



**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**  
**ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**  
**ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ**

**Θεώρημα απεικόνισης του Riemann και εφαρμογές**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

**Χαράλαμπος Οικονόμου**

Επιβλέπων : Ιωάννης Σαραντόπουλος  
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Αύγουστος 2015





**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**  
**ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**

**Θεώρημα απεικόνισης του Riemann και εφαρμογές**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

**Χαράλαμπος Οικονόμου**

Τριμελής Επιτροπή: Ιωάννης Σαραντόπουλος  
Δρόσος Γκιντίδης  
Γεώργιος Σμυρλής

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την

.....  
Ιωάννης Σαραντόπουλος  
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....  
Δρόσος Γκιντίδης  
Αναπληρωτής Καθηγητής  
Ε.Μ.Π.

.....  
Γεώργιος Σμυρλής  
Επίκουρος Καθηγητής  
Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Αύγουστος 2015

.....

**Χαράλαμπος Οικονόμου**

Πτυχιούχος Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Εφαρμογών Ε.Μ.Π.

Copyright © Χαράλαμπος Οικονόμου, 2015.

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τη συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τη συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Στη Σοφία



# Περίληψη

Στην εργασία αυτή αναλύεται το σπουδαίο "Θεώρημα απεικόνισης του Riemann" αναφέροντας την τεράστια σημασία του στην εξέλιξη της Μιγαδικής Ανάλυσης και στα διάφορα προβλήματα στα οποία βρίσκει εφαρμογή. Στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζεται η εισαγωγή και μια μικρή ιστορική αναδρομή για τον Riemann. Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζονται οι βασικές ιδιότητες των σύμμορφων απεικονίσεων και των απλά συνεκτικών πεδίων. Στο τρίτο παρουσιάζονται δύο αποδείξεις του θεωρήματος και στο τέταρτο οι εφαρμογές του σε τομείς της ρευστομηχανικής, ηλεκτρομαγνητισμού και μετάδοσης θερμότητας.





# Abstract

This thesis presents the "Riemann Mapping Theorem", its great significance in the development of Complex Analysis and its various problems and applications. The first chapter introduces the history of Bernard Riemann, whereas in the second chapter presents the basic properties of conformal mappings and simply connected domains. In the third chapter demonstrate two proofs of the theorem. Finally, the last chapter portrays the theorem's applications in the fields of fluid mechanics, electromagnetism and heat transfer.



# Ευχαριστίες

Ολοκληρώνοντας την διπλωματική μου εργασία θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους τους ανθρώπους που με ενέπνευσαν με στήριξαν κ με βοήθησαν σε όλη μου τη πορεία ενασχόλησης με την επιστήμη των Μαθηματικών κ ως μαθητής κ ως φοιτητής. Αρχικά θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή μου κύριο Ιωάννη Σαραντόπουλο που με δέχτηκε κ με καθοδήγησε κατά τη διάρκεια της εκπόνησης αυτής της εργασίας. Ευχαριστώ επίσης τους συμφοιτητές και φίλους μου Δημήτρη Σπύρου, Αζίζ Μούσα και Μπούφη Αναστάση για τις πολύτιμες συμβουλές και βοήθεια που μου προσέφεραν όποτε χρειάστηκε. Τέλος ένα μεγάλο ευχαριστώ ανήκει στην οικογένεια μου για την ηθική και υλική υποστήριξη και εμπιστοσύνη τους όλα αυτά τα χρόνια της ζωής μου.



# Πίνακας Περιεχομένων

	Σελ.
Περίληψη	7
Ευχαριστίες	11
Πίνακας Περιεχομένων	13
Πίνακας Σχημάτων	15
<b>1 Εισαγωγή</b>	<b>17</b>
1.1 Το θεώρημα απεικόνισης του Riemann . . . . .	18
1.2 Η συνεισφορά του Riemann στα σύγχρονα μαθηματικά . . . . .	19
<b>2 Βασικές έννοιες</b>	<b>21</b>
2.1 Καμπύλες στο μιγαδικό επίπεδο . . . . .	21
2.2 Απλά συνεκτικά πεδία . . . . .	23
2.3 Σύμμορφες απεικονίσεις . . . . .	23
<b>3 Το θεώρημα απεικόνισης του Riemann</b>	<b>25</b>
3.1 Φυσιολογικές οικογένειες . . . . .	25
3.1.1 Θεώρημα Ascoli-Arzelà . . . . .	25
3.1.2 Θεώρημα Montel . . . . .	27
3.1.3 Θεώρημα Vitali . . . . .	28
3.2 Το θεώρημα απεικόνισης του Riemann . . . . .	29
3.2.1 Κλασική απόδειξη . . . . .	30

3.2.2	Γενικευμένη απόδειξη . . . . .	34
3.3	Θεώρημα Καραθεοδωρή . . . . .	38
<b>4</b>	<b>Εφαρμογές</b>	<b>39</b>
4.1	Διάδοση θερμότητας . . . . .	41
4.2	Ηλεκτρικό δυναμικό . . . . .	43
4.3	Επίλυση διαφορικής εξίσωσης Laplace . . . . .	44
4.4	Μετασχηματισμός Schwarz-Christoffel . . . . .	47
4.5	Μετασχηματισμός Joukowski . . . . .	49
	<b>Βιβλιογραφία</b>	<b>54</b>
	<b>Παράρτημα</b>	<b>57</b>
	Αρχή μεγίστου μέτρου . . . . .	57
	Θεώρημα Liouville . . . . .	57
	Θεώρημα Morera . . . . .	58
	Λήμμα Schwarz . . . . .	58
	Θεώρημα Rouché . . . . .	59

# Πίνακας Σχημάτων

Σελ.

1	.....	27
2	Η απεικόνιση $z = -\cos\pi w$ μεταφέρει το άνω ημιπίπεδο του $z$ στην ημιάπειρη λωρίδα του $w$ . Οι ισοθερμικές γραμμές είναι ορθογώνιες στο μονωμένο σύνορο.	42
3	Απεικόνιση Schwarz-Christoffel για $n = 5$ και $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 > \pi$ . . . . .	48
4	Η απεικόνιση της περιφέρειας κύκλου μέσω του μετασχηματισμού Joukowski	51





# Κεφάλαιο 1

## Εισαγωγή

Στις αρχές του 19<sup>ου</sup> αιώνα ο Augustin-Louis Cauchy δημοσιεύει μια σειρά διαλέξεων με τίτλο: "Cours d' analyse". Οι διαλέξεις αυτές ήταν ένα ιδιαίτερος ακριβές κείμενο το οποίο έγινε σύντομα το μανιφέστο του κλάδου της Ανάλυσης εκείνη την εποχή. Η σπουδαιότερη συνεισφορά του Cauchy στην επιστήμη των μαθηματικών ήταν η δουλειά του στη μιγαδική ανάλυση. Εισήγαγε την μορφή  $a + ib$  για το μιγαδικό αριθμό (όπου  $i = \sqrt{-1}$ ) και έθεσε το πλαίσιο των ιδιοτήτων και των πράξεων μεταξύ αυτών. Ο στόχος του ήταν η χρησιμοποίηση μιγαδικών μεταβλητών για την επίλυση προβλημάτων που σχετίζονται με συνέχεια συναρτήσεων και σύγκλιση σειρών και ακολουθιών.

Η πρώτη δουλειά του Cauchy στον τομέα της μιγαδικής ολοκλήρωσης εμφανίστηκε σε μια εργασία του το 1814 η οποία δημοσιεύτηκε το 1827. Σε αυτήν περιγράφει τη μέθοδο να περάσεις από το πραγματικό στο μιγαδικό επίπεδο έτσι ώστε να υπολογίσεις κάποια φαινομενικά δύσκολα ολοκληρώματα με ευκολία. Ήταν η πρώτη ανάδειξη του περίφημου ολοκληρωτικού τύπου του Cauchy και των εξισώσεων Cauchy-Riemann. Μέχρι το τέλος του 1820 ο Cauchy είχε καθιερώσει το πεδίο της Μιγαδικής Ανάλυσης.

Η προσέγγιση του Cauchy και η σχετική δουλειά του στη μιγαδική ανάλυση δεν εστίαζε αρκετά στο αντικείμενο της μιγαδικής γεωμετρίας. Στις αρχές του 19<sup>ου</sup> αιώνα είχε γίνει κάποια δουλειά όσον αφορά τη γεωμετρική αναπαράσταση των μιγαδικών αριθμών στο επίπεδο, με κυριότερη συμβολή εκείνου του Ελβετού μαθηματικού Jean Robert Argand το 1806. Το 1831 ο Gauss δημοσίευσε το έργο του πάνω στην γεωμετρική θεωρία των μιγα-

δικών αριθμών.

Η επόμενη σπουδαία εξέλιξη στην μιγαδική ανάλυση ήρθε από τον μαθητή των Gauss και Bernard Riemann. Στη διατριβή του "Foundations for a general theory of functions of a complex variable" παρουσιάστηκε μια εξ' ολοκλήρου καινούργια γεωμετρική προσέγγιση στη μιγαδική ανάλυση και εισήχθη η έννοια της επιφάνειας Riemann. Επίσης έδωσε τον ορισμό της ολόμορφης συνάρτησης και στο τέλος της διατριβής του παρουσίασε το "Θεώρημα Απεικόνισης", το οποίο θα παρουσιαστεί εκτενώς σ' αυτήν την εργασία καθώς και η σπουδαιότητα του.

## 1.1 Το θεώρημα απεικόνισης του Riemann

Το θεώρημα απεικόνισης του Riemann αναφέρει πως δύο απλά συνεκτικές επίπεδες επιφάνειες είναι δυνατό να απεικονιστούν η μία στην άλλη με τέτοιο τρόπο ώστε κάθε σημείο της μιας να ανταποκρίνεται σε ένα και μόνο σημείο της άλλης, με συνεχή και σύμμορφο τρόπο. Επιπλέον, η απεικόνιση ανάμεσα σε οποιοδήποτε εσωτερικό και συνοριακό σημείο του ενός και του άλλου είναι τυχαία, αλλά μόλις γίνει, τότε η απεικόνιση καθορίζεται πλήρως.

Επιπρόσθετα, σε μια πιο μοντέρνα ερμηνεία του θεωρήματος Riemann: κάθε απλά συνεκτικό πεδίο, με τουλάχιστον δύο συνοριακά σημεία, μπορεί να απεικονιστεί σύμμορφα, αμφιμονοσήμαντα πάνω στον μοναδιαίο δίσκο, κατά τέτοιο τρόπο ώστε η απεικόνιση να μπορεί να επεκταθεί και στο σύνορο. Η απεικόνιση, έστω  $f$ , είναι προσδιορισμένη μοναδικά με την απαίτηση για κάθε σημείο  $z_0$  στο εσωτερικό του χώρου,  $f(z_0) = 0$  και  $f'(z_0) > 0$ . Όλες οι παραλλαγές μεταξύ της εκδοχής του Riemann και της πιο μοντέρνας είναι πολύ ενδιαφέρουσες. Η προϋπόθεση, το σύνορο να έχει τουλάχιστον δύο σημεία, μπήκε για να εξαιρεθούν οι περιπτώσεις όπου ο χώρος είναι το επίπεδο ή η σφαίρα, αντιπαραδείγματα που μάλλον θα ήταν γνωστά στον Riemann. Η παρατήρηση, ότι αρκεί να διατυπώσουμε την ισοδυναμία μεταξύ ενός οποιοδήποτε χώρου και του μοναδιαίου δίσκου, έγινε πρώτα απ' όλους από τον ίδιο τον Riemann, αλλά ο ακριβής ορισμός του τι είναι χώρος, έγινε τον εικοστό αιώνα, όταν έγινε κατανοητό πόσο ευαίσθητη μπορεί να γίνει η ερώτηση αυτή. Παρομοίως, η επίγνωση για την προβληματική φύση του συνόρου, μας ήρθε με το έργο

των Osgood και Καραθεοδωρή. Υπό την επίδραση του Καραθεοδωρή, προσδιορίστηκε η μοναδικότητα της απεικόνισης, με συνθήκες μόνο για τα εσωτερικά σημεία.

Το Θεώρημα Απεικόνισης του Riemann ορίζει επίσης πως, δύο απλά συνεκτικά πεδία είναι ισοδύναμα για τη θεωρία μιγαδικών συναρτήσεων του Riemann. Αυτό είναι σημαντικό για όποιον προσπαθεί να θεμελιώσει μια θεωρία μιγαδικής ανάλυσης πάνω σε τοπολογικές αντί για αλγεβρικές ιδέες. Επίσης είναι ιδιαίτερα σημαντικό γιατί ότι μπορεί να αποδειχτεί για το μοναδιαίο δίσκο, μπορεί εύκολα να μετασχηματιστεί και για πιο γενικά πεδία. Παρόλα αυτά, είναι ξεκάθαρο, πως το κενό μεταξύ της σύνθεσης του Riemann και της μοντέρνας είναι αρκετά μεγάλο. Όπως έγραψε και ένας άλλος μεγάλος μαθηματικός, ο Ahlfors, σχεδόν έναν αιώνα μετά, ο Riemann έγραφε “απόκρυφα μηνύματα στο μέλλον” και πως διακήρυξε το θεώρημά του με τέτοιο τρόπο ώστε “να αψηφά οποιαδήποτε προσπάθεια για απόδειξη, ακόμα και με μοντέρνες μεθόδους”.

Η απόδειξη του είναι ιδιαίτερος σημαντική γιατί το αποτέλεσμα που αποδείχθηκε για το δίσκο μπορεί εύκολα να μετασχηματιστεί και σε πιο γενικές μορφές. Η αρχική απόδειξη του θεωρήματος ωστόσο, ήταν ασαφής επειδή στηρίχθηκε στην αρχή του Dirichlet η οποία ισχυρίζεται ότι το πρόβλημα ελαχιστοποίησης του ολοκληρώματος

$$\iint_D \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy$$

υπό συνθήκη στο σύνορο του  $D$  πρέπει να έχει λύση. Ο Karl Weierstrass διαπίστωσε ότι η αρχή αυτή δεν ήταν έγκυρη. Η απόδειξη του θεωρήματος απεικόνισης του Riemann ήταν ανοιχτή σε αξιολόγηση τις επόμενες δεκαετίες και επιχειρήθηκε από πολλούς μαθηματικούς, όπως H.A. Schwarz (1843-1921), A.Harnack (1851-1888), H.Poincare (1854-1912) κ.α. Η πρώτη απόδειξη δόθηκε από τον W.F.Osgood το 1900 και η πρώτη έγκυρη δόθηκε από το Καραθεοδωρή.

## 1.2 Η συνεισφορά του Riemann στα σύγχρονα μαθηματικά

Ο Riemann συνεισέφερε σημαντικά στη Μαθηματική Ανάλυση, τη Τοπολογία, την Αναλυτική Θεωρία των αριθμών και τη Διαφορική Γεωμετρία, προωθώντας τη μη ευκλεί-

δεια Γεωμετρία και ανοίγοντας έτσι το δρόμο μεταξύ άλλων και για τη θεμελίωση αργότερα της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας. Κατά τον D. Struik «με τον Riemann φτάνουμε στον άνθρωπο που επηρέασε περισσότερο από κάθε άλλον την πορεία των σύγχρονων Μαθηματικών».

Το έργο του Riemann άνοιξε νέες ερευνητικές περιοχές συνδυάζοντας την Ανάλυση με τη Γεωμετρία. Εκτός από τη Ριμάνεια Γεωμετρία, η θεωρία των επιφανειών Riemann αναπτύχθηκε παραπέρα από τους Felix Klein και Adolph Hurwitz και σήμερα συνιστά ένα από τα θεμέλια της Τοπολογίας, ενώ εφαρμόζεται ακόμα με νέους τρόπους στη Μαθηματική Φυσική.

Ο Riemann προσέφερε πολλά στην Πραγματική Ανάλυση: όρισε το ολοκλήρωμα Riemann με τη βοήθεια των αθροισμάτων Riemann, ανέπτυξε μια θεωρία για τις τριγωνομετρικές σειρές που δεν είναι σειρές Fourier — ένα πρώτο βήμα για μια θεωρία των γενικευμένων συναρτήσεων — και μελέτησε το διαφορικό ολοκλήρωμα Riemann-Liouville.

Πολύ γνωστές είναι και κάποιες συνεισφορές του Riemann στη σύγχρονη Αναλυτική Θεωρία των αριθμών. Σε μία και μόνη σύντομη δημοσίευση (τη μοναδική του επί της Αριθμοθεωρίας), εισήγαγε τη Συνάρτηση  $\zeta$  του Riemann και έδειξε τη σημασία της για την κατανόηση της κατανομής των πρώτων αριθμών. Διατύπωσε μια σειρά από εικασίες σχετικές με ιδιότητες της συναρτήσεως  $\zeta$ , μία από τις οποίες είναι η περιβόητη "Υπόθεση του Riemann".

Ο Riemann εφάρμοσε την Αρχή του Dirichlet από τον Λογισμό των μεταβολών με σπουδαία αποτελέσματα. Η εργασία του στη μονοδρομία και στην υπεργεωμετρική συνάρτηση στους μιγαδικούς έκανε μεγάλη εντύπωση και καθιέρωσε μια βασική μέθοδο εργασίας με συναρτήσεις «λαμβάνοντας υπόψη μόνο τις ανωμαλίες τους». Η διδακτορική του διατριβή, στο πανεπιστήμιο του Göttingen, αποτέλεσε την πρώτη του δημοσίευση, το 1851, και αναφέρθηκε στο θεώρημα Απεικόνισης. Ο τίτλος αυτής της δημοσίευσης είναι "Θεμέλια για μια γενικευμένη θεωρία των μιγαδικών μεταβλητών". ("Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse" )

## Κεφάλαιο 2

# Βασικές έννοιες

### 2.1 Καμπύλες στο μιγαδικό επίπεδο

Μια μιγαδική συνάρτηση  $z(t)$ ,  $t \in [a, \beta]$ , απεικονίζει το διάστημα αυτό σε ένα σύνολο σημείων στο μιγαδικό επίπεδο. Το σύνολο αυτό μπορούμε να το θεωρήσουμε σαν το γράφημα της συνάρτησης. Αν η  $z(t)$  είναι συνεχής συνάρτηση, το γράφημά της αποτελεί μια καμπύλη στο μιγαδικό επίπεδο. Έστω  $z(t)$ ,  $t \in [a, \beta]$ , μια συνεχής μιγαδική συνάρτηση. Τότε λέμε ότι η συνάρτηση αυτή ορίζει μια συνεχή καμπύλη. Η σχέση

$$z = z(t), \quad a \leq t \leq \beta \tag{2.1}$$

ονομάζεται παραμετρική εξίσωση της καμπύλης. Αν  $z_1 = z(t_1)$  και  $z_2 = z(t_2)$  όπου  $a \leq t_1 \leq t_2 \leq \beta$ , τότε λέμε ότι  $z_1$  προηγείται του  $z_2$ . Έτσι η καμπύλη (2.1) αποτελεί ένα διατεταγμένο σύνολο σημείων στο μιγαδικό επίπεδο.

Μια καμπύλη στο μιγαδικό επίπεδο υποθέτουμε πάντα ότι είναι προσανατολισμένη στη διεύθυνση που αντιστοιχεί όταν η παράμετρος  $t$  αυξάνει. Η διεύθυνση κατά την οποία ένα σημείο  $z$  κινείται κατά μήκος της καμπύλης, όταν το  $t$  αυξάνει, ονομάζεται θετική. Το σημείο  $a = z(a)$  ονομάζεται αρχή και το σημείο  $\beta = z(\beta)$  πέρας της καμπύλης. Αν  $z(a) = z(\beta)$ , τότε η καμπύλη ονομάζεται κλειστή.

Έστω  $C$  μια καμπύλη που δίνεται από την (2.1). *Ίχνος* της καμπύλης ονομάζεται

τότε το σύνολο των σημείων  $\{z = z(t), t \in [a, \beta]\}$ . Το σύνολο αυτό διαφέρει από την καμπύλη, αφού μια καμπύλη αποτελείται από ένα σύνολο διατεταγμένων ζευγών. Μερικές φορές, για λόγους συντομίας και απλότητας, χρησιμοποιείται ο όρος "καμπύλη" αντί του όρου "ίχνος καμπύλης". Η καμπύλη  $C$  με εξίσωση (2.1) ονομάζεται **απλή καμπύλη** αν η συνάρτηση  $z(t)$  είναι αμφιμονοσήμαντη. Αν για κάθε  $t_1, t_2 \in (a, \beta)$  με  $t_1 \neq t_2$  ισχύει  $z(t_1) \neq z(t_2)$  και  $z(a) = z(\beta)$ , τότε η  $C$  ονομάζεται απλή κλειστή καμπύλη ή **καμπύλη Jordan**.

**Παράδειγμα.** Η καμπύλη  $z = e^{it}$ ,  $0 \leq t \leq \pi$ , είναι το ημικύκλιο  $|z| = 1$ ,  $Im z \geq 0$ . Η καμπύλη είναι απλή αλλά όχι κλειστή.

**Παράδειγμα.** Ο κύκλος  $C$  με κέντρο το  $z_0$  και ακτίνα  $R$  με παραμετρική εξίσωση  $C : z(t) = z_0 + Re^{it}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$  είναι μια απλή κλειστή καμπύλη.

Μια καμπύλη  $C$  ονομάζεται **λεία**, αν η  $z(t)$  έχει παράγωγο συνεχή με  $z'(t) \neq 0$  στο  $[a, \beta]$ . Αν η καμπύλη είναι κλειστή θα πρέπει  $z'(a) = z'(\beta)$ . Μια καμπύλη ονομάζεται **τμηματικά λεία**, αν μπορεί να χωριστεί σε πεπερασμένο αριθμό λείων καμπυλών. Ένα απλό παράδειγμα μιας τμηματικά λείας καμπύλης είναι μια τεθλασμένη γραμμή. Από την ανάλυση γνωρίζουμε ότι μια λεία καμπύλη  $z = z(t)$ ,  $t \in [a, \beta]$ , είναι ευθυγραμμίσιμη και το μήκος της δίνεται από την σχέση  $L = \int_a^\beta |z'(t)| dt$ . Η γεωμετρική ερμηνεία της παραγώγου μιας μιγαδικής συναρτήσεως  $z(t)$  είναι η ακόλουθη: Αν μια καμπύλη  $C$  δίνεται από την εξίσωση  $z = z(t)$ ,  $a \leq t \leq \beta$  και σε κάποιο σημείο  $t_0$  υπάρχει η παράγωγος  $z'(t_0) \neq 0$ , τότε η  $C$  έχει στο σημείο  $z_0 = z_{t_0}$  ένα εφαπτόμενο διάνυσμα  $z'(t_0)$ . Επομένως, μια τμηματικά λεία καμπύλη έχει εφαπτομένη σε κάθε σημείο της με κλίση  $Arg z'(t)$ , εκτός ίσως από ένα πεπερασμένο αριθμό σημείων που ονομάζονται γωνιακά σημεία καμπύλης.

**Θεώρημα 2.1.1** (Θεώρημα Jordan). Κάθε απλή κλειστή καμπύλη  $C$  του μιγαδικού επιπέδου χωρίζει το επίπεδο σε δύο πεδία  $D_1, D_2$  που έχουν κοινό σύνορο την καμπύλη  $C$ . Το ένα από τα πεδία αυτά είναι φραγμένο και ονομάζεται **εσωτερικό της καμπύλης** και το άλλο δεν είναι φραγμένο και ονομάζεται **εξωτερικό της καμπύλης**.

## 2.2 Απλά συνεκτικά πεδία

**Ορισμός:** Ένα πεδίο  $D$  ονομάζεται απλά συνεκτικό αν το  $D$  περιέχει το εσωτερικό κάθε απλής κλειστής καμπύλης του. Δηλαδή, σε ένα απλά συνεκτικό πεδίο δεν υπάρχουν «οπές». Ένα πεδίο που δεν είναι απλά συνεκτικό ονομάζεται πολλαπλά συνεκτικό.

**Παράδειγμα.** Ο δακτύλιος  $A = \{z : 1 < |z| < 3\}$  δεν είναι απλά συνεκτικό πεδίο.

**Παράδειγμα.** Ο μοναδιαίος δίσκος εκτός του θετικού πραγματικού άξονα είναι απλά συνεκτικό πεδίο.

**Παράδειγμα.** Η λωρίδα απείρου μήκους  $A = \{z : -1 < \text{Im}z < 1\}$  είναι απλά συνεκτικό πεδίο. Παρατηρούμε όμως ότι η κλειστότητα δεν είναι συνεκτική.

**Πρόταση 2.2.1.** Έστω  $D$  ανοιχτό υποσύνολο του  $\mathbb{C}$  και  $z = z(t)$ ,  $t \in [a, \beta]$ , μια συνεχής καμπύλη που βρίσκεται μέσα στο  $D$ . Τότε υπάρχει ένας αριθμός  $d > 0$  και μια διαμέριση  $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = \beta$  τέτοια, ώστε  $B(z(t_i), d) \subset D$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, n$  και  $z(t_i) \in B(z(t_{i-1}), d)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$

### Παρατήρηση

Η πρόταση αυτή αναφέρει ότι η καμπύλη  $z = z(t)$ ,  $t \in [a, \beta]$ , μπορεί να καλυφθεί από ένα πεπερασμένο πλήθος δίσκων με κέντρα πάνω στη καμπύλη κατά τέτοιο τρόπο ώστε κάθε δίσκος να περιέχεται στο  $D$  και ο καθένας να περιέχει το κέντρο του προηγούμενου και επόμενου δίσκου.

## 2.3 Σύμμορφες απεικονίσεις

**Ορισμός:** Μια συνάρτηση  $f : A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  είναι ένας σύμμορφος μετασχηματισμός ή σύμμορφη απεικόνιση στο πεδίο  $D \subset A$ , αν η  $f$  είναι ολόμορφη στο  $D$  και  $f'(z) \neq 0$  για κάθε  $z \in D$ .

Επομένως, οι σύμμορφες απεικονίσεις έχουν μια συγκεκριμένη ιδιότητα: **διατηρούν το μέτρο και το προσανατολισμό της γωνίας τομής μεταξύ δύο καμπυλών**. Ισχύει επίσης η ακόλουθη πρόταση:

**Πρόταση 2.3.1.** *Αν η  $f$  είναι ολόμορφη και αμφιμονοσήμαντη σε ένα πεδίο  $D$ , τότε  $f'(z) \neq 0$  για κάθε  $z \in D$ , δηλαδή η  $f$  είναι σύμμορφη στο  $D$ .*

*Απόδειξη.* Έστω ότι  $f'(z_0) = 0$  για κάποιο  $z_0 \in D$ . Τότε η συνάρτηση  $g$  που ορίζεται από τη σχέση  $g(z) = f(z) - f(z_0)$  έχει το  $z_0$  ρίζα τάξεως  $n \geq 2$ . Αφού η  $f$  είναι ολόμορφη υπάρχει κύκλος  $C : |z - z_0| = r$  που βρίσκεται μέσα στο  $D$  πάνω στον οποίο η  $g$  δεν μηδενίζεται και στο εσωτερικό του οποίου ισχύει  $g'(z) = 0$  μόνο για  $z = z_0$ . Αν

$$0 < |a| < m = \min_C |g(z)|$$

τότε από το θεώρημα Rouché<sup>1</sup> η συνάρτηση  $g(z) - a$  έχει  $n$  ρίζες εντός του κύκλου  $C$ , οι οποίες είναι απλές αφού  $g'(z) = 0$  μόνο για  $z = z_0$ . Άρα  $f(z) = f(z_0) + a$  για δύο οι περισσότερα σημεία εντός του  $C$ , που είναι άτοπο αφού η  $f$  είναι αμφιμονοσήμαντη στο  $D$ .  $\square$

Στις εφαρμογές οι σύμμορφες απεικονίσεις χρησιμοποιούνται για τη μετατροπή ενός προβλήματος συνοριακών τιμών που περιέχει την εξίσωση Laplace σε ένα άλλο απλούστερο. Η εξίσωση Laplace παραμένει αναλλοίωτη μέσω μιας σύμμορφης απεικόνισης. Για να μελετήσουμε τις συνοριακές συνθήκες, θα πρέπει να γνωρίζουμε ότι το σύνορο απεικονίζεται στο σύνορο. Αυτό, εν γένει δεν ισχύει.

Ένα βασικό ερώτημα στη θεωρία των σύμμορφων απεικονίσεων είναι το ακόλουθο: αν  $D$  είναι ένα πεδίο του  $z$ - επιπέδου και  $G$  ένα πεδίο του  $w$ - επιπέδου, υπάρχει σύμμορφη απεικόνιση που απεικονίζει το  $D$  επί του  $G$ ; Αρκεί να εξεταστεί η ύπαρξη σύμμορφης απεικόνισης που απεικονίζει το  $D$  επί του μοναδιαίου δίσκου  $|\zeta| < 1$ , αφού αν η  $f$  απεικονίζει το  $D$  επί του δίσκου  $|\zeta| < 1$  και η  $g$  απεικονίζει το δίσκο  $|\zeta| < 1$  επί του  $G$ , τότε η σύνθεση  $g \circ f$  απεικονίζει το  $D$  επί του  $G$ .

<sup>1</sup>Βλέπε παράρτημα



## Κεφάλαιο 3

# Το θεώρημα απεικόνισης του Riemann

### 3.1 Φυσιολογικές οικογένειες

**Ορισμός:** Έστω  $\mathcal{F}$  οικογένεια συναρτήσεων (όχι απαραίτητα αναλυτικών) ορισμένη σε μια περιοχή  $\Omega$  και  $S$  υποσύνολο του  $\Omega$ . Υποθέτοντας ότι  $\forall \epsilon > 0 \exists \delta$  τέτοιο ώστε  $|f(z) - f(z')| < \epsilon$  όταν  $f(z) \in \mathcal{F}$  και  $|z - z'| < \delta$ ,  $z, z' \in S$ . Τότε η οικογένεια  $\mathcal{F}$  λέγεται **ισοσυνεχής** στο σύνολο  $S$ .

**Ορισμός:** Οικογένεια  $\mathcal{F}$  από αναλυτικές συναρτήσεις ορισμένη σε μια περιοχή  $\Omega$  ονομάζεται **κανονική** (*normal*) αν κάθε ακολουθία συναρτήσεων επιλεγμένη από την  $\mathcal{F}$  περιέχει μια υπακολουθία η οποία συγκλίνει τοπικά και ομοιόμορφα στο  $\Omega$ .

#### 3.1.1 Θεώρημα Ascoli-Arzelà

**Θεώρημα 3.1.1** (Θεώρημα Ascoli-Arzelà). Έστω  $F$  οικογένεια συναρτήσεων ορισμένη σε περιοχή  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  και κατά σημείο φραγμένη στο  $\Omega$  (δηλαδή  $\forall z \in \Omega \exists M_z > 0$ , τέτοιο ώστε  $|f(z)| \leq M_z \forall$  συνάρτηση  $f(z)$  στην οικογένεια  $F$ ) και ισοσυνεχής σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του  $\Omega$ . Τότε κάθε ακολουθία  $\{f_k(z)\}_{k=1}^{\infty}$  στην  $F$  περιέχει μια υπακολουθία που συγκλίνει τοπικά και ομοιόμορφα στο  $\Omega$ .

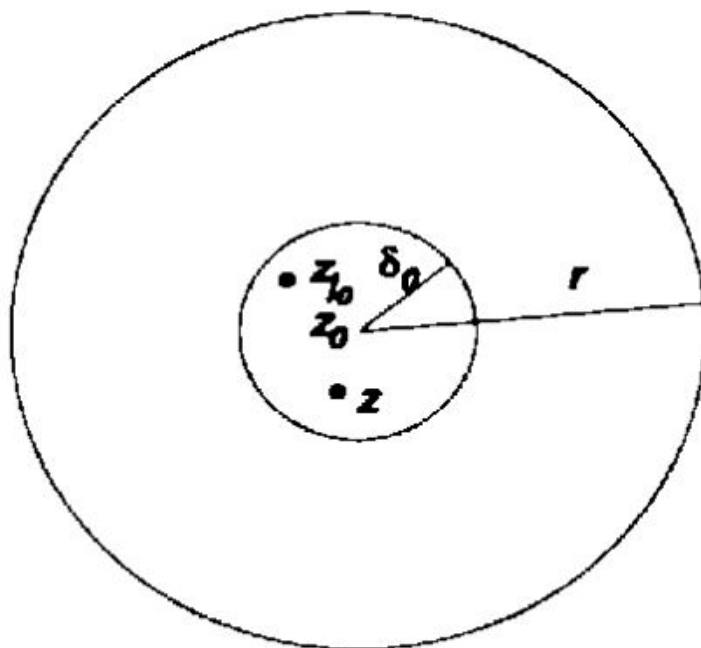
Απόδειξη. Έστω  $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$  ακολουθία σημείων που είναι πυκνή στο  $\Omega$ . Επειδή η ακολουθία  $\{f_k(z)\}_{k=1}^{\infty}$  μιγαδικών αριθμών είναι φραγμένη, περιέχει από το θεώρημα Bolzano-Weierstrass μια συγκλίνουσα υπακολουθία  $\{f_{k_1}(z_1)\}_{k=1}^{\infty}$ . Θεωρούμε επίσης την ακολουθία  $\{f_{k_1}(z_2)\}_{k=1}^{\infty}$ , η οποία είναι κι αυτή φραγμένη. Ως εκ τούτου, από το θεώρημα Bolzano-Weierstrass, περιέχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία την  $\{f_{k_2}(z_1)\}_{k=1}^{\infty}$ . Κατά τον ίδιο τρόπο, συνεχίζουμε την διαδικασία για κάθε θετικό ακέραιο  $m$ , δημιουργούμε μια υπακολουθία  $\{f_{km}(z)\}_{k=1}^{\infty}$  από  $\{f_k(z)\}_{k=1}^{\infty}$ , τέτοια ώστε:

- $\{f_{km}(z)\}_{k=1}^{\infty}$  να είναι υπακολουθία της  $\{f_{kn}(z)\}_{k=1}^{\infty}$  αν  $m > n$
- $\{f_{km}(z_j)\}_{k=1}^{\infty}$  συγκλίνει για κάθε  $j = 1, 2, \dots, m$ .

Θέτουμε  $g_k(z) = f_{kk}(z)$  ( $k \in \mathbb{N}$ ). Τότε εξαιρώντας πιθανόν τους πρώτους  $m - 1$  όρους, η  $\{g_k(z)\}_{k=1}^{\infty}$  είναι υπακολουθία της  $\{f_{km}(z)\}_{k=1}^{\infty}$ . Συνεπώς,  $\{g_k(z_m)\}_{k=1}^{\infty}$  συγκλίνει για κάθε  $m \in \mathbb{N}$ . Ισχυριζόμαστε ότι η ακολουθία  $\{g_k(z)\}_{k=1}^{\infty}$  ικανοποιεί την απαιτούμενη συνθήκη, δηλαδή, ότι συγκλίνει τοπικά και ομοιόμορφα στο  $\Omega$ . Για να αποδείξουμε αυτό τον ισχυρισμό είναι επαρκές (από γνωστό λήμμα), να δείξουμε ότι κάθε σημείο του  $\Omega$  έχει γειτονιά στην οποία η ακολουθία συγκλίνει ομοιόμορφα. Έστω  $z_0$  τυχαίο σημείο του  $\Omega$  και επιλέγουμε  $r > 0$  τέτοιο ώστε ο κλειστός δίσκος  $\bar{D}(z_0, r)$  είναι ολόκληρος μέσα στο  $\Omega$ . Επειδή ο κλειστός δίσκος είναι συμπαγής και η ακολουθία  $\{f_k(z)\}_{k=1}^{\infty}$ , συνεπώς και η  $\{g_k(z)\}_{k=1}^{\infty}$ , είναι ισοσυνεχής στο δίσκο  $\bar{D}(z_0, r)$ , τότε για κάθε δοσμένο  $\varepsilon > 0$  υπάρχει  $\delta > 0$  τέτοιο ώστε  $|g_k(z) - g_k(z')| < \frac{\varepsilon}{3}$  για κάθε  $k \in \mathbb{N}$  και  $|z - z'| < \delta$ ,  $z, z' \in \bar{D}(z_0, r)$ . Επειδή η ακολουθία  $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$  είναι πυκνή στο  $\Omega$ , υπάρχει ένα σημείο  $z_{j_0}$  στην ακολουθία τέτοιο ώστε  $z_{j_0} \in D(z_0, \delta_0)$ , όπου  $\delta_0 = \min\{r, \frac{\delta}{2}\}$  (ΣΧ.1).

Αφού η ακολουθία  $\{g_k(z_j)\}_{k=1}^{\infty}$  συγκλίνει για κάθε  $j \in \mathbb{N}$ , τότε συγκλίνει και για  $j = j_0$ . Ως εκ τούτου, υπάρχει  $N = N(j_0)$ , τέτοιο ώστε  $|g_n(z_{j_0}) - g_n(z_{j_0})| < \frac{\varepsilon}{3}$  για δεδομένα  $m, n \geq N$ . Τότε για κάθε  $z \in D(z_0, \delta_0)$ , έχουμε  $|z - z_{j_0}| < 2\delta_0 \leq \delta$ . Συνεπώς, με βάση την ισοσυνέχεια,  $|g_k(z) - g_k(z_{j_0})| < \frac{\varepsilon}{3}$  για κάθε  $k \in \mathbb{N}$ . Συνακόλουθα, για όλα τα σημεία  $z$  στον δίσκο  $D(z_0, \delta_0)$ ,

$$\begin{aligned} |g_m(z) - g_n(z)| &\leq |g_m(z) - g_m(z_{j_0})| + |g_m(z_{j_0}) - g_n(z_{j_0})| + |g_n(z_{j_0}) - g_n(z)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \quad \text{αν } m, n \geq N \end{aligned}$$



Σχήμα 1

που συμπληρώνει την απόδειξη. Μέχρι τώρα δεν έχουμε υποθέσει ότι οι συναρτήσεις είναι αναλυτικές. Αν  $F$  είναι οικογένεια αναλυτικών συναρτήσεων, τότε η υπόθεση ότι είναι ισοσυνεχής, σε κάθε συμπαγές υποσύνολο μπορεί να αντικατασταθεί, δεδομένου ότι η έννοια του φράγματος κατά σημείο μπορεί να αντικατασταθεί από την έννοια της τοπικού και ομοιόμορφου φράγματος στο  $\Omega$ . Υπάρχουν θετικοί αριθμοί  $\delta(z_0)$  και  $(z_0)$  τέτοιοι ώστε  $\|f\|_{\bar{D}(z_0, \delta(z_0))} \leq M(z_0) f(z) \in \mathcal{F}$ .  $\square$

### 3.1.2 Θεώρημα Montel

**Θεώρημα 3.1.2** (Θεώρημα Montel). Υποθέτουμε ότι η  $\mathcal{F} \in H(\Omega)$  είναι τοπικά και ομοιόμορφα φραγμένη σε περιοχή  $\Omega$ . Τότε κάθε ακολουθία  $\{f_k(z)\}_{k=1}^{\infty}$  στην  $\mathcal{F}$  περιέχει μια υπακολουθία που συγκλίνει τοπικά και ομοιόμορφα στο  $\Omega$ .

*Απόδειξη.* Από το θεώρημα Ascoli-Arzelà είναι επαρκές να αποδείξουμε ότι η αναλυτικότητα συν την έννοια του τοπικού και ομοιόμορφου φράγματος υποδηλώνουν «τοπική ισοσυνέχεια». Αυτό σημαίνει ότι κάθε σημείο του  $\Omega$  έχει γειτονιά στην οποία η ακολουθία  $\{f_k(z)\}_{k=1}^{\infty}$  είναι ισοσυνεχής. Έστω  $z_0$  τυχαίο σημείο του  $\Omega$  και  $0 < \delta < \text{dist}(z_0, \partial\Omega)$ . Από τον

Ολοκληρωτικό Τύπο του Cauchy έχουμε:

$$f'_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0, \delta)} \frac{f_k(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta \quad k \in \mathbb{N}, \quad z \in D\left(z_0, \frac{\delta}{2}\right)$$

. Αντικαθιστώντας το  $\delta$  από μια μικρότερη θετική τιμή, αν χρειάζεται, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η ακολουθία  $\{f_k(z)\}_{k=1}^{\infty}$  είναι ομοιόμορφα φραγμένη από κάποια σταθερά  $M$  στον δίσκο  $\bar{D}(z_0, \delta)$ . Τότε

$$\|f'_k\|_{D(z_0, \frac{\delta}{2})} \leq \frac{M}{2\pi \left(\frac{\delta}{2}\right)^2} \cdot 2\pi\delta = \frac{4M}{\delta} \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Αυτό σημαίνει ότι η  $\{f'_k(z)\}_{k=1}^{\infty}$  είναι επίσης τοπικά και ομοιόμορφα φραγμένη και ως εκ τούτου είναι ομοιόμορφα φραγμένη σε κάθε συμπαγές υποσύνολο. Συνεπώς,

$$|f_k(z) - f_k(z')| = \left| \int_{z'}^z f'_k(\zeta) d\zeta \right| \leq \frac{4M}{\delta} |z - z'| \quad (k \in \mathbb{N}),$$

για κάθε  $z$  και  $z'$  που βρίσκονται μέσα στο δίσκο  $D(z_0, \frac{\delta}{2})$ , που είναι αυτό που θέλουμε να δείξουμε. □

### Παρατήρηση

Το θεώρημα Montel επιβεβαιώνει ότι μια τοπικά και ομοιόμορφα φραγμένη οικογένεια αναλυτικών συναρτήσεων αποτελεί μια κανονική οικογένεια.

### 3.1.3 Θεώρημα Vitali

**Θεώρημα 3.1.3** (Θεώρημα Vitali). *Εστω  $\{f_k(z)\}_{k=1}^{\infty}$  μια ακολουθία συναρτήσεων στο  $H(\Omega)$  που είναι τοπικά και ομοιόμορφα φραγμένη στο  $\Omega$  (ως εκ τούτου είναι μια κανονική οικογένεια αναλυτικών συναρτήσεων) που συγκλίνει σε ένα σύνολο από διακριτά σημεία  $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ , έχοντας σημείο συσώρευσης στο  $\Omega$ . Τότε  $\{f_k(z)\}_{k=1}^{\infty}$  συγκλίνει τοπικά και ομοιόμορφα στο  $\Omega$ .*

*Απόδειξη.* Αρχικά, θα δείξουμε ότι η ακολουθία  $\{f_k(z)\}_{k=1}^{\infty}$  συγκλίνει κατά σημείο παντού στο  $\Omega$ . Υποθέτουμε ότι η ακολουθία δεν συγκλίνει σε κάποιο  $z_0 \in \Omega$ , τότε η ακολουθία

$\{f_k(z_0)\}_{k=1}^{\infty}$ , όντας φραγμένη, πρέπει να έχει τουλάχιστον δύο υπακολουθίες  $\{g_k(z_0)\}_{k=1}^{\infty}$  και  $\{h_k(z_0)\}_{k=1}^{\infty}$  που συγκλίνουν σε διαφορετικές τιμές  $\alpha$  και  $\beta$ , αντίστοιχα από το θεώρημα Bolzano-Weierstrass. Από το θεώρημα Montel, η ακολουθία  $\{g_k(z)\}_{k=1}^{\infty}$  περιέχει μια υπακολουθία που συγκλίνει τοπικά και ομοιόμορφα σε μια αναλυτική συνάρτηση  $g(z) \in H(\Omega)$ . Παρομοίως, η ακολουθία  $\{h_k(z)\}_{k=1}^{\infty}$  περιέχει μια υπακολουθία που συγκλίνει τοπικά και ομοιόμορφα σε μια αναλυτική συνάρτηση  $h(z) \in H(\Omega)$ . Επειδή η ακολουθία  $\{f_k(z)\}_{k=1}^{\infty}$  συγκλίνει στο  $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ , οι υπακολουθίες της  $\{g_k(z)\}_{k=1}^{\infty}$  και  $\{h_k(z)\}_{k=1}^{\infty}$  πρέπει επίσης να συγκλίνουν στα ίδια όρια σε αυτά τα σημεία. Ως εκ τούτου,  $g(z_k) = h(z_k)$  ( $k \in \mathbb{N}$ ), Όπως η ακολουθία  $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$  έχει ένα σημείο συσσώρευσης στο  $\Omega$ , οι δύο αναλυτικές συναρτήσεις  $g(z)$  και  $h(z)$  πρέπει να είναι ίδιες. Αλλά τότε  $a = g(z_0) = h(z_0) = b$ . Αυτή η αντίφαση αποδεικνύει την κατά σημείο σύγκλιση της  $\{f_k(z)\}_{k=1}^{\infty}$  παντού στο  $\Omega$ . Έστω το όριο της να είναι η συνάρτηση  $f(z)$ . Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι η σύγκλιση που αποδείχτηκε είναι τοπικά ομοιόμορφη στο  $\Omega$ . Υποθέτουμε ότι η ακολουθία αποτυγχάνει να συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάποιο συμπαγές υποσύνολο του  $\Omega$ . Τότε υπάρχει ένας θετικός αριθμός  $\varepsilon$  και μια αύξουσα ακολουθία  $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$  θετικών ακεραιών τέτοια ώστε  $\|f - f_{n_k}\|_K \geq \varepsilon$  ( $k \in \mathbb{N}$ ). Όμως αυτό το αποτέλεσμα έρχεται σε αντίθεση με το θεώρημα του Montel το οποίο επιβεβαιώνει ότι η  $\{f_{n_k}(z)\}_{k=1}^{\infty}$  περιέχει μια υπακολουθία  $\{f_{n_{k_j}}(z)\}_{k=1}^{\infty}$  που συγκλίνει τοπικά και ομοιόμορφα στο  $\Omega$ , και συγκεκριμένα ομοιόμορφα στο  $K$ , δηλαδή,  $\|f - f_{n_{k_j}}\|_K < \varepsilon$  για κάθε επαρκώς μεγάλο  $j$  □

## 3.2 Το θεώρημα απεικόνισης του Riemann

**Θεώρημα 3.2.1** (Θεώρημα Απεικόνισης του Riemann). *Κάθε απλά συνεκτική περιοχή  $\Omega$  στην σφαίρα του Riemann, που το σύνορο της αποτελείται από τουλάχιστον 2 σημεία, είναι σύμμορφα ισοδύναμη στο μοναδιαίο δίσκο. Πιο συγκεκριμένα, έστω  $z_0$  ένα αυθαίρετο σημείο στην περιοχή  $\Omega$ . Τότε υπάρχει μοναδική συνάρτηση  $f(z) \in H(\Omega)$  η οποία είναι αμφινοσήμαντη απεικόνιση του  $\Omega$  πάνω στο μοναδιαίο δίσκο, ικανοποιώντας τις ακόλουθες συνθήκες:  $f(z_0) = 0$  και  $f'(z_0) > 0$*

**Ορισμός:** (Σύμμορφη ισοδυναμία) Ονομάζουμε δύο περιοχές  $\Omega_1$  και  $\Omega_2$  σύμμορφα ισοδύναμες εάν υπάρχει μια  $\varphi \in H(\Omega_1)$  τέτοια ώστε να είναι ένα προς ένα στο  $\Omega_1$  και  $\Phi(\Omega_2) = \Omega_1$ ,

εάν υπάρχει σύμμορφη ένα προς ένα απεικόνιση από το  $\Omega_1$  στο  $\Omega_2$ . Κάτω από αυτές τις συνθήκες, η αντίστροφη της  $\varphi$  είναι ολόμορφη στο  $\Omega_2$  και ως εκ τούτου είναι σύμμορφη απεικόνιση από το  $\Omega_2$  στο  $\Omega_1$ .

### 3.2.1 Κλασική απόδειξη

**Πρόταση 3.2.2.** Αν  $\Omega$  ανοικτό συνεκτικό υποσύνολο του  $\mathbb{C}$  και  $\{f_n\}$  ακολουθία συναρτήσεων από "1-1" ολόμορφες συναρτήσεις στο  $\Omega$  οι οποίες συγκλίνουν ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του  $\Omega$  σε μια ολόμορφη συνάρτηση  $f$ , τότε η  $f$  είναι είτε "1-1" είτε σταθερή.

**Θεώρημα 3.2.3** (Θεώρημα απεικόνισης του Riemann). Για κάθε απλά συνεκτικό πεδίο  $\Omega \subset \mathbb{C}$  υπάρχει μοναδική σύμμορφη απεικόνιση  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$  τέτοια ώστε για  $z_0 \in \Omega$

$$F(z_0) = 0 \text{ και } F'(z_0) > 0 \quad (3.1)$$

**Πόρισμα 3.2.4.** Κάθε δύο μη κενά απλά συνεκτικά γνήσια υποσύνολα του  $\mathbb{C}$  είναι σύμμορφα ισοδύναμα.

Γενική ιδέα της απόδειξης

Αρχικά θεωρούμε όλες τις "1-1" ολόμορφες απεικονίσεις  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$  με  $f(z_0) = 0$ . Από αυτές επιλέγουμε μία  $f$  τέτοια ώστε η εικόνα της να καλύπτει όλο το  $\mathbb{D}$ . Το επιτυγχάνουμε δημιουργώντας το  $f'(z_0)$  όσον το δυνατόν μεγαλύτερο. Μετά πρέπει να γράψουμε την  $f$  σαν όριο δοσμένης ακολουθίας συναρτήσεων, οπότε θα χρησιμοποιήσουμε το Θ. Montel.

#### Απόδειξη Θεωρήματος

Βήμα 1<sup>ο</sup>

Αφού  $\Omega$  απλά συνεκτικό τότε υπάρχει  $\phi : \Omega \rightarrow \phi(\Omega)$  σύμμορφη με  $\phi(\Omega)$  φραγμένο. Ισχυριζόμαστε ότι  $\Omega$  είναι σύμμορφα ισοδύναμο με ανοικτό υποσύνολο του μοναδιαίου δίσκου που περιέχει το 0. Επιλέγω  $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ , οπότε  $z - \alpha \neq 0$ , άρα ορίζουμε την ολόμορφη συνάρτηση

$$f(z) = \log(z - \alpha) \Rightarrow e^{f(z)} = z - \alpha \quad (3.2)$$

η οποία είναι "1-1". Ισχυριζόμαστε ότι για  $\omega \in \Omega : f(z) \neq f(\omega) + 2\pi i \quad \forall z \in \Omega$ , οπότε υπάρχει δίσκος με κέντρο το  $f(\omega) + 2\pi i$  που δεν περιέχει σημεία της εικόνας του  $f(\Omega)$ . Διαφορετικά,  $\exists \{z_n\} \in \Omega$  τέτοια ώστε  $f(z_n) \rightarrow f(\omega) + 2\pi i$ . Οπότε επειδή η εκθετική συνάρτηση είναι συνεχής,  $e^{f(z_n)} \rightarrow e^{f(\omega)+2\pi i} = e^{f(\omega)}$  και επομένως  $z_n \rightarrow \omega$ . Αυτό όμως συνεπάγεται ότι  $f(z_n) \rightarrow f(\omega)$ , το οποίο είναι άτοπο.

Θεωρούμε την απεικόνιση

$$F(z) = \frac{1}{f(z) - (f(\omega) + 2\pi i)} \quad (3.3)$$

η οποία είναι "1-1" αφού είναι και η  $f$ , αλλά και σύμμορφη διότι  $F : \Omega \rightarrow F(\Omega)$ . Θα αποδείξουμε παρακάτω ότι το  $F(\Omega)$  είναι φραγμένο. Μπορώ να υποθέσω ότι το  $0 \in \Omega$  και το  $\Omega \subset \mathbb{D}$ . Από το γεγονός ότι το  $\Omega$  είναι φραγμένο έχουμε ότι

$$\exists \omega_0 \in \Omega \text{ και } r > 0 \text{ τέτοιο ώστε } \Omega \subseteq D(\omega_0, r)$$

Θεωρούμε μετασχηματισμό Möbius  $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  με

$$\phi(z) = \frac{z - \omega_0}{r} \text{ οπότε } \phi(\omega_0) = 0$$

Για  $z \in \Omega$   $|\phi(z)| < \frac{r}{r} = 1$ , άρα  $\phi(\Omega) \subseteq D$  και  $0 \in \phi(\Omega)$ .

Βήμα 2<sup>ο</sup>

Θεωρούμε οικογένεια  $\mathcal{F} : \{f : \Omega \rightarrow D, \text{ ολόμορφη, "1-1", } f(0) = 0\}$ . Θα βρούμε μια  $\phi \in \mathcal{F}$  που να είναι και επί. Αρχικά παρατηρούμε ότι  $\mathcal{F} \neq \emptyset$  και ότι  $f(z) = z \in \mathcal{F}$ . Επίσης η  $\mathcal{F}$  είναι ομοιόμορφα φραγμένη αφού όλες οι συναρτήσεις της οικογένειας απεικονίζονται στο μοναδιαίο δίσκο. Έχω ότι  $f \in \mathcal{F}$  με  $|f(z)| < 1$  γιατί  $z \in \Omega$ . Επίσης από τον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy για παραγώγους έχουμε ότι

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(z - \zeta)^2} d\zeta \Rightarrow f'(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta^2} d\zeta$$

και  $D(0, r) \subseteq \Omega$ . Οπότε  $|f'(0)| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{1}{r^2} 2\pi r = \frac{1}{r}$  συνεπώς  $|f'(0)|$  φραγμένο για  $f \in \mathcal{F}$ . Πρέπει να

βρούμε  $f \in \mathcal{F}$  που μεγιστοποιεί το  $|f'(0)|$ . Θέτω  $s = \sup_{f \in \mathcal{F}} |f'(0)|$ . Πρέπει να δείξω ότι υπάρχει  $\phi \in \mathcal{F}$  με  $|\phi'(0)| = s$  και  $\phi$  να είναι επί. Επιλέγω ακολουθία συναρτήσεων με  $\{f_n\} \in \mathcal{F}$  τέτοια ώστε  $|f'_n(0)| \rightarrow s$ . Από το θεώρημα Montel, υπάρχει  $f_{k_n} \rightarrow \phi$  ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του  $\Omega$  και  $\phi$  ολόμορφη. Επίσης  $\phi(0) = 0$  γιατί  $f_{k_n}(0) = 0$  και από την Πρόταση (3.2.4) η  $\phi$  είναι "1-1" αφού δεν είναι σταθερή, διότι  $f'_{k_n}(0) \rightarrow \phi'(0) \Rightarrow |\phi'(0)| = s \neq 0$ . Αφού  $\Omega$  ανοικτό,

$$f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \text{ με } f_n \rightarrow f \text{ ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του } \Omega$$

και  $f'_n \rightarrow f'$  ομοιόμορφα στα συμπαγή, άρα

$$\phi \in \mathcal{F} \text{ με } |\phi'(0)| = s$$

Θα αποδείξουμε τώρα ότι η  $\phi$  είναι επί δια της ατόπου απαγωγής. Έστω ότι η  $\phi$  δεν είναι επί, τότε θα βρούμε μια  $\Phi \in \mathcal{F}$  με  $|\Phi'(0)| > |\phi'(0)|$  κάτι που είναι άτοπο διότι  $|\phi'(0)|$  είναι το supremum. Έστω  $\phi(z) \neq \alpha \ \forall z \in \Omega$  και κάποιο  $\alpha \in D$ . Παίρνω

$$\psi_\alpha(z) = \frac{\alpha - z}{1 - \bar{\alpha}z}, \quad \psi_\alpha : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D} \text{ "1-1" και επί}$$

και  $\psi_\alpha \circ \phi : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$  "1-1" και  $U = (\psi_\alpha \circ \phi)(\Omega)$  απλά συνεκτικό. Το  $0 \notin U$  και  $U \subseteq \mathbb{D}$ . Συνεπώς

$$(\psi_\alpha \circ \phi)(z) = \frac{\alpha - \phi(z)}{1 - \bar{\alpha}\phi(z)} \neq 0$$

Στο  $U$  μπορούμε να ορίσουμε τη συνάρτηση

$$g(\omega) = e^{\frac{1}{2} \log(\omega)} \Rightarrow g^2(\omega) = \omega^2$$

Παίρνω

$$\Phi = \psi_{g(\alpha)} \circ g \circ \psi_\alpha \circ \phi \tag{3.4}$$

Όμως  $\Phi \in \mathcal{F}$  διότι

---

<sup>2</sup> Το  $\Omega$  είναι απλά συνεκτικό και  $0 \notin \Omega$ . Στο  $\Omega$  ορίζεται ολόμορφος κλάδος του λογαρίθμου όπως και της ν-οστής ρίζας



1.  $\Phi(0) = (\psi_{g(\alpha)} \circ g \circ \psi_\alpha \circ \phi)(0) = \psi_{g(\alpha)}(g(\alpha)) = 0$
2.  $\Phi(\Omega) \subseteq \mathbb{D}$  γιατί όλες είναι στο  $\mathbb{D}$
3.  $\Phi$  "1-1" διότι οι συναρτήσεις  $g, f, \psi_{g(\alpha)}, \psi_\alpha$  είναι "1-1"

Αν  $g$  είναι "1-1" τότε

$$g(\omega_1) = g(\omega_2) \Rightarrow g^2(\omega_1) = g^2(\omega_2) \Rightarrow \omega_1 = \omega_2$$

Ορίζουμε  $h(\omega) = \omega^2$  συνεπώς  $g^{-1} = h$ . Από την Σχ. 3.4 έχουμε

$$\phi = \psi_\alpha^{-1} \circ h \circ \psi_{g(\alpha)}^{-1} \circ \Phi = H \circ \Phi, \text{ όπου } H = \psi_\alpha^{-1} \circ h \circ \psi_{g(\alpha)}^{-1}$$

Παρατηρούμε ότι  $H : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  και  $H(0) = 0$  διότι  $H(0) = \psi_\alpha^{-1} \circ (h \circ (\psi_{g(\alpha)}^{-1}(0))) = \psi_\alpha \circ h \circ \psi_{g(\alpha)}(0) = \psi_\alpha \circ h(g(\alpha)) = \psi_\alpha(\alpha) = 0$ <sup>3</sup>. Η συνάρτηση  $H$  δεν είναι "1-1" γιατί η  $\Phi$  είναι, ενώ η  $h$  όχι. Από το λήμμα Schwarz, επειδή η  $H$  δεν είναι "1-1" συμπεραίνουμε ότι  $|H'(0)| < 1$ <sup>4</sup>

$$\phi'(0) = H'(\Phi(0))\Phi'(0) \Rightarrow |\phi'(0)| = |H'(\Phi(0))||\Phi'(0)| \Rightarrow |\Phi'(0)| > |\phi'(0)|$$

*Απόδειξη μοναδικότητας*

Έστω ότι υπάρχουν απεικονίσεις  $\phi_1$  και  $\phi_2$  με τις παραπάνω ιδιότητες, τότε  $\Phi = \phi_1 \circ \phi_2^{-1}$  είναι ένας αυτομορφισμός του μοναδιαίου δίσκου, με  $\Phi(0) = 0$  και  $\Phi'(0) > 0$ . Συνεπώς  $\Phi(z) = e^{i\theta} z$  είναι ταυτοτική απεικόνιση και άρα  $\phi_1 \equiv \phi_2$ . □

## Παρατήρηση

Αν  $\Omega = \mathbb{C}$  το θεώρημα δεν ισχύει διότι από το Θ.Liouville μια φραγμένη ολόμορφη συνάρτηση στο  $\mathbb{C}$  είναι σταθερή.

---

<sup>3</sup>  $\psi_\alpha^{-1} = \psi_\alpha$

<sup>4</sup>Αν  $|H'(0)| = 1$  τότε από γνωστό θεώρημα η  $H$  θα ήταν σταθερή γεγονός που δεν ισχύει

### 3.2.2 Γενικευμένη απόδειξη

**Ορισμός:** (Μονοδύναμη απεικόνιση - univalent) Μια ολόμορφη απεικόνιση ορισμένη σε ένα ανοικτό υποσύνολο του  $\mathbb{C}$  ονομάζεται μονοδύναμη αν είναι '1-1'.

Ιδιότητες : Αν απεικόνιση  $f$  (όχι κατ' ανάγκη αναλυτική) είναι μονοδύναμη σε ένα σύνολο ή μια περιοχή  $D$  τότε η  $f'$  δεν έχει ρίζες στο  $D$ . Αν  $f'(z_0) = 0$  τότε η  $f$  δεν είναι μονοδύναμη (univalent) σε καμία περιοχή γύρω από το  $z_0$ .

Αν  $G$  και  $\Omega$  δύο ανοικτά συνεκτικά σύνολα του  $\mathbb{C}$  και η  $f : G \rightarrow \Omega$  είναι μονοδύναμη απεικόνιση τέτοια ώστε  $f(G) = \Omega$  (δηλαδή  $f$  "επί") τότε  $f'(z) \neq 0$ , η  $f$  είναι αντιστρέψιμη και η αντίστροφή της  $f^{-1}$  είναι επίσης ολόμορφη, οπότε προκύπτει

$$(f^{-1}(f(z)))' = \frac{1}{f'(z)} \quad \forall z \in G$$

#### Παραδείγματα

- Κάθε απεικόνιση  $\phi_\alpha$  από τον μοναδιαίο δίσκο στον εαυτό της είναι μονοδύναμη.
- $\phi_\alpha = \frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}$ , όπου  $|\alpha| < 1$  είναι μονοδύναμη.
- Η μιγαδική εκθετική συνάρτηση  $f(z) = e^z$  δεν είναι μονοδύναμη.
- Η  $f(z) = z^3$  δεν είναι μονοδύναμη.

#### ΘΕΩΡΗΜΑ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗΣ ΤΟΥ RIEMANN

Κάθε απλό συνεκτικό πεδίο  $G$  στο  $\mathbb{C}^*$  του οποίου το σύνολο περιέχει παραπάνω από ένα σημείο μπορεί να απεικονιστεί σύμμορφα στο μοναδιαίο δίσκο.

*Απόδειξη.* Αρχικά θα δείξουμε ότι το σύνολο από μονοδύναμες συναρτήσεις στο  $G$  περιέχει φραγμένες συναρτήσεις (είναι γνωστό ότι κάθε μετασχηματισμός Möbius είναι ορισμένος στο  $\mathbb{C}^*$  και είναι μονοδύναμος οπότε το σύνολο είναι μη κενό). Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις για το  $G$  :

1.  $G$  φραγμένο, οπότε η  $f(z) = z$  φραγμένη

2.  $G$  μη φραγμένο αλλά έχει εξωτερικό σημείο<sup>5</sup>  $z_0$  τότε το  $\text{Ext}(G)$ <sup>6</sup> περιέχει κάποιον δίσκο  $|z - z_0| < \rho$ . Ισχύει ότι  $\mathbb{C} \setminus G = \text{Ext}(G) \neq \emptyset$ . Άρα  $D(z_0, \rho) \subseteq \mathbb{C} \setminus G$  και ορίζουμε την συνάρτηση  $f(z) = \frac{1}{z - z_0}$  η οποία είναι univalent και φραγμένη ( $|f(z)| \leq \frac{1}{\rho}$ )
3.  $G$  μη φραγμένο αλλά δεν έχει εξωτερικό σημείο. Από υπόθεση το  $G$  έχει τουλάχιστον δύο διαφορετικά συνοριακά σημεία  $\alpha$  και  $\beta$  τα οποία ανήκουν στο συμπαγές και συνεκτικό πεδίο  $A$  όπου  $A \subseteq \mathbb{C}^*$  με  $A \cap G = \emptyset$  οπότε υπάρχει καμπύλη  $\gamma$  που ενώνει τα  $\alpha$  και  $\beta$ . Ορίζουμε τώρα την συνάρτηση

$$\phi(z) = \sqrt{\frac{z - \alpha}{z - \beta}}$$

η οποία είναι διπλότιμη στα  $\alpha$  και  $\beta$ . Αφού  $G = \mathbb{C}^* \setminus A$  η  $\phi(z)$  έχει δύο μονότιμους κλάδους  $\phi_1(z)$  και  $\phi_2(z)$  στο  $G$  των οποίων οι τιμές διαφέρουν μόνο κατά πρόσημο. Ισχύει ότι οι  $\phi_1(z)$  και  $\phi_2(z)$  είναι μονοδύναμες αφού

$$\sqrt{\frac{z_1 - \alpha}{z_1 - \beta}} = \sqrt{\frac{z_2 - \alpha}{z_2 - \beta}} \Rightarrow \frac{z_1 - \alpha}{z_1 - \beta} = \frac{z_2 - \alpha}{z_2 - \beta} \Rightarrow z_1 = z_2$$

Συνεπώς  $\phi_1, \phi_2 : G \rightarrow \mathbb{C}$  με  $\phi_1(G) = G_1$  και  $\phi_2(G) = G_2$  με  $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ . Γι αυτό κάθε  $w_0 \in G_2$  είναι εξωτερικό του  $G_1$  οπότε σύμφωνα με τη δεύτερη περίπτωση ορίζουμε συνάρτηση

$$f(z) = \frac{1}{w - w_0} = \frac{1}{\phi_1(z) - w_0}$$

η οποία είναι μονοδύναμη και φραγμένη στο  $G$ .

Οπότε σε κάθε περίπτωση υπάρχει μονοδύναμη και φραγμένη συνάρτηση στο  $G$ . Έστω  $f(z)$  και  $z_0$  πεπερασμένο σημείο του  $G$  με  $f'(z_0) \neq 0$ . Ορίζουμε τώρα την συνάρτηση

$$F(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{f'(z_0)} \quad F : G \rightarrow \mathbb{C} \quad (3.5)$$

η οποία είναι φραγμένη και μονοδύναμη στο  $G$ , με  $F(z_0) = 0$  και  $F'(z_0) = 1$ . Έστω το σύνολο  $E_{z_0}$  των συναρτήσεων ορισμένες στο  $G$  με τις ίδιες ιδιότητες με την  $F(z)$ . Τότε κάθε

---

<sup>5</sup>Ως εξωτερικό σημείο ενός συνόλου  $A$  που ανήκει σε έναν τοπολογικό χώρο  $(X, \tau)$  ορίζουμε ένα σημείο  $x \in X$  αν υπάρχει ανοικτό σύνολο  $U$  τέτοιο ώστε  $x \in U \cap A^c$

<sup>6</sup> $\text{Ext}(A)$  είναι το σύνολο των εξωτερικών σημείων του  $A$

$F(z) \in E_{z_0}$  έχει πεπερασμένο ελάχιστο άνω φράγμα

$$M(F) = \sup_{z \in G} |F(z)| > 0 \quad (3.6)$$

Θέτουμε τώρα

$$R_{z_0} = \inf_{F(z) \in E_{z_0}} M(F) \quad (3.7)$$

με στόχο να βρούμε μια συνάρτηση  $\psi(z) : G \rightarrow D(0, R_{z_0})$ , που είναι 1-1, επί και ολόμορφη. Από τον ορισμό του infimum υπάρχει ακολουθία συναρτήσεων  $F_n(z)$  στο  $E_{z_0}$  τέτοια ώστε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M(F_n) = \inf_{F \in E_{z_0}} M(F) = R_{z_0} \quad (3.8)$$

Η ακολουθία αυτή είναι ομοιόμορφα φραγμένη στο  $G$ , αφού οι  $F_n$  φραγμένες συναρτήσεις.

$$M(F_n) = \sup_{z \in G} |F_n(z)| \leq M$$

Από το θεώρημα Montel η ακολουθία  $F_n(z)$  είναι συμπαγής στο  $G$  και ως εκ τούτου περιέχει υπακολουθία  $F_{k_n}(z)$  η οποία συγκλίνει ομοιόμορφα στο  $G$  σε μία αναλυτική συνάρτηση  $\psi(z)$ . Για αυτήν ισχύουν ότι:

- $\psi : G \rightarrow \mathbb{C}$  ολόμορφη
- $\psi(z_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_{k_n}(z_0) = 0$
- $\psi'(z_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} F'_{k_n}(z_0) = 1$
- $\psi$  δεν είναι σταθερή (επειδή  $\psi(z)$  μονοδύναμη)
- $\psi$  1-1 (διότι  $F_{k_n}(z)$  1-1)

άρα

$$\psi(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_{k_n}(z) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} M(F_{k_n}) \quad \text{όπου } M(F_{k_n}) \rightarrow R_{z_0} \quad (3.9)$$

Για  $\epsilon > 0$  τυχαίο ισχύει

$$|\psi(z)| < |F_{k_n}(z)| + \frac{\epsilon}{2} < R_{z_0} + \epsilon \quad (3.10)$$

άρα

$$|\psi(z)| \leq R_{z_0} \quad (z \in G) \quad (3.11)$$

Επίσης  $\psi(z) \in E_{z_0}$  άρα

$$\sup_{z \in G} |\psi(z)| \geq R_{z_0} \quad (3.12)$$

συνεπώς

$$\sup_{z \in G} |\psi(z)| = R_{z_0} \quad (3.13)$$

Μένει να δείξουμε ότι η  $\psi(z)$  είναι επί.

Έστω  $K_0 = D(0, R_{z_0})$ . Θέλουμε να δείξουμε ότι για  $w \in K_0 \exists z \in G : \psi(z) = w$ . Υποθέτουμε ότι υπάρχει  $w_0$  με  $0 < |w_0| < R_{z_0}$  τέτοιο ώστε  $\psi(z) \neq w_0$  για  $z \in G$  και ορίζουμε τις ακόλουθες συναρτήσεις

$$w = \psi(z), \quad w_1 = R_{z_0}^2 \frac{w - w_0}{R_{z_0}^2 - \bar{w}_0 w} = \psi_1(z), \quad w_2 = \sqrt{R_{z_0} w_1} = \psi_2,$$

$$w_3 = R_{z_0}^2 \frac{w_2 - \psi_2(z_0)}{R_{z_0}^2 - \psi_2(z_0) w_2} = \psi_3(z), \quad w_4 = \frac{w_3}{\psi_3'(z)} = \psi_4$$

Όλες οι  $w_i$  είναι μονοδύναμες στο  $\psi_{i-1}(G)$ . Η  $w_1(w)$  μετασχηματίζει τον δίσκο  $K_0$  στον εαυτό του και το σημείο  $w_0$  στο  $w_1 = 0$  και το πεδίο  $\psi_G$  στο πεδίο  $\psi_1(G)$  που περιέχεται στο  $K_0$  με το  $w_1$  ως συνοριακό σημείο. Η  $w_2(w_1)$  έχει δύο μονότιμους αναλυτικούς κλάδους στο πεδίο  $\psi_1(G)$ . Διαλέγοντας έναν από αυτούς παρατηρούμε ότι παίρνει όλες τις τιμές του στον δίσκο  $K_0$  και το σημείο  $w_1 = 0$  στο  $w_2 = 0$ , συνεπώς το  $\psi_2(G) \subset K_0$  και  $w_2 = 0$  συνοριακό σημείο της  $\psi_2(G)$ . Η  $w_3(w_2)$  μετασχηματίζει το  $K_0$  στον εαυτό του και το  $\psi_2(z_0)$  στο 0. Επομένως η μονοδύναμη συνάρτηση  $\psi_3(z)$  μηδενίζεται στο  $z_0$  και απεικονίζει το  $G$  στο πεδίο  $\psi_3(G) \subset K_0$ . Η παράγωγός της είναι

$$\psi_3'(z_0) = \frac{R_{z_0} + |w_0|}{2\sqrt{-R_{z_0} w_0}}$$

οπότε  $|\psi_3'(z_0)| > 1$ , αφού  $|w_0| < R_{z_0}$ , συνεπώς  $\psi_3(z) \notin E_{z_0}$ . Όμως, διαιρώντας την  $\psi_3(z)$  με την  $\psi_3'(z_0)$  προκύπτει η  $\psi_4(z) \in E_{z_0}$ , διότι η  $\psi_4(z)$  είναι μονοδύναμη,  $\psi_4(z_0) = 0$  και  $\psi_4'(z_0) =$

1. Η  $\psi_4(z)$  απεικονίζει το  $G$  σε μια περιοχή  $\psi_4(G)$  που περιέχεται στον δίσκο

$$|w_4| < \frac{R_{z_0}}{|\psi'_3(z_0)|} < R_{z_0}$$

οπότε

$$\sup_{z \in G} |\psi_4(z)| \leq \frac{R_{z_0}}{|\psi'_3(z_0)|} < R_{z_0}$$

Αλλά αυτό αντιβαίνει στον ορισμό του  $R_{z_0}$  ως το μέγιστο κάτω φράγμα των

$$\sup_{z \in G} |F(z)|, \quad F(z) \in E_{z_0}$$

□

### 3.3 Θεώρημα Καραθεοδωρή

Έστω  $\Omega$  ένα απλά συνεκτικό πεδίο του οποίου το σύνορο είναι μια καμπύλη Jordan εάν  $f(z)$  είναι μια αναλυτική συνάρτηση που απεικονίζει το  $\Omega$  σύμμορφα στο μοναδιαίο δίσκο τότε η  $f(z)$  μπορεί να επεκταθεί έτσι ώστε να γίνει ομοιομορφισμός<sup>7</sup> μεταξύ της κλειστότητας  $\bar{\Omega}$  του  $\Omega$  και του κλειστού μοναδιαίου δίσκου  $\bar{D}$ . Επιπλέον, αν η συνοριακή καμπύλη έχει εφαπτομένη στο σημείο  $z_1$  τότε η απεικόνιση  $w = f(z)$  διατηρεί τη γωνία στο  $w_1 = f(z_1)$ . Τέλος, κάθε τρία σημεία στο σύνορο  $\partial\Omega$  μπορούν αν απεικονιστούν σε οποιαδήποτε προκαθορισμένα σημεία του μοναδιαίου κύκλου δεδομένου ότι προσδιορίζουν τον ίδιο προσανατολισμό.

<sup>7</sup>Ομοιομορφισμός ονομάζεται μια απεικόνιση που είναι συνεχής, "1-1" και επί.

## Κεφάλαιο 4

# Εφαρμογές

Οι σύμμορφες απεικονίσεις αποτελούν μια πανίσχυρη μέθοδο ανάλυσης με πολλές εφαρμογές στην σύγχρονη τεχνολογία. Οι σύμμορφες απεικονίσεις χρησιμοποιούν συναρτήσεις μιγαδικών μεταβλητών για να μετασχηματίσουν πολύπλοκα συνοριακά προβλήματα σε πιο απλά. Η μέθοδος είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στην ανάλυση πεδίων δυναμικού και παίρνει το όνομά της από το γεγονός ότι οι γωνίες και οι διαστάσεις των τετραγώνων πχ, όπως δημιουργούνται από τις διασταυρώσεις των δυναμικών γραμμών, μετασχηματίζονται ισοδύναμα σε τετράγωνα στην νέα διάταξη.

Πιο παλιά θεωρούσαν ότι η εφαρμογή της μεθόδου αυτής περιοριζόταν σε επίπεδα πεδία που ικανοποιούσαν την εξίσωση του Laplace, πεδία σε ομογενή μέσα και σε περιοχές όπου δεν συνδέονται παράξενα, με πολλούς τρόπους. Σήμερα οι περιορισμοί αυτοί μπορούν να αρθούν σε πολλές περιπτώσεις πρακτικών εφαρμογών, με την χρήση αναλυτικών και αριθμητικών μεθόδων. Σήμερα, οι σύμμορφες απεικονίσεις μπορούν να εφαρμοστούν σε μεγαλύτερο εύρος προβλημάτων απ' ό τι πριν από δύο ή τρεις δεκαετίες.

Η διάδοση και η χρήση της τεχνικής των σύμμορφων απεικονίσεων, ευνοήθηκε σε μεγάλο βαθμό από την ολοένα και αυξανόμενη ταχύτητα των ψηφιακών υπολογισμών. Αλγόριθμοι, οι οποίοι είχαν ανακαλυφθεί δεκαετίες πριν, εκσυγχρονίζονται και χρησιμοποιούνται για την επίλυση πολύπλοκων απεικονίσεων. Συνεχώς εμφανίζονται νέες αριθμητικές προσεγγίσεις. Επιπλέον, η εγγενής ταχύτητα της μεθόδου των σύμμορφων απεικονίσεων, χρησιμοποιείται για την βελτίωση της αποτελεσματικότητας άλλων αριθμητι-

κών μεθόδων. Για παράδειγμα, μπορεί να μετασχηματίσει πολύπλοκες συνοριακές συνθήκες και να δημιουργήσει νέες προσεγγίσεις.

Τα σημαντικότερα χαρακτηριστικά της μεθόδου των σύμμορφων απεικονίσεων, πέρα από την δυνατότητα επίλυσης μεγάλου αριθμού προβλημάτων την ακρίβεια και την ταχύτητα, είναι η διορατικότητα που προέρχεται από απαντήσεις που δεν είναι μόνο καθαρά μαθηματικές, η επιπλέον ταχύτητα που προσφέρει σε άλλες μαθηματικές μεθόδους και τέλος η δυνατότητα να εφαρμόζεται τόσο σε εσωτερικά όσο και σε εξωτερικά πεδία, με τα σύνορα να μπορούν να απειριστούν.

Εδώ παραθέτουμε μερικές μη κλασσικές εφαρμογές, οι οποίες αναπτύχθηκαν τα τελευταία εικοσιπέντε χρόνια, για ένα πλήθος προβλημάτων, πολλά από τα οποία δεν διέπονται από την εξίσωση του Laplace:

- Θεωρία ελαστικότητας εφαρμοσμένη σε ανισοτροπικά μέσα
- Προσδιορισμός συχνοτήτων αποκοπής/cutoff frequencies σε ηλεκτρομαγνητικούς κυματοδηγούς (επίσης εφαρμογές σε μαθηματικά παραπλήσιες θεωρίες όπως θεωρία ακουστικών κυματαγωγών και ταλαντώσεις μεμβρανών)
- Ιοντική οπτική
- Διάδοση οπτικών τρόπων ταλάντωσης σε διηλεκτρικές ίνες
- Περίθλαση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων
- Ατομική φυσική
- Διάδοση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων στην ατμόσφαιρα
- Διάδοση και μεταφορά θερμότητας σε αγωγούς τυχαίου σχήματος
- Προβλήματα ασταθούς μετάδοσης θερμότητας (επίσης διαδικασίες διάχυσης σύμφωνα με τον νόμο του Fick)
- Προβλήματα μη γραμμικής διάχυσης
- Υπερηχητικές ροές



- Προβλήματα στερεοποίησης
- Μηχανική συνεχούς μέσου, προβλήματα ευστάθειας, ταλαντώσεων και λογισμού

Στη συνέχεια του κεφαλαίου θα παρουσιαστούν παραδείγματα βασικών εφαρμογών των σύμμορφων απεικονίσεων και ευρέως γνωστοί μετασχηματισμοί.

## 4.1 Διάδοση θερμότητας

Να βρεθεί στην μόνιμη κατάσταση η θερμοκρασία  $T(x, y)$  στο άνω ημιεπίπεδο  $y > 0$  για οριακές συνθήκες

$$T(x, 0) = \begin{cases} T_0 & -\infty < x < -1 \\ T_1 & 1 < x < \infty \end{cases}$$

και μονωμένο τοίχωμα για  $|x| < 1$ , δηλαδή

$$\frac{\partial T}{\partial y}(x, 0) = 0, \quad |x| < 1$$

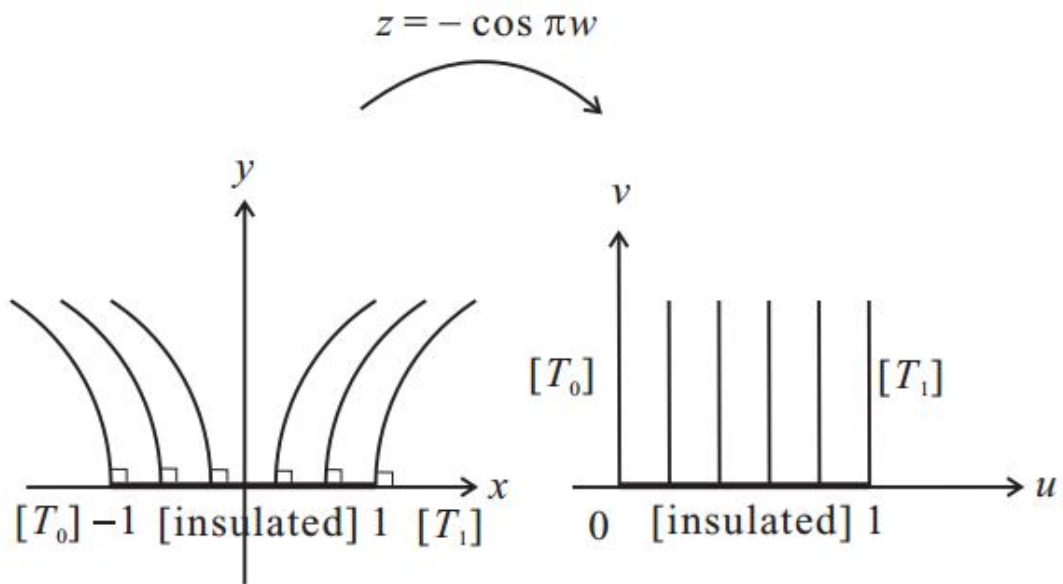
Αυτό είναι ένα πρόβλημα Dirichlet-Neumann όπου οι τιμές της εξαρτημένης μεταβλητής περιγράφονται σε κάποιο μέρος του συνόρου και η κλίση στο υπόλοιπο.

### Λύση

Επιλέγουμε τον μετασχηματισμό  $z = -\cos\pi w$  ο οποίος μεταφέρει το άνω ημιεπίπεδο στην ημιάπειρη λωρίδα  $\{w = u + iv : 0 < u < 1 \text{ και } 0 < v < \infty\}$  επειδή η συνθήκη Neumann αντιμετωπίζεται πιο εύκολα σε αυτήν την περίπτωση. Στο  $w$ -επίπεδο έχουμε τις ακόλουθες συνοριακές συνθήκες

- $T = T_0$  για  $u = 0, v > 0$
- $\frac{\partial T}{\partial y} = 0$  για  $v = 0, 0 < u < 1$
- $T = T_1$  για  $u = 1, v > 0$ .

Αφού η παράγωγος της θερμοκρασίας στην ευθεία που είναι μονωμένη είναι μηδέν, τότε οι ισοθερμικές γραμμές πρέπει να είναι κάθετες σε αυτήν. Στο  $w$ -επίπεδο οι ισοθερμικές



**Σχήμα 2:** Η απεικόνιση  $z = -\cos \pi w$  μεταφέρει το άνω ημιεπίπεδο του  $z$  στην ημιάπειρη λωρίδα του  $w$ . Οι ισοθερμικές γραμμές είναι ορθογώνιες στο μονωμένο σύνορο.

γραμμές στο εσωτερικό της λωρίδας θα είναι παράλληλες στον  $v$ -άξονα. Εύκολα λοιπόν συμπεραίνουμε ότι

$$T(u, v) = T_0 + (T_1 - T_0)u$$

η οποία είναι αρμονική και ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες και είναι μοναδική.

Έχουμε τώρα ότι

$$z = -\cos \pi(u + iw) = -\cos(\pi u) \cosh(\pi v) + i \sin(\pi u) \sinh(\pi v)$$

και

$$\begin{aligned} (\cosh \pi v - \cos \pi u)^2 &= \cosh^2 \pi v + \cos^2 \pi u - 2 \cosh(\pi v) \cos(\pi u) \\ &= x^2 + 2x + 1 + y^2 \end{aligned}$$

Παίρνοντας την θετική ρίζα έχουμε

$$\cosh(\pi v) - \cos(\pi u) = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$$

Ομοίως ισχύει ότι

$$\cosh(\pi v) + \cos(\pi u) = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$$

οπότε στο αρχικό  $z$ -επίπεδο η θερμοκρασία θα δίνεται από τον τύπο

$$T(x, y) = T_0 + \frac{T_1 - T_0}{\pi} \operatorname{Arccos} \left( \frac{1}{2} \left( \sqrt{(x-1)^2 + y^2} - \sqrt{(x+1)^2 + y^2} \right) \right)$$

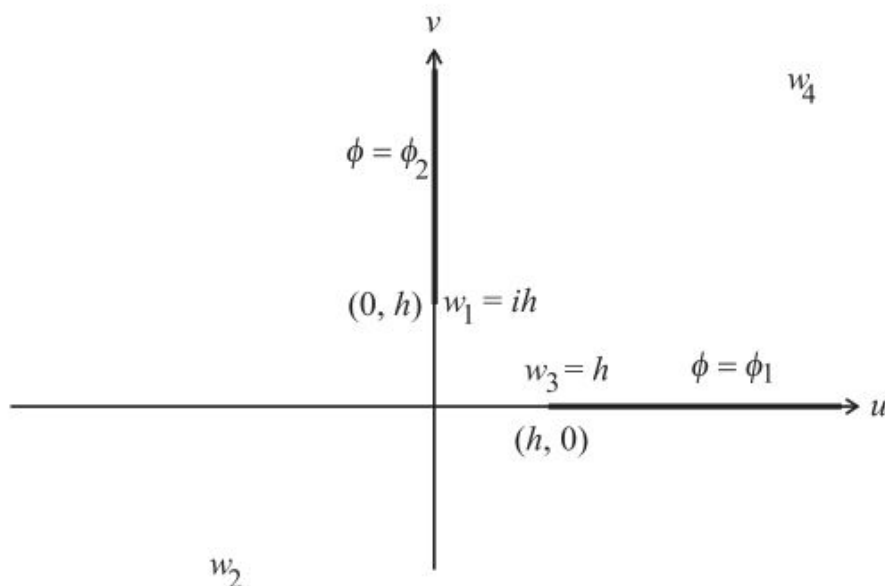
ενώ οι ισοθερμικές γραμμές δίνονται από την εξίσωση

$$\sqrt{(x-1)^2 + y^2} - \sqrt{(x+1)^2 + y^2} = c$$

όπου  $c$  μια σταθερά μεταξύ των  $T_0$  και  $T_1$ . Εύκολα αποδεικνύεται ότι είναι κύκλοι που τέμνουν κάθετα το μονωμένο χωρίο.

## 4.2 Ηλεκτρικό δυναμικό

Να βρεθεί το ηλεκτρικό δυναμικό που δημιουργείται από τη διάταξη που φαίνεται στο σχήμα.



### Λύση

Φανταζόμαστε όλο το επίπεδο  $u - v$  χωρίς τις ράβδους ως ένα μη φραγμένο πολύ-

γωνο το οποίο έχει δύο πραγματικές κορυφές στο  $w_1 = ih$  και  $w_3 = h$  και δύο φανταστικές  $w_2, w_4$ . Αντιστοιχούμε τα σημεία  $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1$  και  $x_4 = \infty$  του πραγματικού άξονα του  $z$ -επιπέδου στα  $w_1, w_2, w_3$  και  $w_4$  μέσω του μετασχηματισμού Schwarz-Christoffel. Οι γωνίες στροφής των κορυφών  $w_1$  και  $w_3$  είναι  $-\pi$ , ενώ στο  $w_2$  είναι  $\frac{5\pi}{2}$ . Η κλίση της ευθείας που ενώνει τα  $w_3$  και  $w_4$  φαίνεται να είναι μηδενική. Συνεπώς ο μετασχηματισμός Schwarz-Christoffel είναι

$$\begin{aligned} w = f(z) &= ih + K \int_{-1}^z \frac{(\zeta - 1)(\zeta + 1)}{\zeta^{5/2}} d\zeta \\ &= ih + K \left( 2z^{1/2} + \frac{2}{3}z^{-3/2} - \frac{8}{3}i \right) \end{aligned}$$

Η σταθερά  $K$  βρίσκεται από τη σχέση  $f(1) = h$ , οπότε

$$h = ih + K \left( 2 + \frac{2}{3} - \frac{8}{3}i \right) \Rightarrow K = \frac{3}{8}h$$

Συνεπώς είναι

$$w = f(z) = \frac{h}{4}z^{1/2} \left( 3 + \frac{1}{z^2} \right)$$

Στο  $z$ -επίπεδο η συνοριακή συνθήκη είναι

$$\phi(x, 0) = \begin{cases} \phi_2 & x < 0 \\ \phi_1 & x > 0 \end{cases}$$

και η λύση για το  $\phi(z)$  είναι

$$\phi(z) = \phi_1 + \frac{\phi_2 - \phi_1}{\pi} \text{Arg}z$$

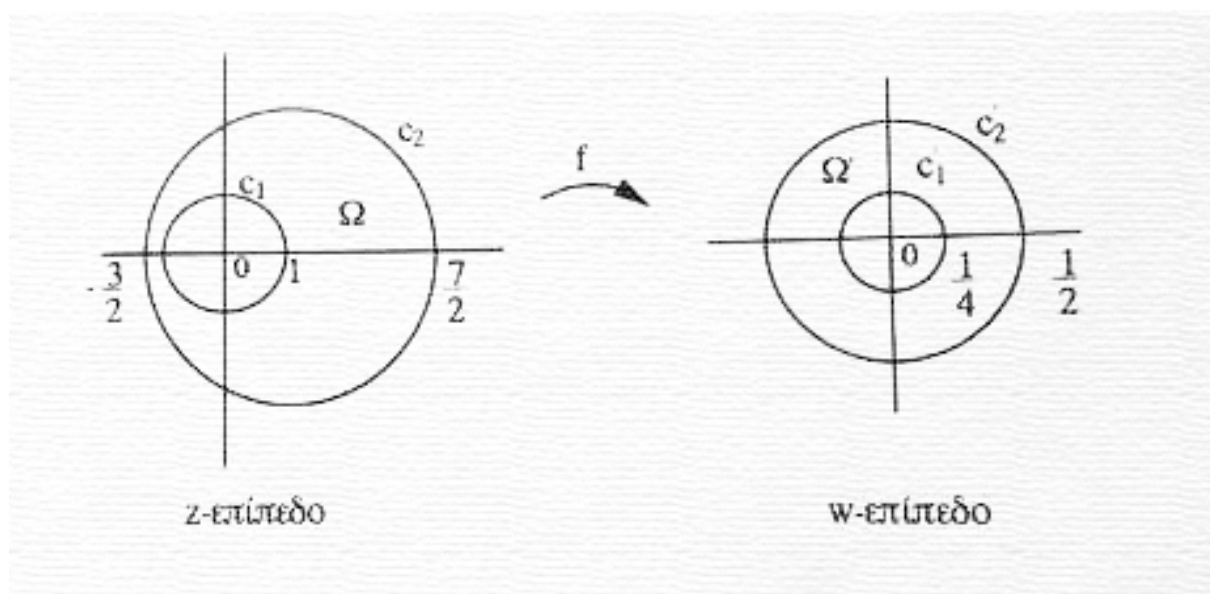
Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω σχέσεις βρίσκει κανείς το ηλεκτρικό δυναμικό  $\phi(w)$  σε τυχαίο σημείο του  $w$ -επιπέδου.

### 4.3 Επίλυση διαφορικής εξίσωσης Laplace

Άμεση συνέπεια του θεωρήματος απεικόνισης του Riemann αποτελεί το θεώρημα Poincare το οποίο ικανοποιεί τις ίδιες υποθέσεις και επιπλέον το  $\partial\Omega$  χωρίζει το  $\mathbb{C}$  σε ακριβώς

ένα εσωτερικό και ένα εξωτερικό σύνολο, οπότε υπάρχει μια μοναδική σύμμορφη απεικόνιση  $\phi : \bar{\Omega} \rightarrow \bar{D}$  τέτοια ώστε να απεικονίζει ένα δεδομένο  $z_0 \in \Omega$  στο 0 και ένα δεδομένο  $z_1 \in \partial\Omega$  σε ένα δεδομένο σημείο  $w_1 \in \partial D$ , οπότε  $\phi(z_0) = 0$  και  $\phi(z_1) = w_1$ .

**Παράδειγμα.** Δίνεται το σύνολο  $\Omega$  που περικλείεται μεταξύ των  $C_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$  και  $C_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| = \frac{5}{2}\}$ .



Θέλουμε να βρούμε μια αρμονική συνάρτηση  $u$  που παίρνει την τιμή  $a$  στο σύνορο  $C_1$  και  $b$  πάνω στο σύνορο  $C_2$ , δηλαδή έχουμε το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\Delta u = 0$$

$$u_{C_1} = a$$

$$u_{C_2} = b$$

Η συνάρτηση

$$w = \phi(z) = \frac{4z + 1}{4(z + 4)}$$

απεικονίζει το  $\Omega$  στο σύνολο

$$\Omega' = \left\{ w \in \mathbb{C} : \frac{1}{4} < |w| < \frac{1}{2} \right\}.$$

Ισχύει ότι  $\phi'(z) \neq 0$ ,  $z \in \Omega$  και συνεπώς η  $\phi$  είναι σύμμορφη απεικόνιση. Η  $\phi$  απεικονίζει το  $C_1$  στο

$$C'_1 = \left\{ w \in \mathbb{C} : |w| = \frac{1}{4} \right\}$$

και το  $C_2$  στο

$$C'_2 = \left\{ w \in \mathbb{C} : |w| = \frac{1}{2} \right\}$$

Είναι γνωστό ότι αν μια συνάρτηση είναι αρμονική σε ένα πεδίο τότε παραμένει αρμονική κάτω από κάθε σύμμορφο μετασχηματισμό, δηλαδή ο τελεστής Laplace είναι αναλλοίωτος. Επιπλέον οι συνοριακές συνθήκες παραμένουν αναλλοίωτες<sup>8</sup> οπότε έχουμε το νέο πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\Delta v = 0$$

$$v_{C'_1} = a$$

$$v_{C'_2} = b$$

Με τη μέθοδο χωριζομένων μεταβλητών η γενική λύση της εξίσωσης Laplace σε πολικές συντεταγμένες στο σύνολο  $\Omega'$  είναι

$$v(\rho, \phi) = \frac{a_0}{2} + b_0 \ln \rho + \sum_{n=1}^{\infty} [\rho^n (a_n \cos n\phi + b_n \sin n\phi) + \rho^{-n} (c_n \cos n\phi + d_n \sin n\phi)]$$

Επειδή οι συνοριακές συνθήκες είναι ανεξάρτητες της γωνίας, άρα  $a_n = b_n = c_n = d_n = 0$ , η λύση του μετασχηματισμένου προβλήματος δίνεται από τη σχέση

$$v(w) = 2b - a + \frac{b - a}{\ln 2} \ln |w|, \quad w \in \Omega'$$

<sup>8</sup>Αν μια συνάρτηση  $\phi(x, y)$  ικανοποιεί τις συνθήκες

$$\phi(x, y) = \kappa, \quad \kappa \text{ σταθερά ή } \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \text{ κατά μήκος μιας καμπύλης } C$$

τότε η  $\Phi = f(\phi)$ , όπου  $f$  σύμμορφη απεικόνιση ικανοποιεί τις ίδιες συνθήκες

$$\Phi(u, v) = \kappa, \quad \kappa \text{ σταθερά ή } \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \text{ κατά μήκος μιας καμπύλης } C'$$

Συνεπώς, η λύση στο  $\Omega$  παίρνει τη μορφή

$$u(z) = 2b - a + \frac{b - a}{\ln 2} \ln \left| \frac{4z + 1}{4(z + 4)} \right|, \quad z \in \Omega$$

ή

$$u(x, y) = 2b - a + \frac{b - a}{\ln 2} \ln \frac{16(x^2 + y^2) + 8x + 1}{16(x^2 + y^2 + 8x + 16)}$$

για κάθε  $(x, y) \in \Omega$

### Παρατήρηση

Γενικά, αν ορίσουμε ως δακτύλιο για  $0 < r < R$  το σύνολο

$$A(r, R) = \{z : r < |z| < R\}$$

τότε δύο δακτύλιοι  $A(r_1, R_1)$  και  $A(r_2, R_2)$  είναι σύμμορφα ισοδύναμα αν και μόνο αν  $R_1/r_1 = R_2/r_2$ .

## 4.4 Μετασχηματισμός Schwarz-Christoffel

Πολλές εφαρμογές σύμμορφων απεικονίσεων απαιτούν την κατασκευή μιας αμφιμονοσήμαντης σύμμορφης απεικόνισης από το άνω ημιεπίπεδο  $\Im z > 0$  επί ενός πεδίου  $G$  στο  $w$ -επίπεδο του οποίου το σύνορο αποτελείται από ευθύγραμμα τμήματα. Θεωρούμε την περίπτωση όπου το  $G$  είναι το εσωτερικό μιας πολυγωνικής γραμμής με κορυφές  $w_1, w_2, \dots, w_n$  και θετικά προσανατολισμένη.

**Θεώρημα 4.4.1** (Μετασχηματισμός Schwarz-Christoffel). *Εστω  $P$  πολυγωνική γραμμή στο  $w$ -επίπεδο με κορυφές  $w_i$  και αντίστοιχες εξωτερικές γωνίες  $a_i$ . Τότε υπάρχει μία αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση  $f(z)$  του άνω ημιεπιπέδου επί του  $G$ , τέτοια ώστε*

$$f'(z) = A(z - x_1)^{-a_1/\pi} (z - x_2)^{-a_2/\pi} \dots (z - x_{n-1})^{-a_{n-1}/\pi}$$

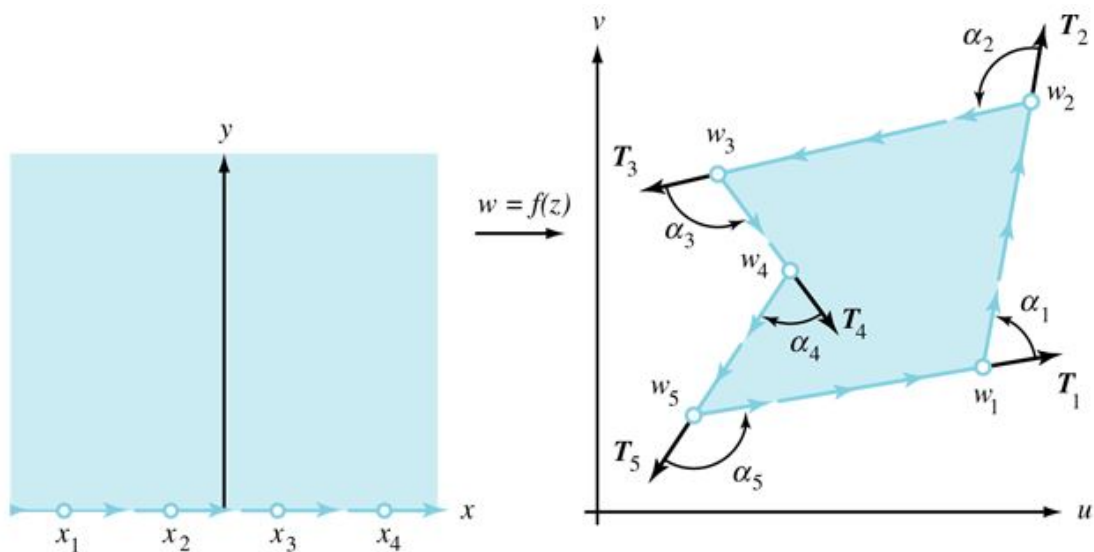
όπου  $x_i$  πραγματικοί,  $x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1}$ ,  $f(x_i) = w_i$ ,  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = w_n$ ,  $A$  μια σταθερά και

οι δυνάμεις παριστάνουν την κύρια τιμή.

Η απεικόνιση  $f(z)$  ονομάζεται μετασχηματισμός Schwarz-Christoffel με

$$f(z) = B + A \int A(z - x_1)^{-a_1/\pi} (z - x_2)^{-a_2/\pi} \dots (z - x_{n-1})^{-a_{n-1}/\pi} dz$$

όπου  $A$  και  $B$  κατάλληλα επιλεγμένες σταθερές που εξαρτώνται από το μέγεθος και τη θέση της πολυγωνικής γραμμής. Δύο από τα  $x_i$  μπορεί να εκλεγούν αυθαίρετα ώστε να διευκολυνθεί ο υπολογισμός της  $f(z)$ .



**Σχήμα 3:** Απεικόνιση Schwarz-Christoffel για  $n = 5$  και  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 > \pi$

**Παράδειγμα.** Να προσδιοριστεί μια συνάρτηση  $w(z)$ , η οποία απεικονίζει σύμμορφα το  $Imz > 0$  στο χωρίο του  $w$ -επιπέδου  $D = \{(u, v) : -a < u < a, v > 0\}$ .

### Λύση

Μπορούμε να θεωρήσουμε τη λωρίδα  $A'B'\Gamma'\Delta'$  ως οριακή περίπτωση ενός τριγώνου με δύο κορυφές τα σημεία  $B'$  και  $\Gamma'$  και τρίτη κορυφή την  $A'$  ή  $\Delta'$  στο άπειρο. Επειδή οι εσωτερικές γωνίες  $B'$  και  $\Gamma'$  είναι ίσες με  $\frac{\pi}{2}$  θα έχουμε  $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$ . Στη συνέχεια θεωρούμε πάνω στον άξονα των  $x$  τα σημεία  $x_1 = -1$  και  $x_2 = 1$  και τα αντιστοιχούμε στις κορυφές  $B'$  και  $\Gamma'$  της λωρίδας. Έτσι ο τύπος S-C παραλείποντας τα όρια της ολοκλήρωσης γίνεται

$$w = A \int (z + 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot (z - 1)^{-\frac{1}{2}} dz + C = A \cdot \int \frac{dz}{\sqrt{z^2 - 1}} + C$$



Θέτοντας  $k = \frac{A}{\gamma}$  ο τύπος γράφεται

$$w = k \cdot \int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} + C \Rightarrow w = k \cdot \text{Arcsin}z + C$$

Αρκεί να προσδιοριστούν οι σταθερές  $k$  και  $C$ . Για  $x_2 = 1$  έχουμε  $w = a$  και για  $x_1 = -1$  έχουμε  $w = -a$  βρίσκουμε ότι  $C=0$  και  $k = \frac{2a}{\pi}$ , συνεπώς

$$w = \frac{2a}{\pi} \text{Arcsin}z$$

**Παράδειγμα.** Να βρεθεί η ροή του ρευστού στο χωρίο  $D = \{(x, y) : -\pi/2 < x < \pi/2, y > 0\}$

### Λύση

Σύμφωνα με το παραπάνω παράδειγμα θεωρούμε τον μετασχηματισμό  $w = \sin z$  που απεικονίζει το χωρίο  $D$  στο ημιεπίπεδο  $\text{Im}w > 0$ . Στο μιγαδικό άνω ημιεπίπεδο και για ομοιόμορφη ροή παράλληλη προς τον άξονα  $u$ , το μιγαδικό δυναμικό είναι:

$$\Omega^*(w) = \alpha \cdot w$$

όπου  $\alpha$  πραγματικός αριθμός. Οπότε στο  $D$  θα είναι

$$\Omega(z) = \alpha \sin z$$

με τις δυναμικές και ροϊκές γραμμές να είναι αντίστοιχα

$$\Phi(x, y) = \alpha \sin x \cosh y = C_1 \Psi(x, y) = \alpha \cos x \sinh y = C_2$$

## 4.5 Μετασχηματισμός Joukowski

Θεωρούμε την απεικόνιση του  $z$ -επιπέδου στο  $w$ -επίπεδο

$$w = f(z) = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)$$

Η παραπάνω απεικόνιση λέγεται μετασχηματισμός Joukowski και ορίζεται για όλα τα σημεία του μιγαδικού επιπέδου εκτός των σημείων  $z = 0$  και  $z = \infty$ . Είναι

$$f'(z) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{z^2}\right)$$

Επομένως  $f'(z) \neq 0$  όταν  $z \neq \pm 1$ , οπότε ο παραπάνω μετασχηματισμός είναι μια σύμμορφη απεικόνιση του  $\mathbb{C} \setminus \{-1, 0, +1\}$  εντός του  $w$ -επίπεδου.

**Πρόταση 4.5.1.** Ο μετασχηματισμός Joukowski είναι μια μονότιμη συνάρτηση σε ένα πεδίο  $D$  εάν και μόνο αν αυτό το πεδίο δεν περιέχει ένα ζεύγος διαφορετικών σημείων  $z_1, z_2$  τέτοια ώστε  $z_1 \cdot z_2 = 1$ .

Απόδειξη. Αν ισχύει ότι

$$\frac{1}{2} \left(z_1 + \frac{1}{z_1}\right) = \frac{1}{2} \left(z_2 + \frac{1}{z_2}\right)$$

έπεται ότι

$$(z_1 - z_2) \cdot \left(1 - \frac{1}{z_1 \cdot z_2}\right) = 0$$

οπότε θα είναι είτε  $z_1 = z_2$ , είτε  $z_1 \cdot z_2 = 1$ . □

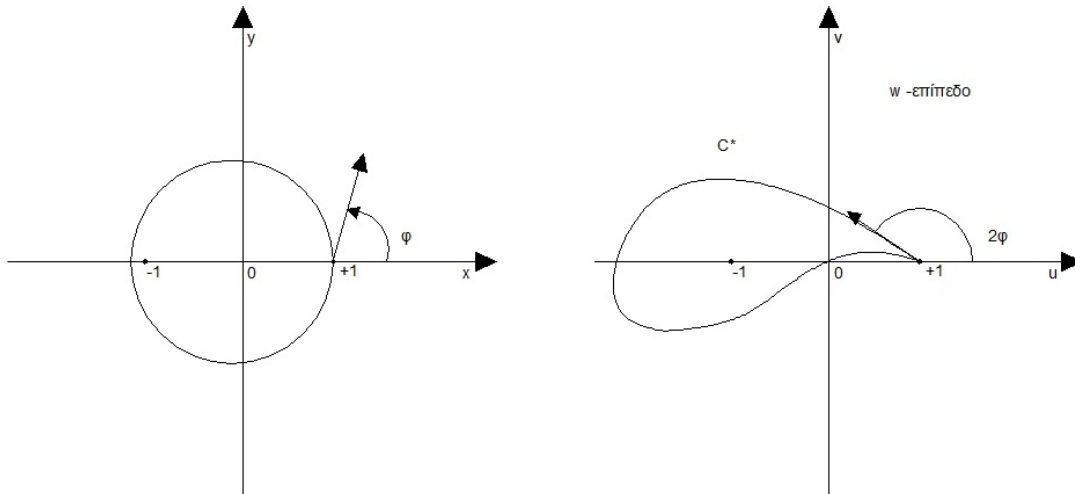
Ο μετασχηματισμός Joukowski είναι μια μονότιμη συνάρτηση στα ακόλουθα πεδία:

- $|z| > 1$  (εξωτερικό μοναδιαίου δίσκου)
- $|z| < 1$  (εσωτερικό μοναδιαίου δίσκου)
- $Imz > 0$  (άνω μιγαδικό ημιεπίπεδο)
- $Imz < 0$  (κάτω μιγαδικό ημιεπίπεδο)

### Το προφίλ του Joukowski

Θεωρούμε μια περιφέρεια  $C$  που διέρχεται από το σημείο  $z = 1$  και στο εσωτερικό της βρίσκεται το σημείο  $z = -1$  (βλέπε σχήμα 3). Έστω  $z_0$  το κέντρο της περιφέρειας με  $Re z_0 < 0$ , τότε η ακτίνα αυτής θα είναι  $R = |1 - z_0|$  και η εξίσωσή της θα είναι  $|z - z_0| = |1 - z_0|$ . Η απεικόνιση  $w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z}\right)$  δεν είναι σύμμορφη στο  $z = 1$ . Η εικόνα της  $C$  μέσω του παραπάνω μετασχηματισμού είναι η κλειστή καμπύλη  $C^*$  που παρουσιάζει μια αιχμή στο

$z = 1$  και μοιάζει με την κάτω ημι-κύκλου αεροπλάνου και λέγεται προφίλ του Joukowski (βλέπε σχήμα 3). Αν η περιφέρεια  $C$  είναι συμμετρική ως προς τον άξονα των  $x$  τότε και η  $C^*$  είναι συμμετρική ως προς τον άξονα των  $u$ .



Σχήμα 4: Η απεικόνιση της περιφέρειας κύκλου μέσω του μετασχηματισμού Joukowski

**Παράδειγμα.** Να λυθεί το πρόβλημα όπως περιγράφεται στο παρακάτω σχήμα

Η απεικόνιση Joukowski  $w = f(z) = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)$  μετασχηματίζει το δοσμένο πρόβλημα στο ακόλουθο πρόβλημα Dirichlet του άνω ημιεπιπέδου.

Η λύση του προβλήματος αυτού είναι

$$\Phi(u, v) = \alpha_2 + \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^2 (\alpha_{m-1} - \alpha_m) \text{Arg}(z - x_m)$$

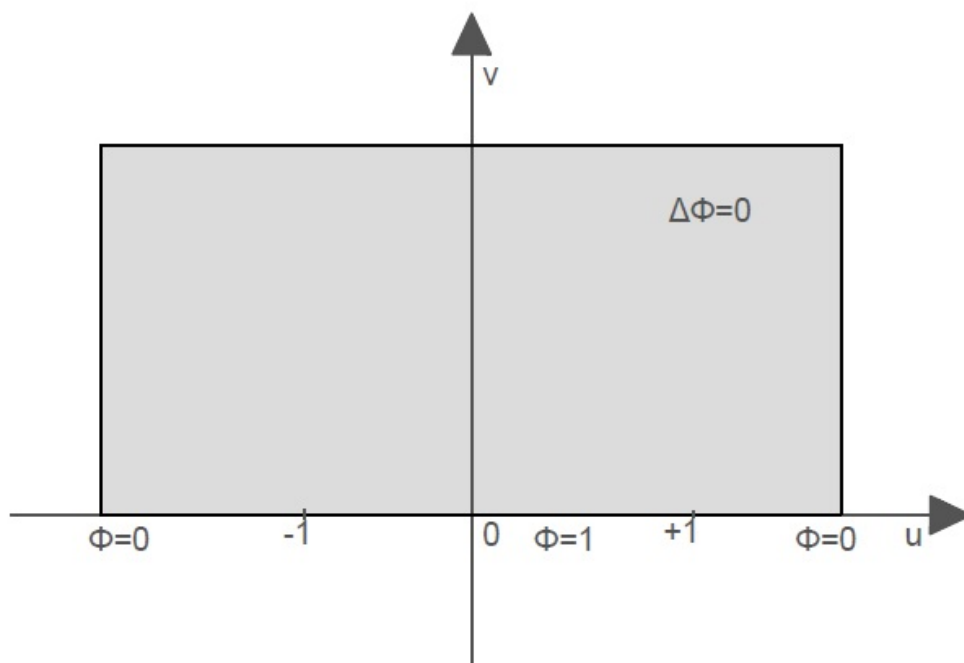
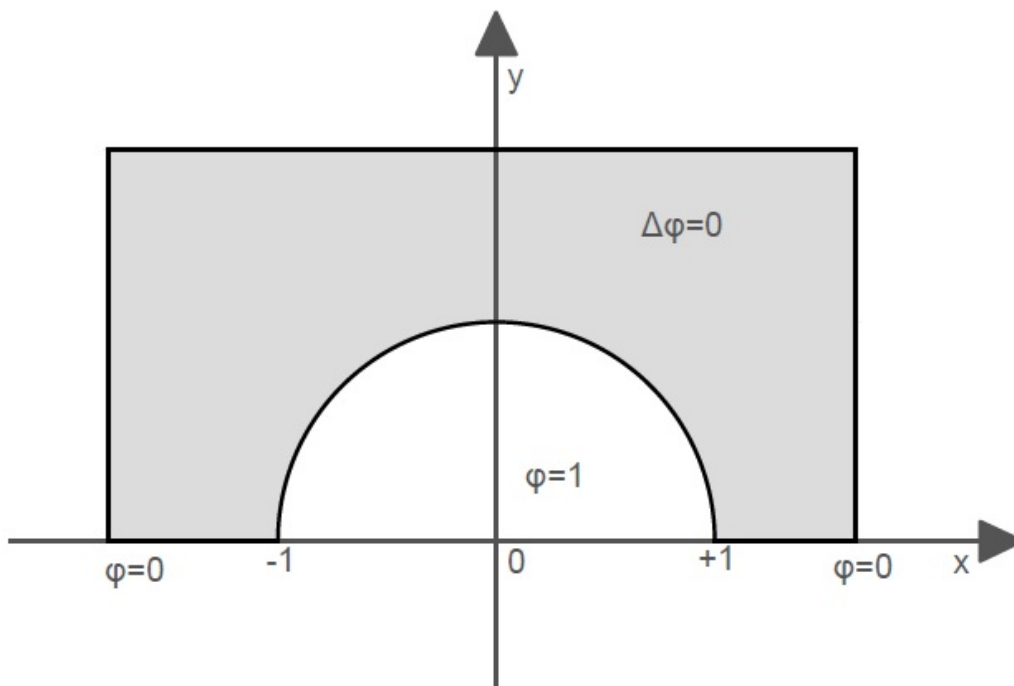
όπου  $\alpha_2 = \alpha_0 = 0$ ,  $\alpha_1 = 1$  και  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = 1$ , συνεπώς

$$\Phi(u, v) = \frac{1}{\pi} \text{Arctan} \left( \frac{2v}{u^2 + v^2 - 1} \right)$$

Από τη σχέση  $w = u(x, y) + iv(x, y) = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)$  προκύπτει

$$u(x, y) = \frac{x(x^2 + y^2 + 1)}{2(x^2 + y^2)} \quad v(x, y) = \frac{y(x^2 + y^2 - 1)}{2(x^2 + y^2)}$$

<sup>9</sup>Επειδή η καμπύλη περνάει από το σημείο  $z = 1$ , για να είναι συμμετρική πρέπει το  $z_0$  να βρίσκεται στον ασηνικό πραγματικό ημιάξονα.



Επομένως η λύση του προβλήματος είναι

$$\phi(x, y) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Arctan} \left( \frac{4y(x^2 + y^2 - 1)}{(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - 4) + (2x^2 - 2y^2 + 1)} \right)$$



# Βιβλιογραφία

- [1] . Σαραντόπουλος, *Μια Εισαγωγή στη Μιγαδική Ανάλυση με Παραδείγματα και Ασκήσεις*. Ε.Μ.Π., 2012.
- [2] . Κραββαρίτης, *Εφαρμοσμένη Μιγαδική Ανάλυση*. Συμεών, 2006.
- [3] L.-S. Hahn and B. Epstein, *Classical Complex Analysis*. Jones and Bartlett Books in Mathematics and Computer Science, 1996.
- [4] J. Bak and D. J. Newman, *Complex analysis*. Springer Science & Business Media, 2010.
- [5] S. R. Stein M. E., *Complex Analysis*. Princeton Lectures, 2002.
- [6] J. Gray, "On the history of the riemann mapping theorem," in *Studies in the history of modern mathematics* (U. Bottazzini, ed.), ch. 34, pp. 47–94, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 1994.
- [7] M. A. I., *Theory of Functions of a Complex Variable*. 1965.
- [8] J. L. Walsh, "History of the riemann mapping theorem," *American Mathematical Monthly*, pp. 270–276, 1973.
- [9] G. Daniel, "Complex analysis and related areas," *Doc-Course IMUS*, 2013.
- [10] . I., *Σύμμορφη Απεικόνιση*. Εκδόσεις Φούντας, 2005.
- [11] . I., *Εφαρμογές της Μιγαδικής Ανάλυσης στη Θεωρία Πεδίων*. Εκδόσεις Φούντας, 2005.
- [12] . Μήτσης, *Σημειώσεις Μιγαδικής Ανάλυσης*.
- [13] . . Δάσιος Γ., *Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις*. Αθήνα, 1994.
- [14] S. R., *Problems and Solutions for Complex Analysis*. Springer, 1999.
- [15] Y. K. Kwok, *Applied Complex Variables for Scientists and Engineers*. Second Edition Cambridge University Press, 2010.





# Παράρτημα

## Αρχή μεγίστου μέτρου

Έστω  $f$  ολόμορφη συνάρτηση στο πεδίο  $D$ . Αν υπάρχει  $z_0 \in D$  τέτοιο, ώστε  $|f(z)| \leq |f(z_0)|$  για κάθε  $z \in D$ , τότε η  $f$  είναι σταθερή στο  $D$  και μάλιστα ισχύει  $f(z) = f(z_0)$  για κάθε  $z \in D$ .

**Θεώρημα 5.1.2** (Αρχή μεγίστου μέτρου). *Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι ολόμορφη και μη σταθερή σε ένα πεδίο  $D$ , τότε το  $|f(z)|$  δεν έχει μέγιστη τιμή στο  $D$ , δηλαδή δεν υπάρχει  $z_0 \in D$  τέτοιο, ώστε  $|f(z)| \leq |f(z_0)|$  για κάθε  $z \in D$ .*

Αν μια συνάρτηση είναι ολόμορφη σε ένα φραγμένο πεδίο  $D$  και συνεχής στο σύνορο  $\partial D$ , τότε το μέτρο  $|f(z)|$ , ως συνεχής συνάρτηση στο συμπαγές σύνολο  $D \cup \partial D$  παίρνει σε ένα τουλάχιστον σημείο  $z_0$  του, μέγιστη τιμή. Στην περίπτωση που η  $f$  δεν είναι σταθερή στο  $D$ , από την αρχή μεγίστου μέτρου συμπεραίνουμε ότι το  $z_0 \in \partial D$ . Με αυτό τον τρόπο, προκύπτει το ακόλουθο πόρισμα.

**Πόρισμα 5.1.3.** *Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι ολόμορφη αλλά όχι σταθερή στο φραγμένο πεδίο  $D$  και συνεχής στο σύνορο  $\partial D$  του  $D$ , τότε η  $|f(z)|$  παίρνει τη μέγιστη τιμή στο σύνορο  $\partial D$  του  $D$ , δηλαδή υπάρχει  $z_0 \in \partial D$  τέτοιο ώστε  $|f(z_0)| = \max_{z \in \bar{D}} |f(z)| \quad z \in D$*

## Θεώρημα Liouville

**Θεώρημα 5.1.4** (Θεώρημα Liouville). *Αν η  $f$  είναι μια φραγμένη ολόμορφη συνάρτηση στο  $\mathbb{C}$ , τότε η  $f$  είναι σταθερή συνάρτηση.*

*Απόδειξη.* Έστω  $|f(z)| \leq M$  για κάθε  $z \in \mathbb{C}$ . Έστω επίσης  $z_0$  τυχαίο σημείο του  $\mathbb{C}$  και  $C_R$  ο κύκλος  $|z - z_0| = R$ . Τότε από την ανισότητα Cauchy βρίσκουμε  $|f'(z_0)| \leq \frac{M}{R}$ . Επειδή η σχέση αυτή ισχύει

για κάθε  $R > 0$ , συμπεραίνουμε ότι  $f'(z_0) = 0$ . Έτσι, αφού το  $z_0$  είναι τυχαίο στο  $D$ , έχουμε  $f'(z) = 0$  για κάθε  $z \in \mathbb{C}$  και άρα η  $f$  είναι σταθερή συνάρτηση.  $\square$

### Παρατήρηση

Το θεώρημα αυτό δεν ισχύει για συναρτήσεις  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Για παράδειγμα, η συνάρτηση  $f(x) = \sin x$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  και ισχύει  $|\sin x| \leq 1$  αλλά η  $f$  δεν είναι σταθερή.

**Παράδειγμα.** Οι συναρτήσεις  $w = \sin z$  και  $w = \cos z$  δεν είναι φραγμένες. Επειδή οι συναρτήσεις  $w = \sin z$  και  $w = \cos z$  είναι μη σταθερές ακέραιες συναρτήσεις, από το θεώρημα Liouville προκύπτει ότι οι συναρτήσεις αυτές δεν είναι φραγμένες. Επειδή  $\cos(iy) = \cos 0 \cosh y - i \sin 0 \sinh y = \cosh y$ , έχουμε  $\lim_{y \rightarrow iy} \cos(iy) = +\infty$

Το θεώρημα Liouville επιτρέπει επίσης την απόδειξη του θεμελιώδους θεωρήματος της Άλγεβρας.

## Θεώρημα Morera

**Θεώρημα 5.1.5** (Θεώρημα Morera). Αν  $f$  είναι μια συνεχής μιγαδική συνάρτηση σε ένα απλά συνεκτικό πεδίο  $D$  και για κάθε κλειστή και πραγματικά λεία καμπύλη  $C$  μέσα στο  $D$  ισχύει  $\int_C f(z) dz = 0$  τότε η  $f$  είναι ολόμορφη συνάρτηση στο  $D$ .

## Λήμμα Schwarz

**Λήμμα 5.1.6** (Λήμμα Schwarz). Υποθέτουμε ότι η  $f(z)$  είναι ολόμορφη στο δίσκο  $|z| < 1$ ,  $f(0) = 0$  και  $|f(z)| < 1$ . Τότε  $|f(z)| \leq |z|$  και  $|f'(0)| \leq 1$  για  $|z| < 1$  με την ισότητα και στις δύο περιπτώσεις να ισχύει αν και μόνο αν  $f(z) = e^{ia}z$  όπου  $a \in \mathbb{R}$ .

*Απόδειξη.* Θεωρούμε τη συνάρτηση  $g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z} & z \neq 0 \\ f'(0) & z = 0 \end{cases}$  Επειδή  $f(0) = 0$  η  $g$  είναι ολόμορφη στο δίσκο  $|z| < 1$ . Έστω  $0 < \rho < 1$  σταθερό. Για  $z$  με  $|z| = \rho$  ισχύει  $|g(z)| = \frac{|f(z)|}{|z|} < \frac{1}{\rho}$ . Από την αρχή μεγίστου μέτρου θα είναι  $|g(z)| < \frac{1}{\rho}$  για κάθε  $z$  με  $|z| \leq \rho$ . Επομένως, για  $\rho \rightarrow 1$ , παίρνουμε  $|g(z)| \leq 1$ , δηλαδή  $|f(z)| \leq |z|$  για  $|z| < 1$ . Αν τώρα για κάποιο  $z_0$  ( $|z_0| < 1$ ) η συνάρτηση  $|g(z)|$  παίρνει τη μέγιστη τιμή, δηλαδή  $|g(z_0)| = 1$ , τότε αναγκαστικά  $g(z) = c$ , όπου  $|c| = 1$ , δηλαδή  $g(z) = e^{ia}$ , οπότε  $f(z) = e^{ia}z$ .  $\square$

## Θεώρημα Rouché

**Θεώρημα 5.1.7.** *Αν οι συναρτήσεις  $f$  και  $g$  είναι ολόμορφες στο απλά συνεκτικό πεδίο  $D$  και για τα σημεία  $z$  μιας απλής κλειστής τμηματικά λείας καμπύλης  $C$  του  $D$  ισχύει  $|g(z)| < |f(z)|$ , τότε οι συναρτήσεις  $f$  και  $f + g$  έχουν το ίδιο πλήθος ριζών στο εσωτερικό της  $C$  (οι ρίζες υπολογίζονται σύμφωνα με την πολλαπλότητά τους).*