



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ Μ.Κ. & Α.Ε.

Εργαστήριο Αυτομάτου Ελέγχου

Διδακτορική Διατριβή

**Δυναμική, Προγραμματισμός Τροχιάς και Έλεγχος
Διαστημικών Ρομποτικών Συστημάτων
Υποκείμενων σε Στροφορμή και Ευκαμψίες**

Κωνσταντίνος Νάνος

Επιβλέπων Καθηγητής: Ε. Γ. Παπαδόπουλος

ΑΘΗΝΑ 2015

Περίληψη

Στην παρούσα διδακτορική διατριβή, η μελέτη εστιάζεται σε ελεύθερα αιωρούμενα Διαστημικά Ρομποτικά Συστήματα (ΔΡΣ) τα οποία φέρουν βραχίονα με μη πλεονάζοντες Βαθμούς Ελευθερίας (ΒΕ). Αντίθετα με άλλες μελέτες οι οποίες, για απλοποίηση του προβλήματος, θεωρούν μηδενική αρχική στροφορμή του ΔΡΣ, εδώ λαμβάνεται υπόψη η ύπαρξη κάποιας ποσότητας συσσωρευμένης στροφορμής στο ΔΡΣ. Αναπτύσσονται οι εξισώσεις κίνησης ενός άκαμπτου ελεύθερα αιωρούμενου ΔΡΣ με αρχική στροφορμή και μελετάται η εξάρτηση των εξισώσεων κίνησης του συστήματος από την στροφορμή του ΔΡΣ. Επίσης, βασιζόμενοι στα αναπτυσσόμενα μοντέλα, αναπτύσσονται νόμοι ελέγχου στο χώρο των αρθρώσεων και στον Καρτεσιανό χώρο οι οποίοι, παρά την ύπαρξη αρχικής στροφορμής στο ΔΡΣ, εξασφαλίζουν ασυμπτωτική ευστάθεια για εντολές επιθυμητής διαμόρφωσης του βραχίονα και επιθυμητής θέσης του ΤΣΔ, αντίστοιχα.

Για αποφυγή πιθανών συγκρούσεων του ΔΡΣ με το περιβάλλον του, στην παρούσα εργασία επιλέγεται ο σχεδιασμός δρόμου του Τελικού Σημείου Δράσης (ΤΣΔ) στον Καρτεσιανό χώρο με ή χωρίς αρχική στροφορμή του ΔΡΣ. Μελετώνται δυο περιπτώσεις κινήσεων του ΤΣΔ στον Καρτεσιανό χώρο. Στην πρώτη περίπτωση είναι επιθυμητή η παρακολούθηση μόνο της θέσης του ΤΣΔ στον επιθυμητό δρόμο, ενώ στην δεύτερη περίπτωση η παρακολούθηση του επιθυμητού δρόμου πρέπει να γίνει επιπλέον και με επιθυμητό προσανατολισμό του ΤΣΔ. Η πραγματοποίηση της δεύτερης περίπτωσης απαιτεί ΔΡΣ με βραχίονες με περισσότερους ΒΕ. Όμως, και στις δυο περιπτώσεις, ο σχεδιασμός δρόμου στον Καρτεσιανό χώρο, σε αντίθεση με το σχεδιασμό δρόμου στο χώρο των αρθρώσεων, μπορεί να είναι μην είναι εφικτός λόγω της πιθανής εμφάνισης Δυναμικών Ιδιομορφιών (ΔΙ). Για την αντιμετώπιση του προβλήματος, εξάγονται και αναλύονται οι εξισώσεις που ορίζουν τις ΔΙ για τους επίπεδους και τρισδιάστατους ελεύθερα αιωρούμενους ρομποτικούς βραχίονες που απαιτούνται για τις δυο παραπάνω περιπτώσεις επιθυμητών κινήσεων του ΤΣΔ. Η ανάλυση των ΔΙ επιτρέπει των υπολογισμό περιοχών του χώρου εργασίας του ΔΡΣ όπου το ΤΣΔ μπορεί να κινηθεί με ασφάλεια. Αποτέλεσμα, λοιπόν, της εμφάνισης ΔΙ είναι ουσιαστικά η μείωση του χώρου όπου το ΔΡΣ μπορεί να εκτελέσει κάποια εργασία με ασφάλεια.

Για εκμετάλλευση όλου του χώρου εργασίας του ΔΡΣ, στην παρούσα εργασία αναπτύσσεται μια καινοτόμος μεθοδολογία η οποία επιτρέπει κινήσεις του ΤΣΔ και σε περιοχές που είναι πιθανή η εμφάνιση ΔΙ. Η αποφυγή της εμφάνισης ΔΙ στις περιοχές αυτές πραγματοποιείται με ξεκίνημα του ΔΡΣ με κατάλληλο αρχικό προσανατολισμό του δορυφόρου και αντίστοιχη αρχική διαμόρφωση του βραχίονα του ΔΡΣ. Η προτεινόμενη μέθοδος εξάγει τους κατάλληλους αρχικούς προσανατολισμούς του δορυφόρου και τις αντίστοιχες αρχικές διαμορφώσεις του βραχίονα του ΔΡΣ ώστε να μπορεί το ΤΣΔ να

κινηθεί με ασφάλεια σε όλο το χώρο εργασίας του ΔΡΣ αποφεύγοντας πιθανές ΔΙ. Η μέθοδος εφαρμόζεται σε επίπεδα και τρισδιάστατα ΔΡΣ με ή χωρίς αρχική στροφορμή και για τις δυο προαναφερθέντες περιπτώσεις κινήσεων του ΤΣΔ.

Στο τελευταίο μέρος της παρούσας εργασίας, μελετάται η δυναμική των εύκαμπτων ΔΡΣ θεωρώντας ότι όλες οι ευκαμψίες τους είναι συγκεντρωμένες στις αρθρώσεις των βραχιόνων τους. Εξάγονται, αναλυτικά, οι εξισώσεις κίνησης των συστημάτων αυτών και σχολιάζονται οι διαφορές τους από τις αντίστοιχες εξισώσεις ΔΡΣ με άκαμπτες αρθρώσεις. Επίσης, αναλύονται οι διαφορές και οι ομοιότητες τους από τις αντίστοιχες εξισώσεις κίνησης των επίγειων ρομποτικών βραχιόνων με εύκαμπτες αρθρώσεις. Λόγω της δυναμικής σύζευξης μεταξύ του δορυφόρου και του βραχίονα του ελεύθερα αιωρούμενου ΔΡΣ, παρατηρούνται διαφορές στη δομή των πινάκων των δυναμικών εξισώσεων αυτών των συστημάτων με τους αντίστοιχους πίνακες των εξισώσεων των επίγειων ρομποτικών βραχιόνων σταθερής βάσης με εύκαμπτες αρθρώσεις. Εκμεταλλευόμενοι τις διαφορές αυτές, σχεδιάζεται ένας ελεγκτής γραμμικοποίησης μέσω ανατροφοδότησης που επιτυγχάνει αποσύζευξη του συστήματος και παρακολούθηση τροχιών τόσο στο χώρο των αρθρώσεων όσο και στον Καρτεσιανό χώρο χωρίς να προκαλεί ανεπιθύμητες ταλαντώσεις στο δορυφόρο του ΔΡΣ.

Ευχαριστίες

Ευχαριστώ ιδιαίτερω τον επιβλέποντα της εργασίας, Καθ. Ε. Παπαδόπουλο, ο οποίος ήταν πάντα πρόθυμος να με βοηθήσει σε κάθε δυσκολία και εμπόδιο που συναντούσα κατά τη διάρκεια της έρευνας καθώς και της συγγραφής της παρούσας εργασίας. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω και τα άλλα δυο μέλη της συμβουλευτικής επιτροπής Καθ. Ν. Κρικέλη και Καθ. Κ. Κυριακόπουλο.

Τέλος, ένα μεγάλο ευχαριστώ σε όλα τα παιδιά του εργαστηρίου Αυτομάτου Ελέγχου, για την ευχάριστη ατμόσφαιρα που δημιούργησαν όλα αυτά τα χρόνια κατά τη διάρκεια της έρευνας μου.

Περιεχόμενα

Περίληψη.....	i
Ευχαριστίες.....	iii
Περιεχόμενα.....	v
Κατάλογος Σχημάτων	vii
Κατάλογος Πινάκων.....	xv
Κατάλογος Συντομογραφιών	xvi
Κατάλογος Συμβόλων.....	xvii
Εισαγωγή.....	1
1.1 Σκοπός της Εργασίας	1
1.2 Βιβλιογραφική Ανασκόπηση	3
1.3 Συνεισφορά της Εργασίας.....	19
1.4 Διάρθρωση της Εργασίας	21
2 Δυναμική Ελεύθερα Αιωρούμενων Διαστημικών Βραχιόνων υπό την Επίδραση Στροφορμής	25
2.1 Εισαγωγή.....	25
2.2 Κινηματικές Εξισώσεις του Συστήματος	28
2.3 Εξισώσεις Ορμής του Συστήματος.....	33
2.4 Εξισώσεις Κίνησης του Συστήματος	37
2.5 Επίπεδα Συστήματα.....	42
2.6 Αξιοσημείωτες Ιδιότητες του Δυναμικού Μοντέλου	44
2.7 Έλεγχος Ελεύθερα Αιωρούμενων ΔΡΣ υπό την επίδραση Στροφορμής	48
2.8 Εφαρμογές	59
2.9 Συμπεράσματα.....	68
3 Σχεδιασμός Δρόμου και Δυναμικές Ιδιομορφίες	69
3.1 Εισαγωγή.....	69
3.2 Σχεδιασμός Δρόμου Θέσης του Τελικού Σημείου Δράσης	70
3.3 Ορισμός του Προσανατολισμού του Τελικού Σημείου Δράσης.....	88
3.4 Επίδραση της Στροφορμής στο Σχεδιασμό Δρόμου	94
3.5 Εφαρμογές.....	96

3.6 Συμπεράσματα	116
4 Αποφυγή Δυναμικών Ιδιομορφιών	117
4.1 Είσαγωγή.....	117
4.2 Βασικές Αρχές και Έννοιες	118
4.3 Υπολογισμός Οριακών Αρχικών Προσανατολισμών Δορυφόρου	123
4.4 Υπολογισμός Εύρους Αρχικού Προσανατολισμού Δορυφόρου	144
4.5 Εφαρμογές.....	147
4.6 Συμπεράσματα	168
5 Δυναμική και Έλεγχος Διαστημικών Βραχιόνων με Ευκαμψίες στις Αρθρώσεις.....	169
5.1 Εισαγωγή.....	169
5.2 Δυναμική Διαστημικών Βραχιόνων με Εύκαμπτες Αρθρώσεις.....	170
5.3 Επίπεδα Συστήματα.....	187
5.4 Έλεγχος Διαστημικών Βραχιόνων με Εύκαμπτες Αρθρώσεις	190
5.5 Γραμμικοποίηση μέσω Ανατροφοδότησης.....	197
5.6 Συμπεράσματα	206
6 Συμπεράσματα και Μελλοντική Εργασία	207
6.1 Εισαγωγή.....	207
6.2 Συμπεράσματα	207
6.3 Μελλοντική Εργασία	209
Βιβλιογραφία	211
Παραρτήματα	219

Κατάλογος Σχημάτων

Κεφάλαιο 1 Εισαγωγή

Σχήμα 1.1 (α) Το ΔΡΣ ETS-7 που αναπτύχθηκε από την JAXA και (β) το ΔΡΣ Orbital Express που αναπτύχθηκε από τη DARPA 1

Σχήμα 1.2 Ο Διαστημικός ρομποτικός βραχίονας Canadarm 2 παρουσιάζει ευκαμψίες στους συνδέσμους του, λόγω του μεγάλου μήκους του 15

Κεφάλαιο 2 Δυναμική και Έλεγχος Ελεύθερα Αιωρούμενων ΔΡΣ υπό την Επίδραση Στροφορμής

Σχήμα 2.1 Ορισμός θέσης σημείου συνδέσμου του βραχίονα ενός ελεύθερα αιωρούμενου ΔΡΣ ως προς το αδρανειακό ΣΣ 29

Σχήμα 2.2 Ορισμός του βαρύκεντρου BC και βαρυκεντρικών διανυσμάτων c_i^* , r_i^* και I_i^* 30

Σχήμα 2.3 Εφαρμογή της μεθόδου των βαρυκεντρικών διανυσμάτων σε ένα επίπεδο ΔΡΣ με ένα ρομποτικό βραχίονα 3-BE. 31

Σχήμα 2.4 Εφαρμογή ελεγκτή PD με αντιστάθμιση στροφορμής σε επίπεδο ΔΡΣ 50

Σχήμα 2.5 Εφαρμογή ελεγκτή PD με αντιστάθμιση στροφορμής σε τρισδιάστατο ΔΡΣ 50

Σχήμα 2.6 Εφαρμογή ελεγκτή αντίστροφης Ιακωβιανής σε τρισδιάστατο ΔΡΣ με αρχική στροφορμή..... 54

Σχήμα 2.7 Επίπεδο ελεύθερα αιωρούμενο ΔΡΣ με βραχίονα 2-BE. (α) Ορισμός των αδρανειακών ιδιοτήτων και των μεταβλητών διαμόρφωσης. (β) Τα βαρυκεντρικά διανύσματα a , b και c του ΔΡΣ..... 59

Σχήμα 2.8 Απόκριση επίπεδου ΔΡΣ με ελεγκτή αντιστάθμισης στροφορμής. (α) Τροχιές των σχετικών γωνιών αρθρώσεων και προσανατολισμός δορυφόρου, (β) Ταχύτητες αρθρώσεων και γωνιακή ταχύτητα δορυφόρου και (γ) Απαιτούμενες ροπές στις αρθρώσεις του βραχίονα 60

Σχήμα 2.9 Στιγμιότυπα κίνησης του επίπεδου ΔΡΣ με την εφαρμογή του ελεγκτή αντιστάθμισης στροφορμής 61

Σχήμα 2.10 Απόκριση ΔΡΣ με ελεγκτή αντίστροφης δυναμικής. (α) Τροχιές των σχετικών γωνιών αρθρώσεων, (β) Σφάλματα σχετικών γωνιών από τις επιθυμητές και (γ) Απαιτούμενες ροπές στις αρθρώσεις του βραχίονα 62

Σχήμα 2.11 Απόκριση ΔΡΣ με ελεγκτή ανάστροφης δυναμικής με εντολή σταθερής επιθυμητής θέσης. (α) Τροχιές της θέσης του ΤΣΔ και (β) Απαιτούμενες ροπές στις αρθρώσεις του βραχίονα 63

Σχήμα 2.12 Απόκριση ΔΡΣ με ελεγκτή ανάστροφης δυναμικής με εντολή επιθυμητής θέσης μέσω γραμμικών συναρτήσεων με παραβολικά τμήματα. (α) Τροχιές της θέσης του ΤΣΔ και (β) Απαιτούμενες ροπές στις αρθρώσεις του βραχίονα	64
Σχήμα 2.13 Στιγμιότυπα κίνησης του επίπεδου ΔΡΣ με την εφαρμογή του ελεγκτή της Εξ. (2.126).....	64
Σχήμα 2.14 Στιγμιότυπα κίνησης του επίπεδου ΔΡΣ για αρχικό προσανατολισμό δορυφόρου $\theta_0 = 60^\circ$	65
Σχήμα 2.15 Απόκριση ΔΡΣ για την κίνηση του Σχήματος 2.14. (α) Τροχιές της θέσης του ΤΣΔ και (β) Απαιτούμενες ροπές στις αρθρώσεις του βραχίονα.....	66
Σχήμα 2.16 Στιγμιότυπα κίνησης του επίπεδου ΔΡΣ για αρχικό προσανατολισμό δορυφόρου $\theta_0 = -45^\circ$. Το ΤΣΔ προσεγγίζει τελικά την επιθυμητή θέση C	67
Σχήμα 2.17 Απόκριση ΔΡΣ για την κίνηση του Σχήματος 2.16. (α) Τροχιές της θέσης του ΤΣΔ και (β) Απαιτούμενες ροπές στις αρθρώσεις του βραχίονα.....	67
Σχήμα 2.18 Απόκριση ΔΡΣ για την κίνηση του Σχήματος 2.16. (α) Τροχιές της θέσης του ΤΣΔ και (β) Απαιτούμενες ροπές στις αρθρώσεις του βραχίονα.....	68
Κεφάλαιο 3 Σχεδιασμός Δρόμου και Δυναμικές Ιδιομορφίες	
Σχήμα 3.1 Εξάρτηση της διαμόρφωσης του βραχίονα από τον προσανατολισμό του δορυφόρου όταν το ΤΣΔ βρίσκεται σε συγκεκριμένο σημείο E. (α) Ιδιόμορφη διαμόρφωση, (β) Μη ιδιόμορφη διαμόρφωση	74
Σχήμα 3.2 Επίπεδο ελεύθερα αιωρούμενο ΔΡΣ με βραχίονα 2-BE. (α) Ορισμός των αδρανειακών ιδιοτήτων και των μεταβλητών διαμόρφωσης. (β) Τα βαρυκεντρικά διανύσματα a, b και c του ΔΡΣ.....	76
Σχήμα 3.3 (α) Καμπύλες Ιδιομορφίας και Καμπύλες Περιθωρίου που αντιστοιχούν στον βραχίονα του Σχήματος 3.2. και (β) Οι υπόχωροι PIW και PDW του χώρου εργασίας που αντιστοιχούν στο επίπεδο ΔΡΣ του Σχήματος 3.2	78
Σχήμα 3.4 (α) Ταχύτητα του ΤΣΔ που προκαλείται από την κίνηση της πρώτης άρθρωσης και (β) Ταχύτητα του ΤΣΔ που προκαλείται από την κίνηση της δεύτερης άρθρωσης.....	79
Σχήμα 3.5 (α) Μη ιδιόμορφος σχηματισμός του βραχίονα. Το ΤΣΔ μπορεί να κινηθεί σε οποιαδήποτε κατεύθυνση και (β) Ιδιόμορφος σχηματισμός του βραχίονα. Το ΤΣΔ μπορεί να κινηθεί μόνο κατά μια διεύθυνση.....	80
Σχήμα 3.6 Επιτρεπόμενες ταχύτητες του ΤΣΔ σε δυναμικά ιδιόμορφη διαμόρφωση.....	81
Σχήμα 3.7 (α) Μεταβολή της γωνίας φ του διανύσματος της επιτρεπόμενης ταχύτητας του ΤΣΔ σε δυναμικά ιδιόμορφη διαμόρφωση του βραχίονα συναρτήσει της απόστασης του ΤΣΔ από το ΚΜ του ΔΡΣ και (β) Αντίστοιχη μεταβολή της	

γωνίας ψ του διανύσματος της επιτρεπόμενης ταχύτητας όταν το ΤΣΔ βρίσκεται στον άξονα x του αδρανειακού ΣΣ	82
Σχήμα 3.8 Διανύσματα των επιτρεπόμενων ταχυτήτων του ΤΣΔ όταν βρίσκεται στον άξονα x του αδρανειακού ΣΣ	82
Σχήμα 3.9 Τρισδιάστατο Ελεύθερα Αιωρούμενο ΔΡΣ με Βραχίονα 3-BE	83
Σχήμα 3.10 Τομή κατά τον άξονα q_1 των Επιφανειών Ιδιομορφίας που αντιστοιχούν στις ΔΙ της 1 ^{ης} Περίπτωσης του ΔΡΣ του Σχήματος 3.9.....	86
Σχήμα 3.11 (α) Τομή κατά τον άξονα q_1 των Επιφανειών Ιδιομορφίας και των Επιφανειών Περιθωρίου που αντιστοιχούν στον βραχίονα του Σχήματος 3.9 και (β) Τομή κατά τον άξονα z των περιοχών PIW και PDW	87
Σχήμα 3.12 Επίπεδο ελεύθερα αιωρούμενο ΔΡΣ με βραχίονα 3-BE. (α) Ορισμός των αδρανειακών ιδιοτήτων και των μεταβλητών διαμόρφωσης. (β) Τα βαρυκεντρικά διανύσματα, a , b , c και d του ΔΡΣ.....	90
Σχήμα 3.13 Τρισδιάστατο Ελεύθερα Αιωρούμενο ΔΡΣ με ένα Βραχίονα 6-BE....	93
Σχήμα 3.14 (α) Αναπαράσταση των διανυσμάτων r_E και α , (β) Γεωμετρική αναπαράσταση του r_{min} και (γ) Γεωμετρική αναπαράσταση του r_{max}	99
Σχήμα 3.15 Όρια Ελεύθερου χώρου εργασίας και περιοχής PIW	101
Σχήμα 3.16 Στιγμιότυπα κίνησης επίπεδου ΔΡΣ με μη μηδενική αρχική στροφορμή καθώς η θέση του ΤΣΔ στον Καρτεσιανό χώρο παραμένει σταθερή.	101
Σχήμα 3.17 (α) Προσανατολισμός δορυφόρου και διαμόρφωση βραχίονα, (β) Γωνιακή ταχύτητα δορυφόρου και ταχύτητες των αρθρώσεων και (γ) απαιτούμενες ροπές στις αρθρώσεις	102
Σχήμα 3.18 (α) Προσανατολισμός δορυφόρου και διαμόρφωση βραχίονα, (β) Γωνιακή ταχύτητα δορυφόρου και ταχύτητες των αρθρώσεων και (γ) απαιτούμενες ροπές στις αρθρώσεις	103
Σχήμα 3.19 Στιγμιότυπα κίνησης τρισδιάστατου ΔΡΣ με μη μηδενική αρχική στροφορμή καθώς η θέση του ΤΣΔ στον Καρτεσιανό χώρο παραμένει σταθερή.....	106
Σχήμα 3.20 Απόκριση ΔΡΣ για την κίνηση του Σχήματος 3.19. (α) Προσανατολισμός δορυφόρου εκφρασμένος σε γωνίες Euler, (β) διαμόρφωση βραχίονα, (γ) γωνιακή ταχύτητα δορυφόρου ως προς το αδρανειακό ΣΣ, (δ) ταχύτητες των αρθρώσεων και (ε) απαιτούμενες ροπές στις αρθρώσεις	107
Σχήμα 3.21 Σύνδεση Καρτεσιανών και Σφαιρικών Συντεταγμένων.....	108
Σχήμα 3.22 Στιγμιότυπα κίνησης τρισδιάστατου ΔΡΣ με μηδενική αρχική στροφορμή καθώς το ΤΣΔ κινείται κατά μήκος της επιθυμητής διαδρομής AB ..	109

Σχήμα 3.23 Απόκριση με μηδενική στροφορμή και για χρόνο κίνησης $t_f = 100s$. (α) Διαμόρφωση του βραχίονα και (β) Προσανατολισμός του δορυφόρου εκφρασμένος σε γωνίες Euler 109

Σχήμα 3.24 Απόκριση με μηδενική στροφορμή και για χρόνο κίνησης $t_f = 200s$. (α) Διαμόρφωση του βραχίονα και (β) Προσανατολισμός του δορυφόρου εκφρασμένος σε γωνίες Euler 110

Σχήμα 3.25 Απόκριση με μηδενική στροφορμή ως συνάρτηση της μεταβλητής s και για χρόνους κίνησης $t_f = 100s$ και $t_f = 200s$. (α) Διαμόρφωση του βραχίονα και (β) Προσανατολισμός του δορυφόρου εκφρασμένος σε γωνίες Euler 110

Σχήμα 3.26 Απόκριση ΔΡΣ για χρονική διάρκεια της κίνησης AB του ΤΣΔ ίση με $t_f = 100s$, για μη – μηδενική αρχική στροφορμή του ΔΡΣ. (α) Διαμόρφωση του βραχίονα και (β) Προσανατολισμός του δορυφόρου εκφρασμένος σε γωνίες Euler 111

Σχήμα 3.27 Απόκριση ΔΡΣ για χρονική διάρκεια της κίνησης AB του ΤΣΔ ίση με $t_f = 200s$, για μη – μηδενική αρχική στροφορμή του ΔΡΣ. (α) Διαμόρφωση του βραχίονα και (β) Προσανατολισμός του δορυφόρου εκφρασμένος σε γωνίες Euler 112

Σχήμα 3.28 Απόκριση ΔΡΣ ως συνάρτηση της μεταβλητής s που καθορίζει τη θέση του ΤΣΔ πάνω στη διαδρομή AB για χρονική διάρκεια κίνησης $t_f = 100s$ και $t_f = 200s$ και για μηδενική αρχική στροφορμή του ΔΡΣ. (α) Διαμόρφωση του βραχίονα και (β) Προσανατολισμός του δορυφόρου εκφρασμένος σε γωνίες Euler 112

Σχήμα 3.29 Στιγμιότυπα κίνησης του επίπεδου ΔΡΣ για κίνηση του ΤΣΔ κατά μήκος του δρόμου AB και για αρχικό προσανατολισμό δορυφόρου $\theta_0^{in} = 150^\circ$. Ο βραχίονας γίνεται ιδιόμορφος κατά τη διάρκεια της κίνησης 114

Σχήμα 3.30 Απόκριση ΔΡΣ για την κίνηση του Σχήματος 3.29. (α) Προσανατολισμός δορυφόρου και τροχιές γωνιών αρθρώσεων και (β) Γωνιακή ταχύτητα δορυφόρου και ταχύτητες αρθρώσεων 114

Σχήμα 3.31 Στιγμιότυπα κίνησης του επίπεδου ΔΡΣ για κίνηση του ΤΣΔ κατά μήκος του δρόμου AB και για αρχικό προσανατολισμό δορυφόρου $\theta_0^{in} = 10^\circ$. Ο βραχίονας δεν γίνεται ιδιόμορφος κατά τη διάρκεια της κίνησης 115

Σχήμα 3.32 Απόκριση ΔΡΣ για την κίνηση του Σχήματος 3.31. (α) Προσανατολισμός δορυφόρου και τροχιές των σχετικών γωνιών αρθρώσεων και (β) Γωνιακή ταχύτητα δορυφόρου και ταχύτητες αρθρώσεων 115

Κεφάλαιο 4 Αποφυγή Δυναμικών Ιδιομορφιών

Σχήμα 4.1 Γεωμετρική αναπαράσταση της ελάχιστης τιμής της συνάρτησης S κατά την κίνηση του ΤΣΔ κατά μήκος επιθυμητών δρόμων. *Περίπτωση I*: Η

- ελάχιστη τιμή S_0 παρουσιάζεται όταν η καμπύλη κίνησης εφάπτεται στην καμπύλη περιθωρίου $S = S_0$ στο σημείο C..... 122
- Σχήμα 4.2** Γεωμετρική αναπαράσταση της ελάχιστης τιμής της συνάρτησης S κατά την κίνηση του ΤΣΔ κατά μήκος επιθυμητών δρόμων. *Περίπτωση II*: Η ελάχιστη τιμή S_0 παρουσιάζεται όταν το τελικό σημείο της καμπύλης κίνησης αγγίζει την καμπύλη περιθωρίου $S = S_0$ στο σημείο E 122
- Σχήμα 4.3** (α) Τυπικές Καμπύλες Ιδιομορφίας και Καμπύλες Περιθωρίου για ένα επίπεδο ΔΡΣ και (β) Οι περιοχές PIW και PDW του χώρου εργασίας καθώς και ένας επιθυμητός δρόμος του ΤΣΔ που διέρχεται από τις περιοχές αυτές 123
- Σχήμα 4.4** Επίπεδο ελεύθερα αιωρούμενο ΔΡΣ με βραχίονα 2-BE. (α) Ορισμός των αδρανειακών ιδιοτήτων και των μεταβλητών διαμόρφωσης. (β) Τα βαρυκεντρικά διανύσματα a , b και c του ΔΡΣ..... 124
- Σχήμα 4.5** (α) Το σημείο C του επιθυμητού δρόμου στο οποίο αντιστοιχεί ελάχιστη τιμή $S = S_0$, (β) Οι καμπύλες κινήσεις 1 και 2 που προκύπτουν ξεκινώντας από το σημείο C και καταλήγοντας στα σημεία A και B, αντίστοιχα, του επιθυμητού δρόμου. 129
- Σχήμα 4.6** Τρισδιάστατο Ελεύθερα Αιωρούμενο ΔΡΣ με Βραχίονα 3-BE 133
- Σχήμα 4.7** Επίπεδο ελεύθερα αιωρούμενο ΔΡΣ με βραχίονα 3-BE. (α) Ορισμός των αδρανειακών ιδιοτήτων και των μεταβλητών διαμόρφωσης. (β) Τα βαρυκεντρικά διανύσματα a , b , c και d του ΔΡΣ..... 138
- Σχήμα 4.8** Διάγραμμα ροής εφαρμογής της μεθόδου όταν ο δρόμος του ΤΣΔ διέρχεται και από τις δύο περιοχές PDW (A) και PDW (B)..... 146
- Σχήμα 4.9** Κίνηση επίπεδου ΔΡΣ με βραχίονα 2-BE με αρχικό προσανατολισμό δορυφόρου $\theta_0^m = 150^\circ$. Ο βραχίονας γίνεται ιδιόμορφος στο σημείο C 150
- Σχήμα 4.10** Απόκριση ΔΡΣ για την κίνηση του Σχήματος 4.9. (α) Προσανατολισμός δορυφόρου και τροχιές γωνιών αρθρώσεων (β) Γωνιακή ταχύτητα δορυφόρου και ταχύτητες αρθρώσεων 150
- Σχήμα 4.11** Κίνηση επίπεδου ΔΡΣ με βραχίονα 2-BE με αρχικό προσανατολισμό δορυφόρου $\theta_0^m = 10^\circ$ 151
- Σχήμα 4.12** Απόκριση ΔΡΣ για την κίνηση του Σχήματος 4.5. (α) Προσανατολισμός δορυφόρου και τροχιές γωνιών αρθρώσεων (β) Γωνιακή ταχύτητα δορυφόρου και ταχύτητες αρθρώσεων 151
- Σχήμα 4.13** Στιγμιότυπα κίνησης συστήματος. Ο βραχίονας γίνεται ιδιόμορφος στο σημείο C 153
- Σχήμα 4.14** Απόκριση ΔΡΣ για την κίνηση του Σχήματος 4.12. (α) Τροχιά θέσης ΤΣΔ, (β) Τροχιές γωνιών αρθρώσεων βραχίονα, (γ) Τροχιές προσανατολισμού

δορυφόρου (x-y-z Euler angles). (δ) Ταχύτητες γωνιών αρθρώσεων, (ε) Γωνιακή ταχύτητα δορυφόρου. (στ) Ροπές αρθρώσεων βραχίονα..... 154

Σχήμα 4.15 Στιγμιότυπα κίνησης τρισδιάστατου ΔΡΣ. Το ΤΣΔ ακολουθεί το δρόμο AB αποφεύγοντας πιθανές δυναμικές ιδιομορφίες 155

Σχήμα 4.16 Απόκριση ΔΡΣ για την κίνηση του Σχήματος 4.15. (α) Τροχιά θέσης ΤΣΔ, (β) Τροχιές γωνιών αρθρώσεων βραχίονα, (γ) Τροχιές προσανατολισμού δορυφόρου (x-y-z Euler angles). (δ) Ταχύτητες γωνιών αρθρώσεων, (ε) Γωνιακή ταχύτητα δορυφόρου. (στ) Ροπές αρθρώσεων βραχίονα..... 156

Σχήμα 4.17 Κίνηση επίπεδου ΔΡΣ με βραχίονα 3-ΒΕ με αρχικό προσανατολισμό δορυφόρου $\theta_0^m = 140^\circ$. Ο βραχίονας γίνεται ιδιόμορφος στο σημείο D 160

Σχήμα 4.18 Απόκριση ΔΡΣ για την κίνηση του Σχήματος 4.17. (α) Προσανατολισμός δορυφόρου και τροχιές γωνιών αρθρώσεων (β) Γωνιακή ταχύτητα δορυφόρου και ταχύτητες αρθρώσεων 160

Σχήμα 4.19 Κίνηση επίπεδου ΔΡΣ με βραχίονα 3-ΒΕ με αρχικό προσανατολισμό δορυφόρου $\theta_0^m = 200^\circ$ 161

Σχήμα 4.20 Απόκριση ΔΡΣ για την κίνηση του Σχήματος 4.18. (α) Προσανατολισμός δορυφόρου και τροχιές γωνιών αρθρώσεων (β) Γωνιακή ταχύτητα δορυφόρου και ταχύτητες αρθρώσεων 161

Σχήμα 4.21 Προσανατολισμός ΤΣΔ κάθετος στο επίπεδο που ορίζεται από την ευθεία AB και το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα \mathbf{n} 162

Σχήμα 4.22 Στιγμιότυπα κίνησης συστήματος. Ο βραχίονας γίνεται ιδιόμορφος στο σημείο D. 165

Σχήμα 4.23 Απόκριση ΔΡΣ για την κίνηση του Σχήματος 4.22. (α) Τροχιά θέσης ΤΣΔ, (β) Τροχιές γωνιών αρθρώσεων βραχίονα, (γ) Τροχιές γωνιών αρθρώσεων καρπού, (δ) Τροχιές προσανατολισμού δορυφόρου (x-y-z Euler γωνίες). (ε) Ταχύτητες γωνιών αρθρώσεων βραχίονα, (στ) Ταχύτητες γωνιών αρθρώσεων καρπού, (ζ) Γωνιακή ταχύτητα δορυφόρου. 165

Σχήμα 4.24 Στιγμιότυπα κίνησης συστήματος. Το ΤΣΔ ακολουθεί το δρόμο AB αποφεύγοντας πιθανές δυναμικές ιδιομορφίες..... 167

Σχήμα 4.25 Απόκριση ΔΡΣ για την κίνηση του Σχήματος 4.24. (α) Τροχιά θέσης ΤΣΔ, (β) Τροχιές γωνιών αρθρώσεων βραχίονα, (γ) Τροχιές γωνιών αρθρώσεων καρπού, (δ) Τροχιές προσανατολισμού δορυφόρου (x-y-z Euler γωνίες). (ε) Ταχύτητες γωνιών αρθρώσεων βραχίονα, (στ) Ταχύτητες γωνιών αρθρώσεων καρπού, (ζ) Γωνιακή ταχύτητα δορυφόρου 167

Κεφάλαιο 5 Δυναμική και Έλεγχος Διαστημικών Βραχιόνων με Ευκαμψίες στις Αρθρώσεις

Σχήμα 5.1 Διαστημικός Ρομποτικός Βραχίονας με Εύκαμπτες Αρθρώσεις. 171

Σχήμα 5.2 Μοντέλο Εύκαμπτης Άρθρωσης	172
Σχήμα 5.3 Θέση ΚΜ Συνδέσμου και Συστήματος Σύνδεσμος-Κινητήρας ως προς το ΚΜ του Διαστημικού Ρομποτικού Βραχίονα.....	173
Σχήμα 5.4 Επίπεδος Διαστημικός Ρομποτικός Βραχίονας 7-BE.....	187
Σχήμα 5.5 Το κλειστό σύστημα ελέγχου του Παραδείγματος 5.1	193
Σχήμα 5.6 Ταλαντώσεις στην κίνηση του βραχίονα	194
Σχήμα 5.7 Ταλαντώσεις στην κίνηση του δορυφόρου	195
Σχήμα 5.8 Οι απαιτούμενες ροπές στις αρθρώσεις για να οδηγηθεί ο βραχίονας στην επιθυμητή διαμόρφωση	195
Σχήμα 5.9 Η σταθεροποίηση του δορυφόρου του ΔΡΣ προκαλεί αύξηση των ταλαντώσεων του βραχίονα	196
Σχήμα 5.10 (α) Σχηματισμοί του βραχίονα και (β) Περιοχές του χώρου εργασίας όπου ${}^0D_2^* = 0$	200
Σχήμα 5.11 Το δομικό διάγραμμα του προτεινόμενου συστήματος ελέγχου	201
Σχήμα 5.12 (α) Οι τροχιές των σχετικών γωνιών, (β) Οι ταχύτητες των σχετικών γωνιών του βραχίονα για την επίτευξη του επιθυμητού δρόμου του ΤΣΔ.....	204
Σχήμα 5.13 (α) Τροχιές των γωνιών, (β) Ταχύτητες των γωνιών των μειωτήρων	204
Σχήμα 5.14 (α) Ο προσανατολισμός και (β) η γωνιακή ταχύτητα του δορυφόρου	205
Σχήμα 5.15 Οι απαιτούμενες ροπές στις αρθρώσεις ώστε το ΤΣΔ να ακολουθήσει τον επιθυμητό δρόμο.....	205
Σχήμα 5.16 Στιγμιότυπα της κίνησης του ελεύθερα αιωρούμενου ρομποτικού βραχίονα	206
Παράρτημα	
Σχήμα Α.1 Ορισμός βαρύκεντρου και βαρυκεντρικών διανυσμάτων	220
Σχήμα Β.1 Επίπεδο ΔΡΣ με Βραχίονα 2-BE.....	222
Σχήμα Β.2 (α) Ορισμός των αδρανειακών ιδιοτήτων και των παραμέτρων διαμόρφωσης ενός επίπεδου ελεύθερα αιωρούμενου ΔΡΣ με βραχίονα 3-BE, (β) Τα βαρυκεντρικά διανύσματα a, b, c και d του συστήματος	228
Σχήμα Γ.1 Συστήματα Συντεταγμένων στο τρισδιάστατο ΔΡΣ με ένα βραχίονα 3-BE	235

Σχήμα Γ.2 Συστήματα Συντεταγμένων στο τρισδιάστατο ΔΡΣ με ένα βραχίονα 6-ΒΕ	245
--	-----

Κατάλογος Πινάκων

Πίνακας 2.1 Παράμετροι του επίπεδου ΔΡΣ με ένα βραχίονα 2-ΒΕ του Σχήματος 2.7	60
Πίνακας 3.1 Παράμετροι του επίπεδου ΔΡΣ με ένα βραχίονα 2-ΒΕ του Σχήματος 3.1	97
Πίνακας 3.2 Παράμετροι του τρισδιάστατου ΔΡΣ με ένα βραχίονα 3-ΒΕ του Σχήματος 3.4	104
Πίνακας 4.1 Παράμετροι του επίπεδου ΔΡΣ με ένα βραχίονα 2-ΒΕ του Σχήματος 4.4	147
Πίνακας 4.2 Παράμετροι του τρισδιάστατου ΔΡΣ με ένα βραχίονα 3-ΒΕ του Σχήματος 4.6	152
Πίνακας 4.3 Παράμετροι του επίπεδου ΔΡΣ με ένα βραχίονα 3-ΒΕ του Σχήματος 4.4	157
Πίνακας 4.4 Παράμετροι του τρισδιάστατου ΔΡΣ με ένα βραχίονα 6-ΒΕ του Σχήματος 3.6	162
Πίνακας 5.1 Παράμετροι του επίπεδου ΔΡΣ του Σχήματος 5.4	191
Πίνακας 5.2 Παράμετροι των κινητήρων και των μηχανισμών μετάδοσης του ΔΡΣ του Σχήματος 5.4	191

Κατάλογος Συντομογραφιών

Ελληνικά

ΒΕ	Βαθμοί Ελευθερίας
ΔΙ	Δυναμικές Ιδιομορφίες
ΔΡΣ	Διαστημικό Ρομποτικό Σύστημα
ΚΜ	Κέντρο Μάζας
ΣΥΕΠ	Σύστημα Υπολογισμού και Ελέγχου Προσανατολισμού
ΣΣ	Σύστημα Συντεταγμένων
ΤΣΔ	Τελικό Σημείο Δράσης

Αγγλικά

ADCS	Attitude Determination and Control System
AHSC	Adaptive Hybrid Suppression Control
BC	Barycenter
CM	Center of Mass
CMG	Control Momentum Gyroscope
ETS	Experimental Test Satellite
GEO	Geostationary Orbit
JEMRMS	Japanese Experimental Module Remote Manipulator System
LEO	Low Earth Orbit
MIC	Multiple Impedance Control
PD	Propotional - Derivative
PDW	Path Dependent Workspace
PID	Propotional - Integral - Derivative
PIW	Path Independent Workspace
RFIM	Rigid-Flexible Interactive Modelling
RNS	Reaction Null Space
ZRM	Zero Reaction Maneuver

Κατάλογος Συμβόλων

Στην παρούσα εργασία, με κεφαλαία έντονα γράμματα συμβολίζονται πίνακες ενώ με μικρά έντονα γράμματα τα ανύσματα. Τα πεζά γράμματα χρησιμοποιούνται για το συμβολισμό των βαθμωτών μεγεθών. Οι εκθέτες στην αριστερή μεριά του μεγέθους δηλώνουν το ΣΣ ως προς το οποίο τα μεγέθη αυτά εκφράζονται.

a	Το μοναδιαίο διάνυσμα του στιγμιαίου άξονα περιστροφής του δορυφόρου
<i>b</i>	Σταθερά απόσβεσης
<i>b_e</i>	Η ισοδύναμη απόσβεση όπως φαίνεται στην έξοδο του μειωτήρα
<i>b_m</i>	Σταθερά της ιξώδους τριβής κινητήρα
<i>b_L</i>	Σταθερά της ιξώδους τριβής συνδέσμου
B	Διαγώνιος πίνακας με στοιχεία τις αποσβέσεις κάθε άρθρωσης
C	Ο πίνακας που εκφράζει την επίδραση των φυγοκεντρικών δυνάμεων καθώς και των δυνάμεων Coriolis στο ΔΡΣ, για μηδενική αρχική στροφορμή, όταν οι εξισώσεις κίνησης του μειωμένου συστήματος δίνονται στο χώρο των αρθρώσεων
C_h	Ο πίνακας που εκφράζει την επίδραση της στροφορμής στις ταχύτητες των αρθρώσεων
C*	= C + C_h
<i>c_{ij}</i>	Το <i>ij</i> στοιχείο του πίνακα C
<i>c_{ijk}</i>	Τα σύμβολα Christoffel πρώτου τύπου
C_{eristof}	Ο πίνακας C ορισμένος μέσω των συμβόλων <i>Christoffel</i> πρώτου τύπου
C_x	Ο πίνακας που εκφράζει την επίδραση των φυγοκεντρικών δυνάμεων καθώς και των δυνάμεων Coriolis στο ΔΡΣ, για μηδενική αρχική στροφορμή, όταν οι μειωμένες εξισώσεις κίνησης γράφονται στον Καρτεσιανό χώρο
C_x*	= C_x + J₁^{-T}C_hJ₁⁻¹
<i>c_(·)</i>	cos(·)
c	Το $N \times 1$ διάνυσμα που περιέχει τους μη γραμμικούς όρους των φυγοκεντρικών δυνάμεων και των δυνάμεων Coriolis
dr_E	Απειροστή μεταβολή της μετατόπισης (όπως και dq).
⁰ D_{ij}	Αδρανειακού – τύπου πίνακας
⁰ D_q , ⁰ D_{q_q}	Αδρανειακού – τύπου πίνακες

${}^0\mathbf{D}^*, {}^0\mathbf{D}_q^*$	Αδρανειακού – τύπου πίνακες που λαμβάνουν υπόψη τα αδρανειακά χαρακτηριστικά των κινητήρων
${}^0\mathbf{D}_{\theta_m}$	Αδρανειακού – τύπου πίνακας που εκφράζει τη συνεισφορά της κίνησης του δρομέα των κινητήρων στη στροφορμή του ΔΡΣ
${}^0\mathbf{D}_e$	$= \begin{bmatrix} {}^0\mathbf{D}_q^* & {}^0\mathbf{D}_{\theta_m} \end{bmatrix}$
D_{diss}	Η ενέργεια που καταναλώνεται εξαιτίας των ιξωδών τριβών
e	Σφάλμα στο χώρο των αρθρώσεων
e_x	Σφάλμα στον Καρτεσιανό χώρο
e_m	Σφάλμα γωνιακής θέσης του δρομέα του κινητήρα στην έξοδο του μειωτήρα
\mathbf{E}	$= \text{diag}(\mathbf{R}_0, \mathbf{R}_0)$
\mathbf{F}	Η δύναμη που ασκείται στο ΤΣΔ
\mathbf{g}_{CM}	Το διάνυσμα των εξωτερικών ροπών που δρουν στο δορυφόρο
\mathbf{g}_h	Το διάνυσμα που δίνει την επίδραση της στροφορμής στις γωνίες των αρθρώσεων
\mathbf{g}_x	Το διάνυσμα που δίνει την επίδραση της στροφορμής στις γωνίες των αρθρώσεων όταν οι μειωμένες εξισώσεις κίνησης γράφονται στον Καρτεσιανό χώρο
\mathbf{h}_{CM}	Η στροφορμή του συστήματος ως προς το κέντρο μάζας του
${}^0\mathbf{h}_{CM}$	Η στροφορμή του συστήματος ως προς το ΚΜ του συστήματος, εκφρασμένη στο ΣΣ {0} του δορυφόρου
\mathbf{H}^*	Ο πίνακας αδράνειας του συστήματος
\mathbf{H}	Ο πίνακας αδράνειας του μειωμένου συστήματος
h_{ij}	Το ij στοιχείο του πίνακα αδράνειας $\mathbf{H}(\mathbf{q})$.
\mathbf{h}	Η στροφορμή του συστήματος ως προς την αρχή του αδρανειακού ΣΣ
\mathbf{H}_x	Ο πίνακας αδράνειας του ΔΡΣ όταν οι μειωμένες εξισώσεις κίνησης γράφονται στον Καρτεσιανό χώρο.
$\mathbf{H}_{q\theta_m}$	Ο πίνακας σύζευξης για ΔΡΣ με εύκαμπτες αρθρώσεις
$\mathbf{H}_{\theta_m\theta_m}$	Υποπίνακας του πίνακα αδράνειας του μειωμένου συστήματος των ελεύθερα αιωρούμενων ΔΡΣ με εύκαμπτες αρθρώσεις
\mathbf{H}_{qq}	Υποπίνακας του πίνακα αδράνειας του μειωμένου συστήματος των ελεύθερα αιωρούμενων ΔΡΣ
I_e	Η ισοδύναμη αδράνεια όπως παρουσιάζεται στην έξοδο του μειωτήρα
\mathbf{I}_k	Ο τανυστής αδράνειας του σώματος k

\mathbf{I}_3	Ο 3×3 μοναδιαίος πίνακας
\mathbf{I}_{m_i}	Η ροπή αδράνειας του κινητήρα
${}^0\mathbf{J}_{12,k}$	Ιακωβιανός υποπίνακας (επίσης ${}^0\mathbf{J}_{22,k}$)
${}^0\mathbf{J}_{11}$	Ιακωβιανός υποπίνακας (επίσης ${}^0\mathbf{J}_{12}$ και ${}^0\mathbf{J}_{22}$)
${}^0\mathbf{J}_q$	Η Γενικευμένη Ιακωβιανή του ελεύθερα αιωρούμενου ΔΡΣ
${}^0\mathbf{J}_h$	Ο πίνακας που εκφράζει την επίδραση της αρχικής στροφορμής του ΔΡΣ στην γραμμική και γωνιακή ταχύτητα του ΤΣΔ
${}^0\mathbf{J}_{11}^*$	$= \begin{bmatrix} {}^0\mathbf{J}_{11}^T & \mathbf{I}_3 \end{bmatrix}^T$
${}^0\mathbf{J}_{12}^*$	$= \begin{bmatrix} {}^0\mathbf{J}_{12}^T & {}^0\mathbf{J}_{22}^T \end{bmatrix}^T$
k	Η σταθερά ελαστικότητας
\mathbf{K}	Ο διαγώνιος πίνακας με στοιχεία τις σταθερές ελαστικότητας κάθε άρθρωσης
\mathbf{K}_p	Ο αναλογικός όρος του PID ελεγκτή
\mathbf{K}_d	Ο διαφορικός όρος του PID ελεγκτή
\mathbf{K}_i	Ο ολοκληρωτικός όρος του PID ελεγκτή
$\mathbf{l}_i^*, \mathbf{r}_i^*$	Οι αποστάσεις του ΚΜ συστήματος δρομέας - σύνδεσμος από τις αρθρώσεις i και $i+1$ αντίστοιχα
L	Η συνάρτηση Lagrange του συστήματος
M	Η συνολική μάζα του ΔΡΣ
m_{m_i}	Η μάζα του δρομέα του κινητήρα που κινεί την άρθρωση i
m_k^*	$= m_k + m_{m_k}$
m_k	Η μάζα του σώματος k .
\mathbf{N}^*	$= \dot{\mathbf{H}} - 2\mathbf{C}^*$
N	Ο αριθμός των αρθρώσεων του βραχίονα
n	Παραμέτρος Euler
n_k	Ο λόγος μείωσης του μειωτήρα
\mathbf{n}	Ο διαγώνιος $N \times N$ πίνακας των λόγων μετάδοσης
\mathbf{p}	Η γραμμική ορμή ενός συστήματος
\mathbf{q}_d	Η επιθυμητή διαμόρφωση του βραχίονα
q_i	Η σχετική γωνία της άρθρωσης i .
\mathbf{q}	Η διαμόρφωση του βραχίονα
\mathbf{Q}	Το διάνυσμα των γενικευμένων ροπών
\mathbf{r}_{cm}	Το διάνυσμα θέσης του ΚΜ του συστήματος ως προς το αδρανειακό ΣΣ

$\mathbf{r}_{k,m}$	Το διάνυσμα θέσης του σημείου m του συνδέσμου k του βραχίονα, εκφρασμένο στο αδρανειακό ΣΣ
$\bar{\mathbf{r}}_{k,m}$	Το διάνυσμα θέσης του σημείου m του συνδέσμου k ως προς το ΚΜ του ίδιου συνδέσμου
\mathbf{r}_E	Η θέση του ΤΣΔ ενός ΔΡΣ, εκφρασμένη στο αδρανειακό ΣΣ
\mathbf{r}_k	Το διάνυσμα θέσης του ΚΜ του σώματος k
R	Η συνάρτηση Routh
R	Η απόσταση του ΤΣΔ από το ΚΜ του συστήματος
\mathbf{R}_0	Ο πίνακας περιστροφής που δίνει το προσανατολισμό του δορυφόρου του ΔΡΣ ως προς το αδρανειακό ΣΣ
${}^0\mathbf{R}_i$	Ο πίνακας περιστροφής μεταξύ του ΣΣ $\{i\}$ του σώματος i και του ΣΣ $\{0\}$ του δορυφόρου
s	Το μήκος τόξου παραμετροποίησης της διαδρομής
$s_{(\cdot)}$	$\sin(\cdot)$
${}^0\mathbf{S}$	Η Γενικευμένη Ιακωβιανή που συνδέει τη γραμμική ταχύτητα του ΤΣΔ με τις ταχύτητες των αρθρώσεων του ελεύθερα αιωρούμενου ΔΡΣ
S	Ο όρος που μηδενίζει την ορίζουσα της Γενικευμένης Ιακωβιανής ${}^0\mathbf{S}$
${}^0\mathbf{S}_i$	Η στήλη i της Γενικευμένης Ιακωβιανής ${}^0\mathbf{S}$
S_0	Επιθυμητή τιμή του όρου S ώστε να αποφευχθούν ΔΙ
${}^0\mathbf{S}^*$	η Γενικευμένη Ιακωβιανή που συνδέει τη γραμμική και τη γωνιακή ταχύτητα του ΤΣΔ με τις ταχύτητες των αρθρώσεων.
t	Ο χρόνος
$t_{s,i}$	Ο χρόνος αποκατάστασης
t_f	Ο συνολικός χρόνος κίνησης
T	Η κινητική ενέργεια του ΔΡΣ
T_L	η ροπή που προκύπτει από την κίνηση του βραχίονα
\mathbf{u}	$= \mathbf{n} \boldsymbol{\tau}$
${}^i\mathbf{v}_{iN,E}$	$= \mathbf{v}_{iN} + \delta_{iN} \bar{\mathbf{r}}_N$
\mathbf{v}_E	$= \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}}_E^T & \boldsymbol{\omega}_E^T \end{bmatrix}$
\mathbf{v}_{ik}	Βαρυκεντρικά διανύσματα
$\mathbf{v}_{ik,m}$	$= \mathbf{v}_{ik} + \delta_{ik} \bar{\mathbf{r}}_{k,m}$
V	Η συνάρτηση Lyapunov
V_{flex}	Η δυναμική ενέργεια που οφείλεται στην ευκαμψία των

	αρθρώσεων
\mathbf{w}	Τυχαίο διάνυσμα
x_E	Συντεταγμένη του ΤΣΔ ως προς τον άξονα x του αδρανειακού ΣΣ
\mathbf{Y}	Regressor
y_E	Συντεταγμένη του ΤΣΔ ως προς τον άξονα y του αδρανειακού ΣΣ
z_E	Συντεταγμένη του ΤΣΔ ως προς τον άξονα z του αδρανειακού ΣΣ
\mathbf{z}_{m_k}	Το μοναδιαίο διάνυσμα κατά τον άξονα του δρομέα του κινητήρα εκφρασμένο στο αδρανειακό ΣΣ
${}^i\mathbf{z}_i$	Το μοναδιαίο διάνυσμα πάνω στον άξονα της άρθρωσης i

Ελληνικά Σύμβολα

δ_{ik}	Το δέλτα Kronecker
$\delta\mathbf{r}_E$	Οι δυνατές μετατοπίσεις (επίσης $\delta\mathbf{q}$)
δW	Το δυνατό έργο
$\Delta\mathbf{r}_E$	Μικρές μεταβολές στη μετατόπιση (επίσης $\Delta\mathbf{q}$)
$\boldsymbol{\varepsilon}$	Παράμετρος Euler
ζ_i	Συντελεστής απόσβεσης
θ_E	Ο προσανατολισμός του ΤΣΔ για επίπεδες κινήσεις
θ_0	Ο προσανατολισμός του δορυφόρου για επίπεδες κινήσεις
$\theta_{0,d}$	Ο επιθυμητός προσανατολισμός του δορυφόρου του ΔΡΣ για επίπεδες κινήσεις
θ_m	Η γωνιακή θέση του δρομέα του κινητήρα στην έξοδο του μειωτήρα
$\boldsymbol{\theta}_m$	Το διάνυσμα – στήλη των γωνιακών θέσεων του δρομέα του κινητήρα στην έξοδο του μειωτήρα
$\boldsymbol{\theta}_{m,d}$	Η επιθυμητή τελική γωνιακή θέση του δρομέα του κινητήρα στην έξοδο του μειωτήρα
Θ	$=[\boldsymbol{\varepsilon}^T \quad n \quad \mathbf{q}^T]^T$
μ_i	Κατανομή μάζας
$\boldsymbol{\pi}$	Το διάνυσμα-στήλη που περιέχει τις άγνωστες δυναμικές παραμέτρους του συστήματος σε πεπλεγμένη μορφή
$\boldsymbol{\rho}_i^*$	Η θέση του ΚΜ του συστήματος δρομέας – σύνδεσμος ως προς το αδρανειακό ΣΣ
$\boldsymbol{\rho}_{m_i}$	Η θέση του ΚΜ του δρομέα του κινητήρα ως προς το αδρανειακό ΣΣ
$\boldsymbol{\rho}_k$	Το διάνυσμα θέσης του ΚΜ του συνδέσμου k του βραχίονα ως

	προς το αδρανειακό ΣΣ
τ	Το διάνυσμα – στήλη των ροπών στις αρθρώσεις του βραχίονα
τ_i	Η ροπή στην άρθρωση i
τ	Ο αδιάστατος χρόνος
τ_0	Η ροπή που ασκείται στο δορυφόρο από το σφόνδυλο αντίδρασης
$\tau_{c,m}$	Η σταθερά της τριβής Coulomb του κινητήρα
$\tau_{c,L}$	Η σταθερά της τριβής Coulomb του συνδέσμου
$\omega_{n,i}$	Φυσική συχνότητα
$\omega_{n,cl}$	Η φυσική συχνότητα του κλειστού συστήματος
ω_{res}	Η ιδιοσυχνότητα
ω_k	Η γωνιακή ταχύτητα του σώματος k εκφρασμένη στο αδρανειακό ΣΣ
ω_0	Η γωνιακή ταχύτητα του δορυφόρου εκφρασμένη στο αδρανειακό ΣΣ
${}^0\omega_0$	Η γωνιακή ταχύτητα του δορυφόρου εκφρασμένη στο ΣΣ $\{0\}$ του δορυφόρου
ω_E	η γωνιακή ταχύτητα του ΤΣΔ
ω_{m_i}	Η γωνιακή ταχύτητα του δρομέα του κινητήρα

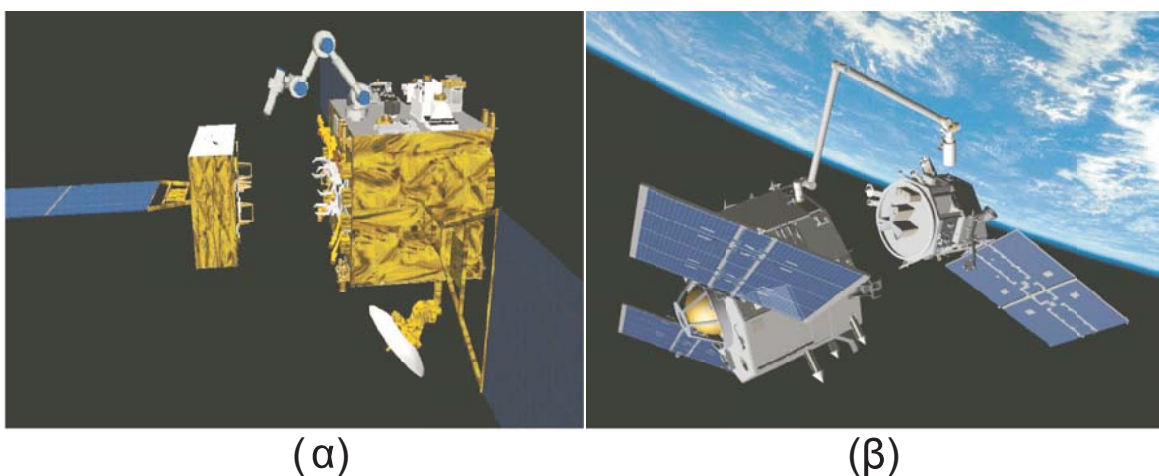
Άλλα Σύμβολα

\mathbf{A}^T	Ανάστροφος του πίνακα \mathbf{A}
\mathbf{A}^{-1}	Αντίστροφος του πίνακα \mathbf{A}
\mathbf{a}^\times	Ο αντισυμμετρικός πίνακας που ορίζεται από το διάνυσμα \mathbf{a}
x_{in}	Αρχική τιμή του μεγέθους x
x_{fin}	Τελική τιμή του μεγέθους x
\dot{x}	Ταχύτητα του μεγέθους x
\ddot{x}	Επιτάχυνση του μεγέθους x

1 Εισαγωγή

1.1 Σκοπός της Εργασίας

Τα Διαστημικά Ρομποτικά Συστήματα (ΔΡΣ) εξαιτίας της ικανότητά τους να δρουν σε περιβάλλοντα που είναι απρόσιτα ή επικίνδυνα για τον άνθρωπο παίζουν σημαντικό ρόλο τόσο στην εξερεύνηση πλανητών όσο και σε εργασίες σε τροχιά. Τα ΔΡΣ σε τροχιά αποτελούνται από έναν επενεργούμενο δορυφόρο (βάση) και από προσαρτημένους πάνω σε αυτό βραχίονες. Πρόσφατα παραδείγματα τέτοιων ΔΣΡ είναι το ETS-7 [105], βλ. Σχήμα 1.1(α) καθώς και το Orbital Express [65], βλ. Σχήμα 1.1(β).



Σχήμα 1.1 (α) Το ΔΡΣ ETS-7 που αναπτύχθηκε από την JAXA και (β) το ΔΡΣ Orbital Express που αναπτύχθηκε από τη DARPA.

Τα τελευταία χρόνια, η επισκευή δορυφόρων καθώς και η απομάκρυνση διαστημικών σκουπιδιών χρησιμοποιώντας αποκλειστικά ΔΡΣ, απασχολεί όλο και περισσότερο τις διαστημικές υπηρεσίες. Επίσης, οι εργασίες σε τροχιά, όπως ο ανεφοδιασμός (refuelling), η επισκευή (repairing) και η εκ νέου τοποθέτηση σε τροχιά (re-orbiting) δορυφόρων είναι εξαιρετικά απαραίτητες για τις διαστημικές δραστηριότητες. Όταν το ΔΡΣ βρίσκεται κοντά στο δορυφόρο-στόχο ώστε να εκτελέσει την επιθυμητή εργασία, οι προωθητήρες του δορυφόρου του ΔΡΣ καθώς και όλα τα συστήματα ελέγχου του πρέπει να είναι απενεργοποιημένα. Στην περίπτωση αυτή, το ΔΡΣ είναι ελεύθερα αιωρούμενο (Free-floating Space Manipulators) και υπάρχει δυναμική σύζευξη μεταξύ του δορυφόρου του ΔΡΣ και των βραχιόνων του. Αυτός ο τρόπος ελέγχου έχει το πλεονέκτημα ότι δεν απαιτούνται καύσιμα για τον έλεγχο του δορυφόρου και ελαχιστοποιείται ο κίνδυνος πιθανών συγκρούσεων του ρομποτικού βραχίονα με το περιβάλλον του, εξαιτίας κάποιας απότομης λειτουργίας (firing) των προωθητήρων του. Ο

παραπάνω τρόπος λειτουργίας είναι εφικτός μόνο όταν οι εξωτερικές δυνάμεις και οι ροπές που ενεργούν στο ΔΡΣ, καθώς και η αρχική ορμή του, είναι μηδέν.

Παρόλα αυτά, κατά την διάρκεια της λειτουργίας του, το ΔΡΣ συσσωρεύει μικρές ποσότητες στροφορμής. Αυτές μπορούν να εξαλειφθούν με ενεργοποίηση των μηχανισμών ελέγχου στροφορμής. Συχνά, οι μηχανισμοί αυτοί φτάνουν σε κορεσμό προτού απορροφήσουν όλη τη συσσωρευμένη στροφορμή του συστήματος. Ο αποκορεσμός τους απαιτεί κυρίως τη χρήση των προωθητήρων του δορυφόρου του ΔΡΣ. Η επανειλημμένη, όμως, χρήση των προωθητήρων έχει ως συνέπεια την κατανάλωση καυσίμων με αποτέλεσμα τη μείωση του χρόνου ζωής του ΔΡΣ. Για το λόγο αυτό, καθώς και λόγω της εντός – εκτός (on – off) φύσης του ελέγχου με προωθητήρες, μια μικρή ποσότητα στροφορμής παραμένει στο ΔΡΣ και επηρεάζει σε σημαντικό βαθμό τη συμπεριφορά του συστήματος. Ένα από τα θέματα που εξετάζονται στην παρούσα εργασία είναι η μη μηδενική αρχική στροφορμή του ΔΡΣ και η επίδραση της στη δυναμική και στον έλεγχο του ΔΡΣ καθώς και στις αναπτυσσόμενες τεχνικές σχεδιασμού δρόμου του Τελικού Σημείου Δράσης (ΤΣΔ).

Κατά τις διάφορες διαστημικές εφαρμογές ενός ΔΡΣ, το ΤΣΔ πρέπει να ακολουθήσει συγκεκριμένη πορεία. Στην εργασία αυτή, λοιπόν, μελετάται ο σχεδιασμός δρόμου στον Καρτεσιανό χώρο. Όμως, στην περίπτωση των ελεύθερα αιωρούμενων ΔΡΣ, ο σχεδιασμός δρόμου στον Καρτεσιανό χώρο, σε αντίθεση με το σχεδιασμό δρόμου στο χώρο των αρθρώσεων, μπορεί να είναι μην είναι πάντα πραγματοποιήσιμος λόγω της ύπαρξης Δυναμικών Ιδιομορφιών (ΔΙ), [72]. Έχει δειχθεί ότι οι ΔΙ είναι δυνατό να παρουσιαστούν σε ορισμένες περιοχές του χώρου εργασίας των ελεύθερα αιωρούμενων ρομποτικών βραχιόνων και η παρουσία τους περιορίζει σημαντικά το χώρο εργασίας των συστημάτων αυτών, [72]. Στην εργασία αυτή παρουσιάζεται μια μεθοδολογία που επιτρέπει την κίνηση του ΤΣΔ σε διαδρομές μέσα σε οποιαδήποτε περιοχή του χώρου εργασίας χωρίς ο βραχίονας να γίνει δυναμικά ιδιόμορφος. Η προτεινόμενη μεθοδολογία εφαρμόζεται για οποιουδήποτε επιθυμητούς δρόμους που πρέπει να διαγράψει το ΤΣΔ του βραχίονα. Καθώς ο δρόμος του ΤΣΔ είναι καθορισμένος, η μεθοδολογία υπολογίζει κατάλληλους αρχικούς προσανατολισμούς του δορυφόρου του ΔΡΣ έτσι ώστε να αποφευχθούν δυναμικά ιδιόμορφοι σχηματισμοί του βραχίονα κατά τη διάρκεια της κίνησης του ΤΣΔ μέσα σε οποιοδήποτε περιοχή του χώρου εργασίας του.

Στα ΔΡΣ, για λόγους ελάττωσης της μάζας εκτόξευσης και αύξησης του χώρου εργασίας, προτιμάται ο σχεδιασμός βραχιόνων μικρού βάρους και μεγάλου μήκους. Αυτός ο σχεδιασμός όμως προκαλεί αύξηση των ευκαμψιών των συνδέσμων του βραχίονα. Επίσης, οι αρθρώσεις των ΔΡΣ οδηγούνται, συνήθως, από αρμονικές μεταδόσεις (harmonic drives). Οι μηχανισμοί αυτοί, όμως, εισάγουν ανεπιθύμητες τριβές και ευκαμψίες στις αρθρώσεις του βραχίονα. Στην παρούσα εργασία και τα δύο παραπάνω

είδη ευκαμψιών θεωρούνται συγκεντρωμένα στις αρθρώσεις του βραχίονα, και μελετάται η επίδραση τους στη δυναμική ανάλυση και στο σχεδιασμό συστημάτων ελέγχου, ειδικά όταν πρέπει να επιτευχθεί ακριβής πορεία του ΤΣΔ του βραχίονα.

1.2 Βιβλιογραφική Ανασκόπηση

Όπως προαναφέρθηκε, στα ελεύθερα αιωρούμενα ΔΡΣ, οι προωθητήρες και οι σφόνδυλοι αντίδρασης του δορυφόρου βρίσκονται εκτός λειτουργίας και ο δορυφόρος του ΔΡΣ μεταφέρεται και περιστρέφεται μέσω των κινήσεων του βραχίονα. Οι ελεύθερα αιωρούμενοι διαστημικοί βραχίονες παρουσιάζουν μη ολόνομη συμπεριφορά η οποία οφείλεται στη μη ολοκληρώσιμη μορφή της στροφορμής του συστήματος, [73]. Αυτή η ιδιότητα περιπλέκει το σχεδιασμό και τον έλεγχο των εν λόγω συστημάτων.

Είναι γνωστό ότι η προσέγγιση των ΔΡΣ ως ελεύθερα αιωρούμενων συστημάτων μπορεί μόνο να υποτεθεί σε συγκεκριμένες καταστάσεις, όπου οι κινήσεις του βραχίονα είναι τοπικές και γίνονται σε σύντομο χρονικό διάστημα. Σε αντίθετη περίπτωση, η παραδοχή αυτή δεν είναι έγκυρη. Γι' αυτό εξετάζεται και το πρόβλημα του σχεδιασμού δρόμου στο γενικότερο πλαίσιο, τη λειτουργία των ελεύθερα ιπτάμενων ΔΣΡ (Free-flying Space Manipulators), [21]. Στην περίπτωση αυτή, η θέση και ο προσανατολισμός του δορυφόρου ελέγχονται από προωθητήρες και σφονδύλους αντίδρασης, για την αντιστάθμιση τυχόν δυνάμεων και ροπών που εξασκούνται από το βραχίονα στο δορυφόρο του ΔΡΣ. Τις τελευταίες δεκαετίες, η δυναμική, ο έλεγχος και ο σχεδιασμός δρόμου των ελεύθερα αιωρούμενων/ιπτάμενων ΔΡΣ καθώς και η εφαρμογή τους σε διάφορες εργασίες σε τροχιά, έχουν μελετηθεί από ένα πλήθος ερευνητών, [22, 47, 100, 108]. Πιο αναλυτικά:

1.2.1 Δυναμική, Σχεδιασμός Δρόμου και Έλεγχος ΔΡΣ

Οι ελεύθερα αιωρούμενοι διαστημικοί βραχίονες είναι συστήματα όπου εμφανίζεται δυναμική σύζευξη μεταξύ όλων των συνδέσμων του βραχίονα και του δορυφόρου του ΔΡΣ. Λόγω της σύζευξης αυτής παρουσιάζονται διαφορές στις κινηματικές και δυναμικές εξισώσεις των συστημάτων αυτών σε σχέση με τους αντίστοιχους επίγειους ρομποτικούς βραχίονες σταθερής βάσης. Οι Vafa και Dubowsky έχουν αναπτύξει μια τεχνική για την περιγραφή της κινηματικής και δυναμικής συμπεριφοράς των ελεύθερα αιωρούμενων ΔΡΣ που ονομάζεται Virtual Manipulator, [97]. Καθώς δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις ή ροπές στο ΔΡΣ, το Κέντρο Μάζας (ΚΜ) του συστήματος παραμένει σταθερό στο αδρανειακό χώρο, επιτρέποντας έτσι την αναπαράσταση του ΔΡΣ με μια κινηματική αλυσίδα, χωρίς μάζα, της οποίας η βάση διατηρείται σταθερή.

Οι Papadopoulos και Dubowsky περιγράφουν την κινηματική και τη δυναμική των ελεύθερα αιωρούμενων ΔΡΣ με ένα βραχίονα μέσω της προσέγγισης των βαρυκεντρικών

διανυσμάτων (Barycentric vector approach), [67-73]. Στην περίπτωση αυτή, το ΚΜ του ΔΡΣ θεωρείται ως το αντιπροσωπευτικό σημείο για τη μεταφορική κίνηση του συστήματος και για την περιγραφή της θέσης του βραχίονα χρησιμοποιούνται τα βαρυκεντρικά διανύσματα, τα οποία αντανakλούν τόσο τη γεωμετρική διαμόρφωση του ΔΡΣ όσο και την κατανομή μάζας του συστήματος. Με την προσέγγιση αυτή, και στην περίπτωση που δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις και ροπές στο ΔΡΣ, επιτυγχάνεται αποσύζευξη των εξισώσεων της γραμμικής ορμής και της στροφορμής του ΔΡΣ από τις υπόλοιπες εξισώσεις. Ο Papadopoulos επέκτεινε την εφαρμογή της μεθόδου μοντελοποίησης μέσω βαρυκεντρικών διανυσμάτων και σε ΔΡΣ με πολλαπλούς βραχίονες, [74]. Με βάση τα προκύπτοντα μοντέλα ορίζεται ο χώρος εργασίας κάθε βραχίονα ο οποίος επηρεάζεται από τη διαμόρφωση των υπόλοιπων βραχιόνων. Επίσης αποδεικνύεται ότι μετά τη σύλληψη κάποιου φορτίου, ο χώρος εργασίας συρρικνώνεται. Η συρρίκνωση αυτή είναι ανάλογη της μάζας του φορτίου και πρέπει να λαμβάνεται υπόψη κατά το χειρισμό μεγάλων φορτίων από ΔΡΣ.

Οι Papadopoulos και Moosavian αναπτύσσουν μια μέθοδο κινηματικής και δυναμικής περιγραφής ΔΡΣ με πολλαπλούς βραχίονες (Direct Path Method) η οποία θεωρεί το ΚΜ της δορυφόρου του ΔΡΣ ως ένα αντιπροσωπευτικό σημείο της μεταφορικής κίνησης του ΔΡΣ, [44-45, 75]. Αποδεικνύεται ότι η μέθοδος αυτή, για ΔΡΣ με πολλαπλούς βραχίονες και στην περίπτωση που ασκούνται στο ΔΡΣ μη μηδενικές εξωτερικές δυνάμεις και ροπές, δηλαδή σε ελεύθερα ιπτάμενα ΔΡΣ, δίνει εξισώσεις με απλούστερους όρους σε σχέση με αυτούς που προκύπτουν από την προσέγγιση των βαρυκεντρικών διανυσμάτων για αντίστοιχα ΔΡΣ.

Ένας ελεύθερα αιωρούμενος διαστημικός βραχίονας είναι ένα υπο-ενεργούμενο (underactuated) σύστημα που εμφανίζει μη ολόνομη συμπεριφορά που οφείλεται στην μη ολοκλήρωση της στροφορμής, [73]. Λόγω των μη ολόνομων περιορισμών, οι συμβατικές μέθοδοι σχεδιασμού δρόμου που εφαρμόζονται σε βραχίονες σταθερής βάσης δεν είναι άμεσα εφαρμόσιμες στους ελεύθερα αιωρούμενους βραχίονες. Στην περίπτωση αυτή, ο σχεδιασμός δρόμου του ΤΣΔ γίνεται πολύ πολύπλοκος επειδή οποιαδήποτε κίνηση του βραχίονα προκαλεί αντίστοιχη κίνηση του δορυφόρου του ΔΡΣ, έτσι ώστε να διατηρείται η στροφορμή του συστήματος. Στην περίπτωση αυτή, η θέση του ΤΣΔ δεν είναι μόνο συνάρτηση της διαμόρφωσης του βραχίονα αλλά και του μη ελεγχόμενου προσανατολισμού του δορυφόρου.

Οι Nakamura και Mukherjee χρησιμοποιούν τεχνικές Lyapunov για την επίτευξη ταυτόχρονου ελέγχου του προσανατολισμού του δορυφόρου και των αρθρώσεων του βραχίονα του ΔΡΣ, [50-51]. Για να περιορίσουν τα αποτελέσματα της σε ένα συγκεκριμένο μηδενικό χώρο (null space), οι συγγραφείς πρότειναν μια αμφίδρομη προσέγγιση, κατά την οποία προγραμματίστηκαν δύο επιθυμητές πορείες, μια που αρχίζει από την αρχική

διαμόρφωση και πηγαίνει προς τα εμπρός και μια άλλη που ξεκινά από την τελική διαμόρφωση και πηγαίνει προς τα πίσω. Η μέθοδος δεν είναι απρόσβλητη από ιδιομορφίες και αποδίδει μη ομαλές τροχιές με τις αρθρώσεις να σταματούν στο σημείο μεταγωγής (switching point). Οι Franch κ.α. χρησιμοποίησαν τη θεωρία της ομαλότητας (flatness theory), για τον προγραμματισμό τροχιών για ελεύθερα αιωρούμενα συστήματα, [23]. Η μέθοδός τους απαιτεί την επιλογή των παραμέτρων του ρομπότ έτσι ώστε το σύστημα να γίνει ελέγξιμο και γραμμικοποιήσιμο. Η προτεινόμενη μέθοδος βρίσκει εφαρμογή σε ένα επίπεδο ΔΡΣ με ένα βραχίονα με τρεις συνδέσμους. Οι Agrawal κ.α. επεκτείνουν την παραπάνω μέθοδο σε ένα τρισδιάστατο ΔΡΣ με ένα βραχίονα τριών συνδέσμων, με την προσθήκη δύο σφονδύλων στροφορμής (momentum wheels) στο δορυφόρο, [6-7].

Οι Vafa και Dubowsky, εμπνευσμένοι από τις κινήσεις των αστροναυτών, πρότειναν μια τεχνική σχεδιασμού δρόμου που την ονόμασαν Self Correcting Motion, η οποία εφαρμόζει μικρές κυκλικές κινήσεις στις αρθρώσεις του βραχίονα για την αλλαγή του προσανατολισμού του δορυφόρου ενός ΔΡΣ, [97]. Οι Papadopoulos κ.α. έχουν προτείνει μια μεθοδολογία σχεδιασμού δρόμου για επίπεδα ΔΡΣ που επιτρέπει ομαλές αλλαγές στη διαμόρφωση του βραχίονα και του προσανατολισμού του δορυφόρου του ΔΡΣ, σε πεπερασμένο και καθορισμένο χρόνο, χωρίς την απαίτηση μικρών κυκλικών κινήσεων, [76-77]. Η προτεινόμενη μέθοδος βασίζεται στο μετασχηματισμό που απεικονίζει το μη ολόνομο περιορισμό, που ορίζεται από τη διατήρηση της στροφορμής του συστήματος, σε ένα χώρο που ικανοποιείται με τετριμμένο τρόπο. Οι Tortopidis και Papadopoulos [89-91], έχουν αναπτύξει μια μέθοδο σχεδιασμού δρόμου από *σημείο σε σημείο* (point-to-point) για υπο-ενεργούμενους διαστημικούς βραχίονες, η οποία επιτρέπει την οδήγηση του ΤΣΔ στην επιθυμητή θέση και συγχρόνως επίτευξη επιθυμητού τελικού προσανατολισμού του δορυφόρου, χρησιμοποιώντας μόνο τους επενεργητές στις αρθρώσεις. Η μέθοδος χρησιμοποιεί πολυώνυμα υψηλής τάξης ως ορίσματα σε τριγωνομετρικές συναρτήσεις, για να ορίσει τον επιθυμητό δρόμο στο χώρο των αρθρώσεων, και παρουσιάζεται στη γενική περίπτωση ενός τρισδιάστατου βραχίονα με N Βαθμούς Ελευθερίας (BE). Πρόσθετες απαιτήσεις, όπως όρια στις αρθρώσεις ή αποφυγή εμπόδιών μπορούν να επιτευχθούν με την προσθήκη περισσότερων βαθμών ελευθερίας στη διαδρομή μέσω της χρήσης πολυωνύμων υψηλότερης τάξης. Δεδομένου ότι η προτεινόμενη μέθοδος εφαρμόζεται στο χώρο των αρθρώσεων, είναι απρόσβλητη από δυναμικές ιδιομορφίες. Όμως δε μπορεί να ακολουθηθεί κάποιος επιθυμητός δρόμος.

Οι Pandey και Agrawal αντιμετωπίζουν το πρόβλημα του σχεδιασμού δρόμου για ένα ελεύθερα αιωρούμενο βραχίονα με πρισματικές αρθρώσεις, [66]. Παρόλα αυτά, ορίζονται μόνο η τελική θέση και ο τελικός προσανατολισμός του ΤΣΔ, και όχι ένας ορισμένος δρόμος. Είναι δηλαδή μέθοδος από σημείο σε σημείο. Οι Lampariello κ.α.

εφαρμόζουν μια μέθοδο σχεδιασμού κίνησης για ελεύθερα ιπτάμενους βραχίονες που δίνει τις βέλτιστες λύσεις για την ενεργοποίηση του δορυφόρου του ΔΡΣ και τη διάρκεια κίνησης, αποφεύγοντας την άσκοπη ενεργοποίηση του δορυφόρου, [31]. Και σε αυτή την περίπτωση ο σχεδιασμός δρόμου γίνεται στον χώρο των αρθρώσεων, με τους ίδιους όπως πριν περιορισμούς.

Οι Agrawal κ.α. έχουν μελετήσει το πρόβλημα σχεδιασμού διαδρομής ενός διαστημικού ρομπότ κλειστής αλυσίδας, περίπτωση κατά την οποία πολλαπλοί ρομποτικοί βραχίονες πιάνουν ένα κοινό αντικείμενο, [5]. Οι συγγραφείς παρουσιάζουν έναν αλγόριθμο για τον προγραμματισμό της κίνησης των ελεύθερα αιωρούμενων ρομπότ χρησιμοποιώντας αντίστροφη κινηματική. Το πρόβλημα των ιδιομορφιών που συναντιούνται κατά την ολοκλήρωση των εξισώσεων της διαφορικής κινηματικής εξακολουθεί να υφίσταται στον αλγόριθμο της αντίστροφης κινηματικής.

Οι σχεδιασμός δρόμου των ελεύθερα αιωρούμενων ΔΡΣ στις παραπάνω εργασίες πραγματοποιείται στο χώρο των αρθρώσεων (joint space, configuration space). Ο σχεδιασμός αυτός αν και δεν επιτρέπει τον ορισμό ενός επιθυμητού δρόμου του ΤΣΔ στον Καρτεσιανό χώρο, έχει το πλεονέκτημα της αποφυγής των ΔΙ. Οι ΔΙ των ελεύθερα αιωρούμενων διαστημικών βραχιόνων που μελετήθηκαν πρώτη φορά από τους Papadopoulos και Dubowsky, [72], δεν συναντιούνται σε χερσαίους ρομποτικούς βραχίονες και οφείλονται στην εξάρτηση της ταχύτητας του ΤΣΔ τόσο από την κίνηση του βραχίονα όσο και από την κίνηση του δορυφόρου του ΔΡΣ. Σε αντίθεση με τις κινηματικές ιδιομορφίες που παρουσιάζονται στους επίγειους βραχίονες σταθερής βάσης ή σε διαστημικούς ρομποτικούς βραχίονες που είναι προσαρτημένοι σε μεγάλη βάση (π.χ. ο βραχίονας Canadarm2 στο Διεθνές Διαστημικό Σταθμό), [101], οι ΔΙ είναι συνάρτηση των δυναμικών ιδιοτήτων του ΔΡΣ. Σε μια δυναμική ιδιομορφία ο βραχίονας δεν μπορεί να κινήσει το ΤΣΔ του σε κάποια διεύθυνση του αδρανειακού χώρου, ενώ η εμφάνισή τους σε κάποια θέση του χώρου εργασίας εξαρτάται από τη διαδρομή που ακολουθεί το ΤΣΔ. Έτσι οι ΔΙ θα πρέπει να λαμβάνονται υπόψη στο σχεδιασμό, στον προγραμματισμό και στον έλεγχο των εν λόγω συστημάτων. Οι Umetani και Yoshida παρουσίασαν τη Γενικευμένη Ιακωβιανή (Generalized Jacobian) για έναν ελεύθερα αιωρούμενο διαστημικό βραχίονα [95]. Υποθέτοντας ότι δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις και το ρομποτικό σύστημα είναι άκαμπτο με περιστροφικές αρθρώσεις, η Γενικευμένη Ιακωβιανή αντανakλά τόσο τους νόμους διατήρησης της ορμής και της στροφορμής καθώς και τις κινηματικές σχέσεις. Η προτεινόμενη Γενικευμένη Ιακωβιανή συγκλίνει με τη συμβατική Ιακωβιανή, όταν η μάζα του δορυφόρου γίνει άπειρη.

Για την αποφυγή των ΔΙ, ο Papadopoulos παρουσίασε μια από σημείο σε σημείο (point-to-point) μέθοδο σχεδιασμού στον Καρτεσιανό χώρο που επιτρέπει την αποτελεσματική χρήση του χώρου εργασίας ενός ελεύθερα αιωρούμενου διαστημικού

βραχίονα αποφεύγοντας τις δυναμικές ιδιομορφίες, χωρίς όμως να γίνει κάποια προσπάθεια ώστε το ΤΣΔ να ακολουθήσει μια καθορισμένη διαδρομή, [71, 73]. Επίσης, οι ΔΙ μπορούν να αποφευχθούν με τη χρήση ΔΡΣ που έχουν πλεονάζοντες βραχίονες (Redundant Manipulators) δηλαδή βραχίονες με περισσότερους ΒΕ από όσους απαιτούνται για την εκτέλεση μιας εργασίας, [82]. Οι Nenchev κ.α. παρουσιάζουν τις κινηματικές και δυναμικές εξισώσεις των διαστημικών ρομποτικών βραχιόνων, εστιάζοντας σε ελεύθερα-ιπτάμενα ΔΡΣ με πλεονάζοντες βραχίονες, [57]. Ο πλεονασμός του συστήματος επιλύεται χρησιμοποιώντας μια προσέγγιση ελάχιστων τετραγώνων και οι προτεινόμενες τεχνικές εφαρμόζονται σε εργασίες με την υπόθεση μηδενικής ορμής και στροφορμής του συστήματος. Οι Xu κ.α. πρότειναν μια μέθοδο σχεδιασμού τροχιάς του ΤΣΔ που χρησιμοποιεί μέθοδο ελάχιστων τετραγώνων με απόσβεση (damped least squares) για να αποφευχθούν πιθανές ΔΙ με απόκλιση όμως του ΤΣΔ από την επιθυμητή του πορεία, [99]. Μια μέθοδος για την αποφυγή ΔΙ, από πλεονάζοντες βραχίονες, έμμεσα μέσω της ελαχιστοποίησης μιας συνάρτησης κόστους προτείνεται στο [32].

Οι Papadopoulos και Dubowsky έχουν δείξει ότι οποιοσδήποτε αλγόριθμος ελέγχου που εφαρμόζεται σε επίγεια ρομποτικά συστήματα, θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για τον έλεγχο τροχιάς του ΤΣΔ, παρά τις κινήσεις του δορυφόρου, εάν ληφθούν υπόψη κάποιες επιπλέον συνθήκες, [70]. Οι συνθήκες αυτές είναι η αποφυγή των ΔΙ και η μέτρηση ή εκτίμηση του προσανατολισμού του δορυφόρου του ΔΡΣ. Στην περίπτωση που χαλάσει μια άρθρωση του ρομποτικού βραχίονα ενός ΔΡΣ και τεθεί εκτός λειτουργίας, οι ίδιοι συγγραφείς έχουν δείξει ότι η άρθρωση αυτή μπορεί να τεθεί υπό έλεγχο εάν υπάρχει σύζευξη μεταξύ του συνδέσμου του οποίου η άρθρωση έχει χαλάσει και ενός άλλου συνδέσμου του οποίου η άρθρωση λειτουργεί, [69]. Στην περίπτωση αυτή ο έλεγχος, που ονομάζεται *Failure Recovery Control*, είναι αποτελεσματικός όταν ο πίνακας αδράνειας (inertia matrix) του ΔΡΣ είναι ανεξάρτητος από τη μεταβλητή της χαλασμένης άρθρωσης.

Οι Umetani και Yoshida, [95], έχουν αναπτύξει μια μέθοδο ελέγχου (*resolved motion rate control*) που βασίζεται στη Γενικευμένη Ιακωβιανή. Ωστόσο, η μέθοδος αποτυγχάνει παρουσία δυναμικών ιδιομορφιών. Οι Caccavale και Siciliano χρησιμοποίησαν quaternions, για να αποφευχθούν οι παραστατικές ιδιομορφίες, και ανέπτυξαν μια παρόμοια μέθοδο ελέγχου για έναν πλεονάζοντα βραχίονα τοποθετημένο σε ένα ελεύθερα αιωρούμενο δορυφόρο, [12]. Παρόλα αυτά, η χρήση της περιορίζεται σε περιπτώσεις που δεν εμφανίζονται ΔΙ. Οι Wang και Xie έχουν αναπτύξει έναν προσαρμοστικό έλεγχο παρακολούθησης βασισμένο στην Ιακωβιανή (*adaptive Jacobian tracking control*) για ελεύθερα αιωρούμενα ΔΡΣ με αβεβαιότητα στις κινηματικές και δυναμικές ιδιότητές τους, [98]. Παρόλα αυτά, για την εφαρμογή αυτού του ελεγκτή το ΤΣΔ

θεωρείται ότι βρίσκεται εκτός των περιοχών του χώρου εργασίας του ΔΡΣ όπου μπορούν να παρουσιαστούν ΔΙ.

Χρησιμοποιώντας τον έμφυτο πλεονασμό BE (redundancy) των ελεύθερα ιπτάμενων ΔΡΣ, οι Papadopoulos και Dubowsky παρουσίασαν μια τεχνική ελέγχου (*coordinated control*) για να ελέγξουν τη θέση και τον προσανατολισμό του δορυφόρου του ΔΡΣ με συντονισμένο τρόπο, [68]. Αυτή η τεχνική ελέγχου μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την αποφυγή συγκρούσεων του ΔΡΣ με το περιβάλλον του ή τη διατήρηση μιας επιθυμητής διαμόρφωσης του βραχίονα κατά τη διάρκεια κίνησης του ΤΣΔ. Για την εφαρμογή του ελέγχου χρησιμοποιήθηκε ένας ελεγκτής ανάστροφης Ιακωβιανής (Transpose Jacobian). Οι Moosavian και Papadopoulos εφαρμόζουν σε επίγειους και διαστημικούς ρομποτικούς βραχίονες έναν νέο νόμο ελέγχου ο οποίος ονομάζεται Modified Transpose Jacobian, [48]. Ο έλεγχος αυτός παρουσιάζει καλύτερη συμπεριφορά, ως προς τα σφάλματα παρακολούθησης και τις δυνάμεις/ροπές που εφαρμόζονται από τους επενεργητές, σε σύγκριση με τον κλασικό νόμο ελέγχου Transpose Jacobian, [13]. Επίσης, σε αντίθεση με τους βασιζόμενους στο μοντέλο (model-based) νόμους ελέγχου, ο έλεγχος αυτός δεν επηρεάζεται από αβεβαιότητες των αδρανειακών χαρακτηριστικών (μάζες, ροπές αδράνειας) των συστημάτων και έχει λιγότερο υπολογιστικό κόστος.

1.2.2 Αντιμετώπιση Αρχικής Στροφορμής

Όλη η προηγούμενη έρευνα βασίζεται στην υπόθεση ότι η αρχική στροφορμή των ελεύθερα αιωρούμενων ΔΡΣ είναι μηδέν. Ωστόσο, όπως προαναφέρθηκε, κατά τη διάρκεια διάφορων εργασιών στο διάστημα, μικρές ποσότητες της στροφορμής τείνουν να συσσωρεύονται. Σε γενικές γραμμές, αυτή η στροφορμή μπορεί να αντιμετωπιστεί για ένα σύντομο χρονικό διάστημα. Αν αυξηθεί πάνω από ένα όριο, πρέπει να ενεργοποιηθούν οι προωθητήρες ή οι σφόνδυλοι αντίδρασης για να την μειώσουν. Ωστόσο, η εκτεταμένη χρήση των προωθητήρων περιορίζει την ωφέλιμη διάρκεια ζωής ενός ρομποτικού συστήματος. Επίσης, οι σφόνδυλοι αντίδρασης τείνουν να φτάσουν σε κορεσμό και, τελικά, απαιτούν επίσης τη χρήση των προωθητήρων. Ως εκ τούτου, η ικανότητα των ελεύθερα αιωρούμενων διαστημικών βραχιόνων να εργάζονται σε τροχιά υπό την παρουσία μικρών ποσοτήτων της στροφορμής είναι σημαντική.

Ένας ελεύθερα αιωρούμενος διαστημικός βραχίονας με μη μηδενική αρχική στροφορμή είναι σύστημα του οποίου η δυναμική περιέχει έναν όρο παράσυρσης (*drift term*). Αυτός ο όρος προκαλείται από τη μη μηδενική στροφορμή και περιπλέκει το σχεδιασμό δρόμου και τον έλεγχο των εν λόγω συστημάτων. Μέχρι σήμερα, πολύ λίγες εργασίες έχουν ασχοληθεί με την ύπαρξη στροφορμής σε ΔΡΣ. Οι Matsuno και Saito έχουν προτείνει ένα νόμο ελέγχου προσανατολισμού του δορυφόρου, θεωρώντας έναν επίπεδο διαστημικό βραχίονα με δύο συνδέσμους και με μη μηδενική αρχική στροφορμή,

[39]. Μολονότι ο ελεγκτής οδηγεί το σύστημα στην επιθυμητή θέση, τελικά το σύστημα παρασύρεται μακριά, λόγω της ύπαρξης μη μηδενικής στροφορμής. Οι Yamada κ.α. έχουν παρουσιάσει μια μέθοδο σχεδιασμού δρόμου για έναν απλό βραχίονα τοποθετημένο σε έναν ελεύθερα αιωρούμενο δορυφόρο εφοδιασμένο με σφονδύλους αντίδρασης, [102]. Αυτή η μέθοδος χρησιμοποιεί τη στροφορμή του δορυφόρου, χωρίς να προκαλεί τον κλονισμό (nutation) του, η οποία λαμβάνει χώρα εκτός εάν ο τελικός προσανατολισμός του δορυφόρου είναι η ίδιος με τον αρχικό. Και στις δυο παραπάνω περιπτώσεις δεν ορίστηκε κάποιος επιθυμητός δρόμος για το ΤΣΔ.

Μηχανικά συστήματα, όπως ρομπότ γυμναστικής και ρομπότ άλματος, περιγράφονται με παρόμοια δυναμική και συμπεριφορές. Οι Mita κ.α. έχουν εισαγάγει μια αναλυτική βέλτιστη ως προς το χρόνο λύση για ένα acrobot με μη μηδενική αρχική ορμή, [41]. Έχουν δείξει ότι βέλτιστες διαδρομές ως προς το χρόνο μπορούν να ληφθούν χρησιμοποιώντας ιδιόμορφο έλεγχο (singular control) και ελεγκτές μεταγωγής (switching controllers). Οι Papadopoulos κ.α. έχουν αναπτύξει μια μέθοδο βελτιστοποίησης για το σχεδιασμό τροχιών σε ρομπότ γυμναστικής, [78]. Το σύστημα σχεδιασμού εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από την αρχική στροφορμή του ρομπότ. Η μέθοδος μπορεί να οδηγήσει το ρομπότ σε έναν επιθυμητό τελικό σχηματισμό ξεκινώντας από έναν αρχικό, και μέσα σε καθορισμένο χρόνο. Η αποφυγή εμποδίων επιτυγχάνεται θέτοντας επιπλέον περιορισμούς.

1.2.2 Διατήρηση Προσανατολισμού του Δορυφόρου του ΔΡΣ

Ενώ, συνήθως, η μεταφορική κίνηση του δορυφόρου του ΔΡΣ δεν δημιουργεί κάποιο πρόβλημα στη λειτουργία του συστήματος, οι περιστροφικές κινήσεις του έχουν συχνά αρνητικές επιπτώσεις. Στην πράξη, η παρέκκλιση του προσανατολισμού του δορυφόρου πρέπει να αποφεύγεται για πολλούς λόγους π.χ. ο προσανατολισμός της κεραίας επικοινωνίας πρέπει να διατηρείται σε κάποια επιθυμητή τιμή έτσι ώστε να εξασφαλίζεται η επικοινωνία του δορυφόρου με τον επίγειο σταθμό ή η κατεύθυνση των ηλιακών συλλεκτών πρέπει να είναι η κατάλληλη που εξασφαλίζει την ενεργειακή αυτονομία του συστήματος. Ερευνητές έχουν προτείνει μεθόδους έτσι ώστε να αποφεύγεται η παρέκκλιση του δορυφόρου από την επιθυμητή τιμή καθώς ο βραχίονας εκτελεί κάποια εργασία (reactionless motion).

Οι Dubowsky και Torres έχουν εισάγει την έννοια του Χάρτη Διαταραχών (Disturbance Map) έτσι ώστε να ελαχιστοποιήσουν τις διαταραχές που εισάγονται στο δορυφόρο του ΔΡΣ από τις κινήσεις του βραχίονα, [20]. Αργότερα, οι ίδιοι συγγραφείς πρότειναν μια πιο αποτελεσματική επέκταση αυτού του χάρτη, [88]. Ο Χάρτης Διαταραχών δίνει τις απαραίτητες τροχιές στο χώρο των αρθρώσεων που πρέπει να ακολουθήσει ο βραχίονας ώστε οι αναπτυσσόμενες διαταραχές στο δορυφόρο του ΔΡΣ

να είναι αμελητέες. Παρόλα αυτά, η μέθοδος αυτή δεν καταφέρνει να εξαλείψει εντελώς τις διαταραχές. Οι Zappa κ.α., [111], εφαρμόζουν την έννοια του Χάρτη Διαταραχών, στην περίπτωση των επίπεδων πολικών βραχιόνων (δηλαδή βραχίονες που αποτελούνται από μια περιστροφική και μία πρισματική άρθρωση). Η πρισματική άρθρωση, αυτού του είδους των ρομπότ, απλοποιεί τη δυναμική του συστήματος, δίνοντας αναλυτικές λύσεις.

Οι Dimitron και Yoshida προτείνουν μια νέα τεχνική, αναφερόμενη ως ολόνομος έλεγχος διανομής (holonomic distribution control), για τον σχεδιασμό τροχιών του βραχίονα έτσι ώστε το ΤΣΔ να οδηγηθεί στο επιθυμητό σημείο στον Καρτεσιανό χώρο δίχως κάποια περιστροφή του δορυφόρου, [19]. Η τεχνική αυτή χρησιμοποιεί το γεγονός ότι ο συνδυασμός δύο ή περισσότερων μη ολόνομων περιορισμών μπορεί να οδηγήσει σε ένα σύνολο από ολόνομους περιορισμούς.

Οι Nenchev κ.α. εφαρμόζουν μια μεθοδολογία σχεδιασμού δρόμου, βασιζόμενοι στην τεχνική Reaction Null Space (RNS), σε ένα ρομποτικό βραχίονα με εύκαμπτη βάση έτσι ώστε να μην προκληθούν διαταραχές στη βάση από τις κινήσεις του βραχίονα, [58]. Αργότερα, οι ίδιοι συγγραφείς επεκτείνουν την παραπάνω μέθοδο και σε ΔΡΣ, [59]. Η μέθοδος αυτή εφαρμόζεται σε ΔΡΣ με *πλεονάζοντες βραχίονες* και υπολογίζει τις απαιτούμενες ταχύτητες των αρθρώσεων του βραχίονα του ΔΡΣ που εισάγουν μηδενικές ροπές αντίδρασης στο δορυφόρο του ΔΡΣ. Για τη σταθεροποίηση της βάσης του ΔΡΣ, οι Yoshida κ.α. προτείνουν την τεχνική Zero Reaction Maneuver (ZRM) η οποία επαληθεύτηκε πειραματικά σε εργασίες σε τροχιά μέσω του ΔΡΣ ETS-VII, [105]. Η χρήση της τεχνικής ZRM έχει αρκετούς περιορισμούς σε τρισδιάστατα ΔΡΣ με ρομποτικούς βραχίονες με 6 ΒΕ.

Οι παραπάνω εργασίες μελετούν ΔΡΣ στα οποία ο δορυφόρος έχει προσαρτημένο ένα ρομποτικό βραχίονα. Σε αρκετές περιπτώσεις η χρήση ΔΡΣ με πολλαπλούς ρομποτικούς βραχίονες παρουσιάζουν πλεονεκτήματα στις εργασίες σε τροχιά. Οι Yoshida κ.α. εισάγουν τη χρήση ενός ελεύθερα αιωρούμενου ΔΡΣ με δύο βραχίονες (dual-arm), [104]. Καθώς ο ένας βραχίονας εκτελεί την επιθυμητή εργασία, ο άλλος κάνει κατάλληλες κινήσεις έτσι ώστε ο προσανατολισμός του δορυφόρου του ΔΡΣ να μη μεταβληθεί. Πιο πρόσφατα, οι Shah κ.α. πρότειναν μια μέθοδο ώστε και οι δύο βραχίονες του ΔΡΣ συλλάβουν ένα περιστρεφόμενο αντικείμενο και παράλληλα η κίνηση τους να μη προκαλέσει κάποια μεταβολή στο προσανατολισμό του δορυφόρου του ΔΡΣ, [81]. Για να αποφευχθεί πιθανή σύγκρουση με το περιστρεφόμενο αντικείμενο, τα ΤΣΔ και των δύο βραχιόνων έχουν κοινή ταχύτητα με τα σημεία επαφής του αντικειμένου. Τελευταία, ένας ελεγκτής που βασίζεται σε ανατροφοδότηση μετρήσεων από οπτικούς αισθητήρες (vision-based robot control ή visual servoing) χρησιμοποιήθηκε για την οδήγηση των ΤΣΔ των βραχιόνων σε επιθυμητά σημεία ασκώντας μηδενική διαταραχή στο δορυφόρο του ΔΡΣ,

[1]. Ο προτεινόμενος ελεγκτής εφαρμόστηκε σε ένα επίπεδο ΔΡΣ με δυο βραχίονες 3-BE των οποίων τα ΤΣΔ έφεραν κάμερες.

1.2.3 Σύλληψη Μη Συνεργάσιμων Δορυφόρων

Πολλές ερευνητικές εργασίες ασχολούνται με τη σύλληψη μη συνεργάσιμων (tumbling, non-cooperative) δορυφόρων από διαστημικούς βραχίονες όπου εμφανίζεται ανταλλαγή στροφορμής. Η επιχείρηση σύλληψης (capture operation) ενός δορυφόρου-στόχου περιλαμβάνει τις φάσεις *προσέγγισης* (approaching, pre-impact), *επαφής* (impact) και *μετά-σύλληψης* (post-impact).

Οι Dimitron και Yoshida έχουν παρουσιάσει μια στρατηγική για την σύλληψη ενός μη συνεργάσιμου δορυφόρου από έναν διαστημικό βραχίονα, [17]. Πρότειναν μία μέθοδο διανομής στροφορμής στο ρομποτικό βραχίονα (Bias Momentum Approach) κατά τη φάση προσέγγισης. Ελέγχοντας την είσοδο ροπής στους σφονδύλους αντίδρασης και στις αρθρώσεις του βραχίονα, ο βραχίονας αποκτά αντίθετη στροφορμή από το αντικείμενο προσέγγισης έτσι ώστε μετά την επαφή τους το σύστημα ΔΡΣ – αντικείμενο να έχει συνολική στροφορμή ίση με μηδέν. Επίσης, στη φάση προσέγγισης χρησιμοποιείται η τεχνική RNS ώστε να διατηρηθεί η απόκλιση του προσανατολισμού του δορυφόρου κοντά στο μηδέν. Η προτεινόμενη μέθοδος εφαρμόστηκε σε έναν επίπεδο ΔΡΣ με ένα βραχίονα 3-BE. Οι ίδιοι συγγραφείς, προσθέτουν και την τεχνική Ελέγχου Κατανεμημένης Στροφορμής (Distributed Momentum Control), [18], η οποία διαχειρίζεται τη στροφορμή του συστήματος με τέτοιο τρόπο ώστε να μην προκληθεί καμία αλλαγή στον προσανατολισμό του δορυφόρου κατά την μετά-προσέγγιση φάση. Οι Yoshida κ.α. εφαρμόζουν επιπλέον και τη τεχνική του ελέγχου σύνθετης αντίστασης (impedance control) κατά τη διάρκεια της φάσης επαφής ώστε να διασφαλιστεί ότι ο δορυφόρος-στόχος δεν θα ωθείται μακριά κατά τη διάρκεια της επαφής, [107]. Αργότερα, οι Oki κ.α. έδειξαν ότι οι τεχνικές Ελέγχου Κατανεμημένης Στροφορμής και ελέγχου σύνθετης αντίστασης μπορούν να χρησιμοποιηθούν ταυτόχρονα εάν το ΔΡΣ έχει πλεονάζοντα βραχίονα, [62]. Επίσης, μια τεχνική ελέγχου βέλτιστου χρόνου που αρχικά είχε προταθεί για ρομποτικούς βραχίονες σταθερής βάσης, [9], επεκτείνεται και σε ΔΡΣ κατά τη διάρκεια της φάσης προσέγγισης με περιορισμούς στη ροπή του σφονδύλου αντίδρασης καθώς και στη στροφορμή που μπορεί να απορροφήσει, [63]. Ενώ αργότερα, ο νόμος ελέγχου βέλτιστου χρόνου λαμβάνει υπόψη περιορισμούς στις δυνάμεις και ροπές στην αρπάγη του βραχίονα καθώς και αβεβαιότητες στις παραμέτρους του προς σύλληψη αντικειμένου, [64]. Οι Yoshikawa και Yamada προτείνουν έναν έλεγχο της στροφορμής ενός μη συνεργάσιμου δορυφόρου μέσω κατάλληλης ώθησης από το βραχίονα του ΔΡΣ, [109].

Ο Aghili αναπτύσσει μια μεθοδολογία βασισμένη στην θεωρία του βέλτιστου ελέγχου (την αρχή του Pontryagin) ώστε, κατά τη φάση της μετά-σύλληψης, να

σταθεροποιηθεί ο δορυφόρος-στόχος που συλλαμβάνει ο βραχίονας σε ελάχιστο χρόνο, [3]. Η μέθοδος λαμβάνει υπόψη και περιορισμούς ροπών μεταξύ βραχίονα και δορυφόρου-στόχου, και επιτυγχάνει σταθεροποίηση του προσανατολισμού του δορυφόρου του ΔΡΣ, μέσω ενός συνδυασμού ελεγκτή γραμμικοποίησης μέσω ανατροφοδότησης (feedback linearization) και PD ελεγκτή ανατροφοδότησης του προσανατολισμού του δορυφόρου του ΔΡΣ (PD quaternion feedback). Επίσης, στην εργασία [4], ο ίδιος συγγραφέας μελετά επιπλέον και τη φάση προσέγγισης. Χρησιμοποιεί μια συνάρτηση κόστους έτσι ώστε το ΤΣΔ να φτάσει στο σημείο επαφής με κοινή ταχύτητα με αυτό, μέσα σε ελάχιστο χρόνο. Οι παραπάνω προσεγγίσεις βέλτιστου ελέγχου αποτυγχάνουν σε περίπτωση που οι δυναμικές παράμετροι του δορυφόρου-στόχου δεν είναι γνωστές. Οι Nguyen Huynh και Sharf, λοιπόν, προτείνουν έναν προσαρμοστικό αλγόριθμο ελέγχου έτσι ώστε οι παραγόμενες κινήσεις του βραχίονα να έχουν ως αποτέλεσμα την ελάχιστη διαταραχή στο δορυφόρο του ΔΡΣ μετά τη σύλληψη ενός μη συνεργάσιμου δορυφόρου με άγνωστες παραμέτρους, [60].

Όταν δυο ή περισσότεροι ρομποτικοί βραχίονες ενός ΔΡΣ συλλαμβάνουν ένα αντικείμενο, σχηματίζονται κλειστές κινηματικές αλυσίδες. Αυτές επιβάλλουν κινηματικούς περιορισμούς που έχουν ως αποτέλεσμα την ανάπτυξη εσωτερικών δυνάμεων μεταξύ του αντικειμένου και των ΤΣΔ των ρομπότ. Οι δυνάμεις αυτές, εάν είναι ανεξέλεγκτες, μπορούν να βλάψουν το αντικείμενο ή τα ίδια τα ρομπότ κατά την εκτέλεση μιας εργασίας. Σε τέτοιες διαστημικές εφαρμογές δύο κύριες μεταβλητές πρέπει να ρυθμίζονται ταυτόχρονα, η θέση του αντικειμένου και οι εσωτερικές δυνάμεις, οι οποίες δεν συμβάλλουν στην κίνηση του αντικειμένου. Οι Hu και Vukobratich [28] αναπτύσσουν την κινηματική και τη δυναμική των ελεύθερα αιωρούμενων διαστημικών ρομποτικών συστημάτων με περιορισμούς κλειστής κινηματικής αλυσίδας. Αποδεικνύεται ότι στην περίπτωση αυτή παρουσιάζεται επίσης το πρόβλημα των δυναμικών ιδιομορφιών, όπως στην περίπτωση της ανοικτής κινηματικής αλυσίδας, αλλά σε μια ακόμα πιο σοβαρή μορφή. Υποθέτοντας ότι τα κινηματικά και δυναμικά μοντέλα είναι ακριβώς γνωστά, προτείνεται ένα σύστημα ελέγχου για τη ρύθμιση θέσης του αντικειμένου και των εσωτερικών δυνάμεων. Ο προτεινόμενος ελεγκτής αποτελείται από δύο μέρη, τον ελεγκτή θέσης και τον ελεγκτή εσωτερικής δύναμης. Αποδεικνύεται ότι με τον προτεινόμενο ελεγκτή η θέση του αντικειμένου και οι εσωτερικές δυνάμεις μπορούν να ελέγχονται ώστε να παρακολουθούνται ασυμπτωτικά οι επιθυμητές τροχιές τους.

Οι Matsumoto κ.α. αντιμετωπίζουν το πρόβλημα της σύλληψης ενός αντικειμένου από ένα ελεύθερα ιπτάμενο ΔΡΣ, ως ένα πρόβλημα σχεδιασμού τροχιάς που επιλύεται με μεθόδους μη γραμμικής βελτιστοποίησης, [38]. Εστίασαν στο σχεδιασμό προσέγγισης και καθοδήγησης για τη σύλληψη ανεξέλεγκτα περιστρεφόμενων δορυφόρων λαμβάνοντας υπόψη θέματα όπως η αποφυγή συγκρούσεων μεταξύ των διαστημικών ρομπότ και του

δορυφόρου-στόχου, και η τροχιακή μηχανική (orbital mechanics), και ρεαλιστικούς περιορισμούς όπως την ικανότητα ελέγχου, σφάλματα αισθητήρων και περιορισμούς στους επενεργητές.

Στις παραπάνω εργασίες, η σταθεροποίηση (detumbling) του μη συνεργαζόμενου δορυφόρου γίνεται μέσω φυσικής επαφής με το βραχίονα του ΔΡΣ η οποία περιέχει το κίνδυνο σύγκρουσης ΔΡΣ-δορυφόρου και πιθανή καταστροφή διάφορων εξαρτημάτων τους. Για να μειώσουν αυτό τον κίνδυνο, οι Sugai κ.α. προτείνουν τη σταθεροποίηση του μη συνεργαζόμενου δορυφόρου από ένα σύστημα φρεναρίσματος μέσω ρευμάτων Eddy (Eddy Current Brake System), [86]. Το σύστημα αυτό μπορεί να εφαρμόσει μια δύναμη επιβράδυνσης του δορυφόρου-στόχου χωρίς κάποια φυσική επαφή με αυτό.

1.2.4 Έλεγχος Δύναμης στα ΔΡΣ

Κατά τη σύλληψη ενός δορυφόρου-στόχου από ένα ΔΡΣ, εκτός από τη μεταφορά στροφορμής που αναλύθηκε στην προηγούμενη παράγραφο, οι επιχειρήσεις σύλληψης μη συνεργάσιμων δορυφόρων είναι πιθανό να περιλαμβάνουν και δυναμικές διαταραχές που οφείλονται κυρίως στη διαφορά ταχυτήτων μεταξύ των δύο σωμάτων που έρχονται σε επαφή. Είναι σημαντικό να έχουμε πρόσβαση στο αποτέλεσμα αυτών των διαταραχών για να δούμε αν θέτουν σε κίνδυνο τη δομική ασφάλεια ή/και τη σταθερότητα προσανατολισμού των συστημάτων αυτών. Η Δυναμική Επαφής (Contact Dynamics), λοιπόν, είναι να είναι ένα σημαντικό θέμα στις διαστημικές εφαρμογές. Μετά την αρχική επαφή του ΤΣΔ με το δορυφόρο-στόχο, είναι επιθυμητή η παρατεταμένη επαφή έτσι ώστε το σύστημα ελέγχου να έχει τη δυνατότητα να αποσβέσει τις δονήσεις που δημιουργούνται κατά την πρόσκρουση, να εφαρμόσει μια επιθυμητή ποσότητα δύναμης και να διαβεβαιώσει ότι δεν υπάρχει ζημία των εξαρτημάτων λόγω υπερφόρτωσης.

Οι Yoshida κ.α. διατυπώνουν την κίνηση επαφής μεταξύ άκαμπτων συστημάτων που αιωρούνται στο διάστημα χρησιμοποιώντας ένα μοντέλο *σύνθετης αντίστασης* (impedance model) και διερευνούν τις δυναμικές συνθήκες, προκειμένου ένα ρομπότ κυνηγός (chaser robot) να συλλάβει ένα μη συνεργάσιμο στόχο, [106]. Οι Moosavian και Papadopoulos [46, 49] έχουν επεκτείνει τη μέθοδο ελέγχου σύνθετης αντίστασης σε ελεύθερα-ιπτάμενα διαστημικά συστήματα με πολλούς βραχίονες για τη σύλληψη ενός αντικείμενου. Έχουν προτείνει τη μέθοδο του Πολλαπλού Ελέγχου Σύνθετης Αντίστασης (Multiple Impedance Control, MIC), ένα νέο αλγόριθμο που επιβάλλει σε όλα τα συμμετέχοντα ΤΣΔ και τα χειριζόμενα αντικείμενα να συμπεριφέρεται σαν μια σχεδιασμένη σύνθετη αντίσταση ως αντίδραση σε οποιαδήποτε εξωτερική διαταραχή. Με ανάλυση σφάλματος, φαίνεται ότι, κάτω από τον έλεγχο MIC, όλοι οι συμμετέχοντες βραχίονες, ο ελεύθερα-ιπτάμενος δορυφόρος του ΔΡΣ και το χειριζόμενο αντικείμενο παρουσιάζουν την ίδια σχεδιασμένη συμπεριφορά σύνθετης αντίστασης, καταλήγοντας

σε μία προσαρμοσμένη παρακολούθηση των διαφόρων βραχιόνων του συστήματος, μαζί με το αντικείμενο, ακόμη και στην παρουσία δυνάμεων κρούσης.

Μια σημαντική εργασία ΔΡΣ σε τροχιά είναι η συναρμολόγηση (assembly) μεγάλων κατασκευών. Οι Boning και Dubowsky προτείνουν την εφαρμογή μιας ομάδας από ΔΡΣ για την απαιτούμενη συναρμολόγηση και την εφαρμογή μιας μεθόδου ελέγχου για την απόσβεση των ταλαντώσεων που προέρχονται από το χειρισμό μεγάλων εύκαμπτων αντικειμένων, [10]. Τα ΔΡΣ χρησιμοποιούν τους προωθητήρες τους για τον έλεγχο της κίνησης του άκαμπτου σώματος και του βραχίονες για την ακύρωση των ταλαντώσεων που προκαλεί η κίνηση αυτή στους εύκαμπτους τρόπους (flexible modes) της κατασκευής. Οι Rekleitis και Papadopoulos αναπτύσσουν μια μεθοδολογία σχεδιασμού δρόμου και ελέγχου για το χειρισμό παθητικών αντικειμένων από συνεργαζόμενα ελεύθερα ιπτάμενα ΔΡΣ χρησιμοποιώντας την εντός – εκτός (on – off) λειτουργία των προωθητήρων και τις συνεχείς (continuous) δυνάμεις από τους βραχίονες, [80].

Οι Moosavian και Rastegari [42] παρουσιάζουν μια δυναμική ανάλυση ευστάθειας, με βάση την άμεση μέθοδο του Lyapunov, εκτός από την ανάλυση σφαλμάτων, η οποία δείχνει ότι, σύμφωνα με το νόμο ελέγχου MIC όλοι οι συμμετέχοντες βραχίονες, ο ελεύθερα-ιπτάμενος δορυφόρος και το χειριζόμενο αντικείμενο εμφανίζουν την ίδια σχεδιασμένη συμπεριφορά σύνθετης αντίστασης. Επίσης, μια στρατηγική παρακολούθησης δύναμης εμπνευσμένη από το ανθρώπινο σύστημα ελέγχου, στην οποία οι εν λόγω εργασίες παρακολούθησης υλοποιούνται με αλλαγή στην ακαμψία των μυών, προστίθεται στον αλγόριθμο MIC και η γενική μέθοδος αναθεωρείται ώστε να εκπληρώσει μία στρατηγική επιθυμητής παρακολούθησης δύναμης για εργασίες χειρισμού αντικειμένων. Η δύναμη που ασκείται επί του αντικείμενου μπορεί να ελέγχεται με κατάλληλη μεταβολή της ακαμψίας, απόσβεσης και επιθυμητής μάζας από τον ελεγκτή. Με βάση την ενσωματωμένη στρατηγική παρακολούθησης δύναμης, η δύναμη επαφής περιορίζεται να ακολουθήσει την επιθυμητή πορεία. Στο [79], οι ίδιοι συγγραφείς εισάγουν ένα νέο μοντέλο, που ονομάζεται εικονικό μοντέλο δεσμού (virtual linkage model), για να χαρακτηρίζουν τις εσωτερικές δυνάμεις και ροπές που ενεργούν σε ένα αντικείμενο, και για να χρησιμοποιηθεί στο νόμο ελέγχου MIC.

Οι Moosavian και Mostafavi [43] έχουν επεκτείνει το νόμο ελέγχου MIC για πολλαπλούς πλεονάζοντες ρομποτικούς βραχίονες που χειρίζονται ένα κοινό στόχο, με την παρουσία κρούσεων που οφείλονται στην επαφή με το περιβάλλον. Λόγω των πλεοναζόντων ΒΕ, ο Ιακωβιανός πίνακας δεν είναι τετραγωνικός. Ωστόσο, στην προτεινόμενη μέθοδο, η προσαρμογή της συμπεριφοράς του ρομπότ γίνεται χωρίς υπολογισμό του αντίστροφου Ιακωβιανού πίνακα. Με την ανάπτυξη του νόμου MIC, η ανάλυση σφάλματος δείχνει ότι υπό το νόμο MIC όλοι οι συμμετέχοντες βραχίονες και το

υπό χειρισμό αντικείμενο παρουσιάζουν την ίδια σχεδιασμένη συμπεριφορά σύνθετης αντίστασης.

1.2.5 Εύκαμπτα ΔΡΣ

Οι διαστημικοί βραχίονες λόγω της μηχανολογικής τους κατασκευής, παρουσιάζουν ευκαμψίες σε μεγάλο βαθμό. Οι ευκαμψίες εμφανίζονται τόσο στις αρθρώσεις όσο και στους συνδέσμους του βραχίονα. Η ελαστικότητα στις αρθρώσεις οφείλεται κυρίως στις αρμονικές μεταδόσεις. Οι αρμονικές μεταδόσεις είναι ένα είδος μηχανισμού μετάδοσης κίνησης ο οποίος είναι πολύ δημοφιλής σε διαστημικές εφαρμογές εξαιτίας του μικρού βάρους και μεγέθους, της αμελητέας υστέρησης και του μεγάλου λόγου μετάδοσης ροπής. Παρόλα αυτά όμως, οι μηχανισμοί αυτοί εισάγουν ανεπιθύμητες τριβές και ευκαμψίες στις αρθρώσεις του ρομπότ. Η ελαστικότητα στους συνδέσμους οφείλεται στο ότι οι διαστημικοί βραχίονες κατασκευάζονται έτσι ώστε να έχουν συνδέσμους με μικρό βάρος, και συνεπώς μικρότερο κατασκευαστικό κόστος, και με μεγάλο μήκος που συνεπάγεται μεγαλύτερο χώρο εργασίας. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα τέτοιων βραχιόνων είναι ο διαστημικός βραχίονας Canadarm 2, βλ. Σχήμα 1.2. Κατά το χειρισμό μεγάλων ωφέλιμων φορτίων, οι ευκαμψίες αυτές είναι σημαντικές και μπορούν να οδηγήσουν σε αστάθεια του συστήματος, ή σε εκδήλωση οριακών κύκλων (limit cycles), [36-37]. Επιπλέον, σε ένα ρομποτικό σύστημα, φυσικές συχνότητες αλλάζουν συνεχώς με το σχηματισμό του βραχίονα και το ωφέλιμο φορτίο, [11]. Ως εκ τούτου, ο έλεγχος αυτών των συστημάτων είναι πιο πολύπλοκος.



Σχήμα 1.2 Ο Διαστημικός ρομποτικός βραχίονας Canadarm 2 παρουσιάζει ευκαμψίες στους συνδέσμους του, λόγω του μεγάλου μήκους του.

Κατά τις τελευταίες δεκαετίες, έχουν προταθεί διάφορα δυναμικά μοντέλα για επίγειους ρομποτικούς βραχίονες σταθερής βάσης με εύκαμπτες αρθρώσεις. Ένα απλοποιημένο μοντέλο, το οποίο στη βιβλιογραφία ονομάζεται, συνήθως, μειωμένο (*reduced*) μοντέλο, υποθέτει ότι η περιστροφική κινητική ενέργεια των δρομέων των κινητήρων οφείλεται μόνο στη σχετική περιστροφή (*spinning*) τους γύρω από τους άξονες τους, [14]. Ένα πιο ακριβές δυναμικό μοντέλο, που ονομάζεται πλήρες (*complete*), περιλαμβάνει επίσης την αδρανειακή σύζευξη που υπάρχει μεταξύ των κινητήρων και των συνδέσμων, [15]. Κάθε ένα από αυτά τα μοντέλα έχει διαφορετικές δομικές ιδιότητες από την άποψη του ελέγχου.

Αρκετοί ελεγκτές έχουν προταθεί για την αντιμετώπιση του προβλήματος των εύκαμπτων αρθρώσεων για βραχίονες σταθερής βάσης, συμπεριλαμβανομένων και τεχνικών παρόμοιων με εκείνες που εφαρμόζονται σε βραχίονες με άκαμπτες αρθρώσεις. Ο Tomei προτείνει έναν απλό ελεγκτή PD για βραχίονες με εύκαμπτες αρθρώσεις, παρέχοντας αποτελέσματα της προσομοίωσης για ένα πρόβλημα ελέγχου γύρω από τη θέση αναφοράς, [87]. Η επέκταση του ελεγκτή PD για ρομποτικούς βραχίονες με εύκαμπτες αρθρώσεις λαμβάνοντας υπόψη και τη δυναμική των επενεργητών καθώς και τη τριβή, παρουσιάζεται από τους Lozano κ.α., [34].

Μια διαφορετική προσέγγιση μοντελοποίησης που ονομάζεται μέθοδος ιδιόμορφων διαταραχών (*singular perturbation*) μπορεί να εφαρμοστεί όταν η δυσκαμψία των αρθρώσεων είναι σχετικά μεγάλη, αλλά πεπερασμένη. Τότε, το σύστημα εμφανίζει μια δυναμική συμπεριφορά δύο χρονικών κλιμάκων από την άποψη των άκαμπτων και των ελαστικών μεταβλητών. Χρησιμοποιώντας αυτή τη μέθοδο, μπορεί κανείς να εφαρμόσει ελεγκτές που αποτελούνται από έναν ελεγκτή βραδείας δράσης σχεδιασμένου επί τη βάση του μοντέλου του άκαμπτου βραχίονα και μια γρήγορη δράση ελέγχου σχεδιασμένη για να αποσβέσει τις ελαστικές ταλαντώσεις στις αρθρώσεις, [24, 85].

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, η δομή του μοντέλου των βραχιόνων σταθερής βάσης με εύκαμπτες αρθρώσεις που θα χρησιμοποιηθεί επηρεάζει τη μέθοδο ελέγχου. Το μειωμένο μοντέλο μπορεί να αποσυμπλεχθεί πλήρως και να γραμμικοποιηθεί μέσω ενός *στατικού μη γραμμικού έλεγχου γραμμικοποίησης με χρήση ανάδρασης καταστάσεων* του συστήματος (*nonlinear static state feedback control law*), παρόμοιο με το γνωστό έλεγχο *υπολογιζόμενης ροπής* (*computed torque*) που εφαρμόζεται σε άκαμπτους βραχίονες, [84]. Από την άλλη πλευρά, όταν εξετάζεται η πιο πλήρης δυναμική, ένας ικανοποιητικός έλεγχος του ΤΣΔ είναι εφικτός μόνο με την εφαρμογή ενός πιο πολύπλοκου *δυναμικού ελεγκτή ανατροφοδότησης κατάστασης* (*dynamic state feedback controller*), [15]. Η εφαρμογή αυτών των ελεγκτών, προϋποθέτει τη διαθεσιμότητα μετρήσεων και της γωνιακής θέσης και ταχύτητας του κινητήρα καθώς και του συνδέσμου. Ωστόσο, η πλήρης ανάδραση της κατάστασης του βραχίονα με εύκαμπτες αρθρώσεις δεν είναι

συνήθως διαθέσιμη. Σε μια τέτοια περίπτωση, η εφαρμογή κάποιου παρατηρητή κατάστασης είναι απαραίτητη. Ένας νέος παρατηρητής που χρησιμοποιεί μόνο μετρήσεις της γωνιακής θέσης του δρομέα, μαζί με επιταχυνσιόμετρα κατάλληλα τοποθετημένα στους συνδέσμους του ρομποτικού βραχίονα προτάθηκε από τους De Luca κ.α., [16]. Το κύριο πλεονέκτημά του είναι ότι η δυναμική σφάλματος στην εκτίμηση της κατάστασης είναι ανεξάρτητη από τις δυναμικές παραμέτρους των συνδέσμων του βραχίονα.

Είναι γνωστό ότι οι φυσικές συχνότητες ενός βραχίονα αλλάζουν συνεχώς με τη διαμόρφωση του και το φορτίο του, [11]. Επιπλέον, σε διαστημικές εφαρμογές, κατά το χειρισμό μεγάλων φορτίων, οι ευκαμψίες στις αρθρώσεις καθώς και η δομική ευκαμψία στους συνδέσμους γίνονται σημαντικές και μπορούν να οδηγήσουν σε δυναμικές αλληλεπιδράσεις με το δορυφόρο προκαλώντας κατανάλωση καυσίμων. Αυτές οι αλληλεπιδράσεις μπορούν να οδηγήσουν σε αστάθεια του συστήματος ελέγχου, ή να εκδηλωθούν ως οριακοί κύκλοι (limit cycles). Ως εκ τούτου, ο έλεγχος αυτών των συστημάτων γίνεται πιο πολύπλοκος.

Οι Martin, Papadopoulos και Angeles [36] εξετάζουν πιθανές αλληλεπιδράσεις μεταξύ του ελεγκτή προσανατολισμού του δορυφόρου ενός ΔΡΣ και των ευέλικτων τρόπων ενός διαστημικού βραχίονα που είναι τοποθετημένος σε αυτό. Χρησιμοποιείται ένα απλό μηχανικό σύστημα για την προσέγγιση της δυναμικής συμπεριφοράς ενός βραχίονα με δύο ελαστικές αρθρώσεις στερεωμένου σε ένα δορυφόρο τριών βαθμών ελευθερίας. Οι συγγραφείς προτείνουν ένα σύστημα ελέγχου που βασίζεται σε προωθητήρες με on-off βαλβίδες, δεδομένου ότι η ως τότε διαθέσιμη τεχνολογία δεν επέτρεπε τη χρήση αναλογικών βαλβίδων στο διάστημα, και ως εκ τούτου, δεν μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν οι κλασικοί PD και PID νόμοι ελέγχου. Οι προτεινόμενες είσοδοι στον ελεγκτή είναι η θέση και η ταχύτητα του βασικού συστήματος. Και οι δύο μπορούν να ληφθούν από μετρήσεις αισθητήρων, χρησιμοποιώντας την τρέχουσα διαστημική τεχνολογία. Οι ίδιοι συγγραφείς προτείνουν μια νέα προσέγγιση για τη μείωση των δυναμικών αλληλεπιδράσεων χρησιμοποιώντας την τεχνική *περιγραφικής-συνάρτησης* (describing-function) σε συνδυασμό με τη μέθοδο του γεωμετρικού τόπου ριζών που εφαρμόζεται στον έλεγχο γραμμικών συστημάτων, [37]. Η προτεινόμενη μέθοδος έχει το πλεονέκτημα ότι παρέχει μια διαφορετική εικόνα του προβλήματος δημιουργώντας μια καλύτερη φυσική σημασία του προβλήματος της δυναμικής αλληλεπίδρασης. Παρέχει επίσης ένα πολύτιμο εργαλείο για το σχεδιασμό των νέων συστημάτων ελέγχου για την εξάλειψη αυτού του προβλήματος.

Οι Hu και Vukovich [29] μελετούν ένα σύστημα που αποτελείται από έναν βραχίονα με πολλές εύκαμπτες αρθρώσεις τοποθετημένο σε ένα δορυφόρο με περιορισμούς κλειστής κινηματικής αλυσίδας. Πρώτον, αναπτύσσονται οι κινηματικές και δυναμικές εξισώσεις αυτών διαστημικών ρομποτικών συστημάτων. Χρησιμοποιώντας τη *θεωρία*

ιδιόμορφων διαταραχών (singular perturbation theory), ο ελεύθερα-ιπτάμενος διαστημικός βραχίονας χωρίζεται σε δύο υποσυστήματα, ένα αργό υποσύστημα που διέπει τη θέση του αντικειμένου και τις εσωτερικές δυνάμεις, και ένα άλλο γρήγορο υποσύστημα που διέπει τις ελαστικές δυνάμεις στις αρθρώσεις. Ένας σύνθετος ελεγκτής που αποτελείται από έναν ελεγκτή για τη θέση και την εσωτερική δύναμη για το αργό υποσύστημα και έναν ελεγκτή για την ελαστική δύναμη στις αρθρώσεις για το γρήγορο υποσύστημα σχεδιάζεται για να διανέμει το φορτίο μεταξύ των εύκαμπτων αρθρώσεων του ρομπότ και να ελέγχει την θέση του αντικειμένου και τις εσωτερικές δυνάμεις καθώς και τις ελαστικές δυνάμεις των αρθρώσεων.

Πιο πρόσφατα, οι Ulrich και Sasiadek αντιμετώπισαν το πρόβλημα του προσαρμοστικού έλεγχου τροχιάς διαστημικών βραχιόνων που παρουσιάζουν ελαστικές ταλαντώσεις στις αρθρώσεις τους και που υπόκεινται σε παραμετρικές αβεβαιότητες και σφάλματα μοντέλων, [92-94]. Προκειμένου να ελέγξουν το διαστημικό βραχίονα, θεωρήθηκε ότι ο δορυφόρος είναι αδρανειακά σταθεροποιημένος.

Για την καταστολή των ταλαντώσεων που οφείλονται στις ευκαμψίες των συνδέσμων του διαστημικού ρομποτικού βραχίονα JEMRMS (Japanese Experimental Module Remote Manipulator System), οι Abiko και Yoshida εισάγουν έναν προσαρμοστικό ελεγκτή χρησιμοποιώντας την έννοια της *δυναμικής αντίδρασης* (reaction dynamics) λαμβάνοντας παράλληλα υπόψη τις αβεβαιότητες στις κινηματικές και δυναμικές παραμέτρους του συστήματος, [2]. Οι Yamano κ.α. προτείνουν την εφαρμογή ενός υβριδικού ελέγχου θέσης/δύναμης και ενός ελέγχου καταστολής των ταλαντώσεων δύο εύκαμπτων βραχιόνων για τη σύλληψη ενός περιστρεφόμενου αντικειμένου, [103]. Οι Liu κ.α. μελετούν τη σύλληψη ενός φορτίου από ένα ΔΡΣ με δύο εύκαμπτους βραχίονες καθώς και το αποτέλεσμα της στη δυναμική και στον έλεγχο του ΔΡΣ, [33]. Οι προσομοιώσεις δείχνουν ότι, χωρίς κάποιο έλεγχο, η επίδραση της σύλληψης ενός φορτίου στη διαμόρφωση του βραχίονα και στο προσανατολισμό του δορυφόρου του ΔΡΣ είναι μεγάλη. Οι συγγραφείς προτείνουν την εφαρμογή ενός ελεγκτή PD του οποίου σκοπός είναι η διατήρηση της σταθεροποίησης του ΔΡΣ μετά τη σύλληψη του φορτίου.

Στις παραπάνω εργασίες θεωρήθηκε ότι οι ευκαμψίες του ΔΡΣ βρίσκονται είτε στις αρθρώσεις είτε στους συνδέσμους του βραχίονα. Οι Yu και Chen μελετούν ένα επίπεδο ελεύθερα ιπτάμενο (με έλεγχο μόνο στη περιστροφή της βάσης) ΔΡΣ με έναν εύκαμπτο σύνδεσμο και δύο εύκαμπτες περιστροφικές αρθρώσεις, [110]. Το δυναμικό μοντέλο του ΔΡΣ προκύπτει εφαρμόζοντας τις εξισώσεις Lagrange και την εξίσωση της γραμμικής ορμής. Στη συνέχεια κατασκευάζεται το μοντέλο *ιδιόμορφων διαταραχών* το οποίο χρησιμοποιείται για το σχεδιασμό ενός ελεγκτή μειωμένης τάξης. Ο ελεγκτής αποτελείται από τρία μέρη (ένα αργό και δύο γρήγορα) και επιτυγχάνει αποτελεσματική

σταθεροποίηση των ταλαντώσεων του συνδέσμου και των αρθρώσεων καθώς και καλή συμπεριφορά παρακολούθησης τροχιάς.

Εκτός από τις ευκαμψίες στις αρθρώσεις και τους συνδέσμους, πολλοί ερευνητές εστιάζουν στην ευκαμψία και άλλων εξαρτημάτων του ΔΡΣ όπως είναι οι κεραίες και οι ηλιακοί συλλέκτες. Οι Hirano κ.α. προτείνουν έναν ελεγκτή για τη καταστολή των ταλαντώσεων ενός εύκαμπτου εξαρτήματος του ΔΡΣ, [26]. Για την εκτίμηση της κατάστασης του εύκαμπτου σώματος, που απαιτείται για την ανάδραση στον ελεγκτή, χρησιμοποιήθηκε ένας αισθητήρας δύναμης/ροπής. Η μέθοδος ελέγχου επαληθεύτηκε πειραματικά σε ένα ελεύθερα αιωρούμενο ΔΡΣ. Παρόλα αυτά στην παραπάνω εργασία δεν λαμβάνει υπόψη την κίνηση του ΤΣΔ του βραχίονα του ΔΡΣ. Σε άλλη εργασία, οι ίδιοι συγγραφείς προτείνουν μια μέθοδο ελέγχου για την εκτέλεση πολλαπλών εργασιών: τον έλεγχο κίνησης του ΤΣΔ και την καταστολή των ταλαντώσεων του εύκαμπτου εξαρτήματος του ΔΡΣ, [27]. Οι Zarafshan κ.α. χρησιμοποίησαν τη μέθοδο Rigid-Flexible Interactive Modelling (RFIM) για την μοντελοποίηση ΔΡΣ με εύκαμπτα εξαρτήματα. Με τη μέθοδο RFIM, οι εξισώσεις κίνησης των άκαμπτων και των εύκαμπτων εξαρτημάτων μπορούν να αναπτυχθούν ξεχωριστά. Οι συγγραφείς έδειξαν ότι οι ταλαντώσεις των ηλιακών συλλεκτών, σε ένα ελεύθερα ιπτάμενο ΔΡΣ με πολλούς βραχίονες, μπορούν να προκαλέσουν ανεπιθύμητα σφάλματα στη θέση των ΤΣΔ των βραχιόνων, [112]. Για βελτίωση της συμπεριφοράς του συστήματος, εφαρμόστηκε ο έλεγχος Adaptive Hybrid Suppression Control (AHSC) ο οποίος επιτυγχάνει την εξάλειψη των σφαλμάτων αυτών.

1.3 Συνεισφορά της Εργασίας

Η συνεισφορά της παρούσας διδακτορικής εργασίας συνίσταται κυρίως στα ακόλουθα:

- Συνήθως, για απλοποίηση της μελέτης των ελεύθερα αιωρούμενων ΔΡΣ, η αρχική στροφορμή τους θεωρείται μηδενική. Στην εργασία αυτή λήφθηκε υπόψη ότι τα ελεύθερα αιωρούμενα ΔΡΣ έχουν κάποια ποσότητα συσσωρευμένης στροφορμής και μελετήθηκε η επίδραση της στη συμπεριφορά τους. Πιο αναλυτικά:
 - Εξάχθηκαν, σε αναλυτική μορφή, οι μειωμένες εξισώσεις κίνησης τρισδιάστατων και επίπεδων ελεύθερα αιωρούμενων ΔΡΣ ως συνάρτηση της αρχικής στροφορμής τους και έγινε ανάλυση της επίδρασης της αρχικής στροφορμής στις ροπές των αρθρώσεων των ΔΡΣ κατά την εκτέλεση μιας επιθυμητής εργασίας του ΔΡΣ. Οι ροπές στις αρθρώσεις των βραχιόνων των ΔΡΣ έχουν κάποια ανώτατα όρια εξαιτίας των σχετικά μικρών κινητήρων που συνήθως επιλέγονται λόγω περιορισμών βάρους στο διάστημα. Η ύπαρξη, λοιπόν, στροφορμής μπορεί να απαιτήσει

μεγάλες ροπές στους κινητήρες οι οποίες κάνουν πρακτικά ανέφικτη κάποια επιθυμητή εργασία σε τροχιά.

- Η παρουσία στροφορμής στο ΔΡΣ δημιουργεί επιπλέον προβλήματα στον έλεγχο του, τα οποία δεν έχουν εξεταστεί έως τώρα. Σχεδιάστηκαν, λοιπόν, ελεγκτές που επιτρέπουν τον έλεγχο του ΔΡΣ, στο χώρο των αρθρώσεων και στον Καρτεσιανό χώρο, παρά την ύπαρξη αρχικής στροφορμής και εξετάστηκαν οι επιπλέον απαιτήσεις και περιορισμοί για την εφαρμογή τους.
- Μελετήθηκε η επίδραση της αρχικής στροφορμής του ΔΡΣ στη χρονική εξέλιξη της διαμόρφωσης του βραχίονα και του προσανατολισμού του δορυφόρου – βάση κατά τη μετάβαση του ΤΣΔ από ένα σημείο του Καρτεσιανού χώρου σε ένα άλλο μέσω συγκεκριμένου δρόμου καθώς και η εξάρτησή τους, στην περίπτωση αυτή, από τη χρονική διάρκεια κίνησης του ΤΣΔ.

Μέρος της μελέτης δημοσιεύτηκε στις εργασίες [52] και [53].

- Η εμφάνιση Δυναμικών Ιδιομορφιών αποτελεί ένα από τα μεγαλύτερα προβλήματα που συναντιούνται κατά το σχεδιασμό δρόμου του ΤΣΔ, στον Καρτεσιανό χώρο, ενός ελεύθερα αιωρούμενου ΔΡΣ. Η παρούσα διδακτορική έρευνα δίνει λύση σε αυτό το πρόβλημα. Έως τώρα, θεωρούταν ότι η εμφάνιση ΔΙ εξαρτάται μόνο από τη διαδρομή που διέρχεται το ΤΣΔ για την προσέγγιση του σε κάποιο επιθυμητό σημείο του Καρτεσιανού χώρου. Οι προσπάθειες λοιπόν, για την αποφυγή ΔΙ, εστιάζονταν στον υπολογισμό κατάλληλων διαδρομών στον Καρτεσιανό χώρο μη επιτρέποντας έτσι την επιλογή κάποιου επιθυμητού δρόμου. Στην εργασία αυτή αποδεικνύεται ότι η εμφάνιση των ΔΙ εξαρτάται επιπλέον και από την αρχική διαμόρφωση του βραχίονα και τον αρχικό προσανατολισμό του δορυφόρου του ΔΡΣ. Εκμεταλλευόμενοι το γεγονός αυτό, αναπτύχθηκε μια μεθοδολογία υπολογισμού αυτών των αρχικών συνθηκών (διαμόρφωσης και προσανατολισμού) έτσι ώστε το ΤΣΔ να ακολουθήσει οποιαδήποτε επιθυμητή διαδρομή στον Καρτεσιανό χώρο αποφεύγοντας την εμφάνιση πιθανών ΔΙ. Επιπλέον, για επίπεδα ελεύθερα αιωρούμενα ΔΡΣ, η προτεινόμενη μέθοδος καταλήγει σε κατάλληλα διαστήματα εύρους αρχικών προσανατολισμών του δορυφόρου του ΔΡΣ, έτσι ώστε να μπορούν να επιλεγθούν περισσότεροι από ένας κατάλληλοι αρχικοί προσανατολισμοί του δορυφόρου του ΔΡΣ. Η μεθοδολογία επαληθεύτηκε με προσομοιώσεις τόσο σε επίπεδα όσο και τρισδιάστατα ΔΡΣ.

Η παραπάνω μεθοδολογία δημοσιεύτηκε στις εργασίες [54] και [55].

- Στην εργασία αυτή αναπτύσσονται αναλυτικά οι δυναμικές εξισώσεις ενός ελεύθερα αιωρούμενου διαστημικού βραχίονα στην περίπτωση που οι ευκαμψίες στις αρθρώσεις του δεν θεωρούνται αμελητέες, λαμβάνοντας υπόψη και τα αδρανειακά χαρακτηριστικά των κινητήρων που τις οδηγούν. Δίνεται έμφαση στη δομή του εξαγόμενου δυναμικού μοντέλου και αναλύονται οι διαφορές από τα αντίστοιχα δυναμικά μοντέλα ρομποτικών βραχιόνων σταθερής βάσης με εύκαμπτες αρθρώσεις. Στους βραχίονες σταθερής βάσης με εύκαμπτες αρθρώσεις, ο πίνακας σύζευξης του δυναμικού μοντέλου έχει μια ανω-τριγωνική δομή η οποία δεν επιτρέπει την εφαρμογή ενός στατικού ελεγκτή γραμμικοποίησης μέσω ανατροφοδότησης. Στην περίπτωση αυτή, ο ελεγκτής αυτός μπορεί να εφαρμοστεί μόνο όταν χρησιμοποιηθεί ένα απλοποιημένο δυναμικό μοντέλο του ΔΡΣ, το οποίο δεν λαμβάνει υπόψη την αδρανειακή σύζευξη που υπάρχει μεταξύ των κινητήρων και των συνδέσμων. Αντίθετα, στην περίπτωση των ελεύθερα αιωρούμενων ΔΡΣ με εύκαμπτες αρθρώσεις, λόγω της δυναμικής σύζευξης μεταξύ του ρομποτικού βραχίονα και του δορυφόρου του ΔΡΣ, ο πίνακας σύζευξης δεν έχει ανω-τριγωνική μορφή. Εκμεταλλευόμενοι, λοιπόν, τη δομή του πίνακα σύζευξης των εξισώσεων κίνησης των ελεύθερα αιωρούμενων ΔΡΣ με εύκαμπτες αρθρώσεις, προτείνεται ένας στατικός ελεγκτής γραμμικοποίησης μέσω ανατροφοδότησης που επιτυγχάνει αποσύζευξη του συστήματος και παρακολούθηση τροχιών τόσο στο χώρο των αρθρώσεων όσο και στον Καρτεσιανό χώρο. Ο προτεινόμενος νόμος ελέγχου επαληθεύτηκε με προσομοίωση σε ένα επίπεδο ΔΡΣ.

Τα αποτελέσματα της μελέτης δημοσιεύτηκαν στην εργασία [56].

1.4 Διάρθρωση της Εργασίας

Η παρούσα διδακτορική εργασία αποτελείται από έξι κεφάλαια. Στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται ανασκόπηση της διεθνούς βιβλιογραφίας που σχετίζεται κυρίως με το σχεδιασμό δρόμου ελεύθερα αιωρούμενων ΔΡΣ, τις δυναμικές ιδιομορφίες και τη μελέτη ΔΡΣ με βραχίονες με εύκαμπτες αρθρώσεις. Αναφέρονται ακόμα εργασίες που παρουσιάζουν μεθόδους για τη σταθεροποίηση του δορυφόρου του ΔΡΣ καθώς εργασίες που ασχολούνται με τη σύλληψη μη ελεγχόμενων δορυφόρων, από ΔΡΣ, και τον έλεγχο δύναμης κατά την επαφή με αυτούς.

Τις περισσότερες φορές, για απλοποίηση του προβλήματος, θεωρείται ότι το ΔΡΣ έχει μηδενική στροφορμή. Στην πράξη όμως μια μικρή ποσότητα στροφορμής παραμένει στο ΔΡΣ. Η στροφορμή αυτή συσσωρεύεται κυρίως από την εντός – εκτός λειτουργία των προωθητήρων και από τις πιθανές συγκρούσεις του ελεύθερα αιωρούμενου βραχίονα με αντικείμενα του περιβάλλοντος του. Στο δεύτερο κεφάλαιο, λοιπόν, αναπτύσσονται οι

εξισώσεις κίνησης ενός άκαμπτου ελεύθερα αιωρούμενου ΔΡΣ με αρχική στροφορμή και μελετάται η επίδραση της αρχικής στροφορμής του ΔΡΣ στις ροπές των αρθρώσεων του ρομποτικού βραχίονα κατά την εκτέλεση κάποιας εργασίας σε τροχιά. Επιπλέον μελετήθηκε και το πρόβλημα του ελέγχου παρά την ύπαρξη στροφορμής στο ΔΡΣ. Σχεδιάστηκαν ελεγκτές στο χώρο των αρθρώσεων που επιτρέπουν την επίτευξη της επιθυμητής διαμόρφωσης του βραχίονα καθώς και ελεγκτές στον Καρτεσιανό χώρο που μπορούν να εφαρμοστούν για την προσέγγιση του ΤΣΔ σε κάποιο επιθυμητό σημείο του χώρου εργασίας.

Στο τρίτο κεφάλαιο αναπτύσσονται αναλυτικά οι τεχνικές σχεδιασμού δρόμου στον Καρτεσιανό χώρο ενός ελεύθερα αιωρούμενου διαστημικού βραχίονα. Το ενδιαφέρον εστιάστηκε στο σχεδιασμό δρόμου στον Καρτεσιανό χώρο επειδή σε αρκετές διαστημικές εφαρμογές το ΤΣΔ πρέπει να ακολουθήσει μια συγκεκριμένη πορεία. Ο σχεδιασμός δρόμου στον Καρτεσιανό χώρο όμως, σε αντίθεση με το σχεδιασμό δρόμου στο χώρο των αρθρώσεων, μπορεί να είναι μην είναι πραγματοποιήσιμος λόγω των Δυναμικών Ιδιομορφιών. Αναπτύσσονται οι εξισώσεις που δίνουν τις ταχύτητες των αρθρώσεων καθώς και την προκύπτουσα γωνιακή ταχύτητα του δορυφόρου του ΔΡΣ όταν το ΤΣΔ εκτελεί μια επιθυμητή κίνηση στον Καρτεσιανό χώρο. Επίσης, εξάγονται οι εξισώσεις που δίνουν τις ΔΙ για επίπεδους και τρισδιάστατους ελεύθερα αιωρούμενους ρομποτικούς βραχίονες. Οι εξισώσεις αυτές επεκτείνονται και για τις περιπτώσεις όπου το ΤΣΔ πρέπει να έχει και επιθυμητό προσανατολισμό κατά την κίνηση του. Τέλος, μελετάται η επίδραση της αρχικής στροφορμής του συστήματος στο σχεδιασμό δρόμου του ΤΣΔ του βραχίονα στον Καρτεσιανό χώρο.

Αντικείμενο του τέταρτου κεφαλαίου είναι η ανάπτυξη μιας μεθοδολογίας που επιτρέπει την κίνηση του ΤΣΔ του ελεύθερα αιωρούμενου βραχίονα σε οποιαδήποτε επιθυμητή διαδρομή αποφεύγοντας πιθανές ΔΙ. Εφόσον η διαδρομή του ΤΣΔ είναι προκαθορισμένη, η μέθοδος δίνει τις κατάλληλες τιμές αρχικού προσανατολισμού του δορυφόρου του ΔΡΣ για την αποφυγή δυναμικών ιδιομορφιών κατά την διάρκεια της επιθυμητής κίνησης του ΤΣΔ. Έτσι, το ΤΣΔ μπορεί να εκτελέσει χωρίς πρόβλημα εργασίες σε όλο το χώρο εργασίας του ΔΡΣ. Η προτεινόμενη μέθοδος μπορεί να εφαρμοστεί σε επίπεδα και τρισδιάστατα ΔΡΣ με ή χωρίς αρχική στροφορμή, επιτρέποντας εντολές για επιθυμητή θέση και προσανατολισμό του ΤΣΔ του ρομποτικού βραχίονα. Επίσης, για επίπεδους βραχίονες, η μέθοδος εξάγει τα ακριβή διαστήματα εύρους των εφικτών αρχικών προσανατολισμών του δορυφόρου του ΔΡΣ. Η αποτελεσματικότητα της μεθόδου επαληθεύεται μέσω προσομοιώσεων σε επίπεδα και τρισδιάστατα ΔΡΣ.

Στο πέμπτο κεφάλαιο αναπτύσσονται αναλυτικά οι δυναμικές εξισώσεις ενός ελεύθερα αιωρούμενου διαστημικού βραχίονα στην περίπτωση που οι ευκαμψίες στις αρθρώσεις του δεν θεωρούνται αμελητέες, λαμβάνοντας υπόψη και τα αδρανειακά

χαρακτηριστικά των κινητήρων που τις οδηγούν. Επίσης, με βάση την δομή του παραγόμενου δυναμικού μοντέλου, αναπτύσσεται ένας στατικός ελεγκτής γραμμικοποίησης μέσω ανατροφοδότησης που επιτυγχάνει αποσύζευξη του συστήματος και παρακολούθηση τροχιών τόσο στο χώρο των αρθρώσεων όσο και στον Καρτεσιανό χώρο. Η προτεινόμενη μέθοδος έχει μικρό υπολογιστικό κόστος και σε αντίθεση με τους χερσαίους βραχίονες σταθερής βάσης, η εφαρμογή της στους ελεύθερα αιωρούμενους βραχίονες δεν απαιτεί κάποια παραδοχή που απλουστεύει το δυναμικό μοντέλο των ΔΡΣ. Για την επαλήθευση της αποτελεσματικότητας του ελεγκτή πραγματοποιείται προσομοίωση σε ένα επίπεδο ΔΡΣ.

Τέλος, στο έκτο κεφάλαιο αναφέρονται συνοπτικά τα συνολικά συμπεράσματα της εργασίας και προτείνονται θέματα για μελλοντική εργασία.

2 Δυναμική και Έλεγχος Ελεύθερα Αιωρούμενων ΔΡΣ υπό την Επίδραση Στροφορμής

2.1 Εισαγωγή

Τα Διαστημικά Ρομποτικά Συστήματα (ΔΡΣ) σε τροχιά διαχωρίζονται σε *ελεύθερα ιπτάμενα (free-flying)* και σε *ελεύθερα αιωρούμενα (free-floating)* ΔΡΣ ανάλογα με το αν ο δορυφόρος του ΔΡΣ ελέγχεται, μέσω του Συστήματος Υπολογισμού και Ελέγχου Προσανατολισμού (ΣΥΕΠ) (Attitude Determination and Control System, ADCS) του δορυφόρου, ή όχι, αντίστοιχα. Το ΣΥΕΠ του δορυφόρου λειτουργεί ανεξάρτητα από το σύστημα ελέγχου του βραχίονα του ΔΡΣ, το οποίο χρησιμοποιείται για τον έλεγχο της κίνησης του Τελικού Σημείου Δράσης (ΤΣΔ) δίνοντας κατάλληλες εντολές στους κινητήρες των αρθρώσεων. Όταν, λοιπόν, το ΤΣΔ εκτελεί μια εργασία διαγράφοντας μια επιθυμητή κίνηση, η κίνηση του δορυφόρου διαταράσσεται εξαιτίας της δυναμικής σύζευξης βραχίονα – δορυφόρου του ΔΡΣ. Για την απόσβεση αυτών των προκαλούμενων διαταραχών ενεργοποιείται το ΣΥΕΠ του δορυφόρου το οποίο διατηρεί το δορυφόρο σε κάποιο συγκεκριμένο προσανατολισμό. Όμως, η ελεγχόμενη κίνηση του δορυφόρου του ΔΡΣ προκαλεί, με τη σειρά της, διαταραχές στην κίνηση του ΤΣΔ απομακρύνοντας το τελικά από την επιθυμητή του κίνηση. Σε εργασίες σε τροχιά όπου το ΤΣΔ του ΔΡΣ πρέπει να εκτελέσει κάποιες επιθυμητές κινήσεις, για την αποφυγή των διαταραχών στην κίνηση του, είναι προτιμότερο το ΣΥΕΠ του δορυφόρου του ΔΡΣ να είναι απενεργοποιημένο και το ΔΡΣ είναι ελεύθερα αιωρούμενο. Επίσης, στις περισσότερες περιπτώσεις, όπως και στην παρούσα εργασία, οι ροπές που οφείλονται στο περιβάλλον (π.χ. μικροβαρύτητα, αντίσταση αέρα, μαγνητικές δυνάμεις) αναμένεται να είναι πολύ μικρότερες από τις ροπές στους κινητήρες του βραχίονα και τις ροπές που ασκούνται στο ΔΡΣ λόγω αδράνειας. Έτσι, στην παρούσα εργασία, η επίδραση τους θεωρείται αμελητέα. Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω, οι εξωτερικές δυνάμεις που ασκούνται σε ένα ελεύθερα αιωρούμενο ΔΡΣ είναι μηδενικές.

Στο κεφάλαιο αυτό αναπτύσσονται οι εξισώσεις κίνησης ενός άκαμπτου ελεύθερα αιωρούμενου ΔΡΣ και μελετάται η επίδραση της μη μηδενικής αρχικής στροφορμής του ΔΡΣ στη συμπεριφορά του. Γενικά, κατά την εκτέλεση των εργασιών ενός ελεύθερα αιωρούμενου ΔΡΣ είναι επιθυμητή μηδενική αρχική στροφορμή. Παρόλα αυτά, μικρές ποσότητες στροφορμής μπορεί να συσσωρευτούν στο σύστημα για διάφορους λόγους. Για παράδειγμα η εντός – εκτός (on – off) λειτουργία των προωθητήρων (thrusters) μπορεί να προκαλέσει συσσώρευση μικρών ποσοτήτων στροφορμής. Ένας άλλος

σημαντικός παράγοντας συσσώρευσης μικρών ποσοτήτων στροφορμής είναι οι πιθανές συγκρούσεις του ελεύθερα αιωρούμενου ΔΡΣ με αντικείμενα του περιβάλλοντος του.

Η συσσωρευμένη αυτή στροφορμή μπορεί να απορροφηθεί από μηχανισμούς ελέγχου στροφορμής (momentum control devices). Τέτοιοι μηχανισμοί είναι οι σφόνδυλοι αντίδρασης (reaction wheels), οι σφόνδυλοι στροφορμής (momentum wheels) και τα γυροσκόπια ελέγχου στροφορμής (Control Momentum Gyroscopes, CMG). Για την απορρόφηση κάποιας ποσότητας στροφορμής απαιτείται σταδιακά ταχύτερη περιστροφή του σφονδύλου των μηχανισμών αυτών. Όμως, οι μηχανισμοί σφονδύλου παρουσιάζουν στην πράξη ένα όριο ως προς το πόσο γρήγορα μπορεί να περιστραφεί ο σφόνδυλος τους, ενώ παράλληλα, η ροπή που διαθέτει μειώνεται. Σε κάποιο σημείο, ο σφόνδυλος φθάνει σε κορεσμό (saturation), δηλαδή στη μέγιστη ταχύτητα περιστροφής για την οποία έχει σχεδιαστεί, όπου η διατιθέμενη ροπή έχει μηδενιστεί. Από την άλλη μεριά, τα γυροσκόπια ελέγχου στροφορμής έχουν σφονδύλους οι οποίοι περιστρέφονται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα. Στην περίπτωση αυτή, η ροπή παράγεται αλλάζοντας τον προσανατολισμό του άξονα περιστροφής του σφονδύλου. Επειδή, στα γυροσκόπια ελέγχου στροφορμής, το διάνυσμα της παραγόμενης στροφορμής των σφονδύλων τους αλλάζει κατά διεύθυνση και όχι κατά μέτρο, υπάρχει ένας μέγιστος χώρος εργασίας (workspace) για τη παραγόμενη στροφορμή. Ο χώρος αυτός ονομάζεται "φάκελος στροφορμής" ("angular momentum envelope"). Οι γωνίες του σφονδύλου στις οποίες η στροφορμή φτάνει αυτό το φάκελο ονομάζονται ιδιομορφίες καθώς η εμφάνισή τους δεν επιτρέπει την ανάπτυξη ροπής σε ορισμένες διευθύνσεις. Στην περίπτωση αυτή το γυροσκόπιο ελέγχου στροφορμής έχει φτάσει σε κορεσμό. Και στις δυο παραπάνω περιπτώσεις κορεσμού των σφονδύλων αντίδρασης/στροφορμής και των γυροσκοπίων ελέγχου στροφορμής, αντίστοιχα, απαιτείται αποκορεσμός (desaturation) τους μέσω μιας διεργασίας που είναι γνωστή ως momentum dumping, [35]. Η διεργασία αυτή είναι μια τεχνική για την ελάττωση της στροφορμής του σφονδύλου εφαρμόζοντας ελεγχόμενη ροπή στο δορυφόρο. Ο σφόνδυλος μπορεί να απορροφήσει τη ροπή αυτή με τέτοιο τρόπο ώστε να ελαττωθεί η ταχύτητα περιστροφής του ή η γωνία περιστροφής του, αντίστοιχα. Η εξωτερική αυτή ροπή πρέπει να εφαρμοστεί από κάποιο ανεξάρτητο μηχανισμό όπως είναι οι προωθητήρες και οι μηχανισμοί μαγνητικής ροπής (magnetic torquers/magnetorquers). Οι μηχανισμοί μαγνητικής ροπής είναι επενεργητές που παράγουν ροπή μαγνητικού δίπολου (magnetic dipole moment) που παράγεται από τη διέλευση ρεύματος μέσω ενός πηνίου και η οποία αλληλεπιδρά με το μαγνητικό πεδίο της Γης, δημιουργώντας εξωτερικές ροπές στο δορυφόρο του ΔΡΣ. Η αποτελεσματικότητα των μηχανισμών αυτών εξαρτάται άμεσα από την ισχύ του μαγνητικού πεδίου της Γης η οποία ελαττώνεται καθώς αυξάνεται το ύψος τροχιάς του δορυφόρου. Έτσι, η χρήση τους περιορίζεται κυρίως σε δορυφόρους που βρίσκονται στη Χαμηλή Περιγεία Τροχιά (Low

Earth Orbit, LEO) όπου το γεωμαγνητικό πεδίο είναι σχετικά ισχυρό. Αντίθετα, η εφαρμογή τους στη Γεωστατική Τροχιά (Geostationary Orbit, GEO) καθώς και σε μεγαλύτερες τροχιές είναι δύσκολη αφού εκεί το μαγνητικό πεδίο είναι ασθενές και επηρεάζεται από την ηλιακή ακτινοβολία. Επίσης, η δράση των προωθητήρων γενικά δεν είναι επιθυμητή λόγω κατανάλωσης καυσίμων ενώ η εντός – εκτός λειτουργία τους προκαλεί ανεπιθύμητη απότομη κίνηση του ΤΣΔ του βραχίονα. Οπότε, σε αρκετές περιπτώσεις, μια μικρή ποσότητα από τη συσσωρευμένη αυτή στροφορμή παραμένει στο σύστημα, λόγω δυσλειτουργίας των παραπάνω μηχανισμών. Έτσι είναι σκόπιμη η μελέτη της συμπεριφοράς των ελεύθερα αιωρούμενων ΔΡΣ κάτω από την επίδραση μικρών ποσοτήτων στροφορμής.

Στην παρούσα εργασία θα ασχοληθούμε με ΔΡΣ που διαθέτουν βραχίονα με μη πλεονάζοντες βαθμούς ελευθερίας (BE) (non-redundant manipulators). Στην περίπτωση αυτή, η κίνηση του δορυφόρου δίνει στο ρομποτικό σύστημα τους επιπλέον BE έτσι ώστε να αποφεύγει τυχόν εμπόδια αλλά και πιθανές ιδιομορφίες του βραχίονα. Η χρήση τέτοιων ρομποτικών βραχιόνων απλοποιεί την μηχανολογική κατασκευή του διαστημικού ρομποτικού βραχίονα με τη χρήση λιγότερων επενεργητών και έχει ως αποτέλεσμα ενδεχόμενη εξοικονόμηση μάζας του συστήματος. Ακολουθώντας τη συνήθη πρακτική σε διαστημικές εφαρμογές, θεωρούμε ένα ΔΡΣ του οποίου ο βραχίονας αποτελείται από περιστροφικές αρθρώσεις και διαμόρφωση ανοιχτής κινηματικής αλυσίδας, έτσι ώστε να επιτυγχάνεται ο μέγιστος δυνατός χώρος εργασίας σε σχέση με τη μάζα του συστήματος. Στην περίπτωση αυτή, ένα ΔΡΣ με ένα βραχίονα με N BE θα έχει στο σύνολο $N + 6$ BE (ή $N + 3$ BE για επίπεδα ΔΡΣ) συμπεριλαμβανομένων και των BE του δορυφόρου του ΔΡΣ.

Στους ελεύθερα αιωρούμενους βραχίονες, κάτω από την παραδοχή της απουσίας των εξωτερικών δυνάμεων, το Κέντρο Μάζας (KM) του ΔΡΣ δεν επιταχύνεται και η γραμμική ορμή του διατηρείται σταθερή. Με την επιπλέον παραδοχή της μηδενικής αρχικής γραμμικής ορμής, το KM του συστήματος παραμένει σταθερό ως προς ένα αδρανειακό σύστημα συντεταγμένων (ΣΣ), του οποίου ως αρχή, στην περίπτωση αυτή, μπορεί να επιλεγθεί το KM του συστήματος.

Στις Παραγράφους 2.2 και 2.3, αντίστοιχα, αναπτύσσονται οι κινηματικές εξισώσεις θέσης και ταχύτητας (γραμμικής και γωνιακής) καθώς και οι εξισώσεις ορμής – στροφορμής ενός ελεύθερα αιωρούμενου βραχίονα υπό την επίδραση αρχικής στροφορμής του ΔΡΣ. Στην Παράγραφο 2.4 παρουσιάζονται οι εξισώσεις κίνησης του συστήματος, παρουσία αρχικής στροφορμής του ΔΡΣ. Οι εξισώσεις αυτές συνδέουν τις ροπές των κινητήρων που κινούν τις αρθρώσεις του βραχίονα με την κίνηση του βραχίονα και δορυφόρου του ΔΡΣ όπως αυτή εκφράζεται από τη διαμόρφωση του βραχίονα και τον

προσανατολισμό του δορυφόρου καθώς και τις αντίστοιχες ταχύτητες και επιταχύνσεις τους. Στην Παράγραφο 2.5 οι κινηματικές και δυναμικές εξισώσεις που αναπτύχθηκαν στις προηγούμενες παραγράφους απλοποιούνται για την εφαρμογή τους σε επίπεδες κινήσεις ενώ στην Παράγραφο 2.6 κάποιες βασικές ιδιότητες που ισχύουν για το δυναμικό μοντέλο των βραχιόνων σταθερής βάσης επεκτείνονται και για ελεύθερα αιωρούμενα ΔΡΣ με αρχική στροφορμή. Τέλος, στην Παράγραφο 2.7 εξετάζεται το πρόβλημα του ελέγχου υπό την επίδραση της αρχικής στροφορμής και σχεδιάζονται ελεγκτές στο χώρο των αρθρώσεων και στον Καρτεσιανό χώρο.

2.2 Κινηματικές Εξισώσεις του Συστήματος

Στα ελεύθερα αιωρούμενα ΔΡΣ, η θέση κάποιου συνδέσμου του βραχίονα εξαρτάται από τη θέση όλων των συνδέσμων, συμπεριλαμβανομένων και αυτών που βρίσκονται μετά από τον σύνδεσμο, καθώς και από τη θέση του δορυφόρου του ΔΡΣ. Αυτό έρχεται σε αντίθεση με την περίπτωση των βραχιόνων σταθερής βάσης, στους οποίους η θέση ενός συνδέσμου εξαρτάται μόνο από τη θέση των προηγούμενων συνδέσμων. Στην εργασία αυτή, το ενδιαφέρον εστιάζεται στην κίνηση του ΤΣΔ του βραχίονα στον Καρτεσιανό χώρο, οπότε παρακάτω αναφέρονται περιληπτικά οι εξισώσεις αυτού. Για την κινηματική και δυναμική περιγραφή του ελεύθερα αιωρούμενου ΔΡΣ χρησιμοποιείται η προσέγγιση μέσω βαρυκεντρικών διανυσμάτων (The Barycentric Vector Approach), κατά την οποία το ΚΜ του ΔΡΣ επιλέγεται ως ένα αντιπροσωπευτικό σημείο για την μεταφορική κίνηση του ΔΡΣ, [67-74].

Για αποφυγή πιθανών περιγραφικών ιδιομορφιών (representational singularities) που θα προκαλούσε η επιλογή κάποιας τριάδας γωνιών Euler, ο προσανατολισμός του δορυφόρου ως προς το αδρανειακό ΣΣ περιγράφεται μέσω των παραμέτρων Euler (ή Unit Quaternion) ϵ, n , οι οποίες δίνονται από τις εξισώσεις, [82]:

$$\epsilon(\mathbf{a}, \theta) = \mathbf{a} \sin(\theta/2) \quad (2-1\alpha)$$

$$n(\mathbf{a}, \theta) = \mathbf{a} \cos(\theta/2) \quad (2-1\beta)$$

όπου \mathbf{a} είναι το μοναδιαίο διάνυσμα του στιγμιαίου άξονα περιστροφής του δορυφόρου και θ είναι η γωνία περιστροφής γύρω από αυτόν.

Να σημειωθεί ότι οι παράμετροι Euler ϵ, n δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, αλλά ισχύει ο περιορισμός:

$$n^2 + \epsilon^T \epsilon = 1 \quad (2-2)$$

Ο πίνακας περιστροφής που δίνει το προσανατολισμό του δορυφόρου ως προς το αδρανειακό ΣΣ είναι:

$$\mathbf{R}_0(\boldsymbol{\varepsilon}, n) = (n^2 - \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{I}_3 + 2\boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon}^T + 2n\boldsymbol{\varepsilon}^\times \quad (2-3)$$

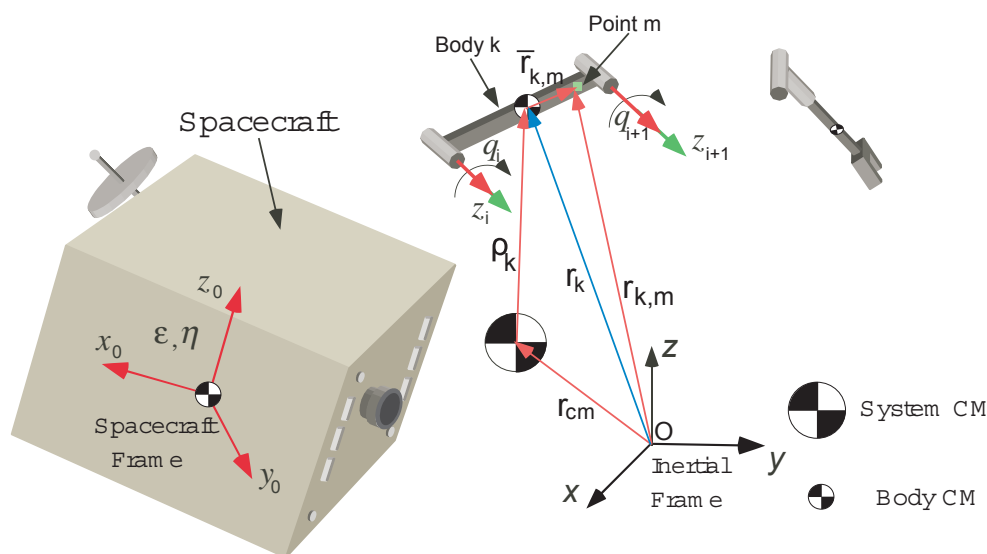
όπου \mathbf{I}_3 είναι ο 3×3 μοναδιαίος πίνακας, το σύμβολο $(\cdot)^T$ δίνει τον ανάστροφο του διανύσματος (\cdot) και το σύμβολο $(\cdot)^\times$ ορίζει τον τελεστή του εξωτερικού γινομένου (cross product operator), δηλαδή τον αντι-συμμετρικό πίνακα με στοιχεία του τα στοιχεία του διανύσματος (\cdot) σύμφωνα με:

$$(\cdot)^\times = \begin{bmatrix} 0 & -(\cdot)_z & (\cdot)_y \\ (\cdot)_z & 0 & -(\cdot)_x \\ -(\cdot)_y & (\cdot)_x & 0 \end{bmatrix} \quad (2-4)$$

Το διάνυσμα θέσης, $\mathbf{r}_{k,m}$, του σημείου m του συνδέσμου k του βραχίονα, εκφρασμένο στο αδρανειακό ΣΣ, βλ. Σχήμα 2-1, είναι:

$$\mathbf{r}_{k,m} = \mathbf{r}_{cm} + \boldsymbol{\rho}_k + \bar{\mathbf{r}}_{k,m} \quad (2-5)$$

όπου τα διανύσματα \mathbf{r}_{cm} και $\boldsymbol{\rho}_k$ είναι τα διανύσματα θέσης του ΚΜ του συστήματος και του ΚΜ του συνδέσμου k του βραχίονα, αντίστοιχα, ως προς το αδρανειακό ΣΣ και $\bar{\mathbf{r}}_{k,m}$ είναι το διάνυσμα θέσης του σημείου m του συνδέσμου k ως προς το ΚΜ του ίδιου συνδέσμου, όπως ορίζονται και στο Σχήμα 2.1.



Σχήμα 2.1 Ορισμός θέσης σημείου συνδέσμου του βραχίονα ενός ελεύθερα αιωρούμενου ΔΡΣ ως προς το αδρανειακό ΣΣ.

Το διάνυσμα $\boldsymbol{\rho}_k$ αποδεικνύεται ότι δίνεται από, [67]:

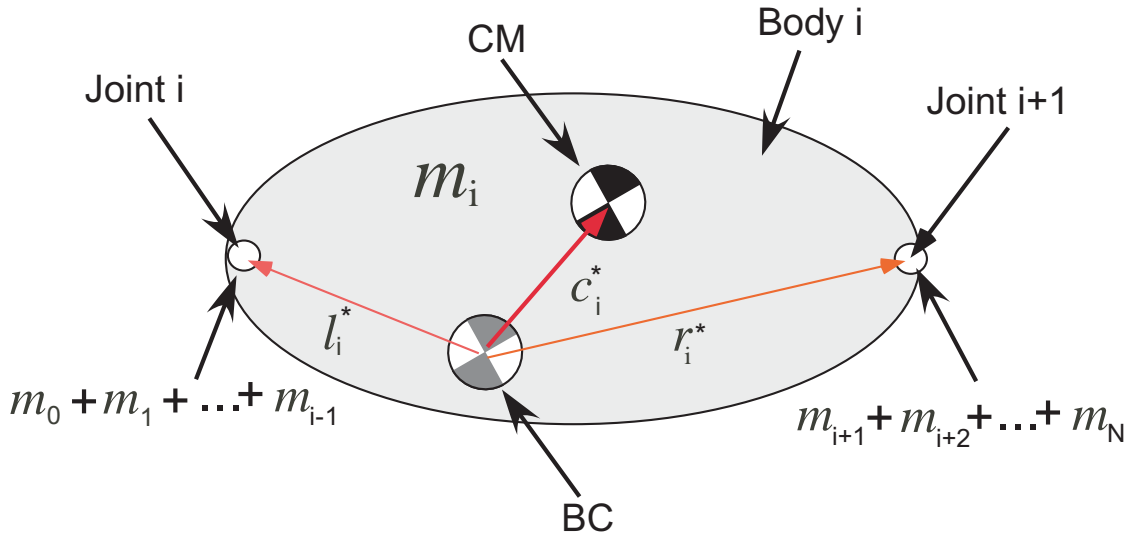
$$\boldsymbol{\rho}_k = \sum_{i=0}^N \mathbf{v}_{ik} \quad (2-6a)$$

όπου \mathbf{v}_{ik} είναι σταθερά πάνω στο σώμα (body - fixed) διανύσματα, τα οποία ονομάζονται βαρυκεντρικά διανύσματα (barycentric vectors), και υπολογίζονται από:

$$\mathbf{v}_{ik} \equiv \begin{cases} \mathbf{r}_i^* & i < k \\ \mathbf{c}_i^* & i = k \\ \mathbf{l}_i^* & i > k \end{cases} \quad (2-6\beta)$$

όπου τα βαρυκεντρικά διανύσματα \mathbf{c}_i^* , \mathbf{r}_i^* και \mathbf{l}_i^* του συνδέσμου i ορίζονται στο Σχήμα 2.2.

Στο Σχήμα 2.2 φαίνεται και το βαρύκεντρο (barycenter, BC) του σώματος i . Το βαρύκεντρο είναι το ΚΜ του νέου *επαυξημένου* σώματος i (augmented body) που σχηματίζεται θεωρώντας ότι στην άρθρωση i είναι συγκεντρωμένη η μάζα των προηγούμενων σωμάτων από το σώμα i , δηλαδή μάζα $m_0 + m_1 + \dots + m_{i-1}$, ενώ αντίστοιχα στην άρθρωση $i+1$ είναι συγκεντρωμένη η συνολική μάζα των επόμενων σωμάτων από το σώμα i , δηλαδή μάζα ίση με $m_{i+1} + m_{i+2} + \dots + m_N$, [67].



Σχήμα 2.2. Ορισμός του βαρύκεντρου (BC) και βαρυκεντρικών διανυσμάτων \mathbf{c}_i^* , \mathbf{r}_i^* και \mathbf{l}_i^* .

Από τις Εξ. (2-5) και (2-6) προκύπτει ότι η θέση του σημείου m του συνδέσμου k ως προς το αδρανειακό ΣΣ είναι:

$$\mathbf{r}_{k,m} = \mathbf{r}_{cm} + \sum_{i=0}^N \mathbf{v}_{ik} + \bar{\mathbf{r}}_{k,m} = \mathbf{r}_{cm} + \sum_{i=0}^N \mathbf{v}_{ik,m} \quad (2-7\alpha)$$

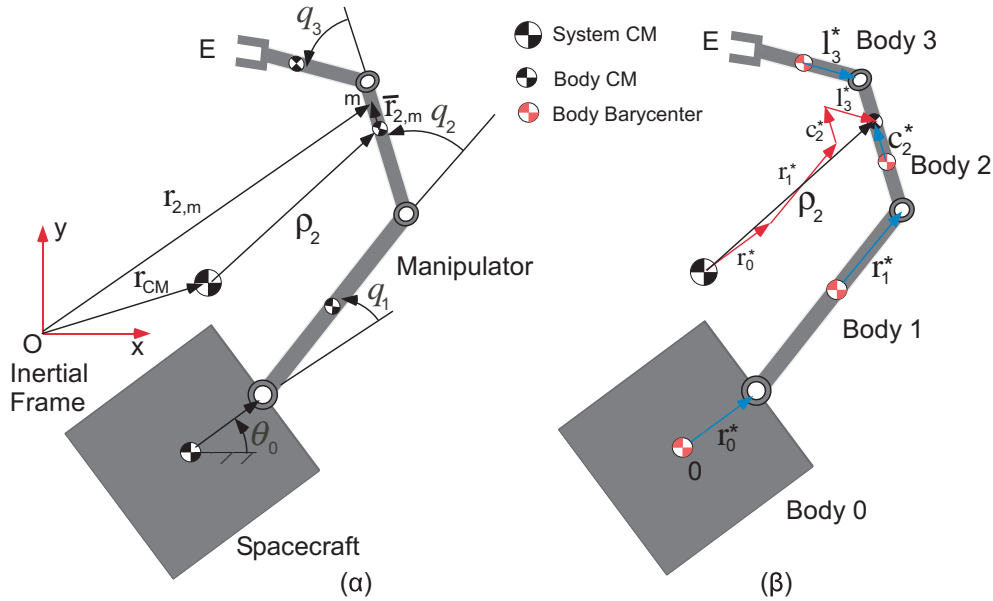
όπου:

$$\mathbf{v}_{ik,m} = \mathbf{v}_{ik} + \delta_{ik} \bar{\mathbf{r}}_{k,m} \quad (2-7\beta)$$

και δ_{ik} είναι το δέλτα Kronecker.

Για την καλύτερη κατανόηση του υπολογισμού της θέσης ενός σημείου του βραχίονα ενός ΔΡΣ μέσω της μεθόδου των βαρυκεντρικών διανυσμάτων, παρακάτω

εφαρμόζεται η μέθοδος για το σημείο m του δεύτερου συνδέσμου ($k=2$) ενός επίπεδου ΔΡΣ με ένα βραχίονα 3 συνδέσμων ($N=3$), βλ. Σχήμα 2.3.



Σχήμα 2.3 Εφαρμογή της μεθόδου των βαρυκεντρικών διανυσμάτων σε ένα επίπεδο ΔΡΣ με ένα ρομποτικό βραχίονα 3-ΒΕ.

Από την Εξ. (2-5) προκύπτει ότι η θέση του σημείου m του συνδέσμου 2 ως προς το αδρανειακό ΣΣ είναι, βλ. Σχήμα 2.3(α):

$$\mathbf{r}_{2,m} = \mathbf{r}_{cm} + \boldsymbol{\rho}_2 + \bar{\mathbf{r}}_{2,m} \quad (2-8\alpha)$$

όπου το διάνυσμα $\boldsymbol{\rho}_2$ είναι το διάνυσμα από το ΚΜ του ΔΡΣ στο ΚΜ του συνδέσμου 2 και, σύμφωνα με τις Εξ. (2-6), δίνεται από:

$$\boldsymbol{\rho}_2 = \sum_{i=0}^3 \mathbf{v}_{i2} = \mathbf{v}_{02} + \mathbf{v}_{12} + \mathbf{v}_{22} + \mathbf{v}_{32} = \mathbf{r}_0^* + \mathbf{r}_1^* + \mathbf{c}_2^* + \mathbf{I}_3^* \quad (2-8\beta)$$

Όπως προκύπτει από την Εξ. (2-8β) και το Σχήμα 2.3(β), η θέση του ΚΜ του δεύτερου συνδέσμου εξαρτάται από τον προσανατολισμό της βάσης και τη διαμόρφωση των συνδέσμων 1 και 2 (βαρυκεντρικά διανύσματα \mathbf{r}_0^* , \mathbf{r}_1^* , \mathbf{c}_2^*) αλλά και από τη διαμόρφωση του τρίτου συνδέσμου (βαρυκεντρικό διάνυσμα \mathbf{I}_3^*). Επίσης, επειδή τα βαρυκεντρικά διανύσματα εξαρτώνται από την κατανομή μάζας του ΔΡΣ, βλέπε Εξ. (Α-4) του Παραρτήματος Α.1, αποδεικνύεται τελικά ότι η θέση ενός σημείου ενός συνδέσμου του ΔΡΣ εξαρτάται από την κατανομή μάζας του ΔΡΣ καθώς και από τη διαμόρφωση όλων των συνδέσμων του βραχίονα συμπεριλαμβανομένων και αυτών που βρίσκονται και μετά από τον σύνδεσμο που μας ενδιαφέρει. Η ιδιότητα αυτή αποτελεί τη μεγαλύτερη διαφορά της κινηματικής των ΔΡΣ και της κινηματικής βραχιόνων σταθερής βάσης και είναι αποτέλεσμα της δυναμικής σύζευξης μεταξύ του βραχίονα και του δορυφόρου του ΔΡΣ.

Η γωνιακή ταχύτητα του σώματος k εκφρασμένη στο αδρανειακό ΣΣ είναι, [67]:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}_k &= \boldsymbol{\omega}_0 + \mathbf{R}_0(\boldsymbol{\varepsilon}, n) \sum_{i=1}^k {}^0\mathbf{R}_i(\mathbf{q}) {}^i\mathbf{z}_i \dot{q}_i \\ &= \mathbf{R}_0(\boldsymbol{\varepsilon}, n) ({}^0\boldsymbol{\omega}_0 + {}^0\mathbf{F}_k \dot{\mathbf{q}})\end{aligned}\quad (2-9)$$

όπου $\boldsymbol{\omega}_0$ και ${}^0\boldsymbol{\omega}_0$ είναι η γωνιακή ταχύτητα του δορυφόρου εκφρασμένη στο αδρανειακό ΣΣ και το ΣΣ $\{0\}$ του δορυφόρου αντίστοιχα. Ο πίνακας ${}^0\mathbf{R}_i(\mathbf{q})$ είναι ο πίνακας περιστροφής μεταξύ του ΣΣ $\{i\}$ του σώματος i και του ΣΣ $\{0\}$ του δορυφόρου και εξαρτάται από το διάνυσμα \mathbf{q} των γωνιών των αρθρώσεων. Επίσης, ${}^i\mathbf{z}_i$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα πάνω στον άξονα της άρθρωσης i και ο $3 \times N$ πίνακας ${}^0\mathbf{F}_k$ δίνεται από:

$${}^0\mathbf{F}_k = \begin{bmatrix} {}^0\mathbf{R}_1 {}^1\mathbf{z}_1 & \dots & {}^0\mathbf{R}_k {}^k\mathbf{z}_k & \mathbf{0}_{3 \times (N-k)} \end{bmatrix}\quad (2-10)$$

Η Εξ. (2-9) γράφεται τελικά:

$$\boldsymbol{\omega}_k = \mathbf{R}_0(\boldsymbol{\varepsilon}, n) ({}^0\boldsymbol{\omega}_0 + {}^0\mathbf{J}_{22,k} \dot{\mathbf{q}})\quad (2-11)$$

όπου:

$${}^0\mathbf{J}_{22,k} \equiv {}^0\mathbf{F}_k\quad (2-12)$$

Η γραμμική ταχύτητα του σημείου m εκφρασμένη στο αδρανειακό ΣΣ, προκύπτει από τη χρονική παράγωγο της Εξ. (2-7):

$$\dot{\mathbf{r}}_{k,m} = \dot{\mathbf{r}}_{cm} + \sum_{i=0}^N \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{v}_{ik,m} = \dot{\mathbf{r}}_{cm} - \sum_{i=0}^N \mathbf{v}_{ik,m} \times \boldsymbol{\omega}_i = \dot{\mathbf{r}}_{cm} - \sum_{i=0}^N \mathbf{v}_{ik,m}^\times \boldsymbol{\omega}_i\quad (2-13)$$

όπου αντικαθιστώντας τη γωνιακή ταχύτητα $\boldsymbol{\omega}_i$ από την Εξ. (2-11) και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα:

$$\mathbf{v}_{ik,m}^\times = (\mathbf{R}_0 {}^0\mathbf{v}_{ik,m})^\times = \mathbf{R}_0 {}^0\mathbf{v}_{ik,m}^\times \mathbf{R}_0^T\quad (2-14)$$

προκύπτει τελικά:

$$\dot{\mathbf{r}}_{k,m} = \dot{\mathbf{r}}_{cm} + \mathbf{R}_0(\boldsymbol{\varepsilon}, n) ({}^0\mathbf{J}_{11,k} {}^0\boldsymbol{\omega}_0 + {}^0\mathbf{J}_{12,k} \dot{\mathbf{q}})\quad (2-15)$$

όπου ο 3×3 πίνακας ${}^0\mathbf{J}_{11,k}$ και ο $3 \times N$ πίνακας ${}^0\mathbf{J}_{12,k}$ δίνονται αντίστοιχα από:

$${}^0\mathbf{J}_{11,k} \equiv - \sum_{i=0}^N ({}^0\mathbf{R}_i {}^i\mathbf{v}_{ik,m})^\times\quad (2-16\alpha)$$

$${}^0\mathbf{J}_{12,k} \equiv - \sum_{i=1}^N ({}^0\mathbf{R}_i {}^i\mathbf{v}_{ik,m})^\times {}^0\mathbf{F}_i\quad (2-16\beta)$$

Στην Εξ. (2-15), το γινόμενο ${}^0\mathbf{J}_{11,k} {}^0\boldsymbol{\omega}_0$ αντιπροσωπεύει την επίδραση της κίνησης του δορυφόρου του ΔΡΣ στην ταχύτητα του σημείου k του βραχίονα. Λαμβάνοντας

υπόψη ότι η γραμμική ταχύτητα ενός σημείου μπορεί να εκφραστεί ως το εξωτερικό γινόμενο ενός διανύσματος θέσης με τη γωνιακή ταχύτητα, δηλαδή $\mathbf{v} = -\mathbf{r}^\times \boldsymbol{\omega}$, ο 3×3 πίνακας ${}^0\mathbf{J}_{11,k}$ αντιστοιχεί στον αντι-συμμετρικό πίνακα με στοιχεία του διανύσματος που ξεκινά από το ΚΜ του ΔΡΣ και καταλήγει στο σημείο k του βραχίονα, εκφρασμένο στο ΣΣ $\{0\}$ του δορυφόρου. Αντίστοιχα, το γινόμενο ${}^0\mathbf{J}_{12,k} \dot{\mathbf{q}}$ αντιπροσωπεύει την επίδραση της κίνησης του των αρθρώσεων στην ταχύτητα του σημείου k του βραχίονα.

Από τις Εξ. (2-7), (2-11) και (2-15) προκύπτει ότι η θέση, η γραμμική ταχύτητα και η γωνιακή ταχύτητα του ΤΣΔ ενός ΔΡΣ, εκφρασμένα όλα στο αδρανειακό ΣΣ, είναι αντίστοιχα:

$$\mathbf{r}_E = \mathbf{r}_{cm} + \mathbf{R}_0(\boldsymbol{\varepsilon}, n) \sum_{i=0}^N {}^0\mathbf{R}_i(\mathbf{q}) {}^i\mathbf{v}_{iN,E} \quad (2-17)$$

$$\dot{\mathbf{r}}_E = \dot{\mathbf{r}}_{cm} + \mathbf{R}_0(\boldsymbol{\varepsilon}, n) ({}^0\mathbf{J}_{11}(\mathbf{q}) {}^0\boldsymbol{\omega}_0 + {}^0\mathbf{J}_{12}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}) \quad (2-18)$$

$$\boldsymbol{\omega}_E = \mathbf{R}_0(\boldsymbol{\varepsilon}, n) ({}^0\boldsymbol{\omega}_0 + {}^0\mathbf{J}_{22}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}) \quad (2-19)$$

2.3 Εξισώσεις Ορμής του Συστήματος

Στην παρούσα εργασία, το ενδιαφέρον εστιάζεται κυρίως σε ελεύθερα αιωρούμενα ΔΡΣ. Στα συστήματα αυτά, οι προωθητήρες του δορυφόρου του ΔΡΣ είναι εκτός λειτουργίας και έτσι δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις και ροπές με αποτέλεσμα η γραμμική ορμή και η στροφορμή του συστήματος να διατηρούνται.

2.3.1 Γραμμική Ορμή του Συστήματος

Η γραμμική ορμή, \mathbf{p} , ενός συστήματος, μάζας M , του οποίου το ΚΜ απέχει απόσταση \mathbf{r}_{CM} από την αρχή του αδρανειακού ΣΣ, βλ. Σχήμα 2.1, δίνεται από:

$$\mathbf{p} = M \dot{\mathbf{r}}_{CM} \quad (2-20)$$

Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του συστήματος ισούται με την συνισταμένη δύναμη, $\Sigma \mathbf{F}_{ext}$, που δρα στο σύστημα,

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt} (M \dot{\mathbf{r}}_{CM}) = \Sigma \mathbf{F}_{ext} \quad (2-21)$$

Όπως προαναφέρθηκε, στα ελεύθερα αιωρούμενα διαστημικά ΔΡΣ, οι εξωτερικές δυνάμεις είναι μηδέν, δηλαδή $\Sigma \mathbf{F}_{ext} = \mathbf{0}$. Οπότε:

$$\frac{d}{dt} (M \dot{\mathbf{r}}_{CM}) = \mathbf{0} \Rightarrow \dot{\mathbf{r}}_{CM} = const \quad (2-22)$$

Με την παραδοχή μηδενικής αρχικής ορμής, η Εξ. (2-22) γράφεται:

$$\dot{\mathbf{r}}_{CM} = \mathbf{0} \quad (2-23a)$$

ή ισοδύναμα:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}_{\text{CM}}) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{r}_{\text{CM}} = \text{const} \quad (2-23\beta)$$

Το ΚΜ του συστήματος, λοιπόν, παραμένει σταθερό ως προς το αδρανειακό ΣΣ. Στην περίπτωση αυτή, ως αρχή του αδρανειακού ΣΣ μπορεί να επιλεγθεί το ΚΜ του συστήματος. Δηλαδή, μπορεί να θεωρηθεί ότι:

$$\mathbf{r}_{\text{CM}} = \mathbf{0} \quad (2-23\gamma)$$

Για ελεύθερα αιωρούμενα ΔΡΣ με μηδενική αρχική γραμμική ορμή, λοιπόν, οι κινηματικές εξισώσεις που δίνουν τη θέση και τη γραμμική ταχύτητα του ΤΣΔ, δηλαδή οι Εξ. (2-17) και (2-18), μπορούν να απλοποιηθούν λαμβάνοντας υπόψη τις Εξ. (2-23γ) και (2-23α), αντίστοιχα.

2.3.2 Στροφορμή του Συστήματος

Η στροφορμή του συστήματος ως προς την αρχή του αδρανειακού ΣΣ, \mathbf{h} , δίνεται από:

$$\mathbf{h} = \sum_{k=0}^N (\mathbf{I}_k \cdot \boldsymbol{\omega}_k + m_k \mathbf{r}_k \times \dot{\mathbf{r}}_k) \quad (2-24\alpha)$$

όπου \mathbf{I}_k είναι ο τανυστής αδράνειας του σώματος k , $\boldsymbol{\omega}_k$ είναι η γωνιακή ταχύτητα του σώματος k και \mathbf{r}_k είναι το διάνυσμα θέσης του ΚΜ του σώματος k , όλα ως προς το αδρανειακό ΣΣ, βλ. Σχήμα 2.1. Ο δορυφόρος είναι το σώμα με $k=0$.

Η στροφορμή του συστήματος ως προς το κέντρο μάζας του, \mathbf{h}_{CM} , δίνεται από:

$$\mathbf{h}_{\text{CM}} = \sum_{k=0}^N (\mathbf{I}_k \cdot \boldsymbol{\omega}_k + m_k \boldsymbol{\rho}_k \times \dot{\boldsymbol{\rho}}_k) \quad (2-24\beta)$$

όπου $\boldsymbol{\rho}_k$ είναι το διάνυσμα από το ΚΜ του συστήματος στο ΚΜ του σώματος k ως προς το αδρανειακό ΣΣ.

Το διάνυσμα $\boldsymbol{\rho}_k$ δίνεται από την Εξ. (2-6α) και επομένως το $\dot{\boldsymbol{\rho}}_k$ δίνεται από:

$$\dot{\boldsymbol{\rho}}_k = \sum_{i=0}^N \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{v}_{ik} \quad (2-25)$$

Από τις Εξ. (2-24β), (2-6α) και (2-25) προκύπτει ότι:

$$\mathbf{h}_{\text{CM}} = \sum_{k=0}^N (\mathbf{I}_k \cdot \boldsymbol{\omega}_k) + \sum_{j=0}^N \sum_{i=0}^N \sum_{k=0}^N (m_k \mathbf{v}_{ik} \times \boldsymbol{\omega}_j \times \mathbf{v}_{jk}) \quad (2-26)$$

όπου ο πρώτος όρος της είναι ισοδύναμος με:

$$\sum_{k=0}^N (\mathbf{I}_k \cdot \boldsymbol{\omega}_k) = \sum_{j=0}^N \sum_{i=0}^N \delta_{ij} \mathbf{I}_i \cdot \boldsymbol{\omega}_j \quad (2-27)$$

Κάνοντας χρήση της ταυτότητας:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = [(\mathbf{c} \cdot \mathbf{a})\mathbf{1} - \mathbf{c}\mathbf{a}] \cdot \mathbf{b} \quad (2-28)$$

με $\mathbf{1}$ τη μοναδιαία δυαδική ποσότητα, το εσωτερικό άθροισμα του δεύτερου όρου της Εξ. (2-26) μπορεί να γραφτεί ως:

$$\sum_{k=0}^N m_k \mathbf{v}_{ik} \times \boldsymbol{\omega}_j \times \mathbf{v}_{jk} = \sum_{k=0}^N m_k [(\mathbf{v}_{jk} \cdot \mathbf{v}_{ik})\mathbf{1} - (\mathbf{v}_{jk} \mathbf{v}_{ik})] \cdot \boldsymbol{\omega}_j \quad (2-29)$$

Η Εξ. (2-26), λαμβάνοντας υπόψη τις Εξ. (2-27) και (2-29), γράφεται:

$$\mathbf{h}_{CM} = \sum_{j=0}^N \sum_{i=0}^N \mathbf{D}_{ij} \cdot \boldsymbol{\omega}_j \quad (2-30)$$

όπου:

$$\mathbf{D}_{ij} = \delta_{ij} \mathbf{I}_i + \sum_{k=0}^N m_k [(\mathbf{v}_{jk} \cdot \mathbf{v}_{ik})\mathbf{1} - (\mathbf{v}_{jk} \mathbf{v}_{ik})] \quad (2-31)$$

Αντικαθιστώντας στην Εξ. (2-30) τη γωνιακή ταχύτητα $\boldsymbol{\omega}_i$ από την Εξ. (2-9) και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα:

$$\mathbf{D}_{ij} = \mathbf{R}_0 {}^0 \mathbf{D}_{ij} \mathbf{R}_0^T \quad (2-32)$$

προκύπτει:

$$\mathbf{h}_{CM} = \mathbf{R}_0(\boldsymbol{\varepsilon}, n) ({}^0 \mathbf{D} {}^0 \boldsymbol{\omega}_0 + {}^0 \mathbf{D}_q \dot{\mathbf{q}}) \quad (2-33)$$

όπου:

$${}^0 \mathbf{D}_j \equiv \sum_{i=0}^N {}^0 \mathbf{D}_{ij} \quad (2-34\alpha)$$

$${}^0 \mathbf{D} \equiv \sum_{j=0}^N {}^0 \mathbf{D}_j \quad (2-34\beta)$$

$${}^0 \mathbf{D}_q \equiv \sum_{j=1}^N {}^0 \mathbf{D}_j {}^0 \mathbf{F}_j \quad (2-34\gamma)$$

όπου ο $3 \times N$ πίνακας ${}^0 \mathbf{F}_j$ δίνεται από την Εξ. (2-10).

Αφού ο πίνακας ${}^0 \mathbf{D}$ είναι ο πίνακας αδράνειας όλου του ΔΡΣ, ως προς το ΚΜ του συστήματος, εκφρασμένος στο ΣΣ του δορυφόρου του ΔΡΣ, είναι πάντα αντιστρέψιμος, [67]. Έτσι, η Εξ. (2-33) μπορεί να επιλυθεί ως προς τη γωνιακή ταχύτητα ${}^0 \boldsymbol{\omega}_0$ του δορυφόρου του ΔΡΣ, δηλαδή:

$${}^0 \boldsymbol{\omega}_0 = {}^0 \mathbf{D}^{-1} (\mathbf{R}_0^T(\boldsymbol{\varepsilon}, n) \mathbf{h}_{CM} - {}^0 \mathbf{D}_q \dot{\mathbf{q}}) \quad (2-35)$$

Στη συνέχεια θα εξεταστεί η επίδραση της μη-μηδενικής αρχικής στροφορμής του ελεύθερα αιωρούμενου ΔΡΣ στην ταχύτητα (γραμμική και γωνιακή) του ΤΣΔ. Θεωρώντας μηδενική γραμμική ορμή του συστήματος, δηλαδή $\dot{\mathbf{r}}_{\text{CM}} = \mathbf{0}$, βλ. Εξ. (2-23α), και αντικαθιστώντας την Εξ. (2-35) στις Εξ. (2-18) και (2-19) προκύπτει ότι η ταχύτητα \mathbf{v}_E του ΤΣΔ δίνεται από:

$$\mathbf{v}_E = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}}_E \\ \boldsymbol{\omega}_E \end{bmatrix} = \mathbf{E}(\boldsymbol{\varepsilon}, n) ({}^0 \mathbf{J}_q(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + {}^0 \mathbf{J}_h \mathbf{R}_0^T(\boldsymbol{\varepsilon}, n) \mathbf{h}_{\text{CM}}) \quad (2-36)$$

όπου ο 6×6 πίνακας $\mathbf{E}(\boldsymbol{\varepsilon}, n)$ είναι:

$$\mathbf{E}(\boldsymbol{\varepsilon}, n) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_0(\boldsymbol{\varepsilon}, n) & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{R}_0(\boldsymbol{\varepsilon}, n) \end{bmatrix} \quad (2-37\alpha)$$

όπου $\mathbf{0}_{m \times n}$ είναι ο μηδενικός πίνακας $m \times n$.

Ο $6 \times N$ πίνακας ${}^0 \mathbf{J}_q(\mathbf{q})$, που ονομάζεται Γενικευμένη Ιακωβιανή (Generalized Jacobian) του ελεύθερα αιωρούμενου ΔΡΣ, συνδέει τη γραμμική και γωνιακή ταχύτητα του ΤΣΔ με τις ταχύτητες των αρθρώσεων του βραχίονα του ΔΡΣ λαμβάνοντας υπόψη τη διατήρηση της στροφορμής του ΔΡΣ, [97]. Η Γενικευμένη Ιακωβιανή, σε αντίθεση με την Ιακωβιανή που αντιστοιχεί στους ρομποτικούς βραχίονες σταθερής βάσης, εξαρτάται επιπλέον και από τα δυναμικά χαρακτηριστικά (μάζες, ροπές αδράνειας) του ΔΡΣ και δίνεται από:

$${}^0 \mathbf{J}_q(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} {}^0 \mathbf{J}_{12}(\mathbf{q}) - {}^0 \mathbf{J}_{11}(\mathbf{q}) {}^0 \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{q}) {}^0 \mathbf{D}_q(\mathbf{q}) \\ {}^0 \mathbf{J}_{22}(\mathbf{q}) - {}^0 \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{q}) {}^0 \mathbf{D}_q(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \quad (2-37\beta)$$

Η Γενικευμένη Ιακωβιανή δεν επηρεάζεται από την ύπαρξη μη-μηδενικής στροφορμής του ΔΡΣ ενώ η επίδραση της στροφορμής δίνεται μέσω του 6×3 πίνακα ${}^0 \mathbf{J}_h(\mathbf{q})$, που συνδέει τη γραμμική και γωνιακή ταχύτητα του ΤΣΔ με τη στροφορμή του ΔΡΣ και ισούται με:

$${}^0 \mathbf{J}_h(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} {}^0 \mathbf{J}_{11}(\mathbf{q}) {}^0 \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{q}) \\ {}^0 \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \quad (2-37\gamma)$$

Όταν η Γενικευμένη Ιακωβιανή ${}^0 \mathbf{J}_q(\mathbf{q})$ αντιστρέφεται, η Εξ. (2-36) μπορεί να επιλυθεί ως προς $\dot{\mathbf{q}}$ και να δώσει τις ταχύτητες των αρθρώσεων που απαιτούνται ώστε το ΤΣΔ να διαγράψει μια επιθυμητή τροχιά στον Καρτεσιανό χώρο παρά την ύπαρξη στροφορμής του ΔΡΣ. Το πρόβλημα αυτό θα μελετηθεί αναλυτικά στο Κεφάλαιο 3.

2.4 Εξισώσεις Κίνησης του Συστήματος

Στην παράγραφο αυτή αναπτύσσουμε τις εξισώσεις κίνησης για ελεύθερα αιωρούμενους διαστημικούς βραχίονες με άκαμπτες αρθρώσεις υπό την επίδραση μη μηδενικής αρχικής στροφορμής. Για τη δημιουργία των εξισώσεων κίνησης του συστήματος, πρώτα πρέπει να εκφραστεί η κινητική και η δυναμική του ενέργεια. Η κινητική ενέργεια του συστήματος είναι:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N m_k \dot{\rho}_k \cdot \dot{\rho}_k + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N \omega_k \cdot \mathbf{I}_k \cdot \omega_k \quad (2-38)$$

Σύμφωνα με την Εξ. (2-25) ισχύει:

$$\dot{\rho}_k \cdot \dot{\rho}_k = \left(\sum_{i=0}^N \omega_i \times \mathbf{v}_{ik} \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^N \omega_j \times \mathbf{v}_{jk} \right) = \sum_{j=0}^N \sum_{i=0}^N (\omega_i \times \mathbf{v}_{ik}) \cdot (\omega_j \times \mathbf{v}_{jk}) \quad (2-39)$$

ενώ κάνοντας χρήση της ταυτότητας:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot [(\mathbf{d} \cdot \mathbf{b})\mathbf{1} - \mathbf{d}\mathbf{b}] \cdot \mathbf{c} \quad (2-40)$$

προκύπτει:

$$\dot{\rho}_k \cdot \dot{\rho}_k = \sum_{j=0}^N \sum_{i=0}^N \omega_i \cdot [(\mathbf{v}_{jk} \cdot \mathbf{v}_{ik})\mathbf{1} - (\mathbf{v}_{jk} \mathbf{v}_{ik})] \cdot \omega_j \quad (2-41)$$

Οπότε ο πρώτος όρος της Εξ. (2-38) ισούται με:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N m_k \dot{\rho}_k \cdot \dot{\rho}_k &= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^N \sum_{i=0}^N \sum_{k=0}^N \omega_i \cdot m_k [(\mathbf{v}_{jk} \cdot \mathbf{v}_{ik})\mathbf{1} - (\mathbf{v}_{jk} \mathbf{v}_{ik})] \cdot \omega_j \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^N \sum_{i=0}^N \left\{ \omega_i \cdot \sum_{k=0}^N m_k [(\mathbf{v}_{jk} \cdot \mathbf{v}_{ik})\mathbf{1} - (\mathbf{v}_{jk} \mathbf{v}_{ik})] \right\} \cdot \omega_j \end{aligned} \quad (2-42)$$

Ο δεύτερος όρος της Εξ. (2-38) ισούται με:

$$\frac{1}{2} \sum_{k=0}^N \omega_k \cdot \mathbf{I}_k \cdot \omega_k = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^N \sum_{i=0}^N \delta_{ij} \omega_i \cdot \mathbf{I}_i \cdot \omega_j \quad (2-43)$$

Από τις Εξ. (2-38), (2-42), (2-43) και (2-31) προκύπτει ότι:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^N \sum_{i=0}^N \omega_i \cdot \mathbf{D}_{ij} \cdot \omega_j \quad (2-44)$$

Αντικαθιστώντας τη γωνιακή ταχύτητα ω από την Εξ. (2-9), προκύπτει:

$$T({}^0\omega_0, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} {}^0\omega_0^T {}^0\mathbf{D} {}^0\omega_0 + {}^0\omega_0^T {}^0\mathbf{D}_q \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T {}^0\mathbf{D}_{qq} \dot{\mathbf{q}} \quad (2-45a)$$

όπου οι πίνακες ${}^0\mathbf{D}$ και ${}^0\mathbf{D}_q$ διαστάσεων 3×3 και $3 \times N$ αντίστοιχα δίνονται από τις Εξ. (2-

34) και ο $N \times N$ πίνακας ${}^0\mathbf{D}_{qq}$ είναι:

$${}^0\mathbf{D}_{qq} \equiv \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N {}^0\mathbf{F}_i^T {}^0\mathbf{D}_{ij} {}^0\mathbf{F}_j \quad (2-45\beta)$$

Η Εξ. (2-45α) γράφεται σε μητρική μορφή:

$$T({}^0\boldsymbol{\omega}_0, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} {}^0\boldsymbol{\omega}_0^T & \dot{\mathbf{q}}^T \end{bmatrix} \mathbf{H}^*(\mathbf{q}) \begin{bmatrix} {}^0\boldsymbol{\omega}_0 \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \quad (2-46\alpha)$$

όπου ο $(N+3) \times (N+3)$ πίνακας αδράνειας (system inertia matrix) $\mathbf{H}^*(\mathbf{q})$ του συστήματος δίνεται από:

$$\mathbf{H}^*(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} {}^0\mathbf{D} & {}^0\mathbf{D}_q \\ {}^0\mathbf{D}_q^T & {}^0\mathbf{D}_{qq} \end{bmatrix} \quad (2-46\beta)$$

Σημειώνεται ότι για την εξαγωγή της Εξ. (2-46α) από την Εξ. (2-45α), λήφθηκε υπόψη ότι:

$${}^0\boldsymbol{\omega}_0^T {}^0\mathbf{D}_q \dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} {}^0\boldsymbol{\omega}_0^T {}^0\mathbf{D}_q \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T {}^0\mathbf{D}_q^T {}^0\boldsymbol{\omega}_0 \quad (2-46\gamma)$$

Εφόσον η κινητική ενέργεια T του ΔΡΣ είναι πάντα θετική ποσότητα, ο πίνακας αδράνειας $\mathbf{H}^*(\mathbf{q})$, όπως προκύπτει από την Εξ. (2-46α), είναι θετικά ορισμένος.

Για τον υπολογισμό της συνάρτησης Lagrange απαιτείται επίσης και η δυναμική ενέργεια του ΔΡΣ. Η δυναμική ενέργεια που οφείλεται στη βαρύτητα είναι μηδέν, και αφού το σύστημα είναι άκαμπτο, η δυναμική ενέργεια που οφείλεται στην ευκαμψία είναι επίσης μηδέν.

Η συνάρτηση Lagrange L του συστήματος, λοιπόν, είναι ίση με τη κινητική του ενέργεια και δίνεται ως συνάρτηση της διαμόρφωσης \mathbf{q} του βραχίονα, των ταχυτήτων $\dot{\mathbf{q}}$ των αρθρώσεων και της γωνιακής ταχύτητας του δορυφόρου του ΔΡΣ εκφρασμένης ως προς το ΣΣ $\{0\}$ του δορυφόρου:

$$L({}^0\boldsymbol{\omega}_0, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} {}^0\boldsymbol{\omega}_0^T {}^0\mathbf{D} {}^0\boldsymbol{\omega}_0 + {}^0\boldsymbol{\omega}_0^T {}^0\mathbf{D}_q \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T {}^0\mathbf{D}_{qq} \dot{\mathbf{q}} \quad (2-47)$$

Η μερική παράγωγος της συνάρτησης L ως προς τη γωνιακή ταχύτητα του δορυφόρου ${}^0\boldsymbol{\omega}_0$, εκφρασμένης ως προς το ΣΣ $\{0\}$ του δορυφόρου, ισούται με τη στροφορμή του συστήματος ως προς το ΚΜ του:

$$\frac{\partial L({}^0\boldsymbol{\omega}_0, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial {}^0\boldsymbol{\omega}_0} = {}^0\mathbf{D} {}^0\boldsymbol{\omega}_0 + {}^0\mathbf{D}_q \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{R}_0^T \mathbf{h}_{\text{CM}} = {}^0\mathbf{h}_{\text{CM}} \quad (2-48)$$

όπου ${}^0\mathbf{h}_{\text{CM}}$ είναι η στροφορμή του συστήματος ως προς το ΚΜ του συστήματος, εκφρασμένη στο ΣΣ του δορυφόρου και σε αντίθεση με την \mathbf{h}_{CM} , δεν είναι σταθερή.

Χρησιμοποιώντας το διάνυσμα $[{}^0\boldsymbol{\omega}_0^T \dot{\mathbf{q}}^T]^T$ για διάνυσμα γενικευμένων ταχυτήτων (generalized speeds) και εφαρμόζοντας τις εξισώσεις Lagrange για quasi-coordinates προκύπτει, [40]:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L({}^0\boldsymbol{\omega}_0, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial {}^0\boldsymbol{\omega}_0} \right) + {}^0\boldsymbol{\omega}_0^\times \frac{\partial L({}^0\boldsymbol{\omega}_0, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial {}^0\boldsymbol{\omega}_0} = \mathbf{R}_0^T \mathbf{g}_{CM} \quad (2-49)$$

όπου \mathbf{g}_{CM} είναι το διάνυσμα των εξωτερικών ροπών που δρουν στο δορυφόρο, από τους προωθητήρες και τους σφονδύλους αντίδρασης, ως προς το ΚΜ του συστήματος, εκφρασμένο στο αδρανειακό ΣΣ και το σύμβολο $(\cdot)^\times$ ορίζει τον αντι-συμμετρικό πίνακα που αντιστοιχεί στο εξωτερικό γινόμενο όπως αυτός δίνεται από την Εξ. (2-4).

Συνδυάζοντας τις Εξ. (2-48) και (2-49) προκύπτει:

$$\frac{d}{dt} ({}^0\mathbf{D} {}^0\boldsymbol{\omega}_0 + {}^0\mathbf{D}_q \dot{\mathbf{q}}) + {}^0\boldsymbol{\omega}_0^\times ({}^0\mathbf{D} {}^0\boldsymbol{\omega}_0 + {}^0\mathbf{D}_q \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{R}_0^T \mathbf{g}_{CM} \quad (2-50)$$

όπου ύστερα από κάποιες πράξεις έχουμε:

$$\left({}^0\mathbf{D} {}^0\dot{\boldsymbol{\omega}}_0 + \frac{\partial ({}^0\mathbf{D} {}^0\boldsymbol{\omega}_0)}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} + {}^0\mathbf{D}_q \ddot{\mathbf{q}} + \frac{\partial ({}^0\mathbf{D}_q \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} \right) + {}^0\boldsymbol{\omega}_0^\times ({}^0\mathbf{D} {}^0\boldsymbol{\omega}_0 + {}^0\mathbf{D}_q \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{R}_0^T \mathbf{g}_{CM} \quad (2-51)$$

Στα ελεύθερα αιωρούμενα ΔΡΣ, οι ροπές \mathbf{g}_{CM} , των εξωτερικών δυνάμεων που ασκούνται στο δορυφόρο είναι μηδέν. Η Εξ. (2-51), λοιπόν, παίρνει τη μορφή:

$${}^0\mathbf{D} {}^0\dot{\boldsymbol{\omega}}_0 + {}^0\mathbf{D}_q \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{c}_1^* ({}^0\boldsymbol{\omega}_0, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{0} \quad (2-52\alpha)$$

όπου το 3×1 διάνυσμα \mathbf{c}_1^* δίνεται από:

$$\mathbf{c}_1^* ({}^0\boldsymbol{\omega}_0, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = {}^0\boldsymbol{\omega}_0^\times {}^0\mathbf{D} {}^0\boldsymbol{\omega}_0 + \left({}^0\boldsymbol{\omega}_0^\times {}^0\mathbf{D}_q + \frac{\partial ({}^0\mathbf{D} {}^0\boldsymbol{\omega}_0)}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial ({}^0\mathbf{D}_q \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} \right) \dot{\mathbf{q}} \quad (2-52\beta)$$

Σημειώνεται ότι η Εξ. (2-52α) μπορεί να προκύψει και από τη χρονική παράγωγο της Εξ. (2-33), θεωρώντας σταθερή στροφορμή. Δηλαδή η διατήρηση της στροφορμής, Εξ. (2-33), αποτελεί ένα ολοκλήρωμα κίνησης. Οι εξισώσεις Lagrange ως προς τις μεταβλητές \mathbf{q} είναι:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L({}^0\boldsymbol{\omega}_0, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial L({}^0\boldsymbol{\omega}_0, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} = \boldsymbol{\tau} \quad (2-53)$$

όπου $\boldsymbol{\tau} = [\tau_1, \dots, \tau_N]^T$ είναι το $N \times 1$ διάνυσμα των ροπών στις αρθρώσεις του βραχίονα και τ_i είναι η ροπή που εφαρμόζεται στην άρθρωση i .

Η μερική παράγωγος της συνάρτησης L ως προς τις ταχύτητες $\dot{\mathbf{q}}$ των γωνιών των αρθρώσεων του βραχίονα, δηλαδή η γενικευμένη ορμή, συζυγής της συντεταγμένης \mathbf{q} , είναι:

$$\frac{\partial L({}^0\boldsymbol{\omega}_0, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = {}^0\mathbf{D}_q^T {}^0\boldsymbol{\omega}_0 + {}^0\mathbf{D}_{qq} \dot{\mathbf{q}} \quad (2-54\alpha)$$

Επίσης, ο δεύτερος όρος της Εξ. (2-53) γράφεται ως:

$$\frac{\partial L({}^0\boldsymbol{\omega}_0, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} = \frac{1}{2} \frac{\partial ({}^0\boldsymbol{\omega}_0^T {}^0\mathbf{D})}{} \cdot {}^0\boldsymbol{\omega}_0 + \left[\frac{\partial ({}^0\boldsymbol{\omega}_0^T {}^0\mathbf{D}_q)}{\partial \mathbf{q}} + \frac{1}{2} \frac{\partial (\dot{\mathbf{q}}^T {}^0\mathbf{D}_{qq})}{\partial \mathbf{q}} \right] \dot{\mathbf{q}} \quad (2-54\beta)$$

Οι Εξ. (2-53) και (2-54) δίνουν:

$${}^0\mathbf{D}_{qq} \ddot{\mathbf{q}} + {}^0\mathbf{D}_q^T {}^0\dot{\boldsymbol{\omega}}_0 + \mathbf{c}_2^*({}^0\boldsymbol{\omega}_0, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \boldsymbol{\tau} \quad (2-55\alpha)$$

όπου το $N \times 1$ διάνυσμα \mathbf{c}_2^* δίνεται από:

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_2^*({}^0\boldsymbol{\omega}_0, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = & \left[\frac{\partial ({}^0\mathbf{D}_q^T {}^0\boldsymbol{\omega}_0)}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial ({}^0\mathbf{D}_{qq} \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial ({}^0\boldsymbol{\omega}_0^T {}^0\mathbf{D}_q)}{\partial \mathbf{q}} - \frac{1}{2} \frac{\partial (\dot{\mathbf{q}}^T {}^0\mathbf{D}_{qq})}{\partial \mathbf{q}} \right] \dot{\mathbf{q}} \\ & - \frac{1}{2} \frac{\partial ({}^0\boldsymbol{\omega}_0^T {}^0\mathbf{D})}{\partial \mathbf{q}} \cdot {}^0\boldsymbol{\omega}_0 \end{aligned} \quad (2-55\beta)$$

Εφόσον ο πίνακας ${}^0\mathbf{D}$ είναι πάντα αντιστρέψιμος, η Εξ. (2-52α) επιλύεται ως προς ${}^0\dot{\boldsymbol{\omega}}_0$ και το αποτέλεσμα αντικαθιστάται στην Εξ. (2-55α), από όπου τελικά προκύπτει:

$$\mathbf{H}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{c}({}^0\boldsymbol{\omega}_0, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \boldsymbol{\tau} \quad (2-56)$$

όπου $\mathbf{H}(\mathbf{q})$ είναι ένας $N \times N$ θετικά ορισμένος συμμετρικός πίνακας, που ονομάζεται *πίνακας αδράνειας του μειωμένου συστήματος* (reduced system inertia matrix) και δίνεται από:

$$\mathbf{H}(\mathbf{q}) = {}^0\mathbf{D}_{qq} - {}^0\mathbf{D}_q^T {}^0\mathbf{D}^{-1} {}^0\mathbf{D}_q \quad (2-57\alpha)$$

και $\mathbf{c}({}^0\boldsymbol{\omega}_0, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ είναι ένα $N \times 1$ διάνυσμα που περιέχει τους μη γραμμικούς όρους των φυγοκεντρικών δυνάμεων και των δυνάμεων Coriolis:

$$\mathbf{c}({}^0\boldsymbol{\omega}_0, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{c}_2^*({}^0\boldsymbol{\omega}_0, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - {}^0\mathbf{D}_q^T {}^0\mathbf{D}^{-1} \mathbf{c}_1^*({}^0\boldsymbol{\omega}_0, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (2-57\beta)$$

Στη συνέχεια η εξίσωση της διατήρησης της στροφορμής, Εξ. (2-33), επιλύεται ως προς το ${}^0\boldsymbol{\omega}_0$ και το αποτέλεσμα αντικαθίσταται στην Εξ. (2-56), που τελικά δίνει:

$$\mathbf{H}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}^*(\boldsymbol{\varepsilon}, n, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{h}_{CM}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}_h(\boldsymbol{\varepsilon}, n, \mathbf{q}, \mathbf{h}_{CM}) = \boldsymbol{\tau} \quad (2-58)$$

όπου ο $N \times N$ πίνακας \mathbf{C}^* δίνεται από την:

$$\mathbf{C}^*(\boldsymbol{\varepsilon}, n, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{h}_{CM}) = \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{C}_h(\boldsymbol{\varepsilon}, n, \mathbf{q}, \mathbf{h}_{CM}) \quad (2-59\alpha)$$

Στην Εξ. (2-59α), ο $N \times N$ πίνακας \mathbf{C} είναι ο πίνακας των φυγοκεντρικών δυνάμεων και των δυνάμεων Coriolis και δίνεται από:

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \frac{\partial (\dot{\mathbf{q}}^T {}^0\mathbf{D}_q^T {}^0\mathbf{D}^{-1} {}^0\mathbf{D}_q)}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial ({}^0\mathbf{D}_{qq} \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} - \frac{1}{2} \frac{\partial (\dot{\mathbf{q}}^T {}^0\mathbf{D}_{qq})}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial ({}^0\mathbf{D}_q^T {}^0\mathbf{D}^{-1} {}^0\mathbf{D}_q \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} \quad (2-59\beta)$$

ενώ ο $N \times N$ πίνακας \mathbf{C}_h δίνεται από:

$$\mathbf{C}_h(\boldsymbol{\varepsilon}, n, \mathbf{q}, \mathbf{h}_{CM}) = \frac{\partial({}^0\mathbf{D}_q^T {}^0\mathbf{D}^{-1} \mathbf{R}_0^T \mathbf{h}_{CM})}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial(\mathbf{h}_{CM}^T \mathbf{R}_0 {}^0\mathbf{D}^{-1} {}^0\mathbf{D}_q)}{\partial \mathbf{q}} \quad (2-59\gamma)$$

Αντίστοιχα, το $N \times 1$ διάνυσμα \mathbf{g}_h δίνεται από:

$$\mathbf{g}_h(\boldsymbol{\varepsilon}, n, \mathbf{q}, \mathbf{h}_{CM}) = \frac{1}{2} \frac{\partial(\mathbf{h}_{CM}^T \mathbf{R}_0 {}^0\mathbf{D}^{-1} \mathbf{R}_0^T)}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{h}_{CM} - {}^0\mathbf{D}_q^T {}^0\mathbf{D}^{-1} [{}^0\mathbf{D}^{-1} (\mathbf{R}_0^T \mathbf{h}_{CM} - {}^0\mathbf{D}_q \dot{\mathbf{q}})]^x \mathbf{R}_0^T \mathbf{h}_{CM} \quad (2-59\delta)$$

Είναι γνωστό ότι στους ρομποτικούς βραχίονες σταθερής βάσης, το διαγώνιο στοιχείο h_{ii} του πίνακα αδράνειας $\mathbf{H}(\mathbf{q})$ αντιστοιχεί στην ολική ροπή αδράνειας των συνδέσμων $i, i+1, \dots, N$ ως προς την άρθρωση i και είναι συνάρτηση μόνο των αδρανειακών παραμέτρων αυτών των συνδέσμων καθώς και της διαμόρφωσης τους, δηλαδή των γωνιών q_i, q_{i+1}, \dots, q_N , [8]. Η ιδιότητα αυτή, όμως δεν ισχύει για τα ελεύθερα αιωρούμενα ΔΡΣ. Αν και στην περίπτωση αυτή, το στοιχείο h_{ii} του πίνακα αδράνειας $\mathbf{H}(\mathbf{q})$ αντιστοιχεί πάλι στην ολική ροπή αδράνειας των συνδέσμων $i, i+1, \dots, N$ ως προς την άρθρωση i , παρόλα αυτά, λόγω της δυναμικής σύζευξης μεταξύ βραχίονα και δορυφόρου του ΔΡΣ, αυτή είναι τώρα συνάρτηση των αδρανειακών παραμέτρων του δορυφόρου και όλων των συνδέσμων του βραχίονα καθώς και της διαμόρφωσης τους, δηλαδή των γωνιών q_1, q_2, \dots, q_N .

Η Εξ. (2-58) αποτελεί τις N μειωμένες (reduced) εξισώσεις κίνησης, παρουσία αρχικής στροφορμής \mathbf{h}_{CM} . Όταν το ΔΡΣ έχει μηδενική αρχική στροφορμή, ο όρος \mathbf{g}_h που δίνεται από την Εξ. (2-59δ) καθώς και ο πίνακας \mathbf{C}_h που δίνεται από την Εξ. (2-59γ) μηδενίζονται. Στην περίπτωση αυτή, οι εξισώσεις κίνησης εξαρτώνται μόνο από τη διαμόρφωση \mathbf{q} του ρομποτικού βραχίονα. Αντίθετα, παρουσία αρχικής στροφορμής, οι εξισώσεις κίνησης του συστήματος εξαρτώνται και από τον προσανατολισμό του δορυφόρου που εκφράζεται από τις παραμέτρους Euler $\boldsymbol{\varepsilon}, n$, οι οποίες δεν μπορούν να αντικατασταθούν συναρτήσει της διαμόρφωσης \mathbf{q} του ρομποτικού βραχίονα, λόγω του μη ολόνομου χαρακτήρα της εξίσωσης της στροφορμής. Επίσης, όπως προκύπτει από την Εξ. (2-58), η αρχική στροφορμή στο ΔΡΣ επιδρά ως διαταραχή στο σύστημα όπως η βαρύτητα στους επίγειους ρομποτικούς βραχίονες σταθερής βάσης. Από την Εξ. (2-59δ) προκύπτει ότι η επίδραση στις ροπές των αρθρώσεων δεν είναι ανάλογη της στροφορμής. Δηλαδή μεταβολή της στροφορμής του συστήματος δε θα προκαλέσει ανάλογη μεταβολή στις απαιτούμενες ροπές των αρθρώσεων του ΔΡΣ. Στην περίπτωση μη μηδενικής στροφορμής, για το "κλείδωμα" του βραχίονα σε μια συγκεκριμένη

διαμόρφωση $\mathbf{q} = \text{const}$ ($\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$, $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$) απαιτούνται ροπές στις αρθρώσεις, σύμφωνα με τις Εξ. (2.58) – (2.59), ίσες με:

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{1}{2} \frac{\partial (\mathbf{h}_{CM}^T \mathbf{R}_0^0 \mathbf{D}^{-1} \mathbf{R}_0^T)}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{h}_{CM} - {}^0 \mathbf{D}_q^T {}^0 \mathbf{D}^{-1} [{}^0 \mathbf{D}^{-1} (\mathbf{R}_0^T \mathbf{h}_{CM})]^{\times} \mathbf{R}_0^T \mathbf{h}_{CM} \quad (2-60)$$

Η Εξ. (2-60) δίνει τις απαιτούμενες ροπές ώστε η αρθρώσεις να διατηρηθούν “κλειδωμένες” παρά τις διαταραχές που προκαλούνται από την κίνηση του δορυφόρου του ΔΡΣ λόγω της μη μηδενικής στροφορμής του. Για μηδενική αρχική στροφορμή προκύπτει από την Εξ. (2-60) ότι $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{0}$, αφού στην περίπτωση αυτή ο δορυφόρος δεν περιστρέφεται και έτσι δεν απαιτούνται ροπές για τη διατήρηση των αρθρώσεων στην επιθυμητή “κλειδωμένη” θέση.

2.5 Επίπεδα Συστήματα

Η εξίσωση διατήρησης της στροφορμής, οι κινηματικές εξισώσεις καθώς και οι εξισώσεις κίνησης των ΔΡΣ απλοποιούνται σημαντικά στις περιπτώσεις επίπεδων κινήσεων. Η διατήρηση της στροφορμής, Εξ. (2-33), μπορεί να γραφεί:

$$D \dot{\theta}_0 + \mathbf{D}_q \dot{\mathbf{q}} = h_{CM} \quad (2-61)$$

όπου θ_0 είναι ο προσανατολισμός του δορυφόρου και h_{CM} είναι η αρχική στροφορμή του συστήματος, κάθετη στο επίπεδο της κίνησης. Σημειώνεται ότι, στα επίπεδα συστήματα, το διάνυσμα της στροφορμής εκφρασμένο ως προς το ΣΣ {0} του δορυφόρου ταυτίζεται με το αντίστοιχο διάνυσμα εκφρασμένο στο αδρανειακό ΣΣ.

Το διάνυσμα θέσης, \mathbf{r}_E , του ΤΣΔ ενός επίπεδου ελεύθερα αιωρούμενου ΔΡΣ, εκφρασμένο στο αδρανειακό ΣΣ του οποίου η αρχή βρίσκεται στο ΚΜ του συστήματος, Εξ. (2-17), γράφεται ως:

$$\mathbf{r}_E = \mathbf{R}_0(\theta_0) \sum_{i=0}^N {}^0 \mathbf{R}_i(\mathbf{q})^i \mathbf{v}_{iN,E} \quad (2-62)$$

Η γραμμική και η γωνιακή ταχύτητα του ΤΣΔ, Εξ. (2-18) – (2-19), παίρνουν τη μορφή αντίστοιχα:

$$\dot{\mathbf{r}}_E = \mathbf{R}_0(\theta_0) (\mathbf{J}_{11} \dot{\theta}_0 + \mathbf{J}_{12} \dot{\mathbf{q}}) \quad (2-63\alpha)$$

$$\dot{\theta}_E = \dot{\theta}_0 + \mathbf{J}_{22} \dot{\mathbf{q}} \quad (2-63\beta)$$

όπου θ_E είναι ο προσανατολισμός του ΤΣΔ. Ο πίνακας \mathbf{R}_0 είναι ένας πίνακας περιστροφής 2×2 που συνδέει το ΣΣ {0} του δορυφόρου του ΔΡΣ με το αδρανειακό ΣΣ και ο οποίος δίνεται από:

$$\mathbf{R}_0 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_0) & -\sin(\theta_0) \\ \sin(\theta_0) & \cos(\theta_0) \end{bmatrix} \quad (2-63\gamma)$$

Η συνάρτηση Lagrange του συστήματος, Εξ. (2-47), γράφεται:

$$L(\dot{\theta}_0, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} D \dot{\theta}_0^2 + \dot{\theta}_0 \mathbf{D}_q \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{D}_{qq} \dot{\mathbf{q}} \quad (2-64)$$

Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση αυτή, η συνάρτηση Lagrange L είναι μόνο συνάρτηση της γωνιακής ταχύτητας $\dot{\theta}_0$ του δορυφόρου του ΔΡΣ και των \mathbf{q} και $\dot{\mathbf{q}}$, αφού οι όροι D είναι συναρτήσεις της διαμόρφωσης \mathbf{q} του βραχίονα και όχι του προσανατολισμού του δορυφόρου θ_0 . Τότε, ο προσανατολισμός του δορυφόρου είναι μια κυκλική μεταβλητή, [40]. Σε μια τέτοια περίπτωση μπορεί να κατασκευαστεί μια συνάρτηση Routh $R(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ του συστήματος, [40]:

$$R(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = L(\dot{\theta}_0, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - b \dot{\theta}_0 \quad (2-65\alpha)$$

όπου b είναι η μερική παράγωγος της συνάρτησης L ως προς τη γωνιακή ταχύτητα του δορυφόρου, $\dot{\theta}_0$, η οποία στην περίπτωση των επίπεδων ελεύθερα αιωρούμενων ΔΡΣ είναι σταθερή:

$$b = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_0} = D \dot{\theta}_0 + \mathbf{D}_q \dot{\mathbf{q}} = h_{CM} = const. \quad (2-65\beta)$$

Χρησιμοποιώντας την Εξ. (2-61), η γωνιακή ταχύτητα $\dot{\theta}_0$ μπορεί να αντικατασταθεί συναρτήσει των \mathbf{q} και $\dot{\mathbf{q}}$ στη συνάρτηση Routh. Τότε, η συνάρτηση Routh γίνεται:

$$R(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{H}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + h_{CM} D^{-1} \mathbf{D}_q \dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2} h_{CM}^2 D^{-1} \quad (2-66)$$

όπου $\mathbf{H}(\mathbf{q})$ είναι ο $N \times N$ πίνακας αδράνειας του επίπεδου μειωμένου συστήματος:

$$\mathbf{H}(\mathbf{q}) = \mathbf{D}_{qq} - \mathbf{D}_q^T D^{-1} \mathbf{D}_q \quad (2-67)$$

Παρατηρούμε ότι ο δεύτερος όρος της συνάρτησης $R(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ στην Εξ. (2-66) είναι γραμμικός ως προς τις ταχύτητες των αρθρώσεων και ότι ο τρίτος όρος εξαρτάται μόνο από τη διαμόρφωση του βραχίονα \mathbf{q} . Έτσι, δρα όπως οι όροι βαρύτητας στους επίγειους ρομποτικούς βραχίονες. Εφαρμόζοντας τις εξισώσεις Lagrange στην $R(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, προκύπτουν οι παρακάτω εξισώσεις:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{H}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}^*(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, h_{CM}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}_h(\mathbf{q}, h_{CM}) \quad (2-68)$$

Ο $N \times N$ πίνακας C^* δίνεται από την Εξ. (2-59α) όπου C είναι ο πίνακας των μη γραμμικών όρων Coriolis και των φυγοκεντρικών όρων που αντιστοιχεί σε μηδενική αρχική στροφορμή του συστήματος, [68-75] και ο $N \times N$ πίνακας C_h δίνεται από:

$$C_h(\mathbf{q}, h_{CM}) = h_{CM} \left[\frac{\partial(D^{-1} \mathbf{D}_q^T)}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial(D^{-1} \mathbf{D}_q)}{\partial \mathbf{q}} \right] \quad (2-69\alpha)$$

Το $N \times 1$ διάνυσμα $\mathbf{g}_h(\mathbf{q}, h_{CM})$ στην Εξ. (2-68) είναι συνάρτηση της αρχικής στροφορμής του συστήματος και δίνεται από:

$$\mathbf{g}_h(\mathbf{q}, h_{CM}) = \frac{1}{2} h_{CM}^2 \frac{\partial(D^{-1})}{\partial \mathbf{q}} \quad (2-69\beta)$$

Οι Εξ. (2-69) δείχνει ότι για τα επίπεδα συστήματα οι όροι C_h και \mathbf{g}_h είναι ανεξάρτητοι του προσανατολισμού του δορυφόρου και έτσι οι μειωμένες εξισώσεις κίνησης, Εξ. (2-68), σε αντίθεση με τις αντίστοιχες των τρισδιάστατων συστημάτων, Εξ. (2-58), είναι συναρτήσεις μόνο των διανυσμάτων-στηλών $\ddot{\mathbf{q}}$, $\dot{\mathbf{q}}$ και \mathbf{q} .

2.6 Αξιοσημείωτες Ιδιότητες του Δυναμικού Μοντέλου

Οι βασικές ιδιότητες του δυναμικού μοντέλου που μελετούνται στην παρούσα παράγραφο είναι (α) η αντισυμμετρικότητα του πίνακα $\mathbf{N}^* = \dot{\mathbf{H}} - 2\mathbf{C}^*$ και (β) η γραμμικότητα ως προς τις δυναμικές παραμέτρους. Οι ιδιότητες αυτές ισχύουν για βραχίονες σταθερής βάσης, [82], αλλά και για ελεύθερα αιωρούμενα ΔΡΣ με μηδενική στροφορμή, [67]. Εδώ εξετάζεται η ικανοποίηση τους παρά την ύπαρξη αρχικής στροφορμής στο ελεύθερα αιωρούμενο ΔΡΣ.

2.6.1 Αντισυμμετρικότητα του Πίνακα $\mathbf{N}^* = \dot{\mathbf{H}} - 2\mathbf{C}^*$

Στην παράγραφο αυτή αποδεικνύεται η αντισυμμετρικότητα του πίνακα $\mathbf{N}^* = \dot{\mathbf{H}} - 2\mathbf{C}^*$. Η ιδιότητα αυτή είναι απαραίτητη για την εφαρμογή προσαρμοστικών ελεγκτών (adaptive controllers) στα ελεύθερα αιωρούμενα ΔΡΣ με αρχική στροφορμή, [84]. Ένας πίνακας \mathbf{N}^* είναι αντισυμμετρικός όταν για οποιοδήποτε διάνυσμα \mathbf{w} ισχύει:

$$\mathbf{w}^T \mathbf{N}^* \mathbf{w} = 0 \quad (2-70\alpha)$$

Αντίστοιχα όταν ισχύει η Εξ. (2-70α), ο πίνακας \mathbf{N}^* είναι αντισυμμετρικός. Ο πίνακας $\mathbf{N}^* = \dot{\mathbf{H}} - 2\mathbf{C}^*$ είναι αντισυμμετρικός, λοιπόν, όταν για οποιοδήποτε διάνυσμα \mathbf{w} ισχύει η Εξ. (2-70α).

Όπως προκύπτει από την Εξ. (2-59α), ο πίνακας \mathbf{C}^* , που εκφράζει την επίδραση των ταχυτήτων $\dot{\mathbf{q}}$ των αρθρώσεων στις εξισώσεις κίνησης ενός ελεύθερα αιωρούμενου ΔΡΣ με αρχική στροφορμή, ισούται με το άθροισμα των πινάκων C και C_h . Ο πίνακας

\mathbf{C} , που δίνεται από την Εξ. (2-59β), είναι συνάρτηση και των ταχυτήτων $\dot{\mathbf{q}}$ των αρθρώσεων. Έτσι, λοιπόν, όπως συμβαίνει και στους επίγειους ρομποτικούς βραχίονες σταθερής βάσης, [82], ο πίνακας \mathbf{C} μπορεί να γραφτεί με διαφορετικές μορφές έτσι ώστε ο όρος $\mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}$ να δίνει τις ροπές που οφείλονται στις φυγοκεντρικές δυνάμεις και στις δυνάμεις Coriolis για ένα ελεύθερα αιωρούμενο ΔΡΣ με μηδενική αρχική στροφορμή. Αντίστοιχα, ο πίνακας \mathbf{C}_h , που οφείλεται στην ύπαρξη της αρχικής στροφορμής του ΔΡΣ, δεν εξαρτάται από τις ταχύτητες των αρθρώσεων του βραχίονα και δίνεται μοναδικά από τις Εξ. (2-59γ) και (2-69α) για τρισδιάστατα και επίπεδα ΔΡΣ, αντίστοιχα. Λαμβάνοντας υπόψη την Εξ. (2-59α) έχουμε:

$$\mathbf{w}^T (\dot{\mathbf{H}} - 2\mathbf{C}^*) \mathbf{w} = \mathbf{w}^T (\dot{\mathbf{H}} - 2\mathbf{C}) \mathbf{w} - 2\mathbf{w}^T \mathbf{C}_h \mathbf{w} \quad (2-70\beta)$$

Η Εξ. (2-70α) ισχύει για τον πίνακα $\mathbf{N}^* = \dot{\mathbf{H}} - 2\mathbf{C}^*$ όταν και οι δυο όροι του δεξιού μέλους της Εξ. (2-70β) είναι μηδέν. Στην συνέχεια αποδεικνύεται ότι ο πρώτος όρος είναι μηδέν κάτω από την προϋπόθεση ότι ο πίνακας $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ γραφεί με μια συγκεκριμένη μορφή. Όπως προαναφέρθηκε, ο πίνακας $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ μπορεί να γραφεί με διαφορετικές μορφές. Μια από τις μορφές του, προκύπτει όταν τα στοιχεία c_{ij} του πίνακα υπολογιστούν από τη σχέση:

$$c_{ij} = \sum_{k=0}^N c_{ijk} \dot{q}_k \quad (2-71\alpha)$$

όπου οι συντελεστές c_{ijk} ονομάζονται *σύμβολα Christoffel πρώτου τύπου* και δίνονται από, [82]:

$$c_{ijk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial h_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial h_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial h_{jk}}{\partial q_i} \right) \quad (2-71\beta)$$

όπου h_{ij} είναι το ij στοιχείο του πίνακα αδράνειας $\mathbf{H}(\mathbf{q})$. Επίσης, λόγω της συμμετρίας του πίνακα αδράνειας $\mathbf{H}(\mathbf{q})$ ισχύει ότι:

$$c_{ijk} = c_{ikj} \quad (2-71\gamma)$$

Στη συνέχεια ο πίνακας \mathbf{C} θα συμβολίζεται με $\mathbf{C}_{\text{crstof}}$ όταν τα στοιχεία του υπολογίζονται από τις Εξ. (2-71) και αντίστοιχα ο πίνακας \mathbf{C}^* με $\mathbf{C}_{\text{crstof}}^*$. Στην περίπτωση αυτή, λόγω της συμμετρίας του πίνακα αδράνειας $\mathbf{H}(\mathbf{q})$, αποδεικνύεται, αντίστοιχα με τους επίγειους ρομποτικούς βραχίονες σταθερής βάσης, [82], ότι ο πίνακας $\dot{\mathbf{H}} - 2\mathbf{C}_{\text{crstof}}$ είναι αντισυμμετρικός, δηλαδή για οποιοδήποτε διάνυσμα \mathbf{w} ισχύει:

$$\mathbf{w}^T (\dot{\mathbf{H}} - 2\mathbf{C}_{\text{crstof}}) \mathbf{w} = 0 \quad (2-72\alpha)$$

Στη συνέχεια αποδεικνύεται ότι ο δεύτερος όρος του δεξιού μέλους της Εξ. (2-70β) είναι ίσος με μηδέν. Όπως προκύπτει από την Εξ. (2-59γ), ο πίνακας C_h είναι της μορφής $\partial \mathbf{a} / \partial \mathbf{q} - \partial \mathbf{a}^T / \partial \mathbf{q}$ όπου $\mathbf{a} = {}^0 \mathbf{D}_q^T {}^0 \mathbf{D}^{-1} \mathbf{R}_0^T \mathbf{h}_{CM}$. Εύκολα μπορεί ναδειχθεί, ότι για οποιοδήποτε διάνυσμα $\mathbf{a}(\mathbf{q})$, ο πίνακας $\partial \mathbf{a} / \partial \mathbf{q} - \partial \mathbf{a}^T / \partial \mathbf{q}$ είναι αντισυμμετρικός. Οπότε ο πίνακας C_h είναι αντισυμμετρικός και ισχύει:

$$\mathbf{w}^T C_h(\boldsymbol{\varepsilon}, n, \mathbf{q}, \mathbf{h}_{CM}) \mathbf{w} = 0 \quad (2-72\beta)$$

Από τις Εξ. (2-70β) και (2-72) προκύπτει ότι η Εξ. (2-70α) ισχύει. Δηλαδή ο πίνακας $\mathbf{N}^* = \dot{\mathbf{H}} - 2\mathbf{C}_{\text{cristof}}^*$ είναι αντισυμμετρικός, μόνο όταν ο πίνακας $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ οριστεί μέσω των συμβόλων *Christoffel πρώτου τύπου*.

Η ικανοποίηση, λοιπόν, της Εξ. (2-70α) είναι εφικτή μόνο για έναν συγκεκριμένο ορισμό του πίνακα $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$. Παρόλα αυτά, όπως θα αναφερθεί στην Παράγραφο 2.7, για την εφαρμογή άλλων ελεγκτών αρκεί η ικανοποίηση της σχέσης:

$$\dot{\mathbf{q}}^T (\dot{\mathbf{H}} - 2\mathbf{C}^*) \dot{\mathbf{q}} = 0 \quad (2-73\alpha)$$

Η ικανοποίηση της Εξ. (2-73α) δεν συνεπάγεται ότι ο πίνακας $\mathbf{N}^* = \dot{\mathbf{H}} - 2\mathbf{C}^*$ είναι αντισυμμετρικός, αφού ισχύει μόνο για το διάνυσμα-στήλη $\dot{\mathbf{q}}$ των ταχυτήτων των αρθρώσεων από τις οποίες εξαρτάται και ο πίνακας \mathbf{N}^* . Στη συνέχεια θαδειχθεί ότι η Εξ. (2-73α) επαληθεύεται για οποιαδήποτε δυνατή επιλογή του πίνακα $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$. Λαμβάνοντας υπόψη την Εξ. (2-59α) έχουμε:

$$\dot{\mathbf{q}}^T (\dot{\mathbf{H}} - 2\mathbf{C}^*) \dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}}^T (\dot{\mathbf{H}} - 2\mathbf{C}) \dot{\mathbf{q}} - 2\dot{\mathbf{q}}^T C_h \dot{\mathbf{q}} \quad (2-73\beta)$$

Όπως και προηγουμένως, η Εξ. (2-73α) επαληθεύεται όταν και οι δυο όροι του δεξιού μέλους της Εξ. (2-73β) είναι ίσοι με μηδέν. Έχει αποδειχθεί, [67], ότι για ελεύθερα αιωρούμενα ΔΡΣ με μηδενική αρχική στροφορμή, και για οποιαδήποτε δυνατή μορφή του πίνακα \mathbf{C} , ισχύει ότι:

$$\dot{\mathbf{q}}^T (\dot{\mathbf{H}} - 2\mathbf{C}) \dot{\mathbf{q}} = 0 \quad (2-74)$$

Για την πληρότητα της ανάλυσης, παρακάτω αποδεικνύεται η Εξ. (2-74). Από τη διατήρηση της ενέργειας για το ελεύθερα αιωρούμενο ΔΡΣ με μηδενική αρχική στροφορμή, προκύπτει ότι ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του ελεύθερα αιωρούμενου ΔΡΣ ισούται με την ισχύ των συνολικών ροπών που ασκούνται από τους κινητήρες στις αρθρώσεις του βραχίονα του. Οπότε η διατήρηση της ενέργειας δίνει:

$$\frac{dT(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{dt} = \dot{\mathbf{q}}^T \boldsymbol{\tau} \quad (2-75\alpha)$$

όπου η κινητική ενέργεια ενός ελεύθερα αιωρούμενου ΔΡΣ με μηδενική αρχική στροφορμή δίνεται από:

$$T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{H}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (2-75\beta)$$

Χρησιμοποιώντας την παρακάτω σχέση που ισχύει για τη χρονική παράγωγο της τετραγωνικής μορφής ενός μεγέθους

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}) = 2 \mathbf{x}^T \mathbf{A} \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{x}^T \dot{\mathbf{A}} \mathbf{x} \quad (2-76)$$

όπου λήφθηκε υπόψη ότι ο πίνακας \mathbf{A} είναι συμμετρικός, δηλ. $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$, προκύπτει ότι το πρώτο μέρος της Εξ. (2-75α) μπορεί να γραφτεί:

$$\frac{dT(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{H}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \right) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{H}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{H}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} \quad (2-77\alpha)$$

Θεωρώντας μηδενική αρχική στροφορμή του ΔΡΣ, η Εξ. (2-58) επιλύεται ως προς τον όρο $\mathbf{H}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}}$ και το αποτέλεσμα αντικαθίσταται στην Εξ. (2-77α). Οπότε:

$$\frac{dT(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{dt} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T (\dot{\mathbf{H}}(\mathbf{q}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})) \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T \boldsymbol{\tau} \quad (2-77\beta)$$

Από τη σύγκριση των Εξ. (2-75α) και (2-77β) προκύπτει ότι η Εξ. (2-74) ισχύει για οποιαδήποτε εφικτή μορφή του πίνακα \mathbf{C} . Επίσης, επειδή ο πίνακας \mathbf{C}_h είναι αντισυμμετρικός ισχύει η Εξ. (2-72β). Στην περίπτωση, λοιπόν, όπου $\mathbf{w} = \dot{\mathbf{q}}$, έχουμε:

$$\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{C}_h(\boldsymbol{\varepsilon}, n, \mathbf{q}, \mathbf{h}_{cm}) \dot{\mathbf{q}} = 0 \quad (2-78)$$

Από το συνδυασμό των Εξ. (2-73β), (2-74) και (2-78) προκύπτει η Εξ. (2-73α). Συμπερασματικά, λοιπόν, η Εξ. (2-73α) ικανοποιείται για οποιαδήποτε μορφή του πίνακα $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ ενώ αντίθετα η Εξ. (2-70), δηλαδή η αντισυμμετρικότητα του πίνακα \mathbf{N}^* , επαληθεύεται μόνο όταν ο πίνακας $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ οριστεί μέσω των συμβόλων *Christoffel πρώτου τύπου*.

2.6.2 Γραμμικότητα ως προς τις Δυναμικές Παραμέτρους

Μια άλλη ιδιότητα του δυναμικού μοντέλου που βρίσκει εφαρμογή στη σχεδίαση προσαρμοστικών ελεγκτών είναι η γραμμικότητα του μοντέλου ως προς τις δυναμικές παραμέτρους, [82]. Η ιδιότητα αυτή αν και ισχύει για επίγειους βραχίονες σταθερής βάσης, [82], για ελεύθερα αιωρούμενα ΔΡΣ με μηδενική αρχική στροφορμή επαληθεύεται κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις, [67]. Στην παράγραφο αυτή εξετάζεται η ικανοποίηση της όταν το ελεύθερο αιωρούμενο ΔΡΣ έχει μη-μηδενική στροφορμή. Όπως και στην περίπτωση των ελεύθερα αιωρούμενων ΔΡΣ χωρίς αρχική στροφορμή, έτσι και στην περίπτωση που το ΔΡΣ έχει στροφορμή, οι μειωμένες εξισώσεις του συστήματος, βλ. Εξ. (2-58), δεν είναι γραμμικές ως προς τις δυναμικές παραμέτρους, δηλαδή:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{H}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}^*(\mathbf{h}_{cm}, \boldsymbol{\varepsilon}, n, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}_h(\mathbf{h}_{cm}, \boldsymbol{\varepsilon}, n, \mathbf{q}) \neq \mathbf{Y}(\ddot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, \boldsymbol{\varepsilon}, n) \boldsymbol{\pi} \quad (2-79\alpha)$$

όπου ο πίνακας \mathbf{Y} ονομάζεται regressor και $\boldsymbol{\pi}$ είναι το διάνυσμα-στήλη που περιέχει τις άγνωστες δυναμικές παραμέτρους του συστήματος σε πεπλεγμένη μορφή.

Η μη γραμμικότητα της Εξ. (2-79α) ως προς τις δυναμικές παραμέτρους οφείλεται στην μορφή των πινάκων \mathbf{H} , \mathbf{C}^* και \mathbf{g}_h όπως υπολογίζονται από τις Εξ. (2-57α) και (2-59), αντίστοιχα. Η ύπαρξη του πίνακα ${}^0\mathbf{D}^{-1}$ δημιουργεί παρανομαστές στα στοιχεία των πινάκων αυτών οι οποίοι δεν μπορούν να γραφούν σε γραμμική μορφή ως προς τις δυναμικές παραμέτρους. Αν όμως χρησιμοποιηθούν οι Εξ. (2-52α) και (2-55α), οι οποίες είναι ισοδύναμες της Εξ. (2-58), τότε μπορεί το μοντέλο του συστήματος να γραφτεί σε μια μορφή η οποία είναι γραμμική ως προς τις δυναμικές παραμέτρους του συστήματος. Δηλαδή:

$$\boldsymbol{\theta} = {}^0\mathbf{D} {}^0\dot{\boldsymbol{\omega}}_0 + {}^0\mathbf{D}_q \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{c}_1^*({}^0\boldsymbol{\omega}_0, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{Y}_1(\ddot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, {}^0\dot{\boldsymbol{\omega}}_0, {}^0\boldsymbol{\omega}_0) \boldsymbol{\pi} \quad (2-79\beta)$$

$$\boldsymbol{\tau} = {}^0\mathbf{D}_{qq} \ddot{\mathbf{q}} + {}^0\mathbf{D}_q^T {}^0\dot{\boldsymbol{\omega}}_0 + \mathbf{c}_2^*({}^0\boldsymbol{\omega}_0, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{Y}_2(\ddot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, {}^0\dot{\boldsymbol{\omega}}_0, {}^0\boldsymbol{\omega}_0) \boldsymbol{\pi} \quad (2-79\gamma)$$

Παρόλα αυτά, ο υπολογισμός των πινάκων \mathbf{Y}_1 και \mathbf{Y}_2 απαιτεί επιπλέον και μετρήσεις της γωνιακής ταχύτητας ${}^0\boldsymbol{\omega}_0$ καθώς επίσης και της γωνιακής επιτάχυνσης ${}^0\dot{\boldsymbol{\omega}}_0$ του δορυφόρου του ΔΡΣ. Η μέτρηση όμως της γωνιακής επιτάχυνσης ${}^0\dot{\boldsymbol{\omega}}_0$ του δορυφόρου (όπως και των επιταχύνσεων $\ddot{\mathbf{q}}$ των αρθρώσεων) δεν μπορεί να γίνει με ακρίβεια καθώς επηρεάζεται από το θόρυβο. Η εφαρμογή, λοιπόν, προσαρμοστικών ελεγκτών που απαιτούν την χρήση του γραμμικού μοντέλου ως προς τις δυναμικές παραμέτρους, σε ελεύθερα αιωρούμενα ΔΡΣ (με ή χωρίς αρχική στροφορμή), είναι υπό εξέταση, εξαιτίας της δυσκολίας μέτρησης αυτών των επιταχύνσεων on-line.

2.7 Έλεγχος Ελεύθερα Αιωρούμενων ΔΡΣ υπό την Επίδραση Στροφορμής

Στις προηγούμενες παραγράφους αναλύθηκε η επίδραση της μη μηδενικής αρχικής στροφορμής του ΔΡΣ στις κινηματικές και στις δυναμικές εξισώσεις του. Στην παράγραφο αυτή θα εξεταστεί η επίδραση της στροφορμής στον έλεγχο των ελεύθερα αιωρούμενων ΔΡΣ. Οι ελεγκτές που αναπτύσσονται παρακάτω, θεωρούν πλήρη γνώση των κινηματικών και δυναμικών παραμέτρων του ΔΡΣ.

2.7.1 Έλεγχος στο Χώρο των Αρθρώσεων

Ο έλεγχος στο χώρο των αρθρώσεων μπορεί να εφαρμοστεί είτε για την *ρύθμιση* (regulation) της διαμόρφωσης του βραχίονα σε μια επιθυμητή τελική διαμόρφωση είτε για την *παρακολούθηση* (tracking) της τροχιάς των αρθρώσεων. Για ελεύθερα αιωρούμενα ΔΡΣ με μηδενική αρχική στροφορμή ο έλεγχος στο χώρο των αρθρώσεων μπορεί να επιτευχθεί με έναν απλό ελεγκτή PD, [67]. Όπως αποδείχτηκε στην Παράγραφο 2.5, η ύπαρξη στροφορμής στα συστήματα αυτά, προσθέτει έναν επιπλέον όρο, τον όρο \mathbf{g}_h ,

στις εξισώσεις κίνησης τους, βλ. Εξ. (2-68) για επίπεδα ΔΡΣ και Εξ. (2-58) για τρισδιάστατα ΔΡΣ. Όπως προαναφέρθηκε, ο όρος αυτός δρα όπως η βαρύτητα στους επίγειους ρομποτικούς βραχίονες σταθερής βάσης. Στις παρακάτω παραγράφους, αναπτύσσονται οι κατάλληλοι νόμοι ελέγχου που επιτρέπουν την επίτευξη της επιθυμητής τελικής διαμόρφωσης του βραχίονα και της παρακολούθησης της τροχιάς των αρθρώσεων, αντίστοιχα.

2.7.1.1 Έλεγχος PD με Αντιστάθμιση Στροφορμής

Στην παράγραφο αυτή θα σχεδιαστεί ο κατάλληλος ελεγκτής που επιτρέπει την επίτευξη της επιθυμητής τελικής διαμόρφωσης του βραχίονα παρά την ύπαρξη αρχικής στροφορμής στο ΔΡΣ. Οι εξισώσεις κίνησης των επιπέδων καθώς και των τρισδιάστατων ΔΡΣ με αρχική στροφορμή έχουν την παρακάτω μορφή:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}^*\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}_h \quad (2-80)$$

όπου για επίπεδα ΔΡΣ, ο όρος \mathbf{g}_h εξαρτάται από την αρχική στροφορμή \mathbf{h}_{CM} καθώς και από τη διαμόρφωση \mathbf{q} του βραχίονα, βλ. Εξ. (2-68). Για τρισδιάστατα ΔΡΣ, ο όρος αυτός εξαρτάται επιπλέον και από τον προσανατολισμό του δορυφόρου του ΔΡΣ, εκφρασμένο από τις παραμέτρους Euler $\boldsymbol{\varepsilon}, n$, βλ. Εξ. (2-59δ). Για την αντιστάθμιση, λοιπόν, της στροφορμής χρησιμοποιείται ο παρακάτω ελεγκτής PD με "αντιστάθμιση στροφορμής":

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{K}_p \mathbf{e} - \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}_h \quad (2-81\alpha)$$

όπου το σφάλμα \mathbf{e} ορίζεται ως:

$$\mathbf{e} = \mathbf{q}_d - \mathbf{q} \quad (2-81\beta)$$

όπου \mathbf{q}_d είναι η τελική επιθυμητή διαμόρφωση του βραχίονα.

Ο παραπάνω ελεγκτής αντισταθμίζει την αρχική στροφορμή του ΔΡΣ όπως ο αντίστοιχος ελεγκτής PD με αντιστάθμιση βαρύτητας, που εφαρμόζεται στον έλεγχο επίγειων ρομποτικών βραχιόνων σταθερής βάσης, αντισταθμίζει την επίδραση της βαρύτητας. Για τον έλεγχο επιπέδων ΔΡΣ, η εφαρμογή αυτού του ελεγκτή απαιτεί την γνώση της αρχικής στροφορμής του ΔΡΣ καθώς και αισθητήρες για τη μέτρηση της διαμόρφωσης \mathbf{q} του βραχίονα και των ταχυτήτων $\dot{\mathbf{q}}$ των αρθρώσεων, βλ. Σχήμα 2.4. Αντίστοιχα για την εφαρμογή του ίδιου ελεγκτή σε τρισδιάστατα ΔΡΣ απαιτείται επιπλέον και η ανατροφοδότηση και του προσανατολισμού του δορυφόρου του ΔΡΣ μέσω κατάλληλων αισθητήρων ή εκτίμηση του μέσω των Εξ. (2-82), [30]:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = (1/2)[\boldsymbol{\varepsilon}^\times + n\mathbf{I}_3]{}^0 \boldsymbol{\omega}_0 \quad (2-82\alpha)$$

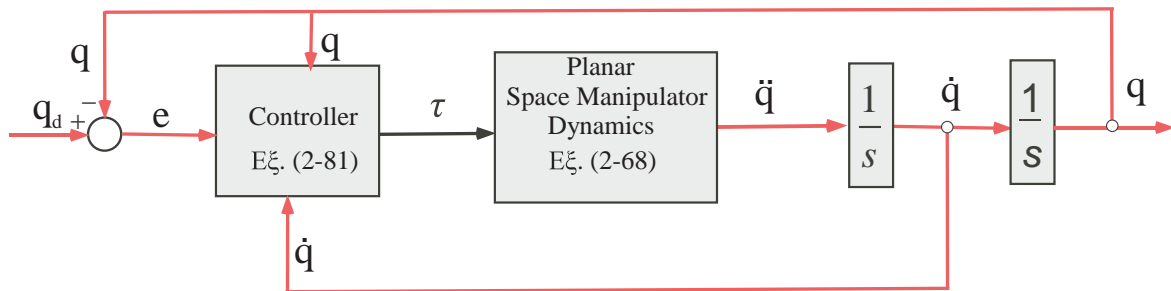
$$\dot{n} = -(1/2)\boldsymbol{\varepsilon}^T{}^0 \boldsymbol{\omega}_0 \quad (2-82\beta)$$

Αντικαθιστώντας τη γωνιακή ταχύτητα του δορυφόρου του ΔΡΣ, από τη διατήρηση της στροφορμής, Εξ. (2-33), προκύπτει:

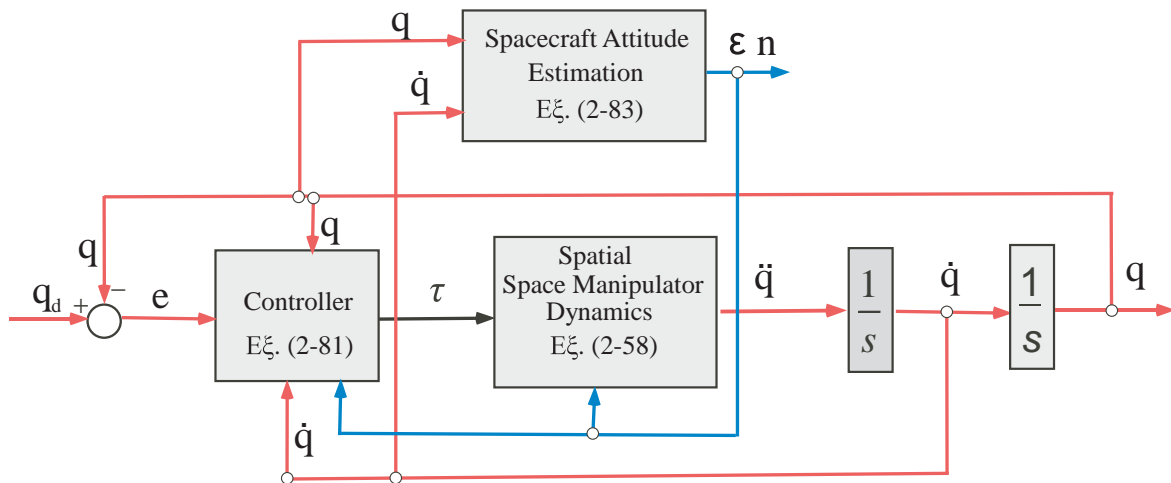
$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = (1/2)[\boldsymbol{\varepsilon}^\times + n\mathbf{I}_3] {}^0\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{R}_0^T(\boldsymbol{\varepsilon}, n)\mathbf{h}_{\text{CM}} - {}^0\mathbf{D}_q \dot{\mathbf{q}}) \quad (2-83\alpha)$$

$$\dot{n} = -(1/2)\boldsymbol{\varepsilon}^T {}^0\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{R}_0^T(\boldsymbol{\varepsilon}, n)\mathbf{h}_{\text{CM}} - {}^0\mathbf{D}_q \dot{\mathbf{q}}) \quad (2-83\beta)$$

Οπότε, μέσω της μέτρησης των μεταβλητών \mathbf{q} και $\dot{\mathbf{q}}$, μπορεί να εκτιμηθεί ο αντίστοιχος προσανατολισμός του δορυφόρου του ΔΡΣ. Στα Σχήματα 2.4 και 2.5 παρουσιάζεται η εφαρμογή του παραπάνω ελεγκτή σε επίπεδα και τρισδιάστατα, αντίστοιχα, ελεύθερα αιωρούμενα ΔΡΣ.



Σχήμα 2.4. Εφαρμογή ελεγκτή PD με αντιστάθμιση στροφορμής σε επίπεδο ΔΡΣ.



Σχήμα 2.5. Εφαρμογή ελεγκτή PD με αντιστάθμιση στροφορμής σε τρισδιάστατο ΔΡΣ.

Για την απόδειξη της ασυμπτωτικής ευστάθειας του συστήματος κλειστού βρόχου επιλέγεται η παρακάτω συνάρτηση Lyapunov:

$$V(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{e}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{H}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{K}_p \mathbf{e} \quad (2-84\alpha)$$

όπου για θετικά ορισμένο πίνακα \mathbf{K}_p , ισχύει ότι:

$$V(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{e}) > 0 \quad (2-84\beta)$$

και

$$V(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = 0 \quad (2-84\gamma)$$

Η χρονική παράγωγος της συνάρτησης Lyapunov είναι:

$$\dot{V}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{e}) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{H}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{K}_p \mathbf{e} \right) \quad (2-85\alpha)$$

Χρησιμοποιώντας τις Εξ. (2-76) και (2-80), προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{e}) &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{H}} \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T (\boldsymbol{\tau} - \mathbf{C}^* \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{g}_h) + \dot{\mathbf{e}}^T \mathbf{K}_p \mathbf{e} \\ &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T (\dot{\mathbf{H}} - 2\mathbf{C}^*) \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T (\boldsymbol{\tau} - \mathbf{g}_h - \mathbf{K}_p \mathbf{e}) \end{aligned} \quad (2-85\beta)$$

όπου με εισαγωγή του προτεινόμενου ελεγκτή αντιστάθμισης στροφορμής, Εξ. (2-81α), έχουμε:

$$\dot{V}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{e}) = -\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{q}} \leq 0 \quad (2-85\gamma)$$

όπου λήφθηκε υπόψη η Εξ. (2-73α).

Από την Εξ. (2-85γ) προκύπτει ότι $\dot{V} = 0$ όταν $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ ανεξάρτητα από το σφάλμα \mathbf{e} . Οπότε η Εξ. (2-85γ) δεν εξασφαλίζει την ασυμπτωτική ευστάθεια του σημείου $(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{e}) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$ (origin). Στη συνέχεια θα δειχθεί ότι $\dot{V} = 0$ μόνο όταν $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ και $\mathbf{e} = \mathbf{0}$. Έστω, ότι ο βραχίονας ισορροπεί ($\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}, \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$) σε μια διαμόρφωση όπου $\mathbf{e} \neq \mathbf{0}$. Αντικαθιστώντας τον προτεινόμενο νόμο ελέγχου, που δίνεται από την Εξ. (2-81), στην Εξ. (2-58) και λαμβάνοντας υπόψη ότι $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ (δηλαδή $\dot{V} = 0$) προκύπτει ότι:

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{K}_p \mathbf{e} \quad (2-86\alpha)$$

Επειδή οι πίνακες $\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q})$ και \mathbf{K}_p είναι θετικά ορισμένοι, από την Εξ. (2-86α) προκύπτει ότι για $\mathbf{e} \neq \mathbf{0}$ είναι $\ddot{\mathbf{q}} \neq \mathbf{0}$. Ο βραχίονας, λοιπόν, ακινητοποιείται ($\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}, \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$) μόνο όταν $\mathbf{e} = \mathbf{0}$. Οπότε $\dot{V} = 0$ μόνο όταν $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ και $\mathbf{e} = \mathbf{0}$ και σύμφωνα με το θεώρημα La Salle, το σημείο $(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{e}) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές, [84].

Άρα ο ελεγκτής που δίνεται από την Εξ. (2-81α) επιτυγχάνει την επίτευξη της επιθυμητής διαμόρφωσης \mathbf{q}_d του βραχίονα παρά την ύπαρξη αρχικής στροφορμής \mathbf{h}_{cm} . Όμως για τη διατήρηση της επιθυμητής διαμόρφωσης, απαιτούνται, εξαιτίας της μη-μηδενικής στροφορμής, μη-μηδενικές ροπές στις αρθρώσεις:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{g}_h(\mathbf{h}_{cm}, \boldsymbol{\varepsilon}, n, \mathbf{q}_d) \quad (2-86\beta)$$

2.7.1.2 Έλεγχος Βασιζόμενος στο Μοντέλο (Model-Based Control)

Ο ελεγκτής που εφαρμόστηκε στη προηγούμενη παράγραφο μπορεί να εφαρμοστεί και για την παρακολούθηση τροχιών στο χώρο των αρθρώσεων υπό την προϋπόθεση ότι επιλέγονται μεγάλα κέρδη. Παρόλα αυτά όσο και μεγάλα κέρδη και να επιλεγθούν, το σφάλμα παρακολούθησης δεν θα γίνει ποτέ μηδέν. Επίσης, εξαιτίας του κινδύνου κορεσμού των κινητήρων, δεν μπορούν να επιλεγούν αυθαίρετα μεγάλα κέρδη. Στην

συνέχεια εφαρμόζεται ο έλεγχος βασιζόμενος στο μοντέλο έτσι ώστε να επιτευχθεί μηδενισμός του σφάλματος παρακολούθησης ύστερα από κάποιο μικρό χρονικό διάστημα.

Οι επιθυμητές τροχιές των αρθρώσεων περιγράφονται από τις χρονικές συναρτήσεις $\mathbf{q}_d(t)$, $\dot{\mathbf{q}}_d(t)$ και $\ddot{\mathbf{q}}_d(t)$. Εάν στη εξίσωση κίνησης του ελεύθερα αιωρούμενου ΔΡΣ, Εξ. (2-58), εφαρμοστεί ελεγκτής της μορφής:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{H}(\mathbf{q})(\ddot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{K}_p(\mathbf{q}_d - \mathbf{q}) + \mathbf{K}_d(\dot{\mathbf{q}}_d - \dot{\mathbf{q}})) + \mathbf{C}^*(\boldsymbol{\varepsilon}, n, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{h}_{CM})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}_h(\boldsymbol{\varepsilon}, n, \mathbf{q}, \mathbf{h}_{CM}) \quad (2-87)$$

τότε προκύπτει η παρακάτω δυναμική του σφάλματος παρακολούθησης $\mathbf{e} = \mathbf{q}_d(t) - \mathbf{q}$:

$$\ddot{\mathbf{e}} + \mathbf{K}_d\dot{\mathbf{e}} + \mathbf{K}_p\mathbf{e} = \mathbf{0} \quad (2-88)$$

Στην περίπτωση αυτή, η δυναμική του σφάλματος περιγράφεται, από μια γραμμική διαφορική εξίσωση 2^{ης} τάξης η οποία, υπό την προϋπόθεση θετικά ορισμένων πινάκων \mathbf{K}_p και \mathbf{K}_d , είναι ασυμπτωτικά ευσταθής και στη μόνιμη κατάσταση το σφάλμα οδηγείται στο μηδέν, δηλαδή $\mathbf{e}_{ss} = \mathbf{0}$.

Οι πίνακες κέρδους \mathbf{K}_p και \mathbf{K}_d καθορίζουν πλήρως τον τρόπο με τον οποίο το σφάλμα παρακολούθησης θα συγκλίνει στο μηδέν. Αν επιλεγούν, λοιπόν, διαγώνιοι πίνακες της μορφής:

$$\mathbf{K}_p = \text{diag}(\omega_{n,1}^2, \omega_{n,2}^2, \dots, \omega_{n,n}^2) \quad (2-89\alpha)$$

και

$$\mathbf{K}_d = \text{diag}(2\zeta_1\omega_{n,1}, 2\zeta_2\omega_{n,2}, \dots, 2\zeta_n\omega_{n,n}) \quad (2-89\beta)$$

τότε η δυναμική της εξίσωσης σφάλματος σε κάθε άρθρωση δίνεται από:

$$\ddot{e}_i + 2\zeta_i\omega_{n,i}\dot{e}_i + \omega_{n,i}^2 e_i = 0 \quad (2-90\alpha)$$

όπου συνήθως ο συντελεστής απόσβεσης ζ_i επιλέγεται ίσος με $\zeta_i = 1$ (η ταχύτερη απόκριση χωρίς ταλαντώσεις) και η φυσική συχνότητα $\omega_{n,i}$ επιλέγεται με βάση τον επιθυμητό χρόνο αποκατάστασης $t_{s,i}$ σύμφωνα με τη σχέση:

$$\omega_{n,i} = \frac{6}{t_{s,i}} \quad (2-90\beta)$$

Επιλέγοντας λοιπόν τα κέρδη \mathbf{K}_p και \mathbf{K}_d με τον παραπάνω τρόπο, το σφάλμα θα μηδενιστεί ύστερα από χρόνο περίπου ίσο με $t_{s,i}$ και μετά η άρθρωση i θα κινείται ακριβώς όπως ορίζει η εντολή.

2.7.2 Έλεγχος στον Καρτεσιανό Χώρο

Στην περίπτωση που είναι επιθυμητή η προσέγγιση του ΤΣΔ σε κάποιο σημείο του Καρτεσιανού χώρου ή το ΤΣΔ πρέπει να ακολουθήσει μια επιθυμητή διαδρομή στο χώρο

εργασίας του, τότε απαιτείται έλεγχος στον Καρτεσιανό χώρο. Ο έλεγχος στον Καρτεσιανό χώρο προϋποθέτει τη δυνατότητα της μέτρησης της θέσης (και του προσανατολισμού) του ΤΣΔ. Στην περίπτωση που δεν είναι διαθέσιμη αυτή, τότε, θεωρώντας ότι γνωρίζουμε τις κινηματικές και δυναμικές παραμέτρους του ΔΡΣ, γίνεται εκτίμηση της από τις κινηματικές εξισώσεις. Στις επόμενες παραγράφους αναπτύσσονται ένας ελεγκτής αντίστροφης Ιακωβιανής (Inverse-Jacobian Controller) και ένας ελεγκτής ανάστροφης Ιακωβιανής (Transpose-Jacobian Controller) για την προσέγγιση του ΤΣΔ σε κάποιο επιθυμητό σημείο του χώρου εργασίας παρά την αρχική στροφορμή του ΔΡΣ. Επίσης σχεδιάζεται και ένας ελεγκτής βασιζόμενος στο μοντέλο για την επίτευξη της παρακολούθησης επιθυμητών διαδρομών του ΤΣΔ στο χώρο εργασίας.

2.7.2.1 Έλεγχος Αντίστροφης Ιακωβιανής

Στους βραχίονες σταθερής βάσης, ο έλεγχος της Αντίστροφης Ιακωβιανής εκμεταλλεύεται το γεγονός ότι για μικρές μεταβολές $\Delta \mathbf{r}_E$ της θέσης του ΤΣΔ, απαιτούνται μικρές μεταβολές $\Delta \mathbf{q}$ των γωνιών των αρθρώσεων του βραχίονα, σύμφωνα με τη σχέση:

$$\Delta \mathbf{q} = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}) \Delta \mathbf{r}_E \quad (2-91)$$

όπου \mathbf{J} είναι η Ιακωβιανή του ρομποτικού βραχίονα.

Στην περίπτωση, λοιπόν, αυτή, η θέση \mathbf{r}_E του ΤΣΔ συγκρίνεται με την επιθυμητή θέση $\mathbf{r}_{E,d}$ και σχηματίζεται το σφάλμα $\Delta \mathbf{r}_E = \mathbf{r}_{E,d} - \mathbf{r}_E$. Το σφάλμα αυτό μπορεί να θεωρηθεί αρκετά μικρό, αν ο ελεγκτής λειτουργεί σωστά, και μέσω της Εξ. (2-91) να μετασχηματιστεί σε σφάλμα $\Delta \mathbf{q}$ στο χώρο των αρθρώσεων. Στη συνέχεια το σφάλμα $\Delta \mathbf{q}$ πολλαπλασιάζεται με κατάλληλα κέρδη ώστε να υπολογιστούν οι αναγκαίες ροπές που θα τείνουν να μειώσουν το σφάλμα αυτό, [13].

Στα ελεύθερα αιωρούμενα ΔΡΣ με αρχική στροφορμή, η ταχύτητα του ΤΣΔ δίνεται από την Εξ. (2-36), η οποία μπορεί να γραφτεί ως:

$$\dot{\mathbf{r}}_E = \mathbf{J}_q(\mathbf{q}, \boldsymbol{\varepsilon}, n) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{J}_h(\mathbf{q}, \boldsymbol{\varepsilon}, n) \mathbf{h}_{CM} \quad (2-92)$$

όπου:

$$\mathbf{J}_q(\mathbf{q}, \boldsymbol{\varepsilon}, n) = \mathbf{E}(\boldsymbol{\varepsilon}, n)^0 \mathbf{J}_q(\mathbf{q}) \quad (2-93\alpha)$$

και

$$\mathbf{J}_h(\mathbf{q}, \boldsymbol{\varepsilon}, n) = \mathbf{E}(\boldsymbol{\varepsilon}, n)^0 \mathbf{J}_h(\mathbf{q}) \mathbf{R}_0^T(\boldsymbol{\varepsilon}, n) \quad (2-93\beta)$$

Στην περίπτωση όπου η Γενικευμένη Ιακωβιανή \mathbf{J}_q του ΔΡΣ αντιστρέφεται, η Εξ. (2-92) μπορεί να επιλυθεί ως προς τις ταχύτητες $\dot{\mathbf{q}}$ των αρθρώσεων:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_q^{-1}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\varepsilon}, n) \dot{\mathbf{r}}_E - \mathbf{J}_q^{-1}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\varepsilon}, n) \mathbf{J}_h(\mathbf{q}, \boldsymbol{\varepsilon}, n) \mathbf{h}_{CM} \quad (2-94\alpha)$$

ή

$$\Delta \mathbf{q} = \mathbf{J}_q^{-1}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\varepsilon}, n) \Delta \mathbf{r}_E - \mathbf{J}_q^{-1}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\varepsilon}, n) \mathbf{J}_h(\mathbf{q}, \boldsymbol{\varepsilon}, n) \mathbf{h}_{CM} \Delta t \quad (2-94\beta)$$

όπου $\Delta \mathbf{q}$ είναι μια μικρή μεταβολή στη διαμόρφωση του βραχίονα η οποία απαιτείται για μια μικρή μεταβολή της θέσης $\Delta \mathbf{r}_E$ του ΤΣΔ σε μικρό χρόνο Δt .

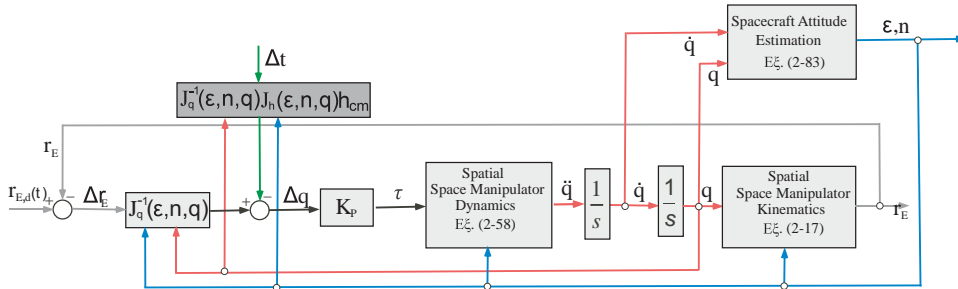
Οι απαιτούμενες ροπές στις αρθρώσεις μπορούν να δοθούν με την εφαρμογή ενός κλασικού ελεγκτή P:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{K}_p \Delta \mathbf{q} \quad (2-95)$$

Όπως προκύπτει από την Εξ. (2-94β), στην περίπτωση των ελεύθερα αιωρούμενων ΔΡΣ με αρχική στροφορμή, ο έλεγχος αντίστροφης Ιακωβιανής απαιτεί και την γνώση του χρόνου Δt , ο οποίος δίνεται από:

$$\Delta t \approx \frac{\Delta \mathbf{r}_E}{\dot{\mathbf{r}}_{E,d}} \quad (2-96)$$

Στο Σχήμα 2.6 παρουσιάζεται το δομικό διάγραμμα του συστήματος κλειστού βρόχου, όπου εφαρμόζεται ο προτεινόμενο ελεγκτής αντίστροφης Ιακωβιανής σε ένα τρισδιάστατο ελεύθερα αιωρούμενο ΔΡΣ με αρχική στροφορμή.



Σχήμα 2.6. Εφαρμογή ελεγκτή αντίστροφης Ιακωβιανής σε τρισδιάστατο ΔΡΣ με αρχική στροφορμή.

2.7.2.2 Έλεγχος Ανάστροφης Ιακωβιανής

Στους βραχίονες σταθερής βάσης, ο ελεγκτής ανάστροφης Ιακωβιανής στηρίζεται στην παρατήρηση ότι το ΤΣΔ κινείται γιατί εφαρμόζεται σε αυτό μια υποθετική δύναμη \mathbf{F} η οποία είναι το αποτέλεσμα των ροπών $\boldsymbol{\tau}$ που εφαρμόζονται στις αρθρώσεις. Στην περίπτωση αυτή, οι ροπές $\boldsymbol{\tau}$ στις αρθρώσεις του βραχίονα συνδέονται με την υποθετική δύναμη \mathbf{F} που ασκείται στο ΤΣΔ μέσω της εξίσωσης, [13]:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}^T \mathbf{F} \quad (2-97)$$

όπου \mathbf{J} είναι η Ιακωβιανή του ρομποτικού βραχίονα.

Στα ΔΡΣ, όμως, η εφαρμογή μιας εξωτερικής δύναμης \mathbf{F} δεν έχει το ίδιο αποτέλεσμα με την εφαρμογή ροπών $\boldsymbol{\tau}$ στις αρθρώσεις αφού προκαλεί επιπλέον και κίνηση του ΚΜ του ΔΡΣ. Στη συνέχεια, εξετάζεται η εφαρμογή του παραπάνω ελεγκτή

Ανάστροφης Ιακωβιανής σε ελεύθερα αιωρούμενα ΔΡΣ με μη-μηδενική αρχική στροφορμή.

Αρχικά, οι εξισώσεις κίνησης του μειωμένου συστήματος, Εξ. (2-58), εκφράζονται στον Καρτεσιανό χώρο. Η επιτάχυνση του ΤΣΔ προκύπτει από τη χρονική παράγωγο της Εξ. (2-92):

$$\ddot{\mathbf{r}}_E = \mathbf{J}_q(\mathbf{q}, \boldsymbol{\varepsilon}, n) \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{J}}_q(\mathbf{q}, \boldsymbol{\varepsilon}, n) \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{J}}_h(\mathbf{q}, \boldsymbol{\varepsilon}, n) \mathbf{h}_{CM} \quad (2-98)$$

όπου, στην περίπτωση που η Γενικευμένη Ιακωβιανή \mathbf{J}_q αντιστρέφεται, προκύπτει:

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_q^{-1}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\varepsilon}, n) \ddot{\mathbf{r}}_E - \mathbf{J}_q^{-1}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\varepsilon}, n) \dot{\mathbf{J}}_q(\mathbf{q}, \boldsymbol{\varepsilon}, n) \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{J}_q^{-1}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\varepsilon}, n) \dot{\mathbf{J}}_h(\mathbf{q}, \boldsymbol{\varepsilon}, n) \mathbf{h}_{CM} \quad (2-99)$$

Με αντικατάσταση των Εξ. (2-94α) και (2-99) στην Εξ. (2-58), προκύπτουν οι εξισώσεις κίνησης στον Καρτεσιανό χώρο:

$$\mathbf{H}_x(\mathbf{q}, \boldsymbol{\varepsilon}, n) \ddot{\mathbf{r}}_E + \mathbf{C}_x^*(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\varepsilon}, n, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \dot{n}) \dot{\mathbf{r}}_E + \mathbf{g}_x(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\varepsilon}, n, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \dot{n}, \mathbf{h}_{CM}) = \mathbf{u} \quad (2-100\alpha)$$

όπου:

$$\mathbf{u} = \mathbf{J}_q^{-T} \boldsymbol{\tau} \quad (2-100\beta)$$

και

$$\mathbf{H}_x(\mathbf{q}, \boldsymbol{\varepsilon}, n) = \mathbf{J}_q^{-T} \mathbf{H} \mathbf{J}_q^{-1} \quad (2-101\alpha)$$

$$\mathbf{C}_x^*(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\varepsilon}, n, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \dot{n}, \mathbf{h}_{CM}) = \mathbf{J}_q^{-T} (\mathbf{C}^* - \mathbf{H} \mathbf{J}_q^{-1} \dot{\mathbf{J}}_q) \mathbf{J}_q^{-1} \quad (2-101\beta)$$

$$\mathbf{g}_x(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\varepsilon}, n, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \dot{n}, \mathbf{h}_{CM}) = \mathbf{J}_q^{-T} \mathbf{g} + \mathbf{J}_q^{-T} (\mathbf{H} \mathbf{J}_q^{-1} \dot{\mathbf{J}}_q \mathbf{J}_q^{-1} \mathbf{J}_h - \mathbf{H} \mathbf{J}_q^{-1} \dot{\mathbf{J}}_h - \mathbf{C}^* \mathbf{J}_q^{-1} \mathbf{J}_h) \mathbf{h}_{CM} \quad (2-101\gamma)$$

Στην συνέχεια, σχεδιάζεται ένας ελεγκτής που οδηγεί το ΤΣΔ σε επιθυμητό σημείο του χώρου εργασίας παρά την ύπαρξη αρχικής στροφορμής. Για την εύρεση του κατάλληλου ελεγκτή, επιλέγεται η παρακάτω συνάρτηση Lyapunov:

$$V(\dot{\mathbf{r}}_E, \mathbf{e}_x) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}}_E^T \mathbf{H}_x \dot{\mathbf{r}}_E + \frac{1}{2} \mathbf{e}_x^T \mathbf{K}_p \mathbf{e}_x \quad (2-102\alpha)$$

όπου \mathbf{e}_x είναι το σφάλμα από την επιθυμητή θέση $\mathbf{r}_{E,d}$, δηλαδή:

$$\mathbf{e}_x = \mathbf{r}_{E,d} - \mathbf{r}_E \quad (2-102\beta)$$

Όταν η Γενικευμένη Ιακωβιανή \mathbf{J}_q του ΔΡΣ αντιστρέφεται, ο πίνακας \mathbf{H}_x είναι θετικά ορισμένος. Στην περίπτωση αυτή, για θετικά ορισμένο πίνακα \mathbf{K}_p , ισχύει ότι:

$$V(\dot{\mathbf{r}}_E, \mathbf{e}_x) > 0 \quad (2-103\alpha)$$

και

$$V(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = 0 \quad (2-103\beta)$$

Η χρονική παράγωγος της συνάρτησης Lyapunov είναι:

$$\dot{V}(\dot{\mathbf{r}}_E, \mathbf{e}_x) = \frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{r}}_E^T \mathbf{H}_x \dot{\mathbf{r}}_E) + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} \mathbf{e}_x^T \mathbf{K}_p \mathbf{e}_x\right) \quad (2-104\alpha)$$

Χρησιμοποιώντας την Εξ. (2-76) προκύπτει ότι:

$$\dot{V}(\dot{\mathbf{r}}_E, \mathbf{e}_x) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}}_E^T \dot{\mathbf{H}}_x \dot{\mathbf{r}}_E + \dot{\mathbf{r}}_E^T \mathbf{H}_x \ddot{\mathbf{r}}_E + \mathbf{e}_x^T \mathbf{K}_p \dot{\mathbf{e}}_x \quad (2-104\beta)$$

Ο όρος $\mathbf{H}_x \ddot{\mathbf{r}}_E$ μπορεί να αντικατασταθεί μέσω της Εξ. (2-100) ενώ από την Εξ. (2-102β), για $\mathbf{r}_{E,d} = \text{σταθ}$, προκύπτει ότι $\dot{\mathbf{e}}_x = -\dot{\mathbf{r}}_E$. Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω, και για $\mathbf{K}_p = \mathbf{K}_p^T$ έχουμε:

$$\dot{V}(\dot{\mathbf{r}}_E, \mathbf{e}_x) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}}_E^T \dot{\mathbf{H}}_x \dot{\mathbf{r}}_E + \dot{\mathbf{r}}_E^T (\mathbf{u} - \mathbf{C}_x^* \dot{\mathbf{r}}_E - \mathbf{g}_x) - \dot{\mathbf{r}}_E^T \mathbf{K}_p \mathbf{e}_x \quad (2-105\alpha)$$

ή

$$\dot{V}(\dot{\mathbf{r}}_E, \mathbf{e}_x) = \dot{\mathbf{r}}_E^T (\mathbf{u} - \mathbf{g}_x - \mathbf{K}_p \mathbf{e}_x) + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}}_E^T (\dot{\mathbf{H}}_x - 2\mathbf{C}_x^*) \dot{\mathbf{r}}_E \quad (2-105\beta)$$

Στη συνέχεια αποδεικνύεται ότι:

$$\dot{\mathbf{r}}_E^T (\dot{\mathbf{H}}_x - 2\mathbf{C}_x^*) \dot{\mathbf{r}}_E = 0 \quad (2-106)$$

Ο πίνακας \mathbf{C}_x^* δίνεται από την Εξ. (2-101β). Λαμβάνοντας υπόψη την Εξ. (2-59α) έχουμε:

$$\mathbf{C}_x^* = \mathbf{C}_x + \mathbf{J}_q^{-T} \mathbf{C}_h \mathbf{J}_q^{-1} \quad (2-107\alpha)$$

όπου ο πίνακας:

$$\mathbf{C}_x = \mathbf{J}_q^{-T} \mathbf{C} \mathbf{J}_q^{-1} - \mathbf{J}_q^{-T} \mathbf{H} \mathbf{J}_q^{-1} \dot{\mathbf{J}}_q \mathbf{J}_q^{-1} \quad (2-107\beta)$$

αντιστοιχεί σε ΔΡΣ με μηδενική αρχική στροφορμή. Χρησιμοποιώντας, λοιπόν, την Εξ. (2-107α), το αριστερό μέλος της Εξ. (2-106) γράφεται:

$$\dot{\mathbf{r}}_E^T (\dot{\mathbf{H}}_x - 2\mathbf{C}_x^*) \dot{\mathbf{r}}_E = \dot{\mathbf{r}}_E^T (\dot{\mathbf{H}}_x - 2\mathbf{C}_x) \dot{\mathbf{r}}_E - 2\dot{\mathbf{r}}_E^T \mathbf{J}_q^{-T} \mathbf{C}_h \mathbf{J}_q^{-1} \dot{\mathbf{r}}_E \quad (2-108)$$

Η Εξ. (2-106) επαληθεύεται όταν και οι δυο όροι του δεξιού μέλους της Εξ. (2-108) είναι ίσοι με μηδέν. Από τη διατήρηση της ενέργειας για το ελεύθερα αιωρούμενο ΔΡΣ με μηδενική αρχική στροφορμή, προκύπτει ότι ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του ελεύθερα αιωρούμενου ΔΡΣ ισούται με την ισχύ των συνολικών ροπών που ασκούνται από τους κινητήρες στις αρθρώσεις του βραχίονα του. Δηλαδή:

$$\frac{dT}{dt} = \dot{\mathbf{q}}^T \boldsymbol{\tau} \quad (2-109\alpha)$$

όπου η κινητική ενέργεια ενός ελεύθερα αιωρούμενου ΔΡΣ με μηδενική αρχική στροφορμή δίνεται από:

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}}_E^T \mathbf{H}_x \dot{\mathbf{r}}_E \quad (2-109\beta)$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι ο πίνακας \mathbf{H}_x είναι συμμετρικός προκύπτει, από την Εξ. (2-76), ότι ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας δίνεται από:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}}_E^T \mathbf{H}_x \dot{\mathbf{r}}_E \right) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}}_E^T \dot{\mathbf{H}}_x \dot{\mathbf{r}}_E + \dot{\mathbf{r}}_E^T \mathbf{H}_x \ddot{\mathbf{r}}_E \quad (2-110\alpha)$$

Θεωρώντας μηδενική αρχική στροφορμή του ΔΡΣ, δηλαδή $\mathbf{C}_x^* = \mathbf{C}_x$ και $\mathbf{g}_x = \mathbf{0}$, η Εξ. (2-100α) επιλύεται ως προς τον όρο $\mathbf{H}_x \ddot{\mathbf{r}}_E$ και το αποτέλεσμα αντικαθίσταται στην Εξ. (2-110α). Οπότε:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}}_E^T (\dot{\mathbf{H}}_x - 2\mathbf{C}_x) \dot{\mathbf{r}}_E + \dot{\mathbf{r}}_E^T \mathbf{u} \quad (2-110\beta)$$

Αντίστοιχα, λαμβάνοντας υπόψη την Εξ. (2-100β) και την Εξ. (2-92) για μηδενική αρχική στροφορμή, η ισχύς των ροπών στις αρθρώσεις του βραχίονα είναι:

$$\dot{\mathbf{q}}^T \boldsymbol{\tau} = \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{J}_q^T \mathbf{u} = (\mathbf{J}_q \dot{\mathbf{q}})^T \mathbf{u} = \dot{\mathbf{r}}_E^T \mathbf{u} \quad (2-110\gamma)$$

Από τις Εξ. (2-109α) και (2-110) προκύπτει ότι:

$$\dot{\mathbf{r}}_E^T (\dot{\mathbf{H}}_x - 2\mathbf{C}_x) \dot{\mathbf{r}}_E = 0 \quad (2-111)$$

Επίσης, επειδή ο πίνακας \mathbf{C}_h είναι αντισυμμετρικός ισχύει η Εξ. (2-72β). Στην περίπτωση, λοιπόν, όπου $\mathbf{w} = \mathbf{J}_q^{-1} \dot{\mathbf{r}}_E$, έχουμε:

$$\dot{\mathbf{r}}_E^T \mathbf{J}_q^{-T} \mathbf{C}_h \mathbf{J}_q^{-1} \dot{\mathbf{r}}_E = 0 \quad (2-112)$$

Από το συνδυασμό των Εξ. (2-108), (2-111) και (2-112) προκύπτει η Εξ. (2-106). Με εισαγωγή του νόμου ελέγχου \mathbf{u} :

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}_p \mathbf{e}_x - \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{r}}_E + \mathbf{g}_x \quad (2-113)$$

στην Εξ. (2-105β) και λαμβάνοντας υπόψη την Εξ. (2-106) έχουμε:

$$\dot{V}(\dot{\mathbf{r}}_E, \mathbf{e}_x) = -\dot{\mathbf{r}}_E^T \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{r}}_E \leq 0 \quad (2-114)$$

Από την Εξ. (2-114) προκύπτει ότι $\dot{V} = 0$ όταν $\dot{\mathbf{r}}_E = \mathbf{0}$ ανεξάρτητα από το σφάλμα \mathbf{e}_x . Οπότε η Εξ. (2-114) δεν εξασφαλίζει την ασυμπτωτική ευστάθεια του σημείου $(\dot{\mathbf{r}}_E, \mathbf{e}_x) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$ (origin). Στη συνέχεια θα δειχθεί ότι $\dot{V} = 0$ μόνο όταν $\dot{\mathbf{r}}_E = \mathbf{0}$ και $\mathbf{e}_x = \mathbf{0}$. Έστω ότι το ΤΣΔ σταματά ($\dot{\mathbf{r}}_E = \mathbf{0}$, $\ddot{\mathbf{r}}_E = \mathbf{0}$) σε κάποια θέση όπου $\mathbf{e}_x \neq \mathbf{0}$. Αντικαθιστώντας τον προτεινόμενο νόμο ελέγχου, που δίνεται από την Εξ. (2-113), στην Εξ. (2-100α) και λαμβάνοντας υπόψη ότι $\dot{\mathbf{r}}_E = \mathbf{0}$ (δηλαδή $\dot{V} = 0$) προκύπτει ότι:

$$\ddot{\mathbf{r}}_E = \mathbf{H}_x^{-1} \mathbf{K}_p \mathbf{e}_x \quad (2-115)$$

Στην περίπτωση που η Γενικευμένη Ιακωβιανή \mathbf{J}_q αντιστρέφεται, ο πίνακας \mathbf{H}_x είναι θετικά ορισμένος και από την Εξ. (2-115) προκύπτει ότι όταν $\mathbf{e}_x \neq \mathbf{0}$, το ΤΣΔ έχει επιτάχυνση $\ddot{\mathbf{r}}_E \neq \mathbf{0}$, το οποίο είναι άτοπο. Οπότε $\dot{V} = 0$ μόνο όταν $\dot{\mathbf{r}}_E = \mathbf{0}$ και $\mathbf{e}_x = \mathbf{0}$ και σύμφωνα με το θεώρημα La Salle, το σημείο $(\dot{\mathbf{r}}_E, \mathbf{e}_x) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές, [84].

Από το συνδυασμό των Εξ. (2-100β) και (2-113) προκύπτει ότι ο ζητούμενος ελεγκτής είναι:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}_q^T (\mathbf{K}_p \mathbf{e}_x - \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{r}}_E) + \mathbf{J}_q^T \mathbf{g}_x \quad (2-116\alpha)$$

Ο παραπάνω ελεγκτής επιτυγχάνει την επίτευξη της επιθυμητής θέσης $\mathbf{r}_{E,d}$ του ΤΣΔ παρά την ύπαρξη αρχικής στροφορμής \mathbf{h}_{cm} . Όμως για να παραμείνει το ΤΣΔ στην επιθυμητή θέση, απαιτούνται, εξαιτίας της μη-μηδενικής στροφορμής, μη-μηδενικές ροπές στις αρθρώσεις:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{g}_h(\boldsymbol{\varepsilon}, n, \mathbf{q}, \mathbf{h}_{CM}) \quad (2-116\beta)$$

Στην συνέχεια προτείνεται η εφαρμογή ενός ελεγκτή βασισμένου στο μοντέλο για την επίτευξη της παρακολούθησης της επιθυμητής τροχιάς του ΤΣΔ παρά την ύπαρξη αρχικής στροφορμής του ΔΡΣ. Δηλαδή:

$$\mathbf{u} = \mathbf{H}_x (\ddot{\mathbf{r}}_{E,d} + \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{e}}_x + \mathbf{K}_p \mathbf{e}_x) + \mathbf{C}_x^* \dot{\mathbf{r}}_E + \mathbf{g}_x \quad (2-117)$$

Με αντικατάσταση της Εξ. (2-117) στην Εξ. (2-100α) προκύπτει η παρακάτω δυναμική του σφάλματος:

$$\ddot{\mathbf{e}}_x + \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{e}}_x + \mathbf{K}_p \mathbf{e}_x = \mathbf{0} \quad (2-118)$$

Η δυναμική του σφάλματος περιγράφεται, λοιπόν, από μια γραμμική διαφορική εξίσωση 2^{ης} τάξης. Οπότε αν επιλεγούν θετικά ορισμένοι πίνακες κερδών \mathbf{K}_p και \mathbf{K}_d έτσι ώστε να εξασφαλίζεται η ευστάθεια του συστήματος, το ΤΣΔ θα οδηγηθεί τελικά στο επιθυμητό σημείο αφού το σφάλμα στη μόνιμη κατάσταση θα είναι μηδενικό:

$$\mathbf{e}_{x,ss} = \mathbf{0} \quad (2-119)$$

Σημειώνεται ότι η εφαρμογή του ελεγκτή ανάστροφης Ιακωβιανής που δίνεται από την Εξ. (2-116) καθώς και του ελεγκτή βασισμένου στο μοντέλο που δίνεται από την Εξ. (2-117), περιορίζεται στις περιπτώσεις όπου η Γενικευμένη Ιακωβιανή \mathbf{J}_q του ΔΡΣ αντιστρέφεται, δηλαδή δεν εμφανίζονται δυναμικές ιδιομορφίες, [72].

2.8 Εφαρμογές

Στο εδάφιο αυτό, παρουσιάζονται ορισμένα παραδείγματα εφαρμογής κάποιων από τους παραπάνω προτεινόμενους ελεγκτές. Η Εφαρμογή 2.1 εξετάζει την περίπτωση εφαρμογής των προτεινόμενων ελεγκτών στο χώρο των αρθρώσεων σε ένα επίπεδο ελεύθερα αιωρούμενο ΔΡΣ με αρχική στροφορμή ενώ στη Εφαρμογή 2.2 στο ίδιο επίπεδο ΔΡΣ εφαρμόζονται οι προτεινόμενοι ελεγκτές για τον Καρτεσιανό χώρο.

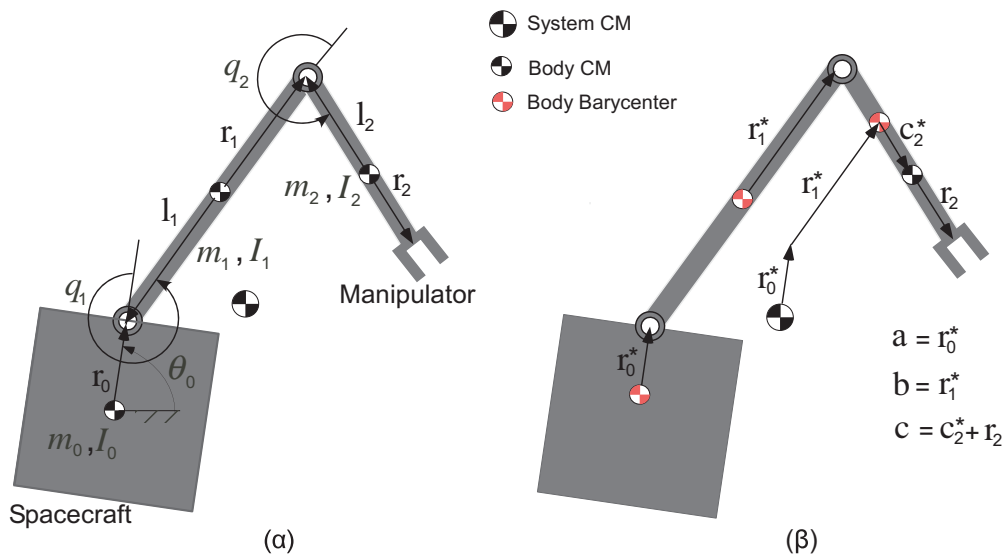
Εφαρμογή 2.1: Στην εφαρμογή αυτή, μελετάται η περίπτωση όπου ο ελεγκτής που δίνεται από την Εξ. (2-81α) εφαρμόζεται στο επίπεδο ελεύθερα αιωρούμενο ΔΡΣ με βραχίονα 2-BE του Σχήματος 2.7 έτσι ώστε να επιτευχθεί μια επιθυμητή τελική διαμόρφωση του βραχίονα του. Οι παράμετροι του ΔΡΣ δίνονται από τον Πίνακα 2.1 και το ΔΡΣ έχει αρχική στροφορμή $h_{cm} = 1.5 \text{ Nms}$. Εξετάζονται δυο περιπτώσεις: (α) Η αρχική διαμόρφωση του βραχίονα είναι $q_{1, \text{in}} = 10^\circ$, $q_{2, \text{in}} = 20^\circ$ και η επιθυμητή τελική είναι $q_{1, \text{fin}} = 60^\circ$, $q_{2, \text{fin}} = 90^\circ$. (β) Στην δεύτερη περίπτωση είναι επιθυμητό να παρακολουθηθεί η παρακάτω τροχιά της διαμόρφωσης του βραχίονα:

$$q_1(t) = \pi/18 + (\pi/360)t^3 - (\pi/2400)t^4 + (\pi/60000)t^5 \quad (\text{rad})$$

και

$$q_2(t) = \pi/9 + (7\pi/1800)t^3 - (7\pi/12000)t^4 + (7\pi/300000)t^5 \quad (\text{rad})$$

Η παραπάνω τροχιά της διαμόρφωσης του βραχίονα επιτρέπει την ίδια μεταβολή των γωνιών των αρθρώσεων που παρουσιάστηκε στο ερώτημα (α), σε χρόνο $t_f = 10 \text{ s}$ και με μηδενικές αρχικές και τελικές ταχύτητες/επιταχύνσεις.

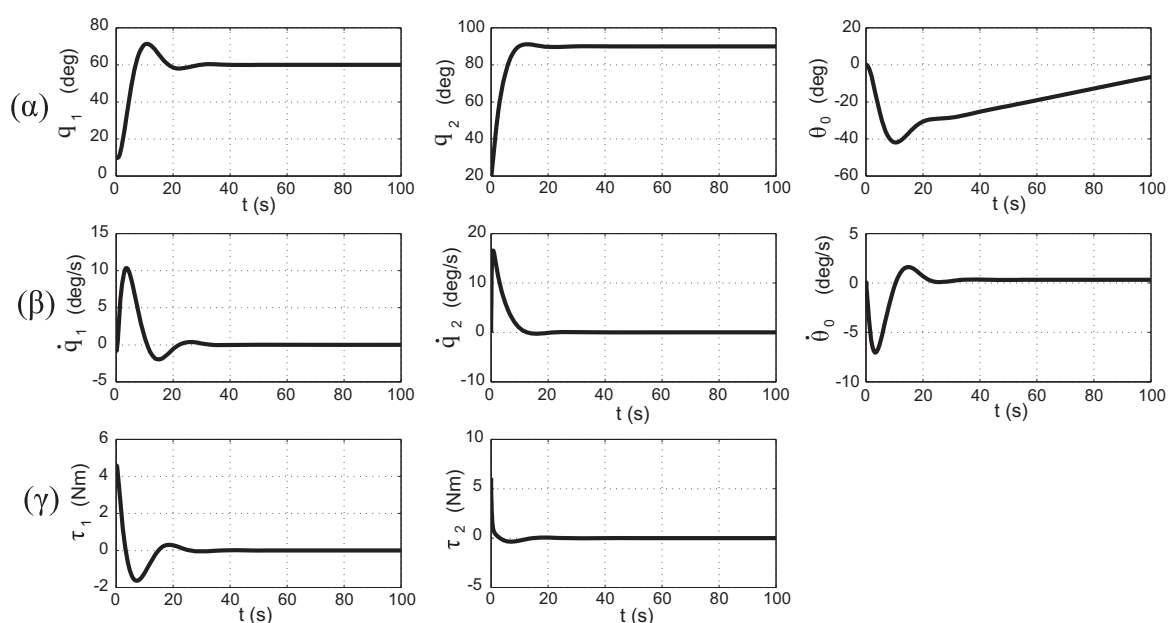


Σχήμα 2.7. Επίπεδο ελεύθερα αιωρούμενο ΔΡΣ με βραχίονα 2-BE. (α) Ορισμός των αδρανειακών ιδιοτήτων και των μεταβλητών διαμόρφωσης. (β) Τα βαρυκεντρικά διανύσματα \mathbf{a} , \mathbf{b} και \mathbf{c} του ΔΡΣ.

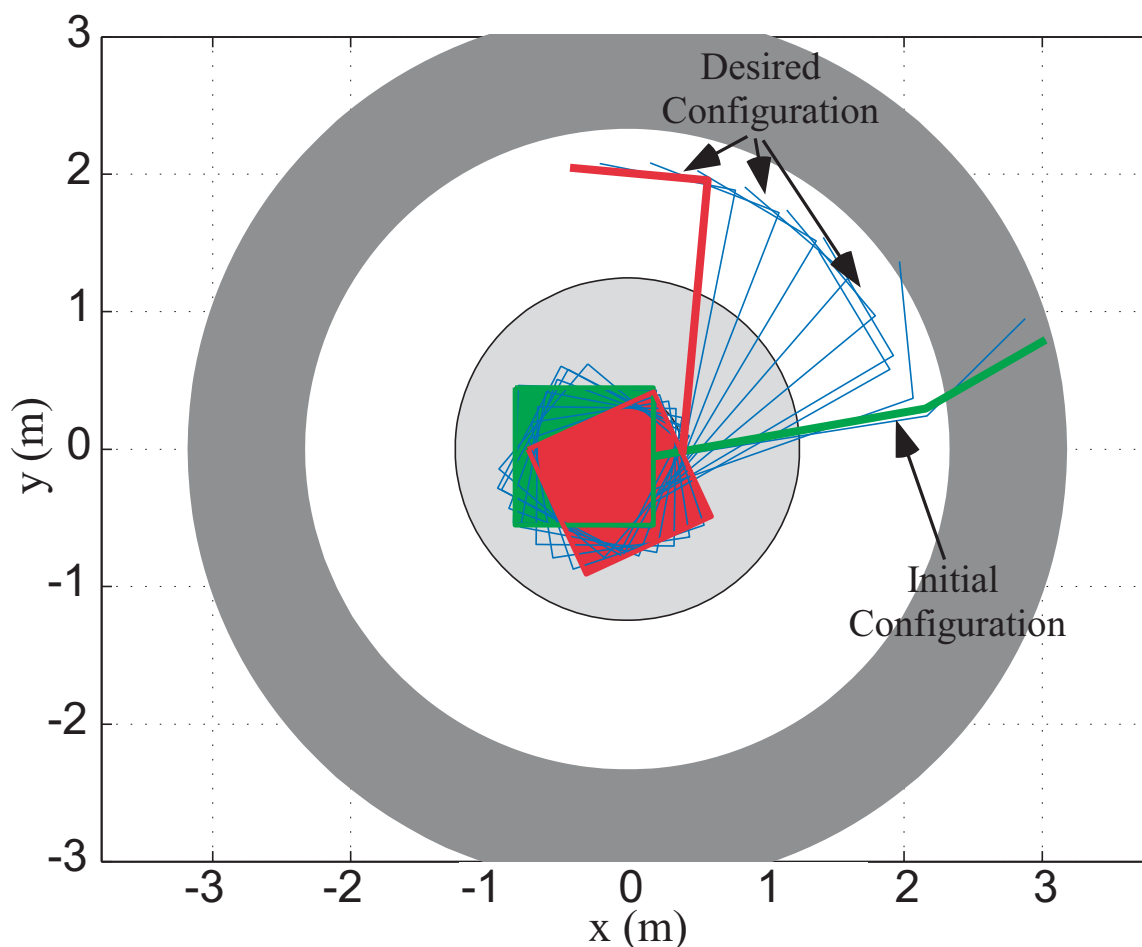
ΠΙΝΑΚΑΣ 2.1. ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ ΤΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΔΡΣ ΜΕ ΕΝΑ ΒΡΑΧΙΟΝΑ 2-ΒΕ ΤΟΥ ΣΧΗΜΑΤΟΣ 2.7

Σώμα	$l_i (m)$	$r_i (m)$	$m_i (Kg)$	$I_i (Kg m^2)$
0	0.5	0.5	400	66.67
1	1.0	1.0	40	13.33
2	0.5	0.5	30	2.50

(α) Στο σύστημα εφαρμόζεται ο ελεγκτής αντιστάθμισης στροφορμής που δίνεται από την Εξ. (2-81α) με κέρδη $\mathbf{K}_p = \text{diag}(5,5)$ και $\mathbf{K}_d = \text{diag}(15,15)$. Θεωρώντας ότι στο ξεκίνημα της κίνησης ο αρχικός προσανατολισμός του δορυφόρου του ΔΡΣ είναι $\theta_{0,in} = 0^0$, στα Σχήματα 2.8(α) και (β) παρουσιάζονται οι αποκρίσεις των σχετικών γωνιών του βραχίονα και του προσανατολισμού του δορυφόρου του ΔΡΣ καθώς και οι αντίστοιχες ταχύτητες τους, για χρόνο $t_f = 100s$. Παρατηρείται ότι οι τελικές γωνίες λαμβάνουν τις επιθυμητές τιμές παρά την ύπαρξη αρχικής στροφορμής ενώ ο δορυφόρος συνεχίζει να περιστρέφεται έτσι ώστε η στροφορμή του ΔΡΣ να διατηρείται σταθερή και ίση με την αρχική. Το Σχήμα 2.8(γ) παρουσιάζει τις απαιτούμενες ροπές που πρέπει να εφαρμοστούν στις αρθρώσεις μέσω του ελεγκτή για την επίτευξη της παραπάνω επιθυμητής διαμόρφωσης του βραχίονα ενώ στο Σχήμα 2.9 παρουσιάζονται κάποια στιγμιότυπα της κίνησης του ΔΡΣ.

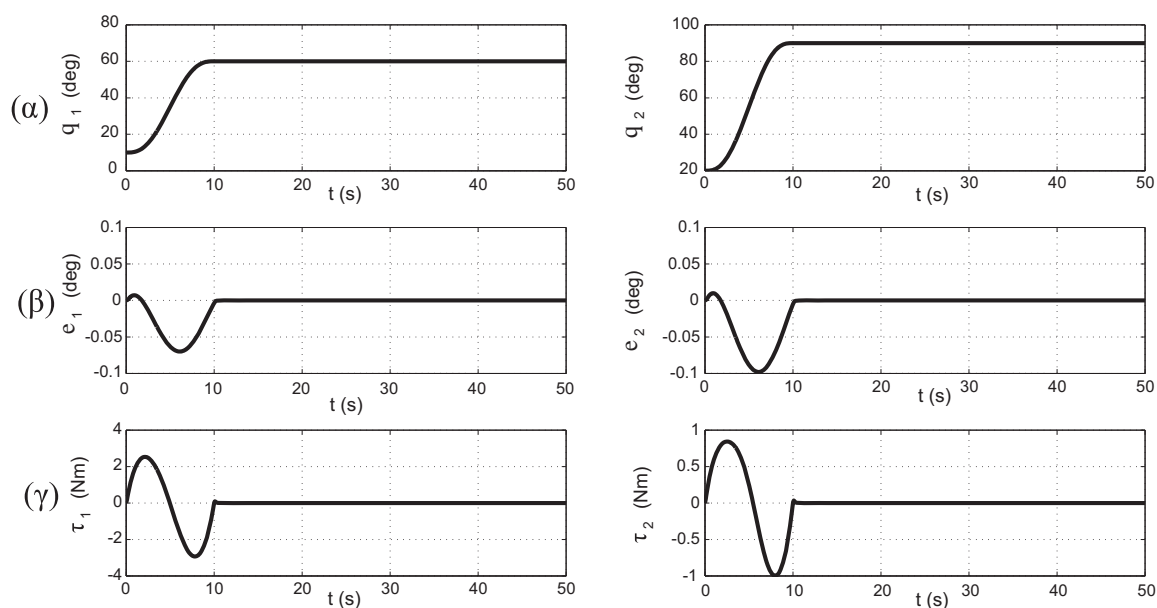


Σχήμα 2.8. Απόκριση επίπεδου ΔΡΣ με ελεγκτή αντιστάθμισης στροφορμής. (α) Τροχιές των σχετικών γωνιών αρθρώσεων και προσανατολισμός δορυφόρου, (β) Ταχύτητες αρθρώσεων και γωνιακή ταχύτητα δορυφόρου και (γ) Απαιτούμενες ροπές στις αρθρώσεις του βραχίονα.



Σχήμα 2.9. Στιγμιότυπα κίνησης του επίπεδου ΔΡΣ με την εφαρμογή του ελεγκτή αντιστάθμισης στροφορμής.

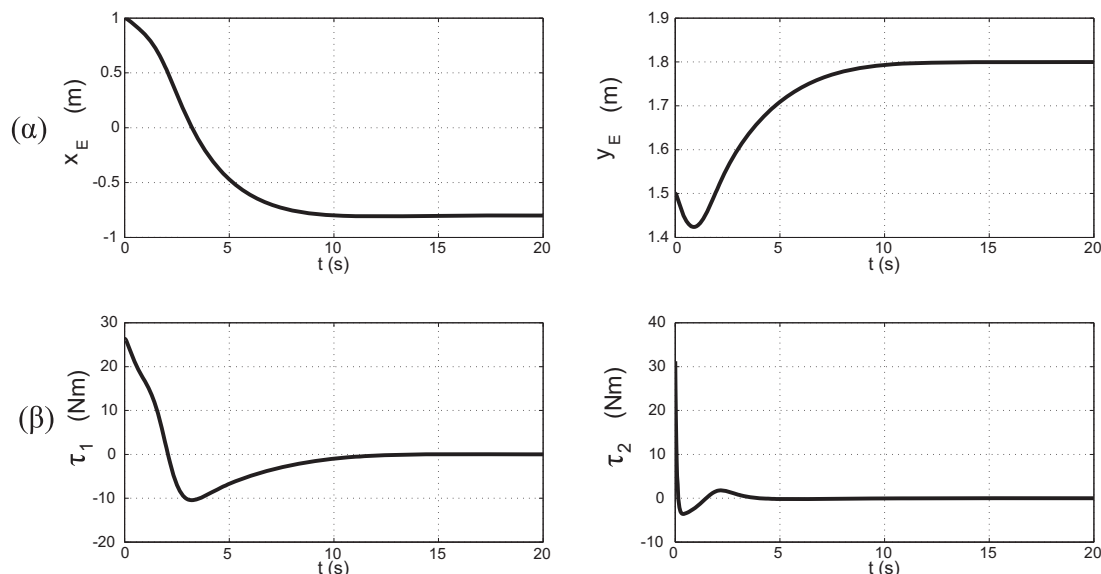
(β) Για την παρακολούθηση της τροχιάς στο χώρο των αρθρώσεων, εφαρμόζεται ο ελεγκτής βασισμένος στο μοντέλο που δίνεται από την Εξ. (2-87). Η βαθμονόμηση των κερδών του ελεγκτή γίνεται μέσω των Εξ. (2-89). Θεωρώντας συντελεστή απόσβεσης για την επιθυμητή απόκριση της κάθε άρθρωσης ίσο με $\zeta_i=1$ και επιθυμητό χρόνο αποκατάστασης $t_{s,i}=0.5s$ προκύπτουν κέρδη $\mathbf{K}_p = \text{diag}(144,144)$ και $\mathbf{K}_d = \text{diag}(24,24)$. Στο Σχήμα 2.10(α) παρουσιάζονται οι αποκρίσεις των σχετικών γωνιών του βραχίονα ενώ στο Σχήμα 2.10(β) φαίνονται τα αντίστοιχα σφάλματα από τις επιθυμητές γωνίες. Το σχήμα 2.10(γ) παρουσιάζει τις απαιτούμενες ροπές που πρέπει να εφαρμοστούν στις αρθρώσεις μέσω του ελεγκτή για την επίτευξη της παρακολούθησης της επιθυμητής τροχιάς διαμόρφωσης του βραχίονα.



Σχήμα 2.10. Απόκριση ΔΡΣ με ελεγκτή αντίστροφης δυναμικής. (α) Τροχιές των σχετικών γωνιών αρθρώσεων, (β) Σφάλματα σχετικών γωνιών από τις επιθυμητές και (γ) Απαιτούμενες ροπές στις αρθρώσεις του βραχίονα.

Εφαρμογή 2.2: Στην εφαρμογή αυτή, εφαρμόζεται ο ελεγκτής ανάστροφης Ιακωβιανής που περιγράφεται από την Εξ. (2-116) για την προσέγγιση του ΤΣΔ ενός ελεύθερα αιωρούμενου ΔΡΣ με μη-μηδενική στροφορμή σε κάποιο επιθυμητό σημείο του χώρου εργασίας του. Ο ελεγκτής εφαρμόζεται στο επίπεδο ΔΡΣ με ένα βραχίονα με 2-ΒΕ του Σχήματος 2.7 του οποίου οι παράμετροι παρουσιάζονται στον Πίνακα 2.1. Η αρχική στροφορμή του ΔΡΣ είναι ίση με $h_{cm}=1.5\text{ Nms}$ και το ΤΣΔ τη στιγμή που εφαρμόζεται ο ελεγκτής βρίσκεται στο σημείο $A(1.0,1.5)\text{ m}$ και είναι επιθυμητή η προσέγγιση του (α) στο σημείο $B(-0.8,1.8)\text{ m}$ και (β) στο σημείο $C(-2.0,2.0)\text{ m}$, παρά την ύπαρξη αρχικής στροφορμής στο ΔΡΣ.

Στο σύστημα εφαρμόζεται ο ελεγκτής ανάστροφης Ιακωβιανής που δίνεται από την Εξ. (2-116). Τα κέρδη του ελεγκτή επιλέγονται ίσα με $\mathbf{K}_p = \text{diag}(50,50)$ και $\mathbf{K}_d = \text{diag}(150,150)$. Ο αρχικός προσανατολισμός του δορυφόρου του ΔΡΣ ορίζεται ίσος με $\theta_0 = 60^\circ$. Για τον προσανατολισμό αυτό, η αντίστοιχη διαμόρφωση του βραχίονα όταν το ΤΣΔ βρίσκεται στο σημείο A είναι $q_1 = -37.3^\circ$ και $q_2 = 130.1^\circ$. Στην περίπτωση αυτή, η κίνηση του ΤΣΔ φαίνεται στο Σχήμα 2.11(α) ενώ στο Σχήμα 2.11(β) παρουσιάζονται οι απαιτούμενες ροπές που πρέπει να εφαρμοστούν στις αρθρώσεις για την προσέγγιση του ΤΣΔ στο σημείο B.



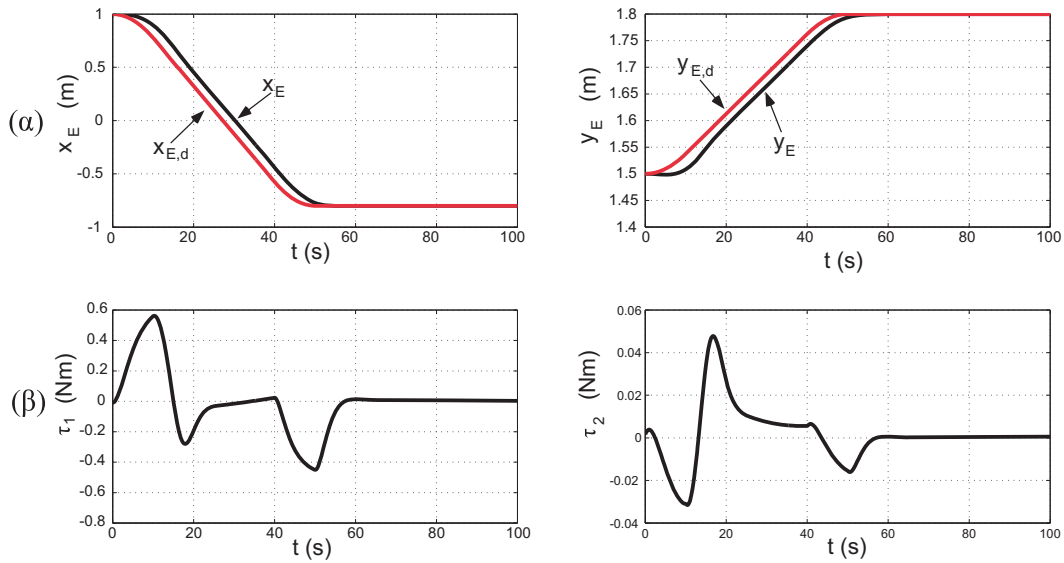
Σχήμα 2.11. Απόκριση ΔΡΣ με ελεγκτή ανάστροφης δυναμικής με εντολή σταθερής επιθυμητής θέσης. (α) Τροχιές της θέσης του ΤΣΔ και (β) Απαιτούμενες ροπές στις αρθρώσεις του βραχίονα.

Από το Σχήμα 2.11(β) παρατηρούμε ότι στο ξεκίνημα της κίνησης του ΤΣΔ απαιτούνται μεγάλες ροπές στις αρθρώσεις του βραχίονα. Αυτό οφείλεται στο αρχικό μεγάλο σφάλμα θέσης που υπολογίζει ο ελεγκτής το οποίο όταν πολλαπλασιάζεται με τα αντίστοιχα κέρδη δίνει μεγάλες ροπές. Μια συνήθης πρακτική η οποία αντιμετωπίζει το πρόβλημα των μεγάλων ροπών στο ξεκίνημα της κίνησης είναι να δοθεί ως εντολή στον ελεγκτή όχι η επιθυμητή σταθερή τελική θέση του ΤΣΔ αλλά μια ομαλή μεταβολή από την αρχική θέση του ΤΣΔ στην τελική επιθυμητή θέση του. Στη συνέχεια το ΤΣΔ θα προσεγγίσει την επιθυμητή θέση μέσω μιας επιθυμητής κίνησης που ορίζεται με γραμμικές συναρτήσεις με παραβολικά τμήματα, [13]. Ορίζεται, λοιπόν, μια επιθυμητή κίνηση του ΤΣΔ η οποία αποτελείται από μια επιταχυνόμενη κίνηση με επιτάχυνση a για χρόνο t_b , μια κίνηση με σταθερή ταχύτητα και μια επιβραδυνόμενη κίνηση με επιβράδυνση a για χρονικό διάστημα t_b . Αν ο συνολικός χρόνος κίνησης του ΤΣΔ είναι ίσος με t_f τότε η επιτάχυνση (επιβράδυνση) a που απαιτείται για να διανύσει το ΤΣΔ απόσταση ίση με S δίνεται από:

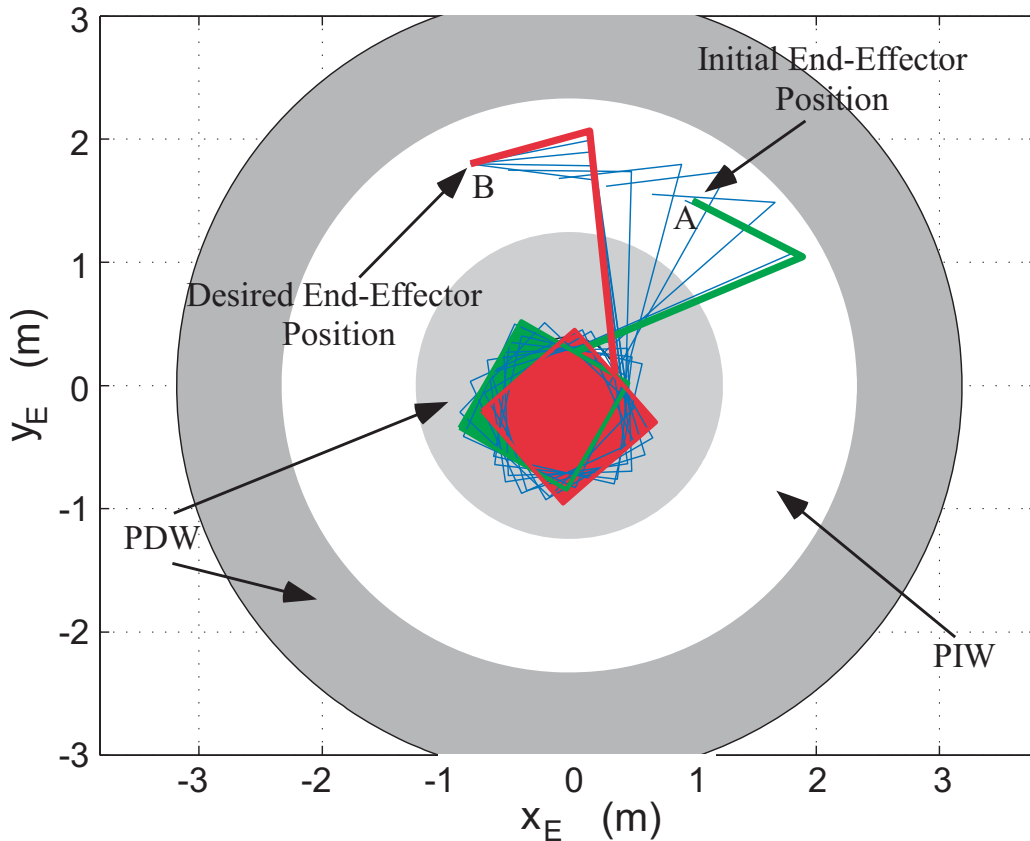
$$a = \frac{S}{t_b(t_f - t_b)} \quad (2-119)$$

Εφαρμόζοντας την παραπάνω τεχνική για την οριζόντια και κατακόρυφη κίνηση του ΤΣΔ, και θεωρώντας $t_f = 50s$ και $t_b = 10s$ προκύπτουν οι εντολές $x_{E,d}$ και $y_{E,d}$ για την επιθυμητή θέση του ΤΣΔ οι οποίες παρουσιάζονται στο Σχήμα 2.12(α). Στο ίδιο σχήμα φαίνονται και οι πραγματικές τροχιές x_E και y_E της θέσης του ΤΣΔ. Παρατηρούμε ότι, στην περίπτωση αυτή, τα σφάλματα θέσης σε όλη τη διάρκεια της κίνησης είναι σχετικά

μικρά, με αποτέλεσμα την απαίτηση μικρότερων ροπών, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 2.12(β). Στιγμιότυπα της κίνησης του ΔΡΣ παρουσιάζονται στο Σχήμα 2.13.



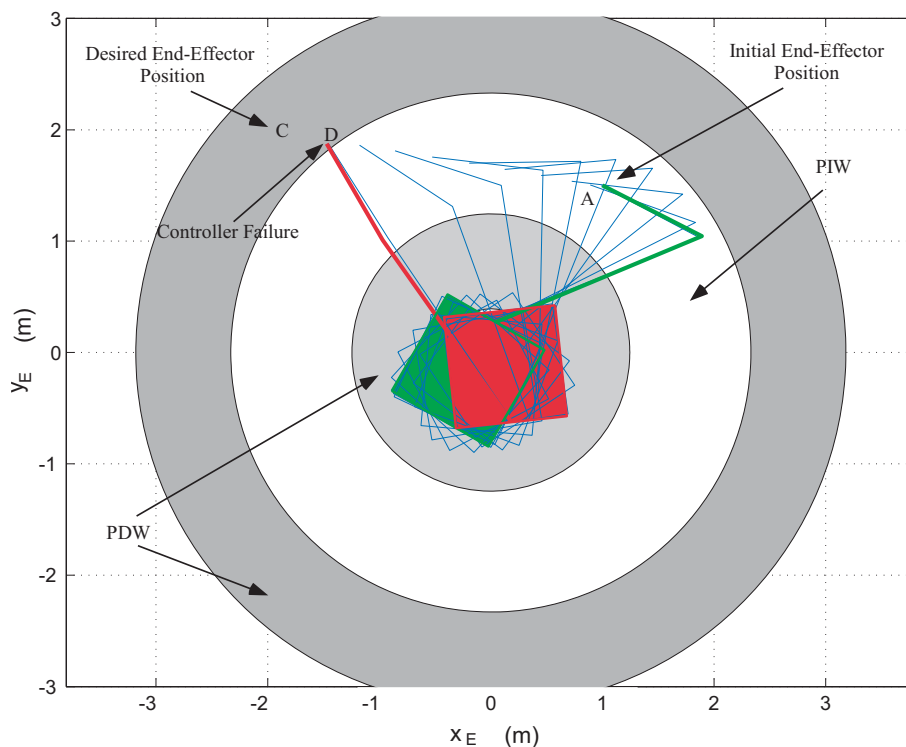
Σχήμα 2.12. Απόκριση ΔΡΣ με ελεγκτή ανάστροφης δυναμικής με εντολή επιθυμητής θέσης μέσω γραμμικών συναρτήσεων με παραβολικά τμήματα. (α) Τροχιές της θέσης του ΤΣΔ και (β) Απαιτούμενες ροπές στις αρθρώσεις του βραχίονα.



Σχήμα 2.13. Στιγμιότυπα κίνησης του επίπεδου ΔΡΣ με την εφαρμογή του ελεγκτή της Εξ. (2.116).

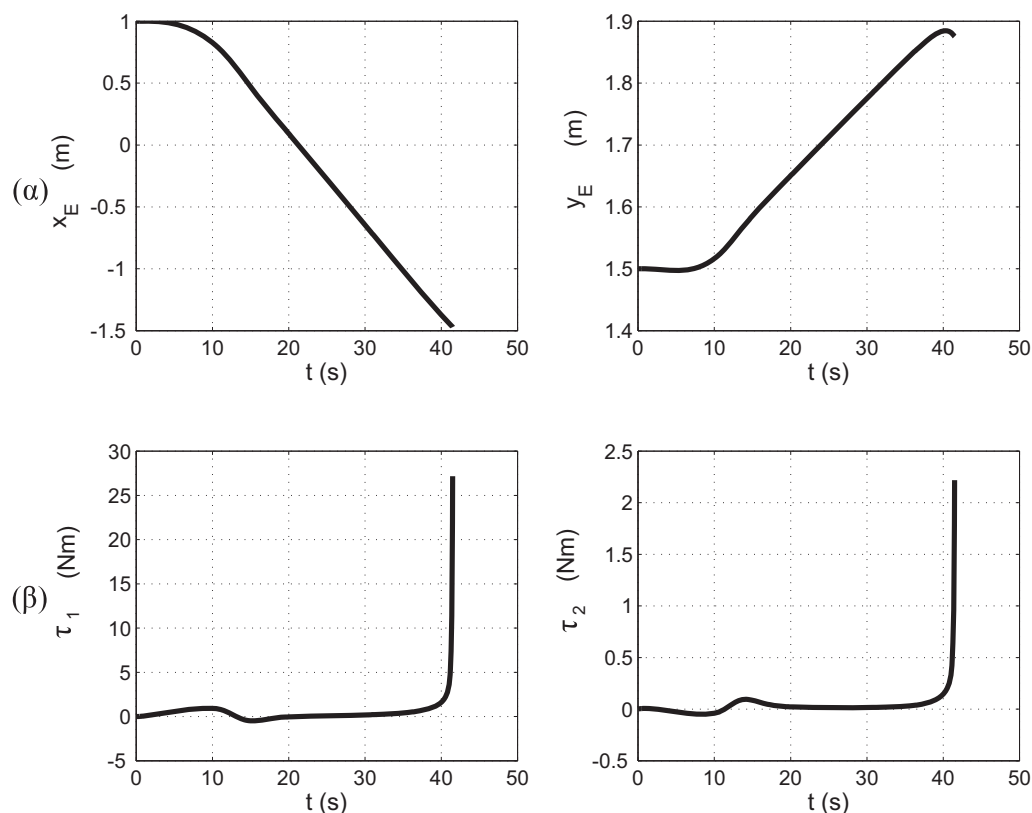
Στο Σχήμα 2.13 ορίζονται και οι περιοχές PDW στις οποίες η διαμόρφωση του βραχίονα μπορεί να πάρει τέτοιες τιμές ώστε να εμφανιστούν δυναμικές ιδιομορφίες, δηλαδή η οριζουσα της Γενικευμένης Ιακωβιανής να γίνει μηδέν, [72]. Επειδή η εφαρμογή του προτεινόμενου ελεγκτή απαιτεί την αντιστροφή της Ιακωβιανής, υπάρχει πιθανότητα, για κινήσεις του ΤΣΔ μέσα σε αυτές τις περιοχές, ο ελεγκτής αυτός να μη μπορεί να εφαρμοστεί. Επίσης, στο ίδιο σχήμα φαίνεται και η περιοχή PIW, όπου εκεί δεν είναι δυνατή η εμφάνιση δυναμικών ιδιομορφιών δηλαδή στην περιοχή αυτή η οριζουσα της Γενικευμένης Ιακωβιανής δεν μπορεί να γίνει μηδέν. Όπως προκύπτει από το Σχήμα 2.13, η κίνηση του ΤΣΔ γίνεται στην περιοχή PIW και ο προτεινόμενος ελεγκτής δεν παρουσιάζει πρόβλημα.

(β) Στη συνέχεια, θεωρείται η περίπτωση όπου το ΤΣΔ πρέπει να προσεγγίσει το σημείο $C(-2.0,2.0)m$ το οποίο, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 2.13, βρίσκεται μέσα στην περιοχή PDW. Εξετάζονται δυο περιπτώσεις: Στην πρώτη περίπτωση, ο προσανατολισμός του δορυφόρου, τη στιγμή που το ΤΣΔ βρίσκεται στο σημείο $A(1.0,1.5)m$ και ξεκινά να εφαρμόζεται ο ελεγκτής, είναι ίσος με $\theta_0 = 60^0$. Στη δεύτερη περίπτωση ο αντίστοιχος προσανατολισμός του ΔΡΣ είναι ίσος με $\theta_0 = -45^0$. Στο Σχήμα 2.14 παρουσιάζονται στιγμιότυπα της κίνησης του ΔΡΣ για αρχικό προσανατολισμό δορυφόρου ίσο με $\theta_0 = 60^0$.



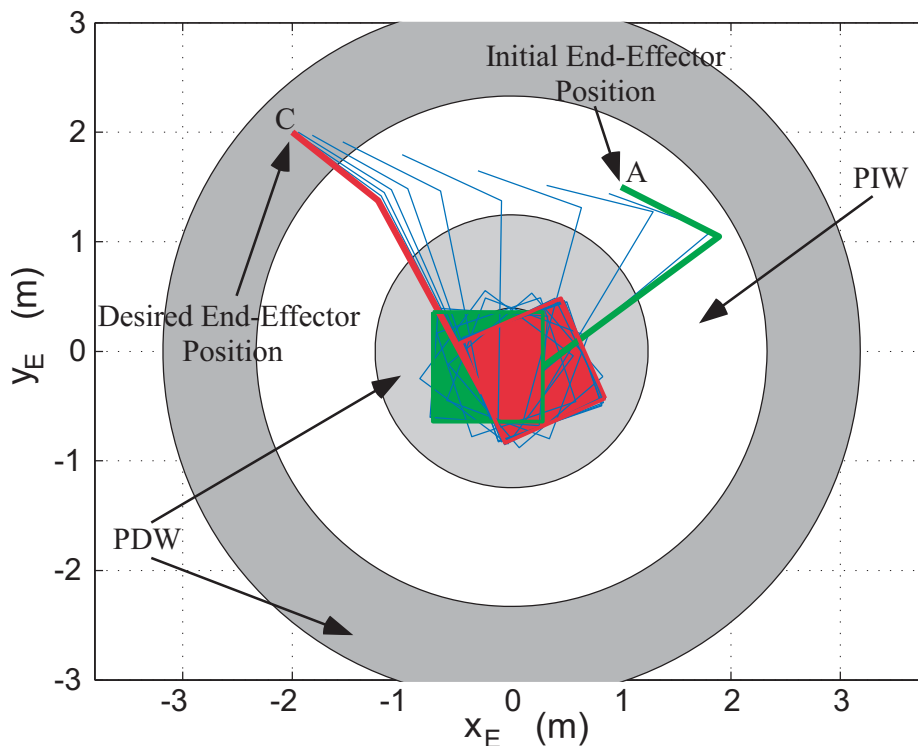
Σχήμα 2.14. Στιγμιότυπα κίνησης του επίπεδου ΔΡΣ για αρχικό προσανατολισμό δορυφόρου $\theta_0 = 60^0$.

Παρατηρούμε ότι όταν το ΤΣΔ βρεθεί στο σημείο D, το οποίο βρίσκεται στη περιοχή PDW, ο βραχίονας γίνεται δυναμικά ιδιόμορφος. Στο σημείο αυτό, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 2.15, για κάποια μικρή μετατόπιση του ΤΣΔ απαιτούνται πολύ μεγάλες μεταβολές των ροπών στις αρθρώσεις του βραχίονα και ο ελεγκτής δεν μπορεί να εφαρμοστεί πια.

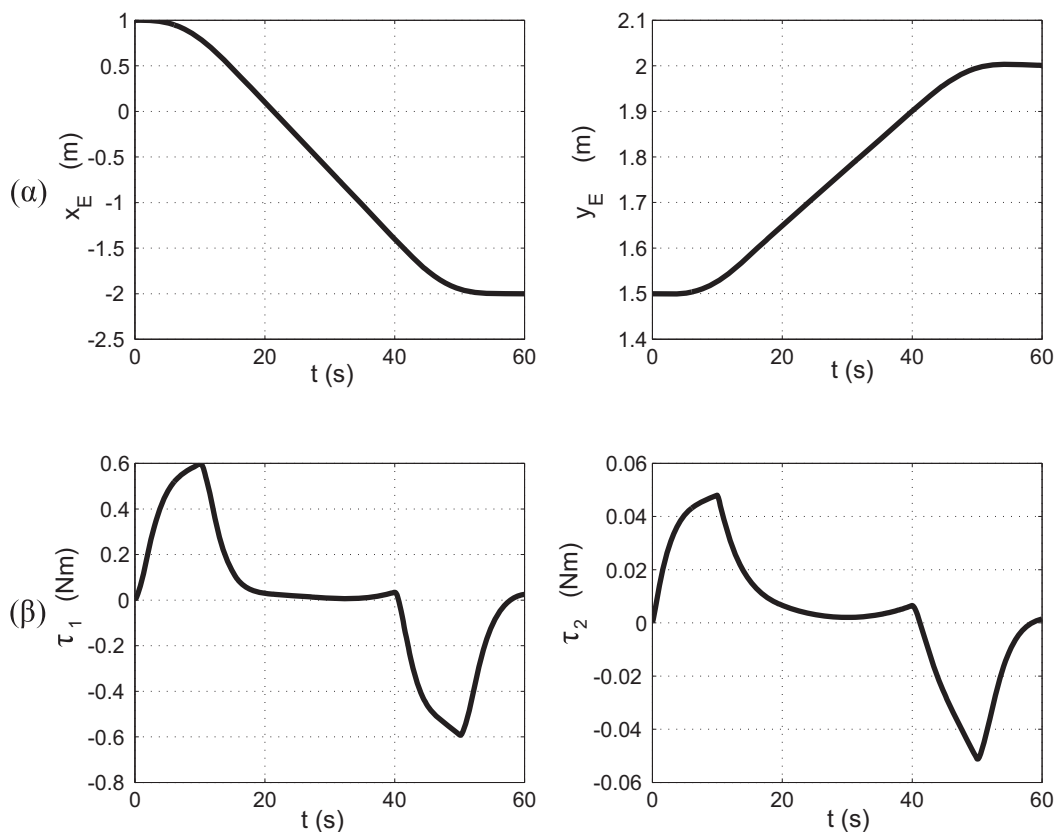


Σχήμα 2.15. Απόκριση ΔΡΣ για την κίνηση του Σχήματος 2.14. (α) Τροχιές της θέσης του ΤΣΔ και (β) Απαιτούμενες ροπές στις αρθρώσεις του βραχίονα.

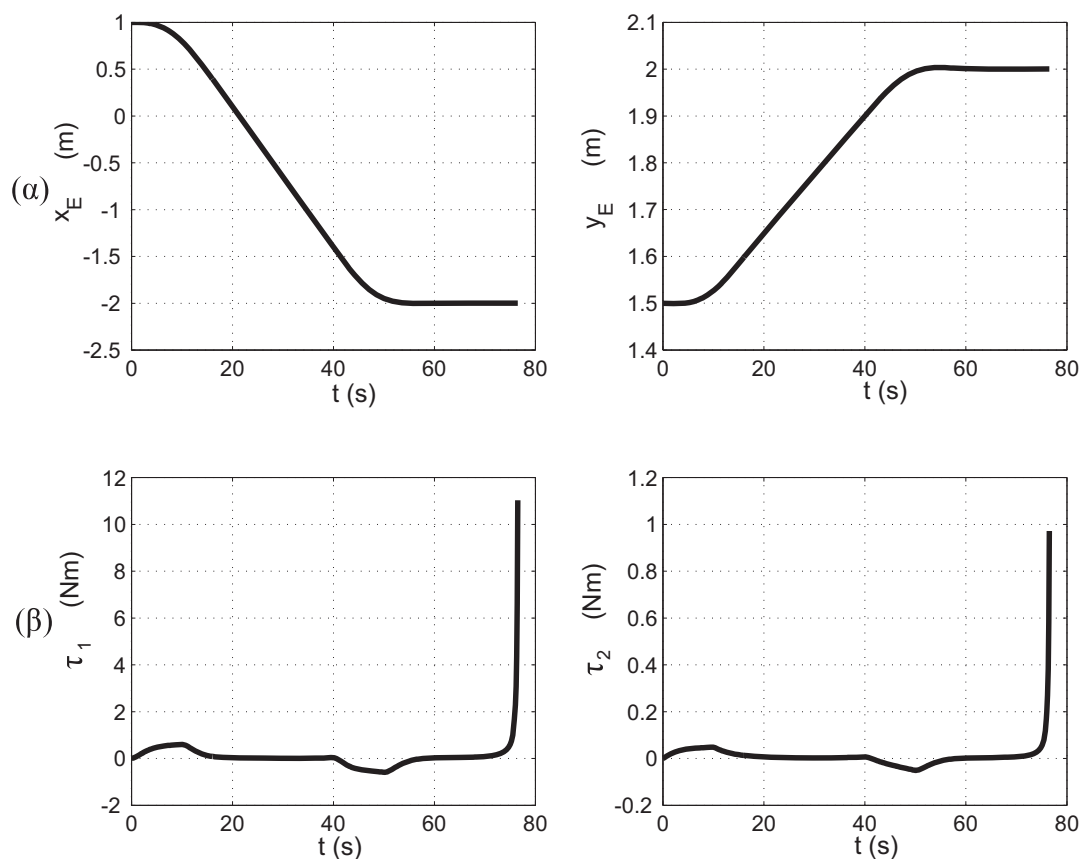
Στη συνέχεια, εξετάζεται η δεύτερη περίπτωση όπου ο αντίστοιχος αρχικός προσανατολισμός του ΔΡΣ είναι ίσος με $\theta_0 = -45^\circ$. Στο Σχήμα 2.16 παρουσιάζονται κάποια στιγμιότυπα της κίνησης του ΔΡΣ. Όπως φαίνεται και στο Σχήμα 2.16, στην περίπτωση αυτή, με την εφαρμογή του προτεινόμενου ελεγκτή, επιτυγχάνεται η προσέγγιση του ΤΣΔ στο επιθυμητό σημείο C του χώρου εργασίας. Το Σχήμα 2.17 δείχνει την τροχιά της θέσης του ΤΣΔ καθώς και τις απαιτούμενες ροπές που απαιτούνται για την κίνηση που παρουσιάζεται στο Σχήμα 2.16. Παρόλα αυτά, λόγω της αρχικής στροφορμής του ΔΡΣ, καθώς το ΤΣΔ παραμένει στο σημείο C, τόσο η διαμόρφωση του βραχίονα όσο και ο προσανατολισμός του δορυφόρου μεταβάλλονται με τέτοιο τρόπο ώστε η στροφορμή του ΔΡΣ να διατηρείται σταθερή. Εφόσον το σημείο C βρίσκεται σε περιοχή PDW, κάποια στιγμή η διαμόρφωση του βραχίονα θα γίνει τέτοια ώστε να εμφανιστούν δυναμικές ιδιομορφίες καθιστώντας την εφαρμογή του ελεγκτή ανέφικτη. Στο Σχήμα 2.18 φαίνεται ότι ύστερα από λίγο χρόνο αφού το ΤΣΔ προσεγγίσει το σημείο C, απαιτούνται απότομες μεταβολές στις ροπές των αρθρώσεων για την διατήρηση του ΤΣΔ στο σημείο αυτό, τις οποίες ο ελεγκτής δεν μπορεί να δώσει.



Σχήμα 2.16. Στιγμιότυπα κίνησης του επίπεδου ΔΡΣ για αρχικό προσανατολισμό δορυφόρου $\theta_0 = -45^\circ$. Το ΤΣΔ προσεγγίζει τελικά την επιθυμητή θέση C.



Σχήμα 2.17. Απόκριση ΔΡΣ για την κίνηση του Σχήματος 2.16. (α) Τροχιές της θέσης του ΤΣΔ και (β) Απαιτούμενες ροπές στις αρθρώσεις του βραχίονα.



Σχήμα 2.18. Απόκριση ΔΡΣ για την κίνηση του Σχήματος 2.16. (α) Τροχιές της θέσης του ΤΣΔ και (β) Απαιτούμενες ροπές στις αρθρώσεις του βραχίονα.

2.9 Συμπεράσματα

Στο κεφάλαιο αυτό αναπτύχθηκαν οι κινηματικές εξισώσεις, οι εξισώσεις διατήρησης ορμής – στροφορμής και κυρίως οι εξισώσεις κίνησης ενός ελεύθερα αιωρούμενου ΔΡΣ. Το ενδιαφέρον εστιάστηκε στην τροποποίηση των εξισώσεων αυτών όταν η αρχική στροφορμή του συστήματος δεν είναι μηδέν. Η ύπαρξη στροφορμής δεν επηρεάζει τη μορφή των κινηματικών εξισώσεων καθώς και των εξισώσεων ορμής – στροφορμής ενός ελεύθερα αιωρούμενου βραχίονα. Αντίθετα, η παρουσία μη μηδενικής στροφορμής επηρεάζει τη μορφή των εξισώσεων κίνησης του συστήματος. Στην περίπτωση αυτή, οι εξισώσεις κίνησης των τρισδιάστατων ΔΡΣ δεν είναι αποσυζευγμένες από τον προσανατολισμό του δορυφόρου του ΔΡΣ, όπως συμβαίνει για μηδενική αρχική στροφορμή. Αντίθετα, για επίπεδες κινήσεις, οι εξισώσεις κίνησης είναι αποσυζευγμένες από τον προσανατολισμό του δορυφόρου παρά την ύπαρξη στροφορμής. Ο όρος της στροφορμής δρα ως διαταραχή στο ΔΡΣ, όπως αντίστοιχα οι βαρυτικοί όροι στους επίγειους ρομποτικούς βραχίονες. Στη συνέχεια εξετάστηκε η επίδραση της στροφορμής στον έλεγχο των ελεύθερα αιωρούμενων ΔΡΣ και σχεδιάστηκαν ελεγκτές τόσο στο χώρο των αρθρώσεων όσο και στον Καρτεσιανό χώρο.

3 Σχεδιασμός Δρόμου και Δυναμικές Ιδιομορφίες

3.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό αναπτύσσονται αναλυτικά οι τεχνικές σχεδιασμού δρόμου στον Καρτεσιανό χώρο ενός ελεύθερα αιωρούμενου διαστημικού βραχίονα. Εάν είναι επιθυμητή η μετάβαση του ΤΣΔ του βραχίονα από ένα σημείο του Καρτεσιανού χώρου σε ένα άλλο και η διαδρομή που θα ακολουθηθεί δεν ενδιαφέρει τότε ο σχεδιασμός δρόμου γίνεται στο χώρο των αρθρώσεων (configuration/joint space), [77, 91]. Στην περίπτωση αυτή, το ενδιαφέρον εστιάζεται μόνο στην αρχική και τελική θέση/ταχύτητα/επιτάχυνση του ΤΣΔ. Στην περίπτωση όμως του σχεδιασμού τροχιάς στο χώρο των αρθρώσεων υπάρχει μεγάλη πιθανότητα το ΤΣΔ να συγκρουστεί με κάποιο εμπόδιο ή ακόμα χειρότερα να χτυπήσει κάποιον αστροναύτη που εκτελεί εργασίες κοντά στο ρομποτικό βραχίονα. Επίσης σε αρκετές διαστημικές εφαρμογές (π.χ. επισκευή ή επιθεώρηση δορυφόρου), το ΤΣΔ πρέπει να ακολουθήσει συγκεκριμένη πορεία. Για τους παραπάνω λόγους, λοιπόν, είναι επιθυμητή η κίνηση του ΤΣΔ σε συγκεκριμένη διαδρομή στον Καρτεσιανό χώρο. Στην περίπτωση αυτή ο σχεδιασμός δρόμου γίνεται στον Καρτεσιανό χώρο. Στην παρούσα εργασία μελετάται ο σχεδιασμός δρόμου στον Καρτεσιανό χώρο οποίος σε αντίθεση με το σχεδιασμό τροχιάς στο χώρο των αρθρώσεων παρουσιάζει το πρόβλημα της πιθανής εμφάνισης Δυναμικών Ιδιομορφιών (ΔI), [72].

Για λόγους ασφαλείας, αποφυγής κρούσεων, καθώς και εξοικονόμησης καυσίμων και ηλεκτρικής ενέργειας, κατά τη διάρκεια της επιθυμητής κίνησης του βραχίονα όλοι οι επενεργητές του δορυφόρου του ΔΡΣ (προωθητήρες και μηχανισμοί ελέγχου στροφορμής) θεωρούνται απενεργοποιημένοι. Δηλαδή ο ρομποτικός βραχίονας είναι ελεύθερα αιωρούμενος και η μη ελεγχόμενη κίνηση του δορυφόρου προκύπτει από τη διατήρηση της στροφορμής του συστήματος. Σε πολλές διαστημικές εφαρμογές είναι επιθυμητό ο δορυφόρος να διατηρεί συγκεκριμένο προσανατολισμό έτσι ώστε να εξασφαλίζεται ο κατάλληλος προσανατολισμός της κεραίας του για την επίτευξη επικοινωνίας με τον επίγειο σταθμό καθώς και ο κατάλληλος προσανατολισμός των ηλιακών συλλεκτών (solar panels) για να είναι δυνατή η ενεργειακή τροφοδοσία του. Παρόλα αυτά, η μη ελεγχόμενη κίνηση του δορυφόρου, κατά τη διάρκεια της κίνησης του ΤΣΔ κατά μήκος του επιθυμητού δρόμου, δεν δημιουργεί πρόβλημα στην επίτευξη της κίνησης του ΤΣΔ, αφού θεωρείται ότι πριν την κίνηση του βραχίονα το ΔΡΣ έχει επαρκή ηλεκτρική ενέργεια για την λειτουργία των κινητήρων των αρθρώσεων και η κεραία τον κατάλληλο προσανατολισμό έτσι ώστε το ΔΡΣ να λάβει την εντολή για την επίτευξη της επιθυμητής κίνησης. Επιπλέον, η μελέτη περιπτώσεων στις οποίες δεν ελέγχεται ο δορυφόρος του ΔΡΣ είναι ενδιαφέρουσα ερευνητικά γιατί επιτρέπει τη μελέτη των

δυνατοτήτων του ΔΡΣ σε περιπτώσεις όπου τα συστήματα ελέγχου του δορυφόρου παρουσιάσουν κάποια βλάβη και ο δορυφόρος βρεθεί εκτός ελέγχου.

Στην περίπτωση των ελεύθερα αιωρούμενων ΔΡΣ και σε αντίθεση με το σχεδιασμό τροχιάς στο χώρο των αρθρώσεων, ο σχεδιασμός δρόμου στον Καρτεσιανό χώρο, μπορεί να είναι μην είναι πάντα πραγματοποιήσιμος λόγω της πιθανής εμφάνισης ΔΙ. Οι ΔΙ είναι δυνατό να παρουσιαστούν σε ορισμένες περιοχές του χώρου εργασίας των ελεύθερα αιωρούμενων ΔΡΣ και επομένως η παρουσία τους περιορίζει σημαντικά το χώρο εργασίας των συστημάτων αυτών. Επιπλέον, όπως ήδη έχει προαναφερθεί, σε αρκετές περιπτώσεις, μια μικρή ποσότητα συσσωρευμένης στροφορμής παραμένει στο ΔΡΣ, λόγω κορεσμού των σφονδύλων των μηχανισμών ελέγχου στροφορμής. Επομένως, η κατάσταση αυτή πρέπει να ληφθεί υπόψη κατά το σχεδιασμό δρόμου.

Στην Παράγραφο 3.2 του παρόντος κεφαλαίου παρουσιάζονται οι απαραίτητες εξισώσεις καθώς και οι συνθήκες που πρέπει να πληρούνται έτσι ώστε να είναι εφικτή η παρακολούθηση ενός επιθυμητού δρόμου από το ΤΣΔ ενός ελεύθερα αιωρούμενου ΔΡΣ με αρχική στροφορμή τόσο για επίπεδα όσο και για τρισδιάστατα ΔΡΣ. Επίσης υπολογίζονται και οι συναρτήσεις που περιγράφουν την ύπαρξη των δυναμικών ιδιομορφιών. Σε πολλές ρομποτικές εφαρμογές σε τροχιά είναι επιπλέον επιθυμητός και κατάλληλος προσανατολισμός του ΤΣΔ του βραχίονα. Στην Παράγραφο 3.3, λοιπόν, οι παραπάνω εξισώσεις γενικεύονται έτσι ώστε να εφαρμόζονται και στις περιπτώσεις όπου η παρακολούθηση του δρόμου πραγματοποιείται και με επιθυμητό προσανατολισμό του ΤΣΔ του βραχίονα. Στην Παράγραφο 3.4 μελετάται η επίδραση της μη – μηδενικής αρχικής στροφορμής του συστήματος στον σχεδιασμό δρόμου του ΤΣΔ του βραχίονα. Τέλος στην Παράγραφο 3.5 παρουσιάζονται παραδείγματα εφαρμογής της μεθοδολογίας που αναπτύσσεται.

3.2 Σχεδιασμός Δρόμου Θέσης του Τελικού Σημείου Δράσης

Η περιγραφή της επιθυμητής θέσης του ΤΣΔ γίνεται μέσω του καθορισμού της γραμμικής του ταχύτητας η οποία, για μηδενική αρχική γραμμική ορμή του ΔΡΣ, δίνεται από:

$$\dot{\mathbf{r}}_E = \mathbf{R}_0(\boldsymbol{\varepsilon}, n)({}^0\mathbf{J}_{11}(\mathbf{q}){}^0\boldsymbol{\omega}_0 + {}^0\mathbf{J}_{12}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}) \quad (3-1\alpha)$$

όπου ο 3×3 πίνακας περιστροφής \mathbf{R}_0 δίνεται από την Εξ. (2-3) και οι πίνακες ${}^0\mathbf{J}_{11}$ και ${}^0\mathbf{J}_{12}$ διαστάσεων 3×3 και $3 \times N$ αντίστοιχα, ορίζονται από τις Εξ. (2-16).

Η Εξ. (3-1α) σε συνδυασμό με τη διατήρηση της στροφορμής του συστήματος:

$$\mathbf{h}_{CM} = \mathbf{R}_0(\boldsymbol{\varepsilon}, n)({}^0\mathbf{D}{}^0\boldsymbol{\omega}_0 + {}^0\mathbf{D}_q\dot{\mathbf{q}}) \quad (3-1\beta)$$

όπου ο 3×3 πίνακας ${}^0\mathbf{D}$ και ο $3 \times N$ πίνακας ${}^0\mathbf{D}_q$ ορίζονται από τις Εξ. (2-34), δίνει:

$$\mathbf{A}(\mathbf{q}) \begin{bmatrix} {}^0\boldsymbol{\omega}_0 \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \mathbf{E}^T(\boldsymbol{\varepsilon}, n) \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{\text{CM}} \\ \dot{\mathbf{r}}_E \end{bmatrix} \quad (3-2\alpha)$$

και ο $6 \times (N+3)$ πίνακας \mathbf{A} είναι:

$$\mathbf{A}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} {}^0\mathbf{D} & {}^0\mathbf{D}_q \\ {}^0\mathbf{J}_{11} & {}^0\mathbf{J}_{12} \end{bmatrix} \quad (3-2\beta)$$

και ο 6×6 πίνακας \mathbf{E} δίνεται από την Εξ. (2-37α).

Στον τρισδιάστατο χώρο, η Εξ. (3-2α) έχει λύσεις ως προς ${}^0\boldsymbol{\omega}_0$ και $\dot{\mathbf{q}}$ μόνο όταν ο βραχίονας του τρισδιάστατου ΔΡΣ έχει τουλάχιστον 3-BE, δηλαδή $N \geq 3$. Η παρούσα εργασία, όπως προαναφέρθηκε, ασχολείται με βραχίονες με μη-πλεονάζοντες BE. Δηλαδή βραχίονες με τους ελάχιστους BE έτσι ώστε να πραγματοποιηθεί η επιθυμητή εργασία. Όταν $N=3$, η Εξ. (3-2α) έχει λύση, μόνο όταν ο πίνακας \mathbf{A} είναι αντιστρέψιμος, δηλαδή:

$$\det(\mathbf{A}) \neq 0 \quad (3-3\alpha)$$

Ο πίνακας \mathbf{A} έχει στοιχεία υποπίνακες (Block Matrix). Γνωρίζοντας ότι ο πίνακας ${}^0\mathbf{D}$ είναι πάντα αντιστρέψιμος, βλ. Παράγραφο 2.4, και χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των πινάκων με στοιχεία υποπίνακες, [61], αποδεικνύεται ότι η ορίζουσα του πίνακα \mathbf{A} δίνεται από:

$$\det(\mathbf{A}) = \det({}^0\mathbf{D}) \det(-{}^0\mathbf{J}_{11}(\mathbf{q}) {}^0\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{q}) {}^0\mathbf{D}_q(\mathbf{q}) + {}^0\mathbf{J}_{12}(\mathbf{q})) \quad (3-3\beta)$$

Αφού, λοιπόν, ο πίνακας ${}^0\mathbf{D}$ είναι πάντα αντιστρέψιμος, για να είναι ο πίνακας \mathbf{A} αντιστρέψιμος θα πρέπει ο πίνακας:

$${}^0\mathbf{S}(\mathbf{q}) = -{}^0\mathbf{J}_{11}(\mathbf{q}) {}^0\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{q}) {}^0\mathbf{D}_q(\mathbf{q}) + {}^0\mathbf{J}_{12}(\mathbf{q}) \quad (3-4)$$

να είναι αντιστρέψιμος, δηλαδή:

$$S(\mathbf{q}) = \det({}^0\mathbf{S}(\mathbf{q})) \neq 0 \quad (3-5)$$

Ο πίνακας ${}^0\mathbf{S}$, που ορίζεται από την Εξ. (3-4) είναι η Γενικευμένη Ιακωβιανή (Generalized Jacobian) του ελεύθερα αιωρούμενου ΔΡΣ που συνδέει τη γραμμική ταχύτητα του ΤΣΔ με τις ταχύτητες των αρθρώσεων του βραχίονα του ΔΡΣ λαμβάνοντας υπόψη τη διατήρηση της στροφορμής του ΔΡΣ, [95], εκφρασμένη στο ΣΣ $\{0\}$ του δορυφόρου του ΔΡΣ και εξαρτάται μόνο από τη διαμόρφωση \mathbf{q} του βραχίονα.

Όταν η Εξ. (3-5) ικανοποιείται, τότε οι ταχύτητες των αρθρώσεων που απαιτούνται για την πραγματοποίηση του επιθυμητού δρόμου που δίνεται από τη γραμμική ταχύτητα $\dot{\mathbf{r}}_E$ του ΤΣΔ όταν το ΔΡΣ έχει αρχική στροφορμή \mathbf{h}_{CM} δίνονται από:

$$\dot{\mathbf{q}} = -{}^0\mathbf{S}^{-1} {}^0\mathbf{J}_{11} {}^0\mathbf{D}^{-1} \mathbf{R}_0^T \mathbf{h}_{\text{CM}} + {}^0\mathbf{S}^{-1} \mathbf{R}_0^T \dot{\mathbf{r}}_E \quad (3-6\alpha)$$

Ενώ η γωνιακή ταχύτητα του δορυφόρου του ΔΡΣ, εκφρασμένη στο ΣΣ {0} του δορυφόρου που προκύπτει από τη διατήρηση της στροφορμής του ΔΡΣ, δίνεται από:

$$\begin{aligned} {}^0\boldsymbol{\omega}_0 = & [{}^0\mathbf{D}^{-1} + {}^0\mathbf{D}^{-1} {}^0\mathbf{D}_q {}^0\mathbf{S}^{-1} {}^0\mathbf{J}_{11} {}^0\mathbf{D}^{-1}] \mathbf{R}_0^T \mathbf{h}_{CM} \\ & - {}^0\mathbf{D}^{-1} {}^0\mathbf{D}_q {}^0\mathbf{S}^{-1} \mathbf{R}_0^T \dot{\mathbf{r}}_E \end{aligned} \quad (3-6\alpha)$$

Καθώς ο δορυφόρος περιστρέφεται, ο πίνακας περιστροφής $\mathbf{R}_0(\boldsymbol{\varepsilon}, n)$ στις Εξ. (3-6) πρέπει να ανανεώνεται. Οι παράμετροι Euler $\boldsymbol{\varepsilon}$ και n , από τις οποίες προκύπτει ο $\mathbf{R}_0(\boldsymbol{\varepsilon}, n)$, υπολογίζονται από τις ακόλουθες εξισώσεις, [30]:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = (1/2)[\boldsymbol{\varepsilon}^\times + n\mathbf{I}_3] {}^0\boldsymbol{\omega}_0 \quad (3-7\alpha)$$

$$\dot{n} = -(1/2)\boldsymbol{\varepsilon}^T {}^0\boldsymbol{\omega}_0 \quad (3-7\beta)$$

Η περιγραφή του επιθυμητού δρόμου του ΤΣΔ του ρομποτικού βραχίονα γίνεται μέσω του ορισμού της γραμμικής του ταχύτητας $\dot{\mathbf{r}}_E$ στις Εξ. (3-6). Η επιθυμητή θέση του ΤΣΔ δίνεται από:

$$\mathbf{r}_E(t) = [x_E(s(t)) \quad y_E(s(t)) \quad z_E(s(t))]^T \quad (3-8)$$

όπου x_E , y_E και z_E είναι οι συντεταγμένες του ΤΣΔ ως προς το αδρανειακό ΣΣ και $s(t)$ ($0 \leq s(t) \leq 1$), είναι το μήκος τόξου παραμετροποίησης της διαδρομής (arc length parameterization of the path):

$$s(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5 \quad (3-9\alpha)$$

με αρχικές και τελικές τιμές $s_{in} = 0$ και $s_{fin} = 1$ αντίστοιχα και μηδενικές αρχικές και τελικές ταχύτητες και επιταχύνσεις. Με αυτές τις έξι συνθήκες, η μεταβλητή $s(t)$ δίνεται από:

$$s = 10\tau^3 - 15\tau^4 + 6\tau^5 \quad (3-9\beta)$$

όπου τ είναι ο αδιάστατος χρόνος, και t_f είναι ο συνολικός χρόνος κίνησης,

$$\tau = t t_f^{-1} \quad 0 \leq \tau \leq 1 \quad (3-9\gamma)$$

Η γραμμική ταχύτητα του ΤΣΔ είναι τότε:

$$\dot{\mathbf{r}}_E = [\dot{x}_E \quad \dot{y}_E \quad \dot{z}_E]^T = [\partial x_E / \partial s \quad \partial y_E / \partial s \quad \partial z_E / \partial s]^T \dot{s} = \mathbf{F}(s) \dot{s} \quad (3-10\alpha)$$

όπου η ταχύτητα $\dot{s}(t)$ κατά μήκος του δρόμου προκύπτει από τη χρονική παράγωγο της Εξ. (3-9β) και ισούται με:

$$\dot{s} = \frac{30\tau^2(1-\tau)^2}{t_f} \quad (3-10\beta)$$

Οι Εξ. (3-6) και (3-7) αποτελούν σύστημα διαφορικών εξισώσεων ως προς τις παραμέτρους Euler $\boldsymbol{\varepsilon}$ και n και τις σχετικές γωνίες \mathbf{q} των αρθρώσεων του βραχίονα, οι οποίες εφόσον ισχύει η συνθήκη που περιγράφεται από την Εξ. (3-5) έχει λύση για κάθε αρχική συνθήκη.

Όπως προκύπτει από τις Εξ. (3-6), η επίτευξη του σχεδιασμού δρόμου θέσης του ΤΣΔ είναι εφικτή μόνο όταν υπάρχει ο αντίστροφος της Γενικευμένης Ιακωβιανής 0S . Είναι γνωστό ότι η μη ύπαρξη του αντίστροφου του πίνακα αυτού οδηγεί το βραχίονα σε ΔΙ, [74]. Οι ΔΙ αντιστοιχούν σε διαμορφώσεις του ΔΡΣ στις οποίες δεν είναι εφικτή η κίνηση του ΤΣΔ σε οποιαδήποτε κατεύθυνση. Στη γειτονιά των ιδιόμορφων διαμορφώσεων, μικρές ταχύτητες του ΤΣΔ μπορούν να προκαλέσουν μεγάλες ταχύτητες στις αρθρώσεις καθώς και μεγάλες ροπές στους κινητήρες που τις οδηγούν.

Για την απεικόνιση των ΔΙ στο χώρο των αρθρώσεων, η Εξ. (3-5) επιλύεται ως μια ισότητα. Οι λύσεις που προκύπτουν δημιουργούν επιφάνειες (για τρισδιάστατες κινήσεις) ή καμπύλες (για επίπεδες κινήσεις) στο χώρο των αρθρώσεων. Στην παρούσα εργασία, αυτές οι επιφάνειες (ή καμπύλες για επίπεδα ΔΡΣ) θα ονομάζονται *επιφάνειες* (ή *καμπύλες*) *ιδιομορφίας*.

Για την εξασφάλιση της ασφαλούς κίνησης του ΤΣΔ, είναι απαραίτητη η αναγνώριση των θέσεων του ΤΣΔ στον Καρτεσιανό χώρο στις οποίες αυτοί οι ιδιόμορφοι σχηματισμοί μπορεί να εμφανιστούν, δηλαδή απαιτείται η απεικόνιση των επιφανειών (ή καμπυλών) ιδιομορφίας στον Καρτεσιανό χώρο. Για το σκοπό αυτό σημειώνεται ότι η απόσταση R του ΤΣΔ από το ΚΜ του συστήματος δίνεται από,

$$R = \|\mathbf{r}_E(\boldsymbol{\varepsilon}, n, \mathbf{q})\| = \|\mathbf{R}_0(\boldsymbol{\varepsilon}, n) {}^0\mathbf{r}_E(\mathbf{q})\| = \|\mathbf{R}_0(\boldsymbol{\varepsilon}, n)\| \|{}^0\mathbf{r}_E(\mathbf{q})\| = \|{}^0\mathbf{r}_E(\mathbf{q})\| \quad (3-11)$$

Δηλαδή, η απόσταση R δεν εξαρτάται από τον προσανατολισμό του δορυφόρου του ΔΡΣ και είναι συνάρτηση μόνο της διαμόρφωσης \mathbf{q} του βραχίονα του. Για δοσμένη, λοιπόν, διαμόρφωση του βραχίονα, η απόσταση του ΤΣΔ από το ΚΜ του ΔΡΣ είναι σταθερή, ανεξάρτητα από τον προσανατολισμό του δορυφόρου του ΔΡΣ. Αυτό σημαίνει ότι εάν ο βραχίονας έχει μια δοσμένη διαμόρφωση, οι πιθανές θέσεις του ΤΣΔ, που προκύπτουν για διάφορες τιμές του προσανατολισμού του δορυφόρου του, βρίσκονται πάνω σε έναν κύκλο (στις επίπεδες κινήσεις) ή πάνω σε μια σφαίρα (για τρισδιάστατες κινήσεις), με ακτίνα που δίνεται από την Εξ. (3-11).

Αντικαθιστώντας τις ιδιόμορφες διαμορφώσεις, που προκύπτουν από την επίλυση της Εξ. (3-5), στην Εξ. (3-11), προκύπτουν οι ακτίνες σφαιρών (τρειςδιάστατη περίπτωση) ή κύκλων (επίπεδη περίπτωση) που αναπαριστούν αυτές τις διαμορφώσεις στον Καρτεσιανό χώρο. Το σύνολο αυτών των σφαιρών (ή κύκλων σε επίπεδα ΔΡΣ) δημιουργούν τον υπόχωρο του χώρου εργασίας του ΔΡΣ όπου υπάρχει πιθανότητα ο βραχίονας να γίνει ιδιόμορφος όταν το ΤΣΔ βρεθεί σε κάποιο σημείο του. Ο υπόχωρος αυτός ονομάζεται περιοχή PDW (Path Dependent Workspace), [72]. Αφαιρώντας την περιοχή PDW από το χώρο εργασίας του ΔΡΣ, προκύπτει ο υπόχωρος όπου εκεί το ΤΣΔ μπορεί να κινηθεί ελεύθερα χωρίς ο βραχίονας να γίνει ιδιόμορφος. Ο υπόχωρος αυτός ονομάζεται περιοχή PIW (Path Independent Workspace), [72].

Η εμφάνιση δυναμικής ιδιομορφίας σε ένα σημείο της περιοχής PDW, εξαρτάται από την διαδρομή που θα ακολουθήσει το ΤΣΔ για να φτάσει στο επιθυμητό σημείο. Σε αντίθεση με τους ρομποτικούς βραχίονες σταθερής βάσης, το διάνυσμα θέσης του ΤΣΔ ενός ελεύθερα αιωρούμενου ΔΡΣ εξαρτάται εκτός από τη διαμόρφωση του βραχίονα και από το προσανατολισμό του δορυφόρου του ΔΡΣ. Το διάνυσμα θέσης, \mathbf{r}_E , του ΤΣΔ εκφρασμένο στο αδρανειακό ΣΣ του οποίου η αρχή βρίσκεται στο ΚΜ του ΔΡΣ δίνεται από την Εξ. (3-12α):

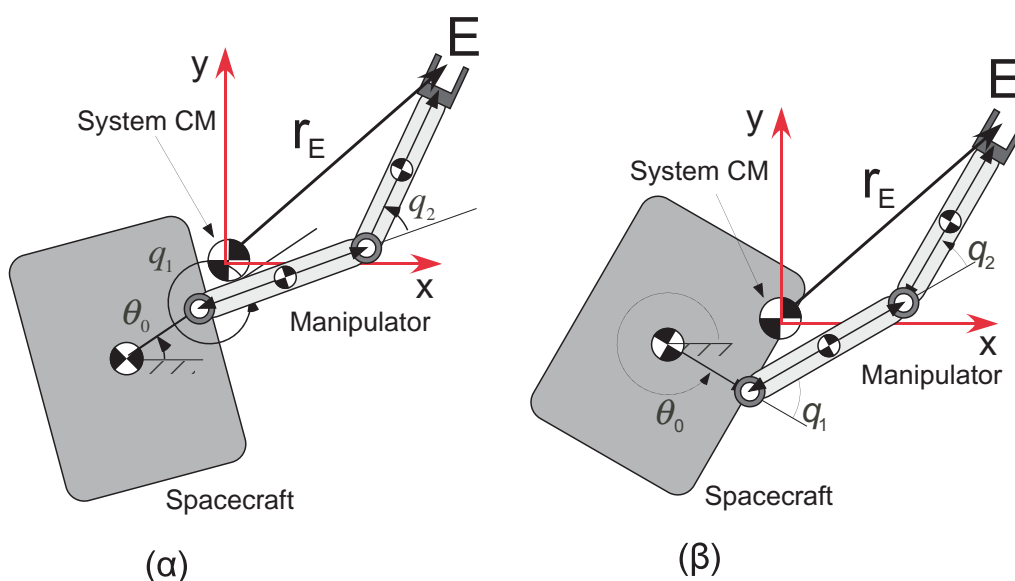
$$\mathbf{r}_E = \mathbf{R}_0(\boldsymbol{\varepsilon}, n) \sum_{i=0}^N {}^0\mathbf{R}_i(\mathbf{q}) {}^i\mathbf{v}_{iN,E} \quad (3-12\alpha)$$

όπου ${}^0\mathbf{R}_i(\mathbf{q})$ είναι ο 3×3 πίνακας περιστροφής του ΣΣ $\{i\}$ του συνδέσμου i και του ΣΣ $\{0\}$ του δορυφόρου και ${}^i\mathbf{v}_{iN,E}$ είναι τα βαρυκεντρικά διανύσματα εκφρασμένα στο ΣΣ $\{i\}$ (σταθερά διανύσματα).

Επιλύοντας το αντίστροφο κινηματικό πρόβλημα προκύπτει ότι:

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}(\boldsymbol{\varepsilon}, n, \mathbf{r}_E) \quad (3-12\beta)$$

Δηλαδή, η διαμόρφωση \mathbf{q} του βραχίονα που αντιστοιχεί σε κάποια θέση του ΤΣΔ στο χώρο εργασίας, η οποία δίνεται από το διάνυσμα θέσης \mathbf{r}_E , εξαρτάται και από τον προσανατολισμό του δορυφόρου του ΔΡΣ που, για τρισδιάστατες κινήσεις του δορυφόρου, περιγράφεται από τις παραμέτρους Euler $\boldsymbol{\varepsilon}, n$. Στο Σχήμα 3.1(α) η διαμόρφωση του βραχίονα, όταν το ΤΣΔ βρίσκεται σε κάποιο σημείο E, είναι ιδιόμορφη. Αντίστοιχα στο Σχήμα 3.1(β) η διαμόρφωση του βραχίονα όταν το ΤΣΔ βρίσκεται στο ίδιο σημείο E του χώρου εργασίας δεν είναι ιδιόμορφη.



Σχήμα 3.1. Εξάρτηση της διαμόρφωσης του βραχίονα από τον προσανατολισμό του δορυφόρου όταν το ΤΣΔ βρίσκεται σε συγκεκριμένο σημείο E. (α) Ιδιόμορφη διαμόρφωση, (β) Μη ιδιόμορφη διαμόρφωση.

Είναι γνωστό ήδη ότι κατά την προσέγγιση ενός σημείου στον Καρτεσιανό χώρο μέσω διαφορετικών δρόμων προκύπτουν διαφορετικές διαμορφώσεις του βραχίονα, [71]. Σε κάποιο σημείο της περιοχής PDW οι διαμορφώσεις αυτές μπορεί να είναι ιδιόμορφες και να καθιστούν την κίνηση του ΤΣΔ, προς την επιθυμητή κατεύθυνση, ανέφικτη. Στην παρούσα εργασία εξετάζεται η προσέγγιση ενός σημείου στον Καρτεσιανό χώρο μέσω συγκεκριμένου δρόμου. Στην περίπτωση αυτή η πιθανότητα εμφάνισης ΔΙ κατά την κίνηση του ΤΣΔ καθώς και η δυνατότητα αποφυγής τους θα πρέπει να λαμβάνονται πάντα υπόψη.

Στη συνέχεια εξάγονται οι απλοποιημένες μορφές των Εξ. (3-4) – (3-6), που δίνουν τη συνάρτηση που ορίζει τις ΔΙ του ρομποτικού βραχίονα καθώς και τις απαιτούμενες ταχύτητες των αρθρώσεων του βραχίονα για την επίτευξη του επιθυμητού δρόμου του ΤΣΔ και την προκύπτουσα γωνιακή ταχύτητα του δορυφόρου, για επίπεδες κινήσεις ελεύθερα αιωρούμενων ΔΡΣ. Επίσης, αναλύονται οι ρομποτικοί βραχίονες που περιέχουν τους ελάχιστους ΒΕ, έτσι ώστε να πραγματοποιηθεί ο σχεδιασμός δρόμου θέσης του ΤΣΔ για κινήσεις στο επίπεδο και στον τρισδιάστατο χώρο. Για τους βραχίονες αυτούς υπολογίζονται οι συναρτήσεις που ορίζουν τις δυναμικές ιδιομορφίες καθώς και οι αντίστοιχες περιοχές PIW και PDW.

3.2.1 Επίπεδη Κίνηση

Για την κίνηση στο επίπεδο του ελεύθερα αιωρούμενου ΔΡΣ με βραχίονα με N - ΒΕ, η διατήρηση της στροφορμής του ΔΡΣ δίνεται από:

$${}^0D\dot{\theta}_0 + {}^0\mathbf{D}_q\dot{\mathbf{q}} = h_{CM} \quad (3-13\alpha)$$

όπου h_{CM} είναι η αρχική στροφορμή του ΔΡΣ, η οποία για επίπεδες κινήσεις είναι κάθετη στο επίπεδο κίνησης του ΔΡΣ. Επίσης, στην περίπτωση αυτή το μέγεθος 0D είναι βαθμωτό και ο πίνακας ${}^0\mathbf{D}_q$ έχει διαστάσεις $1 \times N$. Η γραμμική ταχύτητα του ΤΣΔ δίνεται από την εξίσωση:

$$\dot{\mathbf{r}}_E = \mathbf{R}_0(\theta_0)({}^0\mathbf{J}_{11}\dot{\theta}_0 + {}^0\mathbf{J}_{12}\dot{\mathbf{q}}) \quad (3-13\beta)$$

όπου ο 2×2 πίνακας περιστροφής \mathbf{R}_0 δίνεται από την Εξ. (2-62γ) και οι πίνακες ${}^0\mathbf{J}_{11}$ και ${}^0\mathbf{J}_{12}$ έχουν διαστάσεις 2×1 και $2 \times N$, αντίστοιχα.

Ο συνδυασμός των Εξ. (3-13α) και (3-13β) σε μητρική μορφή δίνει:

$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_0 \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}_{1 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 1} & \mathbf{R}_0^T(\theta_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{CM} \\ \dot{\mathbf{r}}_E \end{bmatrix} \quad (3-14\alpha)$$

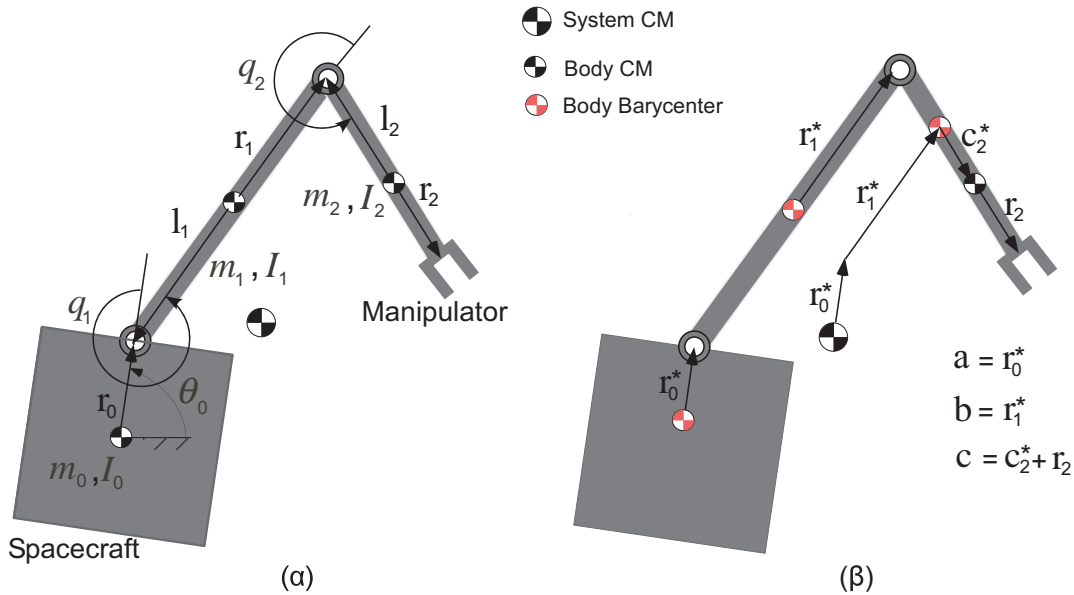
όπου ο $3 \times (N+1)$ πίνακας \mathbf{A} είναι:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} {}^0D & {}^0\mathbf{D}_q \\ {}^0\mathbf{J}_{11} & {}^0\mathbf{J}_{12} \end{bmatrix} \quad (3-14\beta)$$

Για επίπεδες κινήσεις, λοιπόν, η Εξ. (3-14α) έχει λύσεις ως προς $\dot{\theta}_0$ και $\dot{\mathbf{q}}$ μόνο όταν ο βραχίονας του επιπέδου ΔΡΣ έχει τουλάχιστον 2-ΒΕ, δηλαδή $N \geq 2$. Για βραχίονες με μη-πλεονάζοντες ΒΕ είναι $N=2$. Για το επίπεδο ΔΡΣ με βραχίονα 2-ΒΕ του Σχήματος 3.2, η Εξ. (3-14α) έχει λύση, μόνο όταν ο πίνακας \mathbf{A} είναι αντιστρέψιμος ή ισοδύναμα όταν η αντίστοιχη 2×2 Γενικευμένη Ιακωβιανή:

$${}^0\mathbf{S} = -{}^0\mathbf{J}_{11} {}^0D^{-1} {}^0\mathbf{D}_{\mathbf{q}} + {}^0\mathbf{J}_{12} \quad (3-15)$$

είναι αντιστρέψιμος πίνακας.



Σχήμα 3.2. Επίπεδο ελεύθερα αιωρούμενο ΔΡΣ με βραχίονα 2-ΒΕ. (α) Ορισμός των αδρανειακών ιδιοτήτων και των μεταβλητών διαμόρφωσης. (β) Τα βαρυκεντρικά διανύσματα \mathbf{a} , \mathbf{b} και \mathbf{c} του ΔΡΣ.

Ο βραχίονας του επιπέδου ΔΡΣ του Σχήματος 3.2 περιέχει τους ελάχιστους ΒΕ για τη μετάβαση του ΤΣΔ από ένα σημείο σε ένα άλλο σημείο του Καρτεσιανού χώρου κατά μήκος ενός επιθυμητού δρόμου στο επίπεδο. Όταν η Γενικευμένη Ιακωβιανή του ΔΡΣ αντιστρέφεται τότε κατά την κίνηση του ΤΣΔ, το διάνυσμα-στήλη που δίνει τις απαιτούμενες ταχύτητες των αρθρώσεων είναι:

$$\dot{\mathbf{q}} = -{}^0\mathbf{S}^{-1} {}^0\mathbf{J}_{11} {}^0D^{-1} h_{CM} + {}^0\mathbf{S}^{-1} \mathbf{R}_0^T \dot{\mathbf{r}}_E \quad (3-16\alpha)$$

Ενώ η προκύπτουσα γωνιακή ταχύτητα του δορυφόρου δίνεται από:

$$\dot{\theta}_0 = [{}^0D^{-1} + {}^0D^{-1} {}^0\mathbf{D}_{\mathbf{q}} {}^0\mathbf{S}^{-1} {}^0\mathbf{J}_{11} {}^0D^{-1}] h_{CM} - {}^0D^{-1} {}^0\mathbf{D}_{\mathbf{q}} {}^0\mathbf{S}^{-1} \mathbf{R}_0^T \dot{\mathbf{r}}_E \quad (3-16\beta)$$

Για το επίπεδο ΔΡΣ με βραχίονα 2-ΒΕ του Σχήματος 3.2 αποδεικνύεται, βλ. Παραρτήματα Β.1.2 και Β.1.3, ότι το βαθμωτό μέγεθος 0D καθώς και οι πίνακες ${}^0\mathbf{D}_{\mathbf{q}}$, ${}^0\mathbf{J}_{11}$ και ${}^0\mathbf{J}_{12}$ διαστάσεων 1×2 , 2×1 και 2×2 , αντίστοιχα, δίνονται από:

$${}^0D = {}^0D_0 + {}^0D_1 + {}^0D_2 \quad (3-17\alpha)$$

$${}^0\mathbf{D}_q = \begin{bmatrix} {}^0D_1 + {}^0D_2 & {}^0D_2 \\ & \end{bmatrix} \quad (3-17\beta)$$

$${}^0\mathbf{J}_{11} = \begin{bmatrix} -(b s_{(q_1)} + c s_{(q_1+q_2)}) \\ a + b c_{(q_1)} + c c_{(q_1+q_2)} \end{bmatrix} \quad (3-17\gamma)$$

$${}^0\mathbf{J}_{12} = \begin{bmatrix} -(b s_{(q_1)} + c s_{(q_1+q_2)}) & -c s_{(q_1+q_2)} \\ b c_{(q_1)} + c c_{(q_1+q_2)} & c c_{(q_1+q_2)} \end{bmatrix} \quad (3-17\delta)$$

όπου τα μήκη a, b, c των βαρυκεντρικών διανυσμάτων δίνονται από τις Εξ. (B-2) στο Παράρτημα B.1.1 και οι τα βαθμωτά μεγέθη 0D_i , $i=0,1,2$ δίνονται από τις Εξ. (B-20) στο Παράρτημα B.1.3. Επίσης $c_{(\cdot)} = \cos(\cdot)$ και $s_{(\cdot)} = \sin(\cdot)$.

Λαμβάνοντας υπόψη ότι η επιθυμητή θέση του ΤΣΔ δίνεται μέσω της γραμμικής του ταχύτητας:

$$\dot{\mathbf{r}}_E = [\dot{x}_E \quad \dot{y}_E]^T \quad (3-18)$$

οι Εξ. (3-16) γράφονται:

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 = & -\frac{a c s_{(q_1+q_2)} + b c s_{(q_2)}}{S(q_1, q_2)} h_{CM} + \frac{c ({}^0D_0 + {}^0D_1) c_{(\theta_0+q_1+q_2)} - {}^0D_2 (a c_{(\theta_0)} + b c_{(\theta_0+q_1)})}{S(q_1, q_2)} \dot{x}_E \\ & + \frac{c ({}^0D_0 + {}^0D_1) s_{(\theta_0+q_1+q_2)} - {}^0D_2 (a s_{(\theta_0)} + b s_{(\theta_0+q_1)})}{S(q_1, q_2)} \dot{y}_E \end{aligned} \quad (3-19\alpha)$$

$$\begin{aligned} \dot{q}_2 = & \frac{a b s_{(q_1)} + a c s_{(q_1+q_2)}}{S(q_1, q_2)} h_{CM} + \frac{a ({}^0D_1 + {}^0D_2) c_{(\theta_0)} - {}^0D_0 (b c_{(\theta_0+q_1)} + c c_{(\theta_0+q_1+q_2)})}{S(q_1, q_2)} \dot{x}_E \\ & + \frac{a ({}^0D_1 + {}^0D_2) s_{(\theta_0)} - {}^0D_0 (b s_{(\theta_0+q_1)} + c s_{(\theta_0+q_1+q_2)})}{S(q_1, q_2)} \dot{y}_E \end{aligned} \quad (3-19\beta)$$

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_0 = & \frac{b c s_{(q_2)}}{S(q_1, q_2)} h_{CM} + \frac{b {}^0D_2 c_{(\theta_0+q_1)} - c {}^0D_1 c_{(\theta_0+q_1+q_2)}}{S(q_1, q_2)} \dot{x}_E \\ & + \frac{b {}^0D_2 s_{(\theta_0+q_1)} - c {}^0D_1 s_{(\theta_0+q_1+q_2)}}{S(q_1, q_2)} \dot{y}_E \end{aligned} \quad (3-19\gamma)$$

Στις Εξ. (3-19), ο όρος $S(q_1, q_2)$ είναι η συνάρτηση που μηδενίζει την ορίζουσα της Γενικευμένης Ιακωβιανής ${}^0\mathbf{S}$. Με αντικατάσταση των αδρανειακών όρων που δίνονται από τις Εξ. (3-17) στην Εξ. (3-15), προκύπτει ότι η ορίζουσα αυτή ισούται με:

$$S(q_1, q_2) = \det({}^0\mathbf{S}) = a b {}^0D_2 s_{(q_1)} + b c {}^0D_0 s_{(q_2)} - a c {}^0D_1 s_{(q_1+q_2)} \quad (3-20\alpha)$$

Με αντικατάσταση των όρων 0D_i , $i=0,1,2$, που δίνονται από τις Εξ. (B-20) στο Παράρτημα B.1.3, στην Εξ. (3-20α), προκύπτει:

$$S(q_1, q_2) = k_0(q_1) + k_1(q_1) \sin(q_2) + k_2(q_1) \cos(q_2) \quad (3-20\beta)$$

όπου οι συντελεστές k_i , $i=0,1,2$ δίνονται από τις Εξ. (B-30) στο Παράρτημα B.1.4.

Από την Εξ. (3-20β), προκύπτει ότι η εξίσωση:

$$S(q_1, q_2) = S_0 \quad (3-21)$$

όπου S_0 σταθερά, έχει ως λύσεις τις:

$$q_2(q_1) = \arcsin[(S_0 - k_0) \cos \varphi / k_1] - \varphi \quad (3-22\alpha)$$

$$q_2(q_1) = \pi - \arcsin[(S_0 - k_0) \cos \varphi / k_1] - \varphi \quad (3-22\beta)$$

όπου

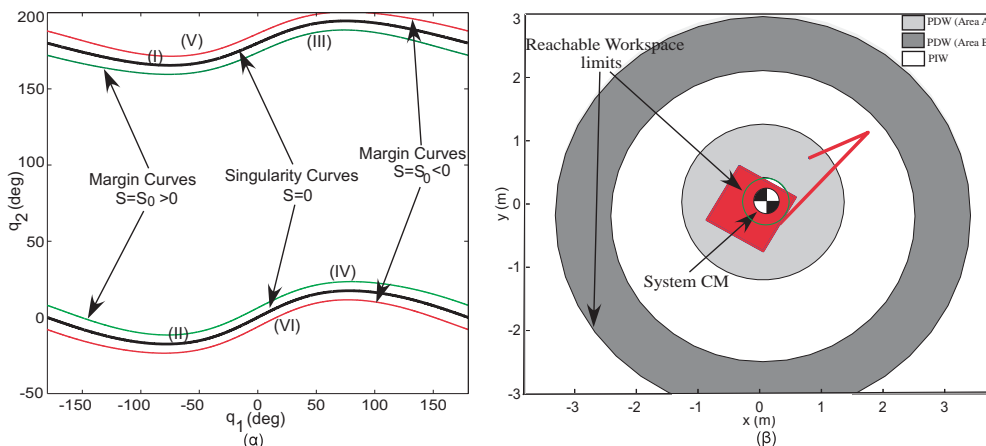
$$\varphi(q_1) = \arctan[k_2 / k_1] \quad (3-22\gamma)$$

Οι Εξ. (3-22) δίνουν σταθερές καμπύλες στο χώρο των αρθρώσεων οι οποίες για $S_0 = 0$ στην παρούσα εργασία θα ονομάζονται *καμπύλες ιδιομορφίας* (Singularity Curves) ενώ για $S_0 \neq 0$ θα ονομάζονται *καμπύλες περιθωρίου* (Margin Curves), όπως φαίνεται και στο Σχήμα 3.3(α). Οι καμπύλες (I), (III) και (V) προκύπτουν από την Εξ. (3-22β) ενώ οι καμπύλες (II), (IV) και (VI) από την Εξ. (3-22α).

Στην περίπτωση του επίπεδου ΔΡΣ του Σχήματος 3.2, η Εξ. (3-11) γίνεται:

$$R(q_1, q_2) = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab \cos(q_1) + 2ac \cos(q_1 + q_2) + 2bc \cos(q_2)} \quad (3-23)$$

η οποία δίνει την απόσταση του ΤΣΔ που αντιστοιχεί στη διαμόρφωση q_1, q_2 , του ΔΡΣ του Σχήματος 3.2, από το ΚΜ του συστήματος, το οποίο έχει επιλεγθεί ως αρχή του αδρανειακού ΣΣ.



Σχήμα 3.3. (α) Καμπύλες Ιδιομορφίας και Καμπύλες Περιθωρίου που αντιστοιχούν στον βραχίονα του Σχήματος 3.2. και (β) Οι υπόχωροι PIW και PDW του χώρου εργασίας που αντιστοιχούν στο επίπεδο ΔΡΣ του Σχήματος 3.2.

Από τις Εξ. (3-22), για $S_0 = 0$, και την Εξ. (3-23) προκύπτουν, για το ΔΡΣ του Σχήματος 3.2, οι περιοχές του Καρτεσιανού χώρου όπου μπορεί να εμφανιστούν ΔΙ. Με αντικατάσταση της Εξ. (3-22α), με $S_0 = 0$, στην Εξ. (3-23) και για $q_1 \in [0, 2\pi)$ προκύπτουν οι αποστάσεις του ΤΣΔ από το ΚΜ του ΔΡΣ που δημιουργούν την περιοχή PDW (B) στον Καρτεσιανό χώρο, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.3(β). Αντίστοιχα με αντικατάσταση της Εξ.

(3-22β), με $S_0 = 0$, στην Εξ. (3-23) και για $q_1 \in [0, 2\pi)$ προκύπτουν οι αποστάσεις του ΤΣΔ από το ΚΜ του ΔΡΣ που δημιουργούν την περιοχή PDW (A), βλ. Σχήμα 3.3(β).

Όπως προαναφέρθηκε, στην περίπτωση που ο βραχίονας του ΔΡΣ γίνει ιδιόμορφος η ταχύτητα του ΤΣΔ χάνει κάποιο ή κάποιους ΒΕ. Πιο αναλυτικά, σύμφωνα με την Εξ. (3-13β), για το επίπεδο ΔΡΣ του Σχήματος 3.2, η ταχύτητα του ΤΣΔ εκφρασμένη στο ΣΣ $\{0\}$ του δορυφόρου του ΔΡΣ, δίνεται από:

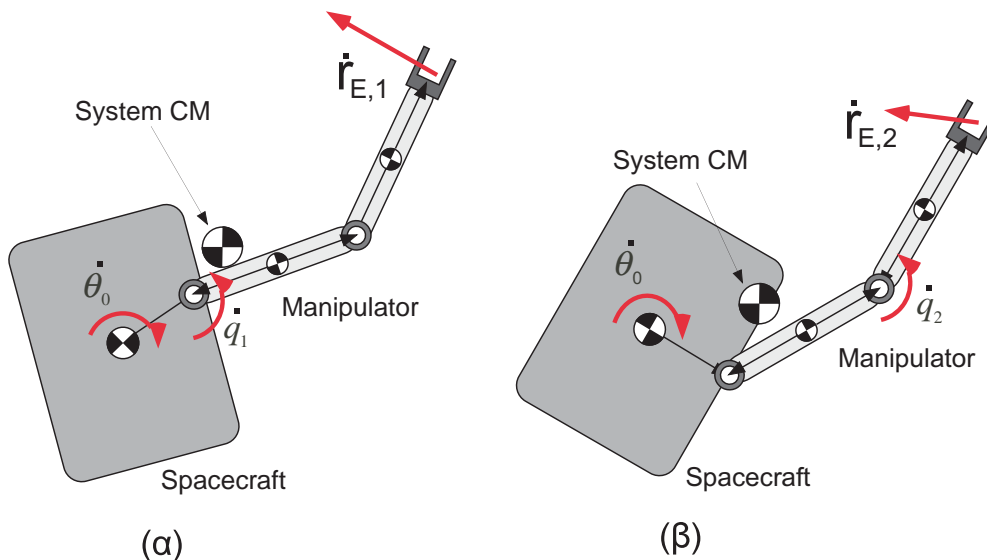
$${}^0\dot{\mathbf{r}}_E = \mathbf{R}_0^T(\theta_0)\dot{\mathbf{r}}_E = {}^0\mathbf{J}_{11}\dot{\theta}_0 + {}^0\mathbf{J}_{12}\dot{\mathbf{q}} \quad (3-24\alpha)$$

όπου με αντικατάσταση της γωνιακής ταχύτητα $\dot{\theta}_0$ του δορυφόρου του ΔΡΣ από τη διατήρηση της στροφορμής, Εξ. (3-13α), και θεωρώντας μηδενική αρχική στροφορμή του ΔΡΣ, γίνεται:

$${}^0\dot{\mathbf{r}}_E = {}^0\mathbf{S}(\mathbf{q}) \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^0\mathbf{S}_1 & {}^0\mathbf{S}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{{}^0\mathbf{S}_1 \dot{q}_1}_{{}^0\dot{\mathbf{r}}_{E,1}} + \underbrace{{}^0\mathbf{S}_2 \dot{q}_2}_{{}^0\dot{\mathbf{r}}_{E,2}} = {}^0\dot{\mathbf{r}}_{E,1} + {}^0\dot{\mathbf{r}}_{E,2} \quad (3-24\beta)$$

όπου η Γενικευμένη Ιακωβιανή ${}^0\mathbf{S}$ του επιπέδου ΔΡΣ του Σχήματος 3.2 δίνεται από την Εξ. (B-26) του Παραρτήματος Β.1.4.

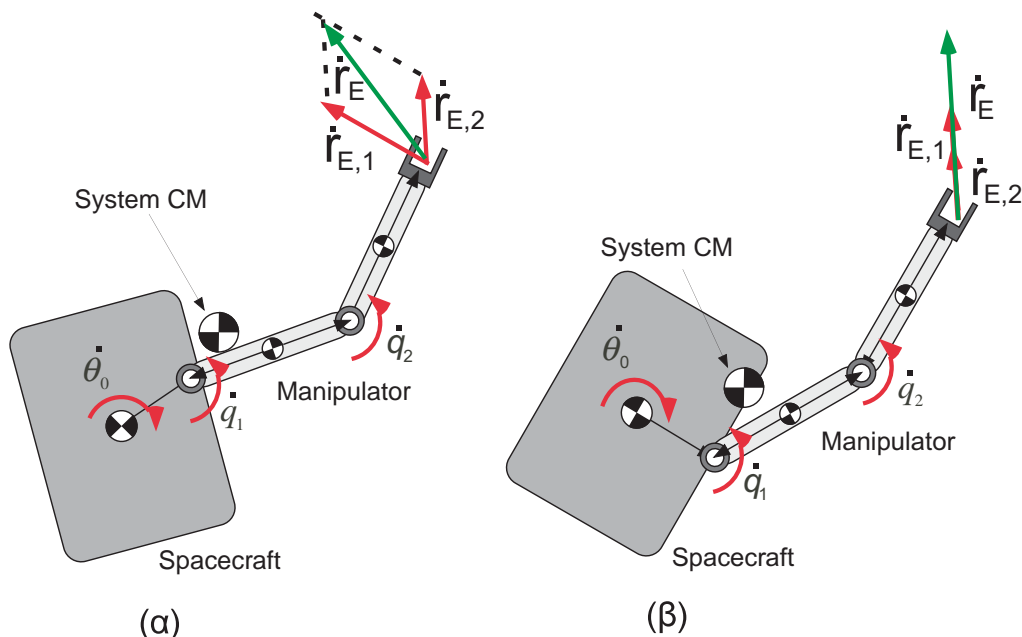
Όπως προκύπτει από την Εξ. (3-24β), οι στήλες του πίνακα ${}^0\mathbf{S}$ εκφράζουν την επίδραση της κίνησης της κάθε άρθρωσης στην ταχύτητα του ΤΣΔ μέσω των ταχυτήτων ${}^0\dot{\mathbf{r}}_{E,1}$ και ${}^0\dot{\mathbf{r}}_{E,2}$, βλέπε Σχήμα 3. 4.



Σχήμα 3.4. (α) Ταχύτητα του ΤΣΔ που προκαλείται από την κίνηση της πρώτης άρθρωσης και (β) Ταχύτητα του ΤΣΔ που προκαλείται από την κίνηση της δεύτερης άρθρωσης.

Όταν ο βραχίονας δεν είναι δυναμικά ιδιόμορφος, η ορίζουσα του πίνακα ${}^0\mathbf{S}$ είναι διάφορη του μηδενός και οι στήλες του ${}^0\mathbf{S}_1$ και ${}^0\mathbf{S}_2$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες ή ισοδύναμα οι ταχύτητες ${}^0\dot{\mathbf{r}}_{E,1}$ και ${}^0\dot{\mathbf{r}}_{E,2}$ είναι μη παράλληλες. Στην περίπτωση αυτή η

ταχύτητα του ΤΣΔ, που προκύπτει ως διανυσματικό άθροισμα των ταχυτήτων ${}^0\dot{\mathbf{r}}_{E,1}$ και ${}^0\dot{\mathbf{r}}_{E,2}$, μπορεί να πάρει οποιαδήποτε κατεύθυνση ανάλογα με τις ταχύτητες \dot{q}_1 και \dot{q}_2 των αρθρώσεων του βραχίονα, βλέπε Σχήμα 3.5(α). Στην περίπτωση εμφάνισης δυναμικής ιδιομορφίας, η ορίζουσα του πίνακα ${}^0\mathbf{S}$ είναι μηδέν και οι στήλες του ${}^0\mathbf{S}_1$ και ${}^0\mathbf{S}_2$ είναι γραμμικά εξαρτημένες ή ισοδύναμα οι ταχύτητες ${}^0\dot{\mathbf{r}}_{E,1}$ και ${}^0\dot{\mathbf{r}}_{E,2}$ είναι παράλληλες. Τότε, η ταχύτητα του ΤΣΔ μπορεί να κινηθεί μόνο ως προς μια διεύθυνση, ανεξάρτητα των ταχυτήτων των αρθρώσεων, βλέπε Σχήμα 3.5(β).



Σχήμα 3.5. (α) Μη ιδιόμορφος σχηματισμός του βραχίονα. Το ΤΣΔ μπορεί να κινηθεί σε οποιαδήποτε κατεύθυνση και (β) Ιδιόμορφος σχηματισμός του βραχίονα. Το ΤΣΔ μπορεί να κινηθεί μόνο κατά μια διεύθυνση.

Στην περίπτωση αυτή, η γραμμική ταχύτητα ${}^0\dot{\mathbf{r}}_E$ του ΤΣΔ είναι:

$${}^0\dot{\mathbf{r}}_E = {}^0\mathbf{S}_1 \dot{q}_1 + k {}^0\mathbf{S}_1 \dot{q}_2 = (\dot{q}_1 + k \dot{q}_2) \mathbf{a} \quad (3-25)$$

όπου k είναι πραγματικός αριθμός και \mathbf{a} είναι διάνυσμα στο επίπεδο xy του ΣΣ $\{0\}$ που ορίζεται από τα στοιχεία της πρώτης στήλης ${}^0\mathbf{S}_1$ της Γενικευμένης Ιακωβιανής, δηλαδή:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} s_{11}(q_1, q_2) \\ s_{21}(q_1, q_2) \end{bmatrix} \quad (3-26)$$

όπου οι συναρτήσεις s_{11} και s_{21} δίνονται από τις Εξ. (B-27α) και (B-27γ), αντίστοιχα, του Παραρτήματος Β.1.4.

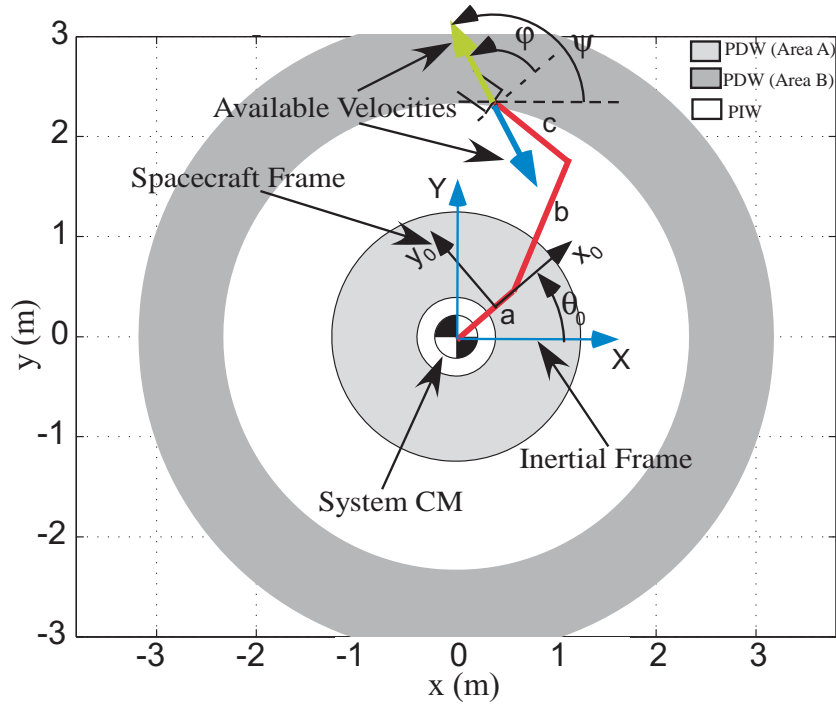
Από την Εξ. (3-25) προκύπτει ότι όταν ο βραχίονας είναι δυναμικά ιδιόμορφος, οι κινήσεις της πρώτης και της δεύτερης άρθρωσης του βραχίονα του ΔΡΣ προκαλούν κίνηση του ΤΣΔ κατά ορισμένη διεύθυνση του επιπέδου xy του ΣΣ $\{0\}$, που ορίζεται από

τη διεύθυνση του διανύσματος \mathbf{a} ως προς το ΣΣ $\{0\}$, η οποία δίνεται από τη γωνία φ που σχηματίζει το διάνυσμα \mathbf{a} με τον άξονα x του ΣΣ $\{0\}$, βλ. Σχήμα 3.6, η οποία ισούται με:

$$\varphi(q_1, q_2) = \text{atan2}(s_{21}(q_1, q_2), s_{11}(q_1, q_2)) \quad (3-27\alpha)$$

ή

$$\varphi(q_1, q_2) = \pi + \text{atan2}(s_{21}(q_1, q_2), s_{11}(q_1, q_2)) \quad (3-27\beta)$$



Σχήμα 3.6. Επιτρεπόμενες ταχύτητες του ΤΣΔ σε δυναμικά ιδιόμορφη διαμόρφωση.

Η επιτρεπόμενη διεύθυνση, ως προς το αδρανειακό ΣΣ, της ταχύτητας του ΤΣΔ σε ΔI του βραχίονα ορίζεται από τη γωνία ψ , βλ. Σχήμα 3.6, η οποία δίνεται από:

$$\psi(q_1, q_2) = \varphi(q_1, q_2) + \theta_0 \quad (3-28)$$

όπου θ_0 είναι ο προσανατολισμός του δορυφόρου του ΔΡΣ που αντιστοιχεί στην δυναμικά ιδιόμορφη διαμόρφωση (q_1, q_2) του βραχίονα όταν το ΤΣΔ βρίσκεται σε κάποιο σημείο του Καρτεσιανού χώρου με συντεταγμένες (x_E, y_E) , και δίνεται από:

$$\theta_0 = \text{atan2}(\sin(\theta_0), \cos(\theta_0)) \quad (3-29)$$

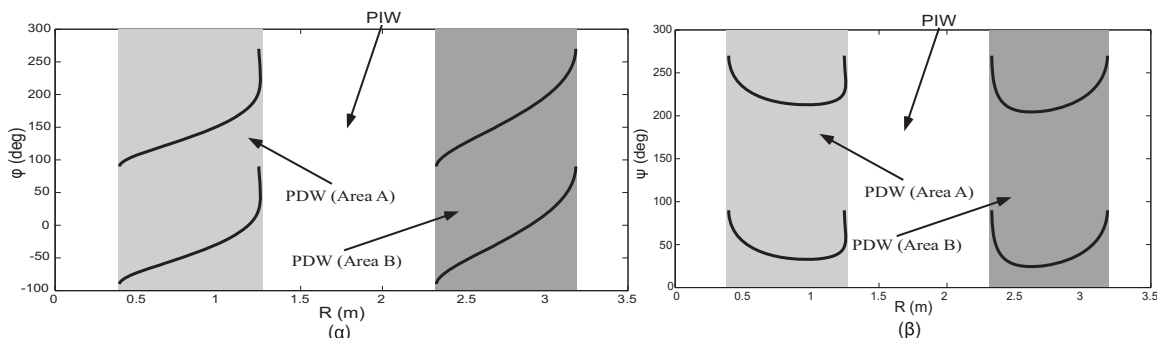
όπου

$$\sin(\theta_0) = \frac{(a + bc_{(q_1)} + cc_{(q_1+q_2)})y_E - (bs_{(q_1)} + cs_{(q_1+q_2)})x_E}{(a + bc_{(q_1)} + cc_{(q_1+q_2)})^2 + (bs_{(q_1)} + cs_{(q_1+q_2)})^2} \quad (3-30\alpha)$$

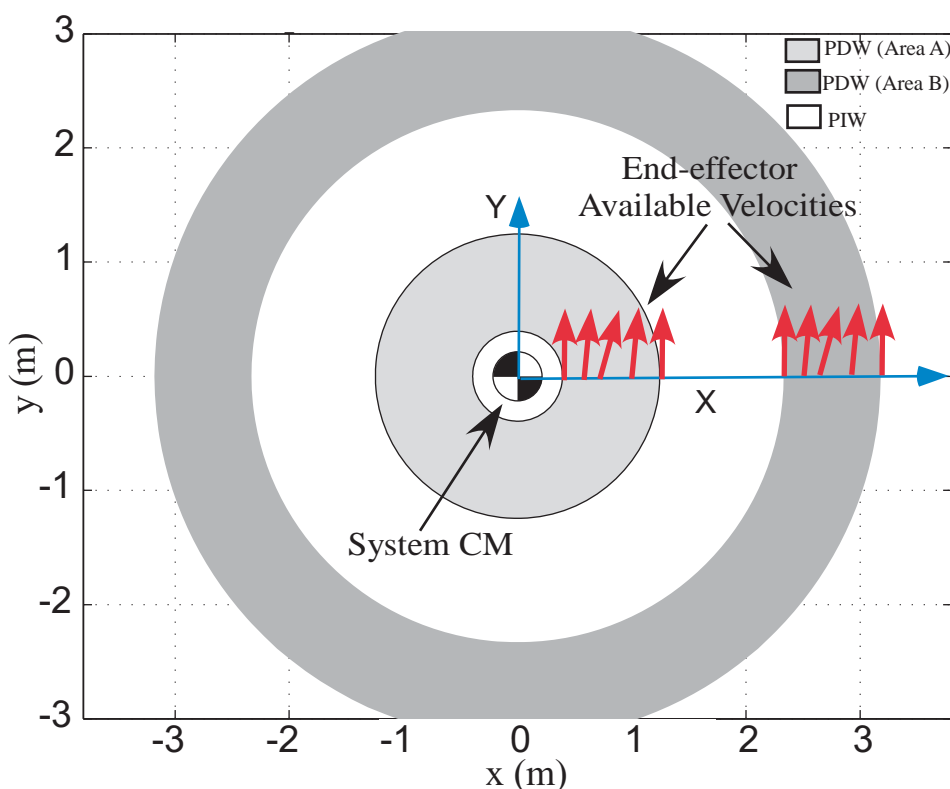
και

$$\cos(\theta_0) = \frac{(a + bc_{(q_1)} + cc_{(q_1+q_2)})x_E + (bs_{(q_1)} + cs_{(q_1+q_2)})y_E}{(a + bc_{(q_1)} + cc_{(q_1+q_2)})^2 + (bs_{(q_1)} + cs_{(q_1+q_2)})^2} \quad (3-30\beta)$$

Στα Σχήματα 3.7(α) και 3.7(β) παρουσιάζονται αντίστοιχα, οι μεταβολές των γωνιών φ και ψ , όταν αυτό βρίσκεται στον άξονα x του αδρανειακού ΣΣ, συναρτήσει της απόστασης του ΤΣΔ από το ΚΜ του ΔΡΣ. Στο Σχήμα 3.8 παρουσιάζονται κάποια χαρακτηριστικά διανύσματα των επιτρεπόμενων ταχυτήτων του ΤΣΔ.



Σχήμα 3.7. (α) Μεταβολή της γωνίας φ του διανύσματος της επιτρεπόμενης ταχύτητας του ΤΣΔ σε δυναμικά ιδιόμορφη διαμόρφωση του βραχίονα συναρτήσει της απόστασης του ΤΣΔ από το ΚΜ του ΔΡΣ και (β) Αντίστοιχη μεταβολή της γωνίας ψ του διανύσματος της επιτρεπόμενης ταχύτητας όταν το ΤΣΔ βρίσκεται στον άξονα x του αδρανειακού ΣΣ.

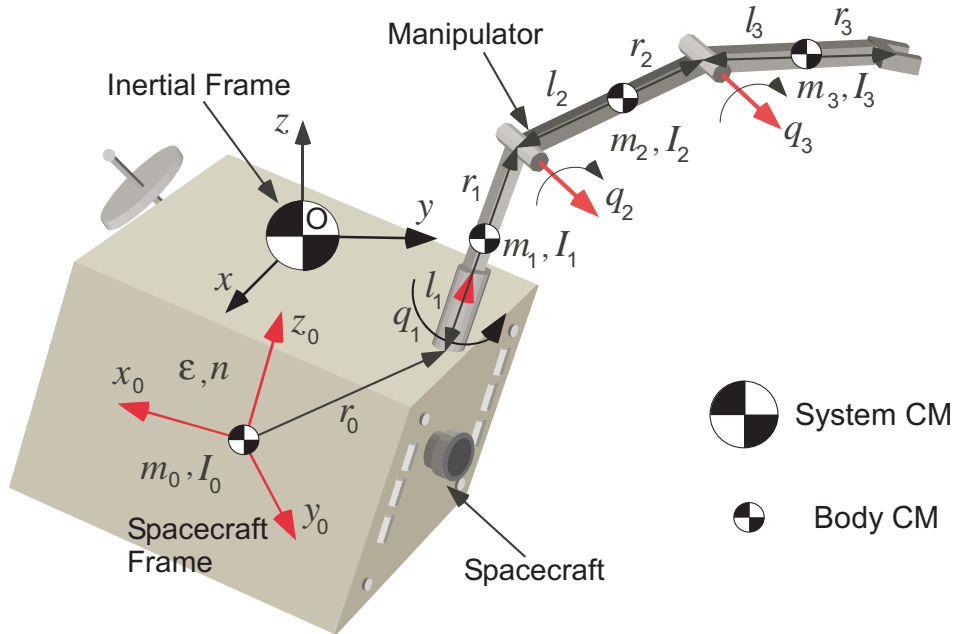


Σχήμα 3.8. Διανύσματα των επιτρεπόμενων ταχυτήτων του ΤΣΔ όταν βρίσκεται στον άξονα x του αδρανειακού ΣΣ.

3.2.2 Κίνηση στο Χώρο

Ο ελάχιστος αριθμός ΒΕ του βραχίονα του ΔΡΣ για τους οποίους η Εξ. (3-2α) έχει λύση είναι $N=3$. Για τη μετάβαση, λοιπόν, του ΤΣΔ από ένα σημείο σε ένα άλλο σημείο του

Καρτεσιανού χώρου κατά μήκος ενός επιθυμητού δρόμου στο χώρο, χρησιμοποιείται το ΔΡΣ με βραχίονα 3-BE του Σχήματος 3.9.



Σχήμα 3.9. Τρισδιάστατο Ελεύθερα Αιωρούμενο ΔΡΣ με Βραχίονα 3-BE.

Στην περίπτωση του τρισδιάστατου ΔΡΣ με βραχίονα 3-BE του Σχήματος 3.9, η ορίζουσα της Γενικευμένης Ιακωβιανής είναι συνάρτηση των τριών μεταβλητών των αρθρώσεων του βραχίονα. Δηλαδή:

$$S = \det({}^0S(q_1, q_2, q_3)) = S(q_1, q_2, q_3) \quad (3-31)$$

Η συνάρτηση αυτή στο χώρο των αρθρώσεων αναπαριστά μια επιφάνεια. Η Γενικευμένη Ιακωβιανή S γράφεται σε πιο απλή μορφή, αν θεωρήσουμε τις παρακάτω παραδοχές:

α) Θέση 1^{ns} άρθρωσης ως προς το ΚΜ του δορυφόρου του ΔΡΣ:

$${}^0\mathbf{r}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r_{0z} \end{bmatrix} \quad (3-32\alpha)$$

β) Τανυστής ροπής αδράνειας του δορυφόρου του ΔΡΣ:

$${}^0\mathbf{I}_0 = \begin{bmatrix} I_{0x} & 0 & 0 \\ 0 & I_{0x} & 0 \\ 0 & 0 & I_{0z} \end{bmatrix} \quad (3-32\beta)$$

Κάτω από αυτές τις συνθήκες, όπως αποδεικνύεται αναλυτικά στο Παράρτημα Γ.1.2, η Γενικευμένη Ιακωβιανή 0S γράφεται:

$${}^0S(q_1, q_2, q_3) = {}^0\mathbf{R}_1(q_1)\mathbf{S}_n(q_2, q_3) \quad (3-33\alpha)$$

όπου ο 3×3 πίνακας \mathbf{S}_n εξαρτάται μόνο από τις μεταβλητές q_2, q_3 και δίνεται από:

$$\mathbf{S}_n(q_2, q_3) = \begin{bmatrix} 0 & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & 0 & 0 \\ 0 & s_{32} & s_{33} \end{bmatrix} \quad (3-33\beta)$$

όπου οι όροι s_{ij} δίνονται από τις Εξ. (Γ-46) στο Παράρτημα Γ.1.3.

Αφού ο πίνακας ${}^0\mathbf{R}_1(q_1)$ είναι πίνακας περιστροφής, είναι αντιστρέψιμος και από την Εξ. (3-33α) προκύπτει ότι ο βραχίονας γίνεται δυναμικά ιδιόμορφος, δηλαδή ισχύει $\det({}^0\mathbf{S})=0$, όταν η ορίζουσα του πίνακα \mathbf{S}_n γίνει μηδέν. Δηλαδή, στην περίπτωση αυτή, οι ΔΙ είναι ανεξάρτητες από τη σχετική γωνία q_1 της πρώτης άρθρωσης. Από την Εξ. (3-33β) προκύπτει ότι η ορίζουσα του πίνακα \mathbf{S}_n είναι:

$$s_n(q_2, q_3) = \det(\mathbf{S}_n) = -s_{21}(q_2, q_3) \cdot s(q_2, q_3) \quad (3-34\alpha)$$

όπου:

$$s(q_2, q_3) = s_{12}s_{33} - s_{13}s_{32} \quad (3-34\beta)$$

Από την Εξ. (3-34α) συμπεραίνουμε ότι, στην περίπτωση που ισχύουν οι παραδοχές που δίνονται από τις Εξ. (3-32), οι ΔΙ εμφανίζονται όταν:

$$s_{21}(q_2, q_3) = 0 \quad (3-35\alpha)$$

ή

$$s(q_2, q_3) = 0 \quad (3-35\beta)$$

Οι Εξ. (3-35α) και (3-35β) αναπαριστούν τις δυο περιπτώσεις ΔΙ που εμφανίζονται κατά την κίνηση του ΤΣΔ του τρισδιάστατου ΔΡΣ με βραχίονα 3-BE του Σχήματος 3.9, όταν ισχύουν οι παραδοχές που δίνονται από τις Εξ. (3-32). Σε κάθε μια από τις δυο αυτές περιπτώσεις, η γραμμική ταχύτητα του ΤΣΔ χάνει ένα BE αλλά με διαφορετικό τρόπο. Στη συνέχεια εξετάζονται αναλυτικά οι δυο παραπάνω περιπτώσεις ΔΙ.

Εφόσον η στροφορμή του συστήματος δεν επηρεάζει την εμφάνιση των ΔΙ, χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρούμε ότι η στροφορμή του ΔΡΣ είναι μηδέν, δηλαδή $\mathbf{h}_{CM} = \mathbf{0}$. Στην περίπτωση αυτή, η γωνιακή ταχύτητα του δορυφόρου του ΔΡΣ, όπως προκύπτει από την Εξ. (3-1β), δίνεται από:

$${}^0\boldsymbol{\omega}_0 = -{}^0\mathbf{D}^{-1}{}^0\mathbf{D}_q \dot{\mathbf{q}} \quad (3-36\alpha)$$

Η γραμμική ταχύτητα του ΤΣΔ, όπως προκύπτει από την Εξ. (3-1α), είναι τότε:

$$\dot{\mathbf{r}}_E = \mathbf{R}_0(\boldsymbol{\varepsilon}, n) {}^0\mathbf{S}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (3-36\beta)$$

όπου ${}^0\mathbf{S}(\mathbf{q})$ είναι η Γενικευμένη Ιακωβιανή που ισούται με:

$${}^0\mathbf{S}(\mathbf{q}) = -{}^0\mathbf{J}_{11} {}^0\mathbf{D}^{-1} {}^0\mathbf{D}_q + {}^0\mathbf{J}_{12} = {}^0\mathbf{R}_1(q_1) \mathbf{S}_n(q_2, q_3) \quad (3-37)$$

Άρα, αντικαθιστώντας την Ιακωβιανή \mathbf{S}_n από την Εξ. (3-33β) προκύπτει:

$$\dot{\mathbf{r}}_E = \mathbf{R}_0(\boldsymbol{\varepsilon}, n) {}^0\mathbf{R}_1(q_1) \begin{bmatrix} 0 & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & 0 & 0 \\ 0 & s_{32} & s_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} \quad (3-38\alpha)$$

Η γραμμική ταχύτητα ${}^1\dot{\mathbf{r}}_E$ του ΤΣΔ εκφρασμένη στο ΣΣ {1} το οποίο περιστρέφεται μαζί με την πρώτη άρθρωση, βλ. Σχήμα 3.9, δίνεται από:

$${}^1\dot{\mathbf{r}}_E = {}^0\mathbf{R}_1^T(q_1) \mathbf{R}_0^T(\boldsymbol{\varepsilon}, n) \dot{\mathbf{r}}_E = \begin{bmatrix} 0 \\ s_{21} \\ 0 \end{bmatrix} \dot{q}_1 + \begin{bmatrix} s_{12} \\ 0 \\ s_{32} \end{bmatrix} \dot{q}_2 + \begin{bmatrix} s_{13} \\ 0 \\ s_{33} \end{bmatrix} \dot{q}_3 \quad (3-38\beta)$$

Στην Εξ. (3-38β), κάθε διάνυσμα – στήλη αναπαριστά τη συνεισφορά κάθε άρθρωσης στη γραμμική ταχύτητα ${}^1\dot{\mathbf{r}}_E$ του ΤΣΔ. Παρακάτω εξετάζεται τι συμβαίνει στην γραμμική ταχύτητα ${}^1\dot{\mathbf{r}}_E$ του ΤΣΔ όταν ισχύει η Εξ. (3-35α) (1^η Περίπτωση) ή η Εξ. (3-35β) (2^η Περίπτωση).

1^η Περίπτωση

Στην περίπτωση που η διαμόρφωση (q_2, q_3) του βραχίονα πάρει τέτοιες τιμές ώστε να ισχύει η Εξ. (3-35α), τότε η γραμμική ταχύτητα του ΤΣΔ εκφρασμένη στο ΣΣ {1} είναι:

$${}^1\dot{\mathbf{r}}_E = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \dot{q}_1 + \begin{bmatrix} s_{12} \\ 0 \\ s_{32} \end{bmatrix} \dot{q}_2 + \begin{bmatrix} s_{13} \\ 0 \\ s_{33} \end{bmatrix} \dot{q}_3 = \begin{bmatrix} s_{12} \\ 0 \\ s_{32} \end{bmatrix} \dot{q}_2 + \begin{bmatrix} s_{13} \\ 0 \\ s_{33} \end{bmatrix} \dot{q}_3 \quad (3-39)$$

Δηλαδή στην περίπτωση αυτή, η κίνηση της πρώτης άρθρωσης του βραχίονα του ΔΡΣ δε συνεισφέρει στη γραμμική ταχύτητα του ΤΣΔ. Στην περίπτωση αυτή, το ΤΣΔ δεν έχει συνιστώσα γραμμικής ταχύτητας κατά τη διεύθυνση y του ΣΣ {1}, βλ. Σχήμα 3.9.

Η συνάρτηση s_{21} που ορίζει τις ΔΙ στην περίπτωση αυτή είναι:

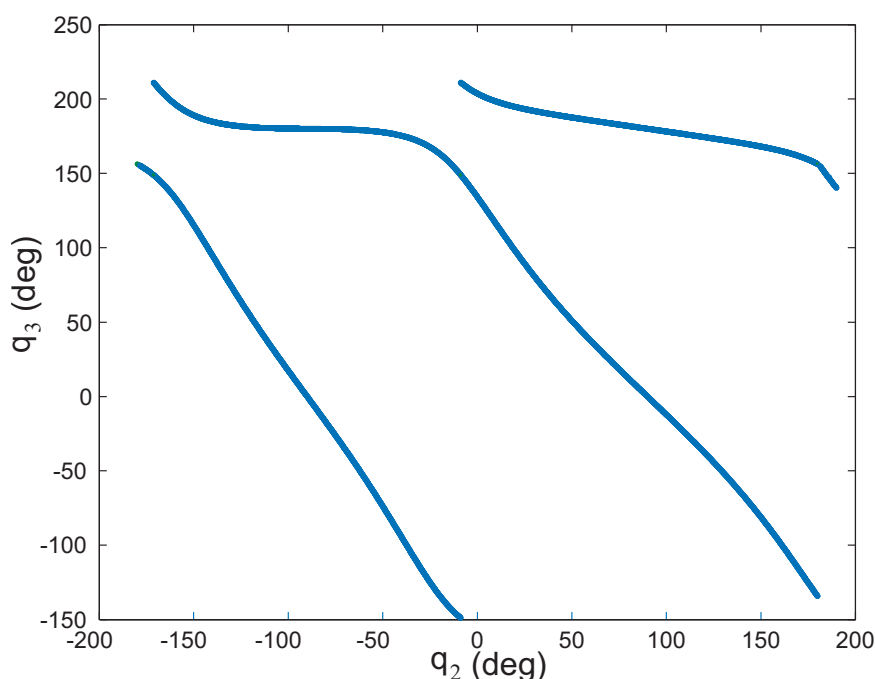
$$s_{21} = -\frac{{}^0D_0 + {}^0D_1 + {}^0D_2 + {}^0D_3}{\det({}^0\mathbf{D}_n)} s_{21}^* \quad (3-40\alpha)$$

όπου τα μεγέθη 0D_i , $i=0,1,2,3$ και ο πίνακας ${}^0\mathbf{D}_n$ δίνονται από τις Εξ. (Γ-43) και (Γ-42α) του Παραρτήματος Γ, αντίστοιχα. Επειδή στην Εξ. (3-40α), ο συντελεστής του όρου s_{21}^* αποτελείται από αδρανειακούς όρους, οι οποίοι είναι διάφοροι του μηδενός, ο όρος που ορίζει τις ΔΙ είναι ο s_{21}^* , ο οποίος μπορεί να γραφτεί ως:

$$s_{21}^* = k_0(q_2) + k_1(q_2) \sin(q_3) + k_2(q_2) \cos(q_3) \quad (3-40\beta)$$

όπου τα μεγέθη k_i , $i=0,1,2$ δίνονται από τις Εξ. (Γ-48) του Παραρτήματος Γ.

Η Εξ. (3-35α) ορίζει, στο χώρο των αρθρώσεων, τις επιφάνειες ιδιομορφίας, η τομή των οποίων κατά τον άξονα q_1 δίνεται στο Σχήμα 3.10.



Σχήμα 3.10. Τομή κατά τον άξονα q_1 των Επιφανειών Ιδιομορφίας που αντιστοιχούν στις ΔΙ της 1^{ης} Περίπτωσης του ΔΡΣ του Σχήματος 3.9.

Όταν η μάζα και η αδράνεια του δορυφόρου του ΔΡΣ πάρουν μεγάλες τιμές, οι παραπάνω ΔΙ προσεγγίζουν τις εσωτερικές *κινηματικές ιδιομορφίες ώμου* (shoulder singularities) που εμφανίζονται σε έναν *ανθρωπομορφικό* (anthropomorphic) βραχίονα σταθερής βάσης και οι οποίες εμφανίζονται κατά μήκος του άξονα περιστροφής της πρώτης άρθρωσης, [82].

2^η Περίπτωση

Στην περίπτωση που διαμόρφωση (q_2, q_3) του βραχίονα πάρει τιμές τέτοιες ώστε να ισχύει η Εξ. (3-35β), τότε οι συνιστώσες της γραμμικής ταχύτητας ${}^1\dot{\mathbf{r}}_E$ που οφείλονται στις κινήσεις της δεύτερης και τρίτης άρθρωσης, βλ. Εξ. (3-38β), είναι παράλληλες. Στην περίπτωση αυτή, η γραμμική ταχύτητα ${}^1\dot{\mathbf{r}}_E$ του ΤΣΔ είναι:

$${}^1\dot{\mathbf{r}}_E = \begin{bmatrix} 0 \\ s_{21} \\ 0 \end{bmatrix} \dot{q}_1 + \begin{bmatrix} s_{12} \\ 0 \\ s_{32} \end{bmatrix} \dot{q}_2 + \begin{bmatrix} s_{13} \\ 0 \\ s_{33} \end{bmatrix} \dot{q}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ s_{21} \\ 0 \end{bmatrix} \dot{q}_1 + (\dot{q}_2 + k \dot{q}_3) \mathbf{a} \quad (3-41)$$

όπου \mathbf{a} είναι διάνυσμα στο επίπεδο xz του ΣΣ {1} και k πραγματικός αριθμός.

Δηλαδή στην περίπτωση αυτή, οι κινήσεις της δεύτερης και της τρίτης άρθρωσης του βραχίονα του ΔΡΣ προκαλούν κίνηση του ΤΣΔ κατά ορισμένη διεύθυνση του επιπέδου xz του ΣΣ {1}.

Η συνάρτηση που ορίζει τις ΔΙ στην περίπτωση αυτή είναι η $S(q_2, q_3)$ η οποία με αντικατάσταση των όρων s_{ij} , από τις Εξ. (Γ-46) στο Παράρτημα Γ.1.3, στην Εξ. (3-34β) γράφεται:

$$S(q_2, q_3) = -(a+b)c {}^0D_3 \cos(q_2) + (a+b)d {}^0D_2 \cos(q_2 + q_3) + cd({}^0D_0 + {}^0D_1) \sin(q_3) \quad (3-42\alpha)$$

όπου a, b, c, d είναι τα μήκη των βαρυκεντρικών διανυσμάτων του συστήματος και δίνονται από τις Εξ. (Γ-2) στο Παράρτημα Γ.1.1 ενώ οι αδρανειακού τύπου όροι ${}^0D_i, i=0,1,2,3$ δίνονται από τις Εξ. (Γ-43) στο Παράρτημα Γ.1.3.

Με αντικατάσταση των πινάκων ${}^0D_i, i=0,1,2,3$ στην Εξ. (3-34α) προκύπτει:

$$S = k_0(q_2) + k_1(q_2) \sin(q_3) + k_2(q_2) \cos(q_3) \quad (3-42\beta)$$

όπου οι συντελεστές $k_i, i=0,1,2$ δίνονται από τις Εξ. (Γ-51) στο Παράρτημα Γ.1.3.

Από την Εξ. (3-42β), προκύπτει ότι η Εξ. (3-35β) έχει λύσεις τις:

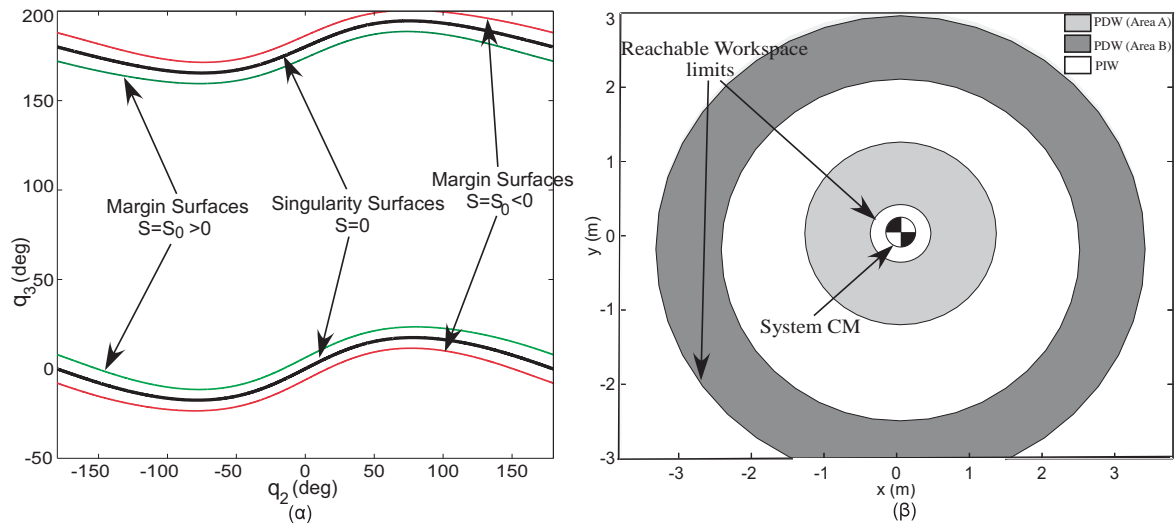
$$q_3(q_2) = \arcsin[(S_0 - k_0) \cos \varphi / k_1] - \varphi \quad (3-43\alpha)$$

$$q_3(q_2) = \pi - \arcsin[(S_0 - k_0) \cos \varphi / k_1] - \varphi \quad (3-43\beta)$$

όπου:

$$\varphi(q_2) = \arctan[k_2 / k_1] \quad (3-43\gamma)$$

Οι Εξ. (3-43) δίνουν για $S_0 = 0$ τις επιφάνειες ιδιομορφίας (Singularity Surfaces) ενώ για $S_0 \neq 0$ τις επιφάνειες περιθωρίου (Margin Surfaces), οι οποίες είναι κυλινδρικές με τομές κατά τον άξονα της μεταβλητής q_1 , βλ. Σχήμα 3.11(α).



Σχήμα 3.11. (α) Τομή κατά τον άξονα q_1 των Επιφανειών Ιδιομορφίας και των Επιφανειών Περιθωρίου που αντιστοιχούν στον βραχίονα του Σχήματος 3.9 και (β) Τομή κατά τον άξονα z των περιοχών PIW και PDW.

Για τον υπολογισμό των θέσεων του ΤΣΔ στον Καρτεσιανό χώρο όπου μπορεί να υπάρξουν ιδιομορφίες, χρησιμοποιείται η εξίσωση:

$$R(q_2, q_3) = \sqrt{(a+b)^2 + c^2 + d^2 + 2(a+b)c \cos(q_2) + 2(a+b)d \cos(q_2 + q_3) + 2cd \cos(q_3)} \quad (3-44)$$

η οποία δίνει την απόσταση του ΤΣΔ που αντιστοιχεί στη διαμόρφωση q_2, q_3 , του ΔΡΣ του Σχήματος 3.4, από το ΚΜ του συστήματος.

Με αντικατάσταση της Εξ. (3-43α) στην Εξ. (3-44) και για $q_2 \in [0, 2\pi)$, προκύπτουν οι αποστάσεις του ΤΣΔ από το ΚΜ του συστήματος που δημιουργούν το χώρο (B) στον Καρτεσιανό χώρο, ο οποίος είναι σφαιρικό κέλυφος με τομή κατά τον άξονα z . Αντίστοιχα, με αντικατάσταση της Εξ. (3-43β) στην Εξ. (3-44) και για $q_2 \in [0, 2\pi)$, προκύπτουν οι αποστάσεις του ΤΣΔ από το ΚΜ του συστήματος που δημιουργούν το χώρο (A), ο οποίος είναι σφαιρικό κέλυφος με τομή κατά τον άξονα z , βλ. Σχήμα 3.11(β).

3.3 Ορισμός του Προσανατολισμού του Τελικού Σημείου Δράσης

Σε πολλές ρομποτικές εφαρμογές σε τροχιά, είναι απαραίτητο το ΤΣΔ να έχει συγκεκριμένο προσανατολισμό καθώς ακολουθεί τον επιθυμητό δρόμο. Ενώ η επιθυμητή του θέση περιγράφεται από τη γραμμική του ταχύτητα, η οποία δίνεται από την Εξ. (3-1α), ο επιθυμητός προσανατολισμός του ΤΣΔ περιγράφεται από τη γωνιακή του ταχύτητα, η οποία δίνεται από:

$$\boldsymbol{\omega}_E = \mathbf{R}_0(\boldsymbol{\varepsilon}, n) ({}^0\boldsymbol{\omega}_0 + {}^0\mathbf{J}_{22}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}) \quad (3-45)$$

όπου ο $3 \times N$ πίνακας ${}^0\mathbf{J}_{22}$ ορίζεται από την Εξ. (2-12).

Αν ορίσουμε το 6×1 διάνυσμα-στήλη \mathbf{v}_E το διάνυσμα που περιέχει τη γραμμική και γωνιακή ταχύτητα του ΤΣΔ,

$$\mathbf{v}_E = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}}_E^T & \boldsymbol{\omega}_E^T \end{bmatrix}^T \quad (3-46\alpha)$$

τότε οι Εξ. (3-1α) – (3-45) γράφονται:

$$\mathbf{v}_E = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}}_E \\ \boldsymbol{\omega}_E \end{bmatrix} = \mathbf{E}(\boldsymbol{\varepsilon}, n) \begin{bmatrix} {}^0\mathbf{J}_{11}^* & {}^0\mathbf{J}_{12}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^0\boldsymbol{\omega}_0 \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \quad (3-46\beta)$$

όπου ο 6×6 πίνακας $\mathbf{E}(\boldsymbol{\varepsilon}, n)$ δίνεται από την Εξ. (2-37α) και οι πίνακες ${}^0\mathbf{J}_{11}^*$ και ${}^0\mathbf{J}_{12}^*$, διαστάσεων 6×3 και $6 \times N$ αντίστοιχα, από:

$${}^0\mathbf{J}_{11}^* = \begin{bmatrix} {}^0\mathbf{J}_{11}^T & \mathbf{I}_3 \end{bmatrix}^T \quad (3-47\alpha)$$

$${}^0\mathbf{J}_{12}^* = \begin{bmatrix} {}^0\mathbf{J}_{12}^T & {}^0\mathbf{J}_{22}^T \end{bmatrix}^T \quad (3-47\beta)$$

όπου \mathbf{I}_3 είναι ο 3×3 μοναδιαίος πίνακας.

Η Εξ. (3-46β) σε συνδυασμό με τη διατήρηση της στροφορμής του συστήματος, Εξ. (3-1β), δίνει:

$$\mathbf{A}^* \begin{bmatrix} {}^0\boldsymbol{\omega}_0 \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_0^T & \mathbf{0}_{3 \times 6} \\ \mathbf{0}_{6 \times 3} & \mathbf{E}^{-T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{CM} \\ \mathbf{v}_E \end{bmatrix} \quad (3-48\alpha)$$

όπου ο $9 \times (N+3)$ πίνακας \mathbf{A}^* δίνεται από:

$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} {}^0\mathbf{D} & {}^0\mathbf{D}_q \\ {}^0\mathbf{J}_{11}^* & {}^0\mathbf{J}_{12}^* \end{bmatrix} \quad (3-48\beta)$$

Η Εξ. (3-48α) έχει λύσεις μόνο όταν ο βραχίονας του τρισδιάστατου ΔΡΣ έχει τουλάχιστον 6-BE, δηλαδή $N \geq 6$. Για βραχίονες με μη-πλεονάζοντες BE είναι $N=6$. Όταν $N=6$, η Εξ. (3-48α) έχει λύση, μόνο όταν:

$$S = \det({}^0\mathbf{S}^*) \neq 0 \quad (3-49)$$

όπου ο πίνακας ${}^0\mathbf{S}^*$ είναι η αντίστοιχη Γενικευμένη Ιακωβιανή που συνδέει τη γραμμική και τη γωνιακή ταχύτητα του ΤΣΔ με τις ταχύτητες των αρθρώσεων του βραχίονα του ΔΡΣ και δίνεται από,

$${}^0\mathbf{S}^* = -{}^0\mathbf{J}_{11}^* {}^0\mathbf{D}^{-1} {}^0\mathbf{D}_q + {}^0\mathbf{J}_{12}^* \quad (3-50)$$

Εάν η Εξ. (3-49) ικανοποιείται, τότε κατά την επιθυμητή κίνηση του ΤΣΔ, η γωνιακή ταχύτητα του δορυφόρου του ΔΡΣ εκφρασμένη στο $\Sigma \{0\}$ του δορυφόρου είναι συνάρτηση της στροφορμής \mathbf{h}_{CM} και της ταχύτητας \mathbf{v}_E και δίνεται από:

$${}^0\boldsymbol{\omega}_0 = [{}^0\mathbf{D}^{-1} + {}^0\mathbf{D}^{-1} {}^0\mathbf{D}_q {}^0\mathbf{S}^{*-1} {}^0\mathbf{J}_{11}^* {}^0\mathbf{D}^{-1}] \mathbf{R}_0^T \mathbf{h}_{CM} - {}^0\mathbf{D}^{-1} {}^0\mathbf{D}_q {}^0\mathbf{S}^{*-1} \mathbf{E}^{-T} \mathbf{v}_E \quad (3-51\alpha)$$

Ενώ το διάνυσμα-στήλη των ταχυτήτων των αρθρώσεων επίσης είναι συνάρτηση της στροφορμής \mathbf{h}_{CM} και της ταχύτητας \mathbf{v}_E και δίνεται από:

$$\dot{\mathbf{q}} = -{}^0\mathbf{S}^{*-1} {}^0\mathbf{J}_{11}^* {}^0\mathbf{D}^{-1} \mathbf{R}_0^T \mathbf{h}_{CM} + {}^0\mathbf{S}^{*-1} \mathbf{E}^{-T} \mathbf{v}_E \quad (3-51\beta)$$

Καθώς ο δορυφόρος του ΔΡΣ περιστρέφεται, οι πίνακες $\mathbf{R}_0(\boldsymbol{\varepsilon}, n)$ και $\mathbf{E}(\boldsymbol{\varepsilon}, n)$ στις Εξ. (3-51) πρέπει να ανανεώνονται. Οι νέες παράμετροι Euler $\boldsymbol{\varepsilon}$ and n υπολογίζονται από τις Εξ. (3-7) οι οποίες επιλύονται παράλληλα με τις Εξ. (3-51).

Στην επόμενη παράγραφο θα υπολογιστούν οι συναρτήσεις που ορίζουν τις δυναμικές ιδιομορφίες καθώς και οι αντίστοιχες περιοχές PIW και PDW για ρομποτικούς βραχίονες που περιέχουν τους ελάχιστους BE έτσι ώστε να πραγματοποιηθεί ο σχεδιασμός δρόμου θέσης του ΤΣΔ για κινήσεις στο επίπεδο και στο τρισδιάστατο χώρο και με επιθυμητό προσανατολισμό του ΤΣΔ.

3.3.1 Επίπεδη Κίνηση

Για την κίνηση στο επίπεδο του ελεύθερα αιωρούμενου ΔΡΣ με βραχίονα με N BE, η διατήρηση της στροφορμής του ΔΡΣ καθώς και η γραμμική ταχύτητα του ΤΣΔ δίνονται από τις Εξ. (3-13α) και (3-13β), αντίστοιχα. Για επίπεδες κινήσεις, η γωνιακή ταχύτητα του ΤΣΔ δίνεται από:

$$\dot{\theta}_E = \dot{\theta}_0 + {}^0\mathbf{J}_{22} \dot{\mathbf{q}} \quad (3-52)$$

όπου θ_E είναι ο προσανατολισμός του ΤΣΔ, βλ. Σχήμα 3.1, και ο $1 \times N$ πίνακας ${}^0\mathbf{J}_{22}$ ορίζεται από την Εξ. (2-12).

Ο συνδυασμός των Εξ. (3-13β) και (3-52) σε μητρική μορφή δίνει:

$$\mathbf{v}_E = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}}_E \\ \dot{\theta}_E \end{bmatrix} = \mathbf{E}(\theta_0) \begin{bmatrix} {}^0\mathbf{J}_{11}^* & {}^0\mathbf{J}_{12}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_0 \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \quad (3-53)$$

όπου ο 3×3 πίνακας \mathbf{E} είναι:

$$\mathbf{E}(\theta_0) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_0(\theta_0) & \mathbf{0}_{2 \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times 2} & 1 \end{bmatrix} \quad (3-54\alpha)$$

και ο $3 \times N$ πίνακας ${}^0\mathbf{J}_{12}^*$ δίνεται από την Εξ. (3-39γ) ενώ ο 3×1 πίνακας ${}^0\mathbf{J}_{11}^*$ δίνεται από:

$${}^0\mathbf{J}_{11}^* = \begin{bmatrix} {}^0\mathbf{J}_{11}^T & 1 \end{bmatrix}^T \quad (3-54\beta)$$

Ο συνδυασμός των Εξ. (3-13α) και (3-53) σε μητρική μορφή δίνει:

$$\mathbf{A}^* \begin{bmatrix} \dot{\theta}_0 \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}_{1 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} & \mathbf{E}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{CM} \\ \mathbf{v}_E \end{bmatrix} \quad (3-55\alpha)$$

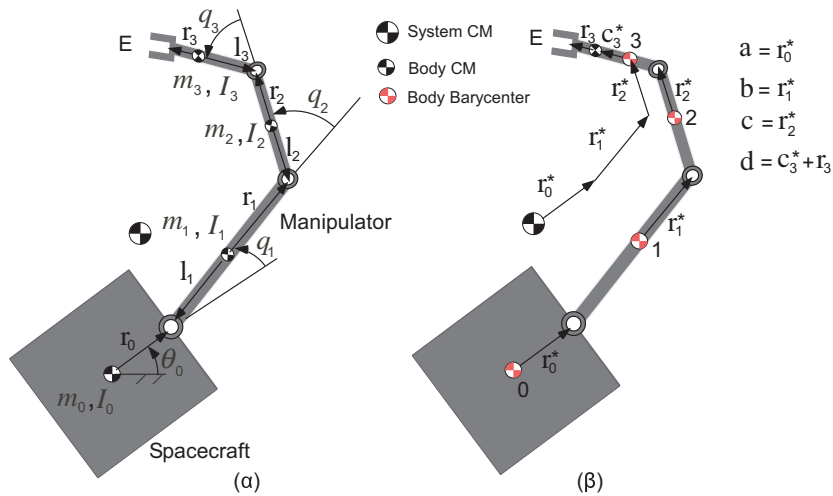
όπου ο $4 \times (N+1)$ πίνακας \mathbf{A}^* είναι:

$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} {}^0D & {}^0\mathbf{D}_q \\ {}^0\mathbf{J}_{11}^* & {}^0\mathbf{J}_{12}^* \end{bmatrix} \quad (3-55\beta)$$

Η Εξ. (3-55α) έχει λύσεις μόνο όταν ο βραχίονας του ΔΡΣ έχει τουλάχιστον 3-ΒΕ. Για το επίπεδο ΔΡΣ με βραχίονα 3-ΒΕ του Σχήματος 3.12, δηλαδή $N=3$, η Εξ. (3-55α) έχει μόνο μια λύση, μόνο όταν ο πίνακας \mathbf{A}^* είναι αντιστρέψιμος ή ισοδύναμα όταν η αντίστοιχη 3×3 Γενικευμένη Ιακωβιανή:

$${}^0\mathbf{S}^* = -{}^0\mathbf{J}_{11}^* {}^0D^{-1} {}^0\mathbf{D}_q + {}^0\mathbf{J}_{12}^* \quad (3-56)$$

είναι αντιστρέψιμος πίνακας.



Σχήμα 3.12. Επίπεδο ελεύθερα αιωρούμενο ΔΡΣ με βραχίονα 3-ΒΕ. (α) Ορισμός των αδρανειακών ιδιοτήτων και των μεταβλητών διαμόρφωσης. (β) Τα βαρυστατικά διανύσματα, \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} και \mathbf{d} του ΔΡΣ.

Ο βραχίονας του επίπεδου ΔΡΣ του Σχήματος 3.12 περιέχει τους ελάχιστους ΒΕ για τη μετάβαση του ΤΣΔ από ένα σημείο σε ένα άλλο σημείο του Καρτεσιανού χώρου κατά μήκος ενός επιθυμητού δρόμου στο επίπεδο, ορίζοντας παράλληλα και τον προσανατολισμό του. Όταν η Γενικευμένη Ιακωβιανή του ΔΡΣ αντιστρέφεται, τότε κατά την κίνηση του ΤΣΔ, το διάνυσμα-στήλη των απαιτούμενων ταχυτήτων των αρθρώσεων είναι:

$$\dot{\mathbf{q}} = - {}^0\mathbf{S}^{*-1} {}^0\mathbf{J}_{11}^* {}^0D^{-1} h_{CM} + {}^0\mathbf{S}^{*-1} \mathbf{E}^{-1} \mathbf{v}_E \quad (3-57\alpha)$$

Ενώ η γωνιακή ταχύτητα του δορυφόρου που προκύπτει δίνεται από:

$$\dot{\theta}_0 = [{}^0D^{-1} + {}^0D^{-1} {}^0\mathbf{D}_q {}^0\mathbf{S}^{*-1} {}^0\mathbf{J}_{11}^* {}^0D^{-1}] h_{CM} - {}^0D^{-1} {}^0\mathbf{D}_q {}^0\mathbf{S}^{*-1} \mathbf{E}^{-1} \mathbf{v}_E \quad (3-57\beta)$$

όπου το διάνυσμα \mathbf{v}_E που περιέχει τη γραμμική και γωνιακή ταχύτητα του ΤΣΔ δίνεται από:

$$\mathbf{v}_E = \begin{bmatrix} \dot{x}_E & \dot{y}_E & \dot{\theta}_E \end{bmatrix}^T \quad (3-58)$$

Για το επίπεδο ΔΡΣ με βραχίονα 3-ΒΕ του Σχήματος 3.12, όπως αποδεικνύεται στο Παράρτημα Β.2.2, το βαθμωτό μέγεθος 0D καθώς και οι πίνακες ${}^0\mathbf{D}_q$, ${}^0\mathbf{J}_{11}$, ${}^0\mathbf{J}_{12}$ και ${}^0\mathbf{J}_{22}$ διαστάσεων 1×3 , 2×1 , 2×3 και 1×3 , αντίστοιχα, δίνονται από:

$${}^0D = {}^0D_0 + {}^0D_1 + {}^0D_2 + {}^0D_3 \quad (3-59\alpha)$$

$${}^0\mathbf{D}_q = \begin{bmatrix} {}^0D_1 + {}^0D_2 + {}^0D_3 & {}^0D_2 + {}^0D_3 & {}^0D_3 \end{bmatrix} \quad (3-59\beta)$$

$${}^0\mathbf{J}_{11} = \begin{bmatrix} -(bs_{(q_1)} + cs_{(q_1+q_2)} + ds_{(q_1+q_2+q_3)}) \\ a + bc_{(q_1)} + cc_{(q_1+q_2)} + dc_{(q_1+q_2+q_3)} \end{bmatrix} \quad (3-59\gamma)$$

$${}^0\mathbf{J}_{12} = \begin{bmatrix} -(bs_{(q_1)} + cs_{(q_1+q_2)} + ds_{(q_1+q_2+q_3)}) & -(cs_{(q_1+q_2)} + ds_{(q_1+q_2+q_3)}) & -ds_{(q_1+q_2+q_3)} \\ bc_{(q_1)} + cc_{(q_1+q_2)} + dc_{(q_1+q_2+q_3)} & cc_{(q_1+q_2)} + dc_{(q_1+q_2+q_3)} & dc_{(q_1+q_2+q_3)} \end{bmatrix} \quad (3-59\delta)$$

$${}^0\mathbf{J}_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-51\epsilon)$$

όπου a, b, c, d είναι τα μήκη των βαρυκεντρικών διανυσμάτων του συστήματος και δίνονται από τις Εξ. (Α-34) στο Παράρτημα Β.2.1. Οι αδρανειακού τύπου όροι 0D_i δίνονται από τις Εξ. (Β-47) στο Παράρτημα Β.2.3.

Για την περίπτωση του επίπεδου ΔΡΣ με βραχίονα 3-ΒΕ, οι Εξ. (3-57) γράφονται:

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 = & - \frac{ac s_{(q_1+q_2)} + bc s_{(q_2)}}{S(q_1, q_2, q_3)} h_{CM} + \frac{c({}^0D_0 + {}^0D_1) c_{(\theta_0+q_1+q_2)} - {}^0D_2 (ac_{(\theta_0)} + bc_{(\theta_0+q_1)})}{S(q_1, q_2, q_3)} \dot{x}_E \\ & + \frac{c({}^0D_0 + {}^0D_1) s_{(\theta_0+q_1+q_2)} - {}^0D_2 (as_{(\theta_0)} + bs_{(\theta_0+q_1)})}{S(q_1, q_2, q_3)} \dot{y}_E \\ & + \frac{c{}^0D_3 (bs_{(q_2)} + as_{(q_1+q_2)}) + cd({}^0D_0 + {}^0D_1) s_{(q_3)} - d{}^0D_2 (bs_{(q_2+q_3)} - as_{(q_1+q_2+q_3)})}{S(q_1, q_2, q_3)} \dot{\theta}_E \end{aligned} \quad (3-60\alpha)$$

$$\begin{aligned} \dot{q}_2 = & \frac{abs_{(q_1)} + acs_{(q_1+q_2)}}{S(q_1, q_2, q_3)} h_{CM} + \frac{a({}^0D_1 + {}^0D_2)c_{(\theta_0)} - {}^0D_0(bc_{(\theta_0+q_1)} + cc_{(\theta_0+q_1+q_2)})}{S(q_1, q_2, q_3)} \dot{x}_E \\ & + \frac{a({}^0D_1 + {}^0D_2)s_{(\theta_0)} - {}^0D_0(bs_{(\theta_0+q_1)} + cs_{(\theta_0+q_1+q_2)})}{S(q_1, q_2, q_3)} \dot{y}_E \\ & + \frac{ad({}^0D_1 + {}^0D_2)s_{(q_1+q_2+q_3)} - a{}^0D_3(cs_{(q_1+q_2)} + bs_{(q_1)}) - d{}^0D_0(bs_{(q_2+q_3)} + cs_{(q_3)})}{S(q_1, q_2, q_3)} \dot{\theta}_E \end{aligned} \quad (3-60\beta)$$

$$\begin{aligned} \dot{q}_3 = & \frac{abs_{(q_1)}}{S(q_1, q_2, q_3)} h_{CM} + \frac{-a{}^0D_1c_{(\theta_0)} + b{}^0D_0c_{(\theta_0+q_1)}}{S(q_1, q_2, q_3)} \dot{x}_E + \frac{-a{}^0D_1s_{(\theta_0)} + b{}^0D_0s_{(\theta_0+q_1)}}{S(q_1, q_2, q_3)} \dot{y}_E \\ & + \frac{ab({}^0D_2 + {}^0D_3)s_{(q_1)} + b{}^0D_0(cs_{(q_2)} + ds_{(q_2+q_3)}) - a{}^0D_1(cs_{(q_1+q_2)} + as_{(q_1+q_2+q_3)})}{S(q_1, q_2, q_3)} \dot{\theta}_E \end{aligned} \quad (3-60\gamma)$$

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_0 = & \frac{b{}^0D_2c_{(\theta_0+q_1)} - c{}^0D_1c_{(\theta_0+q_1+q_2)}}{S(q_1, q_2, q_3)} \dot{x}_E + \frac{b{}^0D_2s_{(\theta_0+q_1)} - c{}^0D_1s_{(\theta_0+q_1+q_2)}}{S(q_1, q_2, q_3)} \dot{y}_E \\ & + \frac{-c(b{}^0D_3s_{(q_2)} + d{}^0D_1s_{(q_3)}) + bd{}^0D_2s_{(q_2+q_3)}}{S(q_1, q_2, q_3)} \dot{\theta}_E + \frac{bc s_{(q_2)}}{S(q_1, q_2, q_3)} h_{CM} \end{aligned} \quad (3-60\delta)$$

Στις Εξ. (3-60), η συνάρτηση S είναι η συνάρτηση που μηδενίζει την ορίζουσα της Γενικευμένης Ιακωβιανής ${}^0S^*$. Με αντικατάσταση των αδρανειακών πινάκων που δίνονται από τις Εξ. (3-59) στην Εξ. (3-56), προκύπτει ότι:

$$S(q_1, q_2, q_3) = ab{}^0D_2(q_1, q_2, q_3)s_{(q_1)} + bc{}^0D_0(q_1, q_2, q_3)s_{(q_2)} - ac{}^0D_1(q_1, q_2, q_3)s_{(q_1+q_2)} \quad (3-61\alpha)$$

Μετά από αντικατάσταση των όρων 0D_i , $i=0,1,2$ που δίνονται από τις Εξ. (B-47) (βλ. Παράρτημα B.2.3) προκύπτει ότι:

$$S = k_0(q_1) + k_1(q_1)\sin(q_2) + k_2(q_1)\cos(q_2) \quad (3-61\beta)$$

όπου οι συντελεστές k_i , $i=0,1,2$ δίνονται από τις Εξ. (B-62) (Παράρτημα B.2.4).

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση S είναι ανεξάρτητη από τη σχετική γωνία q_3 της τρίτης άρθρωσης και έχει την ίδια μορφή με την περίπτωση του επίπεδου βραχίονα 2-ΒΕ με την διαφορά ότι αλλάζουν οι συντελεστές k_i λόγω της επίδρασης της μάζας του τρίτου συνδέσμου. Οι λύσεις της εξίσωσης $S(q_1, q_2) = S_0$ δίνονται από τις Εξ. (3-22). Στην περίπτωση αυτή, οι υπόχωροι PIW και PDW του χώρου εργασίας του βραχίονα δεν καθορίζονται από τη θέση του ΤΣΔ του βραχίονα αλλά από τη θέση του βαρύκεντρου του τρίτου συνδέσμου (σημείο 3 στο Σχήμα 3.12(β)). Για τον υπολογισμό των θέσεων του σημείου αυτού στον Καρτεσιανό χώρο όπου μπορεί να υπάρξουν ιδιομορφίες, χρησιμοποιείται η εξίσωση:

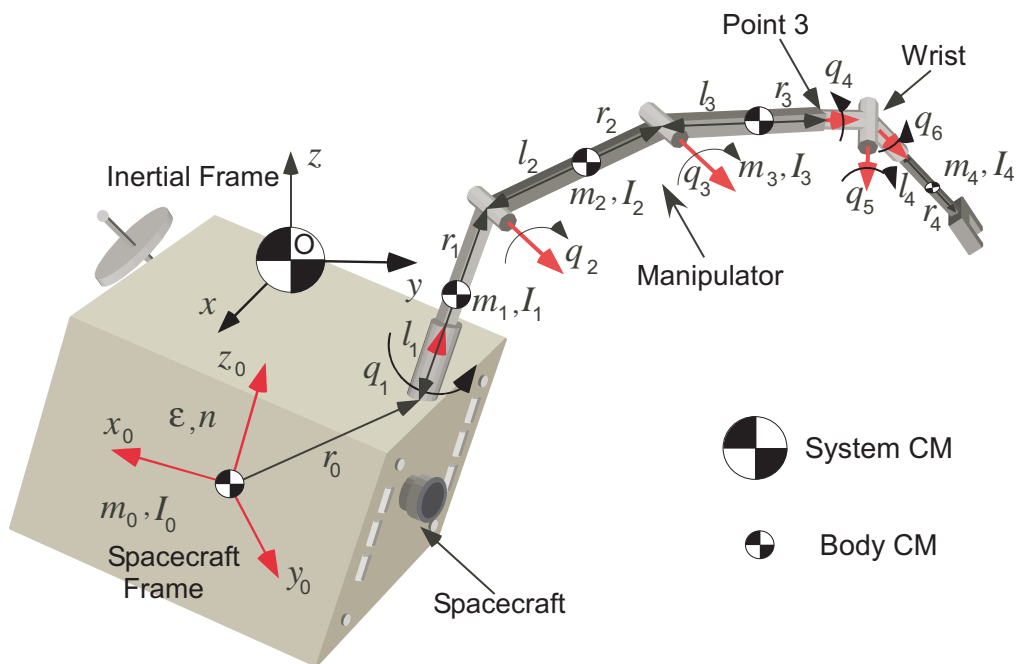
$$R_3(q_1, q_2) = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\cos(q_1) + 2ac\cos(q_1 + q_2) + 2bc\cos(q_2)} \quad (3-62)$$

η οποία δίνει την απόσταση του βαρύκεντρου του τρίτου συνδέσμου που αντιστοιχεί στη διαμόρφωση q_1, q_2 , του ΔΡΣ του Σχήματος 3.12, από το ΚΜ του συστήματος.

Με αντικατάσταση της Εξ. (3-22α), με $S_0=0$, στην Εξ. (3-62) και για $q_1 \in [0, 2\pi)$ προκύπτουν οι αποστάσεις του βαρύκεντρου του τρίτου συνδέσμου από το ΚΜ του συστήματος που δημιουργούν την περιοχή PDW (B) στον Καρτεσιανό χώρο, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.3. Αντίστοιχα με αντικατάσταση της Εξ. (3-22β), με $S_0=0$, στην Εξ. (3-62) και για $q_1 \in [0, 2\pi]$ προκύπτουν οι αποστάσεις του σημείου αυτού από το ΚΜ του συστήματος που δημιουργούν την περιοχή PDW (A).

3.3.2 Κίνηση στο Χώρο

Όπως προκύπτει από την Εξ. (3-48α), για τη μετάβαση του ΤΣΔ από ένα σημείο σε ένα άλλο σημείο του Καρτεσιανού χώρου κατά μήκος ενός επιθυμητού δρόμου στο χώρο ορίζοντας παράλληλα και τον προσανατολισμό του, απαιτείται ΔΡΣ με βραχίονα με τουλάχιστον 6-BE. Στην παρούσα εργασία, μελετώνται ΔΡΣ με μη πλεονάζοντες BE. Για τη επίτευξη, λοιπόν, του επιθυμητού δρόμου και προσανατολισμού του ΤΣΔ στο χώρο, χρησιμοποιείται το τρισδιάστατο ΔΡΣ με ένα βραχίονα 6-BE του Σχήματος 3.13.



Σχήμα 3.13. Τρισδιάστατο Ελεύθερα Αιωρούμενο ΔΡΣ με ένα Βραχίονα 6-BE.

Στην περίπτωση που ικανοποιούνται οι παραδοχές των Εξ. (3-32) και ο βραχίονας έχει σφαιρικό καρπό, η συνάρτηση που δίνει τις δυναμικές ιδιομορφίες είναι:

$$S(q_2, q_3, q_4, q_5, q_6) = -ac {}^0D_3 \cos(q_2) + ad {}^0D_2 \cos(q_2 + q_3) + cd {}^0D_0 \sin(q_3) \quad (3-63a)$$

όπου τα μήκη a, c, d των βαρυκεντρικών διανυσμάτων δίνονται από τις Εξ. (Γ-54) (Παράρτημα Γ.2.1) και οι αδρανειακοί όροι 0D_i , $i=0,2,3$ δίνονται από τις Εξ. (Γ-55) (Παράρτημα Γ.2.1).

Λόγω του σφαιρικού καρπού, γίνεται αποσύζευξη των Δυναμικών Ιδιομορφιών από τις ιδιομορφίες του καρπού. Μετά από αντικατάσταση των όρων 0D_i , $i=0,2,3$, από το Παράρτημα Γ.2.1, προκύπτει ότι:

$$S(q_2, q_3) = k_0(q_2) + k_1(q_2) \sin(q_3) + k_2(q_2) \cos(q_3) \quad (3-63\beta)$$

όπου οι συντελεστές k_i , $i=0,1,2$ δίνονται από τις Εξ. (Γ-60) στο Παράρτημα Γ.2.2.

3.4 Επίδραση της Στροφορμής στο Σχεδιασμό Δρόμου.

Όπως προαναφέρθηκε στην Παράγραφο 2.1, είναι πιθανό οι μηχανισμοί ελέγχου στροφορμής, λόγω κορεσμού, να μην έχουν μπορέσει να απορροφήσουν πλήρως τη στροφορμή που έχει συγκεντρωθεί στο σύστημα. Στην παράγραφο αυτή θα εξεταστεί η επίδραση της αρχικής στροφορμής του συστήματος στον σχεδιασμό δρόμου του ΤΣΔ του ελεύθερα αιωρούμενου διαστημικού βραχίονα.

Στην περίπτωση που ο προσανατολισμός του δορυφόρου περιγράφεται από τις παραμέτρους Euler ε, n , οι Εξ. (3-7) γράφονται:

$$\begin{bmatrix} \dot{\varepsilon} \\ \dot{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1/2)(\varepsilon^\times + n\mathbf{I}_3) \\ -(1/2)\varepsilon^\top \end{bmatrix} {}^0\omega_0 \quad (3-64)$$

Με αντικατάσταση της γωνιακής ταχύτητας ${}^0\omega_0$ από την Εξ. (3-6β) στην Εξ. (3-64), οι Εξ. (3-64) και (3-6α) γράφονται σε μητρική μορφή:

$$\dot{\Theta} = \mathbf{A}_1(\Theta) \mathbf{h}_{\text{CM}} + \mathbf{A}_2(\Theta) \dot{\mathbf{r}}_E \quad (3-65)$$

όπου το $\dot{\mathbf{r}}_E$ δίνεται από την Εξ. (3-10α) και το $(4+N) \times 1$ διάνυσμα Θ είναι:

$$\Theta = \begin{bmatrix} \varepsilon^\top & n & \mathbf{q}^\top \end{bmatrix}^\top \quad (3-66)$$

Επίσης, οι $(4+N) \times 3$ πίνακες \mathbf{A}_1 και \mathbf{A}_2 δίνονται από:

$$\mathbf{A}_1(\Theta) = \begin{bmatrix} \mathbf{W} [{}^0\mathbf{D}^{-1} + {}^0\mathbf{D}^{-1} {}^0\mathbf{D}_q \mathbf{S}^{-1} {}^0\mathbf{J}_{11} {}^0\mathbf{D}^{-1}] \mathbf{R}_0^\top \\ -\mathbf{S}^{-1} {}^0\mathbf{J}_{11} {}^0\mathbf{D}^{-1} \mathbf{R}_0^\top \end{bmatrix} \quad (3-67\alpha)$$

$$\mathbf{A}_2(\Theta) = \begin{bmatrix} -\mathbf{W} {}^0\mathbf{D}^{-1} {}^0\mathbf{D}_q \mathbf{S}^{-1} \mathbf{R}_0^\top \\ \mathbf{S}^{-1} \mathbf{R}_0^\top \end{bmatrix} \quad (3-67\beta)$$

όπου ο 4×3 πίνακας \mathbf{W} ορίζεται από:

$$\mathbf{W}(\varepsilon, n) = \begin{bmatrix} (1/2)(\varepsilon^\times + n\mathbf{I}_3) \\ -(1/2)\varepsilon^\top \end{bmatrix} \quad (3-67\gamma)$$

Η Εξ. (3-65), χρησιμοποιώντας την Εξ. (3-10α), γράφεται:

$$d\Theta = \mathbf{A}_1(\Theta) \cdot \mathbf{h}_{\text{CM}} dt + \mathbf{A}_2(\Theta) \cdot \mathbf{F}(s(t; t_f)) \dot{s}(t; t_f) dt \quad (3-68)$$

όπου η μεταβλητή s δίνεται από τις Εξ. (3-9).

Λαμβάνοντας υπόψη τις Εξ. (3-9γ) και (3-10β), η Εξ. (3-68) γράφεται:

$$d\Theta = \mathbf{A}_1(\Theta) \cdot \mathbf{h}_{\text{CM}} t_f d\tau + \mathbf{A}_2(\Theta) \cdot \mathbf{F}(s(\tau)) g(\tau) d\tau \quad (3-69)$$

όπου $g(\tau)$ είναι ο αριθμητής του κλάσματος που ορίζει την \dot{s} στην Εξ. (3-10β).

Η λύση της Εξ. (3-69), θεωρώντας αρχικές συνθήκες Θ_{in} , έχει τη μορφή:

$$\Theta = \Theta(\tau; \mathbf{h}_{\text{CM}} t_f, \Theta_{\text{in}}) \quad (3-70\alpha)$$

Από την Εξ. (3-9β) προκύπτει ότι κάθε αδιάστατη χρονική στιγμή τ αντιστοιχεί σε κάποια τιμή της μεταβλητής s , δηλαδή σε κάποιο σημείο της επιθυμητής διαδρομής του ΤΣΔ. Οπότε η Εξ. (3-70α) μπορεί να γραφτεί ως:

$$\Theta = \Theta(s; \mathbf{h}_{\text{CM}} t_f, \Theta_{\text{in}}) \quad (3-70\beta)$$

Από την Εξ. (3-70β) προκύπτει ότι στην περίπτωση μη μηδενικής στροφορμής οι τιμές του προσανατολισμού του δορυφόρου και της αντίστοιχης διαμόρφωσης του βραχίονα σε κάθε σημείο της επιθυμητής διαδρομής του ΤΣΔ, που περιγράφεται από τη μεταβλητή s , εξαρτώνται από τις αρχικές συνθήκες Θ_{in} καθώς και από το συνολικό χρόνο t_f της κίνησης.

Στην περίπτωση που η στροφορμή του συστήματος είναι μηδέν, ο όρος $\mathbf{h}_{\text{CM}} t_f$ στις Εξ. (3-70) μηδενίζεται, οπότε προκύπτει:

$$\Theta = \Theta(\tau; \Theta_{\text{in}}) \quad (3-71\alpha)$$

ή αντίστοιχα:

$$\Theta = \Theta(s; \Theta_{\text{in}}) \quad (3-71\beta)$$

Από την Εξ. (3-71β) προκύπτει ότι στην περίπτωση μηδενικής στροφορμής οι τιμές του προσανατολισμού του δορυφόρου και της αντίστοιχης διαμόρφωσης του βραχίονα σε κάθε σημείο της επιθυμητής διαδρομής του ΤΣΔ, που περιγράφεται από τη μεταβλητή s , εξαρτώνται μόνο από τις αρχικές συνθήκες Θ_{in} και είναι ανεξάρτητες από το συνολικό χρόνο t_f της κίνησης.

Στη συνέχεια υπολογίζεται ο αρχικός προσανατολισμός του δορυφόρου και η αρχική διαμόρφωση του βραχίονα του ΔΡΣ όταν το ΤΣΔ βρίσκεται στο αρχικό σημείο του επιθυμητού δρόμου με τα αντίστοιχα μεγέθη σε κάποιο συγκεκριμένο σημείο του δρόμου γνωστά. Έστω ότι το ΤΣΔ ξεκινά από κάποιο σημείο A του Καρτεσιανού χώρου, στο οποίο αντιστοιχεί αδιάστατος χρόνος τ_1 . Ο προσανατολισμός του δορυφόρου και η διαμόρφωση του βραχίονα, στο σημείο αυτό, δίνονται από το άγνωστο διάνυσμα-στήλη Θ_1 . Σε ένα σημείο B της διαδρομής, στο οποίο αντιστοιχεί αδιάστατος χρόνος τ_2 , ο προσανατολισμός του δορυφόρου και η διαμόρφωση του βραχίονα δίνονται από το γνωστό διάνυσμα-στήλη Θ_2 . Το ΤΣΔ διαγράφει τη διαδρομή AB μέσα σε χρόνο t_f . Όπως αποδεικνύεται παρακάτω, το άγνωστο διάνυσμα-στήλη Θ_1 , υπολογίζεται θεωρώντας την

αντίστροφη κίνηση του ΤΣΔ από το σημείο Β στο σημείο Α για χρόνο t_f με αντίθετη ταχύτητα και με αντίθετη στροφορμή. Πιο αναλυτικά έχουμε:

Έστω η υποθετική κίνηση του ΤΣΔ από το σημείο Β, που αντιστοιχεί σε προσανατολισμό του δορυφόρου και σε διαμόρφωση του βραχίονα Θ_2 και σε αδιάστατο χρόνο $\tau_2=0$, προς το σημείο Α, που αντιστοιχεί σε προσανατολισμό του δορυφόρου και σε διαμόρφωση του βραχίονα Θ_3 και σε αδιάστατο χρόνο $\tau_3=1$, με αντίθετη ταχύτητα του ΤΣΔ και αντίθετη αρχική στροφορμή του ΔΡΣ. Το διάνυσμα Θ_3 προκύπτει από την ολοκλήρωση της Εξ. (3-69):

$$\int_{\Theta_2}^{\Theta_3} d\Theta = \Theta_3 - \Theta_2 = - \int_{\tau_2=0}^{\tau_3=1} \mathbf{A}_1(\Theta(\tau, \mathbf{h}_{CM} t_f)) \mathbf{h}_{CM} t_f d\tau - \int_{\tau_2=0}^{\tau_3=1} \mathbf{A}_2(\Theta(\tau, \mathbf{h}_{CM} t_f)) \mathbf{F}(s(\tau)) g(\tau) d\tau \quad (3-72\alpha)$$

Έστω τώρα η πραγματική κίνηση του ΤΣΔ από το σημείο Α στο σημείο Β. Η κίνηση αυτή πραγματοποιείται στο ίδιο χρονικό διάστημα t_f και το σύστημα ξεκινάει με προσανατολισμό δορυφόρου και διαμόρφωση βραχίονα που περιγράφεται από το ζητούμενο διάνυσμα Θ_1 . Ο προσανατολισμός του δορυφόρου και η διαμόρφωση του βραχίονα στο σημείο Β περιγράφεται από το γνωστό διάνυσμα Θ_2 . Από ολοκλήρωση της Εξ. (3-69), προκύπτει:

$$\int_{\Theta_1}^{\Theta_2} d\Theta = \Theta_2 - \Theta_1 = \int_{\tau_1=0}^{\tau_2=1} \mathbf{A}_1(\Theta(\tau, \mathbf{h}_{CM} t_f)) \mathbf{h}_{CM} t_f d\tau + \int_{\tau_1=0}^{\tau_2=1} \mathbf{A}_2(\Theta(\tau, \mathbf{h}_{CM} t_f)) \mathbf{F}(s(\tau)) g(\tau) d\tau \quad (3-72\beta)$$

Σύγκριση των Εξ. (3-72α) και (3-72β) δίνει:

$$\Theta_2 - \Theta_1 = -(\Theta_3 - \Theta_2) \Rightarrow \Theta_3 = \Theta_1 \quad (3-73)$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι ο αρχικός προσανατολισμός του δορυφόρου και η αντίστοιχη διαμόρφωση του βραχίονα με την οποία ξεκινά μια επιθυμητή κίνηση ΑΒ, μπορεί να υπολογιστεί εάν γνωρίζουμε τα αντίστοιχα μεγέθη σε ένα σημείο Ε της διαδρομής ΑΒ που φτάνει το ΤΣΔ μετά από χρόνο Δt . Αρκεί να πραγματοποιήσουμε την αντίστροφη υποθετική κίνηση του ΤΣΔ από το σημείο Ε στο σημείο Α για χρόνο Δt και με αντίθετη στροφορμή. Η ιδιότητα αυτή θα χρησιμοποιηθεί στο επόμενο κεφάλαιο.

3.5 Εφαρμογές

Στο εδάφιο αυτό, παρουσιάζονται ορισμένες εφαρμογές της ανάλυσης που προηγήθηκε. Οι Εφαρμογές 3.1 και 3.2 εξετάζουν κάτω από ποιες συνθήκες μπορεί το ΤΣΔ ενός επίπεδου και τρισδιάστατου ρομποτικού βραχίονα, αντίστοιχα, να παραμείνει ακίνητο στον Καρτεσιανό χώρο κάτω από την επίδραση αρχικής στροφορμής.

Στις Εφαρμογές 3.3 και 3.4 μελετάται η επίδραση της αρχικής στροφορμής στην απόκριση ενός ελεύθερα αιωρούμενου βραχίονα κατά την κίνηση του ΤΣΔ κατά μήκος

ενός επιθυμητού δρόμου που διέρχεται μόνο μέσα από την περιοχή PIW. Στην Εφαρμογή 3.3 δείχνεται ότι στην περίπτωση που το σύστημα έχει μηδενική αρχική στροφορμή, η διάρκεια κίνησης του ΤΣΔ στην επιθυμητή διαδρομή δεν έχει καμία επίδραση στην απόκριση του συστήματος. Αντίθετα, στην Εφαρμογή 3.4, όταν το σύστημα έχει κάποια αρχική στροφορμή, η απόκρισή του εξαρτάται από το συνολικό χρόνο κίνησης του ΤΣΔ κατά μήκος του επιθυμητού δρόμου.

Τέλος, στην Εφαρμογή 3.5, εξετάζεται η επίδραση του αρχικού προσανατολισμού του δορυφόρου στην αποφυγή των δυναμικών ιδιομορφιών, όταν το ΤΣΔ του βραχίονα εκτελεί κίνηση κατά μήκος επιθυμητού δρόμου που διέρχεται μέσα από μια περιοχή PDW.

Εφαρμογή 3.1: Στην εφαρμογή αυτή, μελετάται η περίπτωση όπου το ΤΣΔ μπορεί να παραμείνει ακίνητο για απεριόριστο χρόνο σε κάποιο σημείο του χώρου εργασίας εκτελώντας κάποια εργασία (π.χ. επιθεώρηση ή επισκευή δορυφόρου), όταν το σύστημα έχει μη μηδενική αρχική στροφορμή. Είναι γνωστό ότι στην περίπτωση μηδενικής στροφορμής, το ΤΣΔ μπορεί να παραμείνει σε οποιοδήποτε σημείο του χώρου εργασίας ακίνητο. Η ύπαρξη όμως μη μηδενικής στροφορμής έχει ως αποτέλεσμα την κίνηση του ρομποτικού βραχίονα καθώς και του δορυφόρου του ΔΡΣ με τέτοιο τρόπο ώστε η στροφορμή του συστήματος να διατηρείται.

Έστω το επίπεδο ΔΡΣ με βραχίονα 2-ΒΕ του Σχήματος 3.2 του οποίου οι παράμετροι δίνονται από τον Πίνακα 3.1.

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.1. ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ ΤΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΔΡΣ ΜΕ ΕΝΑ ΒΡΑΧΙΟΝΑ 2-ΒΕ ΤΟΥ ΣΧΗΜΑΤΟΣ 3.1

Σώμα	$l_i (m)$	$r_i (m)$	$m_i (Kg)$	$I_i (Kg m^2)$
0	0.5	0.5	400	66.67
1	1.0	1.0	40	3.33
2	0.5	0.5	30	2.50

Για να έχουμε τη θέση \mathbf{r}_E του ΤΣΔ σταθερή στον Καρτεσιανό χώρο, θέτουμε:

$$\mathbf{r}_E = [x_E \quad y_E]^T = \text{σταθ.} \quad (3-74)$$

Εφόσον, το ελεύθερα αιωρούμενο ΔΡΣ έχει μη μηδενική στροφορμή, ο προσανατολισμός θ_0 του δορυφόρου του ΔΡΣ θα αλλάζει συνεχώς έτσι ώστε να διατηρείται η στροφορμή ΔΡΣ και παράλληλα το ΤΣΔ να παραμένει σταθερό σε κάποιο επιθυμητό σημείο στον Καρτεσιανό χώρο. Αρχικά, λοιπόν, πρέπει να εξασφαλισθεί ότι το επιθυμητό σημείο βρίσκεται στον υπόχωρο του χώρου εργασίας όπου κάθε σημείο του μπορεί να προσεγγιστεί από το ΤΣΔ με οποιοδήποτε προσανατολισμό του δορυφόρου του ΔΡΣ. Ο υπόχωρος αυτός ονομάζεται *ελεύθερος χώρος εργασίας* (free workspace), [97]. Δηλαδή,

θα πρέπει να βρεθούν εκείνες οι θέσεις \mathbf{r}_E του ΤΣΔ για τις οποίες το αντίστροφο κινηματικό πρόβλημα,

$$q_i = q_i(\mathbf{r}_E, \theta_0) \quad i = 1, 2 \quad (3-75)$$

έχει πάντα λύσεις, ανεξάρτητα από τον προσανατολισμό θ_0 του δορυφόρου.

Για το ΔΡΣ του Σχήματος 3.2, η λύση του αντίστροφου κινηματικού προβλήματος δίνεται από τις Εξ. (B-10) του Παραρτήματος Β.1.1. Όπως προκύπτει από την Εξ. (B-5β) του Παραρτήματος Β.1.1, το αντίστροφο κινηματικό πρόβλημα έχει λύση μόνο όταν

$$-1 \leq c_{q_2} \leq 1 \quad (3-76\alpha)$$

όπου:

$$c_{q_2} = \frac{(x_E - a c_{\theta_0})^2 + (y_E - a s_{\theta_0})^2 - b^2 - c^2}{2bc} \quad (3-76\beta)$$

Από τις Εξ. (3-76) προκύπτει ότι:

$$(b-c)^2 \leq r \leq (b+c)^2 \quad (3-77\alpha)$$

όπου

$$r = x_E^2 + y_E^2 + a^2 - 2a(x_E c_{\theta_0} + y_E s_{\theta_0}) \quad (3-77\beta)$$

Η συνάρτηση $x_E c_{\theta_0} + y_E s_{\theta_0}$ που εμφανίζεται στην Εξ. (3-77β) μπορεί να γραφτεί ως:

$$x_E c_{\theta_0} + y_E s_{\theta_0} = \begin{bmatrix} x_E & y_E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{\theta_0} \\ s_{\theta_0} \end{bmatrix} = \mathbf{r}_E^T \mathbf{a} \quad (3-78)$$

όπου τα διανύσματα

$$\mathbf{r}_E = \begin{bmatrix} x_E \\ y_E \end{bmatrix} \quad (3-79\alpha)$$

και

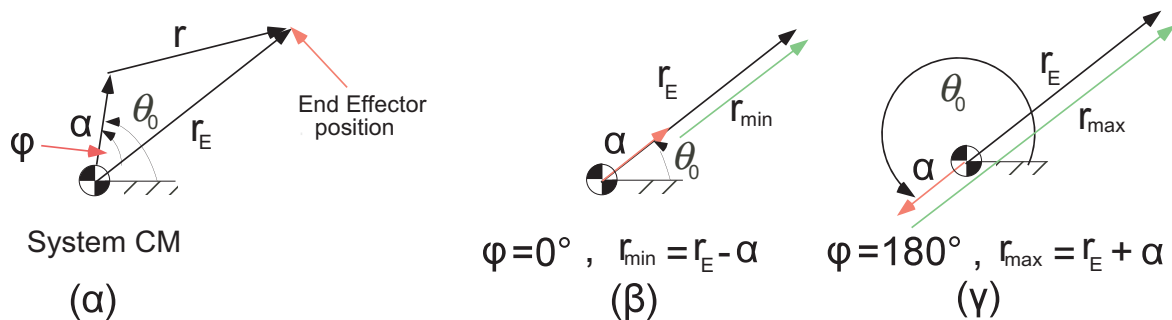
$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} c_{\theta_0} \\ s_{\theta_0} \end{bmatrix} \quad (3-79\beta)$$

φαίνονται στο Σχήμα 3.14(α). Το εσωτερικό γινόμενο στην Εξ. (3-78) ισούται με:

$$x_E c_{\theta_0} + y_E s_{\theta_0} = |\mathbf{r}_E| |\mathbf{a}| c_\varphi = \sqrt{x_E^2 + y_E^2} (s_{\theta_0}^2 + c_{\theta_0}^2) c_\varphi = \sqrt{x_E^2 + y_E^2} c_\varphi = r_E c_\varphi \quad (3-80)$$

όπου φ είναι η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων \mathbf{r}_E και \mathbf{a} , όπως φαίνεται και στο Σχήμα 3.14(α) και r_E είναι η απόσταση του ΤΣΔ από το ΚΜ του ΔΡΣ,

$$r_E = \sqrt{x_E^2 + y_E^2} \quad (3-81)$$



Σχήμα 3.14. (α) Αναπαράσταση των διανυσμάτων r_E και α , (β) Γεωμετρική αναπαράσταση του r_{\min} και (γ) Γεωμετρική αναπαράσταση του r_{\max} .

Η Εξ. (3-77β) γράφεται ως:

$$r = r_E^2 + a^2 - 2 a r_E c_\varphi \quad (3-82)$$

Για το υπολογισμό των θέσεων του ΤΣΔ όπου ισχύει η Εξ. (3-77α) αρκεί να υπολογιστούν τα ακρότατα του μεγέθους r , τα οποία είναι:

$$r_{\min} = r_E^2 + a^2 - 2 a r_E = (r_E - a)^2, \varphi = 0 \quad (3-83\alpha)$$

$$r_{\max} = r_E^2 + a^2 + 2 a r_E = (r_E + a)^2, \varphi = \pi \quad (3-83\beta)$$

Η γεωμετρική προσέγγιση των παραπάνω ελάχιστων και μέγιστων τιμών παρουσιάζεται στα Σχήματα 3.14(α) και (β), αντίστοιχα. Η ανισότητα (3-77α) ικανοποιείται μόνο όταν

$$r_{\min} \geq (b - c)^2 \quad (3-84\alpha)$$

$$r_{\max} \leq (b + c)^2 \quad (3-84\beta)$$

Οι ανισότητες (3-84) σε συνδυασμό με τις Εξ. (3-83) δίνουν δυο λύσεις. Η πρώτη λύση είναι:

$$a + |b - c| \leq r_E \leq b + c - a \quad (3-85\alpha)$$

με $a < \min(b, c)$. Η δεύτερη λύση είναι:

$$r_E \leq \min(-a + b + c, a - |b - c|) \quad (3-85\beta)$$

με $|b - c| < a < b + c$.

Για το σύστημα με παραμέτρους που δίνονται από τον Πίνακα 3.1 και από τις Εξ. (3-85) προκύπτουν τα όρια του ελεύθερου χώρου εργασίας:

$$1.2447 m \leq r_E \leq 2.3298 m$$

Για να παραμείνει ακίνητο το ΤΣΔ σε κάποιο σημείο του Καρτεσιανού χώρου θα πρέπει η γραμμική του ταχύτητα ως προς το αδρανειακό ΣΣ να είναι ίση με μηδέν. Για το επίπεδο ΔΡΣ με βραχίονα 2-BE του Σχήματος 3.2, οι Εξ. (3-19) δίνουν για μηδενική γραμμική ταχύτητα του ΤΣΔ:

$$\dot{\theta}_0 = \frac{bc s_{(q_2)}}{S(q_1, q_2)} h_{CM} \quad (3-86\alpha)$$

$$\dot{q}_1 = -\frac{ac s_{(q_1+q_2)} + bc s_{(q_2)}}{S(q_1, q_2)} h_{CM} \quad (3-86\beta)$$

$$\dot{q}_2 = \frac{ab s_{(q_1)} + ac s_{(q_1+q_2)}}{S(q_1, q_2)} h_{CM} \quad (3-86\gamma)$$

Οι Εξ. (3-86) επιτρέπουν τον σχεδιασμό κινήσεων των αρθρώσεων του βραχίονα έτσι ώστε το ΤΣΔ να παραμένει σε σταθερή θέση. Από τις Εξ. (3-86) προκύπτει ότι η γωνιακή ταχύτητα του δορυφόρου καθώς και οι ταχύτητες των αρθρώσεων είναι ανάλογες της αρχικής στροφορμής του συστήματος και μηδενίζονται όταν αυτή είναι μηδέν.

Καθώς οι γωνίες των αρθρώσεων του βραχίονα μεταβάλλονται σύμφωνα με τις Εξ. (3-87β) – (3-87γ) υπάρχει πιθανότητα κάποια στιγμή να πάρουν τέτοιες τιμές ώστε να μηδενιστεί η συνάρτηση $S(q_1, q_2)$, δηλαδή ο βραχίονας να γίνει ιδόμορφος. Για να αποφευχθεί κάποια τέτοια περίπτωση θα πρέπει η επιθυμητή θέση του ΤΣΔ να βρίσκεται μέσα στην περιοχή PIW του χώρου εργασίας του βραχίονα.

Για το σύστημα αυτό, από τις Εξ. (3-22α), με $S_0 = 0$, και (3-23) και για τιμές της μεταβλητής $q_1 \in [0, 2\pi)$ προκύπτουν οι ακτίνες του υποχώρου PDW (A) με όρια:

$$0.3936 m \leq R \leq 1.2553 m$$

Αντίστοιχα από τις Εξ. (3-22β), με $S_0 = 0$, και (3-23) και για τιμές της μεταβλητής $q_1 \in [0, 2\pi)$ προκύπτουν οι ακτίνες του υποχώρου PDW (B) με όρια:

$$2.3298 m \leq R \leq 3.1809 m$$

Τα όρια του υποχώρου PIW προκύπτουν από τις παραπάνω ακτίνες και είναι:

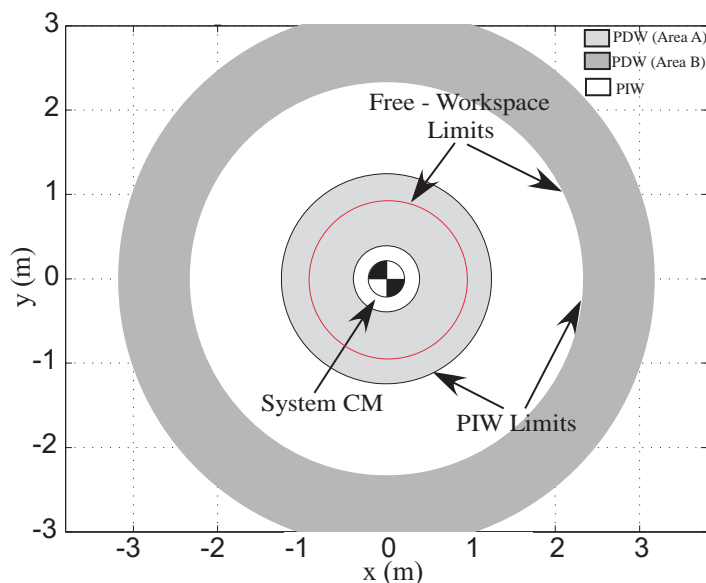
$$1.2553 m \leq R \leq 2.3298 m$$

Για να μπορέσει το ΤΣΔ να παραμείνει ακίνητο σε κάποιο σημείο του χώρου παρά την ύπαρξη στροφορμής, θα πρέπει το σημείο αυτό να ανήκει στη περιοχή που οριοθετείται από την τομή των ορίων του ελεύθερου χώρου εργασίας και των ορίων του υποχώρου PIW, βλ. Σχήμα 3.15. Από το Σχήμα 3.15 προκύπτει ότι η τομή των δυο περιοχών (ελεύθερου χώρου εργασίας και PIW) είναι τα όρια της περιοχής PIW. Δηλαδή η ακτίνα R_E του επιθυμητού σημείου E από το ΚΜ του ΔΡΣ πρέπει να ανήκει στην περιοχή:

$$1.2553 m \leq R_E \leq 2.3298 m$$

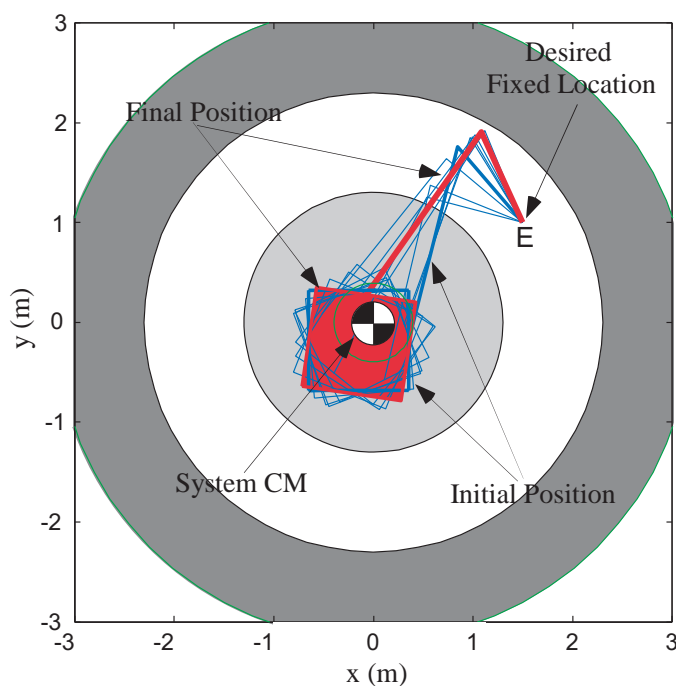
Έστω ότι επιλέγουμε το σημείο E (1.5, 1.0) του οποίου η απόσταση από το ΚΜ του ΔΡΣ είναι $R_E = 1.8 m$. Εφόσον το σημείο E βρίσκεται στον ελεύθερο χώρο εργασίας μπορούμε να επιλέξουμε οποιοδήποτε αρχικό προσανατολισμό του δορυφόρου του ΔΡΣ.

Για αρχικό προσανατολισμό του δορυφόρου $\theta_0^{in} = 0^0$, η διαμόρφωση του βραχίονα που αντιστοιχεί στη θέση του ΤΣΔ στο σημείο E, για elbow-up σχηματισμό, δίνεται από τις Εξ. (B-10) του Παραρτήματος Β.1.1 από τις οποίες προκύπτει $q_1^{in} = 76^0$ και $q_2^{in} = -125^0$.



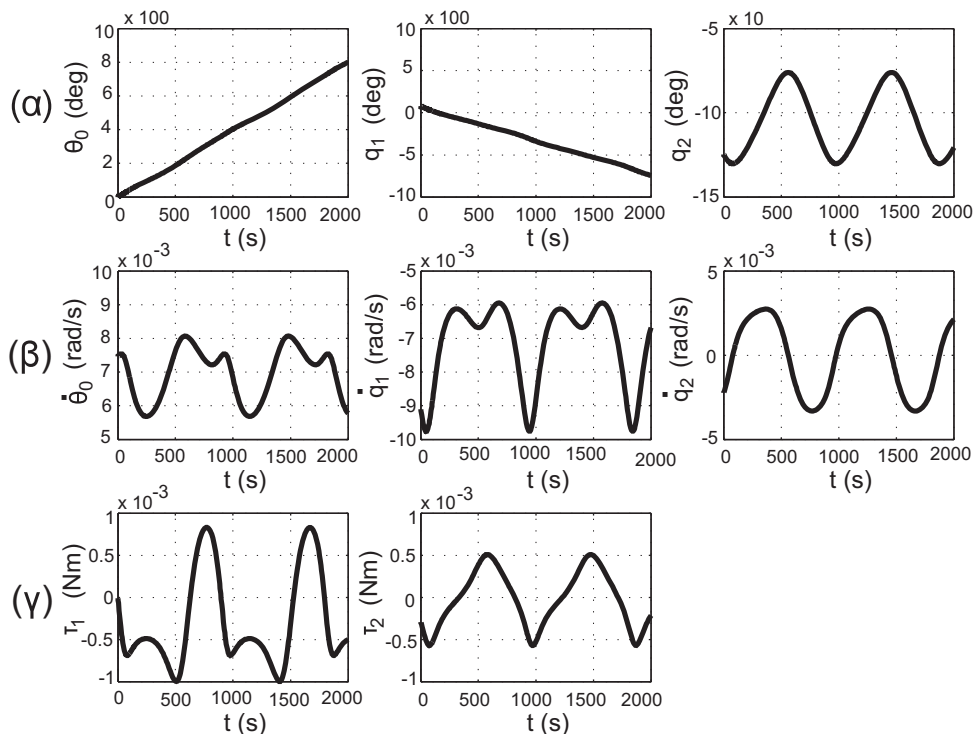
Σχήμα 3.15. Όρια Ελεύθερου χώρου εργασίας και περιοχής PIW.

Η ολοκλήρωση των Εξ. (3-87) με αρχικές συνθήκες $(\theta_0^{in}, q_1^{in}, q_2^{in})$ δίνει την κίνηση του συστήματος στιγμιότυπα της οποίας παρουσιάζονται στο Σχήμα 3.16. Καθώς το ΤΣΔ παραμένει σε σταθερή θέση, ο δορυφόρος του ΔΡΣ περιστρέφεται αργά ενώ ο βραχίονας εκτελεί μια ταλαντευόμενη κίνηση με τέτοιο τρόπο ώστε η στροφορμή του ΔΡΣ να παραμένει σταθερή.



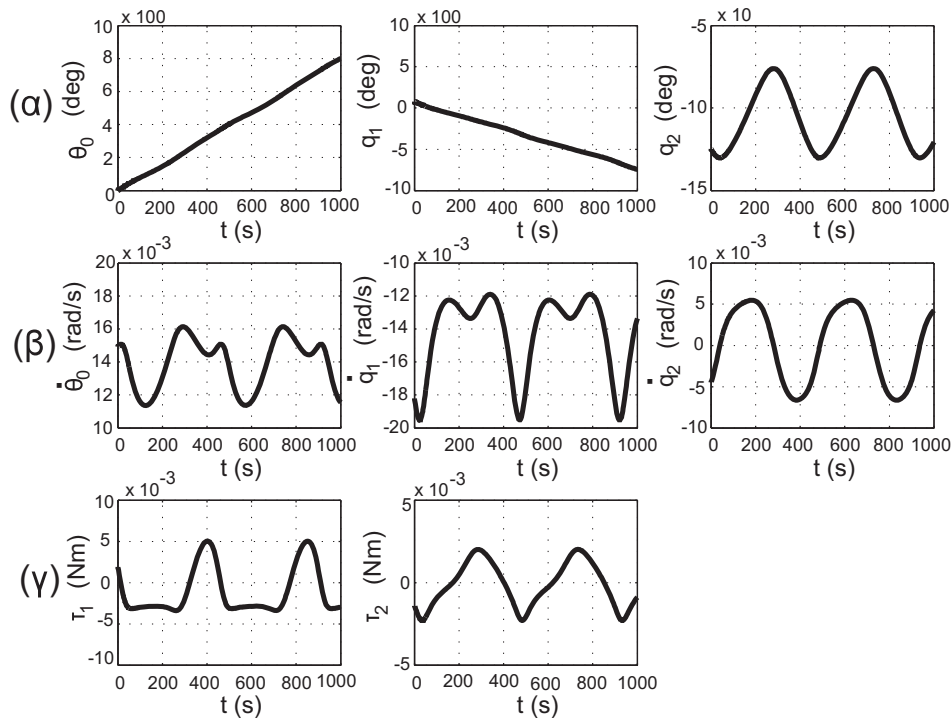
Σχήμα 3.16. Στιγμιότυπα κίνησης επίπεδου ΔΡΣ με μη μηδενική αρχική στροφορμή καθώς η θέση του ΤΣΔ στον Καρτεσιανό χώρο παραμένει σταθερή.

Οι τροχιές καθώς και οι ρυθμοί των μεταβλητών διαμόρφωσης, όπως φαίνονται στα Σχήματα 3.17(α) και (β) για αρχική στροφορμή $h_{CM} = 0.5 \text{ Nms}$, είναι λείες κατά τη διάρκεια της κίνησης. Επίσης η γωνία της πρώτης άρθρωσης αυξάνεται συνεχώς με το χρόνο, κάτι το οποίο απαιτεί έναν ειδικό σχεδιασμό της άρθρωσης αυτής ή καθορισμό της διάρκειας κίνησης του ΔΡΣ από τα όρια των αρθρώσεων. Εφόσον στα διαστημικά συστήματα η ποσότητα συσσωρευμένης στροφορμής είναι πολύ μικρή, αναμένεται ότι τα όρια των αρθρώσεων είναι αρκετά, για πρακτικές εφαρμογές, ώστε η επιθυμητή σταθερή θέση του ΤΣΔ να διατηρηθεί για αρκετό χρόνο. Η απαιτούμενη εργασία του ΔΡΣ εκτελείται από τους κινητήρες των αρθρώσεων. Είναι σημαντικό λοιπόν, να γνωρίζουμε εάν οι απαιτούμενες ροπές μπορούν να εφαρμοστούν από ένα σύστημα κινητήρων. Οι απαιτούμενες ροπές στις αρθρώσεις του βραχίονα που αντιστοιχούν στην κίνηση του ΔΡΣ του Σχήματος 3.16 υπολογίζονται από την Εξ. (2-68) και παρουσιάζονται στο Σχήμα 3.17(γ). Εξετάζεται το μέτρο και η ομαλότητα των εφαρμοζόμενων ροπών ώστε να εξασφαλιστεί ότι η εργασία του ΔΡΣ δεν απαιτεί μεγάλες ροπές ή ροπές με μεταβατική κατάσταση υψηλής συχνότητας (π.χ. όχι chattering). Όπως προκύπτει από το Σχήμα 3.17(γ), οι απαιτούμενες ροπές στις αρθρώσεις του βραχίονα, οι οποίες είναι μικρές και λείες, και μπορούν να εφαρμοστούν εύκολα από κινητήρες έτσι ώστε η παραπάνω κίνηση του βραχίονα να είναι εφικτή.



Σχήμα 3.17. (α) Προσανατολισμός δορυφόρου και διαμόρφωση βραχίονα, (β) Γωνιακή ταχύτητα δορυφόρου και ταχύτητες των αρθρώσεων και (γ) απαιτούμενες ροπές στις αρθρώσεις.

Στο Σχήμα 3.18(α) παρουσιάζεται η χρονική απόκριση του προσανατολισμού του δορυφόρου καθώς και της διαμόρφωσης του βραχίονα του ΔΡΣ καθώς το ΤΣΔ παραμένει ακίνητο στο σημείο E του χώρου για διπλάσια αρχική στροφορμή του ΔΡΣ, δηλαδή $h_{CM}=1.0 Nms$. Το Σχήμα 3.18(β) δείχνει τη γωνιακή ταχύτητα του δορυφόρου και τις ταχύτητες των αρθρώσεων του βραχίονα. Παρατηρείται ότι καθώς διπλασιάζεται η αρχική στροφορμή του ΔΡΣ, διπλασιάζονται και οι αντίστοιχες ταχύτητες του ΔΡΣ, όπως προκύπτει και από τις Εξ. (3-87). Στην περίπτωση αυτή απαιτείται ο μισός χρόνος για την αντίστοιχη μεταβολή του προσανατολισμού του δορυφόρου και της διαμόρφωσης του βραχίονα του ΔΡΣ. Τέλος στο Σχήμα 3.18(γ) παρουσιάζονται οι αντίστοιχες ροπές που εφαρμόζονται στις αρθρώσεις του βραχίονα. Ο διπλασιασμός της αρχικής στροφορμής του ΔΡΣ δεν προκαλεί αντίστοιχη μεταβολή στις απαιτούμενες ροπές στις αρθρώσεις γιατί όπως αποδείχθηκε στο Κεφάλαιο 2, οι δυναμικές εξισώσεις των ελεύθερα αιωρούμενων ΔΡΣ δεν είναι ανάλογες της αρχικής στροφορμής του ΔΡΣ. Πιο συγκεκριμένα για το επίπεδο ΔΡΣ αυτής της εφαρμογής οι δυναμικές εξισώσεις περιέχουν όρους που είναι ανάλογοι της ποσότητας h_{CM}^2 , βλ. Εξ. (2-68β).



Σχήμα 3.18. (α) Προσανατολισμός δορυφόρου και διαμόρφωση βραχίονα, (β) Γωνιακή ταχύτητα δορυφόρου και ταχύτητες των αρθρώσεων και (γ) απαιτούμενες ροπές στις αρθρώσεις.

Εφαρμογή 3.2: Η Εφαρμογή 3.1 επεκτείνεται εδώ σε *τρισδιάστατη* κίνηση ΔΡΣ χρησιμοποιώντας τις γενικές εξισώσεις κίνησης των ελεύθερα αιωρούμενων ΔΡΣ. Στην παρούσα εφαρμογή γίνεται προσομοίωση της κίνησης του τρισδιάστατου ΔΡΣ που έχει στο δορυφόρο προσαρτημένο έναν ανθρωπομορφικό (RRR) βραχίονα 3-BE, Σχήμα 3.9.

Οι παράμετροι του ΔΡΣ παρουσιάζονται στον Πίνακα 3.2, ενώ η αρχική στροφορμή του ΔΡΣ είναι $\mathbf{h}_{\text{CM}} = [0.3 \ 0.1 \ 0.5]^T \text{ Nm s}$.

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.2. ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ ΤΟΥ ΤΡΙΣΔΙΑΣΤΑΤΟΥ ΔΡΣ ΜΕ ΕΝΑ ΒΡΑΧΙΟΝΑ 3-ΒΕ ΤΟΥ ΣΧΗΜΑΤΟΣ 3.4.

Body	$l_i (m)$	$r_i (m)$	$m_i (Kg)$	$I_{xx} (Kg m^2)$	$I_{yy} (Kg m^2)$	$I_{zz} (Kg m^2)$
0	-	$[0,0,0.5]^T$	400.00	66.67	66.67	66.67
1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
2	0.5	0.5	30.00	0.00	2.50	2.50
3	0.5	0.5	20.00	0.00	1.70	1.70

Για να έχουμε τη θέση \mathbf{r}_E του ΤΣΔ σταθερή, θέτουμε:

$$\mathbf{r}_E = [x_E, y_E, z_E]^T = \text{const.} \quad (3-87)$$

Όπως και στην περίπτωση του επίπεδου ΔΡΣ της Εφαρμογής 3.1 έτσι και στην περίπτωση του τρισδιάστατου ΔΡΣ θα πρέπει να βρεθεί αρχικά ο ελεύθερος χώρος εργασίας του ΔΡΣ ώστε το σημείο που θα επιλεγθεί να μπορεί να προσεγγιστεί με οποιοδήποτε προσανατολισμό του δορυφόρου του ΔΡΣ. Στην περίπτωση των τρισδιάστατων ΔΡΣ το αντίστροφο κινηματικό πρόβλημα που δίνεται από:

$$q_i = q_i(\mathbf{r}_E, \boldsymbol{\varepsilon}, n) \quad i = 1, \dots, n \quad (3-88)$$

Για το τρισδιάστατο ΔΡΣ του Σχήματος 3.9, το αντίστροφο κινηματικό πρόβλημα δίνεται από τις Εξ. (Γ-10) του Παραρτήματος Γ.1.1. Για να έχει λύση το αντίστροφο κινηματικό πρόβλημα πρέπει:

$$-1 \leq c_{q_3} \leq 1 \quad (3-89\alpha)$$

όπου

$$c_{q_3} = \frac{({}^0x_E - \alpha_x)^2 + ({}^0y_E - \alpha_y)^2 + ({}^0z_E - \alpha_z)^2 - c^2 - d^2}{2cd} \quad (3-89\beta)$$

όπου $[{}^0x_E \ {}^0y_E \ {}^0z_E]^T$ είναι οι συντεταγμένες της θέσης του ΤΣΔ ως προς το ΣΣ {0} του δορυφόρου του ΔΡΣ, $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ είναι οι συνιστώσες του βαρυκεντρικού διανύσματος \mathbf{a} και c, d τα μήκη των βαρυκεντρικών διανυσμάτων \mathbf{c} και \mathbf{d} .

Από τις Εξ. (3-89) προκύπτει:

$$(c-d)^2 \leq R \leq (c+d)^2 \quad (3-90\alpha)$$

όπου

$$R = {}^0x_E^2 + {}^0y_E^2 + {}^0z_E^2 + \alpha_x^2 + \alpha_y^2 + \alpha_z^2 - 2({}^0x_E \alpha_x + {}^0y_E \alpha_y + {}^0z_E \alpha_z) \quad (3-90\beta)$$

ή ισοδύναμα:

$$R = \left| {}^0\mathbf{r}_E \right|^2 + \left| \boldsymbol{\alpha} \right|^2 - 2 \left| {}^0\mathbf{r}_E \right| \left| \boldsymbol{\alpha} \right| \cos \varphi \quad (3-90\gamma)$$

όπου

$${}^0\mathbf{r}_E = \begin{bmatrix} {}^0x_E & {}^0y_E & {}^0z_E \end{bmatrix}^T \quad (3-92\alpha)$$

και

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_x & \alpha_y & \alpha_z \end{bmatrix}^T \quad (3-92\alpha)$$

και φ είναι η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων ${}^0\mathbf{r}_E$ και $\boldsymbol{\alpha}$.

Τα ακρότατα του μεγέθους R είναι:

$$R_{\min} = \left(\left| \mathbf{r}_E \right| - \left| \boldsymbol{\alpha} \right| \right)^2, \quad \varphi = 0 \quad (3-93\alpha)$$

$$R_{\max} = \left(\left| \mathbf{r}_E \right| + \left| \boldsymbol{\alpha} \right| \right)^2, \quad \varphi = \pi \quad (3-93\beta)$$

Η ανισότητα (3-90α) ικανοποιείται μόνο όταν

$$R_{\min} \geq (c-d)^2 \quad (3-94\alpha)$$

$$R_{\max} \leq (c+d)^2 \quad (3-94\beta)$$

Οι ανισότητες (3-94) σε συνδυασμό με τις Εξ. (3-93) δίνουν δυο λύσεις. Η πρώτη λύση είναι:

$$\left| \boldsymbol{\alpha} \right| + |c-d| \leq \left| \mathbf{r}_E \right| \leq -\left| \boldsymbol{\alpha} \right| + c+d \quad (3-95\alpha)$$

με $\left| \boldsymbol{\alpha} \right| < \min(c, d)$. Η δεύτερη λύση είναι:

$$\left| \mathbf{r}_E \right| \leq \min(-\left| \boldsymbol{\alpha} \right| + c+d, \left| \boldsymbol{\alpha} \right| - |c-d|) \quad (3-95\beta)$$

με $|a-b| < \left| \boldsymbol{\alpha} \right| < c+d$.

Για το σύστημα με παραμέτρους που δίνονται από τον Πίνακα 3.2 και από τις Εξ. (3-95) προκύπτουν τα όρια του ελεύθερου χώρου εργασίας:

$$0.5 \text{ m} \leq \left| \mathbf{r}_E \right| \leq 1.4556 \text{ m}$$

και

$$\left| \mathbf{r}_E \right| \leq 0.3889 \text{ m}$$

Από τις Εξ. (3-43) και (3-44) προκύπτουν οι περιοχές PDW (περιοχές Α και Β) των οποίων τα όρια δίνονται από:

$$0.3889 \text{ m} \leq \left| \mathbf{r}_E \right| \leq 0.5442 \text{ m}$$

και

$$1.4556 \text{ m} \leq \left| \mathbf{r}_E \right| \leq 2.3444 \text{ m}$$

Από την αφαίρεση των παραπάνω περιοχών PDW από το χώρο εργασίας του ΔΡΣ προκύπτουν τα όρια της περιοχής PIW, τα οποία είναι:

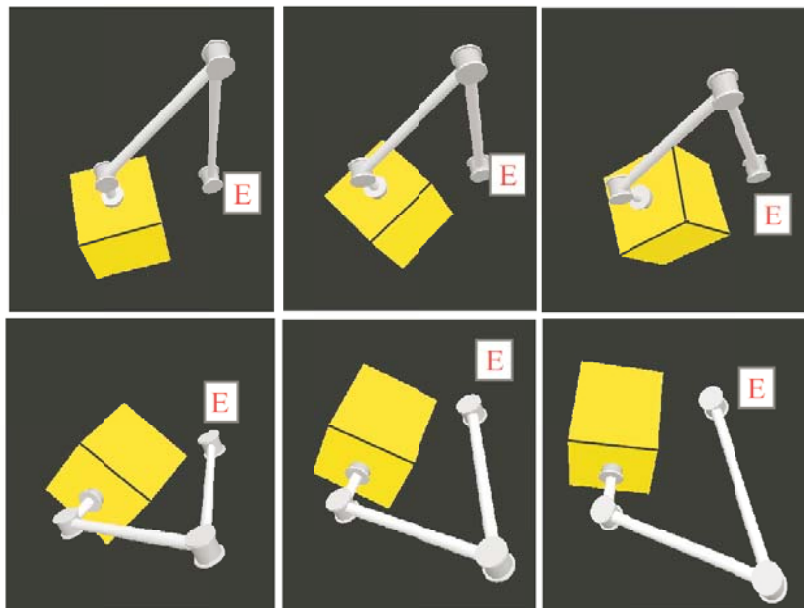
$$0.5442\text{ m} \leq |\mathbf{r}_E| \leq 1.4556\text{ m}$$

Για να μπορέσει το ΤΣΔ να παραμείνει ακίνητο σε κάποιο σημείο του χώρου παρά την ύπαρξη στροφορμής, θα πρέπει το σημείο αυτό να ανήκει στη περιοχή που οριοθετείται από την τομή του ελεύθερου χώρου εργασίας και της περιοχής PIW. Τα όρια του χώρου αυτού δίνονται από:

$$0.5442\text{ m} \leq |\mathbf{r}_E| \leq 1.4556\text{ m}$$

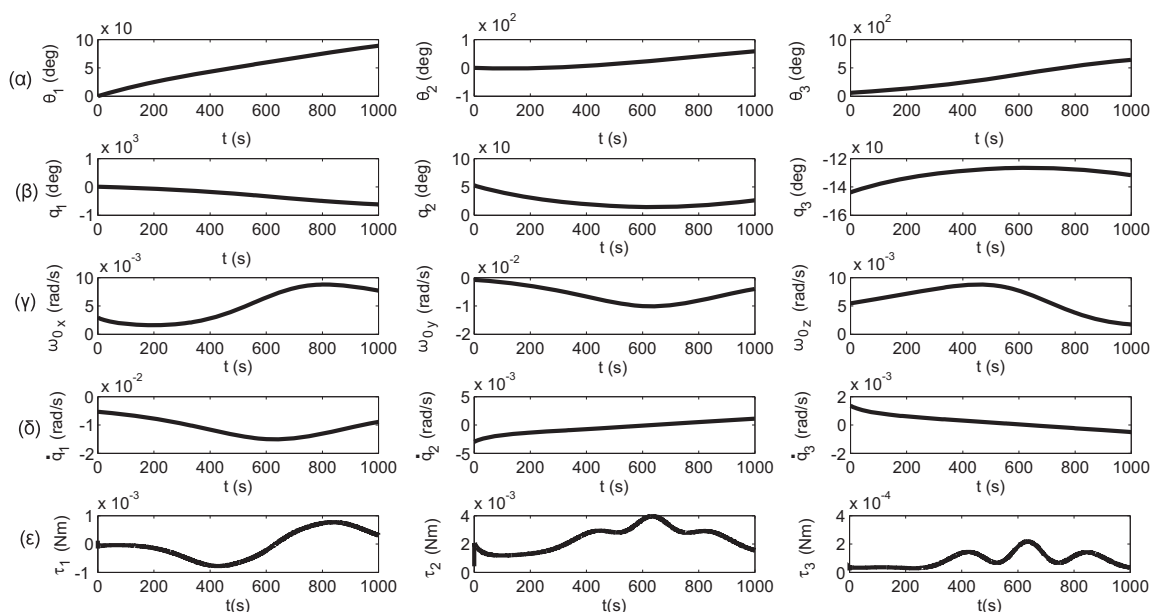
Η επιθυμητή θέση του ΤΣΔ, στην οποία παραμένει ακίνητο, επιλέγεται το σημείο E με συντεταγμένες $x_E = 0.2\text{ m}$, $y_E = 0.5\text{ m}$, $z_E = 0.2\text{ m}$, του οποίου η απόσταση από το ΚΜ του ΔΡΣ είναι $R_E = 0.57\text{ m}$. Εφόσον το σημείο E βρίσκεται στον ελεύθερο χώρο εργασίας μπορούμε να επιλέξουμε οποιοδήποτε αρχικό προσανατολισμό του δορυφόρου του ΔΡΣ. Ο προσανατολισμός του δορυφόρου περιγράφεται από τις παραμέτρους Euler, με αρχικές τιμές $\mathbf{e}_{in} = [0 \ 0 \ 0.5]^T$ και $n_{in} = \sqrt{0.75}$ ενώ

Η αρχική διαμόρφωση \mathbf{q}_{in} του βραχίονα υπολογίζεται από τις Εξ. (Γ-10) του Παραρτήματος Γ.1.1 για την δεδομένη αρχική θέση του ΤΣΔ στον Καρτεσιανό χώρο και τον αρχικό προσανατολισμό του δορυφόρου. Για την επίλυση του προβλήματος χρησιμοποιούνται οι Εξ. (3-6) – (3-7) λαμβάνοντας υπόψη ότι $\dot{\mathbf{r}}_E = \mathbf{0}\text{ m/s}$. Στο Σχήμα 3.19 φαίνονται στιγμιότυπα της κίνησης του ΔΡΣ. Παρατηρούμε ότι παρά την ύπαρξη της στροφορμής το ΤΣΔ παραμένει στο επιθυμητό σημείο E.



Σχήμα 3.19. Στιγμιότυπα κίνησης τρισδιάστατου ΔΡΣ με μη μηδενική αρχική στροφορμή καθώς η θέση του ΤΣΔ στον Καρτεσιανό χώρο παραμένει σταθερή.

Στο Σχήμα 3.20(α) και (β) παρουσιάζεται ο προσανατολισμός του δορυφόρου, εκφρασμένος με γωνίες Euler, καθώς και η διαμόρφωση του βραχίονα. Στο Σχήμα 3.20(γ) και (δ) φαίνονται η γωνιακή ταχύτητα του δορυφόρου εκφρασμένη στο αδρανειακό ΣΣ και οι γωνιακές ταχύτητες των αρθρώσεων του βραχίονα, αντίστοιχα. Τέλος, το Σχήμα 3.20(ε) δείχνει τις ροπές που απαιτούνται να εφαρμοστούν στις αρθρώσεις του βραχίονα ώστε το ΤΣΔ να παραμείνει ακίνητο στο σημείο E.



Σχήμα 3.20. Απόκριση ΔΡΣ για την κίνηση του Σχήματος 3.19. (α) Προσανατολισμός δορυφόρου εκφρασμένος σε γωνίες Euler, (β) διαμόρφωση βραχίονα, (γ) γωνιακή ταχύτητα δορυφόρου ως προς το αδρανειακό ΣΣ, (δ) ταχύτητες των αρθρώσεων και (ε) απαιτούμενες ροπές στις αρθρώσεις.

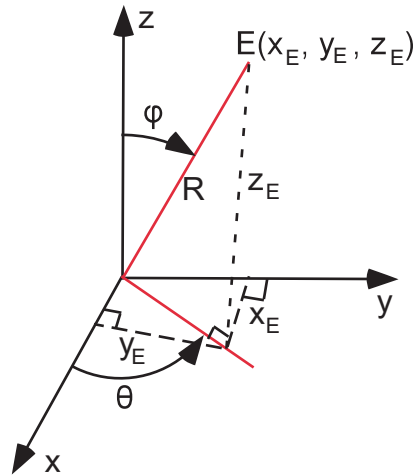
Εφαρμογή 3.3: Το ΤΣΔ του τρισδιάστατου ρομποτικού βραχίονα 3-BE του Σχήματος 3.9 με παραμέτρους που δίνονται στον Πίνακα 3.2. Η διαδρομή του ΤΣΔ επιλέγεται να είναι πάνω σε επιφάνεια σφαίρας ακτίνας $R=0.8m$. Όπως προκύπτει και από την ανάλυση της Εφαρμογής 3.2, η επιφάνεια αυτή βρίσκεται μέσα στην περιοχή PIW έτσι ώστε να αποφευχθούν τυχόν δυναμικές ιδιομορφίες. Οι παραμετρικές εξισώσεις της σφαίρας, σε σφαιρικές συντεταγμένες, δίνονται από:

$$x_E(t) = R \sin \varphi(t) \cos \theta(t) \quad (3-96\alpha)$$

$$y_E(t) = R \sin \varphi(t) \sin \theta(t) \quad (3-96\beta)$$

$$z_E(t) = R \cos \varphi(t) \quad (3-96\gamma)$$

όπου η ακτίνα R και οι γωνίες φ και θ ορίζονται στο Σχήμα 3.21.



Σχήμα 3.21. Σύνδεση Καρτεσιανών και Σφαιρικών Συντεταγμένων.

Για απλοποίηση, επιλέγεται εκείνη η επιθυμητή τροχιά του ΤΣΔ πάνω στην σφαίρα ακτίνας R για την οποία ισχύει ότι:

$$\varphi(t) = \theta(t) \quad (3-97)$$

Λαμβάνοντας υπόψη την Εξ. (3-97), οι Εξ. (3-96) γίνονται:

$$x_E(t) = \frac{R}{2} \sin(2\varphi(t)) \quad (3-98\alpha)$$

$$y_E(t) = R \sin^2 \varphi(t) \quad (3-98\beta)$$

$$z_E(t) = R \cos \varphi(t) \quad (3-98\gamma)$$

Το ΤΣΔ οδηγείται από το σημείο $A = (x_E^{\text{in}}, y_E^{\text{in}}, z_E^{\text{in}})$ με $z_E^{\text{in}} = 0.3m$ στο σημείο $B = (x_E^{\text{fin}}, y_E^{\text{fin}}, z_E^{\text{fin}})$ με $z_E^{\text{fin}} = 0.6m$. Οι συντεταγμένες $x_E^{\text{in}}, y_E^{\text{in}}$ και $x_E^{\text{fin}}, y_E^{\text{fin}}$ προκύπτουν από τις Εξ. (3-98α) και (3-98β), λαμβάνοντας υπόψη ότι $\varphi_{\text{in}} = \arccos(z_E^{\text{in}}/R)$ και $\varphi_{\text{fin}} = \arccos(z_E^{\text{fin}}/R)$, αντίστοιχα, όπως προκύπτει από την Εξ. (3-98γ). Ο αρχικός προσανατολισμός του δορυφόρου περιγράφεται από τις παραμέτρους Euler $\epsilon_{\text{in}} = [0 \ 0 \ 0.5]^T$ και $n_{\text{in}} = \sqrt{0.75}$. Στην περίπτωση αυτή η αρχική στροφορμή του συστήματος είναι μηδέν και μελετάται η απόκριση του συστήματος όταν ο συνολικός χρόνος κίνησης του βραχίονα είναι i) $t_f = 100s$ και ii) $t_f = 200s$.

Από τις Εξ. (3-98) προκύπτει ότι για σταθερή ακτίνα τροχιάς R , η θέση του ΤΣΔ καθορίζεται αποκλειστικά από τη μεταβλητή $\varphi(t)$. Για την επίλυση, λοιπόν, του προβλήματος θεωρούμε ότι:

$$\varphi(t) = \varphi_{\text{in}} + s(t)(\varphi_{\text{fin}} - \varphi_{\text{in}}) \quad (3-99)$$

όπου η μεταβλητή $s(t)$ δίνεται από την Εξ. (3-9α).

Η γραμμική ταχύτητα του ΤΣΔ δίνεται από την Εξ. (3-10α) και είναι:

$$\dot{\mathbf{r}}_E(t) = R(\varphi_{\text{fin}} - \varphi_{\text{in}}) [\cos(2\varphi(t)) \ \sin(2\varphi(t)) \ -\sin(\varphi(t))]^T \dot{s}(t) \quad (3-100)$$

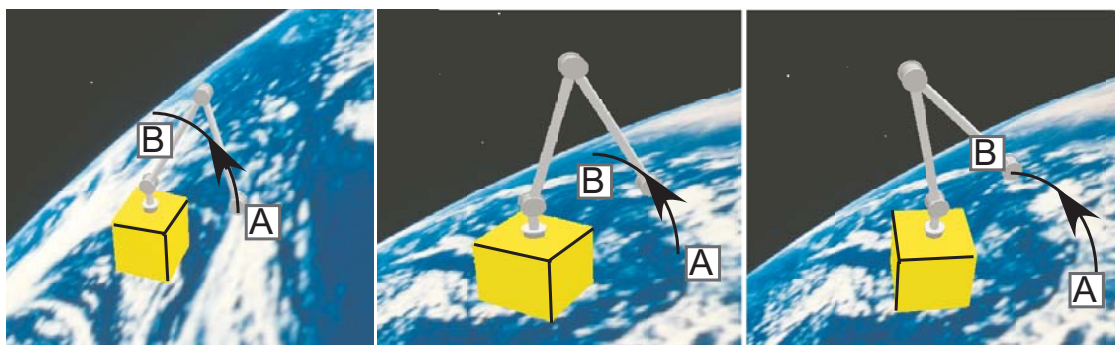
όπου η μεταβλητή $\dot{s}(t)$ δίνεται από την Εξ. (3-10β).

Οι Εξ. (3-6) – (3-7) επιλύονται με αρχικές συνθήκες:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{in}}^T & n_{\text{in}} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.5 & \sqrt{0.75} \end{bmatrix}^T$$

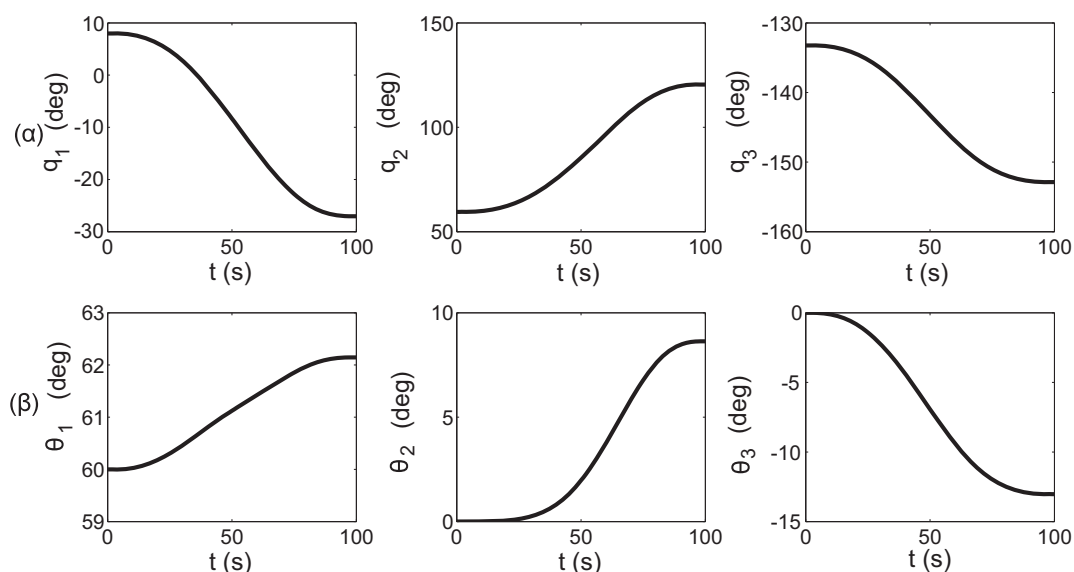
$$\mathbf{q}_{\text{in}} = \begin{bmatrix} 0.14 & 1.04 & -2.33 \end{bmatrix}^T \text{ rad}$$

όπου η αρχική διαμόρφωση \mathbf{q}_{in} του βραχίονα υπολογίστηκε από τις Εξ. (Γ-10) του Παραρτήματος Γ.1.1 για την δεδομένη αρχική θέση του ΤΣΔ στον Καρτεσιανό χώρο και τον αρχικό προσανατολισμό του δορυφόρου. Στο Σχήμα 3.22 παρουσιάζονται στιγμιότυπα τις κίνησης του ΔΡΣ όταν το ΤΣΔ διαγράφει την επιθυμητή πορεία.

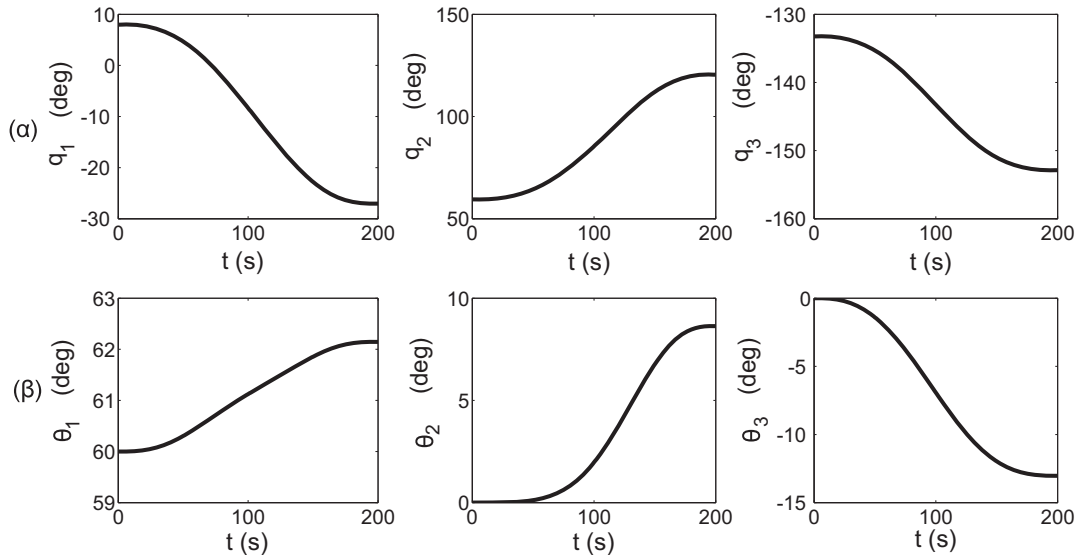


Σχήμα 3.22. Στιγμιότυπα κίνησης τρισδιάστατου ΔΡΣ με μηδενική αρχική στροφορμή καθώς το ΤΣΔ κινείται κατά μήκος της επιθυμητής διαδρομής AB.

Τα Σχήματα 3.23 και 3.24 δείχνουν τη χρονική απόκριση της διαμόρφωσης του βραχίονα καθώς και του προσανατολισμού του δορυφόρου, εκφρασμένο σε γωνίες Euler, κατά τη κίνηση του ΤΣΔ στην επιθυμητή διαδρομή AB για χρονική διάρκεια $t_f = 100\text{ s}$ και $t_f = 200\text{ s}$ αντίστοιχα.

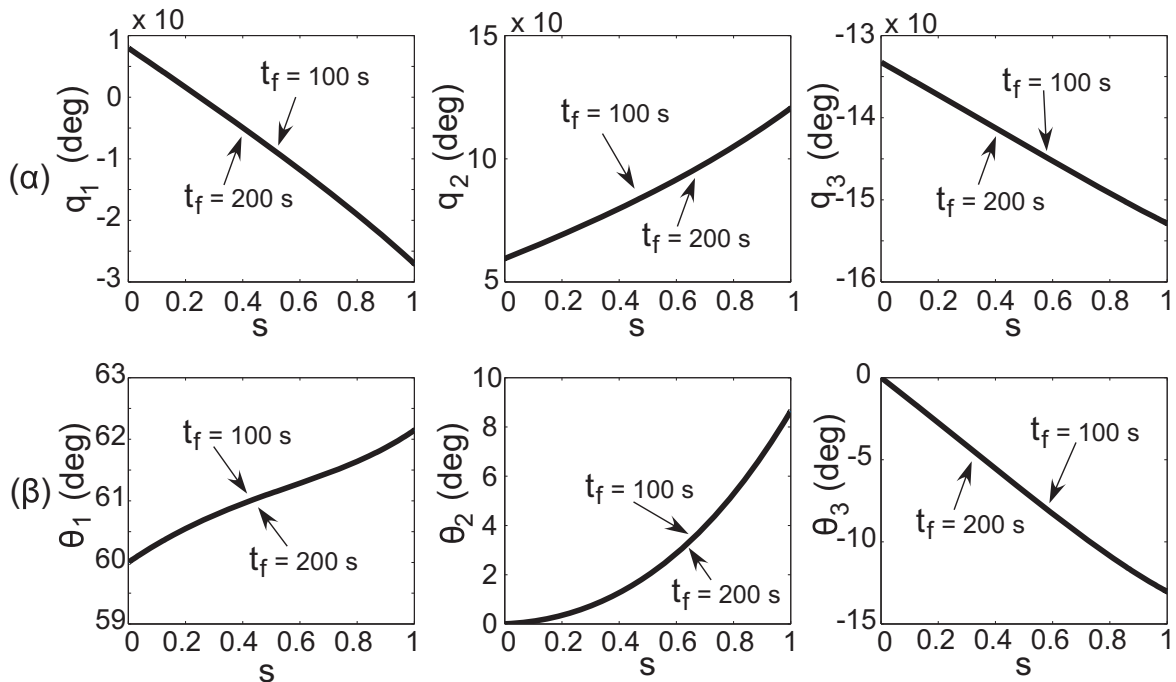


Σχήμα 3.23. Απόκριση με μηδενική στροφορμή και για χρόνο κίνησης $t_f = 100\text{ s}$. (α) Διαμόρφωση του βραχίονα και (β) Προσανατολισμός του δορυφόρου εκφρασμένος σε γωνίες Euler.



Σχήμα 3.24. Απόκριση με μηδενική στροφορμή και για χρόνο κίνησης $t_f = 200\text{ s}$. (α) Διαμόρφωση του βραχίονα και (β) Προσανατολισμός του δορυφόρου εκφρασμένος σε γωνίες Euler.

Στο Σχήμα 3.25 απεικονίζεται η διαμόρφωση του βραχίονα και ο προσανατολισμός του δορυφόρου του ΔΡΣ ως συνάρτηση της θέσης του ΤΣΔ πάνω στον επιθυμητό δρόμο, όπως περιγράφεται από τη συνάρτηση s για διάρκεια κίνησης $t_f = 100\text{ s}$ και $t_f = 200\text{ s}$. Παρατηρούμε ότι οι αποκρίσεις τόσο της διαμόρφωσης του βραχίονα όσο και του προσανατολισμού του δορυφόρου είναι ανεξάρτητες της διάρκειας κίνησης t_f όταν το σύστημα έχει μηδενική αρχική στροφορμή.

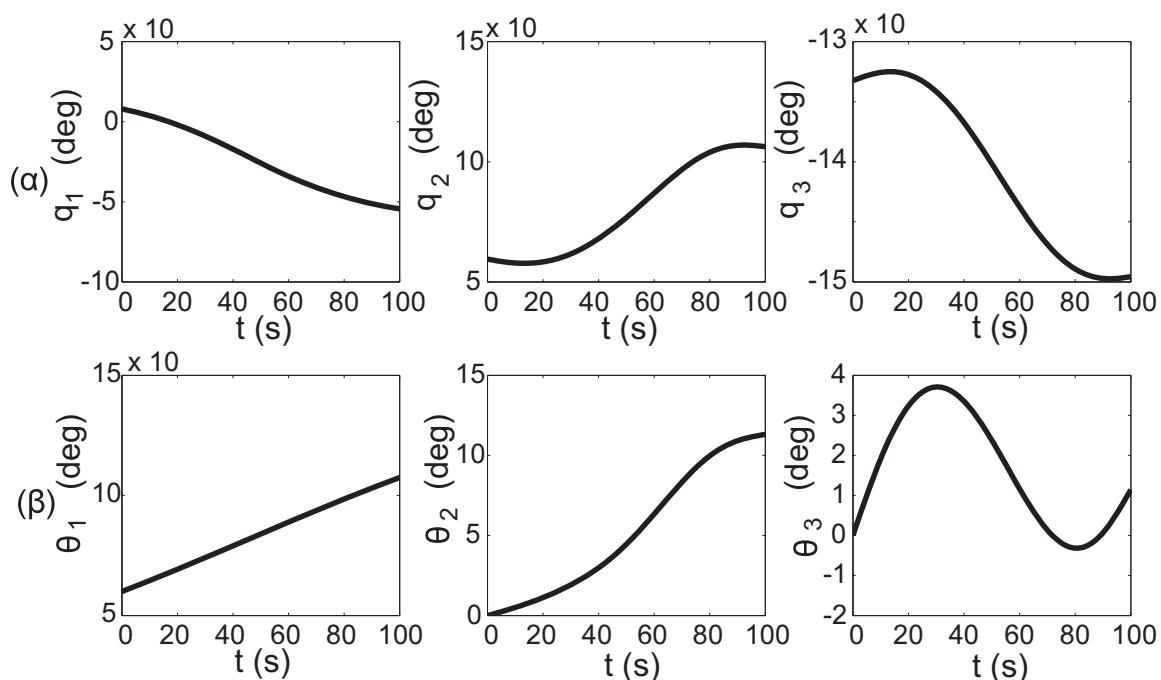


Σχήμα 3.25. Απόκριση με μηδενική στροφορμή ως συνάρτηση της μεταβλητής s και για χρόνους κίνησης $t_f = 100\text{ s}$ και $t_f = 200\text{ s}$. (α) Διαμόρφωση του βραχίονα και (β) Προσανατολισμός του δορυφόρου εκφρασμένος σε γωνίες Euler.

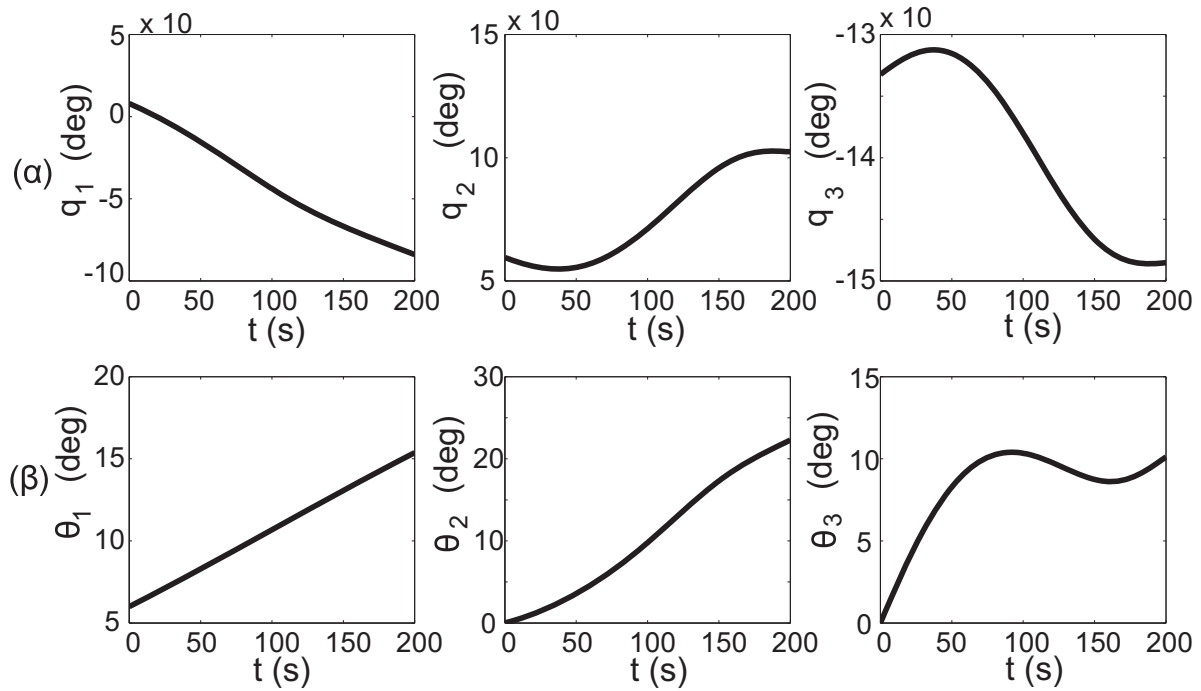
Εφαρμογή 3.4: Το ΤΣΔ του ρομποτικού βραχίονα του Σχήματος 3.4 ακολουθεί την ίδια διαδρομή με αυτή της Εφαρμογής 3.3. Στην περίπτωση αυτή όμως η αρχική στροφορμή του συστήματος είναι μη μηδενική και ίση προς $\mathbf{h}_{\text{CM}} = [0.3 \ 0.1 \ 0.5]^T \text{ Nm s}$. Μελετάται η απόκριση του συστήματος όταν ο συνολικός χρόνος κίνησης του βραχίονα είναι i) $t_f = 100 \text{ s}$ και ii) $t_f = 200 \text{ s}$.

Για την επίλυση του προβλήματος χρησιμοποιούνται και πάλι οι Εξ. (3-5) – (3-6) σε συνδυασμό με την Εξ. (3-71) και με τις ίδιες αρχικές συνθήκες της Εφαρμογής 3.3 αλλά τώρα η αρχική στροφορμή είναι \mathbf{h}_{CM} . Τα Σχήματα 3.26 και 3.27 δείχνουν τη χρονική απόκριση της διαμόρφωσης του βραχίονα καθώς και του προσανατολισμού του δορυφόρου, εκφρασμένο σε γωνίες Euler, κατά τη κίνηση του ΤΣΔ στην επιθυμητή διαδρομή AB για χρονική διάρκεια $t_f = 100 \text{ s}$ και $t_f = 200 \text{ s}$ αντίστοιχα.

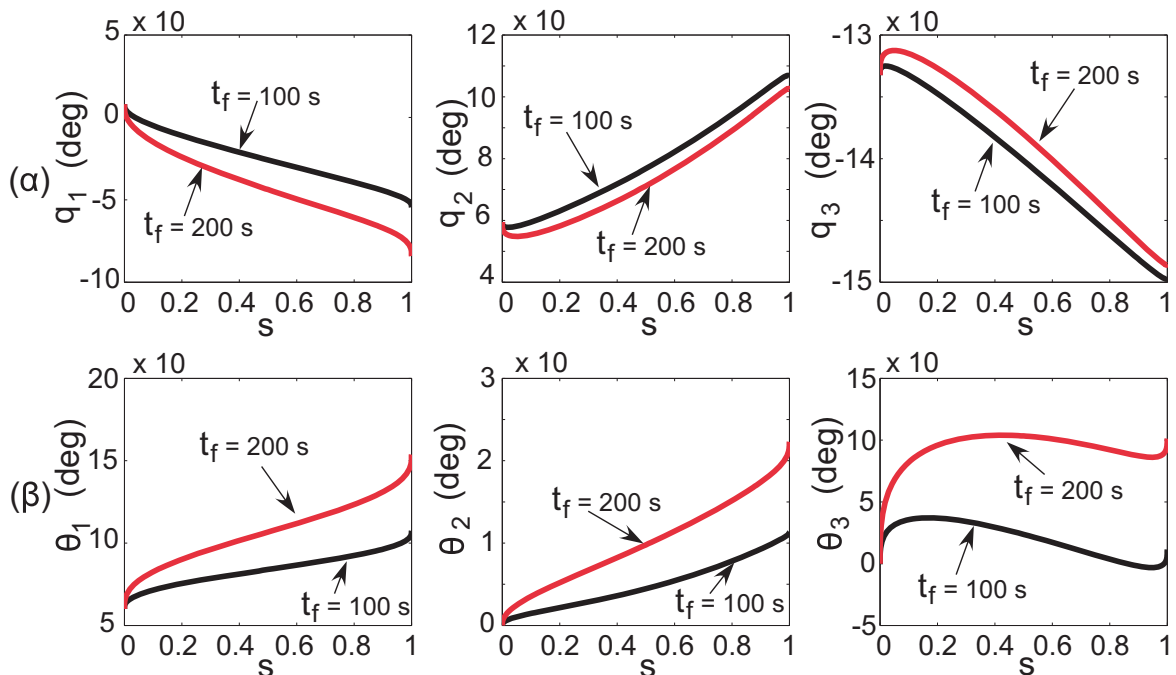
Το Σχήμα 3.28 δείχνει τη διαμόρφωση του βραχίονα και τον προσανατολισμό του δορυφόρου του ΔΡΣ ως συνάρτηση της μεταβλητής s που ορίζει τη θέση του ΤΣΔ πάνω στον επιθυμητό δρόμο, για διάρκεια κίνησης $t_f = 100 \text{ s}$ και $t_f = 200 \text{ s}$. Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση που το ΔΡΣ έχει μη-μηδενική αρχική στροφορμή, οι αποκρίσεις τόσο της διαμόρφωσης του βραχίονα όσο και του προσανατολισμού του δορυφόρου εξαρτώνται από τη διάρκεια κίνησης του ΤΣΔ πάνω στον επιθυμητό δρόμο AB.



Σχήμα 3.26. Απόκριση ΔΡΣ για χρονική διάρκεια της κίνησης AB του ΤΣΔ ίση με $t_f = 100 \text{ s}$, για μη – μηδενική αρχική στροφορμή του ΔΡΣ. (α) Διαμόρφωση του βραχίονα και (β) Προσανατολισμός του δορυφόρου εκφρασμένος σε γωνίες Euler.



Σχήμα 3.27. Απόκριση ΔΡΣ για χρονική διάρκεια της κίνησης ΑΒ του ΤΣΔ ίση με $t_f = 200\text{ s}$, για μη – μηδενική αρχική στροφορμή του ΔΡΣ. (α) Διαμόρφωση του βραχίονα και (β) Προσανατολισμός του δορυφόρου εκφρασμένος σε γωνίες Euler.



Σχήμα 3.28. Απόκριση ΔΡΣ ως συνάρτηση της μεταβλητής s που καθορίζει τη θέση του ΤΣΔ πάνω στη διαδρομή ΑΒ για χρονική διάρκεια κίνησης $t_f = 100\text{ s}$ και $t_f = 200\text{ s}$ και για μηδενική αρχική στροφορμή του ΔΡΣ. (α) Διαμόρφωση του βραχίονα και (β) Προσανατολισμός του δορυφόρου εκφρασμένος σε γωνίες Euler.

Εφαρμογή 3.5: Στην παρούσα εφαρμογή, χρησιμοποιείται το επίπεδο ελεύθερα αιωρούμενο ΔΡΣ με ένα βραχίονα 2-ΒΕ του Σχήματος 3.2 του οποίου οι παράμετροι

δίνονται στον Πίνακα 3.1, και το οποίο έχει μηδενική αρχική στροφορμή. Το ΤΣΔ οδηγείται από το σημείο $A=(2.0,0) \text{ m}$ στο σημείο $B=(-1.0,1.5) \text{ m}$ ακολουθώντας έναν ευθύγραμμο δρόμο, ο οποίος περνά από την περιοχή PDW (A). Έτσι, ο βραχίονας μπορεί να γίνει δυναμικά ιδιόμορφος καθώς το ΤΣΔ διέρχεται από αυτή την περιοχή. Εξετάζεται η δυνατότητα της παραπάνω επιθυμητής κίνησης του ΤΣΔ όταν ο δορυφόρος έχει αρχικό προσανατολισμό i) $\theta_0^{in}=150^0$ και ii) $\theta_0^{in}=10^0$.

Αφού το ΤΣΔ ακολουθεί ευθύγραμμη διαδρομή ισχύει:

$$y_E(t) = K x_E(t) + L \quad (3-101\alpha)$$

όπου

$$x_E(t) = x_E^{in} + s(t)(x_E^{fin} - x_E^{in}) \quad (3-101\beta)$$

όπου η συνάρτηση $s(t)$ δίνεται από την Εξ. (3-8α) και

$$K = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \quad (3-102\alpha)$$

$$L = \frac{y_A(x_B - x_A) - x_A(y_B - y_A)}{x_B - x_A} \quad (3-102\beta)$$

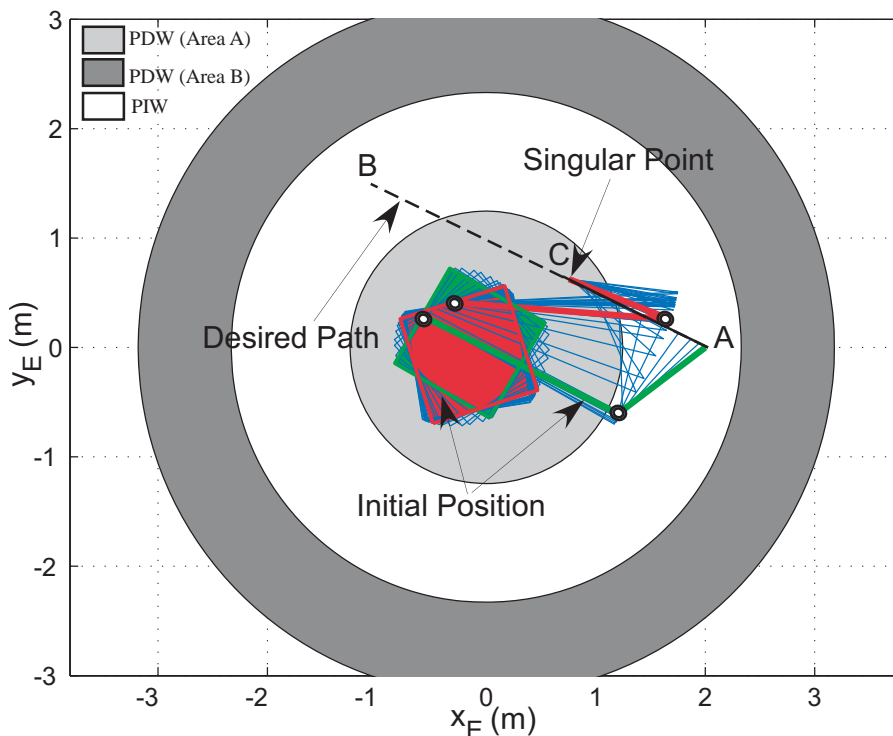
Από την Εξ. (3-10α) προκύπτει ότι:

$$\dot{\mathbf{r}}_E(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_E(t) \\ \dot{y}_E(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_E^{fin} - x_E^{in} \\ K(x_E^{fin} - x_E^{in}) \end{bmatrix} \dot{s}(t) \quad (3-103)$$

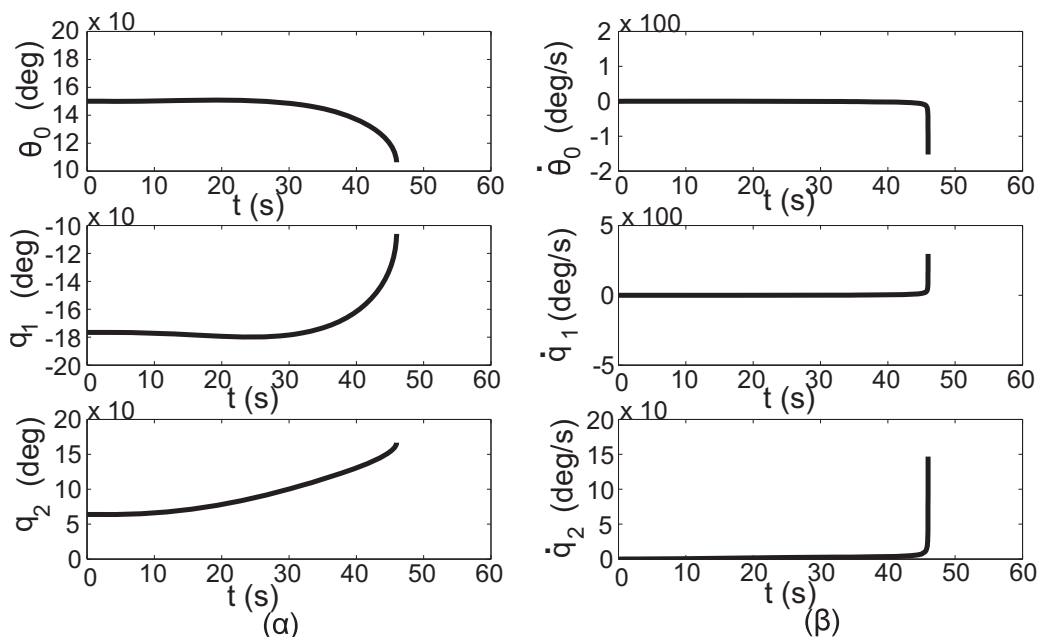
όπου η μεταβλητή $\dot{s}(t)$ δίνεται από την Εξ. (3-10β).

Για την επίλυση του προβλήματος χρησιμοποιούνται οι Εξ. (3-19) σε συνδυασμό με την Εξ. (3-103) και με αρχικές συνθήκες θ_0^{in} και \mathbf{q}_{in} όπου η αρχική διαμόρφωση \mathbf{q}_{in} του βραχίονα υπολογίστηκε από τις Εξ. (B-10) του Παραρτήματος Β.1.1. για την δεδομένη αρχική θέση του ΤΣΔ και αρχικό προσανατολισμό του δορυφόρου.

Το Σχήμα 3.29 δείχνει τα στιγμιότυπα κίνησης του ΔΡΣ όταν ο αρχικός προσανατολισμός του δορυφόρου είναι $\theta_0^{in}=150^0$. Στην περίπτωση αυτή, ο βραχίονας γίνεται ιδιόμορφος σε κάποιο σημείο της περιοχής PDW κατά την κίνηση του ΤΣΔ του βραχίονα. Στο Σχήμα 3.30(α) παρουσιάζονται οι χρονικές αποκρίσεις του προσανατολισμού του δορυφόρου και της διαμόρφωσης του βραχίονα μέχρι τη χρονική στιγμή που αυτός γίνεται ιδιόμορφος στο σημείο C. Στο Σχήμα 3.30(β) απεικονίζονται η γωνιακή ταχύτητα του δορυφόρου και οι ταχύτητες των αρθρώσεων. Παρατηρούμε ότι κοντά στο σημείο Δ1 οι ταχύτητες των αρθρώσεων του βραχίονα και η γωνιακή ταχύτητα του δορυφόρου παρουσιάζουν απότομες μεταβολές.



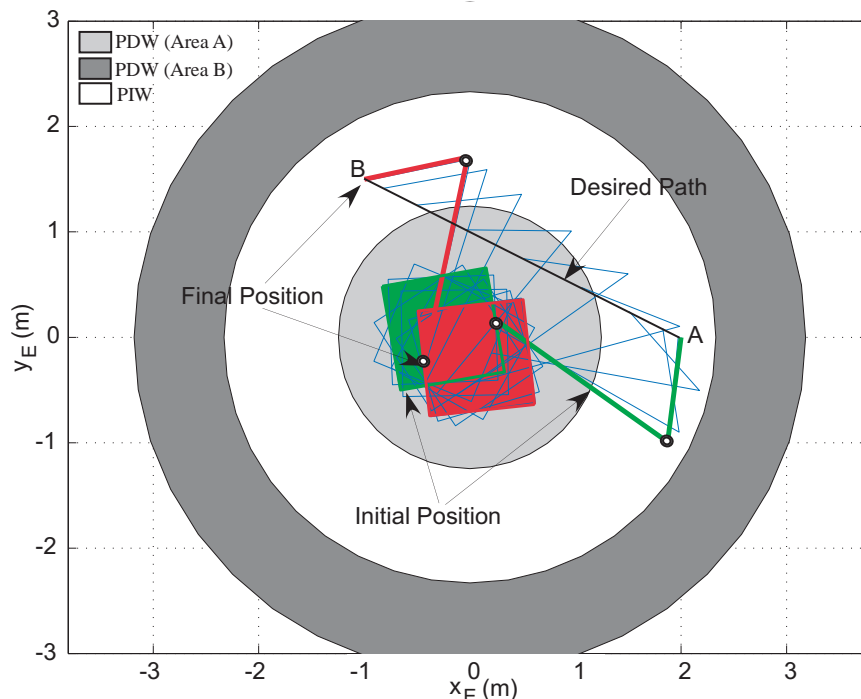
Σχήμα 3.29. Στιγμιότυπα κίνησης του επίπεδου ΔΡΣ για κίνηση του ΤΣΔ κατά μήκος του δρόμου AB και για αρχικό προσανατολισμό δορυφόρου $\theta_0^{in} = 150^0$. Ο βραχίονας γίνεται ιδιόμορφος κατά τη διάρκεια της κίνησης.



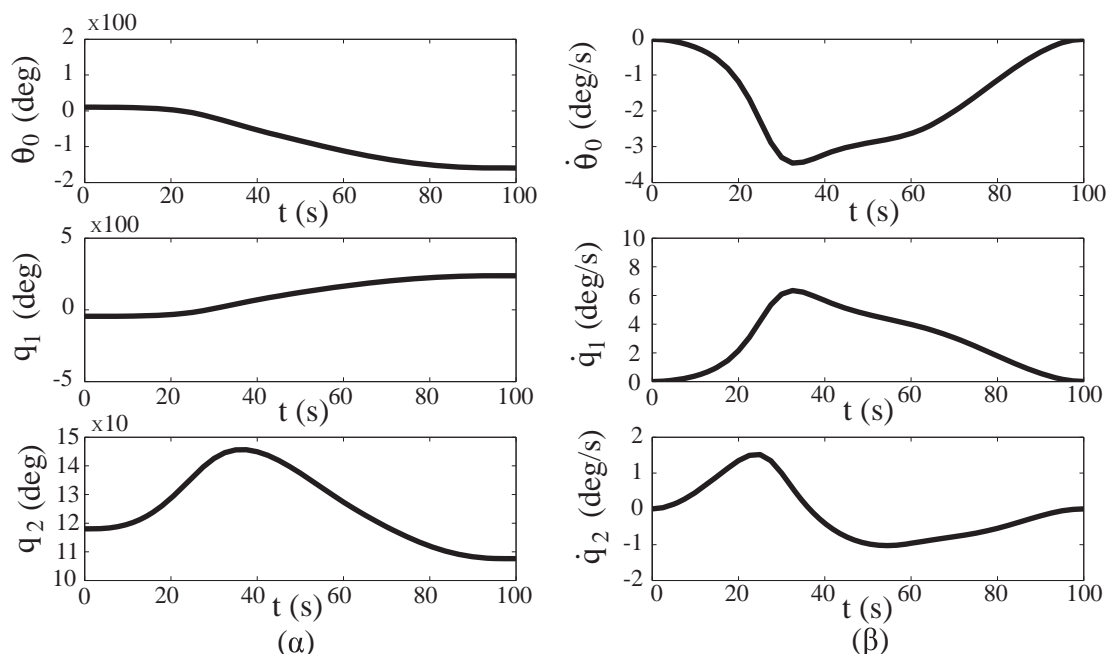
Σχήμα 3.30. Απόκριση ΔΡΣ για την κίνηση του Σχήματος 3.29. (α) Προσανατολισμός δορυφόρου και τροχιές γωνιών αρθρώσεων και (β) Γωνιακή ταχύτητα δορυφόρου και ταχύτητες αρθρώσεων.

Αντίστοιχα, στο Σχήμα 3.31 φαίνονται τα στιγμιότυπα κίνησης του ΔΡΣ όταν ο αρχικός προσανατολισμός του δορυφόρου είναι $\theta_0^{in} = 10^0$. Στην περίπτωση αυτή, το ΤΣΔ διαγράφει την επιθυμητή κίνηση κατά μήκος της διαδρομής AB χωρίς ο βραχίονας να γίνει

ιδίομορφος σε κάποιο σημείο της διαδρομής. Στα Σχήματα 3.32(α) και 3.32(β) παρουσιάζονται οι χρονικές αποκρίσεις του προσανατολισμού του δορυφόρου και της διαμόρφωσης του βραχίονα καθώς και οι αντίστοιχες ταχύτητες κατά τη διάρκεια της επιθυμητής κίνησης.



Σχήμα 3.31. Στιγμιότυπα κίνησης του επίπεδου ΔΡΣ για κίνηση του ΤΣΔ κατά μήκος του δρόμου AB και για αρχικό προσανατολισμό δορυφόρου $\theta_0^{in} = 10^0$. Ο βραχίονας δεν γίνεται ιδίομορφος κατά τη διάρκεια της κίνησης.



Σχήμα 3.32. Απόκριση ΔΡΣ για την κίνηση του Σχήματος 3.31. (α) Προσανατολισμός δορυφόρου και τροχιές των σχετικών γωνιών αρθρώσεων και (β) Γωνιακή ταχύτητα δορυφόρου και ταχύτητες αρθρώσεων.

3.6 Συμπεράσματα

Στο κεφάλαιο αυτό αναπτύχθηκαν αναλυτικά οι τεχνικές σχεδιασμού δρόμου στον Καρτεσιανό χώρο ενός ελεύθερα αιωρούμενου ΔΡΣ. Όμως, ο σχεδιασμός δρόμου στον Καρτεσιανό χώρο, σε αντίθεση με το σχεδιασμό τροχιάς στο χώρο των αρθρώσεων, μπορεί να είναι μην είναι πραγματοποιήσιμος λόγω της πιθανής εμφάνισης ΔΙ. Για την αντιμετώπιση των ΔΙ, εξήχθησαν οι εξισώσεις που ορίζουν τις ΔΙ για επίπεδες και τρισδιάστατες κινήσεις των ελεύθερα αιωρούμενων ΔΡΣ. Οι εξισώσεις αυτές επεκτάθηκαν και για τις περιπτώσεις όπου το ΤΣΔ πρέπει να έχει και επιθυμητό προσανατολισμό κατά την κίνηση του. Επίσης, στην περίπτωση που η κίνηση του ΤΣΔ είναι απρόσβλητη από ΔΙ, αναπτύχθηκαν οι εξισώσεις που δίνουν τις ταχύτητες των αρθρώσεων καθώς και τη γωνιακή ταχύτητα του δορυφόρου του ΔΡΣ που προκύπτει όταν το ΤΣΔ εκτελεί μια επιθυμητή κίνηση στον Καρτεσιανό χώρο. Τέλος, μελετήθηκε η επίδραση της αρχικής στροφορμής του συστήματος στο σχεδιασμό δρόμου του ΤΣΔ του βραχίονα στον Καρτεσιανό χώρο.

4 Αποφυγή Δυναμικών Ιδιομορφιών

4.1 Εισαγωγή

Στο προηγούμενο κεφάλαιο είδαμε ότι η παρουσία των δυναμικών ιδιομορφιών περιορίζει σημαντικά το χώρο όπου μπορεί να κινηθεί το ΤΣΔ ενός ελεύθερα αιωρούμενου ΔΡΣ αποφεύγοντας την εμφάνιση ΔΙ, αφού η κίνηση του μακριά από ΔΙ περιορίζεται στην περιοχή ΡΙW του χώρου εργασίας του ΔΡΣ. Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται μια μεθοδολογία που επιτρέπει την κίνηση του ΤΣΔ σε διαδρομές μέσα στις περιοχές ΡDW του χώρου εργασίας χωρίς ο βραχίονας να γίνει ιδιόμορφος, επιτρέποντας την αποτελεσματική χρήση ολόκληρου του χώρου εργασίας του ΔΡΣ.

Στην παράγραφο 4.2 αποδεικνύεται ότι η εμφάνιση ΔΙ, κατά τη μετάβαση του ΤΣΔ από ένα σημείο σε ένα άλλο μέσω επιθυμητού δρόμου στον Καρτεσιανό χώρο, εξαρτάται από τον αρχικό προσανατολισμό του δορυφόρου του ΔΡΣ. Το παραπάνω συμπέρασμα επιτρέπει την ανάπτυξη μιας μεθοδολογίας εύρεσης κατάλληλων αρχικών προσανατολισμών του δορυφόρου του ΔΡΣ για την αποφυγή ΔΙ όταν το ΤΣΔ διέρχεται από κάποιο επιθυμητό δρόμο. Στην ίδια παράγραφο αναπτύσσονται οι βασικές αρχές της μεθοδολογίας καθώς και μερικές έννοιες που θα βοηθήσουν την κατανόηση της. Στην παράγραφο 4.3, υπολογίζονται οι οριακοί αρχικοί προσανατολισμοί του δορυφόρου του ΔΡΣ για τους οποίους αποφεύγεται η ιδιόμορφη διαμόρφωση του βραχίονα, καθώς το ΤΣΔ ακολουθεί μια επιθυμητή διαδρομή που διέρχεται μέσα από μια απλή περιοχή ΡDW. Αρχικά αναλύονται επίπεδα και τρισδιάστατα ΔΡΣ με μηδενική αρχική στροφορμή και για τα οποία δεν ορίζεται συγχρόνως και κάποιος επιθυμητός προσανατολισμός του ΤΣΔ κατά την κίνηση του στην επιθυμητή διαδρομή. Στη συνέχεια μελετάται η επίδραση της μη μηδενικής στροφορμής καθώς και η επέκταση της μεθόδου έτσι ώστε να επιτυγχάνεται και επιθυμητός προσανατολισμός του ΤΣΔ κατά μήκος του επιθυμητού του δρόμου.

Στην Παράγραφο 4.4 υπολογίζονται, για *επίπεδα* ΔΡΣ, τα απαιτούμενα εύρη των αρχικών προσανατολισμών του δορυφόρου για τους οποίους αποφεύγεται πιθανή ιδιομορφία του βραχίονα κατά την κίνηση του ΤΣΔ κατά μήκος επιθυμητού δρόμου που διέρχεται από μια απλή περιοχή ΡDW. Τα εύρη αυτά φράσσονται από τους οριακούς αρχικούς προσανατολισμούς του δορυφόρου του ΔΡΣ που υπολογίστηκαν στην Παράγραφο 4.3. Για την πλήρη αξιοποίηση του χώρου εργασίας του ΔΡΣ, το ΤΣΔ θα πρέπει να μπορεί να ακολουθήσει επιθυμητές διαδρομές που διέρχονται από οποιοδήποτε σημείο του χώρου εργασίας αποφεύγοντας την πιθανή εμφάνιση ΔΙ. Ο χώρος εργασίας όμως αποτελείται από περισσότερες από μια περιοχές ΡDW. Στην παράγραφο 4.4, λοιπόν, επεκτείνεται η προτεινόμενη μέθοδος έτσι ώστε να υπολογιστούν τα απαιτούμενα εύρη αρχικού προσανατολισμού του δορυφόρου του ΔΡΣ, για επίπεδα

ΔΡΣ, έτσι ώστε να αποφευχθεί κάποια ιδιόμορφη διαμόρφωση του βραχίονα κατά την κίνηση του ΤΣΔ διαδοχικά μέσα από περισσότερες από μια απλές περιοχές PDW. Τέλος, στις Παραγράφους 4.5 και 4.6 παρουσιάζονται ορισμένες εφαρμογές και τα συμπεράσματα του κεφαλαίου, αντίστοιχα.

4.2 Βασικές Αρχές και Έννοιες

Στο κεφάλαιο αυτό, μελετάται η παρακολούθηση δρόμου του ΤΣΔ στον Καρτεσιανό χώρο αποφεύγοντας πιθανή ΔΙ καθώς διέρχεται από περιοχές PDW του χώρου εργασίας. Στην παρούσα παράγραφο αποδεικνύεται, αρχικά, ότι για καθορισμένους δρόμους του ΤΣΔ στον Καρτεσιανό χώρο, η εμφάνιση ΔΙ εξαρτάται μόνο από τον αρχικό προσανατολισμό του δορυφόρου του ΔΡΣ. Το παραπάνω συμπέρασμα επιτρέπει την ανάπτυξη μιας καινοτόμου μεθοδολογίας που εξάγει κατάλληλους αρχικούς προσανατολισμούς του δορυφόρου του ΔΡΣ έτσι ώστε να αποφευχθούν δυναμικά ιδιόμορφοι σχηματισμοί του βραχίονα κατά τη διάρκεια της κίνησης του ΤΣΔ μέσα σε περιοχές PDW του χώρου εργασίας. Στην συνέχεια της παραγράφου παρουσιάζονται οι βασικές αρχές και έννοιες της προτεινόμενης μεθοδολογίας.

Όπως προαναφέρθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο, η αποφυγή πιθανών ΔΙ είναι εφικτή, εάν η συνθήκη

$$S \neq 0 \quad (4-1)$$

ικανοποιείται σε όλη την διάρκεια κίνησης του ΤΣΔ του ΔΡΣ.

Η συνάρτηση S στη συνθήκη που δίνεται από την Εξ. (4-1), ορίζεται από την Εξ. (4-2),

$$S(\mathbf{q}) = \det(-{}^0\mathbf{J}_{11}(\mathbf{q}) {}^0\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{q}) {}^0\mathbf{D}_q(\mathbf{q}) + {}^0\mathbf{J}_{12}(\mathbf{q})) \quad (4-2)$$

και μπορεί να πάρει θετικές και αρνητικές τιμές. Το πρόσημο της εξαρτάται από τη διαμόρφωση του βραχίονα (π.χ. βραχίονας-πάνω (elbow-up), βραχίονας-κάτω (elbow-down)). Η ικανοποίηση, λοιπόν, της συνθήκης που δίνεται από την Εξ. (4-1) είναι δυνατή εάν η συνάρτηση S , που ορίζει τις ΔΙ, έχει μια ελάχιστη τιμή $S_0 > 0$ (εάν $S > 0$) ή μια μέγιστη τιμή $S_0 < 0$ (εάν $S < 0$), κατά τη διάρκεια της επιθυμητής κίνησης του ΤΣΔ. Στη συνέχεια, χωρίς απώλεια της γενικότητας, μελετάται η περίπτωση όπου $S > 0$.

Όπως προκύπτει από την Εξ. (4-2), η τιμή της συνάρτησης S εξαρτάται από τη διαμόρφωση \mathbf{q} του βραχίονα. Επίσης, όπως αποδείχθηκε στο Κεφάλαιο 3, κατά την κίνηση του ΤΣΔ κατά μήκος της επιθυμητής διαδρομής, η διαμόρφωση \mathbf{q} του βραχίονα προκύπτει από την επίλυση της Εξ. (4-3α):

$$\dot{\mathbf{q}} = -\mathbf{S}^{-1} {}^0\mathbf{J}_{11} {}^0\mathbf{D}^{-1} \mathbf{R}_0^T \mathbf{h}_{\text{CM}} + \mathbf{S}^{-1} \mathbf{R}_0^T \dot{\mathbf{r}}_E \quad (4-3\alpha)$$

σε συνδυασμό με την Εξ. (4-3β):

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \\ \dot{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1/2)(\boldsymbol{\varepsilon}^\times + n\mathbf{I}) \\ -(1/2)\boldsymbol{\varepsilon}^\top \end{bmatrix} {}^0\boldsymbol{\omega}_0 \quad (4-3\beta)$$

όπου η γωνιακή ταχύτητα ${}^0\boldsymbol{\omega}_0$ του δορυφόρου του ΔΡΣ, εκφρασμένη στο ΣΣ {0} του δορυφόρου, δίνεται από:

$${}^0\boldsymbol{\omega}_0 = [{}^0\mathbf{D}^{-1} + {}^0\mathbf{D}^{-1} {}^0\mathbf{D}_q \mathbf{S}^{-1} {}^0\mathbf{J}_{11} {}^0\mathbf{D}^{-1}] \mathbf{R}_0^\top \mathbf{h}_{CM} - {}^0\mathbf{D}^{-1} {}^0\mathbf{D}_q \mathbf{S}^{-1} \mathbf{R}_0^\top \dot{\mathbf{r}}_E \quad (4-3\gamma)$$

Η διαμόρφωση \mathbf{q} του βραχίονα, εφόσον προκύπτει από την επίλυση των Εξ. (4-3), είναι συνάρτηση του χρόνου t και των αρχικών συνθηκών $\boldsymbol{\varepsilon}_{in}, n_{in}, \mathbf{q}_{in}$, δηλαδή $\mathbf{q}(t; \boldsymbol{\varepsilon}_{in}, n_{in}, \mathbf{q}_{in})$. Άρα η τιμή της συνάρτησης S είναι επίσης συνάρτηση των μεταβλητών $t, \boldsymbol{\varepsilon}_{in}, n_{in}, \mathbf{q}_{in}$. Στη συνέχεια, θα δειχθεί ότι η ελάχιστη τιμή S_{min} της συνάρτησης S είναι συνεχής συνάρτηση του αρχικού προσανατολισμού $\boldsymbol{\varepsilon}_{in}, n_{in}$ του δορυφόρου, μια ιδιότητα που θα χρησιμοποιηθεί στην ανάπτυξη της προτεινόμενης μεθοδολογίας.

Για ένα δεδομένο δρόμο, στον Καρτεσιανό χώρο, ο οποίος ορίζεται από τη γραμμική ταχύτητα $\dot{\mathbf{r}}_E$ του ΤΣΔ, η διαμόρφωση \mathbf{q} του βραχίονα προκύπτει από την ολοκλήρωση των Εξ. (4-3), οι οποίες είναι της μορφής $\dot{\boldsymbol{\Theta}} = \mathbf{f}(t; \boldsymbol{\Theta})$, $\boldsymbol{\Theta} = [\mathbf{q}^\top, \boldsymbol{\varepsilon}^\top, n]^\top$. Αφού η συνάρτηση \mathbf{f} αποτελείται από τριγωνομετρικές συναρτήσεις, είναι συνεχής και επιπλέον όλες οι μερικές παράγωγοι της είναι συνεχείς συναρτήσεις. Έτσι, μπορεί να αποδειχθεί ότι η λύση $\boldsymbol{\Theta}$ είναι συνεχής ως προς t και $\boldsymbol{\varepsilon}_{in}, n_{in}, \mathbf{q}_{in}$, [83]. Άρα και η συνάρτηση S είναι επίσης συνεχής συνάρτηση των ίδιων μεταβλητών:

$$S = S(t; \boldsymbol{\varepsilon}_{in}, n_{in}, \mathbf{q}_{in}) \quad (4-4\alpha)$$

Εξαιτίας της κινηματικής, για μια δεδομένη αρχική θέση του ΤΣΔ, το διάνυσμα-στήλη \mathbf{q}_{in} είναι συνεχής συνάρτηση του $\boldsymbol{\varepsilon}_{in}, n_{in}$. Τότε, η Εξ. (4-4α) γίνεται:

$$S = S(t; \boldsymbol{\varepsilon}_{in}, n_{in}) \quad (4-4\beta)$$

Όμοια, η χρονική παράγωγος της συνάρτησης S έχει τη μορφή:

$$\dot{S} = f(t; \boldsymbol{\varepsilon}_{in}, n_{in}) \quad (4-5)$$

Η συνάρτηση S μπορεί ή να έχει ένα ελάχιστο σε ένα ενδιάμεσο σημείο της διαδρομής που ακολουθεί το ΤΣΔ, δηλαδή σε κάποιο χρόνο $0 < t^* < t_f$ (Περίπτωση I), όπου t_f είναι ο τελικός χρόνος κίνησης, ή σε κάποιο άκρο του δρόμου (Περίπτωση II), δηλαδή ή για $t^* = 0$ (εάν αυτό το σημείο είναι το αρχικό) ή για $t^* = t_f$ (εάν αυτό το σημείο είναι το τελικό).

Στην *Περίπτωση I*, ο χρόνος t^* μπορεί να υπολογιστεί θέτοντας τη συνάρτηση \dot{S} ίση με μηδέν:

$$t^* = g(\boldsymbol{\varepsilon}_{in}, n_{in}) \quad (4-6)$$

Για κάποιον επιθυμητό δρόμο, το ελάχιστο που αντιστοιχεί στη συνάρτηση S είναι:

$$S_{\min} = S(t^*; \boldsymbol{\varepsilon}_{in}, n_{in}) = S(\boldsymbol{\varepsilon}_{in}, n_{in}) \quad (4-7\alpha)$$

Στην *Περίπτωση II* και για κάποιον επιθυμητό δρόμο, το ελάχιστο της συνάρτησης S είναι:

$$S_{\min} = S(t^*; \boldsymbol{\varepsilon}_{in}, n_{in}) \quad (4-7\beta)$$

όπου $t^* = 0$ ή $t^* = t_f$. Επομένως, και για τις δυο περιπτώσεις, για έναν επιθυμητό δρόμο δεδομένης διάρκειας, το ελάχιστο της συνάρτησης S είναι μια συνεχής συνάρτηση του αρχικού προσανατολισμού του δορυφόρου:

$$S_{\min} = S(\boldsymbol{\varepsilon}_{in}, n_{in}) \quad (4-7\gamma)$$

Για επίπεδα συστήματα, η Εξ. (4-7γ) απλοποιείται στην:

$$S_{\min} = S(\theta_{0,in}) \quad (4-7\delta)$$

όπου $\theta_{0,in}$ είναι ο αρχικός προσανατολισμός του δορυφόρου του ΔΡΣ.

Από τις Εξ. (4-7) προκύπτει ότι, για καθορισμένο δρόμο του ΤΣΔ, η ελάχιστη τιμή (ή μέγιστη τιμή για $S < 0$) της συνάρτησης S καθορίζεται από τον αρχικό προσανατολισμό του δορυφόρου του ΔΡΣ. Οπότε η ικανοποίηση της Εξ. (4-1) ή ισοδύναμα η αποφυγή ΔΙ, εξαρτάται από τον αρχικό προσανατολισμό του δορυφόρου του ΔΡΣ. Στη συνέχεια, ορίζονται οι αναγκαίες συνθήκες, καθώς και η γεωμετρική αναπαράστασή τους, της προτεινόμενης μεθοδολογίας για την εξαγωγή κατάλληλων αρχικών προσανατολισμών του δορυφόρου του ΔΡΣ για την αποφυγή ΔΙ. Οι συνθήκες αυτές αποτελούν τις αναγκαίες συνθήκες για την εμφάνιση ελαχίστου της συνάρτησης $S(\mathbf{q})$ κατά μήκος κάποιου επιθυμητού δρόμου του ΤΣΔ. Στην *Περίπτωση I*, η διαμόρφωση $\mathbf{q}(t^*)$ του βραχίονα που αντιστοιχεί σε ελάχιστη (ή μέγιστη) τιμή της συνάρτησης $S(\mathbf{q})$, προκύπτει θέτοντας τη χρονική παράγωγο της $S(\mathbf{q})$ ίση με μηδέν:

$$\dot{S} = \nabla S^T \dot{\mathbf{q}} = 0 \quad (4-8\alpha)$$

όπου ∇S είναι η κλίση (gradient) της βαθμωτής συνάρτησης $S(\mathbf{q})$.

Εάν η επιθυμητή ελάχιστη τιμή της συνάρτησης S , κατά τη διάρκεια της κίνησης του ΤΣΔ, είναι S_0 , τότε η Εξ. (4-8α) μαζί με την εξίσωση

$$S(\mathbf{q}) = S_0 \quad (4-8\beta)$$

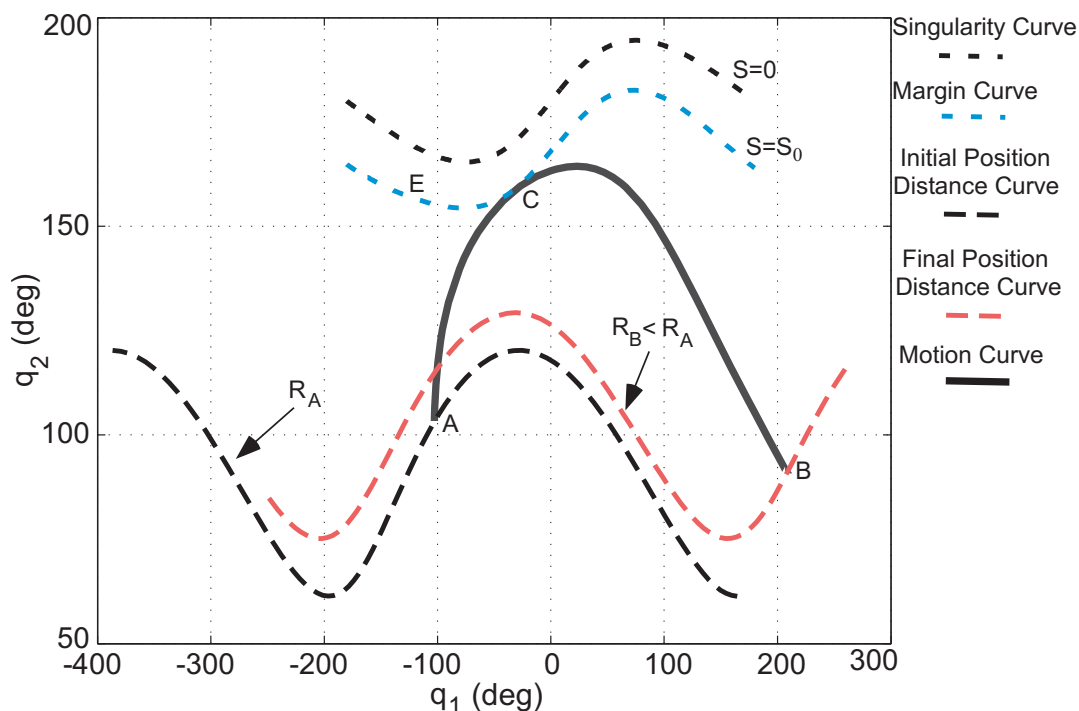
αποτελούν τις αναγκαίες συνθήκες για τον υπολογισμό της διαμόρφωσης \mathbf{q} του βραχίονα τη στιγμή που ισχύει $S_{\min} = S_0$.

Στην *Περίπτωση II*, η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης S αντιστοιχεί στην αρχική ή τελική τιμή της συνάρτησης S , ή ισοδύναμα στην αρχική ή τελική θέση του ΤΣΔ, αντίστοιχα. Εφόσον, η απόσταση $R(\mathbf{q})$ του ΤΣΔ από την αρχή (ΚΜ του συστήματος) είναι συνάρτηση μόνο της διαμόρφωσης \mathbf{q} του βραχίονα, [67], η παρακάτω εξίσωση

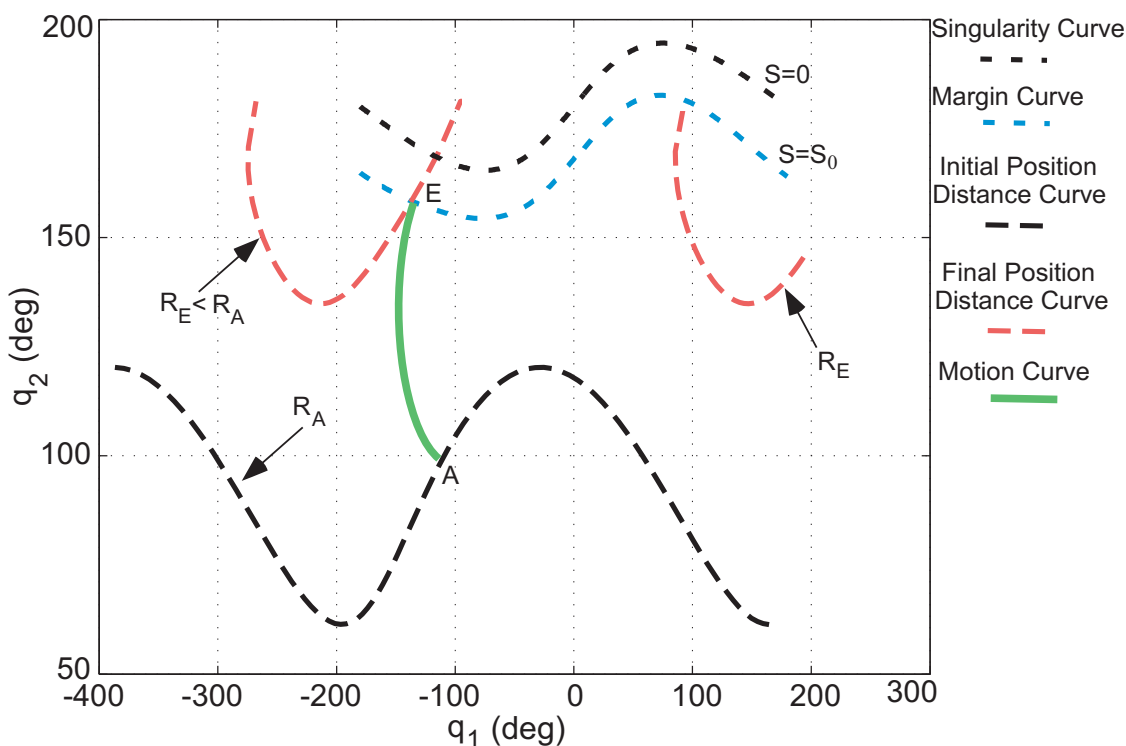
$$R(\mathbf{q}) = R_i \quad (4-8\gamma)$$

αποτελεί μαζί με την Εξ. (4-8β) τις αναγκαίες συνθήκες για τον υπολογισμό της διαμόρφωσης \mathbf{q} του βραχίονα τη στιγμή που ισχύει $S_{\min} = S_0$. Στην Εξ. (4-8γ), R_i είναι η απόσταση της αρχικής ή τελικής θέσης του ΤΣΔ από το ΚΜ του ΔΡΣ.

Οι παραπάνω συνθήκες για τις *Περιπτώσεις I* και *II* αναπαρίστανται γεωμετρικά στα Σχήματα 4.1 και 4.2, αντίστοιχα. Στα σχήματα αυτά παρουσιάζονται, εκτός από τις καμπύλες περιθωρίου (*margin curves*) για επίπεδα ελεύθερα αιωρούμενα ΔΡΣ που έχουν ήδη οριστεί στο Κεφάλαιο 3, δυο επιπλέον είδη καμπυλών στο χώρο των αρθρώσεων. Το πρώτο είδος ονομάζεται *καμπύλη κίνησης* (*motion curve*) και απεικονίζει τη διαμόρφωση του βραχίονα που προκύπτει από την επίλυση των Εξ. (4-3) κατά τη διάρκεια της κίνησης του ΤΣΔ κατά μήκος του επιθυμητού δρόμου. Τέτοιες καμπύλες είναι η καμπύλη ACB στο Σχήμα 4.1 και η καμπύλη AE στο Σχήμα 4.2. Η Καμπύλη Κίνησης ACB παράγεται από την κίνηση του ΤΣΔ κατά μήκος του δρόμου AB του Σχήματος 4.3(β) ενώ η Καμπύλη Κίνησης AE παράγεται από την κίνηση του ΤΣΔ κατά μήκος του δρόμου AE του Σχήματος 4.3(β). Το δεύτερο είδος καμπυλών ονομάζεται *καμπύλη απόστασης* (*distance curve*) για επίπεδα ΔΡΣ και *επιφάνεια απόστασης* (*distance surface*) για τρισδιάστατα ΔΡΣ. Η καμπύλη (επιφάνεια) αυτή αναπαριστά όλες τις δυνατές διαμορφώσεις του βραχίονα που αντιστοιχούν σε μια δεδομένη απόσταση του ΤΣΔ από το ΚΜ του συστήματος. Για παράδειγμα οι καμπύλες R_A , R_B και R_E στα Σχήματα 4.1 και 4.2 αντιστοιχούν σε όλες τις δυνατές διαμορφώσεις που μπορεί να πάρει ο βραχίονας όταν το ΤΣΔ βρίσκεται στα σημεία A, B και E, αντίστοιχα, της διαδρομής AB που παρουσιάζεται στο Σχήμα 4.3(β).

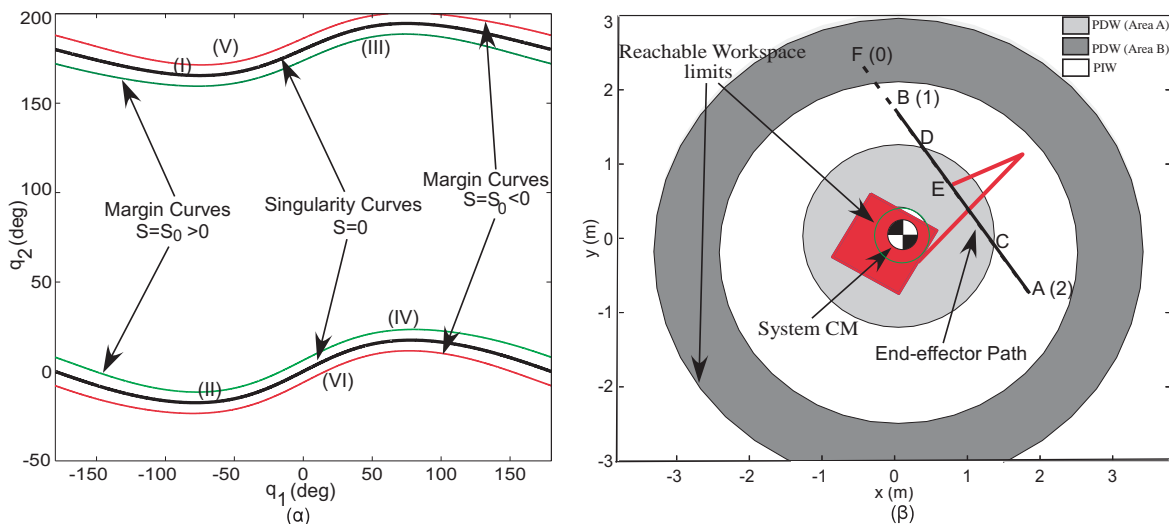


Σχήμα 4.1 Γεωμετρική αναπαράσταση της ελάχιστης τιμής της συνάρτησης S κατά την κίνηση του ΤΣΔ κατά μήκος επιθυμητών δρόμων. Περίπτωση I: Η ελάχιστη τιμή S_0 παρουσιάζεται όταν η καμπύλη κίνησης εφάπτεται στην καμπύλη περιθωρίου $S = S_0$ στο σημείο C.



Σχήμα 4.2 Γεωμετρική αναπαράσταση της ελάχιστης τιμής της συνάρτησης S κατά την κίνηση του ΤΣΔ κατά μήκος επιθυμητών δρόμων. Περίπτωση II: Η ελάχιστη τιμή S_0 παρουσιάζεται όταν το τελικό σημείο της καμπύλης κίνησης αγγίζει την καμπύλη περιθωρίου $S = S_0$ στο σημείο E.

Εφόσον, το κάθετο διάνυσμα σε μια επιφάνεια περιθωρίου (ή καμπύλη περιθωρίου για επίπεδα ΔΡΣ) ισούται με την κλίση ∇S , της βαθμωτής συνάρτησης $S(\mathbf{q})$ και το εφαπτόμενο διάνυσμα στην καμπύλη κίνησης είναι ίσο με $\dot{\mathbf{q}}$, τότε στην *Περίπτωση I* η Εξ. (4-8α) υποδεικνύει ότι τα διανύσματα $\dot{\mathbf{q}}$ και ∇S είναι κάθετα μεταξύ τους ή ισοδύναμα η καμπύλη κίνησης και η επιφάνεια (ή καμπύλη) περιθωρίου έχουν κοινή εφαπτομένη, όπως η Καμπύλη Κίνησης ACB και η Καμπύλη Περιθωρίου $S = S_0$ στο Σχήμα 4.1. Στην *Περίπτωση II*, η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης S αντιστοιχεί στην αρχική ή τελική τιμή της S ή ισοδύναμα το αρχικό ή τελικό σημείο της καμπύλης κίνησης θα πρέπει να αγγίζει την καμπύλη περιθωρίου, όπως η Καμπύλη Κίνησης AE αγγίζει την Καμπύλη Περιθωρίου $S = S_0$ στο Σχήμα 4.2. Σημειώνεται ότι ο βραχίονας γίνεται δυναμικά ιδιόμορφος όταν η καμπύλη κίνησης, που προκύπτει κατά τη διάρκεια κίνησης του ΤΣΔ στον επιθυμητό δρόμο, τέμνει σε κάποιο σημείο την καμπύλη (ή επιφάνεια) ιδιομορφίας $S = 0$. Επίσης, διαφορετικές καμπύλες (ή επιφάνειες) ιδιομορφίας αντιστοιχούν στις περιοχές PDW (A) και PDW (B), όπως φαίνεται και στο Σχήμα 4.3(α). Έτσι, εάν ο δρόμος του ΤΣΔ περνά και από τις δύο περιοχές A και B, βλ. Σχήμα 4.3(β), η καμπύλη κίνησης θα πρέπει αποφύγει την τομή και με τις δύο καμπύλες (ή επιφάνειες) ιδιομορφίας που αντιστοιχούν σε αυτές τις περιοχές, βλ. Σχήμα 4.3(α).



Σχήμα 4.3 (α) Τυπικές Καμπύλες Ιδιομορφίας και Καμπύλες Περιθωρίου για ένα επίπεδο ΔΡΣ και (β) Οι περιοχές PIW και PDW του χώρου εργασίας καθώς και ένας επιθυμητός δρόμος του ΤΣΔ που διέρχεται από τις περιοχές αυτές.

4.3 Υπολογισμός Οριακών Αρχικών Προσανατολισμών Δορυφόρου

Στην παράγραφο αυτή, θα εφαρμοστούν οι βασικές σχέσεις που αναπτύχθηκαν στην προηγούμενη παράγραφο, έτσι ώστε να προκύψουν οι απαιτούμενοι αρχικοί

προσανατολισμοί του δορυφόρου για τις οποίες η συνάρτηση S που ορίζει τις δυναμικές ιδιομορφίες έχει ελάχιστο μια επιλεγμένη τιμή S_0 , δηλαδή επιτυγχάνεται αποφυγή δυναμικών ιδιομορφιών, κατά την κίνηση του ΤΣΔ κατά μήκος του επιθυμητού δρόμου που διέρχεται από περιοχή PDW.

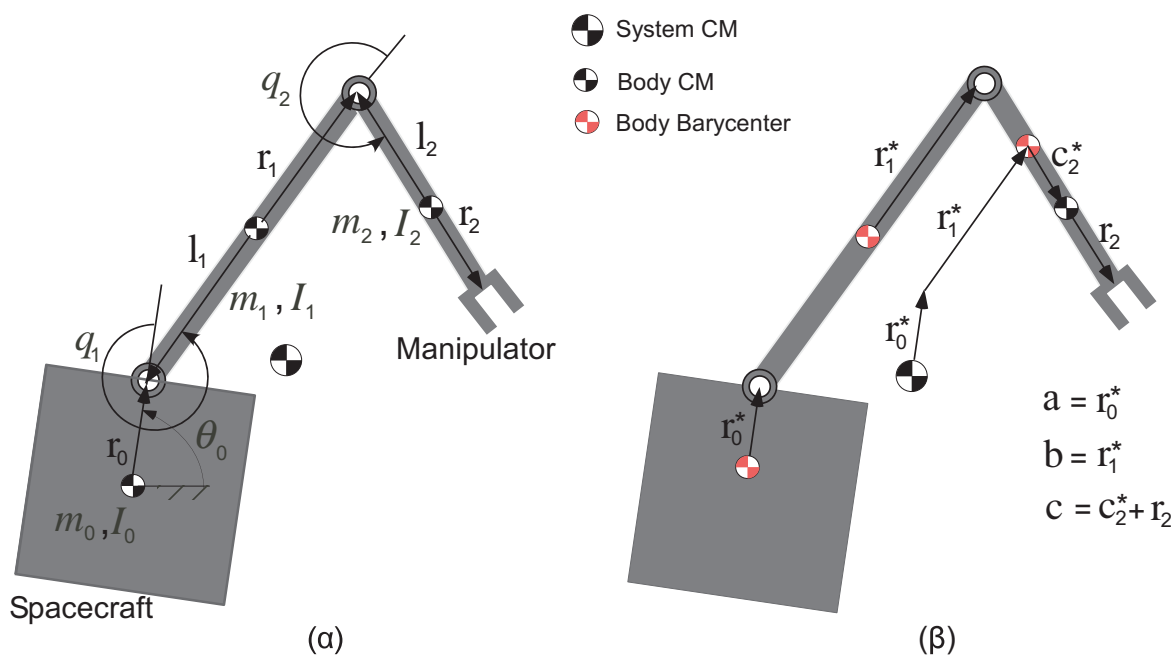
Αρχικά αναλύονται ΔΡΣ με μηδενική αρχική στροφορμή και για τα οποία δεν ορίζεται κάποιος επιθυμητός προσανατολισμός του ΤΣΔ κατά την κίνηση του και στην συνέχεια μελετάται η επίδραση της μη μηδενικής στροφορμής καθώς και η επέκταση της μεθόδου έτσι ώστε να επιτυγχάνεται και επιθυμητός προσανατολισμός του ΤΣΔ κατά την κίνηση του κατά μήκος του επιθυμητού του δρόμου.

4.3.1 Συστήματα με Μηδενική Στροφορμή

Στην παράγραφο αυτή, η μέθοδος εφαρμόζεται σε συστήματα με μηδενική αρχική στροφορμή και περιορίζεται στις περιπτώσεις όπου το ΤΣΔ οδηγείται από μια θέση σε μια άλλη μέσω ενός αυθαίρετου επιθυμητού δρόμου χωρίς να μας ενδιαφέρει ο προσανατολισμός του. Αρχικά μελετούνται τα επίπεδα ΔΡΣ και στη συνέχεια γίνεται επέκταση της μεθόδου και σε τρισδιάστατα ΔΡΣ.

4.3.1.1 Επίπεδες Κινήσεις

Για την επίπεδη μετάβαση του ΤΣΔ από ένα σημείο σε ένα άλλο κατά μήκος ενός συγκεκριμένου δρόμου, χρησιμοποιείται το επίπεδο ΔΡΣ με ένα βραχίονα 2-BE του Σχήματος 4.4.



Σχήμα 4.4 Επίπεδο ελεύθερα αιωρούμενο ΔΡΣ με βραχίονα 2-BE. (α) Ορισμός των αδρανειακών ιδιοτήτων και των μεταβλητών διαμόρφωσης. (β) Τα βαρυκεντρικά διανύσματα **a**, **b** και **c** του ΔΡΣ.

Χρησιμοποιώντας την προσέγγιση των βαρυκεντρικών διανυσμάτων, [67], η θέση του ΤΣΔ για το επίπεδο ελεύθερα αιωρούμενο ΔΡΣ του Σχήματος 4.4, δίνεται από:

$$x_E(\theta_0, q_1, q_2) = a c_{(\theta_0)} + b c_{(\theta_0+q_1)} + c c_{(\theta_0+q_1+q_2)} \quad (4-9\alpha)$$

$$y_E(\theta_0, q_1, q_2) = a s_{(\theta_0)} + b s_{(\theta_0+q_1)} + c s_{(\theta_0+q_1+q_2)} \quad (4-9\beta)$$

που οι παράμετροι a, b, c είναι τα σταθερά μήκη των βαρυκεντρικών διανυσμάτων τα οποία, όπως αναφέρθηκε στο Κεφάλαιο 3, περιγράφουν τη γεωμετρική διαμόρφωση και τα οποία είναι συνάρτηση της κατανομής μάζας του συστήματος, βλ. Σχήμα 4.4(β), και δίνονται από τις Εξ. (B-2) στο Παράρτημα Β.1.1. Επίσης, $c_{(\cdot)} = \cos(\cdot)$, $s_{(\cdot)} = \sin(\cdot)$.

Θεωρώντας μηδενική αρχική στροφορμή, οι Εξ. (3-18α) – (3-18β) που δίνουν τις απαιτούμενες ταχύτητες $\dot{\mathbf{q}} = [\dot{q}_1 \quad \dot{q}_2]^T$ των αρθρώσεων για να κινηθεί το ΤΣΔ στον επιθυμητό δρόμο, που ορίζεται από την ταχύτητα $\dot{\mathbf{r}}_E = [\dot{x}_E \quad \dot{y}_E]^T$, γράφονται:

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 = & \frac{-{}^0D_2(a c_{(\theta_0)} + b c_{(\theta_0+q_1)}) + c({}^0D_0 + {}^0D_1)c_{(\theta_0+q_1+q_2)}}{S(q_1, q_2)} \dot{x}_E \\ & + \frac{-{}^0D_2(a s_{(\theta_0)} + b s_{(\theta_0+q_1)}) + c({}^0D_0 + {}^0D_1)s_{(\theta_0+q_1+q_2)}}{S(q_1, q_2)} \dot{y}_E \end{aligned} \quad (4-10\beta)$$

$$\begin{aligned} \dot{q}_2 = & \frac{a({}^0D_1 + {}^0D_2)c_{(\theta_0)} - {}^0D_0(b c_{(\theta_0+q_1)} + c c_{(\theta_0+q_1+q_2)})}{S(q_1, q_2)} \dot{x}_E \\ & + \frac{a({}^0D_1 + {}^0D_2)s_{(\theta_0)} - {}^0D_0(b s_{(\theta_0+q_1)} + c s_{(\theta_0+q_1+q_2)})}{S(q_1, q_2)} \dot{y}_E \end{aligned} \quad (4-10\gamma)$$

ενώ η γωνιακή ταχύτητα $\dot{\theta}_0$ του δορυφόρου που προκύπτει, δίνεται από την Εξ. (3-18γ):

$$\dot{\theta}_0 = \frac{b {}^0D_2 c_{(\theta_0+q_1)} - c {}^0D_1 c_{(\theta_0+q_1+q_2)}}{S(q_1, q_2)} \dot{x}_E + \frac{b {}^0D_2 s_{(\theta_0+q_1)} - c {}^0D_1 s_{(\theta_0+q_1+q_2)}}{S(q_1, q_2)} \dot{y}_E \quad (4-10\alpha)$$

όπου τα μεγέθη 0D_i , $i=0,1,2$ δίνονται από τις Εξ. (B-20) στο Παράρτημα Β.1.3 και η συνάρτηση $S(q_1, q_2)$, που ορίζει τις ΔΙ, δίνεται από:

$$S(q_1, q_2) = a b {}^0D_2 s_{(q_1)} + b c {}^0D_0 s_{(q_2)} - a c {}^0D_1 s_{(q_1+q_2)} \quad (4-11)$$

Στην περίπτωση που η συνάρτηση $S(q_1, q_2)$ δίνεται από την Εξ. (4-11), η Εξ. (4-8β), που δίνει τις καμπύλες ιδιομορφίας και περιθωρίου, έχει λύσεις τις:

$$q_2(q_1) = \pi - \arcsin \left[(S_0 - k_0) / \sqrt{k_1^2 + k_2^2} \right] - \arctan(k_2/k_1) \quad (4-12\alpha)$$

$$q_2(q_1) = \arcsin \left[(S_0 - k_0) / \sqrt{k_1^2 + k_2^2} \right] - \arctan(k_2/k_1) \quad (4-12\beta)$$

όπου S_0 σταθερά και οι συντελεστές $k_i, i=0,1,2$ δίνονται από τις Εξ. (B-30) στο Παράρτημα Β.1.4.

Οι Εξ. (4-12α) και (4-12β) με $S_0=0$, όπως προαναφέρθηκε στο Κεφάλαιο 3, αντιστοιχούν στις καμπύλες ιδιομορφίας του συστήματος, καμπύλες (I) και (II) στο Σχήμα 4.3(α) και παράγουν στον καρτεσιανό χώρο τις περιοχές PDW (A) και PDW (B) αντίστοιχα, βλ. το Σχήμα 4.3(β).

Κατά την κίνηση του ΤΣΔ μέσα σε κάποια περιοχή PDW, θα πρέπει η καμπύλη κίνησης να μην έρθει σε επαφή με την καμπύλη ιδιομορφίας που αντιστοιχεί σε αυτή την περιοχή, έτσι ώστε να αποφευχθεί πιθανή δυναμική ιδιομορφία. Μια ικανή συνθήκη είναι η ύπαρξη σημείου κοινής εφαπτομένης μεταξύ της καμπύλης κίνησης του συστήματος και της καμπύλης περιθωρίου $S(q_1, q_2)=S_0$, με $S_0 \neq 0$, (καμπύλες (III) – (VI) στο Σχήμα 4.3(α)).

Σε ένα τυχαίο σημείο (q_1, q_2) , η κλίση της καμπύλης κίνησης είναι:

$$\lambda_1 = \frac{dq_2}{dq_1} = \frac{\dot{q}_2}{\dot{q}_1} \quad (4-13)$$

Έστω ότι το ΤΣΔ του επίπεδου βραχίονα ακολουθεί τον επιθυμητό δρόμο του οποίου η εξίσωση δίνεται από:

$$x_E = x_E(s(t)) \quad (4-14\alpha)$$

$$y_E = y_E(x_E) \quad (4-14\beta)$$

όπου $s(t)$ είναι το μήκος τόξου παραμετροποίησης της διαδρομής:

$$s(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5, \quad 0 \leq s \leq 1 \quad (4-15\alpha)$$

όπου οι συντελεστές a_i υπολογίζονται κάθε φορά από τις αρχικές και τελικές συνθήκες θέσης, ταχύτητας και επιτάχυνσης της διαδρομής του ΤΣΔ.

Από τις Εξ. (4-9α) και (4-14α) προκύπτει ότι η μεταβλητή s μπορεί να εκφραστεί και ως συνάρτηση των μεταβλητών θ_0, q_1, q_2 , δηλαδή:

$$s(t) = f(\theta_0, q_1, q_2) \quad (4-15\beta)$$

Στην περίπτωση επίπεδων κινήσεων στις οποίες η θέση του ΤΣΔ δίνεται από τις Εξ. (4-14), η γραμμική του ταχύτητα δίνεται από:

$$\dot{\mathbf{r}}_E = [\dot{x}_E \quad \dot{y}_E]^T = \left[1 \quad \frac{\partial y_E(x_E)}{\partial x_E} \right]^T \frac{\partial x_E(s)}{\partial s} \dot{s} \quad (4-16)$$

όπου η ταχύτητα $\dot{s}(t)$ δίνεται από τη χρονική παράγωγο της Εξ. (4-15α).

Από τις Εξ. (4-10α) – (4-10β), με αντικατάσταση των ταχυτήτων \dot{x}_E και \dot{y}_E του ΤΣΔ που δίνονται από την Εξ. (4-16), προκύπτουν οι παρακάτω ταχύτητες των αρθρώσεων του βραχίονα:

$$\dot{q}_1 = \frac{\dot{s}}{S(q_1, q_2)} g_1 \quad (4-17\alpha)$$

$$\dot{q}_2 = \frac{\dot{s}}{S(q_1, q_2)} g_2 \quad (4-17\beta)$$

όπου:

$$g_1 = \frac{\partial x_E(s)}{\partial s} [- {}^0D_2 (a c_{(\theta_0)} + b c_{(\theta_0+q_1)}) + c ({}^0D_0 + {}^0D_1) c_{(\theta_0+q_1+q_2)}] \\ + \frac{\partial x_E(s)}{\partial s} \frac{\partial y_E(x_E)}{\partial x_E} [- {}^0D_2 (a s_{(\theta_0)} + b s_{(\theta_0+q_1)}) + c ({}^0D_0 + {}^0D_1) s_{(\theta_0+q_1+q_2)}] \quad (4-18\alpha)$$

$$g_2 = \frac{\partial x_E(s)}{\partial s} [a ({}^0D_1 + {}^0D_2) c_{(\theta_0)} - {}^0D_0 (b c_{(\theta_0+q_1)} + c c_{(\theta_0+q_1+q_2)})] \\ + \frac{\partial x_E(s)}{\partial s} \frac{\partial y_E(x_E)}{\partial x_E} [a ({}^0D_1 + {}^0D_2) s_{(\theta_0)} - {}^0D_0 (b s_{(\theta_0+q_1)} + c s_{(\theta_0+q_1+q_2)})] \quad (4-18\beta)$$

Στις Εξ. (4-18) ο όρος $\partial y_E(x_E)/\partial x_E$ είναι συνάρτηση της μεταβλητής x_E η οποία, σύμφωνα με την Εξ. (4-9α), εξαρτάται από τις μεταβλητές θ_0, q_1, q_2 . Επίσης ο όρος $\partial x_E(s)/\partial s$ είναι συνάρτηση της μεταβλητής s η οποία όπως προκύπτει από την Εξ. (4-15β) εξαρτάται επίσης από τις μεταβλητές θ_0, q_1, q_2 . Από τα παραπάνω προκύπτει ότι οι συναρτήσεις g_1 και g_2 που δίνονται τις Εξ. (4-18) εξαρτώνται μόνο από τις μεταβλητές θ_0, q_1, q_2 , δηλαδή $g_1(\theta_0, q_1, q_2)$ και $g_2(\theta_0, q_1, q_2)$. Χρησιμοποιώντας τις Εξ. (4-13) και (4-17), η κλίση της καμπύλης κίνησης γράφεται:

$$\lambda_1 = \frac{g_2(\theta_0, q_1, q_2)}{g_1(\theta_0, q_1, q_2)} = G_1(\theta_0, q_1, q_2) \quad (4-19\alpha)$$

Η κλίση της καμπύλης περιθωρίου στο σημείο (q_1, q_2) δίνεται από τη χρονική παράγωγο της Εξ. (4-8β) και είναι:

$$\lambda_2 = \frac{dq_2}{dq_1} = \frac{\dot{q}_2}{\dot{q}_1} = - \frac{\frac{\partial S(q_1, q_2)}{\partial q_1}}{\frac{\partial S(q_1, q_2)}{\partial q_2}} = G_2(q_1, q_2) \quad (4-19\beta)$$

Οι δύο καμπύλες έχουν κοινή εφαπτομένη όταν:

$$\lambda_1 = \lambda_2 \quad (4-18\gamma)$$

Εάν ο δείκτης t δηλώνει τις μεταβλητές του συστήματος στο σημείο επαφής, τότε οι Εξ. (4-19) δίνουν:

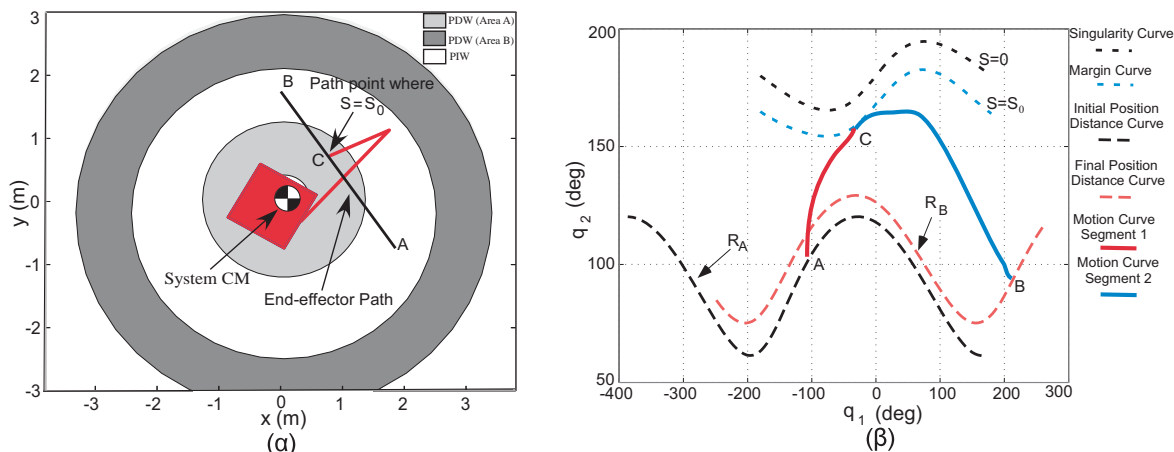
$$G_1(\theta_{0t}, q_{1t}, q_{2t}) = G_2(q_{1t}, q_{2t}) \quad (4-20)$$

Κατά την κίνηση του ΤΣΔ στην επιθυμητή διαδρομή, η Εξ. (4-12α) (ή η Εξ. (4-12β) ανάλογα με την περιοχή PDW που κινείται το ΤΣΔ) που ορίζουν την επιθυμητή καμπύλη περιθωρίου ή ισοδύναμα το επιθυμητό ελάχιστο της συνάρτησης S , η Εξ. (4-20) που αποτελεί την αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη ελαχίστου καθώς και η Εξ. (4-14β) που ορίζει τον επιθυμητό δρόμο σε συνδυασμό με τις Εξ. (4-9) που δίνουν τη θέση του ΤΣΔ στον Καρτεσιανό χώρο μπορούν να επιλυθούν και να δώσουν τον προσανατολισμό θ_{0t} του δορυφόρου και τη διαμόρφωση q_{1t}, q_{2t} του βραχίονα τη στιγμή που η καμπύλη κίνησης και η καμπύλη περιθωρίου εφάπτονται σε κάποιο σημείο C, βλ. Σχήμα 4.1.

Όμως, η Εξ. (4-20) αποτελεί αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη τοπικού ακρότατου και όχι απαραίτητα ολικού ελαχίστου που είναι το ζητούμενο. Δηλαδή η συνάρτησης S που ορίζει τις ΔΙ, είναι πιθανό στο σημείο q_{1t}, q_{2t} να παρουσιάζει μέγιστη τιμή αντί για ελάχιστη ή επίσης να παρουσιάζει τοπικό (και όχι ολικό) ελάχιστο στο σημείο αυτό. Θα πρέπει, λοιπόν, να γίνουν αποδεκτές μόνο αυτές οι τιμές της διαμόρφωσης $\theta_{0t}, q_{1t}, q_{2t}$ του ΔΡΣ, οι οποίες αντιστοιχούν σε ολικό ελάχιστο. Για το σκοπό αυτό, θα πρέπει να σχεδιαστεί η καμπύλης κίνησης, που αντιστοιχεί σε κάθε μια από τις διαμορφώσεις του ΔΡΣ που υπολογίστηκαν παραπάνω, για την κίνηση του ΤΣΔ κατά μήκος του επιθυμητού δρόμου. Αν η καμπύλη κίνησης δεν τέμνει την καμπύλη ιδιομορφίας $S=0$, τότε η διαμόρφωση $\theta_{0t}, q_{1t}, q_{2t}$, στην οποία αντιστοιχεί, γίνεται δεκτή, διαφορετικά απορρίπτεται.

Αφού υπολογιστεί η διαμόρφωση $\theta_{0t}, q_{1t}, q_{2t}$ του ΔΡΣ στο σημείο κοινής επαφής και η οποία αντιστοιχεί σε ένα ενδιάμεσο σημείο C του επιθυμητού δρόμου του ΤΣΔ, βλ. Σχήμα 4.5(β), του οποίου οι συντεταγμένες υπολογίζονται από τις Εξ. (4-9), ο υπολογισμός της καμπύλης κίνησης, η οποία εφάπτεται στην επιλεγμένη καμπύλη περιθωρίου $S=S_0$, γίνεται τμηματικά. Χρησιμοποιώντας τη διαμόρφωση $\theta_{0t}, q_{1t}, q_{2t}$ όταν το ΤΣΔ βρίσκεται στο σημείο C ως αρχική συνθήκη, οι Εξ. (4-10), σε συνδυασμό με την Εξ. (4-16), επιλύονται από το σημείο C προς το αρχικό σημείο A και το τελικό σημείο B του επιθυμητού δρόμου, από όπου προκύπτουν τα τμήματα CA και CB της καμπύλης κίνησης του Σχήματος 4.5(α), αντίστοιχα. Εάν και τα δυο τμήματα της καμπύλης κίνησης, που προκύπτουν και για τις δύο κατευθύνσεις κίνησης του ΤΣΔ, δεν τέμνουν σε κάποιο σημείο την καμπύλη ιδιομορφίας, η αντίστοιχη λύση είναι δεκτή. Σε αυτή την περίπτωση, το αποτέλεσμα που δίνουν οι Εξ. (4-10) για τον προσανατολισμό του δορυφόρου και την διαμόρφωση του βραχίονα, όταν το ΤΣΔ βρίσκεται στο αρχικό σημείο A, αποτελεί μια

αποδεκτή λύση για την αποφυγή ΔΙ. Ξεκινώντας το ΤΣΔ από το σημείο Α με αυτόν τον προσανατολισμό του δορυφόρου και διαμόρφωση του βραχίονα, θα προκύψει η καμπύλη κίνησης ACB η οποία εφάπτεται στην επιλεγμένη καμπύλη περιθωρίου $S=S_0$ όπως φαίνεται και στο Σχήμα 4.5(β).



Σχήμα 4.5 (α) Το σημείο C του επιθυμητού δρόμου στο οποίο αντιστοιχεί ελάχιστη τιμή $S=S_0$, (β) Τα τμήματα CA και CB της καμπύλης κίνησης που προκύπτουν ξεκινώντας από το σημείο C και καταλήγοντας στα σημεία A και B, αντίστοιχα, του επιθυμητού δρόμου.

Να σημειωθεί ότι ο χρόνος ολοκλήρωσης των Εξ. (4-10), δηλαδή ο χρόνος κίνησης του ΤΣΔ από το σημείο C στα σημεία A και B του επιθυμητού δρόμου, μπορεί να πάρει οποιοδήποτε τιμή, αφού, όπως αποδείχθηκε στο Κεφάλαιο 3, για ΔΡΣ με μηδενική αρχική στροφορμή ο χρόνος κίνησης δεν επηρεάζει την απόκριση του συστήματος.

Όπως προαναφέρθηκε στην προηγούμενη παράγραφο, υπάρχουν δρόμοι για τους οποίους δεν υπάρχει κοινή εφασπτομένη μεταξύ της καμπύλης κίνησης και κάποιας καμπύλης περιθωρίου. Στην περίπτωση αυτή θα πρέπει το τελικό σημείο της καμπύλης κίνησης να έρθει σε επαφή με την καμπύλη περιθωρίου (Περίπτωση II). Η απαίτηση αυτή περιγράφεται από τις Εξ. (4-8β) και (4-8γ). Στην περίπτωση του επίπεδου ΔΡΣ με βραχίονα 2-BE του Σχήματος 4.4, η απόσταση R του ΤΣΔ από ΚΜ του συστήματος, στην Εξ. (4-8γ), δίνεται από:

$$R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab \cos(q_1) + 2ac \cos(q_1 + q_2) + 2bc \cos(q_2)} \quad (4-21)$$

Στην περίπτωση αυτή, η Εξ. (4-12α) (ή η Εξ. (4-12β) ανάλογα με την περιοχή PDW που κινείται το ΤΣΔ) και η Εξ. (4-8γ) λαμβάνοντας υπόψη την Εξ. (4-21) επιλύονται και δίνουν τη διαμόρφωση q_1, q_2 του βραχίονα στο τελικό σημείο του δρόμου. Ο προσανατολισμός θ_0 του δορυφόρου προκύπτει από την επίλυση των Εξ. (4-9) και είναι:

$$\theta_0 = \text{atan2}(\sin(\theta_0), \cos(\theta_0)) \quad (4-22\alpha)$$

όπου

$$\sin(\theta_0) = \frac{A y_E^{fin} - B x_E^{fin}}{A^2 + B^2} \quad (4-22\beta)$$

$$\cos(\theta_0) = \frac{A x_E^{fin} + B y_E^{fin}}{A^2 + B^2} \quad (4-22\gamma)$$

όπου:

$$A = a + b \cos(q_1) + c \cos(q_1 + q_2) \quad (4-23\alpha)$$

$$B = b \sin(q_1) + c \sin(q_1 + q_2) \quad (4-23\beta)$$

Στην συνέχεια, οι λύσεις αυτές χρησιμοποιούνται για αρχικές συνθήκες για την επίλυση των Εξ. (4-10) προς το αρχικό ή τελικό σημείο του δρόμου.

4.3.1.2 Τρισδιάστατα Συστήματα

Στην παράγραφο αυτή, οι απαιτούμενες εξισώσεις, για τον υπολογισμό του αρχικού προσανατολισμού της βάσης και της αντίστοιχης διαμόρφωσης του βραχίονα έτσι ώστε η προκύπτουσα καμπύλη κίνησης να εφάπτεται σε μια επιθυμητή επιφάνεια περιθωρίου, επεκτείνονται σε τρισδιάστατα συστήματα. Η θέση του ΤΣΔ είναι συνάρτηση της διαμόρφωσης του βραχίονα και του προσανατολισμού του δορυφόρου που περιγράφεται από τις παραμέτρους Euler, [13]:

$$\mathbf{r}_E(t) = [x_E(\boldsymbol{\varepsilon}(t), n(t), \mathbf{q}(t)) \quad y_E(\boldsymbol{\varepsilon}(t), n(t), \mathbf{q}(t)) \quad z_E(\boldsymbol{\varepsilon}(t), n(t), \mathbf{q}(t))]^T \quad (4-24)$$

όπου οι παράμετροι Euler $\boldsymbol{\varepsilon}, n$ ικανοποιούν τον περιορισμό:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon} + n^2 = 1 \quad (4-25\alpha)$$

και το διάνυσμα $\boldsymbol{\varepsilon}$ δίνεται από:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 \quad \varepsilon_3]^T \quad (4-25\beta)$$

Για τη μετάβαση του ΤΣΔ από ένα σημείο σε ένα άλλο σημείο του χώρου, χρησιμοποιείται το τρισδιάστατο ΔΡΣ με βραχίονα 3-BE του Σχήματος 3.4. Όπως αποδεικνύεται στο Παράρτημα Β.1.1, η θέση του ΤΣΔ συναρτήσει του προσανατολισμού του δορυφόρου και της διαμόρφωσης του βραχίονα, δίνεται από:

$$x_E(\boldsymbol{\varepsilon}, n, \mathbf{q}) = (1 - 2\varepsilon_2^2 - 2\varepsilon_3^2)h_1 + 2(\varepsilon_1\varepsilon_2 - \varepsilon_3n)h_2 + 2(\varepsilon_1\varepsilon_3 + \varepsilon_2n)h_3 \quad (4-26\alpha)$$

$$y_E(\boldsymbol{\varepsilon}, n, \mathbf{q}) = 2(\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_3n)h_1 + (1 - 2\varepsilon_1^2 - 2\varepsilon_3^2)h_2 + 2(\varepsilon_2\varepsilon_3 - \varepsilon_1n)h_3 \quad (4-26\beta)$$

$$z_E(\boldsymbol{\varepsilon}, n, \mathbf{q}) = 2(\varepsilon_1\varepsilon_3 - \varepsilon_2n)h_1 + 2(\varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_1n)h_2 + (1 - 2\varepsilon_1^2 - 2\varepsilon_2^2)h_3 \quad (4-26\gamma)$$

όπου

$$h_1(\mathbf{q}) = a_x + c_{(q_1)} (c c_{(q_2)} + d c_{(q_2+q_3)}) \quad (4-27\alpha)$$

$$h_2(\mathbf{q}) = a_y + s_{(q_1)} (c c_{(q_2)} + d c_{(q_2+q_3)}) \quad (4-27\beta)$$

$$h_3(\mathbf{q}) = a_z + b + c s_{(q_2)} + d s_{(q_2+q_3)} \quad (4-27\gamma)$$

όπου τα μεγέθη a_x, a_y, a_z, b, c και d δίνονται από τις Εξ. (Γ-2) στο Παράρτημα Γ.1.1.

Στην περίπτωση που μεταβάλλονται και οι τρεις συντεταγμένες του ΤΣΔ στο χώρο, η επιθυμητή του διαδρομή δίνεται από:

$$x_E = x_E(s) \quad (4-28\alpha)$$

$$y_E = y_E(x_E) \quad (4-28\beta)$$

$$z_E = z_E(x_E) \quad (4-28\gamma)$$

Στην γενική περίπτωση, λοιπόν, που η θέση του ΤΣΔ δίνεται από τις Εξ. (4-28), η γραμμική του ταχύτητα είναι:

$$\dot{\mathbf{r}}_E = [\dot{x}_E \quad \dot{y}_E \quad \dot{z}_E]^T = \left[1 \quad \frac{\partial y_E(x_E)}{\partial x_E} \quad \frac{\partial z_E(x_E)}{\partial x_E} \right]^T \frac{\partial x_E(s)}{\partial s} \dot{s} \quad (4-29)$$

Από τις Εξ. (4-26α) και (4-28α) προκύπτει ότι η μεταβλητή s μπορεί να εκφραστεί και ως συνάρτηση των μεταβλητών $\boldsymbol{\varepsilon}, n, \mathbf{q}$, δηλαδή:

$$s(t) = f(\boldsymbol{\varepsilon}, n, \mathbf{q}) \quad (4-30)$$

Στη συνέχεια η συνθήκη ύπαρξης κοινής εφαπτομένης μεταξύ της καμπύλης κίνησης και μιας επιφάνειας περιθωρίου επεκτείνεται στα τρισδιάστατα συστήματα. Καθώς το ΤΣΔ κινείται, οι σχηματισμοί του βραχίονα παράγουν μια καμπύλη κίνησης στο χώρο των αρθρώσεων, η οποία έχει εφαπτόμενο διάνυσμα \mathbf{c} που δίνεται από:

$$\mathbf{c} = \dot{\mathbf{q}} = [\dot{q}_1 \quad \dot{q}_2 \quad \dot{q}_3]^T \quad (4-31)$$

όπου το διάνυσμα-στήλη $\dot{\mathbf{q}}$ των ταχυτήτων των αρθρώσεων δίνεται από την Εξ. (4-3α).

Η Εξ. (4-3α) για μηδενική αρχική στροφορμή και με αντικατάσταση της γραμμικής ταχύτητας του ΤΣΔ από την Εξ. (4-29), γίνεται:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{S}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{R}_0^T(\boldsymbol{\varepsilon}, n) \left[1 \quad \frac{\partial y_E(x_E)}{\partial x_E} \quad \frac{\partial z_E(x_E)}{\partial x_E} \right]^T \frac{\partial x_E(s)}{\partial s} \dot{s} \quad (4-32)$$

Για έναν τρισδιάστατο ΔΡΣ με βραχίονα 3-BE, η Εξ. (4-8β) ορίζει μια σταθερή επιφάνεια στο χώρο των αρθρώσεων. Το κάθετο διάνυσμα \mathbf{n} στην επιφάνεια περιθωρίου $S = S_0$ δίνεται από,

$$\mathbf{n} = \nabla S = [\partial S / \partial q_1 \quad \partial S / \partial q_2 \quad \partial S / \partial q_3]^T \quad (4-33)$$

Για την αποφυγή πιθανών δυναμικών ιδιομορφιών, η καμπύλη κίνησης που ορίζεται από την Εξ. (4-31), θα πρέπει να εφάπτεται σε κάποιο σημείο στο χώρο των αρθρώσεων με την επιφάνεια περιθωρίου που ορίζεται από την Εξ. (4-33). Στο σημείο κοινής

εφαπτόμενης θα πρέπει τα διανύσματα \mathbf{c} και \mathbf{n} να είναι κάθετα. Η συνθήκη αυτή οδηγεί στην Εξ. (4-8α) που ορίζει το ελάχιστο της συνάρτησης S .

Η Εξ. (4-8α), λόγω των Εξ. (4-32) γίνεται:

$$\nabla S^T \mathbf{S}^{-1} \mathbf{R}_0^T \left[1 \quad \frac{\partial y_E(x_E)}{\partial x_E} \quad \frac{\partial z_E(x_E)}{\partial x_E} \right]^T \frac{\partial x_E(s)}{\partial s} \dot{s} = 0 \quad (4-34\alpha)$$

Όμως, σε οποιοδήποτε ενδιάμεσο σημείο της διαδρομής του ΤΣΔ, ισχύει ότι:

$$\frac{\partial x_E(s)}{\partial s} \dot{s} \neq 0 \quad (4-34\beta)$$

Οπότε η Εξ. (4-34α) απλοποιείται σε:

$$\nabla S^T \mathbf{b} = 0 \quad (4-35\alpha)$$

όπου το 3×1 διάνυσμα-στήλη \mathbf{b} δίνεται από:

$$\mathbf{b} = [b_1 \quad b_2 \quad b_3]^T = \mathbf{S}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{R}_0^T(\boldsymbol{\varepsilon}, n) \left[1 \quad \frac{\partial y_E(x_E)}{\partial x_E} \quad \frac{\partial z_E(x_E)}{\partial x_E} \right]^T \quad (4-35\beta)$$

Αφού οι όροι $\partial y_E(x_E)/\partial x_E$ και $\partial z_E(x_E)/\partial x_E$ είναι συναρτήσεις της μεταβλητής x_E η οποία, σύμφωνα με την Εξ. (4-26α), εξαρτάται από τις μεταβλητές $\boldsymbol{\varepsilon}, n, \mathbf{q}$ από την Εξ. (4-35β) προκύπτει ότι $\mathbf{b}(\boldsymbol{\varepsilon}, n, \mathbf{q})$. Οπότε από τις Εξ. (4-33) και (4-35α) έχουμε ότι:

$$b_1(\boldsymbol{\varepsilon}, n, \mathbf{q}) \frac{\partial S(\mathbf{q})}{\partial q_1} + b_2(\boldsymbol{\varepsilon}, n, \mathbf{q}) \frac{\partial S(\mathbf{q})}{\partial q_2} + b_3(\boldsymbol{\varepsilon}, n, \mathbf{q}) \frac{\partial S(\mathbf{q})}{\partial q_3} = 0 \quad (4-36)$$

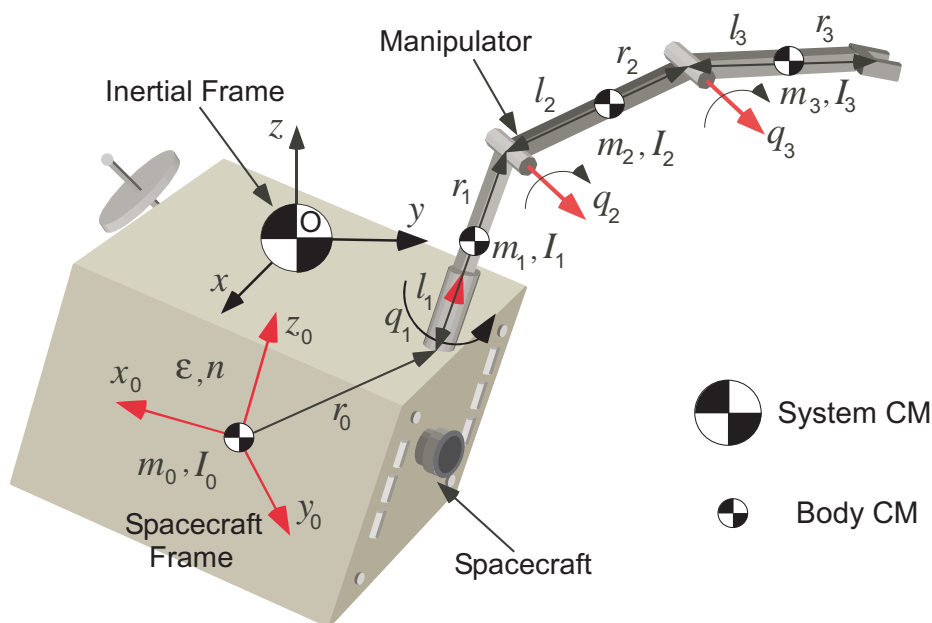
Δηλαδή, η Εξ. (4-36) που αποτελεί την αναγκαία συνθήκη για ύπαρξη ελάχιστης τιμής της συνάρτησης S , για ελεύθερα αιωρούμενα ΔΡΣ με μηδενική αρχική στροφορμή, είναι συνάρτηση μόνο των μεταβλητών $\boldsymbol{\varepsilon}, n, \mathbf{q}$ και ανεξάρτητη από το χρόνο t .

Στην περίπτωση που το ΤΣΔ του τρισδιάστατου βραχίονα ακολουθεί κάποιον επιθυμητό δρόμο, οι Εξ. (4-28β) και (4-28γ) που ορίζουν τον επιθυμητό δρόμο σε συνδυασμό με τις Εξ. (4-26) που δίνουν τη θέση του ΤΣΔ, η Εξ. (4-25α) που περιγράφει τον περιορισμό μεταξύ των παραμέτρων Euler καθώς και η Εξ. (4-8β) που ορίζει την επιθυμητή επιφάνεια περιθωρίου (ή διαφορετικά το επιθυμητό ελάχιστο της συνάρτησης S) και τέλος η Εξ. (4-36) που δίνει τη συνθήκη για την ύπαρξη ελάχιστη τιμής της συνάρτησης S , επιλύονται και δίνουν τον προσανατολισμό $\boldsymbol{\varepsilon}, n$ του δορυφόρου και τη διαμόρφωση \mathbf{q} του βραχίονα όταν η καμπύλη κίνησης και η καμπύλη περιθωρίου εφάπτονται. Στην συνέχεια, οι λύσεις αυτές χρησιμοποιούνται ως αρχικές συνθήκες για την επίλυση των Εξ. (4-3) προς το αρχικό και τελικό σημείο του δρόμου που δίνεται από τις Εξ. (4-28) και (4-15α). Εάν τα αντίστοιχα τμήματα της καμπύλη κίνησης που προκύπτουν δεν τέμνουν σε κάποιο σημείο την επιφάνεια ιδιομορφίας, η αντίστοιχη λύση είναι δεκτή. Σε αυτή την περίπτωση, το αποτέλεσμα που δίνουν οι Εξ. (4-3) για τον

προσανατολισμό του δορυφόρου και τη διαμόρφωση του βραχίονα στο αρχικό σημείο αποτελεί μια αποδεκτή αρχική συνθήκη για την οποία η προκύπτουσα καμπύλη κίνησης εφάπτεται της επιθυμητής επιφάνειας περιθωρίου εξασφαλίζοντας την αποφυγή δυναμικών ιδιομορφιών.

Στην περίπτωση που δεν υπάρχει κοινή εφαπτομένη, δηλαδή δεν υπάρχει ελάχιστη τιμή της συνάρτησης S για κάποια ενδιάμεση τιμή της διάρκειας της κίνησης του ΤΣΔ, τότε η ελάχιστη τιμή της S πρέπει να είναι είτε στην αρχική είτε στην τελική θέση του ΤΣΔ του βραχίονα. Στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιούνται οι Εξ. (4-8β) και (4-8γ). Για το τρισδιάστατο ΔΡΣ με βραχίονα 3-BE του Σχήματος 4.6 όπου ο βραχίονας είναι τοποθετημένος κατά μήκος ενός κύριου άξονα (principal axis) του δορυφόρου και οι ροπές αδράνειας του δορυφόρου ως προς τους δύο άλλους κύριους άξονες είναι ίσες, δηλαδή ισχύουν οι παραδοχές που περιγράφονται από τις Εξ. (3-23), η απόσταση R του ΤΣΔ από το ΚΜ του συστήματος, στην Εξ. (4-8γ), είναι ανεξάρτητη της γωνίας q_1 της πρώτης άρθρωσης και δίνεται από:

$$R = \sqrt{(a+b)^2 + c^2 + d^2 + 2(a+b)c \sin(q_2) + 2(a+b)d \sin(q_2 + q_3) + 2cd \cos(q_3)} \quad (4-37)$$



Σχήμα 4.6 Τρισδιάστατο Ελεύθερα Αιωρούμενο ΔΡΣ με Βραχίονα 3-BE.

4.3.2 Συστήματα με Αρχική Στροφορμή

Όπως έχει προαναφερθεί, μικρές ποσότητες στροφορμής μπορούν να παραμείνουν στο ΔΡΣ εξαιτίας της αδυναμίας πλήρους απορρόφησης της από τους μηχανισμούς ελέγχου στροφορμής, όπως είναι οι σφόνδυλοι ανάδρασης, λόγω κορεσμού των κινητήρων τους. Στην παράγραφο αυτή, λοιπόν, η μέθοδος επεκτείνεται σε συστήματα με αρχική στροφορμή έτσι ώστε εξασφαλιστεί η ευρωστία της μεθόδου κάτω από τις συνθήκες

αυτές. Αρχικά εξετάζονται επίπεδες κινήσεις ΔΡΣ και στη συνέχεια η μελέτη επεκτείνεται και σε τρισδιάστατες κινήσεις ΔΡΣ.

4.3.2.1 Επίπεδη Κίνηση

Για το επίπεδο ΔΡΣ με βραχίονα 2-ΒΕ του Σχήματος 4.4 του οποίου η αρχική στροφορμή είναι μη μηδενική, με αντικατάσταση των ταχυτήτων \dot{x}_E και \dot{y}_E του ΤΣΔ από τις Εξ. (4-16) στις Εξ. (3-19) προκύπτει ότι:

$$\dot{q}_1 = \frac{\dot{s}}{S(q_1, q_2)} \left[g_1(\theta_0, q_1, q_2) - \frac{h_{CM}}{\dot{s}} (a c s_{(q_1+q_2)} + b c s_{(q_2)}) \right] \quad (4-38\alpha)$$

$$\dot{q}_2 = \frac{\dot{s}}{S(q_1, q_2)} \left[g_2(\theta_0, q_1, q_2) + \frac{h_{CM}}{\dot{s}} (a c s_{(q_1+q_2)} + b c s_{(q_2)}) \right] \quad (4-38\beta)$$

$$\dot{\theta}_0 = \frac{\dot{s}}{S(q_1, q_2)} \left[g_0(\theta_0, q_1, q_2) + \frac{h_{CM}}{\dot{s}} b c s_{(q_2)} \right] \quad (4-38\gamma)$$

όπου οι συναρτήσεις $g_1(\theta_0, q_1, q_2)$ και $g_2(\theta_0, q_1, q_2)$ δίνονται από τις Εξ. (4-18) και:

$$g_0(\theta_0, q_1, q_2) = \frac{\partial x_E(s)}{\partial s} [b {}^0D_2 c_{(\theta_0+q_1)} - c {}^0D_1 c_{(\theta_0+q_1+q_2)}] + \frac{\partial x_E(s)}{\partial s} \frac{\partial y_E(x_E)}{\partial x_E} [b {}^0D_2 s_{(\theta_0+q_1)} - c {}^0D_1 s_{(\theta_0+q_1+q_2)}] \quad (4-39)$$

Χρησιμοποιώντας τις Εξ. (4-13) και (4-38α)-(4-38β), η κλίση της καμπύλης κίνησης γράφεται:

$$\lambda_1 = \frac{g_2(\theta_0, q_1, q_2) + \frac{h_{CM}}{\dot{s}} (a c s_{(q_1+q_2)} + b c s_{(q_2)})}{g_1(\theta_0, q_1, q_2) - \frac{h_{CM}}{\dot{s}} (a c s_{(q_1+q_2)} + b c s_{(q_2)})} \quad (4-40)$$

Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση μη μηδενικής στροφορμής, η κλίση λ_1 της καμπύλης κίνησης δεν εξαρτάται μόνο από τον προσανατολισμό θ_0 του δορυφόρου και τη διαμόρφωση q_1, q_2 του βραχίονα αλλά επίσης και από τον όρο h_{CM}/\dot{s} . Με αντικατάσταση της ταχύτητας \dot{s} από την Εξ. (3-10β) προκύπτει ότι:

$$\frac{h_{CM}}{\dot{s}} = \frac{1}{30\tau^2(1-\tau)^2} h_{CM} t_f, \quad 0 < \tau < 1 \quad (4-41)$$

Δηλαδή στην περίπτωση μη μηδενικής στροφορμής του ΔΡΣ, το πρόβλημα της αποφυγής δυναμικών ιδιομορφιών εξαρτάται επιπλέον και από το γινόμενο της στροφορμής h_{CM} με το χρόνο κίνησης t_f του ΤΣΔ καθώς και από τον αδιάστατο χρόνο τ . Σημειώνεται ότι η Εξ. (4-41) ορίζεται πάντα, αφού ο υπολογισμός της κοινής

εφαπτομένης (Περίπτωση Ι) γίνεται για χρονικές στιγμές $0 < t < t_f$ ή ισοδύναμα για $0 < \tau < 1$.

Εφόσον μόνο το γινόμενο των όρων h_{CM} και t_f παρουσιάζεται, η κλίση της καμπύλης κίνησης δίνεται από:

$$\lambda_1 = G_1^*(\theta_0, q_1, q_2, \tau, h_{CM} t_f) \quad (4-42)$$

Η κλίση της καμπύλης περιθωρίου δίνεται από την Εξ. (4-19β). Στο σημείο όπου η καμπύλη κίνησης εφάπτεται στην καμπύλη περιθωρίου ισχύει η Εξ. (4-19γ). Εάν ο δείκτης t δηλώνει τις μεταβλητές του συστήματος στο σημείο επαφής, τότε:

$$G_1^*(\theta_{0t}, q_{1t}, q_{2t}, \tau_t, h_{CM} t_f) = G_2(q_{1t}, q_{2t}) \quad (4-43)$$

Η Εξ. (4-43) περιέχει έναν παραπάνω άγνωστο σε σχέση με την Εξ. (4-20) που αντιστοιχεί στην περίπτωση επίπεδου ΔΡΣ με μηδενική στροφορμή, τον αδιάστατο χρόνο τ . Για την επίλυση του προβλήματος, λοιπόν, χρειάζεται μια επιπλέον σχέση. Η σχέση αυτή προκύπτει από το συνδυασμό των Εξ. (4-15α) και (4-15β). Οπότε προκύπτει μια σχέση που συνδέει το χρόνο κίνησης του ΔΡΣ με τις μεταβλητές θ_0, q_1, q_2 .

Για μια γνωστή τιμή της στροφορμής h_{CM} του ΔΡΣ και έναν προκαθορισμένο χρόνο κίνησης t_f του ΤΣΔ για τον υπολογισμό του προσανατολισμού θ_{0t} του δορυφόρου και της διαμόρφωση q_{1t}, q_{2t} του βραχίονα καθώς και του χρόνου t_t τη στιγμή που η καμπύλη κίνησης και η καμπύλη περιθωρίου εφάπτονται σε κάποιο σημείο C, βλ. Σχήμα 4.1. χρησιμοποιούνται οι παρακάτω εξισώσεις. Η Εξ. (4-12α) (ή την Εξ. (4-12β) ανάλογα με την περιοχή PDW που κινείται το ΤΣΔ) που ορίζει την επιθυμητή καμπύλη περιθωρίου ή ισοδύναμα το επιθυμητό ελάχιστο της συνάρτησης S , η Εξ. (4-43) που αποτελεί την αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη αυτού του ελαχίστου καθώς και οι Εξ. (4-14β) και (4-9) που ορίζουν τον επιθυμητό δρόμο και τη θέση του ΤΣΔ στον Καρτεσιανό χώρο αντίστοιχα, και τέλος οι Εξ. (4-15α) και (4-15β) που δίνουν το χρόνο κίνησης συναρτήσει του προσανατολισμού του δορυφόρου και της διαμόρφωσης του βραχίονα,

Στη συνέχεια, οι μεταβλητές θ_{0t} και q_{1t}, q_{2t} θα πρέπει να χρησιμοποιηθούν ως αρχικές συνθήκες στην επίλυση των Εξ. (4-38) για κίνηση του ΤΣΔ προς το αρχικό σημείο (με χρόνο κίνησης $\tau_t t_f$) και προς το τελικό σημείο (με χρόνο κίνησης $(1-\tau_t)t_f$) του δρόμου ο οποίος δίνεται μέσω της γραμμικής ταχύτητας του ΤΣΔ, Εξ. (4-16). Πρέπει να σημειωθεί ότι στην περίπτωση μη-μηδενικής στροφορμής, ο χρόνος ολοκλήρωσης δεν μπορεί να ληφθεί αυθαίρετα, όπως γίνεται για τα συστήματα με μηδενική στροφορμή. Επίσης, για την αντίθετη κίνηση του ΤΣΔ προς το αρχικό σημείο του δρόμου, απαιτείται η χρήση στροφορμής του συστήματος με αντίθετο πρόσημο. Οι λύση $(\theta_{0t}, \mathbf{q}_t, \tau_t)$ γίνεται

δεκτή, εφόσον κανένα από τα τμήματα της καμπύλης κίνησης που προκύπτουν από τις κινήσεις του ΤΣΔ και προς τις δυο κατευθύνσεις, δεν τέμνει την καμπύλη ιδιομορφίας. Στην περίπτωση αυτή ο προσανατολισμός του δορυφόρου και η διαμόρφωση του βραχίονα που προκύπτουν από την επίλυση των Εξ. (4-38) όταν το ΤΣΔ βρεθεί στο αρχικό σημείο του δρόμου, αποτελούν μια αποδεκτή τιμή αρχικών συνθηκών για τις οποίες η καμπύλη κίνησης εφάπτεται μιας επιθυμητής καμπύλης περιθωρίου εξασφαλίζοντας έτσι αποφυγή ΔΙ.

4.3.2.2 Τρισδιάστατη Κίνηση

Στην γενική περίπτωση, το διάνυσμα των απαιτούμενων ταχυτήτων των αρθρώσεων δίνεται από την Εξ. (4-3α) η οποία σε συνδυασμό με την Εξ. (4-29) γράφεται:

$$\dot{\mathbf{q}} = -\mathbf{S}^{-1} {}^0\mathbf{J}_{11} {}^0\mathbf{D}^{-1} \mathbf{R}_0^T \mathbf{h}_{\text{CM}} + \mathbf{S}^{-1} \mathbf{R}_0^T \left[1 \quad \frac{\partial y_E(x_E)}{\partial x_E} \quad \frac{\partial z_E(x_E)}{\partial x_E} \right]^T \frac{\partial x_E(s)}{\partial s} \dot{s} \quad (4-44\alpha)$$

όπου βγάζοντας κοινό παράγοντα τον όρο \dot{s} και λαμβάνοντας υπόψη την Εξ. (3-10β) έχουμε:

$$\dot{\mathbf{q}} = \left[-\frac{\mathbf{S}^{-1} {}^0\mathbf{J}_{11} {}^0\mathbf{D}^{-1} \mathbf{R}_0^T \mathbf{h}_{\text{CM}} t_f}{30\tau^2(1-\tau)^2} + \mathbf{S}^{-1} \mathbf{R}_0^T \left[1 \quad \frac{\partial y_E(x_E)}{\partial x_E} \quad \frac{\partial z_E(x_E)}{\partial x_E} \right]^T \frac{\partial x_E(s)}{\partial s} \right] \dot{s} \quad (4-44\beta)$$

Η Εξ. (4-8α), λόγω της Εξ. (4-44β) γίνεται:

$$\nabla S^T \left[-\frac{\mathbf{S}^{-1} {}^0\mathbf{J}_{11} {}^0\mathbf{D}^{-1} \mathbf{R}_0^T \mathbf{h}_{\text{CM}} t_f}{30\tau^2(1-\tau)^2} + \mathbf{S}^{-1} \mathbf{R}_0^T \left[1 \quad \frac{\partial y_E(x_E)}{\partial x_E} \quad \frac{\partial z_E(x_E)}{\partial x_E} \right]^T \frac{\partial x_E(s)}{\partial s} \right] \dot{s} = 0 \quad (4-44\gamma)$$

Όμως, σε οποιοδήποτε ενδιάμεσο σημείο της διαδρομής του ΤΣΔ, ισχύει ότι $\dot{s} \neq 0$, οπότε η Εξ. (4-44γ) απλοποιείται σε:

$$\nabla S^T \mathbf{b}^* = 0 \quad (4-45\alpha)$$

όπου το 3×1 διάνυσμα-στήλη \mathbf{b}^* δίνεται από:

$$\mathbf{b}^* = \left[b_1^* \quad b_2^* \quad b_3^* \right]^T = \frac{\mathbf{S}^{-1} {}^0\mathbf{J}_{11} {}^0\mathbf{D}^{-1} \mathbf{R}_0^T \mathbf{h}_{\text{CM}} t_f}{30\tau^2(1-\tau)^2} + \mathbf{S}^{-1} \mathbf{R}_0^T \left[1 \quad \frac{\partial y_E(x_E)}{\partial x_E} \quad \frac{\partial z_E(x_E)}{\partial x_E} \right]^T \frac{\partial x_E(s)}{\partial s} \quad (4-45\beta)$$

Όπως αναφέρθηκε και στην Παράγραφο 4.3.1.2, οι όροι $\partial y_E(x_E)/\partial x_E$ και $\partial z_E(x_E)/\partial x_E$ είναι συναρτήσεις των μεταβλητών $\varepsilon, n, \mathbf{q}$. Επίσης ο όρος $\partial x_E(s)/\partial s$ είναι συνάρτηση της μεταβλητής s η οποία σύμφωνα με την Εξ. (4-43) εξαρτάται επίσης από τις μεταβλητές $\varepsilon, n, \mathbf{q}$. Ο δεύτερος όρος, λοιπόν, του αθροίσματος της Εξ. (4-45β) είναι συνάρτηση των μεταβλητών $\varepsilon, n, \mathbf{q}$. Από την άλλη μεριά, ο πρώτος όρος του αθροίσματος της Εξ. (4-45β) εξαρτάται επίσης και από τις μεταβλητές $\tau, \mathbf{h}_{\text{CM}} t_f$. Τελικά, από την Εξ. (4-45β), προκύπτει ότι $\mathbf{b}^*(\varepsilon, n, \mathbf{q}, \tau, \mathbf{h}_{\text{CM}} t_f)$. Οπότε από τις Εξ. (4-32) και (4-45β) έχουμε ότι:

$$b_1^*(\boldsymbol{\varepsilon}, n, \mathbf{q}, \tau, \mathbf{h}_{CM} t_f) \frac{\partial S(\mathbf{q})}{\partial q_1} + b_2^*(\boldsymbol{\varepsilon}, n, \mathbf{q}, \tau, \mathbf{h}_{CM} t_f) \frac{\partial S(\mathbf{q})}{\partial q_2} + b_3^*(\boldsymbol{\varepsilon}, n, \mathbf{q}, \tau, \mathbf{h}_{CM} t_f) \frac{\partial S(\mathbf{q})}{\partial q_3} = 0 \quad (4-46)$$

Δηλαδή, η Εξ. (4-46) που αποτελεί την αναγκαία συνθήκη για ύπαρξη ελάχιστης τιμής της συνάρτησης S , για ελεύθερα αιωρούμενα ΔΡΣ με μη-μηδενική αρχική στροφορμή, είναι συνάρτηση των όχι μόνο των μεταβλητών $\boldsymbol{\varepsilon}, n, \mathbf{q}$ αλλά επίσης και των μεταβλητών τ και $\mathbf{h}_{CM} t_f$.

Στην περίπτωση που το ΤΣΔ του τρισδιάστατου βραχίονα ακολουθεί κάποιον επιθυμητό δρόμο, οι Εξ. (4-28β) και (4-28γ) που ορίζουν τον επιθυμητό δρόμο σε συνδυασμό με τις Εξ. (4-26) που δίνουν τη θέση του ΤΣΔ, η Εξ. (4-25α) που περιγράφει τον περιορισμό μεταξύ των παραμέτρων Euler καθώς και η Εξ. (4-8β) που ορίζει την επιθυμητή επιφάνεια περιθωρίου (ή διαφορετικά το επιθυμητό ελάχιστο της συνάρτησης S), η Εξ. (4-46) που δίνει τη συνθήκη για την ύπαρξη ελάχιστη τιμής της συνάρτησης S , και τέλος ο συνδυασμός των Εξ. (4-15α) και (4-30) που δίνουν το χρόνο κίνησης συναρτήσει του προσανατολισμού του δορυφόρου και της διαμόρφωσης του βραχίονα επιλύονται και δίνουν τον προσανατολισμό $\boldsymbol{\varepsilon}_i, n_i$ του δορυφόρου και τη διαμόρφωση \mathbf{q}_i του βραχίονα καθώς και τον αδιάστατο χρόνο τ_i όταν η καμπύλη κίνησης και η καμπύλη περιθωρίου εφάπτονται.

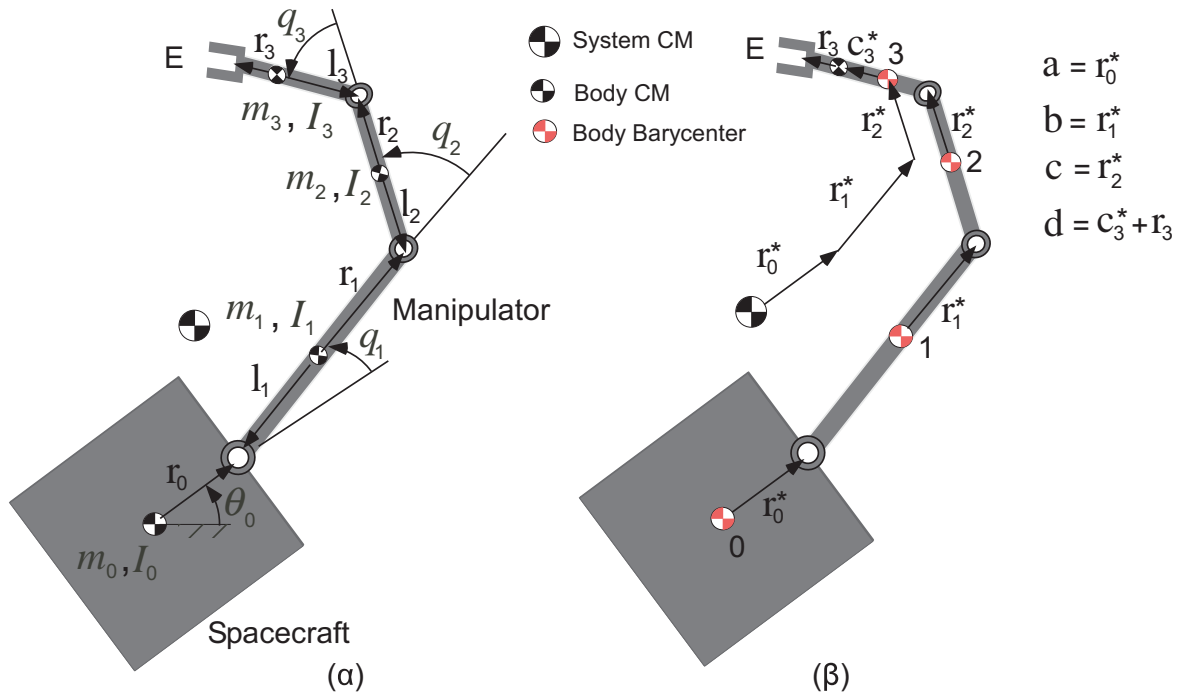
Στην συνέχεια, οι λύσεις αυτές χρησιμοποιούνται ως αρχικές συνθήκες για την επίλυση των Εξ. (4-3) προς το αρχικό και τελικό σημείο του δρόμου ο οποίος δίνεται μέσω της Εξ. (4-29). Εάν η καμπύλη κίνησης που προκύπτει δεν τέμνει σε κάποιο σημείο την καμπύλη ιδιομορφίας, η αντίστοιχη λύση είναι δεκτή. Σε αυτή την περίπτωση, το αποτέλεσμα που δίνουν οι Εξ. (4-3) για τον προσανατολισμό του δορυφόρου και της αντίστοιχης διαμόρφωσης του βραχίονα στο αρχικό σημείο του ΤΣΔ αποτελεί μια αρχική συνθήκη για την οποία η προκύπτουσα καμπύλη κίνησης εφάπτεται της επιλεγμένης επιφάνειας περιθωρίου εξασφαλίζοντας έτσι την αποφυγή δυναμικών ιδιομορφιών.

4.3.3 Ορισμός Προσανατολισμού Εργαλείου Τελικής Δράσης

Σε πολλές ρομποτικές εφαρμογές σε τροχιά απαιτείται το ΤΣΔ κατά τη διάρκεια της κίνησης του να έχει κάποιον επιθυμητό προσανατολισμό. Η επίτευξη κατάλληλου προσανατολισμού του ΤΣΔ απαιτεί βραχίονες με περισσότερους βαθμούς ελευθερίας. Εδώ, η μέθοδος επεκτείνεται σε περιπτώσεις όπου κατά την μετάβαση του ΤΣΔ από ένα σημείο σε ένα άλλο απαιτείται επιπλέον και καθορισμένος προσανατολισμός του.

4.3.3.1 Επίπεδη Κίνηση

Για να μπορέσει το ΤΣΔ ενός επίπεδου βραχίονα να ακολουθήσει τον επιθυμητό δρόμο με επιθυμητό προσανατολισμό, απαιτείται η χρήση του επίπεδου ελεύθερα αιωρούμενου ΔΡΣ με βραχίονα 3-BE, ($N=3$), του Σχήματος 4.7.



Σχήμα 4.7 Επίπεδο ελεύθερα αιωρούμενο ΔΡΣ με βραχίονα 3-ΒΕ. (α) Ορισμός των αδρανειακών ιδιοτήτων και των μεταβλητών διαμόρφωσης. (β) Τα βαρυκεντρικά διανύσματα **a**, **b**, **c** και **d** του ΔΡΣ.

Χρησιμοποιώντας την προσέγγιση των βαρυκεντρικών διανυσμάτων, [67], η θέση και ο προσανατολισμός του ΤΣΔ για το επίπεδο ΔΡΣ με βραχίονα 3-ΒΕ του Σχήματος 4.7, δίνονται από:

$$x_E = a c_{(\theta_0)} + b c_{(\theta_0+q_1)} + c c_{(\theta_0+q_1+q_2)} + d c_{(\theta_0+q_1+q_2+q_3)} \quad (4-47\alpha)$$

$$y_E = a s_{(\theta_0)} + b s_{(\theta_0+q_1)} + c s_{(\theta_0+q_1+q_2)} + d s_{(\theta_0+q_1+q_2+q_3)} \quad (4-47\beta)$$

$$\theta_E = \theta_0 + q_1 + q_2 + q_3 \quad (4-47\gamma)$$

όπου a, b, c, d είναι τα σταθερά μήκη των βαρυκεντρικών διανυσμάτων, Σχήμα 4.7(β) και δίνονται από τις Εξ. (B-34) στο Παράρτημα Β.2.1.

Αφού ο προσανατολισμός του ΤΣΔ είναι καθορισμένος, οι Εξ. (4-47) γράφονται:

$$x_3 = x_E - d c_{(\theta_E)} = a c_{(\theta_0)} + b c_{(\theta_0+q_1)} + c c_{(\theta_0+q_1+q_2)} \quad (4-48\alpha)$$

$$y_3 = y_E - d s_{(\theta_E)} = a s_{(\theta_0)} + b s_{(\theta_0+q_1)} + c s_{(\theta_0+q_1+q_2)} \quad (4-48\beta)$$

όπου x_3, y_3 είναι οι συντεταγμένες του σημείου 3 (Βαρύκεντρο του συνδέσμου 3) στο Σχήμα 4.7(β).

Στην περίπτωση που η επιθυμητή διαδρομή και προσανατολισμός του ΤΣΔ δίνεται από:

$$x_E = x_E(s) \quad (4-49\alpha)$$

$$y_E = y_E(x_E) \quad (4-49\beta)$$

$$\theta_E = \theta_E(x_E) \quad (4-49\gamma)$$

η γραμμική και η γωνιακή ταχύτητα του ΤΣΔ υπολογίζονται από την χρονική παράγωγο των Εξ. (4-49):

$$\dot{\mathbf{r}}_E = \begin{bmatrix} \dot{x}_E & \dot{y}_E & \dot{\theta}_E \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\partial y_E}{\partial x_E} & \frac{\partial \theta_E}{\partial x_E} \end{bmatrix}^T \frac{\partial x_E}{\partial s} \dot{s}(t) \quad (4-50)$$

Όπως αποδείχτηκε στην παράγραφο 3.3.1, στην περίπτωση του επίπεδου ΔΡΣ με ένα βραχίονα 3-BE, οι δυναμικές ιδιομορφίες είναι ανεξάρτητες από τη γωνία q_3 της τρίτης άρθρωσης και οι υπόχωροι PIW και PDW του χώρου εργασίας του βραχίονα μπορούν να οριστούν και από τη θέση του βαρύκεντρου του τρίτου συνδέσμου (σημείο 3 στο Σχήμα 4.7(β)). Ως εκ τούτου, το πρόβλημα της αποφυγής των δυναμικών ιδιομορφιών για έναν επίπεδο ελεύθερα αιωρούμενο ΔΡΣ με βραχίονα 3-BE του οποίου ο προσανατολισμός του ΤΣΔ είναι καθορισμένος καταλήγει σε αντίστοιχο πρόβλημα ενός επίπεδου ΔΡΣ με βραχίονα 2-BE, θεωρώντας την κίνηση του σημείου 3 του βραχίονα. Η κίνηση του σημείου 3 του βραχίονα προκύπτει από το επιθυμητό δρόμο και προσανατολισμό του ΤΣΔ, όπως φαίνεται από τις Εξ. (4-48).

Οι καμπύλες ιδιομορφιών καθώς και οι καμπύλες περιθωρίου ορίζονται από τις Εξ. (4-12) μόνο που στην περίπτωση αυτή οι συντελεστές k_i , $i=0,1,2$ δίνονται από τις Εξ. (B-62) στο Παράρτημα Β.2.4.

Η καμπύλη περιθωρίου ορίζεται από την τιμή της παραμέτρου S_0 . Η κλίση της καμπύλης περιθωρίου υπολογίζεται από την Εξ. (4-19β) ενώ η κλίση της καμπύλης κίνησης στο σημείο (q_1, q_2) δίνεται από την Εξ. (4-13). Οι ταχύτητες των αρθρώσεων στην Εξ. (4-13) πρέπει να εκφραστούν συναρτήσει του προσανατολισμού του δορυφόρου και της διαμόρφωσης του βραχίονα. Οι ταχύτητες των αρθρώσεων \dot{q}_1 , \dot{q}_2 και \dot{q}_3 του βραχίονα καθώς και η γωνιακή ταχύτητα του δορυφόρου του ΔΡΣ δίνονται από τις Εξ. (3-60). Αντικαθιστώντας στις εξισώσεις αυτές τη γραμμική ταχύτητα \dot{x}_E και \dot{y}_E του ΤΣΔ καθώς και την γωνιακή του ταχύτητα $\dot{\theta}_E$ από τις Εξ. (4-50) προκύπτει ότι:

$$\dot{q}_1 = \frac{\dot{s}}{S(q_1, q_2, q_3)} \left[-(ac s_{(q_1+q_2)} + bc s_{(q_2)}) \frac{h_{CM}}{\dot{s}} + g_1 + g_1^* \right] \quad (4-51\alpha)$$

$$\dot{q}_2 = \frac{\dot{s}}{S(q_1, q_2, q_3)} \left[(abs_{(q_1)} + acs_{(q_1+q_2)}) \frac{h_{CM}}{\dot{s}} + g_2 + g_2^* \right] \quad (4-51\beta)$$

$$\dot{q}_3 = \frac{\dot{s}}{S(q_1, q_2, q_3)} \left[-abs_{(q_1)} \frac{h_{CM}}{\dot{s}} + g_3 + g_3^* \right] \quad (4-51\gamma)$$

$$\dot{\theta}_0 = \frac{\dot{s}}{S(q_1, q_2, q_3)} [g_0^* + g_0 + bc s_{(q_2)} \frac{h_{CM}}{\dot{s}}] \quad (4-51\delta)$$

όπου οι συναρτήσεις g_0 και g_1, g_2 δίνονται από τις Εξ. (4-39) και (4-18) αντίστοιχα και

$$g_0^* = \frac{\partial \theta_E(x_E)}{\partial x_E} \frac{\partial x_E(s)}{\partial s} [bdD_2 s_{(q_2+q_3)} - c(bD_3 s_{(q_2)} + dD_1 s_{(q_3)})] \quad (4-52\alpha)$$

$$g_1^* = \frac{\partial \theta_E}{\partial x_E} \frac{\partial x_E}{\partial s} [cD_3 (bs_{(q_2)} + as_{(q_1+q_2)}) + cd(D_0 + D_1)s_{(q_3)} - dD_2 (bs_{(q_2+q_3)} - as_{(q_1+q_2+q_3)})] \quad (4-52\beta)$$

$$g_2^* = \frac{\partial \theta_E}{\partial x_E} \frac{\partial x_E}{\partial s} [ad(D_1 + D_2)s_{(q_1+q_2+q_3)} - aD_3 (cs_{(q_1+q_2)} + bs_{(q_1)}) - dD_0 (bs_{(q_2+q_3)} + cs_{(q_3)})] \quad (4-52\gamma)$$

$$g_3 = \frac{\partial x_E(s)}{\partial s} [(-aD_1 c_{(\theta_0)} + bD_0 c_{(\theta_0+q_1)}) + \frac{\partial y_E}{\partial x_E} (-aD_1 s_{(\theta_0)} + bD_0 s_{(\theta_0+q_1)})] \quad (4-52\delta)$$

$$g_3^* = \frac{\partial \theta_E}{\partial x_E} \frac{\partial x_E}{\partial s} [ab(D_2 + D_3)s_{(q_1)} + bD_0 (cs_{(q_2)} + ds_{(q_2+q_3)}) - aD_1 (cs_{(q_1+q_2)} + as_{(q_1+q_2+q_3)})] \quad (4-52\epsilon)$$

Οι όροι στις Εξ. (4-52) είναι συναρτήσεις των μεταβλητών θ_0, q_1, q_2, q_3 . Οι Εξ. (4-51), όμως περιέχουν και τον όρο h_{CM}/\dot{s} ο οποίος, όπως προκύπτει από την Εξ. (4-41), είναι συνάρτηση του αδιάστατου χρόνου τ και του γινομένου $h_{CM} t_f$. Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω, από τις Εξ. (4-13), (4-51α) και (4-51β) προκύπτει ότι:

$$\lambda_1 = G_1^{**}(\theta_0, q_1, q_2, q_3, \tau, h_{CM} t_f) \quad (4-53)$$

Η κλίση της καμπύλης περιθωρίου δίνεται από την Εξ. (4-19β). Για την αποφυγή δυναμικών ιδιομορφιών στις περιοχές PDW (A) ή PDW (B), η καμπύλη κίνησης και η καμπύλη περιθωρίου πρέπει να έρχονται σε επαφή σε ένα σημείο, όπως καμπύλες κίνησης στα Σχήματα 4.1 και 4.2. Εάν ο δείκτης t δηλώνει τις μεταβλητές του συστήματος στο σημείο επαφής, τότε:

$$G_1^{**}(\theta_{0t}, q_{1t}, q_{2t}, q_{3t}, \tau_t, h_{CM} t_f) = G_2(q_{1t}, q_{2t}) \quad (4-54)$$

Για μια γνωστή τιμή της στροφορμής h_{CM} του συστήματος και έναν προκαθορισμένο χρόνο κίνησης t_f του ΤΣΔ, οι Εξ. (4-49β) και (4-49γ) που ορίζουν τον επιθυμητό δρόμο σε συνδυασμό με τις Εξ. (4-47) που δίνουν τη θέση του ΤΣΔ, η Εξ. (4-12α) (ή η Εξ. (4-12β) ανάλογα με την περιοχή PDW) που ορίζει την επιθυμητή επιφάνεια περιθωρίου, η Εξ. (4-54) που δίνει τη συνθήκη για την ύπαρξη κοινής εφαπτομένης μεταξύ της καμπύλης κίνησης και της καμπύλης περιθωρίου και τέλος ο συνδυασμός των Εξ. (4-15α) και (4-15β) που δίνουν το χρόνο κίνησης συναρτήσει του προσανατολισμού του δορυφόρου και της διαμόρφωσης του βραχίονα, επιλύονται και δίνουν τις μεταβλητές

$(\theta_{0t}, q_{1t}, q_{2t}, q_{3t}, \tau_t)$ στο σημείο κοινής επαπτομένης της καμπύλης κίνησης με την επιλεγμένη καμπύλη περιθωρίου. Στη συνέχεια, αυτές οι μεταβλητές θα πρέπει να χρησιμοποιηθούν ως αρχικές συνθήκες στην επίλυση των Εξ. (4-51) για κίνηση του ΤΣΔ προς το αρχικό σημείο (με χρόνο κίνησης $\tau_t t_f$) και προς το τελικό σημείο (με χρόνο κίνησης $(1-\tau_t)t_f$) του δρόμου ο οποίος δίνεται μέσω της Εξ. (4-40). Πρέπει να σημειωθεί ότι για την αντίθετη κίνηση του ΤΣΔ προς το αρχικό σημείο του δρόμου, απαιτείται η χρήση στροφορμής του συστήματος με αντίθετο πρόσημο. Η λύση $(\theta_{0t}, q_{1t}, q_{2t}, q_{3t}, \tau_t)$ γίνεται δεκτή, εφόσον κανένα από τα τμήματα της καμπύλης κίνησης που προκύπτουν από τις κινήσεις του ΤΣΔ και προς τις δυο κατευθύνσεις, δεν τέμνει την καμπύλη ιδιομορφίας. Στην περίπτωση αυτή ο προσανατολισμός του δορυφόρου και η αντίστοιχη διαμόρφωση του βραχίονα που προκύπτουν από την επίλυση των Εξ. (4-51) όταν το ΤΣΔ βρεθεί στο αρχικό σημείο του δρόμου, έχουν ως αποτέλεσμα τη δημιουργία μιας καμπύλης κίνησης που εφάπτεται στην επιλεγμένη καμπύλη περιθωρίου αποφεύγοντας πιθανές δυναμικές ιδιομορφίες.

Στην περίπτωση που οι Εξ. (4-49β), (4-49γ), (4-12α) (ή η Εξ. (4-12β)), (4-54) και ο συνδυασμός των Εξ. (4-15α) και (4-15β) δεν δίνουν κάποια αποδεκτή λύση, τότε δεν υπάρχει κοινή επαπτομένη μεταξύ της καμπύλης κίνησης και της επιλεγμένης καμπύλης περιθωρίου. Συνεπώς, για την αποφυγή επαφής μεταξύ καμπύλης κίνησης και καμπύλης ιδιομορφιών, θα πρέπει το τελικό σημείο της καμπύλης κίνησης να είναι αυτό που θα έρθει σε επαφή με την καμπύλη περιθωρίου, όπως η καμπύλη κίνησης στο Σχήμα 4.2. Τότε, το σημείο επαφής (q_{1t}, q_{2t}) είναι το σημείο τομής της καμπύλης περιθωρίου και της καμπύλης απόστασης του σημείου 3 που αντιστοιχεί στο τελικό σημείο του δρόμου του ΤΣΔ και η οποία δίνεται από:

$$R_3 = R_3^{fin} \quad (4-55\alpha)$$

όπου η ακτίνα R_3 του σημείου 3 από το ΚΜ του συστήματος είναι:

$$R_3 = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2abc_{(q_1)} + 2acc_{(q_1+q_2)} + 2bcc_{(q_2)}} \quad (4-55\beta)$$

Οι Εξ. (4-12α) (ή (4-12β) ανάλογα με την περιοχή PDW που κινείται το ΤΣΔ) και (4-55) δίνουν τις γωνίες των αρθρώσεων (q_{1t}, q_{2t}) . Οι υπόλοιπες μεταβλητές (θ_{0t}, q_{3t}) υπολογίζονται από την Εξ. (4-47), εάν ληφθεί υπόψη η τελική θέση και προσανατολισμός του ΤΣΔ του βραχίονα. Δηλαδή:

$$\theta_0 = \text{atan2}(\sin(\theta_0), \cos(\theta_0)) \quad (4-56\alpha)$$

$$q_3 = \theta_E - (\theta_0 + q_1 + q_2) \quad (4-56\beta)$$

όπου:

$$\sin(\theta_0) = \frac{h_1 y_E - h_2 x_E + d (h_2 \cos(\theta_E) - h_1 \sin(\theta_E))}{h_1^2 + h_2^2} \quad (4-57\alpha)$$

$$\cos(\theta_0) = \frac{h_1 x_E + h_2 y_E - d (h_1 \cos(\theta_E) + h_2 \sin(\theta_E))}{h_1^2 + h_2^2} \quad (4-57\beta)$$

και

$$h_1 = a + b \cos(q_1) + c \cos(q_1 + q_2) \quad (4-58\alpha)$$

$$h_2 = b \sin(q_1) + c \sin(q_1 + q_2) \quad (4-58\beta)$$

Χρησιμοποιώντας αυτές τις λύσεις ως αρχικές συνθήκες στην επίλυση των Εξ. (4-51) για κίνηση του ΤΣΔ προς το αρχικό σημείο του δρόμου που δίνεται από την Εξ. (4-30) και για χρόνο t_f , προκύπτει ο προσανατολισμός του δορυφόρου και η διαμόρφωση του βραχίονα για τα οποία το τελικό σημείο της καμπύλης κίνησης που προκύπτει έρχεται σε επαφή με την επιλεγμένη καμπύλη περιθωρίου αποφεύγοντας έτσι την εμφάνιση ΔΙ.

4.3.3.2 Τρισδιάστατη Κίνηση

Στην παρούσα παράγραφο, η προτεινόμενη μεθοδολογία επεκτείνεται σε τρισδιάστατους ρομποτικούς βραχίονες όπως ο διαστημικός βραχίονας που φαίνεται στο Σχήμα 3.6. Το ΤΣΔ του βραχίονα πρέπει να ακολουθήσει έναν επιθυμητό δρόμο με κατάλληλο προσανατολισμό. Η προδιαγραφή της επιθυμητής θέσης – προσανατολισμού του ΤΣΔ απαιτεί την χρήση ενός ΔΡΣ με βραχίονα 6-BE.

Η θέση και ο προσανατολισμός του ΤΣΔ είναι:

$$\mathbf{r}_E = [x_E(\boldsymbol{\varepsilon}, n, \mathbf{q}) \quad y_E(\boldsymbol{\varepsilon}, n, \mathbf{q}) \quad z_E(\boldsymbol{\varepsilon}, n, \mathbf{q})]^T \quad (4-59\alpha)$$

$$\mathbf{R}_E(\boldsymbol{\varepsilon}, n, \mathbf{q}) = \mathbf{R}_E(s) \quad (4-59\beta)$$

όπου \mathbf{R}_E είναι ο πίνακας περιστροφής που συνδέει το σύστημα συντεταγμένων του ΤΣΔ με το αντίστοιχο αδρανειακό. Το μήκος τόξου παραμετροποίησης της διαδρομής s δίνεται από την Εξ. (4-15α) και οι παράμετροι Euler $\boldsymbol{\varepsilon}, n$ ικανοποιούν τον περιορισμό που δίνεται από την Εξ. (4-25α).

Η γραμμική ταχύτητα του ΤΣΔ δίνεται από την Εξ. (4-30), ενώ η γωνιακή του ταχύτητα δίνεται από:

$$\boldsymbol{\omega}_E^{\times} = \dot{\mathbf{R}}_E \mathbf{R}_E^T \quad (4-59\gamma)$$

όπου $\boldsymbol{\omega}_E^{\times}$ είναι ο αντι-συμμετρικός πίνακας που παράγεται από το διάνυσμα στήλης της γωνιακής ταχύτητας $\boldsymbol{\omega}_E$.

Στη γενική περίπτωση, η ορίζουσα της Γενικευμένης Ιακωβιανής που δίνεται από την Εξ. (4-2) είναι:

$$S = \det(\mathbf{S}^*) = S(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6) \quad (4-60)$$

και αναπαριστά μια επιφάνεια στο 6 – διάστατο χώρο των αρθρώσεων.

Στη συνέχεια, εξάγεται η συνθήκη για την ύπαρξη κοινής εφαπτομένης μεταξύ της καμπύλης κίνησης και μιας επιφάνειας περιθωρίου. Καθώς το ΤΣΔ κινείται, η διαμόρφωση του βραχίονα διαγράφει μια καμπύλη στο χώρο των αρθρώσεων, με εφαπτόμενο διάνυσμα \mathbf{c} ,

$$\mathbf{c} = \dot{\mathbf{q}} = [\dot{q}_1 \quad \dot{q}_2 \quad \dot{q}_3 \quad \dot{q}_4 \quad \dot{q}_5 \quad \dot{q}_6]^T \quad (4-61)$$

Το κάθετο διάνυσμα \mathbf{n} στην επιφάνεια περιθωρίου $S = S_0$ δίνεται από,

$$\mathbf{n} = \nabla S = [\partial S / \partial q_1 \quad \dots \quad \partial S / \partial q_6]^T \quad (4-62)$$

Για την αποφυγή των δυναμικών ιδιομορφιών, η καμπύλη που ορίζεται από την Εξ. (4-61) δεν πρέπει να τέμνει την επιφάνεια που ορίζεται από την Εξ. (4-62). Στο όριο, η καμπύλη και η επιφάνεια θα πρέπει να έχουν μόνο ένα σημείο επαφής. Στο σημείο αυτό, τα διανύσματα \mathbf{c} και \mathbf{n} θα είναι κάθετα. Η συνθήκη για την αποφυγή δυναμικών ιδιομορφιών περιγράφεται και σε αυτήν την περίπτωση από την Εξ. (4-8α).

Μια ενδιαφέρουσα περίπτωση που απλοποιεί αρκετά τις παραπάνω εξισώσεις και μπορεί να εφαρμοστεί σε διαστημικές εφαρμογές είναι η χρήση ενός ρομποτικού βραχίονα 3-ΒΕ με ένα σφαιρικό καρπό. Στην περίπτωση αυτή η θέση του ΤΣΔ είναι:

$$\mathbf{r}_E = \mathbf{r}_3 + \mathbf{R}_0 {}^0\mathbf{R}_6 {}^6\mathbf{u}_{6,E} = \mathbf{r}_3 + \mathbf{R}_E {}^E\mathbf{u}_{6,E} \quad (4-63)$$

όπου \mathbf{r}_3 είναι η θέση του βαρύκεντρου του τρίτου συνδέσμου (σημείο 3 στο Σχήμα 3.6), ${}^6\mathbf{u}_{6,E}$ είναι το σταθερό βαρυκεντρικό διάνυσμα θέσης του ΤΣΔ ως προς το βαρύκεντρο του τρίτου συνδέσμου.

Εφόσον ο προσανατολισμός του ΤΣΔ είναι ορισμένος, η Εξ. (4-63) μπορεί να γραφεί:

$$\mathbf{r}_3(\varepsilon, n, q_1, q_2, q_3) = \mathbf{r}_E - \mathbf{R}_E {}^E\mathbf{u}_{6,E} \quad (4-64)$$

Έτσι, η κίνηση του ΤΣΔ κατά μήκος του επιθυμητού δρόμου με καθορισμένο προσανατολισμό παράγει ένα συγκεκριμένο δρόμο για το σημείο 3 του βραχίονα. Για τον βραχίονα αυτό, η οριζουσα της Γενικευμένης Ιακωβιανής που δίνεται από την Εξ. (4-2) είναι:

$$S = \det(\mathbf{S}^*) = S(q_1, q_2, q_3) \quad (4-65)$$

Αφού η Εξ. (4-65) δεν εξαρτάται από τις γωνίες του σφαιρικού καρπού, σύμφωνα με την Εξ. (4-64) το πρόβλημα της αποφυγής δυναμικών ιδιομορφιών με συγκεκριμένο

προσανατολισμό του ΤΣΔ καθορίζεται από την κίνηση του σημείου 3 του βραχίονα και η Εξ. (4-8α) απλοποιείται στην:

$$\dot{q}_1(\boldsymbol{\varepsilon}, n, \mathbf{q}, t) \frac{\partial S(\mathbf{q})}{\partial q_1} + \dot{q}_2(\boldsymbol{\varepsilon}, n, \mathbf{q}, t) \frac{\partial S(\mathbf{q})}{\partial q_2} + \dot{q}_3(\boldsymbol{\varepsilon}, n, \mathbf{q}, t) \frac{\partial S(\mathbf{q})}{\partial q_3} = 0 \quad (4-66)$$

4.4 Υπολογισμός Εύρους Αρχικού Προσανατολισμού Δορυφόρου

Στην παράγραφο 4.3 υπολογίστηκαν οι τιμές $\theta_{0,in}$ του αρχικού προσανατολισμού του δορυφόρου του επίπεδου ΔΡΣ για τις οποίες η προκύπτουσα καμπύλη κίνησης εφάπτεται της επιλεγμένης καμπύλης περιθωρίου ή ισοδύναμα η συνάρτηση που ορίζει τις ΔΙ έχει ελάχιστη (ή μέγιστη) τιμή το επιλεγμένο κέρδος S_0 . Χρησιμοποιώντας αυτές τις τιμές ως όρια, στην Παράγραφο 4.4.1 ορίζονται, για επίπεδα ΔΡΣ, τα εύρη του αρχικού προσανατολισμού του δορυφόρου του ΔΡΣ για τα οποία επιτυγχάνεται αποφυγή Δυναμικών Ιδιομορφιών σε μια απλή περιοχή PDW. Για την πλήρη εκμετάλλευση του χώρου εργασίας του ΔΡΣ, που αποτελείται από πολλαπλές περιοχές PDW, στην Παράγραφο 4.4.2 ο ορισμός των διαστημάτων του αρχικού προσανατολισμού του δορυφόρου επεκτείνεται σε δρόμους ΤΣΔ που περνούν από πολλαπλές περιοχές PDW.

4.4.1 Κίνηση σε μια απλή περιοχή PDW

Στην παράγραφο αυτή, υπολογίζονται τα εύρη του αρχικού προσανατολισμού του δορυφόρου που οδηγούν σε αποφυγή ΔΙ κατά τη διάρκεια της κίνησης του ΤΣΔ σε δρόμους που περνούν από μια απλή περιοχή PDW ((A) ή (B) στο Σχήμα 4.1). Τα εύρη αυτά φράσσονται από τις τιμές $\theta_{0,in}$ που αντιστοιχούν σε $S_{\min} = S_0$ και οι οποίες υπολογίστηκαν στην Παράγραφο 4.3. Όπως αποδεικνύεται στο Παράρτημα Δ, ο αριθμός των τιμών $\theta_{0,in} \in [0, 2\pi)$ που αντιστοιχούν σε $S_{\min} = S_0$ είναι άρτιος. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν n τιμές $\theta_{0,in}^i \in [0, 2\pi), i=1, \dots, n$ με $\theta_{0,in}^i < \theta_{0,in}^{i+1}$, που αντιστοιχούν σε $S_{\min} = S_0 > 0$. Εξαιτίας της συνέχειας της συνάρτησης S_{\min} ως προς τον αρχικό προσανατολισμό $\theta_{0,in}$, όπως αποδείχθηκε στην Παράγραφο 4.2, υπάρχουν προσανατολισμοί στη γειτονιά του $\theta_{0,in}$ που καταλήγουν σε $S_{\min} > 0$ και άλλοι που καταλήγουν σε $S_{\min} < 0$. Οι τιμές αυτές των προσανατολισμών ορίζουν εύρη με όρια τα $\theta_{0,in}^i$. Από αυτά τα εύρη, αυτά που οδηγούν σε αποφυγή ΔΙ είναι αυτά για τα οποία ισχύει $S_{\min} > S_0$.

Στη συνέχεια, χωρίς απώλεια της γενικότητας, ας θεωρήσουμε δύο οριακές τιμές $\theta_{0,in}^1 < \theta_{0,in}^2 \in [0, 2\pi)$, που αντιστοιχούν σε $S_{\min} = S_0 > 0$. Για τον προσδιορισμό του κατάλληλου εύρους, επιλέγεται μία τυχαία τιμή $\theta_{0,in}^{*1} \in (\theta_{0,in}^1, \theta_{0,in}^2)$. Εάν για την τιμή $\theta_{0,in}^{*1}$

προκύπτει ότι $S_{\min} > S_0$, τότε για όλες τις τιμές στο διάστημα $(\theta_{0,in}^1, \theta_{0,in}^2)$ ισχύει $S_{\min} > S_0$. Τότε, οι αρχικοί προσανατολισμοί που έχουν τιμές μέσα στα συμπληρωματικά εύρη αντιστοιχούν σε $S_{\min} < S_0$. Οπότε τα εύρη τιμών του αρχικού προσανατολισμού του δορυφόρου για το οποίο επιτυγχάνεται αποφυγή των ΔΙ ορίζεται από $\Theta = [\theta_{0,in}^1, \theta_{0,in}^2]$. Διαφορετικά, τα επιθυμητά εύρη είναι τα συμπληρωματικά του, δηλαδή $\Theta = [0, \theta_{0,in}^1] \cup [\theta_{0,in}^2, 2\pi]$.

Στην γενική περίπτωση όπου n τιμές $\theta_{0,in}^i$ αντιστοιχούν σε $S_{\min} = S_0$, τότε τα παραπάνω εύρη δίνονται αντίστοιχα από:

$$\Theta = \bigcup_{k=0}^{k=(n-2)/2} [\theta_{0,in}^{2k+1}, \theta_{0,in}^{2k+2}] \quad (4-67\alpha)$$

ή

$$\Theta = \bigcup_{k=0}^{k=n/2} [\theta_{0,in}^{2k}, \theta_{0,in}^{2k+1}] \quad (4-67\beta)$$

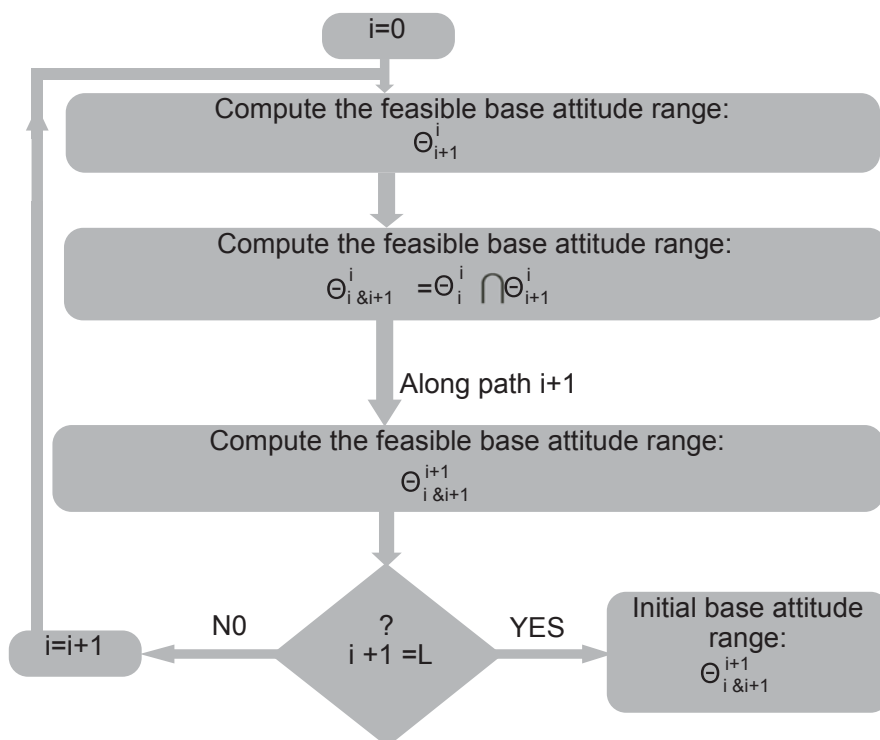
όπου ορίζουμε ως $\theta_{0,in}^0 = 0 \text{ rad}$ και $\theta_{0,in}^{n+1} = 2\pi \text{ rad}$.

Στα τρισδιάστατα συστήματα ο προσανατολισμός του δορυφόρου περιγράφεται από τρεις ανεξάρτητες μεταβλητές. Στην περίπτωση αυτή, ο υπολογισμός του αντίστοιχου εύρους για τις μεταβλητές αυτές δεν είναι εύκολος. Παρόλα αυτά, μπορεί να βρεθούν αρχικοί προσανατολισμοί του δορυφόρου του ΔΡΣ που εξασφαλίζουν την αποφυγή δυναμικών ιδιομορφιών.

4.4.2 Κίνηση σε πολλαπλές περιοχές PDW

Στην παράγραφο αυτή αντιμετωπίζουμε το πρόβλημα της κίνησης του ΤΣΔ κατά μήκος οποιουδήποτε δρόμου που περιέχει τμήματα και στις δύο περιοχές PDW (A) και PDW (B). Εάν ο επιθυμητός δρόμος του ΤΣΔ περνά L φορές και τις δύο περιοχές PDW (A) και PDW (B), ο δρόμος διαιρείται σε L διαδοχικά μέρη με τα σημεία διαίρεσης να βρίσκονται στην περιοχή PIW. Για παράδειγμα, οι δρόμοι AB και AF στο Σχήμα 4.3(β) περνούν από περιοχή PDW μια και δύο φορές αντίστοιχα. Έτσι ο δρόμος AF θα πρέπει να διαιρεθεί σε δύο τμήματα, π.χ. στα τμήματα AB και BF. Για την εφαρμογή της μεθόδου, τα σημεία διαίρεσης του συνολικού δρόμου ονομάζονται $0, 1, \dots, L$ ξεκινώντας από το τελικό σημείο του δρόμου, έτσι ώστε στη συνέχεια, να μπορούν να συσχετισθούν αλγοριθμικά. Το τμήμα i έχει ως άκρα τα σημεία $i-1$ και i . Στη συνέχεια ο ορισμός του εύρους γενικεύεται για την περίπτωση που το ΤΣΔ ξεκινά από κάποιο σημείο k και αποφεύγει ΔΙ κατά μήκος του τμήματος l , ως Θ_l^k .

Για παράδειγμα, στο Σχήμα 4.3(β), το ΤΣΔ οδηγείται από το σημείο 2 στο σημείο 0. Για να υπολογιστούν οι εφικτοί αρχικοί προσανατολισμοί του δορυφόρου στο σημείο 2, ο δρόμος διαιρείται στα τμήματα FB (τμήμα 1) και BA (τμήμα 2). Και τα δύο αυτά τμήματα διασχίζουν μια απλή περιοχή PDW. Υπολογίζεται πρώτα τα εύρη των εφικτών προσανατολισμών Θ_1^1 του δορυφόρου στο σημείο 1 έτσι ώστε να αποφθεχθούν δυναμικές ιδιομορφίες στο τμήμα 1. Στη συνέχεια υπολογίζονται τα εύρη των εφικτών προσανατολισμών Θ_2^1 του δορυφόρου στο ίδιο σημείο έτσι ώστε να αποφθεχθούν δυναμικές ιδιομορφίες στο τμήμα 2. Οι κοινές τιμές τους $\Theta_{1\&2}^1 = \Theta_1^1 \cap \Theta_2^1$, δίνει το εύρος των εφικτών προσανατολισμών του δορυφόρου στο σημείο 1 έτσι ώστε να αποφθεχθούν δυναμικές ιδιομορφίες και στα δύο τμήματα 1 και 2. Τέλος, η αντίστροφη κίνηση του ΤΣΔ από το σημείο 1 στο σημείο 2 κατά μήκος του τμήματος 2, με στροφορμή αντίθετου πρόσημου, δίνει το ζητούμενο εφικτό εύρος προσανατολισμών $\Theta_{1\&2}^2$ στο σημείο 2. Το Σχήμα 4.8 απεικονίζει την προτεινόμενη μεθοδολογία μέσω ενός διαγράμματος ροής. Εφόσον το τμήμα 0 δεν υπάρχει, θεωρούμε ότι $\Theta_0^0 = [0 \ 2\pi]$ και $\Theta_{0\&1}^1 = \Theta_1^1$. Η έξοδος του διαγράμματος ροής είναι το εύρος των αρχικών προσανατολισμών του δορυφόρου, οι οποίοι εξασφαλίζουν την αποφυγή δυναμικών ιδιομορφιών κατά την παρακολούθηση οποιουδήποτε επιθυμητού δρόμου του ΤΣΔ που διέρχεται από οποιοδήποτε σημείο του χώρου εργασίας του συστήματος.



Σχήμα 4.8 Διάγραμμα ροής εφαρμογής της μεθόδου όταν ο δρόμος του ΤΣΔ διέρχεται και από τις δύο περιοχές PDW (A) και PDW (B).

4.5 Εφαρμογές

Οι Εφαρμογές 4.1 και 4.2 εξετάζουν την αποφυγή δυναμικών ιδιομορφιών ενός επίπεδου και ενός τρισδιάστατου ελεύθερα αιωρούμενου ρομποτικού βραχίονα, αντίστοιχα, όταν η στροφορμή του συστήματος είναι μηδέν και κατά τη διάρκεια κίνησης του ΤΣΔ δεν ορίζεται κάποιος επιθυμητός προσανατολισμός του.

Οι Εφαρμογές 4.3 και 4.4 εξετάζουν την αποφυγή δυναμικών ιδιομορφιών σε επίπεδα και τρισδιάστατα ΔΡΣ, αντίστοιχα, με μη μηδενική αρχική στροφορμή και με επιθυμητό προσανατολισμό του ΤΣΔ κατά τη πραγματοποίηση της κίνησής του κατά μήκος του επιθυμητού δρόμου.

Εφαρμογή 4.1: Έστω το επίπεδο ΔΡΣ με βραχίονα 2-ΒΕ του Σχήματος 4.4 του οποίου οι παράμετροι δίνονται στον Πίνακα 4.1. Το ΤΣΔ του βραχίονα οδηγείται από το σημείο $A=(2.0,0) m$ στο σημείο $B=(-1.0,1.5) m$ ακολουθώντας έναν ευθύγραμμο δρόμο, ο οποίος περνά από την περιοχή PDW (A). Ο βραχίονας, λοιπόν, μπορεί να γίνει δυναμικά ιδιόμορφος καθώς το ΤΣΔ διέρχεται από αυτή την περιοχή. Η στροφορμή του συστήματος θεωρείται αμελητέα.

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.1. ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ ΤΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΔΡΣ ΜΕ ΕΝΑ ΒΡΑΧΙΟΝΑ 2-ΒΕ ΤΟΥ ΣΧΗΜΑΤΟΣ 4.4

Σώμα	$l_i (m)$	$r_i (m)$	$m_i (Kg)$	$I_i (Kg m^2)$
0	0.5	0.5	400	66.67
1	1.0	1.0	40	3.33
2	0.5	0.5	30	2.50

Η επιθυμητή θέση του ΤΣΔ κατά μήκος του ευθύγραμμου δρόμου AB ορίζεται από τις εξισώσεις:

$$y_E(t) = K x_E(t) + L \quad (4-68\alpha)$$

και

$$x_E(t) = x_{in} + (x_{fin} - x_{in}) s(t) \quad (4-68\beta)$$

όπου x_{in} , x_{fin} είναι οι τετμημένες του αρχικού και του τελικού σημείου της διαδρομής, αντίστοιχα, και το μήκος τόξου παραμετροποίησης της διαδρομής $s(t)$ δίνεται από την Εξ. (4-15α). Οι συντελεστές K και L δίνονται από:

$$K = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \quad (4-69\alpha)$$

$$L = \frac{y_A(x_B - x_A) - x_A(y_B - y_A)}{x_B - x_A} \quad (4-69\beta)$$

όπου x_A, y_A είναι οι συντεταγμένες του σημείου A και x_B, y_B είναι οι συντεταγμένες του σημείου B .

Στην επίλυση των Εξ. (4-10), για τον προσδιορισμό της χρονικής εξέλιξης του προσανατολισμού του δορυφόρου και του σχηματισμού του βραχίονα καθώς το ΤΣΔ διαγράφει την επιθυμητή του πορεία, η επιθυμητή θέση του ΤΣΔ ορίζεται από την γραμμική του ταχύτητα η οποία στην περίπτωση αυτή είναι:

$$\dot{\mathbf{r}}_E = [\dot{x}_E \quad \dot{y}_E]^T = (x_{fin} - x_{in})[\dot{s} \quad K\dot{s}]^T \quad (4-70)$$

Για την επίλυση των Εξ. (4-10) απαιτούνται οι αρχικές συνθήκες, δηλαδή ο προσανατολισμός του δορυφόρου και η διαμόρφωση του βραχίονα όταν το ΤΣΔ βρίσκεται στο σημείο A . Μια τυχαία επιλογή των αρχικών συνθηκών μπορεί να οδηγήσει σε εμφάνιση ΔI σε κάποιο σημείο της διαδρομής του ΤΣΔ. Στη συνέχεια, η προτεινόμενη μέθοδος εφαρμόζεται για τον υπολογισμό των κατάλληλων προσανατολισμών του δορυφόρου όταν το ΤΣΔ βρίσκεται στην αρχική του θέση, έτσι ώστε ο βραχίονας να μη βρεθεί σε κάποια ιδιόμορφη θέση καθώς το ΤΣΔ περνά από την περιοχή PDW.

Ο συνδυασμός της Εξ. (4-68α), που δίνει το επιθυμητό δρόμο του ΤΣΔ, με τις Εξ. (4-9), που δίνουν τη θέση του ΤΣΔ συναρτήσει του προσανατολισμού του δορυφόρου και της διαμόρφωσης του βραχίονα, δίνει:

$$a s_{(\theta_0)} + b s_{(\theta_0+q_1)} + c s_{(\theta_0+q_1+q_2)} = K (a c_{(\theta_0)} + b c_{(\theta_0+q_1)} + c c_{(\theta_0+q_1+q_2)}) + L \quad (4-71)$$

Όπως φαίνεται και στο Σχήμα 4.9, το ΤΣΔ κινείται στην περιοχή PDW (A). Στην περιοχή αυτή η καμπύλη περιθωρίου δίνεται από την Εξ. (4-12β). Στην εφαρμογή αυτή, η παράμετρος που ορίζει την καμπύλη περιθωρίου επιλέγεται ίση με $S_0 = 5$. Οι Εξ. (4-12β), (4-71) και (4-20) μπορούν να επιλυθούν και να δώσουν τον προσανατολισμό θ_0 του δορυφόρου και τη διαμόρφωση q_1, q_2 του βραχίονα τη στιγμή που οι δύο καμπύλες εφάπτονται. Πιο αναλυτικά, η Εξ. (4-71) είναι ισοδύναμη με,

$$(h_1 + K h_2) s_{(\theta_0)} + (h_2 - K h_1) c_{(\theta_0)} = L \quad (4-72α)$$

όπου,

$$h_1 = a + b c_{(q_1)} + c c_{(q_1+q_2)}, \quad h_2 = b s_{(q_1)} + c s_{(q_1+q_2)} \quad (4-72β)$$

Χρησιμοποιώντας τριγωνομετρικούς μετασχηματισμούς, προκύπτει:

$$(L + (h_2 - K h_1)) x^2 - 2(h_1 + K h_2) x + L - (h_2 - K h_1) = 0 \quad (4-73α)$$

όπου

$$x = \tan(\theta_0/2) \quad (4-73β)$$

Οι Εξ. (4-73) δίνουν δυο λύσεις για τον προσανατολισμό θ_0 , συναρτήσει των q_1, q_2 . Λόγω της Εξ. (4-12β), η μεταβλητή q_2 δίνεται συναρτήσει της q_1 , και έτσι, και οι δυο μεταβλητές θ_0 και q_2 εξαρτώνται μόνο από τη μεταβλητή q_1 . Για ένα εύρος τιμών της $q_1 \in [0, 2\pi)$, υπολογίζονται οι μεταβλητές θ_0 και q_2 που ικανοποιούν τη συνθήκη κοινής εφαπτομένης, βλ. Εξ. (4-20). Σημειώνεται ότι κάποιες λύσεις απορρίπτονται (π.χ. ανήκουν εκτός των ορίων του επιθυμητού δρόμου του ΤΣΔ). Οπότε προκύπτουν οι ακόλουθες λύσεις για τον προσανατολισμό του δορυφόρου και τη διαμόρφωση του βραχίονα στο σημείο που η καμπύλη κίνησης εφάπτεται της επιλεγμένης καμπύλης περιθωρίου $S = S_0$:

$$[\theta_{0r}, q_{1r}, q_{2r}]^T = [2.028, -0.386, 2.982]^T \text{ rad}$$

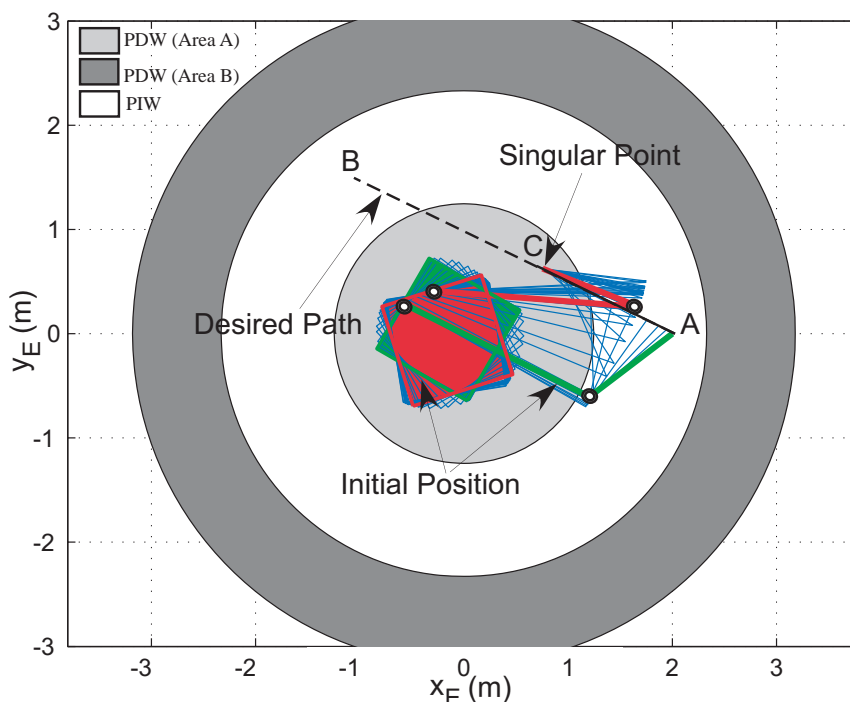
$$[\theta_{0r}, q_{1r}, q_{2r}]^T = [0.550, -0.585, 2.932]^T \text{ rad}$$

$$[\theta_{0r}, q_{1r}, q_{2r}]^T = [2.377, -1.030, 2.864]^T \text{ rad}$$

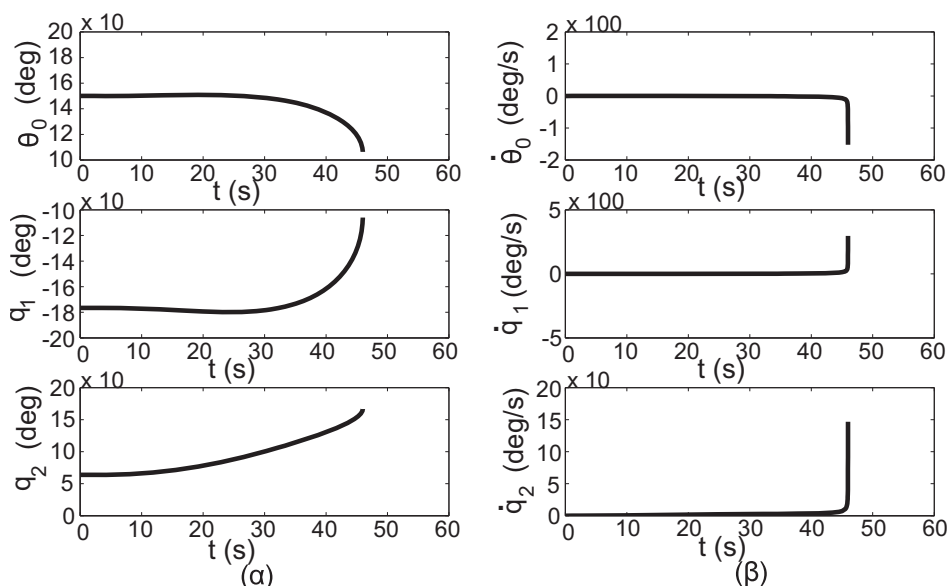
Όπως προαναφέρθηκε η συνθήκη της κοινής εφαπτομένης, Εξ. (4-20), μπορεί να αντιστοιχεί και σε τοπικό (όχι ολικό) ελάχιστο ή ακόμα και σε τοπικό/ολικό μέγιστο. Έτσι είναι πιθανό κάποια από τις παραπάνω λύσεις να πρέπει να απορριφθεί. Χρησιμοποιώντας τις Εξ. (4-9), κάθε μια από τις παραπάνω λύσεις αντιστοιχεί σε θέση του ΤΣΔ σε κάποιο σημείο C της διαδρομής AB, βλ. Σχήμα 4.5(α). Ο δρόμος AB, λοιπόν, χωρίζεται στα τμήματα CA και CB. Χρησιμοποιώντας κάθε μια από τις παραπάνω λύσεις ως αρχικές συνθήκες, επιλύονται οι Εξ. (4-10) για μετάβαση του ΤΣΔ από το σημείο C στο αρχικό A και στο τελικό σημείο B του δρόμου. Εάν και για τις δυο διαδρομές CA και CB, τα αντίστοιχα τμήματα της καμπύλης κίνησης που προκύπτουν δεν τέμνουν την καμπύλη ιδιομορφίας, η αντίστοιχη λύση γίνεται δεκτή. Στην περίπτωση αυτή, ο προσανατολισμός του δορυφόρου που προκύπτει όταν το ΤΣΔ βρίσκεται στο αρχικό σημείο A δίνει ένα όριο του επιτρεπόμενου εύρους προσανατολισμών. Η πρώτη λύση δίνει καμπύλη κίνησης που τέμνει την καμπύλη ιδιομορφίας, οπότε απορρίπτεται. Από τις άλλες δύο λύσεις προκύπτουν οι αντίστοιχοι προσανατολισμοί του δορυφόρου $\theta_{0,in}^1 = 80.4^0$ και $\theta_{0,in}^2 = 270.9^0$. Οι προσανατολισμοί αυτοί αποτελούν, για τα επίπεδα ΔΡΣ, τα όρια του εύρους αρχικών προσανατολισμών που πρέπει να έχει ο δορυφόρος για την αποφυγή Δυναμικών Ιδιομορφιών. Επιλέγοντας μια ενδιάμεση τιμή αρχικού προσανατολισμού μεταξύ $\theta_{0,in}^1$ και $\theta_{0,in}^2$, προκύπτει ότι $S < S_0$. Οπότε το ζητούμενο διάστημα αρχικών προσανατολισμών του δορυφόρου, για την αποφυγή ΔΙ όταν το ΤΣΔ βρίσκεται στη θέση A, είναι:

$$\Theta_{AB}^A = [0^0 \ 80.4^0] \cup [270.9^0 \ 360^0]$$

Τα Σχήματα 4.9 και 4.10 δείχνουν την κίνηση του ΔΡΣ καθώς και τη χρονική εξέλιξη του προσανατολισμού του δορυφόρου, της διαμόρφωσης του βραχίονα και των αντίστοιχων ρυθμών τους, αντίστοιχα, όταν ο αρχικός προσανατολισμός του δορυφόρου είναι $\theta_{0,in} = 150^\circ$. Εφόσον ο αρχικός προσανατολισμός του δορυφόρου βρίσκεται εκτός του παραπάνω εύρους, εμφανίζεται Δι όταν το ΤΣΔ φτάσει στο σημείο C της διαδρομής.

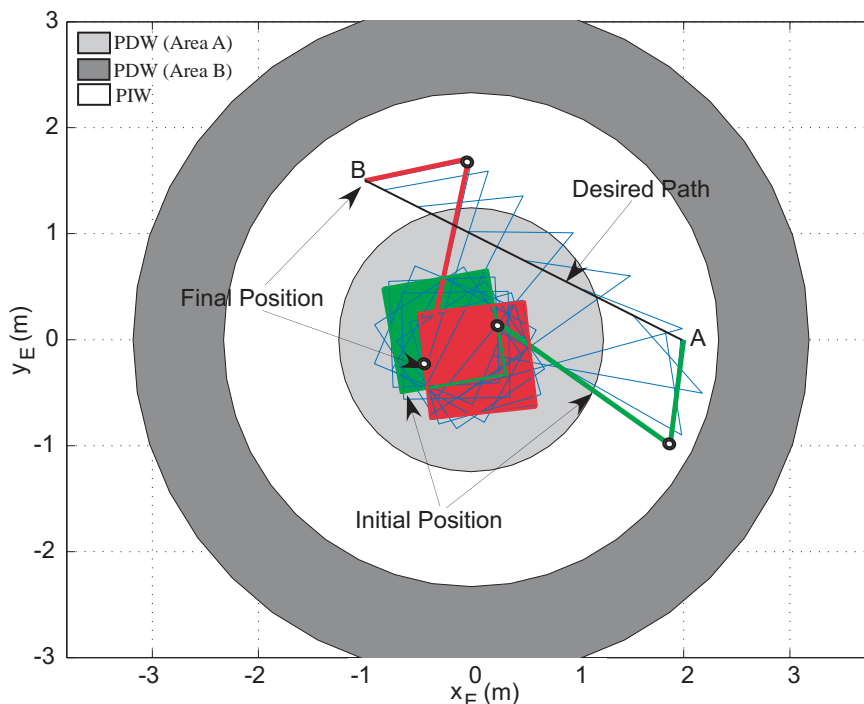


Σχήμα 4.9 Κίνηση επίπεδου ΔΡΣ με βραχίονα 2-ΒΕ με αρχικό προσανατολισμό δορυφόρου $\theta_{0,in} = 150^\circ$. Ο βραχίονας γίνεται ιδιόμορφος στο σημείο C.

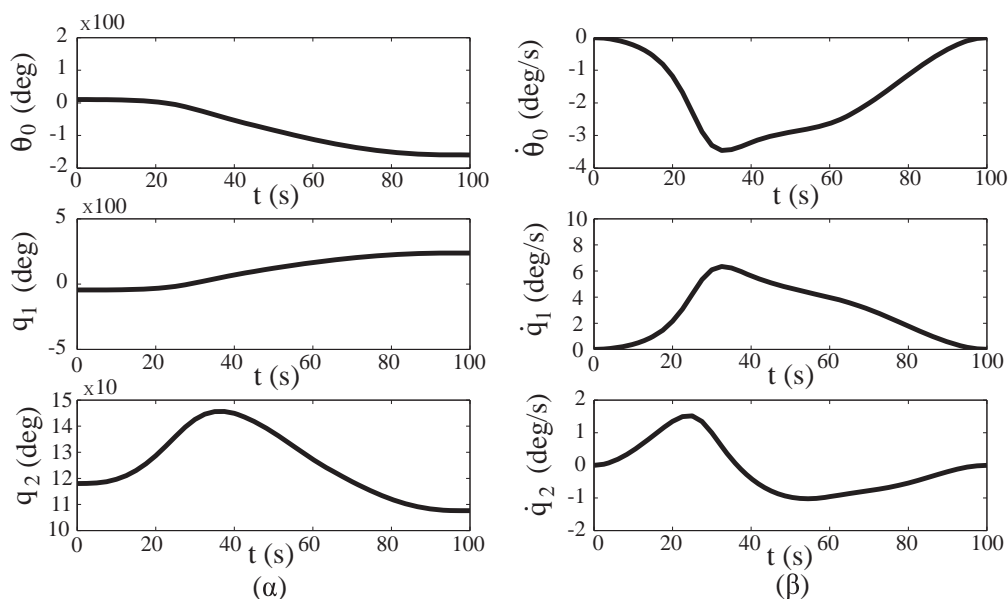


Σχήμα 4.10 Απόκριση ΔΡΣ για την κίνηση του Σχήματος 4.9. (α) Προσανατολισμός δορυφόρου και τροχιές γωνιών αρθρώσεων (β) Γωνιακή ταχύτητα δορυφόρου και ταχύτητες αρθρώσεων.

Τα Σχήματα 4.11 και 4.12 δείχνουν την κίνηση του ΔΡΣ καθώς και τη χρονική εξέλιξη του προσανατολισμού του δορυφόρου, της διαμόρφωσης του βραχίονα και των αντίστοιχων ρυθμών τους, αντίστοιχα, όταν ο αρχικός προσανατολισμός του δορυφόρου είναι $\theta_{0,in} = 10^0$. Εφόσον ο αρχικός προσανατολισμός του δορυφόρου βρίσκεται εντός του εύρους, το ΤΣΔ ακολουθεί τον επιθυμητό δρόμο χωρίς την εμφάνιση ΔΙ.



Σχήμα 4.11 Κίνηση επίπεδου ΔΡΣ με βραχίονα 2-ΒΕ με αρχικό προσανατολισμό δορυφόρου $\theta_{0,in} = 10^0$.



Σχήμα 4.12 Απόκριση ΔΡΣ για την κίνηση του Σχήματος 4.5. (α) Προσανατολισμός δορυφόρου και τροχιές γωνιών αρθρώσεων (β) Γωνιακή ταχύτητα δορυφόρου και ταχύτητες αρθρώσεων.

Εφαρμογή 4.2: Στο παράδειγμα αυτό, το ΤΣΔ του τρισδιάστατου ΔΡΣ με βραχίονα 3-ΒΕ του Σχήματος 4.6 πρέπει να μετακινηθεί από το σημείο $A=(1,0,0)m$ στο σημείο $B=(-0.5,0.8,0.3317)m$ ακολουθώντας τον ευθύγραμμο δρόμο που τα ενώνει, σε χρόνο $t_{fm}=200s$. Οι παράμετροι του βραχίονα δίνονται στον Πίνακα 4.2. Η αρχική στροφορμή του συστήματος είναι μηδέν.

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.2. ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ ΤΟΥ ΤΡΙΣΔΙΑΣΤΑΤΟΥ ΔΡΣ ΜΕ ΕΝΑ ΒΡΑΧΙΟΝΑ 3-ΒΕ ΤΟΥ ΣΧΗΜΑΤΟΣ 4.6.

Σώμα	$l_i (m)$	$r_i (m)$	$m_i (Kg)$	$I_{xx} (Kg m^2)$	$I_{yy} (Kg m^2)$	$I_{zz} (Kg m^2)$
0	-	$[0,0,0.5]^T$	400.00	66.67	66.67	66.67
1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
2	0.5	0.5	30.00	0.00	2.50	2.50
3	0.5	0.5	20.00	0.00	1.70	1.70

Η επιθυμητή διαδρομή που πρέπει να ακολουθήσει το ΤΣΔ διέρχεται από περιοχή PDW του χώρου εργασίας, που έχει ως αποτέλεσμα πιθανή ιδιόμορφη διαμόρφωση του βραχίονα σε κάποιο σημείο αυτής της περιοχής.

Η επιθυμητή θέση του ΤΣΔ κατά μήκος του ευθύγραμμου δρόμου AB, στον τρισδιάστατο χώρο, ορίζεται από τις εξισώσεις:

$$y_E(t) = K_1 x_E(t) + L_1 \quad (4-74\alpha)$$

$$z_E(t) = K_2 x_E(t) + L_2 \quad (4-74\beta)$$

όπου

$$x_E(t) = x_{in} + (x_{fm} - x_{in})s(t) \quad (4-74\gamma)$$

όπου x_{in} , x_{fm} είναι οι τετμημένες του αρχικού και του τελικού σημείου της διαδρομής, αντίστοιχα, και το μήκος τόξου παραμετροποίησης της διαδρομής $s(t)$ δίνεται από την Εξ. (4-15α). Οι συντελεστές K_1 , L_1 και K_2 , L_2 δίνονται από:

$$K_1 = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \quad (4-75\alpha)$$

$$L_1 = \frac{y_A(x_B - x_A) - x_A(y_B - y_A)}{x_B - x_A} \quad (4-75\beta)$$

$$K_2 = \frac{z_B - z_A}{x_B - x_A} \quad (4-75\gamma)$$

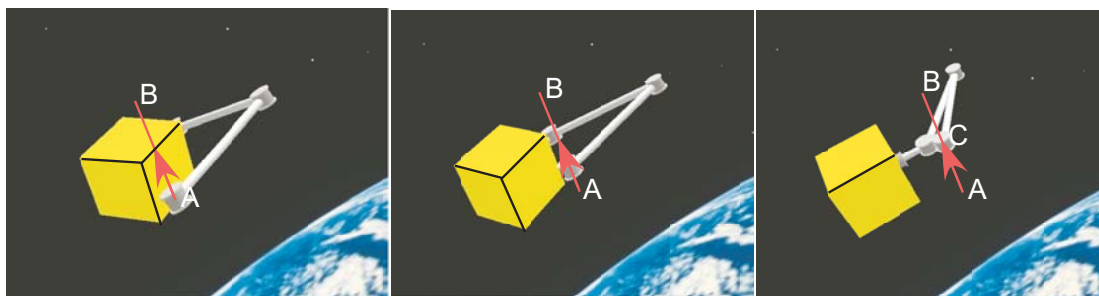
$$L_2 = \frac{z_A(x_B - x_A) - x_A(z_B - z_A)}{x_B - x_A} \quad (4-75\delta)$$

όπου x_A, y_A, z_A είναι οι συντεταγμένες του σημείου A και x_B, y_B, z_B είναι οι συντεταγμένες του σημείου B .

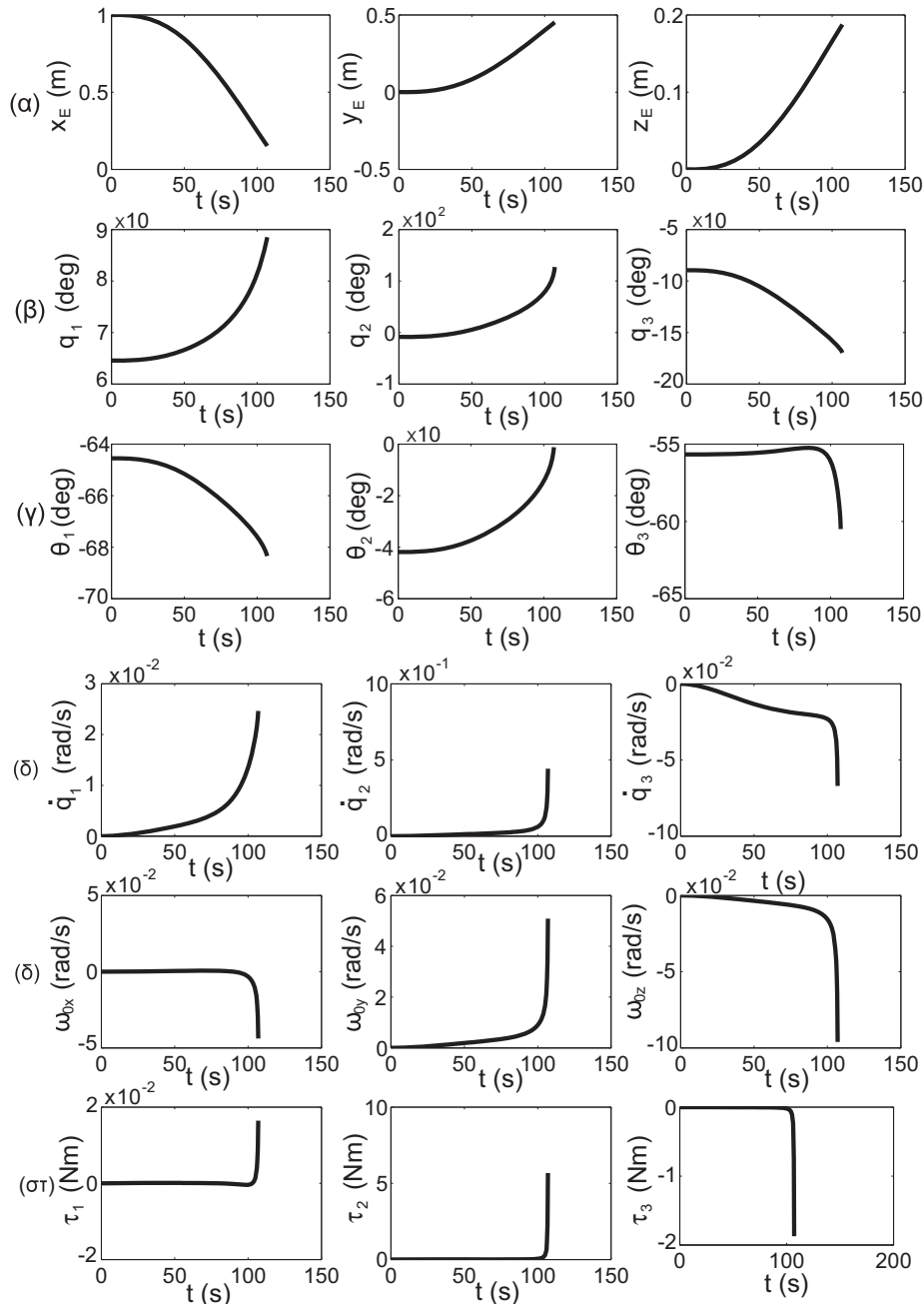
Η επιθυμητή θέση του ΤΣΔ ορίζεται επίσης και από την γραμμική του ταχύτητα η οποία στην περίπτωση αυτή είναι:

$$\dot{\mathbf{r}}_E = [\dot{x}_E \quad \dot{y}_E \quad \dot{z}_E]^T = (x_{fin} - x_{in}) [\dot{s} \quad K_1 \dot{s} \quad K_2 \dot{s}]^T \quad (4-76)$$

Ένας τυχαίος προσανατολισμός του δορυφόρου του ΔΡΣ, που περιγράφεται από τις παραμέτρους Euler $\boldsymbol{\varepsilon}_{in} = [0.2 \ 0.5 \ 0.3]^T$, $n_{in} = -0.7874$, και ο αντίστοιχος σχηματισμός του βραχίονα $\mathbf{q}_{in} = [1.1266 \ -0.1515 \ -1.5631]^T \text{ rad}$ για θέση του ΤΣΔ στο σημείο A , όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.13(α), έχει ως αποτέλεσμα μια αρχική κίνηση του ΤΣΔ στον επιθυμητό δρόμο, βλ. Σχήμα 4.13(β), η οποία καταλήγει σε ΔI του βραχίονα όταν το ΤΣΔ φτάσει στο σημείο $C = (0.1576, 0.4546, 0.1885) \text{ m}$, όπως παρουσιάζεται στο Σχήμα 4.13(γ). Για την κίνηση AC του ΤΣΔ, οι τροχιές του ΤΣΔ φαίνονται στο Σχήμα 4.14(α), ενώ τα Σχήματα 4.14(β),(γ) παρουσιάζουν τις τροχιές των μεταβλητών διαμόρφωσης του βραχίονα καθώς και τον προσανατολισμό του δορυφόρου εκφρασμένο από τις x - y - z γωνίες Euler αντίστοιχα. Τα Σχήματα 4.14(δ),(ε) δείχνουν τις ταχύτητες των αρθρώσεων καθώς και τη γωνιακή ταχύτητα του δορυφόρου εκφρασμένη στο αδρανειακό σύστημα. Οι ροπές στις αρθρώσεις υπολογίζονται από την Εξ. (2-58) και παρουσιάζονται στο Σχήμα 4.14(στ). Παρατηρούμε, ότι κοντά στο σημείο όπου εμφανίζεται ΔI , οι ταχύτητες των αρθρώσεων του βραχίονα και η γωνιακή ταχύτητα του δορυφόρου καθώς και οι ροπές στις αρθρώσεις του βραχίονα παρουσιάζουν απότομες μεταβολές.



Σχήμα 4.13 Στιγμιότυπα κίνησης συστήματος. Ο βραχίονας γίνεται ιδιόμορφος στο σημείο C .



Σχήμα 4.14 Απόκριση ΔΡΣ για την κίνηση του Σχήματος 4.12. (α) Τροχιά θέσης ΤΣΔ, (β) Τροχιές γωνιών αρθρώσεων βραχίονα, (γ) Τροχιές προσανατολισμού δορυφόρου (x-y-z Euler angles). (δ) Ταχύτητες γωνιών αρθρώσεων, (ε) Γωνιακή ταχύτητα δορυφόρου. (στ) Ροπές αρθρώσεων βραχίονα.

Για την εφαρμογή της μεθόδου, επιλέγεται η επιφάνεια περιθωρίου με $S_0 = -5$. Για ένα εύρος των μεταβλητών q_1 και q_2 , από την Εξ. (3-31β) προκύπτει η αντίστοιχη γωνία q_3 . Στη συνέχεια, οι Εξ. (4-51), (B-8), (2-2) και (4-23) δίνουν τον αντίστοιχο προσανατολισμό του δορυφόρου όταν η καμπύλη κίνησης εφάπτεται στην επιφάνεια περιθωρίου $S = S_0$. Για αυτό το σημείο, μια λύση είναι:

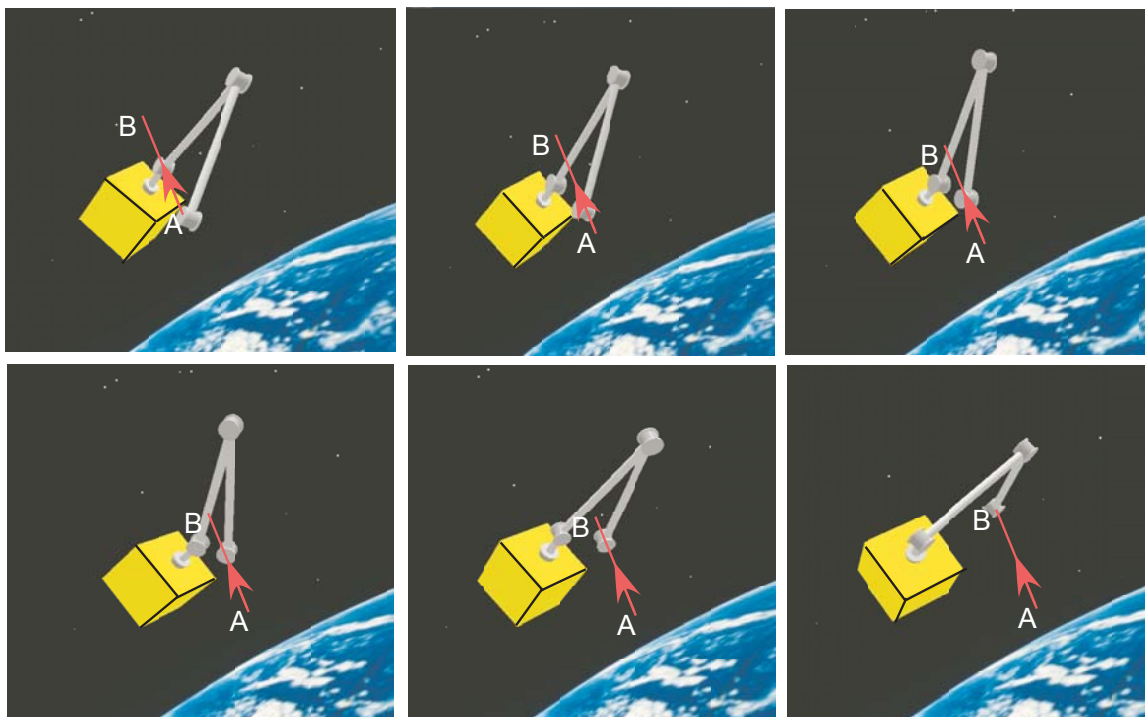
$$[q_{1t}, q_{2t}, q_{3t}]^T = [0.1, 2.3, -2.9417]^T \text{ rad}$$

$$[\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t}, \varepsilon_{3t}, n_t]^T = [0.0697, -0.4808, -0.3066, -0.8186]^T$$

Στη συνέχεια, η παραπάνω λύση χρησιμοποιείται ως αρχική συνθήκη στις Εξ. (3-6) και (3-7) οι οποίες επιλύονται για κίνηση του ΤΣΔ και προς το αρχικό και προς τελικό σημείο του επιθυμητού δρόμου. Η λύση είναι αποδεκτή, αφού τα τμήματα της καμπύλης κίνησης που παράγονται από την κάθε μια από τις παραπάνω κινήσεις του ΤΣΔ δεν έρχεται σε επαφή με την καμπύλη ιδιομορφιών. Σε αυτή την περίπτωση, από τη λύση των Εξ. (3-6) και (3-7) κατά την κίνηση του ΤΣΔ από το εφαπτόμενο σημείο προς το αρχικό σημείο του δρόμου, προκύπτει ένας επιθυμητός αρχικός προσανατολισμός του δορυφόρου,

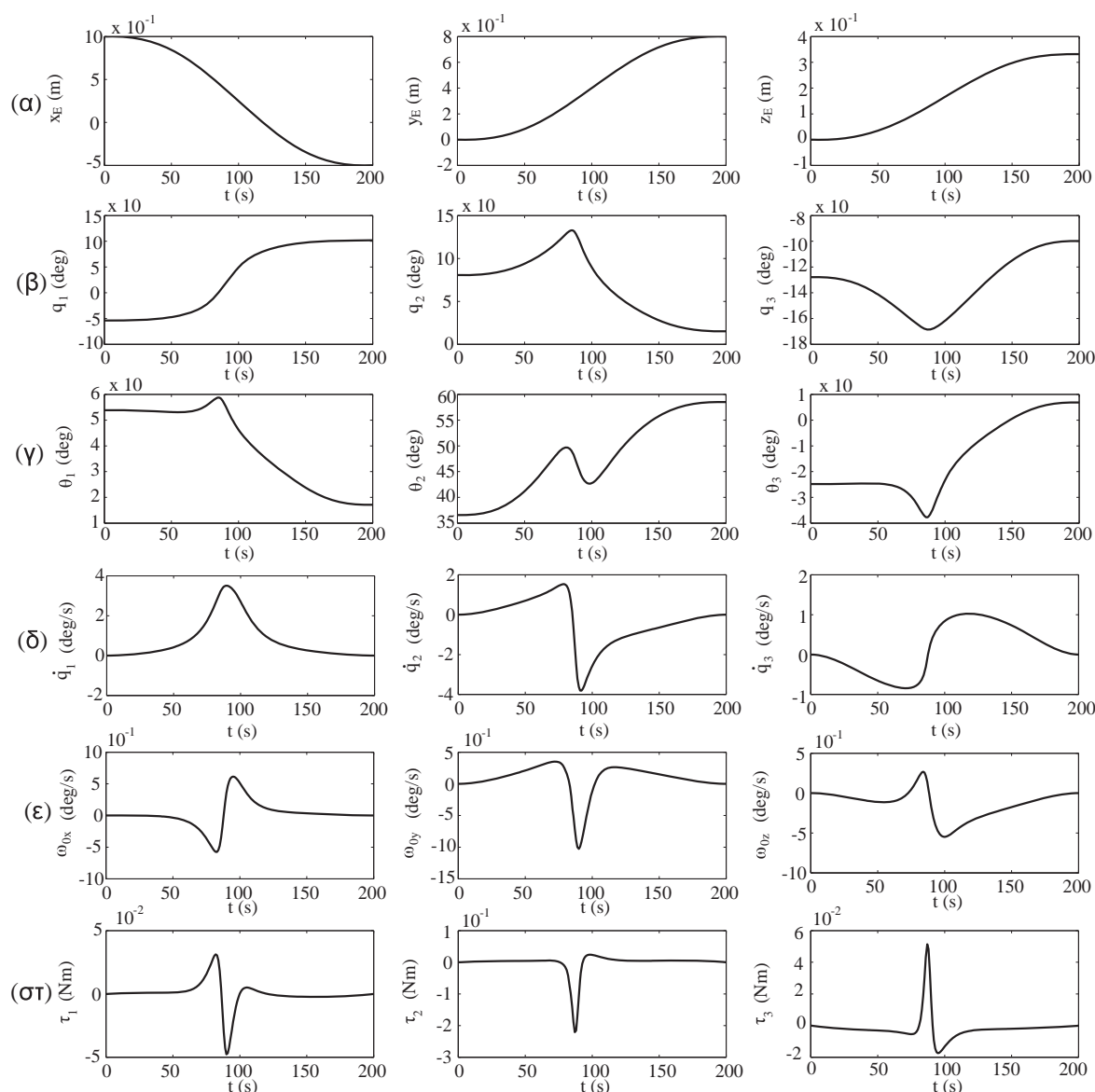
$$[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, n]^T = [0.0431, -0.3657, -0.3598, -0.8573]^T$$

Οι απαιτούμενες τροχιές των γωνιών των αρθρώσεων υπολογίζονται από τις Εξ. (3-6), (3-7) και (4-50). Το Σχήμα 4.15 δείχνει στιγμιότυπα της κίνησης του συστήματος.



Σχήμα 4.15 Στιγμιότυπα κίνησης τρισδιάστατου ΔΡΣ. Το ΤΣΔ ακολουθεί το δρόμο AB αποφεύγοντας πιθανές δυναμικές ιδιομορφίες.

Το Σχήμα 4.16 δείχνει τα αντίστοιχα μεγέθη που φαίνονται στο Σχήμα 4.14, για την κίνηση του ΔΡΣ που παρουσιάζεται στο Σχήμα 4.15. Στην περίπτωση αυτή, όλες οι τροχιές είναι ομαλές κατά τη διάρκεια της κίνησης του συστήματος καθώς και οι απαιτούμενες ροπές είναι μικρές και ομαλές και εγγυώνται την εφεκτικότητα της επιθυμητής κίνησης.



Σχήμα 4.16 Απόκριση ΔΡΣ για την κίνηση του Σχήματος 4.15. (α) Τροχιά θέσης ΤΣΔ, (β) Τροχιές γωνιών αρθρώσεων βραχίονα, (γ) Τροχιές προσανατολισμού δορυφόρου (x-y-z Euler angles). (δ) Ταχύτητες γωνιών αρθρώσεων, (ε) Γωνιακή ταχύτητα δορυφόρου. (στ) Ροπές αρθρώσεων βραχίονα.

Εφαρμογή 4.3: Στην εφαρμογή αυτή χρησιμοποιείται το επίπεδο ΔΡΣ με ένα βραχίονα 3-ΒΕ του Σχήματος 4.4 του οποίου οι παράμετροι δίνονται στον Πίνακα 4.3. Ο τρίτος σύνδεσμος αντιστοιχεί σε ένα μικρό σύνδεσμο ο οποίος φέρει το ΤΣΔ του οποίου η θέση και ο προσανατολισμός πρέπει να ακολουθήσουν την επιθυμητή τροχιά. Έτσι, ο σύνδεσμος αυτός είναι μια μικρή άκαμπτη μάζα. Παρόλα αυτά, ένας μεγαλύτερος σύνδεσμος με μεγαλύτερη μάζα θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί, αφού η εφαρμογή της προτεινόμενης μεθόδου δεν επηρεάζεται από τις αδρανειακές ιδιότητες του συστήματος. Η αρχική στροφορμή του συστήματος είναι $h_{CM} = 0.5 \text{ Nms}$. Το ΤΣΔ κινείται από το σημείο $A = (2.0, 0.0) \text{ m}$ στο σημείο $B = (-1.0, 2.0) \text{ m}$ ακολουθώντας την παραβολική διαδρομή

που ορίζεται θέτοντας ενδιάμεση θέση το σημείο το $C=(0.0,1.0)m$. Η κίνηση διαρκεί χρόνο $t_f=100s$.

Ο επιθυμητός δρόμος δίνεται από την Εξ. (4-40α):

$$y_E = \alpha x_E^2 + \beta x_E + \gamma \quad (4-77\alpha)$$

όπου μπορεί να τεθεί:

$$x_E = x_{in} + (x_{fin} - x_{in}) s(t) \quad (4-77\beta)$$

Επιπλέον, το ΤΣΔ πρέπει να είναι συνεχώς κάθετο στο δρόμο.

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.3. ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ ΤΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΔΡΣ ΜΕ ΕΝΑ ΒΡΑΧΙΟΝΑ 3-ΒΕ ΤΟΥ ΣΧΗΜΑΤΟΣ 4.4

Σώμα	$l_i (m)$	$r_i (m)$	$m_i (Kg)$	$I_i (Kg m^2)$
0	0.5	0.5	400	66.67
1	1.0	1.0	40	3.33
2	0.5	0.5	30	2.50
3	0.2	0.2	1	1.5

Στη συνέχεια, η προτεινόμενη μεθοδολογία θα εφαρμοστεί έτσι ώστε να υπολογιστούν οι κατάλληλοι αρχικοί προσανατολισμοί του δορυφόρου που εξασφαλίζουν την αποφυγή δυναμικών ιδιομορφιών κατά την επιθυμητή κίνηση του ΤΣΔ. Για ολόκληρο το εύρος τιμών των μεταβλητών των αρθρώσεων q_1 και q_2 , η μέγιστη τιμή του S είναι $S_{max} \approx 150$. Επιλέγουμε $S_0 = 5$ ($S_0 \approx 3.3\% S_{max}$), έτσι ώστε να επιτευχθεί ένα ικανοποιητικό εύρος των εφικτών προσανατολισμών του δορυφόρου. Επίσης είναι δυνατόν να επιλεχθεί και μια αρνητική τιμή της παραμέτρου S_0 .

Για να παραμείνει το ΤΣΔ κάθετο στην διαγραφόμενη τροχιά, θα πρέπει:

$$\theta_E = 3\pi/2 + \text{atan}(\partial y_E(x_E)/\partial x_E) \quad (4-78)$$

Εφόσον η εμφάνιση δυναμικών ιδιομορφιών προκαλείται από την κίνηση του σημείου 3, οι περιοχές PIW και PDW στα Σχήματα 4.17 και 4.19 έχουν υπολογιστεί με βάση την κίνηση αυτού του σημείου. Ο δρόμος που διαγράφει το σημείο 3 περνά από μια φορά τις περιοχές PDW (A) και PDW (B), όπως φαίνεται και στο Σχήμα 4.19. Άρα $n=2$. Πρώτα, ο δρόμος AB του ΤΣΔ χωρίζεται στα τμήματα AF και FB αντίστοιχα, όπου $F=(-0.5,1.4583)m$ και η αντίστοιχη θέση F' του σημείου 3 ανήκει στην περιοχή PIW, βλ. Σχήμα 4.19. Αφού η στροφορμή του συστήματος είναι μη-μηδενική, θα πρέπει να ληφθεί υπόψη και η διάρκεια κίνησης του συστήματος. Στην περίπτωση αυτή, από τις Εξ. (4-

40β), (3-10β) και (3-10γ) προκύπτουν οι χρόνοι κίνησης $t_1=69.73\text{ s}$ και $t_2=t_f-t_1$ για τα τμήματα AF και FB αντίστοιχα.

Εφαρμόζοντας την προτεινόμενη μέθοδο, πρώτα υπολογίζεται το εφικτό εύρος των προσανατολισμών του δορυφόρου στο τελικό σημείο B της διαδρομής, έτσι ώστε να αποφευχθεί κάποια δυναμική ιδιομορφία στη διαδρομή FB. Οι Εξ. (4-32), (4-27γ), (4-28), (3-10β) και (3-17β) σε συνδυασμό με την εξίσωση του δρόμου, Εξ. (4-40) δίνουν τις ακόλουθες επιτρεπτές τιμές για τον προσανατολισμό του δορυφόρου και τη διαμόρφωση του βραχίονα καθώς και τον αδιάστατο χρόνο για τις οποίες η καμπύλη κίνησης εφάπτεται στην καμπύλη περιθωρίου $S=S_0$:

$$[\theta_{0t}, \mathbf{q}_t^T]^T = [-0.7463, -3.6512, 0.1762, 1.7885]^T \text{ rad}, \quad \tau_t = 0.9495$$

Εάν η Εξ. (3-40) επιλυθεί με αρχικές συνθήκες τον παραπάνω προσανατολισμό δορυφόρου και διαμόρφωση βραχίονα για το χρονικό διάστημα $\Delta t_1 = (1-\tau_t)t_1$ προκύπτει ο αντίστοιχος προσανατολισμός του δορυφόρου καθώς και η διαμόρφωση του βραχίονα όταν το ΤΣΔ βρίσκεται στο σημείο B του δρόμου FB. Ο προσανατολισμός του δορυφόρου που προκύπτει είναι $\theta_0^B = 318.9^\circ$.

Από την επίλυση των Εξ. (4-32), (4-27γ), (4-28), (3-10β) και (3-17β) σε συνδυασμό με την εξίσωση του δρόμου, Εξ. (4-40), δεν προκύπτει άλλη δεκτή λύση. Δηλαδή η καμπύλη κίνησης δεν έχει άλλη κοινή εφαπτομένη με την καμπύλη περιθωρίου στην περιοχή PDW (B). Στην περίπτωση αυτή, για τον υπολογισμό του ορίου, θα πρέπει να θεωρηθεί ότι η καμπύλη κίνησης αγγίζει την καμπύλη περιθωρίου όταν το ΤΣΔ φτάνει στο σημείο B. Το σημείο (q_{1t}, q_{2t}) υπολογίζεται από τις Εξ. (3-18) και (4-19). Οι μεταβλητές (θ_{0t}, q_{3t}) μπορούν να υπολογιστούν από τις Εξ. (4-27), θεωρώντας την επιθυμητή θέση και προσανατολισμό του ΤΣΔ. Από την παραπάνω διαδικασία προκύπτει η αποδεκτή λύση για τον προσανατολισμό του δορυφόρου στο σημείο B, $\theta_0^B = 259.4^\circ$.

Το εφικτό διάστημα εύρους για τον προσανατολισμό του δορυφόρου όταν το ΤΣΔ είναι στο σημείο B έτσι ώστε να αποφευχθεί κάποια δυναμική ιδιομορφία στη διαδρομή FB είναι:

$$\Theta_{FB}^B = [0^\circ \ 259.4^\circ] \cup [318.9^\circ \ 360^\circ]$$

Χρησιμοποιώντας τα όρια αυτού του εύρους ως αρχικές συνθήκες και επιλύοντας την Εξ. (3-40) αντίστροφα στο σημείο F της διαδρομής FB, προκύπτουν τα όρια που φράζουν το εφικτό εύρος προσανατολισμών όταν το ΤΣΔ βρίσκεται στο σημείο F έτσι ώστε να επιτευχθεί αποφυγή δυναμικών ιδιομορφιών στη διαδρομή FB. Το διάστημα εύρους του αρχικού προσανατολισμού του δορυφόρου που προκύπτει είναι

$$\Theta_{FB}^F = [0^0 \ 298.7^0] \cup [354.2^0 \ 360^0]$$

Σημειώστε ότι η αντίστροφη επίλυση της Εξ. (3-40) απαιτεί τη χρήση στροφορμής αντίθετης φοράς. Στην συνέχεια επαναλαμβάνεται η παραπάνω διαδικασία για τον υπολογισμό του κατάλληλου εύρους προσανατολισμού του δορυφόρου, όταν το ΤΣΔ βρίσκεται στο σημείο F έτσι ώστε να αποφευχθεί δυναμική ιδιομορφία στη διαδρομή AF. Η επίλυση των Εξ. (4-32), (4-27γ), (4-28), (3-10β) και (3-17β) σε συνδυασμό με την εξίσωση του δρόμου, Εξ. (4-40) δίνει τις ακόλουθες τιμές για τον προσανατολισμό του δορυφόρου και τη διαμόρφωση του βραχίονα καθώς και για τον αδιάστατο χρόνο για τις οποίες η καμπύλη κίνησης εφάπτεται της καμπύλης περιθωρίου $S = S_0$:

$$[\theta_{0t}, \mathbf{q}_t^T]^T = [0.9158, -0.6074, 2.9265, 0.9617]^T \text{ rad}, \quad \tau_t = 0.4895$$

$$[\theta_{0t}, \mathbf{q}_t^T]^T = [1.5922, -0.7348, 2.9014, 0.2833]^T \text{ rad}, \quad \tau_t = 0.6413$$

Εάν οι παραπάνω τιμές χρησιμοποιηθούν ως αρχικές συνθήκες για την επίλυση της Εξ. (3-40) προς το σημείο F της διαδρομής AF, προκύπτουν οι αντίστοιχοι προσανατολισμοί του δορυφόρου στο σημείο F οι οποίοι είναι $\theta_0^F = 335.3^0$ και $\theta_0^F = 60.9^0$ αντίστοιχα. Το εφικτό εύρος των προσανατολισμών του δορυφόρου στο σημείο F με τους οποίους αποφεύγεται πιθανή δυναμική ιδιομορφία στη διαδρομή AF είναι $\Theta_{AF}^F = [60.9^0 \ 335.3^0]$. Το διάστημα εύρους των προσανατολισμών του δορυφόρου στο σημείο F που εξασφαλίζει αποφυγή δυναμικών ιδιομορφιών συγχρόνως στις διαδρομές AF και FB είναι:

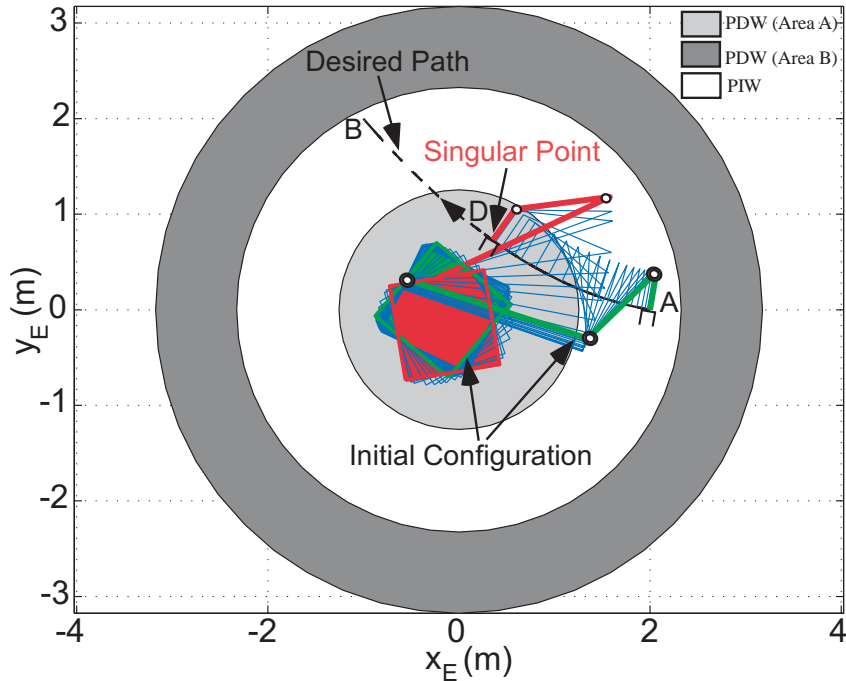
$$\Theta_{AF \& FB}^F = \Theta_{AF}^F \cap \Theta_{FB}^F = [60.9^0 \ 298.7^0].$$

Χρησιμοποιώντας τα όρια του εύρους αυτού ως αρχικές συνθήκες και επιλύοντας την Εξ. (3-40) αντίστροφα προς το σημείο A της διαδρομής AF, προκύπτει το εφικτό διάστημα εύρους προσανατολισμών στο αρχικό σημείο A με τους οποίους αποφεύγεται πιθανή δυναμική ιδιομορφία κατά την κίνηση του ΤΣΔ στη διαδρομή AB, το οποίο είναι

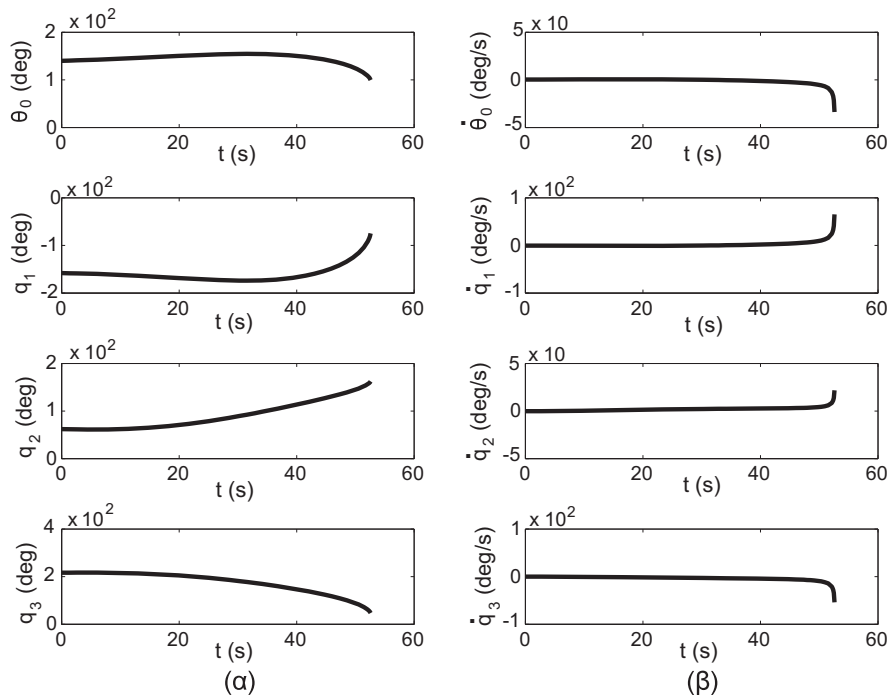
$$\Theta_{AB}^A = [0^0 \ 63.0^0] \cup [161.0^0 \ 360^0]$$

Σημειώνεται ότι το εύρος αυτό μπορεί να αυξηθεί εάν επιλεγεί κάποια μικρότερη τιμή για το κέρδος S_0 . Τα Σχήματα 4.17 και 4.19 δείχνουν την κίνηση του ΔΡΣ όταν ο αρχικός προσανατολισμός του δορυφόρου είναι $\theta_0^{in} = 140^0$ και $\theta_0^{in} = 200^0$, αντίστοιχα. Στην πρώτη περίπτωση, ο αρχικός προσανατολισμός είναι εκτός του εύρους που υπολογίστηκε παραπάνω και έτσι η επιθυμητή κίνηση δεν είναι εφικτή (ο βραχίονας γίνεται ιδιόμορφος στο σημείο D). Στη δεύτερη περίπτωση, ο προσανατολισμός του δορυφόρου βρίσκεται στο διάστημα εύρους που υπολογίστηκε παραπάνω και επιτρέπει στο ΤΣΔ να

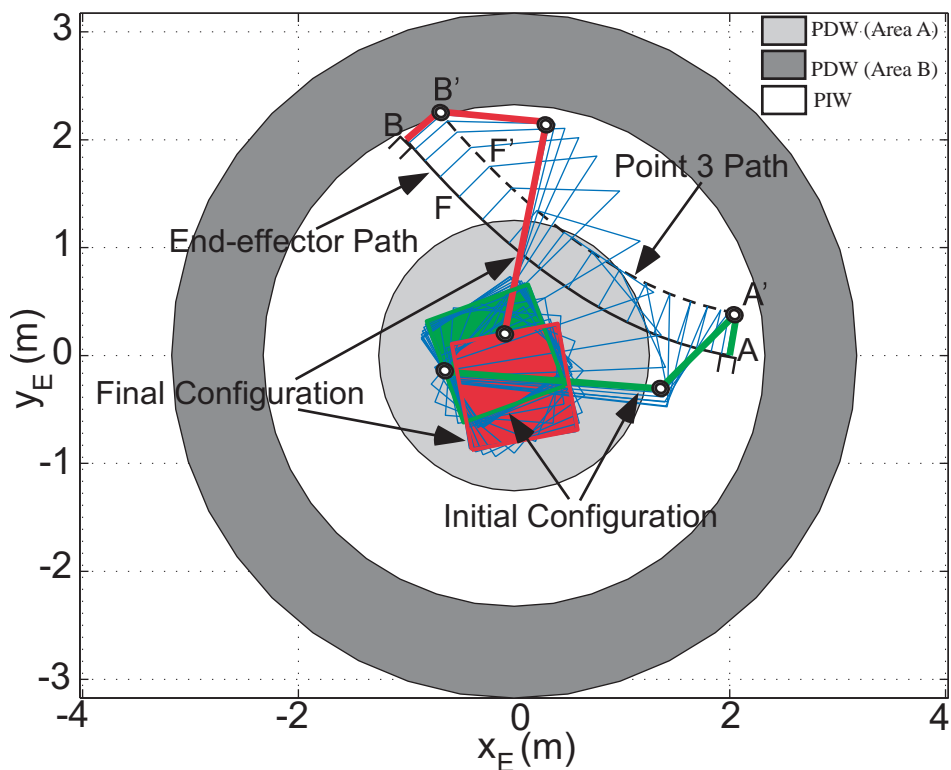
ακολουθήσει τον επιθυμητό δρόμο. Τα Σχήματα 4.18(α),(β) και 4.20(α),(β) δείχνουν τις μεταβολές του προσανατολισμού του δορυφόρου και των γωνιών των αρθρώσεων του βραχίονα καθώς και των ταχυτήτων τους για την πρώτη και δεύτερη περίπτωση, αντίστοιχα.



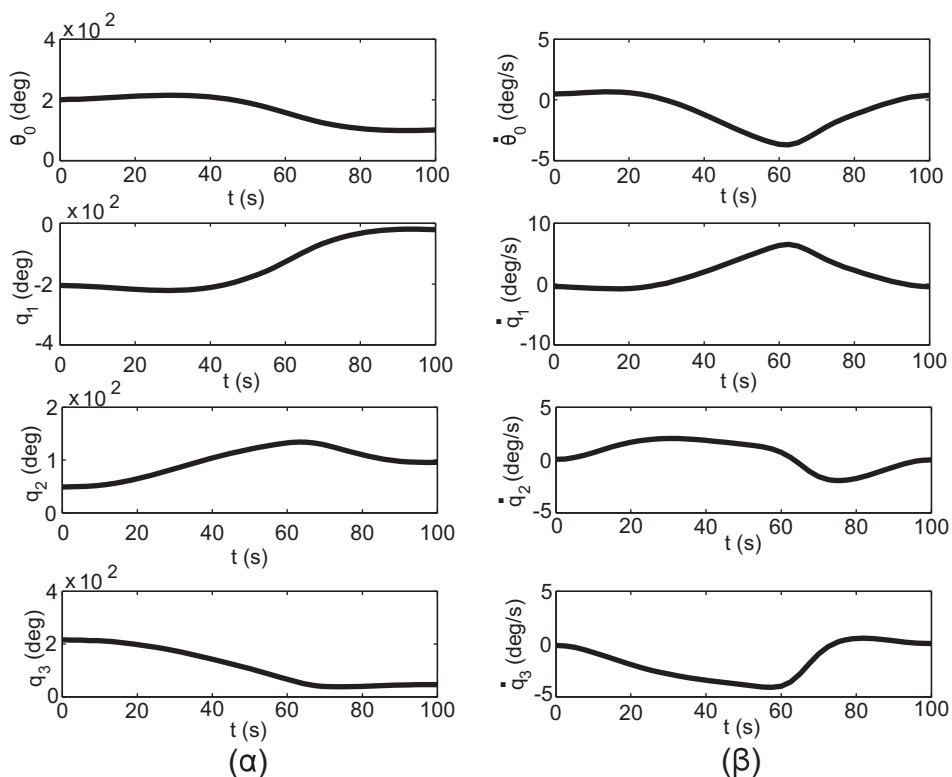
Σχήμα 4.17 Κίνηση επίπεδου ΔΡΣ με βραχίονα 3-ΒΕ με αρχικό προσανατολισμό δορυφόρου $\theta_0^i = 140^\circ$. Ο βραχίονας γίνεται ιδιόμορφος στο σημείο D.



Σχήμα 4.18 Απόκριση ΔΡΣ για την κίνηση του Σχήματος 4.17. (α) Προσανατολισμός δορυφόρου και τροχιές γωνιών αρθρώσεων (β) Γωνιακή ταχύτητα δορυφόρου και ταχύτητες αρθρώσεων.



Σχήμα 4.19 Κίνηση επίπεδου ΔΡΣ με βραχίονα 3-ΒΕ με αρχικό προσανατολισμό δορυφόρου $\theta_0^i = 200^\circ$.



Σχήμα 4.20 Απόκριση ΔΡΣ για την κίνηση του Σχήματος 4.19. (α) Προσανατολισμός δορυφόρου και τροχιές γωνιών αρθρώσεων (β) Γωνιακή ταχύτητα δορυφόρου και ταχύτητες αρθρώσεων.

Εφαρμογή 4.4: Στην εφαρμογή αυτή μελετάται η κίνηση του τρισδιάστατου ΔΡΣ με ένα βραχίονα 6-ΒΕ του Σχήματος 3.13 του οποίου οι παράμετροι δίνονται στον Πίνακα 4.4. Το ΤΣΔ οδηγείται από το σημείο $A=(1,0,0)m$ στο σημείο $B=(-0.5,0.8,0.3317)m$ ακολουθώντας μια ευθύγραμμη διαδρομή σε χρόνο $t_{fm}=100s$. Επιπλέον το ΤΣΔ πρέπει να είναι συνεχώς κάθετο στο επίπεδο που ορίζεται από την εξίσωση:

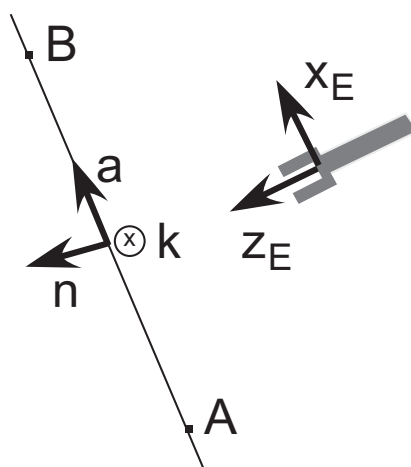
$$0.4683x + 1.1683y - 0.7z - 0.4683 = 0 \quad (4-79)$$

στο οποίο ανήκει η ευθύγραμμη διαδρομή AB. Η αρχική στροφορμή του συστήματος είναι $\mathbf{h}_{CM} = [0.5 \ 0.3 \ 0.1] Nms$.

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.4. ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ ΤΟΥ ΤΡΙΣΔΙΑΣΤΑΤΟΥ ΔΡΣ ΜΕ ΕΝΑ ΒΡΑΧΙΟΝΑ 6-ΒΕ ΤΟΥ ΣΧΗΜΑΤΟΣ 3.6

Σώμα	$l_i (m)$	$r_i (m)$	$m_i (Kg)$	$I_{xx} (Kg m^2)$	$I_{yy} (Kg m^2)$	$I_{zz} (Kg m^2)$
0	-	$[0,0,0.5]^T$	400	66.67	66.67	66.67
1	0	0	0	0	0	0
2	0.5	0.5	40	0.001	2.5	2.5
3	0.5	0.5	30	0.001	7.5	1.7
4	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0
6	0.2	0.2	10	1.5	1.5	1.5

Στο Σχήμα 4.21 παρουσιάζεται το επίπεδο που περιέχει την ευθεία AB. Το επίπεδο αυτό ορίζεται από το παράλληλο στην ευθεία μοναδιαίο διάνυσμα \mathbf{a} , το κάθετο στο επίπεδο μοναδιαίο διάνυσμα \mathbf{n} και το μοναδιαίο διάνυσμα \mathbf{k} τέτοιο ώστε η τριάδα $[\mathbf{n} \ \mathbf{a} \ \mathbf{k}]$ να είναι δεξιόστροφο.



Σχήμα 4.21 Προσανατολισμός ΤΣΔ κάθετος στο επίπεδο που ορίζεται από την ευθεία AB και το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα \mathbf{n} .

Επίσης, το ίδιο σχήμα δείχνει και τον προσανατολισμό του ΤΣΔ όπως αυτός ορίζεται από το ΣΣ {E}. Ο προσανατολισμός του ΤΣΔ ως προς το αδρανειακό ΣΣ δίνεται από τον πίνακα περιστροφής \mathbf{R}_E :

$$\mathbf{R}_E = [\hat{x}_E \quad \hat{y}_E \quad \hat{z}_E] \quad (4-80\alpha)$$

$$\mathbf{R}_E = \mathbf{R}_0(\boldsymbol{\varepsilon}, n) {}^0\mathbf{R}_3(q_1, q_2, q_3) {}^3\mathbf{R}_6(q_4, q_5, q_6) \quad (4-80\beta)$$

Το μοναδιαίο, κατά μήκος της ευθείας AB, διάνυσμα \mathbf{a} είναι:

$$\mathbf{a} = \frac{1}{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}} \begin{bmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{bmatrix} \quad (4-81\alpha)$$

Το μοναδιαίο διάνυσμα \mathbf{n} , κάθετο στο επίπεδο

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (4-81\beta)$$

δίνεται από:

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} \quad (4-81\gamma)$$

Το μοναδιαίο διάνυσμα \mathbf{k} είναι:

$$\mathbf{k} = \mathbf{n} \times \mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{k} = \mathbf{n}^x \mathbf{a} \quad (4-81\delta)$$

Για να είναι κάθετο το ΤΣΔ στο επίπεδο θα πρέπει:

$$\mathbf{R}_E = [\mathbf{a} \quad \mathbf{k} \quad \mathbf{n}] \quad (4-82)$$

Από την Εξ. (4-59β) προκύπτει:

$${}^3\mathbf{R}_6(q_4, q_5, q_6) = (\mathbf{R}_0(\boldsymbol{\varepsilon}, n) {}^0\mathbf{R}_3(q_1, q_2, q_3))^T \mathbf{R}_E \quad (4-83)$$

Είναι:

$${}^3\mathbf{R}_6(q_4, q_5, q_6) = \begin{bmatrix} c_{(q_6)} s_{(q_5)} & -s_{(q_5)} s_{(q_6)} & c_{(q_5)} \\ -c_{(q_4)} c_{(q_5)} c_{(q_6)} + s_{(q_4)} s_{(q_6)} & c_{(q_4)} c_{(q_5)} s_{(q_6)} + c_{(q_6)} s_{(q_4)} & c_{(q_4)} s_{(q_5)} \\ -c_{(q_5)} c_{(q_6)} s_{(q_4)} - c_{(q_4)} s_{(q_6)} & s_{(q_4)} c_{(q_5)} s_{(q_6)} - c_{(q_4)} c_{(q_6)} & s_{(q_4)} s_{(q_5)} \end{bmatrix} \quad (4-84)$$

και

$$(\mathbf{R}_0(\boldsymbol{\varepsilon}, n) {}^0\mathbf{R}_3(q_1, q_2, q_3))^T \mathbf{R}_E = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \quad (4-85)$$

Από όπου προκύπτει:

$$q_4 = \text{atan2}(s_{(q_4)}, c_{(q_4)}) \quad (4-86\alpha)$$

$$q_5 = \text{atan2}(s_{(q_5)}, c_{(q_5)}) \quad (4-86\beta)$$

$$q_6 = \text{atan2}(s_{(q_6)}, c_{(q_6)}) \quad (4-86\gamma)$$

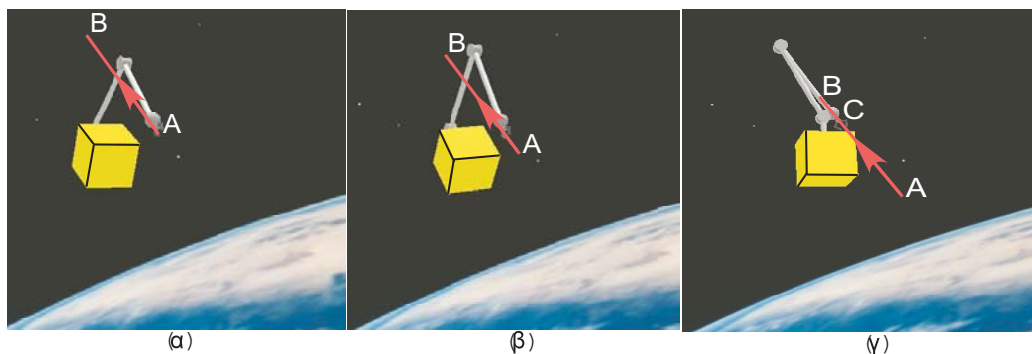
όπου

$$c_{(q_5)} = r_{13}, s_{(q_5)} = \pm \sqrt{r_{23}^2 + r_{33}^2} \quad (5-87\alpha)$$

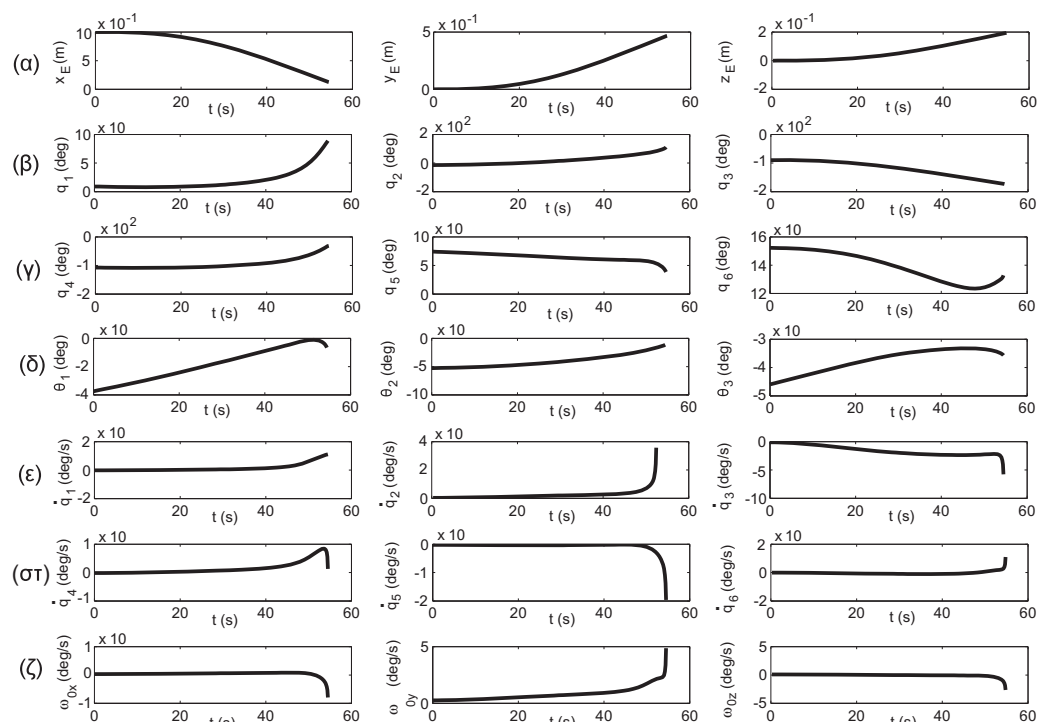
$$c_{(q_6)} = \frac{r_{11}}{s_{(q_5)}}, s_{(q_6)} = -\frac{r_{12}}{s_{(q_5)}} \quad (4-87\beta)$$

$$c_{(q_4)} = \frac{r_{23}}{s_{(q_5)}}, s_{(q_4)} = \frac{r_{33}}{s_{(q_5)}} \quad (4-87\gamma)$$

Οι Εξ. (4-87β) και (4-87γ) ορίζονται όταν $s_{(q_5)} \neq 0$. Η τιμές της γωνίας q_5 για τις οποίες ισχύει $s_{(q_5)} = 0$ αντιστοιχούν σε κινηματικές ιδιομορφίες του καρπού (wrist singularities) και θα πρέπει να επιλέγονται κατάλληλοι προσανατολισμοί του ΤΣΔ έτσι ώστε αυτές οι τιμές να αποφεύγονται. Για το σύστημα αυτό, οι περιοχές PDW και PIW του χώρου εργασίας είναι ομόκεντροι σφαιρικοί όγκοι με κάθετες τομές όμοιες με τον αντίστοιχο χώρο εργασίας επίπεδων συστημάτων που φαίνεται στο Σχήμα 3.3(β). Οι εμφάνιση δυναμικών ιδιομορφιών εξαρτάται από το δρόμο του σημείου 3, όπως προαναφέρθηκε παραπάνω. Ο δρόμος του σημείου 3 διέρχεται από την περιοχή PDW (A), έτσι εάν ο αρχικός προσανατολισμός του δορυφόρου επιλεγθεί αυθαίρετα, όπως για παράδειγμα $\mathbf{\varepsilon}_{in} = [0.1 \ 0.5 \ 0.2]^T$, $n_{in} = -0.8367$ και ο αντίστοιχος σχηματισμός του βραχίονα $\mathbf{q}_{in} = [0.1561 \ -0.2505 \ -1.5657 \ -1.8699 \ 1.2960 \ 2.6572]^T \text{ rad}$ για θέση του ΤΣΔ στο σημείο A, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.22(α), έχει ως αποτέλεσμα μια αρχική κίνηση του ΤΣΔ στον επιθυμητό δρόμο, βλ. Σχήμα 4.22(β), η οποία καταλήγει σε ΔΙ του βραχίονα όταν το ΤΣΔ φτάσει στο σημείο $C = (0.1214, 0.4686, 0.1943) \text{ m}$, όπως παρουσιάζεται στο Σχήμα 4.22(γ). Για την κίνηση AC του ΤΣΔ, οι τροχιές του ΤΣΔ φαίνονται στο Σχήμα 4.23(α), ενώ τα Σχήματα 4.23(β),(γ) παρουσιάζουν τις τροχιές των μεταβλητών διαμόρφωσης του βραχίονα καθώς και τον προσανατολισμό του δορυφόρου εκφρασμένο με τις x-y-z γωνίες Euler αντίστοιχα. Τα Σχήματα 4.23(δ),(ε) δείχνουν τις ταχύτητες των αρθρώσεων καθώς και τη γωνιακή ταχύτητα του δορυφόρου εκφρασμένη στο αδρανειακό σύστημα. Παρατηρούμε, ότι κοντά στο σημείο όπου εμφανίζεται ΔΙ, οι ταχύτητες των αρθρώσεων του βραχίονα και η γωνιακή ταχύτητα του δορυφόρου παρουσιάζουν απότομες μεταβολές.



Σχήμα 4.22 Στιγμιότυπα κίνησης συστήματος. Ο βραχίονας γίνεται ιδιόμορφος στο σημείο D.



Σχήμα 4.23 Απόκριση ΔΡΣ για την κίνηση του Σχήματος 4.22. (α) Τροχιά θέσης ΤΣΔ, (β) Τροχίες γωνιών αρθρώσεων βραχίονα, (γ) Τροχίες γωνιών αρθρώσεων καρπού, (δ) Τροχίες προσανατολισμού δορυφόρου (x-y-z Euler γωνίες). (ε) Ταχύτητες γωνιών αρθρώσεων βραχίονα, (στ) Ταχύτητες γωνιών αρθρώσεων καρπού, (ζ) Γωνιακή ταχύτητα δορυφόρου.

Στη συνέχεια υπολογίζονται οι κατάλληλοι προσανατολισμοί του δορυφόρου, οι οποίοι εξασφαλίζουν την αποφυγή πιθανών ιδιομορφιών του βραχίονα. Όπως αποδείχθηκε στο Κεφάλαιο 3, οι δυναμικές ιδιομορφίες του βραχίονα καθορίζονται από την εξίσωση:

$$S(q_2, q_3) = k_0(q_2) + k_1(q_2) \sin(q_3) + k_2(q_2) \cos(q_3) \quad (4-88)$$

Για την αποφυγή δυναμικών ιδιομορφιών η καμπύλη κίνησης θα πρέπει να εφάπτεται της επιφάνειας περιθωρίου:

$$S = S_0 \quad (4-89)$$

όπου επιλέγεται, $S_0 = -5$. Η εξίσωση που ορίζει τις επιφάνειες ιδιομορφίας και περιθωρίου (ανάλογα με τη τιμή της σταθεράς S_0) δίνεται από:

$$q_3 = \pi - \arcsin[(S_0 - k_0(q_2)) \cos \varphi(q_2) / k_1(q_2)] - \varphi(q_2) \quad (4-90)$$

Η θέση του ΤΣΔ κατά μήκος του επιθυμητού ευθύγραμμου δρόμου είναι:

$$y_E(\boldsymbol{\varepsilon}, n, \mathbf{q}) = K_1 x_E(\boldsymbol{\varepsilon}, n, \mathbf{q}) + L_1 \quad (4-91\alpha)$$

$$z_E(\boldsymbol{\varepsilon}, n, \mathbf{q}) = K_2 x_E(\boldsymbol{\varepsilon}, n, \mathbf{q}) + L_2 \quad (4-91\beta)$$

και η αντίστοιχη θέση του σημείου 3 είναι:

$$y_A(\boldsymbol{\varepsilon}, n, q_1, q_2, q_3) = K_1^* x_A(\boldsymbol{\varepsilon}, n, q_1, q_2, q_3) + L_1^* \quad (4-92\alpha)$$

$$z_A(\boldsymbol{\varepsilon}, n, q_1, q_2, q_3) = K_2^* x_A(\boldsymbol{\varepsilon}, n, q_1, q_2, q_3) + L_2^* \quad (4-92\beta)$$

όπου μπορεί να τεθεί:

$$x_E(\boldsymbol{\varepsilon}(t), n(t), \mathbf{q}(t)) = x_{in} + (x_{fin} - x_{in}) s(t) \quad (4-92\gamma)$$

όπου το μήκος τόξου παραμετροποίησης της διαδρομής, $s(t)$, δίνεται από τις Εξ. (3-9).

Για τις παραμέτρους Euler ισχύει ο περιορισμός:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon} + n^2 = 1 \quad (4-93)$$

Η συνθήκη της κοινής εφαπτομένης, Εξ. (4-8α), δίνει:

$$\dot{q}_2(\boldsymbol{\varepsilon}, n, \mathbf{q}, \tau) \frac{\partial S(q_2, q_3)}{\partial q_2} + \dot{q}_3(\boldsymbol{\varepsilon}, n, \mathbf{q}, \tau) \frac{\partial S(q_2, q_3)}{\partial q_3} = 0 \quad (4-94)$$

Η επίλυση των παραπάνω εξισώσεων δίνει:

$$\mathbf{q} = [0.1, 2.0, 3.3076, -2.6104, 2.2981, 1.4288]^T \text{ rad}$$

$$[\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3, n]^T = [0.4295, -0.147, 0.6898, -0.564]^T, \quad \tau = 0.4225$$

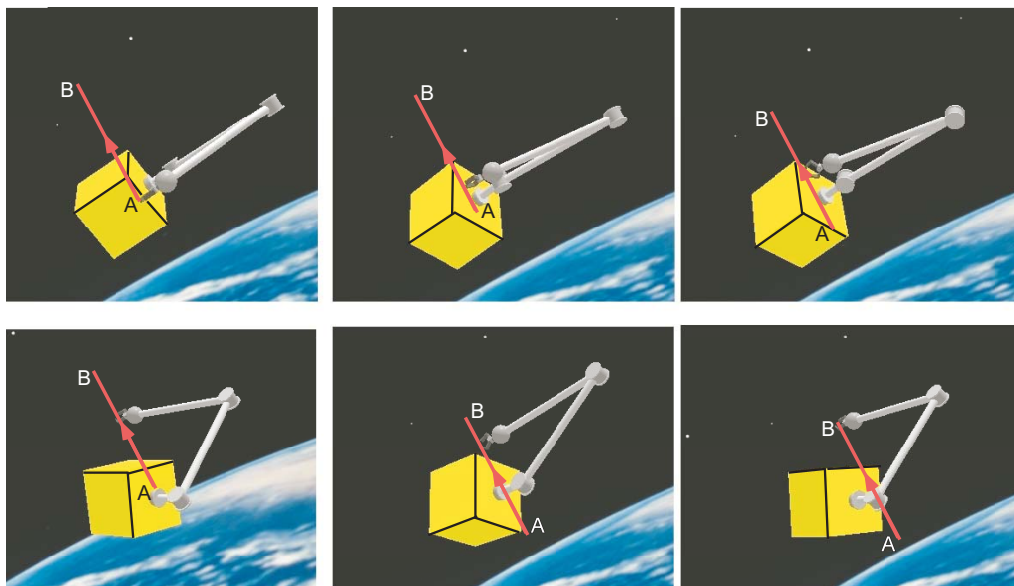
Χρησιμοποιώντας τη λύση αυτή για αρχική συνθήκη και επιλύοντας τις Εξ. (4-3) προς το αρχικό σημείο για χρόνο $t = \tau t_f$ και με αρχική στροφορμή $-\mathbf{h}_{CM}$, προκύπτει ο επιθυμητός αρχικός προσανατολισμός του δορυφόρου

$$[\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3, n]^T = [0.46, 0.0935, 0.7352, -0.489]^T$$

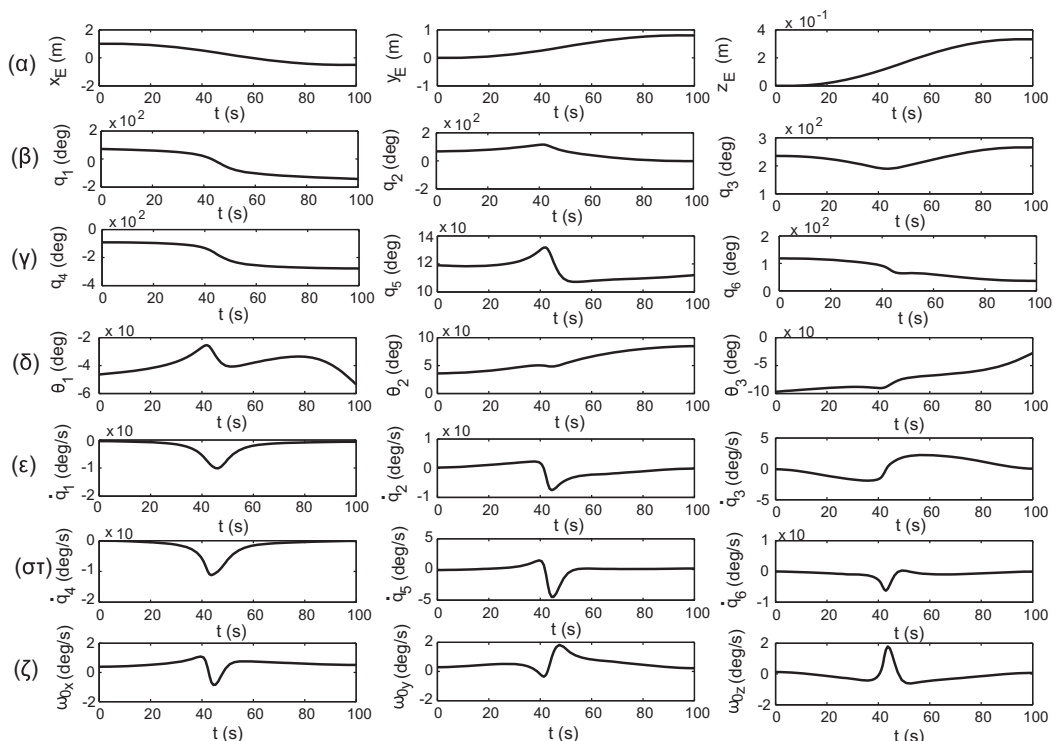
Η αντίστοιχη αρχική διαμόρφωση \mathbf{q} του βραχίονα μπορεί να προκύψει από το αντίστροφο κινηματικό πρόβλημα.

Το Σχήμα 4.24 δείχνει στιγμιότυπα της κίνησης του συστήματος. Οι τροχιές του ΤΣΔ φαίνονται στο Σχήμα 4.25(α), ενώ τα Σχήματα 4.25(β) και (γ) δείχνουν τις τροχιές των αρθρώσεων του βραχίονα και του καρπού αντίστοιχα. Ο προσανατολισμός του δορυφόρου, εκφρασμένος με τις x-y-z γωνίες Euler φαίνεται στο Σχήμα 4.25(δ). Τα

Σχήματα 4.25(ε) και (στ) δείχνουν τις ταχύτητες των αρθρώσεων και το Σχήμα 4.25(ζ) δείχνει τη γωνιακή ταχύτητα του δορυφόρου εκφρασμένη στο αδρανειακό σύστημα συντεταγμένων. Όπως προκύπτει, όλες οι τροχιές είναι λείες κατά τη διάρκεια της κίνησης και δεν εμφανίζεται καμία δυναμική ιδιομορφία.



Σχήμα 4.24 Στιγμιότυπα κίνησης συστήματος. Το ΤΣΔ ακολουθεί το δρόμο AB αποφεύγοντας πιθανές δυναμικές ιδιομορφίες.



Σχήμα 4.25 Απόκριση ΔΡΣ για την κίνηση του Σχήματος 4.24. (α) Τροχιά θέσης ΤΣΔ, (β) Τροχιές γωνιών αρθρώσεων βραχίονα, (γ) Τροχιές γωνιών αρθρώσεων καρπού, (δ) Τροχιές προσανατολισμού δορυφόρου (x-y-z Euler γωνίες). (ε) Ταχύτητες γωνιών αρθρώσεων βραχίονα, (στ) Ταχύτητες γωνιών αρθρώσεων καρπού, (ζ) Γωνιακή ταχύτητα δορυφόρου.

4.6 Συμπεράσματα

Στο κεφάλαιο αυτό, αναπτύχθηκε μια μεθοδολογία που επιτρέπει στο ΤΣΔ του ελεύθερα αιωρούμενου ΔΡΣ να ακολουθήσει οποιαδήποτε επιθυμητή διαδρομή στον Καρτεσιανό χώρο αποφεύγοντας πιθανές Δυναμικές Ιδιομορφίες. Εφόσον η διαδρομή του ΤΣΔ είναι προκαθορισμένη, η μέθοδος δίνει τις κατάλληλες τιμές αρχικού προσανατολισμού του δορυφόρου για την αποφυγή δυναμικών ιδιομορφιών κατά την διάρκεια της επιθυμητής κίνησης του ΤΣΔ. Έτσι, το ΤΣΔ μπορεί να εκτελέσει χωρίς πρόβλημα εργασίες σε όλο το χώρο εργασίας του συστήματος.

Η προτεινόμενη μέθοδος μπορεί να εφαρμοστεί σε συστήματα με ή χωρίς αρχική στροφορμή. Η παρουσία αρχικής στροφορμής στο σύστημα έχει ως αποτέλεσμα την εξάρτηση του κατάλληλου αρχικού προσανατολισμού του δορυφόρου από τη διάρκεια κίνησης του ΤΣΔ κατά μήκος της επιθυμητής του διαδρομής καθώς και από τη στροφορμή του ΔΡΣ.

Επιπλέον, η προτεινόμενη μέθοδος είναι εφαρμόσιμη για οποιαδήποτε επιθυμητή διαδρομή και εφαρμόστηκε σε επίπεδους και τρισδιάστατους ελεύθερα – αιωρούμενους διαστημικούς βραχίονες επιτρέποντας εντολές για επιθυμητή θέση και προσανατολισμό του ΤΣΔ του ρομποτικού βραχίονα. Επίσης, για επίπεδα ελεύθερα αιωρούμενα ΔΡΣ, η μέθοδος εξάγει τα ακριβή εύρη των εφικτών αρχικών προσανατολισμών του δορυφόρου.

5 Δυναμική και Έλεγχος Διαστημικών Βραχιόνων με Ευκαμψίες στις Αρθρώσεις

5.1 Εισαγωγή

Στα προηγούμενα κεφάλαια οι ευκαμψίες του βραχίονα θεωρήθηκαν αμελητέες. Αυτή η παραδοχή είναι αποδεκτή εάν η δομή του ρομποτικού βραχίονα είναι αρκετά δύσκαμπτη. Στις διαστημικές εφαρμογές, όμως, η κατασκευή των βραχιόνων είναι διαφορετική από την αντίστοιχη των επίγειων συστημάτων. Για λόγους ελάττωσης της μάζας εκτόξευσης και αύξησης του χώρου εργασίας, προτιμάται ο σχεδιασμός βραχιόνων μικρού βάρους και μεγάλου μήκους. Αυτός ο σχεδιασμός προκαλεί αύξηση των ευκαμψιών των συνδέσμων του βραχίονα. Για την αποφυγή των ταλαντώσεων που μπορεί να προκληθούν από τέτοιες ευκαμψίες, απαιτούνται πολύ αργές κινήσεις του βραχίονα. Παρόλα αυτά, σε περιπτώσεις χειρισμού μεγάλων φορτίων και μάλιστα από μεγάλους βραχίονες όπως το Canadarm, η δημιουργία ταλαντώσεων είναι εμφανής ακόμα και για αργές κινήσεις του βραχίονα.

Εκτός από την ελαστικότητα στους συνδέσμους, οι διαστημικοί βραχίονες παρουσιάζουν και ελαστικότητα στις αρθρώσεις που οφείλεται κυρίως στους κυματισμούς ροπής (torque ripples) των ηλεκτρικών κινητήρων, στα στοιχεία μετάδοσης των αρθρώσεων όπως είναι οι οδοντωτοί τροχοί (π.χ. οι αρμονικές μεταδόσεις (harmonic drives)) και στους άξονες των επενεργητών. Οι κυματισμοί ροπής είναι ένα φαινόμενο που παρουσιάζεται στους ηλεκτρικούς κινητήρες και αναφέρεται στις περιοδικές αυξομειώσεις της ροπής καθώς ο άξονας του κινητήρα περιστρέφεται. Το φαινόμενο αυτό μπορεί να μειωθεί με καλύτερη επιλογή υλικών, προσεκτική θεώρηση του σχεδιασμού των παραμέτρων του κινητήρα και εφαρμογή κατάλληλων τεχνικών ελέγχου. Οι αρμονικές μεταδόσεις είναι ένα είδος μηχανισμού μετάδοσης κίνησης ο οποίος είναι πολύ δημοφιλής σε επίγειες και διαστημικές εφαρμογές εξαιτίας του μικρού βάρους και μεγέθους του, της αμελητέας χάρης οδόντων (Backlash), του μεγάλου εύρους σε θερμοκρασίες λειτουργίας και του μεγάλου λόγου μετάδοσης ροπής που παρουσιάζει. Παρόλα αυτά όμως, οι μηχανισμοί αυτοί εισάγουν ανεπιθύμητες τριβές και ευκαμψίες στις αρθρώσεις του βραχίονα.

Στην παρούσα εργασία όλες οι ευκαμψίες του βραχίονα θεωρούνται συγκεντρωμένες στις αρθρώσεις του βραχίονα. Η παραδοχή αυτή διευκολύνει τη μελέτη της επίδρασης των ευκαμψιών στην ανάλυση και στο σχεδιασμό συστημάτων ελέγχου, όπου ενδιαφερόμαστε κυρίως για τη χαμηλότερη συχνότητα συντονισμού (resonant frequency), ειδικά όταν πρέπει να επιτευχθεί ακριβής θέση του ΤΣΔ του βραχίονα.

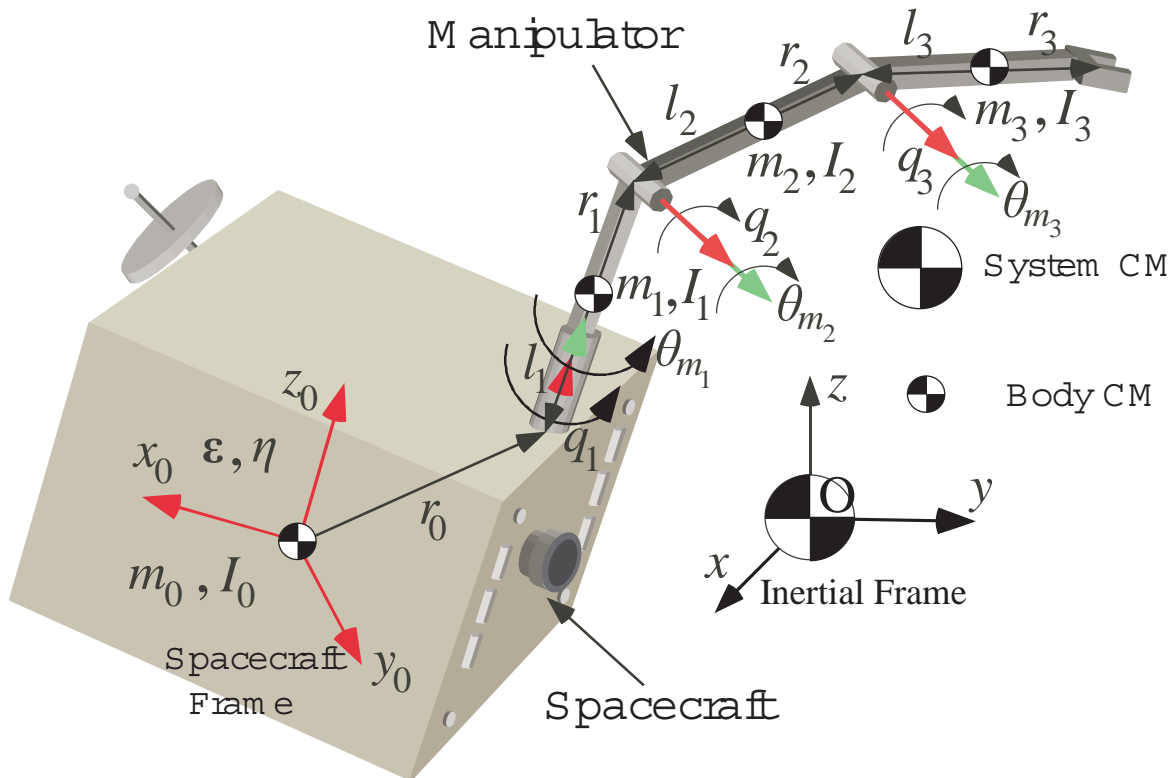
Επίσης, η παραδοχή των συγκεντρωμένων ευκαμψιών στις αρθρώσεις είναι βάσιμη για ελεύθερα αιωρούμενα/ιπτάμενα ΔΡΣ που έχουν κοντούς συνδέσμους όπως είναι οι βραχίονες που μελετώνται στην παρούσα εργασία αλλά και για ΔΡΣ όπως είναι το ETS-7 ή το Orbital Express.

Ο έλεγχος των ΔΡΣ με εύκαμπτες αρθρώσεις παρουσιάζει μεγάλες προκλήσεις καθώς ο αριθμός των ΒΕ του βραχίονα είναι διπλάσιος από τις εισόδους ελέγχου. Πολλές φορές οι ευκαμψίες στις αρθρώσεις μπορούν να οδηγήσουν σε αστάθεια όταν αγνοούνται κατά το σχεδιασμό των ελεγκτών του συστήματος.

Στο κεφάλαιο αυτό αναπτύσσονται αναλυτικά οι δυναμικές εξισώσεις ενός ελεύθερα αιωρούμενου ΔΡΣ στην περίπτωση που οι ευκαμψίες στις αρθρώσεις του δεν θεωρούνται αμελητέες, λαμβάνοντας υπόψη και τα αδρανειακά χαρακτηριστικά των κινητήρων που τις οδηγούν. Επίσης, με βάση την δομή του παραγόμενου δυναμικού μοντέλου, προτείνεται ένας στατικός ελεγκτής γραμμικοποίησης μέσω ανατροφοδότησης που επιτυγχάνει αποσύζευξη του συστήματος και παρακολούθηση τροχιών τόσο στο χώρο των αρθρώσεων όσο και στον Καρτεσιανό χώρο χωρίς να προκαλεί ανεπιθύμητες ταλαντώσεις στο δορυφόρο του ΔΡΣ.

5.2 Δυναμική Διαστημικών Βραχιόνων με Εύκαμπτες Αρθρώσεις

Στην παράγραφο αυτή, αναπτύσσονται οι δυναμικές εξισώσεις ενός διαστημικού βραχίονα με εύκαμπτες αρθρώσεις. Θεωρούμε ότι βραχίονας αποτελείται από περιστροφικές αρθρώσεις και διαμόρφωση ανοιχτής κινηματικής αλυσίδας για επίτευξη του μέγιστου δυνατού χώρου εργασίας. Ένα σύστημα με ένα βραχίονα με N αρθρώσεις θα έχει $2N$ ΒΕ λόγω των επιπλέον ΒΕ που εισάγονται εξαιτίας των ευκαμψιών των αρθρώσεων και το σύστημα θα έχει στο σύνολο $2N+6$ ΒΕ (ή $2N+3$ ΒΕ για επίπεδα συστήματα) συμπεριλαμβανομένων και των ΒΕ του δορυφόρου. Κάτω από την παραδοχή της απουσίας των εξωτερικών δυνάμεων, το ΚΜ του συστήματος δεν επιταχύνεται και η γραμμική ορμή του διατηρείται σταθερή. Με την επιπλέον παραδοχή της μηδενικής αρχικής γραμμικής ορμής, το ΚΜ του συστήματος παραμένει σταθερό ως προς ένα αδρανειακό ΣΣ, του οποίου η αρχή, στην περίπτωση αυτή, μπορεί να επιλεγθεί το ΚΜ του συστήματος, όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.1.



Σχήμα 5.1. Διαστημικός Ρομποτικός Βραχίονας με Εύκαμπτες Αρθρώσεις.

Οι N αρθρώσεις του ρομποτικού βραχίονα ενεργοποιούνται μέσω κινητήρων συνεχούς ρεύματος χωρίς ψήκτρες (DC brushless motors) εφοδιασμένων με μηχανισμούς αρμονικών μεταδόσεων (harmonic drive mechanisms). Η μείωση θεωρείται ότι εφαρμόζεται πριν την ευκαμψία στην κάθε άρθρωση, όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.2.

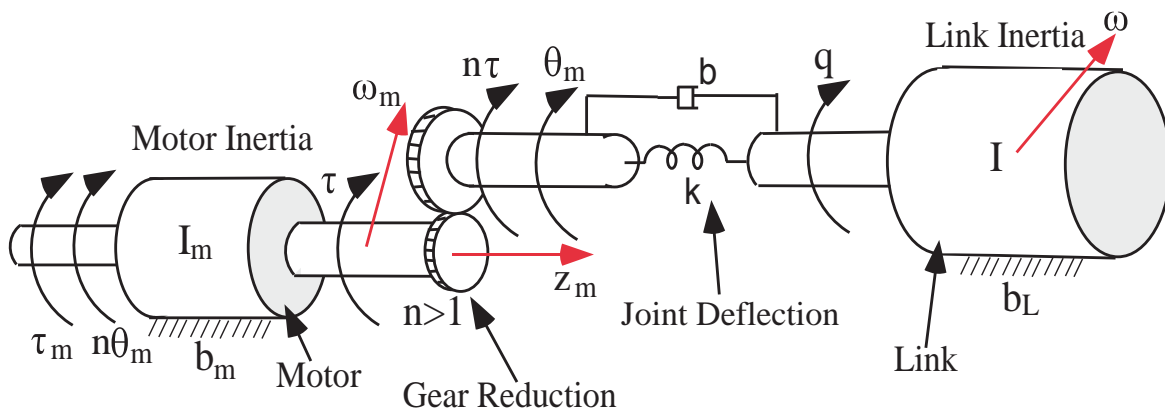
Το δυναμικό μοντέλο των εύκαμπτων βραχιόνων απαιτεί μεγαλύτερο αριθμό γενικευμένων μεταβλητών όταν εφαρμόζεται η μέθοδος Lagrange, αφού τότε χρησιμοποιούνται και η γωνιακή μετατόπιση \mathbf{q} του συνδέσμου και η γωνιακή μετατόπιση θ_m στην έξοδο του μειωτήρα, όπως ορίζονται στο Σχήμα 5.2. Η εξαγωγή του μοντέλου πραγματοποιείται χρησιμοποιώντας τις παρακάτω παραδοχές:

Παραδοχή 1: Οι παραμορφώσεις στις αρθρώσεις είναι μικρές.

Η παραπάνω παραδοχή επιτρέπει την μοντελοποίηση των ευκαμψιών και των τριβών στην άρθρωση του βραχίονα με ένα γραμμικό στροφικό ελατήριο ελαστικότητας k και ένα γραμμικό στοιχείο απόσβεσης b που συνδέουν την έξοδο του μειωτήρα και τον σύνδεσμο, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 5.2.

Παραδοχή 2: Οι δρομείς (rotors) των κινητήρων θεωρούνται επιπρόσθετα ομοιόμορφα σώματα με το κέντρο μάζας τους στον άξονα περιστροφής τους. Οι στάτες (stators) των κινητήρων θεωρούνται ως ένα σώμα με τους συνδέσμους. Με την παραδοχή αυτή εξασφαλίζεται η ανεξαρτησία του πίνακα αδράνειας του συστήματος από τη γωνιακή θέση θ_m στην έξοδο του μειωτήρα.

Παραδοχή 3: Η τοποθέτηση των κινητήρων στη δομή του βραχίονα έχει μεγάλη επίδραση στη μορφή των εξισώσεων κίνησης. Θεωρούμε, για λόγους απλότητας, ότι ο κινητήρας i κινεί το σύνδεσμο i και είναι τοποθετημένος στο σύνδεσμο $i-1$ με τον άξονα περιστροφής του να ταυτίζεται με τον άξονα της άρθρωσης $i-1$.



Σχήμα 5.2. Μοντέλο Εύκαμπτης Άρθρωσης.

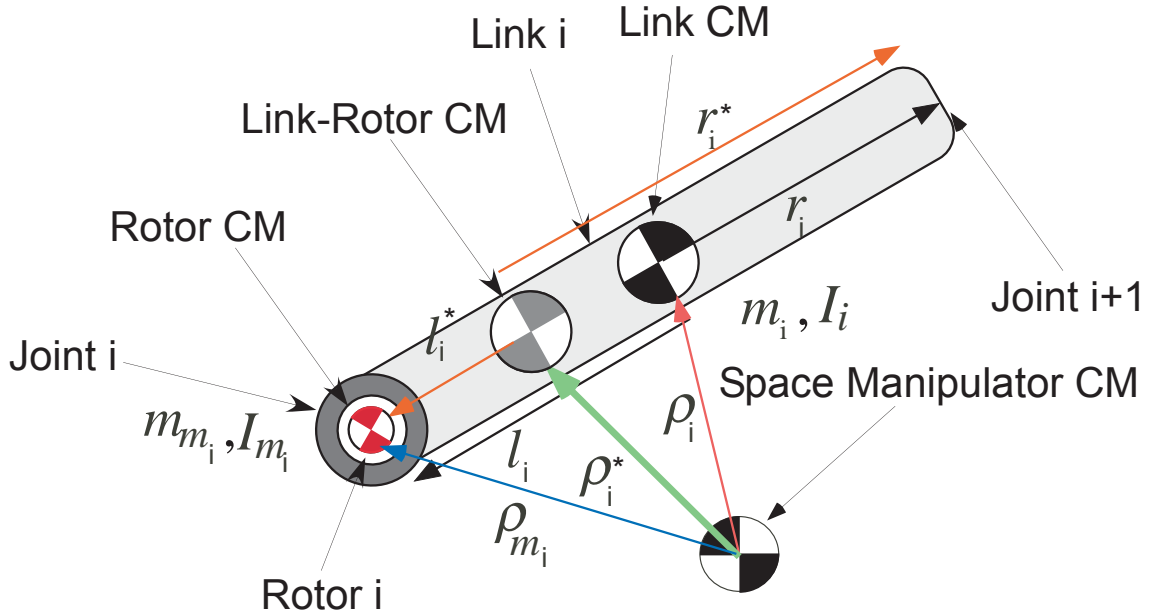
Στη συνέχεια εξετάζεται η επίδραση της μάζας και της ροπής αδράνειας του δρομέα του κινητήρα στη στροφορμή και στην κινητική ενέργεια του συστήματος. Ακολουθεί η εξαγωγή των εξισώσεων κίνησης.

5.2.1 Επίδραση των Κινητήρων στη Στροφορμή του Συστήματος

Σκοπός της παραγράφου αυτής είναι η μελέτη της επίδρασης των αδρανειακών χαρακτηριστικών του κινητήρων των αρθρώσεων στην δομή της εξίσωσης της στροφορμής του ΔΡΣ, όπως αυτή δίνεται από την Εξ. (2-33). Στη συνέχεια του κειμένου, το μέγεθος (\cdot) θα συμβολίζεται με $(\cdot)^*$ όταν λαμβάνονται υπόψη και τα αδρανειακά χαρακτηριστικά των κινητήρων.

Έστω ο σύνδεσμος i που έχει μάζα m_i , ροπή αδράνειας I_i ως προς ΚΜ του και ο οποίος περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω_i . Το ΚΜ του συνδέσμου i βρίσκεται σε απόσταση ρ_i από το ΚΜ του συστήματος, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 5.3. Ο δρομέας του κινητήρα έχει μάζα m_{m_i} , ροπή αδράνειας I_{m_i} και το ΚΜ του βρίσκεται σε απόσταση ρ_{m_i} από το ΚΜ του συστήματος. Αν η γωνιακή ταχύτητα του δρομέα είναι ω_{m_i} τότε η στροφορμή του συστήματος ως προς το ΚΜ του, \mathbf{h}_{CM} , δίνεται από:

$$\mathbf{h}_{CM} = \sum_{k=0}^N (\mathbf{I}_k \cdot \boldsymbol{\omega}_k + m_k \boldsymbol{\rho}_k \times \dot{\boldsymbol{\rho}}_k) + \sum_{k=1}^N (\mathbf{I}_{m_k} \cdot \boldsymbol{\omega}_{m_k} + m_{m_k} \boldsymbol{\rho}_{m_k} \times \dot{\boldsymbol{\rho}}_{m_k}) \quad (5-1\alpha)$$



Σχήμα 5.3. Θέση ΚΜ Συνδέσμου και Συστήματος Σύνδεσμος-Κινητήρας ως προς το ΚΜ του Διαστημικού Ρομποτικού Βραχίονα.

Η Εξ. (5.1α) γράφεται:

$$\mathbf{h}_{\text{CM}} = \mathbf{I}_0 \boldsymbol{\omega}_0 + m_0 \boldsymbol{\rho}_0 \times \dot{\boldsymbol{\rho}}_0 + \sum_{k=1}^N \left(\mathbf{I}_k \boldsymbol{\omega}_k + m_k \boldsymbol{\rho}_k \times \dot{\boldsymbol{\rho}}_k + \mathbf{I}_{m_k} \boldsymbol{\omega}_{m_k} + m_{m_k} \boldsymbol{\rho}_{m_k} \times \dot{\boldsymbol{\rho}}_{m_k} \right) \quad (5-1\beta)$$

όπου η γωνιακή του ταχύτητα $\boldsymbol{\omega}_{m_k}$ του δρομέα δίνεται από:

$$\boldsymbol{\omega}_{m_k} = \boldsymbol{\omega}_{k-1} + n_k \dot{\theta}_{m_k} \mathbf{z}_{m_k} \quad (5-2\alpha)$$

όπου n_k είναι ο λόγος μείωσης του μειωτήρα, θ_{m_k} είναι η γωνιακή μετατόπιση στην έξοδο του μειωτήρα και $\boldsymbol{\omega}_{k-1}$ η γωνιακή ταχύτητα του συνδέσμου $i-1$. Το διάνυσμα \mathbf{z}_{m_k} είναι το μοναδιαίο διάνυσμα κατά τον άξονα του δρομέα του κινητήρα εκφρασμένο στο αδρανειακό ΣΣ και δίνεται από:

$$\mathbf{z}_{m_k} = \mathbf{R}_0 {}^0\mathbf{R}_k \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5-2\beta)$$

όπου \mathbf{R}_0 είναι ο πίνακας περιστροφής του ΣΣ $\{0\}$ του δορυφόρου του ΔΡΣ ως προς το αδρανειακό ΣΣ, και ${}^0\mathbf{R}_k$ είναι ο πίνακας περιστροφής του ΣΣ $\{k\}$ ως προς το ΣΣ $\{0\}$ του δορυφόρου του ΔΡΣ.

Η προσθήκη του κινητήρα μετατοπίζει το ΚΜ του συστήματος σύνδεσμος – κινητήρας σε μια θέση που δίνεται από το διάνυσμα $\boldsymbol{\rho}_i^*$ όπως φαίνεται και στο Σχήμα 5.3. Επίσης θεωρείται ότι η προσθήκη αυτή δεν επηρεάζει τη θέση του ΚΜ του ΔΡΣ, αφού αυτή εξαρτάται κυρίως από την πολύ μεγάλη μάζα του δορυφόρου του ΔΡΣ. Η Εξ. (5-1β)

απλοποιείται αν τα μεγέθη ρ_i και ρ_{m_i} εκφραστούν ως προς την απόσταση ρ_i^* . Έστω ότι τα διανύσματα \mathbf{l}_i , \mathbf{r}_i που δίνουν τις αποστάσεις του ΚΜ του συνδέσμου i από τις αρθρώσεις i και $i+1$ αντίστοιχα. Τα διανύσματα \mathbf{l}_i^* , \mathbf{r}_i^* δίνουν τις αποστάσεις του ΚΜ συστήματος δρομέας - σύνδεσμος από τις αρθρώσεις i και $i+1$ αντίστοιχα. Η θέση του ΚΜ του συστήματος δρομέας - σύνδεσμος ορίζεται από τη σχέση:

$$\rho_i^* = \frac{m_i \rho_i + m_{m_i} \rho_{m_i}}{m_i + m_{m_i}} \quad (5-3)$$

Από το Σχήμα 5.3 προκύπτουν οι σχέσεις:

$$\rho_i^* = \rho_{m_i} - \mathbf{l}_i^* \quad (5-4\alpha)$$

$$\rho_i = \rho_{m_i} - \mathbf{l}_i \quad (5-4\beta)$$

και

$$-\mathbf{l}_i^* + \mathbf{r}_i^* = -\mathbf{l}_i + \mathbf{r}_i \quad (5-4\gamma)$$

Από τις Εξ. (5-3) και (5-4α) – (5-4β) προκύπτει:

$$\mathbf{l}_i^* = \frac{m_i}{m_i + m_{m_i}} \mathbf{l}_i \quad (5-5\alpha)$$

Από τις Εξ. (5-4γ) και (5-5α) προκύπτει:

$$\mathbf{r}_i^* = \mathbf{r}_i - \frac{m_{m_i}}{m_i + m_{m_i}} \mathbf{l}_i \quad (5-5\beta)$$

Από το Σχήμα 5.3 προκύπτει ότι:

$$\rho_i = \rho_i^* + (\mathbf{r}_i^* - \mathbf{r}_i) \quad (5-6\alpha)$$

Με αντικατάσταση της μεταβλητής \mathbf{r}_i^* από την Εξ. (5.5β) έχουμε:

$$\rho_i = \rho_i^* - \frac{m_{m_i}}{m_i + m_{m_i}} \mathbf{l}_i \quad (5-6\beta)$$

Επίσης από το Σχήμα 5.3 έχουμε ότι:

$$\rho_{m_i} = \rho_i^* + \mathbf{l}_i^* \quad (5-7\alpha)$$

Με αντικατάσταση της μεταβλητής \mathbf{l}_i^* από την Εξ. (5.5α) προκύπτει:

$$\rho_{m_i} = \rho_i^* + \frac{m_i}{m_i + m_{m_i}} \mathbf{l}_i \quad (5-7\beta)$$

Το μέγεθος $\dot{\rho}_i$ στην Εξ. (5-1β) προκύπτει από τη χρονική παράγωγο της Εξ. (5-6β):

$$\dot{\rho}_i = \dot{\rho}_i^* - \frac{m_{m_i}}{m_i + m_{m_i}} \omega_i \times \mathbf{l}_i \quad (5-8\alpha)$$

Ενώ το μέγεθος $\dot{\rho}_{m_i}$ στην Εξ. (5-1β) προκύπτει από τη χρονική παράγωγο της Εξ. (5-7β) είναι:

$$\dot{\rho}_{m_i} = \dot{\rho}_i^* + \frac{m_i}{m_i + m_{m_i}} \omega_i \times \mathbf{l}_i \quad (5-8\beta)$$

Άρα το εξωτερικό γινόμενο $\rho_i \times \dot{\rho}_i$ δίνεται από:

$$\begin{aligned} \rho_i \times \dot{\rho}_i &= \left(\rho_i^* - \frac{m_{m_i}}{m_i + m_{m_i}} \mathbf{l}_i \right) \times \left(\dot{\rho}_i^* - \frac{m_{m_i}}{m_i + m_{m_i}} \omega_i \times \mathbf{l}_i \right) = \\ &= \rho_i^* \times \dot{\rho}_i^* - \frac{m_{m_i}}{m_i + m_{m_i}} \rho_i^* \times (\omega_i \times \mathbf{l}_i) - \frac{m_{m_i}}{m_i + m_{m_i}} \mathbf{l}_i \times \dot{\rho}_i^* + \frac{m_{m_i}^2}{(m_i + m_{m_i})^2} \mathbf{l}_i \times (\omega_i \times \mathbf{l}_i) \end{aligned} \quad (5-9\alpha)$$

Αντίστοιχα, το εξωτερικό γινόμενο $\rho_{m_i} \times \dot{\rho}_{m_i}$ είναι:

$$\begin{aligned} \rho_{m_i} \times \dot{\rho}_{m_i} &= \left(\rho_i^* + \frac{m_i}{m_i + m_{m_i}} \mathbf{l}_i \right) \times \left(\dot{\rho}_i^* + \frac{m_i}{m_i + m_{m_i}} \omega_i \times \mathbf{l}_i \right) = \\ &= \rho_i^* \times \dot{\rho}_i^* + \frac{m_i}{m_i + m_{m_i}} \rho_i^* \times (\omega_i \times \mathbf{l}_i) + \frac{m_i}{m_i + m_{m_i}} \mathbf{l}_i \times \dot{\rho}_i^* + \frac{m_i^2}{(m_i + m_{m_i})^2} \mathbf{l}_i \times (\omega_i \times \mathbf{l}_i) \end{aligned} \quad (5-9\beta)$$

Από τις Εξ. (5-9) προκύπτει:

$$m_i \rho_i \times \dot{\rho}_i + m_{m_i} \rho_{m_i} \times \dot{\rho}_{m_i} = (m_i + m_{m_i}) \rho_i^* \times \dot{\rho}_i^* + \frac{m_i m_{m_i}}{m_i + m_{m_i}} \mathbf{l}_i \times (\omega_i \times \mathbf{l}_i) \quad (5-10)$$

Όμως, ισχύει ότι:

$$\mathbf{l}_i \times (\omega_i \times \mathbf{l}_i) = \mathbf{l}_i^\times (-\mathbf{l}_i \times \omega_i) = (-\mathbf{l}_i^\times) (\mathbf{l}_i^\times \omega_i) = (\mathbf{l}_i^\times)^\top \mathbf{l}_i^\times \omega_i \quad (5-11)$$

Με αντικατάσταση της Εξ. (5-11) στην Εξ. (5-10) προκύπτει τελικά:

$$m_i \rho_i \times \dot{\rho}_i + m_{m_i} \rho_{m_i} \times \dot{\rho}_{m_i} = (m_i + m_{m_i}) \rho_i^* \times \dot{\rho}_i^* + \frac{m_i m_{m_i}}{m_i + m_{m_i}} ((\mathbf{l}_i^\times)^\top \mathbf{l}_i^\times) \omega_i \quad (5-12)$$

Με αντικατάσταση της Εξ. (5-12) στην Εξ. (5-1β) έχουμε για τη στροφορμή του συστήματος ως προς το ΚΜ του,

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_{\text{CM}} &= \mathbf{I}_0 \omega_0 + m_0 \rho_0 \times \dot{\rho}_0 \\ &+ \sum_{k=1}^N (\mathbf{I}_k \omega_k + \mathbf{I}_{m_k} \omega_{m_k} + (m_k + m_{m_k}) \rho_k^* \times \dot{\rho}_k^* + \frac{m_k m_{m_k}}{m_k + m_{m_k}} ((\mathbf{l}_k^\times)^\top \mathbf{l}_k^\times) \omega_k) \end{aligned} \quad (5-13\alpha)$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι $m_{m_0}=0$ (αφού ο δρομέας του κινητήρα της πρώτης άρθρωσης ανήκει στον πρώτο σύνδεσμο (σώμα 1) και όχι στο δορυφόρο (σώμα 0)) και $\dot{\rho}_0^* = \dot{\rho}_0$, (βλ. Εξ. 5.8α), η Εξ. (5-13α) γράφεται:

$$\mathbf{h}_{\text{CM}} = \sum_{k=0}^N \left((\mathbf{I}_k + \frac{m_k m_{m_k}}{m_k + m_{m_k}} (\mathbf{I}_k^\times)^T \mathbf{I}_k^\times) \boldsymbol{\omega}_k + (m_k + m_{m_k}) \boldsymbol{\rho}_k^* \times \dot{\boldsymbol{\rho}}_k^* \right) + \sum_{k=1}^N (\mathbf{I}_{m_k} \boldsymbol{\omega}_{m_k}) \quad (5-13\beta)$$

Με αντικατάσταση της Εξ. (5-2α) στην Εξ. (5-13β) προκύπτει:

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_{\text{CM}} = & \sum_{k=0}^N \left[(\mathbf{I}_k + \frac{m_k m_{m_k}}{m_k + m_{m_k}} (\mathbf{I}_k^\times)^T \mathbf{I}_k^\times) \boldsymbol{\omega}_k + (m_k + m_{m_k}) \boldsymbol{\rho}_k^* \times \dot{\boldsymbol{\rho}}_k^* \right] \\ & + \sum_{k=1}^N (\mathbf{I}_{m_k} (\boldsymbol{\omega}_{k-1} + n_k \dot{\theta}_{m_k} \mathbf{z}_{m_k})) \end{aligned} \quad (5-13\gamma)$$

Με τροποποίηση των ορίων του δεύτερου αθροίσματος της Εξ. (5-13γ) έχουμε:

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_{\text{CM}} = & \sum_{k=0}^N \left((\mathbf{I}_k + \frac{m_k m_{m_k}}{m_k + m_{m_k}} (\mathbf{I}_k^\times)^T \mathbf{I}_k^\times) \cdot \boldsymbol{\omega}_k + (m_k + m_{m_k}) \boldsymbol{\rho}_k^* \times \dot{\boldsymbol{\rho}}_k^* \right) \\ & + \sum_{k=0}^{N-1} (\mathbf{I}_{m_{k+1}} \boldsymbol{\omega}_k + n_{k+1} \dot{\theta}_{m_{k+1}} \mathbf{I}_{m_{k+1}} \mathbf{z}_{m_{k+1}}) \end{aligned} \quad (5-13\delta)$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι $\mathbf{I}_{m_{N+1}} = \mathbf{0}$ (αφού δεν υπάρχει άρθρωση $N+1$), η Εξ. (5-13δ) γράφεται:

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_{\text{CM}} = & \sum_{k=0}^N \left[(\mathbf{I}_k + \mathbf{I}_{m_{k+1}} + \frac{m_k m_{m_k}}{m_k + m_{m_k}} (\mathbf{I}_k^\times)^T \mathbf{I}_k^\times) \cdot \boldsymbol{\omega}_k + (m_k + m_{m_k}) \boldsymbol{\rho}_k^* \times \dot{\boldsymbol{\rho}}_k^* \right] \\ & + \sum_{k=0}^{N-1} (n_{k+1} \dot{\theta}_{m_{k+1}} \mathbf{I}_{m_{k+1}} \mathbf{z}_{m_{k+1}}) \end{aligned} \quad (5-13\epsilon)$$

Τελικά προκύπτει ότι η στροφορμή του συστήματος ως προς το ΚΜ του είναι:

$$\mathbf{h}_{\text{CM}} = \sum_{k=0}^N (\mathbf{I}_k^* \boldsymbol{\omega}_k + m_k^* \boldsymbol{\rho}_k^* \times \dot{\boldsymbol{\rho}}_k^*) + \sum_{k=0}^{N-1} (n_{k+1} \dot{\theta}_{m_{k+1}} \mathbf{I}_{m_{k+1}} \mathbf{z}_{m_{k+1}}) \quad (5-13\sigma\tau)$$

όπου:

$$\mathbf{I}_k^* = \mathbf{I}_k + \mathbf{I}_{m_{k+1}} + \frac{m_k m_{m_k}}{m_k + m_{m_k}} (\mathbf{I}_k^\times)^T \mathbf{I}_k^\times \quad (5-14\alpha)$$

είναι η ροπή αδράνειας του συστήματος σώμα – κινητήρας γύρω από το νέο ΚΜ του συστήματος, βλ. Παράρτημα Ε.1, και

$$m_k^* = m_k + m_{m_k} \quad (5-14\beta)$$

είναι η συνολική μάζα του συστήματος σώμα – κινητήρας.

Για το πρώτο άθροισμα της Εξ. (5-13σ\tau) ισχύει:

$$\sum_{k=0}^N (\mathbf{I}_k^* \boldsymbol{\omega}_k + m_k^* \boldsymbol{\rho}_k^* \times \dot{\boldsymbol{\rho}}_k^*) = \mathbf{R}_0(\boldsymbol{\varepsilon}, n) ({}^0\mathbf{D}^* {}^0\boldsymbol{\omega}_0 + {}^0\mathbf{D}_q^* \dot{\mathbf{q}}) \quad (5-15\alpha)$$

όπου:

$${}^0\mathbf{D}_j^* \equiv \sum_{i=0}^N {}^0\mathbf{D}_{ij}^* \quad (5-16\alpha)$$

$${}^0\mathbf{D}^* \equiv \sum_{j=0}^N {}^0\mathbf{D}_j^* \quad (5-16\beta)$$

$${}^0\mathbf{D}_q^* \equiv \sum_{j=1}^N {}^0\mathbf{D}_j^* {}^0\mathbf{F}_j \quad (5-16\gamma)$$

όπου οι πίνακες ${}^0\mathbf{D}_{ij}^*$ υπολογίζονται από τις σχέσεις που ισχύουν για τον υπολογισμό των πινάκων ${}^0\mathbf{D}_{ij}$ με τη αντικατάσταση των παραμέτρων m_k , \mathbf{I}_k , \mathbf{I}_k και \mathbf{r}_k από τις αντίστοιχες παραμέτρους m_k^* , \mathbf{I}_k^* , \mathbf{I}_k^* και \mathbf{r}_k^* .

Για το δεύτερο άθροισμα της Εξ. (5-13στ) ισχύει:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N-1} (n_{k+1} \dot{\theta}_{m_{k+1}} \mathbf{I}_{m_{k+1}} \mathbf{z}_{k+1}) &= \sum_{k=0}^{N-1} (n_{k+1} \dot{\theta}_{m_{k+1}} \mathbf{R}_0 {}^0\mathbf{I}_{m_{k+1}} \mathbf{R}_0^T \mathbf{R}_0 {}^0\mathbf{z}_{m_{k+1}}) \\ &= \mathbf{R}_0 \sum_{k=0}^{N-1} (n_{k+1} \dot{\theta}_{m_{k+1}} {}^0\mathbf{I}_{m_{k+1}} {}^0\mathbf{z}_{m_{k+1}}) \end{aligned} \quad (5-17\alpha)$$

Επίσης ισχύει:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N-1} (n_{k+1} \dot{\theta}_{m_{k+1}} {}^0\mathbf{I}_{m_{k+1}} {}^0\mathbf{z}_{k+1}) &= \sum_{k=1}^N (n_k \dot{\theta}_{m_k} {}^0\mathbf{I}_{m_k} {}^0\mathbf{z}_{m_k}) \\ &= \sum_{k=1}^N (n_k \dot{\theta}_{m_k} {}^0\mathbf{R}_{m_k} {}^{m_k}\mathbf{I}_{m_k} {}^0\mathbf{R}_{m_k}^T {}^0\mathbf{R}_{m_k} {}^{m_k}\mathbf{z}_{m_k}) \quad (5-17\beta) \\ &= \sum_{k=1}^N (n_k \dot{\theta}_{m_k} {}^0\mathbf{R}_{m_k} {}^{m_k}\mathbf{I}_{m_k} {}^{m_k}\mathbf{z}_{m_k}) = {}^0\mathbf{D}_{\theta_m} \dot{\boldsymbol{\theta}}_m \end{aligned}$$

όπου:

$${}^0\mathbf{D}_{\theta_m} = \begin{bmatrix} n_1 {}^0\mathbf{R}_{m_1} {}^{m_1}\mathbf{I}_{m_1} {}^{m_1}\mathbf{z}_{m_1} & \cdots & n_N {}^0\mathbf{R}_{m_N} {}^{m_N}\mathbf{I}_{m_N} {}^{m_N}\mathbf{z}_{m_N} \end{bmatrix} \quad (5-18\alpha)$$

$$\boldsymbol{\theta}_m = \begin{bmatrix} \theta_{m_1} & \theta_{m_2} & \cdots & \theta_{m_N} \end{bmatrix}^T \quad (5-18\beta)$$

Τελικά, η Εξ. (5-13στ) γράφεται:

$$\mathbf{h}_{CM} = \mathbf{R}_0(\boldsymbol{\varepsilon}, n) ({}^0\mathbf{D}^* {}^0\boldsymbol{\omega}_0 + {}^0\mathbf{D}_q^* \dot{\mathbf{q}} + {}^0\mathbf{D}_{\theta_m} \dot{\boldsymbol{\theta}}_m) \quad (5-19\alpha)$$

Δηλαδή για έναν βραχίονα με εύκαμπτες αρθρώσεις, η στροφορμή του ως προς το ΚΜ του, διαφέρει ως προς την αντίστοιχη για έναν βραχίονα με άκαμπτες αρθρώσεις, βλ. Εξ. (2-33), στα εξής σημεία:

α) Οι αδρανειακοί πίνακες ${}^0\mathbf{D}^*$, ${}^0\mathbf{D}_q^*$, αν και δίνονται από τις ίδιες γενικές σχέσεις με τους αντίστοιχους πίνακες ${}^0\mathbf{D}$, ${}^0\mathbf{D}_q$ για συστήματα με άκαμπτες αρθρώσεις, διαφέρουν από αυτούς στο ότι αντί για τα μεγέθη m , \mathbf{I} , \mathbf{I} και \mathbf{r} χρησιμοποιούνται τα αντίστοιχα m^* , \mathbf{I}^* , \mathbf{I}^* και \mathbf{r}^* , που δίνονται από τις Εξ. (5-5) και (5-14), έτσι ώστε να συμπεριληφθεί και η επίδραση των αδρανειακών χαρακτηριστικών των κινητήρων.

β) Στην εξίσωση στροφορμής υπάρχει ο επιπλέον όρος ${}^0\mathbf{D}_{\theta_m} \dot{\theta}_m$ ο οποίος οφείλεται αποκλειστικά στην κίνηση των κινητήρων.

Η Εξ. (5-19α) γράφεται και ως:

$$\mathbf{h}_{CM} = \mathbf{R}_0(\varepsilon, n) ({}^0\mathbf{D}^* {}^0\boldsymbol{\omega}_0 + {}^0\mathbf{D}_{\Theta} \dot{\Theta}) \quad (5-19\beta)$$

όπου

$$\Theta = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \theta_m \end{bmatrix} \quad (5-20\alpha)$$

$${}^0\mathbf{D}_{\Theta} = \begin{bmatrix} {}^0\mathbf{D}_q^* & {}^0\mathbf{D}_{\theta_m} \end{bmatrix} \quad (5-20\beta)$$

5.2.2 Επίδραση των Κινητήρων στην Κινητική Ενέργεια του Συστήματος

Σκοπός της παρούσας παραγράφου είναι η μελέτη της επίδρασης των αδρανειακών χαρακτηριστικών του κινητήρων των αρθρώσεων στην δομή της εξίσωσης της κινητικής ενέργειας του ΔΡΣ, όπως αυτή δίνεται από την Εξ. (2-45α). Η κινητική ενέργεια του συστήματος, λαμβάνοντας υπόψη και τα αδρανειακά χαρακτηριστικά του δρομέα του κινητήρα της κάθε άρθρωσης, δίνεται από:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N m_k \dot{\mathbf{r}}_k \dot{\mathbf{r}}_k + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N \boldsymbol{\omega}_k \mathbf{I}_k \boldsymbol{\omega}_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_{m_k} \dot{\mathbf{r}}_{m_k} \dot{\mathbf{r}}_{m_k} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \boldsymbol{\omega}_{m_k} \mathbf{I}_{m_k} \boldsymbol{\omega}_{m_k} \quad (5-21\alpha)$$

ή

$$T = \frac{1}{2} m_0 \dot{\mathbf{r}}_0 \dot{\mathbf{r}}_0 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_0 \mathbf{I}_0 \boldsymbol{\omega}_0 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \boldsymbol{\omega}_k \mathbf{I}_k \boldsymbol{\omega}_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (m_k \dot{\mathbf{r}}_k \dot{\mathbf{r}}_k + m_{m_k} \dot{\mathbf{r}}_{m_k} \dot{\mathbf{r}}_{m_k}) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \boldsymbol{\omega}_{m_k} \mathbf{I}_{m_k} \boldsymbol{\omega}_{m_k} \quad (5-21\beta)$$

Λαμβάνοντας υπόψη την Εξ. (5-6β), έχουμε:

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{\rho}}_i^T \dot{\boldsymbol{\rho}}_i &= \left(\dot{\boldsymbol{\rho}}_i^* - \frac{m_{m_i}}{m_i + m_{m_i}} \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{l}_i \right)^T \left(\dot{\boldsymbol{\rho}}_i^* - \frac{m_{m_i}}{m_i + m_{m_i}} \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{l}_i \right) \\
&= \left(\dot{\boldsymbol{\rho}}_i^{*T} - \frac{m_{m_i}}{m_i + m_{m_i}} (\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{l}_i)^T \right) \left(\dot{\boldsymbol{\rho}}_i^* - \frac{m_{m_i}}{m_i + m_{m_i}} \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{l}_i \right) \\
&= \dot{\boldsymbol{\rho}}_i^{*T} \dot{\boldsymbol{\rho}}_i^* - \frac{m_{m_i}}{m_i + m_{m_i}} \dot{\boldsymbol{\rho}}_i^{*T} (\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{l}_i) - \frac{m_{m_i}}{m_i + m_{m_i}} (\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{l}_i)^T \dot{\boldsymbol{\rho}}_i^* \\
&\quad + \frac{m_{m_i}^2}{(m_i + m_{m_i})^2} (\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{l}_i)^T (\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{l}_i)
\end{aligned} \tag{5-22α}$$

Επίσης, από την Εξ. (5-7β) προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{\rho}}_{m_i}^T \dot{\boldsymbol{\rho}}_{m_i} &= \left(\dot{\boldsymbol{\rho}}_i^* + \frac{m_i}{m_i + m_{m_i}} \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{l}_i \right)^T \left(\dot{\boldsymbol{\rho}}_i^* + \frac{m_i}{m_i + m_{m_i}} \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{l}_i \right) \\
&= \left(\dot{\boldsymbol{\rho}}_i^{*T} + \frac{m_i}{m_i + m_{m_i}} (\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{l}_i)^T \right) \left(\dot{\boldsymbol{\rho}}_i^* + \frac{m_i}{m_i + m_{m_i}} \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{l}_i \right) \\
&= \dot{\boldsymbol{\rho}}_i^{*T} \dot{\boldsymbol{\rho}}_i^* + \frac{m_i}{m_i + m_{m_i}} \dot{\boldsymbol{\rho}}_i^{*T} (\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{l}_i) + \frac{m_i}{m_i + m_{m_i}} (\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{l}_i)^T \dot{\boldsymbol{\rho}}_i^* \\
&\quad + \frac{m_i^2}{(m_i + m_{m_i})^2} (\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{l}_i)^T (\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{l}_i)
\end{aligned} \tag{5-22β}$$

Από τις Εξ. (5-22) έχουμε ότι:

$$m_i \dot{\boldsymbol{\rho}}_i^T \dot{\boldsymbol{\rho}}_i + m_{m_i} \dot{\boldsymbol{\rho}}_{m_i}^T \dot{\boldsymbol{\rho}}_{m_i} = (m_i + m_{m_i}) \dot{\boldsymbol{\rho}}_i^{*T} \dot{\boldsymbol{\rho}}_i^* + \frac{m_i m_{m_i}}{m_i + m_{m_i}} (\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{l}_i)^T (\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{l}_i) \tag{5-23}$$

Όμως ισχύει ότι:

$$(\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{l}_i)^T (\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{l}_i) = (\mathbf{l}_i \times \boldsymbol{\omega}_i)^T (\mathbf{l}_i \times \boldsymbol{\omega}_i) = (\mathbf{l}_i^\times \boldsymbol{\omega}_i)^T (\mathbf{l}_i^\times \boldsymbol{\omega}_i) = \boldsymbol{\omega}_i^T (\mathbf{l}_i^\times)^T (\mathbf{l}_i^\times) \boldsymbol{\omega}_i \tag{5-24}$$

Με αντικατάσταση της Εξ. (5-24) στην Εξ. (5-23) προκύπτει:

$$m_i \dot{\boldsymbol{\rho}}_i^T \dot{\boldsymbol{\rho}}_i + m_{m_i} \dot{\boldsymbol{\rho}}_{m_i}^T \dot{\boldsymbol{\rho}}_{m_i} = (m_i + m_{m_i}) \dot{\boldsymbol{\rho}}_i^{*T} \dot{\boldsymbol{\rho}}_i^* + \frac{m_i m_{m_i}}{m_i + m_{m_i}} \boldsymbol{\omega}_i^T (\mathbf{l}_i^\times)^T (\mathbf{l}_i^\times) \boldsymbol{\omega}_i \tag{5-25}$$

Από τις Εξ. (5-21β) και (5-25) έχουμε:

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} m_0 \dot{\boldsymbol{\rho}}_0 \dot{\boldsymbol{\rho}}_0 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_0 \mathbf{I}_0 \boldsymbol{\omega}_0 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \boldsymbol{\omega}_k \mathbf{I}_k \boldsymbol{\omega}_k \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N ((m_k + m_{m_k}) \dot{\boldsymbol{\rho}}_k^{*T} \dot{\boldsymbol{\rho}}_k^* + \frac{m_k m_{m_k}}{m_k + m_{m_k}} \boldsymbol{\omega}_k^T (\mathbf{l}_k^\times)^T (\mathbf{l}_k^\times) \boldsymbol{\omega}_k) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \boldsymbol{\omega}_{m_k} \mathbf{I}_{m_k} \boldsymbol{\omega}_{m_k}
\end{aligned} \tag{5-26α}$$

όπου ύστερα από κάποιες πράξεις προκύπτει:

$$\begin{aligned}
T = & \frac{1}{2} m_0 \dot{\boldsymbol{\rho}}_0 \dot{\boldsymbol{\rho}}_0 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_0 \mathbf{I}_0 \boldsymbol{\omega}_0 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \boldsymbol{\omega}_k^T \left(\mathbf{I}_k + \frac{m_k m_{m_k}}{m_k + m_{m_k}} (\mathbf{I}_k^\times)^T (\mathbf{I}_k^\times) \right) \boldsymbol{\omega}_k \\
& + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N ((m_k + m_{m_k}) \dot{\boldsymbol{\rho}}_k^{*T} \dot{\boldsymbol{\rho}}_k^*) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \boldsymbol{\omega}_{m_k} \mathbf{I}_{m_k} \boldsymbol{\omega}_{m_k}
\end{aligned} \tag{5-26β}$$

Αντικαθιστώντας τη γωνιακή ταχύτητα του δρομέα του κινητήρα από την Εξ. (5-2α) και λαμβάνοντας υπόψη ότι $m_{m_0} = 0$ και $\dot{\boldsymbol{\rho}}_0^* = \dot{\boldsymbol{\rho}}_0$, προκύπτει:

$$\begin{aligned}
T = & \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N \boldsymbol{\omega}_k^T \left(\mathbf{I}_k + \frac{m_k m_{m_k}}{m_k + m_{m_k}} (\mathbf{I}_k^\times)^T (\mathbf{I}_k^\times) \right) \boldsymbol{\omega}_k \\
& + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N ((m_k + m_{m_k}) \dot{\boldsymbol{\rho}}_k^{*T} \dot{\boldsymbol{\rho}}_k^*) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (\boldsymbol{\omega}_{k-1} + n_k \dot{\theta}_{m_k} \mathbf{z}_{m_k})^T \mathbf{I}_{m_k} (\boldsymbol{\omega}_{k-1} + n_k \dot{\theta}_{m_k} \mathbf{z}_{m_k})
\end{aligned} \tag{5-26γ}$$

Ύστερα από κάποιες πράξεις στο τρίτο άθροισμα της Εξ. (5-26γ) έχουμε:

$$\begin{aligned}
T = & \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N ((m_k + m_{m_k}) \dot{\boldsymbol{\rho}}_k^{*T} \dot{\boldsymbol{\rho}}_k^*) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N \boldsymbol{\omega}_k^T \left(\mathbf{I}_k + \frac{m_k m_{m_k}}{m_k + m_{m_k}} (\mathbf{I}_k^\times)^T (\mathbf{I}_k^\times) \right) \boldsymbol{\omega}_k \\
& + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (\boldsymbol{\omega}_{k-1}^T \mathbf{I}_{m_k} \boldsymbol{\omega}_{k-1}) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (n_k \dot{\theta}_{m_k} \mathbf{z}_{m_k}^T \mathbf{I}_{m_k} \boldsymbol{\omega}_{k-1}) \\
& + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (n_k \dot{\theta}_{m_k} \boldsymbol{\omega}_{k-1}^T \mathbf{I}_{m_k} \mathbf{z}_{m_k}) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N ((n_k \dot{\theta}_{m_k})^2 \mathbf{z}_{m_k}^T \mathbf{I}_{m_k} \mathbf{z}_{m_k})
\end{aligned} \tag{5-26δ}$$

Με τροποποίηση των ορίων στα τέσσερα τελευταία αθροίσματα της Εξ. (5-26δ):

$$\begin{aligned}
T = & \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N ((m_k + m_{m_k}) \dot{\boldsymbol{\rho}}_k^{*T} \dot{\boldsymbol{\rho}}_k^*) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N \boldsymbol{\omega}_k^T \left(\mathbf{I}_k + \frac{m_k m_{m_k}}{m_k + m_{m_k}} (\mathbf{I}_k^\times)^T (\mathbf{I}_k^\times) \right) \boldsymbol{\omega}_k \\
& + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} (\boldsymbol{\omega}_k^T \mathbf{I}_{m_{k+1}} \boldsymbol{\omega}_k) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} (n_{k+1} \dot{\theta}_{m_{k+1}} \mathbf{z}_{m_{k+1}}^T \mathbf{I}_{m_{k+1}} \boldsymbol{\omega}_k) \\
& + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} (n_{k+1} \dot{\theta}_{m_{k+1}} \boldsymbol{\omega}_k^T \mathbf{I}_{m_{k+1}} \mathbf{z}_{m_{k+1}}) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} ((n_{k+1} \dot{\theta}_{m_{k+1}})^2 \mathbf{z}_{m_{k+1}}^T \mathbf{I}_{m_{k+1}} \mathbf{z}_{m_{k+1}})
\end{aligned} \tag{5-26ε}$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι ο πίνακας $\mathbf{I}_{m_{k+1}}$ είναι συμμετρικός ($\mathbf{I}_{m_{k+1}} = \mathbf{I}_{m_{k+1}}^T$) έχουμε:

$$\begin{aligned}
T = & \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N ((m_k + m_{m_k}) \dot{\boldsymbol{\rho}}_k^{*T} \dot{\boldsymbol{\rho}}_k^*) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N \boldsymbol{\omega}_k^T \left(\mathbf{I}_k + \mathbf{I}_{m_{k+1}} + \frac{m_k m_{m_k}}{m_k + m_{m_k}} (\mathbf{I}_k^\times)^T (\mathbf{I}_k^\times) \right) \boldsymbol{\omega}_k \\
& + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} (2n_{k+1} \dot{\theta}_{m_{k+1}} \boldsymbol{\omega}_k^T \mathbf{I}_{m_{k+1}} \mathbf{z}_{m_{k+1}}) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} ((n_{k+1} \dot{\theta}_{m_{k+1}})^2 \mathbf{z}_{m_{k+1}}^T \mathbf{I}_{m_{k+1}} \mathbf{z}_{m_{k+1}})
\end{aligned} \tag{5-26στ}$$

Τελικά, λαμβάνοντας υπόψη την Εξ. (5-14), η κινητική ενέργεια δίνεται από:

$$\begin{aligned}
T = & \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N (m_k^* \dot{\boldsymbol{\rho}}_k^{*T} \dot{\boldsymbol{\rho}}_k^*) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N (\boldsymbol{\omega}_k^T \mathbf{I}_k^* \boldsymbol{\omega}_k) \\
& + \sum_{k=0}^{N-1} (n_{k+1} \dot{\theta}_{m_{k+1}} \boldsymbol{\omega}_k^T \mathbf{I}_{m_{k+1}} \mathbf{z}_{m_{k+1}}) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} ((n_{k+1} \dot{\theta}_{m_{k+1}})^2 \mathbf{z}_{m_{k+1}}^T \mathbf{I}_{m_{k+1}} \mathbf{z}_{m_{k+1}})
\end{aligned} \tag{5-26ζ}$$

Σε αντιστοιχία με τις Εξ. (2-38) και (2-45α), τα δυο πρώτα αθροίσματα της Εξ. (5-26ζ) γράφονται:

$$\frac{1}{2} \sum_{k=0}^N (m_k^* \dot{\rho}_k^{*T} \rho_k^*) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N (\omega_k^T \mathbf{I}_k^* \omega_k) = \frac{1}{2} {}^0\omega_0^T {}^0\mathbf{D}^* {}^0\omega_0 + {}^0\omega_0^T {}^0\mathbf{D}_q^* \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T {}^0\mathbf{D}_{qq}^* \dot{\mathbf{q}} \quad (5-27)$$

όπου οι αδρανειακού τύπου πίνακες ${}^0\mathbf{D}^*$ και ${}^0\mathbf{D}_q^*$ δίνονται από τις Εξ. (5-16) και:

$${}^0\mathbf{D}_{qq}^* \equiv \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N {}^0\mathbf{F}_i^T {}^0\mathbf{D}_{ij}^* {}^0\mathbf{F}_j \quad (5-28)$$

Για το τρίτο άθροισμα της Εξ. (5-26ζ) ισχύει:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N-1} (n_{k+1} \dot{\theta}_{m_{k+1}} \omega_k^T \mathbf{I}_{m_{k+1}} \mathbf{z}_{k+1}) &= \sum_{k=0}^{N-1} (n_{k+1} \dot{\theta}_{m_{k+1}} ({}^0\omega_0^T + \dot{\mathbf{q}}^T {}^0\mathbf{J}_{22,k}^T) \mathbf{R}_0^T \mathbf{R}_0 {}^0\mathbf{I}_{m_{k+1}} \mathbf{R}_0^T \mathbf{R}_0 {}^0\mathbf{z}_{m_{k+1}}) \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} (n_{k+1} \dot{\theta}_{m_{k+1}} ({}^0\omega_0^T + \dot{\mathbf{q}}^T {}^0\mathbf{J}_{22,k}^T) {}^0\mathbf{I}_{m_{k+1}} {}^0\mathbf{z}_{m_{k+1}}) \\ &= \sum_{k=1}^N (n_k \dot{\theta}_{m_k} ({}^0\omega_0^T + \dot{\mathbf{q}}^T {}^0\mathbf{J}_{22,k-1}^T) {}^0\mathbf{I}_{m_k} {}^0\mathbf{z}_{m_k}) \\ &= \sum_{k=1}^N (n_k \dot{\theta}_{m_k} {}^0\omega_0^T {}^0\mathbf{I}_{m_k} {}^0\mathbf{z}_{m_k}) + \sum_{k=1}^N (n_k \dot{\theta}_{m_k} \dot{\mathbf{q}}^T {}^0\mathbf{J}_{22,k-1}^T {}^0\mathbf{I}_{m_k} {}^0\mathbf{z}_{m_k}) \end{aligned} \quad (5-29)$$

όπου λαμβάνοντας υπόψη την Εξ. (5-17β):

$$\sum_{k=1}^N (n_k \dot{\theta}_{m_k} {}^0\omega_0^T {}^0\mathbf{I}_{m_k} {}^0\mathbf{z}_{m_k}) = {}^0\omega_0^T \sum_{k=1}^N (n_k \dot{\theta}_{m_k} {}^0\mathbf{I}_{m_k} {}^0\mathbf{z}_{m_k}) = {}^0\omega_0^T {}^0\mathbf{D}_{\theta_m} \dot{\theta}_m \quad (5-30\alpha)$$

ενώ

$$\sum_{k=1}^N (n_k \dot{\theta}_{m_k} \dot{\mathbf{q}}^T {}^0\mathbf{J}_{22,k-1}^T {}^0\mathbf{I}_{m_k} {}^0\mathbf{z}_{m_k}) = \dot{\mathbf{q}}^T \sum_{k=1}^N (n_k \dot{\theta}_{m_k} {}^0\mathbf{J}_{22,k-1}^T {}^0\mathbf{I}_{m_k} {}^0\mathbf{z}_{m_k}) = \dot{\mathbf{q}}^T {}^0\mathbf{D}_{q\theta_m} \dot{\theta}_m \quad (5-30\beta)$$

όπου:

$${}^0\mathbf{D}_{q\theta_m} = \begin{bmatrix} n_1 {}^0\mathbf{J}_{22,0}^T {}^0\mathbf{I}_{m_1} {}^0\mathbf{z}_{m_1} & n_2 {}^0\mathbf{J}_{22,1}^T {}^0\mathbf{I}_{m_2} {}^0\mathbf{z}_{m_2} & \cdots & n_N {}^0\mathbf{J}_{22,N}^T {}^0\mathbf{I}_{m_N} {}^0\mathbf{z}_{m_N} \end{bmatrix} \quad (5-30\gamma)$$

όπου:

$${}^0\mathbf{J}_{22,k} \equiv {}^0\mathbf{F}_k \quad (5-30\delta)$$

Επίσης για το τέταρτο άθροισμα της Εξ. (5-26ζ) ισχύει:

$$\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} ((n_{k+1} \dot{\theta}_{m_{k+1}})^2 \mathbf{z}_{m_{k+1}}^T \mathbf{I}_{m_{k+1}} \mathbf{z}_{m_{k+1}}) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N ((n_k \dot{\theta}_{m_k})^2 \mathbf{z}_{m_k}^T \mathbf{I}_{m_k} \mathbf{z}_{m_k}) = \frac{1}{2} \dot{\theta}_m^T \mathbf{D}_{\theta_m \theta_m} \dot{\theta}_m \quad (5-31)$$

όπου:

$$\mathbf{D}_{\theta_m \theta_m} = \begin{bmatrix} n_1^2 I_{m_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & n_2^2 I_{m_2} & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & n_N^2 I_{m_N} \end{bmatrix} \quad (5-32)$$

όπου I_{m_i} είναι η ροπή αδράνειας του κινητήρα i ως προς τον άξονα περιστροφής του.

Τελικά η κινητική ενέργεια του συστήματος είναι:

$$\begin{aligned} T = & \frac{1}{2} {}^0 \boldsymbol{\omega}_0^T {}^0 \mathbf{D}^* {}^0 \boldsymbol{\omega}_0 + {}^0 \boldsymbol{\omega}_0^T {}^0 \mathbf{D}_q^* \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T {}^0 \mathbf{D}_{qq}^* \dot{\mathbf{q}} \\ & + {}^0 \boldsymbol{\omega}_0^T {}^0 \mathbf{D}_{\theta_m} \dot{\boldsymbol{\theta}}_m + \dot{\mathbf{q}}^T {}^0 \mathbf{D}_{q\theta_m} \dot{\boldsymbol{\theta}}_m + \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\theta}}_m^T \mathbf{D}_{\theta_m \theta_m} \dot{\boldsymbol{\theta}}_m \end{aligned} \quad (5-33\alpha)$$

ή διαφορετικά:

$$T = \frac{1}{2} {}^0 \boldsymbol{\omega}_0^T {}^0 \mathbf{D}^* {}^0 \boldsymbol{\omega}_0 + {}^0 \boldsymbol{\omega}_0^T {}^0 \mathbf{D}_{\Theta} \dot{\boldsymbol{\Theta}} + \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\Theta}}^T \mathbf{D}_{\Theta\Theta} \dot{\boldsymbol{\Theta}} \quad (5-33\beta)$$

όπου ο $3 \times 2N$ πίνακας ${}^0 \mathbf{D}_{\Theta}$ δίνεται από την Εξ. (5-20β) και ο $2N \times 2N$ πίνακας $\mathbf{D}_{\Theta\Theta}$ από:

$$\mathbf{D}_{\Theta\Theta} = \begin{bmatrix} {}^0 \mathbf{D}_{qq}^* & {}^0 \mathbf{D}_{q\theta_m} \\ {}^0 \mathbf{D}_{q\theta_m}^T & \mathbf{D}_{\theta_m \theta_m} \end{bmatrix} \quad (5-34)$$

5.2.3 Εξισώσεις Κίνησης Διαστημικών Βραχιόνων με Εύκαμπτες Αρθρώσεις

Στην παράγραφο αυτή εξάγουμε τις εξισώσεις κίνησης για ελεύθερα ιπτάμενους (free-flying) και ελεύθερα αιωρούμενους (free-floating) διαστημικούς βραχίονες με εύκαμπτες αρθρώσεις. Στην παρούσα εργασία, θεωρείται ότι στους ελεύθερα ιπτάμενους βραχίονες, ο δορυφόρος του ΔΡΣ ελέγχεται μόνο από σφονδύλους αντίδρασης (reaction wheels) έτσι ώστε να επιτευχθεί εξοικονόμηση καυσίμων που καταναλώνονται λόγω της λειτουργίας των προωθητήρων (thrusters).

Για τη δημιουργία των εξισώσεων κίνησης του συστήματος, πρώτα πρέπει να εκφραστεί η κινητική και η δυναμική του ενέργεια. Η κινητική ενέργεια του συστήματος υπολογίστηκε στην προηγούμενη παράγραφο και δίνεται από την Εξ. (5-33β).

Η δυναμική ενέργεια που οφείλεται στη βαρύτητα είναι μηδέν, αλλά το σύστημα είναι εύκαμπτο. Η δυναμική ενέργεια που οφείλεται στην ευκαμψία των αρθρώσεων είναι:

$$V_{flex}(\boldsymbol{\Theta}) = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\theta}_m - \mathbf{q})^T \mathbf{K} (\boldsymbol{\theta}_m - \mathbf{q}) \quad (5-35\alpha)$$

όπου

$$\mathbf{K} = \text{diag}(k_1, k_2, \dots, k_N) \quad (5-35\beta)$$

Εξαιτίας των ιξωδών τριβών καταναλώνεται ενέργεια ίση με:

$$D_{diss}(\dot{\Theta}) = \frac{1}{2}(\dot{\Theta}_m - \dot{q})^T \mathbf{B}(\dot{\Theta}_m - \dot{q}) \quad (5-36\alpha)$$

όπου

$$\mathbf{B} = \text{diag}(b_1, b_2, \dots, b_N) \quad (5-36\beta)$$

Η συνάρτηση Lagrange L του συστήματος ορίζεται ως:

$$L({}^0\omega_0, \Theta, \dot{\Theta}) = T({}^0\omega_0, \Theta, \dot{\Theta}) - V_{flex}(\Theta) \quad (5-37)$$

Χρησιμοποιώντας το διάνυσμα $[{}^0\omega_0^T \dot{\Theta}^T]^T$ για διάνυσμα γενικευμένων ταχυτήτων (generalized speeds) και εφαρμόζοντας έναν quasi-coordinate σχηματισμό προκύπτει, [30, 40]:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T({}^0\omega_0, \Theta, \dot{\Theta})}{\partial {}^0\omega_0} \right) + {}^0\omega_0 \times \frac{\partial T({}^0\omega_0, \Theta, \dot{\Theta})}{\partial {}^0\omega_0} = \mathbf{R}_0^T \mathbf{g}_{CM} \quad (5-38\alpha)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L({}^0\omega_0, \Theta, \dot{\Theta})}{\partial \dot{\Theta}} \right) - \frac{\partial L({}^0\omega_0, \Theta, \dot{\Theta})}{\partial \Theta} + \frac{\partial D_{diss}(\dot{\Theta})}{\partial \dot{\Theta}} = \mathbf{Q} \quad (5-38\beta)$$

όπου \mathbf{g}_{CM} είναι η συνολική εξωτερική ροπή που ασκείται στο δορυφόρο του ΔΡΣ από τους σφονδύλους αντίδρασης, εκφρασμένη στο αδρανειακό ΣΣ και \mathbf{Q} είναι το διάνυσμα των γενικευμένων ροπών

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0_{N \times 1} \\ \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \end{bmatrix} \quad (5-39\alpha)$$

όπου $\boldsymbol{\tau}$ είναι το διάνυσμα των ροπών που ασκούνται στον δρομέα του κινητήρα (πριν το μειωτήρα)

$$\boldsymbol{\tau} = [\tau_1 \quad \tau_2 \quad \dots \quad \tau_N]^T \quad (5-39\beta)$$

και \mathbf{n} είναι ο διαγώνιος $N \times N$ πίνακας των λόγων μετάδοσης

$$\mathbf{n} = \text{diag}(n_1, n_2, \dots, n_N) \quad (5-39\gamma)$$

5.2.3.1 Ελεύθερα Ιπτάμενοι Διαστημικοί Βραχίονες.

Στην περίπτωση των ελεύθερα ιπτάμενων ΔΡΣ, ασκείται εξωτερική ροπή στο δορυφόρο του ΔΡΣ από τους σφονδύλους αντίδρασης, η οποία, όπως προαναφέρθηκε παραπάνω, δίνεται από το διάνυσμα \mathbf{g}_{CM} . Χρησιμοποιώντας την Εξ. (5-37), οι Εξ. (5-38) γίνονται:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T({}^0\omega_0, \Theta, \dot{\Theta})}{\partial {}^0\omega_0} \right) + {}^0\omega_0 \times \frac{\partial T({}^0\omega_0, \Theta, \dot{\Theta})}{\partial {}^0\omega_0} = \mathbf{R}_0^T \mathbf{g}_{CM} \quad (5-40\alpha)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T({}^0\boldsymbol{\omega}_0, \boldsymbol{\Theta}, \dot{\boldsymbol{\Theta}})}{\partial \dot{\boldsymbol{\Theta}}} \right) - \frac{\partial T({}^0\boldsymbol{\omega}_0, \boldsymbol{\Theta}, \dot{\boldsymbol{\Theta}})}{\partial \boldsymbol{\Theta}} + \frac{\partial V_{flex}(\boldsymbol{\Theta})}{\partial \boldsymbol{\Theta}} + \frac{\partial D_{dis}(\dot{\boldsymbol{\Theta}})}{\partial \dot{\boldsymbol{\Theta}}} = \mathbf{Q} \quad (5-40\beta)$$

Η μερική παράγωγος της κινητικής ενέργειας του ΔΡΣ ως προς τη γωνιακή ταχύτητα ${}^0\boldsymbol{\omega}_0$ του δορυφόρου είναι:

$$\frac{\partial T({}^0\boldsymbol{\omega}_0, \boldsymbol{\Theta}, \dot{\boldsymbol{\Theta}})}{\partial {}^0\boldsymbol{\omega}_0} = {}^0\mathbf{D}^* {}^0\boldsymbol{\omega}_0 + {}^0\mathbf{D}_{\boldsymbol{\Theta}} \dot{\boldsymbol{\Theta}} = \mathbf{R}_0^T \mathbf{h}_{CM} = {}^0\mathbf{h}_{CM} \quad (5-41\alpha)$$

όπου ${}^0\mathbf{h}_{CM}$ είναι η στροφορμή του συστήματος ως προς το ΚΜ του συστήματος, εκφρασμένη στο ΣΣ {0} του δορυφόρου και σε αντίθεση με την \mathbf{h}_{CM} , δεν είναι σταθερή.

Επίσης, η μερική παράγωγος της κινητικής ενέργειας του ΔΡΣ ως προς τις μεταβλητές $\dot{\boldsymbol{\Theta}}$ και $\boldsymbol{\Theta}$, είναι αντίστοιχα:

$$\frac{\partial T({}^0\boldsymbol{\omega}_0, \boldsymbol{\Theta}, \dot{\boldsymbol{\Theta}})}{\partial \dot{\boldsymbol{\Theta}}} = {}^0\mathbf{D}_{\boldsymbol{\Theta}}^T {}^0\boldsymbol{\omega}_0 + {}^0\mathbf{D}_{\boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{\Theta}} \dot{\boldsymbol{\Theta}} \quad (5-41\beta)$$

και

$$\frac{\partial T({}^0\boldsymbol{\omega}_0, \boldsymbol{\Theta}, \dot{\boldsymbol{\Theta}})}{\partial \boldsymbol{\Theta}} = \frac{1}{2} \frac{\partial ({}^0\boldsymbol{\omega}_0^T {}^0\mathbf{D}^*)}{\partial \boldsymbol{\Theta}} {}^0\boldsymbol{\omega}_0 + \left[\frac{\partial ({}^0\boldsymbol{\omega}_0^T {}^0\mathbf{D}_{\boldsymbol{\Theta}})}{\partial \boldsymbol{\Theta}} + \frac{1}{2} \frac{\partial (\dot{\boldsymbol{\Theta}}^T {}^0\mathbf{D}_{\boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{\Theta}})}{\partial \boldsymbol{\Theta}} \right] \dot{\boldsymbol{\Theta}} \quad (5-41\gamma)$$

Συνδυάζοντας τις Εξ. (5-40α) και (5-41α) προκύπτει:

$$\frac{d}{dt} ({}^0\mathbf{D}^* {}^0\boldsymbol{\omega}_0 + {}^0\mathbf{D}_{\boldsymbol{\Theta}} \dot{\boldsymbol{\Theta}}) + {}^0\boldsymbol{\omega}_0^\times ({}^0\mathbf{D}^* {}^0\boldsymbol{\omega}_0 + {}^0\mathbf{D}_{\boldsymbol{\Theta}} \dot{\boldsymbol{\Theta}}) = \mathbf{R}_0^T \mathbf{g}_{CM} \quad (5-42\alpha)$$

όπου ύστερα από πράξεις:

$${}^0\mathbf{D}^* \dot{{}^0\boldsymbol{\omega}_0} + \frac{\partial ({}^0\mathbf{D}^* {}^0\boldsymbol{\omega}_0)}{\partial \boldsymbol{\Theta}} \dot{\boldsymbol{\Theta}} + {}^0\mathbf{D}_{\boldsymbol{\Theta}} \ddot{\boldsymbol{\Theta}} + \frac{\partial ({}^0\mathbf{D}_{\boldsymbol{\Theta}} \dot{\boldsymbol{\Theta}})}{\partial \boldsymbol{\Theta}} \dot{\boldsymbol{\Theta}} + {}^0\boldsymbol{\omega}_0^\times ({}^0\mathbf{D}^* {}^0\boldsymbol{\omega}_0 + {}^0\mathbf{D}_{\boldsymbol{\Theta}} \dot{\boldsymbol{\Theta}}) = \mathbf{R}_0^T \mathbf{g}_{CM} \quad (5-42\beta)$$

Η Εξ. (5-42β) γράφεται:

$${}^0\mathbf{D}^* \dot{{}^0\boldsymbol{\omega}_0} + {}^0\mathbf{D}_{\boldsymbol{\Theta}} \ddot{\boldsymbol{\Theta}} + \mathbf{C}_1^* ({}^0\boldsymbol{\omega}_0, \boldsymbol{\Theta}, \dot{\boldsymbol{\Theta}}) = \mathbf{R}_0^T \mathbf{g}_{CM} \quad (5-43\alpha)$$

όπου:

$$\mathbf{C}_1^* = {}^0\boldsymbol{\omega}_0^\times (\mathbf{R}_0^T (\boldsymbol{\varepsilon}, n) \mathbf{h}_{CM}) + \left(\frac{\partial ({}^0\mathbf{D}^* {}^0\boldsymbol{\omega}_0)}{\partial \boldsymbol{\Theta}} + \frac{\partial ({}^0\mathbf{D}_{\boldsymbol{\Theta}} \dot{\boldsymbol{\Theta}})}{\partial \boldsymbol{\Theta}} \right) \dot{\boldsymbol{\Theta}} \quad (5-43\beta)$$

Στην Εξ. (5-40β) η ροπή που οφείλεται στην ευκαμψία των αρθρώσεων είναι:

$$\frac{\partial V_{flex}(\boldsymbol{\Theta})}{\partial \boldsymbol{\Theta}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial V_{flex}(\boldsymbol{\Theta})}{\partial \mathbf{q}} \\ \frac{\partial V_{flex}(\boldsymbol{\Theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}_m} \end{bmatrix} \quad (5-44\alpha)$$

όπου

$$\begin{aligned}\frac{\partial V_{flex}(\Theta)}{\partial \mathbf{q}} &= \frac{1}{2} \frac{\partial [(\boldsymbol{\theta}_m - \mathbf{q})^T \mathbf{K} (\boldsymbol{\theta}_m - \mathbf{q})]}{\partial \mathbf{q}} = \frac{1}{2} \frac{\partial [(\boldsymbol{\theta}_m - \mathbf{q})^T \mathbf{K} (\boldsymbol{\theta}_m - \mathbf{q})]}{\partial (\boldsymbol{\theta}_m - \mathbf{q})} \frac{\partial (\boldsymbol{\theta}_m - \mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \\ &= \frac{1}{2} 2 \mathbf{K} (\boldsymbol{\theta}_m - \mathbf{q}) (-1) = -\mathbf{K} (\boldsymbol{\theta}_m - \mathbf{q})\end{aligned}\quad (5-44\beta)$$

και

$$\begin{aligned}\frac{\partial V_{flex}(\Theta)}{\partial \boldsymbol{\theta}_m} &= \frac{1}{2} \frac{\partial [(\boldsymbol{\theta}_m - \mathbf{q})^T \mathbf{K} (\boldsymbol{\theta}_m - \mathbf{q})]}{\partial \boldsymbol{\theta}_m} = \frac{1}{2} \frac{\partial [(\boldsymbol{\theta}_m - \mathbf{q})^T \mathbf{K} (\boldsymbol{\theta}_m - \mathbf{q})]}{\partial (\boldsymbol{\theta}_m - \mathbf{q})} \frac{\partial (\boldsymbol{\theta}_m - \mathbf{q})}{\partial \boldsymbol{\theta}_m} \\ &= \frac{1}{2} 2 \mathbf{K} (\boldsymbol{\theta}_m - \mathbf{q}) 1 = \mathbf{K} (\boldsymbol{\theta}_m - \mathbf{q})\end{aligned}\quad (5-44\gamma)$$

Η Εξ. (5-44α) λόγω των Εξ. (5-44β) και (5-44γ) γίνεται:

$$\frac{\partial V_{flex}(\Theta)}{\partial \Theta} = \begin{bmatrix} -\mathbf{K} (\boldsymbol{\theta}_m - \mathbf{q}) \\ \mathbf{K} (\boldsymbol{\theta}_m - \mathbf{q}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{K} \\ \mathbf{K} \end{bmatrix} (\boldsymbol{\theta}_m - \mathbf{q}) \quad (5-44\delta)$$

Αντίστοιχα, η ροπή που προκαλείται από την ιξώδη τριβή στις αρθρώσεις είναι:

$$\frac{\partial D_{dis}(\dot{\Theta})}{\partial \dot{\Theta}} = \begin{bmatrix} -\mathbf{B} (\dot{\boldsymbol{\theta}}_m - \dot{\mathbf{q}}) \\ \mathbf{B} (\dot{\boldsymbol{\theta}}_m - \dot{\mathbf{q}}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{B} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} (\dot{\boldsymbol{\theta}}_m - \dot{\mathbf{q}}) \quad (5-45)$$

Οι Εξ. (5-40β), (5-41β), (5-41γ), (5-44δ) και (5-45) δίνουν:

$${}^0 \mathbf{D}_{\Theta\Theta} \ddot{\Theta} + {}^0 \mathbf{D}_{\Theta}^T {}^0 \dot{\omega}_0 + \mathbf{C}_2^* ({}^0 \omega_0, \Theta, \dot{\Theta}) + \begin{bmatrix} -\mathbf{K} \\ \mathbf{K} \end{bmatrix} (\boldsymbol{\theta}_m - \mathbf{q}) + \begin{bmatrix} -\mathbf{B} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} (\dot{\boldsymbol{\theta}}_m - \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{Q} \quad (5-46\alpha)$$

όπου:

$$\begin{aligned}\mathbf{C}_2^* ({}^0 \omega_0, \Theta, \dot{\Theta}) &= \left[\frac{\partial ({}^0 \mathbf{D}_{\Theta}^T {}^0 \omega_0)}{\partial \Theta} + \frac{\partial ({}^0 \mathbf{D}_{\Theta\Theta} \dot{\Theta})}{\partial \Theta} - \frac{\partial ({}^0 \omega_0^T {}^0 \mathbf{D}_{\Theta})}{\partial \Theta} - \frac{1}{2} \frac{\partial (\dot{\Theta}^T {}^0 \mathbf{D}_{\Theta\Theta})}{\partial \Theta} \right] \dot{\Theta} \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{\partial ({}^0 \omega_0^T {}^0 \mathbf{D}^*)}{\partial \Theta} {}^0 \omega_0\end{aligned}\quad (5-46\beta)$$

Οι Εξ. (5-43α) και (5-46α) γράφονται σε μητρωική μορφή:

$$\begin{bmatrix} {}^0 \mathbf{D}^* & {}^0 \mathbf{D}_{\Theta} \\ {}^0 \mathbf{D}_{\Theta}^T & {}^0 \mathbf{D}_{\Theta\Theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^0 \dot{\omega}_0 \\ \dot{\Theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1^* \\ \mathbf{C}_2^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times N} \\ -\mathbf{K} \\ \mathbf{K} \end{bmatrix} (\boldsymbol{\theta}_m - \mathbf{q}) + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times N} \\ -\mathbf{B} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} (\dot{\boldsymbol{\theta}}_m - \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_0^T \mathbf{g}_{CM} \\ \mathbf{Q} \end{bmatrix} \quad (5-47)$$

5.2.3.2 Ελεύθερα Αιωρούμενοι Διαστημικοί Βραχίονες.

Στην περίπτωση των ελεύθερα αιωρούμενων διαστημικών βραχιόνων, η συνολική εξωτερική ροπή που ενεργεί στο δορυφόρο είναι ίση με μηδέν, δηλαδή $\mathbf{g}_{CM} = \mathbf{0}$, και η στροφορμή του συστήματος \mathbf{h}_{CM} που ορίζεται από την Εξ. (5-19β) διατηρείται σταθερή.

Στην περίπτωση αυτή η Εξ. (5-43α) επιλύεται ως προς ${}^0 \dot{\omega}_0$ και το αποτέλεσμα αντικαθίσταται στην Εξ. (5-47), όπου τελικά προκύπτει:

$$\mathbf{H}^*(\Theta)\ddot{\Theta} + \mathbf{C}^*({}^0\omega_0, \Theta, \dot{\Theta}) + \begin{bmatrix} -\mathbf{K} \\ \mathbf{K} \end{bmatrix} (\theta_m - \mathbf{q}) + \begin{bmatrix} -\mathbf{B} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} (\dot{\theta}_m - \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{Q} \quad (5-48\alpha)$$

όπου

$$\mathbf{H}^*(\Theta) = {}^0\mathbf{D}_{\Theta\Theta} - {}^0\mathbf{D}_{\Theta}^T ({}^0\mathbf{D}^*)^{-1} {}^0\mathbf{D}_{\Theta} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{qq}^* & \mathbf{H}_{q\theta_m} \\ \mathbf{H}_{q\theta_m}^T & \mathbf{H}_{\theta_m\theta_m} \end{bmatrix} \quad (5-48\beta)$$

και $\mathbf{C}({}^0\omega_0, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ είναι ένα $N \times 1$ διάνυσμα που περιέχει τους μη γραμμικούς όρους των φυγοκεντρικών δυνάμεων και των δυνάμεων Coriolis:

$$\mathbf{C}({}^0\omega_0, \Theta, \dot{\Theta}) = \mathbf{C}_2({}^0\omega_0, \Theta, \dot{\Theta}) - {}^0\mathbf{D}_{\Theta}^T ({}^0\mathbf{D}^*)^{-1} \mathbf{C}_1({}^0\omega_0, \Theta, \dot{\Theta}) \quad (5-48\gamma)$$

Οι αδρανειακού-τύπου πίνακες \mathbf{H}_{qq}^* , $\mathbf{H}_{q\theta_m}$ και $\mathbf{H}_{\theta_m\theta_m}$ που χρησιμοποιούνται στην Εξ. (5-48β) δίνονται από τις Εξ. (E-14) του Παραρτήματος E.3. Για τον επίπεδο ελεύθερα αιωρούμενο βραχίονα 7-BE, που φαίνεται στο Σχήμα 5.4, οι πίνακες αυτοί δίνονται από τις Εξ. (E-15) του Παραρτήματος E.3.

Όπως προαναφέρθηκε, η στροφορμή του συστήματος διατηρείται. Εάν, για μηδενική αρχική στροφορμή, η Εξ. (5-19β) επιλυθεί ως προς ${}^0\omega_0$ και αντικατασταθεί στην Εξ. (5-48γ), τότε η Εξ. (5-48α) γράφεται:

$$\mathbf{H}^*(\Theta)\ddot{\Theta} + \mathbf{C}(\Theta, \dot{\Theta})\dot{\Theta} + \begin{bmatrix} -\mathbf{K} \\ \mathbf{K} \end{bmatrix} (\theta_m - \mathbf{q}) + \begin{bmatrix} -\mathbf{B} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} (\dot{\theta}_m - \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{Q} \quad (5-49\alpha)$$

όπου:

$$\mathbf{C}(\Theta, \dot{\Theta}) = \frac{1}{2} \frac{\partial(\dot{\Theta}^T {}^0\mathbf{D}_{\Theta}^T ({}^0\mathbf{D}^*)^{-1} {}^0\mathbf{D}_{\Theta})}{\partial\Theta} + \frac{\partial({}^0\mathbf{D}_{\Theta\Theta}\dot{\Theta})}{\partial\Theta} - \frac{1}{2} \frac{\partial(\dot{\Theta}^T {}^0\mathbf{D}_{\Theta\Theta})}{\partial\Theta} - \frac{\partial({}^0\mathbf{D}_{\Theta}^T ({}^0\mathbf{D}^*)^{-1} {}^0\mathbf{D}_{\Theta}\dot{\Theta})}{\partial\Theta} \quad (5-49\beta)$$

Για την χρησιμοποίηση των παραπάνω εξισώσεων στο σχεδιασμό του ελεγκτή, στη συνέχεια, οι εξισώσεις αυτές μπορούν να γραφτούν στην παρακάτω μορφή:

$$\mathbf{H}_{qq}^*(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{H}_{q\theta_m}(\mathbf{q})\ddot{\theta}_m + \mathbf{h}_1(\Theta, \dot{\Theta}) = \mathbf{0} \quad (5-50\alpha)$$

$$\mathbf{H}_{q\theta_m}^T(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{H}_{\theta_m\theta_m}(\mathbf{q})\ddot{\theta}_m + \mathbf{h}_2(\Theta, \dot{\Theta}) = \mathbf{u} \quad (5-50\beta)$$

όπου η σύζευξη σε επίπεδο επιταχύνσεων δίνεται μέσω του πίνακα σύζευξης $\mathbf{H}_{q\theta_m}$ και

$$\mathbf{h}_1(\Theta, \dot{\Theta}) = \mathbf{C}_1(\mathbf{q}, \dot{\Theta}) - \mathbf{K}(\theta_m - \mathbf{q}) - \mathbf{B}(\dot{\theta}_m - \dot{\mathbf{q}}) \quad (5-51\alpha)$$

$$\mathbf{h}_2(\Theta, \dot{\Theta}) = \mathbf{C}_2(\mathbf{q}, \dot{\Theta}) + \mathbf{K}(\theta_m - \mathbf{q}) + \mathbf{B}(\dot{\theta}_m - \dot{\mathbf{q}}) \quad (5-51\beta)$$

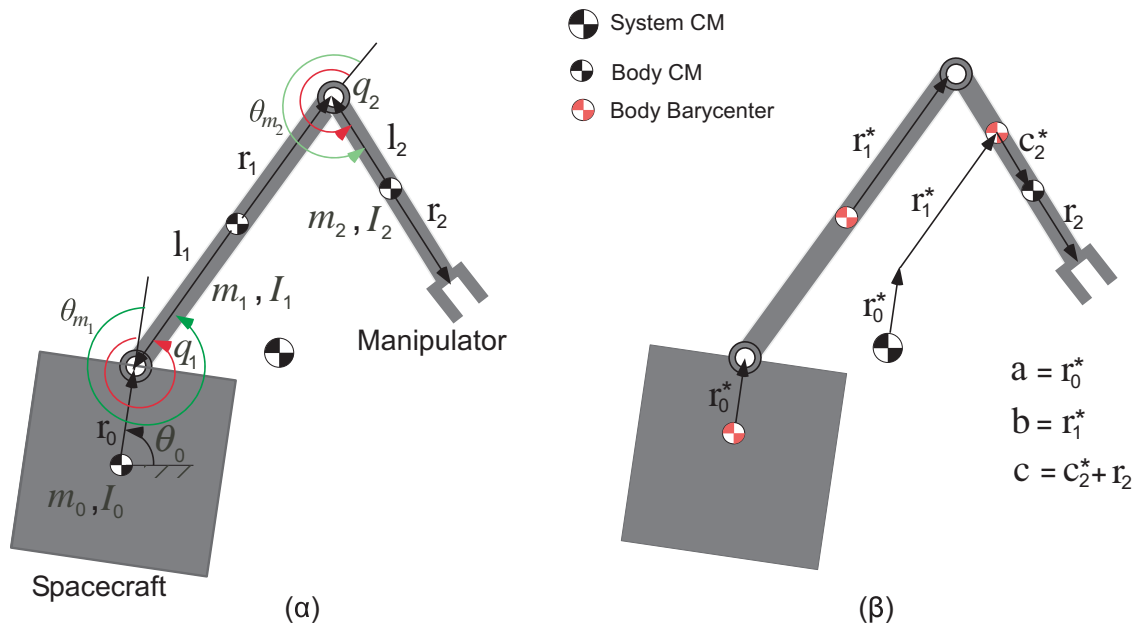
και

$$\mathbf{u} = \mathbf{n} \boldsymbol{\tau} \quad (5-51\gamma)$$

Στην περίπτωση, λοιπόν, των ελεύθερα αιωρούμενων ΔΡΣ με ένα βραχίονα με N εύκαμπτες αρθρώσεις, οι εξισώσεις κίνησης μπορούν να ελαττωθούν από $2N + 6$ σε $2N$, όσοι, δηλαδή, είναι οι ΒΕ των εύκαμπτων αρθρώσεων.

5.3 Επίπεδα Συστήματα

Στην περίπτωση των επίπεδων συστημάτων, όπως του επίπεδου βραχίονα 7-ΒΕ (δηλαδή 2-ΒΕ για κάθε εύκαμπτη άρθρωση και 3-ΒΕ για το δορυφόρο) που παρουσιάζεται στο Σχήμα 5.4, οι εξισώσεις κίνησης απλοποιούνται. Οι αντίστοιχες εξισώσεις για ελεύθερα ιπτάμενους και για ελεύθερα αιωρούμενους επίπεδους βραχίονες δίνονται παρακάτω.



Σχήμα 5.4. Επίπεδος Διαστημικός Ρομποτικός Βραχίονας 7-ΒΕ.

5.3.1 Ελεύθερα Ιπτάμενοι Διαστημικοί Βραχίονες

Όπως προαναφέρθηκε, στην εργασία αυτή θεωρούμε ότι σε αυτό τον τρόπο λειτουργίας του συστήματος, ο δορυφόρος του ΔΡΣ ελέγχεται μόνο από ένα σφόνδυλο αντίδρασης. Η Εξ. (5-47) γράφεται, στην περίπτωση αυτή ως:

$$\begin{bmatrix} {}^0D^* & {}^0D_{\Theta} \\ {}^0D_{\Theta}^T & {}^0D_{\Theta\Theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_0 \\ \ddot{\Theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1^* \\ c_2^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{1 \times N} \\ -\mathbf{K} \\ \mathbf{K} \end{bmatrix} (\Theta_m - \mathbf{q}) + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{1 \times N} \\ -\mathbf{B} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} (\dot{\Theta}_m - \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} \tau_0 \\ \mathbf{Q} \end{bmatrix} \quad (5-52)$$

όπου τ_0 είναι η ροπή που ασκείται στο δορυφόρο από το σφόνδυλο αντίδρασης και η μεταβλητή θ_0 ορίζει τον προσανατολισμό του δορυφόρου του ΔΡΣ. Το βαθμωτό μέγεθος ${}^0D^*$ καθώς και οι πίνακες ${}^0D_{\Theta}$ και ${}^0D_{\Theta\Theta}$, για το επίπεδο ΔΡΣ με ένα βραχίονα με δυο εύκαμπτες αρθρώσεις του Σχήματος 5.4, δίνονται στο Παράρτημα Ε.2.

Όμως για επίπεδους ρομποτικούς βραχίονες, τα διανύσματα ${}^0\boldsymbol{\omega}_0$ και ${}^0\mathbf{h}_{CM}$ (καθώς και το διάνυσμα \mathbf{h}_{CM}) είναι παράλληλα (έχουν φορά κάθετη στο επίπεδο κίνησης). Οπότε το εξωτερικό τους γινόμενο, που εμφανίζεται στην Εξ. (5-43β) είναι μηδέν. Δηλαδή:

$${}^0\boldsymbol{\omega}_0 \times {}^0\mathbf{h}_{CM} = {}^0\boldsymbol{\omega}_0 \times {}^0\mathbf{h}_{CM} = \mathbf{0} \quad (5-53\alpha)$$

Άρα η Εξ. (5-43β) γίνεται:

$$\mathbf{C}_1^*(\dot{\theta}_0, \boldsymbol{\Theta}, \dot{\boldsymbol{\Theta}}) = \left(\frac{\partial({}^0\mathbf{D}^* \dot{\theta}_0)}{\partial \boldsymbol{\Theta}} + \frac{\partial({}^0\mathbf{D}_{\Theta} \dot{\boldsymbol{\Theta}})}{\partial \boldsymbol{\Theta}} \right) \dot{\boldsymbol{\Theta}} \quad (5-53\beta)$$

Για τον 7-ΒΕ βραχίονα του Σχήματος 5.4, μπορεί να δειχθεί ότι οι Εξ. (5-43β) και (5-46β) γράφονται αντίστοιχα:

$$c_1^* = -(\hat{d}_{01}^* + \hat{d}_{02}^*)(2\dot{\theta}_0 \dot{q}_1 + \dot{q}_1^2) - (\hat{d}_{12}^* + \hat{d}_{02}^*)(2\dot{\theta}_0 \dot{q}_2 + 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_2^2) \quad (5-54\alpha)$$

και

$$\mathbf{C}_2^*(\dot{\theta}_0, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} -\hat{d}_{12}^*(2\dot{q}_1 \dot{q}_2 + 2\dot{\theta}_0 \dot{q}_2 + \dot{q}_2^2) + (\hat{d}_{01}^* + \hat{d}_{02}^*)\dot{\theta}_0^2 \\ \hat{d}_{12}^*(2\dot{\theta}_0 \dot{q}_1 + \dot{q}_1^2) + (\hat{d}_{12}^* + \hat{d}_{02}^*)\dot{\theta}_0^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5-54\beta)$$

όπου οι όροι \hat{d}_{ij}^* είναι συναρτήσεις της διαμόρφωσης \mathbf{q} του βραχίονα και ορίζονται από τις Εξ. (E-12) στο Παράρτημα E.2.

5.3.2 Ελεύθερα Αιωρούμενοι Διαστημικοί Βραχίονες

Στα ελεύθερα αιωρούμενα ΔΡΣ, οι εξισώσεις κίνησης για επίπεδη και τρισδιάστατη κίνηση δίνονται από την Εξ. (5-49α), η οποία επαναλαμβάνεται παρακάτω:

$$\mathbf{H}^*(\boldsymbol{\Theta})\ddot{\boldsymbol{\Theta}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\boldsymbol{\Theta}})\dot{\boldsymbol{\Theta}} + \begin{bmatrix} -\mathbf{K} \\ \mathbf{K} \end{bmatrix} (\boldsymbol{\theta}_m - \mathbf{q}) + \begin{bmatrix} -\mathbf{B} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} (\dot{\boldsymbol{\theta}}_m - \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{Q} \quad (5-49\alpha)$$

όπου $\mathbf{H}^*(\boldsymbol{\Theta})$ είναι ο πίνακας αδράνειας του μειωμένου συστήματος που δίνεται από την Εξ. (5-48β) και $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\boldsymbol{\Theta}})$ είναι το διάνυσμα – στήλη των φυγοκεντρικών δυνάμεων καθώς και των δυνάμεων Coriolis που δίνεται από την Εξ. (5-49β).

Σημειώνεται, ότι για τα ελεύθερα αιωρούμενα ΔΡΣ, το διάνυσμα στήλη των φυγοκεντρικών δυνάμεων καθώς και των δυνάμεων Coriolis μπορεί να υπολογιστεί επίσης και από την Εξ. (5-48γ). Στην περίπτωση αυτή, πρέπει να ληφθεί υπόψη ότι στους επίπεδους ελεύθερα αιωρούμενους βραχίονες, το διάνυσμα της στροφορμής του συστήματος είναι σταθερό και έτσι το διάνυσμα στήλη που δίνεται από την Εξ. (5-53β) είναι μηδέν. Δηλαδή:

$$\mathbf{C}_1^*(\dot{\theta}_0, \Theta, \dot{\Theta}) = \frac{\partial({}^0\mathbf{D}^* \dot{\theta}_0 + {}^0\mathbf{D}_\Theta \dot{\Theta})}{\partial \Theta} \dot{\Theta} = \frac{\partial({}^0\mathbf{h}_{CM})}{\partial \Theta} \dot{\Theta} = \mathbf{0} \quad (5-55\alpha)$$

και επομένως το διάνυσμα στήλη των φυγόκεντρων δυνάμεων και δυνάμεων Coriolis, που δίνεται από την Εξ. (5-48γ), γράφεται

$$\mathbf{C}(\dot{\theta}_0, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{C}_2^*(\dot{\theta}_0, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (5-55\beta)$$

όπου το διάνυσμα-στήλη \mathbf{C}_2^* δίνεται από την Εξ. (5-54β) αντικαθιστώντας τη μεταβλητή $\dot{\theta}_0$ από τη διατήρηση της στροφορμής.

5.3.3 Σύγκριση με Βραχίονες Σταθερής Βάσης

Ο πίνακας σύζευξης $\mathbf{H}_{q_{\theta_m}}(\mathbf{q})$, που εμφανίζεται στην Εξ. (5-48β), αναπαριστά τη σύζευξη μεταξύ των επιταχύνσεων των συνδέσμων και των κινητήρων. Σύμφωνα με την παραδοχή 3, ο κινητήρας i βρίσκεται στο σύνδεσμο $i-1$ και κινεί το σύνδεσμο i . Εφόσον, στους βραχίονες σταθερής βάσης, η γραμμική και γωνιακή ταχύτητα του κινητήρα i είναι ανεξάρτητη από την κίνηση του συνδέσμου i καθώς και των επόμενων συνδέσμων, ο πίνακας $\mathbf{H}_{q_{\theta_m}}(\mathbf{q})$ έχει πάντα την ακόλουθη αυστηρά άνω-τριγωνική δομή, [14].

$$\mathbf{H}_{q_{\theta_m}} = \begin{bmatrix} 0 & h_{12} & h_{13}(q_2) & h_{14}(q_2, q_3) & \cdots & \cdots & h_{1N}(q_2, \dots, q_{N-1}) \\ 0 & 0 & h_{23} & h_{24}(q_3) & \cdots & \cdots & h_{2N}(q_3, \dots, q_{N-1}) \\ 0 & 0 & 0 & h_{34} & \cdots & \cdots & h_{3N}(q_4, \dots, q_{N-1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & h_{N-2, N-1} & h_{N-2, N}(q_{N-1}) \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & h_{N-1, N} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5-56\alpha)$$

Στους ελεύθερα αιωρούμενους διαστημικούς βραχίονες, οποιαδήποτε κίνηση ενός απλού συνδέσμου προκαλεί κίνηση σε όλο το ρομποτικό σύστημα. Έτσι, στους ελεύθερα αιωρούμενους βραχίονες, ο πίνακας $\mathbf{H}_{q_{\theta_m}}(\mathbf{q})$ δεν έχει την παραπάνω αυστηρά άνω-τριγωνική δομή. Για παράδειγμα, ο πίνακας σύζευξης $\mathbf{H}_{q_{\theta_m}}(\mathbf{q})$ για τον 7-BE επίπεδο ελεύθερα αιωρούμενο διαστημικό βραχίονα του Σχήματος 5.4 είναι:

$$\mathbf{H}_{q_{\theta_m}} = \begin{bmatrix} -\frac{({}^0D_1^* + {}^0D_2^*)n_1 I_{m_1}}{{}^0D^*} & n_2 I_{m_2} & -\frac{({}^0D_1^* + {}^0D_2^*)n_2 I_{m_2}}{{}^0D^*} \\ -\frac{{}^0D_2^* n_1 I_{m_1}}{{}^0D^*} & & -\frac{{}^0D_2^* n_2 I_{m_2}}{{}^0D^*} \end{bmatrix} \quad (5-56\beta)$$

Όπως θα δειχθεί σε επόμενη παράγραφο, η δομή του πίνακα σύζευξης $\mathbf{H}_{q_{\theta_m}}(\mathbf{q})$ στα ελεύθερα αιωρούμενα ΔΡΣ, επιτρέπει το σχεδιασμό ενός στατικού ελεγκτή

γραμμικοποίησης μέσω ανατροφοδότησης ο οποίος επιτυγχάνει αποσύζευξη του συστήματος και παρακολούθηση επιθυμητών τροχιών της διαμόρφωσης του βραχίονα.

Παρατηρούμε ότι όταν οι τιμές της μάζας και της ροπής αδράνειας του δορυφόρου προσεγγίζουν το άπειρο,

$$m_0 \rightarrow \infty, \quad I_0 \rightarrow \infty \quad (5-57\alpha)$$

τότε

$$\begin{aligned} \frac{D_1}{D} \rightarrow 0, \frac{D_2}{D} \rightarrow 0, \frac{I_{m_1}}{D} \rightarrow 0, \frac{I_{m_2}}{D} \rightarrow 0, \\ \frac{m_1}{D} \rightarrow 0, \frac{m_2}{D} \rightarrow 0, \frac{m_{m_1}}{D} \rightarrow 0, \frac{m_{m_2}}{D} \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (5-57\beta)$$

Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω οριακές τιμές στους αδρανειακούς πίνακες \mathbf{H}_{qq}^* , $\mathbf{H}_{q\theta_m}$ και $\mathbf{H}_{\theta_m\theta_m}$ του 7-ΒΕ επίπεδου ελεύθερα αιωρούμενου διαστημικού βραχίονα του Σχήματος 5.4, οι οποίοι δίνονται από τις Εξ. (E-15) του Παραρτήματος Ε.3, οι υποπίνακες του $\mathbf{H}^*(\Theta)$ είναι:

$$\mathbf{H}_{qq} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12} & h_{22} \end{bmatrix} \quad (5-58\alpha)$$

$$\mathbf{H}_{q\theta_m} = \begin{bmatrix} 0 & n_2 I_{m_2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5-58\beta)$$

$$\mathbf{H}_{\theta_m\theta_m} = \begin{bmatrix} n_1^2 I_{m_1} & 0 \\ 0 & n_2^2 I_{m_2} \end{bmatrix} \quad (5-58\gamma)$$

όπου οι όροι h_{ij} στην Εξ. (5-58α) δίνονται από τις Εξ. (E-16) στο Παράρτημα Ε.3.

Οι παραπάνω πίνακες ταυτίζονται με τους αντίστοιχους πίνακες ενός 4-ΒΕ ρομποτικού βραχίονα σταθερής βάσης με εύκαμπτες αρθρώσεις, [14].

5.4 Έλεγχος Διαστημικών Βραχιόνων με Εύκαμπτες Αρθρώσεις

Η παράγραφος αυτή παρουσιάζει τα βασικά προβλήματα ελέγχου στους διαστημικούς ρομποτικούς βραχίονες με εύκαμπτες αρθρώσεις. Όπως και στους ρομποτικούς βραχίονες σταθερής βάσης, τα βασικά προβλήματα ελέγχου είναι ο έλεγχος ρύθμισης (regulation control) όπου ο βραχίονας οδηγείται σε μια τελική επιθυμητή διαμόρφωση και ο έλεγχος παρακολούθησης τροχιάς (trajectory tracking control) όπου ο βραχίονας ακολουθεί χρονικά μεταβαλλόμενες τροχιές.

Στις εφαρμογές των βραχιόνων σταθερής βάσης, για το πρόβλημα του ελέγχου ρύθμισης εφαρμόζεται ένας ελεγκτής PID, βασιζόμενος σε ανατροφοδότηση του

σφάλματος της γωνιακής θέσης του δρομέα του κινητήρα στην έξοδο του μειωτήρα. Δηλαδή:

$$\tau_m = \mathbf{K}_p \mathbf{e}_m + \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{e}}_m + \mathbf{K}_I \int_0^t \mathbf{e}_m dt \quad (5-59\alpha)$$

όπου

$$\mathbf{e}_m = \theta_{m,d} - \theta_m \quad (5-59\beta)$$

είναι το σφάλμα γωνιακής θέσης του δρομέα του κινητήρα στην έξοδο του μειωτήρα, $\theta_{m,d}$ είναι η επιθυμητή τελική γωνιακή θέση του δρομέα του κινητήρα στην έξοδο του μειωτήρα, και οι πίνακες \mathbf{K}_p , \mathbf{K}_d και \mathbf{K}_I είναι διαγώνιοι θετικά ορισμένοι πίνακες κέρδους.

Παρόλα αυτά, στις διαστημικές εφαρμογές ο παραπάνω ελεγκτής είναι ανεπαρκής. Είναι γνωστό ότι στους ελεύθερους αιωρούμενους διαστημικούς βραχίονες, υπάρχει δυναμική σύζευξη μεταξύ βραχίονα και δορυφόρου και ως εκ τούτου οι κινήσεις του βραχίονα προκαλούν διαταραχές στο δορυφόρο. Έτσι, η ταλαντευόμενη κίνηση του βραχίονα εισάγει αντίστοιχες ανεπιθύμητες ταλαντώσεις του δορυφόρου, όπως φαίνεται και στο επόμενο παράδειγμα.

Εφαρμογή 5.1: Έστω ο επίπεδος ελεύθερα αιωρούμενος διαστημικός βραχίονας 7-BE με παραμέτρους αυτές που παρουσιάζονται στον Πίνακα 5.1. Οι αδρανειακά χαρακτηριστικά του κινητήρα καθώς και τα χαρακτηριστικά του εύκαμπτου μηχανισμού μετάδοσης παρουσιάζονται στον Πίνακα 5.2.

ΠΙΝΑΚΑΣ 5.1. ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ ΤΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΔΡΣ ΤΟΥ ΣΧΗΜΑΤΟΣ 5.4.

Σώμα	m_i (kg)	l_i (m)	r_i (m)	I_i (kg m ²)
0	4000	5.0	5.0	666.7
1	200	5.0	5.0	33.3
2	1000	2.5	2.5	50.0

ΠΙΝΑΚΑΣ 5.2. ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ ΤΩΝ ΚΙΝΗΤΗΡΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΜΗΧΑΝΙΣΜΩΝ ΜΕΤΑΔΟΣΗΣ ΤΟΥ ΔΡΣ ΤΟΥ ΣΧΗΜΑΤΟΣ 5.4

Κινητήρας	n_i	k_i (N m / rad)	b_i (N m s / rad)	m_{m_i} (kg)	I_{m_i} (kg m ²)
1	50	1000	14.1	1.0	0.00002
2	50	1000	14.1	1.0	0.00002

Η αρχική διαμόρφωση του βραχίονα είναι $(q_{1,in}, q_{2,in}) = (0^\circ, 30^\circ)$ και ο αρχικός προσανατολισμός του δορυφόρου είναι $\theta_{0,in} = 0^\circ$. Η επιθυμητή τελική διαμόρφωση του βραχίονα είναι $(q_{1,fin}, q_{2,fin}) = (100^\circ, 60^\circ)$. Ο βραχίονας οδηγείται στην τελική επιθυμητή διαμόρφωση σε χρόνο $t_f = 100s$ με μηδενικές αρχικές και τελικές τιμές ταχύτητας και επιτάχυνσης. Ο τελικός προσανατολισμός του δορυφόρου προκύπτει από τη διατήρηση της στροφορμής του συστήματος. Εφαρμόζεται ο απλός PID έλεγχος που δίνεται από την

Εξ. (5-59α). Εφαρμογή των ισοζυγίων ροπών στο δρομέα και στο σύνδεσμο, βλέπε Σχήμα 5.2, αμελώντας τις παραμορφώσεις στις αρθρώσεις (joint deflection), δηλαδή θεωρώντας $\theta_m = q$ και λαμβάνοντας υπόψη τόσο την ιξώδη τριβή (viscous friction) όσο και τη τριβή Coulomb (Coulomb friction), δίνουν αντίστοιχα:

$$\tau = \tau_m - I_m n \ddot{\theta}_m - b_m n \dot{\theta}_m - \tau_{c,m} \operatorname{sgn}(n \dot{\theta}_m) \quad (5-60\alpha)$$

και

$$n \tau = I_L \ddot{\theta}_m + b_L \dot{\theta}_m + \tau_{c,L} \operatorname{sgn}(\dot{\theta}_m) \quad (5-60\beta)$$

όπου b_m και $\tau_{c,m}$ είναι οι παράμετροι της ιξώδους τριβής και της τριβής Coulomb, αντίστοιχα, που εφαρμόζονται στο κινητήρα ενώ b_L και $\tau_{c,L}$ είναι οι αντίστοιχες παράμετροι για το σύνδεσμο.

Η ροπή τ_m του κινητήρα δίνεται από την Εξ. (5-59α), η οποία για έναν απλό σύνδεσμο παίρνει τη μορφή

$$\tau_m = k_p e_m + k_d \dot{e}_m + k_I \int_0^t e_m dt \quad (5-60\gamma)$$

Από το συνδυασμό των Εξ. (5-60α) – (5-60γ) προκύπτει η εξίσωση της δυναμικής του σφάλματος (error dynamics):

$$\ddot{e}_m + \frac{nk_d + b_e}{I_e} \dot{e}_m + \frac{nk_p}{I_e} e_m = \ddot{\theta}_m^d + \frac{b_e}{I_e} \dot{\theta}_m^d \quad (5-61\alpha)$$

όπου οι τιμές των $\ddot{\theta}_m^d$ και $\dot{\theta}_m^d$ είναι ίσες με μηδέν στη μόνιμη κατάσταση και I_e , b_e είναι η ισοδύναμη αδράνεια (effective inertia) και η ισοδύναμη απόσβεση (effective damping), αντίστοιχα, και οι δυο όπως παρουσιάζονται στην έξοδο του μειωτήρα και δίνονται από:

$$I_e = n^2 I_m + I_L \quad (5-61\beta)$$

όπου η μεταβλητή I_L αντιπροσωπεύει τη ροπή αδράνειας ενός συνδέσμου ως προς εκείνη την άρθρωση του που είναι πιο κοντά στο δορυφόρο του ΔΡΣ, και

$$b_e = n^2 b_m + b_L \quad (5-61\gamma)$$

Η δυναμική του σφάλματος, όπως περιγράφεται από την Εξ. (5-61α), είναι γραμμική και για το σχεδιασμό του ελεγκτή μπορεί να επιλεγθεί το παρακάτω επιθυμητό χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$$p_d(s) = (s+a)(s+\omega_{n,cl})^2 = s^3 + (a+2\omega_{n,cl})s^2 + (2a\omega_{n,cl} + \omega_{n,cl}^2)s + a\omega_{n,cl}^2 \quad (5-62)$$

όπου $\omega_{n,cl} > 0$ είναι η φυσική συχνότητα (natural frequency) του κλειστού συστήματος και επιλέγεται $a \geq 5\omega_{n,cl}$ έτσι ώστε η απόκριση της δυναμικής του σφάλματος να αντιστοιχεί σε ένα κρίσιμα αποσβενόμενο (δηλαδή $\zeta=1$) σύστημα δεύτερης τάξης.

Από το συνδυασμό των παραπάνω εξισώσεων προκύπτουν τα παρακάτω κέρδη για τον ελεγκτή PID:

$$k_p = (2a\omega_{n,cl} + \omega_{n,cl}^2) I_e / n \quad (5-63\alpha)$$

$$k_d = ((a + 2\omega_{n,cl}) I_e - b_e) / n \quad (5-63\beta)$$

$$k_i = a \omega_{n,cl}^2 I_e / n \quad (5-63\gamma)$$

Για την αποφυγή τυχόν διέγερσης κάποιας ιδιοσυχνότητας (resonance frequency) του συστήματος, η φυσική συχνότητα $\omega_{n,cl}$ του κλειστού συστήματος πρέπει να ικανοποιεί την παρακάτω συνθήκη:

$$\frac{6}{t_s} < \omega_{n,cl} < \frac{1}{5} \omega_{res} \quad (5-64\alpha)$$

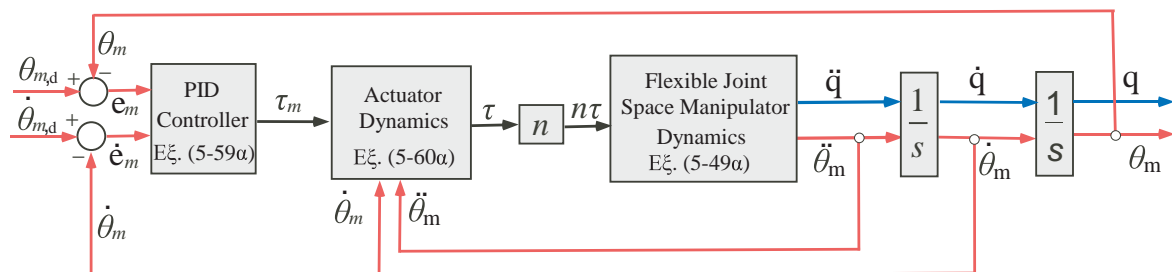
όπου t_s είναι ο χρόνος αποκατάστασης της επιθυμητής απόκρισης και ω_{res} είναι η ιδιοσυχνότητα που δίνεται από:

$$\omega_{res} = \sqrt{k / \bar{I}} \quad (5-64\beta)$$

όπου \bar{I} είναι η ισοδύναμη αδράνεια (equivalent reduced inertia) που ορίζεται από:

$$\bar{I} = \frac{n^2 I_m I_L}{n^2 I_m + I_L} \quad (5-64\gamma)$$

Το Σχήμα 5.5 παρουσιάζει το δομικό διάγραμμα κλειστού βρόχου του συστήματος της Εφαρμογής 5.1, το οποίο περιέχει τον προτεινόμενο PID ελεγκτή που εφαρμόζεται στο ελεύθερα αιωρούμενο ΔΡΣ με εύκαμπτες αρθρώσεις καθώς και τη δυναμική του κινητήρα.

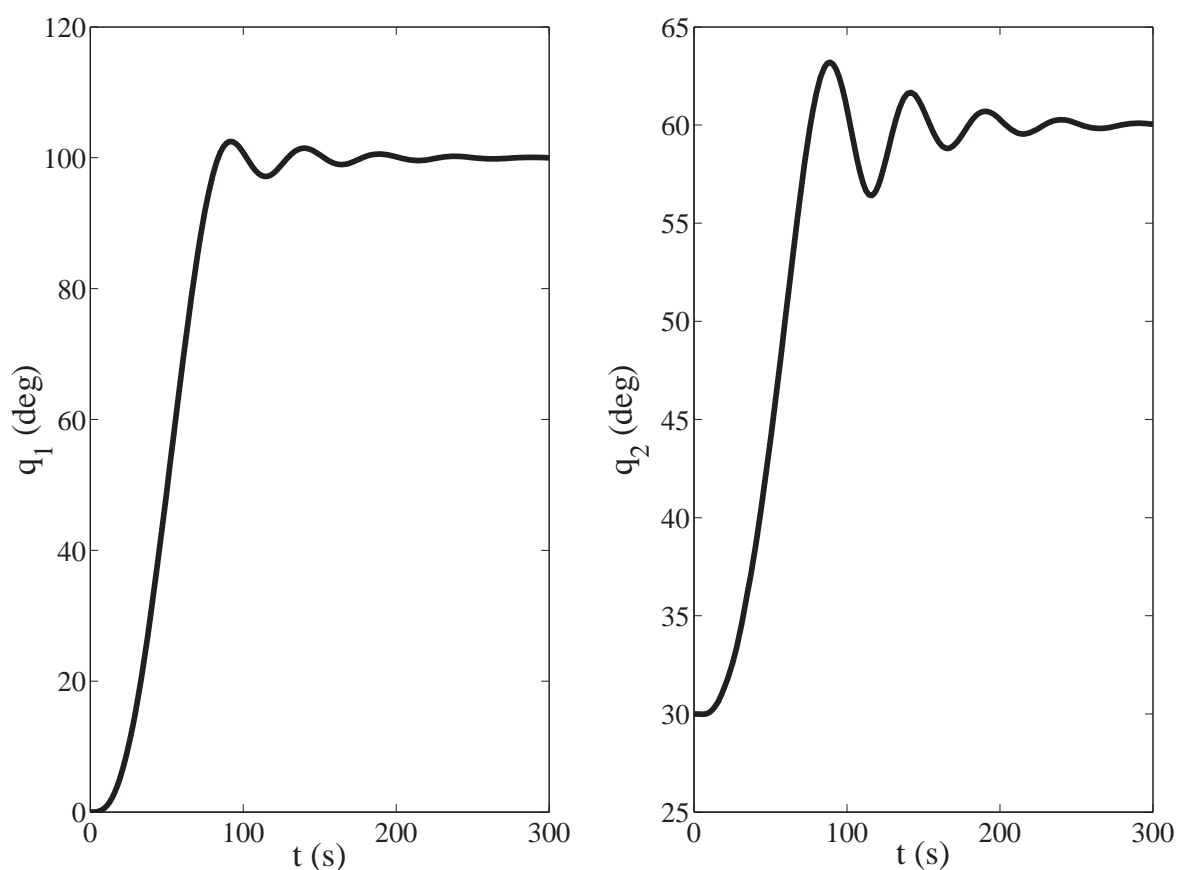


Σχήμα 5.5. Το κλειστό σύστημα ελέγχου του Παραδείγματος 5.1.

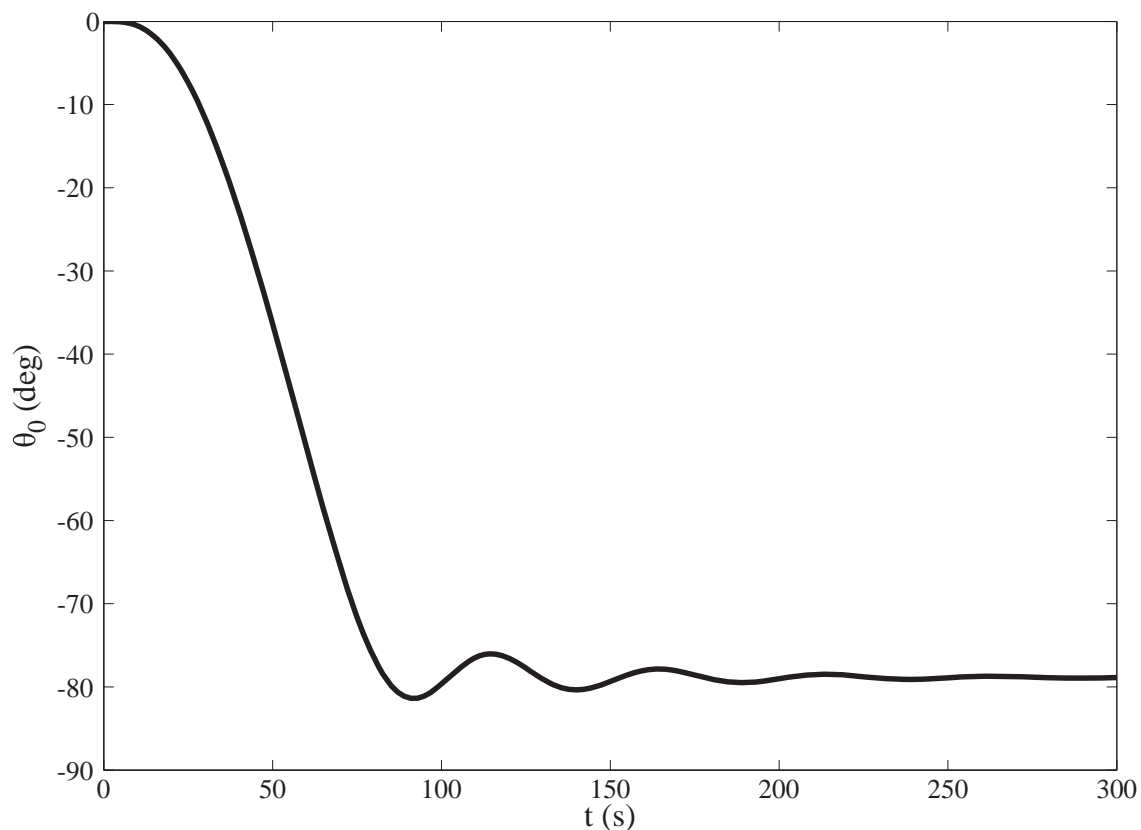
Οι πίνακες κέρδους του PID νόμου ελέγχου, που προκύπτουν από τις Εξ. (5-63), είναι:

$$\mathbf{K}_P = \begin{bmatrix} 26.4 & 0 \\ 0 & 5.5 \end{bmatrix}, \mathbf{K}_D = \begin{bmatrix} 167.9 & 0 \\ 0 & 34.9 \end{bmatrix}, \mathbf{K}_I = \begin{bmatrix} 1.2 & 0 \\ 0 & 0.25 \end{bmatrix} \quad (5-65)$$

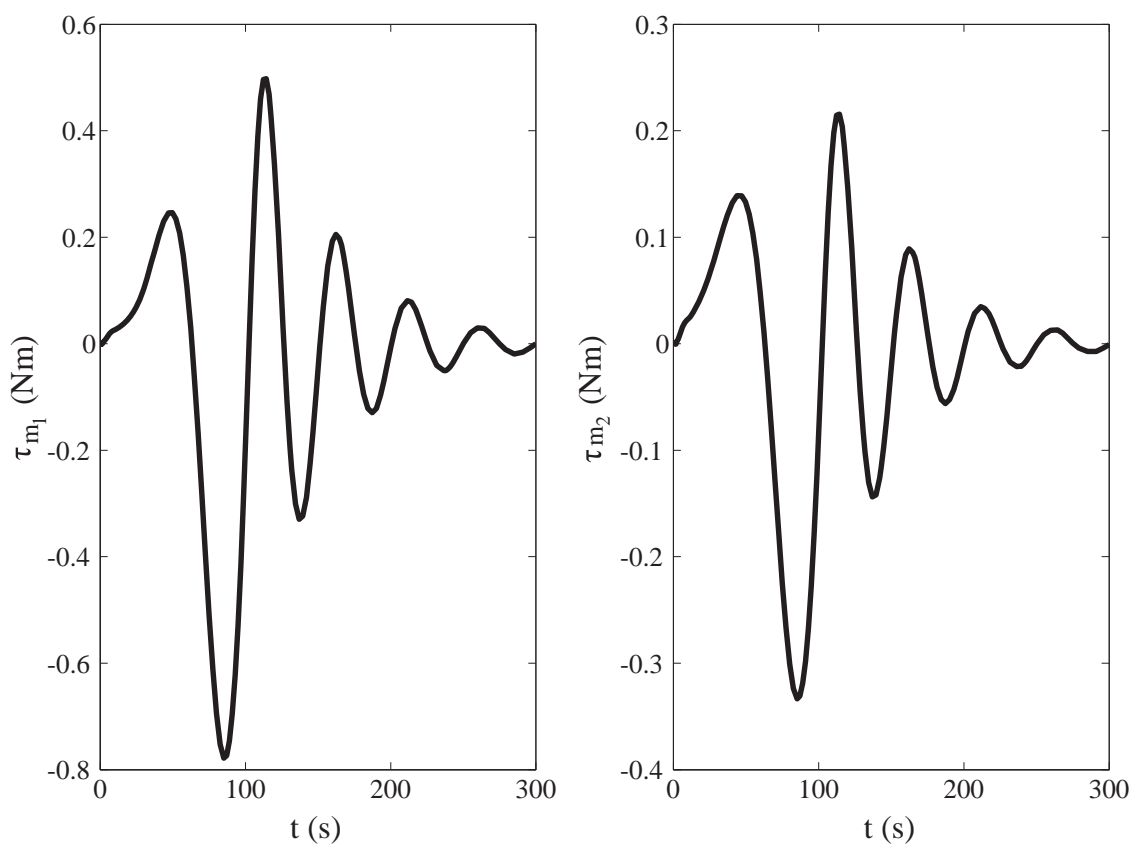
Τα Σχήματα 5.6 και 5.7 δείχνουν την ταλαντευόμενη κίνηση του βραχίονα και την αντίστοιχη ταλάντωση που προκαλείται στο δορυφόρο. Η χαμηλή συχνότητα στην απόκριση του βραχίονα είναι φυσιολογική, αφού σε ΔΡΣ οι συχνότητες είναι συνήθως στην περιοχή των 1 Hz. Η ταλάντωση του δορυφόρου μπορεί να προκαλέσει δυσλειτουργία σε πολλά εξαρτήματα που βρίσκονται πάνω του, όπως κεραίες επικοινωνίας και ηλιακούς συλλέκτες. Το Σχήμα 5.8 παρουσιάζει τις απαιτούμενες ροπές από τους κινητήρες.



Σχήμα 5.6. Ταλαντώσεις στην κίνηση του βραχίονα.



Σχήμα 5.7. Ταλαντώσεις στην κίνηση του δορυφόρου.



Σχήμα 5.8. Οι απαιτούμενες ροπές στις αρθρώσεις για να οδηγηθεί ο βραχίονας στην επιθυμητή διαμόρφωση.

Για την εξάλειψη των ανεπιθύμητων ταλαντώσεων του δορυφόρου του ΔΡΣ, μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι σφόνδυλοι αντίδρασης. Τότε, η δυναμική του δορυφόρου του ΔΡΣ μπορεί να γραφεί:

$$I_0 \ddot{\theta}_0 = \tau_0 + T_L \quad (5-66\alpha)$$

όπου T_L είναι η ροπή που προκύπτει από την κίνηση του βραχίονα και τ_0 είναι η ροπή που εφαρμόζεται από το σφόνδυλο αντίδρασης στο δορυφόρο του ΔΡΣ, με τη μορφή ενός ελεγκτή PID:

$$\tau_0 = k_p (\theta_{0,d} - \theta_0) + k_d (\dot{\theta}_{0,d} - \dot{\theta}_0) + k_i \int_0^t (\theta_{0,d} - \theta_0) dt \quad (5-66\beta)$$

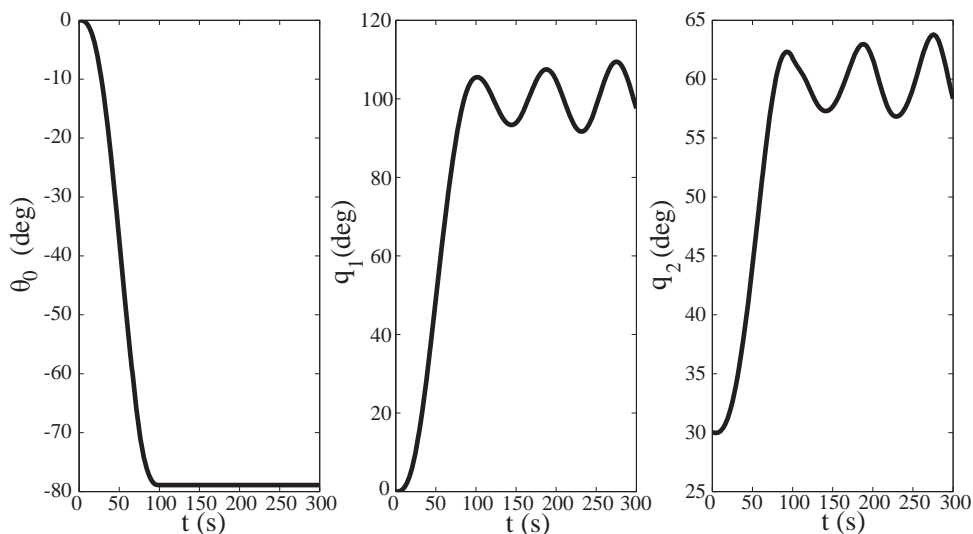
όπου $\theta_{0,d}$ είναι ο επιθυμητός προσανατολισμός του δορυφόρου του ΔΡΣ.

Υποθέτοντας σταθερή ροπή T_L , η δυναμική του σφάλματος του προσανατολισμού του δορυφόρου, προκύπτει από το συνδυασμό των Εξ. (5-66α) και (5-66β):

$$\ddot{e}_0 + \frac{k_d}{I_0} \dot{e}_0 + \frac{k_p}{I_0} e_0 + \frac{k_i}{I_0} \int_0^t e_0 dt = 0 \quad (5-66\gamma)$$

όπου $e_0 = \theta_{0,d} - \theta_0$ είναι το σφάλμα του προσανατολισμού του δορυφόρου.

Εφαρμόζοντας την ίδια μέθοδο όπως παραπάνω, ως κέρδη ελέγχου μπορούν να επιλεγθούν τα $k_p = 7.3 \cdot 10^3$, $k_d = 4.7 \cdot 10^3$, $k_i = 3.3 \cdot 10^3$. Η επιθυμητή κίνηση και ο έλεγχος του βραχίονα είναι ίδια με αυτά της Εφαρμογής 5.1. Οι αντίστοιχες κινήσεις του δορυφόρου και του βραχίονα παρουσιάζονται στο Σχήμα 5.9. Αν και ο σφόνδυλος αντίδρασης επιτυγχάνει την επιθυμητή κίνηση του δορυφόρου, οι ταλαντώσεις του βραχίονα συνεχώς αυξάνονται.



Σχήμα 5.9. Η σταθεροποίηση του δορυφόρου του ΔΡΣ προκαλεί αύξηση των ταλαντώσεων του βραχίονα.

Είναι προφανές ότι απαιτείται ένας νόμος ελέγχου ικανός να επιτύχει εξάλειψη των ταλαντώσεων τόσο του βραχίονα όσο και του δορυφόρου του ΔΡΣ. Επιπλέον, συχνά είναι επιθυμητή η κίνηση του ΤΣΔ κατά μήκος συγκεκριμένου δρόμου. Έτσι, ο προτεινόμενος ελεγκτής θα πρέπει επίσης να επιτυγχάνει και παρακολούθηση τροχιάς του ΤΣΔ στον Καρτεσιανό χώρο.

Στους επίγειους βραχίονες σταθερής βάσης, το πρόβλημα έχει αντιμετωπιστεί χρησιμοποιώντας δυναμικούς ελεγκτές γραμμικοποίησης μέσω ανατροφοδότησης, [14]. Όμως το υπολογιστικό φορτίο είναι μεγάλο και αυτό τους καθιστά ανέφικτους για διαστημικές εφαρμογές. Στους βραχίονες σταθερής βάσης, ένας στατικός ελεγκτής γραμμικοποίησης μέσω ανατροφοδότησης (static feedback linearization controller) με υπολογιστικό φορτίο πολύ μικρότερο και εφικτό για διαστημικές εφαρμογές μπορεί να εφαρμοστεί μόνο εάν θεωρηθεί ένα απλοποιημένο μοντέλο του βραχίονα, εξαιτίας της αυστηρά άνω τριγωνικής δομής του πίνακα σύζευξης $\mathbf{H}_{q\theta_m}$, βλέπε Εξ. (5-56α). Παρόλα αυτά, το απλοποιημένο μοντέλο δεν είναι ρεαλιστικό τις περισσότερες φορές αφού υποθέτει ότι η κινητική ενέργεια του κάθε δρομέα οφείλεται μόνο στην δική του περιστροφή.

Όμως, η μη άνω-τριγωνική δομή του πίνακα σύζευξης $\mathbf{H}_{q\theta_m}$ στους ελεύθερα αιωρούμενους διαστημικούς βραχίονες, βλέπε Εξ. (5-56β) για τον 7-BE επίπεδο βραχίονα, δίνει νέες δυνατότητες στο σχεδιασμό ελεγκτών για παρακολούθηση τροχιάς. Στην συνέχεια, εκμεταλλευόμενοι την δομή του δυναμικού μοντέλου των ελεύθερα αιωρούμενων διαστημικών βραχιόνων, προτείνουμε την εφαρμογή στατικών ελεγκτών γραμμικοποίησης μέσω ανατροφοδότησης, οι οποίοι μπορούν να εφαρμοστούν στον σχεδιασμό δρόμου και στον χώρο των αρθρώσεων και στον Καρτεσιανό χώρο.

5.5 Γραμμικοποίηση Μέσω Ανατροφοδότησης (Feedback Linearization)

Στην παράγραφο αυτή, εκμεταλλευόμενοι τη δομή των εξισώσεων κίνησης των ελεύθερα αιωρούμενων ΔΡΣ με εύκαμπτες αρθρώσεις, αναπτύσσουμε ένα στατικό ελεγκτή γραμμικοποίησης μέσω ανατροφοδότησης ο οποίος επιτυγχάνει αποσύζευξη των εξισώσεων που ισχύουν για τους συνδέσμους και τους κινητήρες (the link and the motor equations), για έναν τρισδιάστατο ελεύθερα αιωρούμενο διαστημικό βραχίονα και δίνονται από τις Εξ. (5-50). Επειδή όμως η Εξ. (5-50α) δεν έχει περιέχει κάποια είσοδο ελέγχου (control input), δεν είναι δυνατό να ελεγχθεί πλήρως το σύστημα, δηλαδή τόσο η διαμόρφωση των συνδέσμων \mathbf{q} όσο και η γωνιακή μετατόπιση θ_m στην έξοδο του μειωτήρα. Οπότε, στη συνέχεια προτείνεται μόνο έλεγχος της διαμόρφωσης \mathbf{q} ενώ η γωνιακή μετατόπιση θ_m στην έξοδο του μειωτήρα παραμένει μη ελεγχόμενη. Η

απαιτούμενη ευστάθεια της θ_m εξετάζεται λαμβάνοντας υπόψη την εσωτερική δυναμική (internal dynamics) του συστήματος, [84].

Οι εξισώσεις κίνησης ενός ελεύθερα αιωρούμενου ΔΡΣ με εύκαμπτες αρθρώσεις αναπτύχθηκαν στην Παράγραφο 5.2.3.2 και επαναλαμβάνονται παρακάτω:

$$\mathbf{H}_{qq}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{H}_{q\theta_m}(\mathbf{q})\ddot{\theta}_m + \mathbf{h}_1(\Theta, \dot{\Theta}) = \mathbf{0} \quad (5-50\alpha)$$

$$\mathbf{H}_{q\theta_m}^T(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{H}_{\theta_m\theta_m}(\mathbf{q})\ddot{\theta}_m + \mathbf{h}_2(\Theta, \dot{\Theta}) = \mathbf{u} \quad (5-50\beta)$$

όπου:

$$\mathbf{h}_1(\Theta, \dot{\Theta}) = \mathbf{C}_1(\mathbf{q}, \dot{\Theta}) - \mathbf{K}(\theta_m - \mathbf{q}) - \mathbf{B}(\dot{\theta}_m - \dot{\mathbf{q}}) \quad (5-51\alpha)$$

$$\mathbf{h}_2(\Theta, \dot{\Theta}) = \mathbf{C}_2(\mathbf{q}, \dot{\Theta}) + \mathbf{K}(\theta_m - \mathbf{q}) + \mathbf{B}(\dot{\theta}_m - \dot{\mathbf{q}}) \quad (5-51\beta)$$

Η Εξ. (5-50β) γράφεται:

$$\ddot{\theta}_m = \mathbf{H}_{\theta_m\theta_m}^{-1}(\mathbf{q})(\mathbf{u} - \mathbf{H}_{q\theta_m}^T(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} - \mathbf{h}_2(\Theta, \dot{\Theta})) \quad (5-67)$$

Η Εξ. (5-50α), σε συνδυασμό με την Εξ. (5-67) γράφεται:

$$\mathbf{H}_{qq}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{H}_{q\theta_m}(\mathbf{q})[\mathbf{H}_{\theta_m\theta_m}^{-1}(\mathbf{q})(\mathbf{u} - \mathbf{H}_{q\theta_m}^T(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} - \mathbf{h}_2(\Theta, \dot{\Theta}))] + \mathbf{h}_1(\Theta, \dot{\Theta}) = \mathbf{0} \quad (5-68)$$

Τελικά, μετά από πράξεις προκύπτει:

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{A}(\mathbf{q})\mathbf{u} + \mathbf{G}(\Theta, \dot{\Theta}) \quad (5-69)$$

όπου:

$$\mathbf{A}(\mathbf{q}) = -\mathbf{S}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{H}_{q\theta_m}(\mathbf{q})\mathbf{H}_{\theta_m\theta_m}^{-1}(\mathbf{q}) \quad (5-70\alpha)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(\Theta, \dot{\Theta}) &= \mathbf{S}^{-1}(\mathbf{q})[\mathbf{H}_{q\theta_m}(\mathbf{q})\mathbf{H}_{\theta_m\theta_m}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{h}_2(\Theta, \dot{\Theta}) - \mathbf{h}_1(\Theta, \dot{\Theta})] \\ &= -\mathbf{A}(\mathbf{q})\mathbf{h}_2(\Theta, \dot{\Theta}) - \mathbf{S}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{h}_1(\Theta, \dot{\Theta}) \end{aligned} \quad (5-70\beta)$$

$$\mathbf{S}(\mathbf{q}) = \mathbf{H}_{qq}(\mathbf{q}) - \mathbf{H}_{q\theta_m}(\mathbf{q})\mathbf{H}_{\theta_m\theta_m}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{H}_{q\theta_m}^T(\mathbf{q}) \quad (5-70\gamma)$$

Επιλέγοντας τον παρακάτω νόμο ελέγχου:

$$\mathbf{u} = \mathbf{n}\boldsymbol{\tau} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{q})(-\mathbf{G}(\Theta, \dot{\Theta}) + \ddot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{K}_p\mathbf{e} + \mathbf{K}_d\dot{\mathbf{e}} + \mathbf{K}_I\int_0^t \mathbf{e} dt) \quad (5-71)$$

προκύπτει η παρακάτω εξίσωση σφάλματος:

$$\ddot{\mathbf{e}} + \mathbf{K}_d\dot{\mathbf{e}} + \mathbf{K}_p\mathbf{e} + \mathbf{K}_I\mathbf{e} = \mathbf{0} \quad (5-72\alpha)$$

όπου $\mathbf{e} = \mathbf{q}_d(t) - \mathbf{q}$ είναι το σφάλμα στη γωνιακή θέση των αρθρώσεων του βραχίονα.

Έτσι, η επιλογή θετικά ορισμένων διαγώνιων πινάκων κέρδους \mathbf{K}_p , \mathbf{K}_d και \mathbf{K}_I οδηγεί στην παρακάτω δυναμική σφάλματος για την άρθρωση i :

$$\ddot{e}_i + k_{d,i}\dot{e}_i + k_{p,i}e_i + k_{i,i}e_i = 0 \quad (5-72\beta)$$

όπου, για εξασφάλιση της ευστάθειας του συστήματος, τα στοιχεία $k_{p,i}$, $k_{d,i}$ και $k_{i,i}$ πρέπει να ικανοποιούν τη συνθήκη:

$$k_{d,i} k_{p,i} > k_{i,i} \quad (5-72\gamma)$$

Από τις Εξ. (5-62) και (5-72β) προκύπτουν τα παρακάτω κέρδη του ελεγκτή, έτσι ώστε η απόκριση της δυναμικής του σφάλματος να αντιστοιχεί σε ένα κρίσιμα αποσβενόμενο (δηλαδή $\zeta=1$) σύστημα δεύτερης τάξης.

$$k_{p,i} = 2a\omega_{n,cl} + \omega_{n,cl}^2 \quad (5-73\alpha)$$

$$k_{d,i} = 2\omega_{n,cl} + a \quad (5-73\beta)$$

$$k_{i,i} = a\omega_{n,cl}^2 \quad (5-73\gamma)$$

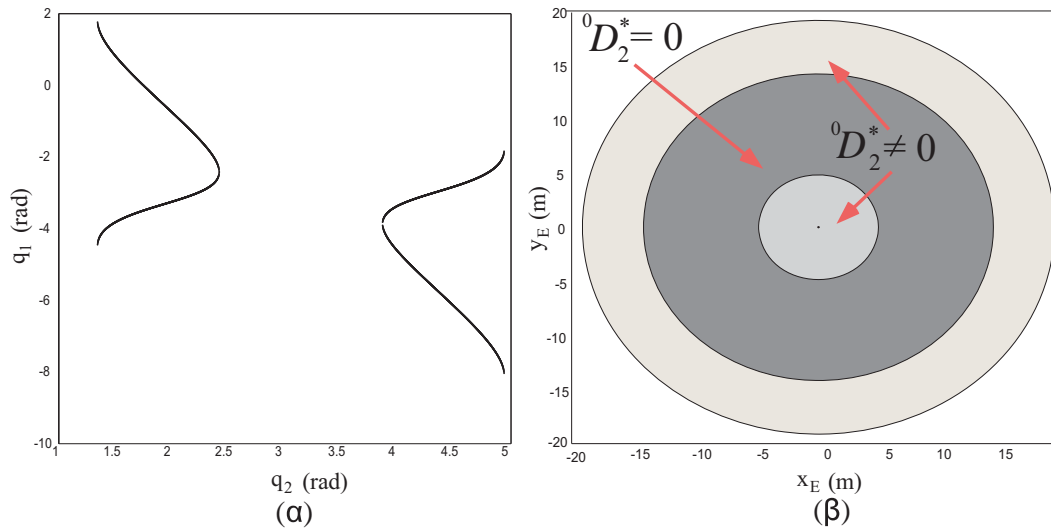
Παρατηρούμε ότι ο νόμος ελέγχου, που δίνεται από την Εξ. (5-71), είναι εφαρμόσιμος μόνο όταν ο πίνακας αποσύζευξης $\mathbf{A}(\mathbf{q})$, που δίνεται από την Εξ. (5-70α), είναι πλήρους τάξης. Από τις Εξ. (5-70α) και (5-70γ) προκύπτει ότι ο πίνακας $\mathbf{A}(\mathbf{q})$ είναι πλήρους τάξης μόνο όταν ο πίνακας σύζευξης $\mathbf{H}_{\mathbf{q}\theta_m}$ αντιστρέφεται. Όπως δείχθηκε στην Παράγραφο 5.3.3, στα ελεύθερα αιωρούμενα ΔΡΣ, η δομή του πίνακα σύζευξης $\mathbf{H}_{\mathbf{q}\theta_m}$ είναι τέτοια ώστε να μπορεί να αντιστραφεί. Άρα, στους ελεύθερα αιωρούμενους διαστημικούς βραχίονες, υπάρχουν σχηματισμοί \mathbf{q} του βραχίονα για τους οποίους ο πίνακας $\mathbf{A}(\mathbf{q})$ είναι αντιστρέψιμος. Για παράδειγμα, ο πίνακας $\mathbf{A}(\mathbf{q})$ που αντιστοιχεί στον επίπεδο ΔΡΣ με 7-BE του Σχήματος 5.4 έχει ορίζουσα διάφορη του μηδενός όταν:

$${}^0D_2^* \neq 0 \Rightarrow a_{20}^* \cos(q_1 + q_2) + a_{21}^* \cos(q_2) + a_{22}^* \neq 0 \quad (5-74)$$

όπου a_{20}^* , a_{21}^* και a_{22}^* είναι σταθεροί όροι που δίνονται στο Παράρτημα Ε.2.

Οπότε, αν οι επιθυμητοί σχηματισμοί του βραχίονα επαληθεύουν την Εξ. (5-74), τότε η εφαρμογή ενός στατικού ελεγκτή γραμμικοποίησης μέσω ανατροφοδότησης θα επιτύχει αποσύζευξη του συστήματος. Στην περίπτωση όπου η Εξ. (5-74) δεν ικανοποιείται, δηλαδή ${}^0D_2^* = 0$, ο πίνακας σύζευξης $\mathbf{H}_{\mathbf{q}\theta_m}$, που δίνεται από την Εξ. (5-56β), δεν είναι πλήρους τάξης. Σύμφωνα με την Εξ. (5-70α), προκύπτει ότι και ο πίνακας αποσύζευξης $\mathbf{A}(\mathbf{q})$ δεν είναι πλήρους τάξης. Τότε, όπως προκύπτει από την Εξ. (5-69), υπάρχουν σχηματισμοί του βραχίονα για τους οποίους οι επιταχύνσεις κάποιων αρθρώσεων δεν επηρεάζονται ανεξαρτήτως των εφαρμοζόμενων ροπών στις αρθρώσεις αυτές.

Το Σχήμα 5.10α παρουσιάζει τις διαμορφώσεις του βραχίονα για τις οποίες ισχύει ${}^0D_2^* = 0$, και το Σχήμα 5.10β δείχνει τις περιοχές του χώρου εργασίας στις οποίες αυτοί οι σχηματισμοί μπορεί να εμφανιστούν.



Σχήμα 5.10. (α) Σχηματισμοί του βραχίονα και (β) Περιοχές του χώρου εργασίας όπου ${}^0D_2^* = 0$.

Ο προτεινόμενος ελεγκτής μπορεί να επιτύχει παρακολούθηση των επιθυμητών, χρονικά μεταβαλλόμενων σχηματισμών $\mathbf{q}_d(t)$ του βραχίονα. Παρόλα αυτά, στους ελεύθερα αιωρούμενους βραχίονες, η θέση του ΤΣΔ δεν είναι μόνο συνάρτηση της διαμόρφωσης \mathbf{q} του βραχίονα αλλά επίσης εξαρτάται και από τον προσανατολισμό του δορυφόρου, [73]. Ο προσανατολισμός του δορυφόρου προκύπτει από την γωνιακή του ταχύτητα η οποία εξάγεται από τη διατήρηση της στροφορμής του συστήματος. Θεωρώντας μηδενική αρχική στροφορμή, η Εξ. (5-19α) γράφεται:

$${}^0\boldsymbol{\omega}_0 = -{}^0\mathbf{D}^{*-1} ({}^0\mathbf{D}_q^* \dot{\mathbf{q}} + {}^0\mathbf{D}_{\theta_m} \dot{\boldsymbol{\theta}}_m) \quad (5-75)$$

Οπότε, ο προσανατολισμός του δορυφόρου εξαρτάται και από την μη ελεγχόμενη ταχύτητα $\dot{\boldsymbol{\theta}}_m$ στην έξοδο του μειωτήρα. Παρόλα αυτά, η επίδραση του όρου που περιέχει την μη ελεγχόμενη ταχύτητα $\dot{\boldsymbol{\theta}}_m$ στην έξοδο του μειωτήρα στην παραπάνω εξίσωση είναι υπερβολικά μικρή συγκρινόμενη με τον άλλο όρο της εξίσωσης επειδή ο αδρανειακού-τύπου πίνακας ${}^0\mathbf{D}_{\theta_m}$ περιέχει της μάζες και ροπές αδράνειας των κινητήρων οι οποίες είναι πολύ μικρές σε σχέση με τα αντίστοιχα μεγέθη του δορυφόρου και των συνδέσμων του βραχίονα που περιέχονται στον αδρανειακού-τύπου πίνακα ${}^0\mathbf{D}_q^*$. Έτσι, ο προτεινόμενος ελεγκτής επιτυγχάνει παρακολούθηση τόσο της διαμόρφωσης του βραχίονα όσο και της θέσης του ΤΣΔ.

Αν και ο προτεινόμενος ελεγκτής επιτυγχάνει να οδηγήσει το ΤΣΔ κατά μήκος του επιθυμητού δρόμου, για την αποτελεσματικότητα του ελεγκτή θα πρέπει να εξεταστεί και η ευστάθεια της εσωτερικής δυναμικής (internal dynamics), δηλαδή εάν οι εσωτερικές καταστάσεις του συστήματος παραμένουν φραγμένες. Στην περίπτωση μας, ελέγχουμε μόνο τη διαμόρφωση \mathbf{q} του βραχίονα ενώ η γωνιακή θέση θ_m στην έξοδο του μειωτήρα δεν ελέγχεται. Η εσωτερική δυναμική του ελεύθερα αιωρούμενου βραχίονα προκύπτει από τις εξισώσεις της δυναμικής που δεν περιέχουν τον νόμο ελέγχου, [84], δηλαδή:

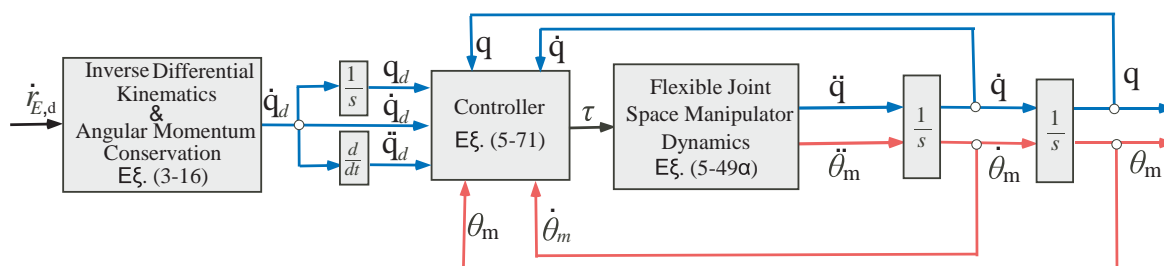
$$\mathbf{H}_{\mathbf{q}\mathbf{q}}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{H}_{\mathbf{q}\theta_m}(\mathbf{q})\ddot{\theta}_m + \mathbf{h}_1(\Theta, \dot{\Theta}) = \mathbf{0} \quad (5-50\alpha)$$

Εφόσον η μελέτη της εσωτερικής δυναμικής είναι συνήθως πολύπλοκη, θα μπορούσε να μελετηθεί η μηδενική-δυναμική (zero-dynamics) για να προκύψουν κάποια συμπεράσματα για την ευστάθεια της εσωτερικής δυναμικής, [84]. Η μηδενική-δυναμική προκύπτει θέτοντας $\mathbf{q} = \dot{\mathbf{q}} = \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$. Άρα η Εξ. (5-50α) γράφεται:

$$\ddot{\theta}_m = -\mathbf{H}_{\mathbf{q}\theta_m}^{-1} \mathbf{h}_1^*(\theta_m, \dot{\theta}_m) \quad (5-76)$$

Σημειώνεται ότι η είσοδος αναφοράς στον ελεγκτή είναι η επιθυμητή τροχιά $\mathbf{q}_d(t)$ της διαμόρφωσης του βραχίονα. Σε περίπτωση που είναι επιθυμητό το ΤΣΔ να ακολουθήσει επιθυμητή τροχιά $\mathbf{r}_{E,d}(t)$ στον Καρτεσιανό χώρο, ο υπολογισμός της αντίστοιχης επιθυμητής διαμόρφωσης του βραχίονα είναι εφικτός μόνο αν αποφευχθούν δυναμικές ιδιομορφίες. Έτσι είτε θα πρέπει ο επιθυμητός δρόμος του ΤΣΔ να βρίσκεται στις περιοχές PIW του χώρου εργασίας, [74], είτε ο προσανατολισμός του δορυφόρου του ΔΡΣ να βρίσκεται στο κατάλληλο εύρος, όπως αποδείχθηκε στο Κεφάλαιο 4.

Το Σχήμα 5.11 παρουσιάζει το δομικό διάγραμμα του προτεινόμενου συστήματος ελέγχου κλειστού βρόχου. Η κίνηση του ΤΣΔ ορίζεται από την επιθυμητή ταχύτητα $\dot{\mathbf{r}}_{E,d}$ του ΤΣΔ, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 5.11. Οι επιθυμητές ταχύτητες των αρθρώσεων του βραχίονα $\dot{\mathbf{q}}_d$ προκύπτουν από την επίλυση του αντίστροφου διαφορικού κινηματικού προβλήματος και της διατήρησης της στροφορμής του συστήματος, όπως αναλύθηκε στο Κεφάλαιο 4.



Σχήμα 5.11. Το δομικό διάγραμμα του προτεινόμενου συστήματος ελέγχου.

Εφαρμογή 5.2: Για την εφαρμογή της μεθόδου, χρησιμοποιείται ο επίπεδος διαστημικός βραχίονας 7-BE με εύκαμπτες αρθρώσεις του Σχήματος 5.4 και με παραμέτρους που παρουσιάζονται στους Πίνακες 5.1 και 5.2. Ο επιθυμητός δρόμος που πρέπει να ακολουθήσει το ΤΣΔ είναι κύκλος με κέντρο το σημείο (11.5, 6.5) m και ακτίνα $R=1.5\text{ m}$. Ο χρόνος κίνησης του ΤΣΔ επιλέγεται ίσος με $t_f=100\text{ s}$. Στους κινητήρες των αρθρώσεων εφαρμόζεται ο στατικός ελεγκτής γραμμικοποίησης μέσω ανατροφοδότησης, που δίνεται από την Εξ. (5-71). Οι πίνακες κέρδους δίνονται από τις Εξ. (5-73):

$$\mathbf{K}_P = \begin{bmatrix} 0.11 & 0 \\ 0 & 0.11 \end{bmatrix}, \mathbf{K}_D = \begin{bmatrix} 0.7 & 0 \\ 0 & 0.7 \end{bmatrix}, \mathbf{K}_I = \begin{bmatrix} 0.05 & 0 \\ 0 & 0.05 \end{bmatrix}$$

Μπορεί ναδειχτεί ότι ο παραπάνω επιθυμητός δρόμος του ΤΣΔ ανήκει σε περιοχή PDW του χώρου εργασίας του βραχίονα. Έτσι, πρώτα πρέπει να εξασφαλιστεί η αποφυγή πιθανών δυναμικών ιδιομορφιών κατά την κίνηση του ΤΣΔ. Όπως αποδείχθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο, η αποφυγή πιθανών δυναμικών ιδιομορφιών είναι εφικτή εάν ο αρχικός προσανατολισμός του δορυφόρου ανήκει σε κάποιο κατάλληλο εύρος τιμών. Εφαρμόζοντας, για τον παραπάνω επιθυμητό δρόμο του ΤΣΔ, τη μεθοδολογία που αναπτύχθηκε στο Κεφάλαιο 4, επιλέγεται ο προσανατολισμός $\theta_{0,in}=0^\circ$ ως ο αρχικός προσανατολισμός του δορυφόρου του ΔΡΣ ο οποίος εξασφαλίζει την αποφυγή ΔΙ.

Η επιθυμητή κυκλική τροχιά του ΤΣΔ ορίζεται από τις Εξ. (5-76):

$$\dot{x}_{E,d} = -R \sin(\varphi) \dot{\varphi} \quad (5-77\alpha)$$

$$\dot{y}_{E,d} = R \cos(\varphi) \dot{\varphi} \quad (5-77\beta)$$

όπου

$$\varphi(t) = \varphi_{in} + s(t)(\varphi_{fin} - \varphi_{in}) \quad (5-78\alpha)$$

όπου επιλέγονται $\varphi_{in}=0\text{ rad}$ και $\varphi_{fin}=2\pi\text{ rad}$, ώστε το ΤΣΔ να διαγράψει έναν πλήρη κύκλο, ενώ το μήκος τόξου παραμετροποίησης της διαδρομής $s(t)$ δίνεται από:

$$s(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5 \quad (5-78\beta)$$

με αρχικές και τελικές τιμές $s_{in}=0$ και $s_{fin}=1$ αντίστοιχα και μηδενικές αρχικές και τελικές ταχύτητες και επιταχύνσεις.

Η επιθυμητή γραμμική ταχύτητα του ΤΣΔ, η οποία εισάγεται στο προτεινόμενο σύστημα ελέγχου, βλ. Σχήμα 5.11, δίνεται από:

$$\dot{\mathbf{r}}_{E,d}(t) = R(\varphi_{fin} - \varphi_{in}) \begin{bmatrix} -\sin(\varphi(t)) \\ \cos(\varphi(t)) \end{bmatrix} \dot{s}(t) \quad (5-79)$$

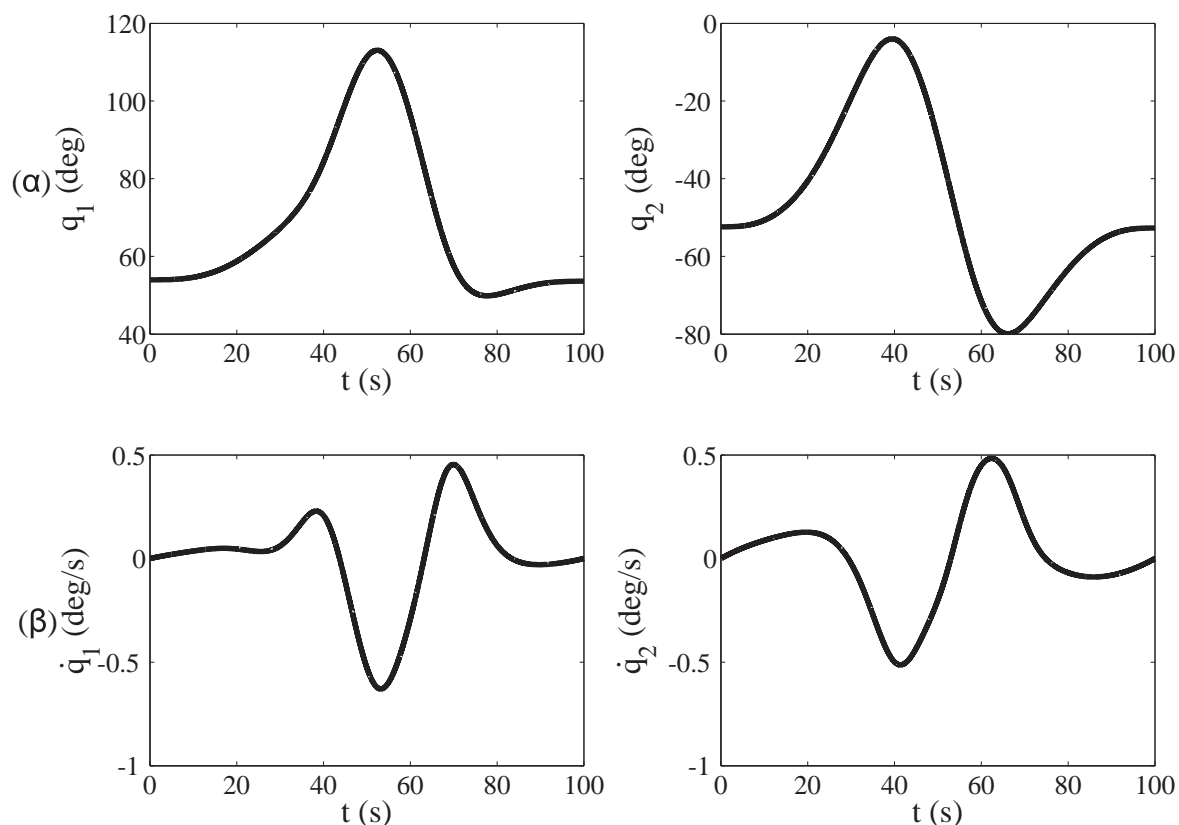
Όπως προκύπτει από την ανάλυση του Κεφαλαίου 3, για την επίτευξη της παραπάνω τροχιάς $\dot{\mathbf{r}}_{E,d}(t)$ του ΤΔΣ και στην περίπτωση που δεν εμφανίζονται ΔΙ, οι επιθυμητές ταχύτητες $\dot{\mathbf{q}}_d$ των αρθρώσεων, οι οποίες εισάγονται ως σήμα αναφοράς στο νόμο ελέγχου (βλ. Σχήμα 5.11), προκύπτουν από συνδυασμό την αντίστροφης διαφορική κινηματικής του ΔΡΣ και της διατήρησης της στροφορμής του ΔΡΣ αμελώντας τις ευκαμψίες των αρθρώσεων. Για επίπεδα ελεύθερα αιωρούμενα ΔΡΣ, το διάνυσμα-στήλη $\dot{\mathbf{q}}_d$ προκύπτει από την επίλυση των Εξ. (3-16) οι οποίες για μηδενική αρχική στροφορμή του ΔΡΣ γράφονται:

$$\dot{\mathbf{q}}_d = {}^0\mathbf{S}^{-1}(\mathbf{q}_d) \mathbf{R}_0^T(\theta_{0,d}) \dot{\mathbf{r}}_{E,d}(t) \quad (5-80\beta)$$

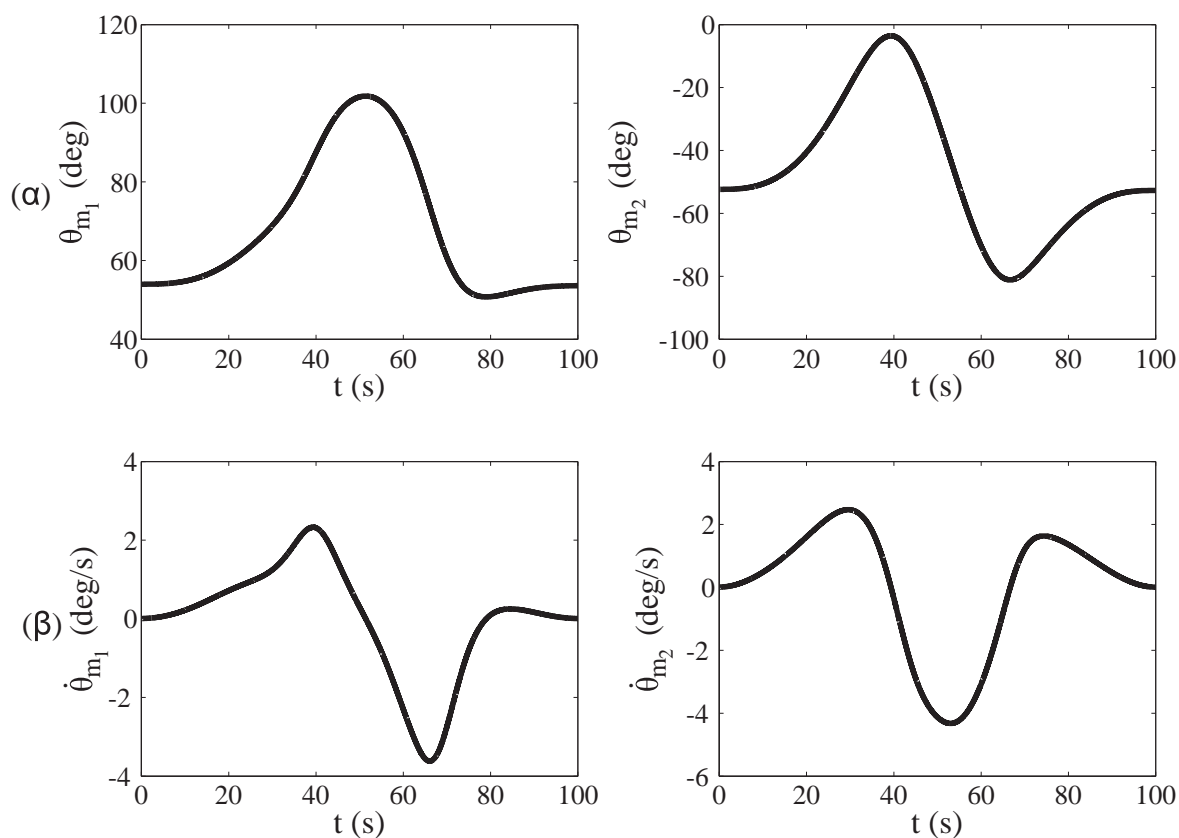
$$\dot{\theta}_{0,d} = -{}^0D^{-1}(\mathbf{q}_d) {}^0\mathbf{D}_q(\mathbf{q}_d) {}^0\mathbf{S}^{-1}(\mathbf{q}_d) \mathbf{R}_0^T(\theta_{0,d}) \dot{\mathbf{r}}_{E,d}(t) \quad (5-80\alpha)$$

Επίσης, από την Εξ. (5-74) προκύπτει ότι για τις παραπάνω επιθυμητές τροχιές \mathbf{q}_d των σχετικών γωνιών των αρθρώσεων ισχύει $D_2^*(\mathbf{q}_d) \neq 0$. Άρα μπορεί να σχεδιαστεί ο προτεινόμενος ελεγκτής που δίνεται από την Εξ. (5-71). Εφαρμόζοντας, λοιπόν, το σύστημα ελέγχου του Σχήματος 5.11, προκύπτουν οι ελεγχόμενες τροχιές των σχετικών γωνιών των αρθρώσεων του βραχίονα και οι αντίστοιχες τροχιές των ταχυτήτων τους οι οποίες παρουσιάζονται στο Σχήμα 5.12. Οι τροχιές αυτές συμπίπτουν με τις επιθυμητές τροχιές που δίνονται από τις Εξ. (5-80). Το Σχήμα 5.14 δείχνει τις μη ελεγχόμενες γωνιακές θέσεις και ταχύτητες στις εξόδους των μειωτήρων των αρθρώσεων ενώ το Σχήμα 5.14 δείχνει τον προσανατολισμό και τη γωνιακή ταχύτητα του δορυφόρου ΔΡΣ που προκύπτουν από τη διατήρηση της στροφορμής του συστήματος λαμβάνοντας υπόψη τις ευκαμψίες των αρθρώσεων, Εξ. (5-75). Οι ροπές που εφαρμόζονται στους κινητήρες των αρθρώσεων έτσι ώστε το ΤΣΔ να ακολουθήσει τον επιθυμητό δρόμο προκύπτουν από την Εξ. (5-71) και παρουσιάζονται στο Σχήμα 5.15. Τέλος, στο Σχήμα 5.16 παρουσιάζονται η κίνηση του ΤΣΔ και η αντίστοιχη κίνηση του ελεύθερα αιωρούμενου βραχίονα.

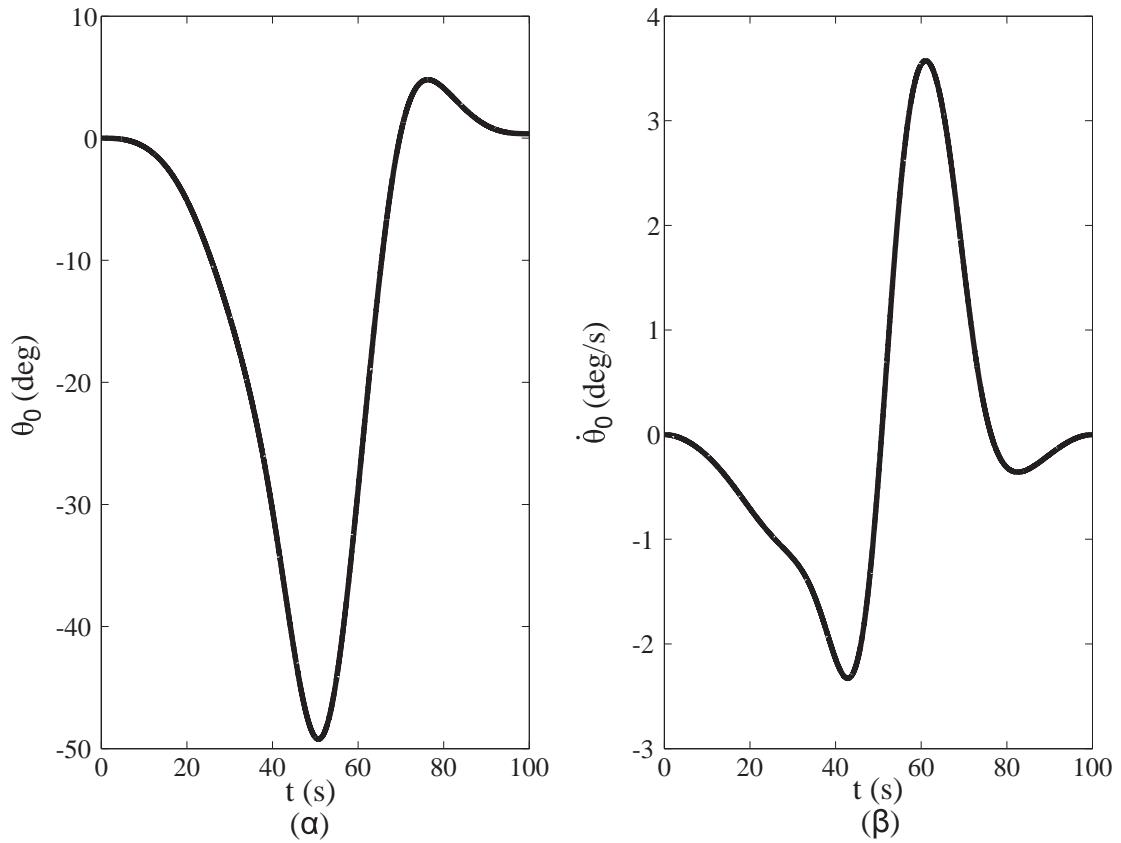
Όπως προκύπτει από το Σχήμα 5.16, ο προτεινόμενος νόμος ελέγχου επιτυγχάνει ακριβή παρακολούθηση του επιθυμητού δρόμου από το ΤΣΔ παρά το γεγονός ότι μόνο η διαμόρφωση του βραχίονα ελέγχεται.



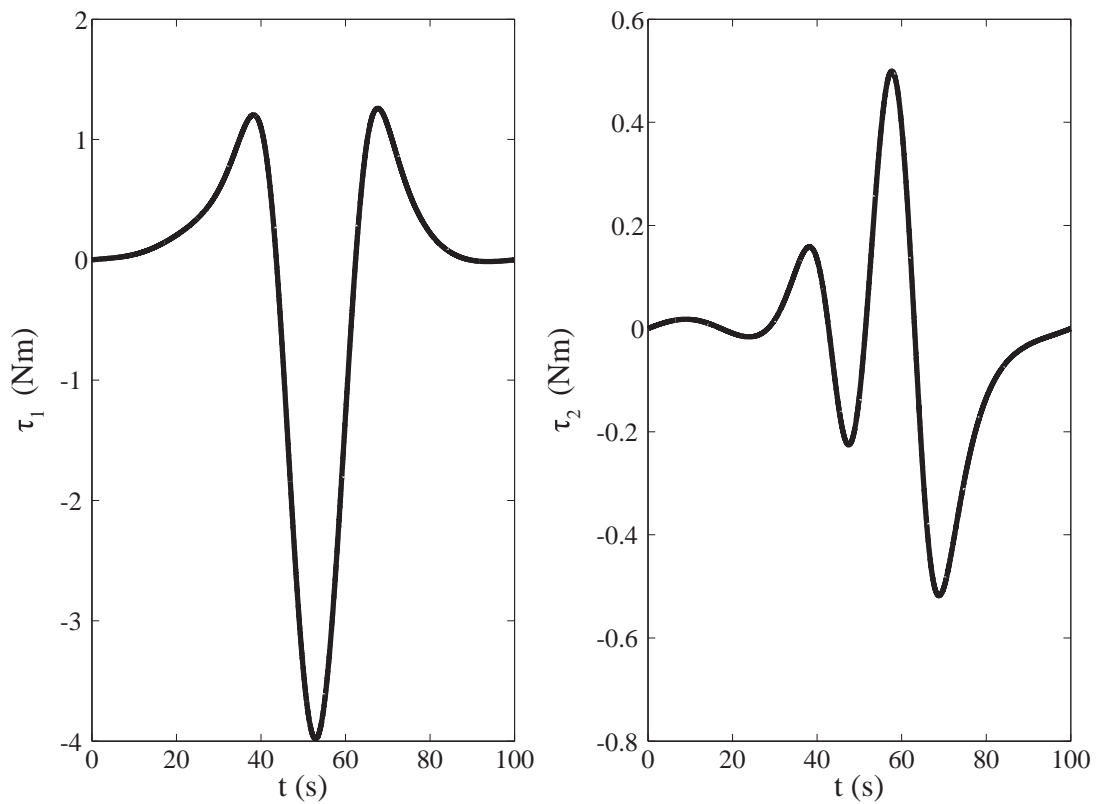
Σχήμα 5.12. (α) Οι τροχιές των σχετικών γωνιών, (β) Οι ταχύτητες των σχετικών γωνιών του βραχίονα για την επίτευξη του επιθυμητού δρόμου του ΤΣΔ.



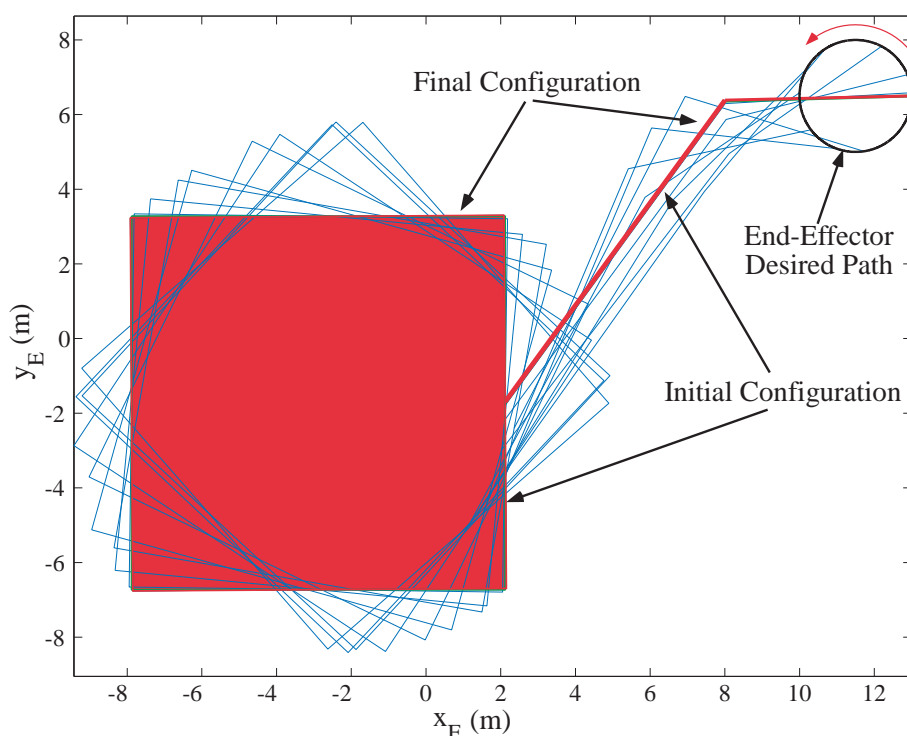
Σχήμα 5.13. (α) Τροχιές των γωνιών, (β) Ταχύτητες των γωνιών των μειωτήρων.



Σχήμα 5.14. (α) Ο προσανατολισμός και (β) η γωνιακή ταχύτητα του δορυφόρου.



Σχήμα 5.15. Οι απαιτούμενες ροπές στις αρθρώσεις ώστε το ΤΣΔ να ακολουθήσει τον επιθυμητό δρόμο.



Σχήμα 5.16. Στιγμιότυπα της κίνησης του ελεύθερα αιωρούμενου ρομποτικού βραχίονα.

5.6 Συμπεράσματα

Οι ευκαμψίες στους βραχίονες των ελεύθερα αιωρούμενων ΔΡΣ, εκτός από τις δυσκολίες στην πραγματοποίηση της επιθυμητής θέσης του ΤΣΔ, προκαλούν και ανεπιθύμητες ταλαντώσεις στο δορυφόρο του ΔΡΣ, λόγω της αλληλεπίδρασης βραχίονα – δορυφόρου. Στο κεφάλαιο αυτό, μελετήθηκε η δυναμική των εύκαμπτων ΔΡΣ θεωρώντας ότι όλες οι ευκαμψίες τους είναι συγκεντρωμένες στις αρθρώσεις των βραχιόνων τους. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Lagrange, εξάχθηκε το δυναμικό μοντέλο όπου οι εξισώσεις των συνδέσμων και των κινητήρων είναι συζευγμένες όχι μόνο μέσω της ροπής των ελαστικών δυνάμεων αλλά επίσης και σε επίπεδο επιταχύνσεων. Δείχθηκε ότι η δομή των πινάκων του δυναμικού μοντέλου των ελεύθερα αιωρούμενων ΔΡΣ με εύκαμπτες αρθρώσεις διαφέρει από την αντίστοιχη δομή του δυναμικού μοντέλου εύκαμπτων βραχιόνων σταθερής βάσης. Το εξαγόμενο δυναμικό μοντέλο δίνει νέες δυνατότητες στο σχεδιασμό ελεγκτών παρακολούθησης τροχιάς. Εκμεταλλευόμενοι, λοιπόν, τη δομή του εξαγόμενου μοντέλου, προτείνεται ένας στατικός ελεγκτής γραμμικοποίησης μέσω ανατροφοδότησης του οποίου το υπολογιστικό φορτίο είναι εφικτό για διαστημικές εφαρμογές. Η εφαρμογή του προτεινόμενου ελεγκτή εξασφαλίζει την εξάλειψη των ταλαντώσεων τόσο του βραχίονα όσο και του δορυφόρου του ελεύθερα αιωρούμενου ΔΡΣ. Ο προτεινόμενος ελεγκτής μπορεί να εφαρμοστεί επιτυχώς και για τροχιές του ΤΣΔ στον Καρτεσιανό χώρο έτσι ώστε το ΤΣΔ να ακολουθήσει τον επιθυμητό δρόμο παρά την ύπαρξη ευκαμψιών στις αρθρώσεις.

6 Συμπεράσματα και Μελλοντική Εργασία

6.1 Εισαγωγή

Στο πλαίσιο της παρούσας διδακτορικής διατριβής: α) Μελετήθηκε η επίδραση της αρχικής στροφορμής των ελεύθερα αιωρούμενων ΔΡΣ στις εξισώσεις κίνησης τους καθώς και στον σχεδιασμό δρόμου του ΤΣΔ τους στον Καρτεσιανό χώρο. β) Θεωρώντας πλήρη γνώση των κινηματικών και δυναμικών παραμέτρων του ΔΡΣ, σχεδιάστηκαν κατάλληλοι ελεγκτές στο χώρο των αρθρώσεων και στον Καρτεσιανό χώρο που εξασφαλίζουν ασυμπτωτική ευστάθεια παρά την ύπαρξη αρχικής στροφορμής στο ΔΡΣ. γ) Αναπτύχθηκε μια καινοτόμος μεθοδολογία η οποία επιτρέπει κινήσεις του ΤΣΔ σε οποιαδήποτε επιθυμητή διαδρομή στον Καρτεσιανό χώρο σε όλο το χώρο εργασίας του ΔΡΣ αποφεύγοντας την εμφάνιση πιθανών ΔΙ. δ) Αναπτύχθηκαν οι εξισώσεις στροφορμής και κίνησης των ΔΡΣ θεωρώντας ευκαμψίες στις αρθρώσεις των βραχιόνων τους και σχεδιάστηκε ένας νόμος ελέγχου ο οποίος επιτυγχάνει την παρακολούθηση τροχιών τόσο στο χώρο των αρθρώσεων όσο και στον Καρτεσιανό χώρο χωρίς να προκαλεί ανεπιθύμητες ταλαντώσεις στο δορυφόρο του ΔΡΣ. Στο κεφάλαιο αυτό γίνεται μια σύνοψη των κυριότερων συμπερασμάτων που προέκυψαν καθώς και προτάσεις για μελλοντική εργασία.

6.2 Συμπεράσματα

Στο Κεφάλαιο 2 αναπτύχθηκαν οι κινηματικές και δυναμικές εξισώσεις ενός ελεύθερα αιωρούμενου ΔΡΣ όταν η αρχική στροφορμή του συστήματος δεν θεωρείται αμελητέα. Δείχτηκε ότι η παρουσία μη μηδενικής στροφορμής στο σύστημα δρα ως διαταραχή στο ΔΡΣ. Στην περίπτωση αυτή, κατά την εκτέλεση κάποιας εργασίας, απαιτούνται ροπές οι οποίες αυξάνονται, αλλά με μη γραμμικό τρόπο, με αύξηση της στροφορμής του συστήματος. Επίσης, στα επίπεδα ΔΡΣ, οι εξισώσεις κίνησης του μειωμένου συστήματος, παρουσίας στροφορμής, είναι αποσυσζευγμένες από τον προσανατολισμό του δορυφόρου του ΔΡΣ, όπως συμβαίνει στην περίπτωση που θεωρείται μηδενική στροφορμή του ελεύθερα αιωρούμενου ΔΡΣ. Αντίθετα, στα τρισδιάστατα ΔΡΣ οι αντίστοιχες εξισώσεις κίνησης δεν είναι αποσυσζευγμένες από τον προσανατολισμό του δορυφόρου. Στην συνέχεια, θεωρώντας πλήρη γνώση του μοντέλου, αναπτύχθηκαν κατάλληλοι νόμοι ελέγχου στον χώρο των αρθρώσεων και στον Καρτεσιανό χώρο για την επίτευξη επιθυμητής διαμόρφωσης του βραχίονα και επιθυμητής θέσης του ΤΣΔ, αντίστοιχα, παρά την μη μηδενική στροφορμή του ΔΡΣ.

Στο Κεφάλαιο 3, αναπτύχθηκαν οι απαιτούμενες εξισώσεις που δίνουν τις ταχύτητες των αρθρώσεων που απαιτούνται για να ακολουθήσει το ΤΣΔ έναν επιθυμητό δρόμο στον

Καρτεσιανό χώρο, με ή χωρίς κατάλληλο επιθυμητό προσανατολισμό, καθώς επίσης και τη γωνιακή ταχύτητα του δορυφόρου του ελεύθερα αιωρούμενου ΔΡΣ που προκύπτει ως αποτέλεσμα της επιθυμητής κίνησης του ΤΣΔ. Για να είναι εφικτή η κίνηση του ΤΣΔ στο Καρτεσιανό χώρο και η εφαρμογή των εξαγόμενων εξισώσεων, θα πρέπει η κίνηση του να είναι απρόσβλητη από την πιθανή εμφάνιση ΔΙ. Για τον υπολογισμό των προϋποθέσεων κάτω από τις οποίες είναι εφικτή η πραγματοποίηση της επιθυμητής κίνησης του ΤΣΔ, στο ίδιο κεφάλαιο έγινε ανάλυση των ΔΙ των συστημάτων αυτών. Έως τώρα είχε γίνει αναλυτική μελέτη των ΔΙ μόνο των επίπεδων ΔΡΣ με ένα βραχίονα 2-BE, [66, 69-72]. Εδώ επεκτάθηκε η ανάλυση και σε επίπεδα ΔΡΣ με ένα βραχίονα 3-BE (που απαιτείται όταν το ΤΔΣ πρέπει να έχει και επιθυμητό προσανατολισμό). Στην περίπτωση αυτή, αποδείχτηκε ότι οι ΔΙ ιδιομορφίες είναι ανεξάρτητες από την κίνηση του τρίτου συνδέσμου αλλά εξαρτώνται μόνο από τα αδρανειακά χαρακτηριστικά του. Επίσης αναλύθηκαν οι ΔΙ ενός τρισδιάστατου ΔΡΣ με ένα βραχίονα 3-BE, κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις. Οι προϋποθέσεις αυτές αφορούν τη θέση του ρομποτικού βραχίονα πάνω στο δορυφόρο του ΔΡΣ καθώς και τη ροπή αδράνειας του δορυφόρου. Αποδείχτηκε ότι σε αυτό το ΔΡΣ παρουσιάζονται δύο περιπτώσεις ΔΙ, η κάθε μια προκαλεί απώλεια ΒΕ της ταχύτητας του ΤΣΔ με διαφορετικό τρόπο. Τέλος η ανάλυση ΔΙ επεκτάθηκε και σε τρισδιάστατα ΔΡΣ με ένα βραχίονα 6-BE με την παραδοχή ύπαρξης σφαιρικού καρπού.

Στο Κεφάλαιο 4, έχοντας κάνει ήδη στο προηγούμενο κεφάλαιο μια πλήρη ανάλυση των ΔΙ για επίπεδα και τρισδιάστατα ΔΡΣ με βραχίονες που έχουν μη πλεονάζοντες ΒΕ, αναπτύσσεται μια μεθοδολογία που υπολογίζει κατάλληλους αρχικούς προσανατολισμούς του δορυφόρου και τις αντίστοιχες αρχικές διαμορφώσεις του βραχίονα του ΔΡΣ επιτρέποντας τη διέλευση του ΤΣΔ και από δρόμους που διέρχονται από 'επικίνδυνες' περιοχές όπου είναι πιθανή η εμφάνιση ΔΙ. Η μεθοδολογία εφαρμόζεται σε επίπεδα και τρισδιάστατα ΔΡΣ με ή και χωρίς αρχική στροφορμή των οποίων ο βραχίονας έχει τους ελάχιστους ΒΕ ώστε το ΤΣΔ να διαγράφει επιθυμητούς δρόμους στο Καρτεσιανό χώρο με ή χωρίς επιθυμητό προσανατολισμό.

Στα προηγούμενα κεφάλαια, θεωρήθηκε ότι οι αρθρώσεις του ρομποτικού βραχίονα των ΔΡΣ είναι άκαμπτες. Στο Κεφάλαιο 5, λαμβάνονται υπόψη οι ευκαμψίες στις αρθρώσεις του βραχίονα και αναπτύσσονται οι εξισώσεις στροφορμής και κίνησης που προκύπτουν στην περίπτωση αυτή. Σχολιάζονται οι διαφορές και οι ομοιότητες από τις αντίστοιχες εξισώσεις κίνησης των επίγειων ρομποτικών βραχιόνων με εύκαμπτες αρθρώσεις. Επίσης, δείχνεται ότι οι ταλαντώσεις στην κίνηση του ΤΣΔ μπορούν να προκαλέσουν ανεπιθύμητες ταλαντώσεις και στη κίνηση του δορυφόρου του ΔΡΣ. Εκμεταλλευόμενοι τη δομή του πίνακα σύζευξης των δυναμικών εξισώσεων των ελεύθερα αιωρούμενων ΔΡΣ με εύκαμπτες αρθρώσεις, σχεδιάζεται ένας ελεγκτής γραμμικοποίησης μέσω ανατροφοδότησης που επιτυγχάνει αποσύζευξη του συστήματος και

παρακολούθηση τροχιών τόσο στο χώρο των αρθρώσεων όσο και στον Καρτεσιανό χώρο χωρίς να προκαλεί ανεπιθύμητες ταλαντώσεις στο δορυφόρο του ΔΡΣ.

6.3 Μελλοντική Εργασία

Στο Κεφάλαιο 2 αναπτύχθηκαν ελεγκτές που βασίζονται στο δυναμικό μοντέλο των ελεύθερα αιωρούμενων ΔΡΣ με αρχική στροφορμή, θεωρώντας ότι οι παράμετροι του μοντέλου είναι γνωστές. Στην πράξη όμως κάποιες παράμετροι του συστήματος δεν είναι γνωστές με ακρίβεια και οι προτεινόμενοι ελεγκτές μπορεί να οδηγήσουν το σύστημα σε αστάθεια. Για να αντιμετωπιστεί το πρόβλημα της αβεβαιότητας των παραμέτρων, θα πρέπει, σαν μελλοντική εργασία, να γίνει μια ανάλυση ευρωστίας των προτεινόμενων ελεγκτών ως προς τις παραμέτρους που είναι δύσκολο να είναι γνωστές με ακρίβεια. Επίσης, στη συνέχεια θα πρέπει να αναπτυχθούν, αν είναι δυνατόν, νόμοι προσαρμοστικού ελέγχου έτσι ώστε να μη είναι απαραίτητη η γνώση των παραμέτρων του μοντέλου.

Στα Κεφάλαιο 3, για να υπολογιστούν αναλυτικά οι εξισώσεις που ορίζουν τις ΔΙ του τρισδιάστατου ΔΡΣ έγιναν κάποιες παραδοχές που αφορούν τη θέση του βραχίονα πάνω στο δορυφόρο καθώς και την ροπή αδράνειας του δορυφόρου και επιπλέον η παραδοχή σφαιρικού καρπού για βραχίονες με 6-ΒΕ. Σαν μελλοντική εργασία, θα πρέπει να μελετηθεί πως επηρεάζει τις ΔΙ η μη ικανοποίηση των παραπάνω παραδοχών.

Στα Κεφάλαιο 4, η μεθοδολογία που προτείνεται για την αποφυγή των ΔΙ κατά την κίνηση του ΤΣΔ στον Καρτεσιανό χώρο, στηρίζεται στον υπολογισμό των διαμορφώσεων του ΔΡΣ οι οποίες αντιστοιχούν σε ολικά ακρότατα (ελάχιστο ή μέγιστο) της συνάρτησης που ορίζει τις ΔΙ. Παρόλα αυτά, η μέθοδος υπολογίζει αρχικά διαμορφώσεις του ΔΡΣ οι οποίες αντιστοιχούν σε τοπικά ακρότατα (στα οποία περιλαμβάνονται και τα ζητούμενα ολικά) και σε επόμενο στάδιο επιλέγονται μόνο αυτές που αντιστοιχούν στα ολικά απορρίπτοντας τις υπόλοιπες διαμορφώσεις. Θα πρέπει, λοιπόν, για βελτίωση της μεθόδου, να εξεταστεί αν είναι δυνατή η εισαγωγή επιπλέον συνθηκών ώστε η μέθοδος να δίνει κατευθείαν αυτές τις διαμορφώσεις του ΔΡΣ που αντιστοιχούν σε ολικά ακρότατα. Επίσης, ενώ η μέθοδος καταλήγει σε κατάλληλα διαστήματα αρχικών προσανατολισμών του δορυφόρου για τα επίπεδα ΔΡΣ, στα τρισδιάστατα ΔΡΣ εξάγει μόνο μεμονωμένους αρχικούς προσανατολισμούς του δορυφόρου τους. Θα πρέπει, λοιπόν, να εξεταστεί αν είναι δυνατή η εύρεση διαστημάτων που περιέχουν όλους τους δυνατούς αρχικούς προσανατολισμούς που εξασφαλίζουν τη αποφυγή ΔΙ και για τρισδιάστατα ΔΡΣ.

Στα Κεφάλαιο 5, για το σχεδιασμό του προτεινόμενου ελεγκτή, ο οποίος βασίζεται στο δυναμικό μοντέλο του ΔΡΣ, θεωρείται ότι οι όλες οι παράμετροι του συστήματος είναι γνωστές. Σαν μελλοντική εργασία, θα πρέπει να εξεταστεί η ευρωστία του ελεγκτή αυτού σε πιθανές αβεβαιότητες του μοντέλου. Επίσης, στην περίπτωση των ΔΡΣ με εύκαμπτες

αρθρώσεις δεν εξετάστηκε και η παράλληλη ύπαρξη μη μηδενικής στροφορμής στο ΔΡΣ. Θα πρέπει, λοιπόν, να εξεταστεί επίσης αν ο προτεινόμενος ελεγκτής μπορεί να αποσβέσει τις διαταραχές που προκαλούνται από τη στροφορμή του συστήματος.

Βιβλιογραφία

1. Abdul Hafez, A. H., Anurag, V. V., Shah, S. V., Madhava Krishna, K., and Jawahar, C. V., "Reactionless Visual Servoing of a Dual-Arm Space Robot," *IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA '14)*, May 31– June 7, 2014, Hong Kong, China, pp. 4475-4480.
2. Abiko, S., and Yoshida, K., "Adaptive Reaction Control for Space Robotic Applications with Dynamic Model Uncertainty," *Advanced Robotics*, Vol. 24, No. 8-9, 2010, pp. 1099-1126.
3. Aghili, F., "Optimal Control of a Space Manipulator for Detumbling a Target Satellite," *IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA '09)*, May 12–17, 2009, Kobe, Japan, pp. 3019-3024.
4. Aghili, F., "Coordination Control of a Free-Flying Manipulator and Its Base Attitude to Capture and Detumble a Noncooperative Satellite," *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS '09)*, October 11-15, 2009, St. Louis, USA, pp. 2365-2372.
5. Agrawal, S., Garimella, R., and Desmier, G., "Free-Floating Closed-Chain Planar Robots: Kinematics and Path Planning," *Nonlinear Dynamics*, Vol. 9, No. 1-2, February 1996, pp. 1-19.
6. Agrawal, S., Pathak, K., Franch, J., Lampariello, R., and Hirzinger, G., "Design of a Differentially Flat Open-Chain Space Robots with Arbitrarily Oriented Joints and Two Momentum Wheels at the Base," *IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA '06)*, May 15-19, 2006, Orlando, Florida, pp.3867-3872.
7. Agrawal, S., Pathak, K., Franch, J., Lampariello, R., and Hirzinger, G., "A Differentially Flat Open-Chain Space Robot with Arbitrarily Joint Axes and Two Momentum Wheels at the Base," *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 54, No. 9, September 2009, pp. 2185-2191.
8. Asada, H., and Slotine, J.J.E., "Robot Analysis and Control," *John Willey and Sons*, 1986.
9. Bobrow, J.E., Dubowsky, S., and Gibson, J.S., "Time-Optimal Control of Robotic Manipulators Along Specified Paths," *The International Journal of Robotics Research*, September 1985, Vol. 4, No. 3, September 1985, pp. 3-17.
10. Boning, P., and Dubowsky, S., "Coordinated Control of Space Robot Teams for the On-orbit Construction of Large Flexible Space Structures," *Advanced Robotics*, Vol. 24, No. 3, 2010, pp. 303-323.
11. Book J., W., "Structural Flexibility of Motion Systems in the Space Environment", *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 9, No. 5, October 1993, pp. 524-530.
12. Caccavale, F., and Siciliano, B., "Kinematic Control of Redundant Free-floating Robotic Systems", *Advanced Robotics*, Vol. 15, No. 4, 2001, pp. 429-448.
13. Craig, J., "Introduction to Robotics: Mechanics and Control," 3rd Edition, *Pearson, Prentice-Hall*, 2005.
14. De Luca, A., "Trajectory Control of flexible Manipulators," *Control Problems in Robotics and Automation*, Book Chapter, Springer, 1998, pp. 83-104.
15. De Luca, A., Lucibello, P., "A General Algorithm for Dynamic Feedback Linearization of Robots with Elastic Joints", *IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA '98)*, 16-20 May, 1998, Leuven, Belgium, pp. 504-510 (Vol.1).
16. De Luca, A., Lucibello, Schroder, D., Thummel, M., "An Acceleration-based State Observer for Robot Manipulators with Elastic Joints," *IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA '07)*, April 10–14, 2007, Roma, Italy, pp. 3817-3823.
17. Dimitrov, D., Yoshida, K., "Utilization of the Bias Momentum Approach for Capturing a Tumbling Satellite," *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS '04)*, September 28 – October 2, 2004, Sendai, Japan, pp. 3333-3338.

18. Dimitrov, D., Yoshida, K., "Momentum Distribution in a Space Manipulator for Facilitating the Post-Impact Control," *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS '04)*, September 28 – October 2, 2004, Sendai, Japan, pp. 3345-3350.
19. Dimitrov, D., Yoshida, K., "Utilization of Holonomic Distribution Control for Reactionless Path Planning," *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS '06)*, October 9-15, 2006, Beijing, China, pp. 3387-3392.
20. Dubowsky, S. and Torres, A. M., "Path Planning for Space Manipulators to Minimize Spacecraft Attitude Disturbances," *IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA '91)*, April 9-11, 1991, Sacramento, California, pp. 2522-2528.
21. Dubowsky, S. and Papadopoulos E., "The kinematics, Dynamics, and Control of Free-Flying and Free-Floating Space Robotic Systems," *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 9, No. 5, October 1993, pp. 531-543.
22. Flores-Abad, A., Ma, O., Rham, K. and Ulrich, S., "A Review of Space Robotics Technologies for On-Orbit Servicing," *Progress in Aerospace Sciences*, Vol. 68, July 2014, pp. 1-26.
23. Franch, J., Agrawal, S., Fattah, A., "Design of Differentially Flat Planar Space Robots: A Step Forward in Their Planning and Control," *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS '03)*, 27-31 October, 2003, Las Vegas, Nevada, pp. 3053-3058.
24. Ghorbel, F., Hung, J. Y., and Spong M. W., "Adaptive Control of Flexible Joint Manipulators," *IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA '89)*, May 14-19, 1989, Scottsdale, AZ, pp. 1188-1193 (Vol. 2).
25. Goldstein, H., Poole, C., and Safko, J., "Classical Mechanics," 3rd Edition, *Addison Wesley*, 2002.
26. Hirano, D., Fujii, Y., Abiko, S., Lampariello, R., Nagaoka, K., Yoshida, K., "Vibration Suppression Control of a Space Robot with Flexible Appendage Based on Simple Dynamic Model," *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS '13)*, November 3 – 7, 2013, Tokyo, Japan, pp. 789-794.
27. Hirano, D., Fujii, Y., Abiko, S., Lampariello, R., Nagaoka, K., Yoshida, K., "Simultaneous Control for End-Point Motion and Vibration Suppression of a Space Robot Based on Simple Dynamic Model," *IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA '14)*, May 31– June 7, 2014, Hong Kong, China, pp. 6631-6637.
28. Hu, Y. R., and Vucovich, G., "Dynamic Control of Free-Floating Coordinated Space Robots," *Journal of Robotic Systems*, Vol. 15, No. 4, April 1998, pp. 217-230.
29. Hu, Y. R., and Vucovich, G., "Modeling and Control of Free-flying Flexible Joint Coordinated Robots," *International Conference on Advanced Robotics (ICAR '97)*, 7-9 July, 1997, Monterey, CA, USA, pp. 1013-1020.
30. Hughes, C., P., "Spacecraft Attitude Dynamics," *John Willey*, New York, NY, 1986.
31. Lampariello, R., Agrawal, S., and Hirzinger, G., "Optimal Motion Planning for Free-Flying Robots," *IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA '03)*, 14-19 September, 2003, Taiwan, pp. 3029- 3035 (Vol. 3).
32. Lampariello, R., "Motion Planning for the On-orbit Grasping of a Non-cooperative Target Satellite with Collision Avoidance," *International Symposium on Artificial Intelligence, Robotics and Automation in Space, (i-SAIRAS '10)*, Sapporo, Japan, 2010.
33. Liu, S., Wu, L., and Lu, Z., "Impact Dynamics and Control of a Flexible Dual-arm Space Robot Capturing an Object," *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 185, No. 2, February 2007, pp. 1149-1159.
34. Lozano, R., Valera, A., Albertos, P., Arimoto, S., and Nakayama, T., "PD control of robot manipulators with joint flexibility, actuators dynamics and friction," *Automatica*, Vol. 35, No. 10, October 1999, pp. 1697-1700.
35. Markley, F. L., and Crasidis, J. L., "Fundamentals of Spacecraft Attitude Determination and Control," *Springer Science + Business Media*, New York, 2014.

36. Martin, E., Papadopoulos, E., and Angeles, J., "On the Interaction of Flexible Modes and on-off Thrusters in Space robotic Systems," *IEEE/RSJ International Conference on intelligent Robots and Systems (IROS '95)*, August 5-9, 1995, Pittsburgh, PA, pp. 65-70 (Vol. 2).
37. Martin, E., Papadopoulos, E., and Angeles, J., "A Novel Approach to Reduce Dynamic Interactions in Space Robots," *IASTED International Conference on Robotics and Applications*, October 28-30, 1999, Santa Barbara, CA, pp. 294-299.
38. Matsumoto, S., Jacobsen, S., Dubowsky, S., and Ohkami, Y., "Approach Planning and Guidance for Uncontrolled Rotating Satellite Capture Considering Collision Avoidance," *International Symposium on Artificial Intelligence, Robotics and Automation in Space (i-SAIRAS '03)*, May 19-23, 2009, NARA, Japan.
39. Matsuno, F. and Saito, K., "Attitude Control of a Space Robot with Initial Angular Momentum," *IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA '01)*, May 21-26, 2001, Seoul, Korea, pp. 1400-1405 (Vol. 2).
40. Meirovitch, L., "Methods of Analytical Dynamics," *McGraw Hill*, New York, 1970.
41. Mita, T., Hyon, S., and Nam, T., "Analytical Time Optimal Control Solution for a Two-Link Planar Acrobot with Initial Angular Momentum," *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 17, No. 3, June 2001, pp. 361-366.
42. Moosavian S. Ali. A, Rastegari R., "Multi-arm space free-flying robots for manipulating objects with force tracking restrictions," *Robotics and Autonomous Systems*, Vol. 54, No. 10, October 2006, pp. 779-788.
43. Moosavian S. Ali. A, Mostafavi M., "Multiple Impedance Control of Redundant Manipulators," *IEEE Conference on Robotics, Automation and Mechatronics*, June 1-3, 2006, Bangkok, Thailand, pp. 1-6.
44. Moosavian, S. Ali A., Papadopoulos E., "On the Kinematics of Multiple Space Free-Flyers and their Computation," *Journal of Robotic Systems*, Vol. 15, No. 4, April 1998, pp. 207-216.
45. Moosavian, S. Ali A., Papadopoulos E., "Explicit Dynamics of Space Free-Flyers with Multiple Manipulators via SPACEMAPLE," *Advanced Robotics*, Vol. 18, No. 2, 2004, pp. 223-244.
46. Moosavian, S. Ali A., Papadopoulos E., "On the Control of Space Free-Flyers Using Multiple Impedance Control," *IEEE International Conference on Robotics and Automation 1997 (ICRA '97)*, April 20-25, 1997, Albuquerque, NM, pp. 853-858 (Vol. 1).
47. Moosavian, S. Ali A., Papadopoulos E., "Free-Flying Robots Space: An Overview of Dynamics Modeling, Planning and Control," *Robotica*, Vol. 25, No. 5, September 2007, pp. 537-547.
48. Moosavian, S. Ali A., Papadopoulos E., "Modified Transpose Jacobian Control for Terrestrial and Space Robotic Systems," *Automatica*, Vol. 43, No. 7, July 2007, pp. 1226-1244.
49. Moosavian, S. Ali A., Papadopoulos E., "Cooperative Object Manipulation with Contact Impact Using Multiple Impedance Control," *International Journal of Control, Automation and Systems (JCAS)*, Vol. 8, No. 2, April 2010, pp. 314-327.
50. Nakamura, Y. and Mukherjee, R., "Nonholonomic Path Planning of Space Robots," *IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA '89)*, May 14-19, 1989, Scottsdale, AZ, pp. 1050-1055 (Vol. 2).
51. Nakamura, Y. and Mukherjee, R., "Nonholonomic Path Planning of Space Robots via a Bidirectional Approach," *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 7, No. 4, August 1991, pp. 500-514.
52. Nanos, K., and Papadopoulos, E., "On the Use of Free-floating Space Robots in the Presence of Angular Momentum," *IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics (AIM '10)*, July 6-9, 2010, Montreal, Que. Canada, pp. 1287-1292.

53. Nanos, K., and Papadopoulos, E., "On the Use of Free-floating Space Robots in the Presence of Angular Momentum," *Intelligent Service Robotics, Sp. Issue on Space Robotics*, Vol. 4, No. 1, 2011, pp. 3-15.
54. Nanos, K., and Papadopoulos, E., "On Cartesian Motions with Singularity Avoidance for Free-floating Space Robots," *IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA '12)*, May 14–18, 2012, St. Paul, MN, USA, pp. 5398-5403.
55. Nanos, K., and Papadopoulos, E., "Avoiding Dynamic Singularities in Cartesian Motions of Free-floating Manipulators," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems (TAES)*, Vol. 51, No. 3, July 2015, pp. 2305-2318.
56. Nanos, K., and Papadopoulos, E., "On the Dynamics and Control of Flexible Joint Space Manipulators," *IFAC Control Engineering Practice (CEP)*, Vol. 45, December 2015, pp. 230-243.
57. Nenchev, D., Umetani, Y., and Yoshida, K., "Analysis of a Redundant Free-Flying Spacecraft/Manipulator System," *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 8, No. 1, February 1992, pp. 1-6.
58. Nenchev, D., Yoshida, K., Vichitkulsawat, P., and Uchiyama, M., "Reaction Null-Space Control of Flexible Structure Mounted Manipulator Systems," *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 15, No. 6, December 1999, pp. 1011-1023.
59. Nenchev, D., and Yoshida, K., "Impact Analysis and Post-Impact Motion Control Issues of a Free-Floating Space Robot Subject to a Force Impulse," *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 15, No. 3, June 1999, pp. 548-557.
60. Nguyen Huynh, T.C., and Sharf, I., "Adaptive Reactionless Motion and Parameter Identification in Postcapture of Space Debris," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 36, No. 2, March-April 2013, pp. 404-414.
61. Noble, B., and Daniel, J. W., "Applied Linear Algebra," 3rd Ed., *Prentice-Hall*, Englewood Cliffs, NJ, 1987.
62. Oki, T., Nakanishi, H., and Yoshida, K., "Whole-Body Motion Control for Capturing a Tumbling Satellite by a Space Robot," *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS '07)*, October 29 – November 2, 2007, San Diego, CA, USA, pp. 2256-2261.
63. Oki, T., Nakanishi, H., and Yoshida, K., "Time-Optimal Manipulator Control for Management of Angular Momentum Distribution during the Capture of a Tumbling Target," *Advanced Robotics*, Vol. 24, No. 3, 2010, pp. 441-466.
64. Oki, T., Abiko, S., Nakanishi, H., Yoshida, K., "Time-Optimal Detumbling Maneuver Along an Arbitrary Arm Motion During the Capture of a Target Satellite," *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots & Systems (IROS '11)*, September 25–30, 2011, San Francisco, CA, USA, pp.625-630.
65. Ogilvie, A., Allport, J., Hannah, M., and Lymer, J., "Autonomous Satellite Servicing Using the Orbital Express Demonstration Manipulator System," *International Symposium on Artificial Intelligence, Robotics and Automation in Space, (i-SAIRAS '08)*, February 26 - 29, 2008, Hollywood, USA.
66. Pandey, S., Agrawal, S.: "Path Planning for Free-Floating Prismatic-Jointed Manipulators," *Multibody System Dynamics*, Vol. 1, No. 1, March 1997, pp. 127- 140.
67. Papadopoulos, E., "On the Dynamics and Control of Space Manipulators," *PhD Thesis*, Department of Mechanical Engineering, MIT, October 1990.
68. Papadopoulos, E., and Dubowsky, S., "Coordinated Manipulator/Spacecraft Motion Control for Space Robotic Systems," *IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA '91)*, April 9-11, 1991, Sacramento, CA, pp.1696-1701 (Vol. 2).
69. Papadopoulos, E., and Dubowsky, S., "Failure Recovery Control for Space Robotic Systems," *IEEE American Control Conference, (ACC '91)*, Boston MA, June 26-28, 1991, pp. 1485-1490.
70. Papadopoulos, E., and Dubowsky, S., "On the Nature of Control Algorithms for Free-Floating Space Manipulators," *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 7, No.6, December 1991, pp. 750-758.

71. Papadopoulos, E., "Path Planning for Space Manipulators Exhibiting Nonholonomic Behavior," *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS '92)*, July 7-10, 1992, Raleigh, NC, pp. 669-675.
72. Papadopoulos, E., Dubowsky, S., "Dynamic Singularities of Free-Floating Space Manipulators," *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol. 115, No. 1, March 1993, pp. 44-52.
73. Papadopoulos, E., "Nonholonomic Behavior in Free-Floating Space Manipulators and its Utilization," *chapter in Nonholonomic Motion Planning*, Zexiang Li and J.F. Canny, Eds. Boston: Kluwer Academic, 1993, pp. 423-445.
74. Papadopoulos, E., "Large Payload Manipulation by Space Robots," *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS '93)*, July 26-30, 1993, Yokohama, Japan, pp. 2087-2094 (Vol. 3).
75. Papadopoulos, E., and Moosavian, A., "Dynamics and Control of Multi-arm Space Robots During Chase and Capture Operations," *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS '94)*, September 12-16, 1994, Munich, Germany, pp. 1554-1561.
76. Papadopoulos, E., and Nanos, K., "On Configuration Planning for Free-floating Space Robots," *CISM-IFTOMM Symposium on Robot Design, Dynamics and Control*, June 14-18, 2004, Montreal, Canada.
77. Papadopoulos, E., Tortopidis, I., and Nanos, K., "Smooth Planning for Free-floating Space Robots Using Polynomials," *IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA '05)*, April 18-22, 2005, Barcelona, Spain, pp. 4272-4277.
78. Papadopoulos, E., Fragkos, I., and Tortopidis, I., "On Robot Gymnastics Planning with Non-zero Angular Momentum," *IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA '07)*, April 10-14, 2007, Roma, Italy, pp. 1443-1448.
79. Rastegari R., Moosavian S. Ali. A., "Multiple Impedance Control of Space Free-Flying Robots Using Virtual Object Grasp," *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS '06)*, October 9-15, 2006, Beijing, China, pp. 3125-3130.
80. Rekleitis, G., and Papadopoulos, E., "On-orbit Cooperating Space Robotics Servicers Handling a Passive Object," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems (TAES)*, Vol. 51, No. 2, April 2015.
81. Shah, S.V, Sharf, I., and Misra, A. K., "Reactionless Path Planning Strategies for Capture of Tumbling Objects in Space Using a Dual-Arm Robotic System," *AIAA Conference on Guidance, Navigation and Control (GNC)*, August 19-22, 2013, Boston, Massachusetts, USA.
82. Siciliano, B., Sciavicco, L., Villani, L., Oriolo, G., "Robotics, Modelling, Planning and Control," *Springer-Verlag*, 2009.
83. Sideris, T., "Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems," *Atlantis Press*, 2013.
84. Slotine, J.J.E., and Li, W., "Applied Nonlinear Control," *Prentice-Hall*, 1991.
85. Spong M. W., "Modeling and Control of Elastic Joint Robots," *ASME, Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol. 109, No. 4, December 1987, pp. 310-318.
86. Sugai, F., Abiko, S., Tsujita, T., Jiang, X., and Uchiyama, M. "Detumbling an Uncontrolled Satellite with Contactless Force by Using an Eddy Current Brake," *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS '13)*, November 3 – 7, 2013, Tokyo, Japan, pp. 783-788.
87. Tomei, P., "A Simple PD Controller for Robots with Elastic Joints," *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 36, No. 10, October 1991, pp. 1208-1213.
88. Torres, M.A., and Dubowsky, S., "Minimizing Spacecraft Attitude Disturbances in Space Manipulator Systems," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 15, No. 4, July 1992, pp. 1010-1017.
89. Tortopidis, I. and Papadopoulos, E., "Under-Actuated Space Robots: Physical and Algorithmic Constraints in Smooth Motion Planning," *International Conference on Robotics and Applications (ICAR '05)*, Oct. 31-Nov. 2, 2005, Cambridge, MA, USA.

90. Tortopidis, I., and Papadopoulos, E., "Point-to-Point Planning: Methodologies for Underactuated Space Robots," *IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA '06)*, May 15-19, 2006, Orlando, FL, USA, pp. 3861-3866.
91. Tortopidis, I., and Papadopoulos, E., "On Point-to-Point Motion Planning for Underactuated Space Manipulator Systems," *Robotics and Autonomous Systems*, Vol. 55, No. 2, February 2007, pp. 122- 131.
92. Ulrich, S., and Sasiadek, J. Z., "Modeling and Direct Adaptive Control of a Flexible-Joint Manipulator," *AIAA Journal of Guidance and Control, and Dynamics*, Vol. 35, No. 1, January-February 2012, pp. 25-39.
93. Ulrich, S., Sasiadek, J.Z., "Trajectory Tracking Control of Flexible Joint Space Manipulators," (CASJ-2010-0025), *Canadian Aeronautics and Space Journal*, Vol. 58, No. 1, 2012, pp. 47-59.
94. Ulrich, S., Sasiadek, J.Z., "Real-Time Estimation and Adaptive Control of Flexible Joint Space Manipulators", *Robot Motion and Control, Springer Lecture Notes in Control and Information Sciences (LUNCIS), Springer-Verlag*, Vol. 442, 2012, pp.215-224.
95. Umetani, Y., Yoshida, K., "Resolved Motion Rate Control of Space Manipulators with Generalized Jacobian Matrix," *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 5, No. 3, June 1989, pp. 303-314.
96. Umetani, Y., and Yoshida, K., "Workspace and Manipulability Analysis of Space Manipulator" *Trans. of the Society of Instrument and Control Engineers*, Vol. E-1, No. 1, 2001, pp. 1-8.
97. Vafa, Z., and Dubowsky, S., "On the Dynamics of Space Manipulators Using the Virtual Manipulator, with Applications to Path Planning," *chapter in Space Robotics: Dynamics and Control*, Xu, Y., Kanade, T., The Kluwer International Series in Engineering and Computer Science, Vol. 188, 1993, pp. 45-76.
98. Wang, H., Xie, Y., "Prediction Error Based Adaptive Jacobian Tracking for Free-Floating Space Manipulators," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. 48, No.4, October 2012, pp. 3207-3221.
99. Xu, W., Liang, B., Li, C., Liu, Y., and Xu, Y., "Autonomous Target Capturing of Free – floating Space Robot: Theory and Experiments," *Robotica*, Vol. 27, No. 3, May 2009, pp. 425 – 445.
100. Xu, W., Liang, B., and Xu, Y., "Survey of Modeling, Planning, and Ground Verification of Space Robotic Systems," *Acta Astronautica*, Vol. 68, No. 11-12, June-July 2011, pp.1629-1649.
101. Xu, W., Zhang, J., Qian, H., ; Chen, Y., Xu, Y., "Identifying the Singularity Conditions of Canadarm2 Based on Elementary Jacobian Transformation," *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS '13)*, November 3 – 7, 2013, Tokyo, Japan, pp. 795-800.
102. Yamada, K., Yoshikawa, S., Fujita, Y., "Arm Path Planning of a Space Robot with Angular Momentum," *Advanced Robotics*, Vol. 9, No. 6, 1995, pp. 693-709.
103. Yamano, M., Konno, A., Uchiyama, M., and Miyabe, T., "Capturing a Spinning Object by Two Flexible Manipulators," *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS '00)*, October 31 – November 5, 2000, Takamatsu, Japan, pp. 2036-2041 (Vol. 3).
104. Yoshida, K., Kurazume, R., and Umetani, Y., "Dual Arm Coordination in Space Free-Flying Robots," *IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA '91)*, Sacramento, California, April 9-11, 1991, pp. 2516-2521 (Vol. 3).
105. Yoshida, K., Hashizume, K., and Abiko, S., "Zero Reaction Maneuver: Validation with ETS-VII Space Robot and Extension to Kinematically Redundant Arm," *IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA '01)*, May 21-26, 2001, Seoul, Korea, pp. 441-446.
106. Yoshida, K., Nakanishi, H., Inaba, N., Ueno, H., and Oda, M., "Contact Dynamics and Control Strategy Based on Impedance Matching for Robotic Capture of a non-

- cooperative Satellite,” *CISM-IFTOMM Symposium on Robot Design, Dynamics and Control*, June 14-18, 2004, Montreal, Canada.
107. Yoshida, K., Dimitrov, D., and Nakanishi, H., “On the Capture of Tumbling Satellite by a Space Robot,” *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS '06)*, October 9 – 15, 2006, Beijing, China, pp. 4127-4132.
 108. Yoshida, K., “Achievements in Space Robotics,” *IEEE Robotics and Automation Magazine*, Vol. 16, No. 4, December 2009, pp. 20-28.
 109. Yoshikawa, S., and Yamada, K., “Impulsive Control for Angular Momentum Management of Tumbling Spacecraft,” *Acta Astronautica*, Vol. 60, No. 10-11, May-June 2007, pp. 810-819.
 110. Yu, X., and Chen L., “Dynamic Modeling and Control of a Free-flying Space Robot with Flexible-link and Flexible-joints,” *IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA '14)*, May 31– June 7, 2014, Hong Kong, China, pp. 6625-6630.
 111. Zappa, B., Legnani, G., and Adamini, R., “Path Planning of Free-Flying Space Manipulators: An Exact Solution for Polar Robots,” *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 40, No. 7, July 2005, pp. 806-820.
 112. Zarafshan, P., Moosavian, S. Ali A. and Papadopoulos E., “Adaptive Hybrid Suppression of Space Free-Flying Robots with Flexible Appendages,” *Robotica*, August 2014.

Παράρτημα Α

Στο παράρτημα αυτό δίνονται οι εξισώσεις που απαιτούνται για τον υπολογισμό της θέσης του ΤΣΔ καθώς και της γραμμικής και γωνιακής ταχύτητας του όπως επίσης και της στροφορμής του ΔΡΣ, μέσω της μεθόδου των βαρυκεντρικών διανυσμάτων, [67].

A.1 Υπολογισμός Θέσης ΤΣΔ.

Η θέση του ΤΣΔ ως προς το αδρανειακό ΣΣ δίνεται από:

$$\mathbf{r}_E = \mathbf{r}_{CM} + \mathbf{R}_0(\boldsymbol{\varepsilon}, n) \sum_{i=0}^N {}^0\mathbf{R}_i(\mathbf{q})^i \mathbf{v}_{iN,E} \quad (\text{A-1}\alpha)$$

όπου:

$${}^i \mathbf{v}_{iN,E} = {}^i \mathbf{v}_{iN} + \delta_{iN} {}^i \bar{\mathbf{r}}_{N,E} \quad (\text{A-1}\beta)$$

όπου τα βαρυκεντρικά διανύσματα ${}^i \mathbf{v}_{ik}$, εκφρασμένα στο ΣΣ $\{i\}$ του σώματος i ορίζονται από:

$${}^i \mathbf{v}_{iN} \equiv \begin{cases} {}^i \mathbf{r}_i^* & i < N \\ {}^i \mathbf{c}_i^* & i = N \\ {}^i \mathbf{l}_i^* & i > N \end{cases} \quad (\text{A-2})$$

όπου, όπως προκύπτει από το Σχήμα Α.1,

$${}^i \mathbf{c}_i^* = -{}^i \mathbf{c}_i \quad (\text{A-3}\alpha)$$

$${}^i \mathbf{r}_i^* = {}^i \mathbf{r}_i - {}^i \mathbf{c}_i \quad (\text{A-3}\beta)$$

$${}^i \mathbf{l}_i^* = {}^i \mathbf{l}_i - {}^i \mathbf{c}_i \quad (\text{A-3}\gamma)$$

όπου, όπως φαίνεται και στο Σχήμα Α.1, \mathbf{r}_i είναι το διάνυσμα από το ΚΜ του σώματος i στην άρθρωση $i+1$ και \mathbf{l}_i είναι το διάνυσμα από το ΚΜ του σώματος i στην άρθρωση i και

$${}^i \mathbf{c}_i = {}^i \mathbf{l}_i \mu_i + {}^i \mathbf{r}_i (1 - \mu_{i+1}) \quad (\text{A-4}\alpha)$$

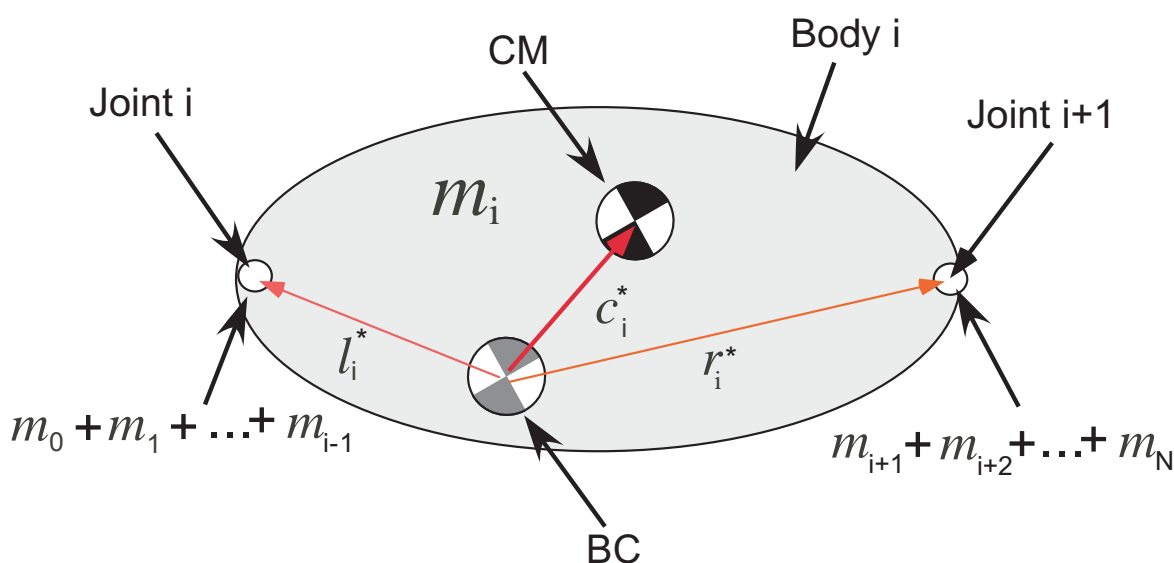
όπου το μέγεθος μ_i εκφράζει την κατανομή μάζας στο σύστημα και δίνεται από:

$$\mu_i \equiv \begin{cases} 0 & i=0 \\ \sum_{j=0}^{i-1} \frac{m_j}{M} & i=1, \dots, N \\ 1 & i=N+1 \end{cases} \quad (\text{A-4}\beta)$$

όπου N είναι ο αριθμός των αρθρώσεων του ρομποτικού βραχίονα και M είναι η συνολική μάζα του συστήματος.

Στο Σχήμα Α.1 ορίζεται το βαρύκεντρο (barycenter, BC) και τα βαρυκεντρικά διανύσματα \mathbf{c}_i^* , \mathbf{r}_i^* και \mathbf{l}_i^* του συνδέσμου i ενός συστήματος σωμάτων. Θεωρούμε ότι στην άρθρωση i είναι συγκεντρωμένη η μάζα των προηγούμενων σωμάτων από το σώμα i ,

δηλαδή μάζα $m_0 + m_1 + \dots + m_{i-1}$. Λαμβάνοντας υπόψη την Εξ. (A-4β), η μάζα αυτή ισούται με $\mu_i M$. Αντίστοιχα στην άρθρωση $i+1$ είναι συγκεντρωμένη η συνολική μάζα των επόμενων σωμάτων από το σώμα i , δηλαδή μάζα ίση με $m_{i+1} + m_{i+2} + \dots + m_N$ η οποία, σύμφωνα με την Εξ. (A-4β), ισοδυναμεί με $(1 - \mu_{i+1})M$. Το βαρύκεντρο του σώματος i είναι το ΚΜ του του νέου *επαυξημένου* σώματος i (augmented body) που σχηματίζεται λαμβάνοντας υπόψη τις παραπάνω συγκεντρωμένες μάζες στις αρθρώσεις. Η θέση του βαρύκεντρου του σώματος i σε σχέση με το ΚΜ του σώματος i ορίζεται από το σταθερό διάνυσμα c_i το οποίο δίνεται από την Εξ. (A-4α).



Σχήμα A.1. Ορισμός βαρύκεντρου και βαρυκεντρικών διανυσμάτων.

A.2 Υπολογισμός Γραμμικής και Γωνιακής ταχύτητας του ΤΣΔ.

Η γραμμική ταχύτητα του ΤΣΔ ως προς το αδρανειακό ΣΣ δίνεται από τη σχέση, [67]:

$$\dot{\mathbf{r}}_E = \dot{\mathbf{r}}_{cm} + \mathbf{R}_0(\varepsilon, n) ({}^0\mathbf{J}_{11}(\mathbf{q}) {}^0\boldsymbol{\omega}_0 + {}^0\mathbf{J}_{12}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}) \quad (\text{A-5})$$

όπου οι αδρανειακού τύπου πίνακες ${}^0\mathbf{J}_{11}$, ${}^0\mathbf{J}_{12}$ δίνονται από:

$${}^0\mathbf{J}_{11} \equiv - \sum_{i=1}^N [{}^0\mathbf{R}_i {}^i\mathbf{v}_{iN,E}]^\times \quad (\text{A-6a})$$

$${}^0\mathbf{J}_{12} \equiv - \sum_{i=1}^N [{}^0\mathbf{R}_i {}^i\mathbf{v}_{iN,E}]^\times {}^0\mathbf{F}_i \quad (\text{A-6β})$$

όπου:

$${}^0\mathbf{F}_k = [{}^0\mathbf{R}_1 {}^1\mathbf{u}_1 \quad {}^0\mathbf{R}_2 {}^2\mathbf{u}_2 \quad \dots \quad {}^0\mathbf{R}_k {}^k\mathbf{u}_k \quad \dots \quad \mathbf{0}] , \quad k=1, \dots, N \quad (\text{A-7})$$

όπου $\mathbf{0}$ είναι $3 \times (N - k)$ μηδενικός πίνακας.

Η γωνιακή ταχύτητα του ΤΣΔ ως προς το αδρανειακό ΣΣ δίνεται από τη σχέση:

$$\boldsymbol{\omega}_E = \mathbf{R}_0(\varepsilon, n) ({}^0\boldsymbol{\omega}_0 + {}^0\mathbf{J}_{22}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}) \quad (\text{A-8})$$

όπου ο αδρανειακού τύπου πίνακας ${}^0\mathbf{J}_{22}$ δίνεται από:

$${}^0\mathbf{J}_{22} = \begin{bmatrix} {}^0\mathbf{R}_1 {}^1\mathbf{u}_1 & {}^0\mathbf{R}_2 {}^2\mathbf{u}_2 & \cdots & {}^0\mathbf{R}_N {}^N\mathbf{u}_N \end{bmatrix} \quad (\text{A-9})$$

A.3 Υπολογισμός Στροφορμής του ΔΡΣ.

Η στροφορμή του ΔΡΣ, ως προς το ΚΜ του, δίνεται από:

$$\mathbf{h}_{\text{CM}} = \mathbf{R}_0(\boldsymbol{\varepsilon}, n) ({}^0\mathbf{D}^0 \boldsymbol{\omega}_0 + {}^0\mathbf{D}_q \dot{\mathbf{q}}) \quad (\text{A-10})$$

όπου ο αδρανειακού-τύπου πίνακας ${}^0\mathbf{D}$ είναι:

$${}^0\mathbf{D} \equiv \sum_{j=0}^N {}^0\mathbf{D}_j \quad (\text{A-11α})$$

ενώ ο αδρανειακού-τύπου πίνακας ${}^0\mathbf{D}_q$ δίνεται από:

$${}^0\mathbf{D}_q \equiv \sum_{j=1}^N {}^0\mathbf{D}_j {}^0\mathbf{F}_j \quad (\text{A-11β})$$

όπου ο πίνακας ${}^0\mathbf{F}_j$ ορίζεται από την Εξ. (A-7) ενώ ο πίνακας ${}^0\mathbf{D}_j$ που εμφανίζεται στις Εξ. (A-11) δίνεται από:

$${}^0\mathbf{D}_j \equiv \sum_{i=0}^N {}^0\mathbf{D}_{ij} \quad (\text{A-12})$$

όπου

$${}^0\mathbf{D}_{ij} = \begin{cases} -M({}^0\mathbf{r}_i^*)^\times ({}^0\mathbf{I}_j^*)^\times & i < j \\ {}^0\mathbf{I}_i + \sum_{k=0}^N m_k \{ ({}^0\mathbf{v}_{ik}^\top {}^0\mathbf{v}_{ik}) \mathbf{I}_3 - {}^0\mathbf{v}_{ik} {}^0\mathbf{v}_{ik}^\top \} & i = j \end{cases} \quad (\text{A-13α})$$

και

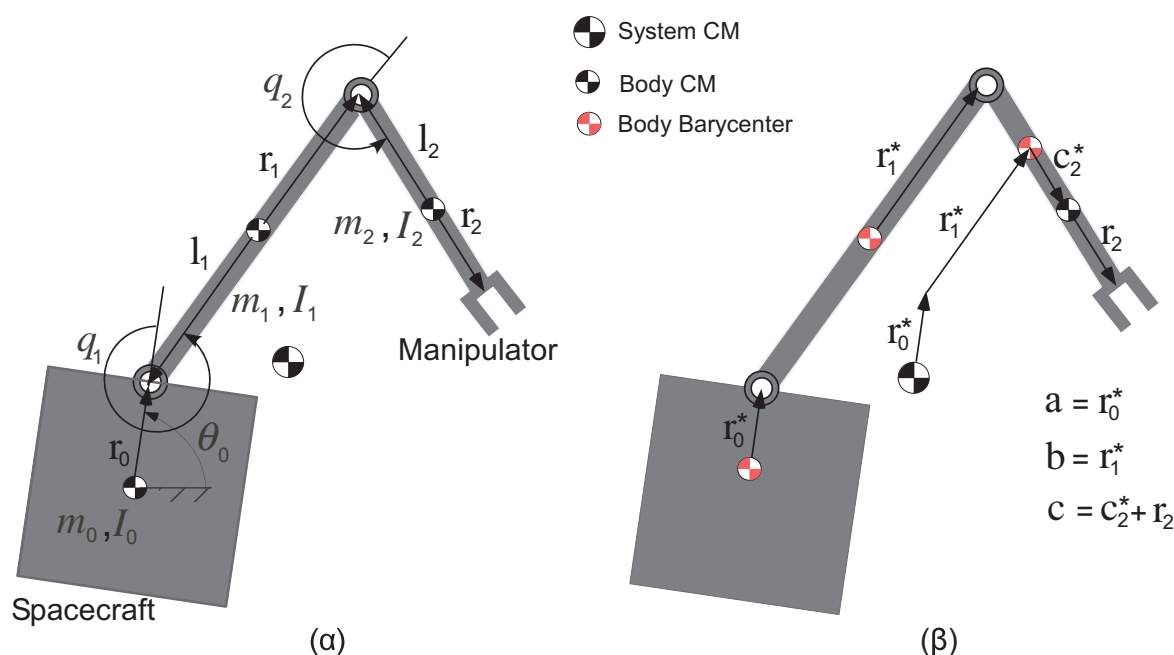
$${}^0\mathbf{D}_{ji} = {}^0\mathbf{D}_{ij}^\top \quad (\text{A-13β})$$

Παράρτημα Β

Στο παράρτημα αυτό αναπτύσσονται αναλυτικά οι εξισώσεις των επίπεδων ΔΡΣ που εφαρμόστηκαν στην παρούσα εργασία.

Β.1 Επίπεδο Ελεύθερα Αιωρούμενο ΔΡΣ με Βραχίονα 2-ΒΕ.

Για τη επίτευξη ενός επιθυμητού δρόμου του ΤΣΔ στο επίπεδο, χρησιμοποιείται το επίπεδο ΔΡΣ με βραχίονα 2-ΒΕ του Σχήματος Β.1.



Σχήμα Β.1. Επίπεδο ΔΡΣ με Βραχίονα 2-ΒΕ.

Β.1.1 Κινηματική Ανάλυση

Η θέση του ΤΣΔ ως προς το αδρανειακό ΣΣ δίνεται από τις σχέσεις:

$$x_E = a \cos(\theta_0) + b \cos(\theta_0 + q_1) + c \cos(\theta_0 + q_1 + q_2) \quad (\text{B-1}\alpha)$$

$$y_E = a \sin(\theta_0) + b \sin(\theta_0 + q_1) + c \sin(\theta_0 + q_1 + q_2) \quad (\text{B-1}\beta)$$

όπου:

$$a = m_0 r_0 / M \quad (\text{B-2}\alpha)$$

$$b = (m_0 l_1 + r_1 (m_0 + m_1)) / M \quad (\text{B-2}\beta)$$

$$c = r_2 + (m_0 + m_1) l_2 / M \quad (\text{B-2}\gamma)$$

$$M = m_0 + m_1 + m_2 \quad (\text{B-2}\delta)$$

Για τον υπολογισμό της διαμόρφωσης του ρομποτικού βραχίονα όταν το ΤΣΔ βρίσκεται σε γνωστή θέση (αντίστροφο κινηματικό πρόβλημα), έχουμε:

$$(x_E - a \cos(\theta_0))^2 + (y_E - a \sin(\theta_0))^2 = b^2 + c^2 + 2bc (\cos(\theta_0 + q_1) \cos(\theta_0 + q_1 + q_2) + \sin(\theta_0 + q_1) \sin(\theta_0 + q_1 + q_2)) \quad (\text{B-3}\alpha)$$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα:

$$\begin{aligned} & \cos(\theta_0 + q_1) \cos(\theta_0 + q_1 + q_2) + \sin(\theta_0 + q_1) \sin(\theta_0 + q_1 + q_2) \\ & = \cos(\theta_0 + q_1 + q_2 - (\theta_0 + q_1)) = \cos(q_2) \end{aligned} \quad (\text{B-3}\beta)$$

προκύπτει η Εξ. (B-4):

$$(x_E - a \cos(\theta_0))^2 + (y_E - a \sin(\theta_0))^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cos(q_2) \quad (\text{B-4})$$

η οποία επιλύεται στην:

$$\cos(q_2) = \frac{(x_E - a \cos(\theta_0))^2 + (y_E - a \sin(\theta_0))^2 - b^2 - c^2}{2bc} \quad (\text{B-5}\alpha)$$

Επίσης ισχύει ότι:

$$\sin(q_2) = \pm \sqrt{1 - \cos^2(q_2)} \quad (\text{B-5}\beta)$$

Χρησιμοποιώντας τις ταυτότητες:

$$\sin(\theta_0 + q_1 + q_2) = \sin(\theta_0 + q_1) \cos(q_2) + \sin(q_2) \cos(\theta_0 + q_1) \quad (\text{B-6}\alpha)$$

και

$$\cos(\theta_0 + q_1 + q_2) = \cos(\theta_0 + q_1) \cos(q_2) - \sin(\theta_0 + q_1) \sin(q_2) \quad (\text{B-6}\beta)$$

οι Εξ. (B-1) γράφονται:

$$x_E - a \cos(\theta_0) = -A \sin(\theta_0 + q_1) + B \cos(\theta_0 + q_1) \quad (\text{B-7}\alpha)$$

$$y_E - a \sin(\theta_0) = B \sin(\theta_0 + q_1) + A \cos(\theta_0 + q_1) \quad (\text{B-7}\beta)$$

όπου:

$$A = c \sin(q_2) \quad (\text{B-8}\alpha)$$

$$B = b + c \cos(q_2) \quad (\text{B-8}\beta)$$

Τελικά, η επίλυση του συστήματος των Εξ. (B-7) δίνει:

$$\sin(\theta_0 + q_1) = -\frac{A(x_E - a \cos(\theta_0)) - B(y_E - a \sin(\theta_0))}{b^2 + c^2 + 2bc \cos(q_2)} \quad (\text{B-9}\alpha)$$

$$\cos(\theta_0 + q_1) = \frac{A(y_E - a \sin(\theta_0)) + B(x_E - a \cos(\theta_0))}{b^2 + c^2 + 2bc \cos(q_2)} \quad (\text{B-9}\beta)$$

Οι γωνίες των αρθρώσεων για τις οποίες το ΤΣΔ βρίσκεται στη θέση (x_E, y_E) είναι

$$q_2 = \text{atan2}(\sin(q_2), \cos(q_2)) \quad (\text{B-10}\alpha)$$

$$q_1 = \text{atan2}(\sin(\theta_0 + q_1), \cos(\theta_0 + q_1)) - \theta_0 \quad (\text{B-10}\beta)$$

Επειδή για τη γωνία q_2 αντιστοιχούν 2 λύσεις, που δίνονται από τις Εξ. (B-10α) και (B-5), υπάρχουν 2 σχηματισμοί του βραχίονα για τους οποίους το ΤΣΔ βρίσκεται στη θέση (x_E, y_E) . Η πρώτη διαμόρφωση προκύπτει από τις Εξ. (B-10) θεωρώντας τη θετική λύση της Εξ. (B-5β) και αντιστοιχεί σε διαμόρφωση του βραχίονα με τον αγκώνα κάτω (elbow down). Η δεύτερη διαμόρφωση προκύπτει από τις Εξ. (B-10) θεωρώντας την αρνητική λύση της Εξ. (B-5β) και αντιστοιχεί σε διαμόρφωση του βραχίονα με τον αγκώνα πάνω (elbow up).

B.1.2 Κινηματική Ανάλυση των Ταχυτήτων του ΤΣΔ

Στη γενική περίπτωση, η γραμμική ταχύτητα του ΤΣΔ είναι, [67]:

$${}^0\dot{\mathbf{r}}_E = \mathbf{R}_0^T \dot{\mathbf{r}}_E = {}^0\mathbf{J}_{11} {}^0\boldsymbol{\omega}_0 + {}^0\mathbf{J}_{12} \dot{\mathbf{q}} \quad (\text{B-11})$$

όπου $\dot{\mathbf{r}}_E = [\dot{x}_E \ \dot{y}_E \ \dot{z}_E]^T$ και ${}^0\dot{\mathbf{r}}_E = [{}^0\dot{x}_E \ {}^0\dot{y}_E \ {}^0\dot{z}_E]^T$ είναι η ταχύτητα του ΤΣΔ εκφρασμένη στο αδρανειακό ΣΣ και στο ΣΣ {0} του δορυφόρου του ΔΡΣ, αντίστοιχα.

Οι πίνακες ${}^0\mathbf{J}_{11}$ και ${}^0\mathbf{J}_{12}$ για το επίπεδο ΔΡΣ με βραχίονα 2-ΒΕ δίνονται από:

$${}^0\mathbf{J}_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -(b s_{(q_1)} + c s_{(q_1+q_2)}) \\ 0 & 0 & a + b c_{(q_1)} + c c_{(q_1+q_2)} \\ b s_{(q_1)} + c s_{(q_1+q_2)} & -(a + b c_{(q_1)} + c c_{(q_1+q_2)}) & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B-12α})$$

και

$${}^0\mathbf{J}_{12} = \begin{bmatrix} -(b s_{(q_1)} + c s_{(q_1+q_2)}) & -c s_{(q_1+q_2)} \\ b c_{(q_1)} + c c_{(q_1+q_2)} & c c_{(q_1+q_2)} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B-12β})$$

όπου $c_{(\cdot)} = \cos(\cdot)$ και $s_{(\cdot)} = \sin(\cdot)$.

Στις επίπεδες κινήσεις ισχύουν ότι $\dot{z}_E = {}^0\dot{z}_E = 0$ και ${}^0\boldsymbol{\omega}_0 = [0 \ 0 \ \dot{\theta}_0]^T$. Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω, η Εξ. (B-11) γράφεται:

$$\begin{bmatrix} {}^0\dot{x}_E \\ {}^0\dot{y}_E \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -(b s_{(q_1)} + c s_{(q_1+q_2)}) \\ 0 & 0 & a + b c_{(q_1)} + c c_{(q_1+q_2)} \\ b s_{(q_1)} + c s_{(q_1+q_2)} & -(a + b c_{(q_1)} + c c_{(q_1+q_2)}) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -(b s_{(q_1)} + c s_{(q_1+q_2)}) & -c s_{(q_1+q_2)} \\ b c_{(q_1)} + c c_{(q_1+q_2)} & c c_{(q_1+q_2)} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} \quad (\text{B-13α})$$

ή απλούστερα:

$$\begin{bmatrix} {}^0\dot{x}_E \\ {}^0\dot{y}_E \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -(b s_{(q_1)} + c s_{(q_1+q_2)}) \\ a + b c_{(q_1)} + c c_{(q_1+q_2)} \end{bmatrix}}_{{}^0\mathbf{J}_{11}} \dot{\theta}_0 + \underbrace{\begin{bmatrix} -(b s_{(q_1)} + c s_{(q_1+q_2)}) & -c s_{(q_1+q_2)} \\ b c_{(q_1)} + c c_{(q_1+q_2)} & c c_{(q_1+q_2)} \end{bmatrix}}_{{}^0\mathbf{J}_{12}} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} \quad (\text{B-13β})$$

όπου

$$\begin{bmatrix} {}^0\dot{x}_E \\ {}^0\dot{y}_E \end{bmatrix} = \mathbf{R}_0^T \begin{bmatrix} \dot{x}_E \\ \dot{y}_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{(\theta_0)} & s_{(\theta_0)} \\ -s_{(\theta_0)} & c_{(\theta_0)} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \dot{x}_E \\ \dot{y}_E \end{bmatrix} \quad (\text{B-14})$$

Τελικά, η γραμμική ταχύτητα του ΤΣΔ στο επίπεδο είναι:

$$\dot{\mathbf{r}}_E = \mathbf{R}_0 ({}^0\mathbf{J}_{11} \dot{\theta}_0 + {}^0\mathbf{J}_{12} \dot{\mathbf{q}}) \quad (\text{B-15})$$

όπου ο πίνακας περιστροφής \mathbf{R}_0 , στην περίπτωση αυτή, γράφεται:

$$\mathbf{R}_0 = \begin{bmatrix} c_{(\theta_0)} & s_{(\theta_0)} \\ -s_{(\theta_0)} & c_{(\theta_0)} \end{bmatrix} \quad (\text{B-16})$$

και οι πίνακες ${}^0\mathbf{J}_{11}$ και ${}^0\mathbf{J}_{12}$ δίνονται από τις εξισώσεις:

$${}^0\mathbf{J}_{11} = \begin{bmatrix} -(b s_{(q_1)} + c s_{(q_1+q_2)}) \\ a + b c_{(q_1)} + c c_{(q_1+q_2)} \end{bmatrix} \quad (\text{B-17α})$$

$${}^0\mathbf{J}_{12} = \begin{bmatrix} -(b s_{(q_1)} + c s_{(q_1+q_2)}) & -c s_{(q_1+q_2)} \\ b c_{(q_1)} + c c_{(q_1+q_2)} & c c_{(q_1+q_2)} \end{bmatrix} \quad (\text{B-17β})$$

B.1.3 Διατήρηση της Στροφορμής του ΔΡΣ

Η διατήρηση της στροφορμής του συστήματος δίνεται από τη σχέση, [67]:

$${}^0\mathbf{D} {}^0\boldsymbol{\omega}_0 + {}^0\mathbf{D}_q \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{R}_0^T \mathbf{h}_{\text{CM}} \quad (\text{B-18})$$

όπου για το επίπεδο ΔΡΣ με βραχίονα 2-BE, οι πίνακες ${}^0\mathbf{D}$ και ${}^0\mathbf{D}_q$ δίνονται από:

$${}^0\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_{11}(q_1, q_2) & d_{12}(q_1, q_2) & 0 \\ d_{21}(q_1, q_2) & d_{22}(q_1, q_2) & 0 \\ 0 & 0 & {}^0D_0 + {}^0D_1 + {}^0D_2 \end{bmatrix} \quad (\text{B-19α})$$

και

$${}^0\mathbf{D}_q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ {}^0D_1 + {}^0D_2 & {}^0D_2 \end{bmatrix} \quad (\text{B-19β})$$

Στις Εξ. (B-19) οι όροι 0D_i , $i=0,1,2$ δίνονται από:

$${}^0D_0 = a_{00} + a_{01} \cos(q_1) + a_{02} \cos(q_1 + q_2) \quad (\text{B-20α})$$

$${}^0D_1 = a_{01} \cos(q_1) + a_{11} + a_{12} \cos(q_2) \quad (\text{B-20β})$$

$${}^0D_2 = a_{02} \cos(q_1 + q_2) + a_{12} \cos(q_2) + a_{22} \quad (\text{B-20γ})$$

όπου

$$a_{00} = I_0 + m_0 (m_1 + m_2) r_0^2 / M \quad (\text{B-21α})$$

$$a_{01} = m_0 r_0 (l_1 (m_1 + m_2) + r_1 m_2) / M \quad (\text{B-21β})$$

$$a_{02} = m_0 m_2 r_0 l_2 / M \quad (\text{B-21γ})$$

$$a_{11} = I_1 + (m_0 m_1 l_1^2 + m_1 m_2 r_1^2 + m_0 m_2 (l_1 + r_1)^2) / M \quad (\text{B-21δ})$$

$$a_{21} = m_2 l_2 (m_1 r_1 + m_0 (l_1 + r_1)) / M \quad (\text{B-21ε})$$

$$a_{22} = I_2 + m_2 (m_0 + m_1) l_2^2 / M \quad (\text{B-21στ})$$

Οι πίνακες ${}^0\mathbf{D}$ και ${}^0\mathbf{D}_q$ που δίνονται από τις Εξ. (B-19) μπορούν να γραφτούν σε απλούστερη μορφή. Λαμβάνοντας υπόψη ότι στις επίπεδες κινήσεις ισχύουν ότι ${}^0\boldsymbol{\omega}_0 = [0 \ 0 \ \dot{\theta}_0]^T$ και $\mathbf{h}_{CM} = [0 \ 0 \ h_{CM}]^T$, η Εξ. (B-18) γράφεται:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} d_{11}(q_1, q_2) & d_{12}(q_1, q_2) & 0 \\ d_{21}(q_1, q_2) & d_{22}(q_1, q_2) & 0 \\ 0 & 0 & {}^0D_0 + {}^0D_1 + {}^0D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ {}^0D_1 + {}^0D_2 & {}^0D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} \cos(\theta_0) & \sin(\theta_0) & 0 \\ -\sin(\theta_0) & \cos(\theta_0) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ h_{CM} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B-22}\alpha)$$

ή απλούστερα:

$$\underbrace{({}^0D_0 + {}^0D_1 + {}^0D_2)}_{{}^0D} \dot{\theta}_0 + \underbrace{\begin{bmatrix} {}^0D_1 + {}^0D_2 & {}^0D_2 \end{bmatrix}}_{{}^0\mathbf{D}_q} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = h_{CM} \quad (\text{B-22}\beta)$$

Η Εξ. (B-18), λοιπόν, για επίπεδες κινήσεις γράφεται:

$${}^0D \dot{\theta}_0 + {}^0\mathbf{D}_q \dot{\mathbf{q}} = h_{CM} \quad (\text{B-23})$$

όπου το βαθμωτό μέγεθος 0D και ο πίνακας ${}^0\mathbf{D}_q$, στην περίπτωση ΔΡΣ με βραχίονα 2-ΒΕ, δίνονται από τις εξισώσεις:

$${}^0D = {}^0D_0 + {}^0D_1 + {}^0D_2 \quad (\text{B-24}\alpha)$$

$${}^0\mathbf{D}_q = \begin{bmatrix} {}^0D_1 + {}^0D_2 & {}^0D_2 \end{bmatrix} \quad (\text{B-24}\beta)$$

B.1.4 Ανάλυση Δυναμικών Ιδιομορφιών

Στα επίπεδα συστήματα, η Γενικευμένη Ιακωβιανή δίνεται από τη σχέση:

$${}^0\mathbf{S} = -{}^0\mathbf{J}_{11} {}^0D^{-1} {}^0\mathbf{D}_q + {}^0\mathbf{J}_{12} \quad (\text{B-25})$$

Με αντικατάσταση των πινάκων από τις Εξ. (B-17) και (B-24), στην Εξ. (B-25) προκύπτει ο 2x2 πίνακας:

$${}^0\mathbf{S} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{B-26})$$

όπου:

$$s_{11} = -(b s_{(q_1)} + c s_{(q_1+q_2)}) + \frac{({}^0D_1 + {}^0D_2)(b s_{(q_1)} + c s_{(q_1+q_2)})}{{}^0D_0 + {}^0D_1 + {}^0D_2} \quad (\text{B-27}\alpha)$$

$$s_{12} = -c s_{(q_1+q_2)} + \frac{{}^0D_2 (b s_{(q_1)} + c s_{(q_1+q_2)})}{{}^0D_0 + {}^0D_1 + {}^0D_2} \quad (\text{B-27}\beta)$$

$$s_{21} = b c_{(q_1)} + c c_{(q_1+q_2)} - \frac{({}^0D_1 + {}^0D_2)(a + b c_{(q_1)} + c c_{(q_1+q_2)})}{{}^0D_0 + {}^0D_1 + {}^0D_2} \quad (\text{B-27}\gamma)$$

$$s_{22} = c c_{(q_1+q_2)} - \frac{{}^0D_2 (a + b c_{(q_1)} + c c_{(q_1+q_2)})}{{}^0D_0 + {}^0D_1 + {}^0D_2} \quad (\text{B-27δ})$$

Οι Ιδιομορφίες του βραχίονα προκύπτουν όταν η ορίζουσα του πίνακα \mathbf{S} γίνει μηδέν. Η ορίζουσα αυτή είναι:

$$s = \det({}^0\mathbf{S}(q_1, q_2)) \quad (\text{B-28α})$$

$$s = s_{11} s_{22} - s_{12} s_{21} \quad (\text{B-28β})$$

$$s(q_1, q_2) = \frac{ab {}^0D_2 s_{(q_1)} + bc {}^0D_0 s_{(q_2)} - ac {}^0D_1 s_{(q_1+q_2)}}{{}^0D(q_1, q_2)} \quad (\text{B-28γ})$$

Η συνάρτηση που μηδενίζει την ορίζουσα του πίνακα ${}^0\mathbf{S}$ είναι:

$$S(q_1, q_2) = ab {}^0D_2 s_{(q_1)} + bc {}^0D_0 s_{(q_2)} - ac {}^0D_1 s_{(q_1+q_2)} \quad (\text{B-29α})$$

Με αντικατάσταση των πινάκων 0D_i , $i=0,1,2$ προκύπτει:

$$S(q_1, q_2) = k_0(q_1) + k_1(q_1) \sin(q_2) + k_2(q_1) \cos(q_2) \quad (\text{B-29β})$$

όπου:

$$k_0 = b(aa_{22} - ca_{02}) \sin(q_1) \quad (\text{B-30α})$$

$$k_1 = -(aba_{02} + aca_{01} - 2bca_{00}) / 2 + c(-aa_{11} + ba_{01}) \cos(q_1) + a(ba_{02} - ca_{01}) \cos(2q_1) / 2 \quad (\text{B-30β})$$

$$k_2 = a(ba_{21} - ca_{11}) \sin(q_1) + a(ba_{02} - ca_{01}) \sin(2q_1) / 2 \quad (\text{B-30γ})$$

Στην περίπτωση που η συνάρτηση που ορίζει τις Δl δίνεται από την Εξ. (B-29β), προκύπτει ότι η εξίσωση:

$$S(q_1, q_2) = S_0 \quad (\text{B-31})$$

όπου S_0 σταθερά, έχει λύσεις τις:

$$q_2 = \arcsin[(S_0 - k_0) \cos \varphi / k_1] - \varphi \quad (\text{B-32α})$$

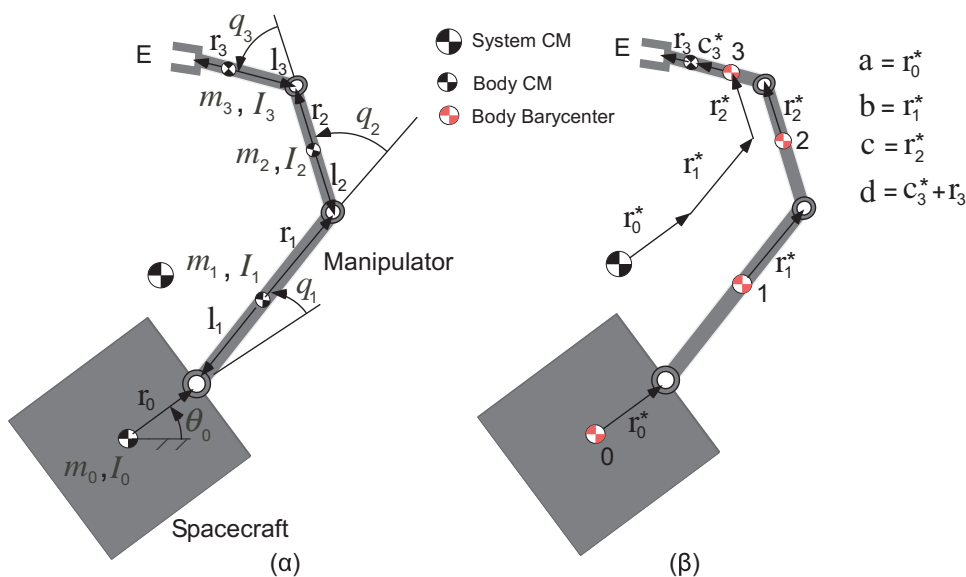
$$q_2 = \pi - \arcsin[(S_0 - k_0) \cos \varphi / k_1] - \varphi \quad (\text{B-32β})$$

όπου

$$\varphi = \arctan[k_2 / k_1] \quad (\text{B-32γ})$$

B.2 Επίπεδο Ελεύθερα Αιωρούμενο ΔΡΣ με Βραχίονα 3-ΒΕ.

Για τη επίτευξη ενός επιθυμητού δρόμου θέσης και προσανατολισμού του ΤΣΔ στο επίπεδο, χρησιμοποιείται το επίπεδο ΔΡΣ με ένα βραχίονα 3-ΒΕ του Σχήματος Β.2.



Σχήμα Β.2 (α) Ορισμός των αδρανειακών ιδιοτήτων και των παραμέτρων διαμόρφωσης ενός επίπεδου ελεύθερα αιωρούμενου ΔΡΣ με βραχίονα 3-ΒΕ, (β) Τα βαρυκεντρικά διανύσματα **a**, **b**, **c** και **d** του συστήματος.

Β.2.1 Κινηματική Ανάλυση

Η θέση και ο προσανατολισμός του ΤΣΔ ως προς το αδρανειακό ΣΣ δίνεται από τις σχέσεις:

$$x_E = a \cos(\theta_0) + b \cos(\theta_0 + q_1) + c \cos(\theta_0 + q_1 + q_2) + d \cos(\theta_0 + q_1 + q_2 + q_3) \quad (\text{B-33}\alpha)$$

$$y_E = a \sin(\theta_0) + b \sin(\theta_0 + q_1) + c \sin(\theta_0 + q_1 + q_2) + d \sin(\theta_0 + q_1 + q_2 + q_3) \quad (\text{B-33}\beta)$$

$$\theta_E = \theta_0 + q_1 + q_2 + q_3 \quad (\text{B-33}\gamma)$$

όπου:

$$a = m_0 r_0 / M \quad (\text{B-34}\alpha)$$

$$b = (l_1 m_0 + (m_0 + m_1) r_1) / M \quad (\text{B-34}\beta)$$

$$c = (l_2 (m_0 + m_1) + r_2 (m_0 + m_1 + m_2)) / M \quad (\text{B-34}\gamma)$$

$$d = l_3 (m_0 + m_1 + m_2) / M + r_3 \quad (\text{B-34}\delta)$$

$$M = m_0 + m_1 + m_2 + m_3 \quad (\text{B-34}\epsilon)$$

Για τον υπολογισμό της διαμόρφωσης του ρομποτικού βραχίονα όταν το ΤΣΔ βρίσκεται σε γνωστή θέση (αντίστροφο κινηματικό πρόβλημα), έχουμε:

$$\cos(q_2) = \frac{(x_E - a \cos(\theta_0) - d \cos(\theta_E))^2 + (y_E - a \sin(\theta_0) - d \sin(\theta_E))^2 - b^2 - c^2}{2bc} \quad (\text{B-35}\alpha)$$

$$\sin(q_2) = \pm \sqrt{1 - \cos^2(q_2)} \quad (\text{B-35}\beta)$$

$$\sin(\theta_0 + q_1) = - \frac{A(x_E - a \cos(\theta_0) - d \cos(\theta_E)) - B(y_E - a \sin(\theta_0) - d \sin(\theta_E))}{b^2 + c^2 + 2bc \cos(q_2)} \quad (\text{B-35}\gamma)$$

$$\cos(\theta_0 + q_1) = \frac{A(y_E - a \sin(\theta_0) - d \sin(\theta_E)) + B(x_E - a \cos(\theta_0) - d \cos(\theta_E))}{b^2 + c^2 + 2bc \cos(q_2)} \quad (\text{B-35}\delta)$$

όπου:

$$A = c \sin(q_2) \quad (\text{B-36}\alpha)$$

$$B = b + c \cos(q_2) \quad (\text{B-36}\beta)$$

Οι γωνίες των αρθρώσεων για τις οποίες το ΤΣΔ βρίσκεται στη θέση (x_E, y_E) είναι

$$q_2 = \text{atan2}(\sin(q_2), \cos(q_2)) \quad (\text{B-37}\alpha)$$

$$q_1 = \text{atan2}(\sin(\theta_0 + q_1), \cos(\theta_0 + q_1)) - \theta_0 \quad (\text{B-37}\beta)$$

$$q_3 = \theta_E - \theta_0 - q_1 - q_2 \quad (\text{B-37}\gamma)$$

B.2.2 Κινηματική Ανάλυση των Ταχυτήτων του ΤΣΔ

Η γραμμική ταχύτητα του ΤΣΔ δίνεται από την Εξ. (B-11) όπου οι πίνακες ${}^0\mathbf{J}_{11}$ και ${}^0\mathbf{J}_{12}$ δίνονται από:

$${}^0\mathbf{J}_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -A \\ 0 & 0 & B \\ A & -B & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B-38}\alpha)$$

και

$${}^0\mathbf{J}_{12} = \begin{bmatrix} -(bs_{(q_1)} + cs_{(q_1+q_2)} + ds_{(q_1+q_2+q_3)}) & -(cs_{(q_1+q_2)} + ds_{(q_1+q_2+q_3)}) & -ds_{(q_1+q_2+q_3)} \\ bc_{(q_1)} + cc_{(q_1+q_2)} + dc_{(q_1+q_2+q_3)} & cc_{(q_1+q_2)} + dc_{(q_1+q_2+q_3)} & dc_{(q_1+q_2+q_3)} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B-38}\beta)$$

όπου

$$A = bs_{(q_1)} + cs_{(q_1+q_2)} + ds_{(q_1+q_2+q_3)} \quad (\text{B-39}\alpha)$$

$$B = a + bc_{(q_1)} + cc_{(q_1+q_2)} + dc_{(q_1+q_2+q_3)} \quad (\text{B-39}\beta)$$

Στις επίπεδες κινήσεις ισχύουν ότι $\dot{z}_E = {}^0\dot{z}_E = 0$ και ${}^0\boldsymbol{\omega}_0 = [0 \quad 0 \quad \dot{\theta}_0]^T$. Οπότε, η Εξ.

(B-11) γράφεται:

$$\begin{bmatrix} {}^0\dot{x}_E \\ {}^0\dot{y}_E \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -A \\ 0 & 0 & B \\ A & -B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -(bs_{(q_1)} + cs_{(q_1+q_2)} + ds_{(q_1+q_2+q_3)}) & -(cs_{(q_1+q_2)} + ds_{(q_1+q_2+q_3)}) & -ds_{(q_1+q_2+q_3)} \\ bc_{(q_1)} + cc_{(q_1+q_2)} + dc_{(q_1+q_2+q_3)} & cc_{(q_1+q_2)} + dc_{(q_1+q_2+q_3)} & dc_{(q_1+q_2+q_3)} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} \quad (\text{B-40}\alpha)$$

ή απλούστερα:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} {}^0\dot{x}_E \\ {}^0\dot{y}_E \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} -(bs_{(q_1)} + cs_{(q_1+q_2)} + ds_{(q_1+q_2+q_3)}) \\ bc_{(q_1)} + cc_{(q_1+q_2)} + dc_{(q_1+q_2+q_3)} \end{bmatrix}}_{{}^0\mathbf{J}_{11}} \dot{\theta}_0 \\
 &+ \underbrace{\begin{bmatrix} -(bs_{(q_1)} + cs_{(q_1+q_2)} + ds_{(q_1+q_2+q_3)}) & -(cs_{(q_1+q_2)} + ds_{(q_1+q_2+q_3)}) & -ds_{123} \\ bc_{(q_1)} + cc_{(q_1+q_2)} + dc_{(q_1+q_2+q_3)} & cc_{(q_1+q_2)} + dc_{(q_1+q_2+q_3)} & dc_{123} \end{bmatrix}}_{{}^0\mathbf{J}_{12}} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} \quad (\text{B-40}\beta)
 \end{aligned}$$

Τελικά η Εξ. (B-11) απλοποιείται στην Εξ. (B-15) όπου οι πίνακες ${}^0\mathbf{J}_{11}$ και ${}^0\mathbf{J}_{12}$ δίνονται από:

$${}^0\mathbf{J}_{11} = \begin{bmatrix} -(bs_{(q_1)} + cs_{(q_1+q_2)} + ds_{(q_1+q_2+q_3)}) \\ a + bc_{(q_1)} + cc_{(q_1+q_2)} + dc_{(q_1+q_2+q_3)} \end{bmatrix} \quad (\text{B-41}\alpha)$$

$${}^0\mathbf{J}_{12} = \begin{bmatrix} -(bs_{(q_1)} + cs_{(q_1+q_2)} + ds_{(q_1+q_2+q_3)}) & -(cs_{(q_1+q_2)} + ds_{(q_1+q_2+q_3)}) & -ds_{(q_1+q_2+q_3)} \\ bc_{(q_1)} + cc_{(q_1+q_2)} + dc_{(q_1+q_2+q_3)} & cc_{(q_1+q_2)} + dc_{(q_1+q_2+q_3)} & dc_{(q_1+q_2+q_3)} \end{bmatrix} \quad (\text{B-41}\beta)$$

Η γωνιακή ταχύτητα του ΤΣΔ είναι, [67]:

$$\boldsymbol{\omega}_E = \mathbf{R}_0 ({}^0\boldsymbol{\omega}_0 + {}^0\mathbf{J}_{22} \dot{\mathbf{q}}) \quad (\text{B-42})$$

όπου ο πίνακας ${}^0\mathbf{J}_{22}$ δίνεται από:

$${}^0\mathbf{J}_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B-43})$$

Στις επίπεδες κινήσεις ισχύουν ότι $\boldsymbol{\omega}_E = [0 \ 0 \ \dot{\theta}_E]^T$ και ${}^0\boldsymbol{\omega}_0 = [0 \ 0 \ \dot{\theta}_0]^T$. Οπότε, η Εξ. (B-42) γράφεται:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_0) & -\sin(\theta_0) & 0 \\ \sin(\theta_0) & \cos(\theta_0) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} \right) \quad (\text{B-44}\alpha)$$

ή απλούστερα:

$$\dot{\theta}_E = \dot{\theta}_0 + {}^0\mathbf{J}_{22} \dot{\mathbf{q}} \quad (\text{B-44}\beta)$$

όπου ο πίνακας ${}^0\mathbf{J}_{22}$ δίνεται από:

$${}^0\mathbf{J}_{22} = [1 \ 1 \ 1] \quad (\text{B-45})$$

B.2.3 Διατήρηση της Στροφορμής του ΔΡΣ

Η διατήρηση της στροφορμής του συστήματος δίνεται από την Εξ. (B-18), όπου για το επίπεδο ΔΡΣ με βραχίονα 3-BE οι πίνακες αδράνειας ${}^0\mathbf{D}$ και ${}^0\mathbf{D}_q$ είναι:

$${}^0\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_{11}(q_1, q_2, q_3) & d_{12}(q_1, q_2, q_3) & 0 \\ d_{21}(q_1, q_2, q_3) & d_{22}(q_1, q_2, q_3) & 0 \\ 0 & 0 & {}^0D_0 + {}^0D_1 + {}^0D_2 + {}^0D_3 \end{bmatrix} \quad (\text{B-46}\alpha)$$

και

$${}^0\mathbf{D}_q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ {}^0D_1 + {}^0D_2 + {}^0D_3 & {}^0D_2 + {}^0D_3 & {}^0D_3 \end{bmatrix} \quad (\text{B-46}\beta)$$

Στις Εξ. (B-46) οι όροι 0D_i , $i=0,1,2,3$ δίνονται από:

$${}^0D_0 = a_{00} + a_{01} \cos(q_1) + a_{02} \cos(q_1 + q_2) + a_{m_3} l_3 \cos(q_1 + q_2 + q_3) \quad (\text{B-47}\alpha)$$

$${}^0D_1 = a_{01} \cos(q_1) + a_{11} + a_{12} \cos(q_2) + b_{m_3} l_3 \cos(q_2 + q_3) \quad (\text{B-47}\beta)$$

$${}^0D_2 = a_{02} \cos(q_1 + q_2) + a_{12} \cos(q_2) + a_{22} + c_{m_3} l_3 \cos(q_3) \quad (\text{B-47}\gamma)$$

$${}^0D_3 = a_{33} + c_{m_3} l_3 \cos(q_3) + b_{m_3} l_3 \cos(q_2 + q_3) + a_{m_3} l_3 \cos(q_1 + q_2 + q_3) \quad (\text{B-47}\delta)$$

όπου:

$$a_{00} = I_0 + m_0 (m_1 + m_2 + m_3) r_0^2 / M \quad (\text{B-48}\alpha)$$

$$a_{01} = m_0 r_0 (l_1 (m_1 + m_2 + m_3) + r_1 (m_2 + m_3)) / M \quad (\text{B-48}\beta)$$

$$a_{02} = m_0 r_0 (l_2 (m_2 + m_3) + r_2 m_3) / M \quad (\text{B-48}\gamma)$$

$$a_{11} = I_1 + (m_0 m_1 l_1^2 + m_1 (m_2 + m_3) r_1^2 + m_0 (m_2 + m_3) (l_1 + r_1)^2) / M \quad (\text{B-48}\delta)$$

$$a_{21} = (l_1 m_0 + (m_0 + m_1) r_1) (l_2 (m_2 + m_3) + m_3 r_2) / M \quad (\text{B-48}\epsilon)$$

$$a_{22} = I_2 + (m_2 m_3 r_2^2 + m_2 (m_0 + m_1) l_2^2 + m_3 (m_0 + m_1) (l_2 + r_2)^2) / M \quad (\text{B-48}\sigma)$$

$$a_{33} = I_3 + m_3 (m_0 + m_1 + m_2) l_3^2 / M \quad (\text{B-48}\zeta)$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι στις επίπεδες κινήσεις ισχύουν ότι ${}^0\boldsymbol{\omega}_0 = [0 \ 0 \ \dot{\theta}_0]^T$ και $\mathbf{h}_{\text{CM}} = [0 \ 0 \ h_{\text{CM}}]^T$, οι πίνακες που δίνονται από τις Εξ. (B-46) μπορούν να γραφούν σε απλούστερη μορφή. Η Εξ. (B-18), στην περίπτωση αυτή, γράφεται:

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} d_{11}(q_1, q_2, q_3) & d_{12}(q_1, q_2, q_3) & 0 \\ d_{21}(q_1, q_2, q_3) & d_{22}(q_1, q_2, q_3) & 0 \\ 0 & 0 & {}^0D_0 + {}^0D_1 + {}^0D_2 + {}^0D_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_0 \end{bmatrix} \\
 & + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ {}^0D_1 + {}^0D_2 + {}^0D_3 & {}^0D_2 + {}^0D_3 & {}^0D_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} \\
 & = \begin{bmatrix} \cos(\theta_0) & \sin(\theta_0) & 0 \\ -\sin(\theta_0) & \cos(\theta_0) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ h_{CM} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{B-49α}$$

ή απλούστερα:

$$\underbrace{({}^0D_0 + {}^0D_1 + {}^0D_2 + {}^0D_3)}_{{}^0D} \dot{\theta}_0 + \underbrace{\begin{bmatrix} {}^0D_1 + {}^0D_2 + {}^0D_3 & {}^0D_2 + {}^0D_3 & {}^0D_3 \end{bmatrix}}_{{}^0D_q} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = h_{CM} \tag{B-49β}$$

Δηλαδή η Εξ. (B-18) γράφεται στη μορφή που περιγράφεται από την Εξ. (B-23) όπου το βαθμωτό μέγεθος 0D και ο πίνακας 0D_q δίνονται από:

$${}^0D = {}^0D_0 + {}^0D_1 + {}^0D_2 + {}^0D_3 \tag{B-50α}$$

$${}^0D_q = \begin{bmatrix} {}^0D_1 + {}^0D_2 + {}^0D_3 & {}^0D_2 + {}^0D_3 & {}^0D_3 \end{bmatrix} \tag{B-50β}$$

B.2.4 Ανάλυση Δυναμικών Ιδιομορφιών

Η Γενικευμένη Ιακωβιανή για επίπεδα ΔΡΣ δίνεται από την εξίσωση:

$${}^0S^* = - {}^0J_{11}^* {}^0D^{-1} {}^0D_q + {}^0J_{12}^* \tag{B-51}$$

όπου

$${}^0J_{11}^* = \begin{bmatrix} {}^0J_{11} \\ 1 \end{bmatrix} \tag{B-56α}$$

και

$${}^0J_{12}^* = \begin{bmatrix} {}^0J_{12} \\ {}^0J_{22} \end{bmatrix} \tag{B-56β}$$

Από τις Εξ. (B-41α) και (B-56α) προκύπτει:

$${}^0J_{11}^* = \begin{bmatrix} -(b s_{(q_1)} + c s_{(q_1+q_2)} + d s_{(q_1+q_2+q_3)}) \\ a + b c_{(q_1)} + c c_{(q_1+q_2)} + d c_{(q_1+q_2+q_3)} \\ 1 \end{bmatrix} \tag{B-57α}$$

Από τις Εξ. (B-41β), (B-45) και (B-56β) προκύπτει:

$${}^0\mathbf{J}_{12}^* = \begin{bmatrix} -(bs_{(q_1)} + cs_{(q_1+q_2)} + ds_{(q_1+q_2+q_3)}) & -(cs_{(q_1+q_2)} + ds_{(q_1+q_2+q_3)}) & -ds_{(q_1+q_2+q_3)} \\ bc_{(q_1)} + cc_{(q_1+q_2)} + dc_{(q_1+q_2+q_3)} & cc_{(q_1+q_2)} + dc_{(q_1+q_2+q_3)} & dc_{(q_1+q_2+q_3)} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B-57}\beta)$$

Με αντικατάσταση στην Εξ. (B-51) έχουμε:

$${}^0\mathbf{S}^* = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{B-58})$$

όπου:

$$s_{11} = -\frac{{}^0D_0 (bs_{(q_1)} + cs_{(q_1+q_2)} + ds_{(q_1+q_2+q_3)})}{{}^0D_0 + {}^0D_1 + {}^0D_2 + {}^0D_3} \quad (\text{B-59}\alpha)$$

$$s_{12} = \frac{bs_{(q_1)} ({}^0D_2 + {}^0D_3) - ({}^0D_0 + {}^0D_1) (cs_{(q_1+q_2)} + ds_{(q_1+q_2+q_3)})}{{}^0D_0 + {}^0D_1 + {}^0D_2 + {}^0D_3} \quad (\text{B-59}\beta)$$

$$s_{13} = \frac{{}^0D_3 (bs_{(q_1)} + cs_{(q_1+q_2)}) - ({}^0D_0 + {}^0D_1 + {}^0D_2) ds_{(q_1+q_2+q_3)}}{{}^0D_0 + {}^0D_1 + {}^0D_2 + {}^0D_3} \quad (\text{B-59}\gamma)$$

$$s_{21} = \frac{-a({}^0D_1 + {}^0D_2 + {}^0D_3) + {}^0D_0 (bc_{(q_1)} + cc_{(q_1+q_2)} + dc_{(q_1+q_2+q_3)})}{{}^0D_0 + {}^0D_1 + {}^0D_2 + {}^0D_3} \quad (\text{B-59}\delta)$$

$$s_{22} = \frac{-({}^0D_2 + {}^0D_3)(a + bc_{(q_1)}) + ({}^0D_0 + {}^0D_1) (cc_{(q_1+q_2)} + dc_{(q_1+q_2+q_3)})}{{}^0D_0 + {}^0D_1 + {}^0D_2 + {}^0D_3} \quad (\text{B-59}\epsilon)$$

$$s_{23} = \frac{-{}^0D_3 (a + bc_{(q_1)} + cc_{(q_1+q_2)}) + ({}^0D_0 + {}^0D_1 + {}^0D_2) dc_{(q_1+q_2+q_3)}}{{}^0D_0 + {}^0D_1 + {}^0D_2 + {}^0D_3} \quad (\text{B-59}\sigma\tau)$$

$$s_{31} = \frac{{}^0D_0}{{}^0D_0 + {}^0D_1 + {}^0D_2 + {}^0D_3} \quad (\text{B-59}\zeta)$$

$$s_{32} = \frac{{}^0D_0 + {}^0D_1}{{}^0D_0 + {}^0D_1 + {}^0D_2 + {}^0D_3} \quad (\text{B-59}\eta)$$

$$s_{33} = \frac{{}^0D_0 + {}^0D_1 + {}^0D_2}{{}^0D_0 + {}^0D_1 + {}^0D_2 + {}^0D_3} \quad (\text{B-59}\theta)$$

Οι ΔΙ του βραχίονα προκύπτουν όταν η ορίζουσα του πίνακα ${}^0\mathbf{S}^*$ γίνει μηδέν. Η ορίζουσα αυτή είναι:

$$S(q_1, q_2, q_3) = \det({}^0\mathbf{S}^*) = \frac{ab {}^0D_2 s_{(q_1)} + bc {}^0D_0 s_{(q_2)} - ac {}^0D_1 s_{(q_1+q_2)}}{{}^0D(q_1, q_2, q_3)} \quad (\text{B-60})$$

Η συνάρτηση που μηδενίζει την ορίζουσα $S(q_1, q_2, q_3)$ είναι:

$$S_1(q_1, q_2, q_3) = ab {}^0D_2 s_{(q_1)} + bc {}^0D_0 s_{(q_2)} - ac {}^0D_1 s_{(q_1+q_2)} \quad (\text{B-61}\alpha)$$

Μετά από αντικατάσταση των όρων 0D_i , $i=0,1,2$ προκύπτει ότι:

$$S_1 = k_0(q_1) + k_1(q_1) \sin(q_2) + k_2(q_1) \cos(q_2) \quad (\text{B-61}\beta)$$

όπου

$$k_0 = b(aa_{22} - ca_{02}) \sin(q_1) \quad (\text{B-62}\alpha)$$

$$k_1 = -(aba_{02} + aca_{01} - 2bca_{00}) / 2 + c(-aa_{11} + ba_{01}) \cos(q_1) + a(ba_{02} - ca_{01}) \cos(2q_1) / 2 \quad (\text{B-62}\beta)$$

$$k_2 = a(ba_{21} - ca_{11}) \sin(q_1) + a(ba_{02} - ca_{01}) \sin(2q_1) / 2 \quad (\text{B-62}\gamma)$$

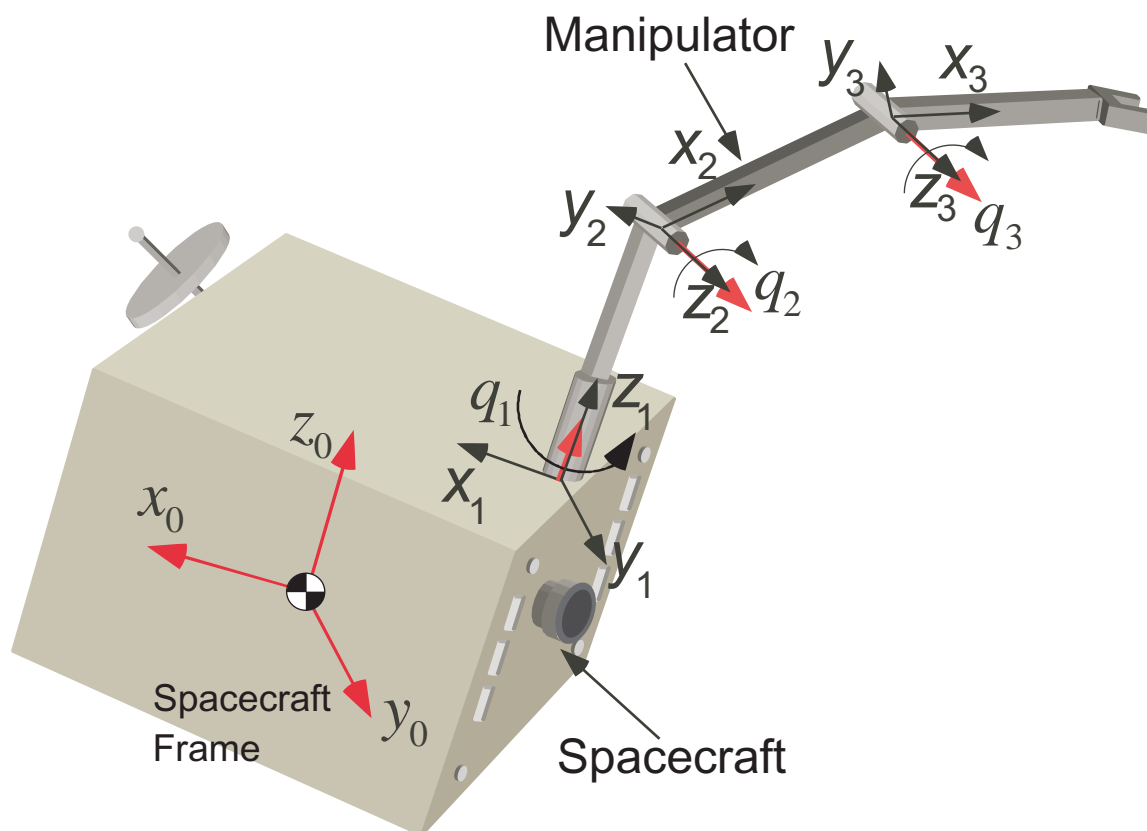
Το $S_1(q_1, q_2)$ έχει την ίδια μορφή με την περίπτωση του επίπεδου ΔΡΣ με ένα βραχίονα 2-BE με την διαφορά ότι αλλάζουν οι συντελεστές k_i λόγω της επίδρασης της μάζας του τρίτου συνδέσμου.

Παράρτημα Γ

Στο παράρτημα αυτό αναπτύσσονται αναλυτικά οι εξισώσεις των τρισδιάστατων ΔΡΣ που εφαρμόστηκαν στην παρούσα εργασία.

Γ.1 Τρισδιάστατο Ελεύθερα Αιωρούμενο ΔΡΣ με Βραχίονα 3-ΒΕ.

Για τη επίτευξη ενός επιθυμητού δρόμου του ΤΣΔ στο χώρο, χρησιμοποιείται το τρισδιάστατο ΔΡΣ με ένα βραχίονα 3-ΒΕ του Σχήματος Γ.1.



Σχήμα Γ.1. Συστήματα Συντεταγμένων στο τρισδιάστατο ΔΡΣ με ένα βραχίονα 3-ΒΕ.

Γ.1.1 Κινηματική Ανάλυση.

Η θέση του ΤΣΔ ως προς το αδρανειακό σύστημα συντεταγμένων είναι:

$$\mathbf{r}_E = \mathbf{r}_{CM} + \mathbf{R}_0(\boldsymbol{\varepsilon}, n)({}^0\mathbf{v}_{03,E} + {}^0\mathbf{R}_1(\mathbf{q}){}^1\mathbf{v}_{13,E} + {}^0\mathbf{R}_2(\mathbf{q}){}^2\mathbf{v}_{23,E} + {}^0\mathbf{R}_3(\mathbf{q}){}^3\mathbf{v}_{33,E}) \quad (\Gamma-1\alpha)$$

όπου

$${}^0\mathbf{v}_{03,E} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}, {}^1\mathbf{v}_{13,E} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{bmatrix}, {}^2\mathbf{v}_{23,E} = \begin{bmatrix} c \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, {}^3\mathbf{v}_{33,E} = \begin{bmatrix} d \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\Gamma-1\beta)$$

και

$$a_x = m_0 r_{0,x} / M \quad (\Gamma-2\alpha)$$

$$a_y = m_0 r_{0,y} / M \quad (\Gamma-2\beta)$$

$$a_z = m_0 r_{0z} / M \quad (\Gamma-2\gamma)$$

$$b = (m_0 l_1 + r_1 (m_0 + m_1)) / M \quad (\Gamma-2\delta)$$

$$c = (l_2 (m_0 + m_1) + r_2 (m_0 + m_1 + m_2)) / M \quad (\Gamma-2\epsilon)$$

$$d = l_3 (m_0 + m_1 + m_2) / M + r_3 \quad (\Gamma-2\sigma)$$

$$M = m_0 + m_1 + m_2 + m_3 \quad (\Gamma-2\zeta)$$

Ο προσανατολισμός του δορυφόρου του ΔΡΣ περιγράφεται από τις παραμέτρους Euler ϵ , n και ο αντίστοιχος πίνακας περιστροφής δίνεται από:

$$\mathbf{R}_0(\epsilon, n) = (n^2 - \epsilon^T \epsilon) \mathbf{I}_3 + 2 \epsilon \epsilon^T + 2 n \epsilon^\times \quad (\Gamma-3)$$

όπου

$$\epsilon = [\epsilon_1 \quad \epsilon_2 \quad \epsilon_3]^T \quad (\Gamma-4\alpha)$$

και

$$\epsilon^\times = \begin{bmatrix} 0 & -\epsilon_3 & \epsilon_2 \\ \epsilon_3 & 0 & -\epsilon_1 \\ -\epsilon_2 & \epsilon_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\Gamma-4\beta)$$

Οι παράμετροι Euler δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους αλλά ισχύει η σχέση:

$$\epsilon^T \epsilon + n^2 = 1 \quad (\Gamma-4\gamma)$$

Ο πίνακας περιστροφής $\mathbf{R}_0(\epsilon, n)$ μπορεί να γραφεί πιο αναλυτικά:

$$\mathbf{R}_0(\epsilon, n) = \begin{bmatrix} 1 - 2\epsilon_2^2 - 2\epsilon_3^2 & 2(\epsilon_1\epsilon_2 - \epsilon_3 n) & 2(\epsilon_1\epsilon_3 + \epsilon_2 n) \\ 2(\epsilon_1\epsilon_2 + \epsilon_3 n) & 1 - 2\epsilon_1^2 - 2\epsilon_3^2 & 2(\epsilon_2\epsilon_3 - \epsilon_1 n) \\ 2(\epsilon_1\epsilon_3 - \epsilon_2 n) & 2(\epsilon_2\epsilon_3 + \epsilon_1 n) & 1 - 2\epsilon_1^2 - 2\epsilon_2^2 \end{bmatrix} \quad (\Gamma-5)$$

Οι πίνακες περιστροφής που συνδέουν τα ΣΣ του βραχίονα είναι:

$${}^0\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} \cos(q_1) & -\sin(q_1) & 0 \\ \sin(q_1) & \cos(q_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\Gamma-6\alpha)$$

$${}^1\mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} \cos(q_2) & -\sin(q_2) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \sin(q_2) & \cos(q_2) & 0 \end{bmatrix} \quad (\Gamma-6\beta)$$

$${}^2\mathbf{R}_3 = \begin{bmatrix} \cos(q_3) & -\sin(q_3) & 0 \\ \sin(q_3) & \cos(q_3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\Gamma-6\gamma)$$

Τελικά προκύπτει:

$$\mathbf{r}_E = \mathbf{R}_0(\boldsymbol{\varepsilon}, n) \begin{bmatrix} a_x + c_{(q_1)} (c c_{(q_2)} + d c_{(q_2+q_3)}) \\ a_y + s_{(q_1)} (c c_{(q_2)} + d c_{(q_2+q_3)}) \\ a_z + b + c s_{(q_2)} + d s_{(q_2+q_3)} \end{bmatrix} \quad (\Gamma-7)$$

Με αντικατάσταση του πίνακα $\mathbf{R}_0(\boldsymbol{\varepsilon}, n)$ στην Εξ. (Γ-7) από την Εξ. (Γ-5) προκύπτει:

$$x_E = (1 - 2\varepsilon_2^2 - 2\varepsilon_3^2) h_1 + 2(\varepsilon_1\varepsilon_2 - \varepsilon_3 n) h_2 + 2(\varepsilon_1\varepsilon_3 + \varepsilon_2 n) h_3 \quad (\Gamma-8\alpha)$$

$$y_E = 2(\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_3 n) h_1 + (1 - 2\varepsilon_1^2 - 2\varepsilon_3^2) h_2 + 2(\varepsilon_2\varepsilon_3 - \varepsilon_1 n) h_3 \quad (\Gamma-8\beta)$$

$$z_E = 2(\varepsilon_1\varepsilon_3 - \varepsilon_2 n) h_1 + 2(\varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_1 n) h_2 + (1 - 2\varepsilon_1^2 - 2\varepsilon_2^2) h_3 \quad (\Gamma-8\gamma)$$

όπου

$$h_1 = a_x + c_{(q_1)} (c c_{(q_2)} + d c_{(q_2+q_3)}) \quad (\Gamma-9\alpha)$$

$$h_2 = a_y + s_{(q_1)} (c c_{(q_2)} + d c_{(q_2+q_3)}) \quad (\Gamma-9\beta)$$

$$h_3 = a_z + b + c s_{(q_2)} + d s_{(q_2+q_3)} \quad (\Gamma-9\gamma)$$

Για τον υπολογισμό της διαμόρφωσης του ρομποτικού βραχίονα όταν το ΤΣΔ βρίσκεται σε γνωστή θέση (αντίστροφο κινηματικό πρόβλημα), έχουμε:

$$q_1 = \text{atan2}(\sin(q_1), \cos(q_1)) \quad (\Gamma-10\alpha)$$

$$q_2 = \text{atan2}(\sin(q_2), \cos(q_2)) \quad (\Gamma-10\beta)$$

$$q_3 = \text{atan2}(\sin(q_3), \cos(q_3)) \quad (\Gamma-10\gamma)$$

όπου

$$\cos(q_3) = \frac{(h_1 - a_x)^2 + (h_2 - a_y)^2 + (h_3 - b - a_z)^2 - c^2 - d^2}{2cd} \quad (\Gamma-11\alpha)$$

$$\sin(q_3) = \pm \sqrt{1 - \cos^2(q_3)} \quad (\Gamma-11\beta)$$

$$\cos(q_2) = \frac{(c + d \cos(q_3)) \sqrt{(h_1 - a_x)^2 + (h_2 - a_y)^2} + d \sin(q_3) (h_3 - b - a_z)}{c^2 + d^2 + 2cd \cos(q_3)} \quad (\Gamma-11\gamma)$$

$$\sin(q_2) = \frac{(c + d \cos(q_3)) (h_3 - b - a_z) - d \sin(q_3) \sqrt{(h_1 - a_x)^2 + (h_2 - a_y)^2}}{c^2 + d^2 + 2cd \cos(q_3)} \quad (\Gamma-11\delta)$$

$$\cos(q_1) = \frac{h_1 - a_x}{c \cos(q_2) + d \cos(q_2 + q_3)} \quad (\Gamma-11\epsilon)$$

$$\sin(q_1) = \frac{h_2 - a_y}{c \cos(q_2) + d \cos(q_2 + q_3)} \quad (\Gamma-11\sigma)$$

και

$$\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^0x_E \\ {}^0y_E \\ {}^0z_E \end{bmatrix} = \mathbf{R}_0^T(\boldsymbol{\varepsilon}, n) \mathbf{r}_E \quad (\Gamma-12)$$

Γ.1.2 Ανάλυση Δυναμικών Ιδιομορφιών.

Στη παράγραφο αυτή θα αποδειχθεί ότι, κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις, η Γενικευμένη Ιακωβιανή του τρισδιάστατου ΔΡΣ με βραχίονα 3-BE που παρουσιάζεται στο Σχήμα Γ.1, μπορεί να αποσυμπλεχθεί από τη γωνία της πρώτης άρθρωσης. Η μορφή αυτή θα μας διευκολύνει στην ανάλυση των ΔΙ.

Η Γενικευμένη Ιακωβιανή του ΔΡΣ δίνεται από την εξίσωση:

$${}^0\mathbf{S}(\mathbf{q}) = - {}^0\mathbf{J}_{11}(\mathbf{q}) {}^0\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{q}) {}^0\mathbf{D}_q(\mathbf{q}) + {}^0\mathbf{J}_{12}(\mathbf{q}) \quad (\Gamma-13)$$

όπου οι πίνακες ${}^0\mathbf{J}_{11}$, ${}^0\mathbf{J}_{12}$, ${}^0\mathbf{D}$, ${}^0\mathbf{D}_q$ υπολογίζονται από τις Εξ. (Α-6) και (Α-11) των Παραρτημάτων Α.2 και Α.3, αντίστοιχα. Στη συνέχεια, με βάση αυτές τις εξισώσεις, θα υπολογιστούν πιο απλές μορφές των πινάκων αυτών. Πιο αναλυτικά έχουμε:

Χρησιμοποιώντας την Εξ. (Α-6α) ο πίνακας ${}^0\mathbf{J}_{11}$ γράφεται:

$$\begin{aligned} {}^0\mathbf{J}_{11} &= -[({}^0\mathbf{v}_{03,E})^\times + ({}^0\mathbf{R}_1 {}^1\mathbf{v}_{13,E})^\times + ({}^0\mathbf{R}_2 {}^2\mathbf{v}_{23,E})^\times + ({}^0\mathbf{R}_3 {}^3\mathbf{v}_{33,E})^\times] \\ &= -[({}^0\mathbf{v}_{03,E})^\times + ({}^0\mathbf{R}_1 {}^1\mathbf{v}_{13,E})^\times + ({}^0\mathbf{R}_1 {}^1\mathbf{R}_2 {}^2\mathbf{v}_{23,E})^\times + ({}^0\mathbf{R}_1 {}^1\mathbf{R}_3 {}^3\mathbf{v}_{33,E})^\times] \end{aligned} \quad (\Gamma-14)$$

Έστω ότι για τον πίνακα ${}^0\mathbf{R}_1$ που δίνεται από την Εξ. (Γ-6α) και το διάνυσμα-στήλη ${}^0\mathbf{v}_{03,E}$ που δίνεται από την Εξ. (Γ-1β) ισχύει:

$${}^0\mathbf{v}_{03,E} = {}^0\mathbf{R}_1 {}^0\mathbf{v}_{03,E} \quad (\Gamma-15)$$

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα, [82]:

$$(\mathbf{R}\mathbf{a})^\times = \mathbf{R}\mathbf{a}^\times\mathbf{R}^T \quad (\Gamma-16)$$

η Εξ. (Γ-14) γράφεται:

$${}^0\mathbf{J}_{11} = {}^0\mathbf{R}_1 {}^0\mathbf{J}_{11,n} {}^0\mathbf{R}_1^T \quad (\Gamma-17\alpha)$$

όπου:

$${}^0\mathbf{J}_{11,n} = -[({}^0\mathbf{v}_{03,E})^\times + ({}^1\mathbf{v}_{13,E})^\times + {}^1\mathbf{R}_2 ({}^2\mathbf{v}_{23,E})^\times {}^1\mathbf{R}_2^T + {}^1\mathbf{R}_3 ({}^3\mathbf{v}_{33,E})^\times {}^1\mathbf{R}_3^T] \quad (\Gamma-17\beta)$$

Απαραίτητη προϋπόθεση ώστε να ισχύει η Εξ. (Γ-17α), είναι η ικανοποίηση της συνθήκης που δίνεται από την Εξ. (Γ-15). Αποδεικνύεται εύκολα ότι η Εξ. (Γ-15) ικανοποιείται όταν:

$${}^0\mathbf{v}_{03,E} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a_z \end{bmatrix} \quad (\Gamma-18\alpha)$$

ή ισοδύναμα όταν η θέση 1^{ης} άρθρωσης από το ΚΜ του δορυφόρου είναι:

$${}^0\mathbf{r}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r_{0z} \end{bmatrix} \quad (\Gamma-18\beta)$$

Από την Εξ. (Α-6β) προκύπτει ότι για τον πίνακα ${}^0\mathbf{J}_{12}$ ισχύει:

$$\begin{aligned} {}^0\mathbf{J}_{12} &= -[({}^0\mathbf{R}_1 {}^1\mathbf{v}_{13,E})^\times {}^0\mathbf{F}_1 + ({}^0\mathbf{R}_2 {}^2\mathbf{v}_{23,E})^\times {}^0\mathbf{F}_2 + ({}^0\mathbf{R}_3 {}^3\mathbf{v}_{33,E})^\times {}^0\mathbf{F}_3] \\ &= -[({}^0\mathbf{R}_1 {}^1\mathbf{v}_{13,E})^\times {}^0\mathbf{F}_1 + ({}^0\mathbf{R}_1 {}^1\mathbf{R}_2 {}^2\mathbf{v}_{23,E})^\times {}^0\mathbf{F}_2 + ({}^0\mathbf{R}_1 {}^1\mathbf{R}_3 {}^3\mathbf{v}_{33,E})^\times {}^0\mathbf{F}_3] \end{aligned} \quad (\Gamma-19)$$

όπου:

$${}^0\mathbf{F}_1 = [{}^0\mathbf{R}_1 {}^1\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0}] = {}^0\mathbf{R}_1 [{}^1\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0}] = {}^0\mathbf{R}_1 {}^0\mathbf{F}_{1,n} \quad (\Gamma-20\alpha)$$

$${}^0\mathbf{F}_2 = [{}^0\mathbf{R}_1 {}^1\mathbf{u}_1 \quad {}^0\mathbf{R}_2 {}^2\mathbf{u}_2 \quad \mathbf{0}] = {}^0\mathbf{R}_1 [{}^1\mathbf{u}_1 \quad {}^1\mathbf{R}_2 {}^2\mathbf{u}_2 \quad \mathbf{0}] = {}^0\mathbf{R}_1 {}^0\mathbf{F}_{2,n} \quad (\Gamma-20\beta)$$

$${}^0\mathbf{F}_3 = [{}^0\mathbf{R}_1 {}^1\mathbf{u}_1 \quad {}^0\mathbf{R}_2 {}^2\mathbf{u}_2 \quad {}^0\mathbf{R}_3 {}^3\mathbf{u}_3] = {}^0\mathbf{R}_1 [{}^1\mathbf{u}_1 \quad {}^1\mathbf{R}_2 {}^2\mathbf{u}_2 \quad {}^1\mathbf{R}_3 {}^3\mathbf{u}_3] = {}^0\mathbf{R}_1 {}^0\mathbf{F}_{3,n} \quad (\Gamma-20\gamma)$$

Χρησιμοποιώντας τις Εξ. (Γ-20) καθώς και την ιδιότητα που δίνεται από την Εξ. (Γ-16), προκύπτει τελικά ότι η Εξ. (Γ-19) γράφεται:

$${}^0\mathbf{J}_{12} = {}^0\mathbf{R}_1 {}^0\mathbf{J}_{12,n} \quad (\Gamma-21\alpha)$$

όπου:

$${}^0\mathbf{J}_{12,n} = -[({}^1\mathbf{v}_{13,E})^\times {}^0\mathbf{F}_{1,n} + {}^1\mathbf{R}_2 ({}^2\mathbf{v}_{23,E})^\times {}^1\mathbf{R}_2^T {}^0\mathbf{F}_{2,n} + {}^1\mathbf{R}_3 ({}^3\mathbf{v}_{33,E})^\times {}^1\mathbf{R}_3^T {}^0\mathbf{F}_{3,n}] \quad (\Gamma-21\beta)$$

Από την Εξ. (Α-11α) προκύπτει ότι για τον πίνακα ${}^0\mathbf{D}_{ij}$, όταν $0 < i < j$ ισχύει:

$${}^0\mathbf{D}_{ij} = -M ({}^0\mathbf{r}_i^*)^\times ({}^0\mathbf{l}_j^*)^\times = -M ({}^0\mathbf{R}_1 {}^1\mathbf{R}_i {}^i\mathbf{r}_i^*)^\times ({}^0\mathbf{R}_1 {}^1\mathbf{R}_j {}^j\mathbf{l}_j^*)^\times \quad (\Gamma-22)$$

όπου χρησιμοποιώντας την ιδιότητα που δίνεται από την Εξ. (Γ-16), προκύπτει τελικά ότι:

$${}^0\mathbf{D}_{ij} = {}^0\mathbf{R}_1 {}^0\mathbf{D}_{ij,n} {}^0\mathbf{R}_1^T \quad (\Gamma-23\alpha)$$

όπου

$${}^0\mathbf{D}_{ij,n} = -M {}^1\mathbf{R}_i ({}^i\mathbf{r}_i^*)^\times {}^1\mathbf{R}_i^T {}^1\mathbf{R}_j ({}^j\mathbf{l}_j^*)^\times {}^1\mathbf{R}_j^T \quad (\Gamma-23\beta)$$

Στην περίπτωση που $0 = i < j$, από την Εξ. (Α-11α) έχουμε ότι:

$${}^0\mathbf{D}_{0j} = -M ({}^0\mathbf{r}_0^*)^\times ({}^0\mathbf{l}_j^*)^\times = -M ({}^0\mathbf{r}_0^*)^\times ({}^0\mathbf{R}_1 {}^1\mathbf{R}_j {}^j\mathbf{l}_j^*)^\times \quad (\Gamma-24)$$

Έστω ότι για τον πίνακα ${}^0\mathbf{R}_1$ που δίνεται από την Εξ. (Β-6α) και το διάνυσμα-στήλη ${}^0\mathbf{r}_0^*$ ισχύει:

$${}^0\mathbf{r}_0^* = {}^0\mathbf{R}_1 {}^0\mathbf{r}_0^* \quad (\Gamma-25)$$

τότε η Εξ. (Γ-24) γράφεται:

$${}^0\mathbf{D}_{0j} = -M ({}^0\mathbf{R}_1 {}^0\mathbf{r}_0^*)^\times ({}^0\mathbf{R}_1 {}^1\mathbf{R}_j {}^j\mathbf{l}_j^*)^\times \quad (\Gamma-26)$$

όπου χρησιμοποιώντας την ιδιότητα που δίνεται από την Εξ. (Γ-16), προκύπτει ότι:

$${}^0\mathbf{D}_{0j} = {}^0\mathbf{R}_1 {}^0\mathbf{D}_{0j,n} {}^0\mathbf{R}_1^T \quad (\Gamma-27\alpha)$$

όπου

$${}^0\mathbf{D}_{0j,n} = -M ({}^0\mathbf{r}_0^*) \times {}^1\mathbf{R}_j (j\mathbf{I}_j^*) \times {}^1\mathbf{R}_j^T {}^0\mathbf{R}_1^T \quad (\Gamma-27\beta)$$

Απαραίτητη προϋπόθεση να ισχύει η Εξ. (Γ-27α), είναι η ικανοποίηση της συνθήκης που δίνεται από την Εξ. (Γ-25). Αποδεικνύεται εύκολα ότι η Εξ. (Γ-25) ικανοποιείται όταν η θέση 1^{ns} άρθρωσης από το ΚΜ του δορυφόρου δίνεται από την Εξ. (Γ-18β).

Από την Εξ. (Α-11α) προκύπτει ότι για τον πίνακα ${}^0\mathbf{D}_{ii}$, όταν $i \neq 0$, ισχύει:

$${}^0\mathbf{D}_{ii} = {}^0\mathbf{R}_1 {}^1\mathbf{R}_i {}^i\mathbf{I}_i {}^1\mathbf{R}_i^T {}^0\mathbf{R}_1^T + \sum_{k=0}^N m_k [({}^0\mathbf{v}_{ik}^T {}^0\mathbf{v}_{ik}) \mathbf{I}_3 - {}^0\mathbf{R}_1 {}^1\mathbf{R}_i {}^i\mathbf{v}_{ik} {}^i\mathbf{v}_{ik}^T {}^1\mathbf{R}_i^T {}^0\mathbf{R}_1^T] \quad (\Gamma-28)$$

όπου ο όρος ${}^0\mathbf{v}_{ik}^T {}^0\mathbf{v}_{ik}$ είναι βαθμωτό μέγεθος. Οπότε ισχύει:

$${}^0\mathbf{v}_{ik}^T {}^0\mathbf{v}_{ik} \mathbf{I}_3 = {}^0\mathbf{R}_1 {}^0\mathbf{v}_{ik}^T {}^0\mathbf{v}_{ik} \mathbf{I}_3 {}^0\mathbf{R}_1^T \quad (\Gamma-29)$$

και η Εξ. (Γ-28) γράφεται τελικά:

$${}^0\mathbf{D}_{ii} = {}^0\mathbf{R}_1 {}^0\mathbf{D}_{ii,n} {}^0\mathbf{R}_1^T \quad (\Gamma-30\alpha)$$

όπου

$${}^0\mathbf{D}_{ii,n} = {}^1\mathbf{R}_i {}^i\mathbf{I}_i {}^1\mathbf{R}_i^T + \sum_{k=0}^N m_k [{}^0\mathbf{v}_{ik}^T {}^0\mathbf{v}_{ik} \mathbf{I}_3 - {}^1\mathbf{R}_i {}^i\mathbf{v}_{ik} {}^i\mathbf{v}_{ik}^T {}^1\mathbf{R}_i^T] \quad (\Gamma-30\beta)$$

Στην περίπτωση που $i = j = 0$, από την Εξ. (Α-11α) έχουμε ότι:

$${}^0\mathbf{D}_{00} = {}^0\mathbf{I}_0 + \sum_{k=0}^N m_k [({}^0\mathbf{v}_{0k}^T {}^0\mathbf{v}_{0k}) \mathbf{I}_3 - {}^0\mathbf{v}_{0k} {}^0\mathbf{v}_{0k}^T] \quad (\Gamma-31)$$

Έστω ότι για τον πίνακα ${}^0\mathbf{R}_1$ που δίνεται από την Εξ. (Β-6α) και το διάνυσμα-στήλη ${}^0\mathbf{v}_{0k}$ καθώς και για τον τανυστή ροπής αδράνειας ${}^0\mathbf{I}_0$ του δορυφόρου του ΔΡΣ ισχύουν αντίστοιχα ότι:

$${}^0\mathbf{v}_{0k} = {}^0\mathbf{R}_1 {}^0\mathbf{v}_{0k} \quad (\Gamma-32\alpha)$$

και

$${}^0\mathbf{I}_0 = {}^0\mathbf{R}_1 {}^0\mathbf{I}_0 {}^0\mathbf{R}_1^T \quad (\Gamma-32\beta)$$

Χρησιμοποιώντας τις Εξ. (Γ-29) και (Γ-32), η Εξ. (Γ-31) γίνεται:

$${}^0\mathbf{D}_{00} = {}^0\mathbf{R}_1 {}^0\mathbf{D}_{00,n} {}^0\mathbf{R}_1^T \quad (\Gamma-33\alpha)$$

και

$${}^0\mathbf{D}_{00,n} = {}^0\mathbf{I}_0 + \sum_{k=0}^N m_k [({}^0\mathbf{v}_{0k}^T {}^0\mathbf{v}_{0k}) \mathbf{I}_3 - {}^0\mathbf{v}_{0k} {}^0\mathbf{v}_{0k}^T] \quad (\Gamma-33\beta)$$

Απαραίτητη προϋπόθεση ώστε να ισχύει η Εξ. (Γ-33α), είναι η ικανοποίηση των συνθηκών που δίνεται από τις Εξ. (Γ-32α) και (Γ-32β). Αποδεικνύεται εύκολα ότι η Εξ. (Γ-32α) ικανοποιείται όταν η θέση 1^{ns} άρθρωσης από το ΚΜ του δορυφόρου δίνεται από την Εξ. (Γ-18β) ενώ η Εξ. (Γ-32β) ικανοποιείται όταν ο τανυστής ροπής αδράνειας ${}^0\mathbf{I}_0$ του δορυφόρου του ΔΡΣ δίνεται από:

$${}^0\mathbf{I}_0 = \begin{bmatrix} I_{0x} & 0 & 0 \\ 0 & I_{0x} & 0 \\ 0 & 0 & I_{0z} \end{bmatrix} \quad (\Gamma-34)$$

Από τις Εξ. (Α-12), (Γ-23α), (Γ-27α), (Γ-30α) και (Γ-33α) προκύπτει ότι ο πίνακας ${}^0\mathbf{D}_j$ παίρνει τη μορφή:

$${}^0\mathbf{D}_j = {}^0\mathbf{R}_1 {}^0\mathbf{D}_{j,n} {}^0\mathbf{R}_1^T \quad (\Gamma-35\alpha)$$

όπου:

$${}^0\mathbf{D}_{j,n} = \sum_{i=0}^N {}^0\mathbf{D}_{ij,n} \quad (\Gamma-35\beta)$$

Τελικά, από τις Εξ. (Α-11α) και (Γ-35), προκύπτει ότι ο πίνακας ${}^0\mathbf{D}$ παίρνει τη μορφή:

$${}^0\mathbf{D} = {}^0\mathbf{R}_1 {}^0\mathbf{D}_n {}^0\mathbf{R}_1^T \quad (\Gamma-36\alpha)$$

όπου:

$${}^0\mathbf{D}_n = \sum_{J=0}^N {}^0\mathbf{D}_{j,n} \quad (\Gamma-36\beta)$$

Από την Εξ. (Α-11β) προκύπτει ότι για τον πίνακα ${}^0\mathbf{D}_q$ ισχύει:

$${}^0\mathbf{D}_q = {}^0\mathbf{D}_1 {}^0\mathbf{F}_1 + {}^0\mathbf{D}_2 {}^0\mathbf{F}_2 + {}^0\mathbf{D}_3 {}^0\mathbf{F}_3 \quad (\Gamma-37)$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις Εξ. (Γ-20) και (Γ-35), η Εξ. (Γ-37) γίνεται:

$${}^0\mathbf{D}_q = {}^0\mathbf{R}_1 {}^0\mathbf{D}_{q,n} \quad (\Gamma-38\alpha)$$

όπου:

$${}^0\mathbf{D}_{q,n} = {}^0\mathbf{D}_{1,n} {}^0\mathbf{F}_{1,n} + {}^0\mathbf{D}_{2,n} {}^1\mathbf{R}_2 {}^0\mathbf{F}_{2,n} + {}^0\mathbf{D}_{3,n} {}^1\mathbf{R}_3 {}^0\mathbf{F}_{3,n} \quad (\Gamma-38\beta)$$

Συμπερισματικά, από τα παραπάνω καταλήξαμε ότι:

Ο πίνακας ${}^0\mathbf{J}_{12}$ μπορεί να γραφτεί στη μορφή:

$${}^0\mathbf{J}_{12}(q_1, q_2, q_3) = {}^0\mathbf{R}_1(q_1) {}^0\mathbf{J}_{12n}(q_2, q_3) \quad (\Gamma-39\alpha)$$

ενώ όταν η θέση της πρώτης άρθρωσης δίνεται από την Εξ. (Γ-18β), ο πίνακας ${}^0\mathbf{J}_{11}$ γράφεται:

$${}^0\mathbf{J}_{11}(q_1, q_2, q_3) = {}^0\mathbf{R}_1(q_1) {}^0\mathbf{J}_{11n}(q_2, q_3) {}^0\mathbf{R}_1^T(q_1) \quad (\Gamma-39\beta)$$

Επίσης όταν η θέση της πρώτης άρθρωσης δίνεται από την Εξ. (Γ-18β) και ο ταυιστής ροπής αδράνειας ${}^0\mathbf{I}_0$ του δορυφόρου δίνεται από την Εξ. (Γ-34), οι πίνακες ${}^0\mathbf{D}$ και ${}^0\mathbf{D}_q$ γράφονται αντίστοιχα:

$${}^0\mathbf{D}(q_1, q_2, q_3) = {}^0\mathbf{R}_1(q_1) {}^0\mathbf{D}_n(q_2, q_3) {}^0\mathbf{R}_1^T(q_1) \quad (\Gamma-39\gamma)$$

και

$${}^0\mathbf{D}_q(q_1, q_2, q_3) = {}^0\mathbf{R}_1(q_1) {}^0\mathbf{D}_{qn}(q_2, q_3) \quad (\Gamma-39\delta)$$

Αντικαθιστώντας τους πίνακες ${}^0\mathbf{D}$, ${}^0\mathbf{D}_q$, ${}^0\mathbf{J}_{11}$ και ${}^0\mathbf{J}_{12}$ από τις Εξ. (Γ-39) στην Εξ. (Γ-13) προκύπτει ότι η Γενικευμένη Ιακωβιανή δίνεται από:

$${}^0\mathbf{S}(q_1, q_2, q_3) = {}^0\mathbf{R}_1(q_1) {}^0\mathbf{S}_n(q_2, q_3) \quad (\Gamma-40\alpha)$$

όπου:

$${}^0\mathbf{S}_n(q_2, q_3) = -{}^0\mathbf{J}_{11,n} {}^0\mathbf{D}_n^{-1} {}^0\mathbf{D}_{q,n} + {}^0\mathbf{J}_{12,n} \quad (\Gamma-40\beta)$$

Γ.1.3 Υπολογισμός της Γενικευμένης Ιακωβιανής.

Η Γενικευμένη Ιακωβιανή που ορίζει τις ΔΙ δίνεται από την Εξ. (Γ-40β). Στη συνέχεια θα υπολογιστούν οι πίνακες ${}^0\mathbf{J}_{11,n}$, ${}^0\mathbf{J}_{12,n}$, ${}^0\mathbf{D}_n$ και ${}^0\mathbf{D}_{q,n}$ που απαιτούνται για τον προσδιορισμό της.

Ο πίνακας ${}^0\mathbf{J}_{11,n}$ υπολογίζεται από την Εξ. (Γ-17β) και είναι:

$${}^0\mathbf{J}_{11,n} = \begin{bmatrix} 0 & a_z + b + c s_{(q_2)} + d s_{(q_2+q_3)} & 0 \\ -(a_z + b + c s_{(q_2)} + d s_{(q_2+q_3)}) & 0 & c c_{(q_2)} + d c_{(q_2+q_3)} \\ 0 & -(c c_{(q_2)} + d c_{(q_2+q_3)}) & 0 \end{bmatrix} \quad (\Gamma-41\alpha)$$

Ενώ ο πίνακας ${}^0\mathbf{J}_{12,n}$ υπολογίζεται από την Εξ. (Γ-21β) και ισούται με:

$${}^0\mathbf{J}_{12,n} = \begin{bmatrix} 0 & -(c s_{(q_2)} + d s_{(q_2+q_3)}) & -d s_{(q_2+q_3)} \\ c c_{(q_2)} + d c_{(q_2+q_3)} & 0 & 0 \\ 0 & c c_{(q_2)} + d c_{(q_2+q_3)} & d c_{(q_2+q_3)} \end{bmatrix} \quad (\Gamma-41\beta)$$

Οι πίνακες ${}^0\mathbf{D}_n$ και ${}^0\mathbf{D}_{q,n}$ υπολογίζονται από τις Εξ. (Γ-36β) και (Γ-38β), αντίστοιχα και δίνονται από:

$${}^0\mathbf{D}_n = \begin{bmatrix} d_{11}(q_2, q_3) & 0 & d_{13}(q_2, q_3) \\ 0 & {}^0D_0 + {}^0D_1 + {}^0D_2 + {}^0D_3 & 0 \\ d_{13}(q_2, q_3) & 0 & d_{33}(q_2, q_3) \end{bmatrix} \quad (\Gamma-42\alpha)$$

και

$${}^0\mathbf{D}_{q,n} = \begin{bmatrix} d_{q11}(q_2, q_3) & 0 & 0 \\ 0 & -({}^0D_2 + {}^0D_3) & -{}^0D_3 \\ d_{q31}(q_2, q_3) & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\Gamma-42\beta)$$

Στις Εξ. (Γ-42) οι πίνακες 0D_i , $i=0,1,2,3$ δίνονται από:

$${}^0D_0 = a_{00} + a_{02} \sin(q_2) + a_{03} \sin(q_2 + q_3) \quad (\Gamma-43\alpha)$$

$${}^0D_1 = a_{11} + a_{12} \sin(q_2) + a_{13} \sin(q_2 + q_3) \quad (\Gamma-43\beta)$$

$${}^0D_2 = (a_{02} + a_{12}) \sin(q_2) + a_{22} + a_{23} \cos(q_3) \quad (\Gamma-43\gamma)$$

$${}^0D_3 = a_{23} \cos(q_3) + (a_{03} + a_{13}) \sin(q_2 + q_3) + a_{33} \quad (\Gamma-43\delta)$$

όπου

$$a_{00} = I_{0,xx} + \frac{m_0 (m_2 + m_3) r_{0z}^2}{M} \quad (\Gamma-44\alpha)$$

$$a_{11} = I_{1,yy} + \frac{m_0 (m_0 + m_1 + m_2) l_1^2}{M} + 2 \frac{l_1 m_0 (m_1 + m_2 + m_3) r_{0z} + m_0 (m_2 + m_3) (l_1 + r_{0z}) r_1}{M} + \frac{(m_0 + m_1) (m_2 + m_3) r_1^2}{M} \quad (\Gamma-44\beta)$$

$$a_{02} = \frac{m_0 r_{0z} (l_2 (m_2 + m_3) + r_2 m_3)}{M} \quad (\Gamma-44\gamma)$$

$$a_{12} = \frac{(l_1 m_0 + r_1 (m_0 + m_1)) (l_2 (m_2 + m_3) + r_2 m_3)}{M} \quad (\Gamma-44\delta)$$

$$a_{03} = \frac{m_0 m_3 r_{0z} l_3}{M} \quad (\Gamma-44\epsilon)$$

$$a_{13} = \frac{l_3 m_3 (l_1 m_0 + r_1 (m_0 + m_1))}{M} \quad (\Gamma-44\sigma\tau)$$

$$a_{22} = I_{2,zz} + \frac{(m_0 + m_1) m_2 l_2^2 + m_2 m_3 r_2^2 + (m_0 + m_1) m_3 (l_2 + r_2)^2}{M} \quad (\Gamma-44\zeta)$$

$$a_{23} = \frac{m_3 l_3 [l_2 (m_0 + m_1) + r_2 (m_0 + m_1 + m_2)]}{M} \quad (\Gamma-44\eta)$$

$$a_{33} = I_{3,zz} + \frac{m_3 (m_0 + m_1 + m_2) l_3^2}{M} \quad (\Gamma-44\theta)$$

Με αντικατάσταση των πινάκων ${}^0\mathbf{J}_{11n}$, ${}^0\mathbf{J}_{12,n}$, ${}^0\mathbf{D}_n$ και ${}^0\mathbf{D}_{q,n}$ στην Εξ. (Γ-40β)

προκύπτει:

$${}^0\mathbf{S}_n = \begin{bmatrix} 0 & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & 0 & 0 \\ 0 & s_{32} & s_{33} \end{bmatrix} \quad (\Gamma-45)$$

όπου:

$$s_{12} = -(c s_{(q_2)} + d s_{(q_2+q_3)}) + \frac{({}^0D_2 + {}^0D_3)(a_z + b + c s_{(q_2)} + d s_{(q_2+q_3)})}{{}^0D_0 + {}^0D_1 + {}^0D_2 + {}^0D_3} \quad (\Gamma-46\alpha)$$

$$s_{13} = -d s_{(q_2+q_3)} + \frac{{}^0D_3 (a_z + b + c s_{(q_2)} + d s_{(q_2+q_3)})}{{}^0D_0 + {}^0D_1 + {}^0D_2 + {}^0D_3} \quad (\Gamma-46\beta)$$

$$s_{32} = c c_{(q_2)} + d c_{(q_2+q_3)} - \frac{({}^0D_2 + {}^0D_3)(c c_{(q_2)} + d c_{(q_2+q_3)})}{{}^0D_0 + {}^0D_1 + {}^0D_2 + {}^0D_{33}} \quad (\Gamma-46\gamma)$$

$$s_{33} = d c_{(q_2+q_3)} - \frac{{}^0D_3 (c c_{(q_2)} + d c_{(q_2+q_3)})}{{}^0D_0 + {}^0D_1 + {}^0D_2 + {}^0D_3} \quad (\Gamma-46\delta)$$

και

$$s_{21} = -\frac{{}^0D_0 + {}^0D_1 + {}^0D_2 + {}^0D_3}{{\det}({}^0\mathbf{D}_n)} s_{21}^* \quad (\Gamma-46\epsilon)$$

όπου:

$$s_{21}^* = k_0(q_2) + k_1(q_2) \sin(q_3) + k_2(q_2) \cos(q_3) \quad (\Gamma-47)$$

όπου:

$$k_0 = a_1 \cos(q_2) + a_4 \cos(q_2) \sin(q_2) \quad (\Gamma-48\alpha)$$

$$k_1 = a_7 + a_8 \cos(2q_2) + a_9 \sin(q_2) \quad (\Gamma-48\beta)$$

$$k_2 = a_2 \cos(q_2) + a_5 \cos(q_2) \sin(q_2) \quad (\Gamma-48\gamma)$$

Όπως αποδείχθηκε στην Παράγραφο 3.1 του Κεφαλαίου 3, η συνάρτηση που ορίζει τις Δι είναι η:

$$S(q_2, q_3) = s_{12} s_{33} - s_{13} s_{32} \quad (\Gamma-49\alpha)$$

Από τις Εξ. (B-24δ) και (B-22) έχουμε ότι:

$$S(q_2, q_3) = \frac{-(a+b)c {}^0D_3 \cos(q_2) + (a+b)d {}^0D_2 \cos(q_2+q_3) + cd({}^0D_0 + {}^0D_1) \sin(q_3)}{{}^0D_0 + {}^0D_1 + {}^0D_2 + {}^0D_3} \quad (\Gamma-49\beta)$$

Η συνάρτηση που μηδενίζει την ορίζουσα αυτή είναι:

$$S(q_2, q_3) = -(a+b)c {}^0D_3 \cos(q_2) + (a+b)d {}^0D_2 \cos(q_2+q_3) + cd({}^0D_0 + {}^0D_1) \sin(q_3) \quad (\Gamma-49\gamma)$$

Με αντικατάσταση των πινάκων 0D_i , $i=0,1,2,3$ προκύπτει:

$$S = k_0(q_2) + k_1(q_2) \sin(q_3) + k_2(q_2) \cos(q_3) \quad (\Gamma-50)$$

όπου:

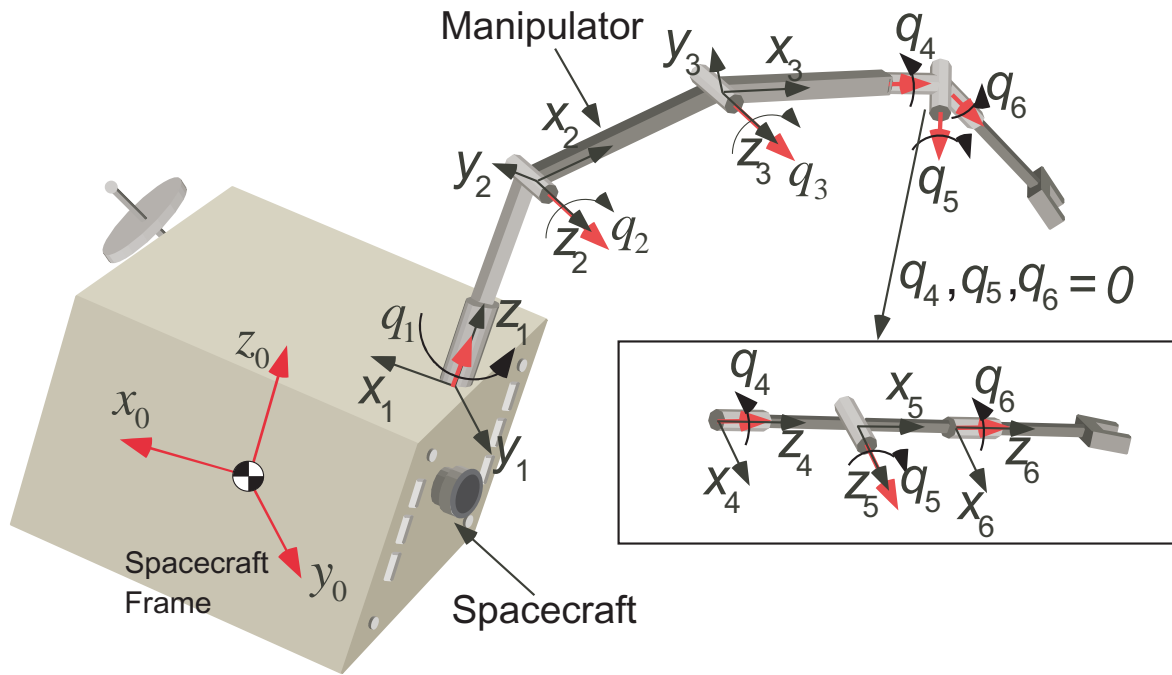
$$k_0 = c(da_{03} - aa_{33}) \cos(q_2) \quad (\Gamma-51\alpha)$$

$$k_1 = -(a ca_{03} + a d a_{02} - 2cda_{00}) / 2 + d (-aa_{22} + ca_{01}) \sin(q_2) + a(ca_{03} - da_{02}) \cos(2q_2) / 2 \quad (\Gamma-51\beta)$$

$$k_2 = -a(ba_{23} - da_{22}) \cos(q_2) - a(ca_{03} - da_{02}) \sin(2q_1) / 2 \quad (\Gamma-51\gamma)$$

Γ.2 Τρισδιάστατο Ελεύθερα Αιωρούμενο ΔΡΣ με Βραχίονα 6-ΒΕ.

Για την επίτευξη ενός επιθυμητού δρόμου του ΤΣΔ στο χώρο, χρησιμοποιείται ο τρισδιάστατος βραχίονας 6-B Ε του Σχήματος Β.2.



Σχήμα Γ.2 Συστήματα Συντεταγμένων στο τρισδιάστατο ΔΡΣ με ένα βραχίονα 6-ΒΕ.

Γ.2.1 Κινηματική Ανάλυση.

Η θέση του ΤΣΔ ως προς το αδρανειακό σύστημα συντεταγμένων είναι:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_E = & \mathbf{r}_{CM} + \mathbf{R}_0(\boldsymbol{\varepsilon}, n)({}^0\mathbf{v}_{06,E} + {}^0\mathbf{R}_1(\mathbf{q}){}^1\mathbf{v}_{16,E} + {}^0\mathbf{R}_2(\mathbf{q}){}^2\mathbf{v}_{26,E} + {}^0\mathbf{R}_3(\mathbf{q}){}^3\mathbf{v}_{36,E}) \\ & + \mathbf{R}_0(\boldsymbol{\varepsilon}, n)({}^0\mathbf{R}_4(\mathbf{q}){}^4\mathbf{v}_{46,E} + {}^0\mathbf{R}_5(\mathbf{q}){}^5\mathbf{v}_{56,E} + {}^0\mathbf{R}_6(\mathbf{q}){}^6\mathbf{v}_{66,E}) \end{aligned} \quad (\Gamma-52)$$

όπου

$${}^0\mathbf{v}_{06,E} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}, \quad {}^1\mathbf{v}_{16,E} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{bmatrix}, \quad {}^2\mathbf{v}_{26,E} = \begin{bmatrix} c \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^3\mathbf{v}_{36,E} = \begin{bmatrix} d \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\Gamma-53\alpha)$$

και

$${}^4\mathbf{v}_{46,E} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e \end{bmatrix}, \quad {}^5\mathbf{v}_{56,E} = \begin{bmatrix} f \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^6\mathbf{v}_{66,E} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} \quad (\Gamma-53\beta)$$

όπου

$$a_x = m_0 r_{0x} / M \quad (\Gamma-54\alpha)$$

$$a_y = m_0 r_{0y} / M \quad (\Gamma-54\beta)$$

$$a_z = m_0 r_{0z} / M \quad (\Gamma-54\gamma)$$

$$b = (l_1 m_0 + r_1 (m_0 + m_1)) / M \quad (\Gamma-54\delta)$$

$$c = (l_2 (m_0 + m_1) + r_2 (m_0 + m_1 + m_2)) / M \quad (\Gamma-54\epsilon)$$

$$d = l_3 (m_0 + m_1 + m_2) + r_3 (m_0 + m_1 + m_2 + m_3) / M \quad (\Gamma-54\sigma\tau)$$

$$e = l_4 (m_0 + m_1 + m_2 + m_3) + r_4 (m_0 + m_1 + m_2 + m_3 + m_4) / M \quad (\Gamma-54\zeta)$$

$$f = l_5 (m_0 + m_1 + m_2 + m_3 + m_4) + r_5 (m_0 + m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5) / M \quad (\Gamma-54\eta)$$

$$g = l_6 (m_0 + m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5) / M + r_6 \quad (\Gamma-54\theta)$$

Οι πίνακες περιστροφής ${}^i\mathbf{R}_{i+1}$, $i=0,1,2$ που συνδέουν τα ΣΣ του δορυφόρου και των συνδέσμων του βραχίονα δίνονται από τις Εξ. (Γ-6). Οι πίνακες περιστροφής που συνδέουν τα ΣΣ του καρπού είναι:

$${}^3\mathbf{R}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\cos(q_4) & \sin(q_4) & 0 \\ -\sin(q_4) & -\cos(q_4) & 0 \end{bmatrix} \quad (\Gamma-55\alpha)$$

$${}^4\mathbf{R}_5 = \begin{bmatrix} \cos(q_5) & -\sin(q_5) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \sin(q_5) & \cos(q_5) & 0 \end{bmatrix} \quad (\Gamma-55\beta)$$

$${}^5\mathbf{R}_6 = \begin{bmatrix} \cos(q_6) & -\sin(q_6) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\sin(q_6) & -\cos(q_6) & 0 \end{bmatrix} \quad (\Gamma-55\gamma)$$

Γ.2.2 Ανάλυση Δυναμικών Ιδιομορφιών.

Ο πίνακας ιδιομορφιών ${}^0\mathbf{S}^*$ δίνεται από την Εξ. (Α-44). Η ορίζουσα του πίνακα γίνεται μηδέν είτε όταν $q_5 = 0$ (wrist singularities).

Η συνάρτηση που δημιουργεί τις δυναμικές ιδιομορφίες έχει τη μορφή:

$$S(q_2, q_3, q_4, q_5, q_6) = -ac {}^0D_3 \cos(q_2) + ad {}^0D_2 \cos(q_2 + q_3) + cd {}^0D_0 \sin(q_3) \quad (\Gamma-56)$$

όπου:

$${}^0D_0 = a_{00} + a_{02} \sin(q_2) + a_{03} \sin(q_2 + q_3) + m_6 l_6 a (\cos(q_5) \sin(q_2 + q_3) + \sin(q_5) \cos(q_2 + q_3) \cos(q_4)) \quad (\Gamma-57\alpha)$$

$${}^0D_2 = a_{02} \sin(q_2) + a_{22} + a_{23} \cos(q_3) + m_6 l_6 c (\cos(q_3) \cos(q_5) - \sin(q_3) \sin(q_5) \cos(q_4)) \quad (\Gamma-57\beta)$$

$${}^0D_3 = a_{23} \cos(q_3) + a_{03} \sin(q_2 + q_3) + a_{33} + m_6 l_6 d \cos(q_5) \quad (\Gamma-57\gamma)$$

και

$$a_{00} = I_{0,yy} + m_0 (m_2 + m_3 + m_6) r_{0z}^2 / M \quad (\Gamma-58\alpha)$$

$$a_{02} = m_0 r_{0z} (l_2 (m_2 + m_3 + m_6) + r_2 (m_3 + m_6)) / M \quad (\Gamma-58\beta)$$

$$a_{03} = m_0 r_{0z} (l_3 (m_3 + m_6) + m_6 r_3) / M \quad (\Gamma-58\gamma)$$

$$a_{22} = I_{2zz} + (m_0 m_2 l_2^2 + m_2 (m_3 + m_6) r_2^2 + m_0 (m_3 + m_6) (l_2 + r_2)^2) / M \quad (\Gamma-58\delta)$$

$$a_{23} = ((m_3 + m_6) l_3 + m_6 l_3) (m_2 r_2 + m_0 (l_2 + r_2)) / M \quad (\Gamma-58\epsilon)$$

$$a_{33} = I_{3zz} + (m_3 (m_0 + m_2) l_3^2 + m_3 m_6 r_3^2 + m_6 (m_0 + m_2) (l_3 + r_3)^2) / M \quad (\Gamma-58\sigma\tau)$$

$$M = m_0 + m_2 + m_3 + m_6 \quad (\Gamma-58\zeta)$$

Μετά από αντικατάσταση των όρων 0D_i , $i=0,1,2,3$ προκύπτει ότι:

$$S(q_2, q_3) = k_0(q_2) + k_1(q_2) \sin(q_3) + k_2(q_2) \cos(q_3) \quad (\Gamma-59)$$

όπου

$$k_0 = c(da_{03} - aa_{33})c_2 \quad (\Gamma-60\alpha)$$

$$k_1 = -(a ca_{03} + a d a_{02} - 2cda_{00}) / 2 + d (-aa_{22} + ca_{01})s_2 + a(ca_{03} - da_{02}) \cos(2q_2) / 2 \quad (\Gamma-60\beta)$$

$$k_2 = -a (ba_{23} - da_{22})c_2 - a(ca_{03} - da_{02}) \sin(2q_1) / 2 \quad (\Gamma-60\gamma)$$

Παράρτημα Δ

Στο Παράρτημα αυτό αποδεικνύεται, για τα επίπεδα ΔΡΣ, ότι ο αριθμός των τιμών του αρχικού προσανατολισμού του δορυφόρου $\theta_{0,in} \in [0, 2\pi)$ που αντιστοιχούν σε $S_{\min} = S_0$ είναι άρτιος.

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν n τιμές του αρχικού προσανατολισμού του δορυφόρου $\theta_{0,in}^i \in [0, 2\pi)$, $i = 1, 2, \dots, n$, όπου $\theta_{0,in}^i < \theta_{0,in}^{i+1}$, που αντιστοιχούν σε $S_{\min} = S_0 > 0$ και n αυθαίρετοι αρχικοί προσανατολισμοί του δορυφόρου $\theta_{0,in}^{*i} \in [0, 2\pi)$ έτσι ώστε $\theta_{0,in}^{*i} \in (\theta_{0,in}^i, \theta_{0,in}^{i+1})$, $i = 1, 2, \dots, n$. Σημειώνεται ότι οι τιμές των $\theta_{0,in}^i$ και $\theta_{0,in}^{*i}$ επαναλαμβάνονται μετά από 2π έτσι ώστε να ικανοποιείται η περιοδικότητα της συνάρτησης S . Τότε, $\theta_{0,in}^{n+i} = 2\pi + \theta_{0,in}^i$ και $\theta_{0,in}^{*n+i} = 2\pi + \theta_{0,in}^{*i}$. Στη συνέχεια ορίζεται η συνάρτηση $f(\theta_{0,in}) = S_{\min}(\theta_{0,in}) - S_0$. Εφόσον η συνάρτηση αυτή είναι περιοδική ως προς τη μεταβλητή $\theta_{0,in}$ και έχει λύσεις $\theta_{0,in}^i$, ισχύουν οι επόμενες n ανισότητες:

$$\begin{aligned} f(\theta_{0,in}^{*1})f(\theta_{0,in}^{*2}) < 0 &\Rightarrow -\frac{f(\theta_{0,in}^{*1})}{f(\theta_{0,in}^{*2})} > 0 \\ &\vdots \\ f(\theta_{0,in}^{*n})f(\theta_{0,in}^{*n+1}) < 0 &\Rightarrow -\frac{f(\theta_{0,in}^{*n})}{f(\theta_{0,in}^{*n+1})} > 0 \end{aligned} \quad (\Delta-1)$$

Πολλαπλασιάζοντας τις n ανισότητες που δίνονται από την Εξ. (Δ-1), προκύπτει:

$$\pm \frac{f(\theta_{0,in}^{*1})}{f(\theta_{0,in}^{*n+1})} > 0 \quad (\Delta-2)$$

όπου τα πρόσημα (+) και (-) αντιστοιχούν σε άρτιο και περιττό αριθμό τιμών του n , αντίστοιχα. Επιπλέον, η συνάρτηση $f(\theta_{0,in})$ είναι περιοδική, έτσι:

$$f(\theta_{0,in}^{*n+1}) = f(2\pi + \theta_{0,in}^{*1}) = f(\theta_{0,in}^{*1}) \quad (\Delta-3)$$

Οι Εξ. (Δ-2) και (Δ-3) δίνουν:

$$\pm 1 > 0 \quad (\Delta-4)$$

Η Εξ. (Δ-4) είναι αληθής μόνο για τη περίπτωση που το πρόσημο είναι (+). Οπότε, ο αριθμός n των τιμών του αρχικού προσανατολισμού του δορυφόρου που αντιστοιχούν σε $S_{\min} = S_0 > 0$ πρέπει να είναι άρτιος.

Παράρτημα Ε

Στο Παράρτημα αυτό δίνεται μορφή διάφορων μεγεθών που χρησιμοποιήθηκαν στο Κεφάλαιο 5.

Ε.1

Αν η ροπή αδράνειας του σώματος i γύρω από το αρχικό ΚΜ είναι \mathbf{I}_i και η ροπή αδράνειας του κινητήρα γύρω από το ΚΜ του, μετά το μειωτήρα, είναι \mathbf{I}_{m_i} , τότε η ροπή αδράνειας \mathbf{I}_i^* του συστήματος σώμα – κινητήρας γύρω από το νέο ΚΜ είναι:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_i^* = & \mathbf{I}_i + m_i [(\mathbf{r}_i^* - \mathbf{r}_i)^T (\mathbf{r}_i^* - \mathbf{r}_i) \mathbf{I}_3 - (\mathbf{r}_i^* - \mathbf{r}_i)(\mathbf{r}_i^* - \mathbf{r}_i)^T] \\ & + m_{m_i} [(\mathbf{I}_i^*)^T \mathbf{I}_i^* \mathbf{I}_3 - \mathbf{I}_i^* (\mathbf{I}_i^*)^T] \end{aligned} \quad (\text{E-1})$$

όπου ο πίνακας \mathbf{I}_3 είναι ο 3×3 μοναδιαίος πίνακας.

Από τις Εξ. (5-35α) και (5-5) προκύπτει:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_i^* = & \mathbf{I}_i + m_i \left(\frac{m_{m_i}}{m_i + m_{m_i}} \right)^2 [\mathbf{I}_i^T \mathbf{I}_i \mathbf{I}_3 - \mathbf{I}_i \mathbf{I}_i^T] \\ & + m_{m_i} \left(\frac{m_i}{m_i + m_{m_i}} \right)^2 [\mathbf{I}_i^T \mathbf{I}_i \mathbf{I}_3 - \mathbf{I}_i \mathbf{I}_i^T] \end{aligned} \quad (\text{E-2})$$

όπου ύστερα από πράξεις προκύπτει:

$$\mathbf{I}_i^* = \mathbf{I}_i + \frac{m_i m_{m_i}}{m_i + m_{m_i}} [\mathbf{I}_i^T \mathbf{I}_i \mathbf{I}_3 - \mathbf{I}_i \mathbf{I}_i^T] \quad (\text{E-3})$$

ή διαφορετικά:

$$\mathbf{I}_i^* = \mathbf{I}_i + \frac{m_i m_{m_i}}{m_i + m_{m_i}} (\mathbf{I}_i^\times)^T (\mathbf{I}_i^\times) \quad (\text{E-4})$$

Δηλαδή ο όρος \mathbf{I}_i^* που ορίζεται στην Εξ. (5-14α), αποτελεί τη ροπή αδράνειας του συστήματος σώμα – κινητήρας γύρω από το νέο ΚΜ του συστήματος.

Ε.2

Εδώ δίνονται οι αδρανειακού τύπου πίνακες και τα διανύσματα-στήλες των φυγοκεντρικών δυνάμεων και των δυνάμεων Coriolis που παρουσιάζονται στην Εξ. (5-52), για το επίπεδο 7-ΒΕ ΔΡΣ που παρουσιάζεται στο Σχήμα 5.2.

Ο αδρανειακού τύπου πίνακας ${}^0D^*$ είναι:

$${}^0D^* = {}^0D_0^* + {}^0D_1^* + {}^0D_2^* \quad (\text{E-5})$$

όπου

$${}^0D_0^* = d_{00}^* + d_{10}^* + d_{20}^* \quad (\text{E-6α})$$

$${}^0D_1^* = d_{01}^* + d_{11}^* + d_{21}^* \quad (\text{E-6}\beta)$$

$${}^0D_2^* = d_{02}^* + d_{12}^* + d_{22}^* \quad (\text{E-6}\gamma)$$

και

$$d_{00}^* = a_{00}^* \quad (\text{E-7}\alpha)$$

$$d_{10}^* = a_{10}^* \cos(q_1) \quad (\text{E-7}\beta)$$

$$d_{20}^* = a_{20}^* \cos(q_1 + q_2) \quad (\text{E-7}\gamma)$$

$$d_{11}^* = a_{11}^* \quad (\text{E-7}\delta)$$

$$d_{21}^* = a_{21}^* \cos(q_2) \quad (\text{E-7}\epsilon)$$

όπου

$$a_{00}^* = I_0^* + m_0^* (m_1^* + m_2^*) r_0^{*2} / (m_0^* + m_1^* + m_2^*) \quad (\text{E-8}\alpha)$$

$$a_{10}^* = m_0^* r_0^* (l_1^* (m_1^* + m_2^*) + r_1^* m_2^*) / (m_0^* + m_1^* + m_2^*) \quad (\text{E-8}\beta)$$

$$a_{20}^* = m_0^* m_2^* r_0^* l_2^* / (m_0^* + m_1^* + m_2^*) \quad (\text{E-8}\gamma)$$

$$\alpha_{11}^* = I_1^* + (m_0^* m_1^* l_1^{*2} + m_1^* m_2^* r_1^{*2}) / (m_0^* + m_1^* + m_2^*) + m_0^* m_2^* (l_1^* + r_1^*)^2 / (m_0^* + m_1^* + m_2^*) \quad (\text{E-8}\delta)$$

$$\alpha_{21}^* = m_2^* l_2^* (m_1^* r_1^* + m_0^* (l_1^* + r_1^*)) / (m_0^* + m_1^* + m_2^*) \quad (\text{E-8}\epsilon)$$

$$\alpha_{22}^* = I_2^* + m_2^* (m_0^* + m_1^*) l_2^{*2} / (m_0^* + m_1^* + m_2^*) \quad (\text{E-8}\sigma\tau)$$

Σημειώνεται ότι τα ισοδύναμα μήκη l_i^* , r_i^* καθώς και οι ισοδύναμες μάζες m_i^* και ροπές αδράνειας I_i^* υπολογίζονται χρησιμοποιώντας τις Εξ. (5-5) και (5-14), αντίστοιχα, οι οποίες για επίπεδα ΔΡΣ παίρνουν τη μορφή:

$$l_i^* = \frac{m_i}{m_i + m_{m_i}} l_i \quad (\text{E-9}\alpha)$$

$$r_i^* = r_i + \frac{m_{m_i}}{m_i + m_{m_i}} l_i \quad (\text{E-9}\beta)$$

και

$$I_i^* = I_i + I_{m_{i+1}} + \frac{m_i m_{m_i}}{m_i + m_{m_i}} l_i^2 \quad (\text{E-9}\gamma)$$

Ο αδρανειακού τύπου πίνακας ${}^0D_{\ominus}$ είναι:

$${}^0D_{\ominus} = \begin{bmatrix} {}^0D_1^* + {}^0D_2^* & {}^0D_2^* & n_1 I_{m_1} & n_2 I_{m_2} \end{bmatrix} \quad (\text{E-10})$$

Ο αδρανειακού τύπου πίνακας ${}^0D_{\ominus\ominus}$ είναι:

$${}^0\mathbf{D}_{\Theta\Theta} = \begin{bmatrix} d_{11}^* + 2d_{12}^* + d_{22}^* & d_{12}^* + d_{22}^* & 0 & n_2 I_{m_2} \\ d_{12}^* + d_{22}^* & d_{22}^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n_1^2 I_{m_1} & 0 \\ n_2 I_{m_2} & 0 & 0 & n_2^2 I_{m_2} \end{bmatrix} \quad (\text{E-11})$$

Οι όροι \hat{d}_{ij}^* εμφανίζονται στην Εξ. (5-54) είναι:

$$\hat{d}_{01}^* = a_{10}^* \sin(q_1) \quad (\text{E-12}\alpha)$$

$$\hat{d}_{02}^* = a_{20}^* \sin(q_1 + q_2) \quad (\text{E-12}\beta)$$

$$\hat{d}_{12}^* = a_{21}^* \sin(q_2) \quad (\text{E-12}\gamma)$$

E.3

Ο πίνακας αδράνειας \mathbf{H}^* του μειωμένου συστήματος ενός ελεύθερα αιωρούμενου ΔΡΣ με εύκαμπτες αρθρώσεις δίνεται από:

$$\mathbf{H}^*(\mathbf{q}) = {}^0\mathbf{D}_{\Theta\Theta} - {}^0\mathbf{D}_{\Theta}^T {}^0\mathbf{D}^{*-1} {}^0\mathbf{D}_{\Theta} \quad (\text{E-13}\alpha)$$

όπου μετά από αντικατάσταση των πινάκων ${}^0\mathbf{D}_{\Theta}$ και ${}^0\mathbf{D}_{\Theta\Theta}$ από τις Εξ. (5-20β) και (5-34) αντίστοιχα, προκύπτει:

$$\mathbf{H}^*(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{qq}^* & \mathbf{H}_{q\theta_m} \\ \mathbf{H}_{q\theta_m}^T & \mathbf{H}_{\theta_m\theta_m} \end{bmatrix} \quad (\text{E-13}\beta)$$

όπου:

$$\mathbf{H}_{qq}^* = {}^0\mathbf{D}_{qq}^* - {}^0\mathbf{D}_q^{*T} {}^0\mathbf{D}^{*-1} {}^0\mathbf{D}_q^* \quad (\text{E-14}\alpha)$$

$$\mathbf{H}_{q\theta_m} = {}^0\mathbf{D}_{q\theta_m} - {}^0\mathbf{D}_q^{*T} {}^0\mathbf{D}^{*-1} {}^0\mathbf{D}_{\theta_m} \quad (\text{E-14}\beta)$$

$$\mathbf{H}_{\theta_m\theta_m} = {}^0\mathbf{D}_{\theta_m\theta_m} - {}^0\mathbf{D}_{\theta_m}^T {}^0\mathbf{D}^{*-1} {}^0\mathbf{D}_{\theta_m} \quad (\text{E-14}\gamma)$$

όπου οι πίνακες ${}^0\mathbf{D}^*$, ${}^0\mathbf{D}_q^*$ δίνονται από τις Εξ. (5-16), ενώ οι πίνακες ${}^0\mathbf{D}_{\theta_m}$, ${}^0\mathbf{D}_{q\theta_m}$ και ${}^0\mathbf{D}_{\theta_m\theta_m}$ υπολογίζονται από τις Εξ. (5-18α), (5-30γ) και (5-32) αντίστοιχα.

Παρακάτω δίνονται οι αδρανειακού τύπου πίνακες \mathbf{H}_{qq}^* , $\mathbf{H}_{q\theta_m}$ και $\mathbf{H}_{\theta_m\theta_m}$, για το επίπεδο ΔΡΣ με ένα βραχίονα με 2 εύκαμπτες αρθρώσεις που παρουσιάζεται στο Σχήμα 5.2:

$$\mathbf{H}_{qq}^* = \begin{bmatrix} d_{11}^* + 2d_{12}^* + d_{22}^* - \frac{({}^0D_1^* + {}^0D_2^*)^2}{{}^0D^*} & d_{12}^* + d_{22}^* - \frac{{}^0D_2^*({}^0D_1^* + {}^0D_2^*)}{{}^0D^*} \\ d_{12}^* + d_{22}^* - \frac{{}^0D_2^*({}^0D_1^* + {}^0D_2^*)}{{}^0D^*} & d_{22}^* - \frac{{}^0D_2^{*2}}{{}^0D^*} \end{bmatrix} \quad (\text{E-15}\alpha)$$

$$\mathbf{H}_{\mathbf{q}\theta_m} = \begin{bmatrix} -\frac{({}^0D_1^* + {}^0D_2^*)n_1 I_{m_1}}{{}^0D^*} & n_2 I_{m_2} - \frac{({}^0D_1^* + {}^0D_2^*)n_2 I_{m_2}}{{}^0D^*} \\ -\frac{{}^0D_2^* n_1 I_{m_1}}{{}^0D^*} & -\frac{{}^0D_2^* n_2 I_{m_2}}{{}^0D^*} \end{bmatrix} \quad (\text{E-15}\beta)$$

$$\mathbf{H}_{\theta_m\theta_m} = \begin{bmatrix} n_1^2 I_{m_1} - \frac{n_1^2 I_{m_1}^2}{{}^0D^*} & -\frac{n_1 I_{m_1} n_2 I_{m_2}}{{}^0D^*} \\ -\frac{n_1 I_{m_1} n_2 I_{m_2}}{{}^0D^*} & n_2^2 I_{m_2} - \frac{n_2^2 I_{m_2}^2}{{}^0D^*} \end{bmatrix} \quad (\text{E-15}\gamma)$$

Οι όροι h_{ij} που παρουσιάζονται στην Εξ. (5-58α), δίνονται παρακάτω:

$$h_{11} = I_1 + m_1 l_1^2 + I_2 + m_2 ((l_1 + r_1)^2 + l_2^2 + 2 l_2 (l_1 + r_1) \cos(q_2)) + I_{m_2} + m_{m_2} (l_1 + r_1)^2 \quad (\text{E-16}\alpha)$$

$$h_{12} = I_2 + m_2 (l_2 (l_1 + r_1) \cos(q_2) + l_2^2) \quad (\text{E-16}\beta)$$

$$h_{22} = I_2 + m_2 l_2^2 \quad (\text{E-16}\gamma)$$