Περίληψη

Το κεντρικό αποτέλεσμα αυτής της εργασίας, είναι το Θεώρημα 3.6 που αποδεικνύεται στο τρίτο Κεφάλαιο με τη βοήθεια των Λημμάτων 3.2 και 3.4. Για την απόδειξη και την κατανόησή του, είναι απαραίτητη η εννόηση του ρόλου του μεταβλητού εκθέτη και η εμβάθυνση στο πρόβλημα της πυκνότητας. Αυτό μπορεί κατά τη γνώμη μας να γίνει στο Κεφάλαιο 2, όπου παραθέτουμε τα βασικά Θεωρήματα στους χώρους Lebesgue και Sobolev μεταβλητού εκθέτη, καθώς και τις αποδείξεις τους.

Ειδικότερα, στην παράγραφο 2.1 δίνουμε τον ορισμό του χώρου Lebesgue μεταβλητού εκθέτη που συμβολίζουμε με $L^{p(\cdot)}(\Omega)$. Τα θεωρήματα που αποδεικνύουμε, χρησιμοποιούνται άμεσα ή έμμεσα στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.6 και ταυτόχρονα εξοικειώνουν τον αναγνώστη με τις ιδιαιτερότητες του χώρου αυτού. Στην παράγραφο 2.2, ορίζονται οι χώροι Sobolev μεταβλητού εκθέτη που αντίστοιχα συμβολίζονται με $W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$. Εδώ, τα θεωρήματα που αποδεικνύουμε είναι ελάχιστα και αφορούν κυρίως τη βασική συνθήκη που έδωσαν ανεξάρτητα οι S. Samko και L. Diening, εκείνη της log-Hölder συνέχειας. Ταυτόχρονα, γίνεται προσπάθεια ώστε ο αναγνώστης να μπορέσει να εμβαθύνει στο πρόβλημα της πυκνότητας των λείων συναρτήσεων. Στην παράγραφο 2.3, ορίζεται το ολοκλήρωμα Riesz και οι μελετώνται οι ιδιότητές του.

Στα επόμενα κεφάλαια, δίνουμε τη δική μας εκδοχή και τις δικές μας ικανές συνθήκες για την αντιμετώπιση του προβλήματος της πυκνότητας. Στο Κεφάλαιο 3 το Θεώρημα 3.6, βασικός πυρήνας του κεφαλαίου, συσχετίζει την πυκνότητα των λείων συναρτήσεων, με τη φραξιμότητα της $L^{p(\cdot)}$-νόρμας της συνέλιξης

$$f * |x-y|^{1-n},$$

όπου n είναι η διάσταση του χώρου.

Τα παραπάνω, μας οδηγούν στην απόδειξη δύο εξίσου σημαντικών Θεωρημάτων στο Κεφάλαιο 4, στα οποία φαίνεται πως η σχέση της διάστασης του χώρου με τον μεταβλητό εκθέτη παίζει σηματικό ρόλο στο πρόβλημα της πυκνότητας. Αυτά είναι τα Θεωρήματα 4.1 και 4.2. Το Θεώρημα 4.1 μας λέει πως αν ο εκθέτης είναι μεγαλύτερος από τη διάσταση του χώρου, τότε οι λείες συναρτήσεις είναι πυκνές στον χώρο $W^{1,p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$. Το Θεώρημα 4.2 μας λέει πως αν ο εκθέτης είναι μικρότερος από τη διάσταση του χώρου και ισχύει μια ακόμα συνθήκη για τον ίδιο τον εκθέτη, τότε πάλι έχουμε πυκνότητα.

Στο Κεφάλαιο 5 επιβεβαιώνεται η σχέση πυκνότητας και μεγιστικού τελεστή μέσω του Θεωρήματος 5.5. Χρησιμοποιώντας αυτή τη σχέση, αποδεικνύουμε ότι αν ο εκθέτης είναι μεγαλύτερος του 2, τότε μπορούμε να δώσουμε μία εναλλακτική απόδειξη για το ὀτι η συνθήκη της log-Hölder συνέχειας των S. Samko και L. Diening συνεπάγεται την πυκνότητα.

Τέλος, στο έκτο Κεφάλαιο γενικεύουμε τα προηγούμενα αποτελέσματα στους χώρους $W^{\kappa,p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$.