Η ΠΥΚΝΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΛΕΙΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΣΤΟΥΣ ΧΩΡΟΥΣ SOBOLEV ΜΕΤΑΒΛΗΤΟΥ ΕΚΘΕΤΗ.

Θανάσης Κωστόπουλος

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ - ΣΕΜΦΕ

ΕΜΠ

Περιεχομενα

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΙ

$B(x_0,r)=B_r(x_0)$ ανοιχτή μπάλα με κέντρο x_0 και ακτίνα r
$r_hf(x)=f(x+h)$ μετάθεση της συνάρτησης f
$p'(\cdot)$ συζυγής εκθέτης του $p(\cdot)$, δηλαδή $\frac{1}{p(\cdot)}+\frac{1}{p'(\cdot)}=1$
$|A|$ μέτρο Lebesgue του συνόλου A
$ess\sup f=\inf\{a\in\mathbb{R}:|\{x:f(x)>a\}|=0\}$
$ess\inf f=\sup\{b\in\mathbb{R}:|\{x:f(x)<b\}|=0\}$
$\nabla u=\left(\frac{\partial u}{\partial x_1},\frac{\partial u}{\partial x_2},...,\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)=grad\, u$
$D^\alpha(u)=\frac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1}\ldots\partial_{x_1}^{\alpha_n}}$
$f*g$ συνέλιξη
$sptf$ φορέας της συναρτήσεως f
$\Omega\subset\mathbb{R}^n$ ανοιχτό
$C_0(\Omega)$ συνεχείς συναρτήσεις με συμπαγή φορέα στο Ω
$C^\kappa(\Omega)$ συναρτήσεις με συνεχείς παραγώγους μέχρι την τάξη κ στο Ω
$C^\infty(\Omega)=\cap_{\kappa\geq 0}C^\kappa(\Omega)$
$C_0^\infty(\Omega)=C^\infty(\Omega)\cap C_0(\Omega)$
$\sigma.\pi$ σχεδόν παντού
$L^p(\Omega)=\{u$ μετρήσιμη στο Ω και $\int_\Omega|u|^pdx<\infty\},1\leq p<\infty$
$L^\infty(\Omega)=\{u$ μετρήσιμη στο Ω και υπάρχει C τέτοιο ώστε $u(x)\leq C,\ \sigma.\pi$ στο $\Omega\}$
$L^1_{loc}(\Omega)=\{f:\Omega\to\mathbb{R}:\int_K|f|dx<\infty,$ για κάθε K συμπαγές υποσύνολο του $\Omega\}$
$W^{1,p}$, $W^{\kappa,p}$ χώροι Sobolev
$\partial\Omega$ σύνορο του Ω
u_ε ομαλοποιητική ακολουθία

1. **ΕΙΣΑΓΩΓΗ**

Στην εργασία αυτή, θα ασχοληθούμε με το πρόβλημα της πυκνότητας των λείων συναρτήσεων στους χώρους Sobolev μεταβλητού εκθέτη, δίνοντας καινούργιες συνθήκες για τη λύση του (Θεώρημα 3.6).

Όπως είναι γνωστό, στους κλασσικούς χώρους Sobolev ισχύει το Θεώρημα Meyers-Serrin [13], σύμφωνα με το οποίο κάθε Sobolev συνάρτηση μπορεί να προσεγγιστεί από μία λεία συνάρτηση ως προς τη νόρμα του χώρου. Η βαρύνουσα σημασία αυτού του Θεωρήματος, αλλά και προβλήματα στη θεωρία των μερικών διαφορικών εξισώσεων γενικότερα, δημιούργησαν σε αρκετους μαθηματικούς την ανάγκη να εξετάσουν την ισχύ ή όχι ενός αντίστοιχου Θεωρήματος στους χώρους Sobolev μεταβλητού εκθέτη.

Η απόδειξη των Meyers-Serrin, χρησιμοποιεί ως βασικό εργαλείο την ανισότητα Young, σύμφωνα με την οποία αν f, g είναι δύο συναρτήσεις των L^p και L^1 αντίστοιχα, τότε η συνέλιξή $f * g$ ανήκει στον L^p και

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_1.$$

Όπως θα δούμε (Πρόταση 2.33) η ανισότητα αυτή, δεν ισχύει στους χώρους Lebesgue μεταβλητού εκθέτη και έτσι δεν είναι εφικτή, τουλάχιστον με άμεσο τρόπο, μια φυσιολογική γενίκευση του Θεωρήματος Meyers-Serrin. Αυτή η 'αποτυχία' της ανισότητας Young στους χώρους Lebesgue μεταβλητού εκθέτη, δημιούργησε σοβαρές αμφιβολίες όσον αφορά την πυκνότητα των λείων συναρτήσεων στους αντίστοιχους χώρους Sobolev. Οι αμφιβολίες αυτές επιβεβαιώθηκαν με την κατασκευή δύο παραδειγμάτων (δες [17], [8]), που ὲδειξαν ότι οι λείες συναρτήσεις γενικά δεν είναι πυκνές στους χώρους αυτούς.

Υπήρξαν πολλοί ερευνητές, από τις αρχές της δεκαετίας του 90, που ασχολήθηκαν με το πρόβλημα αυτό: οι D. Edmunds και J. Rakosnik [5] ὲδωσαν πρώτοι μία λύση το 1992, χρησιμοποιώντας μια περίπλοκη συνθήκη μονοτονίας για τον εκθέτη, η οποία τους επέτρεψε μία μερική τουλάχιστον χρήση της συνέλιξης. Στη συνέχεια ο S. Samko [15] και ο L. Diening [4] απέδειξαν ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο, ότι η log-Hölder συνέχεια του εκθέτη, για την οποία θα μιλήσουμε στο Κεφάλαιο 2 (δες Ορισμό 2.44), αποτελεί ικανή συνθήκη για την πυκνότητα. Ο V. Zhikov στο [18], απέδειξε ότι μια ασθενέστερη της log-Hölder συνέχειας συνθήκη αρκεί. Απέφυγε δε, την προβληματική συμπεριφορά της συνέλιξης, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η πυκνότητα των Lipschitz συναρτήσεων στους χώρους Sobolev μεταβλητού εκθέτη, συνεπάγεται πυκνότητα και για τις λείες συναρτήσεις.Τέλος τα πιο πρόσφατα αποτελέσματα οφείλονται στον P. Hasto (δες [9]).

Αναφερθήκαμε προηγουμένως, σε δύο παραδείγματα που δείχνουν ότι το Θεώρημα Meyers-Serrin δεν ισχύει εν γένει, στην περίπτωση του μεταβλητού εκθέτη. Ενδεικτικά, θα αναφέρουμε ότι το παράδειγμα του P. Hasto [8] που αφορά τη μοναδιαία μπάλα του $\mathbb{R}^2$ (όπως άλλωστε και του V. Zhikov [17]) χρησιμοποιεί μια μετρήσιμη συνάρτηση $p(\cdot)$ για την οποία ισχύει ότι:

$$\int_{A_1\cup A_3} |x|^{-p'(x)}dx < \infty \quad \text{και} \quad \int_{A_2\cup A_4} |x|^{-p(x)}dx < \infty,$$

όπου A_1, A_2, A_3, A_4, είναι τέσσερις ξένοι μεταξύ τους τομείς, αριθμημένοι αντίστροφα με τη φορά των δεικτών του ρολογιού. Για αυτή τη συνάρτηση $p(\cdot)$, οι λείες συναρτήσεις δεν είναι πυκνές στο χώρο Sobolev μεταβλητού εκθέτη $W^{1,p(\cdot)}(B(0,1))$. Η συνάρτηση $p(\cdot)-2$, στο παράδειγμα αυτό αλλάζει πρόσημο στους τομείς $A_1 \cup A_3$ και $A_2 \cup A_4$. Από αυτήν τη παρατήρηση προέκυψε το ερώτημα αν υπάρχει σχέση της πυκνότητας στους χώρους μεταβλητού εκθέτη και της συνάρτησης $p(\cdot)-n$, όπου n η διάσταση του χώρου (στα αναφερθέντα παραδείγματα $n=2$). Η απάντηση είναι καταφατική και δίνεται σε αυτήν την εργασία σε δύο πορίσματα του Θεωρήματος 3.6: στο Θεώρημα 4.1 και στο Θεώρημα 4.2.

Ερχόμενοι λοιπόν στην εργασία αυτή, μετά από τη σύντομη ιστορική περιήγηση και πριν περάσουμε στη λεπτομερή παρουσίαση και απόδειξη των προτάσεων που την απαρτίζουν, θα μιλήσουμε για τη δομή της.

Η δομή της εργασίας:

Το κεντρικό αποτέλεσμα αυτής της εργασίας, είναι το Θεώρημα 3.6 που αποδεικνύεται στο τρίτο Κεφάλαιο με τη βοήθεια των Λημμάτων 3.2 και 3.4. Για την απόδειξη και την κατανόησή του, είναι απαραίτητη η εννόηση του ρόλου του μεταβλητού εκθέτη και η εμβάθυνση στο πρόβλημα της πυκνότητας. Αυτό μπορεί κατά τη γνώμη μας να γίνει στο Κεφάλαιο 2, όπου παραθέτουμε τα βασικά Θεωρήματα στους χώρους Lebesgue και Sobolev μεταβλητού εκθέτη, καθώς και τις αποδείξεις τους.

Ειδικότερα, στην παράγραφο 2.1 δίνουμε τον ορισμό του χώρου Lebesgue μεταβλητού εκθέτη που συμβολίζουμε με $L^{p(\cdot)}(\Omega)$. Τα θεωρήματα που αποδεικνύουμε, χρησιμοποιούνται άμεσα ή έμμεσα στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.6 και ταυτόχρονα εξοικειώνουν τον αναγνώστη με τις ιδιαιτερότητες του χώρου αυτού. Στην παράγραφο 2.2, ορίζονται οι χώροι Sobolev μεταβλητού εκθέτη που αντίστοιχα συμβολίζονται με $W^{\kappa,p(\cdot)}(\Omega)$. Εδώ, τα θεωρήματα που αποδεικνύουμε είναι ελάχιστα και αφορούν κυρίως τη βασική συνθήκη που έδωσαν ανεξάρτητα οι S. Samko στο [15] και L. Diening στο [4], εκείνη της log-Hölder συνέχειας. Ταυτόχρονα, γίνεται προσπάθεια ώστε ο αναγνώστης να μπορέσει να εμβαθύνει στο πρόβλημα της πυκνότητας των λείων συναρτήσεων. Στην παράγραφο 2.3, ορίζεται το ολοκλήρωμα Riesz και οι μελετώνται οι ιδιότητές του.

Στα επόμενα κεφάλαια, δίνουμε τη δική μας εκδοχή και τις δικές μας ικανές συνθήκες για την αντιμετώπιση του προβλήματος της πυκνότητας. Στο Κεφάλαιο 3 το Θεώρημα 3.6, βασικός πυρήνας του κεφαλαίου, συσχετίζει την πυκνότητα των λείων συναρτήσεων, με τη φραξιμότητα της $L^{p(\cdot)}$-νόρμας της συνέλιξης

$$f * |x-y|^{1-n},$$

όπου n είναι η διάσταση του χώρου.

Τα παραπάνω, μας οδηγούν στην απόδειξη δύο εξίσου σημαντικών Θεωρημάτων στο Κεφάλαιο 4, στα οποία φαίνεται πως η σχέση της διάστασης του χώρου με τον μεταβλητό εκθέτη παίζει σηματικό ρόλο στο πρόβλημα της πυκνότητας. Αυτά, όπως αναφέραμε ήδη, είναι τα Θεωρήματα 4.1 και 4.2. Το Θεώρημα 4.1 μας λέει πως αν ο εκθέτης είναι μεγαλύτερος από τη διάσταση του χώρου, τότε οι λείες συναρτήσεις είναι πυκνές στον χώρο $W^{1,p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$. Το Θεώρημα 4.2 μας λέει πως αν ο εκθέτης είναι μικρότερος από τη διάσταση του χώρου και ισχύει μια ακόμα συνθήκη για τον ίδιο τον εκθέτη, τότε πάλι έχουμε πυκνότητα.

Στο Κεφάλαιο 5 επιβεβαιώνεται η σχέση πυκνότητας και μεγιστικού τελεστή μέσω του Θεωρήματος 5.5. Χρησιμοποιώντας αυτή τη σχέση, αποδεικνύουμε ότι αν ο εκθέτης είναι μεγαλύτερος του 2, τότε με το Θεώρημα 3.6 (δες Θεώρημα 5.7) μπορούμε να δώσουμε μία εναλλακτική απόδειξη για το ὀτι η συνθήκη της log-Hölder συνέχειας των S. Samko και L. Diening συνεπάγεται την πυκνότητα.

Τέλος, στο έκτο Κεφάλαιο γενικεύουμε τα προηγούμενα αποτελέσματα στους χώρους $W^{\kappa,p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$.

2. ΧΩΡΟΙ ΜΕΤΑΒΛΗΤΟΥ ΕΚΘΕΤΗ ΚΑΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ RIESZ

Στο κεφάλαιο αυτό θα ορίσουμε τους χώρους Lebesgue και Sobolev μεταβλητού εκθέτη. Θα αποδείξουμε κάποιες βασικές ιδιότητες των χώρων αυτών, εντοπίζοντας ομοιότητες αλλά και μια κομβική διαφορά που έχουν με τους κλασσικούς χώρους σταθερού εκθέτη, που αφορά το κομμάτι της συνέλιξης (Πρόταση 2.33). Οι αποδείξεις των προτάσεων και των θεωρημάτων για τους χώρους Lebesgue είναι από το δεύτερο Κεφάλαιο του [2], ενώ για τους χώρους Sobolev, από το όγδοο και ένατο Κεφάλαιο του [3].

Στη συνέχεια του Κεφαλαίου θα ορίσουμε το ολοκλήρωμα Riesz που αποκτά σημαντικό ρόλο στο τρίτο Κεφάλαιο.

2.1. **Χώροι Lebesgue μεταβλητού εκθέτη.**

Ο ορισμός των χώρων Lebesgue μεταβλητού εκθέτη όπως δίνεται στο [2], είναι ο εξής:

Ορισμός 2.1. *Ας θεωρήσουμε $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ανοιχτό και $p : \Omega \to [1, \infty]$ μια μετρήσιμη συνάρτηση του Ω. Ονομάζουμε χώρο Lebesgue μεταβλητού εκθέτη το χώρο*

$$L^{p(\cdot)}(\Omega) = \{f \text{ μετρήσιμη στο } \Omega : \varrho_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}\big(f/\lambda\big) < \infty, \text{ για κάποιο } \lambda > 0\},$$

όπου

$$\varrho_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}(f) = \int_{\Omega \setminus \Omega_\infty} \big|f(x)\big|^{p(x)} dx + \big\|f\big\|_{L^\infty(\Omega_\infty)}$$

και

$$\Omega_\infty = \{x \in \Omega : p(x) = \infty\}.$$

Όταν δεν υπάρχει σύγχυση για το Ω, θα γράφουμε $\varrho(f)$ ή $\varrho_{p(\cdot)}(f)$ αντί για $\varrho_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}(f)$.

Παρατήρηση 2.2. *Παρατηρούμε ότι για $\lambda = 1$, ο παραπάνω ορισμός ταιριάζει με εκείνον στους κλασσικούς χώρους Lebesgue. Στο παρακάτω παράδειγμα, φαίνεται ότι υπάρχει διαφορά στον ορισμό για τις τιμές του λ που είναι διάφορες της μονάδας. Μετά, θα δούμε ότι αυτό οφείλεται στο ότι η συνάρτηση $p(\cdot)$ δεν είναι απαραίτητα άνω φραγμένη.*

Παράδειγμα 2.3. *Έστω $\Omega = (1, \infty)$, $p(x) = x$, $f(x) = 1$. Τότε, $\varrho(f) = \infty$ ενώ για κάθε $\lambda > 1$*

$$\varrho\big(\frac{f}{\lambda}\big) = \int_1^\infty \lambda^{-x} dx = \frac{1}{\lambda \log(\lambda)} < \infty.$$

Ορισμός 2.4. *Έστω ένα σύνολο $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ανοιχτό και $p : \Omega \to [1, \infty]$, μια Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση. Αν $E \subset \Omega$, ορίζουμε*

$$p^+ = ess \sup_{x \in E} p(x)$$

και

$$p^- = ess \inf_{x \in E} p(x).$$

Ορισμός 2.5. *Έστω ένα σύνολο $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ανοιχτό. Ορίζουμε με $P(\Omega)$ το χώρο όλων των Lebesgue μετρήσιμων συναρτήσεων $p : \Omega \to [1, \infty)$, με $p^+ < \infty$.*

Πρόταση 2.6. *Έστω $p(\cdot) \in P(\Omega)$. Τότε $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ αν και μόνον αν $\varrho(f) < \infty$.*

Απόδειξη. Αν υποθέσουμε ότι $\varrho(f) < \infty$, είναι προφανές από τον ορισμό 2.1 ότι $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$.
Αντίστροφα, έστω ότι $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$. Τότε,

$$\varrho(f) = \int_\Omega \big(\frac{\lambda |f(x)|}{\lambda}\big)^{p(x)} dx \leq (\lambda^{p^+} + \lambda^{p^-}) \varrho(\frac{f}{\lambda}) < \infty.$$

□

Παρατήρηση 2.7. *Από την παραπάνω πρόταση, είναι φανερό ότι όταν ο εκθέτης $p(\cdot)$ είναι φραγμένος, μπορούμε να υποθέσουμε στον ορισμό 2.1 ότι $\lambda = 1$. Από εδώ και πέρα, θα θεωρούμε ότι $p^+ < \infty$ και άρα ότι*

$$L^{p(\cdot)}(\Omega) = \{f \text{ μετρήσιμη στο } \Omega : \int_\Omega \big| \, f(x) \big|^{p(x)} < \infty\}.$$

Θεώρημα 2.8. *Έστω $p(\cdot) \in P(\Omega)$. Ο $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ είναι διανυσματικός χώρος.*

Απόδειξη. Καταρχήν, έχουμε ότι $0 \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$.
Στη συνέχεια, αν υποθέσουμε ότι $f, g \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$, χρησιμοποιώντας την ανισότητα $(a + b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$, έχουμε ότι

$$\varrho(f+g) = \int_\Omega |f(x)+g(x)|^{p(x)} dx \leq 2^{p^+-1} \big[\int_\Omega |f(x)|^{p(x)} dx + \int_\Omega |g(x)|^{p(x)} dx \big] < \infty.$$

Τέλος,

$$\varrho(\alpha f) = \int_\Omega |\alpha f(x)|^{p(x)} dx = \int_\Omega |\alpha|^{p(x)} |f(x)|^{p(x)} dx < \infty,$$

για $\alpha \in \mathbb{R}$. □

Στους κλασσικούς χώρους Lebesgue, η νόρμα του χώρου είναι η συνάρτηση $(\int |f|^p)^{\frac{1}{p}}$. Στους χώρους μεταβλητού εκθέτη, δε μπορούμε να αντικαταστήσουμε το σταθερό εκθέτη $1/p$ με τη μεταβλητή συνάρτηση $1/p(\cdot)$ έξω από το ολοκλήρωμα. Έτσι, είμαστε αναγκασμένοι να εισάγουμε τη νόρμα του χώρου με διαφορετικό τρόπο, παρόμοιο με εκείνον της νόρμας στους χώρους Orlicz.

Ορισμός 2.9. *Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ και $p(\cdot) \in P(\Omega)$. Αν $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$, ορίζουμε τη συνάρτηση $\|\cdot\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} : L^{p(\cdot)}(\Omega) \to \mathbb{R}$ με*

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} = \inf\big\{\lambda > 0 : \varrho_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}\big(\frac{f}{\lambda}\big) \leq 1\big\}.$$

Όταν δεν υπάρχει σύγχυση για το Ω, θα γράφουμε απλά $\|f\|_{p(\cdot)}$ ή $\|f\|_{L^{p(\cdot)}}$.

Παρατήρηση 2.10. *Ο παραπάνω ορισμός είναι ισοδύναμος με εκείνον της κλασσικής νόρμας στους L^p. Πράγματι, αν $p < \infty$ και $\int_\Omega \big(\frac{|f(x)|}{\lambda}\big)^p dx = 1$, τότε $\lambda = \|f\|_{L^p(\Omega)}$.*

Θεώρημα 2.11. *Έστω $p(\cdot) \in P(\Omega)$. Τότε η $\|\cdot\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}$ ορίζει μια νόρμα στον $L^{p(\cdot)}(\Omega)$.*

Απόδειξη. Πρώτα θα δείξουμε την ισοδυναμία

$$f = 0,\ \sigma.\pi. \Leftrightarrow \|f\|_{p(\cdot)} = 0.$$

Πράγματι, αν $f = 0$, τότε $\varrho(\frac{f}{\lambda}) = 0$ για όλα τα $\lambda > 0$, οπότε

$$\|f\|_{p(\cdot)} = 0.$$

Αντίστροφα, αν $\|f\|_{p(\cdot)} = 0$, τότε για όλα τα $\lambda > 0$

$$1 \geq \varrho\big(\frac{f}{\lambda}\big) = \int_\Omega \big(\frac{|f(x)|}{\lambda}\big)^{p(x)} dx$$

Επομένως,

$$\lambda^{p^-} \geq \int_\Omega |f(x)|^{p(x)} dx$$

Παίρνοντας το όριο για $\lambda \to 0$, προκύπτει ότι

$$\|f(x)^{p(x)}\|_{L^1(\Omega)} = 0.$$

Τελικά, από τις ιδιότητες της νόρμας στον L^1, προκύπτει ότι $f = 0,\ \sigma.\pi.$ Θα πρέπει να δείξουμε ακόμα τις ιδιότητες της ομογένειας και της υποπροσθετικότητας.
Όσον αφορά την ομογένεια, για $\alpha \neq 0$

$$\begin{aligned}\|\alpha f\|_{p(\cdot)} &= \inf\{\lambda > 0 : \varrho(|\alpha| f/\lambda) \leq 1\}\\ &= |\alpha| \inf\{\lambda/\alpha > 0 : \varrho(f/(\lambda/\alpha)) \leq 1\}\end{aligned}$$

$$= |\alpha| \inf\{\mu > 0 : \varrho(f/\mu) \leq 1\}$$
$$= |\alpha| \|f\|_{p(\cdot)}$$

Τέλος, για να δείξουμε τη τριγωνική ανισότητα, θεωρούμε $\lambda, \mu > 0$ έτσι ώστε

$$\lambda > \|f\|_{p(\cdot)} \text{ και } \mu > \|g\|_{p(\cdot)}.$$

Οπότε,

$$\varrho\big(\frac{f}{\lambda}\big) \leq 1 \text{ και } \varrho\big(\frac{g}{\mu}\big) \leq 1.$$

Θέτοντας $\kappa = \lambda + \mu$

$$\varrho\big(\frac{f+g}{\kappa}\big) = \varrho\big(\frac{\lambda}{\kappa}\frac{f}{\lambda} + \frac{\mu}{\kappa}\frac{g}{\mu}\big)$$

$$\leq \int_\Omega \big(\frac{\lambda}{\kappa}\frac{|f(x)|}{\lambda} + \frac{\mu}{\kappa}\frac{|g(x)|}{\mu}\big)^{p(x)} dx$$

Όμως λόγω της κυρτότητας της συνάρτησης $t \to t^{p(x)}$, θα είναι

$$\varrho\big(\frac{f+g}{\kappa}\big) \leq \frac{\lambda}{\kappa}\int_\Omega \big|\frac{f(x)}{\lambda}\big|^{p(x)} dx + \frac{\mu}{\kappa}\int_\Omega \big|\frac{g(x)}{\mu}\big|^{p(x)} dx$$

Δηλαδή,

$$\varrho\big(\frac{f+g}{\kappa}\big) \leq \frac{\lambda}{\kappa}\varrho\big(\frac{f}{\lambda}\big) + \frac{\mu}{\kappa}\varrho\big(\frac{g}{\mu}\big) \leq 1.$$

Επομένως,

$$\varrho\big(\frac{f+g}{\kappa}\big) \leq 1.$$

Από τον ορισμό της συνάρτησης $\|\cdot\|_{p(\cdot)}$, προκύπτει ότι

$$\|f+g\|_{p(\cdot)} \leq \lambda + \mu.$$

Παίρνοντας το $infimum$ των λ και μ, έχουμε αυτό που ζητάμε. Δηλαδή,

$$\|f+g\|_{p(\cdot)} \leq \|f\|_{p(\cdot)} + \|g\|_{p(\cdot)}.$$

□

Το επόμενο Λήμμα, είναι βασικό στη θεωρία των χώρων μεταβλητού εκθέτη, αφού συνδέει τη νόρμα με τη συνάρτηση ϱ.

Λήμμα 2.12 (norm modular property). *Αν $p \in P(\Omega)$, τότε*

$$\|f\|_{p(\cdot)} \leq 1 \Leftrightarrow \varrho_{p(\cdot)}(f) \leq 1.$$

Απόδειξη. Ξεκινάμε με το αντίστροφο. Υποθέτουμε δηλαδή ότι $\varrho(f) \le 1$. Τότε προφανώς $\varrho(\frac{f}{1}) \le 1$ και από τον ορισμό της νόρμας, έπεται ότι

$$\|f\|_{p(\cdot)} \le 1.$$

Για το ευθύ υποθέτουμε ότι $\|f\|_{p(\cdot)} \le 1$. Επομένως

$$\varrho\big(\frac{f}{\lambda}\big) \le 1, \text{ για κάθε } \lambda > 1.$$

Έτσι λοιπόν,

$$\int_\Omega \big(\frac{f(x)}{\lambda}\big)^{p(x)dx} \le 1 \Rightarrow \lambda^{-p^+} \int_\Omega |f(x)|^{p(x)} dx \le 1.$$

Παίρνοντας το όριο για $\lambda \to 1$, έχουμε ότι

$$\int_\Omega |f(x)|^{p(x)} dx \le 1 \Rightarrow \varrho_{p(\cdot)}(f) \le 1.$$

□

Στη συνέχεια, θα αποδείξουμε τη γνωστή ανισότητα *Hölder* για τους χώρους μεταβλητού εκθέτη η οποία θα μας οδηγήσει σε δύο βασικά θεωρήματα εγκλεισμού, αλλά θα χρησιμοποιηθεί αυτούσια και στη συνέχεια της εργασίας μας. Στην προσπάθεια αυτή, θα μας χρησιμεύσει ο επόμενος ορισμός:

Ορισμός 2.13. *Έστω $p(\cdot) \in P(\Omega)$. Η συνάρτηση που συμβολίζεται με $p'(\cdot)$ και ορίζεται στο Ω έτσι ώστε*

$$\frac{1}{p'(\cdot)} + \frac{1}{p(\cdot)} = 1,$$

ονομάζεται η συζυγής συνάρτηση της $p(\cdot)$.

Λήμμα 2.14. *Έστω $p(\cdot) \in P(\Omega)$ με $1 < p < \infty$, $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ και $g \in L^{p'(\cdot)}(\Omega)$. Τότε $fg \in L^1(\Omega)$ και*

$$\int_\Omega |f(x)g(x)| dx \le K_{p(\cdot)} \|f\|_{p(\cdot)} \|g\|_{p'(\cdot)},$$

όπου $K_{p(\cdot)} = \frac{1}{p^-} + 1 - \frac{1}{p^+}$.

Απόδειξη. Αν $\|f\|_{p(\cdot)} = 0$ ή $\|g\|_{p'(\cdot)} = 0$, τότε είναι προφανές $(0 \le 0)$. Υποθέτουμε λοιπόν, χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι

$$\|f\|_{p(\cdot)} = \|g\|_{p'(\cdot)} = 1.$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

του Young, όπου p και q συζυγείς εκθέτες, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega} |f(x)g(x)|dx \\
&\leq \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)}|f(x)|^{p(x)}dx + \int_{\Omega} \frac{1}{p'(x)}|g(x)|^{p'(x)}dx \\
&\leq \frac{1}{p^-}\varrho_{p(\cdot)}(f) + \frac{1}{(p')^-}\varrho_{p'(\cdot)}(g) \\
&\leq \frac{1}{p^-} + 1 - \frac{1}{p^+},
\end{aligned}$$

όπου στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιήσαμε το Λήμμα 2.12. Επειδή όμως

$$\|f\|_{p(\cdot)} = \|g\|_{p'(\cdot)} = 1,$$

έπεται ότι

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)|dx \leq (\frac{1}{p^-} + 1 - \frac{1}{p^+})\|f\|_{p(\cdot)}\|g\|_{p\prime(\cdot)}.$$

□

Θεώρημα 2.15. *(Ανισότητα Hölder) Έστω $r(\cdot)$, $q(\cdot)$, $p(\cdot) \in P(\Omega)$ έτσι ώστε*

$$\frac{1}{p(\cdot)} = \frac{1}{q(\cdot)} + \frac{1}{r(\cdot)}.$$

Τότε, υπάρχει σταθερά K τέτοια ώστε για κάθε $f \in L^{q(\cdot)}(\Omega)$ και για κάθε $g \in L^{r(\cdot)}(\Omega)$

$$fg \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$$

και

$$\|fg\|_{p(\cdot)} \leq K\|f\|_{q(\cdot)}\|g\|_{r(\cdot)}.$$

Απόδειξη. Αν $\|f\|_{q(\cdot)} = 0$ ή $\|g\|_{r(\cdot)} = 0$, τότε $fg = 0$.
Υποθέτουμε λοιπόν, χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι

$$\|f\|_{q(\cdot)} = \|g\|_{r(\cdot)} = 1.$$

Ορίζουμε συνάρτηση s, τέτοια ώστε

$$s(x) = \frac{q(x)}{p(x)}.$$

Είναι φανερό ότι $|f|^{p(\cdot)} \in L^{s(\cdot)}$ και $|g|^{p(\cdot)} \in L^{s'(\cdot)}$ και ότι

$$\||f|^{p(\cdot)}\|_{L^{s(\cdot)}} \leq 1 \text{ και } \||g|^{p(\cdot)}\|_{L^{s\prime(\cdot)}} \leq 1.$$

Τότε, από το Λήμμα 2.14 προκύπτει ότι

$$\varrho_{p(\cdot)}(fg) = \int_{\Omega} |f(x)|^{p(x)}|g(x)|^{p(x)}dx$$

$$\leq K_{s(\cdot)} \| |f|^{p(\cdot)} \|_{L^{s(\cdot)}} \| |g|^{p(\cdot)} \|_{L^{s'(\cdot)}}$$
$$\leq K_{s(\cdot)}\ .$$

Τελικά από το Λήμμα 2.12, προκύπτει το ζητούμενο. Δηλαδή ότι

$$\|fg\|_{p(\cdot)} \leq K_{s(\cdot)} \|f\|_{q(\cdot)} \|g\|_{r(\cdot)}\ .$$

□

Όπως στους κλασσικούς χώρους L^p, οι σχέσεις εγκλεισμού και τα θεωρήματα εμφύτευσης στους χώρους μεταβλητού εκθέτη, αποτελούν ένα σημαντικό κομμάτι της θεωρίας. Υπάρχουν αρκετές σχέσεις εγκλεισμού στους χώρους Lebesgue μεταβλητού εκθέτη, εμείς όμως θα αποδείξουμε εκείνες τις δύο (Πόρισμα 2.18, Θεώρημα 2.20) που αναφέρονται παρακάτω και χρησιμοποιούνται άμεσα στο τρίτο Κεφάλαιο.

Θεώρημα 2.16. *Έστω $p(\cdot)$, $q(\cdot) \in P(\Omega)$. Αν ορίσουμε $r(\cdot) \in P(\Omega)$ τέτοια ώστε*

$$\frac{1}{r(y)} := \max\Big\{\frac{1}{q(y)} - \frac{1}{p(y)}, 0\Big\}, \text{ για όλα τα } y \in \Omega.$$

Τότε, αν $p \leq q$ σ.π και $1 \in L^{r(\cdot)}(\Omega)$

$$L^{p(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(\cdot)}(\Omega).$$

Απόδειξη. Από την ανισότητα Holder που αποδείξαμε στο προηγούμενο Θεώρημα, έχουμε ότι

$$\|f\|_{q(\cdot)} \leq K \|1\|_{r(\cdot)} \|f\|_{p(\cdot)}.$$

□

Παρατήρηση 2.17. *Από το Θεώρημα 3.3.1 του [3], γνωρίζουμε ότι ισχύει και το αντίστροφο του προηγούμενου θεωρήματος:*
Αν $L^{p(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(\cdot)}(\Omega)$ με νόρμα $K > 0$, τότε $q(x) \leq p(x)$ για όλα σχεδόν τα $x \in \Omega$ και

$$\|1\|_{L^{r(\cdot)}(\Omega)} \leq 4K.$$

Πόρισμα 2.18. *Έστω $\Omega \in \mathbb{R}^n$ με $|\Omega| < \infty$ και $p(\cdot)$, $q(\cdot) \in P(\Omega)$, με $q(x) \leq p(x)$ για όλα σχεδόν τα $x \in \Omega$. Τότε*

$$L^{p(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(\cdot)}(\Omega).$$

Απόδειξη. Εφόσον $|\Omega| < \infty$, συμπεραίνουμε ότι $1 \in L^{r(\cdot)}(\Omega)$ για τη συνάρτηση $r(\cdot)$ του Θεωρήματος 2.16. □

Ορισμός 2.19. *Έστω X, Y δύο διανυσματικοί χώροι με νόρμα. Στην τομή τους ορίζουμε τη νόρμα*

$$\|f\|_{X \cap Y} := \max\{\|f\|_X, \|f\|_Y\}.$$

Θεώρημα 2.20. *Έστω $p(\cdot), q(\cdot), r(\cdot) \in P(\Omega)$ με $p(x) \leq q(x) \leq r(x)$, για όλα σχεδόν τα $x \in \Omega$. Τότε*

$$L^{p(\cdot)}(\Omega) \cap L^{r(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(\cdot)}(\Omega).$$

Απόδειξη. Έστω $f \in L^{p(\cdot)} \cap L^{r(\cdot)}$ και υποθέτουμε ακόμα, χωρίς βλάβη της γενικότητας, οτι

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega) \cap L^{r(\cdot)}(\Omega)} = \max\{\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}, \|f\|_{L^{r(\cdot)}(\Omega)}\} \leq 1.$$

Τότε από το Λήμμα 2.12, προκύπτει ότι

$$\varrho_{p(\cdot)}(f) \leq 1 \text{ και } \varrho_{r(\cdot)}(f) \leq 1.$$

Έχουμε ότι

$$\varrho_{q(\cdot)}(f) = \int_\Omega |f(x)|^{q(x)} dx$$

$$= \int_{\{x:|f|\leq 1\}} |f(x)|^{q(x)} dx + \int_{\{x:|f|>1\}} |f(x)|^{q(x)} dx$$

$$\leq \int_{\{x:|f|\leq 1\}} |f(x)|^{p(x)} dx + \int_{\{x:|f|>1\}} |f(x)|^{r(x)} dx$$

$$\leq \int_\Omega |f(x)|^{p(x)} dx + \int_\Omega |f(x)|^{r(x)} dx \leq 2.$$

Όμως,

$\varrho_{q(\cdot)}(\frac{f}{2}) = \int_\Omega \left(\frac{|f|}{2}\right)^{q(x)} dx \leq \frac{1}{2^{p^-}} \int_\Omega |f|^{q(x)} dx \leq \frac{1}{2} \varrho_{q(\cdot)}(f) \leq 1.$

Επομένως, πάλι από το Λήμμα 2.12,

$$\|f\|_{q(\cdot)} \leq 2.$$

Τελικά

$$\|f\|_{L^{q(\cdot)}(\Omega)} \leq 2\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega) \cap L^{r(\cdot)}(\Omega)}.$$

□

Στους χώρους Lebesgue μεταβλητού εκθέτη ισχύουν πολλά από τα γνωστά θεωρήματα σύγκλισης που ισχύουν στους κλασσικούς χώρους. Εμείς, θα ασχοληθούμε με τα τρία πιο σημαντικά: Το Θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης, το Θεώρημα μονότονης σύγκλισης και το Λήμμα Fatou.

Ορισμός 2.21. *Αν $p(\cdot) \in P(\Omega)$ και αν $\{f_\kappa\} \subset L^{p(\cdot)}(\Omega)$, λέμε ότι η ακολουθία (f_κ) συγκλίνει ως προς ϱ στην f και συμβολίζουμε με $f_\kappa \xrightarrow{\varrho} f$, αν για κάποιο $\beta > 0$*

$$\varrho\big(\beta(f - f_\kappa)\big) \to 0, \text{ όταν } \kappa \to \infty.$$

Πρόταση 2.22. *Έστω $p(\cdot) \in P(\Omega)$. Τότε*
$f_\kappa \xrightarrow{\|\cdot\|_{p(\cdot)}} f$ αν και μόνον αν $f_\kappa \xrightarrow{\varrho} f$.

Απόδειξη. Έστω ότι υπάρχει $\beta > 0$ τέτοιο ώστε $\varrho\big(\beta(f - f_\kappa)\big) \to 0$, όταν $\kappa \to \infty$. Θεωρώ $\lambda > 0$ τέτοιο ώστε $0 < \lambda < \beta - 1$. Τότε

$$\varrho\big(\frac{f - f_\kappa}{\lambda}\big) \leq (\beta\lambda)^{-p^+}\varrho\big(\beta(f - f_\kappa)\big).$$

Επομένως, υπάρχει κ_0 τέτοιο ώστε

$$\varrho\big(\frac{f - f_\kappa}{\lambda}\big) \leq 1, \text{ για } \kappa \geq \kappa_0.$$

Δηλαδή

$$\|f - f_\kappa\|_{p(\cdot)} \leq \lambda,$$

και επειδή το λ ήταν τυχαίο, επεται ότι

$$\|f - f_\kappa\|_{p(\cdot)} \to 0.$$

Έστω τώρα ότι $f_\kappa \xrightarrow{\|\cdot\|_{p(\cdot)}} f$. Επομένως $\beta(f - f_\kappa) \xrightarrow{\|\cdot\|_{p(\cdot)}} 0$, για κάποιο β που εμείς έχουμε επιλέξει.
Δηλαδή $\beta\|f - f_\kappa\|_{p(\cdot)} \to 0$, όταν $\kappa \to \infty$. Οπότε, χρησιμοποιώντας τον ορισμό της νόρμας στον $L^{p(\cdot)}$, θα έχουμε ότι

$$\varrho\big(\beta(f - f_\kappa)\big) = \varrho\big(\|\beta(f - f_\kappa)\|_{p(\cdot)}\frac{\beta(f - f_\kappa)}{\|\beta(f - f_\kappa)\|_{p(\cdot)}}\big) \leq \|\beta(f - f_\kappa)\|_{p(\cdot)}1 \to 0.$$

□

Παρατήρηση 2.23. *Έχουμε αναφέρει από την αρχή του δευτέρου Κεφαλαίου, ότι θεωρούμε τον μεταβλητό εκθέτη φραγμένο. Αν αυτό δεν ισχύει, δηλαδή αν η συνάρτηση $p(\cdot)$ είναι μη φραγμένη, τότε δεν ισχύει η ισοδυναμία της Πρότασης 2.22. Για του λόγου το αληθές, παραθέτουμε το επόμενο παράδειγμα.*

Παράδειγμα 2.24. *Έστω $\Omega = (1, \infty)$ και $p(x) = x$.*
Για $f \equiv 1$, $f_\kappa = \chi_{(1,\kappa)}$, $f_\kappa \to f$ ως προς ϱ, αφού

$$\varrho\big(\frac{f - f\kappa}{2}\big) = \int_\kappa^\infty 2^{-x}dx \to 0, \ \kappa \to \infty.$$

Όμως,

$$\varrho(f - f_\kappa) = \int_\kappa^\infty dx = \infty$$

Επομένως

$$\|f - f_\kappa\|_{p(\cdot)} \geq 1.$$

Θεώρημα 2.25. *(Κυριαρχημένης σύγκλισης) Έστω $p(\cdot) \in P(\Omega)$. Αν $f_\kappa \to f$ σ.π σημειακά και υπάρχει $g \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ με $|f(x)| \leq g(x)$ σ.π, τότε*

$$f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$$

και
$$\|f-f_\kappa\|_{p(\cdot)} \to 0, \text{ όταν } k\to\infty.$$

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα $(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p+b^p)$, παίρνουμε ότι
$|f(x)-f_\kappa(x)|^{p(x)} \leq 2^{p(x)-1}\big(|f|^{p(x)}+|f_\kappa|^{p(x)}\big) \leq 2^{p^+}|g(x)|^{p(x)} \in L^1(\Omega)$.
Οπότε, από το κλασσικό Θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης, έπεται ότι
$$\varrho(f-f_\kappa) \to 0, \text{ όταν } \kappa\to\infty.$$
Επομένως, από την Πρόταση 2.22
$$\|f-f_\kappa\|_{p(\cdot)} \to 0, \text{ όταν } \kappa\to\infty.$$
□

Θεώρημα 2.26. *(Μονότονης Σύγκλισης) Έστω $p(\cdot)\in P(\Omega)$ και (f_κ) ακολουθία μη αρνητικών συναρτήσεων του $L^{p(\cdot)}(\Omega)$, με $\kappa=1,2,....$ Αν $f_\kappa \nearrow f$, τότε*
$$\text{είτε } f\in L^{p(\cdot)} \text{ και } \|f_\kappa\|_{p(\cdot)} \to \|f\|_{p(\cdot)},$$
$$\text{είτε } f\notin L^{p(\cdot)} \text{ και } \|f_\kappa\|_{p(\cdot)} \to \infty.$$

Απόδειξη. Εφόσον η f_κ είναι αύξουσα και $f_\kappa \leq f$, έπεται ότι η $\{\|f_\kappa\|_{p(\cdot)}\}$ είναι αύξουσα και
$$\|f_\kappa\|_{p(\cdot)} \leq \|f\|_{p(\cdot)}.$$
Θεωρούμε $\lambda>0$ τέτοιο ώστε $\lambda<\|f\|_{p(\cdot)}$. Αρκεί να δείξουμε ότι
$$\|f_\kappa\|_{p(\cdot)} > \lambda.$$
μετά από κάποιο κ_0.
Χρησιμοποιώντας το κλασσικό Θεώρημα Μονότονης σύγκλισης, έχουμε
$$\begin{aligned}\varrho\Big(\frac{f}{\lambda}\Big) &= \int_\Omega \Big(\frac{f(x)}{\lambda}\Big)^{p(x)}dx \\ &= \lim_{\kappa\to\infty}\int_\Omega \Big(\frac{f_\kappa(x)}{\lambda}\Big)^{p(x)}dx \\ &= \lim_{\kappa\to\infty}\varrho\Big(\frac{f_\kappa}{\lambda}\Big).\end{aligned}$$
Οπότε για μεγάλα κ, $\varrho\big(\frac{f_\kappa}{\lambda}\big)>1$ και άρα $\|f_\kappa\|_{p(\cdot)}>\lambda$. □

Θεώρημα 2.27. *(Λήμμα Fatou) Έστω $p(\cdot)\in P(\Omega)$ και $\{f_\kappa\}\subset L^{p(\cdot)}(\Omega)$ τέτοια ώστε $f_\kappa\to f$, σ.π. Αν*
$$\liminf_{\kappa\to\infty}\|f_\kappa\|_{p(\cdot)} < \infty,$$
τότε $f\in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ και
$$\|f\|_{p(\cdot)} \leq \liminf_{\kappa\to\infty}\|f_\kappa\|_{p(\cdot)}.$$

Απόδειξη. Ορίζουμε την ακολουθία

$$g_\kappa(x) = \inf_{m \geq \kappa} |f_m(x)|.$$

Τότε για όλα τα $m \geq \kappa$, $g_\kappa(x) \leq |f_m(x)|$, οπότε $g_\kappa \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$. Επιπλέον, η $\{g_\kappa\}$ είναι εξ' ορισμού μια αύξουσα ακολουθία και

$$\lim_{\kappa \to \infty} g_\kappa(x) = \liminf_{m \to \infty} |f_m(x)| = |f(x)|, \text{ για σχεδόν όλα τα } x \in \Omega.$$

Οπότε από το προηγούμενο Θεώρημα

$$\|f\|_{p(\cdot)} = \lim_{\kappa \to \infty} \|g_\kappa\|_{p(\cdot)} \leq \lim_{\kappa \to \infty} \big(\inf_{m \geq \kappa} \|f_m\|_{p(\cdot)} \big) = \liminf_{\kappa \to \infty} \|f_\kappa\|_{p(\cdot)} < \infty.$$

□

Παρατήρηση 2.28. *Στην κλασσική περίπτωση του Λήμματος Fatou είναι απαραίτητο να υποθέσουμε ότι οι f_κ παίρνουν μη αρνητικές τιμές. Στη δική μας περίπτωση που έχουμε να κάνουμε με νόρμες, αυτό δεν είναι απαραίτητο.*

Το παρακάτω Θεώρημα χρειάζεται ώστε να αποδειχθεί η πληρότητα των χώρων $L^{p(\cdot)}$ και είναι η ιδιότητα Riesz-Fisher που ισχύει και στους κλασσικούς χώρους *Lebesque*.

Θεώρημα 2.29 (ιδιότητα Riesz-Fisher)**.** *Έστω $p(\cdot) \in P(\Omega)$ και $\{f_\kappa\} \subset L^{p(\cdot)}(\Omega)$ τέτοια ώστε*

$$\sum_{\kappa=1}^{\infty} \|f_\kappa\|_{p(\cdot)} < \infty.$$

Τότε, υπάρχει $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ τέτοια ώστε

$$\| \sum_{\kappa=1}^{i} f_\kappa - f \|_{p(\cdot)} \to 0, \text{ όταν } i \to \infty$$

και

$$\|f\|_{p(\cdot)} \leq \sum_{\kappa=1}^{\infty} \|f_\kappa\|_{p(\cdot)}.$$

Απόδειξη. Ορίζουμε τη συνάρτηση F στο Ω με

$$F(x) = \sum_{\kappa=1}^{\infty} |f_\kappa(x)|$$

και ορίζουμε την ακολουθία $\{F_i\}$ με

$$F_i(x) = \sum_{\kappa=1}^{i} |f_\kappa(x)|.$$

Η ακολουθία F_i είναι ακολουθία μη αρνητικών συναρτήσεων και $F_i \nearrow F$. Επίσης,

$$\|F_i\|_{p(\cdot)} \leq \sum_{\kappa=1}^{i} \|f_\kappa\|_{p(\cdot)} \leq \sum_{\kappa=1}^{\infty} \|f_\kappa\|_{p(\cdot)} < \infty.$$

Δηλαδή $F_i \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ και η νόρμα φράσσεται ομοιόμορφα. Από το Θεώρημα 2.26 (Μονότονης σύγκλισης), έχουμε ότι

$$F \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$$

και

$$\|F_i\|_{p(\cdot)} \to \|F\|_{p(\cdot)}.$$

Έχουμε λοιπόν:

$$F_i \text{ αύξουσα, } |F_i|^{p(\cdot)} \in L^1,$$

$$\sup_i \int |F_i|^{p(x)} dx = \lim_i \||F_i|^{p(x)}\|_1 = \||F|^{p(\cdot)}\|_1 < \infty.$$

Από το Θεώρημα $Beppo - Levi$, έπεται ότι η ακολουθία $F_i(x)$ συγκλίνει $\sigma.\pi.$ στο Ω. Επομένως, αν ορίσουμε την ακολουθία

$$G_i(x) = \sum_{\kappa=1}^{i} f_\kappa(x),$$

αυτή συγκλίνει σημειακά $\sigma.\pi.$ στο Ω, εφόσον η απόλυτη σύγκλιση έπεται σύγκλιση. Το άθροισμα $\sum_{\kappa=1}^{\infty} f_\kappa(x)$ το συμβολίζουμε με f.
Τώρα, αν πάρουμε $G_0 = 0$, για κάθε $j \geq 0$, $(G_i - G_j)(x) \to (f - G_j)(x)$, για όλα σχεδόν τα $x \in \Omega$ και

$$\liminf_{i\to\infty} \|G_i - G_j\|_{p(\cdot)} \leq \liminf_{i\to\infty} \sum_{\kappa=j+1}^{i} \|f_\kappa\|_{p(\cdot)} = \sum_{\kappa=j+1}^{\infty} \|f_\kappa\|_{p(\cdot)} < \infty.$$

Από Θεώρημα 2.27 (Λήμμα $Fatou$), για $j = 0$,

$$\|f\|_{p(\cdot)} \leq \liminf_{i\to\infty} \|G_i\|_{p(\cdot)} \leq \sum_{\kappa=1}^{\infty} \|f_\kappa\|_{p(\cdot)} < \infty.$$

Γενικότερα, για κάθε j,

$$\|f - G_j\|_{p(\cdot)} \leq \liminf_{i\to\infty} \|G_i - G_j\|_{p(\cdot)} \leq \sum_{\kappa=j+1}^{\infty} \|f_\kappa\|_{p(\cdot)} \to 0.$$

Άρα, $\|G_i - f\|_{p(\cdot)} \to 0$, όταν $i \to \infty$. □

Μετά από όλα αυτά, είμαστε σε θέση να αποδείξουμε ότι ο χώρος $L^{p(\cdot)}$ είναι χώρος Banach.

Θεώρημα 2.30. *Έστω $p(\cdot) \in P(\Omega)$. Τότε ο $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ είναι πλήρης.*

Απόδειξη. Έστω $\{f_\kappa\} \subset L^{p(\cdot)}(\Omega)$ ακολουθία *Cauchy*.
Επιλέγω κ_1 τέτοιο ώστε $\|f_i - f_j\|_{p(\cdot)} < 2^{-1}$, $i, j \geq \kappa_1$.
Επιλέγω κ_2 τέτοιο ώστε $\|f_i - f_j\|_{p(\cdot)} < 2^{-2}$, $i, j \geq \kappa_2$ κ.ο.κ.
Έτσι, κατασκευάζουμε μια υπακολουθία $\{f_{\kappa_j}\}$, $\kappa_{j+1} > \kappa_j$, τέτοια ώστε

$$\|f_{\kappa_{j+1}} - f_{\kappa_j}\|_{p(\cdot)} < 2^{-j}.$$

Ορίζουμε τώρα μια νέα ακολουθία $\{g_j\}$ με $g_1 = f_{\kappa_1}$ και για $j > 1$, $g_j = f_{\kappa_j} - f_{\kappa_{j-1}}$. Τότε,

$$f_{\kappa_j} = \sum_{i=1}^{j} g_i$$

και

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|g_j\|_{p(\cdot)} \leq \|f_{\kappa_1}\|_{p(\cdot)} + \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} < \infty.$$

Από το προηγούμενο Θεώρημα, υπάρχει $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$, τέτοια ώστε

$$\|f_{\kappa_j} - f\|_{p(\cdot)} \to 0.$$

Από τριγωνική ανισότητα, έχουμε ότι

$$\|f - f_\kappa\|_{p(\cdot)} \leq \|f - f_{\kappa_j}\|_{p(\cdot)} + \|f_{\kappa_j} - f_\kappa\|_{p(\cdot)} \to 0.$$

□

Παρατήρηση 2.31. *Το παραπάνω Θεώρημα ισχύει και στην περίπτωση όπου $p^+ = \infty$, η οποία όμως έχουμε αναφέρει πως δε θα μας απασχολήσει σε αυτήν την εργασία.*

2.1.1. *Το πρόβλημα της συνέλιξης.* Όπως είδαμε στα προηγούμενα, η πλειοψηφία των βασικών θεωρημάτων και σχέσεων που διέπουν τους κλασσικούς χώρους L^p, ισχύουν και στους χώρους μεταβλητού εκθέτη $L^{p(\cdot)}$. Παρακάτω όμως, θα διαπιστώσουμε ανάμεσά τους, μια κομβικής σημασίας διαφορά. Πρόκειται για την ανισότητα Young για τη συνέλιξη δύο συναρτήσεων, τη σημαντικότητα της οποίας τουλάχιστον στο θέμα της πυκνότητας, θα δούμε στο Θεώρημα 2.46. Έτσι ενώ στους κλασσικούς χώρους η ανισότητα Young ισχύει και μας οδηγεί φυσιολογικά στην απόδειξη του Θεωρήματος Meyers-Serrin, δε συμβαίνει το ίδιο στους χώρους μεταβλητού εκθέτη.

Ορισμός 2.32. *Για δύο μετρήσιμες συναρτήσεις f, g, ορίζουμε τη συνάρτηση*

$$y \to f(x-y)g(y).$$

Αν είναι ολοκληρώσιμη για σχεδόν κάθε $x \in \mathbb{R}^n$, το ολοκλήρωμά της ονομάζεται συνέλιξη και συμβολίζεται με $f * g$. Δηλαδή

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}^n.$$

Αν οι συναρτήσεις f, g ορίζονται σε ένα υποσύνολο Ω του $\mathbb{R}^n$, τότε τις επεκτείνουμε στο $\mathbb{R}^n$ πριν εφαρμόσουμε την
Ανισότητα Young: Αν $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, $p,\ q,\ r \in [1, \infty]$ με $\frac{1}{r} + 1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, τότε:

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Για $q = 1$, έχουμε:

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_1.$$

Οι παραπάνω ανισότητες δε μπορούν να γενικευτούν στου χώρους $L^{p(\cdot)}$. Αυτό, είναι απόρροια του γεγονότος ότι οι χώροι αυτοί δεν είναι αναλλοίωτοι ως προς τις μεταφορές και στο επόμενο Θεώρημα, διαπιστώνουμε ότι αυτό συμβαίνει αν και μόνον αν ο εκθέτης είναι σταθερός.

Πρόταση 2.33. *Έστω $p \in P(\mathbb{R}^n)$ και $(r_h f)(y) = f(y-h)$ ο τελεστής μετατόπισης. Ο r_h είναι γραμμικός και φραγμένος τελεστής από τον $L^{p(\cdot)}$ στον $L^{p(\cdot)}$ για κάθε $h \in \mathbb{R}^n$ αν και μόνον αν p σταθερά.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι ο r_h είναι φραγμένος στον $L^{p(\cdot)}$ για κάθε $h \in \mathbb{R}^n$. Είναι:

$$\|r_h(f)\|_{p(\cdot)} = \inf\{\lambda > 0 : \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x-h)|^{p(x)}}{\lambda^{p(x)}} dx \leq 1\}$$

$$= \inf\{\lambda > 0 : \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|^{p(x+h)}}{\lambda^{p(x+h)}} d(x+h) \leq 1\} = \|f\|_{r_{-h}p(\cdot)}.$$

Επομένως $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{r_{-h}p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$. Από την Παρατήρηση 2.17, συμπεραίνουμε ότι

$$p \geq r_{-h}p, \ \sigma.\ \pi.$$

Θέτοντας h αντί για $-h$, και επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία, έχουμε ότι

$$p \geq r_h p, \ \sigma.\ \pi.$$

Επομένως, μέσω της πρώτης ανισότητας θα έχουμε

$$p(x-h+h) \leq p(x-h).$$

Οπότε

$$p(x) \leq p(x-h).$$

Τελικά, προκύπτει $p(x) \le p(x-h) \le p(x)$, δηλαδή p σταθερός.
Το αντίστροφο είναι άμεσο:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |r_h f(x)|^p dx = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^p dx = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx < \infty.$$

όπου το τελευταίο προκύπτει εφόσον η $f \in L^{p(\cdot)}$. $\square$

Η παραπάνω Πρόταση μας οδηγεί στη μη ισχύ της ανισότητας Young στους χώρους Lebesgue μεταβλητού εκθέτη:

Θεώρημα 2.34. *Έστω $p \in P(\mathbb{R}^n)$. Τότε η ανισότητα*

$$\|f * g\|_{p(\cdot)} \le \|f\|_{p(\cdot)} \|g\|_1,$$

για κάθε $f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ και $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, ισχύει αν και μόνον αν $p(\cdot)$ σταθερά.

Απόδειξη. Αν p σταθερά τότε μιλάμε για την κλασσική ανισότητα του Young.
Έστω λοιπόν ότι p όχι σταθερά και ότι η παραπάνω ανισότητα ισχύει για κάθε $f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ και για κάθε $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Από την προηγούμενη πρόταση, υπάρχει $h \in \mathbb{R}^n$ έτσι ώστε $r_h f \notin L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$. Υποθέτουμε $\chi.\beta.\gamma$ ότι $f > 0$ και ότι $\|f\|_{p(\cdot)} = 1$. Από την προηγούμενη πρόταση, υπάρχει $h \in \mathbb{R}^n$ έτσι ώστε $r_h f \notin L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$. Για κάθε $N > 0$ θέτουμε

$$g_N(x) = \min(f(x), N)\chi_{B_N(0)}.$$

Τότε,

$$\|g_N\|_{p(\cdot)} \le \|f\|_{p(\cdot)} \le 1.$$

Επειδή οι g_N είναι φραγμένες συναρτήσεις με συμπαγή φορέα, ανήκουν στον $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$. Εφ' όσον $r_h g_N \to r_h f$ σημειακά, από το Λήμμα *Fatou* για τους χώρους $L^{p(\cdot)}$, έχουμε ότι

$$\infty = \|r_h f\|_{p(\cdot)} \le \liminf_{N \to \infty} \|r_h g_N\|_{p(\cdot)}.$$

Οπότε, για κάθε $k \ge 1$, μπορούμε να βρούμε ακολουθία N_k τέτοια ώστε $f_k = g_{N_k} \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ και $\|f_k\|_{p(\cdot)} \le 1$, $\|r_h f_k\|_{p(\cdot)} \ge 2^k$. Έστω τώρα ϕ μια φραγμένη, μη αρνητική συνάρτηση με συμπαγή φορέα τέτοια ώστε $\|\phi\|_1 = 1$. Για κάθε $t > 0$ ορίζουμε

$$\psi_{t,h}(x) = t^{-n}\phi((x-h)/t).$$

Τότε, με αλλαγή μεταβλητών έχουμε

$$\psi_{t,h} * f_k(x) = \phi_t * (r_h f_k)(x).$$

Επειδή $r_h f_k \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ από το Θεώρημα 5.7 του [2], έχουμε ότι $\phi_t * (r_h f_k)(x) \to r_h f_k(x)$ σημειακά σ.π. Τότε, από το Λήμμα *Fatou* για του $L^{p(\cdot)}$,

$$\begin{aligned} 2^k \le \|r_h f_k\|_{p(\cdot)} &\le \liminf_{t\to 0} \|\phi_t * (r_h f_k)\|_{p(\cdot)} \\ = \liminf_{t\to 0} \|\psi_{t,h} * f_k)\|_{p(\cdot)} &\le C\|f\|_{p(\cdot)}\|\phi\|_1 \le C, \end{aligned}$$

πράγμα άτοπο, αφού η παραπάνω ανισότητα δε μπορεί να ισχύει για όλα τα k. $\square$

Παρατήρηση 2.35. *Παρά την αποτυχία της συνέλιξης, θα δούμε αργότερα (Πόρισμα 5.2) ότι για μια κλάση συναρτήσεων και όταν ο μεγιστικός τελεστής που θα ορίσουμε στο 5ο Κεφάλαιο είναι φραγμένος, ισχύει η ανισότητα Young.*

2.2. **Χώροι Sobolev μεταβλητού εκθέτη.** Η μελέτη των μερικών διαφορικών εξισώσεων, οδηγεί με φυσικό τρόπο στη μελέτη των χώρων Sobolev. Για τις κλασσικές Sobolev συναρτήσεις έχουν ανακαλυφθεί ποικίλα θεωρήματα, προτάσεις και ανισοτικές σχέσεις. Όσον αφορά τις συναρτήσεις στους χώρους Sobolev μεταβλητού εκθέτη, δύο μείζονος σημασίας προβλήματα που έχουν απασχολήσει τους ερευνητές αυτού του πεδίου, είναι η πυκνότητα των λείων συναρτήσεων και η φραξιμότητα του μεγιστικού τελεστή. Εμείς στην εργασία αυτή, θα εμβαθύνουμε στην πυκνότητα, αλλά θα αναφερθούμε και στο θέμα του μεγιστικού τελεστή (Κεφάλαιο 5).

Στο Θεώρημα 2.46, ο αναγνώστης θα καταλάβει ότι είναι η προβληματική συνέλιξη στους χώρους $L^{p(\cdot)}$ που μας αναγκάζει να προσθέσουμε τουλάχιστον μία επιπλέον συνθήκη (τη log-Holder συνέχεια του εκθέτη) για να ισχύει η πυκνότητα των λείων συναρτήσεων.

Στην ενότητα αυτή, εκτός από τα βασικά εργαλεία που θα βοηθήσουν στην κατανόηση των δικών μας συμπερασμάτων που αφορούν την πυκνότητα στα Κεφάλαια 3,4,5 και 6, αναφέρονται και δύο ήδη γνωστές περιπτώσεις που συνεπάγονται την πυκνότητα. Η πρώτη, όπως είπαμε, είναι η συνθήκη της log-Holder συνέχειας που ανακαλύφθηκε ανεξάρτητα από τους Samko [15], [**;**] και Diening [4], ενώ η δεύτερη είναι από τον Zhikov [18].

Η συνθήκη που ανακάλυψε ο Zhikov, είναι πιο ισχυρή από εκείνη της log-Holder-συνέχειας. Για την ακρίβεια, μπορεί να αποδειχθεί πως η log-Holder συνέχεια, εμπεριέχεται στη συνθήκη που έδωσε ο Ρώσσος μαθηματικός. Παρόλα αυτά, εμείς θα σταθούμε περισσότερο στην ασθενέστερη log-Holder συνθήκη, αφού εκεί, εντοπίζεται αμεσότερα η προσπάθεια να παρακαμφθεί το πρόβλημα της συνέλιξης.

Ορισμός 2.36. *Για ένα σύνολο $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοιχτό, $p(\cdot) \in P(\Omega)$ και $\kappa \geq 1$ ακέραιο, ορίζουμε τον χώρο Sobolev μεταβλητού εκθέτη:*

$$W^{\kappa,p(\cdot)}(\Omega) = \{f \in L^{p(\cdot)} : D^\alpha f \in L^{p(\cdot)}(\Omega),\, |\alpha| \leq \kappa\},$$

όπου $D^\alpha f$, η ασθενής μερική παράγωγος της f.

Στους χώρους $W^{\kappa,p(\cdot)}$ εισάγουμε τη νόρμα

$$\|f\|_{W^{k,p(\cdot)}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq\kappa} \|D^\alpha f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}.$$

Παρατήρηση 2.37. *Όταν δεν υπάρχει σύγχυση για το Ω, γράφουμε $\|\cdot\|_{\kappa,p(\cdot)}$ ή $\|\cdot\|_{W^{k,p(\cdot)}}$ αντί για $\|\cdot\|_{W^{k,p(\cdot)}(\Omega)}$.*

Παρακάτω αποδεικνύουμε ότι ο $W^{\kappa,p(\cdot)}(\Omega)$ είναι χώρος Banach. Η απόδειξη βασίζεται στο γεγονός ότι ο $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ είναι χώρος Banach και ταιριάζει με την απόδειξη στην περίπτωση των κλασσικών χώρων $L^p(\Omega)$.

Θεώρημα 2.38. *Έστω* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $p(\cdot) \in P(\Omega)$ *και* $\kappa \geq 1$. *Τότε ο* $W^{\kappa,p(\cdot)}(\Omega)$ *είναι χώρος Banach με τη νόρμα* $\|\cdot\|_{\kappa,p(\cdot)}$.

Απόδειξη. Όπως και στην περίπτωση του $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ προκύπτει με ανάλογο τρόπο ότι ο $W^{\kappa,p(\cdot)}(\Omega)$ είναι διανυσματικός χώρος και ότι η συνάρτηση $\|\cdot\|_{\kappa,p(\cdot)}$ είναι νόρμα.
Θα δείξουμε ότι ο $W^{\kappa,p(\cdot)}(\Omega)$ είναι πλήρης:
Έστω $\{f_j\} \subset W^{\kappa,p(\cdot)}(\Omega)$ μια ακολουθία *Cauchy*. Τότε, για κάθε α με $0 \leq |\alpha| \leq \kappa$,

$$\|D^\alpha f_j - D^\alpha f_i\|_{p(\cdot)} \leq \|f_j - f_i\|_{\kappa,p(\cdot)},$$

οπότε η ακολουθία $\{D^\alpha f_j\}$ είναι *Cauchy* στον $L^{p(\cdot)}(\Omega)$.
Επειδή ο $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ είναι πλήρης, υπάρχει $g_\alpha \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$, τέτοια ώστε

$$\|D^\alpha f_j - g_\alpha\|_{p(\cdot)} \to 0.$$

Θέτουμε $g = g_0$. Θα δείξουμε ότι $g \in W^{k,p(\cdot)}(\Omega)$ και ότι $\|f_j - g\|_{k,p(\cdot)} \to 0$. Θεωρούμε ένα τυχαίο α. Για κάθε $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, από ανισότητα *Hölder* έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} &\Big|\int_\Omega (g(x) - f_j(x)) D^\alpha \varphi(x)\Big| \\ &\leq \int_\Omega |g(x) - f_j(x)||D^\alpha \varphi(x)| dx \\ &\leq K_{p(\cdot)} \| \, g - f_j\|_{p(\cdot)} \|D^\alpha \varphi\|_{p'(\cdot)}. \end{aligned}$$

Επειδή $D^\alpha \varphi \in L^{p'(\cdot)}(\Omega)$, έπεται ότι:

$$\lim_{j\to\infty} \int_\Omega f_j D^\alpha \varphi(x) dx = \int_\Omega g(x) D^\alpha \varphi(x) dx.$$

Όμοια,

$$\lim_{j\to\infty} \int_\Omega D^\alpha f_j(x) \varphi(x) dx = \int_\Omega g_\alpha(x) \varphi(x) dx.$$

Από τις δύο παραπάνω σχέσεις και το γεγονός ότι $f_j \in W^{k,p(\cdot)}$, παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} &\int_\Omega g(x) D^\alpha \varphi(x) dx \\ &= \lim_{j\to\infty} \int_\Omega f_j D^\alpha \varphi(x) dx \\ &= \lim_{j\to\infty} \int_\Omega D^\alpha f_j(x) \varphi(x) dx \\ &= \int_\Omega g_\alpha(x) \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

Επομένως, από τον ορισμό, $D^\alpha g = g_\alpha$. ☐

Στην απόδειξη πολλών Θεωρημάτων που θα δούμε στη συνέχεια, αντικαθιστούμε τις Sobolev συναρτήσεις, με φραγμένες Sobolev συναρτήσεις, οι οποίες έχουν συμπαγή φορέα. Αυτό μας το επιτρέπει το Λήμμα 2.39 και το Θεώρημα 2.40 που θα δούμε αμέσως μετά.

Λήμμα 2.39. *Αν $p \in P(\Omega)$, τότε οι φραγμένες Sobolev συναρτήσεις είναι πυκνές στον $W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$.*

Απόδειξη. Έστω $u \in W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$. Ορίζουμε τις συναρτήσεις

$$u_m(x) = \max\{\min\{u(x), m\}, -m\}\ ,\ m > 0,$$

οι οποίες ανήκουν στον $W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ (δες Πρόταση 8.1.9 στο [3]). Είναι φανερό ότι αν για μια συνάρτηση g του $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ έχουμε ότι

$$\int_\Omega |g(x)|^{p(x)} dx < \infty,$$

τότε θα έχουμε και ότι $|\{x \in \Omega : |g(x)|^{p(x)} \geq m\}| \to 0$, όταν $m \to \infty$. Αν $|u(x)| \geq 1$, τότε

$$|u(x)| \leq |u(x)|^{p(x)}$$

και ως εκ' τούτου,

$$\{x \in \Omega : |u(x)| \geq m\} \subset \{x \in \Omega : |u(x)|^{p(x)} \geq m\}.$$

Κατά συνέπεια

$$\varrho_{W^{1,p(\cdot)}(\Omega)}(u - u_m) \leq \int_{x \in \Omega : |u(x)| \geq m} \left(|u(x)|^{p(x)} + |\nabla u(x)|^{p(x)} \right) dx \to 0,$$

όταν $m \to \infty$, όπου

$$\varrho_{W^{\kappa,p(\cdot)}(\Omega)}(u) = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq \kappa} \varrho_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}(D^\alpha u).$$

Επειδή όμως p φραγμένη, οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι (δες Πρόταση 2.22)

$$\|u - u_m\|_{W^{1,p(\cdot)}(\Omega)} \to 0.$$

□

Θεώρημα 2.40. *Αν $p \in P(\mathbb{R}^n)$, τότε οι Sobolev συναρτήσεις με συμπαγή φορέα είναι πυκνές στον $W^{\kappa,p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$, $\kappa \in \mathbb{N}$.*

Απόδειξη. Ας θέσουμε $B_t := B(0, t),\ t \geq 1$.
Έστω $\psi_r \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ μία ομαλοποιητική ακολουθία με
$\psi_r = 1$ στο B_r, $\psi_r = 0$ στο $\mathbb{R}^n \backslash B_{r+1}$, $0 \leq \psi_r(x) \leq 1$ και $|\nabla^m \psi_r| \leq c$, $m = 0, ..., \kappa$.

Θα δείξουμε ότι $u\psi_r \to u$ στον $W^{\kappa,p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$, όταν $r \to \infty$. Παρατηρούμε λοιπόν ότι

$$\|u - u\psi_r\|_{W^{\kappa,p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \leq \|u\|_{W^{\kappa,p(\cdot)}(\mathbb{R}^n \setminus B_{r+1})} + \|u - u\psi_r\|_{W^{\kappa,p(\cdot)}(B_{r+1} \setminus B_r)}.$$

Για τον πρώτο όρο, εφόσον έχουμε ότι

$$\varrho_{W^{\kappa,p(\cdot)}(\mathbb{R}^n \setminus B_{r+1})}(u) \to 0,$$

όταν $r \to \infty$, μέσω της Πρότασης 2.22, προκύπτει ότι

$$\|u\|_{W^{\kappa,p(\cdot)}(\mathbb{R}^n \setminus B_{r+1})} \to 0,$$

όταν $r \to \infty$.
Για το δεύτερο όρο της ανισότητας, γράφουμε

$$|\nabla^m u - \nabla^m (u\psi_r)| \leq (1 - \psi_r)|u| + \sum_{j=1}^{m} |\nabla^j \psi_r||\nabla^{m-j} u| \leq c \sum_{j=0}^{m} |\nabla^j u|,$$

για $m = 0, ..., \kappa$. Όμως,

$$\varrho_{W^{\kappa,p(\cdot)}(B_{r+1} \setminus B_r)}(u) \leq c\varrho_{W^{\kappa,p(\cdot)}(\mathbb{R}^n \setminus B_r)}(u) \to 0,$$

όταν $r \to \infty$. Άρα και ο δεύτερος όρος τείνει στο μηδέν όταν $r \to \infty$. □

Παρατήρηση 2.41. *Το προηγούμενο Λήμμα και το προηγούμενο Θεώρημα, δεν ισχύουν για μη φραγμένο εκθέτη.*

Είμαστε πλέον σε θέση, να αποδείξουμε την πυκνότητα των λείων συναρτήσεων μέσω της log-Hölder συνέχειας του εκθέτη (δες Θεώρημα 2.46). Θα δώσουμε πρώτα το σχετικό ορισμό και το Θεώρημα 2.45 (δες Θεώρημα 4.6.4 στο [3]) που ξεπερνάει το πρόβλημα της συνέλιξης στο οποίο αναφερθήκαμε εκτενώς στα προηγούμενα.

Ορισμός 2.42. *Καλούμε ομαλοποιητική ακολουθία (mollifier) κάθε ακολουθία συναρτήσεων $(\rho_n)_{n\geq 1}$ τέτοια ώστε*

$$\rho_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \qquad spt\rho_n \subset B\big(0, \frac{1}{n}\big), \qquad \int \rho_n = 1, \qquad \rho_n \geq 0.$$

Παρατήρηση 2.43. *Γενικά, η συνέλιξη μιας συνάρτησης συμπαγούς φορέα και μιας τοπικά ολοκληρώσιμης συνάρτησης, είναι καλά ορισμένη και συνεχής. Ειδικότερα, είναι γνωστό (δες [1]) ότι αν $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, με $1 \leq p < \infty$, τότε η συνέλιξη $\rho_n * f$ είναι συνεχής συνάρτηση και*

$$\rho_n * f \to f, \text{ στον } L^p(\mathbb{R}^n).$$

Επίσης,

$$spt(\rho_n * f) \subset B\big(0, \frac{1}{n}\big) + sptf.$$

Τέλος, αν οι ασθενείς μερικές παράγωγοι των f και g, ανήκουν στον L^1 έχουμε ότι

$$D_i(f * g) = (D_i f) * g = f * (D_i g).$$

Η ισότητα $D_i(f * g) = (D_i f) * g$, ισχύει ακόμα και αν οι g, $D_i f$ είναι συναρτήσεις του L^1, ενώ η ισότητα $D_i(f * g) = f * (D_i g)$ ισχύει ακόμα και αν τα ίδια ισχύουν για τις f, $D_i g$.

Ορισμός 2.44. *Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ και $r(\cdot) : \Omega \to \mathbb{R}$. Τότε η $r(\cdot)$ είναι τοπικά $log - Hölder$ συνεχής αν υπάρχει σταθερά c_0 τέτοια ώστε για όλα τα $x, y \in \Omega$ με*

$$|x - y| < \frac{1}{2} \Rightarrow |r(x) - r(y)| \leq \frac{c_0}{-\log(|x-y|)}.$$

Θεώρημα 2.45. *Έστω $p(\cdot) \in P(\Omega)$ έτσι ώστε να είναι τοπικά $log - Hölder$ συνεχής. Αν $f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$, $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, τότε*

$$f * u_\varepsilon \to f, \sigma.\pi$$

$$\|f * u_\varepsilon - f\|_{p(\cdot)} \to 0, \ \alpha\nu \ p^+ < \infty,$$

όπου u_ε μια ομαλοποιητική ακολουθία της u.

Το Θεώρημα 2.45 λύνει κατά κάποιο τρόπο το πρόβλημα της συνέλιξης στους χώρους $L^{p(\cdot)}$ και μας οδηγεί όπως θα δούμε αμέσως μετά, φυσιολογικά στην πυκνότητα. Η απόδειξη που δε θα γίνει εδώ, βασίζεται στο ότι η τοπική log-Holder-συνέχεια του εκθέτη, συνεπάγεται τη τοπική φραξιμότητα του μεγιστικού τελεστή (δες αρχή του 5ου Κεφαλαίου), η οποία με τη σειρά της συνεπάγεται το Πόρισμα 5.2. Από αυτό το Πόρισμα, αποδεικνύεται σχεδόν άμεσα (δες [3] Θεώρημα 4.6.4) η παραπάνω σύγκλιση.

Θεώρημα 2.46. *(S. Samko, 2000 - L. Diening, 2004) Αν $p \in P(\Omega)$ και είναι $log - Hölder$ συνεχής, τότε*

$$\overline{C^\infty(\Omega) \cap W^{\kappa,p(\cdot)}(\Omega)}^{\|\cdot\|_{\kappa,p(\cdot)}} = W^{\kappa,p(\cdot)}(\Omega).$$

Απόδειξη. Έστω $u \in W^{\kappa,p(\cdot)}(\Omega)$. Επιλέγουμε ένα $\varepsilon > 0$ και ορίζουμε τα σύνολα

$$\Omega_0 = \emptyset$$

και

$$\Omega_m = \{x \in \Omega : dist(x, \partial\Omega) > \frac{1}{m}\} \cap B(x_0, m),$$

για $m = 1, 2, ...$ και για ένα $x_0 \in \Omega$. Θεωρούμε τα σύνολα

$$U_m = \Omega_{m+1} \backslash \overline{\Omega}_{m-1}, \ m = 1, 2, ...$$

Έστω (ξ_m) η διαμέριση της μονάδας ως προς την κάλυψη U_m έτσι ώστε:

$$\xi_m \in C_0^\infty(U_m),$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \xi_m(x) = 1, \ \forall x \in \Omega.$$

Τότε, αν ψ_δ η συνήθης ομαλοποιητική ακολουθία, από την Παρατήρηση 2.43, για κάθε m υπάρχει δ_m ώστε

$$spt\big((\xi_m u) * \psi_{\delta_m}\big) \subset U_m.$$

και από το προηγούμενο Θεώρημα, επιλέγοντας μικρότερο δ_m αν χρειαστεί,

$$\|(\xi_m u) - (\xi_m u) * \psi_{\delta_m}\|_{W^{\kappa,p(\cdot)}(\Omega)} \leq \varepsilon 2^{-m}.$$

Ορίζουμε $u_\varepsilon = \sum_{m=1}^{\infty}(\xi_m u) * \psi_{\delta_m}$. Παρατηρούμε ότι από τον ορισμό των συνόλων U_m, για κάθε $x \in \Omega$ το παραπάνω άθροισμα έχει πεπερασμένο αριθμό μη μηδενικών όρων, οι οποίοι είναι συναρτήσεις του $C^\infty(\Omega)$ και γι΄ αυτό

$$u_\varepsilon \in C^\infty(\Omega).$$

Τέλος,

$$\|u - u_\varepsilon\|_{W^{\kappa,p(\cdot)}(\Omega)} \leq \sum_{m=1}^{\infty} \|(\xi_m u) - (\xi_m u) * \psi_{\delta_m}\|_{W^{\kappa,p(\cdot)}(\Omega)} \leq \varepsilon.$$

□

Πριν ολοκληρώσουμε αυτή την παράγραφο, θα θέλαμε να αναφέρουμε το Θεώρημα του V. Zhikov [18] για το οποίο μιλήσαμε προηγουμένως, που είναι κατά τη γνώμη μας, μαζί με το προηγούμενο Θεώρημα από τα πιο σημαντικά αποτελέσματα, όσον αφορά την πυκνότητα στους χώρους Sobolev μεταβλητού εκθέτη. Στην απόδειξή του, ο Zhikov, στηρίζεται στη σχέση που έχει η πυκνότητα των λείων συναρτήσεων με την πυκνότητα των Lipschitz συναρτήσεων. Για την ακρίβεια, μπορεί να αποδειχθεί (Λήμμα 9.2.1 [3]) ότι αν ο $W^{1,\infty}(\Omega)$ είναι πυκνός στον $W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$, τότε και οι λείες συναρτήσεις είναι πυκνές στον $W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$.

Θεώρημα 2.47. *(V. Zhikov, 2006) Αν $p \in P(\mathbb{R}^n)$, με $1 < p^- \leq p^+ < \infty$ και υπάρχει συνάρτηση $\omega : [0,\infty] \to [0,\infty]$ τέτοια ώστε*

$$|p(x) - p(y)| \leq \omega|(x-y)|, \ \textit{για όλα τα } x, \ y, \ \textit{στο πεδίο ορισμού της } p(\cdot)$$

και

$$\int_0^{\frac{1}{2}} t^{-1+\frac{n}{p^-}\omega(t)} dt = \infty,$$

τότε οι λείες συναρτήσεις με συμπαγή φορέα, είναι πυκνές στον $W^{1,p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$.

Παρατήρηση 2.48. *Ας υποθέσουμε για το μεταβλητό εκθέτη ότι είναι $log - Hölder$ συνεχής. Ας θεωρήσουμε επίσης $\omega(t) = \frac{c}{\log(e+\frac{1}{t})}$. Τότε, το ολοκλήρωμα στο προηγούμενο Θεώρημα, γινεται:*

$$\int_0^{\frac{1}{2}} t^{-1+\frac{n}{p^-}\omega(t)}dt = \int_0^{\frac{1}{2}} t^{-1+\frac{c}{\log(e+\frac{1}{t})}}dt \geq \int_0^{\frac{1}{2}} t^{-1}e^{-c}dt = \infty,$$

και οι συνθήκες του προηγούμενου Θεωρήματος ικανοποιούνται. Αποδεικνύεται δηλαδή ότι η πυκνότητα λόγω της $log - Hölder$ συνέχειας προκύπτει από το Θεώρημα Zhikov.

2.3. **Μετασχηματισμός Fourier και Ολοκλήρωμα Riesz.** Αυτό που κυρίως μας ενδιαφέρει στην παράγραφο αυτή, είναι να ορίσουμε το ολοκλήρωμα Riesz και να μιλήσουμε για κάποιες βασικές ιδιότητές του, φτάνοντας στο Θεώρημα 2.59 που χρησιμοποιείται στην απόδειξη του Λήμματος 3.2. Για να επιτευχθεί όμως αυτό, επιβάλλεται να μιλήσουμε για το μετασχηματισμό Fourier.

Ο μετασχηματισμός Fourier αποτελεί ένα σημαντικό εργαλείο της Ανάλυσης. Το πλεονέκτημά του είναι ότι μετατρέπει την πράξη της συνέλιξης σε πολλαπλασιασμό, δίνοντας αρκετά χρήσιμα θεωρήματα, μερικά από τα οποία θα παραθέσουμε στη συνέχεια που ο αναγνώστης μπορεί να βρει στο [11].

Ορισμός 2.49. *Έστω f μια συνάρτηση του $L^1(\mathbb{R}^n)$. Ο μετασχηματισμός Fourier της f, που συμβολίζεται με $\widehat{f}$, είναι η συνάρτηση του $\mathbb{R}^n$ που δίνεται από τον τύπο:*

$$\widehat{f}(k) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(k,x)} f(x)dx,$$

όπου

$$(k, x) := \sum_{i=1}^{n} k_i x_i.$$

Η $\widehat{f}$ είναι μια συνεχής, άρα και μετρήσιμη συνάρτηση. Πράγματι,

$$k_n \to k \Rightarrow e^{-2\pi i(k_n,x)} f(x) \to e^{-2\pi i(k,x)} f(x).$$

Όμως

$$\left|e^{-2\pi i(k_n,x)} f(x)\right| \leq |f(x)| \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

Από το Θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης παίρνουμε το ζητούμενο. Εξίσου εύκολα, αποδεικνύεται και ότι

$$\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1.$$

Από την ανισότητα Young, αν f, g δύο συναρτήσεις του $L^1(\mathbb{R}^n)$, τότε,

$$f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$$

και από το Θεώρημα $Fubini$,

$$\widehat{f * g}(k) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(k,x)} \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dydx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(k,y)} g(y) \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(k,x-y)} f(x-y)dxdy$$

$$= \widehat{f(k)}\widehat{g(k)}.$$

Παράδειγμα 2.50. *Είναι εύκολο να ελέγξει κανείς ότι:*

$$\widehat{r_h f}(k) = e^{-2\pi i(k,h)}\widehat{f}(k),\ h \in \mathbb{R}^n,$$
$$\widehat{\delta_\lambda f}(k) = \lambda^n \widehat{f}(\lambda k),\ \lambda > 0,$$

όπου $(r_h f)(x) = f(x-h)$ *και* $(\delta_\lambda f)(x) = f(x/\lambda)$.
Για του λόγου το αληθές,

$$\begin{aligned}\widehat{r_h f}(k) &= \int e^{-2\pi i(k,x)}(r_h f)(x)dx \\ &= \int e^{-2\pi i(k,x)} f(x-h)dx \\ &= \int e^{-2\pi i(k,y+h)} f(y)dy \\ &= e^{-2\pi i(k,h)} \int e^{-2\pi i(k,x)} f(x)dx.\end{aligned}$$

Ενώ,

$$\begin{aligned}\widehat{\delta_\lambda f}(k) &= \int e^{-2\pi i(k,x)}(\delta_\lambda f)(x) \\ &= \int e^{-2\pi i(k,x)} f\big(\frac{x}{\lambda}\big)dx \\ &= \int e^{-2\pi i(k,\lambda x)} f(x)d(\lambda x) \\ &= \lambda^n \int e^{-2\pi i(\lambda k,x)} f(x)dx \\ &= \lambda^n \widehat{f}(\lambda k).\end{aligned}$$

Παράδειγμα 2.51. *Για* $\lambda > 0$, *ο μετασχηματισμός Fourier της Γκαουσιανής συνάρτησης*

$$g_\lambda(x) = \exp[-\pi\lambda|x|^2],\ \text{για } x \in \mathbb{R}^n,$$

είναι:

$$\widehat{g_\lambda}(k) = \lambda^{-\frac{n}{2}} \exp\big[\frac{-\pi|k|^2}{\lambda}\big]$$

Πράγματι, σύμφωνα με το προηγούμενο παράδειγμα, αρκεί να ελέγξουμε την περίπτωση που $\lambda = 1$ *και επειδή*

$$g_1(x) = \prod_{i=1}^{n} \exp[-\pi x_i^2],$$

αρκεί τελικά και για $n = 1$. *Έχουμε λοιπόν:*

$$\widehat{g_1}(k) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i(k,x)} \exp[-\pi x^2]dx = g_1(k)f(k),$$

όπου

$$f(k)=\int_{\mathbb{R}}\exp[-\pi(x+ik)^2]dx.$$

Επειδή $f\in C^\infty(\mathbb{R})$, μπορούμε να παραγωγίσουμε την παραπάνω σχέση, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης:

$$\begin{aligned}\frac{df}{dk}&=-2\pi i\int_{\mathbb{R}}(x+ik)\exp[-\pi(x+ik)^2]dx\\&=i\int_{\mathbb{R}}\frac{d}{dx}\exp[-\pi(x+ik)^2]dx\\&=i\exp[-\pi(x+ik)^2]\big|_{-\infty}^{\infty}=0.\end{aligned}$$

Επομένως η f είναι σταθερά και επειδή $f(0)=1$, έχουμε ότι $f(k)=1$.

Ο ορισμός του μετασχηματισμού Fourier μπορεί να γενικευτεί και για συναρτήσεις του L^2 ή του L^p, σαν το όριο συναρτήσεων του L^1, πράγμα που είναι πολύ χρήσιμο για τη συνέχεια.

Θεώρημα 2.52. *Αν $f\in L^1(\mathbb{R}^n)\cap L^2(\mathbb{R}^n)$, τότε $\widehat{f}\in L^2(\mathbb{R}^n)$ και ισχύει η ταυτότητα του Plancherel*

$$\|\widehat{f}\|_2=\|f\|_2.$$

Απόδειξη. Επειδή η συνάρτηση f ανήκει στον $L^1(\mathbb{R}^n)\cap L^2(\mathbb{R}^n)$, η συνάρτηση $\widehat{f}(k)$ ανήκει στον $L^\infty(\mathbb{R}^n)$, οπότε το ολοκλήρωμα

$$\int_{\mathbb{R}^n}|\widehat{f}(k)|^2\exp[-\varepsilon\pi k^2]dk,$$

είναι καλώς ορισμένο και η συνάρτηση

$$\overline{f}(x)f(y)\exp[-\varepsilon\pi k^2]$$

των τριών μεταβλητών είναι στον $L^1(\mathbb{R}^{3n})$. Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα *Fubini*, το παράδειγμα 2.51 και τη σχέση $\overline{\widehat{f}}(k)=\widehat{f}(-k)$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^n}|\widehat{f}(k)|^2\exp[-\varepsilon\pi k^2]dk\\&=\int_{\mathbb{R}^{3n}}\overline{f}(x)f(y)e^{2\pi i(k,x-y)}\exp[-\varepsilon\pi k^2]dxdydk\\&=\int_{\mathbb{R}^{2n}}\varepsilon^{\frac{-n}{2}}\exp\big[-\frac{\pi(x-y)^2}{\varepsilon}\big]\overline{f}(x)f(y)dxdy.\end{aligned}$$

Είναι γνωστό (δες Θεώρημα 2.16 [11]) ότι η συνάρτηση

$$\varepsilon^{\frac{-n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}\exp\big[-\frac{\pi(x-y)^2}{\varepsilon}\big]f(y)dy,$$

είναι η συνέλιξη της f και μιας ομαλοποιητική ακολουθίας και ότι

$$\varepsilon^{\frac{-n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\big[-\frac{\pi(x-y)^2}{\varepsilon}\big] f(y)dy \to f(x),$$

στον $L^2(\mathbb{R}^n)$, όταν $\varepsilon \to 0$. Οπότε,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(k)|^2 \exp[-\varepsilon\pi k^2]dk \to \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx.$$

Εφαρμόζοντας τώρα το Θεώρημα μονότονης σύγκλισης, παίρνουμε το ζητούμενο. □

Παρατήρηση 2.53. *Με την ταυτότητα του Plancherel μπορούμε να επεκτείνουμε τη συνάρτηση* $\widehat{\ }$: $L^1 \cap L^2 \to L^2$ *σε μια γραμμική και συνεχή ισομετρία από τον* L^2 *στον* L^2. *Ας θεωρήσουμε λοιπόν μια συνάρτηση* f, *η οποία είναι στον* $L^2(\mathbb{R}^n)$ *αλλά όχι στον* $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$. *Επειδή ως γνωστό από τη θεωρία των κλασσικών χώρων Lebesgue ο χώρος* $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ *είναι πυκνός στον* $L^2(\mathbb{R}^n)$, *υπάρχει ακολουθία* $f^j \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ *τέτοια ώστε:*

$$\|f - f^j\|_2 \to 0.$$

Από την ταυτότητα του Plancherel που αποδείξαμε προηγουμένως,

$$\|\widehat{f^m} - \widehat{f^j}\|_2 = \|f^m - f^j\|_2.$$

Οπότε η $\widehat{f^j}$ *είναι ακολουθία Cauchy στον* $L^2(\mathbb{R}^n)$ *η οποία συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση. Αυτή τη συνάρτηση, τη συμβολίζουμε με* $\widehat{f}$ *και θα καλείται ο μετασχηματισμός Fourier της* f *στον* L^2. *Επίσης,*

$$\|\widehat{f}\|_2 = \lim_{j\to\infty} \|\widehat{f^j}\|_2 = \lim_{j\to\infty} \|f^j\|_2 = \|f\|_2.$$

Για τη γραμμικότητα,

$$= \|\widehat{f_1 + f_2} - \widehat{f_1} - \widehat{f_2}\|_2$$

$$= \lim_{j\to\infty} \|\widehat{f_1^j + f_2^j} - \widehat{f_1^j} - \widehat{f_2^j}\|_2$$

$$= \lim_{j\to\infty} \|\widehat{f_1^j} + \widehat{f_2^j} - \widehat{f_1^j} - \widehat{f_2^j}\|_2 = 0$$

Για τη συνέχεια, έχουμε ότι αν $f_n \to f$ *στον* L^2, *τότε*

$$\|\widehat{f_n} - \widehat{f}\|_2 = \|\widehat{f_n - f}\|_2 = \|f_n - f\|_2 \to 0, \ \text{για } n \to \infty.$$

Παρατήρηση 2.54. *Χρησιμοποιώντας τον τύπο*

$$(f,g) = \frac{1}{2}\{\|f+g\|_2^2 - i\frac{1}{2}\|f+ig\|_2^2 - (1-i)\frac{1}{2}\|f\|_2^2 - (1-i)\frac{1}{2}\|g\|_2^2\},$$

παίρνουμε σχετικά εύκολα, την ταυτότητα του Parseval:

$$(f, g) = (\widehat{f}, \widehat{g}).$$

Στο παρακάτω Θεώρημα, φαίνεται ότι η ισομετρία $f \to \widehat{f}$, αντιστρέφεται.

Θεώρημα 2.55. *Αν $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, τότε*

$$f = (\widehat{f})^{\vee},$$

όπου $f^{\vee}(x) := \widehat{f}(-x)$ (δηλαδή στον ορισμό 2.49 του μετασχηματισμού Fourier, το $-i$ αντικαθίσταται από το i).

Απόδειξη. Αν $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, τότε λόγω του Θεωρήματος *Fubini*, ισχύει η παρακάτω σχέση:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{g_\lambda}(y - x) f(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} g_\lambda(k) \widehat{f}(k) e^{2\pi i (k,x)} dk,$$

όπου $g_\lambda(k) = e^{-\lambda\pi|k|^2}$ και κατά συνέπεια, $\widehat{g_\lambda}(y - x) = \lambda^{-\frac{n}{2}} e^{-\pi|x-y|^2/\lambda}$, όπως στο Παράδειγμα 2.51. Κατά συνέπεια, λόγω της πυκνότητας του $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ στον $L^2(\mathbb{R}^n)$ και της Παρατήρησης 2.53, μπορούμε να πάρουμε την προηγούμενη ισότητα και για μια συνάρτηση f του $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Όταν $\lambda \to 0$, το αριστερό μέρος της παραπάνω σχέσης τείνει στην f στον L^2, όπως και στο Θεώρημα 2.52.

Όσον αφορά το δεξί μέλος, εφόσον $g_\lambda \widehat{f} \to \widehat{f}$ στον L^2, όταν $\lambda \to 0$, έπεται ότι:

$$(g_\lambda \widehat{f})^{\vee} \to (\widehat{f})^{\vee}.$$

Έτσι, όταν $\lambda \to 0$, το δεξί μέλος τείνει στην $(\widehat{f})^{\vee}$. □

Ακολουθώντας τη διαδικασία επέκτασης του ορισμού του μετασχηματισμού Fourier στους χώρους L^2, μπορεί κάποιος να επεκτείνει τον ορισμό και στους χώρους L^p, με στόχο, αν η συνάρτηση f ανήκει σε ένα L^p χώρο, ο μετασχηματισμός Fourier της, να ανήκει σε κάποιον L^q χώρο. Το επόμενο Θεώρημα, επεκτείνει τον μετασχηματισμό Fourier στους χώρους L^p για $1 < p < 2$.

Θεώρημα 2.56. *Αν $1 < p < 2$ και $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n)$, τότε:*

$$\|f\|_{p'} \leq C_p^n \|f\|_p.$$

Απόδειξη. Η απόδειξη του Θεωρήματος, είναι παρόμοια με εκείνη της ανισότητας Young, όμως είναι αρκετά μακροσκελής ώστε να την αναφέρουμε στη εργασία αυτή. Αν κάποιος αναγνώστης ενδιαφέρεται, μπορεί να τη βρει στο [10]. □

Παρακάτω θα ορίσουμε το ολοκλήρωμα Riesz μιας τοπικά ολοκληρώσιμης συνάρτησης, το οποίο στη διεθνή βιβλιογραφία, αναφέρεται ως Riesz potential και είναι η γενίκευση του ολοκληρώματος Riemann-Liouville.

Ορισμός 2.57. *Αν* $0 < \alpha < n$, *το ολοκλήρωμα Riesz μιας τοπικά ολοκληρώσιμης συνάρτησης,* f *ορίζεται ως εξής:*

$$I_\alpha(f)(x) = \frac{1}{\gamma(\alpha)} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}\, dy\,,$$

όπου

$$\gamma(\alpha) = \pi^{n/2} 2^\alpha \frac{\Gamma(\frac{\alpha}{2})}{\Gamma(\frac{n-\alpha}{2})}$$

και Γ *η συνάρτηση Γάμμα.*

Το επόμενο Θεώρημα, μας λέει ότι το ολοκλήρωμα Riesz, είναι ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης $|k|^{-a}\widehat{f}(k)$.

Θεώρημα 2.58. *Έστω* f *μια συνάρτηση του* $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ *και* $0 < a < n$. *Τότε*

$$c_a(|k|^{-a}\widehat{f}(k))^\vee(x) = c_{n-a} \int_{\mathbb{R}^n} |x-y|^{a-n} f(y) dy,$$

όπου $c_a := \pi^{-\frac{a}{2}}\Gamma(\frac{a}{2})$.

Απόδειξη. Εφόσον $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, ο μετασχηματισμός Fourier $\widehat{f}$ της f ανήκει στον $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ και όταν $k \to \infty$, πηγαίνει στο 0, όπως και όλες οι παράγωγοί του πιο γρήγορα από κάθε πολυώνυμο του k. Αυτό φαίνεται αν ολοκληρώσουμε κατά μέλη το

$$\int e^{-2\pi i(k,x)} f(x) dx.$$

Εξαιτίας αυτού, η συνάρτηση $|k|^{-a}\widehat{f}(k)$, ανήκει στον $L^1(\mathbb{R}^n)$. Πράγματι,

$$\int |k|^{-a}\widehat{f}(k) \le \|\widehat{f}\|_\infty \int_{\{|k|\le 1\}} |k|^{-a} dk + \sup_{|k|>1}\{|k|^{n-a+1}|\widehat{f}(k)|\} \int_{\{|k|>1\}} |k|^{-n-1} dk.$$

Επομένως ορίζεται ο μετασχηματισμός Fourier της. Από τον ορισμό τώρα της συνάρτησης Γάμμα, προκύπτει ότι:

$$c_a |k|^{-a} = \int_0^\infty \exp[-\pi|k|^2\lambda]\lambda^{\frac{a}{2}-1} d\lambda.$$

Εφόσον η συνάρτηση $|k|^{-a}\widehat{f}(k)$ είναι ολοκληρώσιμη, από το Θεώρημα Fubini, καθώς και από το Παράδειγμα 2.51 έχουμε:

$$c_a(|k|^{-a}\widehat{f}(k))^\vee(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i(k,x)} \{\int_0^\infty \exp[-\pi|k|^2\lambda]\lambda^{\frac{a}{2}-1} d\lambda\}\widehat{f}(k) dk$$

$$= \int_0^\infty e^{2\pi i(k,x)}\{\int_{\mathbb{R}^n} \exp[-\pi|k|^2\lambda]\widehat{f}(k)dk\}\lambda^{\frac{a}{2}-1}d\lambda$$
$$= \int_0^\infty \lambda^{-\frac{n}{2}}\lambda^{\frac{a}{2}-1}\{\int_{\mathbb{R}^n} \exp[-\pi|x-y|^2/\lambda]f(y)dy\}d\lambda$$
$$= c_{n-a}\int_{\mathbb{R}^n} |x-y|^{a-n}f(y)dy.$$

$\square$

Το επόμενο Θεώρημα, χρησιμοποιείται στην απόδειξη του Λήμματος 3.2.

Θεώρημα 2.59. *Αν $0 < a < \frac{n}{2}$ και αν $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ με $p = \frac{2n}{n+a}$, τότε η συνάρτηση*

$$g := c_{n-a}|x|^{a-n} * f,$$

ανήκει στον $L^2(\mathbb{R}^n)$ και

$$\widehat{g}(k) = c_a|k|^{-a}\widehat{f}(k).$$

Απόδειξη. Θεωρούμε μια ακολουθία (f^j) από $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ συναρτήσεις, η οποία συγκλίνει στην f ως προς τη νόρμα του $L^p(\mathbb{R}^n)$. Από την ανισότητα Hardy-Littlewood-Sobolev (δες [11] Θεώρημα 4.3), οι συναρτήσεις g και

$$g^j = |x|^{a-n} * f^j$$

είναι στον $L^2(\mathbb{R}^n)$. Αυτό έπεται από το Θεώρημα Fubini και το γεγονός ότι για $0 < a, b < n$ και $0 < a + b < n$, έχουμε:

$$(|x|^{a-n} * |x|^{b-n})(y) := \int_{\mathbb{R}^n} |z|^{a-n}|y-z|^{b-n}dz$$
$$= \frac{c_{n-a-b}c_a c_b}{c_{a+b}c_{n-a}c_{n-b}}|y|^{a+b-n},$$

το οποίο αποδεικνύεται μέσω απλών υπολογισμών, χρησιμοποιώντας την ήδη γνωστή σχέση

$$c_a|k|^{-a} = \int_0^\infty \exp[-\pi|k|^2\lambda]\lambda^{\frac{a}{2}-1}d\lambda.$$

Από το Θεώρημα 2.56 και εφόσον $f^j \to f$, έχουμε ότι

$$\widehat{f^j} \to \widehat{f},$$

στον $L^q(\mathbb{R}^n)$, με $q = \frac{2n}{n-2a}$. Από την ανισότητα Hardy-Littlewood-Sobolev

$$g^j \to g,$$

στον $L^2(\mathbb{R}^n)$ και ως εκ τούτου,

$$\widehat{g^j} \to \widehat{g},$$

στον $L^2(\mathbb{R}^n)$ από το Θεώρημα 2.52 του Plancheler. Από το προηγούμενο Θεώρημα, γνωρίζουμε ότι

$$\widehat{g}^j(k) = c_a|k|^{-a}\widehat{f}^j(k).$$

Τέλος, από την πληρότητα των χώρων Lebesgue, μπορούμε να βρούμε υπακολουθίες, έτσι ώστε

$$\widehat{g}^j(k) \to \widehat{g}(k),\ \sigma.\pi$$

και

$$\widehat{f}^j(k) \to \widehat{f}(k),\ \sigma.\pi.$$

Επομένως,

$$\widehat{g}(k) = \lim_{j\to\infty} c_a|k|^{-a}\widehat{f}^j(k) = c_a|k|^{-a}\lim_{j\to\infty}\widehat{f}^j(k) = c_a|k|^{-a}\widehat{f}(k).$$

$\square$

3. **Η ΠΥΚΝΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΛΕΙΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΣΤΟΝ ΧΩΡΟ** $W^{1,p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$

Μετά από τα όσα είπαμε στο δεύτερο Κεφάλαιο, είμαστε πλέον σε θέση να παρουσιάσουμε τα δικά μας αποτελέσματα που αφορούν την πυκνότητα των λείων συναρτήσεων στους χώρους $W^{1,p(\cdot)}$. Όπως αναφέραμε ήδη στην εισαγωγή, το βασικό Θεώρημα αυτού του Κεφαλαίου, είναι το Θεώρημα 3.6, στο οποίο υποθέτουμε ότι η συνέλιξη $f*|x-y|^{1-n}$ ανήκει στον $L^{p(\cdot)}$ για κάθε συνάρτηση f του $L^{p(\cdot)}$. Πριν περάσουμε στην απόδειξή του, θα μιλήσουμε λίγο ακόμα για το ολοκλήρωμα Riesz και θα δώσουμε δύο ακόμα λήμματα (3.2, 3.4).

Θεώρημα 3.1. *(Hardy-Littlewood-Sobolev) Έστω $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Τότε*

$$(1) \qquad I_\alpha(f) \in L^{\frac{np}{n-\alpha p}}(\mathbb{R}^n)\,, \text{ για } 0<\alpha<n.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε τη συνάρτηση $K(x)=|x|^{a-n}$ και γράφουμε

$$K(x)=K_1(x)+K_\infty(x),$$

όπου,

$$K_1(x)=K(x) \text{ όταν } |x|\le\mu, \quad K_1(x)=0 \text{ όταν } |x|>\mu$$

$$K_\infty(x)=K(x) \text{ όταν } |x|>\mu, \quad K_\infty(x)=0 \text{ όταν } |x|\le\mu.$$

Το ολοκλήρωμα K_1*f συγκλίνει απόλυτα σχεδόν παντού, λόγω της ανισότητας Young, ως συνέλιξη μιας L^1 συνάρτησης (της K_1) και μιας συνάρτησης του L^p, της f. Το ολοκλήρωμα $K_\infty*f$ επίσης συγκλίνει απόλυτα σχεδόν παντού, ως συνέλιξη μιας L^p συνάρτησης, της f και μιας συνάρτησης του $L^{p'}$, της K_∞. Έτσι, έχουμε την απόλυτη σύγκλιση του ολοκληρώματος $K*f$.
Τώρα, αν $1\le p<q<\infty$, με $\frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{a}{n}$, θα δείξουμε ότι

$$\big|x:|K*f|>\lambda\big|\le\big(A\frac{\|f\|_p}{\lambda}\big)^q,\ f\in L^p(\mathbb{R}^n),\ \lambda>0,$$

όπου A μια σταθερά ανεξάρτητη της συνάρτησης f.
Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θα αποδείξουμε την παραπάνω σχέση για $\|f\|_p=1$ και για 2λ αντί για λ. Λόγω της σχέσης

$$\big\{x:|K*f|>2\lambda\big\}\subset\big\{x:|K_1*f|>\lambda\big\}\cup\big\{x:|K_\infty*f|>\lambda\big\},$$

θα έχουμε

$$\big|x:|K*f|>2\lambda\big|\le\big|x:|K_1*f|>\lambda\big|+\big|x:|K_\infty*f|>\lambda\big|.$$

Για τον πρώτο όρο του δεξιού μέλους, έχουμε

$$\big|x:|K_1*f|>\lambda\big|\le\frac{\|K_1*f\|_p^p}{\lambda^p}\le\frac{\|K_1\|_1^p\|f\|_p^p}{\lambda^p}=\frac{\|K_1\|_1^p}{\lambda^p}.$$

Αλλά,
$$\|K_1\|_1 = \int_{|x|\leq\mu} |x|^{a-n} dx = c_1\mu^a.$$
Για το δεύτερο όρο, έχουμε
$$\|K_\infty * f\|_\infty \leq \|K_\infty\|_{p'}\|f\|_p \leq \|K_\infty\|_{p'}.$$
Όμως
$$\|K_\infty\|_{p'} = \Big(\int_{|x|>\mu} (|x|^{a-n})^{p'} dx\Big)^{\frac{1}{p'}} = c_2\mu^{-\frac{n}{q}}.$$
Επομένως, $\|K_\infty\|_{p'} = \lambda$, για $\mu = c_3\lambda^{-\frac{q}{n}}$. Γι′ αυτό, αν επιλέξουμε τέτοιο μ, από τη σχέση $\|K_\infty * f\|_\infty \leq \|K_\infty\|_{p'}$, παίρνουμε ότι
$$\Big|x : |K_\infty * f| > \lambda\Big| = 0.$$
Τελικά προκύπτει το ζητούμενο:
$$\Big|x : |K * f| > \lambda\Big| \leq c_4\Big(\frac{\|f\|_p}{\lambda}\Big)^q.$$
Από το Θεώρημα Marcinkiewicz, το οποίο θα βρείτε στο παράρτημα αυτής της εργασίας, προκύπτει σαν εφαρμογή ότι:
$$\|I_a f\|q \leq A\|f\|_p.$$
□

Το επόμενο Λήμμα, χρησιμοποιείται στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.6 και αφορά τη σύγκλιση του ολοκληρώματος Riesz στον L^2.

Λήμμα 3.2. *Έστω $p \geq 2$. Αν $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ και έχει συμπαγή φορέα, τότε*
$$\lim_{\alpha\to 0^+} I_\alpha(f) = f, \ \text{στον } L^2.$$

Απόδειξη. Εφόσον $\frac{2n}{n+2\alpha} \leq 2 \leq p$ και η f έχει συμπαγή φορέα, έχουμε ότι
$$f \in L^{\frac{2n}{n+2\alpha}}(\mathbb{R}^n)\,,$$
για όλα τα $0 < \alpha < n$. Έστω
$$c_\alpha = \pi^{-\alpha/2}\Gamma(\frac{\alpha}{2})$$
και
$$g_\alpha = c_{n-\alpha}\, I_\alpha(f)\,.$$
Αν στη σχέση (1) του Θεωρήματος 3.1, θέσουμε $p = \frac{2n}{n+2\alpha}$, τότε
$$\frac{np}{n-\alpha p} = 2.$$

Κατά συνέπεια, οι συναρτήσεις g_α ανήκουν στον $L^2(\mathbb{R}^n)$. Ως εκ΄ τούτου, αν υποθέσουμε επιπλέον ότι $\alpha < n/2$, τότε χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 2.59, παίρνουμε ότι

$$c_\alpha |k|^{-\alpha} \widehat{f}(k) = \widehat{g}_\alpha(k), \tag{2}$$

όπου $\widehat{f}$, $\widehat{g}_\alpha$ οι μετασχηματισμοί Fourier των f και g_α αντίστοιχα.

Εφ΄ όσον $\|\widehat{g}_\alpha\|_2 = \|g_\alpha\|_2$, έχουμε ότι

$$\int_{\mathbb{R}^n} |c_\alpha |k|^{-\alpha} \widehat{f}(k)|^2 dk = \int_{\mathbb{R}^n} |g_\alpha(k)|^2 dk\,.$$

Ως εκ΄ τούτου

$$(2\pi)^{-2\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\widehat{f}(k)|^2}{|k|^{2\alpha}} dk = \int_{\mathbb{R}^n} |(I_\alpha f)(k)|^2 dk\,. \tag{3}$$

Αν $\alpha < 1/2$ και παίρνοντας υπ΄ όψη ότι η f ανήκει επίσης στον $L^1(\mathbb{R}^n)$ (άρα ο μετασχηματισμός Fourier είναι στον $L^\infty(\mathbb{R}^n)$), συνεπάγεται ότι

$$\begin{aligned} \frac{|\widehat{f}(k)|^2}{|k|^{2\alpha}} &\le \chi_{B(0,1)}(k) \frac{|\widehat{f}(k)|^2}{|k|^{2\alpha}} + \chi_{B(0,1)^c}(k) |\widehat{f}(k)|^2 \\ &\le \chi_{B(0,1)}(k) \frac{\|\widehat{f}\|_\infty^2}{|k|} + \chi_{B(0,1)^c}(k) |\widehat{f}(k)|^2\,. \end{aligned}$$

Το δεξί μέρος της παραπάνω ανισότητας είναι μια L^1-συνάρτηση, οπότε, παίρνοντας όρια στη σχέση (3) και χρησιμοποιώντας το Θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης,

$$\lim_{\alpha \to 0^+} \int_{\mathbb{R}^n} |(I_\alpha f)(k)|^2 dk = \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(k)|^2 dk = \int_{\mathbb{R}^n} |f(k)|^2 dk\,. \tag{4}$$

Επίσης, από (2) έχουμε ότι

$$\widehat{I_\alpha(f)}(k) = \frac{2^{-\alpha}}{\pi^\alpha} \frac{\widehat{f}(k)}{|k|^\alpha}.$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με $\overline{\widehat{f}}$ και ολοκληρώνοντας, παίρνουμε

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{I_\alpha(f)(k)}\, \overline{\widehat{f}(k)}\, dk = \frac{2^{-\alpha}}{\pi^\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\widehat{f}(k)|^2}{|k|^\alpha}\, dk\,.$$

Ύστερα, από την ταυτότητα του Parseval προκύπτει ότι

$$\int_{\mathbb{R}^n} I_\alpha(f)(k) \overline{f(k)}\, dk = \frac{2^{-\alpha}}{\pi^\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\widehat{f}(k)|^2}{|k|^\alpha}\, dk.$$

Όπως και πριν, μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι η συνάρτηση $\frac{|\widehat{f}(k)|^2}{|k|^\alpha}$, φράσσεται από μια συνάρτηση του L^1 και ως εκ΄ τούτου, αν πάρουμε όρια και χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης,

$$\text{(5)} \qquad \lim_{\alpha \to 0^+} \int_{\mathbb{R}^n} I_\alpha(f)(k)\overline{f(k)}dk = \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(k)|^2 dk = \int |f(k)|^2 dk.$$

Τελικά, από (4) και (5), $I_\alpha(f) \to f$ στον $L^2(\mathbb{R}^n)$, για $\alpha \to 0^+$. □

Το επόμενο Θεώρημα του M. Riesz, απαντάει επίσης ως προς τη σημειακή σύγκλιση του $I_\alpha f$, όταν $\alpha \to 0$ για κάποιες όμως συναρτήσεις του C^∞. Λόγω της σπάνιας θέσης του στη βιβλιογραφία, παραθέτουμε μια εναλλακτική απόδειξη.

Θεώρημα 3.3. [14, σελ 23] *Αν μια συνάρτηση f του $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ είναι τέτοια ώστε*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \|x^\alpha D^\beta f\|_\infty < \infty, \quad \text{για όλα τα } \alpha,\, \beta \geq 0,$$

τότε

$$\lim_{\alpha \to 0^+} I_\alpha(f)(x) = f(x)\,, \ \text{ για όλα τα } x \in \mathbb{R}^n\,.$$

Απόδειξη. Αν μια συνάρτηση f ανήκει στον $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, έτσι ώστε

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \|x^\alpha D^\beta f\|_\infty < \infty,$$

τότε λέμε ότι είναι μια συνάρτηση Schwartz, ή αλλιώς ότι ανήκει στο χώρο Schwartz που συμβολίζουμε με $S(\mathbb{R}^n)$. Από τη θεωρία των χώρων Lebesgue, είναι γνωστό ότι

$$S(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n), \text{ για } 1 \leq p \leq \infty.$$

Επομένως, το ζητούμενο προκύπτει ακολουθώντας την ίδια ακριβώς διαδικασία απόδειξης που κάναμε στο προηγούμενο Λήμμα. □

Το επόμενο λήμμα μας παρέχει ένα χρήσιμο εργαλείο ώστε να προσεγγίσουμε Sobolev συναρτήσεις.

Λήμμα 3.4. *Υπάρχει μια ακολουθία (g_λ) συναρτήσεων στον $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, οι οποίες είναι 0 στη μπάλα $B(0, \frac{1}{\lambda})$, 1 στο $B(0,\lambda) \setminus B(0, \frac{2}{\lambda})$ και 0 στο $\mathbb{R}^n \setminus B(0, 2\lambda)$, έτσι ώστε η πρώτη και δεύτερη παράγωγος να είναι φραγμένη από τις συναρτήσεις $\frac{c_1}{|x|}$ και $\frac{c_2}{|x|^2}$ αντίστοιχα, όπου c_1, c_2 θετικές σταθερές.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τη $C^\infty(\mathbb{R}^n)$-συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x-1}} & , \quad \text{αν } x > 1 \\ 0 & , \quad \text{αν } x \leq 1 \end{cases}.$$

Επίσης, θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\psi(x) = \frac{f(x)}{f(x)+f(3-x)} \ ,$$

η οποία ανήκει επίσης στον $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, εφόσον ο παρανομαστής είναι διάφορος του μηδενός. Τότε ορίζοντας τις συναρτήσεις $\psi_\lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, με

$$\psi_\lambda(x) = \psi(\lambda|x|)$$

παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} 0 < \psi_\lambda(x) < 1 \quad &, \quad \text{αν } \frac{1}{\lambda} < |x| < \frac{2}{\lambda} \\ \psi_\lambda(x) = 0 \quad &, \quad \text{αν } |x| \leq \frac{1}{\lambda} \\ \psi_\lambda(x) = 1 \quad &, \quad \text{αν } \ |x| \geq \frac{2}{\lambda} \,. \end{aligned}$$

Οι συναρτήσεις ψ_λ ανήκουν στον $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ εφόσον και η συνάρτηση ψ ανήκει στον $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Ο παρανομαστής του κλάσματος της συνάρτησης ψ είναι πάντα διάφορος του μηδενός, η πρώτη και δεύτερη παράγωγος της f είναι συνεχής και φραγμένη. Επομένως, η πρώτη και δεύτερη παράγωγος της ψ είναι συνεχής και φραγμένη. Έτσι, εφόσον

$$|\frac{\partial}{\partial x_i}\psi_\lambda(x)| = \left|\frac{\lambda x_i}{|x|}\psi'(\lambda|x|)\right| \leq \frac{1}{|x|}|\psi'(\lambda|x|)|,$$

βλέπουμε ότι οι πρώτες και δεύτεροι παράγωγοι των ψ_λ, φράσσονται από τις συναρτήσεις $\frac{c_1}{|x|}$ και $\frac{c_2}{|x|^2}$ αντίστοιχα, για κάποιες θετικές σταθερές c_1 και c_2.
Ανάλογα, κατασκευάζουμε τις συναρτήσεις $\varphi_\lambda(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, με

$$\varphi_\lambda(x) = \psi(\frac{|x|}{\lambda})$$

και

$$\begin{aligned} 0 < \varphi_\lambda(x) < 1 \quad &, \quad \text{αν } \lambda < |x| < 2\lambda \\ \varphi_\lambda(x) = 0 \quad &, \quad \text{αν } |x| \leq \lambda \\ \varphi_\lambda(x) = 1 \quad &, \quad \text{αν } |x| \geq 2\lambda, \end{aligned}$$

οι οποίες έχουν τις παραγώγους τους φραγμένες απο μια σταθερά c.

Μπορεί να δειχθεί εύκολα ότι οι

$$g_\lambda = \psi_\lambda(1-\varphi_\lambda)$$

έχουν τις επιθυμητές ιδιότητες και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. $\square$

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 3.6, θα χρησιμοποιήσουμε μια γνωστή αναπάρασταση των συναρτήσεων του $W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$ (δες [6, Λήμμα 7.14]):

Λήμμα 3.5. *Έστω $f \in W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$. Τότε*
$$f(x) = \frac{1}{n\omega_n}\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-y_i)D_if(y)}{|x-y|^n}\,dy\,, \sigma.\pi \text{ στο } \mathbb{R}^n,$$
όπου ω_n είναι ο όγκος της μοναδιαίας μπάλας του $\mathbb{R}^n$.

Απόδειξη. Έστω $u \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$. Τότε (από το Θεώρημα 1.1.10 του [12]), η συνάρτηση u μπορεί να γραφεί στη μορφή:
$$u(x) = \frac{1}{n\omega_n}\sum_{i=1}^{n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{(x_i-y_i)D_iu(y)}{|x-y|^n}dy.$$
Ας θεωρήσουμε τώρα μία συνάρτηση f που να ανήκει στον $W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$. Ως γνωστόν, υπάρχει μια ακολουθία u_k από $C_0^1(\mathbb{R}^n)$ συναρτήσεις, που να συγκλίνουν στην f στον $W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$. Αν πάρουμε τώρα $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, από το Θεώρημα 3.1, έχουμε ότι
$$\overline{K}_i * \psi \in L^{p'}(\mathbb{R}^n),$$
όπου $K_i(x) = \frac{1}{n\omega_n}\frac{x_i}{|x|^n}$.
Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Fubini προκύπτει ότι
$$\langle u_k, \psi\rangle = \sum_{i=1}^{n}\int_{\mathbb{R}^n} D^iu_k(y)(\overline{K_i}*\psi)(y)dy,$$
Επειδή $\overline{K}_i \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ και $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, από την Παρατήρηση 2.43, έπεται ότι
$$\overline{K_i}*\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n).$$
Κατά συνέπεια, εφόσον $D_iu_k \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$,
$$D_iu_k(\overline{K_i}*\psi) \in C_0^1(\mathbb{R}^n).$$
Παίρνοντας το όριο για $k \to \infty$ και χρησιμοποιώντας το Θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης, καταλήγουμε στο ζητούμενο:
$$\langle f, \psi\rangle = \sum_{i=1}^{n}\int_{\mathbb{R}^n} D^iu_k(y)(\overline{K_i}*\psi)(y)dy = \langle\sum_{i=1}^{n}K_i * D^if, \psi\rangle.$$
□

Θα αποδείξουμε τώρα το βασικό Θεώρημα του Κεφαλαίου.

Θεώρημα 3.6. *Έστω $p \in P(\Omega)$, με $p_- \geq 2$ και*
$$I_1(f) \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)\,,$$
για κάθε $f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ με συμπαγή φορέα. Τότε ο $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ είναι πυκνός στον $W^{1,p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$.

Απόδειξη. Έστω f μία συνάρτηση του $W^{1,p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$. Από το Λήμμα 2.39 και το Θεώρημα 2.40, μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι η συνάρτηση f είναι φραγμένη και έχει συμπαγή φορέα. Θεωρούμε την ακολουθία των συναρτήσεων

$$\omega_\lambda^i(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g_\lambda(y) \frac{y_i}{|y|^{n-\frac{1}{\lambda^2}}} D_i f(x-y)dy,$$

όπου g_λ όπως στο Λήμμα 3.4 και $\lambda \in \mathbb{N}$, αρκετά μεγάλο ώστε $1+\frac{1}{\lambda^2} < n$. Οι συναρτήσεις

$$g_\lambda(x)\frac{x_i}{|x|^{n-\frac{1}{\lambda^2}}}$$

ανήκουν στον $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ και η $D_i f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ έχει συμπαγή φορέα. Ως εκ΄ τούτου, οι συναρτήσεις ω_λ^i ανήκουν επίσης στον $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ (δες Παρατήρηση 2.43).

Θα δείξουμε ότι οι $|\omega_\lambda^i|$ είναι άνω φραγμένες από μία $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$-συνάρτηση:

$$\begin{aligned} |\omega_\lambda^i(x)| &= \Big| \int_{\mathbb{R}^n} g_\lambda(y)\big(\frac{y_i}{|y|^{n-\frac{1}{\lambda^2}}}\big) D_i f(x-y)dy\Big| \\ &\le \int_{\mathbb{R}^n} \frac{g_\lambda(y)|y|^{\frac{1}{\lambda^2}}}{|y|^{n-1}} |D_i f(x-y)|dy \\ &\le \int_{B(0,2\lambda)} \frac{|y|^{\frac{1}{\lambda^2}}}{|y|^{n-1}} |D_i f(x-y)|dy\,, \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το Λήμμα 3.4 όσον αφορά τον φορέα των συναρτήσεων g_λ. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $(2\lambda)^{\frac{1}{\lambda^2}} < 2$ για κάθε $\lambda > 1$, έχουμε ότι

$$|\omega_\lambda^i(x)| \le cI_1\big(D_i(f)\big).$$

Η $D_i(f)$ έχει συμπαγή φορέα, επομένως από την υπόθεση του θεωρήματος,

$$I_1(|D_i(f)|) \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n).$$

Τώρα θα δείξουμε ότι μια υπακολουθία της $\{\omega_\lambda^i\}$ συγκλίνει στη συνάρτηση

$$f_i(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{y_i}{|y|^n} D_i f(x-y)dy, \ \sigma.\pi \text{ στο } \mathbb{R}^n.$$

Έχουμε ότι

$$\big|\omega_\lambda^i(x) - f_i(x)\big| =$$

$$\Big|\int_{\mathbb{R}^n} \big(g_\lambda(y)|y|^{\frac{1}{\lambda^2}} - 1\big)\frac{y_i}{|y|^n} D_i f(x-y)dy\Big|$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\left|g_\lambda(y)|y|^{\frac{1}{\lambda^2}} - 1\right|}{|y|^{n-1}} |D_i f(x-y)| dy$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\left|g_\lambda(y)|y|^{\frac{1}{\lambda^2}} - g_\lambda(y)\right|}{|y|^{n-1}} |D_i f(x-y)| dy + \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\left|g_\lambda(y) - 1\right|}{|y|^{n-1}} |D_i f(x-y)| dy$$

Ο φορείς των g_λ, είναι μεσα στο δακτύλιο $\Delta(\frac{1}{\lambda}, 2\lambda)$ και γι΄ αυτό, παίρνοντας την L^2-νόρμα για τον πρώτο όρο, έχουμε

$$\Big(\int_{\mathbb{R}^n} \Big| \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\left|g_\lambda(y)|y|^{\frac{1}{\lambda^2}} - g_\lambda(y)\right|}{|y|^{n-1}} |D_i f(x-y)| dy\Big|^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \Big(\int_{\mathbb{R}^n} \Big| \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\left||y|^{\frac{1}{\lambda^2}} - 1\right|}{|y|^{n-1}} |D_i f(x-y)| dy\Big|^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \|D_i f\|_2 \int_{\Delta(\frac{1}{\lambda}, 2\lambda)} \frac{\left||x|^{\frac{1}{\lambda^2}} - 1\right|}{|x|^{n-1}} |dx$$

που συγκλίνει στο 0 όταν $\lambda \to \infty$.

Για το δεύτερο όρο, έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\left|g_\lambda(y) - 1\right|}{|y|^{n-1}} |D_i f(x-y)| dy \leq$$

$$\int_{B(0,\frac{2}{\lambda})} \frac{|D_i f(x-y)|}{|y|^{n-1}} dy + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\lambda)} \frac{|D_i f(x-y)|}{|y|^{n-1}} dy.$$

Αλλά,

$$\Big(\int_{\mathbb{R}^n} \Big| \int_{B(0,\frac{2}{\lambda})} \frac{|D_i f(x-y)|}{|y|^{n-1}} dy\Big|^2 dx\Big)^2 \leq \|D_i f\|_2 \int_{B(0,\frac{2}{\lambda})} \frac{dx}{|x|^{n-1}}$$

και

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\lambda)} \frac{|D_i f(x-y)|}{|y|^{n-1}} dy \leq \lambda^{1-n} \|D_i f\|_1.$$

Έτσι, μέσω υπακολουθίας αν είναι απαραίτητο, ο δεύτερος όρος, συγκλίνει επίσης στο 0 όταν $\lambda \to \infty$.

Ως εκ΄ τούτου,

$$\left|\omega_\lambda^i(x) - f_i(x)\right| \to 0.$$

Από την προηγούμενη σχέση και το γεγονός ότι οι $|\omega_\lambda^i|$ φράσσονται από μία $L^{p(\cdot)}$-συνάρτηση, το Θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης για τους $L^{p(\cdot)}$-χώρους, μας λέει ότι

$$\left\|\omega_\lambda^i - f_i\right\|_{L^{p(\cdot)}} \to 0, \text{ όταν } \lambda \to \infty.$$

Σύμφωνα με το Λήμμα 3.5, η f γράφεται στη μορφή:

$$\frac{1}{n\omega_n}\sum_{i=1}^{n} f_i\,.$$

Από αυτό, είναι προφανές ότι

$$\Big\|\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n\omega_n}\omega_\lambda^i - f\Big\|_{L^{p(\cdot)}} \to 0,\ \text{όταν } \lambda\to\infty.$$

Αν τώρα, αποδείξουμε ότι οι $D_j\big(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n\omega_n}\omega_\lambda^i\big)$, για $1\le i,j\le n$ φράσσονται από μια $L^{p(\cdot)}$-συνάρτηση, τότε θα έπονταν και ότι

$$\Big\|D_j\big(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n\omega_n}\omega_\lambda^i\big) - D_j f\Big\|_{L^{p(\cdot)}} \to 0,\ \text{όταν } \lambda\to\infty.$$

Από το Λήμμα 3.2 έχουμε ότι

$$\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\big|D_i f(x-y)\big|}{|y|^{n-\frac{1}{\lambda^2}}}dy \to \big|D_i f(x)\big| \qquad (1),$$

ενώ το Λήμμα 3.4 μας δίνει ότι

$$\big|D_j\omega_\lambda^i(x)\big| =$$

$$\Big|\int_{\mathbb{R}^n} D_j\big(g_\lambda(y)\big)\frac{y_i}{|y|^{n-\frac{1}{\lambda^2}}}D_i f(x-y)dy + \int_{\mathbb{R}^n}\big(g_\lambda(y)\big)D_j\big(\frac{y_i}{|y|^{n-\frac{1}{\lambda^2}}}\big)D_i f(x-y)dy\Big|$$

$$\le (n+3)\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\big|D_i f(x-y)\big|}{|y|^{n-\frac{1}{\lambda^2}}}dy$$

$$\le (n+3)\int_{B(0,1)}\frac{\big|D_i f(x-y)\big|}{|y|^{n-\frac{1}{\lambda^2}}}dy + (n+3)\int_{\mathbb{R}^n\setminus B(0,1)}\frac{\big|D_i f(x-y)\big|}{|y|^{n-1}}dy.$$

Για το δεύτερο όρο, γνωρίζουμε ήδη ότι είναι στον $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$. Η ακολουθία

$$\int_{B(0,1)}\frac{\big|D_i f(x-y)\big|}{|y|^{n-\frac{1}{\lambda^2}}}dy$$

είναι αύξουσα ως προς λ και φράσσεται από τη συνέλιξη

$$\frac{1}{|x|^{n-\frac{1}{\lambda^2}}} * |D_i f|\,.$$

Οπότε, από την (1), είναι φραγμένη από την $|D_i f(x)|$, που είναι μια συνάρτηση του $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$.

Επομένως οι $|D_j\omega_\lambda^i|$ είναι φραγμένες από μια συνάρτηση του $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ και έτσι η ακολουθία

$$\big(D_j\big(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n\omega_n}D_i\omega_\lambda^i\big)\big)$$

επίσης φράσσεται από μια $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$-συνάρτηση.

Τελικά, και επειδή τα παραπάνω μπορούν να γίνουν για όλα τα $1 \le j \le n$, έχουμε ότι

$$\big\|\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n\omega_n}D_i\omega_\lambda^i - f\big\|_{p(\cdot)} \to 0\,,\ \text{όταν } \lambda \to \infty$$

και

$$\big\|D_j\big(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n\omega_n}\omega_\lambda^i\big) - D_jf\big\|_{p(\cdot)} \to 0\,,\ \text{όταν } \lambda \to \infty,$$

για όλα τα $1 \le j \le n$. Επομένως,

$$\big\|\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n\omega_n}\omega_\lambda^i - f\big\|_{W^{1,p(\cdot)}} \to 0\,,\ \text{όταν } \lambda \to \infty$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. $\square$

4. Ο ΡΟΛΟΣ ΤΗΣ ΔΙΑΣΤΑΣΗΣ ΣΤΗΝ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑ

Το 2007, ο P. Hasto, στο άρθρο του 'Density of smooth functions in variable exponent Sobolev spaces', έθεσε το εξής ερώτημα:
Αν $p^- > n$, όπου n η διάσταση του χώρου, τότε ισχύει η πυκνότητα των λείων συναρτήσεων στον $W^{1,p(\cdot)}$;
Η απάντηση στο παραπάνω ερώτημα είναι καταφατική. Αποτελεί δε, όπως θα δούμε αμέσως πιο κάτω, την πρώτη εφαρμογή του Θεωρήματος 3.6.

Θεώρημα 4.1. *Αν $p^- > n$, τότε ο $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ είναι πυκνός στον $W^{1,p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$.*

Απόδειξη. Έστω $f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ μια συνάρτηση με συμπαγή φορέα. Επειδή $p^- \geq 2$, έχουμε ότι
$$f \in L^{\frac{2n}{n+2}}(\mathbb{R}^n).$$
Επομένως
$$I_1(f) \in L^2(\mathbb{R}^n).$$
Από την άλλη, εφ' όσον $p^- > n$ και η συνάρτηση f έχει συμπαγή φορέα, έχουμε ότι $f \in L^q$ για κάθε $q \leq n$. Επιλέγοντας λοιπόν $q < n$ τέτοιο ώστε
$$\frac{nq}{n-q} \geq p^+,$$
συνεπάγεται ότι
$$I_1(f) \in L^{\frac{nq}{n-q}}.$$
Δηλαδή,
$$I_1(f) \in L^2 \cap L^{\frac{nq}{n-q}}$$
και μέσω του Θεωρήματος 2.20,
$$I_1(f) \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n).$$
Από το Θεώρημα 3.6 παίρνουμε ότι ο $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ είναι πυκνός στον $W^{1,p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$. $\square$

Στο προηγούμενο θεώρημα είδαμε ότι αν ο εκθέτης είναι μεγαλύτερος από τη διάσταση του χώρου, αυτό συνεπάγεται πυκνότητα. Τι γίνεται όμως στην αντίθετη περίπτωση, δηλαδή όταν ο εκθέτης κυριαρχείται από τη διάσταση; Για να απαντήσουμε σε αυτό το ερώτημα, χρειαζόμαστε έναν ακόμα περιορισμό. Συγκεκριμένα:

Θεώρημα 4.2. *Αν $2 \leq p^- \leq n$ και $p^+ \leq \frac{np^-}{n-p^-}$, τότε ο $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ είναι πυκνός στον $W^{1,p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$.*

Απόδειξη. Έστω $f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ μια συνάρτηση με συμπαγή φορέα. Όπως και πριν, από το γεγονός ότι $p^- \geq 2$, έχουμε ότι·
$$I_1(f) \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Επίσης, από τη σχέση (1) του Θεωρήματος 3.1 έχουμε ότι

$$I_1(f) \in L^{\frac{np^-}{n-p^-}}(\mathbb{R}^n)\,.$$

Επομένως,

$$I_1(f) \in L^2(\mathbb{R}^n) \cap L^{\frac{np^-}{n-p^-}}(\mathbb{R}^n)$$

και έτσι από το Θεώρημα 2.20 παίρνουμε ότι

$$I_1(f) \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n).$$

Το αποτέλεσμα έπεται πάλι από το Θεώρημα 3.6.

$\square$

Παρατήρηση 4.3. *Η συνθήκη $p^+ \leq \frac{np^-}{n-p^-}$ στο προηγούμενο Θεώρημα, απαντάται και στο 8.2.14 του* [3], *όπου χρησιμοποιείται για να αποδειχθεί η ανισότητα Sobolev-Poincare σε συγκεκριμένα φραγμένα σύνολα στην περίπτωση του μεταβλητού εκθέτη. Μάλιστα, θα λέγαμε ότι οι συνθήκες για τον εκθέτη και στα δύο προηγούμενα Θεωρήματα, βρίσκονται κατά αντιστοιχία με εκείνες που διέπουν τους κλασσικούς χώρους Sobolev και αφορούν τις εμφυτεύσεις του $W^{1,p}$ στον L^q.*

5. ΠΥΚΝΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΜΕΓΙΣΤΙΚΟΣ ΤΕΛΕΣΤΗΣ

Για μια συνάρτηση $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, ο μεγιστικός τελεστής Hardy - Littlewood Mf της συνάρτησης f, ορίζεται για όλα τα $x \in \mathbb{R}^n$, με

$$Mf(x) = \sup_{Q \in x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)|\, dy\,,$$

όπου το supremum είναι πάνω σε όλα τα $Q \subset \mathbb{R}^n$ που περιέχουν το x με πλευρές παράλληλες στους άξονες, δες [2, Ορισμός 3.1].

Λέμε ότι ο μεγιστικός τελεστής είναι τοπικά φραγμένος στον $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ αν για κάθε φραγμένο ανοιχτό υποσύνολο Ω του $\mathbb{R}^n$, με $\overline{\Omega}$ συμπαγές, ο μεγιστικός τελεστής είναι φραγμένος στον $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ [δες [2], Ορισμός 6.13]. Σε αντίθεση με την κλασσική περίπτωση, ο μεγιστικός τελεστής δεν είναι πάντα φραγμένος ή τοπικά φραγμένος στον $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$. Στη δική μας περίπτωση, ένα τοπικό φράγμα αρκεί για να μας δώσει πυκνότητα, όπως φαίνεται στο Θεώρημα 5.5.

Λήμμα 5.1. *Έστω $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Αν η συνάρτηση*

$$\Phi(x) = \sup_{|y| \geq \ |x|} |\phi(y)|$$

ανήκει επίσης στον $L^1(\mathbb{R}^n)$, τότε για κάθε τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση f, έχουμε ότι

$$\sup_{t>0} |\phi_t * f(x)| \leq C(n) \|\Phi\|_1 Mf(x),$$

όπου, $\phi_t(x) = t^{-n}\phi(\frac{x}{t})$.

Απόδειξη. Θεωρούμε μια συνάρτηση $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Είναι προφανές ότι

$$|\phi_t * f(x)| \leq \Phi_t * |f(x)|, \text{ για κάθε } t > 0,$$

εφόσον

$$\Phi_t(x) = \sup_{|y| \geq \ |x|} |\phi_t(y)|.$$

Επομένως, αν θεωρήσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι η συνάρτηση f δεν παίρνει αρνητικές τιμές, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\Phi_t * f(x) \leq \|\Phi\|_1 Mf(x), \text{ για κάθε } t > 0,$$

όπου το *supremum* του μεγιστικού τελεστή, θα το πάρουμε πάνω σε μπάλες.
Για κάθε $j, k \geq 1$, θεωρούμε $B^k_j = B_{j2^{-k}}(0)$ και ορίζουμε τις συναρτήσεις Φ_k έτσι ώστε

$$\Phi_k(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \big(\Phi(j2^{-k}) - \Phi((j+1)2^{-k})\big)\chi_{B^k_j}(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a^k_j \chi_{B^k_j}(x),$$

όπου $a_j^k \geq 0$, εφόσον η Φ είναι φθίνουσα. Αν θέσουμε $A_j^k = B_j^k \backslash B_{j-1}^k$, για $x \in A_j^k$,

$$\Phi_k(x) = \sum_{i=j}^{\infty} \big(\Phi(i2^{-k}) - \Phi((i+1)2^{-k})\big)\chi_{B_j^k} = \Phi(j2^{-k}) \leq \Phi(x).$$

Επειδή η συνάρτηση $\Phi \in L^1$ και δεν παίρνει αρνητικές τιμές, οι τιμές της φθίνουν προς το 0 όταν $|x| \to \infty$. Επομένως, το μεσαίο άθροισμα συγκλίνει. Επιπλέον,

$$\Phi_k(x) \nearrow \Phi(x), \ \sigma.\pi.$$

Οπότε, από το Θεώρημα μονότονης σύγκλισης, έχουμε ότι

$$((\Phi_k)_t * f)(x) \nearrow (\Phi_t * f)(x), \ \sigma.\pi, \text{όταν } k \to \infty.$$

Έτσι, αρκεί να δείξουμε ότι

$$(\Phi_k)_t * f(x) \leq \|\Phi\|_1 Mf(x), \text{ για κάθε } t > 0.$$

Ας πάρουμε την περίπτωση πρώτα, όπου $t = 1$. Εφόσον για όλα τα x ισχύει ότι

$$|B_j^k|^{-1}\chi_{B_j^k} * f(x) = \fint_{B_j^k} f(x-y)dy = \fint_{B_{j2^{-k}}(x)} f(y)dy \leq Mf(x),$$

έπεται ότι

$$\Phi_k * f(x) = \sum_j a_j^k |B_j^k||B_j^k|^{-1}\chi_{B_j^k} * f(x) \leq \|\Phi_k\|_1 Mf(x) \leq \|\Phi\|_1 Mf(x).$$

Επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία με $(\Phi_k)_t$ αντί για Φ_k, παίρνουμε το ζητούμενο αποτέλεσμα για όλα τα $t > 0$, εφόσον $\|(\Phi_k)_t\|_1 = \|(\Phi_k)\|_1$. $\square$

Πόρισμα 5.2. *Έστω $p \in P(\Omega)$ και ο μεγιστικός τελεστής είναι φραγμένος στον $L^{p(\cdot)}(\Omega)$. Τότε, αν ϕ_t και Φ όπως πριν,*

$$\sup_{t>0} \|\phi_t * f(x)\|_{L^{p(\cdot)}} \leq C\|f\|_{L^{p(\cdot)}}$$

όπου η σταθερά C, εξαρτάται από τα n, p, $\|M\|_{L^{p(\cdot)}}$ και $\|\Phi\|_1$.

Απόδειξη. Από το Λήμμα 5.1, έπεται ότι:

$$\sup_{t>0} \|\phi_t * f(x)\|_{p(\cdot)} \leq C(n)\|\phi\|_1 \|Mf\|_{p(\cdot)} \leq c\|f\|_{p(\cdot)}.$$

$\square$

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, για $p \geq 2$, η συνθήκη της log-Holder συνέχειας, εμπεριέχεται σε εκείνη του Θεωρήματος 3.6. Αυτό, επιτυγχάνεται όπως θα δούμε στη συνέχεια (Θεώρημα 5.7) μέσω της παρακάτω πρότασης.

Πρόταση 5.3. *Έστω* $\Omega \in \mathbb{R}^n$ *φραγμένο με διάμετρο* D, $p \in P(\Omega)$ *και ο μεγιστικός τελεστής είναι φραγμένος στον* $L^{p(\cdot)}(\Omega)$. *Τότε, για κάθε* $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$,

$$\|I_1 f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \leq c\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε μια συνάρτηση $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$, την οποία επεκτείνουμε ίση με 0 στο $\mathbb{R}^n \backslash \Omega$. Τότε, για κάθε $x \in \Omega$,

$$I_1 f(x) = \int_\Omega f(y)|x-y|^{1-n}dy = \int_{B_D(x)} f(y)|x-y|^{1-n}dy = \Phi * f(x),$$

όπου, $\Phi(x) = |x|^{1-n}\chi_{B_D(0)}(x)$.
Ολοκληρώνοντας σε πολικές συντεταγμένες, έχουμε

$$\int_{B_D(0)} \Phi(x)dx = C(n)D.$$

Τότε πληρούνται οι υποθέσεις του Πορίσματος 5.2 και έτσι

$$\|I_1 f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \leq c\|f\|_{L^{p(\cdot)}}.$$

□

Παρατήρηση 5.4. *Είναι γνωστό ότι αν* $p^- = 1$ *(δες [2], Θεώρημα 3.19), τότε ο μεγιστικός τελεστής δεν είναι φραγμένος στον* $L^{p(\cdot)}$.

Θεώρημα 5.5. *Αν* $p_- \geq 2$ *και ο μεγιστικός τελεστής είναι τοπικά φραγμένος στον* $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$, *τότε ο* $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ *είναι πυκνός στον* $W^{1,p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$.

Απόδειξη. Έστω $f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ με συμπαγή φορέα K. Από την πρόταση 5.3 και επειδή ο μεγιστικός τελεστής είναι φραγμένος στον $L^{p(\cdot)}(K)$, έχουμε ότι

$$\|I_1(f)\|_{p(\cdot)} \leq c\|f\|_{p(\cdot)}\,,$$

όπου η σταθερά $c > 0$ εξαρτάται από το φράγμα του μεγιστικού τελεστή της f και από τη διάμετρο του K. Από το Θεώρημα 3.6, έπεται το ζητούμενο. □

Παρατήρηση 5.6. *Η τοπική φραξιμότητα του μεγιστικού τελεστή, μπορεί να μας δώσει και μια εναλλακτική απόδειξη του Θεωρήματος 5.5, ξεπερνώντας το πρόβλημα της συνέλιξης. Αυτό επιτυγχάνεται ως εξής: Από το Πόρισμα 5.2, έχουμε ότι αν* ϕ_t *και* Φ *όπως πριν:*

$$\sup_{t>0} \|\phi_t * f(x)\|_{L^{p(\cdot)}} \leq C\|f\|_{L^{p(\cdot)}}$$

όπου η σταθερά C, *εξαρτάται από τα* n, p, $\|M\|_{L^{p(\cdot)}}$ *και* $\|\Phi\|_1$. *Όμως, από το Θεώρημα 4.6.4 στο [3], αυτό σημαίνει ότι για κάθε* f *στον* $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$, *ισχύει ότι:*

$$\|f * \phi_t - f\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \to 0.$$

Το παραπάνω, μας οδηγεί φυσιολογικά στη γενίκευση του Θεωρήματος Meyers-Serrin, όπως αναφέραμε ήδη στο δεύτερο Κεφάλαιο (δες Θεώρημα 2.46).

Μία ικανή συνθήκη για την τοπική φραξιμότητα του μεγιστικού τελεστή, είναι η τοπική log-Holder συνέχεια [δες [2], σελ. 246]. Επομένως από το Θεώρημα 5.5, έχουμε το επόμενο:

Θεώρημα 5.7. *Αν $p_- \geq 2$ και p είναι τοπικά log-Hölder συνεχής, τότε ο $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ είναι πυκνός στον $W^{1,p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$.*

Απόδειξη. Όπως αναφέραμε, η *log-Hölder* συνέχεια του εκθέτη, συνεπάγεται τοπική φραξιμότητα για το μεγιστικό τελεστή. Επομένως, από το Θεώρημα 5.5, έπεται το ζητούμενο. □

Παρατήρηση 5.8. *Όπως αναφέραμε ήδη στην εισαγωγή, έχουμε μια εναλλακτική απόδειξη αυτού του σημαντικού αποτελέσματος, όταν $p_- \geq 2$.*

6. Η ΠΥΚΝΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΛΕΙΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΣΤΟΥΣ ΧΩΡΟΥΣ $W^{\kappa,p(\cdot)}$

Θυμίζουμε ότι για ένα σύνολο $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοιχτό, $p(\cdot) \in P(\Omega)$ και $\kappa \geq 1$ ακέραιο ο $W^{\kappa,p(\cdot)}(\Omega)$ ορίζεται ως εξής:

$$W^{\kappa,p(\cdot)}(\Omega) = \{f \in L^{p(\cdot)} : D^\alpha f \in L^{p(\cdot)}(\Omega),\, |\alpha| \leq \kappa\}.$$

Θυμίζουμε επίσης ότι στον $W^{\kappa,p(\cdot)}(\Omega)$ εισάγουμε τη νόρμα:

$$\|f\|_{W^{k,p(\cdot)}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq\kappa} \|D^\alpha f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}.$$

Η εργασία μας θα τελειώσει γενικεύοντας τα αποτελέσματα των Κεφαλαίων 3 και 4 που αφορούν τους χώρους $W^{1,p(\cdot)}$, στους χώρους $W^{\kappa,p(\cdot)}$. Αυτό, θα επιτευχθεί με τη γενίκευση του Θεωρήματος 3.6. Ας δούμε όμως αυτή τη γενίκευση, πρώτα, για $\kappa = 2$.

Θεώρημα 6.1. *Έστω $p \in P(\Omega)$, με $p^- \geq 2$ και*

$$I_1(f) \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n),$$

όπου $f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ με συμπαγή φορέα. Τότε, ο $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ είναι πυκνός στον $W^{2,p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$.

Απόδειξη. Ας θεωρήσουμε μία συνάρτηση f του $W^{2,p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$, η οποία, χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι έχει συμπαγή φορέα, λόγω του Θεωρήματος 2.40. Θεωρούμε την ακολουθία των συναρτήσεων

$$\omega_\lambda^i(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g_\lambda(y) \frac{y_i}{|y|^{n-\frac{1}{\lambda^2}}} D_i f(x-y)dy,$$

όπου g_λ όπως στο Λήμμα 3.4. Οι συναρτήσεις ω_λ^i ανήκουν στον $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Στο Θεώρημα 3.6, αποδείξαμε ότι:

$$\Big\| \sum_{i=1}^n \frac{1}{n\omega_n} \omega_\lambda^i - f \Big\|_{p(\cdot)} \to 0\,,\ \text{όταν } \lambda \to \infty,$$

όπου $f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{|y|^n} D^i f(x-y)dy$. Επίσης, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η $D_j f$, με $1 \leq j \leq n$, είναι μια συνάρτηση του $L^{p(\cdot)}$ με συμπαγή φορέα, αποδείξαμε ότι:

$$\Big\| D_j\big(\sum_{i=1}^n \frac{1}{n\omega_n} \omega_\lambda^i\big) - D_j f \Big\|_{p(\cdot)} \to 0\,,\ \text{όταν } \lambda \to \infty,$$

για όλα τα $1 \leq j \leq n$.

Αν τώρα στη θέση των ω_λ^i, παίρναμε τις συναρτήσεις $D_r\omega_\lambda^i$, όπου $r =$

$1, 2, ..., n$, τότε, στη θέση των $D_i f$ μέσα στο ολοκλήρωμα, θα είχαμε τις $D_i D_r f$, δηλαδή:

$$D_r \omega_\lambda^i(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g_\lambda(y) \frac{y_i}{|y|^{n-\frac{1}{\lambda^2}}} D_i D_r f(x-y) dy,$$

όπου $D_i D_r f \in L^{p(\cdot)}$, από υπόθεση. Πανομοιότυπα λοιπόν με την απόδειξη του Θεωρήματος 3.6, θα παίρναμε και ότι:

$$\Big\| \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n\omega_n} D_r \omega_\lambda^i - D_r f \Big\|_{p(\cdot)} \to 0\,, \text{ όταν } \lambda \to \infty$$

για όλα τα $1 \leq r \leq n$ και

$$\Big\| D_j \Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n\omega_n} D_r \omega_\lambda^i \Big) - D_j D_r f \Big\|_{p(\cdot)} \to 0\,, \text{ όταν } \lambda \to \infty,$$

για όλα τα $1 \leq j \leq n$, όπου στη θέση της συνάρτησης f, τώρα έχουμε τη συνάρτηση $D_r f$.
Επειδή όμως έχουμε και ότι

$$\Big\| \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n\omega_n} \omega_\lambda^i - f \Big\|_{p(\cdot)} \to 0\,, \text{ όταν } \lambda \to \infty,$$

τελικά, προκύπτει ότι

$$\Big\| \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n\omega_n} \omega_\lambda^i - f \Big\|_{2,p(\cdot)} \to 0\,, \text{ όταν } \lambda \to \infty,$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

Στο προηγούμενο Θεώρημα, αντί της συνάρτησης f, θεωρήσαμε τη μερική παράγωγο $D_r f$ και αποδείξαμε την πυκνότητα στον $W^{2,p(\cdot)}$. Είναι προφανές, ότι αν ακολουθούσαμε την ίδια διαδικασία κ-φορές, άμεσα θα προέκυπτε η πυκνότητα στον $W^{\kappa,p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$. Ισχύει λοιπόν το εξής Θεώρημα:

Θεώρημα 6.2. *Έστω $p \in P(\Omega)$, με $p^- \geq 2$ και*

$$I_1(f) \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n),$$

όπου $f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ με συμπαγή φορέα. Τότε, ο $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ είναι πυκνός στον $W^{\kappa,p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$.

Όπως τα Θεωρήματα 4.1 και 4.2 προέκυψαν σαν εφαρμογές του Θεωρήματος 3.6, έτσι συμβαίνει και με τις γενικεύσεις τους, οι οποίες προκύπτουν από το Θεώρημα 6.2 κατά προφανή τρόπο. Έχουμε λοιπόν:

Θεώρημα 6.3. *Αν $p_- > n$, τότε ο $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ είναι πυκνός στον $W^{\kappa,p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$.*

Θεώρημα 6.4. *Αν $2 \leq p_- \leq n$ και $p_+ \leq \frac{np_-}{n-p_-}$, τότε ο $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ είναι πυκνός στον $W^{\kappa,p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$.*

Το Θεώρημα που θα αποδείξουμε εδώ και χρησιμοποιήθηκε ήδη στο 3ο Κεφάλαιο, αποτελεί ένα από τα γνωστά εργαλεία στους χώρους L^p. Αποδείχθηκε το 1939 από τον Jozef Marcinkiewicz, ο οποίος το έδειξε στο δάσκαλό του Antoni Zygmund λίγο πριν πεθάνει στον Δεύτερο Παγκόσμιο πόλεμο. Ο Zygmund αντιλήφθηκε ότι το Θεώρημα Marcinkiewicz είναι σε θέση να απλοποιήσει αρκετά κομμάτια από τη δουλειά του στην Αρμονική Ανάλυση και δημοσίευσε μια γενίκευσή του αρκετά χρόνια αργότερα, το 1956. Το Θεώρημα Marcinkiewicz μπορεί να βρεθεί σε πολλά βιβλία και εφαρμόζεται και σε μη γραμμικούς τελεστές. Την απόδειξη του Θεωρήματος Marcinkiewicz που παραθέτουμε λίγο πιο κάτω, ο αναγνώστης μπορεί να βρει στην αυθεντική της μορφή στο Παράρτημα του [16].

Ορισμός Α′.1. *Ένας τελεστής $T : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^q(\mathbb{R}^n)$ καλείται τύπου (p,q) αν*

$$\|(Tf)(x)\|_q \leq A\|f\|_p,\ f \in L^p(\mathbb{R}^n),$$

όπου η σταθερά A, είναι ανεξάρτητη της συνάρτησης f.

Ο $T : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^q(\mathbb{R}^n)$ καλείται ασθενούς τύπου (p,q) αν

$$\big|x : |(Tf)(x)| > a\big| \leq \big(\frac{A\|f\|_p}{a}\big)^q,\ q < \infty,$$

όπου η σταθερά A, είναι ανεξάρτητη της συνάρτησης f και του $a > 0$.

Θεώρημα Α′.2. *Έστω ότι ένας τελεστής T είναι συγχρόνως ασθενούς τύπου (p_0,q_0) και ασθενούς τύπου (p_1,q_1). Αν $0 < \theta < 1$ και $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$, $\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$, τότε ο T είναι τύπου (p,q).*

Πριν ξεκινήσουμε με την απόδειξη του Θεωρήματος, θα δώσουμε κάποιες έννοιες και σχέσεις, που είναι απαραίτητες. Έτσι, στη συνέχεια, θα συμβολίζουμε με $\lambda_f(a)$, το μέτρο $\big|x : |f(x)| > a\big|$. Για τη συνάρτηση f, θα συμβολίζουμε με f^*, τη συνάρτηση

$$f^*(x) = \inf\{a : \lambda_f(a) \leq x\}.$$

Δείχνεται εύκολα ότι οι συναρτήσεις λ_f και f^* δεν είναι αύξουσες, δεν παίρνουν ανρητικές τιμές και είναι συνεχείς από δεξιά. Επίσης, $\lambda_f(a) = \lambda_{f^*}(a)$, μιας και το σύνολο στο οποίο $f^*(x) > a$ είναι το διάστημα $0 \leq x < \lambda_f(a)$. Ως εκ΄ τούτου,

$$\|f*(x)\|_p = \big(\int_0^\infty |f^*(x)|^p dx\big)^{\frac{1}{p}} = \big(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx\big)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_p.$$

Ισχύουν οι γνωστές ανισότητες που ανακαλύφθηκαν από τον Hardy

$$\Big(\int_0^\infty \Big(\int_0^x f(y)dy\Big)^p x^{-r-1}dx\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{p}{r}\Big(\int_0^\infty (yf(y))^p y^{-r-1}dy\Big)^{\frac{1}{p}},$$

$$\Big(\int_0^\infty \Big(\int_x^\infty f(y)dy\Big)^p x^{r-1}dx\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{p}{r}\Big(\int_0^\infty (yf(y))^p y^{r-1}dy\Big)^{\frac{1}{p}},$$

$$\Big(\int_0^\infty [t^{\frac{1}{p}}h(t)]^{q_2}\frac{dt}{t}\Big)^{\frac{1}{q_2}} \leq A\Big(\int_0^\infty [t^{\frac{1}{p}}h(t)]^{q_1}\frac{dt}{t}\Big)^{\frac{1}{q_1}},\ q_1 \leq q_2 \leq \infty,\ 0 < p \leq \infty,$$

με $h > 0$ και όχι αύξουσα.
Ας περάσουμε τώρα στην απόδειξη του Θεωρήματος:

Απόδειξη. Θεωρούμε το ευθύγραμμο τμήμα

$$\sigma = \frac{\frac{1}{q_0} - \frac{1}{q}}{\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p}} = \frac{\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q}}{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p}}.$$

Έστω $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Για κάθε $t > 0$, γράφουμε την f ως εξής:

$$f = f^t + f_t,$$

όπου $f^t(x) = f(x)$, αν $|f(x)| > f^*(t^\sigma)$ και $f^t(x) = 0$, αλλιώς, ενώ $f_t = f - f^t$. Έπεται σχεδόν άμεσα ότι:

$$(f^t)^*(y) \leq f^*(y),\ \text{αν}\ 0 \leq y \leq t^\sigma$$

και

$$(f^t)^*(y) = 0,\ \text{αν}\ y > t^\sigma.$$

Επίσης,

$$(f_t)^*(y) \leq f^*(t^\sigma),\ \text{αν}\ y \leq t^\sigma$$

και

$$(f_t)^*(y) = f^*(y),\ \text{αν}\ y \geq t^\sigma.$$

Εύκολα συνάγουμε ότι αν $f = f_1 + f_2$:

$$(1) \qquad (T(f))^*(t) \leq (T(f_1))^*(\frac{t}{2}) + (T(f_2))^*(\frac{t}{2}).$$

Η ασθενής (p, q) υπόθεση για τον τελεστή T, μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι όταν $f \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n)$, έχουμε:

$$(2) \qquad (Tf)^*(t) \leq A_0 t^{\frac{1}{q_0}} \|f\|_{p_0}.$$

Όμοια, αν $f \in L^{p_1}(\mathbb{R}^n)$, έχουμε:

$$(3) \qquad (Tf)^*(t) \leq A_1 t^{\frac{1}{q_1}} \|f\|_{p_1}.$$

Επειδή $p_0 < p < p_1$, $f^t \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n)$ και $f_t \in L^{p_1}(\mathbb{R}^n)$, οι σχέσεις (1),(2),(3), δίνουν ότι:

$$(T(f))^*(t) \leq A_0\big(\frac{2}{t}\big)^{\frac{1}{q_0}}\|f^t\|_{p_0} + A_1\big(\frac{2}{t}\big)^{\frac{1}{q_1}}\|f_t\|_{p_1}.$$

Όμως, $\|Tf\|_q = \|Tf^*\|_q$ και από τη τρίτη ανισότητα του Hardy, η παραπάνω σχέση, μεγιστοποιείται από μια σταθερά πολλαπλασιασμένη με την παράσταση:

$$\Big(\int_0^\infty (t^{\frac{1}{q}}(Tf^*)(t))^p\frac{dt}{t}\Big)^{\frac{1}{p}},$$

εφόσον $p \leq q$. Έτσι, η νόρμα $\|Tf\|_q$ μεγιστοποιείται από μια σταθερά πολλαπλασιασμένη με την παράσταση:

$$\Big(\int_0^\infty (t^{\frac{1}{q}-\frac{1}{q_0}}(\|f^t\|_{p_0})^p\frac{dt}{t}\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\int_0^\infty (t^{\frac{1}{q}-\frac{1}{q_1}}(\|f_t\|_{p_1})^p\frac{dt}{t}\Big)^{\frac{1}{p}}. \tag{4}$$

Λόγω του ορισμού της $(f^t)^*$, έχουμε:

$$\|f^t\|_{p_0} = \Big((y^{\frac{1}{p_0}}(f^t)^*(y))^{p_0}\frac{dy}{y}\Big)^{\frac{1}{p_0}} \leq c\Big(y^{\frac{1}{p_0}}(f)^*(y)\frac{dy}{y}\Big)^{\frac{1}{p_0}}.$$

Αν την παραπάνω ανισότητα τη χρησιμοποιήσουμε στη σχέση (4) και εφαρμόσουμε την πρώτη από τις ανισότητες του Hardy κάνοντας αλλαγή μεταβλητών ($t^\sigma \to t$), ο πρώτος όρος, φρασσεται από μια σταθερά πολλαπλασιασμένη με $\|f\|_p$. Ανάλογα εργαζόμαστε και με το δεύτερο όρο. $\square$

Αναφορες

[1] H. Brezis, *Functional analysis, Sobolev spaces and Partial differential equations*, Springer (2010).

[2] D. Cruz-Uribe, A. Fiorenza, *Variable Lebesgue Spaces*, Springer (2013).

[3] L. Diening, P. Harjulehto, P. Hasto, M. Ruzicka, *Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents*, Springer (2010).

[4] L. Diening, *Maximal function on generalized Lebesgue spaces* $L^{p(x)}$, Math. Inequal. Appl., 7:245 - 253, 2004.

[5] D. Edmunds, J. Rakosnik, *Density of smooth functions in* $W^{k,p(x)}(\Omega)$, Proc. Roy. Soc. London Ser. A **437** (1992), 229 - 236.

[6] D. Gilbarg, N. S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Reprint of the 1998 edition, Springer-Verlag, Berlin, 2001.

[7] P. Hajlasz, A. Kalamajska *Polynomial asymptotics and approximation of Sobolev functions*, Studia Mathematica, **113**(1), 1995.

[8] P. Hasto, *Counter-examples of regularity in variable exponent Sobolev spaces.* In The p - harmonic equation and recent advances in analysis, vol 370 of Contemp. Math., pages133–143 Amer Math Soc., Providence, RI, 2005.

[9] P. Hasto, *On the density of continuous functions in variable exponent Sobolev space*, Rev. Mat. Iberoam. **23** (2007), 215–237.

[10] E. H. Lieb, *Gaussian, kernels have, only Gaussian maximizers*, Invent Math **102**, 179–208 (1990).

[11] E. H. Lieb, M. Loss, *Analysis*, Graduate Studies in Mathematics **14**, Second edition, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.

[12] V. M. Maz'ya, *Sobolev spaces, Springer. 1985.*

[13] N. Meyers, J. Serrin, $H = W$, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **51**:1055–1056, 1964.

[14] M. Riesz, *L'integrale de Riemann-Liouville et le probleme de Cauchy*, Acta Math. **81** (1948), 1–222.

[15] S. Samko, *Denseness of* $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ *functions in the generalized Sobolev spaces* $W^{m,p(x)}(\mathbb{R}^n)$. In direct and inverse problems of mathematical physics, (Newark, DE, 1997), volume 5 of Int. Soc. Anal. Appl. Comput., Kluwer Acad. Publ., Dordrecht (2000), 1–10.

[16] E. M. Stein, *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton University Press, Princeton, 1970.

[17] V. V. Zhikov, *Averaging of functionals of the calculus of variations and elasticity theory*, Math. USSR-Izv. **29** (1987), 33–65.

[18] V. V. Zhikov, *Density of smooth functions in Sobolev-Orlicz spaces*, J Math. Sc. **132** (2006), 285–294.