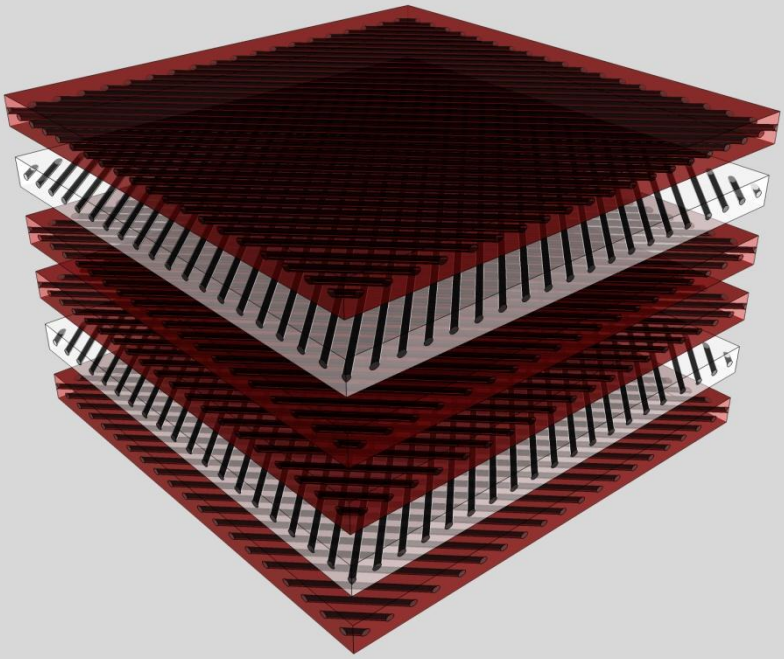
ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
Σχολή Πολιτικών Μηχανικών
Εργαστήριο Μεταλλικών Κατασκευών

Διερεύνηση Ενεργού Πλάτους σε Διαστρωματώσεις από Σύνθετα Υλικά



ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Μαρία Α. Γκέβρου

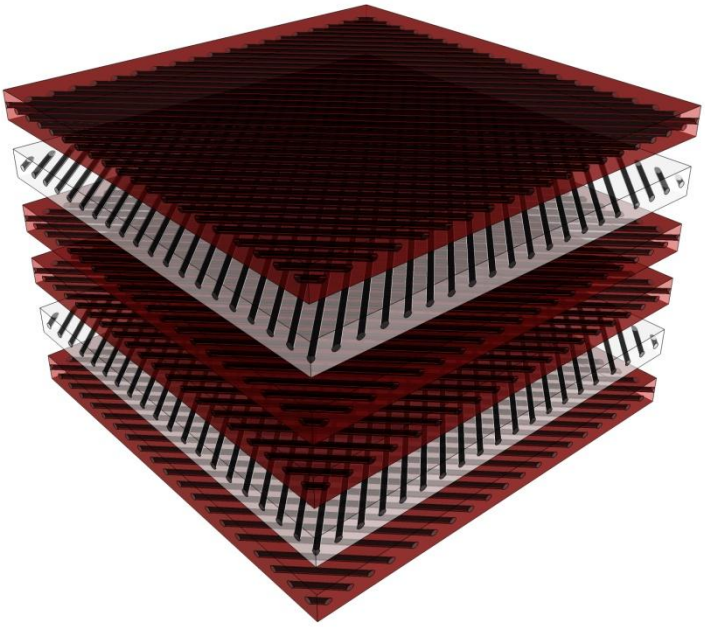
Επιβλέπων: Ιωάννης Γ. Ραυτογιάννης

Αθήνα, Ιούλιος 2015

ΕΜΚ ΔΕ 2015/21

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
Σχολή Πολιτικών Μηχανικών
Εργαστήριο Μεταλλικών Κατασκευών

Διερεύνηση Ενεργού Πλάτους σε Διαστρωματώσεις από Σύνθετα Υλικά



ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Μαρία Α. Γκέβρου

Επιβλέπων: Ιωάννης Γ. Ραυτογιάννης

Αθήνα, Ιούλιος 2015

ΕΜΚ ΔΕ 2015/21

Γκέβρου Μ. Α. (2015).
Διερεύνηση ενεργού πλάτους σε διαστρωματώσεις από σύνθετα υλικά
Διπλωματική Εργασία ΕΜΚ ΔΕ 2015/21
Εργαστήριο Μεταλλικών Κατασκευών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα.

Gkevrou M. A. (2015).
Investigation of the effective width in different laminates of composite materials
Diploma Thesis EMK ΔΕ 2015/21
Institute of Steel Structures, National Technical University of Athens, Greece

Πίνακας περιεχομένων

Περίληψη....3

Abstract....4

Ευχαριστίες....5

1 Σύνθετα Υλικά....6
1.1 Γενικά Χαρακτηριστικά....6
1.2 Ελαστικότητα Σύνθετων Υλικών....8
1.2.1 Τάσεις – Παραμορφώσεις....8
1.2.2 Γενικευμένος Νόμος του Hooke....9
1.3 Μετασχηματισμοί....13
1.3.1 Μετασχηματισμός Τάσεων....13
1.3.2 Μετασχηματισμός Παραμορφώσεων....13
1.3.3 Μετασχηματισμός Όρων Δυσκαμψίας Q_{ij}....14
1.4 Διαστρωματώσεις Σύνθετων Υλικών....16
1.4.1 Μεμβρανική Ακαμψία....17
1.4.2 Καμπτική Ακαμψία....19
1.5 Κριτήρια Αστοχίας....21
1.5.1 Εισαγωγή....21
1.5.2 Κριτήρια Αστοχίας Σύνθετων Υλικών....21

2 Ελαστική Κύρτωση Λεπτών Πλακών....30
2.1 Τοπικός Λυγισμός Πλακών από Ισότροπο Υλικό....30
2.2 Μεταλυγισμική Συμπεριφορά Πλακών....33
2.3 Ενεργό Πλάτος Διατομής....36
2.3.1 Προσέγγιση Von Karman....36
2.3.2 Βελτίωση Winter....40
2.4 Τοπικός Λυγισμός Πλακών από Ορθότροπο Υλικό....43

3 Παραμετρική Διερεύνηση Ενεργού Πλάτους....47
3.1 Γενικά....47
3.2 Υλικό T300/5208 - Graphite/Epoxy....52
3.2.1 Διαστρωματώσεις με Ίνες Προσανατολισμένες Κατά 0° και 90°....53
3.2.2 Διαστρωματώσεις με Ίνες Προσανατολισμένες Κατά Γωνίες $\pm\theta^o$....76
3.2.3 Ψευδο – Ισότροπη Διαστρωμάτωση....94
3.2.4 Διερεύνηση Πάχους στη Διαστρωμάτωση π / 4....100
3.3 Υλικό Scotchply 1002 - Glass / Epoxy....107
3.3.1 Διαστρωματώσεις με Ίνες Προσανατολισμένες Κατά 0° και 90°....108
3.3.2 Διαστρωματώσεις με Ίνες Προσανατολισμένες Κατά Γωνίες $\pm\theta^o$....131
3.3.3 Ψευδο – Ισότροπη Διαστρωμάτωση....149
3.3.4 Διερεύνηση Πάχους στη Διαστρωμάτωση π / 4....155
3.4 Χάλυβας....162
3.4.1 Γενικά....162
3.4.2 Χάλυβας Ποιότητας S235....162
3.4.3 Χάλυβας Ποιότητας S355....165

4 Επεξεργασία και Ανάλυση Αποτελεσμάτων.....166
4.1 Συγκεντρωτικά Αποτελέσματα.....166
4.2 Σύγκριση Αποτελεσμάτων..... 177
4.2.1 Διαστρωματώσεις με Ίνες Προσανατολισμένες Κατά 0° και 90°..... 177
4.2.2 Διαστρωματώσεις με Ίνες Προσανατολισμένες Κατά Γωνίες $\pm\theta^o$..... 186
4.2.3 Ψευδο – Ισότροπη Διαστρωμάτωση..... 189
4.2.4 Διερεύνηση Πάχους στη Διαστρωμάτωση π / 4.....190
4.2.5 Σύγκριση Ενεργού Πλάτους Σύνθετων Υλικών με Χάλυβα.....191

5 Συμπεράσματα.....194

6 Βιβλιογραφία.....195

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΜΕΤΑΛΛΙΚΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ
ΕΜΚ ΔΕ 2015/21

Διερεύνηση ενεργού πλάτους σε διαστρωματώσεις από σύνθετα υλικά

Γκέβρου Μ. Α. (Επιβλέπων: Ραυτογιάννης Ι.)

Περίληψη

Σκοπός της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η ανάλυση της συμπεριφοράς έναντι τοπικού λυγισμού λεπτών πλακών από σύνθετα υλικά. Συγκεκριμένα, χρησιμοποιήθηκε η ευρέως εφαρμοζόμενη στα ισότροπα υλικά θεωρία του ενεργού πλάτους σε ένα στοιχείο πλάκας από ορθότροπα - σύνθετα υλικά. Τα υλικά που εξετάστηκαν είναι το T300/5208 (Graphite/Epoxy) και το Scotchply 1002 (Glass/Epoxy). Ένα απλά στηριζόμενο στοιχείο πλάκας υποβάλλεται σε ομοιόμορφη θλιπτική φόρτιση στον άξονα x. Ακολούθως, γίνεται παραμετρική διερεύνηση ώστε να εκτιμηθεί η επιρροή των περιπτώσεων διαστρωμάτωσης, της διάταξης των στρώσεων σε μία διαστρωμάτωση, του προσανατολισμού των ινών σε κάθε στρώση μίας διαστρωμάτωσης αλλά και του πάχους σε διατομή με σταθερές τις άλλες δύο διαστάσεις. Τέλος, τα αποτελέσματα της διερεύνησης συγκρίνονται με τα αντίστοιχα του πιο κοινού ισότροπου υλικού, του χάλυβα.

Το πρώτο κεφάλαιο περιλαμβάνει μία εισαγωγή για τα σύνθετα υλικά, τα πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα τους στις σημερινές εφαρμογές, τις μηχανικές τους ιδιότητες και τον τρόπο αστοχίας τους.

Στο δεύτερο κεφάλαιο αναλύεται η συμπεριφορά των λεπτών πλακών από ισότροπο υλικό σε λυγισμό, η μεταλυγισμική τους συμπεριφορά, η προσέγγιση του ενεργού πλάτους αλλά και η αντίστοιχη συμπεριφορά σε λυγισμό λεπτών πλακών μεγάλου μήκους από ορθότροπο υλικό υπό επίπεδη αξονική φόρτιση.

Στο τρίτο κεφάλαιο παρατίθεται η διαδικασία υπολογισμού του ενεργού πλάτους για συνολικά 40 περιπτώσεις διαστρωματώσεων και για τα δύο προαναφερθέντα σύνθετα υλικά. Τα χαρακτηριστικά μεγέθη που αναζητήθηκαν στην διερεύνηση είναι το κρίσιμο φορτίο λυγισμού που καθορίζει την αντοχή των πλακών σε λυγισμό, και το φορτίο αστοχίας που αντιστοιχεί στο μέγιστο φορτίο που μπορεί να αντέξει τουλάχιστον μία από τις στρώσεις της διαστρωμάτωσης. Μέσα από την προσέγγιση του Von Karman (1932) προκύπτει από αυτά τα δύο μεγέθη το ενεργό πλάτος της διατομής.

Στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζονται αναλυτικά τα αποτελέσματα της διερεύνησης για όλες τις παραμέτρους που εξετάστηκαν, παραθέτοντας τα αντίστοιχα διαγράμματα. Επιπλέον γίνεται η σύγκριση με το χάλυβα ποιότητας S235 και S355.

Στο πέμπτο κεφάλαιο αναφέρονται συνοπτικά όλα τα χρήσιμα συμπεράσματα που προέκυψαν από τη διερεύνηση αυτή στο πλαίσιο της παρούσας διπλωματικής εργασίας.

NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS
FACULTY OF CIVIL ENGINEERING
INSTITUTE OF STEEL STRUCTURES

DIPLOMA THESIS
EMK ΔΕ 2015/21

Investigation of the effective width in different laminates of composite materials

Gkevrou M. A. (supervised by Raftoyannis I.)

Abstract

The main purpose of this diploma thesis is to analyze the local buckling behavior of thin plates made of composite materials. In particular, the widely recognized for isotropic materials *effective width* concept is implemented into the local buckling analysis of a plate element made of orthotropic – composite materials. The materials that went under examination are T300/5208 (Graphite/Epoxy) and Scotchply 1002 (Glass/Epoxy). A simply supported along its edges plate element is subjected to uniforn compressive loading in x-direction. Subsequently, a parametric study is conducted to evaluate the influences of the laminate cases, the place of plies in a laminate, the fibers' orientation in every ply of a laminate and the section's width, while the other two dimensions remain the same. Finally, the results of the investigation are compared with those of steel, which is the most common isotropic material.

The first chapter includes an introduction to composite materials, as long as their advantages and disadvantages, their properties and their failure modes.

In the second chapter, the buckling behavior analysis of isotropic thin plates is presented, followed by their post-buckling behavior analysis, the effective width concept and the buckling behavior of orthotropic thin plates under in-plane axial loading.

In the third chapter the calculation of the effective width in 40 laminate cases concerning the two composite materials is cited. For this purpose, the critical buckling load which indicates the buckling strength of a plate, and the ultimate strength which refers to the maximum load that a ply in a laminate may carry, are determined. The effective width is calculated, based on the approximate formula that has been derived from Von Karman (1932) and contains the two aforementioned values.

In the forth chapter there is a detailed report of the investigation's results along with the charts, regarding all the parameters examined. Additionally, the results are compared to those of structural steel S235 and S355.

The fifth chapter briefly presents the conclusions reached through this investigation.

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Ιωάννη Ραυτογιάννη, Αναπληρωτή Καθηγητή του τμήματος Πολιτικών Μηχανικών ΕΜΠ για την υπόδειξη του θέματος της διπλωματικής μου εργασίας και τη συνεχή καθοδήγησή του για την εκπόνησή της.

Επίσης, ένα μεγάλο ευχαριστώ στην οικογένειά μου και τους φίλους μου που ήταν συνεχώς δίπλα μου σε όλη τη διάρκεια των σπουδών μου.

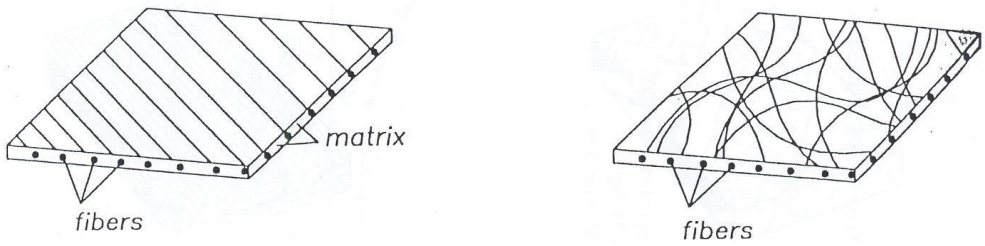
1 Σύνθετα Υλικά

1.1 Γενικά Χαρακτηριστικά

Ο όρος σύνθετα υλικά σημαίνει συνδυασμός δύο ή περισσοτέρων υλικών, με σημαντικές διαφορές στις φυσικές και στις μηχανικές ιδιότητες, υπό διακριτή μορφή τα οποία συνεργάζονται και δημιουργούν ένα νέο υλικό με βελτιωμένες ιδιότητες. Τα τελευταία χρόνια τα υλικά αυτά έχουν αναδειχθεί πολύ και τείνουν να επικρατήσουν σε καθημερινές εφαρμογές. Ο όγκος και ο αριθμός των εφαρμογών των σύνθετων υλικών έχουν σταθερή ανάπτυξη και πρόσφατα έχουν κατακτήσει τις νέες αγορές. Οι τύποι των σύνθετων υλικών είναι τα ινοπλισμένα με συνεχείς ή κοντές ίνες (Fibrous Composites), τα ινοπλισμένα με κομμάτια (Particulate Composites), τα υλικά σε διακριτές στρώσεις (Laminated) και τα υβριδικά (Hybrid Composites).

Τα πλέον συνήθη σύνθετα υλικά είναι αυτά που αποτελούνται από ισχυρές ίνες που ενώνονται και συγκρατούνται στην προβλεπόμενη θέση τους με ένα συνδετικό υλικό. Οι ίνες μπορεί να είναι συνεχείς προσανατολισμένες με μεγάλο μήκος (Unidirectional Composites), κοντές (Whiskers), πεπλεγμένες-μη προσανατολισμένες σε 2D (Random Composites) και πεπλεγμένες σε 3D (Yarns). Οι πλέον διαδεδομένες ίνες που χρησιμοποιούνται στα σύνθετα υλικά είναι από γυαλί, άνθρακα, οργανικές (Kevlar), βόριο και αλουμίνιο. Οι ίνες καθορίζουν τις ιδιότητες του σύνθετου υλικού και προτιμώνται ως οπλισμός επειδή τα περισσότερα υλικά είναι περισσότερο ανθεκτικά υπό μορφή ινών παρά στη συμπαγή μορφή τους. Μόρια ή νιφάδες (particles ή flakes) χρησιμοποιούνται επίσης ως ενισχύσεις, αλλά δεν είναι τόσο αποτελεσματικές όσο οι ίνες.

Το συνδετικό υλικό – μητρώο μπορεί να είναι από πολυμερή υλικά (PMC – polymer matrix composites), από κεραμικά υλικά (CMC – ceramic matrix composites), ή μεταλλικό (MMC – metal matrix composites). Το συνδετικό υλικό είναι κυρίως ρητίνες με χαμηλές μηχανικές ιδιότητες, όμως είναι κρίσιμα καθοριστικό για την αντοχή σε διάβρωση του σύνθετου υλικού. Η τάση εξάπλωσης των σύνθετων υλικών στην κατασκευή έργων υποδομής και κυρίως στις επισκευές και στις ενισχύσεις, οφείλεται στην εξαιρετική αντοχή τους σε περιβαλλοντικές και χημικές αντιδράσεις των πολυμερών συνδετικών υλικών και των περισσότερων ινών, έναντι των συμβατικών υλικών όπως ο χάλυβας, το σκυρόδεμα και το αλουμίνιο.



Σχήμα 1.1 : Ινοπλισμένο πολυμερές με συνεχείς προσανατολισμένες ίνες
και ίνες με τυχαίο προσανατολισμό

Λόγω της μορφής τους οι φυσικές ιδιότητες και η μηχανική τους συμπεριφορά διαφέρει από εκείνες των συμβατικών υλικών που χρησιμοποιούνται στις κατασκευές. Πλήθος ιδιοτήτων όπως το μικρό τους βάρος, η μεγάλη αντοχή και δυσκαμψία σε σχέση με το βάρος τους, η υψηλή αντοχή σε διάβρωση, η πολύ καλή συμπεριφορά σε κόπωση καθώς και οι μεγάλες αντοχές σε υψηλές θερμοκρασίες, καθιστούν την ύπαρξη των σύνθετων υλικών πολύ σημαντική στις κατασκευές. Παράλληλα, η δυνατότητα διαμόρφωσης των μηχανικών ιδιοτήτων τους ως προς τη θέση και τη διεύθυνση, αναδεικνύει τη χρησιμότητά τους για παράδειγμα στην κατασκευή πλακών όπου αναλόγως με τη φόρτιση στην οποία υποβάλλονται διαφέρει και ο προσανατολισμός των ινών για την βέλτιστη απόδοση τους.

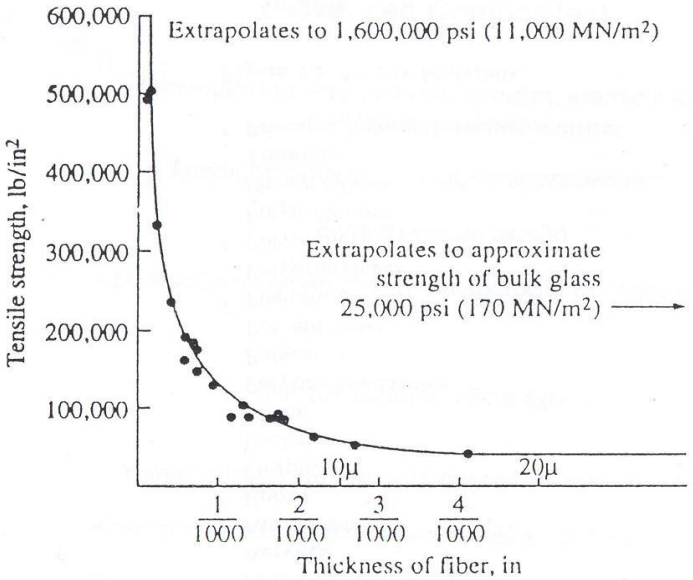
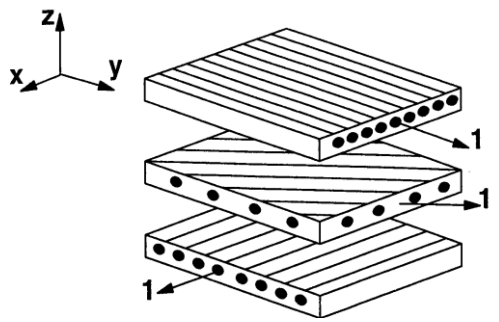


FIGURE 1.2
Griffith's measurements of tensile strength as a function of fiber thickn
(*Data from Griffith* [1.3], *as analyzed by Gordon* [1.4].)

Σχήμα 1.2 : Εφελκυστική αντοχή σε συνάρτηση με το πάχος των ινών

Προκειμένου να επιτευχθεί η μέγιστη δυσκαμψία του υλικού, οι ίνες σε κάθε στρώση έχουν κοινό προσανατολισμό. Εξαιτίας, όμως, της μικρής συνεισφοράς τους στην αντοχή σε θλιπτικά ή εγκάρσια φορτία, οι ίνες δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν μόνες τους (εκτός της περίπτωσης των καλωδίων). Αυτό, σε συνδυασμό με το γεγονός ότι η αντοχή του συνδετικού υλικού είναι πολύ μικρή σε σχέση με αυτή των ινών, καθίσταται αναγκαίο να προστεθούν στρώσεις με διαφόρους προσανατολισμούς ώστε να παραλαμβάνονται τα επιβαλλόμενα φορτία. Ένας τρόπος είναι να δημιουργηθεί μία διαστρωμάτωση με αλληλουχία στρώσεων με διάφορους προσανατολισμούς που θα παραλαμβάνει φορτία επίπεδης έντασης, αν και η αντοχή και η δυσκαμψία της ανά μονάδα βάρους για δεδομένη διεύθυνση είναι μικρότερη από τις αντίστοιχες τιμές μίας μεμονωμένης στρώσης.



Σχήμα 1.3 : Επαλληλία τριών στρώσεων για τη δημιουργία διαστρωμάτωσης

Τα σύνθετα υλικά είναι ανισότροπα, δηλαδή οι μηχανικές ιδιότητές τους δεν είναι ίδιες σε όλες τις κατευθύνσεις. Έτσι, ενώ παρουσιάζουν πολύ καλή συμπεριφορά σε εφελκυσμό, η συμπεριφορά τους σε θλιπτικά φορτία δεν είναι το ίδιο αποτελεσματική. Το φαινόμενο που εμφανίζεται σε κατασκευαστικά στοιχεία που δέχονται θλιπτική φόρτιση ονομάζεται λυγισμός. Αρχικά, οι παραμορφώσεις ακολουθούν το επίπεδο του θλιπτικού φορτίου. Όταν, όμως, το φορτίο ξεπεράσει μια τιμή, που ονομάζεται κρίσιμη, τότε λαμβάνουν χώρα παραμορφώσεις εκτός επιπέδου. Το κρίσιμο φορτίο και οι παραμορφώσεις που συμβαίνουν σε ένα σύνθετο υλικό επηρεάζονται από τις διαστάσεις του στοιχείου δηλαδή το μήκος, το πλάτος και το πάχος του, από το υλικό της διαστρωμάτωσης, τον προσανατολισμό των ινών και από τις συνθήκες στήριξης. Συγκεκριμένα, στην παρούσα διπλωματική εργασία εξετάστηκε η διαφοροποίηση του κρίσιμου φορτίου λυγισμού αλλά και του φορτίου αντοχής μίας διατομής από δύο διαφορετικά σύνθετα υλικά σε ένα στοιχείο πλάκας ανάλογα με την αλλαγή της διαστρωμάτωσής του.

1.2 Ελαστικότητα Σύνθετων Υλικών

Στην παρούσα εργασία γίνεται διερεύνηση σε σύνθετα υλικά αποτελούμενα από πολλές στρώσεις. Η διαφοροποίηση των στρώσεων δε συνίσταται στη διαφορά υλικού (ίνες ή μητρώο), αλλά στους διαφόρους τρόπους ενισχύσεώς τους, μέσα από τον τύπο διάταξης των ινών και του προσανατολισμού τους. Πολλές φορές στην πράξη κατασκευάζονται οι στρώσεις από το ίδιο υλικό και πάχος, με διαφορετικό, όμως, προσανατολισμό των ινών.

1.2.1 Τάσεις - Παραμορφώσεις

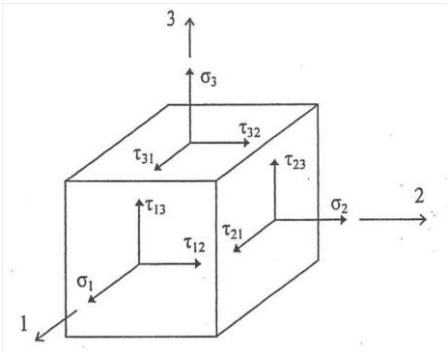
Η συμπεριφορά ενός υλικού χαρακτηρίζονται από τις μηχανικές του ιδιότητες. Για τα ισότροπα υλικά ορίζονται οι σχέσεις:

- $E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$ - το μέτρο ελαστικότητας (Young) συσχετίζει την ορθή (κατακόρυφη) τάση που δέχεται ένα υλικό με την παραμόρφωσή του.
- $G = \frac{\tau_{xy}}{\gamma_{xy}}$ - το μέτρο διάτμησης συσχετίζει τη διατμητική τάση με την παραμόρφωση.

- $\nu = -\dfrac{d\varepsilon_{trans}}{d\varepsilon_{axial}}$ - ο λόγος Poisson συσχετίζει τις μεταβολές των κάθετων μεταξύ τους παραμορφώσεων.

Η συμπεριφορά των ισότροπων υλικών, των οποίων οι μηχανικές ιδιότητες δεν αλλάζουν ανάλογα με τη διεύθυνση επιβολής του φορτίου, μπορεί να περιγραφεί από το μέτρο ελαστικότητας {E} και το λόγο Poisson {ν} καθώς το μέτρο διάτμησης εξαρτάται από τα άλλα δύο μεγέθη ($G = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$). Αντιθέτως, στα ορθότροπα υλικά όπως τα σύνθετα, το μέτρο διάτμησης δεν εξαρτάται από τα μεγέθη E και ν και η παραμόρφωση που προκαλείται με τη επιβολή ενός φορτίου – τάσης διαφοροποιείται ανάλογα με τη διεύθυνση που εξετάζουμε. Συνεπώς για να περιγράψουμε τη συμπεριφορά ενός σύνθετου υλικού χρειαζόμαστε έξι διαφορετικές σταθερές E, G, ν, τρεις για κάθε διεύθυνση.

Θεωρώντας το κύριο σύστημα αξόνων 1-2-3 ορίζουμε σ_i τις ορθές τάσεις και τ_{ij} τις διατμητικές τάσεις για i, j = 1, 2, 3.



Σχήμα 1.4 : Τάσεις στο κύριο σύστημα 1 – 2 - 3

Οι τάσεις γράφονται υπό διανυσματική μορφή ως εξής:

$\{\sigma\}^T = \{\sigma_1\ \sigma_2\ \sigma_3\ \tau_{23}\ \tau_{31}\ \tau_{12}\}$.

Ομοίως, οι αντίστοιχες παραμορφώσεις συμβολίζονται με ε_{ij} (ορθές) και γ_{ij} (διατμητικές) και ισχύει $\gamma_{ij} = 2\ \varepsilon_{ij}$.

Το διάνυσμα των παραμορφώσεων είναι $\{\varepsilon\}^T = \{\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3\ \gamma_{23}\ \gamma_{31}\ \gamma_{12}\}$, ενώ ακριβώς αντίστοιχες σχέσεις ισχύουν για ένα τυχαίο σύστημα x-y-z όπου οι δείκτες λαμβάνουν τιμές i, j = x, y, z.

1.2.2 Γενικευμένος Νόμος του Hooke

Ο νόμος της ελαστικότητας, όπως εκφράστηκε παραπάνω, συνδέει τάσεις και παραμορφώσεις με 81 ελαστικές σταθερές $C_{i,j,k,l}$, όπου i, j, k, l = 1, 2, 3. Επειδή όμως οι τάσεις και οι παραμορφώσεις είναι συμμετρικές ($\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ και $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$), ο νόμος γίνεται:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}.$$

Αυτή η έκφραση είναι γενική για ένα ανισότροπο γραμμικώς ελαστικό υλικό. Υπάρχουν 36 ελαστικές σταθερές εκ των οποίων οι 21 είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.

Στα ορθότροπα υλικά, υπάρχει συμμετρία ως προς τρία ορθογωνικά επίπεδα και εννιά ανεξάρτητες ελαστικές σταθερές, ο γενικευμένος νόμος ελαστικότητας του Hooke μετασχηματίζεται ως εξής:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}.$$

Επίσης στα ορθότροπα υλικά και στο κύριο σύστημα αξόνων 1 – 2 – 3, δεν υπάρχει αλληλεξάρτηση μεταξύ κυρίων και διατμητικών τάσεων – παραμορφώσεων.

Μετά από απλά πειράματα προέκυψαν οι μηχανικές σταθερές (μέτρα ελαστικότητας) και έτσι το αντίστροφο του νόμου ελαστικότητας συναρτήσει αυτών των μηχανικών σταθερών είναι:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\mathrm{E}_1} & -\frac{\nu_{21}}{\mathrm{E}_2} & -\frac{\nu_{31}}{\mathrm{E}_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{\mathrm{E}_1} & \frac{1}{\mathrm{E}_2} & -\frac{\nu_{32}}{\mathrm{E}_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{\mathrm{E}_1} & -\frac{\nu_{23}}{\mathrm{E}_2} & \frac{1}{\mathrm{E}_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}$$

, όπου οι λόγοι του Poisson είναι $\nu_{ij} = -\frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_i}$, όπου i, j = 1, 2, 3.

Για επίπεδη εντατική κατάσταση ισχύει $\sigma_3 = \tau_{23} = \tau_{31} = 0$, οπότε το παραπάνω μητρώο μετασχηματίζεται ως εξής:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}.$$

Οι ανεξάρτητες σταθερές είναι πλέον τέσσερις, δηλαδή E_1, E_2, ν_{12}, G_{12}, και ισχύει $\frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2}$.

Αντιστρέφοντας τον παραπάνω πίνακα προκύπτει η ακόλουθη σχέση τάσεων παραμορφώσεων με όρους δυσκαμψίας:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \frac{1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \begin{bmatrix} E_1 & \nu_{21}E_1 & 0 \\ \nu_{12}E_2 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu_{12}\nu_{21})G_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}$$

όπου $Q_{11} = \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}}$, $Q_{22} = \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}}$, $Q_{12} = \frac{\nu_{21}E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{12}E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} = Q_{21}$, $Q_{66} = G_{12}$.

Στους πίνακες που ακολουθούν παρατίθενται οι ιδιότητες κάποιων συνήθων σύνθετων υλικών, στα οποία το μητρώο είναι ρητίνες (εποξικές, πολυεστερικές, κλπ), ενώ οι ίνες είναι γυαλί, γραφίτης βόριο και αραμίδιο.

ΤΥΠΟΣ	ΥΛΙΚΟ	E_1 (GPa)	E_2 (GPa)	ν_{12}	G_{12} (GPa)	ν_f	ρ (g/cm^3)
T300/5208	Graphite Epoxy	181,00	10,30	0,28	7,17	0,70	1,60
B(4)/5505	Boron Epoxy	204,00	18,50	0,23	5,59	0,50	2,00
AS/3501	Graphite Epoxy	138,00	8,96	0,30	7,10	0,66	1,60
Scotchply 1002	Glass Epoxy	38,60	8,27	0,26	4,14	0,45	1,80
Kevlar 49	Aramid Epoxy	76,00	5,50	0,34	2,30	0,60	1,46

Πίνακας 1.1 : Μέτρα Ελαστικότητας (E) σύνθετων υλικών
(για συγκεκριμένο λόγο όγκου ν_f)

ΤΥΠΟΣ	$1/(1-\nu_{12}\nu_{21})$	Q_{11}	Q_{22}	Q_{12}	Q_{66}
T300/5208	1,0045	181,8	10,34	2,897	7,17
B(4)/5505	1,0048	205,0	18,58	4,275	5,79
AS/3501	1,0059	138,8	9,013	2,704	7,10
Scotchply 1002	1,0147	39,16	8,392	2,182	4,14
Kevlar 49	1,0084	76,64	5,546	1,886	2,30

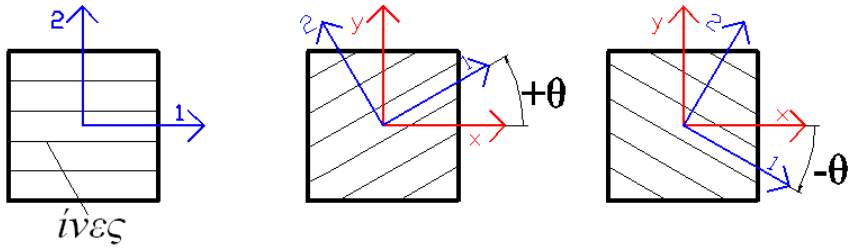
Πίνακας 1.2 : Όροι Δυσκαμψίας (Q) στο σύστημα υλικού 1-2 (GPa)

ΤΥΠΟΣ	S_{11}	S_{22}	S_{12}	S_{66}
T300/5208	5,525	97,09	-1,547	139,5
B(4)/5505	4,902	54,05	-1,128	172,7
AS/3501	7,246	111,6	-2,174	140,8
Scotchply 1002	25,91	120,9	-6,744	241,5
Kevlar 49	13,16	181,8	-4,474	434,8

Πίνακας 1.3 : Όροι Ευκαμψίας (S) στο σύστημα υλικού 1-2 (Tpa^{-1})

1.3 Μετασχηματισμοί

Στα συμβατικά – ισότροπα υλικά, ο προσανατολισμός των ινών δεν επηρεάζει τις ιδιότητες του υλικού. Στους κύριους άξονες η διατμητική τάση τ_{xy} είναι μηδέν, ενώ στο κριτήριο αστοχίας Von Mises η διατμητική τάση αστοχίας είναι $\tau_y \cong \frac{1}{2}\sigma_y$. Αντιθέτως στα σύνθετα υλικά τα οποία είναι ορθότροπα ή ανισότροπα, οι ιδιότητες του υλικού επηρεάζονται από τον προσανατολισμό των ινών, άρα για τον προσδιορισμό των τάσεων, των παραμορφώσεων, των όρων δυσκαμψίας και ευκαμψίας, καθώς και των ισοδυνάμων μέτρων ελαστικότητας, προκύπτει αναγκαίος ο μετασχηματισμός στο σύστημα 1 – 2 του υλικού. Συγκεκριμένα, γνωρίζοντας τη σχέση τάσεων – παραμορφώσεων στο σύστημα 1 – 2 του υλικού το οποίο αντιστοιχεί στη διεύθυνση των ινών και την κάθετό της, θέλουμε να προσδιορίσουμε την ανάλογη σχέση σε ένα άλλο σύστημα x - y υπό γωνία θ ως προς το σύστημα 1 – 2. Η θετική φορά για τη γωνία θ καθορίζεται στο ακόλουθο σχήμα:



Σχήμα 1.5 : Θετική και αρνητική φορά γωνίας μετασχηματισμού θ

1.3.1 Μετασχηματισμός Τάσεων

Το $[T_\sigma^+]$ είναι το μητρώο μετασχηματισμού των τάσεων σ_x, σ_y και τ_{xy} από το τυχόν σύστημα x – y στο σύστημα υλικού 1 – 2, με τη γωνία θ θετικά ορισμένη (αντιωρολογιακή φορά). Έτσι προσδιορίζονται οι τάσεις σ_1, σ_2 και τ_{12}:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2cs \\ s^2 & c^2 & -2cs \\ -cs & cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \left[T_\sigma^+\right]\{\sigma\}$$

, όπου c = cos θ και s = sin θ.

1.3.2 Μετασχηματισμός Παραμορφώσεων

Η αντίστοιχη μητρωική σχέση για το μετασχηματισμό των παραμορφώσεων γίνεται μέσω του μητρώου μετασχηματισμού των παραμορφώσεων $[T_\varepsilon^+]$.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & cs \\ s^2 & c^2 & -cs \\ -2cs & 2cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \left[T_\varepsilon^+ \right] \{\varepsilon\}$$

, όπου c = cos θ και s = sin θ.

Η διαφορά μεταξύ των μητρώων $[T_\sigma^+]$ και $[T_\varepsilon^+]$ έγκειται στον ορισμό της διατμητικής παραμόρφωσης $\gamma_{12} = 2\,\varepsilon_{12}$. Γενικά ισχύει:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \frac{1}{2}\gamma_{12} \end{Bmatrix} = \left[T_\sigma^+ \right] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

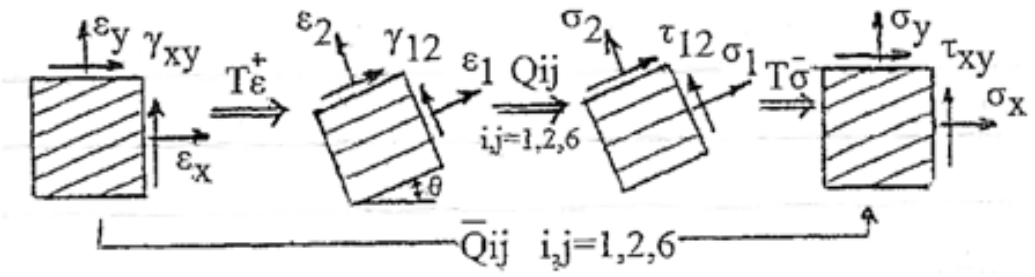
Εισάγοντας το συντελεστή $\frac{1}{2}$, ο οποίος πολλαπλασιάζει τις παραμορφώσεις γ , στους όρους του μητρώου μετασχηματισμού των τάσεων $[T_\sigma^+]$ παίρνουμε το μητρώο μετασχηματισμού των παραμορφώσεων $[T_\varepsilon^+]$.

1.3.3 Μετασχηματισμός Όρων Δυσκαμψίας Q_{ij}

Στο σύστημα του υλικού 1 – 2, η σχέση τάσεων – παραμορφώσεων είναι:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}$$

Χρειάζεται να προσδιοριστεί η σχέση που συνδέει τις τάσεις σ_x, σ_y και τ_{xy} με τις παραμορφώσεις ε_x, ε_y και γ_{xy} στο τυχόν σύστημα x – y υπό γωνία θ σε σχέση με το σύστημα του υλικού 1 – 2. Αυτό συνίσταται στον προσδιορισμό των όρων δυσκαμψίας στο σύστημα x – y.



Σχήμα 1.6 : Διάγραμμα μετασχηματισμού των όρων δυσκαμψίας [Q]

Η παραπάνω σχέση τάσεων – παραμορφώσεων στο σύστημα του υλικού 1 – 2, μετασχηματίζεται στην ακόλουθη σχέση στο σύστημα x – y:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{16} \\ \overline{Q}_{21} & \overline{Q}_{22} & \overline{Q}_{26} \\ \overline{Q}_{16} & \overline{Q}_{26} & \overline{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

Το μητρώο δυσκαμψίας $[\overline{Q}]$ είναι συμμετρικό, δηλαδή ισχύει:
$\overline{Q}_{12} = \overline{Q}_{21}$, $\overline{Q}_{16} = \overline{Q}_{61}$ και $\overline{Q}_{26} = \overline{Q}_{62}$.

Οι μετασχηματισμένοι όροι δυσκαμψίας $\overline{Q}_{ij}$ υπολογίζονται συναρτήσει των όρων δυσκαμψίας Q_{ij} ως ακολούθως:

$$\begin{Bmatrix} \overline{Q}_{11} \\ \overline{Q}_{22} \\ \overline{Q}_{12} \\ \overline{Q}_{66} \\ \overline{Q}_{16} \\ \overline{Q}_{26} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^4 & s^4 & 2c^2s^2 & 4c^2s^2 \\ s^4 & c^4 & 2c^2s^2 & 4c^2s^2 \\ c^2s^2 & c^2s^2 & c^4+s^4 & -4c^2s^2 \\ c^2s^2 & c^2s^2 & -2c^2s^2 & (c^2-s^2)^2 \\ c^3s & -cs^3 & cs^3-c^3s & 2(cs^3-c^3s) \\ cs^3 & -c^3s & c^3s-cs^3 & 2(c^3s-cs^3) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_{11} \\ Q_{22} \\ Q_{12} \\ Q_{66} \end{Bmatrix}$$

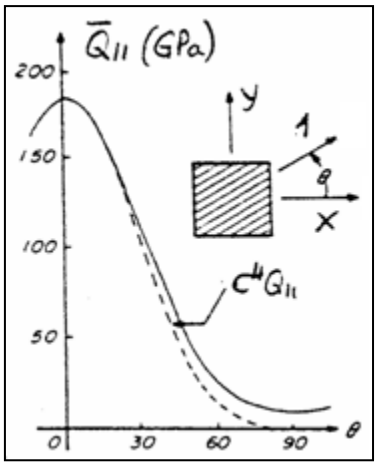
, όπου c = cos θ και s = sin θ.

Η παραπάνω σχέση ισχύει μόνο για στροφή από το σύστημα του υλικού 1 – 2 προς ένα τυχαίο σύστημα x – y και για γωνία θ θετική (αντιωρολογιακή φορά). Επίσης σημειώνεται ότι θετικό ή αρνητικό πρόσημο στη γωνία θ επηρεάζει μόνο το πρόσημο των όρων $\overline{Q}_{16}$ και $\overline{Q}_{26}$, ενώ παρατηρείται ότι στο σύστημα 1 – 2 οι όροι Q_{16} και Q_{26} είναι μηδενικοί.

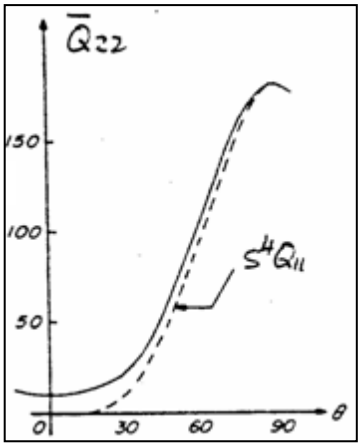
Η σχέση μετασχηματισμού των όρων δυσκαμψίας γράφεται υπό συμβολική μορφή:
$\overline{Q}_{ij} = [T_Q]\, Q_{ij}$, όπου το $[T_Q]$ είναι ένα μητρώο 6x4.

Παρακάτω παρατίθενται τα διαγράμματα μεταβολής των μετασχηματισμένων όρων δυσκαμψίας συναρτήσει της γωνίας θ για το υλικό T300/5208 (Graphite/Epoxy).

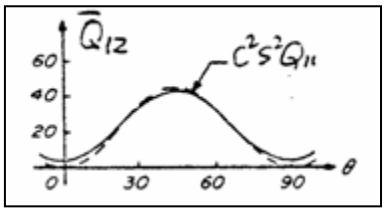
·$\overline{Q}_{11}$:



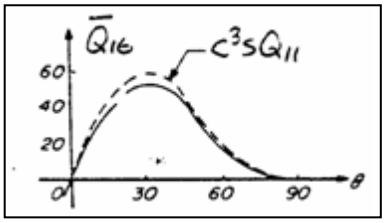
·$\overline{Q}_{22}$:



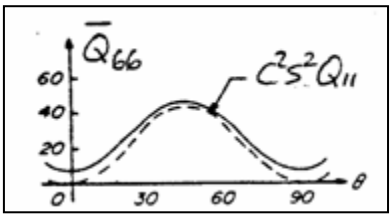
·$\overline{Q}_{12}$:



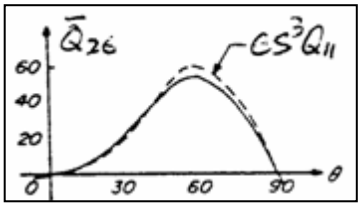
·$\overline{Q}_{16}$:



·$\overline{Q}_{66}$:



·$\overline{Q}_{26}$:

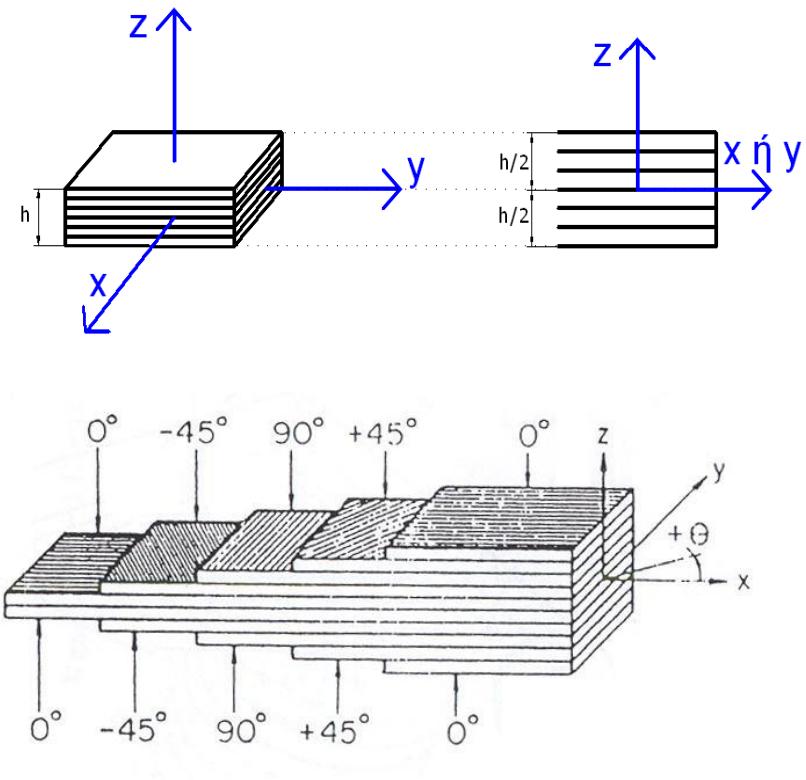


Σχήμα 1.7 : Διαγράμματα μεταβολής των μετασχηματισμένων όρων δυσκαμψίας συναρτήσει της γωνίας θ (υλικό T300/5208)

Με τον ίδιο τρόπο μετασχηματίζονται ο όροι ευκαμψίας S_{ij} που στην παρούσα εργασία δεν θα χρησιμοποιηθούν.

1.4 Διαστρωματώσεις Σύνθετων Υλικών

Μία διαστρωμάτωση μορφώνεται διατάσσοντας πολλές στρώσεις μαζί σε συνεργασία, κάθε μία εκ των οποίων έχει της δικές της ιδιότητες και γεωμετρικά χαρακτηριστικά, όπως πάχος, κατεύθυνση ινών, συνδετικό υλικό – ίνες και λόγο συμμετοχής όγκου ινών. Ο κώδικας αλληλουχίας χαρακτηρίζει μία διαστρωμάτωση καθώς περιγράφει τη θέση κάθε στρώσης μέσα στο συνολικό πάχος h της διαστρωμάτωσης. Η ονοματολογία αφορά στη γωνία θ της κατεύθυνσης των ινών κάθε στρώσης, με πάχος κάθε στρώσης t. Η διαστρωμάτωση μπορεί να είναι συμμετρική ή μη συμμετρική. Στην περίπτωση της συμμετρικής διαστρωμάτωσης, κάθε στρώση αποτελείται από το ίδιο υλικό και πάχος και υπάρχει άρτιος αριθμός στρώσεων διατεταγμένων συμμετρικά ως προς το μέσο επίπεδο [θ(z) = θ(-z)]. Η συμμετρία εκφράζεται με το δείκτη S, ενώ ως επίπεδο αναφοράς (z = 0) λαμβάνεται το μέσο επίπεδο της διαστρωμάτωσης στη θέση h / 2.



Σχήμα 1.8 : Σύστημα αξόνων υλικού διαστρωμάτωσης,
κώδικας αλληλουχίας $[0/45^o/90^o/-45^o/0]_S$

1.4.1 Μεμβρανική Ακαμψία

Δεχόμαστε σταθερή παραμόρφωση κατά το πάχος της διαστρωμάτωσης, δηλαδή είναι:

$\varepsilon_x(z) = \varepsilon_x(0) = \varepsilon_x^0$

$\varepsilon_y(z) = \varepsilon_y(0) = \varepsilon_y^0$

$\gamma_{xy}(z) = \gamma_{xy}(0) = \gamma_{xy}^0$

Επίσης, ορίζουμε βοηθητικά τη μέση τάση $\bar{\sigma}$, οπότε έχουμε:

$$\bar{\sigma}_x = \frac{1}{h}\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz$$

$$\bar{\sigma}_y = \frac{1}{h}\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y dz$$

$$\bar{\tau}_{xy} = \frac{1}{h}\int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} dz$$

και αντικαθιστώντας την σχέση τάσεων – παραμορφώσεων {σ} = [E] {ε} στην πρώτη από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει:

$$\bar{\sigma}_x = \frac{1}{h}\int_{-h/2}^{h/2}\left[\bar{Q}_{11}\varepsilon_x + \bar{Q}_{12}\varepsilon_y + \bar{Q}_{16}\gamma_{xy}\right]dz =$$

$$= \frac{1}{h}\left[\int \bar{Q}_{11}dz\varepsilon_x + \int \bar{Q}_{12}dz\varepsilon_y + \int \bar{Q}_{16}dz\gamma_{xy}\right] =$$

$$= \frac{1}{h}\left(\mathrm{A}_{11}\varepsilon_x + \mathrm{A}_{12}\varepsilon_y + \mathrm{A}_{16}\gamma_{xy}\right)$$

Μεταθέτοντας στο αριστερό μέλος της παραπάνω σχέσεως το πάχος h και ορίζοντας τη μεμβρανική δύναμη N_x ως το γινόμενο $\bar{\sigma}_x$ h, έχουμε την έκφραση:

$N_x = \bar{\sigma}_x\, h = A_{11}\, \varepsilon_x + A_{12}\, \varepsilon_y + A_{16}\, \gamma_{xy}$

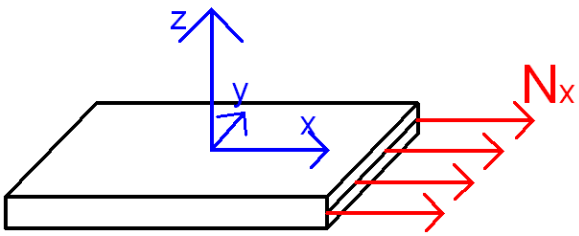
όπου A_{ij} οι όροι της μεμβρανικής δυσκαμψίας που ορίζονται ως εξής:

$$A_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \overline{Q_{ij}}dz\,, \quad \mathrm{i, j = 1, 2, 6}$$

Αν κάθε στρώση k έχει πάχος t_k τότε η παραπάνω σχέση γίνεται :

$$A_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \overline{Q_{ij}}dz = \sum_{k=1}^{N}\left(\overline{Q_{ij}}\right)_k t_k$$

Η μεμβρανική δράση N_x είναι κατανεμημένη αξονική δύναμη ανά μονάδα μήκους (KN/m) που εφαρμόζεται στο μέσο επίπεδο της διαστρωμάτωσης (z = 0) και ουσιαστικά αποτελεί το καθ' ύψος άθροισμα όλων των επιμέρους δυνάμεων που αναπτύσσονται σε κάθε στρώση. Με τον ίδιο τρόπο ορίζονται και οι μεμβρανικές δυνάμεις N_y και N_{xy}.



Σχήμα 1.9 : Η μεμβρανική δράση N_x

Η σχέση τάσεων – παραμορφώσεων προκύπτει μετά την ολοκλήρωση των τάσεων ως προς το πάχος της διαστρωμάτωσης:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix}$$

όπου A_{ij} είναι οι μεμβρανικές δυσκαμψίες της διαστρωμάτωσης και έχουν μονάδες κατανεμημένης δύναμης.

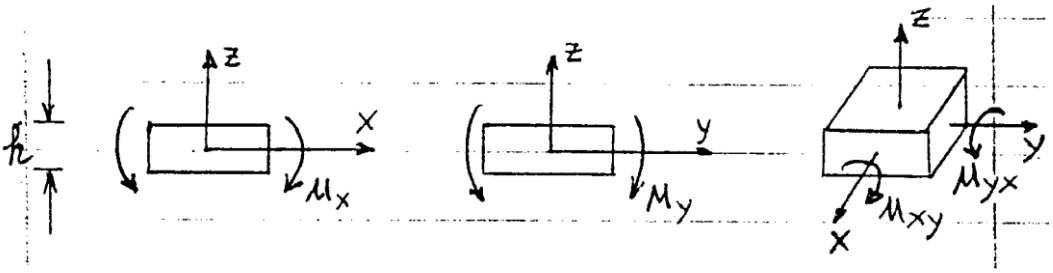
Αντιστρέφοντας την παραπάνω σχέση παίρνουμε:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{26} \\ a_{16} & a_{26} & a_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix}$$

όπου a_{ij} είναι οι μεμβρανικοί όροι ευκαμψίας της διαστρωμάτωσης.

1.4.2 Καμπτική Ακαμψία

Θεωρούμε μία διαστρωμάτωση πάχους h στην οποία δρουν εγκάρσια φορτία. Ο φορέας αυτός είναι μία σύνθετη πλάκα η οποία υποβάλλεται σε καμπτική καταπόνηση. Οι ροπές M_x , M_y και M_{xy} είναι κατανεμημένες και έχουν μονάδα μέτρησης KNm/m δηλαδή KN. Ορίζουμε ως θετικές φορές για τις ροπές αυτές που φαίνονται στο ακόλουθο σχήμα.



Σχήμα 1.10 : Προσήμανση θετικών ροπών κάμψης πλάκας

Οι ροπές αυτές εφαρμόζονται στο μέσο επίπεδο της διαστρωμάτωσης και υπολογίζονται με ολοκλήρωση των τάσεων κατά την έννοια του πάχους της διαστρωμάτωσης ως εξής:

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz$$

$$M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz$$

$$M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz$$

Ορίζονται οι καμπυλότητες της πλάκας,

$$k_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad , \quad k_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad , \quad k_{xy} = -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

και οι κινηματικές σχέσεις γίνονται:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = zk_x ,$$
$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = zk_y ,$$
$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = zk_{xy} .$$

Αναπτύσσοντας την έκφραση $M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz$ συναρτήσει των τάσεων και λαμβάνοντας υπόψη τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει:

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz = \int \left[\overline{Q}_{11}\varepsilon_x + \overline{Q}_{12}\varepsilon_y + \overline{Q}_{16}\gamma_{xy} \right] z dz = \int \left[\overline{Q}_{11}k_x + \overline{Q}_{12}k_y + \overline{Q}_{16}k_{xy} \right] z^2 dz =$$
$$= \left(\int \overline{Q}_{11} z^2 dz \right) k_x + \left(\int \overline{Q}_{12} z^2 dz \right) k_y + \left(\int \overline{Q}_{16} z^2 dz \right) k_{xy}$$

ή αλλιώς:

$M_x = D_{11}k_x + D_{12}k_y + D_{16}k_{xy}$, όπου D_{ij} οι όροι καμπτικής δυσκαμψίας για i, j =1, 2, 6.

Η σχέση ροπών καμπυλοτήτων γράφεται υπό μητρωική μορφή:

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} ,$$

όπου $D_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \overline{Q_{ij}} z^2 dz = \sum_{k=1}^{N} \left(\overline{Q_{ij}} \right)_k \cdot \left[\overline{z_k}^2 t_k + \frac{t_k^3}{12} \right]$ για i, j =1, 2, 6 και $\overline{z_k}$ είναι η απόσταση του μέσου της στρώσης k από το μέσο επίπεδο. Σημειώνεται ότι το μητρώο D είναι συμμετρικό και η εμφάνιση των όρων D_{16} και D_{26} δηλώνει σύζευξη απλής κάμψης και συστροφής.

1.5 Κριτήρια Αστοχίας

1.5.1 Εισαγωγή

Συγκρίνοντας τα συμβατικά με τα σύνθετα υλικά προκύπτουν αρκετές διαφορές ως προς τις μηχανικές ιδιότητες και τη συμπεριφορά τους. Αρχικά τα συμβατικά – ισότροπα υλικά έχουν τις ίδιες ιδιότητες προς κάθε κατεύθυνση, σε αντίθεση με τα σύνθετα – ορθότροπα ή ανισότροπα υλικά, των οποίων οι ιδιότητες είναι συνάρτηση του προσανατολισμού στο γενικό σύστημα χ – y. Επίσης, δεδομένου ότι ο λόγος Poisson στα ισότροπα υλικά είναι συνήθως ν = 0,3, χρειαζόμαστε μόνο την τιμή του μέτρου ελαστικότητας Ε, ενώ στα σύνθετα υλικά απαιτούνται τέσσερις ελαστικές σταθερές για τον προσδιορισμό της συμπεριφοράς τους. Παράλληλα, ο έλεγχος αστοχίας στα ισότροπα υλικά γίνεται εκτιμώντας την τάση σε κάποια θέση αστοχίας του υλικού, αντιθέτως για τα σύνθετα υλικά απαιτούνται έξι σταθερές ώστε να γίνει ο έλεγχος. Τέλος, τα κριτήρια αστοχίας των ισότροπων υλικών δεν μπορούν να εφαρμοστούν απ' ευθείας στα σύνθετα υλικά. Συμπερασματικά, κρίνεται αναγκαίος ο καθορισμός νέων κριτηρίων αστοχίας για τα σύνθετα υλικά.

1.5.2 Κριτήρια Αστοχίας Σύνθετων Υλικών

Ένα σύνθετο υλικό φθάνει σε όρια αστοχίας είτε όταν κάποια τάση μίας από τις στρώσεις υπερβεί την φέρουσα ικανότητα, είτε όταν κάποια παραμόρφωση ξεπεράσει τα ανώτατα επιτρεπόμενα όρια. Η εκτίμηση των αντοχών σε ένα σύνθετο υλικό αποτελούμενο από πολλές στρώσεις είναι, σε κάθε περίπτωση, αρκετά πιο πολύπλοκη σε σχέση με ένα αντίστοιχο ισότροπο υλικό, όπως ο χάλυβας. Η πολυπλοκότητα, αυτή, οφείλεται τόσο στο γεγονός ότι το σύνθετο δεν είναι ενιαίο, όσο και στο ότι εμφανίζει διαφορετικές ιδιότητες ανά διεύθυνση.

Αστοχία ενός σύνθετου υλικού μπορεί να επέλθει όταν εφαρμόζεται εφελκυστικό φορτίο παράλληλο στη διεύθυνση των ινών. Στα συνήθη υλικά από ίνες γυαλιού, επέρχεται πρώτα αστοχία του συνδετικού υλικού – ρητίνης, διότι η μέγιστη παραμόρφωση των ινών είναι μεγαλύτερη από της ρητίνης, που είναι συνήθως πολυεστερική, ενώ γενικότερα δεν επηρεάζεται σημαντικά η αντοχή της στρώσης. Παράλληλα, η αστοχία μιας μονοαξονικής στρώσης σε εφελκυστικό φορτίο κάθετα στη διεύθυνση των ινών εμφανίζεται συνήθως με ρηγμάτωση της ρητίνης και αποχωρισμό των δεσμών ίνας - ρητίνης.

Εκτός από εφελκυσμό, αστοχία μπορεί να επέλθει και εξαιτίας θλιπτικού φορτίου. Στα ινώδη υλικά οι ίνες λειτουργούν σαν δοκοί και εδράζονται ελαστικά στη ρητίνη που τις περιβάλλει. Υπό τη δράση θλιπτικών φορτίων αυξάνονται τόσο οι τάσεις όσο και οι παραμορφώσεις. Τα κενά μεταξύ ινών και ρητίνης ή η μη σωστή ευθυγράμμιση των ινών είναι κάποιες από τις ατέλειες που μπορούν να οδηγήσουν σε αστοχία. Ένας συνήθης τρόπος αστοχίας ενός σύνθετου υλικού αποτελούμενου από πολλές στρώσεις είναι ο αποχωρισμός των στρώσεων πράγμα που επηρεάζει τη συνολική απόκριση και συμπεριφορά μίας κατασκευής.

Για τον έλεγχο της αντοχής ενός ινώδους σύνθετου υλικού αναπτύχθηκαν, κατά καιρούς, διάφορα κριτήρια. Κάποια εφαρμόζονται σε όλα τα ορθότροπα υλικά, άλλα εφαρμόζονται μόνο σε συγκεκριμένα σύνθετα υλικά ενώ άλλα προέκυψαν από κριτήρια αστοχίας ισότροπων υλικών.

Τα πλέον πιο διαδεδομένα κριτήρια αστοχίας των σύνθετων υλικών είναι τα εξής:

Α) Κριτήριο Μέγιστης Τάσης

Β) Κριτήριο Μέγιστης Παραμόρφωσης

Γ) Κριτήριο Tsai – Hill

Δ) Κριτήριο Tsai – Wu

Ορίζονται οι ακόλουθες κρίσιμες τάσεις αστοχίας:

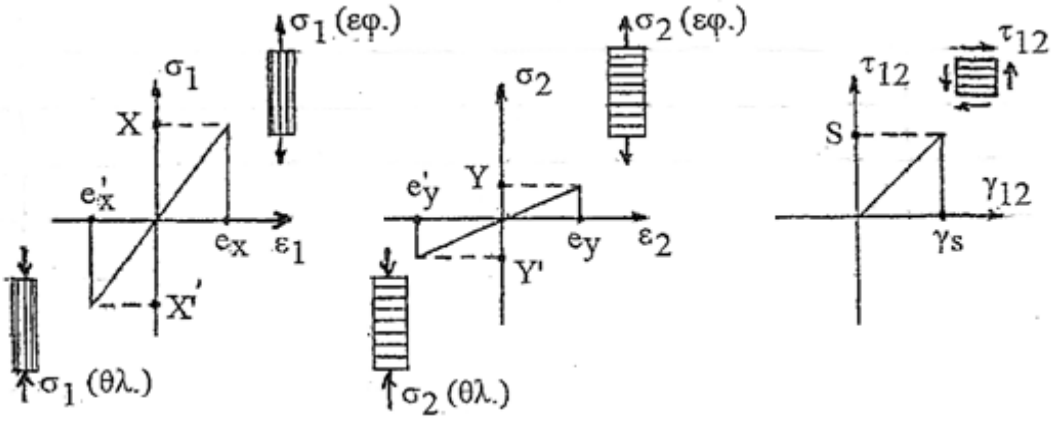
X : τάση αστοχίας σε μονοαξονικό εφελκυσμό κατά την έννοια των ινών

X' : τάση αστοχίας σε μονοαξονική θλίψη κατά την έννοια των ινών

Y : τάση αστοχίας σε μονοαξονικό εφελκυσμό παράλληλα στις ίνες

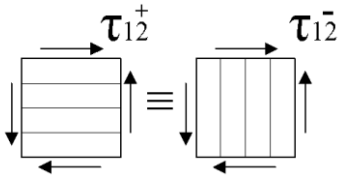
Y' : τάση αστοχίας σε μονοαξονική θλίψη παράλληλα στις ίνες

S : τάση αστοχίας σε καθαρή διάτμηση



Σχήμα 1.11 : Πειραματικός προσδιορισμός τάσεων αστοχίας X, X', Y, Y', S, όπου e_x, e'_x, e_y, e'_y και γ_s οι αντίστοιχες παραμορφώσεις αστοχίας

Σημειώνεται ότι το πρόσημο της διατμητικής τάσης δεν παίζει ρόλο:

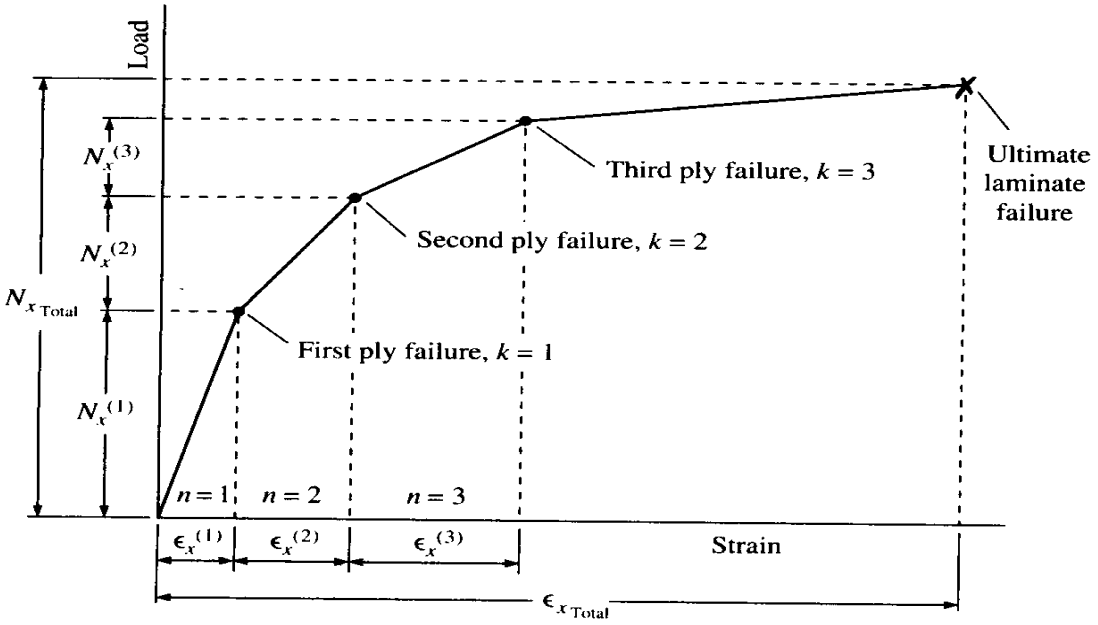


Παρακάτω παρατίθεται ο πίνακας με τις κρίσιμες τάσεις αστοχίας ορισμένων σύνθετων υλικών και του αλουμινίου.

ΤΥΠΟΣ	ΥΛΙΚΟ	v_f	X	X’	Y	Y’	S
T300/5208	Graphite Epoxy	0,70	1500	1500	40	246	68
B(4)/5505	Boron Epoxy	0,50	1260	2500	61	202	67
AS/3501	Graphite Epoxy	0,66	1447	1447	51,7	206	93
Scotchply 1002	Glass Epoxy	0,45	1062	610	31	118	72
Kevlar 49	Aramid Epoxy	0,60	1400	235	12	53	34
-	Αλουμίνιο		400	400	400	400	230

Πίνακας 1.4 : Κρίσιμες τάσεις αστοχίας X, X’, Y, Y’ και S σε MPa
(ορισμένων σύνθετων υλικών και αλουμινίου)

Τα παραπάνω κριτήρια αναφέρονται σε μία μόνο στρώση του σύνθετου υλικού και στη συμπεριφορά του σαν ενιαίο υλικό. Συνεπώς, έχουμε τη δυνατότητα να ελέγξουμε αν κάποια από τις στρώσεις θα αστοχήσει πρώτα υπό συγκεκριμένο φορτίο, κάτι που δεν αποτελεί αυτόματα και αστοχία της διαστρωμάτωσης. Πολλές φορές η πρώτη αστοχία μπορεί να μην είναι καν εμφανής, εξετάζοντας τη συμπεριφορά του υλικού μακροσκοπικά. Οι στρώσεις που είναι αρκετά πιο ευαίσθητες και αστοχούν πρώτες είναι αυτές με τις ίνες κάθετα διατεταγμένες στη διεύθυνση του φορτίου. Όταν επέρχεται αστοχία, έχει σαν αποτέλεσμα τη μείωση της δυσκαμψίας και συνεπώς η απόκριση του σύνθετου υλικού αποκλίνει από την αρχική συμπεριφορά. Τα φορτία που δρουν αφού έχει αρχίσει η αστοχία κάποιων στρώσεων προκαλούν μεγαλύτερες παραμορφώσεις. Παρ' όλα αυτά το υλικό έχει ακόμα φέρουσα ικανότητα, ενώ ανάμεσα στην αστοχία δύο στρώσεων το υλικό διατηρεί την ελαστική του συμπεριφορά, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.12.



Σχήμα 1.12 : Καμπύλη φορτίου – παραμόρφωσης για σύνθετο υλικό αποτελούμενο από πολλές στρώσεις

Παρακάτω αναλύονται τα τέσσερα αυτά κριτήρια:

Α) Κριτήριο Μέγιστης Τάσης

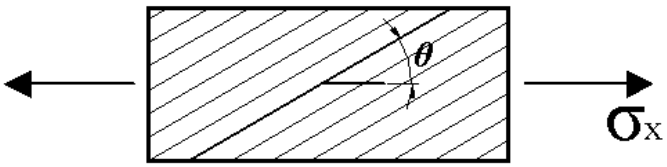
Διατυπώθηκε από τον Jenkins (1920) για τα ορθότροπα υλικά και αποτελεί μία επέκταση του κριτηρίου Rankine για τα ισότροπα. Σύμφωνα με το κριτήριο, αστοχία επέρχεται όταν δεν ικανοποιείται έστω και μία από τις παρακάτω σχέσεις:

$X' < \sigma_1 < X$

$Y' < \sigma_2 < Y$

$|\tau_{12}| < S$

- Διατύπωση του κριτηρίου για μονοαξονικό εφελκυσμό κατά x:



Σχήμα 1.13 : Μονοαξονικός εφελκυσμός κατά x

Από τις σχέσεις $\sigma_1 = \sigma_x \cos^2\theta$, $\sigma_2 = \sigma_x \sin^2\theta$, $\tau_{12} = -\sigma_x \sin\theta \cos\theta$, προκύπτει η ακόλουθη μορφή του κριτηρίου μέγιστης τάσης :

$\frac{X'}{c^2} < \sigma_x < \frac{X}{c^2}$, $\frac{Y'}{s^2} < \sigma_x < \frac{Y}{s^2}$, $|\sigma_x| < \frac{S}{|CS|}$, όπου c = cos θ και s = sin θ.

Β) Κριτήριο Μέγιστης Παραμόρφωσης

Διατυπώθηκε από τον Waddoups (1967) και αποτελεί επέκταση του κριτηρίου St. Venant για τα ισότροπα υλικά. Σύμφωνα με το κριτήριο αυτό, αστοχία επέρχεται όταν δεν ικανοποιείται έστω και μία από τις ακόλουθες σχέσεις:

$e_x' < \varepsilon_1 < e_x$

$e_y' < \varepsilon_2 < e_y$

$|\gamma_{12}| < \gamma_s$

Μία άλλη διατύπωση του κριτηρίου αυτού συναρτήσει των κρίσιμων τάσεων είναι:

$\frac{X'}{E_1} < \varepsilon_1 < \frac{X}{E_1}$, $\frac{Y'}{E_2} < \varepsilon_2 < \frac{Y}{E_2}$, $|\gamma_{12}| < \frac{S}{G_{12}}$

- Διατύπωση του κριτηρίου για μονοαξονικό εφελκυσμό κατά x:

Οι παραμορφώσεις είναι:

$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_\chi}{E_1} (c^2 - v_{12}\, s^2)$

$\varepsilon_2 = \frac{\sigma_\chi}{E_2} (s^2 - v_{12}\, c^2)$

$\gamma_{12} = - \frac{\sigma_\chi}{G_{12}}$ cs

Έτσι το κριτήριο μέγιστης παραμόρφωσης αποκτά την ακόλουθη μορφή:

$\frac{X'}{c^2 - v_{12}s^2} < \sigma_x < \frac{X}{c^2 - v_{12}s^2}$

$\frac{Y'}{s^2 - v_{12}c^2} < \sigma_x < \frac{Y}{s^2 - v_{12}c^2}$

$|\sigma_x| < \frac{S}{|CS|}$, όπου c = cos θ και s = sin θ.

Γ) Κριτήριο Tsai – Hill

Ο Hill (1950) παρουσίασε μία θεωρία αστοχίας για ανισότροπα υλικά και στη συνέχεια ο Tsai (1968) συνέδεσε τις σταθερές του υλικού στο κριτήριο Hill με τις κρίσιμες τάσεις αστοχίας.

Εφαρμόζοντας μόνο τάση σ_1 : $(G + H) X^2 = 1$, άρα $G + H = \frac{1}{X^2}$

Εφαρμόζοντας μόνο τάση σ_2 : $F + H = \frac{1}{Y^2}$

Εφαρμόζοντας μόνο τάση σ_3 : $F + G = \frac{1}{Z^2}$, Z: η τάση αστοχίας κατά τη διεύθυνση 3.

Επιλύοντας τις πιο πάνω σχέσεις ως προς H, G και F προκύπτει:

$$2H = \frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} - \frac{1}{Z^2}$$

$$2G = \frac{1}{Z^2} + \frac{1}{X^2} - \frac{1}{Y^2}$$

$$2F = \frac{1}{Y^2} + \frac{1}{Z^2} - \frac{1}{X^2}$$

Τέλος, εφαρμόζοντας μόνο διατμητικές τάσεις τ_{23}, τ_{31} και τ_{12} προκύπτουν αντίστοιχα:

$$2L = \frac{1}{S_{YZ}^2}$$

$$2M = \frac{1}{S_{ZX}^2}$$

$$2N = \frac{1}{S^2}$$

Για ένα σύνθετο υλικό με προσανατολισμένες ίνες κατά τη διεύθυνση x, οι ιδιότητες κατά y είναι ίδιες με αυτές κατά z και συνεπώς

$$2H = \frac{1}{X^2} \quad , \quad 2G = \frac{1}{X^2} \quad , \quad 2F = \frac{2}{Y^2} - \frac{1}{X^2}$$

Το κριτήριο Tsai – Hill εκφρασμένο στο επίπεδο απλοποιείται στη μορφή:

$$(G + H)\, \sigma_1^2 + (F + H)\, \sigma_2^2 - 2\, H\, \sigma_1 \sigma_2 + 2\, N\, \tau_{12}^2 \leq 1$$

και αν συνδυαστούν οι παραπάνω σχέσεις , η τελική μορφή του κριτηρίου Tsai – Hill στο επίπεδο είναι:

$$\frac{\sigma_1^2}{X^2} - \frac{\sigma_1\, \sigma_2}{X^2} + \frac{\sigma_2^2}{Y^2} + \frac{\tau_{12}^2}{S^2} \leq 1$$

Αστοχία του υλικού λαμβάνει χώρα όταν δεν ικανοποιείται η παραπάνω σχέση.

- Διατύπωση του κριτηρίου για μονοαξονικό εφελκυσμό κατά x:

Για τις τάσεις ισχύουν οι σχέσεις:

$\sigma_1 = c^2 \sigma_x$, $\sigma_2 = s^2 \sigma_x$, $\tau_{12} = -cs\, \sigma_x$ και αντικαθιστώντας τες στο κριτήριο προκύπτει:

$\frac{c^4}{X^2} + (\frac{1}{S^2} - \frac{1}{X^2})\, c^2 s^2 + \frac{s^4}{Y^2} = \frac{1}{\sigma_x^2}$, όπου $c = \cos\theta$ και $s = \sin\theta$.

Δ) Κριτήριο Tsai – Wu

Το κριτήριο αυτό παρουσιάστηκε από τους Tsai και Wu (1971) ως μία γενικευμένη πλέον μορφή του κριτηρίου Tsai – Hill. Εκφράζεται με τη μορφή τάσεων και παραμορφώσεων ως εξής:

$F_{ij}\, \sigma_i\, \sigma_j + F_i\, \sigma_i \leq 1$
$G_{ij}\, \varepsilon_i\, \varepsilon_j + G_i\, \varepsilon_i \leq 1$, όπου F_{ij}, F_i, G_{ij}, G_i οι σταθερές του υλικού

- Έκφραση κριτηρίου με τη μορφή Τάσεων

Αναλυτική έκφραση:

$F_{11}\sigma_1^2 + 2\, F_{12}\, \sigma_1\sigma_2 + F_{22}\, \sigma_2^2 + F_{66}\, \tau_{12}^2 + 2\, F_{16}\, \sigma_1\tau_{12} + 2\, F_{26}\, \sigma_2\tau_{12} + F_1\, \sigma_1 + F_2\, \sigma_2 + F_6\, \tau_{12} \leq 1$

Η αλλαγή του πρόσημου της διατμητικής τάσης τ_{12} δεν πρέπει να επηρεάζει το κριτήριο, άρα $F_{16} = F_{26} = F_6 = 0$ και συνεπώς

$F_{11}\sigma_1^2 + 2\, F_{12}\, \sigma_1\sigma_2 + F_{22}\, \sigma_2^2 + F_{66}\, \tau_{12}^2 + F_1\, \sigma_1 + F_2\, \sigma_2 \leq 1$

Οι υπόλοιπες έξι παράμετροι προσδιορίζονται με απλά πειράματα μονοαξονικού εφελκυσμού.

Με εφαρμογή μόνο ορθής τάσης $\sigma_1 = X$ ή $\sigma_1 = X'$:

$F_{11}\, X^2 + F_1\, X = 1$
$F_{11}\, X'^2 + F_1\, X' = 1$ => $F_{11} = \frac{1}{XX'}$ και $F_1 = \frac{1}{X} - \frac{1}{X'}$

Με εφαρμογή μόνο ορθής τάσης $\sigma_2 = Y$ ή $\sigma_2 = Y'$:

$F_{22}\, Y^2 + F_2\, Y = 1$
$F_{22}\, Y'^2 + F_2\, Y' = 1$ => $F_{22} = \frac{1}{YY'}$ και $F_2 = \frac{1}{Y} - \frac{1}{Y'}$

Με εφαρμογή μόνο διατμητικής τάσης τ_{12} = S :

$F_{66}\, S^2 = 1 \quad => \quad F_{66} = \frac{1}{S^2}$

Μετά από θεωρητικό προσδιορισμό του όρου F_{12} προκύπτει ότι η τιμή F_{12}^{*} = -1/2 που ισχύει για τα συνήθη – ισότροπα υλικά μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για τα σύνθετα υλικά.

- Έκφραση κριτηρίου με τη μορφή Παραμορφώσεων

Γενική έκφραση: $G_{ij}\, \varepsilon_i\, \varepsilon_j + G_i\, \varepsilon_i \leq 1$

Τάσεις:
$\sigma_1 = Q_{11}\, \varepsilon_1 + Q_{12}\, \varepsilon_2$
$\sigma_2 = Q_{12}\, \varepsilon_1 + Q_{22}\, \varepsilon_2$
$\tau_{12} = Q_{66}\, \gamma_{12}$

Αντικαθιστώντας αυτές τις τάσεις στην αναλυτική έκφραση του κριτηρίου
$F_{11}\sigma_1^2 + 2\, F_{12}\, \sigma_1\sigma_2 + F_{22}\, \sigma_2^2 + F_{66}\, \tau_{12}^2 + F_1\, \sigma_1 + F_2\, \sigma_2 \leq 1$
υπολογίζονται οι τιμές των σταθερών G_{ij} και G_i.

Είναι :
$G_{11} = F_{11}\, Q_{11}^2 + 2\, F_{12}\, Q_{11}\, Q_{12} + F_{22}\, Q_{12}^2$
$G_{12} = F_{11}\, Q_{11}\, Q_{12} + 2\, F_{12}\, (Q_{11}Q_{12} + Q_{12}^2) + F_{22}\, Q_{12}\, Q_{22}$
$G_{22} = F_{11}\, Q_{12}^2 + 2\, F_{12}\, Q_{12}\, Q_{22} + F_{22}\, Q_{22}^2$
$G_{66} = F_{66}\, Q_{66}^2$
$G_1 = F_1\, Q_{11} + F_2\, Q_{12}$
$G_2 = F_1\, Q_{12} + F_2\, Q_{22}$

Συνεπώς το κριτήριο αποκτά την παρακάτω μορφή:

$G_{11}\varepsilon_1^2 + 2\, G_{12}\, \varepsilon_1\varepsilon_2 + G_{22}\, \varepsilon_2^2 + G_{66}\, \gamma_{12}^2 + G_1\, \varepsilon_1 + G_2\, \varepsilon_2 \leq 1$

Τα πλεονεκτήματα της έκφρασης του κριτηρίου μέσω των παραμορφώσεων είναι:

α) Οι σταθερές G_{ij} και G_i είναι αδιάστατες

β) Οι παραμορφώσεις είναι σταθερές ή μεταβάλλονται γραμμικά σε μία διαστρωμάτωση.

Συνεπώς ο έλεγχος των παραμορφώσεων είναι πιο ευχερής από τον έλεγχο των τάσεων σε κάθε στρώση.

Παρακάτω, παρατίθενται οι πίνακες των παραμέτρων αντοχής τάσεων και παραμορφώσεων ορισμένων σύνθετων υλικών και αλουμινίου για το κριτήριο Tsai – Wu.

ΤΥΠΟΣ	ΥΛΙΚΟ	F_{11}	F_{22}	F_{12}	F_{66}	F_1	F_2
T300/5208	Graphite Epoxy	0,444	101,6	-3,36	216,2	0,0	20,93
B(4)/5505	Boron Epoxy	0,317	81,15	-2,53	222,7	0,393	11,44
AS/3501	Graphite Epoxy	0,476	93,48	-3,33	115,4	0,0	14,50
Scotchply 1002	Glass Epoxy	1,543	273,3	-10,27	192,9	-0.697	23,78
Kevlar 49	Aramid Epoxy	3,039	1572	-34,56	865,0	-3,541	64,46
-	Αλουμίνιο	6,25	6,25	-3,125	18,9	0,0	230

Παραδοχή: F_{12}^{*} = -1/2

Πίνακας 1.5 : Κριτήριο Tsai – Wu - Παράμετροι αντοχής τάσεων σε GPa^{-2}
(ορισμένων σύνθετων υλικών και αλουμινίου)

ΤΥΠΟΣ	ΥΛΙΚΟ	G_{11}	G_{22}	G_{12}	G_{66}	G_1	G_2
T300/5208	Graphite Epoxy	12004	10680	-3069	11117	60,64	216,5
B(4)/5505	Boron Epoxy	10374	27646	-2988	6961	129,6	214,3
AS/3501	Graphite Epoxy	7375	7467	-1746	5828	39,17	130,57
Scotchply 1002	Glass Epoxy	1913	18881	1712	3306	24,56	198,05
Kevlar 49	Aramid Epoxy	13453	47656	2068	4576	-149,8	350,8
-	Αλουμίνιο	28387	28387	1976	13313	0	0

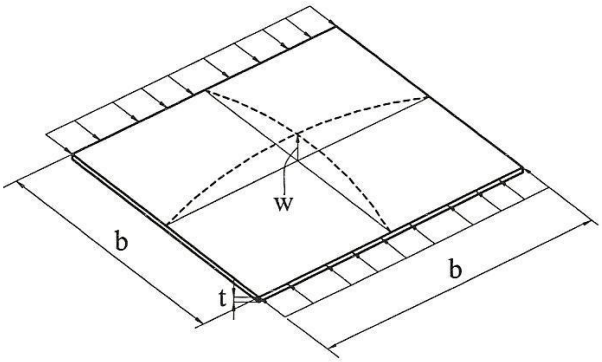
Παραδοχή: F_{12}^{*} = -1/2

Πίνακας 1.6 : Κριτήριο Tsai – Wu - Παράμετροι αντοχής παραμορφώσεων - αδιάστατες
(ορισμένων σύνθετων υλικών και αλουμινίου)

2 Ελαστική Κύρτωση Λεπτών Πλακών

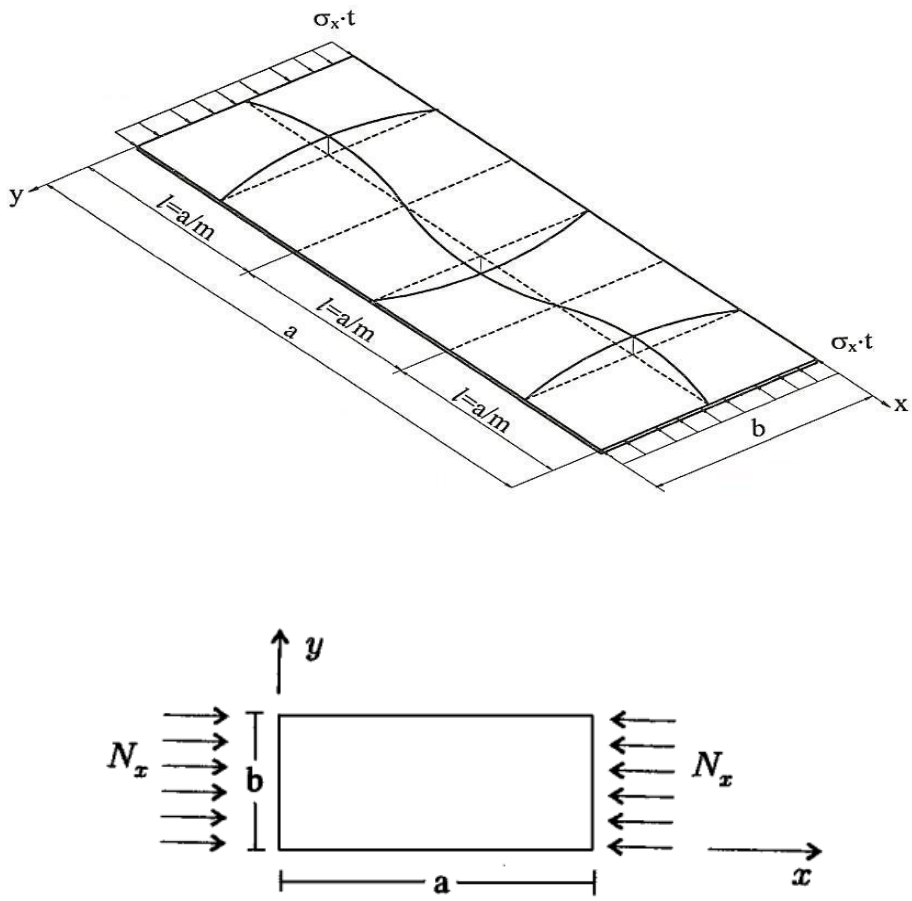
2.1 Τοπικός Λυγισμός Πλακών από Ισότροπο Υλικό

Ο τοπικός λυγισμός είναι μια μορφή αστάθειας που παρουσιάζεται έντονα σε λεπτές πλάκες και αντιμετωπίζεται ως πρόβλημα κύρτωσης των πλακών. Συμβαίνει, όταν ανάλογα με τον τρόπο στήριξης, η μία ή και οι δύο διαμήκεις πλευρές του στοιχείου παραμένουν ευθύγραμμες. Στο κεφάλαιο αυτό της εργασίας θα προσδιοριστεί αναλυτικά η κρίσιμη τάση κύρτωσης των πλακών που θλίβονται αξονικά και κατά συνέπεια το κρίσιμο φορτίο λυγισμού τους.



Σχήμα 2.1 : Τετραγωνική πλάκα υπό ομοιόμορφη αξονική θλίψη

Στην παραπάνω τετραέρειστη τετραγωνική πλάκα η οποία εδράζεται με αρθρώσεις και στις τέσσερις πλευρές (οριακές συνθήκες έδρασης Navier) και υποβάλλεται σε ομοιόμορφη αξονική θλίψη, παρατηρείται ως προς τις δύο διευθύνσεις ήβωση (κύρτωση) σε μία καμπύλη επιφάνεια. Επίσης, το μήκος του τοιχώματος της διατομής είναι πολύ μεγαλύτερο από το πλάτος. Αυτή η μορφή λυγισμού ονομάζεται 'τοπικός' λυγισμός, καθώς τα μήκη των κυρτώσεων έχουν την ίδια τάξη μεγέθους με τις διαστάσεις της διατομής. Το αντίστοιχο συμβαίνει και στις ορθογωνικές πλάκες, όπως είναι αυτή του σχήματος 2.2.



Σχήμα 2.2 : Ορθογωνική πλάκα υπό ομοιόμορφη αξονική θλίψη

Ο Saint – Venant διατύπωσε τις εξισώσεις ισορροπίας για λεπτές ελαστικές πλάκες στις οποίες επιβάλλεται ομοιόμορφη θλίψη:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{\sigma_x t}{D}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \qquad (1)$$

με

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$$

όπου D η καμπτική δυσκαμψία της πλάκας, E το μέτρο ελαστικότητας, t το πάχος της πλάκας, ν ο λόγος Poisson, w το βέλος κάθετα στην επιφάνεια της πλάκας και σ_x η αξονική θλιπτική τάση.

Τα βέλη w μπορούν να εκφραστούν με διπλές σειρές Fourier, όπου m και n ο αριθμός των ημιτονοειδών κυμάτων στις διευθύνσεις x και y αντίστοιχα:

$$w=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$$

, όπου a και b το μήκος και το πλάτος της πλάκας αντίστοιχα.

Η παραπάνω σχέση ικανοποιεί τις οριακές συνθήκες καθώς τα βέλη για x = 0 και a αλλά και για y = 0 και b είναι ίσα με μηδέν. Επίσης ικανοποιούνται και οριακές συνθήκες για τις ακραίες ροπές κάμψης καθώς κατά μήκος των πλευρών ισχύει $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0$ και $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0$.

Οι ακραίες ροπές κάμψης υπολογίζονται από τις σχέσεις:

$$M_x=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$

$$M_y=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)$$

Από τη λύση της εξίσωσης (1) προκύπτει

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A_{mn}\left[\pi^4\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2-\frac{\sigma_x t}{D}\frac{m^2\pi^2}{a^2}\right]\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}=0$$

Για $\pi^4\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2-\frac{\sigma_x t}{D}\frac{m^2\pi^2}{a^2}\neq 0$, προκύπτει η τετριμμένη λύση ότι δε λαμβάνει χώρα η κύρτωση. Οπότε πρέπει να εξισωθεί το περιεχόμενο της αγκύλης με μηδέν.

Για $\pi^4\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2-\frac{\sigma_x t}{D}\frac{m^2\pi^2}{a^2}=0$ και n = 1, δηλαδή ένα ημικύμα στη διεύθυνση y προκύπτει η ελάχιστη τάση κύρτωσης, η οποία αποτελεί την κρίσιμη τάση κύρτωσης και δίνεται από τη σχέση:

$$\sigma_{cr}=\frac{K_\sigma\pi^2 D}{tb^2}$$

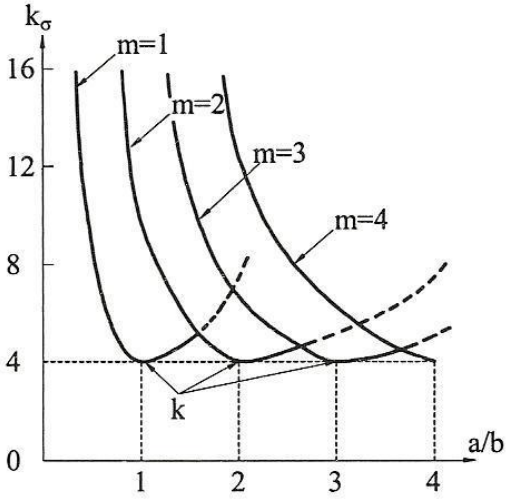
Αντικαθιστώντας την τιμή της D στην εξίσωση προκύπτει η γενική εξίσωση της κρίσιμης τάσης κύρτωσης σε μία αξονικά θλιβόμενη ορθογωνική πλάκα:

$$\sigma_{cr} = \frac{K_\sigma \pi^2 E}{12(1-\nu^2)\left(\frac{b}{t}\right)^2} = \left(\frac{\pi t}{b}\right)^2 \cdot \frac{EK_\sigma}{12(1-\nu^2)}$$

όπου K_σ είναι ο συντελεστής κύρτωσης της πλάκας και δίνεται από τη σχέση:

$$K_\sigma = \left[m\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{1}{m}\left(\frac{a}{b}\right) \right]^2$$

Οι καμπύλες του συντελεστή κύρτωσης της πλάκας σε συνάρτηση με το λόγο των πλευρών της a / b δίνονται στο παρακάτω σχήμα:

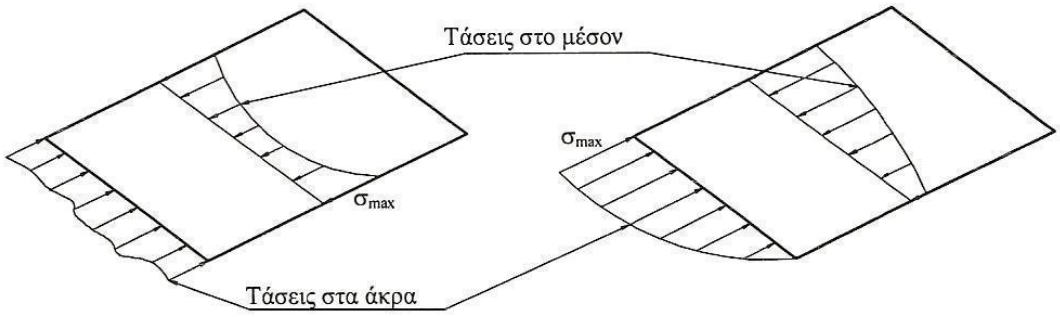


Σχήμα 2.3 : Συντελεστής κύρτωσης K_σ αξονικά θλιβόμενων πλακών συναρτήσει του λόγου πλευρών τους

Ο συντελεστής κύρτωσης παίρνει τιμές ανάλογα με τη φόρτιση της πλάκας και τις συνθήκες στήριξής της (άρθρωση, πάκτωση, ελεύθερο άκρο). Σημειώνεται ότι η ελάχιστη τιμή του συντελεστή κύρτωσης είναι 4 και την παίρνει όταν ο λόγος των πλευρών της πλάκας a / b είναι ακέραιος αριθμός.

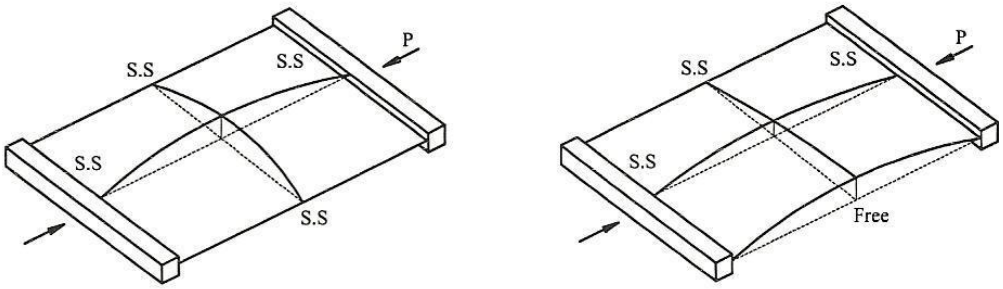
2.2 Μεταλυγισμική Συμπεριφορά Πλακών

Η εμφάνιση τοπικού λυγισμού – κύρτωσης στις πλάκες δεν οδηγεί σε αστοχία, σε αντίθεση με το λυγισμό των ράβδων. Αν και ένα μέρος της δυσκαμψίας χάνεται, η πλάκα παρουσιάζει μικρότερες παραμορφώσεις και είναι ικανή να παραλάβει μεγαλύτερα φορτία, διότι συμβαίνει ανακατανομή των μεμβρανικών διαμήκων τάσεων οι οποίες μετά την κύρτωση δεν είναι ομοιόμορφες, όπως φαίνεται στα παρακάτω σχήματα. Αυτή η ιδιότητα των πλακών ονομάζεται μεταλυγισμική αντοχή.



α) έδραση σε δύο διαμήκεις πλευρές β) έδραση σε μία διαμήκη πλευρά

Σχήμα 2.4 : Μεταλυγισμική συμπεριφορά πλάκας – Τάσεις

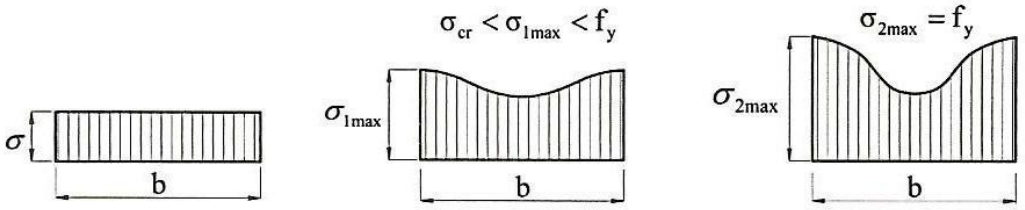


α) έδραση σε δύο διαμήκεις πλευρές β) έδραση σε μία διαμήκη πλευρά

Σχήμα 2.5 : Μεταλυγισμική συμπεριφορά πλάκας – Παραμορφώσεις

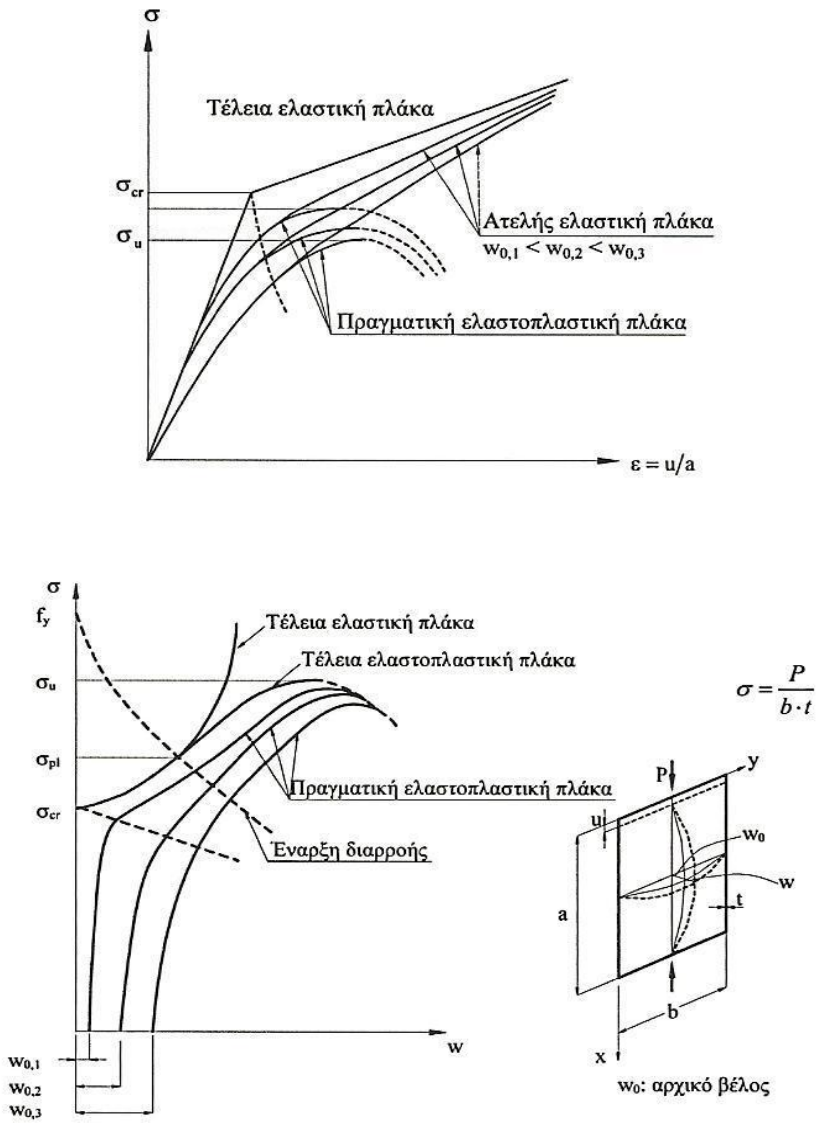
Το μέγιστο ποσοστό των τάσεων παραλαμβάνεται από το τμήμα της πλάκας που βρίσκεται πιο κοντά στις στηρίξεις της. Στην περίπτωση που η πλάκα εδράζεται σε μία διαμήκη πλευρά το σημείο εφαρμογής της θλιπτικής δύναμης μετατοπίζεται προς τη διεύθυνση της στήριξης.

Αυτή η ανακατανομή των τάσεων προς τις στηριζόμενες διαμήκεις πλευρές φαίνεται στα παρακάτω σχήματα, όπου παρατηρείται πως στην προλυγισμική κατάσταση η κατανομή των τάσεων είναι ομοιόμορφη κατά πλάτος, ενώ στη μεταλυγισμική κατάσταση γίνεται ανομοιόμορφη μέχρι να φτάσει το όριο διαρροής στα άκρα και η πλάκα να αστοχήσει.



α) προλυγισμική κατάσταση β) μεταλυγισμική κατάσταση γ) τάση ίση με το όριο διαρροής

Σχήμα 2.6 : Κατανομή τάσεων περιμετρικά εδραζόμενης θλιβόμενης πλάκας



Σχήμα 2.7 : Κατανομή τάσεων περιμετρικά εδραζόμενης θλιβόμενης πλάκας συναρτήσει της ανηγμένης παραμόρφωσης (άνω) και του βέλους (κάτω)

Στα παραπάνω σχήματα αρχικά συγκρίνεται μία τέλεια ελαστική πλάκα με μία ατελή ελαστική πλάκα, της οποίας η καμπύλη πλησιάζει στην τέλεια όσο το αρχικό γεωμετρικό βέλος μειώνεται. Επίσης παρατηρείται ότι στην προλυγισμική περιοχή ($\sigma < \sigma_{cr}$) η πλάκα χαρακτηρίζεται από επίπεδη εντατική κατάσταση και γραμμική συμπεριφορά, ενώ από τη στιγμή που η τάση φτάνει στην κρίσιμη τάση κύρτωσης ($\sigma = \sigma_{cr}$) και μετά, η δυσκαμψία της μειώνεται (μικρότερη κλίση) και οι παραμορφώσεις αυξάνουν. Η συμπεριφορά της πλάκας στην μεταλυγισμική περιοχή ($\sigma > \sigma_{cr}$) εξαρτάται από τον τρόπο έδρασης, τις ιδιότητες του υλικού και τον τρόπο κατανομής των τάσεων (ομοιόμορφη ή ανομοιόμορφη). Από τη στιγμή που η τάση θα φτάσει σε κάποιο σημείο το όριο διαρροής ($\sigma = f_y$) , η πλάκα αποκτά ελαστοπλαστική συμπεριφορά. Στην περιοχή όπου $\sigma > f_y$, η δυσκαμψία της πλάκας μειώνεται και η τάση πλησιάζει την οριακή τάση σ_u με συνεχόμενη αύξηση των παραμορφώσεων.

Όπως φαίνεται και στο σχήμα 2.7, εξαιτίας των γεωμετρικών ατελειών ή των γεωμετρικών τάσεων, η πραγματική συμπεριφορά της πλάκας παρουσιάζεται μέσω μίας συνεχούς καμπύλης. Παράλληλα, καθώς ο διαχωρισμός των σημείων σ_{cr} και f_y είναι αρκετά δύσκολος λόγω αυτών των υπαρχουσών ατελειών, η οριακή τάση λαμβάνεται ίση με την κρίσιμη τάση κύρτωσης ($\sigma_u = \sigma_{cr}$).

2.3 Ενεργό Πλάτος Διατομής

2.3.1 Προσέγγιση Von Karman

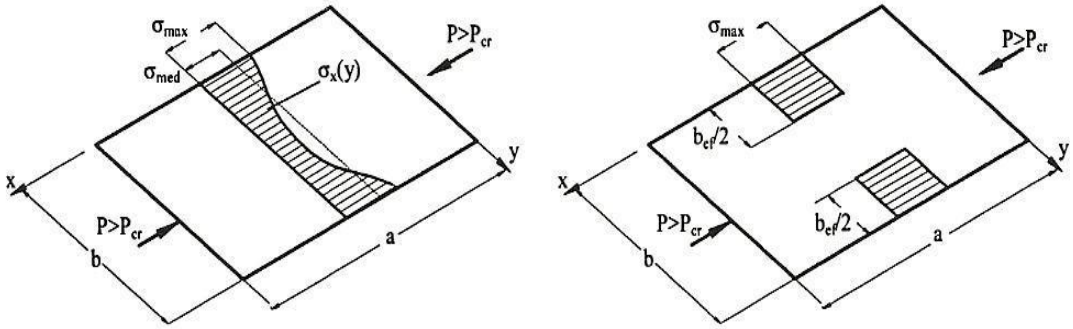
Η μεταλυγισμική συμπεριφορά των πλακών περιγράφεται από τη θεωρία των μεγάλων μετατοπίσεων, πάνω στην οποία ο Von Karman (1910) διατύπωσε την παρακάτω διαφορική εξίσωση:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{t}{D}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$

$$\text{με} \quad \sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\ , \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\ , \quad \tau_{xy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$$

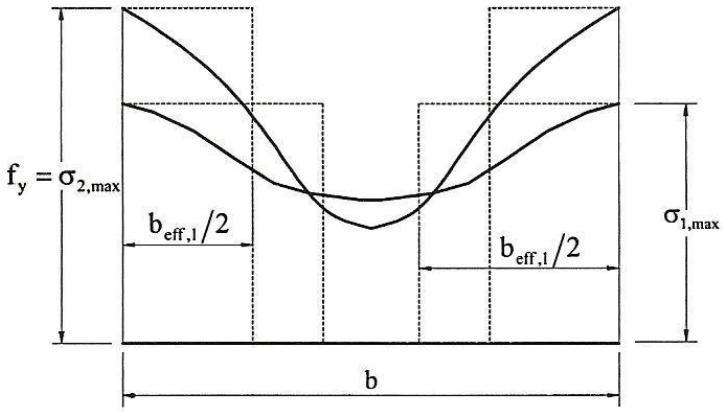
όπου F η συνάρτηση των τάσεων της μεσαίας επιφάνειας της πλάκας.

Η λύση αυτής της διαφορικής εξίσωσης είναι δυσχερής και δεν εφαρμόζεται εύκολα στην πράξη. Για αυτό το λόγο αναπτύχθηκε από τον Von Karman (1932) το προσομοίωμα του ενεργού πλάτους, σύμφωνα με το οποίο η ασκούμενη δύναμη αντί για την ανομοιόμορφη κατανομή που είχε κατά μήκος του πλάτους της πλάκας σ_x (y), κατανέμεται ομοιόμορφα σε ένα ενεργό πλάτος b_{eff} όπου ισχύει $\sigma = \sigma_{max}$, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 2.8 : Κατανομή τάσεων περιμετρικά εδραζόμενης θλιβόμενης πλάκας – ανομοιόμορφη κατανομή και ομοιόμορφη κατανομή στο ενεργό πλάτος

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται ότι η τιμή του ενεργού πλάτους είναι αντιστρόφως ανάλογη με την τιμή της ακραίας τάσης σ_{max}, δηλαδή για μεγαλύτερα ακραία τάση έχουμε και μικρότερο ενεργό πλάτος. Η μικρότερη τιμή του ενεργού πλάτους προκύπτει όταν $\sigma_{max} = f_y$.



Σχήμα 2.9 : Μεταβολή ενεργού πλάτους συναρτήσει των ακραίων τάσεων σ_{max}

Το ενεργό πλάτος b_{eff} υπολογίζεται ως εξής:

Το εμβαδό της ανομοιόμορφης κατανομής των τάσεων είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των δύο ορθογωνικών επιφανειών πλάτους b_1 και b_2 (συνολικού πλάτους b_{eff}) και ακραίων τάσεων σ_{max}. Με αυτόν τον τρόπο η συνολική ασκούμενη δύναμη είναι ίση και στις δύο περιπτώσεις:

$$P = \sigma_{med} b = \int_0^b \sigma_x(y) dy = \sigma_{\max} b_{eff}$$

Η θεωρητική τιμή του ενεργού πλάτους υπολογίζεται για $\sigma_{max} = f_y$ από την εξίσωση της κρίσιμης τάσης κύρτωσης που έχει αποδειχθεί στο προηγούμενο υποκεφάλαιο:

$$\sigma_{cr} = \sigma_{\max} = f_y = \frac{K_\sigma \pi^2 E}{12(1-\nu^2)\left(b_{eff}/t\right)^2}$$

Από την παραπάνω εξίσωση προκύπτει:

$$b_{eff} = \frac{\sqrt{K_\sigma \pi^2}}{\sqrt{12(1-\nu^2)}} t \sqrt{\frac{E}{f_y}}$$

και αν τεθεί

$$C = \sqrt{K_\sigma \pi^2 / 12(1-\nu^2)}$$

τότε η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$b_{eff} = Ct\sqrt{\frac{E}{f_y}}$$

Για μια πλάκα εδραζόμενη στις δύο διαμήκεις πλευρές της που υποβάλλεται σε ομοιόμορφη κεντρική θλίψη και για την οποία ισχύουν $K_\sigma = 4$ και $\nu = 0,3$, η σταθερά προκύπτει $C = 1,9$ και κατά συνέπεια η σχέση που προσδιορίζει το ενεργό πλάτος γίνεται:

$$b_{eff} = 1,9t\sqrt{\frac{E}{f_y}}$$

Από τις παρακάτω δύο σχέσεις που αναφέρθηκαν προηγουμένως,

$$\sigma_{cr} = \sigma_{\max} = f_y = \frac{K_\sigma \pi^2 E}{12(1-\nu^2)\left(b_{eff}/t\right)^2}$$

$$\sigma_{cr} = \frac{K_\sigma \pi^2 E}{12(1-\nu^2)\left(\frac{b}{t}\right)^2}$$

προκύπτει η εξής αναλογία η οποία αποτελεί μία πρώτη προσέγγιση του ενεργού πλάτους από τον Von Karman:

$$\frac{b_{eff}}{b} = \sqrt{\frac{\sigma_{cr}}{f_y}}$$

Για επίπεδα στοιχεία χωρίς ενισχύσεις υπολογίζεται η ανηγμένη λυγηρότητα της πλάκας η οποία γενικά ορίζεται ως:

$$\overline{\lambda_p} = \sqrt{\frac{\sigma}{\sigma_{cr}}}$$

Για αύξηση της έντασης παρατηρείται και αύξηση της ανηγμένης λυγηρότητας, μέχρις ότου πάρει τη μέγιστη τιμή της με την έναρξη της διαρροής, δηλαδή όταν σ = f_y. Τότε θα ισχύει:

$$\overline{\lambda_p} = \sqrt{\frac{f_y}{\sigma_{cr}}} = \frac{b}{t}\sqrt{\frac{12(1-\nu^2)f_y}{\pi^2 E K_\sigma}} \cong 1,052\frac{b}{t}\sqrt{\frac{f_y}{EK_\sigma}} = \frac{\frac{b}{t}}{28,4\varepsilon\sqrt{K_\sigma}}$$

όπου $\varepsilon = \sqrt{235/f_y}$.

Θέτοντας $\rho = b_{eff}/b$, έχουμε το μειωτικό συντελεστή κύρτωσης, δηλαδή το λόγο του ενεργού πλάτους προς το πλήρες και ισχύει:

$$\rho = \frac{b_{eff}}{b} = \frac{1}{\overline{\lambda_p}} \leq 1 \quad \text{και συνεπώς} \quad b_{eff} = \rho b .$$

Για τις περιπτώσεις που η τάση δεν ισούται με το όριο διαρροής, και ισχύει δηλαδή $\sigma_{cr} < \sigma_{max} < f_y$, το ενεργό πλάτος υπολογίζεται από την παρακάτω σχέση:

$$b_{eff} = Ct\sqrt{\frac{E}{\sigma}}$$

Επίσης, ισχύει η αναλογία:

$$\frac{b_{eff}}{b} = \sqrt{\frac{\sigma_{cr}}{\sigma}}$$

και η αντίστοιχη ανηγμένη λυγηρότητα της πλάκας όπως διατυπώθηκε προηγουμένως θα είναι:

$$\overline{\lambda_p} = \sqrt{\frac{\sigma}{\sigma_{cr}}} = \sqrt{\frac{\varepsilon \cdot \mathrm{E}}{\sigma_{cr}}}$$

2.3.2 Βελτίωση Winter

Η σταθεράς C πήρε την τιμή 1,9, όταν η πλάκα είναι στηριζόμενη κατά Navier και ισχύει $K_\sigma = 4$, κάτι το οποίο πειραματικά επιβεβαιώθηκε για πολύ λυγηρές πλάκες με μεγάλη τιμή του λόγου b / t. Για αυτό το λόγο ο Winter (1946) λαμβάνοντας υπ' όψη και πιθανές γεωμετρικές ατέλειες, πρότεινε την εξής βελτίωση της σχέσης:

$$C = 1,9\left[1 - 0,415\left(\frac{t}{b}\right)\sqrt{\frac{E}{f_y}}\right]$$

Η παραπάνω σχέση οδηγεί στην πιο διαδεδομένη έκφραση του ενεργού πλάτους:

$$b_{eff} = \rho b = \sqrt{\frac{\sigma_{cr}}{f_y}}\left(1 - 0,22\sqrt{\frac{\sigma_{cr}}{f_y}}\right)b$$

και με όρους ανηγμένης λυγηρότητας η σχέση γίνεται:

$$b_{eff} = \rho b = \frac{1}{\overline{\lambda_p}}\left(1 - \frac{0,22}{\overline{\lambda_p}}\right)b$$

Το ενεργό πλάτος εξαρτάται από το μέγεθος της ακραίας τάσης και από το λόγο b / t. Η παραπάνω σχέση δείχνει ότι για πλήρως ενεργή πλάκα, δηλαδή ρ = 1 ισχύει $\overline{\lambda_p} \le 0,673$.

Συνοψίζοντας, για επίπεδα πλακοειδή στοιχεία χωρίς ενισχύσεις, η κρίσιμη τάση λυγισμού και η ανηγμένη λυγηρότητα είναι αντίστοιχα:

$$\sigma_{cr} = \left(\frac{\pi t}{b}\right)^2 \cdot \frac{EK_\sigma}{12(1-\nu^2)}$$

και

$$\overline{\lambda_p} = \sqrt{\frac{f_y}{\sigma_{cr}}} = \frac{b}{t}\sqrt{\frac{12(1-\nu^2)f_y}{\pi^2 EK_\sigma}} \cong 1,052\frac{b}{t}\sqrt{\frac{f_y}{EK_\sigma}} = \frac{\frac{b}{t}}{28,4\varepsilon\sqrt{K_\sigma}}$$

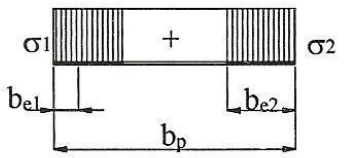
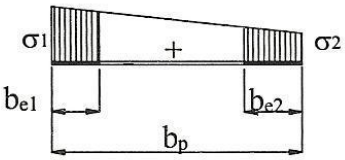
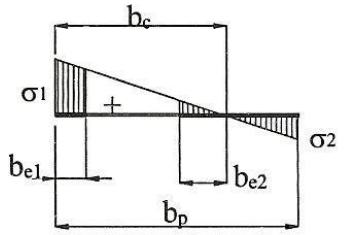
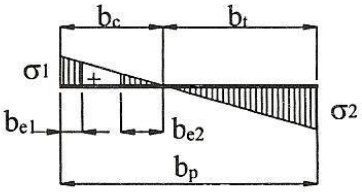
όπου $\varepsilon = \sqrt{235/f_y}$, f_y σε MPa.

Ο μειωτικός συντελεστής υπολογίζεται ως εξής:

αν $\overline{\lambda_p} \le 0,673$: ρ = 1

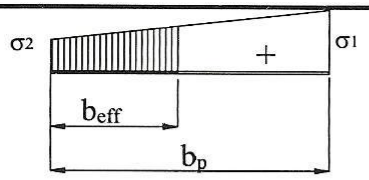
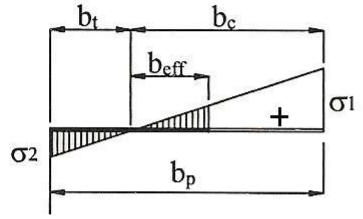
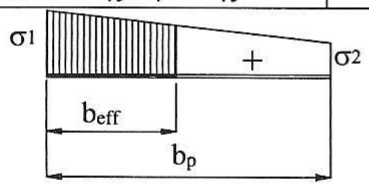
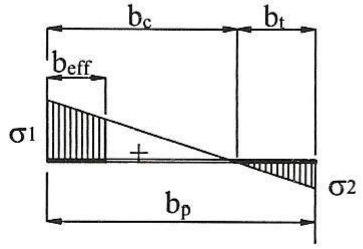
αν $\overline{\lambda_p} > 0,673$: $\rho = \frac{1}{\overline{\lambda_p}}\left(1 - \frac{0,22}{\overline{\lambda_p}}\right) \leq 1$

Παρακάτω παρατίθενται οι πίνακες υπολογισμού του ενεργού πλάτους και του συντελεστή κύρτωσης K_σ ανάλογα με την κατανομή των τάσεων σε εσωτερικά και προεξέχοντα θλιβόμενα στοιχεία από ισότροπο υλικό.

	$\psi = +1$: $b_{eff} = \rho b_p$ $b_{e1} = 0,5 b_{eff}$ $b_{e2} = 0,5 b_{eff}$
	$+1 > \psi \geq 0$: $b_{eff} = \rho b_p$ $b_{e1} = \frac{2 b_{eff}}{5 - \psi}$ $b_{e2} = b_{eff} - b_{e1}$
	$0 > \psi \geq -1$: $b_{eff} = \rho b_c$ $b_{e1} = 0,4 b_{eff}$ $b_{e2} = 0,6 b_{eff}$
	$\psi < -1$: $b_{eff} = \rho b_c$ $b_{e1} = 0,4 b_{eff}$ $b_{e2} = 0,6 b_{eff}$

$\psi = \sigma_2/\sigma_1$	+1	$1 > \psi > 0$	0	$0 > \psi > -1$	-1	$-1 > \psi > -3$
Συντελεστής κύρτωσης k_σ	4,0	$\frac{8,2}{1,05+\psi}$	7,81	$7,81 - 6,29\psi + 9,78\psi^2$	23,9	$5,98(1-\psi)^2$
Εναλλακτικά, για $+1 > \psi > -1$: $k_\sigma = \frac{16}{\left[(1+\psi)^2 + 0,112(1+\psi)^2\right]^{0,5} + (1+\psi)}$						

Πίνακας 2.1 : Εσωτερικά θλιβόμενα στοιχεία από ισότροπο υλικό

<table>
<tr><td colspan="2"> 
</td><td colspan="3">$+1 > \psi \geq 0:$
$b_{eff} = \rho b_p$</td></tr>
<tr><td colspan="2"> 
</td><td colspan="3">$\psi < 0:$
$b_{eff} = \rho b_c$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\psi = \sigma_2 / \sigma_1$</td><td>+1</td><td>0</td><td>-1</td><td>$+1 \geq \psi \geq -1$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Συντελεστής κύρτωσης k_σ</td><td>0,43</td><td>0,57</td><td>0,85</td><td>$0{,}57 - 0{,}21\psi + 0{,}07\psi^2$</td></tr>
<tr><td colspan="2"> 
</td><td colspan="3">$+1 > \psi \geq 0:$
$b_{eff} = \rho b_p$</td></tr>
<tr><td colspan="2"> 
</td><td colspan="3">$\psi < 0:$
$b_{eff} = \rho b_c$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\psi = \sigma_2 / \sigma_1$</td><td>+1</td><td>$+1 \geq \psi > 0$</td><td>0</td><td>$0 > \psi > -1$</td><td>-1</td></tr>
<tr><td colspan="2">Συντελεστής κύρτωσης k_σ</td><td>0,43</td><td>$\frac{0{,}578}{\psi - 0{,}34}$</td><td>1,70</td><td>$1{,}70 - 5\psi + 17{,}1\psi^2$</td><td>23,8</td></tr>
</table>

Πίνακας 2.2 : Προεξέχοντα θλιβόμενα στοιχεία από ισότροπο υλικό

2.4 Τοπικός λυγισμός πλακών από ορθότροπο υλικό

Το πρόβλημα της κύρτωσης λεπτών πλακών μπορεί να αντιμετωπιστεί με ενεργειακές μεθόδους, πράγμα που απαιτεί γνώση της ενέργειας παραμόρφωσης του στοιχείου, του δυναμικού των εξωτερικών δυνάμεων και κατά συνέπεια της ολικής ενέργειας. Παρακάτω δίνεται η ενέργεια παραμόρφωσης του στοιχείου:

$$U = \frac{1}{2}\iiint \left(\varepsilon_x \sigma_x + \varepsilon_y \sigma_y + \varepsilon_z \sigma_z + \gamma_{yz}\tau_{yz} + \gamma_{xz}\tau_{xz} + \gamma_{xy}\tau_{xy}\right) dV$$

Το δυναμικό των εξωτερικών δυνάμεων δίνεται από τη σχέση:

$$\Omega = -\iiint \left(f_x u + f_y v + f_z w\right) dV - \iint \left(p_x u + p_y v + p_z w\right) dA$$

Η ολική ενέργεια είναι το άθροισμα:

$$\pi_p = U + \Omega$$

Όπως προαναφέρθηκε, το βέλος μίας ορθογωνικής πλάκας εδραζόμενης κατά Navier είναι:

$$w = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}$$

και η αντίστοιχη κρίσιμη τάση κύρτωσης είναι:

$$\sigma_{cr} = \frac{K_\sigma \pi^2 D}{tb^2}$$

όπου D η καμπτική δυσκαμψία της πλάκας.

Συγκεκριμένα στην παρούσα εργασία ενδιαφέρει η περίπτωση ειδικώς ορθότροπης πλάκας για την οποία ισχύει $B_{ij} = 0$ και $D_{16} = D_{26} = 0$.

Όπως προαναφέρθηκε, οι παραμορφώσεις και οι καμπυλότητες της πλάκας εκφράζονται από τις σχέσεις:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad , \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$k_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad , \quad k_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad , \quad k_{xy} = -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

Συνεπώς και με βάση τις παραπάνω σχέσεις η ενέργεια παραμόρφωσης δίνεται από τη σχέση:

$$U=\frac{1}{2}\int_0^{L_x}\int_0^{L_y}\left[D_{11}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2+D_{22}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2+D_{66}\left(2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2+2\left(D_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\right]d_y d_x$$

ενώ το δυναμικό των εξωτερικών δυνάμεων δίνεται από τη σχέση:

$$\Omega=\frac{1}{2}\int_0^{L_x}\int_0^{L_y}\left[N_x\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+N_y\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2+2N_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right]d_y d_x$$

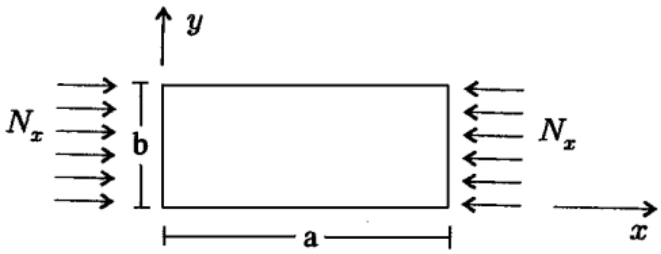
Χρησιμοποιώντας τη θεωρία δευτέρας τάξεως, προκύπτει η εξίσωση λυγισμού εκφρασμένη ως προς τις μεμβρανικές δυνάμεις και ροπές:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2}+N_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+N_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+2N_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}=0$$

Αν εφαρμοστεί αξονικό θλιπτικό φορτίο μόνο κατά τη διεύθυνση x, δηλαδή $N_y = N_{xy} = 0$, τότε η διαφορική εξίσωση που περιγράφει την κίνηση των λεπτών πλακών από σύνθετα υλικά είναι η εξής:

$$D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\left(D_{12}+2D_{66}\right)\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+D_{22}\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}=-N_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

Στο παρακάτω σχήμα, βλέπουμε μία απλά εδραζόμενης ορθογωνικής πλάκας διαστάσεων a, b από σύνθετο υλικό υπό ομοιόμορφη αξονική θλιπτική δράση.



Σχήμα 2.10 : Ορθογωνική πλάκα υπό ομοιόμορφη αξονική θλίψη κατά x

Αντικαθιστώντας την εξίσωση του βέλους $w=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}w_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$ στην παραπάνω διαφορική εξίσωση του λυγισμού προκύπτει η παρακάτω σχέση:

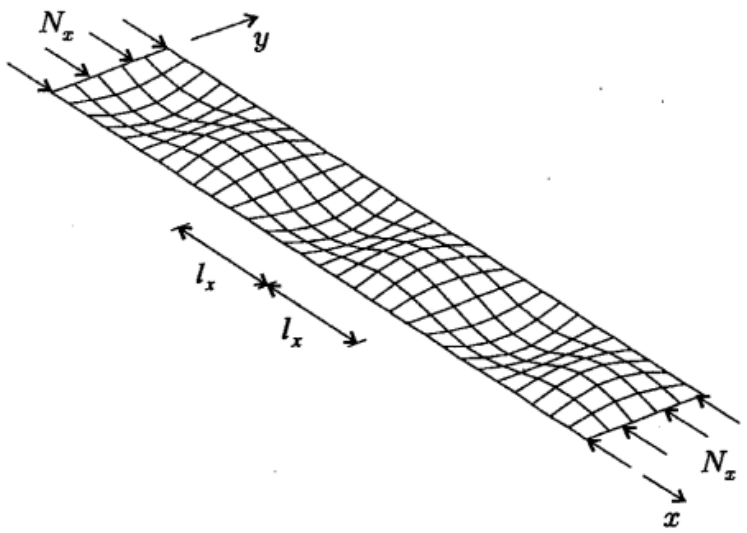
$$w_{mn}\pi^2\left[D_{11}m^4+2\left(D_{12}+2D_{66}\right)(mnR)^2+D_{22}(nR)^4\right]=w_{mn}N_x a^2 m^2$$

όπου R = a / b. Δεδομένου ότι $w_{mn} \neq 0$ θα είναι:

$$N_x = \frac{\pi^2}{a^2 m^2}\left[D_{11}m^4 + 2\left(D_{12} + 2D_{66}\right)(mnR)^2 + D_{22}(nR)^4\right]$$

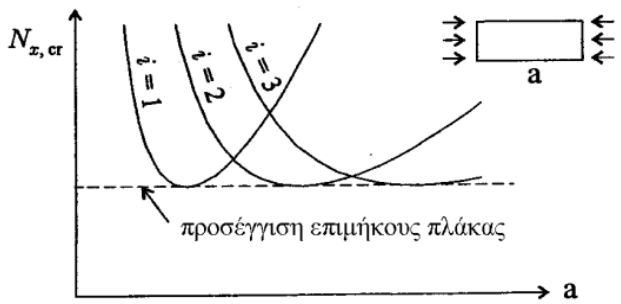
Το κρίσιμο φορτίο λυγισμού είναι το μικρότερο από τα φορτία που προκύπτουν για διάφορες τιμές των m και n.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι περιπτώσεις πλακών μεγάλου μήκους που φορτίζονται στην έννοια του πλάτους. Αυτές μπορεί να αφορούν τμήματα λεπτότοιχων διατομών όπως πέλματα και κορμούς δοκών ή πανέλων.



Σχήμα 2.11 : Κύρτωση πλάκας μεγάλου μήκους υπό ομοιόμορφη αξονική θλίψη κατά x

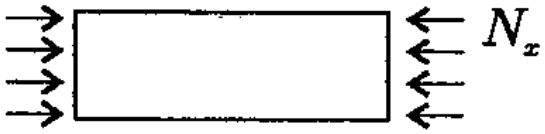
Αποδεικνύεται ότι σε πλάκες μεγάλου μήκους η κύρια παράμετρος που επηρεάζει το κρίσιμο φορτίο λυγισμού είναι μόνο το πλάτος b, καθώς μας ενδιαφέρει μόνο η ελάχιστη τιμή του η οποία δεν εξαρτάται από το μήκος a, όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



Σχήμα 2.12 : Κρίσιμο φορτίο λυγισμού συναρτήσει του μήκους a της πλάκας

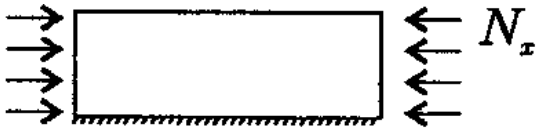
Ανάλογα με τον τρόπο έδρασης της πλάκας, η σχέση υπολογισμού του κρίσιμου φορτίου λυγισμού διαφέρει. Παρουσιάζονται τέσσερις διαφορετικές συνθήκες έδρασης:

α) πλάκα με τις δύο επιμήκεις πλευρές απλά εδραζόμενες



$$N_x^{cr} = \frac{\pi^2}{b^2}\left[2\sqrt{D_{11}D_{22}} + 2\left(D_{12} + 2D_{66}\right)\right]$$

β) πλάκα με τη μία επιμήκη πλευρά απλά εδραζόμενη και την άλλη πακτωμένη

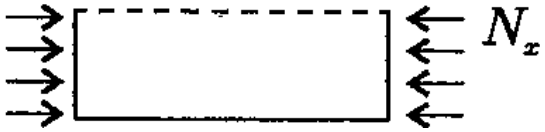


$$N_x^{cr} = \frac{\pi^2}{b^2}\left[3{,}125\sqrt{D_{11}D_{22}} + 2{,}33\left(D_{12} + 2D_{66}\right)\right]$$

γ) πλάκα με τις δύο επιμήκεις πλευρές πακτωμένες

$$N_x^{cr} = \frac{\pi^2}{b^2}\left[4{,}53\sqrt{D_{11}D_{22}} + 2{,}62\left(D_{12} + 2D_{66}\right)\right]$$

δ) πλάκα με τη μία επιμήκη πλευρά απλά εδραζόμενη και την άλλη ελεύθερη



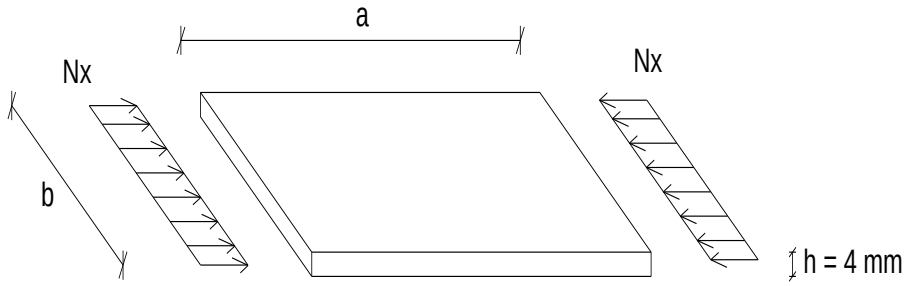
Στην περίπτωση αυτή υπεισέρχεται και το μήκος a της πλάκας.

$$N_x^{cr} = \frac{\pi^2 D_{11}}{a^2} + \frac{12D_{66}}{b^2}$$

3 Παραμετρική Διερεύνηση Ενεργού Πλάτους

3.1 Γενικά

Στο Κεφάλαιο 3 θα επικεντρωθούμε στην παραμετρική διερεύνηση του ενεργού πλάτους μίας διατομής από σύνθετα υλικά, μέσω του υπολογισμού αρχικά του κρίσιμου φορτίου λυγισμού και έπειτα του φορτίου αστοχίας της διατομής, από τα οποία θα προκύψει η ανηγμένη λυγηρότητα και κατά συνέπεια το ενεργό πλάτος της διατομής. Τα αποτελέσματα θα συγκριθούν με τα αντίστοιχα του χάλυβα (ισότροπο υλικό), τα οποία αναπτύσσονται στο υποκεφάλαιο 3.4.



Η περίπτωση που θα ελεγχθεί είναι ένα στοιχείο πλάκας μεγάλου μήκους, τετραγωνική με a = b = 500 mm, απλά εδραζόμενη (αρθρώσεις στις τέσσερις πλευρές της) και το συνολικό πάχος της θα είναι σταθερό και ίσο με h = 4 mm εκτός από τα υποκεφάλαια 3.2.4 και 3.3.4 στα οποία το πάχος θα είναι η παράμετρος διερεύνησης. Τα σύνθετα υλικά των διατομών που αποφασίστηκε να εξεταστούν είναι το T300 / 5208 (Graphite/Epoxy) και το Scotchply 1002 (Glass/Epoxy), ενώ οι ποιότητες του χάλυβα που συγκρίθηκαν είναι S235 και S355.

Η μεμβρανική δράση που θα ασκηθεί στην πλάκα είναι κατανεμημένη αξονική δύναμη ανά μονάδα μήκους N_x (KN/mm) που εφαρμόζεται μόνο κατά τη διεύθυνση x της διατομής στο μέσο επίπεδο της διαστρωμάτωσης (z = 0) και ουσιαστικά αποτελεί το καθ' ύψος άθροισμα όλων των επιμέρους δυνάμεων που αναπτύσσονται σε κάθε στρώση. Οι αντίστοιχες δυνάμεις στις άλλες διευθύνσεις N_y και N_{xy} είναι μηδενικές.

Το κριτήριο αστοχίας που θα χρησιμοποιηθεί ώστε να προσδιορισθεί το φορτίο αστοχίας στα σύνθετα υλικά είναι το Κριτήριο Μέγιστης Τάσης. Επίσης, σημειώνεται ότι η έκφραση του ενεργού πλάτους έχει ληφθεί από την προσέγγιση του Von Karman $\frac{b_{eff}}{b} = \sqrt{\frac{\sigma_{cr}}{f_y}}$, ώστε να υπάρξει σαφής σύγκριση των διατομών από σύνθετα υλικά.

Η διαδικασία υπολογισμού είναι η εξής:

Το μητρώο δυσκαμψίας του κάθε υλικού είναι:

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}$$

Αρχικά το μητρώο δυσκαμψίας Q πρέπει να μετασχηματιστεί στο σύστημα του υλικού 1 – 2 ανάλογα με τον προσανατολισμό των ινών της κάθε στρώσης.

$$\overline{Q} = \begin{bmatrix} \overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{16} \\ \overline{Q}_{21} & \overline{Q}_{22} & \overline{Q}_{26} \\ \overline{Q}_{61} & \overline{Q}_{62} & \overline{Q}_{66} \end{bmatrix}$$

Αυτό γίνεται με τη σχέση:

$$\begin{Bmatrix} \overline{Q}_{11} \\ \overline{Q}_{22} \\ \overline{Q}_{12} \\ \overline{Q}_{66} \\ \overline{Q}_{16} \\ \overline{Q}_{26} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^4 & s^4 & 2c^2s^2 & 4c^2s^2 \\ s^4 & c^4 & 2c^2s^2 & 4c^2s^2 \\ c^2s^2 & c^2s^2 & c^4+s^4 & -4c^2s^2 \\ c^2s^2 & c^2s^2 & -2c^2s^2 & (c^2-s^2)^2 \\ c^3s & -cs^3 & cs^3-c^3s & 2(cs^3-c^3s) \\ cs^3 & -c^3s & c^3s-cs^3 & 2(c^3s-cs^3) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_{11} \\ Q_{22} \\ Q_{12} \\ Q_{66} \end{Bmatrix}$$

, όπου c = cos θ και s = sin θ.

Στη συνέχεια, υπολογίζεται το μητρώο καμπτικής δυσκαμψίας D της διατομής:

$$D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{bmatrix}.$$

Οι όροι της καμπτικής δυσκαμψίας D_{ij} υπολογίζονται από τη σχέση:

$$D_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \overline{Q_{ij}} z^2 dz = \sum_{k=1}^{N} \left(\overline{Q_{ij}}\right)_k \cdot \left[\overline{z_k}^2 t_k + \frac{t_k^{\,3}}{12} \right]$$

, όπου $\overline{z_k}$ είναι η απόσταση του μέσου της στρώσης k από το μέσο επίπεδο.

Σημειώνεται ότι επικαλούμενοι τον κανόνα του 10%, δηλαδή ότι το πλήθος των στρώσεων σε κάθε προσανατολισμό ινών είναι τουλάχιστον το 10% του συνόλου των στρώσεων, μπορούμε να αγνοήσουμε τους όρους D_{16}, D_{61}, D_{26}, D_{62} όταν αυτοί δεν είναι μηδενικοί.

Έπειτα υπολογίζεται το κρίσιμο φορτίο λυγισμού από τον τύπο για πλάκα μεγάλου μήκους με τις δύο επιμήκεις πλευρές της απλά εδραζόμενες, όπως αναφέρθηκε στο υποκεφάλαιο 2.4:

$$N_x^{cr} = \frac{\pi^2}{b^2}\left[2\sqrt{D_{11}D_{22}} + 2\left(D_{12} + 2D_{66}\right)\right].$$

Ως γνωστόν, οι αξονικές δυνάμεις συνδέονται με τις αντίστοιχες παραμορφώσεις με τη σχέση:

$$\begin{Bmatrix} \mathrm{N}_x \\ \mathrm{N}_y \\ \mathrm{N}_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} & \mathrm{A}_{16} \\ \mathrm{A}_{21} & \mathrm{A}_{22} & \mathrm{A}_{26} \\ \mathrm{A}_{61} & \mathrm{A}_{62} & \mathrm{A}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

, οπότε πρέπει αρχικά να υπολογιστεί το μητρώο μεμβρανικής δυσκαμψίας A:

$$A = \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} & \mathrm{A}_{16} \\ \mathrm{A}_{21} & \mathrm{A}_{22} & \mathrm{A}_{26} \\ \mathrm{A}_{61} & \mathrm{A}_{62} & \mathrm{A}_{66} \end{bmatrix}$$

όπου οι όροι της καμπτικής δυσκαμψίας A_{ij} υπολογίζονται από τη σχέση:

$$A_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \overline{Q_{ij}}\,dz = \sum_{k=1}^{N} \left(\overline{Q_{ij}}\right)_k t_k \ .$$

Με εφαρμογή αξονικής θλιπτικής δύναμης N_x = -1 KN/mm βρίσκουμε τις αντίστοιχες παραμορφώσεις από τη ανεστραμμένη σχέση:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{26} \\ a_{61} & a_{62} & a_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathrm{N}_x \\ \mathrm{N}_y \\ \mathrm{N}_{xy} \end{Bmatrix}$$

όπου a_{ij} είναι οι μεμβρανικοί όροι ευκαμψίας της διαστρωμάτωσης.

Μέσω της παρακάτω σχέσης σ = Q·ε υπολογίζονται οι τάσεις έχοντας δεδομένες τις παραμορφώσεις:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{16} \\ \overline{Q}_{21} & \overline{Q}_{22} & \overline{Q}_{26} \\ \overline{Q}_{61} & \overline{Q}_{62} & \overline{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}.$$

Για την εφαρμογή του κριτηρίου αστοχίας, πρέπει οι τάσεις που υπολογίστηκαν να μετασχηματιστούν στο σύστημα 1 – 2 του υλικού μέσω της σχέσης:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2cs \\ s^2 & c^2 & -2cs \\ -cs & cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \left[T_\sigma^+ \right] \{\sigma\}$$

, όπου c = cos θ και s = sin θ.

Στη συνέχεια με δεδομένες τις κρίσιμες τάσεις αστοχίας του υλικού γίνεται εφαρμογή του κριτηρίου Μέγιστης Τάσης, υπολογίζοντας τους συντελεστές ασφαλείας:

$\frac{X}{\sigma_1}$ για τάση σ_1 εφελκυστική, $\frac{X'}{\sigma_1}$ για τάση σ_1 θλιπτική,

$\frac{Y}{\sigma_2}$ για τάση σ_2 εφελκυστική, $\frac{Y'}{\sigma_2}$ για τάση σ_2 θλιπτική,

$\left| \frac{S}{\tau_{12}} \right|$ για τη διατμητική τάση.

Το φορτίο αστοχίας της διατομής N_x^u είναι η μικρότερη τιμή των συντελεστών ασφαλείας.

Τέλος, υπολογίζονται η ανηγμένη παραμόρφωση, ο μειωτικός συντελεστής και συνεπώς το ενεργό πλάτος της διατομής από τις παρακάτω αντίστοιχες σχέσεις:

$$\overline{\lambda_p} = \sqrt{\frac{N_x^u}{N_x^{cr}}}$$

$$\rho = \frac{b_{eff}}{b} = \frac{1}{\overline{\lambda_p}} \leq 1$$

$$b_{eff} = \rho \cdot b$$

Οι περιπτώσεις που εξετάστηκαν είναι χαρακτηριστικές περιπτώσεις διαστρωματώσεων με ίνες προσανατολισμένες κατά 0° , 90° και $\pm\theta^o$. Συγκεκριμένα:

1) διαστρωμάτωση $\mathbf{[0/90_2/0]}$

2) διαστρωμάτωση $\mathbf{[90/0_2/90]}$

3) διαστρωμάτωση $\mathbf{[0/90_4/0]}$

4) διαστρωμάτωση $\mathbf{[90/0_4/90]}$

5) διαστρωμάτωση $\left[\mathbf{0}_2 / \mathbf{90}_2 / \mathbf{0}_2\right]$

6) διαστρωμάτωση $\left[\mathbf{90}_2 / \mathbf{0}_2 / \mathbf{90}_2\right]$

7) διαστρωμάτωση $\left[\mathbf{0}_3 / \mathbf{90}_2 / \mathbf{0}_3\right]$

8) διαστρωμάτωση $\left[\mathbf{90}_3 / \mathbf{0}_2 / \mathbf{90}_3\right]$

9) διαστρωμάτωση $\left[\mathbf{0}_4 / \mathbf{90}_2 / \mathbf{0}_4\right]$

10) διαστρωμάτωση $\left[\mathbf{90}_4 / \mathbf{0}_2 / \mathbf{90}_4\right]$

11) διαστρωμάτωση $\left[\mathbf{0} / \mathbf{90} / \mathbf{0}_2 / \mathbf{90} / \mathbf{0}\right]$

Επίσης για τις γωνίες $\pm 30^o$, $\pm 45^o$, $\pm 60^o$ οι εξής περιπτώσεις:

1) διαστρωμάτωση $[\theta / -\theta / \theta / -\theta / \theta / -\theta / \theta / -\theta]$

2) διαστρωμάτωση $[\theta / -\theta / \theta / -\theta]_s$

3) διαστρωμάτωση $[-\theta / \theta / -\theta / \theta]_s$

4) διαστρωμάτωση $[\theta / -\theta / \theta / -\theta / \theta / -\theta]$

5) διαστρωμάτωση $[\theta / -\theta / \theta]_s$

6) διαστρωμάτωση $[-\theta / \theta / -\theta]_s$

7) διαστρωμάτωση $[\theta / -\theta / \theta / -\theta]$

8) διαστρωμάτωση $[\theta / -\theta]_s$

9) διαστρωμάτωση $[-\theta / \theta]_s$

Τέλος, εξετάστηκαν οι περιπτώσεις ψευδο – ισότροπης διαστρωμάτωσης **π / 3** και **π / 4**. Σημειώνεται ότι η διαστρωμάτωση τέτοιου τύπου αποτελείται από στρώσεις με μεμονωμένη ορθότροπη συμπεριφορά, αλλά παρουσιάζει τελικά ισότροπη συμπεριφορά.

- διαστρωμάτωση π / 3 : $[\mathbf{0} / \mathbf{60} / \mathbf{-60}]_s$
- διαστρωμάτωση π / 4 : $[\mathbf{0} / \mathbf{45} / \mathbf{90} / \mathbf{-45}]_s$

3.2 Υλικό T300/5208 – Graphite / Epoxy

Τα μητρώα δυσκαμψίας Q των γωνιών $\theta = 0°$ και $\theta = 90°$ υπολογίζονται αντίστοιχα παίρνοντας ως δεδομένα τα στοιχεία του Πίνακα 1.4:

$$Q^0 = \begin{bmatrix} 181,8 & 2,897 & 0 \\ 2,897 & 10,34 & 0 \\ 0 & 0 & 7,17 \end{bmatrix}$$

Το μετασχηματισμένο μητρώο για $\theta = 90°$ προκύπτει απλώς αντιμεταθέτοντας τους όρους Q_{11} και Q_{22} στο μητρώο Q^0. Δηλαδή προκύπτει:

$$Q^{90°} = \begin{bmatrix} 10,34 & 2,897 & 0 \\ 2,897 & 181,8 & 0 \\ 0 & 0 & 7,17 \end{bmatrix}$$

, ενώ τα μητρώα γωνίας θ προκύπτουν με τη γνωστή σχέση που προαναφέρθηκε:

$$\begin{Bmatrix} \overline{Q}_{11} \\ \overline{Q}_{22} \\ \overline{Q}_{12} \\ \overline{Q}_{66} \\ \overline{Q}_{16} \\ \overline{Q}_{26} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^4 & s^4 & 2c^2s^2 & 4c^2s^2 \\ s^4 & c^4 & 2c^2s^2 & 4c^2s^2 \\ c^2s^2 & c^2s^2 & c^4+s^4 & -4c^2s^2 \\ c^2s^2 & c^2s^2 & -2c^2s^2 & (c^2-s^2)^2 \\ c^3s & -cs^3 & cs^3-c^3s & 2(cs^3-c^3s) \\ cs^3 & -c^3s & c^3s-cs^3 & 2(c^3s-cs^3) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_{11} \\ Q_{22} \\ Q_{12} \\ Q_{66} \end{Bmatrix}$$

, όπου c = cos θ και s = sin θ.

Συνεπώς μετά από υπολογισμούς προκύπτουν τα μετασχηματισμένα μητρώα για $\theta = 30°$, $\theta = -30°$, $\theta = 45°$, $\theta = -45°$, $\theta = 60°$, $\theta = -60°$ αντίστοιχα:

Γωνία θ	**Μητρώο Δυσκαμψίας Q**
$\theta = 30°$	$Q^{30°} = \begin{bmatrix} 109,373 & 32,459 & 54,19 \\ 32,459 & 23,643 & 20,054 \\ 54,19 & 20,054 & 31,835 \end{bmatrix}$
$\theta = -30°$	$Q^{-30°} = \begin{bmatrix} 109,373 & 32,459 & -54,19 \\ 32,459 & 23,643 & -20,054 \\ -54,19 & -20,054 & 31,835 \end{bmatrix}$
$\theta = 45°$	$Q^{45°} = \begin{bmatrix} 56,654 & 42,314 & 42,865 \\ 42,314 & 56,654 & 42,865 \\ 42,865 & 42,865 & 46,587 \end{bmatrix}$
$\theta = -45°$	$Q^{-45°} = \begin{bmatrix} 56,654 & 42,314 & -42,865 \\ 42,314 & 56,654 & -42,865 \\ -42,865 & -42,865 & 46,587 \end{bmatrix}$
$\theta = 60°$	$Q^{60°} = \begin{bmatrix} 23,643 & 32,459 & 20,054 \\ 32,459 & 109,373 & 54,19 \\ 20,054 & 54,19 & 38,045 \end{bmatrix}$
$\theta = -60°$	$Q^{-60°} = \begin{bmatrix} 23,643 & 32,459 & -20,054 \\ 32,459 & 109,373 & -54,19 \\ -20,054 & -54,19 & 38,045 \end{bmatrix}$

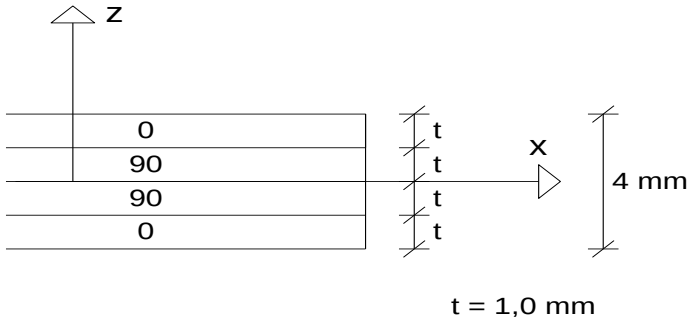
Πίνακας 3.1 : Μητρώα δυσκαμψίας Q μετασχηματισμένα για διάφορες γωνίες θ^o

Οι κρίσιμες τάσεις αστοχίας του συγκεκριμένου υλικού είναι γνωστές από τον Πίνακα 1.4 :

ΤΥΠΟΣ	ΥΛΙΚΟ	vf	X(Mpa)	X'(Mpa)	Y(Mpa)	Y'(Mpa)	S(Mpa)
T300/5208	Graphite Epoxy	0,70	1500	1500	40	246	68

3.2.1 Διαστρωματώσεις με Ίνες Προσανατολισμένες Κατά 0° και 90°

1) διαστρωμάτωση $\left[\mathbf{0/90_2/0}\right]$



Το μητρώο καμπτικής δυσκαμψίας προκύπτει:

$$D=\begin{bmatrix} 855,293 & 15,451 & 0 \\ 15,451 & 169,453 & 0 \\ 0 & 0 & 38,24 \end{bmatrix}$$

Άρα το κρίσιμο φορτίο λυγισμού θα είναι:

$$N_x^{cr}=\frac{\pi^2}{500^2}\left[2\sqrt{855,293\cdot 169,453}+2\left(15,451+2\cdot 38,24\right)\right]=0{,}0373\ \text{KN/mm}$$

Το μητρώο μεμβρανικής δυσκαμψίας υπολογίζεται:

$$A=\begin{bmatrix} 384,28 & 11,588 & 0 \\ 11,588 & 384,28 & 0 \\ 0 & 0 & 28,68 \end{bmatrix}$$

Για αξονική θλιπτική δύναμη N_x = -1 KN/mm προκύπτουν οι παραμορφώσεις:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{26} \\ a_{61} & a_{62} & a_{66} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \mathrm{N}_x \\ \mathrm{N}_y \\ \mathrm{N}_{xy} \end{Bmatrix}=10^{-3}\begin{bmatrix} 2,605 & -0,079 & 0 \\ -0,079 & 2,605 & 0 \\ 0 & 0 & 34,868 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} -2,605 \\ 0,079 \\ 0 \end{Bmatrix}10^{-3}$$

Με δεδομένες τις παραμορφώσεις υπολογίζονται οι τάσεις:

Για $\theta=0°$ είναι:

$$\sigma=Q^0\varepsilon\Rightarrow\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} Q^0{}_{11} & Q^0{}_{12} & Q^0{}_{16} \\ Q^0{}_{21} & Q^0{}_{22} & Q^0{}_{26} \\ Q^0{}_{61} & Q^0{}_{62} & Q^0{}_{66} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}181,8 & 2,897 & 0\\ 2,897 & 10,34 & 0\\ 0 & 0 & 7,17\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-2,605\\ 0,079\\ 0\end{Bmatrix}10^{-3}=\begin{Bmatrix}-0,473\\ -0,007\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \tau_{12}\end{Bmatrix}$$

Για $\theta = 90°$ είναι:

$$\sigma = Q^{90°}\varepsilon \Rightarrow \begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}Q^{90°}{}_{11} & Q^{90°}{}_{12} & Q^{90°}{}_{16}\\ Q^{90°}{}_{21} & Q^{90°}{}_{22} & Q^{90°}{}_{26}\\ Q^{90°}{}_{61} & Q^{90°}{}_{62} & Q^{90°}{}_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}10,34 & 2,897 & 0\\ 2,897 & 181,8 & 0\\ 0 & 0 & 7,17\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-2,605\\ 0,079\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-0,027\\ 0,007\\ 0\end{Bmatrix}$$

Οι τάσεις μετασχηματίζονται στο σύστημα υλικού $1-2$ για c = cos 90° και s = sin 90°:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \tau_{12}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}c^2 & s^2 & 2cs\\ s^2 & c^2 & -2cs\\ -cs & cs & c^2-s^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-0,027\\ 0,007\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0,007\\ -0,027\\ 0\end{Bmatrix}$$

Συντελεστές ασφαλείας:

$\theta = 0°$	$\frac{X'}{\sigma_1}=\frac{-1,5}{-0,473}=3,17$	$\frac{Y'}{\sigma_2}=\frac{-0,246}{-0,007}=36,53$
$\theta = 90°$	$\frac{X}{\sigma_1}=\frac{1,5}{0,007}=222,77$	$\frac{Y'}{\sigma_2}=\frac{-0,246}{-0,027}=9,21$

Από τους παραπάνω συντελεστές ασφαλείας προκύπτει ότι η μικρότερη τιμή του φορτίου και συνεπώς το φορτίο αστοχίας είναι:

N_x^u = 3,17 KN/mm

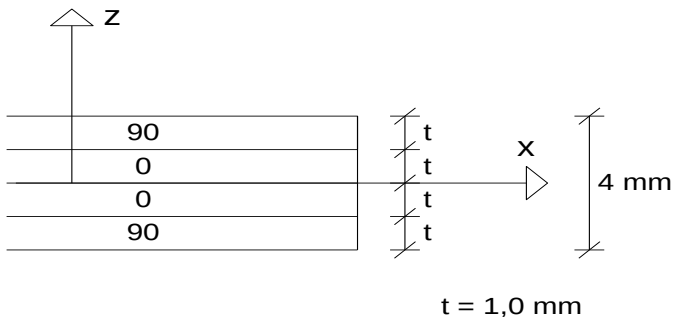
Και κατά συνέπεια:

$$\overline{\lambda_p}=\sqrt{\frac{N_x^u}{N_x^{cr}}}=\sqrt{\frac{3,17}{0,0373}}=9,22$$

$$\rho=\frac{b_{eff}}{b}=\frac{1}{\overline{\lambda_p}}=0,1085$$

$$b_{eff}=\rho\cdot b=54,26\ \text{mm}$$

2) διαστρωμάτωση $\left[\mathbf{90/0_2/90}\right]$



Το μητρώο καμπτικής δυσκαμψίας προκύπτει:

$$D=\begin{bmatrix}169,453 & 15,451 & 0\\ 15,451 & 855,293 & 0\\ 0 & 0 & 38,24\end{bmatrix}$$

Άρα το κρίσιμο φορτίο λυγισμού θα είναι:

$$N_x^{cr}=\frac{\pi^2}{500^2}\left[2\sqrt{169,453\cdot 855,293}+2\left(15,451+2\cdot 38,24\right)\right]=0{,}0373\ \text{KN/mm}$$

Το μητρώο μεμβρανικής δυσκαμψίας υπολογίζεται:

$$A=\begin{bmatrix}384,28 & 11,588 & 0\\ 11,588 & 384,28 & 0\\ 0 & 0 & 28,68\end{bmatrix}$$

Για αξονική θλιπτική δύναμη N_x = -1 KN/mm προκύπτουν οι παραμορφώσεις:

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{16}\\ a_{21} & a_{22} & a_{26}\\ a_{61} & a_{62} & a_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\mathrm{N}_x\\ \mathrm{N}_y\\ \mathrm{N}_{xy}\end{Bmatrix}=10^{-3}\begin{bmatrix}2,605 & -0,079 & 0\\ -0,079 & 2,605 & 0\\ 0 & 0 & 34,868\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-1\\ 0\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-2,605\\ 0,079\\ 0\end{Bmatrix}10^{-3}$$

Με δεδομένες τις παραμορφώσεις υπολογίζονται οι τάσεις:

Για $\theta=0°$ είναι:

$$\sigma=Q^0\varepsilon\Rightarrow\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}Q^0{}_{11} & Q^0{}_{12} & Q^0{}_{16}\\ Q^0{}_{21} & Q^0{}_{22} & Q^0{}_{26}\\ Q^0{}_{61} & Q^0{}_{62} & Q^0{}_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}181,8 & 2,897 & 0\\ 2,897 & 10,34 & 0\\ 0 & 0 & 7,17\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-2,605\\ 0,079\\ 0\end{Bmatrix}10^{-3}=\begin{Bmatrix}-0,473\\ -0,007\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \tau_{12}\end{Bmatrix}$$

Για $\theta = 90°$ είναι:

$$\sigma = Q^{90°}\varepsilon \Rightarrow \begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}Q^{90°}{}_{11} & Q^{90°}{}_{12} & Q^{90°}{}_{16}\\ Q^{90°}{}_{21} & Q^{90°}{}_{22} & Q^{90°}{}_{26}\\ Q^{90°}{}_{61} & Q^{90°}{}_{62} & Q^{90°}{}_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}10,34 & 2,897 & 0\\ 2,897 & 181,8 & 0\\ 0 & 0 & 7,17\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-2,605\\ 0,079\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-0,027\\ 0,007\\ 0\end{Bmatrix}$$

Οι τάσεις μετασχηματίζονται στο σύστημα υλικού $1-2$ για c = cos 90° και s = sin 90°:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \tau_{12}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}c^2 & s^2 & 2cs\\ s^2 & c^2 & -2cs\\ -cs & cs & c^2-s^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-0,027\\ 0,007\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0,007\\ -0,027\\ 0\end{Bmatrix}$$

Συντελεστές ασφαλείας:

$\theta = 0°$	$\frac{X'}{\sigma_1}=\frac{-1,5}{-0,473}=3,17$	$\frac{Y'}{\sigma_2}=\frac{-0,246}{-0,007}=36,53$
$\theta = 90°$	$\frac{X}{\sigma_1}=\frac{1,5}{0,007}=222,77$	$\frac{Y'}{\sigma_2}=\frac{-0,246}{-0,027}=9,21$

Από τους παραπάνω συντελεστές ασφαλείας προκύπτει ότι η μικρότερη τιμή του φορτίου και συνεπώς το φορτίο αστοχίας είναι:

N_x^u = 3,17 KN/mm

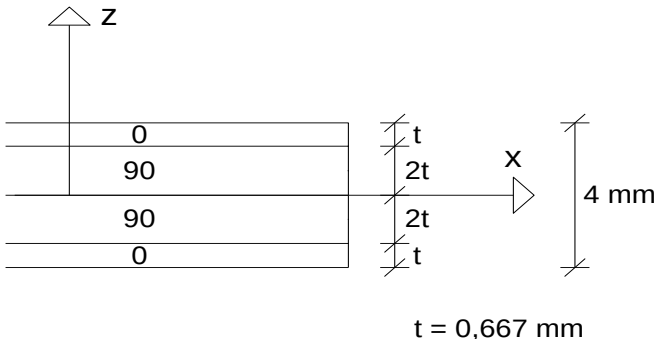
Και κατά συνέπεια:

$$\overline{\lambda_p}=\sqrt{\frac{N_x^u}{N_x^{cr}}}=\sqrt{\frac{3,17}{0,0373}}=9,22$$

$$\rho=\frac{b_{eff}}{b}=\frac{1}{\overline{\lambda_p}}=0,1085$$

$$b_{eff}=\rho\cdot b=54,26\ \text{mm}$$

3) διαστρωμάτωση $\left[0/90_4/0\right]$



Το μητρώο καμπτικής δυσκαμψίας προκύπτει:

$$D=\begin{bmatrix} 698,651 & 15,451 & 0 \\ 15,451 & 326,096 & 0 \\ 0 & 0 & 38,24 \end{bmatrix}$$

Άρα το κρίσιμο φορτίο λυγισμού θα είναι:

$$N_x^{cr}=\frac{\pi^2}{500^2}\left[2\sqrt{698,651\cdot 326,096}+2\left(15,451+2\cdot 38,24\right)\right]=0{,}0449\ \text{KN/mm}$$

Το μητρώο μεμβρανικής δυσκαμψίας υπολογίζεται:

$$A=\begin{bmatrix} 269,973 & 11,588 & 0 \\ 11,588 & 498,587 & 0 \\ 0 & 0 & 28,68 \end{bmatrix}$$

Για αξονική θλιπτική δύναμη N_x = -1 KN/mm προκύπτουν οι παραμορφώσεις:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{26} \\ a_{61} & a_{62} & a_{66} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \mathrm{N}_x \\ \mathrm{N}_y \\ \mathrm{N}_{xy} \end{Bmatrix}=10^{-3}\begin{bmatrix} 3,708 & -0,086 & 0 \\ -0,086 & 2,008 & 0 \\ 0 & 0 & 34,868 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} -3,708 \\ 0,086 \\ 0 \end{Bmatrix}10^{-3}$$

Με δεδομένες τις παραμορφώσεις υπολογίζονται οι τάσεις:

Για $\theta=0°$ είναι:

$$\sigma=Q^0\varepsilon\Rightarrow\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} Q^0{}_{11} & Q^0{}_{12} & Q^0{}_{16} \\ Q^0{}_{21} & Q^0{}_{22} & Q^0{}_{26} \\ Q^0{}_{61} & Q^0{}_{62} & Q^0{}_{66} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}181,8 & 2,897 & 0\\ 2,897 & 10,34 & 0\\ 0 & 0 & 7,17\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-3,708\\ 0,086\\ 0\end{Bmatrix}10^{-3}=\begin{Bmatrix}-0,674\\ -0,010\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \tau_{12}\end{Bmatrix}$$

Για $\theta = 90°$ είναι:

$$\sigma = Q^{90°}\varepsilon \Rightarrow \begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}Q^{90°}{}_{11} & Q^{90°}{}_{12} & Q^{90°}{}_{16}\\ Q^{90°}{}_{21} & Q^{90°}{}_{22} & Q^{90°}{}_{26}\\ Q^{90°}{}_{61} & Q^{90°}{}_{62} & Q^{90°}{}_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}10,34 & 2,897 & 0\\ 2,897 & 181,8 & 0\\ 0 & 0 & 7,17\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-3,708\\ 0,086\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-0,038\\ 0,005\\ 0\end{Bmatrix}$$

Οι τάσεις μετασχηματίζονται στο σύστημα υλικού $1-2$ για c = cos 90° και s = sin 90°:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \tau_{12}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}c^2 & s^2 & 2cs\\ s^2 & c^2 & -2cs\\ -cs & cs & c^2-s^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-0,038\\ 0,005\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0,005\\ -0,038\\ 0\end{Bmatrix}$$

Συντελεστές ασφαλείας:

$\theta = 0°$	$\frac{X'}{\sigma_1}=\frac{-1,5}{-0,674}=2,23$	$\frac{Y'}{\sigma_2}=\frac{-0,246}{-0,010}=24,97$
$\theta = 90°$	$\frac{X}{\sigma_1}=\frac{1,5}{0,005}=304,56$	$\frac{Y'}{\sigma_2}=\frac{-0,246}{-0,038}=6,46$

Από τους παραπάνω συντελεστές ασφαλείας προκύπτει ότι η μικρότερη τιμή του φορτίου και συνεπώς το φορτίο αστοχίας είναι:

N_x^u = 2,23 KN/mm

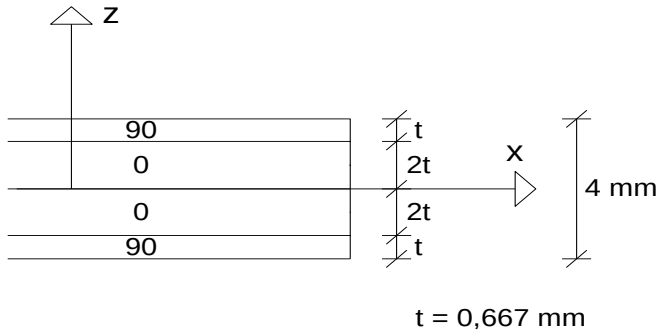
Και κατά συνέπεια:

$$\overline{\lambda_p}=\sqrt{\frac{N_x^u}{N_x^{cr}}}=\sqrt{\frac{2,23}{0,0449}}=7,04$$

$$\rho=\frac{b_{eff}}{b}=\frac{1}{\overline{\lambda_p}}=0,1421$$

$$b_{eff}=\rho\cdot b=71,05\ \text{mm}$$

4) διαστρωμάτωση $\left[90/0_4/90\right]$



Το μητρώο καμπτικής δυσκαμψίας προκύπτει:

$$D=\begin{bmatrix} 326,096 & 15,451 & 0 \\ 15,451 & 698,651 & 0 \\ 0 & 0 & 38,24 \end{bmatrix}$$

Άρα το κρίσιμο φορτίο λυγισμού θα είναι:

$$N_x^{cr}=\frac{\pi^2}{500^2}\left[2\sqrt{326,096\cdot 698,651}+2\left(15,451+2\cdot 38,24\right)\right]=0{,}0449\ \text{KN/mm}$$

Το μητρώο μεμβρανικής δυσκαμψίας υπολογίζεται:

$$A=\begin{bmatrix} 498,587 & 11,588 & 0 \\ 11,588 & 269,973 & 0 \\ 0 & 0 & 28,68 \end{bmatrix}$$

Για αξονική θλιπτική δύναμη N_x = -1 KN/mm προκύπτουν οι παραμορφώσεις:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{26} \\ a_{61} & a_{62} & a_{66} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \mathrm{N}_x \\ \mathrm{N}_y \\ \mathrm{N}_{xy} \end{Bmatrix}=10^{-3}\begin{bmatrix} 2,008 & -0,086 & 0 \\ -0,086 & 3,708 & 0 \\ 0 & 0 & 34,868 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} -2,008 \\ 0,086 \\ 0 \end{Bmatrix}10^{-3}$$

Με δεδομένες τις παραμορφώσεις υπολογίζονται οι τάσεις:

Για $\theta=0°$ είναι:

$$\sigma=Q^0\varepsilon\Rightarrow\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} Q^0{}_{11} & Q^0{}_{12} & Q^0{}_{16} \\ Q^0{}_{21} & Q^0{}_{22} & Q^0{}_{26} \\ Q^0{}_{61} & Q^0{}_{62} & Q^0{}_{66} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}181,8 & 2,897 & 0\\ 2,897 & 10,34 & 0\\ 0 & 0 & 7,17\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-2,008\\ 0,086\\ 0\end{Bmatrix}10^{-3}=\begin{Bmatrix}-0,365\\ -0,005\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \tau_{12}\end{Bmatrix}$$

Για $\theta = 90°$ είναι:

$$\sigma = Q^{90°}\varepsilon \Rightarrow \begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}Q^{90°}{}_{11} & Q^{90°}{}_{12} & Q^{90°}{}_{16}\\ Q^{90°}{}_{21} & Q^{90°}{}_{22} & Q^{90°}{}_{26}\\ Q^{90°}{}_{61} & Q^{90°}{}_{62} & Q^{90°}{}_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}10,34 & 2,897 & 0\\ 2,897 & 181,8 & 0\\ 0 & 0 & 7,17\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-2,008\\ 0,086\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-0,021\\ 0,010\\ 0\end{Bmatrix}$$

Οι τάσεις μετασχηματίζονται στο σύστημα υλικού $1-2$ για c = cos 90° και s = sin 90°:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \tau_{12}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}c^2 & s^2 & 2cs\\ s^2 & c^2 & -2cs\\ -cs & cs & c^2-s^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-0,021\\ 0,010\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0,010\\ -0,021\\ 0\end{Bmatrix}$$

Συντελεστές ασφαλείας:

$\theta = 0°$	$\frac{X'}{\sigma_1}=\frac{-1,5}{-0,365}=4,11$	$\frac{Y'}{\sigma_2}=\frac{-0,246}{-0,005}=49,95$
$\theta = 90°$	$\frac{X}{\sigma_1}=\frac{1,5}{0,010}=152,28$	$\frac{Y'}{\sigma_2}=\frac{-0,246}{-0,021}=11,99$

Από τους παραπάνω συντελεστές ασφαλείας προκύπτει ότι η μικρότερη τιμή του φορτίου και συνεπώς το φορτίο αστοχίας είναι:

N_x^u = 4,11 KN/mm

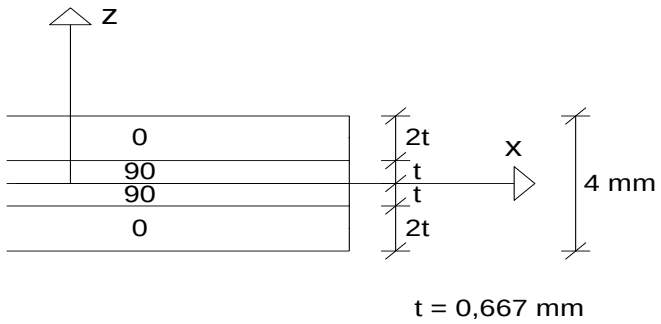
Και κατά συνέπεια:

$$\overline{\lambda_p}=\sqrt{\frac{N_x^u}{N_x^{cr}}}=\sqrt{\frac{4,11}{0,0449}}=9,57$$

$$\rho=\frac{b_{eff}}{b}=\frac{1}{\overline{\lambda_p}}=0,1045$$

$$b_{eff}=\rho\cdot b=52,27\ \text{mm}$$

5) διαστρωμάτωση $\left[\mathbf{0}_2 / \mathbf{90}_2 / \mathbf{0}_2\right]$



Το μητρώο καμπτικής δυσκαμψίας προκύπτει:

$$D = \begin{bmatrix} 935,731 & 15,451 & 0 \\ 15,451 & 89,015 & 0 \\ 0 & 0 & 38,24 \end{bmatrix}$$

Άρα το κρίσιμο φορτίο λυγισμού θα είναι:

$$N_x^{cr} = \frac{\pi^2}{500^2}\left[2\sqrt{935,731 \cdot 89,015} + 2\left(15,451 + 2 \cdot 38,24\right)\right] = 0{,}0300 \text{ KN/mm}$$

Το μητρώο μεμβρανικής δυσκαμψίας υπολογίζεται:

$$A = \begin{bmatrix} 498,587 & 11,588 & 0 \\ 11,588 & 269,973 & 0 \\ 0 & 0 & 28,68 \end{bmatrix}$$

Για αξονική θλιπτική δύναμη N_x = -1 KN/mm προκύπτουν οι παραμορφώσεις:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{26} \\ a_{61} & a_{62} & a_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathrm{N}_x \\ \mathrm{N}_y \\ \mathrm{N}_{xy} \end{Bmatrix} = 10^{-3} \begin{bmatrix} 2,008 & -0,086 & 0 \\ -0,086 & 3,708 & 0 \\ 0 & 0 & 34,868 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2,008 \\ 0,086 \\ 0 \end{Bmatrix} 10^{-3}$$

Με δεδομένες τις παραμορφώσεις υπολογίζονται οι τάσεις:

Για $\theta = 0°$ είναι:

$$\sigma = Q^0 \varepsilon \Rightarrow \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q^0{}_{11} & Q^0{}_{12} & Q^0{}_{16} \\ Q^0{}_{21} & Q^0{}_{22} & Q^0{}_{26} \\ Q^0{}_{61} & Q^0{}_{62} & Q^0{}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}181,8 & 2,897 & 0\\ 2,897 & 10,34 & 0\\ 0 & 0 & 7,17\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-2,008\\ 0,086\\ 0\end{Bmatrix}10^{-3}=\begin{Bmatrix}-0,365\\ -0,005\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \tau_{12}\end{Bmatrix}$$

Για $\theta = 90°$ είναι:

$$\sigma = Q^{90°}\varepsilon \Rightarrow \begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}Q^{90°}{}_{11} & Q^{90°}{}_{12} & Q^{90°}{}_{16}\\ Q^{90°}{}_{21} & Q^{90°}{}_{22} & Q^{90°}{}_{26}\\ Q^{90°}{}_{61} & Q^{90°}{}_{62} & Q^{90°}{}_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}10,34 & 2,897 & 0\\ 2,897 & 181,8 & 0\\ 0 & 0 & 7,17\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-2,008\\ 0,086\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-0,021\\ 0,010\\ 0\end{Bmatrix}$$

Οι τάσεις μετασχηματίζονται στο σύστημα υλικού $1-2$ για c = cos 90° και s = sin 90°:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \tau_{12}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}c^2 & s^2 & 2cs\\ s^2 & c^2 & -2cs\\ -cs & cs & c^2-s^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-0,021\\ 0,010\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0,010\\ -0,021\\ 0\end{Bmatrix}$$

Συντελεστές ασφαλείας:

$\theta = 0°$	$\frac{X'}{\sigma_1}=\frac{-1,5}{-0,365}=4,11$	$\frac{Y'}{\sigma_2}=\frac{-0,246}{-0,005}=49,95$
$\theta = 90°$	$\frac{X}{\sigma_1}=\frac{1,5}{0,010}=152,28$	$\frac{Y'}{\sigma_2}=\frac{-0,246}{-0,021}=11,99$

Από τους παραπάνω συντελεστές ασφαλείας προκύπτει ότι η μικρότερη τιμή του φορτίου και συνεπώς το φορτίο αστοχίας είναι:

N_x^u = 4,11 KN/mm

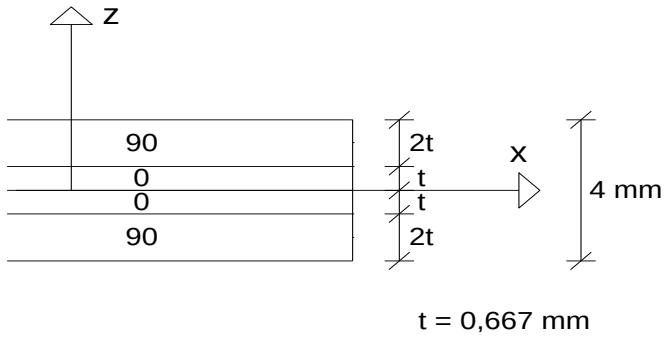
Και κατά συνέπεια:

$$\overline{\lambda_p}=\sqrt{\frac{N_x^u}{N_x^{cr}}}=\sqrt{\frac{4,11}{0,0300}}=11,70$$

$$\rho=\frac{b_{eff}}{b}=\frac{1}{\overline{\lambda_p}}=0,0855$$

$$b_{eff}=\rho\cdot b=42,74\ \text{mm}$$

6) διαστρωμάτωση $\left[\mathbf{90_2 / 0_2 / 90_2}\right]$



Το μητρώο καμπτικής δυσκαμψίας προκύπτει:

$$D = \begin{bmatrix} 89,015 & 15,451 & 0 \\ 15,451 & 935,731 & 0 \\ 0 & 0 & 38,24 \end{bmatrix}$$

Άρα το κρίσιμο φορτίο λυγισμού θα είναι:

$$N_x^{cr} = \frac{\pi^2}{500^2}\left[2\sqrt{89,015 \cdot 935,731} + 2\left(15,451 + 2 \cdot 38,24\right)\right] = 0{,}0300 \text{ KN/mm}$$

Το μητρώο μεμβρανικής δυσκαμψίας υπολογίζεται:

$$A = \begin{bmatrix} 269,973 & 11,588 & 0 \\ 11,588 & 498,587 & 0 \\ 0 & 0 & 28,68 \end{bmatrix}$$

Για αξονική θλιπτική δύναμη N_x = -1 KN/mm προκύπτουν οι παραμορφώσεις:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{26} \\ a_{61} & a_{62} & a_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathrm{N}_x \\ \mathrm{N}_y \\ \mathrm{N}_{xy} \end{Bmatrix} = 10^{-3} \begin{bmatrix} 3,708 & -0,086 & 0 \\ -0,086 & 2,008 & 0 \\ 0 & 0 & 34,868 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -3,708 \\ 0,086 \\ 0 \end{Bmatrix} 10^{-3}$$

Με δεδομένες τις παραμορφώσεις υπολογίζονται οι τάσεις:

Για $\theta = 0°$ είναι:

$$\sigma = Q^0 \varepsilon \Rightarrow \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q^0{}_{11} & Q^0{}_{12} & Q^0{}_{16} \\ Q^0{}_{21} & Q^0{}_{22} & Q^0{}_{26} \\ Q^0{}_{61} & Q^0{}_{62} & Q^0{}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}181,8 & 2,897 & 0\\ 2,897 & 10,34 & 0\\ 0 & 0 & 7,17\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-3,708\\ 0,086\\ 0\end{Bmatrix}10^{-3}=\begin{Bmatrix}-0,674\\ -0,010\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \tau_{12}\end{Bmatrix}$$

Για $\theta = 90°$ είναι:

$$\sigma = Q^{90°}\varepsilon \Rightarrow \begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}Q^{90°}{}_{11} & Q^{90°}{}_{12} & Q^{90°}{}_{16}\\ Q^{90°}{}_{21} & Q^{90°}{}_{22} & Q^{90°}{}_{26}\\ Q^{90°}{}_{61} & Q^{90°}{}_{62} & Q^{90°}{}_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}10,34 & 2,897 & 0\\ 2,897 & 181,8 & 0\\ 0 & 0 & 7,17\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-3,708\\ 0,086\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-0,038\\ 0,005\\ 0\end{Bmatrix}$$

Οι τάσεις μετασχηματίζονται στο σύστημα υλικού $1-2$ για c = cos 90° και s = sin 90°:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \tau_{12}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}c^2 & s^2 & 2cs\\ s^2 & c^2 & -2cs\\ -cs & cs & c^2-s^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-0,038\\ 0,005\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0,005\\ -0,038\\ 0\end{Bmatrix}$$

Συντελεστές ασφαλείας:

$\theta = 0°$	$\frac{X'}{\sigma_1}=\frac{-1,5}{-0,674}=2,23$	$\frac{Y'}{\sigma_2}=\frac{-0,246}{-0,010}=24,97$
$\theta = 90°$	$\frac{X}{\sigma_1}=\frac{1,5}{0,005}=304,56$	$\frac{Y'}{\sigma_2}=\frac{-0,246}{-0,038}=6,46$

Από τους παραπάνω συντελεστές ασφαλείας προκύπτει ότι η μικρότερη τιμή του φορτίου και συνεπώς το φορτίο αστοχίας είναι:

N_x^u = 2,23 KN/mm

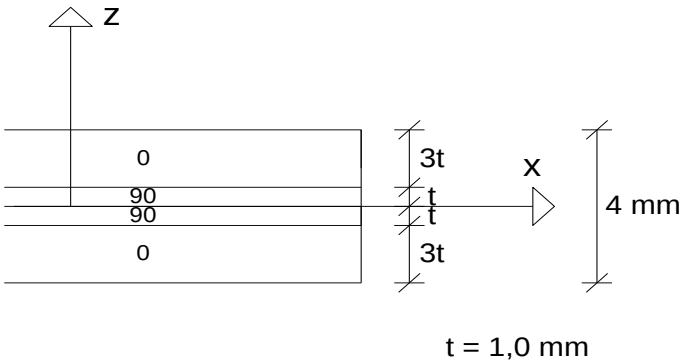
Και κατά συνέπεια:

$$\overline{\lambda_p}=\sqrt{\frac{N_x^u}{N_x^{cr}}}=\sqrt{\frac{2,23}{0,0300}}=8,61$$

$$\rho=\frac{b_{eff}}{b}=\frac{1}{\overline{\lambda_p}}=0,1162$$

$$b_{eff}=\rho\cdot b=58,09\ \text{mm}$$

7) *διαστρωμάτωση* $\left[\mathbf{0_3 / 90_2 / 0_3}\right]$



Το μητρώο καμπτικής δυσκαμψίας προκύπτει:

$$D = \begin{bmatrix} 955,312 & 15,451 & 0 \\ 15,451 & 69,435 & 0 \\ 0 & 0 & 38,24 \end{bmatrix}$$

Άρα το κρίσιμο φορτίο λυγισμού θα είναι:

$$N_x^{cr} = \frac{\pi^2}{500^2}\left[2\sqrt{955,312 \cdot 69,435} + 2\left(15,451 + 2 \cdot 38,24\right)\right] = 0{,}0276 \text{ KN/mm}$$

Το μητρώο μεμβρανικής δυσκαμψίας υπολογίζεται:

$$A = \begin{bmatrix} 555,74 & 11,588 & 0 \\ 11,588 & 212,82 & 0 \\ 0 & 0 & 28,68 \end{bmatrix}$$

Για αξονική θλιπτική δύναμη N_x = -1 KN/mm προκύπτουν οι παραμορφώσεις:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{26} \\ a_{61} & a_{62} & a_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathrm{N}_x \\ \mathrm{N}_y \\ \mathrm{N}_{xy} \end{Bmatrix} = 10^{-3} \begin{bmatrix} 1,801 & -0,098 & 0 \\ -0,098 & 4,704 & 0 \\ 0 & 0 & 34,868 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1,801 \\ 0,098 \\ 0 \end{Bmatrix} 10^{-3}$$

Με δεδομένες τις παραμορφώσεις υπολογίζονται οι τάσεις:

Για $\theta = 0°$ είναι:

$$\sigma = Q^0 \varepsilon \Rightarrow \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q^0{}_{11} & Q^0{}_{12} & Q^0{}_{16} \\ Q^0{}_{21} & Q^0{}_{22} & Q^0{}_{26} \\ Q^0{}_{61} & Q^0{}_{62} & Q^0{}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}181,8 & 2,897 & 0\\ 2,897 & 10,34 & 0\\ 0 & 0 & 7,17\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-1,801\\ 0,098\\ 0\end{Bmatrix}10^{-3}=\begin{Bmatrix}-0,327\\ -0,004\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \tau_{12}\end{Bmatrix}$$

Για $\theta = 90°$ είναι:

$$\sigma = Q^{90°}\varepsilon \Rightarrow \begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}Q^{90°}{}_{11} & Q^{90°}{}_{12} & Q^{90°}{}_{16}\\ Q^{90°}{}_{21} & Q^{90°}{}_{22} & Q^{90°}{}_{26}\\ Q^{90°}{}_{61} & Q^{90°}{}_{62} & Q^{90°}{}_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}10,34 & 2,897 & 0\\ 2,897 & 181,8 & 0\\ 0 & 0 & 7,17\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-1,801\\ 0,098\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-0,018\\ 0,013\\ 0\end{Bmatrix}$$

Οι τάσεις μετασχηματίζονται στο σύστημα υλικού $1-2$ για c = cos 90° και s = sin 90°:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \tau_{12}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}c^2 & s^2 & 2cs\\ s^2 & c^2 & -2cs\\ -cs & cs & c^2-s^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-0,018\\ 0,013\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0,013\\ -0,018\\ 0\end{Bmatrix}$$

Συντελεστές ασφαλείας:

$\theta = 0°$	$\frac{X'}{\sigma_1}=\frac{-1,5}{-0,327}=4,58$	$\frac{Y'}{\sigma_2}=\frac{-0,246}{-0,004}=58,51$
$\theta = 90°$	$\frac{X}{\sigma_1}=\frac{1,5}{0,013}=118,92$	$\frac{Y'}{\sigma_2}=\frac{-0,246}{-0,018}=13,41$

Από τους παραπάνω συντελεστές ασφαλείας προκύπτει ότι η μικρότερη τιμή του φορτίου και συνεπώς το φορτίο αστοχίας είναι:

N_x^u = 4,58 KN/mm

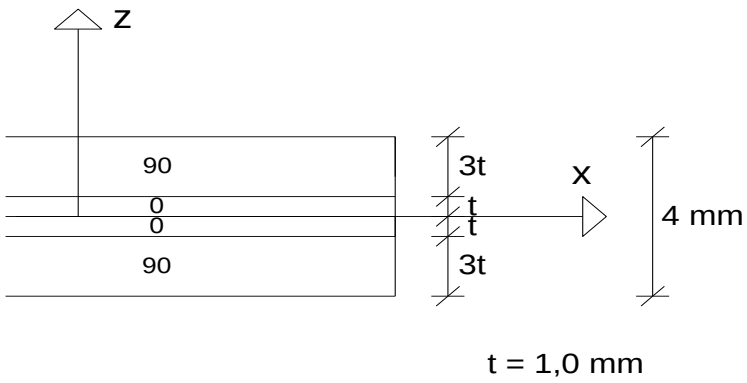
Και κατά συνέπεια:

$$\overline{\lambda_p}=\sqrt{\frac{N_x^u}{N_x^{cr}}}=\sqrt{\frac{4,58}{0,0276}}=12,89$$

$$\rho=\frac{b_{eff}}{b}=\frac{1}{\overline{\lambda_p}}=0,0776$$

$$b_{eff}=\rho\cdot b=38,79\ \text{mm}$$

8) διαστρωμάτωση $\left[\mathbf{90_3 / 0_2 / 90_3}\right]$



Το μητρώο καμπτικής δυσκαμψίας προκύπτει:

$$D = \begin{bmatrix} 69,435 & 15,451 & 0 \\ 15,451 & 955,312 & 0 \\ 0 & 0 & 38,24 \end{bmatrix}$$

Άρα το κρίσιμο φορτίο λυγισμού θα είναι:

$$N_x^{cr} = \frac{\pi^2}{500^2}\left[2\sqrt{69,435 \cdot 955,312} + 2\left(15,451 + 2 \cdot 38,24\right)\right] = 0{,}0276 \text{ KN/mm}$$

Το μητρώο μεμβρανικής δυσκαμψίας υπολογίζεται:

$$A = \begin{bmatrix} 212,82 & 11,588 & 0 \\ 11,588 & 555,74 & 0 \\ 0 & 0 & 28,68 \end{bmatrix}$$

Για αξονική θλιπτική δύναμη N_x = -1 KN/mm προκύπτουν οι παραμορφώσεις:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{26} \\ a_{61} & a_{62} & a_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathrm{N}_x \\ \mathrm{N}_y \\ \mathrm{N}_{xy} \end{Bmatrix} = 10^{-3} \begin{bmatrix} 4,704 & -0,098 & 0 \\ -0,098 & 1,801 & 0 \\ 0 & 0 & 34,868 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -4,704 \\ 0,098 \\ 0 \end{Bmatrix} 10^{-3}$$

Με δεδομένες τις παραμορφώσεις υπολογίζονται οι τάσεις:

Για $\theta = 0°$ είναι:

$$\sigma = Q^0 \varepsilon \Rightarrow \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q^0{}_{11} & Q^0{}_{12} & Q^0{}_{16} \\ Q^0{}_{21} & Q^0{}_{22} & Q^0{}_{26} \\ Q^0{}_{61} & Q^0{}_{62} & Q^0{}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}181,8 & 2,897 & 0\\ 2,897 & 10,34 & 0\\ 0 & 0 & 7,17\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-4,704\\ 0,098\\ 0\end{Bmatrix}10^{-3}=\begin{Bmatrix}-0,855\\ -0,013\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \tau_{12}\end{Bmatrix}$$

Για $\theta = 90°$ είναι:

$$\sigma = Q^{90°}\varepsilon \Rightarrow \begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}Q^{90°}{}_{11} & Q^{90°}{}_{12} & Q^{90°}{}_{16}\\ Q^{90°}{}_{21} & Q^{90°}{}_{22} & Q^{90°}{}_{26}\\ Q^{90°}{}_{61} & Q^{90°}{}_{62} & Q^{90°}{}_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}10,34 & 2,897 & 0\\ 2,897 & 181,8 & 0\\ 0 & 0 & 7,17\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-4,704\\ 0,098\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-0,048\\ 0,004\\ 0\end{Bmatrix}$$

Οι τάσεις μετασχηματίζονται στο σύστημα υλικού $1-2$ για c = cos 90° και s = sin 90°:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \tau_{12}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}c^2 & s^2 & 2cs\\ s^2 & c^2 & -2cs\\ -cs & cs & c^2-s^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-0,048\\ 0,004\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0,004\\ -0,048\\ 0\end{Bmatrix}$$

Συντελεστές ασφαλείας:

$\theta = 0°$	$\frac{X'}{\sigma_1}=\frac{-1,5}{-0,855}=1,75$	$\frac{Y'}{\sigma_2}=\frac{-0,246}{-0,013}=19,50$
$\theta = 90°$	$\frac{X}{\sigma_1}=\frac{1,5}{0,004}=356,76$	$\frac{Y'}{\sigma_2}=\frac{-0,246}{-0,048}=5,09$

Από τους παραπάνω συντελεστές ασφαλείας προκύπτει ότι η μικρότερη τιμή του φορτίου και συνεπώς το φορτίο αστοχίας είναι:

N_x^u = 1,75 KN/mm

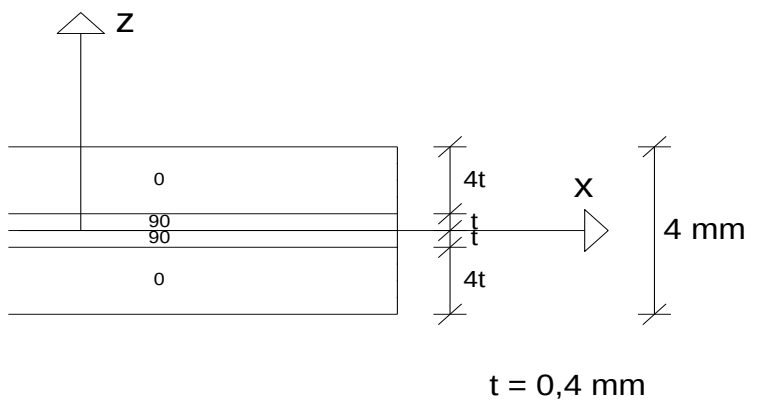
Και κατά συνέπεια:

$$\overline{\lambda_p}=\sqrt{\frac{N_x^u}{N_x^{cr}}}=\sqrt{\frac{1,75}{0,0276}}=7,97$$

$$\rho=\frac{b_{eff}}{b}=\frac{1}{\overline{\lambda_p}}=0,1254$$

$$b_{eff}=\rho\cdot b=62,70\ \text{mm}$$

9) διαστρωμάτωση $\left[\mathbf{0_4 / 90_2 / 0_4}\right]$



Το μητρώο καμπτικής δυσκαμψίας προκύπτει:

$$D = \begin{bmatrix} 962,284 & 15,451 & 0 \\ 15,451 & 62,462 & 0 \\ 0 & 0 & 38,24 \end{bmatrix}$$

Άρα το κρίσιμο φορτίο λυγισμού θα είναι:

$$N_x^{cr} = \frac{\pi^2}{500^2}\left[2\sqrt{962,284 \cdot 62,462} + 2\left(15,451 + 2 \cdot 38,24\right)\right] = 0{,}0266 \text{ KN/mm}$$

Το μητρώο μεμβρανικής δυσκαμψίας υπολογίζεται:

$$A = \begin{bmatrix} 590,032 & 11,588 & 0 \\ 11,588 & 178,528 & 0 \\ 0 & 0 & 28,68 \end{bmatrix}$$

Για αξονική θλιπτική δύναμη N_x = -1 KN/mm προκύπτουν οι παραμορφώσεις:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{26} \\ a_{61} & a_{62} & a_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathrm{N}_x \\ \mathrm{N}_y \\ \mathrm{N}_{xy} \end{Bmatrix} = 10^{-3} \begin{bmatrix} 1,697 & -0,11 & 0 \\ -0,11 & 5,609 & 0 \\ 0 & 0 & 34,868 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1,697 \\ 0,110 \\ 0 \end{Bmatrix} 10^{-3}$$

Με δεδομένες τις παραμορφώσεις υπολογίζονται οι τάσεις:

Για $\theta = 0°$ είναι:

$$\sigma = Q^0 \varepsilon \Rightarrow \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q^0{}_{11} & Q^0{}_{12} & Q^0{}_{16} \\ Q^0{}_{21} & Q^0{}_{22} & Q^0{}_{26} \\ Q^0{}_{61} & Q^0{}_{62} & Q^0{}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}181,8 & 2,897 & 0\\ 2,897 & 10,34 & 0\\ 0 & 0 & 7,17\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-1,697\\ 0,110\\ 0\end{Bmatrix}10^{-3}=\begin{Bmatrix}-0,308\\ -0,004\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \tau_{12}\end{Bmatrix}$$

Για $\theta = 90°$ είναι:

$$\sigma = Q^{90°}\varepsilon \Rightarrow \begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}Q^{90°}{}_{11} & Q^{90°}{}_{12} & Q^{90°}{}_{16}\\ Q^{90°}{}_{21} & Q^{90°}{}_{22} & Q^{90°}{}_{26}\\ Q^{90°}{}_{61} & Q^{90°}{}_{62} & Q^{90°}{}_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}10,34 & 2,897 & 0\\ 2,897 & 181,8 & 0\\ 0 & 0 & 7,17\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-1,697\\ 0,110\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-0,017\\ 0,015\\ 0\end{Bmatrix}$$

Οι τάσεις μετασχηματίζονται στο σύστημα υλικού $1-2$ για c = cos 90° και s = sin 90°:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \tau_{12}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}c^2 & s^2 & 2cs\\ s^2 & c^2 & -2cs\\ -cs & cs & c^2-s^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-0,017\\ 0,015\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0,015\\ -0,017\\ 0\end{Bmatrix}$$

Συντελεστές ασφαλείας:

$\theta = 0°$	$\frac{X'}{\sigma_1}=\frac{-1,5}{-0,308}=4,87$	$\frac{Y'}{\sigma_2}=\frac{-0,246}{-0,004}=65,13$
$\theta = 90°$	$\frac{X}{\sigma_1}=\frac{1,5}{0,015}=99,28$	$\frac{Y'}{\sigma_2}=\frac{-0,246}{-0,017}=14,28$

Από τους παραπάνω συντελεστές ασφαλείας προκύπτει ότι η μικρότερη τιμή του φορτίου και συνεπώς το φορτίο αστοχίας είναι:

N_x^u = 4,87 KN/mm

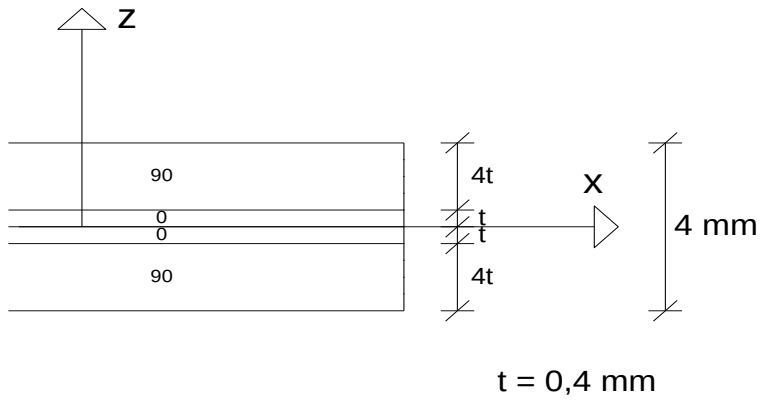
Και κατά συνέπεια:

$$\overline{\lambda_p}=\sqrt{\frac{N_x^u}{N_x^{cr}}}=\sqrt{\frac{4,87}{0,0266}}=13,52$$

$$\rho=\frac{b_{eff}}{b}=\frac{1}{\overline{\lambda_p}}=0,0739$$

$$b_{eff}=\rho\cdot b=36,97\ \text{mm}$$

10) διαστρωμάτωση $\left[\mathbf{90_4 / 0_2 / 90_4}\right]$



Το μητρώο καμπτικής δυσκαμψίας προκύπτει:

$$D = \begin{bmatrix} 62,462 & 15,451 & 0 \\ 15,451 & 962,284 & 0 \\ 0 & 0 & 38,24 \end{bmatrix}$$

Άρα το κρίσιμο φορτίο λυγισμού θα είναι:

$$N_x^{cr} = \frac{\pi^2}{500^2}\left[2\sqrt{62,462 \cdot 962,284} + 2\left(15,451 + 2 \cdot 38,24\right)\right] = 0{,}0266 \text{ KN/mm}$$

Το μητρώο μεμβρανικής δυσκαμψίας υπολογίζεται:

$$A = \begin{bmatrix} 178,528 & 11,588 & 0 \\ 11,588 & 590,032 & 0 \\ 0 & 0 & 28,68 \end{bmatrix}$$

Για αξονική θλιπτική δύναμη N_x = -1 KN/mm προκύπτουν οι παραμορφώσεις:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{26} \\ a_{61} & a_{62} & a_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathrm{N}_x \\ \mathrm{N}_y \\ \mathrm{N}_{xy} \end{Bmatrix} = 10^{-3} \begin{bmatrix} 5,609 & -0,11 & 0 \\ -0,11 & 1,697 & 0 \\ 0 & 0 & 34,868 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -5,609 \\ 0,110 \\ 0 \end{Bmatrix} 10^{-3}$$

Με δεδομένες τις παραμορφώσεις υπολογίζονται οι τάσεις:

Για $\theta = 0°$ είναι:

$$\sigma = Q^0 \varepsilon \Rightarrow \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q^0{}_{11} & Q^0{}_{12} & Q^0{}_{16} \\ Q^0{}_{21} & Q^0{}_{22} & Q^0{}_{26} \\ Q^0{}_{61} & Q^0{}_{62} & Q^0{}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}181,8 & 2,897 & 0\\ 2,897 & 10,34 & 0\\ 0 & 0 & 7,17\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-5,609\\ 0,110\\ 0\end{Bmatrix}10^{-3}=\begin{Bmatrix}-1,019\\ -0,015\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \tau_{12}\end{Bmatrix}$$

Για $\theta = 90°$ είναι:

$$\sigma = Q^{90°}\varepsilon \Rightarrow \begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}Q^{90°}{}_{11} & Q^{90°}{}_{12} & Q^{90°}{}_{16}\\ Q^{90°}{}_{21} & Q^{90°}{}_{22} & Q^{90°}{}_{26}\\ Q^{90°}{}_{61} & Q^{90°}{}_{62} & Q^{90°}{}_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}10,34 & 2,897 & 0\\ 2,897 & 181,8 & 0\\ 0 & 0 & 7,17\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-5,609\\ 0,110\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-0,058\\ 0,004\\ 0\end{Bmatrix}$$

Οι τάσεις μετασχηματίζονται στο σύστημα υλικού $1-2$ για c = cos 90° και s = sin 90°:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \tau_{12}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}c^2 & s^2 & 2cs\\ s^2 & c^2 & -2cs\\ -cs & cs & c^2-s^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-0,058\\ 0,004\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0,004\\ -0,058\\ 0\end{Bmatrix}$$

Συντελεστές ασφαλείας:

$\theta = 0°$	$\frac{X'}{\sigma_1}=\frac{-1,5}{-1,019}=1,47$	$\frac{Y'}{\sigma_2}=\frac{-0,246}{-0,015}=16,28$
$\theta = 90°$	$\frac{X}{\sigma_1}=\frac{1,5}{0,004}=397,12$	$\frac{Y'}{\sigma_2}=\frac{-0,246}{-0,058}=4,27$

Από τους παραπάνω συντελεστές ασφαλείας προκύπτει ότι η μικρότερη τιμή του φορτίου και συνεπώς το φορτίο αστοχίας είναι:

N_x^u = 1,47 KN/mm

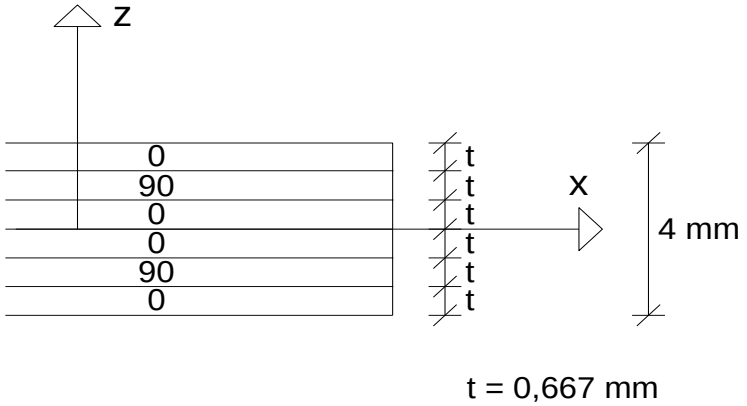
Και κατά συνέπεια:

$$\overline{\lambda_p}=\sqrt{\frac{N_x^u}{N_x^{cr}}}=\sqrt{\frac{1,47}{0,0266}}=7,44$$

$$\rho=\frac{b_{eff}}{b}=\frac{1}{\overline{\lambda_p}}=0,1345$$

$$b_{eff}=\rho\cdot b=67,24\ \text{mm}$$

11) διαστρωμάτωση $\left[\mathbf{0/90/0_2/90/0}\right]$



Το μητρώο καμπτικής δυσκαμψίας προκύπτει:

$$D=\begin{bmatrix} 732,52 & 15,451 & 0 \\ 15,451 & 292,227 & 0 \\ 0 & 0 & 38,24 \end{bmatrix}$$

Άρα το κρίσιμο φορτίο λυγισμού θα είναι:

$$N_x^{cr}=\frac{\pi^2}{500^2}\left[2\sqrt{732,52\cdot 292,227}+2\left(15,451+2\cdot 38,24\right)\right]=0{,}0438\ \text{KN/mm}$$

Το μητρώο μεμβρανικής δυσκαμψίας υπολογίζεται:

$$A=\begin{bmatrix} 498,587 & 11,588 & 0 \\ 11,588 & 269,973 & 0 \\ 0 & 0 & 28,68 \end{bmatrix}$$

Για αξονική θλιπτική δύναμη N_x = -1 KN/mm προκύπτουν οι παραμορφώσεις:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{26} \\ a_{61} & a_{62} & a_{66} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \mathrm{N}_x \\ \mathrm{N}_y \\ \mathrm{N}_{xy} \end{Bmatrix}=10^{-3}\begin{bmatrix} 2,008 & -0,086 & 0 \\ -0,086 & 3,708 & 0 \\ 0 & 0 & 34,868 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} -2,008 \\ 0,086 \\ 0 \end{Bmatrix}10^{-3}$$

Με δεδομένες τις παραμορφώσεις υπολογίζονται οι τάσεις:

Για $\theta=0°$ είναι:

$$\sigma=Q^0\varepsilon\Rightarrow\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} Q^0{}_{11} & Q^0{}_{12} & Q^0{}_{16} \\ Q^0{}_{21} & Q^0{}_{22} & Q^0{}_{26} \\ Q^0{}_{61} & Q^0{}_{62} & Q^0{}_{66} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}181,8 & 2,897 & 0\\ 2,897 & 10,34 & 0\\ 0 & 0 & 7,17\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-2,008\\ 0,086\\ 0\end{Bmatrix}10^{-3}=\begin{Bmatrix}-0,365\\ -0,005\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \tau_{12}\end{Bmatrix}$$

Για $\theta = 90°$ είναι:

$$\sigma = Q^{90°}\varepsilon \Rightarrow \begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}Q^{90°}{}_{11} & Q^{90°}{}_{12} & Q^{90°}{}_{16}\\ Q^{90°}{}_{21} & Q^{90°}{}_{22} & Q^{90°}{}_{26}\\ Q^{90°}{}_{61} & Q^{90°}{}_{62} & Q^{90°}{}_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}10,34 & 2,897 & 0\\ 2,897 & 181,8 & 0\\ 0 & 0 & 7,17\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-2,008\\ 0,086\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-0,021\\ 0,010\\ 0\end{Bmatrix}$$

Οι τάσεις μετασχηματίζονται στο σύστημα υλικού $1-2$ για c = cos 90° και s = sin 90°:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \tau_{12}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}c^2 & s^2 & 2cs\\ s^2 & c^2 & -2cs\\ -cs & cs & c^2-s^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-0,021\\ 0,010\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0,010\\ -0,021\\ 0\end{Bmatrix}$$

Συντελεστές ασφαλείας:

$\theta = 0°$	$\frac{X'}{\sigma_1}=\frac{-1,5}{-0,365}=4,11$	$\frac{Y'}{\sigma_2}=\frac{-0,246}{-0,005}=49,95$
$\theta = 90°$	$\frac{X}{\sigma_1}=\frac{1,5}{0,010}=152,28$	$\frac{Y'}{\sigma_2}=\frac{-0,246}{-0,021}=11,99$

Από τους παραπάνω συντελεστές ασφαλείας προκύπτει ότι η μικρότερη τιμή του φορτίου και συνεπώς το φορτίο αστοχίας είναι:

N_x^u = 4,11 KN/mm

Και κατά συνέπεια:

$$\overline{\lambda_p}=\sqrt{\frac{N_x^u}{N_x^{cr}}}=\sqrt{\frac{4,11}{0,0438}}=9,69$$

$$\rho=\frac{b_{eff}}{b}=\frac{1}{\overline{\lambda_p}}=0,1032$$

$$b_{eff}=\rho\cdot b=51,59\ \text{mm}$$

3.2.2 Διαστρωματώσεις με Ίνες Προσανατολισμένες Κατά Γωνίες $\pm\theta^o$

Α) γωνίες $\pm 60^o$

Περιπτώσεις διαστρωματώσεων που εξετάστηκαν:

1) διαστρωμάτωση $[\mathbf{60/-60/60/-60/60/-60/60/-60}]$

2) διαστρωμάτωση $[\mathbf{60/-60/60/-60}]_s$

3) διαστρωμάτωση $[\mathbf{-60/60/-60/60}]_s$

4) διαστρωμάτωση $[\mathbf{60/-60/60/-60/60/-60}]$

5) διαστρωμάτωση $[\mathbf{60/-60/60}]_s$

6) διαστρωμάτωση $[\mathbf{-60/60/-60}]_s$

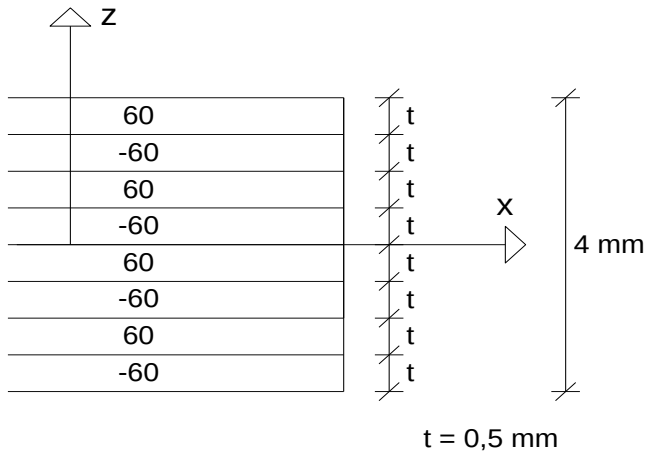
7) διαστρωμάτωση $[\mathbf{60/-60/60/-60}]$

8) διαστρωμάτωση $[\mathbf{60/-60}]_s$

9) διαστρωμάτωση $[\mathbf{-60/60}]_s$

Αναλυτικά:

1) ***διαστρωμάτωση*** $[\mathbf{60/-60/60/-60/60/-60/60/-60}]$



Το μητρώο καμπτικής δυσκαμψίας προκύπτει:

$$D=\begin{bmatrix} 126,094 & 173,117 & 0 \\ 173,117 & 583,321 & 0 \\ 0 & 0 & 202,904 \end{bmatrix}$$

Άρα το κρίσιμο φορτίο λυγισμού θα είναι:

$$N_x^{cr}=\frac{\pi^2}{500^2}\left[2\sqrt{126,094\cdot 583,321}+2\left(173,117+2\cdot 202,904\right)\right]=0,0671 \text{ KN/mm}$$

Το μητρώο μεμβρανικής δυσκαμψίας υπολογίζεται:

$$A=\begin{bmatrix} 94,571 & 129,838 & 0 \\ 129,838 & 437,491 & 0 \\ 0 & 0 & 152,178 \end{bmatrix}$$

Για αξονική θλιπτική δύναμη N_x = -1 KN/mm προκύπτουν οι παραμορφώσεις:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{26} \\ a_{61} & a_{62} & a_{66} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \mathrm{N}_x \\ \mathrm{N}_y \\ \mathrm{N}_{xy} \end{Bmatrix}=10^{-3}\begin{bmatrix} 17,845 & -5,296 & 0 \\ -5,296 & 3,858 & 0 \\ 0 & 0 & 6,571 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} -17,845 \\ 5,296 \\ 0 \end{Bmatrix}10^{-3}$$

Με δεδομένες τις παραμορφώσεις υπολογίζονται οι τάσεις:

Για $\theta=60°$ είναι:

$$\sigma=Q^{60°}\varepsilon\Rightarrow\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} Q^{60°}{}_{11} & Q^{60°}{}_{12} & Q^{60°}{}_{16} \\ Q^{60°}{}_{21} & Q^{60°}{}_{22} & Q^{60°}{}_{26} \\ Q^{60°}{}_{61} & Q^{60°}{}_{62} & Q^{60°}{}_{66} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} 23,643 & 32,459 & 20,054 \\ 32,459 & 109,373 & 54,19 \\ 20,054 & 54,19 & 38,045 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} -17,845 \\ 5,296 \\ 0 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} -0,25 \\ 0 \\ -0,071 \end{Bmatrix}$$

Οι τάσεις μετασχηματίζονται στο σύστημα υλικού $1-2$ για c = cos 60° και s = sin 60°:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2cs \\ s^2 & c^2 & -2cs \\ -cs & cs & c^2-s^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} 0,25 & 0,75 & 0,866 \\ 0,75 & 0,25 & -0,866 \\ -0,433 & 0,433 & -0,5 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} -0,25 \\ 0 \\ -0,071 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} -0,124 \\ -0,126 \\ 0,144 \end{Bmatrix}$$

Για $\theta=-60°$ είναι:

$$\sigma = Q^{-60°}\varepsilon \Rightarrow \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q^{-60°}{}_{11} & Q^{-60°}{}_{12} & Q^{-60°}{}_{16} \\ Q^{-60°}{}_{21} & Q^{-60°}{}_{22} & Q^{-60°}{}_{26} \\ Q^{-60°}{}_{61} & Q^{-60°}{}_{62} & Q^{-60°}{}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 23,643 & 32,459 & -20,054 \\ 32,459 & 109,373 & -54,19 \\ -20,054 & -54,19 & 38,045 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -17,845 \\ 5,296 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,25 \\ 0 \\ 0,071 \end{Bmatrix}$$

Οι τάσεις μετασχηματίζονται στο σύστημα υλικού 1 – 2 για c = cos (-60°) και s = sin (-60°):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2cs \\ s^2 & c^2 & -2cs \\ -cs & cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,25 & 0,75 & -0,866 \\ 0,75 & 0,25 & 0,866 \\ 0,433 & -0,433 & -0,5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0,25 \\ 0 \\ 0,071 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,124 \\ -0,126 \\ -0,144 \end{Bmatrix}$$

Συντελεστές ασφαλείας:

$\theta = 60°$	$\frac{X'}{\sigma_1} = \frac{-1,5}{-0,124} = 12,11$	$\frac{Y'}{\sigma_2} = \frac{-0,246}{-0,126} = 1,95$	$\left\lvert \frac{S}{\tau_{12}} \right\rvert = \frac{0,068}{0,144} = 0,4732$
$\theta = -60°$	$\frac{X'}{\sigma_1} = \frac{-1,5}{-0,124} = 12,11$	$\frac{Y'}{\sigma_2} = \frac{-0,246}{-0,126} = 1,95$	

Από τους παραπάνω συντελεστές ασφαλείας προκύπτει ότι η μικρότερη τιμή του φορτίου και συνεπώς το φορτίο αστοχίας είναι:

N_x^u = 0,4732 KN/mm

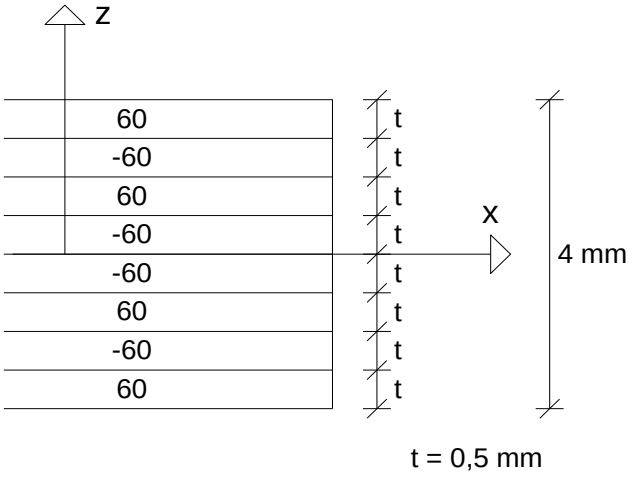
Και κατά συνέπεια:

$$\overline{\lambda_p} = \sqrt{\frac{N_x^u}{N_x^{cr}}} = \sqrt{\frac{0,4732}{0,0671}} = 2,66$$

$$\rho = \frac{b_{eff}}{b} = \frac{1}{\overline{\lambda_p}} = 0,3766$$

$$b_{eff} = \rho \cdot b = 188,31 \text{ mm}$$

2) ***διαστρωμάτωση*** $[\mathbf{60/-60/60/-60}]_S$



Το μητρώο καμπτικής δυσκαμψίας προκύπτει:

$$D=\begin{bmatrix} 126,094 & 173,117 & 40,109 \\ 173,117 & 583,321 & 108,38 \\ 40,109 & 108,38 & 202,904 \end{bmatrix}$$

Άρα το κρίσιμο φορτίο λυγισμού θα είναι:

$$N_x^{cr}=\frac{\pi^2}{500^2}\left[2\sqrt{126,094\cdot 583,321}+2\left(173,117+2\cdot 202,904\right)\right]=0,0671 \text{ KN/mm}$$

Το μητρώο μεμβρανικής δυσκαμψίας υπολογίζεται:

$$A=\begin{bmatrix} 94,571 & 129,838 & 0 \\ 129,838 & 437,491 & 0 \\ 0 & 0 & 152,178 \end{bmatrix}$$

Για αξονική θλιπτική δύναμη N_x = -1 KN/mm προκύπτουν οι παραμορφώσεις:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{26} \\ a_{61} & a_{62} & a_{66} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \mathrm{N}_x \\ \mathrm{N}_y \\ \mathrm{N}_{xy} \end{Bmatrix}=10^{-3}\begin{bmatrix} 17,845 & -5,296 & 0 \\ -5,296 & 3,858 & 0 \\ 0 & 0 & 6,571 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} -17,845 \\ 5,296 \\ 0 \end{Bmatrix}10^{-3}$$

Με δεδομένες τις παραμορφώσεις υπολογίζονται οι τάσεις:

Για $\theta=60°$ είναι:

$$\sigma = Q^{60^\circ}\varepsilon \Rightarrow \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q^{60^\circ}{}_{11} & Q^{60^\circ}{}_{12} & Q^{60^\circ}{}_{16} \\ Q^{60^\circ}{}_{21} & Q^{60^\circ}{}_{22} & Q^{60^\circ}{}_{26} \\ Q^{60^\circ}{}_{61} & Q^{60^\circ}{}_{62} & Q^{60^\circ}{}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 23,643 & 32,459 & 20,054 \\ 32,459 & 109,373 & 54,19 \\ 20,054 & 54,19 & 38,045 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -17,845 \\ 5,296 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,25 \\ 0 \\ -0,071 \end{Bmatrix}$$

Οι τάσεις μετασχηματίζονται στο σύστημα υλικού 1 – 2 για c = cos 60° και s = sin 60°:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2cs \\ s^2 & c^2 & -2cs \\ -cs & cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,25 & 0,75 & 0,866 \\ 0,75 & 0,25 & -0,866 \\ -0,433 & 0,433 & -0,5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0,25 \\ 0 \\ -0,071 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,124 \\ -0,126 \\ 0,144 \end{Bmatrix}$$

Για $\theta = -60^\circ$ είναι:

$$\sigma = Q^{-60^\circ}\varepsilon \Rightarrow \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q^{-60^\circ}{}_{11} & Q^{-60^\circ}{}_{12} & Q^{-60^\circ}{}_{16} \\ Q^{-60^\circ}{}_{21} & Q^{-60^\circ}{}_{22} & Q^{-60^\circ}{}_{26} \\ Q^{-60^\circ}{}_{61} & Q^{-60^\circ}{}_{62} & Q^{-60^\circ}{}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 23,643 & 32,459 & -20,054 \\ 32,459 & 109,373 & -54,19 \\ -20,054 & -54,19 & 38,045 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -17,845 \\ 5,296 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,25 \\ 0 \\ 0,071 \end{Bmatrix}$$

Οι τάσεις μετασχηματίζονται στο σύστημα υλικού 1 – 2 για c = cos (-60°) και s = sin (-60°):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2cs \\ s^2 & c^2 & -2cs \\ -cs & cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,25 & 0,75 & -0,866 \\ 0,75 & 0,25 & 0,866 \\ 0,433 & -0,433 & -0,5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0,25 \\ 0 \\ 0,071 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,124 \\ -0,126 \\ -0,144 \end{Bmatrix}$$

Συντελεστές ασφαλείας:

$\theta = 60^\circ$	$\frac{X'}{\sigma_1} = \frac{-1,5}{-0,124} = 12,11$	$\frac{Y'}{\sigma_2} = \frac{-0,246}{-0,126} = 1,95$	$\left\lvert \frac{S}{\tau_{12}} \right\rvert = \frac{0,068}{0,144} = 0,4732$
$\theta = -60^\circ$	$\frac{X'}{\sigma_1} = \frac{-1,5}{-0,124} = 12,11$	$\frac{Y'}{\sigma_2} = \frac{-0,246}{-0,126} = 1,95$	

Από τους παραπάνω συντελεστές ασφαλείας προκύπτει ότι η μικρότερη τιμή του φορτίου και συνεπώς το φορτίο αστοχίας είναι:

N_x^u = 0,4732 KN/mm

Και κατά συνέπεια:

$$\overline{\lambda_p} = \sqrt{\frac{N_x^u}{N_x^{cr}}} = \sqrt{\frac{0,4732}{0,0671}} = 2,66$$

$$\rho = \frac{b_{eff}}{b} = \frac{1}{\overline{\lambda_p}} = 0,3766$$

$$b_{eff} = \rho \cdot b = 188,31 \text{ mm}$$

3) ***διαστρωμάτωση*** $[-60/60/-60/60]_s$

4) ***διαστρωμάτωση*** $[60/-60/60/-60/60/-60]$

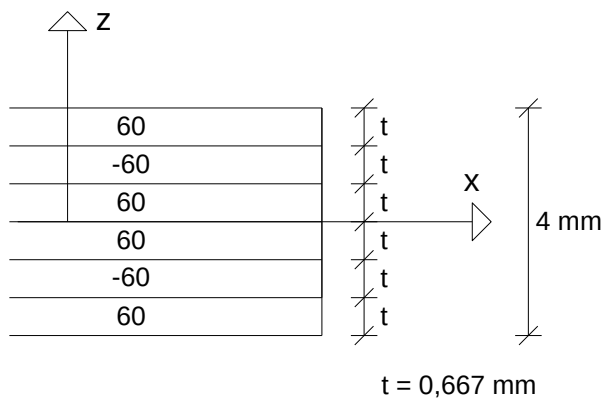
7) ***διαστρωμάτωση*** $[60/-60/60/-60]$

8) ***διαστρωμάτωση*** $[60/-60]_s$

9) ***διαστρωμάτωση*** $[-60/60]_s$

Όπως φαίνεται και στις δύο προηγούμενες περιπτώσεις, τα αποτελέσματα είναι ίδια καθώς η διάταξη – θέση των στρώσεων δεν επηρεάζει το μητρώο A και δηλαδή τις παραμορφώσεις και τις τάσεις όπως θα επηρέαζε το πάχος τους. Όντως, μέσω της υπολογιστικής διαδικασίας προέκυψαν για τις περιπτώσεις διαστρωμάτωσης 3), 4), 7), 8), 9) ακριβώς τα ίδια αποτελέσματα με πριν, καθώς το συνολικό πάχος παραμένει σταθερό και κατανέμεται ισομερώς στις στρώσεις χωρίς το μητρώο A να επηρεάζεται. Παρόλα αυτά, όπως φαίνεται παρακάτω, στην περίπτωση 5) παρατίθεται η ανάλυση διότι οι μη μηδενικοί όροι A_{16}, A_{61}, A_{26}, A_{62}, στο μητρώο A αλλάζουν τα αποτελέσματα, αν και ελάχιστα όπως θα φανεί παρακάτω.

5) διαστρωμάτωση $[60/-60/60]_s$



Το μητρώο καμπτικής δυσκαμψίας προκύπτει:

$$D=\begin{bmatrix}126,094 & 173,117 & 51,498\\ 173,117 & 583,321 & 139,155\\ 51,498 & 139,155 & 202,904\end{bmatrix}$$

Άρα το κρίσιμο φορτίο λυγισμού θα είναι:

$$N_x^{cr}=\frac{\pi^2}{500^2}\left[2\sqrt{126,094\cdot 583,321}+2\left(173,117+2\cdot 202,904\right)\right]=0,0671\ \text{KN/mm}$$

Το μητρώο μεμβρανικής δυσκαμψίας υπολογίζεται:

$$A=\begin{bmatrix}94,571 & 129,838 & 26,739\\ 129,838 & 437,491 & 72,253\\ 26,739 & 72,253 & 152,178\end{bmatrix}$$

Για αξονική θλιπτική δύναμη N_x = -1 KN/mm προκύπτουν οι παραμορφώσεις:

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{16}\\ a_{21} & a_{22} & a_{26}\\ a_{61} & a_{62} & a_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\mathrm{N}_x\\ \mathrm{N}_y\\ \mathrm{N}_{xy}\end{Bmatrix}=10^{-3}\begin{bmatrix}17,934 & -5,194 & -0,607\\ -5,194 & 3,986 & -1\\ -0,607 & -1 & 7,156\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-1\\ 0\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-17,934\\ 5,194\\ 0,607\end{Bmatrix}10^{-3}$$

Με δεδομένες τις παραμορφώσεις υπολογίζονται οι τάσεις:

Για $\theta=60°$ είναι:

$$\sigma=Q^{60°}\varepsilon\Rightarrow\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}Q^{60°}{}_{11} & Q^{60°}{}_{12} & Q^{60°}{}_{16}\\ Q^{60°}{}_{21} & Q^{60°}{}_{22} & Q^{60°}{}_{26}\\ Q^{60°}{}_{61} & Q^{60°}{}_{62} & Q^{60°}{}_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}23,643 & 32,459 & 20,054\\ 32,459 & 109,373 & 54,19\\ 20,054 & 54,19 & 38,045\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-17,934\\ 5,194\\ 0,607\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-0,243\\ 0,019\\ -0,055\end{Bmatrix}$$

Οι τάσεις μετασχηματίζονται στο σύστημα υλικού $1-2$ για c = cos 60° και s = sin 60°:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \tau_{12}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}c^2 & s^2 & 2cs\\ s^2 & c^2 & -2cs\\ -cs & cs & c^2-s^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}0,25 & 0,75 & 0,866\\ 0,75 & 0,25 & -0,866\\ -0,433 & 0,433 & -0,5\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-0,243\\ 0,019\\ -0,055\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-0,094\\ -0,13\\ 0,141\end{Bmatrix}$$

Για $\theta=-60°$ είναι:

$$\sigma = Q^{-60°}\varepsilon \Rightarrow \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q^{-60°}{}_{11} & Q^{-60°}{}_{12} & Q^{-60°}{}_{16} \\ Q^{-60°}{}_{21} & Q^{-60°}{}_{22} & Q^{-60°}{}_{26} \\ Q^{-60°}{}_{61} & Q^{-60°}{}_{62} & Q^{-60°}{}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 23,643 & 32,459 & -20,054 \\ 32,459 & 109,373 & -54,19 \\ -20,054 & -54,19 & 38,045 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -17,934 \\ 5,194 \\ 0,607 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,268 \\ -0,047 \\ 0,101 \end{Bmatrix}$$

Οι τάσεις μετασχηματίζονται στο σύστημα υλικού 1 – 2 για c = cos (-60°) και s = sin (-60°):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2cs \\ s^2 & c^2 & -2cs \\ -cs & cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,25 & 0,75 & -0,866 \\ 0,75 & 0,25 & 0,866 \\ 0,433 & -0,433 & -0,5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0,268 \\ -0,047 \\ 0,101 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,19 \\ -0,125 \\ -0,146 \end{Bmatrix}$$

Συντελεστές ασφαλείας:

$\theta = 60°$	$\frac{X'}{\sigma_1} = \frac{-1,5}{-0,094} = 15,89$	$\frac{Y'}{\sigma_2} = \frac{-0,246}{-0,13} = 1,89$	$\left\lvert \frac{S}{\tau_{12}} \right\rvert = \frac{0,068}{0,141} = 0,48$
$\theta = -60°$	$\frac{X'}{\sigma_1} = \frac{-1,5}{-0,19} = 7,9$	$\frac{Y'}{\sigma_2} = \frac{-0,246}{-0,125} = 1,97$	$\left\lvert \frac{S}{\tau_{12}} \right\rvert = \frac{0,068}{0,146} = 0,4652$

Από τους παραπάνω συντελεστές ασφαλείας προκύπτει ότι η μικρότερη τιμή του φορτίου και συνεπώς το φορτίο αστοχίας είναι:

N_x^u = 0,4652 KN/mm

Και κατά συνέπεια:

$$\overline{\lambda_p} = \sqrt{\frac{N_x^u}{N_x^{cr}}} = \sqrt{\frac{0,4652}{0,0671}} = 2,63$$

$$\rho = \frac{b_{eff}}{b} = \frac{1}{\overline{\lambda_p}} = 0,378$$

$$b_{eff} = \rho \cdot b = 189,94 \text{ mm}$$

6) διαστρωμάτωση $[-60/60/-60]_s$

Εφόσον οι μη μηδενικοί όροι του μητρώου Α διαφοροποιούν τα αποτελέσματα έστω και λίγο, εξετάστηκε κανονικά και η έκτη περίπτωση με την εναλλαγή του πρόσημου και προέκυψε εναλλαγή στις τάσεις και άρα στους συντελεστές ασφαλείας ανάμεσα στις δύο γωνίες. Ενώ στην περίπτωση 5) η αστοχία επέρχεται λόγω της διατμητικής τάσης στη στρώση με -60°, στην 6) επέρχεται λόγω της ίδιας τιμής της διατμητικής τάσης στην στρώση με 60°.

Β) γωνίες ±45°

Περιπτώσεις διαστρωματώσεων που εξετάστηκαν:

1) διαστρωμάτωση $[45/-45/45/-45/45/-45/45/-45]$

2) διαστρωμάτωση $[45/-45/45/-45]_s$

3) διαστρωμάτωση $[-45/45/-45/45]_s$

4) διαστρωμάτωση $[45/-45/45/-45/45/-45]$

5) διαστρωμάτωση $[45/-45/45]_s$

6) διαστρωμάτωση $[-45/45/-45]_s$

7) διαστρωμάτωση $[45/-45/45/-45]$

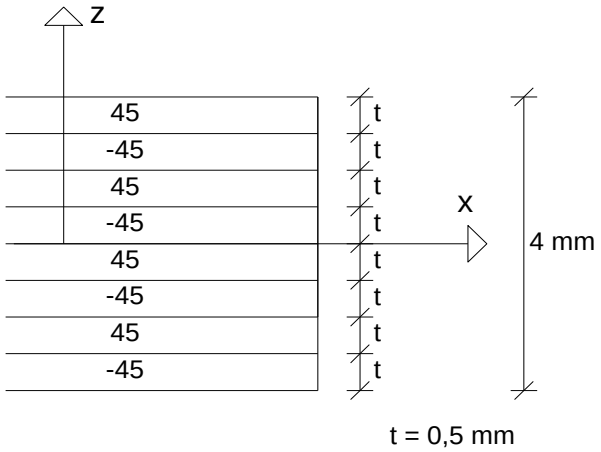
8) διαστρωμάτωση $[45/-45]_s$

9) διαστρωμάτωση $[-45/45]_s$

Αναλυτικά:

Με την ίδια ανάλυση, προέκυψαν παρόμοια αποτελέσματα στις διαστρωματώσεις γωνιών ±45°, οπότε παρατίθενται μόνο οι αναλύσεις των περιπτώσεων 1) και 5), καθώς τα υπόλοιπα αποτελέσματα είναι τα ίδια.

1*) διαστρωμάτωση* $[45/-45/45/-45/45/-45/45/-45]$



Το μητρώο καμπτικής δυσκαμψίας προκύπτει:

$$D=\begin{bmatrix} 302,152 & 225,672 & 0 \\ 225,672 & 302,152 & 0 \\ 0 & 0 & 248,461 \end{bmatrix}$$

Άρα το κρίσιμο φορτίο λυγισμού θα είναι:

$$N_x^{cr}=\frac{\pi^2}{500^2}\left[2\sqrt{302,152\cdot 302,152}+2\left(225,672+2\cdot 248,461\right)\right]=0,0809 \text{ KN/mm}$$

Το μητρώο μεμβρανικής δυσκαμψίας υπολογίζεται:

$$A=\begin{bmatrix} 226,614 & 169,254 & 0 \\ 169,254 & 226,614 & 0 \\ 0 & 0 & 186,346 \end{bmatrix}$$

Για αξονική θλιπτική δύναμη N_x = -1 KN/mm προκύπτουν οι παραμορφώσεις:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{26} \\ a_{61} & a_{62} & a_{66} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \mathrm{N}_x \\ \mathrm{N}_y \\ \mathrm{N}_{xy} \end{Bmatrix}=10^{-3}\begin{bmatrix} 9,98 & -7,454 & 0 \\ -7,454 & 9,98 & 0 \\ 0 & 0 & 5,366 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} -9,98 \\ 7,454 \\ 0 \end{Bmatrix}10^{-3}$$

Με δεδομένες τις παραμορφώσεις υπολογίζονται οι τάσεις:

Για $\theta=45°$ είναι:

$$\sigma=Q^{45°}\varepsilon\Rightarrow\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} Q^{45°}{}_{11} & Q^{45°}{}_{12} & Q^{45°}{}_{16} \\ Q^{45°}{}_{21} & Q^{45°}{}_{22} & Q^{45°}{}_{26} \\ Q^{45°}{}_{61} & Q^{45°}{}_{62} & Q^{45°}{}_{66} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}56,654 & 42,314 & 42,865\\ 42,314 & 56,654 & 42,865\\ 42,865 & 42,865 & 46,587\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-9,98\\ 7,454\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-0,25\\ 0\\ -0,108\end{Bmatrix}$$

Οι τάσεις μετασχηματίζονται στο σύστημα υλικού 1 – 2 για c = cos 45° και s = sin 45°:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \tau_{12}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}c^2 & s^2 & 2cs\\ s^2 & c^2 & -2cs\\ -cs & cs & c^2-s^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}0,5 & 0,5 & 1\\ 0,5 & 0,5 & -1\\ -0,5 & 0,5 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-0,25\\ 0\\ -0,108\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-0,233\\ -0,017\\ 0,125\end{Bmatrix}$$

Για $\theta=-45°$ είναι:

$$\sigma=Q^{-45°}\varepsilon\Rightarrow\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}Q^{-45°}{}_{11} & Q^{-45°}{}_{12} & Q^{-45°}{}_{16}\\ Q^{-45°}{}_{21} & Q^{-45°}{}_{22} & Q^{-45°}{}_{26}\\ Q^{-45°}{}_{61} & Q^{-45°}{}_{62} & Q^{-45°}{}_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}56,654 & 42,314 & -42,865\\ 42,314 & 56,654 & -42,865\\ -42,865 & -42,865 & 46,587\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-9,98\\ 7,454\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-0,25\\ 0\\ 0,108\end{Bmatrix}$$

Οι τάσεις μετασχηματίζονται στο σύστημα υλικού 1 – 2 για c = cos (-45°) και s = sin (-45°):

$$\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \tau_{12}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}c^2 & s^2 & 2cs\\ s^2 & c^2 & -2cs\\ -cs & cs & c^2-s^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}0,5 & 0,5 & -1\\ 0,5 & 0,5 & 1\\ 0,5 & -0,5 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-0,25\\ 0\\ 0,108\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-0,233\\ -0,017\\ -0,125\end{Bmatrix}$$

Συντελεστές ασφαλείας:

$\theta=45°$	$\frac{X'}{\sigma_1}=\frac{-1,5}{-0,233}=6,43$	$\frac{Y'}{\sigma_2}=\frac{-0,246}{-0,017}=14,71$	$\left\lvert\frac{S}{\tau_{12}}\right\rvert=\frac{0,068}{0,125}=0,544$
$\theta=-45°$	$\frac{X'}{\sigma_1}=\frac{-1,5}{-0,233}=6,43$	$\frac{Y'}{\sigma_2}=\frac{-0,246}{-0,017}=14,71$	

Από τους παραπάνω συντελεστές ασφαλείας προκύπτει ότι η μικρότερη τιμή του φορτίου και συνεπώς το φορτίο αστοχίας είναι:

N_x^u = 0,544 KN/mm

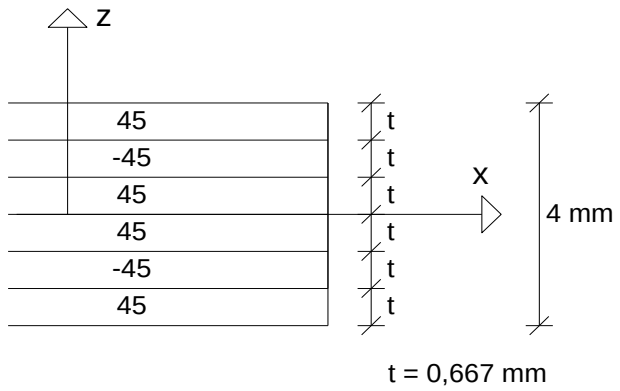
Και κατά συνέπεια:

$$\overline{\lambda_p} = \sqrt{\frac{N_x^u}{N_x^{cr}}} = \sqrt{\frac{0,544}{0,0809}} = 2,59$$

$$\rho = \frac{b_{eff}}{b} = \frac{1}{\overline{\lambda_p}} = 0,3857$$

$$b_{eff} = \rho \cdot b = 192,83 \text{ mm}$$

5) διαστρωμάτωση $[\mathbf{45/-45/45}]_s$



Το μητρώο καμπτικής δυσκαμψίας προκύπτει:

$$D = \begin{bmatrix} 302,152 & 225,672 & 110,073 \\ 225,672 & 302,152 & 110,073 \\ 110,073 & 110,073 & 248,461 \end{bmatrix}$$

Άρα το κρίσιμο φορτίο λυγισμού θα είναι:

$$N_x^{cr} = \frac{\pi^2}{500^2}\left[2\sqrt{302,152 \cdot 302,152} + 2\left(225,672 + 2 \cdot 248,461\right)\right] = 0,0809 \text{ KN/mm}$$

Το μητρώο μεμβρανικής δυσκαμψίας υπολογίζεται:

$$A = \begin{bmatrix} 226,614 & 169,254 & 57,153 \\ 169,254 & 226,614 & 57,153 \\ 57,153 & 57,153 & 186,346 \end{bmatrix}$$

Για αξονική θλιπτική δύναμη N_x = -1 KN/mm προκύπτουν οι παραμορφώσεις:

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{16}\\ a_{21} & a_{22} & a_{26}\\ a_{61} & a_{62} & a_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\mathrm{N}_x\\ \mathrm{N}_y\\ \mathrm{N}_{xy}\end{Bmatrix}=10^{-3}\begin{bmatrix}10,161 & -7,383 & -0,851\\ -7,383 & 10,161 & -0,851\\ -0,851 & -0,851 & 5,898\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-1\\ 0\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-10,161\\ 7,383\\ 0,851\end{Bmatrix}10^{-3}$$

Με δεδομένες τις παραμορφώσεις υπολογίζονται οι τάσεις:

Για $\theta=45°$ είναι:

$$\sigma=Q^{45°}\varepsilon\Rightarrow\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}Q^{45°}{}_{11} & Q^{45°}{}_{12} & Q^{45°}{}_{16}\\ Q^{45°}{}_{21} & Q^{45°}{}_{22} & Q^{45°}{}_{26}\\ Q^{45°}{}_{61} & Q^{45°}{}_{62} & Q^{45°}{}_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}56,654 & 42,314 & 42,865\\ 42,314 & 56,654 & 42,865\\ 42,865 & 42,865 & 46,587\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-10,161\\ 7,383\\ 0,851\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-0,227\\ 0,025\\ -0,079\end{Bmatrix}$$

Οι τάσεις μετασχηματίζονται στο σύστημα υλικού 1 – 2 για c = cos 45° και s = sin 45°:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \tau_{12}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}c^2 & s^2 & 2cs\\ s^2 & c^2 & -2cs\\ -cs & cs & c^2-s^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}0,5 & 0,5 & 1\\ 0,5 & 0,5 & -1\\ -0,5 & 0,5 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-0,227\\ 0,025\\ -0,079\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-0,18\\ -0,022\\ 0,126\end{Bmatrix}$$

Για $\theta=-45°$ είναι:

$$\sigma=Q^{-45°}\varepsilon\Rightarrow\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}Q^{-45°}{}_{11} & Q^{-45°}{}_{12} & Q^{-45°}{}_{16}\\ Q^{-45°}{}_{21} & Q^{-45°}{}_{22} & Q^{-45°}{}_{26}\\ Q^{-45°}{}_{61} & Q^{-45°}{}_{62} & Q^{-45°}{}_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}56,654 & 42,314 & -42,865\\ 42,314 & 56,654 & -42,865\\ -42,865 & -42,865 & 46,587\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-10,161\\ 7,383\\ 0,851\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-0,3\\ -0,048\\ 0,159\end{Bmatrix}$$

Οι τάσεις μετασχηματίζονται στο σύστημα υλικού 1 – 2 για c = cos (-45°) και s = sin (-45°):

$$\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \tau_{12}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}c^2 & s^2 & 2cs\\ s^2 & c^2 & -2cs\\ -cs & cs & c^2-s^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}0,5 & 0,5 & -1\\ 0,5 & 0,5 & 1\\ 0,5 & -0,5 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-0,3\\ -0,048\\ 0,159\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-0,333\\ -0,015\\ -0,126\end{Bmatrix}$$

Συντελεστές ασφαλείας:

$\theta = 45°$	$\frac{X'}{\sigma_1} = \frac{-1,5}{-0,18} = 8,32$	$\frac{Y'}{\sigma_2} = \frac{-0,246}{-0,022} = 11,42$	$\left\lvert \frac{S}{\tau_{12}} \right\rvert = \frac{0,068}{0,126} = 0,5406$
$\theta = -45°$	$\frac{X'}{\sigma_1} = \frac{-1,5}{-0,333} = 4,51$	$\frac{Y'}{\sigma_2} = \frac{-0,246}{-0,015} = 16,17$	

Από τους παραπάνω συντελεστές ασφαλείας προκύπτει ότι η μικρότερη τιμή του φορτίου και συνεπώς το φορτίο αστοχίας είναι:

N_x^u = 0,5406 KN/mm

Και κατά συνέπεια:

$$\overline{\lambda_p} = \sqrt{\frac{N_x^u}{N_x^{cr}}} = \sqrt{\frac{0,5406}{0,0809}} = 2,58$$

$$\rho = \frac{b_{eff}}{b} = \frac{1}{\overline{\lambda_p}} = 0,3869$$

$$b_{eff} = \rho \cdot b = 193,44 \text{ mm}$$

Γ) γωνίες ±30°

Περιπτώσεις διαστρωματώσεων που εξετάστηκαν:

1) διαστρωμάτωση $[\mathbf{30/-30/30/-30/30/-30/30/-30}]$

2) διαστρωμάτωση $[\mathbf{30/-30/30/-30}]_s$

3) διαστρωμάτωση $[\mathbf{-30/30/-30/30}]_s$

4) διαστρωμάτωση $[\mathbf{30/-30/30/-30/30/-30}]$

5) διαστρωμάτωση $[\mathbf{30/-30/30}]_s$

6) διαστρωμάτωση $[\mathbf{-30/30/-30}]_s$

7) διαστρωμάτωση $[\mathbf{30/-30/30/-30}]$

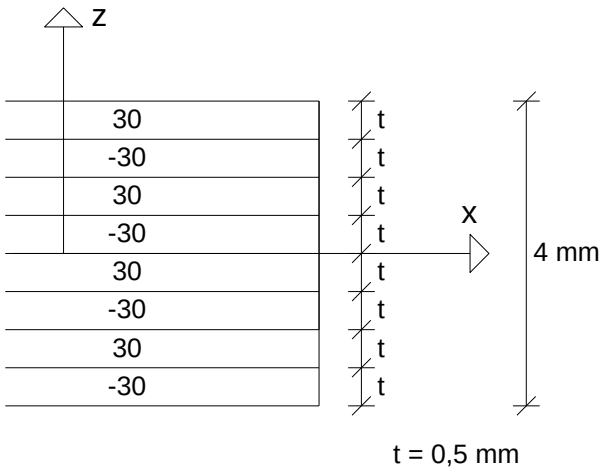
8) διαστρωμάτωση $[\mathbf{30/-30}]_s$

9) διαστρωμάτωση $[\mathbf{-30/30}]_s$

Αναλυτικά:

Με την ίδια ανάλυση, προέκυψαν παρόμοια αποτελέσματα στις διαστρωματώσεις γωνιών $\pm 30^{o}$, οπότε παρατίθενται μόνο οι αναλύσεις των περιπτώσεων 1) και 5), καθώς τα υπόλοιπα αποτελέσματα είναι τα ίδια.

1) ***διαστρωμάτωση*** $[\mathbf{30/-30/30/-30/30/-30/30/-30}]$



Το μητρώο καμπτικής δυσκαμψίας προκύπτει:

$$D = \begin{bmatrix} 583,321 & 173,117 & 0 \\ 173,117 & 126,094 & 0 \\ 0 & 0 & 169,788 \end{bmatrix}$$

Άρα το κρίσιμο φορτίο λυγισμού θα είναι:

$$N_x^{cr} = \frac{\pi^2}{500^2}\left[2\sqrt{583,321 \cdot 126,094} + 2\left(173,117 + 2 \cdot 169,788\right)\right] = 0,0619 \text{ KN/mm}$$

Το μητρώο μεμβρανικής δυσκαμψίας υπολογίζεται:

$$A = \begin{bmatrix} 437,491 & 129,838 & 0 \\ 129,838 & 94,571 & 0 \\ 0 & 0 & 127,341 \end{bmatrix}$$

Για αξονική θλιπτική δύναμη N_x = -1 KN/mm προκύπτουν οι παραμορφώσεις:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{26} \\ a_{61} & a_{62} & a_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathrm{N}_x \\ \mathrm{N}_y \\ \mathrm{N}_{xy} \end{Bmatrix} = 10^{-3} \begin{bmatrix} 3,858 & -5,296 & 0 \\ -5,296 & 17,845 & 0 \\ 0 & 0 & 7,853 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -3,858 \\ 5,296 \\ 0 \end{Bmatrix} 10^{-3}$$

Με δεδομένες τις παραμορφώσεις υπολογίζονται οι τάσεις:

Για $\theta = 30°$ είναι:

$$\sigma = Q^{30°}\varepsilon \Rightarrow \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q^{30°}{}_{11} & Q^{30°}{}_{12} & Q^{30°}{}_{16} \\ Q^{30°}{}_{21} & Q^{30°}{}_{22} & Q^{30°}{}_{26} \\ Q^{30°}{}_{61} & Q^{30°}{}_{62} & Q^{30°}{}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 109,373 & 32,459 & 54,19 \\ 32,459 & 23,643 & 20,054 \\ 54,19 & 20,054 & 31,835 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -3,858 \\ 5,296 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,25 \\ 0 \\ -0,103 \end{Bmatrix}$$

Οι τάσεις μετασχηματίζονται στο σύστημα υλικού 1 – 2 για c = cos 30° και s = sin 30°:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2cs \\ s^2 & c^2 & -2cs \\ -cs & cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,75 & 0,25 & 0,866 \\ 0,25 & 0,75 & -0,866 \\ -0,433 & 0,433 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0,25 \\ 0 \\ -0,103 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,277 \\ 0,027 \\ 0,057 \end{Bmatrix}$$

Για $\theta = -30°$ είναι:

$$\sigma = Q^{-30°}\varepsilon \Rightarrow \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q^{-30°}{}_{11} & Q^{-30°}{}_{12} & Q^{-30°}{}_{16} \\ Q^{-30°}{}_{21} & Q^{-30°}{}_{22} & Q^{-30°}{}_{26} \\ Q^{-30°}{}_{61} & Q^{-30°}{}_{62} & Q^{-30°}{}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 109,373 & 32,459 & -54,19 \\ 32,459 & 23,643 & -20,054 \\ -54,19 & -20,054 & 31,835 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -3,858 \\ 5,296 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,25 \\ 0 \\ 0,103 \end{Bmatrix}$$

Οι τάσεις μετασχηματίζονται στο σύστημα υλικού 1 – 2 για c = cos (-30°) και s = sin (-30°):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2cs \\ s^2 & c^2 & -2cs \\ -cs & cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,75 & 0,25 & -0,866 \\ 0,25 & 0,75 & 0,866 \\ 0,433 & -0,433 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0,25 \\ 0 \\ 0,103 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,277 \\ 0,027 \\ -0,057 \end{Bmatrix}$$

Συντελεστές ασφαλείας:

$\theta = 30°$	$\frac{X'}{\sigma_1} = \frac{-1,5}{-0,277} = 5,42$	$\frac{Y}{\sigma_2} = \frac{0,04}{0,027} = 1,51$	$\left\lvert \frac{S}{\tau_{12}} \right\rvert = \frac{0,068}{0,057} = 1,1964$
$\theta = -30°$	$\frac{X'}{\sigma_1} = \frac{-1,5}{-0,277} = 5,42$	$\frac{Y}{\sigma_2} = \frac{0,04}{0,027} = 1,51$	

Από τους παραπάνω συντελεστές ασφαλείας προκύπτει ότι η μικρότερη τιμή του φορτίου και συνεπώς το φορτίο αστοχίας είναι:

N_x^u = 1,1964 KN/mm

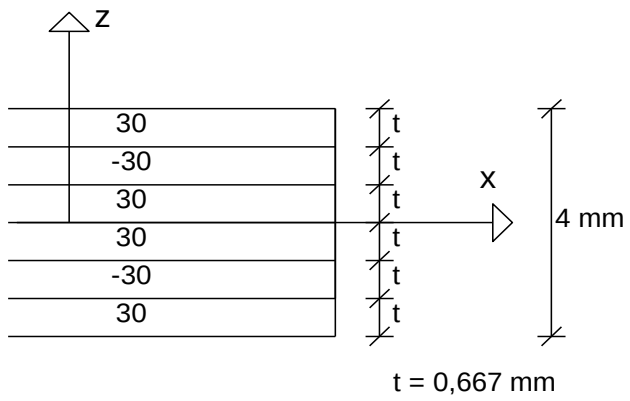
Και κατά συνέπεια:

$$\overline{\lambda_p} = \sqrt{\frac{N_x^u}{N_x^{cr}}} = \sqrt{\frac{1,1964}{0,0619}} = 4,40$$

$$\rho = \frac{b_{eff}}{b} = \frac{1}{\overline{\lambda_p}} = 0,2275$$

$$b_{eff} = \rho \cdot b = 113,73 \text{ mm}$$

5) διαστρωμάτωση $[\mathbf{30 / -30 / 30}]_s$



Το μητρώο καμπτικής δυσκαμψίας προκύπτει:

$$D = \begin{bmatrix} 583,321 & 173,117 & 139,155 \\ 173,117 & 126,094 & 51,498 \\ 139,155 & 51,498 & 169,788 \end{bmatrix}$$

Άρα το κρίσιμο φορτίο λυγισμού θα είναι:

$$N_x^{cr} = \frac{\pi^2}{500^2}\left[2\sqrt{583,321 \cdot 126,094} + 2\left(173,117 + 2 \cdot 169,788\right)\right] = 0,0619 \text{ KN/mm}$$

Το μητρώο μεμβρανικής δυσκαμψίας υπολογίζεται:

$$A = \begin{bmatrix} 437,491 & 129,838 & 72,253 \\ 129,838 & 94,571 & 26,739 \\ 72,253 & 26,739 & 127,341 \end{bmatrix}$$

Για αξονική θλιπτική δύναμη N_x = -1 KN/mm προκύπτουν οι παραμορφώσεις:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{26} \\ a_{61} & a_{62} & a_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathrm{N}_x \\ \mathrm{N}_y \\ \mathrm{N}_{xy} \end{Bmatrix} = 10^{-3} \begin{bmatrix} 4,017 & -5,176 & -1,218 \\ -5,176 & 17,946 & -0,74 \\ -1,218 & -0,74 & 8,716 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -4,017 \\ 5,176 \\ 1,218 \end{Bmatrix} 10^{-3}$$

Με δεδομένες τις παραμορφώσεις υπολογίζονται οι τάσεις:

Για $\theta = 30°$ είναι:

$$\sigma = Q^{30°}\varepsilon \Rightarrow \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q^{30°}{}_{11} & Q^{30°}{}_{12} & Q^{30°}{}_{16} \\ Q^{30°}{}_{21} & Q^{30°}{}_{22} & Q^{30°}{}_{26} \\ Q^{30°}{}_{61} & Q^{30°}{}_{62} & Q^{30°}{}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 109,373 & 32,459 & 54,19 \\ 32,459 & 23,643 & 20,054 \\ 54,19 & 20,054 & 31,835 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -4,017 \\ 5,176 \\ 1,218 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,205 \\ 0,016 \\ -0,075 \end{Bmatrix}$$

Οι τάσεις μετασχηματίζονται στο σύστημα υλικού 1 – 2 για c = cos 30° και s = sin 30°:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2cs \\ s^2 & c^2 & -2cs \\ -cs & cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,75 & 0,25 & 0,866 \\ 0,25 & 0,75 & -0,866 \\ -0,433 & 0,433 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0,205 \\ 0,016 \\ -0,075 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,215 \\ 0,026 \\ 0,058 \end{Bmatrix}$$

Για $\theta = -30°$ είναι:

$$\sigma = Q^{-30°}\varepsilon \Rightarrow \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q^{-30°}{}_{11} & Q^{-30°}{}_{12} & Q^{-30°}{}_{16} \\ Q^{-30°}{}_{21} & Q^{-30°}{}_{22} & Q^{-30°}{}_{26} \\ Q^{-30°}{}_{61} & Q^{-30°}{}_{62} & Q^{-30°}{}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 109,373 & 32,459 & -54,19 \\ 32,459 & 23,643 & -20,054 \\ -54,19 & -20,054 & 31,835 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -4,017 \\ 5,176 \\ 1,218 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,337 \\ -0,032 \\ 0,153 \end{Bmatrix}$$

Οι τάσεις μετασχηματίζονται στο σύστημα υλικού 1 – 2 για c = cos (-30°) και s = sin (-30°):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2cs \\ s^2 & c^2 & -2cs \\ -cs & cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,75 & 0,25 & -0,866 \\ 0,25 & 0,75 & 0,866 \\ 0,433 & -0,433 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0,337 \\ -0,032 \\ 0,153 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,393 \\ 0,024 \\ -0,056 \end{Bmatrix}$$

Συντελεστές ασφαλείας:

$\theta = 30°$	$\frac{X'}{\sigma_1} = \frac{-1,5}{-0,215} = 6,98$	$\frac{Y}{\sigma_2} = \frac{0,04}{0,026} = 1,54$	$\left\lvert \frac{S}{\tau_{12}} \right\rvert = \frac{0,068}{0,058} = 1,1631$
$\theta = -30°$	$\frac{X'}{\sigma_1} = \frac{-1,5}{-0,393} = 3,81$	$\frac{Y}{\sigma_2} = \frac{0,04}{0,024} = 1,70$	$\left\lvert \frac{S}{\tau_{12}} \right\rvert = \frac{0,068}{0,056} = 1,22$

Από τους παραπάνω συντελεστές ασφαλείας προκύπτει ότι η μικρότερη τιμή του φορτίου και συνεπώς το φορτίο αστοχίας είναι:

N_x^u = 1,1631 KN/mm

Και κατά συνέπεια:

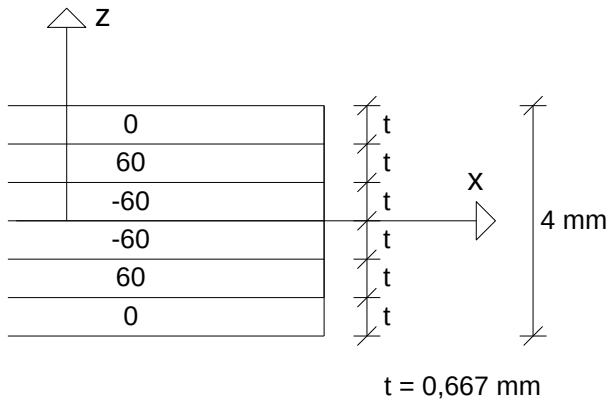
$$\overline{\lambda_p} = \sqrt{\frac{N_x^u}{N_x^{cr}}} = \sqrt{\frac{1,1631}{0,0619}} = 4,34$$

$$\rho = \frac{b_{eff}}{b} = \frac{1}{\overline{\lambda_p}} = 0,2307$$

$$b_{eff} = \rho \cdot b = 115,34 \text{ mm}$$

3.2.3 Ψευδο – Ισότροπη Διαστρωμάτωση

- **$\pi / 3$ - $[0 / 60 / -60]_S$**



Το μητρώο καμπτικής δυσκαμψίας προκύπτει:

$$D=\begin{bmatrix} 719,672 & 62,167 & 23,768 \\ 62,167 & 211,643 & 64,225 \\ 23,768 & 64,225 & 87,029 \end{bmatrix}$$

Άρα το κρίσιμο φορτίο λυγισμού θα είναι:

$$N_x^{cr}=\frac{\pi^2}{500^2}\left[2\sqrt{719,672\cdot 211,643}+2\left(62,167+2\cdot 87,029\right)\right]=0,0495 \text{ KN/mm}$$

Το μητρώο μεμβρανικής δυσκαμψίας υπολογίζεται:

$$A=\begin{bmatrix} 305,447 & 90,421 & 0 \\ 90,421 & 305,447 & 0 \\ 0 & 0 & 111,012 \end{bmatrix}$$

Για αξονική θλιπτική δύναμη N_x = -1 KN/mm προκύπτουν οι παραμορφώσεις:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{26} \\ a_{61} & a_{62} & a_{66} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \mathrm{N}_x \\ \mathrm{N}_y \\ \mathrm{N}_{xy} \end{Bmatrix}=10^{-3}\begin{bmatrix} 3,588 & -1,062 & 0 \\ -1,062 & 3,588 & 0 \\ 0 & 0 & 9,008 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} -3,588 \\ 1,062 \\ 0 \end{Bmatrix}10^{-3}$$

Με δεδομένες τις παραμορφώσεις υπολογίζονται οι τάσεις:

Για $\theta=0°$ είναι:

$$\sigma=Q^0\varepsilon\Rightarrow\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} Q^0{}_{11} & Q^0{}_{12} & Q^0{}_{16} \\ Q^0{}_{21} & Q^0{}_{22} & Q^0{}_{26} \\ Q^0{}_{61} & Q^0{}_{62} & Q^0{}_{66} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} 181,8 & 2,897 & 0 \\ 2,897 & 10,34 & 0 \\ 0 & 0 & 7,17 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} -3,588 \\ 1,062 \\ 0 \end{Bmatrix}10^{-3}=\begin{Bmatrix} -0,649 \\ 0,001 \\ 0 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}$$

Για $\theta=60°$ είναι:

$$\sigma=Q^{60°}\varepsilon\Rightarrow\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} Q^{60°}{}_{11} & Q^{60°}{}_{12} & Q^{60°}{}_{16} \\ Q^{60°}{}_{21} & Q^{60°}{}_{22} & Q^{60°}{}_{26} \\ Q^{60°}{}_{61} & Q^{60°}{}_{62} & Q^{60°}{}_{66} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} 23,643 & 32,459 & 20,054 \\ 32,459 & 109,373 & 54,19 \\ 20,054 & 54,19 & 38,045 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} -3,588 \\ 1,062 \\ 0 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} -0,05 \\ 0 \\ -0,014 \end{Bmatrix}$$

Οι τάσεις μετασχηματίζονται στο σύστημα υλικού 1 – 2 για c = cos 60° και s = sin 60°:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \tau_{12}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}c^2 & s^2 & 2cs\\ s^2 & c^2 & -2cs\\ -cs & cs & c^2-s^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}0,25 & 0,75 & 0,866\\ 0,75 & 0,25 & -0,866\\ -0,433 & 0,433 & -0,5\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-0,05\\ 0\\ -0,014\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-0,025\\ -0,025\\ 0,029\end{Bmatrix}$$

Για $\theta=-60°$ είναι:

$$\sigma=Q^{-60°}\varepsilon\Rightarrow\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}Q^{-60°}{}_{11} & Q^{-60°}{}_{12} & Q^{-60°}{}_{16}\\ Q^{-60°}{}_{21} & Q^{-60°}{}_{22} & Q^{-60°}{}_{26}\\ Q^{-60°}{}_{61} & Q^{-60°}{}_{62} & Q^{-60°}{}_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}23,643 & 32,459 & -20,054\\ 32,459 & 109,373 & -54,19\\ -20,054 & -54,19 & 38,045\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-3,588\\ 1,062\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-0,05\\ 0\\ 0,014\end{Bmatrix}$$

Οι τάσεις μετασχηματίζονται στο σύστημα υλικού 1 – 2 για c = cos (-60°) και s = sin (-60°):

$$\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \tau_{12}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}c^2 & s^2 & 2cs\\ s^2 & c^2 & -2cs\\ -cs & cs & c^2-s^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}0,25 & 0,75 & -0,866\\ 0,75 & 0,25 & 0,866\\ 0,433 & -0,433 & -0,5\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-0,05\\ 0\\ 0,014\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-0,025\\ -0,025\\ -0,029\end{Bmatrix}$$

Συντελεστές ασφαλείας:

$\theta=0°$	$\frac{X'}{\sigma_1}=\frac{-1,5}{-0,649}=2,31$	$\frac{Y}{\sigma_2}=\frac{0,04}{0,001}=68,00$	
$\theta=60°$	$\frac{X'}{\sigma_1}=\frac{-1,5}{-0,025}=59,34$	$\frac{Y'}{\sigma_2}=\frac{-0,246}{-0,025}=9,70$	$\left\lvert\frac{S}{\tau_{12}}\right\rvert=\frac{0,068}{0,029}=2,35$
$\theta=-60°$	$\frac{X'}{\sigma_1}=\frac{-1,5}{-0,025}=59,34$	$\frac{Y'}{\sigma_2}=\frac{-0,246}{-0,025}=9,70$	$\left\lvert\frac{S}{\tau_{12}}\right\rvert=\frac{0,068}{0,029}=2,35$

Από τους παραπάνω συντελεστές ασφαλείας προκύπτει ότι η μικρότερη τιμή του φορτίου και συνεπώς το φορτίο αστοχίας είναι:

N_x^u = 2,31 KN/mm

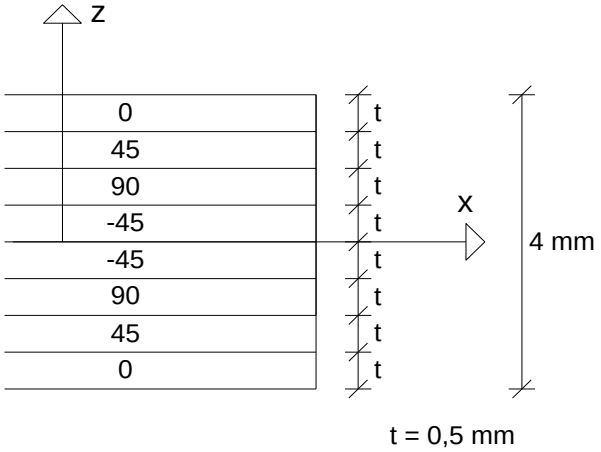
Και κατά συνέπεια:

$$\overline{\lambda_p}=\sqrt{\frac{N_x^u}{N_x^{cr}}}=\sqrt{\frac{2,31}{0,0495}}=6,83$$

$$\rho = \frac{b_{eff}}{b} = \frac{1}{\bar{\bar{\lambda}}_p} = 0{,}1463$$

$$b_{eff} = \rho \cdot b = 73{,}16 \text{ mm}$$

- **$\pi / 4$ - $[0/45/90/-45]_s$**



Το μητρώο καμπτικής δυσκαμψίας προκύπτει:

$$D = \begin{bmatrix} 661{,}004 & 81{,}145 & 64{,}298 \\ 81{,}145 & 232{,}354 & 64{,}298 \\ 64{,}298 & 64{,}298 & 103{,}934 \end{bmatrix}$$

Άρα το κρίσιμο φορτίο λυγισμού θα είναι:

$$N_x^{cr} = \frac{\pi^2}{500^2}\left[2\sqrt{661{,}004 \cdot 232{,}354} + 2\left(81{,}145 + 2 \cdot 103{,}934\right)\right] = 0{,}0538 \text{ KN/mm}$$

Το μητρώο μεμβρανικής δυσκαμψίας υπολογίζεται:

$$A = \begin{bmatrix} 305{,}447 & 90{,}421 & 0 \\ 90{,}421 & 305{,}447 & 0 \\ 0 & 0 & 107{,}513 \end{bmatrix}$$

Για αξονική θλιπτική δύναμη N_x = -1 KN/mm προκύπτουν οι παραμορφώσεις:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{26} \\ a_{61} & a_{62} & a_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathrm{N}_x \\ \mathrm{N}_y \\ \mathrm{N}_{xy} \end{Bmatrix} = 10^{-3} \begin{bmatrix} 3{,}588 & -1{,}062 & 0 \\ -1{,}062 & 3{,}588 & 0 \\ 0 & 0 & 9{,}301 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -3{,}588 \\ 1{,}062 \\ 0 \end{Bmatrix} 10^{-3}$$

Με δεδομένες τις παραμορφώσεις υπολογίζονται οι τάσεις:

Για $\theta = 0°$ είναι:

$$\sigma = Q^0 \varepsilon \Rightarrow \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q^0{}_{11} & Q^0{}_{12} & Q^0{}_{16} \\ Q^0{}_{21} & Q^0{}_{22} & Q^0{}_{26} \\ Q^0{}_{61} & Q^0{}_{62} & Q^0{}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 181,8 & 2,897 & 0 \\ 2,897 & 10,34 & 0 \\ 0 & 0 & 7,17 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -3,588 \\ 1,062 \\ 0 \end{Bmatrix} 10^{-3} = \begin{Bmatrix} -0,649 \\ 0,001 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}$$

Για $\theta = 45°$ είναι:

$$\sigma = Q^{45°} \varepsilon \Rightarrow \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q^{45°}{}_{11} & Q^{45°}{}_{12} & Q^{45°}{}_{16} \\ Q^{45°}{}_{21} & Q^{45°}{}_{22} & Q^{45°}{}_{26} \\ Q^{45°}{}_{61} & Q^{45°}{}_{62} & Q^{45°}{}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 56,654 & 42,314 & 42,865 \\ 42,314 & 56,654 & 42,865 \\ 42,865 & 42,865 & 46,587 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -3,588 \\ 1,062 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,158 \\ -0,092 \\ -0,108 \end{Bmatrix}$$

Οι τάσεις μετασχηματίζονται στο σύστημα υλικού $1-2$ για c = cos 45° και s = sin 45°:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2cs \\ s^2 & c^2 & -2cs \\ -cs & cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 & 1 \\ 0,5 & 0,5 & -1 \\ -0,5 & 0,5 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0,158 \\ -0,092 \\ -0,108 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,233 \\ -0,017 \\ 0,033 \end{Bmatrix}$$

Για $\theta = 90°$ είναι:

$$\sigma = Q^{90°} \varepsilon \Rightarrow \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q^{90°}{}_{11} & Q^{90°}{}_{12} & Q^{90°}{}_{16} \\ Q^{90°}{}_{21} & Q^{90°}{}_{22} & Q^{90°}{}_{26} \\ Q^{90°}{}_{61} & Q^{90°}{}_{62} & Q^{90°}{}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 10,34 & 2,897 & 0 \\ 2,897 & 181,8 & 0 \\ 0 & 0 & 7,17 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -3,588 \\ 1,062 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,034 \\ 0,183 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Οι τάσεις μετασχηματίζονται στο σύστημα υλικού $1-2$ για c = cos 90° και s = sin 90°:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \tau_{12}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}c^2 & s^2 & 2cs\\ s^2 & c^2 & -2cs\\ -cs & cs & c^2-s^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-0,034\\ 0,183\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0,183\\ -0,034\\ 0\end{Bmatrix}$$

Για $\theta=-45°$ είναι:

$$\sigma=Q^{-45°}\varepsilon\Rightarrow\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}Q^{-45°}{}_{11} & Q^{-45°}{}_{12} & Q^{-45°}{}_{16}\\ Q^{-45°}{}_{21} & Q^{-45°}{}_{22} & Q^{-45°}{}_{26}\\ Q^{-45°}{}_{61} & Q^{-45°}{}_{62} & Q^{-45°}{}_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}56,654 & 42,314 & -42,865\\ 42,314 & 56,654 & -42,865\\ -42,865 & -42,865 & 46,587\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-3,588\\ 1,062\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-0,158\\ -0,092\\ 0,108\end{Bmatrix}$$

Οι τάσεις μετασχηματίζονται στο σύστημα υλικού 1 – 2 για c = cos (-45°) και s = sin (-45°):

$$\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \tau_{12}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}c^2 & s^2 & 2cs\\ s^2 & c^2 & -2cs\\ -cs & cs & c^2-s^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}0,5 & 0,5 & -1\\ 0,5 & 0,5 & 1\\ 0,5 & -0,5 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-0,158\\ -0,092\\ 0,108\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-0,233\\ -0,017\\ -0,033\end{Bmatrix}$$

Συντελεστές ασφαλείας:

$\theta=0°$	$\frac{X'}{\sigma_1}=\frac{-1,5}{-0,649}=2,31$	$\frac{Y}{\sigma_2}=\frac{0,04}{0,001}=68,00$	
$\theta=45°$	$\frac{X'}{\sigma_1}=\frac{-1,5}{-0,233}=6,43$	$\frac{Y'}{\sigma_2}=\frac{-0,246}{-0,017}=14,71$	$\left\lvert\frac{S}{\tau_{12}}\right\rvert=\frac{0,068}{0,033}=2,04$
$\theta=90°$	$\frac{X}{\sigma_1}=\frac{1,5}{0,183}=8,21$	$\frac{Y'}{\sigma_2}=\frac{-0,246}{-0,034}=7,23$	
$\theta=-45°$	$\frac{X'}{\sigma_1}=\frac{-1,5}{-0,233}=6,43$	$\frac{Y'}{\sigma_2}=\frac{-0,246}{-0,017}=14,71$	$\left\lvert\frac{S}{\tau_{12}}\right\rvert=\frac{0,068}{0,033}=2,04$

Από τους παραπάνω συντελεστές ασφαλείας προκύπτει ότι η μικρότερη τιμή του φορτίου και συνεπώς το φορτίο αστοχίας είναι:

N_x^u = 2,04 KN/mm

Και κατά συνέπεια:

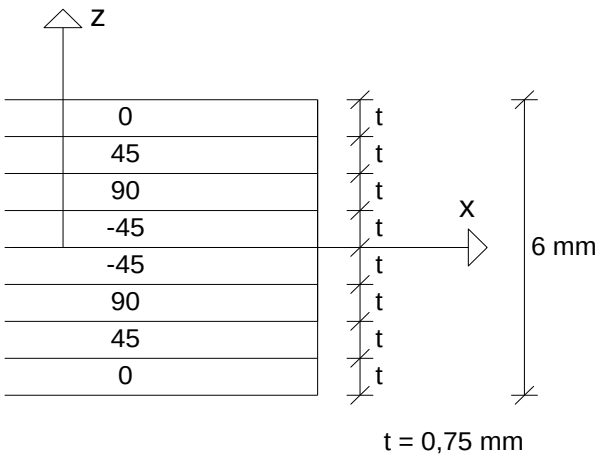
$$\overline{\lambda_p} = \sqrt{\frac{N_x^u}{N_x^{cr}}} = \sqrt{\frac{2,04}{0,0538}} = 6,16$$

$$\rho = \frac{b_{eff}}{b} = \frac{1}{\overline{\lambda_p}} = 0,1624$$

$$b_{eff} = \rho \cdot b = 81,18 \text{ mm}$$

3.2.4 Διερεύνηση Πάχους στη Διαστρωμάτωση π / 4 - $[0/45/90/-45]_s$

- **h = 6 mm**



Το μητρώο καμπτικής δυσκαμψίας προκύπτει:

$$D = \begin{bmatrix} 2230,889 & 273,864 & 217,004 \\ 273,864 & 784,195 & 217,004 \\ 217,004 & 217,004 & 350,778 \end{bmatrix}$$

Άρα το κρίσιμο φορτίο λυγισμού θα είναι:

$$N_x^{cr} = \frac{\pi^2}{500^2}\left[2\sqrt{2230,889 \cdot 784,195} + 2\left(273,864 + 2 \cdot 350,778\right)\right] = 0,1814 \text{ KN/mm}$$

Το μητρώο μεμβρανικής δυσκαμψίας υπολογίζεται:

$$A = \begin{bmatrix} 458,171 & 135,632 & 0 \\ 135,632 & 458,171 & 0 \\ 0 & 0 & 161,27 \end{bmatrix}$$

Για αξονική θλιπτική δύναμη N_x = -1 KN/mm προκύπτουν οι παραμορφώσεις:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{26} \\ a_{61} & a_{62} & a_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathrm{N}_x \\ \mathrm{N}_y \\ \mathrm{N}_{xy} \end{Bmatrix} = 10^{-3} \begin{bmatrix} 2,392 & -0,708 & 0 \\ -0,708 & 2,392 & 0 \\ 0 & 0 & 6,201 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2,392 \\ 0,708 \\ 0 \end{Bmatrix} 10^{-3}$$

Με δεδομένες τις παραμορφώσεις υπολογίζονται οι τάσεις:

Για $\theta = 0°$ είναι:

$$\sigma = Q^0 \varepsilon \Rightarrow \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q^0{}_{11} & Q^0{}_{12} & Q^0{}_{16} \\ Q^0{}_{21} & Q^0{}_{22} & Q^0{}_{26} \\ Q^0{}_{61} & Q^0{}_{62} & Q^0{}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 181,8 & 2,897 & 0 \\ 2,897 & 10,34 & 0 \\ 0 & 0 & 7,17 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -2,392 \\ 0,708 \\ 0 \end{Bmatrix} 10^{-3} = \begin{Bmatrix} -0,433 \\ 0,0004 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}$$

Για $\theta = 45°$ είναι:

$$\sigma = Q^{45°} \varepsilon \Rightarrow \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q^{45°}{}_{11} & Q^{45°}{}_{12} & Q^{45°}{}_{16} \\ Q^{45°}{}_{21} & Q^{45°}{}_{22} & Q^{45°}{}_{26} \\ Q^{45°}{}_{61} & Q^{45°}{}_{62} & Q^{45°}{}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 56,654 & 42,314 & 42,865 \\ 42,314 & 56,654 & 42,865 \\ 42,865 & 42,865 & 46,587 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -2,392 \\ 0,708 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,106 \\ -0,061 \\ -0,072 \end{Bmatrix}$$

Οι τάσεις μετασχηματίζονται στο σύστημα υλικού $1-2$ για c = cos 45° και s = sin 45°:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2cs \\ s^2 & c^2 & -2cs \\ -cs & cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 & 1 \\ 0,5 & 0,5 & -1 \\ -0,5 & 0,5 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0,106 \\ -0,061 \\ -0,072 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,156 \\ -0,011 \\ 0,022 \end{Bmatrix}$$

Για $\theta = 90°$ είναι:

$$\sigma = Q^{90°} \varepsilon \Rightarrow \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q^{90°}{}_{11} & Q^{90°}{}_{12} & Q^{90°}{}_{16} \\ Q^{90°}{}_{21} & Q^{90°}{}_{22} & Q^{90°}{}_{26} \\ Q^{90°}{}_{61} & Q^{90°}{}_{62} & Q^{90°}{}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}10,34 & 2,897 & 0\\ 2,897 & 181,8 & 0\\ 0 & 0 & 7,17\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-2,392\\ 0,708\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-0,023\\ 0,122\\ 0\end{Bmatrix}$$

Οι τάσεις μετασχηματίζονται στο σύστημα υλικού 1 – 2 για c = cos 90° και s = sin 90°:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \tau_{12}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}c^2 & s^2 & 2cs\\ s^2 & c^2 & -2cs\\ -cs & cs & c^2-s^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-0,023\\ 0,122\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0,122\\ -0,023\\ 0\end{Bmatrix}$$

Για $\theta=-45°$ είναι:

$$\sigma=Q^{-45°}\varepsilon\Rightarrow\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}Q^{-45°}{}_{11} & Q^{-45°}{}_{12} & Q^{-45°}{}_{16}\\ Q^{-45°}{}_{21} & Q^{-45°}{}_{22} & Q^{-45°}{}_{26}\\ Q^{-45°}{}_{61} & Q^{-45°}{}_{62} & Q^{-45°}{}_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}56,654 & 42,314 & -42,865\\ 42,314 & 56,654 & -42,865\\ -42,865 & -42,865 & 46,587\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-2,392\\ 0,708\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-0,106\\ -0,061\\ 0,072\end{Bmatrix}$$

Οι τάσεις μετασχηματίζονται στο σύστημα υλικού 1 – 2 για c = cos (-45°) και s = sin (-45°):

$$\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \tau_{12}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}c^2 & s^2 & 2cs\\ s^2 & c^2 & -2cs\\ -cs & cs & c^2-s^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}0,5 & 0,5 & -1\\ 0,5 & 0,5 & 1\\ 0,5 & -0,5 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-0,106\\ -0,061\\ 0,072\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-0,156\\ -0,011\\ -0,022\end{Bmatrix}$$

Συντελεστές ασφαλείας:

$\theta=0°$	$\frac{X'}{\sigma_1}=\frac{-1,5}{-0,433}=3,47$	$\frac{Y}{\sigma_2}=\frac{0,04}{0,0004}=102,00$	
$\theta=45°$	$\frac{X'}{\sigma_1}=\frac{-1,5}{-0,156}=9,65$	$\frac{Y'}{\sigma_2}=\frac{-0,246}{-0,011}=22,07$	$\left\lvert\frac{S}{\tau_{12}}\right\rvert=\frac{0,068}{0,022}=3,06$
$\theta=90°$	$\frac{X}{\sigma_1}=\frac{1,5}{0,122}=12,31$	$\frac{Y'}{\sigma_2}=\frac{-0,246}{-0,023}=10,84$	
$\theta=-45°$	$\frac{X'}{\sigma_1}=\frac{-1,5}{-0,156}=9,65$	$\frac{Y'}{\sigma_2}=\frac{-0,246}{-0,011}=22,07$	$\left\lvert\frac{S}{\tau_{12}}\right\rvert=\frac{0,068}{0,022}=3,06$

Από τους παραπάνω συντελεστές ασφαλείας προκύπτει ότι η μικρότερη τιμή του φορτίου και συνεπώς το φορτίο αστοχίας είναι:

N_x^u = 3,06 KN/mm

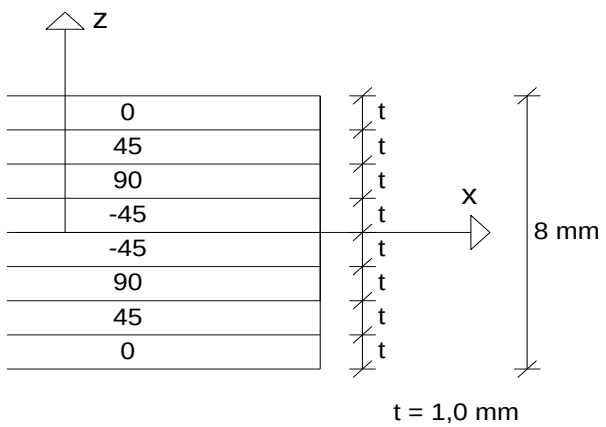
Και κατά συνέπεια:

$$\overline{\lambda_p} = \sqrt{\frac{N_x^u}{N_x^{cr}}} = \sqrt{\frac{3,06}{0,1814}} = 4,11$$

$$\rho = \frac{b_{eff}}{b} = \frac{1}{\overline{\lambda_p}} = 0,2436$$

$$b_{eff} = \rho \cdot b = 121,78 \text{ mm}$$

- **h = 8 mm**



Το μητρώο καμπτικής δυσκαμψίας προκύπτει:

$$D = \begin{bmatrix} 5288,033 & 649,159 & 514,38 \\ 649,159 & 1858,833 & 514,38 \\ 514,38 & 514,38 & 831,473 \end{bmatrix}$$

Άρα το κρίσιμο φορτίο λυγισμού θα είναι:

$$N_x^{cr} = \frac{\pi^2}{500^2}\left[2\sqrt{5288,033 \cdot 1858,833} + 2\left(649,159 + 2 \cdot 831,473\right)\right] = 0,4301 \text{ KN/mm}$$

Το μητρώο μεμβρανικής δυσκαμψίας υπολογίζεται:

$$A = \begin{bmatrix} 610,894 & 180,842 & 0 \\ 180,842 & 610,894 & 0 \\ 0 & 0 & 215,026 \end{bmatrix}$$

Για αξονική θλιπτική δύναμη N_x = -1 KN/mm προκύπτουν οι παραμορφώσεις:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{26} \\ a_{61} & a_{62} & a_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathrm{N}_x \\ \mathrm{N}_y \\ \mathrm{N}_{xy} \end{Bmatrix} = 10^{-3} \begin{bmatrix} 1,794 & -0,531 & 0 \\ -0,531 & 1,794 & 0 \\ 0 & 0 & 4,651 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1,794 \\ 0,531 \\ 0 \end{Bmatrix} 10^{-3}$$

Με δεδομένες τις παραμορφώσεις υπολογίζονται οι τάσεις:

Για $\theta = 0°$ είναι:

$$\sigma = Q^0 \varepsilon \Rightarrow \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q^0{}_{11} & Q^0{}_{12} & Q^0{}_{16} \\ Q^0{}_{21} & Q^0{}_{22} & Q^0{}_{26} \\ Q^0{}_{61} & Q^0{}_{62} & Q^0{}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 181,8 & 2,897 & 0 \\ 2,897 & 10,34 & 0 \\ 0 & 0 & 7,17 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -1,794 \\ 0,531 \\ 0 \end{Bmatrix} 10^{-3} = \begin{Bmatrix} -0,325 \\ 0,0003 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}$$

Για $\theta = 45°$ είναι:

$$\sigma = Q^{45°} \varepsilon \Rightarrow \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q^{45°}{}_{11} & Q^{45°}{}_{12} & Q^{45°}{}_{16} \\ Q^{45°}{}_{21} & Q^{45°}{}_{22} & Q^{45°}{}_{26} \\ Q^{45°}{}_{61} & Q^{45°}{}_{62} & Q^{45°}{}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 56,654 & 42,314 & 42,865 \\ 42,314 & 56,654 & 42,865 \\ 42,865 & 42,865 & 46,587 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -1,794 \\ 0,531 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,079 \\ -0,046 \\ -0,054 \end{Bmatrix}$$

Οι τάσεις μετασχηματίζονται στο σύστημα υλικού $1-2$ για c = cos 45° και s = sin 45°:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2cs \\ s^2 & c^2 & -2cs \\ -cs & cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 & 1 \\ 0,5 & 0,5 & -1 \\ -0,5 & 0,5 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0,079 \\ -0,046 \\ -0,054 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,117 \\ -0,008 \\ 0,017 \end{Bmatrix}$$

Για $\theta = 90°$ είναι:

$$\sigma = Q^{90°} \varepsilon \Rightarrow \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q^{90°}{}_{11} & Q^{90°}{}_{12} & Q^{90°}{}_{16} \\ Q^{90°}{}_{21} & Q^{90°}{}_{22} & Q^{90°}{}_{26} \\ Q^{90°}{}_{61} & Q^{90°}{}_{62} & Q^{90°}{}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}10,34 & 2,897 & 0\\ 2,897 & 181,8 & 0\\ 0 & 0 & 7,17\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-1,794\\ 0,531\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-0,017\\ 0,091\\ 0\end{Bmatrix}$$

Οι τάσεις μετασχηματίζονται στο σύστημα υλικού 1 – 2 για c = cos 90° και s = sin 90°:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \tau_{12}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}c^2 & s^2 & 2cs\\ s^2 & c^2 & -2cs\\ -cs & cs & c^2-s^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-0,017\\ 0,091\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0,091\\ -0,017\\ 0\end{Bmatrix}$$

Για $\theta=-45°$ είναι:

$$\sigma=Q^{-45°}\varepsilon\Rightarrow\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}Q^{-45°}{}_{11} & Q^{-45°}{}_{12} & Q^{-45°}{}_{16}\\ Q^{-45°}{}_{21} & Q^{-45°}{}_{22} & Q^{-45°}{}_{26}\\ Q^{-45°}{}_{61} & Q^{-45°}{}_{62} & Q^{-45°}{}_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}56,654 & 42,314 & -42,865\\ 42,314 & 56,654 & -42,865\\ -42,865 & -42,865 & 46,587\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-1,794\\ 0,531\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-0,079\\ -0,046\\ 0,054\end{Bmatrix}$$

Οι τάσεις μετασχηματίζονται στο σύστημα υλικού 1 – 2 για c = cos (-45°) και s = sin (-45°):

$$\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \tau_{12}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}c^2 & s^2 & 2cs\\ s^2 & c^2 & -2cs\\ -cs & cs & c^2-s^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}0,5 & 0,5 & -1\\ 0,5 & 0,5 & 1\\ 0,5 & -0,5 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-0,079\\ -0,046\\ 0,054\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-0,117\\ -0,008\\ -0,017\end{Bmatrix}$$

Συντελεστές ασφαλείας:

$\theta=0°$	$\frac{X'}{\sigma_1}=\frac{-1,5}{-0,325}=4,62$	$\frac{Y}{\sigma_2}=\frac{0,04}{0,0003}=136,00$	
$\theta=45°$	$\frac{X'}{\sigma_1}=\frac{-1,5}{-0,117}=12,86$	$\frac{Y'}{\sigma_2}=\frac{-0,246}{-0,008}=29,43$	$\left\lvert\frac{S}{\tau_{12}}\right\rvert=\frac{0,068}{0,017}=4,08$
$\theta=90°$	$\frac{X}{\sigma_1}=\frac{1,5}{0,091}=16,42$	$\frac{Y'}{\sigma_2}=\frac{-0,246}{-0,017}=14,46$	
$\theta=-45°$	$\frac{X'}{\sigma_1}=\frac{-1,5}{-0,117}=12,86$	$\frac{Y'}{\sigma_2}=\frac{-0,246}{-0,008}=29,43$	$\left\lvert\frac{S}{\tau_{12}}\right\rvert=\frac{0,068}{0,017}=4,08$

Από τους παραπάνω συντελεστές ασφαλείας προκύπτει ότι η μικρότερη τιμή του φορτίου και συνεπώς το φορτίο αστοχίας είναι:

N_x^u = 4,08 KN/mm

Και κατά συνέπεια:

$$\overline{\lambda_p} = \sqrt{\frac{N_x^u}{N_x^{cr}}} = \sqrt{\frac{4,08}{0,4301}} = 3,08$$

$$\rho = \frac{b_{eff}}{b} = \frac{1}{\overline{\lambda_p}} = 0,3247$$

$$b_{eff} = \rho \cdot b = 162,37 \text{ mm}$$

3.3 Υλικό Scotchply 1002 – Glass / Epoxy

Τα μητρώα δυσκαμψίας Q που αναφέρονται σε γωνίες $\theta = 0°$ και $\theta = 90°$ υπολογίζονται αντίστοιχα παίρνοντας ως δεδομένα τα στοιχεία του Πίνακα 1.4:

$$Q^0 = \begin{bmatrix} 39,16 & 2,182 & 0 \\ 2,182 & 8,392 & 0 \\ 0 & 0 & 4,14 \end{bmatrix}$$

Το μετασχηματισμένο μητρώο για $\theta = 90°$ προκύπτει απλώς αντιμεταθέτοντας τους όρους Q_{11} και Q_{22} στο μητρώο Q^0. Δηλαδή προκύπτει:

$$Q^{90°} = \begin{bmatrix} 8,392 & 2,182 & 0 \\ 2,182 & 39,16 & 0 \\ 0 & 0 & 4,14 \end{bmatrix}$$

, ενώ τα μητρώα γωνίας θ προκύπτουν με τη γνωστή σχέση που προαναφέρθηκε:

$$\begin{Bmatrix} \overline{Q}_{11} \\ \overline{Q}_{22} \\ \overline{Q}_{12} \\ \overline{Q}_{66} \\ \overline{Q}_{16} \\ \overline{Q}_{26} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^4 & s^4 & 2c^2s^2 & 4c^2s^2 \\ s^4 & c^4 & 2c^2s^2 & 4c^2s^2 \\ c^2s^2 & c^2s^2 & c^4+s^4 & -4c^2s^2 \\ c^2s^2 & c^2s^2 & -2c^2s^2 & (c^2-s^2)^2 \\ c^3s & -cs^3 & cs^3-c^3s & 2(cs^3-c^3s) \\ cs^3 & -c^3s & c^3s-cs^3 & 2(c^3s-cs^3) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_{11} \\ Q_{22} \\ Q_{12} \\ Q_{66} \end{Bmatrix}$$

, όπου c = cos θ και s = sin θ.

Συνεπώς μετά από υπολογισμούς προκύπτουν τα μετασχηματισμένα μητρώα για $\theta = 30°$, $\theta = -30°$, $\theta = 45°$, $\theta = -45°$, $\theta = 60°$, $\theta = -60°$ αντίστοιχα:

Γωνία θ	Μητρώο Δυσκαμψίας Q
$\theta = 30°$	$Q^{30°} = \begin{bmatrix} 26,475 & 7,175 & 9,544 \\ 7,175 & 11,091 & 3,779 \\ 9,544 & 3,779 & 6,305 \end{bmatrix}$
$\theta = -30°$	$Q^{-30°} = \begin{bmatrix} 26,475 & 7,175 & -9,544 \\ 7,175 & 11,091 & -3,779 \\ -9,544 & -3,779 & 6,305 \end{bmatrix}$
$\theta = 45°$	$Q^{45°} = \begin{bmatrix} 17,119 & 8,839 & 7,692 \\ 8,839 & 17,119 & 7,692 \\ 7,692 & 7,692 & 10,797 \end{bmatrix}$
$\theta = -45°$	$Q^{-45°} = \begin{bmatrix} 17,119 & 8,839 & -7,692 \\ 8,839 & 17,119 & -7,692 \\ -7,692 & -7,692 & 10,797 \end{bmatrix}$
$\theta = 60°$	$Q^{60°} = \begin{bmatrix} 11,091 & 7,175 & 3,779 \\ 7,175 & 26,475 & 9,544 \\ 3,779 & 9,544 & 9,89 \end{bmatrix}$
$\theta = -60°$	$Q^{-60°} = \begin{bmatrix} 11,091 & 7,175 & -3,779 \\ 7,175 & 26,475 & -9,544 \\ -3,779 & -9,544 & 9,89 \end{bmatrix}$

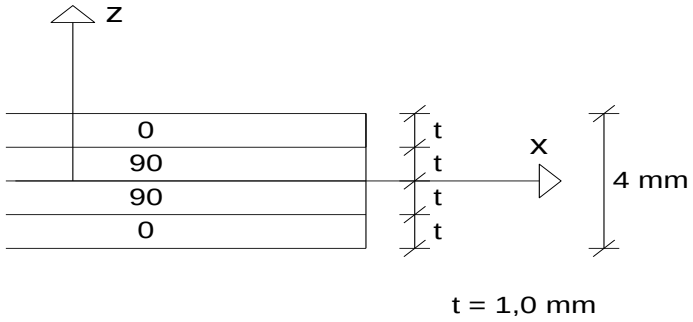
Πίνακας 3.1 : Μητρώα δυσκαμψίας Q μετασχηματισμένα για διάφορες γωνίες θ

Οι κρίσιμες τάσεις αστοχίας του συγκεκριμένου υλικού είναι γνωστές από τον Πίνακα 1.4:

ΤΥΠΟΣ	ΥΛΙΚΟ	vf	X(Mpa)	X'(Mpa)	Y(Mpa)	Y'(Mpa)	S(Mpa)
Scotchply 1002	Glass Epoxy	0,45	1062	610	31	118	72

3.3.1 Διαστρωματώσεις με Ίνες Προσανατολισμένες Κατά 0° και 90°

1) διαστρωμάτωση $\left[\mathbf{0/90_2/0}\right]$



Το μητρώο καμπτικής δυσκαμψίας προκύπτει:

$$D=\begin{bmatrix}188,341 & 11,637 & 0\\ 11,637 & 65,269 & 0\\ 0 & 0 & 22,08\end{bmatrix}$$

Άρα το κρίσιμο φορτίο λυγισμού θα είναι:

$$N_x^{cr}=\frac{\pi^2}{500^2}\left[2\sqrt{188,341\cdot 65,269}+2\left(11,637+2\cdot 22,08\right)\right]=0{,}0132\ \text{KN/mm}$$

Το μητρώο μεμβρανικής δυσκαμψίας υπολογίζεται:

$$A=\begin{bmatrix}95,104 & 8,728 & 0\\ 8,728 & 95,104 & 0\\ 0 & 0 & 16,56\end{bmatrix}$$

Για αξονική θλιπτική δύναμη N_x = -1 KN/mm προκύπτουν οι παραμορφώσεις:

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{16}\\ a_{21} & a_{22} & a_{26}\\ a_{61} & a_{62} & a_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\mathrm{N}_x\\ \mathrm{N}_y\\ \mathrm{N}_{xy}\end{Bmatrix}=10^{-3}\begin{bmatrix}10,604 & -0,973 & 0\\ -0,973 & 10,604 & 0\\ 0 & 0 & 60,386\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-1\\ 0\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-10,604\\ 0,973\\ 0\end{Bmatrix}10^{-3}$$

Με δεδομένες τις παραμορφώσεις υπολογίζονται οι τάσεις:

Για $\theta=0°$ είναι:

$$\sigma=Q^0\varepsilon\Rightarrow\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}Q^0{}_{11} & Q^0{}_{12} & Q^0{}_{16}\\ Q^0{}_{21} & Q^0{}_{22} & Q^0{}_{26}\\ Q^0{}_{61} & Q^0{}_{62} & Q^0{}_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}39,16 & 2,182 & 0\\ 2,182 & 8,392 & 0\\ 0 & 0 & 4,14\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-10,604\\ 0,973\\ 0\end{Bmatrix}10^{-3}=\begin{Bmatrix}-0,413\\ -0,015\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \tau_{12}\end{Bmatrix}$$

Για $\theta = 90°$ είναι:

$$\sigma = Q^{90°}\varepsilon \Rightarrow \begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}Q^{90°}{}_{11} & Q^{90°}{}_{12} & Q^{90°}{}_{16}\\ Q^{90°}{}_{21} & Q^{90°}{}_{22} & Q^{90°}{}_{26}\\ Q^{90°}{}_{61} & Q^{90°}{}_{62} & Q^{90°}{}_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}8,392 & 2,182 & 0\\ 2,182 & 39,16 & 0\\ 0 & 0 & 4,14\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-10,604\\ 0,973\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-0,087\\ 0,015\\ 0\end{Bmatrix}$$

Οι τάσεις μετασχηματίζονται στο σύστημα υλικού $1-2$ για c = cos 90° και s = sin 90°:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \tau_{12}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}c^2 & s^2 & 2cs\\ s^2 & c^2 & -2cs\\ -cs & cs & c^2-s^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-0,087\\ 0,015\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0,015\\ -0,087\\ 0\end{Bmatrix}$$

Συντελεστές ασφαλείας:

$\theta = 0°$	$\frac{X'}{\sigma_1}=\frac{-0,61}{-0,413}=1,48$	$\frac{Y'}{\sigma_2}=\frac{-0,118}{-0,015}=7,88$
$\theta = 90°$	$\frac{X}{\sigma_1}=\frac{1,062}{0,015}=70,94$	$\frac{Y'}{\sigma_2}=\frac{-0,118}{-0,087}=1,36$

Από τους παραπάνω συντελεστές ασφαλείας προκύπτει ότι η μικρότερη τιμή του φορτίου και συνεπώς το φορτίο αστοχίας είναι:

N_x^u = 1,36 KN/mm

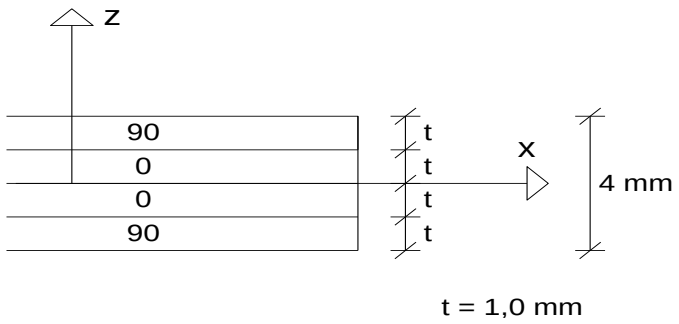
Και κατά συνέπεια:

$$\overline{\lambda_p}=\sqrt{\frac{N_x^u}{N_x^{cr}}}=\sqrt{\frac{1,36}{0,0132}}=10,16$$

$$\rho=\frac{b_{eff}}{b}=\frac{1}{\overline{\lambda_p}}=0,0984$$

$$b_{eff}=\rho\cdot b=49,21\ \text{mm}$$

2) διαστρωμάτωση $\left[\mathbf{90/0_2/90}\right]$



Το μητρώο καμπτικής δυσκαμψίας προκύπτει:

$$D=\begin{bmatrix} 65,269 & 11,637 & 0 \\ 11,637 & 188,341 & 0 \\ 0 & 0 & 22,08 \end{bmatrix}$$

Άρα το κρίσιμο φορτίο λυγισμού θα είναι:

$$N_x^{cr}=\frac{\pi^2}{500^2}\left[2\sqrt{65,269\cdot 188,341}+2\left(11,637+2\cdot 22,08\right)\right]=0{,}0132\ \text{KN/mm}$$

Το μητρώο μεμβρανικής δυσκαμψίας υπολογίζεται:

$$A=\begin{bmatrix} 95,104 & 8,728 & 0 \\ 8,728 & 95,104 & 0 \\ 0 & 0 & 16,56 \end{bmatrix}$$

Για αξονική θλιπτική δύναμη N_x = -1 KN/mm προκύπτουν οι παραμορφώσεις:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{26} \\ a_{61} & a_{62} & a_{66} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \mathrm{N}_x \\ \mathrm{N}_y \\ \mathrm{N}_{xy} \end{Bmatrix}=10^{-3}\begin{bmatrix} 10,604 & -0,973 & 0 \\ -0,973 & 10,604 & 0 \\ 0 & 0 & 60,386 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} -10,604 \\ 0,973 \\ 0 \end{Bmatrix}10^{-3}$$

Με δεδομένες τις παραμορφώσεις υπολογίζονται οι τάσεις:

Για $\theta=0°$ είναι:

$$\sigma=Q^0\varepsilon\Rightarrow\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} Q^0{}_{11} & Q^0{}_{12} & Q^0{}_{16} \\ Q^0{}_{21} & Q^0{}_{22} & Q^0{}_{26} \\ Q^0{}_{61} & Q^0{}_{62} & Q^0{}_{66} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}39,16 & 2,182 & 0\\ 2,182 & 8,392 & 0\\ 0 & 0 & 4,14\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-10,604\\ 0,973\\ 0\end{Bmatrix}10^{-3}=\begin{Bmatrix}-0,413\\ -0,015\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \tau_{12}\end{Bmatrix}$$

Για $\theta = 90°$ είναι:

$$\sigma = Q^{90°}\varepsilon \Rightarrow \begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}Q^{90°}{}_{11} & Q^{90°}{}_{12} & Q^{90°}{}_{16}\\ Q^{90°}{}_{21} & Q^{90°}{}_{22} & Q^{90°}{}_{26}\\ Q^{90°}{}_{61} & Q^{90°}{}_{62} & Q^{90°}{}_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}8,392 & 2,182 & 0\\ 2,182 & 39,16 & 0\\ 0 & 0 & 4,14\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-10,604\\ 0,973\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-0,087\\ 0,015\\ 0\end{Bmatrix}$$

Οι τάσεις μετασχηματίζονται στο σύστημα υλικού $1-2$ για c = cos 90° και s = sin 90°:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \tau_{12}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}c^2 & s^2 & 2cs\\ s^2 & c^2 & -2cs\\ -cs & cs & c^2-s^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-0,087\\ 0,015\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0,015\\ -0,087\\ 0\end{Bmatrix}$$

Συντελεστές ασφαλείας:

$\theta = 0°$	$\frac{X'}{\sigma_1}=\frac{-0,61}{-0,413}=1,48$	$\frac{Y'}{\sigma_2}=\frac{-0,118}{-0,015}=7,88$
$\theta = 90°$	$\frac{X}{\sigma_1}=\frac{1,062}{0,015}=70,94$	$\frac{Y'}{\sigma_2}=\frac{-0,118}{-0,087}=1,36$

Από τους παραπάνω συντελεστές ασφαλείας προκύπτει ότι η μικρότερη τιμή του φορτίου και συνεπώς το φορτίο αστοχίας είναι:

N_x^u = 1,36 KN/mm

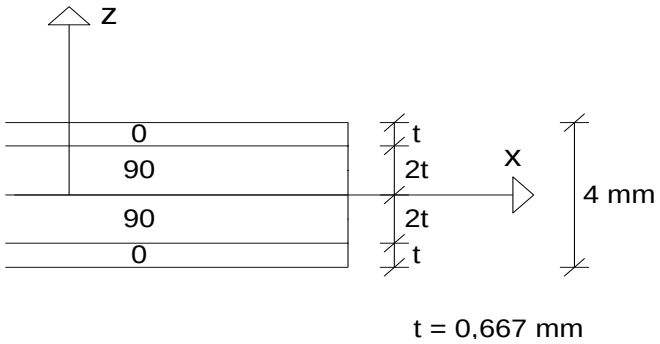
Και κατά συνέπεια:

$$\overline{\lambda_p}=\sqrt{\frac{N_x^u}{N_x^{cr}}}=\sqrt{\frac{1,36}{0,0132}}=10,16$$

$$\rho=\frac{b_{eff}}{b}=\frac{1}{\overline{\lambda_p}}=0,0984$$

$$b_{eff}=\rho\cdot b=49,21\ \text{mm}$$

3) διαστρωμάτωση $\left[0/90_4/0\right]$



Το μητρώο καμπτικής δυσκαμψίας προκύπτει:

$$D=\begin{bmatrix}160,232 & 11,637 & 0\\ 11,637 & 93,378 & 0\\ 0 & 0 & 22,08\end{bmatrix}$$

Άρα το κρίσιμο φορτίο λυγισμού θα είναι:

$$N_x^{cr}=\frac{\pi^2}{500^2}\left[2\sqrt{160,232\cdot 93,378}+2\left(11,637+2\cdot 22,08\right)\right]=0{,}0141\ \text{KN/mm}$$

Το μητρώο μεμβρανικής δυσκαμψίας υπολογίζεται:

$$A=\begin{bmatrix}74,592 & 8,728 & 0\\ 8,728 & 115,616 & 0\\ 0 & 0 & 16,56\end{bmatrix}$$

Για αξονική θλιπτική δύναμη N_x = -1 KN/mm προκύπτουν οι παραμορφώσεις:

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{16}\\ a_{21} & a_{22} & a_{26}\\ a_{61} & a_{62} & a_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\mathrm{N}_x\\ \mathrm{N}_y\\ \mathrm{N}_{xy}\end{Bmatrix}=10^{-3}\begin{bmatrix}13,526 & -1,021 & 0\\ -1,021 & 8,726 & 0\\ 0 & 0 & 60,386\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-1\\ 0\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-13,526\\ 1,021\\ 0\end{Bmatrix}10^{-3}$$

Με δεδομένες τις παραμορφώσεις υπολογίζονται οι τάσεις:

Για $\theta=0°$ είναι:

$$\sigma=Q^0\varepsilon\Rightarrow\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}Q^0{}_{11} & Q^0{}_{12} & Q^0{}_{16}\\ Q^0{}_{21} & Q^0{}_{22} & Q^0{}_{26}\\ Q^0{}_{61} & Q^0{}_{62} & Q^0{}_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}39,16 & 2,182 & 0\\ 2,182 & 8,392 & 0\\ 0 & 0 & 4,14\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-13,526\\ 1,021\\ 0\end{Bmatrix}10^{-3}=\begin{Bmatrix}-0,527\\ -0,021\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \tau_{12}\end{Bmatrix}$$

Για $\theta = 90°$ είναι:

$$\sigma = Q^{90°}\varepsilon \Rightarrow \begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}Q^{90°}{}_{11} & Q^{90°}{}_{12} & Q^{90°}{}_{16}\\ Q^{90°}{}_{21} & Q^{90°}{}_{22} & Q^{90°}{}_{26}\\ Q^{90°}{}_{61} & Q^{90°}{}_{62} & Q^{90°}{}_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}8,392 & 2,182 & 0\\ 2,182 & 39,16 & 0\\ 0 & 0 & 4,14\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-13,526\\ 1,021\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-0,111\\ 0,010\\ 0\end{Bmatrix}$$

Οι τάσεις μετασχηματίζονται στο σύστημα υλικού $1-2$ για c = cos 90° και s = sin 90°:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \tau_{12}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}c^2 & s^2 & 2cs\\ s^2 & c^2 & -2cs\\ -cs & cs & c^2-s^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-0,111\\ 0,010\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0,010\\ -0,111\\ 0\end{Bmatrix}$$

Συντελεστές ασφαλείας:

$\theta = 0°$	$\frac{X'}{\sigma_1}=\frac{-0,61}{-0,527}=1,16$	$\frac{Y'}{\sigma_2}=\frac{-0,118}{-0,021}=5,63$
$\theta = 90°$	$\frac{X}{\sigma_1}=\frac{1,062}{0,010}=101,41$	$\frac{Y'}{\sigma_2}=\frac{-0,118}{-0,111}=1,06$

Από τους παραπάνω συντελεστές ασφαλείας προκύπτει ότι η μικρότερη τιμή του φορτίου και συνεπώς το φορτίο αστοχίας είναι:

N_x^u = 1,06 KN/mm

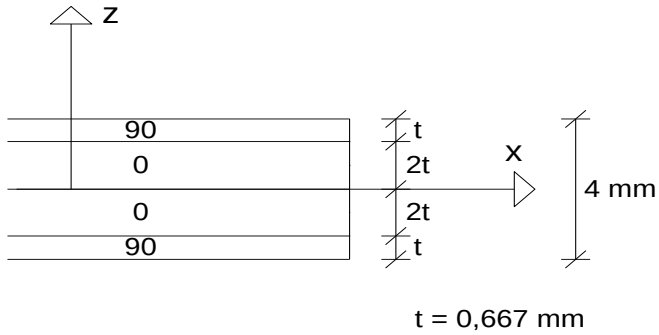
Και κατά συνέπεια:

$$\overline{\lambda_p}=\sqrt{\frac{N_x^u}{N_x^{cr}}}=\sqrt{\frac{1,06}{0,0141}}=8,68$$

$$\rho=\frac{b_{eff}}{b}=\frac{1}{\overline{\lambda_p}}=0,1152$$

$$b_{eff}=\rho\cdot b=57,58\ \text{mm}$$

4) διαστρωμάτωση $\left[90/0_4/90\right]$



Το μητρώο καμπτικής δυσκαμψίας προκύπτει:

$$D=\begin{bmatrix} 93,378 & 11,637 & 0 \\ 11,637 & 160,232 & 0 \\ 0 & 0 & 22,08 \end{bmatrix}$$

Άρα το κρίσιμο φορτίο λυγισμού θα είναι:

$$N_x^{cr}=\frac{\pi^2}{500^2}\left[2\sqrt{93,378\cdot 160,232}+2\left(11,637+2\cdot 22,08\right)\right]=0{,}0141\ \text{KN/mm}$$

Το μητρώο μεμβρανικής δυσκαμψίας υπολογίζεται:

$$A=\begin{bmatrix} 115,616 & 8,728 & 0 \\ 8,728 & 74,592 & 0 \\ 0 & 0 & 16,56 \end{bmatrix}$$

Για αξονική θλιπτική δύναμη N_x = -1 KN/mm προκύπτουν οι παραμορφώσεις:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{26} \\ a_{61} & a_{62} & a_{66} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \mathrm{N}_x \\ \mathrm{N}_y \\ \mathrm{N}_{xy} \end{Bmatrix}=10^{-3}\begin{bmatrix} 8,726 & -1,021 & 0 \\ -1,021 & 13,526 & 0 \\ 0 & 0 & 60,386 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} -8,726 \\ 1,021 \\ 0 \end{Bmatrix}10^{-3}$$

Με δεδομένες τις παραμορφώσεις υπολογίζονται οι τάσεις:

Για $\theta=0°$ είναι:

$$\sigma=Q^0\varepsilon\Rightarrow\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} Q^0{}_{11} & Q^0{}_{12} & Q^0{}_{16} \\ Q^0{}_{21} & Q^0{}_{22} & Q^0{}_{26} \\ Q^0{}_{61} & Q^0{}_{62} & Q^0{}_{66} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}39,16 & 2,182 & 0\\ 2,182 & 8,392 & 0\\ 0 & 0 & 4,14\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-8,726\\ 1,021\\ 0\end{Bmatrix}10^{-3}=\begin{Bmatrix}-0,339\\ -0,010\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \tau_{12}\end{Bmatrix}$$

Για $\theta = 90°$ είναι:

$$\sigma = Q^{90°}\varepsilon \Rightarrow \begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}Q^{90°}{}_{11} & Q^{90°}{}_{12} & Q^{90°}{}_{16}\\ Q^{90°}{}_{21} & Q^{90°}{}_{22} & Q^{90°}{}_{26}\\ Q^{90°}{}_{61} & Q^{90°}{}_{62} & Q^{90°}{}_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}8,392 & 2,182 & 0\\ 2,182 & 39,16 & 0\\ 0 & 0 & 4,14\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-8,726\\ 1,021\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-0,071\\ 0,021\\ 0\end{Bmatrix}$$

Οι τάσεις μετασχηματίζονται στο σύστημα υλικού $1-2$ για c = cos 90° και s = sin 90°:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \tau_{12}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}c^2 & s^2 & 2cs\\ s^2 & c^2 & -2cs\\ -cs & cs & c^2-s^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-0,071\\ 0,021\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0,021\\ -0,071\\ 0\end{Bmatrix}$$

Συντελεστές ασφαλείας:

$\theta = 0°$	$\frac{X'}{\sigma_1}=\frac{-0,61}{-0,339}=1,80$	$\frac{Y'}{\sigma_2}=\frac{-0,118}{-0,010}=11,27$
$\theta = 90°$	$\frac{X}{\sigma_1}=\frac{1,062}{0,021}=50,71$	$\frac{Y'}{\sigma_2}=\frac{-0,118}{-0,071}=1,66$

Από τους παραπάνω συντελεστές ασφαλείας προκύπτει ότι η μικρότερη τιμή του φορτίου και συνεπώς το φορτίο αστοχίας είναι:

N_x^u = 1,66 KN/mm

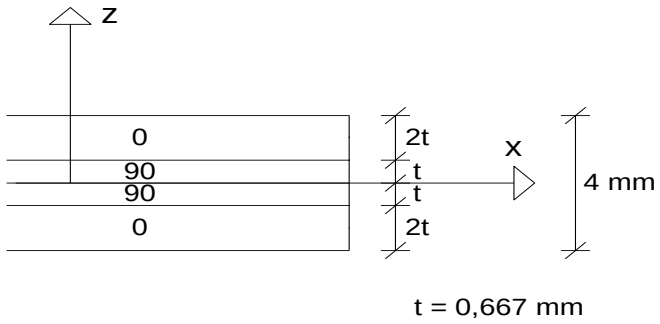
Και κατά συνέπεια:

$$\overline{\lambda_p}=\sqrt{\frac{N_x^u}{N_x^{cr}}}=\sqrt{\frac{1,66}{0,0141}}=10,87$$

$$\rho=\frac{b_{eff}}{b}=\frac{1}{\overline{\lambda_p}}=0,920$$

$$b_{eff}=\rho\cdot b=46,00\ \text{mm}$$

5) διαστρωμάτωση $\left[\mathbf{0}_2 / \mathbf{90}_2 / \mathbf{0}_2\right]$



Το μητρώο καμπτικής δυσκαμψίας προκύπτει:

$$D = \begin{bmatrix} 202,776 & 11,637 & 0 \\ 11,637 & 50,835 & 0 \\ 0 & 0 & 22,08 \end{bmatrix}$$

Άρα το κρίσιμο φορτίο λυγισμού θα είναι:

$$N_x^{cr} = \frac{\pi^2}{500^2}\left[2\sqrt{202,776 \cdot 50,835} + 2\left(11,637 + 2 \cdot 22,08\right)\right] = 0{,}0124 \text{ KN/mm}$$

Το μητρώο μεμβρανικής δυσκαμψίας υπολογίζεται:

$$A = \begin{bmatrix} 115,616 & 8,728 & 0 \\ 8,728 & 74,592 & 0 \\ 0 & 0 & 16,56 \end{bmatrix}$$

Για αξονική θλιπτική δύναμη N_x = -1 KN/mm προκύπτουν οι παραμορφώσεις:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{26} \\ a_{61} & a_{62} & a_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathrm{N}_x \\ \mathrm{N}_y \\ \mathrm{N}_{xy} \end{Bmatrix} = 10^{-3} \begin{bmatrix} 8,726 & -1,021 & 0 \\ -1,021 & 13,526 & 0 \\ 0 & 0 & 60,386 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -8,726 \\ 1,021 \\ 0 \end{Bmatrix} 10^{-3}$$

Με δεδομένες τις παραμορφώσεις υπολογίζονται οι τάσεις:

Για $\theta = 0°$ είναι:

$$\sigma = Q^0 \varepsilon \Rightarrow \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q^0{}_{11} & Q^0{}_{12} & Q^0{}_{16} \\ Q^0{}_{21} & Q^0{}_{22} & Q^0{}_{26} \\ Q^0{}_{61} & Q^0{}_{62} & Q^0{}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}39,16 & 2,182 & 0\\ 2,182 & 8,392 & 0\\ 0 & 0 & 4,14\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-8,726\\ 1,021\\ 0\end{Bmatrix}10^{-3}=\begin{Bmatrix}-0,339\\ -0,010\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \tau_{12}\end{Bmatrix}$$

Για $\theta = 90°$ είναι:

$$\sigma = Q^{90°}\varepsilon \Rightarrow \begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}Q^{90°}{}_{11} & Q^{90°}{}_{12} & Q^{90°}{}_{16}\\ Q^{90°}{}_{21} & Q^{90°}{}_{22} & Q^{90°}{}_{26}\\ Q^{90°}{}_{61} & Q^{90°}{}_{62} & Q^{90°}{}_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}8,392 & 2,182 & 0\\ 2,182 & 39,16 & 0\\ 0 & 0 & 4,14\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-8,726\\ 1,021\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-0,071\\ 0,021\\ 0\end{Bmatrix}$$

Οι τάσεις μετασχηματίζονται στο σύστημα υλικού $1-2$ για c = cos 90° και s = sin 90°:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \tau_{12}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}c^2 & s^2 & 2cs\\ s^2 & c^2 & -2cs\\ -cs & cs & c^2-s^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-0,071\\ 0,021\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0,021\\ -0,071\\ 0\end{Bmatrix}$$

Συντελεστές ασφαλείας:

$\theta = 0°$	$\frac{X'}{\sigma_1}=\frac{-0,61}{-0,339}=1,80$	$\frac{Y'}{\sigma_2}=\frac{-0,118}{-0,010}=11,27$
$\theta = 90°$	$\frac{X}{\sigma_1}=\frac{1,062}{0,021}=50,71$	$\frac{Y'}{\sigma_2}=\frac{-0,118}{-0,071}=1,66$

Από τους παραπάνω συντελεστές ασφαλείας προκύπτει ότι η μικρότερη τιμή του φορτίου και συνεπώς το φορτίο αστοχίας είναι:

N_x^u = 1,66 KN/mm

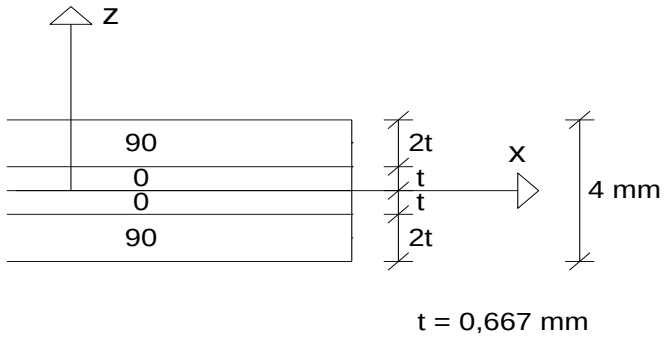
Και κατά συνέπεια:

$$\overline{\lambda_p}=\sqrt{\frac{N_x^u}{N_x^{cr}}}=\sqrt{\frac{1,66}{0,0124}}=11,57$$

$$\rho=\frac{b_{eff}}{b}=\frac{1}{\overline{\lambda_p}}=0,0865$$

$$b_{eff}=\rho\cdot b=43,23\ \text{mm}$$

6) διαστρωμάτωση $\left[\mathbf{90_2 / 0_2 / 90_2}\right]$



Το μητρώο καμπτικής δυσκαμψίας προκύπτει:

$$D = \begin{bmatrix} 50,835 & 11,637 & 0 \\ 11,637 & 202,776 & 0 \\ 0 & 0 & 22,08 \end{bmatrix}$$

Άρα το κρίσιμο φορτίο λυγισμού θα είναι:

$$N_x^{cr} = \frac{\pi^2}{500^2}\left[2\sqrt{202,776 \cdot 50,835} + 2\left(11,637 + 2 \cdot 22,08\right)\right] = 0{,}0124 \text{ KN/mm}$$

Το μητρώο μεμβρανικής δυσκαμψίας υπολογίζεται:

$$A = \begin{bmatrix} 74,592 & 8,728 & 0 \\ 8,728 & 115,616 & 0 \\ 0 & 0 & 16,56 \end{bmatrix}$$

Για αξονική θλιπτική δύναμη N_x = -1 KN/mm προκύπτουν οι παραμορφώσεις:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{26} \\ a_{61} & a_{62} & a_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathrm{N}_x \\ \mathrm{N}_y \\ \mathrm{N}_{xy} \end{Bmatrix} = 10^{-3} \begin{bmatrix} 13,526 & -1,021 & 0 \\ -1,021 & 8,726 & 0 \\ 0 & 0 & 60,386 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -13,526 \\ 1,021 \\ 0 \end{Bmatrix} 10^{-3}$$

Με δεδομένες τις παραμορφώσεις υπολογίζονται οι τάσεις:

Για $\theta = 0°$ είναι:

$$\sigma = Q^0 \varepsilon \Rightarrow \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q^0{}_{11} & Q^0{}_{12} & Q^0{}_{16} \\ Q^0{}_{21} & Q^0{}_{22} & Q^0{}_{26} \\ Q^0{}_{61} & Q^0{}_{62} & Q^0{}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}39,16 & 2,182 & 0\\ 2,182 & 8,392 & 0\\ 0 & 0 & 4,14\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-13,526\\ 1,021\\ 0\end{Bmatrix}10^{-3}=\begin{Bmatrix}-0,527\\ -0,021\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \tau_{12}\end{Bmatrix}$$

Για $\theta = 90°$ είναι:

$$\sigma = Q^{90°}\varepsilon \Rightarrow \begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}Q^{90°}{}_{11} & Q^{90°}{}_{12} & Q^{90°}{}_{16}\\ Q^{90°}{}_{21} & Q^{90°}{}_{22} & Q^{90°}{}_{26}\\ Q^{90°}{}_{61} & Q^{90°}{}_{62} & Q^{90°}{}_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}8,392 & 2,182 & 0\\ 2,182 & 39,16 & 0\\ 0 & 0 & 4,14\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-13,526\\ 1,021\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-0,111\\ 0,010\\ 0\end{Bmatrix}$$

Οι τάσεις μετασχηματίζονται στο σύστημα υλικού $1-2$ για c = cos 90° και s = sin 90°:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \tau_{12}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}c^2 & s^2 & 2cs\\ s^2 & c^2 & -2cs\\ -cs & cs & c^2-s^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-0,111\\ 0,010\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0,010\\ -0,111\\ 0\end{Bmatrix}$$

Συντελεστές ασφαλείας:

$\theta = 0°$	$\frac{X'}{\sigma_1}=\frac{-0,61}{-0,527}=1,16$	$\frac{Y'}{\sigma_2}=\frac{-0,118}{-0,021}=5,63$
$\theta = 90°$	$\frac{X}{\sigma_1}=\frac{1,062}{0,010}=101,41$	$\frac{Y'}{\sigma_2}=\frac{-0,118}{-0,111}=1,06$

Από τους παραπάνω συντελεστές ασφαλείας προκύπτει ότι η μικρότερη τιμή του φορτίου και συνεπώς το φορτίο αστοχίας είναι:

N_x^u = 1,06 KN/mm

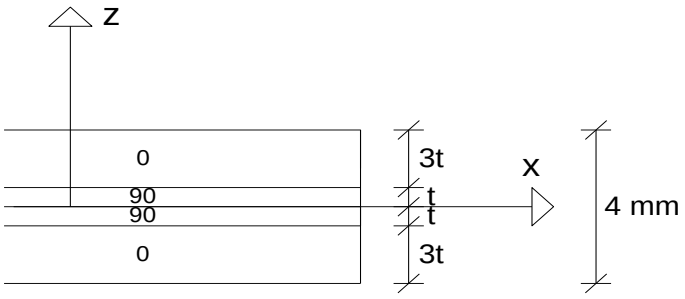
Και κατά συνέπεια:

$$\overline{\lambda_p}=\sqrt{\frac{N_x^u}{N_x^{cr}}}=\sqrt{\frac{1,06}{0,0124}}=9,24$$

$$\rho=\frac{b_{eff}}{b}=\frac{1}{\overline{\lambda_p}}=0,1082$$

$$b_{eff}=\rho\cdot b=54,12\ \text{mm}$$

7) διαστρωμάτωση $\left[\mathbf{0_3 / 90_2 / 0_3}\right]$



t = 1,0 mm

Το μητρώο καμπτικής δυσκαμψίας προκύπτει:

$$D = \begin{bmatrix} 206,289 & 11,637 & 0 \\ 11,637 & 47,321 & 0 \\ 0 & 0 & 22,08 \end{bmatrix}$$

Άρα το κρίσιμο φορτίο λυγισμού θα είναι:

$$N_x^{cr} = \frac{\pi^2}{500^2}\left[2\sqrt{206,289 \cdot 47,321} + 2\left(11,637 + 2 \cdot 22,08\right)\right] = 0,0122 \text{ KN/mm}$$

Το μητρώο μεμβρανικής δυσκαμψίας υπολογίζεται:

$$A = \begin{bmatrix} 125,872 & 8,728 & 0 \\ 8,728 & 64,336 & 0 \\ 0 & 0 & 16,56 \end{bmatrix}$$

Για αξονική θλιπτική δύναμη N_x = -1 KN/mm προκύπτουν οι παραμορφώσεις:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{26} \\ a_{61} & a_{62} & a_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathrm{N}_x \\ \mathrm{N}_y \\ \mathrm{N}_{xy} \end{Bmatrix} = 10^{-3} \begin{bmatrix} 8,02 & -1,088 & 0 \\ -1,088 & 15,691 & 0 \\ 0 & 0 & 60,386 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -8,02 \\ 1,088 \\ 0 \end{Bmatrix} 10^{-3}$$

Με δεδομένες τις παραμορφώσεις υπολογίζονται οι τάσεις:

Για $\theta = 0°$ είναι:

$$\sigma = Q^0 \varepsilon \Rightarrow \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q^0{}_{11} & Q^0{}_{12} & Q^0{}_{16} \\ Q^0{}_{21} & Q^0{}_{22} & Q^0{}_{26} \\ Q^0{}_{61} & Q^0{}_{62} & Q^0{}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}39,16 & 2,182 & 0\\ 2,182 & 8,392 & 0\\ 0 & 0 & 4,14\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-8,02\\ 1,088\\ 0\end{Bmatrix}10^{-3}=\begin{Bmatrix}-0,312\\ -0,008\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \tau_{12}\end{Bmatrix}$$

Για $\theta = 90°$ είναι:

$$\sigma = Q^{90°}\varepsilon \Rightarrow \begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}Q^{90°}{}_{11} & Q^{90°}{}_{12} & Q^{90°}{}_{16}\\ Q^{90°}{}_{21} & Q^{90°}{}_{22} & Q^{90°}{}_{26}\\ Q^{90°}{}_{61} & Q^{90°}{}_{62} & Q^{90°}{}_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}8,392 & 2,182 & 0\\ 2,182 & 39,16 & 0\\ 0 & 0 & 4,14\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-8,02\\ 1,088\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-0,065\\ 0,025\\ 0\end{Bmatrix}$$

Οι τάσεις μετασχηματίζονται στο σύστημα υλικού $1-2$ για c = cos 90° και s = sin 90°:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \tau_{12}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}c^2 & s^2 & 2cs\\ s^2 & c^2 & -2cs\\ -cs & cs & c^2-s^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-0,065\\ 0,025\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0,025\\ -0,065\\ 0\end{Bmatrix}$$

Συντελεστές ασφαλείας:

$\theta = 0°$	$\frac{X'}{\sigma_1}=\frac{-0,61}{-0,312}=1,96$	$\frac{Y'}{\sigma_2}=\frac{-0,118}{-0,008}=14,10$
$\theta = 90°$	$\frac{X}{\sigma_1}=\frac{1,062}{0,025}=42,30$	$\frac{Y'}{\sigma_2}=\frac{-0,118}{-0,065}=1,82$

Από τους παραπάνω συντελεστές ασφαλείας προκύπτει ότι η μικρότερη τιμή του φορτίου και συνεπώς το φορτίο αστοχίας είναι:

N_x^u = 1,82 KN/mm

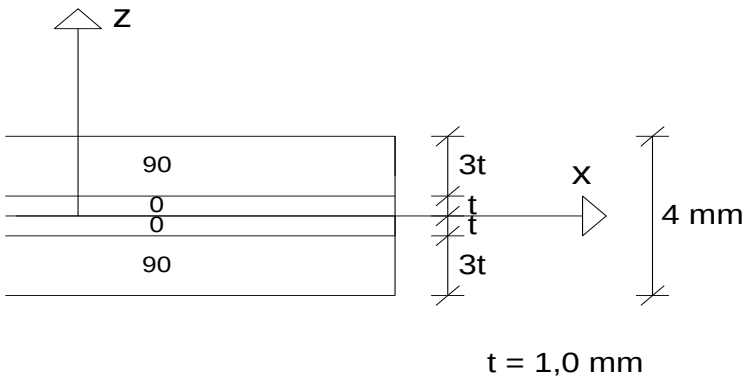
Και κατά συνέπεια:

$$\overline{\lambda_p}=\sqrt{\frac{N_x^u}{N_x^{cr}}}=\sqrt{\frac{1,82}{0,0122}}=12,20$$

$$\rho=\frac{b_{eff}}{b}=\frac{1}{\overline{\lambda_p}}=0,0820$$

$$b_{eff}=\rho\cdot b=40,98\ \text{mm}$$

8) διαστρωμάτωση $\left[\mathbf{90_3 / 0_2 / 90_3}\right]$



Το μητρώο καμπτικής δυσκαμψίας προκύπτει:

$$D = \begin{bmatrix} 47,321 & 11,637 & 0 \\ 11,637 & 206,289 & 0 \\ 0 & 0 & 22,08 \end{bmatrix}$$

Άρα το κρίσιμο φορτίο λυγισμού θα είναι:

$$N_x^{cr} = \frac{\pi^2}{500^2}\left[2\sqrt{47,321 \cdot 206,289} + 2\left(11,637 + 2 \cdot 22,08\right)\right] = 0{,}0122 \text{ KN/mm}$$

Το μητρώο μεμβρανικής δυσκαμψίας υπολογίζεται:

$$A = \begin{bmatrix} 64,336 & 8,728 & 0 \\ 8,728 & 125,872 & 0 \\ 0 & 0 & 16,56 \end{bmatrix}$$

Για αξονική θλιπτική δύναμη N_x = -1 KN/mm προκύπτουν οι παραμορφώσεις:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{26} \\ a_{61} & a_{62} & a_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathrm{N}_x \\ \mathrm{N}_y \\ \mathrm{N}_{xy} \end{Bmatrix} = 10^{-3} \begin{bmatrix} 15,691 & -1,088 & 0 \\ -1,088 & 8,02 & 0 \\ 0 & 0 & 60,386 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -15,691 \\ 1,088 \\ 0 \end{Bmatrix} 10^{-3}$$

Με δεδομένες τις παραμορφώσεις υπολογίζονται οι τάσεις:

Για $\theta = 0°$ είναι:

$$\sigma = Q^0 \varepsilon \Rightarrow \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q^0{}_{11} & Q^0{}_{12} & Q^0{}_{16} \\ Q^0{}_{21} & Q^0{}_{22} & Q^0{}_{26} \\ Q^0{}_{61} & Q^0{}_{62} & Q^0{}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}39,16 & 2,182 & 0\\ 2,182 & 8,392 & 0\\ 0 & 0 & 4,14\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-15,691\\ 1,088\\ 0\end{Bmatrix}10^{-3}=\begin{Bmatrix}-0,612\\ -0,025\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \tau_{12}\end{Bmatrix}$$

Για $\theta = 90°$ είναι:

$$\sigma = Q^{90°}\varepsilon \Rightarrow \begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}Q^{90°}{}_{11} & Q^{90°}{}_{12} & Q^{90°}{}_{16}\\ Q^{90°}{}_{21} & Q^{90°}{}_{22} & Q^{90°}{}_{26}\\ Q^{90°}{}_{61} & Q^{90°}{}_{62} & Q^{90°}{}_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}8,392 & 2,182 & 0\\ 2,182 & 39,16 & 0\\ 0 & 0 & 4,14\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-15,691\\ 1,088\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-0,129\\ 0,008\\ 0\end{Bmatrix}$$

Οι τάσεις μετασχηματίζονται στο σύστημα υλικού $1-2$ για c = cos 90° και s = sin 90°:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \tau_{12}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}c^2 & s^2 & 2cs\\ s^2 & c^2 & -2cs\\ -cs & cs & c^2-s^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-0,129\\ 0,008\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0,008\\ -0,129\\ 0\end{Bmatrix}$$

Συντελεστές ασφαλείας:

$\theta = 0°$	$\frac{X'}{\sigma_1}=\frac{-0,61}{-0,612}=1,00$	$\frac{Y'}{\sigma_2}=\frac{-0,118}{-0,025}=4,70$
$\theta = 90°$	$\frac{X}{\sigma_1}=\frac{1,062}{0,008}=126,90$	$\frac{Y'}{\sigma_2}=\frac{-0,118}{-0,129}=0,91$

Από τους παραπάνω συντελεστές ασφαλείας προκύπτει ότι η μικρότερη τιμή του φορτίου και συνεπώς το φορτίο αστοχίας είναι:

N_x^u = 0,91 KN/mm

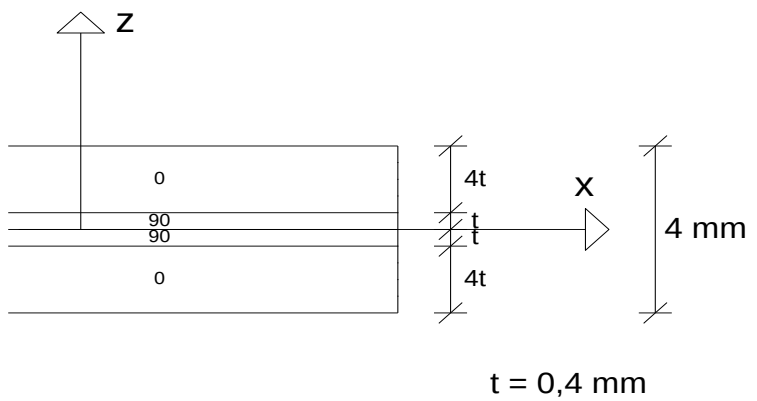
Και κατά συνέπεια:

$$\overline{\lambda_p}=\sqrt{\frac{N_x^u}{N_x^{cr}}}=\sqrt{\frac{0,91}{0,0122}}=8,65$$

$$\rho=\frac{b_{eff}}{b}=\frac{1}{\overline{\lambda_p}}=0,1157$$

$$b_{eff}=\rho\cdot b=57,83\ \text{mm}$$

9) διαστρωμάτωση $\left[\mathbf{0_4 / 90_2 / 0_4}\right]$



Το μητρώο καμπτικής δυσκαμψίας προκύπτει:

$$D = \begin{bmatrix} 207,541 & 11,637 & 0 \\ 11,637 & 46,07 & 0 \\ 0 & 0 & 22,08 \end{bmatrix}$$

Άρα το κρίσιμο φορτίο λυγισμού θα είναι:

$$N_x^{cr} = \frac{\pi^2}{500^2}\left[2\sqrt{207,541 \cdot 46,07} + 2\left(11,637 + 2 \cdot 22,08\right)\right] = 0{,}0121 \text{ KN/mm}$$

Το μητρώο μεμβρανικής δυσκαμψίας υπολογίζεται:

$$A = \begin{bmatrix} 132,026 & 8,728 & 0 \\ 8,728 & 58,182 & 0 \\ 0 & 0 & 16,56 \end{bmatrix}$$

Για αξονική θλιπτική δύναμη N_x = -1 KN/mm προκύπτουν οι παραμορφώσεις:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{26} \\ a_{61} & a_{62} & a_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathrm{N}_x \\ \mathrm{N}_y \\ \mathrm{N}_{xy} \end{Bmatrix} = 10^{-3} \begin{bmatrix} 7,65 & -1,148 & 0 \\ -1,148 & 17,359 & 0 \\ 0 & 0 & 60,386 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -7,65 \\ 1,148 \\ 0 \end{Bmatrix} 10^{-3}$$

Με δεδομένες τις παραμορφώσεις υπολογίζονται οι τάσεις:

Για $\theta = 0°$ είναι:

$$\sigma = Q^0 \varepsilon \Rightarrow \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q^0{}_{11} & Q^0{}_{12} & Q^0{}_{16} \\ Q^0{}_{21} & Q^0{}_{22} & Q^0{}_{26} \\ Q^0{}_{61} & Q^0{}_{62} & Q^0{}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}39,16 & 2,182 & 0\\ 2,182 & 8,392 & 0\\ 0 & 0 & 4,14\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-7,65\\ 1,148\\ 0\end{Bmatrix}10^{-3}=\begin{Bmatrix}-0,297\\ -0,007\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \tau_{12}\end{Bmatrix}$$

Για $\theta = 90°$ είναι:

$$\sigma = Q^{90°}\varepsilon \Rightarrow \begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}Q^{90°}{}_{11} & Q^{90°}{}_{12} & Q^{90°}{}_{16}\\ Q^{90°}{}_{21} & Q^{90°}{}_{22} & Q^{90°}{}_{26}\\ Q^{90°}{}_{61} & Q^{90°}{}_{62} & Q^{90°}{}_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}8,392 & 2,182 & 0\\ 2,182 & 39,16 & 0\\ 0 & 0 & 4,14\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-7,65\\ 1,148\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-0,062\\ 0,028\\ 0\end{Bmatrix}$$

Οι τάσεις μετασχηματίζονται στο σύστημα υλικού $1-2$ για c = cos 90° και s = sin 90°:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \tau_{12}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}c^2 & s^2 & 2cs\\ s^2 & c^2 & -2cs\\ -cs & cs & c^2-s^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-0,062\\ 0,028\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0,028\\ -0,062\\ 0\end{Bmatrix}$$

Συντελεστές ασφαλείας:

$\theta = 0°$	$\frac{X'}{\sigma_1}=\frac{-0,61}{-0,297}=2,05$	$\frac{Y'}{\sigma_2}=\frac{-0,118}{-0,007}=16,71$
$\theta = 90°$	$\frac{X}{\sigma_1}=\frac{1,062}{0,028}=37,60$	$\frac{Y'}{\sigma_2}=\frac{-0,118}{-0,062}=1,91$

Από τους παραπάνω συντελεστές ασφαλείας προκύπτει ότι η μικρότερη τιμή του φορτίου και συνεπώς το φορτίο αστοχίας είναι:

N_x^u = 1,91 KN/mm

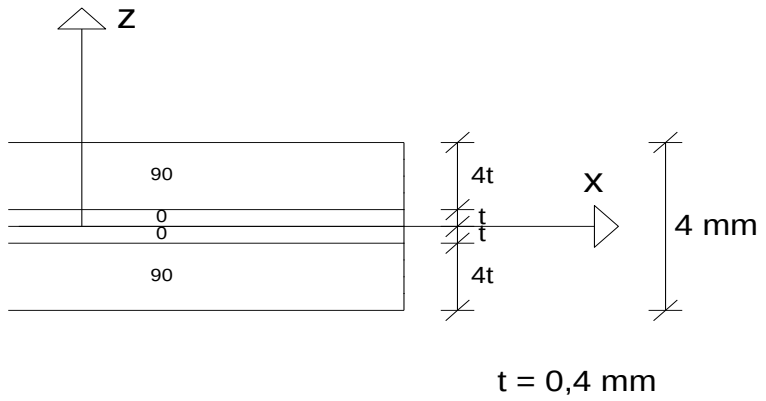
Και κατά συνέπεια:

$$\overline{\lambda_p}=\sqrt{\frac{N_x^u}{N_x^{cr}}}=\sqrt{\frac{1,91}{0,0121}}=12,56$$

$$\rho=\frac{b_{eff}}{b}=\frac{1}{\overline{\lambda_p}}=0,0796$$

$$b_{eff}=\rho\cdot b=39,81\ \text{mm}$$

10) διαστρωμάτωση $\left[\mathbf{90_4 / 0_2 / 90_4}\right]$



Το μητρώο καμπτικής δυσκαμψίας προκύπτει:

$$D = \begin{bmatrix} 46,07 & 11,637 & 0 \\ 11,637 & 207,541 & 0 \\ 0 & 0 & 22,08 \end{bmatrix}$$

Άρα το κρίσιμο φορτίο λυγισμού θα είναι:

$$N_x^{cr} = \frac{\pi^2}{500^2}\left[2\sqrt{46,07 \cdot 207,541} + 2\left(11,637 + 2 \cdot 22,08\right)\right] = 0{,}0121 \text{ KN/mm}$$

Το μητρώο μεμβρανικής δυσκαμψίας υπολογίζεται:

$$A = \begin{bmatrix} 58,182 & 8,728 & 0 \\ 8,728 & 132,026 & 0 \\ 0 & 0 & 16,56 \end{bmatrix}$$

Για αξονική θλιπτική δύναμη N_x = -1 KN/mm προκύπτουν οι παραμορφώσεις:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{26} \\ a_{61} & a_{62} & a_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathrm{N}_x \\ \mathrm{N}_y \\ \mathrm{N}_{xy} \end{Bmatrix} = 10^{-3} \begin{bmatrix} 17,359 & -1,148 & 0 \\ -1,148 & 7,65 & 0 \\ 0 & 0 & 60,386 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -17,359 \\ 1,148 \\ 0 \end{Bmatrix} 10^{-3}$$

Με δεδομένες τις παραμορφώσεις υπολογίζονται οι τάσεις:

Για $\theta = 0°$ είναι:

$$\sigma = Q^0 \varepsilon \Rightarrow \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q^0{}_{11} & Q^0{}_{12} & Q^0{}_{16} \\ Q^0{}_{21} & Q^0{}_{22} & Q^0{}_{26} \\ Q^0{}_{61} & Q^0{}_{62} & Q^0{}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}39,16 & 2,182 & 0\\ 2,182 & 8,392 & 0\\ 0 & 0 & 4,14\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-17,359\\ 1,148\\ 0\end{Bmatrix}10^{-3}=\begin{Bmatrix}-0,677\\ -0,028\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \tau_{12}\end{Bmatrix}$$

Για $\theta = 90°$ είναι:

$$\sigma = Q^{90°}\varepsilon \Rightarrow \begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}Q^{90°}{}_{11} & Q^{90°}{}_{12} & Q^{90°}{}_{16}\\ Q^{90°}{}_{21} & Q^{90°}{}_{22} & Q^{90°}{}_{26}\\ Q^{90°}{}_{61} & Q^{90°}{}_{62} & Q^{90°}{}_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}8,392 & 2,182 & 0\\ 2,182 & 39,16 & 0\\ 0 & 0 & 4,14\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-17,359\\ 1,148\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-0,143\\ 0,007\\ 0\end{Bmatrix}$$

Οι τάσεις μετασχηματίζονται στο σύστημα υλικού $1-2$ για c = cos 90° και s = sin 90°:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \tau_{12}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}c^2 & s^2 & 2cs\\ s^2 & c^2 & -2cs\\ -cs & cs & c^2-s^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-0,143\\ 0,007\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0,007\\ -0,143\\ 0\end{Bmatrix}$$

Συντελεστές ασφαλείας:

$\theta = 0°$	$\frac{X'}{\sigma_1}=\frac{-0,61}{-0,677}=0,90$	$\frac{Y'}{\sigma_2}=\frac{-0,118}{-0,028}=4,18$
$\theta = 90°$	$\frac{X}{\sigma_1}=\frac{1,062}{0,007}=150,38$	$\frac{Y'}{\sigma_2}=\frac{-0,118}{-0,143}=0,82$

Από τους παραπάνω συντελεστές ασφαλείας προκύπτει ότι η μικρότερη τιμή του φορτίου και συνεπώς το φορτίο αστοχίας είναι:

N_x^u = 0,82 KN/mm

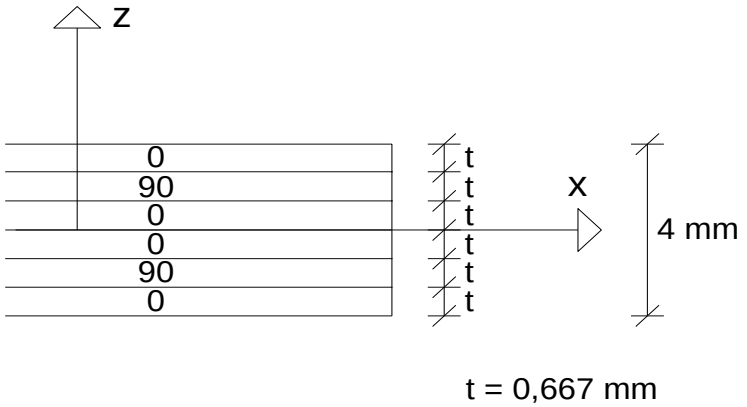
Και κατά συνέπεια:

$$\overline{\lambda_p}=\sqrt{\frac{N_x^u}{N_x^{cr}}}=\sqrt{\frac{0,82}{0,0121}}=8,24$$

$$\rho=\frac{b_{eff}}{b}=\frac{1}{\overline{\lambda_p}}=0,1213$$

$$b_{eff}=\rho\cdot b=60,65\ \text{mm}$$

11) διαστρωμάτωση $\left[\mathbf{0/90/0_2/90/0}\right]$



Το μητρώο καμπτικής δυσκαμψίας προκύπτει:

$$D=\begin{bmatrix}166,31 & 11,637 & 0\\ 11,637 & 87,301 & 0\\ 0 & 0 & 22,08\end{bmatrix}$$

Άρα το κρίσιμο φορτίο λυγισμού θα είναι:

$$N_x^{cr}=\frac{\pi^2}{500^2}\left[2\sqrt{166,31\cdot 87,301}+2\left(11,637+2\cdot 22,08\right)\right]=0{,}0139\ \text{KN/mm}$$

Το μητρώο μεμβρανικής δυσκαμψίας υπολογίζεται:

$$A=\begin{bmatrix}115,616 & 8,728 & 0\\ 8,728 & 74,592 & 0\\ 0 & 0 & 16,56\end{bmatrix}$$

Για αξονική θλιπτική δύναμη N_x = -1 KN/mm προκύπτουν οι παραμορφώσεις:

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{16}\\ a_{21} & a_{22} & a_{26}\\ a_{61} & a_{62} & a_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\mathrm{N}_x\\ \mathrm{N}_y\\ \mathrm{N}_{xy}\end{Bmatrix}=10^{-3}\begin{bmatrix}8,726 & -1,021 & 0\\ -1,021 & 13,526 & 0\\ 0 & 0 & 60,386\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-1\\ 0\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-8,726\\ 1,021\\ 0\end{Bmatrix}10^{-3}$$

Με δεδομένες τις παραμορφώσεις υπολογίζονται οι τάσεις:

Για $\theta=0°$ είναι:

$$\sigma=Q^0\varepsilon\Rightarrow\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}Q^0{}_{11} & Q^0{}_{12} & Q^0{}_{16}\\ Q^0{}_{21} & Q^0{}_{22} & Q^0{}_{26}\\ Q^0{}_{61} & Q^0{}_{62} & Q^0{}_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}39,16 & 2,182 & 0\\ 2,182 & 8,392 & 0\\ 0 & 0 & 4,14\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-8,726\\ 1,021\\ 0\end{Bmatrix}10^{-3}=\begin{Bmatrix}-0,339\\ -0,010\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \tau_{12}\end{Bmatrix}$$

Για $\theta = 90°$ είναι:

$$\sigma = Q^{90°}\varepsilon \Rightarrow \begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}Q^{90°}{}_{11} & Q^{90°}{}_{12} & Q^{90°}{}_{16}\\ Q^{90°}{}_{21} & Q^{90°}{}_{22} & Q^{90°}{}_{26}\\ Q^{90°}{}_{61} & Q^{90°}{}_{62} & Q^{90°}{}_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}8,392 & 2,182 & 0\\ 2,182 & 39,16 & 0\\ 0 & 0 & 4,14\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-8,726\\ 1,021\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-0,071\\ 0,021\\ 0\end{Bmatrix}$$

Οι τάσεις μετασχηματίζονται στο σύστημα υλικού $1-2$ για c = cos 90° και s = sin 90°:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \tau_{12}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}c^2 & s^2 & 2cs\\ s^2 & c^2 & -2cs\\ -cs & cs & c^2-s^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-0,071\\ 0,021\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0,021\\ -0,071\\ 0\end{Bmatrix}$$

Συντελεστές ασφαλείας:

$\theta = 0°$	$\frac{X'}{\sigma_1}=\frac{-0,61}{-0,339}=1,80$	$\frac{Y'}{\sigma_2}=\frac{-0,118}{-0,010}=11,27$
$\theta = 90°$	$\frac{X}{\sigma_1}=\frac{1,062}{0,021}=50,71$	$\frac{Y'}{\sigma_2}=\frac{-0,118}{-0,071}=1,66$

Από τους παραπάνω συντελεστές ασφαλείας προκύπτει ότι η μικρότερη τιμή του φορτίου και συνεπώς το φορτίο αστοχίας είναι:

N_x^u = 1,66 KN/mm

Και κατά συνέπεια:

$$\overline{\lambda_p}=\sqrt{\frac{N_x^u}{N_x^{cr}}}=\sqrt{\frac{1,66}{0,0139}}=10,93$$

$$\rho=\frac{b_{eff}}{b}=\frac{1}{\overline{\lambda_p}}=0,0915$$

$$b_{eff}=\rho\cdot b=45,76\ \text{mm}$$

3.3.2 Διαστρωματώσεις με Ίνες Προσανατολισμένες Κατά Γωνίες $\pm\theta^o$

Α) γωνίες $\pm 60^o$

Περιπτώσεις διαστρωματώσεων που εξετάστηκαν:

1) διαστρωμάτωση $[\mathbf{60/-60/60/-60/60/-60/60/-60}]$

2) διαστρωμάτωση $[\mathbf{60/-60/60/-60}]_s$

3) διαστρωμάτωση $[\mathbf{-60/60/-60/60}]_s$

4) διαστρωμάτωση $[\mathbf{60/-60/60/-60/60/-60}]$

5) διαστρωμάτωση $[\mathbf{60/-60/60}]_s$

6) διαστρωμάτωση $[\mathbf{-60/60/-60}]_s$

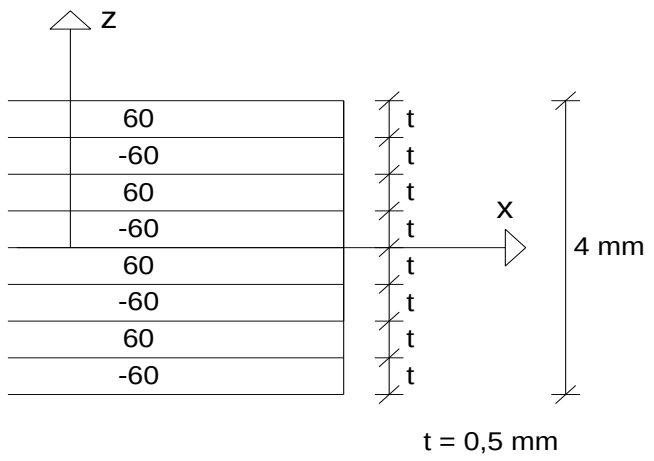
7) διαστρωμάτωση $[\mathbf{60/-60/60/-60}]$

8) διαστρωμάτωση $[\mathbf{60/-60}]_s$

9) διαστρωμάτωση $[\mathbf{-60/60}]_s$

Αναλυτικά:

1*) διαστρωμάτωση* $[\mathbf{60/-60/60/-60/60/-60/60/-60}]$



Το μητρώο καμπτικής δυσκαμψίας προκύπτει:

$$D=\begin{bmatrix} 59,153 & 38,265 & 0 \\ 38,265 & 141,201 & 0 \\ 0 & 0 & 52,749 \end{bmatrix}$$

Άρα το κρίσιμο φορτίο λυγισμού θα είναι:

$$N_x^{cr}=\frac{\pi^2}{500^2}\left[2\sqrt{59,153\cdot 141,201}+2\left(38,265+2\cdot 52,749\right)\right]=0,0186 \text{ KN/mm}$$

Το μητρώο μεμβρανικής δυσκαμψίας υπολογίζεται:

$$A=\begin{bmatrix} 44,365 & 28,699 & 0 \\ 28,699 & 105,901 & 0 \\ 0 & 0 & 39,562 \end{bmatrix}$$

Για αξονική θλιπτική δύναμη N_x = -1 KN/mm προκύπτουν οι παραμορφώσεις:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{26} \\ a_{61} & a_{62} & a_{66} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \mathrm{N}_x \\ \mathrm{N}_y \\ \mathrm{N}_{xy} \end{Bmatrix}=10^{-3}\begin{bmatrix} 27,332 & -7,407 & 0 \\ -7,407 & 11,45 & 0 \\ 0 & 0 & 25,277 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} -27,332 \\ 7,407 \\ 0 \end{Bmatrix}10^{-3}$$

Με δεδομένες τις παραμορφώσεις υπολογίζονται οι τάσεις:

Για $\theta=60°$ είναι:

$$\sigma=Q^{60°}\varepsilon\Rightarrow\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} Q^{60°}{}_{11} & Q^{60°}{}_{12} & Q^{60°}{}_{16} \\ Q^{60°}{}_{21} & Q^{60°}{}_{22} & Q^{60°}{}_{26} \\ Q^{60°}{}_{61} & Q^{60°}{}_{62} & Q^{60°}{}_{66} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} 11,091 & 7,175 & 3,779 \\ 7,175 & 26,475 & 9,544 \\ 3,779 & 9,544 & 9,89 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} -27,332 \\ 7,407 \\ 0 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} -0,25 \\ 0 \\ -0,033 \end{Bmatrix}$$

Οι τάσεις μετασχηματίζονται στο σύστημα υλικού $1-2$ για c = cos 60° και s = sin 60°:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2cs \\ s^2 & c^2 & -2cs \\ -cs & cs & c^2-s^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} 0,25 & 0,75 & 0,866 \\ 0,75 & 0,25 & -0,866 \\ -0,433 & 0,433 & -0,5 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} -0,25 \\ 0 \\ -0,033 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} -0,091 \\ -0,159 \\ 0,125 \end{Bmatrix}$$

Για $\theta=-60°$ είναι:

$$\sigma = Q^{-60°}\varepsilon \Rightarrow \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q^{-60°}{}_{11} & Q^{-60°}{}_{12} & Q^{-60°}{}_{16} \\ Q^{-60°}{}_{21} & Q^{-60°}{}_{22} & Q^{-60°}{}_{26} \\ Q^{-60°}{}_{61} & Q^{-60°}{}_{62} & Q^{-60°}{}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 11,091 & 7,175 & -3,779 \\ 7,175 & 26,475 & -9,544 \\ -3,779 & -9,544 & 9,89 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -27,332 \\ 7,407 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,25 \\ 0 \\ 0,033 \end{Bmatrix}$$

Οι τάσεις μετασχηματίζονται στο σύστημα υλικού 1 – 2 για c = cos (-60°) και s = sin (-60°):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2cs \\ s^2 & c^2 & -2cs \\ -cs & cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,25 & 0,75 & -0,866 \\ 0,75 & 0,25 & 0,866 \\ 0,433 & -0,433 & -0,5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0,25 \\ 0 \\ 0,033 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,091 \\ -0,159 \\ -0,125 \end{Bmatrix}$$

Συντελεστές ασφαλείας:

$\theta = 60°$	$\frac{X'}{\sigma_1} = \frac{-0,61}{-0,091} = 6,72$	$\frac{Y'}{\sigma_2} = \frac{-0,118}{-0,159} = 0,74$	$\left\lvert \frac{S}{\tau_{12}} \right\rvert = \frac{0,072}{0,125} = 0,58$
$\theta = -60°$	$\frac{X'}{\sigma_1} = \frac{-0,61}{-0,091} = 6,72$	$\frac{Y'}{\sigma_2} = \frac{-0,118}{-0,159} = 0,74$	

Από τους παραπάνω συντελεστές ασφαλείας προκύπτει ότι η μικρότερη τιμή του φορτίου και συνεπώς το φορτίο αστοχίας είναι:

N_x^u = 0,58 KN/mm

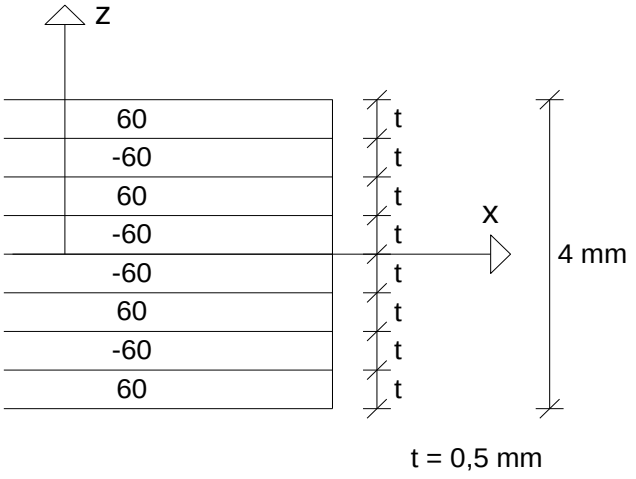
Και κατά συνέπεια:

$$\overline{\lambda_p} = \sqrt{\frac{N_x^u}{N_x^{cr}}} = \sqrt{\frac{0,58}{0,0186}} = 5,58$$

$$\rho = \frac{b_{eff}}{b} = \frac{1}{\overline{\lambda_p}} = 0,1792$$

$$b_{eff} = \rho \cdot b = 89,61 \text{ mm}$$

2) ***διαστρωμάτωση*** $[\mathbf{60/-60/60/-60}]_S$



Το μητρώο καμπτικής δυσκαμψίας προκύπτει:

$$D=\begin{bmatrix} 59,153 & 38,265 & 7,558 \\ 38,265 & 141,201 & 19,088 \\ 7,558 & 19,088 & 52,749 \end{bmatrix}$$

Άρα το κρίσιμο φορτίο λυγισμού θα είναι:

$$N_x^{cr}=\frac{\pi^2}{500^2}\left[2\sqrt{59,153\cdot 141,201}+2\left(38,265+2\cdot 52,749\right)\right]=0{,}0186\ \text{KN/mm}$$

Το μητρώο μεμβρανικής δυσκαμψίας υπολογίζεται:

$$A=\begin{bmatrix} 44,365 & 28,699 & 0 \\ 28,699 & 105,901 & 0 \\ 0 & 0 & 39,562 \end{bmatrix}$$

Για αξονική θλιπτική δύναμη N_x = -1 KN/mm προκύπτουν οι παραμορφώσεις:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{26} \\ a_{61} & a_{62} & a_{66} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \mathrm{N}_x \\ \mathrm{N}_y \\ \mathrm{N}_{xy} \end{Bmatrix}=10^{-3}\begin{bmatrix} 27,332 & -7,407 & 0 \\ -7,407 & 11,45 & 0 \\ 0 & 0 & 25,277 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} -27,332 \\ 7,407 \\ 0 \end{Bmatrix}10^{-3}$$

Με δεδομένες τις παραμορφώσεις υπολογίζονται οι τάσεις:

Για $\theta=60°$ είναι:

$$\sigma = Q^{60^\circ}\varepsilon \Rightarrow \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q^{60^\circ}{}_{11} & Q^{60^\circ}{}_{12} & Q^{60^\circ}{}_{16} \\ Q^{60^\circ}{}_{21} & Q^{60^\circ}{}_{22} & Q^{60^\circ}{}_{26} \\ Q^{60^\circ}{}_{61} & Q^{60^\circ}{}_{62} & Q^{60^\circ}{}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 11,091 & 7,175 & 3,779 \\ 7,175 & 26,475 & 9,544 \\ 3,779 & 9,544 & 9,89 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -27,332 \\ 7,407 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,25 \\ 0 \\ -0,033 \end{Bmatrix}$$

Οι τάσεις μετασχηματίζονται στο σύστημα υλικού 1 – 2 για c = cos 60° και s = sin 60°:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2cs \\ s^2 & c^2 & -2cs \\ -cs & cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,25 & 0,75 & 0,866 \\ 0,75 & 0,25 & -0,866 \\ -0,433 & 0,433 & -0,5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0,25 \\ 0 \\ -0,033 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,091 \\ -0,159 \\ 0,125 \end{Bmatrix}$$

Για $\theta = -60^\circ$ είναι:

$$\sigma = Q^{-60^\circ}\varepsilon \Rightarrow \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q^{-60^\circ}{}_{11} & Q^{-60^\circ}{}_{12} & Q^{-60^\circ}{}_{16} \\ Q^{-60^\circ}{}_{21} & Q^{-60^\circ}{}_{22} & Q^{-60^\circ}{}_{26} \\ Q^{-60^\circ}{}_{61} & Q^{-60^\circ}{}_{62} & Q^{-60^\circ}{}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 11,091 & 7,175 & -3,779 \\ 7,175 & 26,475 & -9,544 \\ -3,779 & -9,544 & 9,89 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -27,332 \\ 7,407 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,25 \\ 0 \\ 0,033 \end{Bmatrix}$$

Οι τάσεις μετασχηματίζονται στο σύστημα υλικού 1 – 2 για c = cos (-60°) και s = sin (-60°):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2cs \\ s^2 & c^2 & -2cs \\ -cs & cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,25 & 0,75 & -0,866 \\ 0,75 & 0,25 & 0,866 \\ 0,433 & -0,433 & -0,5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0,25 \\ 0 \\ 0,033 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,091 \\ -0,159 \\ -0,125 \end{Bmatrix}$$

Συντελεστές ασφαλείας:

$\theta = 60^\circ$	$\frac{X'}{\sigma_1} = \frac{-0,61}{-0,091} = 6,72$	$\frac{Y'}{\sigma_2} = \frac{-0,118}{-0,159} = 0,74$	$\left\lvert \frac{S}{\tau_{12}} \right\rvert = \frac{0,072}{0,125} = 0,58$
$\theta = -60^\circ$	$\frac{X'}{\sigma_1} = \frac{-0,61}{-0,091} = 6,72$	$\frac{Y'}{\sigma_2} = \frac{-0,118}{-0,159} = 0,74$	

Από τους παραπάνω συντελεστές ασφαλείας προκύπτει ότι η μικρότερη τιμή του φορτίου και συνεπώς το φορτίο αστοχίας είναι:

N_x^u = 0,58 KN/mm

Και κατά συνέπεια:

$$\overline{\lambda_p} = \sqrt{\frac{N_x^u}{N_x^{cr}}} = \sqrt{\frac{0,58}{0,0186}} = 5,58$$

$$\rho = \frac{b_{eff}}{b} = \frac{1}{\overline{\lambda_p}} = 0,1792$$

$$b_{eff} = \rho \cdot b = 89,61 \text{ mm}$$

3) ***διαστρωμάτωση*** $[\mathbf{-60/60/-60/60}]_s$

4) ***διαστρωμάτωση*** $[\mathbf{60/-60/60/-60/60/-60/60}]$

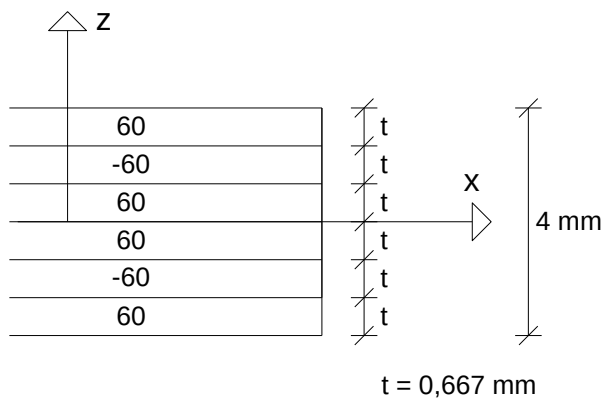
7) ***διαστρωμάτωση*** $[\mathbf{60/-60/60/-60}]$

8) ***διαστρωμάτωση*** $[\mathbf{60/-60}]_s$

9) ***διαστρωμάτωση*** $[\mathbf{-60/60}]_s$

Όπως φαίνεται και στις δύο προηγούμενες περιπτώσεις, τα αποτελέσματα είναι ίδια καθώς η διάταξη – θέση των στρώσεων δεν επηρεάζει το μητρώο A και δηλαδή τις παραμορφώσεις και τις τάσεις όπως θα επηρέαζε το πάχος τους. Όντως, μέσω της υπολογιστικής διαδικασίας προέκυψαν για τις περιπτώσεις διαστρωμάτωσης 3), 4), 7), 8), 9) ακριβώς τα ίδια αποτελέσματα με πριν, καθώς το συνολικό πάχος παραμένει σταθερό και κατανέμεται ισομερώς στις στρώσεις χωρίς το μητρώο A να επηρεάζεται. Παρόλα αυτά, όπως φαίνεται παρακάτω, στην περίπτωση 5) παρατίθεται η ανάλυση διότι οι μη μηδενικοί όροι A_{16}, A_{61}, A_{26}, A_{62}, στο μητρώο A αλλάζουν τα αποτελέσματα, αν και ελάχιστα όπως θα φανεί παρακάτω.

5) ***διαστρωμάτωση*** $[\mathbf{60/-60/60}]_s$



Το μητρώο καμπτικής δυσκαμψίας προκύπτει:

$$D=\begin{bmatrix} 59,153 & 38,265 & 9,704 \\ 38,265 & 141,201 & 24,508 \\ 9,704 & 24,508 & 52,749 \end{bmatrix}$$

Άρα το κρίσιμο φορτίο λυγισμού θα είναι:

$$N_x^{cr}=\frac{\pi^2}{500^2}\left[2\sqrt{59,153\cdot 141,201}+2\left(38,265+2\cdot 52,749\right)\right]=0,0186 \text{ KN/mm}$$

Το μητρώο μεμβρανικής δυσκαμψίας υπολογίζεται:

$$A=\begin{bmatrix} 44,365 & 28,699 & 5,039 \\ 28,699 & 105,901 & 12,725 \\ 5,039 & 12,725 & 39,562 \end{bmatrix}$$

Για αξονική θλιπτική δύναμη N_x = -1 KN/mm προκύπτουν οι παραμορφώσεις:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{26} \\ a_{61} & a_{62} & a_{66} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \mathrm{N}_x \\ \mathrm{N}_y \\ \mathrm{N}_{xy} \end{Bmatrix}=10^{-3}\begin{bmatrix} 27,437 & -7,167 & -1,312 \\ -7,167 & 11,743 & -2,694 \\ -1,312 & -2,694 & 26,638 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} -27,437 \\ 7,167 \\ 1,312 \end{Bmatrix}10^{-3}$$

Με δεδομένες τις παραμορφώσεις υπολογίζονται οι τάσεις:

Για $\theta=60°$ είναι:

$$\sigma=Q^{60°}\varepsilon\Rightarrow\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} Q^{60°}{}_{11} & Q^{60°}{}_{12} & Q^{60°}{}_{16} \\ Q^{60°}{}_{21} & Q^{60°}{}_{22} & Q^{60°}{}_{26} \\ Q^{60°}{}_{61} & Q^{60°}{}_{62} & Q^{60°}{}_{66} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} 11,091 & 7,175 & 3,779 \\ 7,175 & 26,475 & 9,544 \\ 3,779 & 9,544 & 9,89 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} -27,437 \\ 7,167 \\ 1,312 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} -0,248 \\ 0,005 \\ -0,022 \end{Bmatrix}$$

Οι τάσεις μετασχηματίζονται στο σύστημα υλικού $1-2$ για c = cos 60° και s = sin 60°:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2cs \\ s^2 & c^2 & -2cs \\ -cs & cs & c^2-s^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} 0,25 & 0,75 & 0,866 \\ 0,75 & 0,25 & -0,866 \\ -0,433 & 0,433 & -0,5 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} -0,248 \\ 0,005 \\ -0,022 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} -0,077 \\ -0,165 \\ 0,121 \end{Bmatrix}$$

Για $\theta=-60°$ είναι:

$$\sigma = Q^{-60°}\varepsilon \Rightarrow \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q^{-60°}{}_{11} & Q^{-60°}{}_{12} & Q^{-60°}{}_{16} \\ Q^{-60°}{}_{21} & Q^{-60°}{}_{22} & Q^{-60°}{}_{26} \\ Q^{-60°}{}_{61} & Q^{-60°}{}_{62} & Q^{-60°}{}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 11,091 & 7,175 & -3,779 \\ 7,175 & 26,475 & -9,544 \\ -3,779 & -9,544 & 9,89 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -27,437 \\ 7,167 \\ 1,312 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,258 \\ -0,020 \\ 0,048 \end{Bmatrix}$$

Οι τάσεις μετασχηματίζονται στο σύστημα υλικού 1 – 2 για c = cos (-60°) και s = sin (-60°):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2cs \\ s^2 & c^2 & -2cs \\ -cs & cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,25 & 0,75 & -0,866 \\ 0,75 & 0,25 & 0,866 \\ 0,433 & -0,433 & -0,5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0,258 \\ -0,020 \\ 0,048 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,121 \\ -0,157 \\ -0,127 \end{Bmatrix}$$

Συντελεστές ασφαλείας:

$\theta = 60°$	$\frac{X'}{\sigma_1} = \frac{-0,61}{-0,077} = 7,90$	$\frac{Y'}{\sigma_2} = \frac{-0,118}{-0,165} = 0,71$	$\left\lvert \frac{S}{\tau_{12}} \right\rvert = \frac{0,072}{0,121} = 0,60$
$\theta = -60°$	$\frac{X'}{\sigma_1} = \frac{-0,61}{-0,121} = 5,04$	$\frac{Y'}{\sigma_2} = \frac{-0,118}{-0,157} = 0,75$	$\left\lvert \frac{S}{\tau_{12}} \right\rvert = \frac{0,072}{0,127} = 0,57$

Από τους παραπάνω συντελεστές ασφαλείας προκύπτει ότι η μικρότερη τιμή του φορτίου και συνεπώς το φορτίο αστοχίας είναι:

N_x^u = 0,57 KN/mm

Και κατά συνέπεια:

$$\overline{\lambda_p} = \sqrt{\frac{N_x^u}{N_x^{cr}}} = \sqrt{\frac{0,57}{0,0186}} = 5,52$$

$$\rho = \frac{b_{eff}}{b} = \frac{1}{\overline{\lambda_p}} = 0,1812$$

$$b_{eff} = \rho \cdot b = 90,58 \text{ mm}$$

6) διαστρωμάτωση $[-60/60/-60]_s$

Εφόσον οι μη μηδενικοί όροι του μητρώου Α διαφοροποιούν τα αποτελέσματα έστω και λίγο, εξετάστηκε κανονικά και η έκτη περίπτωση με την εναλλαγή του πρόσημου και προέκυψε εναλλαγή στις τάσεις και άρα στους συντελεστές ασφαλείας ανάμεσα στις δύο γωνίες. Ενώ στην περίπτωση 5) η αστοχία επέρχεται λόγω της διατμητικής τάσης στη στρώση με -60°, στην 6) επέρχεται λόγω της ίδιας τιμής της διατμητικής τάσης στην στρώση με 60°.

Β) γωνίες ±45°

Περιπτώσεις διαστρωματώσεων που εξετάστηκαν:

1) διαστρωμάτωση $[45/-45/45/-45/45/-45/45/-45]$

2) διαστρωμάτωση $[45/-45/45/-45]_s$

3) διαστρωμάτωση $[-45/45/-45/45]_s$

4) διαστρωμάτωση $[45/-45/45/-45/45/-45]$

5) διαστρωμάτωση $[45/-45/45]_s$

6) διαστρωμάτωση $[-45/45/-45]_s$

7) διαστρωμάτωση $[45/-45/45/-45]$

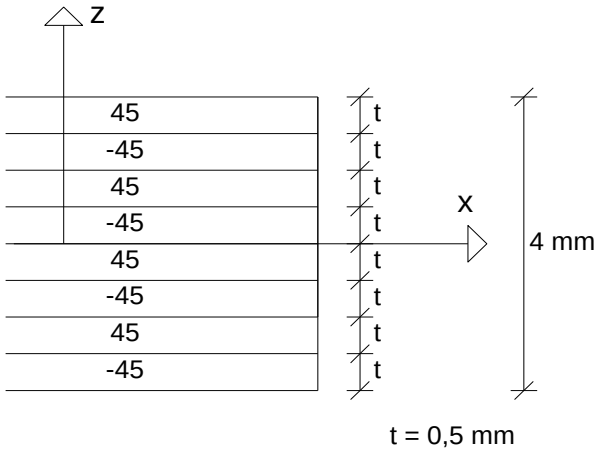
8) διαστρωμάτωση $[45/-45]_s$

9) διαστρωμάτωση $[-45/45]_s$

Αναλυτικά:

Με την ίδια ανάλυση, προέκυψαν παρόμοια αποτελέσματα στις διαστρωματώσεις γωνιών ±45°, οπότε παρατίθενται μόνο οι αναλύσεις των περιπτώσεων 1) και 5), καθώς τα υπόλοιπα αποτελέσματα είναι τα ίδια.

1*) διαστρωμάτωση* $[45/-45/45/-45/45/-45/45/-45]$



Το μητρώο καμπτικής δυσκαμψίας προκύπτει:

$$D = \begin{bmatrix} 91,301 & 47,141 & 0 \\ 47,141 & 91,301 & 0 \\ 0 & 0 & 57,584 \end{bmatrix}$$

Άρα το κρίσιμο φορτίο λυγισμού θα είναι:

$$N_x^{cr} = \frac{\pi^2}{500^2}\left[2\sqrt{91,301 \cdot 91,301} + 2\left(47,141 + 2 \cdot 57,584\right)\right] = 0,0200 \text{ KN/mm}$$

Το μητρώο μεμβρανικής δυσκαμψίας υπολογίζεται:

$$A = \begin{bmatrix} 68,476 & 35,356 & 0 \\ 35,356 & 68,476 & 0 \\ 0 & 0 & 43,188 \end{bmatrix}$$

Για αξονική θλιπτική δύναμη N_x = -1 KN/mm προκύπτουν οι παραμορφώσεις:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{26} \\ a_{61} & a_{62} & a_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathrm{N}_x \\ \mathrm{N}_y \\ \mathrm{N}_{xy} \end{Bmatrix} = 10^{-3} \begin{bmatrix} 19,912 & -10,281 & 0 \\ -10,281 & 19,912 & 0 \\ 0 & 0 & 23,155 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} -19,912 \\ 10,281 \\ 0 \end{Bmatrix} 10^{-3}$$

Με δεδομένες τις παραμορφώσεις υπολογίζονται οι τάσεις:

Για $\theta = 45°$ είναι:

$$\sigma = Q^{45^\circ}\varepsilon \Rightarrow \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q^{45^\circ}{}_{11} & Q^{45^\circ}{}_{12} & Q^{45^\circ}{}_{16} \\ Q^{45^\circ}{}_{21} & Q^{45^\circ}{}_{22} & Q^{45^\circ}{}_{26} \\ Q^{45^\circ}{}_{61} & Q^{45^\circ}{}_{62} & Q^{45^\circ}{}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 17,119 & 8,839 & 7,692 \\ 8,839 & 17,119 & 7,692 \\ 7,692 & 7,692 & 10,797 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -17,845 \\ 5,296 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,25 \\ 0 \\ -0,074 \end{Bmatrix}$$

Οι τάσεις μετασχηματίζονται στο σύστημα υλικού 1 – 2 για c = cos 45° και s = sin 45°:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2cs \\ s^2 & c^2 & -2cs \\ -cs & cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 & 1 \\ 0,5 & 0,5 & -1 \\ -0,5 & 0,5 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0,25 \\ 0 \\ -0,074 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,199 \\ -0,051 \\ 0,125 \end{Bmatrix}$$

Για $\theta = -45^\circ$ είναι:

$$\sigma = Q^{-45^\circ}\varepsilon \Rightarrow \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q^{-45^\circ}{}_{11} & Q^{-45^\circ}{}_{12} & Q^{-45^\circ}{}_{16} \\ Q^{-45^\circ}{}_{21} & Q^{-45^\circ}{}_{22} & Q^{-45^\circ}{}_{26} \\ Q^{-45^\circ}{}_{61} & Q^{-45^\circ}{}_{62} & Q^{-45^\circ}{}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 17,119 & 8,839 & -7,692 \\ 8,839 & 17,119 & -7,692 \\ -7,692 & -7,692 & 10,797 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -17,845 \\ 5,296 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,25 \\ 0 \\ 0,074 \end{Bmatrix}$$

Οι τάσεις μετασχηματίζονται στο σύστημα υλικού 1 – 2 για c = cos (-45°) και s = sin (-45°):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2cs \\ s^2 & c^2 & -2cs \\ -cs & cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 & -1 \\ 0,5 & 0,5 & 1 \\ 0,5 & -0,5 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0,25 \\ 0 \\ 0,074 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,199 \\ -0,051 \\ -0,125 \end{Bmatrix}$$

Συντελεστές ασφαλείας:

$\theta = 45^\circ$	$\frac{X'}{\sigma_1} = \frac{-0,61}{-0,199} = 3,06$	$\frac{Y'}{\sigma_2} = \frac{-0,118}{-0,051} = 2,32$	$\left\lvert \frac{S}{\tau_{12}} \right\rvert = \frac{0,072}{0,125} = 0,58$
$\theta = -45^\circ$	$\frac{X'}{\sigma_1} = \frac{-0,61}{-0,199} = 3,06$	$\frac{Y'}{\sigma_2} = \frac{-0,118}{-0,051} = 2,32$	

Από τους παραπάνω συντελεστές ασφαλείας προκύπτει ότι η μικρότερη τιμή του φορτίου και συνεπώς το φορτίο αστοχίας είναι:

N_x^u = 0,58 KN/mm

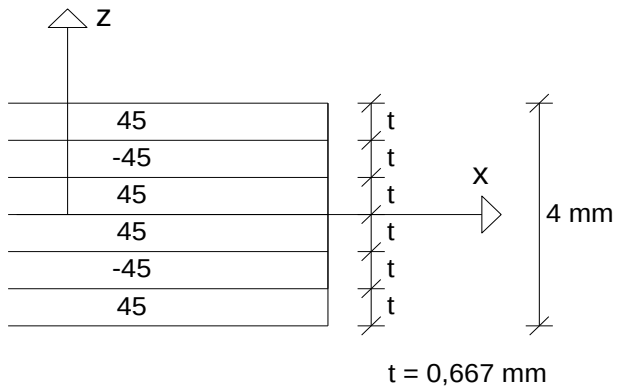
Και κατά συνέπεια:

$$\overline{\lambda_p} = \sqrt{\frac{N_x^u}{N_x^{cr}}} = \sqrt{\frac{0,58}{0,0200}} = 5,36$$

$$\rho = \frac{b_{eff}}{b} = \frac{1}{\overline{\lambda_p}} = 0,1865$$

$$b_{eff} = \rho \cdot b = 93,23 \text{ mm}$$

5) διαστρωμάτωση $[\mathbf{45/-45/45}]_s$



Το μητρώο καμπτικής δυσκαμψίας προκύπτει:

$$D = \begin{bmatrix} 91,301 & 47,141 & 19,752 \\ 47,141 & 91,301 & 19,752 \\ 19,752 & 19,752 & 57,584 \end{bmatrix}$$

Άρα το κρίσιμο φορτίο λυγισμού θα είναι:

$$N_x^{cr} = \frac{\pi^2}{500^2}\left[2\sqrt{91,301 \cdot 91,301} + 2\left(47,141 + 2 \cdot 57,584\right)\right] = 0,0200 \text{ KN/mm}$$

Το μητρώο μεμβρανικής δυσκαμψίας υπολογίζεται:

$$A = \begin{bmatrix} 68,476 & 35,356 & 10,256 \\ 35,356 & 68,476 & 10,256 \\ 10,256 & 10,256 & 43,188 \end{bmatrix}$$

Για αξονική θλιπτική δύναμη N_x = -1 KN/mm προκύπτουν οι παραμορφώσεις:

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{16}\\ a_{21} & a_{22} & a_{26}\\ a_{61} & a_{62} & a_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\mathrm{N}_x\\ \mathrm{N}_y\\ \mathrm{N}_{xy}\end{Bmatrix}=10^{-3}\begin{bmatrix}20,235 & -10,068 & -2,365\\ -10,068 & 20,235 & -2,365\\ -2,365 & -2,365 & 24,356\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-1\\ 0\\ 0\end{Bmatrix}=$$

$$=\begin{Bmatrix}-20,235\\ 10,068\\ 2,365\end{Bmatrix}10^{-3}$$

Με δεδομένες τις παραμορφώσεις υπολογίζονται οι τάσεις:

Για $\theta=45°$ είναι:

$$\sigma=Q^{45°}\varepsilon\Rightarrow\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}Q^{45°}{}_{11} & Q^{45°}{}_{12} & Q^{45°}{}_{16}\\ Q^{45°}{}_{21} & Q^{45°}{}_{22} & Q^{45°}{}_{26}\\ Q^{45°}{}_{61} & Q^{45°}{}_{62} & Q^{45°}{}_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}17,119 & 8,839 & 7,692\\ 8,839 & 17,119 & 7,692\\ 7,692 & 7,692 & 10,797\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-20,235\\ 10,068\\ 2,365\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-0,239\\ 0,012\\ -0,053\end{Bmatrix}$$

Οι τάσεις μετασχηματίζονται στο σύστημα υλικού 1 – 2 για c = cos 45° και s = sin 45°:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \tau_{12}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}c^2 & s^2 & 2cs\\ s^2 & c^2 & -2cs\\ -cs & cs & c^2-s^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}0,5 & 0,5 & 1\\ 0,5 & 0,5 & -1\\ -0,5 & 0,5 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-0,239\\ 0,012\\ -0,053\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-0,166\\ -0,061\\ 0,125\end{Bmatrix}$$

Για $\theta=-45°$ είναι:

$$\sigma=Q^{-45°}\varepsilon\Rightarrow\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}Q^{-45°}{}_{11} & Q^{-45°}{}_{12} & Q^{-45°}{}_{16}\\ Q^{-45°}{}_{21} & Q^{-45°}{}_{22} & Q^{-45°}{}_{26}\\ Q^{-45°}{}_{61} & Q^{-45°}{}_{62} & Q^{-45°}{}_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}17,119 & 8,839 & -7,692\\ 8,839 & 17,119 & -7,692\\ -7,692 & -7,692 & 10,797\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-20,235\\ 10,068\\ 2,365\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-0,276\\ -0,025\\ 0,104\end{Bmatrix}$$

Οι τάσεις μετασχηματίζονται στο σύστημα υλικού 1 – 2 για c = cos (-45°) και s = sin (-45°):

$$\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \tau_{12}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}c^2 & s^2 & 2cs\\ s^2 & c^2 & -2cs\\ -cs & cs & c^2-s^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}0,5 & 0,5 & -1\\ 0,5 & 0,5 & 1\\ 0,5 & -0,5 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-0,276\\ -0,025\\ 0,104\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-0,256\\ -0,046\\ -0,125\end{Bmatrix}$$

Συντελεστές ασφαλείας:

$\theta = 45°$	$\frac{X'}{\sigma_1} = \frac{-0,61}{-0,166} = 3,66$	$\frac{Y'}{\sigma_2} = \frac{-0,118}{-0,061} = 1,93$	$\left\lvert \frac{S}{\tau_{12}} \right\rvert = \frac{0,072}{0,125} = 0,57$
$\theta = -45°$	$\frac{X'}{\sigma_1} = \frac{-0,61}{-0,254} = 2,40$	$\frac{Y'}{\sigma_2} = \frac{-0,118}{-0,046} = 2,54$	

Από τους παραπάνω συντελεστές ασφαλείας προκύπτει ότι η μικρότερη τιμή του φορτίου και συνεπώς το φορτίο αστοχίας είναι:

N_x^u = 0,57 KN/mm

Και κατά συνέπεια:

$$\overline{\lambda_p} = \sqrt{\frac{N_x^u}{N_x^{cr}}} = \sqrt{\frac{0,57}{0,0200}} = 5,35$$

$$\rho = \frac{b_{eff}}{b} = \frac{1}{\overline{\lambda_p}} = 0,1868$$

$$b_{eff} = \rho \cdot b = 93,40 \text{ mm}$$

Γ) γωνίες ±30°

Περιπτώσεις διαστρωματώσεων που εξετάστηκαν:

1) διαστρωμάτωση $[\mathbf{30/-30/30/-30/30/-30/30/-30}]$

2) διαστρωμάτωση $[\mathbf{30/-30/30/-30}]_s$

3) διαστρωμάτωση $[\mathbf{-30/30/-30/30}]_s$

4) διαστρωμάτωση $[\mathbf{30/-30/30/-30/30/-30}]$

5) διαστρωμάτωση $[\mathbf{30/-30/30}]_s$

6) διαστρωμάτωση $[\mathbf{-30/30/-30}]_s$

7) διαστρωμάτωση $[\mathbf{30/-30/30/-30}]$

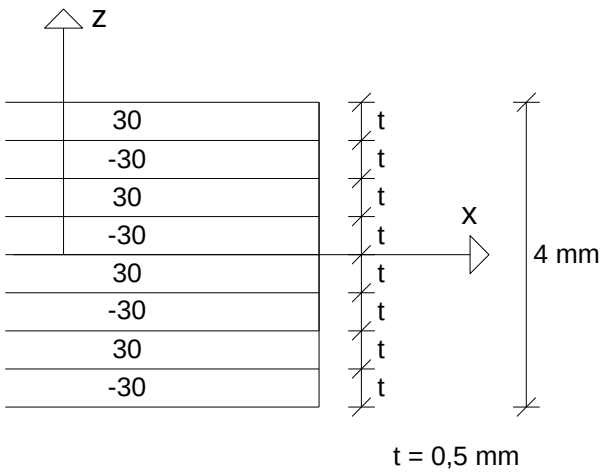
8) διαστρωμάτωση $[\mathbf{30/-30}]_s$

9) διαστρωμάτωση $[-30/30]_S$

Αναλυτικά:

Με την ίδια ανάλυση, προέκυψαν παρόμοια αποτελέσματα στις διαστρωματώσεις γωνιών $\pm 30^o$, οπότε παρατίθενται μόνο οι αναλύσεις των περιπτώσεων 1) και 5), καθώς τα υπόλοιπα αποτελέσματα είναι τα ίδια.

1) ***διαστρωμάτωση*** $[30/-30/30/-30/30/-30/30/-30]$



Το μητρώο καμπτικής δυσκαμψίας προκύπτει:

$$D = \begin{bmatrix} 141,201 & 38,265 & 0 \\ 38,265 & 59,153 & 0 \\ 0 & 0 & 33,627 \end{bmatrix}$$

Άρα το κρίσιμο φορτίο λυγισμού θα είναι:

$$N_x^{cr} = \frac{\pi^2}{500^2}\left[2\sqrt{141,201 \cdot 59,153} + 2\left(38,265 + 2 \cdot 33,627\right)\right] = 0,0155 \text{ KN/mm}$$

Το μητρώο μεμβρανικής δυσκαμψίας υπολογίζεται:

$$A = \begin{bmatrix} 105,901 & 28,699 & 0 \\ 28,699 & 44,365 & 0 \\ 0 & 0 & 25,22 \end{bmatrix}$$

Για αξονική θλιπτική δύναμη N_x = -1 KN/mm προκύπτουν οι παραμορφώσεις:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{26} \\ a_{61} & a_{62} & a_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = 10^{-3} \begin{bmatrix} 11,45 & -7,407 & 0 \\ -7,407 & 27,332 & 0 \\ 0 & 0 & 39,651 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -11,45 \\ 7,407 \\ 0 \end{Bmatrix} 10^{-3}$$

Με δεδομένες τις παραμορφώσεις υπολογίζονται οι τάσεις:

Για $\theta = 30°$ είναι:

$$\sigma = Q^{30°}\varepsilon \Rightarrow \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q^{30°}{}_{11} & Q^{30°}{}_{12} & Q^{30°}{}_{16} \\ Q^{30°}{}_{21} & Q^{30°}{}_{22} & Q^{30°}{}_{26} \\ Q^{30°}{}_{61} & Q^{30°}{}_{62} & Q^{30°}{}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 26,475 & 7,175 & 9,544 \\ 7,175 & 11,091 & 3,779 \\ 9,544 & 3,779 & 6,305 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -11,45 \\ 7,407 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,25 \\ 0 \\ -0,081 \end{Bmatrix}$$

Οι τάσεις μετασχηματίζονται στο σύστημα υλικού 1 – 2 για c = cos 30° και s = sin 30°:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2cs \\ s^2 & c^2 & -2cs \\ -cs & cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,75 & 0,25 & 0,866 \\ 0,25 & 0,75 & -0,866 \\ -0,433 & 0,433 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0,25 \\ 0 \\ -0,081 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,258 \\ 0,008 \\ 0,068 \end{Bmatrix}$$

Για $\theta = -30°$ είναι:

$$\sigma = Q^{-30°}\varepsilon \Rightarrow \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q^{-30°}{}_{11} & Q^{-30°}{}_{12} & Q^{-30°}{}_{16} \\ Q^{-30°}{}_{21} & Q^{-30°}{}_{22} & Q^{-30°}{}_{26} \\ Q^{-30°}{}_{61} & Q^{-30°}{}_{62} & Q^{-30°}{}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 26,475 & 7,175 & -9,544 \\ 7,175 & 11,091 & -3,779 \\ -9,544 & -3,779 & 6,305 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -11,45 \\ 7,407 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,25 \\ 0 \\ 0,081 \end{Bmatrix}$$

Οι τάσεις μετασχηματίζονται στο σύστημα υλικού 1 – 2 για c = cos (-30°) και s = sin (-30°):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2cs \\ s^2 & c^2 & -2cs \\ -cs & cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,75 & 0,25 & -0,866 \\ 0,25 & 0,75 & 0,866 \\ 0,433 & -0,433 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0,25 \\ 0 \\ 0,081 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,258 \\ -0,008 \\ -0,068 \end{Bmatrix}$$

Συντελεστές ασφαλείας:

$\theta = 30°$	$\frac{X'}{\sigma_1} = \frac{-0,61}{-0,258} = 2,37$	$\frac{Y'}{\sigma_2} = \frac{0,031}{0,008} = 3,92$	$\left\lvert \frac{S}{\tau_{12}} \right\rvert = \frac{0,072}{0,068} = 1,06$
$\theta = -30°$	$\frac{X'}{\sigma_1} = \frac{-0,61}{-0,258} = 2,37$	$\frac{Y'}{\sigma_2} = \frac{0,031}{0,008} = 3,92$	

Από τους παραπάνω συντελεστές ασφαλείας προκύπτει ότι η μικρότερη τιμή του φορτίου και συνεπώς το φορτίο αστοχίας είναι:

N_x^u = 1,06 KN/mm

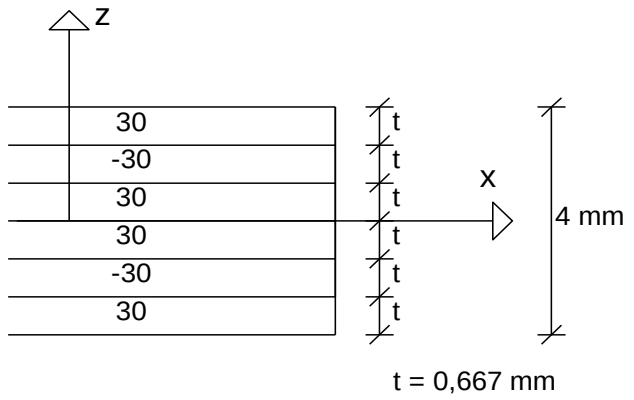
Και κατά συνέπεια:

$$\overline{\lambda_p} = \sqrt{\frac{N_x^u}{N_x^{cr}}} = \sqrt{\frac{1,06}{0,0155}} = 8,28$$

$$\rho = \frac{b_{eff}}{b} = \frac{1}{\overline{\lambda_p}} = 0,1208$$

$$b_{eff} = \rho \cdot b = 60,41 \text{ mm}$$

5*) διαστρωμάτωση* [30 / –30 / 30]$_s$



Το μητρώο καμπτικής δυσκαμψίας προκύπτει:

$$D = \begin{bmatrix} 141,201 & 38,265 & 24,508 \\ 38,265 & 59,153 & 9,704 \\ 24,508 & 9,704 & 33,627 \end{bmatrix}$$

Άρα το κρίσιμο φορτίο λυγισμού θα είναι:

$$N_x^{cr} = \frac{\pi^2}{500^2}\left[2\sqrt{141,201 \cdot 59,153} + 2\left(38,265 + 2 \cdot 33,627\right)\right] = 0,0155 \text{ KN/mm}$$

Το μητρώο μεμβρανικής δυσκαμψίας υπολογίζεται:

$$A = \begin{bmatrix} 105,901 & 28,699 & 12,725 \\ 28,699 & 44,365 & 5,039 \\ 12,725 & 5,039 & 25,22 \end{bmatrix}$$

Για αξονική θλιπτική δύναμη N_x = -1 KN/mm προκύπτουν οι παραμορφώσεις:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{26} \\ a_{61} & a_{62} & a_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathrm{N}_x \\ \mathrm{N}_y \\ \mathrm{N}_{xy} \end{Bmatrix} = 10^{-3} \begin{bmatrix} 11,905 & -7,088 & -4,297 \\ -7,088 & 27,475 & -2,093 \\ -4,297 & -2,093 & 42,481 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -11,905 \\ 7,088 \\ 4,297 \end{Bmatrix} 10^{-3}$$

Με δεδομένες τις παραμορφώσεις υπολογίζονται οι τάσεις:

Για $\theta = 30°$ είναι:

$$\sigma = Q^{30°}\varepsilon \Rightarrow \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q^{30°}{}_{11} & Q^{30°}{}_{12} & Q^{30°}{}_{16} \\ Q^{30°}{}_{21} & Q^{30°}{}_{22} & Q^{30°}{}_{26} \\ Q^{30°}{}_{61} & Q^{30°}{}_{62} & Q^{30°}{}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 26,475 & 7,175 & 9,544 \\ 7,175 & 11,091 & 3,779 \\ 9,544 & 3,779 & 6,305 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -11,905 \\ 7,088 \\ 4,297 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,223 \\ 0,009 \\ -0,06 \end{Bmatrix}$$

Οι τάσεις μετασχηματίζονται στο σύστημα υλικού 1 – 2 για c = cos 30° και s = sin 30°:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2cs \\ s^2 & c^2 & -2cs \\ -cs & cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,75 & 0,25 & 0,866 \\ 0,25 & 0,75 & -0,866 \\ -0,433 & 0,433 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0,223 \\ 0,009 \\ -0,06 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,217 \\ 0,003 \\ 0,071 \end{Bmatrix}$$

Για $\theta = -30°$ είναι:

$$\sigma = Q^{-30°}\varepsilon \Rightarrow \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q^{-30°}{}_{11} & Q^{-30°}{}_{12} & Q^{-30°}{}_{16} \\ Q^{-30°}{}_{21} & Q^{-30°}{}_{22} & Q^{-30°}{}_{26} \\ Q^{-30°}{}_{61} & Q^{-30°}{}_{62} & Q^{-30°}{}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 26,475 & 7,175 & -9,544 \\ 7,175 & 11,091 & -3,779 \\ -9,544 & -3,779 & 6,305 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -11,905 \\ 7,088 \\ 4,297 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,305 \\ -0,023 \\ 0,114 \end{Bmatrix}$$

Οι τάσεις μετασχηματίζονται στο σύστημα υλικού 1 – 2 για c = cos (-30°) και s = sin (-30°):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2cs \\ s^2 & c^2 & -2cs \\ -cs & cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,75 & 0,25 & -0,866 \\ 0,25 & 0,75 & 0,866 \\ 0,433 & -0,433 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0,305 \\ -0,023 \\ 0,114 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,333 \\ 0,005 \\ -0,065 \end{Bmatrix}$$

Συντελεστές ασφαλείας:

$\theta = 30°$	$\frac{X'}{\sigma_1} = \frac{-0,61}{-0,217} = 2,81$	$\frac{Y'}{\sigma_2} = \frac{0,031}{0,003} = 10,39$	$\left\lvert \frac{S}{\tau_{12}} \right\rvert = \frac{0,072}{0,071} = 1,02$
$\theta = -30°$	$\frac{X'}{\sigma_1} = \frac{-0,61}{-0,333} = 1,83$	$\frac{Y'}{\sigma_2} = \frac{0,031}{0,005} = 6,14$	$\left\lvert \frac{S}{\tau_{12}} \right\rvert = \frac{0,072}{0,065} = 1,10$

Από τους παραπάνω συντελεστές ασφαλείας προκύπτει ότι η μικρότερη τιμή του φορτίου και συνεπώς το φορτίο αστοχίας είναι:

N_x^u = 1,02 KN/mm

Και κατά συνέπεια:

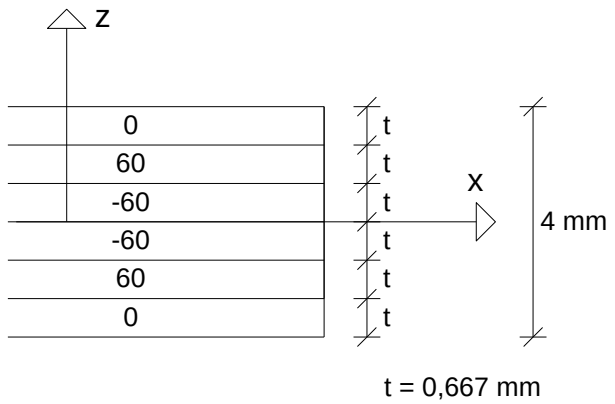
$$\overline{\lambda_p} = \sqrt{\frac{N_x^u}{N_x^{cr}}} = \sqrt{\frac{1,02}{0,0155}} = 8,08$$

$$\rho = \frac{b_{eff}}{b} = \frac{1}{\overline{\lambda_p}} = 0,1237$$

$$b_{eff} = \rho \cdot b = 61,87 \text{ mm}$$

3.3.3 Ψευδο – Ισότροπη διαστρωμάτωση

- **$\pi / 3$ - $[0 / 60 / -60]_S$**



Το μητρώο καμπτικής δυσκαμψίας προκύπτει:

$$D=\begin{bmatrix}164,498 & 19,527 & 4,479\\ 19,527 & 73,333 & 11,311\\ 4,479 & 11,311 & 31,167\end{bmatrix}$$

Άρα το κρίσιμο φορτίο λυγισμού θα είναι:

$$N_x^{cr}=\frac{\pi^2}{500^2}\left[2\sqrt{164,498\cdot 73,333}+2\left(19,527+2\cdot 31,167\right)\right]=0,0151\ \text{KN/mm}$$

Το μητρώο μεμβρανικής δυσκαμψίας υπολογίζεται:

$$A=\begin{bmatrix}81,79 & 22,042 & 0\\ 22,042 & 81,79 & 0\\ 0 & 0 & 31,894\end{bmatrix}$$

Για αξονική θλιπτική δύναμη N_x = -1 KN/mm προκύπτουν οι παραμορφώσεις:

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{16}\\ a_{21} & a_{22} & a_{26}\\ a_{61} & a_{62} & a_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\mathrm{N}_x\\ \mathrm{N}_y\\ \mathrm{N}_{xy}\end{Bmatrix}=10^{-3}\begin{bmatrix}13,184 & -3,553 & 0\\ -3,553 & 13,184 & 0\\ 0 & 0 & 31,353\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-1\\ 0\\ 0\end{Bmatrix}=$$

$$=\begin{Bmatrix}-13,184\\ 3,553\\ 0\end{Bmatrix}10^{-3}$$

Με δεδομένες τις παραμορφώσεις υπολογίζονται οι τάσεις:

Για $\theta=0°$ είναι:

$$\sigma=Q^0\varepsilon\Rightarrow\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}Q^0{}_{11} & Q^0{}_{12} & Q^0{}_{16}\\ Q^0{}_{21} & Q^0{}_{22} & Q^0{}_{26}\\ Q^0{}_{61} & Q^0{}_{62} & Q^0{}_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}39,16 & 2,182 & 0\\ 2,182 & 8,392 & 0\\ 0 & 0 & 4,14\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-13,184\\ 3,553\\ 0\end{Bmatrix}10^{-3}=\begin{Bmatrix}-0,509\\ 0,001\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \tau_{12}\end{Bmatrix}$$

Για $\theta=60°$ είναι:

$$\sigma=Q^{60°}\varepsilon\Rightarrow\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}Q^{60°}{}_{11} & Q^{60°}{}_{12} & Q^{60°}{}_{16}\\ Q^{60°}{}_{21} & Q^{60°}{}_{22} & Q^{60°}{}_{26}\\ Q^{60°}{}_{61} & Q^{60°}{}_{62} & Q^{60°}{}_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}11,091 & 7,175 & 3,779\\ 7,175 & 26,475 & 9,544\\ 3,779 & 9,544 & 9,89\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-13,184\\ 3,553\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-0,121\\ -0,001\\ -0,016\end{Bmatrix}$$

Οι τάσεις μετασχηματίζονται στο σύστημα υλικού 1 – 2 για c = cos 60° και s = sin 60°:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \tau_{12}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}c^2 & s^2 & 2cs\\ s^2 & c^2 & -2cs\\ -cs & cs & c^2-s^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}0,25 & 0,75 & 0,866\\ 0,75 & 0,25 & -0,866\\ -0,433 & 0,433 & -0,5\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-0,121\\ -0,001\\ -0,016\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-0,044\\ -0,077\\ 0,060\end{Bmatrix}$$

Για $\theta=-60°$ είναι:

$$\sigma=Q^{-60°}\varepsilon\Rightarrow\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}Q^{-60°}{}_{11} & Q^{-60°}{}_{12} & Q^{-60°}{}_{16}\\ Q^{-60°}{}_{21} & Q^{-60°}{}_{22} & Q^{-60°}{}_{26}\\ Q^{-60°}{}_{61} & Q^{-60°}{}_{62} & Q^{-60°}{}_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}11,091 & 7,175 & -3,779\\ 7,175 & 26,475 & -9,544\\ -3,779 & -9,544 & 9,89\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-13,184\\ 3,553\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-0,121\\ -0,001\\ 0,016\end{Bmatrix}$$

Οι τάσεις μετασχηματίζονται στο σύστημα υλικού 1 – 2 για c = cos (-60°) και s = sin (-60°):

$$\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \tau_{12}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}c^2 & s^2 & 2cs\\ s^2 & c^2 & -2cs\\ -cs & cs & c^2-s^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}0,25 & 0,75 & -0,866\\ 0,75 & 0,25 & 0,866\\ 0,433 & -0,433 & -0,5\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-0,121\\ -0,001\\ 0,016\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-0,044\\ -0,077\\ -0,060\end{Bmatrix}$$

Συντελεστές ασφαλείας:

$\theta=0°$	$\frac{X'}{\sigma_1}=\frac{-0,61}{-0,509}=1,20$	$\frac{Y}{\sigma_2}=\frac{0,031}{0,001}=29,54$	
$\theta=60°$	$\frac{X'}{\sigma_1}=\frac{-0,61}{-0,044}=13,75$	$\frac{Y'}{\sigma_2}=\frac{-0,118}{-0,077}=1,53$	$\left\lvert\frac{S}{\tau_{12}}\right\rvert=\frac{0,072}{0,06}=1,20$
$\theta=-60°$	$\frac{X'}{\sigma_1}=\frac{-0,61}{-0,044}=13,75$	$\frac{Y'}{\sigma_2}=\frac{-0,118}{-0,077}=1,53$	$\left\lvert\frac{S}{\tau_{12}}\right\rvert=\frac{0,072}{0,06}=1,20$

Από τους παραπάνω συντελεστές ασφαλείας προκύπτει ότι η μικρότερη τιμή του φορτίου και συνεπώς το φορτίο αστοχίας είναι:

N_x^u = 1,20 KN/mm

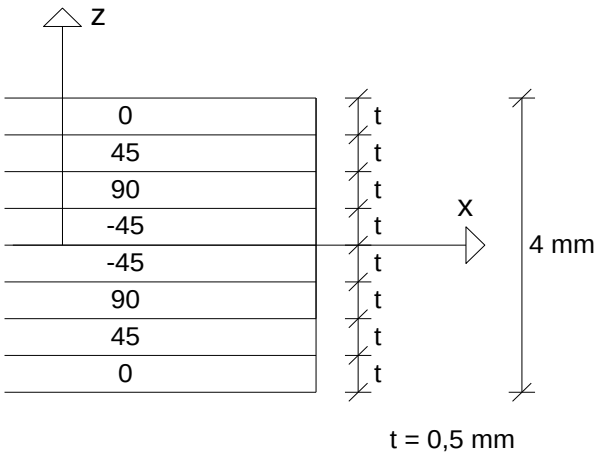
Και κατά συνέπεια:

$$\overline{\lambda_p} = \sqrt{\frac{N_x^u}{N_x^{cr}}} = \sqrt{\frac{1,20}{0,0151}} = 8,90$$

$$\rho = \frac{b_{eff}}{b} = \frac{1}{\overline{\lambda_p}} = 0,1123$$

$$b_{eff} = \rho \cdot b = 56,16 \text{ mm}$$

- **π / 4 - $[0/45/90/-45]_s$**



Το μητρώο καμπτικής δυσκαμψίας προκύπτει:

$$D = \begin{bmatrix} 154,17 & 22,732 & 11,538 \\ 22,732 & 77,25 & 11,538 \\ 11,538 & 11,538 & 33,175 \end{bmatrix}$$

Άρα το κρίσιμο φορτίο λυγισμού θα είναι:

$$N_x^{cr} = \frac{\pi^2}{500^2}\left[2\sqrt{154,17 \cdot 77,25} + 2\left(22,732 + 2 \cdot 33,175\right)\right] = 0,0157 \text{ KN/mm}$$

Το μητρώο μεμβρανικής δυσκαμψίας υπολογίζεται:

$$A = \begin{bmatrix} 81,79 & 22,042 & 0 \\ 22,042 & 81,79 & 0 \\ 0 & 0 & 29,874 \end{bmatrix}$$

Για αξονική θλιπτική δύναμη N_x = -1 KN/mm προκύπτουν οι παραμορφώσεις:

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{16}\\ a_{21} & a_{22} & a_{26}\\ a_{61} & a_{62} & a_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\mathrm{N}_x\\ \mathrm{N}_y\\ \mathrm{N}_{xy}\end{Bmatrix}=10^{-3}\begin{bmatrix}13,184 & -3,553 & 0\\ -3,553 & 13,184 & 0\\ 0 & 0 & 33,474\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-1\\ 0\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-13,184\\ 3,553\\ 0\end{Bmatrix}10^{-3}$$

Με δεδομένες τις παραμορφώσεις υπολογίζονται οι τάσεις:

Για $\theta=0°$ είναι:

$$\sigma=Q^0\varepsilon\Rightarrow\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}Q^0{}_{11} & Q^0{}_{12} & Q^0{}_{16}\\ Q^0{}_{21} & Q^0{}_{22} & Q^0{}_{26}\\ Q^0{}_{61} & Q^0{}_{62} & Q^0{}_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}39,16 & 2,182 & 0\\ 2,182 & 8,392 & 0\\ 0 & 0 & 4,14\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-13,184\\ 3,553\\ 0\end{Bmatrix}10^{-3}=\begin{Bmatrix}-0,509\\ 0,001\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \tau_{12}\end{Bmatrix}$$

Για $\theta=45°$ είναι:

$$\sigma=Q^{45°}\varepsilon\Rightarrow\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}Q^{45°}{}_{11} & Q^{45°}{}_{12} & Q^{45°}{}_{16}\\ Q^{45°}{}_{21} & Q^{45°}{}_{22} & Q^{45°}{}_{26}\\ Q^{45°}{}_{61} & Q^{45°}{}_{62} & Q^{45°}{}_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}17,119 & 8,839 & 7,692\\ 8,839 & 17,119 & 7,692\\ 7,692 & 7,692 & 10,797\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-13,184\\ 3,553\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-0,194\\ -0,056\\ -0,074\end{Bmatrix}$$

Οι τάσεις μετασχηματίζονται στο σύστημα υλικού $1-2$ για c = cos 45° και s = sin 45°:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \tau_{12}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}c^2 & s^2 & 2cs\\ s^2 & c^2 & -2cs\\ -cs & cs & c^2-s^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}0,5 & 0,5 & 1\\ 0,5 & 0,5 & -1\\ -0,5 & 0,5 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-0,194\\ -0,056\\ -0,074\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-0,199\\ -0,051\\ 0,069\end{Bmatrix}$$

Για $\theta=90°$ είναι:

$$\sigma=Q^{90°}\varepsilon\Rightarrow\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}Q^{90°}{}_{11} & Q^{90°}{}_{12} & Q^{90°}{}_{16}\\ Q^{90°}{}_{21} & Q^{90°}{}_{22} & Q^{90°}{}_{26}\\ Q^{90°}{}_{61} & Q^{90°}{}_{62} & Q^{90°}{}_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}8,392 & 2,182 & 0\\ 2,182 & 39,16 & 0\\ 0 & 0 & 4,14\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-13,184\\ 3,553\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-0,103\\ 0,11\\ 0\end{Bmatrix}$$

Οι τάσεις μετασχηματίζονται στο σύστημα υλικού 1 – 2 για c = cos 90° και s = sin 90°:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \tau_{12}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}c^2 & s^2 & 2cs\\ s^2 & c^2 & -2cs\\ -cs & cs & c^2-s^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-0{,}103\\ 0{,}11\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0{,}11\\ -0{,}103\\ 0\end{Bmatrix}$$

Για $\theta=-45°$ είναι:

$$\sigma=Q^{-45°}\varepsilon\Rightarrow\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}Q^{-45°}{}_{11} & Q^{-45°}{}_{12} & Q^{-45°}{}_{16}\\ Q^{-45°}{}_{21} & Q^{-45°}{}_{22} & Q^{-45°}{}_{26}\\ Q^{-45°}{}_{61} & Q^{-45°}{}_{62} & Q^{-45°}{}_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}17{,}119 & 8{,}839 & -7{,}692\\ 8{,}839 & 17{,}119 & -7{,}692\\ -7{,}692 & -7{,}692 & 10{,}797\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-13{,}184\\ 3{,}553\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-0{,}194\\ -0{,}056\\ 0{,}074\end{Bmatrix}$$

Οι τάσεις μετασχηματίζονται στο σύστημα υλικού 1 – 2 για c = cos (-45°) και s = sin (-45°):

$$\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \tau_{12}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}c^2 & s^2 & 2cs\\ s^2 & c^2 & -2cs\\ -cs & cs & c^2-s^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}0{,}5 & 0{,}5 & -1\\ 0{,}5 & 0{,}5 & 1\\ 0{,}5 & -0{,}5 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-0{,}194\\ -0{,}056\\ 0{,}074\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-0{,}199\\ -0{,}051\\ -0{,}069\end{Bmatrix}$$

Συντελεστές ασφαλείας:

$\theta=0°$	$\frac{X'}{\sigma_1}=\frac{-0{,}61}{-0{,}509}=1{,}20$	$\frac{Y}{\sigma_2}=\frac{0{,}031}{0{,}001}=29{,}54$	
$\theta=45°$	$\frac{X'}{\sigma_1}=\frac{-0{,}61}{-0{,}199}=3{,}06$	$\frac{Y'}{\sigma_2}=\frac{-0{,}118}{-0{,}051}=2{,}32$	$\left\lvert\frac{S}{\tau_{12}}\right\rvert=\frac{0{,}072}{0{,}069}=1{,}04$
$\theta=90°$	$\frac{X}{\sigma_1}=\frac{1{,}062}{0{,}11}=9{,}62$	$\frac{Y'}{\sigma_2}=\frac{-0{,}118}{-0{,}103}=1{,}15$	
$\theta=-45°$	$\frac{X'}{\sigma_1}=\frac{-0{,}61}{-0{,}199}=3{,}06$	$\frac{Y'}{\sigma_2}=\frac{-0{,}118}{-0{,}051}=2{,}32$	$\left\lvert\frac{S}{\tau_{12}}\right\rvert=\frac{0{,}072}{0{,}069}=1{,}04$

Από τους παραπάνω συντελεστές ασφαλείας προκύπτει ότι η μικρότερη τιμή του φορτίου και συνεπώς το φορτίο αστοχίας είναι:

N_x^u = 1,04 KN/mm

Και κατά συνέπεια:

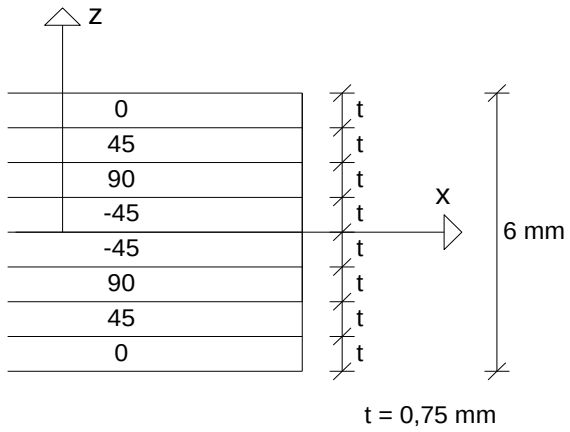
$$\overline{\lambda_p} = \sqrt{\frac{N_x^u}{N_x^{cr}}} = \sqrt{\frac{1,04}{0,0157}} = 8,15$$

$$\rho = \frac{b_{eff}}{b} = \frac{1}{\overline{\lambda_p}} = 0,1227$$

$$b_{eff} = \rho \cdot b = 61,36 \text{ mm}$$

3.3.4 Διερεύνηση Πάχους στη Διαστρωμάτωση π / 4 - $[0/45/90/-45]_S$

- **h = 6 mm**



Το μητρώο καμπτικής δυσκαμψίας προκύπτει:

$$D = \begin{bmatrix} 520,325 & 76,722 & 38,941 \\ 76,722 & 260,72 & 38,941 \\ 38,941 & 38,941 & 111,966 \end{bmatrix}$$

Άρα το κρίσιμο φορτίο λυγισμού θα είναι:

$$N_x^{cr} = \frac{\pi^2}{500^2}\left[2\sqrt{520,325 \cdot 260,72} + 2\left(76,722 + 2 \cdot 111,966\right)\right] = 0,0528 \text{ KN/mm}$$

Το μητρώο μεμβρανικής δυσκαμψίας υπολογίζεται:

$$A = \begin{bmatrix} 122,685 & 33,063 & 0 \\ 33,063 & 122,685 & 0 \\ 0 & 0 & 44,811 \end{bmatrix}$$

Για αξονική θλιπτική δύναμη N_x = -1 KN/mm προκύπτουν οι παραμορφώσεις:

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{16}\\ a_{21} & a_{22} & a_{26}\\ a_{61} & a_{62} & a_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\mathrm{N}_x\\ \mathrm{N}_y\\ \mathrm{N}_{xy}\end{Bmatrix}=10^{-3}\begin{bmatrix}8,789 & -2,369 & 0\\ -2,369 & 8,789 & 0\\ 0 & 0 & 22,316\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-1\\ 0\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-8,789\\ 2,369\\ 0\end{Bmatrix}10^{-3}$$

Με δεδομένες τις παραμορφώσεις υπολογίζονται οι τάσεις:

Για $\theta=0°$ είναι:

$$\sigma=Q^0\varepsilon\Rightarrow\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}Q^0{}_{11} & Q^0{}_{12} & Q^0{}_{16}\\ Q^0{}_{21} & Q^0{}_{22} & Q^0{}_{26}\\ Q^0{}_{61} & Q^0{}_{62} & Q^0{}_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}39,16 & 2,182 & 0\\ 2,182 & 8,392 & 0\\ 0 & 0 & 4,14\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-8,789\\ 2,369\\ 0\end{Bmatrix}10^{-3}=\begin{Bmatrix}-0,339\\ 0,0007\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \tau_{12}\end{Bmatrix}$$

Για $\theta=45°$ είναι:

$$\sigma=Q^{45°}\varepsilon\Rightarrow\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}Q^{45°}{}_{11} & Q^{45°}{}_{12} & Q^{45°}{}_{16}\\ Q^{45°}{}_{21} & Q^{45°}{}_{22} & Q^{45°}{}_{26}\\ Q^{45°}{}_{61} & Q^{45°}{}_{62} & Q^{45°}{}_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}17,119 & 8,839 & 7,692\\ 8,839 & 17,119 & 7,692\\ 7,692 & 7,692 & 10,797\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-8,789\\ 2,369\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-0,130\\ -0,037\\ -0,049\end{Bmatrix}$$

Οι τάσεις μετασχηματίζονται στο σύστημα υλικού $1-2$ για c = cos 45° και s = sin 45°:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \tau_{12}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}c^2 & s^2 & 2cs\\ s^2 & c^2 & -2cs\\ -cs & cs & c^2-s^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}0,5 & 0,5 & 1\\ 0,5 & 0,5 & -1\\ -0,5 & 0,5 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-0,130\\ -0,037\\ -0,049\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-0,133\\ -0,034\\ 0,046\end{Bmatrix}$$

Για $\theta=90°$ είναι:

$$\sigma=Q^{90°}\varepsilon\Rightarrow\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}Q^{90°}{}_{11} & Q^{90°}{}_{12} & Q^{90°}{}_{16}\\ Q^{90°}{}_{21} & Q^{90°}{}_{22} & Q^{90°}{}_{26}\\ Q^{90°}{}_{61} & Q^{90°}{}_{62} & Q^{90°}{}_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}8,392 & 2,182 & 0\\ 2,182 & 39,16 & 0\\ 0 & 0 & 4,14\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-8,789\\ 2,369\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-0,069\\ 0,074\\ 0\end{Bmatrix}$$

Οι τάσεις μετασχηματίζονται στο σύστημα υλικού 1 – 2 για c = cos 90° και s = sin 90°:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \tau_{12}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}c^2 & s^2 & 2cs\\ s^2 & c^2 & -2cs\\ -cs & cs & c^2-s^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-0,069\\ 0,074\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0,074\\ -0,069\\ 0\end{Bmatrix}$$

Για $\theta=-45°$ είναι:

$$\sigma=Q^{-45°}\varepsilon\Rightarrow\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}Q^{-45°}{}_{11} & Q^{-45°}{}_{12} & Q^{-45°}{}_{16}\\ Q^{-45°}{}_{21} & Q^{-45°}{}_{22} & Q^{-45°}{}_{26}\\ Q^{-45°}{}_{61} & Q^{-45°}{}_{62} & Q^{-45°}{}_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}17,119 & 8,839 & -7,692\\ 8,839 & 17,119 & -7,692\\ -7,692 & -7,692 & 10,797\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-8,789\\ 2,369\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-0,130\\ -0,037\\ 0,049\end{Bmatrix}$$

Οι τάσεις μετασχηματίζονται στο σύστημα υλικού 1 – 2 για c = cos (-45°) και s = sin (-45°):

$$\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \tau_{12}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}c^2 & s^2 & 2cs\\ s^2 & c^2 & -2cs\\ -cs & cs & c^2-s^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}0,5 & 0,5 & -1\\ 0,5 & 0,5 & 1\\ 0,5 & -0,5 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-0,106\\ -0,061\\ 0,072\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-0,133\\ -0,034\\ -0,046\end{Bmatrix}$$

Συντελεστές ασφαλείας:

$\theta=0°$	$\frac{X'}{\sigma_1}=\frac{-0,61}{-0,339}=1,80$	$\frac{Y}{\sigma_2}=\frac{0,031}{0,0007}=44,31$	
$\theta=45°$	$\frac{X'}{\sigma_1}=\frac{-0,61}{-0,133}=4,60$	$\frac{Y'}{\sigma_2}=\frac{-0,118}{-0,034}=3,48$	$\left\lvert\frac{S}{\tau_{12}}\right\rvert=\frac{0,072}{0,046}=1,56$
$\theta=90°$	$\frac{X}{\sigma_1}=\frac{1,062}{0,074}=14,43$	$\frac{Y'}{\sigma_2}=\frac{-0,118}{-0,069}=1,72$	
$\theta=-45°$	$\frac{X'}{\sigma_1}=\frac{-0,61}{-0,133}=4,60$	$\frac{Y'}{\sigma_2}=\frac{-0,118}{-0,034}=3,48$	$\left\lvert\frac{S}{\tau_{12}}\right\rvert=\frac{0,072}{0,046}=1,56$

Από τους παραπάνω συντελεστές ασφαλείας προκύπτει ότι η μικρότερη τιμή του φορτίου και συνεπώς το φορτίο αστοχίας είναι:

N_x^u = 1,56 KN/mm

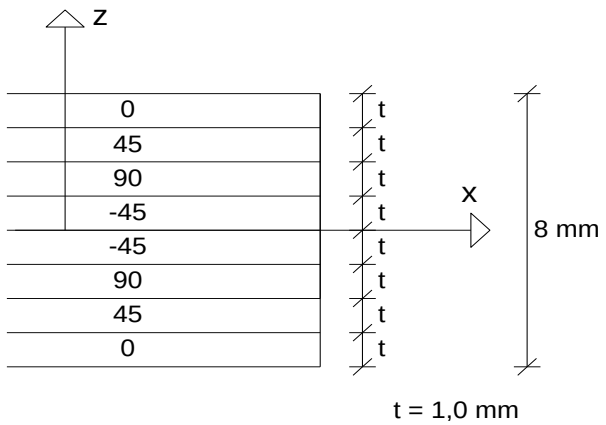
Και κατά συνέπεια:

$$\overline{\lambda_p} = \sqrt{\frac{N_x^u}{N_x^{cr}}} = \sqrt{\frac{1,56}{0,0528}} = 5,43$$

$$\rho = \frac{b_{eff}}{b} = \frac{1}{\overline{\lambda_p}} = 0,1841$$

$$b_{eff} = \rho \cdot b = 92,04 \text{ mm}$$

- **h = 8 mm**



Το μητρώο καμπτικής δυσκαμψίας προκύπτει:

$$D = \begin{bmatrix} 1233,363 & 181,859 & 92,304 \\ 181,859 & 618,003 & 92,304 \\ 92,304 & 92,304 & 265,4 \end{bmatrix}$$

Άρα το κρίσιμο φορτίο λυγισμού θα είναι:

$$N_x^{cr} = \frac{\pi^2}{500^2}\left[2\sqrt{1233,363 \cdot 618,003} + 2\left(181,859 + 2 \cdot 265,4\right)\right] = 0,1252 \text{ KN/mm}$$

Το μητρώο μεμβρανικής δυσκαμψίας υπολογίζεται:

$$A = \begin{bmatrix} 163,58 & 44,084 & 0 \\ 44,084 & 163,58 & 0 \\ 0 & 0 & 59,748 \end{bmatrix}$$

Για αξονική θλιπτική δύναμη N_x = -1 KN/mm προκύπτουν οι παραμορφώσεις:

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{16}\\ a_{21} & a_{22} & a_{26}\\ a_{61} & a_{62} & a_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\mathrm{N}_x\\ \mathrm{N}_y\\ \mathrm{N}_{xy}\end{Bmatrix}=10^{-3}\begin{bmatrix}6,592 & -1,777 & 0\\ -1,777 & 6,592 & 0\\ 0 & 0 & 16,737\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-1\\ 0\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-6,592\\ 1,777\\ 0\end{Bmatrix}10^{-3}$$

Με δεδομένες τις παραμορφώσεις υπολογίζονται οι τάσεις:

Για $\theta=0°$ είναι:

$$\sigma=Q^0\varepsilon\Rightarrow\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}Q^0{}_{11} & Q^0{}_{12} & Q^0{}_{16}\\ Q^0{}_{21} & Q^0{}_{22} & Q^0{}_{26}\\ Q^0{}_{61} & Q^0{}_{62} & Q^0{}_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}39,16 & 2,182 & 0\\ 2,182 & 8,392 & 0\\ 0 & 0 & 4,14\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-6,592\\ 1,777\\ 0\end{Bmatrix}10^{-3}=\begin{Bmatrix}-0,254\\ 0,0005\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \tau_{12}\end{Bmatrix}$$

Για $\theta=45°$ είναι:

$$\sigma=Q^{45°}\varepsilon\Rightarrow\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}Q^{45°}{}_{11} & Q^{45°}{}_{12} & Q^{45°}{}_{16}\\ Q^{45°}{}_{21} & Q^{45°}{}_{22} & Q^{45°}{}_{26}\\ Q^{45°}{}_{61} & Q^{45°}{}_{62} & Q^{45°}{}_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}17,119 & 8,839 & 7,692\\ 8,839 & 17,119 & 7,692\\ 7,692 & 7,692 & 10,797\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-6,592\\ 1,777\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-0,097\\ -0,028\\ -0,037\end{Bmatrix}$$

Οι τάσεις μετασχηματίζονται στο σύστημα υλικού $1-2$ για c = cos 45° και s = sin 45°:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \tau_{12}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}c^2 & s^2 & 2cs\\ s^2 & c^2 & -2cs\\ -cs & cs & c^2-s^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}0,5 & 0,5 & 1\\ 0,5 & 0,5 & -1\\ -0,5 & 0,5 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-0,097\\ -0,028\\ -0,037\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-0,100\\ -0,025\\ 0,035\end{Bmatrix}$$

Για $\theta=90°$ είναι:

$$\sigma=Q^{90°}\varepsilon\Rightarrow\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}Q^{90°}{}_{11} & Q^{90°}{}_{12} & Q^{90°}{}_{16}\\ Q^{90°}{}_{21} & Q^{90°}{}_{22} & Q^{90°}{}_{26}\\ Q^{90°}{}_{61} & Q^{90°}{}_{62} & Q^{90°}{}_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}8,392 & 2,182 & 0\\ 2,182 & 39,16 & 0\\ 0 & 0 & 4,14\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-6,592\\ 1,777\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-0,051\\ 0,055\\ 0\end{Bmatrix}$$

Οι τάσεις μετασχηματίζονται στο σύστημα υλικού 1 – 2 για c = cos 90° και s = sin 90°:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \tau_{12}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}c^2 & s^2 & 2cs\\ s^2 & c^2 & -2cs\\ -cs & cs & c^2-s^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-0,051\\ 0,055\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0,055\\ -0,051\\ 0\end{Bmatrix}$$

Για $\theta=-45°$ είναι:

$$\sigma=Q^{-45°}\varepsilon\Rightarrow\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}Q^{-45°}{}_{11} & Q^{-45°}{}_{12} & Q^{-45°}{}_{16}\\ Q^{-45°}{}_{21} & Q^{-45°}{}_{22} & Q^{-45°}{}_{26}\\ Q^{-45°}{}_{61} & Q^{-45°}{}_{62} & Q^{-45°}{}_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}17,119 & 8,839 & -7,692\\ 8,839 & 17,119 & -7,692\\ -7,692 & -7,692 & 10,797\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-6,592\\ 1,777\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-0,097\\ -0,028\\ 0,037\end{Bmatrix}$$

Οι τάσεις μετασχηματίζονται στο σύστημα υλικού 1 – 2 για c = cos (-45°) και s = sin (-45°):

$$\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \tau_{12}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}c^2 & s^2 & 2cs\\ s^2 & c^2 & -2cs\\ -cs & cs & c^2-s^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}0,5 & 0,5 & -1\\ 0,5 & 0,5 & 1\\ 0,5 & -0,5 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-0,097\\ -0,028\\ 0,037\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-0,100\\ -0,025\\ -0,035\end{Bmatrix}$$

Συντελεστές ασφαλείας:

$\theta=0°$	$\frac{X'}{\sigma_1}=\frac{-0,61}{-0,254}=2,40$	$\frac{Y}{\sigma_2}=\frac{0,031}{0,0005}=59,08$	
$\theta=45°$	$\frac{X'}{\sigma_1}=\frac{-0,61}{-0,100}=6,13$	$\frac{Y'}{\sigma_2}=\frac{-0,118}{-0,025}=4,63$	$\left\lvert\frac{S}{\tau_{12}}\right\rvert=\frac{0,072}{0,035}=2,08$
$\theta=90°$	$\frac{X}{\sigma_1}=\frac{1,062}{0,055}=19,24$	$\frac{Y'}{\sigma_2}=\frac{-0,118}{-0,051}=2,29$	
$\theta=-45°$	$\frac{X'}{\sigma_1}=\frac{-0,61}{-0,100}=6,13$	$\frac{Y'}{\sigma_2}=\frac{-0,118}{-0,025}=4,63$	$\left\lvert\frac{S}{\tau_{12}}\right\rvert=\frac{0,072}{0,035}=2,08$

Από τους παραπάνω συντελεστές ασφαλείας προκύπτει ότι η μικρότερη τιμή του φορτίου και συνεπώς το φορτίο αστοχίας είναι:

N_x^u = 2,08 KN/mm

Και κατά συνέπεια:

$$\overline{\lambda_p} = \sqrt{\frac{N_x^u}{N_x^{cr}}} = \sqrt{\frac{2,08}{0,1252}} = 4,07$$

$$\rho = \frac{b_{eff}}{b} = \frac{1}{\overline{\lambda_p}} = 0,2455$$

$$b_{eff} = \rho \cdot b = 122,73 \text{ mm}$$

3.4 Χάλυβας

3.4.1 Γενικά

Όπως προαναφέρθηκε, εξετάστηκε η ίδια τετραγωνική διατομή με διαστάσεις a = b = 500 mm και πάχος h = 4 mm και ομοιόμορφα κατανεμημένη δύναμη και συνεπώς και τάση. Επίσης, η σχέση του ενεργού πλάτους που λήφθηκε είναι από τη προσέγγιση του Von Karman, ώστε να έχουμε σαφή σύγκριση.

Από τον Πίνακα 2.1 προκύπτει πως για $\psi = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = 1$ (ομοιόμορφη θλίψη) ο συντελεστής κύρτωσης είναι: $K_\sigma = 4$. Επίσης, για το χάλυβα ισχύει:

Μέτρο ελαστικότητας:
E = 210000 Mpa

Λόγος Poisson:
v = 0,3

Το μητρώο καμπτικής δυσκαμψίας για το ισότροπο υλικό είναι:

$$D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{21} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix}$$

με $D_{11} = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$, $D_{12} = \nu \cdot D_{11}$, $D_{22} = D_{11}$ και $D_{11} = D_{12} + 2D_{66}$

3.4.2 Χάλυβας Ποιότητας S235

Όριο διαρροής:
f_y = 235 MPa

Υπολογίζονται οι όροι του μητρώου καμπτικής δυσκαμψίας:

$$D_{11} = \frac{210 \cdot 4^3}{12(1-0,3^2)} = 1230,77 KN/mm$$

$$D_{12} = 0,3 \cdot 1230,77 = 369,23 KN/mm$$

$$D_{22} = 1230,77 KN/mm$$

$$D_{66} = \frac{D_{11} - D_{12}}{2} = \frac{1230,77 - 369,23}{2} = 430,77 KN/mm$$

Άρα το μητρώο της καμπτικής δυσκαμψίας γίνεται:

$$D = \begin{bmatrix} 1230,77 & 369,23 & 0 \\ 369,23 & 1230,77 & 0 \\ 0 & 0 & 430,77 \end{bmatrix}.$$

Η κρίσιμη τάση και το κρίσιμο φορτίο λυγισμού είναι αντίστοιχα:

$$\sigma_{cr} = \frac{K_\sigma \pi^2 E}{12(1-\nu^2)\left(\frac{b}{t}\right)^2} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot 210000}{12(1-0,3^2)\left(\frac{500}{4}\right)^2} = 48,59 MPa$$

$N_x^{cr} = \sigma_{cr} \cdot t = 48,59 \cdot 4 = 0,1944$ KN/mm.

Η ανηγμένη λυγηρότητα και ο μειωτικός συντελεστής ρ προκύπτουν:

$$\overline{\lambda_p} = \sqrt{\frac{f_y}{\sigma_{cr}}} = \sqrt{\frac{235}{48,59}} = 2,20$$

$$\rho = \frac{b_{eff}}{b} = \sqrt{\frac{\sigma_{cr}}{f_y}} = \sqrt{\frac{48,59}{235}} = 0,4547$$

Άρα το ενεργό πλάτος είναι:

$$b_{eff} = \rho \cdot b = 0,4547 \cdot 500 = 227,36 mm.$$

Για τις περιπτώσεις συνολικού πάχους h = 6 mm και h = 8 mm που διερευνήσαμε στη διατομή από σύνθετα υλικά, τα αντίστοιχα αποτελέσματα για τον χάλυβα προκύπτουν:

1) h = 6 mm

Το μητρώο της καμπτικής δυσκαμψίας είναι:

$$D = \begin{bmatrix} 4153,85 & 1246,15 & 0 \\ 1246,15 & 4153,85 & 0 \\ 0 & 0 & 1453,85 \end{bmatrix}$$

Η κρίσιμη τάση και το κρίσιμο φορτίο λυγισμού είναι αντίστοιχα:

$$\sigma_{cr} = \frac{K_\sigma \pi^2 E}{12(1-\nu^2)\left(\frac{b}{t}\right)^2} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot 210000}{12(1-0,3^2)\left(\frac{500}{6}\right)^2} = 109,32 MPa$$

$N_x^{cr} = \sigma_{cr} \cdot t = 109{,}32 \cdot 4 = 0{,}4373$ KN/mm.

Η ανηγμένη λυγηρότητα και ο μειωτικός συντελεστής ρ προκύπτουν:

$$\overline{\lambda_p} = \sqrt{\frac{f_y}{\sigma_{cr}}} = \sqrt{\frac{235}{109,32}} = 1,47$$

$$\rho = \frac{b_{eff}}{b} = \sqrt{\frac{\sigma_{cr}}{f_y}} = \sqrt{\frac{109,32}{235}} = 0,6821$$

Άρα το ενεργό πλάτος είναι:

$$b_{eff} = \rho \cdot b = 0,6821 \cdot 500 = 341,03mm.$$

2) h = 8 mm

Το μητρώο της καμπτικής δυσκαμψίας είναι:

$$D = \begin{bmatrix} 9846,15 & 2953,85 & 0 \\ 2953,85 & 9846,15 & 0 \\ 0 & 0 & 3446,15 \end{bmatrix}$$

Η κρίσιμη τάση και το κρίσιμο φορτίο λυγισμού είναι αντίστοιχα:

$$\sigma_{cr} = \frac{K_\sigma \pi^2 E}{12(1-\nu^2)\left(\frac{b}{t}\right)^2} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot 210000}{12(1-0,3^2)\left(\frac{500}{8}\right)^2} = 194,36MPa$$

$N_x^{cr} = \sigma_{cr} \cdot t = 194{,}36 \cdot 4 = 0{,}7774$ KN/mm.

Η ανηγμένη λυγηρότητα και ο μειωτικός συντελεστής ρ προκύπτουν:

$$\overline{\lambda_p} = \sqrt{\frac{f_y}{\sigma_{cr}}} = \sqrt{\frac{235}{194,36}} = 1,10$$

$$\rho = \frac{b_{eff}}{b} = \sqrt{\frac{\sigma_{cr}}{f_y}} = \sqrt{\frac{194,36}{235}} = 0,9094$$

Άρα το ενεργό πλάτος είναι:

$$b_{eff} = \rho \cdot b = 0,9094 \cdot 500 = 454,71mm.$$

3.4.3 Χάλυβας Ποιότητας S355

Όριο διαρροής:
f_y = 355 MPa

Υπολογίζονται οι όροι του μητρώου καμπτικής δυσκαμψίας:

$$D_{11} = \frac{210 \cdot 4^3}{12(1-0,3^2)} = 1230,77 KN/mm$$

$$D_{12} = 0,3 \cdot 1230,77 = 369,23 KN/mm$$

$$D_{22} = 1230,77 KN/mm$$

$$D_{66} = \frac{D_{11} - D_{12}}{2} = \frac{1230,77 - 369,23}{2} = 430,77 KN/mm$$

Άρα το μητρώο της καμπτικής δυσκαμψίας γίνεται:

$$D = \begin{bmatrix} 1230,77 & 369,23 & 0 \\ 369,23 & 1230,77 & 0 \\ 0 & 0 & 430,77 \end{bmatrix}.$$

Η κρίσιμη τάση και το κρίσιμο φορτίο λυγισμού είναι αντίστοιχα:

$$\sigma_{cr} = \frac{K_\sigma \pi^2 E}{12(1-\nu^2)\left(\frac{b}{t}\right)^2} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot 210000}{12(1-0,3^2)\left(\frac{500}{4}\right)^2} = 48,59 MPa$$

$N_x^{cr} = \sigma_{cr} \cdot t = 48,59 \cdot 4 = 0,1944$ KN/mm.

Η ανηγμένη λυγηρότητα και ο μειωτικός συντελεστής ρ προκύπτουν:

$$\overline{\lambda_p} = \sqrt{\frac{f_y}{\sigma_{cr}}} = \sqrt{\frac{355}{48,59}} = 2,70$$

$$\rho = \frac{b_{eff}}{b} = \sqrt{\frac{\sigma_{cr}}{f_y}} = \sqrt{\frac{48,59}{355}} = 0,3700$$

Άρα το ενεργό πλάτος είναι:

$$b_{eff} = \rho \cdot b = 0,3700 \cdot 500 = 184,98 mm.$$

4 Επεξεργασία και Ανάλυση Αποτελεσμάτων

4.1 Συγκεντρωτικά Αποτελέσματα

Από την υπολογιστική διαδικασία που προηγήθηκε, προέκυψαν και παρουσιάζονται στους παρακάτω πίνακες τα συγκεντρωτικά αποτελέσματα για όλες τις περιπτώσεις διαστρωματώσεων που εξετάστηκαν για τα δύο σύνθετα υλικά T300/5208 και Scotchply 1002.

Συγκεκριμένα, παρατίθεται το κρίσιμο φορτίο λυγισμού N_x^{cr}, το φορτίο αστοχίας N_x^u, η ανηγμένη λυγηρότητα λ, ο μειωτικός συντελεστής ρ και τελικά το ενεργό πλάτος b_{eff}. Επίσης, ο δεύτερος πίνακας δείχνει το συντελεστή r που είναι ο λόγος N_x^{cr} / N_x^u , αλλά και τους συντελεστές αποχής από την ισοτροπία r_{12} και r_{22}. Σημειώνεται ότι για ισότροπο υλικό ισχύει $r_{12} = r_{22} = 1$.

Συγκεκριμένα είναι :

$$r_{22} = \frac{D_{22}}{D_{11}}$$

$$r_{12} = \frac{D_{12} + 2D_{66}}{D_{11}} .$$

Οι μονάδες μέτρησης για τα N_x^{cr} και N_x^u είναι KN/mm , για το b_{eff} τα mm και οι υπόλοιπες μεταβλητές είναι αδιάστατες.

Αποτελέσματα παρατίθενται ακόμα και για τη διερεύνηση του πάχους στη περίπτωση ψευδο – ισότροπης διαστρωμάτωσης π / 4 , δηλαδή για τις περιπτώσεις h = 6 mm και h = 8 mm αλλά. Τέλος, δίνονται τα αποτελέσματα για το χάλυβα ποιότητας S235 και S355 που συγκρίνονται παρακάτω με τα δύο σύνθετα υλικά.

Διαστρωμάτωση	N_x^{cr}		N_x^u		λ		ρ		b_{eff}	
Υλικό	T300/5208	Scotchply 1002	T300/5208	Scotchply 1002	T300/5208	Scotchply 1002	T300/5208	Scotchply 1002	T300/5208	Scotchply 1002
1) $\left[\mathbf{0/90_2/0}\right]$	0,0373	0,0132	3,17	1,36	9,22	10,16	0,1085	0,0984	54,26	49,21
2) $\left[\mathbf{90/0_2/90}\right]$	0,0373	0,0132	3,17	1,36	9,22	10,16	0,1085	0,0984	54,26	49,21
3) $\left[\mathbf{0/90_4/0}\right]$	0,0449	0,0141	2,23	1,06	7,04	8,68	0,1421	0,1152	71,05	57,58
4) $\left[\mathbf{90/0_4/90}\right]$	0,0449	0,0141	4,11	1,66	9,57	10,87	0,1045	0,0920	52,27	46,00
5) $\left[\mathbf{0_2/90_2/0_2}\right]$	0,0300	0,0124	4,11	1,66	11,70	11,57	0,0855	0,0865	42,74	43,23
6) $\left[\mathbf{90_2/0_2/90_2}\right]$	0,0300	0,0124	2,23	1,06	8,61	9,24	0,1162	0,1082	58,09	54,12
7) $\left[\mathbf{0_3/90_2/0_3}\right]$	0,0276	0,0122	4,58	1,82	12,89	12,20	0,0776	0,0820	38,79	40,98
8) $\left[\mathbf{90_3/0_2/90_3}\right]$	0,0276	0,0122	1,75	0,91	7,97	8,65	0,1254	0,1157	62,70	57,83
9) $\left[\mathbf{0_4/90_2/0_4}\right]$	0,0266	0,0121	4,87	1,91	13,52	12,56	0,0739	0,0796	36,97	39,81
10) $\left[\mathbf{90_4/0_2/90_4}\right]$	0,0266	0,0121	1,47	0,82	7,44	8,24	0,1345	0,1213	67,24	60,65
11) $\left[\mathbf{0/90/0_2/90/0}\right]$	0,0438	0,0139	4,11	1,66	9,69	10,93	0,1032	0,0915	51,59	45,76

Πίνακας 4.1 : Αποτελέσματα για διαστρωματώσεις γωνιών 0° και 90° και υλικά T300/5208, Scotchply 1002

Διαστρωμάτωση	r		r_{22}		r_{12}	
Υλικό	T300/5208	Scotchply 1002	T300/5208	Scotchply 1002	T300/5208	Scotchply 1002
1) $\left[\mathbf{0/90_2/0}\right]$	0,012	0,010	0,198	0,347	0,107	0,296
2) $\left[\mathbf{90/0_2/90}\right]$	0,012	0,010	5,047	2,886	0,543	0,855
3) $\left[\mathbf{0/90_4/0}\right]$	0,020	0,013	0,467	0,583	0,132	0,348
4) $\left[\mathbf{90/0_4/90}\right]$	0,011	0,008	2,142	1,716	0,282	0,598
5) $\left[\mathbf{0_2/90_2/0_2}\right]$	0,007	0,007	0,095	0,251	0,098	0,275
6) $\left[\mathbf{90_2/0_2/90_2}\right]$	0,013	0,012	10,512	3,989	1,033	1,098
7) $\left[\mathbf{0_3/90_2/0_3}\right]$	0,006	0,007	0,073	0,229	0,096	0,270
8) $\left[\mathbf{90_3/0_2/90_3}\right]$	0,016	0,013	13,758	4,359	1,324	1,179
9) $\left[\mathbf{0_4/90_2/0_4}\right]$	0,005	0,006	0,065	0,222	0,096	0,269
10) $\left[\mathbf{90_4/0_2/90_4}\right]$	0,018	0,015	15,406	4,505	1,472	1,211
11) $\left[\mathbf{0/90/0_2/90/0}\right]$	0,011	0,008	0,399	0,525	0,125	0,336

Πίνακας 4.2 : Συντελεστές r , r_{22} , r_{12} για διαστρωματώσεις γωνιών 0° και 90° και υλικά T300/5208, Scotchply 1002

Υλικό T300 / 5208	N_x^{cr}	N_x^u	λ	ρ	b_{eff}	r	r_{22}	r_{12}
1) [60 / –60 / 60 / –60 / 60 / –60 / 60 / –60]	0,0671	0,4732	2,66	0,3766	188,31	0,142	4,626	4,591
2) $[60 / -60 / 60 / -60]_S$	0,0671	0,4732	2,66	0,3766	188,31	0,142	4,626	4,591
3) $[-60 / 60 / -60 / 60]_S$	0,0671	0,4732	2,66	0,3766	188,31	0,142	4,626	4,591
4) [60 / –60 / 60 / –60 / 60 / –60]	0,0671	0,4732	2,66	0,3766	188,31	0,142	4,626	4,591
5) $[60 / -60 / 60]_S$	0,0671	0,4652	2,63	0,3799	189,94	0,144	4,626	4,591
6) $[-60 / 60 / -60]_S$	0,0671	0,4652	2,63	0,3799	189,94	0,144	4,626	4,591
7) [60 / –60 / 60 / –60]	0,0671	0,4732	2,66	0,3766	188,31	0,142	4,626	4,591
8) $[60 / -60]_S$	0,0671	0,4732	2,66	0,3766	188,31	0,142	4,626	4,591
9) $[-60 / 60]_S$	0,0671	0,4732	2,66	0,3766	188,31	0,142	4,626	4,591

Πίνακας 4.3 : Αποτελέσματα για διαστρωματώσεις γωνιών ± 60° και υλικό T300 / 5208

Υλικό Scotchply 1002	N_x^{cr}	N_x^u	λ	ρ	b_{eff}	r	r_{22}	r_{12}
1) $[60/-60/60/-60/60/-60/60/-60]$	0,0186	0,5781	5,58	0,1792	89,61	0,032	2,387	2,430
2) $[60/-60/60/-60]_S$	0,0186	0,5781	5,58	0,1792	89,61	0,032	2,387	2,430
3) $[-60/60/-60/60]_S$	0,0186	0,5781	5,58	0,1792	89,61	0,032	2,387	2,430
4) $[60/-60/60/-60/60/-60]$	0,0186	0,5781	5,58	0,1792	89,61	0,032	2,387	2,430
5) $[60/-60/60]_S$	0,0186	0,5657	5,52	0,1812	90,58	0,033	2,387	2,430
6) $[-60/60/-60]_S$	0,0186	0,5657	5,52	0,1812	90,58	0,033	2,387	2,430
7) $[60/-60/60/-60]$	0,0186	0,5781	5,58	0,1792	89,61	0,032	2,387	2,430
8) $[60/-60]_S$	0,0186	0,5781	5,58	0,1792	89,61	0,032	2,387	2,430
9) $[-60/60]_S$	0,0186	0,5781	5,58	0,1792	89,61	0,032	2,387	2,430

Πίνακας 4.4 : Αποτελέσματα για διαστρωματώσεις γωνιών ± 60° και υλικό Scotchply 1002

Υλικό T300 / 5208	N_x^{cr}	N_x^u	λ	ρ	b_{eff}	r	r_{22}	r_{12}
1) $[45/-45/45/-45/45/-45/45/-45]$	0,0809	0,5440	2,59	0,3857	192,83	0,149	1,000	2,391
2) $[45/-45/45/-45]_S$	0,0809	0,5440	2,59	0,3857	192,83	0,149	1,000	2,391
3) $[-45/45/-45/45]_S$	0,0809	0,5440	2,59	0,3857	192,83	0,149	1,000	2,391
4) $[45/-45/45/-45/45/-45]$	0,0809	0,5440	2,59	0,3857	192,83	0,149	1,000	2,391
5) $[45/-45/45]_S$	0,0809	0,5406	2,58	0,3869	193,44	0,150	1,000	2,391
6) $[-45/45/-45]_S$	0,0809	0,5406	2,58	0,3869	193,44	0,150	1,000	2,391
7) $[45/-45/45/-45]$	0,0809	0,5440	2,59	0,3857	192,83	0,149	1,000	2,391
8) $[45/-45]_S$	0,0809	0,5440	2,59	0,3857	192,83	0,149	1,000	2,391
9) $[-45/45]_S$	0,0809	0,5440	2,59	0,3857	192,83	0,149	1,000	2,391

Πίνακας 4.5 : Αποτελέσματα για διαστρωματώσεις γωνιών ± 45° και υλικό T300 / 5208

Υλικό Scotchply 1002	N_x^{cr}	N_x^u	λ	ρ	b_{eff}	r	r_{22}	r_{12}
1) $[45/-45/45/-45/45/-45/45/-45]$	0,0200	0,5760	5,36	0,1865	93,23	0,035	1,000	1,778
2) $[45/-45/45/-45]_S$	0,0200	0,5760	5,36	0,1865	93,23	0,035	1,000	1,778
3) $[-45/45/-45/45]_S$	0,0200	0,5760	5,36	0,1865	93,23	0,035	1,000	1,778
4) $[45/-45/45/-45/45/-45]$	0,0200	0,5760	5,36	0,1865	93,23	0,035	1,000	1,778
5) $[45/-45/45]_S$	0,0200	0,5739	5,35	0,1868	93,40	0,035	1,000	1,778
6) $[-45/45/-45]_S$	0,0200	0,5739	5,35	0,1868	93,40	0,035	1,000	1,778
7) $[45/-45/45/-45]$	0,0200	0,5760	5,36	0,1865	93,23	0,035	1,000	1,778
8) $[45/-45]_S$	0,0200	0,5760	5,36	0,1865	93,23	0,035	1,000	1,778
9) $[-45/45]_S$	0,0200	0,5760	5,36	0,1865	93,23	0,035	1,000	1,778

Πίνακας 4.6 : Αποτελέσματα για διαστρωματώσεις γωνιών ± 45° και υλικό Scotchply 1002

Υλικό T300 / 5208	N_x^{cr}	N_x^{u}	λ	ρ	b_{eff}	r	r_{22}	r_{12}
1) $[30/-30/30/-30/30/-30/30/-30]$	0,0619	1,1964	4,40	0,2275	113,73	0,052	0,216	0,879
2) $[30/-30/30/-30]_S$	0,0619	1,1964	4,40	0,2275	113,73	0,052	0,216	0,879
3) $[-30/30/-30/30]_S$	0,0619	1,1964	4,40	0,2275	113,73	0,052	0,216	0,879
4) $[30/-30/30/-30/30/-30]$	0,0619	1,1964	4,40	0,2275	113,73	0,052	0,216	0,879
5) $[30/-30/30]_S$	0,0619	1,1631	4,34	0,2307	115,34	0,052	0,216	0,879
6) $[-30/30/-30]_S$	0,0619	1,1631	4,34	0,2307	115,34	0,052	0,216	0,879
7) $[30/-30/30/-30]$	0,0619	1,1964	4,40	0,2275	113,73	0,052	0,216	0,879
8) $[30/-30]_S$	0,0619	1,1964	4,40	0,2275	113,73	0,052	0,216	0,879
9) $[-30/30]_S$	0,0619	1,1964	4,40	0,2275	113,73	0,052	0,216	0,879

Πίνακας 4.7 : Αποτελέσματα για διαστρωματώσεις γωνιών ± 30° και υλικό T300 / 5208

Υλικό Scotchply 1002	N_x^{cr}	N_x^u	λ	ρ	b_{eff}	r	r_{22}	r_{12}
1) $[30/-30/30/-30/30/-30/30/-30]$	0,0155	1,0650	8,28	0,1208	60,41	0,015	0,419	0,747
2) $[30/-30/30/-30]_S$	0,0155	1,0650	8,28	0,1208	60,41	0,015	0,419	0,747
3) $[-30/30/-30/30]_S$	0,0155	1,0650	8,28	0,1208	60,41	0,015	0,419	0,747
4) $[30/-30/30/-30/30/-30]$	0,0155	1,0650	8,28	0,1208	60,41	0,015	0,419	0,747
5) $[30/-30/30]_S$	0,0155	1,0153	8,08	0,1237	61,87	0,015	0,419	0,747
6) $[-30/30/-30]_S$	0,0155	1,0153	8,08	0,1237	61,87	0,015	0,419	0,747
7) $[30/-30/30/-30]$	0,0155	1,0650	8,28	0,1208	60,41	0,015	0,419	0,747
8) $[30/-30]_S$	0,0155	1,0650	8,28	0,1208	60,41	0,015	0,419	0,747
9) $[-30/30]_S$	0,0155	1,0650	8,28	0,1208	60,41	0,015	0,419	0,747

Πίνακας 4.8 : Αποτελέσματα για διαστρωματώσεις γωνιών ± 30° και υλικό Scotchply 1002

Διαστρωμάτωση	N_x^{cr}		N_x^u		λ		ρ		b_{eff}	
Υλικό	T300/5208	Scotchply 1002	T300/5208	Scotchply 1002	T300/5208	Scotchply 1002	T300/5208	Scotchply 1002	T300/5208	Scotchply 1002
π / 3	0,0495	0,0151	2,3102	1,1995	6,83	8,90	0,1463	0,1123	73,16	56,16
π / 4	0,0538	0,0157	2,0393	1,0391	6,16	8,15	0,1624	0,1227	81,18	61,36

Διαστρωμάτωση	r		r_{22}		r_{12}	
Υλικό	T300/5208	Scotchply 1002	T300/5208	Scotchply 1002	T300/5208	Scotchply 1002
π / 3	0,021	0,013	0,294	0,446	0,328	0,498
π / 4	0,026	0,015	0,352	0,501	0,437	0,578

Πίνακας 4.9 : Αποτελέσματα για διαστρωματώσεις π / 3 και π / 4 και υλικά T300 / 5208 και Scotchply 1002

Υλικό	σ_{cr} (MPa)	f_y (MPa)	λ	ρ	b_{eff}
Χάλυβας S235	48,59	235	2,20	0,4547	227,36
Χάλυβας S355	48,59	355	2,70	0,3700	184,98

Πίνακας 4.10 : Αποτελέσματα για διατομή από χάλυβα S235 και S355

Σύγκριση διατομής από σύνθετα υλικά διαστρωμάτωσης π / 4 και διατομής από χάλυβα για διάφορα πάχη.

Διαστρωμάτωση π / 4	N_x^{cr}		N_x^{u}		λ		ρ		b_{eff}	
Υλικό	T300/5208	Scotchply 1002	T300/5208	Scotchply 1002	T300/5208	Scotchply 1002	T300/5208	Scotchply 1002	T300/5208	Scotchply 1002
h = 4 mm	0,0538	0,0157	2,0393	1,0391	6,16	8,15	0,1624	0,1227	81,18	61,36
h = 6 mm	0,1814	0,0528	3,0589	1,5586	4,11	5,43	0,2436	0,1841	121,78	92,04
h = 8 mm	0,4301	0,1252	4,0786	2,0782	3,08	4,07	0,3247	0,2455	162,37	122,73

Πίνακας 4.11 : Σύγκριση αποτελεσμάτων διαστρωμάτωσης π / 4 για διαφορετικά πάχη διατομής

Χάλυβας S235	σ_{cr} (MPa)	N_x^{cr}	f_y (MPa)	λ	ρ	b_{eff}
h = 4 mm	48,59	0,1944	235	2,20	0,4547	227,36
h = 6 mm	109,32	0,4373	235	1,47	0,6821	341,03
h = 8 mm	194,36	0,7774	235	1,10	0,9094	454,71

Πίνακας 4.12 : Σύγκριση αποτελεσμάτων χάλυβα S235 για διαφορετικά πάχη διατομής

4.2 Σύγκριση Αποτελεσμάτων

4.2.1 Διαστρωματώσεις με Ίνες Προσανατολισμένες Κατά 0° και 90°

Στο Διάγραμμα 4.1 που παρουσιάζεται παρακάτω, βλέπουμε το κρίσιμο φορτίο λυγισμού συναρτήσει των διαφόρων περιπτώσεων διαστρωμάτωσης για τα δύο σύνθετα υλικά που εξετάστηκαν T300/5208 και Scotchply 1002. Παρατηρείται ότι οι πρώτες δέκα περιπτώσεις ανά δύο έχουν ακριβώς το ίδιο N_x^{cr}. Αυτό συμβαίνει διότι σε αυτές τις περιπτώσεις που αναδιατάσσονται οι στρώσεις των 0 και 90 μοιρών σε διατομή σταθερού συνολικού πάχους h, το μητρώο καμπτικής δυσκαμψίας D παραμένει επίσης σταθερό καθώς δεν επηρεάζεται από τη διάταξη των στρώσεων αλλά μόνο από το πλήθος τους, κάτι που δικαιολογεί και τη διαφορά του N_x^{cr} κάθε δύο περιπτώσεις. Η μόνη διαφορά στο μητρώο D όπως εμφανίστηκε και στο προηγούμενο κεφάλαιο είναι στην εναλλαγή των όρων D_{11} και D_{22}, που όπως φαίνεται και από τον τύπο του N_x^{cr} δεν επηρεάζει την τελική τιμή του.

Επίσης, όπως διακρίνουμε και στο Διάγραμμα 4.2, το μεγαλύτερο N_x^{cr} προέκυψε στις περιπτώσεις 3) $\mathbf{[0/90_4/0]}$ και 4) $\mathbf{[90/0_4/90]}$, με το σχετικά μεγαλύτερο πλήθος στρώσεων με κοινά προσανατολισμένες ίνες στη μέση της διατομής. Αντιθέτως, οι διαστρωματώσεις με το μικρότερο N_x^{cr} είναι οι 9) $\mathbf{[0_4/90_2/0_4]}$ και 10) $\mathbf{[90_4/0_2/90_4]}$, με το σχετικά μεγαλύτερο πλήθος στρώσεων με κοινά προσανατολισμένες ίνες στα άκρα της διατομής. Από τα παραπάνω θα μπορούσε να προκύψει ότι το κρίσιμο φορτίο λυγισμού μπορεί να σχετίζεται με την επιρροή σχηματισμού ενός ισχυρού 'πυρήνα' στη διατομή. Το κρίσιμο φορτίο λυγισμού είναι μεγαλύτερο όταν έχουμε ισχυρό πυρήνα, ενώ αντιθέτως μειώνεται σταδιακά όσο τα 'άκρα' γίνονται πιο συμπαγή.

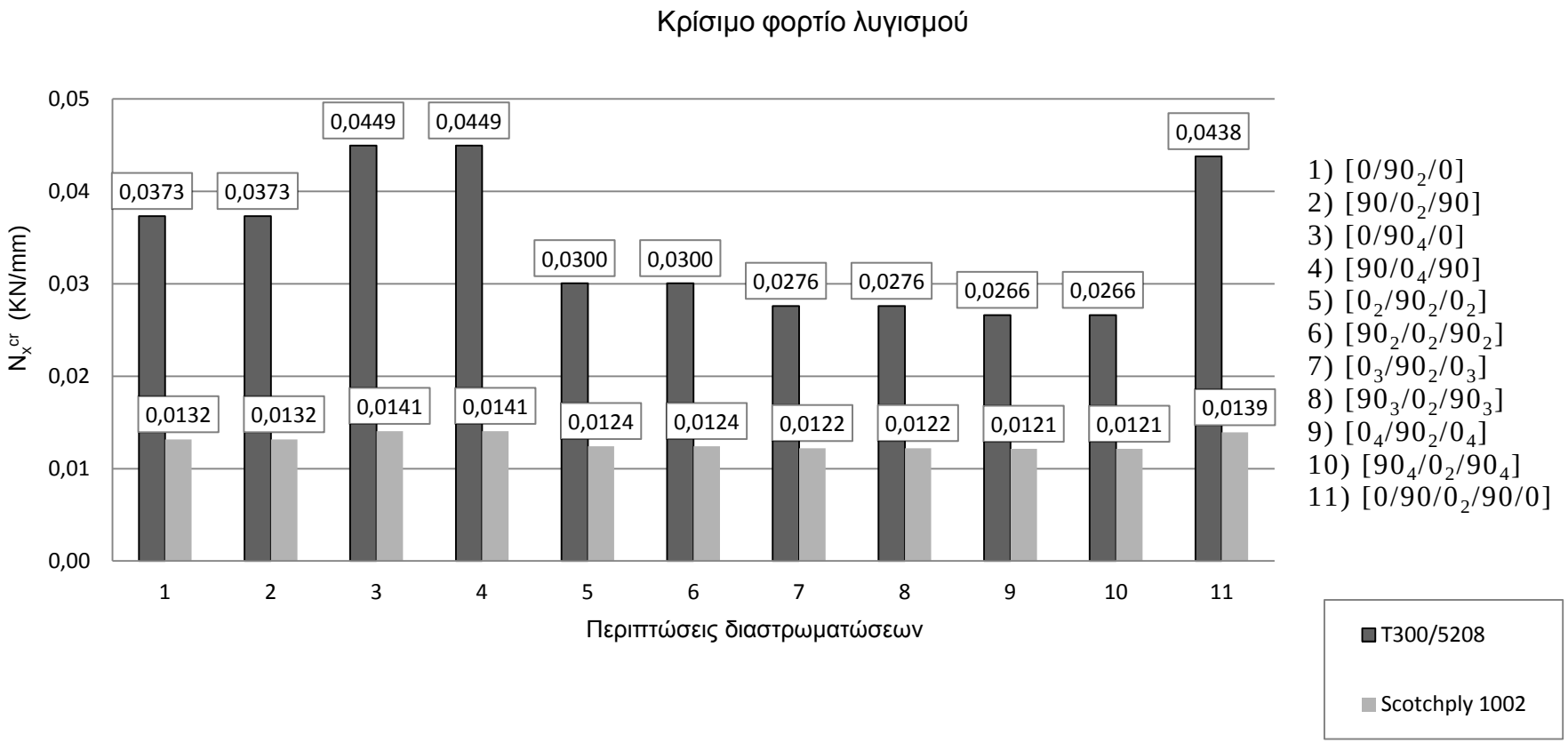
Στο Διάγραμμα 4.3, βλέπουμε το φορτίο αστοχίας συναρτήσει των ίδιων περιπτώσεων διαστρωμάτωσης για τα δύο σύνθετα υλικά. Ισχύει ότι οι περιπτώσεις 1) $\mathbf{[0/90_2/0]}$ και 2) $\mathbf{[90/0_2/90]}$, 3) $\mathbf{[0/90_4/0]}$ και 6) $\mathbf{[90_2/0_2/90_2]}$ και τέλος 4) $\mathbf{[90/0_4/90]}$, 5) $\mathbf{[0_2/90_2/0_2]}$ και 11) $\mathbf{[0/90/0_2/90/0]}$, έχουν αντίστοιχα το ίδιο φορτίο αστοχίας N_x^u. Όπως παρατηρείται, αυτό συμβαίνει στις περιπτώσεις που έχουν το ίδιο συνολικό πλήθος στρώσεων με όμοια προσανατολισμένες ίνες, π.χ. στις περιπτώσεις 3) και 6) έχουμε συνολικά δύο στρώσεις με ίνες προσανατολισμένες κατά 0° και τέσσερις στρώσεις με ίνες προσανατολισμένες κατά 90°. Συνεπώς, το μητρώο μεμβρανικής δυσκαμψίας A παραμένει σταθερό εφόσον εξαρτάται μόνο από αυτό το πλήθος και οδηγεί σε κοινές παραμορφώσεις και τάσεις και εν τέλει στο ίδιο φορτίο αστοχίας.

Επιπρόσθετα, στο Διάγραμμα 4.4 τοποθετούνται οι διάφορες περιπτώσεις διαστρωματώσεων σε φθίνουσα σειρά, ανάλογα με το φορτίο αστοχίας τους. Συγκρίνοντας το διάγραμμα αυτό με το Διάγραμμα 4.2 για το κρίσιμο φορτίο λυγισμού, είναι εμφανές πως οι περιπτώσεις με τα μέγιστα και τα ελάχιστα φορτία δε συμπίπτουν σε λυγισμό και

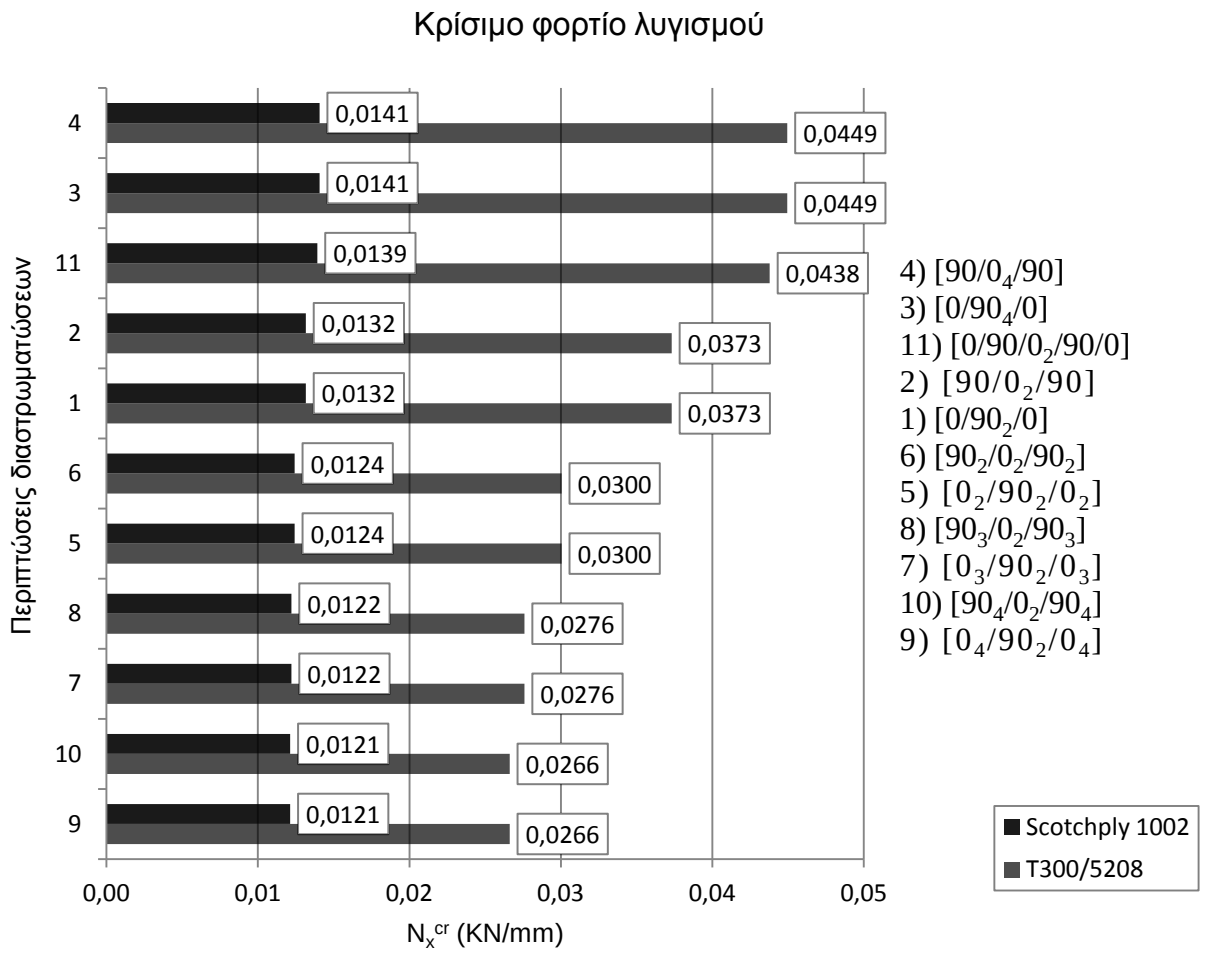
αστοχία. Βλέπουμε πως οι περιπτώσεις 9) $\left[\mathbf{0_4 / 90_2 / 0_4}\right]$ και 7) $\left[\mathbf{0_3 / 90_2 / 0_3}\right]$ έχουν τα μεγαλύτερα φορτία αστοχίας, ενώ οι περιπτώσεις με τα μικρότερα φορτία είναι οι 8) $\left[\mathbf{90_3 / 0_2 / 90_3}\right]$ και 10) $\left[\mathbf{90_4 / 0_2 / 90_4}\right]$. Αυτό εξηγείται από το γεγονός ότι όσο περισσότερες στρώσεις με ίνες προσανατολισμένες κατά τη διεύθυνση του φορτίου με αντίστοιχα όσο λιγότερες στρώσεις με ίνες προσανατολισμένες κάθετα στο φορτίο υπάρχουν στην εκάστοτε διαστρωμάτωση, τόσο πιο μεγάλη αντοχή έχει η διατομή. Συγκεκριμένα, οι στρώσεις 9) και 7) έχουν τις περισσότερες στρώσεις με προσανατολισμένες ίνες κατά 0°, ενώ καθώς το πλήθος των στρώσεων αυτών μειώνεται και αυξάνεται αντίστοιχα το πλήθος των ινών προσανατολισμένων κατά 90° (ασθενής στρώση για την αξονική θλιπτική φόρτιση) το φορτίο αστοχίας μειώνεται όπως φαίνεται στο διάγραμμα. Επίσης, σε αντίθεση με το κρίσιμο φορτίο λυγισμού, το φορτίο αστοχίας δεν επηρεάζεται από τη διάταξη των στρώσεων σε σχέση πυρήνα – άκρα.

Όσο αναφορά το μειωτικό συντελεστή ρ και κατ' επέκταση το ενεργό πλάτος της διατομής, φαίνεται στα Διαγράμματα 4.6 πως το υλικό επηρεάζει μόνο τις τρεις πρώτες περιπτώσεις διαστρωματώσεων αλλά πολύ λίγο. Επίσης τα Διαγράμματα 4.7 παρουσιάζουν τους συντελεστές αποχής από την ισοτροπία r_{22} και r_{12}, με την αναλογία των υλικών σε σχέση με την ταξινόμηση των περιπτώσεων διαστρωμάτωσης να είναι σταθερή. Υπενθυμίζεται ότι για ισότροπο υλικό οι συντελεστές αυτοί είναι ίσοι με τη μονάδα.

Τέλος, είναι προφανές από τα γραφήματα ότι οι τιμές για το υλικό T300/5208 είναι μεγαλύτερες από το Scotchply 1002, κάτι που συμπεραίνεται από τη μεγαλύτερη δυσκαμψία του.

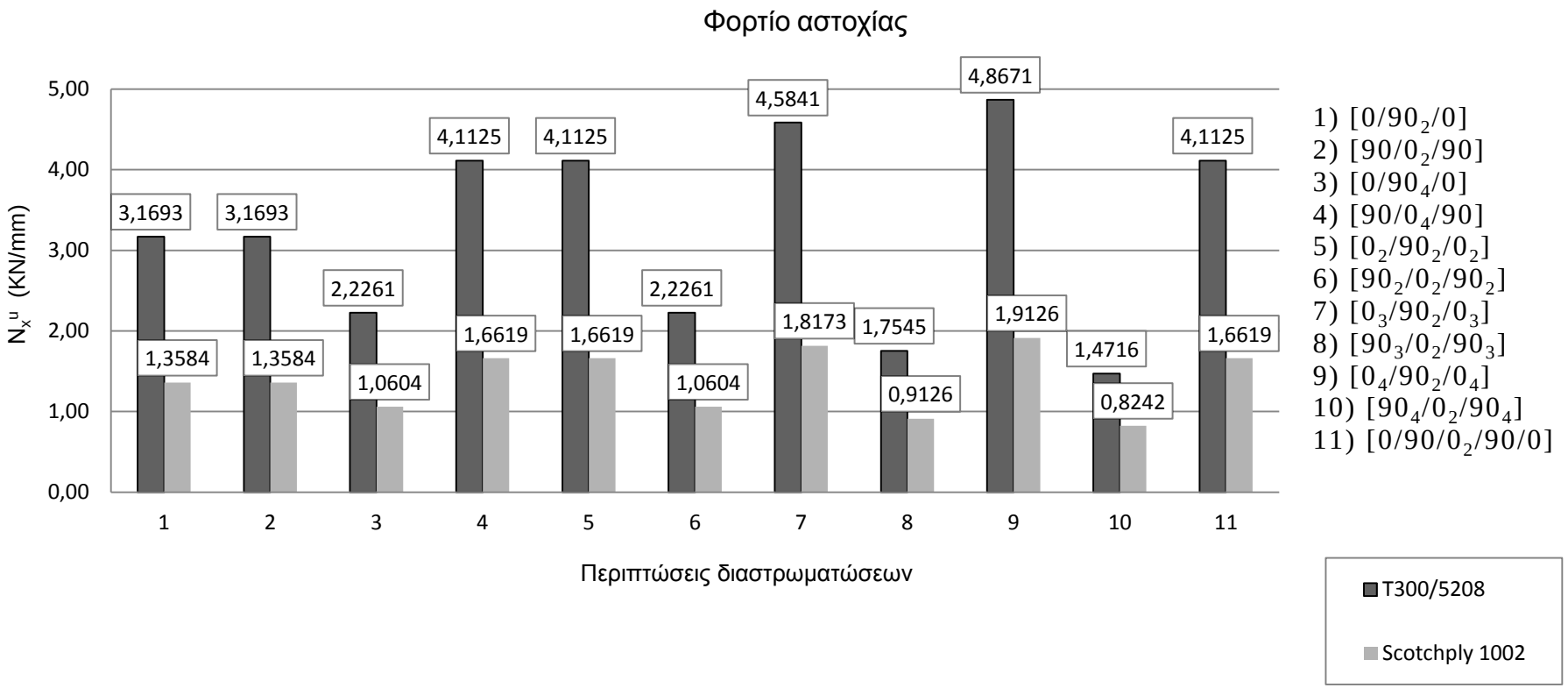


Διάγραμμα 4.1 : Κρίσιμο φορτίο λυγισμού για διαστρωματώσεις με 0° και 90° και υλικά T300/5208 και Scotchply 1002

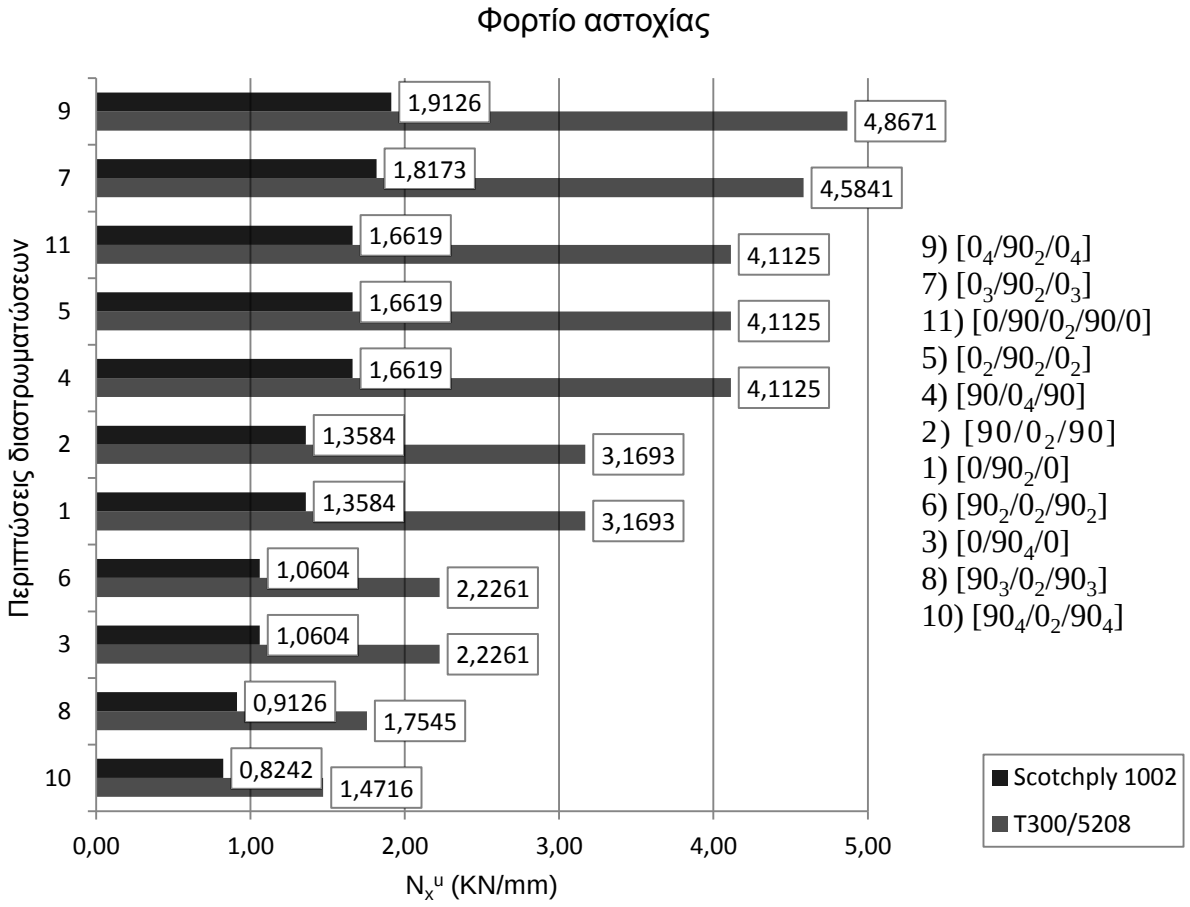


Διάγραμμα 4.2 : Κρίσιμο φορτίο λυγισμού για διαστρωματώσεις με 0° και 90° και υλικά T300/5208 και Scotchply 1002 σε φθίνουσα ταξινόμηση

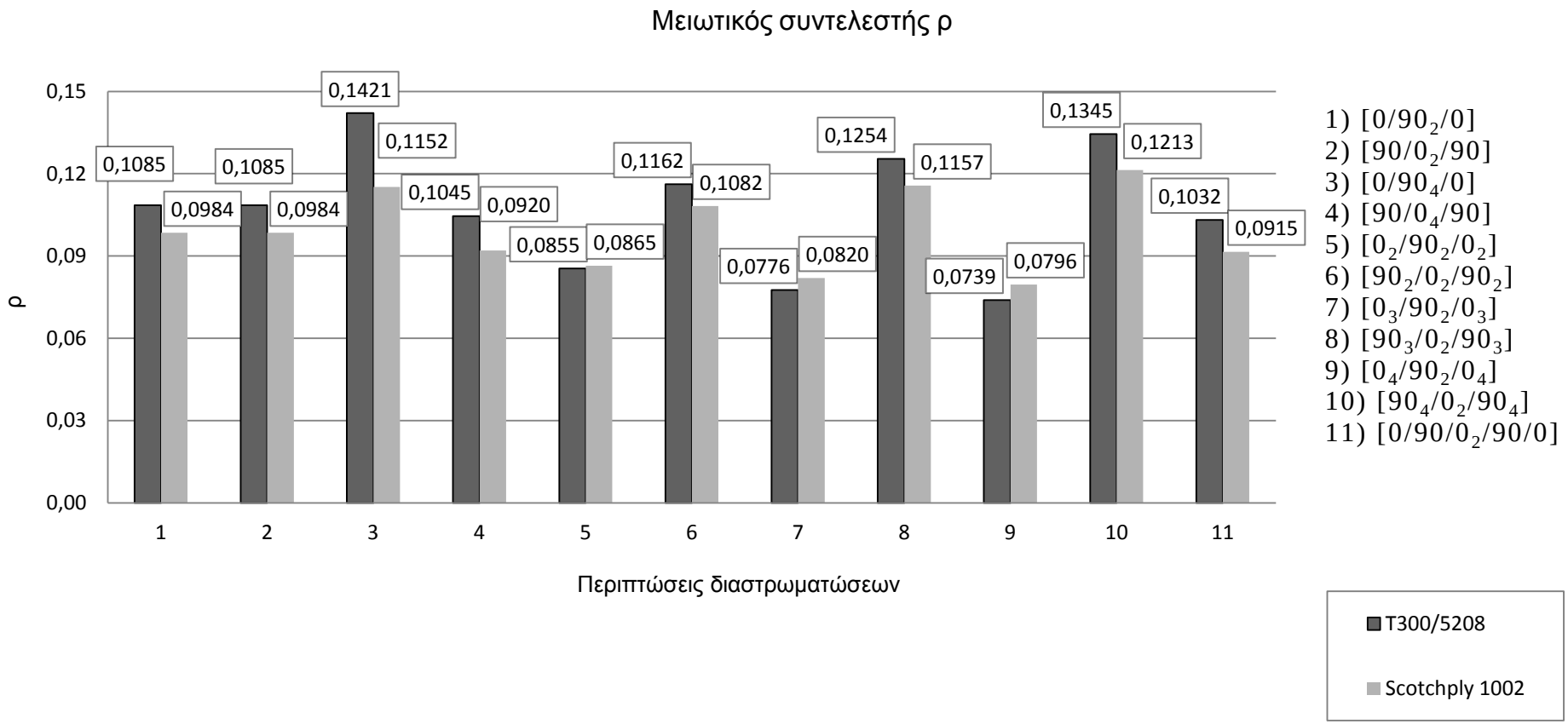
Σημειώνεται ότι το κρίσιμο φορτίο λυγισμού του χάλυβα ποιότητας S235 και S355 είναι N_x^{cr} = 0,1944 KN/mm, αρκετά μεγαλύτερο από τα δύο σύνθετα υλικά λόγω του μεγαλύτερου μέτρου ελαστικότητάς του.



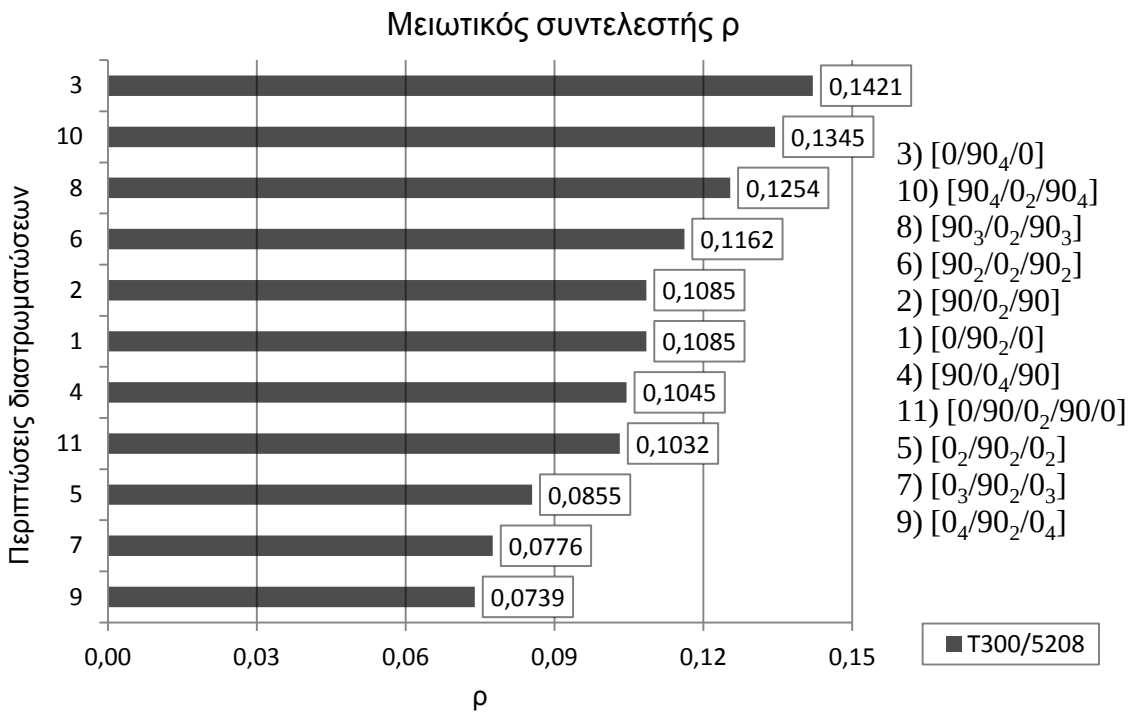
Διάγραμμα 4.3 : Φορτίο αστοχίας για διαστρωματώσεις με 0° και 90° και υλικά T300/5208 και Scotchply 1002

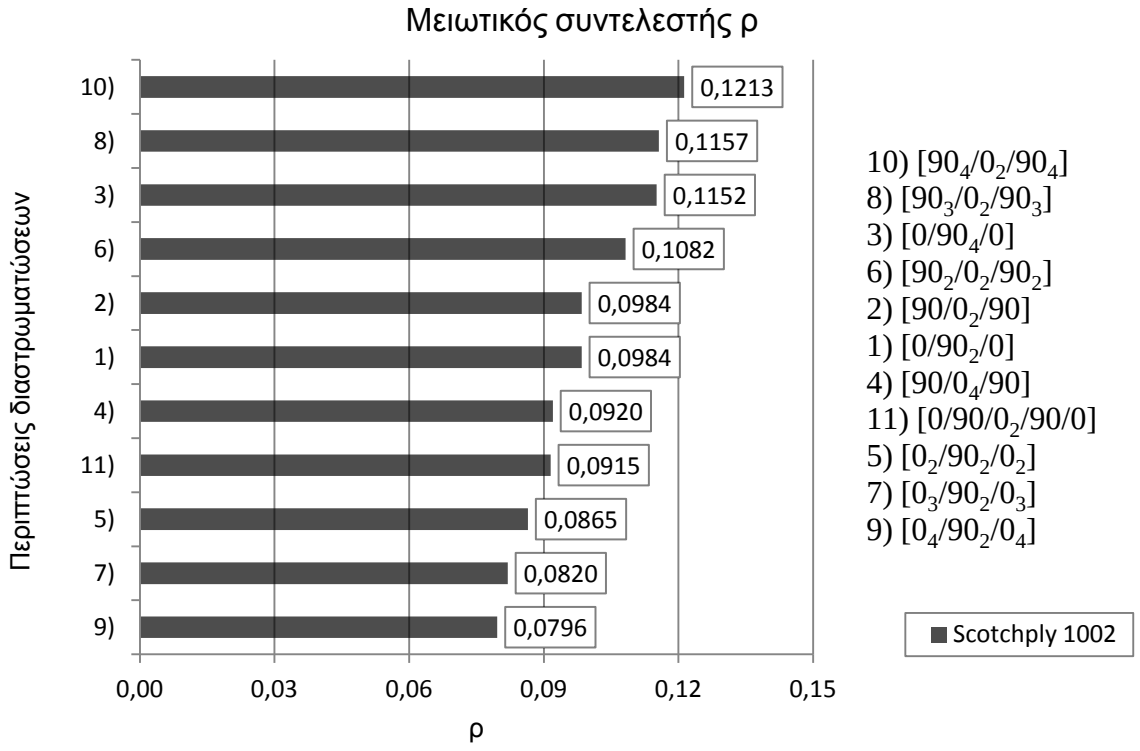


Διάγραμμα 4.4 : Φορτίο αστοχίας για διαστρωματώσεις με 0° και 90° και υλικά T300/5208 και Scotchply 1002 σε φθίνουσα ταξινόμηση

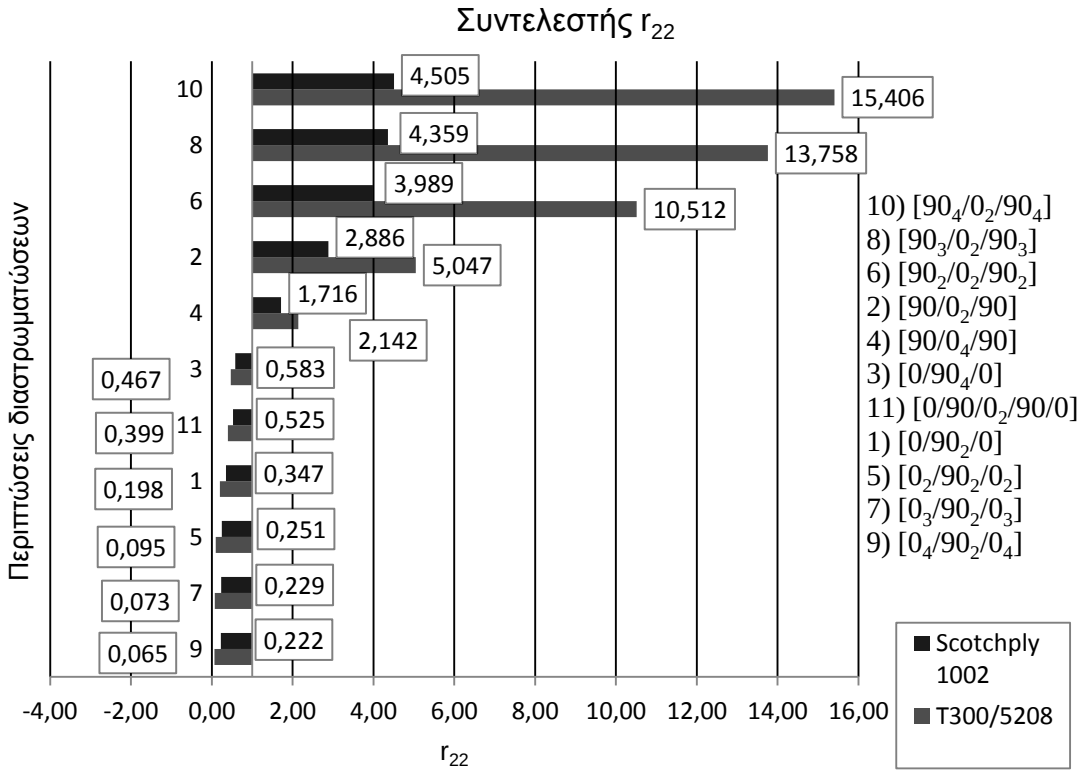


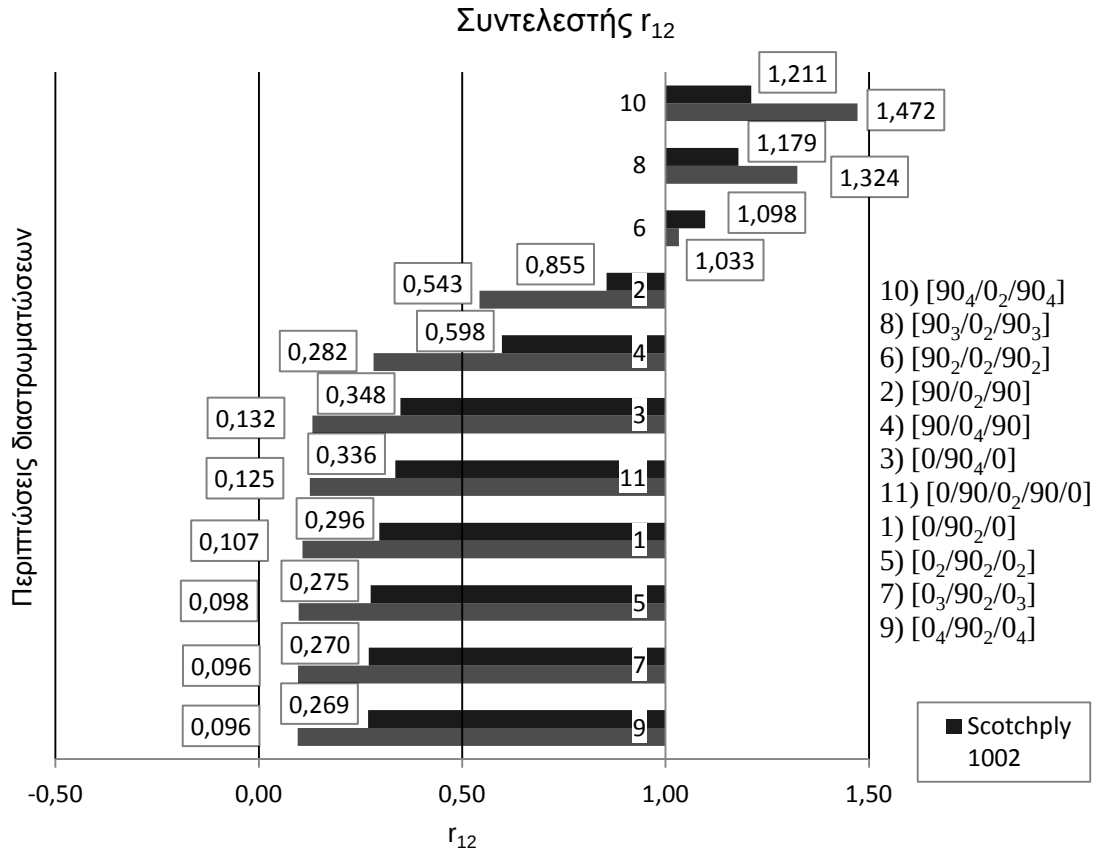
Διάγραμμα 4.5 : Μειωτικός συντελεστής ρ για διαστρωματώσεις με 0° και 90° και υλικά T300/5208 και Scotchply 1002





Διαγράμματα 4.6 : Μειωτικός συντελεστής ρ για διαστρωματώσεις με 0° και 90° και υλικά T300/5208 και Scotchply 1002

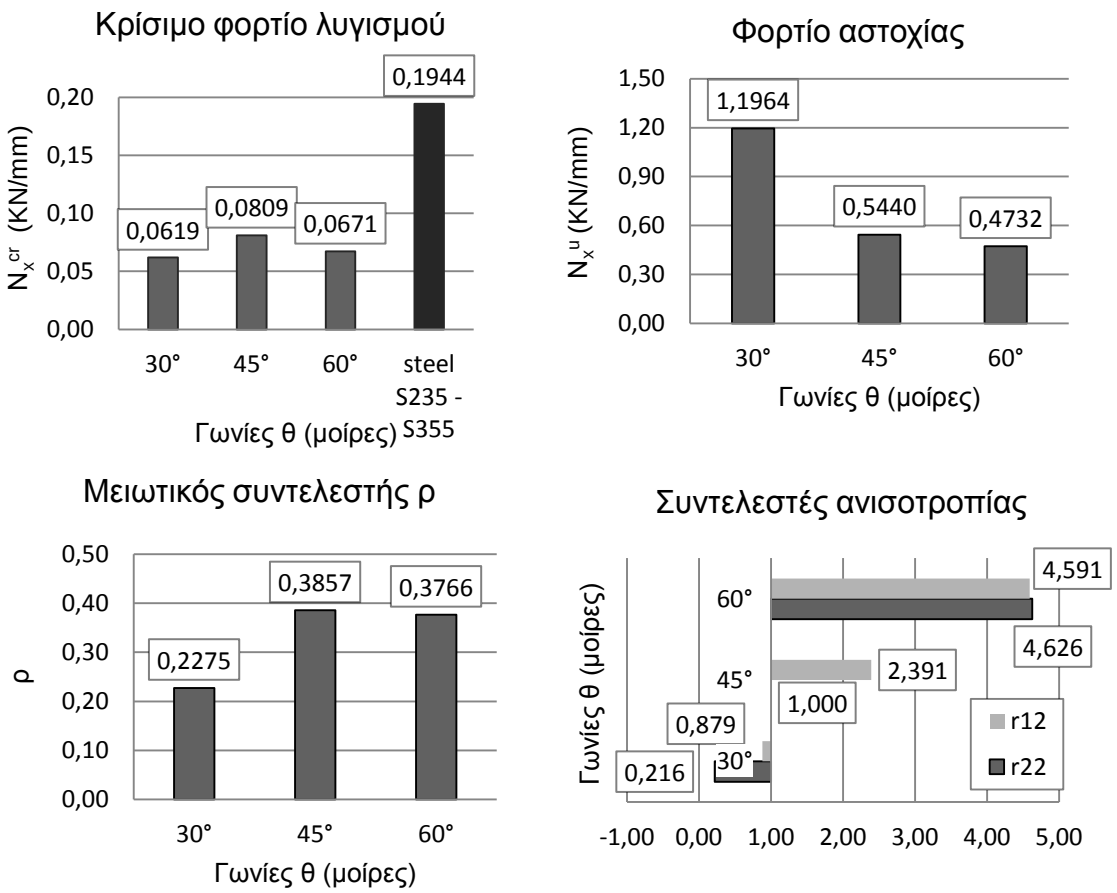




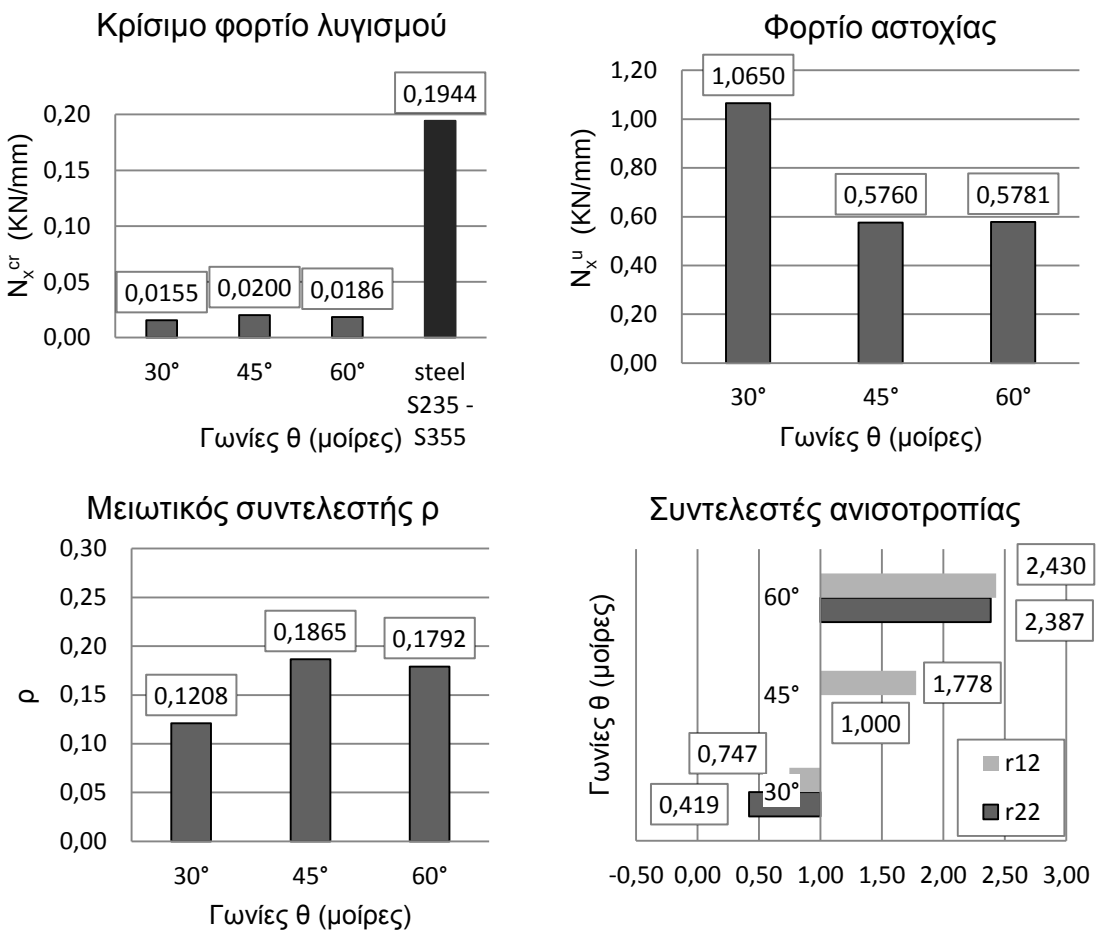
Διαγράμματα 4.7 : Συντελεστές r_{22} και r_{12} για διαστρωματώσεις με 0° και 90° και υλικά T300/5208 και Scotchply 1002 σε φθίνουσα ταξινόμηση

4.2.2 Διαστρωματώσεις με Ίνες Προσανατολισμένες Κατά Γωνίες $\pm\theta^o$

Στις περιπτώσεις διαστρωματώσεων με ίνες προσανατολισμένες κατά γωνίες $\pm\theta^o$ που εξετάστηκαν, όπως φαίνεται και στους συγκεντρωτικούς πίνακες, παρατηρήθηκε ότι ανά γωνία τα αποτελέσματα είναι ίδια, καθώς η διάταξη των στρώσεων δεν επηρεάζει το μητρώο A και δηλαδή τις παραμορφώσεις και τις τάσεις όπως θα επηρέαζε το πάχος τους. Όντως, μέσω της υπολογιστικής διαδικασίας προέκυψαν για τις περιπτώσεις διαστρωματώσεων 1), 2), 3), 4), 7), 8), 9) ακριβώς τα ίδια αποτελέσματα, καθώς το συνολικό πάχος παραμένει σταθερό και κατανέμεται ισομερώς στις στρώσεις χωρίς το μητρώο A να επηρεάζεται. Επίσης, αν και επηρεάζεται από τη διάταξη των στρώσεων, για τις συγκεκριμένες περιπτώσεις με $\pm\theta^o$, το μητρώο D παραμένει σταθερό ανά γωνία και συνεπώς δίνει το ίδιο κρίσιμο φορτίο λυγισμού. Στις περιπτώσεις 5) και 6) οι μη μηδενικοί όροι A_{16}, A_{61}, A_{26}, A_{62}, στο μητρώο μεμβρανικής δυσκαμψίας A αλλάζουν τα αποτελέσματα όμως πολύ λίγο όπως φάνηκε στους πίνακες με τα συγκεντρωτικά αποτελέσματα.



Διαγράμματα 4.8 : Κρίσιμο φορτίο λυγισμού, φορτίο αστοχίας, μειωτικός συντελεστής και συντελεστές ορθοτροπίας συναρτήσει των διαστρωματώσεων γωνιών $\pm30^o$, $\pm45^o$, $\pm60^o$ για το υλικό T300/5208



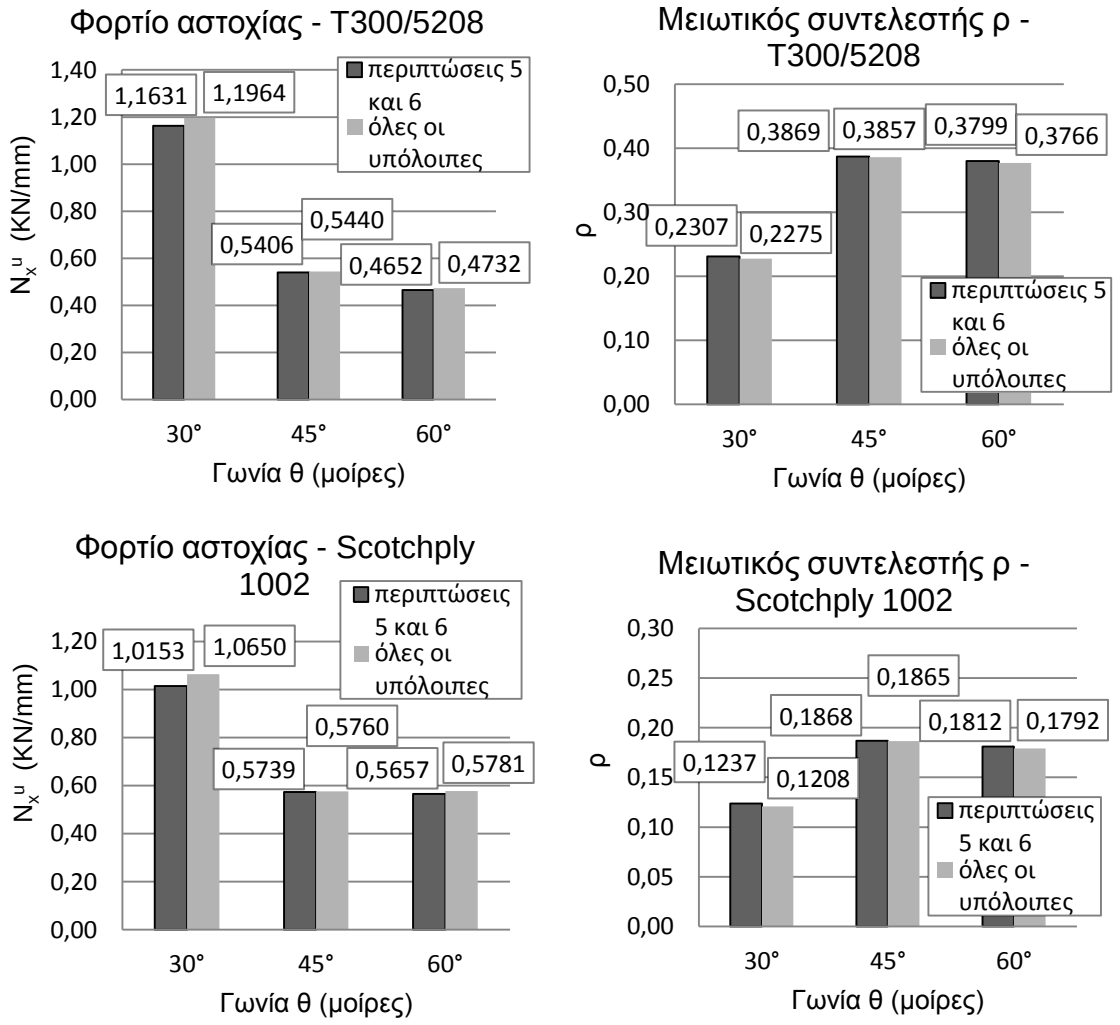
Διαγράμματα 4.9 : Κρίσιμο φορτίο λυγισμού, φορτίο αστοχίας, μειωτικός συντελεστής και συντελεστές ορθοτροπίας συναρτήσει των διαστρωματώσεων γωνιών ±30°, ±45°, ±60° για το υλικό Scotchply 1002

Στα παραπάνω διαγράμματα παρουσιάζεται το κρίσιμο φορτίο, το φορτίο αστοχίας, ο μειωτικός συντελεστής και οι συντελεστές αποχής από την ισοτροπία συναρτήσει των διαστρωματώσεων γωνιών ±30° , ±45° και ±60° που εξετάστηκαν για τα υλικά T300/5208 και Scotchply 1002. Παρατηρώντας τα διαγράμματα, προκύπτει αρχικά ότι οι διαστρωματώσεις με ±45° έχουν το μεγαλύτερο κρίσιμο φορτίο λυγισμού και πιο κοντά στο χάλυβα ποιοτήτων S235 και S355 και στα δύο υλικά, ενώ τα αντίστοιχα φορτία των διαστρωματώσεων γωνιών ±30° και ±60° είναι αρκετά κοντά. Σε όρους αστοχίας, αρχικά παρατηρείται από την υπολογιστική διαδικασία του Κεφαλαίου 3 πως το φορτίο αστοχίας προέκυψε από τις διατμητικές τάσεις. Επίσης φαίνεται ξεκάθαρα ότι το φορτίο αστοχίας των διαστρωματώσεων με ±30° είναι περίπου διπλάσιο από το αντίστοιχο των άλλων γωνιών ανεξαρτήτως υλικού. Όσο αναφορά το μειωτικό συντελεστή ρ και κατ' επέκταση το ενεργό πλάτος της διατομής, παρατηρείται ότι οι διαστρωματώσεις με ±45° υπερέχουν, με τις ±60° να βρίσκονται πάρα πολύ κοντά. Τέλος, από τα διαγράμματα των συντελεστών ανισοτροπίας βλέπουμε πως οι διαστρωματώσεις με γωνίες ±45° παρουσιάζουν

τετραγωνικώς ισότροπη συμπεριφορά, καθώς $r_{12} \neq 1$ αλλά $r_{22} = 1$, λόγω $Q_{11} = Q_{22}$ και $D_{11} = D_{12}$.

Όσο αναφορά τη σύγκριση των δύο υλικών T300/5208 και Scotchply 1002, βλέπουμε πως το πρώτο υλικό είναι μεγαλύτερης αντοχής σε όλες τις περιπτώσεις, εκτός από το φορτίο αστοχίας στις περιπτώσεις με γωνίες ±45° και ±60°, όπου το Scotchply 1002 υπερτερεί ελάχιστα ενώ τα δύο υλικά είναι σχετικά κοντά. Αυτό συμβαίνει διότι το φορτίο αστοχίας προέκυψε από τις διατμητικές τάσεις που οι τιμές τους είναι σχετικά κοντά και όχι από τις ορθές που οι τιμές τους απέχουν.

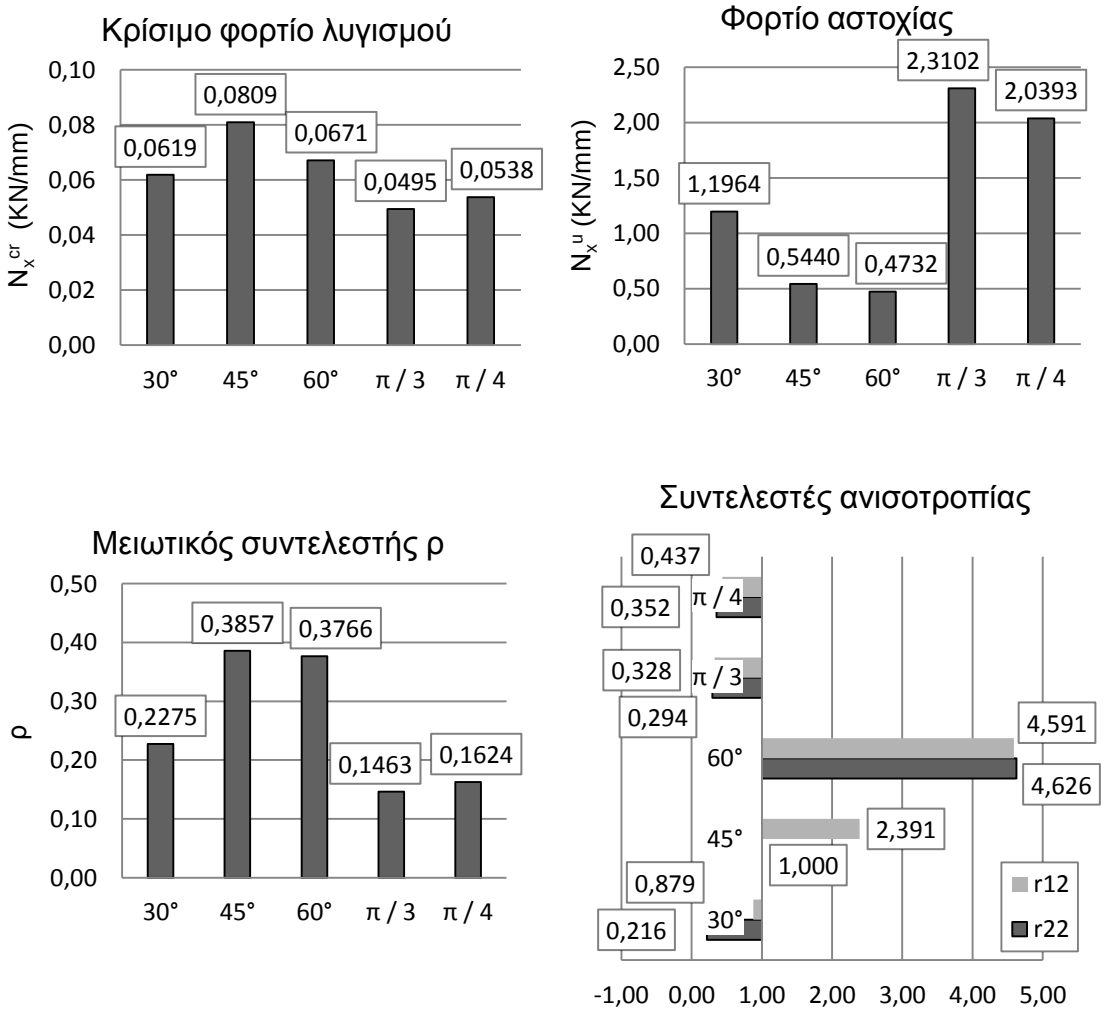
Όπως ειπώθηκε στην αρχή, τα παραπάνω διαγράμματα αναφέρονται σε όλες τις περιπτώσεις εκτός των 5) και 6) όπου τα αποτελέσματα διέφεραν πολύ λίγο. Αυτό που επηρεάζεται είναι το φορτίο αστοχίας και συνεπώς ο μειωτικός συντελεστής ρ που εξαρτάται από αυτό. Στα Διαγράμματα 4.10 παρατίθενται αυτές οι διαφορές για τα δύο υλικά.



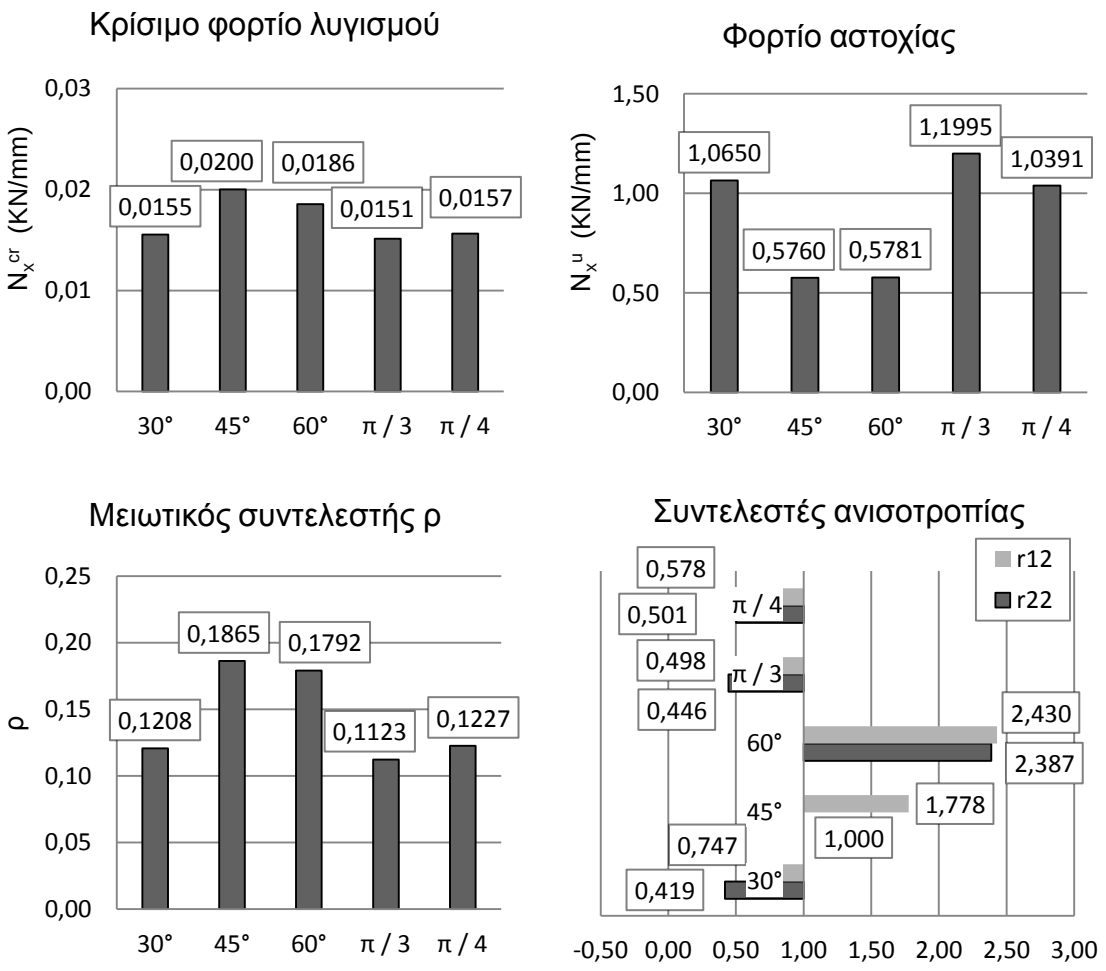
Διαγράμματα 4.10 : Φορτίο αστοχίας και μειωτικός συντελεστής συναρτήσει των διαστρωματώσεων γωνιών ±30°, ±45°, ±60° για τις περιπτώσεις 5) και 6) και υλικά T300/5208 και Scotchply 1002

4.2.3 Ψευδο – Ισότροπη Διαστρωμάτωση

Παρακάτω βλέπουμε τη σύγκριση των διαστρωματώσεων με ίνες προσανατολισμένες κατά γωνίες $\pm\theta^o$ με τις ψευδο – ισότροπες διαστρωματώσεις π / 3 και π / 4. Παρατηρείται ότι το φορτίο λυγισμού τους είναι σχετικά μικρό, όμως έχουν μεγαλύτερη αντοχή σε αστοχία από τις άλλες περιπτώσεις διαστρωματώσεων. Παρ' όλα αυτά, εξαιτίας του σχετικά μικρού φορτίου λυγισμού τους ο μειωτικός συντελεστής ρ καταλήγει να είναι μικρότερος. Παρατηρείται επίσης ότι η συμπεριφορά τους είναι πολύ κοντά στην περίπτωση των $\pm30^o$ για το υλικό Scotchply 1002.



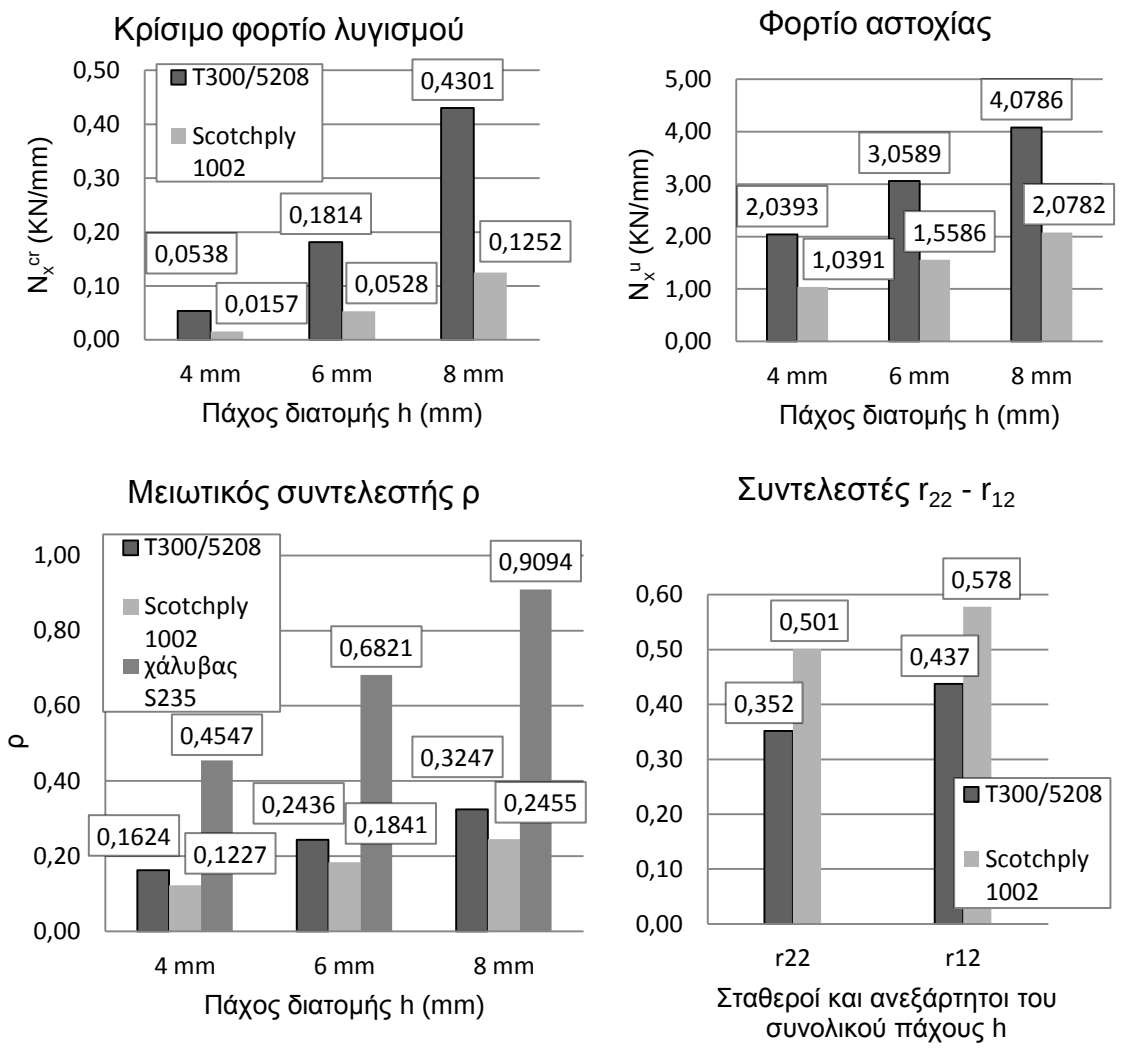
Διαγράμματα 4.11 : Κρίσιμο φορτίο λυγισμού, φορτίο αστοχίας, μειωτικός συντελεστής και συντελεστές ορθοτροπίας συναρτήσει των διαστρωματώσεων γωνιών $\pm30^o$, $\pm45^o$, $\pm60^o$ και των διαστρωματώσεων π/3 και π/4 για το υλικό T300/5208



Διαγράμματα 4.12 : Κρίσιμο φορτίο λυγισμού, φορτίο αστοχίας, μειωτικός συντελεστής και συντελεστές ορθοτροπίας συναρτήσει των διαστρωματώσεων γωνιών ±30°, ±45°, ±60° και των διαστρωματώσεων π/3 και π/4 για το υλικό Scotchply 1002

4.2.4 Διερεύνηση Πάχους στη Διαστρωμάτωση π / 4 - $[0 / 45 / 90 / -45]_S$

Παρακάτω παρατίθενται τα διαγράμματα του κρίσιμου φορτίου λυγισμού, του φορτίου αστοχίας, του μειωτικού συντελεστή ρ και των συντελεστών ανισοτροπίας συναρτήσει των τριών διαφορετικών παχών που εξετάστηκαν για την περίπτωση της ψευδο – ισότροπης διαστρωμάτωσης π / 4 για τα δύο υλικά. Επίσης γίνεται και η σύγκριση των δύο σύνθετων υλικών με το χάλυβα στην περίπτωση του μειωτικού συντελεστή και δηλαδή του ενεργού πλάτους της διατομής. Παρατηρείται ότι ισχύει ξεκάθαρα και για τα δύο υλικά η αναλογία για τα συνολικά πάχη της διατομής. Επιπρόσθετα, οι συντελεστές αποχής από την ισοτροπία είναι ίσοι παρά την αλλαγή του συνολικού πάχους, διότι η αναλογία εξακολουθεί να ισχύει από τη στιγμή που οι στρώσεις έχουν μεταξύ τους το ίδιο πάχος.

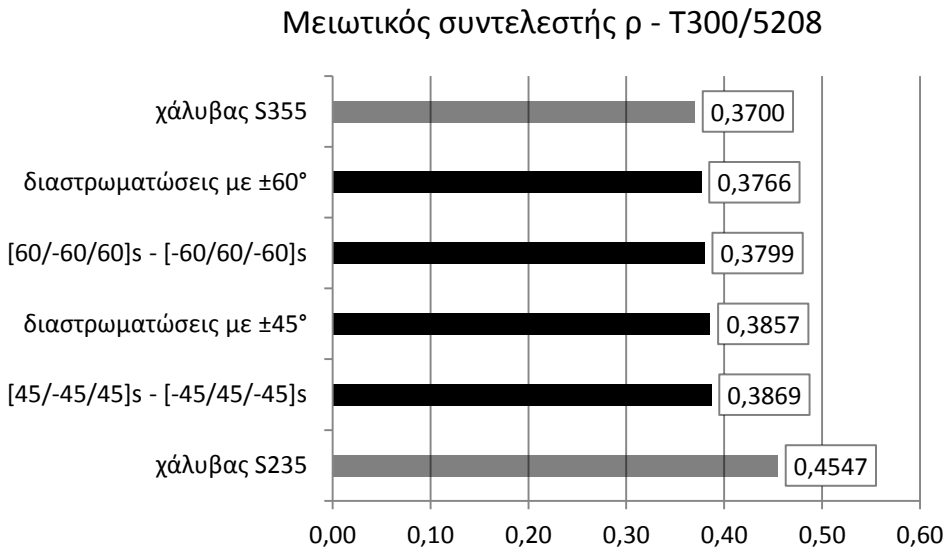


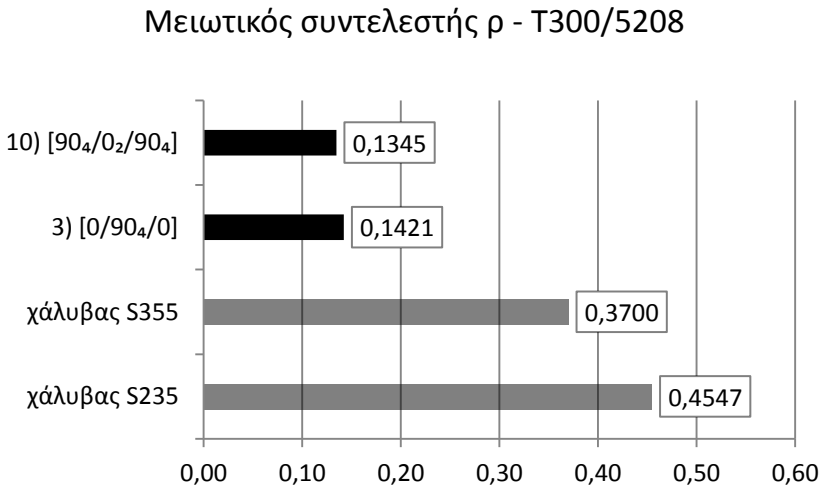
Διαγράμματα 4.13 : Κρίσιμο φορτίο λυγισμού, φορτίο αστοχίας, μειωτικός συντελεστής και συντελεστές ορθοτροπίας συναρτήσει τριών διαφόρων παχών διατομής για τη διαστρωμάτωση π/4 και υλικά T300/5208, Scotchply 1002 και χάλυβα S235

4.2.5 Σύγκριση Ενεργού Πλάτους Σύνθετων Υλικών με Χάλυβα

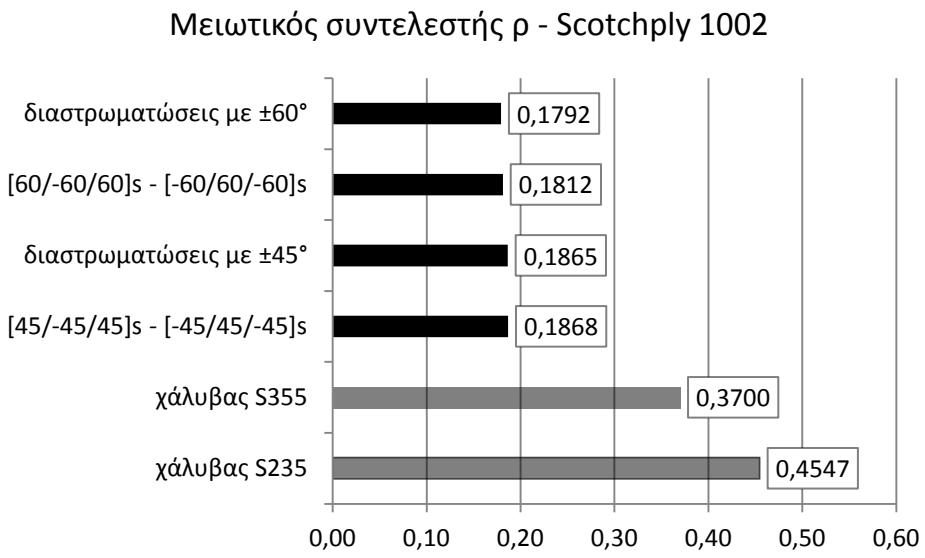
Όπως προέκυψε από τα αποτελέσματα, οι περιπτώσεις διαστρωματώσεων των οποίων ο λόγος κρίσιμου φορτίου λυγισμού και φορτίου αστοχίας και κατ' επέκταση ενεργού πλάτους είναι πιο μεγάλος φαίνεται στα παρακάτω διαγράμματα. Συγκεκριμένα, είναι οι περιπτώσεις με ίνες προσανατολισμένες κατά γωνίες $\pm 45^o$ και $\pm 60^o$ για το υλικό T300/5208 και πλησιάζουν πιο κοντά στο χάλυβα. Ο χάλυβας και για τις δύο ποιότητες S235 και S355 έχει το ίδιο κρίσιμο φορτίο λυγισμού και μεγαλύτερο από όλες τις διαστρωματώσεις σύνθετων υλικών. Το ενεργό πλάτος του χάλυβα S235 είναι μεγαλύτερο από των σύνθετων υλικών καθώς χρειάζεται μεγαλύτερο πλάτος για να εξισωθούν οι τάσεις με την ομοιόμορφη κατανομή τους, όμως επειδή η αντοχή του S355 είναι

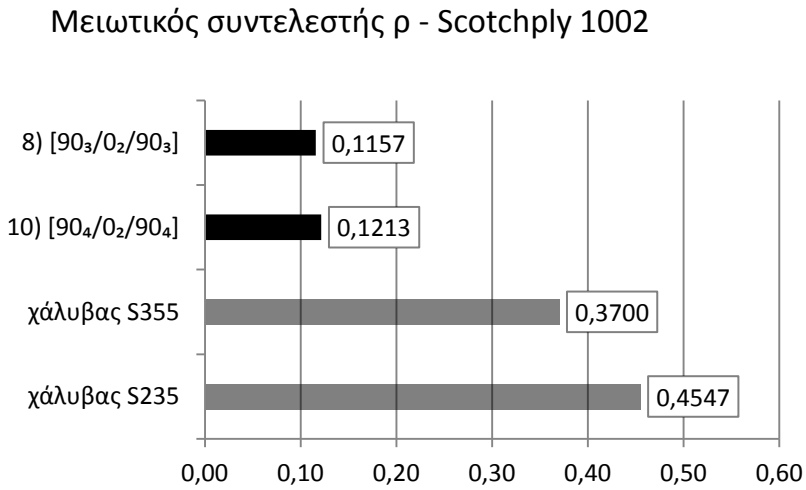
μεγαλύτερη το ενεργό πλάτος είναι μικρότερο από τις διαστρωματώσεις γωνιών ±45° και ±60° και υλικό Graphite/Epoxy.





Διαγράμματα 4.14 : Σύγκριση μειωτικού συντελεστή διατομής από υλικό T300/5208 για ορισμένες περιπτώσεις διαστρωματώσεων και διατομή από χάλυβα S235 και S355





Διαγράμματα 4.15 : Σύγκριση μειωτικού συντελεστή διατομής από υλικό Scotchply 1002 για ορισμένες περιπτώσεις διαστρωματώσεων και διατομή από χάλυβα S235 και S355

5 Συμπεράσματα

Από την διερεύνηση που διεξήχθη στο πλαίσιο της παρούσας διπλωματικής εργασίας, πολλά και χρήσιμα συμπεράσματα αξίζει να αναδειχθούν. Αυτά αναφέρθηκαν μαζί με τα αντίστοιχα διαγράμματα στις προηγούμενες ενότητες του Κεφαλαίου 4 και παρατίθενται εδώ σε μία συνολική αναφορά.

- Όπως έγινε αντιληπτό, η διαδικασία υπολογισμού τόσο του κρίσιμου φορτίου λυγισμού όσο και του φορτίου αστοχίας των σύνθετων υλικών είναι πολύ πιο μεγάλη από την αντίστοιχη για τα ισότροπα υλικά, λόγω της ύπαρξης περισσότερων σταθερών για την έκφραση των μηχανικών ιδιοτήτων τους.

- Το κρίσιμο φορτίο λυγισμού για τα σύνθετα υλικά εξαρτάται όχι μόνο από τις διαστάσεις του στοιχείου, αλλά το μεγαλύτερο ρόλο διαδραματίζει ο προσανατολισμός των ινών σε κάθε στρώση. Στη διατομή ιδίων διαστάσεων που εξετάστηκε, το κρίσιμο φορτίο λυγισμού είχε αρκετά μεγάλες διαφορές ανάλογα με το προσανατολισμό των ινών και ήταν μεγαλύτερο στην διαστρωμάτωση με ±45°. Ένα άλλο σημείο που αξίζει να τονιστεί είναι ότι στην περίπτωση προσανατολισμού κατά 0 και 90 μοίρες παρατηρήθηκε πως επηρεάζεται από τη διάταξη των στρώσεων και ήταν μεγαλύτερο στην περίπτωση σχηματισμού ‘‘πυρήνα’’ με όσο το δυνατό περισσότερες στρώσεις με κοινά προσανατολισμένες ίνες, ενώ αντίστοιχα στις περιπτώσεις προσανατολισμού ±θ° το μητρώο D και συνεπώς και το κρίσιμο φορτίο λυγισμού παραμένει σταθερό λόγω ισομερούς καταμερισμού του πάχους στις στρώσεις.

- Όσο αναφορά το φορτίο αστοχίας, αποδείχθηκε πως εκείνο των διαστρωματώσεων γωνιών 0 και 90 μοιρών είναι μεγαλύτερο από των αντίστοιχων διάφορων γωνιών ±θ° και στα δύο υλικά που εξετάστηκαν. Το μεγαλύτερο φορτίο αστοχίας παρατηρήθηκε στη διαστρωμάτωση με το μεγαλύτερο πλήθος στρώσεων με ίνες προσανατολισμένες παράλληλα στο θλιπτικό φορτίο, δηλαδή 0° και με το μικρότερο πλήθος στρώσεων με ίνες προσανατολισμένες κάθετα στο φορτίο, δηλαδή 90°. Επιπρόσθετα, το μητρώο A των διαστρωματώσεων γωνιών ±θ° δεν επηρεάζεται από τη διάταξη των στρώσεων παρά μόνο από το πάχος, με αποτέλεσμα να έχουν όλες το ίδιο φορτίο αστοχίας για δεδομένο το σταθερό πάχος της διατομής.

- Σχετικά με το ενεργό πλάτος, παρατηρήθηκε πως η βέλτιστη διαστρωμάτωση είναι από υλικό Graphite/Epoxy με ίνες προσανατολισμένες κατά ±45°, καθώς έχει το μεγαλύτερο κρίσιμο φορτίο λυγισμού σε σχέση με το φορτίο αστοχίας της. Γενικά η εφαρμογή της θεωρίας του ενεργού πλάτους στα σύνθετα υλικά είναι πολύ χρήσιμη και θα πρέπει να δοθεί η απαραίτητη προσοχή στα παραπάνω στοιχεία που διερευνήθηκαν στο πλαίσιο της παρούσας διπλωματικής εργασίας, ώστε να επιτευχθεί ο μεγαλύτερος λόγος του κρίσιμου φορτίου λυγισμού προς το φορτίο αστοχίας.

6 Βιβλιογραφία

1. Ραυτογιάννης Ι. (2011). “Σύνθετα Υλικά, Τόμος Ι Μηχανική Συμπεριφορά”. Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα.
2. Ραυτογιάννης Ι. (2007). “Κατασκευές από Σύνθετα Υλικά”. Σημειώσεις για το μάθημα Β4 του μεταπτυχιακού προγράμματος ΔΠΜΣ, Αθήνα.
3. Μιχάλτσος Γ.Θ. (2008). “Ελαφρές Μεταλλικές Κατασκευές – Μέθοδοι Υπολογισμού”. Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα.
4. Μιχάλτσος Γ.Θ. (2009). “Ελαφρές Μεταλλικές Κατασκευές – Θεωρία και Εφαρμογές”, εκδόσεις Συμεών, Αθήνα.
5. Βάγιας Ι., Dubina D. (2004). “Σιδηρές Κατασκευές από Λεπτότοιχες Διατομές Ψυχρής Διαμόρφωσης”. Εκδόσεις Κλειδάριθμος, Αθήνα.
6. Kollar L., Springer G. (2003). “Mechanics of Composite Structures”. Cambridge.
7. Jones R. (1999). “Mechanics of Composite Materials”. Taylor & Francis.
8. Jones R. (2006). “Buckling of Bars, Plates and Shells”. Bull Ridge Publishing.
9. Reddy J.N. (2013). ‘‘Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis’’, Second Edition. CRC Press
10. Christensen R. (2012). “Mechanics of Composite Materials”. Courier Corporation.
11. Kinlan J. (2012). ‘‘Structural Comparison of a Composite and Steel Truss Bridge’’. Rensselaer Polytechnic Institute, Hartford, Connecticut.
12. Beznea E., Chirica I. (2011). ‘‘Buckling and Post-buckling Analysis of Composite Plates, Advances in Composite Materials - Ecodesign and Analysis’’, Dr. Brahim Attaf, InTech.
13. Hopkins T.A. (2007). “Optimization of Stiffener Placement for Thin Plate Buckling”. Massachusetts Institute of Technology.
14. Kaw A. (2006). “Mechanics of Composite Materials”. Taylor & Francis.
15. Gibson R. (1994). ‘‘Principles of Composite Material Mechanics’’. McGraw-Hill Inc..