



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών

Τομέας Ρευστών

Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών

Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής  
& Βελτιστοποίησης

Προγραμματισμός Λογισμικού για την Επίλυση  
Μη-Μόνιμων Πεδίων Ροής με Κινούμενα Στερεά Όρια  
με τη Μέθοδο των Τεμνόμενων Κυψελών (Cut-Cell)

Διπλωματική Εργασία

Κατσανούλης Στέργιος

Επιβλέπων: Κυριάκος Χ. Γιαννάκογλου , Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, 2015





Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο  
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών  
Τομέας Ρευστών  
Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής  
& Βελτιστοποίησης

Προγραμματισμός Λογισμικού για την Επίλυση Μη-Μόνιμων  
Πεδίων Ροής με Κινούμενα Στερεά Όρια με τη Μέθοδο των  
Τεμνόμενων Κυψελών (Cut-Cell)

Διπλωματική Εργασία

Κατσανούλης Στέργιος

Επιβλέπων: Κ. Χ. Γιαννάκογλου, Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, 2015

Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία πραγματεύεται την ανάπτυξη ενός λογισμικού αριθμητικής επίλυσης μη-μόνιμων πεδίων ατρίβους, συμπιεστής ροής με κινούμενα στερεά όρια με τη μέθοδο των μη-οριόδωτων πλεγμάτων (Immersed Boundary Method). Ειδικότερα, το λογισμικό χρησιμοποιεί την τεχνική των τεμνόμενων κυψελών για τον χειρισμό των κυψελών στη γειτονιά του στερεού ορίου ενώ η επίλυση των εξισώσεων που διέπουν τη ροή πραγματοποιείται μέσω της μεθόδου των πεπερασμένων όγκων (Cut-Cell Finite-Volume approach). Επιπλέον, αναπτύσσεται μια μέθοδος για την απόδοση τιμών στις μεταβλητές ροής και στις γεωμετρικές ποσότητες των κυψελών που εισέρχονται στο ρευστό κατά την κίνηση του στερεού ορίου.

Αναφορικά με τις εφαρμογές που εξετάζονται, αρχικά, πραγματοποιείται η πιστοποίηση του επιλύτη σε δύο χρονικά μόνιμες ροές, μια υποηχητική και μια διηχητική. Στη συνέχεια, παρουσιάζονται οι αντίστοιχες περιπτώσεις ροών σε μη-μόνιμες συνθήκες, με το μη-μόνιμο πεδίο να είναι απόρροια της χρονικής μεταβολής των οριακών συνθηκών. Επιπλέον, εξετάζεται η περιοδική κίνηση πρόνευσης δύο αεροτομών για τις οποίες υπάρχουν πειραματικά δεδομένα ενώ, όπου είναι εφικτό, πραγματοποιείται η σύγκριση με αποτελέσματα που παράχθηκαν από την αριθμητική επίλυση των ίδιων περιπτώσεων είτε σε οριόδετα πλέγματα, είτε σε μη-οριόδετα πλέγματα που στηρίζονται στην υλοποίηση της μεθόδου Ghost-Cell. Τέλος, μελετάται η μη-μόνιμη ροή γύρω από μια υπεραντωτική διάταξη (flap).



**National Technical University of Athens**  
**School of Mechanical Engineering**  
**Fluids Section**  
**Parallel CFD & Optimization Unit**

**Programming of the Cut-Cell Method for Unsteady Flow Fields with  
Moving Solid Boundaries**

Diploma Thesis

**Katsanoulis Stergios**

Supervisor: K. C. Giannakoglou, Professor NTUA

Athens, 2015

**Abstract**

The present diploma thesis is dealing with the development of CFD software concerning the numerical solution of the steady and unsteady, inviscid and compressible fluid flow equations, including cases with moving solid boundaries, through the Immersed Boundary method, according to the finite-volume technique. More specifically, the software applies the Cut-Cell method for discretizing the flow equations over cells in the vicinity of the solid boundary. Furthermore, a new method is developed for attributing values in the field variables and geometrical quantities of cells entering the fluid domain during the motion of the solid boundary.

Regarding applications, initially, a validation of the solver in steady, subsonic and transonic flow fields is carried out. Then, cases with unsteady flow conditions where the unsteadiness results from the temporal variation of the imposed boundary conditions are studied. Moreover, the periodic pitching motion of two airfoils, for which experimental data are available, is presented. In some cases, comparison with the results derived from the numerical solution of the same cases, using either body-fitted grids, or cartesian grids by implementing the Ghost-Cell technique, is made. Finally, the unsteady flow around a high-lift device (flap) is studied using the developed software.



*Στη μνήμη του πατέρα μου*



## Ευχαριστίες

Η ολοκλήρωση της παρούσας διπλωματικής εργασίας σηματοδοτεί το τέλος της φοίτησής μου στη σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών του Εθνικού Μετσοβίου Πολυτεχνείου. Με αυτή την ευκαιρία θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους εκείνους που συνέβαλαν στην εκπόνηση αυτής της εργασίας αλλά και όσους ήταν δίπλα μου καθόλη τη διάρκεια της φοίτησής μου.

Πρωτίστως, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή μου, κ. Κ. Χ. Γιαννάκογλου, η καθοδήγηση και οι γνώσεις του οποίου αποτέλεσαν τον βασικότερο οδηγό για την ολοκλήρωση της παρούσας διπλωματικής εργασίας. Επίσης, τον ευχαριστώ που μου έδωσε τη δυνατότητα να ασχοληθώ με ένα θέμα που αποδείχθηκε ιδιαίτερα επιμορφωτικό, αλλά κυριότερα, που από τα πρώτα έτη ως καθηγητής, ο μοναδικός τρόπος διδασκαλίας του με ενέπνευσε να εμβαθύνω σε αντικείμενα που άπτονται των ενδιαφερόντων του.

Επιπλέον, οφείλω να ευχαριστήσω όλα τα μέλη της ΜΠΥΡ&Β του Εργαστηρίου Θερμικών Στροβιλομηχανών, των οποίων η συμβολή στην εκπόνηση αυτής της διπλωματικής εργασίας υπήρξε καθοριστικής σημασίας. Ιδιαίτερα πρέπει να ευχαριστήσω τον υποψήφιο διδάκτορα Κωνσταντίνο Σαμούχο ο οποίος διέθεσε σημαντικό χρόνο επιλύοντας τις απορίες μου και συνέβαλε ουσιαστικά στην ολοκλήρωση ενός μεγάλου μέρους αυτής της εργασίας. Τον ευχαριστώ, επίσης, για τις ενδιαφέρουσες συζητήσεις μας. Ακόμη, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους διδάκτορες Βαρβάρα Ασούτη και Ξενοφώντα Τρομπούκη καθώς και τους υποψήφιους διδάκτορες Κωνσταντίνο Τσιάχα και Δημήτρη Καψούλη οι οποίοι με τις συμβουλές τους συνεισέφεραν στην άμεση αντιμετώπιση των προβλημάτων που ανέκυπταν.

Σε καμία περίπτωση δεν θα μπορούσα να παραλείψω να ευχαριστήσω τους φίλους μου που ήταν δίπλα μου κατά τη διάρκεια της φοίτησής μου και κυρίως τους συμφοιτητές μου Παύλο Αλεξιά και Ηλία Βασιλόπουλο, για τη συμπαράσταση και την ευχάριστη συντροφιά τους τόσο εντός όσο και εκτός της σχολής. Επίσης, ξεχωριστή μνεία οφείλω να κάνω στη Βίβιαν Νταμπουρλιάκου για την υπομονή και την υποστήριξη που δείχνει όλα αυτά τα χρόνια.

Κλείνοντας, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου, χωρίς την υποστήριξη της οποίας δεν θα μπορούσα να βρισκομαι σε αυτήν τη θέση. Τους ευχαριστώ για την αμέριστη συμπαράσταση τους, και κυρίως, γιατί μου παρείχαν τη δυνατότητα να ακολουθήσω τα όνειρα μου.

---



## Ακρωνύμια

ΕΜΠ                      Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

ΕΘΣ                      Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών

ΜΠΥΡ&Β                Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής  
Ρευστοδυναμικής & Βελτιστοποίησης

ΥΡΔ                      Υπολογιστική Ρευστοδυναμική

---

CFD                      Computational Fluid Dynamics

NTUA                    National Technical University of Athens

PCopt                    Parallel CFD & Optimization unit

IB                        Immersed Boundary

---



# Περιεχόμενα

<b>1</b>	<b>Εισαγωγή</b>	<b>1</b>
1.1	Μη-μόνιμες ροές . . . . .	1
1.2	Μέθοδοι μη-οριόδετων πλεγμάτων . . . . .	2
1.3	Στόχος και δομή της διπλωματικής εργασίας . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Διατύπωση 2D μη-μόνιμου προβλήματος εξωτερικής αεροδυναμικής</b>	<b>9</b>
2.1	Εισαγωγικά σχόλια . . . . .	9
2.2	Διακριτοποίηση του υπολογιστικού χωρίου . . . . .	10
2.3	Οι εξισώσεις Euler και η διακριτοποίησή τους . . . . .	13
2.3.1	Ολοκλήρωση σε κεντροκυβελικούς όγκους ελέγχου . . . . .	14
2.3.2	Διακριτοποίηση των ατριβών όρων . . . . .	15
2.3.3	Διακριτοποίηση των χρονικών όρων . . . . .	24
2.3.4	Επιβολή οριακών συνθηκών . . . . .	25
2.4	Επαναληπτικός αλγόριθμος επίλυσης . . . . .	27
<b>3</b>	<b>Διακριτοποίηση χρονικού όρου σε ροές με κινούμενα στερεά όρια</b>	<b>35</b>
3.1	Εισαγωγικά σχόλια . . . . .	35
3.2	Αιτίες ταλαντώσεων των πεδίων των ροϊκών μεγεθών σε μια μέθοδο IB	36
3.3	Μέθοδος υπολογισμού του χρονικού όρου σε μια μέθοδο Cut-Cell . . .	40
3.3.1	Υπολογισμός του επιφανειακού όρου $\vec{S}$ . . . . .	41
3.3.2	Απόδοση τιμών σε κυψέλες που εμφανίζονται στο ρευστό . . . .	43

<b>4</b>	<b>Πρόλεξη μόνιμων και μη-μόνιμων ροών με ακίνητα στερεά όρια</b>	<b>47</b>
4.1	Εισαγωγικά σχόλια . . . . .	47
4.2	Πιστοποίηση του επιλύτη σε χρονικά μόνιμα προβλήματα . . . . .	47
4.3	Πιστοποίηση του επιλύτη σε χρονικά μη-μόνιμα προβλήματα . . . . .	53
<b>5</b>	<b>Πρόλεξη μη-μόνιμων ροών με κινούμενα στερεά όρια</b>	<b>61</b>
5.1	Εισαγωγικά σχόλια . . . . .	61
5.2	Επίλυση ροής γύρω από ένα σώμα . . . . .	62
5.3	Επίλυση ροής γύρω από δύο σώματα . . . . .	73
<b>6</b>	<b>Ανακεφαλαίωση-Συμπεράσματα-Σχόλια</b>	<b>79</b>
	<b>Α' Η μέθοδος Jacobi για την επίλυση γραμμικών συστημάτων</b>	<b>81</b>
	<b>Βιβλιογραφία</b>	<b>85</b>

---



# Κεφάλαιο 1

## Εισαγωγή

### 1.1 Μη-μόνιμες ροές

Ως μη-μόνιμη (unsteady) θεωρείται η ροή στην οποία τα μεγέθη που τη χαρακτηρίζουν (ταχύτητα, πίεση, κλπ), σε μια συγκεκριμένη θέση, μεταβάλλονται ως συνάρτηση του χρόνου [1]. Ο χαρακτηρισμός μιας ροής ως μόνιμης ή μη-μόνιμης εξαρτάται άμεσα από το σύστημα αναφοράς που επιλέγεται για τη μελέτη αυτής. Για παράδειγμα, η στρωτή ροή γύρω από μια σφαίρα, για χαμηλούς αριθμούς Reynolds, θεωρείται μόνιμη σε ένα σύστημα αναφοράς που είναι ακίνητο σε σχέση με τη σφαίρα, ενώ για ένα σύστημα αναφοράς που ακολουθεί τα στοιχεία του ρευστού, η ροή θεωρείται μη-μόνιμη. Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό, οι τυρβώδεις ροές χαρακτηρίζονται ως μη-μόνιμες, εξαιτίας των διαταραχών των ροϊκών μεγεθών που τις διέπουν, παρόλο που τα στατιστικά μεγέθη τους (μέση τιμή και τυπική απόκλιση των ροϊκών ποσοτήτων) σε κάθε θέση, μπορεί να παραμένουν αναλλοίωτα στον χρόνο.

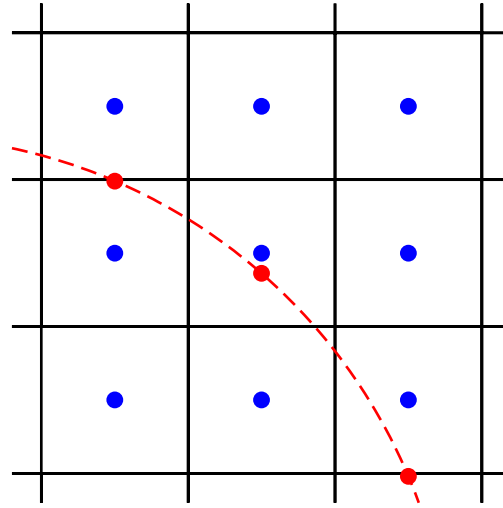
Τόσο για τις μη-συνεκτικές (inviscid) όσο και για τις συνεκτικές (viscous) ροές, η δημιουργία μη-μόνιμου πεδίου προκαλείται είτε μέσω της μεταβολής των οριακών συνθηκών (π.χ. αλλαγή της γωνίας πρόσπτωσης σε μια αεροτομή), είτε από την ύπαρξη κινούμενων ορίων (λ.χ. μια παλλόμενη πτέρυγα αεροσκάφους). Η ύπαρξη της συνεκτικότητας, ωστόσο, παρέχει και έναν επιπλέον μηχανισμό δημιουργίας μη-μόνιμου πεδίου μέσω της αποκόλλησης που παρατηρείται σε τέτοιες ροές και έχει ως αποτέλεσμα την παραγωγή στροβίλων στον ομόρρο (wake) των σωμάτων (π.χ. έκλυση στροβίλων von Karman [2]).

## 1.2 Μέθοδοι μη-οριόδετων πλεγμάτων

Ο όρος «Μέθοδος μη-οριόδετων πλεγμάτων» (Immersed Boundary Method ή IB) χρησιμοποιείται για την αναφορά στη μέθοδο που αναπτύχθηκε αρχικά από τον Peskin [3] για την προσομοίωση της καρδιακής λειτουργίας και της ροής του αίματος δια μέσου της καρδιάς. Το καινοτόμο χαρακτηριστικό αυτής της μεθόδου έγκειται στο γεγονός ότι ολόκληρη η προσομοίωση πραγματοποιείται σε ένα καρτεσιανό πλέγμα (Cartesian Grid), το οποίο δεν προσαρμόζεται στη γεωμετρία της καρδιάς, ενώ η επίδραση των τοιχωμάτων μοντελοποιείται μέσω της προσθήκης ενός επιπλέον όρου στις εξισώσεις της ροής. Η ιδέα πίσω από αυτή τη μέθοδο συνοψίζεται στο σχήμα 1.1, όπου φαίνεται ότι το στερεό σώμα «βυθίζεται» (immersed) εντός του καρτεσιανού πλέγματος. Έτσι, υπάρχουν κυψέλες που ανήκουν εξ ολοκλήρου στο στερεό ή στο ρευστό και άλλες που διαχωρίζονται από το όριο του σώματος. Η περιγραφή των ροϊκών ποσοτήτων για τις κυψέλες του πλέγματος γίνεται με μεταβλητές Euler (η μεταβολή, δηλαδή, των ροϊκών ποσοτήτων αφορά έναν παρατηρητή που βρίσκεται ακίνητος σε κάθε κυψέλη). Αντίθετα, για την περιγραφή της κίνησης του στερεού χρησιμοποιούνται μεταβλητές Lagrange (η μεταβολή δηλαδή της θέσης του στερεού ορίου αναφέρεται στη μεταβολή που αντιλαμβάνεται ένας παρατηρητής που μετέχει στην κίνησή του).

Για την κατανόηση των πλεονεκτημάτων που απορρέουν από μια τέτοια προσέγγιση κρίνεται σκόπιμο να γίνει αντιπαραβολή με τις μεθόδους που βασίζονται σε οριόδετα πλέγματα (body-fitted). Σε μια τέτοια μέθοδο η γένεση του πλέγματος περιλαμβάνει δύο κύρια στάδια. Αρχικά, παράγεται ένα επιφανειακό πλέγμα που καλύπτει το στερεό όριο του σώματος και το οποίο, στη συνέχεια, χρησιμοποιείται ως οριακή συνθήκη για τη γένεση του πλέγματος στον όγκο που καταλαμβάνεται από το ρευστό. Για τη διακριτοποίηση των εξισώσεων μπορεί να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών (finite-difference method), των πεπερασμένων στοιχείων (finite-element method) ή των πεπερασμένων όγκων (finite-volume method). Στις δύο πρώτες περιπτώσεις, η διαφορική μορφή των εξισώσεων που διέπουν τη ροή μετασχηματίζεται σε ένα καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων, το οποίο ταυτίζεται με το πλέγμα. Στη δεύτερη περίπτωση, διακριτοποιείται η ολοκληρωματική μορφή των ροϊκών εξισώσεων και οι γεωμετρικές πληροφορίες για το στερεό όριο ενσωματώνονται έμμεσα στη διακριτοποίηση μέσω της ολοκλήρωσης.

Αντίθετα, στην IB μέθοδο, αν και διατηρείται το επιφανειακό πλέγμα για το όριο του σώματος, εντούτοις το καρτεσιανό πλέγμα που παράγεται για το χωρίο της ροής δεν δέχεται κάποια πληροφορία από αυτό. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα το στερεό να «κόβει»



Lagrangian points      ●      Immersed Boundary      - - - -  
 Eulerian points        ●

**Σχήμα 1.1:** Υλοποίηση της μεθόδου IB όπου απεικονίζονται με μπλε χρώμα τα σημεία στα οποία αποθηκεύονται οι ροϊκές ποσότητες για κάθε κυψέλη και για τα οποία χρησιμοποιείται Eulerian περιγραφή ενώ με κόκκινο τα σημεία του στερεού για τα οποία χρησιμοποιείται Lagrangian περιγραφή.

τις υπολογιστικές κυψέλες κατά τυχαίο τρόπο. Εφόσον το πλέγμα δεν είναι προσαρμοσμένο στο σώμα, η ικανοποίηση των οριακών συνθηκών πρέπει να πραγματοποιηθεί μέσω μιας διαφορετικής διαδικασίας οδηγώντας στη δημιουργία διαφόρων μεθόδων μη-οριόδετων πλεγμάτων.

Για να γίνουν πιο κατανοητές οι διάφορες μέθοδοι, θα θεωρηθεί ατριβής ροή ασυμπίεστου ρευστού γύρω από στερεό σώμα (που καταλαμβάνει όγκο  $\Omega_b$ ), η οποία διέπεται από τις εξισώσεις Euler:

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} \right) + \nabla p = 0, \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0, \text{ στο } \Omega_f \quad (1.2)$$

$$\vec{u} = \vec{u}_\Gamma, \text{ στο } \Gamma_b \quad (1.3)$$

όπου  $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t)$  είναι η ταχύτητα του ρευστού,  $\vec{p} = \vec{p}(\vec{x}, t)$  η πίεση του ρευστού και  $\rho$  η πυκνότητά του. Με  $\Omega_f$  συμβολίζεται ο όγκος που καταλαμβάνει το ρευστό και  $\Gamma_b$  είναι η επιφάνεια του ορίου του στερεού σώματος. Η πρώτη κατηγορία μεθόδων μη-

οριόδετων πλεγμάτων ονομάζεται συνεχής μέθοδος IB (Continuous forcing approach) και βασίζεται στην εισαγωγή στην εξίσωση (1.1) ενός όρου πηγής ως εξής:

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} \right) + \nabla p = \vec{f} \quad (1.4)$$

όπου ο όρος  $\vec{f}$  παίρνει κατάλληλες τιμές έτσι ώστε να προσομοιώνει το στερεό όριο που ενδεχομένως υπάρχει στο εσωτερικό μιας κυψέλης, ενώ αποσβένεται μακριά από αυτό [4].

Τη δεύτερη κατηγορία μεθόδων αποτελούν οι διακριτές μέθοδοι IB (Discrete forcing approach). Σύμφωνα με αυτές, οι διέπουσες εξισώσεις διακριτοποιούνται αγνοώντας το «βυθισμένο» σώμα και μόνο αφού τελειώσει η διακριτοποίηση, οι προκύπτουσες εξισώσεις διαφοροποιούνται κοντά στο στερεό όριο για να συμπεριλάβουν την επίδρασή του. Η περισσότερο χρησιμοποιούμενη τέτοια μέθοδος είναι η μέθοδος Ghost-Cell [5, 6].

Τέλος, υπάρχει η μέθοδος των τεμνόμενων κυψελών (Cut-Cell), η οποία αν και μπορεί να χαρακτηριστεί διακριτή μέθοδος [7], εντούτοις διαφοροποιείται σε σχέση με αυτές ως προς το ότι οι κυψέλες που τέμνονται από το στερεό όριο αλλάζουν το σχήμα τους έτσι ώστε να προσαρμόζονται σε αυτό [8, 9]. Η διαδικασία αυτή είναι ο λόγος που τους επιτρέπει να είναι η μόνη διακριτή μέθοδος IB η οποία ικανοποιεί «αυστηρά» τόσο τους τοπικούς (γύρω από μια κυψέλη) όσο και τους συνολικούς (σε ολόκληρο το υπολογιστικό χωρίο) νόμους διατήρησης.

Τονίζεται ότι το λογισμικό που αναπτύχθηκε σε αυτή τη διπλωματική εργασία βασίστηκε στην Cut-Cell τεχνική των μεθόδων μη-οριόδετων πλεγμάτων. Συνεπώς, τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται αντιστοιχούν στο σύνολό τους σε αυτή την τεχνική με εξαίρεση μια περίπτωση στο κεφάλαιο 5 όπου γίνεται αντιπαράθεση με την Ghost-Cell τεχνική και με μια μέθοδο οριόδετων πλεγμάτων.

Η απλότητα που απορρέει από τη σχετική ανάλυση αναφορικά με όλες τις μεθόδους μη-οριόδετων πλεγμάτων, έχει ως αποτέλεσμα αυτές οι μέθοδοι να παρουσιάζουν δύο βασικά πλεονεκτήματα. Αρχικά, η γένεση του πλέγματος σε μια IB μέθοδο εμφανίζει μικρή εξάρτηση από την πολυπλοκότητα της γεωμετρίας των «βυθισμένων» στο ρευστό σωμάτων. Αυτό είναι ιδιαίτερα σημαντικό καθώς στις μεθόδους γένεσης οριόδετων πλεγμάτων, όταν η γεωμετρία διαθέτει κάποια πολυπλοκότητα, χρειάζεται να καταβληθεί σημαντική προσπάθεια από το χρήστη, μέσω μιας επαναληπτικής διαδικασίας, προκειμένου να παραχθεί πλέγμα καλής ποιότητας. Επιπρόσθετα, αυτές οι μέθοδοι

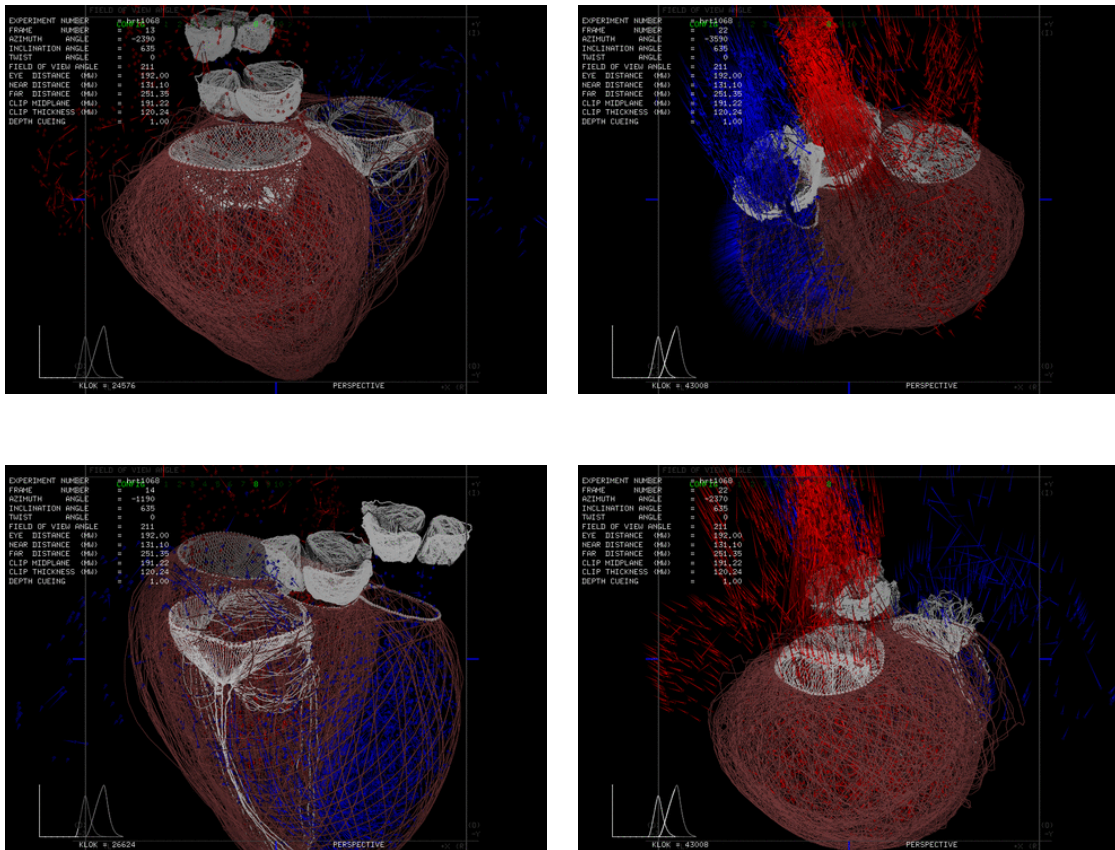
παρέχουν μια σπουδαία ποσοτική διαφοροποίηση στις περιπτώσεις ροών με κινούμενα όρια. Πράγματι, σε τέτοιες ροές μια IB μέθοδος δεν απαιτεί την επαναπλεγματοποίηση ή την παραμόρφωση του πλέγματος σε κάθε χρονικό βήμα, κάτι το οποίο μειώνει κατά πολύ το υπολογιστικό κόστος και κάνει τη διαδικασία επίλυσης πιο στιβαρή (robust).

Στον αντίποδα αυτών βρίσκεται το βασικό μειονέκτημα των μεθόδων IB που έγκειται στο ότι η επιβολή των οριακών συνθηκών δεν είναι άμεση καθώς στη γενική περίπτωση δεν υπάρχουν κόμβοι του πλέγματος που να βρίσκονται πάνω στα στερεά όρια. Αυτό το γεγονός, σε συνδυασμό με την πολυπλοκότητα της γεωμετρίας, μπορεί να οδηγήσει στην αλλοίωση της συντηρητικής ιδιότητας [10] των ροϊκών εξισώσεων, μειώνοντας την ακρίβεια της τελικής λύσης. Επιπλέον, στην περίπτωση των συνεκτικών ροών μπορεί ναδειχθεί ότι καθώς αυξάνεται ο αριθμός Reynolds, η αύξηση του πλήθους των υπολογιστικών κυψελών για ένα καρτεσιανό πλέγμα είναι μεγαλύτερη από την αντίστοιχη αύξηση σε ένα οριόδετο πλέγμα [7]. Ωστόσο, η επίδραση στο υπολογιστικό κόστος δεν είναι ευθέως ανάλογη αυτής της αύξησης εφόσον ένα σημαντικό μέρος των κυψελών βρίσκεται στο εσωτερικό του στερεού σώματος όπου δεν απαιτείται η επίλυση των εξισώσεων της ροής.

Κλείνοντας αυτή την εισαγωγή, για την ανάδειξη της δυναμικής των μεθόδων μη-οριόδετων πλεγμάτων σε μη-μόνιμα πεδία ροής παρουσιάζεται η προσομοίωση της καρδιακής λειτουργίας (σχήμα 1.2), όπως προέκυψε από τη μέθοδο του Peskin [11].

### 1.3 Στόχος και δομή της διπλωματικής εργασίας

Στόχος της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η ανάπτυξη ενός λογισμικού αριθμητικής επίλυσης μη-μόνιμων πεδίων ατριβούς ροής με ακίνητα ή κινούμενα στερεά όρια με τη μέθοδο των μη-οριόδετων πλεγμάτων. Το λογισμικό αυτό βασίζεται σε υπάρχον λογισμικό επίλυσης μόνιμης ατριβούς ροής [12], το οποίο χρησιμοποιεί την τεχνική των τεμνόμενων κυψελών (Cut-Cell) για τον χειρισμό των κυψελών στη γειτονιά του στερεού ορίου και επεκτείνεται ώστε να εφαρμόζεται και σε περιπτώσεις μη-μόνιμων ροών, διαχειριζόμενο ακόμη και αυτές στις οποίες τα στερεά όρια κινούνται στο χρόνο. Το λογισμικό είναι προγραμματισμένο σε γλώσσα C++.



**Σχήμα 1.2:** Τέσσερα στιγμιότυπα ενός κύκλου λειτουργίας της καρδιάς, όπως προέκυψαν μέσω της μεθόδου IB που ανέπτυξε ο Peskin [11].

Η δομή της εργασίας έχει την εξής μορφή:

- Κεφάλαιο 2

Παρουσιάζεται ο τρόπος διακριτοποίησης του υπολογιστικού χωρίου με τη μέθοδο Cut-Cell. Στη συνέχεια, γίνεται η παράθεση των εξισώσεων που διέπουν τη ροή σε συνδυασμό με τις οριακές συνθήκες που πρέπει να επιβληθούν καθώς και η διακριτοποίηση αυτών. Τέλος, περιγράφεται λεπτομερώς ο αλγόριθμος της αριθμητικής επίλυσης της ροής.

- Κεφάλαιο 3

Αναλύεται ο τρόπος διακριτοποίησης μη-μόνιμων πεδίων ροής με κινούμενα στερεά όρια και παρουσιάζεται ένα μειονέκτημα (δημιουργία μη φυσικών ταλαντώσεων στα μεγέθη ροής, Spurious Oscillations) [6, 13, 14] που εμφανίζονται οι μέθοδοι μη-οριζόμενων πλεγμάτων σε αυτές τις περιπτώσεις. Στη συνέχεια, επιχειρείται μια ποιοτική διερεύνηση των αιτιών αυτού του φαινομένου ενώ, τέλος, αναπτύσσεται

μια μεθοδολογία για τον χειρισμό τέτοιων ροών.

- Κεφάλαιο 4

Πραγματοποιείται η πιστοποίηση του προγραμματισθέντος επιλύτη σε δύο περιπτώσεις μόνιμης ροής, μια υποηχητική (subsonic) και μια διηχητική (supercritical). Επίσης, επιλύεται ένα μη-μόνιμο πρόβλημα τόσο σε υποηχητικές όσο και σε διηχητικές συνθήκες ροής. Η ύπαρξη μη μόνιμου πεδίου σε αυτό το κεφάλαιο είναι απόρροια της χρονικής μεταβολής των οριακών συνθηκών.

- Κεφάλαιο 5

Γίνεται εφαρμογή της μεθόδου που αναπτύχθηκε για την επίλυση μη-μόνιμων ροών με κινούμενα στερεά όρια. Για το σκοπό αυτό, μελετάται η ροή γύρω από δύο διαφορετικές αεροτομές σε εξαναγκασμένη περιοδική κίνηση για τις οποίες υπάρχουν πειραματικά δεδομένα. Επίσης, για τη μια από τις δύο αεροτομές επιχειρείται η σύγκριση των αποτελεσμάτων του IB επιλύτη με τα αντίστοιχα αποτελέσματα που προέκυψαν αφενός μέσω ενός Ghost-Cell επιλύτη και αφετέρου μέσω οικείου λογισμικού που ανέπτυξε η ομάδα της ΜΠΥΡ&Β/ΕΘΣ και το οποίο χρησιμοποιεί οριόδετα πλέγματα για την επίλυση των εξισώσεων ροής. Τέλος, μελετάται η μη-μόνιμη ροή γύρω από μια υπεραντωτική διάταξη (flap).

- Κεφάλαιο 6

Συνοψίζονται τα συμπεράσματα της παρούσας διπλωματικής εργασίας και γίνεται αναφορά σε πιθανό μελλοντικό έργο που θα μπορούσε να πραγματοποιηθεί στο συγχεκριμένο πεδίο, με στόχο την περαιτέρω επέκταση του λογισμικού επίλυσης.





# Κεφάλαιο 2

## Διατύπωση 2D μη-μόνιμου προβλήματος εξωτερικής αεροδυναμικής

### 2.1 Εισαγωγικά σχόλια

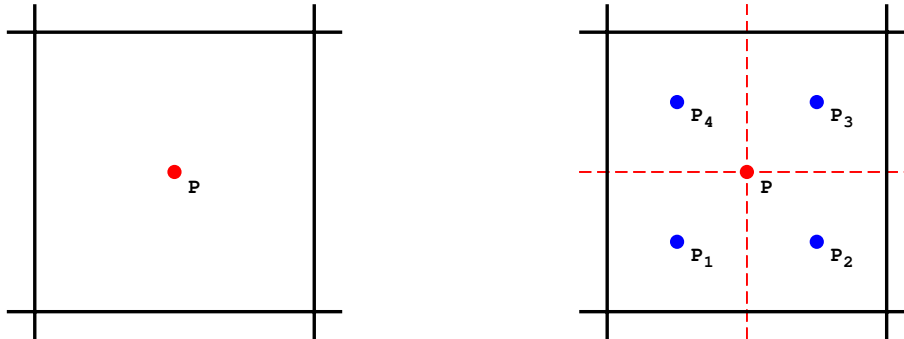
Στο παρόν κεφάλαιο αναλύεται ο τρόπος διακριτοποίησης και επίλυσης των μη-μόνιμων 2D εξισώσεων Euler για το συμπιεστό ρευστό με τη μέθοδο Cut-Cell. Προκειμένου η μέθοδος να γίνει πιο κατανοητή, παρουσιάζονται αποτελέσματα από την εφαρμογή της σε μια απλή γεωμετρία, όπως αυτή μιας αεροτομής. Η επιλογή αυτή έγινε καθώς πρόκειται για ένα πρόβλημα το οποίο μελετάται ενδελεχώς στην διεθνή βιβλιογραφία, παρέχοντας αρκετά αποτελέσματα που χρησιμεύουν ως αναφορά (benchmark) για τον κώδικα που αναπτύχθηκε. Η δημιουργία μη-μόνιμου πεδίου ροής σε αυτό το κεφάλαιο είναι αποτέλεσμα της μεταβολής των οριακών συνθηκών. Μη-μόνιμα πεδία λόγω κίνησης της γεωμετρίας θα εξεταστούν στο κεφάλαιο 3.

Αρχικά, στο κεφάλαιο αυτό επιχειρείται η παρουσίαση του τρόπου διακριτοποίησης του υπολογιστικού χωρίου με τη μέθοδο IB. Ακολουθεί η παράθεση των εξισώσεων που διέπουν τη ροή σε συνδυασμό με τις οριακές συνθήκες που επιβάλλονται καθώς και η διακριτοποίηση αυτών. Τέλος, περιγράφεται λεπτομερώς ο αλγόριθμος της αριθμητικής επίλυσης της ροής.

## 2.2 Διακριτοποίηση του υπολογιστικού χωρίου

Το υπολογιστικό χωρίο, το οποίο χρησιμοποιείται για την επίλυση των εξισώσεων της ροής γύρω από οποιαδήποτε γεωμετρία είναι ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Τα δεδομένα που απαιτούνται για τη διακριτοποίησή του είναι οι διαστάσεις του ορθογωνίου καθώς και οι τιμές δύο εμβαδών που ορίζουν τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του εμβαδού που μπορεί να λάβει κάθε κυψέλη του πλέγματος. Με αυτά ως δεδομένα, ο πλεγματοποιητής ξεκινά να διαχωρίζει το αρχικό ορθογώνιο σε μικρότερα ορθογώνια ακολουθώντας τη δομή δένδρου κατά την οποία κάθε κυψέλη διαχωρίζεται σε τέσσερις ισοεμβαδικές κυψέλες (quadtrees) όπως φαίνεται στο σχήμα 2.1. Αυτή η διαδικασία συνεχίζεται για κάθε υπό-κυψέλη που τέμνεται από το στερεό όριο, μέχρι το «σπάσιμο» των κελιών να δημιουργήσει κυψέλες με εμβαδό μικρότερο από το δοσμένο κάτω φράγμα. Σε αυτή τη διαδικασία, τίθεται ως βασικός περιορισμός δύο γειτονικές κυψέλες να μην απέχουν περισσότερο από δύο επίπεδα στη δένδρική δομή. Με αυτόν τον τρόπο, δημιουργείται πλέγμα με ομαλή πύκνωση κοντά στη γεωμετρία, κάτι που το καθιστά κατάλληλο για εφαρμογές υπολογιστικής ρευστομηχανικής. Από αυτό το σημείο και έπειτα, ο πλεγματοποιητής αναγνωρίζει τη θέση της γεωμετρίας και με βάση μια ακτίνα πύκνωσης, που του δίνεται ως είσοδος, αρχίζει να διαχωρίζει εκ νέου τις κυψέλες που βρίσκονται κοντά στη γεωμετρία δημιουργώντας μια προοδευτική πύκνωση μέσα στην ακτίνα, με την πιο πυκνή περιοχή να εντοπίζεται γύρω από τη γεωμετρία. Η παραπάνω διαδικασία απεικονίζεται στα σχήματα 2.2 και 2.3, όπου φαίνονται το υπολογιστικό χωρίο και η προοδευτική πύκνωση γύρω από την αεροτομή.

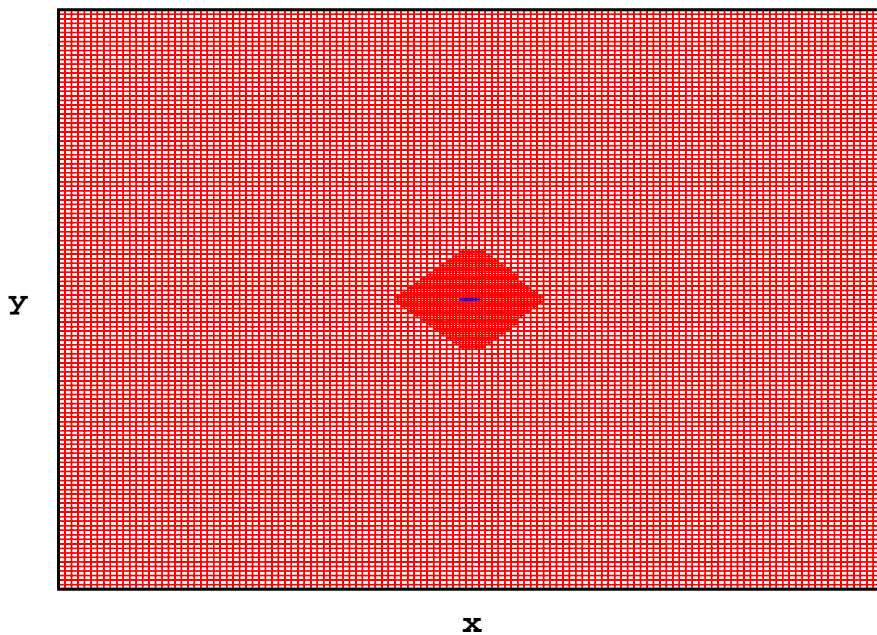
Η μέθοδος που επιλέχθηκε για τον χειρισμό των κυψελών στη γειτονιά του στερεού ορίου είναι η μέθοδος Cut-Cell [15, 16]. Έτσι, αν μια κυψέλη του καρτεσιανού πλέγματος τέμνεται από το στερεό όριο της γεωμετρίας, τότε άγεται ένα ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία τομής της κυψέλης με το στερεό όριο. Το χωρίο που δημιουργείται μεταξύ αυτού του ευθύγραμμου τμήματος και της κυψέλης, σχηματίζει μια νέα κυψέλη. Αυτή η κυψέλη (σχήματος τριγώνου, τετραπλεύρου ή πενταγώνου) ανήκει στο ρευστό και τα μεγέθη της ροής αποθηκεύονται πλέον στο βαρύκεντρό της όπως φαίνεται στο σχήμα 2.4. Τέλος, το τμήμα της αρχικής κυψέλης που δεν βρίσκεται μέσα στη νέα κυψέλη, θεωρείται ότι ανήκει στο στερεό και, προφανώς, οι εξισώσεις της ροής δεν επιλύονται γι' αυτό.



(i) Αρχική κυψέλη με βαρύκεντρο το σημείο  $P$ .

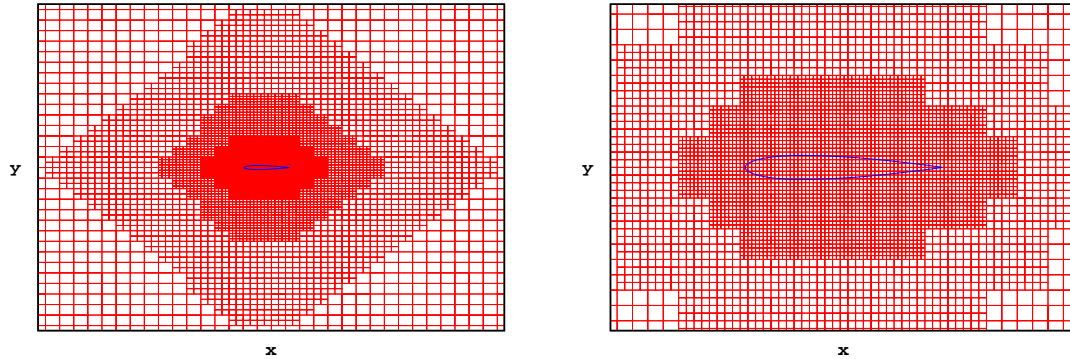
(ii) Οι τέσσερις κυψέλες με βαρύκεντρα τα σημεία  $P_1, P_2, P_3$  και  $P_4$  αντίστοιχα που προκύπτουν από το «σπάσιμο» της αρχικής κυψέλης.

**Σχήμα 2.1:** Η διαδικασία του «σπασίματος» των κυψελών του υπολογιστικού χωρίου.



**Σχήμα 2.2:** Το χωρίο επίλυσης της ροής με την αεροτομή τοποθετημένη στο κέντρο του. Στο σχήμα διακρίνεται η πυκνωση του πλέγματος γύρω από την αεροτομή η οποία, λόγω του μικρού της πάχους σε σύγκριση με το υπολογιστικό χωρίο, φαίνεται ως ευθύγραμμο τμήμα.

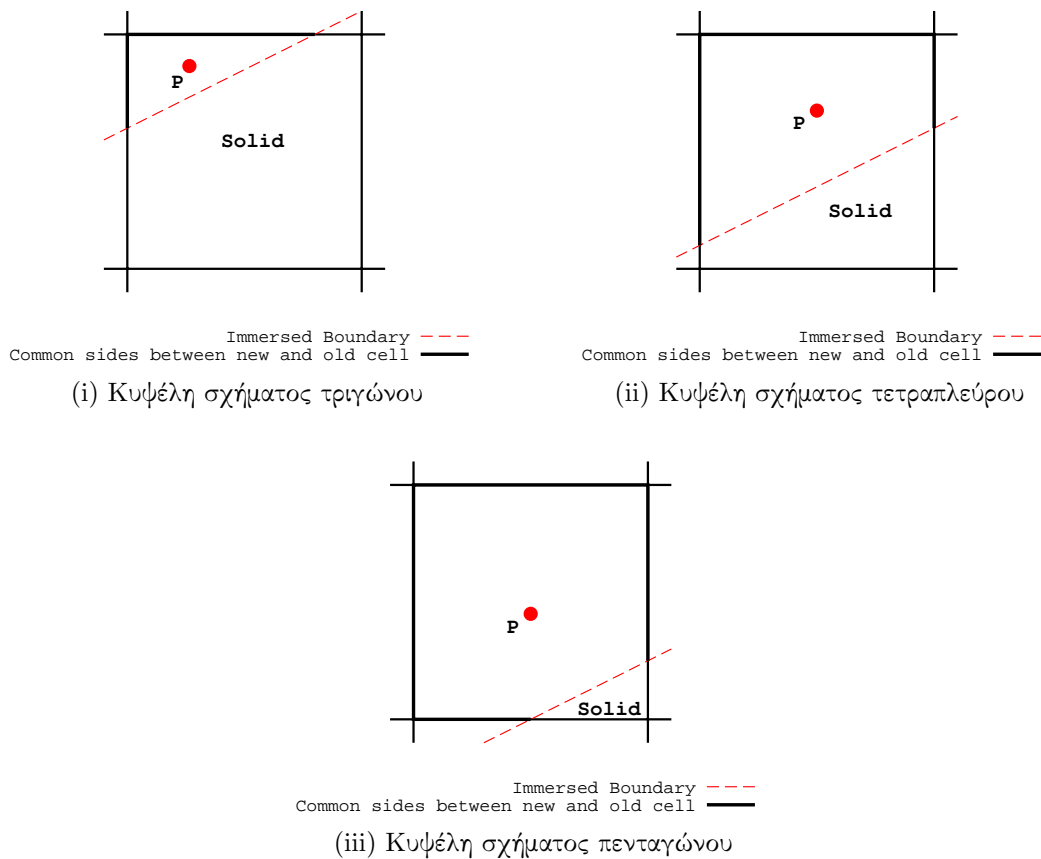
Επιπλέον, πρέπει να τονιστεί ότι η διαδικασία της πλεγματοποίησης γίνεται μόνο μια φορά, στην αρχή της επίλυσης. Έτσι, αν η γεωμετρία παραμένει ακίνητη, δεν χρειάζεται να γίνει ξανά υπολογισμός κάποιας γεωμετρικής ποσότητας στα επόμενα χρονικά



(i) Μεγέθυνση του σχήματος 2.2 στη μέγιστη ακτίνα από όπου ξεκινάει η πύκνωση του πλέγματος.

(ii) Περαιτέρω μεγέθυνση στη μέγιστη πύκνωση γύρω από την αεροτομή.

Σχήμα 2.3: Εστίαση στο πλέγμα γύρω από την αεροτομή.



Σχήμα 2.4: Τρόποι τομής κυψελών από το στερεό όριο. Με  $P$  συμβολίζεται το βαρύκεντρο της νέας κυψέλης.

βήματα. Αν, αντίθετα, η γεωμετρία κινείται, τότε σε κάθε χρονικό βήμα γίνεται ο υπολογισμός των γεωμετρικών ποσοτήτων των τεμνόμενων κυψελών και μόνο αυτών. Και στις δύο περιπτώσεις, βέβαια, υπάρχουν σημαντικά οφέλη στο υπολογιστικό κόστος σε σύγκριση με ένα οριόδετο πλέγμα. Το μειονέκτημα αυτής της διαδικασίας έγκειται στο γεγονός ότι σε περιπτώσεις που η γεωμετρία διαγράφει μεγάλα χωρία κατά την κίνησή της, η εσωτερική πύκνωση πρέπει να τα περιλαμβάνει εξ ολοκλήρου, αυξάνοντας σημαντικά τον αριθμό των κυψελών του πλέγματος.

## 2.3 Οι εξισώσεις Euler και η διακριτοποίησή τους

Οι εξισώσεις Euler εκφράζουν σε διαφορική μορφή τους νόμους διατήρησης μάζας, ορμής και ενέργειας για μια ροή ρευστού. Για διδιάστατη ροή συμπιεστού ρευστού, σε ένα αδρανειακό καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων (με άξονες τους  $x$  και  $y$ ), οι εξισώσεις αυτές, γραμμένες σε συντηρητική διανυσματική μορφή, έχουν ως εξής [17]:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{f}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{g}}{\partial y} = \vec{0} \quad (2.1)$$

Στην εξίσωση (2.1) με  $\vec{U}$  συμβολίζεται το διάνυσμα των συντηρητικών μεταβλητών:

$$\vec{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

ενώ με  $\vec{f}$  και  $\vec{g}$  συμβολίζονται τα διανύσματα ατριβούς ροής στις διευθύνσεις  $x$  και  $y$  αντίστοιχα, τα οποία δίνονται από τις σχέσεις:

$$\vec{f} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ u(E + p) \end{bmatrix}, \quad \vec{g} = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ v(E + p) \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

όπου  $\rho$  η πυκνότητα του ρευστού,  $u$  και  $v$  οι συνιστώσες της ταχύτητας κατά τους άξονες  $x$  και  $y$  αντίστοιχα,  $p$  η στατική πίεση και  $E$  η ολική ενέργεια ανά μονάδα όγκου του ρευστού.

Το κλείσιμο του συστήματος των εξισώσεων πραγματοποιείται με την υπόθεση ότι το ρευστό ικανοποιεί την καταστατική εξίσωση των τελείων αερίων:

$$p = \rho RT \quad (2.4)$$

όπου  $R$  η σταθερά του αερίου και  $T$  η στατική θερμοκρασία.

Ιδιαίτερα χρήσιμες είναι οι ακόλουθες σχέσεις από τη θερμοδυναμική των τελείων αερίων:

$$E = \rho e + \frac{1}{2}\rho(u^2 + v^2) \quad (2.5)$$

$$E = h_t - \frac{p}{\rho} \quad (2.6)$$

$$E = \frac{\rho c^2}{\gamma(\gamma - 1)} + \frac{1}{2}\rho(u^2 + v^2) \quad (2.7)$$

$$p = (\gamma - 1)\rho e = (\gamma - 1) \left( E - \frac{1}{2}\rho(u^2 + v^2) \right) \quad (2.8)$$

$$h_t = \frac{\gamma p}{\rho(\gamma - 1)} + \frac{1}{2}\rho(u^2 + v^2) \quad (2.9)$$

όπου  $h_t = c_p T_t$  η ολική ενθαλπία,  $T_t$  η ολική θερμοκρασία,  $e = c_v T$  η εσωτερική ενέργεια ανά μονάδα μάζας του ρευστού,  $\gamma$  ο εκθέτης της ισεντροπικής μεταβολής τελείων αερίων,  $c_v$  και  $c_p$  οι συντελεστές θερμοχωρητικότητας υπό σταθερό όγκο και σταθερή πίεση αντίστοιχα, θεωρούμενοι σταθεροί για τέλεια αέρια και  $c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$  η ταχύτητα του ήχου.

### 2.3.1 Ολοκλήρωση σε κεντροκυψελικούς όγκους ελέγχου

Για την επίλυση του συστήματος των εξισώσεων (2.1) και (2.4) χρησιμοποιήθηκε η τεχνική των πεπερασμένων όγκων [18]. Πιο συγκεκριμένα, η ολοκλήρωση των εξισώσεων (2.1) γίνεται σε όγκους ελέγχου που ταυτίζονται είτε με τις κυψέλες του αρχικού καρτεσιανού πλέγματος, είτε με τις τεμνόμενες κυψέλες (**κεντροκυψελική διατύπωση** των πεπερασμένων όγκων). Ορίζεται ως  $\Omega_P$  ο όγκος ελέγχου μιας τυχαίας κυψέλης με βαρύκεντρο το σημείο  $P$  καθώς και τα κάθετα μοναδιαία διανύσματα  $\vec{n}$  στο όριό της, τα οποία έχουν φορά από το εσωτερικό της κυψέλης προς τα έξω.

Ολοκληρώνοντας τις εξισώσεις (2.1) στον όγκο ελέγχου της κυψέλης με βαρύκεντρο το σημείο  $P$  (στο εξής θα ονομάζεται κυψέλη  $P$ ) τη χρονική στιγμή  $t^{k+1}$  ( $\Omega_P^{k+1} := \Omega_P(t^{k+1})$ ) έχουμε:

$$\int_{\Omega_P^{k+1}} \left[ \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{f}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{g}}{\partial y} \right] d\Omega = \vec{0} \quad (2.10)$$

ή

$$\vec{R}_P := \underbrace{\int_{\Omega_P^{k+1}} \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} d\Omega}_{\text{temporal}} + \underbrace{\int_{\Omega_P^{k+1}} \left[ \frac{\partial \vec{f}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{g}}{\partial y} \right] d\Omega}_{\text{inviscid}} = \vec{0} \quad (2.11)$$

όπου  $\vec{R}_P$  το υπόλοιπο των εξισώσεων της ροής στην κυψέλη  $P$ . Υπενθυμίζεται ότι, στην παρούσα διπλωματική εργασία, εξετάζονται και ροές με κινούμενα όρια. Συνεπώς, στη γενική περίπτωση, ο όγκος ελέγχου  $\Omega_P$  μπορεί να μεταβάλλεται με το χρόνο.

Οι επόμενες ενότητες περιγράφουν τον τρόπο υπολογισμού των ολοκληρωμάτων των ατριβών και χρονικών όρων της σχέσης (2.11) στον όγκο ελέγχου  $\Omega_P^{k+1}$ .

### 2.3.2 Διακριτοποίηση των ατριβών όρων

Εφαρμόζοντας το θεώρημα των Green-Gauss προκύπτει:

$$I^{inv,k+1} := \int_{\Omega_P^{k+1}} \left[ \frac{\partial \vec{f}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{g}}{\partial y} \right] d\Omega = \int_{\Omega_P^{k+1}} \frac{\partial F_i}{\partial x_i} d\Omega = \int_{\partial\Omega_P^{k+1}} \vec{F} \cdot \vec{n}^{k+1} d(\partial\Omega) \quad (2.12)$$

όπου ο επαναλαμβανόμενος δείκτης υποδηλώνει άθροιση ενώ για το συνιστάμενο διάνυσμα  $\vec{F}$  ισχύει:

$$\vec{F} = (\vec{f}, \vec{g}) \quad (2.13)$$

Στην εξίσωση (2.12) με  $\partial\Omega_P^{k+1}$  συμβολίζεται το όριο του όγκου ολοκλήρωσης τη χρονική στιγμή  $k+1$  και με  $d(\partial\Omega)$  μια στοιχειώδης επιφάνεια του όγκου αυτού. Για ευκολία, στη συνέχεια της παραγράφου, θεωρείται ότι οι μεταβλητές της ροής και όλες οι γεωμετρικές ποσότητες αναφέρονται στη χρονική στιγμή  $t^{k+1}$  και ο άνω δείκτης  $k+1$

παραλείπεται.

Ορίζοντας ως:

$$\vec{\Phi} = \vec{F} \cdot \vec{n} = \vec{f} n_x + \vec{g} n_y \quad (2.14)$$

το επιφανειακό ολοκλήρωμα της παραπάνω έκφρασης προσεγγίζεται ως εξής:

$$I^{inv} \simeq \sum_{Q \in nei(P)} \vec{\Phi}_{PQ}^{inv} \Delta s \quad (2.15)$$

όπου  $Q$  είναι οι γειτονικές κυψέλες της  $P$ , το σύνολο των οποίων είναι  $nei(P)$ .  $\vec{\Phi}_{PQ}^{inv}$  είναι το αριθμητικό διάνυσμα της ατριβούς ροής που διαπερνά τη διεπιφάνεια των όγκων ελέγχου των γειτονικών κυψελών  $P$  και  $Q$ , ενώ με  $\Delta s$  συμβολίζεται το εμβαδό (μήκος στις δύο διαστάσεις) αυτής της διεπιφάνειας.

Σε αυτό το σημείο είναι απαραίτητος ο ορισμός κάποιων επιπλέον ποσοτήτων. Ορίζεται λοιπόν το συνιστάμενο Ιακωβιανό μητρώο ως προς τις συντηρητικές μεταβλητές  $\vec{U}$ :

$$A := (A_x, A_y) \text{ όπου } A_x := \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{U}}, \quad A_y := \frac{\partial \vec{g}}{\partial \vec{U}} \quad (2.16)$$

Έτσι, η (2.1) μέσω των Ιακωβιανών μητρώων ξαναγράφεται ως:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{U}} \frac{\partial \vec{U}}{\partial \vec{x}} + \frac{\partial \vec{g}}{\partial \vec{U}} \frac{\partial \vec{U}}{\partial \vec{y}} = \vec{0} \quad (2.17)$$

ή

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + A_x \frac{\partial \vec{U}}{\partial \vec{x}} + A_y \frac{\partial \vec{U}}{\partial \vec{y}} = \vec{0} \quad (2.18)$$



Επιπλέον, ορίζεται το μητρώο  $\underline{A}$  ως:

$$\begin{aligned}\underline{A} &:= A \cdot \vec{n} = \vec{A}_x n_x + \vec{A}_y n_y \Leftrightarrow \\ \underline{A} &= \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{U}} n_x + \frac{\partial \vec{g}}{\partial \vec{U}} n_y \Leftrightarrow \\ \underline{A} &= \frac{\partial (\vec{F} \cdot \vec{n})}{\partial \vec{U}} = \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial \vec{U}}\end{aligned}\quad (2.19)$$

Από τον ορισμό του  $\vec{\Phi}$  (σχέση (2.14)) και τη σχέση (2.3), προκύπτει:

$$\vec{\Phi} = \begin{bmatrix} \rho(\vec{u} \cdot \vec{n}) \\ \rho u(\vec{u} \cdot \vec{n}) + p n_x \\ \rho v(\vec{u} \cdot \vec{n}) + p n_y \\ (E + p)(\vec{u} \cdot \vec{n}) \end{bmatrix}\quad (2.20)$$

Συνεπώς, για την εύρεση του μητρώου  $\underline{A}$  πρέπει να παραγωγισθεί το  $\vec{\Phi}$  ως προς τις συντηρητικές μεταβλητές της ροής  $\vec{U}$ . Για να γίνει αυτό, εξυπηρετεί η μετονομασία των συντηρητικών μεταβλητών, ως:

$$\vec{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \mu_4 \end{bmatrix}\quad (2.21)$$

Εκτελώντας τις πράξεις, το διάνυσμα  $\vec{\Phi}$  γράφεται:

$$\vec{\Phi} = \begin{bmatrix} \mu_2 n_x + \mu_3 n_y \\ \frac{\mu_2}{\mu_1}(\mu_2 n_x + \mu_3 n_y) + (\gamma - 1) \left( \mu_4 - \frac{1}{2} \frac{\mu_2^2 + \mu_3^2}{\mu_1} \right) n_x \\ \frac{\mu_3}{\mu_1}(\mu_2 n_x + \mu_3 n_y) + (\gamma - 1) \left( \mu_4 - \frac{1}{2} \frac{\mu_2^2 + \mu_3^2}{\mu_1} \right) n_y \\ \left( \gamma \mu_4 - \frac{\gamma - 1}{2} \frac{\mu_2^2 + \mu_3^2}{\mu_1} \right) \frac{\mu_2 n_x + \mu_3 n_y}{\mu_1} \end{bmatrix}\quad (2.22)$$

Παραγωγίζοντας κάθε όρο του διανύσματος ροής και έπειτα από τις απαραίτητες πράξεις

προκύπτει:

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial \mu_1} = 0$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial \mu_2} = n_x$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial \mu_3} = n_y$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial \mu_4} = 0$$

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial \mu_1} = -u(\vec{u} \cdot \vec{n}) + \frac{\gamma - 1}{2}(u^2 + v^2) n_x$$

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial \mu_2} = \vec{u} \cdot \vec{n} + (2 - \gamma)un_x$$

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial \mu_3} = un_y - (\gamma - 1)vn_x$$

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial \mu_4} = (\gamma - 1)n_x$$

$$\frac{\partial \Phi_3}{\partial \mu_1} = -v(\vec{u} \cdot \vec{n}) + \frac{\gamma - 1}{2}(u^2 + v^2) n_y$$

$$\frac{\partial \Phi_3}{\partial \mu_2} = vn_x - (\gamma - 1)un_y$$

$$\frac{\partial \Phi_3}{\partial \mu_3} = \vec{u} \cdot \vec{n} + (2 - \gamma)vn_y$$

$$\frac{\partial \Phi_3}{\partial \mu_4} = (\gamma - 1)n_y$$

$$\frac{\partial \Phi_4}{\partial \mu_1} = \left( -\gamma \frac{E}{\rho} + (\gamma - 1)(u^2 + v^2) \right) (\vec{u} \cdot \vec{n})$$

$$\frac{\partial \Phi_4}{\partial \mu_2} = \left( \frac{\gamma E}{\rho} - \frac{\gamma - 1}{2}(u^2 + v^2) \right) n_x - (\gamma - 1)u(\vec{u} \cdot \vec{n})$$

$$\frac{\partial \Phi_4}{\partial \mu_3} = \left( \frac{\gamma E}{\rho} - \frac{\gamma - 1}{2}(u^2 + v^2) \right) n_y - (\gamma - 1)v(\vec{u} \cdot \vec{n})$$

$$\frac{\partial \Phi_4}{\partial \mu_4} = \gamma(\vec{u} \cdot \vec{n})$$

Τελικά:

$$\begin{aligned}
 \underline{A}(:, 1) &= \begin{bmatrix} 0 \\ -u(\vec{u} \cdot \vec{n}) + \frac{\gamma-1}{2}(u^2 + v^2) n_x \\ -v(\vec{u} \cdot \vec{n}) + \frac{\gamma-1}{2}(u^2 + v^2) n_y \\ \left(-\gamma \frac{E}{\rho} + (\gamma - 1)(u^2 + v^2)\right) (\vec{u} \cdot \vec{n}) \end{bmatrix} \\
 \underline{A}(:, 2) &= \begin{bmatrix} n_x \\ \vec{u} \cdot \vec{n} + (2 - \gamma)un_x \\ vn_x - (\gamma - 1)vn_y \\ \left(\frac{\gamma E}{\rho} - \frac{\gamma-1}{2}(u^2 + v^2)\right) n_x - (\gamma - 1)u(\vec{u} \cdot \vec{n}) \end{bmatrix} \\
 \underline{A}(:, 3) &= \begin{bmatrix} n_y \\ un_y - (\gamma - 1)vn_x \\ \vec{u} \cdot \vec{n} + (2 - \gamma)vn_y \\ \left(\frac{\gamma E}{\rho} - \frac{\gamma-1}{2}(u^2 + v^2)\right) n_y - (\gamma - 1)v(\vec{u} \cdot \vec{n}) \end{bmatrix} \\
 \underline{A}(:, 4) &= \begin{bmatrix} 0 \\ (\gamma - 1)n_x \\ (\gamma - 1)n_y \\ \gamma(\vec{u} \cdot \vec{n}) \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

Από τις παραπάνω σχέσεις μπορεί εύκολα να αποδειχθεί ότι ισχύει η εξίσωση:

$$\vec{\Phi} = \underline{A}\vec{U} \tag{2.24}$$

Οι ιδιοτιμές του μητρώου  $\underline{A}$  είναι οι εξής:

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 &= \vec{u} \cdot \vec{n} \\
 \lambda_2 &= \vec{u} \cdot \vec{n} \\
 \lambda_3 &= \vec{u} \cdot \vec{n} + c \\
 \lambda_4 &= \vec{u} \cdot \vec{n} - c
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

Τα δεξιά ιδιοδιανύσματα  $\vec{r}^k$  του μητρώου  $\underline{A}$  πρέπει να ικανοποιούν τη σχέση  $(\underline{A} - \lambda_k I) \vec{r}^k = \vec{0}$ , ενώ τα αριστερά  $\vec{l}^k$  την  $\vec{l}^k (\underline{A} - \lambda_k I) = \vec{0}$ , όπου  $I$  ο 4x4 μοναδιαίος

πίνακας. Μετά τις απαραίτητες πράξεις, τα ιδιοδιανύσματα προκύπτουν ως εξής [19]:

$$\begin{aligned}
 \vec{r}_1 &= \begin{bmatrix} 1 & u & v & \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \end{bmatrix}^T \\
 \vec{r}_2 &= \begin{bmatrix} 0 & n_y & -n_x & n_y u - n_x v \end{bmatrix}^T \\
 \vec{r}_3 &= \left[ \frac{1}{c} \frac{u}{c} + n_x \quad \frac{v}{c} + n_y \quad \frac{1}{2c}(u^2 + v^2) + \frac{c}{\gamma-1} + \vec{u} \cdot \vec{n} \right]^T \\
 \vec{r}_4 &= \left[ \frac{1}{c} \frac{u}{c} - n_x \quad \frac{v}{c} - n_y \quad \frac{1}{2c}(u^2 + v^2) + \frac{c}{\gamma-1} - \vec{u} \cdot \vec{n} \right]^T
 \end{aligned} \tag{2.26}$$

και

$$\begin{aligned}
 \vec{l}_1 &= \begin{bmatrix} 1 - \frac{(\gamma-1)(u^2+v^2)}{2c^2} & \frac{(\gamma-1)u}{c^2} & \frac{(\gamma-1)v}{c^2} & -\frac{(\gamma-1)}{c^2} \end{bmatrix} \\
 \vec{l}_2 &= \begin{bmatrix} n_x v - n_y u & n_y & -n_x & 0 \end{bmatrix} \\
 \vec{l}_3 &= \left[ -\frac{\vec{u} \cdot \vec{n}}{2} + \frac{(\gamma-1)(u^2+v^2)}{4c} \quad \frac{n_x}{2} - \frac{(\gamma-1)u}{2c} \quad \frac{n_y}{2} - \frac{(\gamma-1)v}{2c} \quad \frac{(\gamma-1)}{2c} \right] \\
 \vec{l}_4 &= \left[ \frac{\vec{u} \cdot \vec{n}}{2} + \frac{(\gamma-1)(u^2+v^2)}{4c} \quad -\frac{n_x}{2} - \frac{(\gamma-1)u}{2c} \quad -\frac{n_y}{2} - \frac{(\gamma-1)v}{2c} \quad \frac{(\gamma-1)}{2c} \right]
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

Γνωρίζοντας λοιπόν τα παραπάνω, το μητρώο  $\underline{A}$  μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$\underline{A} = P \Lambda P^{-1} \tag{2.28}$$

όπου  $\Lambda$  διαγώνιος πίνακας με στοιχεία τις ιδιοτιμές του  $\underline{A}$  και

$$P = \begin{bmatrix} \vec{r}_1 & \vec{r}_2 & \vec{r}_3 & \vec{r}_4 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} \vec{l}_1 \\ \vec{l}_2 \\ \vec{l}_3 \\ \vec{l}_4 \end{bmatrix} \tag{2.29}$$

Επίσης, ορίζονται τα μητρώα:

$$\underline{A}^+ = P \Lambda^+ P^{-1}, \quad \underline{A}^- = P \Lambda^- P^{-1} \tag{2.30}$$

$$|\underline{A}| = \underline{A}^+ - \underline{A}^- \tag{2.31}$$

όπου το μητρώο  $\Lambda^+$  περιέχει τις θετικές ιδιοτιμές, ενώ το  $\Lambda^-$  τις αρνητικές.

Επιστρέφοντας λοιπόν στον υπολογισμό του διανύσματος ατριβούς ροής  $\vec{\Phi}_{PQ}^{inv}$ , μέσω του σχήματος Roe [20], αυτό γράφεται:

$$\vec{\Phi}_{PQ}^{inv} = \frac{1}{2} \left( \vec{\Phi}_{PQ}^L + \vec{\Phi}_{PQ}^R \right) - \frac{1}{2} \left| \tilde{A}_{PQ} \right| \left( \vec{U}_{PQ}^R - \vec{U}_{PQ}^L \right) \quad (2.32)$$

όπου  $\left| \tilde{A}_{PQ} \right|$  το μητρώο που προκύπτει από τις απόλυτες τιμές των ιδιοτιμών του  $\underline{A}$  (σχέση (2.31)), υπολογισμένο, όμως, με βάση τις κατά Roe μέσες τιμές των πρωτευουσών μεταβλητών. Για τον υπολογισμό αυτών, αν  $\vec{V} = \left[ \rho \quad u \quad v \quad p \right]^T$  είναι το διάνυσμα των πρωτευουσών (μη-συντηρητικών) μεταβλητών της ροής, τότε το αντίστοιχο κατά Roe διάνυσμα είναι:

$$\vec{V} = \left[ \tilde{\rho} \quad \tilde{u} \quad \tilde{v} \quad \tilde{p} \right]^T \quad (2.33)$$

Η πρώτη συνιστώσα του  $\vec{V}$  προκύπτει ως:

$$\tilde{\rho} = \sqrt{\rho_L \rho_R} \quad (2.34)$$

Οι επόμενες δύο συνιστώσες του  $\vec{V}$  υπολογίζονται άμεσα από τη σχέση:

$$\vec{V} = \frac{\sqrt{\rho_L} \vec{V}_L + \sqrt{\rho_R} \vec{V}_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}} \quad (2.35)$$

ενώ για τον υπολογισμό της μέσης τιμής της πίεσης, υπολογίζεται πρώτα η μέση τιμή κατά Roe της ολικής ενθαλπίας χρησιμοποιώντας μια σχέση αντίστοιχη της (2.35) και, έπειτα, από αυτήν προκύπτει η μέση τιμή κατά Roe της πίεσης μέσω της σχέσης (2.9).

### Χωρική διακριτοποίηση 2ης τάξης ακρίβειας

Στην ανάλυση που προηγήθηκε για τον υπολογισμό του διανύσματος  $\vec{\Phi}_{PQ}^{inv}$  απαιτείται ο υπολογισμός των τιμών των συντηρητικών μεταβλητών στην κοινή πλευρά των κυψελών  $P$  και  $Q$  ( $\vec{U}_{PQ}^R, \vec{U}_{PQ}^L$ ). Η επιλογή των τιμών αυτών σχετίζεται άμεσα με την επιθυμητή ακρίβεια της χωρικής διακριτοποίησης των εξισώσεων της ροής. Θα μπορούσε να θεωρηθεί  $\vec{U}_{PQ}^L = \vec{U}_P$  και  $\vec{U}_{PQ}^R = \vec{U}_Q$ , κάτι το οποίο αντιστοιχεί σε χωρική διακριτοποίηση 1ης τάξης ακρίβειας. Εντούτοις, εφαρμόζοντας το θεώρημα Taylor για τον υπολογισμό των συντηρητικών μεταβλητών  $\vec{U}_{PQ}^L$  και  $\vec{U}_{PQ}^R$  και διατηρώντας επιπλέον όρους σε αυτό, επιτυγχάνεται αύξηση της τάξης της χωρικής διακριτοποίησης. Η σχέση του Taylor, αγνοώντας τους όρους 2ης τάξης και άνω, γράφεται για τις

συντηρητικές μεταβλητές ως:

$$\begin{aligned}\vec{U}_{PQ}^L &= \vec{U}_P + \overline{PM} \cdot (\nabla \vec{U})_P \\ \vec{U}_{PQ}^R &= \vec{U}_Q - \overline{PM} \cdot (\nabla \vec{U})_Q\end{aligned}\quad (2.36)$$

όπου  $(\nabla \vec{U})_P = \left( \frac{\partial \vec{U}_P}{\partial x}, \frac{\partial \vec{U}_P}{\partial y} \right)$ ,  $(\nabla \vec{U})_Q = \left( \frac{\partial \vec{U}_Q}{\partial x}, \frac{\partial \vec{U}_Q}{\partial y} \right)$  και  $M$  το μέσο της κοινής πλευράς των κυψελών  $P$  και  $Q$ , όπως φαίνεται στο σχήμα 2.5.

Ο υπολογισμός των χωρικών παραγώγων βασίζεται στη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων. Πιο συγκεκριμένα, για τον υπολογισμό του  $(\nabla \vec{U})_P$  χρησιμοποιούνται οι τιμές των άμεσων γειτόνων της κυψέλης  $P$ , το πλήθος των οποίων ποικίλλει από τέσσερα μέχρι οκτώ ανάλογα με την παραγμένη πυκνωση γύρω από αυτή. Στο σχήμα 2.5, για παράδειγμα, παρουσιάζεται η περίπτωση ύπαρξης πέντε άμεσων γειτόνων γύρω από την κυψέλη  $P$ . Με βάση αυτά, από τη σχέση του Taylor προκύπτει για τον γείτονα  $Q$ :

$$\vec{U}_Q = \vec{U}_P + \frac{\partial \vec{U}_P}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial \vec{U}_P}{\partial y} \Delta y \quad (2.37)$$

όπου  $\Delta x = x_Q - x_P$ ,  $\Delta y = y_Q - y_P$ . Χρησιμοποιώντας το συμβολισμό  $\Delta \vec{U} = \vec{U}_Q - \vec{U}_P$ , αυτή η σχέση γράφεται:

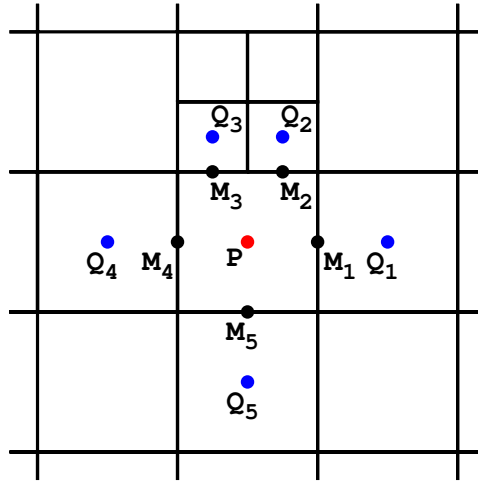
$$\frac{\partial \vec{U}_P}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial \vec{U}_P}{\partial y} \Delta y - \Delta \vec{U} = 0 \quad (2.38)$$

Ορίζοντας ως συνάρτηση κόστους την εξής ποσότητα:

$$E = \sum_{i=1}^{nei(P)} \left( \frac{\partial \vec{U}_P}{\partial x} \Delta x_i + \frac{\partial \vec{U}_P}{\partial y} \Delta y_i - \Delta \vec{U}_i \right)^2 \quad (2.39)$$

η εύρεση των χωρικών παραγώγων ανάγεται στην ελαχιστοποίησή της. Οπότε πρέπει:

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial \left( \frac{\partial \vec{U}_P}{\partial x} \right)} &= \sum_{i=1}^{nei(P)} 2 \left( \frac{\partial \vec{U}_P}{\partial x} \Delta x_i + \frac{\partial \vec{U}_P}{\partial y} \Delta y_i - \Delta \vec{U}_i \right) \Delta x_i = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial \left( \frac{\partial \vec{U}_P}{\partial y} \right)} &= \sum_{i=1}^{nei(P)} 2 \left( \frac{\partial \vec{U}_P}{\partial x} \Delta x_i + \frac{\partial \vec{U}_P}{\partial y} \Delta y_i - \Delta \vec{U}_i \right) \Delta y_i = 0\end{aligned}\quad (2.40)$$



**Σχήμα 2.5:** Η κυψέλη  $P$  και οι άμεσοι γείτονες που λαμβάνονται υπόψη για τον υπολογισμό των χωρικών παραγώγων της στην περίπτωση που το πλήθος αυτών είναι πέντε. Με  $M_i$  συμβολίζεται το μέσο της κοινής πλευράς των κυψελών  $P$  και  $Q_i$ .

Η σχέση (2.40) ξανά γράφεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{U}_P}{\partial x} \Delta x_i \Delta x_i + \frac{\partial \vec{U}_P}{\partial y} \Delta x_i \Delta y_i &= \Delta x_i \Delta \vec{U}_i \\ \frac{\partial \vec{U}_P}{\partial x} \Delta x_i \Delta y_i + \frac{\partial \vec{U}_P}{\partial y} \Delta y_i \Delta y_i &= \Delta y_i \Delta \vec{U}_i \end{aligned} \quad (2.41)$$

όπου ο επαναλαμβανόμενος δείκτης  $i$  υποδηλώνει άθροιση σε όλους τους γείτονες. Σε μορφή πινάκων η παραπάνω σχέση γράφεται ως εξής:

$$\begin{bmatrix} \Delta x_i \Delta x_i & \Delta x_i \Delta y_i \\ \Delta x_i \Delta y_i & \Delta y_i \Delta y_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \vec{U}_P}{\partial x} \\ \frac{\partial \vec{U}_P}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta x_i \Delta \vec{U}_i \\ \Delta y_i \Delta \vec{U}_i \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

Η επίλυση αυτού του συστήματος παρέχει τις τιμές των χωρικών παραγώγων. Με αυτό τον τρόπο αυξάνεται η ακρίβεια του σχήματος χωρικής διακριτοποίησης σε 2ης τάξης.

### Περιοριστής

Η χρησιμοποίηση σχημάτων 2ης τάξης, αν και σαφώς πιο αποδοτική από την άποψη του υπολογιστικού κόστους, παρουσιάζει το μειονέκτημα της εμφάνισης τοπικών υπερακοντίσεων λόγω πιθανών μεγάλων τιμών στις χωρικές παραγώγους [21]. Η συνήθης αντιμετώπιση αυτού του φαινομένου βασίζεται στη χρήση περιοριστών (limiters). Στον

κώδικα που αναπτύχθηκε, χρησιμοποιήθηκε ο περιοριστής των Barth & Jespersen [22], σύμφωνα με τον οποίο η πρώτη εξίσωση (αντίστοιχα και η δεύτερη) της σχέσης (2.36) ξαναγράφεται ως εξής:

$$\left(\vec{U}_{PQ}^L\right)^* = \vec{U}_P + \Psi_P \overline{PM} \cdot \left(\nabla \vec{U}\right)_P \quad (2.43)$$

όπου με  $\Psi_P$  συμβολίζεται ο περιοριστής και με  $\left(\vec{U}_{PQ}^L\right)^*$  η τιμή των προεμβεβλημένων μεταβλητών μετά τη χρήση του. Ορίζοντας τις ακόλουθες ποσότητες:

$$\begin{aligned} \vec{U}_{min} &= \min\left(\vec{U}, \vec{U}_{Q_i}\right) \\ \vec{U}_{max} &= \max\left(\vec{U}, \vec{U}_{Q_i}\right) \\ \vec{U} &= \vec{U}_{PQ}^L \end{aligned} \quad (2.44)$$

η σχέση που δίνει τον περιοριστή είναι:

$$\Psi_{P,j} = \begin{cases} 1 & , \tilde{U}_j = U_{P,j} \\ \min\left(1, \frac{U_{max,j} - U_{P,j}}{\tilde{U}_j - U_{P,j}}\right) & , \tilde{U}_j > U_{P,j} \\ \min\left(1, \frac{U_{min,j} - U_{P,j}}{\tilde{U}_j - U_{P,j}}\right) & , \tilde{U}_j < U_{P,j} \end{cases} \quad , j = 1, 2, 3, 4 \quad (2.45)$$

και επιλέγεται:

$$\Psi_P = \min(\Psi_{P,j})$$

### 2.3.3 Διακριτοποίηση των χρονικών όρων

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα μεταφοράς του Reynolds [23], η ολοκλήρωση της χρονικής παραγωγού των μεταβλητών της ροής υπολογίζεται ως:

$$\int_{\Omega_P^{k+1}} \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} d\Omega = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_P^{k+1}} \vec{U} d\Omega - \int_{\partial\Omega_P^{k+1}} \vec{u}_{grid}^{k+1} \cdot \vec{n}^{k+1} \vec{U} d(\partial\Omega) \quad (2.46)$$

όπου  $\vec{u}_{grid}^{k+1}$  είναι η ταχύτητα παραμόρφωσης του ορίου του όγκου ολοκλήρωσης τη



χρονική στιγμή  $t^{k+1}$ . Για την τελευταία ισχύει ότι (geometric conservation law), [24]:

$$\int_{\partial\Omega_P} \vec{u}_{grid} \cdot \vec{n}^{k+1} d(\partial\Omega) = \left( \frac{\partial\Omega_P}{\partial t} \right)^{k+1} \quad (2.47)$$

όπου  $\frac{\partial\Omega_P}{\partial t}$  είναι ο ρυθμός μεταβολής του όγκου ελέγχου. Η σχέση (2.47) συνδέει το ρυθμό μεταβολής του  $\Omega_P$  με την ταχύτητα παραμόρφωσης του ορίου του όγκου ελέγχου.

Χρησιμοποιώντας ένα σχήμα πίσω διαφορίσης στο χρόνο, 2ης τάξης ακρίβειας, η σχέση (2.46) γράφεται:

$$\int_{\Omega_P^{k+1}} \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} d\Omega \simeq \frac{1}{2\Delta t} \left( 3\vec{U}_P^{k+1} \Omega_P^{k+1} - 4\vec{U}_P^k \Omega_P^k + \vec{U}_P^{k-1} \Omega_P^{k-1} \right) - \sum_{Q \in nei(P)} \vec{\Phi}_{PQ}^{grid, k+1} \Delta s \quad (2.48)$$

όπου  $\vec{U}_P^{k+1}$  είναι οι τιμές των συντηρητικών μεταβλητών της ροής στην κυψέλη  $P$  και  $\Omega_P^{k+1}$  είναι ο όγκος ελέγχου της ίδιας κυψέλης τη χρονική στιγμή  $t^{k+1}$  αντίστοιχα. Όμοια, οι ποσότητες  $\vec{U}_P^k, \Omega_P^k$  αναφέρονται στη χρονική στιγμή  $t^k$  και οι ποσότητες  $\vec{U}_P^{k-1}, \Omega_P^{k-1}$  στη χρονική στιγμή  $t^{k-1}$ .  $\vec{\Phi}_{PQ}^{grid}$  είναι το αριθμητικό διάνυσμα της ροής λόγω της παραμόρφωσης του ορίου του όγκου ολοκλήρωσης.

Στην περίπτωση ακίνητης γεωμετρίας, όπως αυτή που παρουσιάζεται στο παρόν κεφάλαιο, ο δεύτερος όρος της εξίσωσης (2.46) μηδενίζεται καθώς ισχύει  $\vec{u}_{grid} = \vec{0}$ . Ο τρόπος χειρισμού αυτού του όρου, σε περιπτώσεις κινούμενων ορίων, εξετάζεται λεπτομερώς στο κεφάλαιο 3.

### 2.3.4 Επιβολή οριακών συνθηκών

#### Στερεά όρια

Ο τύπος της οριακής συνθήκης που επιβάλλεται στα στερεά όρια υπαγορεύεται από τη φυσική της ροής. Επειδή λοιπόν έχει γίνει η υπόθεση ατριβούς ροής, επιβάλλεται η συνθήκη μη-εισχώρησης:

$$(\vec{u} - \vec{u}_{grid}) \cdot \vec{n} = \vec{0} \quad (2.49)$$

Συνεπώς, όταν η γεωμετρία είναι ακίνητη, από την εξίσωση (2.20) προκύπτει:

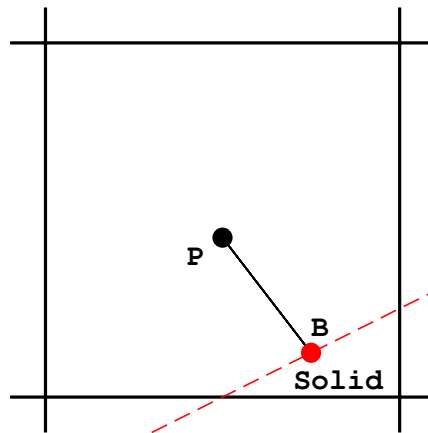
$$\vec{\Phi}_{wall}^{inv} = \begin{bmatrix} 0 \\ pn_x \\ pn_y \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

Η σχέση αυτή δείχνει ότι οι μοναδικές δυνάμεις που ασκούνται, σε ατριβή ροή, στο στερεό τοίχωμα είναι οι δυνάμεις πίεσης, οι οποίες είναι κάθετες σε αυτό.

Ο τρόπος εφαρμογής της οριακής συνθήκης είναι έμμεσος. Με άλλα λόγια, αν η κυψέλη  $P$  τέμνεται από κάποιο στερεό όριο τότε γίνεται προεκβολή των τιμών των συντηρητικών μεταβλητών από το βαρύκεντρο  $P$  στο μέσο του στερεού ορίου μέσω της σχέσης του Taylor (σχήμα 2.6):

$$\vec{U}_B = \vec{U}_P + \vec{PB} \cdot (\nabla \vec{U})_P \quad (2.51)$$

Οι τιμές αυτές χρησιμοποιούνται για να επιβληθεί, μέσω της σχέσης (2.50) στην πλευρά του στερεού ορίου το διάνυσμα της ατριβούς ροής.



Immersed Boundary - - - -

**Σχήμα 2.6:** Εφαρμογή της οριακής συνθήκης για την κυψέλη  $P$ , μέσω προεκβολής των τιμών των συντηρητικών μεταβλητών στο μέσο  $B$  του στερεού ορίου.

### Επ' άπειρο όρια του χωρίου επίλυσης

Στα όρια του χωρίου επίλυσης έχει χρησιμοποιηθεί η τεχνική του ψευδόκομβου. Σε κάθε πλευρά κάθε οριακής κυψέλης αντιστοιχεί ένας ψευδόκομβος, ο οποίος βρίσκεται

εξωτερικά του υπολογιστικού χωρίου. Σε αυτούς τους ψευδόκομβους επιβάλλονται, με συνθήκη Dirichlet, οι τιμές των πρωτεύουσών μεταβλητών της ροής. Έτσι, είναι πλέον δυνατός ο υπολογισμός του αριθμητικού διανύσματος της ροής που εισέρχεται/εξέρχεται στον/από τον όγκο ελέγχου από την οριακή πλευρά της κυψέλης εφαρμόζοντας το σχήμα του Roe (εξίσωση (2.32)) μεταξύ αυτής και του αντίστοιχου ψευδόκομβου.

## 2.4 Επαναληπτικός αλγόριθμος επίλυσης

Θεωρώντας ακίνητη τη γεωμετρία ( $\vec{\Phi}_{PQ}^{grid,k+1} = \vec{0}$ ), μετά την αντικατάσταση των εκφράσεων (2.15) και (2.48) στην εξίσωση (2.11), προκύπτει:

$$\vec{R}_P = - \sum_{Q \in nei(P)} \vec{\Phi}_{PQ}^{k+1} \Delta s + \frac{1}{2\Delta t} \left( 3\vec{U}_P^{k+1} \Omega_P^{k+1} - 4\vec{U}_P^k \Omega_P^k + \vec{U}_P^{k-1} \Omega_P^{k-1} \right) = \vec{0} \quad (2.52)$$

όπου  $\vec{\Phi}_{PQ}^{k+1} = \vec{\Phi}_{PQ}^{inv,k+1}$  είναι το αριθμητικό διάνυσμα της ροής που διαπερνά την επιφάνεια των  $\Omega_P^{k+1}, \Omega_Q^{k+1}$ .

Για την επίλυση αυτού του συστήματος χρησιμοποιείται η τεχνική του διπλού χρονικού βήματος (dual time stepping). Πιο συγκεκριμένα, η επίλυση για κάθε πραγματική χρονική στιγμή θεωρείται ως ένα χρονικά μόνιμο πρόβλημα (με εμβόλιμους όρους πηγής για τη χρονική μεταβολή). Ο όρος «dual time» δικαιολογείται από το γεγονός ότι στις εξισώσεις του συστήματος εισάγεται επιπλέον ένας ψευδο-χρονικός όρος (παρόλο που η ροή θεωρείται χρονικά μόνιμη σε κάθε βήμα) προκειμένου το σύστημα να αποκτήσει υπερβολική μορφή στο χωρο-χρόνο και να εκμεταλλευτούμε τα οφέλη που προκύπτουν από την ενίσχυση της διαγώνιας κυριαρχίας.

Επιπλέον, σε κάθε πραγματική χρονική στιγμή το σύστημα των διακριτοποιημένων εξισώσεων (2.52), όντας μη γραμμικό, πρέπει να γραμμικοποιηθεί για να επιλυθεί. Η διαδικασία μέσω της οποίας πραγματοποιείται η επίλυση ονομάζεται δέλτα-διατύπωση ( $\Delta$ -formulation) και περιγράφεται στη συνέχεια.

Σε κάθε πραγματική χρονική, το πεδίο των συντηρητικών μεταβλητών που αποτελεί λύση των εξισώσεων (2.52) συμβολίζεται με  $\vec{U}^*$ . Ισχύει, δηλαδή,  $\vec{R}_P(\vec{U}^*) = \vec{0}$  για όλες τις υπολογιστικές κυψέλες  $P$ . Η διαδικασία της επίλυσης ξεκινά με ένα τυχαίο πεδίο  $\vec{U}$  για το οποίο οι πεδιακές εξισώσεις δεν επαληθεύονται, δηλαδή  $\vec{R}_P(\vec{U}) \neq \vec{0}$ .

Αν με  $\Delta\vec{U}$  συμβολίσουμε τη διανυσματική διαφορά μεταξύ της λύσης και του τυχαίου πεδίου ( $\Delta\vec{U} = \vec{U}^* - \vec{U} \Rightarrow \vec{U}^* = \vec{U} + \Delta\vec{U}$ ) τότε από το θεώρημα Taylor προκύπτει:

$$\begin{aligned}\vec{R}_P(\vec{U}^*) &= \vec{0} \Leftrightarrow \\ \vec{R}_P(\vec{U} + \Delta\vec{U}) &= \vec{0} \Leftrightarrow \\ \vec{R}_P(\vec{U}) + \frac{\partial \vec{R}_P}{\partial \vec{U}} \Delta\vec{U} + \mathcal{O}(\Delta\vec{U}^2) &= \vec{0} \Rightarrow \\ \frac{\partial \vec{R}_P}{\partial \vec{U}} \Delta\vec{U} &= -\vec{R}_P(\vec{U})\end{aligned}\quad (2.53)$$

Αυτή η έκφραση έχει μια μορφή που συναντάται πολύ συχνά στην επίλυση προβλημάτων με αριθμητικές μεθόδους και η οποία αποδίδεται με την παρακάτω συμβολική εξίσωση:

$$\boxed{[NUMERICS] \Delta\vec{U} = [PHYSICS]}$$

Αυτό το οποίο κωδικοποιεί η παραπάνω έκφραση είναι ότι το  $[PHYSICS]$  σχετίζεται με την ακρίβεια και τη μέθοδο διακριτοποίησης του προβλήματος, ενώ η επιλογή του  $[NUMERICS]$  έχει να κάνει αποκλειστικά με τις ιδιότητες σύγκλισης που έχει η επαναληπτική μέθοδος επίλυσης που θα χρησιμοποιηθεί.

Επιστρέφοντας στον αλγόριθμο επίλυσης, παρατίθενται για λόγους πληρότητας τα εμπλεκόμενα διανύσματα. Έτσι, αν το υπολογιστικό χωρίο περιέχει  $m$  κυψέλες τότε:

$$\vec{R} = [\vec{R}_1, \vec{R}_2, \dots, \vec{R}_{m-1}, \vec{R}_m]^T \quad (2.54)$$

$$\Delta\vec{U} = [\Delta\vec{U}_1, \Delta\vec{U}_2, \dots, \Delta\vec{U}_{m-1}, \Delta\vec{U}_m]^T \quad (2.55)$$

$$\frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}} = \left[ \begin{array}{cccc} \frac{\partial \vec{R}_1}{\partial \vec{U}_1} & \frac{\partial \vec{R}_1}{\partial \vec{U}_2} & \dots & \frac{\partial \vec{R}_1}{\partial \vec{U}_m} \\ \frac{\partial \vec{R}_2}{\partial \vec{U}_1} & \frac{\partial \vec{R}_2}{\partial \vec{U}_2} & \dots & \frac{\partial \vec{R}_2}{\partial \vec{U}_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \vec{R}_m}{\partial \vec{U}_1} & \frac{\partial \vec{R}_m}{\partial \vec{U}_2} & \dots & \frac{\partial \vec{R}_m}{\partial \vec{U}_m} \end{array} \right]_{4m} \quad (2.56)$$

όπου ο τελευταίος πίνακας είναι διάστασης  $4m \times 4m$  καθώς το κάθε  $\frac{\partial \vec{R}_i}{\partial \vec{U}_j}$  έχει διάσταση  $4 \times 4$ .

Όπως είναι προφανές από τις σχέσεις (2.52) και (2.53), πρέπει να υπολογιστεί το διάνυσμα των συντηρητικών μεταβλητών  $\vec{U}$  για το οποίο μηδενίζεται το υπόλοιπο ή διαφορετικά  $\Delta \vec{U} = \vec{0}$ . Με βάση αυτό, προκύπτει επίσης το συμπέρασμα ότι το «λάθος» που εισάγεται με την προσθήκη του ψευδο-χρονικού όρου δεν επηρεάζει τη λύση του προβλήματος καθώς όταν θα έχει βρεθεί το  $\Delta \vec{U} = \vec{0}$  θα ισχύει επίσης  $\vec{R}_P = \vec{0}$  ανεξάρτητα από την τιμή του  $[NUMERICS]$  τμήματος.

Στη συνέχεια, υπολογίζονται οι όροι του  $\frac{\partial \vec{R}_P}{\partial \vec{U}}$  διατηρώντας τον δείκτη  $k$  για τις πραγματικές χρονικές στιγμές και χρησιμοποιώντας τον δείκτη  $n$  για τις ψευδο-χρονικές. Ο ψευδο-χρονικός όρος που προστίθεται στις εξισώσεις Euler (ολοκληρωμένες στον πεπερασμένο όγκο που ορίζεται από την κυψέλη  $P$  (2.52)) έχει τη μορφή:

$$\left( \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} \right)_P^{n+1} \Omega_{cell} \quad (2.57)$$

Διακριτοποιώντας αυτή την έκφραση με σχήμα πρώτης τάξης ακρίβειας στο χρόνο προκύπτει:

$$\left( \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} \right)_P^{n+1} \Omega_{cell} = \frac{\vec{U}^{n+1} - \vec{U}^n}{\Delta t} \Omega_{cell} \Big|_P = \frac{\Delta \vec{U}^{n+1}}{\Delta t} \Omega_{cell} \Big|_P \quad (2.58)$$

Για επιτάχυνση της σύγκλισης εφαρμόζεται η τεχνική του τοπικού ψευδο-χρονικού βήματος [25]. Το ψευδο-χρονικό βήμα για κάθε κυψέλη προκύπτει μέσω της συνθήκης Courant–Friedrichs–Lewy [26] ως εξής:

$$\Delta t^P = CFL \frac{\Omega_{cell}^P}{C} \quad (2.59)$$

όπου  $CFL$  είναι ο αριθμός Courant–Friedrichs–Lewy και ο όρος  $C$  υπολογίζεται από τη σχέση:

$$C = (|u_i^P| + c^P) S_i^P \quad (2.60)$$

όπου ο διπλός δείκτης  $i$  υποδηλώνει άθροιση και  $S_i^P$  είναι η προβολή όλων των τμημάτων που απαρτίζουν τα όρια του όγκου ελέγχου της κυψέλης  $P$  κατά την κατεύθυνση  $i$ , δηλαδή:

$$S_i^P = \frac{1}{2} \sum_{Q \in nei(P)} |n_i^{PQ}| \quad (2.61)$$

Επίσης, αξίζει να αναφερθεί ότι καθώς το σχήμα είναι σημειακά πεπλεγμένο (point-Implicit), ο αριθμός αυτός μπορεί να λάβει τιμές σημαντικά μεγαλύτερες της μονάδας, οδηγώντας σε μεγαλύτερα ψευδο-χρονικά βήματα.

Για τους διαγώνιους όρους του μητρώου  $\frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}}$ , μέσω των (2.52) και (2.59) προκύπτουν τα ακόλουθα:

$$\frac{\partial \vec{R}_P}{\partial \vec{U}_P^{n+1}} = \sum_{Q \in nei(P)} \frac{1}{2} \left( \underline{A}_P + |\tilde{A}_{PQ}| \right) \Delta_{SPQ} + \frac{3\Omega_P^{k+1}}{2\Delta t} I_{4 \times 4} + \frac{\Omega_{cell}}{\Delta t} I_{4 \times 4} \quad (2.62)$$

όπου  $I_{4 \times 4}$  ο μοναδιαίος πίνακας διάστασης 4. Η σχέση αυτή παραμένει ανεξάρτητη της τάξης ακρίβειας της χωρικής διακριτοποίησης. Αυτό το μητρώο συμβολίζεται με  $[D]_P^n$  καθώς υπολογίζεται με τις τιμές των  $\vec{U}^n$  σε κάθε ψευδο-χρονική στιγμή. Αντίστοιχα, προκύπτει και το μητρώο για τους μη-διαγώνιους όρους:

$$[offD]_{PQ}^n = \frac{\partial \vec{R}_P}{\partial \vec{U}_Q^{n+1}} = \frac{1}{2} \left( \underline{A}_Q - |\tilde{A}_{PQ}| \right) \Delta_{SPQ} \quad (2.63)$$

Επομένως, η εξίσωση (2.53) γράφεται:

$$[D]_P^n \Delta \vec{U}_P^{n+1} + \sum_{Q \in nei(P)} [offD]_{PQ}^n \Delta \vec{U}_Q^{n+1} = -\vec{R}_P^n \quad (2.64)$$

ή σε μορφή πινάκων:

$$\begin{bmatrix} [D]_1^n & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & [offD]_{PQ}^n & \cdots & [D]_P^n & \cdots & [offD]_{PQ'}^n & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & [D]_m^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \vec{U}_1^{n+1} \\ \vdots \\ \Delta \vec{U}_P^{n+1} \\ \vdots \\ \Delta \vec{U}_m^{n+1} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \vec{R}_1^n \\ \vdots \\ \vec{R}_P^n \\ \vdots \\ \vec{R}_m^n \end{bmatrix} \quad (2.65)$$

Η επίλυση του συστήματος αυτού με απ' ευθείας αντιστροφή του μητρώου των συντελεστών είναι απαγορευτική από πλευράς υπολογιστικού κόστους, εξαιτίας του μεγάλου μεγέθους του μητρώου (π.χ.  $10^4 \times 10^4$ ). Επιπλέον, πάρα πολλά από τα στοιχεία του μητρώου αυτού είναι μηδενικά, καθώς κάθε κόμβος επηρεάζεται άμεσα μόνο από τους γειτονικούς του και όχι από όλους τους κόμβους του πλέγματος. Ωστόσο, επειδή το πλέγμα που χρησιμοποιείται είναι μη-δομημένο, το μητρώο δεν έχει μπλοκ-διαγώνια μορφή (δηλαδή τα μη-μηδενικά στοιχεία δεν είναι διατεταγμένα σε διαγωνίους) και επομένως δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι τεχνικές ταχείας επίλυσης τέτοιων συστημάτων. Για τους παραπάνω λόγους, χρησιμοποιείται ο επαναληπτικός αλγόριθμος Jacobi, (Παράρτημα Α'), [27].

Για το σκοπό αυτό, η εξίσωση (2.64) γράφεται:

$$[D]_P \Delta \vec{U}_P^{new} = -\vec{R}_P - \sum_{Q \in nei(P)} [offD]_{PQ} \Delta \vec{U}_Q^{old} \quad (2.66)$$

ή

$$\Delta \vec{U}_P^{new} = [D]_P^{-1} \left[ -\vec{R}_P - \sum_{Q \in nei(P)} [offD]_{PQ} \Delta \vec{U}_Q^{old} \right] \quad (2.67)$$

όπου τα μητρώα  $[D]_P^{-1}$ ,  $\vec{R}_P$  και  $[offD]_{PQ}$  υπολογίζονται στην τρέχουσα ψευδο-χρονική στιγμή n.

Ο επαναληπτικός αλγόριθμος επίλυσης του προβλήματος έχει λοιπόν ως εξής:

- Βήμα 1:

Γίνεται αρχικοποίηση του διανύσματος των συντηρητικών μεταβλητών της ροής  $\vec{U}^0$  για κάθε κόμβο του πλέγματος.

- Βήμα 2:

Έναρξη της χρονικής επαναληπτικής διαδικασίας ( $k \leftarrow 1$ ) με  $\vec{U}^k = \vec{U}^0$ .

- Βήμα 3:

Έναρξη της ψευδο-χρονικής επαναληπτικής διαδικασίας ( $n \leftarrow 1$ ) με  $\vec{U}^n = \vec{U}^0$ .

- Βήμα 4:

Χρησιμοποιώντας τα τρέχοντα  $\vec{U}^k$ ,  $\vec{U}^n$  υπολογίζονται τα  $[D]_P^{-1}$ ,  $\vec{R}_P$  και  $[offD]_{PQ}$  για κάθε κυψέλη  $P$ , ενώ τίθεται  $\Delta\vec{U}^{old} = \vec{0}$ .

- Βήμα 5:

Έναρξη της Jacobi (εσωτερικής) επαναληπτικής διαδικασίας ( $i \leftarrow 1$ ).

- Βήμα 6:

Εφαρμόζοντας τη σχέση (2.67) για κάθε κυψέλη  $P$  (όπου χρησιμοποιείται το τρέχον  $\Delta\vec{U}^{old}$ ) υπολογίζονται τα  $\Delta\vec{U}^{new}$ .

- Βήμα 7:

Αν  $i < i_{jacobi}$ , τότε:  $\Delta\vec{U}^{old} \leftarrow \Delta\vec{U}^{new}$ ,  $i \leftarrow i + 1$  και επιστροφή στο βήμα 6.

- Βήμα 8:

Τερματισμός της Jacobi και ανανέωση του διανύσματος των συντηρητικών μεταβλητών σύμφωνα με τη σχέση  $\vec{U}^{n+1} = \vec{U}^n + \Delta\vec{U}^{new}$ .

- Βήμα 9:

Χρησιμοποιώντας το  $\vec{U}^{n+1}$ , υπολογίζονται τα τοπικά υπόλοιπα  $R_P$  για κάθε κυψέλη  $P$  και στη συνέχεια η RMS τιμή τους, η οποία συγκρίνεται με το κριτήριο σύγκλισης που έχει δώσει ο χρήστης. Αν προκύψει μικρότερη από αυτό, τότε:  $\vec{U}^n \leftarrow \vec{U}^{n+1}$ ,  $n \leftarrow n + 1$  και επιστροφή στο βήμα 4.

- Βήμα 10:

Αν ο πραγματικός χρόνος είναι μικρότερος του μέγιστου χρόνου επίλυσης που έχει δώσει ο χρήστης, τότε:  $\vec{U}^k \leftarrow \vec{U}^n$ ,  $k \leftarrow k + 1$  και επιστροφή στο βήμα 3.



- Βήμα 11:

Τερματισμός του αλγορίθμου.

Όπως είναι φανερό από τον παραπάνω αλγόριθμο, για την επίλυση του προβλήματος πραγματοποιείται τριπλή επαναληπτική διαδικασία. Μια εσωτερική (Jacobi) για τον υπολογισμό του  $\Delta \vec{U}$ , μια επανάληψη στον ψευδο-χρόνο και, τέλος, μια εξωτερική επανάληψη στον πραγματικό χρόνο της επίλυσης. Το  $i_{jacobi}$  είναι ένας αριθμός που έχει οριστεί από τον προγραμματιστή και αποτελεί τον αριθμό των εσωτερικών επαναλήψεων που θα εκτελεστούν προκειμένου να επιλυθεί το σύστημα της σχέσης (2.63), σε κάθε ψευδο-χρονικό βήμα. Με άλλα λόγια, δεν υπάρχει κάποιο εσωτερικό κριτήριο σύγκλισης, αλλά εκτελείται συγκεκριμένος αριθμός επαναλήψεων (15 στην περίπτωση μας).



## Κεφάλαιο 3

# Διακριτοποίηση χρονικού όρου σε ροές με κινούμενα στερεά όρια

### 3.1 Εισαγωγικά σχόλια

Ο απώτερος σκοπός της ανάπτυξης μεθόδων μη-οριόδετων πλεγμάτων είναι η επίλυση ροών γύρω από κινούμενα σώματα με πολύπλοκες γεωμετρίες. Ωστόσο, μια ανεπιθύμητη ιδιότητά τους, η οποία έχει επισημανθεί από νωρίς στη βιβλιογραφία [6, 13, 14] και είναι σύμφυτη με τον τρόπο που είναι δομημένες, έχει να κάνει με την εμφάνιση μη-φυσικών χρονικών ταλαντώσεων στο πεδία των μεταβλητών της ροής (spurious oscillations). Αυτές οι ταλαντώσεις αντιμετωπίστηκαν κατά τη φάση της ανάπτυξης του παρόντος λογισμικού ενώ κρίθηκε ότι, για την οικονομία της ανάγνωσης, δεν χρειάζεται να ενσωματωθούν τέτοια μη-αποδεκτά αποτελέσματα στην εργασία αλλά να δοθεί έμφαση απευθείας στην αντιμετώπιση του προβλήματος και στα αποδεκτά αποτελέσματα που τελικά υπολογίστηκαν.

Η πρωταρχική αιτία αυτών των ταλαντώσεων εντοπίζεται στο γεγονός ότι σε ροές με κινούμενα στερεά όρια, υπάρχουν κυψέλες του υπολογιστικού χωρίου που κάποιες χρονικές στιγμές ανήκουν στο ρευστό ενώ άλλες στο στερεό. Αυτή η διαφοροποίηση του ρόλου των κυψελών έχει ως αποτέλεσμα την εμφάνιση μη-φυσικών πηγών/καταβοθρών στη ροή οι οποίες οδηγούν σε ταλαντώσεις.

Με βάση αυτά, στο παρόν κεφάλαιο, επιχειρείται μια ποιοτική διερεύνηση της διαδικασίας γένεσης ταλαντώσεων σε ένα καρτεσιανό πλέγμα. Η διερεύνηση αυτή είναι στηριγμένη σε μεγάλο βαθμό στην ανάλυση που παρουσιάζεται στο άρθρο [6].

Επιπλέον, στηρίζόμενοι στον κώδικα που αναπτύχθηκε στο κεφάλαιο 2 για την επίλυση μη-μόνιμων ροών με τη μέθοδο των πεπερασμένων όγκων, αναπτύσσεται μια μεθοδολογία για τον χειρισμό ροών με κινούμενα στερεά όρια και ταυτόχρονη ελαχιστοποίηση αυτών των ταλαντώσεων. Όπως θα δειχθεί στο επόμενο κεφάλαιο, τα αποτελέσματα κρίνονται αρκούντως ικανοποιητικά.

### 3.2 Αιτίες ταλαντώσεων των πεδίων των ροϊκών μεγεθών σε μια μέθοδο IB

Για την εξακρίβωση της αιτίας δημιουργίας ταλαντώσεων στο πεδίο πιέσεων μιας μεθόδου IB θα εξεταστεί η απλή περίπτωση κυκλικής γεωμετρίας του σχήματος 3.1 [6]. Σε αυτό έχει γίνει η απλουστευτική παραδοχή ότι αν το βαρύκεντρο μιας υπολογιστικής κυψέλης δεν βρίσκεται εντός του «βυθισμένου» σώματος τότε αυτή αποτελεί εξ' ολοκλήρου κομμάτι του ρευστού, ενώ η διακριτοποίηση του υπολογιστικού χωρίου είναι ομοιόμορφη δημιουργώντας παντού σε αυτό κυψέλες ίδιου μεγέθους.

Έστω, λοιπόν, μια επιφάνεια ελέγχου, η οποία περικλείεται από την καμπύλη  $\sigma_{CV}$  (σχήμα 3.1). Θεωρώντας επίσης, ότι το ρευστό είναι ασυμπίεστο, η διατήρηση του όγκου του ρευστού στην επιφάνεια ελέγχου, ικανοποιείται αν ισχύει η ακόλουθη εξίσωση:

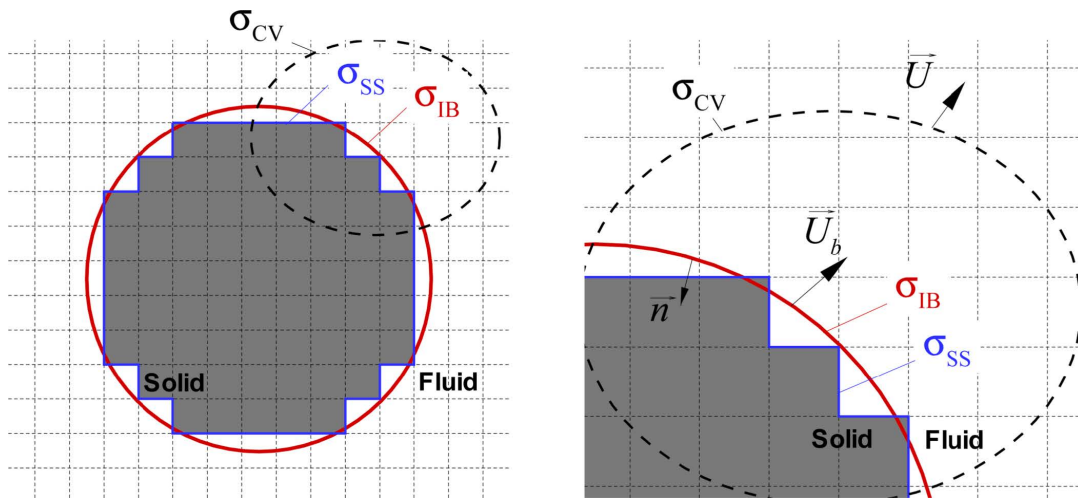
$$\int_{\sigma_{IB}} \vec{u}_b \cdot \vec{n} dA + \int_{\sigma_{CV}} \vec{u} \cdot \vec{n} dA = 0 \quad (3.1)$$

όπου  $\sigma_{IB}$  είναι η καμπύλη που περικλείει την επιφάνεια του «βυθισμένου» σώματος,  $\vec{u}_b$  η ταχύτητα στο όριο του «βυθισμένου» σώματος,  $\vec{u}$  η ταχύτητα την επιφάνειας ελέγχου και  $\vec{n}$  το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα στην επιφάνεια του «βυθισμένου» σώματος όπως φαίνεται στο σχήμα 3.1.

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα της απόκλισης, η (3.1) γράφεται:

$$-\frac{d\Omega_{IB}}{dt} + \int_{\sigma_{CV}} \vec{u} \cdot \vec{n} dA = 0 \quad (3.2)$$

όπου  $\Omega_{IB}$  είναι η επιφάνεια του «βυθισμένου» σώματος. Γράφοντας λίγο διαφορετικά



**Σχήμα 3.1:** Στερεό σώμα κυκλικής γεωμετρίας «βυθισμένο» σε καρτεσιανό πλέγμα. Με  $\sigma_{IB}$  συμβολίζεται η επιφάνεια του «βυθισμένου» σώματος. Με  $\sigma_{SS}$  συμβολίζεται η προσεγγιστική επιφάνεια του στερεού ορίου ενώ με  $\sigma_{CV}$  αναπαρίσταται ο όγκος ελέγχου. Τέλος, η σκιασμένη περιοχή δείχνει τις κυψέλες του στερεού [6].

τον πρώτο όρο αυτής της εξίσωσης προκύπτει:

$$-\left(\frac{\Delta\Omega}{\Delta t}\right)^{k+1} (q^{k+1} - q^k) + \int_{\sigma_{SS}} \vec{u}_f \cdot \vec{n} dA + \int_{\sigma_{CV}} \vec{u} \cdot \vec{n} dA \simeq 0 \quad (3.3)$$

όπου  $q^k$  είναι ο συνολικός αριθμός των κυψελών του στερεού τη χρονική στιγμή  $k$ ,  $\Delta\Omega$  είναι η επιφάνεια κάθε κυψέλης,  $\Delta t$  είναι το χρονικό βήμα ενώ ο δείκτης  $f$  υποδηλώνει τιμές στο όριο του στερεού που έχει τη μορφή σκαλοπατιού. Αυτή η σχέση μέσω αντικατάστασης από τη σχέση (3.1) και μετά την αναδιάταξη των όρων γράφεται:

$$\left(\frac{\Delta\Omega}{\Delta t}\right)^{k+1} (q^{k+1} - q^k) + \int_{\sigma_{IB}} \vec{u}_b \cdot \vec{n} dA - \int_{\sigma_{SS}} \vec{u}_f \cdot \vec{n} dA \simeq 0 \quad (3.4)$$

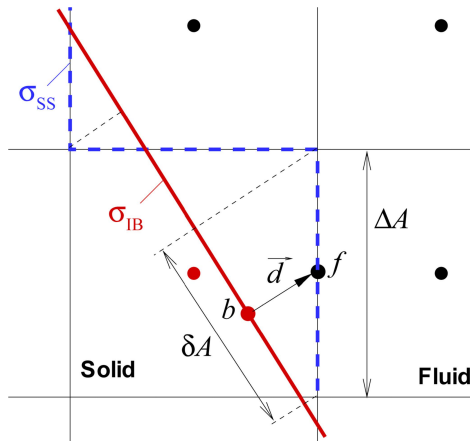
Με σκοπό λοιπόν να εκτιμηθεί το σφάλμα που προκαλεί στο νόμο διατήρησης του όγκου μια τέτοια μέθοδος, η εξίσωση (3.2) μέσω της σχέσης (3.4) γράφεται ξανά ως εξής:

$$-\frac{d\Omega_{IB}}{dt} + \int_{\sigma_{CV}} \vec{u} \cdot \vec{n} dA = \left(\frac{\Delta\Omega}{\Delta t}\right)^{k+1} (q^{k+1} - q^k) + \left[ \int_{\sigma_{IB}} \vec{u}_b \cdot \vec{n} dA - \int_{\sigma_{SS}} \vec{u}_f \cdot \vec{n} dA \right] \quad (3.5)$$

Σε αυτήν την εξίσωση, το δεξί μέλος αποτελεί το ζητούμενο σφάλμα. Οι όροι μέσα στις αγκύλες εκτιμώνται ως εξής:

$$\begin{aligned}
& \int_{\sigma_{IB}} \vec{u}_b \cdot \vec{n} dA - \int_{\sigma_{SS}} \vec{u}_f \cdot \vec{n} dA = \\
& \sum_{faces} (\vec{u}_b \cdot \vec{n}_b \delta A - \vec{u}_f \cdot \vec{n}_f \Delta A) = \\
& \Delta A \sum_{faces} \left( \vec{u}_b \cdot \vec{n}_b (\vec{n}_f \cdot \vec{n}_b) - \left[ \vec{u}_b + \left( \vec{d} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{u} + \dots \right] \cdot \vec{n}_f \right) \simeq \\
& -\Delta A \sum_{faces} \vec{u}_b \cdot (\vec{n}_f - \vec{n}_b (\vec{n}_f \cdot \vec{n}_b)) - \Delta A \sum_{faces} \left( \vec{d} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{u} \cdot \vec{n}_f
\end{aligned} \tag{3.6}$$

όπου  $\Delta A$  είναι η επιφάνεια κάθε κυψέλης,  $\delta A$  είναι η προβολή της  $\Delta A$  πάνω στο στερεό όριο,  $\vec{d}$  είναι το διάνυσμα που ενώνει το μέσο της  $\delta A$  με το μέσο της  $\Delta A$  και  $\vec{n}_b$  και  $\vec{n}_f$  είναι τα μοναδιαία κάθετα διανύσματα στην επιφάνεια της κυψέλης και στο στερεό όριο αντίστοιχα. Η γεωμετρία μιας οριακής κυψέλης απεικονίζεται στο σχήμα 3.2.



**Σχήμα 3.2:** Προβολή της επιφάνειας της κυψέλης  $\Delta A$  στην επιφάνεια του στερεού ορίου  $\delta A$  [6].

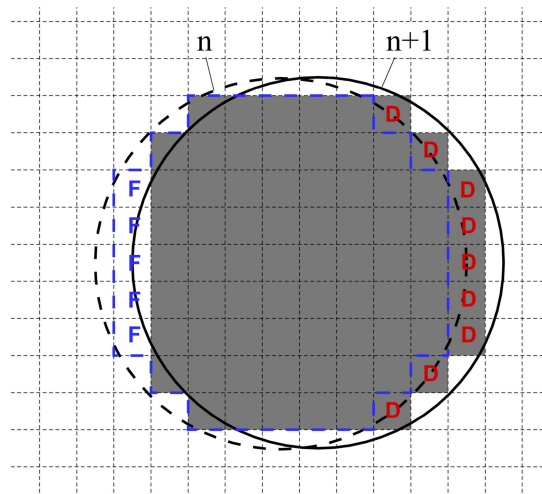
Με αντικατάσταση στην (3.5) προκύπτει:

$$\begin{aligned}
& -\frac{d\Omega_{IB}}{dt} + \int_{\sigma_{CV}} \vec{u} \cdot \vec{n} dA = \\
& \underbrace{\left( \frac{\Delta\Omega}{\Delta t} \right)^{k+1} (q^{k+1} - q^k)}_{S_V} - \underbrace{\Delta A \sum_{faces} \vec{u}_b \cdot (\vec{n}_f - \vec{n}_b (\vec{n}_f \cdot \vec{n}_b)) - \Delta A \sum_{faces} \left( \vec{d} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{u} \cdot \vec{n}_f}_{S_\sigma}
\end{aligned} \tag{3.7}$$

όπου στο δεξί μέλος βρίσκεται το εκτιμώμενο σφάλμα. Ο πρώτος όρος του συμβολίζεται με  $S_V$ , οφείλεται στη μεταβολή του αριθμού των κυψελών που ανήκουν στο ρευστό και αποτελεί ουσιαστικά έναν όρο πηγής που δεν αντιστοιχεί στη φυσική της ροής.

Αναφορικά με τους υπόλοιπους δύο όρους (με κοινό συμβολισμό  $S_\sigma$ ), αυτοί σχετίζονται με το γεγονός ότι το όριο του «βυθισμένου» σώματος δεν ταυτίζεται με το προσεγγιστικό στερεό όριο που αναγνωρίζει ο επιλύτης (στην ανάλυση που προηγήθηκε το όριο δίνεται με μορφή σκαλοπατιού). Φυσικά, το σφάλμα αυτό στην απλουστευμένη περίπτωση που εξετάστηκε είναι πολύ μεγάλο λόγω των παραδοχών που πραγματοποιήθηκαν (ενδεικτικά για έναν κύκλο ακτίνας  $R$  όπως αυτός που εικονίζεται στο σχήμα 3.1 είναι  $\int_{\sigma_{IB}} dA = 2\pi R$  ενώ  $\int_{\sigma_{SS}} dA \simeq 8R$ ). Εντούτοις, ακόμη και σε πραγματικούς κώδικες, όπως αυτός που αναπτύχθηκε στο κεφάλαιο 2, το σφάλμα  $S_\sigma$  παραμένει και μάλιστα σε γεωμετρίες με μεγάλες καμπυλότητες γίνεται σημαντικό καθώς το στερεό όριο προσεγγίζεται μέσω ευθυγράμμου τμήματος στο εσωτερικό της κάθε κυψέλης.

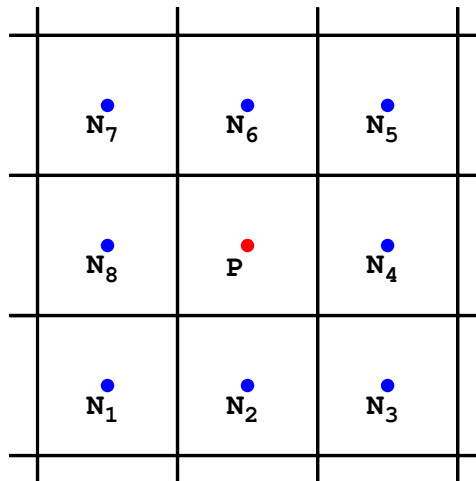
Τέλος, μια αιτία παραγωγής ταλαντώσεων, ανεξάρτητη από τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά υλοποίησης της μεθόδου IB, είναι η εμφάνιση νέων κυψελών στο ρευστό, όπως φαίνεται στο σχήμα 3.3. Σε αυτές τις κυψέλες, επειδή δεν διατηρούν κάποια «ιστορία» της ροής πρέπει να δοθούν τιμές για τις προηγούμενες χρονικές στιγμές μέσω κάποιας διαδικασίας προεκβολής. Αυτό το γεγονός έχει ως αποτέλεσμα οι νέες κυψέλες να λειτουργούν ως πηγές/καταβόθρες παράγοντας ταλαντώσεις στα πεδία γύρω από την αεροτομή.



**Σχήμα 3.3:** Κίνηση του στερεού ορίου στην οποία με F και D συμβολίζονται τα κελιά που τη νέα χρονική στιγμή εισέρχονται στο ρευστό και εξέρχονται από αυτο αντίστοιχα [6].

### 3.3 Μέθοδος υπολογισμού του χρονικού όρου σε μια μέθοδο Cut-Cell

Η διαδικασία της επίλυσης της ροής σε φαινόμενα με κινούμενα στερεά όρια βασίζεται στην απλή παραδοχή ότι κατά το πέρασμα από μια χρονική στιγμή στην επόμενη δεν εμφανίζονται στο ρευστό κυψέλες οι οποίες να μην έχουν από την προηγούμενη χρονική στιγμή κάποια γειτονική κυψέλη στο ρευστό. Με τον όρο «γειτονική κυψέλη» εννοούνται οι οκτώ κυψέλες που περιβάλλουν μια κυψέλη (υποθέτοντας ότι κοντά στο στερεό όριο το πλέγμα είναι παντού ομοιόμορφο) όπως φαίνονται στο σχήμα 3.4.



Σχήμα 3.4: Η κυψέλη P και οι οκτώ γείτονές της.

Αυτή η παραδοχή έχει δύο πλεονεκτήματα. Κατά πρώτον, ελαχιστοποιεί το σφάλμα  $S_V$ , όπως αναπτύχθηκε στην προηγούμενη παράγραφο, καθώς με την αποκάλυψη στο ρευστό μιας μόνο «στρώσης» κυψελών οι αριθμοί  $q_{k+1}$  και  $q_k$  είναι αρκετά κοντά, αν όχι ίδιοι. Επιπλέον, η προεχβολή των ροϊκών ποσοτήτων των γειτόνων στην εμφανισθείσα κυψέλη γίνεται με το μικρότερο δυνατό σφάλμα καθώς οι κυψέλες των γειτόνων βρίσκονται εγγύτερα σε αυτήν.

Το μειονέκτημα αυτής της μεθόδου έγκειται στο γεγονός ότι, όταν το πλέγμα γίνει πολύ πυκνό, προκειμένου να ικανοποιείται η παραπάνω παραδοχή, πρέπει το χρονικό βήμα να γίνει πολύ μικρό, αυξάνοντας σημαντικά το χρόνο επίλυσης. Όμως στην περίπτωση του μεθόδου που αναπτύχθηκε στο κεφάλαιο 2, επειδή το σχήμα που χρησιμοποιήθηκε είναι σημειακά πεπλεγμένο, επιτρέπει μεγάλα ψευδο-χρονικά βήματα τα οποία αντισταθμίζουν τη μείωση του πραγματικού χρονικού βήματος.



Στη συνέχεια παρατίθεται για λόγους πληρότητας η εξίσωση (2.46):

$$\int_{\Omega_P^{k+1}} \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} d\Omega = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_P^{k+1}} \vec{U} d\Omega}_{\vec{V}} - \underbrace{\int_{\partial\Omega_P^{k+1}} \vec{u}_{grid}^{k+1} \cdot \vec{n}^{k+1} \vec{U} d(\partial\Omega)}_{\vec{S}} \quad (3.8)$$

όπου με  $\vec{V}$  συμβολίζεται ο ογκικός όρος, η διακριτοποίηση του οποίου έγινε στο κεφάλαιο 2, ενώ με  $\vec{S}$  συμβολίζεται ο επιφανειακός όρος, ο οποίος υπολογίζεται στην ακόλουθη υποενότητα.

### 3.3.1 Υπολογισμός του επιφανειακού όρου $\vec{S}$

Το  $\vec{S}$  γράφεται:

$$\vec{S} = \int_{S_{fluid}} \vec{u}_{grid}^{k+1} \cdot \vec{n}^{k+1} \vec{U} d(\partial\Omega) + \int_{S_{wall}} \vec{u}_{grid}^{k+1} \cdot \vec{n}^{k+1} \vec{U} d(\partial\Omega) \quad (3.9)$$

όπου ο πρώτος όρος αναφέρεται στις πλευρές της τεμνόμενης κυψέλης που ανήκουν στο ρευστό και μηδενίζεται καθώς αυτές οι πλευρές ανήκουν στο ακίνητο καρτεσιανό πλέγμα οπότε ισχύει  $\vec{u}_{grid}^{k+1} = \vec{0}$ , ενώ ο δεύτερος όρος αναφέρεται στην πλευρά της τεμνόμενης κυψέλης που ταυτίζεται με το στερεό όριο. Συνεπώς, προκύπτει:

$$\vec{S} = \int_{S_{wall}} \vec{u}_{grid}^{k+1} \cdot \vec{n}^{k+1} \vec{U} d(\partial\Omega) \quad (3.10)$$

Ο υπολογισμός αυτού του διανύσματος μπορεί να πραγματοποιηθεί με δύο τρόπους οι οποίοι περιγράφονται στη συνέχεια. Ο πρώτος στηρίζεται στην απ' ευθείας διακριτοποίηση της παραπάνω σχέσης για μια τυχαία κυψέλη  $P$  οπότε προκύπτει:

$$\vec{S} = (\vec{u}_w^{k+1} \cdot \vec{n}^{k+1}) \vec{U}_w \Delta s \quad (3.11)$$

όπου  $\vec{u}_w^{k+1}$  είναι η ταχύτητα του στερεού ορίου, η οποία υπολογίζεται αναλυτικά μέσω του νόμου της κίνησης που επιβάλλεται στην γεωμετρία,  $\vec{n}^{k+1}$  είναι το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα στο μέσο της πλευράς του στερεού ορίου,  $\vec{U}_w$  είναι το διάνυσμα των συντηρητικών μεταβλητών της ροής πάνω στον τοίχο και το οποίο προσεγγίζεται από

τη σχέση του Taylor ως  $\vec{U}_w = \vec{U}_P + \vec{P}\vec{w} \cdot (\nabla\vec{U})_P$ . Τέλος,  $\Delta s$  είναι το μήκος της πλευράς του στερεού ορίου που τέμνει την κυψέλη με βαρύκεντρο το σημείο  $P$ .

Σε αυτήν την περίπτωση το διάνυσμα που προστίθεται στη διαγώνιο του πίνακα συντελεστών του συστήματος επίλυσης έχει την απλή μορφή:

$$\vec{S}_D = (\vec{u}_w^{k+1} \cdot \vec{n}^{k+1}) \Delta s \quad (3.12)$$

Ο δεύτερος τρόπος υπολογισμού του  $\vec{S}$  βασίζεται στη σχέση (2.47), σύμφωνα με την οποία προκύπτει:

$$\vec{S} = \frac{\Delta\Omega}{\Delta t} \vec{U}_w = \frac{\Delta\Omega}{\Delta t} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E \end{bmatrix}_w \quad (3.13)$$

Για την εύρεση του διανύσματος που πρέπει να προστεθεί στη διαγώνιο, οι συνιστώσες των ταχυτήτων του ρευστού αναλύονται στη γενική περίπτωση ως εξής:

$$\begin{aligned} u &= u_t \cos\theta + u_n \sin\theta \\ v &= v_t \cos\theta + v_n \sin\theta \end{aligned} \quad (3.14)$$

όπου οι δείκτες  $t$  και  $n$  συμβολίζουν την εφαπτόμενη και κάθετη διεύθυνση ως προς το στερεό τοίχωμα αντίστοιχα. Λόγω της συνθήκης μη-εισχώρησης ( $u_n = v_n = 0$ ), η ταχύτητα του ρευστού πάνω στο τοίχωμα γράφεται:

$$\begin{aligned} u_{f,w} &= u_t \cos\theta \\ v_{f,w} &= v_t \cos\theta \end{aligned} \quad (3.15)$$

Έτσι προκύπτει:

$$\begin{aligned} u &= u_{f,w} + u_n \sin\theta \\ v &= v_{f,w} + v_n \sin\theta \end{aligned} \quad (3.16)$$

Οπότε:

$$\frac{\partial u_{f,w}}{\partial u} = 1 - \frac{\partial}{\partial u}(u_n \sin\theta) = 1 - \frac{\partial}{\partial u}(u \sin^2\theta) = 1 - \sin^2\theta = \cos^2\theta \quad (3.17)$$

και όμοια για την  $v$  συνιστώσα:

$$\frac{\partial v_{f,w}}{\partial v} = \sin^2\theta \quad (3.18)$$

Έτσι από την εξίσωση (3.13) προκύπτει:

$$\frac{\partial \vec{S}}{\partial \vec{U}} = \frac{\Delta\Omega}{\Delta t} = \frac{\Delta\Omega}{\Delta t} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

ή επειδή  $n_x = \sin\theta$  και  $n_y = -\cos\theta$ :

$$\frac{\partial \vec{S}}{\partial \vec{U}} = \frac{\Delta\Omega}{\Delta t} = \frac{\Delta\Omega}{\Delta t} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_y^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n_x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Οι δύο τρόποι υπολογισμού του  $\vec{S}$  δοκιμάστηκαν και δεν έδωσαν διαφορετικά αποτελέσματα. Παρόλα αυτά ίσως ο πρώτος τρόπος είναι προτιμότερος για εφαρμογές Cut-Cell μεθόδων, γιατί αποφεύγει (τουλάχιστον άμεσα) την ανάγκη απόδοσης τιμών στους όγκους κυψελών που την προηγούμενη χρονική στιγμή βρίσκονταν στο στερεό. Έτσι, στη συνέχεια της διπλωματικής εργασίας, χρησιμοποιήθηκε αυτός ο τρόπος.

### 3.3.2 Απόδοση τιμών σε κυψέλες που εμφανίζονται στο ρευστό

Όπως φαίνεται από τη διακριτοποίηση της εξίσωσης (3.8) (σχέση (2.48)) για τον υπολογισμό του ογκικού όρου είναι αναγκαία η απόδοση τιμών στις προηγούμενες χρονικές στιγμές τόσο για τις πρωτεύουσες/συντηρητικές μεταβλητές όσο και για τους όγκους των κυψελών που εισέρχονται στο ρευστό. Έτσι, σχετικά με τις τιμές των μεταβλητών της ροής, σε μια πρωτοεμφανιζόμενη κυψέλη με βαρύκεντρο το σημείο P τη χρονική

στιγμή  $k$  επιλέχθηκε η ακόλουθη σχέση:

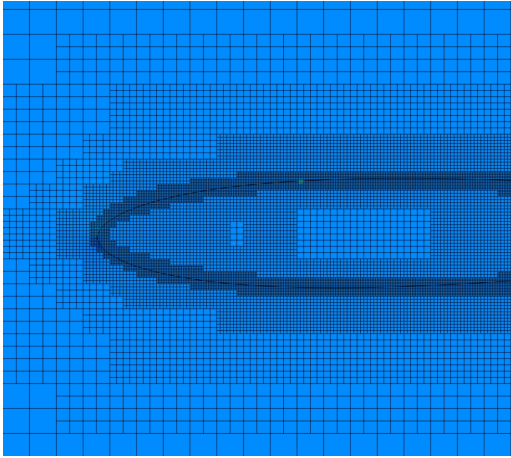
$$\vec{U}_{P,Fresh}^k = \frac{\sum_{i=1}^{Anei(P)} \vec{U}_{i \rightarrow P}^k w_i}{\sum_{i=1}^{Anei(P)} w_i} \quad (3.21)$$

όπου  $\vec{U}_{P,Fresh}^k$  είναι το διάνυσμα των συντηρητικών μεταβλητών της κυψέλης  $P$  για τη χρονική στιγμή  $k$ ,  $Anei(P)$  είναι το πλήθος των γειτόνων της κυψέλης  $P$  που βρίσκονται στο ρευστό τη χρονική στιγμή  $k$ ,  $\vec{U}_{i \rightarrow P}^k$  είναι η ποσότητα που έχει προκύψει από την προεκβολή, μέσω του τύπου του Taylor, στην κυψέλη  $P$  του διανύσματος των συντηρητικών μεταβλητών του γείτονα  $i$  τη χρονική στιγμή  $k$  και  $w_i$  είναι ένα βάρος το οποίο ισούται με  $w_i = \frac{1}{d_i}$  όπου  $d_i$  είναι η απόσταση της κυψέλης  $i$  από την  $P$ . Υπενθυμίζεται ότι επιβάλλεται κάθε κυψέλη που εισέρχεται στο πεδίο ροής να έχει τουλάχιστον έναν γείτονα ευρισκόμενο κατά την προηγούμενη χρονική στιγμή στην περιοχή του ρευστού. Συνεπώς, τα αθροίσματα της πιο πάνω σχέσης θα έχουν πάντα τουλάχιστον έναν όρο.

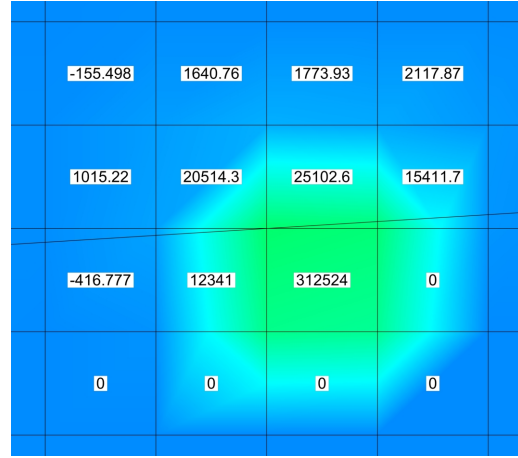
Η ίδια λογική μπορεί να εφαρμοστεί και για τους όγκους των πρωτοεμφανιζόμενων κυψελών. Δηλαδή:

$$\Omega_{P,Fresh}^k = \frac{\sum_{i=1}^{Anei(P)} \Omega_i^k}{Anei(P)} \quad (3.22)$$

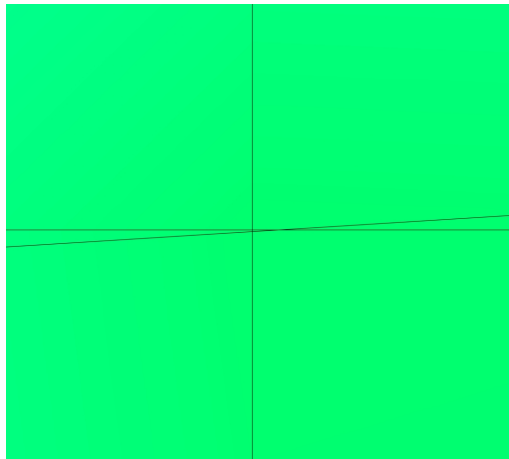
Το πρόβλημα με αυτήν τη σχέση προκύπτει όταν κατά την κίνηση της γεωμετρίας εμφανίζονται κυψέλες που τέμνονται από αυτήν κατά ένα μικρό ποσοστό. Αν συμβαίνει αυτό, τότε με τη χρήση της σχέσης (3.22) προκύπτει  $\Omega_{P,Fresh}^k \gg \Omega_{P,Fresh}^{k+1}$ , σχέση αντίθετη με τη φυσική κίνηση του στερεού ορίου. Μια τέτοια περίπτωση παρουσιάζεται στο σχήμα 3.5 όπου απεικονίζεται το πεδίο της  $\frac{\partial u}{\partial y}$  για μια αεροτομή σε εξαναγκασμένη περιοδική κίνηση. Η παράγωγος αυτή υπολογίστηκε στο πλαίσιο της χωρικής διακριτοποίησης δεύτερης τάξης. Όπως είναι φανερό η χρήση της σχέσης (3.22) οδήγησε στον απειρισμό της παραγώγου για την κυψέλη που τέμνεται οριακά από τη γεωμετρία.



(i) Η γεωμετρία και το προσαρμοσμένο καρτεσιανό πλέγμα. Παρατηρείται μια ανεξήγητα μεγάλη τιμή της παραγώγου στο μέσο περίπου της αεροτομής



(ii) Εστίαση στην περιοχή της μεγάλης τιμής όπου υπάρχει μια κυψέλη με παράγωγο μεγαλύτερη κατά μια τάξη μεγέθους από τις γειτονικές της.



(iii) Περαιτέρω εστίαση στην πρότερη κυψέλη. Η γεωμετρία την τέμνει κατά ένα μικρό μέρος με συνέπεια η επιβολή της σχέσης (3.22) να αντιτίθεται στην φυσική της ροής.

**Σχήμα 3.5:** Το πεδίο της  $\frac{\partial u}{\partial y}$  γύρω από μια αεροτομή σε εξαναγκασμένη περιοδική κίνηση τη χρονική στιγμή που αποκλίνει η επίλυση.

Για την αντιμετώπιση αυτού του ζητήματος υιοθετήθηκε η ακόλουθη σχέση για τους όγκους των νέων κυψελών:

$$\Omega_{P, Fresh}^k = m \Omega_{P, Fresh}^{k+1} \quad (3.23)$$

όπου  $m$  είναι ένα ποσοστό του όγκου της κυψέλης τη χρονική στιγμή  $k+1$ . Για τη

διαπίστωση της εξάρτησης της επίλυσης από την τιμή του  $m$  έγινε μια παραμετρική μελέτη για την οποία υπολογίστηκαν οι συντελεστές άνωσης για μια εξαναγκασμένη περιοδική κίνηση με τις ίδιες αρχικές συνθήκες και διαφορετικά  $m$  και συγκρίθηκαν οι μέγιστες αποκλίσεις των  $C_L$  με την αντίστοιχη τιμή που προέκυψε για  $m = 0$ . Τα αποτελέσματα φαίνονται στον πίνακα 3.1.

**Πίνακας 3.1:** Μέγιστη απόκλιση του συντελεστή άνωσης για διάφορες τιμές του  $m$ , σε σχέση με τον αντίστοιχο συντελεστή άνωσης που υπολογίστηκε για  $m = 0$ .

$m$	Απόκλιση (%)
0.1	0.07
0.3	0.18
0.5	0.34
0.7	0.56

Είναι φανερό ότι οι αποκλίσεις είναι πολύ μικρές οπότε η επίλυση δεν επηρεάζεται από την τιμή του  $m$  στο εύρος τιμών που μελετήθηκε.

## Κεφάλαιο 4

# Πρόλεξη μόνιμων και μη-μόνιμων ροών με ακίνητα στερεά όρια

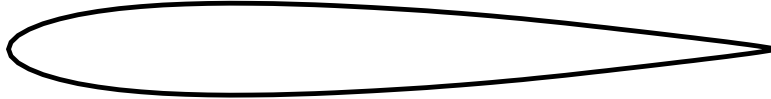
### 4.1 Εισαγωγικά σχόλια

Στο παρόν κεφάλαιο γίνεται εφαρμογή της μεθόδου που αναπτύχθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο για την επίλυση ενός 2D μη-μόνιμου προβλήματος εξωτερικής αεροδυναμικής. Εξετάζεται δηλαδή, η ροή γύρω από μεμονωμένη αεροτομή χρησιμοποιώντας ένα απλό καρτεσιανό πλέγμα όπως απαιτείται από τη μέθοδο των τεμνόμενων κυψελών.

Αρχικά, γίνεται η πιστοποίηση του επιλύτη μόνιμης ροής σε δύο περιπτώσεις που μελετώνται διεξοδικά στη βιβλιογραφία. Πρόκειται για μια περίπτωση υποηχητικής (subsonic) και μια περίπτωση διηχητικής (transonic) ροής, οι οποίες καλύπτουν ένα σημαντικό εύρος όσον αφορά τα φαινόμενα συμπίεστικότητας. Στη συνέχεια, επιλύεται ένα μη-μόνιμο πρόβλημα τόσο σε υποηχητικές όσο και σε διηχητικές συνθήκες ροής. Η ύπαρξη μη-μόνιμου πεδίου, εδώ, είναι απόρροια της χρονικής μεταβολής των οριακών συνθηκών και όχι των κινούμενων τοιχωμάτων.

### 4.2 Πιστοποίηση του επιλύτη σε χρονικά μόνιμα προβλήματα

Η συμμετρικά αεροτομή που θα χρησιμοποιηθεί καθόλη τη διάρκεια αυτού του κεφαλαίου είναι τύπου NACA 0012 [28], η οποία απεικονίζεται στο ακόλουθο σχήμα:



**Σχήμα 4.1:** Η μορφή της αεροτομής NACA 0012.

Για την πιστοποίηση του επιλύτη ατρίβους ροής σε χρονικά μόνιμες συνθήκες χρησιμοποιήθηκαν δύο περιπτώσεις ροής. Η πρώτη αναφέρεται σε υποχητική ροή (η ταχύτητα, τόσο μακριά από την αεροτομή όσο και γύρω από αυτή, είναι παντού υποχητική), ενώ η δεύτερη σε διχητική (η ταχύτητα σε κάποιες περιοχές γύρω από την αεροτομή γίνεται υπερχητική παρόλο που η επί άπειρο ταχύτητα παραμένει υποχητική). Οι συνθήκες της επί άπειρο ροής για τις δύο περιπτώσεις φαίνονται στον πίνακα 4.1.

**Πίνακας 4.1:** Συνθήκες της επί άπειρο ροής

	Υποχητική	Διχητική (°)
Mach	0.5	0.8
Γωνία επί άπειρο ροής (°)	3.0	1.25
Πίεση (bar)		1
Πυκνότητα ( $kg\ m^{-3}$ )		1.2

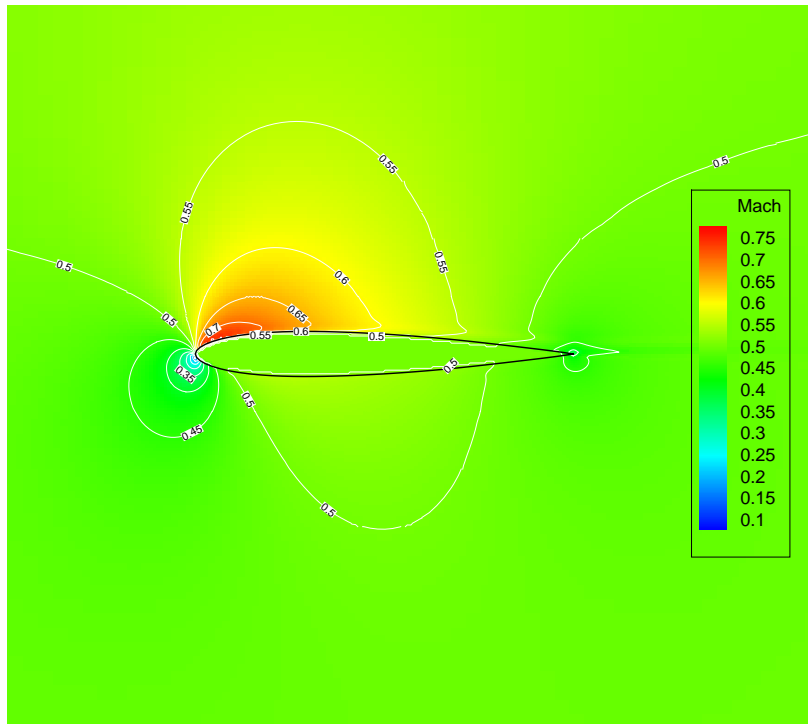
Τα αποτελέσματα της υποχητικής περίπτωσης παρουσιάζονται στα σχήματα 4.2 και 4.3 για τον αριθμό Mach και το συντελεστή πίεσης γύρω από την αεροτομή αντίστοιχα. Σε αυτά τα σχήματα έχει γίνει εστίαση στην περιοχή γύρω από την αεροτομή καθώς ως υπολογιστικό χωρίο χρησιμοποιήθηκε ένα ορθογώνιο με μήκος 50 και πλάτος 49 μήκη χορδής ενώ το εμβαδό της ελάχιστης κυψέλης στην εσωτερική πύκνωση ήταν  $10^{-4}$  (μήκη χορδής)<sup>2</sup>.

Για τον υπολογισμό του συντελεστή πίεσης πραγματοποιήθηκε χρησιμοποιήθηκε η σχέση:

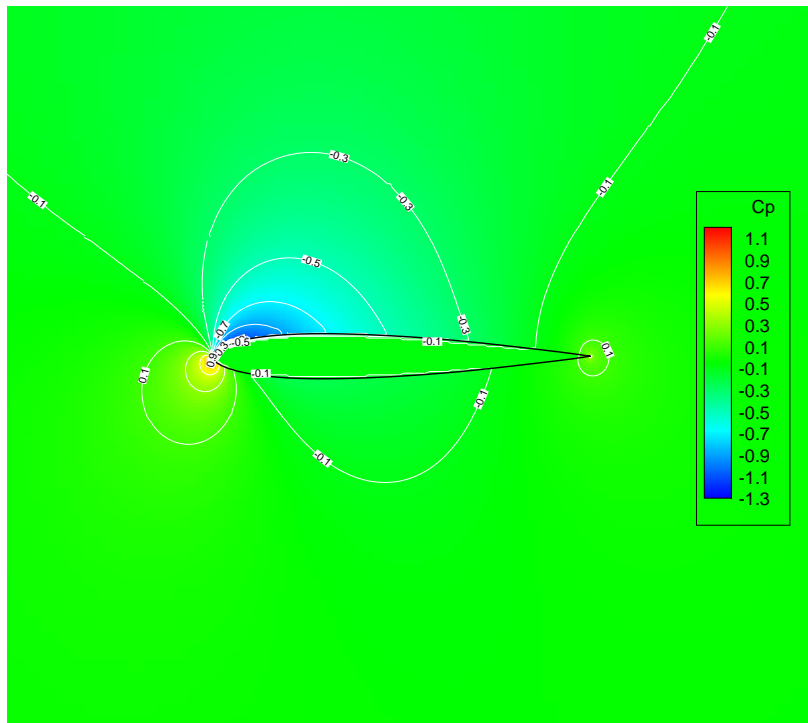
$$C_P = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2} \quad (4.1)$$

Σε αυτήν την έκφραση, με  $p$  συμβολίζεται η στατική πίεση και με  $p_\infty$ ,  $\rho_\infty$  και  $V_\infty$  η στατική πίεση, η πυκνότητα και η ταχύτητα της επί άπειρο ροής, αντίστοιχα.





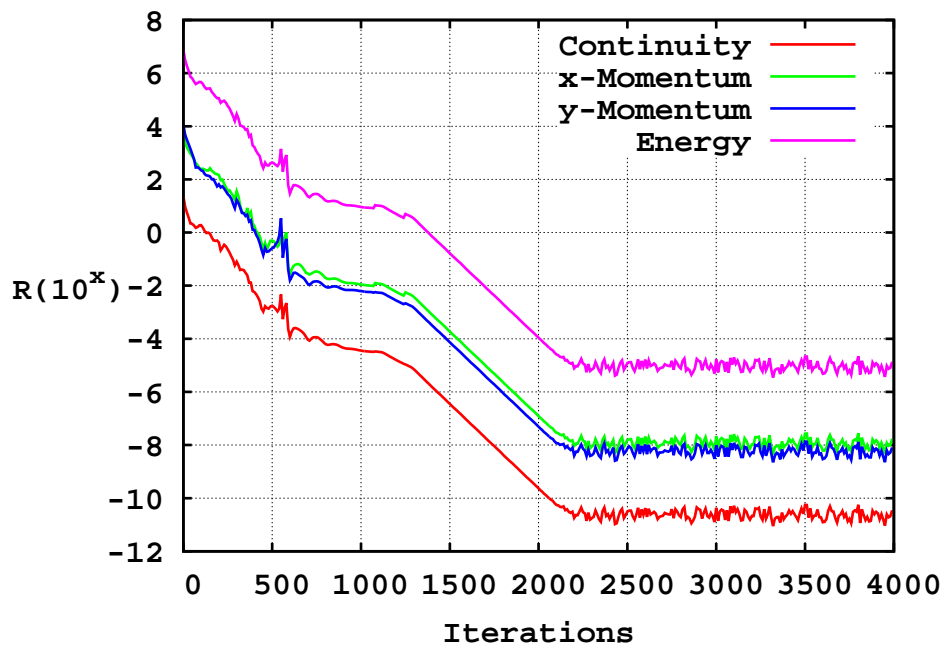
Σχήμα 4.2: Το πεδίο του αριθμού Mach γύρω από την αεροτομή NACA 0012 ( $M_\infty = 0.5$ ,  $\alpha_\infty = 3^\circ$ ). Τα χρώματα που βρίσκονται στο εσωτερικό της αεροτομής δεν έχουν φυσική σημασία καθώς εκεί βρίσκεται στερεό.



Σχήμα 4.3: Το πεδίο του συντελεστή πίεσης γύρω από την αεροτομή NACA 0012 ( $M_\infty = 0.5$ ,  $\alpha_\infty = 3^\circ$ ).

Όπως είναι φανερό, καθώς η ροή προσκρούει στην αεροτομή, δημιουργεί υπερπίεση στην κάτω πλευρά και υποπίεση στην πάνω. Αυτό έχει ως συνέπεια την επιτάχυνση της ροής πάνω από την αεροτομή αυξάνοντας ανάλογα και τον αριθμό Mach.

Στο σχήμα 4.4 απεικονίζεται το υπόλοιπο των τεσσάρων εξισώσεων της ροής ως συνάρτηση του αριθμού των ψευδο-χρονικών επαναλήψεων. Είναι εμφανές ότι καθώς αυξάνει ο αριθμός των επαναλήψεων, το υπόλοιπο ακολουθεί φθίνουσα πορεία οδηγώντας τον επιλύτη στην σύγκλιση της διαδικασίας. Αυτή επιτυγχάνεται στο σημείο του διαγράμματος που ξεκινά η σταθεροποίηση των υπολοίπων. Από τις τέσσερις εξισώσεις της ροής, η εξίσωση της συνέχειας οδηγείται στο μικρότερο υπόλοιπο (σε απόλυτες τιμές) ενώ η εξίσωση της ενέργειας στο μεγαλύτερο.



**Σχήμα 4.4:** Υπόλοιπο των εξισώσεων της ροής ως συνάρτηση του αριθμού των ψευδο-χρονικών επαναλήψεων. Ο χρόνος ολοκλήρωσης του παρόντος «τρεξίματος» ήταν 50 λεπτά σε μηχανήμα με επεξεργαστή Intel(R) Xeon(R) CPU E5520 @ 2.27GHz.

Η πιστοποίηση των αποτελεσμάτων πραγματοποιήθηκε συγκρίνοντας τον συντελεστή άνωσης που προέκυψε μέσω του κώδικα Cut-Cell με τον συντελεστή άνωσης που υπολογίστηκε από μεθόδους οριόδετων πλεγμάτων. Αυτός ο συντελεστής υπολογίζεται μέσω της σχέσης:

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2 c} \quad (4.2)$$

όπου με  $L$  συμβολίζεται η άνωση που παράγει η αεροτομή, υπολογισμένη από την ολοκλήρωση των πιέσεων γύρω από αυτή και προβάλλοντας το αποτέλεσμα σε μια διεύθυνση κάθετη στην επ' άπειρο ταχύτητα. Τέλος, με  $c$  συμβολίζεται η χορδή της αεροτομής.

Στον πίνακα 4.2 φαίνεται η σύγκριση του  $C_L$  που υπολογίστηκε μέσω του κώδικα Cut-Cell με το  $C_L$  που προέκυψε από οριόδετα πλέγματα [29, 30].

**Πίνακας 4.2:** Σύγκριση του  $C_L$  μεταξύ Cut-Cell και οριόδετων πλεγμάτων σε υποηχητική ροή. [29, 30]

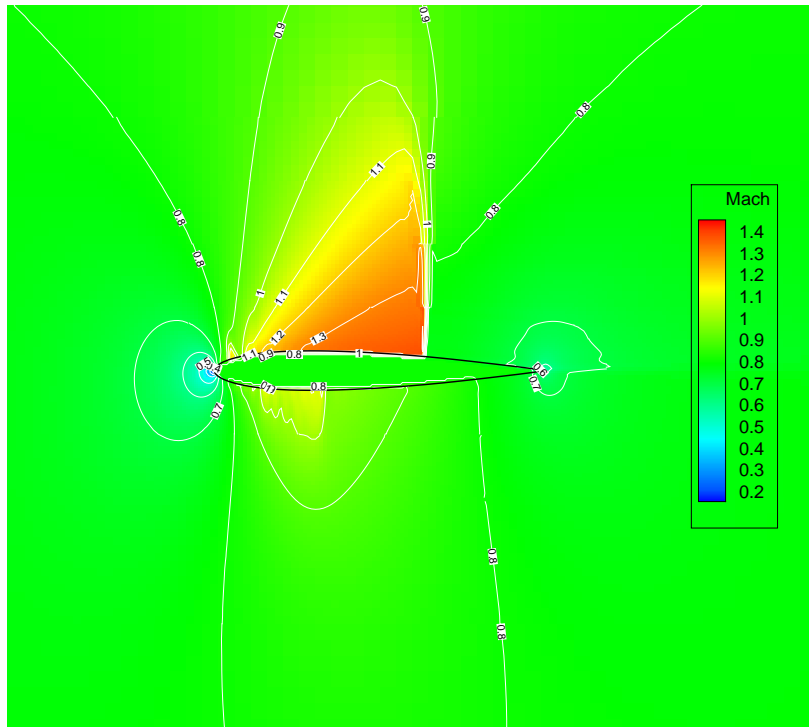
	$C_L$
Παρούσα μέθοδος Cut-Cell	0.4246
Jameson and Mavriplis	0.4296
Jameson and Yoon	0.4269

Το σφάλμα που προκύπτει για τη μέγιστη απόκλιση του  $C_L$  είναι της τάξης του 1% οπότε το αποτέλεσμα κρίνεται ικανοποιητικό.

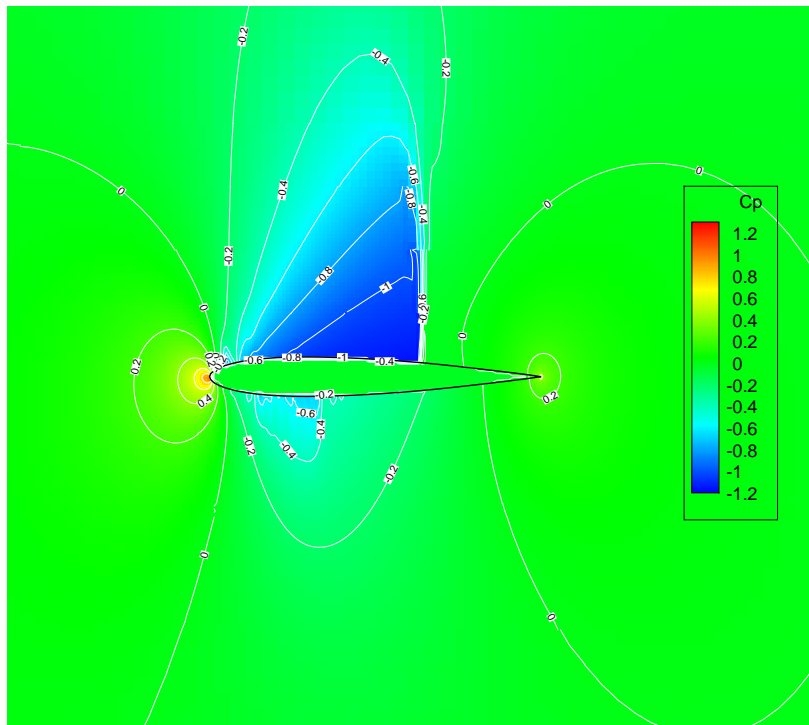
Στη συνέχεια, εξετάζεται η διηχητική περίπτωση. Ο αριθμός Mach και ο συντελεστής πίεσης γύρω από την αεροτομή φαίνονται στα σχήματα 4.5 και 4.6 αντίστοιχα. Οι διαστάσεις του υπολογιστικού χωρίου παρέμειναν ίδιες με την υποηχητική περίπτωση ενώ το εμβαδό της ελάχιστης κυψέλης στην εσωτερική πύκνωση ήταν  $5 \times 10^{-5}$  (μήκη χορδής)<sup>2</sup>.

Σε αυτήν την περίπτωση, όπως είναι αναμενόμενο, η ροή εμφανίζει κύμα κρούσης. Πιο συγκεκριμένα, δημιουργούνται δύο κύματα κρούσης με το πιο ισχυρό να εντοπίζεται στην πλευρά υποπίεσης.

Στον πίνακα 4.3 παρατίθεται η σύγκριση του  $C_L$  που υπολογίστηκε και του  $C_L$  που προέκυψε από μεθόδους οριόδετων πλεγμάτων [31]. Η επίλυση σε οριόδετα πλέγματα πραγματοποιήθηκε χρησιμοποιώντας διάφορους επιλύτες ατρίβους ροής οπότε εδώ παρατίθενται η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή.



Σχήμα 4.5: Το πεδίο του αριθμού Mach γύρω από την αεροτομή NACA 0012 ( $M_\infty = 0.8$ ,  $\alpha_\infty = 1.25^\circ$ ).



Σχήμα 4.6: Το πεδίο του συντελεστή πίεσης γύρω από την αεροτομή NACA 0012 ( $M_\infty = 0.8$ ,  $\alpha_\infty = 1.25^\circ$ ).

**Πίνακας 4.3:** Σύγκριση του  $C_L$  μεταξύ Cut-Cell και οριόδετων πλεγμάτων σε διηχητική ροή [31].

	$C_L$
Παρούσα Μέθοδος Cut-Cell	0.3435
Boundary fitted Min	0.3482
Boundary fitted Max	0.3562

Το σφάλμα που προέκυψε στην περίπτωση της διηχητικής ροής σε σχέση με τη μέγιστη τιμή του  $C_L$  είναι της τάξης του 3% κάτι το οποίο είναι κάπως μεγαλύτερο συγκρινόμενο με την υποηχητική περίπτωση. Οι αιτίες αυτού του γεγονότος εντοπίζονται περισσότερο στην ύπαρξη του κύματος κρούσης και στον τρόπο με τον οποίο το αντιμετωπίζει ο κάθε επιλύτης και λιγότερο στη μέθοδο πλεγματοποίησης που επιλέχθηκε. Γι' αυτό άλλωστε παρατηρούνται μικρές αποκλίσεις στις τιμές του  $C_L$  ακόμη και μεταξύ μεθόδων παρόμοιας φιλοσοφίας.

### 4.3 Πιστοποίηση του επιλύτη σε χρονικά μη-μόνιμα προβλήματα

Σε αυτήν την ενότητα μελετάται το πρόβλημα της 2D μη-μόνιμης, συμπιεστής ροής γύρω από μια μεμονωμένη αεροτομή NACA 0012. Η ύπαρξη μη-μόνιμου πεδίου εδώ, είναι αποτέλεσμα της περιοδικής μεταβολής των οριακών συνθηκών της επί άπειρο ροής. Πιο συγκεκριμένα, το μέγεθος που επιλέχθηκε να μεταβάλλεται, είναι η γωνία που σχηματίζει η επί άπειρο ταχύτητα της ροής με τον άξονα της χορδής της αεροτομής. Ο τύπος που δίνει τη μεταβολή αυτή είναι ο ακόλουθος:

$$\alpha(t) = \alpha_m + \alpha_0 \sin(\omega t) = \alpha_m + \alpha_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \quad (4.3)$$

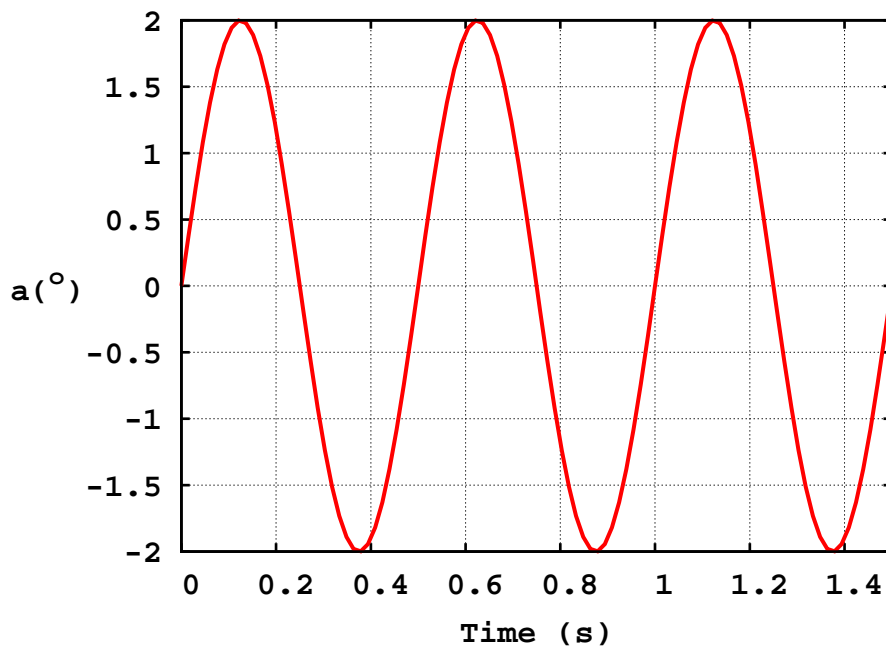
όπου  $\alpha_m$  η μέση γωνία της επί άπειρο ροής,  $\alpha_0$  το πλάτος ταλάντωσης,  $\omega$  η κυκλική συχνότητα και  $T$  η περίοδος. Αυτή η γωνία επιβάλλεται μέσω συνθηκών Dirichlet.

Εξετάστηκαν δύο περιπτώσεις ροών με τα ίδια περιοδικά χαρακτηριστικά αλλά με διαφορετικούς αριθμούς Mach της επί άπειρο ροής, όπως φαίνεται στον πίνακα 4.4. Με βάση αυτό, η μεταβολή της γωνίας συναρτήσε του χρόνου απεικονίζεται στο σχήμα 4.7. Το υπολογιστικό χωρίο που χρησιμοποιήθηκε είχε μήκος 15 και πλάτος 14 μήχη

χορδής ενώ το εμβαδό της ελάχιστης κυψέλης στο εσωτερικό της πύκνωσης ήταν  $10^{-4}$  (μήκη χορδής)<sup>2</sup>.

**Πίνακας 4.4:** Χαρακτηριστικά μεγέθη της περιοδικής μεταβολής των οριακών συνθηκών γύρω από μια αεροτομή NACA 0012 για δύο διαφορετικές περιπτώσεις ροών.

	Υποηχητική ροή	Διηχητική ροή
Μέση γωνία επ' άπειρο ροής $\alpha_m$	$0^\circ$	
Πλάτος ταλάντωσης επ' άπειρο γωνίας $\alpha_0$	$2^\circ$	
Περίοδος ταλάντωσης $T$	$0.5 \text{ s}$	
Περίοδοι επίλυσης της ροής	3	
Αριθμός Mach επ' άπειρο ροής $M_\infty$	0.59	0.8



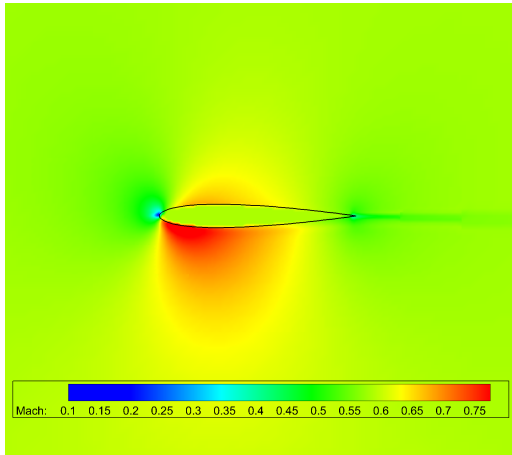
**Σχήμα 4.7:** Μεταβολή της επ' άπειρο γωνίας ως συνάρτηση του χρόνου.

Αρχικά, για την υποηχητική περίπτωση, παρουσιάζονται στο σχήμα 4.8 τα υπολογισθέντα πεδία του αριθμού Mach γύρω από την αεροτομή για διάφορες χρονικές στιγμές σε διάστημα μιας περιόδου του φαινομένου. Παρατηρούμε ότι η αλλαγή του πεδίου κοντά στην αεροτομή ακολουθεί την αλλαγή της επ' άπειρο γωνίας παρουσιάζοντας, όμως, μια υστέρηση σε σχέση με αυτή.

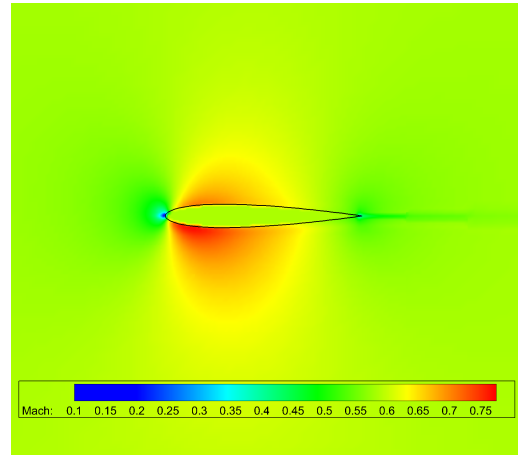
Επιπλέον, στα σχήματα 4.9 και 4.10 φαίνεται ο συντελεστής άνωσης συναρτήσει του

χρόνου και της γωνίας της επ' άπειρο ροής αντίστοιχα. Παρατηρούμε ότι η ροή γίνεται πολύ γρήγορα περιοδική καθώς στο σχήμα 4.10, μετά το πρώτο τέταρτο της περιόδου ο συντελεστής άνωσης εμφανίζει πλήρη ταύτιση με τις επόμενες περιόδους. Επίσης, πιο εμφανής γίνεται η υστέρηση του  $C_L$ , ο οποίος λαμβάνει τιμές διάφορες του μηδενός, όταν η γωνία της επ' άπειρο ροής μηδενίζεται. Η αιτία αυτού του φαινομένου εντοπίζεται στην εσωτερική «αδράνεια» του ρευστού το οποίο, καθώς αλλάζει η γωνία πρόσπτωσης, δεν προσαρμόζεται ακαριαία σε αυτή τη μεταβολή.

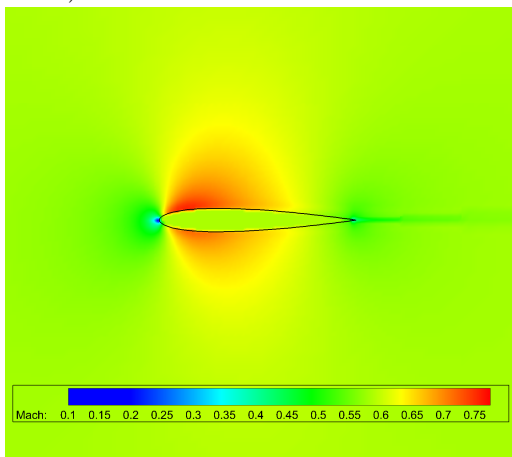
Αναφορικά με την διηχητική ροή, στο σχήμα 4.11, παρουσιάζονται τα πεδία του αριθμού Mach σε διάφορες στιγμές μιας περιόδου. Αντίστοιχα, στα σχήματα 4.12 και 4.13, απεικονίζεται ο συντελεστής άνωσης συναρτήσει του χρόνου και της επ' άπειρο γωνίας. Τα συμπεράσματα που προκύπτουν και εδώ είναι παρόμοια με την υποηχητική περίπτωση με τη διαφορά ότι έχουμε την εμφάνιση κύματος κρούσης τόσο στην πλευρά υποπίεσης όσο και στην πλευρά υπερπίεσης. Παρατηρούμε επίσης, ότι ο συντελεστής άνωσης λαμβάνει σημαντικά μεγαλύτερες τιμές σε σχέση με την υποηχητική ροή, τονίζοντας κατ' αυτόν τον τρόπο την επίδραση της συμπιεστότητας στις υψηλές ταχύτητες. Τέλος, η εσωτερική «αδράνεια» που αναφέρθηκε στην προηγούμενη παράγραφο, εδώ επιτείνεται, λόγω της μεγαλύτερης ταχύτητας, κάνοντας την έλλειψη του σχήματος 4.13 πιο πεπλατυσμένη.



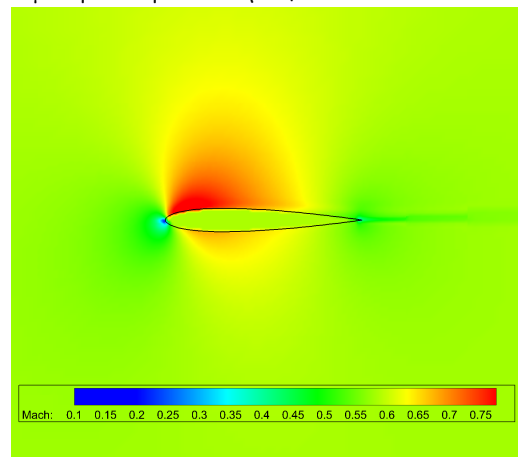
(i) Μέγιστη αρνητική επ' άπειρο γωνία ( $\alpha = -2^\circ$ ).



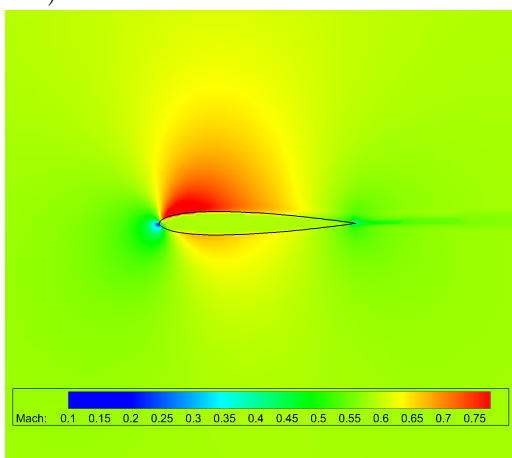
(ii) Μέση επ' άπειρο γωνία ( $\alpha = 0^\circ$ ) στη φάση που η επ' άπειρο γωνία αυξάνει.



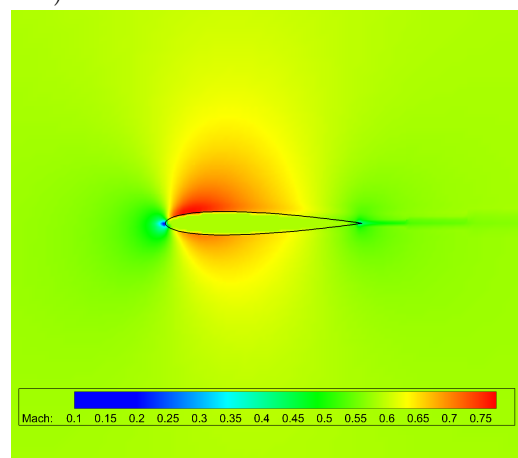
(iii) Επ' άπειρο γωνία σε φάση ανόδου ( $\alpha = 1^\circ$ ).



(iv) Μέγιστη θετική επ' άπειρο γωνία ( $\alpha = 2^\circ$ ).



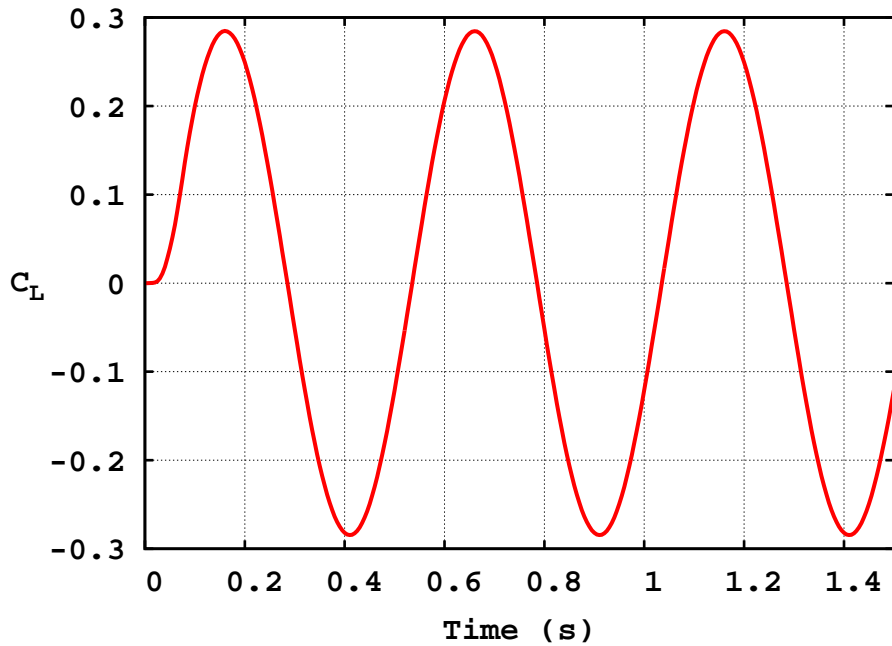
(v) Επ' άπειρο γωνία σε φάση καθόδου ( $\alpha = 1^\circ$ ).



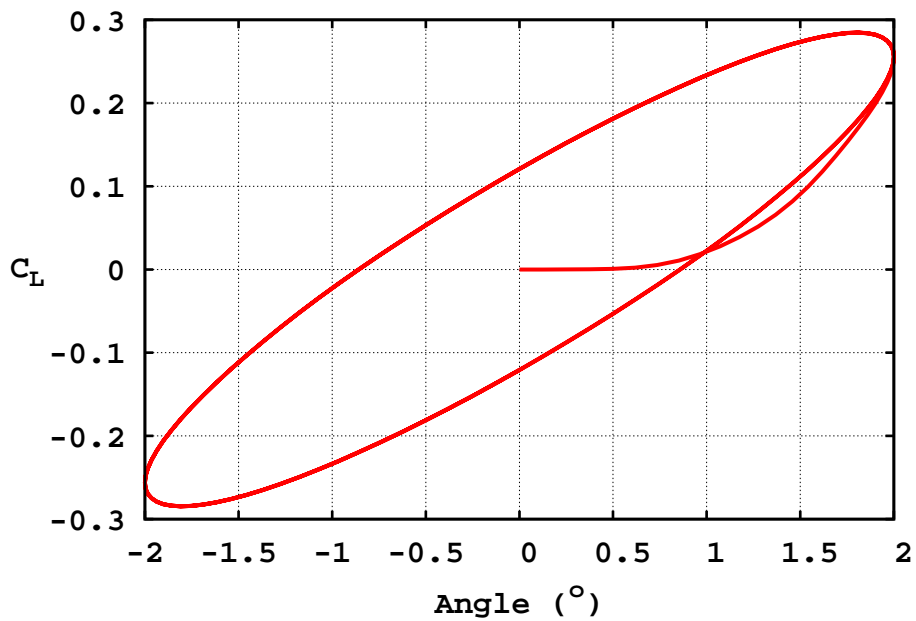
(vi) Μέση επ' άπειρο γωνία ( $\alpha = 0^\circ$ ) στη φάση που η επ' άπειρο γωνία μειώνεται.

**Σχήμα 4.8:** Υπολογισθέντα πεδία αριθμού Mach γύρω από την αεροτομή NACA 0012 υπό την επίδραση περιοδικά μεταβαλλόμενων οριακών συνθηκών ( $M_\infty = 0.59$ ,  $\alpha_m = 0^\circ$ ,  $\alpha_0 = 2^\circ$ ,  $T = 0.5s$ ).

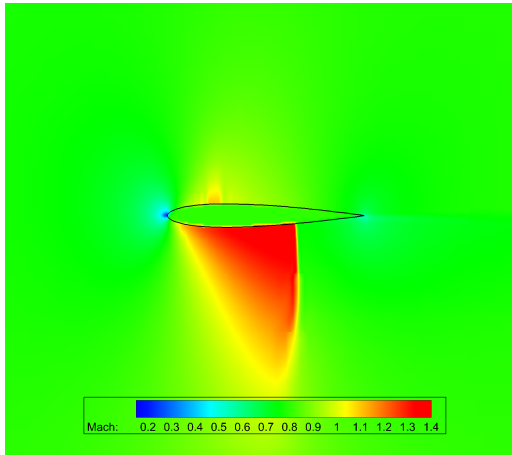




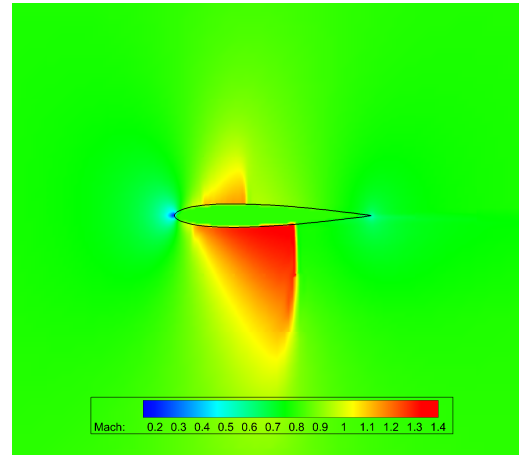
Σχήμα 4.9: Συντελεστής άνωσης αεροτομής NACA 0012 ως συνάρτηση του χρόνου υπό την επίδραση περιοδικά μεταβαλλόμενων οριακών συνθηκών ( $M_\infty = 0.59$ ,  $\alpha_m = 0^\circ$ ,  $\alpha_0 = 2^\circ$ ,  $T = 0.5s$ ).



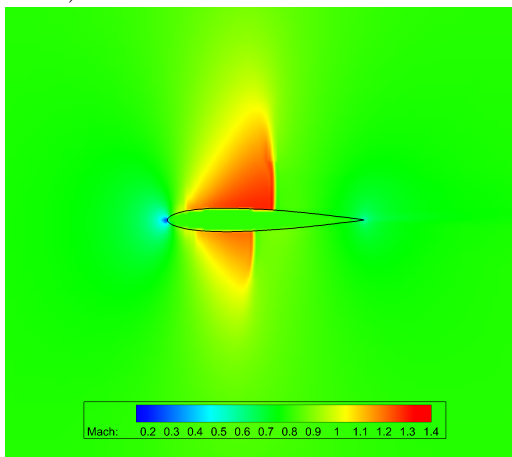
Σχήμα 4.10: Συντελεστής άνωσης αεροτομής NACA 0012 ως συνάρτηση της γωνίας της επί άπειρο ταχύτητας ( $M_\infty = 0.59$ ,  $\alpha_m = 0^\circ$ ,  $\alpha_0 = 2^\circ$ ,  $T = 0.5s$ ).



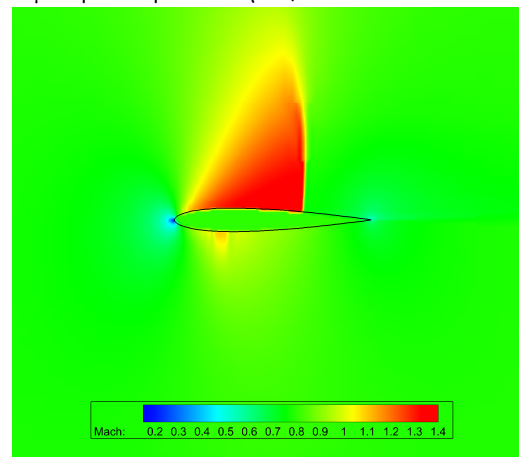
(i) Μέγιστη αρνητική επ' άπειρο γωνία ( $\alpha = -2^\circ$ ).



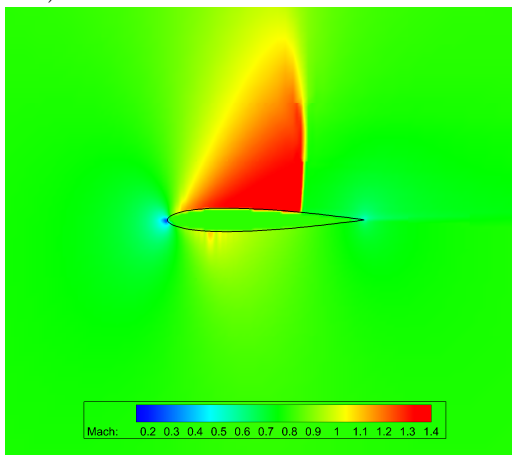
(ii) Μέση επ' άπειρο γωνία ( $\alpha = 0^\circ$ ) στη φάση που η επ' άπειρο γωνία αυξάνει.



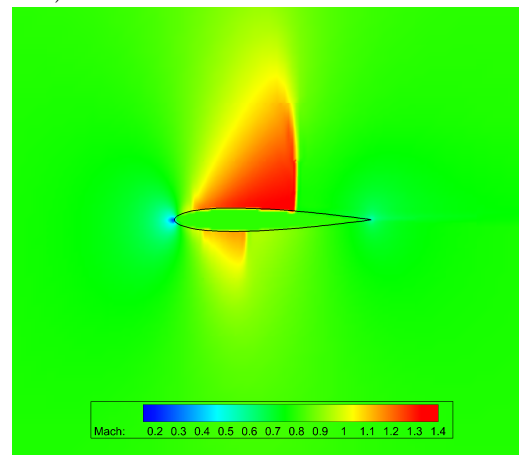
(iii) Επ' άπειρο γωνία σε φάση ανόδου ( $\alpha = 1^\circ$ ).



(iv) Μέγιστη θετική επ' άπειρο γωνία ( $\alpha = 2^\circ$ ).

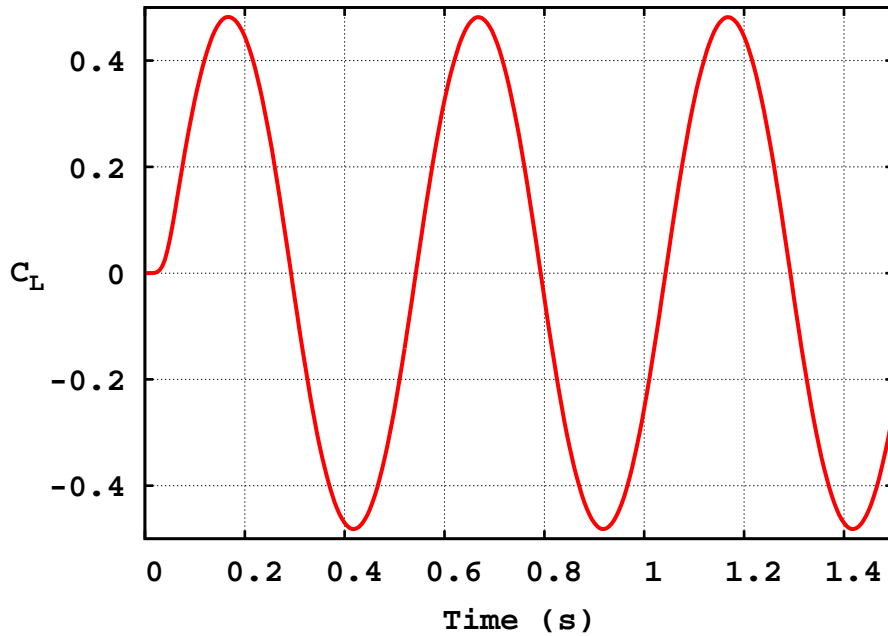


(v) Επ' άπειρο γωνία σε φάση καθόδου ( $\alpha = 1^\circ$ ).

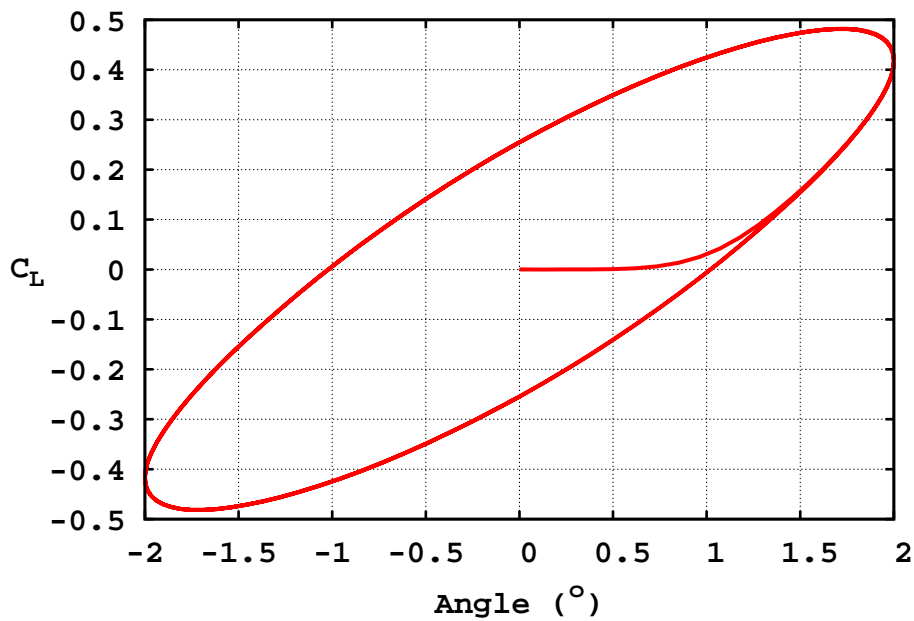


(vi) Μέση επ' άπειρο γωνία ( $\alpha = 0^\circ$ ) στη φάση που η επ' άπειρο γωνία μειώνεται.

**Σχήμα 4.11:** Υπολογισθέντα πεδία αριθμού Mach γύρω από την αεροτομή NACA 0012 υπό την επίδραση περιοδικά μεταβαλλόμενων οριακών συνθηκών ( $M_\infty = 0.8$ ,  $\alpha_m = 0^\circ$ ,  $\alpha_0 = 2^\circ$ ,  $T = 0.5s$ ).



Σχήμα 4.12: Συντελεστής άνωσης αεροτομής NACA 0012 ως συνάρτηση του χρόνου υπό την επίδραση περιοδικά μεταβαλλόμενων οριακών συνθηκών ( $M_\infty = 0.8$ ,  $\alpha_m = 0^\circ$ ,  $\alpha_0 = 2^\circ$ ,  $T = 0.5s$ ).



Σχήμα 4.13: Συντελεστής άνωσης αεροτομής NACA 0012 ως συνάρτηση της γωνίας της επί άπειρο ταχύτητας ( $M_\infty = 0.8$ ,  $\alpha_m = 0^\circ$ ,  $\alpha_0 = 2^\circ$ ,  $T = 0.5s$ ).

Τέλος, αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι η επίλυση μέσω CFD επαληθεύει με πολύ καλή προσέγγιση τη διόρθωση για τη συμπίεστικότητα των Prandtl-Glauert. Πράγματι, αν θεωρήσουμε ότι στην υποηχητική περίπτωση τα φαινόμενα συμπίεστικότητας είναι αμελητέα, τότε με την αναγωγή, μέσω της σχέσης των Prandtl-Glauert, του μέγιστου  $C_L$  στη διηχητική κατάσταση προκύπτει:

$$C_L^{0.8} = \frac{C_L^{0.59}}{\sqrt{1 - M^2}} = 0.4745 \quad (4.4)$$

Το σφάλμα αυτής της τιμής με την υπολογισθείσα μέσω του CFD είναι μικρότερο από 1.5%.

---

## Κεφάλαιο 5

# Πρόλεξη μη-μόνιμων ροών με κινούμενα στερεά όρια

### 5.1 Εισαγωγικά σχόλια

Στο παρόν κεφάλαιο γίνεται εφαρμογή της μεθόδου που αναπτύχθηκε στα κεφάλαια 2 και 4 για την επίλυση δύο 2D μη-μόνιμων προβλημάτων εξωτερικής αεροδυναμικής. Σε αντίθεση με τα αποτελέσματα του κεφαλαίου 3, εδώ η ύπαρξη μη-μόνιμου πεδίου είναι απόρροια της κίνησης των σωμάτων που παρεμβάλλονται στη ροή.

Αρχικά, μελετάται η ροή γύρω από δύο διαφορετικές αεροτομές σε εξαναγκασμένη περιοδική κίνηση, για τις οποίες υπάρχουν πειραματικά δεδομένα. Για τη μια από τις δύο αεροτομές επιχειρείται η σύγκριση των αποτελεσμάτων του Cut-Cell επιλύτη με τα αντίστοιχα αποτελέσματα που προέκυψαν μέσω του οικείου λογισμικού που ανέπτυξε η ομάδα της ΜΠΥΡ&Β/ΕΘΣ [18], το οποίο χρησιμοποιεί οριόδετα πλέγματα για την επίλυση των εξισώσεων ροής. Η εγκυρότητα των αποτελεσμάτων που προέρχονται από το συγκεκριμένο λογισμικό έχει πιστοποιηθεί πολλές φορές στο παρελθόν μέσω της σύγκρισής τους τόσο με λογισμικά γενικής χρήσης (OpenFoam) όσο και με πειραματικά δεδομένα οπότε η ορθότητά του θεωρείται αδιαμφισβήτητη. Επιπρόσθετα, για την ίδια αεροτομή παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που παράχθηκαν μέσω ενός τρίτου λογισμικού που διαθέτει η ΜΠΥΡ&Β/ΕΘΣ και στηρίζεται στην υλοποίηση της μεθόδου Ghost-Cell των μη-οριόδετων πλεγμάτων.

Τέλος, μελετάται ένα πρόβλημα ροής γύρω από δύο σώματα. Πιο συγκεκριμένα, επιλύεται η μη-μόνιμη ροή γύρω από την υπεραντωτική διάταξη (flap). Η ύπαρξη μη-μόνιμου

πεδίου σε αυτήν την περίπτωση είναι αποτέλεσμα της κίνησης που πραγματοποιεί το flap προς την κύρια αεροτομή κατά το τελευταίο στάδιο της απογείωσης ενός αεροσκάφους.

## 5.2 Επίλυση ροής γύρω από ένα σώμα

Η πρώτη αεροτομή που επιλέχθηκε είναι η NACA 0012, η οποία για τις ανάγκες αυτής της περίπτωσης «κόπηκε» στο 98% της χορδής της. Ο λόγος είναι η αδυναμία του αναπτυχθέντος επιλύτη να υπολογίσει τις γεωμετρικές ποσότητες σε κυψέλες που εμπεριέχουν οξείες ακμές όταν η γεωμετρία αλλάζει θέση.

Η αεροτομή εκτελεί εξαναγκασμένη περιστροφική κίνηση (πρόνευση), γύρω από σημείο που βρίσκεται στο 25% του μήκους της χορδής της. Η σχετική γωνία της επί άπειρο ροής ως προς τη στιγμιαία θέση της αεροτομής δίνεται από τον τύπο:

$$\alpha(t) = \alpha_m + \alpha_0 \sin(\omega t) \quad (5.1)$$

όπου με  $\alpha_0 = 2.51^\circ$  συμβολίζεται το πλάτος της ταλάντωσης της αεροτομής ενώ με  $\alpha_m = 0.016^\circ$  η γωνία που σχηματίζει η ταχύτητα της επί άπειρο ροής με την οριζόντια κατεύθυνση. Η ανηγμένη συχνότητα  $k := \frac{\omega c}{2V_\infty}$  της ταλάντωσης είναι 0.0814 και ο αριθμός Mach της επί άπειρο ροής είναι 0.74. Στον ορισμό της ανηγμένης συχνότητας,  $\omega$  είναι η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της αεροτομής, η οποία σχετίζεται με τη συχνότητα της κίνησης με τη σχέση  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ . Στη συνέχεια της ενότητας, όταν αναφέρεται ο όρος «γωνία πρόσπτωσης» θα εννοείται η σχετική γωνία που σχηματίζει κάθε χρονική στιγμή η επί άπειρο ταχύτητα με τη στιγμιαία θέση της χορδής της αεροτομής.

Η ίδια περίπτωση έχει μελετηθεί και πειραματικά από τον Landon [32], με τα χαρακτηριστικά μεγέθη του πειράματος να συνοψίζονται στον πίνακα 5.1. Οι σχετικές μετρήσεις δείχνουν ότι, κατά την ταλάντωση της αεροτομής, η ροή παραμένει προσκολλημένη και εμφανίζεται κύμα κρούσης τόσο στην πλευρά υποπίεσης όσο και στην πλευρά υπερπίεσης, σε διαφορετικές φάσεις της ταλάντωσης.

Επίσης, η εν λόγω περίπτωση έχει επιλυθεί με τη χρήση οριόδετου πλέγματος και επιλύτη ατριβούς ροής στη διδακτορική διατριβή [18].

Ο λόγος που επιτρέπεται η σύγκριση μεταξύ δεδομένων πραγματικής ροής και αποτελεσμάτων που προέκυψαν μέσω επιλυτών ατριβούς ροής είναι ότι ο αριθμός Reynolds του πειράματος ήταν ιδιαίτερα υψηλός. Πράγματι, για τον αριθμό Reynolds ισχύει η ακόλουθη συμβολική εξίσωση:

$$Re = \frac{\text{Αδρανειακές Δυνάμεις}}{\text{Συνεκτικές Δυνάμεις}}$$

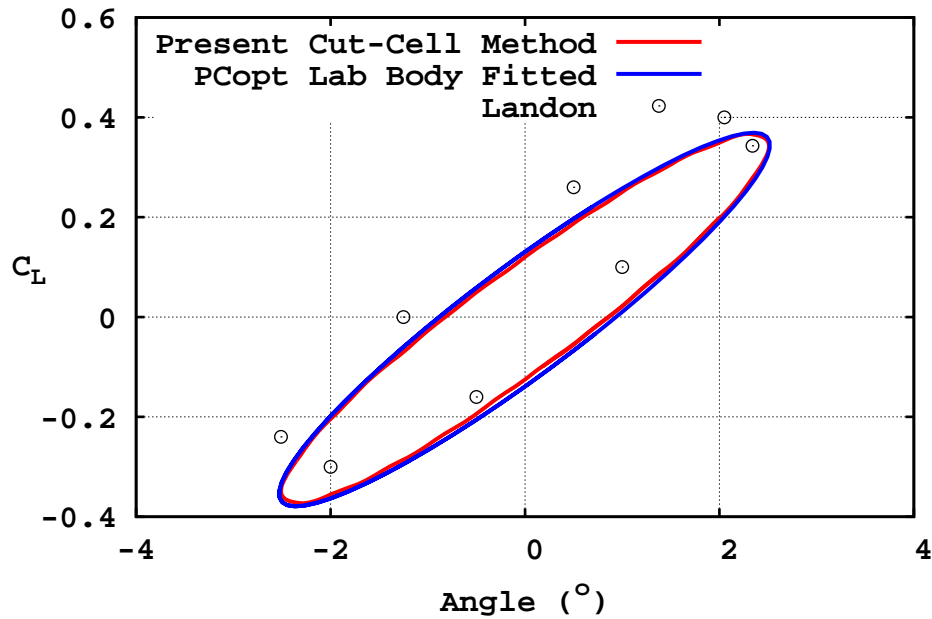
Στο όριο λοιπόν των μεγάλων Reynolds, οι συνεκτικές δυνάμεις μπορούν να αμεληθούν χωρίς να υπάρχει σημαντικό σφάλμα.

**Πίνακας 5.1:** Τα χαρακτηριστικά μεγέθη του πειράματος του Landon [32].

Μεγέθη	Τιμές
Γωνία επ' άπειρο ροής $\alpha_m$	0.016°
Πλάτος ταλάντωσης $\alpha_0$	2.51°
Ανηγγμένη συχνότητα k	0.0814
Άξονας περιστροφής	0.25c
Αριθμός Reynolds επ' άπειρο ροής $Re_\infty$	$5.5 \times 10^6$
Αριθμός Mach επ' άπειρο ροής $M_\infty$	0.755c

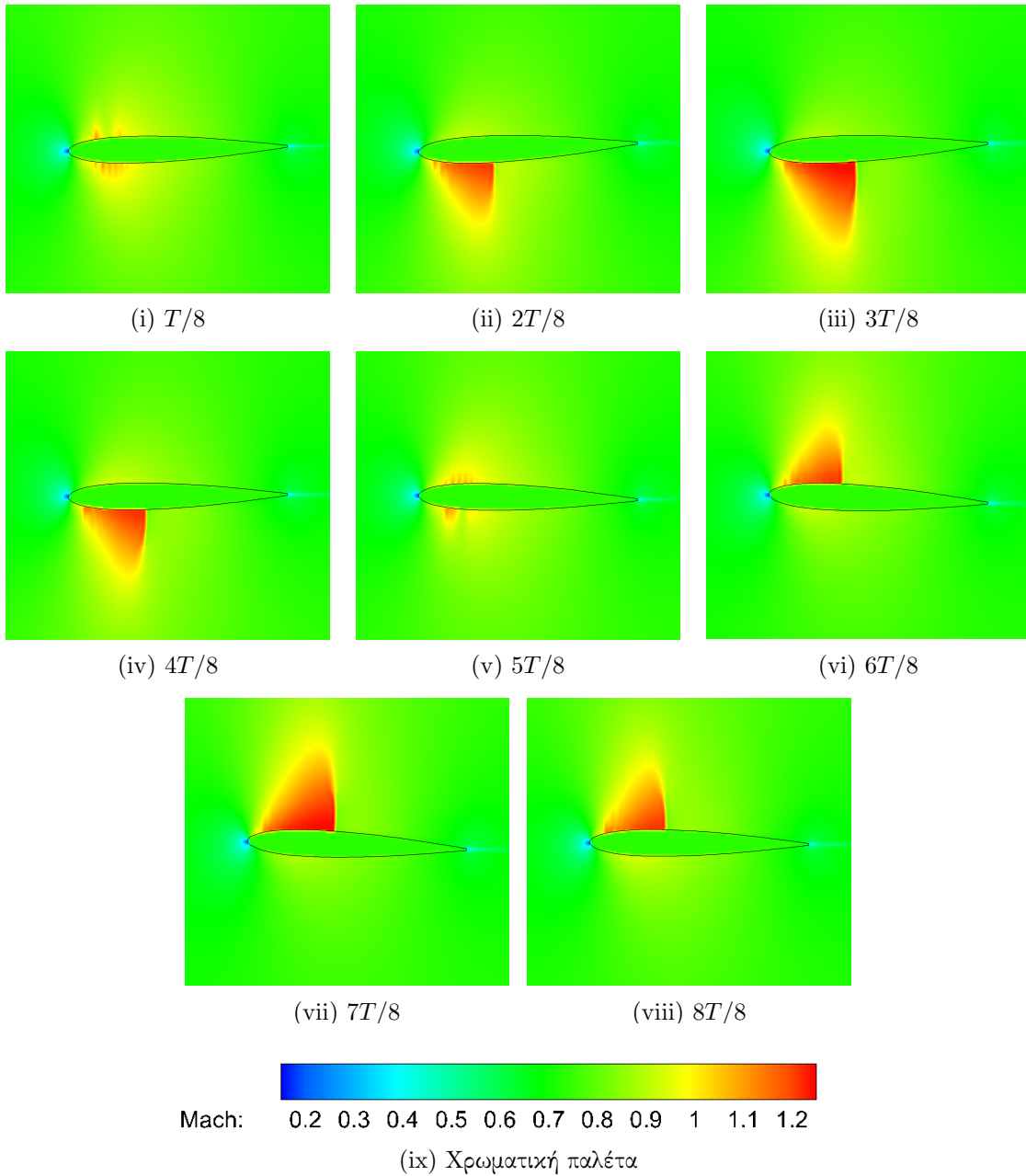
Στο σχήμα 5.1 απεικονίζεται ο συντελεστής άνωσης συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης ενώ έχουν αποκοπεί τα μεταβατικά φαινόμενα. Ως υπολογιστικό χωρίο χρησιμοποιήθηκε ένα ορθογώνιο με διαστάσεις  $15 \times 14$  μήκη χορδής ενώ το εμβαδό της ελάχιστης κυψέλης στην εσωτερική πύκνωση ήταν  $10^{-4}$  (μήκη χορδής)<sup>2</sup>. Η σύγκριση των αποτελεσμάτων του Cut-Cell επιλύτη με τον οριόδετο κώδικα κρίνεται ιδιαίτερα ικανοποιητική. Αντίθετα, τα πειραματικά αποτελέσματα παρουσιάζουν μια σημαντική απόκλιση από τους δύο επιλύτες ατρισούς ροής. Όμως, μια πιο ενδελεχής διερεύνηση των πειραματικών δεδομένων δείχνει ότι, αν και η αεροτομή είναι συμμετρική, η μέση τιμή του συντελεστή άνωσης είναι διάφορη του μηδενός. Το γεγονός αυτό πιθανώς οφείλεται στην επίδραση των τοιχωμάτων της αεροδυναμικής σήραγγας όπου έγιναν οι συγκεκριμένες μετρήσεις και δικαιολογεί εν μέρει την απόκλιση των υπολογιστικών από τα πειραματικά αποτελέσματα.

Τα σχήματα 5.2 δείχνουν τα υπολογισθέντα πεδία του αριθμού Mach γύρω από την αεροτομή για μια περίοδο της κίνησής της. Η περίοδος ξεκινά όταν η αεροτομή βρίσκεται σε γωνία  $(0.016^\circ - 2.51^\circ/2)$  με μειούμενη γωνία πρόσπτωσης ( σχήμα (5.2i) ) και συνεχίζοντας ανά  $T/8$ , καταλήγει σε γωνία  $(0.016^\circ)$  με αυξανόμενη γωνία πρόσπτωσης ( σχήμα (5.2viii) ).



**Σχήμα 5.1:** Μεταβολή του συντελεστή άνωσης ως συνάρτηση της γωνίας πρόσπτωσης μετά το πέρας των μεταβατικών φαινομένων, όπως προέκυψε από την αριθμητική επίλυση των εξισώσεων Euler στο Cut-Cell πλέγμα, σε ένα οριόδετο πλέγμα της ΜΠΥΡ&Β/ΕΘΣ [18] και από πειραματικές μετρήσεις [32]. Περιοδική κίνηση πρόνευσης αεροτομής NACA 0012 ως προς το 25% της χορδής με  $\alpha_m = 0.016^\circ$ ,  $\alpha_0 = 2.51^\circ$ ,  $k = 0.0814$  και  $M_\infty = 0.74$ .



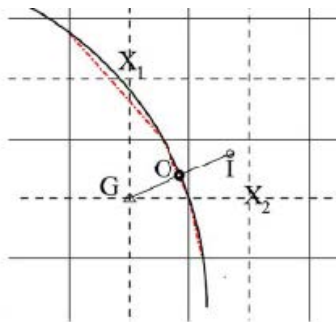


**Σχήμα 5.2:** Ημιτονοειδής κίνηση πρόνευσης αεροτομής NACA 0012 ως προς το 25% της χορδής με  $\alpha_m = 0.016^\circ$ ,  $\alpha_0 = 2.51^\circ$ ,  $k = 0.0814$  και  $M_\infty = 0.74$ : υπολογισθέντα πεδία του αριθμού Mach γύρω από την αεροτομή σε διαδοχικές χρονικές στιγμές ανά  $T/8$ , όπου  $T$  η περίοδος της κίνησης. Η χρωματική παλέτα (ix) είναι κοινή για όλα τα πεδία.

### Επίλυση με την υλοποίηση Ghost-Cell

Η ίδια περίπτωση ροής επιλύθηκε και με το λογισμικό IB που διαθέτει η ΜΠΥΡ&B/ΕΘΣ και στηρίζεται στην υλοποίηση Ghost-Cell. Οι διαφορές που εμφανίζει αυτό το λογισμικό σε σχέση με τον Cut-Cell επιλυτή αφορούν τόσο τη διαδικασία της πλεγματοποίησης όσο και την ίδια την επίλυση. Αναφορικά με το πρώτο σκέλος, ο υπάρχων Ghost-Cell πλεγματοποιητής δημιουργεί ομοιόμορφο πλέγμα σε ολόκληρο το υπολογιστικό χωρίο με συνέπεια, όταν απαιτείται πύκνωση κοντά στο στερεό σώμα να δημιουργούνται πλέγματα με υπερβολικά μεγάλο αριθμό κυψελών. Σχετικά με το δεύτερο σκέλος, οι διαφορές είναι πιο θεμελιώδεις και εντοπίζονται στο διαφορετικό τρόπο επιβολής οριακών συνθηκών.

Σύμφωνα με αυτή, οι εξισώσεις της ροής επιλύονται σε όλο το υπολογιστικό χωρίο, χωρίς να λαμβάνεται υπόψη η ύπαρξη του στερεού ορίου. Με το πέρας, όμως, ενός ψευδοχρονικού βήματος εντοπίζονται οι κυψέλες ghost (κυψέλες εντός του στερεού που γειτονεύουν με κυψέλες ρευστού) και τα συμμετρικά σημεία των βαρύκεντρών τους ως προς το στερεό όριο (σημείο G και I αντίστοιχα στο σχήμα 5.3). Στη συνέχεια, πραγματοποιείται μια σταθμισμένη παρεκβολή των μεταβλητών ροής των γειτονικών κυψελών του I σε αυτό (καθώς εν γένει το σημείο I δεν αποτελεί βαρύκεντρο κάποιας κυψέλης οπότε δεν έχουν επιλυθεί σε αυτό οι εξισώσεις της ροής). Από τις προκύπτουσες τιμές η ταχύτητα αναλύεται σε μια κάθετη και μια εφαπτόμενη συνιστώσα ως προς το στερεό τοίχωμα και επιβάλλεται στο G η μεν κάθετη με αντίθετο πρόσημο, η δε εφαπτόμενη αυτούσια. Με αυτό τον τρόπο ικανοποιείται η συνθήκη μη-εισχώρησης και ο αλγόριθμος επίλυσης συνεχίζει με τον υπολογισμό των διανυσμάτων ατρίβους ροής κατά τα γνωστά.

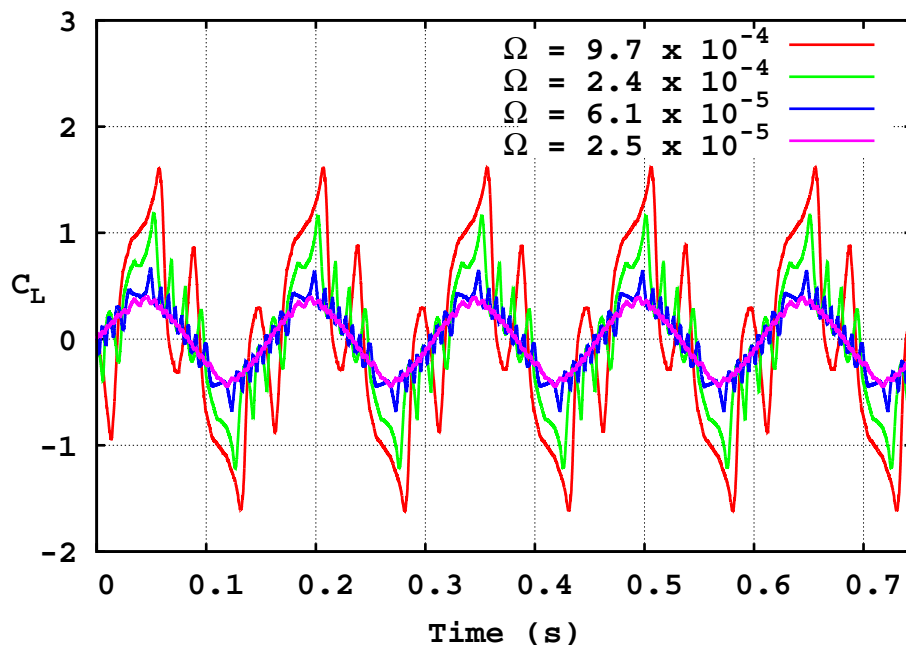


**Σχήμα 5.3:** Υλοποίηση της μεθόδου Ghost-Cell, όπου με G συμβολίζεται το βαρύκεντρο της Ghost κυψέλης και με I το συμμετρικό αυτού ως προς το στερεό τοίχωμα, το οποίο χρησιμοποιείται για να επιβληθούν στο G οι οριακές συνθήκες.

**Πίνακας 5.2:** Τα χαρακτηριστικά μεγέθη του πλέγματος κατά την προσομοίωση του πειράματος του Landon [32], με τον Ghost-Cell επιλύτη.

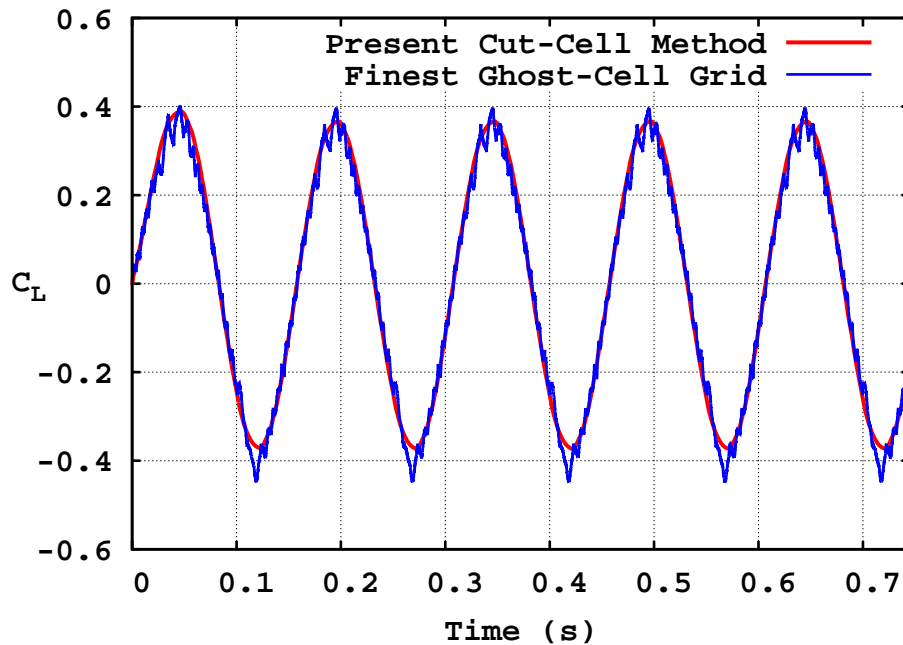
Διαστάσεις υπολογιστικού χωρίου (σε μήκη χορδής)	Αριθμός κυψελών υπολογιστικού χωρίου	Εμβαδό κυψελών $\Omega$
15 × 14	480 × 448	$9.7 \times 10^{-4}$
15 × 14	960 × 896	$2.4 \times 10^{-4}$
15 × 14	1920 × 1792	$6.1 \times 10^{-5}$
10 × 10	2000 × 2000	$2.5 \times 10^{-5}$

Για την προσομοίωση του πειράματος του Landon έγιναν τέσσερα διαφορετικά «τρεξίματα» σε πλέγματα των οποίων τα χαρακτηριστικά μεγέθη συνοψίζονται στον πίνακα 5.2. Στο σχήμα 5.4 απεικονίζεται ο συντελεστής άνωσης συναρτήσει του χρόνου, όπως προέκυψε από την επίλυση σε κάθε ένα από τα τέσσερα πλέγματα του Ghost-Cell επιλύτη. Είναι φανερό ότι οι λύσεις που αφορούν τα πιο αραιά πλέγματα, παρουσιάζουν μεγαλύτερο σφάλμα ενώ η κατάσταση βελτιώνεται καθώς προχωράμε στα πιο πυκνά, όπου διακρίνεται ένα μέσο πεδίο με ημιτονοειδή μορφή και ο θόρυβος γύρω από αυτό.



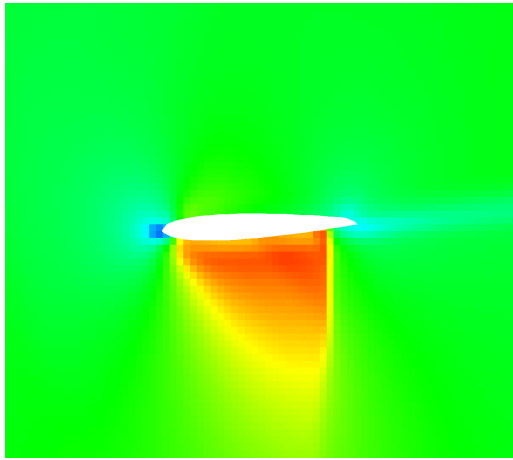
**Σχήμα 5.4:** Μεταβολή του συντελεστή άνωσης ως συνάρτηση του χρόνου, όπως προέκυψε από την αριθμητική επίλυση των εξισώσεων Euler σε μη-οριόδετο πλέγμα με την υλοποίηση Ghost-Cell για τέσσερις διαφορετικές πυκνότητες πλέγματος. Περιοδική κίνηση πρόνευσης αεροτομής NACA 0012 ως προς το 25% της χορδής με  $\alpha_m = 0.016^\circ$ ,  $\alpha_0 = 2.51^\circ$ ,  $k = 0.0814$  και  $M_\infty = 0.74$ .

Στο σχήμα 5.5 φαίνεται ο συντελεστής άνωσης ως συνάρτηση του χρόνου, όπως προέκυψε από το λογισμικό Cut-Cell και το πιο πυκνό πλέγμα του λογισμικού Ghost-Cell. Αν και το ελάχιστο εμβαδό των κυψελών κοντά στο στερεό για την Cut-Cell τεχνική είναι σχεδόν μια τάξη μεγέθους μεγαλύτερο από το εμβαδό των Ghost-Cell κυψελών ( $10^{-4}$  έναντι  $2.5 \times 10^{-5}$  αντίστοιχα), η λύση στην πρώτη περίπτωση είναι πλήρως απαλλαγμένη από ταλαντώσεις.

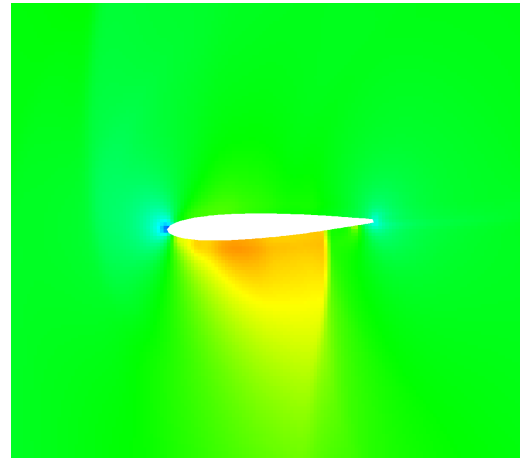


**Σχήμα 5.5:** Μεταβολή του συντελεστή άνωσης ως συνάρτηση του χρόνου, όπως προέκυψε από την αριθμητική επίλυση των εξισώσεων Euler στο Cut-Cell πλέγμα και στο πυκνότερο Ghost-Cell. Περιοδική κίνηση πρόνευσης αεροτομής NACA 0012 ως προς το 25% της χορδής με  $\alpha_m = 0.016^\circ$ ,  $\alpha_0 = 2.51^\circ$ ,  $k = 0.0814$  και  $M_\infty = 0.74$ .

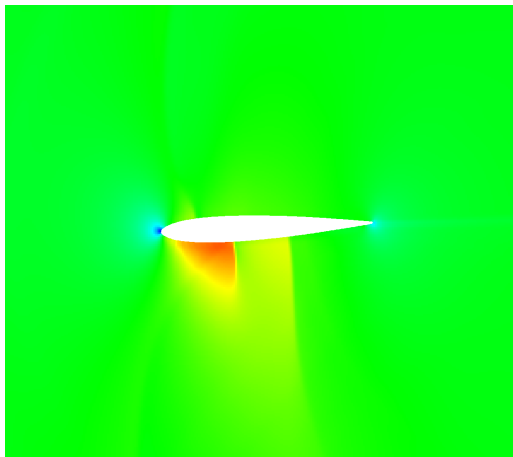
Στο σχήμα 5.6 παρουσιάζεται το πεδίο του αριθμού Mach γύρω από την αεροτομή, όπως προέκυψε από την επίλυση με το Ghost-Cell λογισμικό για τις τέσσερις διαφορετικές πυκνότητες πλέγματος, τη χρονική στιγμή που η αεροτομή βρίσκεται στην άνω ακραία θέση της ταλάντωσής της. Επισημαίνεται ότι για όλες τις περιπτώσεις απεικονίζονται τα πεδία μετά την αποκατάσταση της περιοδικότητας. Άμεσα εμφανές είναι το γεγονός ότι στα δύο πρώτα πεδία ο Ghost-Cell επιλύτης έχει υπολογίσει τη θέση του κύματος κρούσης με μεγάλο σφάλμα (σε σχέση με το Cut-Cell λογισμικό, σχήμα 5.2) ενώ και στο τρίτο πεδίο, παρά το ότι βρίσκει σωστά τη θέση του ισχυρού κύματος κρούσης, εντούτοις σχηματίζει ένα δεύτερο, πιο ασθενές, κοντά στην ακμή εκφυγής. Μόνο το τέταρτο πεδίο εμφανίζεται παρόμοιο με το αντίστοιχο του Cut-Cell επιλύτη, δικαιολογώντας πλήρως τα αποτελέσματα των σχημάτων 5.4 και 5.5 για τον συντελεστή άνωσης.



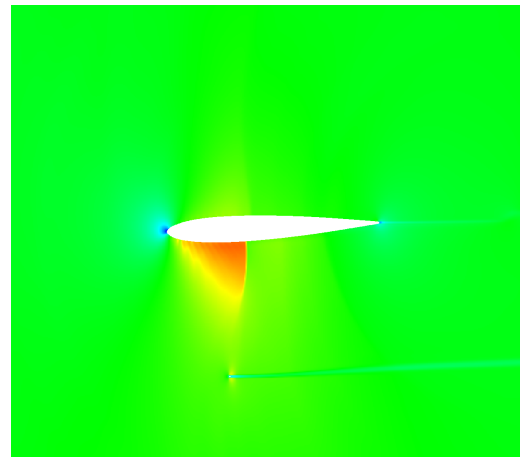
(i) Πλέγμα με εμβαδό κυψελών  $\Omega = 9.7 \times 10^{-4}$  (μήκη χορδής)<sup>2</sup>.



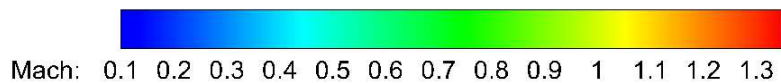
(ii) Πλέγμα με εμβαδό κυψελών  $\Omega = 2.4 \times 10^{-4}$  (μήκη χορδής)<sup>2</sup>.



(iii) Πλέγμα με εμβαδό κυψελών  $\Omega = 6.1 \times 10^{-5}$  (μήκη χορδής)<sup>2</sup>.



(iv) Πλέγμα με εμβαδό κυψελών  $\Omega = 2.5 \times 10^{-5}$  (μήκη χορδής)<sup>2</sup>.



(v) Χρωματική παλέτα

**Σχήμα 5.6:** Ημιτονοειδής κίνηση πρόνευσης αεροτομής NACA 0012 ως προς το 25% της χορδής με  $\alpha_m = 0.016^\circ$ ,  $\alpha_0 = 2.51^\circ$ ,  $k = 0.0814$  και  $M_\infty = 0.74$ : υπολογισθέντα πεδία του αριθμού Mach με την Ghost-Cell τεχνική τη χρονική στιγμή που η αεροτομή βρίσκεται στην άνω ακραία θέση της περιοδικής της κίνησης, για τέσσερις διαφορετικές πυκνότητες πλέγματος. Η χρωματική παλέτα (v) είναι κοινή για όλα τα πεδία.

### Μη-μόνιμο πεδίο ροής γύρω από αεροτομή NACA 64A010

Προκειμένου να γίνει και μια δεύτερη σύγκριση με πειραματικά δεδομένα χρησιμοποιήθηκε η συμμετρική αεροτομή NACA 64A010 [33], η μορφή της οποίας απεικονίζεται στο σχήμα 5.7. Για τον ίδιο λόγο με την προηγούμενη περίπτωση, η αεροτομή «κόπηκε» στο 98% του μήκους της χορδής της.



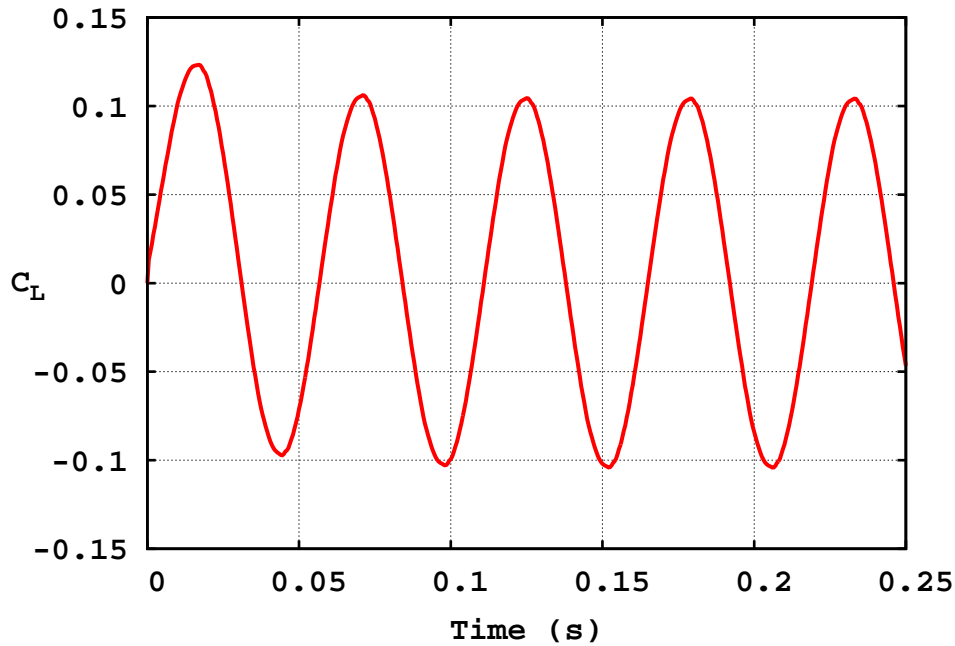
**Σχήμα 5.7:** Η μορφή της αεροτομής NACA 64A010 με κομμένο το 2% του μήκους της χορδής της στην ακμή εκφυγής.

Η αεροτομή εκτελεί ημιτονοειδή κίνηση πρόνευσης ως προς το 24.8% της χορδής της με πλάτος  $1.01^\circ$  και την ταχύτητα της επί άπειρο ροής να είναι οριζόντια. Ο αριθμός Mach της επί άπειρο ροής είναι 0.78 ενώ η ανηγμένη συχνότητα της ταλάντωσης είναι 0.202.

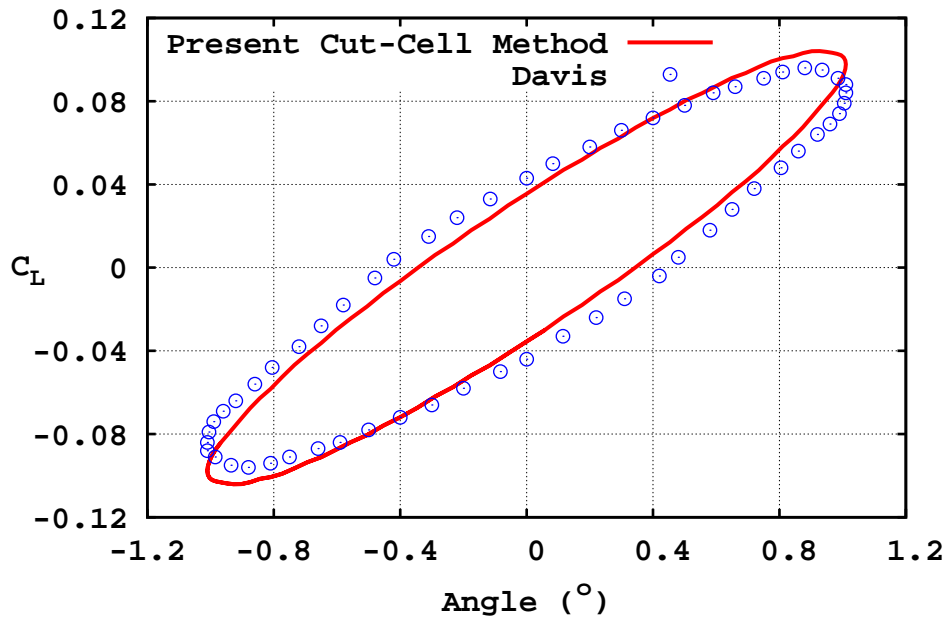
Η συγκεκριμένη περίπτωση έχει μελετηθεί πειραματικά από τον Davis [34] και συνοψίζεται στον πίνακα 5.3. Όπως και με τη NACA 0012, έτσι και εδώ η ροή αναμένεται να παραμένει προσκολλημένη και να εμφανίζει κύμα χρούσης τόσο στην πλευρά υποπίεσης όσο και στην πλευρά υπερπίεσης.

**Πίνακας 5.3:** Τα χαρακτηριστικά μεγέθη του πειράματος του Davis [34].

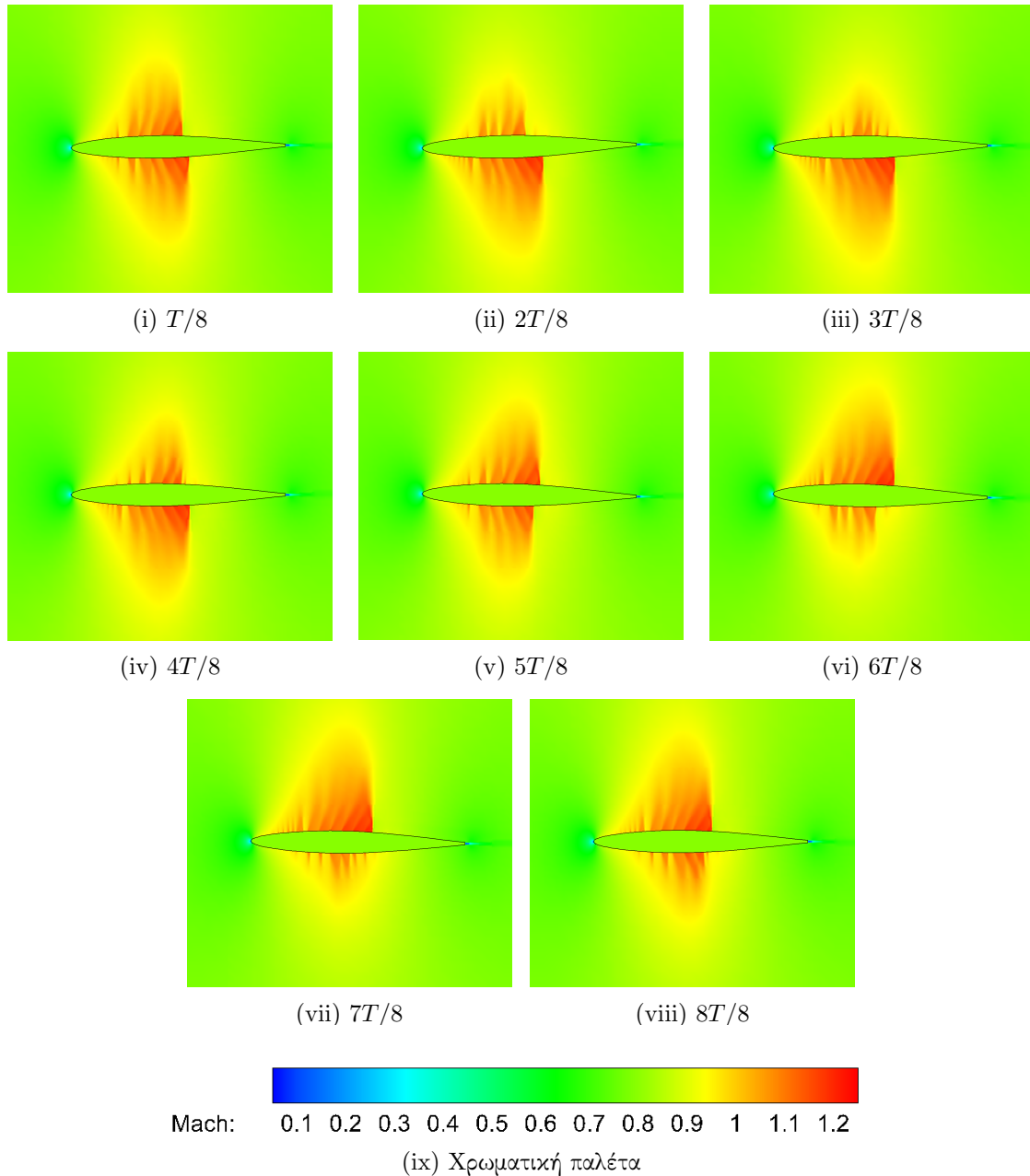
Μεγέθη	Τιμές
Γωνία επί άπειρο ροής $\alpha_m$	$0^\circ$
Πλάτος ταλάντωσης $\alpha_0$	$1.01^\circ$
Ανηγμένη συχνότητα k	0.202
Άξονας περιστροφής	$0.248c$
Αριθμός Reynolds επί άπειρο ροής $Re_\infty$	$12.56 \times 10^6$
Αριθμός Mach επί άπειρο ροής $M_\infty$	0.796c



**Σχήμα 5.8:** Μεταβολή του συντελεστή άνωσης ως συνάρτηση του χρόνου, όπως προέκυψε από την αριθμητική επίλυση των εξισώσεων Euler. Περιοδική κίνηση πρόνευσης αεροτομής NACA 64A010 ως προς το 24.8% της χορδής με  $\alpha_m = 0^\circ$ ,  $\alpha_0 = 1.01^\circ$ ,  $k = 0.202$  και  $M_\infty = 0.78$ .



**Σχήμα 5.9:** Μεταβολή του συντελεστή άνωσης ως συνάρτηση της γωνίας πρόσπτωσης μετά το πέρας των μεταβατικών φαινομένων, όπως προέκυψε από την αριθμητική επίλυση των εξισώσεων Euler και πειραματικές μετρήσεις [34]. Περιοδική κίνηση πρόνευσης αεροτομής NACA 64A010 ως προς το 24.8% της χορδής με  $\alpha_m = 0^\circ$ ,  $\alpha_0 = 1.01^\circ$ ,  $k = 0.202$  και  $M_\infty = 0.78$ .



**Σχήμα 5.10:** Ημιτονοειδής κίνηση πρόνευσης αεροτομής NACA 64A010 ως προς το 24.8% της χορδής με  $\alpha_m = 0^\circ$ ,  $\alpha_0 = 1.01^\circ$ ,  $k = 0.202$  και  $M_\infty = 0.78$ : υπολογισθέντα πεδία του αριθμού Mach γύρω από την αεροτομή σε διαδοχικές χρονικές στιγμές ανά  $T/8$ , όπου  $T$  η περίοδος της κίνησης. Η χρωματική παλέτα (ix) είναι κοινή για όλα τα πεδία.

Στα σχήματα 5.8 και 5.9 φαίνεται ο συντελεστής άνωσης συναρτήσει του χρόνου και της γωνίας πρόσπτωσης αντίστοιχα. Ως υπολογιστικό χωρίο χρησιμοποιήθηκε ένα ορθογώνιο με διαστάσεις  $15 \times 14$  μήκη χορδής ενώ το εμβαδό της ελάχιστης κυψέλης στην εσωτερική πύκνωση ήταν  $5 \times 10^{-5}$  (μήκη χορδής)<sup>2</sup>. Στο δεύτερο σχήμα απεικονί-



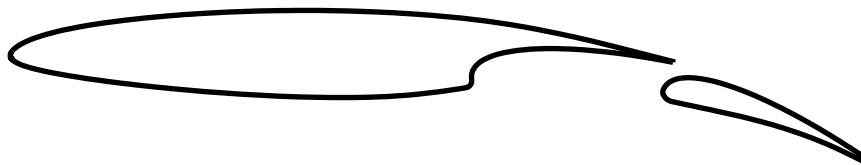
νίζεται η κατάσταση στην οποία έχει περιέλθει η ροή μετά το πέρας των μεταβατικών φαινομένων. Η συμφωνία με τα πειραματικά δεδομένα βρίσκεται σε αρκετά ικανοποιητικό επίπεδο. Αυτό το γεγονός οφείλεται εν μέρει και στον κατά μια τάξη μεγέθους μεγαλύτερο, σε σχέση με το πείραμα του Landon, αριθμό Reynolds, ο οποίος καθιστά την υπόθεση ατριβούς ροής πιο εύλογη.

Τα σχήματα 5.10 δείχνουν τα υπολογισθέντα πεδία του αριθμού Mach γύρω από την αεροτομή για μια περίοδο της κίνησής της ανά  $T/8$ . Αυτό το οποίο παρατηρείται εδώ είναι ότι το σχηματιζόμενο κύμα κρούσης στην πλευρά υπερπίεσης είναι πιο ισχυρό σε σύγκριση με το αντίστοιχο του πειράματος του Landon. Επιπλέον, ο υπερηχητικός θύλακας παρουσιάζει διακριτούς χροσσούς λόγω του τρόπου που διακριτοποιείται η γεωμετρία στο στερεό όριο (μικρός αριθμός σημείων που ενώνονται με ευθύγραμμα τμήματα). Αυτό το φαινόμενο γίνεται πιο εμφανές σε ροές με ισχυρά κύματα κρούσης, όπως στην περίπτωση που εξετάστηκε.

### 5.3 Επίλυση ροής γύρω από δύο σώματα

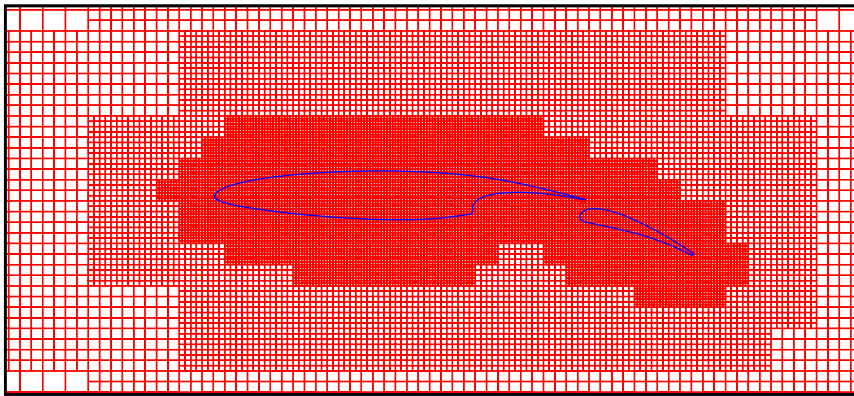
Στην παρούσα ενότητα μελετάται η μη-μόνιμη ροή γύρω από μια αεροτομή με τα flap σε έκταση. Ο λόγος ύπαρξης των flap σε μια πτέρυγα σχετίζεται με την ανάγκη αύξησης είτε του συντελεστή άνωσης είτε του συντελεστή αντίστασης ανάλογα με τη φάση της κίνησης του αεροσκάφους. Έτσι, κατά τη φάση της προσέγγισης, τα flap βρίσκονται σε πλήρη έκταση προκειμένου να αυξηθεί ο συντελεστής αντίστασης και να επιβραδυνθεί πιο ομαλά το αεροσκάφος. Αντίθετα, κατά τη φάση της απογείωσης, η έκταση των flap χρησιμοποιείται για να αυξηθεί η καμπυλότητα της αεροτομής, οδηγώντας σε παράλληλη αύξηση του συντελεστή άνωσης αντισταθμίζοντας κατ' αυτόν τον τρόπο τη χαμηλή ταχύτητα πτήσης [35].

Η αεροτομή που χρησιμοποιήθηκε φαίνεται στο σχήμα 5.11. Στο σχήμα αυτό, το flap βρίσκεται σε πλήρη έκταση.

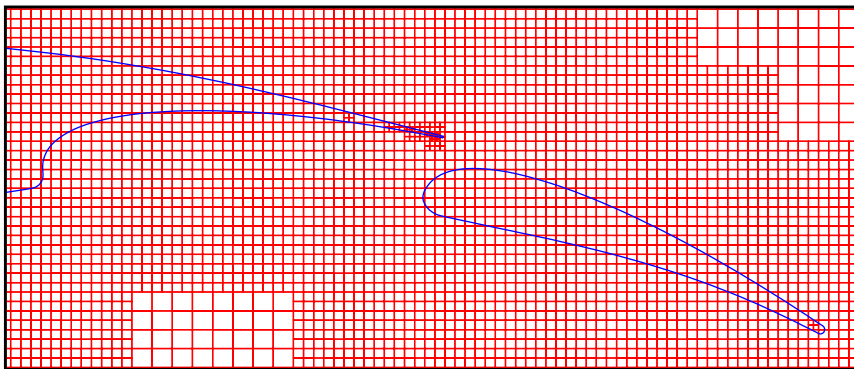


Σχήμα 5.11: Η μορφή της αεροτομής με το flap.

Για την επίλυση της ροής δημιουργήθηκε καρτεσιανό πλέγμα με ομοιόμορφη πύκνωση κοντά στις δύο γεωμετρίες όπως φαίνεται στα σχήματα 5.12 και 5.13. Το υπολογιστικό χωρίο που χρησιμοποιήθηκε είχε διαστάσεις  $20 \times 19$  μήκη χορδής ενώ το εμβαδό της ελάχιστης κυψέλης στην εσωτερική πύκνωση είναι  $10^{-5}$  (μήκη χορδής)<sup>2</sup>.



**Σχήμα 5.12:** Το καρτεσιανό πλέγμα με την προσαρμοσμένη πύκνωση γύρω από το σύστημα αεροτομή - flap. Το εμβαδό της ελάχιστης κυψέλης στην εσωτερική πύκνωση είναι  $\Omega_{min} = 10^{-5}$ .



**Σχήμα 5.13:** Εστίαση στην ακμή εκφυγής της αεροτομής και το flap.

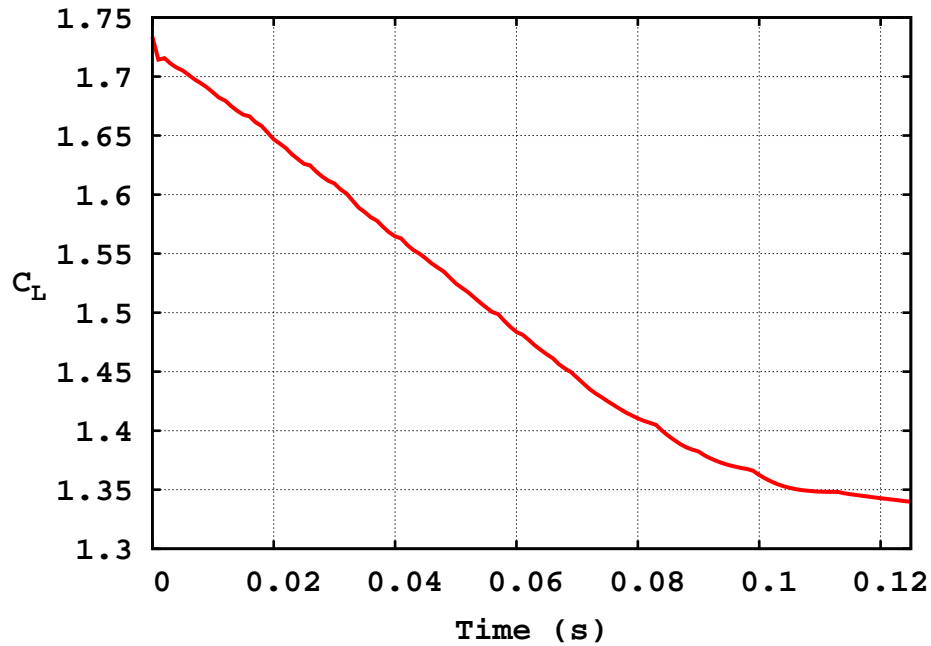
Για τις ανάγκες αυτής της μελέτης υποτέθηκε ότι η αεροτομή βρίσκεται στη φάση της απογείωσης με το flap σε πλήρη έκταση. Κατά το τελευταίο στάδιο της απογείωσης, το flap εκτελεί αρχικά μια περιστροφική κίνηση ευθυγράμμισης με την αεροτομή και, στη συνέχεια, μια μεταφορική κίνηση προσέγγισης σε αυτή. Από τις δύο αυτές κινήσεις, η μελέτη περιορίστηκε στο πρώτο σκέλος καθώς κατά τη δεύτερη φάση οι δύο γεωμετρίες βρίσκονται πολύ κοντά μεταξύ τους και στην πραγματικότητα δημιουργούνται περιοχές ανακυκλοφορίας, τις οποίες ο επιλύτης ατριβούς ροής δεν μπορεί να χειριστεί.

Έτσι, το flap εκτελεί εξαναγκασμένη περιστροφική κίνηση μορφής ημιτόνου με πλάτος  $8^\circ$  ενώ η ταχύτητα της επί άπειρο ροής ευθυγραμμίζεται με την οριζόντια κατεύθυνση. Η περίοδος της ταλάντωσης είναι 0.5 και ο αριθμός Mach της επί άπειρο ροής είναι 0.19. Τέλος, η επί άπειρο πίεση είναι 1 bar και η επί άπειρο πυκνότητα  $1.2 \text{ kg m}^{-3}$ . Τα δεδομένα αυτά συνοψίζονται στον πίνακα 5.4.

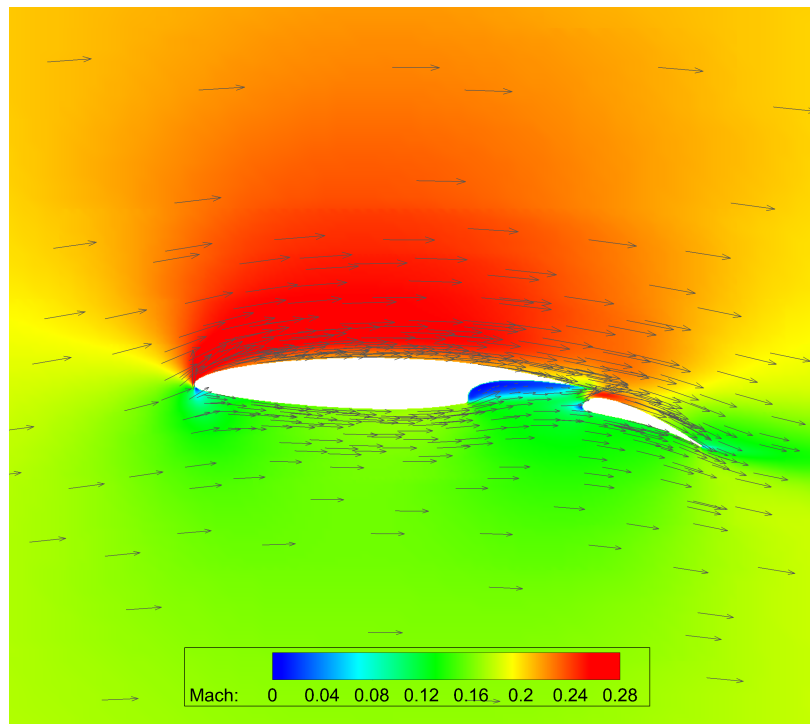
**Πίνακας 5.4:** Τα χαρακτηριστικά της μη-μόνιμης ροής γύρω από αεροτομή με flap.

Μεγέθη	Τιμές
Γωνία επί άπειρο ροής $\alpha_m$	$0^\circ$
Πλάτος ταλάντωσης flap $\alpha_0$	$8^\circ$
Περίοδος ταλάντωσης flap	0.5
Περίοδοι επίλυσης της ροής	1/4
Επί άπειρο πίεση $p_\infty$	1 bar
Επί άπειρο πυκνότητα $\rho_\infty$	$1.2 \text{ kg m}^{-3}$
Αριθμός Mach επί άπειρο ροής $M_\infty$	0.19

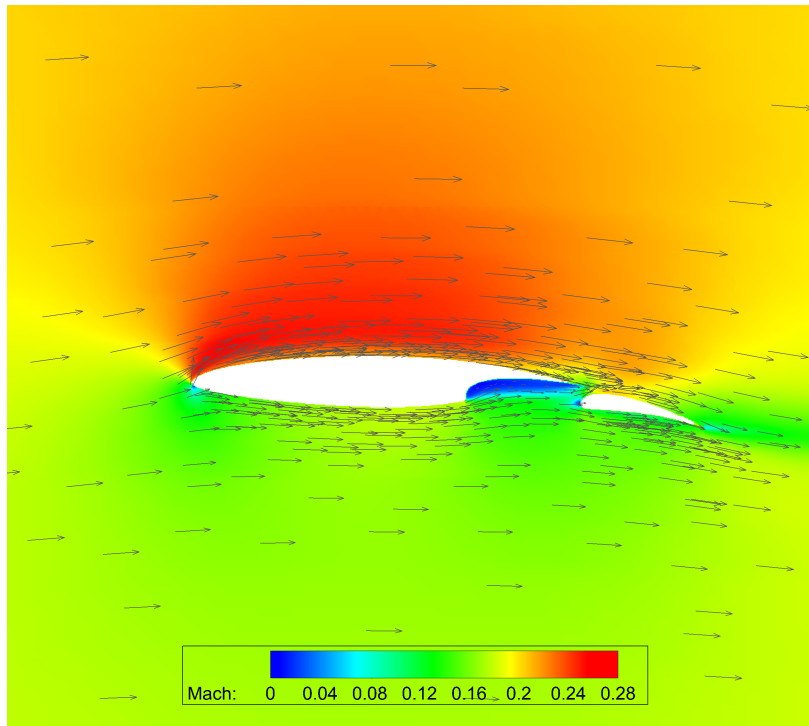
Στο σχήμα 5.14 απεικονίζεται ο συντελεστής άνωσης του συστήματος αεροτομή-flap συναρτήσει του χρόνου κατά την περιστροφική κίνηση επαναφοράς του flap στο εσωτερικό της αεροτομής. Παρατηρούμε τις εν γένει πολύ υψηλές τιμές του  $C_L$  καθώς επίσης και το ότι ακολουθεί φθίνουσα πορεία καθώς η φάση της απογείωσης φτάνει στο τέλος της, παρέχοντας τον έλεγχο του αεροσκάφους στους κινητήρες. Τέλος, στα σχήματα 5.15 και 5.16 φαίνονται τα πεδία του αριθμού Mach γύρω από το σύστημα αεροτομή-flap στην κατάσταση πλήρους έκτασης του flap και κατά το τέλος της περιστροφικής του κίνησης αντίστοιχα. Τα στιγμιότυπα του συντελεστή πίεσης για τις ίδιες χρονικές στιγμές παρέχονται στα σχήματα 5.17 και 5.18.



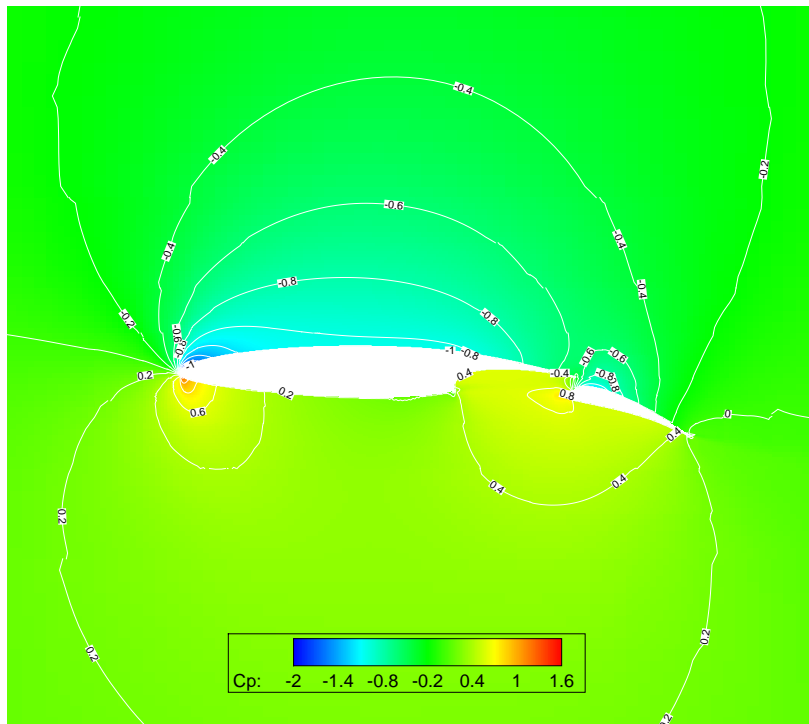
Σχήμα 5.14: Ο συντελεστής άνωσης του συστήματος αεροτομή-flap ως συνάρτηση του χρόνου κατά την περιστροφική κίνηση επαναφοράς του flap στο εσωτερικό της αεροτομής.



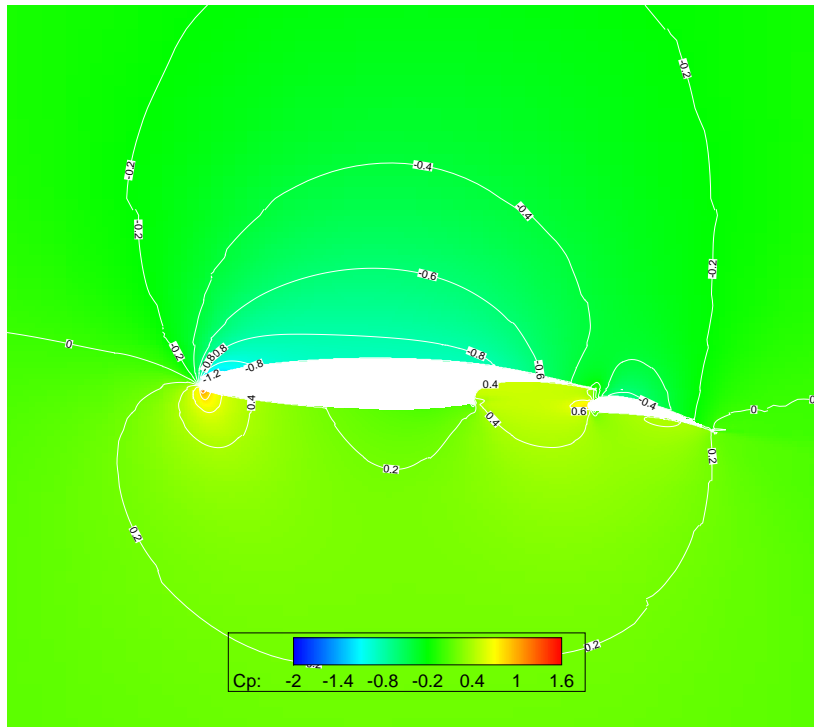
Σχήμα 5.15: Κατανομή του αριθμού Mach και των διανυσμάτων της ταχύτητας γύρω από την αεροτομή και το flap στη φάση που το flap είναι πλήρως ανοιχτό ( $\alpha = 8^\circ$ ).



**Σχήμα 5.16:** Κατανομή του αριθμού Mach και των διανυσμάτων της ταχύτητας γύρω από την αεροτομή και το flap στη φάση που το flap έχει ολοκληρώσει την περιστροφική κίνησή του ( $\alpha = 0^\circ$ ) και είναι έτοιμο να εισέλθει στην κοιλότητα της αεροτομής.



**Σχήμα 5.17:** Κατανομή του συντελεστή πίεσης γύρω από την αεροτομή και το flap στη φάση που το flap είναι πλήρως ανοιχτό ( $\alpha = 8^\circ$ ).



**Σχήμα 5.18:** Κατανομή του συντελεστή πίεσης γύρω από την αεροτομή και το flap στη φάση που το flap έχει ολοκληρώσει την περιστροφική κίνησή του ( $\alpha = 0^\circ$ ) και είναι έτοιμο να εισέλθει στην κοιλότητα της αεροτομής.

## Κεφάλαιο 6

# Ανακεφαλαίωση-Συμπεράσματα- Σχόλια

Στην παρούσα διπλωματική εργασία αναπτύχθηκε και παρουσιάστηκε ένα λογισμικό α-ριθμητικής επίλυσης μη-μόνιμων πεδίων ατρίβους ροής με κινούμενα στερεά όρια με τη μέθοδο των μη-οριόδετων πλεγμάτων. Ο χειρισμός των κυψελών στη γειτονιά του στερεού ορίου πραγματοποιήθηκε μέσω της τεχνικής των τεμνόμενων κυψελών (Cut-Cell). Έτσι, αφού παρουσιάστηκε ο τρόπος πλεγματοποίησης του υπολογιστικού χωρίου με τη μέθοδο Cut-Cell, διατυπώθηκαν οι ισχύουσες εξισώσεις σε διακριτοποιημένη μορφή και, στη συνέχεια, ο πλήρης αλγόριθμος επίλυσης. Έπειτα, αναλύθηκε ο τρόπος διακριτοποίησης των εξισώσεων σε ροές με κινούμενα στερεά όρια και παρουσιάστηκε μια μειονεκτική συμπεριφορά που εμφανίζουν οι μέθοδοι μη-οριόδετων πλεγμάτων σε τέτοιες περιπτώσεις (δημιουργία μη-φυσικών ταλαντώσεων στα μεγέθη ροής). Τέλος, προτάθηκε μια μέθοδος για τον χειρισμό αυτών των ροών και την επίλυση του προαναφερθέντος προβλήματος. Με βάση αυτά και σύμφωνα με τα αποτελέσματα των εφαρμογών που εξετάστηκαν, προκύπτουν τα ακόλουθα συμπεράσματα:

- Επιβεβαιώθηκε η εγκυρότητα του επιλύτη και της μεθόδου μη-οριόδετων πλεγμάτων με την τεχνική Cut-Cell σε χρονικά μόνιμες ροές, υποηχητικές και διηχητικές, μέσω της σύγκρισης με αποτελέσματα που προέκυψαν από διάφορους επιλύτες ατρίβους ροής σε οριόδετα πλέγματα.
- Υλοποιήθηκε η επέκταση του επιλύτη σε μη-μόνιμα πεδία ροής, τα οποία προκαλούνται από τη μεταβολή των οριακών συνθηκών.
- Επιβεβαιώθηκε η ικανότητα του επιλύτη να αντιμετωπίζει μη-μόνιμες ροές με κινούμενα στερεά όρια μέσω της σύγκρισης των αποτελεσμάτων που προέκυψαν

για δύο διαφορετικές αεροτομές σε εξαναγκασμένη περιοδική κίνηση τόσο με πειραματικά δεδομένα όσο και με το οικείο λογισμικό της ΜΠΥΡ&Β/ΕΘΣ που στηρίζεται σε οριόδετα πλέγματα. Επίσης, διαπιστώθηκε η υπεροχή της μεθόδου Cut-Cell έναντι της μεθόδου Ghost-Cell ως προς τις μη-φυσικές υπερακοντίσεις των μεγεθών της ροής σε τέτοιες περιπτώσεις.

- Παρουσιάστηκε, τέλος, η δυνατότητα του επιλύτη να χειρίζεται μη-μόνιμα πεδία ροής και σε περιπτώσεις περισσότερων σωμάτων μέσω της μελέτης της ροής γύρω από ένα δευτερεύον σύστημα ελέγχου της πτήσης (flap).

Ολοκληρώνοντας την παρούσα διπλωματική εργασία, κρίνεται απαραίτητο να αναφερθούν ορισμένες πιθανές κατευθύνσεις στις οποίες θα μπορούσε να επικεντρωθεί μια ενδεχόμενη μελλοντική μελέτη, στηριζόμενη στο λογισμικό που αναπτύχθηκε. Οι βασικοί πυλώνες αυτών των κατευθύνσεων εντοπίζονται αφενός στη διαδικασία της πλεγματοποίησης και αφετέρου στην επίλυση των εξισώσεων. Σχετικά με το πρώτο τμήμα, θα μπορούσε να εξεταστεί η δυνατότητα συγχώνευσης των μικρών κυψελών που δημιουργούνται από την κίνηση της γεωμετρίας και οι οποίες είναι αρκετά πιθανό να οδηγήσουν σε αδυναμία σύγκλισης της μεθόδου. Σε μεταγενέστερο στάδιο, η πλεγματοποίηση θα μπορούσε να επεκταθεί ώστε να περιλαμβάνει και μια διαδικασία πύκνωσης η οποία να ακολουθεί την κίνηση της γεωμετρίας. Σχετικά με το δεύτερο τμήμα, θα μπορούσε να προστεθεί στον επιλύτη η ικανότητα επίλυσης συνεκτικών ή ακόμη και τυρβωδών μη-μόνιμων πεδίων ροής ενώ, κάτι το οποίο σχετίζεται τόσο με την πλεγματοποίηση όσο και με την επίλυση, θα μπορούσε να είναι η επέκταση του λογισμικού ώστε να χειρίζεται τριδιάστατα υπολογιστικά χωρία. Τέλος, καθώς αυτή η διπλωματική εργασία αποτέλεσε μια από τις πρώτες προσπάθειες της ΜΠΥΡ&Β/ΕΘΣ στην περιοχή των μεθόδων μη-οριόδετων πλεγμάτων με συνέπεια ο προγραμματισμός του λογισμικού να πραγματοποιηθεί με σειριακό τρόπο, μια εύλογη επέκταση θα μπορούσε να περιλαμβάνει την παραλληλοποίησή του είτε σε CPUs είτε σε GPUs. Προς τη δεύτερη κατεύθυνση προσανατολίζεται η ταυτόχρονα εξελισσόμενη διπλωματική εργασία [36], η οποία, όμως, αφορά μόνο χρονικά μόνιμες ροές.



## Παράρτημα Α΄

### Η μέθοδος Jacobi για την επίλυση γραμμικών συστημάτων

Έστω ένα τετραγωνικό σύστημα  $n$  γραμμικών εξισώσεων:

$$Ax = b \quad (\text{A'.1})$$

όπου

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \quad (\text{A'.2})$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad (\text{A'.3})$$

Ο  $A$  μπορεί να χωριστεί σε δύο πίνακες, έναν διαγώνιο  $D$  και το υπόλοιπό του  $R$  ως εξής:

$$A = D + R \quad \text{όπου} \quad (\text{A'.4})$$

$$D = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \quad (\text{A'.5})$$

$$R = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & 0 & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A'.6})$$

Η λύση προκύπτει επαναληπτικά μέσω της σχέσης:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = D^{-1}(\mathbf{b} - R\mathbf{x}^{(k)}) \quad (\text{A'.7})$$

όπου  $\mathbf{x}^{(k+1)}$ ,  $\mathbf{x}^{(k)}$  είναι η (k+1)-οστή και k-οστή προσέγγιση του  $\mathbf{x}$  αντίστοιχα.

Η σχέση (A'.7) γράφεται για κάθε στοιχείο του  $\mathbf{x}$  ως:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left( b_i - \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j^{(k)} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (\text{A'.8})$$

### Σύγκλιση

Η εξέταση των συνθηκών σύγκλισης της μεθόδου απαιτεί κάποιους ορισμούς από τη γραμμική άλγεβρα.

- Ορίζεται ως φασματική ακτίνα ενός μητρώου  $G$  ο αριθμός:

$$\rho(G) = \max(|\lambda|), \quad \text{όπου } \lambda \in \lambda(G), \quad \lambda(G) \text{ σύνολο ιδιοτιμών του } G \quad (\text{A'.9})$$

Με βάση αυτό, στο επαναληπτικό σχήμα του Jacobi, συμβολίζοντας με  $G$  το μητρώο  $D^{-1}R$ , αποδεικνύεται ότι αν ισχύει:

$$\rho(G) < 1 \quad (\text{A'.10})$$

τότε το σχήμα συγκλίνει. Μπορεί ναδειχθεί επίσης, ότι αν ένα σχήμα της μορφής (A'.7) συγκλίνει σε μια τιμή, τότε αυτή η τιμή είναι η ακριβής λύση του συστήματος.

Συνεπώς, η συνθήκη (A'.10) είναι μια ικανή συνθήκη για τη σύγκλιση της μεθόδου Jacobi.

Επιπλέον ορίζονται τα εξής:

- Το μητρώο  $A$  θα ονομάζεται μειούμενο (reducible) όταν μπορεί να βρεθεί ένα άλλο μητρώο  $P$  έτσι ώστε το μητρώο  $PAP^T$  να είναι άνω τριγωνικό. Διαφορετικά θα ονομάζεται μη-μειούμενο (irreducible).
- Το μητρώο  $A$  έχει αυστηρή διαγώνια κυριαρχία αν ισχύει:

$$|\alpha_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^{j=n} |\alpha_{ij}|, \quad \forall i \in [1, n] \quad (\text{A'.11})$$

- Το μητρώο  $A$  θα ονομάζεται μη-μειούμενο μητρώο διαγώνιας κυριαρχίας (irreducibly diagonally dominant matrix) όταν είναι μη-μειούμενο και ισχύει η προηγούμενη ανισότητα (πιθανόν ως ανισο-ισότητα για όλες τις γραμμές εκτός από μια τουλάχιστον όπου θα ισχύει αυστηρά ως ανισότητα).

Με βάση αυτά, μπορεί να αποδειχθεί ότι αν το μητρώο  $A$  έχει αυστηρή ή μη-μειούμενη διαγώνια κυριαρχία, η μέθοδος Jacobi συγκλίνει για οποιαδήποτε αρχικοποίηση  $\mathbf{x}^{(0)}$ . Τονίζεται ότι οι παραπάνω συνθήκες αποτελούν ικανές συνθήκες σύγκλισης της μεθόδου Jacobi καθώς υπάρχουν περιπτώσεις που επιτυγχάνεται σύγκλιση χωρίς την ικανοποίηση αυτών.

### Αλγόριθμος Jacobi

Αρχικοποίηση του διανύσματος  $\mathbf{x}^{(0)}$

$k = 0$

**while** Δεν έχει επιτευχθεί η σύγκλιση **do**

**for**  $i = 1, n$  **do**

$\sigma = 0$

**for**  $j = 1, n$  **do**

**if**  $j \neq i$  **then**

$\sigma \leftarrow \sigma + \alpha_{ij}x_j^{(k)}$

**end if**

**end for**

$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i - \sigma}{\alpha_{ii}}$

**end for**

Έλεγχος αν έχει επιτευχθεί η σύγκλιση

$k \leftarrow k + 1$

**end while**

---

# Βιβλιογραφία

- [1] Τσαγγάρης, Σ.: *Μηχανική των Ρευστών*. Συμμεών, 2005.
- [2] Kármán, T.: *Aerodynamics: Selected Topics in the Light of Their Historical Development*. Cornell University Press, Ithaca, pp. 68-69, 1954.
- [3] Peskin, C.: *Flow patterns around heart valves: A numerical method*. Journal of Computational Physics, 10:252–271, 1972.
- [4] Peskin, C.: *The immersed boundary method*. Acta Numerica, pages 479–517, 2002.
- [5] *A simple second order cartesian scheme for compressible Euler flows*. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00701277>.
- [6] Hee Seo J., Mittal R.: *A sharp-interface immersed boundary method with improved mass conservation and reduced spurious pressure oscillations*. Journal of Computational Physics, page 7347–7363, 2011.
- [7] Mittal R., Iaccarino I.: *Immersed boundary methods*. Annual Review of Fluid Mechanics, pages 239–261, 2005.
- [8] Kim Dokyun, Choi Haecheon: *Immersed boundary method for flow around an arbitrarily moving body*. Journal of Computational Physics, pages 662–680, 2006.
- [9] *An accurate cartesian method for incompressible flows with moving boundaries*. <https://hal.inria.fr/hal-00906897>.
- [10] Μπεργελές, Γ.: *Υπολογιστική Ρευστομηχανική*. Συμμεών, 2012.
- [11] *Heart animations computed by the immersed boundary method*. <http://www.math.nyu.edu/faculty/peskin/myo3D/index.html>.
- [12] Σαμούχος, Κ.: *Η συνεχής συζυγής μέθοδος σε μη-οριόδετα πλέγματα για τη βελτιστοποίηση στροβιλομηχανών*. Διδακτορική διατριβή, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, σε εξέλιξη.

- [13] Jongho Lee, Jungwoo Kim, Haecheon Choi Kyung Soo Yang: *Sources of spurious force oscillations from an immersed boundary method for moving-body problems*. Journal of Computational Physics, 230:2677–2695, 2011.
- [14] Luo H., Dai H., de Sousa PF.: *A hybrid formulation to suppress the numerical oscillation caused by immersed moving boundaries*. 62nd Annual Meeting of the APS Division of Fluid Dynamics, Abstract EL.006, 2009.
- [15] Ji Hua, Lien Fue-Sang, Yee Eugene: *A robust and efficient hybrid cut-cell/ghost-cell method with adaptive mesh refinement for moving boundaries on irregular domains*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., page 432–448, 2008.
- [16] Ji Hua, Lien Fue-Sang, Yee Eugene: *Numerical simulation of detonation using an adaptive cartesian cut-cell method combined with a cell-merging technique*. Computers and Fluids, page 1041–1057, 2010.
- [17] Γιαννάκογλου, Κ.Χ.: *Μέθοδοι Βελτιστοποίησης στις Στροβιλομηχανές*. ΕΜΠ, 2006.
- [18] Τρομπούκης, Ξ.: *Αριθμητική επίλυση προβλημάτων αεροδυναμικής-αεροελαστικότητας σε επεξεργαστές καρτών γραφικών*. Διδακτορική διατριβή, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2012.
- [19] Τρομπούκης, Ξ.: *Υπολογιστική ανάλυση και παραμετρική διερεύνηση της τεχνικής συνεχούς αναρρόφησης για τον έλεγχο οριακών στρωμάτων*. Διπλωματική Εργασία. Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., 2007.
- [20] Roe, P.: *Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes*. Journal of Computational Physics, 43(2):357–372, 1981.
- [21] Michalak K., Ollivier Gooch C.: *Limiters for unstructured higher-order accurate solutions of the euler equations*. 46th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, January 2008.
- [22] Barth T. J., Jespersen D. C.: *The design and application of upwind schemes on unstructured meshes*. AIAA paper 89-0366, January 1989.
- [23] Reynolds, O.: *Papers on Mechanical and Physical Subjects, Vol. 3, The Sub-Mechanics of the Universe*. Cambridge University Press, 1903.
- [24] Πάππου, Θ.: *Ανάπτυξη αριθμητικής μεθοδολογίας τεχνητής συμπίεστότητας για τον υπολογισμό μη μόνιμων ροών σε κινούμενα όρια*. Διδακτορική διατριβή, Εργαστήριο Αεροδυναμικής, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 1998.
- [25] Pulliam T. H., Steget J. L.: *Recent improvements in efficiency, accuracy and convergence for implicit approximate factorization algorithms*. AIAA-85-03060, 1985.
- [26] Courant R., Friedrichs K., Lewy H.: *Über die partiellen differenzgleichungen der mathematischen physik*. Mathematische Annalen, 100:32–74, 1928.
-

- 
- [27] Γιαννάκογλου, Κ.Χ.: *Αριθμητική Ανάλυση για Μηχανικούς*. ΕΜΠ, 2003.
- [28] *The NACA airfoil series*. <http://people.clarkson.edu/~pmarzocc/AE429/The%20NACA%20airfoil%20series.pdf>.
- [29] Jameson A., Mavriplis D.: *Finite volume solution of the two-dimensional euler equations on a regular triangular mesh*. AIAA 23rd Aerospace Sciences Meeting, 1985.
- [30] Jameson A., Yoon S.: *Multigrid solution of the euler equations using implicit schemes*. AIAA 23rd Aerospace Sciences Meeting, 1985.
- [31] Vassberg J. C., Jameson A.: *In pursuit of grid convergence for two-dimensional euler solutions*. Journal of Aircraft, 2010.
- [32] Landon, R.H.: *NACA 0012 oscillatory and transient pitching*. AGARD Report 702, Dataset 3, January 1982.
- [33] *The NACA airfoil series*. <http://airfoiltools.com/airfoil/details?airfoil=naca64a010-il>.
- [34] Davis, S.S.: *NACA 64A010 (NASA Ames model) oscillatory pitching*. AGARD Report 702, Dataset 2, January 1982.
- [35] Gunston, B.: *The Cambridge Aerospace Dictionary Cambridge*. Cambridge University Press, 2004.
- [36] Αμαρτωλός, Ν.: *Προγραμματισμός Επιλύτη Εξισώσεων Euler σε Διδιάστατη Ροή με τη Μέθοδο των Τεμνόμενων Κυψελών (Cut-Cells) σε Επεξεργαστές Καρτών Γραφικών*. Διπλωματική Εργασία. Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., 2015 (σε εξέλιξη).
-