Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών
και Φυσικών Επιστημών
Τομέας Μαθηματικών

Θεωρία ευστάθειας: Θεωρήματα Lyapunov και επεκτάσεις

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Λοΐζος Ραουνάς

Επιβλέπων: Ιωάννης Τσινιάς

Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Οκτώβριος 2015

Λοΐζος Ραουνάς

Διπλωματούχος Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών Ε.Μ.Π.

Αφιερώνεται στην οικογένειά μου,

που ήταν πάντα δίπλα μου

και στον καφέ,

για παρόμοιους λόγους.

Περίληψη

Στο παρόν κείμενο ασχολούμαστε με την Θεωρία Ευστάθειας Lyapunov και τις επεκτάσεις της, σε χρονικά αναλλοίωτα μη – γραμμικά δυναμικά συστήματα.

Αρχικά, αναφέρουμε κάποιες βασικές έννοιες της μαθηματικής ανάλυσης, απαραίτητες για την συνέχεια. Έπειτα, αφού ορίσουμε την ευστάθεια κατά Lyapunov, παραθέτουμε το Θεώρημα Lyapunov, το οποίο αποτελεί κριτήριο για ευστάθεια, ασυμπτωτική (τοπική ή ολική) ευστάθεια και εκθετική (τοπική ή ολική) ευστάθεια της μηδενικής λύσης ενός μη – γραμμικού δυναμικού συστήματος.

Στην συνέχεια, ασχολούμαστε με μια σειρά θεωρημάτων που αποτελούν κριτήριο για ασυμπτωτική ευστάθεια, γνωστά και ως θεωρήματα αναλλοίωτου συνόλου. Τα θεωρήματα αυτά, εκμεταλλευόμενα τις ιδιότητες των αναλλοίωτων συνόλων, «χαλαρώνουν» την προϋπόθεση του θεωρήματος Lyapunov για αυστηρά αρνητική συνάρτηση Lyapunov.

Έπειτα, και αφού πλέον είναι σαφής η σημαντικότητα των συναρτήσεων Lyapunov για την μελέτη της ευστάθειας της λύσης ενός μη – γραμμικού δυναμικού συστήματος, παραθέτουμε τέσσερις μεθόδους κατασκευής συναρτήσεων Lyapunov.

Συνεχίζοντας, αναλύουμε μια σειρά από θεωρήματα, γνωστά ως αντίστροφα θεωρήματα Lyapunov, τα οποία εξασφαλίζουν την ύπαρξη μιας συνάρτησης Lyapunov σε μη – γραμμικά δυναμικά συστήματα τα οποία είναι ασυμπτωτικά ευσταθή, εκθετικά ευσταθή και ολικά ασυμπτωτικά ευσταθή.

Η αδυναμία μιας υποψήφιας συνάρτησης Lyapunov να αποδείξει την ευστάθεια της μηδενικής λύσης ενός μη – γραμμικού δυναμικού συστήματος, δεν συνεπάγεται κατανάγκην την αστάθεια της. Έτσι, παραθέτουμε μια σειρά από θεωρήματα τα οποία αποτελούν κριτήριο για την αστάθεια της μηδενικής λύσης σε μη – γραμμικά δυναμικά συστήματα.

Τέλος, αναφέρουμε συνοπτικά μια σειρά θεωρημάτων της Θεωρίας Ευστάθειας κατά Lyapunov για γραμμικά δυναμικά συστήματα, καθώς και το θεώρημα γραμμικοποίησης Lyapunov, το οποίο αποτελεί κριτήριο για εκθετική ευστάθεια και αστάθεια της μηδενικής λύσης ενός μη – γραμμικού δυναμικού συστήματος, μελετώντας την γραμμικοποιημένη μορφή του.

Περιεχόμενα

1 Ευστάθεια μη – γραμμικών δυναμικών συστημάτων κατά Lyapunov

Σε αυτό το κεφάλαιο θα ορίσουμε την κατά Lyapunov ευστάθεια, την άμεση μέθοδο Lyapunov, καθώς και μερικά βασικά θεωρήματα της μαθηματικής ανάλυσης.

1.1 Εισαγωγή

Θα ασχοληθούμε με το μη-γραμμικό δυναμικό σύστημα

$$\dot{x}(t) = f\big(x(t)\big) \tag{1.1}$$

με αρχική συνθήκη

$$x(0) = x_0$$

και με

$$x(t) \in D \subseteq \mathbb{R}^n, t \in I_{x_0} = \big[0, \tau_{x_0}\big), 0 \leq \tau_{x_0} \leq \infty \tag{1.2}$$

όπου $f \in D \to \mathbb{R}^n$ συνεχής συνάρτηση στο D και D μια γειτονιά της λύσης του (1.1).

Υποθέτουμε ότι για κάθε αρχική συνθήκη $x_0 \in D$ το (1.1) έχει μια μοναδική λύση $x(t, x_0)$ με $t \in [0, \tau_{x_0})$, όπου τ_{x_0} είναι ο μέγιστος χρόνος ύπαρξης της $x(\cdot, x_0)$.

Προτού προχωρήσουμε στην διατύπωση της κατά Lyapunov ευστάθειας, διατυπώνουμε κάποια βασικά θεωρήματα και ορισμούς της μαθηματικής ανάλυσης, τα οποία θα χρησιμοποιήσουμε έπειτα.

1.2 Βασικές Έννοιες

<u>Ορισμός 1.1 Lipschitz – Συνέχεια:</u> Μια συνάρτηση $f(x)$ λέγεται Lipschitz – συνεχής στο $D \subseteq \mathbb{R}^n$ αν υπάρχει $L \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε:

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\| \;\; \forall x, y \in D \tag{1.3}$$

Όπου $\|\cdot\|$ η συνήθης νόρμα στον $\mathbb{R}^n$. Αν $D = \mathbb{R}^n$, τότε η f λέγεται ολικά Lipschitz.

<u>Ορισμός 1.2α Κάτω – Ημισυνέχεια:</u> Έστω $D \subseteq \mathbb{R}^n, f: D \to \mathbb{R}$ και $x \in D$. Η f καλείται κάτω – ημισυνεχής στο $x \in D$ αν για κάθε ακολουθία $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D$ με $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, ισχύει

$$f(x) \leq \lim_{n\to\infty} \inf f(x_n) \tag{1.4}$$

<u>Ορισμός 1.2β Άνω – Ημισυνέχεια:</u> Έστω $D \subseteq \mathbb{R}^n, f: D \to \mathbb{R}$ και $x \in D$. Η f καλείται άνω – ημισυνεχής στο $x \in D$ αν για κάθε ακολουθία $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D$ με $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, ισχύει

$$f(x) \geq \lim_{n\to\infty} \sup f(x_n) \tag{1.5}$$

Ή, ισοδύναμα, αν για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ το σύνολο $\{x \in D: f(x) < \alpha\}$ είναι ανοιχτό.

Ορισμός 1.3 Τροχιές Δυναμικού συστήματος: Έστω το μη – γραμμικό δυναμικό σύστημα (1.1) με $x(t) \in D, t \in \mathbb{R}$ και $x(\cdot, x_0): \mathbb{R}^n \to D$ η λύση του (1.1) με αρχική συνθήκη $x(0) = x_0$. Ορίζουμε ως τροχιές του x με αρχική τιμή $x(0) = x_0$ το σύνολο

$$\mathcal{O}_{x_0} \coloneqq \{x \in D: x = x(t, x_0), t \in \mathbb{R}\} \tag{1.6}$$

Επίσης ορίζουμε τις θετικές και αρνητικές τροχιές ως

$$\mathcal{O}_{x_0}^{+} \coloneqq \{x \in D: x = x(t, x_0), t \geq 0\} \tag{1.7}$$

και

$$\mathcal{O}_{x_0}^{-} \coloneqq \{x \in D: x = x(t, x_0), t \leq 0\} \tag{1.8}$$

αντίστοιχα. Προφανώς ισχύει

$$\mathcal{O}_{x_0} = \mathcal{O}_{x_0}^{+} \cup \mathcal{O}_{x_0}^{-} \tag{1.9}$$

Ορισμός 1.4 Θετικό/Αρνητικό Οριακό Σημείο Τροχιάς Δυναμικού Συστήματος: Ένα σημείο $p \in D$ ονομάζεται θετικό οριακό σημείο μιας τροχιάς $x\big(t, x(0)\big)$ του (1.1) αν υπάρχει μονότονη ακολουθία θετικών αριθμών $\{t_n\}_{n=0}^{\infty}$ με $t_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$, τέτοια ώστε

$$x\big(t_n, x(0)\big) \xrightarrow{n\to\infty} p \tag{1.10}$$

Αντίστοιχα, ένα σημείο $q \in D$ ονομάζεται αρνητικό οριακό σημείο μιας τροχιάς $x\big(t, x(0)\big)$ του (1.1) αν υπάρχει μονότονη ακολουθία αρνητικών αριθμών $\{t_n'\}_{n=0}^{\infty}$ με $t_n' \xrightarrow{n\to\infty} -\infty$, τέτοια ώστε

$$x\big(t_n', x(0)\big) \xrightarrow{n\to\infty} q \tag{1.11}$$

Ορισμός 1.5 Θετικό/Αρνητικό Οριακό Σύνολο Τροχιών Δυναμικού Συστήματος: Το σύνολο όλων των θετικών οριακών σημείων της τροχιάς $x\big(t, x(0)\big), t \geq 0$ του μη – γραμμικού δυναμικού συστήματος (1.1) ονομάζεται θετικό οριακό σύνολο και συμβολίζεται με $\omega\big(x(0)\big)$. Το σύνολο όλων των αρνητικών οριακών σημείων της $x\big(t, x(0)\big), t \leq 0$, ονομάζεται αρνητικό οριακό σύνολο και συμβολίζεται με $\alpha\big(x(0)\big)$. Ισοδύναμα, για αρχική συνθήκη $x(0) = x_0$, τα $\omega(x_0), \alpha(x_0)$ ορίζονται ως

$$\omega(x_0) = \cap_{t\geq 0} \overline{\mathcal{O}_{x_0}^{+}} \tag{1.12}$$

και

$$\alpha(x_0) = \cap_{t\leq 0} \overline{\mathcal{O}_{x_0}^{-}} \tag{1.13}$$

Ορισμός 1.6 Αναλλοίωτο σύνολο Δυναμικού Συστήματος: Ένα σύνολο $A \subset D \subseteq \mathbb{R}^n$ ονομάζεται θετικά αναλλοίωτο σύνολο του (1.1), ως προς τροχιά $x(\cdot, x_0)$, αν

$$x(0, x_0) \in A \Rightarrow x(t, x_0) \in A, \forall t \geq 0 \tag{1.14}$$

Στην συνέχεια, παραθέτουμε τα θεωρήματα Bolzano – Weierstrass, Bolzano – Lebesgue και το Θεώρημα Weierstrass, χωρίς απόδειξη.

Θεώρημα 1.1 (Θεώρημα Bolzano – Weierstrass): Έστω $S \subset \mathbb{R}^n$ φραγμένο σύνολο, το οποίο περιέχει άπειρα το πλήθος σημεία. Τότε, θα υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο $p \in \mathbb{R}^n$ το οποίο είναι σημείο συσσώρευσης του S.

Θεώρημα 1.2 (Θεώρημα Bolzano – Lebesgue): Έστω $D_c \subset \mathbb{R}^n$. Για κάθε ακολουθία $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq D_c$, υπάρχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ τέτοια ώστε $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} \in D_c$, αν και μόνο αν το D_c είναι συμπαγές.

Θεώρημα 1.3 (Θεώρημα Weierstrass 1): Έστω $D_c \subset \mathbb{R}^n$ συμπαγές και συνάρτηση $f: D_c \to \mathbb{R}$ κάτω ημισυνεχής στο D_c. Τότε υπάρχει $x^* \in D_c$ τέτοιο ώστε

$$f(x^*) \leq f(x), x \in D_c \tag{1.15}$$

Θεώρημα 1.4: (Θεώρημα Weierstrass 2): Έστω $D_c \subset \mathbb{R}^n$ συμπαγές και συνάρτηση $f: D_c \to \mathbb{R}$ άνω ημισυνεχής στο D_c. Τότε υπάρχει $x^* \in D_c$ τέτοιο ώστε

$$f(x^*) \geq f(x), x \in D_c \tag{1.16}$$

Θεώρημα 1.5: Έστω $D_c \subset \mathbb{R}^n$ συμπαγές και έστω συνάρτηση $f: D_c \to \mathbb{R}$ συνεχής στο D_c. Τότε υπάρχει $x_{\min} \in D_c$ και $x_{\max} \in D_c$ τέτοια ώστε

$$f(x_{\min}) \leq f(x), x \in D_c \tag{1.17}$$

και

$$f(x_{\max}) \geq f(x), x \in D_c \tag{1.18}$$

Απόδειξη: Εφόσον η f είναι συνεχής στο D_c αν και μόνο αν η f είναι άνω και κάτω ημισυνεχής στο D_c, η απόδειξη είναι άμεση συνέπεια των Θεωρημάτων 1.3 και 1.4□

1.3 Ευστάθεια κατά Lyapunov

Σε αυτήν την ενότητα ορίζουμε την κατά Lyapunov ευστάθεια του (1.1) και στην συνέχεια διατυπώνουμε και αποδεικνύουμε το θεώρημα Lyapunov. Στα επόμενα, εκτός και αν δηλώνουμε διαφορετικά, υποθέτουμε ότι το $0 \in \mathbb{R}^n$ είναι σημείο ισορροπίας του (1.1) ή, ισοδύναμα, ότι $f(0) = 0$. Αυτό σημαίνει ότι $x(t, 0) = 0$ για κάθε $t \geq 0$. Επίσης θεωρούμε ότι η $f(\cdot)$ είναι Lipschitz – συνεχής στο D.

Ορισμός 1.7 Ευστάθεια κατά Lyapunov:

i. Η μηδενική λύση του (1.1) είναι Lyapunov – ευσταθής αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ τέτοιο ώστε αν $\|x(0)\| < \delta$ τότε $\|x(t)\| < \varepsilon,\ t \geq 0$

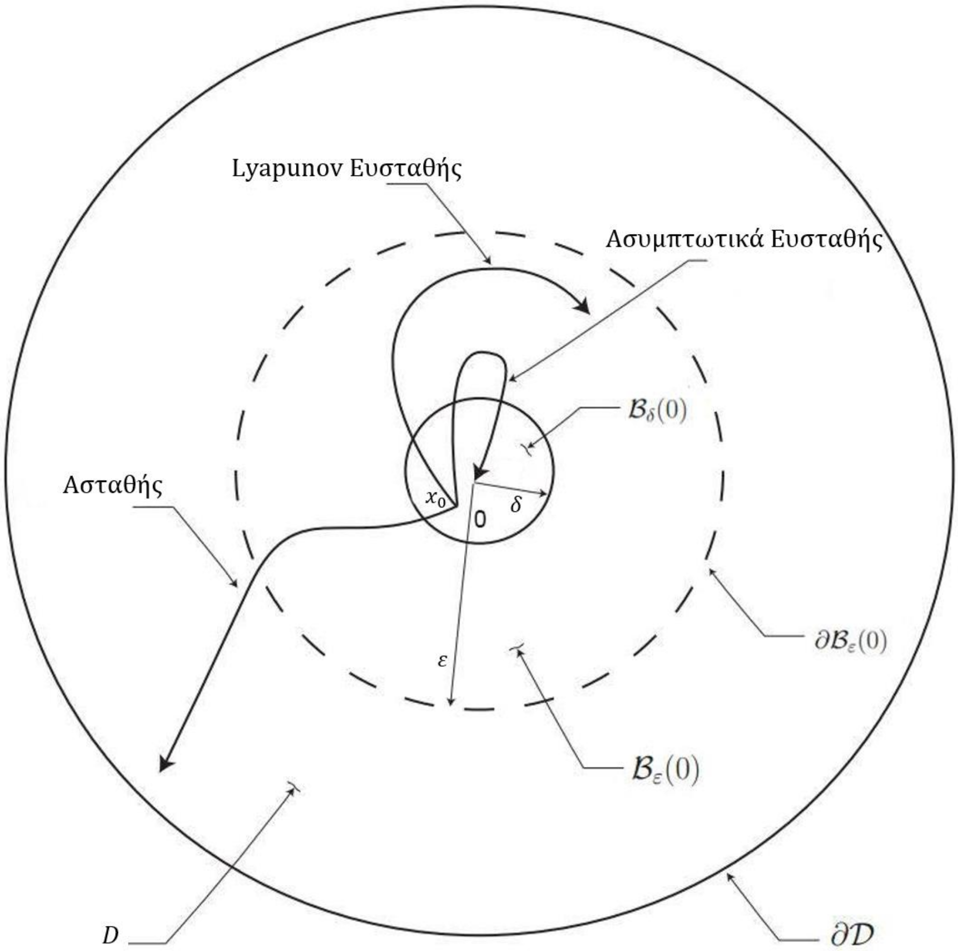
ii. Η μηδενική λύση του (1.1) είναι (τοπικά) ασυμπτωτικά ευσταθής (Asymptotically Stable) αν είναι Lyapunov-ευσταθής και υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε αν $\|x(0)\| < \delta$ τότε $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$

iii. Η μηδενική λύση του (1.1) είναι (τοπικά) εκθετικά ευσταθής αν υπάρχουν σταθερές $\alpha, \beta, \delta > 0$ τέτοιες ώστε αν $\|x(0)\| < \delta$ τότε $\|x(t)\| \leq \alpha\|x(0)\|\mathrm{e}^{-\beta t}, t \geq 0$

iv. Η μηδενική λύση του (1.1) είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθής (Globally Asymptotically Stable) αν είναι Lyapunov-ευσταθής και επιπλέον για κάθε $x(0) \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$, ισχύει $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$

v. Η μηδενική λύση του (1.1) είναι ολικά εκθετικά ευσταθής αν υπάρχουν $\alpha, \beta > 0$: $\|x(t)\| \leq \alpha\|x(0)\|e^{-\beta t}$, $t \geq 0, \forall x(0) \in \mathbb{R}^{n}$

vi. Η μηδενική λύση του (1.1) είναι ασταθής, αν δεν είναι ευσταθής.



<u>Σχήμα 1.1:</u> Lyapunov – ευστάθεια και ασυμπτωτική ευστάθεια

Συνεπώς διαπιστώνουμε ότι:

$$\text{εκθετική ευστάθεια} \Rightarrow \text{ασυμπτωτική ευστάθεια} \Rightarrow \text{Lyapunov ευστάθεια}$$

Στην συνέχεια, περιγράφουμε την άμεση (direct) μέθοδο Lyapunov, η οποία δίνει επαρκείς συνθήκες για ασυμπτωτική, εκθετική και Lyapunov ευστάθεια ενός μη – γραμμικού δυναμικού συστήματος.

Η άμεση μέθοδος Lyapunov αναφέρει ότι αν μπορεί να κατασκευαστεί μια συνεχώς διαφορίσιμη, θετικά ορισμένη συνάρτηση των καταστάσεων ενός δυναμικού συστήματος της οποίας ο ρυθμός μεταβολής ως προς τον χρόνο σε μια περιοχή του σημείου ισορροπίας είναι μικρότερος ή ίσος του μηδενός, τότε το σημείο ισορροπίας αυτό είναι ευσταθές ή, ισοδύναμα, Lyapunov – ευσταθές. Αν δε, ο ρυθμός μεταβολής της θετικά ορισμένης συνάρτησης είναι αυστηρά αρνητικός, τότε το σημείο ισορροπίας είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

Πριν προχωρήσουμε στην διατύπωση της άμεσης μεθόδου Lyapunov, παραθέτουμε τον εξής ορισμό:

Ορισμός 1.8 Συνάρτηση και παράγωγος συνάρτησης Lyapunov:

Έστω συνάρτηση $V: D \to \mathbb{R}$, όπου $D \subseteq \mathbb{R}^n$ μια περιοχή του 0, συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση με παράγωγο πάνω στις τροχιές του (1.1), η οποία ορίζεται ως

$$\dot{V}(x) = V'(x)f(x) \tag{1.19}$$

Σύμφωνα με τον κανόνα της αλυσίδας, έχουμε ότι

$$\dot{V}(x) \coloneqq \frac{d}{dt}V(x(t,x))|_{t=0} = V'(x)f(x) \tag{1.20}$$

Έπεται λοιπόν ότι αν $\dot{V}(x) < 0$, τότε η $V(\cdot)$ είναι γνησίως φθίνουσα κατά την τροχιά της λύσης $x(t, x_0)$ του (1.1), μέσω του $x_0 \in D$ για $t = 0$.

Με βάση τους ανωτέρω ορισμούς, διατυπώνουμε το θεώρημα Lyapunov.

Θεώρημα 1.6 (Θεώρημα Ευστάθειας Lyapunov):

Έστω συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση $V: D \to \mathbb{R}$ όπου $D \subseteq \mathbb{R}^n$ μια γειτονιά του 0, για την οποία ισχύουν τα εξής:

$$V(0) = 0 \tag{1.21}$$

$$V(x) > 0 \;\; \forall x \in D \backslash \{0\} \tag{1.22}$$

$$\dot{V}(x) = V'(x)f(x) \leq 0 \;\; \forall x \in D \tag{1.23}$$

Τότε η μηδενική λύση $x(t) \equiv 0$ του (1.1) είναι Lyapunov – ευσταθής.

Αν, επιπλέον, ισχύει

$$\dot{V}(x) = V'(x)f(x) < 0 \; \forall x \in D, x \neq 0 \tag{1.24}$$

τότε η $x(t) \equiv 0$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθής.

Τέλος, αν υπάρχουν σταθερά $\alpha, \beta, \varepsilon > 0$ και $p \geq 1$ τέτοια ώστε η $V: D \to \mathbb{R}$ να ικανοποιεί

$$\alpha\|x\|^p \leq V(x) \leq \beta\|x\|^p, \qquad x \in D \tag{1.25}$$

$$V'(x)f(x) \leq -\varepsilon V(x), \qquad x \in D \tag{1.26}$$

τότε η μηδενική λύση είναι εκθετικά ευσταθής.

Πριν αποδείξουμε το Θεώρημα 1.6, αναφέρουμε μια πρόταση, ένα θεώρημα χωρίς απόδειξη και ένα πόρισμα που εξάγεται από αυτό.

Πρόταση 1.1: Έστω $D_c \subset \mathbb{R}^m$ συμπαγές σύνολο και συνάρτηση $f: D_c \to \mathbb{R}^n$ συνεχής στο D_c. Τότε, η εικόνα του D_c υπό την f είναι συμπαγής.

Απόδειξη: Έστω ακολουθία $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D_c$. Τότε, θα υπάρχει ακολουθία $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D_c$ τέτοια ώστε $y_n = f(x_n)$. Εφόσον το D_c είναι συμπαγές, λόγω του Θεωρήματος 1.2 θα υπάρχει υπακολουθία $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ τέτοια ώστε $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x \in D_c$. Επιπλέον, επειδή η f είναι συνεχής, έπεται ότι

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(\lim_{k\to\infty} x_{n_k}) = f(x) \in f(D_c) \tag{1.27}$$

Έτσι, η $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία στο $f(D_c)$ άρα, βάσει του Θεωρήματος 1.2, το $f(D_c)$ είναι συμπαγές.□

<u>Θεώρημα 1.7</u>: Έστω το μη – γραμμικό δυναμικό σύστημα (1.1) και συνάρτηση $f: D \to \mathbb{R}^n$ Lipschitz – συνεχής στο D και έστω $x(t, x_0)$ η λύση του (1.1) στο μέγιστο χρονικό διάστημα ύπαρξής της $I_{x_0} = [0, \tau_{max})$, με $\tau_{max} < \infty$. Τότε, για οποιοδήποτε συμπαγές $D_c \subset D$, υπάρχει $t \in I_{x_0}$ τέτοιο ώστε $x(t) \notin D_c$.

Από το Θεώρημα 1.7 προκύπτει το εξής πόρισμα.

<u>Πόρισμα 1.1:</u> Έστω το μη – γραμμικό δυναμικό σύστημα (1.1). Έστω ότι η $f: D \to \mathbb{R}^n$ είναι Lipschitz – συνεχής στο D και $D_c \subset D$ συμπαγές. Υποθέτουμε ότι για αρχική συνθήκη $x_0 \in D_c$, υπάρχει $\tau > 0$ τέτοιο ώστε η λύση $x: [0, \tau] \to D$ να περιέχεται εξ ολοκλήρου στο D_c. Τότε υπάρχει μοναδική λύση $x: [0, \infty) \to D$ του (1.1) για κάθε $t \geq 0$.

<u>Απόδειξη:</u> Έστω $[0, \tau)$ το μέγιστο χρονικό διάστημα ύπαρξης του (1.1) με την λύση $x(t, x_0)$, $t \in [0, \tau)$ να περιέχεται εξ ολοκλήρου στο D_c. Τότε, από υπόθεση $\{y \in D: y = x(t) \text{ για κάποια } t \in [0, \tau)\} \subset D_c$ ή, ισοδύναμα, $x\big([0, \tau)\big) \subset D_c$. Έτσι, από το Θεώρημα 1.7 επάγεται ότι $\tau = \infty$. □

Πλέον είμαστε σε θέση να αποδείξουμε το θεώρημα Lyapunov.

<u>Απόδειξη Θεωρήματος 1.6 (Lyapunov – ευστάθεια):</u>

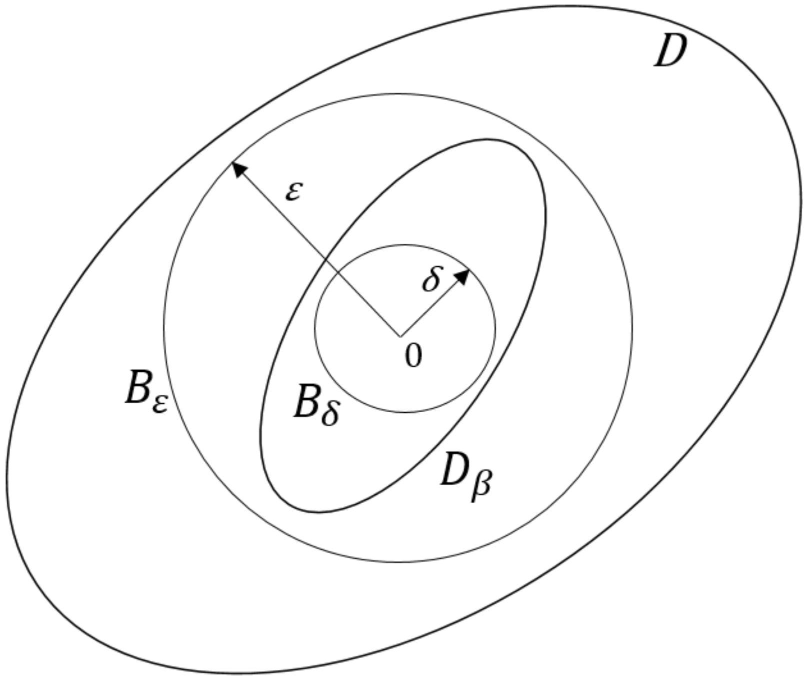
Έστω $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $B_\varepsilon(0) \subseteq D$. Εφόσον το $\partial B_\varepsilon(0)$ είναι συμπαγές και η $V(x)$ είναι συνεχής στο D, έπεται, βάσει της Πρότασης 1.1, ότι το $V(\partial B_\varepsilon(0))$ είναι συμπαγές και συνεπώς, βάσει του Θεωρήματος 1.5, υπάρχει $x_{\min} \in \partial B_\varepsilon(0)$ τέτοιο ώστε $V(x_{\min}) \leq V(x), x \in \partial B_\varepsilon(0)$. Ορίζουμε

$$\alpha \coloneqq V(x_{\min}) = \min_{x \in \partial B_\varepsilon(0)} V(x) \tag{1.28}$$

Επειδή $0 \notin \partial B_\varepsilon(0)$, λόγω της (1.22) προκύπτει πως $\alpha > 0$. Έπειτα, έστω $\beta \in (0, \alpha)$ και ορίζουμε

$$D_\beta = \{x \in D: V(x) \leq \beta\} \tag{1.29}$$

Παρατηρούμε ότι $D_\beta \subset B_\varepsilon(0)$ (Σχήμα 1.2). Πράγματι, υποθέτουμε ότι τουναντίον, $D_\beta \not\subset B_\varepsilon(0)$. Σε αυτήν την περίπτωση, υπάρχει ένα σημείο $p \in D_\beta$ τέτοιο ώστε $p \in \partial B_\varepsilon(0)$ οπότε $V(p) \geq \alpha > \beta$, άτοπο, καθώς $V(x) \leq \beta$, για κάθε $x \in D_\beta$.



Σχήμα 1.2: Γραφική αναπαράσταση $B_\delta(0), B_\varepsilon(0), D_\beta, D$

Εφόσον $D_\beta \subset D$, από την (1.25) έπεται ότι $\dot{V}(x) = V'(x)f(x) \leq 0, x \in D_\beta$, οπότε η $V(x(t))$ είναι μια μη – αύξουσα συνάρτηση του χρόνου και άρα

$$V\big(x(t)\big) \leq V\big(x(0)\big) \leq \beta, \qquad t \geq 0 \tag{1.30}$$

Έτσι, το D_β είναι ένα θετικά αναλλοίωτο σύνολο ως προς το (1.1). Επιπλέον, επειδή το D_β είναι συμπαγές, έπεται από το Πόρισμα 1.1 ότι για κάθε $x(0) \in D_\beta$, το (1.1) θα έχει μοναδική λύση, ορισμένη για κάθε $t \geq 0$.

Έπειτα, επειδή η $V(\cdot)$ είναι συνεχής και $V(0) = 0$, υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) \in (0, \varepsilon)$ τέτοιο ώστε να ισχύει

$$\text{Αν } \|x\| < \delta \Leftrightarrow x \in B_\delta(0) \text{ τότε } V(x) < \beta \tag{1.31}$$

οπότε ισχύει $B_\delta(0) \subset D_\beta$. Έτσι, έχουμε

$$B_\delta(0) \subset D_\beta \subset B_\varepsilon(0) \subseteq D \tag{1.32}$$

Έστω τώρα πως για την αρχική συνθήκη $x(0)$ της λύσης $x(t), t \geq 0$ του (1.1) ισχύει $\|x(0)\| < \delta$. Λόγω της (1.31), έχουμε

$$x(0) \in B_\delta(0) \Rightarrow x(0) \in D_\beta \tag{1.33}$$

και επειδή το D_β είναι θετικά αναλλοίωτο, θα ισχύει

$$x(0) \in D_\beta \Rightarrow x(t) \in D_\beta \overset{(1.32)}{\Longrightarrow} x(t) \in B_\varepsilon(0), t \geq 0 \tag{1.34}$$

Έτσι, από τις (1.33) και (1.34) έχουμε:

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \qquad \forall t \geq 0 \tag{1.35}$$

Συνεπώς, για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ τέτοιο ώστε αν $\|x(0)\| < \delta$, τότε $\|x(t)\| < \varepsilon,\ t \geq 0$, το οποίο αποδεικνύει πως η μηδενική λύση $x(t) \equiv 0$ του (1.1) είναι Lyapunov-ευσταθής. □

Απόδειξη Θεωρήματος (Ασυμπτωτική ευστάθεια):

Αποδεικνύουμε στην συνέχεια την ασυμπτωτική ευστάθεια της μηδενικής λύσης του (1.1). Υποθέτουμε ότι

$$V'(x)f(x) < 0, \qquad x \in D, x \neq 0 \tag{1.36}$$

και έστω $x(0) \in B_\delta(0)$. Έπεται, από την προηγούμενη απόδειξη, πως $x(t) \in B_\varepsilon(0),\ t \geq 0$. Από την (1.36), η $V\big(x(t)\big)$ είναι φθίνουσα για $t \geq 0$ και από τις (1.21), (1.22) είναι κάτω φραγμένη από το μηδέν. Για να δείξουμε ότι η λύση $x(t) \xrightarrow{t\to\infty} 0$, αρκεί να δείξουμε ότι $V\big(x(t)\big) \xrightarrow{t\to\infty} 0$, καθώς η $V(\cdot)$ είναι συνεχής και λόγω των (1.21) και (1.22), ισχύει

$$V(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \tag{1.37}$$

Υποθέτουμε, εις άτοπον απαγωγή, ότι η $x(t)$ δεν συγκλίνει στο μηδέν. Τότε, η $V\big(x(t)\big),\ t \geq 0$ είναι κάτω φραγμένη και υπάρχει $L > 0$ τέτοιο ώστε:

$$V\big(x(t)\big) \geq L > 0, \qquad \forall t \geq 0 \tag{1.38}$$

Άρα, λόγω συνέχειας της $V(\cdot)$, υπάρχει ένα $\delta' > 0$ τέτοιο ώστε $V(x) < L$ για $x \in B_{\delta'}(0)$. Λόγω της (1.38), συνεπάγεται ότι $x(t, x_0) \notin B_{\delta'}(0)$ για κάθε $t \geq 0$. Εν συνεχεία, ορίζουμε

$$L_1 \coloneqq \min_{\delta' \leq \|x\| \leq \varepsilon} -V'(x)f(x) > 0 \tag{1.39}$$

Από την (1.24) έχουμε πως

$$-V'(x)f(x) \geq L_1,\ \ \delta' \leq \|x\| \leq \varepsilon \tag{1.40}$$

ή, ισοδύναμα,

$$V\big(x(t)\big) - V\big(x(0)\big) = \int_0^t V'\big(x(s)\big)f\big(x(s)\big)ds \leq -L_1 t \tag{1.41}$$

οπότε, για κάθε $x(0) \in B_\delta(0)$,

$$V\big(x(t)\big) \leq V\big(x(0)\big) - L_1 t \tag{1.42}$$

Θέτοντας

$$t > \frac{V\big(x(0)\big) - L}{L_1} \tag{1.43}$$

προκύπτει $V\big(x(t)\big) < L$, το οποίο είναι άτοπο, λόγω της (1.38). Συνεπώς έχουμε ότι $V\big(x(t)\big) \xrightarrow{t\to\infty} 0$, το οποίο συνεπάγεται ότι $x(t) \xrightarrow{t\to\infty} 0$, οπότε αποδεικνύεται η ασυμπτωτική ευστάθεια.□

Απόδειξη Θεωρήματος (Εκθετική ευστάθεια):

Τέλος, για να αποδείξουμε την εκθετική ευστάθεια της μηδενικής λύσης $x(t) \equiv 0$ του (1.1), ολοκληρώνοντας την (1.26) έχουμε

$$V\big(x(t)\big) \leq V\big(x(0)\big)e^{-\varepsilon t}, \qquad t \geq 0 \tag{1.44}$$

Από την (1.25) προκύπτει πως

$$V\big(x(0)\big) \leq \beta \|x(0)\|^p \Leftrightarrow$$
$$V\big(x(0)\big)e^{-\varepsilon t} \leq \beta \|x(0)\|^p e^{-\varepsilon t} \tag{1.45}$$

και
$$\alpha \|x(t)\|^p \leq V\big(x(t)\big) \tag{1.46}$$

Η (1.44) μέσω της (1.45):

$$V\big(x(t)\big) \leq \beta \|x(0)\|^p e^{-\varepsilon t} \overset{(1.46)}{\Longrightarrow}$$
$$\alpha \|x(t)\|^p \leq \beta \|x(0)\|^p e^{-\varepsilon t}, t \geq 0 \tag{1.47}$$

που συνεπάγεται ότι

$$\|x(t)\| \leq \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{p}} \|x(0)\| e^{\left(-\frac{\varepsilon}{p}\right)t}, \qquad t \geq 0 \tag{1.48}$$

το οποίο αποδεικνύει την εκθετική ευστάθεια. □

Σημείωση 1.1:

1. Η επιλογή του $x = 0$ ως σημείου ισορροπίας γίνεται χωρίς βλάβη της γενικότητας. Αν το $x_e \neq 0$ είναι σημείο ισορροπίας, τότε το θεώρημα Lyapunov ισχύει με την (1.21) να αντικαθίσταται από $V(x_e) = 0$ και $x \neq x_e$.
2. Μια συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση που ικανοποιεί τα (1.21), (1.22) λέγεται υποψήφια συνάρτηση Lyapunov (candidate Lyapunov function). Αν ικανοποιεί επιπλέον και την (1.23), τότε ονομάζεται συνάρτηση Lyapunov.

Ακολουθούν δυο παραδείγματα με εφαρμογή του θεωρήματος Lyapunov για ευσταθή και ασυμπτωτικά ευσταθή μη – γραμμικά δυναμικά συστήματα.

Παράδειγμα 1.1: Έστω μη – γραμμικό δυναμικό σύστημα

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = -x_2(t) - x_1^3(t) \tag{1.49}$$

με
$$x(0) = \big(x_1(0), x_2(0)\big) = (x_{10}, x_{20}) = x_0, \qquad t \geq 0$$

και συνάρτηση $V: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, με

$$V(x_1, x_2) = x_1^4 + 2x_2^2 \tag{1.50}$$

Εξετάζουμε την ευστάθεια της μηδενικής λύσης $x(t) \equiv 0$ του μη γραμμικού δυναμικού συστήματος (1.49) με συνάρτηση Lyapunov την (1.50).

Για την (1.50) ισχύει ότι

$$V(0,0) = 0 \tag{1.51}$$

$$V(x_1, x_2) > 0, \forall (x_1, x_2) \neq 0 \in \mathbb{R}^2 \tag{1.52}$$

και

$$\begin{aligned}\dot{V}(x_1,x_2) &= 4x_1^3\dot{x}_1 + 4x_2\dot{x}_2 \\ &= 4x_1^3x_2 + 4x_2(-x_2 - x_1^3) \\ &= 4x_1^3x_2 - 4x_2^2 - 4x_1^3x_2 \\ &= -4x_2^2 \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}^2\end{aligned} \tag{1.53}$$

Συνεπώς, βάσει των (1.51), (1.52) και (1.53), το μη – γραμμικό δυναμικό σύστημα (1.49) είναι Lyapunov – ευσταθές. ■

<u>Παράδειγμα 1.2:</u> Έστω μη – γραμμικό δυναμικό σύστημα

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -(x_2(t) - 1)x_1^3(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{x_1^4(t)}{\left(1 + x_1^2(t)\right)^2} - \frac{x_2(t)}{1 + x_2^2(t)}\end{aligned} \tag{1.54}$$

με $\qquad x(0) = \big(x_1(0), x_2(0)\big) = (x_{10}, x_{20}) = x_0, \qquad t \geq 0$

Ορίζουμε $V: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, με

$$V(x_1,x_2) = \frac{x_1^2}{1 + x_1^2} + x_2^2 \tag{1.55}$$

Εξετάζουμε την ευστάθεια της μηδενικής λύσης $x(t) \equiv 0$ του μη – γραμμικού δυναμικού συστήματος (1.54), με συνάρτηση Lyapunov την (1.55).

Για την (1.55) ισχύει ότι

$$V(0,0) = 0 \tag{1.56}$$

$$V(x_1,x_2) > 0, \forall (x_1,x_2) \neq 0 \in \mathbb{R}^2 \tag{1.57}$$

Επιπλέον έχουμε

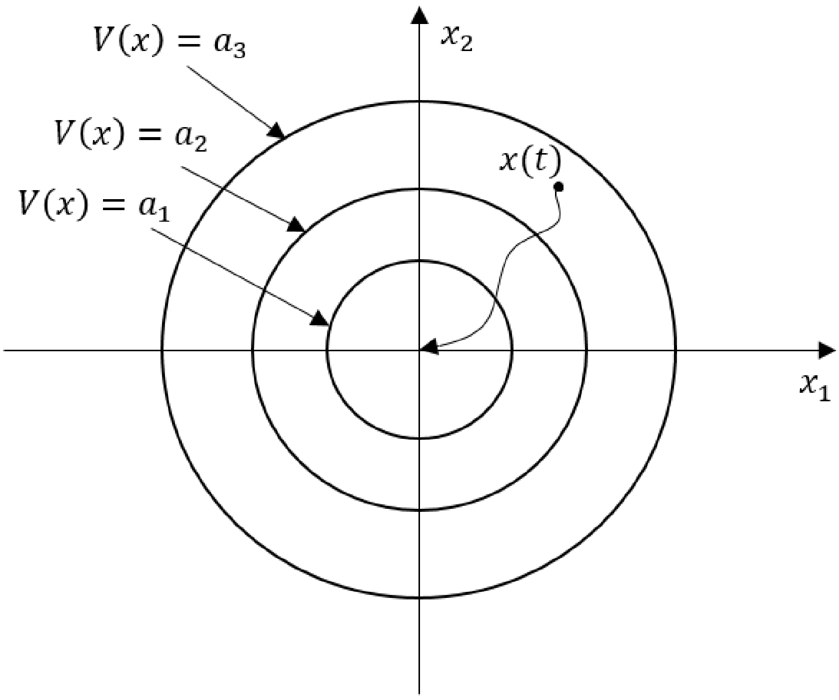
$$\begin{aligned}\dot{V}(x_1,x_2) &= 2\left[\frac{x_1}{1 + x_1^2} - \frac{x_1^3}{(1 + x_1^2)^2}\right]\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 \\ &= -\frac{2x_1^4}{(1 + x_1^2)^2} - \frac{2x_2^2}{1 + x_2^2} \\ &< 0 \ \forall (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2\end{aligned} \tag{1.58}$$

Άρα, από τις (1.56), (1.57), (1.58), προκύπτει ότι το μη – γραμμικό δυναμικό σύστημα (1.54) ασυμπτωτικά ευσταθές■

1.4 Φυσική ερμηνεία συνάρτησης Lyapunov

Μπορούμε να θεωρήσουμε την συνάρτηση Lyapunov, όπως ορίστηκε από τις (1.21) – (1.23), ως μια γενικευμένη συνάρτηση ενέργειας για το μη-γραμμικό δυναμικό σύστημα (1.1). Συγκεκριμένα, θεωρούμε τις ενεργειακές στάθμες (επιφάνειες) Lyapunov $V(x) = \alpha$, για αρκούντως μικρές σταθερές $\alpha > 0$, ως σταθερές ενεργειακές στάθμες μιας περιοχής $D_\beta \subset B_\varepsilon(0)$ του (1.1), με $V(x_0) = \beta$. Τότε, από την απαίτηση $\dot{V}(x) \leq 0$ του θεωρήματος Lyapunov έπεται ότι οι τροχιές του (1.1) κινούνται από μια ενεργειακή στάθμη προς μια κατώτερη ενεργειακή στάθμη και καταλήγουν σε μια περιοχή $B_\varepsilon(0)$ του 0, για οποιαδήποτε αρχική συνθήκη $x_0 \in D_\beta$. Αν δε, ισχύει πως $\dot{V}(x) < 0$, τότε οι ενεργειακές στάθμες του συστήματος καταλήγουν στο 0, ενώ η τροχιά του συστήματος θα τείνει ασυμπτωτικά στο $0 \in \mathbb{R}^n$.

Για δυναμικά συστήματα στο επίπεδο, η συνάρτηση Lyapunov επεξηγείται ως εξής: Έστω $x(t, x_0)$ λύση του (1.1). Αν η λύση «διασχίσει» την ενεργειακή στάθμη $V(x_0) = \beta$, τότε η γωνία που σχηματίζεται μεταξύ του κανονικού καθέτου διανύσματος του $V(x_0)$ και της παραγώγου της $x(t, x_0)$ στο $t = t_0$ θα είναι μεγαλύτερη από 90°, συνεπώς $\dot{V}(x_0) = V'(x_0)f(x_0) < 0$. Για να ισχύει αυτό σε κάθε σημείο, απαιτούμε $\dot{V}(x) = V'(x)f(x) < 0$ για κάθε $x \in D_\beta$. Συνεπώς, η $V\big(x(t, x_0)\big)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση ως προς τον χρόνο. Άρα, η $\dot{V}\big(x(t, x_0)\big)$, κατά την λύση $x(t, x_0)$ του (1.1), θα είναι αρνητική στο D_β.



Σχήμα 1.3: Η λύση $x(x_0, t)$ του (1.1) κινείται από μεγαλύτερη προς μικρότερη στάθμη Lyapunov ($\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$).

1.5 Ολική Ευστάθεια

Σε αυτήν την ενότητα, αναπτύσσουμε την κατά Lyapunov ολική ασυμπτωτική ευστάθεια (global asymptotic stability). Αρχικά, παραθέτουμε τον ορισμό του πεδίου έλξης για το μη – γραμμικό δυναμικό σύστημα (1.1):

Ορισμός 1.9: Έστω ότι η μηδενική λύση του (1.1) είναι ασυμπτωτικά ευσταθής. Τότε, το πεδίο έλξης (domain of attraction) $D_0 \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^n$ με $0 \in D_0$ του (1.1) ορίζεται ως:

$$D_0 \coloneqq \{x_0 \in D\colon \text{αν } x(0) = x_0, \text{τότε} \lim_{t\to\infty} x\big(t, x(0)\big) = 0\} \tag{1.59}$$

Στην συνέχεια, μελετάμε την εκτίμηση του πεδίου έλξης του (1.1), όπως προκύπτει από την απόδειξη του Θεωρήματος 1.6 και αναφέρουμε τις συνθήκες που επιτρέπουν την βελτιστοποίηση της εκτίμησης αυτής. Τέλος, αναλύουμε την περίπτωση κατά την οποία το πεδίο έλξης ταυτίζεται με τον χώρο $\mathbb{R}^n$.

1.5.1 Πεδίο έλξης μη – γραμμικών δυναμικών συστημάτων

Το θεώρημα Lyapunov μπορεί να παρέχει μια εκτίμηση του πεδίου έλξης του μη – γραμμικού συστήματος (1.1). Πρέπει να σημειωθεί ότι οι συνθήκες (1.22) και (1.24) δεν είναι επαρκείς για να εξασφαλίσουν ότι κάθε λύση που ξεκινάει στο $D \subseteq \mathbb{R}^n$, όπου D μια γειτονιά του 0, παραμένει στο D για κάθε $t \geq 0$, ότι δηλαδή

$$x(0) \in D \Rightarrow x\big(t, x(0)\big) \in D \ \forall t \geq 0 \tag{1.60}$$

Εντούτοις, εξασφαλίζουν ότι κάθε αναλλοίωτο σύνολο του (1.1) που ανήκει στο D, ανήκει επίσης στο πεδίο έλξης D_0 του (1.1). Όπως είδαμε στην απόδειξη του θεωρήματος Lyapunov, αν υπάρχει μια συνάρτηση Lyapunov $V: D \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν οι (1.21), (1.22), (1.24) και αν το αναλλοίωτο σύνολο $D_\beta = \{x \in D : V(x) \leq \beta\}$ είναι φραγμένο, τότε κάθε τροχιά του (1.1) που ξεκινάει στο D_β, συγκλίνει στο 0 για $t \to \infty$, δηλαδή

$$x(0) = x\big(0, x(0)\big) \in D_\beta \Rightarrow x\big(t, x(0)\big) \xrightarrow{t \to \infty} 0 \tag{1.61}$$

Συνεπώς το D_β είναι μια εκτίμηση (υποσύνολο) του πεδίου έλξης του (1.1).

Το $\beta > 0$ πρέπει να ορίζεται έτσι ώστε το D_β να είναι φραγμένο. Πράγματι, αφού η $V(\cdot)$ είναι συνεχής και θετικά ορισμένη, θα υπάρχει πάντα ένα αρκούντως μικρό $\beta > 0$ τέτοιο ώστε η στάθμη Lyapunov $V(x) \equiv \beta$ να είναι φραγμένη και ως εκ τούτου το D_β να είναι φραγμένο, καθώς $D_\beta \subset B_\varepsilon(0)$ για κάποιο $\varepsilon > 0$. Ανάλογα με την κατασκευή της $V(\cdot)$ όμως, όσο το β αυξάνεται, η στάθμη-Lyapunov $V(x) \equiv \beta$ μπορεί να γίνει μη – φραγμένη, άρα το D_β να γίνει μη-φραγμένο. Απαιτώντας $\beta < \inf\limits_{\|x\| \geq \varepsilon} V(x)$, εξασφαλίζουμε ότι το D_β θα είναι υποσύνολο του $B_\varepsilon(0)$. Συνεπώς, αν $\beta < \gamma$, όπου

$$\gamma \coloneqq \lim_{\varepsilon \to \infty} \inf_{\|x\| \geq \varepsilon} V(x) < \infty \tag{1.62}$$

και $\gamma > 0$, τότε το D_β είναι σίγουρα φραγμένο.

Το κίνητρο για την κατασκευή του πεδίου έλξης ενός μη – γραμμικού δυναμικού συστήματος, είναι ότι, ακόμα και αν η παράγωγος της συνάρτησης Lyapunov είναι αρνητική στο D (άρα οι τροχιές της κινούνται από μια ενεργειακή στάθμη προς μια χαμηλότερη), δεν είναι βέβαιο ότι η τροχιά του δυναμικού συστήματος που ξεκινάει από ένα υποσύνολο D του χώρου θα παραμείνει στο D (Σχήμα 1.4). Ακολουθεί ένας τρόπος εκτίμησης υποσυνόλου του πεδίου έλξης.

Έστω συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση $V: D \to \mathbb{R}$, όπου $D \subseteq \mathbb{R}^n$ μια γειτονιά του 0, που πληροί τα (1.21), (1.22), (1.24) και έστω

$$D_\beta = \{x \in D : V(x) \leq \beta\}, \text{ με } 0 \in D_\beta \tag{1.63}$$

Λόγω της (1.24), κάθε τροχιά που ξεκινάει από το D_β, κινείται προς κατώτερη ενεργειακή στάθμη και συνεπώς δεν μπορεί να βγει εκτός του D_β. Έτσι, το D_β είναι μια εκτίμηση του πεδίου έλξης του μη – γραμμικού δυναμικού συστήματος

(1.1). Για να βελτιστοποιήσουμε την εκτίμησή μας, θα πρέπει να μεγιστοποιήσουμε το β, απαιτώντας $D_\beta \subseteq D$. Έτσι, ορίζουμε:

$$V_\Gamma \coloneqq \sup\{\beta > 0 \colon D_\beta \subseteq D\} \tag{1.64}$$

έτσι ώστε το σύνολο

$$D_A \coloneqq \{x \in D \colon V(x) \leq V_\Gamma\} \tag{1.65}$$

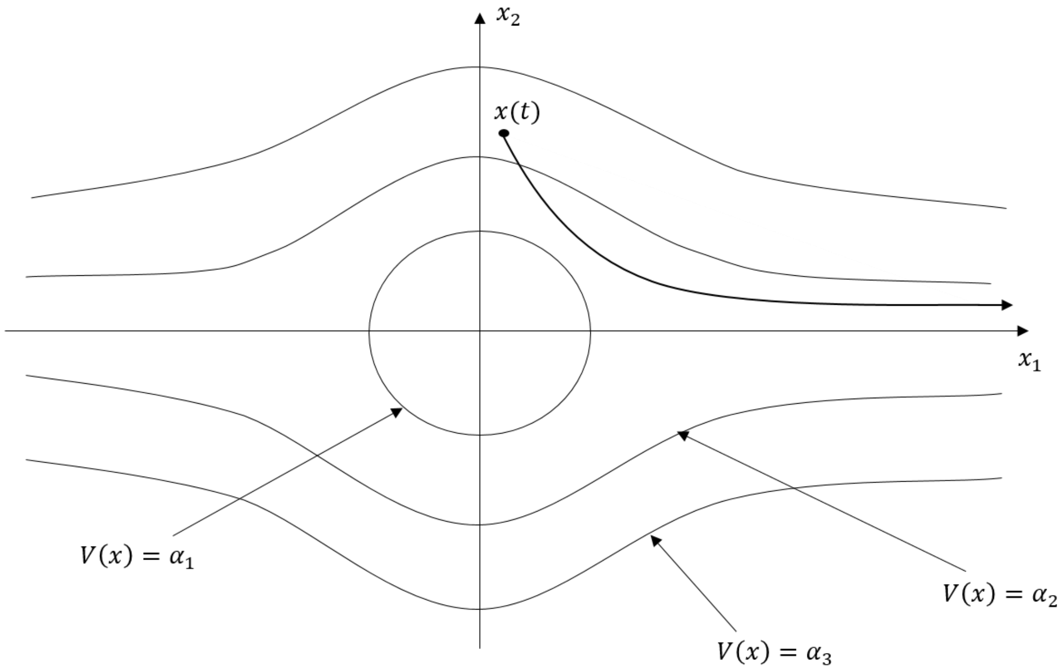
να είναι υποσύνολο του πεδίου έλξης του (1.1), εφόσον

$$\dot{V}(x) < 0 \ \forall x \in D_A \backslash \{0\} \subseteq D \backslash \{0\}. \tag{1.66}$$

Εν συνεχεία, μελετάμε υπό ποιες συνθήκες το πεδίο έλξης είναι ολόκληρος ο χώρος $\mathbb{R}^n$. Αυτό αφορά την περίπτωση κατά την οποία η τροχιά $x\big(t, x(0)\big)$ του (1.1) προσεγγίζει την αρχή των αξόνων καθώς $t \to \infty$, για κάθε $x(0) \in \mathbb{R}^n$ ή, ισοδύναμα, όταν το (1.1) είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές. Ολική ασυμπτωτική ευστάθεια υπάρχει αν κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ ανήκει στο συμπαγές σύνολο D_β για κάποιο $\beta > 0$. Για να ισχύει αυτό, προφανώς απαιτούμε $D = \mathbb{R}^n$ και το D_β να είναι φραγμένο για κάθε $\beta > 0$. Δηλαδή, απαιτούμε για κάθε $\beta > 0$ να υπάρχει $r > 0$ τέτοιο ώστε αν $x \in D_\beta$ τότε $x \in B_r(0)$ ή, ισοδύναμα, $V(x) > \beta$ για κάθε $x \notin B_r(0)$. Η συνθήκη που εξασφαλίζει πως το D_β είναι φραγμένο για κάθε $\beta > 0$ είναι η:

$$V(x) \to \infty \text{ για } \|x\| \to \infty \tag{1.67}$$

Μια συνάρτηση που ικανοποιεί την συνθήκη (1.67) ονομάζεται proper ή radially unbounded.



Σχήμα 1.4: Γραφική αναπαράσταση της αναγκαιότητας της συνθήκης radial unboundedness για ολική ασυμπτωτική ευστάθεια με ενεργειακές στάθμες $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$ της συνάρτησης Lyapunov $V(x) = \frac{x_1^2}{1+x_1^2} + x_2^2$. Η λύση $x(x_0, t)$ του (1.1), παρότι κινείται από ενεργειακή στάθμη σε μικρότερη ενεργειακή στάθμη,

δεν καταλήγει στο 0, διότι οι ενεργειακές στάθμες Lyapunov $V(x) = \alpha_2$ και $V(x) = a_3$ δεν είναι φραγμένες.

1.5.2 Θεώρημα ολικής ασυμπτωτικής ευστάθειας Lyapunov

Ακολούθως, διατυπώνουμε το θεώρημα Lyapunov για ολική ασυμπτωτική ευστάθεια (global asymptotic stability)

<u>Θεώρημα 1.8 (Θεώρημα ολικής ασυμπτωτικής ευστάθειας Lyapunov):</u>

Έστω μη – γραμμικό δυναμικό σύστημα (1.1) και έστω πως υπάρχει συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση $V: \mathbb{R}^{\mathrm{n}} \to \mathbb{R}$ που πληροί τις εξής συνθήκες:

$$V(0) = 0 \tag{1.68}$$

$$V(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}} \backslash \{0\} \tag{1.69}$$

$$\dot{V}(x) = V'(x) f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}} \backslash \{0\} \tag{1.70}$$

$$V(x) \to \infty \text{ για } \|x\| \to \infty \tag{1.71}$$

Τότε η μηδενική λύση $x(t) \equiv 0$ είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθής. Αν υπάρχουν $\alpha, \beta, \varepsilon, p \in \mathbb{R}$ με $\alpha, \beta, \varepsilon > 0$ και $p \geq 1$ τέτοια ώστε η $V: \mathbb{R}^{\mathrm{n}} \to \mathbb{R}$ να ικανοποιεί

$$\alpha \|x\|^p \leq V(x) \leq \beta \|x\|^p, x \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}} \tag{1.72}$$

$$V'(x) f(x) \leq -\varepsilon V(x), x \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}} \tag{1.73}$$

τότε η μηδενική λύση του (1.1) είναι ολικά εκθετικά ευσταθής.

<u>Απόδειξη:</u> Έστω $x(0) \in \mathbb{R}^n$ και έστω $\beta \coloneqq V(x_0)$. Η συνθήκη για radial unboundedness μας εξασφαλίζει πως για οποιοδήποτε β, υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε, για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ με $\|x\| \geq \varepsilon$, να ισχυει $V(x) > \beta$. Συνεπώς, έπεται από την (1.70) πως $V\big(x(t)\big) \leq V(x_0) = \beta$ για κάθε $t \geq 0$, οπότε έχουμε πως $x(t) \in B_\varepsilon(0)$, $t \geq 0$. Το υπόλοιπο της απόδειξης ταυτίζεται με την απόδειξη του Θεωρήματος 1.6 □

<u>Παράδειγμα 1.3:</u> Έστω μη – γραμμικό δυναμικό σύστημα

$$\dot{x}_1(t) = -x_1^3(t)\big(x_1^2(t) + x_2^2(t)\big)$$

$$\dot{x}_2(t) = -x_2^3(t)(x_1^2(t) + x_2^2(t)) \tag{1.74}$$

με $$x(0) = \big(x_1(0), x_2(0)\big) = (x_{10}, x_{20}) = x_0, t \geq 0 \tag{1.75}$$

και συνάρτηση $V: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, με

$$V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 \tag{1.76}$$

Εξετάζουμε την ευστάθεια της μηδενικής λύσης $x(t) \equiv 0$ του μη – γραμμικού δυναμικού συστήματος (1.74) με συνάρτηση Lyapunov την (1.75).

Για την (1.75) ισχύει ότι

$$V(0,0) = 0 \tag{1.77}$$

$$V(x_1, x_2) > 0, \forall (x_1, x_2) \neq (0,0) \tag{1.78}$$

και

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_1, x_2) &= 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 \\ &= 2x_1\big(-x_1^3(x_1^2 + x_2^2)\big) + 2x_2\big(-x_2^3(x_1^2 + x_2^2)\big) \\ &= -2x_1^4(x_1^2 + x_2^2) - 2x_2^4(x_1^2 + x_2^2) \\ &= -2(x_1^4 + x_2^4)(x_1^2 + x_2^2) < 0, \forall x \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\} \end{aligned} \tag{1.79}$$

Επίσης, ισχύει ότι

$$V(x) \xrightarrow{\|x\| \to \infty} \infty \tag{1.80}$$

Άρα, από τις (1.77 – 1.80) προκύπτει ότι το μη – γραμμικό δυναμικό σύστημα (1.74 – (1.75) είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές.■

2 Θεωρήματα ευστάθειας αναλλοίωτων συνόλων

2.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο αναφέρουμε το θεώρημα Barbashin – Krasovskii – LaSalle, καθώς και δυο θεωρήματα που το επεκτείνουν. Τα θεωρήματα αυτά, γνωστά και ως θεωρήματα ευστάθειας αναλλοίωτων συνόλων, εκμεταλλεύονται τις ιδιότητες των αναλλοίωτων συνόλων και εξασφαλίζουν ασυμπτωτική ευστάθεια, «χαλαρώνοντας» την συνθήκη (1.24) του Θεωρήματος 1.6 για αυστηρά αρνητική παράγωγο της συνάρτησης Lyapunov. Προτού διατυπώσουμε το θεώρημα Barbashin – Krasovskii – LaSalle, παραθέτουμε ένα θεώρημα.

<u>Θεώρημα 2.1:</u> Έστω το μη – γραμμικό δυναμικό σύστημα $\dot{x}(t) = f\big(x(t)\big)$ με αρχική συνθήκη $x(0) = x_0$. Έστω επίσης ότι $x(t) \in D$, όπου D ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, $f: D \to \mathbb{R}^n$ Lipschitz – συνεχής και ότι η λύση $x(t, x_0)$ είναι φραγμένη για κάθε $t \geq 0$. Τότε, το θετικό οριακό σύνολο $\omega(x_0)$ του $x(t, x_0)$, $t \geq 0$ είναι μη κενό, συμπαγές, αναλλοίωτο και ισχύει:

$$x(t, x_0) \to \omega(x_0) \text{ για } t \to \infty \tag{2.1}$$

<u>Απόδειξη:</u> Έστω $x(t, x_0), t \geq 0$ η λύση του (1.1), με αρχική συνθήκη $x(0) = x_0$. Εφόσον η $x(t, x_0): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι φραγμένη για κάθε $t \geq 0$, έπεται από το Θεώρημα 1.1 ότι κάθε ακολουθία που ανήκει στις θετικές τροχιές

$$\mathcal{O}_{x_0}^+ \coloneqq \{x(t, x_0): t \in (0, \infty)\} \tag{2.2}$$

έχει τουλάχιστον ένα σημείο συσσώρευσης $p \in D$, καθώς $t \to \infty$, συνεπώς

$$\omega(x_0) \neq \emptyset \tag{2.3}$$

Έστω τώρα σημείο $p \in \omega(x_0)$ τέτοιο ώστε να υπάρχει μια αύξουσα, μη – φραγμένη ακολουθία $\{t_n\}_{n=0}^{\infty}$ με $t_0 = 0$, με $\lim\limits_{n\to\infty} x(t_n) = p$. Επειδή η $x(t_n)$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη, έπεται ότι το οριακό σημείο p είναι φραγμένο, συνεπώς το $\omega(x_0)$ είναι φραγμένο.

Για να δείξουμε ότι το $\omega(x_0)$ είναι κλειστό, έστω ακολουθία $\{p_i\}_{i=0}^{\infty} \subset \omega(x_0)$ με $\lim\limits_{i\to\infty} p_i = p$. Τώρα, επειδή $p_i \xrightarrow{i\to\infty} p$, για κάθε $\varepsilon > 0$ θα υπάρχει ένα $i > 0$ τέτοιο ώστε

$$\|p - p_i\| < \varepsilon/2 \tag{2.4}$$

Επίσης, επειδή $p_i \in \omega(x_0)$, υπάρχει $t \geq T$, όπου $T < \infty$ αυθαίρετο, τέτοιο ώστε

$$\|p_i - x(t)\| < \varepsilon/2 \tag{2.5}$$

Από (2.4) και (2.5), έπεται ότι

$$\|p - x(t)\| \leq \|p_i - x(t)\| + \|p - p_i\| < \varepsilon \tag{2.6}$$

άρα

$$p \in \omega(x_0) \tag{2.7}$$

Συνεπώς, κάθε σημείο συσσώρευσης του $\omega(x_0)$ είναι στοιχείο του $\omega(x_0)$, άρα το $\omega(x_0)$ είναι κλειστό. Επειδή το $\omega(x_0)$ είναι κλειστό και φραγμένο, είναι συμπαγές.

Για να δείξουμε ότι το $\omega(x_0)$ είναι θετικά αναλλοίωτο, έστω $p \in \omega(x_0)$ τέτοιο ώστε να υπάρχει μια αύξουσα μη – φραγμένη ακολουθία $\{t_n\}_{n=0}^{\infty}$ τέτοια ώστε $x(t_n) \xrightarrow{n\to\infty} p$. Στην συνέχεια, συμβολίζουμε με $x(t_n, x_0)$ την λύση $x(t_n)$ του (1.1), με αρχική συνθήκη $x(0) = x_0$. Παρατηρούμε ότι η $f: D \to \mathbb{R}^n$ του (1.1) είναι Lipschitz – συνεχής στο D και πως η $x(t), t \geq 0$ είναι η μοναδική λύση του (1.1), συνεπώς θα ισχύει $x(t + t_n, x_0) = x\big(t, x(t_n, x_0)\big) = x(t, x(t_n))$ (ιδιότητα ημιομάδας). Έπειτα, επειδή $x(t), t \geq 0$ είναι συνεχής, έπεται ότι για $t + t_n \geq 0$,

$$\lim_{n\to\infty} x(t + t_n, x_0) = \lim_{n\to\infty} x(t, x(t_n)) = x(t, p) \tag{2.8}$$

συνεπώς $x(t, p) \in \omega(x_0)$. Έτσι

$$x\big(t, \omega(x_0)\big) \subseteq \omega(x_0), t \geq 0 \tag{2.9}$$

Συνεπώς το $\omega(x_0)$ είναι θετικά αναλλοίωτο.

Για να δείξουμε ότι το $\omega(x_0)$ είναι αναλλοίωτο, έστω $y \in \omega(x_0)$ τέτοιο ώστε να υπάρχει μια αύξουσα μη – φραγμένη ακολουθία $\{t_n\}_{n=0}^{\infty}$ τέτοια ώστε $x(t_n, x_0) \xrightarrow{n\to\infty} y$. Έπειτα, έστω $t \in [0, \infty)$ και παρατηρούμε ότι υπάρχει N τέτοιο ώστε $t_n > t, n \geq N$. Τότε, από την ιδιότητα της ημιομάδας έχουμε ότι $x\big(t, x(t_n - t, x_0)\big) = x(t_n, x_0) \xrightarrow{n\to\infty} y$. Από το Θεώρημα 1.2, προκύπτει ότι υπάρχει μια υπακολουθία $\{z_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ της ακολουθίας $z_n = x(t_n - t, x_0), n = N, N+1, \ldots$ τέτοια ώστε $z_{n_k} \to z \in D$ για $k \to \infty$. Εξ ορισμού έχουμε ότι $z \in \omega(x_0)$. Λόγω συνέχειας ισχύει ότι

$$\lim_{k\to\infty} x(t, z_{n_k}) = x(t, \lim_{k\to\infty} z_{n_k}) \tag{2.10}$$

συνεπώς $y = s(t, z)$, από το οποίο επάγεται ότι

$$\omega(x_0) \subseteq x\big(t, \omega(x_0)\big), t \in [0, \infty) \tag{2.11}$$

Από τις (2.9) και (2.11) προκύπτει ότι

$$x\big(t, \omega(x_0)\big) = \omega(x_0), t \geq 0 \tag{2.12}$$

δηλαδή το $\omega(x_0)$ είναι αναλλοίωτο.

Τέλος, για να δείξουμε ότι $x(t) \xrightarrow{t\to\infty} \omega(x_0)$, υποθέτουμε, προς εις άτοπον απαγωγή, ότι $x(t) \nrightarrow \omega(x_0)$ για $t \to \infty$. Σε αυτήν την περίπτωση, θα υπάρχει μια ακολουθία $\{t_n\}_{n=0}^{\infty}$, με $t_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$, τέτοια ώστε:

$$\inf_{p\in\omega(x_0)} \|x(t_n) - p\| > \varepsilon, n \in \overline{\mathbb{Z}}_+ \tag{2.13}$$

Εντούτοις, επειδή υποθέσαμε ότι η $x(t), t \geq 0$ είναι φραγμένη, η φραγμένη ακολουθία $\{x(t_n)\}_{n=0}^{\infty}$ περιέχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία $\{x(t_n^*)\}_{n=0}^{\infty}$ τέτοια ώστε $x(t_n^*) \to p^*$ για $n \to \infty$, το οποίο έρχεται σε αντίθεση με την (2.13). Συνεπώς $x(t) \xrightarrow{t\to\infty} \omega(x_0)$. □

Ακολουθεί η παρουσίαση και απόδειξη του θεωρήματος Barbashin – Krasovskii – LaSalle.

2.2 Θεώρημα Barbashin – Krasovskii – LaSalle

Θεώρημα 2.2 (Barbashin-Krasovskii-LaSalle): Έστω το μη – γραμμικό δυναμικό σύστημα (1.1), συμπαγές και θετικά αναλλοίωτο σύνολο $0 \in D_c \subset D$, όπου $D \subseteq \mathbb{R}^n$ μια περιοχή του 0, και συνάρτηση $V: D_c \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη τέτοια ώστε

$$V'(x)f(x) \leq 0 \; \forall x \in D_c \tag{2.14}$$

Έστω επίσης

$$\mathcal{R} \coloneqq \{x \in D_c : V'(x)f(x) = 0\} \tag{2.15}$$

Τότε, αν $\mathcal{M}$ είναι το μεγαλύτερο αναλλοίωτο υποσύνολο του $\mathcal{R}$, ισχύει:

$$\text{Αν } x(0) \in D_c, \text{τότε } x(t) = x\big(t, x(0)\big) \xrightarrow{t\to\infty} \mathcal{M} \tag{2.16}$$

Απόδειξη: Έστω $x(t),\ t \geq 0$ η λύση του μη – γραμμικού δυναμικού συστήματος (1.1) με αρχική συνθήκη $x(0) = x_0 \in D_c$. Επειδή $V'(x)f(x) \leq 0,\ x \in D_c$, έπεται πως

$$V\big(x(t)\big) - V\big(x(\tau)\big) = \int_\tau^t V'\big(x(s)\big)f\big(x(s)\big)ds \leq 0, t \geq \tau \tag{2.17}$$

οπότε

$$V\big(x(t)\big) \leq V\big(x(\tau)\big), \qquad \forall t \geq \tau \tag{2.18}$$

Από την (2.18) συνεπάγεται ότι η $V(x(t))$ είναι μια μη – αύξουσα συνάρτηση ως προς t. Έπειτα, επειδή η $V(\cdot)$ είναι συνεχής στο συμπαγές σύνολο D_c, είναι κάτω φραγμένη στο D_c, οπότε υπάρχει $\beta \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$V(x) \geq \beta, \qquad \forall x \in D_c \tag{2.19}$$

Άρα, λόγω συμπάγειας, υπάρχει το όριο

$$\alpha \coloneqq \lim_{t\to\infty} V\big(x(t)\big) \tag{2.20}$$

Επίσης, για κάθε $p \in \omega(x_0)$ υπάρχει αύξουσα μη – φραγμένη ακολουθία $\{t_n\}_{n=0}^{\infty}$ με $t_0 = 0$ και $t_n \to \infty$, τέτοια ώστε $x(t_n) \to p$, για $n \to \infty$. Επειδή η $V: D_c \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, ισχύει:

$$V(p) = V(\lim_{n\to\infty} x(t_n)) = \lim_{n\to\infty} V\big(x(t_n)\big) = \alpha \tag{2.21}$$

Άρα $V(p) = \alpha$ για κάθε $p \in \omega(x_0)$. Επειδή το D_c είναι συμπαγές και θετικά αναλλοίωτο, έπεται ότι η $x(t), t \geq 0$ είναι φραγμένη και συνεπάγεται από το Θεώρημα 2.1 πως το $\omega(x_0)$ είναι μη κενό, συμπαγές και αναλλοίωτο σύνολο. Συνεπώς, για κάθε $x \in \omega(x_0)$ έχουμε πως $V'(x)f(x) = 0$, οπότε

$$\omega(x_0) \subset \mathcal{M} \subset \mathcal{R} \subset D_c \tag{2.22}$$

Τέλος, επειδή $x(t) \to \omega(x_0)$ για $t \to \infty$, θα έχουμε πως $x(t) \to \mathcal{M}$ για $t \to \infty$. □

Η κατασκευή της $V(\cdot)$ στο Θεώρημα 2.2, μπορεί να εξασφαλίσει την ύπαρξη του συμπαγούς θετικά αναλλοίωτου συνόλου D_c. Συγκεκριμένα, αν το σύνολο

$$D_\beta = \{x \in D: V(x) \leq \beta\}, \qquad \beta > 0 \tag{2.23}$$

είναι φραγμένο και $\dot{V}(x) \leq 0, x \in D_\beta$, τότε μπορούμε να πάρουμε $D_c = D_\beta$. Όπως έχουμε ήδη δει στην ενότητα 1.5.2, αν η $V(\cdot)$ είναι θετικά ορισμένη, τότε το D_β είναι φραγμένο για αρκούντως μικρά $\beta > 0$. Επίσης, αν η $V(\cdot)$ είναι radially unbounded, τότε το D_β είναι φραγμένο για κάθε $\beta > 0$, ανεξάρτητα με το αν η $V(\cdot)$ είναι θετικά ορισμένη ή όχι.

Ακολουθεί ένα παράδειγμα στο οποίο εφαρμόζεται το Θεώρημα 2.2.

<u>Παράδειγμα 2.1:</u> Έστω μη – γραμμικό δυναμικό σύστημα

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= 2x_2^3(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -2x_1(t) - x_2(t) \end{aligned} \tag{2.24}$$

με $$x(0) = \big(x_1(0), x_2(0)\big) = (x_{10}, x_{20}) = x_0, \qquad t \geq 0$$

και συνάρτηση Lyapunov $V: D_c \to \mathbb{R}$, όπου το $D_c \subseteq \mathbb{R}^2$ μια γειτονιά του 0 το οποίο θα οριστεί στην συνέχεια, με

$$V(x_1, x_2) = x_1^2 + \frac{x_2^4}{2} \tag{2.25}$$

Μελετάμε την ευστάθεια της μηδενικής λύσης του (2.24), μέσω του Θεωρήματος 2.2.

Για την (2.25) ισχύει

$$V(0) = 0 \tag{2.26}$$

καθώς και ότι είναι proper, συνεπώς $D_c = \mathbb{R}^2$.

Επιπλέον,

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) = V'(x)f(x) &= 2x_1\dot{x}_1 2x_2^3\dot{x}_2 \\ &= 2x_1 2x_2^3 + 2x_2^3(-2x_1 - x_2) \\ &= 4x_1x_2^3 - 4x_1x_2^3 - 2x_2^4 \\ &= -2x_2^4 \leq 0, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^2 \end{aligned} \tag{2.27}$$

Συνεπώς, βάσει του Θεωρήματος Lyapunov, η μηδενική λύση είναι ευσταθής λύση του (2.24), αλλά όχι ασυμπτωτικά ευσταθής, καθώς για $x' \neq 0$, ισχύει $\dot{V}(x', 0) = 0$ και $(x', 0) \neq (0,0)$. Παρατηρούμε ότι

$$\dot{V}(x) = 0 \Leftrightarrow x_2 = 0 \tag{2.28}$$

Συνεπώς, η $\dot{V}(x)$ μηδενίζεται πάνω στην ευθεία $x_2 = 0$, άρα

$$\mathcal{R} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2: V'(x)f(x) = 0\} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2: x_2 \equiv 0\} \tag{2.29}$$

Οπότε, από την δεύτερη εξίσωση της (2.24) έχουμε:

$$x_2 = 0 \Rightarrow \dot{x}_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \tag{2.30}$$

Συνεπώς, το μοναδικό αναλλοίωτο υποσύνολο του $\mathcal{R}$ είναι το $\mathcal{M} = \{(0,0)\}$. Από το Θεώρημα 2.2, επειδή $x(0) \in D_c = \mathbb{R}^2$ έχουμε ότι

$$x(t, x_0) \xrightarrow{t \to \infty} \mathcal{M} \Rightarrow x(t, x_0) \xrightarrow{t \to \infty} 0 \tag{2.31}$$

Άρα η μηδενική λύση του μη – γραμμικού δυναμικού συστήματος (2.24) είναι ασυμπτωτικά ευσταθής.■

Άμεση απόρροια του Θεωρήματος 2.2 είναι το εξής πόρισμα:

Πόρισμα 2.1: Έστω το μη – γραμμικό δυναμικό σύστημα (1.1) και έστω συμπαγές και θετικά αναλλοίωτο σύνολο $D_c \subset D$, όπου $D \subseteq \mathbb{R}^n$ μια γειτονιά του 0, τέτοιο ώστε το $0 \in \mathbb{R}^n$ να ανήκει στο εσωτερικό του D_c. Έστω επίσης ότι υπάρχει συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση $V: D_c \to \mathbb{R}$ με

$$\begin{gathered} V(0) = 0 \\ V(x) > 0, x \neq 0 \end{gathered} \tag{2.32}$$

και
$$V'(x)f(x) \leq 0, x \in D_c$$

Επιπλέον, έστω ότι το σύνολο $\mathcal{R}$, όπως ορίστηκε στην (2.15), δεν περιέχει κάποιο αναλλοίωτο σύνολο πέραν του $\{0\}$. Τότε, η μηδενική λύση του (1.1) είναι ασυμπτωτικά ευσταθής και το D_c είναι υποσύνολο του πεδίου έλξης του (1.1).

Απόδειξη: Η Lyapunov – ευστάθεια της μηδενικής λύσης $x(t) \equiv 0$ του (1.1) προκύπτει από το Θεώρημα 1.6, καθώς $V'(x)f(x) \leq 0,\ x \in D_c$. Από το Θεώρημα 2.2 έπεται ότι αν $x_0 \in D_c$, τότε $\omega(x_0) \subseteq \mathcal{M}$, όπου $\mathcal{M}$ είναι το μεγαλύτερο αναλλοίωτο σύνολο που ανήκει στο $\mathcal{R}$, συνεπώς $\mathcal{M} = \{0\}$. Έτσι, $x(t, x_0) \to \mathcal{M} = \{0\}$ για $t \to \infty$, το οποίο αποδεικνύει την ασυμπτωτική ευστάθεια της μηδενικής λύσης του (1.1). □

Σημείωση 2.1: Το μη – γραμμικό δυναμικό σύστημα (2.24) με συνάρτηση Lyapunov την (2.25) στο Παράδειγμα 2.1, πληροί τις προϋποθέσεις του Πορίσματος 2.1, με $D_c = \mathbb{R}^2$. Συνεπώς, αποδεικνύεται μέσω του Πορίσματος 2.1 ότι η μηδενική λύση του μη – γραμμικού δυναμικού συστήματος (2.24) είναι ασυμπτωτικά ευσταθής.

Θεώρημα 2.3: Έστω το μη – γραμμικό δυναμικό σύστημα (1.1) με αρχική συνθήκη $x(0) = x_0$ και ότι υπάρχει συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση $V: \mathbb{R}^{\mathrm{n}} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε:

$$V(0) = 0 \tag{2.33}$$

$$V(x) > 0, x \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}, x \neq 0 \tag{2.34}$$

$$V'(x)f(x) \leq 0, x \in \mathbb{R}^n \tag{2.35}$$

Επίσης έστω σύνολο $\mathcal{R} \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}: V'(x)f(x) = 0\}$ και $\mathcal{M}$ το μεγαλύτερο αναλλοίωτο υποσύνολο στο $\mathcal{R}$. Τότε όλες οι λύσεις $x(t, x_0),\ t \geq 0$ του (1.1) που είναι φραγμένες, τείνουν στο $\mathcal{M}$ καθώς $t \to \infty$.

Απόδειξη: Έστω $x_0 \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε η τροχιά $x(t, x_0), t \geq 0$ του (1.1) να είναι φραγμένη. Επιλέγοντας $D_c = \overline{\mathcal{O}_x^+}$, έχουμε από το Θεώρημα 2.2 ότι $x(t, x) \to \mathcal{M}$ για $t \to \infty$. □

Τέλος, παρουσιάζουμε ένα θεώρημα το οποίο διασφαλίζει ολική ασυμπτωτική ευστάθεια για το (1.1).

2.3 Θεώρημα Ολικής Ασυμπτωτικής Ευστάθειας Αναλλοίωτων Συνόλων

Θεώρημα 2.4: Έστω το μη – γραμμικό δυναμικό σύστημα (1.1) και ότι υπάρχει συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση $V: \mathbb{R}^{\mathrm{n}} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε:

$$V(0) = 0 \tag{2.36}$$

$$V(x) > 0, x \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}, x \neq 0 \tag{2.37}$$

$$V'(x)f(x) \leq 0, x \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}} \tag{2.38}$$

$$V(x) \to \infty \text{ καθώς } \|x\| \to \infty \tag{2.39}$$

Επίσης έστω πως το σύνολο $R \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}: V'(x)f(x) = 0\}$ δεν περιέχει άλλο αναλλοίωτο σύνολο πέραν του $\{0\}$. Τότε η μηδενική λύση του (1.1) είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθής.

Απόδειξη: Επειδή ισχύουν οι (2.36) – (2.38), έπεται από το Θεώρημα 1.6 πως η μηδενική λύση του (1.1) είναι Lyapunov – ευσταθής, ενώ η συνθήκη (2.39) για radial unboundedness εξασφαλίζει πως όλες οι λύσεις του (1.1) είναι φραγμένες. Από το Θεώρημα 2.3 συνεπάγεται ότι $x(t) \to \mathcal{M}$ για $t \to \infty$. Εντούτοις, το $\mathcal{R}$ δεν περιέχει κάποιο αναλλοίωτο σύνολο πέραν του $\{0\}$, οπότε έχουμε $x(t) \xrightarrow{t\to\infty} 0$, συνεπώς η μηδενική λύση είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθής. □

Παράδειγμα 2.2: Στο Παράδειγμα 2.1, είδαμε ότι το μοναδικό αναλλοίωτο υποσύνολο του $\mathcal{R} = \{x \in D_c: V'(x)f(x) = 0\}$ είναι το $\mathcal{M} = \{0\}$ και για την (2.28) ισχύει ότι $D_c = \mathbb{R}^2$ και

$$V(x) = x_1^2 + \frac{x_2^4}{2} \xrightarrow{\|x\|\to\infty} \infty \tag{2.40}$$

Συνεπώς η μηδενική λύση του μη – γραμμικού δυναμικού συστήματος (2.24) είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθής. ■

Τα Θεωρήματα 2.2, 2.3 και 2.4 είναι γνωστά ως θεωρήματα αναλλοίωτων συνόλων (invariant set theorems). Εφόσον για την τοπική ασυμπτωτική ευστάθεια η V ορίζεται σε ένα συμπαγές θετικά αναλλοίωτο σύνολο D_c, το D_c προσφέρει μια εκτίμηση για το πεδίο έλξης του (1.1), το οποίο δεν είναι κατ' ανάγκην της μορφής

$$D_A \coloneqq \{x \in D: V(x) \leq V_\Gamma\} \tag{2.41}$$

με

$$V_\Gamma \coloneqq \sup\{\beta > 0: D_\beta \subseteq D\} \tag{2.42}$$

Τέλος, σε αντίθεση με το Θεώρημα Lyapunov, το Θεώρημα Barbashin – Krasovskii – LaSalle δεν προϋποθέτει η παράγωγος Lyapunov να είναι αυστηρά αρνητική για την ασυμπτωτική ευστάθεια (τοπική ή ολική).

3 Κατασκευή συναρτήσεων Lyapunov

3.1 Εισαγωγή

Όπως έχουμε δει μέχρι στιγμής, βασική προϋπόθεση τόσο στο Θεώρημα Lyapunov, όσο και στα Θεωρήματα αναλλοίωτων συνόλων, είναι η εύρεση μιας κατάλληλης συνάρτησης Lyapunov. Για συστήματα τα οποία έχουν φυσική ερμηνεία ενέργειας, όπως για παράδειγμα το εκκρεμές, η εύρεση μιας συνάρτησης Lyapunov είναι εν γένει ευθεία, καθώς ως συνάρτηση Lyapunov μπορεί να χρησιμοποιηθεί η συνάρτηση ενέργειας του συστήματος. Εντούτοις, σε περιπτώσεις δυναμικών συστημάτων τα οποία δεν αντιστοιχούν σε φυσικό φαινόμενο με γνωστή συνάρτηση ενέργειας, η επιλογή μιας κατάλληλης συνάρτησης Lyapunov δεν είναι προφανής. Για να αντιμετωπιστεί αυτή η δυσκολία, έχουν αναπτυχθεί συστηματικές μέθοδοι κατασκευής συναρτήσεων Lyapunov. Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζουμε τέσσερις εξ αυτών των μεθόδων.

3.2 Μέθοδος Variable gradient

Σε αυτήν την μέθοδο κατασκευάζουμε μια συγκεκριμένη μορφή κάποιας (άγνωστης) συνάρτησης και ολοκληρώνοντάς την, καταλήγουμε σε μια συνάρτηση Lyapunov.

Έστω συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση $V: D \to \mathbb{R}$, όπου $D \subseteq \mathbb{R}^n$ μια γειτονιά της λύσης του μη – γραμμικού δυναμικού συστήματος (1.1) και έστω

$$g(x) = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T \tag{3.1}$$

Η παράγωγος της $V(x)$ πάνω στις τροχιές του μη-γραμμικού δυναμικού συστήματος (1.1) δίνεται από:

$$\dot{V}(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i}\dot{x}_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x)$$

$$= \left[\frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n}\right] \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix} = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) \overset{(3.1)}{\Longrightarrow}$$

$$\dot{V}(x) = g^T(x) f(x) \tag{3.2}$$

Σκοπός μας είναι να κατασκευάσουμε την συνάρτηση $g(x)$ έτσι ώστε να είναι θετικά ορισμένη και να ισχύει

$$\dot{V}(x) = g^T(x) f(x) < 0, x \in D, x \neq 0 \tag{3.3}$$

Από την (3.1) έχουμε ότι η $V(x)$ μπορεί να υπολογιστεί μέσω του επικαμπύλιου ολοκληρώματος

$$V(x) = \int_0^x g^T(s) ds = \int_0^x \sum_{i=1}^{n} g_i(s) ds_i \tag{3.4}$$

όπου το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι ανεξάρτητο της διαδρομής, συνεπώς μπορούμε να ολοκληρώσουμε το (3.4) σε οποιαδήποτε διαδρομή η οποία ξεκινάει από την αρχή των αξόνων και καταλήγει στο $x \in \mathbb{R}^n$. Επιλέγουμε μια πορεία κατασκευασμένη από ευθύγραμμα τμήματα $s_i, i = 1, .., n$ (line segments) παράλληλα στους άξονες, οπότε από την (3.4) έχουμε

$$\begin{aligned} V(x) = &\int_0^{x_1} g_1(s_1, 0, \dots, 0) ds_1 + \int_0^{x_2} g_2(x_1, s_2, \dots, 0) ds_2 \\ &+ \int_0^{x_3} g_3(x_1, x_2, s_3, \dots, 0) ds_3 + \cdots + \\ &+ \int_0^{x_n} g_n(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, s_n) ds_n \end{aligned} \tag{3.5}$$

Χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό

$$s = \sigma x, \quad \sigma \in [0,1] \tag{3.6}$$

στην (3.5) έχουμε:

$$V(x) = \int_0^1 g^T(\sigma x) x d\sigma = \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} g_i(\sigma x) x_i \, d\sigma \tag{3.7}$$

Εν συνεχεία, θα δείξουμε ότι η $g(x)$ είναι παράγωγος μιας πραγματικής συνάρτησης $V: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ αν και μόνο αν η Ιακωβιανή της $\partial g / \partial x$ είναι συμμετρική.

<u>Πρόταση 3.1:</u> Η συνάρτηση $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι gradient vector μιας βαθμωτής συνάρτησης $V: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ αν και μόνο αν

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_j} = \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \ , \quad i, j = 1, \dots, n \tag{3.8}$$

<u>Απόδειξη:</u> Προφανώς ισχύει:

$$g^T(x) = \frac{\partial V}{\partial x} \Leftrightarrow g_i(x) = \frac{\partial V}{\partial x_i} \tag{3.9}$$

<u>Απόδειξη " $\Leftarrow$ ":</u>

Ισχύει ότι

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 V}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial g_j}{\partial x_i}, i, j = 1, \dots, n \tag{3.10}$$

Συνεπώς η αναγκαιότητα αποδεικνύεται άμεσα.

<u>Απόδειξη "$\Rightarrow$":</u>

Υποθέτουμε πως $\frac{\partial g_i}{\partial x_j} = \frac{\partial g_j}{\partial x_i}, i, j = 1, \dots, n$ και ορίζουμε την $V(x)$ ως επικαμπύλιο ολοκλήρωμα:

$$V(x) = \int_0^1 g^T(\sigma x) x d\sigma = \int_0^1 \sum_{j=1}^{n} g_j(\sigma x) x_j d\sigma \tag{3.11}$$

Έτσι,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial x_i} &= \int_0^1 \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(\sigma x) x_j \sigma d\sigma + \int_0^1 g_i(\sigma x) d\sigma \\
&=^{3.8} \int_0^1 \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\sigma x) x_j \sigma d\sigma + \int_0^1 g_i(\sigma x) d\sigma \\
&= \int_0^1 \frac{d\big(\sigma g_i(\sigma x)\big)}{d\sigma} d\sigma \\
&= g_i(x), \qquad i = 1, \dots, n
\end{aligned} \tag{3.12}
$$

από το οποίο επάγεται ότι $g^T(x) = \frac{\partial V}{\partial x}$ □

Συνεπώς, έχουμε δείξει ότι επιλέγοντας $g(x)$ τέτοια ώστε να πληροί την (3.3) και συγκεκριμένα να ισχύει $g^T(x)f(x) < 0, x \in D, x \neq 0$, μπορούμε, βάσει της Πρότασης 3.1, να υπολογίσουμε την $V(x)$ μέσω του επικαμπύλιου ολοκληρώματος (3.11).

<u>Παράδειγμα 3.1:</u> Κατασκευάζουμε, μέσω της μεθόδου Variable Gradient, συνάρτηση Lyapunov για το μη – γραμμικό δυναμικό σύστημα:

$$
\begin{gathered}
\dot{x}_1(t) = x_2(t) \\
\dot{x}_2(t) = -[2x_1(t) + 2x_1(t)] - \sin\big(x_1(t) + x_2(t)\big) \\
t \geq 0
\end{gathered} \tag{3.13}
$$

Με αρχική συνθήκη $x(0) = \big(x_1(0), x_2(0)\big) = (x_{10}, x_{20}) = x_0$.

Για να κατασκευάσουμε συνάρτηση Lyapunov, έστω συνάρτηση $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με

$$
g(x) = [g_1(x), g_2(x)] = [a_{11}x_1 + a_{12}x_2, a_{21}x_1 + a_{22}x_2]^T \tag{3.14}
$$

όπου $a_{ij} \in \mathbb{R}, i, j = 1,2$.

Η g πρέπει να πληροί την (3.8), συνεπώς

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial g_1}{\partial x_2} = \frac{\partial g_2}{\partial x_1} \Leftrightarrow \\
\frac{\partial(a_{11}x_1 + a_{12}x_2)}{\partial x_2} = \frac{\partial(a_{21}x_1 + a_{22}x_2)}{\partial x_1} \Leftrightarrow \\
a_{12} = a_{21}
\end{gathered}
$$

Θέτουμε

$$
a_{12} = a_{21} = \beta
$$

Επιπλέον, η g πρέπει να ικανοποιεί την (3.3), οπότε

$$
\begin{aligned}
\dot{V}(x) &= g^T(x)f(x) \\
&= [a_{11}x_1 + \beta x_2, \beta x_1 + a_{22}x_2] \begin{bmatrix} x_2 \\ -(x_1 + x_2) - \sin(x_1 + x_2) \end{bmatrix} \\
&= x_2(a_{11}x_1 + \beta x_2) + (\beta x_1 + a_{22}x_2)[-(x_1 + x_2) - \sin(x_1 + x_2)] \\
&= x_2(a_{11}x_1 + \beta x_2) - (\beta x_1 + a_{22}x_2)[(x_1 + x_2) + \sin(x_1 + x_2)]
\end{aligned}
$$

Θέτοντας $a_{11} = 2\beta, a_{22} = \beta$ και $\beta > 0$ έχουμε

$$
\begin{aligned}
\dot{V}(x) &= g^T(x)f(x)\\
&= x_2(\beta x_1+\beta x_2)-\beta(x_1+x_2)[(x_1+x_2)+\sin(x_1+x_2)]\\
&= 2\beta x_1x_2+\beta x_2^2-\beta x_1(x_1+x_2)-\beta x_2(x_1+x_2)-\beta(x_1+x_2)\sin(x_1+x_2)\\
&= 2\beta x_1x_2+\beta x_2^2-\beta x_1^2-\beta x_1x_2-\beta x_1x_2-\beta x_2^2-\beta(x_1+x_2)\sin(x_1+x_2)\\
&= -\beta x_1^2-\beta(x_1+x_2)\sin(x_1+x_2)
\end{aligned}
$$

Πρέπει $\dot{V}(x)<0$. Πράγματι, έχουμε

$$-2\beta x_1^2 \le 0\ \forall (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$$

με την ισότητα να ισχύει για $x_1=0$. Συνεπώς, για να ισχύει $\dot{V}(x)<0$, πρέπει

$$-\beta(x_1+x_2)\sin(x_1+x_2)<0 \overset{\beta>0}{\Longleftrightarrow} (x_1+x_2)\sin(x_1+x_2)>0$$

Ορίζουμε σύνολο D ως

$$D=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2\}:|x_1+x_2|<\pi\,\} \tag{3.15}$$

Συνεπώς, ισχύει:

$$\dot{V}(x)=-\beta x_1^2-\beta(x_1+x_2)\sin(x_1+x_2)<0,\qquad x\in D \tag{3.16}$$

διότι, για $0<x_1+x_2<\pi$ έχουμε: $\sin(x_1+x_2)>0$, ενώ για $-\pi<x_1+x_2<0$ έχουμε $\sin(x_1+x_2)<0$.

Συνεπώς, πράγματι

$$(x_1+x_2)\sin(x_1+x_2)>0 \Leftrightarrow \dot{V}(x)<0,\forall x\in D$$

Απομένει να προσδιορίσουμε την $V(x)$. Από την (3.7), θέτοντας $a_{ij}=\beta$, $i,j=1{,}2$:

$$
\begin{aligned}
V(x) &= \int_0^1 g^T(\sigma x)d\sigma=\int_0^1\sum_{i=1}^{2} g_i(\sigma x)x_i\,d\sigma\\
&= \int_0^1 (g_1(\sigma x)x_1+g_2(\sigma x)x_2)d\sigma\\
&= \int_0^1 \big((2\beta\sigma x_1+\beta\sigma x_2)x_1+(\sigma\beta x_1+\sigma\beta x_2)x_2\big)d\sigma\\
&= \int_0^1 (2\beta\sigma x_1^2+\beta\sigma x_1x_2+\sigma\beta x_1x_2+\sigma\beta x_2^2)d\sigma\\
&= \int_0^1 \beta\sigma(2x_1^2+2x_1x_2+x_2^2)d\sigma\\
&= \beta(x_1^2+(x_1+x_2)^2)\int_0^1\sigma d\sigma\\
&= \beta(x_1^2+(x_1+x_2)^2)\left[\frac{\sigma}{2}\right]_0^1\\
&= \frac{\beta(x_1^2+(x_1+x_2)^2)}{2}\Rightarrow
\end{aligned}
$$

$$V(x)=\beta\,\frac{x_1^2+(x_1+x_2)^2}{2} \tag{3.17}$$

για την οποία προφανώς ισχύει $V(0)=0$ και $V(x)>0$ για κάθε $(x_1,x_2)\in D\backslash\{0\}$.

Συνεπώς, η (3.17) είναι συνάρτηση Lyapunov του (3.13) και βάσει της (3.16) για τα $x \in D$ όπως προσδιορίζονται στην (3.15), η μηδενική λύση είναι τοπικά ασυμπτωτικά ευσταθής.■

Προτού παρουσιάσουμε την μέθοδο Krasovskii για κατασκευή συναρτήσεων Lyapunov, αναφέρουμε το θεώρημα μέσης τιμής χωρίς απόδειξη, καθώς και μια πρόταση που βασίζεται σε αυτό.

Θεώρημα 3.1 Θεώρημα Μέσης Τιμής: Έστω $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοιχτό και $f: D \to \mathbb{R}^m$ συνεχώς διαφορίσιμη στο D. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $x, y \in D$ τέτοια ώστε:

$$L \coloneqq \{z: z = \mu x + (1-\mu)y, \mu \in (0,1)\} \subset D \tag{3.18}$$

Τότε, για κάθε $v \in \mathbb{R}^m$ θα υπάρχει $z \in L$ τέτοιο ώστε:

$$v^T[f(y) - f(x)] = v^T[f'(z)(y-x)] \tag{3.19}$$

Πρόταση 3.2: Έστω $f, g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ συνεχώς διαφορίσιμες συναρτήσεις με $f(0) = 0$. Τότε, για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$, υπάρχει $\alpha \in [0,1]$ τέτοιο ώστε:

$$g^T(x)f(x) = g^T(x)\frac{\partial f}{\partial x}(\alpha x)x \tag{3.20}$$

Απόδειξη: Έστω $p \in \mathbb{R}^n$. Από το Θεώρημα 3.1, έχουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ υπάρχει $\alpha \in [0,1]$τέτοιο ώστε:

$$\begin{aligned} g^T(p)f(x) &= g^T(p)[f(x) - f(0)] \\ &= g^T(p)\left[\frac{\partial f}{\partial x}(\alpha x)x\right] \end{aligned} \tag{3.21}$$

Συνεπώς, υπάρχει $\alpha \in [0,1]$ τέτοιο ώστε

$$g^T(p)f(p) = g^T(p)\left[\frac{\partial f}{\partial x}(\alpha p)p\right] \tag{3.22}$$

και εφόσον το p είναι τυχαίο, η πρόταση ισχύει. □

3.3 Θεώρημα Krasovskii

Θεώρημα 3.2 (Θεώρημα Krasovskii): Έστω $x(t) \equiv 0$ σημείο ισορροπίας του μη – γραμμικού δυναμικού συστήματος

$$\dot{x}(t) = f\big(x(t)\big), \qquad x(0) = x_0, t \geq 0 \tag{3.23}$$

με $f: D \to \mathbb{R}^n$ συνεχώς διαφορίσιμη και $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοιχτό σύνολο με $0 \in D$. Έστω ότι υπάρχουν θετικά ορισμένοι πίνακες $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ τέτοιοι ώστε:

$$\left[\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right]^T P + P\left[\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right] \leq -R, \quad x \in D, x \neq 0 \tag{3.24}$$

Τότε, η μηδενική λύση είναι το μοναδικό ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας, με συνάρτηση Lyapunov

$$V(x) = f^T(x)Pf(x)$$

Επιπλέον, αν $D = \mathbb{R}^n$, τότε η μηδενική λύση είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας.

Απόδειξη: Έστω, τουναντίον, ότι υπάρχει $x_e \in D$ τέτοιο ώστε $x_e \neq 0$ και $f(x_e) = 0$. Σε αυτήν την περίπτωση, από την Πρόταση 3.2, έχουμε πως για κάθε $x_e \in D$ υπάρχει $\alpha \in [0,1]$ τέτοιο ώστε

$$x_e^T P f(x_e) = x_e^T P \frac{\partial f}{\partial x}(\alpha x_e) x_e \tag{3.25}$$

άρα

$$x_e^T \left\{ \left[\frac{\partial f}{\partial x}(\alpha x_e)\right]^T P + P\left[\frac{\partial f}{\partial x}(\alpha x_e)\right] \right\} x_e = 0 \tag{3.26}$$

που έρχεται σε αντίθεση με την (3.24), άρα δεν υπάρχει $x_e \in D, x_e \neq 0$ τέτοιο ώστε $f(x_e) = 0$.

Στην συνέχεια, παρατηρούμε ότι

$$V(x) = f^T(x) P f(x) \geq \lambda_{\min}(P) \|f(x)\|_2^2 \geq 0, x \in D \tag{3.27}$$

το οποίο συνεπάγεται ότι $V(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$ ή, ισοδύναμα λόγω υπόθεσης, $V(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Με $\lambda_{\min}(P)$ (αντίστοιχα $\lambda_{\max}(P)$) συμβολίζεται η ελάχιστη (αντίστοιχα μέγιστη) ιδιοτιμή του P.

Συνεπώς,

$$V(x) = f^T(x) P f(x) > 0, x \in D, x \neq 0$$

Υπολογίζοντας την παράγωγο της $V(x)$ πάνω στις τροχιές της (3.23), χρησιμοποιώντας την (3.24):

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= V'(x) f(x) = 2 f^T(x) P \frac{\partial f(x)}{\partial x} f(x) \\ &= f^T(x) \left\{ \left[\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right]^T P + P\left[\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right] \right\} f(x) \\ &\leq -f^T(x) R f(x) \\ &\leq \lambda_{\min}(R) \|f(x)\|_2^2 \leq 0, x \in D \end{aligned} \tag{3.28}$$

Επειδή $f(x) = 0$ αν και μόνο αν $x = 0$, έπεται από την (3.28) ότι $\dot{V}(x) < 0$, $x \in D$, $x \neq 0$, το οποίο δείχνει ότι η μηδενική λύση είναι μοναδική ασυμπτωτικά ευσταθής θέση ισορροπίας, με συνάρτηση Lyapunov $V(x) = f^T(x) P f(x)$.

Τέλος, στην περίπτωση που $D = \mathbb{R}^n$, απομένει μόνο να δείξουμε ότι $V(x) \to \infty$ για $\|x\| \to \infty$. Από την Πρόταση 3.2, έπεται ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ υπάρχει $\alpha \in (0,1)$τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned} x^T P f(x) &= x^T P \frac{\partial f}{\partial x}(\alpha x) x \\ &= \frac{1}{2} x^T \left\{ \left[\frac{\partial f}{\partial x}(\alpha x)\right]^T P + P\left[\frac{\partial f}{\partial x}(\alpha x)\right] \right\} x \\ &= -\frac{1}{2} x^T R x \\ &\leq -\frac{1}{2} \lambda_{\min}(R) \|x\|_2^2, \quad x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0 \end{aligned} \tag{3.29}$$

οπότε

$$\frac{|x^T P f(x)|}{\|x\|_2^2} \geq \frac{1}{2}\lambda_{\min}(R), \qquad x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0 \qquad (3.30)$$

Έτσι, εφόσον$|x^T P f(x)| \leq \lambda_{\max}(P)\|x\|\|f(x)\|, x \in \mathbb{R}^n$, έπεται από την (3.30) ότι

$$\|f(x)\| \geq \frac{\lambda_{\min}(R)}{2\lambda_{\max}(P)}\|x\| \qquad (3.31)$$

από το οποίο και την (3.27) έπεται ότι $V(x) \xrightarrow{\|x\|\to\infty} \infty$. Το αποτέλεσμα πλέον είναι άμεσο, επαναλαμβάνοντας τα αρχικά στάδια του πρώτου μέρους της απόδειξης. □

<u>Παράδειγμα 3.2:</u> Προσδιορίζουμε, με την μέθοδο Krasovskii, συνάρτηση Lyapunov για το μη – γραμμικό δυναμικό σύστημα

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -7x_1(t) + 4x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) - x_2(t) - x_2^5(t) \end{aligned} \qquad (3.32)$$

Με $x(0) = \big(x_1(0), x_2(0)\big) = (x_{10}, x_{20}) = x_0$ και $t \geq 0$.

Καταρχάς παρατηρούμε ότι το σημείο (0,0) είναι το μοναδικό σημείο ισορροπίας του (3.32). Εν συνεχεία, υπολογίζουμε

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 4 \\ 1 & -1 - 5x_2^4 \end{bmatrix} \qquad (3.33)$$

και

$$\left[\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right]^T = \begin{bmatrix} -7 & 1 \\ 4 & -1 - 5x_2^4 \end{bmatrix} \qquad (3.34)$$

Θέτουμε

$$R = -\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x} + \left[\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right]^T\right) = \begin{bmatrix} 14 & -5 \\ -5 & 2 + 10x_2^4 \end{bmatrix} \qquad (3.35)$$

και

$$P = I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (3.36)$$

Ο P είναι προφανώς θετικά ορισμένος. Απομένει να δείξουμε ότι και ο R είναι θετικά ορισμένος. Πράγματι, για $x = [a \quad b]$, $a, b \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\begin{aligned} xRx^T &= [a \quad b]\begin{bmatrix} 14 & -5 \\ -5 & 2 + 10x_2^4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \\ &= [14a - 5b, \quad -5a + b(2 + 10x_2^4)]\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \\ &= 14a^2 - 5ab - 5ab + b^2(2 + 10x_2^4) \\ &= 14a^2 - 10ab + 2b^2 + 10b^2x_2^4 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\frac{25}{2} - \frac{25}{2} + 14\right) a^2 - 10ab + 2b^2 + 10b^2 x_2^4 \\
&= \frac{25}{2} a^2 - 10ab + 2b^2 + 10b^2 x_2^4 + \left(14 - \frac{25}{2}\right) a^2 \\
&= \left(\frac{5}{\sqrt{2}} a - \sqrt{2} b\right)^2 + 10b^2 x_2^4 + \frac{3}{2} a^2 > 0 \ \forall (a,b) \neq (0,0)
\end{aligned}
$$

άρα ο R θετικά ορισμένος.

Συνεπώς, θέτοντας στην (3.24) τις (3.33) – (3.36) προκύπτει:

$$
\begin{bmatrix} -7 & 4 \\ 1 & -1 - 5x_2^4 \end{bmatrix} I_2 + I_2 \begin{bmatrix} -7 & 1 \\ 4 & -1 - 5x_2^4 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} -14 & 5 \\ 5 & -2 - 10x_2^4 \end{bmatrix} \Rightarrow
$$

$$
\begin{bmatrix} -14 & 5 \\ 5 & -2 - 10x_2^4 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} -14 & 5 \\ 5 & -2 - 10x_2^4 \end{bmatrix}
$$

Το οποίο ισχύει για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2$, οπότε $D = \mathbb{R}^2$, συνεπώς η μηδενική λύση του (3.32) είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθής και το (3.32) έχει συνάρτηση Lyapunov την:

$$
\begin{aligned}
V(x) &= f^T(x) P f(x) \\
&= \begin{bmatrix} -7x_1 + 4x_2 & x_1 - x_2 - x_2^5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7x_1 + 4x_2 \\ x_1 - x_2 - x_2^5 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -7x_1 + 4x_2 & x_1 - x_2 - x_2^5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7x_1 + 4x_2 \\ x_1 - x_2 - x_2^5 \end{bmatrix} \\
&= (-7x_1 + 4x_2)^2 + (x_1 - x_2 - x_2^5)^2, (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2
\end{aligned}
$$

Για την οποία πράγματι ισχύει $V(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^2, x \neq 0$ και $V(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. ∎

3.4 Θεώρημα Zubov

<u>Θεώρημα 3.3 (Θεώρημα Zubov):</u> Έστω μη – γραμμικό δυναμικό σύστημα (1.1) $\dot{x}(t) = f(x(t))$ με $f(0) = 0$, $f: D \to \mathbb{R}$, όπου $D \subset \mathbb{R}^n$ φραγμένη γειτονιά του 0. Έστω συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση $V: D \to \mathbb{R}$ και συνεχής συνάρτηση h με $h: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε $V(0) = 0$, $h(0) = 0$ και:

$$0 < V(x) < 1, x \in D, x \neq 0 \tag{3.37}$$

$$V(x) \to 1 \text{ καθώς } x \to \partial D \tag{3.38}$$

$$h(x) > 0, x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0 \tag{3.39}$$

$$V'(x) f(x) = -h(x)[1 - V(x)] \tag{3.40}$$

Τότε, η μηδενική λύση του (1.1) είναι ασυμπτωτικά ευσταθής με πεδίο έλξης το D.

<u>Απόδειξη:</u> Έπεται από τις (3.37), (3.39), (3.40), ότι υπάρχει μια περιοχή $B_\varepsilon(0)$ της αρχής των αξόνων τέτοια ώστε $V(x) > 0$ και $\dot{V}(x) < 0$, για $x \in B_\varepsilon(0)$. Έτσι, η αρχή είναι (τοπικά) ασυμπτωτικά ευσταθής.

Για να αποδείξουμε ότι το D είναι το πεδίο έλξης του (1.1), πρέπει να αποδείξουμε πως $x(0) \in D \Rightarrow x(t) \to 0$ για $t \to \infty$ και πως $x(0) \notin D$ συνεπάγεται $x(t) \nrightarrow 0$ για $t \to \infty$. Έστω $x(0) \in D$. Τότε, από την (3.37), $V\big(x(0)\big) < 1$. Έστω $\beta > 0$ τέτοιο ώστε $V\big(x(0)\big) \leq \beta < 1$ και ορίζουμε

$D_\beta \coloneqq \{x \in D: V(x) \le \beta\}$. Παρατηρούμε ότι $D_\beta \subset D$ και ότι το D_β είναι φραγμένο, καθώς $\lim_{x \to \partial D} V(x) = 1$ και $\beta < 1$. Έπεται από (3.39) και (3.40) ότι $\dot{V}(x) < 0, x \in D_\beta$, και άρα το D_β είναι θετικά αναλλοίωτο σύνολο. Έπειτα, από την (3.40) λόγω της (3.37), έχουμε ότι, αν $\dot{V}(x) = 0, x \in D$, τότε $h(x) = 0, x \in D$, το οποίο, λόγω υπόθεσης, συνεπάγεται ότι $x = 0$. Έτσι, από το Θεώρημα 2.2 έπεται ότι $x(t) \xrightarrow{t\to\infty} 0$, οπότε το D_β είναι πεδίο έλξης του (1.1), για κάθε $\beta \in (0,1)$ και άρα το D είναι πράγματι πεδίο έλξης.

Συνεχίζοντας, έστω $x(0) \notin D$ και υποθέτουμε, προς εις άτοπον απαγωγή, πως $x(t) \to 0$ για $t \to \infty$. Σε αυτήν την περίπτωση, $x(t) \to D$ για κάποια $t \ge 0$. Συνεπώς, υπάρχουν $t_1, t_2 < \infty$ τέτοια ώστε $x(t_1) \in \partial D$ και $x(t) \in D$ για κάθε $t \in (t_1, t_2]$. Στην συνέχεια, ορίζουμε $W(x) \coloneqq 1 - V(x)$ και παρατηρούμε ότι, λόγω της (3.40), ισχύει $\dot{W}(x) = h(x)W(x)$ ή, ισοδύναμα,

$$\int_{W_0}^{W(x(t))} \frac{dW}{w} = \int_{t_0}^{t} h\big(x(s)\big)ds \tag{3.41}$$

Όπου $W_0 \coloneqq W\big(x(t_0)\big)$. Ολοκληρώνοντας την (3.41) έχουμε:

$$1 - V\big(x(t_0)\big) = \big[1 - V\big(x(t)\big)\big]e^{-\int_{t_0}^{t} h(x(s))ds} \tag{3.42}$$

Έστω $t = t_2$, και $t_0 \to t_1$.Τότε, λόγω της (3.38), έχουμε από το πρώτο σκέλος της (3.42)

$$\lim_{t_0 \to t_1} \big[1 - V\big(x(t_0)\big)\big] = 0$$

και από το δεύτερο σκέλος της (3.42):

$$\lim_{t_0 \to t_1} \left(\big[1 - V\big(x(t_2)\big)\big]e^{-\int_{t_0}^{t_2} h(x(s))ds}\right) > 0$$

καθώς

$$V\big(x(t_2)\big) \in D \Rightarrow 0 < V\big(x(t_2)\big) < 1 \Rightarrow \big[1 - V\big(x(t_2)\big)\big] > 0$$

και

$$\lim_{t_0 \to t_1} e^{-\int_{t_0}^{t_2} h(x(s))ds} > 0$$

το οποίο αποτελεί αντίφαση. Συνεπώς, αν $x(0) \notin D$, τότε $x(t) \nrightarrow 0$ για $t \to \infty$.

Στην περίπτωση που το D δεν είναι φραγμένο ή $D = \mathbb{R}^n$, η (3.38) γίνεται

$$V(x) \to 1 \text{ για } \|x\| \to \infty \tag{3.43}$$

Επειδή από την (3.37) ισχύει $V(x) < 1$, η (3.43) εξασφαλίζει radial unboundedness. Τότε, οι συνθήκες του Θεωρήματος Zubov με την (3.43) αντί της (3.38) έπονται ότι η μηδενική λύση του (1.1) είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθής.

<u>Παράδειγμα 3.3:</u> Προσδιορίζουμε, μέσω του Θεωρήματος Zubov, συνάρτηση Lyapunov για το μη – γραμμικό δυναμικό σύστημα

$$\dot{x}(t) = x^3(t) - x(t), t \ge 0, \text{με } x(0) = 0 \tag{3.44}$$

και συνεχώς διαφορίσιμη $V: D \to \mathbb{R}$, όπου $D \subset \mathbb{R}$ φραγμένη γειτονιά του 0, το οποία θα προσδιοριστεί στην συνέχεια.

Αρχικά, παρατηρούμε ότι $f(0) = 0$. Έπειτα, επιλέγουμε $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$h(x) = 2x^2 \tag{3.45}$$

Πράγματι, η h συνεχής για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $h(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Από την (3.40) έχουμε:

$$\begin{gathered} V'(x)f(x) = -h(x)[1 - V(x)] \Rightarrow \\ V'(x)(x^3 - x) = -2x^2[1 - V(x)] \Rightarrow \\ V'(x)(x^3 - x) - 2x^2V(x) + 2x^2 = 0 \end{gathered} \tag{3.46}$$

Από όπου προκύπτει ότι

$$V(x) = x^2, \qquad x \in D \tag{3.47}$$

Εν συνεχεία, προσδιορίζουμε το D. Η V πρέπει να πληροί τις (3.37) και (3.38), οπότε

$$\begin{gathered} 0 < V(x) < 1, x \neq 0 \Rightarrow \\ 0 < x^2 < 1, x \neq 0 \end{gathered}$$

συνεπώς:

$$D = \{x \in \mathbb{R}: 0 < x^2 < 1\} = (-1,1) \tag{3.48}$$

Πράγματι, $0 < V(x) < 1, x \in D\backslash\{0\}$ και επίσης

$$\lim_{x \to -1} V(x) = \lim_{x \to 1} V(x) = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \to \partial D} V(x) = 1 \tag{3.49}$$

Συνεπώς η $V(x) = x^2$ πληροί την (3.38), οπότε αποτελεί συνάρτηση Lyapunov για το (3.44) και η μηδενική λύση είναι ασυμπτωτικά ευσταθής λύση του (3.44), με πεδίο έλξης το (3.48).■

3.5 Θεώρημα Energy – Casimir

Τέλος, παρουσιάζουμε την μέθοδο Energy – Casimir για κατασκευή συναρτήσεων Lyapunov σε μη – γραμμικά δυναμικά συστήματα. Η μέθοδος αυτή εκμεταλλεύεται την ύπαρξη «δυναμικών αναλλοίωτων», ή «integrals of motion», τα οποία καλούνται συναρτήσεις Casimir. Ακολουθεί ο ορισμός τους.

<u>Ορισμός 3.1:</u> Μια συνάρτηση $C: D \to \mathbb{R}$, όπου D μια περιοχή της λύσης του (1.1) καλείται συνάρτηση Casimir του (1.1) αν διατηρείται κατά την ροή (flow) του μη-γραμμικού δυναμικού συστήματος, δηλαδή εάν

$$C'(x)f(x) = 0 \tag{3.50}$$

Για όλα τα κάτωθι, θεωρούμε πως $r \geq 2$ και $C_i: D \to \mathbb{R}, i = 1, \dots, r$ συνάρτηση Casimir, δυο φορές συνεχώς διαφορίσιμη. Επίσης ορίζουμε:

$$E(x) \coloneqq \sum_{i=1}^{r} \mu_i C_i(x), \qquad \mu_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, r \tag{3.51}$$

<u>Θεώρημα 3.4 (Θεώρημα Energy – Casimir):</u> Έστω το μη-γραμμικό δυναμικό σύστημα $\dot{x}(t) = f(x(t))$, με συνάρτηση $f: D \to \mathbb{R}^n$ Lipschitz – συνεχή στο D,

όπου $D \subseteq \mathbb{R}^n$ γειτονιά της λύσης του (1.1). Έστω $x_e \in D$ σημείο ισορροπίας του (1.1) και $C_i: D \to \mathbb{R},\ i = 1, \dots, r$ συναρτήσεις Casimir του (1.1). Υποθέτουμε πως τα διανύσματα $C_i'(x_e),\ i = 2, \dots, r$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και έστω ότι υπάρχει $\mu = [\mu_1, \dots, \mu_r]^T \in \mathbb{R}^r$ τέτοιο ώστε να ισχύει:

$$\mu_1 \neq 0 \tag{3.52}$$

$$E'(x_e) = 0 \tag{3.53}$$

και

$$x^T E''(x_e) x > 0, x \in M \tag{3.54}$$

όπου

$$M \coloneqq \{x \in D: C_i'(x_e)x = 0, i = 2, \dots, r\} \tag{3.55}$$

Τότε υπάρχει $\alpha \geq 0$ τέτοιο ώστε:

$$E''(x_e) + \alpha \sum_{i=2}^{r} \left(\frac{\partial C_i}{\partial x}(x_e) \right)^T \left(\frac{\partial C_i}{\partial x}(x_e) \right) > 0 \tag{3.56}$$

Επιπλέον, το σημείο ισορροπίας $x(t) \equiv x_e$ του (1.1) είναι Lyapunov-ευσταθές με συνάρτηση Lyapunov

$$V(x) = E(x) - E(x_e) + \frac{\alpha}{2} \sum_{i=2}^{r} [C_i(x) - C_i(x_e)]^2 \tag{3.57}$$

<u>Απόδειξη:</u> Από την (3.57), υπολογίζουμε την $\dot{V}(x)$:

$$\dot{V}(x) = V'(x)f(x) = E'(x)f(x) + \alpha \sum_{i=2}^{r} [C_i(x) - C_i(x_e)] C_i'(x) f(x)$$

$$= \sum_{i=1}^{r} \mu_i C_i'(x) f(x) + \alpha \sum_{i=2}^{r} [C_i(x) - C_i(x_e)] C_i'(x) f(x) = 0, x \in D \tag{3.58}$$

Εφόσον η $V(\cdot)$ είναι συνάρτηση Lyapunov του (1.1) με σημείο ισορροπίας $x(t) \equiv x_e$, πρέπει να ισχύει $V(x_e) = 0$ και $V(x) > 0, x \in D, x \neq x_e$. Από την (3.57), προφανώς $V(x_e) = 0$. Από την (3.57) υπολογίζουμε την $V'(x)$:

$$V'(x) = E'(x) + \alpha \sum_{i=2}^{r} [C_i(x) - C_i(x_e)] C_i'(x) \tag{3.59}$$

συνεπώς, λόγω των (3.53) και (3.59), ισχύει

$$V'(x_e) = 0 \tag{3.60}$$

Εν συνεχεία, παραγωγίζοντας την (3.59) έχουμε

$$V''(x) = E''(x) + \alpha \sum_{i=2}^{r} \{[C_i'(x)]^T C_i'(x) + [C_i(x) - C_i(x_e)] C_i''(x)\} \tag{3.61}$$

οπότε

$$V''(x_e) = E''(x_e) + \alpha \sum_{i=2}^{r} \left(\frac{\partial C_i}{\partial x}(x_e)\right)^T \left(\frac{\partial C_i}{\partial x}(x_e)\right) \tag{3.62}$$

Για να αποδείξουμε την ύπαρξη ενός α που ικανοποιεί την (3.56), παρατηρούμε ότι εφόσον

$$C_i'(x_e)x = 0, \qquad i = 2, \dots, r, x \in M$$

προκύπτει ότι υπάρχει ένας αντιστρέψιμος πίνακας $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ τέτοιος ώστε

$$[0, I_{r-1}]Sx = 0, x \in M$$

και

$$\left[I_{n-(r-1)}, 0\right]Sx = 0, x \in M^c$$

και συνεπώς, από την (3.54) για $x_e \in D$ προκύπτει ότι:

$$E''(x_e) = S^T \begin{bmatrix} E_1 & E_{12} \\ E_{12}^T & E_2 \end{bmatrix} S \tag{3.63}$$

και

$$\sum_{i=2}^{r} \left(\frac{\partial C_i}{\partial x}(x_e)\right)^T \left(\frac{\partial C_i}{\partial x}(x_e)\right) = S^T \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} S \tag{3.64}$$

Όπου $E_1 \in \mathbb{R}^{(n-r+1)\times(n-r+1)}$, $E_{12} \in \mathbb{R}^{(n-r+1)\times(r-1)}$, $E_2 \in \mathbb{R}^{(r-1)\times(r-1)}$ και $N \in \mathbb{R}^{(r-1)\times(r-1)}$ είναι συμμετρικοί και οι E_1, N επιπλέον είναι θετικά ορισμένοι. Στην συνέχεια, αντικαθιστώντας τις (3.62) και (3.63) στην (3.61) θα έχουμε

$$V''(x_e) = S^T \begin{bmatrix} E_1 & E_{12} \\ E_{12}^T & E_2 + \alpha N \end{bmatrix} S = S^T Q S \tag{3.65}$$

όπου

$$Q \coloneqq \begin{bmatrix} E_1 & E_{12} \\ E_{12}^T & E_2 + \alpha N \end{bmatrix}$$

Τέλος, επιλέγοντας $\alpha \geq 0$ τέτοιο ώστε $Q > 0$, η (3.56) ικανοποιείται, άρα από την (3.62) προκύπτει $V''(x_e) > 0$. Εφόσον η $V(\cdot)$ είναι δύο φορές συνεχώς διαφορίσιμη, έπεται ότι η $V(x), x \in D$ είναι θετικά ορισμένη στην περιοχή του x_e. □

Από το Θεώρημα 3.4 είναι προφανές ότι η ύπαρξη συναρτήσεων Energy-Casimir του (1.1) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την κατασκευή συναρτήσεων Lyapunov για το(1.1). Συγκεκριμένα, μπορούμε να κατασκευάσουμε μια συνάρτηση $H: D \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\dot{H}(x) = 0$ κατά μήκος των τροχιών του (1.1). Αν $C_1, \dots, C_r$ είναι συναρτήσεις Casimir για το (1.1), τότε

$$\frac{d}{dx}[H + E(C_1, \dots, C_r)]x(t) \equiv 0 \tag{3.66}$$

για κάθε $E: \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$.

Συγκεκριμένα, ακόμα και αν η H δεν είναι θετικά ορισμένη στο σημείο ισορροπίας $x_e \in D$, η συνάρτηση $V(x) = H(x) + E(C_1(x), \dots, C_r(x))$ μπορεί να γίνει θετικά ορισμένη στο $x_e \in D$ με την κατάλληλη επιλογή E και έτσι η $V(x)$ είναι συνάρτηση Lyapunov του (1.1).

<u>Παράδειγμα 3.4:</u> Έστω μη – γραμμικό δυναμικό σύστημα

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= I_{23}x_2(t)x_3(t), \qquad x_1(0) = x_{10} \\ \dot{x}_2(t) &= I_{31}x_3(t)x_1(t), \qquad x_2(0) = x_{20} \\ \dot{x}_3(t) &= I_{12}x_1(t)x_2(t), \qquad x_3(0) = x_{30} \\ & t \geq 0 \end{aligned} \tag{3.67}$$

με

$$\begin{gathered} I_{23} = \frac{I_2 - I_3}{I_1}, I_{31} = \frac{I_3 - I_1}{I_2}, I_{12} = \frac{I_1 - I_2}{I_3} \\ I_1 > I_2 > I_3 > 0 \end{gathered} \tag{3.68}$$

Δείχνουμε, μέσω της μεθόδου Energy – Casimir, ότι η λύση $x(t) \equiv x_e = [x_{1e} \quad 0 \quad 0]^T$ του (3.67) – (3.68) είναι Lyapunov – ευσταθής.

Παρατηρούμε ότι οι συναρτήσεις

$$\begin{aligned} C_1(x) &= \frac{1}{2}(I_1x_1^2 + I_2x_2^2 + I_3x_3^2) \\ C_2(x) &= \frac{1}{2}(I_1^2x_1^2 + I_2^2x_2^2 + I_3^2x_3^2) \end{aligned} \tag{3.69}$$

είναι συναρτήσεις Casimir του (3.67) – (3.68). Πράγματι:

$$C_1'(x)f(x) = [I_1x_1, \quad I_2x_2, \quad I_3x_3]\begin{bmatrix} I_{23}x_2x_3 \\ I_{31}x_3x_1 \\ I_{12}x_1x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$C_1'(x)f(x) = x_1x_2x_3\left(\frac{I_1(I_2 - I_3)}{I_1} + \frac{I_2(I_3 - I_1)}{I_2} + \frac{I_3(I_1 - I_2)}{I_3}\right) \Rightarrow$$

$$C_1'(x)f(x) = x_1x_2x_3(I_2 - I_3 + I_3 - I_1 + I_1 - I_2) = 0$$

και

$$C_2'(x)f(x) = [I_1^2x_1, \quad I_2^2x_2, \quad I_3^2x_3]\begin{bmatrix} I_{23}x_2x_3 \\ I_{31}x_3x_1 \\ I_{12}x_1x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$C_2'(x)f(x) = x_1x_2x_3\left(\frac{I_1^2(I_2 - I_3)}{I_1} + \frac{I_2^2(I_3 - I_1)}{I_2} + \frac{I_3^2(I_1 - I_3)}{I_3}\right) \Rightarrow$$

$$C_2'(x)f(x) = x_1x_2x_3(I_1I_2 - I_1I_3 + I_2I_3 - I_1I_2 + I_1I_3 - I_2I_3) = 0$$

Πρέπει να δείξουμε ότι $C_2'(x_e) = [I_1^2x_{1e}, \quad 0, \quad 0]$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο. Έστω $k \in \mathbb{R}$. Τότε, ισχύει

$$kC_2'(x_e) = 0 \Leftrightarrow k[I_1^2x_{1e}, \quad 0, \quad 0] = 0 \Leftrightarrow k = 0$$

οπότε το $C_2'(x_e)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο.

Εν συνεχεία, από την (3.51) έχουμε

$$E(x) = \sum_{i=1}^{2}\mu_iC_i(x)$$

επομένως:

$$E(x) = \mu_1\frac{1}{2}(I_1x_1^2 + I_2x_2^2 + I_3x_3^2) + \mu_2\frac{1}{2}(I_1^2x_1^2 + I_2^2x_2^2 + I_3^2x_3^2) \tag{3.70}$$

Προσδιορίζουμε το $M = \{x \in D: C_2'(x_e)x = 0\}$

$$\begin{aligned} C_2'(x_e)x = 0 \Rightarrow [I_1^2x_{1e}, \quad 0, \quad 0]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \\ \Rightarrow x_1I_1^2x_{1e} = 0 \\ \Rightarrow x_1 = 0 \end{aligned}$$

οπότε

$$M = \{(x_1, x_2, x_3) \in D: x_1 = 0\} \tag{3.71}$$

Υπολογίζουμε τις $E'(x)$ και $E''(x)$:

$$E'(x) = [\mu_1I_1x_1 + \mu_2I_1^2x_1, \quad \mu_1I_2x_2 + \mu_2I_2^2x_2, \quad \mu_1I_3x_3 + \mu_2I_3^2x_3] \Rightarrow$$

$$E'(x) = [x_1I_1(\mu_1 + I_1\mu_2), \quad x_2I_2(\mu_1 + I_2\mu_2), \quad x_3I_3(\mu_1 + I_3\mu_2)] \tag{3.72}$$

και

$$E''(x) = \begin{bmatrix} I_1\mu_1 + I_1^2\mu_2 & 0 & 0 \\ 0 & I_2\mu_1 + I_2^2\mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3\mu_1 + I_3^2\mu_2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$E''(x) = \begin{bmatrix} I_1(\mu_1 + I_1\mu_2) & 0 & 0 \\ 0 & I_2(\mu_1 + I_2\mu_2) & 0 \\ 0 & 0 & I_3(\mu_1 + I_3\mu_2) \end{bmatrix} \tag{3.73}$$

Από την (3.53) έχουμε:

$$E'(x_e) = 0 \Rightarrow \mu_1(I_1 x_{1e},\quad 0,\quad 0) + \mu_2(I_1^2 x_{1e},\quad 0,\quad 0) = 0 \Rightarrow$$
$$\mu_1 I_1 x_{1e} + \mu_2 I_1^2 x_{1e} = 0 \Rightarrow$$
$$I_1 x_{1e}(\mu_1 + \mu_2 I_1) = 0 \Rightarrow$$

$$\mu_2 = -\frac{\mu_1}{I_1} \tag{3.74}$$

Επιπλέον, πρέπει να ισχύει η (3.54) για κάθε $x \in M$. Έτσι:

$$x^T E''(x_e)x = [0,\quad x_2,\quad x_3]\begin{bmatrix} I_1\mu_1 + I_1^2\mu_2 & 0 & 0 \\ 0 & I_2\mu_2 + I_3^2\mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3\mu + I_3^2\mu_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$
$$= [0,\quad x_2\quad x_3]\begin{bmatrix} 0 \\ x_2(I_2\mu_1 + I_2^2\mu_2) \\ x_3(I_3\mu_1 + I_3^2\mu_2) \end{bmatrix}$$
$$= x_2^2(I_2\mu_1 + I_2^2\mu_2) + x_3^2(I_3\mu_1 + I_3^2\mu_2) \Rightarrow$$

$$x^T E''(x)x = x_2^2 I_2(\mu_1 + I_2\mu_2) + x_3^2 I_3(\mu_1 + I_3\mu_2) \tag{3.75}$$

Θέτοντας $\mu_1 = I_1$ στην (3.74) έχουμε $\mu_2 = -1$. Αντικαθιστώντας στην (3.75):

$$x^T E''(x)x = x_2^2(I_2 I_1 - I_2^2) + x_3^2(I_3 I_1 - I_3^2) \Rightarrow$$
$$x^T E''(x)x = x_2^2 I_2(I_1 - I_2) + x_3^2 I_3(I_1 - I_3) \xRightarrow{(3.68)}$$
$$x^T E''(x)x > 0\ \forall x \in M, x \neq 0$$

Στην συνέχεια, προσδιορίζουμε το α. Από την (3.56) έχουμε ότι

$$E''(x_e) + \alpha \sum_{i=2}^{r} \left(\frac{\partial C_i}{\partial x}(x_e)\right)^T \left(\frac{\partial C_i}{\partial x}(x_e)\right)$$
$$= E''(x_e) + \alpha\left[\left(\frac{\partial C_2}{\partial x}(x_e)\right)^T \left(\frac{\partial C_2}{\partial x}(x_e)\right)\right]$$
$$= \begin{bmatrix} I_1(\mu_1 + \mu_2 I_1) & 0 & 0 \\ 0 & I_2(\mu_1 + I_2\mu_2) & 0 \\ 0 & 0 & I_3(\mu_1 + I_3\mu_2) \end{bmatrix} + \alpha\left(\begin{bmatrix} I_1^2 x_{1e} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}[I_1^2 x_{1e}\quad 0\quad 0]\right)$$

Για $\mu_1 = I_1, \mu_2 = -1$ έχουμε:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_2(I_1 - I_2) & 0 \\ 0 & 0 & I_3(I_1 - I_3) \end{bmatrix} + \alpha\begin{bmatrix} I_1^4 x_{1e}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \alpha I_1^2 x_{1e}^2 & 0 & 0 \\ 0 & I_2(I_1 - I_2) & 0 \\ 0 & 0 & I_3(I_1 - I_3) \end{bmatrix} > 0 \quad \forall \alpha > 0$$

Άρα $\alpha > 0$.

Συνεπώς, το σημείο ισορροπίας $x(t) \equiv x_e$ του (3.67) – (3.68) είναι Lyapunov – ευσταθές, με συνάρτηση Lyapunov την:

$$V(x) = E(x) - E(x_e) + \frac{\alpha}{2}[C_2(x) - C_2(x_e)]^2$$

ή, ισοδύναμα,

$$V(x) = \frac{1}{2}[I_2 x_2^2(I_1 - I_2) + I_3 x_3^2(I_1 - I_3)] + \frac{\alpha}{8}[I_1^2(x_1^2 - x_{1e}^2) + I_2^2 x_2^2 + I_3^2 x_3^2]^2$$

για την οποία παρατηρούμε ότι πράγματι ισχύει $V(x_e) = 0$ και $V(x) > 0$, για κάθε $x \neq x_e$. ■

4 Αντίστροφα Θεωρήματα Lyapunov

4.1 Εισαγωγή

Στα προηγούμενα κεφάλαια, εξετάσαμε την ευστάθεια μη – γραμμικών δυναμικών συστημάτων, χρησιμοποιώντας μια κατάλληλης συνάρτησης Lyapunov, βάσει της οποίας συμπεραίναμε το είδος της ευστάθειας. Αυτό εγείρει το ερώτημα για το αν υπάρχει συνάρτηση Lyapunov για κάθε ευσταθές ή ασυμπτωτικά ευσταθές μη – γραμμικό δυναμικό σύστημα. Υπάρχει μια σειρά από θεωρήματα, γνωστά ως αντίστροφα θεωρήματα Lyapunov, τα οποία εξασφαλίζουν την ύπαρξη μιας συνάρτησης Lyapunov σε ευσταθή μη – γραμμικά δυναμικά συστήματα, τα οποία και μελετάμε σε αυτό το κεφάλαιο. Πριν διατυπώσουμε τα θεωρήματα αυτά, θα χρειαστούμε κάποιους ορισμούς, δυο λήμματα και μια πρόταση.

<u>Ορισμός 4.1:</u> Μια συνεχής συνάρτηση $\gamma: [0, \alpha) \rightarrow [0, +\infty)$ με $\alpha \in (0, \infty]$ είναι κλάσης – $\mathcal{K}$, αν είναι γνησίως αύξουσα και $\gamma(0) = 0$. Μια συνεχής συνάρτηση $\gamma: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ είναι κλάσης $\mathcal{K}_\infty$ αν είναι γνησίως αύξουσα, $\gamma(0) = 0$ και $\gamma(s) \xrightarrow{s\to\infty} \infty$.

Μια συνεχής συνάρτηση $\gamma: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ είναι κλάσης – $\mathcal{L}$, αν είναι γνησίως φθίνουσα και $\gamma(s) \xrightarrow{s\to\infty} 0$.

<u>Παράδειγμα 4.1:</u> Η συνάρτηση $f(x) = \ln(x + 1)$, $x \geq 0$ είναι κλάσης – $\mathcal{K}_\infty$ και η συνάρτηση $g(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$ είναι κλάσης – $\mathcal{L}$.

Πράγματι, η f είναι συνεχής, γνησίως αύξουσα και ισχύει $f(0) = 0$ και $f(x) \rightarrow \infty$ για $x \rightarrow \infty$.

Αντίστοιχα, η γ είναι συνεχής, γνησίως φθίνουσα και ισχύει $\gamma(x) \rightarrow 0$ για $x \rightarrow \infty$.■

Τέλος, μια συνάρτηση $\gamma: [0, \alpha) \times [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ είναι κλάσης – $\mathcal{KL}$ αν για κάθε σταθερό s, η $\gamma(r, s)$ είναι κλάσης – $\mathcal{K}$ ως προς r και αν για κάθε σταθερό r, η $\gamma(r, s)$ είναι κλάσης-$\mathcal{L}$ ως προς s. Για παράδειγμα, η συνάρτηση $\gamma(r, s) = re^{-s}$, $r, s \geq 0$ είναι κλάσεως $\mathcal{KL}$ γιατί $\gamma(r, s) \xrightarrow{r\to\infty} \infty$ για s σταθερό, ενώ $\gamma(r, s) \xrightarrow{s\to\infty} 0$ για r σταθερό.

<u>Λήμμα 4.1(Λήμμα Massera):</u> Έστω $\sigma: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ συνάρτηση κλάσης – $\mathcal{L}$ και $\lambda > 0$ σταθερό. Τότε, υπάρχει μια απείρως διαφορίσιμη συνάρτηση $\gamma: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ τέτοια ώστε $\gamma(\cdot), \gamma'(\cdot) \in \mathcal{K}$, με

$$\int_0^\infty \gamma[\sigma(t)]dt < \infty \tag{4.1}$$

και

$$\int_0^\infty \gamma'[\sigma(t)]e^{\lambda t}dt < \infty \tag{4.2}$$

<u>Απόδειξη:</u> Επειδή η $\sigma(\cdot)$ είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση, υπάρχει μια μη-φραγμένη ακολουθία $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ τέτοια ώστε

$$\sigma(t_n) \leq \frac{1}{n+1}, n = 1,2, \dots \tag{4.3}$$

Έπειτα, ορίζουμε την συνάρτηση $\eta: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ ως εξής:

$$\eta(t) \coloneqq \begin{cases} \left(\frac{t_1}{t}\right)^p, & 0 < t \leq t_1, \\ \frac{(n+1)t_{n+1} - nt_n - t}{n(n+1)(t_{n+1} - t_n)}, & t_n \leq t \leq t_{n+1}, n = 1,2, \dots \end{cases} \tag{4.4}$$

όπου $p > \frac{t_1^2}{2(t_2 - t_1)}$. Παρατηρούμε πως η $\eta(\cdot)$ είναι γνησίως φθίνουσα και ικανοποιεί

$$\sigma(t) < \eta(t), t \in [t_1, \infty)$$

και

$$\lim_{t \to 0, t > 0} \eta(t) = \infty$$

Επειδή η $\eta(\cdot)$ είναι απείρως διαφορίσιμη συνάρτηση, με εξαίρεση έναν μετρήσιμο αριθμό σημείων του t, μπορεί να προσεγγισθεί απο μια απείρως διαφορίσιμη συνάρτηση στο διάστημα $[0, \infty)$. Στην συνέχεια, μπορεί να αποδειχθεί πως η $\eta^{-1}(\cdot)$ είναι μια γνησίως φθίνουσα συνάρτηση, για την οποία ισχύει $\lim_{s \to 0, s > 0} \eta^{-1}(s) = \infty$ και $\lim_{s \to \infty} \eta^{-1}(s) = 0$.

Έστω συνάρτηση $\mu: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ τέτοια ώστε $\mu(0) = 0$ και $\mu(s) = e^{-(\lambda+1)\eta^{-1}(s)}$, $s > 0$. Παρατηρούμε ότι η $\mu(\cdot)$ λόγω της (4.4) είναι απείρως διαφορίσιμη στο $(0, \infty)$ και είναι γνησίως φθίνουσα, από το οποίο έπεται πως η $\mu(\cdot)$ είναι κλάσης – $\mathcal{K}$.

Ορίζουμε τώρα την συνάρτηση γ με $\gamma: [0, \infty) \to [0, \infty)$ ως ακολούθως:

$$\gamma(r) \coloneqq \int_0^r \mu(s) ds$$

Παρατηρούμε πως $\gamma'(\cdot) = \mu(\cdot)$ και η $\gamma(\cdot)$ είναι επίσης συνάρτηση κλάσης – $\mathcal{K}$. Επιπλέον, έχουμε:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \gamma'[\sigma(t)] e^{\lambda t} dt &= \int_0^{t_1} \mu[\sigma(t)] e^{\lambda t} dt + \int_{t_1}^{\infty} \mu[\sigma(t)] e^{\lambda t} dt \\ &< \int_0^{t_1} \mu[\sigma(t)] e^{\lambda t} dt + \int_{t_1}^{\infty} \mu[\eta(t)] e^{\lambda t} dt \\ &= \int_0^{t_1} \mu[\sigma(t)] e^{\lambda t} dt + \int_{t_1}^{\infty} e^{-t} dt \\ &< \infty \end{aligned}$$

Επομένως, εφόσον για κάθε $t \geq t_1$ και $s \in \big(0, \eta(t)\big), t \leq \eta^{-1}(s)$, έχουμε ότι

$$\int_0^{\eta(t)} \mu(s)ds = \int_0^{\eta(t)} e^{-(\lambda+1)\eta^{-1}(s)}ds$$
$$\leq \int_0^{\eta(t)} e^{-(\lambda+1)t}ds$$
$$= e^{-(\lambda+1)t}\eta(t)$$
$$\leq e^{-(\lambda+1)t}$$

άρα

$$\int_{t_1}^{\infty} \gamma[\sigma(t)]dt = \int_{t_1}^{\infty}\int_0^{\sigma(t)} \mu(s)dsdt$$
$$< \int_{t_1}^{\infty}\int_0^{\eta(t)} \mu(s)dsdt$$
$$\leq \int_{t_1}^{\infty} e^{-(\lambda+1)t}dt < \infty$$

Το αποτέλεσμα προκύπτει από το γεγονός πως $\int_0^\infty \gamma[\sigma(t)]dt < \infty$ αν και μόνο αν $\int_{t_1}^\infty \gamma[\sigma(\tau)]dt < \infty$.□

<u>Λήμμα 4.2 (Λήμμα Gronwall):</u> Έστω συνεχής συνάρτηση $x: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$x(t) \leq \alpha + \int_{t_0}^{t} \beta x(s)ds,\ t \geq t_0 \tag{4.5}$$

Όπου $\alpha, \beta \geq 0$. Τότε ισχύει

$$x(t) \leq \alpha e^{\beta(t-t_0)}, \qquad t \geq t_0 \tag{4.6}$$

<u>Απόδειξη:</u> Έστω $\alpha \geq 0$ και έστω

$$y(t) = \alpha + \int_{t_0}^{t} \beta x(s)ds\,, t \geq t_0 \tag{4.7}$$

Τότε, από τις (4.5) και (4.7) προκύπτει ότι

$$x(t) \leq y(t), \qquad t \geq t_0 \tag{4.8}$$

συνεπώς, από την (4.7) και (4.8) έχουμε

$$\dot{y}(t) = \beta x(t) \leq \beta y(t), \qquad y(t_0) = \alpha, t \geq t_0 \tag{4.9}$$

Στην συνέχεια, ορίζουμε

$$z(t) \coloneqq \dot{y}(t) - \beta y(t) \tag{4.10}$$

και παρατηρούμε ότι, λόγω της (4.9), ισχύει $z(t) \leq 0,\ t \geq t_0$. Λύνοντας την (4.10), προκύπτει:

$$y(t) = y(t_0)e^{\beta(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} e^{\beta(t-\sigma)}z(\sigma)\,d\sigma \tag{4.11}$$

το οποίο συνεπάγεται

$$y(t) \leq y(t_0)e^{\beta(t-t_0)} = \alpha e^{\beta(t-t_0)}, \qquad t \geq t_0 \tag{4.12}$$

οπότε, από (4.8) και (4.12) προκύπτει το ζητούμενο. □

<u>Πρόταση 4.1:</u> Έστω το μη – γραμμικό δυναμικό σύστημα (1.1), μια περιοχή του 0 $D \subseteq \mathbb{R}^n$ και συνάρτηση $f: D \to \mathbb{R}^n$ ομοιόμορφα Lipschitz στο D με σταθερά Lipschitz L και $f(0) = 0$. Τότε, για την λύση $x(t, x_0)$ του (1.1) στο κλειστό διάστημα $[t_0, t_1]$ θα ισχύει

$$\|x_0\|_2 e^{-L|t-t_0|} \leq \|x(t)\|_2 \leq \|x_0\| e^{-L|t_0-t_1|}, t \in [t_0, t_1] \tag{4.13}$$

<u>Απόδειξη:</u> Επειδή $\|x\|_2^2 = x^T x$, έχουμε ότι

$$\frac{d}{dt} x^T(t) x(t) = 2x^T(t)\dot{x}(t) = 2x^T(t) f\big(x(t)\big), t \in [t_0, t_1] \tag{4.14}$$

Επειδή, από υπόθεση, έχουμε ότι $f(0) = 0$ και f ομοιόμορφα Lipschitz στο D, ισχύει

$$\|f(x)\|_2 \leq L\|x\|_2 \tag{4.15}$$

Εφαρμόζοντας την ανισότητα Cauchy – Schwarz στην (4.14) και λόγω της (4.15), έχουμε

$$\begin{aligned} \left|\frac{d}{dt} x^T(t) x(t)\right| &\leq 2\|x(t)\|_2 \big\|f\big(x(t)\big)\big\|_2 \\ &\leq 2L\|x(t)\|_2^2, \quad t \in [t_0, t_1] \end{aligned} \tag{4.16}$$

Θέτοντας

$$q(t) \coloneqq x^T(t) x(t)$$

και

$$q_0 \coloneqq q(0) = x_0^T x_0$$

στην (4.16), προκύπτει

$$-2Lq(t) \leq \dot{q}(t) \leq 2Lq(t), \qquad t \in [t_0, t_1] \tag{4.17}$$

Ολοκληρώνοντας, έχουμε

$$-\int_{t_0}^{t} 2L ds \leq \int_{q_0}^{q} \frac{dq}{q} \leq \int_{t_0}^{t} 2L ds \tag{4.18}$$

συνεπώς

$$q_0 e^{-2L|t-t_0|} \leq q(t) \leq q_0 e^{2L|t-t_0|}, t \in [t_0, t_1] \tag{4.19}$$

όπου αν θέσουμε $q(t) = \|x(t)\|_2^2$ και $q_0 = \|x_0\|_2^2$, προκύπτει η (4.13).□

Είμαστε πλέον σε θέση να διατυπώσουμε δυο θεωρήματα τα οποία εδραιώνουν την ύπαρξη συναρτήσεων Lyapunov για ασυμπτωτικά ευσταθή μη – γραμμικά δυναμικά συστήματα.

4.2 Ασυμπτωτικά ευσταθή μη – γραμμικά δυναμικά συστήματα

<u>Θεώρημα 4.1:</u> Έστω ότι η μηδενική λύση του (1.1), είναι ασυμπτωτικά ευσταθής, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ μια γειτονιά του 0 και έστω συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση $f: D \to \mathbb{R}^n$ με $f(0) = 0$ και $\delta > 0$ τέτοιο ώστε το $B_\delta(0) \subset D$ να εμπεριέχεται στο πεδίο έλξης του (1.1). Τότε, υπάρχει συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση $V: B_\delta(0) \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε:

$$V(0) = 0 \tag{4.20}$$

$$V(x) > 0, \qquad x \in B_\delta(0), x \neq 0 \tag{4.21}$$

$$V'(x)f(x) < 0, \qquad x \in B_\delta(0), x \neq 0 \tag{4.22}$$

Απόδειξη: Επειδή η μηδενική λύση του (1.1) είναι ασυμπτωτικά ευσταθής εξ υποθέσεως, αποδεικνύεται ότι υπάρχουν συναρτήσεις $\alpha(\cdot)$ και $\beta(\cdot)$, κλάσης $\mathcal{K}$ και $\mathcal{L}$ αντίστοιχα, τέτοιες ώστε, αν $\|x_0\| < \delta$,τότε

$$\|x(t)\| \leq \alpha(\|x_0\|)\beta(t), \qquad \forall t \geq 0 \tag{4.23}$$

όπου $\|\cdot\|$ η Ευκλείδεια νόρμα.

Εν συνεχεία, έστω $x \in B_\delta(0)$ και έστω $s(t,x)$ η λύση του (1.1) με αρχική συνθήκη $x(0) = x$, ώστε για κάθε $\|x\| < \delta$, $\|s(t,x)\| \leq \alpha(\|x\|)\beta(t),\ t \geq 0$.

Επιπλέον, παρατηρούμε ότι

$$s(t,x) = x + \int_0^t f\big(s(\tau,x)\big)d\tau \tag{4.24}$$

από το οποίο έπεται ότι

$$\frac{\partial s(t,x)}{\partial x} = I + \int_0^t f'(s(\tau,x))\frac{\partial s(\tau,x)}{\partial x}d\tau \Rightarrow$$

$$\left\|\frac{\partial s(t,x)}{\partial x}\right\| \leq 1 + \int_0^t \lambda \left\|\frac{\partial s(\tau,x)}{\partial x}\right\| d\tau \tag{4.25}$$

όπου
$$\lambda \coloneqq \max_{x \in B_\delta(0)} \|f'(x)\| \tag{4.26}$$

Για την (4.25), λόγω των (4.5) και (4.6) του Λήμματος 4.2 θα ισχύει ότι

$$\left\|\frac{\partial s(t,x)}{\partial x}\right\| \leq e^{\lambda t}, \forall t \geq 0 \tag{4.27}$$

Από το Λήμμα 4.1, υπάρχει μια απείρως διαφορίσιμη συνάρτηση $\gamma(\cdot)$ τέτοια ώστε $\gamma'(\cdot) \in \mathcal{K}$ και επιπλέον

$$\int_0^\infty \gamma(\alpha(\delta)\beta(t))dt < \infty \tag{4.28}$$

$$\int_0^\infty \gamma'\big(\alpha(\delta)\beta(t)\big)e^{\lambda t}dt < \infty \tag{4.29}$$

Επειδή

$$\|s(t,x)\| \leq \alpha(\|x\|)\beta(t) \leq \alpha(\delta)\beta(t), \qquad t \geq 0 \tag{4.30}$$

έπεται ότι η

$$V(x) \coloneqq \int_0^\infty \gamma(\|s(t,x)\|)dt \tag{4.31}$$

λόγω της (4.28) είναι καλά ορισμένη στο $B_\delta(0)$ και επιπλέον έχουμε ότι $V(0) = 0$.

Εν συνεχεία, επειδή η $f(\cdot)$ είναι ομοιόμορφα Lipschitz στο $B_\delta(0)$, έχουμε από την (4.13) της Πρότασης 4.1 ότι

$$V(x) = \int_0^\infty \gamma(\|s(t,x)\|)dt \geq \int_0^\infty \gamma(\|x\|e^{-Lt})dt \tag{4.32}$$

Όπου L η σταθερά Lipschitz της $f(\cdot)$ στο $B_\delta(0)$, το οποίο συνεπάγεται ότι $V(x) > 0, x \in D_0, x \neq 0$.

Επειδή

$$\|s(t,x)\| = \sqrt{s^T(t,x)s(t,x)} \tag{4.33}$$

έχουμε ότι παράγωγος της (4.32) ισούται με:

$$V'(x) = \int_0^\infty \gamma'(\|s(t,x)\|)\frac{s^T(t,x)}{\|s(t,x)\|}\frac{\partial s(t,x)}{\partial x}dt \tag{4.34}$$

και επιπλέον, από τις (4.27) και (4.30) έχουμε:

$$\begin{aligned}\|V'(x)\| &\leq \int_0^\infty \gamma'(\|s(t,x)\|)\left\|\frac{\partial s(t,x)}{\partial x}\right\|dt \\ &\leq \int_0^\infty \gamma'\big(\alpha(\delta)\beta(t)\big)e^{\lambda t}dt < \infty, \qquad x \in B_\delta(0)\end{aligned} \tag{4.35}$$

το οποίο αποδεικνύει ότι η $V'(\cdot)$ είναι φραγμένη. Επιπλέον, από την (4.34) έπεται ότι η $V'(\cdot)$ είναι συνεχής, συνεπώς η $V(\cdot)$ είναι συνεχώς διαφορίσιμη.

Τέλος, επειδή η $f(\cdot)$ είναι Lipschitz-συνεχής στο D, η τροχιά $s(t,x), t \geq 0$ είναι μοναδική και συνεπώς

$$\begin{aligned}V\big(s(t,x)\big) &= \int_0^\infty \gamma(\|s\big(\tau, s(t,x)\big)\|d\tau \\ &= \int_0^\infty \gamma(\|s(\tau + t, x)\|)d\tau \\ &= \int_t^\infty \gamma(\|s(\tau,x)\|)d\tau\end{aligned} \tag{4.36}$$

από όπου προκύπτει ότι

$$\dot{V}\big(s(t,x)\big) = -\gamma(\|s(t,x)\|) < 0, s(t,x) \neq 0 \tag{4.37}$$

Το αποτέλεσμα πλέον είναι άμεσο παρατηρώντας ότι

$$V'(x)f(x) = \dot{V}\big(s(0,x)\big) = -\gamma(\|x\|) < 0 \tag{4.38}$$

$$x \in B_\delta(0), x \neq 0$$

□

Εν συνεχεία, παραθέτουμε το αντίστροφο θεώρημα Lyapunov για εκθετική ευστάθεια.

4.3 Εκθετικά ευσταθή μη – γραμμικά δυναμικά συστήματα

<u>Θεώρημα 4.2:</u> Υποθέτουμε ότι η μηδενική λύση του (1.1) είναι εκθετικά ευσταθής, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ μια γειτονιά του 0 και έστω συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση $f: D \to \mathbb{R}^n$ και $\delta > 0$ τέτοιο ώστε το $B_\delta(0) \subset D$ να εμπεριέχεται στο πεδίο έλξης του (1.1). Τότε για κάθε $p > 1$, υπάρχει συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση $V: D \to \mathbb{R}$ και σταθερές $\alpha, \beta, \varepsilon > 0$ έτσι ώστε:

$$\alpha\|x\|^p \leq V(x) \leq \beta\|x\|^p, \quad x \in B_\delta(0) \tag{4.39}$$

$$V'(x)f(x) \leq -\varepsilon V(x), \qquad x \in B_\delta(0) \tag{4.40}$$

<u>Απόδειξη:</u> Η μηδενική λύση 0 του (1.1) είναι, εξ υποθέσεως, εκθετικά ευσταθής. Από αυτό συνεπάγεται πως υπάρχουν θετικές σταθερές α_1 και β_1 τέτοια ώστε αν $\|x_0\| < \delta$, τότε

$$\|x(t)\| \leq \alpha_1\|x_0\|e^{-\beta_1 t}, \qquad t \geq 0 \tag{4.41}$$

Έπειτα, έστω $x \in B_\delta(0)$ και έστω $s(t,x), t \geq 0$ να είναι η λύση του (1.1) με αρχική συνθήκη $x(0) = x$, έτσι ώστε για κάθε $\|x\| < \delta$ να ισχύει

$$\|s(t,x)\| \leq \alpha_1\|x\|e^{-\beta_1 t}, \qquad t \geq 0 \tag{4.42}$$

Τώρα, χρησιμοποιώντας παρόμοια επιχειρήματα όπως αυτά της απόδειξης του Θεωρήματος 4.1, έπεται πως για $\alpha(\delta) = \alpha_1, \beta(t) = e^{-\beta_1 t}, \gamma(\sigma) = \sigma^p$ και $(p-1)\beta_1 > \lambda$, όπου $\lambda = \max_{x \in B_\delta(0)} \|f'(x)\|$, έχουμε:

$$\int_0^\infty \alpha_1^p e^{-\beta_1 p t} dt < \infty \tag{4.43}$$

και

$$\int_0^\infty p\alpha_1^{p-1} e^{-\beta_1 (p-1) t} e^{\lambda t} dt < \infty \tag{4.44}$$

Συνεπώς, από τις (4.42), (4.43) και (4.44), η συνάρτηση

$$V(x) = \int_0^\infty \|s(t,x)\|^p dt \tag{4.45}$$

είναι μια συνεχώς διαφορίσιμη υποψήφια συνάρτηση Lyapunov για το (1.1).

Για να δείξουμε πως η (4.39) ισχύει, παρατηρούμε πως

$$V(x) = \int_0^\infty \|s(t,x)\|^p dt$$

$$\leq \int_0^{\infty} \alpha_1^p \|x\|^p e^{-\beta_1 p t} dt$$

$$= \frac{\alpha_1^p}{p\beta_1} \|x\|^p, \qquad x \in D \tag{4.46}$$

το οποίο αποδεικνύει την δεξιά ανισότητα της (4.39). Εν συνεχεία, εφόσον $\|f'(x)\| \leq \lambda, x \in B_\delta(0)$ και η $f(\cdot)$ είναι ομοιόμορφα Lipschitz-συνεχής στο $B_\delta(0)$ με σταθερά Lipschitz $L = \lambda$, έπεται ότι

$$\begin{aligned} \|f(s(t,x))\| &\leq \lambda \|s(t,x)\| \\ &\leq \lambda \alpha_1 \|x\| e^{-\beta_1 t} \\ &\leq \lambda \alpha_1 \|x\|, \qquad t \geq 0 \end{aligned} \tag{4.47}$$

συνεπώς,

$$s(t,x) = x + \int_0^t f(s(\tau,x)) d\tau \tag{4.48}$$

το οποίο λόγω της (4.47) συνεπάγεται

$$\|s(t,x)\| \geq \|x\| - \|x\| \lambda \alpha_1 t \Rightarrow$$

$$\|s(t,x)\| \geq \frac{\|x\|}{2}, \qquad t \in \left[0, \frac{1}{2\lambda\alpha_1}\right] \tag{4.49}$$

Λόγω της (4.45) θα έχουμε ότι

$$V(x) \geq \int_0^{\frac{1}{2\lambda\alpha_1}} \frac{\|x\|^p}{2^p} dt = \frac{1}{2^{p+1}\lambda\alpha_1} \|x\|^p, \qquad x \in B_\delta(0) \tag{4.50}$$

το οποίο αποδεικνύει την αριστερή ανισότητα της (4.39)

Τέλος, για να αποδείξουμε την (4.40), παρατηρούμε ότι με $\gamma(\sigma) = \sigma^p$, έπεται ότι, όπως στην απόδειξη του θεωρήματος 4.1, $\dot{V}(x) = -\gamma(\|x\|) = -\|x\|^p$. Το αποτέλεσμα είναι άμεσο από την (4.39), καθώς

$$\dot{V}(x) = -\|x\|^p \leq -\frac{1}{\beta} V(x), \qquad x \in B_\delta(0), \tag{4.51}$$

που αποδεικνύει την (4.40).□

Στην συνέχεια, παρουσιάζουμε ένα πόρισμα του άνωθεν θεωρήματος, το οποίο δείχνει ότι το p μπορεί να είναι ίσο με 2, χωρίς βλάβη της γενικότητας.

Πόρισμα 4.1: Υποθέτουμε ότι η μηδενική λύση του (1.1) είναι εκθετικά ευσταθής, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ μια γειτονιά του 0 και έστω συνάρτηση $f: D \to \mathbb{R}^n$ συνεχώς διαφορίσιμη και $\delta > 0$ τέτοιο ώστε το $B_\delta(0) \subset D$ να εμπεριέχεται στο πεδίο έλξης του (1.1). Τότε υπάρχει συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση $V: D \to \mathbb{R}$ και σταθερές $\alpha, \beta, \varepsilon > 0$ έτσι ώστε:

$$\alpha \|x\|^2 \leq V(x) \leq \beta \|x\|^2, \qquad x \in B_\delta(0) \tag{4.52}$$

$$V'(x)f(x) \leq -\varepsilon V(x), \qquad x \in B_\delta(0) \tag{4.53}$$

Απόδειξη: Άμεση συνέπεια του θεωρήματος, με $p = 2$. □

Στην συνέχεια παρουσιάζουμε το αντίστροφο θεώρημα Lyapunov για ολική εκθετική ευστάθεια. Πριν το διατυπώσουμε, αναφέρουμε μια πρόταση την οποία παραθέτουμε χωρίς απόδειξη.

Πρόταση 4.2: Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ συνεχώς διαφορίσιμη στο $\mathbb{R}^n$. Τότε, η f είναι ολικά Lipschitz – συνεχής αν και μόνο αν υπάρχει $L > 0$ τέτοιο ώστε

$$\|f'(x)\| \leq L \ \ \forall x \in \mathbb{R}^n \tag{4.54}$$

4.4 Ολικά εκθετικά ευσταθή μη – γραμμικά δυναμικά συστήματα

Θεώρημα 4.3: Αν η μηδενική λύση του (1.1) είναι ολικά εκθετικά ευσταθής και υπάρχει συνάρτηση $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ συνεχώς διαφορίσιμη και ολικά Lipschitz, τότε υπάρχει συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση $V: D \to \mathbb{R}$, όπου $D \subseteq \mathbb{R}^n$ μια περιοχή του 0 και σταθερές $\alpha, \beta, \varepsilon > 0$ έτσι ώστε:

$$\alpha\|x\|^2 \leq V(x) \leq \beta\|x\|^2, \ \ x \in \mathbb{R}^n \tag{4.55}$$

$$V'(x)f(x) \leq -\varepsilon V(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n \tag{4.56}$$

Απόδειξη: Από την Πρόταση 4.2, η f θα είναι ολικά Lipschitz εάν και μόνο αν $\|f'(x)\| \leq \lambda \ \ x \in \mathbb{R}^n$. Η απόδειξη είναι η ίδια με αυτήν του Θεωρήματος 3.10, αντικαθιστώντας το $B_\delta(0)$ με $\mathbb{R}^n$ και $p = 2$.□

5 Θεωρήματα Αστάθειας

Μέχρι στιγμής, έχουμε εξετάσει θεωρήματα τα οποία μελετούν την ευστάθεια της μηδενικής λύσης μη – γραμμικών δυναμικών συστημάτων, κάνοντας χρήση κάποιας κατάλληλης συνάρτησης Lyapunov. Εντούτοις, η αδυναμία μιας υποψήφιας συνάρτησης Lyapunov να αποδείξει την ευστάθεια του μη – γραμμικού δυναμικού συστήματος, δεν συνεπάγεται την αστάθεια της λύσης. Σε αυτό το κεφάλαιο, παραθέτουμε τρία θεωρήματα, τα οποία, τα οποία αποδεικνύουν την αστάθεια της μηδενικής λύσης του (1.1).

5.1 Πρώτο θεώρημα αστάθειας Lyapunov

Θεώρημα 5.1 (1ο θεώρημα αστάθειας Lyapunov): Έστω το μη – γραμμικό δυναμικό σύστημα (1.1), συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση $V: D \to \mathbb{R}$, όπου $D \subseteq \mathbb{R}^n$ μια γειτονιά του 0 και $\varepsilon > 0$ έτσι ώστε:

$$V(0) = 0 \tag{5.1}$$

$$V'(x)f(x) > 0, \;\; x \in B_\varepsilon(0), \;\; x \neq 0 \tag{5.2}$$

Επίσης, υποθέτουμε ότι για κάθε αρκούντως μικρό $\delta > 0$, υπάρχει $x_0 \in D$ τέτοιο ώστε

$$\|x_0\| < \delta \tag{5.3}$$

και

$$V(x_0) > 0 \tag{5.4}$$

Τότε η μηδενική λύση του (1.1) είναι ασταθής.

Απόδειξη: Εις άτοπον απαγωγή, υποθέτουμε πως υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε αν $x_0 \in B_\delta(0)$, τότε $x(t) \in B_\varepsilon(0), \;\; t \geq 0$. Από την (5.4), υπάρχει $x_0 \in D$ τέτοιο ώστε

$$V(x_0) = c > 0 \tag{5.5}$$

και $\|x_0\| < \delta$. Τότε, από την (5.2) έπεται ότι

$$V'\big(x(t)\big)f\big(x(t)\big) \geq 0, \;\; t \geq 0 \tag{5.6}$$

και συνεπώς

$$V\big(x(t)\big) \geq c > 0, \qquad t \geq 0 \tag{5.7}$$

Άρα, πάνω στην τροχιά του (1.1) θα ισχύει

$$V'\big(x(t)\big)f\big(x(t)\big) > 0, \qquad t \geq 0 \tag{5.8}$$

όπου $x(t), t \geq 0$ συμβολίζει την λύση του (1.1) με αρχική συνθήκη x_0. Έστω τώρα το σύνολο

$$S \coloneqq \{y \in \mathbb{R}^n : y = x(t), t \geq 0\} \tag{5.9}$$

Παρατηρούμε ότι το $\overline{S}$ είναι συμπαγές. Από την (5.8), έπεται ότι υπάρχει d τέτοιο ώστε

$$d = \min_{y \in \overline{S}} V'(y) f(y) > 0 \tag{5.10}$$

Επειδή η $V(\cdot)$ είναι συνεχής στο $\overline{B}_\varepsilon(0)$, θα υπάρχει $\alpha > 0$ τέτοιο ώστε

$$V(x) \leq \alpha, x \in B_\varepsilon(0) \cap S \tag{5.11}$$

συνεπώς,

$$\begin{aligned} \alpha \geq V\big(x(t)\big) &= V\big(x(t_1)\big) + \int_{t_1}^{t} V'\big(x(s)\big) f\big(x(s)\big) ds \\ &\geq c + (t - t_1)d, \qquad t \geq t_1 \end{aligned} \tag{5.12}$$

Επειδή το δεξί μέρος της ανισότητας δεν είναι φραγμένο, έπεται ότι υπάρχει $t \geq t_1$ τέτοιο ώστε

$$\alpha < c + (t - t_1)d \tag{5.13}$$

κάτι που έρχεται σε αντίθεση με την (5.12). Άρα δεν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε αν $x_0 \in B_\delta(0)$, τότε $x(t) \in B_\varepsilon(0), t \geq 0$. Συνεπώς, η μηδενική λύση του (1.1) είναι ασταθής.□

Είναι ενδιαφέρον να τονίσουμε ότι στο εν λόγω Θεώρημα, η συνάρτηση $V(\cdot)$ μπορεί να είναι θετική ή αρνητική στο D. Εντούτοις, η $V(\cdot)$ πρέπει να είναι θετική για κάποια σημεία $x_0 \neq 0$, κοντά στην αρχή του (1.1).

Ακολουθεί ένα παράδειγμα κατά το οποίο γίνεται εφαρμογή του θεωρήματος 5.1.

<u>Παράδειγμα 5.1:</u> Έστω μη – γραμμικό δυναμικό σύστημα

$$\dot{x}_1(t) = x_1(t) - x_2(t) + x_1(t)x_2(t) \tag{5.14}$$

$$\dot{x}_2(t) = -x_2(t) - x_2^2(t) \tag{5.15}$$

με $x(0) = \big(x_1(0), x_2(0)\big) = (x_{10}, x_{20}) = x_0, t \geq 0$ και συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση $V: D \to \mathbb{R}$, όπου $D \subseteq \mathbb{R}^2$ μια γειτονιά του 0, με

$$V(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2)^2 - x_2^2 \tag{5.16}$$

Εξετάζουμε την ευστάθεια της μηδενικής λύσης για το μη – γραμμικό δυναμικό σύστημα (5.14) – (5.15) μέσω του Θεωρήματος 5.1.

Αρχικά, παρατηρούμε ότι πάνω στην ευθεία $x_2 = 0, V(x_1, x_2) > 0$ για σημεία κοντά στην αρχή των αξόνων. Στην συνέχεια, υπολογίζουμε την $\dot{V}(x_1, x_2)$:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_1, x_2) &= (8x_1 - 4x_2)\dot{x}_1 - 4x_1\dot{x}_2 \\ &= (8x_1 - 5x_2)(x_1 - x_2 + x_1x_2) - 4x_1(-x_2 - x_2^2) \\ &= 8x_1^2 - 8x_1x_2 + 8x_1^2x_2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_2^2 \\ &= 8x_1^2 - 8x_1x_2 + 8x_1^2x_2 + 4x_2^2 \end{aligned} \tag{5.17}$$

Παρατηρούμε ότι υπάρχει μια περιοχή $\mathcal{N}$ της αρχής των αξόνων και $\delta \in (0,1)$ έτσι ώστε:

$$|-8x_1x_2 + 8x_1^2x_2| \leq \delta(8x_1^2 + 4x_2^2), \forall x \in \mathcal{N} \tag{5.18}$$

Από την (5.18), για $x \in \mathcal{N}$ έχουμε:

$$| - 8x_1x_2 + 8x_1^2x_2| \leq \delta(8x_1^2 + 4x_2^2) \Rightarrow$$

$$-\delta(8x_1^2 + 4x_2^2) \leq |-8x_1x_2 + 8x_1^2x_2| \Rightarrow$$

$$(8x_1^2 + 4x_2^2) - \delta(8x_1^2 + 4x_2^2) \leq (8x_1^2 + 4x_2^2) + |-8x_1x_2 + 8x_1^2x_2| \Rightarrow$$

$$(1-\delta)(8x_1^2 + 4x_2^2) \leq (8x_1^2 + 4x_2^2) + |-8x_1x_2 + 8x_1^2x_2| \tag{5.19}$$

Για το πρώτο σκέλος της (5.19), παρατηρούμε ότι

$$0 < (1-\delta)(8x_1^2 + 4x_2^2) \tag{5.20}$$

για $x \in \mathcal{N}, x \neq 0$. Επίσης, για το δεύτερο σκέλος της (5.19), ισχύει:

$$(8x_1^2 + 4x_2^2) + |-8x_1x_2 + 8x_1^2x_2| \leq \dot{V}(x) \tag{5.21}$$

για $x \in \mathcal{N}$.Συνεπώς, από τις (5.19), (5.20) και (5.21), έχουμε

$$\dot{V}(x_1, x_2) > 0, \forall x \in \mathcal{N}, x \neq 0 \tag{5.22}$$

Συνεπώς οι συνθήκες του Θεωρήματος 5.1 πληρούνται, οπότε η μηδενική λύση του μη – γραμμικού δυναμικού συστήματος (5.14) – (5.15) είναι ασταθής.■

5.2 Δεύτερο Θεώρημα αστάθειας Lyapunov

<u>Θεώρημα 5.2 (2ο θεώρημα αστάθειας Lyapunov):</u> Έστω το μη – γραμμικό δυναμικό σύστημα (1.1). Υποθέτουμε ότι υπάρχει συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση $V: D \to \mathbb{R}$, όπου $D \subseteq \mathbb{R}^n$ μια γειτονιά του 0, συνάρτηση $W: D \to \mathbb{R}$ και σταθερές $\varepsilon, \lambda > 0$ έτσι ώστε:

$$V(0) = 0 \tag{5.23}$$

$$W(x) \geq 0, x \in B_\varepsilon(0) \tag{5.24}$$

$$V'(x)f(x) = \lambda V(x) + W(x) \tag{5.25}$$

Επιπλέον, έστω πως για κάθε αρκούντως μικρό $\delta > 0$, υπάρχει $x_0 \in D$ τέτοιο ώστε

$$\|x_0\| < \delta \tag{5.26}$$

και

$$V(x_0) > 0 \tag{5.27}$$

Τότε η μηδενική λύση του (1.1) είναι ασταθής.

<u>Απόδειξη:</u> Υποθέτουμε, προς εις άτοπον απαγωγή, ότι υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε, αν $x_0 \in B_\delta(0)$, τότε $x(t) \in B_\varepsilon(0),\ t \geq 0$. Από υπόθεση, υπάρχει $x_0 \in B_\delta(0)$ τέτοιο ώστε $V(x_0) > 0$. Από την (5.25), έπεται ότι

$$V'(x)f(x) \geq \lambda V(x), \qquad x \in B_\varepsilon(0) \tag{5.28}$$

ή, ισοδύναμα,

$$V'(x)f(x) - \lambda V(x) \geq 0, \qquad x \in B_\varepsilon(0) \tag{5.29}$$

Στην συνέχεια, πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με $e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$ έχουμε:

$$\begin{gathered} e^{-\lambda t}V'\big(x(t)\big)f\big(x(t)\big) - \lambda e^{-\lambda t}V\big(x(t)\big) \geq 0, \qquad t \geq 0 \Rightarrow \\ \frac{d}{dt}\left[e^{-\lambda t}V\big(x(t)\big)\right] \geq 0, \qquad t \geq 0 \end{gathered} \tag{5.30}$$

όπου $x(t)$ είναι η λύση του (1.1) με αρχική συνθήκη x_0. Ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη, έχουμε

$$e^{-\lambda t}V\big(x(t)\big) - V(x(0) \geq 0, \qquad t \geq 0 \Rightarrow$$

$$V\big(x(t)\big) \geq e^{\lambda t}V\big(x(0)\big), \qquad t \geq 0 \tag{5.31}$$

Συνεπώς, εφόσον $V(x_0) > 0$, $x(t) \notin B_\varepsilon(0)$ για $t \to \infty$, άτοπο. Άρα, η μηδενική λύση του (1.1) είναι ασταθής γιατί δεν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε αν $x_0 \in B_\delta(0)$, τότε $x(t) \in B_\varepsilon(0)$, για κάθε $t \geq 0$.

<u>Παράδειγμα 5.2:</u> Έστω μη – γραμμικό δυναμικό σύστημα

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_1(t) + 2x_2(t) + x_1(t)x_2^2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= 2x_1(t) + x_2(t) - x_1^2(t)x_2(t) \end{aligned} \tag{5.32}$$

με $x(0) = \big(x_1(0), x_2(0)\big) = (x_{10}, x_{20}) = x_0$, $t \geq 0$ και συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση $V: D \to \mathbb{R}$, όπου $D \subseteq \mathbb{R}^2$, με

$$V(x) = x_1^2 - x_2^2 \tag{5.33}$$

Εξετάζουμε την ευστάθεια της μηδενικής λύσης για το μη – γραμμικό δυναμικό σύστημα (5.32) μέσω του Θεωρήματος 5.2.

Αρχικά παρατηρούμε ότι πάνω στην ευθεία $x_2 = 0$, ισχύει $V(x_1, x_2) > 0$ για σημεία κοντά στην αρχή των αξόνων. Στην συνέχεια, υπολογίζουμε την $\dot{V}(x)$:

$$\dot{V}(x) = 2x_1\dot{x}_1 - 2x_2\dot{x}_2$$

$$= 2x_1(x_1 + 2x_2 + x_1x_2^2) - 2x_2(2x_1 + x_2 - x_1^2x_2)$$

$$= 2x_1^2 - 2x_2^2 + 4x_1^2x_2^2$$

$$= 2(x_1^2 - x_2^2) + 4x_1^2x_2^2 \Rightarrow$$

$$\dot{V}(x) = 2V(x) + 4x_1^2x_2^2 \tag{5.34}$$

Συνεπώς, έχουμε $\lambda = 2$ και

$$W(x) = 4x_1^2 x_2^2 \geq 0, \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \tag{5.35}$$

Έτσι, πληρούνται οι (5.23) – (5.27) του Θεωρήματος 5.2, οπότε η μηδενική λύση του μη – γραμμικού δυναμικού συστήματος (5.32) είναι ασταθής.■

5.3 Θεώρημα αστάθειας Chetaev

Θεώρημα 5.3 (θεώρημα αστάθειας Chetaev): Έστω το μη – γραμμικό δυναμικό σύστημα (1.1), συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση $V: D \to \mathbb{R}$, όπου $D \subseteq \mathbb{R}^n$ μια γειτονιά του 0 και ανοιχτό μη κενό σύνολο $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ έτσι ώστε

$$0 \in \partial Q \tag{5.36}$$

$$V(x) > 0, x \in Q \text{ κοντά στο } 0 \tag{5.37}$$

$$V(x) = 0, x \in \partial Q \text{ κοντά στο } 0 \tag{5.38}$$

$$\dot{V}(x) = V'(x) f(x) > 0, x \in Q \text{ κοντά στο } 0 \tag{5.39}$$

Τότε η μηδενική λύση του (1.1) είναι ασταθής.

Απόδειξη: Ορίζουμε

$$W = Q \cap B_\varepsilon(0) \tag{5.40}$$

για κατάλληλα μικρό $\varepsilon > 0$, έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι (5.37), (5.38) και (5.39) για κάθε $x \in W$. Έστω τώρα $x_0 \in intW$ και $a = V(x_0)$. Προφανώς, λόγω της (5.37), $\alpha > 0$. Ορίζουμε

$$\gamma \coloneqq \inf\{\dot{V}(x) : x \in W \text{ και } V(x) \geq a\} \tag{5.41}$$

Λόγω της (5.37) και της κατασκευής του α, ισχύει $\gamma > 0$. Από την (5.39) επίσης έπεται ότι

$$V\big(x(t, x_0)\big) = V(x_0) + \int_0^t \dot{V}\big(x(s)\big)\, ds \geq a + \gamma t \tag{5.42}$$

Η (5.42) βεβαιώνει ότι η $x(\cdot)$ εγκαταλείπει το χωρίο W, αφού το W είναι φραγμένο. Άρα, υπάρχει $T > 0$ τέτοιο ώστε

$$x(t, x_0) \in W, t \in [0, T) \tag{5.43}$$

και

$$x(T, x_0) \in \partial B_\varepsilon(0) \tag{5.44}$$

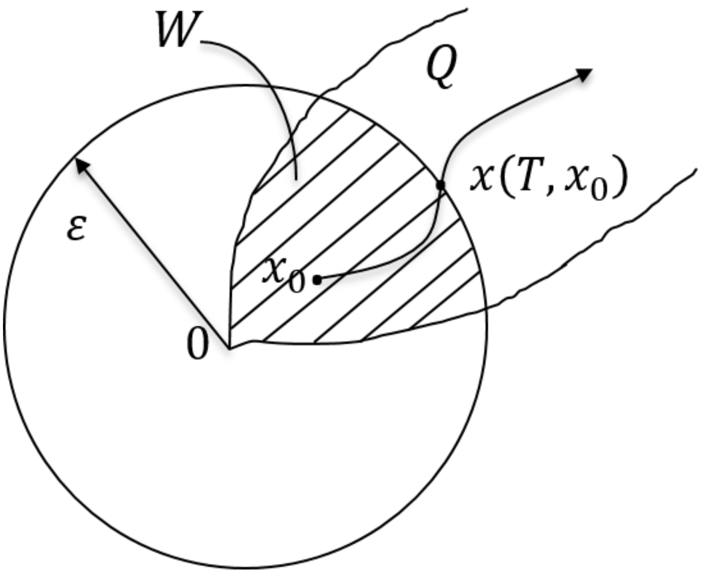
Πράγματι, αν αυτό ήταν ψευδές, τότε $x(t, x_0) \in W$ για $t \in [0, T)$ και

$$x(T, x_0) \in \partial Q$$

$$x(T, x_0) \in B_\varepsilon(0)$$

για κάποιο $T > 0$, συνεπώς, λόγω της (5.38), $V\big(x(T, x_0)\big) = 0$, άτοπο, γιατί λόγω της (5.39) $V\big(x(t, x_0)\big) \geq V(x_0) = a > 0$.

Έτσι, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει x_0 αυθαίρετα κοντά στο μηδέν, έτσι ώστε $\|x(T, x_0)\| \geq \varepsilon$ για κάποιο $T > 0$ ή, ισοδύναμα, η μηδενική λύση του (1.1) είναι ασταθής.□



Σχήμα 5.1: Τα σύνολα $B_\varepsilon(0), W, Q$ της απόδειξης του Θεωρήματος 5.3.

Παράδειγμα 5.3: Έστω το μη – γραμμικό δυναμικό σύστημα

$$\dot{x}_1(t) = x_1(t) + x_2(t) \tag{5.45}$$

$$\dot{x}_2(t) = x_1(t) - x_2(t) + x_1(t)x_2(t)$$

με $x(0) = \big(x_1(0), x_2(0)\big) = (x_{10}, x_{20}) = x_0,\ t \geq 0$.

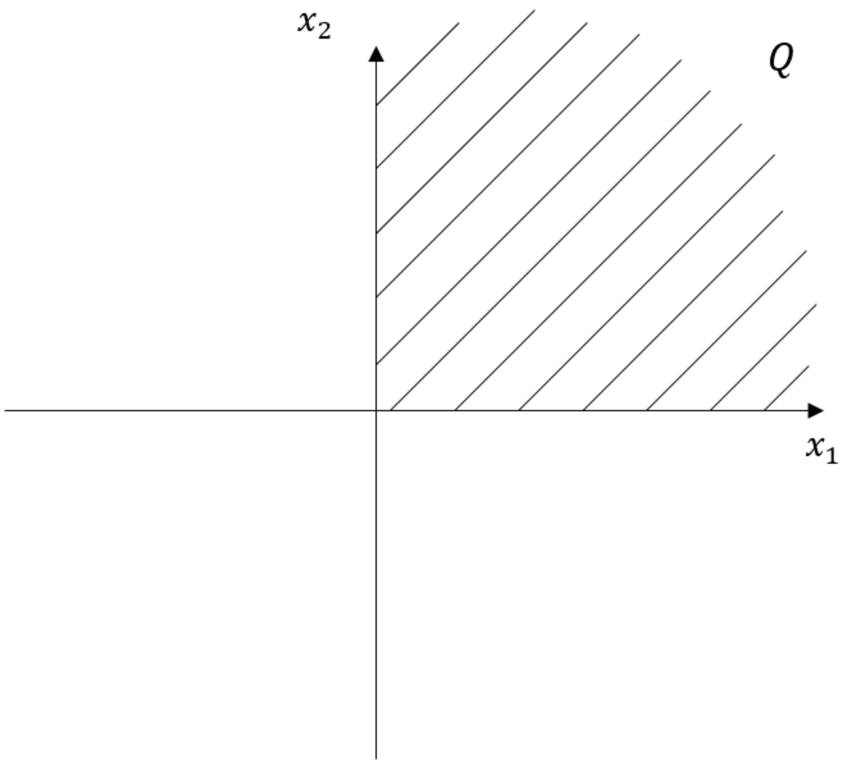
Επίσης, έστω συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση $V\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, με

$$V(x_1, x_2) = x_1 x_2 \tag{5.46}$$

και ανοιχτό διάστημα $Q \subseteq \mathbb{R}^2$ με

$$Q = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \colon x_1 > 0, x_2 > 0\} \tag{5.47}$$

Εξετάζουμε την ευστάθεια της μηδενικής λύσης για το μη – γραμμικό δυναμικό σύστημα (5.45) μέσω του Θεωρήματος 5.3.



Σχήμα 5.2: Γραφική αναπαράσταση Q του Παραδείγματος 5.3

Αρχικά, παρατηρούμε ότι

$$V(x) > 0, x \in Q \tag{5.48}$$

Στην συνέχεια, υπολογίζουμε την κλειστότητα του Q:

$$\overline{Q} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\} \tag{5.49}$$

οπότε το ∂Q θα είναι:

$$\partial Q = \overline{Q} \backslash Q = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = 0, x_2 = 0\} \tag{5.50}$$

άρα

$$0 \in \partial Q \tag{5.51}$$

οπότε, για την (5.46) ισχύει, λόγω της (5.50),

$$V(x_1, x_2) = 0, \qquad \forall x \in \partial Q \tag{5.52}$$

Τέλος, υπολογίζουμε την παράγωγο της $V(x_1, x_2)$:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= x_2 \dot{x}_1 + x_1 \dot{x}_2 \\ &= x_2(x_1 + x_2) + x_1(x_1 - x_2 + x_1 x_2) \\ &= x_1^2 + x_1 x_2 + x_1^2 - x_1 x_2 + x_1^2 x_2 \\ &= x_1^2 + x_2^2 + x_1^2 x_2 > 0 \;\; \forall x \in Q \end{aligned} \tag{5.53}$$

Οι (5.48), (5.51), (5.52) και (5.53) πληρούν τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Chetaev, συνεπώς η μηδενική λύση του μη – γραμμικού δυναμικού συστήματος (5.45) είναι ασταθής. ■

6 Lyapunov ευστάθεια σε γραμμικά συστήματα

Σε αυτό το κεφάλαιο ασχολούμαστε με γραμμικά δυναμικά συστήματα της μορφής

$$\dot{x}(t) = Ax(t), t \geq 0, \qquad x(0) = x_0 \tag{6.1}$$

όπου $x(t) \in \mathbb{R}^n, t \geq 0$ και $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Πριν συνεχίσουμε, ορίζουμε κάποιες έννοιες που θα χρειαστούμε παρακάτω.

<u>Ορισμός 6.1:</u> Ορίζουμε ως μηδενικό υπόχωρο ("null space") ενός πίνακα $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ το σύνολο $N(A) = \{x \in \mathbb{R}^{m\times n}: Ax = 0\}$.

<u>Ορισμός 6.2:</u> Έστω λ_i ιδιοτιμή του $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Ορίζουμε ως αλγεβρική πολλαπλότητα $\mu_A(\lambda_i)$ της λ_i την πολλαπλότητα της ρίζας λ_i στο χαρακτηριστικό πολυώνυμο $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$. Αντίστοιχα, ορίζουμε ως γεωμετρική πολλαπλότητα $\gamma_A(\lambda_i)$ της λ_i τον μέγιστο αριθμό γραμμικώς ανεξάρτητων ιδιοδιανυσμάτων που αντιστοιχούν στην λ_i.

<u>Ορισμός 6.3:</u> Έστω λ_i ιδιοτιμή του $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Η λ_i καλείται ημιαπλή ("semisimple"), αν ισχύει $\mu_A(\lambda_i) = \gamma_A(\lambda_i)$.

6.1 Θεωρήματα ευστάθειας από Εξίσωση Lyapunov

Παρατηρούμε ότι το σημείο ισορροπίας x_e του (6.1) αντιστοιχεί στον μηδενικό υπόχωρο $N(A)$ του A. Αν $\det A \neq 0$ τότε ο μηδενικός υπόχωρος του A είναι ο τετριμμένος, δηλαδή $N(A) = \{0\}$, οπότε $x_e = 0$. Συνεπώς, εκτός και αν αναφέρουμε διαφορετικά, στην συνέχεια μελετάμε την ευστάθεια των γραμμικών δυναμικών συστημάτων για την μηδενική λύση $x_e \equiv 0$.

Στην συνέχεια, παραθέτουμε χωρίς απόδειξη ένα θεώρημα, το οποίο δίνει επαρκείς συνθήκες για ευστάθεια Lyapunov και ολική ασυμπτωτική ευστάθεια του (6.1).

<u>Θεώρημα 6.1:</u> Η μηδενική λύση $x(t) \equiv 0$ του γραμμικού δυναμικού συστήματος (6.1) είναι Lyapunov – ευσταθής αν και μόνο αν για κάθε ιδιοτιμή λ του A ισχύει $Re(\lambda) \leq 0$, με τις ιδιοτιμές για τις οποίες ισχύει $Re(\lambda) = 0$ να είναι ημιαπλές. Επιπλέον, αν και μόνο αν για κάθε ιδιοτιμή λ του A ισχύει $Re(\lambda) < 0$, τότε το (6.1) είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές.

Το Θεώρημα 6.1 δίνει επαρκείς και αναγκαίες συνθήκες για Lyapunov και ασυμπτωτική ευστάθεια για την μηδενική λύση του (6.1), εξετάζοντας τις ιδιοτιμές του A, κάνοντας σαφή την σπουδαιότητα των ιδιοτιμών του A για την ευστάθεια της μηδενικής λύσης. Ακολοθούν δυο ορισμοί.

<u>Ορισμός 6.4:</u> Έστω πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ με ιδιοτιμές λ_i. Ο A καλείται Lyapunov – ευσταθής, αν και $Re(\lambda_i) \leq 0$, για κάθε λ_i και κάθε ιδιοτιμή με $Re(\lambda_i) = 0$, είναι επιπλέον ημιαπλή.

Ορισμός 6.5: Έστω πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ με ιδιοτιμές λ_i. Ο A καλείται ασυμπτωτικά ευσταθής ή Hurwitz, αν $Re(\lambda_i) < 0$ για κάθε λ_i.

Το θεώρημα Lyapunov μπορεί να παρέχει επιπλέον ικανές και αναγκαίες συνθήκες για την μηδενική λύση του (6.1). Συγκεκριμένα, έστω

$$V(x) = x^T P x$$

υποψήφια συνάρτηση Lyapunov, όπου $x \in \mathbb{R}^n$ και $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ θετικά ορισμένος πίνακας. Υπολογίζουμε την παράγωγο της $V(\cdot)$:

$$\dot{V}(x) = V'(x) f(x) = 2x^T P A x = x^T (A^T P + PA) x \tag{6.2}$$

Για να πληροί η (6.2) την (1.23), πρέπει να υπάρχει ένας μη – αρνητικά ορισμένος πίνακας $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ τέτοιος ώστε

$$A^T P + PA = -R \tag{6.3}$$

Οπότε, η (6.2) μέσω της (6.3):

$$V'(x) f(x) = -x^T R x \leq 0, x \in \mathbb{R}^n \tag{6.4}$$

Συνεπώς η (6.4) πληροί την προϋπόθεση (1.23) του Θεωρήματος 1.6 για Lyapunov – ευστάθεια. Άρα πρέπει να προσδιορίσουμε έναν θετικά ορισμένο πίνακα P ο οποίος να ικανοποιεί

$$A^T P + PA^T + R = 0 \tag{6.5}$$

Η (6.5) ονομάζεται εξίσωση Lyapunov. Ακολουθεί ένα λήμμα, χωρίς απόδειξη, το οποίο περιγράφει τις προϋποθέσεις για την ύπαρξη και την μοναδικότητα της λύσης για την εξίσωση Lyapunov. Η σημαντικότητα της (6.5) έγκειται στο ότι, ανάλογα με τις ιδιότητες των $P, R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ που την ικανοποιούν, συνεπάγεται την ευστάθεια ή μη του γραμμικού δυναμικού συστήματος (6.1). Ακολούθως, θα παραθέσουμε δυο θεωρήματα, τα οποία, εκμεταλλευόμενα την εξίσωση Lyapunov όπως αυτή ορίστηκε, παρέχουν συνθήκες για ολική ασυμπτωτική και Lyapunov ευστάθεια. Πρώτα όμως, παραθέτουμε ένα λήμμα, χωρίς απόδειξη.

Λήμμα 6.1: Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Τότε, υπάρχει μοναδικός πίνακας $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ο οποίος ικανοποιεί την εξίσωση Lyapunov, αν και μόνο αν

$$\lambda_i(A) + \lambda_j(A) \neq 0, \qquad i, j = 1, \dots, n$$

όπου λ_i, λ_j, οι ιδιοτιμές του A.

Από το Λήμμα 6.1, έπεται ότι αν για κάποιο $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ η (6.5) δεν έχει μοναδική λύση, τότε η μηδενική λύση του (6.1) δεν είναι ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας. Ακολουθεί ένα θεώρημα το οποίο παρέχει ικανές και αναγκαίες συνθήκες για ολική ασυμπτωτική ευστάθεια, βάσει της λύσης της συνάρτησης Lyapunov.

Θεώρημα 6.2: Η μηδενική λύση του γραμμικού δυναμικού συστήματος (6.1) είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθής αν και μόνο αν για κάθε θετικά ορισμένο πίνακα $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ υπάρχει μοναδικός θετικά ορισμένος πίνακας $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ τέτοιος ώστε να ικανοποιεί την (6.5).

Για να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 6.2, επιλέγουμε οποιονδήποτε θετικά ορισμένο πίνακα $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και επιλύουμε την (6.5) ως προς $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Αν για τον R που επιλέξαμε, η (6.5) δεν έχει λύση ή έχει πολλαπλές λύσεις ως προς P, τότε η μηδενική λύση δεν ειναι ασυμπτωτικά ευσταθής. Αλλιώς, αν υπάρχει μοναδικός θετικά ορισμένος πίνακας P που να επιλύει την (6.5) για το R που επιλέξαμε, η μηδενική λύση είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθής.

Τέλος, παραθέτουμε χωρίς απόδειξη ένα θεώρημα το παρέχει ικανές και αναγκαίες συνθήκες ώστε η μηδενική λύση του (6.1) να είναι Lyapunov – ευσταθής, βάσει της ύπαρξης ενός θετικά ορισμένου πίνακα P ως λύσης της (6.5).

<u>Θεώρημα 6.3:</u> Η μηδενική λύση του γραμμικού δυναμικού συστήματος (6.1) είναι Lyapunov ευσταθής αν και μόνο αν υπάρχει θετικά ορισμένος πίνακας $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και ένας μη – αρνητικά ορισμένος πίνακας $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ τέτοιοι ώστε να ικανοποιούν την (6.5).

6.2 Γραμμικοποίηση

Σε αυτήν την ενότητα, χρησιμοποιούμε την έμμεση μέθοδο Lyapunov (Lyapunov indirect method), η οποία παρέχει συμπεράσματα σχετικά με την τοπική ευστάθεια της μηδενικής λύσης του μη – γραμμικού δυναμικού συστήματος (1.1) σε μια περιοχή της μηδενικής λύσης $x(t) \equiv 0$. Πριν διατυπώσουμε την έμμεση μέθοδο Lyapunov, παραθέτουμε μια πρόταση, η οποία αποτελεί κριτήριο για εκθετική ασυμπτωτική ευστάθεια.

<u>Πρόταση 6.1:</u> Έστω το μη – γραμμικό δυναμικό σύστημα (1.1), συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση $V: D \to \mathbb{R}$, όπου $D \subseteq \mathbb{R}^n$ μια γειτονιά του 0 και σταθερές $0 < c_1, c_2, c_3$. Αν ισχύει:

$$c_1\|x\|^2 \leq V(x)\| \leq c_2\|x\|^2, \qquad \forall x \in D, c_1 \leq c_2 \tag{6.6}$$

$$\dot{V}(x) = V'(x)f(x) \leq -c_3\|x\|^2, \qquad \forall x \in D \tag{6.7}$$

Τότε η μηδενική λύση του (1.1) είναι εκθετικά ευσταθές σημείο ισορροπίας. Αν επιπλέον $D = \mathbb{R}^n$, τότε λόγω της (6.6) ισχύει η συνθήκη για radial unboundedness $V(x) \xrightarrow{\|x\|\to\infty} \infty$, οπότε η μηδενική λύση είναι ολικά εκθετικά ευσταθές σημείο ισορροπίας.

<u>Απόδειξη:</u> Έστω $x(t, x_0), t \geq 0$ η λύση του (1.1) με αρχική συνθήκη $x(0) = x_0$. Τότε από την (6.7):

$$\dot{V}\big(x(t, x_0)\big) = V'\big(x(t, x_0)\big)f\big(x(t, x_0)\big) \leq -c_3\|x(t, x_0)\|^2$$

από την (6.6):

$$0 < V\big(x(t, x_0)\big) \leq c_2\|x(t, x_0)\|^2$$

Διαιρώντας κατά μέλη, έχουμε:

$$\frac{\dot{V}\big(x(t,x_0)\big)}{V\big(x(t,x_0)\big)} \leq -\frac{c_3}{c_2}$$

ολοκληρώνουμε κατά μέλη:

$$\int_0^t \frac{\dot{V}\big(x(s,x_0)\big)}{V\big(x(s,x_0)\big)} ds \leq \int_0^t \left(-\frac{c_3}{c_2}\right) ds \Rightarrow$$

$$\frac{V\big(x(t,x_0)\big)}{V\big(x(0,x_0)\big)} \leq e^{-\frac{c_3}{c_2}t} \xRightarrow{x(0,x_0)=x_0}$$

$$V(x(t,x_0) \leq V(x_0)e^{-\frac{c_3}{c_2}t} \tag{6.8}$$

Η (6.8) μέσω της (6.6):

$$c_1\|x(t,x_0)\|^2 \leq c_2\|x_0\|^2 e^{-\frac{c_3}{c_2}t} \Rightarrow$$

$$\|x(t,x_0)\| \leq \sqrt{\frac{c_2}{c_1}}\|x_0\|e^{-\frac{c_3}{2c_2}t} \tag{6.9}$$

όπου θέτοντας $a \coloneqq \sqrt{\frac{c_2}{c_1}}$ και $\beta \coloneqq \frac{c_3}{2c_2}$ στην (6.9), προκύπτει

$$\|x(t,x_0)\| \leq \alpha\|x_0\|e^{-\beta t}, t \geq 0, \forall x_0 \in D$$

Οπότε η μηδενική λύση είναι εκθετικά ευσταθές σημείο ισορροπίας του (1.1). Αν, επιπλέον, $D = \mathbb{R}^n$ τότε είναι ολικά εκθετικά ευσταθές σημείο ισορροπίας.□

<u>Θεώρημα 6.4 (θεώρημα γραμμικοποίησης Lyapunov):</u>

Έστω το μη – γραμμικό δυναμικό σύστημα (1.1), D ανοιχτό με $0 \in D$, συνάρτηση $f: D \to \mathbb{R}$ συνεχώς διαφορίσιμη με $f(0) = 0$ και έστω ότι

$$A = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=0}$$

Τότε

- Αν ο A είναι Hurwitz, τότε η μηδενική λύση είναι εκθετικά ευσταθής
- αν υπάρχει ιδιοτιμή λ_i του A τέτοια ώστε $Re(\lambda_i)$>0, τότε η μηδενική λύση είναι ασταθής.

<u>Απόδειξη:</u> Αναπτύσσουμε την $f(x)$ στο (1.1) σε σειρά Taylor γύρω από το 0. Τότε:

$$\dot{x}(t) = f\big(x(t)\big) = f(0) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=0} x + O(x)$$

$$\dot{x}(t) = Ax + O(x) \tag{6.10}$$

όπου $O(x)$ είναι το υπόλοιπο του πολυωνύμου, με ιδιότητα

$$\frac{\|O(x)\|}{\|x\|} \xrightarrow{x\to 0} 0 \tag{6.11}$$

Επειδή ο A είναι Hurwitz, υπάρχει πίνακας $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ θετικά ορισμένος, τέτοιος ώστε να ικανοποιεί την εξίσωση Lyapunov, με $R = I_{n\times n}$, δηλαδή

$$A^T P + PA = -I$$

Θέτουμε συνάρτηση Lyapunov $V(x) = x^T Px$, η οποία προφανώς ικανοποιεί την (6.6). Στην συνέχεια, υπολογίζουμε την $\dot{V}(x)$.

$$\dot{V}(x) = V'(x)f(x) = (2x^T P)\big(Ax + O(x)\big) = 2x^T PAx + 2x^T PO(x) \Rightarrow$$

$$\dot{V}(x) = x^T PAx + x^T PAx + 2x^T PO(x) = x^T(PA + A^T P)x + 2x^T PO(x) \Rightarrow$$

$$\dot{V}(x) = -\|x\|^2 \left(1 - \frac{2x^T PO(x)}{\|x\|^2}\right)$$

Οπότε, για x κοντά στο 0, λόγω της (6.11), ισχύει

$$\dot{V}(x) = -\|x\|^2 \tag{6.12}$$

Άρα, η $\dot{V}(x)$ πληροί τις προϋποθέσεις (6.6) και (6.7) της Πρότασης 6.1, συνεπώς η μηδενική λύση είναι εκθετικά ευσταθής. □

Παράδειγμα 6.1: Έστω το μη – γραμμικό δυναμικό σύστημα

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -x_1(t) - x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) - x_2^3(t) \end{aligned} \tag{6.13}$$

Παρατηρούμε ότι $f(0) = 0$. Υπολογίζουμε

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -3x_2^2 \end{pmatrix}$$

οπότε

$$A = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=(0,0)} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{6.14}$$

με ιδιοτιμές

$$\det(\lambda I - A) = 0 \Rightarrow$$

$$\det\begin{pmatrix} \lambda + 1 & 1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$$

το οποίο έχει ρίζες

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Οπότε $Re(\lambda_1), Re(\lambda_2) < 0$, οπότε η μηδενική λύση του (6.13) είναι εκθετικά ασυμπτωτικα ευσταθής.■

Παράδειγμα 6.2: Έστω το μη – γραμμικό δυναμικό σύστημα (5.45) του Παραδείγματος 5.3, δηλαδή το

$$\dot{x}_1(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = x_1(t) - x_2(t) + x_1(t)x_2(t)$$

με $x(0) = \big(x_1(0), x_2(0)\big) = (x_{10}, x_{20}) = x_0,\ t \geq 0.$

Παρατηρούμε ότι $f(0) = 0$. Υπολογίζουμε

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 + x_2 & -1 + x_1 \end{pmatrix}$$

οπότε

$$A = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=(0,0)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{6.15}$$

με ιδιοτιμές

$$\det(\lambda I - A) = 0 \Rightarrow$$

$$\det\begin{pmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -1 & \lambda + 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda^2 - 1 - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda^2 = 2 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{2}$$

Οπότε, επειδή $\lambda_1 = \sqrt{2} \geq 0$, προκύπτει και μέσω του Θεωρήματος 6.4 ότι η μηδενική λύση του (5.45) είναι ασταθής.

Βιβλιογραφία

[1] Haddad, Wassim M., and VijaySekhar Chellaboina. *Nonlinear dynamical systems and control: a Lyapunov-based approach*. Princeton University Press, 2008.

[2] Khalil, Hassan K. *Nonlinear systems (Second Edition)*. New Jersey: Prentice Hall, 1996.

[3] I. Τσινιάς, *Θεωρία Συστημάτων – Συμπληρωματικές σημειώσεις για τα κεφάλαια 1-7,11 των σημειώσεων «Αρίστου Ελέγχου»,* ΕΜΠ.

[4] Brauer, Fred, and John A. Nohel. *The qualitative theory of ordinary differential equations: an introduction*. Courier Corporation, 2012.