



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και
Υπολογιστών

Πειραματική μελέτη δυναμικών μοντέλων διαμόρφωσης απόψεων με περιορισμένη γνώση

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΠΑΛΥΒΟΣ-ΓΙΑΝΝΑΣ

Επιβλέπων : Δημήτριος Φωτάκης
Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Σεπτέμβριος 2015



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και
Υπολογιστών

Πειραματική μελέτη δυναμικών μοντέλων διαμόρφωσης απόψεων με περιορισμένη γνώση

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΠΑΛΥΒΟΣ-ΓΙΑΝΝΑΣ

Επιβλέπων : Δημήτριος Φωτάκης
Επικουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 24η Σεπτεμβρίου 2015.

.....
Δημήτριος Φωτάκης
Επικ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....
Αριστείδης Παγουριτζής
Αν. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....
Νικόλαος Παπασπύρου
Αν. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Σεπτέμβριος 2015

.....
Δημήτρης Παλυβός-Γιαννάς

Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

Copyright © Δημήτρης Παλυβός-Γιαννάς, 2015.
Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Περίληψη

Οι απόψεις των ανθρώπων επηρεάζουν σε μεγάλο βαθμό τόσο την προσωπική ζωή του καθενός όσο και τη γενικότερη λειτουργία της κοινωνίας. Ο σχηματισμός τους βασίζεται σε μια διαδικασία κοινωνικής μάθησης κατά την οποία τα άτομα ανταλλάσσουν πληροφορία με το κοινωνικό τους δίκτυο. Η διαδικασία αυτή περιγράφεται από διάφορα μαθηματικά μοντέλα που ορίζουν το πώς μεταβάλλονται δυναμικά στο χρόνο οι απόψεις αλλά και το ίδιο το κοινωνικό δίκτυο. Τα μοντέλα αυτά χωρίζονται σε δύο κατηγορίες, ανάλογα με το εάν η δομή της κοινωνίας παραμένει σταθερή ή μεταβάλλεται λόγω των απόψεων.

Η πρώτη κατηγορία έχει αναλυθεί διεξοδικά. Σε αυτήν ανήκουν τα μοντέλα του DeGroot και των Friedkin-Johnsen (Kleinberg). Αρχικά, κάνουμε μια γρήγορη αναφορά στα συγκεκριμένα μοντέλα ώστε ο αναγνώστης να εξοικειωθεί με τις σχετικές έννοιες. Στη συνέχεια, σε μια προσπάθεια να πλησιάσουμε περισσότερο τα πραγματικά φαινόμενα, εισάγουμε το μοντέλο των συναντήσεων που προσπαθεί να προσομοιώσει το μοντέλο των Friedkin-Johnsen χρησιμοποιώντας πολύ μικρότερο όγκο πληροφορίας.

Στην δεύτερη κατηγορία, όπου το κοινωνικό δίκτυο μπορεί να μεταβληθεί, η θεωρητική ανάλυση είναι πολύ πιο δύσκολη. Η εργασία μας θα εστιάσει σε πειραματική έρευνα της συμπεριφοράς κάποιων αντιπροσωπευτικών μοντέλων. Η ενότητα ξεκινά με το μοντέλο μεταβλητών βαρών που εισάγει μια πρώτη μορφή δυναμικά μεταβαλλόμενου δικτύου. Συνεχίζεται με μία γρήγορη αναφορά στο μοντέλο των Hegselmann-Krause που αποτελεί το θεμέλιο αυτής της κατηγορίας. Εδώ εξετάζουμε μια παραλλαγή του μοντέλου HK με περιορισμένη ποσότητα πληροφορίας. Ύστερα εστιάζουμε στα μοντέλα K-Nearest Neighbors, για τα οποία έχουμε ελάχιστα στοιχεία στη διάθεσή μας.

Για κάθε μοντέλο εξετάζουμε τη συμπεριφορά του ως προς τη σύγκλιση, την ταχύτητα σύγκλισης καθώς και την εικόνα του τελικού διανύσματος των απόψεων. Όλα τα μοντέλα που μελετήσαμε συγκλίνουν. Ο χρόνος σύγκλισης διαφέρει τόσο ανάμεσα στα μοντέλα, όσο και σε διαφορετικά πειράματα ίδιων μοντέλων με διαφορετικές παραμέτρους. Για παραμέτρους που πλησίαζαν την πραγματικότητα οι απόψεις της κοινωνίας δεν κατέληγαν σε ομοφωνία.

Λέξεις κλειδιά

Κοινωνικά δίκτυα, Διαμόρφωση απόψεων, DeGroot, Friedkin-Johnsen, Kleinberg, Hegselmann Krause, K-Nearest Neighbors

Abstract

Opinions are important for both our personal lives and society as a whole. They are formed during a social learning process in which people use their social network to exchange useful information about the world. This dynamic process is described by several mathematical models that define how the opinions and the network behave over time. Those models can be separated into two distinct categories.

In the first category there are models which make the assumption that the structure of the society remains stable. Those models have been studied extensively and their behavior is well understood. We will begin with a short analysis of the DeGroot and Friedkin-Johnsen(Kleinberg) models so that the reader can understand the basics of the opinion dynamics process. We will continue by introducing a new model which we will call "Meeting a Friend". The purpose of this model is to try to simulate the Friedkin-Johnsen model with a limited amount of information, a situation which resembles reality more closely.

In the second category there are models that allow structural changes in the society. Those changes happen as a result of changing opinions and vice versa. Due to the fact that a mathematical analysis of these models is quite challenging, we will take an experimental approach. We will begin with the Asymmetric Coevolutionary Model in which only the weights of the society graph can change. After that we will have a look at the model proposed by Hegselmann and Krause which allows for a completely dynamic network. We will introduce a variation of the model by limiting the amount of available information. Finally we will focus our experiments on two variations of the K-Nearest Neighbors Model as it hasn't been studied as extensively as the rest.

For each model we will study whether it converges, the speed of convergence and the opinions at the equilibrium. All the models that we tested converge. The convergence times differ depending on the model and its parameters. Finally none of the models reach a consensus for sets of parameters that are close to reality.

Key words

Social Networks, Opinion Dynamics, DeGroot, Friedkin-Johnsen, Kleinberg, Hegselmann Krause, K-Nearest Neighbors

Ευχαριστίες

Ευχαριστώ θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή μου, κ. Δημήτρη Φωτάκη, για τη συνεχή καθοδήγηση και την εμπιστοσύνη του. Ο ενθουσιασμός του και η μεταδοτικότητα του με βοήθησαν στην κατανόηση των εννοιών και στην αποτελεσματική αναζήτηση λύσεων στα προβλήματα που συνάντησα. Ευχαριστώ επίσης τον υποψήφιο διδάκτορα Στρατή Σκουλάκη για την όρεξή του να βοηθήσει και τις πρακτικές συμβουλές του στη διάρκεια της εργασίας. Θα ήθελα τέλος να ευχαριστήσω την οικογένειά μου και κυρίως τους γονείς μου, οι οποίοι με υποστήριζαν και έκαναν δυνατή την απερίσπαστη ενασχόλησή μου τόσο με την εκπόνηση της διπλωματικής μου, όσο και συνολικά με τις σπουδές μου.

Δημήτρης Παλυβός-Γιαννάς,
Αθήνα, 24η Σεπτεμβρίου 2015

Περιεχόμενα

Περίληψη	i
Abstract	iii
Ευχαριστίες	v
Περιεχόμενα	vii
Κατάλογος σχημάτων	ix
1. Εισαγωγή	1
2. Θεωρητικό Υπόβαθρο	5
2.1 Γράφοι και δίκτυα	5
2.1.1 Ορισμοί	5
2.1.2 Αναπαράσταση Γράφου	5
2.1.3 Μονοπάτια	6
2.1.4 Συνεκτικότητα	6
2.1.5 Συνεκτικές Συνιστώσες	7
2.1.6 Γειτονιά	7
2.1.7 Βαθμός και πυκνότητα του δικτύου	8
2.1.8 Το φαινόμενο του "Μικρού Κόσμου"	8
2.1.9 Κατανομή βαθμών (Degree Distribution)	10
2.1.10 Κλείσιμο των τριάδων	10
2.2 Τυχαία Δίκτυα	12
2.2.1 Δίκτυα Erdős-Rényi	12
2.2.2 Δίκτυα Scale-Free	14
2.3 Η δυναμική συμπεριφορά των απόψεων	15
2.4 Κατηγορίες Μοντέλων	17
3. Σταθερό Δίκτυο	19
3.1 Το Μοντέλο του DeGroot	19
3.1.1 Εισαγωγή	19
3.1.2 Περιγραφή Διαδικασίας	19
3.1.3 Σύγκλιση	20
3.2 Το Μοντέλο των Friedkin-Johnsen	23
3.2.1 Εισαγωγή	23
3.2.2 Περιγραφή Διαδικασίας	23
3.2.3 Σύγκλιση	25
3.3 Το μοντέλο των συναντήσεων	27
3.3.1 Εισαγωγή	27
3.3.2 Περιγραφή Διαδικασίας	27

3.3.3 Σύγκλιση	28
3.3.4 Συναντήσεις φίλων με παράμετρο α	29
4. Μεταβαλλόμενα Δίκτυα	31
4.1 Εισαγωγή	31
4.2 Μοντέλο Δικτύου με Μεταβλητά Βάρη	31
4.2.1 Εισαγωγή	31
4.2.2 Περιγραφή Διαδικασίας	31
4.2.3 Σύγκλιση	32
4.2.4 Ταχύτητα Σύγκλισης	37
4.3 Μοντέλο Hegselmann-Krause (HK)	40
4.3.1 Εισαγωγή	40
4.3.2 Περιγραφή Διαδικασίας	40
4.3.3 Συμπεριφορά	41
4.4 Μοντέλο HK με Περιορισμένη Γνώση	44
4.4.1 Εισαγωγή	44
4.4.2 Περιγραφή Διαδικασίας	44
4.4.3 Συμπεριφορά	45
4.5 Μοντέλο K-Nearest Neighbors (K-NN)	48
4.5.1 Εισαγωγή	48
4.5.2 Περιγραφή Διαδικασίας	48
4.5.3 Σύγκλιση	50
4.5.4 Χρόνος Σύγκλισης	55
4.6 Δυναμικό μοντέλο K-NN	60
4.6.1 Εισαγωγή	60
4.6.2 Περιγραφή Διαδικασίας	60
4.6.3 Σύγκλιση	61
4.6.4 Χρόνος Σύγκλισης	63
Βιβλιογραφία	69
A. Κώδικας Προσομοιώσεων	73
A.1 Αντιστοίχιση αποτελεσμάτων και αρχείων κώδικα	73

Κατάλογος σχημάτων

1.1	Οι κοινωνικές επαφές παίζουν ουσιαστικό ρόλο στη διαμόρφωση των απόψεων. Εδώ απεικονίζεται το κοινωνικό δίκτυο των μαθητών μιας τάξης γερμανικού σχολείου τα χρόνια 1880-1881, ένα από τα πρώτα που αναλύθηκαν. (Πηγή δεδομένων: [Heid14]. Το γράφημα δημιουργήθηκε με την εφαρμογή <i>Gephi</i> (http://gephi.github.io)).	2
2.1	Παράδειγμα μη κατευθυνόμενου και κατευθυνόμενου γράφου αντίστοιχα.	5
2.2	Το δίκτυο οπτικών ινών του ΕΔΕΤ μπορεί να αναπαρασταθεί με έναν μη κατευθυνόμενο γράφο (Πηγή: Wikipedia).	7
2.3	Γράφος που αναπαριστά τις ερωτικές σχέσεις των ατόμων σε ένα αμερικανικό λύκειο [Bear04]. Οι περισσότεροι κόμβοι ανήκουν σε μια γιγαντιαία συνιστώσα. (Πηγή: The University of Chicago Press)	8
2.4	Ιστόγραμμα των αποτελεσμάτων του πειράματος του Milgram. Για κάθε μήκος μονοπατιού (οριζόντιος άξονας) φαίνεται ο αριθμός των γραμμάτων που έφτασαν επιτυχώς στον προορισμό τους ακολουθώντας το (κάθετος άξονας). Συνολικά 64 γράμματα πέτυχαν να φτάσουν στον στόχο. (Πηγή: American Sociological Association)	9
2.5	Κατανομή του βαθμού των κόμβων για δίκτυα Poisson και Scale-Free. (Πηγή: [Jack10])	10
2.6	Ο σχηματισμός της ακμής A-C οφείλεται στο κλείσιμο των τριάδων, μιας και οι δύο κόμβοι έχουν αρχικά κοινό φίλο τον D.	11
2.7	Δίκτυο φίλων ενός χρήστη του Facebook. Το κλείσιμο των τριάδων παίζει σημαντικό ρόλο στο σχηματισμό του δικτύου. (Πηγή: [Came])	11
2.8	Δίκτυα Erdős-Rényi 50 κόμβων με πιθανότητες $p=0.02$ και $p=0.1$ αντίστοιχα. Τα μεγέθη των κόμβων είναι ανάλογα του βαθμού τους.	13
2.9	Δίκτυο Scale-Free με 50 κόμβους. Τα μεγέθη των κόμβων είναι ανάλογα του βαθμού τους.	15
2.10	Κατηγοριοποίηση των μοντέλων βάση της δυναμικής του δικτύου.	17
2.11	Κατηγοριοποίηση των μοντέλων βάση της πληροφορίας που έχουν στη διάθεσή τους οι κόμβοι.	18
3.1	Η μορφή του γράφου που δημιουργείται με βάση τον πίνακα A του μοντέλου DeGroot.	20
3.2	Δίκτυο που οδηγεί το μοντέλο DeGroot σε σύγκλιση.	21
3.3	Δίκτυο στο οποίο το μοντέλο DeGroot δεν συγκλίνει.	21
3.4	Η μορφή του γράφου που δημιουργείται με βάση τον πίνακα Q.	24
3.5	Οι τρεις συναρτήσεις κόστους για έναν τυχαίο κόμβο. Ο μαύρος κύκλος αντιπροσωπεύει το ολικό ελάχιστο.	25
3.6	Ιστογράμματα απόψεων. Στο σχήμα 3.6a φαίνονται οι αρχικές απόψεις, στο σχήμα 3.6b οι τελικές απόψεις για δίκτυο μέσου degree 4 και στο σχήμα 3.6c οι τελικές απόψεις για δίκτυο μέσου degree 20.	26

3.7	Χρόνος σύγκλισης σε γύρους καθώς μεταβάλλεται η άπειρη νόρμα του πίνακα A. Η καμπύλη είναι ο μέσος όρος 32 επαναλήψεων του μοντέλου για το ίδιο δίκτυο και η κόκκινη περιοχή είναι η απόκλιση.	28
3.8	Απόσταση των απόψεων από την ισορροπία για παράμετρο $\alpha = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}$ και 10^{-4} αντίστοιχα.	30
3.9	Απόσταση από την ισορροπία στο υβριδικό μοντέλο όπου μειώνουμε την τιμή του α όσο προχωράει ο χρόνος.	30
4.1	Ιστογράμμα χρόνου σύγκλισης του μοντέλου με μεταβλητά βάρη.	33
4.2	Αριστερά: Απλή εκτέλεση του μοντέλου σε δίκτυο 64 κόμβων. Δεξιά: Η ίδια δοκιμή με τυχαία μετακίνηση των απόψεων στον έκτο γύρο.	34
4.3	Αριστερά: Τάξη μεγέθους του B ίση με τη μονάδα. Δεξιά: Τάξη μεγέθους του B ίση με 0.1. Στη δεύτερη περίπτωση είναι ξεκάθαρη η συγκέντρωση των απόψεων κοντά σε μια τιμή.	35
4.4	Πυκνότητα των απόψεων καθώς μεταβάλλεται το σχετικό μέγεθος των τιμών του πίνακα B.	35
4.5	Ασύγχρονη ενημέρωση απόψεων σε δίκτυο 64 κόμβων.	36
4.6	Ιστογράμμα χρόνου σύγκλισης του μοντέλου με μεταβλητά βάρη και ασύγχρονη ενημέρωση.	37
4.7	Χρόνος σύγκλισης (μπλε) και μέσος βαθμός του δικτύου (πορτοκαλί) καθώς αυξάνεται η παράμετρος p	38
4.8	Χρόνος σύγκλισης καθώς μεταβάλλεται το μέγεθος των τιμών του πίνακα B.	39
4.9	Αριστερά: Ιδιοτιμή καθώς μεταβάλλεται το degree του δικτύου. Δεξιά: Ιδιοτιμή καθώς μεταβάλλεται το σχετικό μέγεθος των τιμών του πίνακα B.	39
4.10	Δομή του δικτύου κατά την εκτέλεση του μοντέλου HK τις χρονικές στιγμές $t=0$ και $t=1$. Μετά από έναν μόλις γύρο ξεκινούν να σχηματίζονται ομάδες κόμβων (clusters) με παρόμοιες απόψεις.	40
4.11	Το διάστημα της εμπιστοσύνης ϵ	41
4.12	Εξέλιξη των απόψεων διάφορες τιμές του ϵ	42
4.13	Πυκνότητα των απόψεων καθώς μεταβάλλεται η παράμετρος ϵ	43
4.14	Παράδειγμα εκτέλεσης μοντέλου HK με περιορισμένη γνώση σε 6 κόμβους.	45
4.15	Πυκνότητα των απόψεων καθώς μεταβάλλεται η παράμετρος ϵ για το μοντέλο HK με περιορισμένη γνώση.	46
4.16	Απόσταση στην ισορροπία μεταξύ των μοντέλων HK πλήρους και περιορισμένης γνώσης.	47
4.17	Παράδειγμα εκτέλεσης μοντέλου K-NN.	49
4.18	Παράδειγμα μεγαλύτερου δικτύου με κοντινές απόψεις.	49
4.19	Ιστογράμμα χρόνου σύγκλισης του μοντέλου K-NN.	50
4.20	Πυκνότητα των απόψεων καθώς μεταβάλλεται η παράμετρος K (πολλά δίκτυα).	51
4.21	Πυκνότητα των απόψεων καθώς μεταβάλλεται η παράμετρος K σε ένα δίκτυο.	51
4.22	Εξέλιξη του μοντέλου και ιστογράμμα απόψεων στην ισορροπία για $K=20$	52
4.23	Απόσταση του πιο μακρινού γείτονα που λαμβάνει υπόψη του ο κάθε κόμβος. Τα χρώματα αντιπροσωπεύουν τις απόψεις των ίδιων των κόμβων.	53
4.24	Ένα τμήμα του δικτύου στην ισορροπία για $K=20$. Τα χρώματα αντιπροσωπεύουν τις απόψεις και τα μεγέθη των κόμβων το In-Degree τους.	53
4.25	Πάνω σειρά: Εξέλιξη των απόψεων για τιμές $K=50$ και $K=60$ αντίστοιχα. Κάτω σειρά: Απόσταση του μακρινότερου γείτονα των κόμβων στις ίδιες εκτελέσεις.	54

4.26 Χρόνος σύγκλισης καθώς μεταβάλλεται ο μέσος βαθμός του δικτύου και η παράμετρος K	55
4.27 Εξέλιξη των απόψεων για $K=38$ και $K=44$ αντίστοιχα.	56
4.28 Ενεργοποιημένες ακμές στο δίκτυο καθώς το ένα cluster πλησιάζει αργά το άλλο.	56
4.29 Αριθμός των cluster καθώς μεταβάλλεται ο μέσος βαθμός του δικτύου και η παράμετρος K	57
4.30 Απόσταση του πιο μακρινού γείτονα για μέσο βαθμό δικτύου 14 και 128 αντίστοιχα. Οι αποστάσεις του πρώτου σχήματος είναι δύο τάξεις μεγέθους μεγαλύτερες από αυτές του δεύτερου.	59
4.31 Παράδειγμα εκτέλεσης μοντέλου K -NN.	61
4.32 Ιστόγραμμα χρόνου σύγκλισης του δυναμικού μοντέλου K -NN.	62
4.33 Πυκνότητα των απόψεων καθώς μεταβάλλεται η παράμετρος K σε πολλά δίκτυα με σταθερό διάλυσμα αρχικών απόψεων.	63
4.34 Χρόνος σύγκλισης του δυναμικού μοντέλου K -NN καθώς μεταβάλλεται η παράμετρος K και ο μέσος βαθμός του δικτύου.	64
4.35 Αριθμός των clusters που σχηματίζονται στην ισορροπία του δυναμικού μοντέλου K -NN καθώς μεταβάλλεται η παράμετρος K και ο μέσος βαθμός του δικτύου.	65
4.36 Χρόνος που χρειάζεται μέχρι η ένωση των 2-γειτονιών των κόμβων να γίνει πλήρης γράφος.	66
4.37 Οι ορατοί γείτονες των ατόμων μετά από μια εκτέλεση του μοντέλου για $K=30$ (μπλε περιοχή) και $K=70$ (κίτρινη περιοχή) αντίστοιχα. Τα χρώματα αντιστοιχούν στην τιμή των απόψεων.	68

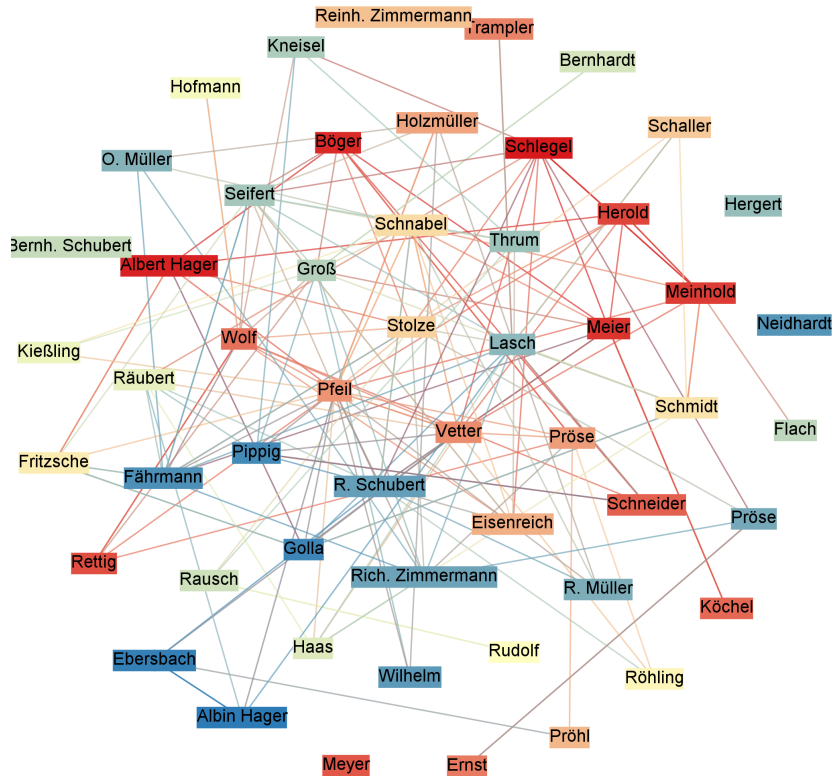
Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Οι πεποιθήσεις και οι απόψεις που υιοθετούμε επηρεάζουν σχεδόν όλες τις πτυχές της κοινωνικής μας ζωής. Βέβαια πολλές φορές αδυνατούμε να εξηγήσουμε την προέλευσή τους. Για παράδειγμα, οι περισσότεροι από εμάς δεν έχουμε δοκιμάσει όλα τα είδη φαγητού ούτε έχουμε ακούσει δείγματα από όλες τις μουσικές του κόσμου. Παρόλα αυτά έχουμε μια αρκετά καλή ιδέα για το τι προτιμούμε. Επιπλέον, ως μέλη της κοινωνίας έχουμε αρκετά ισχυρές πεποιθήσεις για το πώς θα αντιδράσουν οι υπόλοιποι σε διάφορες καταστάσεις και προσαρμόζουμε την συμπεριφορά μας ανάλογα. Αυτές οι πεποιθήσεις περιπλέκονται με τους λεγόμενους "κοινωνικά αποδεκτούς" κανόνες για το πώς πρέπει να συμπεριφέρεται κάποιος (περιμένουμε στο τέλος όταν έχει σχηματιστεί μια ουρά στο σουπερ μάρκετ, βοηθάμε κάποιον που παραπάτησε να σηκωθεί κ.ο.κ). Τέλος δεν μπορούμε να αγνοήσουμε την επιρροή των απόψεων και των πεποιθήσεών μας στα πολιτικά δρώμενα. Επιλέγουμε κόμμα και υποψηφίους ανάλογα με το ποιο οικονομικό και κοινωνικό σύστημα θεωρούμε δίκαιο, ποιος υποψήφιος είναι πιο έμπιστος κ.ο.κ. Συμπερασματικά, οι απόψεις και οι πεποιθήσεις έχουν σημασία τόσο σε προσωπικό επίπεδο όσο και στο γενικότερο πλαίσιο λειτουργίας ολόκληρης της κοινωνίας.

Πώς σχηματίζονται όμως οι απόψεις και οι πεποιθήσεις; Από την γενετική επιστήμη γνωρίζουμε ότι ορισμένα γονιδιακά χαρακτηριστικά των ζωντανών οργανισμών αντικατοπτρίζονται σε συγκεκριμένους φαινότυπους. Παρόλα αυτά, με εξαίρεση μερικές νευρολογικές-ψυχιατρικές παθήσεις, είναι σχεδόν αδύνατο να συνδέσουμε τον γονότυπο ενός ατόμου με τις απόψεις που εκφράζει. Αντίθετα, οι απόψεις και οι πεποιθήσεις φαίνεται να διαμορφώνονται μέσω ποικίλων διαδικασιών μάθησης [Boyd88]. Ένας μέρος της μάθησης συμβαίνει μέσα στην ίδια την οικογένεια όπου οι γονείς διδάσκουν βασικές αρχές και κανόνες συμπεριφοράς στα παιδιά τους [Bisi00, Bisi01, Cava81]. Ένα άλλο μεγάλο τμήμα της διαμόρφωσης των απόψεων πραγματοποιείται μέσω μιας διαδικασίας "*κοινωνικής μάθησης*" όπου τα άτομα αποκτούν πληροφορίες και ενημερώνουν τις πεποιθήσεις και τις συμπεριφορές τους με βάση τις εμπειρίες τους, την παρατήρηση των γύρω ατόμων, την επικοινωνία τους με τους γύρω τους για τις πεποιθήσεις και την συμπεριφορά τους, την ενημέρωση από Μέσα Μαζικής Ενημέρωσης και της προπαγάνδας από τους κρατικούς μηχανισμούς και πολιτικούς ηγέτες [Acem11].

Λέμε ότι η μάθηση είναι κοινωνική επειδή το άτομο παρατηρεί τις συμπεριφορές και λαμβάνει πληροφορίες επικοινωνώντας με ένα μικρό υποσύνολο της κοινωνίας που θα το ονομάζουμε *κοινωνικό δίκτυο* και αποτελείται από τους φίλους και τους γνωστούς του, τους συναδέλφους του, τους συγγενείς του και ορισμένα άλλα άτομα με επιρροή τα οποία εμπιστεύεται όπως για παράδειγμα έμπιστους πολιτικούς, τηλεοπτικά κανάλια και εφημερίδες, τοπικούς άρχοντες κ.ο.κ. Η επίδραση του κοινωνικού δικτύου στη ζωή των ατόμων έχει μελετηθεί διεξοδικά. Ένας ενδιαφέρων τομέας που έχει αναλυθεί είναι ο ρόλος των κοινωνικών δικτύων στη διαδικασία εύρεσης εργασίας. Έχουν γίνει αρκετές μελέτες τη σημασία των κοινωνικών επαφών στην απόκτηση πληροφοριών για



Σχήμα 1.1: Οι κοινωνικές επαφές παίζουν ουσιαστικό ρόλο στη διαμόρφωση των απόψεων. Εδώ απεικονίζεται το κοινωνικό δίκτυο των μαθητών μιας τάξης γερμανικού σχολείου τα χρόνια 1880-1881, ένα από τα πρώτα που αναλύθηκαν. (Πηγή δεδομένων: [Heid14]. Το γράφημα δημιουργήθηκε με την εφαρμογή *Gephi* (<http://gephi.github.io>)).

διαθέσιμες θέσεις εργασίας. Μια από τις πρώτες από αυτές έγινε από τους Myers και Shultz [Myer51] με συνεντεύξεις σε εργατές στην κλωστοϋφαντουργία. Η μελέτη έδειξε ότι το 62% των εργατών είχε βρει τη δουλειά του μέσω κάποιου γνωστού, σε αντίθεση με το 23% που είχε κάνει απευθείας αίτηση και το υπόλοιπο 15% που την είχε βρει μέσω διαφημίσεων κτλ. Μια επόμενη μελέτη [Rees70] έδειξε ότι το φαινόμενο δεν περιοριζόταν στους κλωστοϋφαντουργούς αλλά είχε ευρεία ισχύ.

Όταν το άτομο λαμβάνει πληροφορίες από το κοινωνικό του δίκτυο, καλείται να τις *ερμηνεύσει* μέσα σε ένα κοινωνικό πλαίσιο. Ως αποτέλεσμα, θα εμπιστευτεί κάποιες πληροφορίες περισσότερο από άλλες και θα σχηματίσει υποθέσεις για τις πηγές των εμπειριών και τις προθέσεις των μελών του κοινωνικού του δικτύου. Τελικά η ανταλλαγή πληροφοριών μέσα στο κοινωνικό δίκτυο οδηγεί τη μάθηση και τον σχηματισμό των απόψεων σε μια *δυναμική συμπεριφορά* (*opinion dynamics*). Όταν το άτομο λάβει μια πληροφορία από κάποια επαφή του στο κοινωνικό δίκτυο μπορεί να την προωθήσει αυτούσια ή αλλοιωμένη σε άλλα μέλη του δικτύου. Τα άτομα αυτά με τη σειρά τους μπορεί να ανήκουν και σε άλλα κοινωνικά δίκτυα. Συνεπώς η πληροφορία διαδίδεται μέσα στο κοινωνικό δίκτυο του ατόμου αλλά και έξω από αυτό. Στην πραγματικότητα η ίδια η μετάδοση της πληροφορίας μπορεί να αλλοιώσει το κοινωνικό δίκτυο και να μεταβάλλει δυναμικά τη δομή του. Κάποιο άτομο μπορεί, όταν λάβει μια πληροφορία, να αποφασίσει ότι δεν εμπιστεύεται πια μερικές από τις κοινωνικές επαφές του με αποτέλεσμα να αποκοπεί από αυτές. Στην ίδια λογική μπορεί μέσω της ανταλλαγής πληροφοριών να ανακαλύψει νέα άτομα που θα χρησιμοποιεί ως πηγές γνώσης και να συνάψει στενότερες σχέσεις με αυτά [Acem11].

Η παρούσα εργασία θα επικεντρωθεί στη μελέτη της δυναμικής διαδικασίας κοινωνικής μάθησης. Μας ενδιαφέρει το πώς η δομή των σχέσεων στην κοινωνία, η εμπιστοσύνη των ατόμων προς τους άλλους και οι υποθέσεις που κάνουν οι άνθρωποι για τις προθέσεις των υπολοίπων επηρεάζουν τη διαδικασία διαμόρφωσης των απόψεων και των πεποιθήσεών τους. Με λίγα λόγια θα θέλαμε να ξέρουμε ποια είναι η επίδραση του κοινωνικού δικτύου στη διαμόρφωση των απόψεων. Προς το τέλος της εργασίας θα μας απασχολήσει και το αντίστροφο ερώτημα, δηλαδή το πώς η διαδικασία διαμόρφωσης των απόψεων και ανταλλαγής πληροφοριών επηρεάζει το ίδιο το κοινωνικό δίκτυο.

Σύγκλιση Καταρχάς, το κύριο που μας ενδιαφέρει να μάθουμε για αυτή τη δυναμική διαδικασία ενημέρωσης των απόψεων (*opinion dynamics*) είναι εάν συνεχίζεται για πάντα ή εάν κάποια στιγμή σταματά. Υπάρχει δηλαδή κάποια χρονική στιγμή μετά την οποία οι απόψεις όλων των ατόμων του κοινωνικού δικτύου έχουν σταθεροποιηθεί και δεν αλλάζουν; Εδώ πρέπει να σημειωθεί το χρονικό διάστημα που απαιτείται για να συμβεί κάτι τέτοιο μπορεί να είναι πολύ μεγάλο. Η παραδοχή αυτή μας επιτρέπει από τη μια να μελετήσουμε καλύτερα τη συμπεριφορά των μοντέλων αλλά αρκετές φορές δυσκολεύει την ανάλυση της πραγματικότητας γιατί τέτοια μεγάλα διαστήματα μπορεί να ξεπερνούν τη διάρκεια της ζωής ενός ατόμου [Acem11]. Γι' αυτό το λόγο δεν μας ενδιαφέρει απλά αν οι απόψεις θα σταθεροποιηθούν αλλά και πόσο γρήγορα θα γίνει αυτό, δηλαδή η *ταχύτητα σύγκλισης* της διαδικασίας.

Ομοφωνία (Consensus) Ένα δεύτερο ερώτημα με μεγάλο πρακτικό ενδιαφέρον είναι το αν ένα σύνολο ατόμων με διαφορετικές απόψεις θα καταλήξουν τελικά σε ομοφωνία και μάλιστα εάν η ομοφωνία αυτή θα αντιστοιχεί στη "σωστή" άποψη. Έχουν γίνει διάφορες έρευνες πάνω στο συγκεκριμένο θέμα με την πιο γνωστή να είναι αυτή του Francis Galton [Galt07] στο άρθρο του "Vox Populi (Wisdom Of Crowds)", στο περιοδικό Nature το 1907. Στο άρθρο αυτό ο Galton εξέφρασε την άποψη ότι μια ομάδα σχετικά ανενημέρωτων ατόμων κατέχει συλλογικά πολλή περισσότερη γνώση από κάθε άτομο χωριστά. Στο πείραμά του επισκέφθηκε ένα αγροτικό πανηγύρι και ζήτησε από 800 συμμετέχοντες να μαντέψουν το βάρος ενός συγκεκριμένου βοδιού. Το εκπληκτικό αποτέλεσμα του πειράματος όπως αναφέρεται στο άρθρο είναι ότι ο μέσος όρος των εκτιμήσεων ήταν πολύ κοντά στο πραγματικό βάρος του βοδιού. Πράγματι, η συλλογική πρόβλεψη του πλήθους απείχε μόλις μισό κιλό από την πραγματική τιμή! Ένα δεύτερο πολύ γνωστό σύνολο πειραμάτων είναι τα πειράματα του Asch που έδειξαν πως μια ισχυρή πλειοψηφία μπορεί να μεταβάλλει την άποψη του ατόμου ακόμα και όταν η άποψη της πλειοψηφίας είναι ξεκάθαρα λανθασμένη [Asch51, Asch56].

Εμφανίζεται η ομοφωνία στις πραγματικές κοινωνίες; Η εμπειρία δείχνει πως στις περισσότερες περιπτώσεις κάτι τέτοιο δε συμβαίνει. Σε πολλά οικονομικά, πολιτικά και κοινωνικά φαινόμενα όπως το ποιο είναι το καταλληλότερο κόμμα για να κυβερνήσει, ποια πρέπει να είναι η οικονομική πολιτική μιας χώρας και σε κάποιες πολιτείες των ΗΠΑ αν η θεωρία της εξέλιξης έχει επιστημονική βάση, η διαφωνία φαίνεται να είναι η επικρατούσα κατάσταση. Σε όλες αυτές της περιπτώσεις υπάρχει μεγάλος όγκος πληροφοριών που είναι διαθέσιμος στα άτομα και όμως τελικά η κοινωνία δεν καταλήγει σε μια ενιαία άποψη. Συνεπώς θα ήταν χρήσιμο να έχουμε μοντέλα της διαδικασίας διαμόρφωσης των απόψεων που δεν οδηγούνται πάντα σε ομοφωνία αλλά επιτρέπουν οι κοινωνία να καταλήγει σε πλήθος διαφορετικών απόψεων και πεποιθήσεων ανάλογα με τη δομή του δικτύου, τη δυνατότητα της πρόσβασης του κάθε ατόμου σε νέες πηγές πληροφοριών και τη φύση της διαφωνίας (μπορεί ένα άτομο να μην είναι διατεθειμένο να μετακινηθεί πολύ από την αρχική του άποψη).

Περιορισμένη Γνώση Τα απλούστερα και πιο διαδεδομένα μοντέλα διαμόρφωσης απόψεων υποθέτουν ότι το άτομο έχει στη διάθεσή του και χρησιμοποιεί έναν πολύ μεγάλο όγκο πληροφορίας. Ως παράδειγμα ας δούμε το μοντέλο του DeGroot [DeGr74] που θα αναλύσουμε διεξοδικά αργότερα. Στο μοντέλο αυτό το άτομο έχει ένα σύνολο επαφών και διαρκώς ενημερώνει την άποψη λαμβάνοντας υπόψη τις απόψεις όλων των επαφών του. Κάτι τέτοιο βέβαια δεν είναι ρεαλιστικό. Όταν προσπαθούμε να αποφασίσουμε για παράδειγμα ποια ταινία αξίζει να δούμε στο σινεμά δεν ρωτάμε το σύνολο του κοινωνικού μας δικτύου αλλά μόνο ένα πολύ μικρό υποσύνολο αυτού. Ο τρόπος που καθορίζουμε το συγκεκριμένο υποσύνολο δεν είναι ξεκάθαρος αλλά έχουμε μπορούμε να κάνουμε αρκετές υποθέσεις. Συνήθως ερχόμαστε συχνότερα σε επαφή με τα άτομα του κοινωνικού μας κύκλου με τα οποία είμαστε πιο κοντά. Συνεπώς είναι πιο πιθανό να ακούσουμε τη δική τους άποψη. Επίσης οι άνθρωποι έχουν την τάση να δίνουν περισσότερη σημασία σε αυτούς με τους οποίους συμφωνούν. Έτσι περιμένουμε το άτομο να δώσει μικρή σημασία σε άτομα του κοινωνικού του κύκλου που θεωρεί ακραία.

Από τα παραπάνω διαπιστώνουμε ότι τα μοντέλα διαμόρφωσης απόψεων που χρησιμοποιούν λιγότερη γνώση είναι πιο κοντά στην πραγματικότητα σε σχέση με τα πιο απλά μοντέλα που υποθέτουν ότι το άτομο έχει στη διάθεσή του όση πληροφορία ζητήσει. Σε αυτή την εργασία θα μελετήσουμε παραλλαγές των απλών μοντέλων στα οποία έχουμε περιορίσει την ποσότητα της πληροφορίας που είναι διαθέσιμη στα άτομα. Θα προσπαθήσουμε να ανακαλύψουμε πώς συμπεριφέρονται τα νέα μοντέλα αυτά ως προς τη σύγκλιση, την ταχύτητα σύγκλισης και την ομοφωνία και θα μελετήσουμε εάν η συμπεριφορά τους ταυτίζεται ή βρίσκεται κοντά στα μοντέλα στα οποία βασίστηκαν.

Μετά από μια σύντομη εισαγωγή σε κάποιες βασικές θεωρητικές έννοιες που θα χρειαστούν, θα αναφέρουμε σύντομα το μοντέλο του DeGroot [DeGr74] που αποτελεί τη βάση για αρκετά από τα επόμενα μοντέλα. Το μοντέλο αυτό θα μας δώσει σημαντική διαίσθηση για το πώς συμπεριφέρονται οι απόψεις όταν λαμβάνουμε επανειλημμένα έναν σταθμισμένο μέσο όρο των απόψεων του κοινωνικού μας δικτύου. Στη συνέχεια θα αναλύσουμε το μοντέλο των Friedkin-Johnsen [Noah90, Frie99] που δίνει περιθώρια στην κοινωνία να καταλήξει σε διαφωνία καθώς πλέον τα άτομα δεν είναι διατεθειμένα να φύγουν πολύ μακριά από την αρχική τους άποψη. Εκεί θα μελετήσουμε πειραματικά και μια παραλλαγή του μοντέλου αυτού με περιορισμένη γνώση και θα δούμε τι συμβαίνει όταν το άτομο ενημερώνει την άποψή του ακούγοντας μόνο φίλο του που συναντά με πιθανότητα ανάλογη της εμπιστοσύνης μεταξύ τους.

Όπως αναφέραμε στην αρχή, στα πραγματικά σενάρια τα κοινωνικά δίκτυα δε μένουν σταθερά στο χρόνο αλλά μεταβάλλονται λόγω της διάδοσης πληροφοριών και της αλλαγής των απόψεων. Στο δεύτερο κομμάτι της εργασίας θα ασχοληθούμε με μοντέλα που εκφράζουν ακριβώς αυτή τη δυναμική συμπεριφορά των δικτύων. Στο πρώτο από αυτά τα μοντέλα, η εμπιστοσύνη του ατόμου στα υπόλοιπα μέλη του κοινωνικού δικτύου αλλάζει καθώς μεταβάλλονται οι απόψεις. Πιο συγκεκριμένα το άτομο δίνει περισσότερη εμπιστοσύνη σε αυτούς που έχουν άποψη πιο κοντά στη δική του [Bhaw13]. Το επόμενο μοντέλο, των Hegselmann-Krause [Hegs02], πάει ένα βήμα παραπέρα και επιτρέπει στα άτομα να δημιουργούν και να καταστρέφουν κοινωνικές σχέσεις ανάλογα με τον εάν τα άτομα του κύκλου τους έχουν άποψη κοντά στην δική τους. Εδώ θα μελετήσουμε διάφορες παραλλαγές που περιορίζουν την πληροφορία που έχουν τα άτομα στη διάθεσή τους (μοντέλο HK με περιορισμένη γνώση και μοντέλα K-Nearest Neighbors). Τα τελευταία μοντέλα παρουσιάζουν μεγάλο ενδιαφέρον καθώς η θεωρητική ανάλυση που έχει γίνει είναι δύσκολη και περιορισμένη.

Κεφάλαιο 2

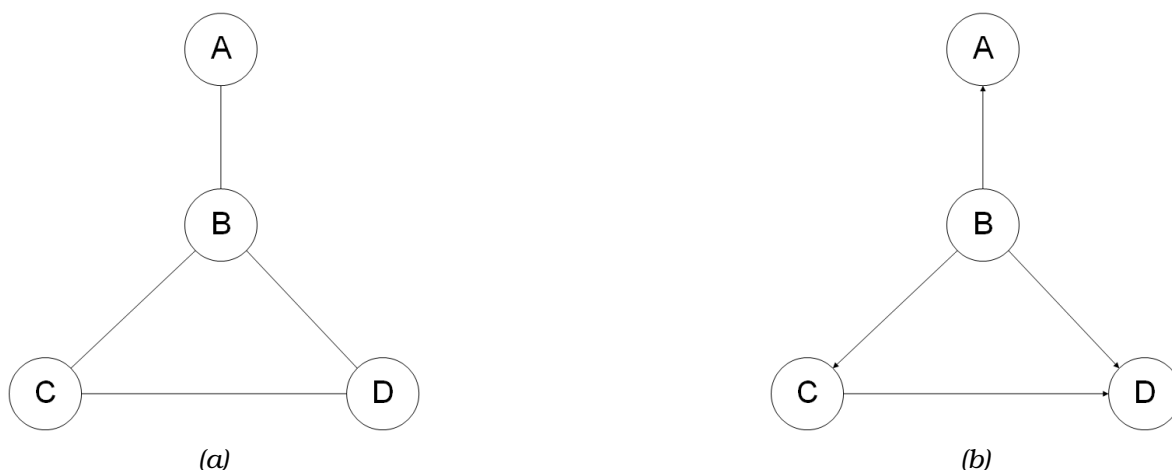
Θεωρητικό Υπόβαθρο

2.1 Γράφοι και δίκτυα

2.1.1 Ορισμοί

Ο γράφος είναι ένας τρόπος για να αναπαραστήσουμε σχέσεις μεταξύ μιας συλλογής αντικειμένων. Ένας γράφος αποτελείται από αντικείμενα που ονομάζονται *κόμβοι*. Μερικοί κόμβοι συνδέονται μεταξύ τους με συνδέσμους που ονομάζονται *ακμές*. Θα λέμε ότι ένας κόμβος είναι *γείτονας* κάποιου άλλου εάν υπάρχει απευθείας ακμή που τους συνδέει. Για να δώσουμε έναν πιο αυστηρό ορισμό, ένας γράφος είναι ένα διατεταγμένο ζεύγος $G = (V, E)$ που αποτελείται από ένα σύνολο κόμβων $V = \{1, \dots, N\}$ και ένα σύνολο ακμών $E = \{(i, j) : i, j \in V\}$ που συνδέουν τους κόμβους μεταξύ τους. Μια ακμή από τον κόμβο i στον κόμβο j συμβολίζεται επίσης και ως ij .

Εάν οι σχέσεις μεταξύ των κόμβων είναι συμμετρικές τότε ο γράφος λέγεται *μη κατευθυνόμενος*. Αντίθετα, εάν δεν υπάρχει συμμετρία, δηλαδή η ύπαρξη ακμής από έναν κόμβο i σε έναν κόμβο j δεν συνεπάγεται την ύπαρξη της ακμής ji , τότε ο γράφος λέγεται *κατευθυνόμενος*.



Σχήμα 2.1: Παράδειγμα μη κατευθυνόμενου και κατευθυνόμενου γράφου αντίστοιχα.

2.1.2 Αναπαράσταση Γράφου

Υπάρχουν πολλοί τρόποι για να αναπαραστήσουμε έναν γράφο. Στην παρούσα εργασία θα χρησιμοποιήσουμε έναν πίνακα $A = [w_{ij}]$ διαστάσεων $N \times N$ που ονομάζεται *πίνακας γειννιάσης*. Εάν υπάρχει ακμή μεταξύ των κόμβων i και j στον γράφο, τότε $w_{ij} = 1$,

αλλιώς $w_{ij} = 0$. Εάν ο γράφος είναι μη κατευθυνόμενος τότε είναι εύκολο να δείξουμε ότι ο πίνακας A είναι ίσος με τον συμμετρικό του, δηλαδή $A^T = A$.

Σε πολλά πραγματικά σενάρια, οι σχέσεις μεταξύ μιας ομάδας αντικειμένων δεν είναι ισότιμες. Για παράδειγμα, αν προσπαθούσαμε να αναπαραστήσουμε το οδικό δίκτυο της Ελλάδας με έναν γράφο θα θέλαμε οι εθνικές οδοί να διαφέρουν με κάποιο τρόπο από του μικρότερους δρόμους. Για να κάνουμε κάτι τέτοιο χρησιμοποιούμε έναν *ζυγισμένο γράφο* στον οποίο κάθε ακμή έχει και ένα βάρος που αντιστοιχεί στο πόσο "ισχυρή" είναι σε σχέση με τις υπόλοιπες ακμές. Στην αναπαράσταση του πίνακα γειτνίασης θεωρούμε ότι η τιμή w_{ij} αναπαριστά το βάρος της ακμής μεταξύ των κόμβων i και j . Όπως και πριν, εάν $w_{ij} = 0$ τότε δεν υπάρχει ακμή που να συνδέει τους δύο κόμβους. Σε κάποιες περιπτώσεις μπορεί ένας κόμβος να δίνει κάποιο βάρος και στον εαυτό του, οπότε τότε θα ισχύει $w_{ii} > 0$.

Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω εργαλεία μπορούμε να απεικονίσουμε ένα κοινωνικό ή άλλο δίκτυο. Οι κόμβοι μπορεί να είναι άτομα, εταιρείες, ΜΜΕ, χώρες κτλ και οι ακμές που τους συνδέουν μπορεί να είναι φιλικές, επαγγελματικές, διπλωματικές σχέσεις. Εάν θέλουμε να δείξουμε την βαρύτητα αυτών των σχέσεων θα χρησιμοποιήσουμε ζυγισμένο γράφο, ενώ αν οι σχέσεις δεν είναι συμμετρικές ο γράφος του δικτύου θα είναι κατευθυνόμενος. Από εδώ και πέρα όταν γράφουμε δίκτυο ή γράφος θα αναφερόμαστε ουσιαστικά στο ίδιο πράγμα.

2.1.3 Μονοπάτια

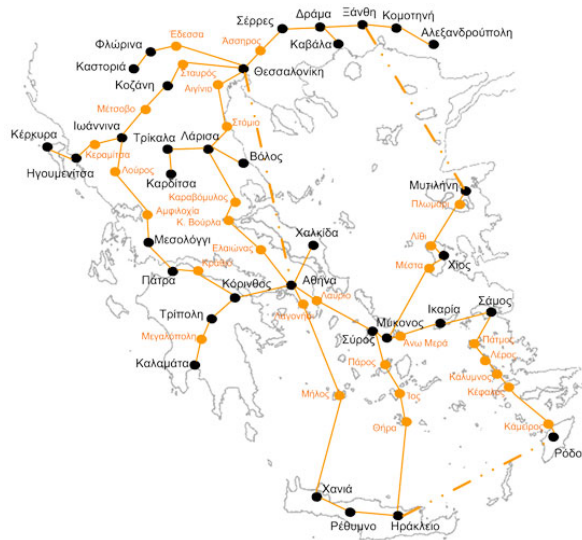
Οι κόμβοι σε ένα δίκτυο επωφελούνται (ή βλάπτονται) από τις *έμμεσες σχέσεις* μεταξύ τους. Για παράδειγμα οι φίλοι ενός ατόμου μεταδίδουν πληροφορίες που έχουν μάθει από τους δικούς τους φίλους και έτσι αυτές διαδίδονται μέσα στο δίκτυο. Ακόμα, παρατηρώντας τη χρήση του διαδικτύου, είναι πιο εύκολο να βρούμε μια ιστοσελίδα αν αυτή προτείνεται από μια ιστοσελίδα που επισκεπτόμαστε συχνά.

Η ιδέα αυτή δίνει το έναυσμα για να εισάγουμε την έννοια του μονοπατιού. Ένα *μονοπάτι* είναι απλά μια ακολουθία κόμβων οι οποίοι συνδέονται διαδοχικά με ακμές. Στον συγκεκριμένο ορισμό επιτρέπεται να επαναλαμβάνονται κάποιοι κόμβοι στην ακολουθία. Εάν σε ένα μονοπάτι δεν επαναλαμβάνονται κόμβοι, τότε θα το ονομάζουμε *απλό μονοπάτι*.

2.1.4 Συνεκτικότητα

Αρκετές φορές θα θέλαμε να γνωρίζουμε σε ποιο σύνολο κόμβων του δικτύου μπορούμε να φτάσουμε με δεδομένο ένα αρχικό σύνολο κόμβων και χρησιμοποιώντας τα υπάρχοντα μονοπάτια του δικτύου. Αυτό το ερώτημα μας ενδιαφέρει ιδιαίτερα όταν μελετάμε την διάδοση ασθενειών, στη μάθηση και στη διάχυση πληροφοριών μέσα στο δίκτυο.

Θα λέμε ότι ένας γράφος είναι *συνεκτικός* εάν οποιοιδήποτε δύο κόμβοι συνδέονται μεταξύ τους με κάποιο μονοπάτι. Εάν ο γράφος δεν είναι συνεκτικός τότε μπορούμε να τον χωρίσουμε σε μικρότερους συνεκτικούς υπογράφους. Ονομάζουμε *συνεκτική συνιστώσα* ενός γράφου ένα υποσύνολο των κόμβων στο οποίο (i) κάθε κόμβος συνδέεται με μονοπάτι με όλους τους υπόλοιπους στο υποσύνολο και (ii) το υποσύνολο δεν ανήκει σε κάποιο μεγαλύτερο σύνολο με την ιδιότητα (i). Σε κατευθυνόμενους γράφους η αντίστοιχη συνιστώσα ονομάζεται *ισχυρά συνεκτική* εάν οι συνδέσεις είναι αμφίδρομες.



Σχήμα 2.2: Το δίκτυο οπτικών ινών του ΕΔΕΤ μπορεί να αναπαρασταθεί με έναν μη κατευθυνόμενο γράφο (Πηγή: Wikipedia).

2.1.5 Συνεκτικές Συνιστώσες

Μεγάλα, πολύπλοκα δίκτυα έχουν αυτό που ονομάζουμε *γιγαντιαία συνιστώσα*, δηλαδή μια συνεκτική συνιστώσα που περιέχει ένα σημαντικό ποσοστό των κόμβων. Συνήθως, όταν υπάρχει μια τέτοια συνιστώσα σε ένα δίκτυο, θα υπάρχει μόνο μια. Για να καταλάβουμε τον λόγο για τον οποίο συμβαίνει αυτό ας φανταστούμε ένα κοινωνικό δίκτυο με δύο γιγάντιες συνιστώσες με εκατομμύρια κόμβους η καθεμία. Αν έστω και ένα άτομο από τη μια συνιστώσα γίνει φίλος (δημιουργήσει ακμή) με ένα άτομο της άλλης, τότε οι δύο συνιστώσες θα ενωθούν σε μια μεγαλύτερη. Όσο αυξάνεται το μέγεθος των συνιστωσών, η πιθανότητα να μη συμβεί μια τέτοια σύνδεση γίνεται πολύ μικρή. Για τον λόγο αυτό σε πραγματικά σενάρια σχεδόν πάντα σχηματίζονται τέτοιες ακμές και έτσι έχουμε μια μοναδική *γιγαντιαία συνιστώσα* [Eas110].

Ένα παράδειγμα γιγαντιαίας συνεκτικής συνιστώσας φαίνεται στο σχήμα 2.3, όπου απεικονίζονται οι ερωτικές σχέσεις των μαθητών ενός αμερικανικού λυκείου σε μια περίοδο 18 μηνών. Δύο κόμβοι που συνδέονται με ακμή διατηρούσαν ερωτική σχέση για κάποια περίοδο μέσα σε αυτό το χρονικό διάστημα. Βλέποντας το σχήμα παρατηρούμε ότι ένα μεγάλο μέρος των ατόμων ανήκει σε μια γιγαντιαία συνιστώσα. Το γεγονός αυτό είναι ενδιαφέρον για τη διάδοση των σεξουαλικά μεταδιδόμενων νοσημάτων που ήταν και το αντικείμενο της συγκεκριμένης μελέτης.

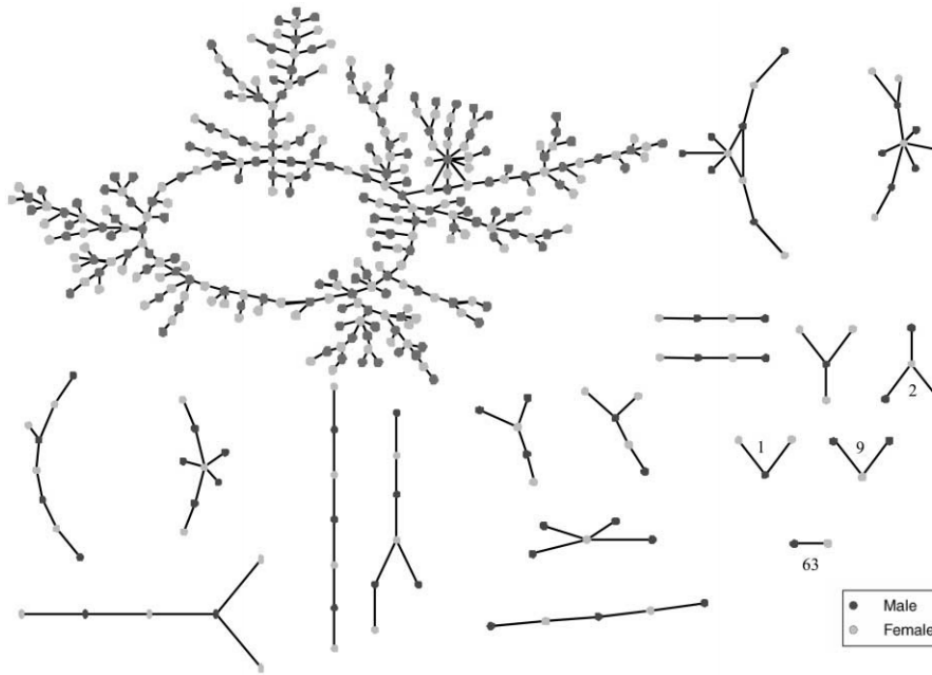
2.1.6 Γειτονιά

Η *γειτονιά* ενός κόμβου είναι το σύνολο των κόμβων που συνδέονται με αυτόν.

$$N(i) = \{j : w_{ij} = 1\} \quad (2.1)$$

Δεδομένου ενός συνόλου κόμβων S , η γειτονιά του S είναι η ένωση των γειτονιών των μελών του συνόλου, δηλαδή

$$N(S) = \bigcup_{i \in S} N(i) = \{j : \exists i \in S, w_{ij} = 1\} \quad (2.2)$$



Σχήμα 2.3: Γράφος που αναπαριστά τις ερωτικές σχέσεις των ατόμων σε ένα αμερικανικό λύκειο [Bear04]. Οι περισσότεροι κόμβοι ανήκουν σε μια γιγαντιαία συνιστώσα. (Πηγή: The University of Chicago Press)

Αν θέλουμε να μελετήσουμε το σύνολο των κόμβων που συνδέονται με μονοπάτια μήκους έως 2 με τον κόμβο i , ορίζουμε την 2-γειτονιά ως εξής

$$N^2(i) = N(i) \cup \left(\bigcup_{j \in N(i)} N(j) \right) \quad (2.3)$$

Με λίγα λόγια η 2-γειτονιά ενός κόμβου περιλαμβάνει τους γείτονές του και τους γείτονες των γειτόνων του. Με παρόμοιο τρόπο ορίζεται και η n -γειτονιά ενός κόμβου.

2.1.7 Βαθμός και πυκνότητα του δικτύου

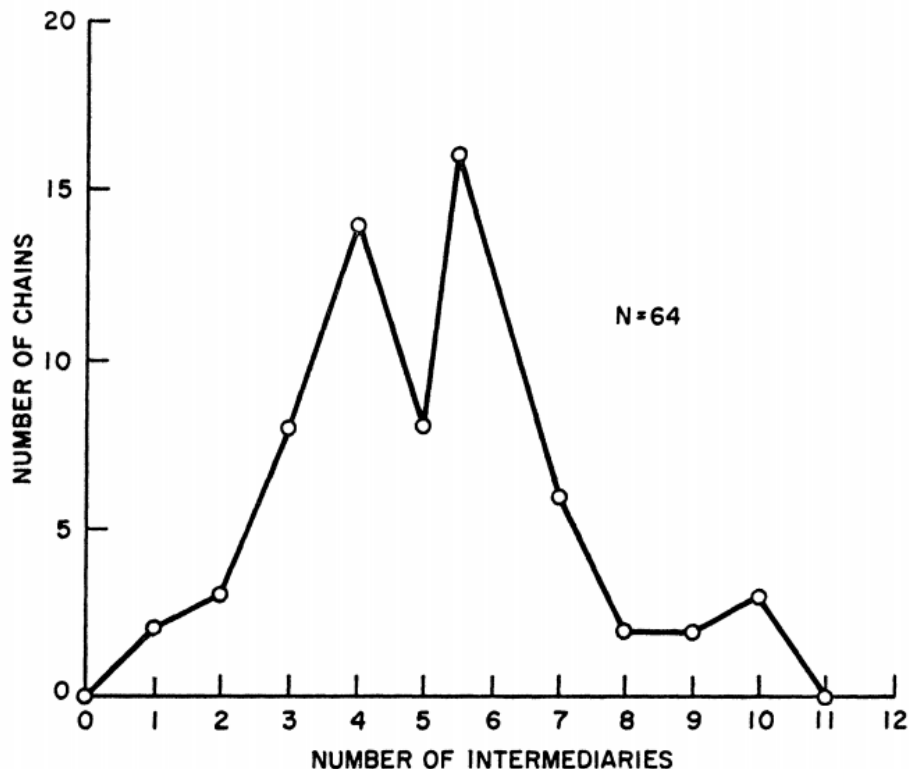
Ο *βαθμός* (*degree*) ενός κόμβου είναι ο αριθμός των ακμών του, δηλαδή το μέγεθος της γειτονιάς του. Συνεπώς, ο βαθμός του κόμβου i συμβολίζεται με $d(i)$ και είναι ίσος με

$$d(i) = \#\{j : w_{ij} = 1\} = \#N(i) \quad (2.4)$$

Η *πυκνότητα* ενός δικτύου n κόμβων είναι δίνει το ποσοστό των ακμών που υπάρχουν στο δίκτυο και είναι ίση με το μέσο degree διαιρεμένο με $n - 1$.

2.1.8 Το φαινόμενο του "Μικρού Κόσμου"

Υπάρχουν σοβαρές ενδείξεις ότι στα κοινωνικά δίκτυα όχι μόνο εμφανίζονται μονοπάτια που συνδέουν κάποιον με οποιονδήποτε άλλο στον κόσμο, αλλά και ότι τα μονοπάτια αυτά είναι εκπληκτικά μικρά. Το φαινόμενο του "μικρού κόσμου" (Small-World) περιγράφει το γεγονός ότι ο κόσμος φαίνεται μικρός αν αναλογιστεί κανείς ότι ένα πολύ



Σχήμα 2.4: Ιστόγραμμα των αποτελεσμάτων του πειράματος του Milgram. Για κάθε μήκος μονοπατιού (οριζόντιος άξονας) φαίνεται ο αριθμός των γραμμών που έφτασαν επιτυχώς στον προορισμό τους ακολουθώντας το (κάθετος άξονας). Συνολικά 64 γράμματα πέτυχαν να φτάσουν στον στόχο. (Πηγή: American Sociological Association)

σύντομο μονοπάτι που ακολουθεί φίλους και φίλους φίλων μπορεί να μας φέρει σε επικοινωνία με οποιονδήποτε άλλο άτομο στην υδρόγειο.

Το πρώτο - και πιο γνωστό - πείραμα πάνω σε αυτό το φαινόμενο πραγματοποιήθηκε από τον Stanley Milgram και τους συναδέλφους του την δεκαετία του 1960 [Tran69]. Η ερευνητική ομάδα παρέδωσε ένα γράμμα σε 296 τυχαία επιλεγμένα άτομα και τους είπε να το προωθήσουν σε έναν "στόχο" ο οποίος ήταν ένας χρηματιστής στη Βοστώνη. Τα άτομα είχαν κάποιες πληροφορίες για τον στόχο συμπεριλαμβανομένου του ονόματος και της διεύθυνσής του και μπορούσαν να προωθήσουν το γράμμα μόνο δίνοντάς το σε κάποιον κοντινό γνωστό τους. Όταν έδιναν το γράμμα σε κάποιον άλλο του παρέχον τις ίδιες οδηγίες για να το προωθήσει και αυτός με τη σειρά του.

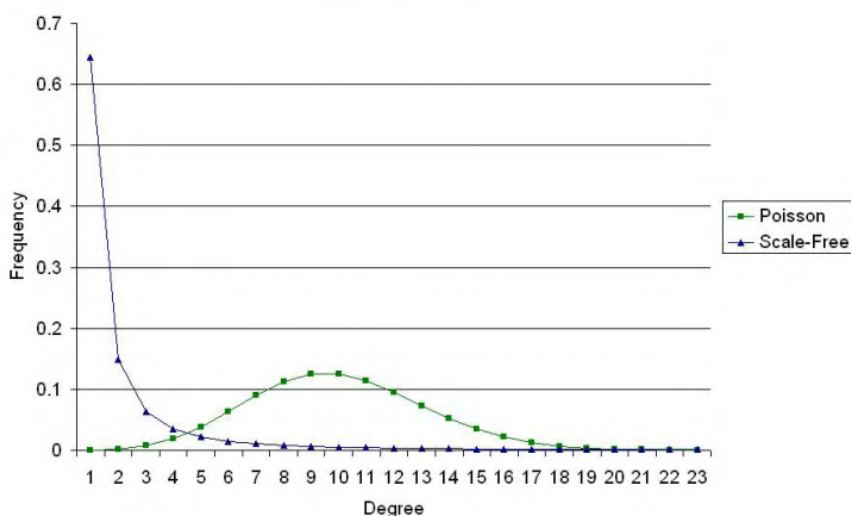
Το σχήμα 2.4 δείχνει την κατανομή του αριθμού των βημάτων που χρειάστηκαν για να φτάσει τελικά το γράμμα στον προορισμό του. Η μέση τιμή ήταν μόλις έξι βήματα και γι' αυτό το συγκεκριμένο φαινόμενο ονομάζεται και φαινόμενο των έξι βαθμών διαχωρισμού (six degrees of separation). Το γεγονός ότι τόσα πολλά γράμματα έφτασαν τελικά στον προορισμό και μάλιστα τόσο σύντομα ήταν και παραμένει ακόμα εκπληκτικό. Παρά τα όποια προβλήματα παρουσίασε το πείραμα η ουσία είναι ότι τα κοινωνικά δίκτυα τείνουν να έχουν πολύ σύντομα μονοπάτια μεταξύ φαινομενικά τυχαίων μελών τους. Αυτό έχει εξαιρετική σημασία για τον τρόπο που μεταδίδονται οι ασθένειες, η πληροφορία αλλά και άλλα φαινόμενα μέσα στο δίκτυο.

Γιατί το μονοπάτι μεταξύ δύο οποιονδήποτε κόμβων του κοινωνικού δικτύου (ή αλλιώς η *διάμετρος* του δικτύου) είναι τόσο μικρό; Μελέτες έχουν δείξει ότι μετρώντας τον αριθμό των γνωστών (ακόμα και αν αυτοί είναι σχετικά "μακρινοί") ενός τυπικού ενή-

λικα στον ανεπτυγμένο κόσμο, αυτοί μπορεί να φτάνουν τις μερικές χιλιάδες [dSol79]. Αν πάρουμε μια συντηρητική εκτίμηση και υποθέσουμε ότι κάθε άτομο έχει κατά μέσο όρο 100 συγγενείς, φίλους και γνωστούς με τους οποίους έχει σχετικά συχνές επαφές τότε παίρνοντας κάποιες παραδοχές (αγνοούμε το κλείσιμο των τριάδων και φανταζόμαστε το κοινωνικό δίκτυο σαν δέντρο), η 2-γειτονιά του (φίλοι των φίλων του) θα είναι $100^2 = 10.000$ και η 3-γειτονιά του θα είναι $10.000^2 = 100.000.000$. Παρόλο που οι παραδοχές που κάναμε μας οδηγούν σε υπερεκτιμήσεις το γενικό συμπέρασμά ισχύει. Ακολουθώντας τις γνωριμίες μας στο κοινωνικό δίκτυο μπορούμε με λίγα βήματα να φτάσουμε σε οποιονδήποτε άνθρωπο σε ολόκληρο τον κόσμο.

2.1.9 Κατανομή βαθμών (Degree Distribution)

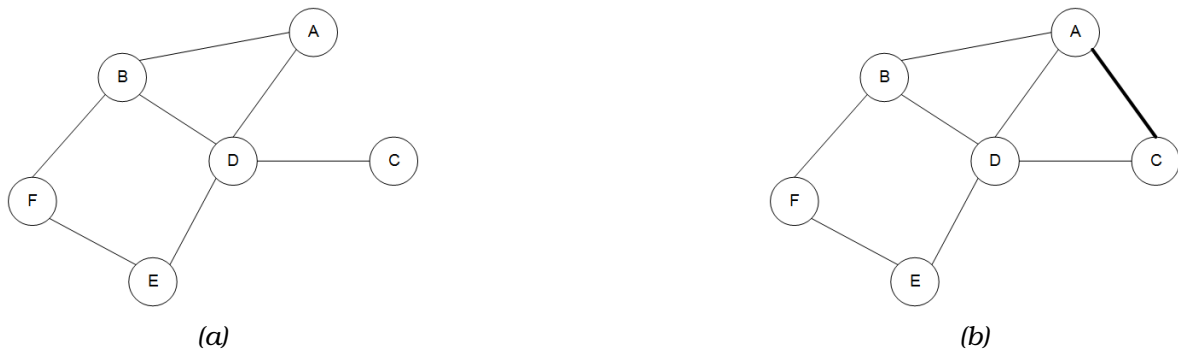
Ένα από τα κύρια χαρακτηριστικά ενός δικτύου είναι η *κατανομή των βαθμών* των κόμβων του, δηλαδή οι συχνότητες των κόμβων που έχουν κάποιο συγκεκριμένο βαθμό (degree). Θα ορίζουμε $P(d)$ ως το κλάσμα των κόμβων του δικτύου που έχουν βαθμό ίσο με d στην κατανομή βαθμών P . Για παράδειγμα, εάν έχουμε ένα κανονικό (regular) δίκτυο όπου όλοι οι κόμβοι έχουν τον ίδιο βαθμό k , τότε θα ισχύει $P(k) = 1$ και $P(d) = 0$ για όλα τα $d \neq k$. Στο σχήμα 2.5 βλέπουμε την κατανομή των βαθμών για δίκτυα Poisson και Scale-Free τα οποία θα αναλύσουμε στη συνέχεια. Παρατηρούμε πως στο δίκτυο Poisson οι κόμβοι έχουν αρκετά παρόμοιους αριθμούς φίλων. Αντίθετα, στο Scale-Free δίκτυο έχουμε πολλούς κόμβους με μικρούς βαθμούς και ελάχιστους κόμβους με μεγάλο αριθμό γειτόνων.



Σχήμα 2.5: Κατανομή του βαθμού των κόμβων για δίκτυα Poisson και Scale-Free. (Πηγή: [Jack10])

2.1.10 Κλείσιμο των τριάδων

Παρ' όλο που πολλές φορές θα εξετάζουμε τα κοινωνικά δίκτυα ως στατικές δομές, δεν πρέπει να μας διαφεύγει το γεγονός ότι οι σχέσεις μέσα σε αυτά διαμορφώνονται δυναμικά στον χρόνο. Υπάρχουν διάφοροι μηχανισμοί που προκαλούν τη δημιουργία και την καταστροφή ακμών σε ένα κοινωνικό δίκτυο. Ένας από τους βασικούς είναι ο ακόλουθος:

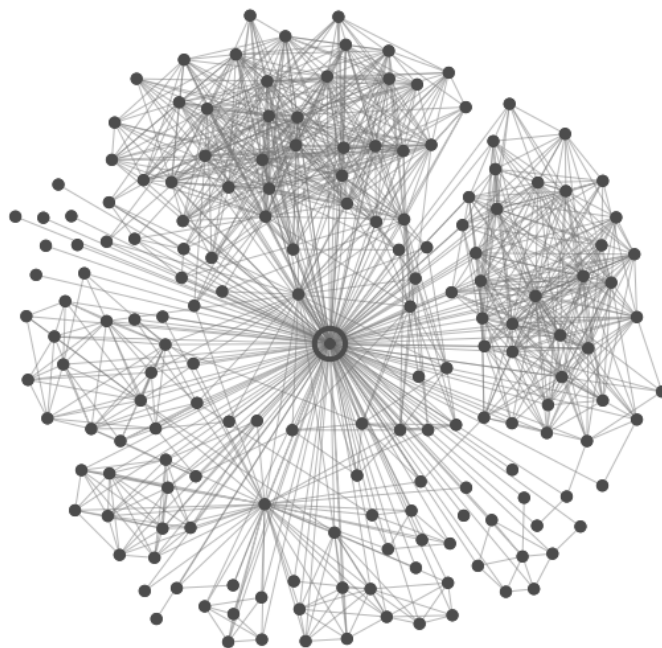


Σχήμα 2.6: Ο σχηματισμός της ακμής A-C οφείλεται στο κλείσιμο των τριάδων, μιας και οι δύο κόμβοι έχουν αρχικά κοινό φίλο τον D.

Εάν δύο άνθρωποι σε ένα κοινωνικό δίκτυο έχουν έναν φίλο από κοινού, τότε υπάρχει μεγαλύτερη πιθανότητα να γίνουν και μεταξύ τους φίλοι σε κάποια στιγμή στο μέλλον [Rap053].

Θα ονομάζουμε την αρχή αυτή *κλείσιμο των τριάδων (triadic closure)*. Το παράδειγμα του σχήματος 2.6 δείχνει τη λειτουργία του μηχανισμού. Αρχικά οι κόμβοι A και C δεν είναι φίλοι μεταξύ τους, όμως έχουν κοινό φίλο τον κόμβο D. Τελικά σχηματίζεται η ακμή A-C με αποτέλεσμα να κλείσει το τρίγωνο ACD και γι' αυτό αναφερόμαστε στο φαινόμενο αυτό ως κλείσιμο των τριάδων.

Ένας τρόπος για να μετρήσουμε πόσο συχνά εμφανίζονται τα τρίγωνα αυτά σε έναν γράφο είναι ο *συντελεστής ομαδοποίησης (clustering coefficient)* [Newm03, Watt98]. Ο συντελεστής αυτός ορίζεται για κάθε κόμβο i του δικτύου και εκφράζει την πιθανότητα δύο τυχαίοι φίλοι του i να είναι φίλοι και μεταξύ τους. Δηλαδή ο συντελεστής ορίζεται ως το κλάσμα των φίλων του i που είναι φίλοι και μεταξύ τους προς το συνολικό αριθμό των φίλων του i .



Σχήμα 2.7: Δίκτυο φίλων ενός χρήστη του Facebook. Το κλείσιμο των τριάδων παίζει σημαντικό ρόλο στο σχηματισμό του δικτύου. (Πηγή: [Came])

Γιατί όμως εμφανίζονται αυτές οι τριάδες στα κοινωνικά δίκτυα; Η δημιουργία τους είναι αρκετά φυσική και ο καθένας μπορεί να βρει παραδείγματά στην καθημερινή του ζωή. Ένας λόγος είναι ότι όταν έχουν έναν κοινό φίλο, δύο άνθρωποι έχουν περισσότερες ευκαιρίες να συναντηθούν και να γίνουν φίλοι και μεταξύ τους. Επιπλέον, μπορούν να εμπιστευτούν πιο εύκολα ο ένας τον άλλο, λόγω της ύπαρξης της κοινής γνωριμίας. Τέλος, ο κοινός τους φίλος έχει κίνητρο να προσπαθήσει να τους κάνει φίλους γιατί σε διαφορετική περίπτωση θα είναι κουραστικό γι' αυτόν να κάνει παρέα με δύο άτομα τα οποία δεν τα πηγαίνουν καλά.

2.2 Τυχαία Δίκτυα

Για να μπορέσουμε να μελετήσουμε τα φαινόμενα που παρουσιάζονται κατά τη διαδικασία του σχηματισμού απόψεων και πεποιθήσεων θα θέλαμε να έχουμε έναν τρόπο να δημιουργούμε εύκολα δίκτυα με δομή που να μοιάζει με αυτή των πραγματικών κοινωνικών δικτύων και η οποία να μπορεί εύκολα να μεταβληθεί για να καλύψει τις ανάγκες μας. Τέτοια δυνατότητα μας δίνουν τα *τυχαία δίκτυα* (*random networks*). Τα μοντέλα τέτοιων τυχαίων δικτύων έχουν τις ρίζες τους σε μελέτες πάνω στους τυχαίους γράφους από τους Solomonoff και Rappoport [Solo51], Rappoport [Rapo57] και τους Erdős και Rényi [Reny59, Erdo60, Erdo61].

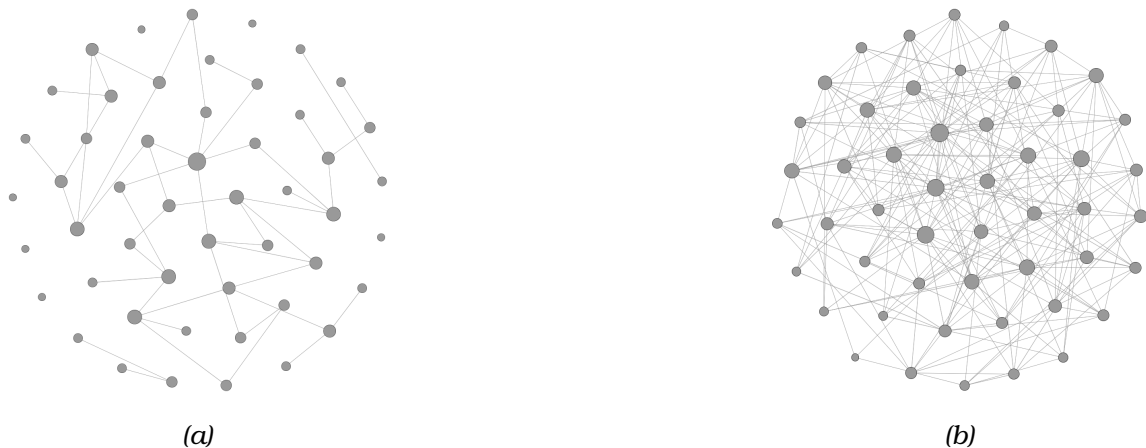
Θα ξεκινήσουμε με το απλούστερο τυχαίο δίκτυο, το δίκτυο Poisson, Erdős-Rényi ή αλλιώς $G(N,p)$ δίκτυο. Τα δίκτυα Erdős-Rényi είναι ο κύριος αντιπρόσωπος των λεγόμενων *στατικών* τυχαίων δικτύων. Ο όρος στατικά αναφέρεται στο ότι σε αυτή την κατηγορία μοντέλων θεωρούμε ότι οι κόμβοι του δικτύου προϋπάρχουν και απλά δημιουργούμε ακμές μεταξύ τους με βάση κάποιον κανόνα πιθανοτήτων.

Στην αντίπερα όχθη βρίσκονται τα δίκτυα που αναπτύσσονται στη διάρκεια του χρόνου. Στα δίκτυα αυτά οι κόμβοι δεν προϋπάρχουν αλλά δημιουργούνται σταδιακά και δημιουργούν ακμές με τους κόμβους που έχουν ήδη δημιουργηθεί. Στην παρούσα εργασία θα ασχοληθούμε με ένα τέτοιο "αναπτυσσόμενο" δίκτυο, το Scale-Free που βασίζεται στη λογική του "οι πλούσιοι γίνονται πλουσιότεροι" (Rich-Get-Richer).

Στα τυχαία δίκτυα οι ακμές δημιουργούνται ανεξάρτητα από τις υπόλοιπες ιδιότητες των κόμβων, με βάση συγκεκριμένους κανόνες πιθανοτήτων. Κάποιοι από αυτούς τους κανόνες μπορεί να έχουν οριστεί σε μια προσπάθεια να προσεγγίσουν πραγματικά κοινωνικά φαινόμενα (όπως για παράδειγμα το preferential attachment), αλλά αυτό δεν ισχύει πάντα. Γι' αυτό το λόγο από τα τυχαία μοντέλα δικτύων λείπουν συνήθως τα κοινωνικοοικονομικά κίνητρα και οι πιέσεις που ασκούν επιρροή στο σχηματισμό των πραγματικών κοινωνικών δικτύων. Παρόλα αυτά τα μοντέλα εξακολουθούν να είναι αρκετά χρήσιμα γιατί μας επιτρέπουν να δημιουργήσουμε γρήγορα πολλά δίκτυα με διάφορες παραμέτρους και συγκεκριμένα επιθυμητά χαρακτηριστικά (πχ μέσο degree). Επιπλέον, διαφορετικά μοντέλα τυχαίων δικτύων πλησιάζουν με διαφορετικό τρόπο τις ιδιότητες των πραγματικών κοινωνικών δικτύων και έτσι μπορούμε να φτιάξουμε υβριδικά μοντέλα τα οποία να περιέχουν πλήθος από τα χαρακτηριστικά που επιθυμούμε.

2.2.1 Δίκτυα Erdős-Rényi

Εισαγωγή Τα δίκτυα Erdős-Rényi ή αλλιώς δίκτυα $G(N,p)$ αποτελούν ένα από τα πιο μελετημένα μοντέλα στην οικογένεια των στατικών δικτύων. Ένα τέτοιο δίκτυο ορίζεται με βάση δύο παραμέτρους. Τον αριθμό των κόμβων N και μια τιμή πιθανότητας p , για την οποία ισχύει $0 \leq p \leq 1$. Κατά τη κατασκευή του δικτύου δημιουργούμε N κόμβους



Σχήμα 2.8: Δίκτυα Erdős-Rényi 50 κόμβων με πιθανότητες $p=0.02$ και $p=0.1$ αντίστοιχα. Τα μεγέθη των κόμβων είναι ανάλογα του βαθμού τους.

χωρίς καμία ακμή. Κάθε ακμή μεταξύ δύο οποιονδήποτε δύο κόμβων δημιουργείται ανεξάρτητα με πιθανότητα p . Επειδή ακριβώς τα δίκτυα εξαρτώνται από αυτές τις δύο παραμέτρους ονομάζονται και δίκτυα $G(N,p)$. Σε ένα δίκτυο N κόμβων μπορούμε να έχουμε μέχρι $N(N-1)/2$ ακμές, συνεπώς σε ένα δίκτυο Erdős-Rényi με πιθανότητα p περιμένουμε να έχουμε κατά μέσο όρο $pN(N-1)/2$ ακμές. Μπορεί φυσικά να έχουμε περισσότερες ή λιγότερες από αυτές, αλλά ο νόμος των μεγάλων αριθμών μας λέει ότι δεν θα αποκλίνουμε πολύ από τον αριθμό που υπολογίσαμε.

Ένα μεγάλο μέρος της ανάλυσης των ιδιοτήτων αυτών των δικτύων σχετίζεται με το τι συμβαίνει όταν ο αριθμός των κόμβων N γίνει αρκετά μεγάλος. Θεωρητικά, αν στο μοντέλο Erdős-Rényi κρατήσουμε σταθερό τον αριθμό των κόμβων και την παράμετρο p , τότε οποιοδήποτε δίκτυο αυτού του μεγέθους είναι δυνατόν να δημιουργηθεί με μη μηδενική πιθανότητα. Για να μπορούμε να έχουμε κάποια χρήσιμα συμπεράσματα θα θέλαμε να μάθουμε ποια είδη δικτύων είναι πολύ πιο πιθανό να εμφανιστούν με βάση τις τιμές των παραμέτρων. Για το λόγο αυτό μας ενδιαφέρει η πιθανότητα ένα δίκτυο $G(N,p)$ να έχει μια συγκεκριμένη ιδιότητα καθώς ο αριθμός των κόμβων N τείνει στο άπειρο [Jack10].

Ιδιότητες Για μεγάλες τιμές του N , τα δίκτυα $G(N,p)$ έχουν μια απότομη μεταβολή των ιδιοτήτων τους για συγκεκριμένες τιμές της παραμέτρους p . Για καθεμία από αυτές τις ιδιότητες, η πιθανότητα εμφάνισής της είναι αρχικά μηδενική και καθώς αυξάνουμε την τιμή του p μεταβάλλεται πολύ απότομα προς τη μονάδα, εμφανίζοντας μια συμπεριφορά κατώφλιού. Έτσι λοιπόν, καθώς $n \rightarrow \infty$ έχουμε τα ακόλουθα κατώφλια σε ένα δίκτυο Erdős-Rényi σχετικά με την παράμετρο p :

- Στο κατώφλι $\frac{1}{n^2}$ εμφανίζονται οι πρώτες ακμές. Έτσι περιμένουμε ότι δίκτυα $G(N,p)$ με $p \leq \frac{1}{n^2}$ δεν θα έχουν καθόλου ακμές ενώ δίκτυα με μεγαλύτερες τιμές του p θα έχουν τουλάχιστον μια ακμή
- Στο κατώφλι $\frac{1}{n^{3/2}}$ εμφανίζεται η πρώτη συνιστώσα του δικτύου που έχει τουλάχιστον 3 κόμβους.
- Στο κατώφλι $\frac{1}{n}$ εμφανίζονται κύκλοι στο δίκτυο καθώς και μια γιγαντιαία συνιστώσα.
- Η γιγαντιαία συνιστώσα μεγαλώνει σταδιακά και τελικά στο κατώφλι $\frac{\log(N)}{N}$ το δίκτυο γίνεται συνεκτικό.

Στο παράδειγμα του σχήματος 2.8 βλέπουμε δύο δίκτυα $G(N,p)$ με διαφορετικές πιθανότητες. Στο πρώτο βρισκόμαστε κάτω από το κατώφλι του $\log(N)/N$ και έτσι ο γράφος του δικτύου δεν είναι συνεκτικός, αλλά έχει σχηματιστεί μια γιγαντιαία συνιστώσα που περιλαμβάνει την πλειοψηφία των κόμβων. Αντίθετα στη δεύτερη εικόνα έχουμε ξεπεράσει το κατώφλι και έχουμε ένα συνεκτικό γράφο. Χαρακτηριστικό των συγκεκριμένων δικτύων είναι το γεγονός ότι όλοι οι κόμβοι έχουν παρόμοιο βαθμό, πράγμα που διαπιστώνουμε από το γεγονός ότι τα μεγέθη τους (που έχουν αντιστοιχιστεί στο degree τους) είναι σχεδόν ίδια.

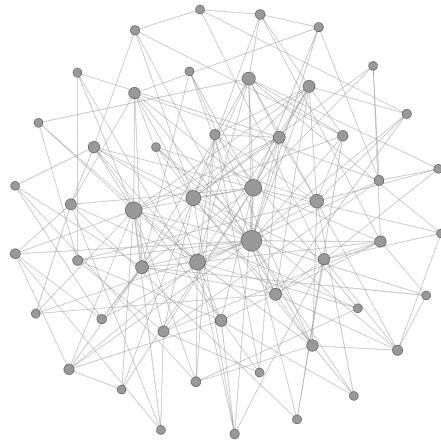
Στις προσομοιώσεις μας πάνω στη διαμόρφωση απόψεων θα θέλουμε σχεδόν πάντα να δουλεύουμε με συνεκτικά δίκτυα, καθώς αν έχουμε περισσότερες από μια συνιστώσες θα μπορούσαμε να τρέξουμε την ανάλυση σε καθεμία από αυτές ξεχωριστά. Επειδή δεν θα έχουμε πάντα δίκτυα με αρκετά μεγάλα N ώστε να ισχύει το τελευταίο κατώφλι με μεγάλη πιθανότητα και επειδή επιπλέον κάποιες φορές θα θέλουμε δίκτυα με μικρό μέσο βαθμό, δημιουργούμε δίκτυα Erdős-Rényi αλλά με μια μικρή παραλλαγή. Πριν ξεκινήσουμε την προσθήκη ακμών με τυχαίο τρόπο, δημιουργούμε ένα (τυχαίο) συνδετικό δέντρο πάνω στους κόμβους μας ώστε να βεβαιωθούμε για τη συνεκτικότητα. Από εκεί και πέρα μπορούμε να δημιουργούμε δίκτυα $G(N,p)$ ξεκινώντας από μηδενική πιθανότητα p χωρίς να μας απασχολούν ιδιαίτερα τα κατώφλια.

2.2.2 Δίκτυα Scale-Free

Ο χρόνος δημιουργίας ενός κόμβου παράγει από μόνος του μια ετερογένεια σε ένα δίκτυο. Για παράδειγμα ένα άτομο που ξεκινά να εργάζεται σε μια νέα εταιρεία, δημιουργεί την πλειοψηφία των δεσμών του το πρώτο διάστημα μετά την έναρξη της θέσης εργασίας. Από εκεί και πέρα μπορεί να δημιουργήσει ή να καταστρέψει δεσμούς, αλλά ένα σημαντικό τμήμα των "ακμών" του προς άλλα άτομα δημιουργείται αρχικά, κατά την εμφάνισή του στο νέο περιβάλλον. Τα λεγόμενα *αναπτυσσόμενα δίκτυα (growing networks)* προσπαθούν να πλησιάσουν αυτό ακριβώς το φαινόμενο με τη δημιουργία των κόμβων σταδιακά στο χρόνο [Jack10].

Όταν "γεννιέται" ένας κόμβος, μπορούμε να σκεφτούμε διάφορους τρόπους για να τον συνδέσουμε με τους ήδη υπάρχοντες. Αρχικά θα μπορούσε ο νέος κόμβος να διαλέγει τελείως τυχαία άλλους κόμβους για να συνδεθεί. Με τον τρόπο αυτό θα είχαμε απλά μια παραλλαγή του δικτύου Erdős-Rényi. Εναλλακτικά, κάθε νέος κόμβος θα μπορούσε να διαλέγει άλλους κόμβους με πιθανότητα ανάλογη του βαθμού (degree) τους. Η διαδικασία αυτή που ονομάζεται *preferential attachment* προτάθηκε από τους Barabási και Albert [Albe02, Bara99] και οδηγεί τους κόμβους που δημιουργήθηκαν πρώτοι και έχουν μεγαλύτερο βαθμό να μεγαλώσουν ακόμα περισσότερο τον βαθμό τους σε σχέση με τους νεότερους κόμβους. Εξαιτίας αυτού λέμε ότι η διαδικασία κάνει τους πλούσιους να γίνουν ακόμα πλουσιότεροι (rich-get-richer) και παράγει μεγάλους "κεντρικούς" κόμβους (*hubs*) οι οποίοι προκαλούν την εμφάνιση φαινομένων Small-World που παρατηρούνται και στα κοινωνικά δίκτυα. Επιπλέον, ορισμένα υβριδικά μοντέλα τέτοιων δικτύων παρουσιάζουν υψηλό συντελεστή ομαδοποίησης που τα κάνει να μοιάζουν ακόμα περισσότερο με δίκτυα που συναντούμε στην πραγματική ζωή.

Αναλυτικά, η κατασκευή ενός τέτοιου δικτύου ξεκινά με ένα αρχικό συνεκτικό γράφο που αποτελείται από $m_0 < N$ κόμβους. Στη συνέχεια προσθέτουμε ακολουθιακά $N - m_0$ κόμβους με τον εξής τρόπο. Ο κάθε νέος κόμβος θα έχει ακριβώς $m \leq m_0$ ακμές. Κάθε νέα ακμή δημιουργείται προς κάποιον από τους ήδη υπάρχοντες κόμβους με πιθανότητα ανάλογη με το βαθμό του. Πιο αυστηρά, τη χρονική στιγμή t το δίκτυο θα έχει ακριβώς t κόμβους και η πιθανότητα να δημιουργήσει ο καινούργιος κόμβος μια ακμή με έναν ήδη κάποιον υπάρχοντα κόμβο i θα είναι



Σχήμα 2.9: Δίκτυο Scale-Free με 50 κόμβους. Τα μεγέθη των κόμβων είναι ανάλογα του βαθμού τους.

$$m \frac{d_i(t)}{\sum_{j=1}^t d_j(t)} \quad (2.5)$$

Στο σχήμα 2.9 παρατηρούμε ένα δίκτυο Scale-Free που περιλαμβάνει 50 κόμβους. Η μεγαλύτερη και πιο χαρακτηριστική διαφορά από τα αντίστοιχα δίκτυα Erdős-Rényi είναι το ότι τώρα έχουμε σοβαρή απόκλιση στους βαθμούς των κόμβων. Υπάρχουν λίγοι κεντρικοί κόμβοι (*hubs*) με μεγάλο degree και πολύ περισσότεροι περιφερειακοί που έχουν μικρό degree συγκριτικά με τους πρώτους.

2.3 Η δυναμική συμπεριφορά των απόψεων

Αναπαριστούμε τα άτομα με κόμβους σε έναν γράφο. Οι ακμές αντιπροσωπεύουν φιλίες ή άλλες κοινωνικές σχέσεις που υπάρχουν μεταξύ των κόμβων. Σε κάθε κόμβο αντιστοιχεί ένας πραγματικός αριθμός που αποτελεί τη δημόσια άποψή του, μεταβαλλόμενη στο χρόνο. Ο αριθμός αυτός μπορεί να αντιπροσωπεύει την συμφωνία του ατόμου με ένα πολιτικό ακόμα, την πιθανότητα να συμμετάσχει σε μια δραστηριότητα, την επιθυμία του να αγοράσει ένα προϊόν, κ.λπ.

Όταν κάποιος διαμορφώνει τη γνώμη του στον πραγματικό κόσμο, φαίνεται να λαμβάνει υπόψη τις ποικίλες απόψεις του κύκλου του σε σε διαφορετικό βαθμό την καθεμία [Fren56, Frie86, Turn85, Turn87]. Παρόμοια οι κόμβοι δεν απορρίπτουν πλήρως ούτε υιοθετούν απόλυτα τις απόψεις των υπολοίπων. Αντίθετα, δίνουν σε καθεμία από αυτές ένα βάρος και παίρνουν τον σταθμισμένο μέσο όρο των απόψεων αυτών (συμπεριλαμβανομένης και της δικής τους). Τα μοντέλα εξελίσσονται σε διακριτούς γύρους κατά τους οποίους μπορεί όλοι οι κόμβοι να ενημερώνουν μαζί τις απόψεις τους (παράλληλη ενημέρωση) ή μόνο ένας κάθε φορά (ακολουθιακή ενημέρωση). Οι γύροι αυτοί μπορεί να μην έχουν ένα προς ένα αντιστοιχία με κάποια μονάδα χρόνου [Fren56]. Θα λέμε ότι ένας κόμβος ασκεί *άμεση επιρροή* (*direct influence*) σε κάποιον άλλο όταν η αλλαγή γνώμης που του προκαλεί οφείλεται σε άμεση επικοινωνία μεταξύ τους. Αντίθετα, η *έμμεση επιρροή* οφείλεται σε έμμεση επικοινωνία δύο κόμβων μέσω κάποιου τρίτου. Η άμεση επιρροή ασκείται στη διάρκεια ενός γύρου ενώ η έμμεση χρειάζεται δύο ή περισσότερους γύρους για να εμφανιστεί.

Η κυριότερη διαφοροποίηση μεταξύ των διάφορων μοντέλων που θα μελετήσουμε αφορά τα βάρη που δίνει ο κάθε κόμβος στους υπόλοιπους. Στην απλούστερη περίπτωση τα βάρη του δικτύου παραμένουν σταθερά στο χρόνο και συνεπώς η δομή του υποκείμενου δικτύου δεν μεταβάλλεται. Κάτι τέτοιο συμβαίνει στα μοντέλα *DeGroot* [DeGr74] και *Friedkin-Johnsen* [Noah90, Frie99] με τις παραλλαγές τους. Πιο σύνθετα μοντέλα όπως το *Δίκτυο Μεταβλητών Βαρών (Asymmetric Coevolutionary Model)* [Bhaw13] επιτρέπουν την μεταβολή των βαρών A καθώς μεταβάλλεται ο χρόνος και οι απόψεις. Άλλα μοντέλα επιτρέπουν τη διαγραφή και την προσθήκη νέων ακμών (μοντέλο των *Hegselmann-Krause* [Hegs02] και το μοντέλο *K-Nearest Neighbors*).

Ας διατυπώσουμε τη διαδικασία με πιο αυστηρούς όρους. Έστω N ο αριθμός των κόμβων που μελετάμε. Η άποψη του κάθε κόμβου είναι ένας συνεχής αριθμός, κατά σύμβαση στο διάστημα $[0, 1]$. Καθώς το μοντέλο εξελίσσεται, θα μετράμε το χρόνο σε διακριτούς γύρους $T = \{1, 2, \dots\}$. Έχουμε δηλαδή δυναμική συνεχών απόψεων, διακριτού χρόνου.

Θα συμβολίζουμε με $z_i(t)$ την τιμή της άποψης του κόμβου i με $1 \leq i \leq N$ κατά τον γύρο t . Οι απόψεις του δικτύου τη χρονική στιγμή t αναπαριστώνται από το $1 \times N$ διάνυσμα απόψεων:

$$z(t) = (z_1(t), \dots, z_N(t))^T \quad (2.6)$$

Σε αρκετά μοντέλα θα δίνουμε σε κάθε κόμβο και μια εγγενή πεποίθηση s η οποία θα παραμένει σταθερή στο χρόνο. Συνήθως θα ισχύει:

$$s = z(0) \quad (2.7)$$

Θα συμβολίζουμε με $w_{ij} \geq 0$ το βάρος που δίνει ο κόμβος i στην άποψη του κόμβου j . Κατά συνέπεια, ο γενικός κανόνας ενημέρωσης των απόψεων με σταθμισμένο μέσο όρο θα είναι:

$$z_i(t+1) = w_{i1}z_1(t) + \dots + w_{iN}z_N(t) \quad (2.8)$$

Δηλαδή η άποψη του κόμβου i την χρονική στιγμή $t+1$ θα είναι ο σταθμισμένος μέσος όρος των απόψεων των υπόλοιπων κόμβων (και του εαυτού του) την χρονική στιγμή t . Η διαδικασία αυτή μπορεί να γραφτεί σε μορφή πολλαπλασιασμού πινάκων ως εξής:

$$z(t+1) = Az(t) \quad (2.9)$$

Όπου ο A είναι ο πίνακας βαρών του δικτύου, δηλαδή:

$$A = [w_{ij}] \quad (2.10)$$

Όπως αναφέραμε και προηγουμένως, τα βάρη μπορούν να αλλάζουν με το χρόνο και τις απόψεις, δηλαδή $w_{ij} = w_{ij}(t, z(t))$ και έτσι η εξίσωση (2.8) παίρνει την πιο γενική μορφή:

$$z(t+1) = A(t, z(t))z(t) \quad (2.11)$$

Θα λέμε ότι η διαδικασία ενημέρωσης των απόψεων *συγκλίνει* ή *φτάνει σε ισορροπία* εάν

$$\forall \epsilon > 0, \exists k > 0 : |z(k) - z(k+1)| < \epsilon \quad (2.12)$$

Θα λέμε ότι ένα μοντέλο καταλήγει σε *ομοφωνία* με τιμή c εάν στην ισορροπία

$$z_i(\infty) = c, \text{ για όλα τα } i = 1, \dots, N \quad (2.13)$$

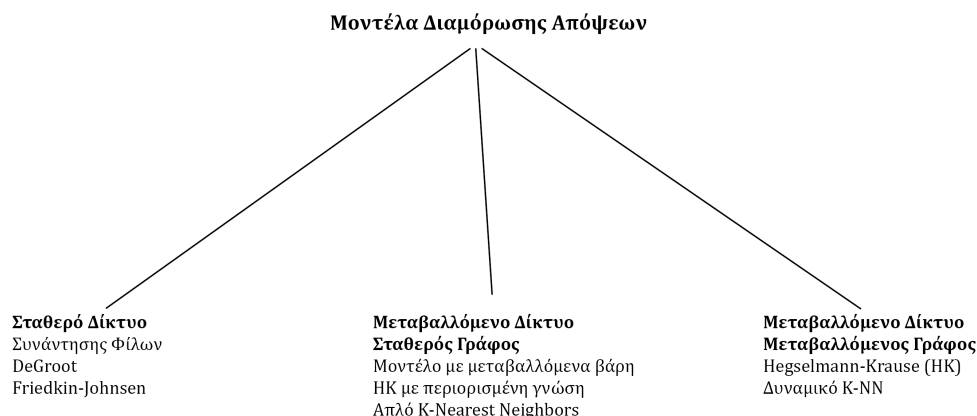
Τώρα μπορούμε να διατυπώσουμε πιο αυστηρά το πρόβλημα που μελετάμε: Δεδομένου ενός διανύσματος αρχικών απόψεων $z(0)$ (και πιθανώς ενός διανύσματος εγγενών πεποιθήσεων s), ενός πίνακα βαρών A και ενός κανόνα ενημέρωσης του A :

- Θα συγκλίνει η διαδικασία ενημέρωσης των απόψεων σε ισορροπία;
- Αν συγκλίνει, από ποιες παραμέτρους εξαρτάται η ταχύτητα σύγκλισης;
- Ποιο θα είναι το τελικό διάνυσμα απόψεων της κοινωνίας $z(\infty)$ και από ποιες παραμέτρους του δικτύου και του μοντέλου εξαρτάται η τιμή του;

2.4 Κατηγορίες Μοντέλων

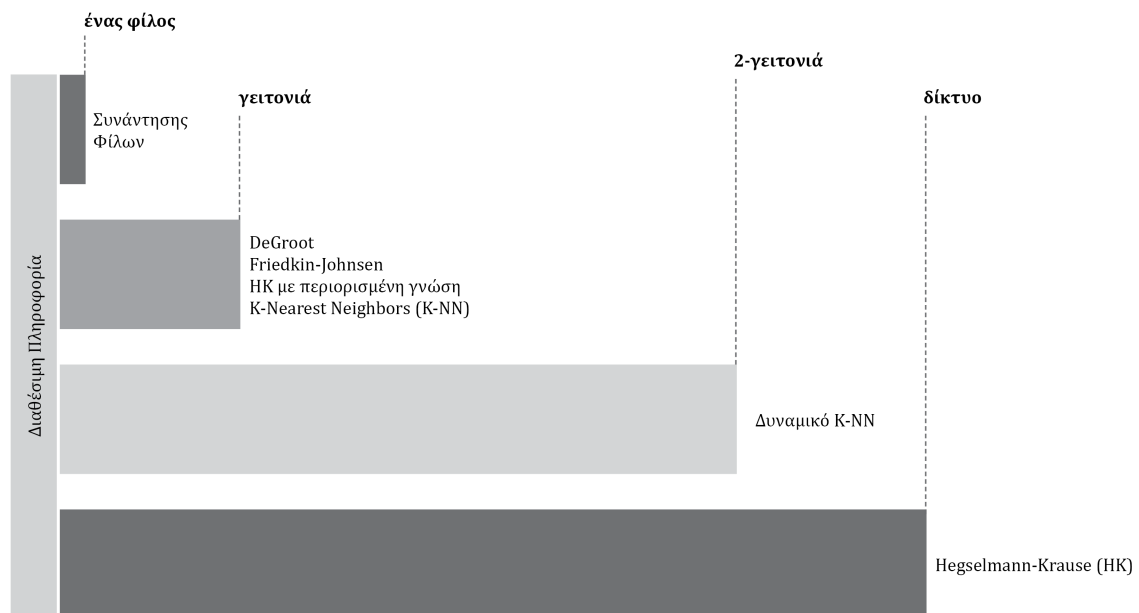
Για να γίνει πιο κατανοητή η μελέτη που ακολουθεί και η σειρά των πειραμάτων, θα προσπαθήσουμε να κατηγοριοποιήσουμε τα μοντέλα διαμόρφωσης των απόψεων με βάση δύο χαρακτηριστικά τους.

Το πρώτο είναι το εάν επιτρέπουν ή όχι στο κοινωνικό δίκτυο να είναι δυναμικό, δηλαδή να μεταβάλλει τη δομή του καθώς μεταβάλλονται οι απόψεις. Ο συγκεκριμένος διαχωρισμός των μοντέλων φαίνεται στο σχήμα 2.10. Στα μοντέλα DeGroot, Friedkin-Johnsen και συνάντησης φίλων το δίκτυο παραμένει σταθερό. Στο μοντέλο των μεταβαλλόμενων βαρών, στο K-Nearest Neighbors και στο Hegselmann-Krause με περιορισμένη γνώση μεταβάλλονται οι φίλοι που εμπιστεύεται το άτομο από γύρο σε γύρο αλλά οι κοινωνικές επαφές των ατόμων παραμένουν σταθερές. Τέλος, στο απλό μοντέλο Hegselmann-Krause και στο δυναμικό μοντέλο K-Nearest Neighbors μεταβάλλονται τόσο οι κοντινοί φίλοι του ατόμου σε κάθε γύρο όσο και ο γενικότερος κοινωνικός του κύκλος.



Σχήμα 2.10: Κατηγοριοποίηση των μοντέλων βάση της δυναμικής του δικτύου.

Το δεύτερο χαρακτηριστικό που μας ενδιαφέρει είναι η ποσότητα της πληροφορίας που διαδίδεται στο δίκτυο. Όπως αναφέραμε εισαγωγικά, η ανταλλαγή πληροφορίας σε πραγματικά σενάρια είναι αρκετά μικρότερη από αυτή που υποθέτουν τα πιο γνωστά μοντέλα. Γι' αυτό το λόγο θα μελετήσουμε πειραματικά τη συμπεριφορά παραλλαγών των μοντέλων των Friedkin-Johnsen και Hegselmann-Krause με περιορισμένη ποσότητα πληροφορίας. Μια σχηματική αναπαράσταση της πληροφορίας που χρησιμοποιούν όλα τα μοντέλα που θα αναφέρουμε φαίνεται στο σχήμα 2.11.



Σχήμα 2.11: Κατηγοριοποίηση των μοντέλων βάση της πληροφορίας που έχουν στη διάθεσή τους οι κόμβοι.

Κεφάλαιο 3

Σταθερό Δίκτυο

3.1 Το Μοντέλο του DeGroot

3.1.1 Εισαγωγή

Το μοντέλο του DeGroot θα αποτελέσει την αφετηρία της μελέτη του τρόπου που εξελίσσεται η πληροφορία και διαμορφώνονται οι γνώμες σε ένα δίκτυο. Η συγκεκριμένη γραμμή έρευνας ξεκίνησε από την εργασία του French [Fren56] πάνω σε μια θεωρία της κοινωνικής ισχύος. Η εργασία αυτή εισήγαγε ένα απλό μοντέλο που περιγράφει το πώς ένα δίκτυο διαπροσωπικής επιρροής (το οποίο πλέον θα το ονομάζουμε κοινωνικό δίκτυο) μπαίνει σε μια διαδικασία διαμόρφωσης των απόψεων. Χρησιμοποιώντας τη θεωρία των Μαρκοβιανών Αλυσίδων, το μοντέλο γενικεύθηκε από τον Harary [Hara59] και τελικά από τον DeGroot [DeGr74] με ακριβή ανάλυση για το πότε συγκλίνει και καταλήγει σε ομοφωνία.

Παρ' όλο που δεν καταφέρνει να περιγράψει όλα τα πραγματικά σενάρια, η απλότητα και η φυσικότητα του μοντέλου του DeGroot μπορεί να μας δώσει μια αρχική διαίσθηση για τη διαδικασία που πραγματοποιείται μέχρι να καταλήξουμε σε μια γνώμη και το πώς οι διάφορες παράμετροι του δικτύου επηρεάζουν τη διαδικασία αυτή.

3.1.2 Περιγραφή Διαδικασίας

Ξεκινάμε με μια ομάδα N ατόμων, καθένα από τα οποία έχει μια αρχική άποψη s_i για ένα συγκεκριμένο θέμα. Κάθε άποψη είναι πραγματικός αριθμός, κατά σύμβαση στο διάστημα $[0, 1]$. Για να εκφράσουμε τον τρόπο αλληλεπίδρασης των ατόμων και τον βαθμό επιρροής κάποιου στους υπόλοιπους χρησιμοποιούμε τον πίνακα βαρών $A = [w_{ij}]$, όπου w_{ij} είναι το βάρος που δίνει το άτομο i στην άποψη του ατόμου j .

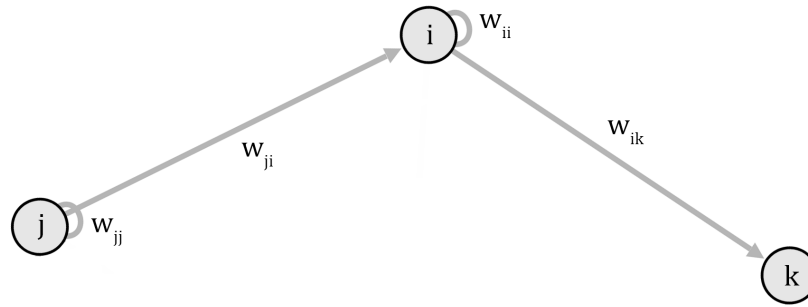
Για να διευκολυνθούν οι υπολογισμοί μας υποθέτουμε ότι ο A είναι στοχαστικός κατά γραμμή. Αυτό σημαίνει ότι το άθροισμα των στοιχείων της κάθε γραμμής του πίνακα A είναι ακριβώς ίσο με τη μονάδα, δηλαδή:

$$\sum_{j=1}^N w_{ij} = 1, \forall i \in \{1..N\}$$

Τα άτομα μπορούν να αναπαρασταθούν από τους κόμβους ενός γράφου, όπως βλέπουμε στο σχήμα 3.1. Αν $w_{ij} > 0$ τότε υπάρχει ακμή μεταξύ των κόμβων i και j και αυτή η ακμή έχει βάρος w_{ij} .

Οι γνώμες ενημερώνονται σύμφωνα με τον κανόνα:

$$z(t+1) = Az(t) \tag{3.1}$$



Σχήμα 3.1: Η μορφή του γράφου που δημιουργείται με βάση τον πίνακα A του μοντέλου DeGroot.

Επαγωγικά μπορούμε εύκολα να δούμε ότι:

$$\begin{aligned}
 z(1) &= Az(0) = As \\
 z(2) &= A^2z(0) = A^2s \\
 &\dots \\
 z(t) &= A^t s
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Τελικά αν καταλήξουμε σε ισορροπία θα έχουμε

$$z(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} A^t s \tag{3.3}$$

3.1.3 Σύγκλιση

Η κυριότερη ερώτηση που θα μας απασχολεί όταν μελετάμε ένα μοντέλο από εδώ και πέρα θα είναι αν αυτό συγκλίνει σε ισορροπία, δηλαδή εάν υπάρχει μια χρονική στιγμή t_{eq} πέρα από την οποία οι απόψεις σταματούν να αλλάζουν. Αν το μοντέλο δεν καταλήγει πάντα σε ισορροπία, τότε θα θέλαμε να διερευνήσουμε υπό ποιες συνθήκες συμβαίνει αυτό.

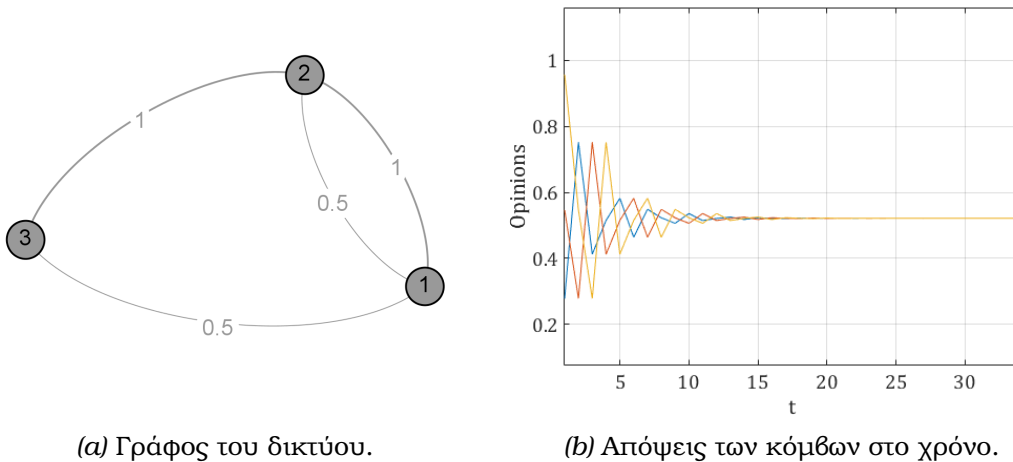
Παράδειγμα 1: Σύγκλιση του Μοντέλου Ας δούμε αρχικά ένα απλό δίκτυο το οποίο οδηγεί γρήγορα τη διαδικασία σε ισορροπία. Έχουμε $N = 3$ κόμβους με τυχαίες αρχικές απόψεις s και πίνακα βαρών

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

Το όριο $\lim_{t \rightarrow \infty} A^t$ υπάρχει και είναι ίσο με

$$A^\infty = \begin{pmatrix} 2/5 & 2/5 & 1/5 \\ 2/5 & 2/5 & 1/5 \\ 2/5 & 2/5 & 1/5 \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

Η παραπάνω σχέση σε συνδυασμό με την εξίσωση (3.3) μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι για οποιοδήποτε συνδυασμό αρχικών απόψεων s , η συγκεκριμένη ομάδα ατόμων θα καταλήξει σε ομοφωνία με άποψη $z_1(\infty) = z_2(\infty) = z_3(\infty) = 2/5s_1 + 2/5s_2 + 1/5s_3$.

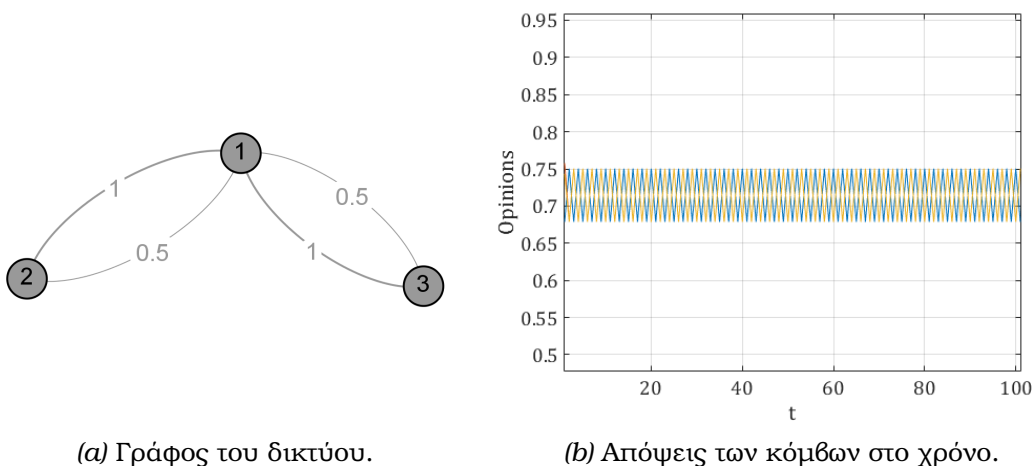


Σχήμα 3.2: Δίκτυο που οδηγεί το μοντέλο DeGroot σε σύγκλιση.

Παράδειγμα 2: Ταλάντωση των απόψεων Δημιουργούμε ένα καινούργιο δίκτυο $N = 3$ κόμβων παρόμοιο με το προηγούμενο, μόνο που τώρα οι κόμβοι 2 και 3 δεν επικοινωνούν άμεσα αλλά μόνο μέσω του κόμβου 1. Τώρα ο πίνακας A είναι ο ακόλουθος:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

Το δίκτυο φαίνεται στο σχήμα 3.3. Τώρα το όριο του A^t καθώς προχωράμε στο άπειρο δεν υπάρχει αλλά αντίθετα οι τιμές του A ταλαντώνονται με αποτέλεσμα να ταλαντώνονται και οι απόψεις όπως φαίνεται στη γραφική παράσταση 3.3b.



Σχήμα 3.3: Δίκτυο στο οποίο το μοντέλο DeGroot δεν συγκλίνει.

Γιατί το παράδειγμα 1 συγκλίνει ενώ το παράδειγμα 2 όχι; Αν παρατηρήσουμε τον υποκείμενο γράφο του δικτύου του παραδείγματος 2 θα παρατηρήσουμε ότι υπάρχουν κατευθυνόμενοι κύκλοι και όλοι έχουν μήκος 2. Ο πίνακας A του παραδείγματος είναι *περιοδικός* και σε αυτές τις περιπτώσεις οι απόψεις ταλαντώνονται και το μοντέλο δεν συγκλίνει.

Λέμε ότι ο πίνακας $A = [w_{ij}]$ είναι *απεριοδικός* όταν ο Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης των μηκών όλων των κατευθυνόμενων κύκλων του είναι 1. Οι κατευθυνόμενοι κύκλοι ορίζονται υποκείμενο κατευθυνόμενο γράφο όπως αυτός διαμορφώνεται από τον πίνακα A .

Επειδή η διαδικασία ενημέρωσης των απόψεων (3.1) είναι ουσιαστικά μια Μαρκοβιανή διαδικασία, δανειζόμενοι αποτελέσματα από τη θεωρία των μαρκοβιανών αλυσίδων καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι θα συγκλίνει εάν ο πίνακας A είναι ισχυρά συνεκτικός και απεριοδικός. Μάλιστα σε αυτή την περίπτωση το δίκτυο θα καταλήγει και σε ομοφωνία.

Πόσο όμως επηρεάζει η άποψη του κάθε κόμβου την τελική τιμή της ισορροπίας; Αναζητούμε ένα διάνυσμα v τέτοιο ώστε:

$$z^\infty = vs \quad (3.7)$$

Αν υπάρχει τέτοιο διάνυσμα, τότε οι τελικές απόψεις του δικτύου θα είναι γραμμικός συνδυασμός των αρχικών απόψεων και οι τιμές v_i του διανύσματος θα είναι ανάλογες της επιρροής του κάθε κόμβου στην τελική άποψη του δικτύου. Αν υπάρχει ένα τέτοιο διάνυσμα θα είναι *ανεξάρτητο από τις αρχικές απόψεις*, αφού ουσιαστικά δηλώνει την "ισχύ" των κόμβων μέσα στο κοινωνικό δίκτυο. Ως συνέπεια για διανύσματα αρχικών απόψεων $s_1 = z(0)$ και $s_2 = z(1)$, με βάση την εξίσωση (3.7) θα πρέπει να ισχύει:

$$vz(1) = vz(0) = z^\infty$$

Εφαρμόζουμε τον κανόνα ενημέρωσης (3.1) και τελικά:

$$\begin{aligned} vz(1) &= vz(0) \\ vAz(0) &= vz(0) \\ vA &= v \end{aligned} \quad (3.8)$$

Από την τελευταία σχέση συμπεραίνουμε ότι το v είναι αριστερό ιδιοδιάνυσμα του πίνακα A με ιδιοτιμή τη μονάδα. Όταν ο A είναι ισχυρά συνεκτικός και απεριοδικός τότε έχει ένα μοναδικό τέτοιο ιδιοδιάνυσμα το οποίο μάλιστα έχει όλες τις τιμές του θετικές.

Σύμφωνα με το παραπάνω όλοι οι κόμβοι ασκούν κάποια επιρροή στην τελική άποψη του δικτύου. Υπάρχει όμως κάποιος τρόπος να καταλάβουμε διαισθητικά ποιοι από αυτούς έχουν τον πρώτο λόγο στο πού θα καταλήξουν όλοι οι υπόλοιποι;

Μελετώντας λίγο παραπάνω το μοντέλο [Jack10] μπορούμε να δώσουμε κάποιες απαντήσεις σε αυτό το ερώτημα:

- Μεγαλύτερη επιρροή ασκούν οι κόμβοι που έχουν εισερχόμενες ακμές με μεγαλύτερο βάρος σε σχέση με τους υπόλοιπους κόμβους.
- Αν δύο κόμβοι έχουν παρόμοιο συνολικό εισερχόμενο βάρος τότε αυτός που έχει εισερχόμενες ακμές από κόμβους με μεγάλη κοινωνική επιρροή θα ασκεί με τη σειρά του μεγαλύτερη επιρροή από τον άλλο.

Στο μοντέλο μπορούμε εύκολα να προσθέσουμε και κόμβους που επηρεάζουν τις γνώμες χωρίς να επηρεάζονται οι ίδιοι, όπως για παράδειγμα τα Μέσα Μαζικής Ενημέρωσης. Ένας τέτοιος κόμβος i θα έχει βάρος μόνο προς τη δική του άποψη και μηδενικό εξερχόμενο βάρος, δηλαδή $w_{ii} = 1$ και $w_{ij} = 0, j \neq i$.

3.2 Το Μοντέλο των Friedkin-Johnsen

3.2.1 Εισαγωγή

Στο μοντέλο του DeGroot είδαμε πως εάν ο γράφος του κοινωνικού δικτύου είναι ισχυρά συνεκτικός, τότε η δυναμική διαδικασία ενημέρωσης των απόψεων θα οδηγηθεί σε *ομοφωνία*, δηλαδή σε ισορροπία όπου όλοι οι κόμβοι έχουν την ίδια άποψη. Όμως στα πραγματικά κοινωνικά δίκτυα δεν φαίνεται να συμβαίνει συχνά κάτι τέτοιο. Όπως το έθεσε ο κοινωνιολόγος David Krackhardt,

Δεν θα έπρεπε να αγνοήσουμε το γεγονός ότι στον πραγματικό κόσμο συνήθως δεν έχουμε ομοφωνία. Αναγνωρίζοντάς το αυτό, οι περισσότεροι επιστήμονες κοινωνικών δικτύων δεν εστιάζουν στην ισορροπία όπου έχουμε ομοφωνία. Αντίθετα, είναι πολύ πιο πιθανό να ενδιαφέρονται να εξηγήσουν την έλλειψη ομοφωνίας (τη διακύμανση) στις απόψεις και στις συμπεριφορές που συμβαίνει στο πλαίσιο των πραγματικών δικτύων [Krac09].

Η γενίκευση της θεωρίας από τους Friedkin-Johnsen [Noah90, Frie99] απάντησε στον παραπάνω περιορισμό του μοντέλου του DeGroot και ενσωμάτωσε ένα μέρος της κοινωνιολογικής έρευνας σχετικά με τη διαμόρφωση απόψεων με ένα άλλο αναπτυσσόμενο πεδίο κοινωνιολογικής έρευνας που ασχολούνταν με τις επιδράσεις του δικτύου (network effects) [Burt82, Dore81, Erbr79, Mars93]. Το χαρακτηριστικό της θεωρητικής προσέγγισης αυτής είναι πως προσπαθεί να μοντελοποιήσει τις ροές της διαπροσωπικής επιρροής που αλλάζουν τις απόψεις των ατόμων.

Στο μοντέλο των Friedkin-Johnsen, αν οι απόψεις δεν οδηγηθούν σε ομοφωνία συνήθως δεν εμφανίζουν πολύ μεγάλη διακύμανση. Πλήθος στοιχείων δείχνει ότι τα περισσότερα άτομα το βρίσκουν δύσκολο να διατηρήσουν μια αμφιλεγόμενη γνώμη για κάποιο ζήτημα όταν οι απόψεις των υπόλοιπων μελών πάνω σε αυτό είναι σχετικά ομοιόμορφες [Noah90].

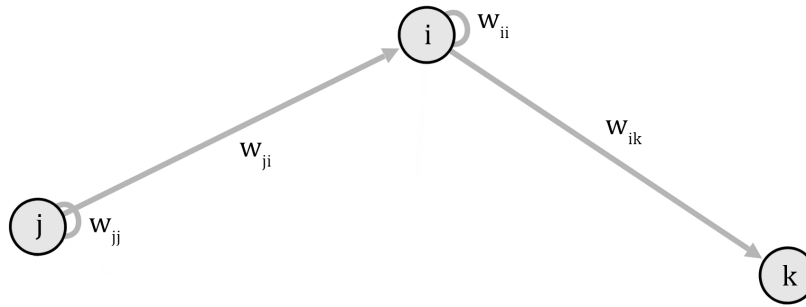
Από που όμως προέρχεται αυτή η - έστω μικρή - διακύμανση στις απόψεις; Στο μοντέλο του DeGroot επιλέξαμε να αγνοήσουμε παράγοντες έξω από το δίκτυο που μπορεί να επηρεάζουν περισσότερο ή λιγότερο την άποψη του ατόμου. Για να μπορέσουμε να πλησιάσουμε καλύτερα την πραγματική διαδικασία σχηματισμού των γνώμων τώρα θα λάβουμε υπόψη μας αυτούς τους παράγοντες. Κάτι τέτοιο έχει ως συνέπεια να μην οδηγούμαστε πλέον σε ομοφωνία εκτός από κάποιες ειδικές περιπτώσεις.

3.2.2 Περιγραφή Διαδικασίας

Έχουμε ένα σύνολο από N άτομα, μόνο που τώρα κάθε άτομο i χαρακτηρίζεται από δύο μεγέθη. Έχει όπως και πριν μια δημόσια άποψη z_i και επιπλέον μια εγγενή πεποίθηση s_i που αντιπροσωπεύει τους παράγοντες έξω από το δίκτυο που αναφέραμε προηγουμένως. Κατά σύμβαση ας υποθέσουμε ότι στην αρχή της διαδικασίας είναι $z_i(0) = s_i$.

Οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ των ατόμων καθορίζονται και πάλι από έναν πίνακα βαρών $Q = [w_{ij}]$. Η σημασία που δίνει το άτομο στην εγγενή του πεποίθηση καθορίζεται από τον διαγώνιο πίνακα $R = [w_{ii}]$. Το δίκτυο μπορεί να παρασταθεί με ζυγισμένο γράφο $G = (V, E)$ όπου $V = \{1, \dots, N\}$ οι κόμβοι του δικτύου και $E = \{(i, j) : w_{ij} > 0\}$ όπως φαίνεται στο σχήμα 3.4.

Για να αποφύγουμε πιθανή σύγχυση, πρέπει να σημειώσουμε μια σημαντική διαφορά από το μοντέλο του DeGroot. Στο μοντέλο των Friedkin-Johnsen, τα βάρη w_{ii} αναφέρο-



Σχήμα 3.4: Η μορφή του γράφου που δημιουργείται με βάση τον πίνακα \mathcal{Q} .

νται στη σημασία που δίνει το άτομο στην εγγενή του πεποίθηση s_i και όχι στην τωρινή του άποψη $z_i(t)$ όπως συνέβαινε στο DeGroot.

Το κάθε άτομο έχει στόχο να διατυπώνει μια τέτοια δημόσια άποψη ώστε να μην είναι ούτε πολύ μακριά από την εγγενή του πεποίθηση s_i ούτε από τις απόψεις των γειτόνων του στο δίκτυο z_j . Συνεπώς, ο κάθε κόμβος i του δικτύου συμβιβάζεται όταν εκφράζει τη δημόσια άποψή του και προσπαθεί να ελαχιστοποιήσει το κόστος [Bind12]:

$$C_i(z) = C_{i, \text{personal}}(z) + C_{i, \text{neighbors}}(z)$$

ή με μαθηματικούς όρους,

$$C_i(z) = w_{ii}(z_i - s_i)^2 + \sum_{j \in N(i)} w_{ij}(z_i - z_j)^2 \quad (3.9)$$

όπου θα λέμε ότι $j \in N(i)$ ή αλλιώς "ο κόμβος j ανήκει στη γειτονιά του κόμβου i " εάν υπάρχει ακμή (i, j) στον γράφο G , δηλαδή εάν $w_{ij} > 0$. Ένα παράδειγμα της συνάρτησης κόστους φαίνεται στο σχήμα 3.5. Αξίζει να σημειωθεί ότι η ισορροπία δεν οδηγεί στο βέλτιστο αποτέλεσμα, δηλαδή στην ελαχιστοποίηση της συνολικής συνάρτησης κόστους $C(z) = \sum_{j=1}^N C_j(z)$. Αυτό συμβαίνει επειδή οι κόμβοι έχουν κάποιο πείσμα (πίστη στην εγγενή τους πεποίθηση) με αποτέλεσμα να αρνούνται να κινηθούν πιο κοντά στους γείτονές τους και να αυξήσουν το κόστος που πρέπει να πληρώσουν αυτοί με τη σειρά τους [Bind12]. Η απόσταση της ισορροπίας από το βέλτιστο ονομάζεται *Price Of Anarchy (PoA)*.

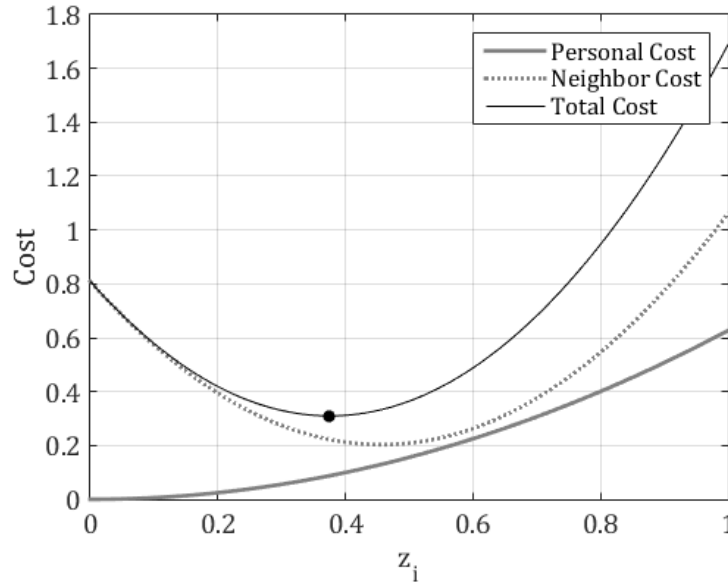
Λύνουμε για την τιμή που ελαχιστοποιεί το κόστος και παίρνουμε τον κανόνα ενημέρωσης

$$z_i(t) = \frac{w_{ii}s_i + \sum_{j \in N(i)} w_{ij}z_j}{w_i + \sum_{j \in N(i)} w_{ij}} \quad (3.10)$$

Μπορούμε εύκολα να εκφράσουμε τη παραπάνω σχέση χρησιμοποιώντας πίνακες. Θετούμε $W_i = w_{ii} + \sum_{j \neq i} w_{ij}$ και ορίζουμε δύο πίνακες $N \times N$: $A = [a_{ij}]$ και $B = [b_{ij}]$. Για τον πίνακα A ισχύει $a_{ii} = 0$ για όλα τα $i \in \{1, \dots, N\}$ και $a_{ij} = w_{ij}/W_i$ για κάθε $j \neq i$. Για τον πίνακα B θα έχουμε $b_{ii} = w_{ii}/W_i$ για κάθε $i \in \{1, \dots, N\}$ και $b_{ij} = 0$ για κάθε $i \neq j$.

Τώρα η σχέση (3.10) γράφεται:

$$z(t) = Az(t-1) + Bs \quad (3.11)$$



Σχήμα 3.5: Οι τρεις συναρτήσεις κόστους για έναν τυχαίο κόμβο. Ο μαύρος κύκλος αντιπροσωπεύει το ολικό ελάχιστο.

Εφαρμόζοντας τη σχέση αναδρομικά, παίρνουμε

$$z(t) = V(t-1)s \quad (3.12)$$

όπου,

$$V(t-1) = A^t + \sum_{k=0}^{t-2} A^k B \quad (3.13)$$

Με βάση των παραπάνω ορισμό, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι η διαδικασία διαμόρφωσης των απόψεων είναι πλήρως *υπετερμυνιστική*. Δεδομένων των πινάκων A και B , οι τιμές των απόψεων σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή είναι πλήρως καθορισμένες από την εξίσωση (3.12). Ένα άλλο χαρακτηριστικό της βασικής μορφής του μοντέλου είναι ότι η ενημέρωση αυτή γίνεται *παράλληλα* [Frie99], δηλαδή πρώτα ενημερώνεται η γνώμη όλων των κόμβων τη χρονική στιγμή t σύμφωνα με τις απόψεις που είχαν τη χρονική στιγμή $t-1$ και ύστερα προχωράμε στο επόμενο βήμα.

3.2.3 Σύγκλιση

Εάν η διαδικασία συγκλίνει τότε μετά από άπειρες επαναλήψεις, η τιμή του διανύσματος $z(\infty)$ θα έχει σταθεροποιηθεί, δηλαδή το όριο $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = z(\infty)$ υπάρχει. Συνεπώς, η εξίσωση (3.11) θα πάρει τη μορφή:

$$z(\infty) = Az(\infty) + Bs \quad (3.14)$$

Συγκεντρώνοντας τους κοινούς παράγοντες:

$$(I - A)z(\infty) = Bs \quad (3.15)$$

Τελικά, εάν ο πίνακας $(I - A)$ είναι αντιστρέψιμος τότε οι απόψεις στην ισορροπία θα δίνονται από τη σχέση:

$$z(\infty) = (I - A)^{-1}Bs \quad (3.16)$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (3.16), (3.12) προκύπτει ότι:

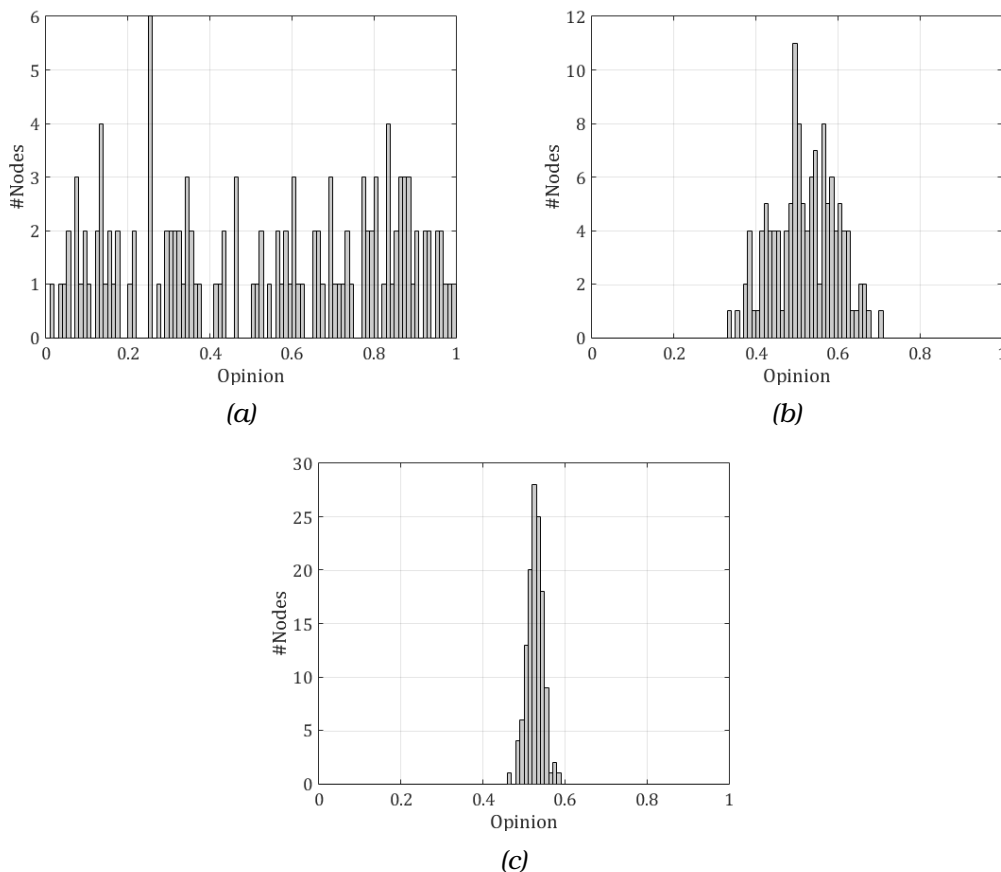
$$z(\infty) = Vs \quad (3.17)$$

όπου,

$$V = (I - A)^{-1}B \quad (3.18)$$

Ο $N \times N$ πίνακας $V = [v_{ij}]$ περιγράφει την επίδραση των διαπροσωπικών και εξωτερικών παραγόντων στον μετασχηματισμό του διανύσματος αρχικών απόψεων s στο διάνυσμα τελικών απόψεων $z(\infty)$. Κάθε στοιχείο v_{ij} είναι μη αρνητικό και δίνει το σχετικό βάρος της αρχικής άποψης του κόμβου j πάνω στην τελική άποψη του κόμβου i , για όλα τα i, j .

Τέλος, αξίζει να επισημάνουμε το φαινόμενο που σχολιάσαμε στην αρχή της περιγραφής του μοντέλου. Είναι δύσκολο να διατηρήσει κάποιος μια πολύ ακραία άποψη στην κοινωνία, όταν ακούει έστω λίγους από τους γείτονές του. Όπως βλέπουμε στο σχήμα 3.6, πριν να εκτελέσουμε το μοντέλο οι απόψεις είναι σχεδόν ομοιόμορφα κατανομημένες στο $[0, 1]$. Όταν ο κάθε κόμβος ακούει κατά μέσο όρο τέσσερις γείτονές του η διασπορά μειώνεται, ενώ όταν ακούει κατά μέσο όρο 20 γείτονες το δίκτυο πλησιάζει στην ομοφωνία.



Σχήμα 3.6: Ιστογράμματα απόψεων. Στο σχήμα 3.6α φαίνονται οι αρχικές απόψεις, στο σχήμα 3.6b οι τελικές απόψεις για δίκτυο μέσου degree 4 και στο σχήμα 3.6c οι τελικές απόψεις για δίκτυο μέσου degree 20.

3.3 Το μοντέλο των συναντήσεων

3.3.1 Εισαγωγή

Καθώς κινούμαστε στην καθημερινή μας ζωή συναντάμε διάφορα άτομα, κάποια περισσότερο και κάποια λιγότερο συχνά. Είναι αναμενόμενο πως τα άτομα που συναντάμε συχνότερα μας ασκούν και μεγαλύτερη επιρροή. Όσο πειστικός και αν είναι κάποιος, δεν γίνεται να μας αλλάξει την άποψη αν δε του μιλήσουμε ποτέ! Για να πλησιάσουμε το φαινόμενο αυτό, ξεχνάμε προς το παρόν την έννοια της εμπιστοσύνης που χρησιμοποιήσαμε στα προηγούμενα μοντέλα και την αντικαθιστούμε από την *πιθανότητα συνάντησης* δύο ατόμων.

Το κοινωνικό δίκτυο αναπαρίσταται από έναν ζυγισμένο γράφο $G(V, E)$. Αν μια ακμή στον γράφο έχει μεγάλο βάρος συμπεραίνουμε ότι υπάρχει μεγάλη πιθανότητα τα δύο άτομα που συνδέονται μέσω αυτής να συναντηθούν και να ανταλλάξουν απόψεις. Σε κάθε γύρο το κάθε άτομο συναντιέται μόνο με έναν γνωστό του και υιοθετεί τον μέσο όρο της άποψής του και της άποψης του γνωστού του. Πράγματι, στην καθημερινή ζωή συνήθως δεν κάνουμε συνδιάσκεψη με όλους τους γνωστούς μας για να διαλέξουμε ποια ταινία θα δούμε το βράδυ. Τις περισσότερες φορές ρωτάμε τον φίλο μας με τον οποίο τυχαίνει να μιλάμε εκείνη την ώρα και αν τα γούστα μας συμφωνούν, την επιλέγουμε άμεσα.

Ήδη πρέπει να έχει γίνει προφανές ότι το μοντέλο που θα μελετήσουμε χρησιμοποιεί πολύ λιγότερο όγκο πληροφορίας σε σχέση με τα μοντέλα που είδαμε προηγουμένως. Στη συνέχεια του κεφαλαίου θα μελετήσουμε τη συμπεριφορά του μοντέλου αυτού. Ειδικότερα θα ερευνήσουμε αν το μοντέλο συγκλίνει, σε ποιες περιπτώσεις συμβαίνει αυτό καθώς και την ταχύτητα με την οποία φτάνει στην ισορροπία.

3.3.2 Περιγραφή Διαδικασίας

Οι παράμετροι της διαδικασίας είναι αντίστοιχες με αυτές του μοντέλου των Friedkin-Johnsen. Έχουμε μια ομάδα N ατόμων, το καθένα με μια δημόσια άποψη z_i και μια εγγενή πεποίθηση s_i , και οι δύο στο διάστημα $[0, 1]$. Οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ των κόμβων καθορίζονται από τους κανονικοποιημένους πίνακες $A = [a_{ij}]$ και $B = [b_{ij}]$.

Σε κάθε γύρο κάνουμε την εξής ενημέρωση:

$$z_i(t+1) = \frac{r + tz_i(t)}{t+1}, \forall i \in [1, N] \quad (3.19)$$

$$r = \begin{cases} s_i & \text{με πιθανότητα } b_{ii} = \frac{w_{ii}}{W_i} \\ z_j(t) & \text{όπου } j \in N(i) \text{ με πιθανότητα } a_{ij} = \frac{w_{ij}}{W_i} \end{cases} \quad (3.20)$$

Κάθε χρονική στιγμή t , ο κάθε κόμβος i διαλέγει με πιθανότητα $\frac{w_{ij}}{W_i}$ την άποψη κάποιου άλλου κόμβου στη γειτονιά του και με πιθανότητα $\frac{w_{ii}}{W_i}$ την εγγενή του πεποίθηση. Θεωρούμε ότι η τελική άποψη του κόμβου είναι η μέση τιμή αυτής της διαδικασίας. Και πάλι η ενημέρωση των απόψεων γίνεται παράλληλα.

Ο μέσος όρος της άποψης ενός κόμβου που διαρκώς ανανεώνεται με βάση την εξίσωση (3.19) εκφράζει *την μνήμη* του ατόμου. Όταν ένας άνθρωπος αλλάζει την άποψή του για ένα θέμα, δεν απορρίπτει όλες τις προηγούμενες πεποιθήσεις που είχε διαμορφώσει πάνω στο θέμα αυτό. Αντίθετα τις συνυπολογίζει και αυτές, καταλήγοντας σε έναν μέσο όρο της καινούργιας με την παλιά πληροφορία.

Η πληροφορία που ανταλλάσσεται σε κάθε γύρο μεταξύ των ατόμων είναι πολύ λιγότερη απ' ό,τι στα προηγούμενα μοντέλα που εξετάσαμε. Πριν πάρουμε μια απόφαση δεν δίνουμε πλέον λόγο σε όλους τους φίλους μας. Αντίθετα ακούμε μόνο έναν από αυτούς (ή τον εαυτό μας) με πιθανότητα ανάλογη της εμπιστοσύνης (του βάρους) που τους δίνουμε. Είναι δυνατόν αυτή η διαδικασία να καταλήγει σε ισορροπία και πώς σχετίζεται με την ισορροπία του μοντέλου των Friedkin-Johnsen; Αυτά τα ερωτήματα θα προσπαθήσουμε να απαντήσουμε στην επόμενη ενότητα.

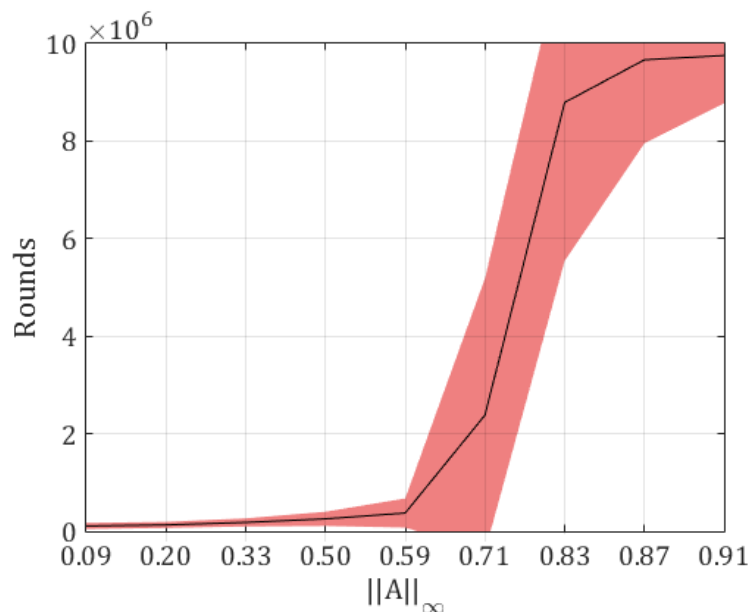
3.3.3 Σύγκλιση

Η ταχύτητα σύγκλισης της διαδικασίας εξαρτάται από το βάρος που δίνει ο κάθε κόμβος στον εαυτό του. Αν όλοι οι κόμβοι λαμβάνουν σπάνια υπόψη την αρχική τους άποψη s_i τότε η πληροφορία που υπάρχει μέσα στο δίκτυο ανακυκλώνεται μεταξύ των κόμβων με αποτέλεσμα να αργούμε να πλησιάσουμε την ισορροπία. Αντιθέτως, εάν όλοι οι κόμβοι έχουν μια μη αμελητέα πιθανότητα να πάρουν την αρχική τους άποψη σε κάθε γύρο, τότε συνέχεια θα μπαίνει στο δίκτυο νέα πληροφορία που θα μας οδηγεί κοντά στην ισορροπία του κλασσικού μοντέλου Friedkin-Johnsen.

Επειδή οι πίνακες A και B είναι κανονικοποιημένοι έτσι ώστε ο πίνακας $(A+B)$ να είναι στοχαστικός, η πιθανότητα να μην πάρει κάποιος κόμβος την αρχική του άποψη s_i και να πάρει την άποψη κάποιου γείτονα $j \neq i$ είναι

$$P[r = z_j] = 1 - b_{ii} = \sum_{j=1}^N a_{ij} \quad (3.21)$$

Για να συγκλίνει γρήγορα η διαδικασία θέλουμε η παραπάνω πιθανότητα να είναι αρκετά μικρή για όλους τους κόμβους. Όμως το μέγιστο αυτής της ποσότητας για όλα



Σχήμα 3.7: Χρόνος σύγκλισης σε γύρους καθώς μεταβάλλεται η άπειρη νόρμα του πίνακα A . Η καμπύλη είναι ο μέσος όρος 32 επαναλήψεων του μοντέλου για το ίδιο δίκτυο και η κόκκινη περιοχή είναι η απόκλιση.

τα i είναι η άπειρη νόρμα του πίνακα A .

$$\|A\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq N} \sum_{j=1}^N |a_{ij}| \quad (3.22)$$

Τελικά η συνθήκη που θέλουμε να ισχύει στο δίκτυό μας για να εξασφαλίσουμε ότι όλοι οι κόμβοι δίνουν κάποιο σημαντικό βάρος στον εαυτό τους είναι

$$\|A\|_{\infty} \ll 1 \quad (3.23)$$

Το παραπάνω συμπέρασμα επιβεβαιώνεται πειραματικά στο σχήμα 3.7. Όσο κατασκευάζουμε δίκτυα με μεγαλύτερη άπειρη νόρμα του πίνακα A , τόσο αυξάνεται ο μέσος χρόνος που χρειάζεται η διαδικασία για να συγκλίνει. [Τι ρόλο παίζει το degree του δικτύου σε όλο αυτό;]

3.3.4 Συναντήσεις φίλων με παράμετρο α

Κλείνοντας την ανάλυση του μοντέλου, θα δούμε μια ελαφρώς διαφορετική εκδοχή του, σύμφωνα με την οποία η ενημέρωση έχει τη μορφή:

$$z_i(t+1) = (1-\alpha)z_i(t) + \alpha r, \forall i \in [1, N] \quad (3.24)$$

όπου,

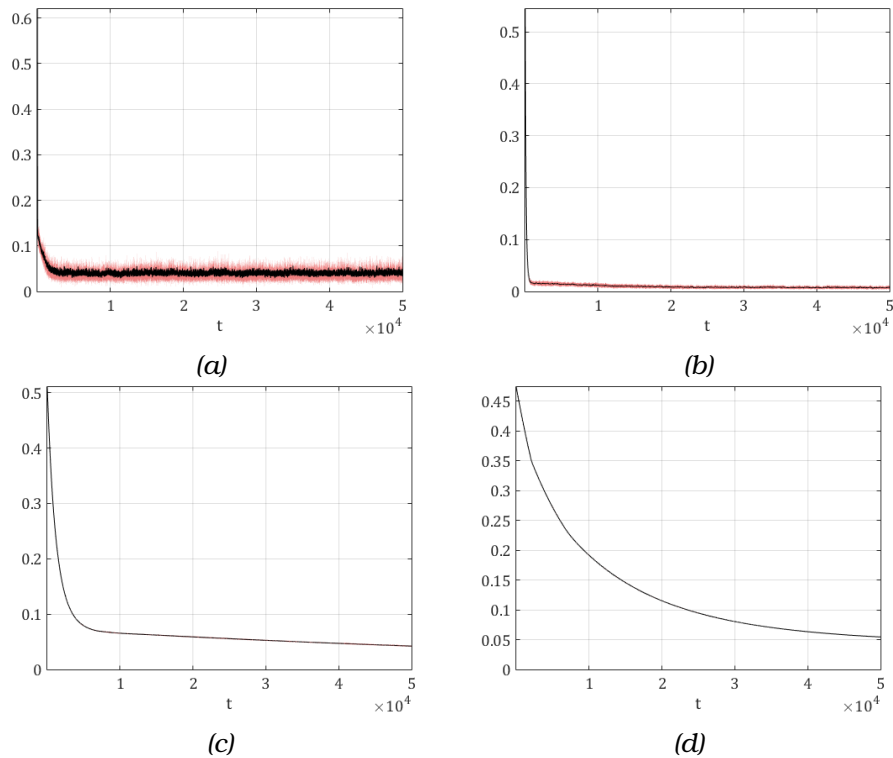
$$r = \begin{cases} s_i & \text{με πιθανότητα } b_{ii} = \frac{w_{ii}}{W_i} \\ z_j(t) & \text{όπου } j \in N(i) \text{ με πιθανότητα } a_{ij} = \frac{w_{ij}}{W_i} \end{cases} \quad (3.25)$$

Η παράμετρος α ελέγχει τη ροή της πληροφορίας προς τους κόμβους. Για $\alpha = 0$ οι απόψεις θα παραμένουν ίδιες από γύρο σε γύρο, ενώ για $\alpha = 1$ η διαδικασία θα έχει μηδενική μνήμη με αποτέλεσμα να ταλαντώνεται συνέχεια και να μην συγκλίνει. Μας ενδιαφέρει να μελετήσουμε κυρίως την περίπτωση όπου $\alpha \ll 1$.

Στο σχήμα 3.8 φαίνονται προσομοιώσεις για τιμές του α από 10^{-1} έως 10^{-5} . Κάθε προσομοίωση έτρεξε 32 φορές σε τυχαίο δίκτυο 50 κόμβων. Για κάθε εκτέλεση καταγράψαμε την απόσταση των απόψεων από την ισορροπία του μοντέλου Friedkin-Johnsen καθώς προχωράει ο χρόνος. Με μαύρο χρώμα φαίνεται ο μέσος όρος των εκτελέσεων και με κόκκινο το σφάλμα.

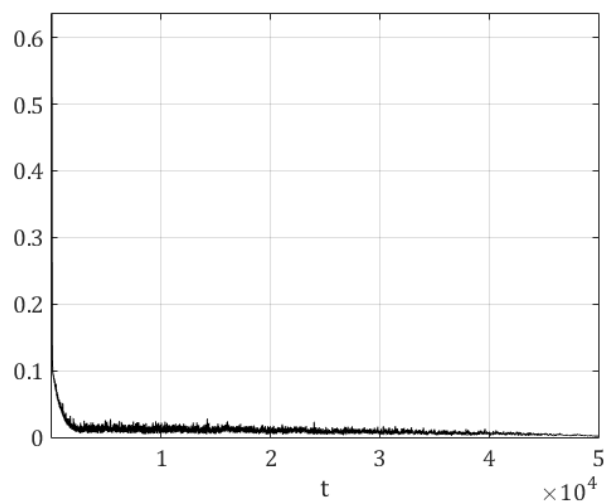
Τα πειράματα δείχνουν πως όταν η παράμετρος α είναι σχετικά μεγάλη, το μοντέλο πλησιάζει πολύ γρήγορα στην ισορροπία. Αυτό συμβαίνει επειδή η νέα πληροφορία όπως αυτή ορίζεται από την τυχαία μεταβλητή r , μπαίνει στο δίκτυο με σχετικά μεγάλο βάρος και τραβάει τις απόψεις προς τη σωστή κατεύθυνση. Όμως το ίδιο φαινόμενο εμποδίζει τη σύγκλιση της διαδικασίας. Μετά την αρχική μείωση της απόστασης από την ισορροπία οι απόψεις ταλαντώνονται με σημαντικό πλάτος και δεν σταθεροποιούνται ποτέ.

Η κατάσταση αντιστρέφεται όσο μικραίνουμε την παράμετρο α . Η ταλάντωση των απόψεων μειώνεται όλο και μαζί της όμως και η ταχύτητα σύγκλισης της διαδικασίας. Για την ακραία περίπτωση του $\alpha = 10^{-4}$ βλέπουμε πως ενώ υπάρχει μηδαμινή ταλάντωση, οι απόψεις βρίσκονται αρκετά μακριά από την ισορροπία μετά από 500.000 γύρους. Γενικά φαίνεται πως για μικρά α το μοντέλο συγκλίνει σε μια περιοχή που απέχει περίπου $\pm\alpha$ από την ισορροπία με ταχύτητα σύγκλισης αντιστρόφως ανάλογη του α .



Σχήμα 3.8: Απόσταση των απόψεων από την ισορροπία για παράμετρο $\alpha = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}$ και 10^{-4} αντίστοιχα.

Για να αξιοποιήσουμε τα καλά χαρακτηριστικά τόσο των μεγάλων τιμών του α (γρήγορη σύγκλιση), όσο και των μικρών (σταθεροποίηση των απόψεων), θα μπορούσαμε να μειώνουμε την τιμή του α όσο προχωράει ο χρόνος. Μια πρόχειρη εφαρμογή της ιδέας αυτής φαίνεται στο σχήμα 3.9.



Σχήμα 3.9: Απόσταση από την ισορροπία στο υβριδικό μοντέλο όπου μειώνουμε την τιμή του α όσο προχωράει ο χρόνος.

Κεφάλαιο 4

Μεταβαλλόμενα Δίκτυα

4.1 Εισαγωγή

Όπως είχαμε δει στην ενότητα 2.3, η πιο γενική διαδικασία διαμόρφωσης απόψεων περιγράφεται από την εξίσωση

$$z(t + 1) = A(t, z(t))z(t) \quad (4.1)$$

Σε αυτή τη γενική περίπτωση ο πίνακας A (και συνεπώς ο γράφος του υποκείμενου δικτύου) μεταβάλλεται δυναμικά με το χρόνο και τις απόψεις. Τα μοντέλα που θα μελετήσουμε σε αυτό το κεφάλαιο θα είναι αυτής της μορφής.

Η γενική ιδέα όλων αυτών των μοντέλων είναι πως η εμπιστοσύνη που δίνει κάποιος στις απόψεις των φίλων του δεν αποτελεί έμφυτο χαρακτηριστικό αλλά μεταβάλλεται δυναμικά. Οι άνθρωποι δίνουν περισσότερη σημασία στις απόψεις εκείνων των φίλων τους που έχουν άποψη κοντά στη δική τους και δίνουν ελάχιστη ή και καθόλου σημασία σε αυτούς τους φίλους τους που διαφωνούν κάθετα με τους ίδιους.

4.2 Μοντέλο Δικτύου με Μεταβλητά Βάρη

4.2.1 Εισαγωγή

Θα ξεκινήσουμε την ανάλυση με το *μοντέλο δικτύου με μεταβλητά βάρη (Asymmetric Coevolutionary Game)* [Bhaw13] όπου η δομή του δικτύου παραμένει σταθερή, δηλαδή δεν έχουμε δημιουργία ή καταστροφή κοινωνικών σχέσεων όπως αυτές αντιπροσωπεύονται από τις ακμές στον πίνακα A . Αυτό που δίνει τη δυναμική συμπεριφορά είναι ότι ο κάθε κόμβος, ανάλογα με την άποψή του, μεταβάλλει το βάρος που δίνει σε καθένα από τους φίλους του έτσι ώστε οι κοντινές απόψεις να παίρνουν περισσότερο βάρος. Θα μελετήσουμε αν το μοντέλο συγκλίνει σε μοναδική ισορροπία και τη γενική συμπεριφορά του κατά τη σύγκλιση.

4.2.2 Περιγραφή Διαδικασίας

Έχουμε μια κοινωνία N ατόμων με απόψεις στο $[0, 1]$. Οι κοινωνικές σχέσεις εκφράζονται με έναν μη ζυγισμένο σταθερό γράφο $G(V, E)$. Για όλους τους κόμβους $i, j \in V$ υπολογίζουμε τις ποσότητες

$$q_{ij} = \frac{c(i, j)}{\sum_{l \in N(i)} c(i, l)} \quad (4.2)$$

όπου $N(i)$ το σύνολο των γειτόνων του κόμβου i , δηλαδή

$$N(i) = \{j : (i, j) \in E\} \quad (4.3)$$

Ορίζουμε το $c(i, j)$ να είναι μια συνάρτηση αντιστρόφως ανάλογη της απόστασης εγγενούς πεποίθησης του ατόμου i από την τρέχουσα άποψη του ατόμου j . Ενδεικτικά:

$$c_1(i, j) = 1 - |s_i - z_j| \quad (4.4)$$

$$c_2(i, j) = \frac{1}{|s_i - z_j| + \epsilon^p}, \text{ για } p \geq 1 \quad (4.5)$$

$$c_3(i, j) = \frac{1}{\ln(|s_i - z_j| + e)} \quad (4.6)$$

Στην πράξη οι παραπάνω συναρτήσεις δεν αλλάζουν σημαντικά τη συμπεριφορά του μοντέλου και έτσι θα εφαρμόζουμε πάντα την c_2 .

Θέτουμε τα μεγέθη q_{ij} ως βάρη των ακμών στον γράφο του δικτύου. Ο τρόπος που τα υπολογίζουμε οδηγεί στο να δίνουμε μεγαλύτερο βάρος σε άτομα που είναι πιο κοντά στη δική μας άποψη και μικρότερο βάρος σε άτομα με πιο μακρινές απόψεις. Επιπλέον, λόγω της κανονικοποίησης στην εξίσωση (4.2), αν υπάρχουν πολλοί κόμβοι κοντά στη δική μας άποψη θα πάρουν όλοι μικρότερο βάρος απ' ότι θα έπαιρνε ένας μόνο κόμβος που θα βρισκόταν κοντά σε εμάς. Τέλος, κάθε άτομο έχει έναν βαθμό πίστης στην εγγενή του πεποίθηση s που παραμένει σταθερός στο χρόνο. Ο βαθμός πίστης εκφράζεται από τον διαγώνιο πίνακα $R = [r_{ij}]$.

Όπως και στην περίπτωση του μοντέλου Friedkin-Johnsen, θέτουμε $W_i = r_{ii} + \sum_{j \neq i} q_{ij}$ και ορίζουμε τους κανονικοποιημένους πίνακες $N \times N$: $A = [a_{ij}]$ και $B = [b_{ij}]$. Για τον πίνακα A ισχύει $a_{ii} = 0$ για όλα τα $i \in \{1, \dots, N\}$ και $a_{ij} = q_{ij}/W_i$ για κάθε $j \neq i$. Για τον πίνακα B θα έχουμε $b_{ii} = r_{ii}/W_i$ για κάθε $i \in \{1, \dots, N\}$ και $b_{ij} = 0$ για κάθε $i \neq j$.

Τώρα μπορούμε να εκφράσουμε την ενημέρωση των απόψεων με τη μορφή εξίσωσης πινάκων

$$z(t+1) = A(t, z)z(t) + Bs \quad (4.7)$$

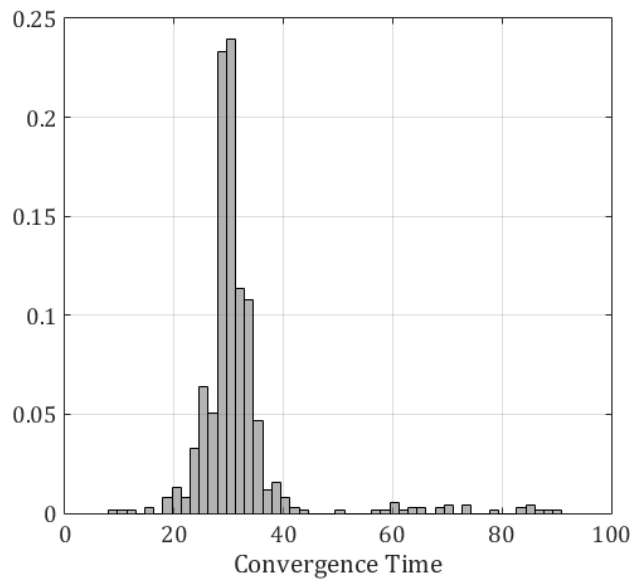
Θεωρούμε ότι το μοντέλο συγκλίνει μόλις η μέγιστη τιμή της πρώτης παραγώγου των απόψεων πάρει αρκετά μικρή (τουλάχιστον $\leq 10^{-5}$).

4.2.3 Σύγκλιση

Μελέτη Σύγκλισης Ξεκινώντας την πειραματική μελέτη του μοντέλου, θα θέλαμε να δούμε αν η διαδικασία διαμόρφωσης των απόψεων σταθεροποιείται και σε ποιες περιπτώσεις συμβαίνει αυτό. Το αποτέλεσμα της συγκεκριμένης αρχικής μελέτης φαίνεται στο σχήμα 4.1. Εκεί βλέπουμε ένα ιστόγραμμα του χρόνου σύγκλισης του μοντέλου για διάφορα δίκτυα.¹ Για κάθε προσομοίωση κρατάγαμε μόνο τον αριθμό των γύρων που χρειάστηκαν οι απόψεις για να σταθεροποιηθούν, δηλαδή να μην μεταβάλλονται

¹Τρέξαμε συνολικά 768 προσομοιώσεις σε δίκτυα Erdős-Rényi και Scale-Free για 32 έως 512 κόμβους. Για τα δίκτυα Erdős-Rényi είχαμε 12 δοκιμές με τιμές του p από 0 έως 1 σε ευθεία γραμμή. Για τα δίκτυα Scale-Free η τιμή του m_0 επιλεγόταν τυχαία στο διάστημα $[1, N/2]$ και η τιμή του m επιλεγόταν επίσης τυχαία μέσα στο επιτρεπτό διάστημα $[1, m_0 - 1]$. Για κάθε δίκτυο επαναλάβαμε την προσομοίωση τέσσερις φορές με διαφορετικό τυχαίο διάνυσμα αρχικών απόψεων κάθε φορά.

περισσότερο από 10^{-6} από γύρο σε γύρο. Αν κάποια προσομοίωση δεν συγκλίνει σύντομα, τότε η εκτέλεσή της σταματά στους 10.000 γύρους και αυτός καταγράφεται ως ο χρόνος σύγκλισής της.



Σχήμα 4.1: Ιστογράμμο χρόνου σύγκλισης του μοντέλου με μεταβλητά βάρη.

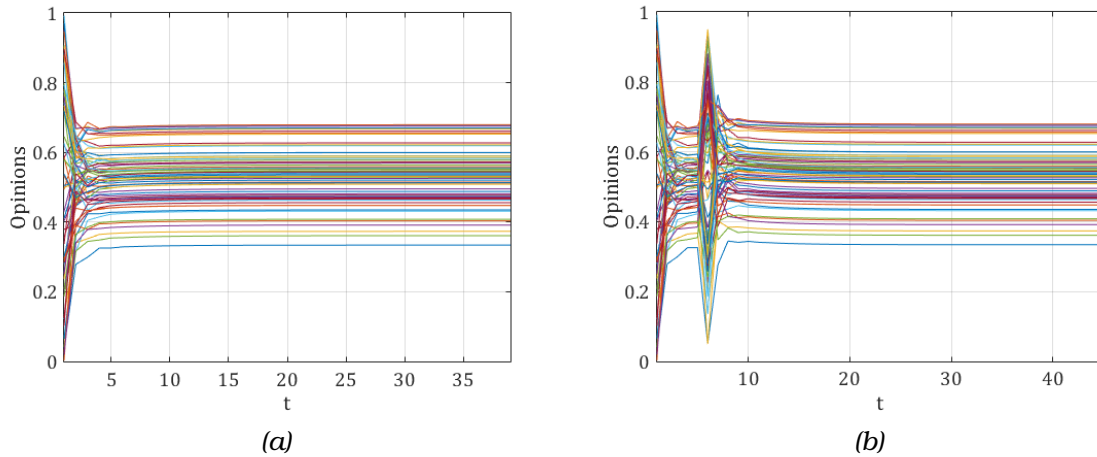
Ο οριζόντιος άξονας του σχήματος 4.1 δηλώνει τον χρόνο σύγκλισης σε γύρους και ο κάθετος άξονας τη σχετική συχνότητα εμφάνισης του χρόνου αυτού. Μπορούμε άμεσα να παρατηρήσουμε ότι σε καμία προσομοίωση δεν παρατηρήθηκε χρόνος σύγκλισης ίσος με 10.000 γύρους που θα σήμαινε ότι οι απόψεις δεν κατάφεραν να σταθεροποιηθούν. Έτσι το πρώτο συμπέρασμα του πειράματος είναι το μοντέλο συγκλίνει. Επιπλέον βλέπουμε ότι οι περισσότερες προσομοιώσεις συνέκλιναν σε λιγότερους από 40 γύρους. Συνεπώς, ένα δεύτερο συμπέρασμα είναι πως το μοντέλο συγκλίνει σχετικά γρήγορα.

Μοναδικό Σημείο Ισορροπίας Η διαδικασία διαμόρφωσης των απόψεων στοχεύει στην ελαχιστοποίηση της συνάρτησης κόστους του κάθε κόμβου, η οποία ορίζεται ως

$$C_i(z_i, z_{-i}) = \sum_{j \neq i} (z_i - z_j)^2 q_{ij}(z) + b_{ii}(z_i - s_i)^2 \quad (4.8)$$

Ο κανόνας ενημέρωσης (4.7) προσπαθεί να οδηγήσει την παραπάνω συνάρτηση προς την ελάχιστη τιμή της. Το ερώτημα που μας απασχολεί σχετίζεται με το εάν το σημείο ισορροπίας στο οποίο καταλήγουμε είναι το μοναδικό ελάχιστο των συναρτήσεων αυτών. Εάν το σημείο ισορροπίας είναι μοναδικό τότε η διαδικασία διαμόρφωσης των απόψεων είναι σταθερή, καθώς από τη στιγμή που θα φτάσουμε σε μια κατάσταση διαφωνίας, αλλαγές των απόψεων των ατόμων δεν μπορούν να μειώσουν τη διαφωρία αυτή (δεδομένων σταθερών εγγενών πεποιθήσεων).

Με αφετηρία την παραπάνω παρατήρηση, κατασκευάσαμε έναν έλεγχο για να δούμε πώς συμπεριφέρεται το μοντέλο όταν μετακινηθούν τυχαία οι απόψεις των κόμβων. Το σχήμα 4.2 δείχνει ένα παράδειγμα τέτοιας μετακίνησης των απόψεων σε δίκτυο $G(N,p)$ με 64 κόμβους. Πραγματοποιούμε την αλλαγή των απόψεων όταν αυτές έχουν αρχίσει να σταθεροποιούνται, βάση της πρώτης τους παραγώγου. Πολύ γρήγορα μετά τη μετακίνηση των απόψεων το μοντέλο καταλήγει σε ισορροπία. Είναι όμως αυτό το σημείο ισορροπίας ίδιο με αυτό που προκύπτει αν δεν κουνήσουμε τις απόψεις;



Σχήμα 4.2: Αριστερά: Απλή εκτέλεση του μοντέλου σε δίκτυο 64 κόμβων. Δεξιά: Η ίδια δοκιμή με τυχαία μετακίνηση των απόψεων στον έκτο γύρο.

Για να δοκιμάσουμε την υπόθεση της μοναδικότητας της ισορροπίας ακολουθήσαμε την παρακάτω πειραματική διαδικασία. Επαναλάβαμε τις προσομοιώσεις της προηγούμενης παραγράφου με τη διαφορά ότι τώρα τρέχαμε την κάθε προσομοίωση πανομοιότυπα δύο φορές. Τη δεύτερη φορά μετακινούσαμε τυχαία τις απόψεις όλων των κόμβων ενώ είχαν εξελιχθεί λίγοι γύροι του μοντέλου. Τελικά ελέγχουμε αν όταν είχε γίνει η τυχαία μετακίνηση των απόψεων η ισορροπία βρισκόταν κοντά στην αρχική ισορροπία. Σε όλες τις δοκιμές μας, τα δύο σημεία ισορροπίας ταυτίζονταν με ακρίβεια τουλάχιστον 10^{-6} .

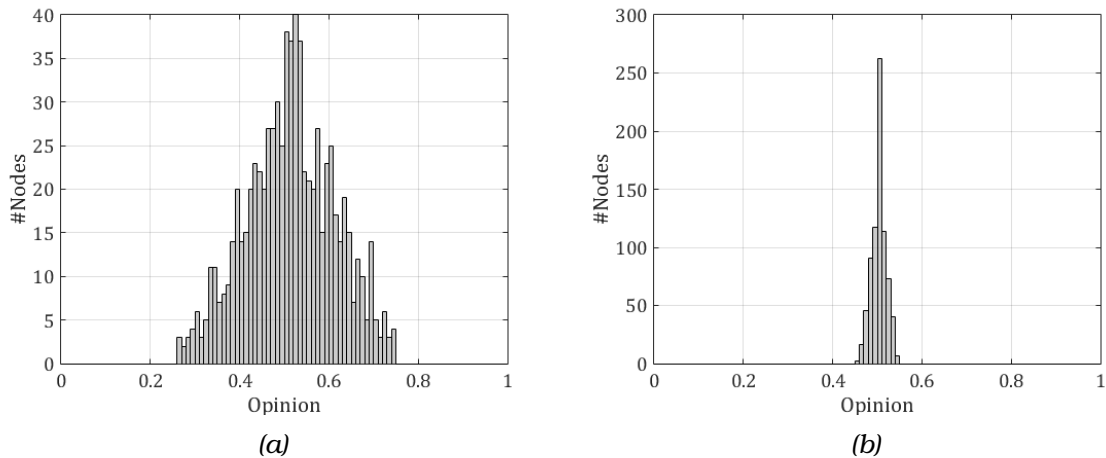
Ομοφωνία Το τελευταίο φαινόμενο που θα μελετήσουμε σχετικά με το συγκεκριμένο μοντέλο είναι το φαινόμενο της ομοφωνίας των απόψεων. Συγκεκριμένα θα θέλαμε να ξέρουμε εάν υπάρχει περίπτωση το μοντέλο να καταλήξει σε ομοφωνία και σε υπό ποιες συνθήκες συμβαίνει αυτό. Παρατηρώντας προσεκτικά την εξίσωση (4.7) διαπιστώνουμε πως αν μηδενίσουμε τον πίνακα B , έχουμε μια παραλλαγή του μοντέλου DeGroot με μεταβλητό πίνακα A . Το γεγονός αυτό μας δίνει μια ισχυρή ένδειξη ότι όσο μικρότερες είναι οι τιμές του πίνακα B , τόσο το συγκεκριμένο μοντέλο θα πλησιάζει το DeGroot και συνεπώς την ομοφωνία. Πράγματι, αν κανένα κόμβος δεν είναι πολύ "πεισματάρης" (δηλαδή δεν έχει μεγάλο βάρος στον εαυτό του) και όλοι οι κόμβοι δίνουν προσοχή σε κάποιους άλλους φίλους τους φαίνεται πολύ λογικό ότι στο τέλος υπάρχουν αρκετές πιθανότητες να συμφωνήσουν σε μια κοινή άποψη.

Εδώ πρέπει να ορίσουμε τι εννοούμε όταν λέμε "μικρές" ή "μεγάλες" τιμές του πίνακα B . Οι απόλυτοι αριθμοί δεν έχουν ιδιαίτερη σημασία, καθώς τα στοιχεία w_{ij} του πίνακα B κανονικοποιούνται με τα αθροίσματα W_i . Συνεπώς το μέγεθος των τιμών του πίνακα B έχει μόνο ουσία σχετικά με τις τιμές του πίνακα A στην ίδια γραμμή. Από εδώ και στο εξής θα ονομάζουμε *σχετικό μέγεθος του πίνακα B* τη διαφορά στην τάξη μεγέθους μεταξύ των τιμών του πίνακα B και των τιμών του πίνακα A . Έτσι για παράδειγμα σχετικό μέγεθος 10 θα σημαίνει ότι οι τιμές του πίνακα B είναι μια τάξη μεγέθους μεγαλύτερες από τις τιμές του πίνακα A . Για να δημιουργήσουμε πίνακες B με διαφορετικές τάξεις μεγεθών στα πειράματά μας, απλά δημιουργούμε έναν τυχαίο πίνακα B (ίδιας τάξης μεγέθους με τον A) και στη συνέχεια τον πολλαπλασιάζουμε με μια σταθερά.

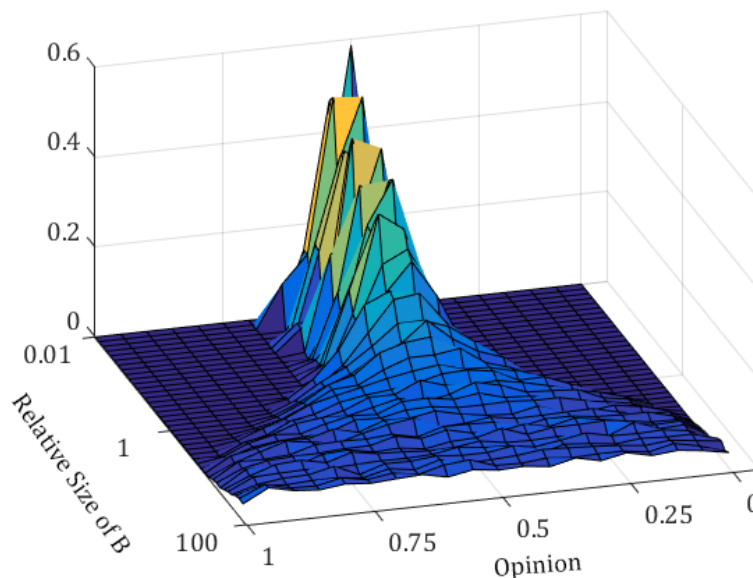
Είναι λογικό λοιπόν να δοκιμάσουμε διάφορες τάξεις μεγεθών του πίνακα B για να

δούμε πού συγκεντρώνονται οι απόψεις στην ισορροπία². Το σχήμα 4.3 μας δείχνει τα τελικά ιστογράμματα των απόψεων για δύο διαφορετικά σχετικά μεγέθη του B . Βλέπουμε πώς καθώς η τάξη μεγέθους των τιμών του πίνακα B μειώνεται (δηλαδή οι κόμβοι δίνουν λιγότερη σημασία στην αρχική τους άποψη), οι απόψεις συγκεντρώνονται πιο έντονα σε ένα σημείο.

Το φαινόμενο φαίνεται πιο καθαρά στο σχήμα 4.4. Ο άξονας x δείχνει το σχετικό μέγεθος του πίνακα B και ο άξονας y τις απόψεις. Στον άξονα z είναι η πυκνότητα των απόψεων³. Ουσιαστικά μπορούμε να φανταστούμε το σχήμα ως πολλά ιστογράμματα



Σχήμα 4.3: Αριστερά: Τάξη μεγέθους του B ίση με τη μονάδα. Δεξιά: Τάξη μεγέθους του B ίση με 0.1. Στη δεύτερη περίπτωση είναι ξεκάθαρη η συγκέντρωση των απόψεων κοντά σε μια τιμή.



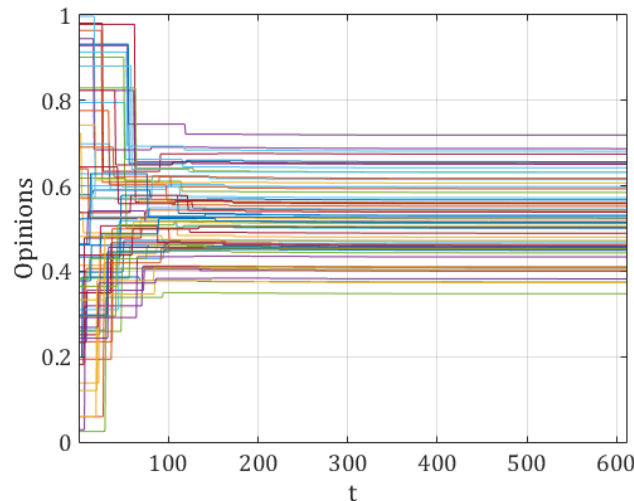
Σχήμα 4.4: Πυκνότητα των απόψεων καθώς μεταβάλλεται το σχετικό μέγεθος των τιμών του πίνακα B .

²Οι προσομοιώσεις έγιναν σε δίκτυο Erdős-Rényi 768 κόμβων με τυχαίες αρχικές απόψεις και $p = 0.1$.

³Για τη δημιουργία του συγκεκριμένου σχήματος πήραμε ένα σταθερό, τυχαίο δίκτυο Erdős-Rényi

απόψεων ενωμένα το ένα με το άλλο καθώς μεταβάλλουμε το μέγεθος του B.

Ασύγχρονη Ενημέρωση Κλείνοντας την αρχική μελέτη της συμπεριφοράς του μοντέλου θα δοκιμάσουμε μια ακόμα παραλλαγή. Σε όλες τις περιπτώσεις που μελετήσαμε μέχρι τώρα υποθέσαμε ότι οι απόψεις όλων των ατόμων ενημερώνονται παράλληλα. Όπως θα δούμε πολλές φορές ακόμα στην εργασία αυτή, η συγκεκριμένη υπόθεση δεν είναι πάντα κοντά στην πραγματικότητα και πολλές φορές η ενημέρωση είναι ασύγχρονη, δηλαδή κάθε χρονική στιγμή αλλάζει την άποψή του μόνο ένα άτομο και όχι όλα μαζί.



Σχήμα 4.5: Ασύγχρονη ενημέρωση απόψεων σε δίκτυο 64 κόμβων.

Η ασύγχρονη ενημέρωση μπορεί να γίνεται με βάση μια σταθερή μετάθεση των κόμβων που επιλέγουμε στην αρχή της προσομοίωσης ή και τελείως τυχαία. Στη συγκεκριμένη εργασία θα επιλέγουμε μια σταθερή τυχαία μετάθεση κάθε φορά που τρέχουμε μια προσομοίωση. Στο σχήμα 4.5 βλέπουμε πώς εξελίσσονται οι απόψεις όταν ακολουθούμε τη διαδικασία της ακολουθιακής ενημέρωσης στο συγκεκριμένο μοντέλο. Προφανώς ο χρόνος που χρειάζεται τώρα για να μεταβληθούν οι απόψεις είναι περισσότερο από την παράλληλη ενημέρωση. Κάτι τέτοιο είναι απόλυτα λογικό καθώς σε κάθε γύρο ανταλλάσσεται πολύ μικρότερη ποσότητα πληροφορίας.

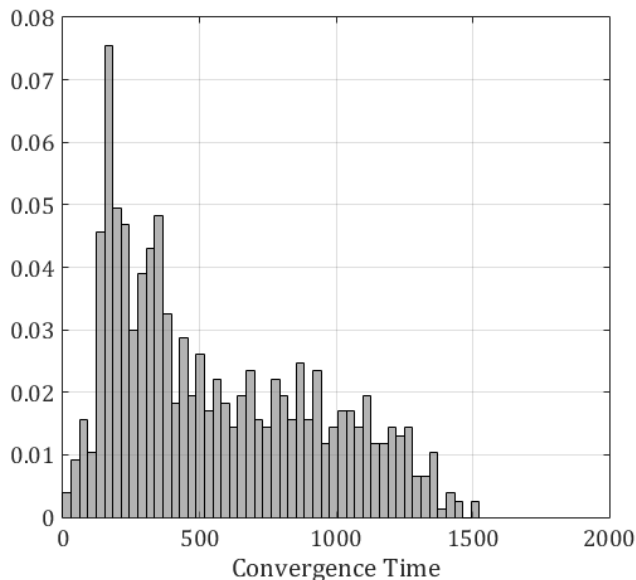
Για να ελέγξουμε τη συμπεριφορά αυτής της παραλλαγής του μοντέλου ως προς τη σύγκλιση, θα εφαρμόσουμε την ίδια μεθοδολογία που εφαρμόσαμε προηγουμένως.⁴ Τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων παρουσιάζονται στο ιστόγραμμα του σχήματος 4.6. Βλέπουμε ότι όλες οι προσομοιώσεις σταθεροποιήθηκαν (με ακρίβεια 10^{-5}) σε λιγότερο από 1600 γύρους και καμία προσομοίωση δεν έφτασε στο όριο των 10.000 γύρων που θα υπονοούσε μη-σύγκλιση.

Παρόλο που η προσομοιώσεις μας ήταν λίγο περιορισμένες λόγω τεχνικών δυσκολιών⁵, μας δίνουν σοβαρές ενδείξεις ότι και αυτή η παραλλαγή του μοντέλου συγκλίνει.

64 κόμβων και τρέξαμε το μοντέλο με 40 διαφορετικά μεγέθη του πίνακα B, από 100 έως 0.01. Για κάθε διαφορετικό πίνακα B επαναλάβαμε την προσομοίωση 20 φορές.

⁴Τρέξαμε συνολικά 768 προσομοιώσεις σε δίκτυα Erdős-Rényi και Scale-Free για 16 έως 128 κόμβους. Για τα δίκτυα Erdős-Rényi είχαμε 12 δοκιμές με τιμές του p από 0 έως 1 σε ευθεία γραμμή. Για τα δίκτυα Scale-Free η τιμή του m_0 επιλεγόταν τυχαία στο διάστημα $[1, N/2]$ και η τιμή του m επιλεγόταν επίσης τυχαία μέσα στο επιτρεπτό διάστημα $[1, m_0 - 1]$. Για κάθε δίκτυο επαναλάβαμε την προσομοίωση τέσσερις φορές με διαφορετικό τυχαίο διάνυσμα αρχικών απόψεων κάθε φορά.

⁵Λόγω της ανάγκης να ανανεώνεται ο πίνακας βαρών σε κάθε γύρο και του μεγάλου αριθμού γύρων



Σχήμα 4.6: Ιστόγραμμα χρόνου σύγκλισης του μοντέλου με μεταβλητά βάρη και ασύγχρονη ενημέρωση.

Επίσης, συγκρίνοντας το σχήμα αυτό με το ιστόγραμμα του σχήματος 4.1 βλέπουμε ότι εδώ οι χρόνοι σύγκλισης έχουν μεγαλύτερη διασπορά. Αυτό συμβαίνει επειδή στην ασύγχρονη ενημέρωση η αύξηση του αριθμού των κόμβων θα συνεπάγεται πάντα και αύξηση του μέσου χρόνου σύγκλισης. Αν για παράδειγμα έχουμε 10 κόμβους θα χρειαστούν τουλάχιστον 10 γύροι για να ανταλλάξουν όλοι οι κόμβοι κάποια πληροφορία. Αν οι κόμβοι του δικτύου είναι 100, θα χρειαστεί δεκαπλάσιος αριθμός γύρων για την ανταλλαγή μιας "μονάδας πληροφορίας" και συνεπώς θα χρειαστεί και περισσότερος χρόνος για τη σύγκλιση. Το φαινόμενο αυτό δεν εμφανίζεται στην παράλληλη ενημέρωση.

4.2.4 Ταχύτητα Σύγκλισης

Όπως φάνηκε στο ιστόγραμμα του σχήματος 4.1, ο χρόνος σύγκλισης του μοντέλου δεν έχει σοβαρές διακυμάνσεις. Στην παρούσα ενότητα θα δούμε λίγο πιο αναλυτικά κάποιους παράγοντες που επηρεάζουν την ταχύτητα με την οποία σταθεροποιούνται οι απόψεις.

Εξάρτηση από τον μέσο βαθμό Ο μέσος βαθμός των κόμβων είναι ενδεικτικός της πυκνότητας του δικτύου. Στο ένα άκρο μπορούμε να φανταστούμε τους κόμβους του δικτύου ενωμένους σε μια αλυσίδα. Ένα τέτοιο δίκτυο θα έχει μέσο βαθμό ίσο με το 2 και η πληροφορία δια μέσου του συγκεκριμένου δικτύου θα διαδίδεται αρκετά αργά. Καθώς αυξάνουμε τις ακμές που έχει ο κάθε κόμβος φτάνουμε τελικά στο πλήρες δίκτυο με μέσο βαθμό ίσο με το N , όπου N ο αριθμός των κόμβων. Το πλήρες δίκτυο θα επιτρέπει την μέγιστη διάδοση της πληροφορίας. Δεδομένης λοιπόν της σημαντικής επιρροής του μέσου βαθμού στη δομή του δικτύου, θα αναζητήσουμε αν υπάρχει κάποια συσχέτιση μεταξύ αυτού και του χρόνου σύγκλισης του συγκεκριμένου μοντέλου.

που απαιτούνται για τη σύγκλιση, το μοντέλο έχει σοβαρές υπολογιστικές απαιτήσεις όσο αυξάνεται ο αριθμός των κόμβων.

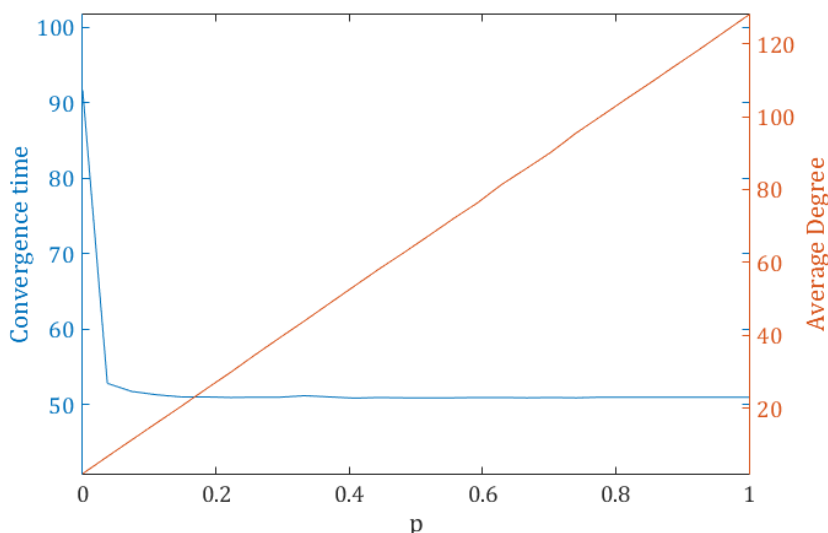
Στο σχήμα 4.7 βλέπουμε τα πειραματικά αποτελέσματα για δίκτυο Erdős-Rényi με 128 κόμβους⁶. Ο βαθμός του δικτύου απεικονίζεται με πορτοκαλί χρώμα και ο χρόνος σύγκλισης με μπλε. Από το σχήμα αυτό μπορούμε να κάνουμε δύο παρατηρήσεις:

- Έχουμε μια απότομη πτώση του χρόνου σύγκλισης με την αρχική αύξηση του μέσου βαθμού. Αυτό δείχνει ότι υπάρχει ένα κατώφλι στον βαθμό του δικτύου που ευνοεί την γρηγορότερη διάδοση της πληροφορίας και συνεπώς την ταχύτερη σύγκλιση.
- Για βαθμούς του δικτύου πάνω από αυτό το κατώφλι, η συσχέτιση μεταξύ του χρόνου σύγκλισης και του βαθμού του δικτύου είναι μηδαμινή.

Εξάρτηση από τον σχετικό μέγεθος του B Όπως είδαμε στην προηγούμενη ενότητα, το σχετικό μέγεθος των τιμών του πίνακα B επηρεάζει την κατάσταση στην οποία θα βρεθούν οι απόψεις στην ισορροπία. Τώρα θα ερευνήσουμε αν υπάρχει κάποια συσχέτιση μεταξύ του χρόνου σύγκλισης του μοντέλου και του σχετικού μεγέθους του B.

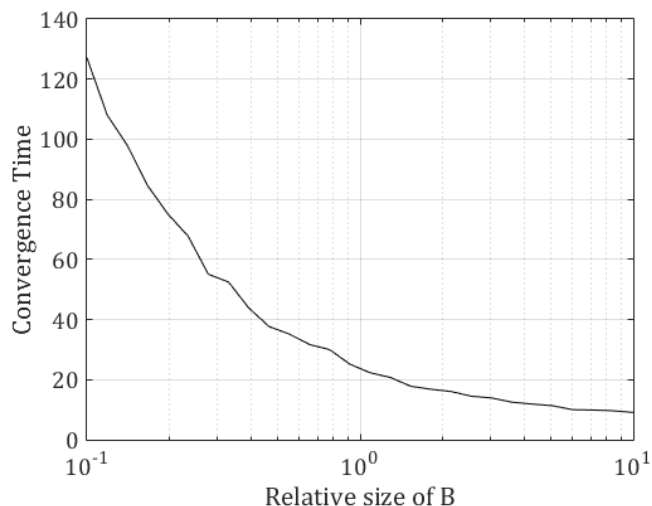
Το αποτέλεσμα των πειραμάτων για δίκτυα Erdős-Rényi 128 κόμβων φαίνεται στο σχήμα 4.8. Καθώς προχωράμε στον (λογαριθμικό) οριζόντιο άξονα από τα αριστερά προς τα δεξιά, αυξάνεται το σχετικό μέγεθος του πίνακα B, άρα και το "πείσμα" των κόμβων σχετικά με την εγγενή τους πεποίθηση. Αυτό φαίνεται ότι οδηγεί σε μικρότερους χρόνους σύγκλισης.

Εξάρτηση από την ιδιοτιμή του πίνακα A Από τα προηγούμενα πειράματα διαπιστώσαμε ότι ο βαθμός του δικτύου δεν σχετίζεται με τον χρόνο σύγκλισης του μοντέλου, ενώ το σχετικό μέγεθος των τιμών του πίνακα B ασκεί κάποια επιρροή σε αυτόν. Το ερώτημα που προκύπτει είναι εάν υπάρχει κάποιος άλλος παράγοντας στο μοντέλο που προκαλεί τη συμπεριφορά αυτή.



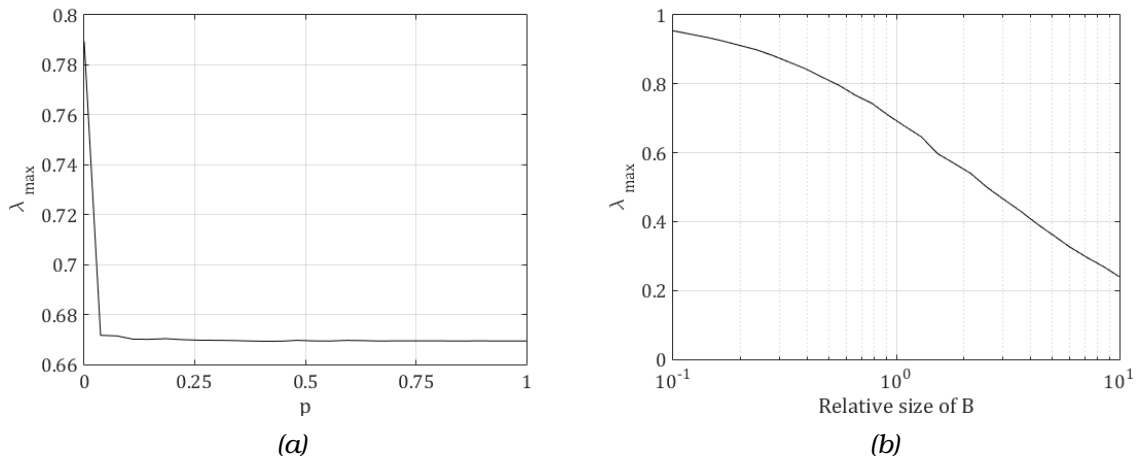
Σχήμα 4.7: Χρόνος σύγκλισης (μπλε) και μέσος βαθμός του δικτύου (πορτοκαλί) καθώς αυξάνεται η παράμετρος p .

⁶Η πειραματική διαδικασία ήταν ως εξής: Επιλέξαμε 28 διακριτές τιμές της παραμέτρου p στο διάστημα $[0, 1]$ και για κάθε τιμή τρέχαμε το μοντέλο 25 φορές κρατώντας τον μέσο όρο του χρόνου σύγκλισης και του βαθμού του δικτύου.



Σχήμα 4.8: Χρόνος σύγκλισης καθώς μεταβάλλεται το μέγεθος των τιμών του πίνακα B.

Η εμπειρία από την ανάλυση απλούστερων μοντέλων μας σπρώχνει να εξετάσουμε τις ιδιοτιμές του πίνακα A και κυρίως την μέγιστη ιδιοτιμή του. Τα πειράματά μας έδειξαν ότι η μέγιστη ιδιοτιμή του πίνακα A παραμένει σχεδόν σταθερή σε μια μεμονωμένη εκτέλεση. Το γεγονός αυτό διευκολύνει τη μελέτη μας. Στα ακόλουθα πειράματα θεωρούμε την ιδιοτιμή ένα ακόμα χαρακτηριστικό της κάθε εκτέλεσης του μοντέλου και παίρνουμε τον μέσο όρο των τιμών της όταν κάνουμε πολλές προσομοιώσεις στο ίδιο δίκτυο.



Σχήμα 4.9: Αριστερά: Ιδιοτιμή καθώς μεταβάλλεται το degree του δικτύου. Δεξιά: Ιδιοτιμή καθώς μεταβάλλεται το σχετικό μέγεθος των τιμών του πίνακα B.

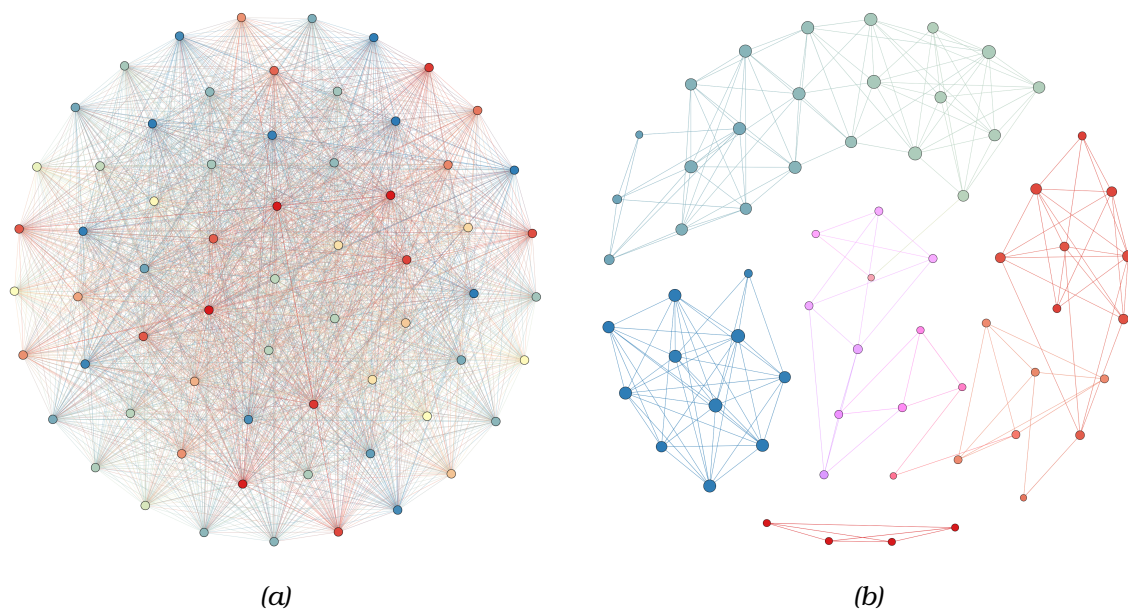
Στο σχήμα 4.9 επαναλαμβάνουμε τις προσομοιώσεις των σχημάτων 4.7, 4.8 καταγράφοντας όμως την μέγιστη ιδιοτιμή του πίνακα A. Ειδικά στο πρώτο σχήμα είναι ξεκάθαρο πως ο χρόνος σύγκλισης ακολουθεί πιστά την ιδιοτιμή του A, η οποία γρήγορα σταθεροποιείται παρά την αύξηση του βαθμού του δικτύου.

4.3 Μοντέλο Hegselmann-Krause (HK)

4.3.1 Εισαγωγή

Μια διαφορετική προσέγγιση στη διαμόρφωση των απόψεων δόθηκε με το μοντέλο της περιορισμένης εμπιστοσύνης (Bounded Confidence) από τους Hegselmann και Krause [Hegs02]. Τώρα το δίκτυο είναι πλήρως δυναμικό. Τα άτομα λαμβάνουν υπόψη το μέσο όρο των απόψεων των γειτόνων τους που βρίσκονται σε απόσταση ϵ_i από τη δική τους άποψη. Η διαδικασία αυτή προκαλεί τη δημιουργία και την καταστροφή ακμών από γύρο σε γύρο. Αφού εξετάσουμε τα κύρια χαρακτηριστικά του μοντελου, η έρευνά μας θα επικεντρωθεί σε παραλλαγές του με περιορισμένη γνώση και επιλογή των K κοντινότερων γειτόνων (K -NN) αντί για την παράμετρο ϵ .

Ξεκινάμε με ένα σύνολο N ατόμων. Σε κάθε άτομο i αντιστοιχεί μια αρχική άποψη $z_i(0) \in [0, 1]$ και ένας πραγματικός αριθμός ϵ_i που δηλώνει το διάστημα εμπιστοσύνης του. Μια πρώτη διαφορά με τα προηγούμενα μοντέλα είναι ότι τώρα δεν καθορίζουμε ρητά τη δομή του δικτύου. Θεωρούμε ότι ο υποκείμενος γράφος είναι πάντα πλήρης, δηλαδή όλοι οι κόμβοι μπορούν να επικοινωνήσουν με όλους τους υπόλοιπους, όπως φαίνεται στο σχήμα 4.10.



Σχήμα 4.10: Δομή του δικτύου κατά την εκτέλεση του μοντέλου HK τις χρονικές στιγμές $t=0$ και $t=1$. Μετά από έναν μόλις γύρο ξεκινούν να σχηματίζονται ομάδες κόμβων (clusters) με παρόμοιες απόψεις.

4.3.2 Περιγραφή Διαδικασίας

Ο κάθε κόμβος i ενημερώνει την άποψή του παίρνοντας τον μέσο όρο όλων των απόψεων των κόμβων που η άποψή τους απέχει λιγότερο από ϵ_i από τη δική του. Αρχίζοντας από τον πλήρη γράφο του δικτύου μπορούμε να φανταστούμε τους κόμβους να ενεργοποιούν μόνο τις ακμές των γειτόνων τους που απέχουν λιγότερο από ϵ σε κάθε γύρο. Η ενημέρωση γίνεται παράλληλα.

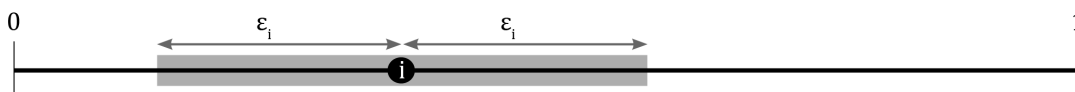
Το σύνολο των γειτόνων ενός κόμβου i που ικανοποιούν την παραπάνω συνθήκη είναι

το

$$I(i, z) = \{1 \leq j \leq N : |z_i - z_j| \leq \epsilon_i\} \quad (4.9)$$

Τελικά, η διαδικασία ενημέρωσης των απόψεων μπορεί να εκφραστεί μαθηματικά με την ακόλουθη σχέση

$$z_i(t+1) = |I(i, z(t))|^{-1} \sum_{j \in I(i, z(t))} z_j(t) \quad (4.10)$$



Σχήμα 4.11: Το διάστημα της εμπιστοσύνης ϵ .

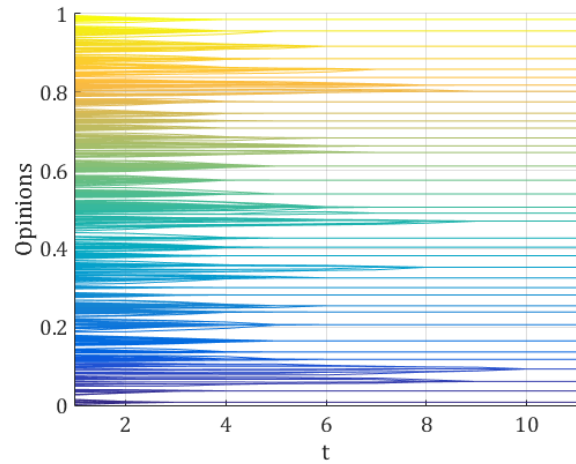
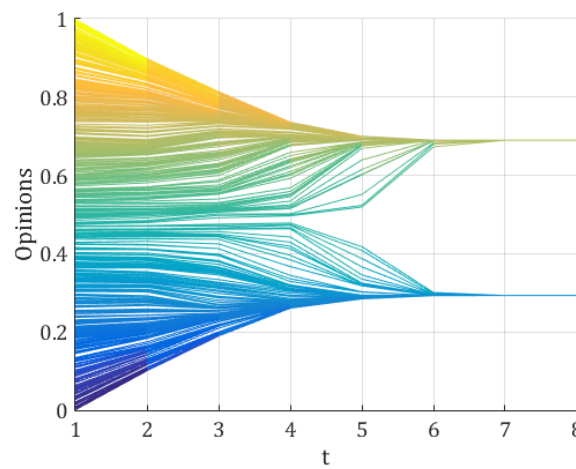
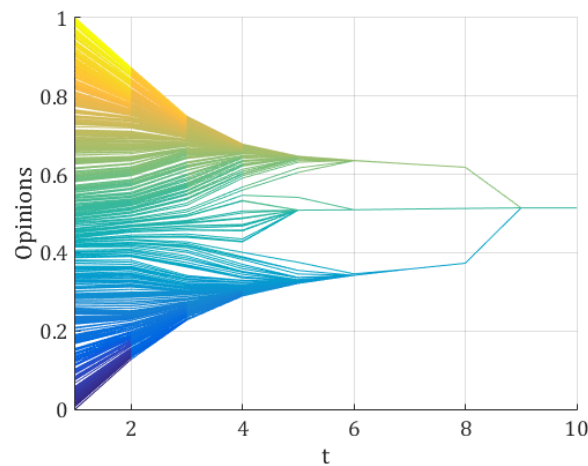
4.3.3 Συμπεριφορά

Η συμπεριφορά του μοντέλου καθορίζεται αποκλειστικά από την τιμή της παραμέτρου ϵ , δηλαδή του *βαθμού εμπιστοσύνης* που δείχνει ένας κόμβος στους γύρω του. Στο σχήμα 4.12 βλέπουμε τρεις διαφορετικές εκτελέσεις του μοντέλου για 625 κόμβους και σταθερό, τυχαίο διάνυσμα αρχικών απόψεων.

Παρατηρούμε τρία διαφορετικά φαινόμενα που είναι χαρακτηριστικά της συμπεριφοράς του μοντέλου

- Στην πρώτη περίπτωση έχουμε επιλέξει μικρό βαθμό εμπιστοσύνης. Στο τέλος έχουν απομείνει 38 διακριτές τιμές απόψεων. Οι κόμβοι δηλαδή έχουν σχηματίσει ομάδες (clusters) με άλλους κόμβους με τους οποίους είχαν κοντινές αρχικές απόψεις. Σε αυτή την περίπτωση έχουμε *πολυφωνία*.
- Στη δεύτερη περίπτωση έχουμε αρκετά μεγαλύτερο βαθμό εμπιστοσύνης ϵ και ως αποτέλεσμα οι κόμβοι ενώνονται σε δύο "αντίπαλα στρατόπεδα". Καθώς αυξάνεται λοιπόν η παράμετρος ϵ εμφανίζεται το φαινόμενο της *πόλωσης*.
- Στην τρίτη περίπτωση ο βαθμός εμπιστοσύνης είναι αρκετά μεγάλος ώστε να επιτρέπει στα άτομα να έχουν επαφή με ένα μεγάλο φάσμα διαφορετικών απόψεων. Έτσι τελικά η δυναμική διαμόρφωση των απόψεων καταλήγει σε *ομοφωνία*.

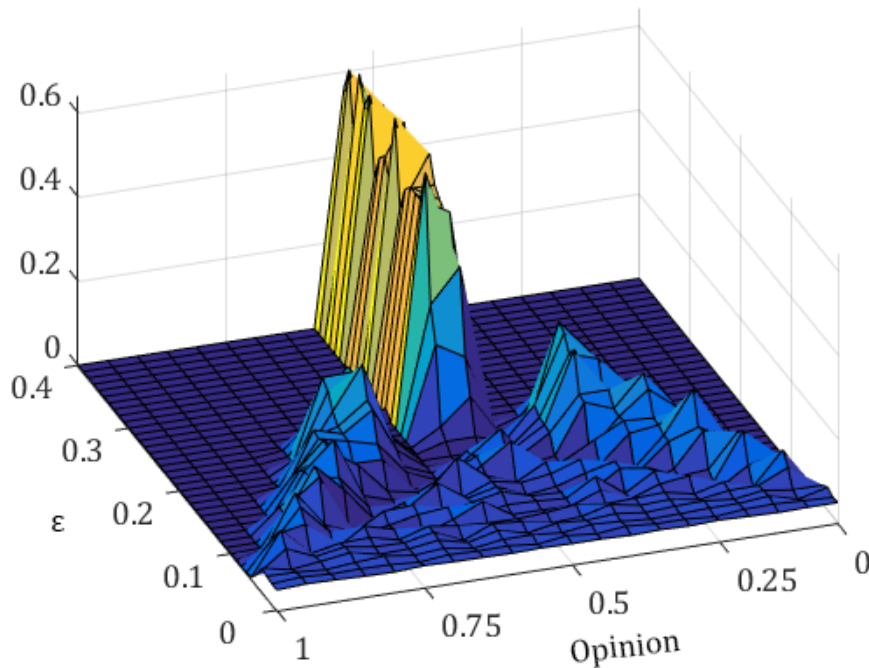
Αφού πήραμε μια βασική ιδέα για τη συμπεριφορά του μοντέλου σε single runs, θα θέλαμε τώρα να εξετάσουμε πιο αναλυτικά το τι ακριβώς συμβαίνει με την αύξηση της τιμής του βαθμού εμπιστοσύνης ϵ . Το αποτέλεσμα αυτής της μελέτης φαίνεται στο σχήμα 4.13. Για τη δημιουργία του πήραμε 40 διακριτές τιμές του βαθμού εμπιστοσύνης στο διάστημα $[0, 0.4]$. Για κάθε τιμή του ϵ τρέξαμε το μοντέλο 50 φορές με διαφορετικά διανύσματα αρχικών απόψεων.

(a) $\epsilon = 0.01$ (b) $\epsilon = 0.2$ (c) $\epsilon = 0.25$ **Σχήμα 4.12:** Εξέλιξη των απόψεων διάφορες τιμές του ϵ .

Οι οριζόντιοι άξονες αντιπροσωπεύουν τις τιμές των τελικών απόψεων και της παραμέτρου ϵ αντίστοιχα, ενώ ο κατακόρυφος άξονας δείχνει την πυκνότητα των απόψεων στην ισορροπία. Ουσιαστικά μια τομή του γραφήματος παράλληλη προς τον άξονα των απόψεων είναι ένα ιστόγραμμα των απόψεων στην ισορροπία για κάποιο ϵ .

Για μικρές τιμές του ϵ οι απόψεις στην ισορροπία είναι ομοιόμορφα κατανομημένες, χωρίς να υπερισχύει κάποια συγκεκριμένη άποψη. Κάτι τέτοιο επαληθεύεται από την πρώτη προσομοίωση του σχήματος 4.12. Καθώς αυξάνεται όμως ο βαθμός εμπιστοσύνης, φαίνεται να σηκώνονται δύο βουνά αντιδιαμετρικά του επιπέδου $y = 0.5$. Το ύψος των δύο αυτών βουνών, που είναι η συχνότητα εμφάνισης των απόψεων σε αυτές τις τιμές διαρκώς αυξάνεται, ενώ τα βουνά πλησιάζουν προς τη μέση των απόψεων. Παράδειγμα αυτής της συμπεριφοράς είναι η δεύτερη προσομοίωση του 4.12. Τέλος για $\epsilon = 0.25$ τα δύο βουνά εξαφανίζονται απότομα και τη θέση τους παίρνει ένα ψηλότερο βουνό ακριβώς στο κέντρο των απόψεων. Έχουμε πλέον ομοφωνία όπως παρατηρήσαμε στην τρίτη περίπτωση του 4.12.

Οι μεταβάσεις του μοντέλου είναι αυτές που υποψιαστήκαμε αρχικά: Από την πολυφωνία περνάμε στην πόλωση των απόψεων και τελικά στην ομοφωνία. Μια πιο εμπειροστατωμένη πειραματική ανάλυση της συμπεριφοράς αυτής, καθώς και άλλων υποπεριπτώσεων, μπορεί να βρεθεί στο αρχικό paper των Hegselmann-Krause [Hegs02].



Σχήμα 4.13: Πυκνότητα των απόψεων καθώς μεταβάλλεται η παράμετρος ϵ .

4.4 Μοντέλο ΗΚ με Περιορισμένη Γνώση

4.4.1 Εισαγωγή

Το μοντέλο των Hegselmann-Krause μας δίνει μια πολύ ενδιαφέρουσα οπτική σε έναν πιθανό μηχανισμό διαμόρφωσης και εξάπλωσης των απόψεων σε μια κοινωνία. Τα άτομα επιλέγουν για φίλους τους άλλα άτομα με τα οποία μοιράζονται κάποιες κοινές πεποιθήσεις για τον κόσμο και αποφεύγουν να διατηρήσουν επαφές με ανθρώπους που έχουν αντίθετες απόψεις από την δική τους. Το πρόβλημα που διαπιστώνουμε με μια προσεκτικότερη μελέτη του μοντέλου είναι ότι κάνει μια κάπως ακραία παραδοχή. Θεωρεί ότι το κάθε άτομο μπορεί να έχει άμεση επικοινωνία και να μάθει την άποψη οποιουδήποτε άλλου ατόμου στην κοινωνία! Αυτό προφανώς είναι αδύνατο ακόμα και σε μικρούς κύκλους, όπως για παράδειγμα σε ένα σχολείο ή μια εταιρία, πόσο μάλλον σε ολόκληρες πόλεις ή χώρες. Συνεπώς στη συνέχεια της παρούσας εργασίας θα αναζητήσουμε τρόπους να περιορίσουμε την ποσότητα της διαθέσιμης πληροφορίας και θα ερευνήσουμε πώς αλλάζουν οι απόψεις και τα δίκτυα στο χρόνο.

4.4.2 Περιγραφή Διαδικασίας

Αρχίζουμε με την απλούστερη παραλλαγή του προηγούμενου μοντέλου στην οποία μπορούμε να περιορίσουμε την ποσότητα της διαθέσιμης πληροφορίας. Τα άτομα επιλέγουν όπως και πριν φίλους για να υπολογίσουν τον μέσο όρο των απόψεών τους. Η διαφορά με το προηγούμενο μοντέλο εντοπίζεται στο γεγονός ότι τώρα η επιλογή των φίλων περιορίζεται από έναν υποκείμενο γράφο που αντιπροσωπεύει τις κοινωνικές σχέσεις των ατόμων. Μπορούμε να φανταστούμε πως το υπάρχον δίκτυο είναι το κοινωνικό δίκτυο της οικογένειας, των γνωστών, των συναδέλφων κ.λπ. ενός ατόμου. Όταν κάποιος καλείται να πάρει μια απόφαση θα λάβει υπόψη του αυτούς με τους οποίους συμφωνεί σε κάποιον βαθμό και όχι εκείνους οι οποίοι θεωρεί ότι έχουν ακραίες απόψεις.

Ο κάθε κόμβος i ενημερώνει την άποψή του ως τον μέσο όρο των απόψεων όλων των υπόλοιπων κόμβων της γειτονιάς του που η άποψή τους απέχει λιγότερο από ϵ_i από τη δική του. Ξεκινώντας από τον γράφο του δικτύου μπορούμε να φανταστούμε τους κόμβους να ενεργοποιούν μόνο τις ακμές των γειτόνων τους που απέχουν λιγότερο από ϵ σε κάθε γύρο. Η ενημέρωση γίνεται παράλληλα με τον κανόνα που ισχύει και στο απλό μοντέλο ΗΚ:

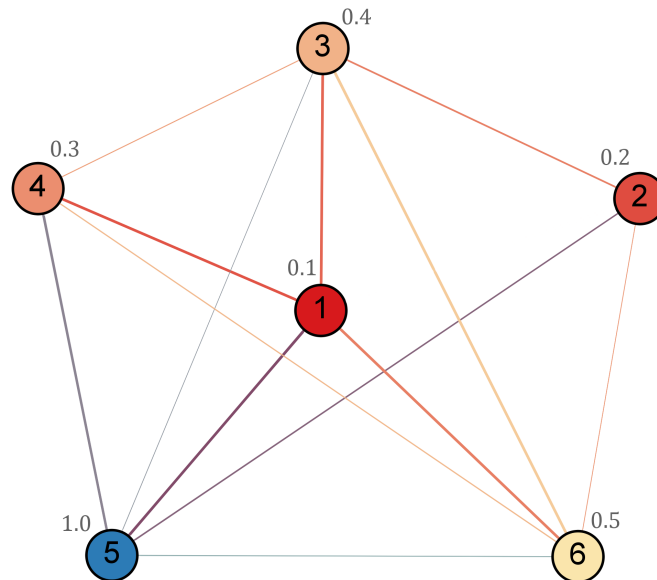
$$z_i(t+1) = |I(i, z(t))|^{-1} \sum_{j \in I(i, z(t))} z_j(t) \quad (4.11)$$

Η διαφορά με την προηγούμενη διαδικασία ενημέρωσης βρίσκεται στον τρόπο επιλογής των γειτόνων. Τώρα επιλέγονται μόνο άτομα με τα οποία υπάρχει ήδη ακμή στον γράφο του δικτύου. Κατά σύμβαση θεωρούμε ότι ο κάθε κόμβος είναι μέλος της γειτονιάς του στον γράφο.

$$I(i, z) = \{j \in N(i) : |z_i - z_j| \leq \epsilon_i\} \quad (4.12)$$

Παράδειγμα Για να γίνει περισσότερο κατανοητή η διαδικασία ενημέρωσης με τη χρήση υποκείμενου γράφου θα δούμε ένα απλό παράδειγμα. Έστω ότι έχουμε το δίκτυο του σχήματος 4.14 που περιλαμβάνει 6 κόμβους. Η τιμή της άποψης του κάθε κόμβου βρίσκεται γραμμένη δίπλα του με γκριζα γράμματα. Θα ασχοληθούμε με τον

κόμβο 1 αφού η διαδικασία είναι πανομοιότυπη για τους υπόλοιπους κόμβους. Θεωρούμε ότι ο γράφος είναι μη κατευθυνόμενος χωρίς αυτό να αλλάζει κάτι ουσιαστικό στο μοντέλο. Έστω ότι $\epsilon = 0.4$.



Σχήμα 4.14: Παράδειγμα εκτέλεσης μοντέλου ΗΚ με περιορισμένη γνώση σε 6 κόμβους.

Για να ενημερώσει την άποψή του ο πρώτος κόμβος πρέπει πρώτα να υπολογίσει τη γειτονιά του. Παρατηρώντας τον γράφο προκύπτει ότι $N(1) = \{1, 3, 4, 5, 6\}$. Στη συνέχεια εφαρμόζουμε την εξίσωση (4.12) οπότε για την τιμή του ϵ που έχουμε επιλέξει θα είναι $I(1, z) = \{1, 3, 4, 6\}$.

Τελικά ο κανόνας ενημέρωσης για τον πρώτο κόμβο δίνει την καινούργια του άποψη

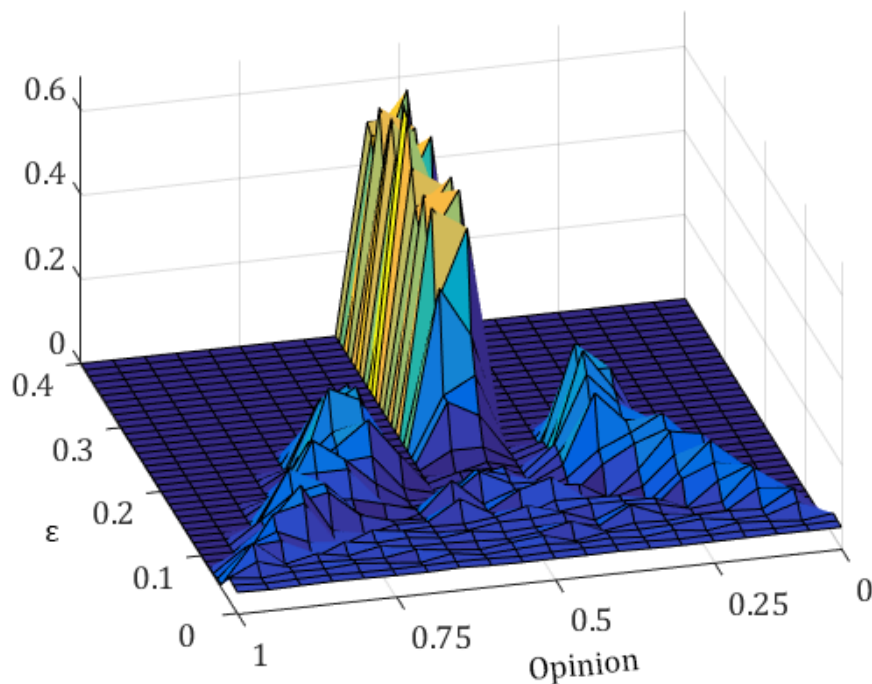
$$z_1(1) = \frac{1}{4}(0.1 + 0.4 + 0.3 + 0.5) = 0.325 \quad (4.13)$$

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα επειδή είχαμε δίκτυο με μεγάλο μέσο βαθμό και χρησιμοποιήσαμε υψηλή τιμή του ϵ , ο κόμβος 1 χρησιμοποίησε σχεδόν όλους τους γνωστούς του για να αποφασίσει την καινούργια του άποψη. Κάτι τέτοιο δεν είναι πάντα επιθυμητό και αργότερα θα εξετάσουμε μια εναλλακτική προσέγγιση στο συγκεκριμένο πρόβλημα.

4.4.3 Συμπεριφορά

Η συμπεριφορά του μοντέλου δεν καθορίζεται πλέον αποκλειστικά από την παράμετρο ϵ . Λόγω της εξίσωσης (4.12) περιμένουμε πως ο μέσος βαθμός του δικτύου θα ασκεί και αυτός κάποια επιρροή στη δυναμική συμπεριφορά των απόψεων. Όταν το δίκτυο έχει σχεδόν πλήρη γράφο, δηλαδή βαθμό ίσο με τον αριθμό των κόμβων, το μοντέλο θα εκφυλίζεται σε απλό ΗΚ. Συνεπώς αυτό που μας ενδιαφέρει είναι η εξέλιξη της διαδικασίας ενημέρωσης των απόψεων για σχετικά μικρό μέσο βαθμό του δικτύου που συνεπάγεται λιγότερη διαθέσιμη πληροφορία στους κόμβους.

Επαναλαμβάνουμε το πείραμα του σχήματος 4.13 με την εξής διαφοροποίηση. Έχουμε και πάλι ένα δίκτυο 625 κόμβων και δοκιμάζουμε 40 διακριτές τιμές του ϵ στο διάστημα $[0, 0.4]$. Όπως και πριν για κάθε τιμή του βαθμού εμπιστοσύνης κάνουμε 50 επαναλήψεις, μόνο που τώρα αυτές γίνονται για 50 διακριτά δίκτυα Erdős-Rényi με μέσους βαθμούς στο διάστημα $[14, 62]$ με τυχαίο αρχικό διάνυσμα απόψεων κάθε φορά. Τελικά απεικονίζουμε τη συχνότητα των απόψεων στην ισορροπία ως συνάρτηση της παραμέτρου ϵ του μοντέλου.



Σχήμα 4.15: Πυκνότητα των απόψεων καθώς μεταβάλλεται η παράμετρος ϵ για το μοντέλο HK με περιορισμένη γνώση.

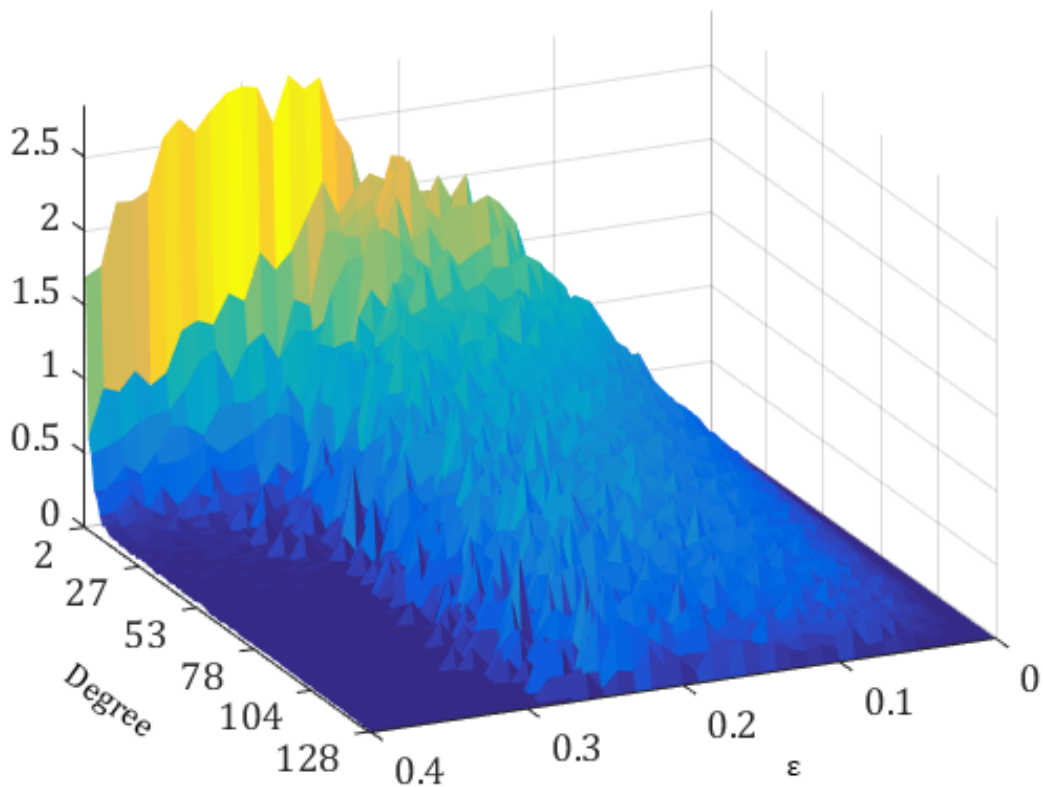
Το αποτέλεσμα του πειράματος φαίνεται στο σχήμα 4.15. Η ομοιότητα με το αντίστοιχο πείραμα του απλού μοντέλου των Hegselmann-Krause είναι προφανής. Αν μειώσουμε ακόμα περισσότερο τον μέσο βαθμό των δικτύων η ομοιότητα αρχίζει να εξαφανίζεται. Όμως ακόμα και σε αυτό το εύρος βαθμών το αποτέλεσμα είναι εντυπωσιακό. Μειώσαμε κατά τουλάχιστον 90% την πληροφορία που έχει ο κάθε κόμβος στη διάθεσή του και η συμπεριφορά του μοντέλου παρέμεινε σχεδόν η ίδια!

Πόσο καλά όμως τελικά προσομοιώνει το μοντέλο αυτό το αρχικό μοντέλο HK; Ένας τρόπος να μάθουμε πειραματικά κάποια στοιχεία σχετικά με αυτό το ερώτημα είναι να εκτελέσουμε την ακόλουθη δοκιμή. Τρέχουμε και τα δύο μοντέλα με 128 κόμβους για 40 τιμές του ϵ στο διάστημα $[0, 0.4]$ και 100 τιμές της παραμέτρου p του δικτύου Erdős-Rényi στο διάστημα $[0, 1]$. Για καθεμία από αυτές τις τιμές καταγράφουμε τη διαφορά των απόψεων στην ισορροπία τους με βάση την 2-νόρμα της διαφοράς των δύο διανυσμάτων. Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται 16 φορές για τυχαία διανύσματα αρχικών απόψεων.

Παρατηρώντας το σχήμα 4.16 διαπιστώνουμε τα ακόλουθα:

- Στο διάστημα $\epsilon \in [0, 0.05]$ δεν συμβαίνει κάτι το ενδιαφέρον καθώς το διάστημα εμπιστοσύνης είναι πολύ μικρό και οι ομάδες των κόμβων (clusters) ολιγομελείς.

- Στο διάστημα $\epsilon \in [0.05, 0.25]$ και τα δύο μοντέλα σχηματίζουν ομάδες με κοινή άποψη που γίνονται όλο και μεγαλύτερες όσο αυξάνεται η τιμή της παραμέτρου εμπιστοσύνης. Εδώ παρατηρούμε μια απόκλιση που μειώνεται με την αύξηση του μέσου βαθμού.
- Στο διάστημα $\epsilon \in [0.25, 0.4]$ τα δύο μοντέλα έχουν καταλήξει σε ομοφωνία. Εξαιρέση αποτελεί η περίπτωση των δικτύων με πάρα μικρό βαθμό (κοντά στο 2). Σε αυτές τις περιπτώσεις το μοντέλο δεν καταφέρνει να φτάσει σε ομοφωνία για τους ίδιους λόγους με πριν και έτσι η απόκλιση είναι σχετικά μεγάλη. Επειδή όμως τώρα υπάρχει μεγάλο διάστημα εμπιστοσύνης, μικρή αύξηση του μέσου βαθμού του δικτύου προκαλεί την εξαφάνιση του φαινομένου αυτού.



Σχήμα 4.16: Απόσταση στην ισορροπία μεταξύ των μοντέλων ΗΚ πλήρους και περιορισμένης γνώσης.

4.5 Μοντέλο K-Nearest Neighbors (K-NN)

4.5.1 Εισαγωγή

Στην παραλλαγή του μοντέλου των Hagselmann-Krause με τοπική γνώση που εξετάσαμε προηγουμένως, προσπαθήσαμε να πλησιάσουμε περισσότερο τη διαδικασία διαμόρφωσης των απόψεων όπως αυτή φαίνεται να συμβαίνει στην πραγματική ζωή. Παρόλα αυτά υπάρχει ακόμα ένα πρόβλημα που είχαμε αγνοήσει ως τώρα. Εάν όλοι οι γνωστοί του ατόμου έχουν παρόμοια άποψη ή εάν το άτομο δείχνει μεγάλο βαθμό εμπιστοσύνης, τότε το άτομο θα ενεργοποιήσει έναν μεγάλο αριθμό γειτονικών του ακμών. Όμως ακμές του γράφου που χρησιμοποιούμε στο μοντέλο της περιορισμένης γνώσης υπονοούν το σύνολο των κοινωνικών επαφών ενός ατόμου. Με βάση τα παραπάνω βλέπουμε ότι είναι πιθανό το άτομο να υπολογίσει την άποψη των δεκάδων ή και εκατοντάδων μακρινών επαφών του για να λάβει μια απόφαση.

Η προηγούμενη κατάσταση απέχει αρκετά από την πραγματική ζωή. Τι μπορούμε να κάνουμε για να την αποφύγουμε; Μια λύση είναι να "κλειδώσουμε" τον αριθμό των επαφών που μπορεί να χρησιμοποιήσει ένας κόμβος για να ενημερώσει την άποψη του. Δηλαδή σε αυτή την περίπτωση θα επιλέγει από τη γειτονιά του με έναν συγκεκριμένο αριθμό φίλων του που έχουν την κοντινότερη άποψη στη δική του και όχι όλους αυτούς που βρίσκονται μέσα στο διάστημα εμπιστοσύνης. Αυτή ακριβώς είναι η ιδέα του μοντέλου K-Nearest Neighbors ή K-NN.

4.5.2 Περιγραφή Διαδικασίας

Στο μοντέλο K-NN ο βαθμός εμπιστοσύνης ϵ αντικαθίσταται από την παράμετρο K που υποδηλώνει τον αριθμό των κοντινότερων σε άποψη γειτόνων που λαμβάνει υπόψη του ο κάθε κόμβος για να ενημερώσει την άποψή του. Σε κάθε γύρο όλοι οι κόμβοι ταξινομούν τους γείτονές τους στο δίκτυο με βάση την απόσταση που έχει η άποψή τους από τη δική τους και στη συνέχεια ενημερώνουν παράλληλα τις απόψεις βάσει του κανόνα

$$z_i(t+1) = \frac{1}{K} \sum_{j \in I(i, z(t))} z_j(t) \quad (4.14)$$

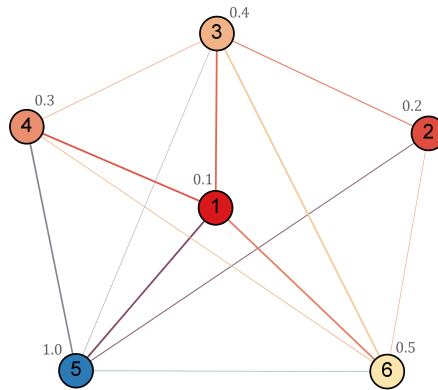
όπου,

$$I(i, z) = \{j \in N(i) : j \in \text{K-NN του } i\} \quad (4.15)$$

Υπενθυμίζουμε ότι με $N(i)$ συμβολίζεται η γειτονιά του κόμβου i στον υποκείμενο γράφο και πάντα ισχύει $i \in N(i)$.

Παράδειγμα Για να γίνει κατανοητή η διαφορά αυτού του μοντέλου με το μοντέλο HK με περιορισμένη γνώση, θα επαναλάβουμε το παράδειγμα που είχαμε δει στην προηγούμενη ενότητα.

Έστω ότι έχουμε και πάλι τον γράφο του σχήματος 4.17 που περιλαμβάνει 6 κόμβους. Η τιμή της άποψης του κάθε κόμβου βρίσκεται γραμμένη δίπλα του με γκριζα γράμματα. Θα ασχοληθούμε με τον κόμβο 1 αφού η διαδικασία είναι πανομοιότυπη για τους υπόλοιπους κόμβους. Θεωρούμε ότι ο γράφος είναι μη κατευθυνόμενος χωρίς αυτό να αλλάζει κάτι ουσιαστικό στο μοντέλο. Έστω ότι $K = 3$.



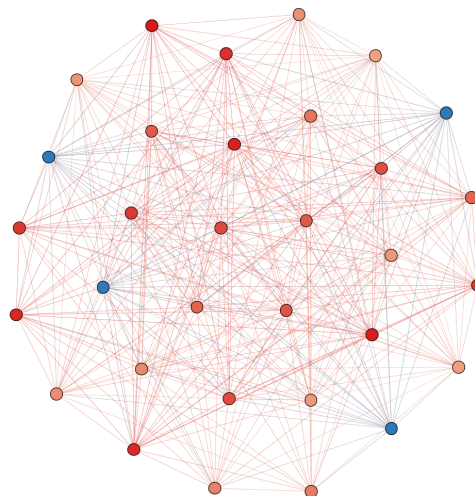
Σχήμα 4.17: Παράδειγμα εκτέλεσης μοντέλου K-NN.

Για να ενημερώσει την άποψη του ο πρώτος κόμβος πρέπει πρώτα να υπολογίσει τη γειτονιά του. Παρατηρώντας τον γράφο προκύπτει ότι $N(1) = \{1, 3, 4, 5, 6\}$. Ταξινομούμε τους γείτονες με βάση τη διαφορά της άποψής τους από αυτή του κόμβου 1. Έτσι $N_{sorted}(1) = \{1, 4, 3, 6, 5\}$. Στη συνέχεια εφαρμόζουμε την εξίσωση (4.15) οπότε για την τιμή του K που έχουμε επιλέξει θα είναι $I(1, z) = \{1, 4, 3\}$.

Τελικά ο κανόνας ενημέρωσης για τον πρώτο κόμβο δίνει την καινούργια του άποψη

$$z_1(1) = \frac{1}{3}(0.1 + 0.4 + 0.3) = 0.27 \quad (4.16)$$

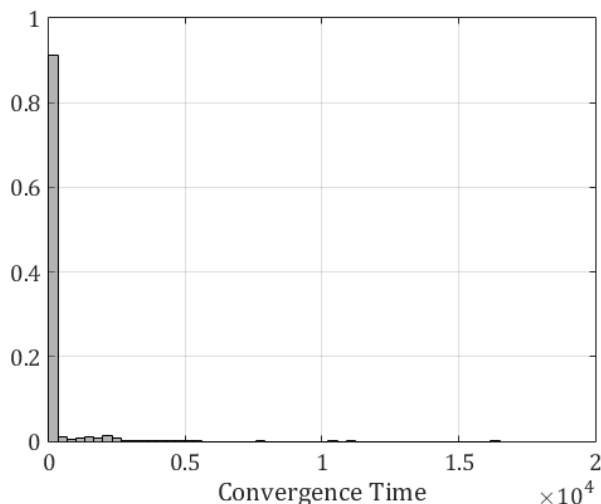
Είναι προφανές ότι ανεξάρτητα από τον αριθμό των κόμβων με κοντινή άποψη στη γειτονιά του, ο κόμβος 1 θα διαλέγει πάντα 2 γείτονες (και τον εαυτό του) για να υπολογίσει τη νέα του άποψη. Η χρησιμότητα του μοντέλου μπορεί να φανεί πιο καθαρά σε μεγαλύτερα δίκτυα όπως αυτό του σχήματος 4.18. Σε αυτό το δίκτυο, λόγω της μεγάλης εγγύτητας των απόψεων, αν χρησιμοποιήσουμε το μοντέλο HK με περιορισμένη γνώση τότε ακόμα και για μικρά ϵ ο βαθμός του κάθε κόμβου θα πλησιάζει αυτόν του δικτύου. Αντίθετα, η χρήση του μοντέλου K-NN διασφαλίζει ότι ο κάθε κόμβος ακόμα και σε αυτή την περίπτωση θα συμβουλευείται έναν μικρό αριθμό γειτόνων.



Σχήμα 4.18: Παράδειγμα μεγαλύτερου δικτύου με κοντινές απόψεις.

4.5.3 Σύγκλιση

Μελέτη Σύγκλισης Η συζήτηση που προηγήθηκε πρέπει να έχει καταστήσει σαφές το γεγονός ότι το μοντέλο K-NN έχει ριζικά διαφορετική συμπεριφορά από το μοντέλο των Hegselmann-Krause και την παραλλαγή του. Συνεπώς το πρώτο ερώτημα που πρέπει να τεθεί είναι το αν το μοντέλο συγκλίνει. Για να εξετάσουμε τη σύγκλιση επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία που εφαρμόσαμε και για το μοντέλο με τα μεταβλητά βάρη που είδαμε νωρίτερα⁷. Επειδή σε κάποιες περιπτώσεις η διάρκεια ολοκλήρωσης των προσομοιώσεων ήταν απαγορευτική, αυξήσαμε το κατώφλι της ισορροπίας σε μεταβολή της τάξης του 10^{-5} .



Σχήμα 4.19: Ιστογράμμα χρόνου σύγκλισης του μοντέλου K-NN.

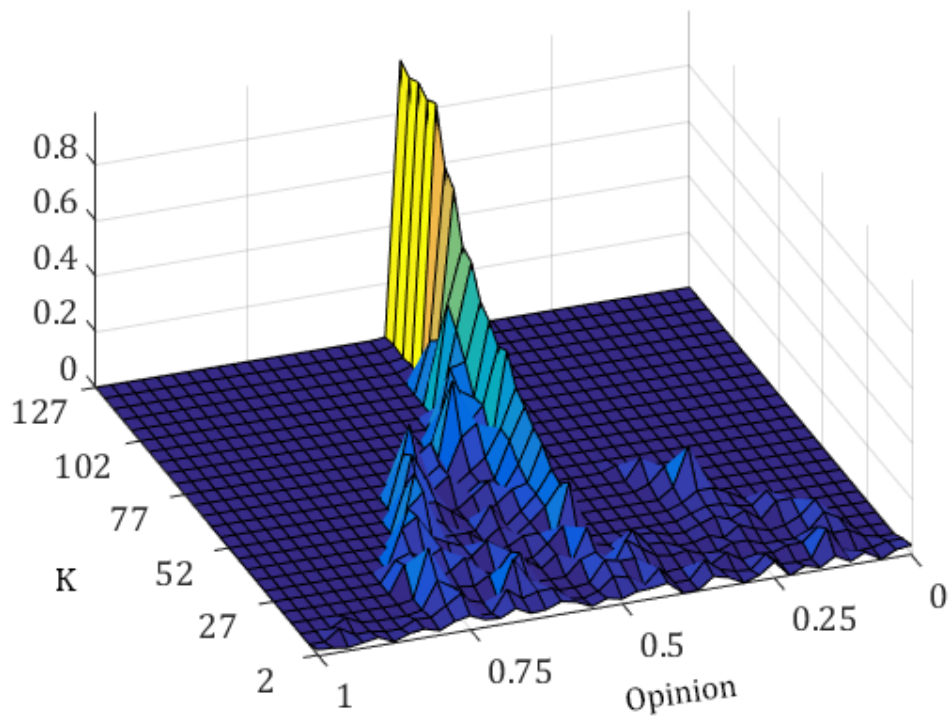
Το αποτέλεσμα του πειράματος παρουσιάζεται στο σχήμα 4.19. Το όριο της μη σύγκλισης που είχαμε θέσει ήταν οι 100.000 γύροι. Το πρώτο πράγμα που μπορούμε να πούμε με σιγουριά είναι πως το μοντέλο συγκλίνει. Η πλειοψηφία (89.5%) των εκτελέσεων ολοκληρώθηκε σε λιγότερους από 250 γύρους. Οι υπόλοιπες εκτελέσεις συνήθως τελείωναν σε λιγότερους από 1000 γύρους αλλά υπήρξαν και λίγες (αλλά όχι μεμονωμένες) περιπτώσεις που ξεπέρασαν τους 5000 γύρους. Θα χρειαστεί να δούμε πιο διεξοδικά τη συμπεριφορά του μοντέλου για να μπορέσουμε να εξηγήσουμε τις μεγάλες αποκλίσεις στους χρόνους σύγκλισης.

Για να εμβαθύνουμε στην ανάλυσή μας, ας προσπαθήσουμε να πάρουμε μια ιδέα για τη συμπεριφορά των απόψεων στην ισορροπία καθώς μεταβάλλεται το K . Στο σχήμα 4.20 φαίνεται μια παρόμοια δοκιμή με αυτή του 4.15⁸. Δυστυχώς το σχήμα αυτό δεν μας δίνει πολλές πληροφορίες. Το μόνο πράγμα που μπορούμε να υποψιαστούμε είναι ότι για αρκετά μεγάλες τιμές του K το μοντέλο βρίσκεται κοντά στην ομοφωνία.

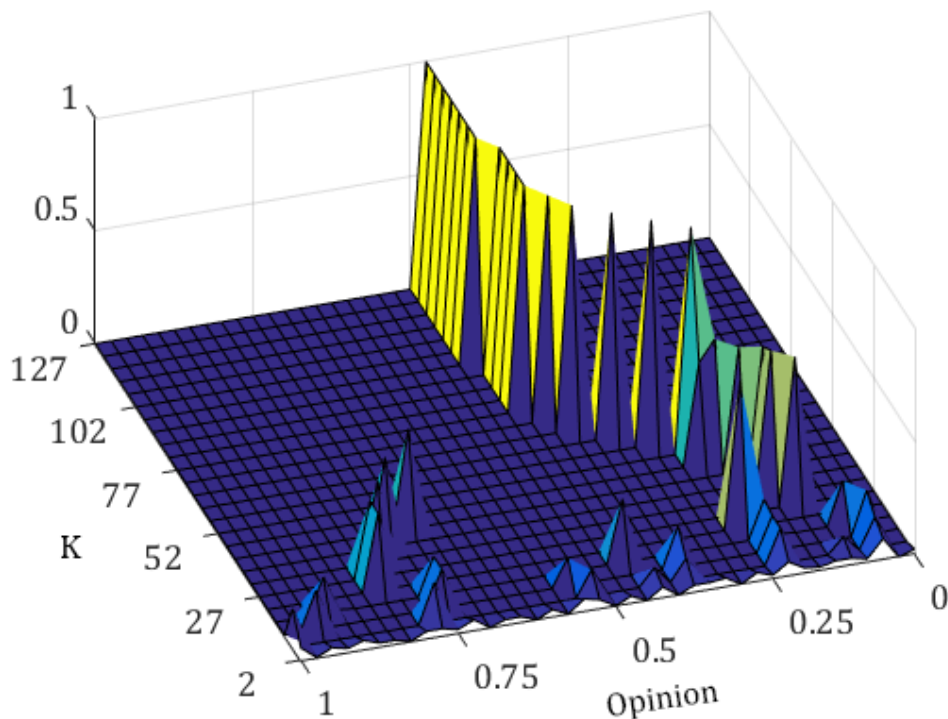
Προσπαθώντας να πάρουμε μια καλύτερη διαίσθηση της συμπεριφοράς του μοντέλου,

⁷Τρέξαμε συνολικά 768 προσομοιώσεις σε δίκτυα Erdős-Rényi και Scale-Free για 32 έως 512 κόμβους. Για τα δίκτυα Erdős-Rényi είχαμε 12 δοκιμές με τιμές του p από 0 έως 1 σε ευθεία γραμμή. Για τα δίκτυα Scale-Free η τιμή του m_0 επιλεγόταν τυχαία στο διάστημα $[1, N/2]$ και η τιμή του m επιλεγόταν επίσης τυχαία μέσα στο επιτρεπτό διάστημα $[1, m_0 - 1]$. Για κάθε δίκτυο επαναλάβαμε την προσομοίωση τέσσερις φορές με διαφορετικό τυχαίο διάνυσμα αρχικών απόψεων κάθε φορά. Η παράμετρος K επιλεγόταν τυχαία σε κάθε εκτέλεση στο διάστημα $[1, N]$.

⁸Για το πείραμα αυτό, επιλέξαμε 25 διακριτές τιμές του K στο διάστημα $[1, 128]$. Για καθεμία από αυτές τρέχουμε το μοντέλο σε 24 διαφορετικά τυχαία δίκτυα Erdős-Rényi με τυχαίο σταθερό αρχικό διάνυσμα απόψεων. Τελικά απεικονίζουμε τη συχνότητα των απόψεων στην ισορροπία ως συνάρτηση της παραμέτρου K του μοντέλου.



Σχήμα 4.20: Πυκνότητα των απόψεων καθώς μεταβάλλεται η παράμετρος K (πολλά δίκτυα).



Σχήμα 4.21: Πυκνότητα των απόψεων καθώς μεταβάλλεται η παράμετρος K σε ένα δίκτυο.

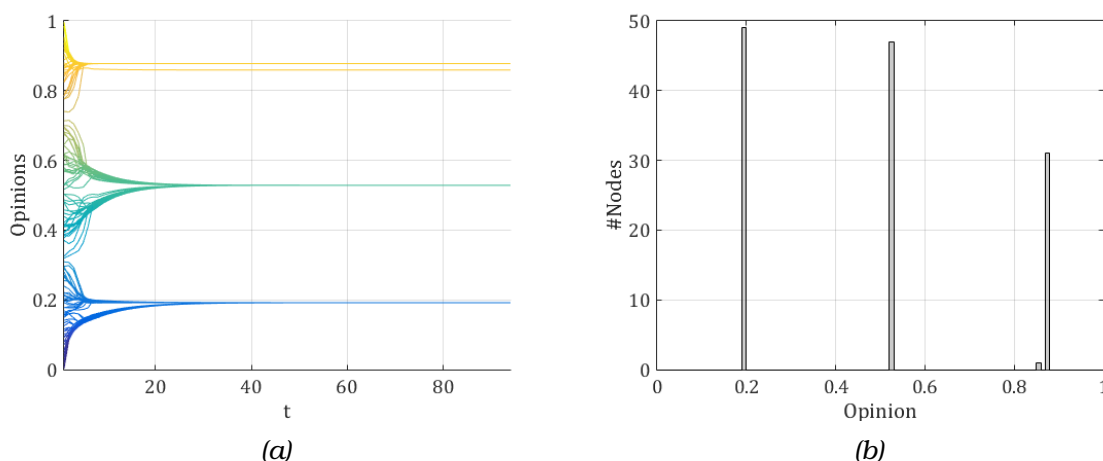
δημιουργούμε ένα παρόμοιο γράφημα για ένα μόνο δίκτυο και διάλυση αρχικών απόψεων, σε διάφορες τιμές του K . Το σχήμα 4.21 μας δίνει μια λίγο πιο καθαρή εικόνα. Για μικρές τιμές του K σχηματίζονται κάποιες ομάδες κόμβων, οι οποίες όμως δεν είναι συμμετρικές, ούτε καταλήγουν σε πόλωση. Για μεγαλύτερες τιμές του K το μοντέλο φτάνει στην ομοφωνία, το σημείο της οποίας όμως μετακινείται καθώς αυξάνεται η παράμετρος αυτή⁹

Δημιουργία Ομάδων Κόμβων (Clusters) Στο προηγούμενο σχήμα είναι εμφανές ότι καθώς αυξάνεται η παράμετρος K έχουμε τον σχηματισμό ομάδων κόμβων με κοινές απόψεις (clusters) οι οποίες μεγαλώνουν σε μέγεθος μέχρι τελικά να ενωθούν και αν καταλήξουν στην ομοφωνία. Στο σχήμα 4.22 βλέπουμε την εξέλιξη των απόψεων για $K=20$ και το ιστόγραμμα των απόψεων στην ισορροπία. Εδώ έχουμε ένα κάπως περίεργο φαινόμενο που δεν είχε εμφανιστεί σε κάποιο από τα προηγούμενα μοντέλα.

Μόλις οι απόψεις σταθεροποιηθούν έχουν δημιουργηθεί τρεις μεγάλες ομάδες κόμβων. Όμως πολύ κοντά στην μεγαλύτερη από αυτές (με άποψη που βρίσκεται κοντά στο 0.87) υπάρχει μια επιπλέον ομάδα. Όπως διαπιστώνουμε από το ιστόγραμμα, η ομάδα αυτή αποτελείται από έναν μόνο κόμβο. Το ερώτημα που προκύπτει είναι προφανές. Εφόσον αυτός ο κόμβος έχει άποψη πολύ κοντά στο διπλανό του cluster, γιατί δεν ενώνεται με αυτό; Για να το πλησιάσει τόσο πολύ πρέπει προφανώς να έχει κάποια επικοινωνία με τους κόμβους του. Ποιο είναι λοιπόν το φαινόμενο αυτό που αποτρέπει αυτές τις δύο πολύ κοντινές απόψεις να ενωθούν;

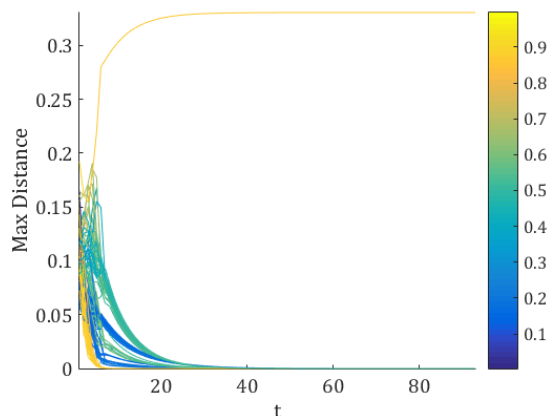
Το σχήμα 4.23 μας φέρνει πιο κοντά στην απάντηση που αναζητούμε. Σε αυτό φαίνεται η καταγραφή της απόστασης του πιο μακρινού γείτονα που λαμβάνει υπόψη του ο κάθε κόμβος καθώς εξελίσσεται το μοντέλο. Τα χρώματα αντιπροσωπεύουν την άποψη του ίδιου του κόμβου στο χρόνο. Όπως βλέπουμε λοιπόν, υπάρχει ένας κόμβος με άποψη κοντά στο 0.9 για τον οποίο η άποψη του πιο μακρινού του γείτονα αυξάνεται όσο περνάει ο χρόνος και σταθεροποιείται περίπου στο 0.33. Από αυτό συμπεραίνουμε ότι ο κόμβος που μας ενδιαφέρει έχει τουλάχιστον έναν γείτονα στο cluster που βρίσκεται στην περιοχή του 0.5.

Το γεγονός αυτό δημιουργεί ακόμα περισσότερα ερωτήματα. Πώς γίνεται να σταθερο-



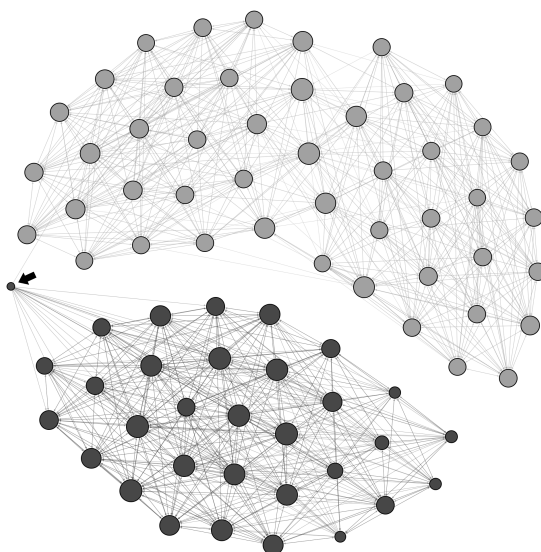
Σχήμα 4.22: Εξέλιξη του μοντέλου και ιστόγραμμα απόψεων στην ισορροπία για $K=20$.

⁹Επιλέξαμε ένα δίκτυο Erdős-Rényi μεγάλου βαθμού γιατί έτσι είναι πιο εμφανή τα φαινόμενα που θέλουμε να μελετήσουμε. Για λόγους που θα συζητήσουμε αργότερα, τα δίκτυα μικρού βαθμού καταλήγουν πολύ γρήγορα σε ομοφωνία.



Σχήμα 4.23: Απόσταση του πιο μακρινού γείτονα που λαμβάνει υπόψη του ο κάθε κόμβος. Τα χρώματα αντιπροσωπεύουν τις απόψεις των ίδιων των κόμβων.

ποιούνται οι απόψεις τη στιγμή που η απόσταση ενός κόμβου από τον γείτονά του είναι μη μηδενική; Για να απαντήσουμε πρέπει να δούμε τη δομή του δικτύου στην ισορροπία. Ένα τμήμα του δικτύου αυτού απεικονίζεται στο σχήμα 4.24. Τα χρώματα των κόμβων είναι αντιπροσωπευτικά της τιμής της άποψής τους ενώ τα μεγέθη τους είναι ανάλογα του In-Degree τους, δηλαδή του αριθμού των ακμών που κατευθύνονται προς αυτούς.



Σχήμα 4.24: Ένα τμήμα του δικτύου στην ισορροπία για $K=20$. Τα χρώματα αντιπροσωπεύουν τις απόψεις και τα μεγέθη των κόμβων το In-Degree τους.

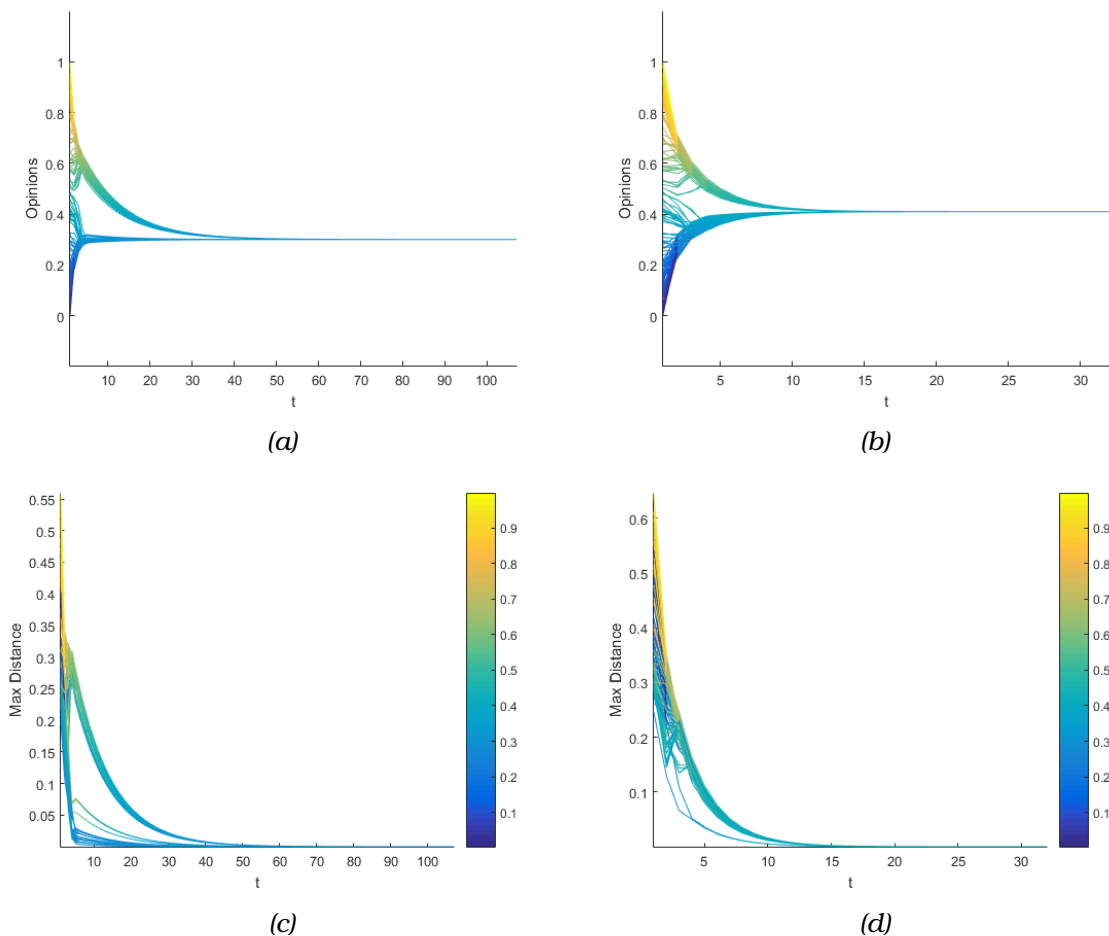
Ο κόμβος-κλειδί έχει σημειωθεί με το βέλος. Το φαινόμενο που συζητάμε προκαλείται από ένα σύνολο ιδιοτήτων του κόμβου αυτού. Αρχικά όπως θα αναμέναμε έχει Out-Degree ίσο με το K , δηλαδή έχει ακμές προς 20 άλλους κόμβους. Ο ένας από αυτούς βρίσκεται στο πάνω cluster που ισορροπεί σε άποψη στο 0.52, ενώ όλοι οι υπόλοιποι βρίσκονται στο κάτω cluster που ισορροπεί στο 0.87. Επίσης κανένας κόμβος δεν έχει ακμή προς τον κόμβο αυτό, έχει δηλαδή In-Degree ίσο με 1 (τον εαυτό του). Τι σημαίνουν όλα αυτά;

Καταρχάς τα δύο μεγάλα clusters δεν έχουν κάποιο τρόπο να επικοινωνήσουν μεταξύ τους και κατά συνέπεια μπορούν να ισορροπήσουν σε συγκεκριμένες απόψεις. Αφού

γίνει αυτό και ο κόμβος που μας ενδιαφέρει θα ισορροπήσει σε έναν σταθμισμένο μέσο όρο των δύο clusters. Πράγματι κάνοντας έναν απλό υπολογισμό, περιμένουμε η άποψη του κόμβου να είναι κοντά στο $0.87\frac{18}{19} + 0.53\frac{1}{19} = 0.85$ (το $\frac{1}{19}$ είναι η άποψη του εαυτού του και το αγνοούμε για λόγους απλότητας των υπολογισμών). Πράγματι, στην ισορροπία η άποψη του κόμβου είναι 0.859, αρκετά κοντά σε αυτό που υπολογίσαμε! Επίσης, αφού σταθεροποιείται σε αυτή την άποψη ο γείτονας του στο cluster του 0.53 θα απέχει αρκετά από αυτόν, πράγμα που εξηγεί τώρα το σχήμα 4.23.

Μετακίνηση της Ομοφωνίας Στα μοντέλα που εξετάσαμε μέχρι στιγμής, από τη στιγμή που περνάγαμε το κατώφλι της ομοφωνίας, η συμπεριφορά των απόψεων ήταν σταθερή όσο και αν άλλαζαν οι παράμετροι του μοντέλου. Εδώ ερχόμαστε αντιμέτωποι με ένα νέο φαινόμενο. Όπως θα περιμέναμε, όταν τα άτομα υπολογίζουν τις απόψεις όλο και περισσότερων φίλων τους, κάποια στιγμή θα καταλήξουν να έχουν την ίδια άποψη. Όμως ανάλογα με το πόσους φίλους ακούν, η τιμή της άποψης που υιοθετεί ολόκληρη η κοινωνία μεταβάλλεται.

Για να ανακαλύψουμε τον λόγο της μετακίνησης αυτής θα πρέπει να παρατηρήσουμε την εξέλιξη των απόψεων καθώς εκτελείται το μοντέλο κοντά στα σημεία μετακίνησης του σημείου ομοφωνίας. Όπως φαίνεται στο σχήμα 4.25 η ισορροπία μετακινείται προς το 0.5 καθώς αυξάνουμε την τιμή του K . Στην μικρή τιμή του K (που είναι αρκετά κοντά στην κατάσταση του δικτύου που καταλήγαμε σε 2 clusters) φαίνεται το πάνω cluster



Σχήμα 4.25: Πάνω σειρά: Εξέλιξη των απόψεων για τιμές $K=50$ και $K=60$ αντίστοιχα. Κάτω σειρά: Απόσταση του μακρινότερου γείτονα των κόμβων στις ίδιες εκτελέσεις.

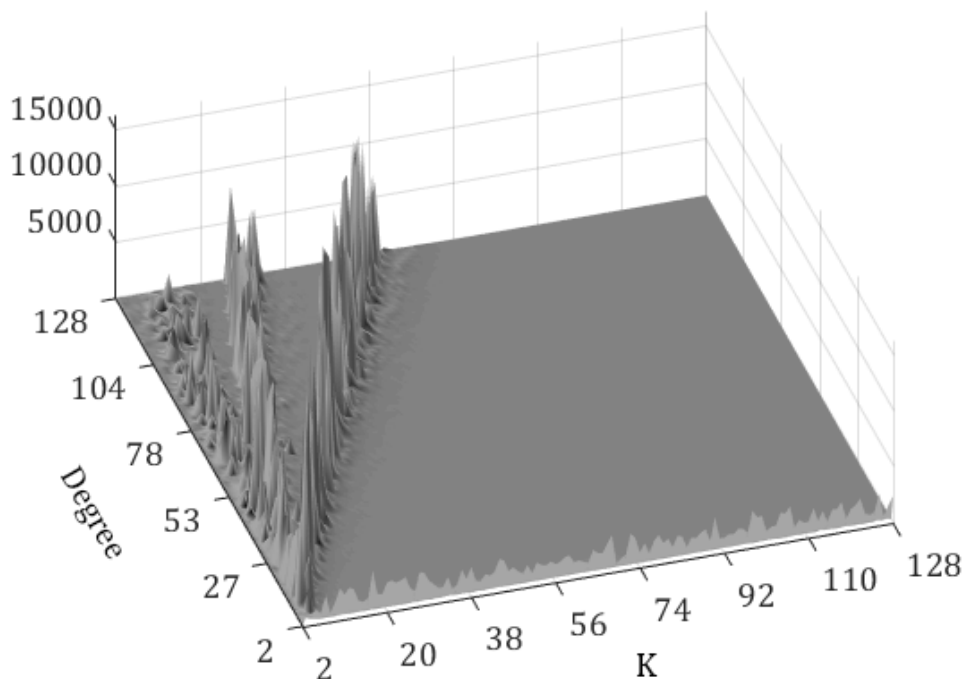
να "τραβιέται" σιγά σιγά προς τα κάτω και να καταλήγει κοντά στο 0.3.

Αντίθετα όταν μεγαλώσουμε το K φαίνεται να μετακινείται και το χαμηλό cluster για να πλησιάσει το άλλο με αποτέλεσμα η ισορροπία να μετακινείται ψηλότερα. Η κατάσταση ξεκαθαρίζει ακόμα περισσότερο αν δούμε σε διάγραμμα την απόσταση του μακρινότερου γείτονα που υπολογίζει ο κάθε κόμβος καθώς περνάει ο χρόνος, στο σχήμα 4.25. Το χρώμα δείχνει την τιμή της άποψης του ίδιου του κόμβου και όχι του γείτονά του.

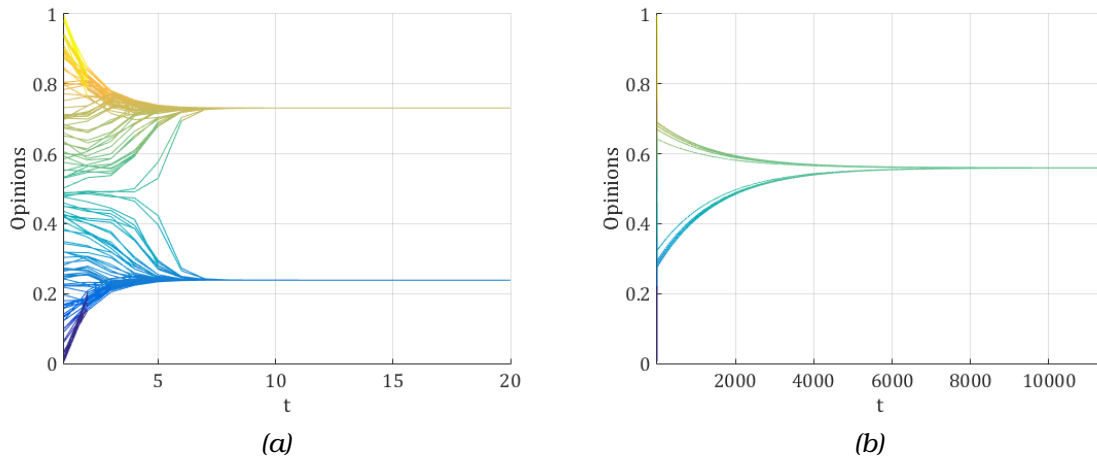
Για την περίπτωση του $K=50$, στο $t=10$ βλέπουμε ότι μόνο οι κόμβοι του πάνω cluster (πράσινη απόχρωση) έχουν γείτονα με απόσταση 0.25, δηλαδή μόνο αυτοί παίρνουν πληροφορία από το ξένο cluster. Αντίθετα οι κόμβοι με πιο έντονο μπλε που ανήκουν στο κάτω clusters έχουν πολύ κοντινούς γείτονες, πράγμα που μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι κοιτάζουν μόνο μέσα στο cluster, με συμπέρασμα να μην το τραβούν προς τα πάνω. Η κατάσταση αλλάζει όταν θέσουμε $K=60$. Τώρα όλοι οι κόμβοι εξακολουθούν να έχουν κάποιον μακρινό γείτονα, πράγμα που υπονοεί αμφίδρομη επικοινωνία μεταξύ των δύο clusters.

4.5.4 Χρόνος Σύγκλισης

Αφού είδαμε κάποια φαινόμενα που χαρακτηρίζουν τη συμπεριφορά του μοντέλου, μπορούμε τώρα να επιστρέψουμε στη μελέτη του χρόνου σύγκλισης. Οι δύο παράμετροι που περιμένουμε να επηρεάζουν τη συμπεριφορά του μοντέλου – και συνεπώς και τον χρόνο σύγκλισης – είναι ο μέσος βαθμός του δικτύου και η παράμετρος K . Έτσι για να πάρουμε μια συνολική εικόνα καταγράφουμε τους χρόνους σύγκλισης για δίκτυα με διαφορετικό μέσο βαθμό και διαφορετικές τιμές του K .



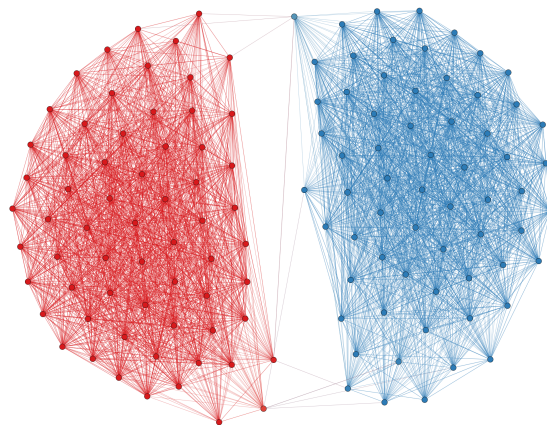
Σχήμα 4.26: Χρόνος σύγκλισης καθώς μεταβάλλεται ο μέσος βαθμός του δικτύου και η παράμετρος K .



Σχήμα 4.27: Εξέλιξη των απόψεων για $K=38$ και $K=44$ αντίστοιχα.

Το αποτέλεσμα ενός τέτοιου πειράματος για δίκτυα 128 κόμβων¹⁰, φαίνεται στο σχήμα 4.26. Αρχικά παρατηρούμε ότι για σταθερό degree του δικτύου, μικρές τιμές του K έχουν ως συνέπεια σχετικά μεγάλους χρόνους σύγκλισης. Το αποτέλεσμα αυτό είναι λογικό, καθώς μικρές τιμές του K σημαίνουν μικρότερη διαθέσιμη πληροφορία και άρα πιο αργή διάχυση των απόψεων στο δίκτυο. Όσο συνεχίζει να αυξάνεται η παράμετρος K , ο χρόνος σύγκλισης μειώνεται αρκετά. Τα πράγματα περιπλέκονται κάπως όταν πλησιάσουμε στην ευθεία $K = \frac{degree}{2}$. Στο σημείο αυτό έχουμε μια κατακόρυφη αύξηση του χρόνου σύγκλισης η οποία δεν έχει κάποια προφανή αιτία.

Σαν να μην έφτανε αυτό, το φαινόμενο εξαφανίζεται όσο γρήγορα εμφανίστηκε όταν αυξήσουμε και άλλο την παράμετρο K . Αυτή η απότομη αύξηση του χρόνου σύγκλισης παρουσιάζεται ως η οροσειρά¹¹ στο σχήμα 4.26.



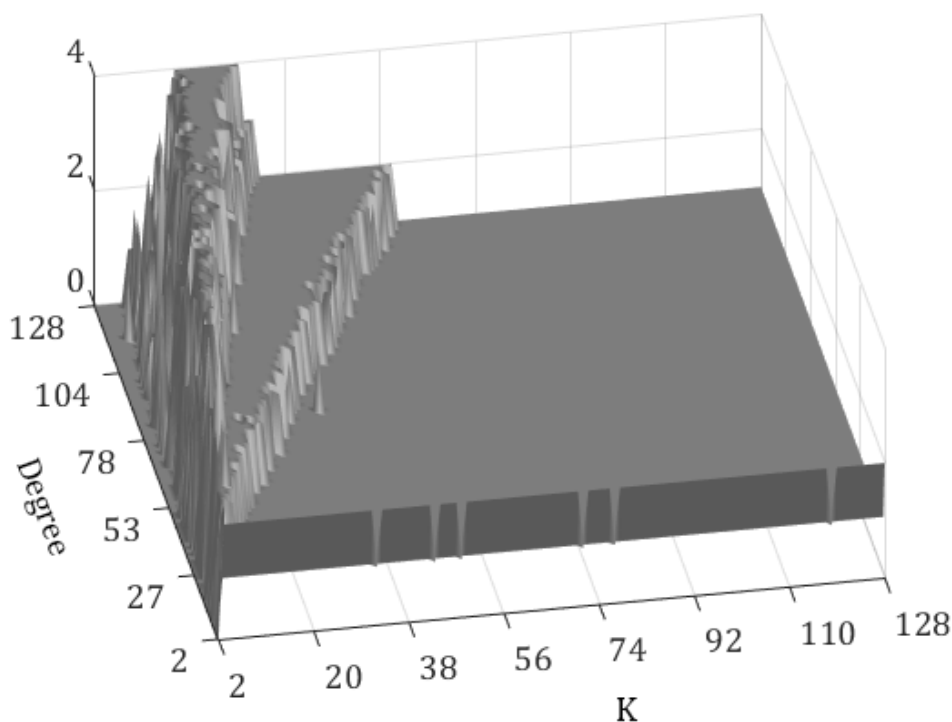
Σχήμα 4.28: Ενεργοποιημένες ακμές στο δίκτυο καθώς το ένα cluster πλησιάζει αργά το άλλο.

¹⁰Για $N=128$ δοκιμάζουμε 127 τιμές του K ξεκινώντας από το $K=2$. Για κάθε τιμή του K δημιουργούμε 100 δίκτυα Erdős-Rényi με διαφορετικές παραμέτρους p στο διάστημα $[0, 1]$. Κατά συνέπεια παίρνουμε 12700 μετρήσεις χρόνων σύγκλισης

¹¹Στα περισσότερα τρισδιάστατα σχήματα όπου έχουμε πάρει δείγματα από πολλά δίκτυα Erdős-Rényi, ο άξονας του μέσου βαθμού δεν μεταβάλλεται ομοιόμορφα. Αυτό συμβαίνει επειδή η μεταβλητή που

Για άλλη μια φορά θα πρέπει να δούμε τι συμβαίνει στις απόψεις κοντά στα σημεία που μας ενδιαφέρουν. Δημιουργούμε ένα δίκτυο Erdős-Rényi με μέσο degree 96 και καταγράφουμε την εξέλιξη των απόψεων για τιμές του K κοντά στο μισό του degree. Το σχήμα 4.27 μας δίνει τα διαγράμματα των απόψεων για τέσσερις τιμές του K κοντά στο σημείο που μας ενδιαφέρει.

Στην πρώτη εκτέλεση (αριστερά) οι απόψεις σταθεροποιούνται γρήγορα σε δύο μεγάλα clusters, τα οποία δεν επικοινωνούν μεταξύ τους. Όταν όμως το K αυξηθεί πάνω από ένα κατώφλι (δεξιά) αρχίζει να υπάρχει κάποια επικοινωνία μεταξύ των δύο clusters που οδηγεί το δίκτυο σε ομοφωνία, μετά από έναν πολύ μεγάλο αριθμό γύρων. Οι δύο ομάδες κόμβων "τραβιούνται" η μία προς την άλλη με πάρα πολύ αργό ρυθμό.



Σχήμα 4.29: Αριθμός των cluster καθώς μεταβάλλεται ο μέσος βαθμός του δικτύου και η παράμετρος K .

Τι μπορεί να προκαλεί αυτό το φαινόμενο; Η απάντηση δίνεται άμεσα από τη δομή του δικτύου όταν πλησιάζουν τα δύο clusters για $K=43$ όπου έχουμε και τον υψηλότερο χρόνο σύγκλισης για το συγκεκριμένο δίκτυο. Όπως βλέπουμε στο σχήμα 4.28, υπάρχουν μόνο 8 ακμές που ενώνουν τα δύο clusters. Επιπλέον η κάθε ακμή συνδέεται σε διαφορετικό ζευγάρι κόμβων και αφού $K=43$, η άποψη του ξένου cluster συμβάλει μόνο κατά $1/43$ στη νέα άποψη του κόμβου που ανήκει στο συγκεκριμένο ζευγάρι. Ο συνδυασμός αυτών των παραγόντων κάνει τις απόψεις να διαδίδονται εξαιρετικά αργά από το ένα cluster στο άλλο με αποτέλεσμα το μοντέλο να χρειάζεται πάνω από 200.000 γύρους για να συγκλίνει!

Ισχύει πάντα ότι οι ασυνέχειες στον χρόνο σύγκλισης οφείλονται σε μείωση του αριθμού των clusters; Για να επιβεβαιώσουμε την υπόθεση αυτή, επαναλαμβάνουμε το πείραμα του σχήματος 4.26 καταγράφοντας παράλληλα τον αριθμό των clusters στην ισορροπία για κάθε σημείο¹². Η εικόνα που παίρνουμε στο σχήμα 4.29 έχει άμεση συσχέτιση με

ελέγχουμε είναι η παράμετρος p του δικτύου, η οποία όμως δεν προκαλεί γραμμική αύξηση του βαθμού.
¹²Δημιουργούμε ένα ιστόγραμμα των απόψεων με 20 bins στο διάστημα $[0, 1]$. Εάν ένα bin περιέχει

τους χρόνους σύγκλισης. Ο "γκρεμός" κατά τη μείωση του αριθμού των clusters από δύο σε ένα κοντά στην ευθεία $K = \frac{degree}{2}$ στο σχήμα αυτό αντιστοιχεί ακριβώς με την οροσειρά που εμφανιζόταν στο σχήμα των χρόνων σύγκλισης στο ίδιο σημείο. Επίσης, τα μικρότερα όρη που εμφανίζονταν για μικρές τιμές του K στους χρόνους σύγκλισης αντιστοιχούν σε μεταβολές του αριθμού των clusters στην ίδια περιοχή.

Μετά από τα παραπάνω πειράματα έχουμε ισχυρές ενδείξεις ότι στο συγκεκριμένο μοντέλο η ομαδοποίηση των απόψεων είναι πολύ στενά συνδεδεμένη με τον χρόνο σύγκλισης. Κάτι τέτοιο δεν συνέβαινε στο μοντέλο ΗΚ και στην παραλλαγή του. Αυτό που άλλαξε τώρα είναι ότι έχουμε η παράμετρος K είναι διακριτή μεταβλητή. Η φύση της νέας παραμέτρου δημιουργεί απότομες μεταβολές στη συμπεριφορά των απόψεων (κατώφλια) οι οποίες δεν εμφανίζονταν όταν το μοντέλο ρυθμιζόταν από τη συνεχή παράμετρο ϵ .

Το Παράδοξο της ομοφωνίας Αν σκεφτούμε καλύτερα τη σημασία των αποτελεσμάτων του προηγούμενου σχήματος θα βρεθούμε μπροστά σε ένα παράδοξο. Όταν το δίκτυο έχει μικρότερο μέσο βαθμό, αρκούν μικρότερες τιμές του K για να οδηγηθούν οι κόμβοι σε ομοφωνία. Για παράδειγμα, έστω το προηγούμενο δίκτυο των 128 κόμβων. Αν το κάθε άτομο έχει κατά μέσο όρο 40 φίλους τότε αρκεί να ακούει τους 20 από αυτούς για να έχουμε ομοφωνία. Αντίθετα, αν το κάθε άτομο μπορεί να συνομιλήσει με όλους τους υπόλοιπους, δηλαδή έχει μέσο βαθμό 128, τότε πρέπει να ακούει τουλάχιστον 60 φίλους του για να έχουμε το ίδιο αποτέλεσμα.

Στην πραγματικότητα θα περιμέναμε να συμβαίνει το αντίθετο. Για την ίδια τιμή του K , μεγαλύτερος μέσος βαθμός του δικτύου σημαίνει μεγαλύτερη ποικιλία πιθανών φίλων για να διαλέξουμε να ακούσουμε με αποτέλεσμα το μοντέλο μας να πλησιάζει αυτό του DeGroot.

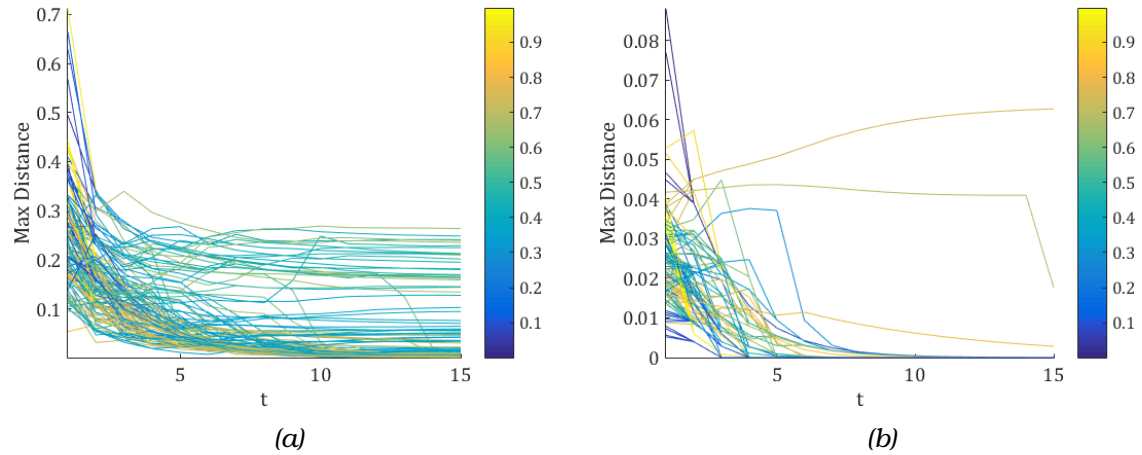
Στο σχήμα 4.30 βλέπουμε για ένα δίκτυο 128 κόμβων την απόσταση του πιο μακρινού γείτονα των κόμβων για τις ακραίες περιπτώσεις βαθμού 14 και 128 αντίστοιχα, με σταθερή παράμετρο $K=7$. Η εικόνα αυτή μας δίνει μια σοβαρή διαίσθηση για το τι συμβαίνει γενικά στο μοντέλο. Στην περίπτωση του μικρού βαθμού του δικτύου, οι γείτονες του κάθε κόμβου έχουν μακρινές αποστάσεις από αυτόν. Όταν ο βαθμός του δικτύου μεγαλώνει, ακόμα και οι πιο μακρινοί γείτονες που έχουν επιλέξει οι κόμβοι βρίσκονται πολύ κοντά στην άποψή τους. Η πρώτη περίπτωση όμως λειτουργεί καλύτερα για την κοινωνία: Επειδή οι κόμβοι ακούν αναγκαστικά κόμβους με τους οποίους διαφωνούν, η άποψή τους μεταβάλλεται περισσότερο και είναι αρκετά πιο εύκολο να φτάσουν να συμφωνούν σε μια κοινή πεποίθηση.

Το παράδοξο λοιπόν δημιουργείται από την άπληστη φύση του μοντέλου. Το γεγονός ότι ο κάθε κόμβος επιλέγει μόνο τους K κοντινότερους γείτονές του, του επιτρέπει να δημιουργήσει έναν μικρόκοσμο (cluster) με άτομα με τα οποία συμφωνεί χωρίς να χρειαστεί να ακούσει διαφορετικές απόψεις. Όσο περισσότερες κοινωνικές επαφές έχει το κάθε άτομο, τόσο πιο εύκολο είναι να βρει τέτοια άτομα στην κοινωνία. Για να αλλάξει λοιπόν άποψη θα πρέπει να δίνει προσοχή σε έναν μεγάλο αριθμό φίλων του (K).

Αντίθετα αν ο βαθμός του δικτύου είναι μικρός, δηλαδή τα άτομα έχουν λίγες επαφές, θα αναγκαστούν να λάβουν υπόψη τους και πιο μακρινές απόψεις (αφού οι επαφές τους δεν δημιουργούνται με βάση την εγγύτητα των απόψεων αλλά με βάση τη δουλειά τους, την οικογένειά τους, τον τόπο που κατοικούν).

περισσότερο από το 20% των κόμβων, θεωρούμε ότι είναι cluster. Πειραματικά η μέθοδος αυτή φαίνεται να ανιχνεύει τα μεγάλα clusters αρκετά αποτελεσματικά.

Το μοντέλο αυτό μας δείχνει ότι η διαδικασία που θεωρείται καλύτερη για τους κόμβους δεν είναι και η καλύτερη για την κοινωνία. Η άπληστη επιλογή κοντινών απόψεων ακυρώνει την σοφία του πλήθους (*wisdom of the crowd*) και ευνοεί τη διατήρηση απομονωμένων ομάδων ατόμων με ακραίες απόψεις.



Σχήμα 4.30: Απόσταση του πιο μακρινού γείτονα για μέσο βαθμό δικτύου 14 και 128 αντίστοιχα. Οι αποστάσεις του πρώτου σχήματος είναι δύο τάξεις μεγέθους μεγαλύτερες από αυτές του δεύτερου.

4.6 Δυναμικό μοντέλο K-NN

4.6.1 Εισαγωγή

Στο μοντέλο K-Nearest Neighbors επιτρέψαμε στο άτομο να επιλέγει να εμπιστευτεί έναν συγκεκριμένο αριθμό ατόμων από τον κοινωνικό του κύκλο όταν χρειάζεται να ανανεώσει τις πεποιθήσεις του. Θεωρήσαμε ότι η δομή του κοινωνικού κύκλου είναι πλήρως ανεξάρτητη από τις απόψεις των μελών του, καθώς η δημιουργία του στηρίζεται σε διαφορετικές διαδικασίες όπως για παράδειγμα η εύρεση εργασίας σε μια εταιρία, η σπουδές σε κάποια σχολή και τα ενδιαφέροντα του ατόμου.

Η υπόθεση αυτή δεν ισχύει πάντα. Κατ' αρχάς ένα άτομο μπορεί να σταματήσει να είναι φίλος με κάποιον που διαφωνεί σε πολλά θέματα. Επιπροσθέτως στη διάρκεια της ζωής τους οι άνθρωποι βρίσκουν νέες επαφές μέσω του ίδιου του κοινωνικού τους κύκλου, συνήθως ερχόμενοι επαφή με φίλους των φίλων τους και δημιουργούν δεσμούς μεταξύ τους (φαινόμενο των τριάδων). Θα μπορούσαμε να εισάγουμε με κάποιο τρόπο τα παραπάνω στοιχεία στο μοντέλο K-NN; Μια προσπάθεια για να κάνουμε το μοντέλο K-NN πιο δυναμικό παρουσιάζεται σε αυτή την ενότητα. Στο νέο αυτό μοντέλο τα άτομα θα μπορούν να σβήσουν και να δημιουργήσουν εκ νέου ακμές στο υποκείμενο δίκτυο, ανάλογα με την εγγύτητα των γειτονικών κόμβων στην άποψή τους.

4.6.2 Περιγραφή Διαδικασίας

Στο δυναμικό μοντέλο K-NN, η κύρια παράμετρος που ρυθμίζει τη συμπεριφορά των απόψεων είναι για άλλη μια φορά το K. Κατά την ενημέρωση των απόψεων ο κάθε κόμβος εξετάζει πλέον όχι μόνο τους φίλους του, αλλά και τους φίλους των φίλων του σύμφωνα με τους κανόνες

$$z_i(t+1) = \frac{1}{K} \sum_{j \in I(i,z(t))} z_j(t) \quad (4.17)$$

όπου,

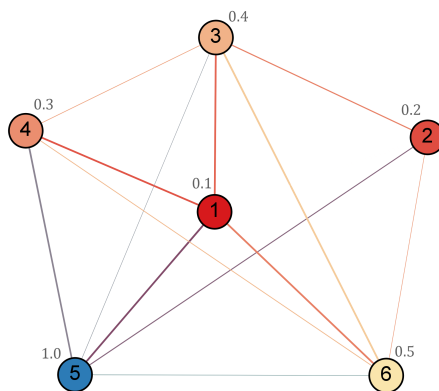
$$I(i, z) = \{j \in N^2(i) : j \in \text{K-NN του } i\} \quad (4.18)$$

Υπενθυμίζουμε ότι με $N^2(i)$ συμβολίζεται η 2-γειτονιά του κόμβου i στον υποκείμενο γράφο, δηλαδή οι γείτονες του i και οι γείτονες των γειτόνων του i . Θεωρούμε ότι πάντα ισχύει $i \in N^2(i)$.

Μετά την ενημέρωση, ο κάθε κόμβος κρατάει ως γείτονές του στον υποκείμενο γράφο μόνο τους κόμβους που ενεργοποίησε στον γύρο αυτό. Δηλαδή $\forall i$:

$$N(i) = I(i, z) \quad (4.19)$$

Αυτό σημαίνει ότι οι κόμβοι σταματούν να επικοινωνούν με τις επαφές που δεν ανήκουν στις K καλύτερες στον γύρο αυτό. Επίσης αναζητούν νέες επαφές στους φίλους των φίλων τους και αν κάποια από αυτές βρίσκεται μέσα στις K καλύτερες, δημιουργούν μια νέα ακμή για να συνδεθούν με εκείνη.



Σχήμα 4.31: Παράδειγμα εκτέλεσης μοντέλου K-NN.

Παράδειγμα Για να γίνει κατανοητή η διαφορά του δυναμικού μοντέλου K-NN με τα προηγούμενα που εξετάσαμε, θα επαναλάβουμε το γνωστό πλέον παράδειγμα.

Έστω ότι ξεκινάμε μια ακόμα φορά με τον γράφο του σχήματος 4.31 που αποτελείται από 6 κόμβους. Η τιμή της άποψης του κάθε κόμβου βρίσκεται γραμμένη δίπλα του με γκριζα γράμματα. Θα ασχοληθούμε με τον κόμβο 1 αφού η διαδικασία είναι πανομοιότυπη για τους υπόλοιπους κόμβους. Θεωρούμε ότι ο γράφος είναι μη κατευθυνόμενος χωρίς αυτό να αλλάζει κάτι στο μοντέλο. Έστω ότι $K = 3$.

Για να ενημερώσει την άποψή του ο πρώτος κόμβος, πρέπει πρώτα να υπολογίσει τη γειτονιά του. Παρατηρώντας τον γράφο προκύπτει ότι $N(1) = \{1, 3, 4, 5, 6\}$. Ύστερα υπολογίζει τη 2-γειτονιά του, η οποία είναι η $N^2(1) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Ταξινομούμε τους γείτονες με βάση τη διαφορά της άποψής τους από αυτή του κόμβου 1. Έτσι $N_{sorted}(1) = \{1, 4, 3, 6, 5\}$. Στη συνέχεια εφαρμόζουμε την εξίσωση (4.18) οπότε για την τιμή του K που έχουμε επιλέξει θα είναι $I(1, z) = \{1, 2, 4\}$, αφού τώρα μπορούμε να "δούμε" τον κόμβο 2 ως γείτονα των γειτόνων μας.

Τελικά ο κανόνας ενημέρωσης για τον πρώτο κόμβο δίνει την καινούργια του άποψη

$$z_1(1) = \frac{1}{3}(0.1 + 0.2 + 0.3) = 0.2 \quad (4.20)$$

Τέλος, ο κόμβος 1 θα σθήσει τις ακμές του με τους κόμβους 3,5,6 στον γράφο, θα διατηρήσει την ακμή του με τον κόμβο 4 και θα δημιουργήσει μια νέα ακμή με τον κόμβο 2 σύμφωνα με την εξίσωση (4.19).

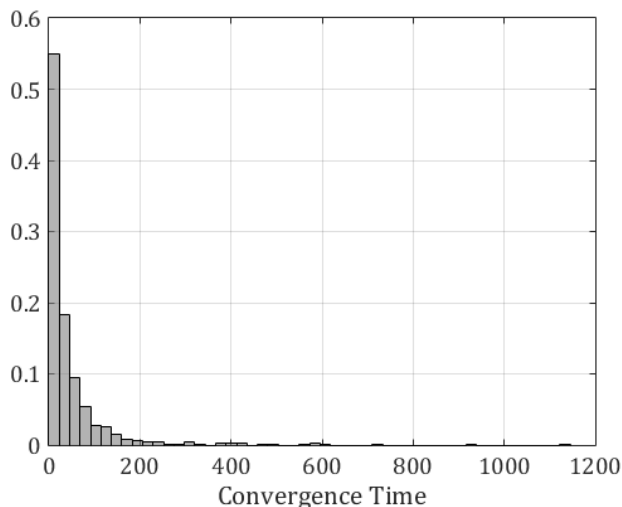
Στο παράδειγμα πήραμε μια πρώτη διαίσθηση για τη συμπεριφορά του μοντέλου. Ακόμα και με πολύ μικρά K οι κόμβοι έχουν τη δυνατότητα να κάνουν αρκετά καλές επιλογές γειτόνων, αφού η 2-γειτονιά τους δίνει την εικόνα ενός αρκετά μεγάλου μέρους του συνολικού δικτύου.

4.6.3 Σύγκλιση

Όπως και σε όλα τα προηγούμενα μοντέλα, θα θέλαμε αρχικά να γνωρίζουμε εάν το δυναμικό μοντέλο K-NN συγκλίνει πάντα σε ένα σημείο ισορροπίας. Για την πειραματική δοκιμή επαναλαμβάνουμε ξανά τη διαδικασία που εφαρμόσαμε νωρίτερα¹³. Η

¹³Τρέξαμε συνολικά 768 προσομοιώσεις σε δίκτυα Erdős-Rényi και Scale-Free για 32 έως 512 κόμβους. Για τα δίκτυα Erdős-Rényi είχαμε 12 δοκιμές με τιμές του p από 0 έως 1 σε ευθεία γραμμή. Για

ελάχιστη μεταβολή των απόψεων για να θεωρήσουμε ότι έχουν σταθεροποιηθεί είναι της τάξης του 10^{-5} .



Σχήμα 4.32: Ιστογράμμο χρόνου σύγκλισης του δυναμικού μοντέλου K-NN.

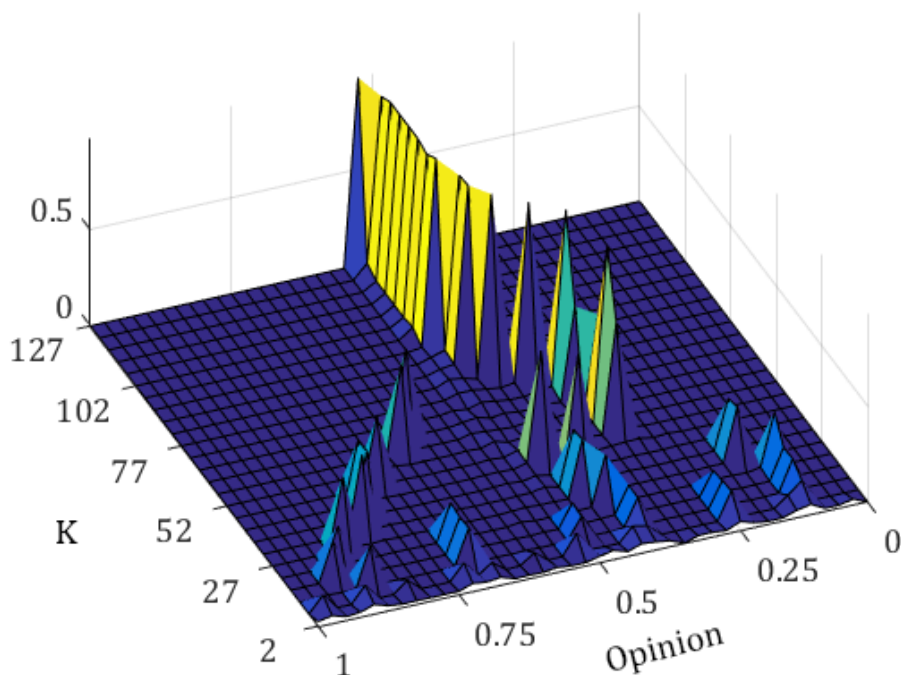
Οι χρόνοι σύγκλισης φαίνονται στο ιστογράμμο του σχήματος 4.32. Το όριο της μη σύγκλισης που είχαμε θέσει ήταν οι 100.000 γύροι. Κατ' αρχάς το μοντέλο συγκλίνει και μάλιστα στην πλειοψηφία των περιπτώσεων αρκετά γρήγορα (σε λιγότερους από 200 γύρους). Όπως και στο απλό K-NN, υπάρχουν κάποιες δοκιμές στις οποίες οι απόψεις άργησαν να σταθεροποιηθούν αλλά ο χρόνος που χρειάστηκε δεν φτάνει σε ακραίες τιμές όπως συνέβαινε πριν (περίπου 1100 γύροι σε αντίθεση με 16.000 γύρους στο απλό K-NN).

Πριν προχωρήσουμε σε πιο λεπτομερή ανάλυση του μοντέλου ας καταγράψουμε τη γενική συμπεριφορά των απόψεων στην ισορροπία καθώς μεταβάλλεται η παράμετρος K σε διάφορα δίκτυα Erdős-Rényi. Η εικόνα, όπως φαίνεται στο σχήμα 4.33 είναι τελείως διαφορετική από το αντίστοιχο σχήμα 4.20 του απλού μοντέλου K-NN. Σε αντίθεση με το προηγούμενο μοντέλο, εδώ δεν φαίνεται να παρουσιάζεται καθόλου "θόρυβος" στις απόψεις όταν τρέχουμε το ίδιο πείραμα σε διαφορετικά δίκτυα. Μάλιστα στο συγκεκριμένο πείραμα δοκιμάσαμε τέσσερις φορές περισσότερα δίκτυα¹⁴, χωρίς να μεταβληθεί το αποτέλεσμα.

Το πρώτο και σημαντικότερο συμπέρασμα από αυτό το σχήμα είναι πως η δομή του αρχικού κοινωνικού δικτύου φαίνεται να επηρεάζει ελάχιστα την εξέλιξη των απόψεων μέσα σε αυτό. Εάν υπήρχε μεγάλη εξάρτηση της διαδικασίας ενημέρωσης των απόψεων από το αρχικό δίκτυο τότε για τόσο μεγάλο αριθμό δικτύων θα περιμέναμε να έχουν σχηματιστεί διαφορετικές ομάδες κόμβων σε διαφορετικές απόψεις δημιουργώντας ένα πιο ομοιόμορφο σχήμα όπως αυτό της εικόνας 4.20. Όμως κάτι τέτοιο δεν ισχύει. Σε όλες τις τιμές του K , τα clusters που σχηματίζονται φαίνονται να είναι μοναδικά και να εξαρτώνται μόνο από το αρχικό διάνυσμα απόψεων s .

τα δίκτυα Scale-Free η τιμή του m_0 επιλεγόταν τυχαία στο διάστημα $[1, N/2]$ και η τιμή του m επιλεγόταν επίσης τυχαία μέσα στο επιτρεπτό διάστημα $[1, m_0 - 1]$. Για κάθε δίκτυο επαναλάβαμε την προσομοίωση τέσσερις φορές με διαφορετικό τυχαίο διάνυσμα αρχικών απόψεων κάθε φορά. Η παράμετρος K επιλεγόταν τυχαία σε κάθε εκτέλεση στο διάστημα $[1, N]$.

¹⁴Για το πείραμα αυτό, επιλέξαμε 25 διακριτές τιμές του K στο διάστημα $[1, 128]$. Για καθεμία από αυτές τρέχουμε το μοντέλο σε 64 διαφορετικά τυχαία δίκτυα Erdős-Rényi με τυχαίο σταθερό αρχικό διάνυσμα απόψεων. Τελικά απεικονίζουμε τη συχνότητα των απόψεων στην ισορροπία ως συνάρτηση της παραμέτρου K του μοντέλου.



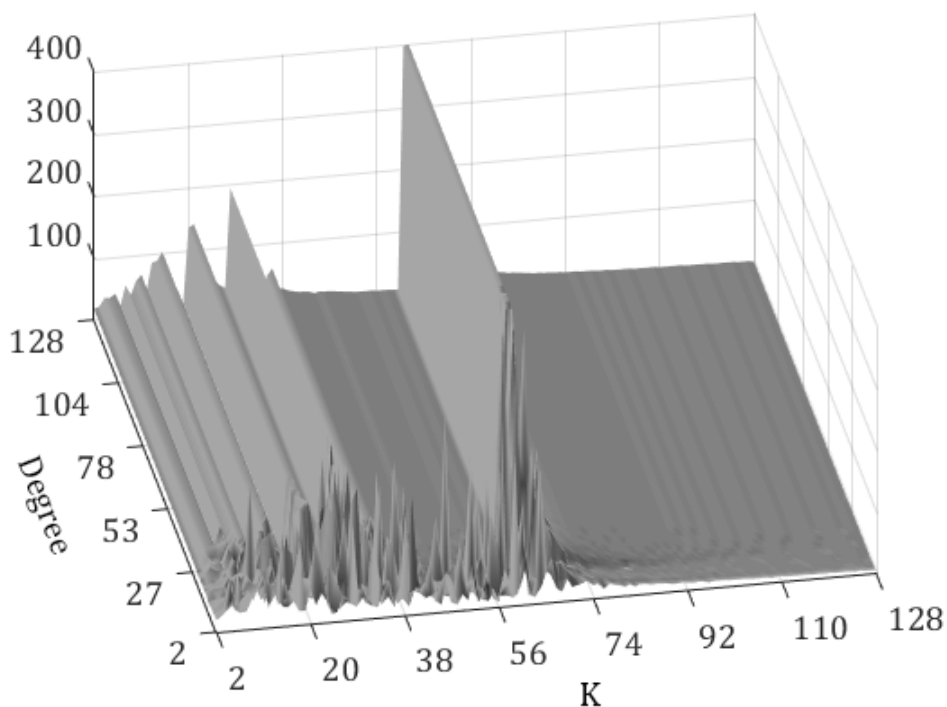
Σχήμα 4.33: Πυκνότητα των απόψεων καθώς μεταβάλλεται η παράμετρος K σε πολλά δίκτυα με σταθερό διάνυσμα αρχικών απόψεων.

Από εκεί και πέρα, οι παρατηρήσεις μας είναι παρόμοιες με αυτές του προηγούμενου μοντέλου. Για μικρές τιμές του K έχουμε πολλά μικρά clusters τα οποία ενώνονται και τελικά οδηγούν στην ομοφωνία όσο το K μεγαλώνει. Όπως και πριν, η ομοφωνία μετακινείται με την αύξηση του K . Το φαινόμενο αυτό εξηγείται με τον ίδιο τρόπο όπως και στο απλό μοντέλο K-NN. Όταν η παράμετρος K οδηγεί αρχικά σε ομοφωνία, δημιουργείται μονομερής επικοινωνία μεταξύ των δύο μεγάλων clusters μέσω ενός μικρού αριθμού ακμών. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα μόνο το ένα να "τραβιέται" προς τη θέση του άλλου. Όσο η τιμή του K μεγαλώνει ενεργοποιούνται περισσότερες ακμές που κάνουν αμφίδρομη την επικοινωνία με αποτέλεσμα και τα δύο clusters να έλκονται προς την τιμή 0.5.

4.6.4 Χρόνος Σύγκλισης

Στην προηγούμενη ενότητα ανακαλύψαμε κάποια βασικά χαρακτηριστικά της συμπεριφοράς του μοντέλου. Τώρα θα εστιάσουμε στον χρόνο σύγκλισης και στην εξάρτησή του από την παράμετρο K και τον μέσο βαθμό του δικτύου. Ο χρόνος σύγκλισης θα μας απασχολήσει για άλλη μια φορά γιατί έχει μεγάλη σημασία στην πραγματική ζωή. Για παράδειγμα, εάν αναμένεται μια εκλογική αναμέτρηση σε διάστημα ενός μήνα και το μοντέλο που έχουμε στη διάθεσή μας υποδεικνύει ότι οι απόψεις θα ισοροπήσουν σε μια δεκαετία, η πληροφορία του μοντέλου είναι σχεδόν άχρηστη. Για το λόγο αυτό προτιμάμε τα μοντέλα με μικρούς χρόνους σύγκλισης.

Για το δυναμικό μοντέλο K-NN περιμένουμε η παράμετρος K να επηρεάζει τις απόψεις με παρόμοιο τρόπο όπως και στο απλό K-NN. Μεγαλύτερα K θα επιτρέπουν σε περισσότερους κόμβους να επικοινωνήσουν μεταξύ τους με συνέπεια τη μείωση του αριθμού των clusters και τη συγκέντρωση των κόμβων σε λιγότερες διακριτές τιμές των



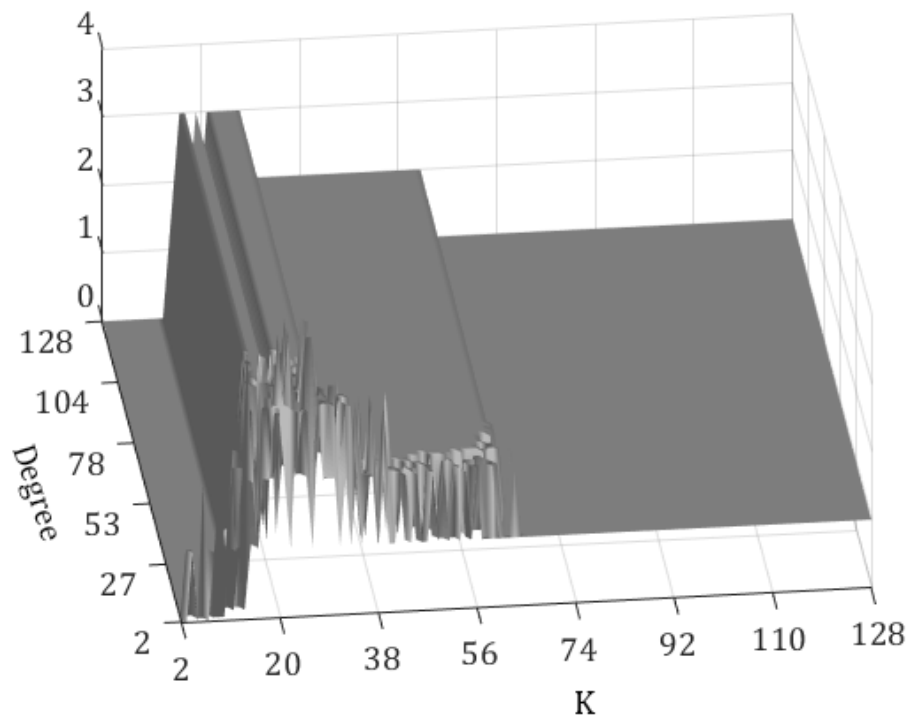
Σχήμα 4.34: Χρόνος σύγκλισης του δυναμικού μοντέλου K-NN καθώς μεταβάλλεται η παράμετρος K και ο μέσος βαθμός του δικτύου.

απόψεων.

Το αποτέλεσμα του πειράματος, όπως αυτό παρουσιάζεται στο σχήμα 4.34, είναι σε μεγάλο βαθμό το αναμενόμενο. Όπως υποψιαζόμασταν, ο χρόνος σύγκλισης – και κατά συνέπεια η συμπεριφορά του μοντέλου – είναι στις περισσότερες περιπτώσεις ανεξάρτητος από τον μέσο βαθμό του δικτύου. Το φαινόμενο αυτό παύει να ισχύει στην περίπτωση μικρών τιμών του degree και του K. Όπως και στο απλό μοντέλο K-NN, έχουμε μια κορυφή στον βαθμό σύγκλισης. Λόγω της απουσίας εξάρτησης από το δίκτυο, η καμπύλη που σχηματίζει αυτή η κορυφή δεν είναι διαγώνια αλλά κάθετη και φαίνεται να εξαρτάται μόνο από τον αριθμό των κόμβων. Επίσης το ύψος της είναι πολύ πιο μικρό και φτάνει τους 400 γύρους σε αντίθεση με τους 15.000 που είχαμε στο προηγούμενο μοντέλο. Το χαρακτηριστικό αυτό κάνει το δυναμικό μοντέλο K-NN πολύ πιο χρήσιμο από το απλό, τουλάχιστον στις ακραίες περιπτώσεις.

Το επόμενο φαινόμενο που χρειάζεται εξήγηση είναι η απότομη αύξηση και πτώση του χρόνου σύγκλισης κοντά στο $K=64$. Στο απλό μοντέλο K-NN η ασυνέχεια αυτή οφειλόταν στην ένωση των δύο μεγάλων clusters που είχαν σχηματιστεί σε ένα με αποτέλεσμα την κατάληξη των απόψεων σε ομοφωνία. Συμβαίνει κάτι αντίστοιχο και εδώ;

Η απάντηση είναι πως ναι, όπως βλέπουμε στο σχήμα 4.35. Ακριβώς στο σημείο που περιμέναμε έχουμε μείωση του αριθμού των clusters από δύο σε ένα. Επιπλέον είναι ξεκάθαρο ότι οι μεταβολές του χρόνου σύγκλισης για μικρότερες τιμές του K οφείλονται σε παράλληλες αυξομειώσεις του αριθμού των clusters στην ισορροπία. Στο παράδειγμα αυτό φαίνεται ξανά η ανεξαρτησία της συμπεριφοράς του μοντέλου από τον βαθμό του δικτύου, για σχετικά μεγάλους βαθμούς. Αυτό είναι κάτι αναμενόμενο. Όταν ταυτίζονται ακριβώς οι χρόνοι σύγκλισης δύο εκτελέσεων του μοντέλου για το



Σχήμα 4.35: Αριθμός των clusters που σχηματίζονται στην ισορροπία του δυναμικού μοντέλου K-NN καθώς μεταβάλλεται η παράμετρος K και ο μέσος βαθμός του δικτύου.

ίδιο διάνυσμα αρχικών απόψεων, υπάρχει αρκετά μεγάλη πιθανότητα οι απόψεις να εξελίχθηκαν με τον ίδιο ακριβώς τρόπο.

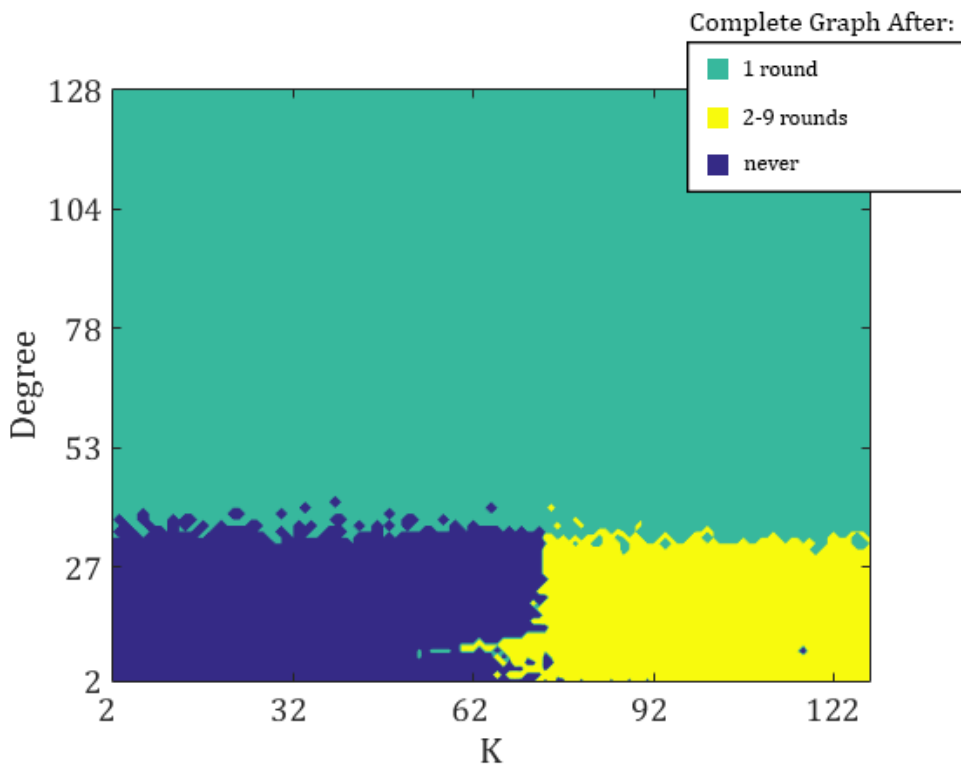
Το ερώτημα που προκύπτει τώρα είναι το γιατί ενώ στο απλό μοντέλο K-NN υπήρχε μεγάλη εξάρτηση της συμπεριφοράς των απόψεων από τον μέσο βαθμό του δικτύου, δεν συμβαίνει το ίδιο και σε αυτό το πιο δυναμικό μοντέλο.

Για να απαντήσουμε θα πρέπει να μελετήσουμε προσεκτικότερα τις εξισώσεις (4.18) και (4.19) που άλλαξαν σε σχέση με το προηγούμενο μοντέλο που μελετήσαμε. Ας θυμηθούμε ότι μας ενδιαφέρει η δοκιμή δύο δικτύων με διαφορετικό μέσο βαθμό κρατώντας σταθερό το διάνυσμα αρχικών απόψεων. Όπως αναφέραμε στο εισαγωγικό παράδειγμα, όταν ένα δίκτυο έχει μεγάλο μέσο βαθμό, η 2-γειτονιά του θα περιλαμβάνει όλους τους κόμβους. Κατά συνέπεια σε αυτή την περίπτωση το αρχικό δίκτυο δεν έχει καμία σημασία καθώς το μοντέλο βλέπει πάντα έναν πλήρη γράφο! Αντίθετα, σε μικρότερα δίκτυα θα πρέπει να εξελιχθεί η δυναμική διαδικασία μεταβολής του γράφου μέχρι οι κόμβοι να βρουν τους ιδανικούς γείτονές τους. Μάλιστα, ο συνδυασμός μικρού degree και K μπορεί να μην επιτρέπει σε κάποια από αυτά τα δίκτυα να δουν σε κανένα στάδιο της εξέλιξης των απόψεων όλους τους υπόλοιπους κόμβους.

Το πείραμα που κάνουμε έχει ως εξής. Για τις ίδιες παραμέτρους όπως και στα προηγούμενα σχήματα, καταγράφουμε πόσοι εάν το σύνολο των 2-γειτονιών όλων των κόμβων φτάνει κάποια στιγμή να είναι ένας πλήρης γράφος του δικτύου και μετά από πόσους γύρους συμβαίνει αυτό. Αν κάτι τέτοιο συμβαίνει πολύ γρήγορα τότε ακόμα και αν τα αρχικά δίκτυα διαφέρουν, οι απόψεις θα έχουν παρόμοια συμπεριφορά. Αντίθετα εάν η διαδικασία αυτή καθυστερήσει ή δεν ολοκληρωθεί καθόλου, αναμένουμε να υπάρχουν διακυμάνσεις από εκτέλεση σε εκτέλεση του μοντέλου, καθώς διαφορές στο δίκτυο θα δίνουν στους κόμβους διαφορετική πληροφορία.

Το σχήμα 4.36 έχει εξαιρετικό ενδιαφέρον. Σε αυτό παρουσιάζεται ο αριθμός των γύρων που απαιτούνται μέχρι το σύνολο των 2-γειτονιών των κόμβων να είναι ένας πλήρης γράφος. Βλέπουμε ότι υπάρχουν τρεις κατηγορίες, που αντιστοιχούν σε τρεις διαφορετικές διαδικασίες που πραγματοποιούνται, ανάλογα με τις τιμές των παραμέτρων:

- Στο πάνω μέρος του σχήματος, για μεγάλες τιμές του βαθμού του δικτύου (στο παράδειγμα, $\text{degree} > 40$), η 2-γειτονιά των κόμβων τους επιτρέπει άμεσα να δουν όλους τους υπόλοιπους πριν εκτελεστεί το μοντέλο. Πράγματι, εάν όλοι οι φίλοι μας έχουν κι αυτοί πολλούς φίλους τότε όπως είδαμε στην εισαγωγή είναι εύκολο να φτάσουμε σε όλους τους κόμβους με μικρό αριθμό βημάτων. Το μέγεθος του degree που απαιτείται θα ήταν αρκετά υψηλότερο σε πραγματικά κοινωνικά δίκτυα καθώς θα είχαμε πολύ πιο έντονο κλείσιμο των τριάδων. Δυστυχώς, τα δίκτυα Erdős-Rényi είναι μακριά από την πραγματικότητα σε αυτό το χαρακτηριστικό, καθώς έχουν χαμηλό συντελεστής ομαδοποίησης ($\text{clustering coefficient}$). Σε αυτό το σενάριο οι κόμβοι γνωρίζουν στον πρώτο γύρο την καλύτερη επιλογή ανεξαρτήτως του δικτύου, με αποτέλεσμα η διαδικασία να εξελίσσεται πανομοιότυπο για σταθερή τιμή του K .
- Κάτω αριστερά, για μικρές τιμές του K και μικρούς βαθμούς του δικτύου το μοντέλο λειτουργεί με άπληστο τρόπο. Ο κάθε κόμβος έχει λίγες επιλογές ανάλογα με του ποιους κόμβους συνδέεται στο υποκείμενο δίκτυο. Με βάση αυτές τις αρχικές επιλογές του, η ανανέωση των απόψεων λαμβάνει διαφορετική τροπή αλλάζοντας το δίκτυο (που αντιπροσωπεύει την αρχική κατάσταση). Η μικρές τιμές του K ενθαρρύνουν τη δημιουργία clusters τα οποία παραμένουν απομονωμένα. Εξαιτίας αυτού του φαινομένου, ο συγκεκριμένος συνδυασμός παραμέτρων δεν οδηγεί ποτέ σε πλήρη γράφο. Οι κόμβοι επιλέγουν λίγους και καλούς φίλους, αλλά απομονώνονται από τους υπόλοιπους. Σε αυτή την περιοχή των παραμέτρων εμφα-

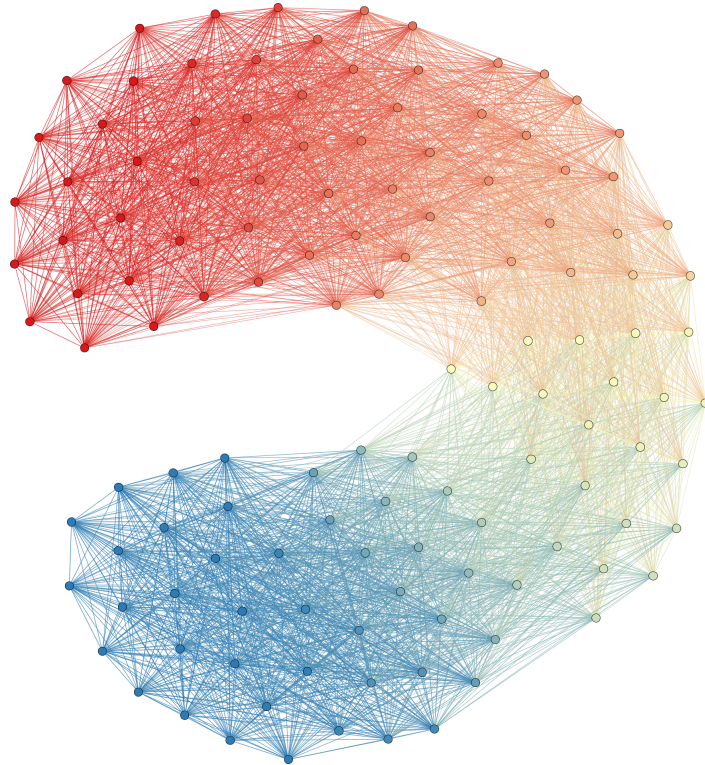


Σχήμα 4.36: Χρόνος που χρειάζεται μέχρι η ένωση των 2-γειτονιών των κόμβων να γίνει πλήρης γράφος.

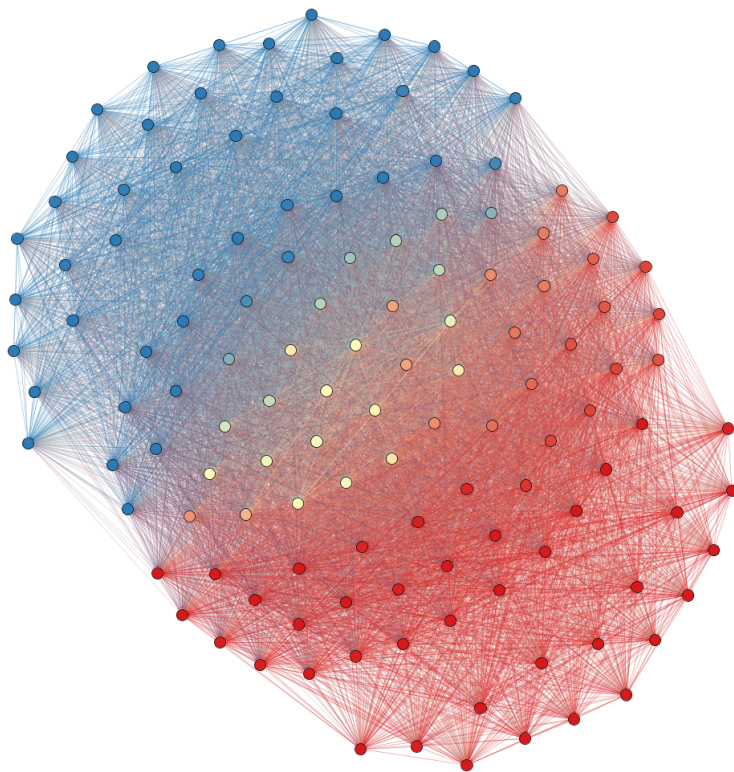
νίζεται η μεγαλύτερη διακύμανση της συμπεριφοράς του μοντέλου όπως είδαμε στο σχήμα 4.34.

- Κάτω δεξιά όπου έχουμε μεγάλες τιμές του K και μικρούς βαθμούς του δικτύου, υπάρχει ξανά μια διακύμανση στη συμπεριφορά του μοντέλου ανάλογα με το αρχικό δίκτυο, η οποία όμως είναι πολύ μικρότερη. Αυτό συμβαίνει επειδή η τιμές του K είναι αρκετά μεγάλες ώστε οι απόψεις να κατευθυνθούν στην ομοφωνία. Αφού οι απόψεις πλησιάζουν πολύ μεταξύ τους, οι κόμβοι δεν κλείνονται σε έναν στενό κύκλο και τελικά το δίκτυο μετατρέπεται σε πλήρη γράφο μετά από κάποιες επαναλήψεις του μοντέλου. Τα άτομα τώρα έχουν περισσότερους φίλους και μπορούν να διαλέξουν και κάποιους που δεν θεωρούν τόσο κοντινούς με αποτέλεσμα κανείς να μην μείνει τελείως απομονωμένος.

Για να φανεί πιο καθαρά η διαφορά μεταξύ της μπλε και της κίτρινης περιοχής θα δούμε της εικόνες δύο δικτύων που κατασκευάστηκαν σε αυτές. Δημιουργούμε ένα δίκτυο Erdős-Rényi μέσου βαθμού 25 και εκτελούμε μια επανάληψη του μοντέλου για $K=30$ (μπλε περιοχή) και $K=70$ (κίτρινη περιοχή). Στο σχήμα 4.37 φαίνονται οι 2-γειτονιές των γράφων μετά την επανάληψη αυτή. Στη δεύτερη περίπτωση υπάρχει πλουραλισμός απόψεων που θα οδηγήσει σε ομοφωνία, ενώ στην πρώτη περίπτωση οι κόμβοι έχουν ήδη σχηματίσει clusters και δεν έχουν καμία επαφή με άτομα μακρινών πεποιθήσεων από τις δικές τους.



(a)



(b)

Σχήμα 4.37: Οι ορατοί γείτονες των ατόμων μετά από μια εκτέλεση του μοντέλου για $K=30$ (μπλε περιοχή) και $K=70$ (κίτρινη περιοχή) αντίστοιχα. Τα χρώματα αντιστοιχούν στην τιμή των απόψεων.

Βιβλιογραφία

- [Acem11] Daron Acemoglu and Asuman Ozdaglar, “Opinion dynamics and learning in social networks”, *Dynamic Games and Applications*, vol. 1, no. 1, pp. 3–49, 2011.
- [Albe02] Réka Albert and Albert-László Barabási, “Statistical mechanics of complex networks”, *Reviews of modern physics*, vol. 74, no. 1, p. 47, 2002.
- [Asch51] Solomon E Asch, “Effects of group pressure upon the modification and distortion of judgments”, *Groups, leadership, and men. S*, pp. 222–236, 1951.
- [Asch56] Solomon E Asch, “Studies of independence and conformity: I. A minority of one against a unanimous majority.”, *Psychological monographs: General and applied*, vol. 70, no. 9, p. 1, 1956.
- [Bara99] Albert-László Barabási and Réka Albert, “Emergence of scaling in random networks”, *science*, vol. 286, no. 5439, pp. 509–512, 1999.
- [Bear04] Peter S Bearman, James Moody and Katherine Stovel, “Chains of affection: The structure of adolescent romantic and sexual networks1”, *American journal of sociology*, vol. 110, no. 1, pp. 44–91, 2004.
- [Bhaw13] Kshipra Bhawalkar, Sreenivas Gollapudi and Kamesh Munagala, “Coevolutionary opinion formation games”, in *Proceedings of the forty-fifth annual ACM symposium on Theory of computing*, pp. 41–50, ACM, 2013.
- [Bind12] David Bindel, Jon M. Kleinberg and Sigal Oren, “How Bad is Forming Your Own Opinion?”, *CoRR*, vol. abs/1203.2973, 2012.
- [Bisi00] Alberto Bisin and Thierry Verdier, “”Beyond The Melting Pot”: Cultural Transmission, Marriage, And The Evolution Of Ethnic And Religious Traits”, *Quarterly Journal of Economics*, pp. 955–988, 2000.
- [Bisi01] Alberto Bisin and Thierry Verdier, “The economics of cultural transmission and the dynamics of preferences”, *Journal of Economic theory*, vol. 97, no. 2, pp. 298–319, 2001.
- [Boyd88] Robert Boyd and Peter J Richerson, *Culture and the evolutionary process*, University of Chicago Press, 1988.
- [Burt82] Ronald S Burt, “Toward a structural theory of action: network models of social Structure, Perception, and Action.”, 1982.
- [Came] Lee Byron Cameron Marlow, Tom Lento and Itamar Rosenn, “Maintained relationships on Facebook, 2009”, *On-line at <http://overstated.net/2009/03/09/maintainedrelationships-on-facebook>*.

- [Cava81] Luigi Luca Cavalli-Sforza and Marcus W Feldman, *Cultural transmission and evolution: a quantitative approach*, no. 16, Princeton University Press, 1981.
- [DeGr74] Morris H. DeGroot, “Reaching a Consensus”, *Journal of the American Statistical Association*, vol. 69, no. 345, pp. 118–121, 1974.
- [Dore81] Patrick Doreian, “Estimating linear models with spatially distributed data”, *Sociological methodology*, pp. 359–388, 1981.
- [dSol79] Ithiel de Sola Pool and Manfred Kochen, “Contacts and influence”, *Social networks*, vol. 1, no. 1, pp. 5–51, 1979.
- [Easl10] D. Easley and J. Kleinberg, *Networks, Crowds, and Markets: Reasoning About a Highly Connected World*, Cambridge University Press, 2010.
- [Erbr79] Lutz Erbring and Alice A Young, “Individuals and social structure contextual effects as endogenous feedback”, *Sociological Methods & Research*, vol. 7, no. 4, pp. 396–430, 1979.
- [Erdo60] Paul Erdős and Alfréd Rényi, “On the evolution of random graphs”, *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.*, vol. 5, pp. 17–61, 1960.
- [Erdo61] Paul Erdős and Alfréd Rényi, “On the strength of connectedness of a random graph”, *Acta Mathematica Hungarica*, vol. 12, no. 1-2, pp. 261–267, 1961.
- [Fren56] John RP French Jr, “A formal theory of social power.”, *Psychological review*, vol. 63, no. 3, p. 181, 1956.
- [Frie86] Noah E Friedkin, “A formal theory of social power”, *Journal of Mathematical Sociology*, vol. 12, no. 2, pp. 103–126, 1986.
- [Frie99] Noah E Friedkin and Eugene C Johnsen, “Social influence networks and opinion change”, *Advances in group processes*, vol. 16, no. 1, pp. 1–29, 1999.
- [Galt07] Francis Galton, “Vox populi (the wisdom of crowds)”, *Nature*, vol. 75, pp. 450–451, 1907.
- [Hara59] Frank Harary, “A criterion for unanimity in French’s theory of social power.”, 1959.
- [Hegs02] Rainer Hegselmann and Ulrich Krause, “Opinion dynamics and bounded confidence models, analysis, and simulation”, *Journal of Artificial Societies and Social Simulation*, vol. 5, no. 3, 2002.
- [Heid14] Richard Heidler, Markus Gamper, Andreas Herz and Florian Eßer, “Relationship patterns in the 19th century: The friendship network in a German boys’ school class from 1880 to 1881 revisited”, *Social Networks*, vol. 37, pp. 1–13, 2014.
- [Jack10] Matthew O. Jackson, *Social and Economic Networks*, Princeton University Press, 2010.
- [Krac09] D. Krackhardt, “A plunge into networks”, *Science*, vol. 326, pp. 47–48, 2 October 2009.
- [Mars93] Peter V Marsden and Noah E Friedkin, “Network studies of social influence”, *Sociological Methods & Research*, vol. 22, no. 1, pp. 127–151, 1993.

- [Myer51] Charles Andrew Myers and George P Shultz, *The dynamics of a labor market: a study of the impact of employment changes on labor mobility, job satisfactions, and company and union policies*, Prentice-Hall, 1951.
- [Newm03] Mark EJ Newman, “The structure and function of complex networks”, *SIAM review*, vol. 45, no. 2, pp. 167–256, 2003.
- [Noah90] Eugene C. Johnsen Noah E. Friedkin, “Social Influence and Opinions”, *Journal of Mathematical Sociology*, vol. 15, no. 3-4, pp. 191–205, 1990.
- [ODon03] Michael C O’Donovan, Nigel M Williams and Michael J Owen, “Recent advances in the genetics of schizophrenia”, *Human molecular genetics*, vol. 12, no. suppl 2, pp. R125–R133, 2003.
- [Picc07] Marco M Picchioni and Robin M Murray, “Schizophrenia”, *BMJ*, vol. 335, no. 7610, pp. 91–95, 2007.
- [Rapo53] Anatol Rapoport, “Spread of information through a population with socio-structural bias: I. Assumption of transitivity”, *The bulletin of mathematical biophysics*, vol. 15, no. 4, pp. 523–533, 1953.
- [Rapo57] Anatol Rapoport, “Contribution to the theory of random and biased nets”, *The bulletin of mathematical biophysics*, vol. 19, no. 4, pp. 257–277, 1957.
- [Rees70] Albert Rees, George Pratt Shultz et al., “Workers and wages in an urban labor market”, 1970.
- [Reny59] A Renyi and P Erdos, “On random graphs”, *Publicationes Mathematicae*, vol. 6, no. 290-297, p. 5, 1959.
- [Solo51] Rapoport Solomonoff, “Connectivity of Random Nets”, *The bulletin of mathematical biophysics*, vol. 13, pp. 107–117, 1951.
- [Trav69] Jeffrey Travers and Stanley Milgram, “An experimental study of the small world problem”, *Sociometry*, pp. 425–443, 1969.
- [Turn85] John C Turner, “Social categorization and the self-concept: A social cognitive theory of group behavior”, *Advances in group processes: Theory and research*, vol. 2, pp. 77–122, 1985.
- [Turn87] John C Turner, Michael A Hogg, Penelope J Oakes, Stephen D Reicher and Margaret S Wetherell, *Rediscovering the social group: A self-categorization theory.*, Basil Blackwell, 1987.
- [Watt98] Duncan J Watts and Steven H Strogatz, “Collective dynamics of ‘small-world’ networks”, *nature*, vol. 393, no. 6684, pp. 440–442, 1998.

Παράρτημα Α

Κώδικας Προσομοιώσεων

Ο κώδικας των προσομοιώσεων έχει γραφτεί στη γλώσσα Matlab και μπορεί να βρεθεί στη διεύθυνση <https://github.com/dmpalyvos/opinion-dynamics>.

A.1 Αντιστοίχιση αποτελεσμάτων και αρχείων κώδικα

- Κώδικας προσομοίωσης 3.7 testRandomNorm.m
- Κώδικας προσομοίωσης 3.8 testRandomParam1.m
- Κώδικας προσομοίωσης 4.1 testGAConvergence.m
- Κώδικας ισορροπίας στο μοντέλο μεταβλητών βαρών testGAStability2.m
- Κώδικας προσομοίωσης 4.4 testGACluster1.m
- Κώδικας προσομοίωσης 4.6 testGASeqConvergence.m
- Κώδικας προσομοίωσης 4.7 testGATimeDegree.m
- Κώδικας προσομοίωσης 4.8 testGATimeB.m
- Κώδικας Προσομοίωσης 4.9 testGATimeEig.m
- Κώδικας Προσομοίωσης 4.13 testHkGlobalCluster1.m
- Κώδικας Προσομοίωσης 4.15 testHkLocalCluster1.m
- Κώδικας Προσομοίωσης 4.16 testHkLocalDist.m
- Κώδικας Προσομοιώσεων 4.19, 4.32 testkNNConvergence.m
- Κώδικας Προσομοιώσεων 4.20, 4.33 testkNNClusterConstS.m
- Κώδικας Προσομοίωσης 4.21 testkNNClusterConstAll.m
- Κώδικας Προσομοιώσεων 4.26, 4.34, 4.29, 4.35 testKNNConstS.m
- Κώδικας Προσομοίωσης 4.36 testkNN2CompleteGraph.m

