωρεί ότι η κατάσταση που αντιμετωπίζει έχει παρόμοιες παραμέτρους. Το σημαντικότερο πόρισμα βέβαια είναι ο τρόπος που τελικά οδηγούνται στην ισορροπία οι παίκτες μέσω της θεωρίας παιγνίων βάση των παραμέτρων και της ανάλυσης ευαισθησίας και όχι ο αλγόριθμος αυτός κάθ' αυτός. Θα κλείσουμε λοιπόν όπως ξεκινήσαμε την διπλωματική μας. Η ανάλυση και το πλαίσιο που θέτει ως εργαλείο είναι αυτό που είναι πολύ σημαντικό για τις επιχειρήσεις, αφού αποτελεί οδηγό δράσης με χρήση θεωρίας παιγνίων σε καταστάσεις στρατηγικής αλληλεπίδρασης ατελούς πληροφόρησης, δηλαδή ό,τι πιο δύσκολο και κοντινό με την πραγματικότητα, άσχετα από το αν θα είναι τελικά νικητές ή όχι του παιγνίου. O Grantland Rice το επισήμανε και συνόψισε πολύ όμορφα στο ποίημα "Alumnus Football" :

> "For when the One Great Scorer comes
> To mark against your name,
> He writes - not that you won or lost -
> But HOW you played the Game"

7 ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

References

[1] Aliprantis, C. and Chakrabarti S. (1999) *Games and Desicion Making*. Oxford: Oxford Univesity Press

[2] Aumann, J., Hart, S. (1992) *Handbook of Game Theory with Economic Applications*, *Volume 1*. Holland: Elsevier Science B.V.

[3] Binmore, K. (2007a) *Does Game Theory Work? The Bargaining Challenge*. Cambridge, MA: MIT Press

[4] Binmore, K (2007b) *Playing for Real. A Text on Game Theory*. Oxford: Oxford University Press

[5] Dal Bó, P. (2000) *Static Games with Incomplete Information*. [Online] Rhode Island: Brown University. Available from: <www.econ.brown.edu/fac/Pedro_Dal_Bo/ec218/classnotespart3.pdf>

[6] Gintis, H. (1999). *Game Theory Evolving*. Princeton: Princeton University Press

[7] Harsanyi, J. (1967) *Games with Incomplete Information Played by Bayesian Players, I-III*. Management Science Volume 14. USA: INFORMS

[8] Kerschbamer R. (n.d.) *Static Games of Incomplete Information*: *Bayesian Equilibrium*. [Online] Innsbruck: University of Innsbruck. Available from: <www.ncer.edu.au/events/documents/10BNEfinite.pdf>

[9] Kreps, D. (1990) *A Course in Microeconomic Theory*. Princeton: Princeton University Press

[10] Levin, J. (2002) *Games of Incomplete Information.* [Online] Stanford: Stanford University. Available from: <web.stanford.edu/~jdlevin/Econ%20203/Bayesian.pdf>

[11] Levin, J. (2002) *Dynamic Games with Incomplete Information.* [Online] Stanford: Stanford University. Available from: <web.stanford.edu/~jdlevin/Econ%20203/DynamicGames.pdf>

[12] Levine, D. (n.d.) *Economic and Game Theory. What is Game Theory?*. [Online] California: University of California. Available from: <levine.sscnet.ucla.edu/general/whatis.htm>

[13] McGraw-Hill. (2008) *GAME THEORY*. pp. 561-594 [Online] Columbus: McGraw-Hill Education. Available from: <highered.mheducation.com>

[14] Munoz, F. (2011) *Strategy and Game Theory Handout on Perfect Bayesian Equilibrium-|||. Semi Separating Equilibrium.* [Online] Washington: Washington State University. Available from: <faculty.ses.wsu.edu/Munoz/Teaching/EconS491_Spring2011/Slides/Slides_24.pdf>

[15] Nash, J.F. (1951) *Non-Cooperative Games. Annals of Mathematics. Volume 54.* pp. 286-295

[16] Norman, P. (2006) *Signaling Games. Limit Pricing.* [Online] Vancouver: University of British Columbia. Available from: <faculty.arts.ubc.ca/pnorman/signalling.pdf>

[17] Osborne, M. and Rubinstein, A. (1994) *A Course in Game Theory.* Cambridge, MA: MIT Press

[18] Polak, B. (2013) *Game Theory.* [Online] Presidential Inauguration Symposia: Yale University. Available from: <https://www.youtube.com/watch?v=M3oWYHYoBvk>

[19] Ross, D. (2014) *Game Theory.* [Online] The Stanford Encyclopedia of Philosophy. Winter 2014 Edition. Available from: <http://plato.stanford.edu/archives/win2014/entries/game-theory/>

[20] Salmon, T. (2007) *Games and Decisions Supplemental Handout. Milgrom and Roberts Limit Pricing Model.* [Online] Dallas, TX: Southern Methodist University. Available from: <myweb.fsu.edu/tsalmon/limitprice.pdf>

[21] Straffin, D. (1993) *Game Theory And Strategy.* Washington, DC: The Mathematical Association of America

[22] Varian, H. (2005) *Intermediate Microeconomics: A Modern Approach*, 7^{th}edition. New York: W.W. Norton & Company, Inc

[23] Varoufakis, Y. and Hargreaves S. (2004) *Game Theory. A Critical Text.* London: Routledge

[24] Von Neumann, J. (1928) *Zur Theorie der Gesellschaftsspiele Math. Annalen.* 100 pp. 295-320

[25] Δαλαγλή, Ε. (2011) *Αξιολόγηση Επενδύσεων με Χρήση Πραγματικών Δικαιωμάτων και Θεωρίας Παιγνίων.* [Online] Διπλωματική Εργασία. Θεσσαλονίκη: ΑΠΘ. Available from: <invenio.lib.auth.gr/record/126937/files/GRI-2011-6992.pdf?version=1>

[26] Μεταξάς, Π. (2009) *Ανάπτυξη Μελέτης για την Αποτίμηση Απειλών με Χρήση Στοιχείων Από την Θεωρία Παιγνίων.* [Online] Διπλωματική Εργασία. Αθήνα: ΕΜΠ. Available from: <dspace.lib.ntua.gr/dspace2/bitstream/handle/123456789/2999/metaxasp_gametheory.pdf?sequence=3>

[27] Μπάντος, Δ. (2009) *Θεωρία Παιγνίων στην Λήψη Στρατηγικών Αποφάσεων.* [Online] Διπλωματική Εργασία. Πειραιάς: Πανεπιστήμιο Πειραιώς. Available from: <digilib.lib.unipi.gr/dspace/bitstream/unipi/3290/1/Mpantos.pdf>