Εθνικο Μετσοβιο Πολυτεχνειο
Σχολη Εφαρμοσμενων Μαθηματικων και Φυσικων Επιστημων
Τομεας Μαθηματικων

Περιγραφική Θεωρία Συνόλων

Διπλωματικη Εργασια

ΓΕΩΡΓΙΟΣ ΚΑΤΣΙΜΠΑΣ
Φοιτητής Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών ΕΜΠ

Επιβλέπων Καθηγητής: Αργυρός Σπυρίδων

Ιουλιος 2015

Επιβλέπων Καθηγητής:

Σ. Αργυρός,
Καθηγητής ΕΜΠ

Τριμελής Εξεταστική Επιτροπή:

Σ. Αργυρός,
Καθηγητής ΕΜΠ

Ι. Γάσπαρης,
Αναπληρωτής Καθηγητής ΕΜΠ

Β. Κανελλόπουλος,
Αναπληρωτής Καθηγητής ΕΜΠ

Υπογραφές Μελών Εξεταστικής Επιτροπής:

Σ. Αργυρος | Ι. Γασπαρης | Β. Κανελλοπουλος

. . . .

ΑΘΗΝΑ, Ιούλιος 2015

Ευχαριστίες

Τα μαθηματικά αποτελούν πλέον μεγάλο μέρος της ζωής μου και θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους όσους στήριξαν την προσπάθεια να βρω το δρόμο μου στην επιστήμη αυτή, τόσο στις καλές στιγμές, όσο και στις πιο δύσκολες.

Ευχαριστώ ολόθερμα τον επιβλέποντα καθηγητή μου Σπύρο Αργυρό, τόσο για τις ευκαιρίες που μου έδωσε και την εμπιστοσύνη που μου έδειξε, όσο και για το γεγονός πως αποτελεί συνεχή πηγή έμπνευσης για μένα σε επιστημονικό και προσωπικό επίπεδο. Μετά από όλα αυτά τα χρόνια ως φοιτητής, δεν θα μπορούσα να φανταστώ τον εαυτό μου να εκπονεί μία διπλωματική εργασία χωρίς αυτόν ως επιβλέπων. Θέλω να ευχαριστήσω τους κ.κ. Δημήτρη Απατσίδη και Νίκο Σταμάτη για τις εύστοχες παρατηρήσεις τους κάθε φορά που τις χρειαζόμουν. Ευχαριστώ τον καθηγητή Βασίλη Κανελλόπουλο, καθώς μέσω της επαφής μαζί του ένιωσα πως η αγάπη μου για τα μαθηματικά πραγματικά γιγαντώθηκε. Ευχαριστώ τον καθηγητή Ιωάννη Γάσπαρη για την παρουσία του στην τριμελή εξεταστική επιτροπή της παρούσης διπλωματικής εργασίας. Φυσικά, δεν θα μπορούσα να μην ευχαριστήσω τους γονείς μου, Γιάννη και Κατερίνα. Χωρίς τη συνεχή στήριξή τους σε όλους τους τομείς της ζωής μου, δεν θα ήθελα καν να φανταστώ που θα βρισκόμουν.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω εκ βαθέων τον Παύλο Μοτάκη, κυρίως για την υπομονή που έδειξε στο πρόσωπό μου, αλλά και για την συνεχή υποστήριξή του όπου κι όποτε τον χρειάστηκα. Για μένα είναι ένας πολύ ιδιαίτερος μέντορας και φίλος τον οποίο θαυμάζω τόσο για το πάθος του για τα μαθηματικά, όσο και για την προσωπικότητά του. Δίχως την βοήθειά του, το παρόν κείμενο δεν θα είχε ποτέ περατωθεί.

Εισαγωγή

Η Περιγραφική Θεωρία Συνόλων είναι ένας κλάδος των Μαθηματικών, ο οποίος άρχισε κυρίως τα τελευταία 70 χρόνια να αποτελεί αντικείμενο ενδελεχούς έρευνας. Κύριο αντικείμενο του αποτελεί η μελέτη **προσδιορίσιμων (definable)** υποσυνόλων τοπολογικών χώρων, υπό την έννοια της ανάλυσης της πολυπλοκότητας και στη συνέχεια κατηγοριοποίησής τους. Ο καλύτερος τρόπος για να πάρουμε μία ιδέα του ουσιώδους αντικειμένου της Περιγραφικής Θεωρίας Συνόλων είναι να πάμε στο μέρος όπου ξεκίνησαν όλα:

Στις αρχές του 20ου αιώνα, ένας από τους κυριότερους κλάδους απασχόλησης των μαθηματικών ήταν η μελέτη των συνόλων Borel. Από τις σημαντικότερες συνεισφορές στην έρευνα αυτή είχε ο Γάλλος μαθηματικός Rene-Louis Baire, ο οποίος μεταξύ άλλων εισήγαγε την έννοια των **συναρτήσεων Baire**, δηλαδή συναρτήσεις που προκύπτουν από συνεχείς συναρτήσεις, επαναλαμβάνοντας την πράξη του κατά σημείου ορίου σε μία ακολουθία τέτοιων συναρτήσεων. Η δουλεία του Baire συνεχίστηκε από τον μεγάλο, επίσης Γάλλο, μαθηματικό Henri Lebesgue, ο οποίος εισήγαγε πάμπολα νέα εργαλεία στην θεωρία αυτή, τα οποία χρησιμοποιούνται μέχρι και σήμερα. Όμως, η θεωρία πίσω από τα σύνολα Borel και γενικότερα η Θεωρία Συνόλων δέχθηκε ένα μεγάλο πλήγμα, όταν ο Ρώσος μαθηματικός Nicolai Lusin ζήτησε από τον μαθητή του Mikhail Souslin να μελετήσει μία εκ των εργασιών του Lebesgue. Ο Lebesgue είχε δείξει το εξής:

Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση Baire, τέτοια ώστε για κάθε x, η εξίσωση:

$$f(x, y) = 0$$

έχει μοναδική λύση. Τότε, το y ως συνάρτηση του x, όπως αυτό ορίζεται από την παραπάνω εξίσωση είναι συνάρτηση Baire.

Ο Lebesgue για την απόδειξη του παραπάνω Θεωρήματος, είχε κάνει χρήση ενός Λήμματος, σύμφωνα με το οποίο η προβολή κάθε Borel υποσυνόλου του $\mathbb{R}^2$ στο $\mathbb{R}$ είναι επίσης σύνολο Borel. Μάλιστα, ο Lebesgue είχε αφήσει το Λήμμα αυτό χωρίς απόδειξη, θεωρώντας το τετριμμένο!

Ο Souslin παρατήρησε την απόδειξη του παραπάνω αποτελέσματος και γρήγορα βρήκε αντιπαραδείγματα στο Λήμμα που είχε διατυπώσει ο μεγάλος αυτός μαθηματικός. Όμως, αντί να επαναπαυτεί στο γεγονός πως βρήκε το λάθος, βάλθηκε να αναπτύξει μία θεωρία που θα έλυνε το πρόβλημα της προβολής - ή, γενικότερα, συνεχούς εικόνας - συνόλων Borel. Ο Souslin εισήγαγε την έννοια των **αναλυτικών συνόλων** ως συνεχείς εικόνες συνόλων Borel και μαζί με τους Lusin, Sierpinski όχι μόνο βρήκαν λύση στο αρχικό πρόβλημα του Lebesgue, αλλά ανέπτυξαν μία θεωρία με δομή πολύ πιο πλούσια από ότι θα μπορούσε να φανταστεί αρχικά κανείς. Αυτή η θεωρία θα αναπτυχθεί στην παρούσα διπλωματική εργασία.

Στο πρώτο κεφάλαιο, παρουσιάζονται κάποια γενικά τοπολογικά στοιχεία αριθμήσιμων γινομένων αριθμήσιμων διακριτών χώρων, με κύριο σκοπό την ανάλυση των τοπολογικών χαρακτηριστικών των χώρων Baire και Cantor. Οι χώροι αυτοί αποτελούν τη βάση της Περιγραφικής Θεωρίας Συνόλων κι ως εκ τούτου είναι λογικό να ξεκινήσει κανείς από εκεί.

Στο δεύτερο κεφάλαιο εισάγουμε τις έννοιες των σχημάτων Souslin και Hausdorff. Τα εργαλεία αυτά εκμεταλλεύονται με ουσιαστικό τρόπο τη δομή των χώρων Baire και Cantor αντίστοιχα και μας επιτρέπουν τη διατύπωση χαρακτηρισμών τριών καθιερωμένων μοντέλων: των $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}, \mathbb{Q}, 2^{\mathbb{N}}$. Στο κεφάλαιο αυτό δίνεται τόσο ο ορισμός των αναλυτικών τοπολογικών χώρων, όσο και κάποιων εκ των πιο σημαντικών Θεωρημάτων, τα οποία χαρακτηρίζουν την πλούσια δομή των αναλυτικών χώρων, όπως για παράδειγμα η απάντηση στην Υπόθεση του Συνεχούς για τα αναλυτικά σύνολα. Τέλος, στην τελευταία ενότητα εξετάζουμε τις υποθέσεις που πρέπει να ισχύουν ώστε να εμφυτεύσουμε ταυτόχρονα τους χώρους $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ και $\mathbb{Q}$ σε άλλους χώρους.

Στο τρίτο κεφάλαιο, περιοριζόμαστε στην μελέτη αναλυτικών υποσυνόλων Πολωνικών χώρων. Στην πρώτη ενότητα αποδεικνύουμε πως κάθε Borel υποσύνολο ενός Πολωνικού χώρου είναι αναλυτικό, δίνοντας έτσι απάντηση στην Υπόθεση του Συνεχούς για τα σύνολα Borel κάνοντας χρήση αποτελεσμάτων μόνο για τα αναλυτικά σύνολα! Δίχως αμφιβολία, η καρδιά της Θεωρίας των Αναλυτικών Συνόλων αποτελεί το Θεώρημα Διαχωρισμού του Lusin, το οποίο κι αποδεικνύουμε. Το Θεώρημα αυτό έχει πολύ σημαντικές συνέπειες καθώς χαρακτηρίζει πλήρως τη σχέση μεταξύ αναλυτικών και Borel υποσυνόλων Πολωνικών χώρων. Στη συνέχεια, δίνουμε χρήσιμους χαρακτηρισμούς των αναλυτικών συνόλων ως προβολές και συνεχείς εικόνες συνόλων σε χώρους γινόμενο. Τελικώς, εξετάζουμε ορισμένες από τις ιδιότητες κανονικότητας των αναλυτικών συνόλων, όπως η κατασκευασιμότητα κι η Lebesgue - μετρησιμότητά τους.

Περιεχόμενα

1 Οι χώροι Baire και Cantor

Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιαστούν οι χώροι Baire και Cantor, χώροι που όπως θα δούμε αποτελούν τη βάση της θεωρίας των αναλυτικών συνόλων.

1.1 Αριθμήσιμα Γινόμενα Αριθμήσιμων Διακριτών Χώρων

Καθώς τόσο ο χώρος Baire, όσο κι ο χώρος Cantor είναι χώροι - γινόμενο,είναι σκόπιμο να παρουσιάσουμε κάποια βασικά τοπολογικά χαρακτηριστικά αριθμήσιμων γινομένων από αριθμήσιμους διακριτούς χώρους. Ξεκινάμε με κάποιους βασικούς ορισμούς συνολοθεωρητικής φύσεως που αφορούν δέντρα σε αυθαίρετα σύνολα.

Ορισμός 1.1.1. *Έστω X αυθαίρετο σύνολο.*

(i) *Συμβολίζουμε με $X^{<\mathbb{N}}$ το σύνολο των πεπερασμένων ακολουθιών από στοιχεία του X.Δηλαδή,είναι:*

$$X^{<\mathbb{N}} = \{(x_1, \ldots, x_n) : n \in \mathbb{N}, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{N}\}$$

(Θεωρούμε πως το $X^{<\mathbb{N}}$ περιλαμβάνει την ακολουθία μηδενικού μήκους,δηλαδή $\emptyset \in X^{<\mathbb{N}}$).

Για $s \in X^{<\mathbb{N}}$,συμβολίζουμε με $\mid s \mid$ το ***μήκος*** *του στοιχείου s,δηλαδή αν $s = (s_1, \ldots, s_k)$,για κάποιο $k \in \mathbb{N}$,τότε $\mid s \mid= k$.Επίσης,με $s(n)$ συμβολίζουμε τη* ***n-οστή συντεταγμένη*** *του s.*

(ii) *Ορίζουμε στον $X^{<\mathbb{N}}$ μία σχέση μερικής διάταξης,ως εξής:*

$$s \sqsubseteq t \quad \Leftrightarrow \quad (\mid s \mid \leq \mid t \mid \textit{ και } s_i = t_i, \forall i = 1, \ldots, \mid s \mid), \quad \forall s, t \in X^{<\mathbb{N}}$$

Είναι εύκολο να δούμε πως η σχέση $'' \sqsubseteq''$ αποτελεί όντως σχέση μερικής διάταξης επί του $X^{<\mathbb{N}}$.

Βλέπουμε,λοιπόν,πως η s είναι 'μικρότερη' από την t αν και μόνο αν αποτελεί αρχικό της τμήμα.

(iii) *Για $s = (s_1, \ldots, s_n), t = (t_1, \ldots, t_m) \in X^{<\mathbb{N}}$ ορίζουμε την* ***συνένωση*** *των s,t ως εξής:*

$$s^\frown t = (s_1, \ldots, s_n, t_1, \ldots, t_m)$$

(iv) *Για* $s = (s_1, \ldots, s_n) \in X^{<\mathbb{N}}$ *συμβολίζουμε με* $s\mid_k$, *για* $k \leq n$, *τον* ***περιορισμό του*** s ***στις πρώτες*** k***-συντεταγμένες***, *δηλαδή είναι:*

$$s\mid_k = (s_1, \ldots, s_{k-1}, s_k)$$

Για λόγους απλότητας, θα καλούμε το στοιχείο $s\mid_k$ *ως τον* ***περιορισμό του*** s ***στο*** k.

(v) *Δύο στοιχεία* s,t *του* $X^{<\mathbb{N}}$ *καλούνται* ***ορθογώνια ή ασύμβατα***, *συμβολικά* $s \perp t$, *αν το* s *δεν αποτελεί αρχικό τμήμα του* t *και το* t *δεν αποτελεί αρχικό τμήμα του* s.

(vi) *Ένα* $T \subseteq X^{<\mathbb{N}}$ *καλείται* ***δέντρο στο X*** *αν:*

$$s \in T \text{ και } t \sqsubseteq s \quad \Rightarrow t \in T, \quad \forall s, t \in X^{<\mathbb{N}}$$

Δηλαδή το T *καλείται δέντρο αν περιέχει όλα τα αρχικά τμήματα των στοιχείων του.*

(vii) *Αν* $T \subseteq X^{<\mathbb{N}}$ *ένα δέντρο στο X, ονομάζουμε* ***κλαδί*** *του δέντρου* T *κάθε ακολουθία* $x = (x_n)_n \in X^{\mathbb{N}}$ *ώστε* $\forall n \in \mathbb{N}, x\mid_n \in T$.

Το σύνολο όλων των κλαδιών του δέντρου T *συμβολίζεται με* $[T]$.

(viii) *Ένα δέντρο* T *στο X καλείται* ***κλαδεμένο*** *αν* $\forall s \in T$ *υπάρχει* $t \in T$ *με* $t \neq s$ *ώστε* $s \sqsubseteq t$, *δηλαδή αν το* T *περιέχει γνήσια επέκταση για κάθε στοιχείο του.*

(ix) *Ένα δέντρο* T *στο X καλείται* ***πεπερασμένης διακλάδωσης*** *αν*

$\forall s \in T$ *υπάρχουν το πολύ πεπερασμένα το πλήθος* $t \in T$ *για τα οποία ισχύει* $\mid t \mid = \mid s \mid +1$.

Στα επόμενα θα αναφερόμαστε σε αριθμήσιμα σύνολα. Έστω,λοιπόν,X ένα αριθμήσιμο σύνολο.Εφοδιάζουμε το X με τη διακριτή τοπολογία και θεωρούμε τον χώρο γινόμενο $X^{\mathbb{N}}$. Στον χώρο αυτό θα ορίσουμε μία νέα τοπολογία και θα αποδείξουμε ότι αυτή ταυτίζεται με τη συνήθη τοπολογία γινόμενο. Ξεκινάμε με την ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 1.1.2. *Για* $s \in X^{<\mathbb{N}}$ *ορίζουμε το σύνολο* $U_s = \{x \in X^{\mathbb{N}} : s \sqsubseteq x\}$. *Τότε, η οικογένεια* $\mathcal{B} = \{U_s : s \in X^{<\mathbb{N}}\}$ *αποτελεί βάση για κάποια τοπολογία επί του* $X^{\mathbb{N}}$.

Απόδειξη. Από γνωστό αποτέλεσμα της Γενικής Τοπολογίας, αρκεί να δείξουμε ότι:

(i) $X^{\mathbb{N}} = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$

(ii) Για κάθε $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ και για κάθε $x \in B_1 \cap B_2$, υπάρχει $B_3 \in \mathcal{B}$ ώστε $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$

Το (i) είναι προφανές,αφού $X^{\mathbb{N}} = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = U_{\emptyset}$.Για το (ii) ,έστω $s_1, s_2 \in X^{<\mathbb{N}}$.Θα δείξουμε ότι $U_{s_1} \cap U_{s_2} \in \mathcal{B}$.Πράγματι, είναι $U_{s_1} \cap U_{s_2} = \begin{cases} \emptyset, & s_1 \perp s_2 \\ U_{s_1}, & s_1 \sqsubseteq s_2 \\ U_{s_2}, & s_2 \sqsubseteq s_1 \end{cases}$ κι άρα έπεται το ζητούμενο. □

Πρόταση 1.1.3. *Στον χώρο $X^{\mathbb{N}}$, έστω $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ η τοπολογία με βάση την $\mathcal{B}$ κι έστω $\mathcal{T}_{X^{\mathbb{N}}}$ η συνήθης τοπολογία γινόμενο. Τότε $\mathcal{T}_{\mathcal{B}} = \mathcal{T}_{X^{\mathbb{N}}}$.*

Απόδειξη. Θα δείξουμε, αρχικά, ότι $\mathcal{T}_{\mathcal{B}} \subseteq \mathcal{T}_{X^{\mathbb{N}}}$. Αρκεί να δείξουμε πως $\forall s \in X^{<\mathbb{N}}$,το $U_s \in \mathcal{T}_{X^{\mathbb{N}}}$. Για $s = (s_1, \ldots, s_n) \in X^{<\mathbb{N}}$ είναι:

$$U_s = \Big(\prod_{i=1}^{n} \{s_i\} \Big) \times \Big(X^{\mathbb{N} \setminus \{1, \ldots, n\}} \Big) \in \mathcal{T}_{X^{\mathbb{N}}}$$

Για να αποδειχθεί ότι $\mathcal{T}_{X^{\mathbb{N}}} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ αρκεί για την υποβάση $\mathcal{F} = \{{\pi_n}^{-1}(V_n) : n \in \mathbb{N}, V_n \subseteq X \text{ ανοικτό}\}$ να δειχθεί ότι $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$. (Με π_n συμβολίζεται η συνήθης προβολή στην $n-$ οστή συντεταγμένη). Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $V_n \subseteq X$.Κατ' αρχάς,αν $V_n = \emptyset$ τότε ${\pi_n}^{-1}(V_n) = \emptyset$ κι αν $V_n = X$,τότε ${\pi_n}^{-1}(V_n) = X^{\mathbb{N}}$. Έστω, λοιπόν, $V_n \subsetneq X$. Τότε:

$$ {\pi_n}^{-1}(V_n) = \bigcup_{z \in V_n} \bigcup_{s \in X^{(n-1)}} U_{s^\frown z} \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$$

□

Παρατήρηση 1.1.4. *Στην τοπολογία $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ με βάση την $\mathcal{B}$ κάθε βασικό ανοικτό σύνολο είναι ταυτόχρονα και κλειστό. Πράγματι,αν υπήρχε $s \in X^{<\mathbb{N}}$ ώστε το σύνολο U_s να μην είναι κλειστό,τότε $\overline{U_s} \supsetneq U_s \Rightarrow \exists z \in \overline{U_s}$ και $z \notin U_s$. Τότε, εφ' όσον προφανώς $z \in U_{z|_{|s|}}$, έπεται ότι $U_{z|_{|s|}} \cap U_s \neq \emptyset$,άτοπο! αφού $z\,|_{|s|} \perp s$. Συμπεραίνουμε πως ο χώρος $X^{\mathbb{N}}$ έχει μία βάση από **clopen** (ανοικτά και κλειστά) σύνολα.*

Ορισμός 1.1.5. *Έστω $(X,\mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος.*

(i) Ο $(X,\mathcal{T})$ καλείται ***πλήρως μετρικοποιήσιμος*** *αν υπάρχει μετρική d επί του X που να επάγει την $\mathcal{T}$ κι ο (X,d) να είναι πλήρης μετρικός χώρος.*

(ii) Ο $(X,\mathcal{T})$ καλείται ***Πολωνικός χώρος*** *αν είναι διαχωρίσιμος και πλήρως μετρικοποιήσιμος.*

Πρόταση 1.1.6. *Ο χώρος $X^{\mathbb{N}}$ είναι πλήρως μετρικοποιήσιμος.*

Απόδειξη. Ορίζουμε μία απεικόνιση $d : X^{\mathbb{N}} \times X^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R}$ ως εξής:

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ \dfrac{1}{2^{n+1}}, & x \neq y \end{cases} \text{,όπου } n = \min\{k \in \mathbb{N} : x(k) \neq y(k)\}$$

Είναι εύκολο να δούμε πως η d είναι μία μετρική επί του $X^{\mathbb{N}}$.Θα δείξουμε ότι η d επάγει την τοπολογία γινόμενο,δηλαδή ότι $\mathcal{T}_{X^{\mathbb{N}}} = \mathcal{T}_d$,όπου $\mathcal{T}_d$ η μετρική τοπολογία.

Έστω $s \in X^{<\mathbb{N}}$, $x \in U_s$.Τότε $S\big(x, \frac{1}{2^{|s|+1}}\big) \subseteq U_s$. Πράγματι, έστω $y = (y_n)_n \in S\big(x, \frac{1}{2^{|s|+1}}\big) \Rightarrow d(x,y) < \frac{1}{2^{|s|+1}}$,το οποίο σημαίνει ότι $\min\{k \in \mathbb{N} : x(k) \neq y(k)\} >\mid s \mid$. Αν όχι, δηλαδή αν $x(k) \neq y(k)$ για κάποιο $k \leqslant \mid s \mid$,έπεται ότι $d(x,y) = \frac{1}{2^{k+1}} \geqslant \frac{1}{2^{|s|+1}}$, άτοπο! Άρα, $\min\{k \in \mathbb{N} : x(k) \neq y(k)\} >\mid s \mid \Rightarrow x \mid_{|s|} \sqsubseteq y \Rightarrow s \sqsubseteq y \Rightarrow y \in U_s$. Τελικώς, έχουμε $\mathcal{T}_{X^{\mathbb{N}}} \subseteq \mathcal{T}_d$.

Έστω, τώρα, $x = (x_n)_n \in X^{\mathbb{N}}$,ε$>0$. Θα δείξουμε ότι $S(x,$ε$)\in \mathcal{T}_{X^{\mathbb{N}}}$. Αρκεί να δειχθεί ότι $\forall y = (y_n)_n \in S(x,$ε$)$,$\exists s \in X^{<\mathbb{N}}$ ώστε $y \in U_s \subseteq S(x,$ε$)$. Κατ' αρχάς, $y \in S(x,$ε$)\Rightarrow d(x,y) <$ε $\Leftrightarrow$ ε$-d(x,y) > 0$. Ως γνωστόν, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε$\frac{1}{2^{n_0}} <$ ε$-d(x,y)$. Ισχυριζόμαστε πως $U_{y|_{n_0+1}} \subseteq S(x,$ε$)$. Πράγματι, αν $z = (z_n)_n \in U_{y|_{n_0+1}} \Rightarrow y\mid_{n_0+1} \sqsubseteq z \Rightarrow \min\{k \in \mathbb{N} : z(k) \neq y(k)\} > n_0 + 1 \Rightarrow d(y,z) < \frac{1}{2^{n_0+1}} <$ ε$-d(x,y)$. Η τριγωνική ανισότητα εξασφαλίζει πως $z \in S(x,$ε$)$ κι άρα $U_{y|_{n_0+1}} \subseteq S(x,$ε$)$. Τελικώς,$\mathcal{T}_d \subseteq \mathcal{T}_{X^{\mathbb{N}}}$.

Για να δούμε πως ο $(X^{\mathbb{N}}, d)$ είναι πλήρης μετρικός χώρος, έστω $(x^n)_n \subseteq X^{\mathbb{N}}$ ακολουθία Cauchy.Τότε $x^n = ({x_1}^n, {x_2}^n, {x_3}^n, \ldots) = ({x_m}^n)_m \in X^{\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Έστω $k \in \mathbb{N}$. Αφού η $(x^n)_n$ ακολουθία Cauchy,έχουμε πως υπάρχει $n_k \in \mathbb{N}$ ώστε $\forall n \geqslant n_k$ να ισχύει $d(x^n, x^{n_k}) < \frac{1}{2^{k+1}}$. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε $n \geqslant n_k$, ο μικρότερος φυσικός αριθμός στον οποίο οι ακολουθίες $({x_m}^n)_m$ και $({x_m}^{n_k})_m$

διαφέρουν θα είναι σίγουρα μεγαλύτερος του k,δηλαδή $({x_m}^n)_m = ({x_m}^{n_k})_m, \forall m \leqslant k$. Θέτουμε $z = ({x_k}^{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ και θα δείξουμε ότι η $(x^n)_n$ συγκλίνει στο z.

Πράγματι, έστω ε>0. Κατ΄ αρχάς, υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\dfrac{1}{2^{k_0+1}}<$ε. Τότε, για κάθε $n \geqslant n_{k_0}$ είναι $d(x^n, x^{n_{k_0}}) < \dfrac{1}{2^{k_0+1}} <$ε $\Rightarrow d(x^n, z) < \dfrac{1}{2^{k_0+1}} <$ε , κι άρα η $(x^n)_n$ είναι συγκλίνουσα. Τελικώς, ο $(X^{\mathbb{N}}, d)$ είναι πλήρης μετρικός χώρος. □

Πρόταση 1.1.7. *Ο $X^{\mathbb{N}}$ είναι διαχωρίσιμος τοπολογικός χώρος.*

Απόδειξη. Θέτουμε $D = \{x = (x_n)_n \in X^{\mathbb{N}} : \exists n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\forall n \geq n_0$ να ισχύει $x_n = x_{n_0}\}$ και ισχυριζόμαστε πως είναι το ζητούμενο σύνολο.

Κατ΄ αρχάς, το D είναι αριθμήσιμο,ως ισοπληθικό με το $X^{<\mathbb{N}}$. (Πράγματι,η απεικόνιση $(x_n)_n \longmapsto (x_1, \ldots, x_{n_0})$ είναι 1-1 κι επί). Θα δείξουμε ότι το D είναι πυκνό στον $X^{\mathbb{N}}$. Έστω $s = (s_1, s_2, \ldots, s_k) \in X^{<\mathbb{N}}$. Αρκεί να δειχθεί πως $D \cap U_s \neq \emptyset$.Θέτοντας $x = (s_1, s_2, \ldots, s_{k-1}, s_k, s_k, \ldots)$ έχουμε πως $s \sqsubseteq x \Rightarrow x \in U_s$ κι αφού προφανώς $x \in D$, το D είναι πυκνό υποσύνολο του $X^{\mathbb{N}}$. □

Παρατήρηση 1.1.8. *Με βάση τις παραπάνω δύο Προτάσεις, συμπεραίνουμε πως για οποιοδήποτε αριθμήσιμο σύνολο X εφοδιασμένο με την διακριτή τοπολογία, ο χώρος γινόμενο $X^{\mathbb{N}}$ είναι Πολωνικός.*

Πρόταση 1.1.9. *Αν το X δεν είναι μονοσύνολο, τότε ο χώρος $X^{\mathbb{N}}$ δεν έχει μεμονομένα σημεία.*

Απόδειξη. Έστω πως υπάρχει $x = (x_n)_n \in X^{\mathbb{N}}$ μεμονομένο σημείο. Τότε υπάρχει $U \subseteq X^{\mathbb{N}}$ ανοικτό ώστε $\{x\} = U$.Αφού η οικογένεια $\{U_s : s \in X^{<\mathbb{N}}\}$ αποτελεί βάση του $X^{\mathbb{N}}$, έπεται ότι υπάρχει $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n) \in X^{<\mathbb{N}}$ ώστε $\{x\} = U_s$. Αυτό είναι προφανώς άτοπο, καθώς θέτοντας π.χ. $y = (s_1, \ldots, s_n, w, w, \ldots)$, για $w \neq x_n$, έχουμε πως $x \neq y$ και $y \in U_s$. □

Πρόταση 1.1.10. *Οι χώροι $X^{\mathbb{N}}, X^{\mathbb{N}} \times X^{\mathbb{N}}, (X^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$ είναι όλοι ομοιομορφικοί.*

Απόδειξη. Ξεκινάμε δείχνοντας πως οι χώροι $X^{\mathbb{N}}, X^{\mathbb{N}} \times X^{\mathbb{N}}$ είναι ομοιομορφικοί. Ορίζουμε απεικόνιση $f : X^{\mathbb{N}} \longrightarrow X^{\mathbb{N}} \times X^{\mathbb{N}}$ με $f(x) = f\big((x_1, x_2, x_3, \ldots)\big) = \big((x_1, x_3, x_5, \ldots), (x_2, x_4, x_6, \ldots)\big)$. Η f είναι καλά ορισμένη, καθώς τα $(x_1, x_3, x_5, \ldots)$,

$(x_2, x_4, x_6, \dots)$ αποτελούν δύο ακολουθίες φυσικών αριθμών. Είναι άμεσο πως η f είναι 1-1 κι επί. Μένει να δείξουμε πως η f είναι συνεχής κι ανοικτή.

Η f είναι συνεχής

Έστω $U \subseteq X^{\mathbb{N}} \times X^{\mathbb{N}}$ ανοικτό. Θα δείξουμε ότι το $f^{-1}(U)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $X^{\mathbb{N}}$.Ως γνωστόν,η οικογένεια $\{V \times W : V, W$ ανοικτά υποσύνολα του $X^{\mathbb{N}}\}$ αποτελεί βάση για την τοπολογία του $X^{\mathbb{N}} \times X^{\mathbb{N}}$, συνεπώς το U γράφεται ως:

$$U = \bigcup_{i \in I} V_i \times W_i \text{ , με } V_i, W_i \text{ ανοικτά υποσύνολα του } X^{\mathbb{N}}, \forall i \in I$$

Τότε,$f^{-1}(U) = \bigcup\limits_{i \in I} f^{-1}(V_i \times W_i)$.Άρα, αρκεί να δείξουμε ότι για $i \in I$,το σύνολο $f^{-1}(V_i \times W_i)$ είναι ανοικτό στον $X^{\mathbb{N}}$. Εφ' όσον η οικογένεια $\{U_s : s \in X^{<\mathbb{N}}\}$ είναι βάση για την τοπολογία του $X^{\mathbb{N}}$, έχουμε ότι $V_i = \bigcup\limits_{s \in A_1} U_s$ και $W_i = \bigcup\limits_{s \in A_2} U_s$, όπου $A_1, A_2 \subseteq X^{<\mathbb{N}}$. Θέτουμε $G = f^{-1}(V_i \times W_i) = f^{-1}\Big(\bigcup\limits_{s \in A_1} U_s \times \bigcup\limits_{s \in A_2} U_s\Big)$ και θα δείξουμε πως το G^c είναι κλειστό υποσύνολο του $X^{\mathbb{N}}$.

Έστω, προς εις άτοπον απαγωγή, πως το G^c δεν είναι κλειστό, δηλαδή υπάρχει $x = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in X^{\mathbb{N}}$ με $x \in \overline{G^c} \setminus G^c \Rightarrow x \in G \Rightarrow f(x) \in \Big(\bigcup\limits_{s \in A_1} U_s\Big) \times \Big(\bigcup\limits_{s \in A_2} U_s\Big) \Rightarrow \exists s_1 = ({s_1}^1, {s_1}^2, \dots, {s_1}^n) \in A_1$ ώστε $(x_1, x_3, x_5, \dots) \in U_{s_1}$ και $\exists s_2 = ({s_2}^1, {s_2}^2, \dots, {s_2}^m) \in A_2$ ώστε $(x_2, x_4, x_6, \dots) \in U_{s_2}$. Έστω πως $n \leq m$,δηλαδή $\mid s_1 \mid \leq \mid s_2 \mid$. Τότε έχουμε ότι ${s_1}^1 = x_1, {s_1}^2 = x_3, {s_1}^3 = x_5, \dots$ και ${s_2}^1 = x_2, {s_2}^2 = x_4, {s_2}^3 = x_6, \dots$

Θέτουμε $s = ({s_1}^1, {s_2}^1, \dots, {s_1}^n, {s_2}^n, x_{2n-1}, {s_2}^{n+1}, \dots, {s_2}^m) \in X^{<\mathbb{N}}$. Τότε $x \in U_s$ και $x \in \overline{G^c} \Rightarrow U_s \cap G^c \neq \emptyset \Rightarrow \exists y = (y_1, y_2, \dots) \in U_s \cap G^c \Rightarrow s \sqsubseteq y$ και $f(y) \notin \Big(\bigcup\limits_{s \in A_1} U_s\Big) \times \Big(\bigcup\limits_{s \in A_2} U_s\Big)$. Όμως,$f(y) = \big((y_1, y_3, y_5, \dots), (y_2, y_4, y_6, \dots)\big)$ κι αφού $s \sqsubseteq y$ έπεται ότι $s_1 \sqsubseteq (y_1, y_3, y_5, \dots)$ και $s_2 \sqsubseteq (y_2, y_4, y_6, \dots)$

$$\Rightarrow \begin{cases} (y_1, y_3, y_5, \dots) \in U_{s_1} \subseteq \bigcup\limits_{s \in A_1} U_s \\ (y_2, y_4, y_6, \dots) \in U_{s_2} \subseteq \bigcup\limits_{s \in A_2} U_s \end{cases} \Rightarrow f(y) \in (\bigcup_{s \in A_1} U_s) \times (\bigcup_{s \in A_2} U_s), \text{άτοπο!}$$

Αντίστοιχα εργαζόμαστε στην περίπτωση που $m \leq n$. Τελικώς, η f αντιστρέφει ανοικτά σύνολα σε ανοικτά κι άρα είναι συνεχής.

Η $f : X^{\mathbb{N}} \to f\big(X^{\mathbb{N}}\big)$ είναι ανοικτή

Έστω $U \subseteq X^{\mathbb{N}}$ ανοικτό.Θα δείξουμε ότι το $f(U)$ είναι ανοικτό στον $X^{\mathbb{N}} \times X^{\mathbb{N}}$. Κατ' αρχάς, υπάρχει $A \subseteq X^{<\mathbb{N}}$ ώστε $U = \bigcup\limits_{s \in A} U_s \Rightarrow f(U) = \bigcup\limits_{s \in A} f(U_s)$. Άρα, αρκεί να δείξουμε ότι για $s \in A$, το σύνολο $f(U_s)$ είναι ανοικτό στον $X^{\mathbb{N}} \times X^{\mathbb{N}}$. Έστω $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n) \in A$.

Θέτουμε $t_1 = (s_1, s_3, \ldots, s_{w_1})$, όπου s_{w_1} το τελευταίο περιττό στοιχείο του s και $t_2 = (s_2, s_4, \ldots, s_{w_2})$, όπου s_{w_2} το τελευταίο άρτιο στοιχείο του s. Θα δείξουμε ότι $f(U_s) = U_{t_1} \times U_{t_2}$,το οποίο συνεπάγεται πως το $f(U_s)$ είναι ανοικτό στον $X^{\mathbb{N}} \times X^{\mathbb{N}}$. Πράγματι, έστω $z \in f(U_s)$. Τότε $z = f(x)$, για κάποιο $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots) \in U_s$. Είναι $f(x) = \big((x_1, x_3, \ldots), (x_2, x_4, \ldots)\big)$ κι άρα, εξ' ορισμού των συνόλων U_{t_1}, U_{t_2} έπεται ότι $t_1 \sqsubseteq (x_1, x_3, \ldots)$ και $t_2 \sqsubseteq (x_2, x_4, \ldots) \Rightarrow z = f(x) \in U_{t_1} \times U_{t_2}$.

Έστω, τώρα, $(x, y) \in U_{t_1} \times U_{t_2}$. Τότε $x = (x_1, x_2, \ldots) \in U_{t_1}$ και $y = (y_1, y_2, \ldots) \in U_{t_2}$. Θέτοντας $z = (x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots)$,έχουμε ότι $s \sqsubseteq z \Rightarrow z \in U_s \Rightarrow f(z) \in f(U_s) \Rightarrow (x, y) \in f(U_s)$.

Τελικώς, $f(U_s) = U_{t_1} \times U_{t_2}$ κι άρα η f είναι ανοικτή.

Για να δούμε πως οι χώροι $X^{\mathbb{N}}, (X^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$ είναι ομοιομορφικοί, ορίζουμε 'διαγώνια' απεικόνιση $g : (X^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}} \longrightarrow X^{\mathbb{N}}$ ώστε για $\overline{x} = (x^1, x^2, x^3, \ldots) \in (X^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$ να είναι $g(\overline{x}) = (x^1(1), x^1(2), x^2(1), x^1(3), \ldots)$. Παρόμοια με πριν, μπορεί να δειχθεί πως η g είναι ομοιομορφισμός. $\square$

Παρατήρηση 1.1.11. *Σε αναλογία με την προηγούμενη Πρόταση,μπορεί κανείς,με παρόμοιο αποδεικτικό τρόπο,να δείξει ότι οι χώροι:*

$$X^{\mathbb{N}}, (X^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}, \big(X^{\mathbb{N}}\big)^{(n)}, \text{για } n \geqslant 1, X^{(n)} \times \big(X^{\mathbb{N}}\big)^{(k)}, \text{για } n, k \geqslant 1$$

είναι όλοι ομοιομορφικοί.

1.2 Ο χώρος Baire

Σε αυτό το σημείο θα παρουσιάσουμε τον χώρο Baire $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, ο οποίος ορίζεται ως εξής:

$$\mathbb{N}^{\mathbb{N}} = \{\sigma = (\sigma_n)_n : \sigma_n \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}\}$$

Δηλαδή ο χώρος Baire αποτελεί το σύνολο όλων των ακολουθιών φυσικών αριθμών, εφοδιασμένο με την τοπολογία γινόμενο και τα στοιχεία του συνήθως συμβολίζονται με 'σ' ή 'τ'.

Σε πλήρη αναλογία με τα αποτελέσματα της προηγούμενης ενότητας,ο χώρος $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ είναι διαχωρίσιμος και πλήρως μετρικοποιήσιμος (δηλαδή Πολωνικός) τοπολογικός χώρος.

Θα διατυπώσουμε τώρα κάποια αποτελέσματα τα οποία χαρακτηρίζουν τα κλειστά και τα συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Ξεκινάμε με το ακόλουθο Λήμμα.

Λήμμα 1.2.1. *Έστω $A \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ και $\sigma \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i) Το σ είναι σημείο συσσώρευσης του A.

(ii) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $\tau \in A, \tau \neq \sigma$ με $\tau \mid_n = \sigma \mid_n$.

Απόδειξη. (i)$\Rightarrow$(ii) Έστω $n \in \mathbb{N}$. Τότε $\sigma \in U_{\sigma|_n}$ κι άρα, εφ' όσον το σ σημείο συσσώρευσης του S, $U_{\sigma|_n} \cap (A \setminus \{\sigma\}) \neq \emptyset \Rightarrow \exists \tau \in U_{\sigma|_n} \cap (A \setminus \{\sigma\}) \Rightarrow \tau \neq x$ και $\tau \in U_{\sigma|_n} \Rightarrow \sigma \mid_n \sqsubseteq \tau \Rightarrow \sigma \mid_n = \tau \mid_n$.

(ii)$\Rightarrow$(i) Έστω $s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ ώστε $\sigma \in U_s$. Τότε είναι άμεσο πως $U_s \cap (A \setminus \{\sigma\}) \neq \emptyset$, λόγω του (ii).Άρα, το σ είναι σημείο συσσώρευσης του A. $\square$

Πρόταση 1.2.2. *Έστω $F \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i) Το F είναι κλειστό.

(ii) Υπάρχει κλαδεμένο δέντρο $T \subseteq \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ ώστε $F = [T]$.

Απόδειξη. (i)$\Rightarrow$(ii) Θέτουμε $T = \{\sigma \mid_n : \sigma \in F, n \in \mathbb{N}\}$. Προφανώς το T είναι κλαδεμένο δέντρο και $F \subseteq [T]$.Έστω $\sigma \in [T]$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $\tau \in F$ ώστε $\tau \mid_n = \sigma \mid_n$, το οποίο σε συνδυασμό με το προηγούμενο Λήμμα έπεται ότι το σ είναι οριακό σημείο του F. Εφ' όσον το F είναι εξ' υποθέσεως κλειστό, έχουμε ότι $\sigma \in F$ κι άρα $[T] \subseteq F$.

(ii)$\Rightarrow$(i) Έστω $T \subseteq \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ κλαδεμένο δέντρο ώστε $F = [T]$. Έστω, επίσης, $\sigma \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ σημείο συσσώρευσης του F. Αρκεί να δείξουμε ότι $\sigma \in [T]$, δηλαδή ότι $\sigma \mid_n \in T, \forall n \in \mathbb{N}$. Για $n \in \mathbb{N}$, υπάρχει $\tau \in U_{\sigma|_n} \cap [T] \Rightarrow \tau \in [T]$ και $\sigma \mid_n = \tau \mid_n \in T$. $\square$

Θεώρημα 1.2.3. *Έστω $K \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i) Το K είναι συμπαγές

(ii) Υπάρχει κλαδεμένο δέντρο $T \subseteq \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ πεπερασμένης διακλάδωσης ώστε $K = \big[T\big]$.

Απόδειξη. (i)⇒(ii) Αφού K συμπαγές ⇒ K κλειστό κι από την Πρόταση 1.2.2 υπάρχει $T \subseteq \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ κλαδεμένο δέντρο ώστε $K = \big[T\big]$. Τότε το T είναι αναγκαστικά πεπερασμένης διακλάδωσης. Αν όχι, υπάρχουν $s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$, $(k_n)_n \subseteq \mathbb{N}$ ώστε $s \frown k_n \in T, \forall n \in \mathbb{N}$.Το T είναι κλαδεμένο, άρα $U_{s\frown(k_n)} \cap \big[T\big] \neq \emptyset, \forall n \in \mathbb{N}$. Τότε:

$$\big[T\big] \subseteq \Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} U_{s\frown(k_n)}\Big) \cup \Big(\{t \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} : s \perp t \text{ ή } t \sqsubseteq s\}\Big)$$

το οποίο είναι ένα ανοικτό κάλυμμα του $\big[T\big] = K$ χωρίς πεπερασμένο υποκάλυμμα, άτοπο! αφού το K συμπαγές. Άρα,το T είναι πεπερασμένης διακλάδωσης.

(ii)⇒(i) Έστω $T \subseteq \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ κλαδεμένο δέντρο πεπερασμένης διακλάδωσης ώστε $K = \big[T\big]$. Υποθέτουμε,προς εις άτοπον απαγωγή,πως το K δεν είναι συμπαγές δηλαδή υπάρχει $\{U_i\}_{i\in I}$ ανοικτό κάλυμμα του K χωρίς πεπερασμένο υποκάλυμμα.

Αρκεί να βρούμε $\sigma \in \big[T\big]$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$, το σύνολο $U_{\sigma|_n} \cap \big[T\big]$ να μην καλύπτεται από πεπερασμένα το πλήθος U_i. Πράγματι, τότε θα ισχύει $\sigma \in U_{i_0}$ για κάποιο $i_0 \in I$ και θα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $U_{\sigma|_{n_0}} \subseteq U_{i_0}$, το οποίο είναι άτοπο.

Θα κατασκευάσουμε το ζητούμενο $\sigma \in \big[T\big]$ επαγωγικά. Για $n = 0$, το $U_{\sigma|_0} \cap \big[T\big]$ εξ' υποθέσεως δεν έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα. Έστω πως για $n \in \mathbb{N}$ έχουμε επιλέξει $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n \in \mathbb{N}$. Θέτοντας $s = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ θα είναι $\{m \in \mathbb{N} : s \frown (m) \in T\} = \{k_1, k_2, \ldots, k_n\}$, άρα:

$$U_{\sigma|_n} \cap \big[T\big] = \bigcup_{i=1}^{n} \Big(U_{\sigma|_n \frown (k_i)} \cap \big[T\big]\Big)$$

Όμως, το σύνολο $U_{\sigma|_n} \cap \big[T\big]$ δεν έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα, άρα υπάρχει $i_0 \in I$ ώστε το σύνολο $U_{\sigma|_n \frown (k_{i_0})} \cap \big[T\big]$ να μην έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα του $(U_i)_{i\in I}$, συνεπώς θέτουμε $\sigma_{n+1} = k_{i_0}$

Ορίζοντας, τελικώς,$\sigma = (\sigma_n)_n$, καταλήγουμε σε άτοπο. □

Πρόταση 1.2.4. *Έστω $K \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ συμπαγές. Τότε $intK = \emptyset$.*

Απόδειξη. Έστω, προς εις άτοπον απαγωγή, πως υπάρχει $s = (s_1, s_2, \ldots, s_k) \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ ώστε να ισχύει $U_s \subseteq K$. Θα κατασκευάσουμε ένα ανοικτό κάλυμμα του K χωρίς πεπερασμένο υποκάλυμμα, το οποίο θα μας οδηγήσει σε άτοπο.

Εύκολα βλέπουμε πως $U_s = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_{s^\frown n}$. Για $\sigma \in K \setminus U_s$ θεωρούμε το σύνολο $U_{\sigma|_{|s|}}$. Τότε $U_s \cap U_{\sigma|_{|s|}} = \emptyset$. Πράγματι, αν υπήρχε $\tau \in U_s \cap U_{\sigma|_{|s|}}$, τότε $\sigma \mid_{|s|} \sqsubseteq \tau$ και $s \sqsubseteq \tau \Rightarrow s \sqsubseteq \sigma \Rightarrow \sigma \in U_s$,άτοπο.

Είναι $K \subseteq \Big(\bigcup_{\sigma \in K \setminus U_s} U_{\sigma|_{|s|}} \cap K \Big) \cup \Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} U_{s^\frown n} \Big)$ κι αφού ο χώρος $(K, \mathcal{T}_K)$ είναι συμπαγής, το παραπάνω κάλυμμα έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα $\Rightarrow \exists A \subseteq K \setminus U_s$ πεπερασμένο και $F \subseteq \mathbb{N}$ πεπερασμένο ώστε:

$$K \subseteq \Big(\bigcup_{\sigma \in A} U_{\sigma|_{|s|}} \cap K \Big) \cup \Big(\bigcup_{n \in F} U_{s^\frown n} \Big)$$

Αφού για κάθε $\sigma \in A$ είναι $U_s \cap U_{\sigma|_{|s|}} = \emptyset$, το σύνολο U_s αναγκαστικά καλύπτεται από την οικογένεια $\{U_{s^\frown n} : n \in F\}$. Αυτό, όμως, είναι άτοπο, καθώς για $w \in \mathbb{N} \setminus F$, το στοιχείο $z = (s_1, s_2, \ldots, s_k, w, w, \ldots) \in U_s \setminus \Big(\bigcup_{n \in F} U_{s^\frown n} \Big)$. $\square$

1.3 Ο χώρος Cantor

Ο χώρος Cantor $2^{\mathbb{N}}$ ορίζεται ως εξής:

$$2^{\mathbb{N}} = \{\sigma = (\sigma_n)_n : \sigma_n \in \{0, 1\}, \forall n \in \mathbb{N}\}$$

δηλαδή αποτελεί το σύνολο όλων των δυαδικών ακολουθιών, εφοδιασμένο με την τοπολογία γινόμενο.

Από τα προηγούμενα έπεται ότι ο χώρος Cantor είναι ένας πλήρως μετρικοποιήσιμος και διαχωρίσιμος μετρικός χώρος .Επίσης, από το Θεώρημα Tychonoff εύκολα βλέπουμε πως ο $2^{\mathbb{N}}$ είναι **συμπαγής** μετρικός χώρος.

Παρατήρηση 1.3.1. *Γνωστό από την Ανάλυση είναι το σύνολο Cantor, το οποίο ορίζεται ως:*

$$C = \{x \in [0, 1] : x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n}, \text{ όπου } x_n = 0 \text{ ή } 2, \forall n \in \mathbb{N}\}$$

δηλαδή το σύνολο όλων των αριθμών στο [0,1], των οποίων το τριαδικό ανάπτυγμα αποτελείται μόνο από 0 και 2. Από τοπολογικής σκοπιάς, το C και ο χώρος $2^{\mathbb{N}}$ ταυτίζονται. Πράγματι, η απεικόνιση $f : 2^{\mathbb{N}} \longrightarrow C$ με $f\big((\sigma_n)_n\big) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sigma_n}{3^n}$ είναι ομοιομορφισμός.

Θα δείξουμε σε αυτό το σημείο πως ο χώρος Cantor περιέχει υποσύνολο ομοιομορφικό με το $[0,1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$, αποτέλεσμα το οποίο, όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο, χαρακτηρίζει τη σχέση μεταξύ των χώρων Baire και Cantor. Πρώτα, χρειαζόμαστε τα ακόλουθα Λήμματα:

Λήμμα 1.3.2. *Έστω $x \in [0,1]$ ώστε το x να έχει δύο δυαδικές αναπαραστάσεις, έστω $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2^n}$, όπου $(a_n)_n \neq (b_n)_n, a_n, b_n \in \{0,1\}, \forall n \in \mathbb{N}$. Τότε, $\exists k \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε:*

(i) $a_i = a_j, \forall i, j \geqslant k$

(ii) $b_i = b_j, \forall i, j \geqslant k$

(iii) $a_i \neq b_j, \forall i, j \geqslant k$

Απόδειξη. Έστω $n_0 = \min\{n \in \mathbb{N} : a_n \neq b_n\}$. Τότε, για $n < n_0$ είναι $a_n = b_n$, συνεπώς:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2^n} \Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} = \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{b_n}{2^n}.$$

Έστω πως $a_{n_0} = 1, b_{n_0} = 0$.Τότε:

$$\frac{1}{2^{n_0}} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} = \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{b_n}{2^n}$$
$$\Rightarrow \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{b_n - a_n}{2^n} = \frac{1}{2^{n_0}} = \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$
$$\Rightarrow \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{b_n - a_n - 1}{2^n} = 0$$

Θέτουμε $c_n = \dfrac{b_n - a_n - 1}{2^n}, \forall n \in \mathbb{N}$. Είναι:

- $c_n = -\dfrac{1}{2^n}$, για $b_n = 0, a_n = 0$
- $c_n = 0$,για $b_n = 1, a_n = 0$
- $c_n = -\dfrac{1}{2^{n-1}}$,για $b_n = 0, a_n = 1$
- $c_n = -\dfrac{1}{2^n}$,για $b_n = 1, a_n = 1$

Είναι $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} c_n = 0 \Rightarrow a_n = 0$ και $b_n = 1, \forall n \geqslant n_0+1$, δηλαδή:

$$\begin{cases} b_n = 1, \forall n \geqslant n_0+1 \\ a_n = 0, \forall n \geqslant n_0+1 \\ a_{n_0} = 1, b_{n_0} = 0 \end{cases}$$

Θέτοντας $k = n_0+1$, έχουμε το ζητούμενο. Αντίστοιχα εργαζόμαστε στην περίπτωση που $a_{n_0} = 0, b_{n_0} = 1$.

□

Λήμμα 1.3.3. *Έστω $x \in [0,1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$. Τότε το x έχει μοναδική δυαδική αναπαράσταση.*

Απόδειξη. Έστω πως το x έχει παραπάνω από μία δυαδικές αναπαραστάσεις, δηλαδή $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2^n}$,με $(a_n)_n \neq (b_n)_n, a_n, b_n \in \{0,1\}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Από το προηγούμενο Λήμμα, υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε:

(i) $a_i = a_j, \forall i,j \geqslant k_0$

(ii) $b_i = b_j, \forall i,j \geqslant k_0$

(iii) $a_i \neq b_j, \forall i,j \geqslant k_0$

Έστω πως $a_n = 0$ $\forall n \geqslant k_0$. Τότε $x = \sum_{n=1}^{k_0-1} \frac{a_n}{2^n} \in \mathbb{Q}$ (ρητές πράξεις), άτοπο! αφού $x \in [0,1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$. Άρα, το x έχει μοναδική δυαδική αναπαράσταση.

□

Είμαστε τώρα σε θέση να αποδείξουμε το προαναφερθέν αποτέλεσμα.

Θεώρημα 1.3.4. *Υπάρχει $Z \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ ομοιομορφικό με το $[0,1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$.*

Απόδειξη. Έστω $x \in [0,1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$. Τότε, από τα προηγούμενα δύο Λήμματα, το x έχει μοναδική δυαδική αναπαράσταση, έστω $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(x)}{2^n}$, όπου $a_n(x) \in \{0,1\}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Ορίζουμε απεικόνιση $f : [0,1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \longrightarrow 2^{\mathbb{N}}$ με:

$$f(x) = f\Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(x)}{2^n}\Big) = \big(a_n(x)\big)_n$$

Η f είναι καλά ορισμένη λόγω της μοναδικότητας της δυαδικής αναπαράστασης του x. Επιπλέον, μπορούμε να δούμε πως η f είναι 1-1 κι αμφισυνεχής. Άρα, το σύνολο $Z = f\big([0,1]\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\big) \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ είναι ομοιομορφικό με το $[0,1]\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$. $\square$

2 Σχήματα Souslin και Χαρακτηρισμοί Καθιερωμένων Μοντέλων

Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιαστούν χαρακτηρισμοί τριών καθιερωμένων μοντέλων διαχωρίσιμων μετρικών χώρων: των ρητών $\mathbb{Q}$, του χώρου Baire $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ και του χώρου Cantor $2^{\mathbb{N}}$.

Κύριος σκοπός μας είναι η διατύπωση και απόδειξη αποτελεσμάτων για τα μοντέλα αυτά, που αφορούν:

- Τοπολογικούς Χαρακτηρισμούς
- Καθολικότητα
- Οικογένειες Χώρων που αποτελούν Συνεχείς Εικόνες των Μοντέλων
- Εμφυτεύσεις σε άλλους Χώρους

Τα περισσότερα αποτελέσματα αυτού του Κεφαλαίου βασίζονται στην έννοια των Σχημάτων Souslin, με τον ορισμό των οποίων και θα ξεκινήσουμε.

2.1 Σχήματα Souslin

Ορισμός 2.1.1. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος.*

(i) ***Σχήμα Souslin*** *στον X καλείται μία απεικόνιση $A : \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \longrightarrow \mathcal{P}(X)$*

(ii) Αν A ένα σχήμα Souslin στον X, τότε ορίζεται η ***πράξη Souslin $\mathcal{S}$ στο A*** *ως εξής:*

$$\mathcal{S}(A) = \bigcup_{\sigma \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \bigcap_{n=1}^{\infty} A(\sigma|_n)$$

(iii) Αν A ένα σχήμα Souslin στον X, το A καλείται ***ανοικτό*** *(αντ.* ***κλειστό****) αν το σύνολο $A(s)$ είναι ανοικτό (αντ. κλειστό) υποσύνολο του $X, \forall s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$.*

Θα χρησιμοποιήσουμε τα σχήματα Souslin προκειμένου να κατασκευάσουμε συνεχείς συναρτήσεις απο το $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (ή υποσύνολά του) σε δεδομένους μετρικοποιήσιμους τοπολογικούς χώρους. Η κατασκευή αυτή έχει ως εξής:

Έστω $(X, \mathcal{T})$ μετρικοποιήσιμος τοπολογικός χώρος, d μία μετρική επί του X συμβατή με την τοπολογία $\mathcal{T}$ κι έστω A ένα σχήμα Souslin στον X. Λέμε ότι το A ικανοποιεί την **συνθήκη διαμέτρου** αν:

$$\lim_{n\to+\infty} diam\, A(\sigma|_n) = 0, \quad \forall \sigma \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$$

Αν η συνθήκη διαμέτρου ικανοποιείται, τότε το σύνολο $\bigcap_{n=1}^{\infty} A(\sigma|_n)$ περιέχει το πολύ ένα σημείο. Ως εκ τούτου, θέτοντας:

$$Z = \{\sigma \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \bigcap_{n=1}^{\infty} A(\sigma|_n) \neq \emptyset\}$$

μπορούμε να ορίσουμε μία συνάρτηση $\phi : Z \longrightarrow X$ με:

$$\{\phi(\sigma)\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} A(\sigma|_n), \quad \forall \sigma \in Z$$

Η συνάρτηση ϕ καλείται ως **η συνάρτηση που επάγεται από το A**.

Η Πρόταση που ακολουθεί θα αποτελέσει τη βάση του παρόντος Κεφαλαίου, καθώς χαρακτηρίζει, μέσω των ιδιοτήτων του χώρου $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ που παρουσιάστηκαν στα προηγούμενα, τόσο τα τοπολογικά γνωρίσματα του Z, όσο κι όλες τις 'καλές ' ιδιότητες που θέλουμε να έχει η ϕ.

Πρόταση 2.1.2. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ μετρικοποιήσιμος τοπολογικός χώρος, d μία συμβατή μετρική επί του X, $A : \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ ένα σχήμα Souslin που ικανοποιεί την συνθήκη διαμέτρου και ϕ η επαγόμενη συνάρτηση. Ισχύουν τα παρακάτω:*

(i) Η ϕ είναι συνεχής

(ii) $\phi(Z) = \mathcal{S}(A) = \bigcup_{\sigma\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \bigcap_{n=1}^{\infty} A(\sigma|_n)$

(iii) Αν ο (X, d) είναι πλήρης μετρικός χώρος και το A είναι κλειστό, τότε το Z είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$

(iv) Αν $\bigcap_{n=1}^{k} A(\sigma|_n) \neq \emptyset$ και $A(\sigma|_k) \subseteq \bigcup_{q=1}^{\infty} A\big((\sigma|_k) \frown q\big)$, $\forall \sigma|_k \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$, τότε το Z είναι πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$

(v) Αν το A είναι ανοικτό και $A(\sigma|_n) \subseteq \bigcup_{q=1}^{\infty} A\big((\sigma|_n) \frown q\big)$, $\forall \sigma|_n \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$, τότε η $\phi : Z \longrightarrow \phi(Z)$ είναι ανοικτή απεικόνιση

(vi) *Αν* $\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A(\sigma|_n)\Big) \bigcap \Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A(\tau|_n)\Big) = \emptyset,\ \forall \sigma, \tau \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ *με* $\sigma \neq \tau$*, τότε η* ϕ *είναι 1-1*

(vii) *Αν το* A *είναι ανοικτό κι η οικογένεια* $\{A\big((\sigma|_n) \frown q\big) : q \in \mathbb{N}\}$ *αποτελείται από ξένα ανά δύο υποσύνολα του* $A(\sigma|_n)$ $\forall \sigma|_n \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$*, τότε η* $\phi : Z \longrightarrow \phi(Z)$ *είναι ομοιομορφισμός*

(viii) *Αν* $A(\emptyset) = X$ *κι η οικογένεια* $\{A\big((\sigma|_n) \frown q\big) : q \in \mathbb{N}\}$ *αποτελεί κάλυμμα του* $A(\sigma|_n), \forall \sigma|_n \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$*, τότε* $\phi(Z) = X$

Απόδειξη. (i) Έστω $x \in X$,ε> 0. Αρκεί να δείξουμε ότι $\phi^{-1}\big(S(x,\varepsilon)\big)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του Z. Αν $\phi^{-1}\big(S(x,\varepsilon)\big) = \emptyset$ το αποτέλεσμα είναι άμεσο.

Έστω, λοιπόν, πως $\phi^{-1}\big(S(x,\varepsilon)\big) \neq \emptyset$ κι έστω $\sigma \in \phi^{-1}\big(S(x,\varepsilon)\big) \Rightarrow \{\phi(\sigma)\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} A(\sigma|_n) \subseteq S(x,\varepsilon)$. Αφού $diam A(\sigma|_n) \to 0, \exists n_\sigma \in \mathbb{N}$ ώστε :

$$\begin{aligned} diam A(\sigma|_{n_\sigma}) &< \frac{\epsilon - d(x,\phi(\sigma))}{2} \\ &\Rightarrow A(\sigma|_{n_\sigma}) \subseteq S(x,\varepsilon) \end{aligned}$$

Θεωρούμε το σύνολο $U_{\sigma|_{n_\sigma}} \cap Z$ το οποίο είναι ανοικτό στο Z. Θα δείξουμε ότι $U_{\sigma|_{n_\sigma}} \cap Z \subseteq \phi^{-1}\big(S(x,\varepsilon)\big)$. Πράγματι, αν $\tau \in U_{\sigma|_{n_\sigma}} \cap Z$ τότε:

$$\begin{aligned} \tau|_{n_\sigma} = \sigma|_{n_\sigma} \quad &\text{και} \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A(\tau|_n) \neq \emptyset \\ &\Rightarrow A(\sigma|_{n_\sigma}) = A(\tau|_{n_\sigma}) \\ &\Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A(\tau|_n) \subseteq A(\tau|_{n_\sigma}) \subseteq S(x,\varepsilon) \\ \Rightarrow \phi^{-1}\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A(\tau|_n)\Big) &= \phi^{-1}\Big(\{\phi(\tau)\}\Big) \subseteq \phi^{-1}\Big(S(x,\varepsilon)\Big) \\ &\Rightarrow \tau \in \phi^{-1}\Big(S(x,\varepsilon)\Big) \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι $\phi^{-1}\big(S(x,\varepsilon)\big) = \bigcup_{\sigma \in \phi^{-1}(S(x,\epsilon))} U_{\sigma|_{n_\sigma}} \cap Z \in \mathcal{T}_Z$ κι άρα η ϕ είναι συνεχής.

(ii)Αν $\sigma \in Z$,τότε $\{\phi(\sigma)\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} A(\sigma|_n) \subseteq \phi(Z) \Rightarrow \phi(\sigma) \in \bigcup_{\sigma \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \bigcap_{n=1}^{\infty} A(\sigma|_n)$

Αν $x \in \bigcup_{\sigma \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \bigcap_{n=1}^{\infty} A(\sigma|_n) \Rightarrow x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A(\sigma_0|_n) = \{\phi(\sigma_0)\}$, για κάποιο $\sigma_0 \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ κι άρα αναγκαστικά $x = \phi(\sigma_0) \Rightarrow x \in \phi(Z)$

(iii) Θα δείξουμε ότι $Z = \overline{Z}$. Έστω σ_0 οριακό σημείο του Z. Τότε, υπάρχει $(\sigma_n)_n \subseteq Z$ με $\sigma_n \to \sigma_0 \Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{T}_Z$ με $\sigma_0 \in U, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\forall n \geqslant n_0$ να ισχύει $\sigma_n \in U$.

Εξετάζουμε την ακολουθία $(\phi(\sigma_n))_n$. Αρχικά, παρατηρούμε ότι για $k \in \mathbb{N}, \exists n_k \in \mathbb{N}$ ώστε $\forall n \geqslant n_k : \ \phi(\sigma_n) \in A(\sigma_0|_k)$.

Πράγματι,έστω $k \in \mathbb{N}$. Τότε, αφού $\sigma_0 \in U_{\sigma_0|_k}$ και $\sigma_n \to \sigma_0$,$\exists n_k \in \mathbb{N}$ ώστε $\forall n \geqslant n_k$ να ισχύει $\sigma_n \in U_{\sigma_0|_k} \Rightarrow \sigma_0|_k = \sigma_n|_k, \forall n \geqslant n_k$.Άρα:

$$\begin{aligned} A(\sigma_n|_k) &= A(\sigma_0|_k), \forall n \geqslant n_k \\ \Rightarrow \{\phi(\sigma_n)\} &= \bigcap_{q=1}^{\infty} A(\sigma_n|_q) \subseteq A(\sigma_0|_k), \forall n \geqslant n_k \\ \Rightarrow \phi(\sigma_n) &\in A(\sigma_0|_k), \forall n \geqslant n_k \end{aligned}$$

Θα δείξουμε ότι η $\big(\phi(\sigma_n)\big)_n$ είναι ακολουθία Cauchy στον X.Έστω ε> 0.Κατ΄ αρχάς,$\exists n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $diamA(\sigma_0|_{n_0}) < \dfrac{\epsilon}{2}$.Επίσης,$\exists n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε $\phi(\sigma_n) \in A(\sigma_0|_{n_0})$, $\forall n \geqslant n_1$.Άρα,για $n, m \geqslant n_1$ είναι:

$$d\big(\phi(\sigma_n), \phi(\sigma_m)\big) \leqslant diamA(\sigma_0|_{n_0}) < \varepsilon$$

δηλαδή η $\big(\phi(\sigma_n)\big)_n$ είναι ακολουθία Cauchy .

Έστω,τώρα,$k \in \mathbb{N}$.Όπως πριν,$\exists n_k \in \mathbb{N}$ ώστε $\phi(\sigma_n) \in A(\sigma_0|_k), \forall n \geqslant n_k$. Αφού ο (X, d) είναι πλήρης και το $A(\sigma_0|_k)$ είναι εξ΄ υποθέσεως κλειστό, έπεται πως ο χώρος $\big(A(\sigma_0|_k), d\,|_{A(\sigma_0|_k)}\big)$ είναι πλήρης μετρικός χώρος κι άρα η ακολουθία $\big(\phi(\sigma_n)\big)_{n \geqslant n_k}$ συγκλίνει σε στοιχείο του $A(\sigma_0|_k) \Rightarrow \lim_n \phi(\sigma_n) \in A(\sigma_0|_k)$. Όμως, αφού αυτό συμβαίνει για κάθε $k \in \mathbb{N}$,έχουμε ότι $\lim_n \phi(\sigma_n) \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A(\sigma_0|_n)$.Η ϕ είναι συνεχής, άρα $\phi(\sigma_n) \to \phi(\sigma_0) \Leftrightarrow \lim_n \phi(\sigma_n) = \phi(\sigma_0)$,συνεπώς:

$$\{\phi(\sigma_0)\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} A(\sigma_0|_n) \neq \emptyset \Rightarrow \sigma_0 \in Z$$

Πριν προχωρήσουμε στην απόδειξη των υπολοίπων, θα δείξουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα, από το οποίο τα (iv),(v) ακολουθούν άμεσα.

Αν το A ικανοποιεί τη σχέση $A(\sigma|_n) \subseteq \bigcup_{q=1}^{\infty} A\big((\sigma|_n) \frown q\big), \forall \sigma|_n \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$,τότε για $s = (s_1, \ldots, s_k) \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ είναι:

$$\phi(Z \cap U_s) = \bigcap_{j=1}^{k} A(s|_j)$$

Έστω $x \in \phi(Z \cap U_s)$. Τότε $\exists \tau \in Z \cap U_s$ ώστε $x = \phi(\tau) \Rightarrow s \sqsubseteq \tau$ και $\{\phi(\tau)\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} A(\tau_n) \neq \emptyset \Rightarrow A(\tau|_j) = A(s|_j), \forall j = 1, \dots, k \Rightarrow x = \phi(\tau) \in \bigcap_{j=1}^{k} A(s|_j)$

Έστω,τώρα,$x \in \bigcap_{j=1}^{k} A(s|_j) \Rightarrow x \in A(s|_j), \forall j = 1, \dots, k$. Θα κατασκευάσουμε επαγωγικά μία ακολουθία $\tau = (\tau_n)_n \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ με $s \sqsubseteq \tau$ και $\bigcap_{n=1}^{\infty} A(\tau|_n) = \{x\}$. Τότε, θα είναι $\phi(\tau) = x$ και $\tau \in Z \cap U_s \Rightarrow x \in \phi\big(Z \cap U_s\big)$

Για $j = 1, \dots, k$ θέτουμε $\tau_j = s_j$. Από την υπόθεση είναι $A(s) \subseteq \bigcup_{q=1}^{\infty} A(s \frown q)$ κι αφού $x \in \bigcap_{j=1}^{k} A(s|_j)$ έπεται πως $\exists q_1 \in \mathbb{N}$ ώστε $x \in A(s \frown q_1)$.Θέτουμε $\tau_{k+1} = q_1$. Έστω πως για $w \in \mathbb{N}$ έχουν επιλεγεί $q_1, \dots, q_w \in \mathbb{N}$ με τις κατάλληλες ιδιότητες. Όπως πριν, είναι:

$$A\big(s \frown q_1 \frown \dots \frown q_w\big) \subseteq \bigcup_{q=1}^{\infty} A\big(s \frown q_1 \frown \dots \frown q_w \frown q\big)$$

κι άρα $\exists q_{w+1} \in \mathbb{N}$ ώστε $x \in A\big(s \frown q_1 \frown \dots \frown q_{w+1}\big)$. Θέτουμε $\tau_{w+1} = q_{w+1}$

Τελικώς, η ακολουθία $\tau = \big(\tau_n\big)_n$ μας δίνει το ζητούμενο.

(iv) Για να δείξουμε ότι το Z είναι πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ είναι $U_s \cap Z \neq \emptyset$. Πράγματι, για $s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ είναι, όπως δείξαμε, $\phi(U_s \cap Z) = \bigcap_{j=1}^{k} A(s|_j)$. Άφου υποθέτουμε πως $\bigcap_{j=1}^{k} A(s|_j) \neq \emptyset \Rightarrow$ $\exists x \in \phi(U_s \cap Z) \Rightarrow \exists \sigma \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ με $\phi(\sigma) = x \Rightarrow \sigma \in U_s \cap Z$

(v) Έστω $V \subseteq Z$ ανοικτό $\Rightarrow V = \bigcup_{s \in K} \big(U_s \cap Z\big)$ για κάποιο $K \subseteq \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$, συνεπώς αρκεί να δείξουμε ότι για $s \in K$,το $\phi(U_s \cap Z)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X. Όμως, $\phi(U_s \cap Z) = \bigcap_{j=1}^{k} A(s|_j)$ κι αφού το A ανοικτό σχήμα Souslin,έχουμε το ζητούμενο.

(vi) Έστω $\sigma, \tau \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ με $\sigma \neq \tau$. Τότε, είναι:

$$\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A(\sigma|_n)\Big) \bigcap \Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A(\tau|_n)\Big) = \emptyset \Rightarrow \{\phi(\sigma)\} \cap \{\phi(\tau)\} = \emptyset \Rightarrow \phi(\sigma) \neq \phi(\tau)$$

κι άρα η ϕ είναι 1-1.

(vii) Θα δείξουμε ότι η $\phi : Z \to \phi(Z)$ είναι 1-1,συνεχής κι ανοικτή.Η συνέχεια της ϕ έπεται από το (i) της παρούσης Πρότασης.

Η ϕ είναι 1-1

Έστω $\sigma, \tau \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ με $\sigma \neq \tau$ κι έστω,προς εις άτοπον απαγωγή,πως $\phi(\sigma) = \phi(\tau)$. Τότε $\bigcap\limits_n A(\sigma|_n) = \bigcap\limits_n A(\tau|_n) = \{x\}$,για κάποιο $x \in X \Leftrightarrow x \in A(\sigma|_n) \cap A(\tau|_n), \forall n \in \mathbb{N}$.

Έστω n_0 ο μικρότερος φυσικός αριθμός ώστε $\sigma_n \neq \tau_n$.Τότε $A(\sigma|_j) = A(\tau|_j), \forall j = 1, \ldots, n_0 - 1$. Όμως, απο υπόθεση τα σύνολα $A(\sigma|_{n_0}), A(\tau|_{n_0})$ αποτελούν ξένα ανά δύο υποσύνολα του $A(\sigma|_{n_0-1})$, άτοπο! αφού υποθέσαμε πως $x \in A(\sigma|_{n_0}) \cap A(\tau|_{n_0})$. Άρα, η ϕ είναι 1-1.

Η $\phi : Z \to \phi(Z)$ είναι ανοικτή απεικόνιση

Έστω $(x_n)_n \subseteq \phi(Z)$ και $x_0 \in \phi(Z)$ ώστε $x_n \to x_0$. Τότε, υπάρχουν $(\sigma_n)_n \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ και $\sigma_0 \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ώστε $x_0 = \phi(\sigma_0), x_n = \phi(\sigma_n), \forall n \in \mathbb{N}$. Θα δείξουμε ότι $(\sigma_n) \to \sigma_0$.

Έστω $s = (s_1, \ldots, s_k) \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ ώστε $\sigma_0 \in U_s \Leftrightarrow \sigma_0|_k = s$. Αναζητούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geqslant n_0$ να ισχύει ότι $\sigma_n \in U_s$. Εξετάζουμε το σύνολο $A(\sigma_0|_k)$, το οποίο είναι ανοικτό στον X. Αφού $\phi(\sigma_n) \to \phi(\sigma_0)$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geqslant n_0$ να είναι $\phi(\sigma_n) \in A(\sigma_0|_k)$. Τότε, $\phi(\sigma_n) \in A(\sigma_0|_i)$, $\forall i = 1, \ldots, k, \forall n \geqslant n_0$.

Πράγματι, έστω πως υπάρχουν $w \geqslant n_0$ και $j \in \{1, \ldots, k\}$ ώστε $\phi(\sigma_w) \notin A(\sigma_0|j)$. Όμως, $\phi(\sigma_w) \in A(\sigma_0|_k)$ κι αφού $j \leqslant k$ από την υπόθεση έπεται ότι:

$$\phi(\sigma_w) \in A(\sigma_0|_k) \subseteq A(\sigma_0|_j)$$

το οποίο είναι φανερά άτοπο.

Έστω, τώρα, $n \geqslant n_0$ κι έστω πως υπάρχει $j \in \{1, \ldots, k\}$ ώστε $\sigma_n(j) \neq s(j)$. Όμως, τότε θα είναι $A(\sigma_n|_j) \cap A(s|_j) = \emptyset$ (από υπόθεση) κι αφού $A(\sigma_n|_j) \subseteq A(\sigma_n|_k)$ συνεπάγεται πως $\phi(\sigma_n) \notin A(s|_j) = A(\sigma_0|_j)$, άτοπο!

Τελικώς, η ϕ θα είναι ανοικτή απεικόνιση.

(viii) Έστω $x \in X$. Θα βρούμε μία ακολουθία $\sigma = (\sigma_n)_n \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ώστε $\phi(\sigma) = x$. Αφού η οικογένεια $\{A(\{q\}) : q \in \mathbb{N}\}$ αποτελεί κάλυμμα του X, υπάρχει $q_1 \in \mathbb{N}$ ώστε $x \in A(\{q_1\})$. Θέτουμε $\sigma_1 = q_1$. Έστω πως για $k \in \mathbb{N}$, τα $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ έχουν οριστεί. Τότε, εφ' όσον το σύνολο $A\big((\sigma_1, \dots, \sigma_k)\big)$ καλύπτεται από την οικογένεια $\{A\big((\sigma_1, \dots, \sigma_k) \frown q\big) : q \in \mathbb{N}\}$, έπεται πως υπάρχει $q_{k+1} \in \mathbb{N}$ ώστε $x \in A\big((\sigma_1, \dots, \sigma_k, q_{k+1})\big)$. Θέτοντας $\sigma_{k+1} = q_{k+1}$, έχουμε το ζητούμενο.

□

2.2 Χαρακτηρισμοί Τοπολογικών Χώρων Μηδενικής Διάστασης

Είμαστε πλέον σε θέση να περάσουμε στα πρώτα Θεωρήμα χαρακτηρισμού,τα οποία αφορούν τοπολογικούς χώρους μηδενικής διάστασης.

Ορισμός 2.2.1. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος.Ο $(X, \mathcal{T})$ καλείται* ***μηδενικής διάστασης*** *αν έχει μία βάση για την $\mathcal{T}$ από clopen σύνολα.*

Τα Θεωρήματα αυτά αφορούν κυρίως την εμφυτευσιμότητα των μηδενοδιάστατων χώρων στον $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$,με κυριότερο εξ' αυτών το Θεώρημα των Alexandrov-Urysohn το οποίο χαρακτηρίζει πλήρως τα τοπολογικά χαρακτηριστικά του $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Ξεκινάμε με το ακόλουθο Λήμμα από τη Θεωρία Μετρικών Χώρων:

Λήμμα 2.2.2. *Έστω (X, d) μετρικός χώρος και $\mathcal{B} = \{B_i\}_{i \in I}$ μία βάση περιοχών του X.Έστω, επίσης, $\epsilon > 0$. Τότε, η οικογένεια $\mathcal{B}_\epsilon = \{B \in \mathcal{B} : diam B \leqslant \epsilon\}$ αποτελεί βάση περιοχών του X.*

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $i_0 \in I$,το σύνολο B_{i_0} γράφεται ως ένωση στοιχείων της $\mathcal{B}_\epsilon$.

Έστω $i_0 \in I, x \in B_{i_0}$. Τότε, υπάρχει $\epsilon_x > 0$ ώστε $S(x, \epsilon_x) \subseteq B_{i_0}$. Θέτουμε $\overline{\epsilon_x} = \min\{\epsilon_x, \frac{\epsilon}{5}\}$. Είναι:

$$B_{i_0} = \bigcup_{x \in B_{i_0}} S(x, \overline{\epsilon_x})$$

Έστω $z \in B_{i_0}$.Εφ' όσον η $\mathcal{B}$ είναι βάση περιοχών του X,υπάρχει $K_z \subseteq I$ ώστε $S(z, \overline{\epsilon_z}) = \bigcup\limits_{i \in K_z} B_i$.Τότε,για $i \in K_z$ είναι :

$$B_i \subseteq S(z, \overline{\epsilon_z}) \Rightarrow diam B_i \leqslant diam S(z, \overline{\epsilon_z}) \Rightarrow diam B_i \leqslant \epsilon \Rightarrow B_i \in \mathcal{B}_\epsilon$$

Άρα $B_{i_0} = \bigcup\limits_{z \in B_{i_0}} \Big(\bigcup\limits_{i \in K_z} B_i\Big)$, δηλαδή έχουμε το ζητούμενο.

□

Θεώρημα 2.2.3. *Έστω $(X,\mathcal{T})$ μηδενικής διάστασης, διαχωρίσιμος και μετρικοποιήσιμος τοπολογικός χώρος. Τότε, ο X είναι ομοιομορφικός με ένα υποσύνολο του $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Αν, επιπλέον, ο $(X,\mathcal{T})$ είναι πλήρως μετρικοποιήσιμος, τότε ο X είναι ομοιομορφικός με ένα κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.*

Απόδειξη. Θα κατασκευάσουμε ένα σχήμα Souslin $A:\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}\to\mathcal{P}(X)$ ώστε να ικανοποιούνται τα παρακάτω:

(α) $A(\emptyset)=X$

(β) Η οικογένεια $\{A\big((\sigma|_n)\frown q\big) : q\in\mathbb{N}\}$ αποτελεί διαμέριση του $A(\sigma|_n), \forall\sigma|_n\in\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$

(γ) Το σύνολο $A(\sigma|_n)$ είναι clopen $,\forall\sigma|_n\in\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$

(δ) $diamA(\sigma|_n)\leqslant\dfrac{1}{2^{n+1}},\forall\sigma|_n\in\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$

Δοθέντος του παραπάνω σχήματος Souslin,έχουμε το ζητούμενο.Πράγματι,από την Πρόταση 2.1.2 (vii) ,η $\phi:Z\to\phi(Z)$ είναι ομοιομορφισμός κι αν,επιπλέον,ο X είναι πλήρως μετρικοποιήσιμος,από το (iii) της ίδιας Πρότασης,το Z θα είναι κλειστό.Τέλος, από τα (α), (β) εύκολα βλέπουμε ότι $\phi(Z)=X$.

Η κατασκευή έχει ως εξής:

Επιλέγουμε αρχικά d μία συμβατή μετρική επί του X κι ορίζουμε $A(\emptyset)=X$. Έστω $\mathcal{B}=(B_n)_n$ μία αριθμήσιμη βάση περιοχών του X από clopen σύνολα ώστε $diamB_n\leqslant\dfrac{1}{4},\forall n\in\mathbb{N}$. Θέτουμε ${G_1}^1=B_1, {G_n}^1=B_n\setminus\bigcup\limits_{k=1}^{n-1}B_k$.Τότε η οικογένεια $({G_n}^1)_n$ αποτελείται από ξένα ανά δύο, clopen υποσύνολα του X με $diam{G_n}^1\leqslant\dfrac{1}{4}$ κι ακόμα ισχύει ότι $X=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}{G_n}^1$.Ορίζουμε:

$$A(\{n\})={G_n}^1,\forall n\in\mathbb{N}.$$

Έστω πως για $k\in\mathbb{N}$ τα σύνολα $A(\sigma|_k)$ έχουν οριστεί $\forall\sigma\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ κι έστω $\sigma\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.Έστω,επίσης,$\{({B_n}')_n\}$ μία βάση περιοχών του X από clopen σύνολα με $diam{B_n}'\leqslant\dfrac{1}{2^{k+1}}$.Τότε,η οικογένεια $\{{B_n}'\cap A(\sigma\,|_k):n\in\mathbb{N}\}$ αποτελεί βάση περιοχών του χώρου $\big(A(\sigma|_k),d\,|_{A(\sigma|_k)}\big)$.

(Είναι ${B_n}'\cap A(\sigma|_k)\subseteq X$ clopen $,\forall n\in\mathbb{N}$.)

Θέτουμε:

$${G_1}^{k+1}={B_1}'\cap A(\sigma|_k)\ \ ,{G_n}^{k+1}=\Big({B_n}'\cap A(\sigma|_k)\Big)\setminus\Big(\bigcup_{q=1}^{n-1}{B_q}'\cap A(\sigma|_k)\Big),\forall n\in\mathbb{N}$$

Τότε η $({G_n}^{k+1})_n$ αποτελείται από ξένα ανά δύο clopen υποσύνολα του X με $diam{G_n}^{k+1} \leqslant \dfrac{1}{2^{k+1}}, \forall n \in \mathbb{N}$ κι επίσης είναι $A(\sigma|_k) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} {G_n}^{k+1}$.

Ορίζουμε $A\big((\sigma|_k) \frown q\big) = {G_q}^{k+1}, \forall q \in \mathbb{N}$

Τελικώς,τα σύνολα $A(\sigma|_n)$ έχουν οριστεί καλά, ικανοποιώντας τα (α) - (δ) για κάθε $\sigma|_n \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$, πράγμα το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη. $\square$

Σημείωση. *Ενδέχεται ορισμένα από τα σύνολα $A(\sigma|_n)$ που ορίστηκαν στο προηγούμενο Θεώρημα να είναι κενά. Αυτό, όμως, δεν επηρεάζει την συνέχεια της απόδειξης.*

Προτού διατυπώσουμε κι αποδείξουμε το Θεώρημα Alexandrov-Urysohn,ας δούμε κάποια βασικά στοιχεία σχετικά με ολικά φραγμένα υποσύνολα μετρικών χώρων:

Υπενθύμιση 2.2.4. *Έστω (X, d) μετρικός χώρος κι $A \subseteq X$.Το A καλείται **ολικά φραγμένο** αν $\forall \epsilon > 0$ υπάρχει $F \subseteq A$ πεπερασμένο ώστε $A \subseteq \bigcup\limits_{x \in F} S(x, \epsilon)$. Στην περίπτωση που $A = X$,ο X καλείται ολικά φραγμένος μετρικός χώρος.Τέλος, από γνωστό θεώρημα της Θεωρίας Μετρικών Χώρων, ο X είναι συμπαγής αν και μόνο αν ο X είναι ολικά φραγμένος και πλήρης.*

Λήμμα 2.2.5. *Έστω (X, d) μετρικός χώρος κι $A \subseteq X$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i) Το A είναι ολικά φραγμένο.

(ii) $\forall \epsilon > 0$ $\exists A_1, \dots, A_n$ πεπερασμένα το πλήθος ανοικτά υποσύνολα του X ώστε $A \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ και $diamA_i < \epsilon, \forall i = 1, \dots, n$.

Απόδειξη. (i)⇒(ii) Έστω $\epsilon > 0$. Για $\epsilon' = \dfrac{\epsilon}{3}, \exists F = \{a_1, \dots, a_n\} \subseteq A$ πεπερασμένο ώστε $A \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} S(x_i, \epsilon')$. Θέτουμε $A_i = S(x_i, \epsilon')$.

Τότε το A_i είναι ανοικτό υποσύνολο του X με $diamA_i < \epsilon, \forall i = 1, \dots, n$ κι επιπλέον ισχύει:

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

άρα έχουμε το ζητούμενο.

(ii)⇒(i) Έστω $\epsilon > 0$. Για $\epsilon^{'} = \frac{\epsilon}{3}$, υπάρχουν $\exists A_1, \ldots, A_n$ πεπερασμένα το πλήθος ανοικτά υποσύνολα του X με $diamA_i < \epsilon^{'}, \forall i = 1, \ldots, n$ ώστε $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_i$.Θέτουμε $\overline{\epsilon} = \max\{diamA_i : i = 1, \ldots, n\}$. (Προφανώς, είναι $\overline{\epsilon} < \epsilon$)

Έστω $i \in \{1, \ldots, n\}, a_i \in A_i$. Τότε $A_i \subseteq S(a_i, \overline{\epsilon})$. Πράγματι,αν $z \in A_i$, είναι $d(z, a_i) \leqslant diamA_i \leqslant \overline{\epsilon} < \epsilon \Rightarrow z \in S(a_i, \overline{\epsilon})$,συνεπώς είναι:

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} S(a_i, \overline{\epsilon}) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} S(a_i, \epsilon)$$

κι άρα θέτοντας $F = \{a_1, \ldots, a_n\}$ έχουμε το ζητούμενο. □

Πρόταση 2.2.6. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ μηδενικής διάστασης Πολωνικός τοπολογικός χώρος ώστε:*

$$intK = \emptyset, \forall K \subseteq X \ συμπαγές$$

Έστω,επίσης,$\epsilon > 0$. Τότε, ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) Ο $(X, \mathcal{T})$ δεν έχει μεμονομένα σημεία

(ii) Ο $(X, \mathcal{T})$ είναι υπεραριθμήσιμος.

(iii) Αν $U \subseteq (X, \mathcal{T})$ clopen, $U \neq \emptyset$, τότε υπάρχει ακολουθία $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ από ξένα ανά δύο, μη κενά, clopen υποσύνολα του X με $diamA_n < \epsilon, \forall n \in \mathbb{N}$ ώστε $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

Απόδειξη. Επιλέγουμε αρχικά d μία συμβατή,πλήρη μετρική επί του X.

(i) Έστω πως υπάρχει $x \in X$ μεμονομένο σημείο του (X, d). Τότε ,υπάρχει $\epsilon > 0$ ώστε $S(x, \epsilon) = \{x\}$. Το μονοσύνολο $\{x\}$ είναι συμπαγές υποσύνολο του (X, d) κι άρα από την υπόθεση έπεται πως $int\{x\} = \emptyset$, άτοπο! αφού $S(x, \epsilon) \subseteq \{x\}$. Άρα, ο (X, d) δεν έχει μεμονομένα σημεία.

(ii) Έστω πως ο (X, d) είναι πεπερασμένος. Τότε,ο X γράφεται ως:

$$X = \{x_1, \ldots, x_n\} = \bigcup_{i=1}^{n} \{x_i\}$$

Θέτουμε $F_1 = F_{n+1} = \ldots = \{x_1\}, \ldots, \;\; F_n = F_{2n} = \ldots = \{x_n\}$.

Είναι άμεσο πως για κάθε $n \in \mathbb{N}$, το σύνολο F_n είναι κλειστό υποσύνολο του X και πως, επιπλέον, είναι $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Αφού ο (X, d) είναι πλήρης,από το Θεώρημα Κατηγορίας του Baire έπεται πως υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $intF_{n_0} \neq \emptyset \Rightarrow int\{x_0\} \neq \emptyset$, για κάποιο $x_0 \in \{x_1, \ldots, x_n\} \Rightarrow x_0$ μεμονομένο σημείο του (X, d), άτοπο! από το (i)

Αντίστοιχα,αν ο (X, d) αριθμήσιμος,τότε $X = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{x_n\}$ και θέτοντας $F_n = \{x_n\}$ καταλήγουμε με τον ίδιο ακριβώς τρόπο σε άτοπο.

(iii) Έστω $U \subseteq X$ clopen, $U \neq \emptyset$. Παρατηρούμε ότι το U δεν είναι συμπαγές υποσύνολο του X. Πράγματι, αν το U ήταν συμπαγές, από την υπόθεση θα συνεπαγόταν πως $intU = \emptyset$. Όμως, $\emptyset \neq U = intU$ (αφού U ανοικτό), άτοπο!.Άρα,το U δεν είναι συμπαγές.

Αφού ο (X, d) είναι πλήρης,έπεται πως το U δεν είναι ολικά φραγμένο υποσύνολο του X.(βλ. Υπενθύμιση 2.2.4). Άρα,από το προηγούμενο Λήμμα υπάρχει $\epsilon_0 > 0$ ώστε $\forall\{A_1, \ldots, A_n\}$ πεπερασμένη οικογένεια ανοικτών υποσυνόλων του X με $diamA_i < \epsilon_0, \forall i = 1, \ldots, n$ να ισχύει ότι:

$$U \cap \big(X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i\big) \neq \emptyset$$

(Το ίδιο συμπέρασμα ισχύει και για κάθε $\epsilon \leqslant \epsilon_0$.)

Εφ΄ όσον ο (X, d) είναι μηδενικής διάστασης και διαχωρίσιμος, $\exists (B_n)_n$ μία αριθμήσιμη βάση περιοχών του X από clopen σύνολα,με $diamB_n \leqslant \frac{\epsilon_0}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$. Προφανώς ισχύει ότι $U \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$.

Θέτουμε $G_1 = B_1, G_n = B_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} B_k$. Τότε είναι $\bigcup_n B_n = \bigcup_n G_n = X$, G_n clopen υποσύνολο του $X, \forall n \in \mathbb{N}$ και $diamG_n < \epsilon_0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Θα δείξουμε ότι $U \cap G_n \neq \emptyset$, για άπειρα το πλήθος n. Έστω,προς εις άτοπον απαγωγή, πως είναι $U \cap B_n \neq \emptyset$ για πεπερασμένα το πλήθος $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists F \subseteq \mathbb{N}$ πεπερασμένο ώστε $U \cap G_n \neq \emptyset, \forall n \in F$ και $U \cap G_n = \emptyset, \forall n \in \mathbb{N} \setminus F$. Τότε:

$$U = \bigcup_{n \in F} \big(U \cap G_n\big)$$

το οποίο είναι άτοπο. Συνεπώς, υπάρχει $F \subseteq \mathbb{N}$ άπειρο ώστε $U = \bigcup_{n \in F} \big(U \cap G_n\big)$ κι άρα θέτοντας $A_n = U \cap G_n, \forall n \in F$, η απόδειξη ολοκληρώνεται. $\square$

Παρατήρηση 2.2.7. *Η παραπάνω πρόταση μας δίνει μία εικόνα της δομής των μηδενοδιάστατων Πολωνικών χώρων.Το κύριο περιεχόμενό της, όμως, εμπεριέχεται στο γεγονός πως μας δίνει συνθήκες υπό της οποίες μπορούμε να επιλέξουμε* ***άπειρα*** *το πλήθος* ***μη κενά*** *clopen υποσύνολα του X.Υπό αυτές τις συνθήκες,το Θεώρημα Alexandrov-Urysohn έπεται σχεδόν άμεσα.*

Θεώρημα 2.2.8 (Alexandrov-Urysohn). *Έστω $(X, \mathcal{T})$ μηδενικής διάστασης Πολωνικός χώρος ώστε:*

$$intK = \emptyset, \forall K \subseteq X \text{ συμπαγές.}$$

Τότε, ο $(X, \mathcal{T})$ είναι ομοιομορφικός με τον χώρο Baire $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Απόδειξη. Θα κατασκευάσουμε σχήμα Souslin $A : \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \to \mathcal{P}(X)$ στον X ώστε να ικανοποιούνται τα παρακάτω:

(α) $A(\emptyset) = X$

(β) Η οικογένεια $\{A\big((\sigma|_n) \frown q\big) : q \in \mathbb{N}\}$ αποτελεί διαμέριση του $A(\sigma|_n), \forall \sigma|_n \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$

(γ) Το σύνολο $A(\sigma|_n)$ είναι clopen $, \forall \sigma|_n \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$

(δ) $diamA(\sigma|_n) \leqslant \dfrac{1}{2^{n+1}}, \forall \sigma|_n \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$

(ε) $A(\sigma|_n) \neq \emptyset, \forall \sigma|_n \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$

Δοθέντος του παραπάνω σχήματος Souslin,έχουμε το ζητούμενο.Πράγματι,από την Πρόταση 2.1.2 (vii) ,η $\phi : Z \to \phi(Z)$ είναι ομοιομορφισμός κι από τα (iii), (iv) της ίδιας Πρότασης,το Z θα είναι κλειστό και πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, δηλαδή θα είναι $Z = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Τέλος, από τα (α), (β) εύκολα βλέπουμε ότι $\phi(Z) = X$.

Η κατασκευή έχει ως εξής:

Επιλέγουμε αρχικά d μία συμβατή μετρική επί του X κι ορίζουμε $A(\emptyset) = X$.

Ο X είναι προφανώς clopen, κι άρα από την Πρόταση 2.2.6 υπάρχει $({G_n}^1)_n$ ακολουθία ξένων ανά δύο,μη κενών,clopen υποσυνόλων του X με $diam{G_n}^1 < \dfrac{1}{4}$ ώστε:

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} {G_n}^1$$

Ορίζουμε $A(\{n\}) = {G_n}^1, \forall n \in \mathbb{N}$.

Έστω πως για $k \in \mathbb{N}$, τα σύνολα $A(\sigma|_k)$ έχουν οριστεί για κάθε $\sigma \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Έστω, επίσης, $\sigma \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Το σύνολο $A(\sigma|_k)$ είναι clopen,μη κενό υποσύνολο του X, συνεπώς πάλι απο την Πρόταση 2.2.6 υπάρχει αριθμήσιμη οικογένεια $({G_n}^{k+1})_n$ αποτελούμενη από clopen,μη κενά,ξένα ανά δύο υποσύνολα του X με $diam{G_n}^{k+1} < \dfrac{1}{2^{k+2}}, \forall n \in \mathbb{N}$ ώστε $A(\sigma|_k) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} {G_n}^{k+1}$.

Θέτοντας $A\big((\sigma|_k) \frown q\big) = {G_q}^{k+1}, \forall q \in \mathbb{N}$, ο επαγωγικός ορισμός της οικογένειας $\{A(\sigma|_k) : \sigma|_k \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}\}$ ολοκληρώνεται ώστε να ικανοποιούνται τα (α)-(ε) κι άρα ο $(X, \mathcal{T})$ είναι ομοιομορφικός με τον $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. $\square$

Έχοντας πλέον στα χέρια μας ως εργαλείο το παραπάνω θεμελιώδες Θεώρημα, μπορούμε να αποδείξουμε ως πορίσματα αυτού κάποια αποτελέσματα χαρακτηρισμού της ίδιας φύσεως.

Θεώρημα 2.2.9 (Mazurkiewicz). *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος Hausdorff και $Y \subseteq X$ ώστε ο χώρος $(Y, \mathcal{T}_Y)$ να είναι μηδενικής διάστασης Πολωνικός χώρος.Αν τα σύνολα $Y, X \setminus Y$ είναι και τα δύο πυκνά στον X, τότε ο Y είναι ομοιομορφικός με τον χώρο Baire $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.*

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι:

$$intK = \emptyset, \forall K \subseteq (Y, \mathcal{T}_Y) \text{ συμπαγές}$$

το οποίο από το Θεώρημα Alexandrov-Urysohn μας δίνει το ζητούμενο.

Έστω $K \subseteq (Y, \mathcal{T}_Y)$ συμπαγές κι έστω πως υπάρχει $V \in \mathcal{T}_Y$ ώστε $V \subseteq K$. Τότε, $V = U \cap Y$ για κάποιο $U \subseteq X$ ανοικτό κι άρα είναι $U \cap Y \subseteq K$. Αρχικά, θα δείξουμε ότι $U \subseteq K$. Έστω,λοιπόν, πως υπάρχει $x \in U \setminus K$. Τότε, αφού ο X είναι Hausdorff,για κάθε $y \in K, \exists {U_x}^y, {U_y}^x \in \mathcal{T}$ με $x \in {U_x}^y, y \in {U_y}^x$ και ${U_x}^y \cap {U_y}^x = \emptyset$. Τότε, η οικογένεια $\{{U_y}^x \cap Y : y \in K\}$ αποτελεί ένα ανοικτό κάλυμμα του K κι αφού το K είναι συμπαγές,υπάρχει $A \subseteq K$ πεπερασμένο ώστε:

$$K \subseteq \bigcup_{y \in A} {U_y}^x$$

Θέτουμε $G = \big(\bigcap\limits_{y \in A} {U_x}^y\big) \cap U$. Τότε $G \cap K = \emptyset$. Πράγματι, αν υπήρχε $x \in G \cap K \Rightarrow \exists y_0 \in A$ ώστε $x \in {U_{y_0}}^x$. Όμως, $x \in G \Rightarrow x \in \big({U_x}^y\big) \cap U$ $, \forall y \in A \Rightarrow x \in \big({U_x}^{y_0}\big) \cap U$, άτοπο! αφού $\big({U_{y_0}}^x\big) \cap \big({U_x}^{y_0}\big) = \emptyset$.

Αφού το Y είναι πυκνό υποσύνολο του X και $G \in \mathcal{T}$, έπεται πως $G \cap Y \neq \emptyset$ κι άρα υπάρχει $z \in G \cap Y$. Τότε,αφού $G \subseteq U$, έχουμε:

$$z \in G \cap Y \subseteq U \cap Y \subseteq K \Rightarrow z \in G \cap K, \text{ άτοπο!}$$

Τελικώς, έχουμε ότι $U \subseteq K \subseteq Y$.

Εφ᾽ όσον το σύνολο $X \setminus Y$ είναι πυκνό στον X έχουμε πως $U \cap \big(X \setminus Y\big) \neq \emptyset$, το οποίο δεν μπορεί να ισχύει, καθώς $U \subseteq Y$ και προφανώς $Y \cap \big(X \setminus Y\big) = \emptyset$. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Πόρισμα 2.2.10. *Ο χώρος* $\big([0,1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}), |\,.\,|\big|_{[0,1]\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})}\big)$ *είναι ομοιομορφικός με τον χώρο Baire* $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Απόδειξη. Εξετάζουμε τον χώρο $\big([0,1], |\,.\,|\big|_{[0,1]}\big)$, ο οποίος είναι προφανώς Hausdorff. (Στην πραγματικότητα είναι Πολωνικός, αφού το $[0,1]$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.)

Κατ᾽ αρχάς,είναι άμεσο πως τα σύνολα:

$$[0,1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \text{ και } [0,1] \setminus \big([0,1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})\big) = [0,1] \cap \mathbb{Q}$$

είναι πυκνά υποσύνολα του χώρου $\big([0,1], |\,.\,|\big|_{[0,1]}\big)$.

Τώρα, αν $\{q_n\}_n$ είναι μία αρίθμησιμη των ρητών στο $[0,1]$, τότε εύκολα βλέπουμε πως:

$$[0,1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \big([0,1] \cap (\mathbb{R} \setminus \{q_n\})\big)$$

όπου το σύνολο $[0,1] \cap (\mathbb{R} \setminus \{q_n\})$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\big([0,1], |\,.\,|\big|_{[0,1]}\big)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Δηλαδή το $[0,1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ είναι G_δ υποσύνολο του $[0,1]$ κι άρα από γνωστό Θεώρημα έπεται ότι ο χώρος $\big([0,1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}), |\,.\,|\big|_{[0,1]\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})}\big)$ είναι Πολωνικός.

Στη συνέχεια, θέτουμε:

$$\mathcal{C} = \{(a,b) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) : a < b, a, b \in [0,1] \cap \mathbb{Q}\}$$

Θα δείξουμε ότι η οικογένεια $\mathcal{C}$ αποτελεί μία βάση περιοχών του $[0,1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ που αποτελείται από clopen σύνολα, δηλαδή ότι ο χώρος αυτός είναι μηδενικής διάστασης.

Πράγματι, έστω $a, b \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$ με $a < b$. Τότε:

$$(a,b) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = [a,b] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$$

αφού τα άκρα του διαστήματος (a,b) είναι ρητοί αριθμοί κι ως εκ τούτου δεν μπορούν να περιέχονται στο $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Άρα, το $(a,b)\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$ είναι clopen στον $[0,1]\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$.

Έστω,τώρα, $U\subseteq[0,1]\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$ ανοικτό .Τότε $U=V\cap\big([0,1]\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\big)$, όπου V ανοικτό υποσύνολο του $[0,1]$, το οποίο με τη σειρά του δίνει ότι $V=G\cap[0,1]$, με G ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Θα δείξουμε ότι για κάθε $x\in U,\exists V_x\in\mathcal{C}$ ώστε $x\in V_x\subseteq U$. Έστω $x\in U$. Κατ΄ αρχάς, υπάρχει $\epsilon>0$ ώστε $(x-\epsilon,x+\epsilon)\subseteq G$. Θέτοντας:

$$\overline{\epsilon}=\frac{\min\{|x|,|x-1|,\epsilon\}}{2}$$

έχουμε ότι $(x-\overline{\epsilon},x+\overline{\epsilon})\subseteq V=G\cap[0,1]$. (Το x είναι άρρητος,άρα $x\neq 0$ και $x\neq 1$.) Από την πυκνότητα του $\mathbb{Q}\cap[0,1]$ στο $[0,1]$ έχουμε πως υπάρχουν $q_1,q_2\in\mathbb{Q}\cap[0,1]$ ώστε $q_1\in(x-\overline{\epsilon},x)$ και $q_2\in(x,x+\overline{\epsilon})$. Τότε,ορίζοντας $V_x=(q_1,q_2)\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$ είναι $x\in V_x\subseteq U$ κι άρα το έχουμε το ζητούμενο.

Τέλος,η απόδειξη ολοκληρώνεται από το Θεώρημα 2.2.9 . □

Παρατήρηση 2.2.11. *Στο Θεώρημα* 1.3.4 *του πρώτου Κεφαλαίου είδαμε πως ο χώρος Cantor περιέχει ένα υποσύνολο ομοιομορφικό με το* $[0,1]\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$. *Αυτό, σε συνδυασμό με το προηγούμενο Πόρισμα δίνει ότι* ***ο χώρος Cantor*** $2^{\mathbb{N}}$ ***περιέχει υποσύνολο ομοιομορφικό με το*** $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. *Το γεγονός αυτό χαρακτηρίζει τη σχέση μεταξύ των δύο αυτών χώρων.*

Μπρούμε να γενικεύσουμε, υπό μία έννοια, το αποτέλεσμα του Πορίσματος 2.2.10 στο πλαίσιο του συνόλου των πραγματικών αριθμών, ως εξής:

Πόρισμα 2.2.12. *Έστω* $A\subseteq\mathbb{R}$ *ώστε ο χώρος* $(A,|\,.\,|\,\big|_A)$ *να είναι Πολωνικός. Αν τα σύνολα* $A,\mathbb{R}\setminus A$ *είναι και τα δύο πυκνά στο* $\mathbb{R}$, *τότε το* A *είναι ομοιομορφικό με το* $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 2.2.9 αρκεί να δείξουμε ότι ο χώρος $(A,|\,.\,|\,\big|_A)$ είναι μηδενικής διάστασης.Όμως, όπως ακριβώς και στην απόδειξη της Πρότασης 2.2.10 μπορεί κανείς να δείξει ότι η οικογένεια:

$$\{(a,b)\cap A:a,b\in\mathbb{R}\setminus A\}$$

αποτελεί μία βάση περιοχών του $(A,|\,.\,|\,\big|_A)$ από clopen σύνολα κι άρα είναι μηδενικής διάστασης. □

Πόρισμα 2.2.13. *Οι χώροι:*

$$(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}),\ \ (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^{(n)} \text{ για } n \geqslant 1,\ \ (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^{\mathbb{N}},\ \ \mathbb{N}^{\mathbb{N}},\ \ (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$$

είναι όλοι ομοιομορφικοί.

Απόδειξη. Κατ΄ αρχάς, από το προηγούμενο Πόρισμα είναι άμεσο πως οι χώροι $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ και $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ είναι ομοιομορφικοί. Αυτό έχει ως άμεση συνέπεια το γεγονός ότι οι χώροι:

$$(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^{\mathbb{N}},\ \ \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \text{ και } (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$$

είναι ομοιομορφικοί.

Πράγματι, αν $f : (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ είναι ομοιομορφισμός, τότε εύκολα μπορούμε να δούμε πως η απεικόνιση $g : (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^{\mathbb{N}} \to (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$ με:

$$g\big((x_n)_n\big) = \big(f(x_n)\big)_n$$

είναι επίσης ομοιομορφισμός. Όμως, από την Πρόταση 1.1.10 έπεται ότι οι χώροι $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ και $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$ είναι ομοιομορφικοί κι άρα όλοι οι παραπάνω χώροι είναι ομοιομορφικοί.

Ανάλογα εργαζόμαστε για να δείξουμε τον ομοιομορφισμό μεταξύ των χώρων $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^{(n)}, \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

□

Στρέφουμε τώρα την προσοχή μας στο σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών,εφοδιασμένο με την επαγόμενη τοπολογία της συνήθους μετρικής του $\mathbb{R}$. Θα διατυπώσουμε δύο ενδιαφέροντα θεωρήματα αναφορικά με το $\mathbb{Q}$, το οποία χαρακτηρίζουν την καθολικότητά του σε σχέση με όλους τους αριθμήσιμους,μετρικοποιήσιμους χώρους. Για αρχή, θα παραθέσουμε χωρίς απόδειξη το παρακάτω αποτέλεσμα του Cantor :

Θεώρημα 2.2.14 (Cantor)**.** *Έστω I ένα ανοικτό διάστημα του $\mathbb{R}$. Αν A είναι ένα αριθμήσιμο, πυκνό υποσύνολο του I, τότε το A είναι ομοιομορφικό με το $\mathbb{Q}$.*

Πρόταση 2.2.15. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ αριθμήσιμος, μετρικοποιήσιμος τοπολογικός χώρος χωρίς μεμονωμένα σημεία.Έστω, επίσης, $A \subseteq X$ μη κενό, clopen και $\epsilon > 0$. Τότε, υπάρχει ακολουθία $(A_n)_n$ ξένων ανά δύο, μη κενών, clopen, άπειρων υποσυνόλων του X με $diam A_n \leqslant \epsilon, \forall n \in \mathbb{N}$ ώστε:*

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

Απόδειξη. Αρχικά, επιλέγουμε d μία συμβατή μετρική επί του X κι έστω $X = (x_n)_n$ μία αρίθμηση του X. Παρατηρούμε πως το A θα είναι απαραίτητα άπειρο σύνολο.

Αν το A είναι πεπερασμένο, τότε $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Έστω $i \in \{1, \ldots, n\}$. Τότε, αφού A ανοικτό, υπάρχει $\epsilon_0 > 0$ ώστε $S(x_i, \epsilon_0) \subseteq A$. Για ${\epsilon_0}' = \dfrac{\min\{\epsilon_0, d(a_i, a_j) : j \neq i\}}{2}$ έχουμε ότι $S(x_i, {\epsilon_0}') = \{x_i\}$, άτοπο! αφού ο X δν έχει μεμονομένα σημεία.

Άρα, το A είναι άπειρο (αναγκαστικά αριθμήσιμο, αφού ο X αριθμήσιμος) σύνολο, δηλαδή $A = (a_n)_n$. Ξεκινώντας με το a_1, θα βρούμε $A_1 \subsetneq A$ ώστε A_1 clopen υποσύνολο του X, $a_1 \in A_1$ και $diam A_1 \leqslant \epsilon$.

Αφού το A ανοικτό υποσύνολο του X, υπάρχει $\epsilon_1 > 0$ ώστε $S(a_1, \epsilon_1) \subseteq A$. Για τυχόν $\epsilon > 0$ είναι $S(a_1, \epsilon) \setminus \{a_1\} \neq \emptyset$, αφού ο X δεν έχει μεμονομένα σημεία. Θέτουμε:

$$\mathcal{C} = \{d(a_1, x_n) : n \in \mathbb{N}, x_n \neq a_1\}$$

κι επιλέγουμε $\overline{\epsilon_1} > 0$ ώστε να ικανοποιούνται τα παρακάτω:

(α) $\overline{\epsilon_1} \leqslant \epsilon$

(β) $\overline{\epsilon_1} \leqslant \epsilon_1$

(γ) $\overline{\epsilon_1} \leqslant d(a_1, a_{n_0})$, για κάποιο $n_0 \in \mathbb{N}$

(δ) $\overline{\epsilon_1} \neq c, \forall c \in \mathcal{C}$

Η επιλογή αυτή είναι δυνατή, καθώς η $\mathcal{C}$ είναι αριθμήσιμη.

Τότε, το σύνολο $S(a_1, \overline{\epsilon_1})$ είναι clopen υποσύνολο του X, αφού το σύνορό του είναι το κενό (λόγω της ιδιότητας (δ)). Θέτοντας $A_1 = S(a_1, \overline{\epsilon_1})$, είναι $a_1 \in S(a_1, \overline{\epsilon_1}), A_1 \subsetneq A$, A_1 απειροσύνολο και $diam A_1 \leqslant \epsilon$.

Το σύνολο $A \setminus A_1 = A \cap {A_1}^{\mathsf{c}}$ είναι επίσης clopen στον X. Θέτουμε $k = \min\{n \in \mathbb{N} : a_n \notin A_1\}$ και με τον ίδιο ακριβώς τρόπο βρίσκουμε A_2 ένα clopen υποσύνολο του X ώστε $a_k \in A_2, A_2 \subsetneq A \setminus A_1, diam A_2 \leqslant \epsilon$ και το A_2 απειροσύνολο.

Συνεχίζοντας επαγωγικά τη διαδικασία αυτή,λαμβάνουμε τη ζητούμενη ακολουθία υποσυνόλων του X. □

Φτάνουμε, λοιπόν, στο εξής Θεώρημα:

Θεώρημα 2.2.16 (Sierpinski). *Έστω $(X, \mathcal{T})$ ένας αριθμήσιμος, μετρικοποιήσιμος τοπολογικός χώρος χωρίς μεμονομένα σημεία. Τότε, ο X είναι ομοιομορφικός με το $\mathbb{Q}$.*

Απόδειξη. Θα κατασκευάσουμε ένα σχήμα Souslin $A : \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \to \mathcal{P}(X)$ στο X ώστε να ικανοποιούνται τα κάτωθι:

(α) $A(\emptyset) = X$

(β) Η οικογένεια $\{A\big((\sigma|_n) \frown q\big) : q \in \mathbb{N}\}$ αποτελεί διαμέριση του $A(\sigma|_n), \forall \sigma|_n \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$

(γ) Το σύνολο $A(\sigma|_n)$ είναι clopen , $\forall \sigma|_n \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$

(δ) $diam A(\sigma|_n) \leqslant \dfrac{1}{2^{n+1}}, \forall \sigma|_n \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$

(ε) $A(\sigma|_n) \neq \emptyset, \forall \sigma|_n \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$

Δοθέντος του παραπάνω σχήματος Souslin , έχουμε τα εξής: Οι ιδιότητες (β), (γ) επάγουν το (vii) της Πρότασης 2.1.2, δηλαδή η επαγόμενη συνάρτηση ϕ θα είναι ομοιομορφισμός, ενώ οι ιδιότητες (β), (ε) επάγουν την (iv) της ίδιας Πρότασης, δηλαδή το Z θα είναι πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Τέλος, η (δ) εξασφαλίζει την συνθήκη διαμέτρου και οι (α),(β) το γεγονός πως $\phi(Z) = X$.

Δηλαδή ο X είναι ομοιομορφικός με ένα αριθμήσιμο, πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Όμως, όπως είδαμε, το $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ είναι ομοιομορφικό με το $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, συνεπώς εύκολα βλέπουμε πως ο X θα είναι ομοιομορφικός με ένα πυκνό,αριθμήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. (Πράγματι, αφού το $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ είναι πυκνό στο $\mathbb{R}$ κι ο X είναι ομοιομορφικός με ένα πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, έπεται πως το υποσύνολο αυτό θα είναι επίσης πυκνό στο $\mathbb{R}$ κι άρα ο X θα είναι ομοιομορφικός με ένα πυκνό,αριθμήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$.) Τότε, το Θεώρημα 2.2.14 για $I = \mathbb{R}$ μας δίνει ότι ο X θα είναι ομοιομορφικός με το $\mathbb{Q}$.

Η κατασκευή του σχήματος Souslin έχει ως εξής:

Αρχικά, ορίζουμε $A(\emptyset) = X$. Ο X είναι προφανώς clopen, συνεπώς από την προηγούμενη Πρόταση, υπάρχει $({G_n}^1)_n$ ακολουθία ξένων ανά 2, μη κενών, clopen υποσυνόλων του X με $diam {G_n}^1 \leqslant \dfrac{1}{4}, \forall n \in \mathbb{N}$ ώστε:

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} {G_n}^1$$

Ορίζουμε $A(\{n\}) = {G_n}^1, \forall n \in \mathbb{N}$.

Έστω πως για $k \in \mathbb{N}$, τα σύνολα $A(\sigma|_k)$ έχουν οριστεί για κάθε $\sigma \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ κι έστω $\sigma \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Το σύνολο $A(\sigma|_k)$ είναι μη κενό, clopen υποσύνολο του X κι άρα πάλι απο την προηγούμενη Πρόταση, υπάρχει $({G_n}^{k+1})_n$ ακολουθία ξένων ανά δύο, μη κενών, clopen υποσυνόλων του X με $diam {G_n}^{k+1} \leqslant \dfrac{1}{2^{k+2}}, \forall n \in \mathbb{N}$ ώστε:

$$A(\sigma|_k) = \bigcup_{n=1}^{\infty} {G_n}^{k+1}$$

Ορίζοντας $A\big(\sigma|_k) \frown q\big) = {G_q}^{k+1}, \forall q \in \mathbb{N}$, ο επαγωγικός ορισμός της οικογένειας $\{A(\sigma|_k) : \sigma|_k \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}\}$ ολοκληρώνεται κι άρα έχουμε το ζητούμενο. $\square$

Πόρισμα 2.2.17. *Οι χώροι*

$$\mathbb{Q},\ \ \mathbb{Q}^{(n)}\ \textit{για}\ n \geqslant 1$$

είναι ομοιομορφικοί.

Απόδειξη. Έστω $n \in \mathbb{N}$. Κατ΄ αρχάς, ο χώρος $\mathbb{Q}^{(n)}$ είναι αριθμήσιμος, ως πεπερασμένο γινόμενο αριθμήσιμων συνόλων. Επιπλέον, ο $\mathbb{Q}^{(n)}$ δεν έχει μεμονομένα σημεία. Πράγματι, αν $z = (z_1, \dots, z_n)$ μεμονομένο σημείο του $\mathbb{Q}^{(n)}$, υπάρχει U βασικό ανοικτό του $\mathbb{Q}^{(n)}$ ώστε $\{z\} = U$. Τότε, $U = \prod_{i=1}^{n} U_i$, όπου U_i ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{Q}, \forall i \in \{1, \dots, n\}$. Αυτό συνεπάγεται πως $\{z_i\} = U_i, \forall i \in \{1, \dots, n\}$, δηλαδή τα $z_i, i = 1, \dots, n$ είναι μεμονομένα σημεία του $\mathbb{Q}$, άτοπο! αφού το $\mathbb{Q}$ δεν έχει μεμονομένα σημεία.

Άρα, οι χώροι $\mathbb{Q}$ και $\mathbb{Q}^{(n)}$ είναι ομοιομορφικοί με βάση το προηγούμενο Θεώρημα. $\square$

Στην πραγματικότητα, μπορούμε να αποδείξουμε ένα αποτέλεσμα εξ΄ ίσου ισχυρό με το Θεώρημα 2.2.16. Στο Θεώρημα αυτό χαρακτηρίστηκαν όλοι οι αριθμήσιμοι,μετρικοποιήσιμοι χώροι χωρίς μεμονομένα σημεία.Αν ένας τέτοιος χώρος περιέχει μεμονομένα σημεία, με βάση την κατασκευή της Πρότασης 2.2.15,μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα σχήμα Souslin στον χώρο αυτό ώστε να ικανοποιούνται τα παρακάτω:

(α) $A(\emptyset) = X$

(β) Η οικογένεια $\{A\big((\sigma|_n) \frown q\big) : q \in \mathbb{N}\}$ αποτελεί διαμέριση του $A(\sigma|_n), \forall \sigma|_n \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$

(γ) Το σύνολο $A(\sigma|_n)$ είναι clopen $, \forall \sigma|_n \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$

(δ) $diam A(\sigma|_n) \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}, \forall \sigma|_n \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$

Το πρόβλημα έγκειται στο γεγονός πως δεν μπορούμε να εξασφαλίσουμε πως θα είναι $A(\sigma|_n) \neq \emptyset, \forall \sigma|_n \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$. Με βάση αυτήν την παρατήρηση, μία λύση στο πρόβλημα δίνεται απο το παρακάτω Θεώρημα:

Θεώρημα 2.2.18 (Frechet). *Έστω $(X,\mathcal{T})$ αριθμήσιμος και μετρικοποιήσιμος τοπολογικός χώρος. Τότε, ο $(X,\mathcal{T})$ είναι ομοιομορφικός με ένα κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{Q}$.*

Απόδειξη. Έστω $A : \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \to \mathcal{P}(X)$ ένα σχήμα Souslin στον X ώστε να ικανοποιούνται τα εξής:

(α) $A(\emptyset) = X$

(β) Η οικογένεια $\{A\big((\sigma|_n) \frown q\big) : q \in \mathbb{N}\}$ αποτελεί διαμέριση του $A(\sigma|_n), \forall \sigma|_n \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$

(γ) Το σύνολο $A(\sigma|_n)$ είναι clopen , $\forall \sigma|_n \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$

(δ) $diam A(\sigma|_n) \leqslant \dfrac{1}{2^{n+1}}, \forall \sigma|_n \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$

Για κάθε $\sigma|_n \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ τέτοιο ώστε $A(\sigma|_n) = \emptyset$, επιλέγουμε $\tau = \tau(\sigma|_n) \in U_{\sigma|_n}$. Στη συνέχεια, θεωρούμε το σύνολο:

$$Y = Z \cup \{\tau(\sigma|_n) : \sigma|_n \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \text{ με } A(\sigma|_n) = \emptyset\}$$

όπου Z είναι το σύνολο που ορίστηκε στην αρχή του Κεφαλαίου, δηλαδή $Z = \{\sigma \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A(\sigma|_n) \neq \emptyset\}$.

Θα δείξουμε ότι το Y είναι ένα αριθμήσιμο, πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ χωρίς μεμονομένα σημεία.

Για να δούμε πως το Y είναι πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, έστω $s = (s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$. Αρκεί να δείξουμε ότι $Y \cap U_s \neq \emptyset$. Αν υπάρχει $\sigma \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \cap U_s$ με $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A(\sigma|_n) \neq \emptyset$, τότε $\sigma \in Z \Rightarrow z \in Y \cap U_s$, αλλίως αν για κάθε $\sigma \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \cap U_s$ υπάρχει $n_\sigma \in \mathbb{N}, n_\sigma \geqslant n$ ώστε $A(\sigma|_{n_\sigma}) = \emptyset$, τότε έχουμε επιλέξει $\tau(\sigma|_{n_\sigma}) \in Y$ με $\tau(\sigma|_{n_\sigma}) \in U_{\sigma|_{n_\sigma}} \Rightarrow \tau(\sigma|_{n_\sigma}) \in U_s \Rightarrow \tau(\sigma|_{n_\sigma}) \in Y \cap U_s$. Άρα, το Y είναι πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Έστω, τώρα, πως υπάρχει $\sigma \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ μεμονομένο σημείο του Y. Τότε, υπάρχει $s = (s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ ώστε $\{\sigma\} = U_s \cap Y$. Το σύνολο $U_s \setminus \{\sigma\}$ είναι ανοικτό στον $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (τα μονοσύνολα είναι κλειστά) κι εφ΄ όσον δείξαμε πως το Y είναι πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, έπεται ότι:

$$Y \cap \big(U_s \setminus \{\sigma\}\big) \neq \emptyset$$

το οποίο είναι προφανώς άτοπο. Άρα, το Y δν έχει μεμονομένα σημεία.

Θα δείξουμε ότι το Y είναι αριθμήσιμο. Οι ιδιότητες (β), (γ) του παραπάνω σχήματος Souslin επάγουν την (vii) της Πρότασης 2.1.2,δηλαδή η επαγόμενη απεικόνιση ϕ είναι ομοιομορφισμός ,ενώ οι (α), (β) δίνουν ότι $\phi(Z) = X$. Συνεπώς ,αφού Z ομοιομορφικό με τον X κι ο X αριθμήσιμος, έπεται ότι το Z είναι αριθμήσιμο. Επιπλέον, εφ' όσον για κάθε $\sigma|_n \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ με $A(\sigma|_n) = \emptyset$ επιλέγουμε ένα $\tau(\sigma|_n) \in U_{\sigma|_n}$ και το σύνολο $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ είναι αριθμήσιμο, έπεται ότι το σύνολο:

$$\{\tau(\sigma|_n) : \sigma|_n \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \text{ με } A(\sigma|_n) = \emptyset\}$$

είναι το πολύ αριθμήσιμο. Τελικώς, το Y είναι αριθμήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Από το Θεώρημα 2.2.16 έπεται ότι το Y είναι ομοιομορφικό με το $\mathbb{Q}$.

Θέτουμε $A = \bigcup\{U_{\sigma|_n} : \sigma|_n \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \text{ με } A(\sigma|_n) = \emptyset\}$. Θα δείξουμε ότι:

$$Z = Y \setminus A$$

Πράγματι, έστω $\sigma \in Z$. Από τον ορισμό του Y, είναι $Z \subseteq Y \Rightarrow \sigma \in Y$. Όμως, για κάθε $\tau \in Z$ είναι $\bigcap_{n=1}^{\infty} A(\tau|_n) \neq \emptyset \Rightarrow \sigma \notin A \Rightarrow \sigma \in Y \setminus A \Rightarrow Z \subseteq Y \setminus A$.

Έστω, τώρα, $\sigma \in Y \setminus A$. Αφού $\sigma \in Y$ έχουμε ότι $\sigma \in Z$ ή $\sigma \in \{\tau(\sigma|_n) : \sigma|_n \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \text{ με } A(\sigma|_n) = \emptyset\}$. Όμως:

$$\{\tau(\sigma|_n) : \sigma|_n \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \text{ με } A(\sigma|_n) = \emptyset\} \subseteq A$$

και αφού $\sigma \notin A \Rightarrow \sigma \in Z \Rightarrow Y \setminus A \subseteq Z$.

Τελικώς, $Z = Y \setminus A$. Το A είναι ανοικτό στον $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, συνεπώς το $Z = Y \setminus A$ είναι κλειστό στον χώρο $(Y, \mathcal{T}_Y)$. (Με $\mathcal{T}_Y$ συμβολίζουμε τη σχετική τοπολογία του Y.)

Για να ανακεφαλαιώσουμε, έχουμε:

(i) X αριθμήσιμος και μετρικοποιήσιμος τοπολογικός χώρος, X ομοιομορφικός με το Z.

(ii) $Z \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}, Z$ κλειστό υποσύνολο του χώρου $(Y, \mathcal{T}_Y)$.

(iii) $Y \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ώστε ο χώρος $(Y, \mathcal{T}_Y)$ ομοιομορφικός με το $\mathbb{Q}$.

Από τα παραπάνω, βλέπουμε ότι ο X θα είναι, εν τέλει, ομοιομορφικός με ένα κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{Q}$. □

2.3 Χαρακτηρισμοί Διαχωρίσιμων Μετρικοποιήσιμων Τοπολογικών Χώρων

Έχοντας ως δεδομένα τα αποτελέσματα της προηγούμενης παραγράφου, ένα ερώτημα που ανακύπτει φυσιολογικά είναι το τι μπορεί να επιτευχθεί στην αρκετά γενικότερη περίπτωση των διαχωρίσιμων και μετρικοποιήσιμων τοπολογικών χώρων.Μπορούν, δηλαδή, οι τεχνικές κατασκευής σχημάτων Souslin που εφαρμόστηκαν σε χώρους μηδενικής διάστασης να δώσουν παρόμοια αποτελέσματα για τους χώρους αυτούς;

Εν γένει, δεν μπορούμε να ελπίζουμε σε τοπολογικές ταυτίσεις, καθώς ο χώρος Baire είναι μηδενοδιάστατος, ιδιότητα που διατηρείται μέσω ομοιομορφισμών. Παρ' όλαυτα, μπορούμε να ερευνήσουμε την περίπτωση των συνεχών εικόνων του $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.Για του λόγου το αληθές, έχουμε το κάτωθι αποτέλεσμα:

Θεώρημα 2.3.1. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ διαχωρίσιμος και μετρικοποιήσιμος τοπολογικός χώρος. Τότε, ο X είναι η συνεχής, ανοικτή εικόνα ενός πυκνού υποσυνόλου του $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Αν, επιπλέον, ο $(X, \mathcal{T})$ είναι πλήρως μετρικοποιήσιμος, τότε ο X είναι η συνεχής, ανοικτή εικόνα του $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.*

Προτού περάσουμε στην απόδειξη, θα χρειαστούμε την ακόλουθη Πρόταση:

Πρόταση 2.3.2. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ διαχωρίσιμος και μετρικοποιήσιμος τοπολογικός χώρος, $U \subseteq X$ ανοικτό και $\epsilon > 0$. Τότε, υπάρχει ακολουθία $(B_n)_n$ ανοικτών, μη κενών υποσυνόλων του X με $diam B_n \leqslant \epsilon, \forall n \in \mathbb{N}$ ώστε:*

$$U = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{B_n}.$$

Απόδειξη. Αρχικά, επιλέγουμε d μία συμβατή μετρική επί του X. Αφού ο (X, d) διαχωρίσιμος, υπάρχει $D = (d_n)_n$ ένα αριθμήσιμο, πυκνό υποσύνολο του X. Θα δείξουμε ότι για κάθε $x \in U$, υπάρχει $n_x \in \mathbb{N}$ και $q_x \in \mathbb{Q}^+$ ώστε:

$$x \in S(d_{n_x}, q) \text{ και } \overline{S(d_{n_x}, q)} \subseteq U$$

Αφού U ανοικτό, υπάρχει $\epsilon' > 0$ ώστε $S(x, \epsilon') \subseteq U$. Θέτουμε $\overline{\epsilon} = \dfrac{\min\{\epsilon', \epsilon\}}{2}$. Η ακολουθία $(d_n)_n$ είναι πυκνή στον X, συνεπώς υπάρχει $n_x \in \mathbb{N}$ ώστε $d_{n_x} \in S(x, \frac{\overline{\epsilon}}{3})$. Τότε, $x \in S(d_{n_x}, \frac{\overline{\epsilon}}{3}) \Rightarrow d(x, d_{n_x}) = w_x < \frac{\overline{\epsilon}}{3}$.

Ως γνωστόν, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\dfrac{1}{n_0} < \dfrac{\overline{\epsilon}}{3} - w_x \Leftrightarrow \dfrac{1}{n_0} + w_x < \dfrac{\overline{\epsilon}}{3}$. Αν ο αριθμός $\dfrac{1}{n_0} + w_x$ είναι ρητός, θέτουμε $q_x = \dfrac{1}{n_0} + w_x$, αλλίως επιλέγουμε $q_x \in \mathbb{Q}^+$ με $w_x < q_x < \dfrac{1}{n_0} + w_x$. Τότε, $x \in S(d_{n_x}, q_x)$ και $\overline{S(d_{n_x}, q_x)} \subseteq U$.

Πράγματι, έστω $z \in \overline{S(d_{n_x}, q_x)} \Rightarrow \exists (z_n)_n \subseteq S(d_{n_x}, q_x)$ με $z_n \to z$. Τότε, $d(z_n, d_{n_x}) < q_x, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow d(z, d_{n_x}) \leq q_x$ κι η τριγωνική ανισότητα δίνει:

$$d(z,x) \leqslant d(z, d_{n_x}) + d(x, d_{n_x}) \leqslant q_x + w_x < \frac{2\overline{\epsilon}}{3} < \epsilon^{'}$$

άρα $z \in S(x, \epsilon^{'}) \Rightarrow z \in U$.

Τότε, το U γράφεται ως:

$$U = \bigcup_{x \in U} S(d_{n_x}, q_x) = \bigcup_{x \in U} \overline{S(d_{n_x}, q_x)}$$

Οι παραπάνω ενώσεις είναι αριθμήσιμες, καθώς η οικογένεια $\{S(d_{n_x}, q_x) : x \in U\}$ είναι αριθμήσιμη. (Πράγματι, η απεικόνιση $S(d_{n_x}, q_x) \mapsto \big(d_{n_x}, q_x\big) \in D \times \mathbb{Q}$ είναι 1-1.) Επιπλέον, είναι άμεσο πως $S(d_{n_x}, q_x) \neq \emptyset, \forall x \in U$ και πως $diam S(d_{n_x}, q_x) \leqslant \epsilon$, $\forall x \in U$. □

Απόδειξη. (**Θεωρήματος 2.3.1**) Θα κατασκευάσουμε δύο σχήματα Souslin $B, \overline{B} : \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \to \mathcal{P}(X)$ με τις εξής ιδιότητες:

(α) $B(\emptyset) = X$

(β) $B(\sigma|_n) \neq \emptyset, \forall \sigma|_n \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$

(γ) Το $B(\sigma|_n)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $X, \forall \sigma|_n \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$

(δ) $\overline{B}(\sigma|_n) = \overline{B(\sigma|_n)}, \forall \sigma|_n \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$

(ε) $B(\sigma|_n) = \bigcup_{q=1}^{\infty} B\big(\sigma|_n \frown q\big) = \bigcup_{q=1}^{\infty} \overline{B\big(\sigma|_n \frown q\big)}, \forall \sigma|_n \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$

(στ) $diam B(\sigma|_n) \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}, \forall \sigma|_n \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$

Τότε, οι επαγόμενες συναρτήσεις $\phi, \overline{\phi}$ από τα $B, \overline{B}$ αντίστοιχα ταυτίζονται. Κατ΄ αρχάς, αν

$$Z_B = \{\sigma \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \bigcap_{n=1}^{\infty} B(\sigma|_n) \neq \emptyset\} \quad \text{και} \quad Z_{\overline{B}} = \{\sigma \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B}(\sigma|_n) \neq \emptyset\}$$

τότε από τις ιδιότητες (δ), (ε) άμεσα έπεται πως $Z_B = Z_{\overline{B}}$ κι άρα οι συναρτήσεις $\phi, \overline{\phi}$ έχουν κοινό πεδίο ορισμού. Έστω, τώρα, $\sigma \in Z_B$. Θα δείξουμε ότι $\phi(\sigma) = \overline{\phi}(\sigma) \Leftrightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} B(\sigma|_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B(\sigma|_n)}$

Έστω $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B(\sigma|_n)$ κι έστω $n \in \mathbb{N}$. Τότε, από την ιδιότητα (ε) έχουμε ότι:

$$B(\sigma|_n) \subseteq \overline{B(\sigma|_n)} \subseteq B(\sigma|_{n-1}) \Rightarrow x \in \overline{B(\sigma|_n)}$$

κι άρα $\bigcap_{n=1}^{\infty} B(\sigma|_n) \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B(\sigma|_n)}$.

Έστω, τώρα, $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{B(\sigma|_n)}$ κι έστω $n \in \mathbb{N}$. Πάλι από την ιδιότητα (ε) έχουμε ότι:

$$x \in \overline{B(\sigma|_{n+1})} \subseteq B(\sigma|_n)$$

κι άρα $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B(\sigma|_n)} \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} B(\sigma|_n)$

Συνεπώς $\phi(\sigma) = \overline{\phi}(\sigma), \forall \sigma \in Z_B$, δηλαδή οι $\phi, \overline{\phi}$ ταυτίζονται.

Βλέπουμε, μέσω της Πρότασης 2.1.2, πως η $\phi = \overline{\phi}$ θα είναι συνεχής και ανοικτή από τις ιδιότητες (γ), (ε) και πως το σύνολο $Z_B = Z_{\overline{B}}$ θα είναι πυκνό στον $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ από την (β). Αν ο X είναι πλήρως μετρικοποιήσιμος, τότε, εφ΄ όσον το $\overline{B}$ είναι κλειστό, το Z θα είναι επιπλέον κλειστό, δηλαδή $Z = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Τέλος, οι (α), (ε) εξασφαλίζουν πως $\phi(Z_B) = \overline{\phi}(Z_B) = X$, ενώ η (στ) εξασφαλίζει την συνθήκη διαμέτρου για τα $B, \overline{B}$.

Η κατασκευή των σχημάτων Souslin $B, \overline{B}$ έχει ως εξής:

Επιλέγουμε d μία συμβατή μετρική επί του X.

Ορίζουμε $B(\emptyset) = X$. Αφού το X ανοικτό , από την προηγούμενη Πρόταση υπάρχει ακολουθία $({G_n}^1)_n$ ανοικτών, μη κενών υποσυνόλων του X με $diam G_n \leqslant \frac{1}{4}, \forall n \in \mathbb{N}$ ώστε:

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} {G_n}^1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{{G_n}^1}$$

Ορίζουμε $B(\{n\}) = {G_n}^1, \forall n \in \mathbb{N}$.

Έστω πως για $k \in \mathbb{N}$, τα σύνολα $B(\sigma|_k)$ έχουν οριστεί για κάθε $\sigma \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Έστω, επίσης, $\sigma \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Το σύνολο $B(\sigma|_k)$ είναι ανοικτό, μη κενό υποσύνολο του X, συνεπώς πάλι απο την Πρόταση 2.3.2 υπάρχει αριθμήσιμη οικογένεια $({G_n}^{k+1})_n$ αποτελούμενη από ανοικτά, μη κενά, υποσύνολα του X με $diam {G_n}^{k+1} < \frac{1}{2^{k+2}}, \forall n \in \mathbb{N}$ ώστε:

$$B(\sigma|_k) = \bigcup_{n=1}^{\infty} {G_n}^{k+1} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{{G_n}^{k+1}}$$

Ορίζουμε $B\big(\sigma|_k \frown q\big) = G_q^{\,k+1}, \forall q \in \mathbb{N}$. Θέτοντας:

$$\overline{B}(\sigma|_n) = \overline{B(\sigma|_n)}, \forall \sigma|_n \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$$

η απόδειξη ολοκληρώνεται. □

Ορισμός 2.3.3. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος Hausdorff. Ο $(X, \mathcal{T})$ καλείται **αναλυτικός** αν είναι συνεχής εικόνα του χώρου Baire $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Ένα $A \subseteq X$ καλείται **αναλυτικό** αν ο χώρος $(A, \mathcal{T}_A)$ (δηλαδή το A εφοσιασμένο με την σχετική τοπολογία) είναι αναλυτικός.*

Με βάση τον παραπάνω ορισμό, ας παρουσιάσουμε κάποιες βασικές ιδιότητες των αναλυτικών χώρων

Πρόταση 2.3.4. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ αναλυτικός χώρος. Τότε, τόσο ο X όσο και κάθε υποσύνολό του είναι χώροι Lindelőf. Αν, επιπλέον, ο $(X, \mathcal{T})$ είναι μετρικοποιήσιμος, τότε ο X είναι διαχωρίσιμος.*

Απόδειξη. Αρχικά,θα δείξουμε ότι ο X είναι χώρος Lindelőf. Έστω $(U_i)_{i \in I}$ ένα ανοικτό κάλυμμα του X. Αφού ο $(X, \mathcal{T})$ είναι αναλυτικός, υπάρχει μία απεικόνιση $f : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to X$ συνεχής, επί. Τότε, η οικογένεια $\{f^{-1}(U_i) : i \in I\}$ αποτελεί ένα ανοικτό κάλυμμα του $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ κι αφού ο χώρος Baire είναι Lindelőf (ως διαχωρίσιμος μετρικός χώρος), έπεται πως υπάρχει $H \subseteq I$ αριθμήσιμο ώστε:

$$\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \subseteq \bigcup_{i \in H} f^{-1}(U_i)$$

Τότε εύκολα βλέπουμε πως $X \subseteq f\big(\bigcup_{i \in H} f^{-1}(U_i)\big) = \bigcup_{i \in H} U_i$. Δηλαδή κάθε ανοικτό κάλυμμα του X έχει αριθμήσιμο υποκάλυμμα, συνεπώς ο $(X, \mathcal{T})$ είναι χώρος Lindelőf.

Αν ένας αυθαίρετος τοπολογικός χώρος είναι Lindelőf, τότε δεν ισχύει εν γένει πως κάθε υποσύνολό του θα έχει αυτή την ιδιότητα. Στην περίπτωση των αναλυτικών χώρων, όμως, ισχύει. Πράγματι, έστω A ένα υποσύνολο του X, το οποίο κι εφοδιάζουμε με την σχετική τοπολογία. Εφόσον η f είναι συνεχής, η απεικόνιση $f|_{f^{-1}(A)} : f^{-1}(A) \to A$ θα είναι επίσης συνεχής. Ο $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ είναι διαχωρίσιμος, μετρικοποιήσιμος χώρος συνεπώς κι ο χώρος $f^{-1}(A)$ είναι διαχωρίσιμος, δηλαδή θα είναι και χώρος Lindelőf. Άρα, όπως και πριν, δείχνουμε ότι το A θα είναι χώρος Lindelőf.

Αν ο $(X, \mathcal{T})$ είναι μετρικοποιήσιμος και D ένα πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, τότω εύκολα βλέπουμε πως το σύνολο $f(D)$ θα είναι πυκνό στον X, καθώς η συνεχής εικόνα ενός πυκνού υποσυνόλου ενός μετρικού χώρου είναι πυκνό. □

Πρόταση 2.3.5. *Έστω $(X, \mathcal{T}_X)$ τοπολογικός χώρος Hausdorff. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i) *Ο $(X, \mathcal{T}_X)$ είναι αναλυτικός χώρος.*

(ii) *Υπάρχει $(Y, \mathcal{T}_Y)$ Πολωνικός χώρος και $g : Y \to X$ συνεχής κι επί συνάρτηση.*

Απόδειξη. (i)→(ii) Άμεσο, αφού, όπως έχουμε δείξει, ο χώρος Baire $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ είναι Πολωνικός.

(ii)→(i) Από το Θεώρημα 2.3.1 έπεται πως κάθε Πολωνικός χώρος είναι αναλυτικός. Συνεπώς, υπάρχει $f : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to Y$ συνεχής κι επί απεικόνιση. Εύκολα βλέπουμε τότε πως η συνάρτηση $g \circ f : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to X$ είναι συνεχής κι επί. □

Άμεσο είναι επίσης και το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Πρόταση 2.3.6. *Έστω $(X, \mathcal{T}_X)$ αναλυτικός χώρος, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ χώρος Hausdorff και $g : X \to Y$ μία συνεχής, επί συνάρτηση. Τότε ο $(Y, \mathcal{T}_Y)$ είναι αναλυτικός χώρος.*

Απόδειξη. Εφ' όσον ο χώρος $(X, \mathcal{T}_X)$ είναι αναλυτικός, υπάρχει $f : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to X$ συνεχής κι επί απεικόνιση. Τότε, η συνάρτηση $g \circ f : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to X$ είναι συνεχής κι επί. □

Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.3.1, κάθε Πολωνικός χώρος είναι αναλυτικός. Στην πραγματικότητα, ισχύει κάτι πολύ ισχυρότερο. Όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο κάθε Borel υποσύνολο ενός Πολωνικού χώρου είναι αναλυτικό. Παρ' όλαυτα, δεν μπορούμε να λάβουμε κάθε αναλυτικό χώρο ως τη συνεχή **και** ανοικτή εικόνα του $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Μπορούμε, όμως, να αναζητήσουμε 1-1 εικόνες. Το (vi) της Πρότασης 2.1.2 μας λέει το τι χρειαζόμαστε για την κατασκευή τέτοιων εικόνων. Αρχίζουμε με την ακόλουθη βοηθητική Πρόταση:

Πρόταση 2.3.7. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ διαχωρίσιμος, μετρικοποιήσιμος τοπολογικός χώρος, $C \subseteq X$ ένα F_σ σύνολο και $\epsilon > 0$. Τότε, υπάρχει ακολουθία $(C_n)_n$ ξένων ανά δύο, F_σ υποσυνόλων του X με $\overline{C_n} \subseteq C, \forall n \in \mathbb{N}$ και $diam C_n \leqslant \epsilon, \forall n \in \mathbb{N}$ ώστε:*

$$C = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$$

Απόδειξη. Επιλέγουμε d μία συμβατή μετρική επί του X. Αρχικά, θα δείξουμε ότι το συμπέρασμα της Πρότασης ισχύει για τα κλειστά υποσύνολα του X. Έστω, λοιπόν, $F \subseteq X$ κλειστό. Τότε, το F γράφεται ως:

$$F = \bigcup_{x \in F} \left(S\left(x, \frac{\epsilon}{2}\right) \cap F \right)$$

Η οικογένεια $\{S\left(x, \frac{\epsilon}{2}\right) \cap F : x \in F\}$ αποτελεί ένα ανοικτό κάλυμμα του F (στη σχετική τοπολογία του χώρου $(F, d \mid_F)$.) Εφ' όσον ο (X, d) είναι διαχωρίσιμος, έπεται πως κι ο χώρος $(F, d \mid_F)$ να είναι διαχωρίσιμος, δηλαδή ο χώρος $(F, d \mid_F)$ είναι Lindelőf. Συνεπώς, υπάρχει $(x_n)_n \subseteq F$ ώστε:

$$F = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(S\big(x_n, \frac{\epsilon}{2}\big) \cap F \right)$$

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, θέτουμε $G_n = \overline{\left(S\big(x_n, \frac{\epsilon}{2}\big) \cap F \right)}$. Τότε κάθε G_n είναι F_σ υποσύνολο του X, $G_n \subseteq \overline{F} = F$ (αφού το F κλειστό υποσύνολο του X) και $diam G_n < \epsilon, \forall n \in \mathbb{N}$. Άρα $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$.

Ορίζουμε:

$$F_1 = G_1 \text{ και } F_n = G_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} G_k = G_n \cap \big(\bigcap_{k=1}^{n-1} {G_k}^{\mathsf{c}} \big), \forall n \in \mathbb{N}$$

Παρατηρούμε ότι κάθε F_n είναι F_σ υποσύνολο του X,καθώς τα ανοικτά υποσύνολα μετρικών χώρων είναι F_σ κι η πεπερασμένη τομή F_σ συνόλων είναι πάλι F_σ.

Συνεπώς,αφού $\bigcup_n F_n = \bigcup_n G_n$ έχουμε ότι το F γράφεται ως την αριθμήσιμη ένωση ξένων ανά δύο F_σ υποσυνόλων του X διαμέτρου μικρότερης ή ίσης του ϵ. Αρα, το συμπέρασμα της Πρότασης ισχύει για τα κλειστά υποσύνολα του X.

Έστω, τώρα, $C \subseteq X$ ένα F_σ σύνολο. Τότε, $C = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, όπου F_n κλειστό υποσύνολο του $X, \forall n \in \mathbb{N}$.

Συνεπώς, όπως και πριν, για $n \in \mathbb{N}$ είναι:

$$F_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} {B_k}^n$$

όπου η οικογένεια $\{{B_k}^n : k \in \mathbb{N}\}$ αποτελείται από ξένα ανά δύο F_συποσύνολα του X διαμέτρου μικρότερης ή ίσης του ϵ. Επίσης, είναι $\overline{{B_k}^n} \subseteq \overline{F_n} = F_n \subseteq C$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Παρατηρούμε ότι η οικογένεια $\mathcal{B} = \{{B_k}^n : k, n \in \mathbb{N}\}$ είναι αρθμήσιμη, καθώς $\{{B_k}^n : k \in \mathbb{N}\} = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty} {B_k}^n$.

Άρα, υπάρχει $f : \mathbb{N} \to \mathcal{B}$ 1-1 κι επί. Θέτουμε $f(n) = A_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Τότε, ορίζοντας:

$$C_1 = A_1 \text{ και } C_n = A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k, \forall n \in \mathbb{N}$$

εύκολα βλέπουμε πως έχουμε το ζητούμενο αποτέλεσμα. □

Θεώρημα 2.3.8. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ διαχωρίσιμος, μετρικοποιήσιμος τοπολογικός χώρος. Τότε, ο X είναι η συνεχής, 1-1 εικόνα ενός υποσυνόλου του $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Αν, επιπλέον, ο $(X, \mathcal{T})$ είναι πλήρως μετρικοποιήσιμος, τότε ο X είναι η συνεχής, 1-1 εικόνα ενός κλειστού υποσυνόλου του $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.*

Απόδειξη. Θα κατασκευάσουμε δύο σχήματα Souslin $C, \overline{C} : \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \to \mathcal{P}(X)$ με τις εξής ιδιότητες:

(α) $C(\emptyset) = X$

(β) $\overline{C}(\sigma|_n) = \overline{C(\sigma|_n)}, \forall \sigma|_n \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$

(γ) $C(\sigma|_n) = \displaystyle\bigcup_{q=1}^{\infty} C(\sigma|_n \frown q) = \bigcup_{q=1}^{\infty} \overline{C(\sigma|_n \frown q)}, \forall \sigma|_n \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$

(δ) $diamC(\sigma|_n) \leqslant \dfrac{1}{2^{n+1}}, \forall \sigma|_n \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$

(ε) $C(\sigma|_n) \cap C(\tau|_n) = \emptyset, \forall \sigma|_n, \tau|_n \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ με $\sigma|_n \neq \tau|_n$

(στ) $C(\sigma|_n)$ είναι F_σ υποσύνολο του $X, \forall \sigma|_n \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$

Τότε, όπως και στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.3.1, οι επαγόμενες συναρτήσεις $\phi, \overline{\phi}$ των $C, \overline{C}$ αντίστοιχα ταυτίζονται. Με βάση την Πρόταση 2.1.2, από την ιδιότητα (ε) η $\phi = \overline{\phi}$ είναι συνεχής κι 1-1. Αν ο X είναι πλήρως μετρικοποιήσιμος, τότε αφού το $\overline{C}$ είναι κλειστό έπεται ότι το σύνολο Z (όπως αυτό ορίστηκε στην ίδια Πρόταση) θα είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Τέλος, η ιδιότητα (δ) εξασφαλίζει την συνθήκη διαμέτρου για τα $C, \overline{C}$ ενώ οι (α), (γ) εξασφαλίζουν πως $\phi(Z) = X$.

Η κατασκευή των σχημάτων Souslin $C, \overline{C}$ έχει ως εξής:

Επιλέγουμε d μία συμβατή μετρική επί του X.

Ορίζουμε $C(\emptyset) = X$. Αφού το X κλειστό (άρα F_σ) , από την προηγούμενη Πρόταση υπάρχει ακολουθία $({G_n}^1)_n$ ξένων ανά δύο F_σ υποσυνόλων του X με $diam G_n \leqslant \frac{1}{4}, \forall n \in \mathbb{N}$ ώστε:

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} {G_n}^1$$

Αφού, προφανώς, είναι $\overline{{G_n}^1} \subseteq X, \forall n \in \mathbb{N}$, έπεται ότι:

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} {G_n}^1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{{G_n}^1}$$

Ορίζουμε $C(\{n\}) = {G_n}^1, \forall n \in \mathbb{N}$.

Έστω πως για $k \in \mathbb{N}$, τα σύνολα $C(\sigma|_k)$ έχουν οριστεί $\forall \sigma \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Έστω, επίσης, $\sigma \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Τότε, εφ᾽ όσον το σύνολο $C(\sigma|_k)$ είναι F_σ, πάλι από την προηγούμενη Πρόταση, υπάρχει ακολουθία ${G_n}^{k+1}$ ξένων ανά δύο F_σ υποσυνόλων του X με $\overline{{G_n}^{k+1}} \subseteq C(\sigma|_k)$ και $diam {G_n}^{k+1} \leqslant \frac{1}{2^{k+2}}, \forall n \in \mathbb{N}$ ώστε:

$$C(\sigma|_k) = \bigcup_{n=1}^{\infty} {G_n}^{k+1} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{{G_n}^{k+1}}$$

Ορίζουμε $C\big(\sigma|_k \frown q\big) = {G_q}^{k+1}, \forall q \in \mathbb{N}$. Θέτοντας:

$$\overline{C}(\sigma|_n) = \overline{C(\sigma|_n)}, \forall \sigma|_n \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$$

η απόδειξη ολοκληρώνεται. $\square$

Σημείωση. *Με διαφορετικές τεχνικές, μπορεί κανείς να δείξει ότι κάθε Πολωνικός χώρος χωρίς μεμονομένα σημεία είναι η συνεχής, 1-1 εικόνα του χώρου Baire* $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Παρατήρηση 2.3.9. *Ορίσαμε τους αναλυτικούς χώρους ως συνεχείς εικόνες του* $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. *Τι μπορεί να πει κανείς για την δομή των χώρων αυτών; Στην περίπτωση των ομοιομορφισμών, η ταυτίσεις είναι απόλυτες καθώς όλες οι τοπολογικές ιδιότητες διατηρούνται. Στην προκειμένη περίπτωση, όμως, η υπόθεση της συνέχειας είναι αρκετά ασθενέστερη. Εκτός από κάποιες απλές παρατηρήσεις, όπως π.χ. η ιδιότητα Lindelőf των αναλυτικών χώρων, ποια άλλα συμπεράσματα μπορούμε να εξάγουμε για τα τοπολογικά, πληθαριθμικά, κτλ. γνωρίσματά* *τους; Θα δούμε πως οι αναλυτικοί χώροι αποτελούν μία οικογένεια χώρων που όχι μόνο περιέχουν μία πολύ πλούσια δομή, αλλά επίσης δίνουν μερική λύση σε γνωστά ανοικτά προβλήματα όπως η Υπόθεση του Συνεχούς. Όλα αυτα θα τα δούμε στις επόμενες ενότητες.*

2.4 Χαρακτηρισμοί Συμπαγών Μετρικοποιήσιμων Τοπολογικών Χώρων

Είδαμε πως ο χώρος Baire $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ αποτελεί 'πρότυπο' για όλους τους Πολωνικούς χώρους (υπό την έννοια του Θερήματος 2.3.1). Σε αυτήν την ενότητα, θα αποδείξουμε παρόμοια αποτελέσματα που συνδέουν τη σχέση των συμπαγών, μετρικοποιήσιμων τοπολογικών χώρων με τον χώρο Cantor $2^{\mathbb{N}}$. Στα προηγούμενα βασιστήκαμε στην έννοια των σχημάτων Souslin για να εκμεταλλευτούμε τη δομή του $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Στην περίπτωση του $2^{\mathbb{N}}$ χρειαζόμαστε παρόμοιες απεικονίσεις, τα σχήματα Hausdorff.

Ορισμός 2.4.1. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος.*

(i) ***Σχήμα Hausdorff*** *στον X καλείται μία απεικόνιση $A : 2^{<\mathbb{N}} \to \mathcal{P}(X)$.*

(ii) Αν A ένα σχήμα Hausdorff στον X,το A καλείται ***ανοικτό*** *(αντ.* ***κλειστό****) αν το σύνολο $A(s)$ είναι ανοικτό (αντ. κλειστό) υποσύνολο του X,$\forall s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$.*

Θα χρησιμοποιήσουμε τα σχήματα Hausdorff προκειμένου να κατασκευάσουμε συνεχείς συναρτήσεις απο το $2^{\mathbb{N}}$ (ή υποσύνολά του) σε δεδομένους μετρικοποιήσιμους τοπολογικούς χώρους.Η κατασκευή αυτή έχει ως εξής:

Έστω $(X, \mathcal{T})$ μετρικοποιήσιμος τοπολογικός χώρος,d μία μετρική επί του X συμβατή με την τοπολογία $\mathcal{T}$ κι έστω A ένα σχήμα Hausdorff στον X.Λέμε ότι το A ικανοποιεί την **συνθήκη διαμέτρου** αν:

$$\lim_{n \to +\infty} diam\, A(\sigma|_n) = 0, \quad \forall \sigma \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$$

Αν η συνθήκη διαμέτρου ικανοποιείται,τότε το σύνολο $\bigcap_{n=1}^{\infty} A(\sigma|_n)$ περιέχει το πολύ ένα σημείο.Ως εκ τούτου, όπως ακριβώς κάναμε και στην περίπτωση των σχημάτων Souslin , θέτοντας:

$$Z = \{\sigma \in 2^{\mathbb{N}} : \bigcap_{n=1}^{\infty} A(\sigma|_n) \neq \emptyset\}$$

μπορούμε να ορίσουμε μία συνάρτηση $\phi : Z \longrightarrow X$ με:

$$\{\phi(\sigma)\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} A(\sigma|_n), \quad \forall \sigma \in Z$$

Η συνάρτηση ϕ καλείται ως **η συνάρτηση που επάγεται από το A**.

Σε πλήρη αναλογία με τις προηγούμενες ενότητες, έχουμε την ακόλουθη Πρόταση:

Πρόταση 2.4.2. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ μετρικοποιήσιμος τοπολογικός χώρος, d μία συμβατή μετρική επί του X, $A : 2^{<\mathbb{N}} \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ ένα σχήμα Hausdorff που ικανοποιεί την συνθήκη διαμέτρου και ϕ η επαγόμενη συνάρτηση. Ισχύουν τα παρακάτω:*

(i) Η ϕ είναι συνεχής

(ii) Αν ο (X, d) είναι πλήρης μετρικός χώρος και το A είναι κλειστό,τότε το Z είναι κλειστό υποσύνολο του $2^{\mathbb{N}}$

(iii) Αν $\bigcap_{n=1}^{k} A(\sigma|_n) \neq \emptyset$ και $A(\sigma|_k) \subseteq A\big(\sigma|_k \frown 0\big) \cup A\big(\sigma|_k \frown 1\big),\ \forall \sigma|_k \in 2^{<\mathbb{N}}$, τότε το Z είναι πυκνό υποσύνολο του $2^{\mathbb{N}}$

(iv) Αν το A είναι ανοικτό και $A(\sigma|_n) \subseteq A\big(\sigma|_k \frown 0\big) \cup A\big(\sigma|_k \frown 1\big),\ \forall \sigma|_n \in 2^{<\mathbb{N}}$, τότε η $\phi : Z \longrightarrow \phi(Z)$ είναι ανοικτή απεικόνιση

(v) Αν $\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A(\sigma|_n)\Big) \bigcap \Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A(\tau|_n)\Big) = \emptyset,\ \forall \sigma, \tau \in 2^{\mathbb{N}}$ με $\sigma \neq \tau$,τότε η ϕ είναι 1-1

(vi) Αν το A είναι ανοικτό κι η οικογένεια $\{A\big((\sigma|_n) \frown q\big) : q \in \{0,1\}\}$ αποτελείται από ξένα ανά δύο υποσύνολα του $A(\sigma|_n)$ $\forall \sigma|_n \in 2^{<\mathbb{N}}$,τότε η $\phi : Z \longrightarrow \phi(Z)$ είναι ομοιομορφισμός

(vii) Αν $A(\emptyset) = X$ κι η οικογένεια $\{A\big((\sigma|_n) \frown q\big) : q \in \{0,1\}\}$ αποτελεί κάλυμμα του $A(\sigma|_n), \forall \sigma|_n \in 2^{<\mathbb{N}}$, τότε $\phi(Z) = X$

Η απόδειξη παραλείπεται, καθώς είναι πανομοιότυπη με αυτή της Πρότασης 2.1.2.

Θα αποδείξουμε τώρα το αντίστοιχο του Θεωρήματος Alexandrov - Urysohn για την περίπτωση του $2^{\mathbb{N}}$. Ξεκινάμε με την ακόλουθη Πρόταση:

Πρόταση 2.4.3. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ μηδενικής διάστασης, συμπαγής, μετρικοποιήσιμος τοπολογικός χώρος χωρίς μεμονομένα σημεία και $A \subseteq X$ μη κενό, clopen. Τότε, για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει οικογένεια $\{G_1, \ldots, G_n\}$ αποτελούμενη από τουλάχιστον 2, αλλά το πολύ πεπερασμένα το πλήθος ξένα ανά δύο, μη κενά, clopen υποσύνολα του X με $diamG_i \leqslant \epsilon, \forall i = 1, \ldots, n$ ώστε:*

$$A = \bigcup_{k=1}^{n} G_k$$

Απόδειξη. Επιλέγουμε d μία συμβατή μετρική επί του X. Αφού ο (X, d) είναι συμπαγής, έπεται πως ο (X, d) είναι διαχωρίσιμος. Συνεπώς υπάρχει $(B_n)_n$ μία αριθμήσιμη βάση περιοχών του X αποτελούμενη από clopen σύνολα με $diamB_n \leqslant \epsilon, \forall n \in \mathbb{N}$. Αφού ο (X, d) δεν έχει μεμονομένα σημεία, εύκολα βλέπουμε πως το X είναι άπειρο σύνολο.

Παρατηρούμε πως μπορούμε να επιλέξουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\emptyset \neq B_{n_0} \subsetneq A$. Πράγματι, έστω $x \in A$. Αφού A ανοικτό, υπάρχει $\epsilon' > 0$ ώστε $S(x, \epsilon') \subseteq A$. Τότε, αφού ο X δεν έχει μεμονομένα σημεία, υπάρχει $y \in S(x, \epsilon'), y \neq x$. Θέτοντας $\overline{\epsilon} = \min\left\{\epsilon', \dfrac{d(x,y)}{2}\right\}$ έχουμε ότι $y \notin S(x, \overline{\epsilon})$. Αφού η $(B_n)_n$ είναι βάση περιοχών του X, υπάρχει $K \subseteq \mathbb{N}$ ώστε:

$$S(x, \overline{\epsilon}) = \bigcup_{n \in K} B_n.$$

Τότε, υπάρχει $n_0 \in K$ ώστε $x \in B_{n_0}$. Όμως, $y \notin B_{n_0}$. Άρα $\emptyset \neq B_{n_0} \subsetneq A$.

Τότε , το σύνολο $A \setminus B_{n_0}$ θα είναι επίσης μη κενό και clopen υποσύνολο του X. Άρα, υπάρχει $K_1 \subseteq \mathbb{N}$ ώστε $A \setminus B_{n_0} = \bigcup\limits_{n \in K_1} B_n$ κι άρα είναι:

$$A = B_{n_0} \cup \big(\bigcup_{n \in K_1} B_n \big)$$

Εφ' όσον το A είναι κλειστό υποσύνολο συμπαγούς μετρικού χώρου, έπεται πως το A θα είναι συμπαγές, άρα υπάρχει $F = \{n_1, \ldots, n_k\} \subseteq K_1$ πεπερασμένο ώστε:

$$A = B_{n_0} \cup \big(\bigcup_{n \in F} B_n \big)$$

Θέτουμε $G_0 = B_{n_0}, G_q = B_{n_q} \setminus \left(\big(\bigcup\limits_{w=1}^{q-1} B_{n_w} \big) \cup B_{n_0} \right), \forall q = 1, \ldots, k.$

Εύκολα βλέπουμε πως η οικογένεια $\{G_0, \ldots, G_k\}$ ικανοποιεί τις υποθέσεις της Πρότασης. $\square$

Θεώρημα 2.4.4 (Brouwer). *Έστω $(X,\mathcal{T})$ μηδενικής διάστασης, συμπαγής, μετρικοποιήσιμος τοπολογικός χώρος χωρίς μεμονομένα σημεία. Τότε, ο $(X,\mathcal{T})$ είναι ομοιομορφικός με τον χώρο Cantor $2^{\mathbb{N}}$.*

Απόδειξη. Θα κατασκευάσουμε ένα σχήμα Hausdorff $A : 2^{<\mathbb{N}} \to \mathcal{P}(X)$ με τις εξής ιδιότητες:

(α) $A(\emptyset) = X$

(β) $A(\sigma|_n) \neq \emptyset, \forall \sigma \in 2^{<\mathbb{N}}$

(γ) Η οικογένεια $\{A\big((\sigma|_n) \frown q\big) : q \in \{0,1\}\}$ αποτελεί διαμέριση του $A(\sigma|_n), \forall \sigma|_n \in 2^{<\mathbb{N}}$

(δ) Το σύνολο $A(\sigma|_n)$ είναι clopen , $\forall \sigma|_n \in 2^{<\mathbb{N}}$

(ε) $diam A(\sigma|_n) \leqslant \dfrac{1}{2^{n+1}}, \forall \sigma|_n \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$

Τότε, με βάση την Πρόταση 2.4.2, από τις ιδιότητες (γ), (δ) έχουμε πως η επαγόμενη συνάρτηση $\phi : Z \to \phi(Z)$ θα είναι ομοιομορφισμός, ενώ απο τις (β), (δ) έχουμε πως το Z θα είναι πυκνό και κλειστό υποσύνολο του $2^{\mathbb{N}}$, δηλαδή $Z = 2^{\mathbb{N}}$. Τέλος, οι (α), (γ) επάγουν πως $\phi(Z) = X$ κι η (ε) εξασφαλίζει την συνθήκη διαμέτρου.

Η κατασκευή του σχήματος Hausdroff A έχει ως εξής:

Επιλέγουμε d μία συμβατή μετρική επί του X κι ορίζουμε $A(\emptyset) = X$. Ο X είναι προφανώς clopen , συνεπώς απο την προηγούμενη Πρόταση υπάρχει οικογένεια $(G_i)_{i=1}^n, n \geqslant 2$, ξένων ανά δύο, μη κενών, clopen υποσυνόλων του X με $diam G_i \leqslant \dfrac{1}{4}, \forall i = 1, \ldots, n$ ώστε:

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} G_i$$

Ορίζουμε:

$$A(1) = G_1,\ \ A(01) = G_2, \ldots,\ \ A(00\ldots01) = G_{n-1},\ \ A(00\ldots00) = G_n$$

και στη συνέχεια:

$$A(00\ldots0) = G_n \cup G_{n-1} \cup \ldots \cup G_{i+1}$$

όπου έχουμε $i-$το πλήθος μηδενικά, με $1 \leqslant i \leqslant n-2$.

Τώρα, κάθε ένα εκ των συνόλων $G_i, i = 1, \ldots, n$ είναι μη κενό, clopen υποσύνολο του X, συνεπώς μπορούμε να εφαρμόσουμε πάλι την προηγούμενη

Πρόταση για τα σύνολα αυτά, εξασφαλίζοντας ότι η διάμετρος των νέων συνόλων θα είναι μικρότερη ή ίση του 1/16. Συνεχίζοντας επαγωγικά με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, κατασκευάζουμε το ζητούμενο σχήμα Hausdorff.

Σχηματικά, έχουμε το ακόλουθο:

$$\Big[\qquad\qquad\qquad A(\emptyset) = X \qquad\qquad\qquad \Big]$$

$$\big[A(1) = G_1\big]\big[A(01) = G_2\big] \ldots \big[A(00\ldots01) = G_{n-1}\big]\big[A(00\ldots00) = G_n\big]$$

$$\big[A(1) = G_1\big]\Big[\qquad\qquad A(0) = G_2 \cup \ldots \cup G_n \qquad\qquad \Big]$$

$$\big[A(01) = G_2\big]\ \Big[\qquad A(00) = G_3 \cup \ldots \cup G_n \qquad \Big]$$

$$\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots$$

□

Θα δείξουμε σε αυτό το σημείο το αντίστοιχο του Θεωρήματος 2.3.1, δηλαδή πως κάθε συμπαγής, μετρικοποιήσιμος τοπολογικός χώρος είναι η συνεχής εικόνα του χώρου Cantor $2^{\mathbb{N}}$. Πριν, όμως, χρειαζόμαστε κάποια βοηθητικά Λήμματα.

Λήμμα 2.4.5. *Έστω $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ τοπολογικοί χώροι και $f : X \to Y$ ομοιομορφισμός. Τότε, οι χώροι $X^{\mathbb{N}}$ και $Y^{\mathbb{N}}$ (εφοδιασμένοι με τη συνήθη τοπολογία γινόμενο) είναι ομοιομορφικοί.*

Απόδειξη. Ορίζουμε απεικόνιση $f_{\mathbb{N}} : X^{\mathbb{N}} \to Y^{\mathbb{N}}$ με:

$$f_{\mathbb{N}}\big((x_n)_n\big) = \big(f(x_n)\big)_n$$

και θα δείξουμε ότι η $f_{\mathbb{N}}$ είναι ομοιομορφισμός.

Για να δούμε ότι η $f_{\mathbb{N}}$ είναι 1-1, έστω $(a_n)_n, (b_n)_n \in X^{\mathbb{N}}$ με $(a_n)_n \neq (b_n)_n$. Τότε, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $a_{n_0} \neq b_{n_0}$ κι άρα αφού η f υποτέθηκε 1-1, είναι:

$$f(a_{n_0}) \neq f(b_{n_0}) \Rightarrow \big(f(a_n)\big)_n \neq \big(f(b_n)\big)_n \Rightarrow f_{\mathbb{N}}\big((a_n)_n\big) \neq f_{\mathbb{N}}\big((b_n)_n\big)$$

Συνεπώς η $f_{\mathbb{N}}$ είναι 1-1.

Για να δούμε ότι η $f_{\mathbb{N}}$ είναι επί, έστω $(b_n)_n \in Y^{\mathbb{N}}$. Αφού η f είναι επί, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $a_n \in X$ ώστε $f(a_n) = b_n$. Είναι άμεσο πως $f_{\mathbb{N}}\big((a_n)_n\big) = (b_n)_n$.

Θα δείξουμε ότι η $f_{\mathbb{N}}$ είναι συνεχής. Έστω U ένα βασικό ανοικτό υποσύνολο του $Y^{\mathbb{N}}$. Τότε, το U γράφεται ως:

$$U = \left(\prod_{n \in F} U_n \right) \times Y^{\mathbb{N} \setminus F}$$

όπου $F \subseteq \mathbb{N}$ πεπερασμένο και $U_n \in \mathcal{T}_Y, \forall n \in F$. Θα δείξουμε ότι $f_{\mathbb{N}}^{-1}(U)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $X^{\mathbb{N}}$. Συγκεκριμένα, θα δείξουμε ότι:

$$f_{\mathbb{N}}^{-1}(U) = \left(\prod_{n \in F} f^{-1}(U_n) \right) \times X^{\mathbb{N} \setminus F}$$

το οποίο είνα ένα βασικό ανοικτό υποσύνολο του $X^{\mathbb{N}}$.

Έστω $(x_n)_n \in f_{\mathbb{N}}^{-1}(U)$. Τότε, $f_{\mathbb{N}}\big((x_n)_n\big) \in U$, δηλαδή $f(x_n) \in U_n, \forall n \in F$ και $f(x_n) \in Y, \forall n \in \mathbb{N} \setminus F$. Αυτό, όμως, συνεπάγεται πως $x_n \in f^{-1}(U_n), \forall n \in F$ και $x_n \in X, \forall n \in \mathbb{N} \setminus F$ κι άρα $(x_n)_n \in \big(\prod\limits_{n \in F} f^{-1}(U_n) \big) \times X^{\mathbb{N} \setminus F}$.

Έστω, τώρα, $(x_n)_n \in \big(\prod\limits_{n \in F} f^{-1}(U_n) \big) \times X^{\mathbb{N} \setminus F}$. Τότε, $f(x_n) \in U_n, \forall n \in F$ και $f(x_n) \in Y, \forall n \in \mathbb{N} \setminus F$. Αυτό μας δίνει ότι $f_{\mathbb{N}}\big((x_n)_n\big) \in U$, δηλαδή $(x_n)_n \in f_{\mathbb{N}}^{-1}(U)$.

Θα δείξουμε, τελικώς, ότι η $f_{\mathbb{N}}$ είναι ανοικτή. Έστω V ένα βασικό ανοικτό υποσύνολο του $X^{\mathbb{N}}$. Τότε, το V γράφεται ως:

$$V = \left(\prod_{n \in F} V_n \right) \times X^{\mathbb{N} \setminus F}$$

όπου $F \subseteq \mathbb{N}$ πεπερασμένο και $V_n \in \mathcal{T}_X, \forall n \in F$. Θα δείξουμε ότι:

$$f_{\mathbb{N}}(V) = \left(\prod_{n \in F} f(V_n) \right) \times Y^{\mathbb{N} \setminus F}$$

το οποίο είναι ένα βασικό υποσύνολο του $Y^{\mathbb{N}}$ (εφ' όσον η f είναι ανοικτή απεικόνιση.)

Έστω $(y_n)_n \in f_{\mathbb{N}}(V)$. Τότε, υπάρχει $(x_n)_n \in X^{\mathbb{N}}$ ώστε $(y_n)_n = f_{\mathbb{N}}\big((x_n)_n\big)$. Έχουμε ότι $(x_n)_n \in V$ κι άρα $x_n \in V_n, \forall n \in F$ και $x_n \in X, \forall n \in \mathbb{N} \setminus F$. Αυτό έπεται πως $f(x_n) \in f(V_n), \forall n \in F$ και $f(x_n) \in Y, \forall n \in \mathbb{N} \setminus F$, δηλαδή $(y_n)_n \in \big(\prod\limits_{n \in F} f(V_n) \big) \times Y^{\mathbb{N} \setminus F}$.

Έστω, τώρα, $(y_n)_n \in \big(\prod\limits_{n \in F} f(V_n) \big) \times Y^{\mathbb{N} \setminus F}$. Όπως πριν, υπάρχει $(x_n)_n \in X^{\mathbb{N}}$ ώστε $(y_n)_n = f_{\mathbb{N}}\big((x_n)_n\big)$. Έχουμε ότι $f(x_n) \in f(V_n), \forall n \in F$ και $f(x_n) \in Y$, $\forall n \in \mathbb{N} \setminus F$. Άρα, $x_n \in V_n, \forall n \in F$ και $x_n \in X, \forall n \in \mathbb{N} \setminus F$, δηλαδή $(x_n)_n \in V$ $\Leftrightarrow (y_n)_n \in f_{\mathbb{N}}(V)$. $\square$

Παρατήρηση 2.4.6. *Αν* $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ *τοπολογικοί χώροι και* $f : X \to Y$ *συνεχής, επί, τότε ακολουθώντας ακριβώς τα ίδια βήματα απόδειξης με την παραπάνω Πρόταση είναι άμεσο ότι η συνάρτηση* $f_{\mathbb{N}} : X^{\mathbb{N}} \to Y^{\mathbb{N}}$ *θα είναι συνεχής κι επί. Την παρατήρηση αυτή θα την χρειαστούμε για το επόμενο Λήμμα.*

Λήμμα 2.4.7. *Υπάρχει απεικόνιση* $g : 2^{\mathbb{N}} \to [0,1]^{\mathbb{N}}$ *συνεχής, επί.*

Απόδειξη. Όπως είδαμε στην Πρόταση 1.1.10, οι χώροι $2^{\mathbb{N}}$ και $(2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$ είναι ομοιομορφικοί. Συνεπώς, αρκεί να δείξουμε πως υπάρχει μία συνάρτηση $f : 2^{\mathbb{N}} \to [0,1]$ συνεχής, επί. Πράγματι , αν $f : 2^{\mathbb{N}} \to [0,1]$ συνεχής, επί, τότε από το Λήμμα 2.4.5 υπάρχει απεικόνιση $f_{\mathbb{N}} : (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}} \to [0,1]^{\mathbb{N}}$ η οποία είναι συνεχής κι επί. Έστω, τώρα, $h : 2^{\mathbb{N}} \to (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$ ένας ομοιομορφισμός. Τότε η $g = f_{\mathbb{N}} \circ h : 2^{\mathbb{N}} \to [0,1]^{\mathbb{N}}$ είναι η ζητούμενη συνεχής κι επί απεικόνιση.

Ορίζοντας:

$$f : 2^{\mathbb{N}} \to [0,1] \text{ με } f(\sigma) = f\big((\sigma_n)_n\big) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n}{2^n}$$

εύκολα βλέπουμε πως η f είναι συνεχής κι επί κι άρα ολοκληρώνεται η απόδειξη. □

Λήμμα 2.4.8. *Έστω* $(X, \mathcal{T})$ *συμπαγής και μετρικοποιήσιμος τοπολογικός χώρος. Τότε, ο* $(X, \mathcal{T})$ *είναι η συνεχής εικόνα ενός κλειστού υποσυνόλου του* $2^{\mathbb{N}}$.

Απόδειξη. Επιλέγουμε d μία συμβατή μετρική επί του X. Τότε, ο (X, d) θα είναι T_3 και δεύτερος αριθμήσιμος (ως συμπαγής μετρικός χώρος), συνεπώς από το Θεώρημα Μετρικοποιησιμότητας του Urysohn υπάρχει $f : X \to [0,1]^{\mathbb{N}}$ ομοιομορφική εμφύτευση. Είναι άμεσο πως το σύνολο $f(X)$ θα είναι κλειστό υποσύνολο του $[0,1]^{\mathbb{N}}$ (συνεχής εικόνα συμπαγούς χώρου είναι συμπαγές).

Από το προηγούμενο Λήμμα, υπάρχει απεικόνιση $g : 2^{\mathbb{N}} \to [0,1]^{\mathbb{N}}$ συνεχής, επί. Τότε, το σύνολο $g^{-1}\big(f(X)\big)$ θα είναι κλειστό υποσύνολο του $2^{\mathbb{N}}$. Άρα, η συνάρτηση:

$$g \,|_{g^{-1}\left(f(X)\right)} : g^{-1}\big(f(X)\big) \to [0,1]^{\mathbb{N}}$$

είναι συνεχής, επί και το σύνολο τιμών της είναι το $f(X)$. Εφ' όσον το $f(X)$ είναι ομοιομορφικό με τον X, έχουμε το ζητούμενο. □

Το ακόλουθο αποτέλεσμα παρουσιάζει από μόνο του αρκετό ενδιαφέρον.

Λήμμα 2.4.9. *Έστω A μη κενό, κλειστό υποσύνολο του $2^{\mathbb{N}}$. Τότε, υπάρχει συνάρτηση $f : 2^{\mathbb{N}} \to A$ συνεχής τέτοια ώστε $f(a) = a$, για κάθε $a \in A$.*

Απόδειξη. Έστω $\sigma = (\sigma_n)_n \in 2^{\mathbb{N}}$. Αν υπάρχει $a = (a_n)_n \in A$ με $a_1 = \sigma_1$, θέτουμε $r(\sigma)_1 = \sigma_1$ και $z(\sigma)_1 = 0$, αλλιώς θέτουμε $r(\sigma)_1 = 1 - \sigma_1$ και $z(\sigma)_1 = 1$. Έστω πως για $k \in \mathbb{N}$, τα $r(\sigma)_1, \dots, r(\sigma)_k$ έχουν οριστεί. Αν υπάρχει $a = (a_n)_n \in A$ με $a_i = r(\sigma)_i, \forall i = 1, \dots, k$ και $a_{k+1} = \sigma_{k+1}$ τότε θέτουμε $r(\sigma)_{k+1} = \sigma_{k+1}$ και $z(\sigma)_{k+1} = 0$, αλλιώς θέτουμε $r(\sigma)_{k+1} = 1 - \sigma_{k+1}$ και $z(\sigma)_{k+1} = 1$.

Συνεπώς, για κάθε $\sigma = (\sigma_n)_n \in 2^{\mathbb{N}}$ καταλήγουμε με δύο δυαδικές ακολουθίες, τις $(r(\sigma)_n)_n$ και $(z(\sigma)_n)_n$. Ορίζουμε συνάρτηση $f : 2^{\mathbb{N}} \to 2^{\mathbb{N}}$ με:

$$f(\sigma) = (r(\sigma)_n)_n, \forall \sigma \in 2^{\mathbb{N}}$$

και θα δείξουμε πως είναι η ζητούμενη.

Είναι άμεσο πως για κάθε $a \in A$ είναι $f(a) = a$.

Έστω $\sigma = (\sigma_n)_n \in 2^{\mathbb{N}}$. Θα δείξουμε ότι $f(\sigma) = (r(\sigma)_n)_n \in A$. Από τον τρόπο κατασκευής της ακολουθίας $(r(\sigma)_n)_n$ έχουμε ότι για κάθε $k \in N$, υπάρχει $a = (a_n)_n \in A$ ώστε $a\,|_k = f(\sigma)\,|_k$. Θέτουμε $\tau^k = a$. Τότε η $(\tau^n)_n$ είναι μία ακολουθία στοιχείων του A η οποία συγκλίνει στο $f(\sigma)$. Αρχικά παρατηρούμε πως αν $n, m \in \mathbb{N}$ με $n \leqslant m$ ισχύει ότι $\tau^n\,|_n \sqsubseteq \tau^m$. Έστω, τώρα, $s = (s_1, \dots, s_k) \in 2^{<\mathbb{N}}$ ώστε $f(\sigma) \in U_s$. Τότε, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\forall n \geqslant n_0$ να ισχύει $\tau^n\,|_k = f(\sigma)_k = s$. Από αυτό έπεται πως για κάθε $n \geqslant n_0$ είναι $\tau^n \in U_s$ κι άρα η $(\tau^n)_n$ συγκλίνει στο $f(\sigma)$. Συνεπώς, το $f(\sigma)$ είναι οριακό σημείο του A κι αφού το A είναι κλειστό, έπεται πως $f(\sigma) \in A$.

Θα δείξουμε ότι η f είναι συνεχής. Έστω $s = (s_1, \dots, s_k) \in 2^{<\mathbb{N}}$. Θα δείξουμε ότι $f^{-1}(U_s \cap A)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $2^{\mathbb{N}}$. Αρκεί να δειχθεί ότι για κάθε $\sigma = (\sigma_n)_n \in f^{-1}(U_s \cap A)$ υπάρχει $s_\sigma \in 2^{<\mathbb{N}}$ ώστε:

$$\sigma \in U_{s_\sigma} \text{ και } U_{s_\sigma} \subseteq f^{-1}(U_s \cap A).$$

Έστω $\sigma = (\sigma_n)_n \in f^{-1}(U_s \cap A)$.Τότε $f(\sigma) = (r(\sigma)_n)_n \in U_s \cap A$, δηλαδή $r(\sigma)_i = s_i, \forall i = 1, \dots, k$. Θέτουμε:

$$\begin{cases} {s_\sigma}^i = r(\sigma)_i & ,\text{αν } z(\sigma)_i = 0 \\ {s_\sigma}^i = 1 - r(\sigma)_i & ,\text{αν } z(\sigma)_i = 1 \end{cases}$$

για κάθε $i \in \{1, \dots, k\}$ κι ισχυριζόμαστε πως το $s_\sigma = ({s_\sigma}^1, \dots, {s_\sigma}^k)$ είναι το ζητούμενο.

Αρχικά, θα δείξουμε ότι $\sigma \in U_{s_\sigma}$. Έστω $i \in \{1, \dots, k\}$. Τότε, αν $z(\sigma)_i = 0$ είναι $r(\sigma)_i = \sigma_i$, δηλαδή ${s_\sigma}^i = r(\sigma)_i = \sigma_i$. Αν $z(\sigma)_i = 1$, τότε $r(\sigma)_i = 1 - \sigma_i$ δηλαδή ${s_\sigma}^i = 1 - r(\sigma)_i = 1 - (1 - \sigma_i) = \sigma_i$. Άρα ${s_\sigma}^i = \sigma_i, \forall i = 1, \dots, k$, συνεπώς $\sigma \in U_{s_\sigma}$.

Θα δείξουμε τώρα ότι $U_{s_\sigma} \subseteq f^{-1}(U_s \cap A)$. Έστω $y = (y_n)_n \in U_{s_\sigma}$. Τότε, είναι ${s_\sigma}^i = y_i, \forall i = 1, \dots, k$ κι αφού $\sigma \in U_{s_\sigma}$ είναι ${s_\sigma}^i = y_i = \sigma_i$, $\forall i = 1, \dots, k$, από το οποίο έπεται άμεσα πως $z(\sigma)_i = z(y)_i, \forall i = 1, \dots, k$. Θα δείξουμε ότι:

$$f(y) = (r(y)_n)_n \in U_s \cap A \Leftrightarrow s_i = r(y)_i, \forall i = 1, \dots, k.$$

Έστω $i \in \{1, \dots, k\}$. Αν $z(y)_i = z(\sigma)_i = 0$ τότε $r(y)_i = y_i = r(\sigma)_i = \sigma_i$ κι αφού $f(\sigma) \in U_s \cap A$ έπεται πως $r(\sigma)_i = s_i$, δηλαδή $r(y)_i = s_i$. Αν $z(y)_i = z(\sigma)_i = 1$ τότε $r(y)_i = 1 - y_i = r(\sigma)_i = 1 - \sigma_i$. Αυτό έχει ως συνέπεια πως $r(\sigma)_i = s_1 = 1 - \sigma_i$, δηλαδή $r(y)_i = s_i$.

Τελικώς, είναι $s_i = r(y)_i, \forall i = 1, \dots, k$ κι άρα $U_{s_\sigma} \subseteq f^{-1}(U_s \cap A)$. □

Με βάση όλα τα παραπάνω Λήμματα, η απόδειξη του ακόλουθου θεμελιώδους Θεωρήματος για τον χώρο Cantor είναι άμεση:

Θεώρημα 2.4.10 (Alexandrov-Hausdroff). *Έστω $(X, \mathcal{T})$ συμπαγής, μετρικοποιήσιμος τοπολογικός χώρος. Τότε, ο $(X, \mathcal{T})$ είναι η συνεχής εικόνα του $2^{\mathbb{N}}$.*

Απόδειξη. Από το Λήμμα 2.4.8 υπάρχει $A \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ κλειστό και μία απεικόνιση $f : A \to X$ συνεχής, επί. Επίσης, από το Λήμμα 2.4.9 υπάρχει συνάρτηση $g : 2^{\mathbb{N}} \to A$ συνεχής, επί. Είναι, λοιπόν, άμεσο πως η $f \circ g : 2^{\mathbb{N}} \to X$ θα είναι η ζητούμενη συνεχής κι επί απεικόνιση. □

Θα περάσουμε τώρα στην απόδειξη του Θεωρήματος του Young, το οποίο είναι ίσως το πιο σημαντικό αποτέλεσμα αυτής της ενότητας, καθώς τα άμεσα πορίσματά του δίνουν μια πολύ καλή αίσθηση της πλούσιας δομής των αναλυτικών χώρων. Ξεκινάμε με τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 2.4.11. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $x_0 \in X$. Το x_0 καλείται* ***σημείο συμπύκνωσης*** *του $(X, \mathcal{T})$ αν για κάθε $U \in \mathcal{T}$ με $x_0 \in U$ ισχύει ότι το U είναι υπεραριθμήσιμο.*

Θεώρημα 2.4.12 (Young). *Έστω $(X, \mathcal{T}_X)$ Πολωνικός χώρος, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ υπεραριθμήσιμος, Hausdroff τοπολογικός χώρος και $f : X \to Y$ συνεχής κι επί απεικόνιση. Τότε, υπάρχει $A \subseteq X$ ομοιομορφικό με τον χώρο Cantor $2^{\mathbb{N}}$ ώστε η συνάρτηση $f|_A : A \to f(A)$ να είναι ομοιομορφισμός.*

Απόδειξη. Κατ' αρχάς, παρατηρούμε πως ο X είναι υπεραριθμήσιμος, εφ' όσον ο Y είναι υπεραριθμήσιμος κι η f είναι επί. Το γεγονός πως η f δεν είναι κατ' ανάγκη 1-1 και πως ο X ενδέχεται να περιέχει μεμονομένα σημεία περιπλέκει κάπως την απόδειξη. Για να διαχειριστούμε αυτά τα προβλήματα αρχικά επιλέγουμε $X_0 \subseteq X$ υπεραριθμήσιμο ώστε η $f\mid_{X_0}$ να είναι 1-1. Η επιλογή γίνεται ως εξής:

Αφού η f είναι επί, για κάθε $y \in Y$ επιλέγουμε $x_y \in X$ ώστε $f(x_y) = y$. Θέτοντας $X_0 = \{x_y : y \in Y\}$ έχουμε το ζητούμενο.

Εξετάζουμε τον χώρο $(X_0, \mathcal{T}_{X_0})$, όπου $\mathcal{T}_{X_0}$ η σχετική τοπολογία στο X_0. Θέτουμε:

$$X_1 = \{z \in X_0 : z \text{ σημείο συμπύκνωσης του } (X_0, \mathcal{T}_{X_0})\}$$

Προφανώς είναι $X_1 \subseteq X_0$. Θα δείξουμε ότι το X_1 είναι υπεραριθμήσιμο σύνολο, το $X_0 \setminus X_1$ είναι αριθμήσιμο και πως ο χώρος $(X_1, \mathcal{T}_{X_1})$ δεν έχει μεμονομένα σημεία.

Για να δούμε πως το σύνολο $X_0 \setminus X_1$ είναι αριθμήσιμο, έστω $x \in X_0 \setminus X_1$. Τότε, το x δεν είναι σημείο συμπύκνωσης του X_0, συνεπώς υπάρχει $U_x \in \mathcal{T}_X$ με $x \in U_x$ ώστε το $U_x \cap X_0$ να είναι αριθμήσιμο. Τότε:

$$X_0 \setminus X_1 = \bigcup_{x \in X_0 \setminus X_1} \Big((U_x \cap X_0) \cap (X_0 \setminus X_1) \Big) = \bigcup_{x \in X_0 \setminus X_1} U_x \cap \big(X_0 \setminus X_1\big)$$

Εφ' όσον ο X είναι Πολωνικός, ο X θα είναι χώρος Lindelőf, το οποίο έπεται πως κι ο χώρος $(X_0 \setminus X_1, \mathcal{T}_{X_0 \setminus X_1})$ θα είναι Lindelőf. Το παραπάνω αποτελεί ένα ανοικτό κάλυμμα του $X_0 \setminus X_1$, συνεπώς υπάρχει ακολουθία $(x_n)_n \subseteq X_0 \setminus X_1$ ώστε:

$$X_0 \setminus X_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_{x_n} \cap \big(X_0 \setminus X_1\big)$$

Άρα, το $X_0 \setminus X_1$ είναι αριθμήσιμο ως αριθμήσιμη ένωση αριθμήσιμων συνόλων (Το σύνολο $U_{x_n} \cap \big(X_0 \setminus X_1\big)$ είναι το πολύ αριθμήσιμο, $\forall n \in \mathbb{N}$.)

Εφ' όσον το X_0 είναι υπεραριθμήσιμο και το $X_0 \setminus X_1$ είναι αριθμήσιμο, είναι άμεσο πως το X_1 θα είναι υπεραριθμήσιμο.

Θα δείξουμε τώρα ότι ο χώρος $(X_1, \mathcal{T}_{X_1})$ δεν έχει μεμονομένα σημεία. Έστω, προς εις άτοπον απαγωγή, πως υπάρχει z μεμονομένο σημείο του X_1. Τότε, υπάρχει $U \in \mathcal{T}_X$ ώστε $U \cap X_1 = \{z\}$. Αφού $z \in X_1$ έπεται πως το σύνολο $U \cap X_0$ θα είναι υπεραριθμήσιμο. Όμως $U \cap X_0 = \big(U \cap (X_0 \setminus X_1)\big) \cup \big(U \cap X_1\big)$ κι αφού δείξαμε πως το $X_0 \setminus X_1$ είναι αριθμήσιμο, έπεται πως το σύνολο $U \cap X_1$ θα είναι υπεραριθμήσιμο, άτοπο! Άρα, ο χώρος $(X_1, \mathcal{T}_{X_1})$ δεν έχει μεμονομένα σημεία.

Επιλέγουμε d μία πλήρη μετρική επί του X. Θα κατασκευάσουμε δύο σχήματα Hausdorff $A, \overline{A} : 2^{<\mathbb{N}} \to \mathcal{P}(X)$ ώστε να ικανοποιούνται τα παρακάτω:

(α) Το σύνολο $A(\sigma|_n)$ είναι ανοικτό $, \forall \sigma|_n \in 2^{<\mathbb{N}}$

(β) $A(\sigma|_n) \cap X_1 \neq \emptyset, \forall \sigma|_n \in 2^{<\mathbb{N}}$

(γ) $diam A(\sigma|_n) \leqslant \dfrac{1}{n}, \forall \sigma|_n \in 2^{<\mathbb{N}}$

(δ) $\overline{f\big(A(\sigma|_n)\big)} \cap f\big(A(\tau|_n)\big) = \emptyset, \forall \sigma|_n, \tau|_n \in 2^{<\mathbb{N}}$ με $\sigma|_n \neq \tau|_n$

(ε) $\overline{A(\sigma|_{n+1})} \subseteq A(\sigma|_n), \forall \sigma|_{n+1} \in 2^{<\mathbb{N}}$

(στ) $\overline{A}(\sigma|_n) = \overline{A(\sigma|_n)}, \forall \sigma|_n \in 2^{<\mathbb{N}}$.

Τότε, όπως και στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.3.1 οι επαγόμενες συναρτήσεις $\phi, \overline{\phi}$ από τα $A, \overline{A}$ αντίστοιχα ταυτίζονται. Η ιδιότητα (γ) εξασφαλίζει την συνθήκη διαμέτρου για τα $A, \overline{A}$. Παρατηρούμε πως λόγω της ιδιότητας (β) είναι $A(\sigma|_n) \neq \emptyset, \forall \sigma|_n \in 2^{<\mathbb{N}}$. Άρα, με βάση την Πρόταση 2.4.2 κι αφού το $\overline{A}$ είναι κλειστό, από τις ιδιότητες (α),(β),(ε) το Z θα είναι πυκνό και κλειστό υποσύνολο του $2^{\mathbb{N}}$, δηλαδή $Z = 2^{\mathbb{N}}$. Παρατηρούμε, επίσης, πως η ιδιότητα (δ) συνεπάγεται πως θα είναι $A(\sigma|_n) \cap A(\tau|_n) = \emptyset, \forall \sigma|_n, \tau|_n \in 2^{<\mathbb{N}}$ με $\sigma|_n \neq \tau|_n$. Πράγματι, αν υπήρχαν $\sigma|_n, \tau|_n \in 2^{<\mathbb{N}}$ με $\sigma|_n \neq \tau|_n$ και $x \in A(\sigma|_n) \cap A(\tau|_n)$, τότε $f(x) \in f\big(A(\sigma|_n)\big) \cap f\big(A(\tau|_n)\big)$, άτοπο! (λόγω του (δ)). Άρα, από τις ιδιότητες (α), (δ), (ε) η συνάρτηση $\phi = \overline{\phi} : 2^{\mathbb{N}} \to \phi(2^{\mathbb{N}}) \subseteq X$ είναι ομοιομορφισμός.

Θέτουμε $A = \phi(2^{\mathbb{N}})$. Θα δείξουμε ότι η $f\,|_A : A \to f(A)$ είναι ομοιομορφισμός. Εφ᾽ όσον η f είναι συνεχής, έπεται πως κι η $f\,|_A$ θα είναι συνεχής. Για να δούμε πως η f θα είναι 1-1, έστω $x, y \in A$ με $x \neq y$. Τότε, υπάρχουν $\sigma, \tau \in 2^{\mathbb{N}}$ ώστε $x = \phi(\sigma)$ και $y = \phi(\tau)$ κι άρα θα είναι $\{f(x)\} = f\big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A(\sigma|_n)\big)$ και $\{f(y)\} = f\big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A(\tau|_n)\big)$. Συνεπώς, από τις ιδιότητες (δ), (ε) εύκολα βλέπουμε πως θα είναι $f(x) \neq f(y)$. Τελικά, καθώς το A είναι συμπαγές (ως ομοιομορφικό με το $2^{\mathbb{N}}$) κι η $f\,|_A$ είναι 1-1, όπως είναι γνωστό από την Γενική Τοπολογία, η $f\,|_A$ θα είναι ομοιομορφισμός.

Η κατασκευή των σχημάτων Hausdorff $A, \overline{A}$ έχει ως εξής:

Έστω $x_0, x_1 \in X_1$ με $x_0 \neq x_1$. Αφού η $f\,|_{X_1}$ είναι 1-1, θα είναι $f(x_0) \neq f(x_1)$. Αφού ο Y είναι Hausdorff, υπάρχουν $U_0, U_1 \in \mathcal{T}_Y$ ώστε $U_0 \cap U_1 = \emptyset$, $f(x_0) \in U_0$ και $f(x_1) \in U_1$. Τότε $f(x_1) \notin \overline{U_0}$. Θέτουμε $V_1 = U_1 \setminus \overline{U_0}$ το οποίο είναι μη κενό. Τότε $V_1 \in \mathcal{T}_Y$ και $\overline{U_0} \cap V_1 = \emptyset$. Άρα, $x_0 \in f^{-1}(U_0)$, $x_1 \in f^{-1}(V_1)$ και:

$$\big(f^{-1}(U_0)\big) \cap \big(f^{-1}(V_1)\big) = \emptyset.$$

Η f είναι συνεχής, συνεπώς $f^{-1}(U_0), f^{-1}(B) \in \mathcal{T}_X$. Άρα, υπάρχουν $\epsilon_0, \epsilon_1 > 0$ ώστε:

$$S(x_0,\epsilon_0) \subseteq f^{-1}(U_0) \text{ και } S(x_1,\epsilon_1) \subseteq f^{-1}(V_1)$$

Θέτουμε $\overline{\epsilon} = \min\left\{\dfrac{d(x_0,x_1)}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{\epsilon_0}{2}, \dfrac{\epsilon_1}{2}\right\}$ κι ορίζουμε:

$$A(\emptyset) = \left(S(x_0, \frac{\overline{\epsilon}}{2})\right) \cup \left(S(x_1, \frac{\overline{\epsilon}}{2})\right)$$

και

$$A(0) = S\big(x_0, \frac{\overline{\epsilon}}{4}\big),\ A(1) = S\big(x_1, \frac{\overline{\epsilon}}{4}\big)$$

Τότε, τα σύνολα $A(\emptyset), A(0), A(1)$ είναι ανοικτά, έχουν διάμετρο μικρότερη ή ίση του 1 και είναι $\overline{A(0)}, \overline{A(1)} \subseteq A(\emptyset)$. Τέλος, αφού $f\big(A(0)\big) \subseteq U_0$, $f\big(A(1)\big) \subseteq V_1$ και $\overline{U_0} \cap V_1 = \emptyset$, εύκολα βλέπουμε πως θα είναι $\overline{f\big(A(0)\big)} \cap f\big(A(1)\big) = \emptyset$.

Έστω πως για $k \in \mathbb{N}$, τα σύνολα $A(\sigma|_k)$ έχουν οριστεί για κάθε $\sigma \in 2^{\mathbb{N}}$. Έστω, επίσης, $\sigma \in 2^{\mathbb{N}}$. Εξ' υποθέσεως, είναι $A(\sigma|_k) \cap X_1 \neq \emptyset$, άρα υπάρχει ${x_0}^{k+1} \in A(\sigma|_k) \cap X_1$. Το σύνολο $A(\sigma|_k)$ είναι ανοικτό, συνεπώς υπάρχει $\epsilon_{k+1} > 0$ ώστε $S({x_0}^{k+1}, \epsilon_{k+1}) \subseteq A(\sigma|_k)$. Εφ' όσον ο χώρος $(X_1, \mathcal{T}_{X_1})$ δεν έχει μεμονωμένα σημεία, έπεται πως υπάρχει ${x_1}^{k+1} \in S({x_0}^{k+1}, \epsilon_{k+1}) \cap X_1$ με ${x_1}^{k+1} \neq {x_0}^{k+1}$. Η $f|_{X_1}$ είναι 1-1, άρα $f({x_0}^{k+1}) \neq f({x_1}^{k+1})$. Ακριβώς όπως και πριν βρίσκουμε δύο ανοικτά σύνολα ${U_0}^{k+1}, {V_1}^{k+1}$ ώστε $f({x_0}^{k+1}) \in {U_0}^{k+1}$, $f({x_1}^{k+1}) \in {V_1}^{k+1}$ και $\overline{{U_0}^{k+1}} \cap {V_1}^{k+1} = \emptyset$. Η f είναι συνεχής, συνεπώς τα σύνολα $f^{-1}({U_0}^{k+1})$ και $f^{-1}({V_1}^{k+1})$ είναι ξένα κι ανοικτά στον X με ${x_0}^{k+1} \in f^{-1}({U_0}^{k+1})$ και ${x_1}^{k+1} \in f^{-1}({V_1}^{k+1})$. Τότε, υπάρχουν ${\epsilon_0}^{k+1}, {\epsilon_1}^{k+1} > 0$ ώστε:

$$S({x_0}^{k+1}, {\epsilon_0}^{k+1}) \subseteq f^{-1}({U_0}^{k+1}) \text{ και } S({x_1}^{k+1}, {\epsilon_1}^{k+1}) \subseteq f^{-1}({V_1}^{k+1})$$

Θέτουμε:

$$\overline{\epsilon}_{k+1} = \min\left\{\frac{d({x_0}^{k+1}, {x_1}^{k+1})}{2}, \frac{1}{2^{k+2}}, \frac{{\epsilon_0}^{k+1}}{2}, \frac{{\epsilon_1}^{k+1}}{2}, \frac{\epsilon_{k+1} - d({x_0}^{k+1}, {x_1}^{k+1})}{2}\right\}$$

Στη συνέχεια, ορίζουμε:

$$A\big(\sigma|_k \frown 0\big) = S({x_0}^{k+1}, \overline{\epsilon}_{k+1}) \text{ και } A\big(\sigma|_k \frown 1\big) = S({x_1}^{k+1}, \overline{\epsilon}_{k+1})$$

κι εύκολα βλέπουμε πως τα παραπάνω σύνολα πληρούν τις ζητούμενες ιδιότητες.

Τέλος, ορίζοντας $\overline{A}(\sigma|_n) = \overline{A(\sigma|_n)}, \forall \sigma|_n \in 2^{<\mathbb{N}}$ η κατασκευή των σχημάτων Hausdorff $A, \overline{A}$ ολοκληρώνεται. $\square$

Πόρισμα 2.4.13. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ υπεραριθμήσιμος αναλυτικός χώρος. Τότε, ο $(X, \mathcal{T})$ περιέχει ένα υποσύνολο ομοιομορφικό με τον χώρο Cantor $2^{\mathbb{N}}$.*

Απόδειξη. Αφού ο $(X, \mathcal{T})$ είναι αναλυτικός, έχουμε ότι θα είναι Hausdorff και πως υπάρχει μία συνάρτηση $f : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to X$ συνεχής, επί. Ο χώρος Baire είναι Πολωνικός, συνεπώς, από το προηγούμενο Θεώρημα υπάρχει $A \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ομοιομορφικό με το $2^{\mathbb{N}}$ ώστε η $f|_A : A \to f(A)$ να είναι ομοιομορφισμός. Άρα, το σύνολο $f(A) \subseteq X$ είναι ομοιομορφικό με το $2^{\mathbb{N}}$. □

Παρατήρηση 2.4.14. *(i) Σύμφωνα με το παραπάνω αποτέλεσμα, κάθε υπεραριθμήσιμος αναλυτικός χώρος περιέχει ένα υποσύνολο ομοιομορφικό με το $2^{\mathbb{N}}$, δηλαδή ένα υποσύνολο το οποίο (εφοδιασμένο με την σχετική τοπολογία) είναι υπεραριθμήσιμο και δεν περιέχει μεμονομένα σημεία. Αυτό μας δίνει μια καλή αρχική ιδέα για την πλούσια δομή τέτοιων αναλυτικών χώρων.*

(ii) Ένα από τα πιο γνωστά προβλήματα της Ανάλυσης είναι η Υπόθεση του Συνεχούς, την οποία εισηγήθηκε ο Γερμανός μαθηματικός Georg Cantor κι η οποία διατυπώνεται ως εξής:

Υπάρχει άπειρο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με πληθάριθμο γνήσια μεγαλύτερο του $\aleph_0$ και γνήσια μικρότερο του $2^{\aleph_0}$?

Η Υπόθεση αυτή γενικεύεται και σε άπειρα υποσύνολα αυθαίρετων χώρων. Σύμφωνα με το παραπάνω Πόρισμα, η Υπόθεση του Συνεχούς ισχύει για τους αναλυτικούς χώρους. Πράγματι ένας υπεραριθμήσιμος αναλυτικός χώρος περιέχει ένα υποσύνολο ομοιομορφικό με τον χώρο Cantor, συνεπώς έχει πληθικότητα μεγαλύτερη ή ίση του $2^{\aleph_0}$. Όμως, για κάθε αναλυτικό χώρο X υπάρχει απεικόνιση $f : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to X$ συνεχής, επί κι αφού ο χώρος Baire $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ έχει τον πληθάριθμο του συνεχούς, έπεται πως κάθε αναλυτικός χώρος θα έχει πληθάριθμο μικρότερο ή ίσο του $2^{\aleph_0}$.

Τελικώς, ένας άπειρος αναλυτικός χώρος έχει πληθικότητα $\aleph_0$ ή $2^{\aleph_0}$.

Πρωτού προχωρήσουμε στην διατύπωση του επόμενου Πορίσματος, θα δώσουμε την απόδειξη ενός θεμελιώδους Θεωρήματος της Γενικής Τοπολογίας:

Θεώρημα 2.4.15. *(i) Έστω $(X, \mathcal{T})$ ένας πλήρως μετρικοποιήσιμος τοπολογικός χώρος και Y ένα G_δ υποσύνολο του X. Τότε, ο χώρος $(Y, \mathcal{T}_Y)$ είναι πλήρως μετρικοποιήσιμος.*

(ii) *Έστω $(X,\mathcal{T})$ ένας τοπολογικός χώρος Hausdorff και Y ένα υποσύνολο του X ώστε ο χώρος $(Y,\mathcal{T}_Y)$ να είναι πλήρως μετρικοποιήσιμος. Τότε, το Y είναι ένα G_δ υποσύνολο του χώρου $(\overline{Y},\mathcal{T}_{\overline{Y}})$.*

Απόδειξη. (i) Επιλέγουμε d μία πλήρη, συμβατή μετρική επί του X ώστε $d(x_1,x_2)\leqslant 1$ για κάθε $x_1,x_2\in X$. Αφού το Y είναι G_δ υποσύνολο του X, θα γράφεται ως:

$$Y=\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n$$

όπου το G_n είναι ανοικτό υποσύνολο του X για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Θέτουμε $F_n = X\setminus G_n$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$ κι ορίζουμε μία απεικόνιση $f:Y\to X\times\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ με:

$$f(y)=\left(y,\frac{1}{d(y,F_1)},\frac{1}{d(y,F_2)},\dots\right)$$

Παρατηρούμε πως είναι $d(y,F_n)>0$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$, εφ' όσον $y\notin F_n$ και το σύνολο F_n είναι κλειστό. Θα δείξουμε πως η f αποτελεί μία ομοιομορφική εμφύτευση και πως το σύνολο $f(Y)$ είναι κλειστό, το οποίο και θα μας δώσει το ζητούμενο. Πράγματι, ο χώρος $X\times\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ είναι πλήρως μετρικοποιήσιμος κι αφού το $f(Y)$ είναι κλειστό, έπεται πως το $f(Y)$ θα είναι ένα πλήρως μετρικοποιήσιμο υποσύνολο του $X\times\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Άρα, αφού η $f:Y\to f(Y)$ είναι ομοιομορφισμός, ο χώρος $(Y,\mathcal{T}_Y)$ θα είναι πλήρως μετρικοποιήσιμος.

Για να δούμε πως το $f(Y)$ είναι κλειστό υποσύνολο του $X\times\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, έστω $z=(z_n)_n$ οριακό σημείο του $f(Y)$. Τότε, υπάρχει $(z^k)_k\subseteq f(Y)$ με $(z^k)_k\to z$. Για κάθε $k\in\mathbb{N}$, υπάρχει $y_k\in Y$ ώστε $f(y_k)=z^k$. Άρα, είναι $\big(f(y_k)\big)_k\to z$. Αρχικά, από τον ορισμό της απεικόνισης f, για $k\in\mathbb{N}$, είναι:

$$f(y_k)=\left(y_k,\frac{1}{d(y_k,F_1)},\frac{1}{d(y_k,F_2)},\dots\right)$$

Συνεπώς, θα έχουμε ότι $(y_k)_k\to z_1$, το οποίο έπεται πως $\big(d(y_k,F_n)\big)_k\to d(z_1,F_n)$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. (Υπενθυμίζουμε πως για $A\subseteq X$, η απεικόνιση $x\in X\mapsto d(x,A)$ είναι συνεχής.) Άρα, θα είναι:

$$\frac{1}{d(z_1,F_n)}>0 \text{ για κάθε } n\in\mathbb{N}$$

συνεπώς $z_1\notin F_n$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Αυτό σημαίνει πως $z_1\in\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n=Y$ και $f(z_1)=z$, άρα $z\in f(Y)$, δηλαδή το $f(Y)$ είναι κλειστό υποσύνολο του $X\times\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Είναι άμεσο πως η f είναι 1-1. Για να δούμε πως η f είναι συνεχής, έστω $(y_k)_k\subseteq Y, y\in Y$ ώστε $(y_k)_k\to y$. Θα δείξουμε ότι $\big(f(y_k)\big)_k\to f(y)$. Όπως και πριν βλέπουμε πως για κάθε $n\in\mathbb{N}$ θα είναι $\big(d(y_k,F_n)\big)_k\to d(y,F_n)$. Συνεπώς, έπεται πως $\big(f(y_k)\big)_k\to f(y)$.

Τέλος, για να δούμε πως η $f^{-1} : f(Y) \to Y$ είναι συνεχής, έστω $\big(f(y_k)\big)_k \subseteq f(Y), f(y) \in f(Y)$ ώστε $\big(f(y_k)\big)_k \to f(y)$. Θα δείξουμε ότι $(y_k)_k \to y$. Από τον ορισμό της απεικόνισης f, για $k \in \mathbb{N}$ είναι:

$$f(y_k) = \left(y_k, \frac{1}{d(y_k, F_1)}, \frac{1}{d(y_k, F_2)}, \dots\right) \text{ και}$$
$$f(y) = \left(y, \frac{1}{d(y, F_1)}, \frac{1}{d(y, F_2)}, \dots\right)$$

από το οποίο είναι άμεσο πως $(y_k)_k \to y$.

(ii) Κατ' αρχάς, επιλέγουμε d μία πλήρη, συμβατή μετρική επί του χώρου $(Y, \mathcal{T}_Y)$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, θέτουμε:

$$G_n = \overline{Y} \cap \left(\bigcup \left\{ H \in \mathcal{T} : diam\big(H \cap Y\big) \leqslant \frac{1}{n} \right\} \right)$$

Είναι άμεσο πως το σύνολο G_n είναι ανοικτό υποσύνολο του $(\overline{Y}, \mathcal{T}_{\overline{Y}})$. Θα δείξουμε ότι $Y = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n$.

Έστω $y \in Y$. Προφανώς $y \in \overline{Y}$. Θεωρούμε το σύνολο $S_Y\big(y, \frac{1}{2^n}\big)$, το οποίο είναι ανοικτό υποσύνολο του $(Y, \mathcal{T}_Y)$, δηλαδή υπάρχει $H_n \in \mathcal{T}$ με $H_n \cap Y = S_Y\big(y, \frac{1}{2^n}\big)$. Επιπλέον, είναι άμεσο πως $diam S_Y\big(y, \frac{1}{2^n}\big) \leqslant \frac{1}{n}$. Συνεπώς, $y \in G_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ κι άρα $Y \subseteq \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n$.

Έστω, τώρα, $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n$. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $H_n \in \mathcal{T}$ ώστε $x \in H_n$ και $diam\big(H_n \cap Y\big) \leqslant \frac{1}{n}$. Έστω, προς εις άτοπον απαγωγή, πως $x \in \overline{Y} \setminus Y$. Για κάθε $k \in \mathbb{N}$, υπάρχει $y_k \in Y \cap \bigcap\limits_{n=1}^{k} H_n$ (αφού $x \in \overline{Y} \cap \bigcap\limits_{n=1}^{k} H_n$ και $\bigcap\limits_{n=1}^{k} H_n \in \mathcal{T}$.) Τότε, η ακολουθία $(y_k)_k$ είναι ακολουθία Cauchy στον Y.

Πράγματι, έστω $\epsilon > 0$. Ως γνωστόν, υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{k_0} < \epsilon$. Τότε, $diam\big(H_{k_0} \cap Y\big) \leqslant \frac{1}{k_0}$ κι άρα $diam\big(Y \cap \bigcap\limits_{n=1}^{k_0} H_n\big) \leqslant \frac{1}{k_0}$. Εύκολα βλέπουμε πως για $k \geqslant k_0$ είναι:

$$y_k \in \bigcap_{n=1}^{k} H_n \subseteq \bigcap_{n=1}^{k_0} H_n \Rightarrow y_k \in \bigcap_{n=1}^{k_0} H_n$$

Συνεπώς, για $k, m \geqslant k_0$ είναι:

$$d(y_k, y_m) \leqslant diam\big(H_{k_0} \cap Y\big) < \epsilon.$$

Συνεπώς, η $(y_k)_k$ είναι ακολουθία Cauchy. Αφού ο χώρος (Y, d) είναι πλήρης, υπάρχει $y_0 \in Y$ ώστε $(y_k)_k \to y_0$. Αφού υποθέσαμε πως $x \notin Y$, έπεται πως $y_0 \neq x$.

Ο χώρος $(X, \mathcal{T})$ είναι Hausdorff, συνεπώς υπάρχουν $U, V \in \mathcal{T}$ με $U \cap V = \emptyset$ ώστε $x \in U$ και $y_0 \in V$. Τότε, $y_0 \in V \cap Y$ κι αφού $V \cap Y \in \mathcal{T}_Y$, συνεπάγεται πως υπάρχει $\epsilon > 0$ ώστε $S_Y\big(y_0, \epsilon\big) \subseteq V \cap Y$. Κατ΄ αρχάς, υπάρχει $k_1 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $k \geqslant k_1$ να ισχύει ότι $y_k \in S_Y\big(y_0, \frac{\epsilon}{3}\big)$. Επίσης, υπάρχει $k_2 \in \mathbb{N}$ ώστε $diam\big(H_{k_2} \cap Y\big) < \frac{\epsilon}{3}$. Θέτουμε $k_3 = max\{k_1, k_2\}$. Τότε, για κάθε $k \geqslant k_3$, ισχύει ότι $y_k \in S_Y\big(y_0, \frac{\epsilon}{3}\big)$ και $diam\big(H_k \cap Y\big) < \frac{\epsilon}{3}$. Τότε, είναι $H_{k_3} \cap Y \subseteq S_Y\big(y_0, \epsilon\big)$.

Πράγματι, έστω $z \in H_{k_3} \cap Y$. Τότε:

$$d(z, y_0) \leqslant d(z, y_{k_3}) + d(y_{k_3}, y_0) \leqslant \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} < \epsilon$$

κι άρα $z \in S_Y\big(y_0, \epsilon\big)$. Δείξαμε ότι:

$$H_{k_3} \cap Y \subseteq S_Y\big(y_0, \epsilon\big) \subseteq V \cap Y$$

Όμως, $x \in H_{k_3} \cap U$ με $U \cap V = \emptyset$. Παίρνοντας ακόμη μία ακολουθία που συγκλίνει στο x αν χρειαστεί, καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα, τελικώς, δείξαμε πως $x \in Y$ κι έχουμε το ζητούμενο. $\square$

Παρατήρηση 2.4.16. *Είναι εύκολη άσκηση να δούμε πως κάθε κλειστό υποσύνολο ενός μετρικού χώρου είναι G_δ. Συνεπώς, στην περίπτωση των μετρικών χώρων το προηγούμενο Θεώρημα παίρνει άμεσα την εξής μορφή:*

Ένα υποσύνολο Y ενός πλήρους μετρικού χώρου X είναι G_δ αν και μόνο αν το Y είναι ένα πλήρως μετρικοποιήσιμο υποσύνολο του X.

Επιστρέφοντας τώρα στο Θεώρημα του Young, είμαστε πλέον σε θέση να αποδείξουμε το ιδιαίτερα σημαντικό ακόλουθο αποτέκεσμα:

Πόρισμα 2.4.17. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ ένας υπεραριθμήσιμος, T_3 αναλυτικός χώρος. Τότε, ο $(X, \mathcal{T})$ περιέχει ένα G_δ υποσύνολο ομοιομορφικό με τον χώρο Baire $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.*

Απόδειξη. Αρχικά, θα δείξουμε ότι αν F είναι ένα κλειστό υποσύνολο του X, τότε το F θα είναι G_δ. Έστω $F \subseteq X$ κλειστό. Εφ' όσον ο X είναι χώρος T_3, για κάθε $x \in X \setminus F$ υπάρχουν $V_x, W_x \in \mathcal{T}$ ώστε $x \in V_x, F \subseteq W_x$ και $V_x \cap W_x = \emptyset$. Πάλι επειδή ο X είναι T_3 και $x \in V_x$ έχουμε πως υπάρχει $U_x \in \mathcal{T}$ ώστε $x \in U_x$ και $x \in U_x \subseteq \overline{U_x} \subseteq V_x$. Άρα, είναι:

$$X \setminus F = \bigcup_{x \in X \setminus F} U_x = \bigcup_{x \in X \setminus F} \overline{U_x}$$

(αφού για κάθε $x \in X \setminus F$ ισχύει ότι $\overline{U_x} \cap F = \emptyset$.) Σύμφωνα με την Πρόταση 2.3.4 ο χώρος $(X \setminus F, \mathcal{T}_{X \setminus F})$ θα είναι Lindelőf, συνεπώς υπάρχει ακολουθία $(x_n)_n \subseteq X \setminus F$ ώστε:

$$X \setminus F = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_{x_n} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{U_{x_n}}$$

Παίρνοντας συμπληρώματα, είναι:

$$F = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\overline{U_{x_n}}\right)^{\mathsf{c}}$$

δηλαδή το F είναι G_δ υποσύνολο του X.

Όπως είδαμε στην Παρατήρηση 2.2.11, ο χώρος Cantor $2^{\mathbb{N}}$ περιέχει ένα υποσύνολο ομοιομορφικό με το $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Αυτό, σε συνδυασμό με το Πόρισμα 2.4.13 έπεται πως ο X θα περιέχει ένα υποσύνολο, έστω Y, ομοιομορφικό με τον χώρο Baire $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Αφού ο $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ είναι πλήρως μετρικοποιήσιμος, το ίδιο θα είναι κι ο Y. Άρα, απο το προηγούμενο Θεώρημα, ο Y θα είναι ένα G_δ υποσύνολο του χώρου $(\overline{Y}, \mathcal{T}_{\overline{Y}})$. Όμως, το σύνολο $\overline{Y}$ είναι κλειστό κι άρα, όπως είδαμε στην αρχή της απόδειξης, θα είναι G_δ υποσύνολο του X. Συνεπώς είναι άμεσο πως το Y θα είναι τότε G_δ υποσύνολο του X. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

2.5 Εμφυτεύσεις των $\mathbb{Q}, \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ σε άλλους Χώρους

Σε αυτήν την ενότητα θα εξετάσουμε τις προυποθέσεις τις οποίες πρέπει να ικανοποιεί ένας μετρικοποιήσιμος χώρος X ώστε να περιέχει ένα υποσύνολο ομοιομορφικό με το $\mathbb{Q}$ ή το $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Κύριος σκοπός είναι η διατύπωση και απόδειξη του Θεωρήματος του Hurewicz, το οποίο μας επιτρέπει να εμφυτεύσουμε και τους δύο αυτούς χώρους ταυτόχρονα ως σχετικά κλειστα υποσύνολα. Θα ξεκινήσουμε με την έννοια των σχημάτων συμπύκνωσης, ο ορισμός των οποίων δίνεται παρακάτω.

Ορισμός 2.5.1. *Έστω (X, d) ένας πλήρης μετρικός χώρος. Ορίζουμε μία συνάρτηση $r : \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^+$ ώστε για $s = (s_1, \ldots, s_k) \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ να είναι:*

$$r(s) = r\big((s_1, \ldots, s_k)\big) = \frac{1}{2^{(s_1+\ldots+s_k)}}$$

Δοθείσας της συνάρτησης r, καλούμε ***σχήμα συμπύκνωσης στον*** *X μία απεικόνιση $x : \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \to X$ ώστε να ικανοποιείται η ακόλουθη συνθήκη:*

$$0 < d\big(x(\sigma|_n), x(\sigma|_{n+1})\big) \leqslant r(\sigma|_{n+1}), \forall \sigma|_{n+1} \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}.$$

Πρόταση 2.5.2. *Έστω (X, d) ένας πλήρης μετρικός χώρος και $x : \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \to X$ ένα σχήμα συμπύκνωσης στον X. Τότε:*

(i) Η ακολουθία $\big(x(s_1, \ldots, s_k, n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο $x(s_1, \ldots, s_k)$, καθώς $n \to +\infty, \forall (s_1, \ldots, s_k) \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$.

(ii) Για κάθε $\sigma \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, η ακολουθία $\big(x(\sigma|_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα.

Απόδειξη. (i) Έστω $\epsilon > 0$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geqslant n_0$ να ισχύει $d\big(x(s_1, \ldots, s_k, n), x(s_1, \ldots, s_k)\big) < \epsilon$. Ως γνωστόν, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\dfrac{1}{n_0} < \epsilon$. Έστω $n \geqslant n_0$. Τότε, είναι:

$$\begin{aligned} d\big(x(s_1, \ldots, s_k), x(s_1, \ldots, s_k, n)\big) &\leqslant r\big((s_1, \ldots, s_k, n)\big) \\ &= \frac{1}{2^{(s_1+\ldots+s_k+n)}} \\ &< \frac{1}{2^{n_0}} \\ &< \frac{1}{n_0} < \epsilon \end{aligned}$$

Άρα, δείξαμε το ζητούμενο.

(ii) Έστω $\sigma = (\sigma_n)_n \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Αφού ο (X, d) είναι πλήρης μετρικός χώρος, αρκεί να δείξουμε ότι η ακολουθία $\big(x(\sigma|_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy. Έστω $\epsilon > 0$. Τότε, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\dfrac{1}{n_0} < \dfrac{\epsilon}{2}$. Έστω, επίσης, $n, m \in \mathbb{N}$ με $n_0 \leqslant n < m$.

Με εφαρμογή της τριγωνικής ανισότητας, έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} d\big(x(\sigma|_n), x(\sigma|_m)\big) &\leqslant d\big(x(\sigma|_n), x(\sigma|_{n+1})\big) + \ldots + d\big(x(\sigma|_{m-1}), x(\sigma|_m)\big) \\ &\leqslant r(\sigma|_{n+1}) + \ldots + r(\sigma|_{m-1}) + r(\sigma|_m) \\ &= \frac{1}{2^{\left(\sigma_1+\ldots+\sigma_{n+1}\right)}} + \ldots + \frac{1}{2^{\left(\sigma_1+\ldots+\sigma_{n+1}+\ldots+\sigma_{m-1}\right)}} + \\ &\quad + \frac{1}{2^{\left(\sigma_1+\ldots+\sigma_{n+1}+\ldots+\sigma_{m-1}+\sigma_m\right)}} \\ &= \frac{1}{2^{\left(\sigma_1+\ldots+\sigma_{n+1}\right)}} \cdot \\ &\cdot \left(1 + \frac{1}{2^{\sigma_{n+1}}} + \frac{1}{2^{\left(\sigma_{n+2}+\sigma_{n+3}\right)}} + \ldots + \frac{1}{2^{\left(\sigma_{n+2}+\ldots+\sigma_m\right)}}\right) \quad (*) \end{aligned}$$

Η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ ως γνωστόν συγκλίνει στο 1. Θεωρούμε την ακολουθία με γενικό όρο $b_n = \frac{1}{2^{\sum\limits_{k=1}^{n} k}}$. Τότε, είναι $b_n \leqslant \frac{1}{2^n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει (ως σειρά με θετικούς όρους) σε κάποιον πραγματικό αριθμό μικρότερο ή ίσο του 1. Συνεπώς, η $(*)$ δίνει:

$$d\big(x(\sigma|_n), x(\sigma|_m)\big) \leqslant \frac{1}{2^{\left(\sigma_1+\ldots+\sigma_{n+1}\right)}} \cdot \left(1+1\right) \leqslant \frac{1}{2^{n_0}} \cdot 2 < \frac{1}{n_0} \cdot 2 < \frac{\epsilon}{2} \cdot 2 = \epsilon.$$

□

Εφ΄ όσον μόλις δείξαμε πως για κάθε $\sigma \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, η ακολουθία $\big(x(\sigma|_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει, μπορούμε να ορίσουμε μία απεικόνιση $\phi_x : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to X$ με:

$$\phi_x(\sigma) = \lim_{n\to+\infty} x(\sigma|_n)$$

Η απεικόνιση αυτή καλείται ως η **συνάρτηση που επάγεται απο το σχήμα συμπύκνωσης** x.

Με βάση το δοθέν σχήμα συμπύκνωσης x, ορίζουμε το εξής σύνολο:

$$D = \{x(\sigma|_n) : \sigma|_n \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}\}$$

Έχουμε, τότε, τις ακόλουθες Προτάσεις:

Πρόταση 2.5.3. *Έστω (X,d) πλήρης μετρικός χώρος, $x : \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \to X$ ένα σχήμα συμπύκνωσης στον X και ϕ_x η επαγόμενη συνάρτηση. Τότε, ισχύουν τα ακόλουθα:*

(i) Η ϕ_x είναι συνεχής

(ii) Το D είναι ομοιομορφικό με το $\mathbb{Q}$

(iii) $\overline{D} \setminus D \subseteq \phi_x(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})$

Απόδειξη. (i) Έστω $(\sigma^n)_n \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ μία ακολουθία στον χώρο Baire και $\sigma_0 \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ώστε $\sigma^n \to \sigma_0$. Θα δείξουμε ότι $\phi_x(\sigma^n) \to \phi_x(\sigma_0)$. Έστω $\epsilon > 0$. Αναζητούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geqslant n_0$ να ισχύει ότι $\phi_x(\sigma^n) \in S\big(\phi_x(\sigma_0), \epsilon\big)$.

Κατ' αρχάς, υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε $\dfrac{1}{n_1+1} < \dfrac{\epsilon}{6}$. Εξετάζουμε το σύνολο $U_{\sigma_0|_{n_1}}$. Αφού η ακολουθία $(\sigma^n)_n$ συγκλίνει στο σ_0, έπεται πως υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geqslant n_2$ να ισχύει ότι $\sigma^n \in U_{\sigma_0|_{n_1}} \Leftrightarrow \sigma^n|_{n_1} = \sigma_0|_{n_1} \Rightarrow x\big(\sigma^n|_{n_1}\big) = x\big(\sigma_0|_{n_1}\big)$. Παρατηρούμε ότι:

$$d\big(\phi_x(\sigma_0), \phi_x(\sigma^n)\big) = \lim_{k \to +\infty} \Big(d\big(x(\sigma_0|_k), x(\sigma^n|_k)\big) \Big)$$

Θέτουμε $n_0 = max\{n_1, n_2\}$. Τότε, για $n, k \geqslant n_0$ είναι:

$$\begin{aligned} d\big(x(\sigma^n|_k), x(\sigma_0|_k)\big) &\leqslant d\big(x(\sigma^n|_k), x(\sigma_0|_{n_1})\big) + d\big(x(\sigma_0|_{n_1}), x(\sigma_0|_k)\big) \\ &\leqslant 2 \cdot r(\sigma_0|_{n_1+1}) + r(\sigma^n|_{n_1+2}) + \ldots + r(\sigma^n|_k) + \\ &\quad + r(\sigma_0|_{n_1+2}) + \ldots + r(\sigma_0|_k) \end{aligned}$$

εφ' όσον για κάθε $n \geqslant n_0$, το $\sigma_0|_{n_1}$ αποτελεί αρχικό τμήμα του σ^n. Συνεχίζοντας όπως και στην απόδειξη της Πρότασης 2.5.2 (ii) , είναι:

$$
\begin{aligned}
d\big(x(\sigma^n|_k), x(\sigma_0|_k)\big) &\leqslant \frac{1}{2^{\left(\sigma_0(1)+\ldots+\sigma_0(n_1+1)\right)}}\cdot \\
&\quad \cdot\left(2+\frac{1}{2^{\left(\sigma^n(1)+\ldots+\sigma^n(n_1+2)\right)}}+\cdots\frac{1}{2^{\left(\sigma_0(1)+\ldots+\sigma_0(k)\right)}}\right) \\
&\leqslant \frac{1}{2^{\left(\sigma_0(1)+\ldots+\sigma_0(n_1+1)\right)}}\cdot\Big(2+2\Big) \\
&= 4\cdot\frac{1}{2^{\left(\sigma_0(1)+\ldots+\sigma_0(n_1+1)\right)}} \\
&\leqslant 4\cdot\frac{1}{2^{(n_1+1)}} \\
&\leqslant 4\cdot\frac{\epsilon}{6} \\
&< \epsilon
\end{aligned}
$$

(ii) Από το Θεώρημα 2.2.16 αρκεί να δείξουμε ότι το D είναι αριθμήσιμο και δεν περιέχει μεμονομένα σημεία. Κατ΄ αρχάς, αφού $D = \{x(\sigma|_n) : \sigma|_n \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}\}$, έπεται άμεσα πως το D είναι αριθμήσιμο. (Πράγματι, η απεικόνιση $\sigma|_n \mapsto x(\sigma|_n)$ είναι επί κι αφού το $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ είναι αριθμήσιμο, το D είναι επίσης αριθμήσιμο.)

Έστω, προς εις άτοπον απαγωγή, πως υπάρχει $z \in D$ μεμονομένο σημείο του D. Άρα, υπάρχει $\epsilon > 0$ ώστε $\{z\} = S(z,\epsilon) \cap D$. Αφού $z \in D$, υπάρχει $\sigma|_n \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ ώστε $z = x(\sigma|_n)$. Όπως είδαμε στη Πρόταση 2.5.2 (i), ισχύει ότι $x(\sigma|_n \frown q) \to x(\sigma|_n)$, καθώς $q \to +\infty$. Άρα, υπάρχει $q_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $q \geqslant q_0$ να είναι $x(\sigma|_n \frown q) \in S(z,\epsilon) \cap D$. Τότε, από τον ορισμό των σχημάτων συμπύκνωσης, θα είναι:

$$0 < d\big(x(\sigma|_n \frown q), x(\sigma|_n)\big) < \epsilon$$

Αυτό μας διασφαλίζει πως θα είναι $x(\sigma|_n \frown q) \neq z$. Συνεπώς, το D δεν περιέχει μεμονομένα σημεία κι ως εκ τούτου θα είναι ομοιομορφικό με το $\mathbb{Q}$.

(iii) Έστω $z \in \overline{D} \setminus D$. Τότε, υπάρχει $(z_n)_n \subseteq D$ ώστε $(z_n)_n \to z$. Αφού η ακολουθία $(z_n)_n$ είναι υποσύνολο του D, έπεται πως για κάθε $n \in \mathbb{N}$, υπάρχει $s^n \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ ώστε $z_n = x(s^n)$. Θεωρούμε την ακολουθία $\big(x(s^n|_1)\big)_n$. Τότε, υπάρχει υπακολουθία $\big(x(s^{n_k}|_1)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ της $\big(x(s^n|_1)\big)_n$ και $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $s^{n_k}|_1 \leqslant n_0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Αν όχι, τότε από την Πρόταση 2.5.2 (i), θα έχουμε πως $\big(x(s^n|_1)\big)_n \to x(\emptyset)$, το οποίο είναι άτοπο. Άρα, υπάρχει $m_1 \in \mathbb{N}$ και $K_1 \subseteq \mathbb{N}$ άπειρο ώστε $s^{n_k}|_1 = m_1$ για κάθε $k \in K_1$. Θέτουμε $\sigma_1 = m_1$. Επαναλαμβάνοντας επεγεγικά την ίδια διαδικασία, βλέπουμε πως για το στοιχείο $\sigma = (\sigma_n)_n \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ έχουμε πως $z = \lim\limits_{n \to +\infty} x\big(\sigma|_n\big)$.

$\square$

Πρόταση 2.5.4. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ μετρικοποιήσιμος τοπολογικός χώρος. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i) Υπάρχει $x : \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \to X$ ένα σχήμα συμπύκνωσης στον X.

(ii) Υπάρχει $A \subseteq X$ μη κενό ώστε ο χώρος $(A, \mathcal{T}_A)$ να μην περιέχει μεμονομένα σημεία.

Απόδειξη. (i)→(ii) Θέτουμε $D = \{x(\sigma|_n) : \sigma|_n \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}\}$ το οποίο, όπως αποδείξαμε, είναι ομοιομορφικό με το $\mathbb{Q}$. Τότε, ορίζοντας $A = D$ έχουμε ότι το A είναι μη κενό και δεν περιέχει μεμονομένα σημεία, δηλαδή δείξαμε το ζητούμενο.

(ii)→(i) Επιλέγουμε d μία συμβατή μετρική επί του X. Έστω $a \in A$. Θέτουμε $x(\emptyset) = a$. Αφού το A δεν περιέχει μεμονομένα σημεία, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει ${y_n}^1 \in S\big(a, \frac{1}{n}\big) \cap A$ με ${y_n}^1 \neq a, \forall n \in \mathbb{N}$. Θέτουμε $x(\{n\}) = {y_n}^1, \forall n \in \mathbb{N}$. Τότε, είναι $0 < d\big(x(\emptyset), x(\{n\})\big) < \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Έστω πως για $k \in \mathbb{N}$, τα στοιχεία $x(\sigma|_k)$ έχουν οριστεί για κάθε $\sigma \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Έστω, επίσης, $\sigma \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Τότε, πάλι αξιοποιώντας το γεγονός πως το A δεν έχει μεμονομένα σημεία, έχουμε πως υπάρχει ${y_n}^{k+1} \in S\big(x(\sigma|_k), r(\sigma|_k \frown n)\big) \cap A$ με ${y_n}^{k+1} \neq x(\sigma|_k)$. Θέτουμε $x\big(\sigma|_k \frown n\big) = {y_n}^{k+1}, \forall n \in \mathbb{N}$. Τότε, είναι:

$$0 < d\big(x(\sigma|_k), x(\sigma|_k \frown n\big) \leqslant r\big(\sigma|_k \frown n\big), \forall n \in \mathbb{N}.$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. $\square$

Πόρισμα 2.5.5. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ μετρικοποιήσιμος τοπολογικός χώρος. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i) Ο X περιέχει ένα υποσύνολο ομοιομορφικό με το $\mathbb{Q}$.

(ii) Ο X περιέχει ένα μη κενό υποσύνολο χωρίς μεμονομένα σημεία.

Απόδειξη. Άμεσο, από τις δύο προηγούμενες Προτάσεις. (Παρατηρείστε, μέσω τις απόδειξης της Πρότασης 2.5.2, πως η υπόθεση της πληρότητας του X δεν είναι αναγκαία ώστε να το σύνολο D να είναι ομοιομορφικό με το $\mathbb{Q}$.) $\square$

Το υποσύνολο του X το οποίο είναι ομοιομορφικό με το $\mathbb{Q}$ στο προηγούμενο Πόρισμα θα είναι προφανώς ένα F_σ υποσύνολο του X. Στο Πόρισμα 2.4.17 είδαμε πως κάθε υπεραριθμήσιμος, αναλυτικός και T_3 τοπολογικός χώρος περιέχει ένα G_δ υποσύνολο ομοιομορφικό με το $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Θα δούμε τώρα υπο ποιες προυποθέσεις μπορούμε να εμφυτεύσουμε ταυτόξρονα τους $\mathbb{Q}, \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ως σχετικά κλειστά υποσύνολα. Αυτό είναι και το περιεχόμενο του Θεωρήματος του Hurewicz. Χρειαζόμαστε, αρχικά, τα ακόλουθα Λήμματα:

Λήμμα 2.5.6. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ πλήρως μετρικοποιήσιμος τοπολογικός χώρος, $x : \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \to X$ ένα σχήμα συμπύκνωσης στον X και $H, \overline{H} : \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \to \mathcal{P}(X)$ δύο σχήματα Souslin στον X. Υποθέτουμε, επίσης, πως ισχύουν τα παρακάτω:*

(α) $x(\sigma|_n) \in H(\sigma|_n) \setminus \left(\bigcup_{q=1}^{\infty} \overline{H((\sigma|_n \frown q))} \right), \forall \sigma|_n \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$.

(β) $H(\sigma|_n) \cap H(\tau|_n) = \emptyset, \forall \sigma|_n, \tau|_n \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ *με* $\sigma|_n \neq \tau|_n$.

(γ) $\overline{H(\sigma|_{n+1})} \subseteq H(\sigma|_n), \forall \sigma|_n \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$.

(δ) $diam H(\sigma|_n) \leqslant r(\sigma|_n), \forall \sigma|_n \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$.

(ε) *Το σύνολο* $H(\sigma|_n)$ *είναι ανοικτό,* $\forall \sigma|_n \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$.

(στ) $\overline{H}(\sigma|_n) = \overline{H(\sigma|_n)}, \forall \sigma|_n \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$.

Τότε, οι επαγόμενες συναρτήσεις $\phi, \overline{\phi}, \phi_x$ από τα $H, \overline{H}, x$ αντίστοιχα ταυτίζονται. Επίσης, για την κοινή επαγόμενη συνάρτηση ϕ ισχύει πως $\phi(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}) = \overline{D} \setminus D$ και πως η $\phi : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \overline{D} \setminus D$ είναι ομοιομορφισμός.

Απόδειξη. Επιλέγουμε d μία πλήρη, συμβατή μετρική επί του X. Κατ΄ αρχάς, όπως και στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.3.1, από την ιδιότητα (γ) εύκολα βλέπουμε πως οι επαγόμενες συναρτήσεις $\phi, \overline{\phi}$ από τα $H, \overline{H}$ αντίστοιχα ταυτίζονται. Έστω $\sigma \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Θα δείξουμε ότι $\{\phi_x(\sigma)\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{H(\sigma|_n)}$. Εφ΄ όσον το σύνολο $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{H(\sigma|_n)}$ αποτελείται αναγκαστικά από μόνο ένα σημείο, αρκεί να δείξουμε ότι $\phi_x(\sigma) \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{H(\sigma|_n)}$. Έστω, προς εις άτοπον απαγωγή, πως υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\phi_x(\sigma) \notin \overline{H(\sigma|_{n_0})}$. Τότε $\phi_x(\sigma) \in X \setminus \overline{H(\sigma|_{n_0})}$, το οποίο είναι ανοικτό. Συνεπώς, υπάρχει $\epsilon > 0$ ώστε $S(\phi_x(\sigma), \epsilon) \cap \overline{H(\sigma|_{n_0})} = \emptyset$. Η ακολουθία $\big(x(\sigma|_n)\big)_n$ συγκλίνει στο $\phi_x(\sigma)$ κι άρα υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geqslant n_1$ να ισχύει ότι $x(\sigma|_n) \in S\big(\phi_x(\sigma), \epsilon\big)$. Εξετάζουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

- Έστω πως $n_1 > n_0$. Τότε, από τις ιδιότητες (α), (γ) έχουμε πως:

$$x(\sigma|_{n_1}) \in \overline{H\big(\sigma|_{n_1}\big)} \subseteq H\big(\sigma|_{n_0}\big) \subseteq \overline{H\big(\sigma|_{n_0}\big)}$$

  κι άρα $x(\sigma|_{n_1}) \in \overline{H\big(\sigma|_{n_0}\big)}$, άτοπο! αφού $x(\sigma|_{n_1}) \in S\big(\phi_x(\sigma), \epsilon\big)$ η οποία όπως δείξαμε είναι ξένη από το $\overline{H\big(\sigma|_{n_0}\big)}$.

- Έστω πως $n_1 \leqslant n_0$. Τότε:

$$x(\sigma|_{n_0}) \in \overline{H\big(\sigma|_{n_0}\big)} \cap S\big(\phi_x(\sigma), \epsilon\big), \text{ άτοπο!}$$

Καταλήγουμε στο γεγονός πως οι επαγόμενες συναρτήσεις $\phi, \overline{\phi}, \phi_x$ ταυτίζονται.

Η ιδιότητα (δ) εξασφαλίζει την συνθήκη διαμέτρου για τα $H, \overline{H}$. Με βάση την Πρόταση 2.1.2, από τις ιδιότητες (β), (γ), (ε) βλέπουμε πως η $\phi : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \phi\big(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\big)$ είναι ομοιομορφισμός.

Θα δείξουμε τώρα πως $\phi\big(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\big) = \overline{D} \setminus D$. Από την Πρόταση 2.5.3 (iii), αρκεί να δείξουμε ότι $\phi\big(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\big) \subseteq \overline{D} \setminus D$. Έστω $z \in \phi\big(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\big)$. Τότε, υπάρχει $\sigma \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ώστε $z = \phi_x(\sigma) = \lim\limits_{n \to +\infty} x(\sigma|_n)$. Προφανώς $z \in \overline{D}$. Έστω πως υπάρχει $\tau|_k \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ ώστε $z = x(\tau|_k)$. Αν $\tau|_k = \sigma|_k$, τότε, από την ιδιότητα (α):

$$\{x(\sigma|_k)\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} H\big(\sigma|_n\big) \subseteq H\big(\sigma|_k\big) \text{ και } x(\sigma|_k) \in H\big(\sigma|_{k-1}\big) \setminus \bigcup_{q=1}^{\infty} H\big(\sigma|_{k-1} \frown q\big)$$

δηλαδή $z \notin H\big(\sigma|_k\big)$, άτοπο!

Έστω πως $\sigma|_k \neq \tau|_k$. Τότε:

$$\{z\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} H\big(\sigma|_n\big) \text{ και } z = x(\tau|_k) \in H\big(\tau|_k\big)$$

Όμως, αφού $\sigma|_k \neq \tau|_k$, από την ιδιότητα (β) έχουμε ότι $H\big(\sigma|_k\big) \cap H\big(\tau|_k\big) = \emptyset$, άτοπο!

Σε κάθε περίπτωση έχουμε πως $z \in \overline{D} \setminus D$. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Λήμμα 2.5.7. *Έστω $(X, \mathcal{T}_X)$ Πολωνικός χώρος και $Y \subseteq X$ ένα αναλυτικό υποσύνολο του X, το οποίο δεν είναι F_σ. Τότε, υπάρχει ένας μη κενός Πολωνικός χώρος $(Z, \mathcal{T}_Z)$ και μία συνεχής συνάρτηση $\theta : Z \to Y$ ώστε:*

$$\overline{\theta(G)} \setminus Y \neq \emptyset, \forall G \subseteq Z \text{ μη κενό, ανοικτό.}$$

Απόδειξη. Κατ' αρχάς, παρατηρούμε ότι το Y είναι υπεραριθμήσιμο υποσύνολο του X. Πράγματι, αν το Y ήταν αριθμήσιμο, τότε $Y = (y_n)_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{y_n\}$ κι αφού τα μονοσύνολα είναι κλειστά, έπεται πως το Y είναι F_σ υποσύνολο του X, το οποίο είναι εξ' υποθέσεως άτοπο.

Αφού το Y είναι αναλυτικό υποσύνολο του X, από τη Πρόταση 2.3.5 υπάρχει $(S, \mathcal{T}_S)$ Πολωνικός χώρος και $\theta_0 : S \to Y$ μία συνεχής κι επί συνάρτηση. Θέτουμε:

$$G_0 = \{x \in S : \exists U \in \mathcal{T}_S \text{ με } x \in U, \exists A \text{ ένα } F_\sigma \text{ υποσύνολο του } X \text{ ώστε:}$$
$$\theta_0(U) \subseteq A \subseteq Y\}$$

και θα δείξουμε ότι το G_0 είναι ανοικτό υποσύνολο του S. Έστω $x \in G_0$. Τότε, υπάρχει $U_x \in \mathcal{T}_S$ με $x \in U_x$, υπάρχει $A \subseteq X$ ένα F_σ σύνολο ώστε $\theta_0(U_x) \subseteq A \subseteq Y$. Αφού το U_x είναι ανοικτό, υπάρχει $\epsilon > 0$ ώστε $S(x, \epsilon) \subseteq U_x$. Αρκεί να δείξουμε ότι $S(x, \epsilon) \subseteq G_0$.

Έστω $z \in S(x, \epsilon)$. Τότε $z \in U_x$ και $\theta_0(U_x) \subseteq A \subseteq Y$, δηλαδή $z \in G_0$. Άρα, το G_0 είναι ανοικτό υποσύνολο του S.

Όπως πριν, για κάθε $x \in G_0$, υπάρχει $U_x \in \mathcal{T}_S$ με $x \in U_x$ και $A_x \subseteq X$ ένα F_σ σύνολο ώστε $\theta_0(U_x) \subseteq A_x \subseteq Y$. Άρα, είναι:

$$G_0 \subseteq \bigcup_{x \in G_0} U_x$$

Εφ' όσον ο χώρος $(S, \mathcal{T}_S)$ είναι Πολωνικός, έπεται πως ο S θα είναι διαχωρίσιμος, δηλαδή και ο $G_0 \subseteq S$ θα είναι διαχωρίσιμος, άρα και χώρος Lindelöf. Συνεπώς, εφ' όσον το παραπάνω αποτελεί ένα ανοικτό κάλυμα του G_0, υπάρχει ακολουθία $(x_n)_n \subseteq G_0$ ώστε:

$$G_0 \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} U_{x_n}$$

Τότε, είναι:

$$\theta_0(G_0) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \theta_0(U_{x_n}) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{x_n} \subseteq Y$$

Θέτουμε $A_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{x_n}$ το οποίο είναι ένα F_σ υποσύνολο του X (ως αριθμήσιμη ένωση F_σ συνόλων.) Συνοψίζοντας μέχρι εδώ, είναι:

$$\theta_0(G_0) \subseteq A_0 \subseteq Y$$

Παρατηρούμε ότι το A_0 είναι γνήσιο υποσύνολο του Y. Πράγματι, αν $A_0 = Y$, τότε το Y θα ήταν ένα F_σ υποσύνολο του X, το οποίο είναι άτοπο εξ' υποθέσεως.

Θέτουμε $Z = S \setminus {\theta_0}^{-1}(A_0)$ και $\theta = \theta_0 \mid_Z : Z \to Y$. Τότε, είναι $Z \neq \emptyset$. Αν $Z = \emptyset$, αυτό θα είχε ως συνέπεια πως $S = {\theta_0}^{-1}(A_0) \Rightarrow \theta_0(S) = A_0 \Rightarrow Y = A_0$, άτοπο! Άρα, $Z \neq \emptyset$. Επίσης, είναι $G_0 \cap Z = \emptyset$. Πράγματι, αν υπήρχε $x \in G_0 \cap Z$, τότε, αφού $x \in G_0$, συνεπάγεται πως $\theta_0(x) \in \theta_0(G_0) \subseteq A_0 \Rightarrow x \in {\theta_0}^{-1}(A_0)$. Όμως, αφού $x \in Z = S \setminus \big({\theta_0}^{-1}(A_0)\big)$, άτοπο! Άρα, είναι $G_0 \cap Z = \emptyset$.

Αφού το A_0 είναι F_σ υποσύνολο του X κι η συνάρτηση θ_0 είναι συνεχής, έπεται πως το σύνολο ${\theta_0}^{-1}(A_0)$ θα είναι F_σ υποσύνολο του S. Συνεπώς, το $Z = \big({\theta_0}^{-1}(A_0)\big)^{\mathsf{c}}$ θα είναι G_δ υποσύνολο του S κι άρα από το Θεώρημα 2.4.15 έχουμε πως ο χώρος $(Z, \mathcal{T}_Z)$ είναι Πολωνικός. Θα δείξουμε πως ο Z είναι ο ζητούμενος χώρος.

Έστω $G \in \mathcal{T}_S$. Θα δείξουμε ότι:

$$\begin{aligned}
&\theta_0(G) \subseteq \theta_0\big(G \cap {\theta_0}^{-1}(A_0)\big) \cup \theta_0\big(G \setminus {\theta_0}^{-1}(A_0)\big) && (1)\\
&\theta_0\big(G \cap {\theta_0}^{-1}(A_0)\big) \subseteq A_0 && (2)\\
&\theta_0\big(G \setminus {\theta_0}^{-1}(A_0)\big) \subseteq \overline{\theta\big(G \cap Z\big)} && (3)
\end{aligned}$$

Είναι άμεσο πως $G = \big(G \cap {\theta_0}^{-1}(A_0)\big) \cup \big(G \setminus {\theta_0}^{-1}(A_0)\big)$ από το οποίο η σχέση (1) προκύπτει εύκολα.

Για την σχέση (2), είναι $G \cap {\theta_0}^{-1}(A_0) \subseteq {\theta_0}^{-1}(A_0)$ κι άρα:

$$\theta_0\big(G \cap {\theta_0}^{-1}(A_0)\big) \subseteq \theta_0\big({\theta_0}^{-1}(A_0)\big) = A_0$$

Τέλος, για την σχέση (3) είναι $G \setminus {\theta_0}^{-1}(A_0) = G \cap \big({\theta_0}^{-1}(A_0)\big)^{\mathsf{c}} = G \cap Z$ δηλαδή:

$$\theta_0\big(G \setminus {\theta_0}^{-1}(A_0)\big) = \theta_0\big(G \cap Z\big) = \theta\big(G \cap Z\big) \subseteq \overline{\theta\big(G \cap Z\big)}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός πως $G \cap Z \subseteq Z$ και $\theta : Z \to Y$.

Από τις σχέσεις (1), (2), (3) παίρνουμε την ακόλουθη σχέση:

$$\theta_0(G) \subseteq A_0 \cup \overline{\theta\big(G \cap Z\big)} \qquad (4)$$

και θέτουμε $W = A_0 \cup \overline{\theta\big(G \cap Z\big)}$, το οποίο είναι ένα F_σ υποσύνολο του X (εφ' όσον το A_0 είναι F_σ και το $\overline{\theta\big(G \cap Z\big)}$ κλειστό.) Θα δείξουμε πως αν ισχύει $G \setminus G_0 \neq \emptyset$, τότε $W \setminus Y \neq \emptyset$. Πράγματι, έστω $x \in G \setminus G_0$ κι έστω πως $W \subseteq Y$. Τότε, $\theta_0(x) \in \theta_0(G) \subseteq W \subseteq Y$ (σχέση (4)), με W ένα F_σ υποσύνολο του X, δηλαδή το x ανήκει στο G_0 (εξ' ορισμού του συνόλου G_0), άτοπο!. Άρα $W \setminus Y \neq \emptyset$.

Θα δείξουμε ότι αν $G \cap Z \neq \emptyset$, τότε $\overline{\theta\big(G \cap Z\big)} \setminus Y \neq \emptyset$, το οποίο μας δίνει το ζητούμενο αποτέλεσμα, εφ' όσον το σύνολο $G \cap Z$ είναι ένα γενικό ανοικτό υποσύνολο του Z.

Έστω, λοιπόν, πως $G \cap Z \neq \emptyset$. Τότε $G \setminus G_0 \neq \emptyset$. Πράγματι, αν $G \subseteq G_0$, τότε $G \subseteq {\theta_0}^{-1}(A_0)$ κι άρα $G \cap Z = \emptyset$, άτοπο!

Αφού $G \setminus G_0 \neq \emptyset$ όπως είδαμε παραπάνω, θα είναι $W \setminus Y \neq \emptyset$ κι εφόσον είναι $A_0 \subseteq Y$, άμεσα έχουμε ότι $\overline{\theta\big(G \cap Z\big)} \setminus Y \neq \emptyset$.

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Λήμμα 2.5.8. *Έστω $(X, \mathcal{T}_X)$ Πολωνικός χώρος και Y ένα αναλυτικό υποσύνολο του X, το οποίο δεν είναι F_σ. Έστω, επίσης, ο χώρος $(Z, \mathcal{T}_Z)$ κι η απεικόνιση $\theta : Z \to Y$, όπως αυτά επιλέγησαν στο Λήμμα 2.5.7. Τότε, υπάρχουν $G : \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \to \mathcal{P}(Z)$ ένα σχήμα Souslin στον Z, $H, \overline{H} : \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \to \mathcal{P}(X)$ δύο σχήματα Souslin στον X και $x : \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \to X$ ένα σχήμα συμπύκνωσης στον X ώστε να ικανοποιούνται τα παρακάτω:*

(α) *Το σύνολο $H\big(\sigma|_n\big)$ είναι ανοικτό στον $X, \forall \sigma|_n \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$.*

(β) $\overline{H}\big(\sigma|_n\big) = \overline{H\big(\sigma|_n\big)}, \forall \sigma|_n \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$.

(γ) *Το σύνολο $G\big(\sigma|_n\big)$ είναι ανοικτό στον $Z, \forall \sigma|_n \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$.*

(δ) $x\big(\sigma|_n\big) \in \left(\big(X \setminus Y\big) \cap \overline{\theta\big(G(\sigma|_n)\big)}\right) \setminus \bigcup_{q=1}^{\infty} \overline{H\big(\sigma|_n \frown q\big)}, \forall \sigma|_n \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$.

(ϵ) $0 < d\big(x(\sigma|_n), x(\sigma|_{n+1})\big) < r\big(\sigma|_{n+1}\big), \forall \sigma|_n \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$.

(στ) $\overline{H\big(\sigma|_n\big)} \cap \overline{H\big(\tau|_n\big)} = \emptyset, \forall \sigma|_n, \tau|_n \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ *με* $\sigma|_n \neq \tau|_n$.

(ζ) $\overline{H\big(\sigma|_{n+1}\big)} \subseteq H\big(\sigma|_n\big), \forall \sigma|_n \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$.

(η) $diam H\big(\sigma|_n\big) \leqslant r\big(\sigma|_n\big), \forall \sigma|_n \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$.

(ϑ) $\overline{G\big(\sigma|_{n+1}\big)} \subseteq G\big(\sigma|_n\big), \forall \sigma|_n \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$.

(ι) $diam G\big(\sigma|_n\big) \leqslant \frac{1}{2^n}, \forall \sigma|_n \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$.

(κ) $\overline{\theta\big(G(\sigma|_n)\big)} \subseteq H\big(\sigma|_n\big), \forall \sigma|_n \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$.

Απόδειξη. Επιλέγουμε d_X μία συμβατή μετρική επί του X και d_Z μία συμβατή μετρική επί του Z. Αρχικά, ορίζουμε $H(\emptyset) = X$ και $G(\emptyset) = Z$. Από το προηγούμενο Λήμμα, ισχύει πως $\overline{\theta(Z)} \setminus Y \neq \emptyset$, συνεπώς υπάρχει $z \in \overline{\theta(Z)} \setminus Y$. Θέτουμε $x(\emptyset) = z$. Παρατηρούμε πως μπορούμε να επιλέξουμε μία ακολουθία $\left(H(\{n\})\right)_n$ μη κενών, ανοικτών υποσυνόλων του X ώστε να ικανοποιούνται οι ιδιότητες (στ), (ζ), (η). Η επιλογή αυτή γίνεται ως εξής:

Αφού $z = x(\emptyset) \in \overline{\theta(G(\emptyset))}$, υπάρχει $z_1 \in S(z,1) \cap \theta(G(\emptyset))$. (Προφανώς είναι $z_1 \neq z$, καθώς $z_1 \in \theta(G(\emptyset)) \subseteq Y$ και $z \in \overline{\theta(G(\emptyset))} \setminus Y$.) Θέτουμε:

$$\epsilon_{z_1} = \min\left\{\frac{r(\{1\})}{3}, \frac{d_X(z,z_1)}{3}\right\}$$

και θεωρούμε το σύνολο $S(z_1, \epsilon_{z_1})$. Επίσης, για τον ίδιο λόγο, υπάρχει $z_2 \in S(z, \epsilon_{z_1}) \cap \theta(G(\emptyset))$. Προφανώς, θα είναι $z_2 \neq z$ και $z_2 \neq z_1$. Θέτουμε:

$$\epsilon_{z_2} = \min\left\{\frac{r(\{2\})}{3}, \frac{d_X(z,z_2)}{3}, \frac{\epsilon_{z_1} - d_X(z,z_2)}{3}\right\}$$

και θεωρούμε το σύνολο $S(z_2, \epsilon_{z_2})$.

Έστω πως για $k \in \mathbb{N}$, τα σύνολα $S(z_1, \epsilon_{z_1}), \ldots, S(z_k, \epsilon_{z_k})$ έχουν οριστεί. Τότε, αφού $z = x(\emptyset) \in \overline{\theta(G(\emptyset))} \setminus Y$, υπάρχει $z_{k+1} \in S(z, \epsilon_{z_k}) \cap \theta(G(\emptyset))$. Άμεσα βλέπουμε πως $z_{k+1} \neq z$ και $z_{k+1} \neq z_i, \forall i = 1, \ldots, k$. Θέτουμε:

$$\epsilon_{z_{k+1}} = \min\left\{\frac{r(\{k+1\})}{3}, \frac{d_X(z,z_{k+1})}{3}, \frac{\epsilon_{z_k} - d_X(z,z_{k+1})}{3}\right\}$$

και θεωρούμε το σύνολο $S(z_{k+1}, \epsilon_{z_{k+1}})$.

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, θέτουμε $H(\{n\}) = S(z_n, \epsilon_{z_n})$ κι εύκολα πιστοποιούμε πως η οικογένεια $\{H(\{n\}) : n \in \mathbb{N}\}$ αποτελείται από μη κενά, ανοικτά σύνολα κι επιπλέον ικανοποιεί τις ιδιότητες (ζ), (η). Για να δούμε την ιδιότητα (στ), αρκεί να παρατηρήσουμε πως για κάθε $n \in \mathbb{N}$, είναι $\overline{S(z_n, \epsilon_{z_n})} \cap \overline{S(z, \epsilon_{z_n})} = \emptyset$ και $S(z_k, \epsilon_{z_k}) \subseteq S(z, \epsilon_{z_n}), \forall k > n$. Άρα, $\overline{H(\{i\})} \cap \overline{H(\{j\})} = \emptyset, \forall i \neq j$.

Εφ' όσον $z = x(\emptyset) \notin \overline{H(\{n\})}, \forall n \in \mathbb{N}$, έπεται πως:

$$x(\emptyset) \in \left(\left(X \setminus Y\right) \cap \overline{\theta(G(\emptyset))}\right) \setminus \bigcup_{q=1}^{\infty} \overline{H(\{q\})}$$

Έστω $n \in \mathbb{N}$. Εφ' όσον το σύνολο $H(\{n\})$ είναι μη κενό, υπάρχει $y_n \in H(\{n\})$. Επιπλέον, το σύνολο αυτό είναι ανοικτό, συνεπώς υπάρχει $\epsilon_{y_n} > 0$ ώστε $S(y_n, \epsilon_{y_n}) \subseteq H(\{n\})$ κι άρα, αφού η θ είναι συνεχής, το σύνολο $\theta^{-1}\left(S\left(y_n, \frac{\epsilon_{y_n}}{3}\right)\right)$ θα είναι ανοικτό στον Z. Τότε, υπάρχει $w_n \in Z$ ώστε

$y_n = \theta(w_n)$. Επίσης, υπάρχει $\epsilon_{w_n} > 0$ ώστε $S(w_n, \epsilon_{w_n}) \subseteq \theta^{-1}\left(S\left(y_n, \frac{\epsilon_{y_n}}{3}\right)\right)$. Θέτουμε:

$$\overline{\epsilon}_{w_n} = \min\left\{\frac{1}{4}, \epsilon_{w_n}\right\}$$

κι ορίζουμε $G\big(\{n\}\big) = S(w_n, \overline{\epsilon}_{w_n})$. Τότε, το $G\big(\{n\}\big)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του Z κι επιπλέον $diamG\big(\{n\}\big) \leqslant \frac{1}{2}$ και $\overline{\theta\big(G(\{n\})\big)} \subseteq H\big(\{n\}\big), \forall n \in \mathbb{N}$.

Από το προηγούμενο Λήμμα, έπεται πως για κάθε $n \in \mathbb{N}$ είναι $\overline{\theta\big(G(\{n\}\big)} \setminus Y \neq \emptyset$, συνεπώς υπάρχει $x_n \in \overline{\theta\big(G(\{n\}\big)} \setminus Y$. Θέτουμε $x\big(\{n\}\big) = x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Αφού $x\big(\{n\}\big) \in \overline{\theta\big(G(\{n\}\big)} \subseteq H\big(\{n\}\big)$, από τον τρόπο ορισμού της ακολουθίας $\big(H\{n\}\big)_n$ μπορούμε να δούμε πως η ιδιότητα (ε) ικανοποιείται. Αυτό ολοκληρώνει το πρώτο βήμα της απόδειξης.

Έστω, τώρα, πως για $k \in \mathbb{N}$, τα σύνολα $H\big(\sigma|_k\big), G\big(\sigma|_k\big)$ και τα στοιχεία $x\big(\sigma|_k\big)$ έχουν οριστεί ικανοποιώντας τις ζητούμενες ιδιότητες, για κάθε $\sigma \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Έστω, επίσης, $\sigma \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Αρχικά, είναι $x\big(\sigma|_k\big) \in \overline{\theta\big(G(\sigma|_k)\big)} \setminus Y$ με $\overline{\theta\big(G(\sigma|_k)\big)} \subseteq H\big(\sigma|_k\big)$. Όπως ακριβώς και πριν, επιλέγουμε ακολουθία $\big(H(\sigma|_k \frown q)\big)_{q\in\mathbb{N}}$ μη κενών, ανοικτών υποσυνόλων του X με $x\big(\sigma|_k\big) \notin \overline{H\big(\sigma|_k \frown q\big)} \subseteq H\big(\sigma|_k\big)$, $\forall q \in \mathbb{N}$ ώστε να ικανοποιούνται οι ιδιότητες (στ), (η). Τότε:

$$x\big(\sigma|_k\big) \in \left(\big(X \setminus Y\big) \cap \overline{\theta\big(G(\sigma|_k)\big)}\right) \setminus \bigcup_{q=1}^{\infty} \overline{H\big(\sigma|_k \frown q\big)}.$$

Τα σύνολα $\big\{H\big(\sigma|_k \frown q\big) : q \in \mathbb{N}\big\}$ είναι ανοικτά, συνεπώς όπως και πριν μπορούμε να επιλέξουμε μία ακολουθία $G\big(\sigma|_k \frown q\big)$ ανοικτών υποσυνόλων του Z με $diamG\big(\sigma|_k \frown q\big) \leqslant \frac{1}{2^{k+1}}, \overline{G\big(\sigma|_k \frown q\big)} \subseteq G\big(\sigma|_k\big)$ και:

$$\overline{\theta\big(G(\sigma|_k \frown q)\big)} \subseteq H\big(\sigma|_k \frown q\big), \forall q \in \mathbb{N}.$$

Από το προηγούμενο Λήμμα, έπεται πως για κάθε $q \in \mathbb{N}$ είναι $\overline{\theta\big(G(\sigma|_k \frown q\big)} \setminus Y \neq \emptyset$, συνεπώς υπάρχει ${x_q}^{k+1} \in \overline{\theta\big(G(\sigma|_k \frown q\big)} \setminus Y$. Θέτουμε $x\big(\sigma|_k \frown q\big) = {x_q}^{k+1}, \forall n \in \mathbb{N}$. Αφού είναι:

$$x\big(\sigma|_k \frown q\big) \in \overline{\theta\big(G(\sigma|_k \frown q\big)} \subseteq H\big(\sigma|_k \frown q\big),$$

από τον τρόπο ορισμού της ακολουθίας $\big(H\big(\sigma|_k \frown q\big)_{q\in\mathbb{N}}$ μπορούμε να δούμε πως η ιδιότητα (ε) ικανοποιείται. Σε αυτό το σημείο, ο επαγωγικός ορισμός των σχημάτων $G, H, \overline{H}, x$ ολοκληρώνεται.

Τελικώς, θέτουμε $\overline{H}\big(\sigma|_n\big) = \overline{H\big(\sigma|_n\big)}, \forall \sigma|_n \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$. Αυτό μας δίνει και το ζητούμενο. $\square$

Είμαστε πλέον σε θέση να αποδείξουμε το Θεώρημα του Hurewicz.

Θεώρημα 2.5.9 (Hurewicz). *Έστω $(X, \mathcal{T})$ Πολωνικός χώρος και Y ένα αναλυτικό υποσύνολο του X, το οποίο δεν είναι F_σ. Τότε, υπάρχει F ένα κλειστό υποσύνολο του X ώστε:*

(i) Το σύνολο $P = F \cap Y$ είναι ομοιομορφικό με το $\mathbb{N}^\mathbb{N}$

(ii) Το σύνολο $Q = F \setminus Y$ είναι ομοιομορφικό με το $\mathbb{Q}$

(iii) $\overline{Q} = F$

Απόδειξη. Επιλέγουμε d_X μία πλήρη, συμβατή μετρική επί του X. Επιλέγουμε, επίσης, τον χώρο $(Z, \mathcal{T}_Z)$, την συνεχή απεικόνιση $\theta : Z \to Y$ όπως στο Λήμμα 2.5.7 και d_Z μία πλήρη, συμβατή μετρική επί του Z. Από το Λήμμα 2.5.8 υπάρχουν $G : \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \to \mathcal{P}(Z)$ ένα σχήμα Souslin στον Z, $\quad H, \overline{H} : \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \to \mathcal{P}(X)$ δύο σχήματα Souslin στον X και $x : \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \to X$ ένα σχήμα συμπύκνωσης στον X ώστε να ικανοποιούνται οι ιδιότητες (α)-(κ) του Λήμματος.

Θέτουμε $D = \{x(\sigma|_n) : \sigma|_n \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}\}$. Τότε, από την Πρόταση 2.5.3 και το Λήμμα 2.5.6 άμεσα έχουμε πως το D είναι ομοιομορφικό με το $\mathbb{Q}$ και το $\overline{D} \setminus D$ είναι ομοιομορφικό με τον χώρο Baire $\mathbb{N}^\mathbb{N}$. Θα δείξουμε ότι το σύνολο $F = \overline{D}$ είναι το ζητούμενο. (Προφανώς, το $\overline{D}$ είναι κλειστό υποσύνολο του X και, από την ιδιότητα (δ) του Λήμματος 2.5.8, είναι $D \subseteq X \setminus Y$.)

Αρχικά, θα δείξουμε ότι $\overline{D} \setminus D \subseteq Y$. Έστω $z \in \overline{D} \setminus D$. Από την Πρόταση 2.5.3 (iii), υπάρχει $\sigma \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$ ώστε:

$$z = \phi_x(\sigma) = \lim_{n \to +\infty} x(\sigma|_n)$$

Από την κατασκευή του σχήματος συμπυκνωσης x, ισχύει ότι $x(\sigma|_n) \in \overline{\theta(G(\sigma|_n))}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Συνεπώς, υπάρχει $z_n \in S\left(x(\sigma|_n), \dfrac{1}{2^n}\right) \cap \theta(G(\sigma|_n)), \forall n \in \mathbb{N}$ κι άρα υπάρχει $t_n \in G(\sigma|_n)$ ώστε $\theta(t_n) = z_n$. Τότε, είναι άμεσο πως $\theta(t_n) \to z$. Θα δείξουμε πως η ακολουθία $(t_n)_n$ είναι συγκλίνουσα στον Z.

Πράγματι, έστω $\epsilon > 0$. Αφού το σχήμα Souslin $G : \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \to \mathcal{P}(Z)$ ικανοποιεί τις ιδιότητες (ϑ), (ι) του Λήμματος 2.5.8, έπεται πως υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geqslant n_0$ να ισχύει πως $diam G(\sigma|_n) < \epsilon$. Άρα, αφού $t_n \in G(\sigma|_n), \forall n \in \mathbb{N}$ έπεται πως για κάθε $n, m \geqslant n_0$ θα είναι $d_Z(t_n, t_m) < \epsilon$. Όμως, ο χώρος (Z, d_Z) είναι πλήρης (ως Πολωνικός) κι άρα υπάρχει $t \in Z$ ώστε $t_n \to t$. Από την συνέχεια της συνάρτησης θ έχουμε ότι:

$$t_n \to t \Rightarrow \theta(t_n) \to \theta(t)$$

κι αφού $\theta(t_n) \to z$, από την μοναδικότητα του ορίου συνεπάγεται πως $z = \theta(t) \in Y$. Άρα, είναι $\overline{D} \setminus D \subseteq Y$.

Από αυτό, εύκολα παίρνουμε τις εξής σχέσεις:

$$D = \Big(D \cap (X \setminus Y)\Big) \cup \Big((\overline{D} \setminus D) \cap (X \setminus Y)\Big) = \overline{D} \setminus Y \text{ και}$$
$$\overline{D} \setminus D = \Big((\overline{D} \setminus D) \cap Y\Big) \cup \Big(D \cap Y\Big) = \overline{D} \cap Y$$

(εφ' όσον $D \subseteq X \setminus Y$ και $\overline{D} \setminus D \subseteq Y$.)

Με τις παραπάνω σχέσεις, η απόδειξη ολοκληρώνεται. □

Το Θεώρημα του Hurewicz έχει ένα ενδιαφέρον αποτελέσματα ως άμεση συνέπεια. Ξεικνάμε με τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 2.5.10. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος. Ο X καλείται K_σ (ή σ-συμπαγής) αν μπορεί να γραφεί ως αριθμήσιμη ένωση συμπαγών υποσυνόλων του.*

Πόρισμα 2.5.11. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ αναλυτικός, μετρικοποιήσιμος χώρος, ο οποίος δεν είναι K_σ. Τότε, υπάρχει Y ένα κλειστό υποσύνολο του X ομοιομορφικό με τον χώρο Baire $\mathbb{N}^\mathbb{N}$.*

Απόδειξη. Όπως είδαμε στην Πρόταση 2.3.4, ο $(X, \mathcal{T})$ θα είναι διαχωρίσιμος, μετρικοποιήσιμος χώρος, δηλαδή θα είναι T_3 και δεύτερος αριθμήσιμος. Συνεπώς, από το θεώρημα μετρικοποιησιμότητας του Urysohn, υπάρχει $f : X \to [0,1]^\mathbb{N}$ ομοιομορφική εμφύτεφση. Παρατηρούμε πως το σύνολο $f(X)$ δεν μπορεί να είναι F_σ υποσύνολο του $[0,1]^\mathbb{N}$.

Πράγματι, αν το $f(X)$ είναι ένα F_σ υποσύνολο του $[0,1]^\mathbb{N}$, τότε θα είναι της μορφής:

$$f(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n,$$

όπου F_n κλειστό υποσύνολο του $[0,1]^\mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}$. Τότε, εφ' όσον ο χώρος $[0,1]^\mathbb{N}$ είναι συμπαγής, έπεται πως το F_n είναι συμπαγές για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αυτό σημαίνει πως το $f(X)$ είναι K_σ κι αφού ο X είναι ομοιομορφικός με το $f(X)$, έχουμε πως κι ο X είναι K_σ, άτοπο! Άρα, το $f(X)$ δεν είναι F_σ.

Ο χώρος $[0,1]^\mathbb{N}$ είναι Πολωνικός, άρα, από το προηγούμενο Θεώρημα έπεται πως υπάρχει $F \subseteq [0,1]^\mathbb{N}$ κλειστό ώστε το σύνολο $F \cap f(X)$ να είναι ομοιομορφικό με το $\mathbb{N}^\mathbb{N}$. Τότε, το σύνολο $f^{-1}\big((F \cap f(X)\big)$ θα είναι κλειστό υποσύνολο του X κι επίσης ομοιομορφικό με το $\mathbb{N}^\mathbb{N}$. □

3 Αναλυτικά Υποσύνολα Πολωνικών Χώρων

Με βάση τα αποτελέσματα του προηγούμενου κεφαλαίου, είδαμε κάποιες βασικές ιδιότητες των αναλυτικών χώρων. Παρ΄ όλαυτα αυ΄τα, ο ορισμός τους γεννά πολλά ερωτηματικά. Στρέφουμε την προσοχή μας στην περίπτωση των Πολωνικών χώρων.

3.1 Αλλάζοντας την τοπολογία

Σε αυτήν την ενότητα, ϑα δείξουμε ότι κάϑε Borel υποσύνολο ενός Πολωνικού χώρου είναι αναλυτικό. Για τον σκοπό αυτο, ϑα παρουσιαστούν κάποιες αποδεικτικές τεχνικές οι οποίες είναι, πλέον, καϑιερωμένες στον ευρύτερο χώρο της Περιγραφικής Θεωρίας Συνόλων. Ξεκινάμε με το ακόλουϑο:

Πρόταση 3.1.1. *Έστω $(X,\mathcal{T}_X)$, $(Y,\mathcal{T}_Y)$ Πολωνικοί χώροι ώστε $X\cap Y=\emptyset$. Έστω, επίσης, d_X και d_Y πλήρεις και συμβατές μετρικές επί των X,Y αντίστοιχα ώστε $d_X(x_1,x_2)\leqslant 1$ για κάϑε $x_1,x_2\in X$ και $d_Y(y_1,y_2)\leqslant 1$ για κάϑε $y_1,y_2\in Y$.*

(i) Ορίζουμε:

$$\mathcal{T}=\{U\subseteq X\cup Y : U\cap X\in\mathcal{T}_X \quad \textit{και} \;\; U\cap Y\in\mathcal{T}_Y\}$$

Τότε, η $\mathcal{T}$ αποτελεί μία τοπολογία επί του συνόλου $X\cup Y$.

(ii) Ορίζουμε μία απεικόνιση $h:\big(X\cup Y\big)\times\big(X\cup Y\big)\to\mathbb{R}$ με:

$$h(z_1,z_2)=\begin{cases} d_X(z_1,z_2), & \textit{αν}\;\; z_1,z_2\in X\\ d_Y(z_1,z_2), & \textit{αν}\;\; z_1,z_2\in Y\\ \quad 2, & \textit{αλλιώς.}\end{cases}$$

Τότε, η h αποτελεί μία μετρική επί του $X\cup Y$, η οποία είναι συμβατή με την $\mathcal{T}$.

(iii) Ο χώρος $(X\cup Y,\mathcal{T})$ είναι Πολωνικός.

Απόδειξη. Αρχικά, παρατηρούμε πως η επιλογή των μετρικών d_X,d_Y, όπως αυτές υποτέϑησαν στην εκφώνηση της Πρότασης, είναι δυνατή. Πράγματι, αν d'_X μία πλήρης και συμβατή μετρική επί του X, τότε εύκολα βλέπουμε πως η $d_X:X\times X\to\mathbb{R}$ με $d_X(x_1,x_2)=\min\{1,d'_X(x_1,x_2)\}$, για κάϑε $x_1,x_2\in X$

είναι επίσης μία πλήρης, συμβατή μετρική επί του X κι επιπλέον προφανώς ισχύει πως $d_X(x_1,x_2) \leqslant 1$ για κάθε $x_1, x_2 \in X$. Όμοια επιλέγουμε και την d_Y.

(i) Κατ' αρχάς, είναι άμεσο πως τα σύνολα $\emptyset, X\cup Y$ ανήκουν στην $\mathcal{T}$. Πράγματι, είναι:

$$\big(X\cup Y\big)\cap X = X \in \mathcal{T}_X \text{ και}$$
$$\big(X\cup Y\big)\cap Y = Y \in \mathcal{T}_Y$$

αφού $X\cap Y=\emptyset$. Άντίστοιχα βλέπουμε πως $\emptyset \in \mathcal{T}$.

Έστω $(U_i)_{i\in I} \subseteq \mathcal{T}$. Τότε, $U_i \cap X \in \mathcal{T}_X$ και $U_i\cap Y \in \mathcal{T}_Y, \forall i \in I$. Θα δείξουμε ότι $\bigcup\limits_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}$. Είναι:

$$\big(\bigcup_{i\in I} U_i\big)\cap X = \bigcup_{i\in I}\big(U_i\cap X\big) \in \mathcal{T}_X \text{ και}$$
$$\big(\bigcup_{i\in I} U_i\big)\cap Y = \bigcup_{i\in I}\big(U_i\cap Y\big) \in \mathcal{T}_Y$$

Άρα, $\bigcup\limits_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}$.

Έστω, τώρα, $\{U_1, U_2, \ldots, U_n\} \subseteq \mathcal{T}$. Θα δείξουμε ότι $\bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i \in \mathcal{T}$. Είναι:

$$\big(\bigcap_{i=1}^{n} U_i\big)\cap X = \bigcap_{i=1}^{n}\big(U_i\cap X\big) \in \mathcal{T}_X \text{ και}$$
$$\big(\bigcap_{i=1}^{n} U_i\big)\cap Y = \bigcap_{i=1}^{n}\big(U_i\cap Y\big) \in \mathcal{T}_Y$$

κι άρα $\bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i \in \mathcal{T}$.

Τελικώς, η $\mathcal{T}$ είναι μία τοπολογία επί του $X\cup Y$.

(ii) Είναι εύκολο να δούμε (παίρνοντας περιπτώσεις) πως η h αποτελεί πράγματι μετρική επί του $X\cup Y$. Θα δείξουμε ότι η h επάγει την τοπολογία $\mathcal{T}$, δηλαδή ότι $\mathcal{T} = \mathcal{T}_h$, όπου $\mathcal{T}_h$ η τοπολογία που επάγεται από την h.

Έστω $U \subseteq X\cup Y$ με $U\in\mathcal{T}$ και $z\in U$. Εφ' όσον $U = \big(U\cap X\big)\cup\big(U\cap Y\big)$, είτε $z\in X$ ή $z \in Y$. Αν $z\in X$, αφού το σύνολο $U\cap X$ είναι ανοικτό υποσύνολο του χώρου (X, d_X), υπάρχει $\epsilon > 0$ ώστε $S_{d_X}(z,\epsilon) \subseteq U\cap X$. Θέτουμε $\overline{\epsilon}_z = \min\{1, \epsilon\}$. Τότε ισχυριζόμαστε πως $S_h(z, \overline{\epsilon}_z) \subseteq U$. Αν όχι, υπάρχει $w \in X\cup Y$ ώστε $w\in S_h(z,\overline{\epsilon}_z)$ και $w\notin U$.

Αν $w\in X$, τότε $h(z,w) = d_X(z,w) < \overline{\epsilon}_z \leqslant \epsilon$ κι άρα $w \in S_{d_X}(z,\epsilon) \subseteq U\cap X$ $\Rightarrow w\in U$, άτοπο!

Αν $w \in Y$, τότε $h(z,w) = 2$ κι άρα $w \notin S_h(z, \overline{\epsilon}_z)$, άτοπο!

Βλέπουμε ότι $S_h(z, \overline{\epsilon}_z) \subseteq U$. Αντίστοιχα εργαζόμαστε στην περίπτωση που $z \in Y$. Τότε, είναι $U = \bigcup_{z \in U} S_h(z, \overline{\epsilon}_z)$ κι άρα, $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_h$.

Έστω, τώρα, $z \in X \cup Y$ και $\epsilon > 0$. Θα δείξουμε ότι $S_h(z,\epsilon) \in \mathcal{T}$, δηλαδή ότι $S_h(z,\epsilon) \cap X \in \mathcal{T}_X$ και $S_h(z,\epsilon) \cap Y \in \mathcal{T}_Y$. Έστω πως $z \in X$. Τότε, είναι $S_h(z,\epsilon) \cap X = S_{d_X}(z,\epsilon) \cap X$. Πράγματι, αν $w \in S_h(z,\epsilon) \cap X$, τότε $h(z,w) = d_X(z,w) < \epsilon$ κι άρα $w \in S_{d_X}(z,\epsilon) \cap X$. Από την άλλη μεριά, αν $w \in S_{d_X}(z,\epsilon) \cap X$, τότε $d_X(z,w) = h(z,w) < \epsilon \Rightarrow w \in S_h(z,\epsilon)$. Άρα $S_h(z,\epsilon) \cap X \in \mathcal{T}_X$.

Θα δείξουμε τώρα ότι:

$$S_h(z,\epsilon) \cap Y = \emptyset, \text{ αν } \epsilon \leqslant 2 \text{ και}$$
$$S_h(z,\epsilon) \cap Y = Y, \text{ αν } \epsilon > 2$$

Έστω πως $\epsilon \leqslant 2$ κι έστω πως υπάρχει $y \in S_h(z,\epsilon) \cap Y$. Αφού $z \in X$, είναι $h(z,y) = 2 > \epsilon$, άτοπο!

Έστω πως $\epsilon > 2$ κι έστω $y \in Y$. Τότε, $h(z,y) = 2 < \epsilon$ κι άρα $y \in S_h(z,\epsilon)$.

Σε κάθε περίπτωση, έχουμε ότι $S_h(z,\epsilon) \cap Y \in \mathcal{T}_Y$. Αντίστοιχα εργαζόμαστε στην πωρίπτωση που $z \in Y$. Είναι $\mathcal{T}_h \subseteq \mathcal{T}$ και τελικώς η h είναι συμβατή με την τοπολογία $\mathcal{T}$.

(iii) Αρκεί να δείξουμε ότι ο χώρος $(X \cup Y, h)$ είναι διαχωρίσιμος και πλήρης. Θα ξεκινήσουμε δείχνοντας την διαχωρισιμότητα του $X \cup Y$. Εφ΄ όσον ο X είναι διαχωρίσιμος, υπάρχουν $(x_n)_n \subseteq X$ αριθμήσιμο, πυκνό υποσύνολο του (X, d_X). Όμοια, υπάρχει $(y_n)_n$ αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολο του (Y, d_Y). Θέτουμε $Z = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{y_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq X \cup Y$ και θα δείξουμε ότι είναι το ζητούμενο. Είναι άμεσο πως το Z είναι αριθμήσιμο. Έστω $z \in X \cup, \epsilon > 0$ κι εστω πως $z \in X$. Θα δείξουμε πως $S_h(z,\epsilon) \cap Z \neq \emptyset$. Αρχικά, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $x_{n_0} \in S_h(z,\epsilon)$. Τότε, $d_X(z, x_{n_0}) = h(z, x_{n_0}) < \epsilon$, συνεπώς $x_{n_0} \in \big(S_h(z, \epsilon \cap Z\big)$. Αντίστοιχα δουλεύουμε στην περίπτωση που $z \in Y$. Άρα, ο $X \cup Y$ είναι διαχωρίσιμος.

Έστω, τώρα, $(z_n)_n \subseteq X \cup Y$ μία ακολουθία Cauchy. Για $\epsilon = \dfrac{1}{2}$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n, m \geqslant n_0$ να ισχύει ότι $h(z_n, z_m) < \epsilon$. Από τον ορισμό της h άμεσα έπεται πως για κάθε $n \geqslant n_0$ θα είναι είτε $z_n \in X$ ή $z_n \in Y$. Έστω πως $(z_n)_{n \geqslant n_0} \subseteq X$. Τότε, η ακολουθία $(z_n)_{n \geqslant n_0}$ θα είναι ακολουθία Cauchy στον X, κι αφού ο (X, d_X) είνι πλ΄ρης, έπεται πως υπάρχει $x \in X$ ώστε $(z_n)_{n \geqslant n_0} \to x$ ως προς την d_X. Όμως, στον X οι μετρικές h, d_X ταυτίζονται, άρα θα έχουμε πως $(z_n)_{n \geqslant n_0} \to x$ ως προς την h.

Αντίστοιχα, εργαζόμαστε στη περίπτωση που $(z_n)_{n \geqslant n_0} \subseteq Y$. Τελικώς, ο $(X \cup Y, h)$ είναι διαχωρίσιμος και πλήρης μετρικός χώρος κι άρα έχουμε το ζητούμενο. $\square$

Παρατήρηση 3.1.2. *(i) Το ουσιαστικό περιεχόμενο της προηγούμενης Πρόταση είναι το γεγονός πως δοθέντων δύο ξένων ανά δύο Πολωνικών χώρων* X, Y *, πάντα μπορούμε να βρούμε μία Πολωνική τοπολογιία επί του συνόλου* $X \cup Y$. *Αυτήν την ιδιότητα θα εκμεταλλευτούμε στα επόμενα.*

(ii) Για δύο Πολωνικούς χώρους $(X, \mathcal{T}_X)$ *και* $(Y, \mathcal{T}_Y)$ *με* $X \cap Y = \emptyset$, *παρατηρούμε πως τα σύνολα* X *και* Y *θα είναι clopen στον χώρο* $(X \cup Y, \mathcal{T})$ *(όπως αυτός ορίστηκε στην παραπάνω Πρόταση). Κατ΄ αρχάς, είναι άμεσο πως τα σύνολα* X, Y *ανήκουν στην* $\mathcal{T}$.*Άρα, είναι:*

$$\big(X \cup Y\big) \setminus X = Y \text{ και}$$
$$\big(X \cup Y\big) \setminus Y = X$$

δηλαδή τα X, Y *είναι και κλειστά υποσύνολα του* $X \cup Y$.

Πρόταση 3.1.3. *Έστω* $(X, \mathcal{T})$ *Πολωνικός χώρος,* $U \subseteq X$ *ανοικτό. Τότε, υπάρχει* $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{P}(X)$ *τοπολογία επί του* X *με* $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$ *ώστε:*

(α) Το U *είναι clopen υποσύνολο του χώρου* $(X, \mathcal{T}')$.

(β) Ο $(X, \mathcal{T}')$ *είναι Πολωνικός χώρος.*

(γ) $\mathcal{B}(X, \mathcal{T}) = \mathcal{B}(X, \mathcal{T}')$, *όπου με* $\mathcal{B}(X, \mathcal{T})$ *συμβολίζουμε το σύνολο όλων των Borel υποσονόλων του* $(X, \mathcal{T})$. *Δηλαδή οι χώροι* $(X, \mathcal{T})$ *και* $(X, \mathcal{T}')$ *έχουν τα ίδια σύνολα Borel.*

Απόδειξη. Κατ΄ αρχάς, εφ΄ όσον $U \in \mathcal{T}$, από το Θεώρημα 2.4.15 ο χώρος $(U, \mathcal{T}_U)$ θα είναι Πολωνικός. Επίσης, το σύνολο $X \setminus U$ θα είναι κλειστό υποσύνολο του $(X, \mathcal{T})$ κι άρα, ως γνωστόν, ο χώρος $(X \setminus U, \mathcal{T}_{X \setminus U})$ θα είναι κι αυτός Πολωνικός. Αφού προφανώς ισχύει ότι $U \cap \big(X \setminus U\big) = \emptyset$, από την Πρόταση 3.1.1, η

$$\mathcal{T}' = \{V \subseteq X : V \cap U \in \mathcal{T}_U \text{ και } V \cap \big(X \setminus U\big) \in \mathcal{T}_{X \setminus U}\}$$

είναι μία Πολωνική τοπολογία επί του συνόλου $U \cup \big(X \setminus U\big) = X$.

Είναι άμεσο πως $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$, όπως επίσης και πως το U είναι clopen υποσύνολο του χώρου $(X, \mathcal{T}')$ (βλ. προηγούμενη Παρατήρηση.) Μένει να δείξουμε ότι $\mathcal{B}(X, \mathcal{T}) = \mathcal{B}(X, \mathcal{T}')$. Αφού $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$, έπεται πως $\mathcal{B}(X, \mathcal{T}) \subseteq \mathcal{B}(X, \mathcal{T}')$.

Έστω $V \in \mathcal{T}'$. Τότε $V = \big(V \cap U\big) \cup \big(V \cap (X \setminus U)\big)$ με $V \cap U \in \mathcal{T}_U$ και $V \cap \big(X \setminus U\big) \in \mathcal{T}_{X \setminus U}$. Συνεπώς, (εξ΄ ορισμού της σχετικής τοπολογίας στα σύνολα U και $X \setminus U$), υπάρχουν $W_1, W_2 \in \mathcal{T}$ ώστε:

$$V \cap U = W_1 \cap U \text{ και}$$
$$V \cap \big(X \setminus U\big) = W_2 \cap \big(X \setminus U\big)$$

Όμως, κάθε ένα εκ των συνόλων $W_1 \cap U$ και $W_2 \cap \big(X \setminus U\big)$ είναι Borel υποσύνολο του χώρου $(X, \mathcal{T})$, εφ' όσον $W_1, W_2, U, \big(X \setminus U\big) \in \mathcal{B}(X, \mathcal{T})$. Άρα, το σύνολο $V = \big(W_1 \cap U\big) \cup \big(W_2 \cap (X \setminus U)\big) \in \mathcal{B}(X, \mathcal{T})$.

Συμπαιρένουμε πως είναι $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{B}(X, \mathcal{T})$. Όμως, αφού η οικογένεια $\mathcal{B}(X, \mathcal{T})$ είναι μία σ-άλγεβρα που περιέχει τα ανοικτά υποσύνολα του χώρου $(X, \mathcal{T}')$, έπεται πως θα είναι $\mathcal{B}(X, \mathcal{T}') \subseteq \mathcal{B}(X, \mathcal{T})$.

Τελικώς, οι χώροι $(X, \mathcal{T})$ και $(X, \mathcal{T}')$ έχουν τα ίδια σύνολα Borel, άρα δείξαμε το ζητούμενο. □

Λήμμα 3.1.4. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ Πολωνικός χώρος και $(\mathcal{T}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μία ακολουθία Πολωνικών τοπολογιών επί του X τέτοια ώστε να ισχύει $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έστω, επίσης, $\mathcal{T}_\infty$ η τοπολογία που παράγεται από την οικογένεια $\{\mathcal{T}_n : n \in \mathbb{N}\}$. Τότε, ο χώρος $(X, \mathcal{T}_\infty)$ είναι Πολωνικός. Επιπλέον, αν ισχύει πως $\mathcal{T}_n \subseteq \mathcal{B}(X, \mathcal{T})$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε έχουμε ότι $\mathcal{B}(X, \mathcal{T}) = \mathcal{B}(X, \mathcal{T}_\infty)$.*

Απόδειξη. Η τοπολογία $\mathcal{T}_\infty$ εξ' ορισμού είναι η τομή όλων των τοπολογιών επί του X που περιέχουν την οικογένεια $\{\mathcal{T}_n : n \in \mathbb{N}\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{T}_n$, δηλαδή:

$$\mathcal{T}_\infty = \bigcap \{\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X) : \text{η } \mathcal{S} \text{ είναι μία τοπολογία επί του } X \text{ και } \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{T}_n \subseteq \mathcal{S}\}.$$

Θα δείξουμε ότι ο χώρος $(X, \mathcal{T}_\infty)$ είναι Πολωνικός.

Θέτουμε $X_n = X, \forall n \in \mathbb{N}$. Τότε, η $\{(X_n, \mathcal{T}_n)\}_n$ είναι μία ακολουθία Πολωνικών χώρων, συνεπώς ο χώρος γινόμενο $\prod_{n \in \mathbb{N}} \big(X_n, \mathcal{T}_n\big)$ είναι επίσης Πολωνικός. Έστω $\mathcal{T}_\gamma$ η τοπολογία γινόμενο στον $\prod_{n \in \mathbb{N}} \big(X_n, \mathcal{T}_n\big)$. Ορίζουμε:

$$g : \big(X, \mathcal{T}_\infty\big) \to \left(\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n, \mathcal{T}_\gamma\right) \text{ με}$$
$$g\big(x\big) = \big(x, x, x, \dots\big)$$

Θα δείξουμε πως η g είναι ομοιομορφική εμφύτευση και πως το σύνολο $g\big(X\big)$ είναι κλειστό στον $\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$. Τότε, ο χώρος $\big(g(X), \mathcal{T}_\gamma\big|_{g(X)}\big)$ θα είναι Πολωνικός (ως κλειστό υποσύνολο Πολωνικού χώρου) και λόγω του ομοιομορφισμού θα έχουμε πως κι ο χώρος $(X, \mathcal{T}_\infty)$ θα είναι Πολωνικός.

Για να δούμε πως το σύνολο $g(X)$ είναι κλειστό, έστω πως υπάρχει $z = (z_n)_n \in \overline{g(X)} \setminus g(X)$. Τότε, υπάρχουν $n_0, n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε $z_{n_0} \neq z_{n_1}$. Έστω πως $n_0 < n_1$. Επιλέγουμε d μία μετρική επί του X που να επάγει την τοπολογία $\mathcal{T}$. Για $\epsilon = \dfrac{d(z_{n_0}, z_{n_1})}{3}$, θέτουμε:

$$U = S_d(z_{n_0}, \epsilon) \text{ και } V = S_d(z_{n_1}, \epsilon)$$

Τότε $z_{n_0} \in U, z_{n_1} \in V$ και $U \cap V = \emptyset$. Αφού $U, V \in \mathcal{T}$ και $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_n, \forall n \in \mathbb{N}$, έπεται πως $U \in \mathcal{T}_{n_0}$ και $V \in \mathcal{T}_{n_1}$. Συνεπώς, θέτοντας:

$$A = X_1 \times \ldots \times X_{n_0-1} \times U \times X_{n_0+1} \times \ldots \times X_{n_1-1} \times V \times X_{n_1+1} \times \ldots$$

έχουμε ότι $z = (z_n)_n \in A$ κι αφού $(z_n)_n \in \overline{g(X)}$ συνεπάγεται ότι $A \cap g(X) \neq \emptyset$. Τότε, υπάρχει $w = (w_n)_n \in \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ με $(w_n)_n \in A \cap g(X)$. Όμως, αυτό σημαίνει ότι $w_{n_0} \in U$ και $w_{n_1} \in V$, δηλαδή $w_{n_0} \neq w_{n_1}$, άτοπο! εφόσον υποθέσαμε πως $(w_n)_n \in g(X)$.

Συμπεραίνουμε πως το $g(X)$ είναι κλειστό υποσύνολο του χώρου $\left(\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n, \mathcal{T}_\gamma\right)$.

Θα δείξουμε, τώρα, ότι η $g : X \to g(X)$ είναι ομοιομορφισμός. Είναι άμεσο πως η g είναι 1-1.

Η f είναι συνεχής

Έστω U ένα βασικό ανοικτό υποσύνολο του χώρου $\left(g(X), \mathcal{T}_\gamma\big|_{g(X)}\right)$. Τότε, το U γράφεται ως:

$$U = \left(\Big(\prod_{n\in F} V_n\Big) \times \Big(\prod_{n\in\mathbb{N}\setminus F} X_n\Big) \right) \cap g(X)$$

όπου $F \subseteq \mathbb{N}$ πεπερασμένο και $V_n \in \mathcal{T}_n, \forall n \in F$. Έστω $x \in g^{-1}(U)$. Τότε, $x \in V_n, \forall n \in F$.

Για κάθε $n \in F$, επιλέγουμε d_n μία μετρική επί του $X_n = X$ που να επάγει την τοπολογία $\mathcal{T}_n$. Αφού $x \in V_n$ και $V_n \in \mathcal{T}_n$, υπάρχει $\epsilon_n > 0$ ώστε $S_{d_n}(x, \epsilon_n) \subseteq V_n$. Είναι άμεσο πως $S_{d_n}(x, \epsilon_n) \in \mathcal{T}_\infty, \forall n \in F$ κι άρα το σύνολο $\bigcap_{n\in F} S_{d_n}(x, \epsilon_n)$ ανήκει στην τοπολογία $\mathcal{T}_\infty$ για κάθε $n \in F$. Θέτουμε:

$$U_x = \bigcap_{n\in F} S_{d_n}(x, \epsilon_n)$$

και βλέπουμε πως $x \in U_x, U_x \in \mathcal{T}_\infty$ και πως $U_x \subseteq g^{-1}(U)$. Συνεπώς, είναι:

$$g^{-1}(U) = \bigcup_{x\in g^{-1}(U)} U_x$$

κι άρα η g είναι συνεχής.

<u>Η $g : X \to g(X)$ είναι ανοικτή</u>

Εφ΄ όσον η οικογένεια $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{T}_n$ αποτελεί υποβάση για την τοπολογία $\mathcal{T}_\infty$, η οικογένεια:

$$D = \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} U_i : n \in \mathbb{N}, {\{U_i\}_{i=1}}^n \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{T}_n \right\} \cup \{X\}$$

αποτελεί βάση για την $\mathcal{T}_\infty$. Έστω $V \in D$. Τότε, $V = \bigcap_{i=1}^{k} U_i$, με ${\{U_i\}_{i=1}}^k \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{T}_n$.

Άρα, για κάθε $i \in \{1, \ldots, k\}$ υπάρχει $n_i \in \mathbb{N}$ ώστε $U_i \in \mathcal{T}_{n_i}$. Θέτοντας $F = \{n_1, \ldots, n_k\}$, εύκολα βλέπουμε ότι:

$$g(\bigcap_{i=1}^{k} U_i) = \left((\prod_{i\in F} U_i) \times (\prod_{i\in \mathbb{N}\setminus F} X_i) \right) \cap g(X)$$

κι άρα η g είναι ανοικτή.

Τελικώς, η $g : X \to g(X)$ είναι ομοιομορφισμός και συνεπώς, όπως αναφέρθηκε στην αρχή της απόδειξης, ο χώρος $(X, \mathcal{T}_\infty)$ είναι Πολωνικός.

Έστω, τώρα, πως ισχύει ότι $\mathcal{T}_n \subseteq \mathcal{B}(X, \mathcal{T}), \forall n \in \mathbb{N}$. Θα δείξουμε ότι $\mathcal{B}(X, \mathcal{T}_\infty) = \mathcal{B}(X, \mathcal{T})$. Κατ΄ αρχάς, αφού είναι $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_\infty$, έπεται άμεσα πως $\mathcal{B}(X, \mathcal{T}) \subseteq \mathcal{B}(X, \mathcal{T}_\infty)$.

Αφού ο χώρος $(X, \mathcal{T}_n)$ είναι Πολωνικός, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $\{{U_k}^n\}_{k\in\mathbb{N}}$ μία αριθμήσιμη βάση για την $\mathcal{T}_n$. Θα δείξουμε, αρχικά, ότι η οικογένεια $\{{U_k}^n : k, n \in \mathbb{N}\}$ αποτελεί υποβάση για την $\mathcal{T}_\infty$. Εφ΄ όσον $\{{U_k}^n\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{T}_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ και $\mathcal{T}_n \subseteq \mathcal{T}_\infty, \forall n \in \mathbb{N}$, έπεται πως $\{{U_k}^n : k, n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{T}_\infty$. Συνεπώς, είναι $\mathcal{T}\big(\{{U_k}^n : k, n \in \mathbb{N}\}\big) \subseteq \mathcal{T}_\infty$. (όπου για μία οικογένεια $\mathcal{C}$ υποσυνόλων του X, με $\mathcal{T}\big(\mathcal{C}\big)$ συμβολίζεται η μικρότερη τοπολογία επί του X που περιέχει την $\mathcal{C}$ ή, ισοδύναμα, η τομή όλων των τοπολογιών επί του X που περιέχουν την $\mathcal{C}$.) Αν, τώρα, μία τοπολογία επί του X περιέχει την οικογένεια $\{{U_k}^n : k, n \in \mathbb{N}\}$, τότε θα περιέχει και την $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{T}_n$, συνεπώς και την $\mathcal{T}_\infty$. Άρα:

$$\mathcal{T}_\infty \subseteq \mathcal{T}\big(\{{U_k}^n : k, n \in \mathbb{N}\}\big)$$

Καταλήγουμε στο γεγονός πως η οικογένεια $\{{U_k}^n : k, n \in \mathbb{N}\}$ είναι υποβάση για την τοπολογία $\mathcal{T}_\infty$. Όπως και πριν, η οικογένεια:

$$D' = \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} V_i : n \in \mathbb{N}, {\{V_i\}_{i=1}}^n \subseteq \{{U_k}^n : k, n \in \mathbb{N}\} \right\}$$

αποτελεί βάση για την $\mathcal{T}_\infty$, η οποία επιπλέον είναι αριθμήσιμη. Θα δείξουμε ότι $\mathcal{T}_\infty \subseteq \mathcal{B}(X,\mathcal{T})$. Έστω, λοιπόν, $W \in \mathcal{T}_\infty$. Τότε, το W γράφεται ως:

$$W = \bigcup_{n\in F} D_n$$

όπου $F \subseteq \mathbb{N}$ και $D_n \in D', \forall n \in F$. Αφού $\mathcal{T}_n \subseteq \mathcal{B}(X,\mathcal{T}), \forall n \in \mathbb{N}$ και από τον ορισμό της οικογένειας D', εύκολα βλέπουμε πως $W \subseteq \mathcal{B}(X,\mathcal{T})$. Δείξαμε, λοιπόν, ότι $\mathcal{T}_\infty \subseteq \mathcal{B}(X,\mathcal{T})$ κι αφού η $\mathcal{B}(X,\mathcal{T}_\infty)$ είναι η μικρότερη σ-άλγεβρα που περιέχει την $\mathcal{T}_\infty$, έπεται πως $\mathcal{B}(X,\mathcal{T}_\infty) \subseteq \mathcal{B}(X,\mathcal{T})$.

Τελικώς, είναι $\mathcal{B}(X,\mathcal{T}) = \mathcal{B}(X,\mathcal{T}_\infty)$ κι άρα η απόδειξη ολοκληρώνεται. □

Είμαστε, πλέον, σε θέση να αποδείξουμε το ακόλουθο θεμελιώδες αποτέλεσμα για τα Borel υποσύνολα Πολωνικών χώρων:

Θεώρημα 3.1.5. *Έστω $(X,\mathcal{T})$ Πολωνικός χώρος και $A \subseteq X$ Borel. Τότε, υπάρχει $\mathcal{T}_A \subseteq \mathcal{P}(X)$ μία τοπολογία επί του X με $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_A$, ώστε να ισχύουν τα ακόλουθα:*

- *(α) Ο χώρος $(X,\mathcal{T}_A)$ είναι Πολωνικός.*
- *(β) Το A είναι clopen υποσύνολο του $(X,\mathcal{T}_A)$.*
- *(γ) $\mathcal{B}(X,\mathcal{T}) = \mathcal{B}(X,\mathcal{T}_A)$.*

Απόδειξη. Θέτουμε:

$$\begin{gathered}\mathcal{C} = \{B \in \mathcal{B}(X,\mathcal{T}) : \text{υπάρχει } \mathcal{T}_B \subseteq \mathcal{P}(X) \text{ τοπολογία επί του } X \text{ τέτοια ώστε} \\ \text{για τον χώρο } (X,\mathcal{T}_B) \text{ να ισχύουν οι ιδιότητες (α), (β), (γ)} \\ \text{του Θεωρήματος}\}\end{gathered}$$

και θα δείξουμε ότι $\mathcal{C} = \mathcal{B}(X,\mathcal{T})$. Εξ' ορισμού, είναι $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}(X,\mathcal{T})$. Επίσης, από τη Πρόταση 3.1.3 έπεται πως κάθε στοιχείο της $\mathcal{T}$ ανήκει στην $\mathcal{C}$, συνεπώς η είναι μη κενή οικογένεια.

Παρατηρούμε πως είναι αρκετό να δείξουμε ότι η οικογένεια $\mathcal{C}$ είναι μία σ-άλγεβρα επί του X. Πράγματι, εφ' όσον η $\mathcal{C}$ περιέχει τα ανοικτά υποσύνολα του X, δοθέντος του γεγονότος ότι αποτελεί σ-άλγεβρα, θα έχουμε ότι $\mathcal{B}(X,\mathcal{T}) \subseteq \mathcal{C}$, πράγμα που θα μας δώσει το ζητούμενο αποτέλεσμα. (Υπενθυμίζουμε πως η $\mathcal{B}(X,\mathcal{T})$ είναι η **μικρότερη** σ-άλγεβρα επί του X που περιέχει τα ανοικτά υποσύνολά του.)

Προφανώς $X \in \mathcal{C}$. Αν $B \in \mathcal{C}$, υπάρχει $\mathcal{T}_B \subseteq \mathcal{P}(X)$ τοπολογία επί του X με $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_B$ ώστε ο χώρος $(X,\mathcal{T}_B)$ να είναι Πολωνικός, το B να είναι clopen στον $(X,\mathcal{T}_B)$ και $\mathcal{B}(X,\mathcal{T}) = \mathcal{B}(X,\mathcal{T}_B)$. Τότε, το σύνολο $X \setminus B$ θα είναι επίσης clopen στον $(X, \mathcal{T}_B)$. Άρα, θέτοντας $\mathcal{T}_{X\setminus B} = \mathcal{T}_B$, βλέπουμε πως για τον χώρο $(X \setminus B, \mathcal{T}_{X\setminus B})$ ικανοποιούνται οι συνθήκες (α), (β),(γ) κι άρα $X \setminus B \in \mathcal{C}$. Συνεπώς, η οικογένεια $\mathcal{C}$ είναι κλειστή ως προς τα συμπληρώματα.

Έστω, τώρα, $(B_n)_n \subseteq \mathcal{C}$. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $\mathcal{T}_{B_n} \subseteq \mathcal{P}(X)$ τοπολογία επί του X με $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_{B_n}$ ώστε ο χώρος $(X, \mathcal{T}_{B_n})$ να είναι Πολωνικός, το σύνολο B_n να είναι clopen στον $(X, \mathcal{T}_{B_n})$ και $\mathcal{B}(X, \mathcal{T}) = \mathcal{B}(X, \mathcal{T}_{B_n})$. Θα δείξουμε ότι $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{C}$.

Ορίζουμε $\mathcal{T}_\infty$ να είναι η τοπολογία που παράγεται από την $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{T}_{B_n}$. Από το προηγούμενο Λήμμα, έχουμε πως ο χώρος $(X, \mathcal{T}_\infty)$ θα είναι Πολωνικός και $\mathcal{B}(X, \mathcal{T}) = \mathcal{B}(X, \mathcal{T}_\infty)$. Επιπλέον, προφανώς θα ισχύει ότι $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{T}_\infty$. Άρα, εφαρμόζοντας την Πρόταση 3.1.3 για τον χώρο $(X, \mathcal{T}_\infty)$, βλέπουμε πως υπάρχει $\mathcal{T}'_\infty \subseteq \mathcal{P}(X)$ τοπολογία επί του X με $\mathcal{T}_\infty \subseteq \mathcal{T}'_\infty$ ώστε ο χώρος $(X, \mathcal{T}'_\infty)$ να είναι Πολωνικός, το σύνολο $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ να είναι clopen στον $(X, \mathcal{T}'_\infty)$ και επίσης $\mathcal{B}(X, \mathcal{T}'_\infty) = \mathcal{B}(X, \mathcal{T}_\infty) = \mathcal{B}(X, \mathcal{T})$. Θέτοντας $\mathcal{T}_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n} = \mathcal{T}'_\infty$, βλέπουμε πως $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{C}$ κι άρα η απόδειξη ολοκληρώνεται. □

Το θεμελιώδες αυτό Θεώρημα έχει κάποιες πολύ ισχυρές άμεσες συνέπειες που αφορούν τα Borel υποσύνολα Πολωνικών χώρων, τις οποίες και παρουσιάζουμε ευθής αμέσως:

Πόρισμα 3.1.6. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ Πολωνικός χώρος και $B \subseteq X$ Borel. Τότε, το B είναι αναλυτικό σύνολο.*

Απόδειξη. Από το παραπάνω Θεώρημα, υπάρχει $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{P}(X)$ τοπολογία επί του X με $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$ ώστε να ισχύουν τα ακολουθα:

(α) Ο χώρος $(X, \mathcal{T}')$ είναι Πολωνικός.

(β) Το B είναι clopen υποσύνολο του $(X, \mathcal{T}')$.

(γ) $\mathcal{B}(X, \mathcal{T}) = \mathcal{B}(X, \mathcal{T}')$.

Από τις ιδιότητες (α) και (β), σε συνδυασμό με το Θεώρημα 2.4.15, έπεται πως ο χώρος $(B, \mathcal{T}'_B)$ θα είναι Πολωνικός κι άρα από το Θεώρημα 2.3.1 ο χώρος $(B, \mathcal{T}'_B)$ θα είναι αναλυτικός. Αυτό σημαίνει πως υπάρχει απεικόνιση $f : \mathbb{N}^\mathbb{N} \to (B, \mathcal{T}'_B)$ συνεχής κι επί.

Θα δείξουμε ότι η $f : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to (B, \mathcal{T}_B)$ είναι επίσης συνεχής κι επί. Πράγματι, έστω $U \in \mathcal{T}_B$. Τότε $U = V \cap B$, όπου $V \in \mathcal{T}$. Αφού είναι $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$ έχουμε πως $V \in \mathcal{T}'$ κι άρα το σύνολο $U = V \cap B \in \mathcal{T}'_B$. Συνεπώς, το σύνολο $f^{-1}(U)$ θα είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, δηλαδή η $f : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to (B, \mathcal{T}_B)$ είναι συνεχής. (Το ότι η f θα είναι επί είναι άμεσο.)

Τελικώς, το B είναι αναλυτικό υποσύνολο του X. □

Πόρισμα 3.1.7. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ Πολωνικός χώρος και $B \subseteq X$ Borel. Τότε, υπάρχει $F \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ κλειστό και $g : F \to B$ συνεχής , 1-1 κι επί. Δηλαδή κάθε Borel υποσύνολο ενός Πολωνικού χώρου είναι η συνεχής κι 1-1 εικόνα ενός κλειστού υποσυνόλου του $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.*

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 3.1.5, υπάρχει $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{P}(X)$ τοπολογία επί του X με $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$ ώστε να ισχύουν τα ακολουθα:

(α) Ο χώρος $(X, \mathcal{T}')$ είναι Πολωνικός.

(β) Το B είναι clopen υποσύνολο του $(X, \mathcal{T}')$.

(γ) $\mathcal{B}(X, \mathcal{T}) = \mathcal{B}(X, \mathcal{T}')$.

Από τις ιδιότητες (α) και (β), σε συνδυασμό με το Θεώρημα 2.4.15, έπεται πως ο χώρος $(B, \mathcal{T}'_B)$ θα είναι Πολωνικός κι άρα από το Θεώρημα 2.3.8 υπάρχει $F \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ κλειστό και $h : F \to (B, \mathcal{T}'_B)$ συνεχής, 1-1 κι επί απεικόνιση. Όμοια με την προηγούμενη απόδειξη δείχνουμε πως η $h : F \to (B, \mathcal{T}_B)$ είναι συνεχής, 1-1 κι επί. □

Πόρισμα 3.1.8. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ Πολωνικός χώρος και $B \subseteq X$ Borel. Τότε, είτε το B είναι αριθμήσιμο, ή περιέχει ένα υποσύνολο ομοιομορφικό με το $2^{\mathbb{N}}$ κι ως εκ τούτου έχει τον πληθάριθμο του συνεχούς.*

Απόδειξη. Από την Πρόταση 3.1.6, ο χώρος $(B, \mathcal{T}_B)$ είναι αναλυτικός. Συνεπώς, αν το B είναι υπεραριθμήσιμο, από το Πόρισμα 2.4.13, ο χώρος $(B, \mathcal{T}_B)$ περιέχει ένα υποσύνολο ομοιομορφικό με τον χώρο Cantor $2^{\mathbb{N}}$. □

Παρατήρηση 3.1.9. *Στο δεύτερο Κεφάλαιο, όταν διατυπώσαμε κι αποδείξαμε το Πόρισμα 2.4.13 ίσως να μην είχαμε μία καλή διασθητική εικόνα για το εύρος των συνόλων στα οποία μπορεί το Πόρισμα να έχει εφαρμογή. Το Πόρισμα 3.1.8 δίνει καταφατική απάντηση στην Υπόθεση του Συνεχούς για κάθε άπειρο Borel υποσύνολο ενός Πολωνικού χώρου, δηλαδή για μία πολύ μεγάλη κλάση υποσυνόλων των χώρων αυτών. Παρατηρούμε πως η απόδειξη του γεγονότος αυτού βασίζεται εξ΄ ολοκλήρου στην θεωρία των αναλυτικών συνόλων!*

Κλείνουμε αυτήν την ενότητα με την ακόλουθη Πρόταση, η οποία μας επιτρέπει υπό συνθήκες την αλλαγή της τοπολογίας ενός Πολωνικού χώρου ώστε να καθιστά μία δοθείσα Borel-μετρήσιμη απεικόνιση, συνεχή.

Πρόταση 3.1.10. *Έστω $(X, \mathcal{T}_X)$ Πολωνικός χώρος, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ δεύτερος αριθμήσιμος τοπολογικός χώρος και $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ μία Borel-μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε, υπάρχει $\mathcal{T}'_X \subseteq \mathcal{P}(X)$ τοπολογία επί του X με $\mathcal{T}_X \subseteq \mathcal{T}'_X$ ώστε να ικανοποιούνται τα παρακάτω:*

(α) *ο χώρος $(X, \mathcal{T}'_X)$ είναι Πολωνικός.*

(β) $\mathcal{B}(X, \mathcal{T}_X) = \mathcal{B}(X, \mathcal{T}'_X)$.

(γ) *η $f : (X, \mathcal{T}'_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ είναι συνεχής.*

Απόδειξη. Εφ΄ όσον ο χώρος $(Y, \mathcal{T}_Y)$ είναι δεύτερος αριθμήσιμος, υπάρχει $(U_n)_n$ μία αριθμήσιμη βάση για την $\mathcal{T}_Y$. Συνεπώς, αφού η $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ είναι Borel-μετρήσιμη, έπεται πως $f^{-1}(U_n) \in \mathcal{B}(X, \mathcal{T}_X), \forall n \in \mathbb{N}$. Άρα, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, από το Θεώρημα 3.1.5 υπάρχει $\mathcal{T}_n \subseteq \mathcal{P}(X)$ τοπολογία επί του X με $\mathcal{T}_X \subseteq \mathcal{T}_n$ ώστε ο χώρος $(X, \mathcal{T}_n)$ να είναι Πολωνικός, $\mathcal{B}(X, \mathcal{T}_X) = \mathcal{B}(X, \mathcal{T}_n)$ και το σύνολο $f^{-1}(U_n)$ να είναι clopen υποσύνολο του $(X, \mathcal{T}_n)$.

Θέτοντας $\mathcal{T}'_X$ να είναι η τοπολογία που παράγεται από την οικογένεια $\{\mathcal{T}_n : n \in \mathbb{N}\}$, από το Λήμμα 3.1.4 έχουμε πως ο χώρος $(X, \mathcal{T}'_X)$ θα είναι Πολωνικός, $\mathcal{T}_X \subseteq \mathcal{T}_n \subseteq \mathcal{T}'_X, \forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{B}(X, \mathcal{T}_X) = \mathcal{B}(X, \mathcal{T}'_X)$ και, προφανώς, $f^{-1}(U_n) \in \mathcal{T}'_X, \forall n \in \mathbb{N}$.

Θα δείξουμε ότι η $f : (X, \mathcal{T}'_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ είναι συνεχής. Έστε $V \in \mathcal{T}_Y$. Τότε, υπάρχει $F \subseteq \mathbb{N}$ ώστε:

$$V = \bigcup_{n \in F} U_n$$

Συνεπώς, θα είναι:

$$f^{-1}(V) = \bigcup_{n \in F} f^{-1}(U_n) \in \mathcal{T}'_X$$

κι άρα η $f : (X, \mathcal{T}'_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ είναι συνεχής. $\square$

3.2 Βασικές Ιδιότητες και το Θεώρημα Διαχωρισμού

Θα δούμε κάποιες ιδιότητες των αναλυτικών συνόλων που αφορούν τόσο την κανονικότητά τους σχετικά με τα αριθμήσιμα γινόμενα, τις αριθμήσιμες ενώσεις και τις αριθμήσιμες τομές, όσο και χρήσιμους χαρακτηρισμούς τους αναφορικά με προβολές. Ξεκινάμε με το ακόλουθο:

Πρόταση 3.2.1. *Έστω $\{(X_n, \mathcal{T}_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ αριθμήσιμη οικογένεια αναλυτικών χώρων. Τότε, ο χώρος γινόμενο $X = \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ είναι αναλυτικός.*

Απόδειξη. Κατ' αρχάς, ο X θα είναι Hausdorff, ως αριθμήσιμο γινόμενο χώρων Hausdroff.

Εφ' όσον για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ο χώρος $(X_n, \mathcal{T}_n)$ είναι αναλυτικός, υπάρχει $f_n : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to X_n$ συνεχής κι επί συνάρτηση. Ορίζουμε απεικόνιση $G : \left(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right)^{\mathbb{N}} \to X$ ώστε για $(\sigma^n)_n \in \left(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right)^{\mathbb{N}}$ να έχουμε:

$$G\big((\sigma^n)_n\big) = \big(f_n(\sigma^n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$$

Όπως δείξαμε στη Πρόταση 1.1.10 οι χώροι $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ και $\left(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right)^{\mathbb{N}}$ είναι ομοιομορφικοί, συνεπώς αρκεί να δείξουμε ότι η G όπως ορίστηκε είναι συνεχής κι επί.

Για να δούμε πως η G είναι επί, έστω $(x_n)_n \in X$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η $f_n : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to X_n$ είναι επί, συνεπώς υπάρχει $\sigma^n \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ώστε $f_n(\sigma^n) = x_n$. Τότε, $G\big((\sigma^n)_n\big) = \big(f_n(\sigma^n)\big)_n = (x_n)_n$ κι άρα η G είναι επί.

Για να δούμε πως η G είναι συνεχής, έστω U ένα βασικό ανοικτό υποσύνολο του X. Τότε, το U γράφεται ως:

$$U = \left(\prod_{n\in F} V_n\right) \times \left(\prod_{n\in\mathbb{N}\setminus F} X_n\right)$$

όπου $F \subseteq \mathbb{N}$ πεπερασμένο και $V_n \in \mathcal{T}_n, \forall n \in F$. Αρκεί να δείξουμε πως το σύνολο $G^{-1}(U)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\left(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right)^{\mathbb{N}}$. Θα δείξουμε ότι:

$$G^{-1}(U) = \left(\prod_{n\in F} {f_n}^{-1}(V_n)\right) \times \left(\left(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right)^{\mathbb{N}\setminus F}\right)$$

το οποίο είναι ένα βασικό ανοικτό υποσύνολο του χώρου $\left(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right)^{\mathbb{N}}$ (η f_n είναι συνεχής, για κάθε $n \in F$.)

Έστω $(\sigma^n)_n \in G^{-1}(U)$. Τότε, $G\big((\sigma^n)_n\big) \in U$ κι άρα $f_n(\sigma^n) \in V_n$ για κάθε $n \in F \Rightarrow \sigma^n \in f^{-1}(V_n), \forall n \in F$ και $\sigma^n \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N} \setminus F$ $\Rightarrow (\sigma^n)_n \in \big(\prod\limits_{n\in F} f_n{}^{-1}(V_n)\big) \times \big(\prod\limits_{n\in\mathbb{N}\setminus F} \left(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right)^{\mathbb{N}\setminus F}\big)$.

Έστω, τώρα, $(\sigma^n)_n \in \big(\prod\limits_{n\in F} f_n{}^{-1}(V_n)\big) \times \big(\prod\limits_{n\in\mathbb{N}\setminus F} \left(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right)^{\mathbb{N}\setminus F}\big)$. Τότε, $\sigma^n \in f_n{}^{-1}(V_n)$, $\forall n \in F$ και $\sigma^n \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N} \setminus F \Rightarrow f_n(\sigma^n) \in V_n, \forall n \in F$ και $f_n(\sigma^n) \in X_n$, $\forall n \in \mathbb{N} \setminus F \Rightarrow \big(f_n(\sigma^n)\big)_n \in U \Rightarrow G\big((\sigma^n)_n \in U \Rightarrow (\sigma^n)_n \in G^{-1}(U)$.

Τελικώς, η G είναι συνεχής κι επί κι άρα δείξαμε το ζητούμενο. □

Είδαμε στην Πρόταση 2.3.5 έναν ισοδύναμο χαρακτηρισμό των αναλυτικών χώρων, σύμφωνα με τον οποίο η συνεχής εικόνα κάθε Πολωνικού χώρου είναι αναλυτικός χώρος. Θα γενικεύσουμε τώρα το αποτέλεσμα αυτό, παραθέτοντας επιπλέον χαρακτηρισμούς των αναλυτικών υποσυνόλων Πολωνικών χώρων, οι οποίοι υποδεικνύουν την άμεση σύνδεση τους με τις προβολές σε άλλους χώρους. Θα χρειαστούμε, πρώτα, ένα βοηθητικό Λήμμα.

Λήμμα 3.2.2. *Έστω $(X, \mathcal{T}_X), (Y, \mathcal{T}_Y)$ και $(Z, \mathcal{T}_Z)$ τοπολογικοί χώροι. Αν οι χώροι Y και Z είναι ομοιομορφικοί, τότε οι χώροι $X \times Y$ και $X \times Z$ είναι επίσης ομοιομορφικοί.*

Απόδειξη. Αφού οι Y, Z είναι ομοιομορφικοί, υπάρχει $f : Y \to Z$ 1-1, επί, συνεχής κι ανοικτή συνάρτηση. Ορίζουμε:

$$h : \big(X \times Y\big) \to \big(X \times Z\big) \text{ με } \quad h\big((x,y)\big) = \big(x, f(y)\big)$$

και θα δείξουμε πως η h είναι η ζητούμενη 1-1,επί, συνεχής κι ανοικτή απεικόνιση.

<u>Η h είναι 1-1</u>

Έστω $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$ με $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$.

Αν $x_1 \neq x_2$, τότε $h\big((x_1, y_1)\big) = \big(x_1, f(y_1)\big) \neq \big(x_2, f(y_2)\big) = h\big((x_2, y_2)\big)$ (εφ' όσον η f είναι 1-1.) Αντίστοιχα εργαζόμαστε στην περίπτωση που $y_1 \neq y_2$ κι άρα η h είναι 1-1.

<u>Η h είναι επί</u>

Έστω $(x, z) \in X \times Z$. Αφού η f είναι επί, υπάρχει $y \in Y$ ώστε $f(y) = z$. Τότε, $h\big((x,y)\big) = \big(x, f(y)\big) = (x, z)$ κι άρα η h είναι επί.

Η h είναι συνεχής

Έστω $U \in \mathcal{T}_X$ και $V \in \mathcal{T}_Z$. Τότε το σύνολο $U \times V$ είναι ένα βασικό ανοικτό υποσύνολο του $X \times Z$ κι άρα αρκεί να δείξουμε ότι το σύνολο $h^{-1}(U \times V)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $X \times Y$. Πράγματι, θα δείξουμε ότι:

$$h^{-1}(U \times V) = U \times f^{-1}(V)$$

το οποίο είναι ένα βασικό ανοικτό υποσύνολο του χώρου $X \times Y$, αφού η f είναι συνεχής. Έστω $(x, y) \in h^{-1}(U \times V)$. Τότε, $h\big((x, y)\big) \in U \times V$ κι άρα $\big(x, f(y)\big) \in U \times V \Rightarrow x \in U$ και $f(y) \in V \Rightarrow x \in U$ και $y \in f^{-1}(V)$ $\Rightarrow (x, y) \in U \times f^{-1}(V)$.

Έστω, τώρα, $(x, y) \in U \times f^{-1}(V)$. Τότε, $x \in U$ και $y \in f^{-1}(V) \Rightarrow x \in U$ και $f(y) \in V \Rightarrow h\big((x, y)\big) \in U \times V \Rightarrow (x, y) \in h^{-1}(U \times V)$.

Άρα, έχουμε ότι $h^{-1}(U \times V) = U \times f^{-1}(V)$, συνεπώς η h είναι συνεχής.

Η h είναι ανοικτή

Έστω $U \in \mathcal{T}_X$ και $V \in \mathcal{T}_Y$. Τότε, το σύνολο $U \times V$ είναι ένα βασικό ανοικτό υποσύνολο του χώρο $X \times Y$ κι άρα αρκεί να δείξουμε ότι το σύνολο $h(U \times V)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $X \times Z$. Πράγματι, θα δείξουμε ότι:

$$h(U \times V) = U \times f(V)$$

το οποίο είναι ανοικτό στον $X \times Z$, εφ' όσον η f είναι ανοικτή απεικόνιση. Έστω $(x, z) \in h(U \times V)$. Τότε, υπάρχει $y \in Y$ ώστε $h\big((x, y)\big) = \big(x, f(y)\big) = (x, z)$. Άρα, $(x, y) \in U \times V \Rightarrow x \in U$ και $y \in V \Rightarrow x \in U$ και $f(y) = z \in f(V)$ $\Rightarrow (x, z) \in U \times f(V)$.

Έστω, τώρα, $(x, z) \in U \times f(V)$. Τότε, $x \in U$ και $z \in f(V) \Rightarrow \exists y \in V$ με $f(y) = z \in f(V) \Rightarrow x \in U$ και $y \in V \Rightarrow (x, y) \in U \times V \Rightarrow h\big((x, y)\big) \in h(U \times V)$ $\Rightarrow (x, z) \in h(U \times V)$.

Τελικώς, η $h : X \times Y \to X \times Z$ είναι ομοιομορφισμός. $\square$

Σημείωση. *Έστω $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ τοπολογικοί χώροι και $A \subseteq X \times Y$. Με $proj_X A$ και $proj_Y A$ συμβολίζουμε τη συνήθη* ***προβολή*** *του συνόλου A στους χώρους X και Y αντίστοιχα.*

Πρόταση 3.2.3. *Έστω $(X, \mathcal{T}_X)$ Πολωνικός χώρος και $A \subseteq X$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i) *Το A είναι αναλυτικό.*

(ii) *Υπάρχει $(Y, \mathcal{T}_Y)$ Πολωνικός χώρος και $g : Y \to X$ συνεχής συνάρτηση με $g(Y) = A$.*

(iii) *Υπάρχει* $F \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times X$ *κλειστό ώστε* $proj_X F = A$*. Αντίστοιχα, υπάρχει* $K \subseteq X \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ *κλειστό ώστε* $proj_X K = A$*.*

(iv) *Υπάρχει* $(Z, \mathcal{T}_Z)$ *Πολωνικός χώρος και* $B \subseteq X \times Z$ *Borel ώστε* $proj_X B = A$*.*

(v) *Υπάρχει* $G \subseteq X \times 2^{\mathbb{N}}$ *ένα* G_δ *σύνολο ώστε* $proj_X G = A$*.*

Απόδειξη. Η ισοδυναμία μεταξύ των (i) και (ii) είναι ουσιαστικά η Πρόταση 2.3.5.

(i)⇒(iii) Αφού το A είναι αναλυτικό, υπάρχει $f : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to X$ συνεχής κι επί συνάρτηση με $f\big(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\big) = A$. Θέτουμε:

$$F = \big\{\big(\sigma, f(\sigma)\big) : \sigma \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\big\} = Gr(f)$$

και θα δείξουμε πως το F είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times X$ και πως $proj_X F = A$.

Για να δούμε πως το F είναι κλειστό, έστω πως υπάρχει $(z_1, z_2) \in \overline{F}$ με $(z_1, z_2) \notin F$. Τότε, $z_1 = \sigma_0$, για κάποιο $\sigma_0 \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ και $z_2 \neq f(\sigma_0)$. Επιλέγουμε d μία συμβατή μετρική επί του X και για $\epsilon = \dfrac{d\big(z_2, f(\sigma_0)\big)}{3}$ θέτουμε:

$$U = S_d\big(f(\sigma_0), \epsilon\big) \text{ και } V = S_d\big(z_2, \epsilon\big)$$

Τότε, τα σύνολα U, V είναι ανοικτά υποσύνολα του X με $U \cap V = \emptyset$. Επίσης, έχουμε ότι $\sigma_0 \in f^{-1}(U)$ και $z_2 \in V$, ενώ το σύνολο $f^{-1}(U) \times V$ είναι ένα βασικό ανοικτό υποσύνολο του χώρου $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times X$. Αφού $(z_1, z_2) = (\sigma_0, z_2) \in \overline{F}$, έπεται πως:

$$F \cap \left(f^{-1}(U) \times V\right) \neq \emptyset,$$

συνεπώς υπάρχει $(w_1, w_2) \in F \cap \big(f^{-1}(U) \times V\big)$.

Αφού $(w_1, w_2) \in F$, υπάρχει $\sigma_1 \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ώστε $w_1 = \sigma_1$ και $w_2 = f(\sigma_1)$.

Αφού $(w_1, w_2) \in f^{-1}(U) \times V$, ισχύει ότι $w_1 = \sigma_1 \in f^{-1}(U)$ και $z_2 = f(\sigma_1) \in V \Rightarrow f(\sigma_1) \in U \cap V$, άτοπο! αφού $U \cap V = \emptyset$. Συνεπώς, το F είναι κλειστό υποσύνολο του χώρου $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times X$.

Θα δείξουμε τώρα ότι $proj_X F = A$. Έστω $z \in proj_X F$. Τότε, υπάρχει $\sigma \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ώστε $(\sigma, z) \in F$. Άρα, θα είναι $z = f(\sigma)$, δηλαδή $z \in A$ (αφού η f παίρνει τιμές στο A.)

Έστω $z \in A$. Τότε, υπάρχει $\sigma \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ώστε $f(\sigma) = z$ (αφού $f\big(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\big) = A$.) Συνεπώς $(\sigma, z) \in F$ κι άρα $z \in proj_X F$.

Τέλος, παρατηρούμε πως θέτοντας:

$$K = \big\{\big(f(\sigma), \sigma\big) : \sigma \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\big\} \subseteq X \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$$

μπορούμε να δείξουμε, εργαζόμενοι παρομοίως, πως το K είναι κλειστό και πως $proj_X K = A$.

(iii)⇒(iv) Άμεσο, καθώς ο χώρος $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ είναι Πολωνικός και τα κλειστά σύνολα είναι προφανώς Borel.

(iv)⇒(i) Εφ΄ όσον οι χώροι $(X, \mathcal{T}_X)$ και $(Z, \mathcal{T}_Z)$ είναι Πολωνικοί, έπεται πως κι ο χώρος $X \times Z$ θα είναι Πολωνικός. Συνεπώς, από το Πόρισμα 3.1.6 το σύνολο B θα είναι αναλυτικό. Αφού οι προβολές είναι συνεχείς συναρτήσεις, από την Πρόταση 2.3.6 έχουμε πως το σύνολο $proj_X B = A$ θα είναι αναλυτικό.

Μέχρι στιγμής, έχουμε δείξει τη ισοδυναμία των $(i), (ii), (iii), (iv)$. Για να δείξουμε ότι η (v) είναι ισοδύναμη με τις παραπάνω, αρκεί να δείξουμε τις συνεπαγωγές $(v) \Rightarrow (iv)$ και $(iii) \Rightarrow (v)$.

(v)⇒(iv) Άμεσο, αφού ο χώρος $2^{\mathbb{N}}$ είναι Πολωνικός και τα G_δ σύνολα είναι προφανώς Borel.

(iii)⇒(v) Έστω πως υπάρχει $F \subseteq X \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ κλειστό με $proj_X F = A$. Όπως είδαμε στην Παρατήρηση 2.2.11, υπάρχει $B \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ ομοιομορφικό με τον χώρο Baire $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Δηλαδή, υπάρχει $g : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to B$ 1-1, επί, συνεχής κι ανοικτή απεικόνιση.

Συνεπώς, η συνάρτηση $h : X \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to X \times B$ με $h\big((x, y)\big) = \big(x, g(y)\big)$ θα είναι ομοιομορφισμός, όπως αποδείχτηκε στο Λήμμα 3.2.2. Τότε, το F θα είναι ομοιομορφικό με σύνολο $h(F) \subseteq X \times 2^{\mathbb{N}}$ (Είναι $h(F) \subseteq X \times B \subseteq X \times 2^{\mathbb{N}}$.)

Αφού ο $X \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ είναι Πολωνικός και το F κλειστό, έπεται πως το F θα είναι Πολωνικό υποσύνολο του $X \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Συνεπώς, λόγω του ομοιομορφισμού, το $h(F)$ θα είναι Πολωνικό υποσύνολο του χώρου $X \times 2^{\mathbb{N}}$ κι άρα από το Θεώρημα 2.4.15, το $h(F)$ είναι G_δ υποσύνολο του $X \times 2^{\mathbb{N}}$.

Θα δείξουμε, τελικώς, ότι $proj_X F = proj_X h(F)$. Έστω $x \in proj_X F$. Τότε, υπάρχει $\sigma \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ώστε $(x, \sigma) \in F \Rightarrow h\big((x, \sigma)\big) \in h(F) \Rightarrow \big(x, g(\sigma)\big) \in h(F)$ $\Rightarrow x \in proj_X h(F)$.

Έστω, τώρα, $x \in proj_X h(F)$. Τότε, υπάρχει $\tau \in 2^{\mathbb{N}}$ ώστε $(x, \tau) \in h(F)$ $\Rightarrow (x, \tau) \in X \times B$ κι άρα υπάρχει $\sigma \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ώστε $g(\sigma) = \tau$. Συνεπώς, είναι $h\big(x, \sigma)\big) = (x, \tau) \Rightarrow (x, \sigma) \in F \Rightarrow x \in proj_X F$. □

Παρατήρηση 3.2.4. *Βασιζόμενοι στην παραπάνω Πρόταση, βλέπουμε την άρρηκτη, ισοδύναμη σχέση μεταξύ αναλυτικών συνόλων και συνεχών προβολών. Αυτή είναι μία ιδιότητα εξηγεί σε μεγάλο βαθμό τον χαρακτηρισμό των αναλυτικών συνόλων ως μία πολύ καλή γενίκευση των Borel συνόλων, καθώς όπως ειπώθηκε και στην εισαγωγή του παρόντος, η προβολή (ή, γενικότερα, συνεχής εικόνα) ενός Borel συνόλου* ***δεν*** *είναι κατ΄ ανάγκη Borel. Αυτή η ιδιότητα είναι, βέβαια, άμεση από τον ορισμό των αναλυτικών συνόλων.*

Η παραπάνω Πρόταση μας δίνει τα εφόδια ώστε να δείξουμε πως τόσο η αιθμήσιμη ένωση, όσο κι η αριθμήσιμη τομή αναλυτικών συνόλων παραμένει αναλυτικό σύνολο. Για του λόγου το αληθές, έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Πρόταση 3.2.5. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ Πολωνικός χώρος και $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μία ακολουθία αναλυτικών υποσύνόλων του X. Τότε, τα σύνολα:*

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \text{ και } \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

είναι αναλυτικά.

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε πρώτα ότι η αριθμήσιμη ένωση των A_n είναι αναλυτικό υποσύνολο του X. Από την Πρόταση 3.2.3 (iii), για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $F_n \subseteq X \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ κλειστό ώστε $proj_X F_n = A_n$. Θα δείξουμε ότι:

$$proj_X\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

το οποίο από το (iv) της ίδιας Πρότασης θα μας δώσει το ζητούμενο, εφ' όσον το σύνολο $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ είναι ένα F_σ υποσύνολο του χώρου $X \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ και, ως εκ τούτου, Borel.

Έστω $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Τότε, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $x \in A_{n_0}$. Αφού $A_{n_0} = proj_X F_{n_0}$, έπεται πως $x \in proj_X F_{n_0}$ κι άρα υπάρχει $\sigma \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ώστε $(x, \sigma) \in F_{n_0} \Rightarrow (x, \sigma) \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n \Rightarrow x \in proj_X\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n\big)$.

Έστω $x \in proj_X\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n\big)$. Τότε, υπάρχει $\sigma \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ώστε $(x, \sigma) \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ κι άρα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $(x, \sigma) \in F_{n_0} \Rightarrow x \in proj_X F_{n_0} \Rightarrow x \in A_{n_0}$ $\Rightarrow x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

Θα δείξουμε, τώρα, ότι η αριθμήσιμη τομή των A_n είναι αναλυτικό σύνολο. Κατ' αρχάς, αφού για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το σύνολο A_n είναι αναλυτικό, υπάρχει $f_n : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to X$ συνεχής απεικόνιση ώστε $f_n\big(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\big) = A_n$. Θέτουμε:

$$Z = \Big\{(\sigma^n)_n \in \big(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\big)^{\mathbb{N}} : f_n(\sigma^n) = f_m(\sigma^m), \forall n, m \in \mathbb{N}\Big\}$$

και για αρχή θα δείξουμε ότι το Z είναι κλειστό υποσύνολο του $\big(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\big)^{\mathbb{N}}$, από το οποίο θα συμπεράνουμε πως το Z είναι Πολωνικό υποσύνολο του χώρου αυτού.

Πράγματι, έστω πως υπάρχει $(\sigma^n)_n \in \overline{Z} \setminus Z$. Τότε, υπάρχουν $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ ώστε $f_{n_1}(\sigma^{n_1}) \neq f_{n_2}(\sigma^{n_2})$. (χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε πως

$n_1 < n_2$.) Επιλέγουμε d μία συμβατή μετρική επί του X και για $\epsilon = \dfrac{d\big(f_{n_1}(\sigma^{n_1}), f_{n_2}(\sigma^{n_2})\big)}{3}$, θέτοντας:

$$U = S\big(f_{n_1}(\sigma^{n_1}), \epsilon\big) \text{ και } V = S\big(f_{n_2}(\sigma^{n_2}), \epsilon\big)$$

έχουμε πως $U, V \in \mathcal{T}, U \cap V = \emptyset$ και πως $f_{n_1}(\sigma^{n_1}) \in U, f_{n_2}(\sigma^{n_2}) \in V$. Αφού οι συναρτήσεις f_{n_1} και f_{n_2} είναι συνεχείς, έπεται πως τα σύνολα ${f_{n_1}}^{-1}(U)$ και ${f_{n_2}}^{-1}(V)$ είναι ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Αφού η οικογένεια $\{U_s : s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}\}$ είναι βάση για την τοπολογία του $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, υπάρχουν $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ ώστε:

$$U_{\sigma^{n_1}|_{k_1}} \subseteq {f_{n_1}}^{-1}(U) \text{ και } U_{\sigma^{n_2}|_{k_2}} \subseteq {f_{n_1}}^{-1}(V)$$

Θέτουμε:

$$W = \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \ldots \times U_{\sigma^{n_1}|_{k_1}} \times \ldots \times U_{\sigma^{n_2}|_{k_2}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \ldots$$

και εύκολα βλέπουμε πως $(\sigma^n)_n \in W$ κι αφού υποθέσαμε πως $(\sigma^n)_n \in \overline{Z} \setminus Z$, έπεται πως $W \cap Z \neq \emptyset$. Άρα, υπάρχει $(\tau^n)_n \in W \cap Z$. Αφού $(\tau^n)_n \in Z$, έχουμε πως $f_n(\tau^n) = f_m(\tau^m), \forall n, m \in \mathbb{N}$. Αφού $(\tau^n)_n \in W$, έχουμε:

$$f_{n_1}(\tau^{n_1}) \in f_{n_1}\big(U_{\sigma^{n_1}|_{k_1}}\big) \subseteq U \text{ και}$$
$$f_{n_2}(\tau^{n_2}) \in f_{n_2}\big(U_{\sigma^{n_2}|_{k_2}}\big) \subseteq V$$

άτοπο! αφού $U \cap V = \emptyset$ και $f_{n_1}(\tau^{n_1}) = f_{n_2}(\tau_{n_2})$. Έχουμε, λοιπόν, πως το Z είναι κλειστό υποσύνολο του $\big(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\big)^{\mathbb{N}}$κι άρα Πολωνικό.

Έστω $n_0 \in \mathbb{N}$. Ορίζουμε $g : Z \to X$ με:

$$g\big((\sigma^n)_n\big) = f_{n_0}(\sigma^{n_0})$$

Παρατηρούμε πως η συνάρτηση g είναι καλά ορισμένη, καθώς για $(\sigma^n)_n \in Z$, κάθε μία από τις f_n παίρνει την ίδια τιμή στο αντίστοιχο σ^n. Επίσης, είναι άμεσο πως η g είναι συνεχής, αφού η f_{n_0} είναι συνεχής.

Αρκεί να δείξουμε πως $g(Z) = \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Τότε, η αριθμήσιμη τομή των A_n θα είναι η συνεχής εικόνα ενός Πολωνικού χώρου κι άρα, από το (ii) της Πρότασης 3.2.3 έχουμε το ζητούμενο.

Έστω $x \in g(Z)$. Τότε, υπάρχει $(\sigma^n)_n \in Z$ ώστε $g\big((\sigma^n)_n\big) = x$. Αυτό σημαίνει ότι $f_n(\sigma^n) = x$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ κι άρα, αφού η f_n παίρνει τιμές στο A_n, ισχύει ότι $x \in \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

Έστω, τώρα, $x \in \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Τότε, $x \in A_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $\sigma^n \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ώστε $f_n(\sigma^n) = x$. Είναι άμεσο πως $g\big((\sigma^n)_n\big) = x$ και συνεπώς $x \in g(Z)$. $\square$

Φτάνουμε τώρα στην ΄καρδιά ΄ της θεωρίας των αναλυτικών συνόλων. Όπως είδαμε στα προηγούμενα, κάθε Borel υποσύνολο ενός Πολωνικού χώρου είναι αναλυτικό, αποτέλεσμα το οποίο εμπλούτισε καθοριστικά την δομή των αναλυτικών συνόλων. Εντούτοις, υπάρχουν κάποια ερωτήματα που ανακύπτουν εντελώς φυσιολογικά, όπως ' Είναι κάθε αναλυτικό σύνολο Borel? ' και ' Υπό ποιες συνθήκες μπορεί να αντικατασταθεί ένα αναλυτικό σύνολο από ένα Borel σύνολο ώστε τα δύο αυτά σύνολα να είναι υπό κάποια έννοια ισοδύναμα? ' Τέτοιας φύσης ερωτήματα απασχόλησαν πολύ τους μαθηματικούς στα πρώιμα στάδια ανάπτυξης της παρούσης θεωρίας.

Τα δύο Θεωρήματα που θα παρουσιαστούν στη συνέχεια (το Θεώρημα Διαχωρισμού του Lusin και το θεώρημα του Souslin) χαρακτηρίζουν πλήρως τη σχέση μεταξύ Borel κι αναλυτικών υποσυνόλων κάθε Πολωνικού χώρου δίνοντας απαντήσεις στα ερωτήματα αύτα. Παραθέτουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 3.2.6. *Έστω $(X,\mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $A,B \subseteq X$. Τα A,B καλούνται **Borel-διαχωρίσιμα** αν υπάρχει $C \in \mathcal{B}(X,\mathcal{T})$ ώστε:*

$$A \subseteq C \text{ και } B \cap C = \emptyset$$

Προτού προχωρήσουμε στην διατύπωση κι απόδειξη των Θεωρημάτων, χρειαζόμαστε το παρακάτω Λήμμα.

Λήμμα 3.2.7. *Έστω $(X,\mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $(P_n)_n, (Q_m)_m$ δύο ακολουθίες υποσυνόλων του X. Θέτουμε:*

$$P = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n \text{ και } Q = \bigcup_{m=1}^{\infty} Q_m$$

Αν για κάθε $n,m \in \mathbb{N}$ τα σύνολα P_n, Q_m είναι Borel-διαχωρίσιμα, τότε και τα σύνολα P,Q είναι Borel-διαχωρίσιμα.

Απόδειξη. Έστω $n,m \in \mathbb{N}$. Τότε, υπάρχει $C_{n,m} \in \mathcal{B}(X,\mathcal{T})$ ώστε $P_n \subseteq C_{n,m}$ και $Q_m \cap C_{n,m} = \emptyset$. Θέτουμε:

$$C = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=1}^{\infty} C_{n,m}$$

Προφανώς $C \in \mathcal{B}(X,\mathcal{T})$. Ισχυριζόματε πως το σύνολο C είναι το ζητούμενο, δηλαδή πως ισχύει ότι $P \subseteq C$ και $Q \cap C = \emptyset$.

Πράγματι, έστω $x \in P$. Τότε, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $x \in P_{n_0}$. Για κάθε $m \in \mathbb{N}$, είναι $P_{n_0} \subseteq C_{n_0,m}$ κι άρα $P_{n_0} \subseteq \bigcap_{m=1}^{\infty} C_{n_0,m} \Rightarrow x \in \bigcap_{m=1}^{\infty} C_{n_0,m} \subseteq C \Rightarrow x \in C$. Άρα, $P \subseteq C$.

Έστω, τώρα, πως υπάρχει $x \in Q \cap C$. Κατ' αρχάς, αφού $x \in Q$, υπάρχει $m_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $x \in Q_{m_0}$. Αφού $x \in C$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $x \in \bigcap_{m=1}^{\infty} C_{n_0,m} \Rightarrow x \in C_{n_0,m_0} \Rightarrow x \in Q_{m_0} \cap C_{n_0,m_0}$, άτοπο! αφού εξ' υποθέσεως είναι $Q_{m_0} \cap C_{n_0,m_0} = \emptyset$. Άρα, είναι $Q \cap C = \emptyset$.

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Είμαστε, πλέον, σε θέση να αποδείξουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Θεώρημα 3.2.8 (Θεώρημα Διαχωρισμού του Lusin). *Έστω $(X, \mathcal{T})$ Πολωνικός χώρος και A, B αναλυτικά υποσύνολα του X με $A \cap B = \emptyset$. Τότε, τα A, B είναι Borel-διαχωρίσιμα.*

Απόδειξη. Η απόδειξη θα πραγματοποιηθεί με απαγωγή σε άτοπο.

Κατ' αρχάς, αφού τα σύνολα A, B είναι αναλυτικά, υπάρχουν συνεχείς συναρτήσεις $f, g : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to X$ με $f\big(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\big) = A$ και $g\big(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\big) = B$. Έστω $s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$. Θέτουμε:

$$A(s) = f(U_s) \text{ και } B_s = g(U_s)$$

Τότε, εύκολα βλέπουμε πως:

$$A_s = \bigcup_{n=1}^{\infty} f\big(U_{s^\frown n}\big) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{s^\frown n}$$
$$B_s = \bigcup_{n=1}^{\infty} g\big(U_{s^\frown n}\big) = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_{s^\frown n}$$

ενώ για τα σύνολα A, B ισχύει ότι:

$$A = A_\emptyset = f\big(U_\emptyset\big) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f\big(U_{\{n\}}\big)$$
$$B = B_\emptyset = g\big(U_\emptyset\big) = \bigcup_{n=1}^{\infty} g\big(U_{\{n\}}\big)$$

Έστω, προς εις άτοπον απαγωγή, πως τα A, B δεν είναι Borel-διαχωρίσιμα. Τότε, από το προηγούμενο Λήμμα, υπάρχουν $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ ώστε τα σύνολα $A_{\{n_1\}} = f\big(U_{n_1}\big)$ και $B_{\{n_2\}} = g\big(U_{n_2}\big)$ να μην είναι Borel-διαχωρίσιμα.

Έστω πως για $n_k, n_m \in \mathbb{N}$, τα σύνολα $A_{n_1 \frown \ldots \frown n_k}$ και $B_{n_2 \frown \ldots \frown n_m}$ έχουν επιλεγεί ώστε να μην είναι Borel-διαχωρίσιμα. (Τα σύνολα $\{n_1, \ldots, n_k\}$ και $\{n_2, \ldots, n_m\}$ είναι ισοπληθικά.) Τότε, ισχύουν τα εξής:

$$A_{n_1\frown\ldots\frown n_k} = \bigcup_{w=1}^{\infty} A_{n_1\frown\ldots\frown n_k\frown w}$$
$$B_{n_2\frown\ldots\frown n_m} = \bigcup_{w=1}^{\infty} B_{n_2\frown\ldots\frown n_m\frown w}$$

Πάλι με χρήση του προηγούμενου Λήμματος, επιλέγουμε $n_{k+1}, n_{m+1} \in \mathbb{N}$ ώστε τα σύνολα $A_{n_1\frown\ldots\frown n_k\frown n_{k+1}}$ και $B_{n_2\frown\ldots\frown n_m\frown n_{m+1}}$ να μην είναι Borel-διαχωρίσιμα. Θέτουμε:

$$\sigma = n_1 \frown \ldots \frown n_k \frown \ldots \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \qquad \text{και}$$
$$\tau = n_2 \frown \ldots \frown n_m \frown \ldots \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$$

Τότε, $f(\sigma) \neq g(\tau)$. Πράγματι, είναι $f(\sigma) \in A, g(\tau) \in B$ κι αφού $A \cap B = \emptyset$, έχουμε το ζητούμενο. Επίσης, τα σύνολα $A_{\sigma|_n}$ και $B_{\tau|_n}$ δεν είναι Borel-διαχωρίσιμα, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Επιλέγουμε d μία συμβατή μετρική επί του X και για $\epsilon = \dfrac{d\big(f(\sigma), g(\tau)\big)}{3}$, ορίζουμε:

$$W = S\big(f(\sigma), \epsilon\big) \text{ και } V = S\big(g(\tau), \epsilon\big)$$

Τότε, είναι $W \cap V = \emptyset, f(\sigma) \in W, g(\tau) \in V$ και τα σύνολα W, V είναι ανοικτά υποσύνολα του X. Εφ' όσον οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς, έπεται πως τα σύνολα $f^{-1}(W)$ και $g^{-1}(V)$ είναι ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Ως γνωστόν, η οικογένεια $\{U_s : s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}\}$ αποτελεί βάση για την τοπολογία του $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, συνεπώς υπάρχει $K \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ώστε:

$$f^{-1}(W) = \bigcup_{s \in K} U_s.$$

Αφού $\sigma \in f^{-1}(W)$, υπάρχει $s_1 \in K, s_1 = ({s_1}^1, \ldots, {s_1}^q)$ για κάποιο $q \in \mathbb{N}$ ώστε $\sigma \in U_{s_1} \Rightarrow \sigma \in U_{\sigma|_q} \subseteq f^{-1}(W)$.

Εντελώς αντίστοιχα, υπάρχει $w \in \mathbb{N}$ ώστε $\tau \in U_{\tau|_w} \subseteq g^{-1}(V)$. Θέτουμε $m = max\{q, w\}$. Τότε, είναι:

$$U_{\sigma|_m} \subseteq U_{\sigma|_q} \subseteq f^{-1}(W) \Rightarrow f\big(U_{\sigma|_m}\big) \subseteq W \text{ και}$$
$$U_{\tau|_m} \subseteq U_{\tau|_w} \subseteq g^{-1}(V) \Rightarrow g\big(U_{\tau|_m}\big) \subseteq V$$

Όμως, αυτό σημαίνει ότι:

$$f\big(U_{\sigma|_m}\big) = A_{\sigma|_m} \subseteq W \text{ και}$$
$$g\big(U_{\tau|_m}\big) = B_{\tau|_m} \subseteq V$$

κι αφού τα W, V είναι προφανώς Borel υποσύνολα του X, έπεται πως τα σύνολα $A_{\sigma|_m}$ και $B_{\tau|_m}$ είναι Borel-διαχωρίσιμα, άτοπο!

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. $\square$

Στην πραγματικότητα, μπορούμε να γενικεύσουμε το Θεώρημα Διαχωρισμού για μία αριθμήσιμη οικογένεια αναλυτικών συνόλων.

Πόρισμα 3.2.9. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ Πολωνικός χώρος και $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μία ακολουθία ξένων ανά δύο, αναλυτικών υποσυνόλων του X. Τότε, υπάρχει ακολουθία $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ξένων ανά δύο, Borel υποσυνόλων του X ώστε $A_n \subseteq B_n, \forall n \in \mathbb{N}$.*

Απόδειξη. Ο ορισμός της ζητούμενης ακολουθίας $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ θα πραγματοποιηθεί επαγωγικά. Τα σύνολα A_1 και $\displaystyle\bigcup_{n=2}^{\infty} A_n$ είναι ξένα ,αναλυτικά, συνεπώς από προηγούμενο Θεώρημα υπάρχει $B_1 \in \mathcal{B}(X, \mathcal{T})$ ώστε:

$$A_1 \subseteq B_1 \text{ και } B_1 \cap \left(\bigcup_{n=2}^{\infty} A_n\right)$$

Έστω πως για $k \in \mathbb{N}$ τα σύνολα $B_1, \ldots, B_k$ έχουν οριστεί ώστε για κάθε $i, j \in \{1, \ldots, k\}$ με $i \neq j$ να ισχύει ότι $B_i \in \mathcal{B}(X, \mathcal{T}), A_i \subseteq B_i, B_i \cap B_j = \emptyset$ και $B_i \cap \big(\displaystyle\bigcup_{n=i+1}^{\infty} A_n\big) = \emptyset$.

Τα σύνολα A_{k+1} και $\displaystyle\bigcup_{n=k+2}^{\infty} A_n$ είναι ξένα κι αναλυτικά, συνεπώς πάλι από το προηγούμενο Θεώρημα υπάρχει $C_{k+1} \in \mathcal{B}(X, \mathcal{T})$ ώστε:

$$A_{k+1} \subseteq C_{k+1} \text{ και } C_{k+1} \cap \left(\bigcup_{n=k+2}^{\infty} A_n\right) = \emptyset.$$

Θέτουμε:

$$B_{k+1} = C_{k+1} \cap \left(\bigcap_{j=1}^{k} {B_j}^{\mathsf{c}}\right)$$

Τότε, εύκολα βλέπουμε πως $B_{k+1} \in \mathcal{B}(X, \mathcal{T}), B_{k+1} \cap B_j = \emptyset, \forall j = 1, \ldots, k$ και πως $A_{k+1} \subseteq B_{k+1}$. □

Το Θεώρημα του Souslin προκύπτει τώρα ως απλή εφαρμογή του Θεωρήματος Διαχωρισμού.

Θεώρημα 3.2.10 (Souslin). *Έστω $(X, \mathcal{T})$ Πολωνικός χώρος και $A \subseteq X$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i) Το A είναι Borel υποσύνολο του X.

(ii) Τα σύνολα A και $X \setminus A$ είναι αναλυτικά.

Απόδειξη. (i)⇒(ii) Κατ' αρχάς, αφού το A είναι Borel, έπεται πως και το συμπλήρωμά του $X \setminus A$ θα είναι Borel. Όπως έχουμε δει, κάθε Borel υποσύνολο ενός Πολωνικού χώρου είναι αναλυτικό, συνεπώς τα σύνολα A και $X \setminus A$ είναι αναλυτικά.

(ii)⇒(i)Έστω πως τα σύνολα A και $X \setminus A$ είναι αναλυτικά. Πορφανώς είναι $A \cap \big(X \setminus A\big) = \emptyset$ κι άρα, από το Θεώρημα Διαχωρισμού του Lusin, υπάρχει $B \in \mathcal{B}(X, \mathcal{T})$ ώστε $A \subseteq B$ και $B \cap \big(X \setminus A\big) = \emptyset$. Τότε, είναι άμεσο πως $A = B$ κι άρα το A είναι Borel υποσύνολο του X. □

Ένα ενδιαφέρον ποιοτικό ερώτημα που προκύπτει για την φύση των αναλυτικών συνόλων είναι το εξής:

" Δοθέντος ενός Πολωνικού χώρου X, υπάρχει κάποια κλάση υποσυνόλων του X ώστε τα αναλυτικά υποσύνολα του X να κατασκευάζονται με κάποιο τρόπο από αυτήν? Αν ναι, ποια είναι αυτή η κλάση? "

Θα κλείσουμε την παρούσα ενότητα δίνοντας απάντηση στο ερώτημα αυτό. Θα δώσουμε για αρχή έναν ορισμό, ο οποίος κάνει χρήση της πράξης Souslin που είδαμε στο δεύτερο Κεφάλαιο.

Ορισμός 3.2.11. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $\mathcal{C}$ μία αυθαίρετη οικογένεια υποσυνόλων του X. Με $\mathcal{A}\big(\mathcal{C}\big)$ συμβολίζουμε την οικογένεια όλων των συνόλων που προκύπτουν από την εφαρμογή της πράξης Souslin στα στοιχεία της $\mathcal{C}$, δηλαδή είναι:*

$$\mathcal{A}\big(\mathcal{C}\big) = \left\{ \bigcup_{\sigma \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \bigcap_{n=1}^{\infty} C_{\sigma|_n} : C_{\sigma|_n} \in \mathcal{C}, \forall \sigma|_n \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \right\}$$

Πρόταση 3.2.12. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ Πολωνικός χώρος, $\Sigma^1_1(X)$ η κλάση όλων των αναλυτικών υποσυνόλων του X και $\mathcal{F}(X)$ η κλάση όλων των κλειστών υποσυνόλων του X. Τότε, ισχύει ότι:*

$$\Sigma^1_1(X) = \mathcal{A}\big(\mathcal{F}(X)\big)$$

δηλαδή τα αναλυτικά υποσύνολα του X είναι ακριβώς τα σύνολα εκείνα που προκύπτουν από την εφαρμογή της πράξης Souslin στα κλειστά υποσύνολα του X.

Απόδειξη. Έστω $A \in \mathcal{A}\big(\mathcal{F}(X)\big)$. Τότε, το A γράφεται ως:

$$A = \bigcup_{\sigma \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \bigcap_{n=1}^{\infty} F_{\sigma|_n}$$

όπου το $F_{\sigma|_n}$ είναι κλειστό υποσύνολο του X για κάθε $\sigma|_n \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$. Θα δείξουμε ότι το A είναι αναλυτικό υποσύνολο του X. Θέτουμε:

$$F = \left\{ (\sigma, x) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times X : x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_{\sigma|_n} \right\}$$

και θα δείξουμε πως το F είναι κλειστό υποσύνολο του χώρου $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times X$ και πως $proj_X F = A$. Από το (iii) της Πρότασης 3.2.3, αυτό θα συνεπάγεται ότι το A είναι αναλυτικό υποσύνολο του X.

Για να δούμε πως το F είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times X$, έστω πως υπάρχει $(\sigma, x) \in \overline{F} \setminus F$. Αφού $x \notin F$, έπεται πως υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $x \notin F_{\sigma|_{n_0}}$. Θέτουμε:

$$G = \left(\bigcap_{k=1}^{n_0} F_{\sigma|_k} \right)^{\mathsf{c}} = \bigcup_{k=1}^{n_0} F_{\sigma|_k}{}^{\mathsf{c}}$$

το οποίο είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του X (εφ' όσον το σύνολο $F_{\sigma|_k}$ είναι κλειστό για κάθε $k \in \mathbb{N}$.)

Αφού $x \notin F_{\sigma|_{n_0}}$, έχουμε ότι $x \in \big(F_{\sigma|_{n_0}}\big)^{\mathsf{c}} \subseteq G$. Ορίζουμε:

$$W = \left(U_{\sigma|_{n_0}} \right) \times G$$

το οποίο είναι ανοικτό στον $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times X$ και επιπλέον $(\sigma, x) \in W$. Αφού υποθέσαμε πως $(\sigma, x) \in \overline{F}$, έπεται ότι υπάρχει $(\tau, y) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times X$ με $(\tau, y) \in W \cap F$.

Εφ' όσον $(\tau, y) \in F$, ισχύει ότι $y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_{\tau|_n}$.

Αφού $(\tau, y) \in W$, θα είναι $\tau \in U_{\sigma|_{n_0}}$ και $y \in G$ κι άρα υπάρχει $k_0 \in \{1, \ldots, n_0\}$ ώστε $y \in F_{\sigma|_{k_0}}{}^{\mathsf{c}}$. Όμως, από το γεγονός πως $\tau \in U_{\sigma|_{n_0}}$ συνεπάγεται ότι $\tau|_{k_0} = \sigma|_{k_0}$, δηλαδή $F_{\tau|_{k_0}}{}^{\mathsf{c}} = F_{\sigma|_{k_0}}{}^{\mathsf{c}}$. Άρα, θα έχουμε ότι $y \in \big(F_{\tau|_{k_0}}\big)^{\mathsf{c}} \cap F_{\tau|_{k_0}}$, άτοπο!

Άρα, το F είναι κλειστό υποσύνολο του χώρου $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times X$.

Θα δείξουμε τώρα ότι $proj_X F = A$. Πράγματι, έστω $x \in proj_X F$. Τότε, υπάρχει $\sigma_0 \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ώστε $(\sigma_0, x) \in F$, άρα $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_{\sigma_0|_n} \subseteq \bigcup_{\sigma \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \bigcap_{n=1}^{\infty} F_{\sigma|_n} = A$ $\Rightarrow x \in A$. Άρα, $proj_X F \subseteq A$.

Έστω $x \in A$. Τότε, υπάρχει $\sigma_0 \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ώστε $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_{\sigma_0|_n} \Rightarrow (\sigma_0, x) \in F \Rightarrow x \in proj_X F$.

Τελικώς, είναι $proj_X F = A$ κι άρα δείξαμε πως $\mathcal{A}\big(\mathcal{F}(X)\big) \subseteq \Sigma_1^1(X)$.

Έστω A ένα αναλυτικό υποσύνολο του X, δηλαδή $A \in \Sigma_1^1(X)$. Τότε, υπάρχει συνάρτηση $f : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to X$ συνεχής με $f\big(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\big) = A$. Θα δείξουμε ότι:

$$A = \bigcup_{\sigma \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{f\big(U_{\sigma|_n}\big)}$$

το οποίο συνεπάγεται άμεσα πως $A \in \mathcal{A}\big(\mathcal{F}(X)\big)$. Έστω $x \in A$. Τότε, υπάρχει $\sigma_0 \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ώστε $f(\sigma_0) = x$. Αφού $\sigma_0 \in U_{\sigma_0|_n}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έχουμε ότι $f(\sigma_0) = x \in f\big(U_{\sigma_0|_n}\big)$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή:

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} f\big(U_{\sigma_0|_n}\big) \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{f\big(U_{\sigma_0|_n}\big)} \subseteq \bigcup_{\sigma \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{f\big(U_{\sigma_0|_n}\big)}$$

κι άρα $x \in \bigcup_{\sigma \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{f\big(U_{\sigma|_n}\big)}$

Έστω, τώρα, $x \in \bigcup_{\sigma \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{f\big(U_{\sigma|_n}\big)}$. Τότε, υπάρχει $\sigma_0 \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ώστε $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{f\big(U_{\sigma_0|_n}\big)}$ κι άρα $x \in \overline{f\big(U_{\sigma_0|_n}\big)}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επιλέγουμε d μία πλήρη, συμβατή μετρική επί του X. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ είναι $S\big(x, \frac{1}{2^n}\big) \cap f\big(U_{\sigma_0|_n}\big) \neq \emptyset \Rightarrow \exists x_n \in X$ με $x_n \in f\big(U_{\sigma_0|_n}\big)$ και $d(x, x_n) < \frac{1}{2^n}$. Επιλέγουμε, επίσης, $\sigma^n \in U_{\sigma_0|_n}$ ώστε $f(\sigma^n) = x_n$.

Τότε, εύκολα βλέπουμε πως $(x_n)_n \to x$ και $(\sigma^n)_n \to \sigma_0$. Αφού η f είναι συνεχής, έπεται πως $\big(f(\sigma^n)\big)_n \to f(\sigma_0)$. Όμως, είναι $\big(f(\sigma^n)\big)_n = (x_n)_n \to x$ κι άρα από την μοναδικότητα του ορίου ισχύει ότι $x = f(\sigma_0)$. Άρα, αφού η f παίρνει τιμές στο A, έχουμε ότι $x \in A$.

Τελικώς, δείξαμε ότι $\Sigma_1^1(X) = \mathcal{A}\big(\mathcal{F}(X)\big)$. $\square$

Σημείωση. *Στην προηγούμενη Πρόταση, χρησιμοποιήσαμε τον συμβολισμό* $\Sigma_1^1(X)$ *για την κλάση των αναλυτικών υποσυνόλων του* X*. Ο συμβολισμός αυτός είθισται να είναι ο συνήθεις συμβολισμός στην διεθνή βιβλιογραφία κι αναφέρεται στην* ***αναλυτική ιεραρχία.*** *Περισσότερες πληροφορίες μπορεί ο αναγνώστης να βρει στα [3], [5].*

3.3 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$-καθολικά Σύνολα

Στην ενότητα αυτή θα δείξουμε ένα από τα πιο σημαντικά αποτελέσματα του Souslin, που αφορά την ύπαρξη αναλυτικών και **όχι** Borel συνόλων. Πιο συγκεκριμένα, θα δείξουμε ότι κάθε υπεραριθμήσιμος Πολωνικός χώρος περιέχει ένα αναλυτικό υποσύνολο το οποίο δεν είναι Borel. Το αποτέλεσμα αυτό έδειξε την αναγκαιότητα ανάπτυξης μιας θεωρίας που θα γενίκευε με ουσιαστικό τρόπο όλες τις " καλές " ιδιότητες των συνόλων Borel.

Παράλληλα, θα γίνει αναφορά σε μία ενδιαφέρουσα κλάση συνόλων, αυτής των $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}-$καθολικών συνόλων, τον ορισμό των οποίων και δίνουμε:

Ορισμός 3.3.1. *Έστω $(X,\mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $\mathcal{C}(X)$ μία οποιαδήποτε κλάση υποσυνόλων του X (π.χ. ανοικτά, κλειστά, αναλυτικά, κ.τ.λ.) Ένα $U\subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\times X$ καλείται $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}-$**καθολικό για την κλάση** $\mathcal{C}$ αν ισχύουν τα ακόλουθα:*

(i) $U\in\mathcal{C}\big(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\times X\big)$

(ii) $\mathcal{C}(X)=\big\{U_y : y\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\big\}$, *όπου για* $y\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ *είναι* $U_y=\{x\in X:(y,x)\in U\}$

Αρχικά, θα εξασφαλίσουμε την ύπαρξη $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}-$καθολικών συνόλων για ορισμένες κλάσεις υποσυνόλων του χώρου Baire $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, μαζί με ορισμένα βοηθητικά Λήμματα που θα χρησιμεύσουν στη συνέχεια.

Λήμμα 3.3.2. *Έστω $(X,\mathcal{T}_X),(Y,\mathcal{T}_Y)$ ομοιομορφικοί τοπολογικοί χώροι. Έστω, επίσης, $U\subseteq\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\times X$ ένα $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}-$καθολικό σύνολο για τα ανοικτά υποσύνολα του X. Τότε, υπάρχει $V\subseteq\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\times Y$ ένα $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}-$καθολικό σύνολο για τα ανοικτά υποσύνολα του Y.*

Απόδειξη. Αφού οι χώροι $(X,\mathcal{T}_X)$ και $(Y,\mathcal{T}_Y)$ είναι ομοιομορφικοί, υπάρχει $f:X\to Y$ 1-1, επί, συνεχής κι ανοικτή συνάρτηση. Ορίζουμε:

$$g:\big(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\times X\big)\to\big(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\times Y\big) \text{ με}$$
$$g\big((y,x)\big)=\big(y,f(x)\big)$$

και θα δείξουμε πως το σύνολο $V=g(U)$ είναι $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}-$καθολικό για τα ανοικτά υποσύνολα του Y.

Αρχικά, θα δείξουμε πως το $g(U)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του χώρου $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\times Y$. Αφού το U είναι $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}-$καθολικό για τα ανοικτά υποσύνολα του X, έπεται πως το U είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\times X$. Συνεπώς, το U γράφεται ως:

$$U=\bigcup_{i\in I}\big(G_i\times W_i\big)$$

όπου τα σύνολα G_i, W_i είναι ανοικτά υποσύνολα των $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ και X αντίστοιχα, για κάθε $i \in I$. Έστω $i \in I$. Αρκεί να δείξουμε πως το σύνολο $g\big(G_i \times W_i\big)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times Y$. Πράγματι, θα δείξουμε ότι:

$$g\big(G_i \times W_i\big) = G_i \times f(W_i)$$

το οποίο θα μας δώσει το ζητούμενο (αφού η f είναι ανοικτή.)

Έστω $(y,z) \in g\big(G_i \times W_i\big)$. Τότε, υπάρχει $x \in X$ ώστε $g\big((y,x)\big) = \big(y, f(x)\big) = (y,z)$. Άρα, $y \in G_i$ και $x \in W_i \Rightarrow y \in G_i$ και $z = f(x) \in f(W_i)$ $\Rightarrow (y,z) \in G_i \times f(W_i)$.

Έστω $(y,z) \in G_i \times f(W_i)$. Τότε, $y \in G_i$ και $z \in f(W_i)$, άρα υπάρχει $x \in X$ ώστε $z = f(x)$. Αυτό συνεπάγεται ότι $(y,x) \in G_i \times W_i$, δηλαδή $g\big((y,x)\big) = (y,z) \in g\big(G_i \times W_i\big)$.

Άρα, δείξαμε πως το $g(U)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times Y$. (Ουσιαστικά δείξαμε ότι η g είναι ανοικτή απεικόνιση.)

Θα δείξουμε τώρα ότι $\mathcal{T}_Y = \{V_y : y \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$. Έστω $W \in \mathcal{T}_Y$. Τότε, $f^{-1}(W) \in \mathcal{T}_X$ (αφού η f είναι συνεχής) κι άρα υπάρχει $y_0 \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ώστε $f^{-1}(W) = U_{y_0}$. Θα δείξουμε ότι $W = V_{y_0} = \big(g(U)\big)_{y_0}$.

Έστω $z \in W$. Τότε, υπάρχει $x \in X$ με $f(x) = z$ κι άρα $x \in f^{-1}(W)$ $\Rightarrow x \in U_{y_0} \Rightarrow (y_0, x) \in U \Rightarrow g\big((y_0,x)\big) \in g(U) \Rightarrow (y_0,z) \in g(U)$ $\Rightarrow z \in \big(g(U)\big)_{y_0}$.

Έστω $z \in \big(g(U)\big)_{y_0}$. Τότε, $(y_0,z) \in g(U)$ κι άρα υπάρχει $x \in X$ ώστε $g\big((y_0,x)\big) = (y_0,z)$. Συνεπώς ,έχουμε ότι $(y_0,x) \in U \Rightarrow x \in U_{y_0} \Rightarrow x \in f^{-1}(W) \Rightarrow z = f(x) \in W$.

Μέχρι στιγμής έχουμε δείξει πως $\mathcal{T}_Y \subseteq \{V_y : y \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$. Έστω $y_0 \in Y$. Θα δείξουμε πως $V_{y_0} = \big(g(U)\big)_{y_0} = f\big(U_{y_0}\big)$, το οποίο είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του Y (αφού η f ανοικτή και $\mathcal{T}_X = \{U_y : y \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$.)

Έστω $z \in \big(g(U)\big)_{y_0}$. Τότε, $(y_0,z) \in g(U)$ κι άρα υπάρχει $x \in X$ ώστε $f(x) = z$, δηλαδή $(y_0,x) \in U \Rightarrow x \in U_{y_0} \Rightarrow z = f(x) \in f\big(U_{y_0}\big)$.

Αν, τώρα, $z \in f\big(U_{y_0}\big)$, τότε υπάρχει $x \in X$ με $f(x) = z$. Άρα, $x \in U_{y_0}$ $\Rightarrow (y_0,x) \in U \Rightarrow g\big((y_0,x)\big) = (y_0,z) \in g(U) \Rightarrow z \in \big(g(U)\big)_{y_0}$.

Τελικώς, είναι $\mathcal{T}_Y = \{V_y : y \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$ κι αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. $\square$

Λήμμα 3.3.3. *Έστω $(X,\mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $U \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times X$ ένα $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}-$καθολικό σύνολο για τα ανοικτά υποσύνολα του X. Τότε, το σύνολο $U^c = \big(\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times X\big) \setminus U$ είναι $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}-$καθολικό για τα κλειστά υποσύνολα του X.*

Απόδειξη. Κατ' αρχάς, αφού είναι άμεσο πως το U^c είναι κλειστό υποσύνολο του χώρου $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times X$.

Θα δείξουμε ότι $\{F \subseteq X : F \text{ κλειστό}\} = \{\left(U^{\mathsf{c}}\right)_y : y \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$. Έστω $F \subseteq X$ κλειστό. Τότε, το $X \setminus F$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X κι άρα υπάρχει $y_0 \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ώστε $X \setminus F = U_{y_0}$. Θα δείξουμε ότι $F = \left(U^{\mathsf{c}}\right)_{y_0}$.

Έστω $z \in F$. Τότε $(y_0, z) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times X$. Αν $(y_0, z) \in U$, θα είναι $z \in U_{y_0}$ κι άρα $z \in X \setminus F$, το οποίο είναι προφανώς άτοπο. Συνεπώς $(y_0, z) \in U^{\mathsf{c}}$, δηλαδή $z \in \left(U^{\mathsf{c}}\right)_{y_0}$.

Έστω $z \in \left(U^{\mathsf{c}}\right)_{y_0}$. Τότε, $(y_0, z) \in U^{\mathsf{c}}$. Αν $z \in X \setminus F$, θα είναι $z \in U_{y_0}$ $\Rightarrow (y_0, z) \in U$, άτοπο!. Άρα $z \in F$.

Μόλις δείξαμε ότι $\{F \subseteq X : F \text{ κλειστό}\} \subseteq \{\left(U^{\mathsf{c}}\right)_y : y \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$. Έστω $y_0 \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Θα δείξουμε ότι $\left(U^{\mathsf{c}}\right)_{y_0} = \left(U_{y_0}\right)^{\mathsf{c}} = X \setminus U_{y_0}$, το οποίο θα συνεπάγεται πως το $\left(U^{\mathsf{c}}\right)_{y_0}$ είναι κλειστό υποσύνολο του X (αφού $U_{y_0} \in \mathcal{T}$.)

Έστω $z \in \left(U^{\mathsf{c}}\right)_{y_0}$. Τότε, $(y_0, z) \in U^{\mathsf{c}}$. Αν $z \in U_{y_0}$, θα είχαμε ότι $(y_0, z) \in U$, άτοπο!. Άρα, $z \in X \setminus U_{y_0}$.

Έστω $z \in X \setminus U_{y_0}$. Τότε, $x \notin U_{y_0} \Rightarrow (y_0, z) \notin U \Rightarrow (y_0, z) \in U^{\mathsf{c}} \Rightarrow z \in \left(U^{\mathsf{c}}\right)_{y_0}$.

Τελικώς, δείξαμε πως $\{F \subseteq X : F \text{ κλειστό}\} = \{\left(U^{\mathsf{c}}\right)_y : y \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$ κι άρα έχουμε το ζητούμενο. $\square$

Πρόταση 3.3.4. *Υπάρχει $V \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, ένα $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}-$καθολικό σύνολο για τα ανοικτά υποσύνολα του χώρου Baire $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.*

Απόδειξη. Ως γνωστόν, το σύνολο $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ είναι αριθμήσιμο, συνεπώς μπορούμε να γράψουμε ότι $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}} = (s_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Θέτουμε:

$$V = \left\{(y, x) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : x \in \bigcup \{U_{s_k} : y(k) = 1\}\right\}$$

και θα δείξουμε πως το V είναι το ζητούμενο $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}-$καθολικό σύνολο για τα ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Για να δούμε πως το V είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, έστω $(y, x) \in V$. Αρκεί να βρούμε G ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ώστε $(y, x) \in G$ και $G \subseteq V$. Αφού $(y, x) \in V$, υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε:

(i) $y(k_0) = 1$

(ii) $x \in U_{s_{k_0}}$

Θέτουμε $G = \left(U_{y|_{k_0}}\right) \times \left(U_{s_{k_0}}\right)$ και ισχυριζόμαστε πως $G \subseteq V$. (Είναι άμεσο πως $(y, x) \in G$ και πως το G είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.)

Έστω $(z_1, z_2) \in G$. Τότε, $z_1 \in U_{y|_{k_0}}$ και $z_2 \in U_{s_{k_0}}$. Αφού $z_1 \in U_{y|_{k_0}}$ και $y(k_0) = 1$, έπεται πως $z_1(k_0) = 1$ κι αφου $z_2 \in U_{s_{k_0}}$, τότε (εξ' ορισμού του συνόλου V) $(z_1, z_2) \in V$. Συνεπώς, το V είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Μένει να δείξουμε ότι $\mathcal{T}_{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}} = \{V_y : y \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$. Έστω $y_0 \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Θέτουμε:

$$K = \{n \in \mathbb{N} : y_0(n) = 1\}$$

το οποίο είναι προφανώς ένα αριθμήσιμο σύνολο. Αν $K = \emptyset$, τότε $V_{y_0} = \emptyset \in \mathcal{T}_{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}}$.

Έστω πως $K \neq \emptyset$. Αν $x \in V_{y_0}$, τότε $(y_0, x) \in V$ κι άρα υπάρχει $n_x \in K$ ώστε $y_0(n_x) = 1$ και $x \in U_{s_{n_x}}$. Θα δείξουμε ότι $U_{s_{n_x}} \subseteq V_{y_0}$. Πράγματι, έστω $z \in U_{s_{n_x}}$. Τότε, $(y_0, z) \in V$ (εξ' ορισμού του συνόλου V) κι άρα $z \in V_{y_0}$. Άρα, είναι:

$$V_{y_0} = \bigcup_{x \in V_{y_0}} U_{s_{n_x}}$$

και συνεπώς $V_{y_0} \in \mathcal{T}_{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}}$.

Έστω, τώρα $U \in \mathcal{T}_{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}}$. Αφού η οικογένεια $\{U_s : s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}\}$ αποτελεί βάση περιοχών του $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, υπάρχει $D \subseteq \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ ώστε:

$$U = \bigcup_{s \in D} U_s = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} U_{s_{n_k}}$$

όπου γράψαμε το D ως μία υπακολουθία της αρχικής ακολουθίας $(s_n)_n = \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$, δηλαδή $D = (s_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$. Για $n \in \mathbb{N}$, θέτουμε:

$$y_n = \begin{cases} 2, & \text{αν } n \neq n_k \text{ για κάθε } k \in \mathbb{N} \\ 1, & \text{αν } n = n_k \text{ για κάποιο } k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Τότε, $y_0 = (y_n)_n \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Θα δείξουμε ότι $U = V_{y_0}$. Έστω $x \in U$. Τότε, $x \in U_{s_{n_{k_0}}}$ για κάποιο $k_0 \in \mathbb{N}$. Όμως, είναι $y_0(n_{k_0}) = 1$ κι άρα $(y_0, x) \in V$ $\Rightarrow x \in V_{y_0}$.

Έστω, τώρα, $x \in V_{y_0}$. Τότε, $(y_0, x) \in V$ κι άρα $x \in U_{s_{n_{k_0}}}$ για κάποιο $k_0 \in \mathbb{N}$. Συνεπώς $x \in U_{s_{n_{k_0}}} \subseteq U \Rightarrow x \in U$.

Τελικώς, είναι $\mathcal{T}_{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}} = \{V_y : y \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$ κι άρα έχουμε το ζητούμενο. $\square$

Είμαστε τώρα σε θέση να αποδείξουμε την ύπαρξη ενός $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}-$καθολικού συνόλου για τα **αναλυτικά** υποσύνολα του χώρου Baire.

Πρόταση 3.3.5. *Υπάρχει $W \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, ένα $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}-$καθολικό σύνολο για τα αναλυτικά υποσύνολα του χώρου Baire $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.*

Απόδειξη. Σύμφωνα με την Πρόταση 3.3.4, υπάρχει V ένα $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}-$καθολικό σύνολο για τα ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Αφού οι χώροι $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ και $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ είναι ομοιομορφικοί, από το Λήμμα 3.3.2 υπάρχει V' ένα $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ καθολικό σύνολο για τα ανοικτά υποσύνολα του χώρου $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Άρα, από το Λήμμα 3.3.3 το συμπλήρωμά του, έστω F, θα είναι $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}-$καθολικό για τα κλειστά υποσύνολα του $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. (Είναι $F \subseteq \left(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right)^{(3)}$ κλειστό.) Θέτουμε:

$$W = \left\{(y,x) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \exists z \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \quad \text{ώστε} \quad (y,x,z) \in F\right\}$$

και ισχυριζόμαστε πως το W είναι το ζητούμενο $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}-$καθολικό σύνολο για τα αναλυτικά υποσύνολα του $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Θα δείξουμε αρχικά πως το W είναι αναλυτικό υποσύνολο του χώρου $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Εφ' όσον ο χώρος $\left(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right)^{(3)}$ είναι Πολωνικός και το F κλειστό υποσύνολό του, το F είναι Πολωνικό υποσύνολο του $\left(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right)^{(3)}$ και, συνεπώς, από το Θεώρημα 2.3.1 το F είναι αναλυτικό υποσύνολο του $\left(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right)^{(3)}$. Επίσης, εύκολα βλέπουμε πως $W = proj_{\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} F$ κι αφού οι προβολές είναι συνεχείς συναρτήσεις, από την Πρόταση 2.3.6 έπεται πως το W είναι αναλυτικό υποσύνολο του $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Θα δείξουμε τώρα ότι $\Sigma_1^1\left(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right) = \left\{W_y : y \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right\}$, όπου υπενθυμίζουμε πως με $\Sigma_1^1\left(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right)$ συμβολίζουμε την κλάση των αναλυτικών υποσυνόλων του $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Έστω $y_0 \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Θα δείξουμε πως το σύνολο $W_{y_0} = \{x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : (y_0, x) \in W\}$ είναι αναλυτικό υποσύνολο του $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Θέτουμε:

$$F'_{y_0} = \left\{(y_0, x, z) \in \left(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right)^{(3)} : (y_0, x, z) \in F\right\}$$

Κατ' αρχάς, εύκολα βλέπουμε πως $W_{y_0} = \emptyset \Leftrightarrow F'_{y_0} = \emptyset$. Θα δείξουμε πως το F'_{y_0} είναι κλειστό υποσύνολο του $\left(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right)^{(3)}$. Πράγματι, έστω (z_1, z_2, z_3) οριακό σημείο του F'_{y_0}. Τότε, υπάρχει ακολουθία $(y_n, x_n, z_n)_n \subseteq F'_{y_0}$ ώστε $(y_n, x_n, z_n)_n \to (z_1, z_2, z_3)$. Τότε, παρατηρούμε τα εξής:

(α) Αφού $(y_n, x_n, z_n)_n \subseteq F'_{y_0}$, έπεται πως $y_n = y_0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συνεπώς, αφού $(y_n)_n \to z_1$, έχουμε ότι $z_1 = y_0$.

(β) Είναι $F'_{y_0} \subseteq F$ κι άρα θα είναι $(y_n, x_n, z_n)_n \subseteq F$. Αφού το F είναι κλειστό και το (z_1, z_2, z_3) είναι οριακό σημείο του F, έπεται ότι $(z_1, z_2, z_3) \in F$.

Από τα (α) και (β) είναι άμεσο πως το F'_{y_0} είναι κλειστό υποσύνολο του $\left(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right)^{(3)}$ κι άρα, όπως πριν, είναι αναλυτικό υποσύνολο του χώρου αυτού. Θα δείξουμε ότι $proj_{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}} F'_{y_0} = W_{y_0}$, από το οποίο συνεπάγεται πως το W_{y_0} είναι αναλυτικό υποσύνολο του $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (ως συνεχής εικόνα αναλυτικού συνόλου.)

Έστω $x \in W_{y_0}$. Τότε, $(y_0, x) \in W$ κι άρα υπάρχει $z \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ώστε $(y_0, x, z) \in F$ $\Rightarrow (y_0, x, z) \in F'_{y_0} \Rightarrow x \in proj_{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}} F'_{y_0}$.

Έστω, τώρα, $x \in proj_{\mathbb{N}^\mathbb{N}} {F'}_{y_0}$. Τότε, υπάρχουν $y, z \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$ ώστε $(y, x, z) \in {F'}_{y_0}$. Αυτό σημαίνει πως $y = y_0$ και $(y, x, z) \in F \Rightarrow (y_0, x, z) \in F \Rightarrow (y_0, x) \in W$ $\Rightarrow x \in W_{y_0}$.

Μόλις δείξαμε ότι $\{W_y : y \in \mathbb{N}^\mathbb{N}\} \subseteq \Sigma_1^1(\mathbb{N}^\mathbb{N})$. Έστω $A \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N}$ αναλυτικό. Τότε, από την Πρόταση 3.2.3, υπάρχει $K \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N} \times \mathbb{N}^\mathbb{N}$ κλειστό, ώστε $A = proj_{\mathbb{N}^\mathbb{N}} K$. Αφού το K είναι κλειστό, υπάρχει $y_0 \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$ ώστε $K = F_{y_0}$. Θα δείξουμε ότι $A = W_{y_0}$, γεγονός το οποίο θα ολοκληρώσει την απόδειξη.

Έστω $x \in A$. Τότε, αφού $A = proj_{\mathbb{N}^\mathbb{N}} K$, υπάρχει $z \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$ ώστε $(x, z) \in K$ $\Rightarrow (x, z) \in F_{y_0} \Rightarrow (y_0, x, z) \in F \Rightarrow (y_0, x) \in W \Rightarrow x \in W_{y_0}$. Άρα, είναι $A \subseteq W_{y_0}$.

Έστω $x \in W_{y_0}$. Τότε, $(y_0, x) \in W$ κι άρα υπάρχει $z \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$ ώστε $(y_0, x, z) \in F$ $\Rightarrow (x, z) \in F_{y_0} \Rightarrow (x, z) \in K \Rightarrow x \in proj_{\mathbb{N}^\mathbb{N}} K \Rightarrow x \in A$.

Τελικώς, είναι $A = W_{y_0}$ κι άρα έχουμε το ζητούμενο. □

Φτάνουμε, πλέον, στο κύριο αποτέλεσμα της ενότητας αυτής, που αφορά την ύπαρξη ενός αναλυτικού και όχι Borel υποσυνόλου του $\mathbb{N}^\mathbb{N}$. Για του λόγου το αληθές, έχουμε το ακόλουθο:

Θεώρημα 3.3.6. *Υπάρχει $A \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N}$ αναλυτικό κι όχι Borel.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τα σύνολα F, W όπως αυτά ορίστηκαν στην προηγούμενη Πρόταση, δηλαδή:

$F \subseteq (\mathbb{N}^\mathbb{N})^{(3)}, \mathbb{N}^\mathbb{N}-$καθολικό για τα κλειστά υποσύνολα του χώρου $\mathbb{N}^\mathbb{N} \times \mathbb{N}^\mathbb{N}$
$W = \{(y, x) \in \mathbb{N}^\mathbb{N} \times \mathbb{N}^\mathbb{N} : \exists z \in \mathbb{N}^\mathbb{N} \quad \text{ώστε} \quad (y, x, z) \in F\}, \mathbb{N}^\mathbb{N}-$καθολικό για τα αναλυτικά υποσύνολα του $\mathbb{N}^\mathbb{N}$.

Θέτουμε:

$$A = \{x \in \mathbb{N}^\mathbb{N} : (x, x) \in W\}$$

και θα δείξουμε πως το A είναι ένα αναλυτικό υποσύνολο του χώρου Baire $\mathbb{N}^\mathbb{N}$, το οποίο δεν είναι Borel.

<u>Το A είναι αναλυτικό υποσύνολο του $\mathbb{N}^\mathbb{N}$</u>

Θέτουμε:

$$F^{xx} = \left\{(x, x, z) \in (\mathbb{N}^\mathbb{N})^{(3)} : (x, x, z) \in F\right\}$$

Θα δείξουμε πως το F^{xx} είναι κλειστό υποσύνολο του $(\mathbb{N}^\mathbb{N})^{(3)}$ και πως $A = proj_{\mathbb{N}^\mathbb{N}} F^{xx}$. Αυτό θα μας δώσει το ζητούμενο, δηλαδή πως το A είναι αναλυτικό υποσύνολο του $\mathbb{N}^\mathbb{N}$.

Για να δούμε πως το F^{xx} είναι κλειστό, έστω (z_1, z_2, z_3) οριακό σημείο του F^{xx}. Τότε, υπάρχει ακολουθία $(y_n, x_n, z_n)_n \subseteq F^{xx}$ ώστε $(y_n, x_n, z_n)_n \to (z_1, z_2, z_3)$. Παρατηρούμε τα εξής:

(α) Αφού $(y_n, x_n, z_n)_n \subseteq F^{xx}$, έπεται πως $y_n = x_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(β) Επειδή $(y_n)_n \to z_1$ και $(x_n)_n \to z_2$, λόγω του (α) θα είναι $z_1 = z_2$.

(γ) Είναι $F^{xx} \subseteq F$, άρα έχουμε πως $(y_n, x_n, z_n)_n \subseteq F$ με:

$$(y_n, x_n, z_n)_n \to (z_1, z_2, z_3).$$

Εφ' όσον το F είναι κλειστό, έπεται πως $(z_1, z_2, z_3) \in F$.

Από τα (α), (β) και (γ) είναι άμεσο πως το F^{xx} είναι κλειστό υποσύνολο του $\left(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right)^{(3)}$.

Θα δείξουμε ότι $A = proj_{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}} F^{xx}$. Έστω $x \in A$. Τότε, $(x, x) \in W$ κι άρα υπάρχει $z \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ώστε $(x, x, z) \in F \Rightarrow (x, x, z) \in F^{xx} \Rightarrow x \in proj_{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}} F^{xx}$.

Έστω $x \in proj_{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}} F^{xx}$. Τότε, υπάρχει $z \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ώστε $(x, x, z) \in F^{xx} \Rightarrow (x, x, z) \in F \Rightarrow (x, x) \in W \Rightarrow x \in A$.

Συνεπώς, είναι $A = proj_{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}} F^{xx}$ κι άρα το A είναι αναλυτικό υποσύνολο του $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Το A δεν είναι Borel υποσύνολο του $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$

Έστω, προς εις άτοπον απαγωγή, πως το A είναι Borel υποσύνολο του $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Τότε, το σύνολο A^c είναι επίσης Borel κι άρα αναλυτικό. Άρα, υπάρχει $y_o \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ώστε $A^c = W_{y_0}$.

Κατ' αρχάς, προφανώς είτε θα ισχύει ότι $(y_0, y_0) \in W$ ή ότι $(y_0, y_0) \notin W$. Αν $(y_0, y_0) \in W$, τότε $y_0 \notin A^c$ (αφού $A^c = \{x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : (x, x) \notin W\}$.) Όμως, αφού υποθέσαμε πως $(y_0, y_0) \in W$, έπεται πως $y_0 \in W_{y_0}$ κι άρα $y_0 \in A^c$ ($A^c = W_{y_0}$), άτοπο!

Αν, τώρα, $(y_0, y_0) \notin W$, τότε $y_0 \in A^c$. Όμως $(y_0, y_0) \notin W \Rightarrow (y_0, y_0) \notin A^c$, άτοπο!

Σε κάθε περίπτωση καταλήγουμε σε άτοπο, άρα η αρχική μας υπόθεση πως το A είναι Borel ήταν λανθασμένη. Έχουμε, λοιπόν, το ζητούμενο. $\square$

Το παραπάνω πολύ σημαντικό Θεώρημα μπορεί σχετικά εύκολα να γενικευτεί, με βάση όλα όσα είδαμε στο δεύτερο Κεφάλαιο, για κάθε υπεραριθμήσιμο Πολωνικό χώρο.

Θεώρημα 3.3.7. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ υπεραριθμήσιμος Πολωνικός χώρος. Τότε, υπάρχει αναλυτικό κι όχι Borel υποσύνολο του X.*

Απόδειξη. Εφ' όσον ο χώρος $(X, \mathcal{T})$ είναι υπεραριθμήσιμος Πολωνικός, από το Πόρισμα 2.4.17, υπάρχει ένα $N \subseteq X$ ομοιομορφικό με τον χώρο Baire $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, δηλαδή υπάρχει $f : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to N$ 1-1, επί, συνεχής κι ανοικτή απεικόνιση. Όπως είδαμε στο Θεώρημα 3.3.6, υπάρχει $A \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ αναλυτικό κι όχι Borel. Θα δείξουμε πως το σύνολο $f(A)$ είναι ένα αναλυτικό κι όχι Borel υποσύνολο του X. (Είναι $f(A) \subseteq f\big(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\big) = N$.)

Είναι άμεσο από την Πρόταση 2.3.6 πως το $f(A)$ είναι αναλυτικό υποσύνολο του X. Θα δείξουμε για αρχή πως το $f(A)$ δεν είναι Borel υποσύνολο του χώρου $(N, \mathcal{T}_N)$. Πράγματι, αν υποθέσουμε πως το $f(A)$ είναι Borel , τότε το σύνολο $f^{-1}\big(f(A)\big) = A$ θα είναι Borel υποσύνολο του $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (αφού οι συνεχείς συναρτήσεις είναι Borel-μετρήσιμες.) Αυτό είναι, όμως, εξ' υποθέσεως άτοπο, συνεπώς το $f(A)$ δεν είναι Borel υποσύνολο του $(N, \mathcal{T}_N)$.

Έστω, τώρα, πως $f(A) \in \mathcal{B}(X, \mathcal{T})$, δη·αδή πως το $f(A)$ είναι Borel υποσύνολο του X. Τότε, εξ' ορισμού της σχετικής Borel σ-άλεβρας στο N, έπεται πως το σύνολο $f(A) \cap N \in \mathcal{B}(N, \mathcal{T}_N)$. Όμως $f(A) \cap N = f(A)$ (αφού $f(A) \subseteq N$) κι άρα καταλήγουμε πως $f(A) \in \mathcal{B}(N, \mathcal{T}_N)$, το οποίο είναι επίσης άτοπο.

Συνεπώς, το σύνολο $f(A)$ είναι ένα αναλυτικό κι όχι Borel υποσύνολο του X, συνεπώς έχουμε το ζητούμενο. $\square$

3.4 Μετρησιμότητα

Στρέφουμε την προσοχή μας στο σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ και θα αποδείξουμε μία ιδιαίτερα σημαντική ιδιότητα κανονικότητας των αναλυτικών υποσυνόλων του: Κάθε αναλυτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ είναι Lebesgue μετρήσιμο.

Η απόδειξη θα βασιστεί σε μεγάλο βαθμό στην χρήση της πράξης Souslin κι ως εκ τούτου στο συνδυαστικό εργαλείο των δέντρων του χώρου Baire $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Θα διατυπώσουμε αρχικά ένα βοηθητικό Λήμμα που μας επιτρέπει τον εγκλεισμό αυθαίρετων υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ από " αρκούντως μικρά " μετρήσιμα υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Σημειώνουμε πως στα επόμενα με λ θα συμβολίζουμε το μέτρο Lebesgue στο $\mathbb{R}$ και με λ^* το εξωτερικό μέτρο Lebesgue στο $\mathbb{R}$.

Λήμμα 3.4.1. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$. Τότε, υπάρχει $B \subseteq \mathbb{R}$ ώστε να ικανοποιούνται τα παρακάτω:*

(i) $A \subseteq B$ και το B είναι Lebesgue μετρήσιμο.

(ii) $\lambda^*(A) = \lambda(B)$.

(iii) Για κάθε $B' \subseteq \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμο ώστε $A \subseteq B' \subseteq B$, ισχύει ότι $\lambda(B \setminus B') = 0$.

Απόδειξη. Αρχικά, θα εξετάσουμε την περίπτωση που είναι $\lambda^*(A) < +\infty$. Ως γνωστόν, είναι:

$$\lambda^*(A) = \inf\{\lambda(U) : A \subseteq U \quad \text{και το } U \quad \text{είναι ανοικτό υποσύνολο του } \mathbb{R}\}$$

(Τα ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}$ είναι Lebesgue μετρήσιμα.) Από τον ορισμό του $infimum$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει U_n ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ ώστε $\lambda(U_n) < \lambda^*(A) + \dfrac{1}{n}$. Θέτοντας:

$$B = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$$

εύκολα βλέπουμε πως το B είναι ένα Lebesgue μετρήσιμο σύνολο με $A \subseteq B$ και $\lambda^*(A) = \lambda(B)$.

Έστω $B' \subseteq \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμο με $A \subseteq B' \subseteq B$. Τότε, από την μονοτονία του εξωτερικού μέτρου Lebesgue, έχουμε ότι:

$$\lambda^*(A) \leqslant \lambda(B') \leqslant \lambda(B).$$

Όμως, εφ' όσον είναι $\lambda^*(A) = \lambda(B)$, άμεσα έπεται πως $\lambda(B') = \lambda(B) = \lambda^*(A)$. Τώρα, αφού είναι $B' \subseteq B$ και $B = \big(B \backslash B'\big) \cup \big(B \cap B'\big)$ με $\big(B \backslash B'\big) \cap \big(B \cap B'\big) = \emptyset$, έχουμε ότι:

$$\lambda(B) = \lambda(B \setminus B') + \lambda(B \cap B') = \lambda(B \setminus B') + \lambda(B') = \lambda(B \setminus B') + \lambda(B)$$

από όπου άμεσα προκύπτει πως $\lambda(B \setminus B') = 0$.

Θα εξετάσουμε τώρα την περίπτωση που είναι $\lambda^*(A) = +\infty$. Για κάθε $m \in \mathbb{Z}$, θέτουμε:

$$A_m = A \cap \big([m, m+1)\big)$$

Τότε, είναι $\lambda^*(A_m) \leqslant 1$ για κάθε $m \in \mathbb{Z}$. Συνεπώς, όπως πριν μπορούμε να επιλέξουμε μία ακολουθία Lebesgue μετρήσιμων συνόλων $(B_m)_{m \in \mathbb{Z}}$ με $A_m \subseteq B_m, \lambda^*(A_m) = \lambda(B_m)$ για κάθε $m \in \mathbb{Z}$ κι αν υπάρχει $C \subseteq \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμο με $A \subseteq C \subseteq B_m$ για κάποιο $m \in \mathbb{Z}$, τότε είναι $\lambda(B_m \setminus C) = 0$. Για κάθε $m \in \mathbb{Z}$, θέτουμε:

$$B'_m = B_m \cap \big([m, m+1)\big)$$

Τότε, για κάθε $m \in \mathbb{Z}$ το σύνολο B'_m είναι Lebesgue μετρήσιμο και ισχύει $A_m \subseteq B'_m \subseteq B_m$. Έστω $C \subseteq \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμο με $A_m \subseteq C \subseteq B'_m$ για κάποιο $m \in \mathbb{Z}$. Θα δείξουμε ότι $\lambda(B'_m \setminus C) = 0$. Πράγματι, αφού είναι $A_m \subseteq C \subseteq B'_m \subseteq B_m$, έχουμε ότι $\lambda(B_m \setminus C) = 0$. Όμως, είναι άμεσο πως $\big(B'_m \setminus C\big) \subseteq \big(B_m \setminus C\big)$ κι άρα $\lambda(B'_m \setminus C) = 0$.

Θέτουμε:

$$B = \bigcup_{m\in\mathbb{Z}} B'_m$$

και θα δείξουμε πως είναι το ζητούμενο σύνολο. Κατ΄ αρχάς, είναι άμεσο πως το B είναι Lebesgue μετρήσιμο. Επίσης, είναι:

$$A = \bigcup_{m\in\mathbb{Z}} A_m \subseteq \bigcup_{m\in\mathbb{Z}} B'_m = B$$

Συνεπώς, $\lambda^*(A) \leqslant \lambda(B)$. Όμως, είναι $\lambda^*(A) = +\infty$, άρα βλέπουμε πως $\lambda^*(A) = +\infty = \lambda(B)$.

Έστω, τελικώς, $G \subseteq \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμο με $A \subseteq G \subseteq B$. Θα δείξουμε ότι $\lambda(B \setminus G) = 0$. Για κάθε $m \in \mathbb{Z}$, θέτουμε:

$$G_m = G \cap \big([m, m+1)\big)$$

Προφανώς είναι $G = \bigcup_{m\in\mathbb{Z}} G_m$ και το σύνολο G_m είναι Lebesque μετρήσιμο για κάθε $m \in \mathbb{Z}$. Θα δείξουμε ότι είναι $A_m \subseteq G_m \subseteq B'_m$, για κάθε $m \in \mathbb{Z}$.

Έστω $m \in \mathbb{Z}$ και $x \in A_m$. Τότε, $x \in A$ και $x \in [m, m+1) \Rightarrow x \in G$ και $x \in [m, m+1) \Rightarrow x \in G_m$. Άρα, $A_m \subseteq G_m$.

Έστω, τώρα, $x \in G_m$. Τότε, $x \in G$ και $x \in [m, m+1) \Rightarrow x \in B$ και $x \in [m, m+1)$. Από τον ορισμό του B, υπάρχει $n \in \mathbb{Z}$ ώστε $x \in B'_n$. Θα δείξουμε ότι αναγκαστικά θα ισχύει πως $m = n$. Αν όχι, έπεται πως $x \in B'_n \Rightarrow x \in B_n \cap \big([n, n+1)\big)$, το οποίο είναι άτοπο, εφ΄ όσον καταλήξαμε πως $x \in [m, m+1) \cap [n, n+1)$ με $n \neq m$. Συνεπώς, έχουμε πως $x \in B'_m$, δηλαδή $G_m \subseteq B'_m$.

Αφού είναι $A_m \subseteq G_m \subseteq B'_m$, έπεται ότι $\lambda(B'_m \setminus G_m) = 0$ για κάθε $m \in \mathbb{Z}$. Εύκολα βλέπουμε ότι:

$$B \setminus G = \Big(\bigcup_{m\in\mathbb{Z}} B'_m\Big) \setminus \Big(\bigcup_{m\in\mathbb{Z}} G_m\Big) \subseteq \bigcup_{m\in\mathbb{Z}} \Big(B'_m \setminus G_m\Big)$$

συνεπώς, είναι:

$$\lambda\big(B \setminus G\big) \leqslant \lambda\big(\bigcup_{m\in\mathbb{Z}} (B'_m \setminus G_m)\big) \leqslant \sum_{m\in\mathbb{Z}} \lambda\big(B'_m \setminus G_m\big) = 0$$

Άρα, καταλήγουμε πως είναι $\lambda\big(B \setminus G\big) = 0$. □

Παρατήρηση 3.4.2. *Στο (iii) του παραπάνω Λήμματος, παρατηρούμε πως αρκέι να ισχύει η υπόθεση πως $A \subseteq B'$ ώστε να έχουμε $\lambda(B \setminus B') = 0$. Πράγματι, εύκολα βλέπουμε πως $B \setminus B' = B \setminus \big(B \cap B'\big)$, ενώ αφού είναι $A \subseteq B$ και $A \subseteq B'$, έχουμε $A \subseteq B \cap B' \subseteq B$, με το $B \cap B'$ Lebesgue μετρήσιμο. Άρα, από το (iii) έχουμε πως $\lambda(B \setminus B') = \lambda\big(B \setminus (B \cap B')\big) = 0$.*

Λήμμα 3.4.3. *Έστω LM η κλάση όλων των Lebesgue μετρήσιμων υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ κι έστω $A \in \mathcal{A}(LM)$, δηλαδή $A = \bigcup_{\sigma\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{\sigma|_n}$ με $A_{\sigma|_n} \in LM$, για κάθε $\sigma|_n \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$. Τότε, υπάρχει οικογένεια $\{A'_{\sigma|_n} : \sigma|_n \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}\}$ ώστε να ικανοποιούνται τα παρακάτω:*

(i) $A'_{\sigma|_n} \in LM$, *για κάθε* $\sigma|_n \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$.

(ii) $A'_{\sigma|_{n+1}} \subseteq A'_{\sigma|_n}$, *για κάθε* $\sigma|_{n+1} \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$.

(iii) $A = \bigcup_{\sigma\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \bigcap_{n=1}^{\infty} A'_{\sigma|_n}$.

Απόδειξη. Ο ορισμός της οικογένειας $\{A'_{\sigma|_n} : \sigma|_n \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}\}$ θα πραγματοποιηθεί επαγωγικά. Ορίζουμε $A'_{\emptyset} = A_{\emptyset}$ και για $n \in \mathbb{N}$, ορίζουμε $A'_{\{n\}} = A_{\{n\}} \cap A_{\emptyset}$.

Έστω πως για $k \in \mathbb{N}$, τα σύνολα $A'_{\sigma|_k}$ έχουν οριστεί, για κάθε $\sigma \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Έστω $\sigma \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Ορίζουμε:

$$A'_{\sigma|_{k+1}} = \left(A_{\sigma|_{k+1}}\right) \cap \left(A'_{\sigma|_k}\right)$$

Θα δείξουμε ότι η οικογένεια $\{A'_{\sigma|_n} : \sigma|_n \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}\}$ ικανοποιεί τις ιδιότητες (i), (ii) και (iii). Κατ΄ αρχάς, οι ιδιότητες (i), (ii) είναι άμεσες από τον ορισμό της παραπάνω οικογένειας. Συνεπώς, αρκεί να δείξουμε την ισχύ της ιδιότητας (iii). Θα δείξουμε ότι:

$$\bigcup_{\sigma\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{\sigma|_n} = \bigcup_{\sigma\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \bigcap_{n=1}^{\infty} A'_{\sigma|_n}$$

Εφ΄ όσον $A'_{\sigma|_n} \subseteq A_{\sigma|_n}$ για κάθε $\sigma|_n \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$, μπορούμε εύκολα να δούμε πως είναι:

$$\bigcup_{\sigma\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \bigcap_{n=1}^{\infty} A'_{\sigma|_n} \subseteq \bigcup_{\sigma\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{\sigma|_n}$$

Έστω, λοιπον, $x \in \bigcup_{\sigma\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{\sigma|_n}$. Τότε, υπάρχει $\sigma_0 \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ώστε $x \in A_{\sigma_0|_n}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Θα δείξουμε πως $x \in A'_{\sigma_0|_n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Έστω, προς εις άτοπον απαγωγή, πως υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $x \notin A'_{\sigma_0|_{n_0}}$. Τότε, από τον ορισμό του συνόλου $A'_{\sigma_0|_{n_0}}$, έπεται πως $x \notin \left(A_{\sigma_0|_{n_0}}\right) \cap \left(A'_{\sigma|_{n_0-1}}\right)$. Αφού όμως υποθέσαμε πως $x \in A_{\sigma_0|_{n_0}}$, έχουμε πως $x \notin A'_{\sigma_0|_{n_0-1}}$. Συνεχίζοντας επαγωγικά, καταλήγουμε πως $x \notin A'_{\emptyset} = A_{\emptyset}$, το οποίο είναι άτοπο.

Άρα, $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A'_{\sigma_0|_n} \Rightarrow x \in \bigcup_{\sigma\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \bigcap_{n=1}^{\infty} A'_{\sigma|_n}$ και συνεπώς η απόδειξη ολοκληρώνεται. $\square$

Είμαστε, πλέον, σε θέση να αποδείξουμε το βασικό Θεώρημα αυτής της ενότητας, την σταθερότητα των Lebesgue μετρήσιμων συνόλων υπό την πράξη Souslin.

Θεώρημα 3.4.4. *Έστω LM η κλάση όλων των Lebesgue μετρήσιμων υποσυνόλων του $\mathbb{R}$. Τότε, η κλάση αυτή είναι κλειστή υπό την πράξη Souslin, δηλαδή είναι:*

$$\mathcal{A}\big(LM\big) = LM$$

Απόδειξη. Έστω $A \in LM$. Τότε, θέτοντας $A_{\sigma|_n} = A$ για κάθε $\sigma|_n \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$, έχουμε:

$$A = \bigcup_{\sigma\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{\sigma|_n} \in \mathcal{A}\big(LM\big).$$

Άρα, $LM \subseteq \mathcal{A}\big(LM\big)$.

Έστω $A \in \mathcal{A}\big(LM\big)$. Τότε, το A γράφεται ως:

$$A = \bigcup_{\sigma\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{\sigma|_n}$$

όπου $A_{\sigma|_n} \in LM$ για κάθε $\sigma|_n \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$. Από το προηγούμενο Λήμμα, μπορούμε να θεωρήσουμε πως είναι $A_{\sigma|_{n+1}} \subseteq A_{\sigma|_n}$ για κάθε $\sigma|_{n+1} \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$. Θα δείξουμε ότι $A \in LM$. Έστω $\sigma|_n \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$. Θέτουμε:

$$A'_{\sigma|_n} = \bigcup_{\substack{\tau\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \\ \sigma|_n \sqsubseteq \tau}} \bigcap_{k=1}^{\infty} A_{\tau|_k}$$

Εύκολα μπορεί κανείς να δει πως:

(α) $A'_{\emptyset} = \bigcup_{\sigma\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{\sigma|_n} = A.$

(β) $A'_{\sigma|_n} \subseteq A_{\sigma|_n}$ για κάθε $\sigma|_n \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$.

(γ) $A'_{\sigma|_{n+1}} \subseteq A'_{\sigma|_n}$, για κάθε $\sigma|_{n+1} \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$.

(δ) $A'_{\sigma|_n} = \bigcup\limits_{q=1}^{\infty} A'_{\sigma|_n \frown q}$, για κάθε $\sigma|_n \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$.

Από το Λήμμα 3.4.1, υπάρχει οικογένεια $\{B_{\sigma|_n} : \sigma|_n \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}\}$ Lebesgue μετρήσιμων υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ ώστε για κάθε $\sigma|_n \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ να ισχύει ότι $A'_{\sigma|_n} \subseteq B_{\sigma|_n}$, $\lambda^*\big(A'_{\sigma|_n}\big) = \lambda\big(B_{\sigma|_n}\big)$ και για $B \subseteq \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμο με $A'_{\sigma|_n} \subseteq B$ να είναι $\lambda\big(B_{\sigma|_n} \setminus B\big) = 0$. (βλ. Παρατήρηση 3.4.2.) Για κάθε $\sigma|_n \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$, θέτουμε:

$$B'_{\sigma|_n} = B_{\sigma|_n} \cap A_{\sigma|_n}$$

Τότε, είναι $A'_{\sigma|_n} \subseteq B'_{\sigma|_n} \subseteq A_{\sigma|_n}$ και $\lambda^*\big(A'_{\sigma|_n}\big) = \lambda\big(B'_{\sigma|_n}\big)$ για κάθε $\sigma|_n \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$. Επίσης, αν $B \subseteq \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμο με $A'_{\sigma|_n} \subseteq B$ για κάποιο $\sigma|_n \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$, τότε έπεται πως $\lambda\big(B'_{\sigma|_n} \setminus B\big) = 0$. Τέλος, η οικογένεια $\{B'_{\sigma|_n} : \sigma|_n \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}\}$ αποτελείται από Lebesgue μετρήσιμα σύνολα.

Για κάθε $\sigma|_n \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$, θέτουμε:

$$C_{\sigma|_n} = B'_{\sigma|_n} \setminus \left(\bigcup_{q=1}^{\infty} B'_{\sigma|_n \frown q}\right)$$

και θα δείξουμε πως $\lambda\big(C_{\sigma|_n}\big) = 0$ για κάθε $\sigma|_n \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$. (Είναι άμεσο πως η οικογένεια $\{C_{\sigma|_n} : \sigma|_n \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}\}$ αποτελείται από Lebesgue μετρήσιμα σύνολα.)

Πράγματι, έστω $\sigma|_n \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$. Τότε, από την ιδιότητα (δ) που αναφέρθηκε παραπάνω, είναι:

$$A'_{\sigma|_n} = \bigcup_{q=1}^{\infty} A'_{\sigma|_n \frown q} \subseteq \bigcup_{q=1}^{\infty} B'_{\sigma|_n \frown q}$$

κι άρα από τον τρόπο επιλογής της οικογένειας $\{B'_{\sigma|_n} : \sigma|_n \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}\}$ έχουμε ότι $\lambda\big(C_{\sigma|_n}\big) = 0$. Συνεπώς, θέτοντας:

$$C = \bigcup_{\sigma|_n \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}} C_{\sigma|_n}$$

θα είναι επίσης $\lambda(C) = 0$.

Θα δείξουμε τώρα ότι $B'_{\emptyset} \setminus C \subseteq A'_{\emptyset}$ και ισχυριζόμαστε πως αυτό θα μας δώσει το ζητούμενο. Πράγματι, η παραπάνω σχέση συνεπάγεται πως $B'_{\emptyset} \setminus A'_{\emptyset} \subseteq C$. Τότε, ορίζοντας:

$$W = C \cap \big(B'_{\emptyset} \setminus A'_{\emptyset}\big)$$

έχουμε ότι $\lambda(W) \leqslant \lambda(C) \Rightarrow \lambda(W) = 0$ και ότι $B'_{\emptyset} \setminus A'_{\emptyset} = W \Rightarrow A'_{\emptyset} = B'_{\emptyset} \setminus W$, δηλαδή το σύνολο $A'_{\emptyset} = A$ διαφέρει από ένα Lebesgue μετρήσιμο σύνολο κατά ένα σύνολο μηδενικού μέτρου, συνεπώς $A \in LM$.

Έστω $x \in B'_{\emptyset} \setminus C$. Τότε, αφού $x \notin C_{\emptyset} = B'_{\emptyset} \setminus \big(\bigcup_{q=1}^{\infty} B'_{\{q\}}\big)$, υπάρχει $q_1 \in \mathbb{N}$ ώστε $x \in B'_{\{q_1\}}$.

Έστω πως για $k \in \mathbb{N}$, οι φυσικοί αριθμοί $q_1, \ldots, q_k$ έχουν επιλεγεί ώστε για το στοιχείο $q^k = (q_1, \ldots, q_k) \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ να ισχύει ότι $x \in B'_{q^k|_m}$ για κάθε $m \in \{1, \ldots, k\}$. Αφού υποθέσαμε πως $x \notin C_{q^k}$, υπάρχει $q_{k+1} \in \mathbb{N}$ ώστε $x \in B'_{q^k \frown q_{k+1}}$.

Θέτουμε $\overline{q} = (q_n)_n \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Τότε, από τον επαγωγικό ορισμό του $\overline{q}$, είναι:

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B'_{\overline{q}|_n} \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{\overline{q}|_n} \subseteq \bigcup_{\sigma \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{\sigma|_n} = A'_{\emptyset} = A$$

Τελικώς, είναι $B'_{\emptyset} \setminus C \subseteq A'_{\emptyset}$ κι άρα η απόδειξη ολοκληρώνεται. □

Άμεσο επακόλουθο του παραπάνω Θεωρήματος είναι το αποτέλεσμα που αναφέρθηκε στην αρχή της ενότητας, δηλαδή η μετρησιμότητα των αναλυτικών υποσυνόλων του $\mathbb{R}$.

Θεώρημα 3.4.5. *Κάθε αναλυτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ είναι Lebesgue μετρήσιμο.*

Απόδειξη. Έστω $\Sigma_1^1(\mathbb{R})$ και LM οι κλάσεις όλων των αναλυτικών και Lebesgue μετρήσιμων υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ αντίστοιχα. Από την Πρόταση 3.2.12, είναι $\Sigma_1^1(\mathbb{R}) = \mathcal{A}(\mathcal{F}(\mathbb{R}))$, όπου με $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ συμβολίζουμε την κλάση των κλειστών υποσυνόλων του $\mathbb{R}$. Όμως, ως γνωστόν, κάθε κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ είναι Lebesgue μετρήσιμο. Συνεπώς, με εφαρμογή του προηγούμενου Θεωρήματος, είναι:

$$\mathcal{F}(\mathbb{R}) \subseteq LM \Rightarrow \mathcal{A}(\mathcal{F}(\mathbb{R})) \subseteq \mathcal{A}(LM) = LM \Rightarrow \mathcal{A}(\mathcal{F}(\mathbb{R})) \subseteq LM$$

κι άρα καταλήγουμε στο εξής:

$$\Sigma_1^1(\mathbb{R}) = \mathcal{A}(\mathcal{F}(\mathbb{R})) \subseteq LM$$

δηλαδή πως κάθε αναλυτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ είναι Lebesgue μετρήσιμο. □

Σημείωση. *Πιο γενικά, μπορεί κανείς να δείξει ότι τα αναλυτικά υποσύνολα ενός Πολωνικού χώρου X είναι* ***καθολικώς μετρήσιμα****, δηλαδή είναι μετρήσιμα ως προς κάθε πλήρες μέτρο πιθανότητας στον X. Περισσότερες πληροφορίες για το συγκεκριμένο αντικείμενο μπορεί κανείς να βρει στο [3].*

Αναφορές

[1] R. Engelking, "*General Topology*", Sigma Series in Pure Mathematics, Heldermann Verlag (1989)

[2] H. Lebesgue, "*Sur les fonctions representables analytiquement*", Journal de mathematiques pures et appliquees 6eserie, tome 1 (1905)

[3] A.S. Kechris, "*Classical Descriptive Set Theory*", Grad. Texts in Math., vol. 156, Springer-Verlag (1995).

[4] C.A. Rogers, J.E. Jayne, "*Analytic Spaces*", Academic Press (1980).

[5] S.M. Srivastava, "*A Course on Borel Sets*", Grad. Texts in Math., vol. 180, Springer-Verlag (1998)

[6] F. Topsøe, J. Hoffmann-Jørgensen, "*Analytic spaces and their applications*", Academic Press (1980).