



*Stochastic dynamic response and optimization of structures  
with Finite Elements*

Odysseas Kokkinos

School of Civil Engineering  
Institute of Structural Analysis & Antiseismic Research

National Technical University of Athens

A thesis submitted for the degree of

*Doctor of Philosophy*

December, 2015

Supervisor:  
Assistant Prof. V. Papadopoulos



---

## **APPROVAL**

PhD THESIS EXAMINATION COMMITTEE:

---

Ass. Prof. Vissarion Papadopoulos  
(Supervisor and Principal Advisor of the Committee)  
National Technical University of Athens  
School of Civil Engineering

---

Prof. Manolis Papadrakakis  
(Member Advisor of the Committee)  
National Technical University of Athens  
School of Civil Engineering

---

Prof. Leonidas Stavridis  
(Member Advisor of the Committee)  
National Technical University of Athens  
School of Civil Engineering



---

---

Prof. Christofer Provatidis  
(Member of the Examination Committee)  
National Technical University of Athens  
School of Mechanical Engineering

---

---

Prof. Konstantinos Spiliopoulos  
(Member of the Examination Committee)  
National Technical University of Athens  
School of Civil Engineering

---

---

Ass. Prof. Nikolaos Lagaros  
(Member of the Examination Committee)  
National Technical University of Athens  
School of Civil Engineering

---

---

Lect. Dimitrios Vamvatsikos  
(Member of the Examination Committee)  
National Technical University of Athens  
School of Civil Engineering



## ACKNOWLEDGEMENTS

This research has been carried out and funded in the framework of the European Research Council Advanced Grant MASTER-Mastering the computational challenges in numerical modeling and optimum design of CNT reinforced composites. This assistance is gratefully acknowledged.

My parents have been true beacons of wisdom, patience and determination on the road towards my PhD completion. The wholehearted and enthusiastic support they have offered me can be matched with no words on my part to express my gratitude. I can only wish to become their equal one day.

For this thesis, Ass. Prof. Vissarion Papadopoulos was a sine qua non condition. His insightful supervision, his composed demeanor, his selfless giving have been constitutive elements of this research. His continuing belief in me and his persisting ethics have shaped my scientific perspective.

Prof. Manolis Papadrakakis has been a fundamental pillar for my maiden journey in scientific research. His academic achievements yet his humble persona, ever available for consultation, have been a true inspiration.

I also owe my gratitude to Prof. Leonidas Stavridis for participating in my supervising committee.

My deepest gratitude is extended to Dr. Aristeidis Papachristidis for his unequivocal assistance. I also wish to thank Dr. Dimitris Savvas, George Soimiris and Dr. Dimitis Giovanis for the smooth and fruitful co-operation during my PhD.





## ABSTRACT

Establishing reliable and computationally efficient methodologies in stochastic dynamic analysis is a continuing effort in academic research. The first part of this thesis is emphasizing on developing a methodology that provides an alternative way of analyzing stochastic dynamic systems. More specifically, the concept of Variability Response Functions (VRFs) is extended initially to linear and then to general finite element stochastic systems leading to closed form integral expressions for their dynamic mean and variability response. An integral form for the variance of the dynamic response of stochastic systems is considered, involving a Dynamic VRF (DVRF) and the spectral density function of the stochastic field modeling the uncertain system properties. A finite element method-based fast Monte Carlo simulation procedure is used for the accurate and efficient numerical evaluation of these functions. As in the case of linear stochastic systems under static loads, the independence of the DVRF to the spectral density and the marginal probability density function of the stochastic field modeling the uncertain parameters is assumed. This assumption is here validated with brute-force Monte Carlo simulations. As a further validation of the assumption of independence of the variability response function to the stochastic parameters of the problem, the concept of the generalized variability response function was applied and compared to the steady state dynamic variability response function. The uncertain system property considered is the inverse of the elastic modulus (flexibility). The dynamic mean and variability response functions, once established, can be used to perform sensitivity/parametric analyses with respect to various probabilistic characteristics involved in the problem (i.e., correlation distance, standard deviation) and to establish realizable upper bounds on the dynamic mean and variance of the response, at practically no additional computational cost. They also provide an insight into the mechanisms controlling the dynamic mean and variability system response.

The second part of this thesis focuses on proposing an alternative approach on Robust Design Optimization (RDO) implementing the concept of Variability Response Function (VRF). The basic idea is to exploit the VRF independence of the stochastic system parameters, in order to obtain safer optima that depend only on the deterministic parameters of the problem. This way, optimal structural designs are achieved which are optimally insensitive to the worst possible uncertainties, that is to say they are free of the spectral-distribution characteristics of the stochastic fields modeling the uncertainties. This is achieved by setting in addition to the total material cost, the maximum VRF value as an objective function. The advantages of using the proposed methodology over traditional Robust Design Optimization are illustrated through an application to a frame-type structure where it is demonstrated that the designs achieved through classical RDO for a given stochastic field description are not optimal for a

variation on the spectral properties of the random field modeling the system uncertainty, while optimal designs obtained with the VRF-based RDO are optimum for the worst case scenario stochastic fields.

## ΣΥΝΤΟΜΗ ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΣΤΑ ΕΛΛΗΝΙΚΑ

Η καθιέρωση αξιόπιστων και υπολογιστικά αποτελεσματικών μεθοδολογιών στη στοχαστική δυναμική ανάλυση κατασκευών αποτελεί μια συνεχιζόμενη προσπάθεια στους κύκλους της ακαδημαϊκής έρευνας. Κατά τις δύο τελευταίες δεκαετίες αρκετή έρευνα έχει εστιάσει στη στοχαστική ανάλυση δομικών συστημάτων που ενσωματώνουν αβέβαιες παραμέτρους σε σχέση με το υλικό ή/και τη γεωμετρία με ταυτόχρονη χρήση μεθοδολογιών στοχαστικών πεπερασμένων στοιχείων για την αριθμητική επίλυση των μερικών διαφορικών εξισώσεων που περιγράφουν τα εν λόγω προβλήματα. Σε όλες αυτές τις περιπτώσεις προϋποτίθεται γνώση της συνάρτησης συσχέτισης και της οριακής συνάρτησης πυκνότητας της πιθανότητας των στοχαστικών πεδίων που περιγράφουν τις αβεβαιότητες του συστήματος για την ακριβή εκτίμηση της απόκρισης. Στη συνήθη περίπτωση ανεπαρκών πειραματικών δεδομένων οι μηχανικοί υποχρεούνται να καταφύγουν σε κοστοβόρες αναλύσεις ευαισθησίας. Σε αυτή την περίπτωση όμως, τα προβλήματα που εγείρονται είναι αυτά του αυξημένου υπολογιστικού κόστους, της έλλειψης εποπτείας επί των μηχανισμών που ελέγχουν τη διακύμανση της απόκρισης του συστήματος και της αδυναμίας προσδιορισμού ορίων στη διακύμανση της απόκρισης. Ένα σχετικά μικρό κλάσμα αυτών των ερευνητικών προσπαθειών έχουν αντιμετωπίσει τη δυναμική διάδοση αυτών των αβεβαιοτήτων, οι περισσότερες των οποίων υποβιβάζουν τις στοχαστικές δυναμικές μερικές διαφορικές εξισώσεις σε ένα γραμμικό πρόβλημα τυχαίων ιδιοτιμών. Αν και όλες οι μέθοδοι αυτού του είδους έχουν παρουσιάσει αξιόλογη ακρίβεια και μικρό υπολογιστικό κόστος υπάρχει ένας μεγάλος αριθμός προβλημάτων στη στοχαστική μηχανική που περιλαμβάνουν συνδυασμούς έντονων μη-γραμμικοτήτων και μεγάλων διακυμάνσεων των ιδιοτήτων του συστήματος όπως επίσης και μη Γκαουσιανές ιδιότητες του συστήματος που μπορούν να επιλυθούν με ικανοποιητική ακρίβεια μόνο με την υπολογιστικά κοστοβόρα μέθοδο Monte Carlo.

Σε αυτό το πλαίσιο και για την αντιμετώπιση των ανωτέρω θεμάτων, στα τέλη της δεκαετίας του 80' προτάθηκε η έννοια της συνάρτησης διακύμανσης της απόκρισης (ΣΔΑ). Αυτή η ιδέα ανατύχθηκε χρησιμοποιώντας μια διατύπωση βασισμένη στη θεωρία της ελαστικότητας. Δείχτηκε ότι η ΣΔΑ εξαρτάται από την τυπική απόκλιση του στοχαστικού πεδίου αλλά φαίνεται να είναι

ανεξάρτητη από τη συνάρτηση της φασματικής πυκνότητας του αντιστρόφου του μέτρου ελαστικότητας.

Η παρούσα διατριβή εστιάζει στην ανάπτυξη μιας μεθοδολογίας που προσφέρει μια εναλλακτική στην ανάλυση στοχαστικών δυναμικών συστημάτων βασισμένη στην παραπάνω ιδέα των ΣΔΑ. Πιο συγκεκριμένα, στο πρώτο μέρος η έννοια των Συναρτήσεων Διακύμανσης της Απόκρισης (ΣΔΑ) επεκτείνεται αρχικά σε γραμμικά και μετά σε γενικευμένα στοχαστικά δυναμικά συστήματα πεπερασμένων στοιχείων οδηγώντας σε ολοκληρωτικές σχέσεις για το δυναμική μέση τιμή και διακύμανση της απόκρισης. Η ολοκληρωτική σχέση για τη διακύμανση της δυναμικής απόκρισης συνεπώς περιλαμβάνει τη Δυναμική εκδοχή της ΣΔΑ (ΔΣΔΑ) και τη συνάρτηση φασματικής πυκνότητας του στοχαστικού πεδίου που περιγράφει τις αβέβαιες παραμέτρους του συστήματος. Ακολούθως χρησιμοποιείται μια γρήγορη προσομοίωση Μόντε Κάρλο βασιζόμενη στη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων για τον ακριβή και υπολογιστικά αποτελεσματικό αριθμητικό υπολογισμό αυτών των συναρτήσεων. Όπως και στην περίπτωση των γραμμικών στοχαστικών συστημάτων υπό στατική φόρτιση, η ανεξαρτησία της ΔΣΔΑ από τη συνάρτηση φασματική πυκνότητας και από την οριακή συνάρτηση πυκνότητας της πιθανότητας του στοχαστικού πεδίου που περιγράφει τις αβέβαιες παραμέτρους πρέπει να επιβεβαιωθεί μέσω σύγκρισης των αποτελεσμάτων με την γενική μέθοδο προσομοίωσης φορέων Μόντε Κάρλο. Ως περαιτέρω επιβεβαίωση της υπόθεσης για την ανεξαρτησία των συναρτήσεων διακύμανσης της απόκρισης από τις στοχαστικές παραμέτρους του προβλήματος, χρησιμοποιήθηκε η έννοια των γενικευμένων συναρτήσεων διακύμανσης της απόκρισης (ΓΣΔΑ) και τα αποτελέσματα συγκρίθηκαν με αυτά της προτεινόμενης μεθοδολογίας με ΔΣΔΑ για την περίπτωση ψευδοστατικής φόρτισης. Ως αβέβαιη παράμετρος του συστήματος θεωρήθηκε το αντίστροφο του μέτρου ελαστικότητας. Οι δυναμικές συναρτήσεις μέσης τιμής και διακύμανσης της απόκρισης, εφόσον υπολογιστούν, δύνανται να χρησιμοποιηθούν για τη διεξαγωγή παραμετρικών αναλύσεων και αναλύσεων ευαισθησίας σε σχέση με διάφορα πιθανοτικά χαρακτηριστικά που σχετίζονται με το πρόβλημα (π.χ. απόσταση συσχέτισης, τυπική απόκλιση) και για τον υπολογισμό πραγματοποιήσιμων άνω ορίων της δυναμικής μέσης τιμής και διακύμανσης της απόκρισης με πρακτικά αμελητέο πρόσθετο υπολογιστικό κόστος. Προσφέρουν επίσης μια διορατική εικόνα για

τους μηχανισμούς που ελέγχουν τη δυναμική μέση τιμή και διακύμανση της απόκρισης του συστήματος.

Το δεύτερο μέρος αυτής της διατριβής προτείνει μια διαφορετική προσέγγιση στο Εύρωστο Βέλτιστο Σχεδιασμό (ΕΒΣ) χρησιμοποιώντας την έννοια της ΣΔΑ. Η βασική ιδέα είναι να γίνει εκμετάλευση της ανεξαρτησίας της ΣΔΑ από τις στοχαστικές παραμέτρους του συστήματος, για να επιτευχθούν πιο ασφαλή βέλτιστα τα οποία εξαρτώνται μόνο από τις ντετερμινιστικές παραμέτρους του προβλήματος. Με αυτόν τον τρόπο, βέλτιστοι δομικοί σχεδιασμοί επιτυγχάνονται οι οποίοι παρουσιάζουν τη μικρότερη διακύμανση για το χειρότερο δυνατό σενάριο αβέβαιων παραμέτρων, δηλ. είναι ανεξάρτητοι από τα χαρακτηριστικά της φασματική πυκνότητας και της οριακής συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας του στοχαστικού πεδίου των αβεβαιοτήτων. Αυτό καθίσταται δυνατό εάν οριστεί, εκτός του συνολικού κόστους της κατασκευής, και η μέγιστη τιμή της ΣΔΑ ως αντικειμενική συνάρτηση. Τα πλεονεκτήματα της χρήσης της προτεινόμενης μεθοδολογίας έναντι των παραδοσιακών διατυπώσεων Εύρωστου Βέλτιστου Σχεδιασμού παρουσιάζονται μέσω μιας εφαρμογής σε μια πλαισιωτή κατασκευή όπου επιδεικνύεται ότι οι επιλεγόμενοι σχεδιασμοί μέσω του κλασικού ΕΒΣ για ένα συγκεκριμένο στοχαστικό πεδίο δεν είναι βέλτιστοι για μια διαφοροποίηση των φασματικών ιδιοτήτων του τυχαίου πεδίου που περιγράφει την αβεβαιότητα του συστήματος, ενώ οι βέλτιστοι σχεδιασμοί που προκύπτουν από τον ΕΒΣ που βασίζεται στις ΣΔΑ είναι βέλτιστοι για το χειρότερο δυνατό σενάριο στοχαστικού πεδίου.



## ΕΚΤΕΝΗΣ ΠΕΡΙΛΗΨΗ

### ‘ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΗ ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΚΑΙ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ ΜΕ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ’

## 1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

### 1.1 ΣΚΟΠΟΣ ΤΗΣ ΔΙΑΤΡΙΒΗΣ

Ακόμα και στη σύγχρονη εποχή, οι διαδικασίες μελέτης και σχεδιασμού κατασκευών, είθισται να αγνοούν την εγγενή αβεβαιότητα των φυσικών συτημάτων που σχετίζεται με π.χ. το υλικό, τη γεωμετρία της κατασκευής, τη φόρτιση κ.τ.λ. σε μια προσπάθεια να απλοποιηθεί η υπολογιστική ανάλυση αλλά και λόγω της έλλειψης αποτελεσματικών μοντέλων ανάλυσης που θα μπορούσαν να την λάβουν υπόψιν τους. Τέτοιου είδους διαδικασίες, γενικά μιλώντας, ονομάζονται ντετερμινιστικές. Σε εναλλακτικές, πιο ρεαλιστικές μεθόδους ανάλυσης, όπου οι αβεβαιότητες λαμβάνονται υπόψιν, πολύ συζήτηση λαμβάνει χώρα σε σχέση με τη μοντελοποίηση απλοποιητικών παραδοχών που εισάγονται και ιδιαίτερος σε σχέση με το πως αυτές οι παραδοχές επηρεάζουν το τελικό αποτέλεσμα. Ειδικότερα στην περίπτωση της δυναμικής μοντελοποίησης και ανάλυσης η συζήτηση είναι πιο ζωντανή εξαιτίας του αυξημένου υπολογιστικού κόστους και των κατά φυσικό επακόλουθο πιο αδρών απλοποιητικών παραδοχών. Φαινόμενα δευτέρας τάξεως, που είναι αναγκαία για τον προσδιορισμό μηχανισμών αστοχίας σπάνια γίνονται αντικείμενο έρευνας. Επιπροσθέτως, αρκετά συχνά, τα αποτελέσματα περιορίζονται στις ιδιότητες ροπών δευτέρας τάξεως της απόκρισης καθιστώντας την ανάλυση μη πρακτική για τον μελετητή. Κάνοντας μια σύγκριση ανάμεσα στις πολύπλοκες μοντελοποιήσεις ντετερμινιστικών αναλύσεων και στα απλοποιημένα μοντέλα που χρησιμοποιούνται στις περισσότερες στοχαστικές αναλύσεις μπορεί κανείς να διαπιστώσει τους λόγους για τους οποίους οι διαδικασίες στοχαστικής ανάλυσης δεν απολαμβάνουν την επιθυμούμενη αναγνώριση από την κοινότητα των μηχανικών. Παρόλαυτα, η κύρια ιδέα πίσω από τις στοχαστικές μεθόδους και αναλύσεις είναι στην ουσία αυτή μιας εναλλακτικής αντίληψης και αναπαράστασης της πληροφορίας. Με απλά λόγια, οι στοχαστικές μεθοδολογίες επιλέγουν την αντιμετώπιση προβλημάτων μηχανικού με μια πιο ‘ολιστική’ προσέγγιση, περιγράφοντας την απόκριση του συστήματος με πιθανοτικές κατανομές, σε αντίθεση με πιο ντετερμινιστικές προσεγγίσεις που τείνουν να λαμβάνουν υπόψιν τους μόνο ένα κλάσμα του φυσικού κόσμου και των πιθανών ενδεχομένων.

Κατά τις δύο τελευταίες δεκαετίες, σημαντικός όγκος έρευνας έχει εστιάσει στη στοχαστική ανάλυση δομικών συστημάτων που ενέχουν αβέβαιες παραμέτρους ως προς το υλικό ή τη γεωμετρία με τη χρήση στοχαστικών μεθοδολογιών πεπερασμένων στοιχείων (ΜΣΠΣ, SFEM) για την αριθμητική επίλυση των μερικών στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων (ΜΣΔΕ) που περιγράφουν τα αντίστοιχα προβλήματα. Οι πιο διαδεδομένες ΣΜΠΣ βασίζονται στη μέθοδο της διαταραχής (Liu, Belytschko and Mani 1986a), (Liu, Belytschko

and Mani 1986b) και στη Φασματική μέθοδο ΣΜΠΣ Γκαλέρκιν (ΦΜΣΠΣ, SSFEM) (Ghanem and Spanos 1991) ή σε κοστοβόρες μεθόδους Μόντε Κάρλο (Grigoriu 1995), (Matthies, et al. 1997), (Stefanou 2009). Σε μερικές περιπτώσεις αυτές οι μέθοδοι έχουν επεκταθεί στη στοχαστική δυναμική ανάλυση με άμεσο τρόπο (Zhao and Chen 2000), (Liu, Besterfield and Belytschko 1988) εφαρμόζοντας τεχνικές που βελτιώνουν την αποτελεσματικότητα τους τόσο ως προς την ακρίβεια (Ghanem and Spanos 1990), (Jensen and Iwan 1992), (Li 1996), (Li and Liao 2001) όσο και ως προς την υπολογιστική δύναμη (Yamazaki, Shinozuka and Dashgupta 1988), (Papadrakakis and Papadopoulos 1996), (Papadrakakis and Kotsopoulos 1999). Μια μέθοδος εξέλιξης της πυκνότητας της πιθανότητας πρόταθηκε επίσης (Li and Chen 2006), (Li and Chen 2004) προσπαθώντας να προσεγγίσει την χρονικά μεταβαλλόμενη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σππ) της απόκρισης στοχαστικών συστημάτων χρησιμοποιώντας την αρχή της διατήρησης της πιθανότητας. Σε αυτές τις γραμμές, κάποιες άλλες ερευνητικές προσπάθειες χρησιμοποιούν προσεγγιστικά ολοκληρωτικά σχήματα ‘δρόμων Wiener’ (Kougioumtzoglou and Spanos 2012). Εντούτοις αυτές οι εργασίες κυρίως εφαρμόζονται σε μονοβάθμιους ταλαντωτές ή σε μικρά επεξηγηματικά συστήματα ακαδημαϊκού ενδιαφέροντος εξαιτίας του αυξημένου υπολογιστικού κόστους. Σε όλες τις παραπάνω περιπτώσεις, η εκ των προτέρων γνώση των ιδιοτήτων συσχέτισης και της οριακής σππ των τυχηματικών πεδίων που χαρακτηρίζουν τις αβεβαιότητες του συστήματος είναι απαραίτητη για την ακριβή εκτίμηση των αποκρίσεων του συστήματος. Στη συνήθη περίπτωση ανεπαρκών πειραματικών δεδομένων, οι μηχανικοί αναγκάζονται να καταφύγουν σε αναλύσεις ευαισθησίας που είναι όμως ιδιαίτερα κοστοβόρες υπολογιστικά. Επιπλέον, τέτοιες αναλύσεις δεν παρέχουν κανενός είδους πληροφορία αναφορικά με τους μηχανισμούς που επηρεάζουν τη διακύμανση της απόκρισης, ή τα όρια της απόκρισης. Πέραν των προαναφερθέντων προσεγγίσεων, ένας σχετικά μικρός αριθμός μελετών έχουν ασχοληθεί με τη δυναμική διάδοση των αβαιοτήτων του συστήματος, οι περισσότερες των οποίων υποβαθμίζουν τις στοχαστικές δυναμικές ΜΔΕ σε ένα γραμμικό πρόβλημα τυχαίων ιδιοτιμών (Ghosh D 2005), (G. I. Schueller 2011). Ενώ αυτού του είδους οι μέθοδοι αποδεικνύονται εξαιρετικά ακριβείς και υπολογιστικά αποτελεσματικές για μια ποικιλία προβλημάτων, υπάρχει ένα ευρύ φάσμα προβλημάτων στη στοχαστική μηχανική που περιλαμβάνουν συνδυασμούς ισχυρών μη-γραμμικοτήτων και/ή μεγάλων διακυμάνσεων των παραμέτρων του συστήματος όπως επίσης και μη-Γκαουσιανών παραμέτρων τους συστήματος τα οποία μπορούν να επιλυθούν με ικανοποιητική ακρίβεια μόνο μέσω υπολογιστικά κοστοβόρων προσεγγίσεων με τη προσομοίωση Μόντε Κάρλο (Liu, Belytschko and Mani 1986a), (Grigoriu 2006), (Matthies, et al. 1997), (Stefanou 2009).

Σε όλες τις προαναφερθείσες περιπτώσεις, τα χαρακτηριστικά της συνάρτησης φασματικής πυκνότητας (ή συνάρτησης συχέτισης) και της οριακής συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας (σππ) των στοχαστικών πεδίων που περιγράφουν τις αβέβαιες παραμέτρους του συστήματος απαιτούνται για την εκτίμηση της διακύμανσης της απόκρισης ενός στοχαστικού στατικού ή δυναμικού συστήματος. Καθώς όμως είθισται να υπάρχει έλλειψη πειραματικών δεδομένων για την ποσοτικοποίηση τέτοιων πιθανοτικών μεγεθών, συνήθως παραγματοποιείται μια



ανάλυση ευαισθησίας σε σχέση με τις διάφορες στοχαστικές παραμέτρους. Σε αυτήν την περίπτωση, όμως, τα προβλήματα που ανακύπτουν είναι το αυξημένο υπολογιστικό κόστος, η έλλειψη εποπτείας επί του τρόπου με τον οποίο αυτές οι παράμετροι ελέγχουν τη διακύμανση της απόκρισης του συστήματος και η αδυναμία καθορισμού ορίων στη διακύμανση της απόκρισης.

Σε αυτό το πλαίσιο και για την αντιμετώπιση των παραπάνω θεμάτων, η έννοια της συνάρτησης διακύμανσης της απόκρισης (ΣΔΑ, VRF) προτάθηκε στα τέλη της δεκαετίας του 80' (M. Shinozuka 1987) και μετέπειτα παρουσιάστηκε σε διαφορετικές μορφές και εφαρμογές (Wall and Deodatis 1994), (Graham and Deodatis 1998). Μια εξέλιξη αυτής της προσέγγισης παρουσιάστηκε σε μια σειρά από δημοσιεύσεις (Papadopoulos, Deodatis and Papadrakakis 2005), (Papadopoulos and Deodatis 2006) και (Papadopoulos, Papadrakakis and Deodatis 2006) όπου αποδείχτηκε η ύπαρξη κλειστών ολοκληρωτικών εκφράσεων για τη διακύμανση της απόκρισης της μετατόπισης της μορφής

$$Var[u] = \int_{-\infty}^{\infty} VRF(\kappa, \sigma_{ff}) S_{ff}(\kappa) d\kappa \quad (1)$$

για γραμμικά στοχαστικά συστήματα υπό στατικά φορτία χρησιμοποιώντας μια διατύπωση βασιμμένη στη θεωρία ελαστικότητας. Αυτή η διατύπωση οδηγεί σε μια ολοκληρωτική έκφραση στην Εξ. (11.69) χωρίς την χρησιμοποίηση προσεγγιστικών υπολογισμών ή παραδοχών. Αποδείχτηκε ότι η ΣΔΑ εξαρτάται από την τυπική απόκλιση αλλά επιδεικνύει ανεξαρτησία ως προς τη συναρτησιακή μορφή της φασματικής πυκνότητας που περιγράφει το αντίστροφο του μέτρου ελαστικότητας. Έπρεπε όμως να γίνει εικασία για την ύπαρξη αυτής της ολοκληρωτικής έκφρασης για στατικά αόριστα όπως επίσης και για γενικευμένα στοχαστικά συστήματα πεπερασμένων στοιχείων. Περαιτέρω έρευνες (Miranda 2008) επιβεβαίωσαν τα προαναφερθέντα αποτελέσματα αλλά έδειξαν ότι η ΣΔΑ έχει μια μικρή εξάρτηση από την οριακή σπ του στοχαστικού πεδίου που μοντελοποιεί την ευκαμψία. Στην εργασία των (Papadopoulos, Papadrakakis and Deodatis 2006) παρουσιάστηκαν αποτελέσματα για στοχαστικά χωρικά πλαίσια, κελυφωτές κατασκευές και κατασκευές επίπεδης έντασης υπό στατικά φορτία. Μια ακόμα σημαντική εξέλιξη στην έννοια της ΣΔΑ βγήκε από την εργασία των (Argwade and Deodatis 2011) για τον καθορισμό ισοδύναμων μηχανικών ιδιοτήτων υλικού σε προβλήματα ομογενοποίησης.

Στην έρευνα που παρουσιάζεται στην παρούσα διατριβή, η παραπάνω προσέγγιση επεκτείνεται σε στοχαστικά συστήματα υπό δυναμικές διαταράξεις. Ως πρώτο βήμα θεωρήθηκε η περίπτωση ενός μονοβάθμιου ταλαντωτή. Ακόμη κι αν η διατύπωση μιας αναλυτικής έκφρασης για τη συνάρτηση διακύμανσης της απόκρισης ενός δυναμικού συστήματος (ΔΣΔΑ, DVRF) είναι εξαιρετικά δύσκολη, ένας αριθμητικός υπολογισμός μπορεί πιο εύκολα να πραγματοποιηθεί και μετά να χρησιμοποιηθεί στην Εξ. (11.69) για να παράσχει αποτελέσματα για τη χρονοϊστορία της διακύμανσης της απόκρισης του δυναμικού συστήματος. Όπως σε προηγούμενες εργασίες (Papadopoulos, Deodatis and Papadrakakis 2005), (Papadopoulos and Deodatis 2006), (Papadopoulos, Papadrakakis and Deodatis 2006) έπρεπε να γίνει εικασία για την ύπαρξη της ΔΣΔΑ. Αυτή η εικασία επιβεβαιώνεται

αριθμητικά συγκρίνοντας τα αποτελέσματα από την Εξ. (11.69) με προσομοιώσεις από τη γενική μέθοδο Μόντε Κάρλο. Δείχνεται ότι η ΔΣΔΑ έχει έντονη εξάρτηση από την τυπική απόκλιση του αντιστρόφου του μέτρου ελαστικότητας αλλά φαίνεται να είναι σχεδόν ανεξάρτητη της συνάρτησης φασματική πυκνότητας, όπως επίσης και της οριακής σππ του στοχαστικού πεδίου της ευκαμψίας. Επιπλέον, μια ολοκληρωτική έκφραση παρόμοια με αυτή στην Εξ. (11.69) προτείνεται για τη χρονοϊστορία της μέσης τιμής της απόκρισης περιέχοντας την Δυναμική Συνάρτηση Μέσης Τιμής της Απόκρισης (ΔΣΜΑ, DMRF), η οποία είναι μια συνάρτηση παρόμοια με τη ΔΣΔΑ.

Και οι δύο ολοκληρωτικές μορφές για τη μέση τιμή και τη διακύμανση μπορούν να χρησιμοποιηθούν αποτελεσματικά για τον υπολογισμό των στατιστικών ροπών πρώτης και δεύτερας τάξεως δυναμικών συστημάτων με ικανοποιητική ακρίβεια, μαζί με τη χρονοϊστορία άνω ορίων για την απόκριση ανεξαρτήτως της φασματικής κατανομής. Επίσης παρέχουν μια εποπτεία των μηχανισμών που επηρεάζουν τη διάδοση της αβεβαιότητας σε σχέση με τόσο το χώρο όσο και το χρόνο και ιδιαίτερα σε σχέση με τις χρονοϊστορίες της μέσης τιμής και της διακύμανσης της απόκρισης του στοχαστικού δυναμικού συστήματος.

Στη συνέχεια αυτής της διατριβής, ολοκληρωτικές εκφράσεις κλειστής μορφής όπως στην Εξ. (11.69) προτείνονται για τη μέση τιμή και τη διακύμανση της δυναμικής απόκρισης στατικά αόριστων φορέων στοιχείων δοκού και πιο γενικευμένων στοχαστικών συστημάτων (π.χ. προβλήματα επίπεδης έντασης) υπό δυναμική φόρτιση. Σε αυτή την περίπτωση διανυσματικές ΔΣΔΑ και ΔΣΜΑ δημιουργούνται από τις αντίστοιχες ΔΣΔΑ και ΔΣΜΑ για κάθε βαθμό ελευθερίας του συστήματος πεπερασμένων στοιχείων. Μια γενικευμένη επονομαζόμενη Δυναμική γρήγορη προσομοίωση Μόντε Κάρλο με τη ΜΠΣ (ΔΜΠΣ-ΓΜΚΠ) παρουσιάζεται για την ακριβή και αποτελεσματική εκτίμηση των ΔΣΔΑ και ΔΣΜΑ για στοχαστικά συστήματα ΠΣ. Παρουσιάζοντα επίσης αριθμητικά αποτελέσματα, που δείχνουν ότι, όπως στην περίπτωση των κασικών ΣΔΑ, όπως επίσης και στην περίπτωση των ΔΣΔΑ και ΔΣΜΑ για μονοβάθμιους στοχαστικούς ταλαντωτές (Papadopoulos και Kokkinos 2012), τα μητρώα ΔΣΔΑ και ΔΣΜΑ εμφανίζουν ανεξαρτησία ως προς τη συνάρτηση φασματικής πυκνότητας  $S_{ff}(\kappa)$  και είναι οριακά εξαρτώμενα από τη σππ του πεδίου που περιγράφει την αβέβαιη παράμετρο του συστήματος. Υπενθυμίζεται ότι η ύπαρξη της ΣΔΑ έχει αποδειχθεί μόνο για την περίπτωση στατικά ορισμένων φορέων υπό στατική φόρτιση (M. Shinozuka 1987), (Papadopoulos and Deodatis 2006). Σε όλες τις άλλες περιπτώσεις η ύπαρξη αυτή έπρεπε να υποθεθεί και η επιβεβαίωση αυτής της υπόθεσης έγινε μέσω συγκρίσεως των αποτελεσμάτων που εξήχθησαν από την προτεινόμενη μεθοδολογία με αυτά που εξήχθησαν από την γενική μέθοδο Μόντε Κάρλο. Η εγκυρότητα αυτής της εικασίας θεμελιώνεται πιο στέρεα σε αυτή τη μελέτη συγκρίνοντας τη ΔΣΔΑ από μια ψευδοστατική φόρτιση με την αντίστοιχη Γενικευμένη ΣΔΑ (Miranda and Deodatis 2012) για ένα στατικά αόριστο πλαισιωτό φορέα. Η ΓΣΔΑ (GVRF) περιλαμβάνει τον υπολογισμό διαφόρων ΣΔΑ για τους ανάλογους συνδυασμούς διαφόρων οριακών σππ και φασματικών πυκνοτήτων και αναπτύχθηκε για να ελέγξει περαιτέρω την ανεξαρτησία της ΣΔΑ από τις στοχαστικές παραμέτρους του προβλήματος. Οφείλει να ανφερθεί εδώ ότι η έννοια της ΣΔΑ πρόσφατα επεκτάθη στην εργασία των (Teferra and Deodatis 2012) σε προβλήματα με μη-γραμμικές

ιδιότητες υλικού όπου μια κλειστή μορφής αναλυτική έκφραση της ΣΔΑ αποκάλυψε τη ξεκάθαρη εξάρτηση της διακύμανσης της απόκρισης από την τυπική απόκλιση όπως επίσης και από ανωτέρας τάξεως φάσματα της δυνάμεως του στοχαστικού πεδίου. Τέλος εκτιμώνται παραγματοποιήσιμα άνω όρια της μέσης τιμής και της διακύμανσης της δυναμικής απόκρισης του συστήματος.

Το επόμενο μέρος αυτής της διατριβής εστιάζει σε θέματα στοχαστικής βελτιστοποίησης με την πρόθεση αρχικά να κάνει μια κριτική αποτίμηση των κλασικών διαδικασιών στοχαστικής βελτιστοποίησης και των περιορισμών τους και εν συνεχεία να εκμεταλευθεί την καθιερωμένη έννοια της ΣΔΑ και των χαρακτηριστικών της και να προτείνει μια εναλλακτική διατύπωση διαδικασίας στοχαστικής βελτιστοποίησης που προσφέρει στον μελετητή πιο χρήσιμα αποτελέσματα.

Στη βιβλιογραφία των προσφάτων ετών, η έννοια του Εύρωστου Βέλτιστου Σχεδιασμού (ΕΒΣ) (ή στοχαστικής Βελτιστοποίησης ή Εύρωστου Σχεδιασμού) εισήχθη για να αντιμετωπίσει εγγενείς αβεβαιότητες των φυσικών συστημάτων που οδηγούν τη συμπεριφορά του συστήματος στο να αποκλίνει από την ντετερμινιστικά αναμενόμενη συμπεριφορά σε απόδοση κατώτερη της βέλτιστης, ουσιαστικά εξουδετερώνοντας την ίδια τη διαδικασία της βελτιστοποίησης. Στον ΕΒΣ ο μελετητής λαμβάνει υπόψιν του τις στοχαστικές ιδιότητες των παραμέτρων/μεταβλητών του συστήματος ή/και των περιορισμών του συστήματος και επακόλουθα φτάνει σε ένα ασφαλέστερο βέλτιστο σχεδιασμό ο οποίος οφείλει να είναι λιγότερο ευαίσθητος στις τυχαίες μεταβολές των παραμέτρων του συστήματος. Κατά καιρούς έχουν προταθεί διάφορες μεθοδολογίες που αφορούν στον ΕΒΣ και στις εφαρμογές του σε διάφορα προβλήματα. Στην κλασική διατύπωση ΕΒΣ ο στόχος της ελαχιστοποίησης της αντικειμενικής συνάρτησης (-εων) επιτυγχάνεται θεωρώντας τη μέση τιμή ή/και την τυπική απόκλιση ενός μεγέθους απόκρισης και προσπαθώντας να προσδιοριστούν οι σχεδιασμοί που ελαχιστοποιούν τις προαναφερθείσες ποσότητες λαμβάνοντας υπόψιν ντετερμινιστικούς ή στοχαστικούς περιορισμούς (Park, Lee, et al. 2006), (Beyer and Sendhoff 2007). Στον ΕΒΣ που βασίζεται στην ανάλυση αξιοπιστίας (Missoum, Ramu and Haftka 2007), (Lagaros and Papadopoulos 2006), (Allen and Maute 2005), συνήθως στόχος είναι να εξακριβωθεί η επιρροή των πιθανοτικών περιορισμών ως ένα όριο στην πιθανότητα αστοχίας στο πλαίσιο της ΕΒΣ κατασκευών. Ο ΕΒΣ που βασίζεται στην έννοια της Τρωτότητας των κατασκευών είναι μια ειδική περίπτωση ΕΒΣ με ανάλυση αξιοπιστίας όπου ενδιάμεσες οριακές καταστάσεις που προσεγγίζουν τους πιθανοτικούς περιορισμούς λαμβάνονται επίσης υπόψιν προσφέροντας έτσι πιθανώς κρίσιμες πληροφορίες σχετικά με τη δομική συμπεριφορά και τη λειτουργικότητα (Papadopoulos and Lagaros 2009).

Όλες οι παραπάνω διατυπώσεις ΕΒΣ πρέπει να διεξαχθούν σε ένα πλαίσιο ανάλυσης με τη μέθοδο των στοχαστικών πεπερασμένων στοιχείων (ΜΣΠΣ) έτσι ώστε να εκτιμηθούν οι απαιτούμενες ποσότητες που σχετίζονται με τις μεταβολές του συστήματος. Αυτή η θεώρηση της τυχαιότητας του συστήματος όμως, για να είναι αξιόπιστη, απαιτεί μια ακριβή γνώση των πιθανοτικών χαρακτηριστικών του συστήματος (οριακή σππ και δομές συσχέτισης) των

αντίστοιχων τυχηματικών πεδίων που μοντελοποιούν τις παραμέτρους του συστήματος που αποκτούνται μόνο μέσω ανάλογων πειραματικών αναλύσεων ή αλλιώς πρέπει να υποτεθούν /επιλεχθούν προσεχτικά. Επιπλέον αυτό πολλαπλασιάζει το υπολογιστικό κόστος της ανάλυσης καθώς κάθε υποψήφιος σχεδιασμός απαιτεί μια πλήρη στοχαστική ανάλυση για την στατιστική εκτίμηση των διαφόρων μεγεθών της απόκρισης. Στη συνήθη περίπτωση όπου τέτοιες συνθήκες δεν ευδοκιμούν, ανάλογες αναλύσεις ευαισθησίας εκτελούνται σε σχέση με τις παραπάνω παραμέτρους με αποτέλεσμα να αυξάνεται σημαντικά το συνολικό υπολογιστικό κόστος.

Στην παρούσα διατριβή, προτείνεται μια εναλλακτική διαδικασία ΕΒΣ που χρησιμοποιεί τις Συναρτήσεις Διακύμανσης της Απόκρισης (ΣΔΑ) σε μια προσπάθεια να παρασχεθεί μια απάντηση στα ανωτέρω γνώστα άλυτα θέματα στη βελτιστοποίηση, μιας πολαισιωτής κατασκευής που περιλαμβάνει ένα στοχαστικό πεδίο για το μέτρο ελαστικότητας του υλικού, ως προς το συνολικό βάρος και την ευρωστία της απόκρισης της μετατόπισης. Κράτώντας υπόψιν ότι στην ολοκληρωτική έκφραση της Εξ. (11.69) η ΣΔΑ θεωρείται ντετερμινιστική αυτό που είναι ιδιαιτέρως ωφέλιμο υπό αυτή τη θεώρηση είναι η δυνατότητα να καθοριστούν άνω όρια ανεξάρτητα του φάσματος και της σππ με έναν άμεσο τρόπο που φαίνεται στην παρακάτω εξίσωση όπως εξηγείται στην εργασία από τους (Papadopoulos, Deodatis and Papadrakakis 2005):

$$\text{Var}(\mathbf{u}) \leq \text{VRF}(\kappa^{\max}, \sigma_{ff}) \sigma_{ff}^2 \quad (2)$$

όπου  $\text{VRF}(\kappa^{\max}, \sigma_{ff})$  είναι η μέγιστη τιμή της ΣΔΑ που προκύπτει για κάποια τιμή του κυματαριθμού  $\kappa^{\max}$ . Γι' αυτό, θέτωντας τη μέγιστη τιμή της ΣΔΑ ως αντικειμενική συνάρτηση για τον έλεγχο της ευρωστίας της απόκρισης του συστήματος, πλέον του ολικού βάρους της κατασκευής, το σύστημα αξεφαλίζεται ότι επιδεικνύει, για μια δεδομένη στάθμη ολικού βάρους, τη χαμηλότερη δυνατή διακύμανση της απόκρισης κάτω από συνθήκες που επιβάλλονται από το χειρότερο δυνατό στοχαστικό πεδίο. Το χειρότερο δυνατό στοχαστικό πεδίο για ένα συγκεκριμένο υποψήφιο σχεδιασμό καθορίζεται μέσω της Εξ. (11.70) δηλ. είναι ένα στοχαστικό πεδίο με μια μονοχρωματική συνάρτηση φασματικής πυκνότητας (ΣΦΠ) συγκεντρωμένη στο  $\kappa^{\max}$  (Papadopoulos, Deodatis and Papadrakakis 2005). Ο βέλτιστος σχεδιασμός για τη συγκεκριμένη στάθμη βάρους είναι αυτός που ελαχιστοποιεί την αντίστοιχη τιμή  $\text{VRF}(\kappa^{\max}, \sigma_{ff})$ . Επαναλαμβάνοντας αυτή τη διαδικασία για όλες τις πιθανές στάθμες βάρους μπορεί κανείς να δημιουργήσει ένα διδιάστατο μέτωπο Pareto για δύο αντικειμενικές συναρτήσεις: το ολικό βάρος και τη διακύμανση της απόκρισης του συστήματος που προκύπτει από την Εξ. (11.70).

Στην κλασική διατύπωση ΕΒΣ, η βελτιστοποίηση επιτελείται για ένα προεπιλεγμένο στοχαστικό πεδίο. Σε ρεαλιστικές εφαρμογές όμως η δομή συσχέτισης της αβέβαιης παραμέτρου του συστήματος είναι σπάνια γνωστή καθιστώντας έτσι μια τέτοια διαδικασία βελτιστοποίησης ανώφελη. Συνεπώς ο μελετητής υποχρεούται να διεξάγει πολλαπλές

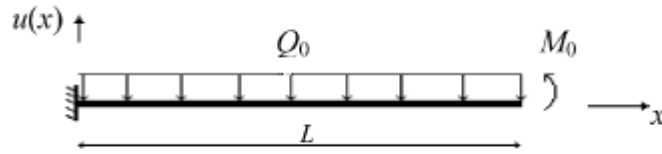
βελτιστοποιήσεις αυτής της μορφής για να θωρακίσει το σχεδιασμένο σύστημα ως προς όλα τα πιθανά ενδεχόμενα. Χρησιμοποιώντας την προτεινόμενη μεθοδολογία αυτό το πρόβλημα ξεπερνάται γιατί κάθε υποψήφιος σχεδιασμός αξιολογείται με βάση τη συμπεριφορά του υπό τις χειρότερες δυνατές συνθήκες που προσδιορίζονται για το συγκεκριμένο σχεδιασμό. Κατά συνέπεια ο μελετητής εξασφαλίζει ότι το σύστημα θα έχει την καλύτερη δυνατή απόδοση υπό τις χειρότερες δυνατές συνθήκες.

Τα πλεονεκτήματα της χρησιμοποίησης της προτεινόμενης μεθοδολογίας έναντι του παραδοσιακού Εύρωστου Βέλτιστου Σχεδιασμού παρουσιάζονται μέσω μιας εφαρμογής σε μια πλαισιωτή κατασκευή όπου αποδεικνύεται ότι οι σχεδιασμοί που επιτυγχάνονται μέσω ενός κλασικού ΕΒΣ για ένα δεδομένο στοχαστικό πεδίο δεν είναι βέλτιστοι για μια διαφοροποίηση των φασματικών ιδιοτήτων του τυχαίου πεδίου που μοντελοποιεί την αβεβαιότητα του συστήματος. Από την άλλη οι βέλτιστοι σχεδιασμοί που επιλέγονται με τον ΕΒΣ που βασίζεται στις ΣΔΑ είναι βέλτιστοι για το χειρότερο δυνατό στοχαστικό πεδίο. Για να δειχτεί αυτό, μια δι-αντικειμενική συνάρτηση μορφοποιείται λαμβάνοντας υπόψη αβεβαιότητες των ιδιοτήτων του υλικού που μοντελοποιούνται ως τυχαία πεδία. Εφαρμόζονται επίσης ντετερμινιστικοί περιορισμοί μέγιστης έντασης και μέγιστης μετατόπισης. Αρχικά κατασκευάζεται ένα μέτωπο Pareto μέσω μιας κλασικής διατύπωσης ΕΒΣ και ενός πολυ-αντικειμενικού Γενετικού Αλγορίθμου για την εύρεση του βέλτιστου μετώπου ανάμεσα στις δύο αντιμαχόμενες αντικειμενικές συναρτήσεις. Μετα, οι μέγιστες δυνατές διακυμάνσεις των επιλεχθέντων σχεδιασμών υπολογίζονται από τις αντίστοιχες μέγιστες τιμές (βλ. Εξ. (11.70)) των αντιστοιχών Συναρτήσεων Διακύμανσης της Απόκρισης που χαρακτηρίζουν τους εν λόγω σχεδιασμούς. Το προκύπτον μέτωπο συγκρίνεται επακολούθως με ένα νέο μέτωπο στο οποίο η δεύτερη αντικειμενική συνάρτηση είναι η μέγιστη δυνατή διακύμανση τα σημεία της οποίας μπορούν άμεσα να προσδιοριστούν αν ελαχιστοποιηθεί η μέγιστη τιμή της Συνάρτησης Διακύμανσης της Απόκρισης. Το πρώτο μέτωπο που αντιστοιχούσε στον κλασικό ΕΒΣ φαίνεται να είναι, όπως αναμενόταν, υποβέλτιστο του δευτέρου που προέκυψε από τον ΕΒΣ που βασίζεται στις ΣΔΑ αφού το δεύτερο είναι εξ ορισμού ανεξάρτητο της κατανομής της πιθανότητας και της φασματικής πυκνότητας που χρησιμοποιούνται για να περιγράψουν την αβεβαιότητα του συστήματος. Τονίζεται σε αυτό το σημείο ότι το παραγόμενο μέτωπο και οι αντίστοιχοι προτεινόμενοι σχεδιασμοί αναφέρονται σε ένα σύνολο διαφορετικών στοχαστικών πεδίων σε αντίθεση με τον κλασικό ΕΒΣ. Γίνεται επίσης σαφές ότι οι προτεινόμενοι σχεδιασμοί δεν είναι απαραίτητα βέλτιστοι εάν εξετασθούν υπό την σκοπιά ενός μόνο προκαθορισμένου στοχαστικού πεδίου. Στην περίπτωση όπου μια βελτιστοποίηση πραγματοποιείται για μια συγκεκριμένη δομή συσχέτισης η προκύπτουσα επιλογή σχεδιασμών θα είναι υποβέλτιστη για την περίπτωση κάποιας άλλης δομής συσχέτισης.

## 2 ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑΤΙΚΗΣ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ ΚΑΙ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗΣ ΤΗΣ ΑΠΟΚΡΙΣΗΣ

### 2.1 ΣΤΑΤΙΚΑ ΟΡΙΣΜΕΝΟΙ ΦΟΡΕΙΣ

Για λόγους επίδειξης έστω ο στατικά ορισμένος πρόβολος μήκους  $L$  του Σχ. 1, με κατανεμημένο φορτίο  $Q_0$  και συγκεντρωμένη ροπή  $M$  επιβαλλόμενη στο ελεύθερο άκρο του.



Σχήμα 1 Στατικά ορισμένη δοκός

Το αντίστροφο του μέτρου ελαστικότητας θεωρείται ότι μεταβάλλεται τυχαία κατά μήκος της δοκού σύμφωνα με την παρακάτω έκφραση:

$$\frac{1}{E(x)} = F_0(1 + f(x)) \quad (3)$$

όπου το  $E$  είναι το μέτρο ελαστικότητας,  $F_0$  είναι η μέση τιμή του αντιστρόφου του  $E$ , και  $f(x)$  είναι ένα ομογενές στοχαστικό πεδίο μηδενικής μέσης τιμής που περιγράφει τη μεταβολή του  $1/E$  περί του  $F_0$ . Η απόκριση της μετατόπισης της δοκού  $u(x)$  δίνεται από την παρακάτω έκφραση

$$u(x) = -\frac{F_0}{I} \int_0^x (x - \xi) M(\xi) (1 + f(\xi)) d\xi = -\frac{F_0}{I} \int_0^x h(x, \xi) M(\xi) (1 + f(\xi)) d\xi \quad (4)$$

όπου  $h(x, \xi)$  είναι η συνάρτηση Green της δοκού,  $I$  είναι η ροπή αδράνειας και  $M(x)$  είναι η καμπτική ροπή. Η μέση τιμή της μετατόπισης δίνεται από την έκφραση

$$E[u(x)] = -\frac{F_0}{I} \int_0^x h(x, \xi) M(\xi) E[(1 + f(\xi))] d\xi \quad (5)$$

ενώ η διακύμανση

$$Var[u(x)] = E[u^2(x)] - E[u(x)]^2 = \frac{F_0^2}{I} \int_0^x \int_0^x h(x, \xi_1) h(x, \xi_2) M(\xi_1) M(\xi_2) R_{ff}(\xi_1 - \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \quad (6)$$

όπου το  $R_{ff}(\xi_1 - \xi_2)$  είναι η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης του στοχαστικού πεδίου  $f(x)$ . Με εφαρμογή στην παραπάνω εξίσωση του μετασχηματισμού Wiener-Khintchine προκύπτει ότι

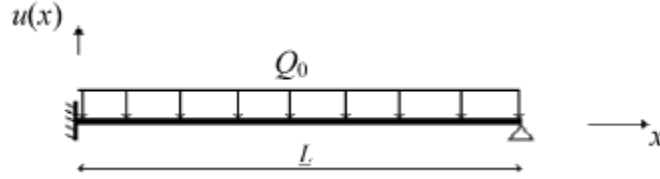
$$Var[u(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} VRF(x, \kappa) S_{ff}(\kappa) d\kappa \quad (7)$$

όπου η ΣΔΑ (VRF) δίνεται από τη σχέση

$$VRF(x, \kappa) = \left| \frac{F_0}{I} \int_0^x h(x, \xi) M(\xi) e^{i\kappa\xi} d\xi \right|^2 \quad (8)$$

## 2.2 ΣΤΑΤΙΚΑ ΑΟΡΙΣΤΟΙ ΦΟΡΕΙΣ

Έστω ο στατικά αόριστος φορέας του Σχ. 2 μήκους  $L$ , με ένα ομοιόμορφα κατανομημένο φορτίο  $Q_0$ . Το αντίστροφο του μέτρου ελαστικότητας καολουθεί τις προαναφερθείσες παραδοχές κατά την παράγραφο 2.2.



Σχήμα 2 Στατικά αόριστη δοκός

Χρησιμοποιώντας μια διατύπωση μέσω της μεθόδου των δυνάμεων, η απόκριση της μετατόπισης μπορεί να εκφραστεί ως

$$u(x) = u_0(x) - Ru_1(x) \quad (9)$$

όπου  $u_0(x)$  είναι η μετατόπιση της αντίστοιχης στατικά ορισμένης δοκού με ομοιόμορφο κατανομημένο φορτίο  $Q_0$  που υπολογίζεται αφαιρώντας την κύλιση του δεξιού άκρου,  $u_1(x)$  είναι η μετατόπιση της ίδιας δοκού λόγω μοναδιαίας συγκεντρωμένης φόρτισης στη θέση  $x=L$ , και  $R$  είναι η κάθετη αντίδραση της στήριξης στο δεξί άκρο. Μετά από πράξεις προκύπτει ότι

$$E[u(x)] = \int_0^x g_1(x, \xi) d\xi + \int_0^x g_2(x, \xi) E[R(1 + f(\xi))] d\xi \quad (10)$$

όπου

$$g_1(x, \xi) = \frac{F_0 Q_0}{2I} (x - \xi)(L - \xi)^2 \text{ and } g_2(x, \xi) = -\frac{F_0}{I} (x - \xi)(L - \xi) \quad (11)$$

Ομοίως για την διακύμανση προκύπτει

$$\begin{aligned} \text{Var}[u(x)] = \int_0^x \int_0^x \{ & g_1(x, \xi_1) g_1(x, \xi_2) R_{ff}(\xi_1 - \xi_2) + g_2(x, \xi_1) g_2(x, \xi_2) R_{pp}(\xi_1, \xi_2) \\ & + 2g_1(x, \xi_1) g_2(x, \xi_2) R_{fp}(\xi_1, \xi_2) \} d\xi_1 d\xi_2 \end{aligned} \quad (12)$$

όπου  $R_{pp}(\xi_1, \xi_2)$  είναι η αυτοσυσχέτιση του πεδίου  $p(x)$  όπως στο (Papadopoulos, Papadrakakis και Deodatis 2006). Τελικά στην παραπάνω εργασία παρουσιάζονται κλειστές μορφές ακριβείς ολοκληρωτικές εκφράσεις της μορφής της Εξ. (3.8) τόσο για τη διακύμανση όσο και για τη μέση τιμή της μετατόπισης δηλ.

$$\varepsilon[u(x)] = \sqrt{\varepsilon[u^2(x)] - \text{Var}[u(x)]} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \text{MRF}(x, \kappa, \sigma_{ff}) S_{ff}(\kappa) d\kappa + u_{\text{det}}^2(x)} \quad (13)$$

ή ισοδύναμα

$$\varepsilon[u(x)]^2 = \varepsilon[u^2(x)] - \text{Var}[u(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} \text{MRF}(x, \kappa, \sigma_{ff}) S_{ff}(\kappa) d\kappa + u_{\text{det}}^2(x), \quad (14)$$

όπου η  $MRF$  (ΣΜΑ) ορίζεται ως

$$MRF(x, \kappa, \sigma_{ff}) = VRF_1(x, \kappa, \sigma_{ff}) - VRF(x, \kappa, \sigma_{ff}) = \int_0^x \{g_1(x, \xi_1)g_1(x, \xi_2)A_2(\xi_2, \kappa)\cos[\kappa(\xi_2 - \xi_1)] + 2g_0(x, \xi_1)g_1(x, \xi_2)B_2(\xi_1, \xi_2, \kappa)\} d\xi_1 d\xi_2 \quad (15)$$

όπου οι συναρτήσεις  $A_2(x, \kappa)$  και  $B_2(x_1, x_2, \kappa)$  είναι κλειστής μορφής και μπορούν να προκύψουν από μια διαδικασία παρόμοια με αυτή που ακολουθείται στην εργασία των (Papadopoulos and Deodatis 2006). Τόσο η  $VRF$  όσο και η  $MRF$  εξαρτώνται από ντετερμινιστικές παραμέτρους του προβλήματος όπως η γεωμετρία, οι συνοριακές συνθήκες, οι μέσες ιδιότητες του υλικού και η φόρτιση του φορέα όπως επίσης και από την τυπική απόκλιση  $\sigma_{ff}$  του στοχαστικού πεδίου.

### 2.3 ΑΝΩ ΟΡΙΑ ΣΤΗΝ ΑΠΟΚΡΙΣΗ

Από τις Εξ. (3.36) και (11.69) μπορούν να προσδιοριστούν άνω όρια για τη διακύμανση και τη μέση τιμή της απόκρισης ως ακολούθως

$$\varepsilon[u(x)] = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} MRFF(x, \kappa, \sigma_{ff}) S_{ff}(\kappa) d\kappa + u_{det}^2(x)} \leq \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} MRFF(x, \kappa, \sigma_{ff}) \sigma_{ff}^2 + u_{det}^2(x)} \quad (16)$$

$$Var[u(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} VRF(\kappa, \sigma_{ff}) S_{ff}(\kappa) d\kappa \leq VRF(x, \kappa^{max}, \sigma_{ff}) \sigma_{ff}^2 \quad (17)$$

όπου  $\kappa^{max}$  είναι ο κυματικός αριθμός όπου οι  $MRF$  και  $VRF$  γίνονται μέγιστες, Βεβαίως αυτό δε σημαίνει ότι αυτός ο κυματικός αριθμός είναι κοινός για τις δύο συναρτήσεις. Σημειωτέον ότι τα όρια αυτά είναι ανεξάρτητα της φασματικής πυκνότητας και της οριακής σππ του πεδίου.

### 2.4 ΓΡΗΓΟΡΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΜΟΝΤΕ ΚΑΡΛΟ

Αναλυτικά οι συναρτήσεις  $VRF$  και  $MRF$  είναι ιδιαίτερα κοπιαστικό και για πολλά προβλήματα αδύνατο να υπολογιστούν. Αριθμητικά όμως, αυτό καθίσταται πολύ πιο εύκολο μέσω της γρήγορης προσομοίωσης Μόντε Κάρλο (FMCS) όπως προτείνεται από τους (Papadopoulos, Deodatis and Papadrakakis 2005), (Papadopoulos and Deodatis 2006). Τα βασικά βήματα αυτής της μεθόδου έχουν ως ακολούθως:

1. Γένεση  $N$  δειγματοσυναρτήσεων μιας τυχαίας ημιτονοειδούς συναρτήσεως τυπικής απόκλισης  $\sigma_{ff}$  και κυματικού αριθμού  $\bar{\kappa}$  του στοχαστικού πεδίου  $f(x)$  που περιγράφει το αντίστροφο του μέτρου ελαστικότητας:

$$f_j(x) = \sqrt{2}\sigma_{ff} \cos(\bar{\kappa}x + \phi_j); \quad j=1,2,\dots,N, \quad (18)$$



όπου  $\phi_j$  είναι μια τυχαία γωνία ομοιόμορφα κατανομημένη στο διάστημα  $[0, 2\pi]$ . Είναι δυνατόν χάριν εξοικονομήσεως υπολογιστικού κόστους οι γωνίες  $\phi_j$  να επιλεγούν στο μέσο  $N$  ίσων διαστημάτων στο διάστημα  $[0, 2\pi]$ .

2. Χρησιμοποιώντας αυτές τις  $N$  δειγματοσυναρτήσεις υπολογίζουμε άμεσα τις αντίστοιχες  $N$  αποκρίσεις και ακολούθως τη μέση τιμή  $\varepsilon[u(x)]_{\bar{\kappa}}$  και τη διακύμανση τους  $Var[u(x)]_{\bar{\kappa}}$  για τον κυματικό αριθμό  $\bar{\kappa}$ .
3. Η τιμή της  $MRF$  για τον κυματικό αριθμό  $\bar{\kappa}$  και τυπική απόκλιση  $\sigma_{ff}$  θα είναι

$$MRF(x, \bar{\kappa}, \sigma_{ff}) = \frac{\left\{ \varepsilon[u(x)]_{\bar{\kappa}} \right\}^2 - u_{\det}^2(x)}{\sigma_{ff}^2} \quad (19)$$

4. Αντίστοιχα της  $VRF$

$$VRF(x, \bar{\kappa}, \sigma_{ff}) = \frac{Var[u(x)]_{\bar{\kappa}}}{\sigma_{ff}^2} \quad (20)$$

5. Τα βήματα 1–4 επαναλαμβάνονται για τις διάφορες τιμές του  $\bar{\kappa}$ . Συνεπώς οι  $MRF(x, \kappa, \sigma_{ff})$  και  $VRF_1(x, \kappa, \sigma_{ff})$  για όλους τους κυματικούς αριθμούς που ενδιαφέρουν. Η όλη διαδικασία μπορεί επαναληφθεί για διαφορετικές  $\sigma_{ff}$  και διαφορετικές θέσεις  $x$  κατά μήκος της δοκού (αν αυτό κριθεί αναχώρογκαίω).

## 2.5 ΕΠΕΚΤΑΣΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΣΕ ΔΙΔΙΑΣΤΑΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Η προτεινόμενη μεθοδολογία μπορεί να επεκταθεί σε δισδιάστατα προβλήματα κατά τρόπο απλό. Το αντίστροφο του μέτρου ελαστικότητας τώρα υποτίθεται ότι ποικίλει τυχαία σε ένα διδιάστατο περιοχή σύμφωνα με την ακόλουθη εξίσωση (συγκρίνετε με την εξίσωση (2).):

$$\frac{1}{E(x, y)} = F_0(1 + f(x, y)), \quad (21)$$

όπου  $E$  είναι το μέτρο ελαστικότητας,  $F_0$  είναι η μέση τιμή του αντίστροφου του  $E$ , και  $f(x, y)$  τώρα είναι ένα δισδιάστατο, με μηδενική μέση τιμή ομογενές πεδίο που περιγράφει τη στοχαστική μεταβολή του  $1/E$  γύρω από τη μέση τιμή του  $F_0$ .

Κατά συνέπεια, οι ολοκληρωτικές εκφράσεις για την μέση τετραγωνική τιμή και τη μέση τιμή της απόκρισης της μετατόπισης γίνονται:

$$\varepsilon[u^2(x, y)] = 2 \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty VRF_1(x, \kappa_x, y, \kappa_y, \sigma_{ff}) S_{ff}(\kappa_x, \kappa_y) d\kappa_x d\kappa_y + u_{\det}^2(x, y) \quad (22)$$

και

$$\varepsilon[u(x, y)] = \sqrt{2 \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty MRF(x, \kappa_x, y, \kappa_y, \sigma_{ff}) S_{ff}(\kappa_x, \kappa_y) d\kappa_x d\kappa_y + u_{\det}^2(x, y)}, \quad (23)$$

όπου  $MRF(x, \kappa_x, y, \kappa_y, \sigma_{ff})$  και  $VRF_1(x, \kappa_x, y, \kappa_y, \sigma_{ff})$  είναι οι διδιάστατες εκδοχές των MRF και VRF1, αντίστοιχα, που έχουν τις ακόλουθες συμμετρίες:

$$\begin{aligned} MRF(\kappa_x, \kappa_y) &= MRF(-\kappa_x, -\kappa_y), \\ VRF_1(\kappa_x, \kappa_y) &= VRF_1(-\kappa_x, -\kappa_y), \end{aligned} \quad (24)$$

$S_{ff}(\kappa_x, \kappa_y)$  είναι η συνάρτηση φασματικής πυκνότητας του πεδίου  $f(x, y)$  που διαθέτει τις ίδιες συμμετρίες όπως οι MRF και VRF1, ενώ η VRF1 υπολογίζεται από

$$VRF_1(\kappa_x, \kappa_y) = MRF(\kappa_x, \kappa_y) + VRF(\kappa_x, \kappa_y). \quad (25)$$

Η διαδικασία FEM-FMCS που περιγράφηκε προηγουμένως για προβλήματα μονοδιάστατης δοκού μπορεί να χρησιμοποιηθεί για 2D προβλήματα επίσης προκειμένου να εκτιμηθεί η MRF και η VRF. Η 1D τυχαία ημιτονοειδής συνάρτηση στην Εξ. (3.45) γίνεται τώρα 2D με την ακόλουθη μορφή:

$$f(x, y) = \sqrt{2}\sigma_{ff} \cos(\bar{\kappa}_x x + \bar{\kappa}_y y + \phi_j); \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (26)$$

Άνω όρια για τη μέση τιμή και διακύμανση της απόκρισης της μετατόπισης μπορεί να προσδιοριστούν για την περίπτωση 2D ως εξής:

$$\varepsilon[u(x, y)] \leq \sqrt{MRF(x, y, \kappa_x^{\max}, \kappa_y^{\max}, \sigma_{ff})\sigma_{ff}^2 + u_{\det}^2(x, y)}, \quad (27)$$

$$Var[u(x, y)] \leq VRF(x, y, \kappa_x^{\max}, \kappa_y^{\max}, \sigma_{ff})\sigma_{ff}^2, \quad (28)$$

όπου  $(\kappa_x^{\max}, \kappa_y^{\max})$  είναι το ζεύγος κυματικών αριθμών στο οποίο η MRF ή η VRF λαμβάνουν τη μέγιστη τιμή τους (για μια δεδομένη τιμή του  $\sigma_{ff}$  και μια δεδομένη θέση  $(x, y)$ ), και  $\sigma_{ff}^2$  είναι η διακύμανση του στοχαστικού πεδίου που περιγράφει το αντίστροφο του μέτρου ελαστικότητας. Θα πρέπει να τονιστεί ότι το  $(\kappa_x^{\max}, \kappa_y^{\max})$  δεν είναι αναγκαστικά το ίδιο για την MRF και τη VRF.

## 2.6 ΓΕΝΙΚΟΤΗΤΑ ΤΗΣ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗΣ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ

Όλα τα παραπάνω συμπεράσματα βασίζονται στην υπόθεση ότι η  $VRF(x, \kappa, \sigma_{ff})$  είναι ανεξάρτητη από την φασματική πυκνότητα  $S_{ff}(\kappa)$  του στοχαστικού πεδίου  $f(x)$ . Περαιτέρω έρευνες (Miranda 2008) επιβεβαίωσαν τα προαναφερθέντα αποτελέσματα, αλλά έδειξαν ότι η VRF έχει μια μικρή εξάρτηση από την οριακή σππ του στοχαστικού πεδίου περιγράφει την ευκαμψία. Μια σημαντική επέκταση της έννοιας της VRF έχει συνταχθεί από τους (Arwade and Deodatis 2011) όπου μέσω αυτής καθορίζουν τις ισοδύναμες ιδιότητες των υλικών σε προβλήματα ομογενοποίησης. Οι (Papadopoulos, Papadrakakis and Deodatis 2006) παρουσίασαν αποτελέσματα για γενικά γραμμικά στοχαστικά συστήματα πεπερασμένων στοιχείων συμπεριλαμβανομένων στοιχείων δοκού, χωρικών πλαισίων, στοιχείων επίπεδης έντασης και κατασκευών με στοιχεία κελύφους υπό στατικά φορτία.

## 2.7 ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΗΣ GVRF ΓΙΑ ΤΗΝ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΣΤΑΤΙΚΗΣ ΦΟΡΤΙΣΗΣ

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, οι MRF και VRF εννοιολογικά βασίζονται στην παραδοχή ότι είναι ντετερμινιστικές, δηλαδή είναι ανεξάρτητες του τύπου της φασματικής πυκνότητας, καθώς και της οριακής σππ που χρησιμοποιείται για να περιγράψει την αβέβαιη παράμετρο του προβλήματος. Η ισχύς αυτής της εικασίας αποδεικνύεται αριθμητικά στις αριθμητικές εφαρμογές από άμεσες συγκρίσεις της χρονοϊστορίας της διακύμανσης της απόκρισης του συστήματος, που υπολογίζεται με την προτεινόμενη προσέγγιση που βασίζεται στη VRF, με την αντίστοιχη χρονοϊστορία της διακύμανσης της απόκρισης που υπολογίζεται με τη μέθοδο άμεσης προσομοίωσης Monte Carlo. Ως περαιτέρω βήμα αυτής της επικύρωσης, η έννοια της Γενικευμένης Συνάρτησης Διακύμανσης της Απόκρισης (GVRF) έχει εισαχθεί από τους (Miranda and Deodatis 2012). Οι (Teferra and Deodatis 2012) την χρησιμοποίησαν για να επικυρώσουν την εικασία τους για δοκούς με μη-γραμμικό καταστατικό νόμο υλικού, αλλά με κάποιες τροποποιήσεις. Παρακάτω χρησιμοποιείται για την επικύρωση της εικασίας σε δυναμικά προβλήματα.

### 2.7.1 ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΕΚΤΙΜΗΣΗΣ ΤΗΣ GVRF

Για μια γραμμική υπερστατική κατασκευή με αβέβαιες ιδιότητες των υλικών, η διακύμανση της απόκρισης του συστήματος μπορεί να υπολογιστεί με τον ακόλουθο τύπο (M. Shinozuka 1987)

$$Var[u(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} VRF(x, \kappa) S_{ff}(\kappa) d\kappa \quad (29)$$

όπου η  $Var[u(x)]$  μπορεί να υπολογιστεί εύκολα με μια άμεση προσομοίωση Monte Carlo. Η Εξ. (3.58) μπορεί να ξαναγραφτεί με την ακόλουθη διακριτοποιημένη μορφή

$$Var[u(x)] = 2 \begin{bmatrix} S_f(\kappa_1) & S_f(\kappa_2) & \cdots & S_f(\kappa_N) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} VRF(x, \kappa_1) \\ VRF(x, \kappa_2) \\ \vdots \\ VRF(x, \kappa_N) \end{bmatrix} \Delta\kappa \quad (30)$$

Έχοντας κάνει την υπόθεση ότι η VRF είναι ανεξάρτητη από την πυκνότητα φασματικής ισχύος και του οριακής σππ, είναι φυσικό να υποθέσουμε ότι οι ίδιες τιμές VRF μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εκτίμηση της διακύμανσης του συστήματος για διάφορες συναρτήσεις φασματικής πυκνότητας. Ως εκ τούτου, η ακόλουθη σχέση θα πρέπει επίσης να είναι αληθής, μόνο που τώρα η VRF ονομάζεται Γενικευμένη Συνάρτηση Διακύμανσης της Απόκρισης (GVRF).

$$\begin{bmatrix} Var[u(x)_1] \\ Var[u(x)_2] \\ \vdots \\ Var[u(x)_N] \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} S_{f_1}(\kappa_1) & S_{f_1}(\kappa_2) & \cdots & S_{f_1}(\kappa_N) \\ S_{f_2}(\kappa_1) & S_{f_2}(\kappa_2) & \cdots & S_{f_2}(\kappa_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{f_N}(\kappa_1) & S_{f_N}(\kappa_2) & \cdots & S_{f_N}(\kappa_N) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} GVRF(x, \kappa_1) \\ GVRF(x, \kappa_2) \\ \vdots \\ GVRF(x, \kappa_N) \end{bmatrix} \Delta\kappa \quad (31)$$

Το διάνυσμα της αριστερής πλευράς είναι το διάνυσμα των διαφορετικών διακυμάνσεων του συστήματος, που υπολογίζονται από τις αντίστοιχες άμεσες προσομοιώσεις Monte Carlo,

και το μητρώο στη δεξιά πλευρά είναι το μητρώο των τιμών των συναρτήσεων φασματικών πυκνοτήτων για διάφορους τύπους φασματικών πυκνοτήτων  $S_{f_i}(\kappa)$ ,  $i=1,2,\dots,N$ . Ουσιαστικά, η Εξ. (3.60) περιγράφει ένα σύστημα  $N$  γραμμικών εξισώσεων με  $N$  αγνώστους, παρέχοντας έτσι μία μοναδική λύση για το διάνυσμα GVRF.

### 3 ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ ΚΑΙ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗΣ ΤΗΣ ΑΠΟΚΡΙΣΗΣ ΥΠΟ ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΦΟΡΤΙΣΗ

#### 3.1 ΜΟΝΟΒΑΘΜΙΟΙ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΟΙ ΤΑΛΑΝΤΩΤΕΣ

##### 3.1.1 ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΝΟΣ ΜΟΝΟΒΑΘΜΙΟΥ ΤΑΛΑΝΤΩΤΗ

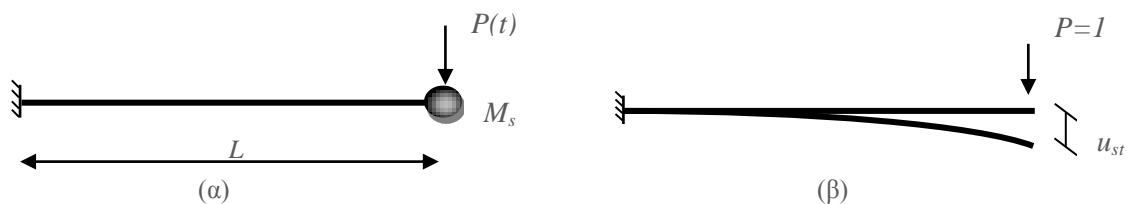
Για το μονοβάθμιο ισοστατικό στοχαστικό ταλαντωτή μήκους  $L$  και μάζας  $M_s$  στο Σχ. 3(α), που φορτίζεται με ένα δυναμικό ντετερμινιστικό φορτίο  $P(t)$ , το αντίστροφο του μέτρου ελαστικότητας θεωρείται ποικίλει τυχαία κατά μήκος της δοκού σύμφωνα με την ακόλουθη έκφραση:

$$\frac{1}{E(x)} = F_0(1 + f(x)) \quad (32)$$

όπου  $E(x)$  είναι το μέτρο ελαστικότητας,  $F_0$  είναι η μέση τιμή του αντίστροφου του  $E(x)$ , και  $f(x)$  είναι ένα μηδενικής μέσης τιμής ομογενές πεδίο που περιγράφει τη μεταβολή του  $1/E$  γύρω από τη μέση τιμή του. Η χρονοϊστορία της μετατόπισης  $u(t)$  του ταλαντωτή μπορεί να προκύψει από το ολοκλήρωμα Duhamel:

$$u(t) = \frac{1}{\omega_D} \int_0^t P(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin(\omega_D(t-\tau)) d\tau \quad (33)$$

όπου  $\xi$  είναι ο συντελεστής απόσβεσης και  $\omega_D = \omega\sqrt{1-\xi^2}$  με  $\omega$  την κυκλική συχνότητα του συστήματος



Σχήμα 3. Μονοβάθμιος ταλαντωτής: (α) Γεωμετρία και φόρτιση (β) Στατική μετατόπιση για μοναδιαίο φορτίο

Λόγω της αβεβαιότητας του συστήματος στην Εξ. (32), η κυκλική συχνότητα  $\omega$  είναι μια τυχαία μεταβλητή που δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$\omega = \sqrt{k / M_s} \quad (34)$$

όπου  $k$  είναι η ακαμψία του ταλαντωτή η οποία μπορεί να προέρχεται από τη στατική απόκριση της μετατόπισης του ταλαντωτή για ένα μοναδιαίο στατικό ντετερμινιστικό φορτίο στο άκρο της δοκού (Σχ. 3β) ως εξής:

$$k = \frac{1}{u_{st}} = \left[ -\frac{F_0}{I} \int_0^L (x-\alpha)M(\alpha)(1+f(\alpha))d\alpha \right]^{-1} \quad (35)$$

όπου  $I$  είναι η ροπή αδράνειας της δοκού και  $M(\alpha)$  είναι η ροπή στη θέση  $\alpha$ . Στη γενική περίπτωση όπου το φορτίο είναι αυθαίρετο και το σύστημα είναι αρχικά σε κατάσταση ηρεμίας, η ντετερμινιστική μετατόπιση στο δεξί άκρο της δοκού μπορεί να προέρχεται από αριθμητική επίλυση του ολοκληρώματος Duhamel.

### 3.1.2 ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗ ΚΑΙ ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ ΤΗΣ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΑΠΟΚΡΙΣΗΣ

Ακολουθώντας μια διαδικασία παρόμοια με αυτή που παρουσιάζεται από τους (Papadopoulos, Deodatis και Papadrakakis 2005) για γραμμικά στοχαστικά συστήματα υπό στατική φόρτιση, είναι δυνατό να εκφραστεί η διακύμανση της στοχαστικής δυναμικής απόκρισης του συστήματος με την παρακάτω ολοκληρωτική έκφραση:

$$Var[u(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} DVRF(t, \kappa, \sigma_{ff}) S_{ff}(\kappa) d\kappa \quad (36)$$

όπου DVRF είναι η δυναμική εκδοχή της VRF, για την οποία γίνεται η υπόθεση ότι είναι συνάρτηση της ντετερμινιστικών παραμέτρων του προβλήματος σε σχέση με τη γεωμετρία, τα φορτία και τις (μέσες) ιδιότητες των υλικών και την τυπική απόκλιση του στοχαστικού πεδίου που περιγράφουν την ευκαμψία του συστήματος. Μια παρόμοια ολοκληρωτική έκφραση μπορεί να δώσει μια εκτίμηση για τη μέση τιμή της δυναμικής απόκρισης του συστήματος με τη χρήση της Δυναμικής Συνάρτησης της Μέσης Τιμής της Απόκρισης (DMRF) (Papadopoulos, Papadrakakis και Deodatis 2006):

$$E[u(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} DMRF(t, \kappa, \sigma_{ff}) S_{ff}(\kappa) d\kappa \quad (37)$$

Γίνεται η υπόθεση ότι η DMRF είναι μια συνάρτηση παρόμοια με τη DVRF με την έννοια ότι εξαρτάται επίσης από ντετερμινιστικές παραμέτρους του προβλήματος, καθώς και από τη  $\sigma_{ff}$ . Είναι εξαιρετικά δύσκολο, ωστόσο, να αποδειχθεί ότι η DVRF (το ίδιο και η DMRF) είναι ανεξάρτητη (ή έστω και κατά προσέγγιση ανεξάρτητη) της οριακής σππ και της συναρτησιακής μορφής της πυκνότητας φασματικής ισχύος του στοχαστικού πεδίου. Όπως και στην περίπτωση των (Papadopoulos, Deodatis και Papadrakakis 2005), (Papadopoulos και Deodatis 2006), (Papadopoulos, Papadrakakis και Deodatis 2006) οι προαναφερθείσες παραδοχές θεωρούνται ότι αποτελούν εικασίες που επιβεβαιώνονται αριθμητικά εδώ με σύγκριση των αποτελεσμάτων από τις Εξ. (4.14) και (4.15) με την άμεση μέθοδο MCS.

Η παραγωγή μιας αναλυτικής έκφρασης για την DVRF και DMRF, αν είναι δυνατόν κάτι τέτοιο, είναι μια εξαιρετικά πολύπλοκη διαδικασία. Με αριθμητικούς υπολογισμούς, ωστόσο, μπορεί να επιτευχθεί εύκολα, όπως περιγράφεται στην επόμενη ενότητα και στη συνέχεια τροφοδοτείται στις Εξ. (4.14) και (4.15) για να παρέχει τις εκτιμήσεις της μέσης τιμής και της διακύμανσης της δυναμικής απόκρισης του συστήματος.

#### 3.1.2.1 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΤΗΣ DVRF ΚΑΙ ΤΗΣ DMRF ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΩΝΤΑΣ ΤΗ ΓΡΗΓΟΡΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ MONTE CARLO

Η αριθμητική εκτίμηση των DMRF και DVRF περιλαμβάνει μια φρήγορη προσομοίωση Monte Carlo (FMCS) της οποίας η βασική ιδέα είναι να εξετάσει το τυχαίο πεδίο ως ένα τυχαίο ημιτονοειδές (Papadopoulos, Deodatis και Papadrakakis 2005), (Papadopoulos και Deodatis 2006) και να χρησιμοποιήσει το μονοχρωματικό φάσμα ισχύος του στις Εξ. (4.14) and (4.15), προκειμένου να υπολογιστεί η αντίστοιχη μέση τιμή και διακύμανση της απόκρισης για διάφορα μήκη κύματος. Τα βήματα της προσέγγισης FMCS είναι τα ακόλουθα:

1. Γένεση  $N$  δειγματοσυναρτήσεων μιας τυχαίας ημιτονοειδούς συναρτήσεως τυπικής απόκλισης  $\sigma_{ff}$  και κυματικού αριθμού  $\bar{\kappa}$  του στοχαστικού πεδίου  $f(x)$  που περιγράφει το αντίστροφο του μέτρου ελαστικότητας:

$$f_j(x) = \sqrt{2}\sigma_{ff} \cos(\bar{\kappa}x + \phi_j); \quad j=1,2,\dots,N, \quad (38)$$

όπου  $\phi_j$  είναι μια τυχαία γωνία ομοιόμορφα κατανομημένη στο διάστημα  $[0,2\pi]$ . Είναι δυνατόν χάριν εξοικονομήσεως υπολογιστικού κόστους οι γωνίες  $\phi_j$  να επιλεγούν στο μέσο  $N$  ίσων διαστημάτων στο διάστημα  $[0,2\pi]$ .

2. Χρησιμοποιώντας αυτές τις  $N$  δειγματοσυναρτήσεις υπολογίζουμε άμεσα τις αντίστοιχες  $N$  αποκρίσεις και ακολούθως τη μέση τιμή  $\varepsilon[u(x)]_{\bar{\kappa}}$  και τη διακύμανση τους  $Var[u(x)]_{\bar{\kappa}}$  για τον κυματικό αριθμό  $\bar{\kappa}$ .
3. Η τιμή της *MRF* για τον κυματικό αριθμό  $\bar{\kappa}$  και τυπική απόκλιση  $\sigma_{ff}$  θα είναι

$$MRF(x, \bar{\kappa}, \sigma_{ff}) = \frac{\left\{ \varepsilon[u(x)]_{\bar{\kappa}} \right\}^2 - u_{det}^2(x)}{\sigma_{ff}^2} \quad (39)$$

4. Αντίστοιχα της *VRF*

$$VRF(x, \bar{\kappa}, \sigma_{ff}) = \frac{Var[u(x)]_{\bar{\kappa}}}{\sigma_{ff}^2} \quad (40)$$

Οι DMRF και DVRF υπολογίζονται ως συνάρτηση του χρόνου  $t$  και του κυματικού αριθμού  $\kappa$  επαναλαμβάνοντας τα προηγούμενα βήματα για διάφορα μήκη κύματος και διάφορα χρονικά βήματα. Η όλη διαδικασία μπορεί να επαναλαμβάνεται για διαφορετικές τιμές της τυπικής απόκλισης του τυχαίου ημιτονοειδούς.

### **3.1.2.2 ΟΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ ΚΑΙ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗΣ ΤΗΣ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΑΠΟΚΡΙΣΗΣ**

Άνω όρια για τη μέση τιμή και διακύμανση της δυναμικής απόκρισης του συστήματος μπορεί να καθοριστούν άμεσα από τις Εξ. (4.14) και (4.15), ως εξής:

$$\varepsilon[u(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} DMRF(t, \kappa, \sigma_{ff}) S_{ff}(\kappa) d\kappa \leq DMRF(t, \kappa^{\max}(t), \sigma_{ff}) \sigma_{ff}^2 \quad (41)$$

$$Var[u(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} DVRF(t, \kappa, \sigma_{ff}) S_{ff}(\kappa) d\kappa \leq DVRF(t, \kappa^{\max}(t), \sigma_{ff}) \sigma_{ff}^2 \quad (42)$$

όπου  $\kappa^{\max}(t)$  είναι ο κυματικός αριθμός στον οποίο η DMRF ή η DVRF, για μια δεδομένη χρονική στιγμή  $t$  και τιμή της  $\sigma_{ff}$ , φθάνει στην μέγιστη τιμή της. Μια περιβάλλουσα συναρτήσεως του χρόνου με άνω όρια της μέσης τιμής και της διακύμανσης της δυναμικής απόκρισης του συστήματος μπορεί να εξαχθεί από τις Εξ. (4.19) and (4.20). Όπως και στην περίπτωση των γραμμικών στοχαστικών συστημάτων υπό στατικά φορτία (Papadopoulos, Deodatis and Papadrakakis 2005), (Papadopoulos and Deodatis 2006) και (Papadopoulos, Papadrakakis and Deodatis 2006) αυτή η περιβάλλουσα αποτελείται από φυσικά πραγματοποιήσιμα άνω όρια αφού η μορφή του στοχαστικού πεδίου που τα παράγει είναι το τυχαίο ημιτονοειδές της Εξ. (38) με  $\bar{\kappa} = \kappa^{\max}(t)$ .

### 3.1.3 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΦΑΡΜΟΓΗ

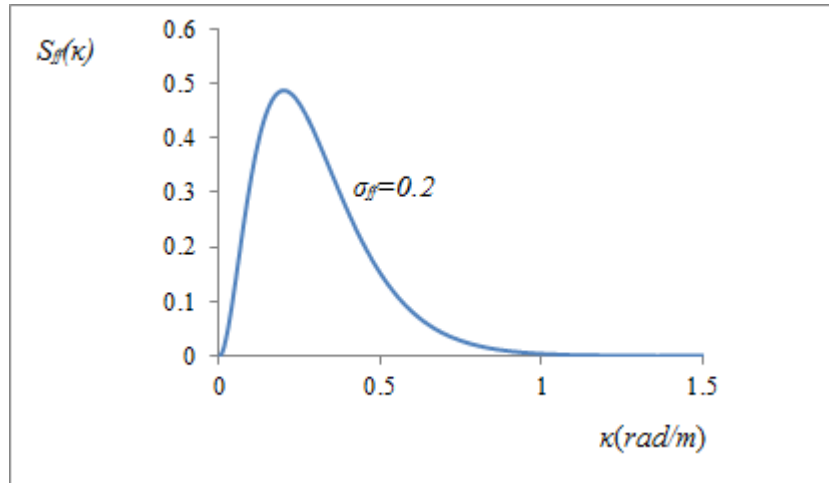
Για τον πρόβλο που φαίνεται στο Σχ. 3 με μήκος  $L=4m$ , το αντίστροφο του μέτρου ελαστικότητας υποτίθεται ότι ποικίλει τυχαία κατά το μήκος του σύμφωνα με την Εξ. (3.2) με  $F_0 = (1.25 \times 10^8 \text{ KN/m})^{-1}$  και  $I = 0.1m^4$ . Μια συγκεντρωμένη μάζα  $M_s = 3.715 \times 10^3 \text{ Kg}$  θεωρείται στο δεξί άκρο της δοκού. Ο συντελεστής απόσβεσης λαμβάνεται ίσος με  $\xi = 5\%$  και η μέση ιδιοπερίοδος τους μονοβάθμιου ταλαντωτή υπολογίζεται σε  $T_0 = 0.5 \text{ sec}$ .

Οι τρεις περιπτώσεις φόρτισης που θεωρούνται είναι: η LC1 που αποτελείται από ένα σταθερό φορτίο  $P(t) = 100 \text{ KN}$ , η LC2 που αποτελείται από μια συγκεντρωμένη δυναμική περιοδική φόρτιση  $P(t) = 100 \sin(\bar{\omega}t)$  και η LC3 που αποτελείται από μια φόρτιση  $P(t) = -M_s \ddot{U}_g(t)$  όπου  $\ddot{U}_g(t)$  είναι ο χρονοϊστορία της επιτάχυνσης του σεισμού στο El Centro το 1940.

Η συνάρτηση φασματικής πυκνότητας (SDF) του Σχ. 4 χρησιμοποιήθηκε για την μοντελοποίηση του αντίστροφου του στοχαστικού μέτρου ελαστικότητας που δίνεται από:

$$S_{ff}(\kappa) = \frac{1}{4} \sigma^2 b^3 \kappa^2 e^{-b|\kappa|} \quad (43)$$

όπου  $b = 10$  είναι η παράμετρος του μήκους συσχέτισης.



**Σχήμα 4.** Φασματική συνάρτηση πυκνότητας ισχύος του στοχαστικού πεδίου  $f(x)$  για τυπική απόκλιση  $\sigma_f=0.2$

Για την απόδειξη την εγκυρότητας της προτεινόμενης μεθοδολογίας, χρησιμοποιείται μια στρογγυλεμένη Γκαουσιανή και μια λογαριθμική σππ για την μοντελοποίηση του  $f(x)$ . Για το σκοπό αυτό, ένα υποκείμενο Γκαουσιανό στοχαστικό πεδίο που συμβολίζεται  $g(x)$  παράγεται χρησιμοποιώντας τη μέθοδο φασματικής αναπαράστασης (Shinozuka and Deodatis 1991) και το φάσμα ισχύος της Εξ. (4.21). Το στρογγυλεμένο Γκαουσιανό πεδίο  $f_{TG}(x)$  λαμβάνεται με απλή στρογγυλοποίηση του  $g(x)$  με τον ακόλουθο τρόπο:  $-0.9 \leq g(x) \leq 0.9$ , ενώ το λογαριθμικό  $f_L(x)$  λαμβάνεται από τον ακόλουθο μετασχηματισμό ως πεδίο μετασχηματισμού (Grigoriu 1995):

$$f_L(x) = F_L^{-1} \{G[g(x)]\} \quad (44)$$

Η SDF του υποκείμενου Γκαουσιανού πεδίου στην Εξ. (4.21) και οι αντίστοιχες φασματικές πυκνότητες του στρογγυλεμένου Γκαουσιανού και Λογαριθμικού πεδίου που συμβολίζονται ως  $S_{f_{TG}f_{TG}}(\kappa)$  και  $S_{f_Lf_L}(\kappa)$ , αντίστοιχα, θα είναι διαφορετικές. Αυτές υπολογίζονται από τον ακόλουθο τύπο

$$S_{f_i f_i}(\kappa) = \frac{1}{2\pi L_x} \left| \int_0^{L_x} f_i(x) e^{-i\kappa x} dx \right|^2 ; i = TG, L \quad (45)$$

όπου  $L_x$  είναι το μήκος της δειγματοσυνάρτησης του μη-Γκαουσιανού πεδίου που περιγράφει την ευκαμψία. Καθώς οι δειγματοσυναρτήσεις των μη-Γκαουσιανών πεδίων δεν είναι εργοδικές, η εκτίμηση των φασμάτων ισχύος στην Εξ. (4.23) εκτελείται υπολογίζοντας το μέσο όρο του αθροίσματος των τιμών της Εξ. (4.23) από τυχαίες πραγματοποιήσεις των πεδίων. (Grigoriu 1995).

### 3.1.3.1 LC1: ΣΤΑΘΕΡΟ ΦΟΡΤΙΟ ΣΤΟ ΑΚΡΟ ΤΟΥ ΠΡΟΒΟΛΟΥ



Αυτό το σενάριο φόρτισης έχει επιλεγεί για να αποδείξει περαιτέρω την εγκυρότητα της μεθοδολογίας και να δημιουργήσει μια λογική συνέχεια με προηγούμενες μελέτες που σχετίζονται με την τρέχουσα εργασία. Στην περίπτωση αυτή η λύση καταπίπτει στη στατική λύση καθώς ο χρόνος τείνει στο άπειρο. Κατά συνέπεια, η DVRF θα πρέπει να συγκλίνει προς την αντίστοιχη στατική VRF ενός προβόλου που φορτίζεται με συγκεντρωμένο φορτίο στο άκρο του, που δίνεται από την Εξ. (4.24) (Papadopoulos, Deodatis and Papadrakakis 2005).

$$VRF(x, \kappa) = \left| \frac{F_0}{I} \int_0^x h(x, \xi) M(\xi) e^{i\kappa\xi} d\xi \right|^2 \quad (46)$$

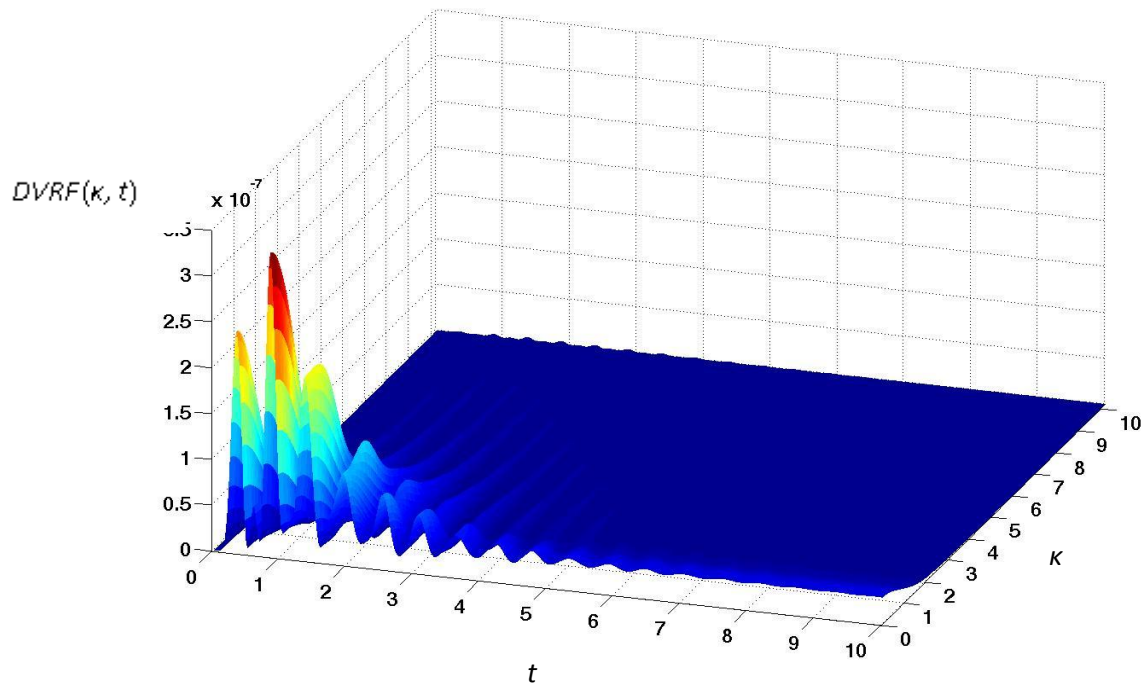
όπου  $h(x, \xi)$  είναι η συνάρτηση Green της δοκού που δίνεται από τη σχέση

$$h(x, \xi) = x - \xi \quad (47)$$

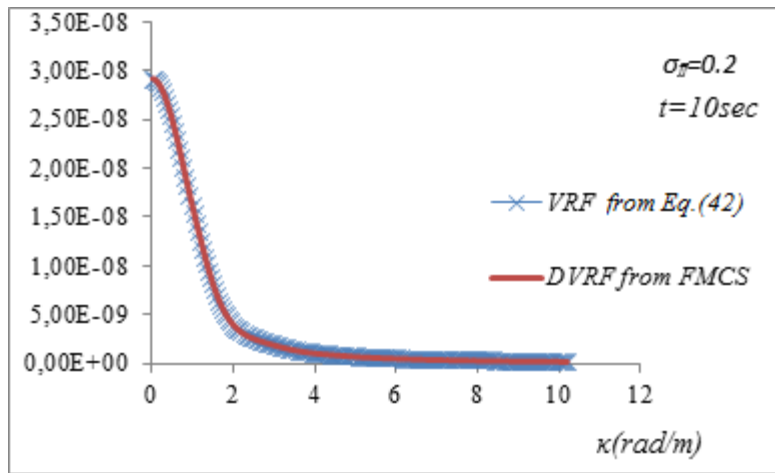
και  $M(x)$  είναι η συνάρτηση καμπτικής ροπής που δίνεται από

$$M(\xi) = -P_0(L - \xi) \quad (48)$$

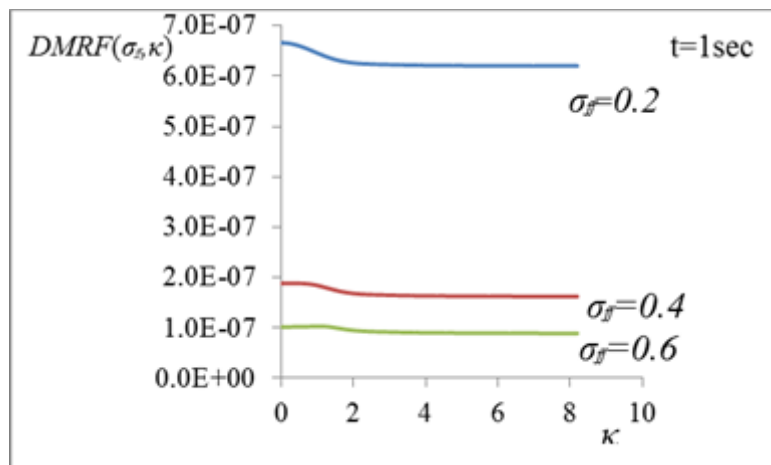
Το Σχ. 5 παρουσιάζει μια 3D αναπαράσταση της DVRF με μια αρχική μεταβατική φάση και στη συνέχεια τη φάση, όπου το σύστημα είναι σχεδόν σε κατάσταση ηρεμίας, ενώ το Σχ. 6 παρουσιάζει την σύμπτωση VRF και ΔVRF που λαμβάνονται από την Εξ. (4.24) και την FMCS, αντίστοιχα, όταν το σύστημα έχει προσεγγίσει την κατάσταση ακινησίας στη χρονική στιγμή  $t = 10\text{sec}$  και για  $\sigma_{ff} = 0.2$ .



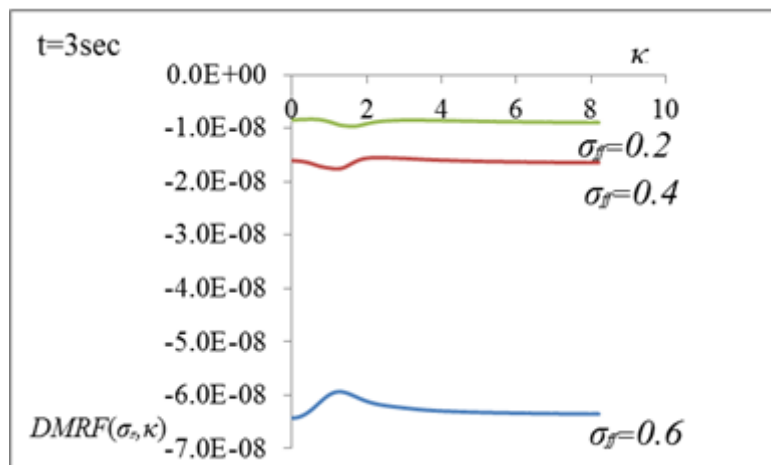
**Σχήμα 5.** 3D αναπαράσταση της  $DVMF$ , συναρτήσει της συχνότητας  $k$  (rad/m) και του χρόνου  $t$ (sec) για την περίπτωση LC3 και  $\sigma_B=0.2$



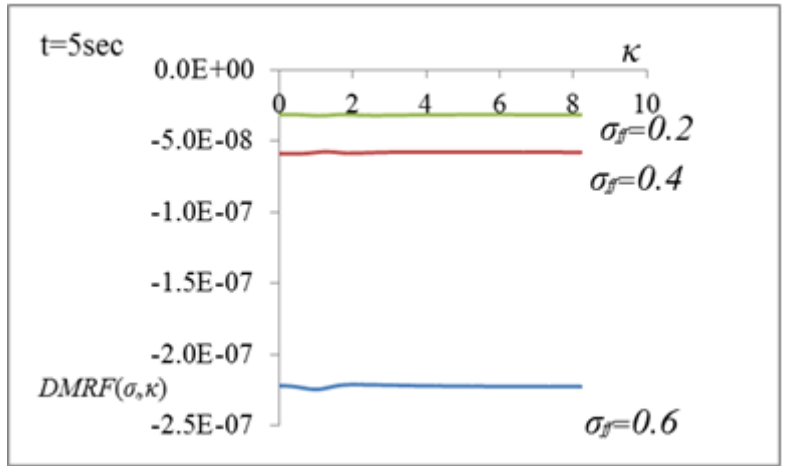
Σχήμα 6. Τιμές της VRF για στατικό φορτίο  $P_0$  και της DVRF για σταθερό φορτίο  $P(t)=P_0$  όταν  $t=10sec$ .



(α)

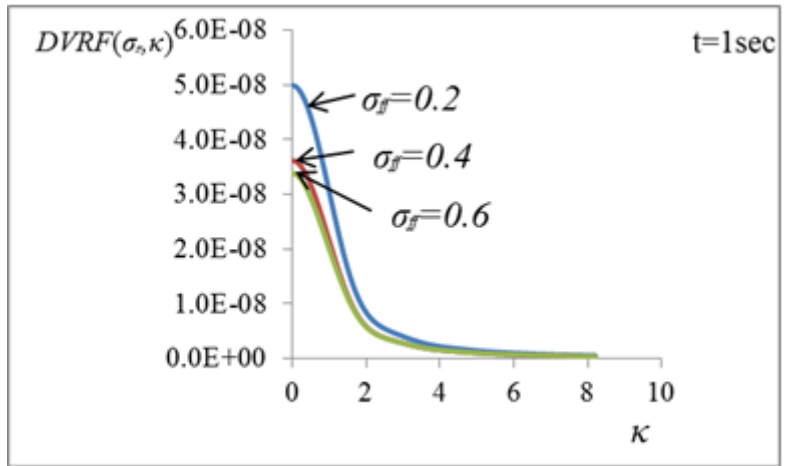


(β)

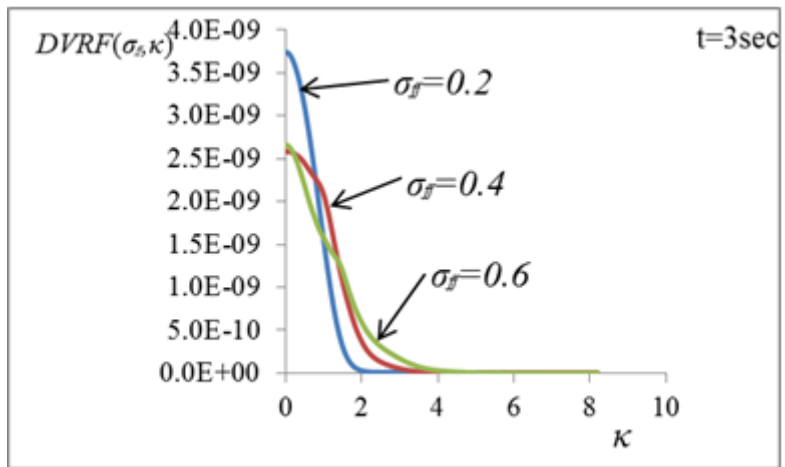


(γ)

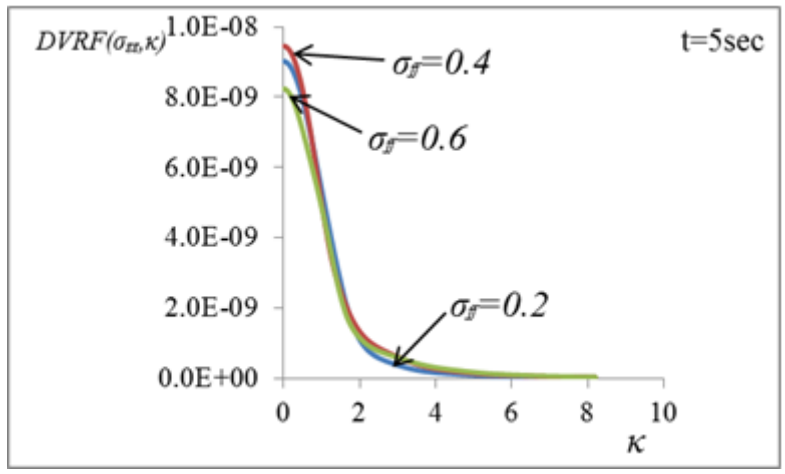
Σχήμα 7.Η Η  $DMRF$  συναρτήσεως του  $\sigma_f$  για (α)  $t=1\text{sec}$ , (β)  $t=3\text{sec}$  και (γ)  $t=5\text{sec}$



(α)



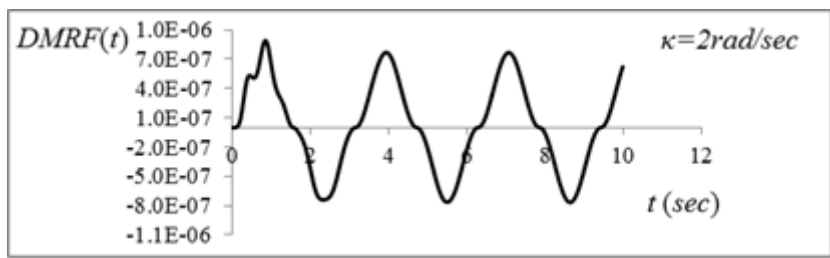
(β)



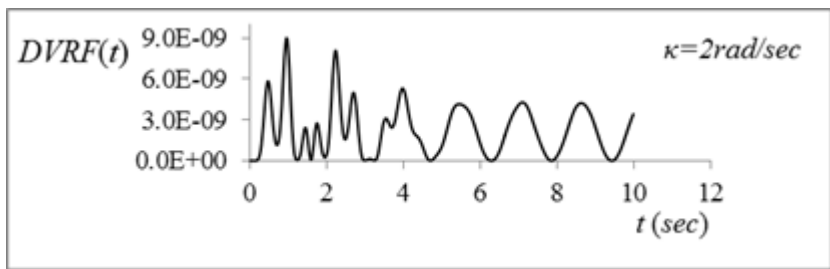
(γ)

Σχήμα 8. Η DVRF συναρτήσεως του  $\sigma_{ff}$  για (a)  $t=1sec$ , (b)  $t=3sec$  και (c)  $t=5sec$

**3.1.3.2 LC2: ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΦΟΡΤΙΟ ΣΤΟ ΑΚΡΟ ΤΟΥ ΠΡΟΒΟΛΟΥ**



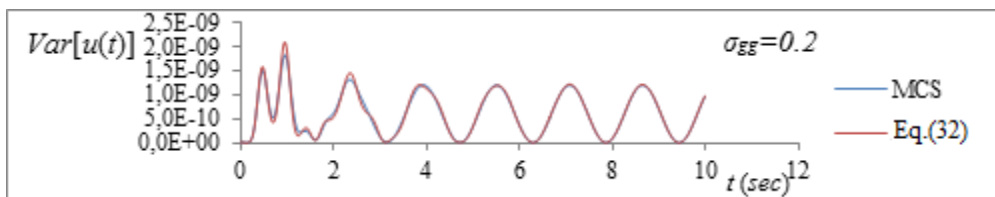
(α)



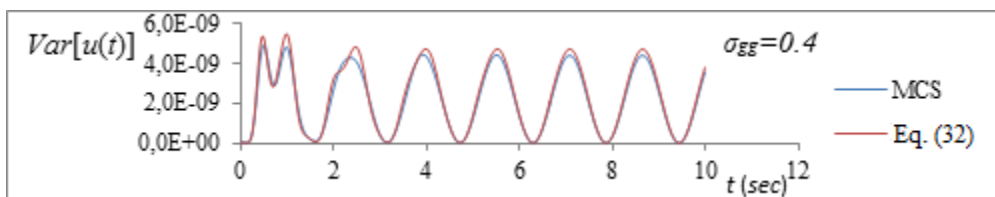
(β)

Σχήμα 9. DMRF (α) και DVRF (β) ως συνάρτηση του  $t$  για  $\kappa=2 rad/sec$  και  $\sigma_{ff} = 0.2$

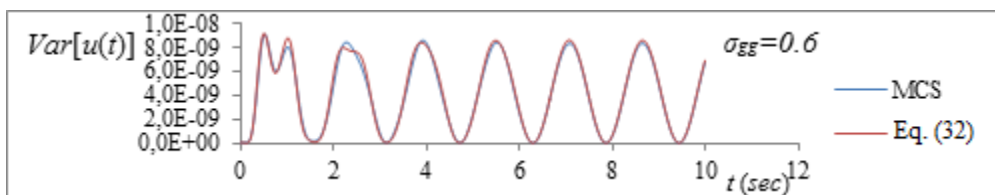
Τα Σχ. 7 και 8 παρουσιάζουν τις DMRF και DVRF, αντίστοιχα, αφού έχουν υπολογιστεί με FMCS για περιοδική φόρτιση με συχνότητα  $\bar{\omega}=2$  και τρεις διαφορετικές τιμές της τυπικής απόκλισης  $\sigma_{ff}=0.2$ ,  $\sigma_{ff}=0.4$  και  $\sigma_{ff}=0.6$ . Τα Σχ. 9 (α) και (β) παρουσιάζουν αναπαραστάσεις της DMRF και της DVRF συναρτήσεως του  $t$  για ένα σταθερό αριθμό κύματος  $\kappa=2$  και  $\sigma_{ff}=0.2$ .



(α)

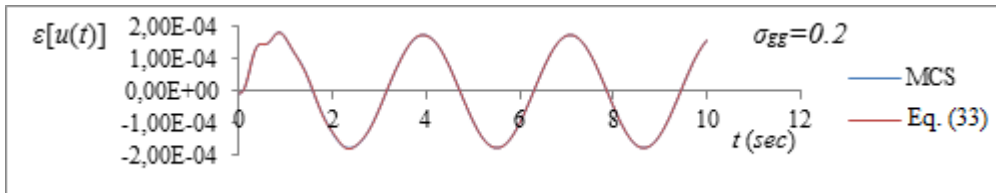


(β)

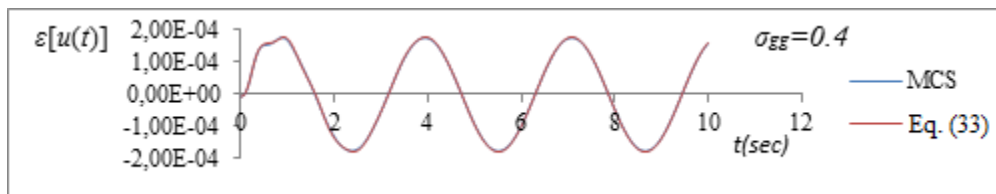


(γ)

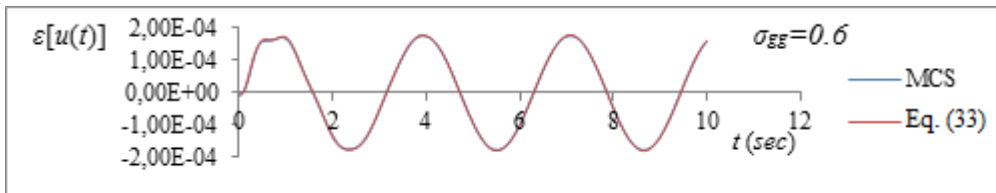
**Σχήμα 10.** Χρονοϊστορία της διακύμανσης της απόκρισης της μετατόπισης για ένα στογγυλεμένο Γκαουσιανό πεδίο με (α)  $\sigma_{gg}=0.2$ , (β)  $\sigma_{gg}=0.4$ , και (γ)  $\sigma_{gg}=0.6$ . Σύγκριση των αποτελεσμάτων με MCS.



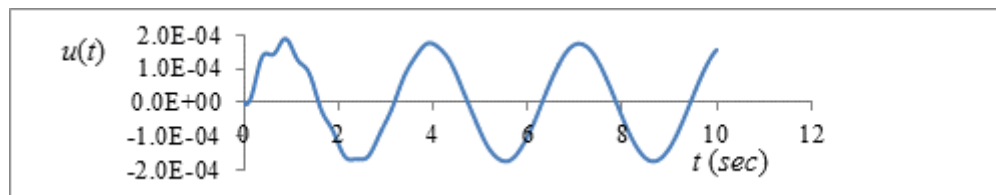
(α)



(β)



(γ)

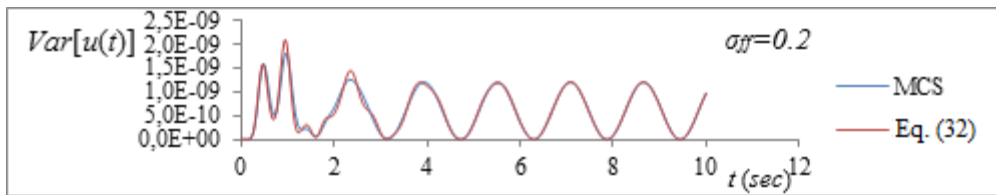


(δ)

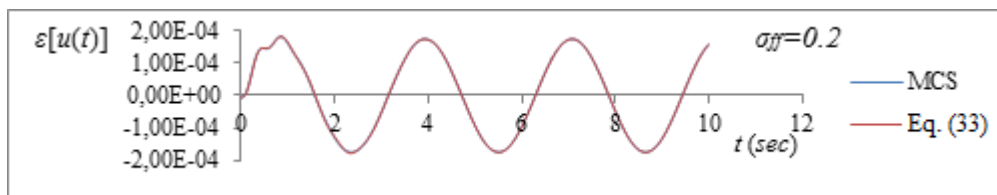
**Figure 9.** Χρονοϊστορίες: (α) της μέσης τιμής της απόκρισης για ένα στρογγυλεμένο Γκαουσιανό πεδίο με  $\sigma_{gg} = 0.2$ , (β)  $\sigma_{gg} = 0.4$ , (γ)  $\sigma_{gg} = 0.6$  και (δ) την ντετερμινιστική μετατόπιση. Σύγκριση των αποτελεσμάτων με τη MCS.

Από τα παραπάνω Σχ. (7, 8 και 9), φαίνεται ότι οι DMRF και DVRF έχουν σημαντική διακύμανση κατά μήκος του άξονα των κυματικών αριθμών  $\kappa$  και του άξονα του χρόνου  $t$ . Και οι δύο συναρτήσεις και ιδιαίτερα η DVRF έχουν μια αρχική μεταβατική φάση και στη συνέχεια φαίνεται να είναι περιοδικές. Υπενθυμίζεται εδώ ότι η DVRF και η DMRF είναι

συναρτήσεις της επιβαλόμενης δυναμικής φόρτισης. Αυτό εξηγεί το γεγονός ότι δεν προσεγγίζουν το μηδέν όταν το  $t$  αυξάνεται, δεδομένου ότι το εφαρμοζόμενο δυναμικό φορτίο είναι περιοδικό με σταθερό μέτρο που δεν απομειώνεται.



(α)



(β)

**Σχήμα 11.** Συγκριτικά αποτελέσματα από τις Εξ. (4.14), (4.15) και από MCS για ένα λογαριθμικό πεδίο με  $\sigma_{ff}=0.2$  για (α) τη διακύμανση και (β) τη μέση τιμή της χρονοϊστορίας της απόκρισης της μετατόπισης.

Τα Σχ. 10(α), (β) και (γ) παρουσιάζουν συγκριτικά τα αποτελέσματα των υπολογιζόμενων χρονοϊστοριών της διακύμανσης της απόκρισης χρησιμοποιώντας την προτεινομένη ολοκληρωτική έκφραση της Εξ. (4.14) και τα αποτελέσματα από άμεση προσομοίωση MC, για τρεις διαφορετικές τυπικές αποκλίσεις ενός στρογγυλεμένου Γκαουσιανού πεδίου. Το υποκείμενο Γκαουσιανό πεδίο αναπαρίσταται χρησιμοποιώντας τη φασματική πυκνότητα ισχύος της Εξ. (4.21) και τρεις διαφορετικές τυπικές αποκλίσεις. Οι αντίστοιχες τυπικές αποκλίσεις του στρογγυλεμένου Γκαουσιανού πεδίου  $f(x)$  υπολογίζονται ως  $\sigma_{gg} = 0.2$ ,  $\sigma_{gg} = 0.3912$  και  $\sigma_{gg} = 0.5286$ . Τα Σχ. 11 (α), (β) και (γ), παρουσιάζουν τα ίδια αποτελέσματα με το Σχ. 8, αλλά για την μέση απόκριση του ταλαντωτή. Η ντετερμινιστική χρονοϊστορία της μετατόπισης επίσης φαίνεται στο Σχ. 11 (δ) για λόγους σύγκρισης. Από τα σχήματα αυτά μπορεί να παρατηρηθεί ότι οι χρονοϊστορίες της μέσης τιμής και της διακύμανσης της απόκρισης που λαμβάνονται με τις ολοκληρωτικές εκφράσεις των Εξ. (4.14) and (4.15) είναι σε συμφωνία με τις αντίστοιχες εκτιμήσεις από την άμεση προσομοίωση με MC. Σε όλες τις περιπτώσεις που εξετάστηκαν το μέγιστο σφάλμα που παρατηρήθηκε στις τιμές της διακύμανσης στην κορυφή των γραφικών παραστάσεων είναι μικρότερο από 25%, ενώ σε όλα τα άλλα χρονικά βήματα αυτό το σφάλμα είναι μικρότερο από 3-4%. Στην περίπτωση της μέσης τιμής οι προβλέψεις της Εξ. (4.15) είναι σχεδόν ταυτόσημες με αυτές που λαμβάνονται με MCS, με ένα σφάλμα μικρότερο από 3% σε όλες τις περιπτώσεις. Από τα Σχ. 11 (α-δ), μπορεί να παρατηρηθεί ότι σε όλες τις περιπτώσεις, η μέση τιμή της χρονοϊστορίας της απόκρισης για όλες τις περιπτώσεις που εξετάστηκαν είναι σχεδόν ταυτόσημη με την ντετερμινιστική.

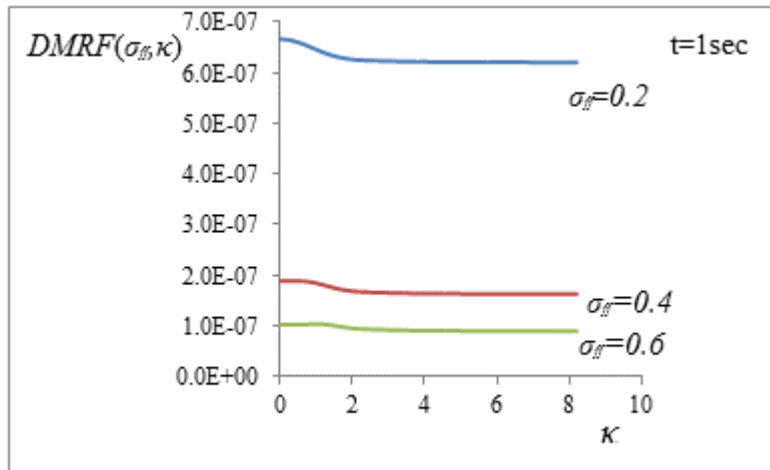


Τα Σχ. 12 (α) και (β) επαναλαμβάνουν τις ίδιες συγκρίσεις με τα προηγούμενα Σχ. 10 και 11, αλλά για την περίπτωση ενός λογαριθμικού πεδίου που χρησιμοποιείται για τη μοντελοποίηση της ευκαμψίας με  $\sigma_{ff} = 0.2$  και κάτω όριο  $I_b = -0.8$ . Τα συμπεράσματα που

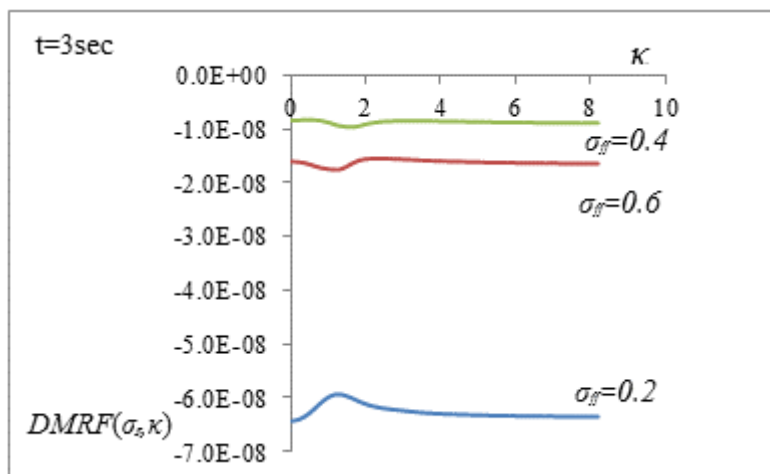
εξήχθησαν προηγουμένως για την περίπτωση του στρογγυλεμένου Γκαουσιανού πεδίου ισχύουν και εδώ.

### **3.1.3.3 LC3: ΣΕΙΣΜΟΣ EL CENTRO**

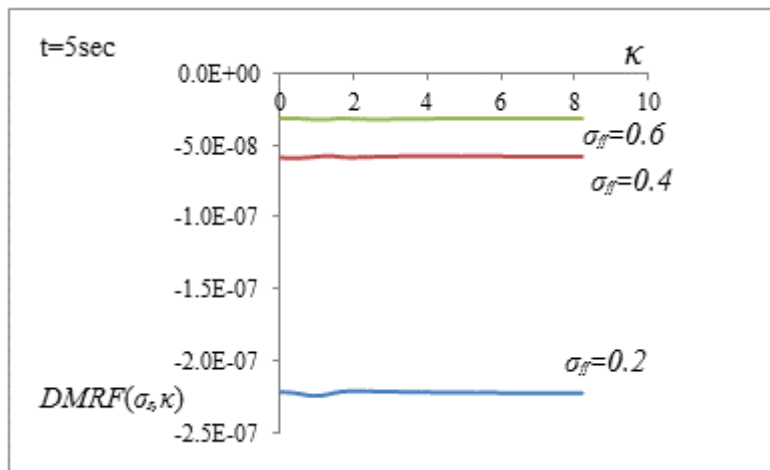
Τα Σχ. 13 και 14 παρουσιάζουν τις γραφικές παραστάσεις των DMRF και DVRF, αντίστοιχα, για την περίπτωση φόρτισης που ακολουθεί τη χρονοϊστορία της επιτάχυνσης του σεισμού του 1940 στο El Centro του Μεξικό. Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση σεναρίου φόρτισης, τρεις διαφορετικές τιμές της τυπικής απόκλισης χρησιμοποιήθηκαν. Από αυτά τα σχήματα μπορεί και πάλι να παρατηρηθεί ότι η DVRF δεν ακολουθεί κάποιο μοτίβο σε σχέση με αύξηση ή μείωση της  $\sigma_{ff}$ .



(α)

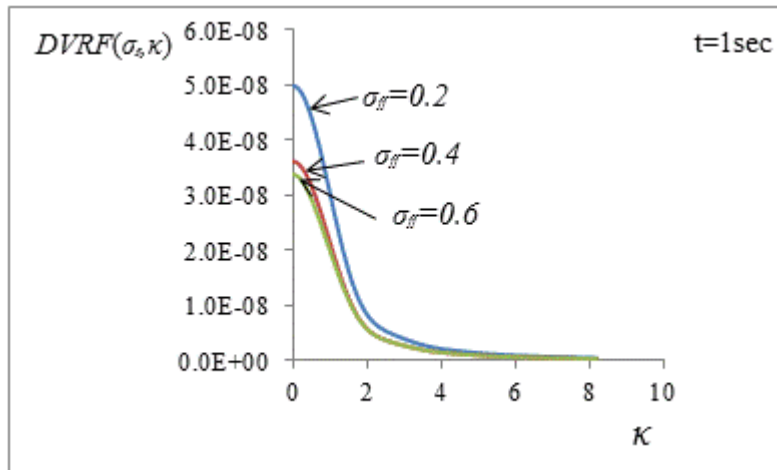


(β)

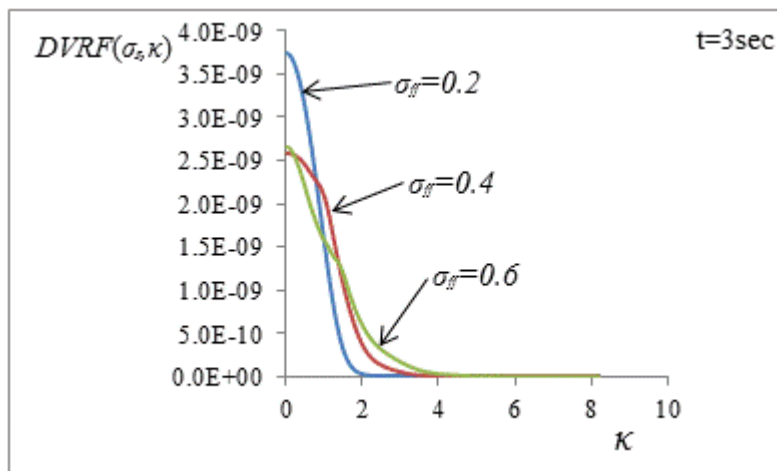


(γ)

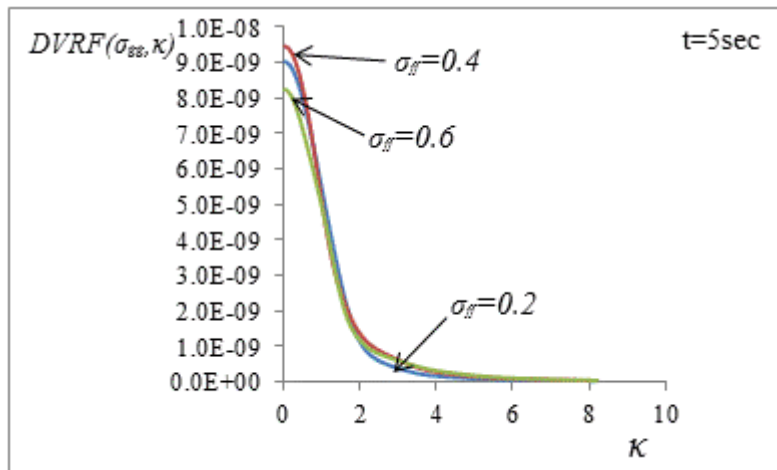
Σχήμα 12. Η DMRF ως συνάρτηση του  $\sigma_{ff}$  για (α)  $t=1\text{sec}$ , (β)  $t=3\text{sec}$  και (γ)  $t=5\text{sec}$



(α)



(β)

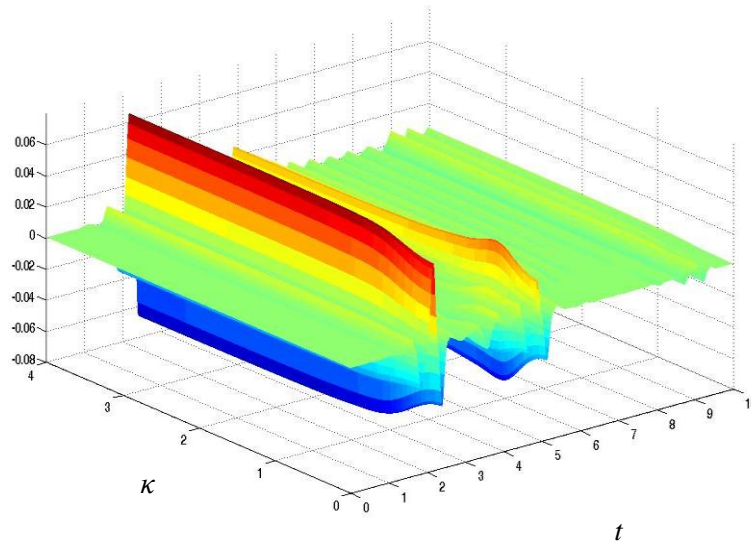


(γ)

Σχήμα 13. Η DVRF ως συνάρτηση του  $\sigma_{ff}$  για (α)  $t=1\text{sec}$ , (β)  $t=3\text{sec}$  και (γ)  $t=5\text{sec}$

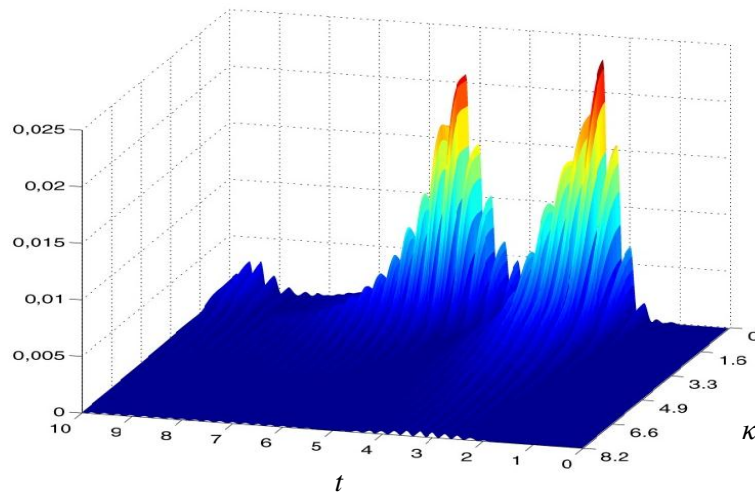
Τα Σχ. 14 (α) και (β) παρουσιάζουν 3D απεικονίσεις της DMRF και της DVRF συναρτήσεως της συχνότητας και του χρόνου. Από αυτά τα σχήματα, καθώς και από τα Σχ. 12 και 13, μπορεί να παρατηρηθεί ότι και πάλι η DMRF και DVRF έχουν σημαντική διακύμανση τόσο κατά τον άξονα  $\kappa$  όσο και κατά τον  $t$ , χωρίς να είναι περιοδικές, σε αντίθεση με ό,τι έχει παρατηρηθεί στην περίπτωση LC2. Επιπλέον, τόσο η DMRF όσο και η DVRF προσεγγίζουν το μηδέν καθώς ο χρόνος αυξάνεται λόγω του γεγονότος ότι οι εδαφικές επιταχύνσεις φθίνουν και εξαφανίζονται μετά από κάποιο χρονικό διάστημα.

*DMRF* ( $\kappa, t$ )



(α)

*DVRF* ( $\kappa, t$ )

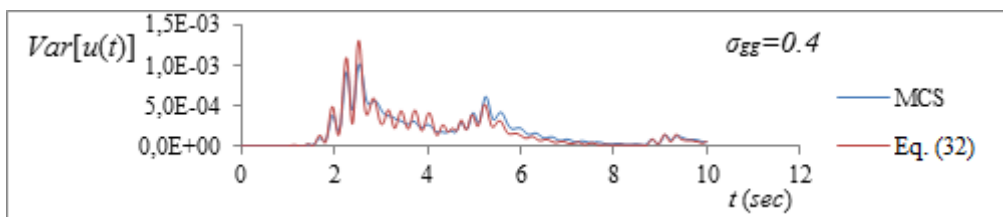


(β)

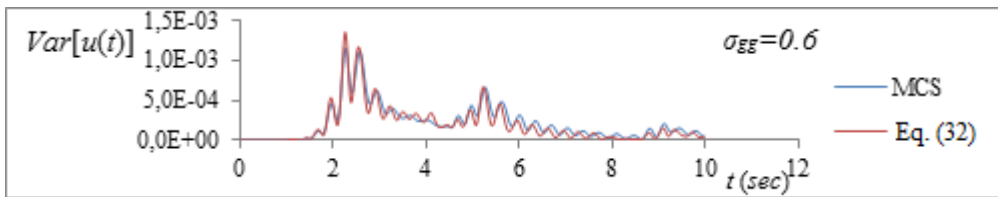
**Σχήμα 14.** 3D αναπαράσταση της (α) DMRF και (β) της DVRF, ως συνάρτηση της συχνότητας  $\kappa$  (rad/m) και του χρόνου  $t$ (sec) για την περίπτωση LC3 και  $\sigma_{ff}=0.2$

Τα Σχ. 15(α) και (β) παρουσιάζουν μια σύγκριση της διακύμανσης της απόκρισης που υπολογίζεται με την Εξ. (4.14) και τη MCS, στην περίπτωση ενός στρογγυλεμένου

Γκαουσιανού πεδίου που περιγράφει την ευκαμψία με  $\sigma_{gg} = 0.4$  και  $\sigma_{gg} = 0.6$ , ενώ τα Σχ. 16(α) και (β) παρουσιάζουν τα ίδια αποτελέσματα για τη μέση δυναμική απόκριση του ταλαντωτή μαζί με την αντίστοιχη ντετερμινιστική μετατόπιση (Σχ. 16 (γ)). Τα Σχ. 17 (α) και (β) επαναλαμβάνουν τις ίδιες συγκρίσεις για την περίπτωση ενός λογαριθμικού πεδίου που χρησιμοποιείται για την μοντελοποίηση της ευκαμψίας με  $\sigma_{ff} = 0.3$  και κάτω όριο  $l_b = -0.8$ .

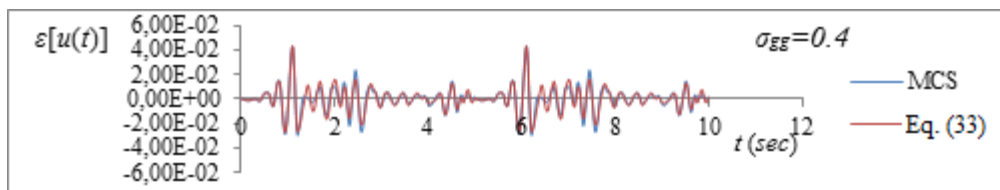


(α)

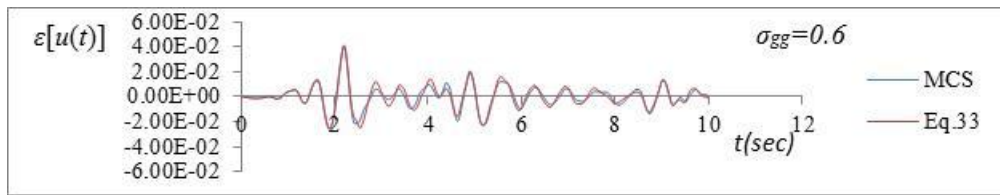


(β)

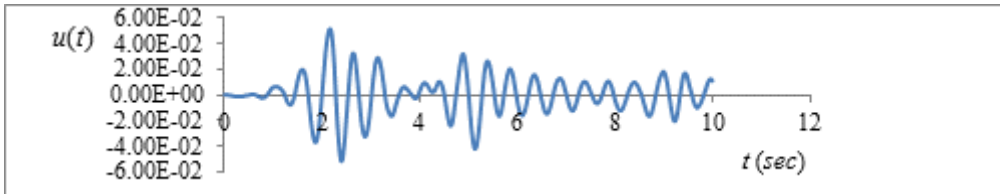
**Σχήμα 15.** Χρονοϊστορίες της διακύμανσης της απόκρισης για ένα στρογγυλεμένο Γκαουσιανό πεδίο για (α)  $\sigma_{gg} = 0.4$  και (β)  $\sigma_{gg} = 0.6$ . Σύγκριση αποτελεσμάτων με MCS.



(α)

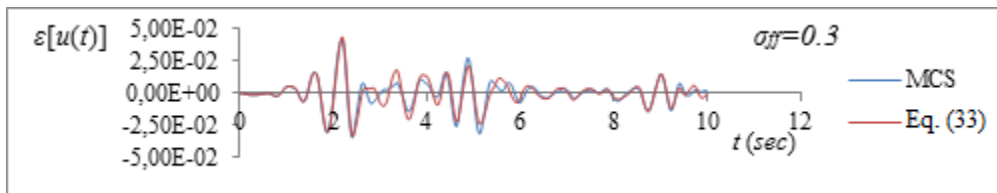


(β)

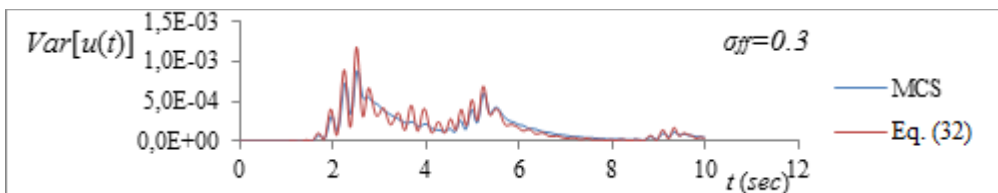


(γ)

**Σχήμα 16.** Χρονοϊστορίες της διακύμανσης της απόκρισης για ένα στρογγυλεμένο Γκαουσιανό πεδίο για (α)  $\sigma_{gg} = 0.4$ , (β)  $\sigma_{gg} = 0.6$  και (γ) της ντετερμινιστικής απόκρισης. Σύγκριση αποτελεσμάτων με MCS.



(α)



(β)

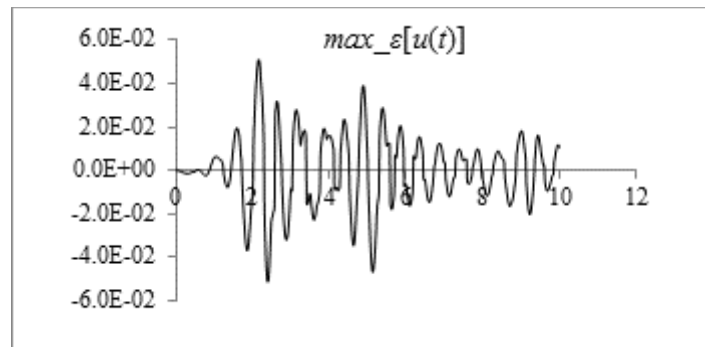
**Σχήμα 17.** Συγκριτικά αποτελέσματα των ολοκληρωτικών εξισώσεων και της MCS για ένα λογαριθμικό πεδίο με  $\sigma_{ff} = 0.3$  για (α) τη διακύμανση και (β) για τη μέση τιμή της απόκρισης της μετατόπισης συναρτήσει του χρόνου.

Από τα παραπάνω σχήματα μπορεί να παρατηρηθεί ότι, όπως και στην LC2, η μέσης τιμή και η διακύμανση της απόκρισης συναρτήσει του χρόνου που λαμβάνεται με τις ολοκληρωτικές εκφράσεις των Εξ. (4.14) and (4.15) είναι σε συμφωνία με τις αντίστοιχες εκτιμήσεις MCS, σε όλες τις περιπτώσεις.

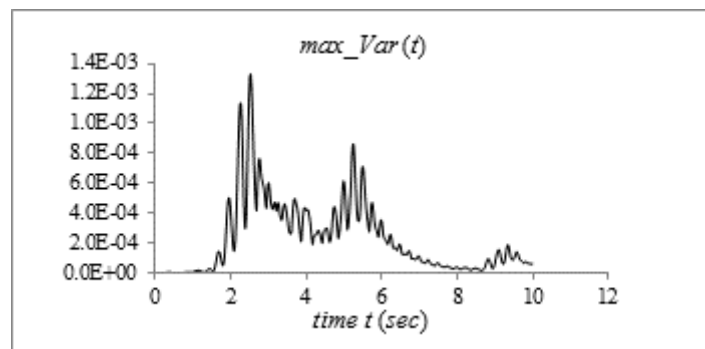
### 3.1.3.4 ΑΝΩ ΟΡΙΑ ΣΤΗ ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ ΚΑΙ ΣΤΗ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗ ΤΗΣ ΑΠΟΚΡΙΣΗΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ LC3

Σε αυτήν την ενότητα παράγονται άνω φράγματα ανεξάρτητα της φασματικής κατανομής και της οριακής σππ για την μέση τιμή και τη διακύμανση της απόκρισης που λαμβάνονται μέσω των Εξ. (4.19) και (4.20), αντίστοιχα. Τα αποτελέσματα αυτού του υπολογισμού

παρουσιάζονται στα Σχ. 18 (α) και (β), στα οποία τα άνω όρια συναρτήσεως του χρόνου για τη μέση τιμή και διακύμανση της απόκρισης της μετατόπισης συναρτήσεως του χρόνου αναπαριστώνται για μια τυπική απόκλιση  $\sigma_{ff} = 0.4$ .



(α)

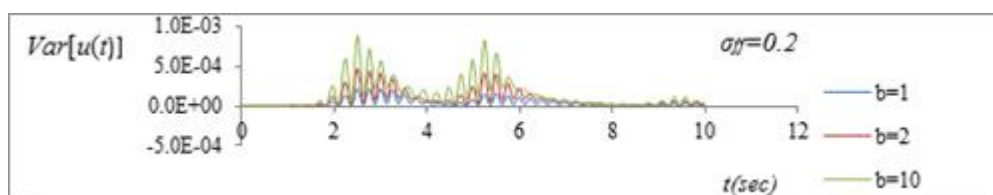


(β)

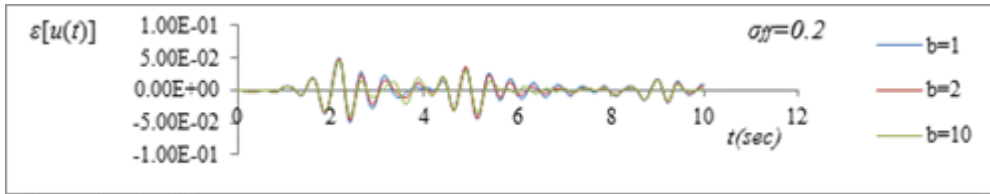
**Σχήμα 18.** Άνω όρια της (α) μέσης τιμής και (β) της διακύμανσης της απόκρισης για την περίπτωση LC3  $\sigma_{gg}=0.4$

### 3.1.3.5 ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΥΑΙΣΘΗΣΙΑΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ LC3 ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΩΝΤΑΣ ΤΙΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΕΣ ΕΚΦΡΑΣΕΙΣ (4.14) ΚΑΙ (4.15)

Τέλος, πραγματοποιείται μια ανάλυση ευαισθησίας χρησιμοποιώντας τις Εξ. (4.14) και (4.15) με ελάχιστο υπολογιστικό κόστος, σε σχέση με τρεις διαφορετικές τιμές της παραμέτρου μήκους συσχέτισης του SDF στην Εξ. (4.21) και  $\sigma_{ff} = 0.2$ .



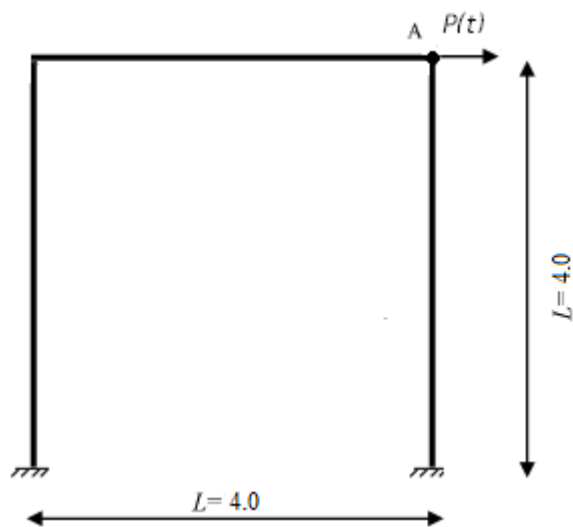
(a)



(b)

**Σχήμα 19.** (α) Μέση τιμή και (β) διακύμανση συναρτήσεων του χρόνου της απόκρισης της μετατόπισης υπολογιζόμενη από τις Εξ. (4.14) και (4.15), αντίστοιχα για τρεις διαφορετικές τιμές της παραμέτρου του μήκους συσχέτισης  $b$  του  $SDF$  in Eq. (4.21).

### 3.2 ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ



**Σχήμα 20.** Γεωμετρία και φόρτιση πλαισίου διακριτοποιημένου με 60 στοιχεία δοκού.

#### 3.2.1 ΑΝΑΛΥΣΗ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ ΚΑΙ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗΣ ΤΗΣ ΑΠΟΚΡΙΣΗΣ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΩΝΤΑΣ ΤΙΣ DMRF ΚΑΙ DVRF

Ακολουθώντας μία διαδικασία παρόμοια με την περίπτωση των στοχαστικών μονοβάθμιων γραμμικών ταλαντωτών υπό δυναμική φόρτιση, είναι δυνατόν να εκφράσουμε την διακύμανση της δυναμικής απόκρισης ενός στοχαστικού συστήματος πεπερασμένων στοιχείων με την ακόλουθη έκφραση μόνο που σε αυτήν την περίπτωση η **DVRF** λαμβάνει διανυσματική μορφή:

$$Var[\mathbf{u}(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{DVRF}(t, \kappa, \sigma_{ff}) S_{ff}(\kappa) d\kappa \quad (49)$$

Αντίστοιχα διατυπώνεται μία σχέση και για την εκτίμηση της μέσης τιμής της διακύμανσης της απόκρισης.



$$\varepsilon[\mathbf{u}(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{DMRF}(t, \kappa, \sigma_{ff}) S_{ff}(\kappa) d\kappa \quad (50)$$

Η αριθμητική εκτίμηση των **DMRF**, **DVRF** γίνεται κατά τα γνωστά μέσω της διαδικασίας FMCS που αναπτύχθηκε και σε προηγούμενες ενότητες μόνο που τώρα ονομάζεται DFEM-FMCS λόγω του ότι αναφέρεται σε δυναμική ανάλυση με πεπερασμένα στοιχεία (DFEM). Επίσης άνω όρια μπορούν να προκύψουν χρησιμοποιώντας τις αντίστοιχες σχέσεις για τη μητρική μορφή των **DMRF** και **DVRF**.

$$\varepsilon[\mathbf{u}(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{DMRF}(t, \kappa, \sigma_{ff}) S_{ff}(\kappa) d\kappa \leq \mathbf{DMRF}(t, \kappa^{\max}(t), \sigma_{ff}) \sigma_{ff}^2 \quad (51)$$

$$\text{Var}[\mathbf{u}(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{DVRF}(t, \kappa, \sigma_{ff}) S_{ff}(\kappa) d\kappa \leq \mathbf{DVRF}(t, \kappa^{\max}(t), \sigma_{ff}) \sigma_{ff}^2 \quad (52)$$

### 3.2.2 ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΣΕ ΔΥΟ ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ

Σε περίπτωση προβλήματος, όπου το αντίστροφο του μέτρου ελαστικότητας θεωρείται ότι μεταβάλλεται τυχαία πάνω σε ένα διδιάστατο χωρίο, η ακόλουθη εξίσωση υιοθετείται:

$$\frac{1}{E(x, y)} = F_0(1 + f(x, y)), \quad (53)$$

όπου  $E$  είναι το μέτρο ελαστικότητας,  $F_0$  είναι η μέση τιμή του αντιστρόφου του  $E$ , και  $f(x, y)$  τώρα είναι ένα διδιάστατο, με μηδενική μέση τιμή ομογενές στοχαστικό πεδίο που περιγράφει τη μεταβολή του  $1/E$  γύρω από τη μέση τιμή του. Κατά συνέπεια, οι ολοκληρωτικές εκφράσεις για τη διακύμανση και τη μέση τιμή της απόκρισης της μετατόπισης γίνονται:

$$\text{Var}[\mathbf{u}(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{DVRF}(t, \kappa_x, \kappa_y, \sigma_{ff}) S_{ff}(\kappa_x, \kappa_y) d\kappa_x d\kappa_y \quad (54)$$

$$\varepsilon[\mathbf{u}(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{DMRF}(t, \kappa_x, \kappa_y, \sigma_{ff}) S_{ff}(\kappa_x, \kappa_y) d\kappa_x d\kappa_y \quad (55)$$

Το μονοδιάστατο τυχαίο ημιτονοειδές στην Εξ. (38) γίνεται τώρα διδιάστατο με την ακόλουθη μορφή που είναι ίδιο για όλα τα πιθανά στοχαστικά πεδία:

$$f_j(x) = \sqrt{2} \sigma_{ff} \cos(\bar{\kappa}_x x + \bar{\kappa}_y y + \varphi_j); \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (56)$$

Άνω όρια για τη μέση τιμή και τη διακύμανση της μετατόπισης για μία δεδομένη χρονική στιγμή  $t$  μπορεί να προκύψουν για την περίπτωση 2D ως εξής:

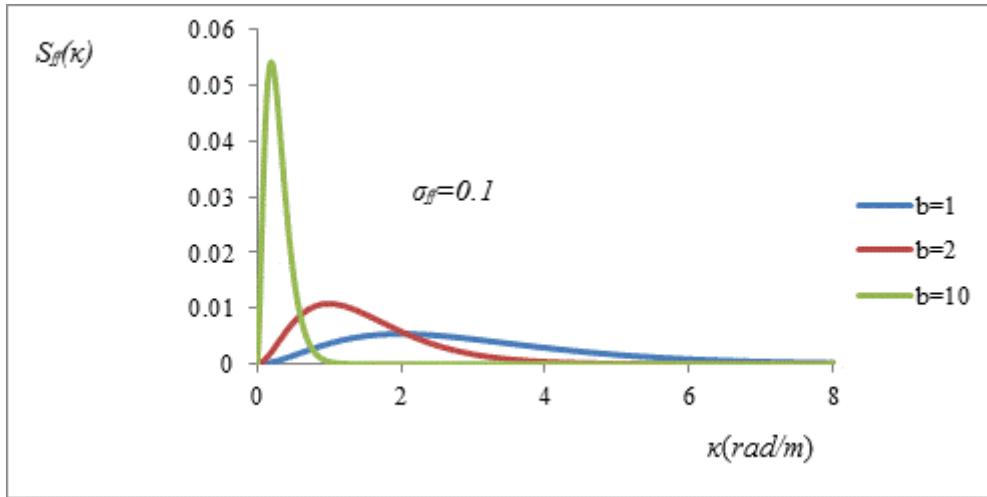
$$\text{Var}[\mathbf{u}(t)] \leq \mathbf{DVRF}(t, \kappa_x^{\max}, \kappa_y^{\max}, \sigma_{ff}) \sigma_{ff}^2 \quad (57)$$

$$\varepsilon[\mathbf{u}(t)] \leq \mathbf{DMRF}(t, \kappa_x^{\max}, \kappa_y^{\max}, \sigma_{ff}) \sigma_{ff}^2 \quad (58)$$

όπου  $(\kappa_x^{\max}, \kappa_y^{\max})$  είναι το ζεύγος κυματικών αριθμών στο οποίο η **DMRF** ή η **DVRF** λαμβάνουν τη μέγιστη τιμή τους (για μια δεδομένη τιμή του  $\sigma_{ff}$  και θέση), και  $\sigma_{ff}^2$  είναι η διακύμανση του στοχαστικού πεδίου. Θα πρέπει να τονιστεί ότι το  $(\kappa_x^{\max}, \kappa_y^{\max})$  δεν είναι αναγκαστικά το ίδιο για την **DMRF** και την **DVRF**.

### 3.2.3 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

*Παράδειγμα 1.* Για το πλαίσιο που φαίνεται στο Σχ. 20 με μήκος και ύψος ίσο με 4m, το αντίστροφο του μέτρου ελαστικότητας θεωρείται ότι ποικίλει τυχαία κατά το μήκος των στοιχείων δοκού σύμφωνα με την Εξ. (32) με  $F_0 = (1.35 \times 10^8 \text{ kN/m})^{-1}$ ,  $I = 0.1 \text{ m}^4$  και λόγο απόσβεσης  $\xi = 5\%$ . Για την ανάλυση της πλαισιωτής κατασκευής χρησιμοποιούνται 60 στοιχεία δοκού, 20 για κάθε υποστήλωμα και για τη δοκό, ίσου μήκους, με αποτέλεσμα 177 β.ε. Η συνολική μάζα της δοκού θεωρείται ίση με  $m_{tot} = 6000 \text{ kg}$ , κατανεμημένη ομοιόμορφα στους κόμβους των πεπερασμένων στοιχείων του μοντέλου.

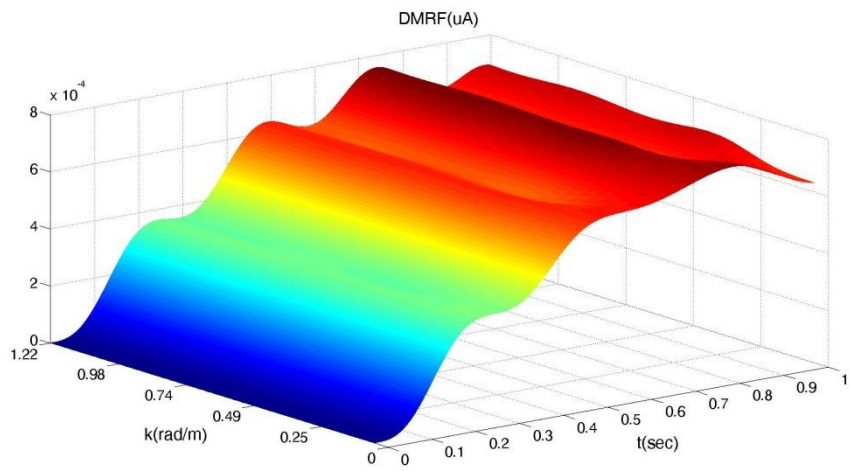


**Σχήμα 21.** Συναρτήσεις φασματικής πυκνότητας για το στοχαστικό πεδίο  $f(x)$  με τυπική απόκλιση  $\sigma_{ff}=0.2$  για τρεις διαφορετικές τιμές της παραμέτρου του μήκους συσχέτισης

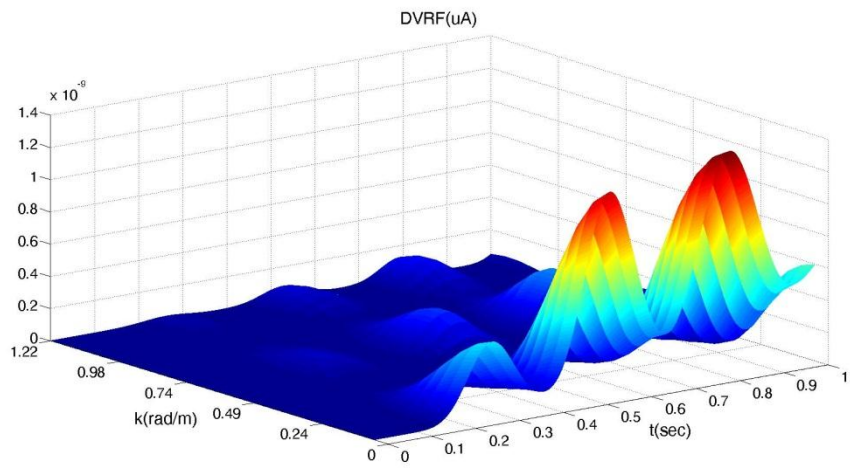
Δύο περιπτώσεις φορτίου θεωρούνται: η LC1 που συνίσταται σε ένα συγκεντρωμένο δυναμικό περιοδικό φορτίο στην πάνω δεξιά γωνία του πλαισίου (βλέπε Σχ. 20) και η LC2 που συνίσταται σε ένα δυναμικό φορτίο  $p_n(t) = -m_n \ddot{U}_g(t)$  που ενεργεί σε κάθε κόμβο  $n$  των στοιχείων δοκού όπου  $m_n$  είναι η αντίστοιχη μάζα που κατανέμεται στον κόμβο και  $\ddot{U}_g(t)$  η χρονοϊτορία της επιτάχυνσης του εδάφους στο σεισμό του 1940 στο El Centro του Μεξικό. Το στοχαστικό πεδίο θεωρείται ότι μεταβάλλεται καθ' όλο το μήκος των δύο υποστηλωμάτων και της δοκού του πλαισίου ξεκινώντας με συναεχόμενο τρόπο από την αριστερή στήριξη προς τη δεξιά. Η συνάρτηση φασματικής πυκνότητας (SDF) του Σχ. 21 χρησιμοποιήθηκε για την μοντελοποίηση του αντίστροφου του μέτρου ελαστικότητας που δίνεται από:

$$S_{ff}(\kappa) = \frac{1}{4} \sigma_{ff}^2 b^3 \kappa^2 e^{-b|\kappa|} \quad (59)$$

για  $b = 1, 2, 10$ .

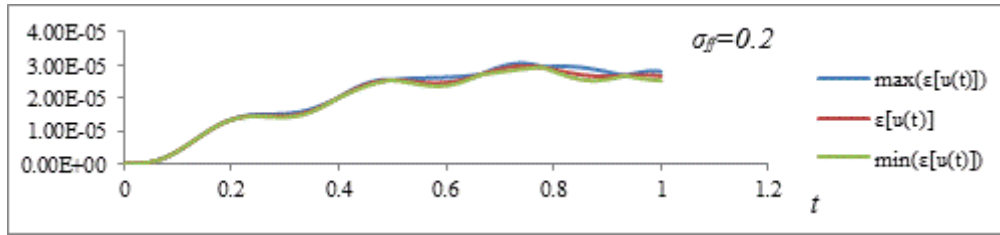


(α)

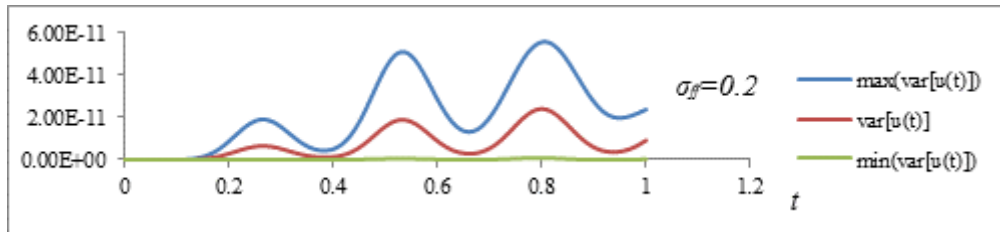


(β)

**Σχήμα 22.** 3D αναπαραστάσεις της (α) *DMRF* and (β) *DVRF* της οριζόντιας μετατόπισης  $u_A$ , συναρτήσει της συχρότητας  $k$  (rad/m) και του χρόνου  $t(\text{sec})$  για την περίπτωση LC1 και  $\sigma_{ff}=0.2$



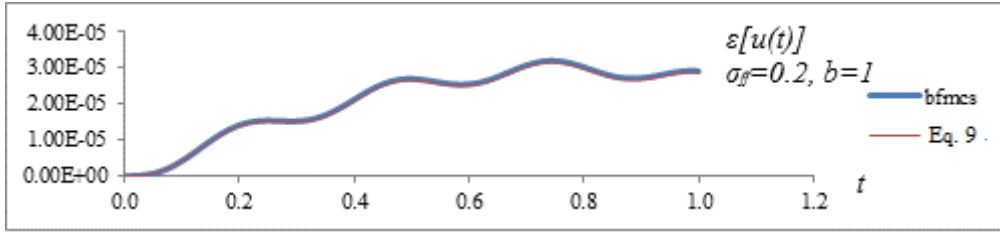
(α)



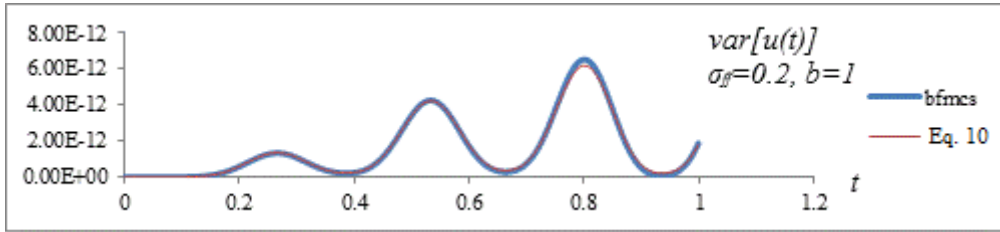
(β)

**Σχήμα 23.** Άνω και κάτω όρια της (α) μέσης τιμής και (β) της διακύμανσης της απόκρισης για την περίπτωση LC1 και  $\sigma_{ff}=0.2$

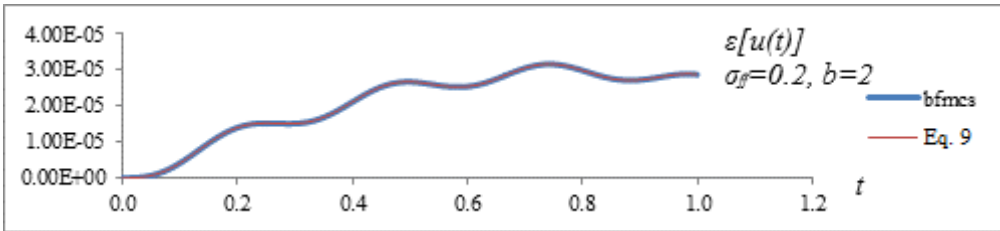
Το Σχ. 22 παρουσιάζει 3D αναπαραστάσεις των  $DMRF(u_A)$  και  $DVRF(u_A)$  για την οριζόντια μετατόπιση  $u_A$  του σημείου  $A$  του πλαισίου ως συνάρτηση του χρόνου και της συχνότητας για  $\sigma_{ff} = 0.2$ . Σε αυτό το σχήμα, μπορεί να παρατηρηθεί ότι η  $DMRF(u_A)$  παραμένει σχεδόν σταθερή σε σχέση με το  $\kappa$ , ενώ μεταβάλλεται έντονα σαν συνάρτηση του  $t$ . Αντιθέτως η  $DVRF(u_A)$  δείχνει μια σημαντική μεταβλητότητα σε σχέση με το  $\kappa$  και το  $t$ . Ως εκ τούτου, σε αντίθεση με την  $DMRF(u_A)$ , η  $DVRF(u_A)$  ευνοεί τη δυνατότητα σημαντικής μεταβολής της διακύμανσης της απόκρισης για διαφορετικές στατιστικές παραμέτρους του στοχαστικού πεδίου. Αυτό φαίνεται πιο ξεκάθαρα στο Σχ. 23 στο οποίο απεικονίζονται τα άνω και κάτω όρια της δυναμικής μέσης τιμής και διακύμανσης της απόκρισης σε σύγκριση με την εκτιμώμενη μέση τιμή και διακύμανση της απόκρισης για την περίπτωση ενός υποκείμενου Γκαουσιανού πεδίου με το φάσμα της Εξ. (4.49) και για  $\sigma_{ff} = 0.2$ . Τα προαναφερθέντα όρια προέρχονται απευθείας από τις Εξ. (4.39) και (4.40) αφού έχουν προηγουμένως υπολογιστεί οι  $DMRF(u_A)$  και  $DVRF(u_A)$  με την υπολογιστικά αποδοτική DFEM-FMCS, ενώ στην περίπτωση του Γκαουσιανού πεδίου με  $\sigma_{ff} = 0.2$ , η μέση τιμή και διακύμανση ελήφθησαν με τις εκφράσεις των Εξ. (4.34) και (4.35). Από αυτό το σχήμα μπορεί να φανεί ότι η ανώτερη δυνατή μέση δυναμική απόκριση και αυτή που εκτιμάται για το Γκαουσιανό πεδίο, είναι σχεδόν ίσες, ενώ τα άνω όρια διαφέρουν σημαντικά στην περίπτωση της διακύμανσης της απόκρισης, φθάνοντας μια μέγιστη διαφορά μεγαλύτερη από 70% τη χρονική στιγμή  $t = 0.8\text{sec}$ .



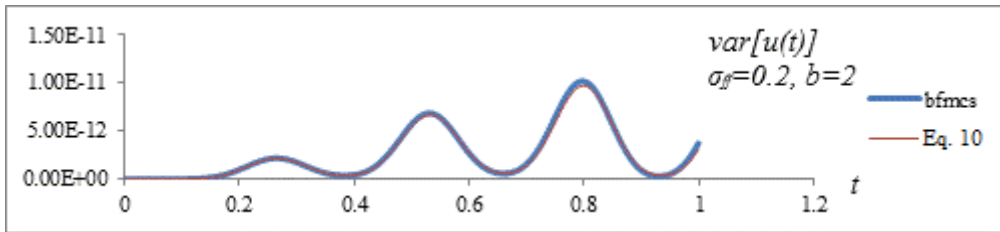
(a)



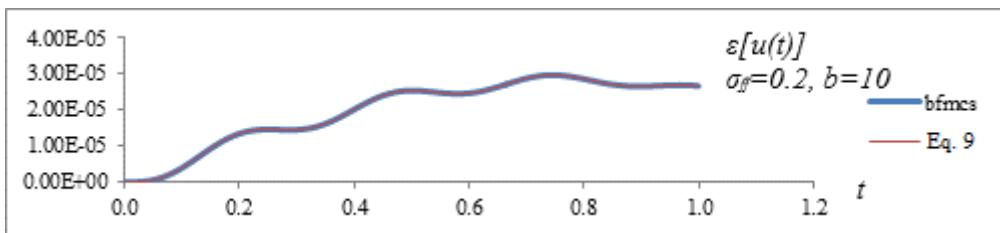
(β)



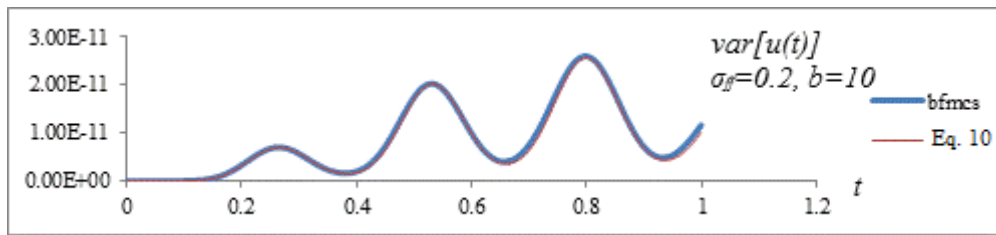
(γ)



(δ)



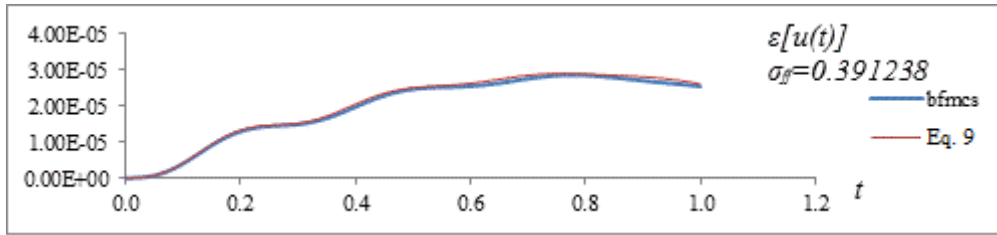
(ε)



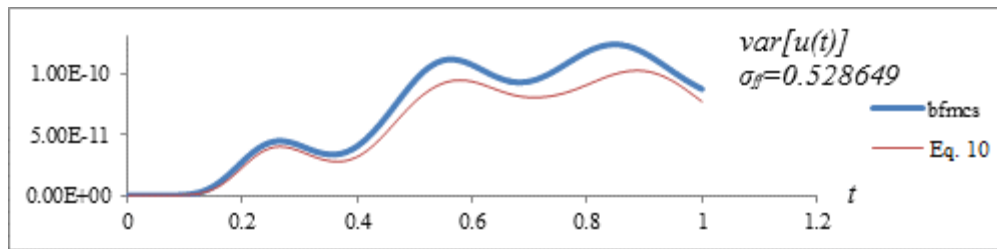
(στ')

**Σχήμα 24.** Χρονοϊστορίες της (α), (γ), (ε) μέσης τιμής και (β), (δ), (στ') διακύμανσης της απόκρισης displacement μιας πλαισιωτής κατασκευής για Γκαουσιανό πεδίο με  $\sigma_{ff} = 0.2$  για την περίπτωση LC1 και για τρία διαφορετικά μήκη συσχέτισης  $b=1,2$  and 10. Σύγκριση των αποτελεσμάτων της προτεινόμενης μεθοδολογίας με τη MCS.

Για να αποδειχτεί η εγκυρότητα της προτεινόμενης προσέγγισης, τα αποτελέσματα που προέκυψαν από τη διαδικασία DFEM-FMCS και Εξ. (4.34),(4.35) συγκρίθηκαν με την άμεση προσομοίωση Monte Carlo. Στα Σχ. 24 α, β, γ, δ, ε και στ' με τα αποτελέσματα της σύγκρισης αυτής παρουσιάζονται για τη δυναμική μέση τιμή και διακύμανση της απόκρισης του  $u_A$  (Σχ. 20) και για την περίπτωση LC1, χρησιμοποιώντας ένα Γκαουσιανό πεδίο και για τρεις διαφορετικές τιμές της παραμέτρου του μήκους συσχέτισης. Με αυτόν τον τρόπο καταδεικνύεται επίσης η ανεξαρτησία των DMRF και DVRF από τη συνάρτηση φασματικής πυκνότητας. Στα Σχ. 25 και 26 παρουσιάζεται η ίδια σύγκριση, αλλά για μια στρογγυλεμένο Γκαουσιανό πεδίο με  $\sigma_{ff} = 0.3912$  και  $0.5286$  αντίστοιχα, ενώ το Σχ. 27 εξετάζει μια περίπτωση λογαριθμικού πεδίου με  $\sigma_{ff} = 0.399$ . Τέλος, το Σχ. 28 παρουσιάζει την ίδια σύγκριση, αλλά για την περίπτωση φορτίου σύμφωνα με τον σεισμό στο El Centro (LC2) και ένα Γκαουσιανό πεδίο με  $\sigma_{ff} = 0.2$ . Από όλα αυτά τα σχήματα μπορεί να παρατηρηθεί ότι τα αποτελέσματα της DFEM-FMCS βρίσκονται σε συμφωνία με τα αντίστοιχα αποτελέσματα της MCS. Η πρόβλεψη της μέσης τιμής είναι σχεδόν ταυτόσημη για τις δύο μεθόδους σε όλες τις περιπτώσεις που εξετάζονται, ενώ το μέγιστο σφάλμα στη διακύμανση δεν υπερβαίνει το 20% και αποδίδεται σε μια μικρή εξάρτηση της DVRF στη σπ του στοχαστικού πεδίου. Αυτό το σφάλμα γίνεται αμελητέο στην περίπτωση μικρών τυπικών αποκλίσεων της τάξης του 20%.



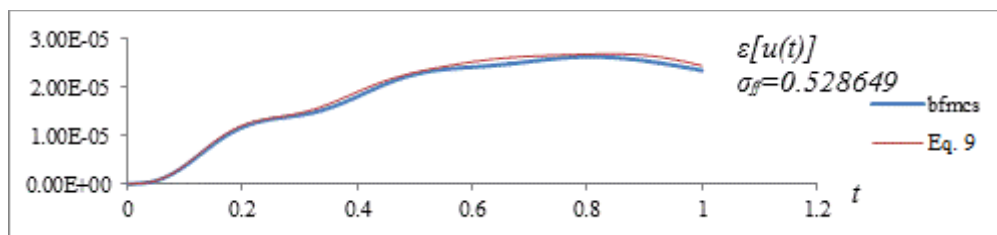
(α)



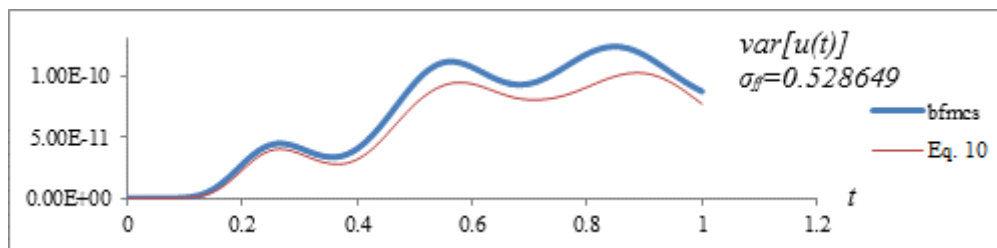
(β)

**Σχήμα 25.** Χρονοϊστορίες της (α) μέσης τιμής και (β) της διακύμανσης της απόκρισης της πλαισιωτής κατασκευής για στρογγυλεμένο Γκαουσιανό πεδίο με  $\sigma_{ff} = 0.391238$  για την περίπτωση LC1.

Σύγκριση αποτελεσμάτων από τις Εξ. (4.34),(4.35) με MCS.



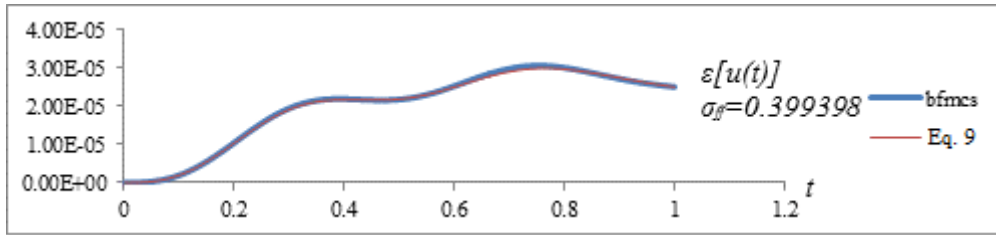
(α)



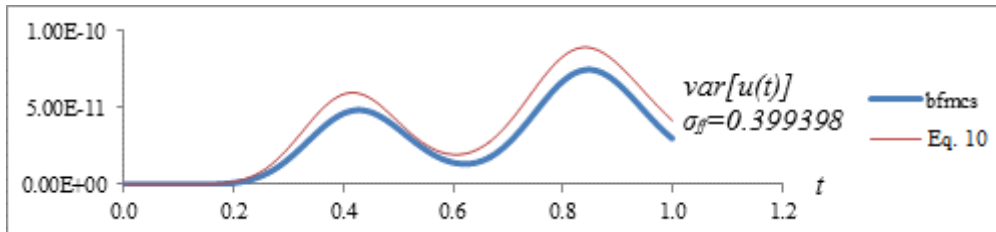
(β)

**Σχήμα 26.** Χρονοϊστορίες της (α) μέσης τιμής και (β) της διακύμανσης της απόκρισης της πλαισιωτής κατασκευής για στρογγυλεμένο Γκαουσιανό πεδίο με  $\sigma_{ff} = 0.528649$  για την περίπτωση LC1. Σύγκριση αποτελεσμάτων από τις Εξ. (4.34),(4.35) με MCS.



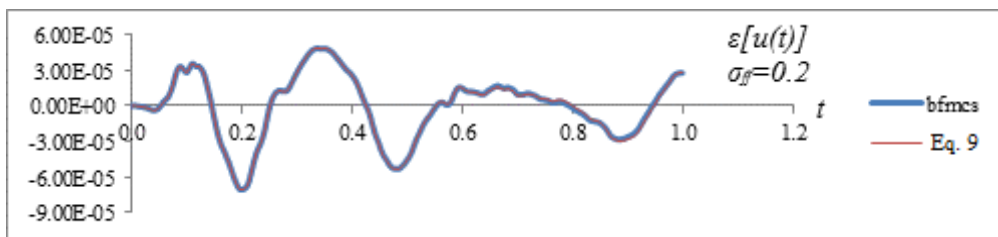


(α)

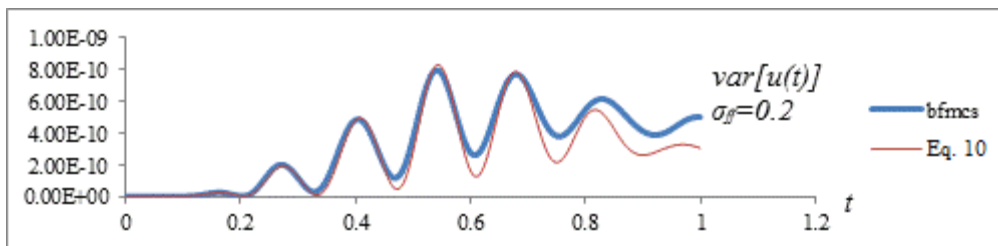


(β)

**Σχήμα 27.** Χρονοϊστορίες της (α) μέσης τιμής και (β) της διακύμανσης της απόκρισης της πλαισιωτής κατασκευής για στρογγυλεμένο Γκαουσιανό πεδίο με  $\sigma_{ff} = 0.399398$  για την περίπτωση LC1. Σύγκριση αποτελεσμάτων από τις Εξ. (4.34),(4.35) με MCS.



(α)



(β)

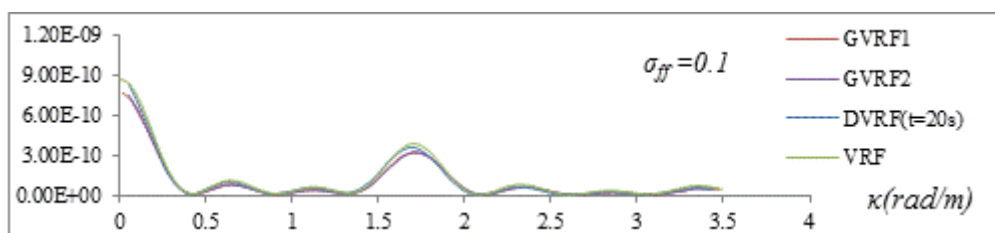
**Σχήμα 28.** Χρονοϊστορίες της (α) μέσης τιμής και (β) της διακύμανσης της απόκρισης της πλαισιωτής κατασκευής για στρογγυλεμένο Γκαουσιανό πεδίο με  $\sigma_{ff} = 0.2$  για την περίπτωση LC2. Σύγκριση αποτελεσμάτων από τις Εξ. (4.34),(4.35) με MCS.

### 3.2.3.1 ΠΕΡΑΙΤΕΡΩ ΕΠΑΛΗΘΕΥΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ ΜΕΣΩ ΤΗΣ GVRF

Στο Σχ. 29 φαίνεται η σύγκλιση της  $DVRF(u_A)$  σε κατάσταση ηρεμίας για ψευδοστατική φόρτιση με την  $GVRF(u_A)$  που παράγεται για την αντίστοιχη στατική λύση για ένα στρογγυλεμένο Γκαουσιανό και ένα λογαριθμικό πεδίο για τυπική απόκλιση  $\sigma_{ff} = 0.1$ . Για

τη διαδικασία αυτή μια οικογένεια SDF,  $S_p$  εκθετικής μορφής έχει χρησιμοποιηθεί που δίνεται από την παρακάτω σχέση

$$S_p(\kappa) = \sigma_{ff}^2 \exp(-2|\kappa|) \quad (60)$$

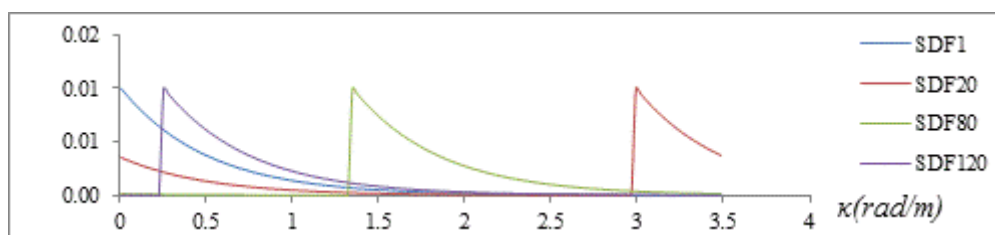


**Σχήμα 29.** Γραφικές παραστάσεις της  $DVRF(u_A, t=20s)$  για σταθερό φορτίο, των  $GVRF1$  και  $GVRF2$  για στρογγυλεμένο Γκαουσιανό και λογαριθμικό πεδίο αντίστοιχα και της στατικής  $VRF$  συναρτήσεως της συχνότητας  $\kappa$  (rad/m) για  $\sigma_{ff} = 0.1$  για το πλαίσιο στο Σχ. 20.

Σε κάθε σειρά της Εξ. (3.60) αντιστοιχεί ένα διαφορετικό SDF της οικογένειας  $S_p$ . Μετά τον υπολογισμό των αντίστοιχων SDF για τα στρογγυλεμένα Γκαουσιανά και λογαριθμικά πεδία, το  $i$ -οστό SDF στην  $i$ -οστή σειρά της Εξ. (3.60), ορίζεται ως εξής

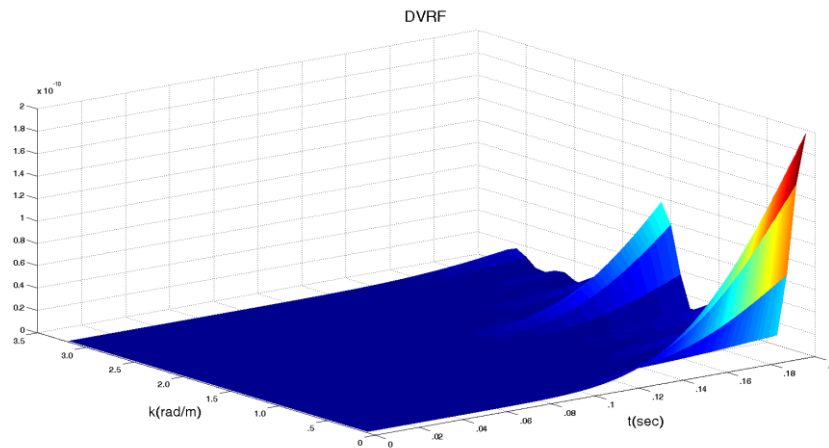
$$S_{p_i}(\kappa) = \begin{cases} S_p(\kappa + \kappa_u - i\Delta\kappa + \Delta\kappa), & 0 \leq \kappa \leq (i-1)\Delta\kappa \\ S_p(\kappa - i\Delta\kappa), & i\Delta\kappa \leq \kappa \leq \kappa_u \end{cases} \quad (61)$$

Τέσσερα διαφορετικά SDF της οικογένειας  $S_p$  απεικονίζονται στο Σχ. 30. Αναμένεται εκ των προτέρων ότι η δυναμική απόκριση του συστήματος, όταν το εφαρμοζόμενο φορτίο είναι σταθερό μέσα στο χρόνο, και

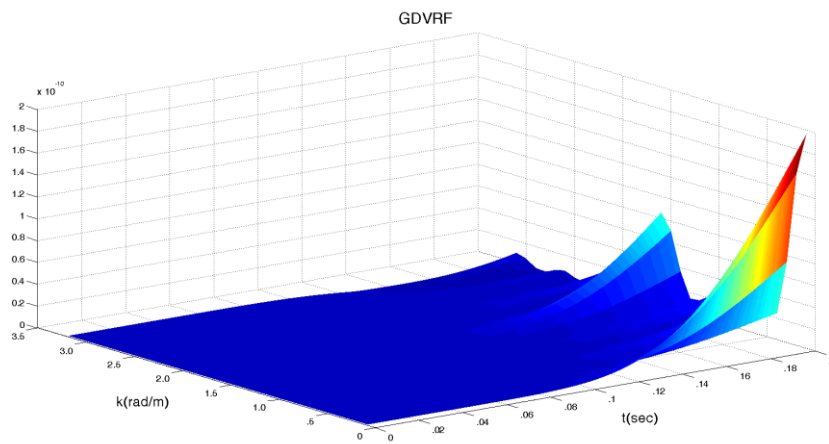


**Σχήμα 30.** Γραφικές παραστάσεις διαφορετικών φασματικών συναρτήσεων της οικογένειας  $S_p$  για διακριτοποίηση 128 βημάτων στο χώρο των συχνοτήτων.

μόλις το σύστημα φθάνει μία κατάσταση ηρεμίας (θεωρητικά καθώς ο χρόνος  $t$  τείνει στο άπειρο), θα ταιριάζει με την απόκριση του συστήματος για τη στατική περίπτωση. Αντίστοιχα, η  $DVRF(u_A)$  θα πρέπει επίσης να ακολουθεί την καμπύλη  $GVRF(u_A)$ , όπως συνάγεται από την Εξ. (4.34) και τους (Miranda and Deodatis 2012). Παρατηρώντας το Σχ. 29, μπορεί να φανεί ότι τόσο η καμπύλη  $GVRF_1$  για το Γκαουσιανό όσο και η  $GVRF_2$  για λογαριθμικό πεδίο ακολουθείται ικανοποιητικά από την καμπύλη  $DVRF(u_A)$  στο χρόνο  $t = 20sec$ . Και οι τρεις καμπύλες επίσης ταιριάζουν με την αντίστοιχη στατική καμπύλη.



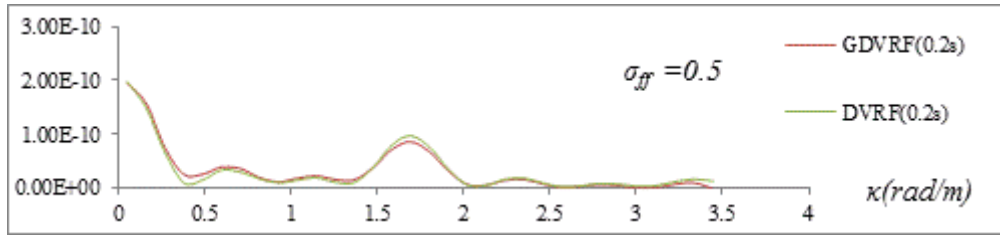
(a)



(b)

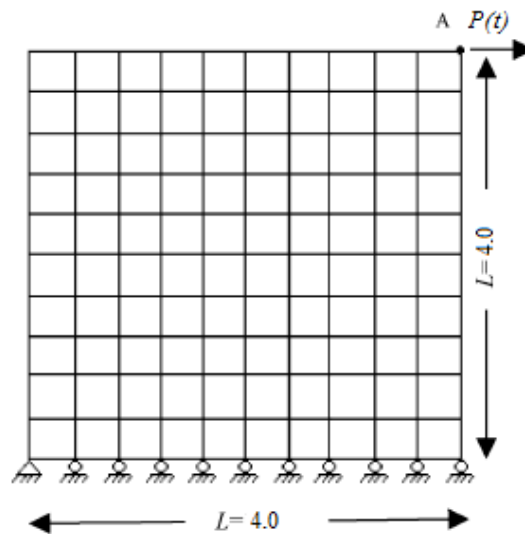
**Σχήμα 31.** 3D γραφικές παραστάσεις της (α) *DVRF* και (β) *GDVRF* της οριζόντιας μετατόπισης  $u_A$ , μέχρι τη στιγμή  $t=0.2\text{sec}$  ως συναρτήσεις της συχνότητας  $k$  (rad/m) και του χρόνου  $t$  (sec) για την περίπτωση LC1 και  $\sigma_{ff}=0.5$  για το πλαίσιο του Σχ. 20.

Τέλος, η *GDVRF* υπολογίστηκε για το πλαίσιο του Σχ. 20 και για την περίπτωση LC1 για ένα χρονικό παράθυρο  $[0-0.2\text{sec}]$  και για μια σχετικά μεγάλη τυπική απόκλιση  $\sigma_{ff} = 0.5$ . Τα Σχ. 31(α) και (β) παρουσιάζουν γραφικές παραστάσεις αυτής της *GDVRF* και της αντίστοιχης *DVRF*. Επιπλέον το Σχ. 32 παρουσιάζει ένα στιγμιότυπο της *GDVRF* και της *DVRF* όταν  $t=0.2\text{sec}$ .



**Σχήμα 32.** Γραφικές παραστάσεις της  $GDVRF(u_A, t=0.2s)$  για την περίπτωση LC1 και η  $DVRF$  ως συνάρτηση της συχνότητας  $\kappa$  (rad/m) για  $\sigma_{ff} = 0.5$  για το πλαίσιο του Σχ. 20.

*Παράδειγμα 2.* Θεωρούμε τώρα το τοιχείο στο Σχ. 33 με μήκος και ύψος ίσο με  $L=4m$ , υποθέτωντας ότι το αντίστροφο του μέτρου ελαστικότητας μεταβάλλεται τυχαία στην επιφάνεια του σύμφωνα με την Εξ. (4.41) με  $F_0 = (1.35 \times 10^8 \text{ kN/m})^{-1}$ ,  $\nu = 0.2$ ,  $t = 1.0$  και λόγο απόσβεσης  $\xi = 5\%$ . Η συνολική μάζα της δοκού υποτίθεται ότι είναι  $m_{tot} = 4000 \text{ kg}$  και ότι κατανέμεται ομοιόμορφα μεταξύ των κόμβων των πεπερασμένων στοιχείων του μοντέλου. Το τοιχείο διακριτοποιείται με ένα σύνολο 100 στοιχείων επίπεδης έντασης, 121 κόμβους και 242 βαθμούς ελευθερίας. Σε αυτό το παράδειγμα, η 2D διατύπωση της διαδικασίας DFEM-FMCS έχει εφαρμοστεί, χρησιμοποιώντας τις Εξ. (4.42) και (4.43) για την εκτίμηση της δυναμικής μέση τιμής και διακύμανσης της απόκρισης.

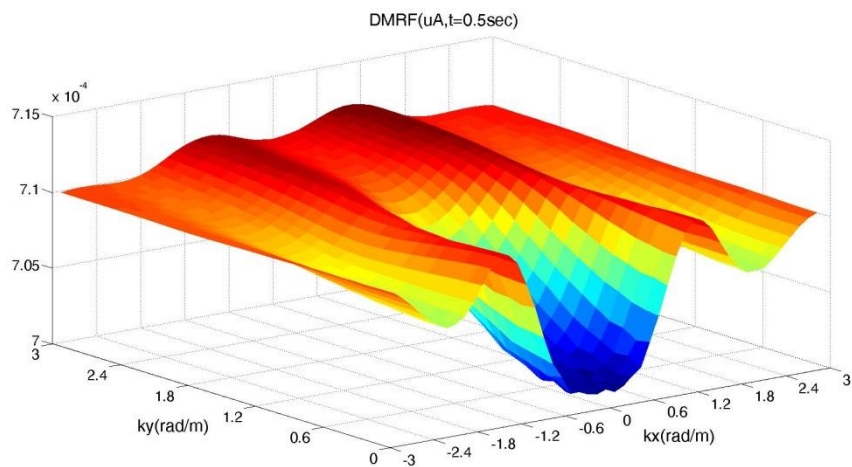


**Σχήμα 33.** Γεωμετρία, φόρτιση και διακριτοποίηση πεπερασμένων στοιχείων του τοιχείου.

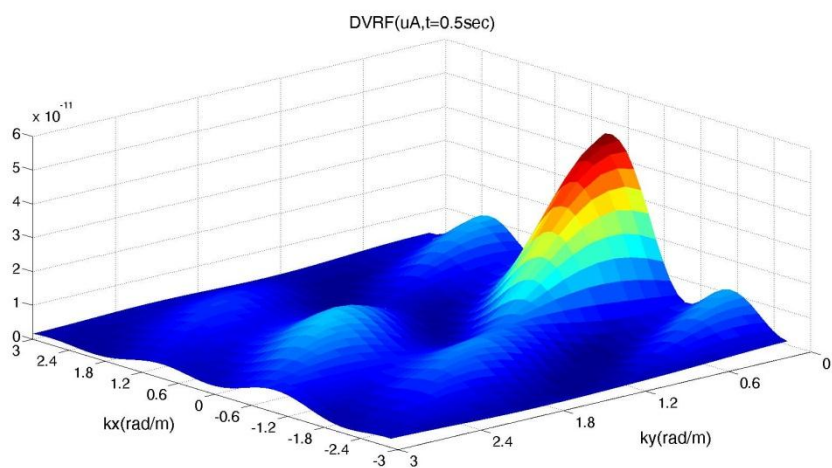
Θεωρούνται οι ίδιες δύο περιπτώσεις φόρτισης όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα. Το συγκεντρωμένο φορτίο εφαρμόζεται όπως φαίνεται στο Σχ. 33. Σε αυτό το παράδειγμα, το ακόλουθο 2D φάσμα έχει χρησιμοποιηθεί:

$$S_{f_0 f_0}(\kappa_x, \kappa_y) = \frac{\sigma_{ff}^2}{4\pi} b_x b_y \exp \left[ -\frac{1}{4} (b_x^2 \kappa_y^2 + b_y^2 \kappa_x^2) \right] \quad (62)$$

όπου  $b_x = 2.0$ ,  $b_y = 4.0$



(α)

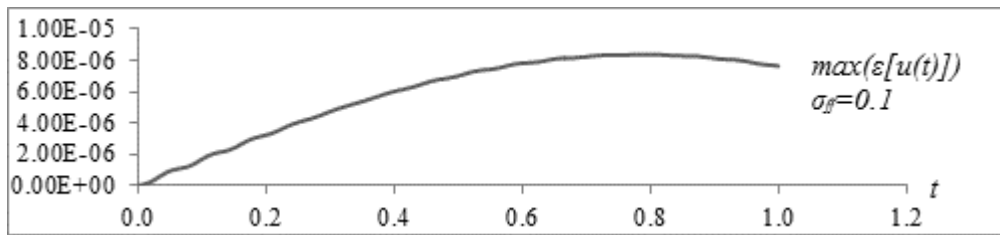


(β)

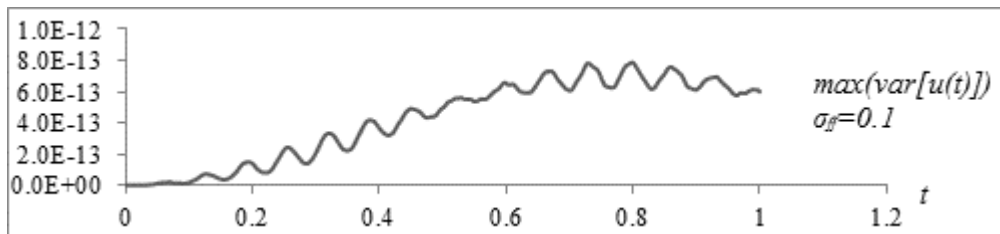
**Σχήμα 34.** 3D γραφικές παραστάσεις της (α)  $DMRF$  και (β)  $DVRF$  της οριζόντιας μετατόπισης  $u_A$ , τη χρονική στιγμή  $t=0.5sec$  συναρτήσεως της συχνότητας  $\kappa_x$  (rad/m) και  $\kappa_y$  (rad/m) για την περίπτωση LC1 και  $\sigma_{ff}=0.2$ .

Το Σχ. 34 παρουσιάζει 3D απεικονίσεις της  $DMRF(u_A)$  και της  $DVRF(u_A)$  για την οριζόντια μετατόπιση  $u_A$  του σημείου  $A$  του τοιχείου ως συνάρτηση της συχνότητας  $\kappa_x$  και  $\kappa_y$  για  $\sigma_{ff} = 0.2$  κατά τον καθορισμένο χρόνο  $t = 0.5sec$ . Παρατηρείται ότι τόσο η  $DMRF(u_A)$  όσο και η  $DVRF(u_A)$  ποικίλλουν σημαντικά σε σχέση με τις δύο διευθύνσεις και ως συνήθως οι μέγιστες τιμές βρίσκονται πλησίον του  $(0,0)$ . Τέτοιες γραφικές παραστάσεις μπορούν να εξαχθούν για όλα τα χρονικά στάδια της ανάλυσης για τη συγκεκριμένη μετατόπιση. Εάν

ενδιαφέρεται κανείς να συνάγει πραγματοποιήσιμα άνω και κάτω όρια για αυτή την περίπτωση, τα άκρα για την  $DMRF(u_A)$  ( $DVRF(u_A)$ ) σε κάθε χρονικό βήμα, που προκύπτουν από τα κατάλληλα ζεύγη  $(\kappa_x, \kappa_y)$ , θα πρέπει να προσδιοριστούν και, μετά τη χρήση Εξ. (4.47) και (4.48), τα όρια μπορεί να υπολογιστούν εύκολα. Μια εφαρμογή της προαναφερθείσας διαδικασίας παρουσιάζεται στο Σχ. 35 για  $\sigma_{ff} = 0.1$ .



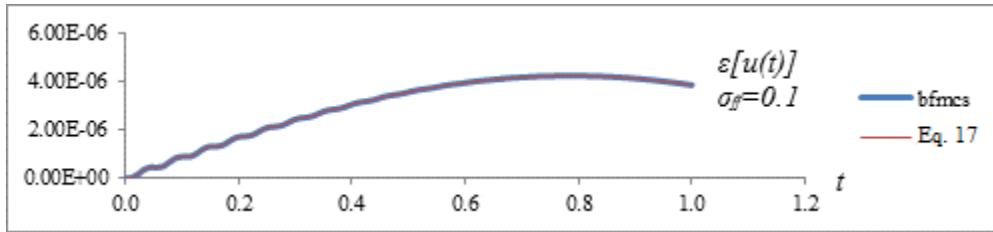
(α)



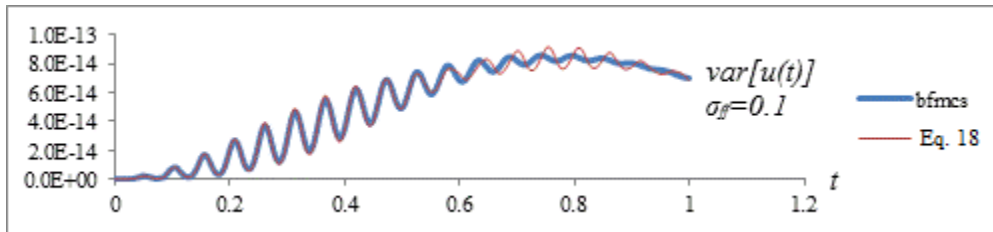
(β)

**Σχήμα 35.** Χρονοϊστορίες των άνω ορίων (α) της μέσης τιμής και (β) της διακύμανσης της απόκρισης του τοιχείου για ένα Γκαουσιανό πεδίο με  $\sigma_{ff} = 0.1$  για την περίπτωση LC1.

Στα ακόλουθα Σχ. (36-40), τα αποτελέσματα της μέσης τιμής και της διακύμανσης της απόκρισης που παρουσιάζονται προέρχονται από τη διαδικασία DFEM-FMCS και τις Εξ. (4.42) και (4.43) σε σύγκριση με τα αποτελέσματα που λαμβάνονται από την άμεση προσομοίωση Monte Carlo. Στο Σχ. 36, τα διαγράμματα απεικονίζουν τη σύγκριση για τη δυναμική μέση τιμή και τη διακύμανση της απόκρισης του τοιχείου για την οριζόντια μετατόπιση στο σημείο  $A$  και για την περίπτωση LC1 για ένα Γκαουσιανό στοχαστικό πεδίο με  $\sigma_{ff} = 0.1$ . Στο Σχ. 37, τα αντίστοιχα αποτελέσματα παρουσιάζονται για ένα Γκαουσιανό στοχαστικό πεδίο με  $\sigma_{ff} = 0.2$ . Στα Σχ. 38, 39 τα αποτελέσματα είναι αντίστοιχα για στρογγυλεμένο Γκαουσιανό πεδίο με  $\sigma_{gg} = 0.4$  και  $\sigma_{gg} = 0.6$  αντίστοιχα. Οι προβλέψεις των Εξ. (4.42) και (4.43) σε αυτές τις περιπτώσεις είναι πολύ ικανοποιητικές με τα σφάλματα να κυμαίνονται από 5 έως 8%. Τέλος, στο Σχ. 40 αποτελέσματα της μέσης τιμής και της διακύμανσης της απόκρισης για το τοιχείο και για την περίπτωση LC2 παρουσιάζονται για ένα λογαριθμικό πεδίο με  $\sigma_{ff} = 0.2$ .

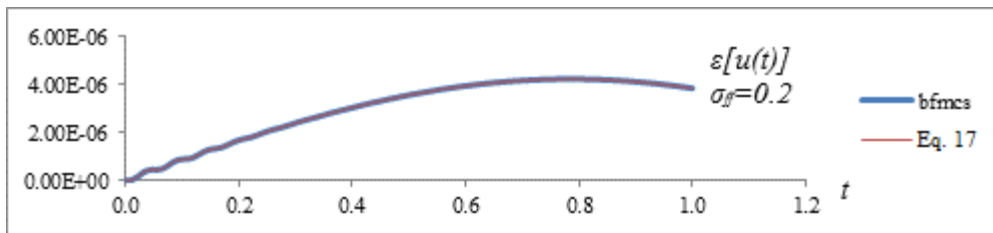


(α)

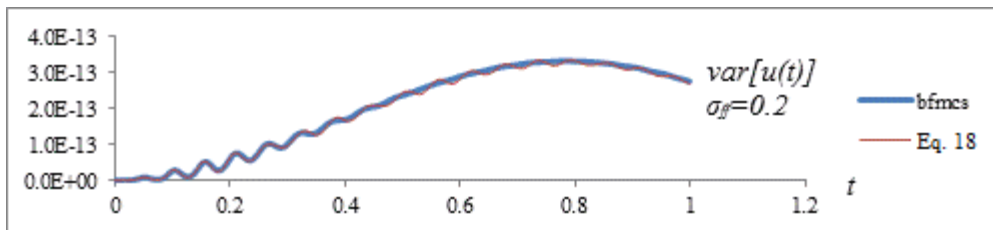


(β)

**Σχήμα 36.** Χρονιστορίες της (α) μέσης τιμής και (β) της διακύμανσης της απόκρισης του τοιχείου για ένα Γκαουσινό πεδίο με  $\sigma_{ff} = 0.1$  για την περίπτωση LC1. Σύγκριση των αποτελεσμάτων με MCS.

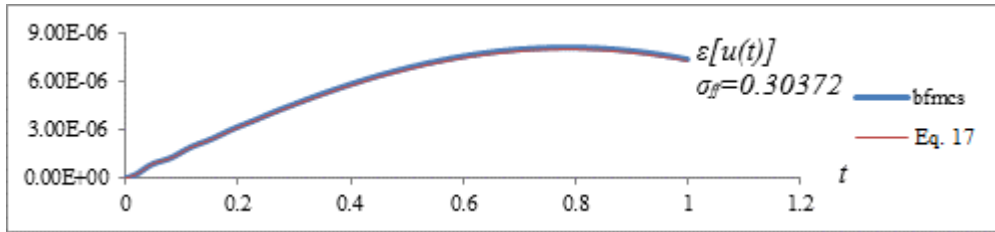


(α)

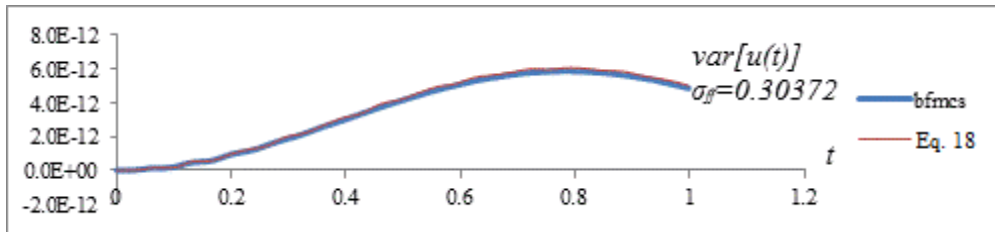


(β)

**Σχήμα 37.** Χρονιστορίες της (α) μέσης τιμής (β) της διακύμανσης της απόκρισης του τοιχείου για ένα Γκαουσινό πεδίο με  $\sigma_{ff} = 0.2$  για την περίπτωση LC1. Σύγκριση των αποτελεσμάτων με MCS.

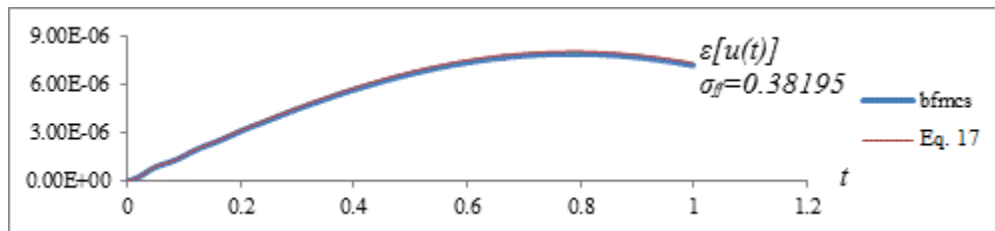


(α)

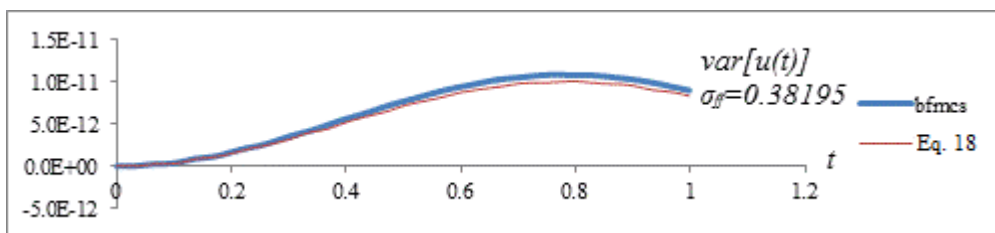


(β)

**Σχήμα 38.** Χρονιστορίες της (α) μέσης τιμής και (β) της διακύμανσης της απόκρισης του τοιχείου για ένα υποκείμενο Γκαουσινό πεδίο με  $\sigma_{gg} = 0.4$  για την περίπτωση LC1. Σύγκριση των αποτελεσμάτων με MCS.



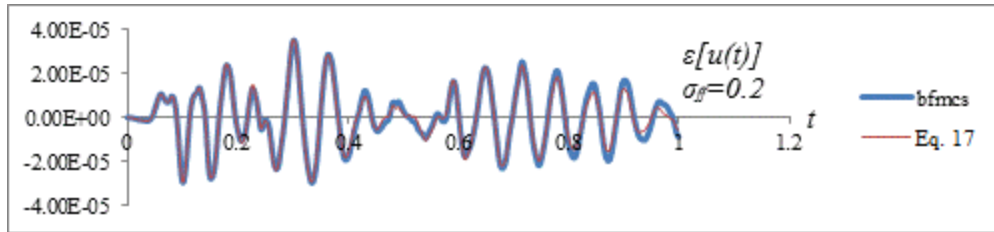
(α)



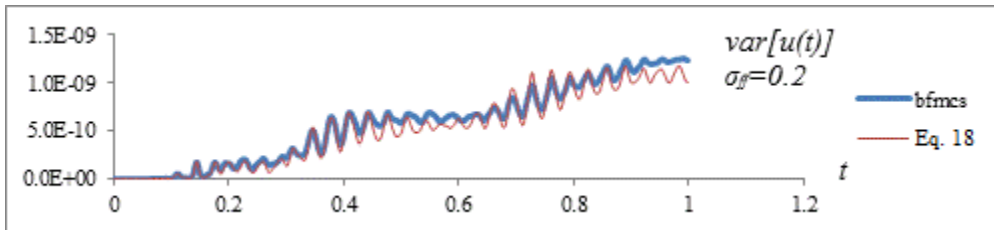
(β)

**Σχήμα 39.** Χρονιστορίες της (α) μέσης τιμής και (β) της διακύμανσης της απόκρισης του τοιχείου για ένα υποκείμενο Γκαουσινό πεδίο με  $\sigma_{gg} = 0.6$  για την περίπτωση LC1. Σύγκριση των αποτελεσμάτων με MCS.





(α)



(β)

**Σχήμα 40.** Χρονιστορίες της (α) μέσης τιμής και (β) της διακύμανσης της απόκρισης του τοιχείου για ένα λογαριθμικό πεδίο με  $\sigma_{ff} = 0.2$  για την περίπτωση LC2. Σύγκριση των αποτελεσμάτων με MCS.

## 4 ΕΥΡΩΣΤΟΣ ΒΕΛΤΙΣΤΟΣ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΜΕ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗΣ ΤΗΣ ΑΠΟΚΡΙΣΗΣ: ΜΙΑ ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ

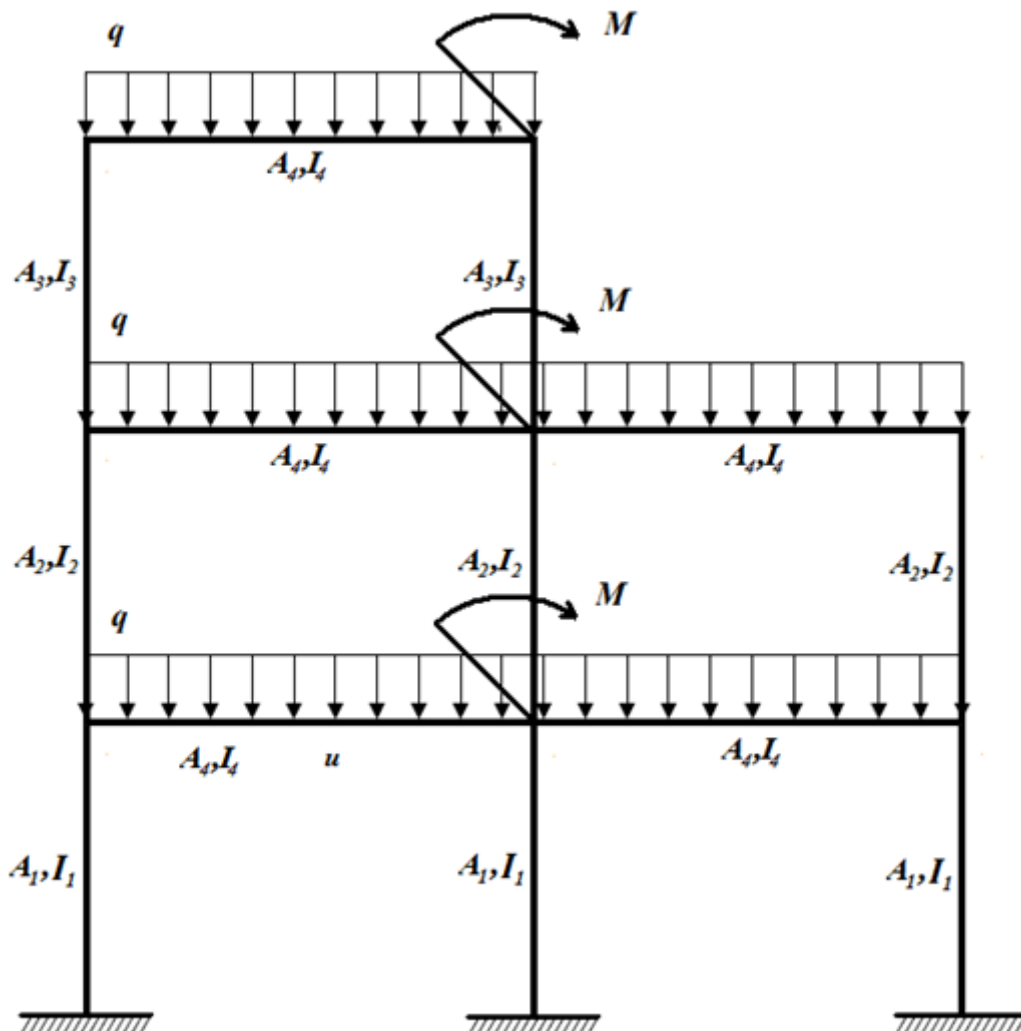
Στην κλασική διατύπωση Εύρωστου Βέλτιστου Σχεδιασμού (RDO), η βελτιστοποίηση γίνεται για ένα α priori επιλεγμένο στοχαστικό πεδίο. Σε πραγματικές εφαρμογές ωστόσο, η δομή συσχέτισης της αβέβαιης παραμέτρου του συστήματος είναι σπάνια γνωστή, ως εκ τούτου καθιστά μια τέτοια διαδικασία βελτιστοποίησης αναποτελεσματική. Κατά συνέπεια, ο σχεδιαστής είναι υποχρεωμένος να διεξάγει πολλαπλές τέτοιες διαδικασίες βελτιστοποίησης για να προστατεύσει το σχεδιασμένο σύστημα από όλες τις πιθανές περιπτώσεις. Με τη χρήση της προτεινόμενης μεθοδολογίας αυτό το πρόβλημα υπερκεράζεται, αφού ο κάθε υποψήφιος σχεδιασμός αξιολογείται με βάση τις επιδόσεις του κάτω από το χειρότερο δυνατό σενάριο που προσδιορίζεται για το συγκεκριμένο σχεδιασμό. Συνεπώς ο σχεδιαστής εξασφαλίζεται ότι το σύστημα θα έχει την καλύτερη δυνατή απόδοση στις χειρότερες δυνατές συνθήκες.

#### 4.1 ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΗΣ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗΣ ΤΗΣ ΑΠΟΚΡΙΣΗΣ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΩΝΤΑΣ ΤΗ VRF

Χωρίς βλάβες γενικότητας εξετάζεται το γραμμικό στοχαστικό σύστημα πεπερασμένων στοιχείων του Σχ. 41, το οποίο είναι μια πλαισιωτή κατασκευή με στοιχεία δοκού. Το γινόμενο του αντίστροφου του μέτρου ελαστικότητας και της ροπής αδρανείας θεωρείται ότι μεταβάλλεται τυχαία κατά μήκος του άξονα  $x$  σύμφωνα με την ακόλουθη έκφραση:

$$\frac{1}{\{E(x)I\}} = F_0(1 + f(x)) \quad (63)$$

όπου  $E$  είναι το μέτρο ελαστικότητας,  $I$  είναι η ροπή αδράνειας,  $F_0$  είναι η μέση τιμή του αντίστροφου του  $EI$ , και  $f(x)$  είναι ένα μηδενικής μέσης ομογενές πεδίο που περιγράφει τη μεταβολή του γύρω από τη μέση τιμή του  $1/EI$ .



Σχήμα 41. Γεωμετρία και φόρτιση του πλαισίου που διακριτοποιείται με 60 στοιχεία δοκού.

Ακολουθώντας μία διαδικασία παρόμοια με εκείνη που παρουσιάζεται από τους (Παπαδόπουλος, Παπαδρακάκης and Deodatis, 2006), είναι δυνατόν να εκφράσουμε την διακύμανση της απόκρισης ενός στοχαστικού συστήματος πεπερασμένων στοιχείων με την ολοκληρωτική έκφραση της Εξ. (11.69).

#### 4.2 ΕΥΡΩΣΤΟΣ ΒΕΛΤΙΣΤΟΣ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΩΝΤΑΣ ΤΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗΣ ΤΗΣ ΑΠΟΚΡΙΣΗΣ

Ο Εύρωστος Βέλτιστος Σχεδιασμός (RDO) χρησιμοποιώντας τις VRF (VRF-RDO) χρησιμοποιεί μια διαντικειμενική συνάρτηση που περιλαμβάνει τη μέγιστη τιμή της VRF και το συνολικό κατασκευαστικό βάρος. Οι περιορισμοί αυτής της λειτουργίας μπορεί να είναι είτε τάσεων είτε παραμορφώσεων είτε και των δύο ταυτόχρονα. Η VRF είναι μια συνάρτηση που αναλύει τη δκύμανση της απόκρισης του συστήματος, ανεξάρτητα από την συνάρτηση της φασματικής πυκνότητας του στοχαστικού πεδίου που περιγράφει το αντίστροφο του μέτρου ελαστικότητας. Έτσι, η ελαχιστοποίηση της μέγιστης τιμής της προκρίνει έναν υποψήφιο σχεδιασμό που έχει τη βέλτιστη απόδοση σε σχέση με το χειρότερο σενάριο.

Μια γενική διατύπωση της VRF-RDO μπορεί να γίνει ως ακολούθως:

$$\min_{\mathbf{s} \in F} f = [C(\mathbf{s}, \mathbf{X}), \mathbf{VRF}(\kappa^{\max}, \sigma_{ff})]^T \quad (64)$$

υπό τους ντετερμινιστικούς περιορισμούς:

$$g_j(\mathbf{X}) \leq 0 \quad j=1, \dots, k \quad (65)$$

όπου  $f$  είναι η διαντικειμενική συνάρτηση που σχετίζεται με το κόστος του υλικού  $C$  και το διάνυσμα που περιέχει τις μέγιστες τιμές των συναρτήσεων διακύμανσης της απόκρισης της επιλεγμένης ποσότητας δηλ. της  $\mathbf{VRF}(\kappa^{\max}, \sigma_{ff})$ . Το κόστος των υλικών είναι μια προφανής επιλογή ως αντικειμενική συνάρτηση σε πολλά προβλήματα δομικής ανάλυσης. Η μέγιστη τιμή της  $\mathbf{VRF}$ , επιλέγεται ως δεύτερη αντικειμενική συνάρτηση προς ελαχιστοποίηση, αντιπροσωπεύοντας τη διακύμανση στην απόκριση του συστήματος και την αποτελεσματική αντιμετώπιση των υφιστάμενων αβεβαιοτήτων σε ένα πιθανοτικό σχεδιαστικό περιβάλλον. Το διάνυσμα  $\mathbf{s}$  συμβολίζει τις μεταβλητές σχεδιασμού και  $\mathbf{X}$  είναι το διάνυσμα θέσης.  $F$  είναι η εφικτή περιοχή όπου όλες οι ντετερμινιστικές συναρτήσεις των περιορισμών  $g_j$  ικανοποιούνται. Η  $\mathbf{VRF}(\kappa^{\max}, \sigma_{ff})$  έχει επιλεγεί ως αντικειμενική συνάρτηση, διότι παρέχει εγγενείς πληροφορίες που είναι χαρακτηριστικές του συστήματος και ανεξάρτητες από τη δομή συσχέτισης του στοχαστικού πεδίου. Ως εκ τούτου, σύμφωνα με τη διατύπωση VRF-RDO ο υποψήφιος σχεδιασμός που επιλέγεται, επιτυγχάνει τη χαμηλότερη δυνατή διακύμανση της απόκρισης υπό τις χειρότερες δυνατές συνθήκες, από την άποψη της φασματικής πυκνότητας του στοχαστικού πεδίου.

### 4.3 ΠΟΛΥ-ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΙΚΗ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΜΕ ΓΕΝΕΤΙΚΟΥΣ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥΣ

Η λύση ενός πολυ-αντικειμενικού προβλήματος βελτιστοποίησης δίνεται με τη μορφή ενός λεγόμενου μετώπου Pareto σε αντίθεση με ένα μονο-αντικειμενικό πρόβλημα όπου η λύση είναι μοναδική. Αρκετές μέθοδοι έχουν προταθεί για την πολυ-αντικειμενική βελτιστοποίηση όπως η μέθοδος του σταθμισμένου αθροίσματος (Zadeh 1963), του προγραμματισμού στοχοθεσίας (Charnes and Cooper 1977), του φυσικού προγραμματισμού (Messac, Puemi-Sukam and Melachrinoudis 2001), του συμβιβαστικού προγραμματισμού (Chen, Więcek and Zhang 1999), όπως επίσης και οι προσφάτως διατυπωμένοι εξελικτικοί αλγόριθμοι, όπως ο Δυνατός Pareto Εξελικτικός Αλγόριθμος 2 (SPEA-2) (Zitzler, Laumanns and Thiele 2001), προσομοιωμένη απόπτωση (Suman and Kumar 2006), η βελτιστοποίηση σμήνους σωματιδίων (Parsopoulos and Vrahatis 2002) (Coello Coello and Salazar Lechuga 2002) και ο μη-κυριαρχούμενης Διαλογής Γενετικός Αλγόριθμος II (NSGA-II) (Deb et al. 2002). Στην παρούσα εργασία η πολυ-αντικειμενική βελτιστοποίηση γίνεται με εφαρμογή του NSGA-II, που έχει καθιερωθεί ως προσέγγιση για τον εντοπισμό του «μετώπου Pareto». Οι πολυ-αντικειμενικοί εξελικτικοί αλγόριθμοι προτιμούνται έναντι των κλασικών μεθόδων βελτιστοποίησης κυρίως λόγω της ικανότητάς τους να βρουν πολλαπλές βέλτιστες λύσεις Pareto με ένα μόνο τρέξιμο. Ωστόσο, έχουν επικριθεί κυρίως για θέματα όπως η υψηλή υπολογιστική πολυπλοκότητα και η μη-ελιτίστικη προσέγγιση.

Λόγ της φύσης του προβλήματος, οι στόχοι και οι περιορισμοί θεωρούνται ως μη γραμμικές συναρτήσεις. Το μέγεθος του πληθυσμού τίθεται ίσο με 50 για κάθε γενεά. Τα κλάσματα των διαδικασιών της μετανάστευσης (migration) και της μετάβασης (crossover) ισούνται με 0.5. Ο μέγιστος αριθμός γενεών ορίστηκε ίσος με 150.

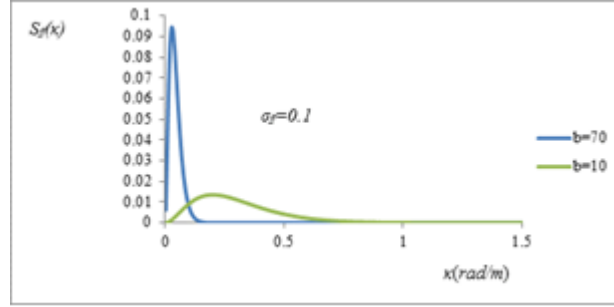
### 4.4 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Το τριώροφο πλαίσιο που φαίνεται στο Σχ. 41 επιλέγεται προκειμένου να αναδείξει τις δυνατότητες της μεθόδου. Για την κατασκευή αυτή, το αντίστροφο του  $EI$  θεωρείται ότι ποικίλλει τυχαία κατά μήκος των στοιχείων της κατασκευής σύμφωνα με την Εξ. (5.42) με  $F_0 = (1.35 \times 10^8 \text{ KNm}^3)^{-1}$ . Επιπλέον, κάθε όροφος έχει 3m ύψος και 4m μήκος. Για την ανάλυση της δομής του πλαισίου χρησιμοποιούνται 220 στοιχεία δοκού, 15 για κάθε υποστήλωμα και 20 για κάθε δοκό που συνεπάγεται ότι η κατασκευή έχει συνολικά 654 βαθμούς ελευθερίας.

Μια συγκεντρωμένη ροπή εφαρμόζεται στη μέση του κάθε ορόφου ίση με  $M = 70 \text{ KNm}$  και ένα κατανεμημένο φορτίο  $q = 3.2 \text{ KN/m}$  κατά μήκος όλων των δοκών (βλέπε Σχ. 41). Υποθέτοντας πλήρη στατιστική εξάρτηση, το стоχαστικό πεδίο  $f(x)$  θεωρείται ότι μεταβάλλεται σε όλο το μήκος των υποστηλωμάτων και των δοκών του πλαισίου ως εξής: το  $x$  υποτίθεται ότι αυξάνει πρώτα κατά μήκος των υποστηλωμάτων από αριστερά προς τα δεξιά και από κάτω προς τα πάνω στον πρώτο όροφο, κατόπιν κατά μήκος των δοκών του πρώτου ορόφου από αριστερά προς τα δεξιά. Ακολουθώντας το ίδιο μοτίβο για τους ορόφους 2 και 3 σχηματίζεται ένα συνεχές πεδίο. Το SDF του πεδίου υποτίθεται ότι είναι εκθετικό και δίνεται ως εξής:

$$S_{ff}(\kappa) = \frac{1}{4} \sigma_{ff}^2 b^3 \kappa^2 e^{-b|\kappa|} \quad (66)$$

Δύο διαφορετικές τιμές της παραμέτρου του μήκους συσχέτισης εξετάστηκαν,  $b=10$  και  $b=70$  με μια τυπική απόκλιση  $\sigma_{ff}=0.1$ . Δύο γρ. παραστάσεις του SDF σε σχέση με τη συχνότητα  $\kappa(\text{rad}/m)$  για τις επιλεγμένες τιμές του  $b$  φαίνονται στο Σχ. 42.



**Σχήμα 42.** Συναρτήσεις φασματικής πυκνότητας για το στοχαστικό πεδίο  $f(x)$  με τυπική απόκλιση  $\sigma_{ff}=0.1$  για δύο διαφορετικές τιμές της παραμέτρου του μήκους συσχέτισης.

Οι γεωμετρικές ιδιότητες των υποστηλωμάτων και των δοκών σε κάθε όροφο του πλαισίου θεωρούνται ως οι τέσσερις διακριτές μεταβλητές σχεδιασμού για τη διατύπωση VRF-RDO (βλ. Σχ. 41). Η επιλογή των γεωμετρικών ιδιοτήτων των υποστηλωμάτων και των δοκών του πλαισίου έχει οριστεί στο πλαίσιο του Ευρωκώδικα-8 με διατομές HEB από *HEB100* έως *HEB1000*. Η διατύπωση του προβλήματος με VRF-RDO έχει ως εξής:

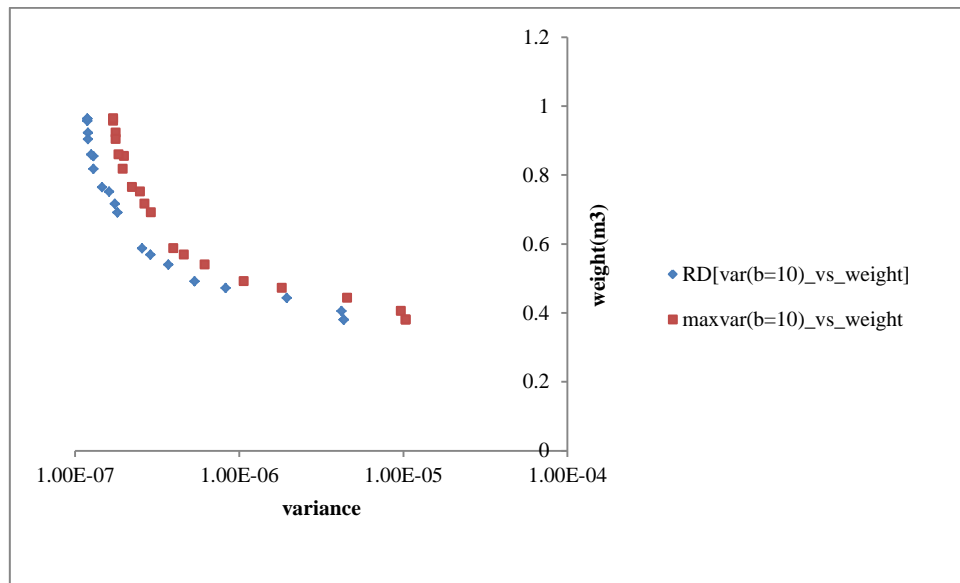
$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{s} \in F} f &= [\text{VOL}(\mathbf{s}), \text{VRF}(\kappa^{\max}, \sigma_{ff})]^T \\ \mathbf{s} &= [\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3, \mathbf{X}_4]^T \\ \mathbf{X}_i &= [A_i, I_i] \end{aligned} \quad (67)$$

υπό τους περιορισμούς

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_i &\in \Omega \\ \max(\sigma) &\leq \sigma_y / 1.10, \quad \sigma_y = 235 \text{Mpa} \end{aligned} \quad (68)$$

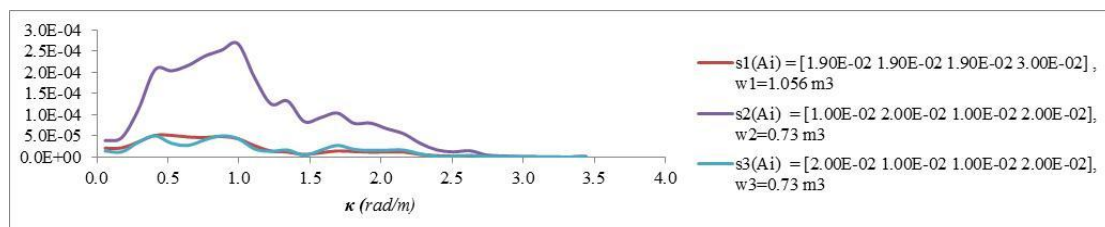
όπου  $\text{VRF}(\kappa^{\max}, \sigma_{ff})$  είναι η μέγιστη τιμή της *VRF* που αντιστοιχεί στη κατακόρυφη μετατόπιση  $u$  στο Σχ. 41,  $\Omega$  είναι το σύνολο διακριτών τιμών που περιέχει τις γεωμετρικές ιδιότητες των διατομών του EC-8 από *HEB100* έως *HEB1000*,  $F \subseteq \Omega^4$  είναι η εφικτή περιοχή για τη μεταβλητή σχεδιασμού  $\mathbf{s}$  όπου όλοι οι περιορισμοί ικανοποιούνται,  $A_i$ ,  $I_i$  είναι οι μέσες τιμές της διατομής και της ροπής αδράνειας, αντίστοιχα, των δομικών μελών,  $\max(\sigma)$  είναι η μέγιστη ντετερμινιστική τάση για κάθε σχεδιασμό που εμφανίζεται στο μοντέλο και  $\sigma_y$  είναι η τάση διαρροής του υλικού. Αναφέρεται εδώ ότι αυτή η μεθοδολογία είναι πλήρως επεκτάσιμη και σε θέση να λάβει υπόψιν πολλαπλές μετατοπίσεις της κατασκευής, χωρίς περαιτέρω συνέπειες και πρόσθετο κόστος με άμεσο τρόπο.

Αρχικά μια κλασική RDO διεξήχθη για την περίπτωση ενός δεδομένου στοχαστικού πεδίου με ένα SDF με  $b=10$  να περιγράφει το  $EI$  στην Εξ. (5.42).

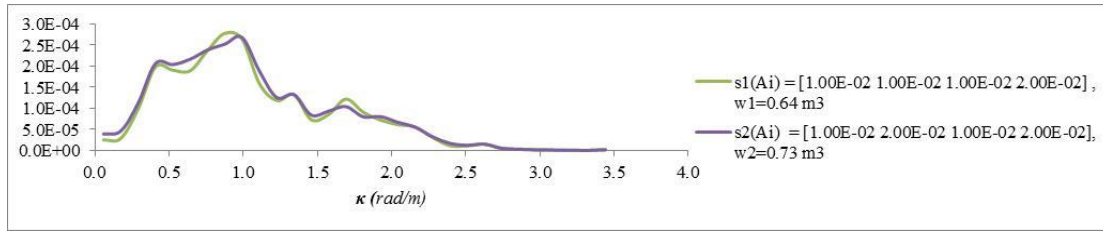


**Σχήμα 43.** Μέτωπο Pareto για μια κλασική RDO για δεδομένο πεδίο με  $b=10$  και το συνολικό βάρος και τη μέγιστη δυνατή διακύμανση ως αντικειμενικές συναρτήσεις. Ο άξονας της διακύμανσης σε λογαριθμική κλίμακα.

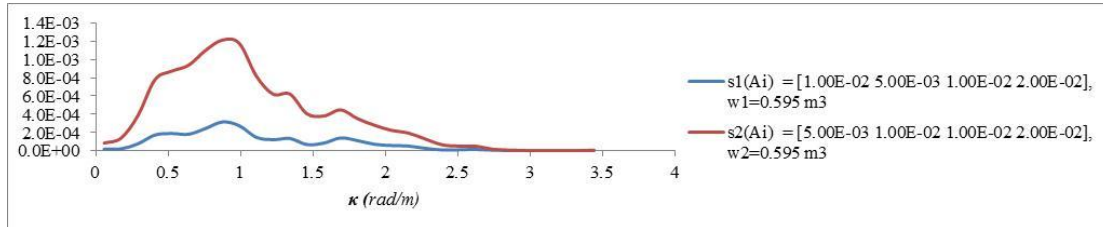
Το Σχ. 43 παρουσιάζει το υπολογισθέν μέτωπο Pareto, όπου, όπως ήταν αναμενόμενο, οι βαρύτεροι σχεδιασμοί εμφανίζουν την υπέρτερη απόδοση δηλαδή τη μικρότερη διακύμανση της απόκρισης. Ομοίως, ελαφρύτεροι σχεδιασμοί ανταλλάσσουν το μειωμένο τους κόστος, από την άποψη του συνολικού όγκου του υλικού, με αυξημένη διακύμανση. Στην ίδια εικόνα εμφανίζεται και ένα μέτωπο το οποίο παράγεται από τον υπολογισμό του άνω ορίου για τη διακύμανση της απόκρισης μέσω της Εξ. (11.70) για κάθε ένα από τους σχεδιασμούς του προηγούμενως υπολογισθέντος μετώπου Pareto από την κλασική διαδικασία RDO. Όπως φαίνεται στο Σχ. 43 αυτό το μέτωπο μετατοπίζεται σαφώς προς τα δεξιά πράγμα που σημαίνει ότι τουλάχιστον ένα πεδίο μπορεί να βρεθεί, π.χ. ένα τυχαίο ημιτονοειδές με  $\kappa = \kappa_{\max}$  αυτό της VRF κάθε υποψηφίου σχεδιασμού, για το οποίο η διακύμανση είναι σημαντικά υψηλότερη από εκείνη που υπολογίστηκε για το δεδομένο στοχαστικό πεδίο με  $b=10$ .



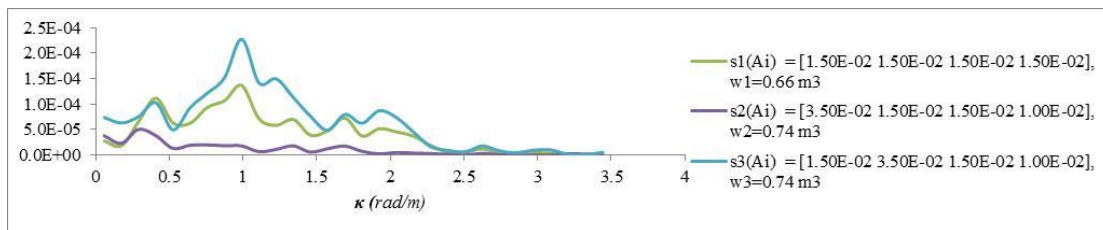
(a)



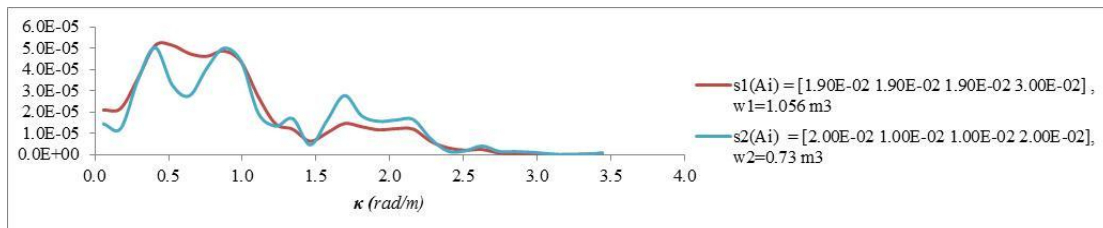
(β)



(γ)



(δ)

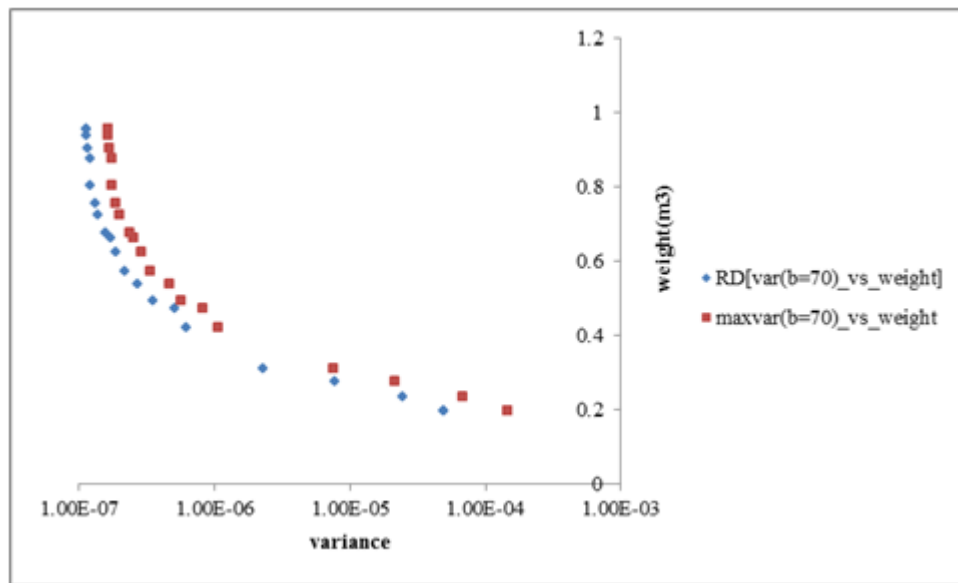


(ε)

**Σχήμα 44.** Γρ. παραστάσεις της VRF για διαφορετικό βάρος και κατασκευαστικές διατομές που περιλαμβάνονται στο διάλυμα σχεδιασμού  $s$ .

Προκειμένου να προσδιοριστεί το άνω όριο για τη διακύμανση της απόκρισης του συστήματος για κάθε σχεδιασμό υπολογίζονται οι αντίστοιχες VRF. Στο Σχ. 44 απεικονίζονται μερικές χαρακτηριστικές VRF για τους αντίστοιχους σχεδιασμούς του συστήματος αυτού. Από αυτά τα γραφήματα των VRF καθίσταται σαφές ότι υπάρχει αρκετό περιθώριο για βελτιστοποίηση σε σχέση με την μέγιστη τιμή της VRF που εξαρτάται από πιθανές αλλαγές στο διάλυμα σχεδιασμού ακόμη και για την περίπτωση ίσων κατασκευαστικών βαρών. Από αυτά τα γραφήματα είναι επίσης προφανές ότι οι περιοχές των κυματικών αριθμών που συνεισφέρουν περισσότερο στη VRF και συνεπώς στη διακύμανση της απόκρισης επιδεικνύουν σημαντική μεταβλητότητα και εξαρτώνται έντονα από τις ντετερμινιστικές παραμέτρους του προβλήματος. Επακόλουθα, εάν μια κλασική RDO οδηγεί σε βέλτιστη διακύμανση της απόκρισης του συστήματος για ένα δεδομένο SDF

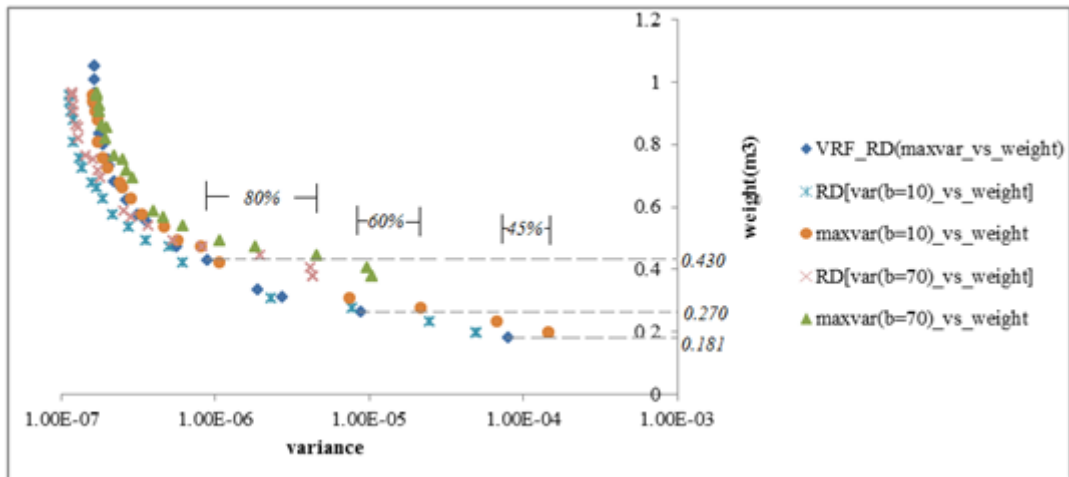
αυτό δεν σημαίνει απαραίτητα ότι αυτός ο σχεδιασμός είναι επίσης βέλτιστος σε σχέση με ένα διαφορετικό SDF.



**Σχήμα 45.** Μέτωπο Pareto για μια κλασική RDO για δεδομένο πεδίο με  $b = 70$  και το συνολικό βάρος και τη μέγιστη δυνατή διακύμανση ως αντικειμενικές συναρτήσεις. Ο άξονας της διακύμανσης σε λογαριθμική κλίμακα.

Το ίδιο συμπέρασμα μπορεί να συναχθεί από το μέτωπο Pareto της κλασικής RDO στο Σχ. 45, αλλά για μια παράμετρο μήκους συσχέτισης  $b = 70$ . Από τα Σχ. 43 και 45 μπορεί να παρατηρηθεί ότι στην περίπτωση του  $b = 10$ , ο μέσος όρος της «μετετόπισης» του παράγωγου μετώπου ως προς τη διακύμανση είναι ίσος με 74% κυμαινόμενος από 44% μέχρι 140% ενώ στην περίπτωση του  $b = 70$  τα αντίστοιχα ποσοστά είναι 86%, 42% και 226%. Στο Σχ. 46 παρουσιάζονται τα δυο προηγούμενα αποτελέσματα σε σύγκριση με το μέτωπο Pareto που παράγεται από τη διατύπωση VRF-RDO. Αυτό που είναι σημαντικό να έχουμε κατά νου κατά τη διαδικασία VRF-RDO είναι ότι οι βέλτιστοι σχεδιασμοί στο μέτωπο Pareto του Σχ. 46 παρουσιάζουν την βέλτιστη απόδοση για διάφορα πιθανά στοχαστικά πεδία των αβέβαιων των παραμέτρων του συστήματος. Συγκεκριμένα, συγκρίνοντας το μέτωπο Pareto από τη VRF-RDO με το μέτωπο της μέγιστης δυνατής διακύμανσης για την περίπτωση του  $b = 10$  παρατηρούμε ότι για ένα παρόμοιο βάρος, δηλαδή το τελευταίο σημείο του κάθε μετώπου (βάρος σημείου μετώπου VRF-RDO ίσο με  $0,181m^3$  και βάρος σημείου μετώπου για την περίπτωση  $b = 10$  ίσο με  $0.197m^3$ ) έχει επιτευχθεί μείωση της διακύμανσης. Σε μια άλλη περίπτωση, για την τάξη βάρους γύρω από το  $0.27m^3$  η μείωση είναι σχεδόν 60%. Κατά τη σύγκριση του μετώπου Pareto με VRF-RDO με το μέτωπο της μέγιστης δυνατής διακύμανσης για  $b = 70$ , η μείωση της διακύμανσης είναι ακόμη πιο έντονη φθάνοντας έως το 80%.





Σχήμα 46. Μέτωπα Pareto για την κλασσική RDO με τη διακύμανση της απόκρισης για ένα πεδίο με  $b = 10, 70$  και το συνολικό βάρος ως αντικειμενικές συναρτήσεις και τις αντίστοιχες μέγιστες διακυμάνσεις για τους επιλεγόμενους σχεδιασμούς.



## 1. INTRODUCTION

1.1 MOTIVATION AND SCOPE	1
1.2 OUTLINE	6

## 2. RANDOM VARIABLES & STOCHASTIC PROCESSES

2.1 PROBABILITY THEORY	9
2.1.1 CONDITIONAL PROBABILITY & BAYES' THEOREM	10
2.1.2 RANDOM NUMBERS GENERATION	11
2.2 RANDOM VARIABLES	12
2.2.1 DISTRIBUTION AND DENSITY FUNCTION	12
2.2.2 PDF TRANSFORM	14
2.2.3 RANDOM NUMBERS WITH ARBITRARY DISTRIBUTION	15
2.2.4 MEAN, VARIANCE AND HIGHER MOMENTS	15
2.2.5 SEQUENCES OF RANDOM VARIABLES	16
2.3 STOCHASTIC PROCESSES, STOCHASTIC FIELDS	17
2.3.1 STATISTICAL PROPERTIES OF STOCHASTIC PROCESSES	18
2.3.2 HOMOGENEOUS RANDOM FIELDS	19
2.3.3 THE POWER SPECTRUM	19
2.3.4 ERGODICITY	20
2.3.5 GAUSSIAN AND NON GAUSSIAN RANDOM FIELDS	20
2.4 DISCRETE RANDOM FIELDS	21
2.4.1 SPECTRAL REPRESENTATION METHOD	22
2.4.2 KARHUNEN-LOEVE EXPANSION	24

## 3. STATIC MEAN AND VARIABILITY RESPONSE FUNCTIONS

3.1 INTRODUCTION	27
3.2 STATICALLY DETERMINATE BEAMS	28
3.3 STATICALLY INDETERMINATE BEAMS	29
3.3.1 UPPER BOUNDS ON RESPONSE MEAN AND VARIANCE	34
3.3.2 FAST MONTE CARLO SIMULATION	35

3.3.3	COEFFICIENT OF VARIATION OF RESPONSE DISPLACEMENT	36
3.4	EXTENSION TO TWO-DIMENSIONAL PROBLEMS	37
3.5	GENERALITY OF THE PROPOSED METHODOLOGY	38
3.6	GVRF FORMULATION FOR STATIC LOADING CASE	41
3.6.1	GVRF ESTIMATION METHODOLOGY	
4.	<b>MEAN AND VARIABILITY RESPONSE FUNCTIONS UNDER DYNAMIC EXCITATION</b>	
4.1	INTRODUCTION	43
4.2	SINGLE DEGREE OF FREEDOM STOCHASTIC OSCILLATORS	44
4.2.1	DYNAMIC ANALYSIS OF A STOCHASTIC SINGLE DEGREE OF FREEDOM OSCILLATOR	46
4.2.2	VARIANCE AND MEAN VALUE OF THE DYNAMIC RESPONSE	47
4.2.2.1	<b>NUMERICAL ESTIMATION OF THE DVRF AND THE DMRF USING FAST MONTE CARLO SIMULATION</b>	
4.2.2.2	<b>BOUNDS OF THE MEAN AND VARIANCE OF THE DYNAMIC RESPONSE</b>	
4.2.3	NUMERICAL EXAMPLE	49
4.2.3.1	<b>LOAD CASE 1: CONSTANT LOAD AT THE END OF THE BEAM</b>	
4.2.3.2	<b>LOAD CASE 2: DYNAMIC PERIODIC LOAD AT THE END OF THE BEAM</b>	
4.2.3.3	<b>LOAD CASE 3: EL CENTRO EARTHQUAKE</b>	
4.2.3.4	<b>UPPER BOUNDS ON THE MEAN AND VARIANCE OF THE RESPONSE OF LC3</b>	
4.2.3.5	<b>SENSITIVITY ANALYSIS FOR LOAD CASE 3 USING THE INTEGRAL EXPRESSIONS IN EQS. (32) AND (33)</b>	
4.3	TIME-HISTORY ANALYSIS OF STOCHASTIC FINITE ELEMENT SYSTEMS	66
4.3.1	ANALYSIS OF MEAN AND VARIANCE OF DYNAMIC SYSTEM RESPONSE USING DMRF AND DVRF	68
4.3.1.1	<b>NUMERICAL ESTIMATION OF THE DVRF AND THE DMRF USING FAST MONTE CARLO SIMULATION</b>	

<b>4.3.1.2</b>	<b>BOUNDS OF THE MEAN AND VARIANCE OF THE DYNAMIC RESPONSE</b>	
<hr/>		
4.3.2	2D FORMULATION	70
4.3.3	NUMERICAL EXAMPLES	71
<b>4.3.3.1</b>	<b>FURTHER VALIDATION USING GVRF</b>	
<b>5. ROBUST DESIGN OPTIMIZATION</b>		
5.1	INTRODUCTION	87
5.2	TAGUCHI'S METHOD	88
5.3	GENERAL ROBUSTNESS CONCEPTS AND MEASURES	89
5.3.1	UNCERTAINTIES IN DESIGN	89
5.3.2	UNCERTAINTY-ROBUSTNESS MEASUREMENT	90
<b>5.3.2.1</b>	<b>DETERMINISTIC UNCERTAINTIES: THE ROBUST COUNTERPART APPROACH</b>	
<hr/>		
5.3.2.2	EXPECTANCY MEASURES OF ROBUSTNESS	
5.3.2.3	PROBABILISTIC THRESHOLD MEASURES OF ROBUSTNESS	
5.3.2.4	STATISTICAL FEASIBILITY ROBUSTNESS	
5.4	ROBUST OPTIMIZATION IN PRACTICE	94
5.4.1	MATHEMATICAL PROGRAMMING	94
5.4.2	DETERMINISTIC AND RANDOMIZED APPROACHES	94
<b>5.4.2.1</b>	<b>THE DETERMINISTIC APPROACH TO ROBUST OPTIMIZATION</b>	
5.4.2.1.1	FEASIBILITY ROBUSTNESS	
5.4.2.1.2	EXPECTED VALUE ROBUSTNESS AND RELATED MEASURES	
<b>5.4.2.2</b>	<b>THE RANDOMIZED APPROACH TO ROBUST OPTIMIZATION</b>	
<b>5.4.2.3</b>	<b>EVOLUTIONARY ALGORITHMS IN THE CONTEXT OF ROBUSTNESS</b>	
5.4.2.3.1	NON-DOMINATED SORTING GENETIC ALGORITHM II (NSGA-II)	
<b>6. ROBUST DESIGN USING VARIABILITY RESPONSE FUNCTIONS</b>		
6.1	INTRODUCTION	103
6.2	ANALYSIS OF RESPONSE VARIABILITY USING VRF'S	106
6.2.1	NUMERICAL VALIDATION OF THE VRF WITH GVRF	107

6.3 RDO USING VARIABILITY RESPONSE FUNCTIONS	107
6.4 MULTI-OBJECTIVE OPTIMIZATION USING GENETIC ALGORITHMS	108
6.5 NUMERICAL EXAMPLE	108
7. CONCLUSIVE REMARKS	115
BIBLIOGRAPHY	117

# 1 INTRODUCTION

## 1.1 MOTIVATION AND SCOPE

Even in modern-day design procedures of engineering structures, inherent uncertainty of physical systems related to i.e. material, geometry, loading etc, is casually neglected in an effort to simplify computational analysis as well as cover lack of efficient models thereof. Such procedures are characterized, broadly speaking, as deterministic procedures. In alternative more realistic methodologies, where uncertainties are taken under consideration, a lot of discussion is taking place with respect to modeling simplifications being introduced and in particular how these simplifications affect the final outcome. Especially in the case of dynamic modeling and analysis this discussion is more vivid due to the increased computational intensity and the consequent cruder simplifications. Second order phenomena, necessary to determine failure mechanisms are seldom addressed. Furthermore, quite often, results are limited to second moment properties of the response rendering the analysis unpractical for the analyst or designer. Drawing a comparison between the sophisticated system models of deterministic designs and the rough models incorporated in most stochastic analyses one can also identify a valid argument for the lack of recognition of the stochastic analysis procedures from the engineering community. However, the whole idea behind stochastic procedures and analysis essentially is that of an alternative perception and different information representation. In simple terms stochastic methodologies choose to tackle engineering problems in a more ‘holistic’ approach i.e. attributing probability distributions to system response, as opposed to deterministic ones that tend to account only for a fraction of reality and possible outcomes.

Over the past two decades a lot of research has been dedicated to the stochastic analysis of structural systems involving uncertain parameters in terms of material or geometry with the implementation of stochastic finite element methodologies (SFEM) to numerically solve the stochastic partial differential equations (PDE's) governing the respective problems. The most commonly used SFEM methods are expansion/perturbation-based (Liu, Belytschko and Mani 1986a), (Liu, Belytschko and Mani 1986) and Galerkin-based Spectral SFEM (SSFEM) approaches (Ghanem and Spanos 1991) or costly Monte Carlo methods (Grigoriu 1995), (Matthies, et al. 1997), (Stefanou 2009). In some cases these methods have been extended to dynamic stochastic analysis in a straightforward manner (Zhao and Chen 2000), (Liu, Besterfield and Belytschko 1988) along with procedures to improve their efficiency both in terms of accuracy (Ghanem and Spanos 1990), (Jensen and Iwan 1992), (Li 1996), (Li and Liao 2001) as well as computational performance (Yamazaki, Shinozuka and Dashgupta 1988), (Papadrakakis and Papadopoulos 1996), (Papadrakakis and Kotsopoulos 1999). A probability density evolution method was proposed in (Li and Chen 2006), (Li and Chen 2004) in an effort to approximate the time varying probability distribution function (pdf) of

the response of stochastic systems using the principle of preservation of probability. Along these lines, some other approaches implement approximate Wiener path integral solution schemes (Kougioumtzoglou and Spanos 2012). However these approaches have been mainly implemented in single degree of freedom oscillators or small illustrative academic systems due to increased computational cost. In all above cases, prior knowledge of the correlation properties and the marginal pdf of the random fields characterizing system uncertainties is essential for accurate estimates of the system's response. In the frequent case of insufficient experimental data, analysts are forced to resort to sensitivity/parametric yet cost inefficient analyses. Furthermore, such analyses do not provide any information on the mechanisms that affect response variability, or bounds of the response. In addition to the aforementioned approaches, a relatively small number of studies have dealt with the dynamic propagation of system uncertainties, most of them reducing the stochastic dynamic PDE's to a linear random eigenvalue problem (Ghosh D 2005), (G. I. Schueller 2011). Although such methods have proven to be highly accurate and computationally efficient for a variety of problems, there is still a wide range of problems in stochastic mechanics involving combinations of strong non-linearities and/or large variations of system properties as well as non-Gaussian system properties that can be solved with reasonable accuracy only through a computationally expensive Monte Carlo simulation approach (Liu, Belytschko and Mani 1986), (Grigoriu 2006), (Matthies, et al. 1997), (Stefanou 2009).

In all aforementioned cases, the spectral/correlation characteristics and the marginal probability distribution function (*pdf*) of the stochastic fields describing the uncertain system parameters are required in order to estimate the response variability of a stochastic static or dynamic system. As there is usually a lack of experimental data for the quantification of such probabilistic quantities, a sensitivity analysis with respect to various stochastic parameters is often implemented. In this case, however, the problems that arise are the increased computational effort, the lack of insight on how these parameters control the response variability of the system and the inability to determine bounds of the response variability.

In this framework and to tackle the aforementioned issues, the concept of the variability response function (VRF) has been proposed in the late 1980s (Shinozuka 1987), along with different aspects and applications of the VRF (Wall and Deodatis 1994), (Graham and Deodatis 1998). A development of this approach was presented in a series of papers (Papadopoulos, Deodatis and Papadrakakis 2005), (Papadopoulos and Deodatis 2006) and (Papadopoulos, Papadrakakis and Deodatis 2006) where the existence of closed-form integral expressions for the variance of the response displacement of the form

$$Var[u] = \int_{-\infty}^{\infty} VRF(\kappa, \sigma_{ff}) S_{ff}(\kappa) d\kappa \quad (11.69)$$

was demonstrated for linear stochastic systems under static loads using a flexibility-based formulation. This formulation leads to the derivation of the integral expression in Eq.(11.69) without any approximations involved. It was shown that the VRF depends on standard deviation but appears to be independent of the functional form of the spectral density function



modeling the inverse of the elastic modulus. The existence however of this integral expression had once again to be conjectured for statically indeterminate as well as for general stochastic finite element systems. Further investigations (Miranda 2008) verified the aforementioned results but showed that VRF has a slight dependence on the marginal pdf of the stochastic field modeling the flexibility. In (Papadopoulos, Papadrakakis and Deodatis 2006) results were presented for stochastic space frames, plane stress and shell-type structures under static loads. Another important extension of the concept of VRF has been drawn in (Arwade and Deodatis 2011) to determine effective material properties in homogenization problems.

In the research presented in this dissertation, aforementioned approach is extended to stochastic systems under dynamic excitations. As a first step a single d.o.f. stochastic oscillator was considered. Although the derivation of an analytic expression for the variability response function of the dynamic system (DVRF) is extremely cumbersome, a numerical computation can be easily achieved and then fed into Eq.(11.69) to provide results for the variance time history of the dynamic system response. As in previous works (Papadopoulos, Deodatis and Papadrakakis 2005), (Papadopoulos and Deodatis 2006), (Papadopoulos, Papadrakakis and Deodatis 2006) the existence of the DVRF has to be assumed. This assumption is numerically validated by comparing the results from Eq. (11.69) with brute force Monte Carlo simulations. It is demonstrated that the DVRF is highly dependent on the standard deviation of the inverse of the elastic modulus but appears to be almost independent of the functional form of the spectral density function, as well as of the marginal pdf of the flexibility. In addition, an integral expression similar to that of Eq. (11.69) is proposed for the mean time history response involving a Dynamic Mean Response Function (DMRF), which is a function similar to the DVRF.

Both integral forms for the mean and variance can be used to efficiently compute the first and second order statistics of the transient system response with reasonable accuracy, together with time dependent spectral-distribution-free upper bounds. They also provide an insight into the mechanisms controlling the uncertainty propagation with respect to both space and time and in particular the mean and variability time histories of the stochastic system dynamic response.

In the continuation of this research, closed form integral expressions in the form of Eq.(11.69) are proposed for the mean and variance of the dynamic response of statically indeterminate beam/frame structures and then extended to more general stochastic finite element systems (i.e. plane stress problems) under dynamic excitations. In this case **DVRF** and **DMRF** vectors are constructed of corresponding DMRF and DVRF for each degree of freedom of the FE system. A general so-called Dynamic FEM fast Monte Carlo simulation (DFEM-FMCS) is provided for the accurate and efficient evaluation of **DVRF** and **DMRF** for stochastic FE systems. Numerical results are presented, demonstrating that, as in the case of classical VRFs, as well as in the case of DMRF and DVRF for single degree of freedom stochastic oscillators (Papadopoulos και Kokkinos 2012), the **DVRF** and **DMRF** matrices

appear to be independent of the functional form of the power spectral density function  $S_{ff}(\boldsymbol{\kappa})$  and appear to be marginally dependent on the pdf of the field modeling the uncertain system parameter. It is reminded that the existence of VRF has been proven only in the case of statically determinate structures under static loading (Shinozuka 1987), (Papadopoulos and Deodatis 2006). In all other cases this existence had to be conjectured and the validity of this conjecture was demonstrated through comparisons of the results obtained from the proposed methodology and brute force MCS. The validity of this conjecture is further boosted in this work by comparing steady state DVRF with respective Generalized VRF (Miranda and Deodatis 2012) for a statically indeterminate frame structure. GVRF involves the computation of different VRFs for corresponding combinations of different marginal pdfs and power spectra and was developed in order to further test the independence of VRF from the stochastic parameters of the problem. It should be mentioned here that the VRF concept was recently extended in (Teferra and Deodatis 2012) for structures with non-linear material properties where a closed form analytic expression of VRF revealed the clear dependence of the integral form of Eq.(11.69) on the standard deviation as well as higher order Power spectra of  $f(x)$ . Finally, realizable upper bounds of the mean and variability dynamic system response are evaluated.

The next part of this dissertation is focusing on stochastic optimization issues with the intent to firstly draw a critical review on classical stochastic optimization procedures and their limitations and secondly take advantage of the established concept of VRF and its features and propose an alternative stochastic optimization formulation which provides the design engineer with more meaningful results.

In recent years, the concept of Robust Design Optimization (RDO) (or Stochastic Optimization or Robust Design) has been introduced in order to deal with intrinsic uncertainties in physical systems that drive the system performance to deviate from the deterministically expected performance into sub-optimal designs, thus neutralizing the effort of the optimization procedure itself. In RDO the analyst is taking into account the stochastic properties of the system variables/parameters and/or system constraints and effectively reaches a safer optimum design which should be less sensitive to random system parameter variations. Various methodologies have been proposed in recent years regarding RDO and its applications to various problems. In classical RDO formulation the goal of minimizing objective function(s) is achieved by considering the mean and/or the standard deviation of a response quantity and trying to establish the designs that minimize the aforementioned quantities considering deterministic or reliability constraints (Park, Lee, et al. 2006), (Beyer and Sendhoff 2007). In Reliability-based Robust Design Optimization (RRDO) (Missoum, Ramu and Haftka 2007), (Lagaros and Papadopoulos 2006), (Allen and Maute 2005) usually care is taken to address the influence of probabilistic constraints as a limit on the probability of failure in the context of RDO of structures. Vulnerability-based Robust Design Optimization (VRDO) is a special case of RRDO where intermediate limit states approaching the probabilistic constraints are also taken into account thus providing possibly crucial

information regarding structural behavior and operational integrity (Papadopoulos and Lagaros 2009).

All previously mentioned RDO formulations are to be carried out in a stochastic finite element method (SFEM) framework so as to efficiently estimate the required quantities associated with system variations. This consideration of system randomness however, for it to be reliable, requires a precise knowledge of probabilistic characteristics (marginal pdf's and correlation structures) of the respective random fields modeling system parameters acquired only through corresponding experimental surveys or otherwise careful assumption/selection of the various statistical properties describing the system variables/parameters uncertainty is necessary. Furthermore it increases substantially the analysis computational cost as any candidate design requires full stochastic analysis for the statistical estimation of various response quantities. In the frequent case that such conditions are not met, similar analyses are implemented based on sensitivity analyses with respect to the aforementioned parameters resulting in a significant further increase of the overall computational cost.

In the current research, an alternative RDO procedure is proposed utilizing Variability Response Functions (VRF) concept in an effort to provide an answer in aforementioned known issues while optimizing a frame structure involving stochastic field material properties with respect to its total weight and robustness of its displacement response. Keeping in mind that in the integral expression of Eq.(11.69) the VRF is assumed to be deterministic what is really beneficial under this assumption is the ability to establish spectral- and pdf-free upper bounds in a straightforward manner described in the following equation as it has been explained in (Papadopoulos, Deodatis and Papadrakakis 2005):

$$Var(\mathbf{u}) \leq VRF(\kappa^{\max}, \sigma_{ff}) \sigma_{ff}^2 \quad (11.70)$$

where  $VRF(\kappa^{\max}, \sigma_{ff})$  is the maximum value of the VRF attained at some wave number  $\kappa^{\max}$ . Therefore, setting maximum VRF value as an objective function accounting for system response robustness, in addition to the total weight, the system is ensured to exhibit, for a given weight class, the lowest possible variance response under conditions imposed by the worst possible stochastic field. The worst possible stochastic field for a particular design candidate is determined by means of Eq. (11.70) i.e. it is a stochastic field with a monochromatic spectral density function (SDF) concentrated at  $\kappa^{\max}$  (Papadopoulos, Deodatis and Papadrakakis 2005). The optimum design candidate for this particular weight class is the one that minimizes the respective  $VRF(\kappa^{\max}, \sigma_{ff})$  value. Repeating this process for all possible weight classes one can create a two dimensional Pareto front for two objective functions: the weight and the system variance response accruing from Eq. (11.70).

In classical RDO formulation, optimization is performed for an a priori selected stochastic field. In real life applications however correlation structure of the uncertain system parameter is rarely known thus rendering such an optimization procedure redundant. Consequently the designer is obliged to conduct multiple such optimization procedures to shield the designed

system from all contingencies. By using the proposed methodology this problem is overcome because each design candidate is evaluated based on its performance under the worst case scenario determined for the specific design. Effectively the designer is ensured that the system will have the best possible performance at the worst possible conditions.

The advantages of using the proposed methodology over traditional Robust Design Optimization are illustrated through an application to a frame-type structure where it is demonstrated that the designs achieved through classical RDO for a given stochastic field description are not optimal if a variation on the spectral properties of the random field modeling the system uncertainty occurs. On the other hand optimal designs obtained with the VRF-based RDO remain optimum for the worst case scenario stochastic fields. In order to demonstrate this, a bi-objective function is formulated taking into account uncertainties in the material properties modeled as random fields. Deterministic constraints of maximum stress and displacement response are applied. A Pareto front is initially constructed through a classical RDO formulation and multi-objective Genetic Algorithm solver for the two conflicting objective functions, namely the total structural weight and the system response variability, for a given stochastic field with a classical Robust Design Optimization formulation. Then, maximum possible variances of the selected designs are computed from the respective maximum values (see Eq. (11.70)) of the corresponding Variability Response Functions characteristic to these designs. The resulting front is then compared to a new Pareto front in which the second objective function is the maximum possible system variance which can be readily obtained by minimizing the maximum value of the Variability Response Function  $\min VRF(\kappa^{\max}, \sigma_{ff})$ . The former classical RDO front proves to be, as expected, sub-optimal to the VRF-based one since the latter is by definition independent of the probability distribution and the spectral density used to model system's uncertainty. It is mentioned that the generated front and the respective proposed designs are referring to a variety of stochastic fields in contrast to the classical RDO. It is also clarified that the proposed designs are not necessarily optimal when examined under the scope of only one predesignated stochastic field. In the case that an optimization is carried out for a specific correlation structure the resulting design selection will be suboptimal with respect to any other correlation structure.

## 1.2 OUTLINE

This thesis is organized in seven chapters organized as follows:

Chapter 2 offers the reader elements of random variables and stochastic processes theory. Basic principles of probability theory are mentioned and most commonly used distribution and density functions as well as the meaning of statistical properties and their definition. Further on, stochastic fields are introduced together with important properties such as correlation structure, ergodicity, homogeneity and a distinction is made in Gaussian and non-Gaussian fields. Also a paragraph is dedicated to discrete random fields particularly useful in computational applications.

Chapter 3 is presenting the concept of the Mean and Variability Response Functions as developed in the past for statically determinate and indeterminate structures. A numerical example with results at the end of this chapter showcases the potential of this methodology as established in previous research and highlights the core conceptual and computational steps utilized and extended in the original research presented in the following chapters of this thesis.

Chapter 4 deals with the extension of the VRF and MRF concept at first to single d.o.f. oscillators. After an introduction and the description of the procedure of a stochastic single dof oscillator dynamic analysis with brute force Monte Carlo simulation, the numerical methodology of Fast Monte Carlo Simulation is presented to calculate DVRF and DMRF for efficient estimation of systems responses and bounds. In the following, a numerical demonstration is presented for three different load cases exhibiting the method's advantages and accuracy by comparing its results to respective Monte Carlo simulation runs.

In the continuation of the chapter, the application of previously proposed methodology is presented to multiple dof beam and plain stress Finite Element systems. Apart from establishing the accuracy of the results with brute force Monte Carlo Simulation runs as benchmark, further validation of the independence of the VRF from the system's correlation structure is given utilizing the GVRF methodology.

Chapter 5 is making a concise recap of most usually applied in practice and academic research Robust Design Optimization procedures while at the same time exploring fundamental concepts and strategies in this field.

Chapter 6 is addressing an integration of the VRF concept with Robust Design leading to an original alternative proposition for performing optimization in a stochastic context. Classical Robust Design Optimization and estimation of system response using VRF are briefly explained. Then the formulation of the Robust Design Optimization using VRF is presented and the description of the Genetic Algorithm implemented. Finally, a numerical example showcasing the potential of the new formulation is presented.

The last chapter, chapter 7, is discussing the conclusions drawn from the research presented in previous chapters and summarizing the innovative contributions of this PhD thesis.



## CHAPTER 2

# 2 RANDOM VARIABLES AND STOCHASTIC PROCESSES

## 2.1 PROBABILITY THEORY

The purpose of the probability theory is to effectively describe and analyze random phenomena by attributing to them certain averages that remain unchanged and tend to approach a constant value as the number of observations increases. The probability theory was born of the need to deal with problems related to gambling and games of chance in the middle of the 17<sup>th</sup> century by Pierre de Fermat (1601-1665), Blaise Pascal (1623-1662), and Christian Huygens (1629-1695). Later Jacob Bernoulli (1654-1705), Abraham De Moivre (1667-1754), Thomas Bayes (1702-1761), Pierre Simon Laplace (1749-1827), Johann Friedrich Carl Gauss (1777-1855), Simeon Denis Poisson (1781-1840) contributed in setting the early foundations of probability theory and the representatives of the Russian school P.L. Chebyshev (1821-1894), A. Markov (1856-1922) and A.M. Lyapunov (1857-1918) helped in developing the theory with important works dealing with the law of large numbers. Andrei Nikolaevich Kolmogorov along with Paul Levy in the 1930s established the connection of probability theory and the mathematical theory of sets and functions en route of founding the deductive theory by means of the axiomatic definition of probability. In this manuscript this definition of probability is adopted.

Deductive probability theory implements notions and axioms of the set theory. The set theory introduces certain properties such as the following:

*Transitivity* If  $b \subset B$  and  $B \subset A$  then  $b \subset A$

*Equality*  $A = B$  if and only if  $A \subset B$  and  $B \subset A$

*Unions and intersections* The union of two sets is a set containing all the elements of these two sets. This set is written

$$A + B \text{ or } A \cup B \quad (2.1)$$

The intersection of two sets is the set containing only the elements that are common for the two sets. It is written as follows

$$AB \text{ or } A \cap B \quad (2.2)$$

*Mutually exclusive sets* are two sets if they have no common elements

$$AB = \{\emptyset\} \quad (2.3)$$

*Complement set*  $\bar{A}$  of a set  $A$  is the set containing all the elements of the probability space that are not contained in set  $A$ . That is

$$A + \bar{A} = \Omega \quad A\bar{A} = \{\emptyset\} \quad \bar{\bar{A}} = A \quad \bar{\Omega} = \{\emptyset\} \quad \overline{\{\emptyset\}} = \Omega \quad (2.4)$$

*De Morgan's law*

$$\overline{A+B} = \bar{A}\bar{B} \quad \overline{AB} = \bar{A} + \bar{B} \quad (2.5)$$

The axiomatic definition of probability is based on the following three postulations: Every event  $A$  has a probability  $P(A)$  assigned to it for which the following is true:

$$P(A) \geq 0 \quad (2.6)$$

If  $\Omega$  is the probability space of all possible events then:

$$P(\Omega) = 1 \quad (2.7)$$

For any given mutually exclusive events  $A, B$  the following is true:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) \quad (2.8)$$

All following properties are derived by the previous three axioms of probability theory.

- i. The probability of the impossible event is 0:

$$P\{\emptyset\} = 0 \quad (2.9)$$

- ii. For any  $A$ ,

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) \leq 1 \quad (2.10)$$

- iii. For any  $A$  and  $B$ ,

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) \leq P(A) + P(B) \quad (2.11)$$

### 2.1.1 CONDITIONAL PROBABILITY & BAYES' THEOREM

Conditional probability of an event  $A$  assuming  $M$ , denoted by  $P(A|M)$ , is by definition the ratio

$$P(A|M) = \frac{P(AM)}{P(M)} \quad (2.12)$$

where we assume that  $P(M)$  is not 0. It is straightforward that:

$$\text{If } M \subset A \text{ then } P(A|M) = 1 \quad (2.13)$$

because  $AM = M$ . Also

$$\text{if } A \subset M \text{ then } P(A|M) = \frac{P(A)}{P(M)} \geq P(A) \quad (2.14)$$



*Total Probability Theorem:* If  $U = [A_1, \dots, A_n]$  is a partition of  $\Omega$  and  $B$  is an arbitrary event then

$$P(B) = P(B|A_1)P(A_1) + \dots + P(B|A_n)P(A_n) \quad (2.15)$$

*Bayes' Theorem:* If  $U = [A_1, \dots, A_n]$  is a partition of  $\Omega$  and  $B$  is an arbitrary event then

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{P(B|A_1)P(A_1) + \dots + P(B|A_n)P(A_n)} \quad (2.16)$$

*Independence:* Two events  $A$  and  $B$  are called independent if

$$P(AB) = P(A)P(B) \quad (2.17)$$

According to **the law of large numbers** (owed to Bernoulli) for an event  $A$  with probability of occurrence equal to  $p$ , if the number of times  $A$  occurs in  $n$  trials is  $k$  then

$$P\left\{\left|\frac{k}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} \rightarrow 1 \quad \text{as } n \rightarrow \infty \quad (2.18)$$

## 2.1.2 RANDOM NUMBERS GENERATION

Answering to the question of when a sequence of numbers is called random we will give two definitions; a conceptual one and an empirical one.

### CONCEPTUAL DEFINITION

A sequence of numbers  $x_i$  is called random if it equals the samples  $x_i = \mathbf{x}_i(\zeta)$  of a sequence  $\mathbf{x}_i$  of i.i.d. random variables  $\mathbf{x}_i$  defined in the space of repeated trials

### EMPIRICAL DEFINITION

A sequence of numbers  $x_i$  is called random if its statistical properties are the same as the properties of random data obtained from a random experiment.

Random numbers used in Monte Carlo calculations are generated mainly by computer programs; however, they can also be generated as observations of random data obtained from real experiments.

The most general algorithm for generating a random number sequence  $z_i$  is an equation of the form

$$z_n = f(z_{n-1}, \dots, z_{n-r}) \quad \text{mod } m \quad (2.19)$$

where  $f(z_{n-1}, \dots, z_{n-r})$  is a function depending on the  $r$  most recent past values of  $z_n$ . In this notation,  $z_n$  is the remainder of the division of the number  $f(z_{n-1}, \dots, z_{n-r})$  by  $m$ . This is a nonlinear recursion expressing  $z_n$  in terms of the constant  $m$ , the function  $f$ , and the initial conditions  $z_1, \dots, z_{r-1}$ . The quality of the generator depends on the form of the function  $f$ . It

might appear that good random number sequences result if this function is complicated. Experience has shown, however, that this is not the case. Most algorithms in use are linear recursions of order 1.

## 2.2 RANDOM VARIABLES

A random variable  $X$  is the process that pairs events  $\zeta$  from a set of events  $\mathfrak{S}$  to certain numbers  $X(\zeta)$  from a set  $\Omega \in \mathfrak{R}$  in a random manner. Every event  $\zeta$  from the set  $\mathfrak{S}$  is matched with a probability  $P(X)$  which is a non-negative number.

### 2.2.1 DISTRIBUTION AND DENSITY FUNCTION

The distribution function of  $X$  is defined as

$$F_X(X) = P(X \leq x), x \in \mathfrak{R} \cup \{-\infty, +\infty\} \quad (2.20)$$

The distribution function possesses the following properties:

$$\text{i.} \quad F(+\infty) = 1, F(-\infty) = 0 \quad (2.21)$$

$$\text{ii.} \quad \text{If } x_1 < x_2 \text{ then } F(x_1) \leq F(x_2) \quad (2.22)$$

$$\text{iii.} \quad \text{If } F(x_0) = 0 \text{ then } F(x) = 0 \text{ for every } x \leq x_0 \quad (2.23)$$

$$\text{iv.} \quad P\{X > x\} = 1 - F(x) \quad (2.24)$$

$$\text{v.} \quad P\{x_1 < X \leq x_2\} = F(x_2) - F(x_1) \quad (2.25)$$

The density function of  $X$  is defined as the derivative of  $F(x)$

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} \quad (2.26)$$

The following properties apply for the derivative function  $f(x)$

$$\text{i.} \quad f(x) \geq 0 \quad (2.27)$$

$$\text{ii.} \quad F(x) = \int_{-\infty}^x f(\xi) d\xi \quad (2.28)$$

$$\text{iii.} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1 \quad (2.29)$$

$$\text{iv.} \quad P\{x_1 < X \leq x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \quad (2.30)$$

A random variable is called *normal* or *Gaussian* if its density function has the following form

$$f(x) = \frac{1}{\sigma} g\left(\frac{x-\eta}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\eta)^2/2\sigma^2} \quad (2.31)$$

Another very commonly used density function is the *uniform* distribution density function whose formula is written below, whereas random variables following this distribution are called *uniform*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x_2 - x_1} & x_1 \leq x \leq x_2 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases} \quad (2.32)$$

If  $z$  is  $N(0,1)$  and  $x = e^{a+bz}$ , then  $x$  has a lognormal distribution:

$$f_x(x) = \frac{1}{bx\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(\ln x - a)^2}{2b^2}\right\} \quad (2.33)$$

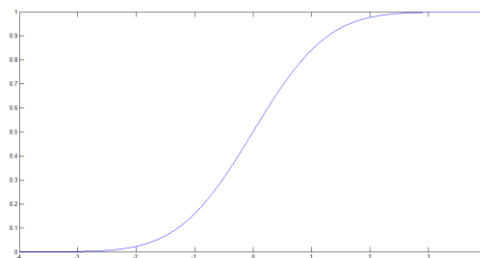
A random variable  $x$  is said to have beta distribution with nonnegative parameters  $\alpha$  and  $\beta$  if

$$f_x(x) = \begin{cases} \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2.34)$$

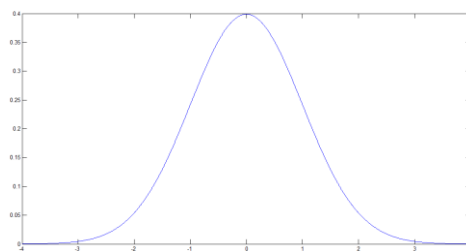
where the beta function  $B(\alpha, \beta)$  is defined as

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx = 2 \int_0^{\pi/2} (\sin \theta)^{2\alpha-1} (\cos \theta)^{2\beta-1} d\theta \quad (2.35)$$

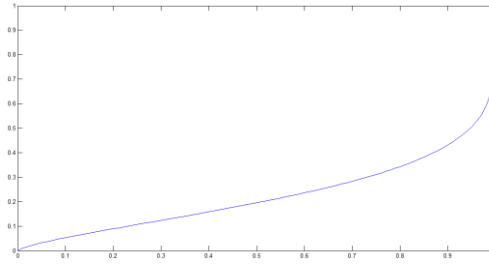
Below are showcased some typical distribution functions and their respective density functions.



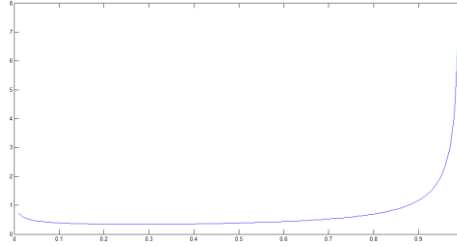
**Figure 2.1** Distribution function of a Gaussian random variable



**Figure 2.2** Density function of a Gaussian random variable



**Figure 2.3** Distribution function of a random variable following Beta distribution with parameters  $\alpha=0.7, \beta=0.2$



**Figure 2.4** Density function of a random variable following Beta distribution with parameters  $\alpha=0.7, \beta=0.2$

### 2.2.2 PDF TRANSFORM

Consider a random variable  $X$  and its distribution function  $F_X(x)$ . We wish to find a function  $g(X)$  such that the distribution of the random variable  $Y = g(X)$  equals a specified function  $F_Y(y)$ .

- I. **From  $F_X(x)$  to a uniform distribution.** Given a random variable  $X$  with distribution  $F_X(x)$ , we wish to find a function  $g(x)$  such that the random variable  $U = g(X)$  is uniformly distributed in the interval  $(0,1)$ . We maintain that  $g(x) = F_X(x)$ , that is, if

$$U = F_X(X) \quad \text{then } F_U(u) = u \text{ for } 0 \leq u \leq 1 \quad (2.36)$$

The random variable  $U$  can be considered as the output of a nonlinear system with input  $X$  and transfer characteristic  $F_X(x)$ . Therefore if we use  $U$  as the input to another system with transfer characteristic the inverse  $F_X^{(-1)}(u)$  of the function  $u = F_X(x)$ , the resulting output will equal  $X$ :

$$\text{If } X = F_X^{(-1)}(U) \text{ then } P\{X \leq x\} = F_X(x) \quad (2.37)$$

- II. **From uniform to  $F_Y(y)$ .** Given a random variable  $U$  with uniform distribution in the interval  $(0,1)$ , we wish to find a function  $g(u)$  such that the distribution of the random variable  $Y = g(U)$  is a specified function  $F_Y(y)$ . We maintain that  $g(u)$  is the inverse of the function  $u = F_Y(y)$ :

$$\text{If } y = F_Y^{(-1)}(U) \text{ then } P\{Y \leq y\} = F_Y(y) \quad (2.38)$$

III. **From  $F_X(x)$  to  $F_Y(y)$ .** To solve this problem, we form the random variable  $U = F_X(X)$  as in (2.37) and the random variable  $Y = F^{(-1)}(U)$  as in (2.37). Combining the two we conclude that

$$\text{If } Y = F_Y^{(-1)}(F_X(X)) \text{ then } P\{Y \leq y\} = F_Y(y) \quad (2.39)$$

### 2.2.3 RANDOM NUMBERS WITH ARBITRARY DISTRIBUTION

In the following we will present a method to produce random numbers with a desired distribution. If  $x_i$  are the samples of the random variable  $X$ , then  $y_i = g(x_i)$  are the samples of the random variable  $Y = g(X)$ . For example, if  $x_i$  is a random number sequence with distribution  $F_X(x)$ , then  $y_i = a + bx_i$  is a random number sequence with distribution  $F_X[(y-a)/b]$  if  $b > 0$ , and  $1 - F_X[(y-a)/b]$  if  $b < 0$ . From this it follows, for example, that  $v_i = 1 - u_i$  is a random number sequence uniform in the interval  $(0,1)$ .

**Percentile transformation method.** Consider a random variable  $X$  with distribution  $F_X(x)$ . Thus, to find a random number sequence  $x_i$  with distribution a given function  $F_X(x)$ , it suffices to determine the inverse of  $F_X(x)$  and to compute  $F_X^{(-1)}(u_i)$ . Note that the numbers  $x_i$  are the  $u_i$  percentiles of  $F_X(x)$ .

### 2.2.4 MEAN, VARIANCE AND HIGHER MOMENTS

The *expected value* or *mean* of a random variable with a known distribution is defined as the integral of the product of its density function times the variable itself

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \quad (2.40)$$

The *variance* of a random variable  $X$  is defined as the integral of the product of the square distance of the variable itself from its mean and its density function

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x)dx \quad (2.41)$$

where  $\mu = E[X]$  and  $\sigma$  is a positive number called the *standard deviation* of the random variable. The variance  $\sigma^2$  can also be expressed in the following sense

$$\sigma^2 = E[X^2] - E^2[X] \quad (2.42)$$

The *mean*  $\mu$  of a random variable is also called the first moment of the random variable. Also the *variance*  $\sigma^2$  is called the second central moment of the random variable. In general a random variable can be characterized by various moments

*Moments*

$$m_n = E[X^n] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x) dx \quad (2.43)$$

*Central moments*

$$\mu_n = E[(x - \mu)^n] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \eta)^n f(x) dx \quad (2.44)$$

*Absolute moments*

$$E[|X|^n] \quad E[|X - \mu|^n] \quad (2.45)$$

*Generalized moments*

$$E[(X - a)^n] \quad E[|X - a|^n] \quad (2.46)$$

A comprehensive knowledge of the moments of a random variable can provide us with additional information of the form its probability density function possesses, even determine it uniquely under certain conditions if  $m_n$  is known for every  $n$ .

### 2.2.5 SEQUENCES OF RANDOM VARIABLES

It is often useful to describe phenomena or natural processes by means of a series of *random variables* with common or diverse attributes. In this case we define a *random vector* to be a vector

$$X = [x_1, \dots, x_n] \quad (2.47)$$

whose components  $x_i$  are *random variables*.

The  $x_i$ 's are mutually independent if the events  $\{X_1 \leq x\}, \dots, \{X_n \leq x_n\}$  are independent. Hence

$$\begin{aligned} F(x_1, \dots, x_n) &= F(x_1) \dots F(x_n) \\ f(x_1, \dots, x_n) &= f(x_1) \dots f(x_n) \end{aligned} \quad (2.48)$$

The covariance  $C$  or  $C_{xy}$  of two *random variables*  $X$  and  $Y$  is by definition equal to

$$C = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] \quad (2.49)$$

The *correlation coefficient*  $r$  or  $r_{XY}$  of  $X$  and  $Y$  is defined as

$$r = \frac{C}{\sigma_X \sigma_Y} \quad (2.50)$$

Noted be that

$$|r| \leq 1 \quad |C| \leq \sigma_X \sigma_Y \quad (2.51)$$

For two *random variables* the joint distribution is denoted as

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) \quad (2.52)$$

Consequently the joint density of the two *random variables* will be

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} \quad (2.53)$$

After that it readily follows that

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(\alpha, \beta) d\alpha d\beta \quad (2.54)$$

Also we maintain that the *marginal distribution* and the *marginal density* of  $X, Y$  are given by

$$\begin{aligned} F_X(x) &= F(x, \infty) & F_Y(y) &= F(\infty, y) \\ f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy & f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx \end{aligned} \quad (2.55)$$

Consequently for multiple random variables the above relations are transformed adequately as follows

$$\begin{aligned} F_X(x) &= F_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) \\ f_X(x) f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) &= \frac{\partial^n F_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1 \dots \partial x_n} \\ f_{X_1} &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) dx_2 \dots dx_n \end{aligned} \quad (2.56)$$

### The Central Limit Theorem

Let  $X = X_1 + \dots + X_n$  be a *random variable* comprised of a sum of  $n$  independent identically distributed *random variables*  $X_i$ . The *central limit theorem* states that as  $n \rightarrow \infty$

$$F(X) \rightarrow N(\mu, \sigma^2) \quad (2.57)$$

where  $\mu = \mu_1 + \dots + \mu_n$  is the mean of  $X$ ,  $\mu_i$  being the mean of the respective  $X_i$ , and  $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2$ ,  $\sigma_i^2$  the variances of the respective *random variables*. This important theorem establishes the significance of the *Gaussian* distribution in the study of random procedures or phenomena.

## 2.3 STOCHASTIC PROCESSES, STOCHASTIC FIELDS

Following a definition similar to the one adopted in the case of a *random variable* we define a *random process* or a *stochastic process* as a way to match outcomes  $\zeta$  of a set of events  $\mathfrak{S}$  to certain functions  $X(t, \zeta)$  from a set  $\Omega$ . Usually notation  $t$  refers to a process evolving in the time domain. In the case when  $t$  refers to an evolution in spatial domain the term *random field* or *stochastic field* is reserved.

### 2.3.1 STATISTICAL PROPERTIES OF STOCHASTIC PROCESSES

For a given  $t$ , the stochastic process  $X(t)$  is a *random variable* for which the distribution function is

$$F(x,t) = P\{X(t) \leq x\} \quad (2.58)$$

Similarly to the previous, it also holds that its density function is

$$f(x,t) = \frac{\partial F(x,t)}{\partial x} \quad (2.59)$$

$F(x,t)$  is called the *first-order distribution* of  $X(t)$  while  $f(x,t)$  *first-order density*. Its *second-order distribution* and *density* respectively are joint distributions and densities

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2; t_1, t_2) &= P\{X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2\} \\ f(x_1, x_2; t_1, t_2) &= \frac{\partial^2 F(x_1, x_2; t_1, t_2)}{\partial x_1 \partial x_2} \end{aligned} \quad (2.60)$$

In many cases instead of having knowledge of the full extent of the statistical properties of a *stochastic process* only certain quantities are used such as the expected value of  $X(t)$  and  $X^2(t)$ .

*Mean*

$$\mu(t) = E[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x,t)dx \quad (2.61)$$

*Autocorrelation*

$$R(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2 \quad (2.62)$$

When  $t_1 = t_2$  the *autocorrelation* is called the *average power* of  $X(t)$ .

The *cross-correlation* of two processes  $X(t)$  and  $Y(t)$  is the function

$$R_{XY}(t_1, t_2) = E\{X(t_1)Y^*(t_2)\} = R_{YX}^*(t_2, t_1) \quad (2.63)$$

Then the *cross-covariance* is defined as follows

$$C_{XY}(t_1, t_2) = R_{XY}(t_1, t_2) - \eta_X(t_1)\eta_Y^*(t_2) \quad (2.64)$$

Two processes  $X(t)$  and  $Y(t)$  are called *orthogonal* if

$$R_{XY}(t_1, t_2) = 0 \text{ for every } t_1 \text{ and } t_2 \quad (2.65)$$

and *uncorrelated* if



$$C_{XY}(t_1, t_2) = 0 \text{ for every } t_1 \text{ and } t_2 \quad (2.66)$$

In general, the values  $X(t_1)$  and  $X(t_2)$  of a stochastic process  $X(t)$  are statistically dependent for  $t_1 \neq t_2$ . However, in most cases this dependence decreases as  $|t_1 - t_2| \rightarrow \infty$ . This leads to the following concept: A stochastic process is called *a-dependent* if all its values  $X(t)$  for  $t < t_0$  and for  $t > t_0 + a$  are mutually *independent*. Then

$$C(t_1, t_2) = 0 \text{ for } |t_1 - t_2| > a \quad (2.67)$$

A process  $w(t)$  *white noise* if its values  $w(t_i)$  and  $w(t_j)$  are uncorrelated for every  $t_i \neq t_j$ . If  $w(t_i)$  and  $w(t_j)$  are also independent then  $w(t)$  will be called *strictly white noise*.

### 2.3.2 HOMOGENEOUS RANDOM FIELDS

A *random field*  $X(t)$  is *strictly homogeneous* if its statistical properties remain unchanged with respect to a shift in their origin. In other words *random fields*  $X(t)$  and  $X(t+c)$  must have identical statistical properties.

$$f(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = f(x_1, \dots, x_n; t_1 + c, \dots, t_n + c) \quad (2.68)$$

for any  $c$ . From the above relation it follows that the *mean* and the *variance* of such a field are invariant of  $t$ , hence constant, while the *autocorrelation function* is only dependent upon  $\tau = t_2 - t_1$ .

Another class of *homogeneity* are the *weakly homogeneous fields*. Their mean has a constant value

$$E\{X(t)\} = \mu \quad (2.69)$$

and their autocorrelation function depends solely on  $\tau$ .

$$E[X(t+\tau)X^*(t)] = R(\tau) \quad (2.70)$$

### 2.3.3 THE POWER SPECTRUM

In the context of Fourier Analysis the *power spectrum* is considered to involve transforms of averages. Formally, for a *weakly homogeneous random field*  $X(t)$  it is defined as the Fourier transform  $S(\omega)$  of its autocorrelation  $R(\tau) = E[X(t+\tau)X^*(t)]$ :

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (2.71)$$

$S(\omega)$  is a real function of  $\omega$ . The inverse Fourier transform is also valid. Thus

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \quad (2.72)$$

In the case that  $X(t)$  is a real *random field*

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) \cos \omega \tau d\tau = 2 \int_0^{\infty} R(\tau) \cos \omega \tau d\tau \\ R(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \cos \omega \tau d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S(\omega) \cos \omega \tau d\omega \end{aligned} \quad (2.73)$$

In particular if  $X(t)$  is white noise with average power  $q$ , then

$$R_{xx}(\tau) = q\delta(\tau) \quad S_{xx}(\omega) = q \quad (2.74)$$

Noted be that the *power spectrum* function or else the *power spectral density* is a positive function.

### 2.3.4 ERGODICITY

Let  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  be a probability space, and  $T: \Omega \rightarrow \Omega$  be a measure-preserving transformation (Keane 1991). We say that  $T$  is ergodic with respect to  $\mu$  if one of the following equivalent statements is true (Walters 1982):

- for every  $E \in \Sigma$  with  $T^{-1}(E) = E$  either  $\mu(E) = 0$  or  $\mu(E) = 1$
- for every  $E \in \Sigma$  with  $\mu(T^{-1}(E) \Delta E) = 0$  we have  $\mu(E) = 0$  or  $\mu(E) = 1$  (where  $\Delta$  denotes the symmetric difference)
- for every  $E \in \Sigma$  with positive measure we have  $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}E\right) = 1$
- for every two sets  $E$  and  $H$  of positive measure, there exists an  $n > 0$  such that  $\mu\left((T^{-n}E) \cap H\right) > 0$
- every measurable function  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  with  $f \circ T = f$  is almost surely constant

A homogeneous random field is ergodic if its second-order moment can be estimated readily by a single realization of the fields. I.e.

$$\mu = E[X(t)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt \quad (2.75)$$

$$R(\tau) = E[X(t+\tau)X(t)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t+\tau)x(t) dt \quad (2.76)$$

Knowing a priori that an examined field is ergodic provides the option to easily estimate the statistics of a random field by a single record in space or time domain. While an ergodic field is surely homogeneous the reverse doesn't necessarily hold.

### 2.3.5 GAUSSIAN AND NON GAUSSIAN RANDOM FIELDS

If a random field  $X(t)$  is Gaussian then random variables  $\{X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)\}$  are jointly Gaussian for any  $\{n, t_1, t_2, \dots, t_n\}$ . The mean function  $\mu(t)$  and the autocorrelation function  $R(t_1, t_2)$  suffice to fully determine a Gaussian field. The statistics of a Gaussian field can also be defined given its standard deviation function  $\sigma(t)$  and its autocorrelation coefficient function  $r(t_1, t_2)$ . The marginal *pdf* of a Gaussian random field is

$$f_{X(t)}(x, t) = \frac{1}{\sigma_x(t)\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x - \mu(t))^2}{2\sigma^2(t)}\right] \quad (2.77)$$

Since it is practically impossible to obtain the joint *pdf* for general non-Gaussian random fields, it is possible to define intermediately some non-Gaussian fields with known second order statistics and marginal distribution by a nonlinear transformation of an underlying Gaussian random field  $g(t)$  as follows

$$X(t) = F_{X(t)}^{-1} \cdot \Phi[g(t)] \quad (2.78)$$

where  $\Phi$  is the standard Gaussian cumulative distribution function and  $F$  is the non-Gaussian marginal cumulative distribution function of  $X(t)$ . The autocorrelation function of the translation field is defined as follows

$$R_X^T(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F^{-1}[\Phi(g_1)] F^{-1}[\Phi(g_2)] \cdot g[g_1, g_2; R_g(\xi)] dg_1 dg_2 \quad (2.79)$$

where,  $g_1 = g(t)$ ,  $g_2 = g(t + \xi)$  and  $f[g_1, g_2; R_g(\xi)]$  is the joint density of  $[g_1, g_2]$ . The result of this definition of the autocorrelation function of the translation field is that the marginal distribution of  $X(t)$  and its autocorrelation function or its power spectral density  $S_X(\omega)$  have to be compatible. Otherwise the translation field has to match the target marginal distribution using alternative techniques such as (B. Puig 2002) (M. T. K. Gurley 1997).

## 2.4 DISCRETE RANDOM FIELDS

A discrete random field is a series of *random variables*  $X_n$ . Similarly to the previous its autocorrelation and autocovariance are given by

$$R[n_1, n_2] = E[X_{n_1}, X_{n_2}^*] \quad C[n_1, n_2] = R[n_1, n_2] - \mu[n_1]\mu^*[n_2] \quad (2.80)$$

A random field  $X_n$  is *strictly homogeneous* if its statistical properties are invariant to a shift of the origin. It is *weakly homogeneous* if its mean is constant and

$$R[n + m, n] = E[X_{n+m}, X_n^*] = R[m] \quad (2.81)$$

A *discrete random field* is called *white noise* if it is a sequence of independent identically distributed (i.i.d.) *random variables*. The autocorrelation of a *white-noise* is given by

$$R[n_1, n_2] = \sigma^2 \delta[n_1 - n_2] \quad \text{where } \delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases} \quad (2.82)$$

### 2.4.1 SPECTRAL REPRESENTATION METHOD

Spectral representation method (Shinozuka and Deodatis 1991), in the context of Monte Carlo simulation methodology, is one of the most reliable ways, to solve a large number of stochastic problems involving nonlinearity, system stochasticity, stochastic stability, parametric excitations, etc.

For demonstration purposes assume a one-dimensional univariate (1D-1V) zero mean homogeneous stochastic field  $f_0(t)$  with autocorrelation function  $R_{f_0 f_0}(\tau)$  and a symmetrical power spectral density function  $S_{f_0 f_0}(\omega)$ . Also consider  $f(t)$  to be  $f_0(t)$ 's simulation. According to the spectral representation method  $f_0(t)$  can be simulated by  $f_0(t)$  using the following Fourier series as  $N \rightarrow \infty$ :

$$f(t) = \sqrt{2} \sum_{n=0}^{N-1} A_n \cos(\omega_n t + \Phi_n) \quad (2.83)$$

where

$$A_n = \left( 2S_{f_0 f_0}(\omega_n) \Delta\omega \right)^{1/2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (2.84)$$

$$\omega_n = n\Delta\omega, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (2.85)$$

$$\Delta\omega = \omega_u / N \quad (2.86)$$

and

$$S_{f_0 f_0}(\omega_0 = 0) = 0 \quad (2.87)$$

The  $\omega_u$  value is chosen appropriately so that the power spectral density function  $S_{f_0 f_0}(\omega)$  has faded to zero. A usual criterion for the  $\omega_u$  estimation derives from the following relation:

$$\int_0^{\omega_u} S_{f_0 f_0}(\omega) d\omega = (1 - \varepsilon) \int_0^{\infty} S_{f_0 f_0}(\omega) d\omega \quad (2.88)$$

for  $\varepsilon \ll 1$  (i.e.  $\varepsilon = 0.01, 0.0001$ ). The  $\Phi_n$ 's in Eq.(2.83) are independent random variables distributed randomly in the range  $[0, 2\pi]$ . The simulated function  $f(t)$  is periodic with period  $T_0$ :

$$T_0 = 2\pi / \Delta\omega \quad (2.89)$$

It is also worth noting that  $f(t)$  is asymptotically Gaussian as  $N \rightarrow \infty$  due to the central limit theorem.

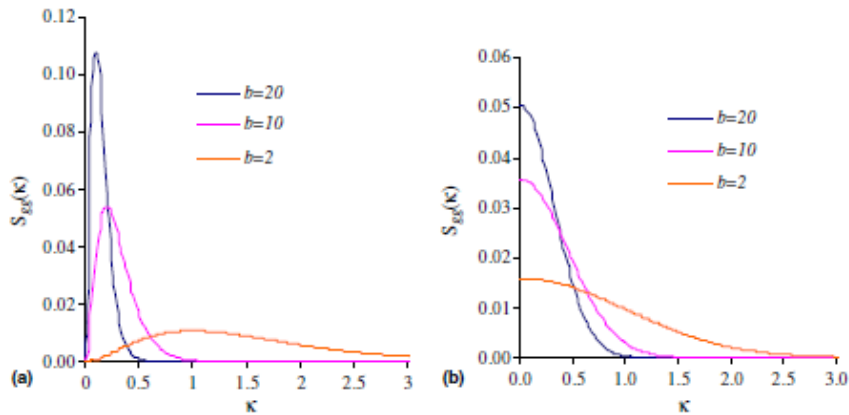
For different sequences of the  $\Phi_n$ 's different realizations  $f^i(t)$  of the simulated function  $f(t)$  can be generated. The condition set in Eq.(2.86) is necessary to ensure ergodicity of the overall procedure for any sample function  $f^i(t)$ . Also, to avoid aliasing  $\Delta t$  step has to be limited by the following rule

$$\Delta t \leq 2\pi / 2\omega_u \quad (2.90)$$

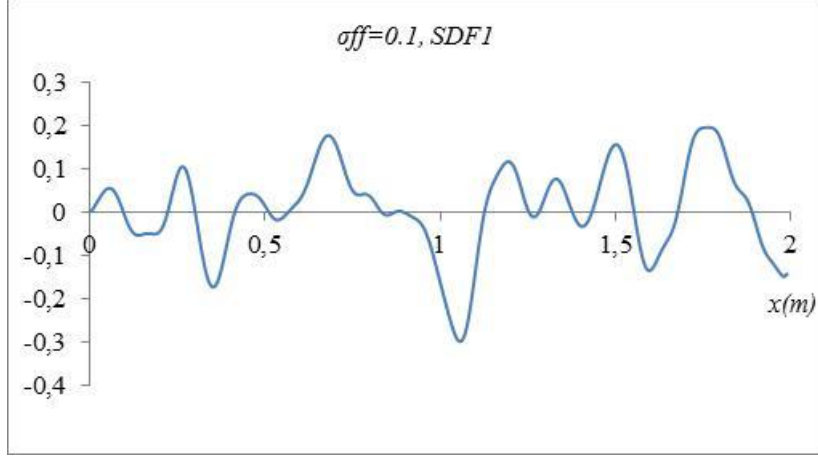
Below spectral density functions SDF1 and SDF2 are plotted for three different values of correlation length parameter  $b$  and for stochastic field standard deviation  $\sigma_{ff} = 0.2$  and in the next figure a sample function using spectral representation.

$$\text{SDF1: } S_{ff}(\kappa) = \frac{1}{4} \sigma_{ff}^2 b^3 \kappa^2 e^{-b|\kappa|} \quad (2.91)$$

$$\text{SDF1: } S_{ff}(\kappa) = \frac{1}{2\pi} \sigma_{ff}^2 \sqrt{\pi b} e^{-\frac{1}{4}b\kappa^2} \quad (2.92)$$



**Figure 2.5** Spectral density functions plotted for three different values of correlation length parameter  $b$ .



**Figure 2.6** Sample function realization with spectral representation using SDF1 for  $\sigma_{ff}=0.1$ .

#### 2.4.2 KARHUNEN-LOEVE EXPANSION

The Karhunen-Loeve (KL) expansion (Grigoriu 2006), (Huang, Quek and Phoon 2001), (M. Loeve 1977) is an alternative procedure of random fields realization. According to KL expansion a one-dimensional random field  $X(t)$  is written as

$$X(t) = m(t) + \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_i} \xi_i(\theta) f_i(t) \quad (2.93)$$

where  $\theta$  is the random event,  $m(t)$  the function of the mean value of the random field and  $\lambda_i$  and  $f_i(t)$  are the eigenvalues and eigenfunctions respectively of its covariance function  $C(t_1, t_2)$ .  $C(t_1, t_2)$  is bounded, symmetric and positive definite. It has the following eigen-decomposition

$$C(t_1, t_2) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i f_i(t_1) f_i(t_2) \quad (2.94)$$

$\lambda_i$ 's and  $f_i(t)$ 's are calculated by solving the homogeneous Fredholm integral equation of the second kind

$$\int_D C(t_1, t_2) f_i(t_1) dt_1 = \lambda_i f_i(t_2) \quad (2.95)$$

where  $D$  is the domain of the random field  $X(t)$ .  $\xi_i(\theta)$ 's are a set of uncorrelated Gaussian random variables given as

$$\xi_i(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \int_D [X(t, \theta) - m(t)] f_i(t) dt \quad (2.96)$$

for which mean and covariance are

$$\begin{aligned} E[\xi_i(\theta)] &= 0 \\ E[\xi_i(\theta)\xi_j(\theta)] &= \delta_{ij} \end{aligned} \tag{2.97}$$

In practical application KL expansion is approximated by  $M$  expansion terms as

$$\hat{X}(t) = m(t) + \sum_{i=1}^M \sqrt{\lambda_i} \xi_i(\theta) f_i(t) \tag{2.98}$$

The variance of the approximation error can be estimated by the following expression

$$\text{Var}[X(t) - \hat{X}(t)] = \sigma^2(t) - \sum_{i=0}^M \lambda_i \phi_i^2(t) \tag{2.99}$$





## 3 STATIC MEAN AND VARIABILITY RESPONSE FUNCTIONS

### 3.1 INTRODUCTION

Over the past two decades a lot of research has been dedicated to the stochastic analysis of structural systems involving uncertain parameters in terms of material or geometry with the implementation of stochastic finite element methodologies (SFEM) to numerically solve the stochastic partial differential equations (PDE's) governing the respective problems. The most commonly used SFEM methods are expansion/perturbation-based (Liu, Belytschko and Mani 1986), (Liu, Belytschko and Mani 1986) and Galerkin-based Spectral SFEM (SSFEM) approaches (Ghanem and Spanos 1991). Although such methods have proven to be highly accurate and computationally efficient for a variety of problems, there is still a wide range of problems in stochastic mechanics involving combinations of strong non-linearities and/or large variations of system properties as well as non-Gaussian system properties that can be solved with reasonable accuracy only through a computationally expensive Monte Carlo simulation approach (Grigoriu 2006), (Matthies, et al. 1997), (Stefanou 2009) limited works are dealing with the dynamic propagation of system uncertainties, most of them reducing the stochastic dynamic PDE's to a linear random eigenvalue problem (Ghosh D 2005), (G. I. Schueller 2011).

In all aforementioned cases, the spectral/correlation characteristics and the marginal probability distribution function (*pdf*) of the stochastic fields describing the uncertain system parameters are required in order to estimate the response variability of a stochastic static or dynamic system. As there is usually a lack of experimental data for the quantification of such probabilistic quantities, a sensitivity analysis with respect to various stochastic parameters is often implemented. In this case, however, the problems that arise are the increased computational effort, the lack of insight on how these parameters control the response variability of the system and the inability to determine bounds of the response variability.

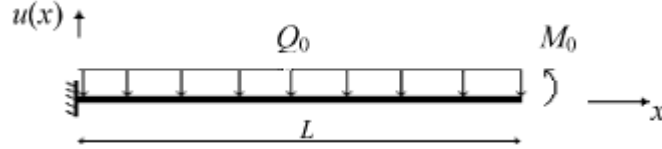
In this framework and to tackle the aforementioned issues, the concept of the variability response function (VRF) has been proposed in the late 1980s (M. Shinozuka 1987) , along with different aspects and applications of the VRF (Wall and Deodatis 1994), (Graham and Deodatis 1998). A development of this approach was presented in a series of papers (Papadopoulos, Deodatis and Papadrakakis 2005), (Papadopoulos and Deodatis 2006) and (Papadopoulos, Papadrakakis and Deodatis 2006) where the existence of closed-form integral expressions for the variance of the response displacement of the form

$$Var[u] = \int_{-\infty}^{\infty} VRF(\kappa, \sigma_{ff}) S_{ff}(\kappa) d\kappa \quad (3.1)$$

was demonstrated for linear stochastic systems under static loads using a flexibility-based formulation.

### 3.2 STATICALLY DETERMINATE BEAMS

For elaboration purposes consider the statically determinate cantilever beam of length  $L$  shown in Fig. 1, with a uniformly distributed load  $Q_0$  and a concentrated moment  $M_0$  imposed at the free end.



**Figure 3.1** Statically determinate beam

The loads are assumed to be static and deterministic. The inverse of the elastic modulus of the beam is assumed to vary randomly along its length according to the following expression:

$$\frac{1}{E(x)} = F_0(1 + f(x)) \quad (3.2)$$

where  $E$  is the elastic modulus,  $F_0$  is the mean value of the inverse of  $E$ , and  $f(x)$  is a zero-mean homogeneous stochastic field modeling the variation of  $1/E$  around its mean value  $F_0$ . The response displacement of the beam  $u(x)$  is given by

$$u(x) = -\frac{F_0}{I} \int_0^x (x - \xi) M(\xi) (1 + f(\xi)) d\xi = -\frac{F_0}{I} \int_0^x h(x, \xi) M(\xi) (1 + f(\xi)) d\xi \quad (3.3)$$

where  $h(x, \xi)$  is the Green function of the beam,  $I$  is the moment of inertia, and  $M(x)$  is the bending moment function given by

$$M(x) = -\frac{Q_0}{2} (L - x)^2 + M_0 \quad (3.4)$$

Using Eq. (3.3), the mean of  $u(x)$  is expressed as

$$E[u(x)] = -\frac{F_0}{I} \int_0^x h(x, \xi) M(\xi) E[(1 + f(\xi))] d\xi \quad (3.5)$$

and the mean square as

$$E[u^2(x)] = \frac{F_0^2}{I} \int_0^x \int_0^x h(x, \xi_1) h(x, \xi_2) M(\xi_1) M(\xi_2) R_{ff}(\xi_1 - \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \quad (3.6)$$

The response variance readily accrues as

$$\text{Var}[u(x)] = E[u^2(x)] - E[u(x)]^2 = \frac{F_0^2}{I} \int_0^x \int_0^x h(x, \xi_1) h(x, \xi_2) M(\xi_1) M(\xi_2) R_{ff}(\xi_1 - \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \quad (3.7)$$

where  $R_{ff}(\xi_1 - \xi_2)$  denotes the autocorrelation function of the stochastic field  $f(x)$ . Then, applying the Wiener–Khintchine transform to the autocorrelation function in Eq. (3.7), the variance of

the response displacement can be written as

$$\text{Var}[u(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} \text{VRF}(x, \kappa) S_{ff}(\kappa) d\kappa \quad (3.8)$$

where the variability response function (VRF) is given by

$$\text{VRF}(x, \kappa) = \left| \frac{F_0}{I} \int_0^x h(x, \xi) M(\xi) e^{i\kappa\xi} d\xi \right|^2 \quad (3.9)$$

The basic difference of this approach with respect to previous work is that by using a flexibility-based formulation, no approximations were involved in the derivation of the resulting integral expression in Eq.(3.1).

### 3.3 STATICALLY INDETERMINATE BEAMS

In the case of a statically indeterminate beam, such as the one depicted in Fig.3.1 It was shown that the VRF depends on the stochastic field standard deviation but appears to be independent of the functional form of the spectral density function modeling the inverse of the elastic modulus. The existence however of this integral expression had to be conjectured for statically indeterminate as well as for general stochastic finite element systems. A rigorous proof of such existence is available only for statically determinate systems in which case VRF is also independent of  $\sigma_{ff}$  (Papadopoulos, Deodatis and Papadrakakis 2005). More specifically consider the statically indeterminate beam of length  $L$  shown in Fig. 3.2, with a deterministic uniformly distributed load  $Q_0$ . The inverse of the elastic modulus is again assumed to vary randomly along the length of the beam according to Eq.(3.1).

Using a force (flexibility) method formulation, the response displacement of this beam  $u(x)$  can be expressed as

$$u(x) = u_0(x) - Ru_1(x) \quad (3.10)$$

where  $u_0(x)$  is the deflection of the associated statically determinate beam with uniform load  $Q_0$  obtained by removing the simple support at the right end of the beam in Fig. 3.2,  $u_1(x)$  is the deflection of the same associated statically determinate beam due to a unit concentrated force acting at  $x=L$ , and  $R$  is the redundant force (vertical reaction at the right end of the beam in Fig. 3.2).

Eq.(3.10) is then rewritten

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{F_0 Q_0}{2I} \int_0^x (x-\xi)(L-\xi)^2 (1+f(\xi)) d\xi - \frac{F_0 R}{I} \int_0^x (x-\xi)(L-\xi)(1+f(\xi)) d\xi \\ &= \int_0^x g_1(x, \xi)(1+f(\xi)) d\xi + \int_0^x g_2(x, \xi) R(1+f(\xi)) d\xi \end{aligned} \quad (3.11)$$

where

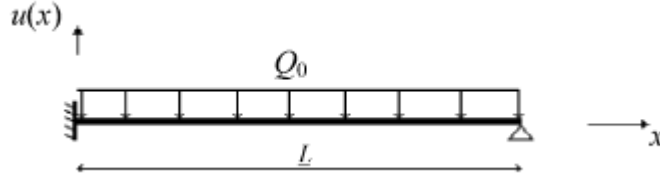
$$g_1(x, \xi) = \frac{F_0 Q_0}{2I} (x - \xi)(L - \xi)^2 \text{ and } g_2(x, \xi) = -\frac{F_0}{I} (x - \xi)(L - \xi) \quad (3.12)$$

The redundant force  $R$  is a random variable that can be computed from the boundary condition at  $x=L$  as

$$u(x=L) = 0 \Rightarrow u_0(x=L) = Ru_1(x=L) \Rightarrow R = \frac{\frac{Q_0}{2} \int_0^L (L - \xi)^3 (1 + f(\xi)) d\xi}{\int_0^L (L - \xi)^2 (1 + f(\xi)) d\xi} \quad (3.13)$$

Consequently the mean value of  $u(x)$  is given by

$$E[u(x)] = \int_0^x g_1(x, \xi) d\xi + \int_0^x g_2(x, \xi) E[R(1 + f(\xi))] d\xi \quad (3.14)$$



**Figure. 3.2** Statically indeterminate beam

After some algebra it follows that the response variance is expressed as

$$\begin{aligned} \text{Var}[u(x)] &= E\left\{ \left( u(x) - E[u(x)] \right)^2 \right\} \\ &= \int_0^x \int_0^x \left\{ g_1(x, \xi_1) g_1(x, \xi_2) R_{ff}(\xi_1 - \xi_2) \right. \\ &\quad + g_2(x, \xi_1) g_2(x, \xi_2) R_{pp}(\xi_1, \xi_2) \\ &\quad + g_1(x, \xi_1) g_2(x, \xi_2) E[f(\xi_1) p(\xi_2)] \\ &\quad \left. + g_1(x, \xi_2) g_2(x, \xi_1) E[p(\xi_1) f(\xi_2)] \right\} d\xi_1 d\xi_2 \end{aligned} \quad (3.15)$$

where  $R_{pp}(\xi_1, \xi_2)$  is the autocorrelation function of  $p(x)$ . The quantities  $E[f(\xi_1) p(\xi_2)]$  and  $E[p(\xi_1) f(\xi_2)]$  in Eq.(3.15) are the cross-correlation functions  $R_{fp}(\xi_1, \xi_2)$  and  $R_{pf}(\xi_1, \xi_2)$  of fields  $f(x)$  and  $p(x)$ . Since  $R_{pf}(\xi_1, \xi_2) = R_{fp}(\xi_2, \xi_1)$  Eq.(3.15) is rewritten as

$$\begin{aligned} \text{Var}[u(x)] &= \int_0^x \int_0^x \left\{ g_1(x, \xi_1) g_1(x, \xi_2) R_{ff}(\xi_1 - \xi_2) + g_2(x, \xi_1) g_2(x, \xi_2) R_{pp}(\xi_1, \xi_2) \right. \\ &\quad \left. + 2g_1(x, \xi_1) g_2(x, \xi_2) R_{fp}(\xi_1, \xi_2) \right\} d\xi_1 d\xi_2 \end{aligned} \quad (3.16)$$

Now, if we take under consideration the Wiener-Khinchine transform after some analytical derivations we will reach an integral expression for the system response variance  $\text{Var}[u(x)]$

involving the power spectral density  $S_{ff}(\kappa)$  of the uncertain system parameter stochastic field  $f(x)$  and another portion called Variability Response Function (VRF) given by

$$\begin{aligned} VRF(x, \kappa, \sigma_{ff}) = & \int_0^x \int_0^x \left\{ g_1(x, \xi_1) g_1(x, \xi_2) \cos[\kappa(\xi_2 - \xi_1)] \right. \\ & + g_2(x, \xi_1) g_2(x, \xi_2) \cos[\kappa(\xi_2 - \xi_1)] \\ & + 2g_1(x, \xi_1) g_2(x, \xi_2) \cos[\kappa(\xi_2 - \xi_1)] \\ & \left. + 2g_1(x, \xi_1) g_2(x, \xi_2) \sin[\kappa(\xi_2 - \xi_1)] \right\} d\xi_1 d\xi_2 \end{aligned} \quad (3.17)$$

Having established the integral expression for the variance of the response displacement in Eq. (3.1), a similar expression can be derived for the mean value by expressing it as a function of the variance and the mean square:

$$E[u(x)] = \sqrt{E[u^2(x)] - Var[u(x)]} \quad (3.18)$$

Therefore  $\varepsilon[u(x)]$  can be computed in a straightforward manner, provided that an integral expression similar to the one in Eq. (3.1) also exists for  $\varepsilon[u^2(x)]$ . Such an expression will be derived as follows.

Using Eq.(3.11) , the following expression can be written for  $u^2(x)$

$$\begin{aligned} u^2(x) = & \int_0^x \int_0^x g_0(x, \xi_1) g_0(x, \xi_2) (1+f(\xi_1))(1+f(\xi_2)) d\xi_1 d\xi_2 \\ & + \int_0^x \int_0^x g_1(x, \xi_1) g_1(x, \xi_2) [R(1+f(\xi_1))] [R(1+f(\xi_2))] d\xi_1 d\xi_2 \\ & + 2 \int_0^x \int_0^x g_0(x, \xi_1) g_1(x, \xi_2) [R(1+f(\xi_1))] (1+f(\xi_2)) d\xi_1 d\xi_2 \end{aligned} \quad (3.19)$$

The above expression results in the following expression for the expected value of  $u^2(x)$

$$\begin{aligned} \varepsilon[u^2(x)] = & \int_0^x \int_0^x g_0(x, \xi_1) g_0(x, \xi_2) R_{f_1 f_1}(\xi_1 - \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \\ & + \int_0^x \int_0^x g_1(x, \xi_1) g_1(x, \xi_2) R_{p_1 p_1}(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \\ & + 2 \int_0^x \int_0^x g_0(x, \xi_1) g_1(x, \xi_2) R_{f_1 p_1}(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \end{aligned} \quad (3.20)$$

In the above equation  $R_{f_1 f_1}(\xi_1 - \xi_2)$  and  $R_{p_1 p_1}(\xi_1, \xi_2)$  denote the autocorrelation functions of stochastic fields  $f_1(x)$  and  $p_1(x)$ , respectively, while  $R_{f_1 p_1}(\xi_1, \xi_2)$  denotes the cross-correlation function between  $f_1(x)$  and  $p_1(x)$ . The two stochastic fields are defined as

$$f_1(x) = 1 + f(x) \quad (3.21)$$

$$p_1(x) = Rf_1(x) \quad (3.22)$$

$f_1(x)$  is a homogeneous stochastic field, while  $p_1(x)$  is a non-homogeneous field which is related to the non-homogeneous field  $p(x)$  used in (Papadopoulos and Deodatis 2006) for the derivation of Eq. (3.1) through

$$p_1(x) - \varepsilon[p_1(x)] = p(x) \quad (3.23)$$

Inspection of Eq. (3.23) indicates that stochastic fields  $p(x)$  and  $p_1(x)$  have similar characteristics. Assuming therefore that  $p_1(x)$  is oscillatory (Priestley 1988)—as was the case for  $p(x)$ —the following expression can be written for  $p_1(x)$ :

$$p_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} A_1(x, \kappa) e^{i\kappa x} dZ(\kappa) \quad (3.24)$$

where  $A_1(x, \kappa)$  is a modulating function and  $Z(\kappa)$  is an orthogonal field with

$$\varepsilon\left[(dZ(\kappa))^2\right] = dS_{p_1 p_1}(\kappa) \quad (3.25)$$

The evolutionary power spectrum of  $p_1(x)$ ,  $S_{p_1 p_1}^E(x, \kappa)$ , is then given by

$$S_{p_1 p_1}^E(x, \kappa) = A_1^2(x, \kappa) S_{p_1 p_1}(\kappa) \quad (3.26)$$

where  $S_{p_1 p_1}(\kappa)$  is a standard (homogeneous) power spectral density function. The evolutionary spectrum of  $p_1(x)$  can be expressed alternatively as

$$S_{p_1 p_1}^E(x, \kappa) = [A_1(x, \kappa)]^2 S_{p_1 p_1}(\kappa) = [A_1^*(x, \kappa)]^2 S_{f_1 f_1}(\kappa) \quad (3.27)$$

Eq. (3.27) displays two alternative evolutionary power spectral representations of the non-homogeneous field  $p_1(x)$ . If the modulating function and (homogeneous) power spectral density function of one of these representations is known, then, assuming the power spectral density function of the other is given, its modulating function can be easily determined using Eq.(3.27). From the (infinite) alternative evolutionary power spectral representations of  $p_1(x)$ , the one involving  $S_{f_1 f_1}(\kappa)$

(shown in Eq. (3.27)) is selected for the following reason: inspection of Eq. (3.22) indicates that stochastic fields  $f_1(x)$  and  $p_1(x)$  have similar frequency contents.

The non-homogeneous autocorrelation function of  $p_1(x)$  can then be expressed as follows:

$$R_{p_1 p_1}(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} A_1^*(x_1, \kappa) A_1^*(x_2, \kappa) e^{i\kappa(x_2 - x_1)} S_{f_1 f_1}(\kappa) d\kappa \quad (3.28)$$

while the cross-correlation function between the homogeneous field  $f_1(x)$  and the non-homogeneous field  $p_1(x)$  is given by

$$R_{f_1 p_1}(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} B_1(x_1, x_2, \kappa) S_{f_1 f_1}(\kappa) d\kappa \quad (3.29)$$

where  $B_1(x_1, x_2, \kappa)$  is an even function of  $\kappa$  that can be determined using the same procedure as the one followed in (Papadopoulos and Deodatis 2006) for the derivation of function  $B_1(x_1, x_2, \kappa)$  (note that  $A_1^*(x, \kappa)$  is also an even function of the wave number  $\kappa$ ). Substituting Eqs. (3.28) and (3.29) into Eq. (3.20), the following expression for the mean square of the response displacement can be established:

$$\varepsilon[u^2(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} VRF_1(x, \kappa, \sigma_{ff}) S_{f_1 f_1}(\kappa) d\kappa \quad (3.30)$$

where

$$\begin{aligned} VRF_1(x, \kappa, \sigma_{ff}) = & \int_0^x \int_0^x \{ g_0(x, \xi_1) g_0(x, \xi_2) \cos[\kappa(\xi_2 - \xi_1)] \\ & + g_1(x, \xi_1) g_1(x, \xi_2) A_1^*(\xi_1, \kappa) A_1^*(\xi_2, \kappa) \cos[\kappa(\xi_2 - \xi_1)] \\ & + 2g_0(x, \xi_1) g_1(x, \xi_2) B_1(\xi_1, \xi_2, \kappa) \} d\xi_1 d\xi_2 \end{aligned} \quad (3.31)$$

According to the definition of stochastic field  $f_1(x)$  in Eq. (3.21), the following expression can be written for the homogeneous spectral density  $S_{f_1 f_1}(\kappa)$ :

$$S_{f_1 f_1}(\kappa) = S_{ff}(\kappa) + 2\pi\delta(\kappa). \quad (3.32)$$

Substituting then Eq. (3.32) into Eq. (3.30), the mean square value of the response displacement can be expressed as

$$\begin{aligned} \varepsilon[u^2(x)] = & \int_{-\infty}^{\infty} VRF_1(x, \kappa, \sigma_{ff}) S_{ff}(\kappa) d\kappa \\ & + 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} VRF_1(x, \kappa, \sigma_{ff}) \delta(\kappa) d\kappa \\ = & \int_{-\infty}^{\infty} VRF_1(x, \kappa, \sigma_{ff}) S_{ff}(\kappa) d\kappa \\ & + 2\pi VRF_1(x, \kappa=0, \sigma_{ff}) \end{aligned} \quad (3.33)$$

It is straightforward to show that the term  $2\pi VRF_1(x, \kappa=0, \sigma_{ff})$  is equal to the square of the deterministic response displacement. Eq. (3.33) can therefore be written alternatively as

$$\varepsilon[u^2(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} VRF_1(x, \kappa, \sigma_{ff}) S_{ff}(\kappa) d\kappa + u_{\text{det}}^2(x), \quad (3.34)$$

where  $u_{\text{det}}(x)$  denotes the deterministic value of the response displacement (obtained when  $f(x)=0$  at every point along the length of the beam).

The following expression can be established for the mean value of the response displacement by substituting Eqs. (3.34) and (3.1) into Eq. (3.18):

$$\varepsilon[u(x)] = \sqrt{\varepsilon[u^2(x)] - \text{Var}[u(x)]} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} MRF(x, \kappa, \sigma_{ff}) S_{ff}(\kappa) d\kappa + u_{\text{det}}^2(x)} \quad (3.35)$$

or equivalently

$$\varepsilon[u(x)]^2 = \varepsilon[u^2(x)] - \text{Var}[u(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} MRF(x, \kappa, \sigma_{ff}) S_{ff}(\kappa) d\kappa + u_{\text{det}}^2(x), \quad (3.36)$$

where the mean response function (MRF) is introduced and defined as

$$\begin{aligned} MRF(x, \kappa, \sigma_{ff}) &= VRF_1(x, \kappa, \sigma_{ff}) - VRF(x, \kappa, \sigma_{ff}) \\ &= \int_0^x \left\{ g_1(x, \xi_1) g_1(x, \xi_2) A_2(\xi_2, \kappa) \cos[\kappa(\xi_2 - \xi_1)] \right. \\ &\quad \left. + 2g_0(x, \xi_1) g_1(x, \xi_2) B_2(\xi_1, \xi_2, \kappa) \right\} d\xi_1 d\xi_2 \end{aligned} \quad (3.37)$$

where

$$A_2(x, \kappa) = A_1^*(x, \kappa) - A^*(x, \kappa) \quad (3.38)$$

and

$$B_2(x_1, x_2, \kappa) = B_1(x_1, x_2, \kappa) - B(x_1, x_2, \kappa) \quad (3.39)$$

are modulating functions for which closed-form expressions can be obtained using the same procedure as the one followed in (Papadopoulos and Deodatis 2006) for the derivation of  $A^*(x, \kappa)$  and  $B(x_1, x_2, \kappa)$ . Both  $A_2(x, \kappa)$  and  $B_2(x_1, x_2, \kappa)$  are even functions of the wave number  $\kappa$ . As was the case for the VRF, the MRF is also a function of the standard deviation  $\sigma_{ff}$  of stochastic field  $f(x)$ , and of the (deterministic) geometry, loading and boundary conditions of the beam.

The integral form for the mean value of the response displacement in Eq. (3.36) is an exact one as no explicit approximations are involved in its derivation. As can be seen from Eq. (3.37), the MRF is obtained from two variability response functions (VRF and VRF1) and, consequently, preserves their general properties. Specifically, the MRF depends also on deterministic parameters related to the geometry, boundary conditions, (mean) material properties and loading of the structural system, as well as on the standard deviation  $\sigma_{ff}$  of the stochastic field modeling the inverse of the elastic modulus.

### 3.3.1 UPPER BOUNDS ON RESPONSE MEAN AND VARIANCE

Upper bounds on the mean and variance of the response displacement of a statically indeterminate beam can be established from Eq. (3.36) and (3.1), respectively, as follows:

$$\varepsilon[u(x)] = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} MRF(x, \kappa, \sigma_{ff}) S_{ff}(\kappa) d\kappa + u_{\det}^2(x)} \leq \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} MRF(x, \kappa, \sigma_{ff}) \sigma_{ff}^2 + u_{\det}^2(x)} \quad (3.40)$$

$$Var[u(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} VRF(\kappa, \sigma_{ff}) S_{ff}(\kappa) d\kappa \leq VRF(x, \kappa^{\max}, \sigma_{ff}) \sigma_{ff}^2 \quad (3.41)$$

where  $\kappa^{\max}$  is the wave number at which the MRF or the VRF take their maximum value (for a given value of  $\sigma_{ff}^2$  and a given location  $x$ ), and  $\sigma_{ff}^2$  is the variance of the stochastic field  $f(x)$  modeling the inverse of the elastic modulus. It is noted that  $\kappa^{\max}$  is not necessarily the same for the MRF and the VRF.

It should be emphasized that the upper bounds shown in Eqs. (3.40) and (3.41) are physically realizable since the form of stochastic field  $f(x)$  that produces them is known. Specifically,



the mean and variance of  $u(x)$  attain their maximum values when random field  $f(x)$  becomes a random sinusoid with wavelength  $2\pi / \kappa^{\max}$  :

$$f(x) = \sqrt{2}\sigma_{ff} \cos(\kappa^{\max}x + \phi) \quad (3.42)$$

where  $\phi$  is a random phase angle uniformly distributed in  $[0, 2\pi]$  . In this case, the corresponding spectral density function of  $f(x)$  is a delta function at wave number  $\kappa^{\max}$  :

$$S_{ff}(\kappa) = \sigma_{ff}^2 \delta(\kappa - \kappa^{\max}) \quad (3.43)$$

while its PDF is a beta probability distribution function given by

$$p_f(s) = \frac{1}{\pi \sqrt{2\sigma_{ff}^2 - s^2}} \text{ defined in the interval: } -\sqrt{2}\sigma_{ff} \leq s \leq \sqrt{2}\sigma_{ff} \quad (3.44)$$

The aforementioned upper bounds are spectral- and probability-distribution-free, as the only probabilistic quantity they depend on is the standard deviation of the inverse of the elastic modulus.

### 3.3.2 FAST MONTE CARLO SIMULATION

The mean and variability response functions can be computed from the closed-form analytic expressions shown in Eqs. (3.17) and (3.37), respectively. Alternatively, they can be estimated numerically using a fast Monte Carlo simulation (FMCS) approach whose basic idea of considering stochastic field  $f(x)$  as a random sinusoid is described in some detail in (Papadopoulos, Deodatis and Papadrakakis 2005), (Papadopoulos and Deodatis 2006). The numerical estimation of the MRF and the VRF through FMCS is extremely important as the closed-form analytic expressions shown in Eqs. (7) and (26) involve modulating functions that are very difficult to establish even in the simplest cases of statically indeterminate beams. For this reason, FMCS is used exclusively to determine the MRF and the VRF. The basic steps of the FMCS approach are described in the following.

6. Generate  $N$  sample functions of a random sinusoid with standard deviation  $\sigma_{ff}$  and wave number  $\bar{\kappa}$  modeling stochastic field  $f(x)$  that describes the inverse of the elastic modulus:

$$f_j(x) = \sqrt{2}\sigma_{ff} \cos(\bar{\kappa}x + \phi_j); \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (3.45)$$

where  $\phi_j$  are random phase angles uniformly distributed in the range  $[0, 2\pi]$  . Rather than picking up the  $\phi_j$ 's randomly in  $[0, 2\pi]$  , they can be selected at  $N$  equal intervals in  $[0, 2\pi]$  for significant computational savings.

7. Using these  $N$  generated sample functions of  $f_j(x)$  , it is straightforward to compute the corresponding  $N$  displacement responses either analytically or numerically. Then, the mean value of the response  $\varepsilon[u(x)]_{\bar{\kappa}}$  and its variance  $\text{Var}[u(x)]_{\bar{\kappa}}$  can be easily

determined for the specific value of  $\bar{\kappa}$  considered by ensemble averaging the  $N$  computed responses.

8. The value of the mean response function (MRF) of the statically indeterminate beam at wave number  $\bar{\kappa}$  and for standard deviation  $\sigma_{ff}$  is computed from

$$MRF(x, \bar{\kappa}, \sigma_{ff}) = \frac{\left\{ \varepsilon[u(x)]_{\bar{\kappa}} \right\}^2 - u_{\det}^2(x)}{\sigma_{ff}^2} \quad (3.46)$$

9. The value of the variability response function (VRF) of the statically indeterminate beam at wave number  $\bar{\kappa}$  and for standard deviation  $\sigma_{ff}$  is computed from

$$VRF(x, \bar{\kappa}, \sigma_{ff}) = \frac{Var[u(x)]_{\bar{\kappa}}}{\sigma_{ff}^2} \quad (3.47)$$

10. The value of the variability response function for the mean square response is then calculated from Eq. (3.37) as follows:

$$VRF_1(x, \bar{\kappa}, \sigma_{ff}) = MRF(x, \bar{\kappa}, \sigma_{ff}) + VRF(x, \bar{\kappa}, \sigma_{ff}) \quad (3.48)$$

11. Steps 1–5 are repeated for different values of the wave number  $\bar{\kappa}$  of the random sinusoid. Consequently,  $MRF(x, \kappa, \sigma_{ff})$  and  $VRF_1(x, \kappa, \sigma_{ff})$  are computed over a wide range of wave numbers, wave number by wave number. The entire procedure can be eventually repeated for different values of the standard deviation  $\sigma_{ff}$  and for different locations  $x$  along the length of the beam (if necessary).

Eqs. (3.46) and (3.47) are direct consequences of Eqs. (3.36) and (3.1), respectively, considering that stochastic field  $f(x)$  modeling the inverse of the elastic modulus becomes a random sinusoid.

It should be pointed out that the fast Monte Carlo simulation procedure can be implemented into the framework of a deterministic finite element code making this approach very general. Specifically, the  $N$  displacement responses in the second step of the aforementioned procedure can be computed numerically using any general purpose finite element code. To do this, every generated sample function modeling the inverse of the elastic modulus is transformed into a corresponding sample function modeling the elastic modulus for direct use as input in a FEM code. This FEM-based approach to compute the MRF, the VRF and the  $VRF_1$  is referred to as FEM-FMCS.

### 3.3.3 COEFFICIENT OF VARIATION OF RESPONSE DISPLACEMENT

The coefficient of variation of the response displacement at a prescribed location  $x$  along the length of the beam can be calculated numerically using:

$$COV[u(x)] = \frac{\sqrt{Var[u(x)]}}{\varepsilon[u(x)]} = \left\{ \frac{\int_{-\infty}^{\infty} VRF(x, \kappa, \sigma_{ff}) S_{ff}(\kappa) d\kappa}{\int_{-\infty}^{\infty} MRF(x, \kappa, \sigma_{ff}) S_{ff}(\kappa) + u_{\det}^2(x)} \right\}^{1/2} \quad (3.49)$$

### 3.4 EXTENSION TO TWO-DIMENSIONAL PROBLEMS

The proposed methodology can be extended to two-dimensional problems in a straightforward manner. The inverse of the elastic modulus is now assumed to vary randomly over a 2D domain according to the following equation (compare to Eq. (3.2)):

$$\frac{1}{E(x, y)} = F_0(1 + f(x, y)), \quad (3.50)$$

where  $E$  is the elastic modulus,  $F_0$  is the mean value of the inverse of  $E$ , and  $f(x, y)$  is now a two-dimensional, zero-mean homogeneous stochastic field modeling the variation of  $1/E$  around its mean value  $F_0$ .

Accordingly, the integral expressions for the mean square and the mean of the response displacement  $u(x, y)$  become:

$$\varepsilon[u^2(x, y)] = 2 \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty VRF_1(x, \kappa_x, y, \kappa_y, \sigma_{ff}) S_{ff}(\kappa_x, \kappa_y) d\kappa_x d\kappa_y + u_{\det}^2(x, y) \quad (3.51)$$

and

$$\varepsilon[u(x, y)] = \sqrt{2 \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty MRF(x, \kappa_x, y, \kappa_y, \sigma_{ff}) S_{ff}(\kappa_x, \kappa_y) d\kappa_x d\kappa_y + u_{\det}^2(x, y)}, \quad (3.52)$$

where  $MRF(x, \kappa_x, y, \kappa_y, \sigma_{ff})$  and  $VRF_1(x, \kappa_x, y, \kappa_y, \sigma_{ff})$  are the two-dimensional versions of the MRF and the  $VRF_1$ , respectively, possessing the following bi-quadrant symmetries:

$$\begin{aligned} MRF(\kappa_x, \kappa_y) &= MRF(-\kappa_x, -\kappa_y), \\ VRF_1(\kappa_x, \kappa_y) &= VRF_1(-\kappa_x, -\kappa_y), \end{aligned} \quad (3.53)$$

$S_{ff}(\kappa_x, \kappa_y)$  is the spectral density function of stochastic field  $f(x, y)$  possessing the same symmetries as MRF and  $VRF_1$ , while  $VRF_1$  is computed from

$$VRF_1(\kappa_x, \kappa_y) = MRF(\kappa_x, \kappa_y) + VRF(\kappa_x, \kappa_y). \quad (3.54)$$

The FEM-FMCS procedure described earlier for 1D beam problems can be used for 2D problems too in order to estimate the MRF and the VRF. The 1D random sinusoid in Eq. (3.45) now becomes a 2D one with the following form:

$$f(x, y) = \sqrt{2} \sigma_{ff} \cos(\bar{\kappa}_x x + \bar{\kappa}_y y + \phi_j); \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (3.55)$$

Upper bounds on the mean and variance of the response displacement can be established for the 2D case as follows:

$$\varepsilon[u(x, y)] \leq \sqrt{MRF(x, y, \kappa_x^{\max}, \kappa_y^{\max}, \sigma_{ff}) \sigma_{ff}^2 + u_{\det}^2(x, y)}, \quad (3.56)$$

$$Var[u(x, y)] \leq VRF(x, y, \kappa_x^{\max}, \kappa_y^{\max}, \sigma_{ff}) \sigma_{ff}^2, \quad (3.57)$$

where  $(\kappa_x^{\max}, \kappa_y^{\max})$  is the wave number pair at which the MRF or the VRF take their maximum value (for a given value of  $\sigma_{ff}$  and a given location  $(x, y)$ ), and  $\sigma_{ff}^2$  is the variance of the stochastic field  $f(x, y)$  modeling the inverse of the elastic modulus. It should be emphasized that  $(\kappa_x^{\max}, \kappa_y^{\max})$  are not necessarily the same for the MRF and the VRF.

### 3.5 GENERALITY OF THE PROPOSED METHODOLOGY

All the above derivations are based on the assumption that the  $VRF(x, \kappa, \sigma_{ff})$  is independent of the spectral density  $S_{ff}(\kappa)$  of the stochastic field  $f(x)$ . Further investigations (Miranda 2008) verified the aforementioned results but showed that VRF has a slight dependence on the marginal pdf of the stochastic field modeling the flexibility. An important extension of the concept of VRF has been drawn in (Arwade and Deodatis 2011) to determine effective material properties in homogenization problems. In (Papadopoulos, Papadrakakis and Deodatis 2006) results were presented for general linear stochastic Finite Element systems including beams, space frames, plane stress and shell-type structures under static loads.

More specifically, for the fixed-simply supported beam of length  $L=10m$  shown in Fig. 3.2, loaded with a uniformly distributed load  $Q_0=1000N/m$  the inverse of the elastic modulus of the beam is assumed to vary randomly along its length according to Eq. (3.2) with  $F_0=8 \times 10^{-9} m^2/N$  and  $I=0.1m^4$ . Fig. 3.3 displays plots of  $MRF(x=L/2, \kappa, \sigma_{ff})$  and  $VRF(x=L/2, \kappa, \sigma_{ff})$  for LC1 and various values of the standard deviation  $\sigma_{ff}$ , calculated using the FMCS approach described earlier. Fig. 3.4 presents results of such a verification process for the statically indeterminate beam of Fig. 3.2 in comparison to results obtained from a brute force MCS procedure as shown in (Papadopoulos, Papadrakakis and Deodatis 2006), where a very close agreement is achieved. Similarly Fig. 3.5(a) presents the evolution of the relative error between brute force Monte Carlo simulations and Eq. (3.35) for  $\varepsilon[u(x=L/2)]$  as a function of the number of samples ( $N_{samp}$ ), while Fig. 3.5(b) presents similar results for  $\varepsilon[u^2(x=L/2)]$ . Figs. 3.7, 3.8 demonstrate 2D MRFs and VRFs respectively for a general shell type structure shown in Fig. 3.6 while Fig. 3.9 shows again a very good agreement of responses from the FMCS procedure and the standard brute force MCS.

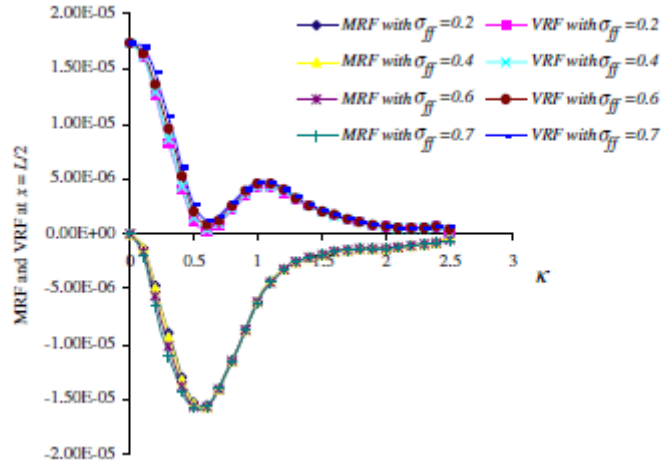


Figure 3.3. Mean and variability response function calculated using FMCS for the beam in Fig. 3.2

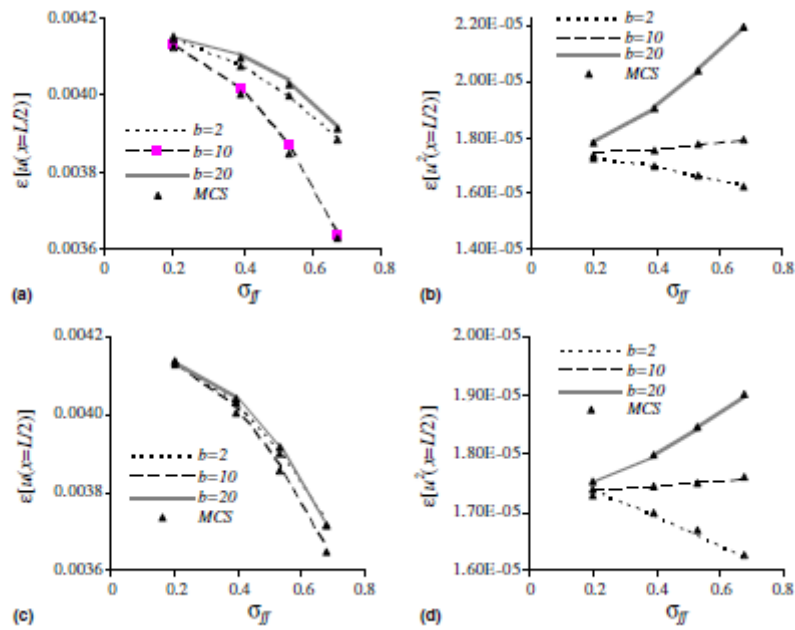
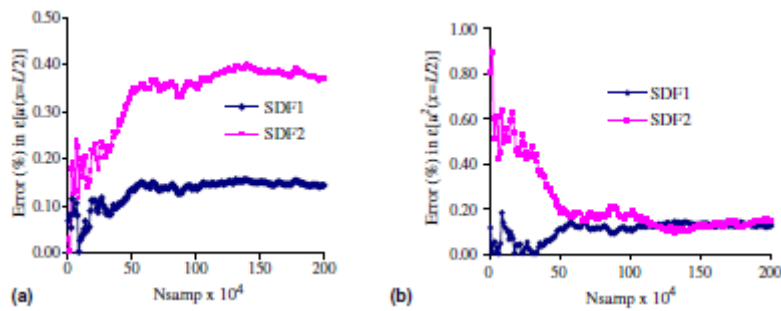
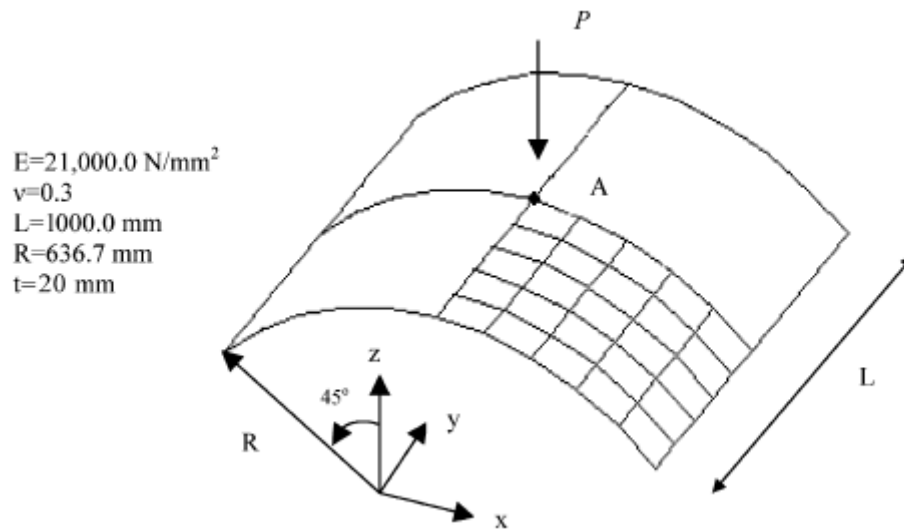


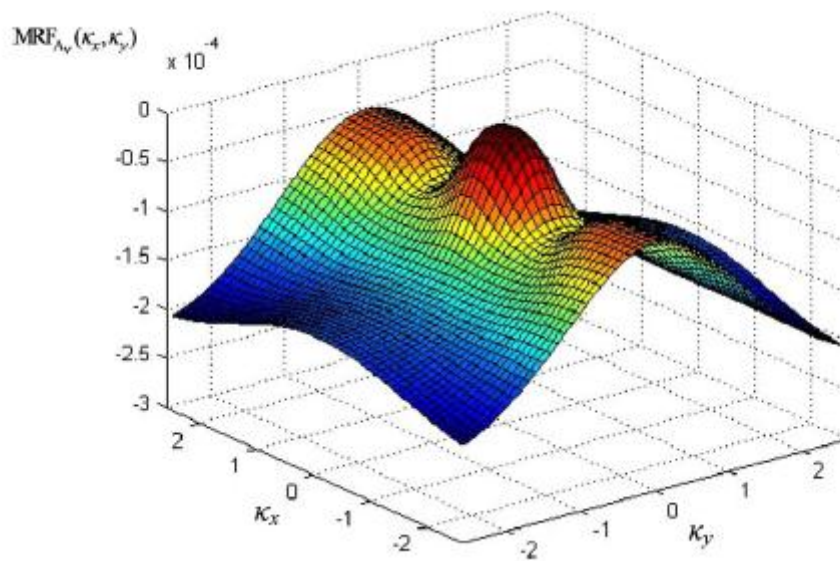
Figure 3.4. Example 1 and LC1: mean and mean square value of response displacement at  $x = L/2$  for the beam shown in Fig. 3.2. Plots correspond to three different values of correlation length parameter  $b$  of spectral density function SDF1 [(a), (b)] and SDF2 [(c), (d)].



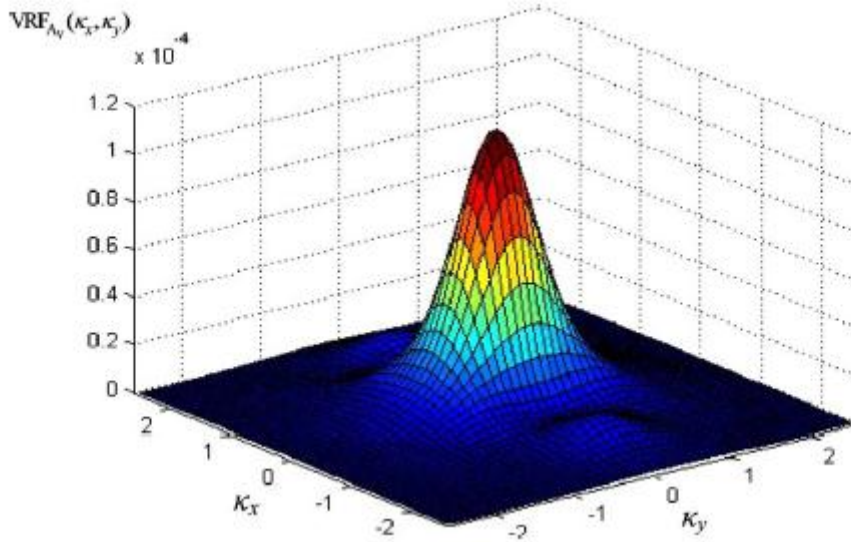
**Figure 3.5.** Relative error in  $\varepsilon[u(x=L/2)]$ (a) and  $\varepsilon[u^2(x=L/2)]$ (b) for  $b=2$  and  $\sigma_{ff} = 0.675$  (LC1)



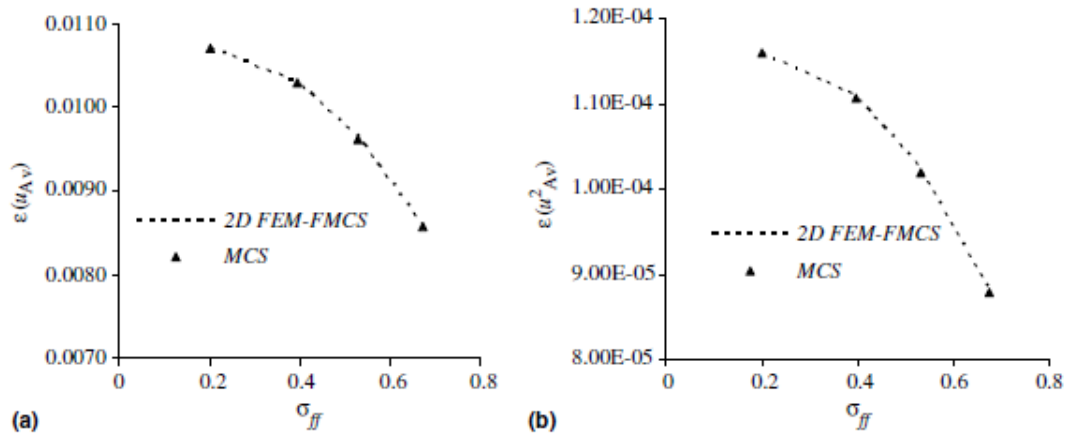
**Figure 3.6.** Geometry, loading, finite element mesh and material properties of the cylindrical panel.



**Figure 3.7.** Mean Response Function calculated using the 2D FEM-FMCS approach for the cylindrical panel shown in Fig.6 and  $\sigma_{ff} = 0.4$



**Figure 3.8.** Variability Response Function calculated using the 2D FEM-FMCS approach for the cylindrical panel shown in Fig.3.6 and  $\sigma_{ff} = 0.4$ .



**Figure 3.9.** mean (a) and mean square (b) value of response displacement, as a function of standard deviation  $\sigma_{ff}$  comparison of results using Eqs. (3.34) and (3.35) and from brute force MCS.

### 3.6 GVRF FORMULATION FOR STATIC LOADING CASE

As mentioned previously, MRF and VRF conceptually are based on the assumption that they are deterministic, i.e. they are independent of the power spectral density type as well as of the marginal pdf used to describe the uncertain parameter of the problem. The validity of this conjecture is numerically demonstrated in the numerical examples by direct comparisons of the variance time history of the system response, computed with the proposed VRF-based approach, with corresponding brute-force Monte Carlo simulations. As a further step of this validation, the concept of Generalized Variability Response Function (GVRF) has been introduced by (Miranda and Deodatis 2012). In (Teferra and Deodatis 2012) it has been used to validate the conjecture for beams with non-linear constitutive laws but with some

modifications. As will be demonstrated in chapter 5, it has also been used for validation in dynamic problems.

### 3.6.1 GVRF ESTIMATION METHODOLOGY

For a certain linear statically indeterminate structure with uncertain material properties, system variance response can be estimated by the following formula (M. Shinozuka 1987)

$$Var[u(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} VRF(x, \kappa) S_{ff}(\kappa) d\kappa \quad (3.58)$$

where  $Var[u(x)]$  can be readily computed by a brute-force Monte Carlo simulation. Eq. (3.58) can be rewritten in the following discretized form

$$Var[u(x)] = 2 \begin{bmatrix} S_f(\kappa_1) & S_f(\kappa_2) & \cdots & S_f(\kappa_N) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} VRF(x, \kappa_1) \\ VRF(x, \kappa_2) \\ \vdots \\ VRF(x, \kappa_N) \end{bmatrix} \Delta\kappa \quad (3.59)$$

Having assumed that VRF is independent of the power spectral density and the marginal pdf, it is natural to assume that the same VRF values can be used to estimate system variance for various SDFs. Therefore the following relation should also be true, only now that VRF is named Generalized Variability Response Function (GVRF).

$$\begin{bmatrix} Var[u(x)_1] \\ Var[u(x)_2] \\ \vdots \\ Var[u(x)_N] \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} S_{f_1}(\kappa_1) & S_{f_1}(\kappa_2) & \cdots & S_{f_1}(\kappa_N) \\ S_{f_2}(\kappa_1) & S_{f_2}(\kappa_2) & \cdots & S_{f_2}(\kappa_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{f_N}(\kappa_1) & S_{f_N}(\kappa_2) & \cdots & S_{f_N}(\kappa_N) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} GVRF(x, \kappa_1) \\ GVRF(x, \kappa_2) \\ \vdots \\ GVRF(x, \kappa_N) \end{bmatrix} \Delta\kappa \quad (3.60)$$

The left hand side vector is the vector of different system variances, calculated by respective brute-force Monte Carlo simulations, and the matrix on the right hand side is the matrix of SDF values for various corresponding spectral density types  $S_{f_i}(\kappa)$ ,  $i=1,2,\dots,N$ . Effectively, Eq. (3.60) describes a system of  $N$  linear equations with  $N$  unknowns, thus providing a unique solution for the GVRF vector.



# 4 MEAN AND VARIABILITY RESPONSE FUNCTIONS UNDER DYNAMIC EXCITATION

## 4.1 INTRODUCTION

In recent years, multiple methodologies based on perturbation/expansion (Liu, Belytschko and Mani 1986), (Liu, Belytschko and Mani 1986), spectral Galerkin approximations (Ghanem and Spanos 1991) or costly Monte Carlo methods (Liu, Belytschko and Mani 1986), (Grigoriu 1995), (Matthies, et al. 1997), (Stefanou 2009) have been developed to deal with random/uncertain phenomena in steady state stochastic structural analysis and extended to dynamic stochastic analysis in a straightforward manner (Zhao and Chen 2000), (Liu, Besterfield and Belytschko 1988), along with procedures to improve their efficiency both in terms of accuracy (Ghanem and Spanos 1990), (Jensen and Iwan 1992), (Li 1996), (Li and Liao 2001) as well as computational performance (Yamazaki, Shinozuka and Dashgupta 1988), (Papadrakakis and Papadopoulos 1996), (Papadrakakis and Kotsopoulos 1999). A probability density evolution method was proposed in (Li and Chen 2006), (Li and Chen 2004) in an effort to approximate the time varying probability distribution function (pdf) of the response of stochastic systems using the principle of preservation of probability. Along these lines, some other approaches implement approximate Wiener path integral solution schemes (Kougioumtzoglou and Spanos 2012). However these approaches have been mainly implemented in single degree of freedom oscillators or small illustrative academic systems due to increased computational cost. In all above cases, prior knowledge of the correlation properties and the marginal pdf of the random fields characterizing system uncertainties is essential for accurate estimates of the system's response. In the frequent case of insufficient experimental data, analysts are forced to resort to sensitivity/parametric yet cost inefficient analyses. Furthermore, such analyses do not provide any information on the mechanisms that affect response variability, or bounds of the response. In addition to the aforementioned approaches, a relatively small number of studies have dealt with the dynamic propagation of system uncertainties, most of them reducing the stochastic dynamic PDE's to a linear random eigenvalue problem (Ghosh D 2005), (G. I. Schueller 2011).

In order to effectively resolve aforementioned issues, a proposition has been made through the concept of Dynamic Variability Response Function (DVRF) in (Papadopoulos and Kokkinos 2012), which was a straightforward generalization of the currently classical VRF proposed in the late 1980s (M. Shinozuka 1987) along with different aspects and extensions (Wall and Deodatis, Variability response functions of stochastic plane stress/strain problems 1994), (Graham and Deodatis, Weighted integral method and variability response functions for stochastic plate bending problems 1998) . DVRF involves information regarding deterministic variables of the problem and the standard deviation of the field modeling the

random system parameters. In that work, closed form integral expressions involving DVRF and the spectral density function of the stochastic field, were suggested for the computation of the dynamic variance of the response displacement as follows:

$$\text{Var}[u(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \text{DVRF}(t, \kappa, \sigma_{ff}) S_{ff}(\kappa) d\kappa \quad (4.1)$$

An additional expression involving a Dynamic Mean Response Function (DMRF) for the system dynamic mean response was also proposed in that work. This approach was formulated for linear statically determinate single degree of freedom stochastic oscillators under dynamic excitations where it was demonstrated that the integral form expressions for the dynamic mean and variance can be used to effectively compute the first and second order statistics of the transient system response with reasonable accuracy, together with time dependent spectral-distribution-free upper bounds. They also provide an insight into the mechanisms controlling the uncertainty propagation with respect to both space and time and in particular the mean and variability time histories of the stochastic system dynamic response. Furthermore, once the DMRF and DVRF are established, sensitivity analyses with respect to various probabilistic parameters such as correlation distances and standard deviation were performed at a very small additional computational cost.

Based on the aforementioned recent development, closed form integral expressions, in the form of Eq.(4.1), were proposed in (Papadopoulos and Kokkinos 2015) for the mean and variance of the dynamic response of statically indeterminate beam/frame structures and then extended to more general stochastic finite element systems (i.e. plane stress problems) under dynamic excitations. In this case **DVRF** and **DMRF** are vectors comprised of a DMRF and DVRF for each degree of freedom of the FE system. A general so-called Dynamic FEM fast Monte Carlo simulation (DFEM-FMCS) is provided for the accurate and efficient evaluation of **DVRF** and **DMRF** for stochastic FE systems. Numerical results are presented, demonstrating that, as in the case of classical VRFs, as well as in the case of DMRF and DVRF for single degree of freedom stochastic oscillators (Papadopoulos and Kokkinos 2012), the **DVRF** and **DMRF** matrices appear to be independent of the functional form of the power spectral density function  $S_{ff}(\kappa)$  and appear to be marginally dependent on the pdf of the field modeling the uncertain system parameter. It is reminded that the existence of VRF has been proven only in the case of statically determinate structures under static loading (M. Shinozuka 1987), (Papadopoulos and Deodatis 2006). In all other cases this existence had to be conjectured and the validity of this conjecture was demonstrated through comparisons of the results obtained from Eq.(4.1) with brute force MCS. The validity of this conjecture is further boosted in this work by comparing steady state DVRF with respective Generalized VRF (Miranda and Deodatis 2012) for a statically indeterminate frame structure. GVRF involves the computation of different VRFs for corresponding combinations of different marginal pdfs and power spectra and was developed in order to further test the validity of the existence of a VRF which is almost independent of the stochastic parameters of the problem. It should be mentioned here that the VRF concept was recently extended in (Papadopoulos,

Deodatis and Papadrakakis 2005) for structures with non-linear material properties where a closed form analytic expression of VRF revealed the clear dependence of the integral form of Eq.(4.1) on the standard deviation as well as higher order Power spectra of  $f(x)$ . Finally, realizable upper bounds of the mean and dynamic system response are evaluated.

## 4.2 SINGLE DEGREE OF FREEDOM STOCHASTIC OSCILLATORS

### 4.2.1 DYNAMIC ANALYSIS OF A STOCHASTIC SINGLE DEGREE OF FREEDOM OSCILLATOR

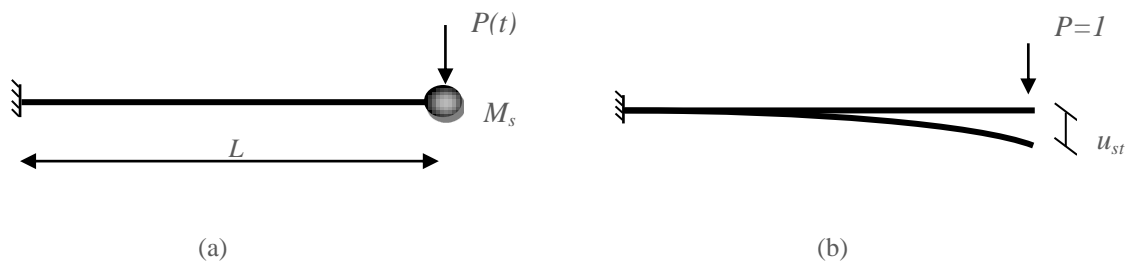
For the single degree of freedom statically determinate stochastic oscillator of length  $L$  and mass  $M_s$  in Fig. 4.1a, loaded with a dynamic deterministic load  $P(t)$ , the inverse of the elastic modulus is considered to vary randomly along the length of the beam according to the following expression:

$$\frac{1}{E(x)} = F_0(1 + f(x)) \quad (4.2)$$

where  $E(x)$  is the elastic modulus,  $F_0$  is the mean value of the inverse of  $E(x)$ , and  $f(x)$  is a zero-mean homogeneous stochastic field modeling the variation of  $1/E(x)$  around its mean value  $F_0$ . The displacement time history  $u(t)$  of the oscillator can be derived from the solution of Duhamel's integral:

$$u(t) = \frac{1}{\omega_D} \int_0^t P(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin(\omega_D(t-\tau)) d\tau \quad (4.3)$$

where  $\xi$  is the damping ratio and  $\omega_D = \omega\sqrt{1-\xi^2}$  with  $\omega$  being the circular frequency of the system.



**Figure 4.1.** One degree of freedom oscillator: (a) Geometry and loading (b) Static displacement for unit load

Due to the system uncertainty in Eq. (2), the circular frequency  $\omega$  is a random variable given by the following relation:

$$\omega = \sqrt{k / M_s} \quad (4.4)$$

where  $k$  is the stiffness of the oscillator which can be derived from the static displacement of the oscillator for a unit static deterministic load at the end of the beam (Fig. 4.1b) as follows:

$$k = \frac{1}{u_{st}} = \left[ -\frac{F_0}{I} \int_0^L (x-\alpha)M(\alpha)(1+f(\alpha))d\alpha \right]^{-1} \quad (4.5)$$

where  $I$  is the moment of inertia of the beam and  $M(a)$  is the moment at position  $a$ . In the general case where the load is arbitrary and the system is initially at rest, the deterministic displacement at the right end of the beam can be derived by numerically solving the Duhamel's integral. In the special case of a sinusoidal  $P(t) = P_0 \sin(\bar{\omega}t)$  the solution of Eq. (4.3) leads to the following expression for  $u(t)$ :

$$u(t) = u_0(t) + u_p(t) \quad (4.6)$$

where

$$\begin{aligned} u_0(t) &= e^{-\xi\omega t} (A \sin \omega_D t + B \cos \omega_D t) \\ u_p(t) &= C_1 \sin \bar{\omega}t + C_2 \cos \bar{\omega}t \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$A = \frac{P_0}{K} * \frac{1}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} * \frac{2\beta\xi^2 - (1-\beta^2)\beta}{\sqrt{1-\xi^2}} \quad (4.8)$$

$$B = -\frac{P_0}{K} * \frac{2\xi\beta}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} \quad (4.9)$$

$$C_1 = \frac{P_0}{K} * \frac{1}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} (1-\beta^2) \quad (4.10)$$

$$C_2 = -\frac{P_0}{K} * \frac{1}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} (2\xi\beta) \quad (4.11)$$

$$\beta = \bar{\omega} / \omega \quad (4.12)$$

In the trivial case in which a static load  $P(t) = P_0$  is suddenly applied, the response displacement is given by

$$u(t) = \frac{P_0}{k} \left[ 1 - \left( \cos \omega_D t + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \omega_D t \right) e^{-\xi\omega t} \right] \quad (4.13)$$

#### 4.2.2 VARIANCE AND MEAN VALUE OF THE DYNAMIC RESPONSE

Following a procedure similar to the one presented in (Papadopoulos, Deodatis και Papadrakakis 2005) for linear stochastic systems under static loading, it is possible to express the variance of the dynamic response of the stochastic system in the following integral form expression:

$$Var[u(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} DVRF(t, \kappa, \sigma_{ff}) S_{ff}(\kappa) d\kappa \quad (4.14)$$

where DVRF is the dynamic version of a VRF, assumed to be a function of deterministic parameters of the problem related to geometry, loads and (mean) material properties and the

standard deviation of the stochastic field  $\sigma_{ff}$  that models the system flexibility. A similar integral expression can provide an estimate for the mean value of the dynamic response of the system using the Dynamic Mean Response Function (DMRF) (Papadopoulos, Papadrakakis και Deodatis 2006):

$$\varepsilon[u(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} DMRF(t, \kappa, \sigma_{ff}) S_{ff}(\kappa) d\kappa \quad (4.15)$$

DMRF is assumed to be a function similar to the DVRF in the sense that it also depends on deterministic parameters of the problem as well as  $\sigma_{ff}$ . It is extremely difficult however, to prove that the DVRF (same counts for DMRF) is independent (or even approximately independent) of the marginal pdf and the functional form of the power spectral density of the stochastic field  $f(x)$ . As in (Papadopoulos, Deodatis και Papadrakakis 2005), (Papadopoulos και Deodatis 2006), (Papadopoulos, Papadrakakis και Deodatis 2006) the aforementioned assumptions are considered to form a conjecture which is numerically validated here by comparing the results from Eqs (4.14) and (4.15) with brute force MCS.

The derivation of an analytic expression for the DVRF and DMRF, if possible at all, is an extremely cumbersome task. A numerical computation, however can be easily achieved, as described in the following section and then fed into the Eqs (4.14) and (4.15) to provide estimates of the mean and variance of the dynamic system response.

#### 4.2.2.1 NUMERICAL ESTIMATION OF THE DVRF AND THE DMRF USING FAST MONTE CARLO SIMULATION

The numerical estimation of DVRF and DMRF involves a fast Monte Carlo simulation (FMCS) whose basic idea is to consider the random field  $f(x)$  as a random sinusoid (Papadopoulos, Deodatis και Papadrakakis 2005), (Papadopoulos και Deodatis 2006) and plug its monochromatic power spectrum into Eqs (4.14) and (4.15), in order to compute the respective mean and variance response at various wave numbers. The steps of the FMCS approach are the following:

- (i) Generate  $N$  (10-20) sample functions of the below random sinusoid with standard deviation  $\sigma_{ff}$  and wave number  $\bar{\kappa}$  modeling the variation of the inverse of the elastic modulus  $1/E$  around its mean  $F_0$ :

$$f_j(x) = \sqrt{2}\sigma_{ff} \cos(\bar{\kappa}x + \phi_j) \quad (4.16)$$

where  $j=1,2,\dots,N$  and  $\phi_i$  varies randomly under uniform distribution in the range  $[0, 2\pi]$ .

- (ii) Using these  $N$  generated sample functions it is straightforward to compute their respective dynamic mean and response variance,  $E[u(t)]_{\bar{\kappa}}$  and  $Var[u(t)]_{\bar{\kappa}}$ , respectively for a given time step  $t$ .
- (iii) The value of the DMRF at wave number  $\bar{\kappa}$  can then be computed as follows

$$DMRF(t, \bar{\kappa}, \sigma_{ff}) = \frac{E[u(t)]_{\bar{\kappa}}}{\sigma_{ff}^2} \quad (4.17)$$

and likewise the value of the DVRF at wave number  $\bar{\kappa}$

$$DVRF(t, \bar{\kappa}, \sigma_{ff}) = \frac{Var[u(t)]_{\bar{\kappa}}}{\sigma_{ff}^2} \quad (4.18)$$

Both previous equations are direct consequences of the integral expressions in Eqs. (4.14) and (4.15) in the case that the stochastic field becomes a random sinusoid.

- (iv) Get DMRF and DVRF as a function of both time  $t$  and wave number  $\kappa$  by repeating previous steps for various wave numbers and different time steps. The entire procedure can be repeated for different values of the standard deviation  $\sigma_{ff}$  of the random sinusoid.

#### 4.2.2.2 BOUNDS OF THE MEAN AND VARIANCE OF THE DYNAMIC RESPONSE

Upper bounds on the mean and variance of the dynamic response of the stochastic system can be established directly from Eqs (4.14) and (4.15), as follows:

$$E[u(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} DMRF(t, \kappa, \sigma_{ff}) S_{ff}(\kappa) d\kappa \leq DMRF(t, \kappa^{\max}(t), \sigma_{ff}) \sigma_{ff}^2 \quad (4.19)$$

$$Var[u(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} DVRF(t, \kappa, \sigma_{ff}) S_{ff}(\kappa) d\kappa \leq DVRF(t, \kappa^{\max}(t), \sigma_{ff}) \sigma_{ff}^2 \quad (4.20)$$

where  $\kappa^{\max}(t)$  is the wave number at which DMRF and DVRF, corresponding to a given time step  $t$  and value of  $\sigma_{ff}$ , reach their maximum value. An envelope of time evolving upper bounds on the mean and variance of the dynamic system response can be extracted from Eqs.(4.19) and (4.20). As in the case of linear stochastic systems under static loads (Papadopoulos, Deodatis and Papadrakakis 2005), (Papadopoulos and Deodatis 2006) and (Papadopoulos, Papadrakakis and Deodatis 2006) this envelope is physically realizable since the form of the stochastic field that produces it is the random sinusoid of Eq.(4.16) with  $\bar{\kappa} = \kappa^{\max}(t)$ .

#### 4.2.3 NUMERICAL EXAMPLE

For the cantilever beam shown in Fig. 4.1 with length  $L=4m$ , the inverse of the modulus of elasticity is assumed to vary randomly along its length according to Eq. (3.2) with  $F_0 = (1.25 \times 10^8 \text{ KN/m})^{-1}$  and  $I = 0.1m^4$ . A concentrated mass  $M_s = 3.715 \times 10^3 \text{ Kg}$  is assumed at the right end of the beam. The damping ratio is taken equal to  $\xi = 5\%$  and the mean eigenperiod of this one d.o.f oscillator is calculated at  $T_0 = 0.5 \text{ sec}$ .

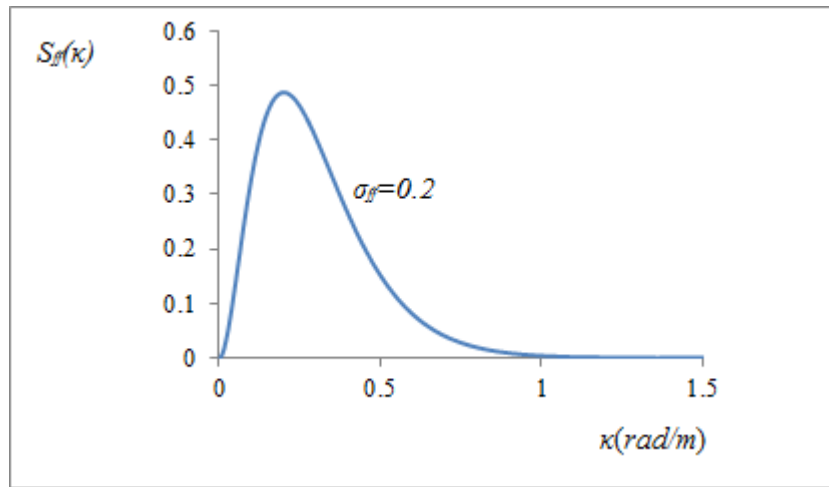
Three load cases are considered: LC1 consisting of a constant load  $P(t) = 100 \text{ KN}$ , LC2 consisting of a concentrated dynamic periodic load  $P(t) = 100 \sin(\bar{\omega}t)$  and LC3 consisting of

$P(t) = -M_s \ddot{U}_g(t)$  where  $\ddot{U}_g(t)$  is the acceleration time history of the 1940 El Centro earthquake.

The spectral density function (SDF) of Fig. 4.2 was used for the modeling of the inverse of the elastic modulus stochastic field, given by:

$$S_{ff}(\kappa) = \frac{1}{4} \sigma^2 b^3 \kappa^2 e^{-b|\kappa|} \quad (4.21)$$

with  $b=10$  being a correlation length parameter.



**Figure 4.2.** Spectral density function for stochastic field  $f(x)$  standard deviation  $\sigma_{ff}=0.2$

In order to demonstrate the validity of the proposed methodology, a truncated Gaussian and a lognormal pdf were used to model  $f(x)$ . For this purpose, an underlying Gaussian stochastic field denoted by  $g(x)$  is generated using the spectral representation method (Shinozuka and Deodatis 1991) and the power spectrum of Eq.(4.21). The truncated Gaussian field  $f_{TG}(x)$  is obtained by simply truncating  $g(x)$  in the following way:  $-0.9 \leq g(x) \leq 0.9$ , while the lognormal  $f_L(x)$  is obtained from the following transformation as a translation field (Grigoriu 1995)

$$f_L(x) = F_L^{-1} \{ G[g(x)] \} \quad (4.22)$$

The SDF of the underlying Gaussian field in Eq.(4.21) and the corresponding spectral densities of the truncated Gaussian and the Lognormal fields denoted  $S_{f_{TG}f_{TG}}(\kappa)$  and  $S_{f_Lf_L}(\kappa)$ , respectively, will be different. These are computed from the following formula

$$S_{f_i f_i}(\kappa) = \frac{1}{2\pi L_x} \left| \int_0^{L_x} f_i(x) e^{-i\kappa x} dx \right|^2 ; i = TG, L \quad (4.23)$$

where  $L_x$  is the length of the sample functions of the non-Gaussian fields modeling flexibility. As the sample functions of the non-Gaussian fields are non-ergodic, the estimation of power spectra in Eq.(4.23) is performed in an ensemble average sense (Grigoriu 1995).

#### 4.2.3.1 LC1: CONSTANT LOAD AT THE END OF THE BEAM

This load case scenario has been selected in order to further demonstrate the validity of the methodology and establish a logical continuation with previous studies related to the current work. In the case when the excitation is constant  $P(t) = P_0$ , and the load  $P_0$  is suddenly applied, the response displacement is given by Eq.(4.13). From this equation it can be seen that the solution degenerates to the static solution  $u(t) = P_0 / k$  as time  $t$  tends to infinity. Accordingly the DVRF should converge to the respective static VRF of a cantilever beam loaded with a concentrated load at its end, given by Eq.(4.24) (Papadopoulos, Deodatis and Papadrakakis 2005).

$$VRF(x, \kappa) = \left| \frac{F_0}{I} \int_0^x h(x, \xi) M(\xi) e^{i\kappa\xi} d\xi \right|^2 \quad (4.24)$$

where  $h(x, \xi)$  is the Green function of the beam given by

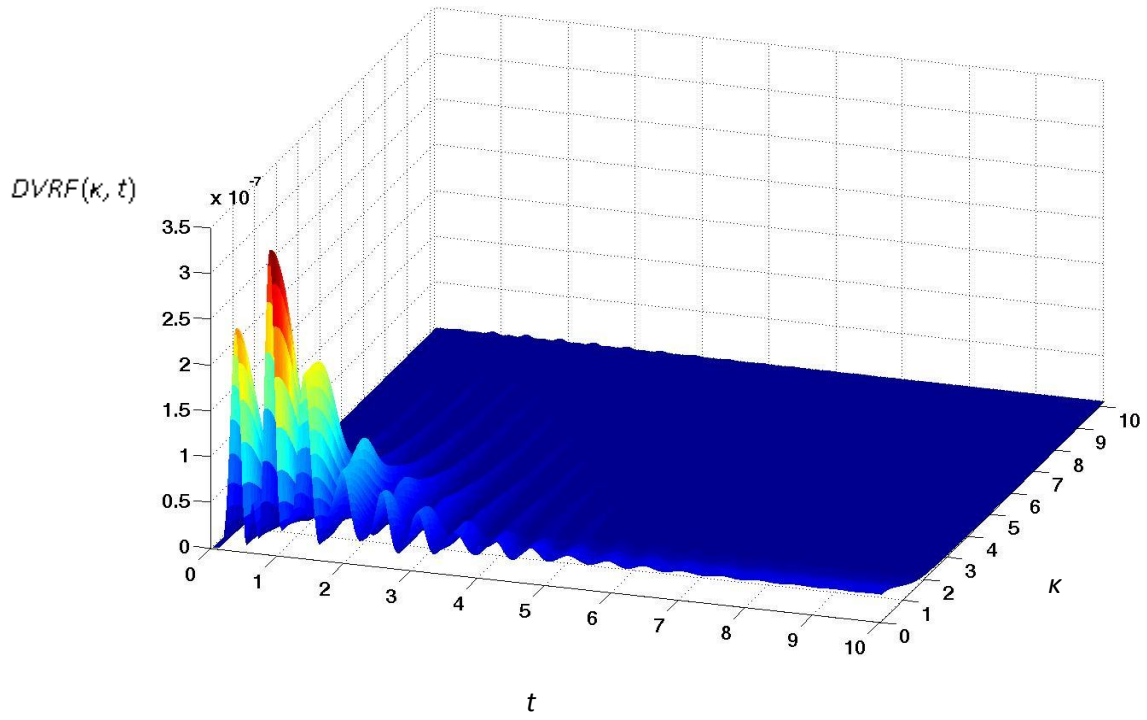
$$h(x, \xi) = x - \xi \quad (4.25)$$

and  $M(x)$  is the bending moment function given by

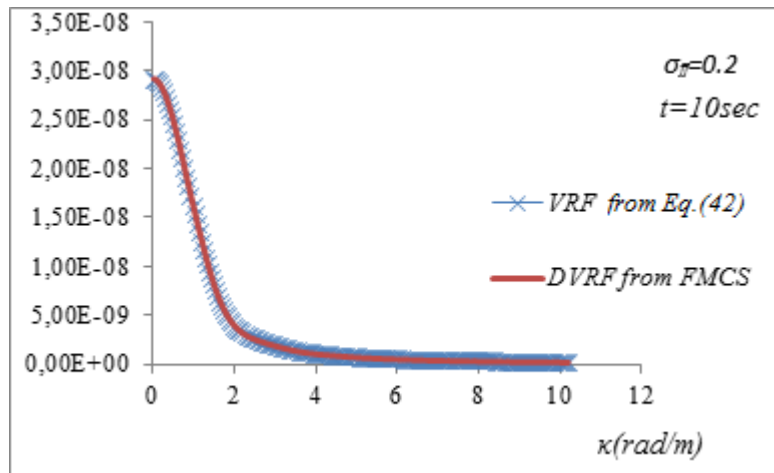
$$M(\xi) = -P_0(L - \xi) \quad (4.26)$$

Validating the aforementioned expectations, Fig. 4.3 presents a 3D plot of the DVRF with an initial transient phase and afterwards the phase where the system is almost at rest, while Fig. 4.4 presents the coinciding VRF and DVRF obtained from Eq. (4.24) and FMCS, respectively, when the system has approached the stationary condition at  $t = 10$ sec and  $\sigma_{ff} = 0.2$ .

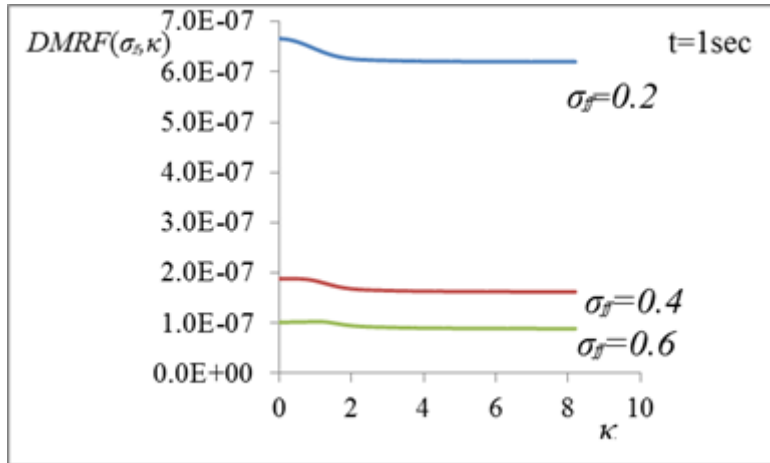




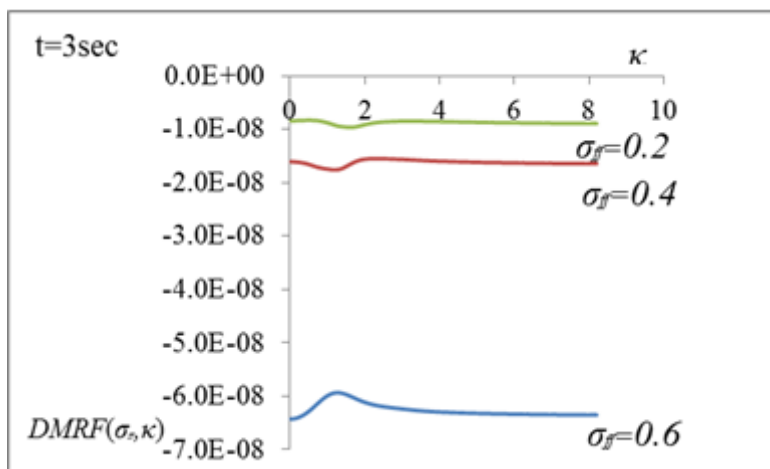
**Figure 4.3.** 3D plot of  $DVRF$ , as a function of frequency  $\kappa$  (rad/m) and time  $t$ (sec) for LC3 and  $\sigma_{ff}=0.2$



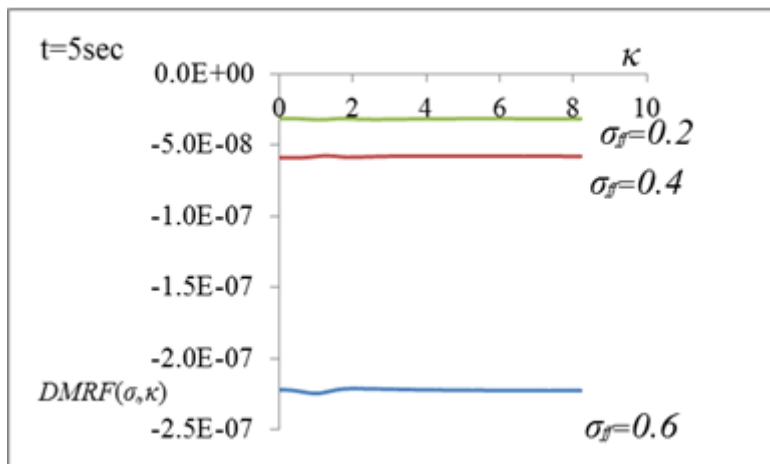
**Figure 4.4.** Values of VRF for static load  $P_0$  and DVRF for constant load  $P(t)=P_0$  at  $t=10$ sec.



(a)

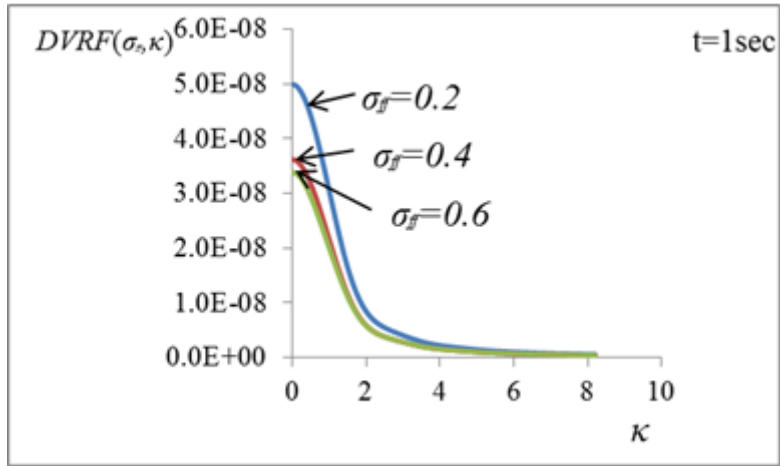


(b)

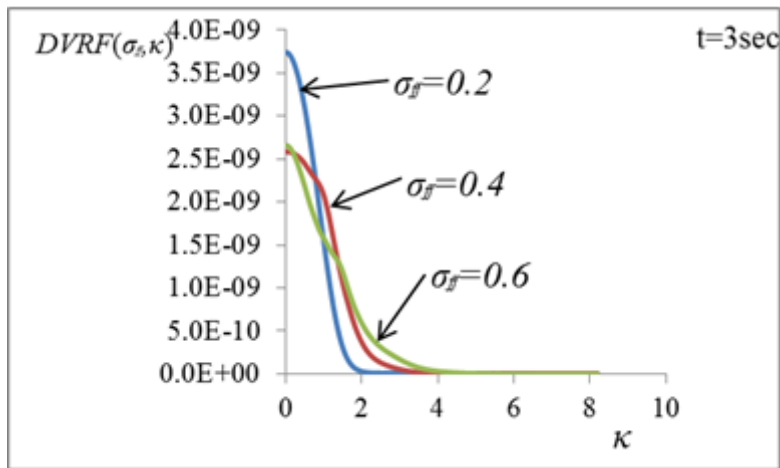


(c)

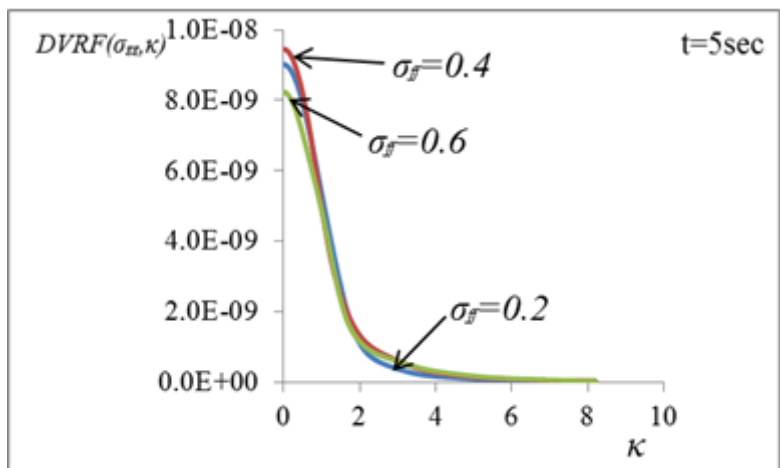
**Figure 4.5.** DMRF as a function of  $\sigma_f$  for (a)  $t=1\text{sec}$ , (b)  $t=3\text{sec}$  and (c)  $t=5\text{sec}$



(a)



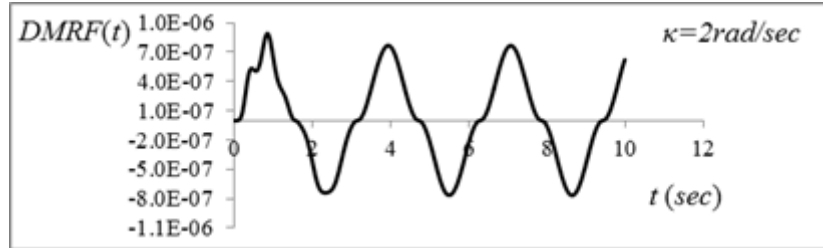
(b)



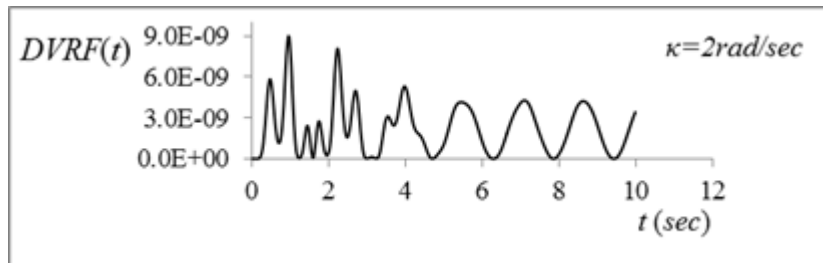
(c)

Figure 4.6. DVRF as a function of the  $\sigma_f$  for (a)  $t=1\text{sec}$ , (b)  $t=3\text{sec}$  and (c)  $t=5\text{sec}$

#### 4.2.3.2 LC2: DYNAMIC PERIODIC LOAD AT THE END OF THE BEAM



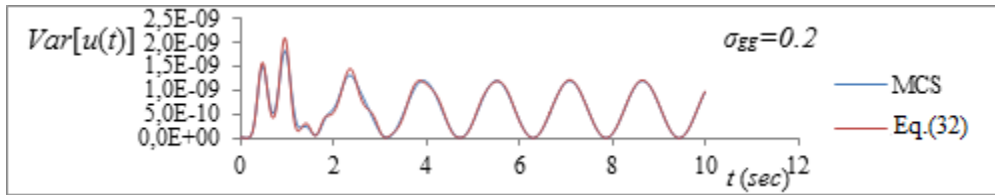
(a)



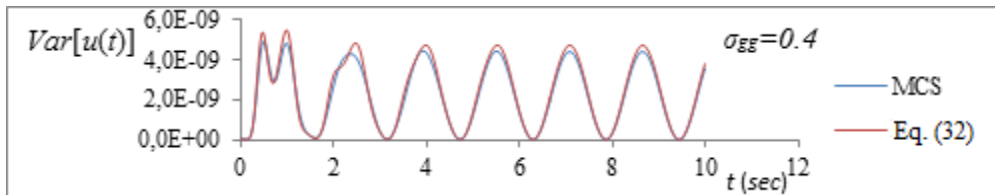
(b)

**Figure 4.7.** *DMRF* (a) and *DVRF* (b) as a function of  $t$  for  $\kappa=2$  rad/sec and  $\sigma_{ff} = 0.2$

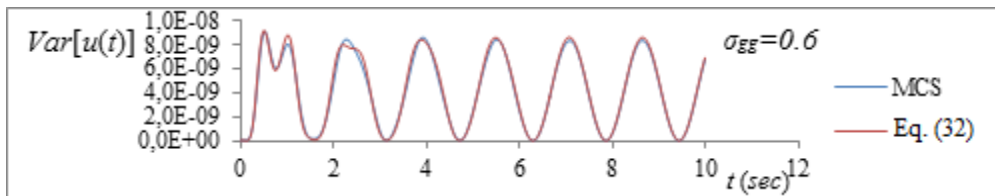
Figs. 4.5 and 4.6 present *DMRF* and *DVRF*, respectively, computed with FMCS for a periodic load with frequency  $\bar{\omega}=2$  and three different values of the standard deviation  $\sigma_{ff} = 0.2$ ,  $\sigma_{ff} = 0.4$  and  $\sigma_{ff} = 0.6$ . From these figures it can be observed that *DVRF* do not follow any particular pattern with respect to any increase or decrease of  $\sigma_{ff}$  in contrast to *DMRF* and to what has been observed in (Papadopoulos and Deodatis 2006) for the corresponding static problem, albeit the mean and variability response increases as  $\sigma_{ff}$  increases, as shown below (Fig. 4.8). Figs. 4.7(a) and (b) present plots of *DMRF* and *DVRF* as a function of  $t$  for a fixed wave number  $\kappa = 2$  and  $\sigma_{ff} = 0.2$ .



(a)



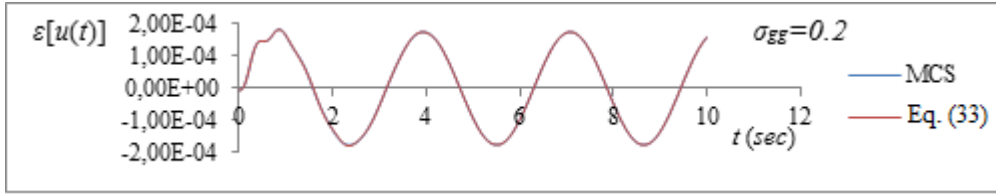
(b)



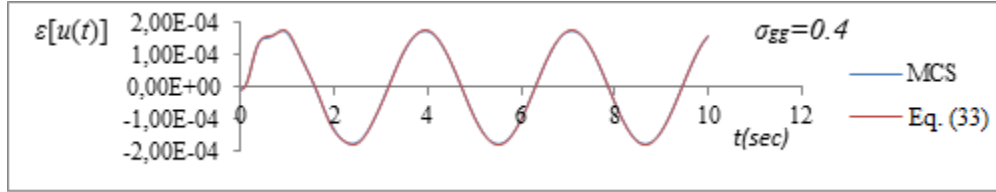
(c)

**Figure 4.8.** Time histories of the variance of the response displacement for a truncated Gaussian field with (a)  $\sigma_{gg} = 0.2$ , (b)  $\sigma_{gg} = 0.4$ , and (c)  $\sigma_{gg} = 0.6$ . Comparison of results obtained from eq.(4.32) and

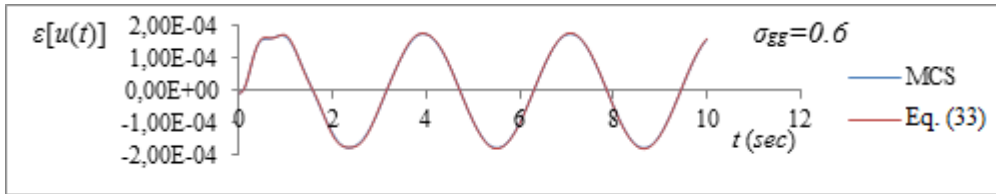
MCS



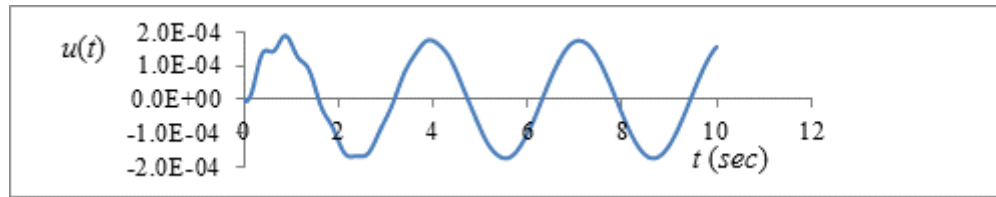
(a)



(b)



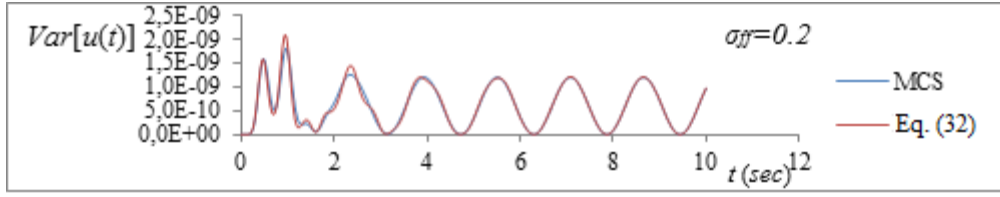
(c)



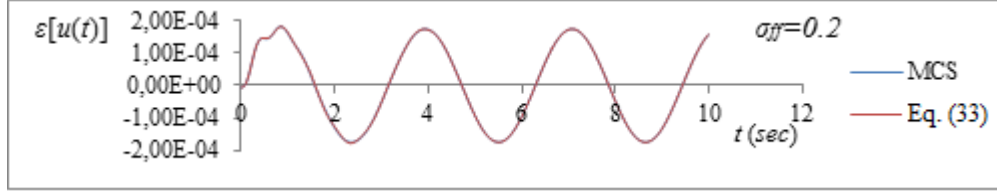
(d)

**Figure 4.9.** Time histories of: (a) mean response displacement for a truncated Gaussian field with  $\sigma_{gg} = 0.2$ , (b)  $\sigma_{gg} = 0.4$ , (c)  $\sigma_{gg} = 0.6$  and (d) the deterministic displacement. Comparison of results obtained from Eqs. (4.33) and MCS.

From the above Figs. (4.5, 4.6 and 4.7) it appears that DMRF and DVRF have a significant variation along the wave number  $\kappa$  axis and the time axis  $t$ . Both functions and especially DVRF have an initial transient phase and then appear to be periodic. It is reminded here that DVRF and DMRF are functions of the imposed dynamic loading. This explains the fact that they do not approach zero with  $t$  increasing, since the applied dynamic load is periodic with constant amplitude which does not decay.



(a)



(b)

**Figure 4.10.** Comparative results from Eq. (4.32) and MCS for a lognormal field with  $\sigma_{ff}=0.2$  for (a) the variance and (b) the mean of the response displacement time history

Figs. 4.8(a), (b) and (c) present comparatively the results of the computed response variance time histories using the integral expression of Eq.(4.14) and MCS, for three different standard deviations of a truncated Gaussian stochastic field used for the modeling of flexibility. The underlying Gaussian field is modeled with the power spectral density of Eq.(4.21) and three different standard deviations  $\sigma_{gg} = 0.2$ ,  $\sigma_{gg} = 0.4$  and  $\sigma_{gg} = 0.6$ . The corresponding standard deviations of the truncated Gaussian field  $f(x)$  are computed as  $\sigma_{ff} = 0.2$ ,  $\sigma_{ff} = 0.3912$  and  $\sigma_{ff} = 0.5286$ , respectively. Figs. 4.9(a), (b) and (c), present the same results with Fig. 4.6 but for the mean response of the oscillator. The deterministic displacement time history is also plotted in Fig. 4.9(d) for comparison purposes. From these figures it can be observed that the mean and variability response time histories obtained with the integral expressions of Eqs (4.14) and (4.15) are in close agreement with the corresponding MCS estimates. In all cases examined the maximum error in the computed  $Var[u(t)]$ , observed at the peak values of the variance, is less than 25%, while in all other time steps this error is less than 3-4%. In the case of  $E[u(t)]$ , the predictions of Eq. (4.15) are almost identical to the ones obtained with MCS, with an error of less than 3% in all cases. From Figs. 4.9(a-d), it can be observed that in all cases, the mean response time history for all cases examined is almost identical to the deterministic one, with the exception of the first cycle where slight differences in the peak values are observed.

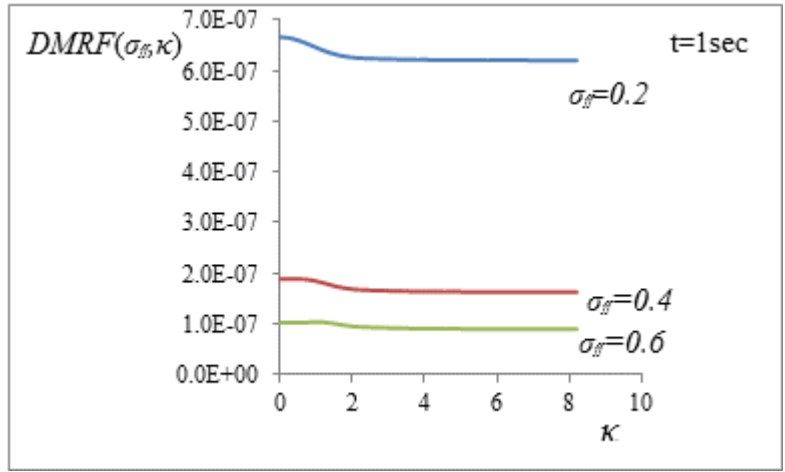
Figs. 4.10(a) and (b) repeat the same comparisons with the previous Figs. 4.8 and 4.9 but for the case of a lognormal stochastic field used for the modeling of flexibility with  $\sigma_{ff} = 0.2$  and lower bound  $l_b = -0.8$ . The conclusions extracted previously for the case of truncated Gaussian fields also apply here.

#### **4.2.3.3 LC3: EL CENTRO EARTHQUAKE**

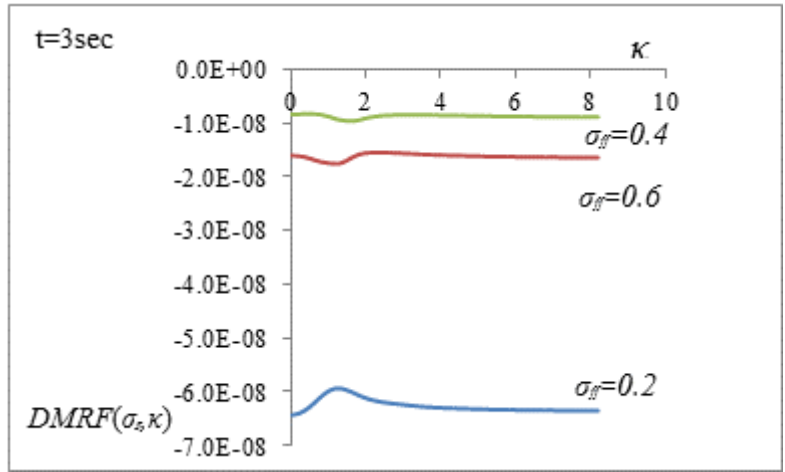
---

Figs. 4.11 and 4.12 present plots of DMRF and DVRF, respectively, for the load case of the acceleration time history of the 1940 El Centro Earthquake. As in previous load case scenario, three different values of the standard deviation were used,  $\sigma_{gg} = 0.2$ ,  $\sigma_{gg} = 0.4$  and  $\sigma_{gg} = 0.6$ . From these figures it can again be observed that DVRF does not follow any pattern with respect to an increase or decrease of  $\sigma_{ff}$ , while in this case this is also observed for the DMRF at Fig. 4.11(c) for  $t = 5\text{sec}$ .

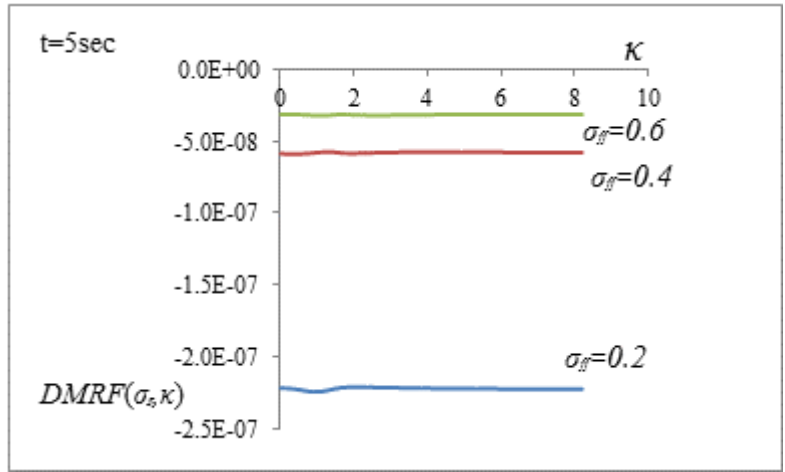




(a)

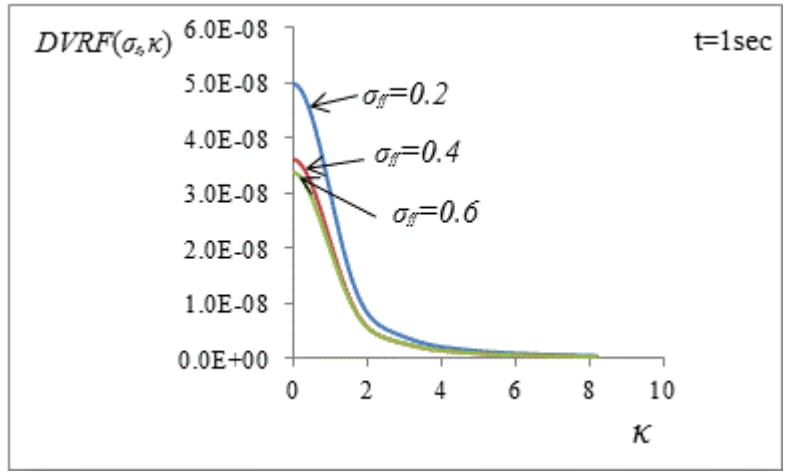


(b)

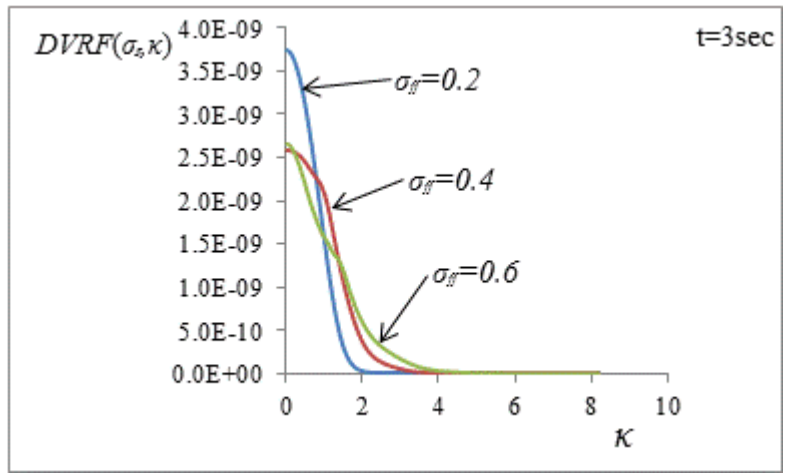


(c)

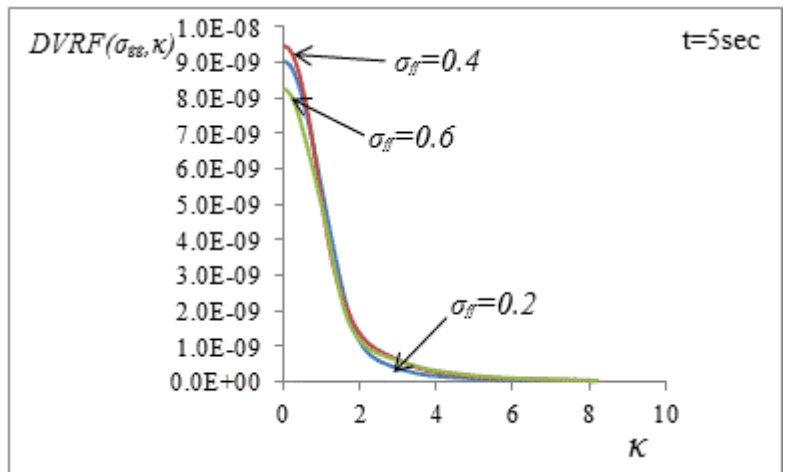
**Figure 4.11.** DMRF as a function of the  $\sigma_{ff}$  for (a)  $t=1\text{sec}$ , (b)  $t=3\text{sec}$  and (c)  $t=5\text{sec}$



(a)



(b)

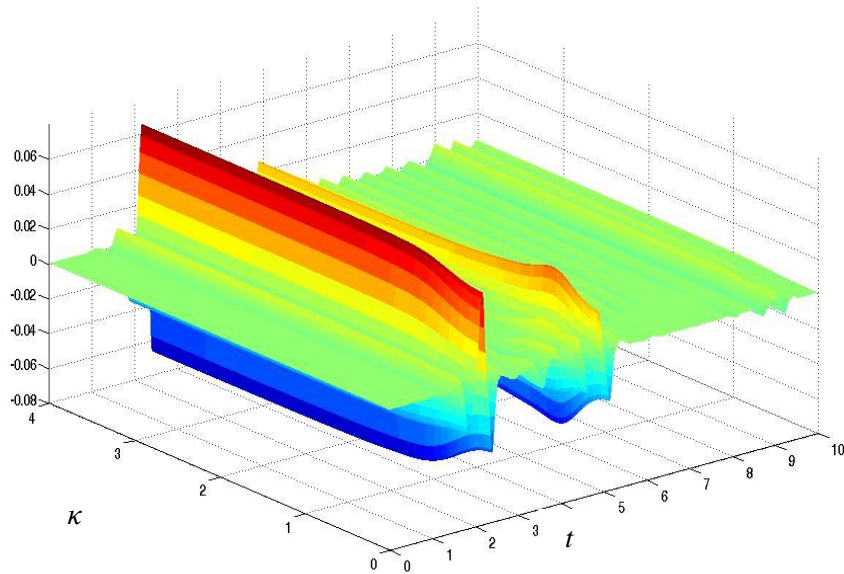


(c)

**Figure 4.12.** DVRF as a function of the  $\sigma_{ff}$  for (a)  $t=1\text{sec}$ , (b)  $t=3\text{sec}$  and (c)  $t=5\text{sec}$

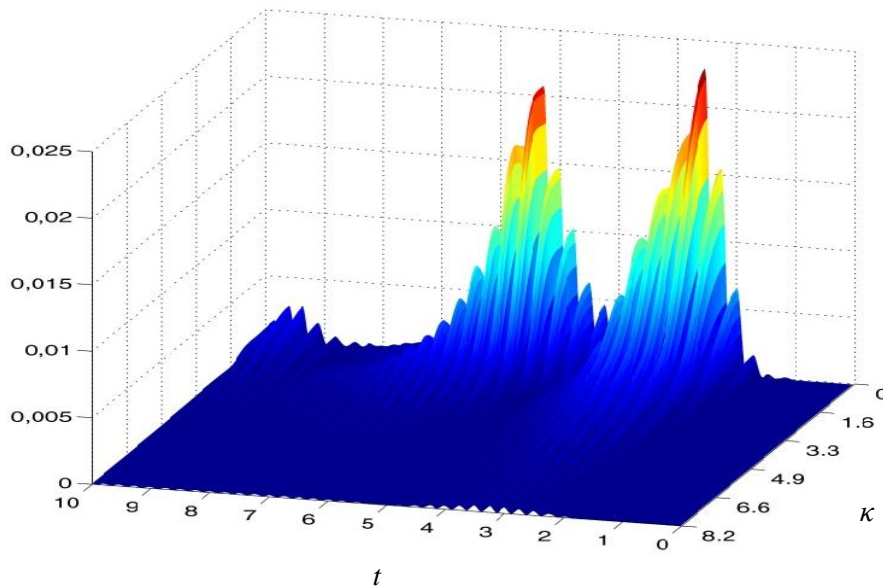
Figs. 4.13(a) and (b) present 3D plots of the DMRF and DVRF as a function of frequency  $\kappa$  and time  $t(\text{sec})$  for  $\sigma_{ff} = 0.2$ . From these figures, as well as from Figs. 4.11 and 4.12, it can be observed that again DMRF and DVRF have a significant variation in both  $\kappa$  and  $t$  axis, without being periodic in contrast to what has been observed in LC2. In addition, both DMRF and DVRF approach a zero value with time increasing due to the fact that ground accelerations decay and vanish after some time.

*DMRF* ( $\kappa, t$ )



(a)

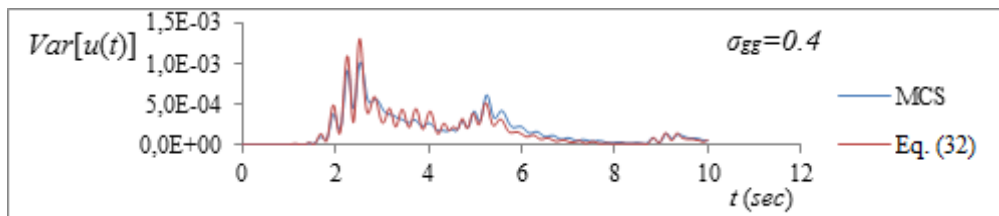
*DVRF* ( $\kappa, t$ )



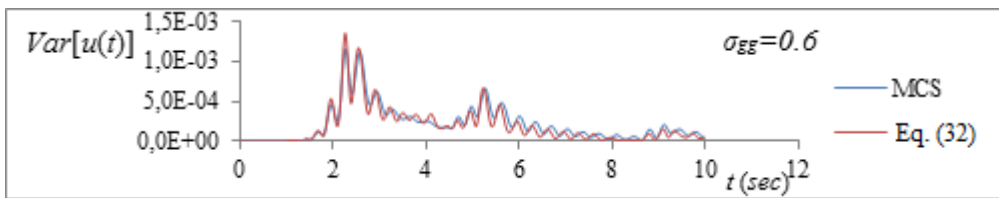
(b)

**Figure 4.13.** 3D plots of (a) DMRF and (b) DVRF, as a function of frequency  $\kappa$  (rad/m) and time  $t(\text{sec})$  for LC3 and off=0.2

Figs. 4.14(a), and 4.14(b) present a comparison of the response variance computed with Eq.(4.14) and MCS, in the case of a truncated Gaussian stochastic field modeling flexibility with  $\sigma_{gg} = 0.4$  and  $0.6$ , while Figs. 4.15(a) and (b) present the same results for the mean dynamic response of the stochastic oscillator along with the corresponding deterministic displacement time history (Fig. 4.15(c)). Figs. 4.16(a) and (b) repeat the same comparisons for the case of a lognormal stochastic field used for the modeling of flexibility and  $\sigma_{ff} = 0.3$  and lower bound  $l_b = -0.8$ .

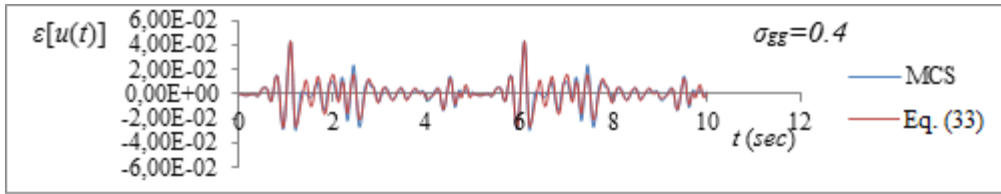


(a)

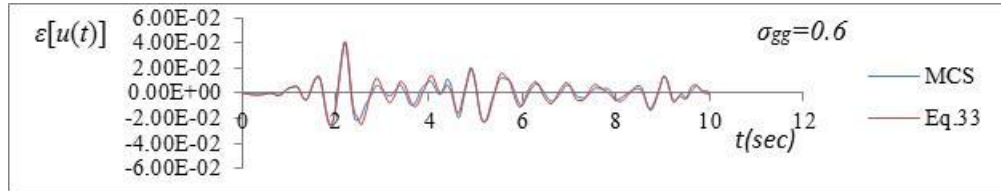


(b)

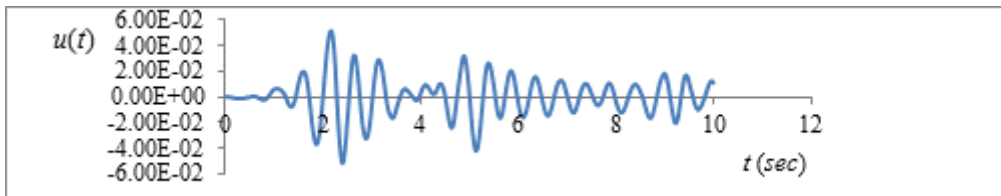
**Figure 4.14.** Time histories of the variance of the response displacement for a truncated Gaussian field for (a)  $\sigma_{gg} = 0.4$  and (b)  $\sigma_{gg} = 0.6$ . Comparison of results obtained from Eq. (4.32) and MCS.



(a)

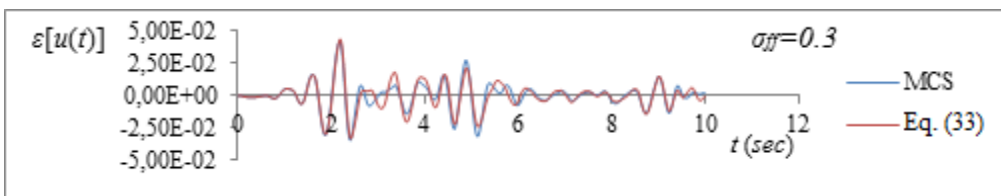


(b)

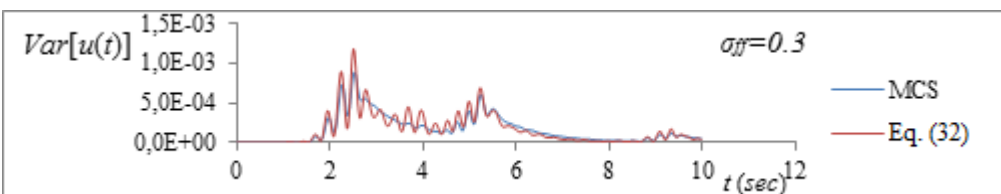


(c)

**Figure 4.15.** Time histories of the mean response displacement for a truncated Gaussian field with (a)  $\sigma_{gg} = 0.4$ , (b)  $\sigma_{gg} = 0.6$  and (c) of the deterministic response displacement. Comparison of results obtained from Eq. (4.33) and MCS.



(a)



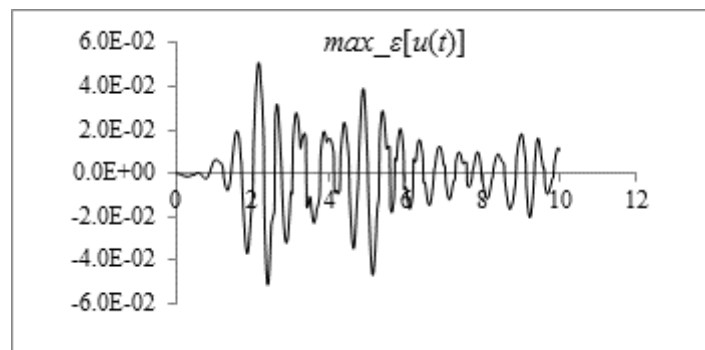
(b)

**Figure 4.16.** Comparative results from Eqs. (4.32), (4.33) and MCS for a lognormal field with  $\sigma_{ff} = 0.3$  for (a) the variance and (b) the mean of the response displacement time history

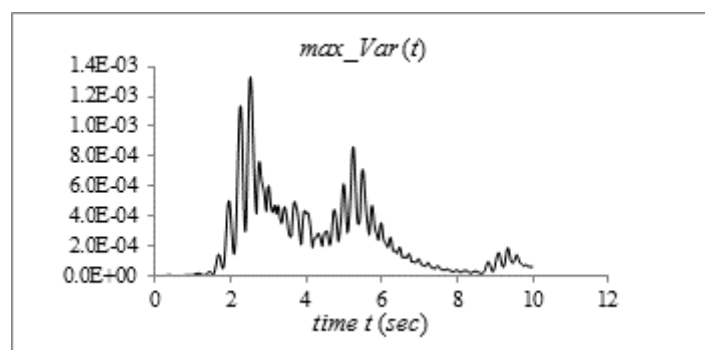
From the above figures it can be observed that, as in LC2, the mean and variability response time histories obtained with the integral expressions of Eqs. (4.14) and (4.15) are in close agreement with the corresponding MCS estimates, in all cases. Again, the maximum error in the computed  $Var[u(t)]$  was observed at the peak values of the variance and is less than 25%, while in all other time steps this error is less than 3-4%. In the case of  $E[u(t)]$ , the predictions of Eq. 8(b) are very close to the ones obtained with MCS, with an error of less than 3% in all cases. From Figs. 4.15(a-c), it can be observed that, in contrast to what was observed in LC2, the mean response time history differs significantly from the corresponding deterministic one, in terms of both frequencies and amplitudes.

#### 4.2.3.4 UPPER BOUNDS ON THE MEAN AND VARIANCE OF THE RESPONSE OF LC3

Spectral-distribution-free upper bounds on both the mean and variance of the response are obtained via Eqs. (4.19) and (4.20), respectively. Results of this calculation are presented in Figs. 4.17(a) and (b), in which the time dependent upper bounds on the mean and variance of the response displacement are plotted against time for a standard deviation  $\sigma_{ff} = 0.4$



(a)

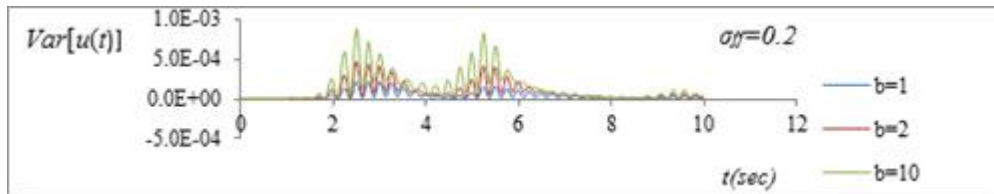


(b)

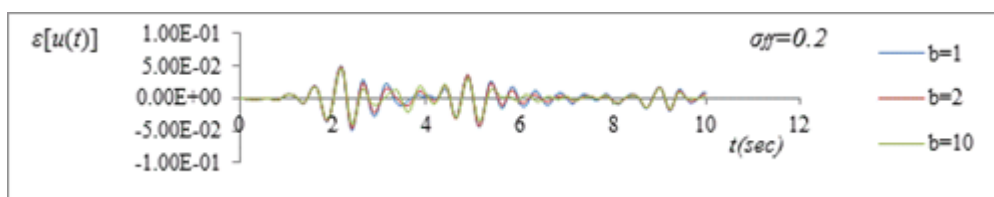
**Figure 4.17.** Upper bounds on the (a) mean and (b) variance of the response displacement for LC3 and  $\sigma_{gg}=0.4$

#### 4.2.3.5 SENSITIVITY ANALYSIS FOR LC3 USING THE INTEGRAL EXPRESSIONS IN EQS (4.14) AND (4.15)

Finally, a sensitivity analysis is performed using Eqs. (4.14) and (4.15) at minimum computational cost, with respect to three different values of the correlation length parameter of the SDF in Eq. (4.21) and  $\sigma_{ff} = 0.2$ .



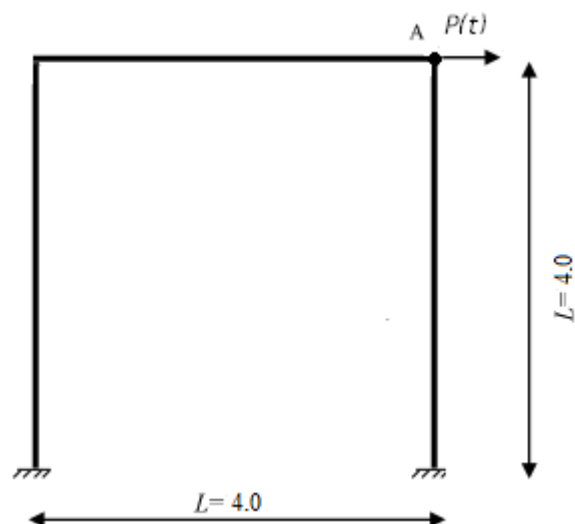
(a)



(b)

**Figure 4.18.** (a) Mean and (b) variance time histories of the response displacement computed from Eqs. (4.14) and (4.15), respectively for three different values of the correlation length parameter  $b$  of the SDF in Eq. (4.21)

### 4.3 TIME-HISTORY ANALYSIS OF STOCHASTIC FINITE ELEMENT SYSTEMS



**Figure 4.19.** Geometry and loading of the fixed–fixed frame discretized with 60 beam elements.

Without loss of generality consider the linear stochastic FE system of Fig. 4.19 which is a fixed-fixed beam/frame structure. The inverse of the elastic modulus is assumed to vary randomly along its length according to the following expression:

$$\frac{1}{E(x)} = F_0(1 + f(x)) \quad (4.27)$$

where  $E$  is the elastic modulus,  $E_0$  is the mean value of the inverse of  $E$ , and  $f(x)$  is a zero-mean homogeneous stochastic field modeling the variation of  $1/E$  around its mean value.

For the derivation of the deterministic system dynamic response the trivial second-order differential equation for the discretized FE dynamic system equilibrium is as follows:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{P}(t) \quad (4.28)$$

where  $\mathbf{M}$  is the mass matrix of the discretized FE system,  $\mathbf{C}$  is its damping matrix,  $\mathbf{K}$  is its stiffness matrix and  $\mathbf{P}(t)$  is its loading vector. At last,  $\mathbf{u}(t)$  is the time-history of the displacement vector of the system, providing information about the response of each node of the FE mesh,  $\dot{\mathbf{u}}(t)$  is the first order time-derivative and  $\ddot{\mathbf{u}}(t)$  is the second order time-derivative of  $\mathbf{u}(t)$ .

Direct integration of Eq.(4.28) can be performed using i.e. a Newmark scheme of the following form:

$${}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{R}} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{R} + \mathbf{M}(a_0 {}^t\mathbf{U} + a_1 {}^t\dot{\mathbf{U}} + a_2 {}^t\ddot{\mathbf{U}}) + \mathbf{C}(a_1 {}^t\mathbf{U} + a_4 {}^t\dot{\mathbf{U}} + a_5 {}^t\ddot{\mathbf{U}}) \quad (4.29)$$

where  $a_0 = \frac{1}{a\Delta t^2}$ ;  $a_1 = \frac{1}{a\Delta t}$ ;  $a_2 = \frac{1}{2a} - 1$ ;  $a_4 = \Delta t(1 - \delta)$ ;  $a_5 = \delta\Delta t$ ;  $a_6 = \Delta t(1 - \delta)$ ;  $a_7 = \Delta t$ . After choosing a time step  $\Delta t$  parameters  $\alpha$  and  $\delta$  are selected under the limitations  $\delta \geq 0.50$  and  $a \geq 0.25(0.5 + \delta)^2$ . After initialization of  ${}^0\mathbf{U}$ ,  ${}^0\dot{\mathbf{U}}$ , and  ${}^0\ddot{\mathbf{U}}$ , the displacements at time  $t + \Delta t$  are calculated solving the following linear system of equations

$$\hat{\mathbf{K}} {}^{t+\Delta t}\mathbf{U} = {}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{R}} \quad (4.30)$$

where  $\hat{\mathbf{K}}$  is the effective stiffness matrix given by

$$\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{K} + a_0\mathbf{M} + a_1\mathbf{C} \quad (4.31)$$

Finally accelerations and velocities at time  $t + \Delta t$  accrue from the following equations:

$${}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}} = a_0({}^{t+\Delta t}\mathbf{U} - {}^t\mathbf{U}) - a_1 {}^t\dot{\mathbf{U}} - a_2 {}^t\ddot{\mathbf{U}} \quad (4.32)$$

$${}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{U}} = {}^t\dot{\mathbf{U}} + a_6 {}^t\ddot{\mathbf{U}} + a_7 {}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}} \quad (4.33)$$

Matrices  $\hat{\mathbf{R}}$  and  $\hat{\mathbf{K}}$  in Eqs.(4.30) and (4.31) and consequently vectors  $\mathbf{U}$ ,  $\dot{\mathbf{U}}$  and  $\ddot{\mathbf{U}}$  are random due to the variation of  $E(x)$  in Eq.(4.27). Thus, the solution of Eq.(4.30) requires the



implementation of some stochastic methodology in order to invert the stochastic operator  $\hat{\mathbf{K}}$  in at each time step and predict the stochastic dynamic response of the FE system.

#### 4.3.1 ANALYSIS OF MEAN AND VARIANCE OF DYNAMIC SYSTEM RESPONSE USING DMRF AND DVRF

Following a procedure similar to the one presented in (Papadopoulos and Kokkinos 2012) for linear stochastic oscillators under dynamic loading, it is possible to express the variance of the dynamic response of a stochastic finite element system in the following integral form expression:

$$\text{Var}[\mathbf{u}(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{DVRF}(t, \kappa, \sigma_{ff}) S_{ff}(\kappa) d\kappa \quad (4.34)$$

where  $\mathbf{DVRF}$  is the vectorized dynamic version of DVRF, assumed to be a function of deterministic parameters of the problem related to geometry, loading, (mean) material properties and the standard deviation  $\sigma_{ff}$  of the stochastic field modeling the system's flexibility. A similar integral expression can provide an estimate for the mean value of the dynamic response of the system (Papadopoulos, Papadrakakis and Deodatis 2006):

$$\varepsilon[\mathbf{u}(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{DMRF}(t, \kappa, \sigma_{ff}) S_{ff}(\kappa) d\kappa \quad (4.35)$$

where again  $\mathbf{DMRF}$  is the vectorized dynamic version of DMRF of dimension equal to the dof's of the problem, which is a function similar to the  $\mathbf{DVRF}$  in the sense that it also depends on deterministic parameters of the problem as well as  $\sigma_{ff}$ .

It is reminded here that the existence of Eqs.(4.34) and (4.35) has only been proved for statically determinate beams in which the resulting displacement field is a linear transformation of the stochastic field of the compliance  $1/E(x)$  (Papadopoulos and Deodatis 2006). In all other cases this transformation is nonlinear. As demonstrated in (Teferra and Deodatis 2012), for such nonlinear transformations the integral expressions for the variance involve higher order spectra. Thus the nature of the approximation induced in Eqs. (4.34) and (4.35) is the omittance of these higher order spectra.

##### 4.3.1.1 NUMERICAL ESTIMATION OF THE DVRF AND THE DMRF USING FAST MONTE CARLO SIMULATION

The numerical estimation of  $\mathbf{DVRF}$  and  $\mathbf{DMRF}$  involves a dynamic FEM-based fast Monte Carlo simulation (DFEM-FMCS) whose idea is to consider the random field  $f(x)$  in Eq.(4.27) as a random sinusoid (Papadopoulos, Papadrakakis και Deodatis 2006), (Papadopoulos, Deodatis και Papadrakakis 2005) and plug its monochromatic power spectrum into Eqs. (4.34) and (4.35), in order to compute the respective mean and variance response at various wave numbers as a function of time  $t$ . The steps of the FEM-FMCS approach are the following:

- (i) Generate  $N(5-10)$  sample functions of the below random sinusoid with standard deviation  $\sigma_{ff}$  and wave number  $\kappa$  modeling the variation of the inverse of the elastic modulus  $1/E$  around its mean :

$$f_j(x) = \sqrt{2}\sigma_{ff} \cos(\bar{\kappa}x + \varphi_j) \quad (4.36)$$

where  $j=1,2,\dots,N$  and  $\varphi_j$  varies randomly under uniform distribution in the range  $[0,2\pi]$ . These samples are generated by dividing the range  $[0,2\pi]$  at 5–10 equally spaced distances and selecting the centres of these distances as values of random phase angles  $\varphi_j$ 's.

- (ii) Using these  $N$  generated sample functions it is straightforward to compute their respective dynamic mean and response variance,  $\varepsilon[\mathbf{u}(t)]_{\bar{\kappa}}$  and  $\text{Var}[\mathbf{u}(t)]_{\bar{\kappa}}$ , by solving the corresponding FEM system under the applied dynamic loading using Eqs.(4.30), (4.32) and (4.33). Random matrix  $\hat{\mathbf{K}}$  is constructed by assigning a different value of  $E$  at each FE, using i.e. the mid-point method.
- (iii) The value of the **DMRF** at wave number  $\bar{\kappa}$  can then be computed as follows:

$$\mathbf{DMRF}(t, \bar{\kappa}, \sigma_{ff}) = \frac{\varepsilon[\mathbf{u}(t)]_{\bar{\kappa}}}{\sigma_{ff}^2} \quad (4.37)$$

and likewise the value of the **DVRF** at wave number  $\bar{\kappa}$

$$\mathbf{DVRF}(t, \bar{\kappa}, \sigma_{ff}) = \frac{\text{Var}[\mathbf{u}(t)]_{\bar{\kappa}}}{\sigma_{ff}^2} \quad (4.38)$$

Both previous equations are direct consequences of the integral expressions in Eqs. (4.34) and (4.35) in the case that the stochastic field becomes a random sinusoid.

- (iv) Get **DMRF** and **DVRF** as a function of both time  $t$  and wave number  $\kappa$  by repeating previous steps for various wave numbers and different time steps. The entire procedure can be repeated for different values of the standard deviation  $\sigma_{ff}$  of the random sinusoid.

#### 4.3.1.2 BOUNDS OF THE MEAN AND VARIANCE OF THE DYNAMIC RESPONSE

Upper bounds on the mean and variance of the dynamic response of the stochastic system can be established directly from Eqs. (4.34) and (4.35), as follows:

$$\varepsilon[\mathbf{u}(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{DMRF}(t, \kappa, \sigma_{ff}) S_{ff}(\kappa) d\kappa \leq \mathbf{DMRF}(t, \kappa^{\max}(t), \sigma_{ff}) \sigma_{ff}^2 \quad (4.39)$$

$$\text{Var}[\mathbf{u}(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{DVRF}(t, \kappa, \sigma_{ff}) S_{ff}(\kappa) d\kappa \leq \mathbf{DVRF}(t, \kappa^{\max}(t), \sigma_{ff}) \sigma_{ff}^2 \quad (4.40)$$

where  $\kappa^{\max}(t)$  is the wave number at which **DMRF** and **DVRF**, corresponding to a given time step  $t$  and value of  $\sigma_{ff}$ , reach their maximum value. For the minimum,  $\kappa^{\min}(t)$  is

substituted with  $\kappa^{\min}(t)$  and inequality signs switch direction. An envelope of time evolving upper and lower bounds on the mean and variance of the dynamic system response can be extracted from Eqs. (4.39) and (4.40). As in the case of linear stochastic systems under static loads (Teferra and Deodatis 2012), (Papadopoulos, Papadrakakis and Deodatis 2006), (Papadopoulos, Deodatis and Papadrakakis 2005) this envelope is physically realizable since the form of the stochastic field that produces it is the random sinusoid of Eq.(4.36) with  $\bar{\kappa} = \kappa^{\max}(t)$ .

### 4.3.2 2D FORMULATION

In the case of a problem where the inverse elastic modulus is considered to vary randomly over a 2D domain, the following equation is adopted:

$$\frac{1}{E(x, y)} = F_0(1 + f(x, y)), \quad (4.41)$$

where  $E$  is the elastic modulus,  $F_0$  is the mean value of the inverse of  $E$ , and  $f(x, y)$  is now a two-dimensional, zero-mean homogeneous stochastic field modeling the variation of  $1/E$  around its mean value  $F_0$ . Accordingly, the integral expressions for the variance and mean response displacement  $u(t)$  become:

$$\text{Var}[\mathbf{u}(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{DVRF}(t, \kappa_x, \kappa_y, \sigma_{ff}) S_{ff}(\kappa_x, \kappa_y) d\kappa_x d\kappa_y \quad (4.42)$$

$$\varepsilon[\mathbf{u}(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{DMRF}(t, \kappa_x, \kappa_y, \sigma_{ff}) S_{ff}(\kappa_x, \kappa_y) d\kappa_x d\kappa_y \quad (4.43)$$

where  $\mathbf{DVRF}(t, \kappa_x, \kappa_y, \sigma_{ff})$  and  $\mathbf{DMRF}(t, \kappa_x, \kappa_y, \sigma_{ff})$  are in this case two-dimensional, possessing the following bi-quadrant symmetries:

$$\mathbf{DMRF}(\kappa_x, \kappa_y) = \mathbf{DMRF}(-\kappa_x, -\kappa_y) \quad (4.44)$$

$$\mathbf{DVRF}(\kappa_x, \kappa_y) = \mathbf{DVRF}(-\kappa_x, -\kappa_y) \quad (4.45)$$

$S_{ff}(\kappa_x, \kappa_y)$  is the spectral density function of the stochastic field  $f(x, y)$  possessing the same symmetries as  $\mathbf{DMRF}$  and  $\mathbf{DVRF}$ . The 1D random sinusoid in Eq. (4.36) now becomes a 2D one with the following form that is the same for all possible stochastic fields:

$$f_j(x) = \sqrt{2}\sigma_{ff} \cos(\bar{\kappa}_x x + \bar{\kappa}_y y + \varphi_j); \quad j=1, 2, \dots, N. \quad (4.46)$$

Upper bounds on the mean and variance of the response displacement for a given time instance  $t$  can be established for the 2D case as follows:

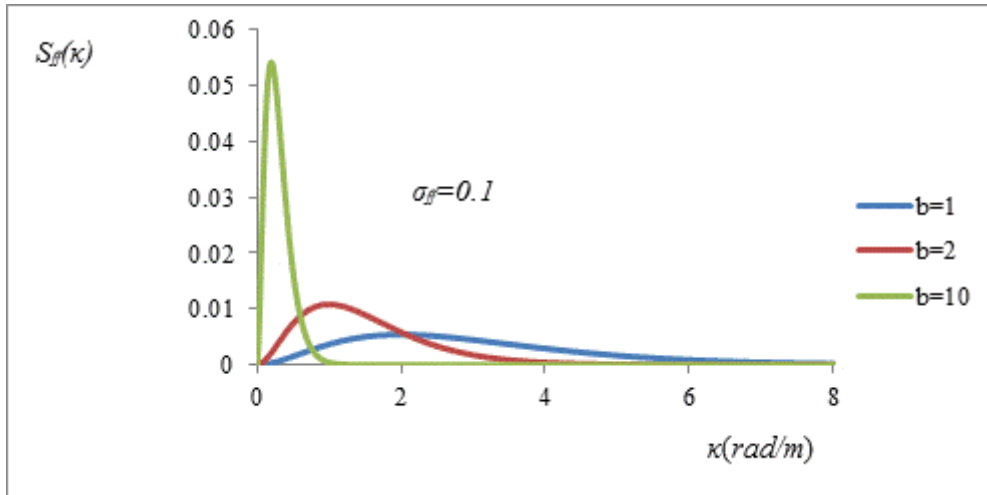
$$\text{Var}[\mathbf{u}(t)] \leq \mathbf{DVRF}(t, \kappa_x^{\max}, \kappa_y^{\max}, \sigma_{ff}) \sigma_{ff}^2 \quad (4.47)$$

$$\varepsilon[\mathbf{u}(t)] \leq \mathbf{DMRF}(t, \kappa_x^{\max}, \kappa_y^{\max}, \sigma_{ff}) \sigma_{ff}^2 \quad (4.48)$$

where  $(\kappa_x^{\max}, \kappa_y^{\max})$  is the wave number pair at which the **DMRF** or the **DVRF** take their maximum value (for a given value of  $\sigma_{ff}$  and a given location  $(x, y)$ ), and  $\sigma_{ff}^2$  is the variance of the stochastic field  $f(x, y)$  modeling the inverse of the elastic modulus. Again, for the minimum,  $\kappa_{x,y}^{\max}(t)$  is substituted with  $\kappa_{x,y}^{\min}(t)$  and inequality signs switch direction. It should be emphasized that  $(\kappa_x^{\max}, \kappa_y^{\max})$  are not necessarily the same for the **DMRF** and the **DVRF**.

### 4.3.3 NUMERICAL EXAMPLES

*Example 1.* For the fixed-fixed frame shown in Fig. 4.19 with length and height equal to  $L = 4m$ , the inverse of the modulus of elasticity is assumed to vary randomly along its length according to Eq. (4.27) with  $F_0 = (1.35 \times 10^8 \text{ kN/m})^{-1}$ ,  $I = 0.1m^4$  and damping ratio  $\xi = 5\%$ . The total mass of the beam is assumed to be  $m_{tot} = 6000kg$ , distributed evenly among the finite element nodes of the model. For the analysis of the frame structure we used 60 beam elements, 20 for each column and the plateau, of equal length, resulting in 177 d.o.f.'s.



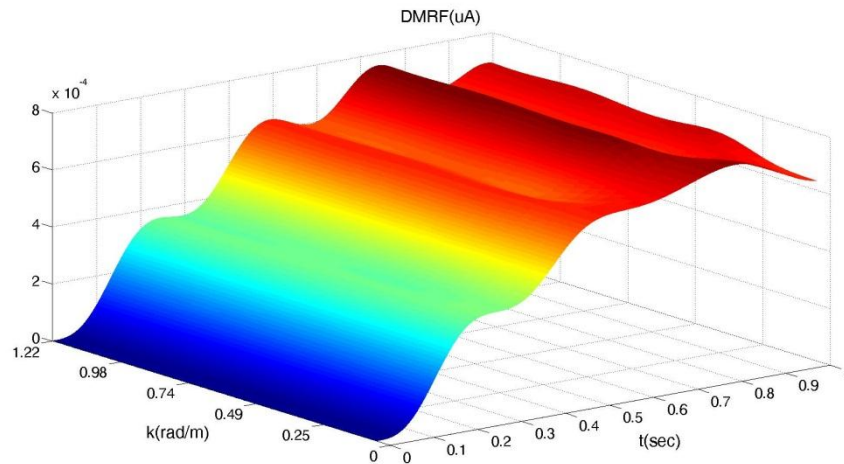
**Figure 4.20.** Spectral density functions for stochastic field  $f(x)$  standard deviation  $\sigma_{ff}=0.2$  for three different values of the correlation length parameter

Two load cases are considered: LC1 consisting of a concentrated dynamic periodic load  $P(t) = 100\sin(2t)$  at the right top corner of the frame (see Fig. 4.19) and LC2 consisting of a dynamic load  $p_n(t) = -m_n \ddot{U}_g(t)$  acting on each node  $n$  of the beam with  $m_n$  being the corresponding nodal mass and  $\ddot{U}_g(t)$  the acceleration time history of the 1940 El Centro earthquake. The stochastic field  $f(x)$  in Eq.(4.27) is considered to vary across the length of the two columns and the plateau of the frame running continuously from the left fixed edge to

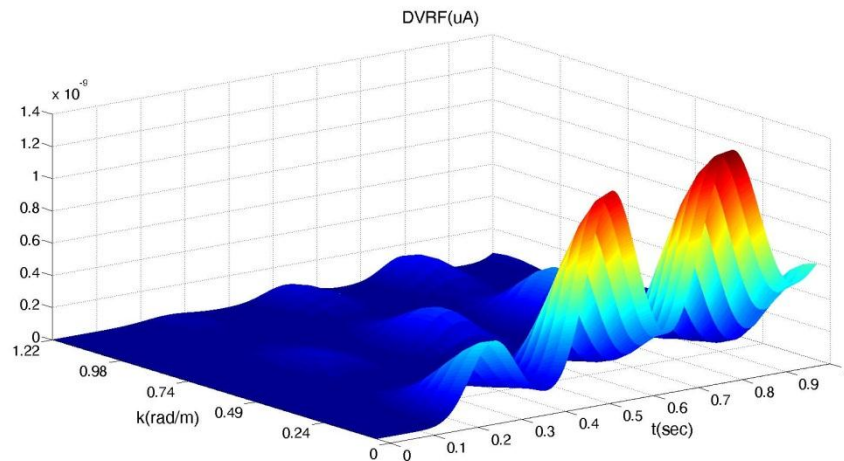
the right. The spectral density function (SDF) of Fig. 4.20 was used for the modeling of the inverse of the elastic modulus stochastic field, given by:

$$S_{ff}(\kappa) = \frac{1}{4} \sigma_{ff}^2 b^3 \kappa^2 e^{-b|\kappa|} \quad (4.49)$$

with  $b=1,2,10$  being three different values of the correlation length parameter examined.



(a)



(b)

**Figure 4.21.** 3D plots of (a) *DMRF* and (b) *DVRF* of the horizontal displacement  $u_A$ , as a function of frequency  $\kappa$  (rad/m) and time  $t$ (sec) for LC1 and  $\sigma_{ff}=0.2$

For standard deviations  $\sigma_{ff}$  of the stochastic field  $f(x)$  higher than 0.2 a truncated Gaussian and a lognormal pdf is used to model  $f(x)$ . For this purpose, an underlying Gaussian stochastic field denoted by  $g(x)$  is generated using the spectral representation method

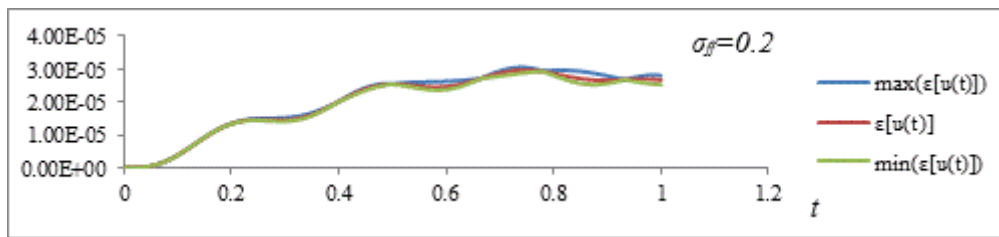
(Shinozuka and Deodatis 1991) and the power spectrum of Eq.(4.49). The truncated Gaussian field  $f_{TG}(x)$  is obtained by simply truncating  $g(x)$  in the following way:  $-0.9 \leq g(x) \leq 0.9$ , while the lognormal  $f_L(x)$  is obtained from the following transformation as a translation field (Grigoriu 1995):

$$f_L(x) = F_L^{-1} \{G[g(x)]\} \quad (4.50)$$

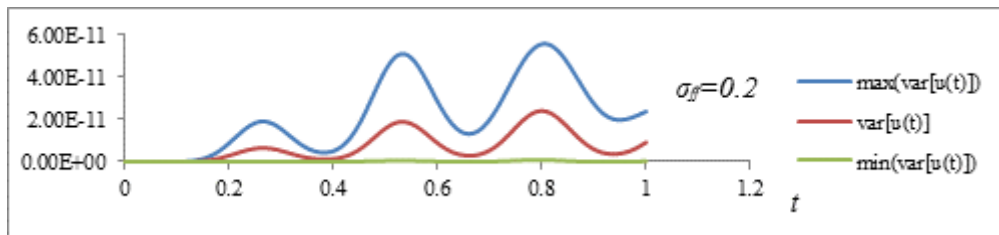
The SDF of the underlying Gaussian field in Eq.(4.50) and the corresponding spectral densities of the truncated Gaussian and the Lognormal fields denoted  $S_{f_{TG}, f_{TG}}(\kappa)$  and  $S_{f_L, f_L}(\kappa)$ , respectively, are different from the one in Eq.(4.49) and are computed from the following formula

$$S_{f_i, f_i}(\kappa) = \frac{1}{2\pi L_x} \left| \int_0^{L_x} f_i(x) e^{-i\kappa x} dx \right|^2; i = TG, L \quad (4.51)$$

where  $L_x$  is the length of the sample functions of the non-Gaussian fields modeling flexibility. As the sample functions of the non-Gaussian fields are non-ergodic, the estimation of power spectra in Eq.(4.51) is performed in an ensemble average sense (Grigoriu 1995).



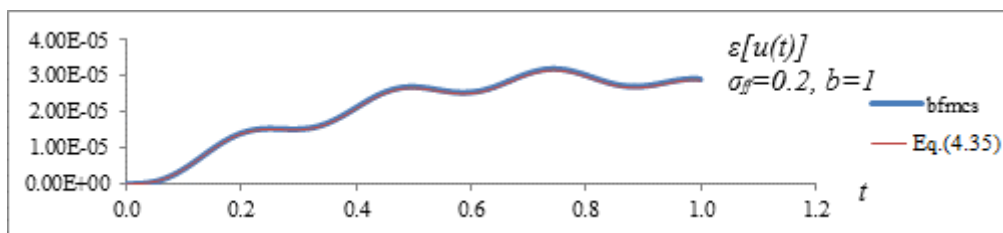
(a)



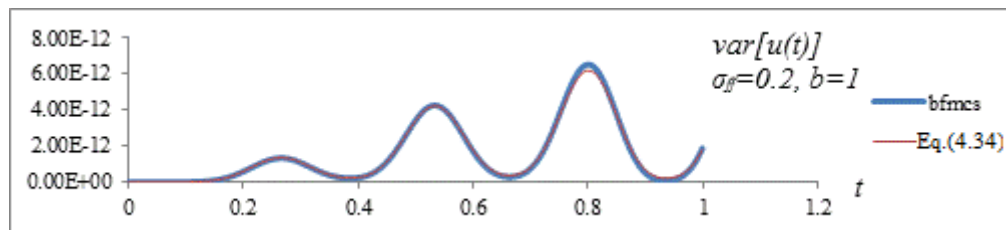
(b)

**Figure 4.22.** Upper and lower bounds on the (a) mean and (b) variance of the response displacement for LC1 and  $\sigma_{ff}=0.2$

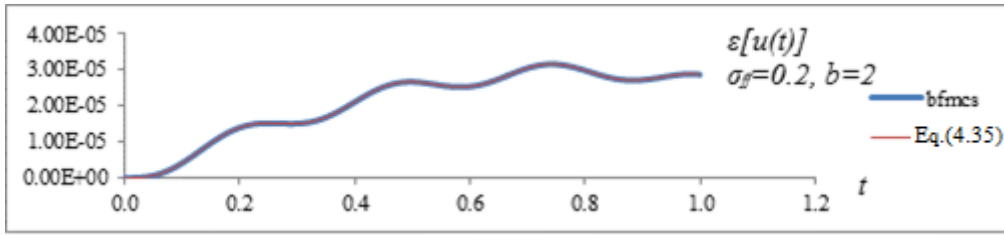
Fig. 4.21 presents 3D plots of  $DMRF(u_A)$  and  $DVRF(u_A)$  for the horizontal displacement  $u_A$  of point  $A$  of the frame as a function of time  $t$  and frequency  $\kappa$  for  $\sigma_{ff} = 0.2$ . In this figure it can be observed that  $DMRF(u_A)$  remains almost constant with respect to  $\kappa$ , while evolving substantially as a function of  $t$ . On the contrary  $DVRF(u_A)$  demonstrates a substantial volatility with respect to both  $\kappa$  and  $t$ . Therefore, in contrast to  $DMRF(u_A)$ ,  $DVRF(u_A)$  accommodates the possibility of considerable variation of the variability response for different statistical parameters of the stochastic field. This is further demonstrated in Fig. 4.22 in which the upper and lower bounds of the dynamic mean and variability response are depicted containing minima and maxima respectively, in comparison to the estimated mean and variability responses for the case of an underlying Gaussian stochastic field with the power spectrum of Eq.(4.49) and  $\sigma_{ff} = 0.2$ . The aforementioned bounds are derived directly from Eqs.(4.39) and (4.40) having previously computed  $DMRF(u_A)$  and  $DVRF(u_A)$  with the computationally efficient DFEM-FMCS in Eqs.(4.37), (4.38) while in the case of the Gaussian field with  $\sigma_{ff} = 0.2$ , the mean and variance were obtained with the integral expressions in Eqs.(4.34) and (4.35). From this figure it can be seen that the upper mean dynamic response and the one estimated for the Gaussian field, are almost identical, while they differ significantly in the case of the response variability, reaching a maximum difference of more than 70% at  $t = 0.8$ sec. It should be pointed out here that bounds of each response do not necessarily need to coincide in the frequency number that they occur.



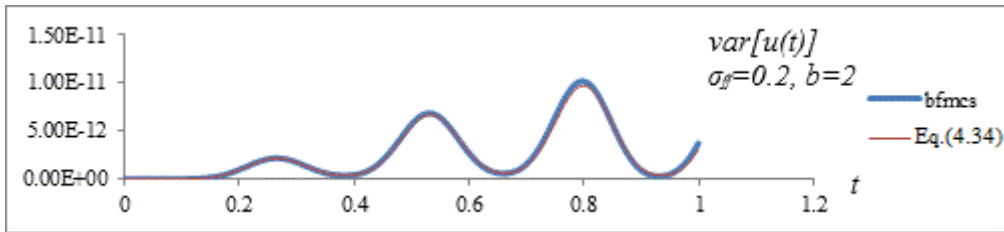
(a)



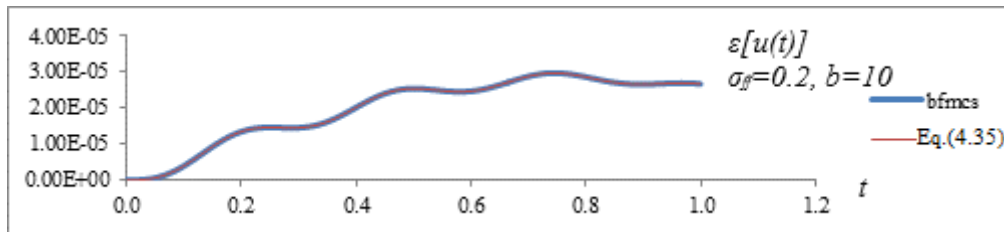
(b)



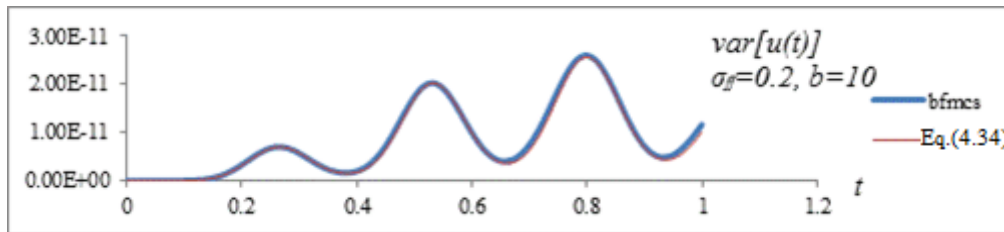
(c)



(d)



(e)



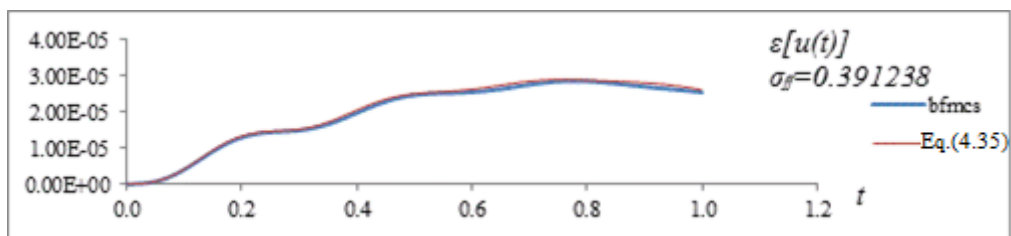
(f)

**Figure 4.23.** Time histories of the (a), (c), (e) mean and (b), (d), (f) variance response displacement of the frame structure for a Gaussian field with  $\sigma_{ff} = 0.2$  for LC1 and for three different correlation length parameter values  $b=1,2$  and  $10$ .. Comparison of results obtained from Eq. (4.34) and (4.35) and MCS.

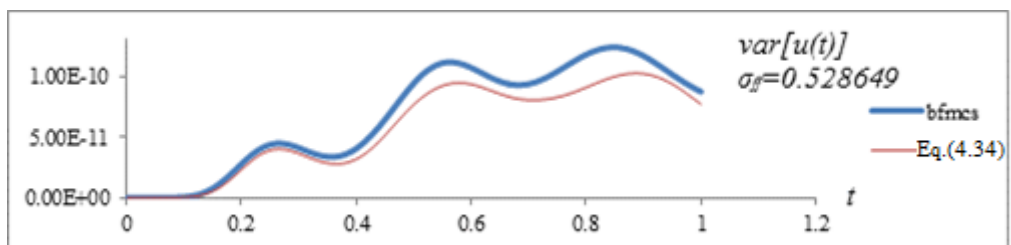
In order to demonstrate the validity of the proposed approach, the results obtained from the DFEM-FMCS procedure and Eqs.(4.34),(4.35) were compared with Brute Force Monte Carlo Simulation. In Figs. 4.23a, b, c, d, e and f the results of this comparison are presented for the dynamic mean and response variability of  $u_A$  (Fig 4.20) and LC1, using a Gaussian stochastic field and  $\sigma_{ff} = 0.2$  for three different values of correlation length parameter  $b$ . In this manner the independence of DMRF and DVRF from the spectral density function is also showcased. Figs. 4.24 and 4.25 present the same comparison but for a truncated Gaussian



field with  $\sigma_{ff} = 0.3912$  and  $0.5286$  respectively, while Fig 4.26 examines a lognormal field case with  $\sigma_{ff} = 0.399$ . Finally, Fig 4.27 presents the same comparison but for the El Centro earthquake load case (LC2) and a Gaussian field with  $\sigma_{ff} = 0.2$ . From all these figures it can be observed that the results of the DFEM-FMCS are in close agreement with the corresponding results of MCS. The prediction of the mean value is almost identical for the two methods in all cases considered, while the maximum error in the variance does not exceed 20% and is attributed to a slight dependence of the DVRF on the pdf of the random field modeling  $1/E(x)$ . This error becomes negligible in the case of small standard deviations of the order of  $\sigma_{ff} = 0.2$ .

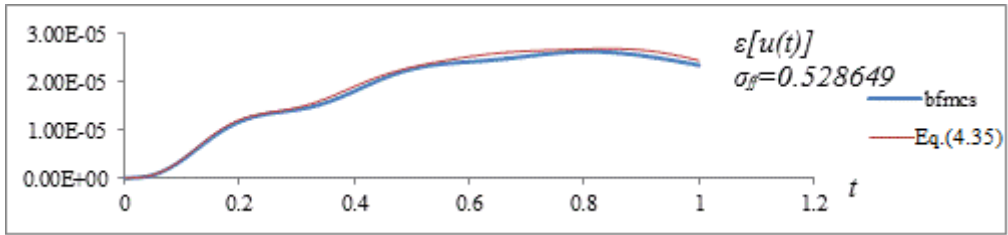


(a)

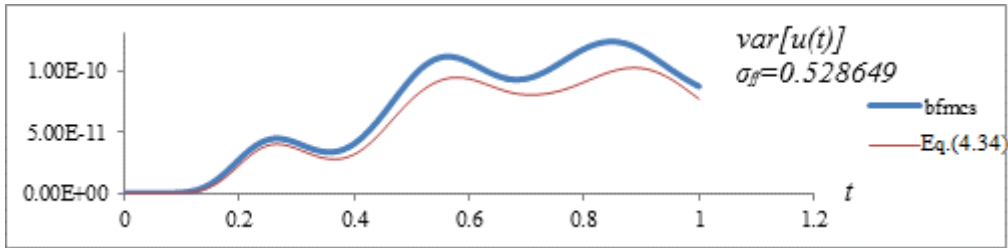


(b)

**Figure 4.24.** Time histories of the (a) mean and (b) variance response displacement of the frame structure for a truncated Gaussian field with  $\sigma_{ff} = 0.391238$  for LC1. Comparison of results obtained from Eq. (4.34) and (4.35) and MCS.

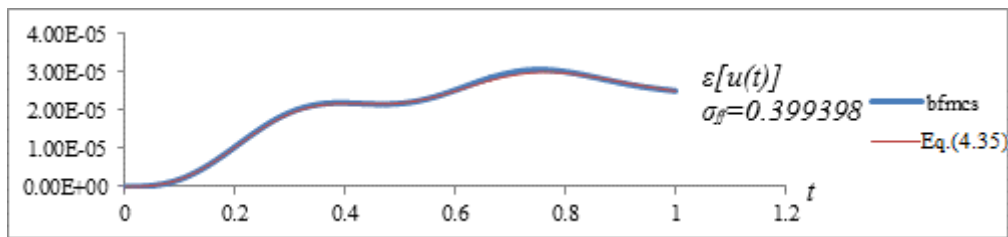


(a)

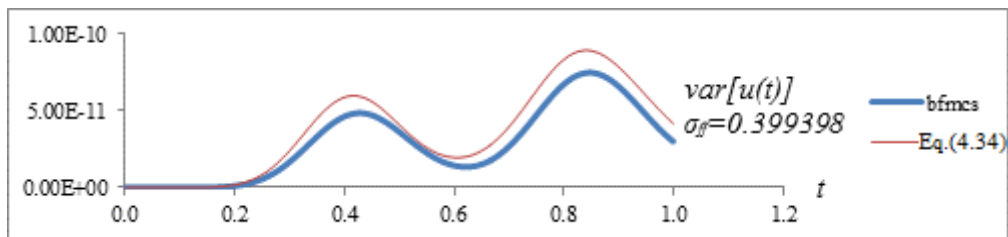


(b)

**Figure 4.25.** Time histories of the (a) mean and (b) variance response displacement of the frame structure for a truncated Gaussian field with  $\sigma_{ff} = 0.528649$  for LC1. Comparison of results obtained from Eq. (4.34) and (4.35) and MCS.

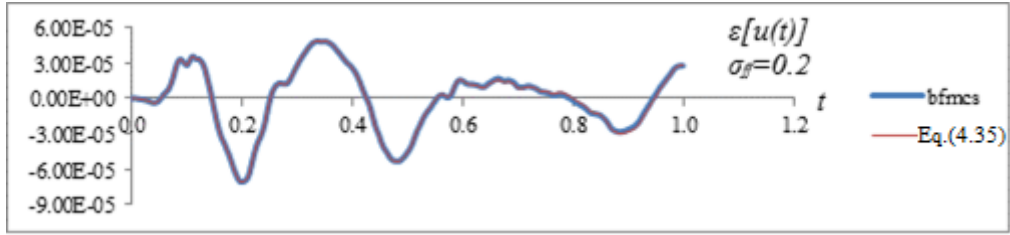


(a)

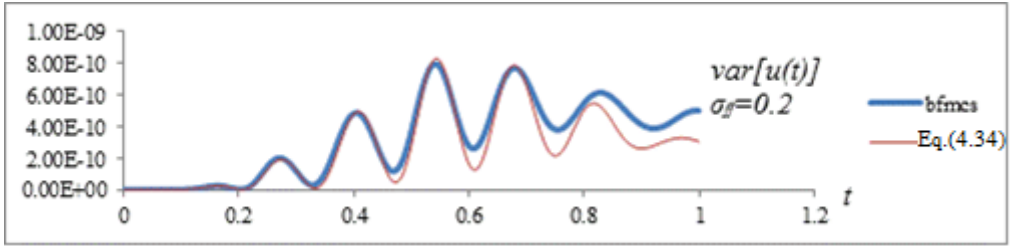


(b)

**Figure 4.26.** Time histories of the (a) mean and (b) variance response displacement of the frame structure for a lognormal field with  $\sigma_{ff} = 0.399398$  for LC1. Comparison of results obtained from Eq. (4.34) and (4.35) and MCS.



(a)



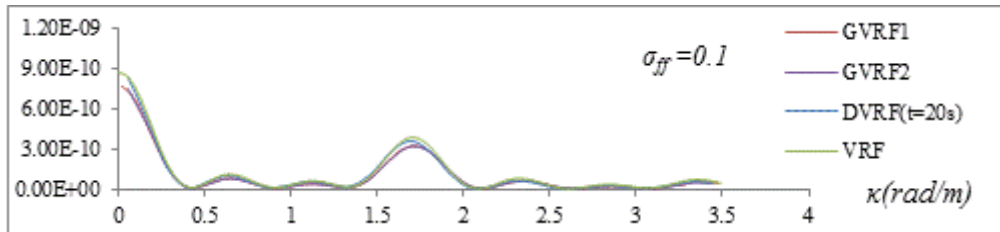
(b)

**Figure 4.27.** Time histories of the (a) mean and (b) variance response displacement of the frame structure for a Gaussian field with  $\sigma_{ff} = 0.2$  for LC2. Comparison of results obtained from Eq. (4.34) and (4.35) and MCS.

#### 4.3.3.1 FURTHER VALIDATION USING GVRF

In Fig 4.28 we demonstrate the convergence of the steady state  $DVRF(u_A)$  of the fixed-fixed frame to the  $GVRF(u_A)$  derived for the respective static solution for a truncated Gaussian and a Log-normal field of standard deviation  $\sigma_{ff} = 0.1$ . For this procedure a parent SDF  $S_p$  of exponential form has been used given by

$$S_p(\kappa) = \sigma_{ff}^2 \exp(-2|\kappa|) \quad (4.52)$$

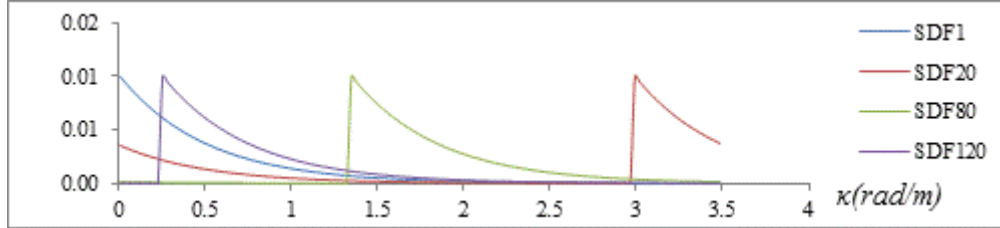


**Figure 4.28.** Plots of  $DVRF(u_A, t=20s)$  for a constant load,  $GVRF1$  and  $GVRF2$  for truncated Gaussian and Log-normal stochastic fields respectively and static  $VRF$  as a function of frequency  $\kappa$  (rad/m) for  $\sigma_{ff} = 0.1$  for the fixed-fixed frame in Fig. 4.19.

In each row of Eq.(3.60) corresponds a different SDF of the SP family. After computing respective SDFs for the truncated Gaussian and Log-normal fields as in previous from Eq.(4.51) the  $i$ -th SDF in the  $i$ -th row of Eq.(3.60) is defined as follows

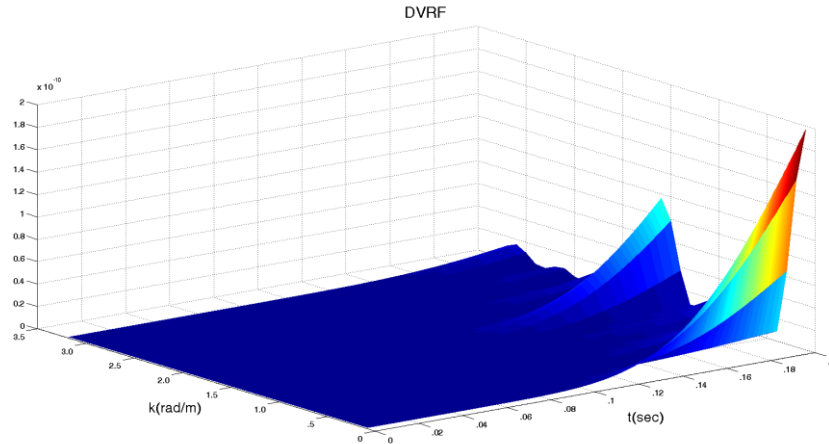
$$S_{P_i}(\kappa) = \begin{cases} S_p(\kappa + \kappa_u - i\Delta\kappa + \Delta\kappa), & 0 \leq \kappa \leq (i-1)\Delta\kappa \\ S_p(\kappa - i\Delta\kappa), & i\Delta\kappa \leq \kappa \leq \kappa_u \end{cases} \quad (4.53)$$

Four different SDFs of the  $S_p$  family are depicted in Fig. 4.29. It is expected a priori that the dynamic response displacement of the system, when the applied load is constant through time,  $P(t) = P_0$ , and

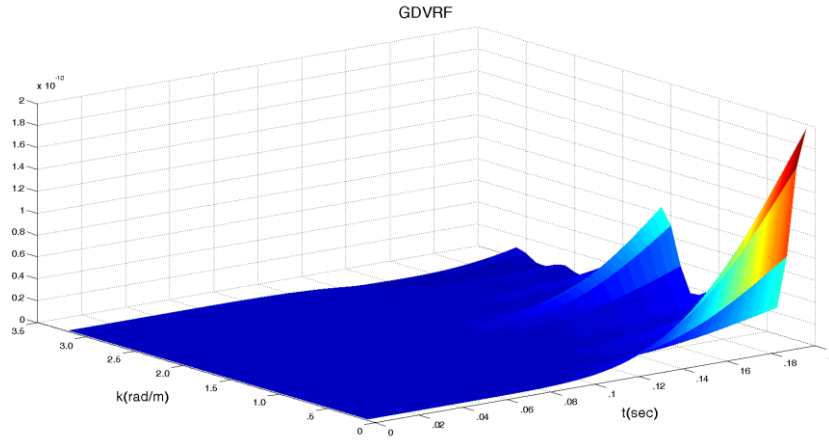


**Figure 4.29.** Plots of different spectral density functions of the  $S_p$  family for a discretization of 128 steps in the frequency domain.

as soon as the system reaches a stationary state (theoretically as time  $t$  tends to infinity), will match the response of the system for the static case  $u(t) = P_0/k$ . Respectively,  $DVRF(u_A)$  should also follow the  $GVRF(u_A)$  curve as it is deduced by Eq. (4.34) and (Miranda and Deodatis 2012). Observing Fig 4.28, it can be seen that the trend of both  $GVRF_1$  for the Gaussian and  $GVRF_2$  for the Log-normal field is captured efficiently from the  $DVRF(u_A)$  curve at time  $t = 20\text{sec}$ . All three curves also match the respective static  $VRF(u_A)$  curve. Noted be that  $VRF$ , as well as  $DVRF$  curves, are essentially computed following the same methodology as in  $GVRF$  where  $S_p$  is the delta function with concentrated power equal to  $\sigma_{ff}^2$  at each wavenumber  $\kappa$  and the  $u$ -beta function being the respective marginal pdf. Also the Gaussian and Log-normal  $GVRF$  curves are, as expected, practically identical.



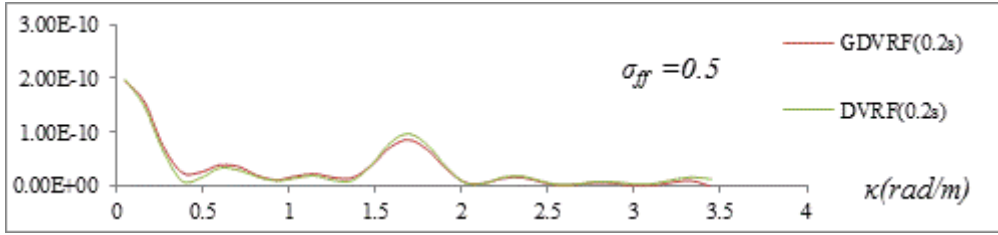
(a)



(b)

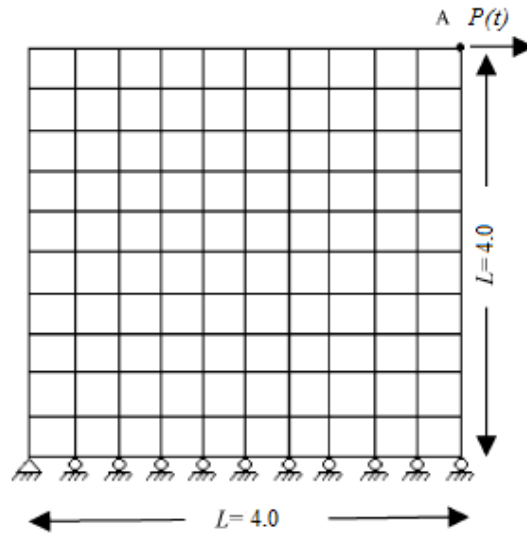
**Figure 4.30.** 3D plots of (a) *DVRF* and (b) *GDVRF* of the horizontal displacement  $u_A$ , until  $t=0.2$  sec as a function of frequency  $\kappa$  (rad/m) and time  $t$  (sec) for LC1 and  $\sigma_{ff}=0.5$  for the fixed-fixed frame in Fig. 4.19.

Finally, the *GDVRF* was computed for the fixed-fixed frame of Fig. 4.19 and LC1 for a time window  $[0-0.2$ sec] and a relatively large coefficient of variation  $\sigma_{ff} = 0.5$ . Figs. 4.30a and 30b present plots of this *GDVRF* and the corresponding *DVRF* computed with Eq.(4.34). In addition Fig. 4.31 presents a snapshot of *GDVRF* and *DVRF* at  $t=0.2$ sec . From all figures it can be observed that *GDVRF* and *DVRF* almost coincide.



**Figure 4.31.** Plots of  $GDVRF(u_A, t=0.2s)$  for LC1 and  $DVRF$  as a function of frequency  $\kappa$  (rad/m) for  $\sigma_{ff} = 0.5$  for the fixed-fixed frame in Fig. 4.19.

*Example 2.* Consider now the shear wall in Fig. 4.32 with length and height equal to  $L=4m$ , the inverse of the modulus of elasticity assumed to vary randomly within its surface according to Eq. (4.41) with  $F_0 = (1.35 \times 10^8 \text{ kN/m})^{-1}$ ,  $\nu=0.2$ ,  $t=1.0$  and damping ratio  $\xi=5\%$ . The total mass of the beam is assumed to be  $m_{tot} = 4000 \text{ kg}$ , distributed evenly among the finite element nodes of the model. The wall is discretized into a total of 100 plain stress elements, 121 nodes and 242 d.o.f.'s. In this example the 2D version DFEM-FMCS procedure has been implemented, using Eqs. (4.42) and (4.43) for the estimation of the dynamic mean and variability.

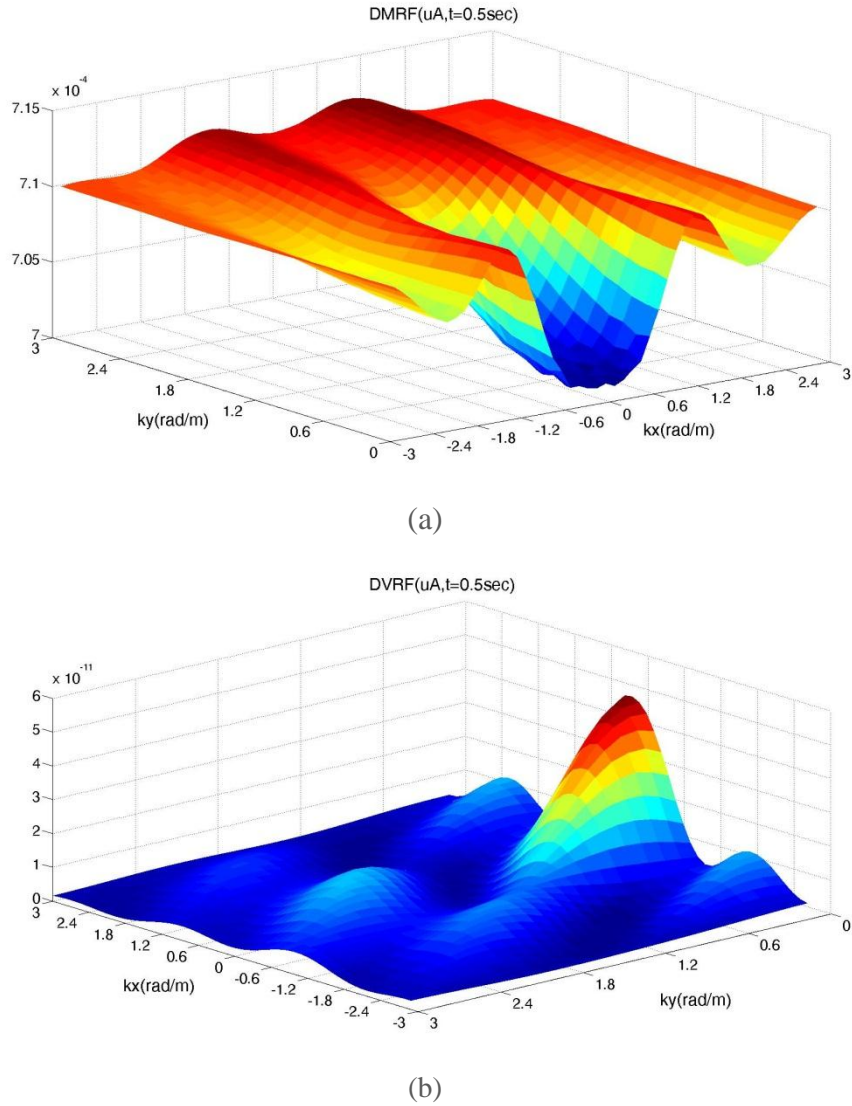


**Figure 4.32.** Geometry, loading and finite element mesh of the shear wall.

The same two load cases as in previous example are considered. The concentrated load is applied as shown in Fig. 4.32. In this example the following 2D spectrum has been implemented:

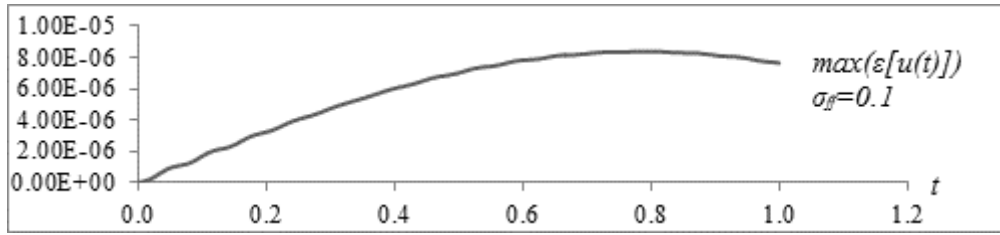
$$S_{f_0 f_0}(\kappa_x, \kappa_y) = \frac{\sigma_{ff}^2}{4\pi} b_x b_y \exp\left[-\frac{1}{4}(b_x^2 \kappa_y^2 + b_y^2 \kappa_x^2)\right] \quad (4.54)$$

where  $b_x = 2.0$ ,  $b_y = 4.0$

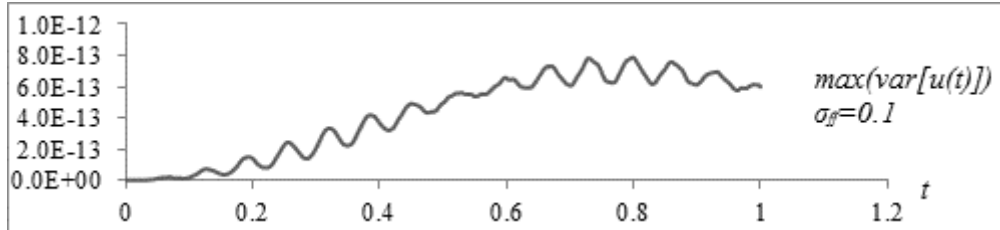


**Figure 4.33.** 3D plots of (a)  $DMRF$  and (b)  $DVRF$  of the horizontal displacement  $u_A$ , at time instance  $t=0.5sec$  as a function of frequency  $\kappa_x$  (rad/m) and frequency  $\kappa_y$  (rad/m) for LC1 and  $\sigma_{ff}=0.2$

Fig. 4.33 presents 3D plots of the  $DMRF(u_A)$  and  $DVRF(u_A)$  for the horizontal  $u_A$  displacement of point  $A$  of the shear wall as a function of frequency  $\kappa_x$  and  $\kappa_y$  for  $\sigma_{ff} = 0.2$  at the fixed time of  $t=0.5sec$ . It is observed that both  $DMRF(u_A)$  and  $DVRF(u_A)$  vary substantially with respect to both directions and as usual maximum values are located at the vicinity of  $(0,0)$ . Such plots can be drawn for all time steps of the analysis for the specific response displacement. Would one care to deduce realizable upper and lower bounds for this case, the extremes for  $DMRF(u_A)$  ( $DVRF(u_A)$ ) at each time step, accruing from the appropriate  $(\kappa_x, \kappa_y)$  pairs, should be selected and, after using Eqs. (4.47) and (4.48), the bounds could be readily calculated. An application of the aforementioned procedure is shown in Fig. 4.34 for  $\sigma_{ff} = 0.1$ .



(a)

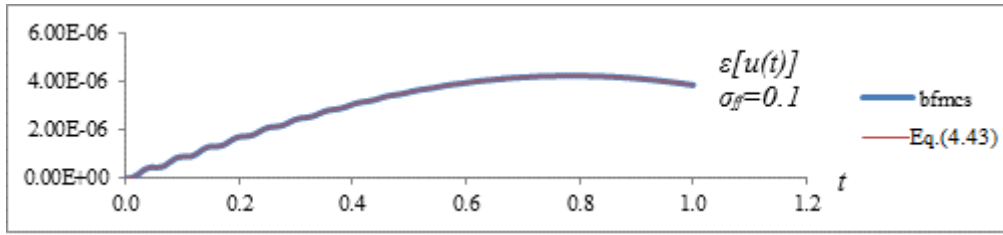


(b)

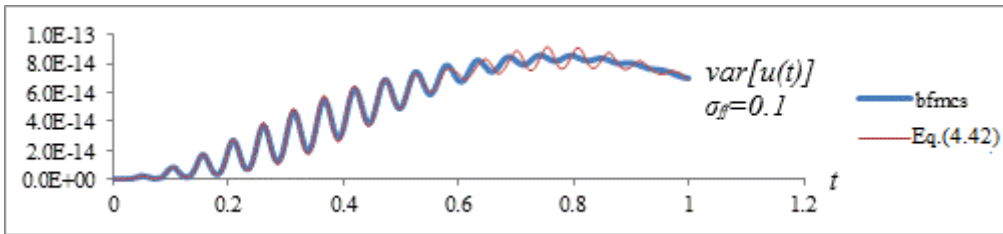
**Figure 4.34.** Time histories of the (a) mean and (b) variance response displacement upper bounds of the shear wall for a Gaussian field with  $\sigma_{ff} = 0.1$  for LC1. Results obtained from Eq.(4.47 and 4.48).

In following Figs. (4.35-4.39), results of mean and variability response are presented obtained from the DFEM-FMCS procedure and Eqs. (4.42) and (4.43) in comparison with results obtained from Brute Force Monte Carlo Simulation. In Fig. 4.35, charts depict the comparison for the dynamic mean and variability response of the shear wall horizontal displacement at point A and LC1 for a Gaussian stochastic field with  $\sigma_{ff} = 0.1$ . In Fig. 4.36 respective results are presented for a Gaussian stochastic field of  $\sigma_{ff} = 0.2$ . In Figs. 4.37, 38 the results are respectively for a truncated Gaussian field with  $\sigma_{gg} = 0.4$  and  $\sigma_{gg} = 0.6$  respectively. The predictions of Eqs. (4.42) and (4.43) in these cases are very satisfactory with errors ranging up to 5–8%. At last, in Fig. 4.39 results of the mean and variability response for the shear wall and for LC2 are displayed for a lognormal stochastic field with  $\sigma_{ff} = 0.2$ . Again, the trend of the response is very well captured by Eqs. (4.42) and (4.43) with errors ranging up to 15–20% in comparison to MCS.



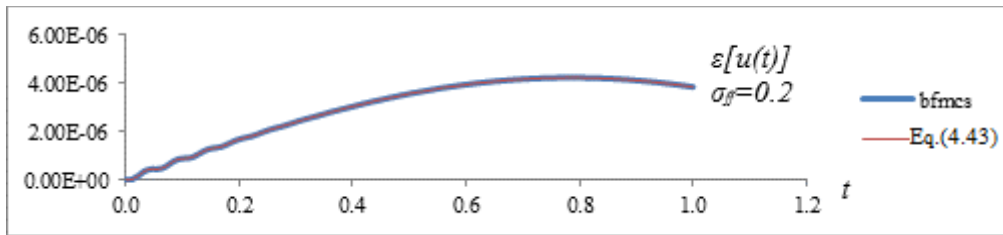


(a)

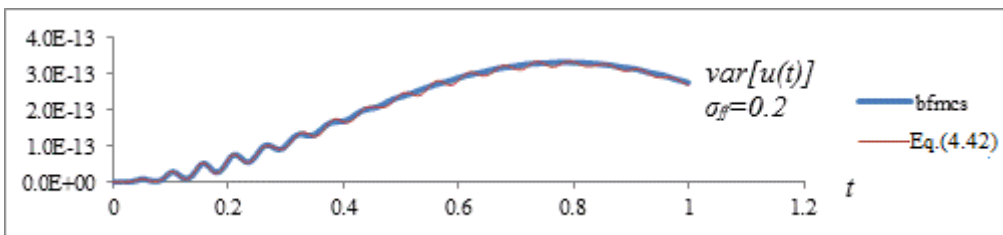


(b)

**Figure 4.35.** Time histories of the (a) mean and (b) variance response displacement of the shear wall for a Gaussian field with  $\sigma_{ff} = 0.1$  for LC1. Comparison of results obtained from Eq.(4.42 and 4.43) and MCS.

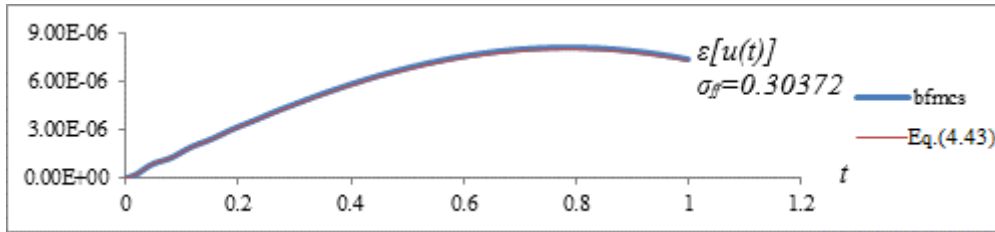


(a)

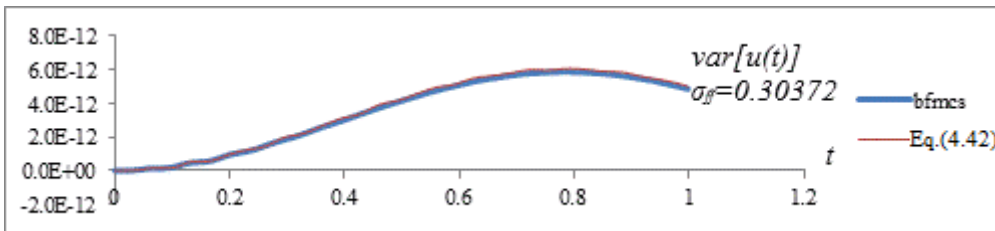


(b)

**Figure 4.36.** Time histories of the (a) mean and (b) variance response displacement of the shear wall for a Gaussian field with  $\sigma_{ff} = 0.2$  for LC1. Comparison of results obtained from Eq.(4.42 and 4.43) and MCS.

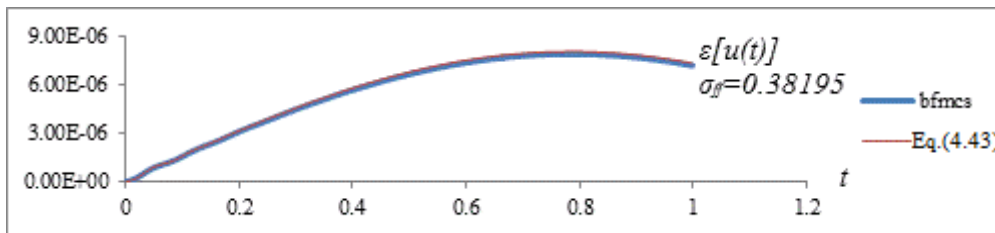


(a)

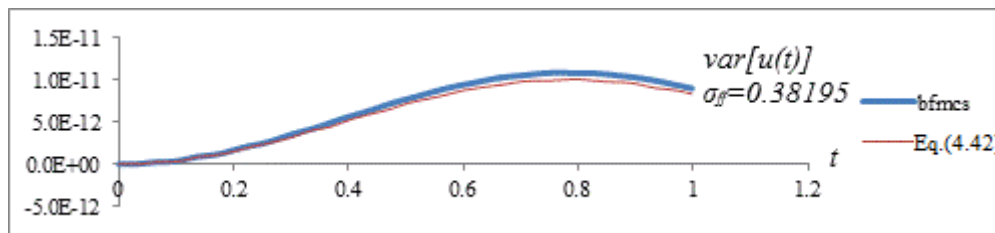


(b)

**Figure 4.37.** Time histories of the (a) mean and (b) variance response displacement of the shear wall for an underlying Gaussian field with  $\sigma_{ff} = 0.4$  for LC1. Comparison of results obtained from Eq.(4.42 and 4.43) and MCS.

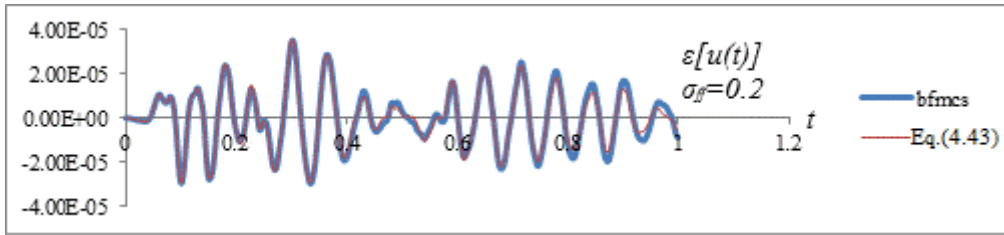


(a)

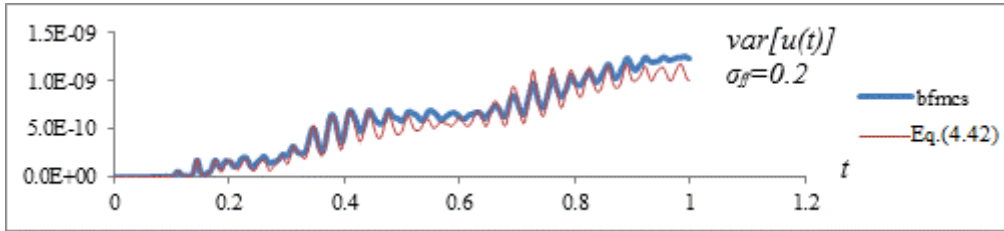


(b)

**Figure 4.38.** Time histories of the (a) mean and (b) variance response displacement of the shear wall for an underlying Gaussian field with  $\sigma_{gg} = 0.6$  for LC1. Comparison of results obtained from Eq.(4.42 and 4.43) and MCS.



(a)



(b)

**Figure 4.39.** Time histories of the (a) mean and (b) variance response displacement of the shear wall for a lognormal field with  $\sigma_{ff} = 0.2$  for LC2. Comparison of results obtained from Eq.(4.42 and 4.43) and MCS.



## 5 ROBUST DESIGN OPTIMIZATION

### 5.1 INTRODUCTION

In order to design high performance systems or manufacture high quality products at a minimum cost, techniques are utilized to determine those designs which meet the requirements usually specified by objectives (goal functions) at the beginning of the design process. Provided that the general system design is designated a priori (i.e., the type of structure and its desired basic properties are given), it is the engineer's task to choose the design parameters  $\mathbf{x}$  according to one (or more) objective function(s)  $f(\mathbf{x})$ . These objective functions may be given by verbal descriptions, mathematical models, simulation models, or physical models. The process of finding the right design parameters is usually referred to as optimization. Typically, the optimization has also to account for design constraints imposed on the design parameters  $\mathbf{x}$ . Such constraints can be modeled by inequalities and/or equalities restricting the design space (search space). A general formulation of an optimization problem can be stated as

$$\begin{aligned} \text{optimize:} & \quad f(\mathbf{x}), & (a) \\ \text{subject to:} & \quad g_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i=1, \dots, I & (b) \\ & \quad h_j(\mathbf{x}) = 0, \quad j=1, \dots, J & (c) \end{aligned} \tag{5.1}$$

where (1b) represents the set of inequality constraints and (1c) the set of equality constraints. Different adversities can deter us from reaching the optimum for  $f(\mathbf{x})$  in Eq. (5.1). Moreover, there is also the question of whether other alternative formulations to the one presented Eq. (5.1) in achieving higher standards of effectiveness can be proposed. An important concern is the issue of isolated design points:

- (i) Wasting useful resources, possibly more crucial for following stages of the optimization, on model functions in Eq.(5.1) that might not trustfully replicate the real world might be unnecessary. Consequently, achieving high levels of precision by utilizing inherently imprecise models can be counter-productive.
- (ii) Often determining the true optimum can be useless in the sense that it is possible that such a design might not be realizable, due to a potentially very complicated manufacturing process or due to environmental conditions, or that this design can be substantially costly to achieve. Thus, at times it might be preferable to choose an alternative sub-optimal design if taking into account the economical trade-off between cost and performance.
- (iii) By definition description of Eq. (5.1) assumes a static environment whereas real life applications are meant to perform in a dynamic environment. Therefore any design

answering the question Eq.(5.1) is posing is meant to be right only for a small fraction of time.

- (iv) Life cycle costs have to be taken into account for many engineering designs. Life cycle engineering focuses on the whole life span of a design, e.g., easier maintenance (system design to enable a cheap disassembly and assembly process, e.g., for gas turbines), longer maintenance intervals, effect of attrition during operation, or environmentally friendly disposal, e.g., recycling capability.

From the above one can deduce that classical optimization procedures do not take into account the sensitivity a proposed design might have to small changes. It is clear, as argued above, that such changes are plausible and can result from different kind of sources. It would be fair to say that what is missing from classical optimization is the robustness of the design. As a consequence, it is assessed worthwhile to make a compromise between the notion of optimality and the notion of robustness to achieve tangible returns. Procedures that aim to realize such principles are described as *Robust Design Optimization* and their goal is to estimate and propose realizable designs that are optimal but at the same time are as insensitive as possible to potential changes, external or systemic, that might affect the proposed solution.

Different versions of the robustness principle in conjunction with robust design optimization have accounted for various independent researchers' efforts primarily in the fields of operations research (OR) and engineering design.

A seminal paper that drew attention in the field of OR with respect to robust design optimization was that of (Mulvey, Vanderbei and Zenios 1995). The original groundbreaking work though that paved the way for future developments in the field of robust design optimization has its roots in engineering design and specifically in a publication by Taguchi in the mid 80's (Taguchi 1984). Taguchi's method will be briefly presented in the next section of this chapter. Since then a lot of research has focused on robust design optimization and the advances in computer science and in particular the ever increasing power of computer processors have played a crucial role in this. This string of research from the early Taguchi method to recent works in robust design optimization is summarized and reviewed in (Park, Lee, et al., Robust design: an overview. 2006), (Beyer and Sendhoff 2007), (Bertsimas, Brown and Caramanis 2011), (Gabrel, Murat and Thiele 2014).

## 5.2 TAGUCHI'S METHOD

Taguchi or "the father of robust design" as he is alternatively known for pioneering the research in robust design proposed a methodology comprised of three basic stages (Taguchi 1984):

- (i) *Systems design*: Initially all the parameters affecting system's performance must be accounted for and defined.
- (ii) *Parameter design*: Solves the optimization problem proposing an optimum design to achieve desired quality. This stage takes place during design time of the system.

(iii) *Tolerance design*: Adjusts design parameters to obtain maximum optimality and minimal sensitivity. This stage mainly takes place during operation time.

The distinction between stages (ii) and (iii) is subtle from a mathematical point of view so we want elaborate further into it and we will focus only on stage (ii).

By reviewing Taguchi's methodology one can notice a substantial difference with respect to the classical optimization procedure; apart from taking under consideration system parameters  $\mathbf{x}$  that control the overall performance of the system, Taguchi introduces a new variable  $\xi$  aiming to represent additional factors that may influence system performance (i.e. environmental conditions, material uncertainties, geometrical uncertainties etc.) that cannot be controlled by the designer.

Along these lines Taguchi proposed three different *Mean Square Deviation* (MSD) measures where  $y_i = y(\mathbf{x}_i, \xi_i)$  is the performance function:

$$MSD_1 = \frac{1}{\kappa} \sum_{i=1}^{\kappa} (y(\mathbf{x}_i, \xi_i) - \hat{y})^2 \quad (5.2)$$

with  $\hat{y}$  being the desired optimum. When  $\hat{y} = 0$

$$MSD_2 = \frac{1}{\kappa} \sum_{i=1}^{\kappa} y(\mathbf{x}_i, \xi_i)^2 \quad (5.3)$$

and if the objective is to maximize  $y$

$$MSD_3 = \frac{1}{\kappa} \sum_{i=1}^{\kappa} y(\mathbf{x}_i, \xi_i)^{-2} \quad (5.4)$$

Then the "signal to noise ration" was defined as follows

$$SNR = -10 \log_{10}(MSD) \quad (5.5)$$

that has to be maximized under the proposed methodology.

The deduction of the optimum SNR according to this methodology is not based on any kind of an automated optimization procedure but rather on the *design of experiments* (DOE) procedure (Koehler and Owen 1996), (Sacks, et al. 1989) . Consequently, speaking from a computational efficiency point of view, the Taguchi method lacks fundamental robustness, inevitably requiring a cumbersome amount of computational operations to reach an optimum. This weakness of the Taguchi approach among others is discussed in (Nair, et al. 1992).

## 5.3 GENERAL ROBUSTNESS CONCEPTS AND MEASURES

### 5.3.1 UNCERTAINTIES IN DESIGN

Consider a typical scenario of a system that generates a certain (desired) output  $f$  relevant to input quantities  $\alpha$  dependent on the environment the system operates. Also consider a set of

design variables  $x$  that the designer uses to control, to his ability, the way the system performs described by the following relation

$$f = f(x, \alpha) \quad (5.6)$$

The design parameters  $x$  meant to be determined in such a way that the designer achieves optimal system performance. However, in reality the designer is facing a situation partly beyond his total control related to types of uncertainty such as:

- a) *Changing environmental and operating conditions.* These uncertainties are factored in the system via the  $a$  parameter.
- b) *Tolerances and imprecision in the production process.* Uncertainties of this kind can affect the design variables  $x$  as a perturbation  $\delta$  of the intended value. Then the function in Eq.(5.6) is modified

$$f = f(x + \delta, a) \quad (5.7)$$

- c) *Discrepancies in estimated and true system output.* This kind of uncertainty is intrinsic to implemented system models and introduced by our approach to the problem. Then the recorded output  $\hat{f}$  is a (random) function of the true output  $f$

$$\hat{f} = \hat{f}[f(x + \delta, a)] \quad (5.8)$$

- d) *Feasibility uncertainties.* This type of uncertainty has to do with failure of the design variables to comply with the constraints set and the quality requirements.

There are three different approaches as to how to express mathematically the types of uncertainties mentioned above:

- 1) *Deterministically* by defining parameter domains in which uncertainties  $a, \delta$  vary.
- 2) *Probabilistically* by assigning probability measures to respective events.
- 3) The *possibilistic* approach which assigns fuzzy measures to respective events.

As a result accruing by the above categorization, one can encounter up to 12 different robustness concepts in real-life analysis problems.

### 5.3.2 UNCERTAINTY-ROBUSTNESS MEASUREMENT

Consistent with the scope of this thesis we will limit ourselves in referring to deterministic and probabilistic uncertainties measures only.

#### 5.3.2.1 DETERMINISTIC UNCERTAINTIES: THE ROBUST COUNTERPART APPROACH

Given an objective function  $f(\mathbf{x})$  to be minimized the robust counterpart function  $F_B(\mathbf{x}; \varepsilon)$  is defined as

$$f_B(\mathbf{x}; \varepsilon) = \sup_{\xi \in X(\mathbf{x}, \varepsilon)} f(\xi) \quad (5.9)$$



where  $X(\mathbf{x};\varepsilon)$  is a neighborhood of the design  $\mathbf{x}$  the size of which depends on the regularization parameter  $\varepsilon$  and

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_B(\mathbf{x};\varepsilon) = f(x) \quad (5.10)$$

This kind of accounting for uncertainties is associated with type  $b$  uncertainties and it considers the maximum  $f$ -value within the neighborhood of the design variable  $\mathbf{x}$ . This technique is also referred to as *robust regularization* (Lewis 2002). *Robust regularization* may also refer to type  $a$  uncertainties

$$F_A(\mathbf{x};\varepsilon) = \sup_{\alpha \in A(\varepsilon)} f(\mathbf{x},\alpha) \quad (5.11)$$

where  $A(\varepsilon)$  is a neighborhood that defines the operating conditions of the system.

The regularization with respect to type  $d$  uncertainties has been examined in literature labeled as “*robust counterpart approach*”. In the case of linear constrained optimization

$$\min_{\mathbf{x}} \{ \alpha^T \mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b} \geq 0 \} \quad (5.12)$$

$\alpha$  as well as the matrix  $\mathbf{A}$  and vector  $\mathbf{b}$  can be sources of uncertainty. In this case the regularized counterpart of  $f$  becomes

$$F_D(\mathbf{x}) = \sup_{(\mathbf{a}, \mathbf{A}, \mathbf{b}) \in \wp} \{ \alpha^T \mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b} \geq 0 \} \quad (5.13)$$

Eq.(5.12) alternatively can be written as

$$\min_{\mathbf{x}, t} \{ t \mid \forall (\mathbf{a}, \mathbf{A}, \mathbf{b}) \in \wp : (t \geq \alpha^T \mathbf{x}) \wedge (\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b} \geq 0) \} \quad (5.14)$$

The inequalities  $t - \mathbf{a}^T \mathbf{x} \geq 0$  and  $\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b} \geq 0$  must be satisfied for all  $\mathbf{a}, \mathbf{A}, \mathbf{b} \in \wp$  (worst case scenario) which is equivalent to demanding  $\min_{\mathbf{a} \in \wp} (t - \mathbf{a}^T \mathbf{x}) \geq 0$  and  $\min_{\mathbf{A}, \mathbf{b} \in \wp} (\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}) \geq 0$ . Thus

$$\left. \begin{array}{l} \min \quad t \\ s.t. \quad \min_{\mathbf{a} \in \wp} (t - \mathbf{a}^T \mathbf{x}) \geq 0, \\ \quad \quad \min_{\mathbf{A}, \mathbf{b} \in \wp} (\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}) \geq 0, \end{array} \right\} \quad (5.15)$$

a linear objective function with (arbitrarily) difficult constraints due to nonlinearity of the functions produced by the minimum operator.

### 5.3.2.2 EXPECTANCY MEASURES OF ROBUSTNESS

Examining the *worst case scenario* as in robust regularization approach can often result in rendering the proposed design useless as it is considered in a very conservative setting. Therefore it is useful sometimes to assume probabilities by means of density functions for the

uncertainties involved in the design. In this framework robustness measures are formulated based on probability.

The *aggregation approach* introduces a *utility function*  $U(f)$  which then is used in a so called *expectancy measure* for the robust counterpart of  $f$  as the *conditional expectation* of  $U(f)$

$$F_U(\mathbf{x}) = E[U(f) | \mathbf{x}] \quad (5.16)$$

Alternatively *dispersion measures* can be implemented in applications or in combination with the *expectancy measures*:

$$F_d(\mathbf{x}) = \int (f(\mathbf{x} + \delta) - f(\mathbf{x}))^2 p(\delta) d\delta \quad (5.17)$$

An alternative to the dispersion measure can be considered if we use the *conditional variance* of  $f$

$$\text{Var}[f | \mathbf{x}] = E[(f - E[f | \mathbf{x}])^2 | \mathbf{x}] = E[f^2 | \mathbf{x}] - (F_1(\mathbf{x}))^2 \quad (5.18)$$

when

$$E[f^2 | \mathbf{x}] = \int (f(\mathbf{x} + \delta))^2 p(\delta) d\delta \quad (5.19)$$

The quest for the optimal robust design, when implementing dispersion or variability measures of robustness is almost by nature a multi-objective problem. In most cases optimal performance, i.e. minimum mean value, is a conflicting objective with the objective of minimizing variance of the measured value. So inevitably we have to enter the field of *robust multi objective optimiazation*. In such cases one can aggregate different objectives in a single function using a weighted sum of the objective functions (Mulvey, Vanderbei and Zenios 1995) or alternatively consider the set of *Pareto-optimal* solutions. Different techniques are applied in determining the Pareto front (Das 1997). However there is a growing interest in the field of evolutionary algorithms for finding solutions to robust design optimization problems in order to locate the Pareto front (Ray 2002), (Lagaros, Plevris and Papadrakakis 2005), (Zhang, Wiecek and Chen 2000), (Kang, Suh and Lee 2004).

### 5.3.2.3 PROBABILISTIC THRESHOLD MEASURES OF ROBUSTNESS

In the probabilistic approach one is considering the distribution of the actual  $f$  value to be optimized. In the case of minimization for a given *threshold*  $q$ , one is seeking the design  $\mathbf{x}$  for which a maximum number of samples of  $f$  for which  $f \leq q$ . Then the criterion for robustness minimization is formed as follows

$$\Pr[f \leq q | \mathbf{x}] \rightarrow \max \quad (5.20)$$

Apparently the cumulative distribution function of  $f$  is equal to  $P(q|\mathbf{x}) = \Pr[f \leq q|\mathbf{x}]$  therefore

$$F_q(\mathbf{x}) = P(q|\mathbf{x}) \rightarrow \max \quad (5.21)$$

In a similar manner the threshold measure for robust *maximization* is formed

$$\Pr[f > q|\mathbf{x}] \rightarrow \max \quad (5.22)$$

or

$$F_q(\mathbf{x}) = P(q|\mathbf{x}) \rightarrow \min \quad (5.23)$$

since  $1 - P(q|\mathbf{x}) \rightarrow \max$ .

Probabilistic threshold measures have not been used in literature. This is mainly due to the analytical and computational complexity of calculating  $P(f|\mathbf{x})$  as well as the difficulty of selecting a  $q$  that has a physical meaning for the problem.

#### 5.3.2.4 STATISTICAL FEASIBILITY ROBUSTNESS

When considering type D uncertainties, it is typical to handle nonlinear constraint inequalities probabilistically

$$\Pr[g(\mathbf{x}, a) \leq 0] \geq P_0 \quad (5.24)$$

where  $P_0$  is the confidence probability and  $a$  a random vector with pdf  $p(a)$ .

Problems expressed likewise are named in literature *reliability-based design optimization* (RBDO) (Agarwal 2004), (Tatel, et al. 2005), (Papadrakakis, Lagaros and Plevris 2005), (Gunawan and Papalambros 2006), (Lagaros and Papadopoulos 2006).

A typical RBDO problem can be formulated in the following form

$$\begin{aligned} & \text{optimize} && f(\mathbf{x}), \\ & \text{subject to} && g_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \\ & && \Pr(h_j(\mathbf{x}) \leq 0) \leq p_{a,j}, \quad j = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (5.25)$$

$$\text{where } \mathbf{x} \sim N(\mu_x, \sigma_x^2),$$

$f(\mathbf{x})$  is the objective function,  $\mathbf{x}$  is the design vector and  $h_j(\mathbf{x})$  are the constraints that their probability of violation should be less than an allowable probability  $p_{a,j}$ .

Another type of robust design optimization that can be added into this category is the Vulnerability – based robust design optimization (VRDO) (Papadopoulos and Lagaros 2009).

In practice such problems are usually dealing with numerical techniques such as First-Order Reliability Methods (FORM) and Second –Order Reliability Methods (SORM) or Monte Carlo simulations. An overview can be found in (Du and Chen 2000).

## 5.4 ROBUST OPTIMIZATION IN PRACTICE

So far in this chapter we have explored different strategies and concepts of robust optimization based on various procedures depending upon the approach they are based on. However we haven't discussed how are these methodologies applied in practice. In particular the task of determining the optimization function  $f(\mathbf{x})$  and then optimizing it, can lead to a different route with respect to which methodology the designer will follow in order to achieve robustness in the optimization problem.

For the not so frequent case that the objective function can be expressed analytically in a mathematical form the utilization of standard mathematical programming strategies is preferred. Otherwise deterministic techniques or advanced randomized simulation techniques are implemented such as evolutionary algorithms which will be our main focus.

### 5.4.1 MATHEMATICAL PROGRAMMING

Mathematical programming as means to a robust design problems solution is mainly applicable in cases of linear optimization problems, quadratically constrained quadratic optimization problems, conic linear or quadratic optimization problems, and semidefinite optimization problems.

So far such applications have been primarily in the field of finance and portfolio management (Takriti and Ahmed 2001), (Lobo 2000), (Lutgens and Sturm 2002) as well as engineering applications such as (linear) truss topology design, antenna design and robust (linear) control problems (Ben-Tal and Nemirovski 2002). In (Kanno and Takewaki 2005) a robust design of truss has been modeled by a nonlinear semidefinite programming problem by successive linearization.

Even if there is the option to describe a real-life problem with an objective function  $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha})$  it is very likely that the model, in order for it to be realistic enough, will have to include an increased amount of variables which will eventually increase the computational cost. In most cases these techniques can be applied if the original problem can be expressed adequately with linear or quadratic functions thus limiting the range of their applications.

### 5.4.2 DETERMINISTIC AND RANDOMIZED APPROACHES

Two major categories can be distinguished in robust design optimization approaches

- A. Methods which calculate the desired robustness measures  $F(\mathbf{x})$  and the related (robust) constraints explicitly using numerical techniques. Thus, the resulting optimization problem is an ordinary one, to be solved using local or global optimization algorithms. This will be referred to as the deterministic approach to robust optimization.

- B. Treating the (probabilistic) uncertainties directly by optimizing noisy functions and constraints. This will be referred to as the randomized approach to robust optimization, sometimes referred to as Monte-Carlo techniques. Since the noisy information is usually obtained by simulation programs, this kind of optimization is also referred to as simulation optimization in OR literature (Andradottir 1998).

Methods of class (A) usually have as a prerequisite knowledge of first- or second-order derivatives of the functions to be optimized. Such methods transform the robust optimization problem into an ordinary optimization problem, solvable by standard nonlinear programming techniques. On the contrary class (B) methods, frequently referred to as *direct search methods*, do not require any prior information of the objective functions other than their actual values to calculate the next search point.

#### 5.4.2.1 THE DETERMINISTIC APPROACH TO ROBUST OPTIMIZATION

---

Methods reviewed in this section use deterministic numerical techniques. Prior knowledge of the objective function  $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha})$ , of the constraints and their respective derivatives with respect to  $\mathbf{x}$  and  $\boldsymbol{\alpha}$  is assumed.

##### 5.4.2.1.1 FEASIBILITY ROBUSTNESS

---

In (Sundaresan, Ishii and Houser 1993) feasibility constraints are taken into account. Considering the inequality constraint  $g_i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}) \leq 0$  the effect of uncertainties  $\boldsymbol{\delta}$  on  $\mathbf{x}$  and  $\Delta\boldsymbol{\alpha}$  on  $\boldsymbol{\alpha}$  about a design point can be approximated by linear Taylor expansion as

$$g_i(\mathbf{x} + \boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\alpha} + \Delta\boldsymbol{\alpha}) = g_i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}) + \sum_j \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \delta_j + \sum_j \frac{\partial g_i}{\partial \alpha_j} \Delta\alpha_j + \dots \leq 0 \quad (5.26)$$

Since the upper bound of these deviations is given by the absolute values of the summands, one obtains the inequality condition

$$g_i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}) + \sum_j \left| \frac{\partial g_i}{\partial \alpha_j} \Delta\alpha_j \right| \leq 0 \quad (5.27)$$

In order to apply the above expressions the uncertainties must have bounded support (i.e.  $0 \leq |\delta_i| < \hat{\delta}_i$  and  $0 \leq |\Delta\alpha_j| < \hat{\alpha}_j$ ). Incorporating unbounded uncertainties can be done in the probabilistic framework using expected value considerations applied (Parkinson, Sorensen and Pourhassan 1993), (Campos, Villar and Jimenez 2006).

##### 5.4.2.1.2 EXPECTED VALUE ROBUSTNESS AND RELATED MEASURES

---

Many methods use expected value or variance robustness measures. In all but a few cases, which suffer from the curse of dimensions (Huang and Du 2006), the approximation techniques implemented are based on Taylor expansions as

$$f(\mathbf{x} + \boldsymbol{\delta}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} \delta_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \delta_i \delta_j + \dots \quad (5.28)$$

If  $E[\boldsymbol{\delta}] = 0$ , which is a logical assumption, then

$$E[f | \mathbf{x}]_1 = f(\mathbf{x}) \quad (5.29)$$

and variance is

$$\begin{aligned} \text{Var}[f | \mathbf{x}]_1 &= E \left[ \left( f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} \delta_i - E[f | \mathbf{x}]_1 \right)^2 \right] \\ &= E \left[ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} \delta_i \delta_j \right] \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} E[\delta_i \delta_j]. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Then if the covariance matrix  $C$  is

$$(C)_{ij} = E[\delta_i \delta_j] \quad (5.31)$$

Eq.(5.30) can be rewritten as

$$\text{Var}[f | \mathbf{x}]_1 = \nabla^T f C \nabla f \quad (5.32)$$

In the event that the uncertainties are not correlated Eq.(5.30) can be simplified to

$$\text{Var}[f | \mathbf{x}]_1 = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \sigma_i^2 \quad (5.33)$$

Using the above expressions for expected value and variance of  $f$  and under the assumption that the partial derivatives of  $f$  can be computed analytically or numerically we can apply the so-called *sensitivity robustness approach* (Darlington, et al. 1995).

Improving the accuracy of this approach one can incorporate in the above equations higher order approximations. Consequently assuming the trace of a matrix  $A$  is given as

$$\text{Tr}[A] = \sum_i (A)_{ii} \quad (5.34)$$

and  $H$  is the Hessian of  $f$  at  $\mathbf{x}$

$$(H)_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \quad (5.35)$$

the expected value of  $f$  can be written as

$$E[f | \mathbf{x}]_2 = f(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \text{Tr}[\mathbf{HC}] \quad (5.36)$$

Also assuming correlated Gaussian noise i.e.  $\delta \sim N(0, \mathbf{C})$  variance can be expressed as

$$\text{Var}[f | \mathbf{x}]_2 = \text{Var}[f | \mathbf{x}]_1 + \frac{1}{2} \text{Tr}[(\mathbf{HC})^2] \quad (5.37)$$

Using the above expressions for expected value and variance we follow the so-called *mean-variance robustness approach* (Darlington, et al. 1995).

#### 5.4.2.2 THE RANDOMIZED APPROACH TO ROBUST OPTIMIZATION

The randomized approach includes methods that incorporate a *direct* approach to robust optimization using simulation techniques that generate values of the objective function  $f$ .

There are three categories:

- A. Monte-Carlo (MC) strategies: Simulate the system under optimization for which the response statistics (mean, variance, etc) are calculated to be implemented as input in a derivative free (deterministic) numerical optimization algorithm.
- B. Meta-model approach: A meta-model is constructed, using carefully selected design points, which is incorporated in the real robust optimizer.
- C. The simulated response values of the objective function are directly fed as input in an optimization algorithm suited for noisy optimization.

Raw MC approaches estimating the response statistics of a system are considered computationally ineffective let alone the issue of the degree of accuracy achieved. Specially tailored MC methods (J. Liu 2001) as an alternative of FORM/SORM approximations, to treat issues of accuracy, have been proposed in the past. Examples of MC techniques in the literature can be found in (Sandgren and Cameron 2002), (Lee, Park and Joo 2005), (Martin and Simpson 2006).

In B methods the designer is using the observed  $\hat{f}$  values of the objective function to create a meta-model  $F_M(\mathbf{x})$  of the robust counterpart  $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha})$  that predicts efficiently the  $\hat{f}$  values

efficiently by fine tuning a set of model parameters  $\boldsymbol{\beta}$ . Then the optimal design point  $\hat{\mathbf{x}}_M$  which is readily calculated by the meta-model is substituting the original robust optimum of  $f$ . A review of meta-model techniques can be found in (Simpson, et al. 1997), (Jin 2005).

In robust design optimization the *response surface methodology*, *neural networks*, and *Kriging* models have been proposed as meta-model techniques. In general these techniques appear to not be well suited for large-scale problems when the number of design variables  $N$  is too large. More specifically there are two issues:

- i. Model complexity: i.e. a fully quadratic response function  $F_M(\mathbf{x}, \boldsymbol{\beta})$  comprises of  $O(N^2)$  free  $\boldsymbol{\beta}$  parameters. Consequently  $O(N^2)$  function evaluations of  $\hat{f}$  are needed.
- ii. The meta-model has to be repeatedly implemented to converge to the robust optimum.

For the *response surface methodology* in particular, there is a third problem due to the data uncertainties that produce uncertainty for the model parameters  $\boldsymbol{\beta}$ . So finding the model parameters  $\boldsymbol{\beta}$  can be robust optimization problem itself.

Methods of the C category can be divided mainly in three types:

- I. gradient estimation techniques or *stochastic approximation methods*
- II. *pattern search methods*
- III. techniques based on *response surface methodology*. Response surfaces created repetitively lead the design to improved design points eventually leading to the robust optimum. Under this procedure it is necessary, for computational efficiency purposes, that as simple as possible response surfaces are used.

These types of robust optimization procedures can be primarily applied to optimize expectancy robustness measures formulated as follows

$$\begin{aligned} \text{optimize: } & E[U(f)|\mathbf{x}], & (a) \\ \text{subject to: } & \mathbf{x} \in \mathfrak{S}, & (b) \end{aligned} \quad (5.38)$$

where  $\mathfrak{S} \subseteq \mathbb{R}^N$  is the space of feasible options.

The idea of stochastic approximation is based on the work of Robbins and Monro (Robbins and Monro 1951). It uses an iterative recursive formula to calculate the design parameters  $\mathbf{x}$  on each step

$$\mathbf{x}^{(t+1)} = \Pi_{\mathfrak{S}} \left[ \mathbf{x}^{(t)} - \alpha^{(t)} \tilde{\gamma}(\mathbf{x}^{(t)}) \right] \quad (5.39)$$

where  $\tilde{\gamma}(\mathbf{x}^{(t)})$  is an estimate of the gradient  $\gamma(\mathbf{x}^{(t)}) = \nabla_{\mathbf{x}} E[U(f)|\mathbf{x}]$ . It can be shown that the above expression converges to the minimizer  $E[U(f)|\mathbf{x}]$ . There are also other more advanced versions of the algorithm (Ermoliev 1988). Even though these algorithms guarantee convergence, the convergence rate is slow.

Instead of traditional optimization methods *pattern search methods* do not approximate the local gradient or Hessian of the objective function  $f$  but rather search design points based on a pattern and proceed to next improved points with (with respect to  $f$  values). The most popular search method is the *simplex strategy* (Nelder and Mead 1965). Improvements on simplex strategies have been proposed in (Humphrey and Wilson 2002), (Anderson and Ferris 2001).



Pattern search methods appear to be more computationally efficient compared to i.e. response surface methodologies because they directly search the design space by inspecting only “necessary” pattern points, that is pattern search steps are only performed up to the next improvement. However, so far, their application in robust design optimization has been limited and has focused only on small scale problems with a low number  $N$  of design variables.

#### 5.4.2.3 EVOLUTIONARY ALGORITHMS IN THE CONTEXT OF ROBUSTNESS

---

Evolutionary Algorithms (EA) fall into the category of direct search and optimization algorithms being inspired in a broad sense by the theory of evolution as postulated by Darwin. An initial “parent” population  $\mathbf{x}_m$  is used in conjunction with the respective  $f_m = f(\mathbf{x}_m)$  values to produce an “offspring” population of  $\lambda$  designs  $\tilde{\mathbf{x}}_i$  through the utilization of some variation operators. The whole process of altering each individual parent  $\mathbf{x}_m$  through the variation operators by means of a specific probability distribution is called *mutation* while if more than one parent takes part in the process it is called *recombination*.

Depending upon the objective of the optimization procedure certain *selection operators* are implemented to qualify the fitter offspring for the next generation. The aforementioned variation and selection operators distinguish in literature different kinds of evolutionary algorithms i.e. *Evolution Strategies (ES)* (Beyer and Sendhoff 2007), (Rechenberg 1994) *Evolutionary Programming (EP)* (Fogel 1992), *Genetic Algorithms (GA)* (Goldberg 1989) and *Genetic Programming* (Koza 1992). *Simulated annealing* (Kirkpatrick, Gelatt Jr. and Vecchi 1983), (Aarts and van Laarhoven 1987), (Spall 1999) is another evolutionary algorithm methodology using one parent, one offspring, a mutation operator and a time dependent probabilistic selection operator.

Even though EA can be used effectively in deterministic robust counterpart functions of  $f$  we look at them for the point of view of noisy optimization as an alternative for the robust optimization techniques presented in the previous section that handle  $f$  -values from Monte Carlo simulations. Numerous such applications of EA can be found in literature; (Sebald and Fogel 1992), (Greiner 1994), (Pictet, et al. 1996), (McIlhagga, Husbands and Ives 1996), (Wiesmann 1997), (Herrmann 1999), (Kazancioglu, et al. 2003), (Kumar, et al. 2006). Finally a comprehensive survey can be found in (Baeck, Hammel and Schwefel 1997).

##### 5.4.2.3.1 NON-DOMINATED SORTING GENETIC ALGORITHM II (NSGA-II)

---

NSGA-II (Deb, et al. 2002) uses an elitist principle and an explicit diversity preserving mechanism and it emphasizes on non-dominated solutions. A simple flowchart of the algorithm is shown in Fig. 5.1. At any generation  $t$ , utilizing the standard genetic operators (selection, crossover, mutation), the offspring population  $Q_t$  is created from the parent population  $P_t$ . Population  $R_t$  is formed combining the two populations. The new population is now of total size  $2N$ . Then, the population  $R_t$  is classified into different non-domination classes. Thereafter, the new population is filled by points of different non-domination fronts,

one at a time. The filling starts with the first non-domination front (of class one) and continues with points of the second non-domination front, and so on. Since the overall population size of  $R_t$  is  $2N$ , not all fronts can be accommodated in  $N$  slots available for the new population. All fronts which cannot be accommodated are deleted. To deal with diversity-preservation issues of the estimated Pareto front the NSGA-II utilizes the crowding distance  $d_i$ . This quantity  $d_i$  is the perimeter of the cuboid formed by using the nearest neighbors in the objective space as the vertices and it is a measure of the objective space around  $i$  which is not occupied by any other solution in the population. The optimal Pareto front points are selected as those individuals of the population that demonstrate the non-domination property and have the highest possible crowding distance  $d_i$ .

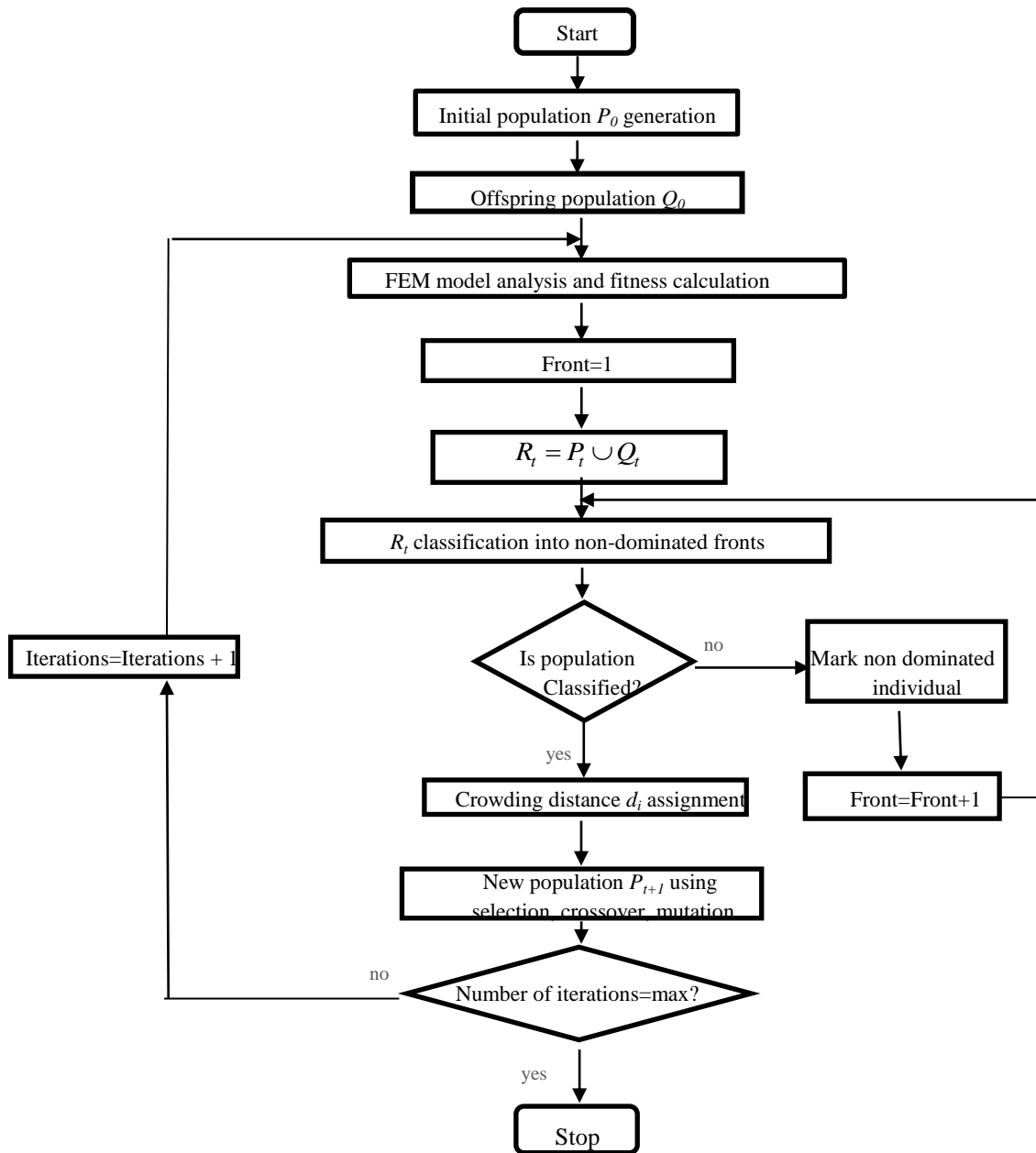


Figure 5.1. Schematic flowchart of the NSGA-II as implemented



## CHAPTER 6

# 6 ROBUST DESIGN WITH VARIABILITY RESPONSE FUNCTIONS; AN ALTERNATIVE APPROACH

## 6.1 INTRODUCTION

The concept of Robust Design Optimization (RDO) has been introduced in order to deal with intrinsic uncertainties in physical systems that drive the system performance to deviate from the deterministically expected performance into sub-optimal designs, thus neutralizing the effort of the optimization procedure itself. In RDO the analyst is taking into account the stochastic properties of the system variables/parameters and/or system constraints and effectively reaches a safer optimum design which should be less sensitive to random system parameter variations. Various methodologies have been proposed in recent years regarding RDO and its applications to various problems. In classical RDO formulation the goal of minimizing objective function(s) is achieved by considering the mean and/or the standard deviation of a response quantity and trying to establish the designs that minimize the aforementioned quantities considering deterministic or reliability constraints (Park, Lee, et al., Robust design: an overview. 2006), (Beyer and Sendhoff 2007). In Reliability-based Robust Design Optimization (RRDO) (Missoum, Ramu and Haftka 2007), (Lagaros and Papadopoulos 2006), (Allen and Maute 2005) usually care is taken to address the influence of probabilistic constraints as a limit on the probability of failure in the context of RDO of structures. Vulnerability-based Robust Design Optimization (VRDO) (Papadopoulos and Lagaros, Vulnerability-based robust design optimization of imperfect shell structures 2009) is a special case of RRDO where intermediate limit states approaching the probabilistic constraints are also taken into account thus providing possibly crucial information regarding structural behavior and operational integrity.

All previously mentioned RDO formulations are to be carried out in a stochastic finite element method (SFEM) framework so as to efficiently estimate the required quantities associated with system variations. This consideration of system randomness however, for it to be reliable, requires a precise knowledge of probabilistic characteristics (marginal pdf's and correlation structures) of the respective random fields modeling system parameters acquired only through corresponding experimental surveys or otherwise careful assumption/selection of various statistical properties describing the system variables/parameters uncertainty. Furthermore it increases substantially the analysis computational cost as any candidate design requires full stochastic analysis for the estimation of various statistical quantities. In the frequent case that such conditions are not met, similar analyses are implemented based on sensitivity analyses with respect to the aforementioned parameters resulting in a significant further increase of the overall computational cost.

In this chapter an alternative RDO procedure is proposed utilizing Variability Response Functions (VRF) concept (Shinozuka 1987), (Wall and Deodatis, Variability response functions of stochastic plane stress/strain problems 1994), (Graham and Deodatis, Weighted integral method and variability response functions for stochastic plate bending problems 1998), (Teferra and Deodatis 2012), (Papadopoulos, Deodatis and Papadrakakis 2005), (Papadopoulos, Papadrakakis and Deodatis 2006), (Papadopoulos and Deodatis 2006), (Papadopoulos and Kokkinos 2012), (Miranda and Deodatis 2012) in an effort to provide an answer in aforementioned known issues while optimizing a frame structure involving stochastic field material properties with respect to its total weight and robustness of its displacement response. It is reminded here that system response variance, as originally proposed in (Shinozuka 1987) and extended and further developed in (Wall and Deodatis 1994), (Graham and Deodatis, Weighted integral method and variability response functions for stochastic plate bending problems 1998), (Teferra and Deodatis 2012), (Papadopoulos, Papadrakakis and Deodatis, Analysis of mean response and response variability of stochastic finite element systems 2006), (Papadopoulos, Deodatis and Papadrakakis, Flexibility-based upper bounds on the response variability of simple beams. 2005), (Papadopoulos and Deodatis, Response variability of stochastic frame structures using evolutionary field theory 2006), (Papadopoulos and Kokkinos, Variability response functions for stochastic systems under dynamic excitations 2012) can be expressed in the following integral form expression:

$$Var(\mathbf{u}) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{VRF}(\kappa, \sigma_{ff}) S_{ff}(\kappa) d\kappa \quad (5.40)$$

In the above expression  $\sigma_{ff}$  is the uncertain system variable standard deviation,  $S_{ff}(\kappa)$  is the stochastic field spectral density and  $\kappa$  the spatial frequency ( $rad/m$ ).  $\mathbf{VRF}$ 's product and integration with the spectral density function  $S_{ff}(\kappa)$  of the stochastic field that models the uncertain system variable(s) amounts to system response variance vector  $Var(\mathbf{u})$ . In the above expression  $\mathbf{VRF}$ , which is a vector comprised of a VRF for each degree of freedom of the FE system, is assumed to be deterministic, an assumption proven rigorously only for statically determinate beam-type structures. For a number of other applications this assumption has been demonstrated numerically while further evidence has been provided with the introduction of the so called Generalized VRF (GVRF) which is a VRF calculated from a family of spectral density functions and various pdfs. What is really beneficial under this assumption is the ability to establish spectral- and pdf-free upper bounds in a straightforward manner described in the following equation as it has been explained in (Papadopoulos, Deodatis and Papadrakakis, Flexibility-based upper bounds on the response variability of simple beams. 2005):

$$Var(\mathbf{u}) \leq \mathbf{VRF}(\kappa^{\max}, \sigma_{ff}) \sigma_{ff}^2 \quad (5.41)$$

Where  $\mathbf{VRF}(\kappa^{\max}, \sigma_{ff})$  is the maximum value of the VRF attained at some wave number  $\kappa^{\max}$ . Therefore, setting maximum VRF value as an objective function accounting for system

response robustness, in addition to the total weight, the system is ensured to exhibit, for a given weight class, the lowest possible variance response under conditions imposed by the worst possible stochastic field. The worst possible stochastic field for a particular design candidate is determined by means of Eq. (11.70) i.e. it is a stochastic field with a monochromatic SDF concentrated at  $\kappa^{\max}$  (Papadopoulos, Deodatis and Papadrakakis, Flexibility-based upper bounds on the response variability of simple beams. 2005). The optimum design candidate for this particular weight class is the one that minimizes the respective  $\mathbf{VRF}(\kappa^{\max}, \sigma_{ff})$  value. Repeating this process for all possible weight classes one can create a two dimensional Pareto front is created for two objective functions: the weight and the system variance response accruing from Eq. (11.70).

In classical RDO formulation, optimization is performed for an a priori selected stochastic field. In real life applications however correlation structure of the uncertain system parameter is rarely known thus rendering such an optimization procedure redundant. Consequently the designer is obliged to conduct multiple such optimization procedures to shield the designed system from all possibilities. By using the proposed methodology this problem is overcome because each design candidate is evaluated based on its performance under the worst case scenario determined for the specific design. Effectively the designer is ensured that the system will have the best possible performance at the worst possible conditions.

The advantages of using the proposed methodology over traditional Robust Design Optimization are illustrated through an application to a frame-type structure where it is demonstrated that the designs achieved through classical RDO for a given stochastic field description are not optimal if a variation on the spectral properties of the random field modeling the system uncertainty occurs. On the other hand optimal designs obtained with the VRF-based RDO remain optimum for the worst case scenario stochastic fields. In order to demonstrate this, a bi-objective function is formulated taking into account uncertainties in the material properties modeled as random fields. Deterministic constraints of maximum stress and displacement response are applied. A Pareto front is initially constructed through a classical RDO formulation and multi-objective Genetic Algorithm solver for the two conflicting objective functions, namely the total structural weight and the system response variability, for a given stochastic field with a classical Robust Design Optimization formulation. Then, maximum possible variances of the selected designs are computed from the respective maximum values (see Eq. (11.70)) of the corresponding Variability Response Functions characteristic to these designs. The resulting front is then compared to a new Pareto front in which the second objective function is the maximum possible system variance which can be readily obtained by minimizing the maximum value of the Variability Response Function  $\min \mathbf{VRF}(\kappa^{\max}, \sigma_{ff})$ . The former classical RDO front proves to be, as expected, sub-optimal to the VRF-based one since the latter is by definition independent of the probability distribution and the spectral density used to model system's uncertainty. It is mentioned that the generated front and the respective proposed designs are referring to a variety of stochastic fields in contrast to the classical RDO. It is also clarified that the proposed designs are not

necessarily optimal when examined under the scope of only one predesignated stochastic field. In the case that an optimization is carried out for a specific correlation structure the resulting design selection will be suboptimal with respect to any other correlation structure.

## 6.2 ANALYSIS OF RESPONSE VARIABILITY USING VRFs

Without loss of generality consider the linear stochastic FE system of Fig. 6.1 which is a fixed-fixed beam/frame structure. The product of the inverse of the elastic modulus and of the moment of inertia is assumed to vary randomly along the  $x$  axis according to the following expression:

$$\frac{1}{\{E(x)I\}} = F_0(1 + f(x)) \quad (5.42)$$

where  $E$  is the elastic modulus,  $I$  is the moment of inertia,  $F_0$  is the mean value of the inverse of  $EI$ , and  $f(x)$  is a zero-mean homogeneous stochastic field modeling the variation of  $1/EI$  around its mean value.

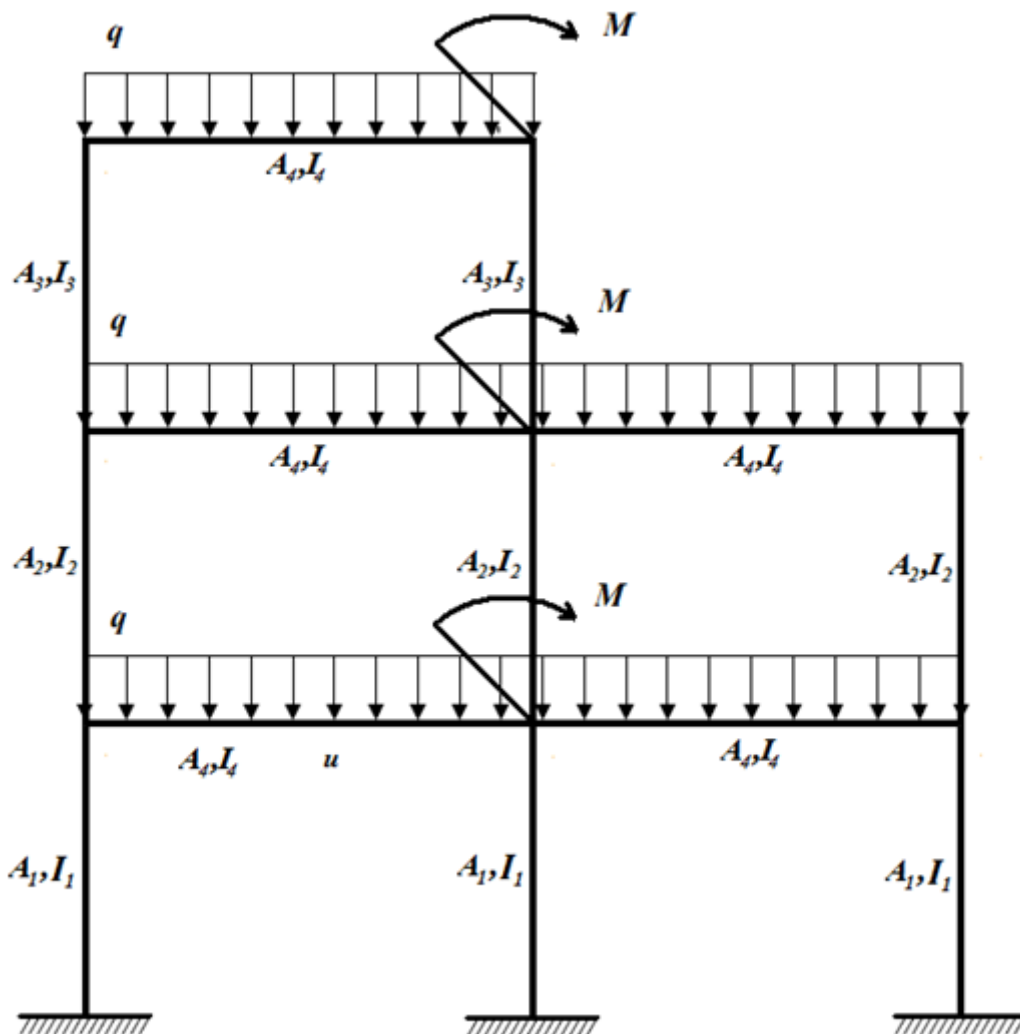


Figure 6.1. Geometry and loading of the fixed-fixed frame discretized with 60 beam elements.



Following a procedure similar to the one presented in (Papadopoulos, Papadrakakis and Deodatis, Analysis of mean response and response variability of stochastic finite element systems 2006), it is possible to express the variance of the response variability of a stochastic finite element system in the integral form expression of Eq. (5.40). The numerical estimation of **VRF** in Eq. (5.40) involves a FEM-based fast Monte Carlo simulation (FEM-FMCS) whose idea is to consider the random field in Eq. (5.42) as a random sinusoid (Papadopoulos, Deodatis and Papadrakakis, Flexibility-based upper bounds on the response variability of simple beams. 2005), (Papadopoulos and Deodatis, Response variability of stochastic frame structures using evolutionary field theory 2006) and plug its monochromatic power spectrum into Eq. (5.40), in order to compute the respective mean and variance response at various wave numbers as a function of time  $t$ .

### 6.2.1 NUMERICAL VALIDATION OF THE VRF WITH GVRF

In the context of this work and in order to validate our findings we have utilized the recently established concept of GVRF (Miranda and Deodatis, Generalized variability response functions for beam structures with stochastic parameters. 2012) in order to further evidence the assumption of independence of the VRF of the stochastic parameters of the problem. For this purpose a GVRF was calculated for a family of moving SDFs and then compared to the VRF computed via FEM-FMCS as described in chapter 3.

## 6.3 RDO USING VARIABILITY RESPONSE FUNCTIONS

RDO using VRFs (VRF-RDO) implements a bi-objective function involving maximum VRF value and total structural weight. The constraints of this function can be either stress- and/or displacement-related. VRF is a function characterizing variability response of the system regardless of the spectral density function of the stochastic field modeling the inverse of the elastic modulus. Thus, minimizing its maximum value selects a design candidate for the system that has the optimal performance with respect to the worst case scenario.

A general formulation of the VRF-RDO can be stated as follows:

$$\min_{\mathbf{s} \in \mathbf{F}} f = [C(\mathbf{s}, \mathbf{X}), \mathbf{VRF}(\kappa^{\max}, \sigma_{ff})]^T \quad (5.43)$$

subjected to deterministic constraints:

$$g_j(\mathbf{X}) \leq 0 \quad j=1, \dots, k \quad (5.44)$$

where  $f$  is the bi-objective function related to the material cost  $C$  and the vector that contains the maximum values of selected variability response function quantities  $\mathbf{VRF}(\kappa^{\max}, \sigma_{ff})$ . Material cost  $C$  is an obvious selection as an objective function in most structural design problems. Maximum attained VRF value  $\mathbf{VRF}(\kappa^{\max}, \sigma_{ff})$ , is chosen as the second objective

function to minimize, accounting for system variability and effectively dealing with existing uncertainty in a structural probabilistic environment. Vector  $\mathbf{s}$  represents the design variable vectors and  $\mathbf{X}$  is the position vector.  $F$  is the feasible region where all the deterministic constraint functions  $g_j$  are satisfied. The  $\mathbf{VRF}(\kappa^{\max}, \sigma_{ff})$  is qualified as an objective function because it provides with more general system inherent information independent of the stochastic field correlation structure. Therefore under the VRF-RDO formulation the design candidate is selected so that it attains the lowest possible variability response when the worst case scenario, in terms of stochastic field spectral density, is applied.

## 6.4 MULTI-OBJECTIVE OPTIMIZATION USING GENETIC ALGORITHMS

The solution of a multi-objective optimization problem is given in the form of a so-called Pareto front as opposed to a single-objective problem where the solution is singular. Several methods have been proposed for multi-objective optimization such as the weighted sum method (Zadeh 1963), goal programming (Charnes and Cooper 1977), physical programming (Messac, Puemi-Sukam and Melachrinoudis 2001), compromise programming (Chen, Wiecek and Zhang 1999), as well as recently developed evolutionary algorithms such as Strength Pareto Evolutionary Algorithm 2 (SPEA-2) (Zitzler, Laumanns and Thiele 2001), simulated annealing (Suman and Kumar 2006), particle swarm optimization (Parsopoulos and Vrahatis 2002), (Coello Coello and Salazar Lechuga 2002) and Non-dominated Sorting Genetic Algorithm II (NSGA-II) (Deb, et al. 2002). In the current work the multi-objective optimization is conducted implementing the NSGA-II which is established as a standard approach in identifying the ‘Pareto front’. Multi-objective evolutionary algorithms are preferred to classical optimization methods primarily due to their ability to find multiple Pareto-optimal solutions in one single run. However, they have been mainly criticized for issues like high computational complexity and non-elitistic approach.

By means of the nature of this particular problem, objectives and constraints are regarded as non-linear functions. The population size is set equal to 50 for each generation. Migration and crossover fractions are set equal to 0.5. Maximum number of generations was set equal to 150.

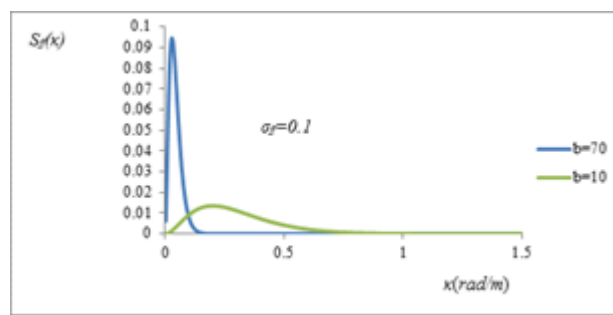
## 6.5 NUMERICAL EXAMPLE

The three-story frame shown in Fig.2 is selected in order to showcase the potential of the VRF-RDO formulation. For this structure, the inverse of  $(EI)$  is assumed to vary randomly along its length according to Eq. (5.42) with  $F_0 = (1.35 \times 10^8 \text{ KNm}^3)^{-1}$ . Additionally, each story is  $4\text{m}$  long and  $3\text{m}$  high. For the analysis of the frame structure we used 220 beam elements, 15 for each column and 20 for each beam resulting in 654 d.o.f.’s.

A concentrated moment is applied at the middle of each storey equal to  $M = 70KNm$  and a distributed load  $q = 3.2 KN/m$  along all beams (see Fig. 6.1). Assuming full statistical dependence, the stochastic field  $f(x)$  in Eq. (5.40) is considered to vary across the length of the columns and the beams of the frame as follows:  $x$  is assumed to run first along the columns from left to right and from bottom to top in the first story; then along the beams of the first floor from left to right. Following the same pattern for stories 2 and 3 a continuous field is formed. The SDF of the field is assumed to be exponential and given as:

$$S_{ff}(\kappa) = \frac{1}{4} \sigma_{ff}^2 b^3 \kappa^2 e^{-b|\kappa|} \quad (5.45)$$

Two different values of the correlation length parameter were examined,  $b = 10$  and  $b = 70$  with a standard deviation  $\sigma_{ff} = 0.1$ . Plots of the SDF with respect to the frequency  $\kappa$  (rad/m) for the selected values of  $b$  can be seen in Fig. 6.3.



**Figure 6.2.** Spectral density functions for stochastic field  $f(x)$  standard deviation  $\sigma_{ff} = 0.1$  for two different values of the correlation length parameter

The geometric properties of the columns and the beams at each storey of the frame are considered to be the four distinct design variables for the VRF-RDO formulation (see Fig. 6.1). The selection of the geometric properties of the columns and the beams of the frame has been defined within the set of the Eurocode-8 HEB sections from *HEB100* to *HEB1000*. The formulation of the VRF-RDO problem is as follows:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{s} \in \mathbf{F}} f &= [VOL(\mathbf{s}), VRF(\kappa^{\max}, \sigma_{ff})]^T \\ \mathbf{s} &= [\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3, \mathbf{X}_4]^T \\ \mathbf{X}_i &= [A_i, I_i] \end{aligned} \quad (5.46)$$

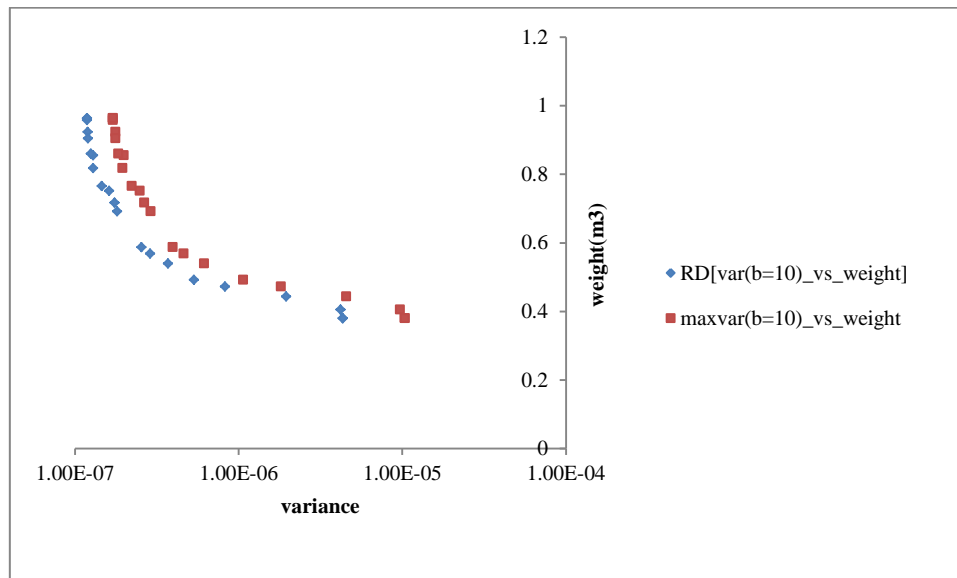
subject to

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_i &\in \Omega \\ \max(\sigma) &\leq \sigma_y / 1.10, \quad \sigma_y = 235Mpa \end{aligned} \quad (5.47)$$

where  $VRF(\kappa^{\max}, \sigma_{ff})$  is the maximum VRF value corresponding to vertical displacement  $u$  in Fig. 6.1,  $\Omega$  is the discrete set containing the geometric properties of the EC-8 sections from

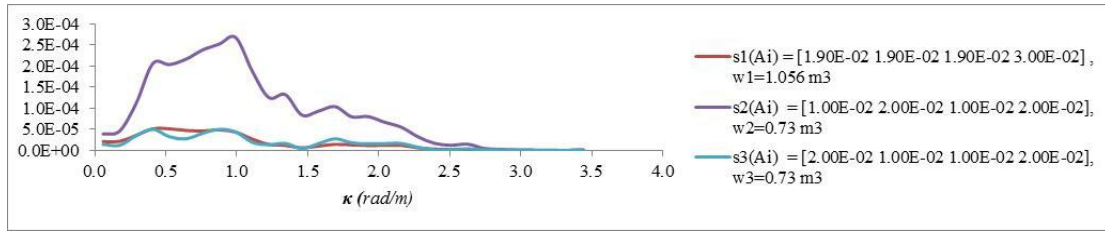
*HEB100* to *HEB1000* ,  $F \subseteq \Omega^4$  is the feasible region for the design variable  $\mathbf{s}$  where all constraints are satisfied,  $A_i$  ,  $I_i$  are the mean values of cross-section and moment of inertia respectively of the structural members,  $\max(\sigma)$  is the maximum deterministically derived effective stress for each design  $\mathbf{s}$  appearing in the model and  $\sigma_y$  is the material yield stress. It is mentioned here that this methodology is fully extendable and able to facilitate multiple displacements of the structure with no further implications and additional cost in a straightforward manner.

An initial classical RD procedure was performed for the case that a given stochastic field with a SDF with  $b=10$  in Eq. **Error! Reference source not found.** describes the modulus of elasticity in Eq. (5.40).

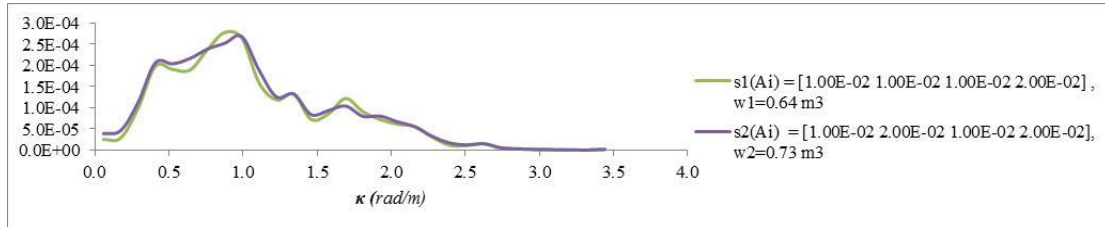


**Figure 6.3.** Pareto front for classical RDO for a given field with  $b=10$  and total weight and maximum possible variance as objective functions for the selected designs. Variance axis in logarithmic scale.

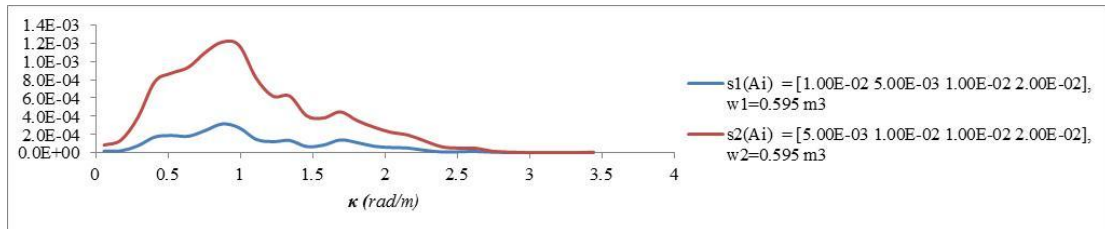
Fig. 6.3 presents the calculated Pareto front where, as expected, the heaviest designs exhibit the superior performance i.e. the minimum response variability. Likewise, lighter designs trade off less cost, in terms of total material volume, with increased variability. The same figure presents also a derivative plot which was produced by calculating the upper bound on the response variability by means of Eq. (11.70) for each of the designs of the previously calculated Pareto front from the classical RD procedure. As shown in Fig. 6.5 the derivative plot shifts clearly to the right which means that at least one field can be found, namely a random sinusoid at  $\kappa = \kappa_{\max}$  of the VRF of each candidate design, in which the variance is significantly higher than the one computed for the given stochastic field with  $b=10$ .



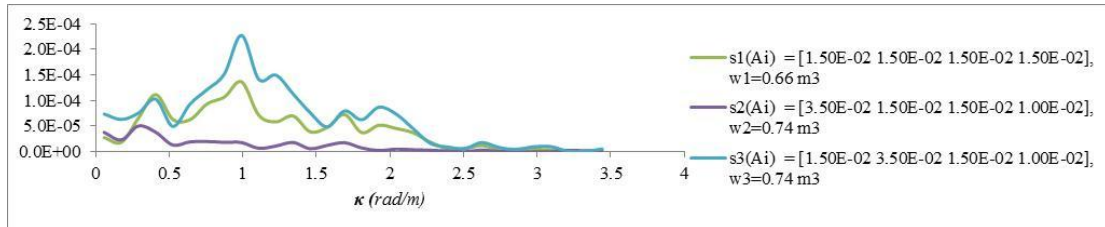
(a)



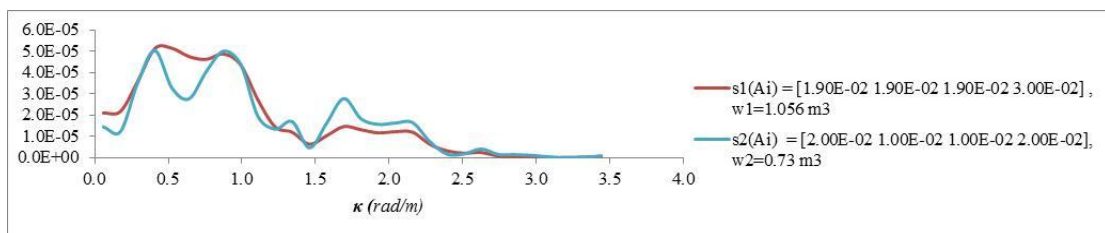
(b)



(c)



(d)

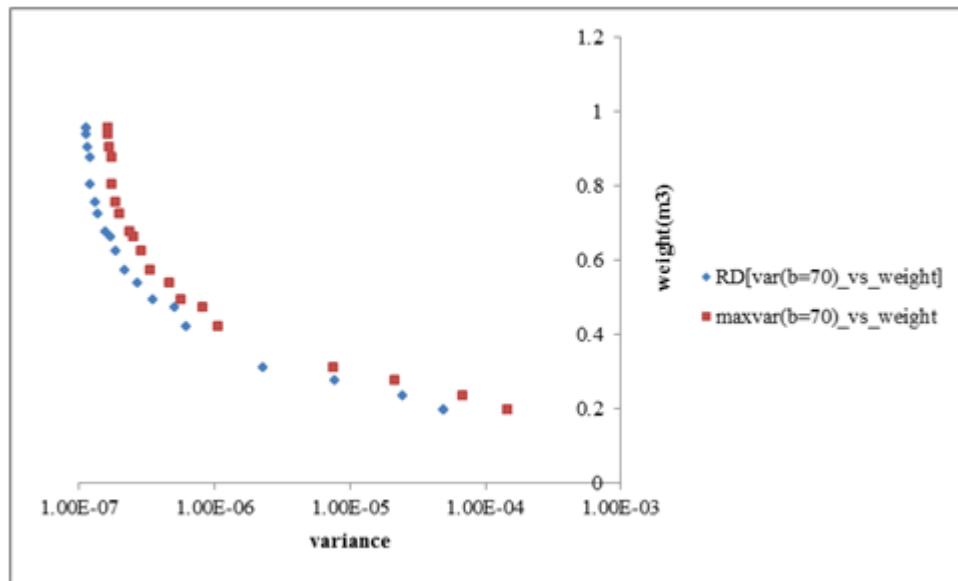


(e)

**Figure 6.4.** Graphs of VRF for different total weight and structural members' cross sections included in design vector  $s$ .

In order to determine the upper bound on the variability response for each design we evaluate their corresponding VRFs. Figs. 6.4 depict some typical VRFs for the respective designs of

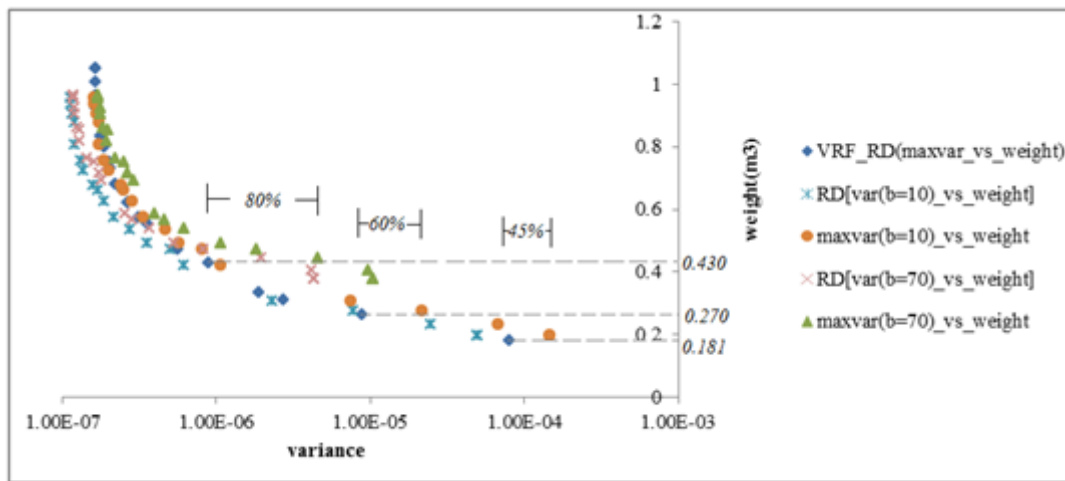
this system. Specifically, in Fig. 6.4(a) the graphs of three conveniently selected designs are depicted; while the first design  $s_1$  is the heaviest one, it demonstrates almost identical performance, as far as VRF values are concerned, with the last design  $s_3$  which generates considerably lower structural weight. On the other hand for the design  $s_2$  with yet identical resulting weight as design  $s_3$ , VRF is substantially augmented thus establishing it as an inferior design with respect to design  $s_3$ . In Fig. 6.4(b) two similar VRF graphs are depicted for two designs of unequal total accruing weight while in Fig. 6.4(c) two designs with equal total weight produce two disparate VRF graphs. In Fig. 6.4(d) two designs of equal total weight  $0.74m^3$ , namely  $s_2$  and  $s_3$ , result in totally different VRFs while  $s_1$  with lower total weight exhibits similar performance to  $s_3$ . Lastly in Fig. 6.4(e) two designs of substantially different total weights exhibit similar performance making it clear that there is plenty of room for optimization with respect to VRF maximum value depending on alterations on the design vector even for equal structural weights. From these VRF graphs it is evident that the wave number domains that are mostly contributing to the VRF and consequently to the response variance demonstrate a significant variation and strongly depend on the deterministic parameters of the problem. Therefore, if a classical RDO results in optimum system response variability for a given SDF this doesn't necessarily mean that this design is also optimum with respect to the response variability for a different SDF.



**Figure 6.5.** Pareto front for classical RDO for a given field with  $b = 70$  and total weight as objective functions and maximum possible variance for the selected designs. Variance axis in logarithmic scale.

The same conclusion can be derived from the Pareto front of the classical RDO in Fig. 6.5 but for a correlation length parameter  $b = 70$ . From Figs. 6.3 and 6.5 it can be observed that in the case of  $b = 10$ , average ‘shift’ in variance is equal to 74% ranging from 44% to 140% while in the case of  $b = 70$  the respective percentages are 86% , 42% and 226% . Fig. 6.6 presents the two previous results in comparison to the Pareto front produced by the VRF-

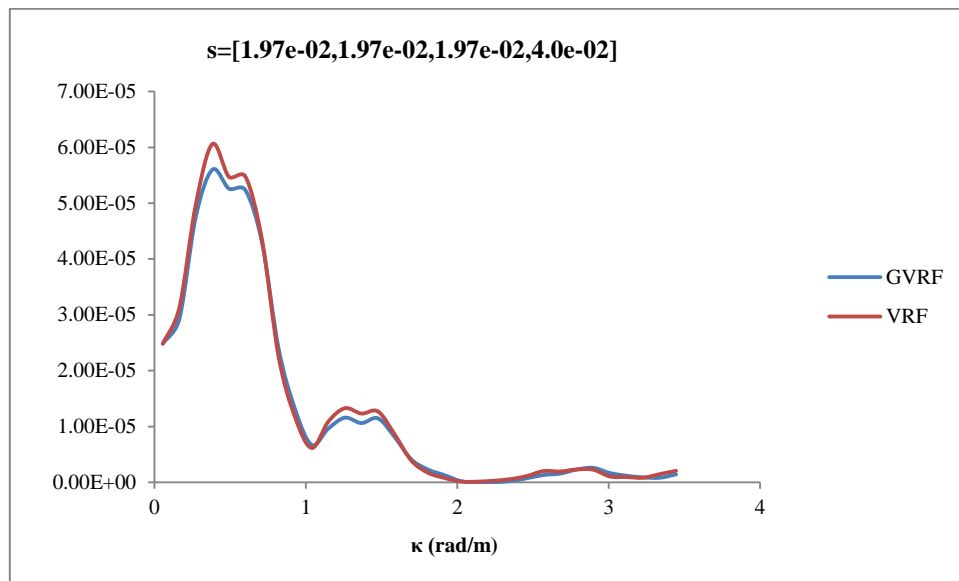
RDO formulation. What is important to bear in mind in the VRF-RDO procedure is that optimal designs in the Pareto front of Fig. 6.6 exhibit the globally optimal performance when focusing on different possible stochastic fields of the uncertain system parameter. Specifically, comparing the VRF-RDO Pareto front with the maximum possible variance front for  $b=10$  case we notice that for a similar weight, i.e. the last point of each front (VRF-RDO point weight equal to  $0,181m^3$  and  $b=10$  case point weight equal to  $0.197m^3$ ) there is a 45% reduction in variance achieved. In another case for the weight class around  $0.27m^3$  the reduction is almost 60%. When comparing VRF-RDO Pareto front with the maximum possible variance front for  $b=70$ , reduction in variance can be even more dramatic reaching up to 80% (VRF-RDO point weight equal to  $0.430m^3$  and  $b=70$  case point weight equal to  $0.444m^3$ ). This can be explained by the following observation; in the specific static model it seems to be a standard feature of VRF (see Figs. 6.4) to attain maximum value far from the neighborhood of  $\kappa=0 \text{ rad/m}$  while the SDF that is used in our example, when the correlation length parameter  $b$  is equal to  $70$ , concentrates 99% of its power at the proximity of  $0 \text{ rad/m}$  wavenumber i.e. for  $\kappa \leq 0.13 \text{ rad/m}$  (see Fig. 6.2). Thus, the integral expression of Eq. (5.40) produces a deceivingly low variance for the case when  $b=70$  not taking into account the evolution of VRF for higher  $\text{rad/m}$  where practically SDF is zero and consequently the classical RDO procedure effectively focuses its selection process on designs that give low VRF values at low wave-numbers neglecting what the variance might be for an alternative stochastic field.



**Figure 6.6.** Pareto fronts for classical RDO with variability response for a given field with  $b=10,70$  and total weight as objective functions with respective maximum possible variances for the selected designs and Pareto front with VRF and total weight as objective functions. Variance axis in logarithmic scale.

Finally, in Fig. 6.7 a comparison of VRF with the respective GVRF generated with the methodology described in section 5.3.1 is presented for a randomly selected design of the

structural model. The agreement of the two curves validates the conjecture of independence of the VRF from the stochastic parameters of the problem.



**Figure 6.7.** Comparison of GVRF and VRF graphs for a specific design vector  $s$  with respective moments of inertia.



### 7 CONCLUSIVE REMARKS

Over the recent years a lot of research has been dedicated to improving existing stochastic analysis methodologies as well as inventing new ones. This fact, combined with the advances in computational science and tools, has made stochastic analysis a more tangible and feasible process for practical engineers. In the original research presented in this particular PhD thesis, an effort has been made to reduce computational cost related to stochastic dynamic analysis and stochastic optimization but mainly to explore additional tools and an alternative perspective of viewing systems' uncertainty, aiming to provide a norm that characterizes each individual system that is decoupled of the system uncertainty itself. This has been achieved by implementing the established concept of Variability Response Function.

More specifically, Dynamic Variability Response Functions and Dynamic Mean Response Functions were derived initially for a linear stochastic single d.o.f. oscillator with random material properties under dynamic excitation. The inverse of the modulus of elasticity was considered as the uncertain system parameter. It was demonstrated that, as in the case of stochastic systems under static loading, DVRF and DMRF depend on the standard deviation of the stochastic field modeling the uncertain parameter but appear to be almost independent of its power spectral density and marginal pdf. The results obtained from the integral expressions are close to those obtained with MCS reaching a maximum error of the order of 20-25%. Moreover, the DVRF and DMRF provide with an insight of the dynamic system sensitivity to the stochastic parameters and the mechanisms controlling the response mean and variability and their evolution in time.

Furthermore, vector type Dynamic Variability Response Functions and Dynamic Mean Response Functions were obtained for general stochastic FE systems such as a statically indeterminate frame structure and a plane stress shear wall problem with random material properties under dynamic excitation. Again, the inverse of the modulus of elasticity was considered as the uncertain system parameter. The recently established GVRF concept has been utilized and effectively validated the independence of DVRF of the spectral properties and the marginal pdf of the uncertain system parameter. Thus an easily implemented methodology is introduced for computationally efficient sensitivity analysis of general finite element systems while at the same time providing reliable information about the evolution of response mean and variability in time.

At last, an alternative Robust Design Optimization is proposed based on the concept of Variability Response Function. Taking advantage of the VRF's invariance to the stochastic field's correlation structure and probability distribution, an alternative Robust Design Optimization formulation is achieved that is dependent only upon deterministic parameters of the problem. The VRF-RDO derived Pareto front provides design candidates, through an essentially deterministic procedure, that have an optimal performance taking into account the

worst possible stochastic field for the system response. The advantages of using the proposed methodology over traditional Robust Design Optimization are illustrated through an application to a frame-type structure where it is demonstrated that the designs achieved through classical RDO for a given stochastic field description are not optimal for a variation on the spectral properties of the random field modeling the system uncertainty, while designs obtained with the VRF-RDO achieve optimal performance for the worst case scenario stochastic fields.

## BIBLIOGRAPHY

- Aarts, E., and P. van Laarhoven. *Simulated Annealing: Theory and Pplications*. Dordrecht: Reidel, 1987.
- Agarwal, H. *Reliability based design optimization: Formulations and methodologies, Ph. D. Thesis*. South Bend, IN: University of Notre Dame, 2004.
- Allen, J., C. Seepersad, H. Choi, and F. Mistree. "Robust design for multiscale and multidisciplinary applications." *J. Mech. Des.* 128 (4), 2006: 832–843.
- Allen, M, and K. Maute. "Reliability-based shape optimization of structures undergoing fluid–structure interaction phenomena." *Comput Methods Appl Mech Eng*, 2005: 194(30–33):3472–95.
- Anderson, E., and M. Ferris. "A direct search algorithm for optimization with noisy function evaluations." *SIAM J. Optim.* 11 (3), 2001: 837-857.
- Andradottir, S. "review of simulation optimization techniques, in: D. Medeiros, E. Watson, J. Carson, M. Mnivannan (Eds.)." *Proceedings of the 1998 Winter Simulation Conference, IEEE*. Piscataway, NJ, 1998. 151-158.
- Arwade, S. R., and G. Deodatis. "Variability response functions for effective material properties." *Probab Engrg Mech*, 2011: 26:174-81.
- B. Puig, F. Poirion, andc. Soize. "Non-Gaussian simulation usingHermite polynomials expansion: convergences and algorithms." *Prob. Engrg. Mech.*, 2002: 17:253-264.
- Baack, T., U. Hammel, and H.-P. Schwefel. "Evolutionary computation: comments on the history and current state." *IEEE Trans. Evolution. Comput.* 1 (1), 1997: 3-17.
- Bai, D., T. Carpenter, and J. Mulvey. "Making a case for robust optimization models." *Manage. Sci.* 43 (7), 1997: 895–907.
- Ben-Tal, A., and A. Nemirovski. "Robust optimization-methodology and applications." *Math. Programm.* 92 (3), 2002: 453-480.
- Bertsimas, D., D.B. Brown, and C. Caramanis. "Theory and applications of robust optimization." *SIAM Review*, 2011: 464-501.
- Beyer, H.-G., and H.-P. Schewefel. "Evolution strategies:a comprehensive introduction." *Natural Comput.* 1 (1), 2002: 3-52.
- Beyer, H-G, and B. Sendhoff. "Robust optimization – a comprehensive survey." *Comput Methods Appl Mech Eng*, 2007: 196(33–34):3190–218.
- Birge, J., and F. Louveaux. *Introduction to Stochastic Programming*. New York: Springer-Verlag, 1997.
- Campos, F., J. Villar, and M. Jimenez. "Robust solutions using fuzzy chance constraints." *Engrg. Optim.* 38 (6), 2006: 627-645.
- Charnes, A, and WW Cooper. "Goal programming and multiple objective optimization." *Eur J Oper Res*, 1977: 1:39–54.

- Chen, W, M Wiecek, and J Zhang. "Quality utility: a compromise programming approach to robust design." *ASME J Mech Des*, 1999: 121(2):179–87.
- Chung, Kai Lai. *A Course in Probability Theory(3rd edition)*. San Diego: Academic Press, 2001.
- Coello Coello, C, and M. Salazar Lechuga. "MOPSO: A Proposal for Multiple Objective Particle Swarm Optimization." *Congress on Evolutionary Computation*. 2002. 1051–1056.
- Cramer, H. *Mathematical Methods to Statistics*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1946.
- Darlington, J., C.C. Pantelides, B. Rustem, and B. Tanyi. *Algorithms for optimal decisions under uncertainty*. 4th International Parallel Computing Workshop, PCW'95, London: Imperial College/Fujitsu Parallel Computing Research Centre, 1995.
- Das, I. *Robustness optimization for constrained, nonlinear programming problems*. Tech. Rep TR97-01, Houston, TX: Department of Computational & Applied Mathematics, Rice University, 1997.
- Deb, K., A. Pratap, S. Agarwal, and T. Meyarivan. "A fast and elitist multi-objective genetic algorithm: NSGA-II." *IEEE Trans Evol Comput*. 2002. 6(2):182–97.
- Du, X., and W. Chen. "Towards a better understanding of modeling feasibility robustness in engineering design." *ASME J. Mech. Des.*, 2000: 385-394.
- Du, X., Y. Wang, and W. Chen. *Methods for robust multidisciplinary design*. Tech. Rep. 2000-1785, American Institute of Aeronautics and Astronautics, AIAA, 2000.
- Ermoliev, Y. "Stochastic quasi-gradient methods." In *Numerical Techniques for Stochastic Optimization*, by Y. Ermoliev and R.-B. Wets, 141-185. Berlin: Springer-Verlag, 1988.
- Feller, William. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Volume I (3rd edition) and Volume II (2nd edition)*. New York: John Wiley and Sons, 1968 and 1971.
- Fogel, D.B. *Evolving Artificial Intelligence*. Ph. D. thesis, San Diego: University of California, 1992.
- Gabrel, V., C. Murat, and A. Thiele. "Recent advances in robust optimization: An overview." *European Journal of Operational Research*, 2014: 471-483.
- Ghanem, R., and P.D. Spanos. "Polynomial chaos in stochastic finite elements." *J. Appl. Mech.*, 1990: 57: 197–202.
- . *Stochastic finite elements: a spectral approach. 2nd ed.* NY: Dover Publications, 2003, 1991.
- Ghosh D, Ghanem R, Red-Horse J. "Analysis of eigenvalues and modal interaction of stochastic systems." *AIAA J*, 2005: 43(10):2196-201.
- Gnedenko, B. *The Theory of Probability, trans. by G. Yankovsky*. Moscow: MIR Publishers, 1978.
- Goldberg, D. *Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning*. Reading: Addison Wesley, 1989.
- Graham, L., and G. Deodatis. "Weighted integral method and variability response functions for stochastic plate bending problems." *Struct Saf*, 1998: 20:167-88.

- Greiner, H. "Robust filter design by stochastic optimization." *Proc. SPIE*, vol 2253. The International Society for Optical Engineering, 1994. 150-160.
- Grigoriu, M. *Applied non-Gaussian processes: examples, theory, simulation, linear random vibration and MATLAB solutions*. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1995.
- Grigoriu, M. "Evaluation of Karhunen-Loève, spectral and sampling representations for stochastic processes." *J. Emgnrg. Mech. (ASCE)*, 2006: 179-189.
- Gunawan, S., and P. Papalambros. "Bayesian approach to reliability-based optimization with incomplete information." *J. Mech. Des.* 128 (4), 2006: 909-918.
- Herrmann, J. "A genetic algorithm for minimax optimization problems." *Proceedings of the Congress on Evolutionary Computation*, vol. 2. IEEE Press, 1999. 1099-1103.
- Huang, B., and X. Du. "A robust design method using variable transformation and Gauss-Hermite integration." *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, 66 (12), 2006: 1841-1858.
- Huang, S.P., S.T. Quek, and K.K. Phoon. "Convergence study of the truncated Karhunen-Loeve expansion for simulation of stochastic processes." *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, 2001: 52:1029-1043.
- Humphrey, D., and J. Wilson. "A revised simplex search procedure for stochastic simulation response surface optimization." *INFORMS J. Comput.* 12 (4), 2002: 272-283.
- Jensen, H., and W.D. Iwan. "Response of systems with uncertain parameters to stochastic excitation." *J. Eng. Mech*, 1992: 118(5): 1012-1025.
- Jin, Y. "A comprehensive survey of fitness approximation in evolutionary computation ." *Soft. Comput. J.* 9 (1), 2005: 3-12.
- K. Gurley, A. Kareem. "A conditional simulation of non-normal velocity/pressure fields." (*Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*), no. 77-78:39-51 (1998).
- K. Gurley, M. Tognarelli, and A. Kareem. "Analysis of simulation tools for wind engineering." *Probabilistic Engineering Mechanics*, 1997: 12:9-31.
- Kalsi, M., K. Hacker, and K. Lewis. "A comprehensive robust design approach for decision trade-offs in complex systems design." *J. Mech. Des.*, 2001: 1-10.
- Kang, J. -S., M. -H. Suh, and T. -Y. Lee. "Robust economic optimization of process design under uncertainty." *Engrg. Optim.* 36(1), 2004: 51-75.
- Kanno, Y., and I. Takewaki. "Evaluation and maximization of robustness of trusses by using semidefinite programming, in: J. Herskovits, S. Matorche, A. Canelas (Eds.)." *Proceedings of the 6th World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization (WCSMO6), ISSMO*. Rio de Janeiro, 2005.
- Kareem, K. Gurley and A. "A conditional simulation of non-normal velocity/pressure fields." *Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 1998: 77-78:39-51.

- Kazancioglu, E., et al. "Robust optimization of an automobile valvetrain using a multiobjective genetic algorithm." *DETC'03 ASME 2003 Design Engineering Technical Conferences*. Chicago, 2003.
- Keane, M. S. "Ergodic theory and subshifts of finite type." In *Ergodic Theory, Symbolic Dynamics and Hyperbolic Spaces*, by T. Bedford, M.S. Keane and C. Series, Chapter 2. Oxford: Oxford University Press, 1991.
- Kirkpatrick, S., C.D. Gelatt Jr., and M.P. Vecchi. "Optimization by simulated annealing." *Science* 220, 1983: 671-680.
- Koehler, J., and A. Owen. "Computer experiments." In *Handbook of Statistics, vol.13*, by S. Ghosh and C. Rao, 261-308. Elsevier Science B.V., 1996.
- Kougioumtzoglou, I.A., and P.D. Spanos. "An analytical Wiener path integral technique for non-stationary response determination of nonlinear oscillators." *Probab Eng Mech*, 2012: 28:125-31.
- Koza, J. *Genetic Programming: On the Programming of Computers by Means of Natural Selection*. Cambridge, MA: MIT Press, 1992.
- Kumar, A., A. Keane, P. Nair, and S. Shahpar. "Robust design of compressor fan blades against erosion." *J. Mech. Des.* 128 (4), 2006: 864-873.
- Lagaros, N. D., and V. Papadopoulos. "Optimum design of shell structures with random geometric, material and thickness imperfections." *Int. J. of Slds. and Struct.*, 2006: 6948-6964.
- Lagaros, N., V. Plevris, and M. Papadrakakis. "Multi-objective design optimization using cascade evolutionary computation." *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 195, 2005: 3496-3515.
- Lagaros, ND, and V Papadopoulos. "Optimum design of shell structures with random geometric, material and thickness imperfections." *Int J Solids Struct*, 2006: 43(22-23):6948-64.
- Lee, K.-H., G.-J. Park, and W.-S. Joo. "A general robust optimization using the kriging based approximation method." *Proceeding of the 6th World Congress on Structural and Multidisciplinary Opimization (WCSMO6), ISSMO, J. Herskovits, S. Matorche, A. Canelas (Eds.)*. Rio de Janeiro, 2005.
- Lewis, A. *Robust regularization*. Technical Report, Vancouver: Simon Frazer University, 2002.
- Li, J. "The expanded order system method of combined random vibration analysis (in Chinese)." *Acta Mech. Sin.*, 1996: 28(1): 66-75.
- Li, J., and JB Chen. "Probability density evolution method for dynamic response analysis of structures with uncertain parameters." *Comput Mech*, 2004: 34:400-9.
- Li, J., and JB Chen. "The probability density evolution method for dynamic response analysis of non-linear stochastic structures." *Int J Numer Meth Eng*, 2006: 65:882-903.
- Li, J., and S.T. Liao. "Response analysis of stochastic parameter structures under non-stationary random excitation." *Comput. Mech.*, 2001: 27(1): 61-68.
- Liu, J. *Monte Carlo Strategies in Scientific Computing*. New York: Springer, 2001.

- Liu, W.K., G. Besterfield, and T. Belytschko. "Transient probabilistic systems." *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 1988: 67(1):27–54.
- Liu, W.K., T. Belytschko, and A. Mani. "Probabilistic finite elements for nonlinear structural dynamics." *Comput. Methods Appl Mech Engrg*, 1986a: 56:61-86.
- Liu, W.K., T. Belytschko, and A. Mani. "Random field finite elements." *Internat J Numer Methods Engrg*, 1986b: 23:1831-45.
- Lobo, M. *Robust and convex optimixzation with applications in finance, Ph. D. Thesis*. Stanford: Department of Electrical Engineering, Stanford University, 2000.
- Loeve, M. *Probability Theory*. 1977.
- Loeve, Michel. *Probability Theory (3rd edition)*. Princeton: Van Nostrand, 1963.
- Lutgens, F., and J. Sturm. *Robust one period option modelling*. Tech. Rep. CentER DP 2002-114 , Universiteit van Tilburg, 2002.
- Marczyk, J. "Stochastic multidisciplinary improvement: beyond optimization." *American Institute of Aeronautics and Astronautics, AIAA*, 2000: 4929.
- Martin, J., and T. Simpson. *A Monte Carlo method for reliability-based design optimization*. Tech. Rep. 2006-2146, American Institute of Aeronautics and Astronautics AIAA, 2006.
- Matthies, H.G., C.E. Brenner, C.G. Bucher, and C.S. Guedes. "Uncertainties in probabilistic numerical analysis of structures and solids — stochastic finite elements." *Struct Saf*, 1997: 19:283-336.
- McIlhagga, M., P. Husbands, and R. Ives. "A comparison of search techniques on a wing-box optimization problem." In *Parallel Problem Solving from Nature, vol 4*, by H.-M. Voigt, W. Ebeling, I. Rechenberg and H.-P. Schwefel, 614-623. Berlin: Springer, 1996.
- Messac, A, C Puemi-Sukam, and E Melachrinoudis. "Mathematical and pragmatic perspectives of physical programming." *AIAA J*, 2001: 39:885–93.
- Messac, A., and A. Ismail-Yahaya. "Multiobjective robust design using physical programming." *Struct Multidiscip Optim*, 2002: 23:357–71.
- Miranda, M. *On the response variability of beam structures with stochastic parameters*. Columbia University: Ph.D. thesis, 2008.
- Miranda, M., and G. Deodatis. "Generalized variability response functions for beam structures with stochastic parameters." *J Eng Mech*, 2012: 138(9):1165–85.
- Missoum, S., P. Ramu, and RT Haftka. "A convex hull approach for the reliability-based design optimization of nonlinear transient dynamic problems." *Comput Methods Appl Mech Eng*, 2007: 196(29–30):2895–906.
- Mulvey, J., R. Vanderbei, and S. Zenios. "Robust optimization of largescale largescale systems." *Oper. Res.* 43 (2), 1995: 264–281.
- Nair, V.N, et al. "Taguchi's parameter design: a panel discussion." *Technometrics* 34 (2), 1992: 127-161.

- Nelder, J., and R. Mead. "A simplex method for function minimization." *Computer Journal* 7, 1965: 308-313.
- Papadopoulos, V., and G. Deodatis. "Response variability of stochastic frame structures using evolutionary field theory." *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 2006: 195:(9-12):1050-74.
- Papadopoulos, V., and ND Lagaros. "Vulnerability-based robust design optimization of imperfect shell structures." *Structural Safety*, 2009: 31:475–482.
- Papadopoulos, V., and O. Kokkinos. "Transient Response of Stochastic Finite Element Systems using Dynamic Variability Response Functions." *Structural Safety*, 2015: 52: 100–112.
- Papadopoulos, V., and O. Kokkinos. "Variability response functions for stochastic systems under dynamic excitations." *Prb. Engrng. Mch.*, 2012: 28:176-184.
- Papadopoulos, V., G. Deodatis, and M. Papadrakakis. "Flexibility-based upper bounds on the response variability of simple beams." *Comput Methods Appl Mech Eng*, 2005: 194(12-16):1385-404.
- Papadopoulos, V., M. Papadrakakis, and G. Deodatis. "Analysis of mean response and response variability of stochastic finite element systems." *Comput Meth Appl Mech Eng*, 2006: 195(41-43):5454-71.
- Papadrakakis, M., and A. Kotsopoulos. "Parallel solutions methods for stochastic FEA using Monte Carlo Simulation." *Comput Meth Appl Mech Eng*, 1999: 168:305–20.
- Papadrakakis, M., and V. Papadopoulos. "Robust and efficient solution techniques for the stochastic finite element analysis of space frames." *Comput Methods Appl Mech Eng*, 1996: 134:325–40.
- Papadrakakis, M., N. Lagaros, and V. Plevris. "Design optimization of steel structures considering uncertainties." *Engrg. Struct.* 27(9), 2005: 1408-1418.
- Park, G.-J., T.-H. Lee, K. Lee, and K.-H. Hwang. "Robust design: an overview." *AIAA J.* 44 (1), 2006: 181–191.
- Park, G.-J., T.-H. Lee, K. Lee, and K.-H. Hwang. "Robust design: an overview." *AIAA J*, 2006: 44(1):181–91.
- Parkinson, A., C. Sorensen, and N. Pourhassan. "A general approach for robust optimal design." *ASME* 115, 1993: 74-80.
- Parsopoulos, K, and M. Vrahatis. "Particle swarm optimization method in multiobjective problems." *ACM Symposium on Applied Computing*. SAC, 2002. 603–607.
- Parzen, E. *Modern Probability Theory and Its Applications (2nd edition)*. New York: John Wiley and Sons, 1973.
- Pictet, O., M. Dacorogna, B. Chopard, M. Oussaidene, R. Schirru, and M. Tomassini. *Using genetic algorithms for robust optimization in financial applications*. Tech. Rep. OVP.1995-02-06, Olsen & Associates, Zuerich, Switzerland: Research Institute for Applied Economics, 1996.
- Priestley, M.B. *Non-Linear and Non-Stationary Time Series Analysis*. Academic Press, 1988.



- R. Popescu, G. Deodatis, and J. Prevost. "Simulation of homogeneous non-Gaussian stochastic vector fields." *Probabilistic Engineering Mechanics*, 1998: 13:1-13.
- Rao, C. Radhakrishna. *Linear Statistical Inference and Its Applications (2nd edition)*. New York: John Wiley and Sons, 1973.
- Ray, T. "Constrained robust design using a multiobjective evolutionary algorithm." *Proceeding of the CEC '02 Conference, IEEE*. Piscataway, NJ, 2002. 419-424.
- Rechenberg, I. *Evolutionstrategie '94*. Stuttgart: Frommann-Holzboog Verlag, 1994.
- Robbins, H., and S. Monro. "A stochastic approximation method." *Ann. Math. Statist.* 29, 1951: 400-407.
- Rohatgi, Vijay K., and A. K. Saleh. *An Introduction to Probability and Statistics*. New York: John Wiley and Sons, 2001.
- Sacks, J., W. Welch, J. Mitchell, and H. Wynn. "Design and analysis of computer experiments." *Statistical Science*, 1989: 409-435.
- Sandgren, E., and T. Cameron. "Robust design optimization of structures through consideration of variation." *Comput. Struct.* 80 (20-21), 2002: 1605-1613.
- Schueller, G. "Special issue on computational methods in stochastic mechanics and reliability analysis." *Comput Methods Appl Mech Eng*, 2005: 194(12-16):1251-795.
- Schueller, G. I. "Model reduction and uncertainties in structural dynamics." In *Computational methods in stochastic dynamics*, by Stefanou G, Papadopoulos V, editors In: Papadrakakis M. Springer, 2011.
- Sebald, A., and D. Fogel. "Design of fault-tolerant neural networks for pattern classification." *First Annual Conf. on Evolutionary Programming, Evolutionary Programming Society*. La Jolla, CA, 1992. 90-99.
- Shinozuka, F. Yamazaki and M. "Digital generation of non-Gaussian stochastic fields." *Engineering Mechanics*, 1988: 114:1183-1197.
- Shinozuka, M. "Structural response variability." *J Engrg Mech*, 1987: 113(6):825-42.
- Shinozuka, M., and G. Deodatis. "Simulation of stochastic processes by spectral representation." *Appl Mech Rev*, 1991: 44(4):191-203.
- Simpson, T., J. Peplinski, P. Koch, and J. Allen. "On the use of statistics in design and the implications for deterministic computer experiments." *ASME Design Theory and Methodology '97, J, Shah (Ed.)*. New York: ASME, 1997.
- Spall, J. "Stochastic optimization: stochastic approximation and simulated annealing." In *Encyclopedia of Electrical and Electronics Engineering, vol. 20*, by J. Webster, 529-542. New York: Wiley, 1999.
- Stefanou, G. "The stochastic finite element method: past, present and future." *Comput Methods Appl Mech Eng*, 2009: 198(9-12):1031-51.

- Suman, B, and P Kumar. "A survey of simulated annealing as a tool for single and multiobjective optimization." *Journal of the Operational Research Society*, 2006: 57 (10): 1143–1160.
- Sundaresan, S., K. Ishii, and D. Houser. "A robust optimization procedure with variations on design variables and constraints." *ASME Design Automation Conference*. 1993. 387-394.
- Suri, R., and K. Otto. "Manufacturing system robustness through integrated modeling." *J. Mech. Des.*, 2001: 630–636.
- Taguchi, G. *Quality Engineering through Design Optimization*. New York: Kraus International Publications, 1984.
- Takriti, S., and S. Ahmed. *On robust optimization of two-stage systems*. Tech. Rep., Yorktown Heights, NY: Mathematical Sciences Department, T.J. Watson Research Center, 2001.
- Tatel, N., H. Agarwal, A. Tovar, and J. Renaud. "Reliability based topology optimization using a hybrid cellular automaton algorithm, in: J. Herskovits, S. Mazorche, A. Canelas (Eds.)." *Proceeding of the 6th World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization (WCSMO6), ISSMO*. Rio de Janeiro, 2005.
- Teferra, K., and G. Deodatis. "Variability response functions for beams with nonlinear constitutive laws." *Probab Eng Mech*, 2012: 29:139–48.
- Uspensky, J. V. *Introduction to Mathematical Probability*. New York: Mc Graw-Hill, 1965.
- Wall, J. F., and G. Deodatis. "Variability response functions of stochastic plane stress/strain problems." *J Engrg Mech*, 1994: 120(9):1963-82.
- Walters, P. *An Introduction to Ergodic Theory*. Springer, 1982.
- Wiesmann, D. *Robust design mit evolutionstrategien*. Diploma thesis, University of Dortmund: Department of Computer Science, 1997.
- Yamazaki, F., M. Shinozuka, and G. Dashgupta. "Neumann expansion for stochastic finite element analysis." *Eng. Mech*, 1988: 114(8): 1335–1354.
- Zadeh, LA. "Optimality and non-scalar-valued performance criteria." *IEEE Trans Autom Control AC-8*. 1963. 59-60.
- Zhang, J., M. Wiecek, and W. Chen. "Local approximation of the efficient frontier in robust design." *J. Mech. Des.* 122(2), 2000: 232-236.
- Zhao, L., and Q. Chen. "Neumann dynamic stochastic finite element method of vibration for structures with stochastic parameters to random excitation." *Comput. Struct.*, 2000: 77: 651–657.
- Zitzler, E, M Laumanns, and L Thiele. *SPEA2: Improving the Performance of the Strength Pareto Evolutionary Algorithm*. Technical Report 103, Zurich: Computer Engineering and Communication Networks Lab (TIK), Swiss Federal Institute of Technology (ETH), 2001.