



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΚΑΙ

ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Ολοκληρώματα Διαδρομής Και Εφαρμογές

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

της

Κιορπελίδη Στέλλας

Επιβλέπων: Γεώργιος Κουτσούμπας

Αν. Καθηγητής Ε.Μ.Π

Αθήνα, Οκτώβριος 2015

Περίληψη

Στην διπλωματική, αυτή εργασία παρουσιάζουμε τον *φορμαλισμό των ολοκληρωμάτων δρόμου του Feynman*. Αντικαθιστούμε την κλασική δράση μιας και μοναδικής τροχιάς για ένα σύστημα, με ένα άθροισμα ή αλλιώς με ένα συναρτησιακό ολοκλήρωμα πάνω σ' ένα άπειρο δυνατό σύνολο τροχιών με αποτέλεσμα να υπολογίσουμε το κβαντικό πλάτος. Βάση αυτού του φορμαλισμού υπολογίζουμε την αναλυτική λύση του προβλήματος της περίθλασης και συμβολής των ηλεκτρονίων για μια και δύο σχισμές, ενώ παρατηρούμε γνωστές ιδιότητες του φαινομένου μας.

Abstract

In this bachelor's thesis we present the *Feynman's path integral formulation* of quantum mechanics. We replace the classical notion of single, unique trajectory for a system with a sum, or functional integral, over an infinity of possible trajectories to compute a quantum amplitude. Based on this formulation we present the analytic solution of the famous problem of diffraction and interference of electrons through one and two slits. Then we observe well known properties of our phenomenon.

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Επιβλέποντα Καθηγητή μου Γεώργιο Κουτσούμπα για τις συζητήσεις, την καθοδήγηση και την ενθάρρυνση.

Thirty-one years ago, Dick Feynman told me about his 'sum over histories' version of quantum mechanics. The electron does anything it likes, he said. 'It goes in any direction at any speed, forward or backward in time, however it likes, and then you add up the amplitudes and it gives you the wave-function.' I said to him, 'You're crazy'. But he wasn't.

F.J. Dyson

Περιεχόμενα

Εισαγωγή	8
Κεφάλαιο 1	10
Ο Φορμαλισμός των ολοκληρωμάτων δρόμου	10
1.1 Το πείραμα των δυο σπών	10
1.2 Μια διαισθητική προσέγγιση του φορμαλισμού των ολοκληρωμάτων δρόμου	13
1.3 Η διατύπωση των ολοκληρωμάτων δρόμου	15
1.4 Από την προσέγγιση του Schrödinger στα ολοκληρώματα δρόμου	19
1.5 Διαταρακτική προσέγγιση	27
1.6 Ο Διαδότης ελεύθερου σωματιδίου σε δύο και τρεις διαστάσεις.	31
Κεφάλαιο 2	35
Θεωρία Σκέδασης	35
2.1 Υπολογισμός του πλάτους σκέδασης	35
2.2 Σκέδαση Coulomb	43
Κεφάλαιο 3	47
Συμβολή και περίθλαση ηλεκτρονίου για μια και δυο σχισμές	47
3.1 Εισαγωγή	47
3.2 Η Αρχή του Huygens	49
3.3 Εφαρμογή στο πρόβλημα συμβολής και περίθλασης του ηλεκτρονίου	50
3.4 Φυσικές παράμετροι και προσεγγίσεις	55
3.5 Αναλυτική λύση του προβλήματος περίθλασης ηλεκτρονίου από μια σχισμή	55
3.6 Αναλυτική λύση του προβλήματος περίθλασης ηλεκτρονίου από δύο σχισμές	66
Κεφάλαιο 4	77
Φαινόμενα Περίθλασης με Διάφορα Είδη Σχισμών	77
Εισαγωγή	77
4.1 Εύρος Λοβού της Καμπύλης Περίθλασης για μια Σχισμή	79
4.2 Εύρος Λοβού της Καμπύλης Περίθλασης για πάνω από μια Σχισμές	82
4.3 Περίθλαση από ασύμμετρη σχισμή	88
4.4 Περίθλαση από τετραγωνικό άνοιγμα	90
4.5 Πλάτη Πιθανότητας Πολλαπλασιασμένα με Πραγματικούς και Εκθετικούς Όρους	92
Συμπεράσματα	96
Α' Θεωρία Περίθλασης	98
Α'1 Το Γενικευμένο Πρόβλημα Περίθλασης	98
Α'2 Περίθλαση Fresnel	101

A'3 Περίθλαση <i>Fraunhofer</i>	104
A'4 Περίθλαση από Σχισμή	108
Βιβλιογραφία	113

Εισαγωγή

Από την κβαντομηχανική γνωρίζουμε ότι, για την μελέτη ενός μικροσκοπικού συστήματος απαιτείται η γνώση των πλατών πιθανότητας. Στα διάφορα φυσικά μεγέθη αντιστοιχίζουμε ερμητειανούς τελεστές, που ο καθένας από αυτούς συνδέεται με το πείραμα μέσω των στοιχείων ενός πίνακα. Τα στοιχεία αυτά του πίνακα δεν είναι τίποτα άλλο παρά πλάτη πιθανότητας.

Για την χρονική εξέλιξη αυτών των πλατών, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε διαφορικές εξισώσεις (όπως την εξίσωση *Schrödinger*) ή τον πιο πρόσφατο σχετικά *φορμαλισμό των ολοκληρωμάτων δρόμου*, δηλαδή μέσω ολοκληρωτικών σχέσεων. Η μέθοδος για στοιχειώδη προβλήματα είναι πιο πολύπλοκη μαθηματικά από τις συνήθεις τελεστικές μεθόδους αλλά διαισθητικά πιο χρήσιμη. Σε προχωρημένα δε προβλήματα συστημάτων με απείρους βαθμούς ελευθερίας, η μέθοδος απεδείχθη αποτελεσματικότερη.

Η ιδέα των ολοκληρωμάτων δρόμου επεκτάθηκε με την χρήση της *Λαγκρανζιανής* στην κβαντομηχανική από τον *Paul Dirac* το 1933. Αυτός παρατήρησε ότι η *δράση* διαδραματίζει έναν κεντρικό ρόλο στην κλασική μηχανική (θεώρησε ότι η διατύπωση της κλασικής μηχανικής με μια *Λαγκρανζιανή* είναι πιο θεμελιώδης από την αντίστοιχη με μια *Χαμιλτονιανή*) ενώ φάνηκε να μην παίζει κανένα σημαντικό ρόλο στην κβαντομηχανική. Σκέφτηκε για το πώς αυτή η κατάσταση θα μπορούσε να διορθωθεί και κατέληξε στο συμπέρασμα ότι ο *διαδότης (propagator)* στην κβαντική μηχανική "αντιστοιχεί" στον όρο $e^{iS/\hbar}$, όπου S είναι η *κλασική δράση* που υπολογίζεται κατά μήκος της κλασικής διαδρομής τροχιάς.

Η πλήρης μέθοδος αναπτύχθηκε το 1948 από τον *Richard Feynman*, Ο οποίος κατόρθωσε να παράξει μια άλλη διατύπωση της κβαντομηχανικής, με βάση το γεγονός ότι ο διαδότης μπορεί να γραφεί σαν ένα άθροισμα ως προς όλους τους δυνατούς δρόμους (όχι μόνο του κλασικού) μεταξύ των αρχικών και των τελικών καταστάσεων. Κάθε δρόμος (*path*) συνεισφέρει στο διαδότη έναν όρο $e^{iS/\hbar}$. Έτσι, ενώ ο *Dirac* θεώρησε μόνο την κλασική διαδρομή ο *Feynman* έδειξε ότι όλοι οι δρόμοι συνεισφέρουν: το κβαντικό σωματίδιο ακολουθεί όλους τους δρόμους μεταξύ αρχικής και τελικής θέσης και τα αντίστοιχα πλάτη για κάθε δρόμο προστίθενται σύμφωνα με τον κανόνα του συνδυασμού πλατών της συνήθους κβαντομηχανικής. Ο *Feynman* μελέτησε το πρόβλημα της περιθλασης και συμβολής σωματιδίων με μάζα, χωρίς όμως λεπτομερείς τύπους. Μια πιο ακριβής επεξεργασία, αν και εξακολουθεί να λείπει η λεπτομέρεια, βρίσκεται στο βιβλίο του με τον *Hibbs*.

Το κρίσιμο σημείο της εργασίας είναι να αντιμετωπίσει διαφορετικές οπτικές προσεγγίσεις, την συνήθη *προσέγγιση Fraunhofer*, την *προσέγγιση Fresnel* όπως και μια *ενδιάμεση*. Αυτές οι προσεγγίσεις εξαρτώνται από την απόσταση μεταξύ των σχισμών και της οθόνης, όπου η *προσέγγιση Fraunhofer* αντιστοιχεί στην περίπτωση όπου η απόσταση αυτή είναι άπειρη, ενώ στις άλλες προσεγγίσεις εμφανίζεται πεπερασμένη απόσταση. Η *ενδιάμεση* και η *Fresnel προσέγγιση* καθορίζονται από την τιμή του

αριθμού Fresnel $N_F \equiv 2a^2/\lambda L$, όπου $2a$ είναι το πλάτος της σχισμής και L η απόσταση σχισμής-οθόνης.

Σκοπός της εργασίας είναι να δώσει την αναλυτική παραγωγή των τελικών τύπων της έντασης των ηλεκτρονίων στην οθόνη και να αναλύσει αυτούς τους τύπους χρησιμοποιώντας κάποιες προσεγγίσεις που βασίζονται στην *ασυμπτωτική* συμπεριφορά των *Fresnel συναρτήσεων* που συμβαίνουν σ' αυτές τις εκφράσεις. Ειδικότερα δείχνουμε πως οι φυσικές παράμετροι, ειδικά ο *αριθμός Fresnel*, επηρεάζει την μορφή των εικόνων *περίθλασης* και *συμβολής*.

Παρουσιάζουμε την θεωρία του πειράματος σχισμών χρησιμοποιώντας λοιπόν τον *φορμαλισμό των ολοκληρωμάτων δρόμου* ή όπως αλλιώς λέγεται *φορμαλισμός των πολλών δρόμων* ή, ακόμα, *άθροισμα ως προς τις ιστορίες* (*sum over histories*).

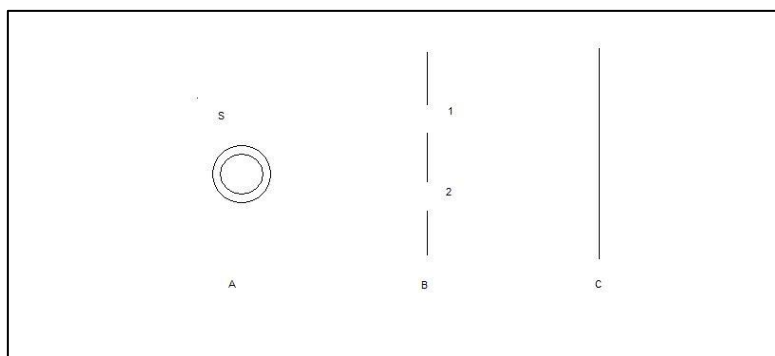
Κεφάλαιο 1

Ο Φορμαλισμός των ολοκληρωμάτων δρόμου

1.1 Το πείραμα των δυο οπών

Ένα από τα σημαντικά πειράματα που δείχνουν τις θεμελιώδεις διαφορές μεταξύ της κλασικής και της κβαντικής Μηχανικής είναι το *πείραμα των δυο οπών* (*double slit experiment*), ένα πείραμα με μυστηριώδη συμπεριφορά και που περιέχει μέσα του την καρδιά της κβαντομηχανικής. Συγκεκριμένα, παρουσιάζει ενδιαφέρον ως προς τα ολοκληρώματα δρόμου διότι οδηγεί σε ένα εννοιολογικό κίνητρο για την εισαγωγή τους.

Έστω μια πηγή S μονοχρωματικών (καθορισμένης ενέργειας και ορμής) περίπου σωματιδίων, π.χ. ηλεκτρονίων, που βρίσκεται τοποθετημένη στη θέση A . Η ροή των ηλεκτρονίων μετριέται πάνω σε μια οθόνη – πέτασμα C απέναντι από την πηγή. Φανταστείτε τώρα την τοποθέτηση ενός τρίτου πετάσματος μεταξύ πηγής και οθόνης, πάνω στο οποίο υπάρχουν δύο σχισμές οι οποίες μπορούν να ανοίξουν ή να κλείσουν (Σχ. 1.1). Όταν η πρώτη σχισμή είναι ανοικτή και η δεύτερη κλειστή μετράμε μια ροή F_1 , όταν η πρώτη σχισμή είναι κλειστή και η δεύτερη ανοικτή μετράμε μια ροή F_2 , ενώ όταν και οι δυο σχισμές είναι ανοικτές μετράμε μια ροή F .



Σχήμα 1.1: Μια πηγή ηλεκτρονίων είναι τοποθετημένη κάπου στο A και ένας ανιχνευτής είναι τοποθετημένος πάνω στο πέτασμα C . Ένα πέτασμα B με δύο σχισμές, οι οποίες μπορούν είτε να ανοίξουν είτε να κλείνουν, βρίσκεται τοποθετημένο ανάμεσα στην πηγή και τον ανιχνευτή, έτσι ώστε τα ηλεκτρόνια που ξεκινούν από το A πρέπει να περάσουν είτε μέσα από την σχισμή 1 είτε μέσα από την σχισμή 2 για να φτάσουν στο C . Μετρούμε τη ροή των ηλεκτρονίων πάνω στην οθόνη C .

Στα πλαίσια της κλασικής φυσικής, οι ροές στην οθόνη αναμένεται να ικανοποιούν τη σχέση $F_1 + F_2 = F$. Στην πραγματικότητα, όμως, βρίσκει κανείς, εν γένει, ότι $F_1 + F_2 + F_{int} = F$ και η δομή του επιπλέον όρου F_{int} αντιστοιχεί ακριβώς στην συμβολή (*interference*) μεταξύ δύο κυμάτων που περνούν μέσα από τη σχισμή 1 και 2, αντίστοιχα:

$$F = |\Phi_1 + \Phi_2|^2 = |\Phi_1|^2 + |\Phi_2|^2 + 2\Re(\Phi_1^* \Phi_2) = F_1 + F_2 + F_{int} \quad (1.1)$$

Πώς μπορεί να ερμηνευθεί αυτό το αποτέλεσμα; Τι είναι το ηλεκτρόνιο;

Μήπως η κυματική συμπεριφορά υποδηλώνει ότι το ηλεκτρόνιο είναι ένα μη-εντοπισμένο αντικείμενο; Ότι το ηλεκτρόνιο περνά συγχρόνως μέσα και από τις δύο σχισμές;

Στην πραγματικότητα αυτό δεν ισχύει. Όταν εντοπίζεται ή παρατηρείται, το ηλεκτρόνιο είναι σημειακό και συγκεκριμένα αν προσπαθήσει κανείς να ανιχνεύσει από ποιά σχισμή πέρασε, βρίσκει ότι πέρασε είτε μέσα από τη σχισμή 1 είτε μέσα από τη σχισμή 2 (αυτό γίνεται με την τοποθέτηση ανιχνευτών στις σχισμές 1 και 2, αντίστοιχα, και λαμβάνοντας υπόψη μια πολύ αδύναμη (χαμηλής έντασης) ροή, έτσι ώστε η πιθανότητα ταυτόχρονης ανίχνευσης του ηλεκτρονίου και στις δυο σχισμές να είναι αυθαίρετα μικρή).

Με βάση τα προηγούμενα καταλήγουμε στο εξής συμπέρασμα: όταν παρατηρούμε τα ηλεκτρόνια αυτά συμπεριφέρονται όπως τα κλασικά σωματίδια, ενώ όταν δεν τα παρατηρούμε αυτά συμπεριφέρονται ως κύματα.

Η F πρέπει να ερμηνευθεί ως *πυκνότητα πιθανότητας (probability density)*. Στην πράξη αυτό σημαίνει ότι υπολογίζουμε το πλάτος Φ σαν να ασχολούμαστε με κύματα και ερμηνεύουμε την ένταση $|\Phi|^2$ ως μια πυκνότητα πιθανότητας για τη θέση ενός σημειακού σωματιδίου. Η $|\Phi|^2$, δηλαδή, έχει στατιστικό χαρακτήρα.

Πως δεν είναι αντιφατικός ο *κυματοσωματιδιακός δυισμός*; Η απάντηση βρίσκεται στα πλαίσια της *Αρχής της Απροσδιοριστίας/Αβεβαιότητας του Heisenberg* και συγκεκριμένα στην επίδραση της *παρατήρησης*. Στην προκειμένη περίπτωση, η προσπάθεια μας να ανιχνεύσουμε ποιόν εναλλακτικό δρόμο ακολούθησε το ηλεκτρόνιο ή από ποια σχισμή πέρασε για να φθάσει από την πηγή στην οθόνη έχει ως αποτέλεσμα την καταστροφή της συμβολής. Έτσι, μια άλλη διατύπωση της *αρχής της απροσδιοριστίας* είναι: *Κάθε προσδιορισμός των εναλλακτικών δρόμων που λαμβάνονται από μια διαδικασία, η οποία μπορεί να ακολουθήσει περισσότερους από έναν εναλλακτικούς δρόμους, καταστρέφει τη συμβολή μεταξύ των εναλλακτικών δρόμων ή δε μπορεί να σχεδιασθεί μια συσκευή που να προσδιορίζει μια από τις δυνατές περιπτώσεις ενός πειράματος χωρίς να καταστρέψει τους κροσσούς συμβολής.*

Στη συνήθη-τυπική προσέγγιση της Κβαντομηχανικής, το πλάτος πιθανότητας καθορίζεται από την εξίσωση του *Schrödinger*. Στην οπτική γωνία του *Schrödinger*, δίδεται κατά κάποιο τρόπο έμφαση στις κυματικές ιδιότητες των σωματιδίων (ηλεκτρόνια, φωτόνια κλπ). Από την άλλη πλευρά, γνωρίζουμε ότι τα σωματίδια, ενώ περιγράφονται από ένα «κύμα πιθανότητας», είναι αντιθέτως σημειακές διακριτές οντότητες. Λόγου χάρη στο πείραμα των δύο οπών, μπορεί κανείς να δει από ποια σχισμή πέρασε το ηλεκτρόνιο με κόστος βέβαια την καταστροφή της κβαντικής υπέρθεσης και κατά συνέπεια των κροσσών συμβολής.

Στο εδάφιο αυτό θα παρουσιαστεί μια εναλλακτική, αλλά πλήρως ισοδύναμη μέθοδος για τον υπολογισμό του *πλάτους πιθανότητας*. Σύμφωνα με αυτήν, η έννοια της τροχιάς ενός σημειακού σωματιδίου θα πρέπει τυπικά να αποκτήσει νόημα, αλλά με έναν τρόπο που να είναι συμβατός με την *αρχή της απροσδιοριστίας*. Η μέθοδος αυτή έγκειται στην

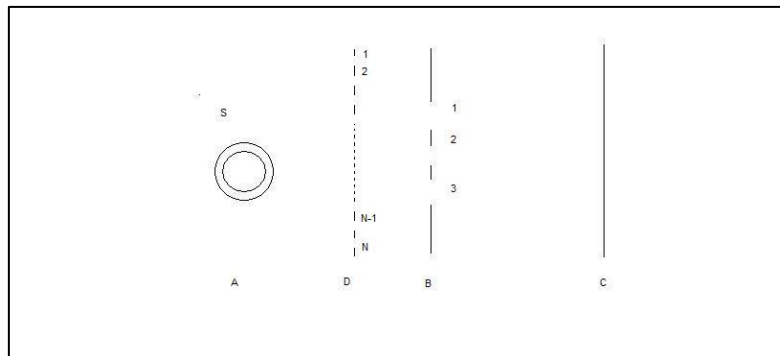
προσέγγιση της κβαντομηχανικής με τα *ολοκληρώματα δρόμου*. Πως μπορεί κανείς να διευκρινίσει τη βασική ιδέα στην οποία βασίζεται αυτή η προσέγγιση;

1.2 Μια διαισθητική προσέγγιση του φορμαλισμού των ολοκληρωμάτων δρόμου

Στο πείραμα των δυο οπών, έχουμε τη συμβολή των δύο εναλλακτικών δρόμων που μπορεί να ακολουθήσει το ηλεκτρόνιο για να μεταβεί από την πηγή A στην οθόνη C . Η ιδέα πίσω από την προσέγγιση της κβαντομηχανικής με *ολοκληρώματα δρόμου* βασίζεται στην επέκταση των συνεπειών του πειράματος των δύο σχισμών. Φανταστείτε, δηλαδή, ότι προσθέτουμε επιπλέον πετάσματα μεταξύ πηγής-οθόνης και ανοίγουμε όλο και περισσότερες σχισμές πάνω σε αυτά. Με αυτόν τον τρόπο γενικεύουμε το αποτέλεσμα του πειράματος των δύο σχισμών μέσω της *αρχής της επαλληλίας/υπέρθωσης*.

Παραστατικά:

1. Με δυο σχισμές γνωρίζουμε ότι: $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$.
2. Εάν ανοίξουμε μια τρίτη σχισμή, σύμφωνα με την *αρχή της επαλληλίας* θα έχουμε: $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3$.
3. Φανταστείτε, έπειτα, ότι προσθέτουμε ένα ενδιάμεσο πέτασμα D με N σχισμές στις θέσεις $x_D^1, x_D^2, \dots, x_D^N$, όπως φαίνεται στο Σχ. 1.2. Τότε, οι δυνατές τροχιές είναι συνάρτηση των x_D^i και $a = 1, 2, 3$, όπου i η σχισμή μέσα από την οποία διέρχεται στο πέτασμα D και a η σχισμή μέσα από την οποία διέρχεται στο πέτασμα B .



Σχήμα 1.2: Έχουμε ένα πέτασμα με N σχισμές και ένα πέτασμα με 2 σχισμές τοποθετημένα μεταξύ πηγής-ανιχνευτή.

Εφαρμόζοντας την *αρχή της επαλληλίας*:

$$\Phi = \sum_{i=1}^N \sum_{a=1,2,3} \Phi(x_D^i, a)$$

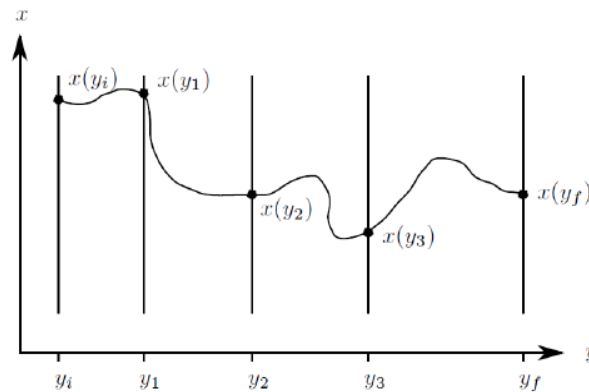
Στο ιδανικό όριο $N \rightarrow \infty$, το άθροισμα \sum_i γίνεται ένα ολοκλήρωμα ως προς x_D , δηλαδή

$$\Phi = \sum_{\alpha=1,2,3} \int dx_D \Phi(x_D, \alpha)$$

Το πέτασμα D γίνεται τότε μία νοητή συσκευή! Επεκτείνοντας αυτή τη διαδικασία προσθέτοντας όλο και περισσότερα νοητά πετάσματα D_1, D_2, \dots, D_M προκύπτει ότι :

$$\Phi = \sum_{\alpha=1,2,3} \int dx_{D_1} dx_{D_2} \dots dx_{D_M} \Phi(x_{D_1}, x_{D_2}, \dots, x_{D_M}; \alpha)$$

Στο όριο όπου τα D_i, D_{i+1} βρίσκονται απείρως κοντά, έχουμε προσδιορίσει όλους τους δυνατούς δρόμους $x(y)$. Στο Σχ. 1.3 μπορεί να δει κανείς μια σχηματική απεικόνιση του δρόμου από ένα αρχικό σε ένα τελικό σημείο, όπου το πέτασμα B έχει αφαιρεθεί έτσι ώστε να μελετηθεί η απλούστερη περίπτωση της διάδοσης στον κενό χώρο.



Σχήμα 1.3: Οι δρόμοι από το (x_i, y_i) στο (x_f, y_f) αντιστοιχούν στις συναρτήσεις $x(y)$ όπου ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες $x(y_i) = x_i$ και $x(y_f) = x_f$.

Στην πραγματικότητα, για να είμαστε πιο ακριβείς, αναμένεται επίσης να έχει σημασία ο τρόπος με τον οποίο οι διάφοροι δρόμοι μεταβάλλονται μέσα στο χρόνο $(t \rightarrow (x(y), y(t)))$. Τότε, καταλήγουμε στην τυπική έκφραση του πλάτους πιθανότητας ως ενός αθροίσματος ως προς όλους τους δυνατούς δρόμους:

$$\Phi = \sum_{\substack{\text{All paths} \\ \{x(y), y(t)\}}} \Phi(\{x\}).$$

Πώς, τώρα, ο πιο πάνω μαθηματικός τύπος κάνει αίσθηση; Πώς μπορεί να κανονικοποιηθεί;

1.3 Η διατύπωση των ολοκληρωμάτων δρόμου

Με βάση τα προηγούμενα, θα επιδιώξουμε να διατυπώσουμε εκ νέου την κβαντομηχανική κινούμενοι πάνω σε δύο κατευθυντήριες γραμμές:

1. Θέλουμε να περιγράψουμε την κίνηση από τη θέση x_i τη χρονική στιγμή t_i στη θέση x_f τη χρονική στιγμή t_f , με ένα κβαντικό πλάτος πιθανότητας $K(x_f, t_f; x_i, t_i)$ που δίδεται από τη σχέση

$$K(x_f, t_f; x_i, t_i) = \sum_{\{\gamma\}} \Phi(\{\gamma\})$$

Όπου $\{\gamma\}$ είναι το σύνολο όλων των δρόμων που ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες $x(t_i) = x_i$ και $x(t_f) = x_f$.

2. Στο όριο $\hbar \rightarrow 0$, θέλουμε η κίνηση να περιγράφεται από την κλασική τροχιά ή, με άλλα λόγια, να προκύπτει η κλασική φυσική.

Παρατηρήσεις

- Η σταθερά \hbar έχει διαστάσεις $[Ενέργεια] \times [Χρόνος]$. Τέτοια είναι και η διάσταση της δράσης S , η οποία περιγράφει τις κλασικές τροχιές μέσω της αρχής της ελάχιστης δράσης (*least action principle*).
- Κανείς μπορεί να συσχετίσει μια τιμή $S[\gamma]$ σε κάθε τροχιά. Οι κλασικές τροχιές δίνονται από τα σταθερά-στάσιμα σημεία της $S[\gamma]$ ($\delta S[\gamma] = 0$).

Επομένως, είναι φυσικό να θεωρήσουμε ότι $\Phi[\gamma] = f(S[\gamma]/\hbar)$, με τη συνάρτηση f τέτοια ώστε στο όριο $\hbar \rightarrow 0$ να προκύπτει η κλασική τροχιά. Η συγκεκριμένη επιλογή

$$\Phi[\gamma] = e^{i\frac{S[\gamma]}{\hbar}} \quad 1.2$$

Συνεπάγεται ότι

$$K(x_f, t_f; x_i, t_i) = \sum_{\{\gamma\}} e^{i\frac{S[\gamma]}{\hbar}} \quad 1.3$$

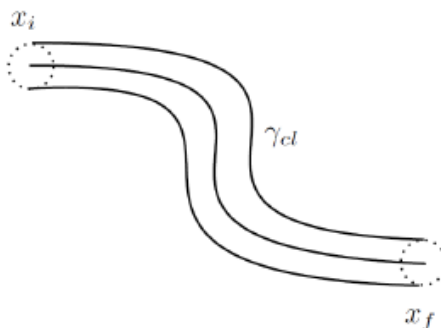
Η οποία φαίνεται να ισχύει για δυο λόγους:

- 1) Η παραδοχή (2), με βάση την εμπειρία μας, φαίνεται να ισχύει. Σε μια μακροσκοπική, κλασική κατάσταση η κλίση $\delta S/\delta\gamma \ll \hbar$ για τις περισσότερες τροχιές. Γύρω από τέτοιες τροχιές η φάση $e^{i\frac{S}{\hbar}}$ ταλαντώνεται πάρα πολύ γρήγορα και το άθροισμα ως προς τις γειτονικές τροχιές θα τείνει στο μηδέν (Σχ. 1.4).



Σχήμα 1.4: Οι συνεισφορές των δυο γειτονικών τροχιών γ_1 και γ_2 θα τείνουν στο μηδέν εάν οι δράσεις τους είναι μεγάλες.

Από την άλλη μεριά, κατά μήκος μιας κλασικής τροχιάς γ_{cl} η δράση $S[\gamma]$ παίρνει ακρότατη ή στάσιμη τιμή και συγκεκριμένα ελάχιστη. Επομένως, στην γειτονιά της γ_{cl} η δράση S διαφέρει πολύ λίγο, έτσι ώστε όλες οι τροχιές που εμπεριέχονται μέσα σε ένα σωλήνα γύρω από την κλασική τροχιά συνεισφέρουν εποικοδομητικά (Σχ. 1.5) στο άθροισμα ως προς τις τροχιές. Πιο συγκεκριμένα, ο σωλήνας αποτελείται από εκείνες τις τροχιές για τις οποίες $|S - S_{cl}| \leq \hbar$ και καθορίζει το όριο στο οποίο η κλασική τροχιά είναι καλά ορισμένη. Δε δύναται η αναμενόμενη τιμή της κλασικής δράσης να προσδιοριστεί με ακρίβεια μεγαλύτερη από $\sim \hbar$. Ωστόσο, σε κανονικές μακροσκοπικές καταστάσεις ισχύει ότι $S_{cl} \gg \hbar$. Στο ακριβές όριο $\hbar \rightarrow 0$, επιβιώνει μόνο η κλασική τροχιά.



Σχήμα 5: Οι συνεισφορές από τις γειτονικές τροχιές της κλασικής τροχιάς θα κυριαρχήσουν.

Ένα ακόμα απλό ανάλογο αποτελεί το μονοδιάστατο ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ix^2/\hbar}$, το οποίο παίρνει σημαντικές τιμές στην περιοχή $x^2 \leq \hbar$ γύρω από το σταθερό σημείο $x = 0$.

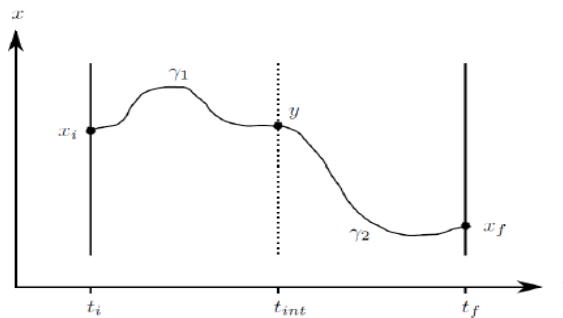
- 2) Η σχέση $\Phi[\gamma] = e^{i\frac{S[\gamma]}{\hbar}}$ οδηγεί σε μια σημαντική ιδιότητα σύνθεσης. Πράγματι, η δράση για το δρόμο γ_{12} λαμβάνεται από την ένωση των δυο διαδοχικών δρόμων γ_1 και γ_2 , όπως φαίνεται στο Σχ. 1.6, ικανοποιώντας την απλή αθροιστική σχέση $S[\gamma_{12}] = S[\gamma_1] + S[\gamma_2]$. Η σχέση αυτή συνεπάγεται την εξής σχέση σύνθεσης για το

πλάτος : $\Phi[\gamma_{12}] = \Phi[\gamma_1]\Phi[\gamma_2]$, η οποία με την σειρά της οδηγεί σε μια σχέση σύνθεσης για το K , την οποία θα αποδείξουμε στην συνέχεια:

Έστω τα πλάτη για τρεις διαδοχικές χρονικές στιγμές $t_i < t_{int} < t_f$. Το συνολικό πλάτος $K(x_f, t_f; x_i, t_i)$ θα βρεθεί από την εξέλιξη σε δυο χρονικά βήματα: (1) από το t_i στο t_{int} , $K(y, t_{int}; x_i, t_i) \forall y$, και (2) από το t_{int} στο t_f , $K(x_f, t_f; y, t_{int})$. Προφανώς, κάθε δρόμος με συνοριακές συνθήκες $x(t_i) = x_i$ και $x(t_f) = x_f$ μπορεί να προκύψει από την ένωση δυο διαδοχικών δρόμων $\gamma_1(y = x(t_{int}))$ από $t_i \rightarrow t_{int}$ και $\gamma_2(y = x(t_{int}))$ από $t_{int} \rightarrow t_f$.

Τότε μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} \int dy K(x_f, t_f; y, t_{int}) K(y, t_{int}; x_i, t_i) &= \sum_{\gamma_1, \gamma_2} \int dy e^{i\frac{S[\gamma_1(y)] + S[\gamma_2]}{\hbar}} \\ &= \sum_{\gamma(y) = \gamma_2(y) \circ \gamma_1(y)} \int dy e^{i\frac{S[\gamma(y)]}{\hbar}} \\ &= K(x_f, t_f; x_i, t_i) \end{aligned} \quad 1.4$$



Σχήμα 6: Ο δρόμος από το (x_i, t_i) στο (x_f, t_f) μπορεί να βρεθεί αθροίζοντας το δρόμο γ_1 με τον δρόμο γ_2 .

Παρατηρούμε ότι ο πιο πάνω κανόνας σύνθεσης πληρούται στην κβαντομηχανική, όπως εύκολα φαίνεται στο συνήθη φορμαλισμό. Είναι το κβαντικό ανάλογο της κλασικής σύνθεσης πιθανοτήτων

$$P_{1 \rightarrow 2} = \sum_a P_{1 \rightarrow a} P_{a \rightarrow 2} \quad 1.5$$

Αυτό που προστίθεται στην Κβαντομηχανική δεν είναι η πιθανότητα P αφ' εαυτής, αλλά το πλάτος K το οποίο σχετίζεται με την πιθανότητα ως $P = |K|^2$.

Είναι σημαντικό να εκτιμήσει κανείς τι θα συμβεί αν τροποποιήσουμε την επιλογή $\Phi[\gamma] = e^{i\frac{S[\gamma]}{\hbar}}$. Επί παραδείγματι, η εναλλακτική επιλογή $\Phi[\gamma] = e^{-i\frac{S[\gamma]}{\hbar}}$ ικανοποιεί την ιδιότητα σύνθεσης, αλλά στο όριο $\hbar \rightarrow 0$ δε δίνει, εν γένει, την κλασική τροχιά. Αυτή η επιλογή θα οδηγήσει μεν στο ελάχιστο της δράσης S , όμως οι κλασικές τροχιές θα αντιπροσωπεύουν, στη γενική περίπτωση, μόνο σαγματικά και όχι στάσιμα σημεία της S στο χώρο των συναρτήσεων. Άλλη μια εναλλακτική επιλογή θα μπορούσε να είναι η $\Phi[\gamma] = e^{(i\frac{S[\gamma]}{\hbar})^2}$, η οποία θα οδηγούσε, ίσως, στην κλασική τροχιά στο όριο $\hbar \rightarrow 0$, αλλά δεν θα σεβόταν καθόλου τον κανόνα σύνθεσης που ισχύει στην κβαντική μηχανική. Ακόμα χειρότερα, στην περίπτωση που η δράση θα αντιπροσώπευε εκείνη ενός συστήματος δυο σωματιδίων, η συγκεκριμένη επιλογή θα υποδηλώνε ότι τα αντίστοιχα πλάτη κάθε σωματιδίου δεν θα παραγοντοποιούνταν ακόμη και στο όριο που βρίσκονται πολύ μακριά το ένα από το άλλο και δεν αλληλεπιδρούν.

Μια ενδιαφέρουσα πτυχή της κβάντωσης είναι ότι εισάγεται μια θεμελιώδης μονάδα για τη δράση: το $\hbar \equiv h/(2\pi)$. Στην κλασική φυσική η συνολική τιμή της δράσης είναι μη-φυσική: Αν

$$S(q, \dot{q}) \rightarrow S_\lambda \equiv \lambda S(q, \dot{q})$$

Το μόνο που έχει να κάνει κανείς είναι να πολλαπλασιάσει όλες τις εξισώσεις κίνησης με τη σταθερά λ , έτσι ώστε οι λύσεις να παραμένουν αναλλοίωτες (τα σταθερά σημεία των S, S_λ συμπίπτουν).

Η κβαντομηχανική θέτει μια φυσική μονάδα μέτρησης για την S . ανάλογα με το μέγεθος της S , το σύστημα θα συμπεριφέρεται διαφορετικά:

- Μεγάλη $S \rightarrow$ κλασική περιοχή
- Μικρή $S \rightarrow$ κβαντική περιοχή

Στο όριο της μεγάλης δράσης ($S \gg \hbar$) αναμένεται ότι στο συνολικό πλάτος K συνεισφέρουν σημαντικά ή κυριαρχούν οι τροχιές που βρίσκονται πολύ κοντά στην κλασική τροχιά γ_{cl} (ημικλασικό όριο). Αναμένεται ότι

$$K(x_f; x_i) \sim (\text{ομαλή συνάρτηση}) e^{i\frac{S_{cl}}{\hbar}}.$$

Στο όριο της μικρής δράσης ($S \sim \hbar$), όλες οι τροχιές είναι σχετικά σημαντικές: πρέπει να τις αθροίσουμε με ένα συνεπή τρόπο και αυτό δεν είναι εύκολο από μαθηματικής άποψης.

Λόγω της προκύπτουσας μαθηματικής δυσκολίας, αντί να ακολουθήσουμε τη μέθοδο του *Feynman* και να δείξουμε ότι οδηγεί στα ίδια αποτελέσματα με αυτά της εξίσωσης του *Schrödinger*, θα ακολουθήσουμε την αντίστροφη πορεία που είναι πιο εύκολη: θα κατασκευάσουμε τον τύπο για τα ολοκληρώματα δρόμου ξεκινώντας από την τελική προσέγγιση του *Schrödinger*.

1.4 Από την προσέγγιση του Schrödinger στα ολοκληρώματα δρόμου

Αρχικά για την μελέτη ενός φυσικού συστήματος είναι απαραίτητος ο προσδιορισμός των εξισώσεων κίνησης που το διέπουν. Έχουμε θεωρήσει το απλό σύστημα ενός σωματιδίου που κινείται στον χωροχρόνο. Σύμφωνα με την κλασική προσέγγιση το σωματίδιο αυτό είναι αυστηρά χωρικά εντοπισμένο και διαγράφει μια καλά καθορισμένη τροχιά η οποία περιγράφεται από τον *δεύτερο Νόμο του Νεύτωνα*:

$$m \frac{d^2 \vec{x}(t)}{dt^2} = -\nabla V(\vec{x}(t))$$

Όπου m η μάζα του σωματιδίου και V το δυναμικό μέσα στο οποίο κινείται. Αντίθετα, στα πλαίσια της κβαντικής μηχανικής και σύμφωνα με την Σχολή της Κοπεγχάγης, τα σωματίδια εμφανίζονται ως *δυναμικότητες (potentialities)* παρά ως αντικειμενικές πραγματικότητες όπως στην κλασική προσέγγιση. Η εξέλιξη του ενός σωματιδίου περιγράφεται από την διαφορική εξίσωση του *Schrödinger*.

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{x}, t) = H\Psi(\vec{x}, t)$$

Όπου H η χαμιλτονιανή του συστήματος και $\Psi(\vec{x}, t)$ η κυματοσυνάρτηση του. Από την στατιστική ερμηνεία του *Born*, η κυματοσυνάρτηση αντιπροσωπεύει ένα κύμα πιθανότητας το τετράγωνο της οποίας δίνει την πυκνότητα πιθανότητας να βρεθεί το σωματίδιο τη χρονική στιγμή t στην θέση \vec{x} .

Έτσι στα πλαίσια της θεωρίας αυτής, η μετάβαση από ένα αρχικό σημείο s' ένα τελικό δεν ακολουθεί μια συγκεκριμένη τροχιά, αλλά αντίθετα κάθε διαδρομή φέρει ένα συγκεκριμένο πλάτος πιθανότητας. Σύμφωνα με την *αρχή της επαλληλίας* της κβαντομηχανικής το άθροισμα των πλατών των πιθανοτήτων όλων των δυνατών τροχιών εκφράζει το συνολικό πλάτος πιθανότητας μετάβασης ή αλλιώς τον *διαδότη* $K(x_f, t_f; x_i, t_i)$ του συστήματος, όπως αναλύσαμε πιο πριν.

Θεωρούμε, τώρα, ότι το κβαντικό σύστημα χαρακτηρίζεται από το *κατά Heisenberg* χρονοανεξάρτητο καταστατικό διάνυσμα $|\Psi\rangle$ του *χώρου Hilbert*. Σύμφωνα όμως με την εικόνα του *Schrödinger*, κατά την οποία η χρονική εξέλιξη εμπεριέχεται στην κυματοσυνάρτηση, κάθε διάνυσμα κατάστασης $|\Psi\rangle$ μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$|\Psi_t\rangle = e^{-i\hat{H}t/\hbar} |\Psi\rangle \quad 1.6$$

Όπου $\hat{H} = \hat{H}(\hat{p}, \hat{x})$ ο τελεστής της χρονοανεξάρτητης *Χαμιλτονιανής* του συστήματος. Να σημειωθεί ότι, στο φορμαλισμό της κβαντομηχανικής, οι ποσότητες p, x αντικαθίστανται με τους τελεστές οι οποίοι επιτρέπουν τη μετατροπή σχέσεων *Heisenberg*.

Η κυματοσυνάρτηση του συστήματος $\Psi(x, t)$ βρίσκεται από την προβολή του διανύσματος $|\Psi\rangle$ πάνω στις ιδιοκαταστάσεις της θέσης $|x\rangle$:

$$\Psi(x, t) = \langle x|\Psi t\rangle = \langle xt|\Psi\rangle \quad 1.7$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δυο μέλη της (1.6) με $\langle x|$ βρίσκουμε

$$\begin{aligned} \langle x|\Psi t\rangle &= \langle x|e^{-i\hat{H}t/\hbar}|\Psi\rangle \\ \Rightarrow \langle xt|\Psi\rangle &= \langle x|e^{-i\hat{H}t/\hbar}|\Psi\rangle \\ \Rightarrow \langle xt| &= \langle x| e^{-i\hat{H}t/\hbar} \\ \Rightarrow |xt\rangle &= e^{i\hat{H}t/\hbar}|x\rangle \end{aligned} \quad 1.8$$

Οι ιδιοκαταστάσεις της θέσης ικανοποιούν τη σχέση ορθοκανονικότητας

$$\langle x|x'\rangle = \delta(x - x')$$

Επίσης εξ' ορισμού της συνάρτησης δέλτα έχουμε:

$$\int \delta(x - x') dx' = 1$$

Έτσι έπεται

$$\begin{aligned} \langle x|\Psi\rangle &= \int \langle x|x'\rangle \langle x'|\Psi\rangle dx' \\ \Rightarrow \int |x'\rangle \langle x'| dx' &= 1 \end{aligned} \quad 1.9$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δυο μέλη της παραπάνω σχέσης με $e^{i\hat{H}t'/\hbar} e^{-i\hat{H}t'/\hbar}$ και σε συνδυασμό με την (1.8) προκύπτει :

$$\int |x't'\rangle \langle x't'| dx' = 1$$

Οπότε αντίστοιχα με πριν μπορούμε να γράψουμε

$$\Psi(x_f, t_f) = \int \langle x_f t_f | x_i t_i \rangle \Psi(x_i, t_i) dx_i \quad 1.10$$

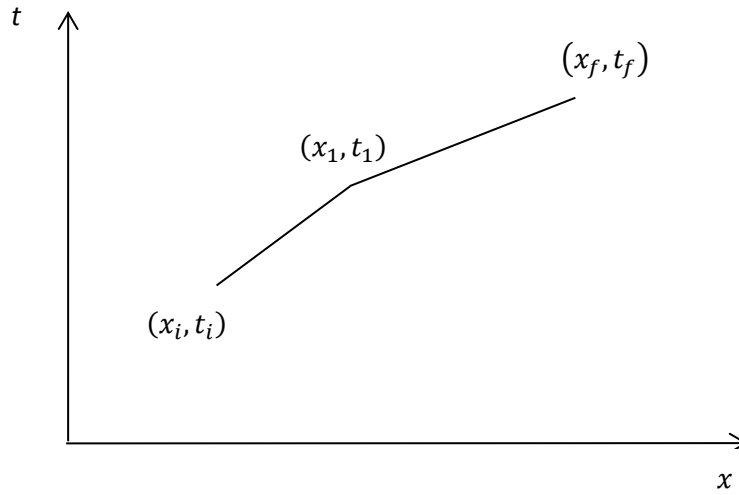
Η ποσότητα

$$K(x_f, t_f; x_i, t_i) = \langle x_f t_f | x_i t_i \rangle$$

αποτελεί τον διαδότη του συστήματος από την αρχική κατάσταση $|x_i t_i\rangle$ στην τελική $|x_f t_f\rangle$. Όπως προαναφέραμε, δηλαδή, αποτελεί το συνολικό πλάτος πιθανότητας μετάβασης από τη θέση x_i τη χρονική στιγμή t_i στη θέση x_f τη χρονική στιγμή t_f . Η πυκνότητα πιθανότητας της μετάβασης είναι κατά τα γνωστά $P = |\langle x_f t_f | x_i t_i \rangle|^2$.

Την ίδια πορεία που ακολουθήσαμε κατά την διαισθητική προσέγγιση του φορμαλισμού μας ακολουθούμε και τώρα.

Έστω t_1 ενδιάμεσο σημείο στο διάστημα (t_i, t_f) και x_1 ενδιάμεσο σημείο στο διάστημα (x_i, x_f) .



Σχήμα1. 7: Η μετάβαση από το (x_i, t_i) στο (x_f, t_f) γίνεται με την μετάβαση από το (x_i, t_i) στο (x_1, t_1) και από το (x_1, t_1) στο τελικό (x_f, t_f) .

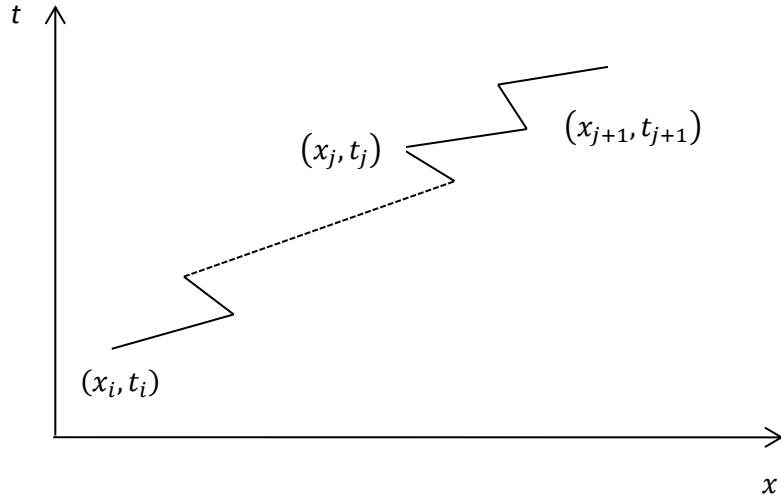
Εκμεταλλευόμενοι τη σχέση ορθοκανονικότητας του διανύσματος $|x_1 t_1\rangle$ μπορούμε να γράψουμε

$$\Psi(x_f, t_f) = \iint \langle x_f t_f | x_1 t_1 \rangle \langle x_1 t_1 | x_i t_i \rangle \Psi(x_i, t_i) dx_i dx_1 \quad 1.11$$

Δηλαδή, το πλάτος της πιθανότητας μετάβασης από το (x_i, t_i) στο (x_f, t_f) ισούται με το άθροισμα των πλατών των πιθανοτήτων μετάβασης από το (x_i, t_i) σε όλα τα ενδιάμεσα σημεία (x_1, t_1) και στη συνέχεια στο τελικό σημείο (x_f, t_f) . Αντιπαραβάλλοντας τις σχέσεις (1.9), (1.10) έπεται ότι ο διαδότης ικανοποιεί τη σχέση

$$\langle x_f t_f | x_i t_i \rangle = \int \langle x_f t_f | x_1 t_1 \rangle \langle x_1 t_1 | x_i t_i \rangle dx_1$$

Συνεχίζοντας τελείως αναλόγως, διαιρούμε το διάστημα του χρόνου $[t_i, t_f]$ σε $(n + 1)$ ίσα διαστήματα πλάτους $\tau = t_{j+1} - t_j$.



Σχήμα 1.8: Διαμέριση της τροχιάς σε επιμέρους τμήματα χρονικής διάρκειας τ .

Κατ' αντιστοιχία με πριν ο διαδότης από την αρχική στην τελική κατάσταση είναι

$$\langle x_f t_f | x_i t_i \rangle = \int dx_1 \dots \int dx_n \langle x_f t_f | x_n t_n \rangle \langle x_n t_n | x_{n-1} t_{n-1} \rangle \dots \langle x_1 t_1 | x_i t_i \rangle \quad 1.12$$

Σύμφωνα με την (1.8) ο διαδότης μεταξύ δυο διαδοχικών σημείων (x_j, t_j) και (x_{j+1}, t_{j+1}) με $0 \leq j \leq n$ μπορεί να γραφεί ως

$$\langle x_{j+1} t_{j+1} | x_j t_j \rangle = \langle x_{j+1} | e^{-i\hat{H}t_{j+1}/\hbar} e^{i\hat{H}t_j/\hbar} | x_j \rangle = \langle x_{j+1} | e^{-i\hat{H}\tau/\hbar} | x_j \rangle$$

Αναπτύσσοντας το εκθετικό έχουμε

$$\begin{aligned} K(x_{j+1}, t_{j+1}; x_j, t_j) &= \left\langle x_{j+1} \left| 1 - \frac{i\hat{H}\tau}{\hbar} + O(\tau^2) \right| x_j \right\rangle \\ &= \langle x_{j+1} | x_j \rangle - \frac{i\tau}{\hbar} \langle x_{j+1} | \hat{H} | x_j \rangle + O(\tau^2) \\ &= \delta(x_{j+1} - x_j) - \frac{i\tau}{\hbar} \langle x_{j+1} | \hat{H} | x_j \rangle + O(\tau^2) \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int dp e^{ip(x_{j+1}-x_j)/\hbar} - \frac{i\tau}{\hbar} \langle x_{j+1} | \hat{H} | x_j \rangle + O(\tau^2) \end{aligned} \quad (1.13)$$

Όπου στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε τον ορισμό της δ -συνάρτησης του Dirac στη μια διάσταση $\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int dp e^{ipx}$ και την ιδιότητα $\delta(ax) = |a|^{-1} \delta(x)$, $a \in \mathbb{R}^*$.

Στην περίπτωση που το κβαντικό σύστημα χαρακτηρίζεται από την μη- σχετικιστική Χαμιλτονιανή της μορφής

$$\hat{H}(p, x) = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x})$$

μπορούμε να εισάγουμε στον δεύτερο όρο της (1.13) έναν παράγοντα 1 μεταξύ των x_{j+1} , \hat{H} και έναν παράγοντα 1 μεταξύ των \hat{H} , x_j ώστε να πάμε στην αναπαράσταση των ορμών

$$\left\langle x_{j+1} \left| \frac{\hat{p}^2}{2m} \right| x_j \right\rangle = \iint dp dp' \langle x_{j+1} | p' \rangle \left\langle p' \left| \frac{\hat{p}^2}{2m} \right| p \right\rangle \langle p | x_j \rangle \quad 1.14$$

Όπου $|p\rangle$ ιδιοκατάσταση της ορμής, για την οποία έχουμε εισάγει τη σχέση πληρότητας των ιδιοκαταστάσεων και ισχύουν

$$\hat{p}|p\rangle = p|p\rangle \quad \langle x|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ipx/\hbar}$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω εκφράσεις στην (1.14) προκύπτει

$$\begin{aligned} \left\langle x_{j+1} \left| \frac{\hat{p}^2}{2m} \right| x_j \right\rangle &= \iint \frac{dp dp'}{2\pi\hbar} e^{\frac{i(p'x_{j+1}-px_j)}{\hbar}} \frac{p^2}{2m} \delta(p' - p) \\ &= \int \frac{dp}{2\pi\hbar} e^{\frac{ip(x_{j+1}-x_j)}{\hbar}} \frac{p^2}{2m} \end{aligned} \quad 1.15$$

Με παρόμοιο τρόπο βρίσκουμε

$$\begin{aligned} \langle x_{j+1} | V(\hat{x}) | x_j \rangle &= V\left(\frac{x_{j+1} + x_j}{2}\right) \langle x_{j+1} | x_j \rangle \\ &= V(\bar{x}_j) \delta(x_{j+1} - x_j) \\ &= \int \frac{dp}{2\pi\hbar} e^{\frac{ip(x_{j+1}-x_j)}{\hbar}} V(\bar{x}_j) \end{aligned} \quad 1.16$$

Όπου $\bar{x}_j = \frac{x_{j+1} + x_j}{2}$.

Με βάση τις σχέσεις (1.15), (1.16) παίρνουμε

$$\begin{aligned} \langle x_{j+1} | \hat{H} | x_j \rangle &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int \frac{dp}{2\pi\hbar} e^{\frac{ip(x_{j+1}-x_j)}{\hbar}} \left(\frac{p^2}{2m} + V(\bar{x}_j) \right) \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int \frac{dp}{2\pi\hbar} e^{\frac{ip(x_{j+1}-x_j)}{\hbar}} H(p, \bar{x}_j) \end{aligned} \quad 1.17$$

Αντικαθιστώντας τώρα την (1.17) στην (1.13) συνεπάγεται ότι ο διαδότης μεταξύ δυο διαδοχικών σημείων είναι

$$\begin{aligned} K(x_{j+1}, t_{j+1}; x_j, t_j) &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int dp_j e^{\frac{ip_j(x_{j+1}-x_j)}{\hbar}} \left(1 - \frac{i\tau}{\hbar} H(p_j, \bar{x}_j) + O(\tau^2) \right) \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int dp_j e^{\frac{ip_j(x_{j+1}-x_j)}{\hbar}} e^{-\frac{i\tau H(p_j, \bar{x}_j)}{\hbar}} \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int dp_j e^{\frac{i[p_j(x_{j+1}-x_j) - \tau H(p_j, \bar{x}_j)]}{\hbar}} \end{aligned}$$

Όπου p_j είναι η ορμή μεταξύ των t_j και t_{j+1} και $\tau \equiv t_{j+1} - t_j$.

Συνεπώς για να πάρουμε τον ολικό διαδότη, σύμφωνα με την (1.12) έχουμε

$$K(x_f, t_f; x_i, t_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \prod_{j=1}^n dx_j \prod_{j=0}^n \frac{dp_j}{2\pi\hbar} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{j=0}^n [p_j(x_{j+1} - x_j) - \tau H(p_j, \bar{x}_j)] \right\}$$

με $x_0 = x_i, x_n = x_f$.

Η σχέση αυτή μπορεί να γραφεί συμβολικά

$$K(x_f, t_f; x_i, t_i) = \int \wp x \wp p \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt [p\dot{x} - H(p, x)] \right\}$$

όπου $\wp x = \prod_{j=1}^n dx_j$ και $\wp p = \prod_{j=0}^n \frac{dp_j}{2\pi\hbar}$.

Αντικαθιστώντας την Χαμιλτονιανή $H(p, x) = \frac{p^2}{2m} + V(x)$ στη διακριτή έκφραση του διαδότη έχουμε

$$K(x_f, t_f; x_i, t_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \prod_{j=1}^n dx_j \prod_{j=0}^n \frac{dp_j}{2\pi\hbar} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{j=0}^n \left[p_j(x_{j+1} - x_j) - \tau \frac{p_j^2}{2m} - \tau V(\bar{x}_j) \right] \right\}$$

Αν χρησιμοποιήσουμε το γνωστό Gaussian ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-ax^2 + bx + c) dx = \exp\left(\frac{b^2}{4a} + c\right) \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Τότε

$$\int \frac{dp}{2\pi\hbar} \exp \left[\frac{i}{\hbar} \tau \left(p\dot{x} - \frac{p^2}{2m} \right) \right] = \sqrt{\frac{m}{i2\pi\hbar\tau}} \exp \left(\frac{i\tau m\dot{x}^2}{2\hbar} \right)$$

Έτσι εύκολα προκύπτει

$$K(x_f, t_f; x_i, t_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{m}{i2\pi\hbar\tau} \right)^{\frac{n+1}{2}} \int \prod_{j=1}^n dx_j \exp \left\{ \frac{i\tau}{\hbar} \sum_{j=0}^n \left[\frac{m}{2} \left(\frac{x_{j+1} - x_j}{\tau} \right)^2 - V(x_j) \right] \right\}$$

Στο συνεχές όριο η προηγούμενη σχέση γίνεται σε πιο συμπαγή μορφή

$$K(x_f, t_f; x_i, t_i) = \mathcal{N} \int \wp x \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt \left[\frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V(x) \right] \right\} \quad 1.18$$

Όπου $\mathcal{N} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{m}{i2\pi\hbar\tau} \right)^{\frac{n+1}{2}}$ μια άπειρη σταθερά, ο απειρισμός της οποίας αίρεται με την μέθοδο της κανονικοποίησης (normalization). Το $\int \wp x$ είναι ένα συναρτησιακό ολοκλήρωμα πάνω σε όλες τις τροχιές $x = x(t)$ που ικανοποιούν τις οριακές συνθήκες $x(t_i) = x_i$ και $x(t_f) = x_f$ και ονομάζεται ολοκλήρωμα τροχιάς. Η ολοκληρωτέα ποσότητα στο εκθετικό αποτελεί την Λαγκρανζιανή του συστήματος $\mathcal{L}(x, \dot{x}) = T(\dot{x}) - V(x)$ και ως γνωστών η χρονική ολοκλήρωση της δίνει τη δράση $S = \int \mathcal{L} dt$. Έτσι

$$K(x_f, t_f; x_i, t_i) = \mathcal{N} \int \wp x \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt \mathcal{L}(x, \dot{x}) \right\} = \mathcal{N} \int \wp x e^{\frac{iS}{\hbar}} \quad 1.19$$

Έτσι, δηλαδή, στο συνεχές όριο το x γίνεται μια συνάρτηση του t , και το ολοκλήρωμα είναι ένα «συναρτησιακό ολοκλήρωμα», ένα ολοκλήρωμα πάνω σε όλες τις συναρτήσεις.

Αποδεικνύεται, λοιπόν, ότι η διάδοση του σωματιδίου στο μικρόκοσμο συνεισφέρουν ισοβαρώς όλες οι δυνατές διαδρομές $x(t)$. Δηλαδή, δεν υπάρχει κάποια διαδρομή που να κατέχει προνομιακό ρόλο συγκριτικά με τις υπόλοιπες. Κάθε μια, όμως, συνεισφέρει με διαφορετική φάση $e^{\frac{iS}{\hbar}}$.

Η μορφή του διαδότη στην (1.19) εξηγεί καθαρά την επιλογή μιας καθορισμένης τροχιάς, όπως συμβαίνει στην κλασική προσέγγιση. Στο κλασικό όριο η δράση είναι πολύ μεγάλη σε σχέση με το \hbar

$$\frac{S}{\hbar} \rightarrow \infty$$

Έτσι απειροστά κοντινές διαδρομές έχουν πολύ διαφορετικές φάσεις $e^{\frac{iS}{\hbar}}$ και $e^{\frac{i(S+\delta S)}{\hbar}}$ αντίστοιχα με αποτέλεσμα να συμβάλλουν καταστροφικά και να αλληλοαναιρούνται. Αντίθετα, ο διαδότης είναι μη μηδενικός μόνο στην περιοχή γύρω από την κλασική διαδρομή που ικανοποιεί την συνθήκη $\delta S = 0$.

Η αρχική προσέγγιση του Feynman ήταν να υιοθετήσει την (1.19) ως μια υπόθεση και έπειτα να αποδείξει την εξίσωση *Schrödinger* από αυτήν. Το μειονέκτημα αυτής της προσέγγισης είναι ότι δεν ισχύει γενικά αφού και η $\hat{H}(p, x) = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x})$ δεν ισχύει πάντα.

Στον φορμαλισμό των ολοκληρωμάτων δρόμου έχουμε σαφή έκφραση για το πλάτος μεταφοράς, που ξεκάθαρα προσαρμόζεται στα προβλήματα σκέδασης πολύ καλά. Οι ποσότητες p και x που αφορούν τα ολοκληρώματα αποτελούν κλασικές ποσότητες και όχι τελεστές. Δεν είναι ξεκάθαρο, ωστόσο, ότι τα ολοκληρώματα απείρων διαστάσεων αυτού του τύπου ορίζονται καλώς μαθηματικά, δηλαδή κατά πόσο συγκλίνουν δηλαδή υπάρχουν! Εμείς θα θεωρήσουμε ότι υπάρχουν.

1.5 Διαταρακτική προσέγγιση

Στόχος μας είναι να επεξηγήσουμε πως η μέθοδος των ολοκληρωμάτων δρόμου χρησιμοποιείται στον υπολογισμό των διαδικασιών της σκέδασης. Η σκέδαση ενός σωματιδίου σ' ένα άλλο περιγράφεται μη σχετικιστικά με αλληλεπίδραση με ένα δυναμικό $V(x)$. Συχνά όμως η μορφή αυτή του δυναμικού καθιστά αδύνατη την εύρεση μιας αναλυτικής έκφρασης για τον διαδότη, έτσι καταλήγουμε, ως συνήθως, στη θεωρία διαταραχών. Αυτό είναι αναγκαίο όταν το δυναμικό είναι μικρό, ή πιο συγκεκριμένα όταν η χρονική ολοκλήρωση του $V(x, t)$ είναι μικρή συγκριτικά με το \hbar .

$$\int_{t_i}^{t_f} V(x, t) dt \ll \hbar$$

Σ' αυτήν την περίπτωση αναπτύσσουμε το δυναμικό ως εξής

$$\exp\left\{-\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} V(x, t) dt\right\} = 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} V(x, t) dt - \frac{1}{2! \hbar^2} \left[\int_{t_i}^{t_f} V(x, t) dt \right]^2 + \dots$$

Αντικαθιστώντας στην έκφραση (4.13) για τον διαδότη $K(x_f, t_f; x_i, t_i)$ έχουμε μια άπειρη σειρά, η οποία ονομάζεται προσέγγιση Born.

$$\begin{aligned} K(x_f, t_f; x_i, t_i) &= \mathcal{N} \int \wp x \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} \frac{1}{2} m \dot{x}^2 dt\right\} \times \\ &\quad \left\{ 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} V(x, t) dt - \frac{1}{2! \hbar^2} \left[\int_{t_i}^{t_f} V(x, t) dt \right]^2 + \dots \right\} \\ &= K_0 + K_1 + K_2 + \dots \end{aligned} \quad 1.20$$

Ο πρώτος όρος του αναπτύγματος περιγράφει την περίπτωση της ελεύθερης διάδοσης του σωματιδίου και είναι

$$K_0(x_f, t_f; x_i, t_i) = \mathcal{N} \int \wp x \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} \frac{1}{2} m \dot{x}^2 dt\right\}$$

Ενώ στη διακριτή μορφή γράφεται

$$K_0(x_f, t_f; x_i, t_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{m}{i2\pi\hbar\tau} \right)^{\frac{n+1}{2}} \int \prod_{j=1}^n dx_j \exp\left\{ \frac{im}{2\hbar\tau} \sum_{j=0}^n \left[\frac{m}{2} (x_{j+1} - x_j)^2 \right] \right\}$$

Το παραπάνω ολοκλήρωμα επιδέχεται αναλυτικής επίλυσης, με την τιμή του στη γενική περίπτωση να είναι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \dots dx_n \exp\{i\lambda[(x_1 - a)^2 + (x_2 - x_1)^2 + \dots + (b - x_n)^2]\} =$$

$$= \sqrt{\frac{i^n \pi^n}{(n+1)\lambda^n}} \exp\left\{\frac{i\lambda}{n+1}(b-a)^2\right\}$$

Ύστερα από κατάλληλες αντικαταστάσεις έπεται

$$K_0(x_f, t_f; x_i, t_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{m}{i2\pi\hbar\tau}\right)^{\frac{n+1}{2}} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \left(\frac{i2\pi\hbar\tau}{m}\right)^{\frac{n}{2}} \exp\left\{\frac{im}{2\hbar(n+1)\tau}(x_f - x_i)^2\right\} \quad 1.21$$

Αντικαθιστώντας $\frac{n+1}{\tau} = t_f - t_i$ ($t_f < t_i$) καταλήγουμε στην έκφραση του ελεύθερου διαδότη στο χώρο των θέσεων

$$K_0(x_f, t_f; x_i, t_i) = \Theta(t_f - t_i) \left(\frac{m}{i2\pi\hbar(t_f - t_i)}\right)^{1/2} \exp\left\{\frac{im(x_f - x_i)^2}{2\hbar(t_f - t_i)}\right\} \quad 1.22$$

Όπου η συνάρτηση $\Theta(t_f - t_i) = \begin{cases} 1, & t_f > t_i \\ 0, & t_f < t_i \end{cases}$ εξασφαλίζει ότι ο διαδότης υπακούει στην αρχή της αιτιότητας.

Η διόρθωση πρώτης τάξης του διαδότη K_1 είναι

$$K_1(x_f, t_f; x_i, t_i) = \mathcal{N} \int \delta x \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} \frac{1}{2} m \dot{x}^2 dt\right\} \times \left(-\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} V(x, t) dt\right)$$

Και στη διακριτή μορφή γράφεται

$$K_1(x_f, t_f; x_i, t_i) = -\frac{i}{\hbar} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{m}{i2\pi\hbar\tau}\right)^{\frac{n+1}{2}} \sum_{l=1}^n \tau \int \prod_{j=1}^n dx_j \exp\left\{\frac{im}{2\hbar\tau} \sum_{j=0}^n (x_{j+1} - x_j)^2\right\} V(x_l, t_l)$$

Επειδή το δυναμικό εξαρτάται μόνο από τα x_l, t_l μπορούμε να τροποποιήσουμε την παραπάνω σχέση ως εξής

$$K_1(x_f, t_f; x_i, t_i) = -\frac{i}{\hbar} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{l=1}^n \tau \int dx_l \left\{ \left(\frac{m}{i2\pi\hbar\tau}\right)^{\frac{n-l+1}{2}} \int \exp\left\{\frac{im}{2\hbar\tau} \sum_{j=0}^n (x_{j+1} - x_j)^2\right\} dx_{l+1} \dots dx_n \right\} \times$$

$$V(x_l, t_l) \left\{ \left(\frac{m}{i2\pi\hbar\tau}\right)^{\frac{l}{2}} \int \exp\left\{\frac{im}{2\hbar\tau} \sum_{j=0}^n (x_{j+1} - x_j)^2\right\} dx_1 \dots dx_{l-1} \right\}$$

Συγκρίνοντας αυτήν την σχέση με την (1.21) εύκολα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι οι όροι στις αγκύλες αντιπροσωπεύουν τους ελεύθερους διαδότες $K_0(x_f, t_f; x, t)$ και $K_0(x, t; x_i, t_i)$ αντίστοιχα, όπου $x_i < x < x_f$ και $t_i < t < t_f$. Με βάση την διαπίστωση αυτή ο διαδότης πρώτης τάξης στο όριο του συνεχούς μπορεί να γραφεί ως

$$K_1(x_f, t_f; x_i, t_i) = -\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt \int_{-\infty}^{+\infty} dx K_0(x_f, t_f; x, t) V(x, t) K_0(x, t; x_i, t_i)$$

Εξαιτίας όμως της βηματικής συνάρτησης στην (1.22) οι παραπάνω ελεύθεροι διαδότες μηδενίζονται για $t > t_f$ και $t < t_i$ αντίστοιχα. Έτσι η χρονική ολοκλήρωση μπορεί να γίνει πάνω σε όλες τις τιμές του t .

$$K_1(x_f, t_f; x_i, t_i) = -\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dt dx K_0(x_f, t_f; x, t) V(x, t) K_0(x, t; x_i, t_i) \quad 1.23$$

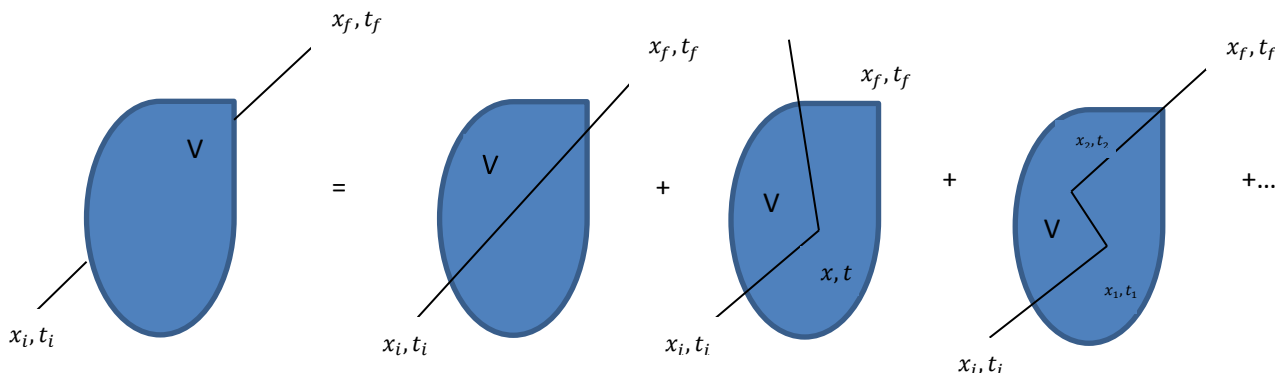
Η διόρθωση πρώτης τάξης εκφράζει τελικά τη διάδοση του σωματιδίου από την αρχική θέση (x_i, t_i) σε όλες τις ενδιάμεσες θέσεις (x, t) στις οποίες αλληλεπιδρά το δυναμικό $V(x, t)$ και στην συνέχεια μεταβαίνει στην τελική θέση (x_f, t_f) .

Εντελώς αντίστοιχα μπορούμε να δείξουμε ότι η διόρθωση δεύτερης τάξης του διαδότη ικανοποιεί τη σχέση

$$K_2(x_f, t_f; x_i, t_i) = \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 dt_2 dx_1 dx_2 K_0(x_f, t_f; x_2, t_2) V(x_2, t_2) \times \\ K_0(x_2, t_2; x_1, t_1) V(x_1, t_1) K_0(x_1, t_1; x_i, t_i) \quad 1.24$$

Τελικά, ο συνολικός διαδότης, θα είναι η σειρά *Born*

$$K(x_f, t_f; x_i, t_i) \\ = K_0(x_f, t_f; x_i, t_i) - \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dt dx K_0(x_f, t_f; x, t) V(x, t) K_0(x, t; x_i, t_i) \\ + \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 dt_2 dx_1 dx_2 K_0(x_f, t_f; x_2, t_2) V(x_2, t_2) K_0(x_2, t_2; x_1, t_1) V(x_1, t_1) K_0(x_1, t_1; x_i, t_i) \\ + \dots$$



Σχήμα 8: Αναπαράσταση προσέγγισης Born

Αντικαθιστώντας τον τελικό διαδότη στην (1.10) έπεται ότι η κυματοσυνάρτηση του σωματιδίου $\Psi(x_f, t_f)$ ικανοποιεί, στη μία διάσταση, τη σχέση

$$\begin{aligned}\Psi(x_f, t_f) &= \int K(x_f, t_f; x_i, t_i) \Psi(x_i, t_i) dx_i \\ &= \int dx_i K_0(x_f, t_f; x_i, t_i) \Psi(x_i, t_i) \\ &\quad - \frac{i}{\hbar} \int dt dx dx_i K_0(x_f, t_f; x, t) V(x, t) K_0(x, t; x_i, t_i) \Psi(x_i, t_i) + \dots\end{aligned}$$

1.6 Ο Διαδότης ελεύθερου σωματιδίου σε δύο και τρεις διαστάσεις.

Στο σημείο αυτό, αξίζει να δούμε πως μπορούμε να κατασκευάσουμε τον κβαντομηχανικό διαδότη ενός ελεύθερου σωματιδίου σε δύο και τρεις διαστάσεις σε καρτεσιανές, σε κυκλικές και σε σφαιρικές συντεταγμένες, αντίστοιχα.

Η βάση για μια τέτοια επέκταση είναι η δυνατότητα διαχωρισμού της εξίσωσης *Schrödinger* και η δυνατότητα κατασκευής των ιδιοσυναρτήσεων αυτής και του διαδότη σε διαφορετικές συντεταγμένες.

Πρωτού ξεκινήσουμε θα αποδείξουμε ότι ο ελεύθερος διαδότης K_0 είναι απλώς μια *συνάρτηση Green* για την εξίσωση *Schrödinger*.

Έχουμε

$$\Psi(x_f, t_f) = \int dx_i K_0(x_f, t_f; x_i, t_i) \Psi(x_i, t_i) - \frac{i}{\hbar} \int dt dx K_0(x_f, t_f; x, t) V(x, t) \Psi(x, t)$$

Αυτή η εξίσωση αποτελεί μια ολοκληρωτική εξίσωση της Ψ . Θεωρούμε ότι στο μακρινό παρελθόν, $t_i \rightarrow -\infty$, η Ψ γίνεται ελεύθερη, δηλαδή ένα επίπεδο κύμα φ . Τότε ο πρώτος όρος της παραπάνω εξίσωσης είναι εξίσου ένα επίπεδο κύμα, εφόσον προκύπτει από την ελεύθερη διάδοση της $\Psi(x_i, t_i)$. Έτσι γράφουμε

$$\Psi(x_f, t_f) = \varphi(x_f, t_f) - \frac{i}{\hbar} \int dt dx K_0(x_f, t_f; x, t) V(x, t) \Psi(x, t)$$

Η $\Psi(x_f, t_f)$ υπακούει στην εξίσωση *Schrödinger*

$$\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_{x_f}^2 \Psi(x_f, t_f) + i\hbar \frac{\partial \Psi(x_f, t_f)}{\partial t_f} = V(x_f, t_f) \Psi(x_f, t_f)$$

Έτσι, επειδή η $\varphi(x_f, t_f)$ υπακούει στην εξίσωση ελεύθερου σωματιδίου (με $V = 0$) τότε ο διαδότης πρέπει να υπακούει στην

$$\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_{x_f}^2 K_0(x_f, t_f; x, t) + i\hbar \frac{\partial K_0(x_f, t_f; x, t)}{\partial t_f} = i\hbar \delta(x_f - x) \delta(t_f - t)$$

Αυτή δεν είναι άλλη παρά η εξίσωση για την *συνάρτηση Green* της εξίσωσης *Schrödinger*. Να σημειώσουμε ότι η παρουσία της $\delta(t_f - t)$ ήταν αναμενόμενη λόγω της συνάρτησης θ της (1.22).

Άρα ο διαδότης K_0 είναι απλώς μια *συνάρτηση Green* της εξίσωσης *Schrödinger*, όπως ισχυριστήκαμε.

Όπως ήδη δείξαμε ο διαδότης καθορίζει τη χρονική εξέλιξη της κυματοσυνάρτησης του κβαντικού συστήματος όπως φαίνεται στην σχέση

$$\Psi(x_f, t_f) = \int K(x_f, t_f; x_i, t_i) \Psi(x_i, t_i) dx_i \quad 1.25$$

Ικανοποιεί την εξίσωση *Schrödinger*

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} K(x_f, t_f; x_i, t_i) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(x) \right] K(x_f, t_f; x_i, t_i)$$

όπως και την αρχική συνθήκη

$$K(x_i, x_f; t = 0) = \delta(x_f - x_i)$$

Έτσι μπορούμε να κατασκευάσουμε τον διαδότη ως μια γραμμική υπέρθεση των ορθοκανονικών ιδιοσυναρτήσεων $\psi_n(x)$, όπου η κάθε μια εξελίσσεται αρμονικά με τον χρόνο με συχνότητα E_n/\hbar , καθορισμένη από τις αντίστοιχες ιδιοτιμές της ενέργειας του κβαντικού συστήματος.

$$K(x_f, t_f; x_i, t_i) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n^*(x_f) \psi_n(x_i) e^{-iE_n(t_f-t_i)/\hbar} \quad 1.26$$

Έτσι, συγκεκριμένα, καταλήγω στον γνωστό τύπο για τον διαδότη ελεύθερου σωματιδίου στην μια διάσταση

$$\begin{aligned} K(x_f, t_f; x_i, t_i) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{ik(x_f-x_i)} e^{-i\hbar k^2(t_f-t_i)/2m} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{2i\pi\hbar t}{m}}} \right) e^{\frac{im(x_i-x_f)^2}{2\hbar(t_f-t_i)}} \end{aligned} \quad 1.27$$

Η οποία αποτελεί την γνωστή μας σχέση (1.22).

Το έργο της κατασκευής των αντίστοιχων διαδοτών σε δυο και τρεις διαστάσεις επιτυγχάνεται σε δυο διαδοχικά στάδια. Το πρώτο αποτελεί την κατασκευή σε καρτεσιανές άμεσα και εύκολα. Το δεύτερο περιλαμβάνει την αλλαγή σε κυκλικές ή σφαιρικές συντεταγμένες καθώς επίσης και την αλλαγή των αντίστοιχων ιδιοσυναρτήσεων και ιδιοτιμών της ενέργειας.

Η επέκταση σε N-διαστάσεις σε καρτεσιανές συντεταγμένες,

$$x_1 = x \quad x_2 = y \quad x_3 = z$$

λαμβάνεται με απευθείας πολλαπλασιασμό

$$\begin{aligned}
K(x_{fs}, t_f; x_{is}, t_i) &= \frac{1}{(2\pi)^N} \prod_{s=1}^N \int_{-\infty}^{+\infty} dk_s e^{ik_s(x_{fs}-x_{is})} e^{-i\hbar k_s^2(t_{fs}-t_{is})/2m} \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{2i\pi\hbar(t_{fs}-t_{is})}{m}}} \right)^{\frac{N}{2}} \prod_{s=1}^N e^{\frac{im(x_{fs}-x_{is})^2}{2\hbar(t_{fs}-t_{is})}} \quad 1.28
\end{aligned}$$

Να σημειώσουμε ότι το γινόμενο των εκθετικών *Gauss* ισούται με ένα απλό εκθετικό *Gauss* ως φαίνεται

$$\frac{im}{2\hbar(t_f-t_i)} \sum_{s=1}^N (x_{fs}-x_{is})^2 = \frac{im}{2\hbar(t_f-t_i)} (\vec{r}_f - \vec{r}_i)^2$$

Για $N = 2, 3$, με αλλαγή σε κυκλικές και σφαιρικές συντεταγμένες και με αντιστοιχία των ιδιοσυναρτήσεων και ιδιοτιμών προκύπτει ο ελεύθερος διαδότης

$$\begin{aligned}
K(R_f, \varphi_f, t_f; R_i, \varphi_i, t_i) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_0^{\infty} dk k J_n(kR_f) J_n(kR_i) \frac{e^{in(\varphi_f-\varphi_i)}}{2\pi} e^{-i\hbar k^2(t_f-t_i)/2m} \\
&= \left(\frac{m\omega}{2\pi i\hbar(t_f-t_i)} \right) e^{-\frac{m[R_i^2-2R_iR_f \cos(\varphi_i-\varphi_f)+R_f^2]}{2i\hbar(t_f-t_i)}} \quad 1.29
\end{aligned}$$

Και

$$\begin{aligned}
K(r_f, \theta_f, \varphi_f, t_f; r_i, \theta_i, \varphi_i, t_i) &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=-l}^l \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} dk k^2 j_l(kr_f) j_l(kr_i) \\
&\quad \times Y_{ln}^*(\theta_f, \varphi_f) Y_{ln}(\theta_i, \varphi_i) e^{-i\hbar k^2(t_f-t_i)/2m} \\
&= \left(\frac{m\omega}{2\pi i\hbar(t_f-t_i)} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m[r_i^2-2\vec{r}_i \cdot \vec{r}_f+r_f^2]}{2i\hbar(t_f-t_i)}} \quad 1.30
\end{aligned}$$

Όπου $J_n(z)$ και $j_l(z)$ είναι οι συνήθεις και οι σφαιρικές συναρτήσεις *Bessel*, αντίστοιχα, και $Y_{ln}(\theta, \varphi)$ είναι οι σφαιρικές αρμονικές.

Έτσι αναγνωρίζουμε πλέον την (1.28) ως τον κβαντομηχανικό διαδότη σε N διαστάσεις στις καρτεσιανές συντεταγμένες για το ελεύθερο σωματίδιο. Η (1.29) αντιστοιχεί στον διαδότη για $N = 2$ στις κυκλικές συντεταγμένες, ενώ η (1.30) για $N = 3$ στις σφαιρικές συντεταγμένες.

Κεφάλαιο 2

Θεωρία Σκέδασης

2.1 Υπολογισμός του πλάτους σκέδασης

Στα Μαθηματικά και την Φυσική η θεωρία σκέδασης αποτελεί ένα πλαίσιο για την μελέτη και την κατανόηση της σκέδασης των κυμάτων και των σωματιδίων. Μπορούμε να πούμε, ότι είναι ουσιαστικά μια χρόνο-ανεξάρτητη θεωρία διαταραχών που εφαρμόζεται στην περίπτωση του συνεχούς φάσματος. Αυτό σημαίνει ότι, ξέρουμε ότι υπάρχει μια ιδιοκατάσταση της πλήρους Χαμιλτονιανής για κάθε δυνατή ενέργεια. Η εύρεση των ιδιοτιμών δεν είναι απαραίτητη εδώ. Η διαδικασία ξεκινάει με το να διαλέξουμε μια οποιαδήποτε ενέργεια E και να προσπαθήσουμε να βρούμε την «διαταραγμένη» ιδιοκατάσταση $|\psi(E)\rangle$. Συνήθως, υπάρχουν πολλαπλές εκφυλισμένες ιδιοκαταστάσεις για κάθε δεδομένη ενέργεια. Έτσι, προκύπτει το ερώτημα: Ποιά από τις προφανώς απείρως πολλές εκφυλισμένες ιδιοκαταστάσεις προσπαθούμε να υπολογίσουμε; Η απάντηση έρχεται από την αιτιότητα: Θέλουμε να είμαστε σε θέση να μπορούμε να υπολογίσουμε πλήρως το πλάτος πιθανότητας ρεύματος που προέρχεται από $|\vec{r}'| = \infty$ και στη συνέχεια η θεωρία να μας δώσει το αντίστοιχο εξερχόμενο πλάτος ρεύματος.

Ο τρόπος να το κάνουμε αυτό είναι να πάρουμε μια «αδιατάραχτη» ιδιοκατάσταση η οποία έχει το επιθυμητό πλάτος ρεύματος (δεν χρειάζεται να ανησυχούμε για το εξερχόμενο πλάτος ρεύματος). Το επόμενο βήμα είναι να βεβαιωθούμε ότι η θεωρία διαταραχών δεν μας δημιουργεί πρόσθετα εισερχόμενα ρεύματα. Αν ανατρέξουμε πίσω σε ό,τι γνωρίζουμε, θυμόμαστε ότι η επίλυση μερικής διαφορικής εξίσωσης απαιτεί πρώτα τον καθορισμό των επιθυμητών συνοριακών συνθηκών.

Τυπικά, ο φορμαλισμός της θεωρίας σκέδασης περιγράφεται με τον ακόλουθο τρόπο: σωματίδιο είναι ελεύθερο στην κατάσταση $|\psi_{in}\rangle$ για $t = -\infty$, σκεδάζεται από δυναμικό V και μεταβαίνει στην κατάσταση $|\psi_{out}\rangle$ για $t = +\infty$ όπου είναι και πάλι ελεύθερο.

$$\psi_{in}(\vec{x}_i, t_i) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3}} e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}_i\vec{x}_i - E_i t_i)} \quad 2.1$$

Επιπλέον θεωρούμε ότι το δυναμικό $V(\vec{x}, t)$ είναι τοπικό, έτσι ώστε

$$\lim_{x \rightarrow \infty} V(\vec{x}, t) = 0$$

Παίρνοντας την $1^{\text{η}}$ προσέγγιση του Born έχουμε

$$\begin{aligned} \psi^{(+)}(\vec{x}_f, t_f) &= \int d\vec{x}_i K_0(\vec{x}_f, t_f; \vec{x}_i, t_i) \psi_{in}(\vec{x}_i, t_i) \\ &\quad - \frac{i}{\hbar} \int dt d\vec{x} d\vec{x}_i K_0(\vec{x}_f, t_f; \vec{x}, t) V(\vec{x}, t) K_0(\vec{x}, t; \vec{x}_i, t_i) \psi_{in}(\vec{x}_i, t_i) \end{aligned} \quad 2.2$$

Ο εκθέτης στο $\psi^{(+)}(\vec{x}_f, t_f)$ υποδηλώνει ότι αυτή αντιστοιχεί σ' ένα κύμα το οποίο ήταν ελεύθερο για $t = -\infty$, και ως εκ τούτου περιλαμβάνει τον "καθυστερημένο" διαδότη $K_0(\vec{x}, t; \vec{x}', t')$, ο οποίος εξαφανίζεται για $t' > t$. Θα ήταν εξίσου αποδεκτό να γράψουμε

την λύση ως $\psi^{(-)}(\vec{x}_1, t_1)$ η οποία θα αποτελείται από ένα κύμα που γίνεται ελεύθερο την χρονική στιγμή $t = \infty$ (ψ_{out}) και έναν "προχωρημένο" διαδότη $K_0(\vec{x}, t; \vec{x}', t')$, ο οποίος θα εξαφανίζεται για $t' < t$.

Συνεχίζοντας, λοιπόν, μας ενδιαφέρει η πιθανότητα να ανιχνεύσουμε το σωματίδιο μας με καθορισμένη ορμή, δηλαδή ένα επίπεδο κύμα ψ_{out} . Αυτή ονομάζεται πλάτος σκέδασης S (*scattering amplitude*) και είναι εξ ορισμού

$$\begin{aligned}
S &= \int \psi_{out}^*(\vec{x}_f, t_f) \psi^{(+)}(\vec{x}_f, t_f) d\vec{x}_f \\
&= \int d\vec{x}_i d\vec{x}_f \psi_{out}^*(\vec{x}_f, t_f) K_0(\vec{x}_f, t_f; \vec{x}_i, t_i) \psi_{in}(\vec{x}_i, t_i) \\
&\quad - \frac{i}{\hbar} \int dt d\vec{x} d\vec{x}_i d\vec{x}_f \psi_{out}^*(\vec{x}_f, t_f) K_0(\vec{x}_f, t_f; \vec{x}, t) V(\vec{x}, t) K_0(\vec{x}, t; \vec{x}_i, t_i) \psi_{in}(\vec{x}_i, t_i) \quad 2.3
\end{aligned}$$

Το επίπεδο κύμα ψ_{out} αντιστοιχεί στην ελεύθερη διάδοση του σωματιδίου, οπότε με αντικατάσταση της (1.22) και της (2.1) έχουμε

$$\begin{aligned}
\psi_{out}(\vec{x}_f, t_f) &= \int d\vec{x}_i K_0(\vec{x}_f, t_f; \vec{x}_i, t_i) \psi_{in}(\vec{x}_i, t_i) \\
&= d\vec{x}_i \Theta(t_f - t_i) \sqrt{\frac{m}{2i\pi\hbar(t_f - t_i)}} e^{\frac{im(\vec{x}_f - \vec{x}_i)^2}{2\hbar(t_f - t_i)}} \frac{1}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3}} e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}_i \vec{x}_i - E_i t_i)} \\
&= \sqrt{\frac{m}{2i\pi\hbar(t_f - t_i)}} \frac{1}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3}} e^{-\frac{i}{\hbar} E_i t_i} \int d\vec{x}_i e^{\frac{im}{2\hbar(t_f - t_i)}(\vec{x}_f^2 + \vec{x}_i^2 - 2\vec{x}_f \vec{x}_i) + \frac{i}{\hbar} \vec{p}_i \vec{x}_i} \\
&= \sqrt{\frac{m}{2i\pi\hbar(t_f - t_i)}} \frac{1}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3}} e^{-\frac{i}{\hbar} E_i t_i} \int d\vec{x}_i e^{\frac{im}{2\hbar(t_f - t_i)}(\vec{x}_f^2 + \vec{x}_i^2 - 2\vec{x}_f \vec{x}_i + \frac{2}{m}(t_f - t_i) \vec{p}_i \vec{x}_i)} \\
&= \sqrt{\frac{m}{2i\pi\hbar(t_f - t_i)}} \frac{1}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3}} e^{-\frac{i}{\hbar} E_i t_i} \int d\vec{x}_i e^{\frac{im}{2\hbar(t_f - t_i)} \left(\vec{x}_f^2 + \vec{x}_i^2 - 2\vec{x}_i \left(\vec{x}_f - \frac{(t_f - t_i)}{m} \vec{p}_i \right) \right)}
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας πάλι το ολοκλήρωμα *Gauss*

$$\begin{aligned}
& \int d\vec{x}_i \exp \left[- \left(-\frac{im}{2\hbar(t_f - t_i)} \right) \vec{x}_i^2 + \left(-\frac{2 \left(\vec{x}_f - \frac{(t_f - t_i)}{m} \vec{p}_i \right)}{2\hbar(t_f - t_i)} im \right) \vec{x}_i + \left(\frac{im}{2\hbar(t_f - t_i)} \vec{x}_f^2 \right) \right] \\
&= \exp \left[-\frac{m^2}{\hbar^2(t_f - t_i)^2} \left(\vec{x}_f - \frac{(t_f - t_i)}{m} \vec{p}_i \right)^2 - \frac{1}{4 \left(-\frac{im}{2\hbar(t_f - t_i)} \right)} + \frac{im}{2\hbar(t_f - t_i)} \vec{x}_f^2 \right] \left(\frac{\pi}{-\frac{im}{2\hbar(t_f - t_i)}} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \exp \left[\frac{m^2 \hbar(t_f - t_i)}{2im\hbar^2(t_f - t_i)^2} \left(\vec{x}_f - \frac{(t_f - t_i)}{m} \vec{p}_i \right)^2 + \frac{im}{2\hbar(t_f - t_i)} \vec{x}_f^2 \right] \sqrt{-\frac{2\hbar\pi(t_f - t_i)}{im}} \\
&= \exp \left[\frac{m}{2i\hbar(t_f - t_i)} \left(\vec{x}_f^2 - \frac{2\vec{x}_f(t_f - t_i)\vec{p}_i}{m} + \frac{(t_f - t_i)^2 \vec{p}_i^2}{m^2} \right) - \frac{m}{2i\hbar(t_f - t_i)} \vec{x}_f^2 \right] \sqrt{-\frac{2\hbar\pi(t_f - t_i)}{im}} \\
&= \exp \left[-\frac{m2\vec{x}_f(t_f - t_i)\vec{p}_i}{m2i\hbar(t_f - t_i)} + \frac{m(t_f - t_i)^2 \vec{p}_i^2}{2i\hbar(t_f - t_i)m^2} \right] \sqrt{-\frac{2\hbar\pi(t_f - t_i)}{im}} \\
&= \exp \left[-\frac{\vec{x}_f \vec{p}_i}{i\hbar} + \frac{(t_f - t_i)\vec{p}_i^2}{2i\hbar m} \right] \sqrt{-\frac{2\hbar\pi(t_f - t_i)}{im}}
\end{aligned}$$

Έτσι προκύπτει

$$\begin{aligned}
\psi_{out}(\vec{x}_f, t_f) &= \sqrt{\frac{m}{2i\pi\hbar(t_f - t_i)}} \frac{1}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3}} \sqrt{-\frac{2\hbar\pi(t_f - t_i)}{im}} e^{-\frac{i}{\hbar} E_i t_i} e^{-\frac{\vec{x}_f \vec{p}_i}{i\hbar}} e^{\frac{(t_f - t_i)\vec{p}_i^2}{2i\hbar m}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3}} e^{-\frac{i}{\hbar} E_i t_i} e^{-\frac{\vec{x}_f \vec{p}_i}{i\hbar}} e^{\frac{(t_f - t_i)\vec{p}_i^2}{2i\hbar m}}
\end{aligned}$$

Γνωρίζουμε ότι $E = \frac{\vec{p}^2}{2m}$ άρα

$$\begin{aligned}
\psi_{out}(\vec{x}_f, t_f) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3}} e^{-\frac{i}{\hbar} E_i t_i} e^{-\frac{\vec{x}_f \vec{p}_i}{i\hbar}} e^{\frac{t_f E_i}{i\hbar}} e^{\frac{it_i E_i}{i\hbar}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3}} e^{-\frac{\vec{x}_f \vec{p}_i}{i\hbar}} e^{\frac{t_f E_i}{i\hbar}}
\end{aligned}$$

Λόγω της ελεύθερης διάδοσης έχουμε επίσης ότι $E_i = E_f$, έτσι τελικά

$$\psi_{out}(\vec{x}_f, t_f) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3}} e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}_f \vec{x}_f - E_f t_f)}$$

Αντικαθιστώντας τώρα τις κανονικοποιημένες κυματοσυναρτήσεις μας στον 1^ο όρο της (2.3) έχουμε

$$\begin{aligned} & \int d\vec{x}_i d\vec{x}_f \psi_{out}^*(\vec{x}_f, t_f) K_0(\vec{x}_f, t_f; \vec{x}_i, t_i) \psi_{in}(\vec{x}_i, t_i) \\ &= \int d\vec{x}_i d\vec{x}_f \frac{1}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3}} e^{-\frac{i}{\hbar}(\vec{p}_f \vec{x}_f - E_f t_f)} \sqrt{\frac{m}{2i\pi\hbar(t_f - t_i)}} e^{\frac{im(\vec{x}_f - \vec{x}_i)^2}{2\hbar(t_f - t_i)}} \frac{1}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3}} e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}_i \vec{x}_i - E_i t_i)} \\ &= \int d\vec{x}_i d\vec{x}_f \sqrt{\frac{m}{2i\pi\hbar(t_f - t_i)}} \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{p}_f \vec{x}_f} e^{\frac{i}{\hbar}E_f t_f} e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}_i \vec{x}_i} e^{-\frac{i}{\hbar}E_i t_i} \\ & \quad \times e^{\frac{im}{2\hbar(t_f - t_i)}\vec{x}_f^2} e^{-\frac{im}{\hbar(t_f - t_i)}\vec{x}_f \vec{x}_i} e^{\frac{im}{2\hbar(t_f - t_i)}\vec{x}_i^2} \end{aligned}$$

Παρατηρώ το ολοκλήρωμα *Gauss*

$$\begin{aligned} & \int d\vec{x}_i e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}_i \vec{x}_i} e^{-\frac{im}{\hbar(t_f - t_i)}\vec{x}_f \vec{x}_i} e^{\frac{im}{2\hbar(t_f - t_i)}\vec{x}_i^2} \\ &= \int d\vec{x}_i \exp \left[- \left(-\frac{im}{2\hbar(t_f - t_i)} \right) \vec{x}_i^2 + \left(-\frac{2im}{2\hbar(t_f - t_i)} \vec{x}_f + \frac{i}{\hbar} \vec{p}_i \right) \vec{x}_i \right] \\ &= \exp \left[\frac{\left(-\frac{2im}{2\hbar(t_f - t_i)} \vec{x}_f + \frac{i}{\hbar} \vec{p}_i \right)^2}{4 \left(-\frac{im}{2\hbar(t_f - t_i)} \right)} \right] \left(\frac{\pi}{-\frac{im}{2\hbar(t_f - t_i)}} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \exp \left[-\frac{im}{2\hbar(t_f - t_i)} \vec{x}_f^2 - \frac{i(t_f - t_i)}{2\hbar m} \vec{p}_i^2 + \frac{i}{\hbar} \vec{p}_i \vec{x}_f \right] \left(\frac{2i\pi\hbar(t_f - t_i)}{m} \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Έτσι ο όρος μας γίνεται

$$\begin{aligned} & \int d\vec{x}_f \sqrt{\frac{m}{2i\pi\hbar(t_f - t_i)}} \sqrt{\frac{2i\pi\hbar(t_f - t_i)}{m}} \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{p}_f \vec{x}_f} e^{\frac{i}{\hbar}E_f t_f} e^{-\frac{i}{\hbar}E_i t_i} e^{\frac{im}{2\hbar(t_f - t_i)}\vec{x}_f^2} e^{-\frac{im}{2\hbar(t_f - t_i)}\vec{x}_f^2} e^{-\frac{i(t_f - t_i)}{2\hbar m} \vec{p}_i^2} e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}_i \vec{x}_f} \\ &= \int d\vec{x}_f \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{p}_f \vec{x}_f} e^{\frac{i}{\hbar}E_f t_f} e^{-\frac{i}{\hbar}E_i t_i} e^{-\frac{i}{\hbar}E_i(t_f - t_i)} e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}_i \vec{x}_f} \\ &= \int d\vec{x}_f \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} e^{\frac{i}{\hbar}E_f t_f} e^{-\frac{i}{\hbar}E_i t_f} e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}_i - \vec{p}_f) \vec{x}_f} \end{aligned}$$

Όμως ο όρος $e^{\frac{i}{\hbar}E_f t_f} e^{-\frac{i}{\hbar}E_i t_f}$ απαλείφεται αφού $E_i = E_f$, ενώ γνωρίζουμε ταυτόχρονα ότι $\int \frac{d\vec{p}}{(2\pi\hbar)^3} e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}(q_{j+1}-q_j)} = \delta(q_{j+1} - q_j)$ έτσι φαίνεται η σχέση μας να παίρνει την μορφή $\delta(\vec{p}_i - \vec{p}_f)$. Με αντικατάσταση στην (2.3) καταλήγω

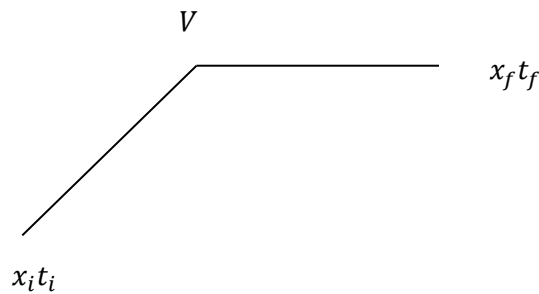
$$S_{fi} = \delta(\vec{p}_i - \vec{p}_f) - \frac{i}{\hbar} \int dt d\vec{x} d\vec{x}_i d\vec{x}_f \psi_{out}^*(\vec{x}_f, t_f) K_0(\vec{x}_f, t_f; \vec{x}, t) V(\vec{x}, t) K_0(\vec{x}, t; \vec{x}_i, t_i) \psi_{in}(\vec{x}_i, t_i) \quad 2.4$$

Το πλάτος σκέδασης φαίνεται λοιπόν να είναι ένα στοιχείο του πίνακα S , του οποίου το στοιχείο (fi) αποτελεί η σχέση (2.4) που μόλις καταλήξαμε. Ο πρώτος όρος που βρήκαμε αναλυτικά αντιστοιχεί σε σωματίδιο που διαδίδεται ελεύθερα, δεν αλληλεπιδρά όποτε και διέπεται από την αρχή διατήρησης της ορμής. Εύκολα μπορούμε να φανταστούμε ότι δεν αντιστοιχεί παρά σ' έναν μοναδιαίο πίνακα S . Πραγματικές αλληλεπιδράσεις εκπροσωπούνται από τον 2^ο όρο της (2.4) και έτσι το πλάτος ,σωματίδιο να μεταβεί από μια κατάσταση "in" σε μια κατάσταση "out" είναι

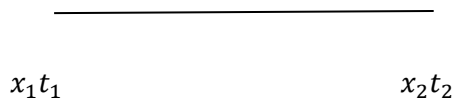
$$A = -\frac{i}{\hbar} \int dt d\vec{x} d\vec{x}_i d\vec{x}_f \psi_{out}^*(\vec{x}_f, t_f) K_0(\vec{x}_f, t_f; \vec{x}, t) V(\vec{x}, t) K_0(\vec{x}, t; \vec{x}_i, t_i) \psi_{in}(\vec{x}_i, t_i) \quad 2.5$$

Έχουμε τώρα μια έκφραση για το πλάτος σκέδασης σε όρους του ελεύθερου διαδότη K_0 και του δυναμικού αλληλεπίδρασης V . Η εξίσωση (2.5) μπορεί να μεταφραστεί από ένα σύνολο κανόνων για το πλάτος σκέδασης, αυτοί οι κανόνες είναι γνωστοί ως κανόνες *Feynman*.

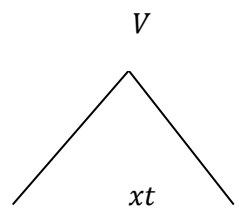
Μπορούμε να αναπαραστήσουμε το πλάτος (2.5) (το οποίο είναι 1^{ης} τάξης προσέγγιση) από το διάγραμμα



Είναι εμφανές ότι οι κανόνες για να ερμηνεύσουμε αυτό το διάγραμμα μέσω της έκφρασης του πλάτους σκέδασης μπορούν να συνοψιστούν κάνοντας την αντιστοιχία

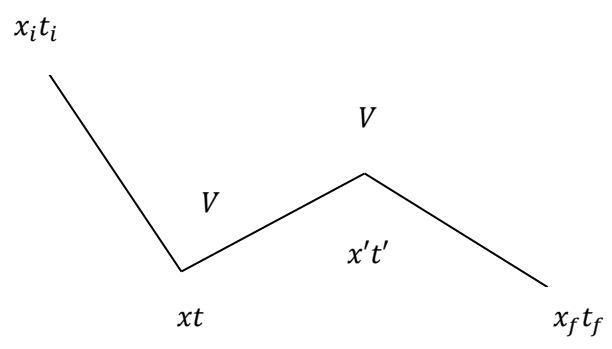


$$K_0(x_2t_2; x_1t_1)$$



$$-\frac{i}{\hbar}V(xt); \text{integration over } x \text{ and } t$$

Τοιουτοτρόπως το πλάτος για την 2^{ης} τάξης προσέγγιση



είναι

$$A^{(2)} = \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int dt dt' d\vec{x}' d\vec{x} d\vec{x}_i d\vec{x}_f \psi_{out}^*(\vec{x}_f, t_f) K_0(\vec{x}_f, t_f; \vec{x}', t') V(\vec{x}', t')$$

$$K_0(\vec{x}', t'; \vec{x}, t) V(\vec{x}, t) K_0(\vec{x}, t; \vec{x}_i, t_i) \psi_{in}(\vec{x}_i, t_i) \quad 2.6$$

Στην μη- σχετικιστική κβαντική μηχανική δεν είναι απαραίτητο να λάβουμε υπόψη μας τους κανόνες αυτούς για να κάνουμε τους υπολογισμούς μας ,σε αντίθεση με την κβαντική θεωρία πεδίου που αποτελούν μεγάλη βοήθεια.

Οι κανόνες *Feynman* είναι διατυπωμένοι στον χώρο των θέσεων. Σε πολλούς υπολογισμούς ,ωστόσο , είναι πιο βολικό να εργαζόμαστε στον χώρο των ορμών.

Δεχόμαστε ότι $\mathcal{K}(p_1, t_1; p_0, t_0)$ αποτελεί το πλάτος πιθανότητας ένα σωματίδιο με ορμή p_0 την χρονική στιγμή t_0 να παρατηρηθεί μετέπειτα χρονική στιγμή t_1 να έχει ορμή p_1 και είναι

$$\mathcal{K}(p_1, t_1; p_0, t_0) = \int dx_0 dx_1 e^{-\frac{i}{\hbar} p_1 x_1} K(x_1, t_1; x_0, t_0) e^{\frac{i}{\hbar} p_0 x_0} \quad 2.7$$

Ο ελεύθερος διαδότης $K_0(x_1, t_1; x_0, t_0)$ στις 3-διαστάσεις δίνεται με γενίκευση από την σχέση

$$K_0(x_1, t_1; x_0, t_0) = \theta(t_1 - t_0) \left[\frac{m}{2\pi i \hbar (t_1 - t_0)} \right]^{\frac{3}{2}} \exp \left[\frac{im(x_0 - x_1)^2}{2\hbar(t_1 - t_0)} \right] \quad 2.8$$

Τότε ο ελεύθερος διαδότης \mathcal{K}_0 είναι

$$\mathcal{K}_0(p_1, t_1; p_0, t_0) = \theta(t_1 - t_0) \left[\frac{m}{2\pi i \hbar (t_1 - t_0)} \right]^{\frac{3}{2}} \int dx_0 dx_1 \exp \left[\frac{i}{\hbar} (p_0 x_0 - p_1 x_1) \right] \exp \left[\frac{im(x_0 - x_1)^2}{2\hbar(t_1 - t_0)} \right]$$

Το οποίο υπολογίζω αναλυτικά με πράξεις

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_0(p_1, t_1; p_0, t_0) &= \theta(t_1 - t_0) \left[\frac{m}{2\pi i \hbar (t_1 - t_0)} \right]^{\frac{3}{2}} \int dx_0 dx_1 e^{\frac{i}{\hbar} p_0 x_0} e^{-\frac{i}{\hbar} p_1 x_1} \\ &\quad e^{\frac{im}{2\hbar(t_1-t_0)} x_0^2} e^{-\frac{im}{\hbar(t_1-t_0)} x_0 x_1} e^{\frac{im}{2\hbar(t_1-t_0)} x_1^2} \\ \mathcal{K}_0(p_1, t_1; p_0, t_0) &= \theta(t_1 - t_0) \left[\frac{m}{2\pi i \hbar (t_1 - t_0)} \right]^{\frac{3}{2}} \int dx_0 dx_1 e^{\frac{i}{\hbar} p_0 x_0} e^{\frac{im}{2\hbar(t_1-t_0)} x_0^2} \\ &\quad \exp \left[-\left(-\frac{im}{2\hbar(t_1-t_0)} \right) x_1^2 + \left(-\frac{i}{\hbar} p_1 - \frac{im}{\hbar(t_1-t_0)} x_0 \right) x_1 \right] \end{aligned}$$

Το ολοκλήρωμα ως προς x_1 λύνεται ως ολοκλήρωμα *Gauss*, έτσι έχουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_0(p_1, t_1; p_0, t_0) &= \theta(t_1 - t_0) \left[\frac{m}{2\pi i \hbar (t_1 - t_0)} \right]^{\frac{3}{2}} \int dx_0 dx_1 e^{\frac{i}{\hbar} p_0 x_0} e^{\frac{im}{2\hbar(t_1-t_0)} x_0^2} \\ &\quad \left[\frac{2i\pi\hbar(t_1-t_0)}{m} \right]^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{ip_1^2(t_1-t_0)}{2m\hbar}} e^{-\frac{i}{\hbar} p_0 x_0} e^{-\frac{im}{2\hbar(t_1-t_0)} x_0^2} \\ &= \theta(t_1 - t_0) e^{-\frac{ip_1^2(t_1-t_0)}{2m\hbar}} \int dx_0 e^{\frac{i}{\hbar} (p_0 - p_1) x_0} \end{aligned}$$

Το ολοκλήρωμα ως προς x_0 είναι $(2\pi\hbar)^3 \delta(p_0 - p_1)$, έτσι τελικά έχουμε

$$\mathcal{K}_0(p_1, t_1; p_0, t_0) = \theta(t_1 - t_0) (2\pi\hbar)^3 \delta(p_0 - p_1) e^{-\frac{ip_1^2(t_1-t_0)}{2m\hbar}}$$

Να σημειωθεί ότι η *συνάρτηση δέλτα* υποδηλώνει ότι $p_1 = p_0$ και ότι η διάδοση υφίσταται μόνο όταν η ορμή διατηρείται. Άρα

$$\mathcal{K}_0(p_1, t_1; p_0, t_0) = \theta(t_1 - t_0) (2\pi\hbar)^3 \delta(p_0 - p_1) e^{-\frac{ip_0^2(t_1-t_0)}{2m\hbar}} \quad 2.9$$

Ο μετασχηματισμός *Fourier* αυτής της ποσότητας είναι φυσικά ο $\mathcal{K}_0(x_1, t_1; x_0, t_0)$ και δίνεται από την αντίστροφη της (2.7)

$$K_0(x_1, t_1; x_0, t_0) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^6} \int dp_1 dp_0 \exp\left[\frac{i}{\hbar} p_1 x_1\right] \mathcal{K}_0(p_1, t_1; p_0, t_0) \exp\left[-\frac{i}{\hbar} p_0 x_0\right]$$

Αντικαθιστώντας την (2.9) σ' αυτήν την έκφραση προκύπτει

$$K_0(x_1, t_1; x_0, t_0) = \theta(t_1 - t_0) \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int dq \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \left[q(x_1 - x_0) - \frac{q^2}{2m}(t_1 - t_0) \right]\right\} \quad 2.10$$

Η έκφραση αυτή του διαδότη, λοιπόν, θα αποτελέσει την βάση στην οποία θα στηριχτούμε για τον υπολογισμό της σκέδασης *Coulomb* στην επόμενη ενότητα.

2.2 Σκέδαση Coulomb

Ας εφαρμόσουμε τώρα την θεωρία πάνω στο γνωστό πρόβλημα της σκέδασης φορτισμένων σωματιδίων σ' ένα πεδίο *Coulomb* (*Rutherford scattering*). Κατά τα γνωστά το πλάτος σκέδασης στην 1^η προσέγγιση *Born* δίνεται από την

$$A = -\frac{i}{\hbar} \int dt d\vec{x} d\vec{x}_i d\vec{x}_f \psi_{out}^*(\vec{x}_f, t_f) K_0(\vec{x}_f, t_f; \vec{x}, t) V(\vec{x}, t) K_0(\vec{x}, t; \vec{x}_i, t_i) \psi_{in}(\vec{x}_i, t_i)$$

Όπου το $V(\vec{x}, t)$ αναπαριστά το δυναμικό *Coulomb*. Αντικαθιστώντας τον ελεύθερο διαδότη (2.10) και τις κανονικοποιημένες κυματοσυναρτήσεις έχουμε

$$A = -\frac{i}{\hbar} \int dt d\vec{x} d\vec{x}_i d\vec{x}_f \frac{1}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3}} \exp\left[-\frac{i}{\hbar}(\vec{p}_f \vec{x}_f - E_f t_f)\right] \theta(t_f - t)$$

$$\frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left[q(\vec{x}_f - \vec{x}) - \frac{q^2}{2m}(t_f - t)\right]\right\} dq V(\vec{x}, t) \theta(t - t_i)$$

$$\frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left[q'(\vec{x} - \vec{x}_i) - \frac{q'^2}{2m}(t - t_i)\right]\right\} dq' \frac{1}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3}} \exp\left[\frac{i}{\hbar}(\vec{p}_i \vec{x}_i - E_i t_i)\right]$$

Το ολοκλήρωμα ως προς q αποτελεί ξεκάθαρα ολοκλήρωμα *Gauss*, οπότε εύκολα έχω

$$\int \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left[q(\vec{x}_f - \vec{x}) - \frac{q^2}{2m}(t_f - t)\right]\right\} dq = \exp\left[\frac{im(\vec{x}_f - \vec{x})^2}{2\hbar(t_f - t)}\right] \sqrt{\frac{\pi\hbar 2m}{i(t_f - t)}}$$

Ομοίως για το ολοκλήρωμα ως προς q'

$$\int \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left[q'(\vec{x} - \vec{x}_i) - \frac{q'^2}{2m}(t - t_i)\right]\right\} dq' = \exp\left[\frac{im(\vec{x} - \vec{x}_i)^2}{2\hbar(t - t_i)}\right] \sqrt{\frac{\pi\hbar 2m}{i(t - t_i)}}$$

Με απλή αντικατάσταση συνεχίζουμε

$$A = -\frac{i}{\hbar} \frac{1}{(2\pi\hbar)^9} \int dt d\vec{x} d\vec{x}_i d\vec{x}_f \theta(t_f - t) \theta(t - t_i) \exp\left[-\frac{i}{\hbar}(\vec{p}_f \vec{x}_f - E_f t_f)\right]$$

$$\exp\left[\frac{im(\vec{x}_f - \vec{x})^2}{2\hbar(t_f - t)}\right] \sqrt{\frac{\pi\hbar 2m}{i(t_f - t)}} V(\vec{x}, t) \exp\left[\frac{im(\vec{x} - \vec{x}_i)^2}{2\hbar(t - t_i)}\right] \sqrt{\frac{\pi\hbar 2m}{i(t - t_i)}} \exp\left[\frac{i}{\hbar}(\vec{p}_i \vec{x}_i - E_i t_i)\right]$$

Το επόμενο βήμα είναι να υπολογίσουμε τα ολοκληρώματα ως προς \vec{x}_i και \vec{x}_f τελείως ανάλογα

$$A = -\frac{i}{\hbar} \frac{1}{(2\pi\hbar)^9} \int dt d\vec{x} d\vec{x}_i d\vec{x}_f \theta(t_f - t) \theta(t - t_i) \exp\left[-\frac{i}{\hbar} \vec{p}_f \vec{x}_f + \frac{im(\vec{x}_f - \vec{x})^2}{2\hbar(t_f - t)}\right] \exp\left[\frac{i}{\hbar} E_f t_f\right] \exp\left[-\frac{i}{\hbar} E_i t_i\right] \exp\left[\frac{i}{\hbar} \vec{p}_i \vec{x}_i + \frac{im(\vec{x} - \vec{x}_i)^2}{2\hbar(t - t_i)}\right] \sqrt{\frac{\pi\hbar 2m}{i(t_f - t)}} \sqrt{\frac{\pi\hbar 2m}{i(t - t_i)}} V(\vec{x}, t)$$

$$\text{Όπου } \int d\vec{x}_f \exp\left[-\frac{i}{\hbar} \vec{p}_f \vec{x}_f + \frac{im(\vec{x}_f - \vec{x})^2}{2\hbar(t_f - t)}\right] = \exp\left[-\frac{i\vec{p}_f^2(t_f - t)}{2\hbar m} - \frac{i}{\hbar} \vec{p}_f \vec{x}\right] \sqrt{\frac{2i\hbar\pi(t_f - t)}{m}}$$

$$\text{Και } \int d\vec{x}_i \exp\left[\frac{i}{\hbar} \vec{p}_i \vec{x}_i + \frac{im(\vec{x} - \vec{x}_i)^2}{2\hbar(t - t_i)}\right] = \exp\left[-\frac{i\vec{p}_i^2(t - t_i)}{2\hbar m} + \frac{i}{\hbar} \vec{p}_i \vec{x}\right] \sqrt{\frac{2i\hbar\pi(t - t_i)}{m}}$$

Έτσι

$$A = -\frac{i}{\hbar} \frac{1}{(2\pi\hbar)^9} \int dt d\vec{x} \theta(t_f - t) \theta(t - t_i) \exp\left[-\frac{i\vec{p}_f^2(t_f - t)}{2\hbar m} - \frac{i}{\hbar} \vec{p}_f \vec{x}\right] \sqrt{\frac{2i\hbar\pi(t_f - t)}{m}} \exp\left[\frac{i}{\hbar} E_f t_f\right] \exp\left[-\frac{i}{\hbar} E_i t_i\right] \exp\left[-\frac{i\vec{p}_i^2(t - t_i)}{2\hbar m} + \frac{i}{\hbar} \vec{p}_i \vec{x}\right] \sqrt{\frac{2i\hbar\pi(t - t_i)}{m}} \sqrt{\frac{\pi\hbar 2m}{i(t_f - t)}} \sqrt{\frac{\pi\hbar 2m}{i(t - t_i)}} V(\vec{x}, t)$$

Θεωρώντας τα όρια $t_i \rightarrow -\infty$, $t_f \rightarrow +\infty$ για να εξαλείψουμε τις συναρτήσεις θ

$$A = -\frac{i}{\hbar} \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int dt d\vec{x} \exp\left[-\frac{iE_f(t_f - t)}{\hbar} - \frac{i}{\hbar} \vec{p}_f \vec{x}\right] \exp\left[\frac{i}{\hbar} E_f t_f\right] \exp\left[-\frac{i}{\hbar} E_i t_i\right] \exp\left[-\frac{iE_i(t - t_i)}{\hbar} + \frac{i}{\hbar} \vec{p}_i \vec{x}\right] V(\vec{x}, t)$$

$$A = -\frac{i}{\hbar} \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int dt d\vec{x} \exp\left[-\frac{i}{\hbar} E_f t\right] \exp\left[\frac{i}{\hbar} E_f t\right] \exp\left[-\frac{i}{\hbar} \vec{p}_f \vec{x}\right] \exp\left[\frac{i}{\hbar} E_f t\right] \\ \exp\left[-\frac{i}{\hbar} E_i t\right] \exp\left[-\frac{i}{\hbar} E_i t\right] \exp\left[\frac{i}{\hbar} E_i t\right] \exp\left[\frac{i}{\hbar} \vec{p}_i \vec{x}\right] V(\vec{x}, t)$$

$$A = -\frac{i}{\hbar} \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int dt d\vec{x} \exp\left[\frac{i}{\hbar} E_f t\right] \exp\left[-\frac{i}{\hbar} \vec{p}_f \vec{x}\right] \exp\left[-\frac{i}{\hbar} E_i t\right] \exp\left[\frac{i}{\hbar} \vec{p}_i \vec{x}\right] V(\vec{x}, t)$$

$$A = -\frac{i}{\hbar} \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \left[(\vec{p}_i - \vec{p}_f) \vec{x} - (E_i - E_f) t \right]\right\} V(\vec{x}, t) d\vec{x} dt$$

Δεν μπορούμε να παραλείψουμε την χρήση του τύπου $E_{i,f} = \frac{\vec{p}_{i,f}^2}{2m}$.

Για δυναμικό *Coulomb* $V = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0\vec{x}}$ το πλάτος σκέδασης γίνεται

$$A = -\frac{i}{\hbar} \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \int \exp\left[\frac{i}{\hbar} (\vec{p}_i - \vec{p}_f) \vec{x}\right] \exp\left[-\frac{i}{\hbar} (E_i - E_f) t\right] \frac{1}{\vec{x}} d\vec{x} dt$$

$$A = -\frac{i}{\hbar} \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} 2\pi\hbar \delta(E_i - E_f) \int \exp\left[\frac{i}{\hbar} (\vec{p}_i - \vec{p}_f) \vec{x}\right] \frac{1}{\vec{x}} d\vec{x}$$

Τώρα όσον αφορά το ολοκλήρωμα ως προς \vec{x} παρατηρώ ότι δεν συγκλίνει στο άπειρο, έτσι εισάγουμε έναν παράγοντα $e^{-\alpha\vec{x}}$ και αφήνοντας το $\alpha \rightarrow 0$, η τιμή του ολοκληρώματος γίνεται $\frac{4\pi\hbar^2}{(\vec{p}_i - \vec{p}_f)^2}$, έτσι

$$A = -\frac{i}{\hbar} \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} 2\pi\hbar \frac{4\pi\hbar^2}{(\vec{p}_i - \vec{p}_f)^2} \delta(E_i - E_f)$$

$$A = -\frac{i}{\hbar} \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \frac{2\pi Ze^2 \hbar^3}{\epsilon_0 (\vec{p}_i - \vec{p}_f)^2} \delta(E_i - E_f) \quad 2.11$$

Αυτή η σχέση αποτελεί λοιπόν το πλάτος σκέδασης, από την οποία θα υπολογίσουμε την ενεργό διατομή της σκέδασης σ . Η τιμή του $|A|^2$ δίνει την πιθανότητα το σωματίδιο μας να εμφανιστεί με ορμή \vec{p}_f . Τότε η πιθανότητα να εντοπίσουμε το σωματίδιο με ορμή μεταξύ \vec{p}_f και $\vec{p}_f + d\vec{p}_f$ θα είναι

$$|A|^2 \frac{d\vec{p}_f}{(2\pi\hbar)^3}$$

Φυσικά αν η αλληλεπίδραση διαρκεί χρόνο T , τότε

$$\frac{|A|^2}{T} \frac{d\vec{p}_f}{(2\pi\hbar)^3}$$

Αποτελεί τον αριθμό των σωματιδίων που εμφανίζουν ορμή σ' αυτό το διάστημα ανά δευτερόλεπτο.

Για να λάβουμε την ενεργό διατομή το μόνο που έχουμε να κάνουμε είναι να διαιρέσουμε με την εισερχόμενη ροή και να ολοκληρώσουμε ως προς \vec{p}_f . Τα εισερχόμενα σωματίδια ταξιδεύουν με ταχύτητα \vec{p}_i/m , ενώ υπάρχουν $1/\tau$ (με $\tau = (2\pi\hbar)^3$ λόγω κανονικοποίησης) από αυτά ανά μονάδα όγκου, έτσι η ροή είναι $\vec{p}_i/\tau m$ σωματίδια ανά δευτερόλεπτο ανά μονάδα επιφάνειας. Η ενεργός διατομή είναι τότε

$$\sigma = \int \frac{|A|^2 \tau m}{T} \frac{d\vec{p}_f}{\vec{p}_i (2\pi\hbar)^3} \quad 2.12$$

Με αντικατάσταση των (2.11) στην (2.12) προκύπτει

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{mZ^2 e^4}{4\pi^2 \epsilon_0^2} \int \frac{1}{p_i} \frac{1}{(p_i - p_f)^4} \delta(E_i - E_f) d^3 p_f \\ &= \frac{mZ^2 e^4}{4\pi^2 \epsilon_0^2} \int \frac{1}{p_i} \frac{1}{(p_i - p_f)^4} p_f^2 dp_f \delta(E_i - E_f) d\Omega \end{aligned}$$

Τώρα χρησιμοποιώντας πάλι την σχέση $E = p^2/2m$ αντικαθιστώ στην παραπάνω σχέση τους όρους $p_i = (2mE_i)^{\frac{1}{2}}$ και $p_f^2 dp_f = (2m^3 E_f)^{\frac{1}{2}} dE_f$, ενώ ολοκληρώνοντας ως προς E_f καταλήγω

$$\sigma = \frac{mZ^2 e^4}{4\pi^2 \epsilon_0^2} \int \frac{1}{(p_i - p_f)^4} d\Omega$$

Λόγω της *συνάρτησης δέλτα* έχουμε ότι $p_i = p_f = p$. Έπειτα εφόσον $(p_i - p_f)^2 = 4p^2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$, με θ να είναι η γωνία που σχηματίζεται μεταξύ p_i και p_f , και τελικά κάνοντας χρήση της σχέσης $p = mu$ έχουμε την σχέση της διαφορικής ενεργού διατομής

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{Ze^2}{8\pi\epsilon_0 mu^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)} \quad 2.13$$

Η τελευταία δεν είναι παρά ο τύπος *Rutherford*.

Ως τώρα, λοιπόν, εξηγήσαμε αναλυτικά τον φορμαλισμό των *ολοκληρωμάτων δρόμου του Feynman* στην κβαντική μηχανική και πως αναπτύσσονται με θεωρία διαταραχών οι *σειρές Born*. Έπειτα ορίσαμε τον πίνακα σκέδασης S (για σκέδαση σωματιδίων), ενώ δείξαμε πως τα προκύπτοντα πλάτη μετάβασης μπορούν να ληφθούν βάση των κανόνων *Feynman*. Και τελικά θεωρώντας την περίπτωση της σκέδασης *Coulomb* καταλήξαμε στον τύπο *Rutherford*.

Κεφάλαιο 3

Συμβολή και περίθλαση ηλεκτρονίου για μια και δυο σχισμές

Σ' αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε μια αναλυτική λύση για το περίφημο πρόβλημα της συμβολής και περίθλασης ηλεκτρονίων για μια και δυο σχισμές (για απλότητα θεωρούμε μόνο την περίπτωση μιας διάστασης). Για να εξάγουμε τους τύπους θα παρουσιάσουμε διάφορες προσεγγίσεις για την κατανομή των ηλεκτρονίων, το οποίο θα μας διευκολύνει και στην ερμηνεία των αποτελεσμάτων. Η εργασία μας, φυσικά, θα βασιστεί στον φορμαλισμό των *ολοκληρωμάτων δρόμου του Feynman*.

3.1 Εισαγωγή

Το πείραμα συμβολής δυο σχισμών υιοθετείται συνήθως για να συζητήσουμε την *Αρχή της Επαλληλίας* που εφαρμόζεται σε ακτινοβολία και για να δείξουμε την περιεργή συμπεριφορά των υλικών σωματιδίων. Ο *Feynman* στις περίφημες διδακτικές σημειώσεις του (R.P. Feynman, 1963) εξετάζει το κβαντικό μηχανικό πρόβλημα της περίθλασης και συμβολής των σωματιδίων με μάζα, χωρίς βέβαια λεπτομερείς τύπους. Στο βιβλίο του με τον *Hibbs* (Hibbs, 1965) πραγματοποιεί μια πιο ακριβή επεξεργασία, η οποία εξακολουθεί να στερείται λεπτομέρειας.

Αξίζει να σημειώσουμε, ότι, το φαινόμενο παρατηρήθηκε πρώτη φορά πειραματικά από τον *Jonsson* το 1961 (Jonsson, 1961). Η περίθλαση και η συμβολή των ηλεκτρονίων έχει αποδειχθεί χρησιμοποιώντας ως συσκευές συμβολομετρίας μια τρύπα, μια σχισμή, δυο τρύπες, δυο σχισμές, ένα ηλεκτροστατικό δίπρισμα κ.α. Μια πολύ σύντομη ανασκόπηση αναφέρεται σε πρωτοπόρες προσπάθειες, για την εποχή εκείνη, που πραγματοποιούνται για να αποδείξουν ότι τα φαινόμενα συμβολής μπορούν να επιτευχθούν μ' ένα μόνο ηλεκτρόνιο μέσω ενός συμβολόμετρου. Επίσης, πειράματα μπορούν να θεωρηθούν ότι πραγματοποιούν ιδέες των *Einsten – Bohr* και μετέπειτα του *Feynman* ώστε να προβούμε σε συζητήσεις για βασικά χαρακτηριστικά της κβαντικής φυσικής. Πρόσφατα, ένα άρθρο πρότεινε μια πολύ ενδιαφέρουσα σύγκριση μεταξύ θεωρητικών και πειραματικών διαγραμμάτων έντασης, εκ των οποίων οι τελευταίες λήφθησαν χρησιμοποιώντας ηλεκτρονικό μικροσκόπιο (Fraboni, 2011).

Το κρίσιμο σημείο στην δική μας εργασία είναι να ασχοληθούμε με τα διάφορα οπτικά συστήματα ή αλλιώς προσεγγίσεις: τη συνήθη προσέγγιση *Fraunhofer*, τη λιγότερο κοινή προσέγγιση *Fresnel* και την *ενδιάμεση*. Θυμόμαστε, ότι, αυτά τα συστήματα εξαρτώνται από την απόσταση μεταξύ των σχισμών και της οθόνης, όπου η προσέγγιση *Fraunhofer* αντιστοιχεί στην περίπτωση όπου η απόσταση αυτή είναι άπειρη, ενώ οι υπόλοιπες αντιστοιχούν σε πεπερασμένη. Οι *ενδιάμεση* και η προσέγγιση *Fresnel* διακρίνονται από την τιμή του αριθμού *Fresnel* $N_F \equiv 2a^2/\lambda L$, όπου $2a$ είναι το πλάτος της σχισμής και L είναι η απόσταση μεταξύ οθόνης και σχισμής. Ο αριθμός *Fresnel* χαρακτηρίζει την περιθλαστική ισχύ ενός περιθλαστικού σχηματισμού μεγέθους a .

Σκοπός του κεφαλαίου μας είναι να εξάγουμε αναλυτικά τους τελικούς τύπους για την ένταση του ηλεκτρονίου στην οθόνη, και να αναλύσουμε αυτούς τους τύπους χρησιμοποιώντας προσεγγίσεις βασισμένες στην ασυμπτωτική συμπεριφορά των συναρτήσεων *Fresnel* (Stegun M. A., 1965). Ειδικότερα, θα δείξουμε πως οι φυσικές παράμετροι, όπως ο αριθμός *Fresnel*, επηρεάζει την μορφή των εικόνων περίθλασης και συμβολής.

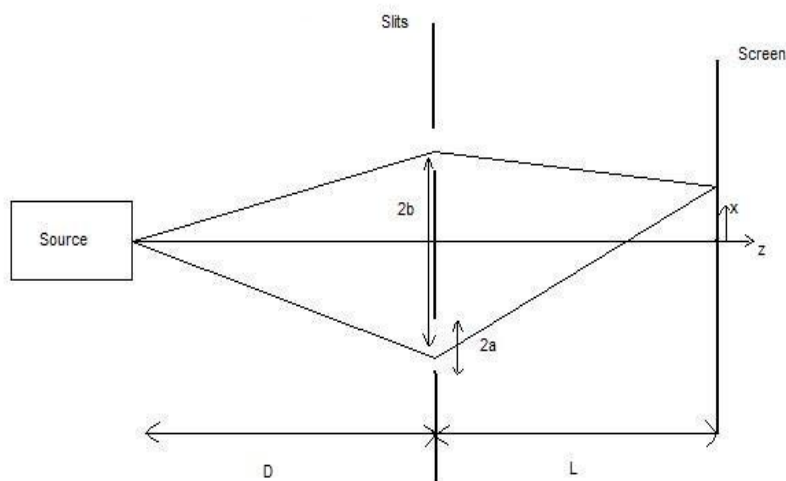
3.2 Η Αρχή του Huygens

Πρωτού ξεκινήσουμε την ανάλυση μας, απαραίτητη είναι η διατύπωση της αρχής του *Huygens*. Η αρχή *Huygens – Fresnel* εφαρμόστηκε για να εξηγήσει το φαινόμενο της περίθλασης στα φωτεινά κύματα. Μόνο που την εποχή εκείνη (1600 – 1700), τα φωτεινά κύματα θεωρούνταν μηχανικά κύματα μέσα σ' έναν τελείως διαπερατό αιθέρα. Αργότερα ο *Maxwell* (1831 – 1879), απέδειξε ότι το φως είναι εγκάρσια ηλεκτρομαγνητικά κύματα και ο *Einstein* ολοκλήρωσε τη σύγχρονη άποψη για το φως, παραμερίζοντας την ανάγκη για την παραδοχή του αιθέρα. Επίσης η αρχή αυτή, να σημειώσουμε ότι αναφέρεται στην κυματική και όχι τη σωματιδιακή φύση του φωτός, ενώ όταν διατυπώθηκε από τον *Huygens*, ο ίδιος δεν γνώριζε αν το φως είναι εγκάρσιο ή διαμήκες κύμα. Στην πραγματικότητα, ο *Huygens* στη θεωρία του δεν αναφέρει τίποτε για τη φύση του φωτός το οποίο γι' αυτόν δεν ήταν παρά μόνο ένα κύμα. Ωστόσο η θεωρία του παραμένει χρήσιμη και θα βοηθήσει στην περαιτέρω ανάλυση μας.

Αρχή του Huygens: Κάθε σημείο ενός μετώπου κύματος συμπεριφέρεται σαν πηγή ενός δευτερεύοντος σφαιρικού κύματος που προχωράει με ταχύτητα και συχνότητα ίσες με εκείνες του πρωτεύοντος κύματος. Μετά την πάροδο λίγου χρόνου το μέτωπο του πρωτεύοντος κύματος είναι η περιβάλλουσα των δευτερευόντων "κυματιδίων".

3.3 Εφαρμογή στο πρόβλημα συμβολής και περίθλασης του ηλεκτρονίου

Θεωρούμε μια πηγή ηλεκτρονίων στο σημείο $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, και ένα πέτασμα με 2 σχισμές στο $z = D$ πλάτους $2a$ με επίκεντρο αντίστοιχα τα σημεία $x = +b$ και $x = -b$ (Σχήμα 3.1). Για το πείραμα περίθλασης με μια μόνο σχισμή, απλώς αντικαθιστούμε το σύστημα με μια σχισμή μεγέθους $2a$ με επίκεντρο το σημείο $x = 0$ (Σχήμα 3.2). Τώρα στο σημείο $z = D + L$ μπορούμε να θεωρήσουμε ότι βρίσκεται μια οθόνη που καταγράφει τα ηλεκτρόνια που προσπίπτουν, δηλαδή ένας ανιχνευτής. Να σημειωθεί ότι στο πρόβλημα μας αγνοούμε πλήρως την ύπαρξη βαρύτητας. Επιπροσθέτως, υποθέτουμε ότι στην ορθογωνική κατεύθυνση του επιπέδου μας στο Σχήμα 3.1 ($x - z$ επίπεδο), η σχισμή είναι αρκετά μεγάλη ώστε να αγνοήσουμε φαινόμενα περίθλασης. Έτσι εξετάζουμε την απόκλιση της δέσμης ηλεκτρονίων μόνο στην οριζόντια διεύθυνση προκειμένου να μην περιπλέξουμε και τους τύπους μας.



Σχήμα 3.1: Σχηματική απεικόνιση της διάταξης με μια πηγή, 2 σχισμές και έναν ανιχνευτή

Πρώτου ξεκινήσουμε τους υπολογισμούς μας, αξίζει να σημειώσουμε σε τι είδους πείραμα είναι αυτό που εξετάζουμε. Πώς μπορούμε να γνωρίζουμε ότι το σωματίδιο μας περνά διαμέσου της σχισμής; Ένας τρόπος είναι να παρατηρήσουμε το σωματίδιο την χρονική στιγμή T και να διαπιστώσουμε αν βρίσκεται στο διάστημα $\pm b$. Αυτός ο τρόπος φαίνεται να είναι ο πιο φυσικός για να κάνουμε, όμως είναι κάπως πιο δύσκολο να αναλύσουμε με λεπτομέρεια, αφού όπως έχουμε προαναφέρει υπάρχει μια περίπλοκη αλληλεπίδραση μεταξύ ηλεκτρονίου και του μηχανισμού παρατήρησης. Υποθέτουμε ότι κοιτάμε, ας πούμε, μ' ένα πολύ ισχυρό φως, παντού καθ' όλο το μήκος του άξονα x , εκτός απ' το διάστημα $\pm b$ την χρονική στιγμή T . Αν βρούμε το σωματίδιο διακόπτουμε το πείραμα. Μας ενδιαφέρουν μόνο εκείνες οι περιπτώσεις, στις οποίες μια εμπεριστατωμένη έρευνα της περιοχής, εκτός

της περιοχής $\pm b$, δεν δείχνει σωματίδια παρόντα. Όλες αυτές οι τροχιές, οπότε, που περνούν έξω από τα όρια $\pm b$, απορρίπτονται.

Μπορεί κανείς να προτείνει διάφορα μοντέλα για τις σχισμές, που δίνονται από συναρτήσεις κατανομής. Λόγου χάρη θα μπορούσε ένα μοντέλο να περιγράφεται από συναρτήσεις *Gauss* ή από τις γνωστές ως συναρτήσεις "door". Εμείς επικεντρωνόμαστε σ' ένα πιο ρεαλιστικό μοντέλο των τελευταίων, το οποίο περιγράφεται από την ακόλουθη συνάρτηση

$$\chi_{[b-a, b+a]}(y) = \begin{cases} 0 & y > b + a, y < b - a \\ 1 & b - a < y < b + a \end{cases} \quad 3.1$$

Το ερώτημα, λοιπόν, που καλούμαστε να εξετάσουμε είναι: ποια είναι η πιθανότητα να ανιχνεύσουμε το ηλεκτρόνιο στο σημείο x της οθόνης, γνωρίζοντας ότι ξεκινάει απ' το σημείο $x = 0, z = 0$; Επακριβέστερα, υποθέτουμε ότι η πηγή εκπέμπει ηλεκτρόνια σε μεγάλο αριθμό, μολονότι αυτός ο αριθμός παραμένει τόσο μικρός που η απόσταση μεταξύ ηλεκτρονίων είναι τέτοια, ώστε μας δίνει την δυνατότητα να αγνοήσουμε τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ τους. Έτσι μπορούμε να αναρωτηθούμε ποια είναι η ένταση των ηλεκτρονίων στην οθόνη, συναρτήσει της απόστασης x ; Οι δυο αυτές ερωτήσεις καταλαβαίνουμε ότι σχετίζονται, εφόσον κάτω απ' αυτές τις συνθήκες η κίνηση των ηλεκτρονίων είναι ανεξάρτητη, δηλαδή χωρίς αμοιβαία αλληλεπίδραση δεδομένου ότι η πυκνότητα της δέσμης είναι πολύ χαμηλή.

Έτσι, καταλήγουμε να έχουμε να υπολογίσουμε τα πλάτη $A_1(x; a, b), A_2(x; a, b)$ σε κάθε σημείο x της οθόνης, χρησιμοποιώντας τον φορμαλισμό *Feynman*, και έπειτα να προσθέσουμε καθένα απ' τα πλάτη για να πάρουμε το συνολικό πλάτος $A(x; a, b)$. Η πιθανότητα που θέλουμε να ανιχνεύσουμε δεν είναι παρά το τετράγωνο του μέτρου του πλάτους μας.

$$P(x; a, b) \equiv |A(x; a, b)|^2$$

Η έκφραση για το πλάτος $A_1(x; a, b)$ είναι

$$A_1(x; a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} dy \chi_{[b-a, b+a]}(y) K_0(x, T + \tau; y, T) K_0(y, T; 0, 0) \quad 3.2$$

Όπου T είναι ο χρόνος που κάνει το ηλεκτρόνιο να διανύσει την απόσταση από την πηγή μέχρι την σχισμή, και τ ο χρόνος από την σχισμή μέχρι την οθόνη.

Αυτή η έκφραση καταγράφηκε σύμφωνα με τον κανόνα που συνδυάζει πλάτη πιθανότητας γεγονότων, τα οποία συμβαίνουν διαδοχικά στον χρόνο. Το πρώτο γεγονός είναι ότι το σωματίδιο από την αρχή πηγαίνει στην σχισμή. Το δεύτερο γεγονός είναι ότι το σωματίδιο προχωράει από τη σχισμή μέχρι το σημείο x και πιο πέρα. Η σχισμή έχει ένα πεπερασμένο πλάτος και το πέρασμα μέσω κάθε στοιχειώδους διαστήματος της σχισμής αντιπροσωπεύει έναν εναλλακτικό τρόπο επεξεργασίας κατά μήκος ολόκληρης της διαδρομής. Έτσι, εμείς πρέπει να ολοκληρώσουμε πάνω στο πλάτος της σχισμής. Όλα εκείνα τα ηλεκτρόνια τα οποία έχασαν την σχισμή λαμβάνονται και απομακρύνονται από το πείραμα. Πλάτη από

αυτά τα ηλεκτρόνια δεν συμπεριλαμβάνονται. Αυτά που κατάφεραν να περάσουν διαμέσου της σχισμής κινούνται ως ελεύθερα σωματίδια με διαδοτές που περιγράφονται από την (1.22). Έτσι το πλάτος με αντικατάσταση των διαδοτών και ολοκληρώνοντας πάνω στο πλάτος της σχισμής γίνεται

$$\begin{aligned} A_1(x; a, b) &= \int_{b-a}^{b+a} dy \sqrt{\frac{m}{2i\pi\hbar(T+\tau-T)}} \exp\left[\frac{im(x-y)^2}{2\hbar(T+\tau-T)}\right] \sqrt{\frac{m}{2i\pi\hbar T}} \exp\left[\frac{imy^2}{2\hbar T}\right] \\ &= \int_{b-a}^{b+a} dy \sqrt{\frac{m}{2i\pi\hbar\tau}} \sqrt{\frac{m}{2i\pi\hbar T}} \exp\left[\frac{im(x-y)^2}{2\hbar\tau} + \frac{imy^2}{2\hbar T}\right] \end{aligned}$$

Η ποσότητα στον εκθέτη όμως είναι

$$\begin{aligned} \frac{im(x-y)^2}{2\hbar\tau} + \frac{imy^2}{2\hbar T} &= \frac{im(x^2 - 2xy + y^2)}{2\hbar\tau} + \frac{imy^2}{2\hbar T} \\ &= \frac{imT}{2\hbar\tau T} x^2 - \frac{imT}{2\hbar\tau T} 2xy + \frac{imT}{2\hbar\tau T} y^2 + \frac{im\tau}{2\hbar\tau T} y^2 \\ &= \frac{im(T+\tau)}{2\hbar\tau T} y^2 - \frac{2im}{2\hbar\tau} xy + \frac{im}{2\hbar\tau} x^2 \\ &= \frac{im(T+\tau)}{2\hbar\tau T} \left[y^2 - 2 \frac{\frac{m}{2\hbar\tau} x}{\frac{m(T+\tau)}{2\hbar\tau T}} y \right] + \frac{im}{2\hbar\tau} x^2 \\ &= \frac{im(T+\tau)}{2\hbar\tau T} \left[y^2 - 2 \frac{Tx}{T+\tau} y + \left(\frac{Tx}{T+\tau} \right)^2 - \left(\frac{Tx}{T+\tau} \right)^2 \right] + \frac{imx^2}{2\hbar\tau} \\ &= -\frac{im(T+\tau)}{2\hbar\tau T} \frac{T^2 x^2}{(T+\tau)^2} + \frac{imx^2}{2\hbar\tau} + \frac{im(T+\tau)}{2\hbar\tau T} \left[y - \left(\frac{Tx}{T+\tau} \right) \right]^2 \\ &= \frac{im}{2\hbar(T+\tau)} x^2 + \frac{im(T+\tau)}{2\hbar\tau T} \left[y - \left(\frac{Tx}{T+\tau} \right) \right]^2 \end{aligned}$$

Έτσι γίνεται το πλάτος

$$\begin{aligned} A_1(x; a, b) &= \sqrt{\frac{m}{2i\pi\hbar\tau}} \sqrt{\frac{m}{2i\pi\hbar T}} \exp\left[\frac{im}{2\hbar(T+\tau)} x^2\right] \int_{b-a}^{b+a} dy \exp\left[\frac{im(T+\tau)}{2\hbar\tau T} \left[y - \left(\frac{Tx}{T+\tau} \right) \right]^2\right] \\ &= \sqrt{\frac{m}{2i\pi\hbar\tau}} \sqrt{\frac{m}{2i\pi\hbar T}} \exp\left[\frac{im}{2\hbar(T+\tau)} x^2\right] \int_{b-a}^{b+a} dy \exp\left[\frac{i\pi}{2} \left(\sqrt{\frac{m(T+\tau)}{\pi\hbar\tau T}} \left(y - \frac{Tx}{T+\tau} \right) \right)^2\right] \end{aligned}$$

Κάπου εδώ θέτω

$$y' = \sqrt{\frac{m(T+\tau)}{\pi\hbar\tau T}} \left(y - \frac{Tx}{T+\tau} \right)$$

Τότε τα όρια ολοκλήρωσης αλλάζουν

$$\text{όταν } y \rightarrow b - a \text{ τότε } y' \rightarrow \sqrt{\frac{m(T + \tau)}{\pi \hbar \tau T}} (b - a) - \frac{x}{\sqrt{\pi \hbar \tau / m}} \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{T + \tau}}$$

$$\text{όταν } y \rightarrow b + a \text{ τότε } y' \rightarrow \sqrt{\frac{m(T + \tau)}{\pi \hbar \tau T}} (b + a) - \frac{x}{\sqrt{\pi \hbar \tau / m}} \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{T + \tau}}$$

επίσης

$$dy' = d \left[\sqrt{\frac{m(T + \tau)}{\pi \hbar \tau T}} \left(y - \frac{Tx}{T + \tau} \right) \right] = \sqrt{\frac{m(T + \tau)}{\pi \hbar \tau T}} dy$$

$$\Rightarrow dy = \sqrt{\frac{\pi \hbar \tau T}{m(T + \tau)}} dy'$$

Οπότε με αλλαγή της μεταβλητής ολοκλήρωσης έχουμε

$$A_1(x; a, b) = \sqrt{\frac{m}{2i\pi\hbar\tau}} \sqrt{\frac{m}{2i\pi\hbar T}} \exp \left[\frac{im}{2\hbar(T + \tau)} x^2 \right] \sqrt{\frac{\pi\hbar\tau T}{m(T + \tau)}} \int_{a_-(x)}^{a_+(x)} dy' \exp \left[\frac{i\pi}{2} y'^2 \right]$$

$$= \sqrt{m/(2i)^2\pi\hbar(T + \tau)} \exp \left[\frac{im}{2\hbar(T + \tau)} x^2 \right] \int_{a_-(x)}^{a_+(x)} dy' \exp \left[\frac{i\pi}{2} y'^2 \right] \quad 3.3$$

Εμφανώς

$$a_{\pm}(x) = \sqrt{\frac{m(T + \tau)}{\pi \hbar \tau T}} (b \pm a) - \frac{x}{\sqrt{\pi \hbar \tau / m}} \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{T + \tau}} \quad 3.4$$

Στην σχέση (3.3) παρατηρούμε ένα ολοκλήρωμα *Gauss* με πολύπλοκη μεταβλητή. Αν χωρίσουμε το ολοκλήρωμα σε πραγματικό και φανταστικό μέρος, θα πάρουμε δυο ολοκληρώματα με συνημιτονικές και ημιτονικές συναρτήσεις αντίστοιχα. Οι μεταβλητές τώρα φαίνεται να είναι πολυώνυμα δευτέρου βαθμού. Αυτά τα ολοκληρώματα αποτελούν τις πασίγνωστες συναρτήσεις *Fresnel* (Stegun M. A., 1965).

$$C[u] \equiv \int_0^u dy \cos \left(\frac{\pi y^2}{2} \right)$$

$$S[u] \equiv \int_0^u dy \sin \left(\frac{\pi y^2}{2} \right)$$

Έτσι, εύκολα καταλήγω στο ζητούμενο πλάτος

$$A_1(x; a, b) = \sqrt{m/(2i)^2 \pi \hbar (T + \tau)} \exp \left[\frac{im}{2\hbar(T + \tau)} x^2 \right] \int_{a_-(x)}^{a_+(x)} dy' \cos \left[\frac{\pi}{2} y'^2 \right] + i \sin \left[\frac{\pi}{2} y'^2 \right]$$

$$A_1(x) = \frac{e^{i \frac{mx^2}{2\hbar(T+\tau)}}}{\sqrt{(2i)^2 \pi \hbar (T + \tau)/m}} \times$$

$$\times (C[a_+(x; a, b)] - C[a_-(x; a, b)] + iS[a_+(x; a, b)] - iS[a_-(x; a, b)]) \quad 3.5$$

Φυσικά το πλάτος πιθανότητας να ανιχνεύσουμε το ηλεκτρόνιο στην οθόνη και να έχει περάσει από την σχισμή που είναι κεντρωμένη στο $-b$ θα περιγράφεται από το μοντέλο

$$\chi_{[-b-a, -b+a]}(y) = \begin{cases} 0 & y > -b + a, y < -b - a \\ 1 & -b - a < y < -b + a \end{cases}$$

και θα ισχύει

$$A_2(x; a, b) = A_1(x; a, -b) \quad 3.6$$

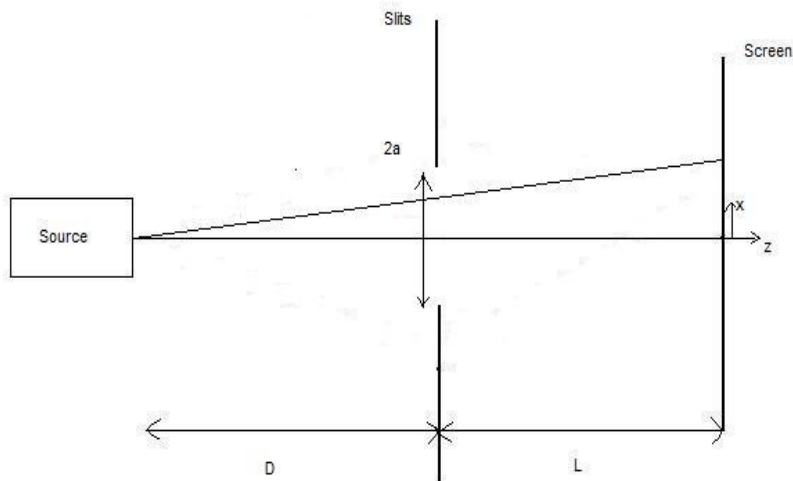
3.4 Φυσικές παράμετροι και προσεγγίσεις

Προτού προβούμε στην αναλυτική εξέταση του φαινομένου της περίθλασης του ηλεκτρονίου από μια και δύο σχισμές ξεχωριστά, είναι απαραίτητο να παρουσιάσουμε τις φυσικές παραμέτρους του προβλήματος.

Το ηλεκτρόνιο κινείται στο επίπεδο $x - z$ με μια ταχύτητα $u \equiv \sqrt{u_x^2 + u_z^2}$. Όμως, δεδομένου ότι το μήκος των σχισμών και η απόσταση μεταξύ τους είναι μικρή σε σύγκριση με τις οριζόντιες αποστάσεις D και L , μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η ταχύτητα του σωματιδίου μας στην κάθετη διεύθυνση u_x είναι μικρή σε σύγκριση με την οριζόντια ταχύτητα u_z . Έτσι θα ισχύει η ισότητα $u \equiv \sqrt{u_x^2 + u_z^2} \approx u_z$. Από την άλλη, γνωρίζουμε ότι το μήκος κύματος του ηλεκτρονίου περιγράφεται από την σχέση $\lambda = h/mu$. Έτσι προκύπτει η προσέγγιση με βάση τα παραπάνω για το μήκος κύματος $\lambda \approx h/mu_z$, ενώ η ταχύτητα στην οριζόντια διεύθυνση φαίνεται να είναι $u_z = \frac{L}{\tau} = \frac{D}{T}$. Αυτές είναι οι εκφράσεις που θα χρησιμοποιήσουμε παρακάτω για την ταχύτητα και το μήκος κύματος του ηλεκτρονίου.

3.5 Αναλυτική λύση του προβλήματος περίθλασης ηλεκτρονίου από μια σχισμή

Το πρόβλημα μας περιγράφεται από το παρακάτω σχήμα



Σχήμα 3.2: Σχηματική απεικόνιση της διάταξης με μια πηγή, 1 σχισμή και έναν ανιχνευτή

Ηλεκτρόνιο την χρονική στιγμή $t = 0$ ξεκινά από την πηγή και περνά μέσα από την σχισμή μετά από χρόνο T . Από την σχισμή μετά από χρόνο τ τελικά ανιχνεύεται. Το μοντέλο που περιγράφει την κίνηση αυτή είναι όπως δείξαμε παραπάνω

$$\chi_{[-a,+a]}(y) = \begin{cases} 0 & y > +a, y < -a \\ 1 & -a < y < +a \end{cases}$$

Ενώ το πλάτος πιθανότητας το ηλεκτρόνιο να διασχίσει την σχισμή και να ανιχνευθεί τελικά είναι

$$A(x; a) = \int_{-\infty}^{+\infty} dy \chi_{[-a,+a]}(y) K_0(y, T; 0, 0) K_0(x, T + \tau; y, T)$$

Με τους διαδότες μας να είναι γνωστοί και σύμφωνα με την διαδικασία που ακολουθήσαμε για να καταλήξουμε στην (3.5) το ζητούμενο πλάτος δίνεται από την σχέση

$$A(x; a) =$$

$$= \frac{e^{i\frac{mx^2}{2\hbar(T+\tau)}}}{\sqrt{(2i)^2\pi\hbar(T+\tau)/m}} (C[a_+(x; a)] - C[a_-(x; a)] + iS[a_+(x; a)] - iS[a_-(x; a)]) \quad 3.7$$

Ο παράγοντας $\alpha_{\pm}(x; a)$ από την (3.4) απαλείφοντας τον όρο b γίνεται εύκολα

$$\alpha_{\pm}(x; a) = \sqrt{\frac{m(T+\tau)}{\pi\hbar\tau T}} (\pm a) - \frac{x}{\sqrt{\pi\hbar\tau/m}} \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{T+\tau}} \quad 3.8$$

Ουσιαστικά, σύμφωνα με την αρχή του *Huygens* κάθε σημείο του μετώπου από το ένα άκρο της σχισμής ως το άλλο γίνεται δευτερογενής πηγή σφαιρικών κυμάτων της ίδιας συχνότητας, τα οποία διαδίδονται από τη σχισμή. Συνεπώς, το πλάτος σ' ένα τυχόν σημείο της οθόνης παρατήρησης προκύπτει από την υπέρθεση όλων των στοιχειωδών κυμάτων που δημιουργούνται στη σχισμή.

Τώρα θέλουμε να αντικαταστήσουμε τις φυσικές παραμέτρους μας ώστε να μπορέσουμε να δώσουμε φυσική ερμηνεία στο πρόβλημα μας.

Αρχικά έχουμε $u_z = \frac{L}{\tau} = \frac{D}{T} = u$ έτσι $\frac{\tau}{T} = \frac{L}{D}$. Ξεκινώντας με την σχέση (3.8) διαιρώ όλους τους όρους με T αριθμητές και παρονομαστές

$$\begin{aligned} \alpha(x; a) &= \frac{1}{T} \sqrt{\frac{m(T+\tau)}{\pi\hbar\tau T}} a - \frac{1}{T} \frac{x}{\sqrt{\pi\hbar\tau/m}} \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{T+\tau}} \\ &= \sqrt{\frac{m\left(\frac{T}{T^2} + \frac{\tau}{T^2}\right)}{\frac{\pi\hbar\tau T}{T^2}}} a - \frac{x}{\sqrt{\pi\hbar\tau/m}} \frac{\sqrt{\frac{T}{T^2}}}{\sqrt{\frac{T}{T^2} + \frac{\tau}{T^2}}} \\ &= \frac{\sqrt{\frac{m}{T}\left(1 + \frac{L}{D}\right)}}{\sqrt{\pi\hbar\frac{L}{D}}} a - x \frac{\sqrt{m\frac{1}{T}}}{\sqrt{\pi\hbar\frac{L}{D}\left(1 + \frac{L}{D}\right)}} \end{aligned}$$

Με αντικατάσταση επίσης του $\hbar = \frac{h}{2\pi}$

$$\begin{aligned} \alpha(x; a) &= \frac{\sqrt{\frac{m}{T} \left(1 + \frac{L}{D}\right)}}{\sqrt{\frac{\pi \hbar L}{2\pi D}}} a - x \frac{\sqrt{m \frac{1}{T}}}{\sqrt{\frac{\pi \hbar L}{2\pi D} \left(1 + \frac{L}{D}\right)}} \\ &= \sqrt{\frac{m2D}{\hbar TL}} \sqrt{1 + \frac{L}{D}} a - x \sqrt{\frac{m2D}{\hbar TL}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{L}{D}}} \frac{\sqrt{1 + \frac{L}{D}}}{\sqrt{1 + \frac{L}{D}}} \\ &= \sqrt{\frac{2mu}{\hbar L}} \sqrt{1 + \frac{L}{D}} a - x \sqrt{\frac{2mu}{\hbar L}} \frac{\sqrt{1 + \frac{L}{D}}}{\left(1 + \frac{L}{D}\right)} \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τελικά το μήκος κύματος $\lambda = \frac{h}{mu}$ και τροποποιώντας λίγο ακόμα την σχέση μας έχουμε

$$\begin{aligned} \alpha(x; a) &= \sqrt{\frac{2}{\lambda L}} \sqrt{1 + \frac{L}{D}} a - x \sqrt{\frac{2}{\lambda L}} \frac{\sqrt{1 + \frac{L}{D}}}{\left(1 + \frac{L}{D}\right)} a \\ &= \sqrt{\frac{2a^2}{\lambda L}} \sqrt{1 + L/D} \left(1 - \frac{x}{a} \frac{1}{1 + L/D}\right) \end{aligned}$$

Κάπου εδώ παρατηρώ ότι ο όρος $\frac{2a^2}{\lambda L}$ αποτελεί τον αριθμό *Fresnel* $N_F(a)$ έτσι

$$\alpha(x; a) = \sqrt{N_F(a)} \sqrt{1 + L/D} \left(1 - \frac{x}{a} \frac{1}{1 + L/D}\right)$$

$$\alpha_{\pm}(x; a) = \sqrt{N_F(a)} \sqrt{1 + L/D} \left(1 \mp \frac{x}{a} \frac{1}{1 + L/D}\right)$$

3.9

Η πιθανότητα διάθλασης του ηλεκτρονίου από μια σχισμή είναι τώρα

$$P^{slit}(x; a) = |A(x; a)|^2$$

$$= \left| \frac{e^{i \frac{mx^2}{2\hbar(T+\tau)}}}{\sqrt{(2i)^2 \pi \hbar (T + \tau) / m}} (C[a_+(x; a)] - C[a_-(x; a)] + iS[a_+(x; a)] - iS[a_-(x; a)]) \right|^2$$

Βρίσκω αναλυτικά

$$\bullet \left| e^{i \frac{mx^2}{2\hbar(T+\tau)}} \right|^2 = \sqrt{\cos^2\left(\frac{mx^2}{2\hbar(T+\tau)}\right) + \sin^2\left(\frac{mx^2}{2\hbar(T+\tau)}\right)} = 1$$

- $\left| \frac{1}{\sqrt{(2i)^2 \pi \hbar (T+\tau)/m}} \right|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{\frac{(2i)^2 \pi \hbar (T+\tau)}{2\pi} / m}} \right|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{2i^2 \frac{\hbar T}{mD} D(1+\frac{L}{D})}} \right|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{2i^2 \lambda (D+L)}} \right|^2 = \frac{1}{2\lambda(D+L)}$
- $a_-(x; a) = \sqrt{\frac{m(T+\tau)}{\pi \hbar \tau T}} (-a) - \frac{x}{\sqrt{\pi \hbar \tau / m}} \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{T+\tau}} = - \left(\sqrt{\frac{m(T+\tau)}{\pi \hbar \tau T}} a + \frac{x}{\sqrt{\pi \hbar \tau / m}} \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{T+\tau}} \right) = -\sqrt{NF(a)} \sqrt{1 + \frac{L}{D}} \left(1 + \frac{x}{a} \frac{1}{1+\frac{L}{D}} \right) = -a(x; -a)$
- $a_+(x; a) = \sqrt{\frac{m(T+\tau)}{\pi \hbar \tau T}} a - \frac{x}{\sqrt{\pi \hbar \tau / m}} \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{T+\tau}} = \sqrt{NF(a)} \sqrt{1 + \frac{L}{D}} \left(1 - \frac{x}{a} \frac{1}{1+\frac{L}{D}} \right) = a(x; +a)$
- Οι συναρτήσεις *Fresnel* είναι περιττές συναρτήσεις έτσι
 $|C[a_+(x; a)] - C[a_-(x; a)] + iS[a_+(x; a)] - iS[a_-(x; a)]|^2 =$
 $|C[\alpha(x; +a)] - C[-\alpha(x; -a)] + iS[\alpha(x; +a)] - iS[-\alpha(x; -a)]|^2 =$
 $|C[\alpha(x; +a)] + C[\alpha(x; -a)] + iS[\alpha(x; +a)] + iS[\alpha(x; -a)]|^2 =$
 $\sqrt{(C[\alpha(x; +a)] + C[\alpha(x; -a)])^2 + (S[\alpha(x; +a)] + S[\alpha(x; -a)])^2}^2 =$
 $(C[\alpha(x; +a)] + C[\alpha(x; -a)])^2 + (S[\alpha(x; +a)] + S[\alpha(x; -a)])^2$

Τελικά η πιθανότητα το ηλεκτρόνιο να διασχίσει την σχισμή και να ανιχνευθεί στην οθόνη είναι

$$P^{1slit}(x; a) =$$

$$\frac{1}{2\lambda(D+L)} [(C[\alpha(x; +a)] + C[\alpha(x; -a)])^2 + (S[\alpha(x; +a)] + S[\alpha(x; -a)])^2] \quad 3.10$$

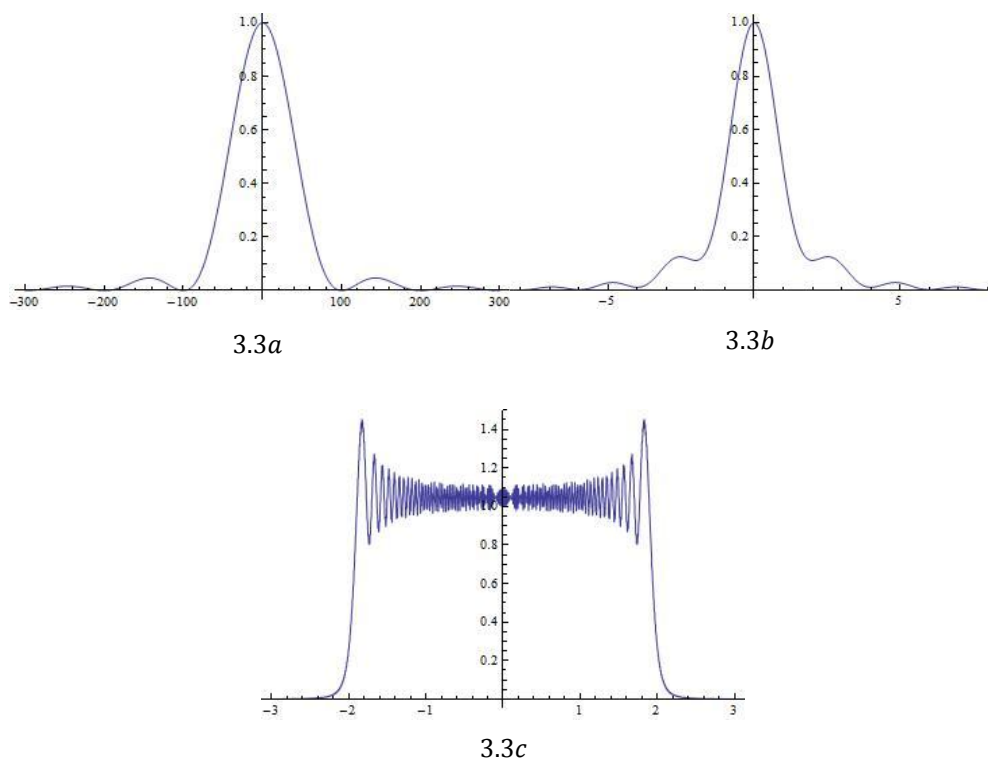
Κάπου εδώ εισάγουμε τις ακόλουθες παραμέτρους

$$\begin{aligned} \eta &\equiv 1 + \frac{L}{D} \\ \gamma &= \eta - 1 \Rightarrow D + L = \eta \frac{L}{\gamma} \end{aligned}$$

Με αντικατάσταση στην (3.10)

$$P^{1slit}(x; a) = \frac{\gamma}{2\lambda\eta L} [(C[\alpha(x; +a)] + C[\alpha(x; -a)])^2 + (S[\alpha(x; +a)] + S[\alpha(x; -a)])^2] \quad 3.11$$

Για διάφορες τιμές των παραμέτρων αυτών κάνουμε τα διαγράμματα κατανομής πιθανότητας



Σχήμα 3.3: Καμπύλη περίθλασης για μια μόνο σχισμή, με $\eta = 2$. Η τετμημένη αποτελεί την απόσταση σε μονάδες a , ενώ η τεταγμένη είναι η σχετική πιθανότητα. Έχουμε $N_F(a) = 0.01$ για το a διάγραμμα, 0.5 για το b και 100 για το c .

Σημειώνουμε ότι οι συναρτήσεις *Fresnel* στην σχέση (3.11) συμπεριφέρονται διαφορετικά ανάλογα με την τιμή του αριθμού *Fresnel* $N_F(a)$, ουσιαστικά εξαρτώνται απ' το αν ο αριθμός αυτός είναι μεγαλύτερος ή μικρότερος της μονάδας. Για να κατανοήσουμε τις διαφορές αυτές πλήρως, θα αναλύσουμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά αυτών των συναρτήσεων για τα διάφορα συστήματα.

Ξεκινώντας να ξεκαθαρίσουμε ότι τα ολοκληρώματα *Fresnel* $S(x), C(x)$ είναι δυο υπερβατικές συναρτήσεις ενώ ορίζονται όπως προαναφέραμε

$$S(x) \equiv \int_0^x dy \cos\left(\frac{\pi y^2}{2}\right)$$

$$C(x) \equiv \int_0^x dy \sin\left(\frac{\pi y^2}{2}\right)$$

Οι ασυμπτωτικές των ολοκληρωμάτων αυτών όσο $x \rightarrow \infty$ δίνονται αντίστοιχα από τους τύπους

$$\begin{aligned} S(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\text{sign}(x)}{2} - [1 + O(x^{-4})] \left(\frac{\cos(x^2)}{x\sqrt{2\pi}} + \frac{\sin(x^2)}{x^3\sqrt{8\pi}} \right) \right) \\ C(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\text{sign}(x)}{2} + [1 + O(x^{-4})] \left(\frac{\sin(x^2)}{x\sqrt{2\pi}} - \frac{\cos(x^2)}{x^3\sqrt{8\pi}} \right) \right) \end{aligned} \quad 3.12$$

$$\text{Συνάρτηση Signum : } \text{sign}(x) = \begin{cases} -1 & \text{αν } x < 0 \\ 0 & \text{αν } x = 0 \\ +1 & \text{αν } x > 0 \end{cases}$$

Έτσι για $x \gg 1$ τότε

$$S(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos(x^2)}{x\sqrt{2\pi}} - \frac{\sin(x^2)}{x^3\sqrt{8\pi}} \right)$$

$$C(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sin(x^2)}{x\sqrt{2\pi}} - \frac{\cos(x^2)}{x^3\sqrt{8\pi}} \right)$$

Οι τελευταίοι όροι απαλείφονται εφόσον $\sin x > 1$ και $x \gg 1 \Rightarrow x^2 \gg 1$ τότε για $x \rightarrow \infty$, $\frac{\sin(x^2)}{x^3\sqrt{8\pi}} \rightarrow 0$ και $\frac{\cos(x^2)}{x^3\sqrt{8\pi}} \rightarrow 0$.

Έτσι γίνονται

$$S(x) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x^2)}{x\sqrt{2\pi}} \approx \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} - \frac{\cos(x^2)}{2x}$$

$$C(x) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x^2)}{x\sqrt{2\pi}} \approx \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} + \frac{\sin(x^2)}{2x}$$

$$\text{Θέτω } x^2 = \frac{\pi}{2} u^2 \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{\pi}{2}} u$$

Για $x = +\sqrt{\frac{\pi}{2}} u$ τότε

$$S\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} u\right) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} - \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} u^2\right)}{2\sqrt{\frac{\pi}{2}} u} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} - \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} u^2\right)}{2\sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} u} =$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} - \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} u^2\right)}{\frac{2\pi}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} u} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\pi u} \cos\left(\frac{\pi}{2} u^2\right)$$

$$\Rightarrow S(u) \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi u} \cos\left(\frac{\pi}{2} u^2\right)$$

Για $x = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} u$ αντίστοιχα έχουμε $S(u) \approx -\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi u} \cos\left(\frac{\pi}{2} u^2\right)$

Ενώ αντίστοιχα με αλλαγή μεταβλητής προκύπτουν οι συναρτήσεις

$$C(\pm u) \approx \pm \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi u} \sin\left(\frac{\pi}{2} u^2\right)$$

Συγκεντρώνουμε τις ασυμπτωτικές των συναρτήσεων *Fresnel* που πλέον θα χρησιμοποιήσουμε στις λύσεις μας

$$C(\pm u) \approx \pm \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi u} \sin\left(\frac{\pi}{2} u^2\right) \quad u \gg 1$$

$$S(\pm u) \approx \pm \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi u} \cos\left(\frac{\pi}{2} u^2\right) \quad u \gg 1 \quad 3.13$$

Αντικαθιστούμε, λοιπόν, τις ασυμπτωτικές των συναρτήσεων *Fresnel* (3.13) στην έκφραση για την πιθανότητα του ηλεκτρονίου (3.11) και με πράξεις έχουμε

$$\begin{aligned} P^{1slit}(x; a) &= \frac{\gamma}{2\lambda\eta L} [(C[\alpha(x; +a)] + C[\alpha(x; -a)])^2 + (S[\alpha(x; +a)] + S[\alpha(x; -a)])^2] \\ &\cong \frac{\gamma}{2\lambda\eta L} \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi a(x; a)} \sin\left(\frac{\pi}{2} a^2(x; a)\right) + \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi a(x; -a)} \sin\left(\frac{\pi}{2} a^2(x; -a)\right) \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi a(x; a)} \cos\left(\frac{\pi}{2} a^2(x; a)\right) + \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi a(x; -a)} \cos\left(\frac{\pi}{2} a^2(x; -a)\right) \right)^2 \right] \\ &= \frac{\gamma}{2\lambda\eta L} \left[\left(1 + \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} N_F(a)\eta \left(1 - \frac{x}{a\eta}\right)^2\right)}{\pi\sqrt{N_F(a)}\sqrt{\eta} \left(1 - \frac{x}{a\eta}\right)} + \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} N_F(a)\eta \left(1 + \frac{x}{a\eta}\right)^2\right)}{\pi\sqrt{N_F(a)}\sqrt{\eta} \left(1 + \frac{x}{a\eta}\right)} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(1 - \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} N_F(a)\eta \left(1 - \frac{x}{a\eta}\right)^2\right)}{\pi\sqrt{N_F(a)}\sqrt{\eta} \left(1 - \frac{x}{a\eta}\right)} - \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} N_F(a)\eta \left(1 + \frac{x}{a\eta}\right)^2\right)}{\pi\sqrt{N_F(a)}\sqrt{\eta} \left(1 + \frac{x}{a\eta}\right)} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\gamma}{\eta} \left[\left(\frac{1}{\sqrt{2\lambda L}} + \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} N_F(a)\eta \left(1 - \frac{x}{a\eta}\right)^2\right)}{\sqrt{2\lambda L} \pi \sqrt{N_F(a)} \sqrt{\eta} \left(1 - \frac{x}{a\eta}\right)} + \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} N_F(a)\eta \left(1 + \frac{x}{a\eta}\right)^2\right)}{\sqrt{2\lambda L} \pi \sqrt{N_F(a)} \sqrt{\eta} \left(1 + \frac{x}{a\eta}\right)} \right)^2 \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{1}{\sqrt{2\lambda L}} - \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} N_F(a)\eta \left(1 - \frac{x}{a\eta}\right)^2\right)}{\sqrt{2\lambda L} \pi \sqrt{N_F(a)} \sqrt{\eta} \left(1 - \frac{x}{a\eta}\right)} - \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} N_F(a)\eta \left(1 + \frac{x}{a\eta}\right)^2\right)}{\sqrt{2\lambda L} \pi \sqrt{N_F(a)} \sqrt{\eta} \left(1 + \frac{x}{a\eta}\right)} \right)^2 \right] \\
&= \frac{\gamma}{\eta} \left[\left(\frac{\sqrt{N_F(a)}}{\sqrt{\frac{2\alpha^2}{\lambda L}} \sqrt{2\lambda L}} + \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} N_F(a)\eta \left(1 - \frac{x}{a\eta}\right)^2\right)}{\sqrt{2\lambda L} \pi \sqrt{\frac{2\alpha^2}{\lambda L}} \sqrt{\eta} \left(1 - \frac{x}{a\eta}\right)} + \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} N_F(a)\eta \left(1 + \frac{x}{a\eta}\right)^2\right)}{\sqrt{2\lambda L} \pi \sqrt{\frac{2\alpha^2}{\lambda L}} \sqrt{\eta} \left(1 + \frac{x}{a\eta}\right)} \right)^2 \right. \\
&\quad + \left(\frac{\sqrt{N_F(a)}}{\sqrt{\frac{2\alpha^2}{\lambda L}} \sqrt{2\lambda L}} - \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} N_F(a)\eta \left(1 - \frac{x}{a\eta}\right)^2\right)}{\sqrt{2\lambda L} \pi \sqrt{\frac{2\alpha^2}{\lambda L}} \sqrt{\eta} \left(1 - \frac{x}{a\eta}\right)} \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} N_F(a)\eta \left(1 + \frac{x}{a\eta}\right)^2\right)}{\sqrt{2\lambda L} \pi \sqrt{\frac{2\alpha^2}{\lambda L}} \sqrt{\eta} \left(1 + \frac{x}{a\eta}\right)} \right)^2 \right] \\
p^{1slit}(x) &\cong \frac{\gamma}{\eta} \left[\left(\frac{\sqrt{N_F(a)}}{2\alpha^2} + \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} N_F(a)\eta \left(1 - \frac{x}{a\eta}\right)^2\right)}{2\pi\sqrt{\eta} \left(\alpha - \frac{x}{\eta}\right)} + \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} N_F(a)\eta \left(1 + \frac{x}{a\eta}\right)^2\right)}{2\pi\sqrt{\eta} \left(\alpha + \frac{x}{\eta}\right)} \right)^2 \right. \\
&\quad + \left(\frac{\sqrt{N_F(a)}}{2\alpha^2} - \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} N_F(a)\eta \left(1 - \frac{x}{a\eta}\right)^2\right)}{2\pi\sqrt{\eta} \left(\alpha - \frac{x}{\eta}\right)} \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} N_F(a)\eta \left(1 + \frac{x}{a\eta}\right)^2\right)}{2\pi\sqrt{\eta} \left(\alpha + \frac{x}{\eta}\right)} \right)^2 \right] \tag{3.14}
\end{aligned}$$

Η έκφραση για την πιθανότητα του ηλεκτρονίου να ανιχνευθεί (3.14) περιγράφει πλήρως την διάδοση του σωματιδίου μας όσο η απόσταση μεταξύ της σχισμής και του ανιχνευτή είναι πεπερασμένη, δηλαδή $N_F(a) \gg 1$. Ο αριθμός *Fresnel*, όπως προαναφέραμε, ορίζει το σύστημα μας εδώ ως σύστημα *Fresnel*-σύστημα κοντινού πεδίου. Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση ταλαντώνεται ραγδαία στο διάστημα $[-\alpha, \alpha]$ γύρω από μια σταθερή τιμή

$$\frac{N_F(a)\gamma}{2\alpha^2\eta} = \frac{\frac{2\alpha^2 L}{\lambda L D}}{2\alpha^2 \left(1 + \frac{L}{D}\right)} = \frac{1}{\lambda(D+L)}, \text{ όπως ήταν αναμενόμενο και φαίνεται στο σχήμα (3.3c).}$$

Έξω από αυτό το διάστημα, για $|x| > \alpha\eta$ παρατηρούμε ότι η κατανομή πιθανότητας μειώνεται ραγδαία στο μηδέν. Αποδεικνύουμε με πράξεις αναλυτικά

- $|x| > a\eta$
- $\alpha(x; a) = \sqrt{N_F(a)}\sqrt{\eta} \left(1 - \frac{x}{a\eta}\right) = -\sqrt{N_F(a)}\sqrt{\eta} \left(\frac{x}{a\eta} - 1\right)$
- $\sqrt{N_F(a)}\sqrt{\eta} \left(\frac{x}{a\eta} - 1\right) \gg 1 \Rightarrow -\sqrt{N_F(a)}\sqrt{\eta} \left(\frac{x}{a\eta} - 1\right) \ll -1 \Rightarrow a(x; a) \ll -1 \Rightarrow -a(x; a) \gg 1$
- $\alpha(x; -a) = \sqrt{N_F(a)}\sqrt{\eta} \left(1 + \frac{x}{a\eta}\right)$
- $\frac{x}{a\eta} - 1 \gg \frac{1}{\sqrt{N_F(a)}\sqrt{\eta}} \Rightarrow \frac{x}{a\eta} \gg \frac{1}{\sqrt{N_F(a)}\sqrt{\eta}} + 1 \Rightarrow \frac{x}{a\eta} + 1 \gg \frac{1}{\sqrt{N_F(a)}\sqrt{\eta}} + 2 \Rightarrow$
 $\frac{x}{a\eta} + 1 \gg \frac{1 + 2\sqrt{N_F(a)}\sqrt{\eta}}{\sqrt{N_F(a)}\sqrt{\eta}} \Rightarrow \left(\frac{x}{a\eta} + 1\right) \left(\sqrt{N_F(a)}\sqrt{\eta}\right) \gg 1 + 2\sqrt{N_F(a)}\sqrt{\eta} \gg 1$
 $\Rightarrow a(x; -a) \gg 1$
- Έτσι $\pm\alpha(x; \mp a) \gg 1$
- $C[a(x; a)] + C[a(x; -a)] \cong \frac{1}{\pi a(x; a)} \sin\left(\frac{\pi}{2} a^2(x; a)\right) + \frac{1}{\pi a(x; -a)} \sin\left(\frac{\pi}{2} a^2(x; -a)\right)$
- $S[a(x; a)] + S[a(x; -a)] \cong -\frac{1}{\pi a(x; a)} \cos\left(\frac{\pi}{2} a^2(x; a)\right) - \frac{1}{\pi a(x; -a)} \cos\left(\frac{\pi}{2} a^2(x; -a)\right)$

Αντικαθιστώ στην (3.11) και με χρήση των τριγωνομετρικών εξισώσεων

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

$$2 \sin^2 x = 1 - \cos(2x)$$

Έχουμε

$$\begin{aligned} P^{1slit}(x; a) &\cong \frac{\gamma}{2\lambda\eta L} \left[\left(\frac{1}{\pi a(x; a)} \sin\left(\frac{\pi}{2} a^2(x; a)\right) + \frac{1}{\pi a(x; -a)} \sin\left(\frac{\pi}{2} a^2(x; -a)\right) \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(-\frac{1}{\pi a(x; a)} \cos\left(\frac{\pi}{2} a^2(x; a)\right) - \frac{1}{\pi a(x; -a)} \cos\left(\frac{\pi}{2} a^2(x; -a)\right) \right)^2 \right] \\ &= \frac{\gamma}{2\lambda\eta L} \left[\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2} a^2(x; a)\right)}{\pi^2 a^2(x; a)} + 2 \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} a^2(x; a)\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} a^2(x; -a)\right)}{\pi^2 a(x; a) a(x; -a)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2} a^2(x; -a)\right)}{\pi^2 a^2(x; -a)} + \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} a^2(x; a)\right)}{\pi^2 a^2(x; a)} \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} a^2(x; a)\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} a^2(x; -a)\right)}{\pi^2 a(x; a) a(x; -a)} + \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} a^2(x; -a)\right)}{\pi^2 a^2(x; -a)} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\gamma}{2\lambda\eta L} \left[\frac{1}{\pi^2 a^2(x; a)} + \frac{1}{\pi^2 a^2(x; -a)} \right. \\
&\quad \left. + 2 \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} a^2(x; a)\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} a^2(x; -a)\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} a^2(x; a)\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} a^2(x; -a)\right)}{\pi^2 a(x; a)a(x; -a)} \right] \\
&= \frac{\gamma}{2\lambda\eta L} \left[\frac{a^2(x; a) + a^2(x; -a)}{\pi^2 a^2(x; a)a^2(x; -a)} + 2 \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} (a^2(x; a) - a^2(x; -a))\right)}{\pi^2 a(x; a)a(x; -a)} \right] \\
&= \frac{\gamma}{2\lambda\eta L} \left[\frac{N_F(a) \left(1 - \frac{2x}{a\eta} + \frac{x^2}{a^2\eta^2} + 1 + \frac{2x}{a\eta} + \frac{x^2}{a^2\eta^2}\right)}{\pi^2 N_F(a)\eta N_F(a)\eta \left(1 - \frac{x}{a\eta}\right)^2 \left(1 + \frac{x}{a\eta}\right)^2} \right. \\
&\quad \left. + 2 \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} N_F(a)\eta \left(1 + \frac{2x}{a\eta} + \frac{x^2}{a^2\eta^2} - 1 + \frac{2x}{a\eta} - \frac{x^2}{a^2\eta^2}\right)\right)}{\pi^2 N_F(a)\eta \left(1 - \frac{x}{a\eta}\right) \left(1 + \frac{x}{a\eta}\right)} \right] \\
&= \frac{\gamma}{2\lambda\eta L} \left[2 \frac{1 + \frac{x^2}{a^2\eta^2}}{\pi^2 \frac{N_F(a)\eta}{a^4} \left(\frac{x^2}{\eta^2} - a^2\right)^2} - 2 \frac{\cos\left(\pi N_F(a)\eta \frac{2x}{a\eta}\right)}{\pi^2 \frac{N_F(a)\eta}{a^2} \left(\frac{x^2}{\eta^2} - a^2\right)} \right] \\
&= \frac{\gamma}{\lambda\eta L} \left[\frac{1 + \frac{x^2}{a^2\eta^2}}{\pi^2 \frac{N_F(a)\eta}{a^4} \left(\frac{x^2}{\eta^2} - a^2\right)^2} - \frac{1 - 2\sin^2\left(\pi N_F(a)\frac{x}{a}\right)}{\pi^2 \frac{N_F(a)\eta}{a^2} \left(\frac{x^2}{\eta^2} - a^2\right)} \right] \\
&= \frac{\gamma}{\lambda\eta L} \left[\frac{1 + \frac{x^2}{a^2\eta^2}}{\pi^2 \frac{N_F(a)\eta}{a^4} \left(\frac{x^2}{\eta^2} - a^2\right)^2} - \frac{\frac{1}{a^2} \left(\frac{x^2}{\eta^2} - a^2\right)}{\pi^2 \frac{N_F(a)\eta}{a^4} \left(\frac{x^2}{\eta^2} - a^2\right)^2} + \frac{2\sin^2\left(\pi N_F(a)\frac{x}{a}\right)}{\pi^2 \frac{N_F(a)\eta}{a^2} \left(\frac{x^2}{\eta^2} - a^2\right)} \right] \\
&= \frac{\gamma}{\lambda\eta L} \left[\frac{1 + \frac{x^2}{a^2\eta^2} - \frac{x^2}{a^2\eta^2} + 1}{\pi^2 \frac{N_F(a)\eta}{a^4} \left(\frac{x^2}{\eta^2} - a^2\right)^2} + \frac{2\sin^2\left(\pi N_F(a)\frac{x}{a}\right)}{\pi^2 \frac{N_F(a)\eta}{a^2} \left(\frac{x^2}{\eta^2} - a^2\right)} \right] \\
&= \frac{\gamma}{\lambda\eta L} \left[\frac{2}{\pi^2 \frac{N_F(a)\eta}{a^2} \left(\frac{x^2}{\eta^2} - a^2\right)^2} + \frac{2}{\pi^2 \frac{N_F(a)\eta}{a^2}} \frac{\sin^2\left(\pi N_F(a)\frac{x}{a}\right)}{\left(\frac{x^2}{\eta^2} - a^2\right)} \right] \\
&= \frac{\gamma}{\lambda\eta L} \frac{2}{\pi^2 \frac{N_F(a)\eta}{a^2}} \left[\frac{a^2}{\left(\frac{x^2}{\eta^2} - a^2\right)^2} + \frac{\sin^2\left(\pi N_F(a)\frac{x}{a}\right)}{\left(\frac{x^2}{\eta^2} - a^2\right)} \right]
\end{aligned}$$

$$P^{1slit}(x; a) = \frac{2\gamma}{\pi^2 \eta^2} \left(\frac{a^2}{\left(\frac{x^2}{\eta^2} - a^2\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{x^2}{\eta^2} - a^2\right)} \sin^2 \left(\pi N_F(a) \frac{x}{a} \right) \right), |x| > a\eta \quad 3.15$$

Η συνάρτηση στην οποία καταλήξαμε (3.15) δεν περιγράφει μόνο την διάδοση του ηλεκτρονίου σε σύστημα μακρινού πεδίου για $|x| > a\eta$, αποτελεί εξίσου την αναλυτική λύση της περίθλασης του ηλεκτρονίου για την προσέγγιση *Fraunhofer*. Μια προσέγγιση που η απόσταση των σχισμών με τον ανιχνευτή είναι άπειρη σε σχέση με το πλάτος της σχισμής, δηλαδή $N_F(a) \ll 1$ και $\frac{(x-a\eta)}{a\eta} \gg \frac{1}{\sqrt{N_F(a)\eta}} \Leftrightarrow x - a\eta \gg \sqrt{\frac{\lambda L}{2}}$, οδηγεί σε εκείνες τις ασυμπτωτικές που με την σειρά τους καταλήγουν σε μια κατανομή πιθανότητας που περιγράφεται από την (3.15).

Επιπροσθέτως, αν σε αυτό το σύστημα θεωρήσουμε τεράστια απόσταση μέχρι τον ανιχνευτή τότε

- $\frac{x}{a\eta} \gg 1 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2\eta^2} \gg 1 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2\eta^2} - 1 \gg 0 \Rightarrow \frac{1}{\frac{x^2}{a^2\eta^2} - 1} \ll 0$
- Έτσι ο όρος $\frac{a^2}{\left(\frac{x^2}{\eta^2} - a^2\right)^2}$ της (3.14) απαλείφεται και $\frac{x^2}{\eta^2} \gg a^2$ έτσι

$$P^{1slit}(x; a) \cong \frac{2\gamma}{\pi^2 x^2} \sin^2 \left(\pi N_F(a) \frac{x}{a} \right), \quad N_F(a) \ll 1, \frac{x}{a\eta} \gg 1 \quad 3.16$$

Η συνάρτηση αυτή λοιπόν που μας περιγράφει το σύστημα μακρινού πεδίου, ή ως γνωστών περίθλαση *Fraunhofer*, είναι τελείως ανάλογη, αν θυμηθούμε, με την περίθλαση επίπεδων κυμάτων στην οπτική, όπως φαίνεται και στο σχήμα (3.3a). Επιβεβαιώνουμε δίνοντας την εξίσωση περίθλασης *Fraunhofer*

$$I(x_0, y_0) \sim \frac{(\sin^2 a)}{a^2}$$

Όπως δίνεται από την σχέση (1.26) στο Παράρτημα A'4.

Οι συναρτήσεις (3.15), (3.16) προσεγγίζουν εξίσου την περίπτωση που ο αριθμός *Fresnel* $N_F(a)$ είναι της τάξης της μονάδας. Αυτό αποτελεί το ενδιάμεσο σύστημα που περιγράφουμε και φαίνεται στο σχήμα (3.3b), υπό την προϋπόθεση να ισχύει $x \gg a\eta$.

3.6 Αναλυτική λύση του προβλήματος περίθλασης ηλεκτρονίου από δύο σχισμές

Το σχήμα (3.1) περιγράφει πλήρως το πρόβλημα μας, ενώ σύμφωνα με τις σχέσεις (3.5) και (3.6) μπορούμε να βρούμε την πιθανότητα περίθλασης του ηλεκτρονίου από δύο σχισμές, (βάση της (1.1) να σημειωθεί)

$$P^{2Slit}(x; a, b) = P_1(x; a, b) + P_2(x; a, b) + I_{12}(x; a, b) \quad 3.17$$

Ομοίως με τα προηγούμενα, οι όροι περίθλασης φαίνεται να είναι

$$\begin{aligned} P_1(x; a, b) &= |A_1(x; a, b)|^2 \\ &= \frac{\gamma}{2\lambda L\eta} \left([C(a_+(x; a, b)) - C(a_-(x; a, b))]^2 + [S(a_+(x; a, b)) - S(a_-(x; a, b))]^2 \right) \end{aligned} \quad 3.18$$

$$P_2(x; a, b) = |A_2(x; a, b)|^2 = |A_1(x; a, -b)|^2 = P_1(x; a, -b) \quad 3.18$$

Ο επιπλέον όρος δεν είναι παρά ο όρος συμβολής δύο σωματιδίων που περνούν από την σχισμή ένα και δύο. Έτσι

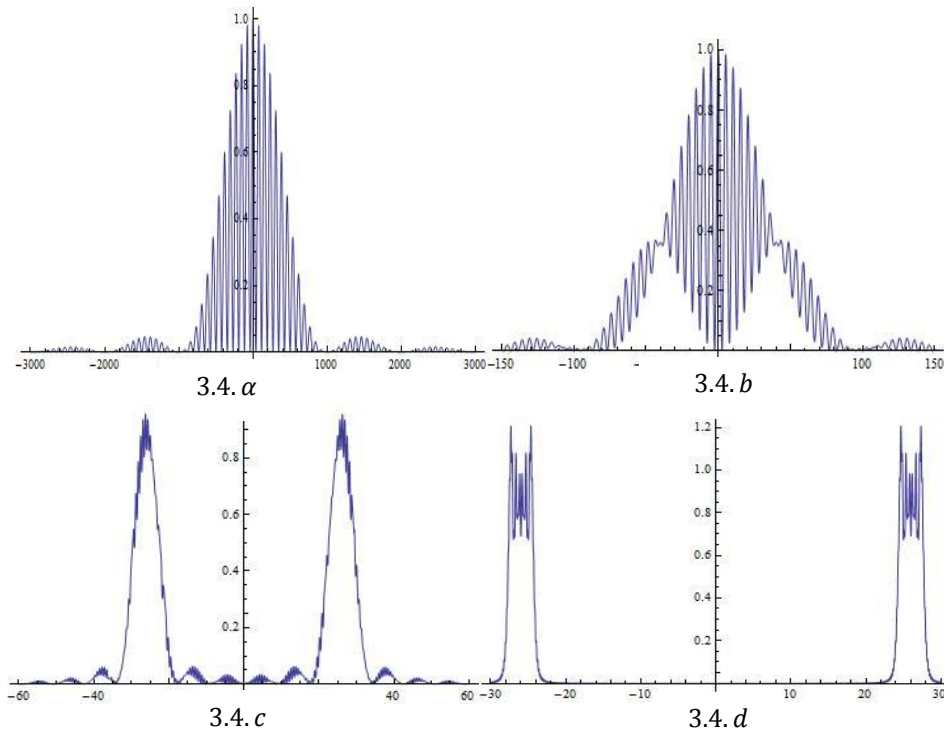
$$\begin{aligned} I_{12}(x; a, b) &= A_1(x; a, b)A_2^*(x; a, b) + A_2(x; a, b)A_1^*(x; a, b) \\ &= \frac{e^{i\frac{mx^2}{2\hbar(T+\tau)}}}{\sqrt{(2i)^2\pi\hbar(T+\tau)/m}} (C[a_+(x; a, b)] - C[a_-(x; a, b)] + iS[a_+(x; a, b)] \\ &\quad - iS[a_-(x; a, b)]) \times \\ &\quad \frac{e^{-i\frac{mx^2}{2\hbar(T+\tau)}}}{\sqrt{(2i)^2\pi\hbar(T+\tau)/m}} (C[a_+(x; a, -b)] - C[a_-(x; a, -b)] - iS[a_+(x; a, -b)] \\ &\quad + iS[a_-(x; a, -b)]) + \\ &\quad \frac{e^{i\frac{mx^2}{2\hbar(T+\tau)}}}{\sqrt{(2i)^2\pi\hbar(T+\tau)/m}} (C[a_+(x; a, -b)] - C[a_-(x; a, -b)] + iS[a_+(x; a, -b)] \\ &\quad - iS[a_-(x; a, -b)]) \times \\ &\quad \frac{e^{-i\frac{mx^2}{2\hbar(T+\tau)}}}{\sqrt{(2i)^2\pi\hbar(T+\tau)/m}} (C[a_+(x; a, b)] - C[a_-(x; a, b)] - iS[a_+(x; a, b)] + iS[a_-(x; a, b)]) \\ &= \frac{\gamma}{2\lambda L\eta} [(C[a_+(x; a, b)] - C[a_-(x; a, b)] + iS[a_+(x; a, b)] - iS[a_-(x; a, b)]) \times \\ &\quad (C[a_+(x; a, -b)] - C[a_-(x; a, -b)] - iS[a_+(x; a, -b)] + iS[a_-(x; a, -b)]) + \\ &\quad (C[a_+(x; a, -b)] - C[a_-(x; a, -b)] + iS[a_+(x; a, -b)] - iS[a_-(x; a, -b)]) \times \\ &\quad (C[a_+(x; a, b)] - C[a_-(x; a, b)] - iS[a_+(x; a, b)] + iS[a_-(x; a, b)])] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\gamma}{2\lambda L\eta} [C[a_+(x; a, b)]C[a_+(x; a, -b)] - C[a_-(x; a, b)]C[a_+(x; a, -b)] \\
&\quad + iS[a_+(x; a, b)]C[a_+(x; a, -b)] - iS[a_-(x; a, b)]C[a_+(x; a, -b)] \\
&\quad - C[a_+(x; a, b)]C[a_-(x; a, -b)] + C[a_-(x; a, b)]C[a_-(x; a, -b)] \\
&\quad - iS[a_+(x; a, b)]C[a_-(x; a, -b)] + iS[a_-(x; a, b)]C[a_-(x; a, -b)] \\
&\quad - C[a_+(x; a, b)]iS[a_+(x; a, -b)] + C[a_-(x; a, b)]iS[a_+(x; a, -b)] \\
&\quad + iS[a_+(x; a, b)]iS[a_+(x; a, -b)] + iS[a_-(x; a, b)]iS[a_+(x; a, -b)] \\
&\quad + C[a_+(x; a, b)]iS[a_-(x; a, -b)] - C[a_-(x; a, b)]iS[a_-(x; a, -b)] \\
&\quad + iS[a_+(x; a, b)]iS[a_-(x; a, -b)] - iS[a_-(x; a, b)]iS[a_-(x; a, -b)] \\
&\quad + C[a_+(x; a, -b)]C[a_+(x; a, b)] - C[a_-(x; a, -b)]C[a_+(x; a, b)] \\
&\quad + iS[a_+(x; a, -b)]C[a_+(x; a, b)] - iS[a_-(x; a, -b)]C[a_+(x; a, b)] \\
&\quad - C[a_+(x; a, -b)]C[a_-(x; a, b)] + C[a_-(x; a, -b)]C[a_-(x; a, b)] \\
&\quad - iS[a_+(x; a, -b)]C[a_-(x; a, b)] + iS[a_-(x; a, -b)]C[a_-(x; a, b)] \\
&\quad - C[a_+(x; a, -b)]iS[a_+(x; a, b)] + C[a_-(x; a, -b)]iS[a_+(x; a, b)] \\
&\quad - iS[a_+(x; a, -b)]iS[a_+(x; a, b)] + iS[a_-(x; a, -b)]iS[a_+(x; a, b)] \\
&\quad + C[a_+(x; a, -b)]iS[a_-(x; a, b)] - C[a_-(x; a, -b)]iS[a_-(x; a, b)] \\
&\quad + iS[a_+(x; a, -b)]iS[a_-(x; a, b)] - iS[a_-(x; a, -b)]iS[a_-(x; a, b)]]
\end{aligned}$$

Απαλείφοντας κοινούς όρους και παραγοντοποιώντας έχουμε την τελική έκφραση

$$\begin{aligned}
I_{12}(x; a, b) &= \frac{\gamma}{2\lambda L\eta} ([C(a_+(x; a, b)) - C(a_-(x; a, b))][C(a_+(x; a, -b)) - C(a_-(x; a, -b))] \\
&\quad + [S(a_+(x; a, b)) - S(a_-(x; a, b))][S(a_+(x; a, -b)) - S(a_-(x; a, -b))]) \quad 3.19
\end{aligned}$$

Και κάπως έτσι μπορούμε να έχουμε τις καμπύλες συμβολής, αθροίζοντας τους παραπάνω όρους μέσω της σχέσης (3.17)



Σχήμα 3.4: Καμπύλη συμβολής για δύο σχισμές, με $b/a = 13, \eta = 2$. Η τετμημένη αποτελεί την απόσταση σε μονάδες a , ενώ η τεταγμένη είναι η σχετική πιθανότητα. Έχουμε $N_F(a) = 0.001$ για το a διάγραμμα, 0.015 για το b και 0.12 για το c και 6 για το d .

Κάπου εδώ, ορίζουμε τους αριθμούς *Fresnel*

$$N_F(a) \equiv \frac{2a^2}{\lambda L}, \quad N_F(b) \equiv \frac{2b^2}{\lambda L}, \quad N_F \equiv \frac{2ab}{\lambda L} = \sqrt{\frac{N_F(a)N_F(b)}{2}}$$

Θεωρούμε ότι η απόσταση μεταξύ των σχισμών είναι μεγάλη σε σύγκριση με το μέγεθος των σχισμών, δηλαδή $b \gg a$. Στο πείραμα μας καθορίζουμε τις δύο παραμέτρους a, b και μεταβάλλουμε την απόσταση μεταξύ σχισμών και ανιχνευτή, οπότε κρατάμε σταθερή την τιμή για την παράμετρο η . Εύκολα μπορούμε να παρατηρήσουμε, σύμφωνα με τους παραπάνω ορισμούς ότι για $b \gg a$ προκύπτει να μην η ανισότητα $N_F \gg 1$ αλλά δεν συνεπάγεται απαραίτητα ότι θα ισχύει $N_F(a) \gg 1$. Κάθε μια από αυτές τις παραμέτρους "παίζουν" διαφορετικούς ρόλους, οι οποίοι αποσαφηνίζονται παρακάτω στην προσπάθεια μας να δείξουμε την αναλυτική λύση του προβλήματος περίθλασης του ηλεκτρονίου από δύο πλέον σχισμές.

Αρχικά αντικαθιστούμε τις φυσικές παραμέτρους μας, όπως πραγματοποιήσαμε στην περίπτωση με την μια μόνο σχισμή, οπότε και έχουμε

$$\begin{aligned}
a_{\pm}(x; a, b) &= \sqrt{\frac{m(T + \tau)}{\pi \hbar \tau T}} (b \pm a) - \frac{x}{\sqrt{\pi \hbar \tau / m}} \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{T + \tau}} \\
\Rightarrow a_{\pm}(x; a, b) &= \sqrt{N_F(a)} \sqrt{1 + L/D} \left(\frac{b \pm a}{a} - \frac{x}{a} \frac{1}{1 + L/D} \right) \\
\Rightarrow a_{\pm}(x; a, b) &= \sqrt{N_F(a)} \sqrt{\eta} \left(\frac{b \pm a}{a} - \frac{x}{a\eta} \right)
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Για την κάθε πιθανότητα P_1 και P_2 αντιστοιχούν οι παράμετροι $a_{\pm}(x; a, b)$ και $a_{\pm}(x; a, -b)$.

Θεωρώντας πρώτα την προσέγγιση *Fresnel* με $N_F(a) \gg 1$ οι όροι περίθλασης, όπως μπορούμε εύκολα να υποθέσουμε, είναι όμοιοι με τις (3.14), (3.15), με την διαφορά ότι στην θέση του x μπαίνει η ποσότητα $x - b\eta$ για την πιθανότητα που αντιστοιχεί στην περίθλαση από την σχισμή εκείνη που είναι κεντρωμένη στο $+b$, ενώ η $x + b\eta$ για εκείνη που είναι κεντρωμένη στο $-b$.

Δείχνουμε

$$\begin{aligned}
P_1(x; a, b) &\cong \frac{\gamma}{\eta} \left[\left(\frac{\sqrt{N_F(a)}}{2a^2} + \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} N_F(a) \eta \left(1 - \frac{x-b\eta}{a\eta}\right)^2\right)}{2\pi\sqrt{\eta}\left(\alpha - \frac{x-b\eta}{\eta}\right)} + \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} N_F(a) \eta \left(1 + \frac{x-b\eta}{a\eta}\right)^2\right)}{2\pi\sqrt{\eta}\left(\alpha + \frac{x-b\eta}{\eta}\right)} \right)^2 + \right. \\
&\quad \left. \left(\frac{\sqrt{N_F(a)}}{2a^2} - \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} N_F(a) \eta \left(1 - \frac{x-b\eta}{a\eta}\right)^2\right)}{2\pi\sqrt{\eta}\left(\alpha - \frac{x-b\eta}{\eta}\right)} - \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} N_F(a) \eta \left(1 + \frac{x-b\eta}{a\eta}\right)^2\right)}{2\pi\sqrt{\eta}\left(\alpha + \frac{x-b\eta}{\eta}\right)} \right)^2 \right]
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Ενώ γράφουμε κατευθείαν

$$\begin{aligned}
P_2(x; a, b) &\cong \frac{\gamma}{\eta} \left[\left(\frac{\sqrt{N_F(a)}}{2a^2} + \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} N_F(a) \eta \left(1 - \frac{x+b\eta}{a\eta}\right)^2\right)}{2\pi\sqrt{\eta}\left(\alpha - \frac{x+b\eta}{\eta}\right)} + \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} N_F(a) \eta \left(1 + \frac{x+b\eta}{a\eta}\right)^2\right)}{2\pi\sqrt{\eta}\left(\alpha + \frac{x+b\eta}{\eta}\right)} \right)^2 + \right. \\
&\quad \left. \left(\frac{\sqrt{N_F(a)}}{2a^2} - \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} N_F(a) \eta \left(1 - \frac{x+b\eta}{a\eta}\right)^2\right)}{2\pi\sqrt{\eta}\left(\alpha - \frac{x+b\eta}{\eta}\right)} - \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} N_F(a) \eta \left(1 + \frac{x+b\eta}{a\eta}\right)^2\right)}{2\pi\sqrt{\eta}\left(\alpha + \frac{x+b\eta}{\eta}\right)} \right)^2 \right]
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Ο όρος συμβολής προκύπτει εισάγοντας τις ασυμπτωτικές *Fresnel* στην εξίσωση (3.17)

$$\begin{aligned}
I_{12}(x; a, b) &= \frac{\gamma}{\lambda L \eta} \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} a_+^2(x; a, b)\right)}{\pi a_+(x; a, b)} - \frac{1}{2} - \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} a_-^2(x; a, b)\right)}{\pi a_-(x; a, b)} \right) \right. \\
&\quad \times \left(\frac{1}{2} + \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} a_+^2(x; a, -b)\right)}{\pi a_+(x; a, -b)} - \frac{1}{2} - \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} a_-^2(x; a, -b)\right)}{\pi a_-(x; a, -b)} \right) \\
&\quad + \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} a_+^2(x; a, b)\right)}{\pi a_+(x; a, b)} - \frac{1}{2} + \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} a_-^2(x; a, b)\right)}{\pi a_-(x; a, b)} \right) \\
&\quad \times \left. \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} a_+^2(x; a, -b)\right)}{\pi a_+(x; a, -b)} - \frac{1}{2} + \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} a_-^2(x; a, -b)\right)}{\pi a_-(x; a, -b)} \right) \right] \\
&= \frac{\gamma}{\lambda L \eta} \left[\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} a_+^2(x; a, b)\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} a_+^2(x; a, -b)\right)}{\pi^2 a_+(x; a, b) a_+(x; a, -b)} \right. \\
&\quad - \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} a_+^2(x; a, b)\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} a_-^2(x; a, -b)\right)}{\pi^2 a_+(x; a, b) a_-(x; a, -b)} \\
&\quad - \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} a_-^2(x; a, b)\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} a_+^2(x; a, -b)\right)}{\pi^2 a_-(x; a, b) a_+(x; a, -b)} \\
&\quad + \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} a_-^2(x; a, b)\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} a_-^2(x; a, -b)\right)}{\pi^2 a_-(x; a, b) a_-(x; a, -b)} \\
&\quad + \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} a_-^2(x; a, b)\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} a_-^2(x; a, -b)\right)}{\pi^2 a_-(x; a, b) a_-(x; a, -b)} \\
&\quad - \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} a_-^2(x; a, b)\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} a_+^2(x; a, -b)\right)}{\pi^2 a_-(x; a, b) a_+(x; a, -b)} \\
&\quad - \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} a_+^2(x; a, b)\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} a_-^2(x; a, -b)\right)}{\pi^2 a_+(x; a, b) a_-(x; a, -b)} \\
&\quad \left. + \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} a_+^2(x; a, b)\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} a_+^2(x; a, -b)\right)}{\pi^2 a_+(x; a, b) a_+(x; a, -b)} \right]
\end{aligned}$$

Σύμφωνα με την τριγωνομετρική ταυτότητα

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

Γίνεται

$$I_{12}(x; a, b) = \frac{\gamma}{\lambda L \eta} \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}(a_+^2(x; a, b) - a_+^2(x; a, -b))\right)}{\pi^2 a_+(x; a, b) a_+(x; a, -b)} \right. \\ - \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}(a_+^2(x; a, b) - a_-^2(x; a, -b))\right)}{\pi^2 a_+(x; a, b) a_-(x; a, -b)} \\ + \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}(a_-^2(x; a, b) - a_-^2(x; a, -b))\right)}{\pi^2 a_-(x; a, b) a_-(x; a, -b)} \\ \left. - \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}(a_-^2(x; a, b) - a_+^2(x; a, -b))\right)}{\pi^2 a_-(x; a, b) a_+(x; a, -b)} \right]$$

Βρίσκω αναλυτικά

- $a_{\pm}(x; a, b) = \sqrt{N_F(a)} \sqrt{\eta} \left(\frac{b \pm a}{a} - \frac{x}{a\eta} \right)$
- $a_{\pm}(x; a, -b) = \sqrt{N_F(a)} \sqrt{\eta} \left(\frac{-b \pm a}{a} - \frac{x}{a\eta} \right)$
- $a_+^2(x; a, b) = N_F(a) \eta \left(\frac{b+a}{a} - \frac{x}{a\eta} \right)^2 = N_F(a) \eta \left(\frac{b^2}{a^2} + \frac{2ab}{a^2} + \frac{a^2}{a^2} - \frac{2bx}{a^2\eta} - \frac{2ax}{a^2\eta} + \frac{x^2}{a^2\eta^2} \right)$
- $a_+^2(x; a, -b) = N_F(a) \eta \left(\frac{-b+a}{a} - \frac{x}{a\eta} \right)^2 =$
 $N_F(a) \eta \left(\frac{a^2}{a^2} - \frac{2ab}{a^2} + \frac{b^2}{a^2} - \frac{2ax}{a^2\eta} + \frac{2bx}{a^2\eta} + \frac{x^2}{a^2\eta^2} \right)$
- $a_-^2(x; a, b) = N_F(a) \eta \left(\frac{b-a}{a} - \frac{x}{a\eta} \right)^2 = N_F(a) \eta \left(\frac{b^2}{a^2} - \frac{2ab}{a^2} + \frac{a^2}{a^2} - \frac{2bx}{a^2\eta} + \frac{2ax}{a^2\eta} + \frac{x^2}{a^2\eta^2} \right)$
- $a_-^2(x; a, -b) = N_F(a) \eta \left(\frac{b+a}{a} + \frac{x}{a\eta} \right)^2 =$
 $N_F(a) \eta \left(\frac{b^2}{a^2} + \frac{2ab}{a^2} + \frac{a^2}{a^2} + \frac{2bx}{a^2\eta^2} + \frac{2ax}{a^2\eta^2} + \frac{x^2}{a^2\eta^2} \right)$
- $a_+^2(x; a, b) - a_+^2(x; a, -b) = N_F(a) \eta \left(\frac{4ab}{a^2} - \frac{4bx}{a^2\eta} \right) = 4 N_F \eta \left(1 - \frac{x}{a\eta} \right)$
- $a_+^2(x; a, b) - a_-^2(x; a, -b) = N_F(a) \eta \left(-\frac{4ax}{a^2\eta} - \frac{4bx}{a^2\eta} \right) = -4 (N_F + N_F(a)) \frac{x}{a}$
- $a_-^2(x; a, b) - a_-^2(x; a, -b) = N_F(a) \eta \left(-\frac{4ab}{a^2} - \frac{4bx}{a^2\eta} \right) = -4 N_F \eta \left(1 + \frac{x}{a\eta} \right)$
- $a_-^2(x; a, b) - a_+^2(x; a, -b) = N_F(a) \eta \left(\frac{4ax}{a^2\eta} - \frac{4bx}{a^2\eta} \right) = 4 (N_F - N_F(a)) \frac{x}{a}$
- $a_+(x; a, b) a_+(x; a, -b) = N_F(a) \eta \left(\left(\frac{a}{a} - \frac{x}{a\eta} \right)^2 - \frac{b^2}{a^2} \right)$
- $a_+(x; a, b) a_-(x; a, -b) = N_F(a) \eta \left(\left(\frac{b}{a} + \frac{a}{a} \right)^2 - \frac{x^2}{a^2\eta^2} \right)$
- $a_-(x; a, b) a_-(x; a, -b) = -N_F(a) \eta \left(\left(\frac{a}{a} + \frac{x}{a\eta} \right)^2 - \frac{b^2}{a^2} \right)$
- $a_-(x; a, b) a_+(x; a, -b) = -N_F(a) \eta \left(\left(\frac{a}{a} - \frac{b}{a} \right)^2 - \frac{x^2}{a^2\eta^2} \right)$

Αντικαθιστώντας τους παραπάνω όρους οπότε στην εξίσωση που περιγράφει την συμβολή μας έχουμε

$$I_{12}(x; a, b) = \frac{\gamma}{\lambda L \eta} \left[\frac{\cos \left[\frac{\pi}{2} \left(4N_F \eta \left(1 - \frac{x}{a\eta} \right) \right) \right]}{\pi^2 N_F(a) \eta \left(\left(\frac{a}{a} - \frac{x}{a\eta} \right)^2 - \frac{b^2}{a^2} \right)} - \frac{\cos \left[\frac{\pi}{2} \left(-4(N_F + N_F(a)) \frac{x}{a} \right) \right]}{\pi^2 N_F(a) \eta \left(\left(\frac{b}{a} + \frac{a}{a} \right)^2 - \frac{x^2}{a^2 \eta^2} \right)} \right. \\ \left. + \frac{\cos \left[\frac{\pi}{2} \left(-4N_F \eta \left(1 + \frac{x}{a\eta} \right) \right) \right]}{-\pi^2 N_F(a) \eta \left(\left(\frac{a}{a} + \frac{x}{a\eta} \right)^2 - \frac{b^2}{a^2} \right)} - \frac{\cos \left[\frac{\pi}{2} \left(4(N_F - N_F(a)) \frac{x}{a} \right) \right]}{-\pi^2 N_F(a) \eta \left(\left(-\frac{b}{a} + \frac{a}{a} \right)^2 - \frac{x^2}{a^2 \eta^2} \right)} \right]$$

Ενώ τελικά σύμφωνα με την προσέγγιση $b \gg a$ γίνεται τελικά

$$I_{12}(x; a, b) = \frac{\gamma}{\lambda L \eta} \left[\frac{\cos \left[\frac{\pi}{2} \left(4N_F \eta \left(1 - \frac{x}{a\eta} \right) \right) \right]}{\pi^2 N_F(a) \eta \left(\left(\frac{a}{a} - \frac{x}{a\eta} \right)^2 - \frac{b^2}{a^2} \right)} - \frac{\cos \left[\frac{\pi}{2} \left(-4(N_F + N_F(a)) \frac{x}{a} \right) \right]}{\pi^2 N_F(a) \eta \left(\left(\frac{b}{a} \right)^2 - \frac{x^2}{a^2 \eta^2} \right)} \right. \\ \left. - \frac{\cos \left[\frac{\pi}{2} \left(-4N_F \eta \left(1 + \frac{x}{a\eta} \right) \right) \right]}{\pi^2 N_F(a) \eta \left(\left(\frac{a}{a} + \frac{x}{a\eta} \right)^2 - \frac{b^2}{a^2} \right)} + \frac{\cos \left[\frac{\pi}{2} \left(4(N_F - N_F(a)) \frac{x}{a} \right) \right]}{\pi^2 N_F(a) \eta \left(\left(\frac{b}{a} \right)^2 - \frac{x^2}{a^2 \eta^2} \right)} \right] \\ = \frac{\gamma}{\lambda L \eta} \left[\frac{\cos \left[\frac{\pi}{2} \left(4N_F \eta \left(1 - \frac{x}{a\eta} \right) \right) \right]}{\frac{\pi^2 2a^2 \eta}{\lambda L a^2} \left(\left(a - \frac{x}{\eta} \right)^2 - b^2 \right)} - \frac{\cos \left[\frac{\pi}{2} \left(-4(N_F + N_F(a)) \frac{x}{a} \right) \right]}{\frac{\pi^2 2a^2 \eta}{\lambda L a^2} \left(b^2 - \frac{x^2}{\eta^2} \right)} \right. \\ \left. - \frac{\cos \left[\frac{\pi}{2} \left(-4N_F \eta \left(1 + \frac{x}{a\eta} \right) \right) \right]}{\frac{\pi^2 2a^2 \eta}{\lambda L a^2} \left(\left(a + \frac{x}{\eta} \right)^2 - b^2 \right)} + \frac{\cos \left[\frac{\pi}{2} \left(4(N_F - N_F(a)) \frac{x}{a} \right) \right]}{\frac{\pi^2 2a^2 \eta}{\lambda L a^2} \left(b^2 - \frac{x^2}{\eta^2} \right)} \right] \\ = \frac{\gamma}{\lambda L \eta} \left[\frac{\cos \left[\frac{\pi}{2} \left(4N_F \eta \left(1 - \frac{x}{a\eta} \right) \right) \right]}{\frac{\pi^2 2a^2 \eta}{\lambda L a^2} \left(\left(a - \frac{x}{\eta} \right)^2 - b^2 \right)} - \frac{\cos \left[\frac{\pi}{2} \left(-4(N_F + N_F(a)) \frac{x}{a} \right) \right]}{\frac{\pi^2 2a^2 \eta}{\lambda L a^2} \left(b^2 - \frac{x^2}{\eta^2} \right)} \right. \\ \left. - \frac{\cos \left[\frac{\pi}{2} \left(-4N_F \eta \left(1 + \frac{x}{a\eta} \right) \right) \right]}{\frac{\pi^2 2a^2 \eta}{\lambda L a^2} \left(\left(a + \frac{x}{\eta} \right)^2 - b^2 \right)} + \frac{\cos \left[\frac{\pi}{2} \left(4(N_F - N_F(a)) \frac{x}{a} \right) \right]}{\frac{\pi^2 2a^2 \eta}{\lambda L a^2} \left(b^2 - \frac{x^2}{\eta^2} \right)} \right]$$

$$I_{12}(x; a, b) = \frac{\gamma}{2\pi\eta^2} \left[\frac{\cos \left[2\pi \left(N_F \eta \left(1 - \frac{x}{a\eta} \right) \right) \right]}{\left(\left(a - \frac{x}{\eta} \right)^2 - b^2 \right)} - \frac{\cos \left[2\pi \left((N_F + N_F(a)) \frac{x}{a} \right) \right]}{\left(b^2 - \frac{x^2}{\eta^2} \right)} \right. \\ \left. - \frac{\cos \left[2\pi \left(N_F \eta \left(1 + \frac{x}{a\eta} \right) \right) \right]}{\left(\left(a + \frac{x}{\eta} \right)^2 - b^2 \right)} + \frac{\cos \left[2\pi \left((N_F - N_F(a)) \frac{x}{a} \right) \right]}{\left(b^2 - \frac{x^2}{\eta^2} \right)} \right] \quad 3.21$$

Έτσι λοιπόν, σύμφωνα με τα παραπάνω, εμφανώς το πρόβλημα είναι συμμετρικό ως προς $x = 0$ και αρκεί να εξετάσουμε την περίπτωση για $x > 0$. Υπάρχουν δύο περιπτώσεις

- i. $|x - b| > a$: Εδώ, οι όροι περίθλασης και συμβολής μειώνονται όπως ο όρος $1/(x+b)(x-b)$ με διάφορους παράγοντες διακύμανσης όπως θα δείξουμε αναλυτικότερα παρακάτω.
- ii. $|x - b| < a$: Σ' αυτήν την περίπτωση, ο όρος περίθλασης P_1 συμπεριφέρεται όπως ακριβώς η σχέση (3.13) στο πρόβλημα για την περίθλαση από μια μόνο σχισμή, επικεντρωμένη όμως στο $x = b$, ενώ οι υπόλοιποι όροι αγνοούνται.

Σ' αυτό το σημείο δεν γράφουμε τους ασυμπτωτικούς τύπους αναλυτικά, εφόσον το αποτέλεσμα παρατηρείται απλώς στο σχήμα (3.4.d) : λαμβάνουμε ένα άθροισμα δύο διαχωρισμένων καμπυλών περίθλασης βάση της προσέγγισης *Fresnel*.

Θεωρούμε τώρα την προσέγγιση $N_F(a) \ll 1$. Σε μεγάλες κλίμακες $|x - b\eta| \gg a\eta$ και $|x + b\eta| \gg a\eta$, παίρνουμε παρόμοιες εκφράσεις για τις πιθανότητες περίθλασης $P_1(x; a, b)$ και $P_2(x; a, b)$ με την (3.14), ενώ υπολογίζοντας την ασυμπτωτική έκφραση για τον όρο συμβολής τότε η (3.15) αποδίδει

$$P^{2Slit}(x; a, b) \cong \frac{2\gamma}{\pi^2(x-b\eta)^2} \sin^2 \left(\pi N_F \eta \left(1 - \frac{x}{b\eta} \right) \right) + \frac{2\gamma}{\pi^2(x+b\eta)^2} \sin^2 \left(\pi N_F \eta \left(1 + \frac{x}{b\eta} \right) \right) - \\ \frac{\gamma}{\pi^2(x^2 - b^2\eta^2)} \left(\cos \left(2\pi(N_F + N_F(a)) \frac{x}{a} \right) - \cos \left(2\pi N_F \eta \left(1 + \frac{x}{a\eta} \right) \right) \right) - \\ \frac{\gamma}{\pi^2(x^2 - b^2\eta^2)} \left(\cos \left(2\pi(N_F - N_F(a)) \frac{x}{a} \right) - \cos \left(2\pi N_F \eta \left(1 - \frac{x}{a\eta} \right) \right) \right) \quad 3.22$$

Παρατηρούμε ότι υπάρχουν δύο φάσεις: *φάση διαχωρισμού* ($N_F \gg 1$) και *φάση ανάμειξης* ($N_F \ll 1$). Ενώ ταυτόχρονα, υπάρχουν οι προσεγγίσεις *Fresnel* και *Fraunhofer*, που εξαρτώνται από τις τιμές του αριθμού $N_F(a)$ όπως εξηγήσαμε στην προηγούμενη ενότητα. Η διάκριση μεταξύ των δύο φάσεων είναι καθαρά γεωμετρική, ενώ χαρακτηρίζει τον διαχωρισμό των αναμειγμένων καμπυλών περίθλασης. Πράγματι, ομοίως με την οπτική, για να παρατηρήσουμε τις δύο καμπύλες περίθλασης ξεχωριστά απαιτούμε η ποσότητα $\lambda L/2a$, που αποτελεί δείκτη για την διαμόρφωση κροσσών, να είναι

μικρότερη από την απόσταση μεταξύ των προελεύσεων των δύο καμπυλών (επικεντρωμένων στο $\pm b\eta$), ειδικά οι καμπύλες αναμειγνύονται. Κάπως έτσι το κριτήριο γράφεται $\frac{\lambda L}{2a} < b\eta$, που συνεπάγεται $N_F \eta > 1$. Αυτό προφανώς έρχεται σε αντίθεση με την περίπτωση όπου ισχύει η $N_F \ll 1$ και τότε οι δύο καμπύλες συνδυάζονται, η μια προστίθεται στην άλλη, και λαμβάνουμε την διαμόρφωση συμβολής.

Αξίζει να κάνουμε μια πιο τυπική εξέταση. Θεωρούμε πρώτα την περίπτωση που $N_F \eta \ll 1$. Αν $|x| > \lambda L/2a$ τότε $|x| \gg b\eta$ έτσι οι δύο πρώτοι όροι της (3.22) γίνονται προσεγγιστικά ίσοι με

$$\begin{aligned} & \frac{2\gamma}{\pi^2(x-b\eta)^2} \sin^2\left(\pi N_F \eta \left(1 - \frac{x}{b\eta}\right)\right) + \frac{2\gamma}{\pi^2(x+b\eta)^2} \sin^2\left(\pi N_F \eta \left(1 + \frac{x}{b\eta}\right)\right) = \\ & \frac{2\gamma}{\pi^2(x)^2} \sin^2\left(\pi N_F \eta \left(\frac{x}{b\eta}\right)\right) + \frac{2\gamma}{\pi^2(x)^2} \sin^2\left(\pi N_F \eta \left(\frac{x}{b\eta}\right)\right) = \\ & \frac{4\gamma}{\pi^2(x)^2} \sin^2\left(\pi \frac{2ab}{\lambda L} \eta \left(\frac{x}{b\eta}\right)\right) = \\ & \frac{4\gamma}{\pi^2 x^2} \sin^2\left(\frac{2\pi a}{\lambda L} x\right) \end{aligned}$$

Στους τελευταίους δυο όρους παίρνοντας την προσέγγιση και αναπτύσσοντας τις συνημιτονικές συναρτήσεις έχουμε

$$\begin{aligned} & -\frac{\gamma}{\pi^2(x^2 - b^2\eta^2)} \left(\cos\left(2\pi(N_F + N_F(a))\frac{x}{a}\right) - \cos\left(2\pi N_F \eta \left(1 + \frac{x}{a\eta}\right)\right) \right) \\ & -\frac{\gamma}{\pi^2(x^2 - b^2\eta^2)} \left(\cos\left(2\pi(N_F - N_F(a))\frac{x}{a}\right) - \cos\left(2\pi N_F \eta \left(1 - \frac{x}{a\eta}\right)\right) \right) = \\ & = -\frac{\gamma}{\pi^2 x^2} \left[\left(\cos\left(2\pi(N_F + N_F(a))\frac{x}{a}\right) - \cos\left(2\pi N_F \eta \left(1 + \frac{x}{a\eta}\right)\right) \right) \right. \\ & \quad \left. + \left(\cos\left(2\pi(N_F - N_F(a))\frac{x}{a}\right) - \cos\left(2\pi N_F \eta \left(1 - \frac{x}{a\eta}\right)\right) \right) \right] = \\ & = -\frac{\gamma}{\pi^2 x^2} \left[\left(\cos\left(2\pi\left(\frac{2ab}{\lambda L} + \frac{2a^2}{\lambda L}\right)\frac{x}{a}\right) - \cos\left(2\pi\frac{2ab}{\lambda L}\eta\left(1 + \frac{x}{a\eta}\right)\right) \right) \right. \\ & \quad \left. + \left(\cos\left(2\pi\left(\frac{2ab}{\lambda L} - \frac{2a^2}{\lambda L}\right)\frac{x}{a}\right) - \cos\left(2\pi\frac{2ab}{\lambda L}\eta\left(1 - \frac{x}{a\eta}\right)\right) \right) \right] = \\ & = -\frac{\gamma}{\pi^2 x^2} \left[\cos\left(\frac{4\pi bx}{\lambda L} + \frac{4\pi ax}{\lambda L}\right) - \cos\left(\frac{4\pi ab\eta}{\lambda L} + \frac{4\pi bx}{\lambda L}\right) \right. \\ & \quad \left. + \cos\left(\frac{4\pi bx}{\lambda L} - \frac{4\pi ax}{\lambda L}\right) - \cos\left(\frac{4\pi ab\eta}{\lambda L} - \frac{4\pi bx}{\lambda L}\right) \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\gamma}{\pi^2 x^2} \left[\cos\left(\frac{4\pi bx}{\lambda L}\right) \cos\left(\frac{4\pi ax}{\lambda L}\right) - \sin\left(\frac{4\pi bx}{\lambda L}\right) \sin\left(\frac{4\pi ax}{\lambda L}\right) \right. \\
&\quad - \cos\left(\frac{4\pi ab\eta}{\lambda L}\right) \cos\left(\frac{4\pi bx}{\lambda L}\right) + \sin\left(\frac{4\pi ab\eta}{\lambda L}\right) \sin\left(\frac{4\pi bx}{\lambda L}\right) \\
&\quad + \cos\left(\frac{4\pi bx}{\lambda L}\right) \cos\left(\frac{4\pi ax}{\lambda L}\right) + \sin\left(\frac{4\pi bx}{\lambda L}\right) \sin\left(\frac{4\pi ax}{\lambda L}\right) \\
&\quad \left. - \cos\left(\frac{4\pi ab\eta}{\lambda L}\right) \cos\left(\frac{4\pi bx}{\lambda L}\right) - \sin\left(\frac{4\pi ab\eta}{\lambda L}\right) \sin\left(\frac{4\pi bx}{\lambda L}\right) \right] = \\
&= -\frac{\gamma}{\pi^2 x^2} 2 \left[\cos\left(\frac{2\pi bx}{\lambda L}\right) \cos\left(\frac{2\pi ax}{\lambda L}\right) - \cos\left(\frac{2\pi ab\eta}{\lambda L}\right) \cos\left(\frac{2\pi bx}{\lambda L}\right) \right] \cong \\
&= +\frac{\gamma}{\pi^2 x^2} 4 \cos\left(\frac{2\pi bx}{\lambda L}\right) \sin^2\left(\frac{2\pi ax}{\lambda L}\right)
\end{aligned}$$

Να σημειωθεί η χρήση των τριγωνομετρικών ταυτοτήτων

$$\cos(x \pm y) = \cos(x) \cos(y) \mp \sin(x) \sin(y)$$

$$2 \sin^2(x) = 1 - \cos(2x)$$

Όπως και η χρήση της προσέγγισης $\cos\left(\frac{2\pi ab\eta}{\lambda L}\right) \cong 1$ επειδή $N_F \eta \ll 1$.

Κάπως έτσι προσθέτοντας τους όρους αυτούς καταλήγω στην προσεγγιστική σχέση για την πιθανότητα

$$P^{2slit}(x; a, b) \cong \frac{8\gamma}{\pi^2 x^2} \sin^2\left(\frac{2\pi a}{\lambda L} x\right) \cos^2\left(\frac{2\pi b}{\lambda L} x\right) \quad 3.23$$

Η παραπάνω σχέση αποτελεί τον οικείο μας τύπο της οπτικής για την κατανομή της έντασης περιθλώμενης ακτινοβολίας από δύο σχισμές εύρους a και απόστασης d μεταξύ τους

$$I_{\Delta Y O \text{ ΣΧΙΣΜΩΝ}} = \underbrace{\frac{\sin^2\left(\frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta_x\right)}{\left(\frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta_x\right)^2}}_{\text{παράγοντας περίθλασης}} \times \underbrace{\cos^2\left[\frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta_x\right]}_{\text{παράγοντας συμβολής}}$$

Όπως δίνεται από την σχέση (1.30) στο Παράρτημα Α'4 .

Η σχέση (3.23) μας δείχνει το γεγονός ότι οι καμπύλες περίθλασης διαμορφώνονται από τους κροσσούς συμβολής. Αξίζει να σημειώσουμε ότι έχουμε μια σύνθετη εικόνα κροσσών, που προκύπτει από το συνδυασμό των κροσσών περίθλασης από κάθε σχισμή και των κροσσών συμβολής που προέρχονται από την υπέρθεση των σωματιδίων από τις δυο σχισμές. Οι κροσσοί περίθλασης θα είναι πλατύτεροι από τους κροσσούς συμβολής, δηλαδή μέσα σε κάθε κροσσοί περίθλασης θα περιέχεται ένας αριθμός λεπτών κροσσών συμβολής. Η απόσταση μεταξύ δυο κροσσών συμβολής φαίνεται να είναι της τάξης του $\lambda L/2b$, ενώ η αυτή μεταξύ ελαχίστων των καμπυλών περίθλασης είναι της τάξης του $\lambda L/2a \gg \lambda L/2b$, όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε στις καμπύλες (3.4. a), (3.4. b)..

Εξακολουθώντας να θεωρούμε ότι $N_F(a) \ll 1$ θεωρούμε την περίπτωση , τώρα, όπου $N_F \eta \gg 1$. Αν $x - b\eta > -\lambda L/2a$ (ή $x + b\eta < \lambda L/2a$) τότε ισχύει ότι $(x - b\eta)^{-2} \gg (x + b\eta)^{-2}$ (ή αντίστοιχα $(x - b\eta)^{-2} \ll (x + b\eta)^{-2}$) με αποτέλεσμα ο ένας απ' τους δυο όρους να αγνοείται στην αντίστοιχη περιοχή. Βέβαια και στις δυο περιπτώσεις, ο όρος συμβολής είναι μικρός σε σύγκριση με τον όρο περίθλασης αφού $(x - b\eta)^{-2} \gg (x^2 - b^2\eta^2)^{-1}$. Επομένως η ολική πιθανότητα προσεγγιστικά θα ισούται με ένα άθροισμα των δυο καμπυλών περίθλασης κεντρώμενων στο $\pm b\eta$, διαμορφωμένων από έναν όρο συμβολής ο οποίος ταλαντώνεται ραγδαία με ένα σχετικά μικρό πλάτος, όπως φαίνεται στο σχήμα (3.4. c)

$$P^{2slit}(x; a, b) \cong \frac{2\gamma}{\pi^2(x \mp b\eta)^2} \sin^2 \left(\pi N_F \eta \left(1 \mp \frac{x}{b\eta} \right) \right) + O \left(\frac{1}{x^2 - b^2\eta^2} \right), |x \pm b\eta| > \frac{\lambda L}{2a} \quad 3.24$$

Σ' αυτό το σημείο αξίζει να σημειώσουμε κάτι πολύ ενδιαφέρον. Στο σχήμα (3.4. c) παρατηρούμε ότι το πλάτος συμβολής είναι πολύ μικρό σε σύγκριση με το πλάτος περίθλασης στην περιοχή $25 < |x/a| < 75$, έτσι ώστε δεν υπάρχουν κροσσοί συμβολής. Το γεγονός αυτό οφείλεται στην ύπαρξη μιας περιοχής που είναι αρκετά ευαίσθητη στην επιλογή της τιμής της παραμέτρου $N_F(a)$.

Ξεκάθαρα, οι ιδιότητες, πλέον, φαινομένων περίθλασης και συμβολής είναι κατάφωρες, με τη χρήση των ασυμπτωτικών συναρτήσεων.

Κεφάλαιο 4

Φαινόμενα Περίθλασης με Διάφορα Είδη Σχισμών

Εισαγωγή

Στο προηγούμενο κεφάλαιο μελετήσαμε τα φαινόμενα περίθλασης και συμβολής από μια και δύο σχισμές, σύμφωνα με τον *φορμαλισμό των ολοκληρωμάτων δρόμου*.

Για την περίπτωση περίθλασης για μια μόνο σχισμή, καταλήξαμε η πιθανότητα το ηλεκτρόνιο να περάσει από την σχισμή να περιγράφεται με την σχέση (3.10)

$$P^{1slit}(x; a) = \frac{1}{2\lambda(D+L)} [(C[\alpha(x; +a)] + C[\alpha(x; -a)])^2 + (S[\alpha(x; +a)] + S[\alpha(x; -a)])^2]$$

Εφόσον το ηλεκτρόνιο πραγματοποιεί φαινόμενα περίθλασης, η παραπάνω σχέση δεν θα μπορούσε, παρά να δίνει την περιθλαστική κατανομή σε ένα πέτασμα παρατήρησης. Έτσι οι καμπύλες περίθλασης του Σχ. 3.3 αποδόθηκαν με την χρήση αυτού του τύπου καθώς και με την βοήθεια ενός υπολογιστικού πακέτου, του *Mathematica*.

Για την πραγματοποίηση των παραπάνω, αρχικά ορίσαμε τις τιμές των παραμέτρων μας στο πρόγραμμα.

Ο όρος $\alpha(x; a)$ καθορίστηκε σύμφωνα με την σχέση (3.9)

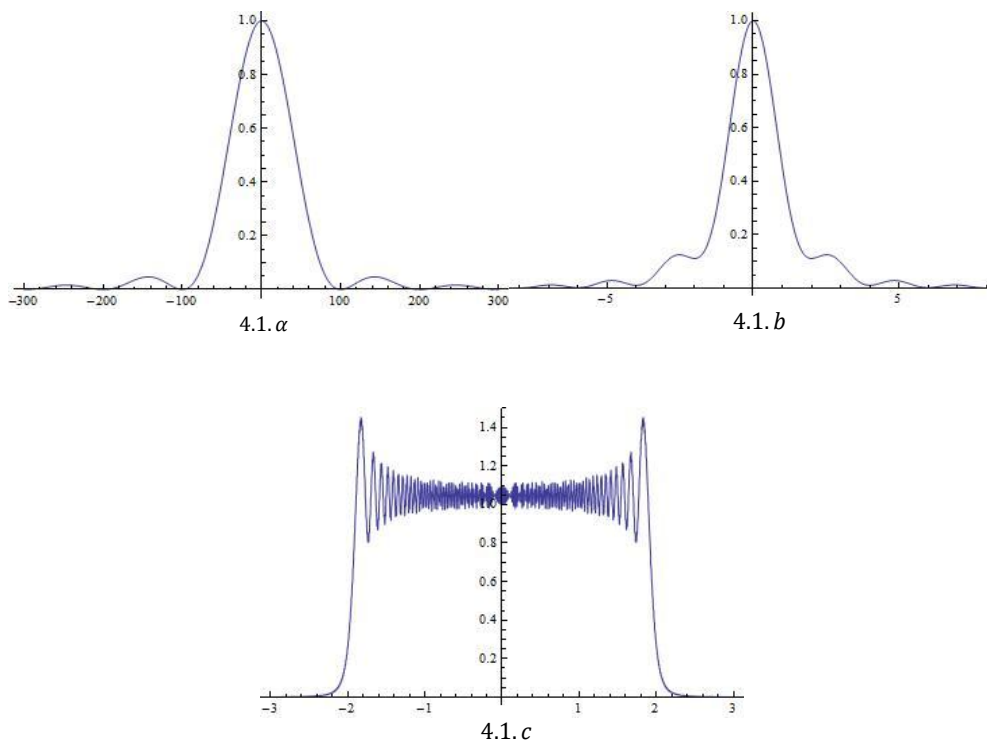
$$\alpha_{\pm}(x; a) = \sqrt{N_F(a)} \sqrt{1 + L/D} \left(1 \mp \frac{x}{a} \frac{1}{1 + L/D} \right)$$

Οι φυσικές παράμετροι του συστήματος μας πήραν τις τιμές $\eta = 2$, όπου θυμόμαστε $\eta \equiv 1 + L/D$, όπου D και L αποτελούν τις αποστάσεις μεταξύ πηγής και σχισμής και μεταξύ σχισμής και ανιχνευτή αντίστοιχα. Για την παράμετρο γ δώσαμε απλώς τον ορισμό $\gamma = \eta - 1$ και υπολογίστηκε έτσι μέσω του η . Η απόσταση D τέθηκε ίση με 1, ενώ η απόσταση L αποδόθηκε με τον τύπο $L = D(\eta - 1)$, ο οποίος προκύπτει από τις σχέσεις που ορίζουν τα η, γ . Η τιμή a που αντιστοιχεί στο πλάτος της σχισμής τέθηκε ίση με 1.

Έπειτα τρέξαμε το πρόγραμμα, για κάθε μια ξεχωριστά, για τρεις διαφορετικές τιμές του αριθμού *Fresnel* $N_F(a) = 0.01, 0.5, 1$, προσεγγίζοντας μ' αυτόν τον τρόπο τις περιθλάσεις *Fraunhofer*, μια ενδιάμεση και την *Fresnel* αντίστοιχα όπως φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.

Να σημειώσουμε ότι το μήκος κύματος λ καθορίστηκε μέσω του ορισμού του αριθμού *Fresnel* $N_F(a) = 2a^2/\lambda L$, έτσι $\lambda = 2a^2/LN_F(a)$.

Έτσι για την πραγματοποίηση των περιθλαστικών καμπυλών κανονικοποιήσαμε τις πιθανότητες περίθλασης διαιρώντας 'τες με έναν όρο $P^{1slit}(0)$ και έτσι προέκυψαν οι παρακάτω

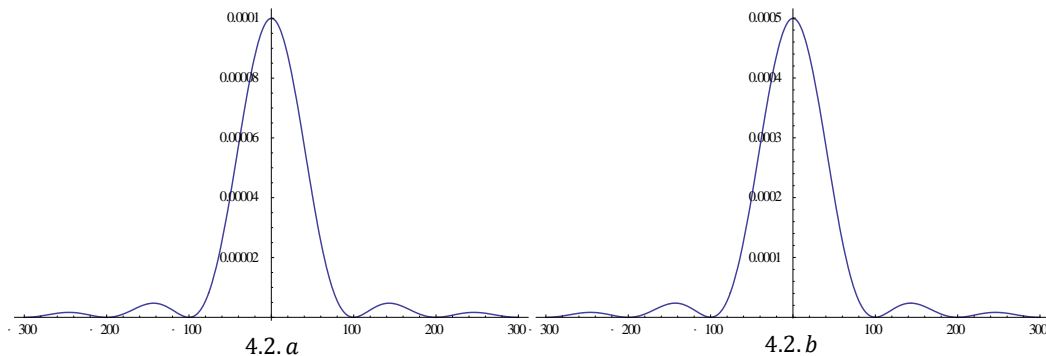


Σχήμα 4.1: Καμπύλη περίθλασης για μια μόνο σχισμή, με $\eta=2$. Η τετμημένη αποτελεί την απόσταση σε μονάδες α , ενώ η τεταγμένη είναι η σχετική πιθανότητα. Έχουμε $N_F(\alpha) = 0.01$ για το a διάγραμμα, 0.5 για το b και 100 για το c .

Με τον απλό αυτό τρόπο παραγωγής των καμπυλών περίθλασης μέσω του *Mathematica* και μεταβάλλοντας τις διάφορες παραμέτρους μπορούμε εύκολα να παρατηρήσουμε ιδιότητες της περίθλασης ηλεκτρονίου από μια σχισμή, όπως και για δύο.

4.1 Εύρος Λοβού της Καμπύλης Περίθλασης για μια Σχισμή

Το εύρος λοβού της καμπύλης περίθλασης εξαρτάται από δύο παράγοντες, το μήκος κύματος λ και το πλάτος α της σχισμής. Με τον ίδιο τρόπο που περιγράψαμε παραπάνω, ορίζω στο *Mathematica* την πιθανότητα περίθλασης και αλλάζω μόνο την απόσταση L μεταξύ σχισμής και οθόνης παρατήρησης κρατώντας σταθερές όλες τις υπόλοιπες παραμέτρους

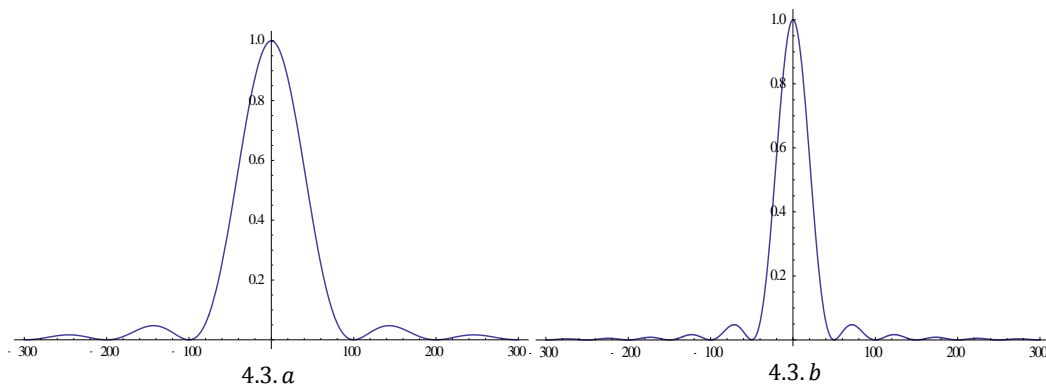


Σχήμα 4.2: Καμπύλη περίθλασης για μια μόνο σχισμή με $N_F(\alpha)=0.01$. Η τετμημένη αποτελεί την απόσταση σε μονάδες α , ενώ η τεταγμένη είναι η σχετική πιθανότητα. Έχουμε $\eta=2$ άρα $L=1$ για το α διάγραμμα και $\eta=6$ άρα $L=5$ για το b.

Παρατηρώ ότι το εύρος λοβού της φωτεινής έντασης στο περιθλαστικό σχηματισμό είναι σταθερό και απλώς μεγαλώνεται για μεγαλύτερες αποστάσεις από την σχισμή.

Φυσικά για κανονικοποιημένες πιθανότητες περίθλασης η παρατήρηση αυτή δεν είναι εφικτή, όπου και για τις δύο τιμές του η η καμπύλη περίθλασης ταυτίζεται.

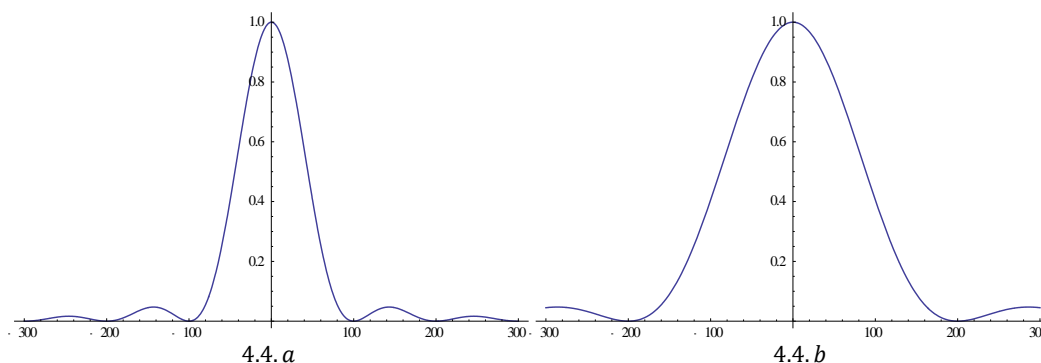
Μεταβάλλοντας ,τώρα την τιμή α του πλάτους της σχισμής και κρατώντας σταθερές τις υπόλοιπες παραμέτρους σχεδιάζουμε τις περιθλαστικές καμπύλες



Σχήμα 4.3: Καμπύλη περίθλασης για μια μόνο σχισμή με $N_F(\alpha) = 0.01$. Η τετμημένη αποτελεί την απόσταση σε μονάδες α , ενώ η τεταγμένη είναι η σχετική πιθανότητα. Έχουμε $\alpha=1$ για το α διάγραμμα και $\alpha=2$ για το b.

Παρατηρούμε ότι αν διπλασιάσουμε το πλάτος της σχισμής, τότε το εύρος λοβού της περιθλαστικής καμπύλης μειώνεται κατά το ήμισυ.

Στην συνέχεια πραγματοποιούμε τις καμπύλες περίθλασης μεταβάλλοντας το μήκος κύματος λ ώστε να δούμε την εξάρτηση. Να τονίσουμε ότι στην περίπτωση αυτή ορίζουμε το λ και αφήνουμε τον αριθμό *Fresnel* $N_F(a)$ να καθοριστεί μέσω της σχέσης $N_F(a) = 2a^2/\lambda L$. Έτσι έχουμε τις κανονικοποιημένες περιθλαστικές καμπύλες

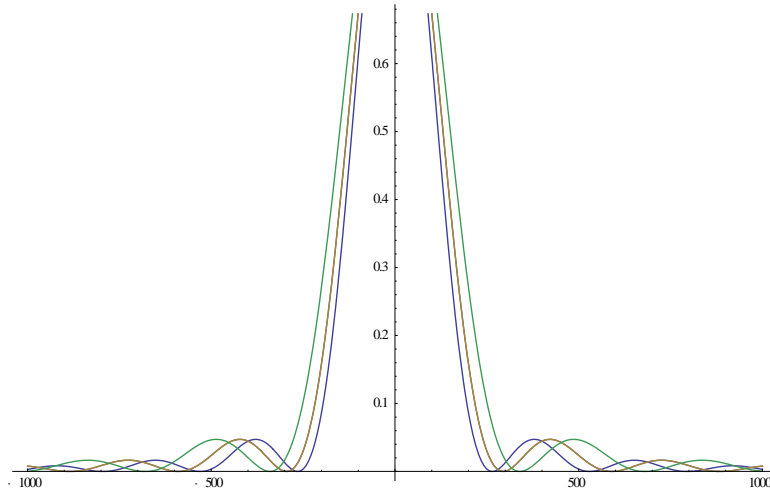


Σχήμα 4.4: Καμπύλη περίθλασης για μια μόνο σχισμή με $\eta=2$. Η τετμημένη αποτελεί την απόσταση σε μονάδες a , ενώ η τεταγμένη είναι η σχετική πιθανότητα. Έχουμε $\lambda=200$ για το a διάγραμμα και $\lambda=400$ για το b.

Παρατηρούμε ότι αν διπλασιάσουμε το μήκος κύματος λ τότε το εύρος λοβού της περιθλαστικής καμπύλης διπλασιάζεται.

Κάπως έτσι μπορούμε να συμπεράνουμε ότι το εύρος λοβού εξαρτάται από τον λόγο λ/a , πράγμα το οποίο είναι ήδη γνωστό από την θεωρία περίθλασης στην οπτική (*Παράρτημα A'4*).

Κάπως έτσι προκύπτει το ερώτημα τι είδους κατανομή θα έχουμε αν φωτίσουμε τη σχισμή με πολυχρωματική ακτινοβολία; Μπορούμε να αναζητήσουμε την απάντηση πειραματικά: σχηματίζουμε με τα βλέφαρα του ματιού μας μια πολύ στενή σχισμή και παρατηρούμε μέσα από αυτή μια μακρινή πηγή λευκού φωτός –π.χ. μια οποιαδήποτε ανάκλαση του ήλιου από κάποιο τζάμι. Θα δούμε να προβάλλονται γύρω από τη σχισμή σκοτεινή δακτύλιοι περίθλασης με ανάλυση χρωμάτων. Θα έχουμε δηλαδή πολυχρωματικούς λοβούς περίθλασης. Το κεντρικό μέγιστο είναι ίδιο για όλες τις χρωματικές συνιστώσες, αλλά στον πρώτης τάξης λοβό το μέγιστο για το μπλε εμφανίζεται πρώτο και μετά ακολουθούν τα υπόλοιπα χρώματα με μεγαλύτερο λ . Αυτό επαναλαμβάνεται και σε ανώτερης τάξης λοβούς και μάλιστα με μεγαλύτερο γωνιακό διαχωρισμό, αλλά εξασθενίζει γρήγορα αφού μια τέτοια πολυχρωματική πηγή έχει αρκετά μικρό μήκος συμφωνίας.



Σχήμα 4.5: Καμπύλη περίθλασης για μια μόνο σχισμή με $n=2$. Η τετμημένη αποτελεί την απόσταση σε μονάδες α , ενώ η τεταγμένη είναι η σχετική πιθανότητα. Έχουμε το μήκος κύματος λ του μπλε χρώματος, του πράσινου και του κόκκινου.

4.2 Εύρος Λοβού της Καμπύλης Περίθλασης για πάνω από μια Σχισμές

Η πιθανότητα του ηλεκτρονίου να περάσει από τις δυο σχισμές και να ανιχνευθεί στην οθόνη παρατήρησης υπολογίζεται μέσω της σχέσης (3.17)

$$P^{2slit}(x; a, b) = P_1(x; a, b) + P_2(x; a, b) + I_{12}(x; a, b)$$

Θυμόμαστε τους όρους περίθλασης και συμβολής

$$P_1(x; a, b) = |A_1(x; a, b)|^2$$

$$= \frac{\gamma}{2\lambda L \eta} \left([C(a_+(x; a, b)) - C(a_-(x; a, b))]^2 + [S(a_+(x; a, b)) - S(a_-(x; a, b))]^2 \right)$$

$$P_2(x; a, b) = |A_2(x; a, b)|^2 = |A_1(x; a, -b)|^2 = P_1(x; a, -b)$$

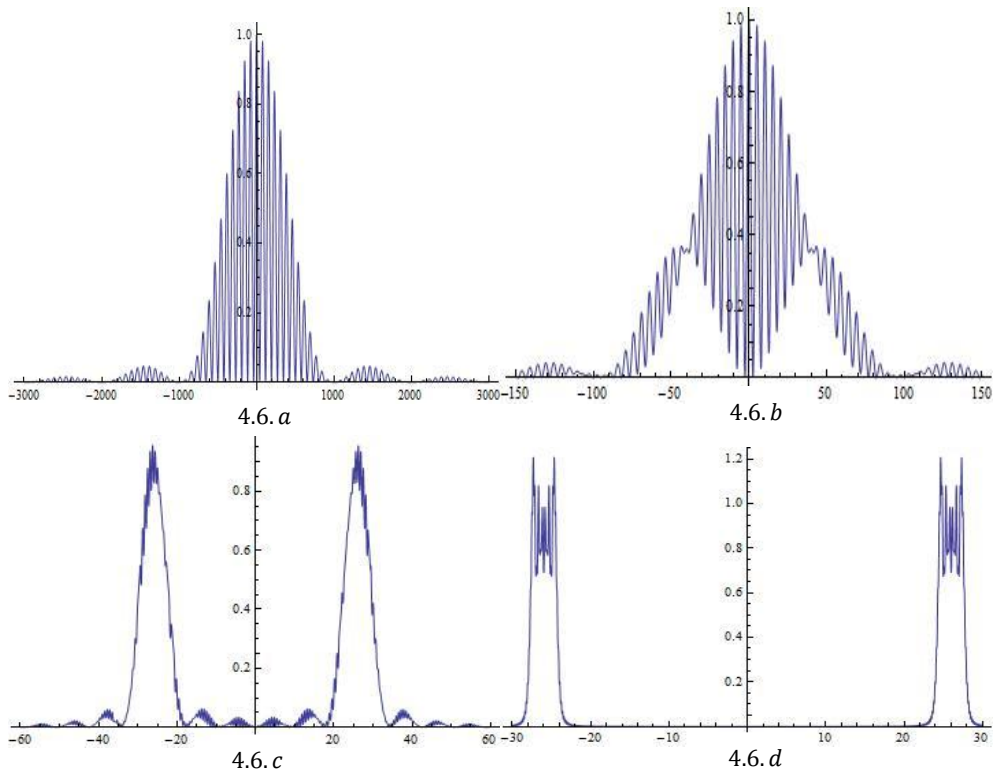
$$I_{12}(x; a, b) = A_1(x; a, b)A_2^*(x; a, b) + A_2(x; a, b)A_1^*(x; a, b)$$

Με τα πλάτη πιθανότητας να ορίζονται από τη σχέση

$$A_1(x) = \frac{e^{i\frac{mx^2}{2\hbar(T+\tau)}}}{\sqrt{(2i)^2\pi\hbar(T+\tau)/m}} (C[a_+(x; a, b)] - C[a_-(x; a, b)] + iS[a_+(x; a, b)] - iS[a_-(x; a, b)])$$

Έτσι για να παράξουμε τις περιθλαστικές καμπύλες για δυο σχισμές με την χρήση του *Mathematica* όπως δείξαμε προηγουμένως αρκεί να ορίσουμε τα πλάτη αυτά και τις παραμέτρους μας.

Ακριβώς με τον ίδιο τρόπο θέτουμε την παράμετρο η ίση με 2 ,ενώ την παράμετρο γ ίση $\eta - 1$. Το πλάτος της σχισμής a θεωρούμε ότι ισούται με την μονάδα. Για τις αποστάσεις έχουμε $D = 1$,οπότε αρκεί να ορίσουμε $L = D(\eta - 1)$. Τέλος ο αριθμός *Fresnel* παίρνει τις τιμές 0.001, 0.015, 0.12 και 6 για κάθε μια από τις προσεγγίσεις που θέλουμε να αποδόσουμε, ενώ το μήκος κύματος λ ορίζεται μέσω της σχέσης $\lambda = 2a^2/LN_F(a)$.



Σχήμα 4.6: Καμπύλη συμβολής για δύο σχισμές, με $b/a=13$, $\eta=2$. Η τετμημένη αποτελεί την απόσταση σε μονάδες α , ενώ η τεταγμένη είναι η σχετική πιθανότητα. Έχουμε $N_F(\alpha) = 0.001$ για το a διάγραμμα, 0.015 για το b και 0.12 για το c και 6 για το d .

Παρατηρούμε μια σύνθετη εικόνα κροσσών, που προκύπτει από το συνδυασμό των κροσσών περίθλασης από κάθε σχισμή και των κροσσών συμβολής που προέρχονται από την υπέρθεση των κυμάτων από δύο σχισμές.

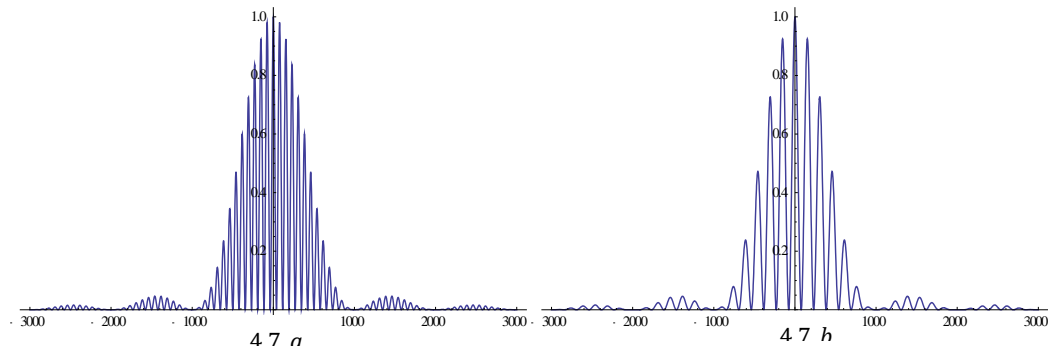
Στο πρώτο διάγραμμα, που αντιστοιχεί στην περίθλαση *Fraunhofer*, δηλαδή στην προσέγγιση του μακρινού πεδίου, οι κροσσοί περίθλασης είναι πλατύτεροι από τους κροσσούς συμβολής, δηλαδή μέσα σε κάθε κροσσό περίθλασης περιέχεται ένας αριθμός λεπτών κροσσών συμβολής, ο οποίος εξαρτάται από τον λόγο b/a , δηλαδή της απόστασης των σχισμών προς το πλάτος των σχισμών.

Αξίζει να παρατηρήσουμε την εξάρτηση αυτή πιο αναλυτικά.

Αρχικά η τιμή του αριθμού *Fresnel* $N_F(a) = 0.001$ θεωρείται τόσο μικρή στους υπολογισμούς μας ώστε να έχουμε μια ξεκάθαρη και ικανοποιητική εικόνα της περίθλασης *Fraunhofer*.

Παίρνουμε δυο περιπτώσεις φαινομένων περίθλασης για δυο σχισμές. Στην πρώτη έχουμε δυο σχισμές όπου το πλάτος κάθε σχισμής θεωρούμε ότι είναι $2\alpha = 2$ έτσι $\alpha = 1$ και η απόσταση των σχισμών θεωρούμε ότι είναι $2b = 26$, έτσι $b = 13$, άρα $\frac{b}{a} = 13$. Στην δεύτερη θεωρούμε ότι το πλάτος της κάθε σχισμής είναι επίσης $2\alpha = 2$, έτσι έχουμε $\alpha = 1$,

ενώ μειώνουμε κατά το ήμισυ την απόσταση των δυο σχισμών, οπότε $2b = 13$ έτσι για $b = 6.5$ πραγματοποιούμε το φαινόμενο για τον λόγο $\frac{b}{a} = 6.5$.

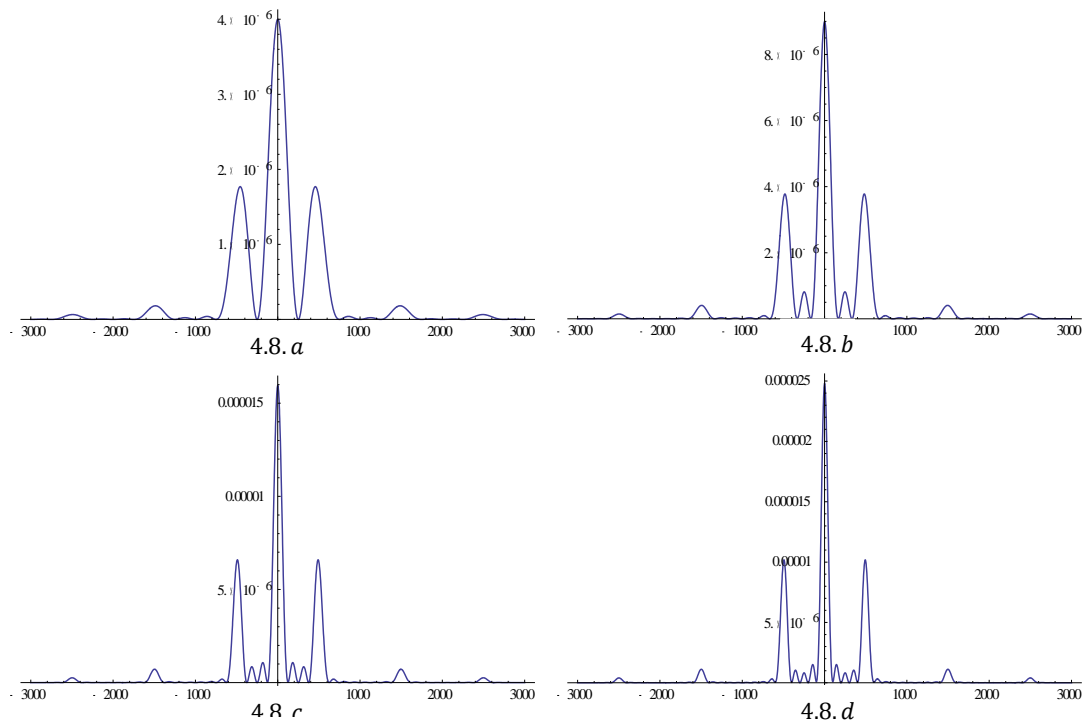


Σχήμα 4.7: Καμπύλη συμβολής για δύο σχισμές με $\eta=2$ και $N_F(\alpha) = 0.001$. Η τετμημένη αποτελεί την απόσταση σε μονάδες a , ενώ η τεταγμένη είναι η σχετική πιθανότητα. Έχουμε $b/a=13$ για το α διάγραμμα και $b/a=6.5$ για το β.

Όπως ήταν αναμενόμενο, παρατηρούμε μείωση του αριθμού των λεπτών κροσσών συμβολής, ενώ το εύρος των κύριων φωτεινών κροσσών παραμένει αμετάβλητο.

Τώρα αν αντί για δύο χρησιμοποιήσουμε N παράλληλες σχισμές ίδιου εύρους a και σε ίσες μικρές αποστάσεις b μεταξύ τους, θα παρατηρήσουμε ανάλογες εικόνες συμβολής – περίθλασης.

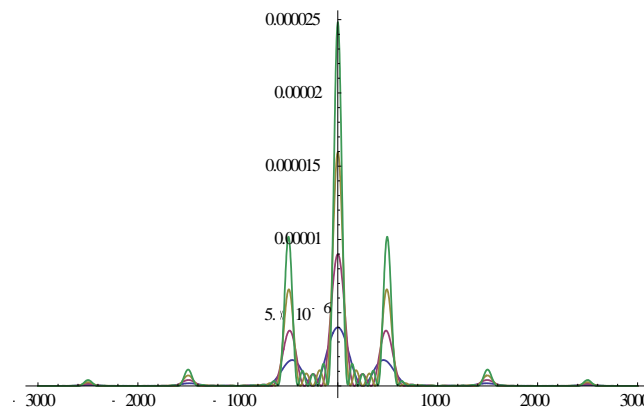
Πραγματοποιούμε, τώρα, τις περιθλαστικές καμπύλες για 2,3,4 και 5 σχισμές εύρους $2a = 2$ και $2b = 8$, οπότε για $\frac{b}{a} = 4$. Θεωρούμε πάλι την προσέγγιση *Fraunhofer* οπότε ο αριθμός *Fresnel* είναι $N_F(\alpha) = 0.001$ και παράγουμε τις παρακάτω μη κανονικοποιημένες πιθανότητες περίθλασης.



Σχήμα 4.8: Καμπύλη συμβολής για N σχισμές με $\eta=2$ και $N_F(\alpha) = 0.001$ και $b/\alpha=4$. Η τετμημένη αποτελεί την απόσταση σε μονάδες α , ενώ η τεταγμένη είναι η σχετική πιθανότητα. Έχουμε $N=2$ για το a διάγραμμα, $N=3$ για το διάγραμμα b , $N=4$ για το c και $N=5$ για το d .

Παρατηρούμε ξεκάθαρα ότι με την αύξηση του αριθμού των σχισμών το εύρος των κροσσών συμβολής μειώνεται, ενώ ταυτόχρονα εντείνεται η απόλυτη φωτεινή ένταση, η καθαρότητα και η οξύτητα τους. Γι' αυτόν ακριβώς τον λόγο πραγματοποιήσαμε τις μη κανονικοποιημένες καμπύλες περίθλασης.

Δεν μπορούμε να μην τονίσουμε ότι οι κύριοι φωτεινοί κροσσοί περίθλασης βρίσκονται στην ίδια θέση, πράγμα που ίσως φαίνεται καλύτερα σ' ένα διάγραμμα ενιαίο που περιέχει και τις 4 από τις παραπάνω περιθλαστικές καμπύλες.

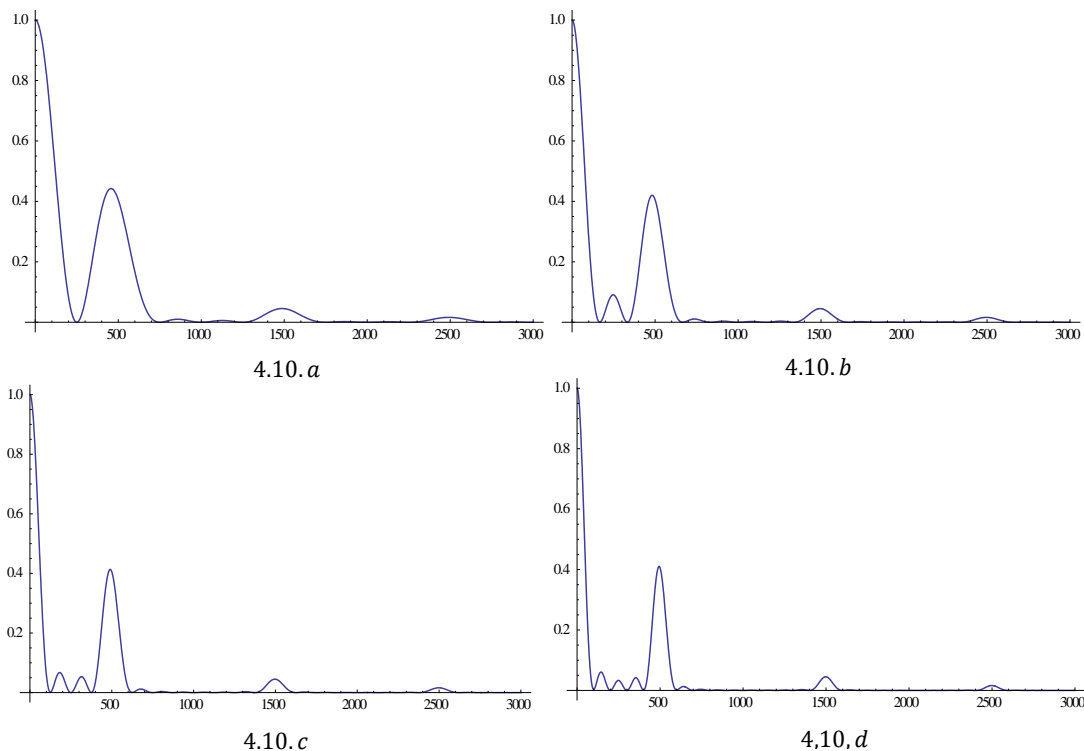


Σχήμα 4.9: Ενιαίο Διάγραμμα καμπυλών συμβολής για N σχισμές με $\eta=2$ και $N_F(\alpha) = 0.001$ και $b/\alpha = 4$. Η τετμημένη αποτελεί την απόσταση σε μονάδες α , ενώ η τεταγμένη είναι η σχετική πιθανότητα. Έχουμε $N = 2$, $N = 3$, $N = 4$ και $N = 5$.

Αξίζει να σημειώσουμε ότι εκτός των κύριων φωτεινών κροσσών συμβολής, που οφείλονται στη συμβολή κυμάτων από διαδοχικές σχισμές, θα εμφανίζονται και δευτερεύοντες φωτεινοί κροσσοί, που οφείλονται στη συμβολή κυμάτων από σχισμές που απέχουν μεταξύ τους αποστάσεις $2d, 3d, 4d, \dots$

Πιο αναλυτικά, οι κύριοι φωτεινοί κροσσοί βρίσκονται στις ίδιες θέσεις και ανάμεσα σε δυο διαδοχικούς κύριους φωτεινούς κροσσούς, θα υπάρχουν $N - 1$ σκοτεινοί κροσσοί, και ανάμεσα σε δυο διαδοχικούς σκοτεινούς κροσσούς, θα υπάρχει ένας δευτερεύων φωτεινός κροσσός. Κατά συνέπεια, ανάμεσα σε δύο διαδοχικούς κύριους φωτεινούς κροσσούς θα υπάρχουν $N - 2$ δευτερεύοντες φωτεινοί κροσσοί. Στην πράξη, η παρατήρηση με γυμνό μάτι των δευτερογενών κροσσών είναι αρκετά δύσκολη στις περισσότερες περιπτώσεις. Αυτό οφείλεται στη χαμηλή ένταση και μειωμένη διακριτική ικανότητα, λόγω του συνωστισμού τους.

Εστιάζοντας στην παρατήρηση δευτερευόντων φωτεινών κροσσών πραγματοποιούμε τις περιθλαστικές καμπύλες για 2,3,4,5 σχισμές με $\frac{b}{\alpha} = 4$ και $N_F(a) = 0.001$ όπως ακριβώς κάναμε προηγουμένως, με την διαφορά ότι επιλέγουμε την εμφάνιση των καμπυλών στο διάστημα $\{0,3000\}$. Έτσι έχουμε τα παρακάτω διαγράμματα.



Σχήμα 4.10: Καμπύλη συμβολής για N σχισμές με $\eta=2$ και $N_F(a) = 0.001$ και $b/\alpha = 4$. Η τετμημένη αποτελεί την απόσταση σε μονάδες α , ενώ η τεταγμένη είναι η σχετική πιθανότητα. Έχουμε $N=2$ για το διάγραμμα α, $N = 3$ για το β, $N = 4$ για το γ και $N = 5$ για το δ.

Όπως ήταν αναμενόμενο για δυο σχισμές δεν έχουμε δευτερεύοντα μέγιστα εφόσον $N - 2 = 2 - 2 = 0$. Για τρεις σχισμές παρατηρούμε δύο ελάχιστα μεταξύ δυο διαδοχικών κύριων μεγίστων, έτσι έχουμε ένα δευτερεύον μέγιστο, $N - 2 = 3 - 2 = 1$. Για τέσσερις σχισμές παρατηρούμε τρία ελάχιστα μεταξύ δύο διαδοχικών κύριων μεγίστων και έτσι δυο δευτερεύοντα μέγιστα, $N - 2 = 4 - 2 = 2$. Ενώ για πέντε σχισμές παρατηρούμε τέσσερα ελάχιστα μεταξύ δύο διαδοχικών κύριων μεγίστων και έτσι έχουμε την εμφάνιση τριών δευτερευόντων μεγίστων, $N - 2 = 5 - 2 = 3$.

Κάπως έτσι μπορούμε να πούμε ότι επαληθεύσαμε την γνώση μας για το φαινόμενο από την *Φυσική Θεωρία Περίθλασης*, ότι μεταξύ δυο διαδοχικών κύριων μεγίστων παρουσιάζονται $N - 2$ δευτερεύοντα μέγιστα και κατά συνέπεια $N - 1$ ελάχιστα.

4.3 Περίθλαση από ασύμμετρη σχισμή

Χωρίς να χρειάζεται να βρούμε αναλυτικές λύσεις με την χρήση του *Mathematica* ορίζοντας τις κατάλληλες μεταβλητές μπορούμε να πραγματοποιήσουμε τις περιθλαστικές καμπύλες για ασύμμετρη σχισμή $\{-a, +2a\}$ πλάτους $3a$ ως προς το κέντρο $(0,0)$ που βρίσκεται η πηγή των ηλεκτρονίων.

Αντιστοίχως με τα προηγούμενα, καθορίζουμε τις φυσικές παραμέτρους του συστήματος μας. Θέτουμε

$$\eta = 2, \gamma = \eta - 1, D = 1, L = D(\eta - 1), \alpha = 1, \lambda = 2a^2/LN_F(a)$$

Ο όρος $a(x; a)$ καθορίζεται σύμφωνα με την σχέση (3.9)

$$a_{\pm}(x; a) = \sqrt{N_F(a)} \sqrt{1 + L/D} \left(1 \mp \frac{x}{a} \frac{1}{1 + L/D} \right)$$

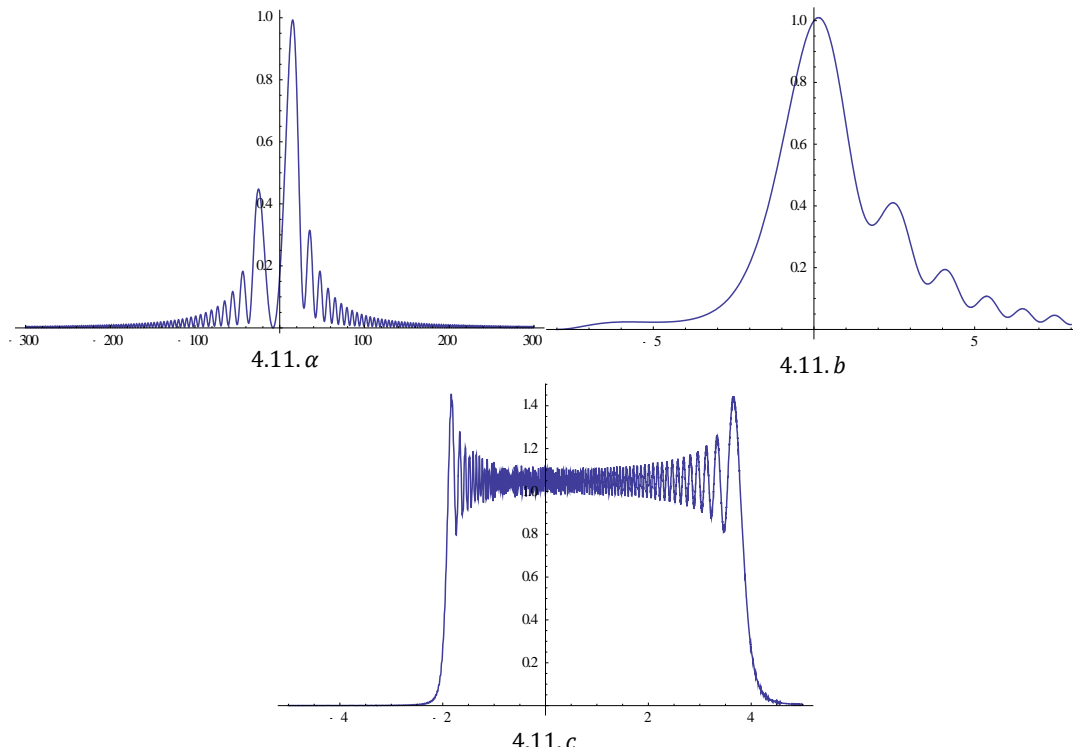
Ενώ καθορίζουμε επιπλέον τον όρο $a(x; 2a)$ εύκολα από την παραπάνω σχέση

$$a_{\pm}(x; 2a) = \sqrt{N_F(a)} \sqrt{1 + L/D} \left(2 \mp \frac{x}{a} \frac{1}{1 + L/D} \right)$$

Έτσι η πιθανότητα περίθλασης για μια ασύμμετρη σχισμή γίνεται

$$P^{1slit}(x; a) = \frac{1}{2\lambda(D+L)} [(C[\alpha(x; +2a)] + C[\alpha(x; -a)])^2 + (S[\alpha(x; +2a)] + S[\alpha(x; -a)])^2]$$

Σχεδιάζουμε, άρα, τις περιθλαστικές καμπύλες για τρεις διαφορετικές τιμές του αριθμού *Fresnel* $N_F(a) = 0.01, 0.5$ και 100 που αντιστοιχούν στις προσεγγίσεις *Fraunhofer*, μια ενδιάμεση και την *Fresnel*.



Σχήμα 4.11: Καμπύλη περίθλασης για μια μόνο ασύμμετρη σχισμή, με $\eta=2$. Η τετημημένη αποτελεί την απόσταση σε μονάδες a , ενώ η τεταγμένη είναι η σχετική πιθανότητα. Έχουμε $N_F(\alpha) = 0.01$ για το a διάγραμμα, 0.5 για το b και 100 για το c .

Παρατηρούμε τις τρεις καμπύλες για τα φαινόμενα περίθλασης. Όπως μπορούσαμε να φανταστούμε από την αρχή απλώς μετατοπίζεται ο κύριος λοβός της περίθλασης.

4.4 Περίθλαση από τετραγωνικό άνοιγμα

Ορίζοντας τις παραμέτρους μας πλέον και ως προς τον άξονα $-y$ έχουμε τις περιθλαστικές καμπύλες για ένα τετραγωνικό άνοιγμα μεγέθους $2a$.

Αντιστοίχως με τα προηγούμενα, καθορίζουμε τις φυσικές παραμέτρους του συστήματος μας. Θέτουμε

$$\eta = 2, \gamma = \eta - 1, D = 1, L = D(\eta - 1), \alpha = 1, \lambda = 2a^2/LN_F(a)$$

Επίσης ο όρος $\alpha(x; a)$ καθορίζεται σύμφωνα με την σχέση (3.9)

$$a_{\pm}(x; a) = \sqrt{N_F(a)} \sqrt{1 + L/D} \left(1 \mp \frac{x}{a} \frac{1}{1 + L/D} \right)$$

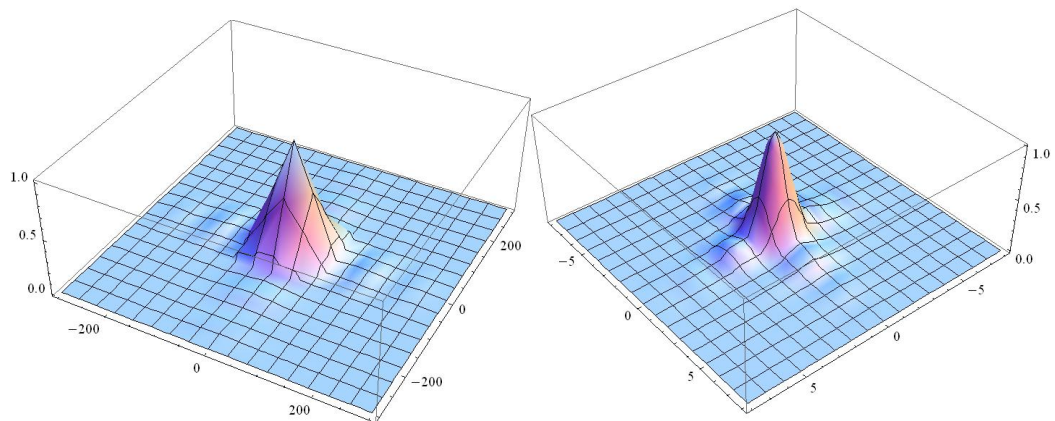
Ενώ έχουμε και τον αντίστοιχο όρο $a_{\pm}(y; a)$ για τον κάθετο άξονα $-y$

$$a_{\pm}(y; a) = \sqrt{N_F(a)} \sqrt{1 + L/D} \left(1 \mp \frac{y}{a} \frac{1}{1 + L/D} \right)$$

Κάπως έτσι προκύπτει η πιθανότητα περίθλασης για ένα τετραγωνικό άνοιγμα

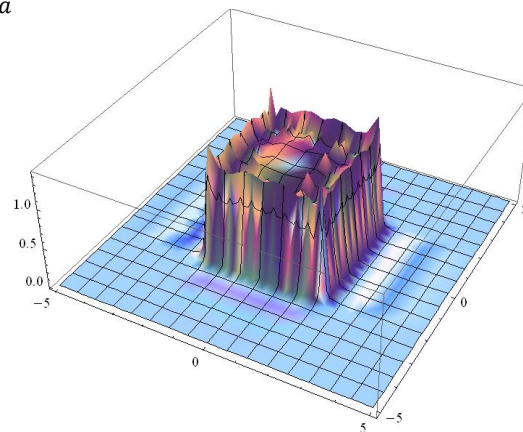
$$P^{1slit}(x, y; a) = \frac{1}{2\eta} [(C[\alpha(x; +a)] + C[\alpha(x; -a)])^2 + (S[\alpha(x; +a)] + S[\alpha(x; -a)])^2] \\ \times [(C[\alpha(y; +a)] + C[\alpha(y; -a)])^2 + (S[\alpha(y; +a)] + S[\alpha(y; -a)])^2]$$

Πραγματοποιούμε, άρα, τις τρισδιάστατες περιθλαστικές καμπύλες για τρεις διαφορετικές τιμές του αριθμού *Fresnel* $N_F(a) = 0.01, 0.5$ και 100 που αντιστοιχούν στις προσεγγίσεις *Fraunhofer*, μια ενδιάμεση και την *Fresnel*.



4.12. a

4.12. b



4.12. c

Σχήμα 4.12: Τρισδιάστατες Καμπύλες περίθλασης για ένα τετραγωνικό άνοιγμα, με $\eta=2$. Η τετμημένη αποτελεί την απόσταση σε μονάδες a , ενώ η τεταγμένη είναι η σχετική πιθανότητα. Έχουμε $N_F(\alpha) = 0.01$ για το a διάγραμμα, 0.5 για το b και 100 για το c .

Η δισδιάστατη κατανομή της περιθλαστικής έντασης γύρω από τον οπτικό άξονα έχει συμμετρία που αντανακλά τη συμμετρία του περιθλώντος ανοίγματος, με σχέσεις αντίστροφης αναλογίας. Όπως και στον περιθλαστικό σχηματισμό μιας σχισμής, που είδαμε παραπάνω, το εύρος του κεντρικού λοβού κατά το επίπεδο xz θα είναι $2\lambda z/a$, ενώ κατά το επίπεδο xy θα είναι $2\lambda z/b$ αν υποθέσουμε ότι έχουμε ορθογώνια σχισμή $a \times b$ και όχι τετραγωνική, δηλαδή αν $a > b$ θα ισχύει $2\lambda/a < 2\lambda/b$. Έτσι ο κεντρικός “ορθογώνιος λοβός” θα είναι επιμηκυμένος κατά τη διάσταση εκείνη που το ορθογώνιο περιθλόν άνοιγμα είναι στενότερο.

4.5 Πλάτη Πιθανότητας Πολλαπλασιασμένα με Πραγματικούς και Εκθετικούς Όρους

Με το *Mathematica* για να πραγματοποιήσουμε τις περιθλαστικές καμπύλες χρησιμοποιήσαμε την έκφραση για το πλάτος πιθανότητας (3.5)

$$A_1(x) = \frac{e^{\frac{imx^2}{2\hbar(T+\tau)}}}{\sqrt{(2i)^2\pi\hbar(T+\tau)/m}} (C[a_+(x; a, b)] - C[a_-(x; a, b)] + iS[a_+(x; a, b)] - iS[a_-(x; a, b)])$$

$$\text{Με } A_2(x; a, b) = A_1(x; a, -b)$$

Με αυτόν τον τρόπο μπορώ να θεωρήσω, αρχικά την περίπτωση περίθλασης από δύο σχισμές, εκ των οποίων στην μια υπάρχει ένα φράγμα. Το φράγμα αυτό δεν εμποδίζει ακριβώς το ηλεκτρόνιο να περάσει από την σχισμή, απλώς το “δυσκολεύει”. Μπορεί ίσως κάποιος να φανταστεί μια ημιδιαφανή σχισμή.

Μια τέτοιου είδους προσομοίωση μπορεί να γίνει με τον πολλαπλασιασμό του πλάτους πιθανότητας που αντιστοιχεί στην μια σχισμή με έναν πραγματικό όρο.

Αντιστοίχως με τα προηγούμενα, καθορίζουμε τις φυσικές παραμέτρους του συστήματος μας. Θέτουμε

$$\eta = 2, \gamma = \eta - 1, D = 1, L = D(\eta - 1), \alpha = 1, \lambda = 2\alpha^2/LN_F(a)$$

Και σύμφωνα με την πιθανότητα περίθλασης για δυο σχισμές

$$P^{2slit}(x; a, b) = P_1(x; a, b) + P_2(x; a, b) + I_{12}(x; a, b)$$

Και τους όρους περίθλασης και συμβολής

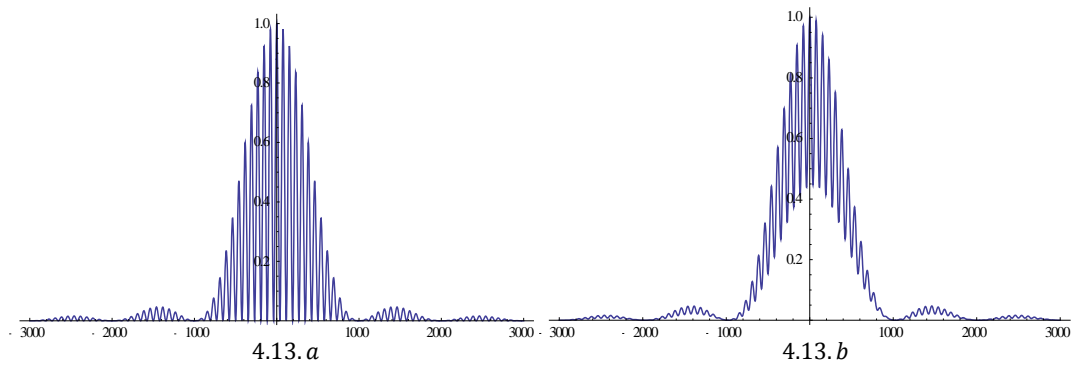
$$P_1(x; a, b) = |A_1(x; a, b)|^2$$

$$= \frac{\gamma}{2\lambda L \eta} \left([C(a_+(x; a, b)) - C(a_-(x; a, b))]^2 + [S(a_+(x; a, b)) - S(a_-(x; a, b))]^2 \right)$$

$$P_2(x; a, b) = |A_2(x; a, b)|^2 = |A_1(x; a, -b)|^2 = P_1(x; a, -b)$$

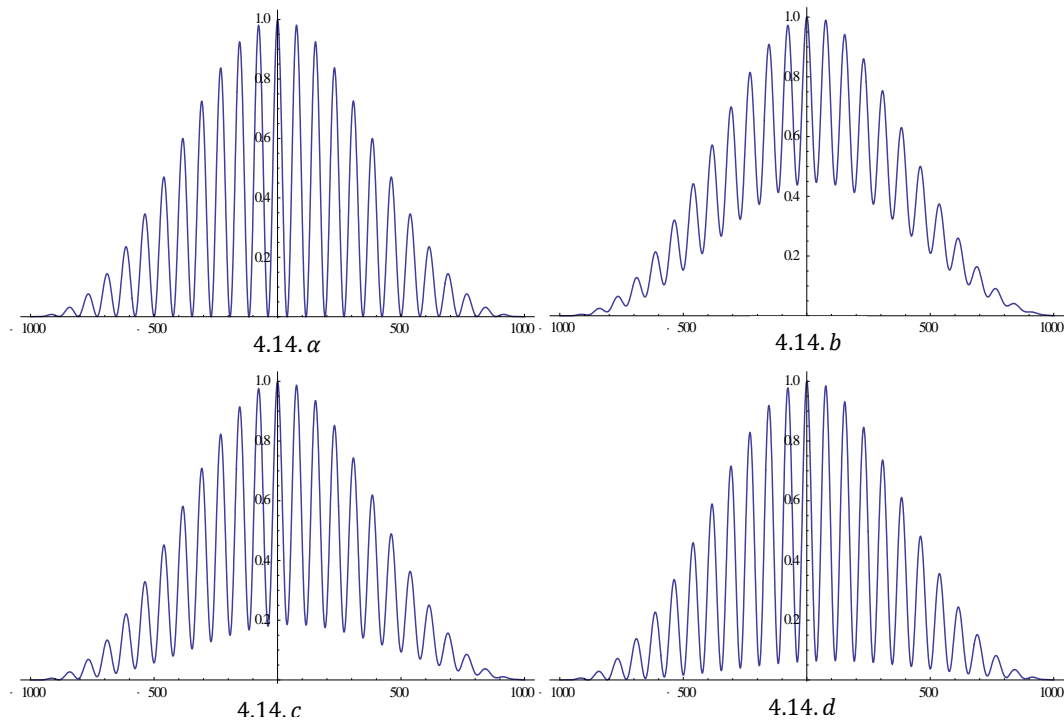
$$I_{12}(x; a, b) = A_1(x; a, b)A_2^*(x; a, b) + A_2(x; a, b)A_1^*(x; a, b)$$

Σχεδιάζουμε τις περιθλαστικές καμπύλες με το πλάτος A_2 να πολλαπλασιάζεται έστω με τον πραγματικό όρο 0.2, δηλαδή μειώνοντας την πιθανότητα το ηλεκτρόνιο να περάσει από την δεύτερη σχισμή. Σημειώνουμε ότι ο αριθμός *Fresnel* παίρνει την τιμή 0.001, οπότε προσεγγίζουμε την περίθλαση *Fraunhofer* για το μακρινό πεδίο.



Σχήμα 4.13: Καμπύλη συμβολής για δύο σχισμές, με $b/a = 13, \eta = 2, N_F(\alpha) = 0.001$. Η τετμημένη αποτελεί την απόσταση σε μονάδες α , ενώ η τεταγμένη είναι η σχετική πιθανότητα. Το διάγραμμα b αντιστοιχεί σ' εκείνη την περιθλαση όπου το πλάτος A_2 πολλαπλασιάζεται με 0.2.

Ενώ η διαφορά είναι αισθητή, μεγεθύνοντας μπορούμε να παρατηρήσουμε καλύτερα. Και για καλύτερα συμπεράσματα πραγματοποιούμε περιθλαστικές καμπύλες με τα πλάτη A_2 να πολλαπλασιάζονται με 1, 0.2, 0.4, 0.6.

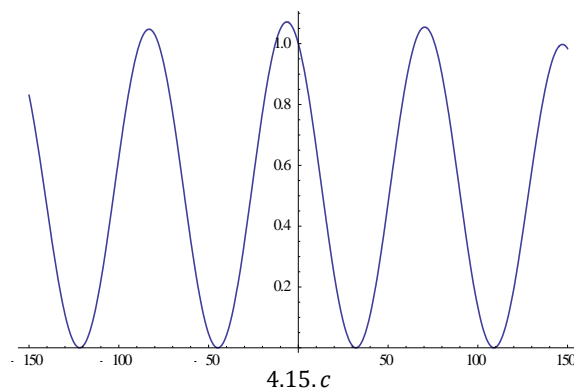
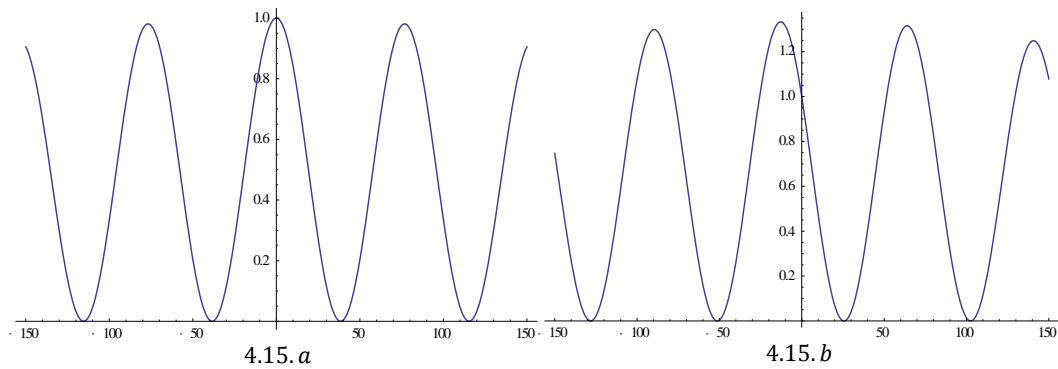


Σχήμα 4.14: Καμπύλη συμβολής για δύο σχισμές, με $b/a = 13, \eta = 2, N_F(\alpha) = 0.001$. Η τετμημένη αποτελεί την απόσταση σε μονάδες α , ενώ η τεταγμένη είναι η σχετική πιθανότητα. Το διάγραμμα a αντιστοιχεί σε πλάτος A_2 , το b σε $0.2A_2$, το c σε $0.4A_2$ και το d σε $0.6A_2$.

Παρατηρούμε ότι όσο μειώνουμε την πιθανότητα το ηλεκτρόνιο να περάσει από τη μια σχισμή, μειώνεται το ποσοστό συμβολής όπως ήταν αναμενόμενο, με αποτέλεσμα στον βαθμό που ίσως μηδενιστεί η πιθανότητα το ηλεκτρόνιο να περάσει από την μια σχισμή να έχω την περιθλαστική καμπύλη για ηλεκτρόνιο που περνά από μια σχισμή κεντρωμένη όχι στην πηγή και έτσι όχι συμμετρική.

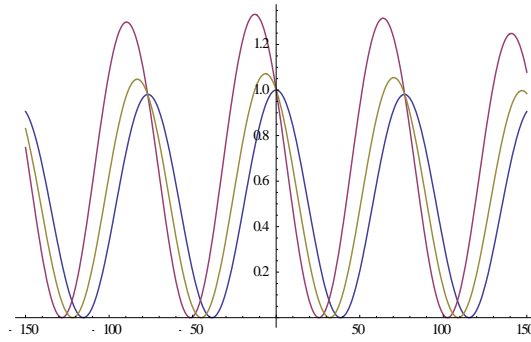
Στην συνέχεια, μπορούμε να θεωρήσουμε την περίπτωση το ηλεκτρόνιο να διέρχεται από την μια σχισμή εκ των δύο με κάποια κλίση για κάποιο λόγο. Η διαδικασία αυτή προσομοιώνεται εύκολα με τον πολλαπλασιασμό του πλάτους πιθανότητας της μιας σχισμής με έναν εκθετικό όρο $\exp\left[i\frac{\pi}{\kappa}\right]$ με κ να αποτελεί μια σταθερά.

Πολλαπλασιάζοντας με $\exp\left[i\frac{\pi}{3}\right]$, $\exp\left[i\frac{\pi}{6}\right]$ το πλάτος A_2 και πραγματοποιώντας τις περιθλαστικές καμπύλες στο διάστημα $\{-150,150\}$ έχουμε



Σχήμα 4.15: Καμπύλη συμβολής για δύο σχισμές, με $b/a = 13, \eta = 2, N_F(\alpha) = 0.001$. Η τετμημένη αποτελεί την απόσταση σε μονάδες a , ενώ η τεταγμένη είναι η σχετική πιθανότητα. Το διάγραμμα a αντιστοιχεί σε πλάτος A_2 , το b σε $\exp\left[i\frac{\pi}{3}\right]A_2$, το c σε $\exp\left[i\frac{\pi}{6}\right]A_2$.

Για καλύτερη εποπτεία δείχνουμε τις περιθλαστικές καμπύλες σ' ένα ενιαίο διάγραμμα



Σχήμα 4.16: Ενιαίο διάγραμμα Καμπυλών συμβολής για δύο σχισμές, με $b/a = 13, \eta = 2, N_F(\alpha) = 0.001$. Η τετμημένη αποτελεί την απόσταση σε μονάδες α , ενώ η τεταγμένη είναι η σχετική πιθανότητα. Το διάγραμμα α αντιστοιχεί σε πλάτος A_2 , το b σε $\exp\left[i\frac{\pi}{3}\right]A_2$, το c σε $\exp\left[i\frac{\pi}{6}\right]A_2$.

Παρατηρούμε ότι η περιθλαστική καμπύλη μετατοπίζεται είτε αριστερά είτε δεξιά ανάλογα αν το πρόσημο του αριθμού κ στον εκθετικό όρο είναι θετικό ή αρνητικό αντίστοιχα για την κάθε περίπτωση. Επίσης, παρατηρούμε ότι αυξάνεται η ένταση, δηλαδή η φωτεινότητα των φωτεινών κροσσών και μειώνεται έτσι το εύρος των κροσσών. Όσο αυξάνεται ο εκθετικός όρος τόσο αυξάνεται η ένταση της περιθλαστικής καμπύλης.

Συμπεράσματα

Ανακεφαλαιώνοντας, παρουσιάσαμε αναλυτικά τον *φορμαλισμό των ολοκληρωμάτων δρόμου* του *Feynman* στην κβαντική μηχανική, βασιζόμενοι στον *Λαγκρανζιανό φορμαλισμό* της κλασικής μηχανικής. Σημειώνουμε ότι, σ' αυτήν την προσέγγιση η μεταφορά από την κλασική στην κβαντική μηχανική είναι αρκετά ομαλή, εφόσον βασίζεται σε γνωστές έννοιες της αναλυτικής μηχανικής και δεν μπερδεύει την σωματιδιακή και κυματική φύση των σωματιδίων. Αυτό είχε σαν αποτέλεσμα να μπορέσουμε να μελετήσουμε εύκολα τα φαινόμενα περίθλασης και συμβολής.

Στην συνέχεια, αποδώσαμε τους αναλυτικούς τύπους που περιγράφουν τα φαινόμενα περίθλασης και συμβολής του ηλεκτρονίου από μια και δύο σχισμές, ενώ εξετάσαμε το πρόβλημα βασιζόμενοι στις φυσικές παραμέτρους του συστήματος. Οι βασικές μας παράμετροι δεν ήταν παρά, ο *αριθμός Fresnel* και η απόσταση μεταξύ των σχισμών και της οθόνης παρατήρησης, του ανιχνευτή. Βέβαια, οι ιδιότητες των όρων περίθλασης και συμβολής δεν ήταν εμφανής από τους ακριβείς τύπους για την πιθανότητα να ανιχνεύσουμε το ηλεκτρόνιο στην οθόνη παρατήρησης (3.11) και (3.17), έτσι απαραίτητο ήταν να καθορίσουμε τους ασυμπτωτικούς τύπους (3.14), (3.15), (3.16) για την περίπτωση της μιας σχισμής και τον τύπο (3.22) για την περίπτωση των δυο σχισμών.

Συνοψίζουμε τα διάφορα αποτελέσματα. Στην περίπτωση της περίθλασης από μια σχισμή

- Για $N_F(a) \ll 1$, έχουμε την προσέγγιση *Fraunhofer* στην οποία η καμπύλη κατανομής της πιθανότητας είναι όμοια με αυτήν ενός επίπεδου κύματος, και περιγράφεται από τις εξισώσεις (3.14) και (3.15) και φαίνεται στο Σχ. 3.3α.
- Για $N_F(a) \gg 1$, έχουμε την προσέγγιση *Fresnel* στην οποία η περιθλαστική καμπύλη προσεγγίζει τον τύπο της σχισμής, ενώ περιγράφεται από τις εξισώσεις (3.17) και (3.15) και φαίνεται στο Σχ. 3.3c.
- Για $N_F(a) \cong 1$, έχουμε μια *ενδιάμεση* προσέγγιση στην οποία υπάρχει μια διασπορά γύρω από το κέντρο της ηλεκτρονιακής κατανομής, ενώ περιγράφεται από τους ασυμπτωτικούς τύπους της περίθλασης *Fraunhofer*, Σχ. 3.3b.

Στην περίπτωση της περίθλασης ηλεκτρονίου από δύο σχισμές πλάτους $2a$, που χωρίζονται με μια απόσταση $2b$ με $b \gg a$, πραγματοποιήσαμε μια όμοια διάκριση με αυτήν για περίθλαση από μια σχισμή.

- Για $N_F \ll 1$, παρατηρούμε μια καμπύλη συμβολής διαμορφωμένη από μια καμπύλη περίθλασης για μια σχισμή μεγέθους a για $N_F(a) \ll 1$, τότε η καμπύλη περίθλασης περιγράφεται από την προσέγγιση *Fresnel* και τις εξισώσεις (3.22) και (3.23), Σχ. 3.4α.
- Για $N_F \gg 1$, παρατηρούμε δύο καμπύλες συμβολής διαμορφωμένες από τις καμπύλες περίθλασης που αντιστοιχούν και στις δύο σχισμές. Κάθε καμπύλη είναι κεντρωμένη αντίστοιχα στα $\pm b\eta$. Το σχήμα των περιθλαστικών καμπυλών

εξαρτάται από την τιμή του αριθμού *Fresnel* ,όπως ακριβώς στην περίπτωση της περίθλασης από μια σχισμή που συνοψίσαμε παραπάνω.

Στο τέλος, με την χρήση του *Mathematica* οι ακριβής εξισώσεις για τις πιθανότητες περίθλασης (3.11) και (3.17) ήταν επαρκής για να κάνουμε διάφορες προσομοιώσεις περίθλασης από μια και δυο σχισμές και να παρατηρήσουμε ιδιότητες, γνωστές έως τώρα από την *Φυσική Θεωρία Περίθλασης*.

Α' Θεωρία Περίθλασης

Η Περίθλαση ασχολείται με εκείνα τα φαινόμενα στα οποία τα εμπόδια ή ανοίγματα μέσα στα οποία θα περάσει το φως είναι συγκρίσιμης τάξης μεγέθους με το μήκος κύματος, και έτσι η αλληλεπίδραση της κυματικής φύσης με το άνοιγμα παίζει σημαντικό ρόλο στη διάδοση του. Σε ένα πέτασμα παρατήρησης δεν έχουμε πλέον τη γεωμετρική σκιά του ανοίγματος και έχουμε την περιθλαστική κατανομή φωτεινής έντασης.

Οι πρώτες παρατηρήσεις περίθλασης έγιναν από τον *Francesco Maria Grimaldi* και μάλιστα αναφέρονται στο *Opticks* του *Newton*. Έχουμε ήδη γνωρίσει φαινόμενα περίθλασης: αν ένα επίπεδο μέτωπο κύματος προσπέσει πάνω σ' ένα πολύ μικρό εμπόδιο ή άνοιγμα που μπορεί να προσεγγιστεί από ένα σημειακό πέρασμα, τότε το σημείο αυτό καθίσταται πηγή δευτερευόντων σφαιρικών κυμάτων προς όλες τις κατευθύνσεις. Αυτή είναι η πιο στοιχειώδης έκφραση περίθλασης: το φως αλλάζει πορεία επειδή πέρασε από ένα σημειακό, απειροστού μεγέθους άνοιγμα, και η αλλαγή αυτή δεν μπορεί να περιγραφεί από τους νόμους της *Γεωμετρικής Οπτικής*.

Εδώ θα ασχοληθούμε με τις περιπτώσεις, όπου το άνοιγμα έχει διαστάσεις με τάξεις μεγέθους συγκρίσιμη με το μήκος κύματος του φωτός, το οποίο είναι τάξης μεγέθους *μικρομέτρων*. Η θεώρηση αυτή μπορεί να μοιάζει με αυτή της *Συμβολής*, διότι όπως θα δούμε, η περίθλαση δεν είναι παρά συμβολή από άπειρες –γειτονικές– σημειακές πηγές.

Α'1 Το Γενικευμένο Πρόβλημα Περίθλασης

Στην περίπτωση που ένα κύμα προσπέσει σε ένα αδιαφανές πέτασμα με ένα μεγάλο –σε σύγκριση με το μήκος κύματος– άνοιγμα, η θεώρηση της γεωμετρικής οπτικής προβλέπει ευθύγραμμη διάδοση πέρα από αυτό ανεξάρτητα από το μήκος κύματος της ακτινοβολίας. Θα θεωρήσουμε ένα προσπίπτον επίπεδο κύμα πριν από το πέτασμα, που το ηλεκτρικό του πεδίο εκφράζεται από μια σχέση της μορφής:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp[i(\omega t - \vec{k} \vec{r} + \varphi)] \quad 1.1$$

Στο χώρο μετά από το πέτασμα το διερχόμενο κύμα θα εκφράζεται ως:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp[i(\omega t - \vec{k} \vec{r} + \varphi)] \text{ , στο χώρο πέρα απο το άνοιγμα}$$
$$\vec{E} = 0 \text{ , στο χώρο που εμποδίζεται} \quad 1.2$$

Δηλαδή θα έχουμε ευθύγραμμη διάδοση πέρα από το άνοιγμα, και στο πέτασμα παρατήρησης θα δούμε τη γεωμετρική σκιά του ανοίγματος.

Αντίθετα, στην περίπτωση που το άνοιγμα είναι σχεδόν σημειακό, τότε το 'σημείο' εκείνο γίνεται πηγή εκπομπής δευτερογενών κυμάτων, προς όλες τις κατευθύνσεις, σύμφωνα με την αρχή του *Huygens*. Για ομογενές και ισότροπο μέσο, τα μέτωπα κύματος γίνονται σφαιρικά, όπως ακριβώς θα ήταν αν στο άνοιγμα είχαμε ακριβώς μια σημειακή πηγή.

Το πεδίο σε κάποιο σημείο $P_0(x_0, y_0)$ στην περιοχή παρατήρησης που απέχει απόσταση r_{01} από τη σημειακή φωτεινή πηγή που εκπέμπει το σφαιρικό κύμα με συχνότητα ω , θα δίνεται από τη σχέση:

$$E_P = \frac{E_{01}}{r_{01}} \exp[i(\omega t - \vec{k} \vec{r} + \varphi)] = \frac{1}{i\lambda r_{01}} \exp[i(\omega t - \vec{k} \vec{r} + \varphi)] \quad 1.3$$

Όπου E_{01} το πλάτος στη μονάδα της απόστασης από την πηγή, που είναι ανάλογο του προσπίπτοντος αρχικού πλάτους και του συντελεστή $1/i\lambda$. Ο συντελεστής αυτός προκύπτει γιατί το δευτερεύον σφαιρικό κύμα έχει καθυστέρηση φάσης $\pi/2$ σε σχέση με το αρχικό κύμα $1/i = \exp[-i\pi/2]$, και το πλάτος ίσο με $1/\lambda$ του αρχικού κύματος. Έτσι, το κύμα που προέρχεται από το σημείο $P_1(x_1, y_1)$ του ανοίγματος στο οποίο προσπίπτει κύμα $E_1(x_1, y_1)$ θα γραφεί ως:

$$E(x_0, y_0) = h(x_0, x_1; y_0, y_1) E_1(x_1, y_1) \quad 1.4$$

Όπου η έκφραση h είναι ο παράγοντας ή συνάρτηση μεταφοράς (*transfer function*). Ο παράγοντας μεταφοράς εκφράζει την εξάρτηση του πεδίου σε κάθε ένα σημείο του πετάσματος παρατήρησης –σύστημα αναφοράς (x_0, y_0) - από κάθε ένα σημείο δευτερογενούς εκπομπής του πεδίου στην ‘διαφάνεια’ εισόδου. Έτσι, συγκρίνοντας τις σχέσεις (1.3), (1.4) προκύπτει ότι :

$$h(x_0, x_1; y_0, y_1) = \frac{i \exp[i \vec{k} \vec{r}_{01}]}{\lambda r_{01}} \quad 1.5$$

Σε ένα πέτασμα παρατήρησης δεν θα δούμε τη γεωμετρική σκιά του ανοίγματος, που είναι ένα σημείο, αλλά μια πολύ εκτεταμένη κυκλική κατανομή φωτεινής έντασης, η οποία φθίνει παραβολικά με την ακτίνα παρατήρησης. Όσο πιο πολύ απέχει το πέτασμα παρατήρησης από το άνοιγμα, -η απόσταση r_{01} - , τόσο πιο λίγο θα εξασθενίζει η ακτινική κατανομή.

Είναι ενδιαφέρον ότι ο *Arnold Johannes Wilhelm Sommerfeld* όρισε την περίθλαση ως ‘οποιαδήποτε απόκλιση από τις ακτίνες του φωτός το οποίο δεν μπορεί να ερμηνευθεί ως ανάκλαση ή διάθλαση’. Ασφαλώς φαινόμενα περίθλασης εμφανίζονται σε κάθε μορφή κύματος, όταν σε κάποιο μέρος του μετώπου του αλλάξει το πλάτος ή η φάση του.

Πώς θα είναι όμως η διάδοση του μετώπου αυτού και ποια θα είναι η κατανομή φωτεινότητας σε ένα πέτασμα από ένα μη σημειακό άνοιγμα;

Η πρώτη παρατήρηση είναι ότι στο άνοιγμα έχουμε αρκετές, πλέον, γειτονικές σημειακές πηγές. Επίσης, οι πηγές αυτές είναι σύμφωνες, μιας και προέρχονται από ακριβώς το ίδιο μέτωπο κύματος. Έτσι, για να λύσουμε το πρόβλημα περίθλασης

- Για κάθε σημείο παρατήρησης βρίσκουμε τα ηλεκτρικά πεδία από κάθε πιθανή πηγή εκπομπής
- Γίνεται γραμμική άθροιση των εντάσεων των ηλεκτρικών πεδίων από τις όλες τις πιθανές σημειακές πηγές

- Βρίσκουμε τη φωτεινή ένταση του κύματος με το τετράγωνο της μέσης τιμής του αθροίσματος των εντάσεων ηλεκτρικών πεδίων

Ασφαλώς, αν οι πιθανές σημειακές πηγές είναι άπειρες τον αριθμό, τότε δεν γίνεται άθροιση αλλά ολοκλήρωση των αναλυτικών εκφράσεων για τα ηλεκτρικά πεδία από όλες τις πηγές. Δηλαδή η λύση της γενικής περίπτωσης του προβλήματος της περίθλασης είναι η συμβολή όλων των στοιχειωδών κυμάτων από κάθε γειτονικό σημείο εισόδου στο σημείο παρατήρησης. Έτσι θα θεωρήσουμε ένα άνοιγμα τυχαίας μορφής στο χώρο (x_1, y_1) και μια περιοχή παρατήρησης στο χώρο (x_0, y_0) που απέχουν μια διαμήκη απόσταση z . Για να υπολογίσουμε το μέτρο και τη φάση του ηλεκτρικού πεδίου σε ένα σημείο $P_0(x_0, y_0)$ στην περιοχή παρατήρησης που προέρχεται από ένα σημείο $P_1(x_1, y_1)$ στο άνοιγμα εισόδου θα χρειαστούμε :

- Το μέτρο και τη φάση του πεδίου στο σημείο $P_1, E_1(x_1, y_1) = E_{01}(x_1, y_1) \exp[i\varphi_0(x_1, y_1)]$
- Το μήκος κύματος λ της ακτινοβολίας
- Την απόσταση r_{01} μεταξύ των σημείων P_1 και $P_0, \sqrt{z^2 + (x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2}$

Οι κυματικές διαταραχές που φθάνουν στο P_0 διαφέρουν κατά πλάτος και κατά φάση γιατί, πρώτον οι στοιχειώδεις πηγές P_1 βρίσκονται σε διαφορετικές αποστάσεις –οπτικούς δρόμους- από το P_0 και δεύτερον, το φως σχηματίζει διαφορετικές γωνίες ‘πρόσπτωσης’ . Όλες αυτές οι διαταραχές θα ολοκληρωθούν για όλα τα πιθανά σημεία του ανοίγματος. Έτσι, το κύμα στο σημείο $P_0(x_0, y_0)$ γράφεται ως:

$$E(x_0, y_0) = \iint_{\text{όλα τα σημεία του ανοίγματος}} h(x_0, x_1; y_0, y_1) E(x_1, y_1) dx_1 dy_1 \quad 1.6$$

Οι υπολογισμοί που χρειάζονται για να βρούμε το ολικό ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P_0 , μπορεί να είναι απλοί στην λογική τους, αλλά είναι σχεδόν αδύνατο να επιλυθούν στην πράξη χωρίς κάποιες προσεγγίσεις. Ο υπολογισμός πρέπει να επαναλαμβάνεται για κάθε σημείο της περιοχής παρατήρησης για όλες τις στοιχειώδεις πηγές δευτερογενούς εκπομπής. Είναι φανερό ότι χρειάζεται να προβούμε σε κάποιες απλοποιήσεις για να επιλύσουμε αναλυτικά ορισμένες περιπτώσεις.

Α'2 Περίθλαση *Fresnel*

Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το προσπίπτον φως στο περιθλόν άνοιγμα έχει σταθερό μέτρο και ότι δεν υπάρχουν μεταβολές φάσης στην είσοδο. Αυτό θα απλοποιήσει πολύ την έκφραση για το πεδίο στο άνοιγμα εισόδου, δηλαδή την έκφραση για το $E_1(x_1, y_1) = E_{01}(x_1, y_1) \exp[i\varphi_0(x_1, y_1)]$. Αυτή η προσέγγιση αποτελεί την *περίθλαση κοντινού πεδίου (near – field diffraction)* ή *προσέγγιση Fresnel*, προς τιμή του *Augustin Jean Fresnel*.

Οι ισοφασικές επιφάνειες δεν είναι κατ' ανάγκη επίπεδες, αλλά αν η αρχική πηγή είναι αρκετά μακριά (ώστε όταν κύμα της συναντήσει το περιθλόν άνοιγμα να έχει μικρή στερεά γωνία), τότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι κάθε φορά μια μόνο ισοφασική περνά από το περιθλόν άνοιγμα. Έτσι, ο παράγοντας μεταφοράς h θα προσεγγιστεί:

$$h(x_0, x_1; y_0, y_1) = \frac{i \exp[i \vec{k} \vec{r}_{01}]}{\lambda z} \quad 1.8$$

και προχωρώντας ένα βήμα ακόμα θέτουμε

$$r_{01} = \sqrt{z^2 + (x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2} \approx z \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x_0 - x_1}{z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{y_0 - y_1}{z} \right)^2 \right] \quad 1.9$$

Και το πεδίο στο σημείο $P_0(x_0, y_0)$ γράφεται ως:

$$E(x_0, y_0) = \frac{i \exp[i kz]}{\lambda z} \iint E(x_1, y_1) \exp \left\{ i \frac{k}{2z} [(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2] \right\} dx_1 dy_1 \quad 1.10$$

Οι τετραγωνικοί όροι στο εκθετικό μέρος μπορούν να διαχωριστούν και έτσι:

$$E(x_0, y_0) = \frac{i \exp[i kz]}{\lambda z} \exp \left[i \frac{k}{2z} (x_0^2 + y_0^2) \right] \times \iint E(x_1, y_1) \exp \left[i \frac{k}{2z} (x_1^2 + y_1^2) \right] \exp \left[-i \frac{2\pi}{\lambda z} (x_0 x_1 + y_0 y_1) \right] dx_1 dy_1 \quad 1.10. a$$

Με τον πρώτο όρο του ολοκληρώματος να είναι η διαμόρφωση του πλάτους εισόδου και ο δεύτερος να είναι η διαμόρφωση της φάσης εισόδου.

Έτσι το ολοκλήρωμα γίνεται πιο βατό. Ουσιαστικά αθροίζονται στο σημείο παρατήρησης άπειρα διανύσματα φάσης, που το καθένα τους έχει διαφορετικό μέτρο αλλά και διαφορετική φάση, λόγω του διαφορετικού οπτικού δρόμου από το αντίστοιχο σημείο του ανοίγματος. Ωστόσο, έχουν ξεκινήσει από την ίδια αρχική κατάσταση. Παρατηρούμε ότι ο παράγοντας φάσης μέσα στο ολοκλήρωμα είναι πολλαπλασιασμένος με μια παραβολική σχέση με την εγκάρσια απομάκρυνση στο σημείο παρατήρησης. Επίσης να σημειωθεί ότι έχουμε επεκτείνει τα όρια ολοκλήρωσης από τα όρια του περιθλόντος ανοίγματος στα όρια $-\infty$ έως $+\infty$, θέτοντας τις τιμές του πεδίου εισόδου να μηδενίζονται έξω από τα όρια του ανοίγματος.

Ένα τέτοιο πρόβλημα επιλύεται γραφικά με μια μέθοδο που αποδίδεται στον *Marie Alfred Cornu*. Κατασκευάζουμε ένα διανυσματικό διάγραμμα (*phasor array*) με

τον περιορισμό ότι η σχετική γωνία των διανυσμάτων φάσης αυξάνεται με το τετράγωνο της εγκάρσιας απομάκρυνσης για το σημείο αναφοράς. Δηλαδή, η καμπυλότητα σε κάθε σημείο αυξάνεται με το τετράγωνο της απόστασης του σημείου. Κάθε διάνυσμα αποτελεί τη συνεισφορά της στοιχειώδους πηγής από το περιθλόν άνοιγμα. Έτσι, προκύπτει η σπείρα ταλαντώσεως Cornu, ή Κλοθοειδές που έχει την εξής μορφή στις καρτεσιανές συντεταγμένες:

$$\begin{aligned} \text{τετμημένη: } C(x) &= a\sqrt{\pi} \int_0^x \cos\left[\frac{\pi s^2}{2}\right] ds \\ \text{τεταγμένη: } S(x) &= a\sqrt{\pi} \int_0^x \sin\left[\frac{\pi s^2}{2}\right] ds \end{aligned} \quad 1.11$$

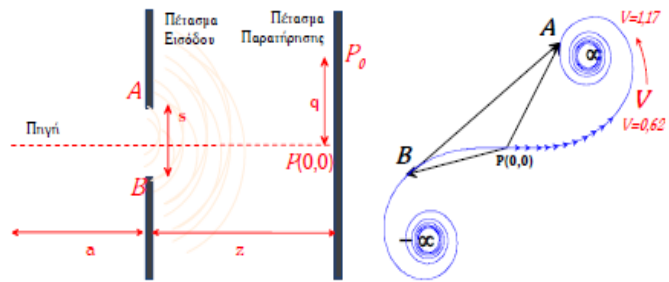
Κάθε σημείο στη σπείρα αντιστοιχεί σε μια παράμετρο x , με πραγματικά και φανταστικά μέρη όπως ορίσαμε παραπάνω. Η σπείρα ξεκινά από το σημείο καμπής (*inflection point*) $(0,0)$ γύρω από το οποίο έχει συμμετρία αναστροφής, και είναι ασυμπτωτική στα $+\infty$ $(a\sqrt{\pi/2}, a\sqrt{\pi/2})$ & $-\infty$ $(-a\sqrt{\pi/2}, a\sqrt{\pi/2})$, που λέγονται 'μάτια'.

Πώς τη χρησιμοποιούμε; Θέλουμε να υπολογίσουμε το μέτρο και τη φάση του πεδίου σ' ένα σημείο $P_0(x_0, y_0)$ που βρίσκεται σε εγκάρσια απομάκρυνση q από το κέντρο συμμετρίας απέναντι του σημείου $P(0,0)$ και απέχει διαμήκη απόσταση z . Αθροίζουμε όλα τα ανύσματα από το κέντρο συμμετρίας ως το σημείο που αντιστοιχεί στο B , το όριο του ανοίγματος AB πλάτους s , και επαναλαμβάνουμε από το ίδιο σημείο για το σημείο A , το άλλο όριο του ανοίγματος. Η διαφορά των ανυσμάτων $P(0,0)B$ και $P(0,0)A$ μας δίνει το διάνυσμα AB .

Αν δεν υπάρχει εμπόδιο στο χώρο (x_1, y_1) , τότε στο πέτασμα παρατήρησης $P_0(x_0, y_0)$ θα ενώσουμε τα σημεία $(-\infty, +\infty)$. Το μέτρο του AB είναι το μέτρο του πεδίου στο P_0 και η γωνία με τον άξονα τεταγμένων η φάση του. Η φωτεινή ένταση της περιθλαστικής κατανομής είναι το τετράγωνο του μέτρου του πεδίου.

Η αντιστοιχία ενός σημείου στο περιθλόν άνοιγμα με ένα σημείο στο κλοθοειδές καθορίζεται από την παράμετρο V που εξαρτάται από σχετική εγκάρσια απομάκρυνση, την ακτίνα καμπυλότητας a του εισερχόμενου μετώπου στο άνοιγμα, και το μήκος κύματος λ . Η παράμετρος V μπορεί να εκφράσει, μέσω του μιγαδικού $C(Vx) + iS(Vx)$ την περιθλαστική κατανομή *Fresnel*. Για παράδειγμα, η παράμετρος V για τα σημεία A και B έχει τη μορφή

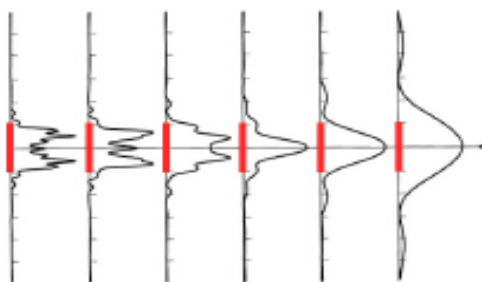
$$\begin{aligned} V_A &= \left(\frac{s}{2} + q\left(\frac{a}{a+z}\right)\right) \sqrt{2 \frac{a+z}{az+\lambda}} \\ V_B &= \left(-\frac{s}{2} + q\left(\frac{a}{a+z}\right)\right) \sqrt{2 \frac{a+z}{az+\lambda}} \end{aligned} \quad 1.12$$



Γραφική επίλυση προβλήματος περίθλασης Fresnel

Η διακύμανση της περιθλαστικής κατανομής προκύπτει από τα διαφορετικά μέτρα διανυσμάτων που προκύπτουν αν η αρχή και το τέλος του διανύσματος τοποθετηθούν σε διάφορα σημεία στη σπείρα.

Η περιθλαστική κατανομή εξαρτάται από το πεδίο στην είσοδο, από το μέγεθος και το σχήμα του ανοίγματος στο χώρο (x_1, y_1) , αλλά και από την απόσταση του πετάσματος z . Παρατηρώντας την εξέλιξη της περιθλαστικής κατανομής διαπιστώνουμε ότι οι περιθλαστικές κατανομές, ενώ παρουσιάζουν έντονες αλλαγές για μικρές αποστάσεις, βαθμιαία τείνουν προς μία σταθερή διαμόρφωση, ένα σταθερό σχήμα, καθώς η απόσταση z μεταξύ του πετάσματος παρατήρησης παίρνει ολοένα και μεγαλύτερες τιμές.



Εξέλιξη περιθλαστικής κατανομής με την απόσταση από το περιθλόν άνοιγμα.

Α'3 Περίθλαση *Fraunhofer*

Το ότι οι περιθλαστικές κατανομές τείνουν σε μια σταθερή διαμόρφωση για μεγάλες αποστάσεις από το περιθλόν άνοιγμα μας οδηγεί στο να απλοποιήσουμε περισσότερο τις υποθέσεις μας. Έτσι θα υποθέσουμε ότι έχουμε:

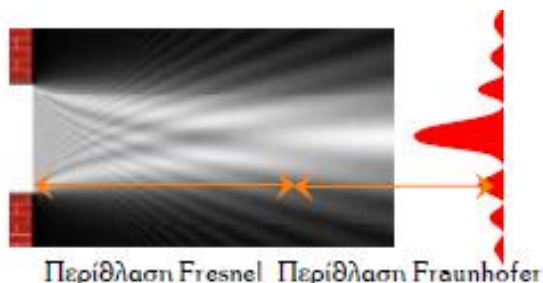
- Επίπεδο κύμα στην είσοδο
- Σταθερή φάση στην είσοδο
- Απόσταση υπολογισμού απομακρυσμένη μακριά από την είσοδο

Η απόσταση υπολογισμού z θεωρείται απομακρυσμένη αν ικανοποιεί τη συνθήκη:

$$z \gg \frac{k}{2} [(x_1)^2 + (y_1)^2]_{MAX} \approx \frac{\pi}{\lambda} D^2 \quad 1.13$$

Όπου D η μέγιστη απομάκρυνση στην είσοδο. Αυτή είναι η προσέγγιση μακρινού πεδίου (*far – field*) ή προσέγγιση *Fraunhofer* προς τιμή του *Joseph von Fraunhofer*.

Αν και η περίθλαση *Fraunhofer* είναι μια οριακή περίπτωση της γενικότερης περίθλασης *Fresnel*, είναι μια σημαντική οριακή περίπτωση και είναι αρκετά πιο εύκολος ο μαθηματικός χειρισμός της. Η απόσταση z που αναφέρεται ως όριο δεν αποτελεί ένα αυστηρό όριο ανάμεσα στις δυο περιοχές, στην πράξη ο σχηματισμός περίθλασης αλλάζει βαθμιαία από τη μία μορφή στην άλλη.



Βαθμιαία εξέλιξη περίθλασης *Fresnel* σε περίθλαση *Fraunhofer*

Σε μια τέτοια μεγάλη απόσταση, σε κάθε σημείο του πετάσματος παρατήρησης συμβάλλουν ακτίνες από τα διάφορα σημεία του περιθλόντος ανοίγματος και είναι παράλληλες μεταξύ τους. Έτσι τα πλάτη των δευτερευόντων κυμάτων είναι σχεδόν ίσα με τα αντίστοιχα του προσπίπτοντος και η φάση τους –λόγω της ίδιας κλίσης των ακτίνων– ακολουθεί μια γραμμική σχέση. Μαθηματικά, αυτό εκφράζεται από την προσέγγιση ότι ο παράγοντας διαμόρφωσης φάσης εισόδου μέσα στο ολοκλήρωμα της περιθλαστικής κατανομής είναι ουσιαστικά μονάδα

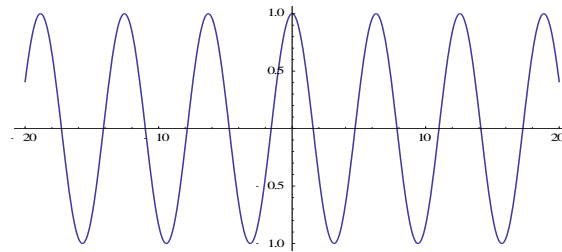
$$\exp \left[\frac{ik}{2z} (x_1^2 + y_1^2) \right] \approx 1 \quad 1.14$$

Έτσι η περιθλαστική κατανομή γίνεται

$$E(x_0, y_0) = \frac{\exp(ikz)}{i\lambda z} \exp\left[i\frac{k}{2z}(x_0^2 + y_0^2)\right] \times \iint E(x_1, y_1) \exp\left[-i\frac{2\pi}{\lambda z}(x_0x_1 + y_0y_1)\right] dx_1 dy_1$$

Η μορφή αυτή δεν είναι παρά ο μετασχηματισμός *Fourier* της κατανομής του πεδίου στην είσοδο. Οι συζυγείς μεταβλητές είναι οι συντεταγμένες εισόδου (x_1, y_1) με τις χωρικές συχνότητες $f_x = x_0/\lambda z$ και $f_y = y_0/\lambda z$. Άλλα παραδείγματα μετασχηματισμών έχουν συζυγείς μεταβλητές χρόνο (t) με γωνιακή συχνότητα (ω) , ή χωρική μεταβολή (x) με κυματαριθμό (k) . Για κάθε μετασχηματισμό *Fourier* υπάρχει ο αντίστροφος.

Μια εξαιρετικά απλή περίπτωση μετασχηματισμού *Fourier* είναι αυτή της συνάρτησης $\cos(\omega_0 t)$. Γνωρίζουμε τη συνάρτηση πολύ καλά στο χώρο του χρόνου (t) , μια περιοδική συνάρτηση με περίοδο $T = 2\pi/\omega_0$, εκτεινόμενη από το $-\infty$ έως το $+\infty$.



Μια συνημιτονική συνάρτηση στο χώρο του χρόνου

Πώς θα απεικονίζαμε την ίδια λοιπόν συνάρτηση στο χώρο των συχνοτήτων;

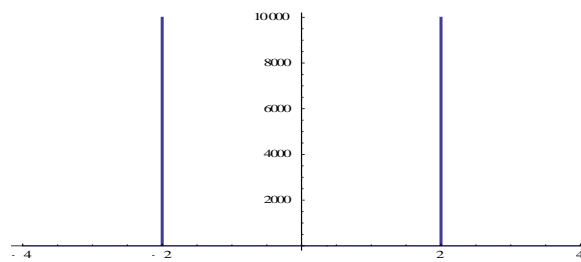
Έχουμε τις σχέσεις μετασχηματισμού *Fourier*

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \exp(-i\omega t) dt \quad \text{και} \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) \exp(i\omega t) d\omega \quad 1.16$$

Έτσι βρίσκουμε

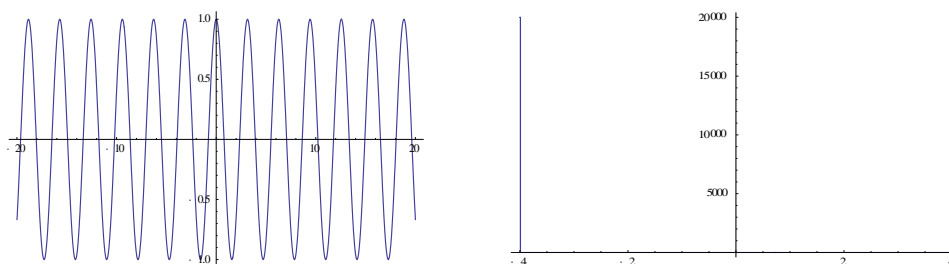
$$\begin{aligned} F\{\cos(\omega_0 t)\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\omega_0 t) \exp(-i\omega t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} [\exp(i\omega_0 t) + \exp(-i\omega_0 t)] \exp(-i\omega t) dt \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i(\omega - \omega_0)t) dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-i(\omega + \omega_0)t) dt \right\} \\ &= \pi(\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)) \end{aligned} \quad 1.17$$

Η τελευταία έκφραση είναι δύο συμμετρικές ως προς την αρχή των αξόνων συναρτήσεις δέλτα. Η συνάρτηση δεν άλλαξε απλώς είναι εκφρασμένη σε δυο διαφορετικούς χώρους. Τον ευθύ χώρο του χρόνου και τον αντίστροφο χώρο των συχνοτήτων.



Η συνημιτονική συνάρτηση εκφρασμένη στο χώρο συχνοτήτων. έστω $\omega_0 = 2$.

Αν η συνάρτηση έχει διπλάσια συχνότητα, στο χώρο των χρόνων θα είναι πιο συμπυκνωμένη, αλλά στο χώρο των συχνοτήτων οι θέσεις των δέλτα απομακρύνονται. Η συνάρτηση $\cos(2\omega_0 t)$ περιγράφεται στους δύο χώρους ως



Η συνημιτονική συνάρτηση διπλάσιας συχνότητας στο χώρο του χρόνου και συχνοτήτων.

Αυτό είναι ακριβώς το ίδιο φαινόμενο με τη συμβολή από δυο σχισμές! Δηλαδή, η περιοδικότητα των κροσσών βρίσκεται σε σχέση αντίστροφης αναλογίας με την απόσταση των πηγών d .

Κάπως έτσι έχουμε ότι για μια σύμφωνη κατανομή ακτινοβολίας που διαδίδεται στο χώρο, σε απόσταση αρκετά μακριά από τη μεγαλύτερη διάσταση της κατανομής θα σχηματιστεί μια περιθλαστική κατανομή που αντιστοιχεί στο μετασχηματισμό *Fourier* της κατανομής εισόδου.

Η αρχή αυτή είναι η βασική αρχή που διέπει την *περίθλαση Fraunhofer*. Για να υπολογίσουμε την περιθλαστική κατανομή σ' ένα πέτασμα θα βρούμε το μετασχηματισμό *Fourier* της κατανομής εισόδου $E(x_1, y_1) = E_0(x_1, y_1) \exp[i \varphi_0(x_1, y_1)]$ υπολογισμένο στις αντίστοιχες χωρικές συχνότητες.

$$E(x_0, y_0) = A \iint dx_1 dy_1 E(x_1, y_1) \exp[-i 2\pi(f_x x_1 + f_y y_1)] \quad 1.18$$

Από το τετράγωνο του μέτρου της κατανομής ηλεκτρικού πεδίου στο πέτασμα παρατήρησης θα υπολογίσουμε την κατανομή της φωτεινής περιθλαστικής έντασης. Η

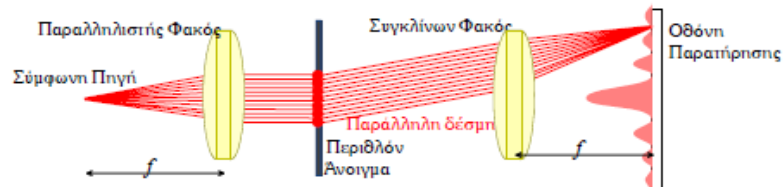
συνάρτηση εισόδου $E(x_1, y_1)$ καθορίζεται από τη μορφή του περιθλαστικού ανοίγματος ή την κατανομή της έντασης πεδίου στην είσοδο. Οι χωρικές συχνότητες αντιστοιχούν στις εκφράσεις

$$f_x = \frac{x_0}{\lambda z} = \frac{k_x x_0}{2\pi z} \approx \frac{k_x \sin\theta}{2\pi} \quad \text{και} \quad f_y = \frac{y_0}{\lambda z} = \frac{k_y y_0}{2\pi z} \approx \frac{k_y \sin\theta}{2\pi} \quad 1.19$$

Οι χωρικές συχνότητες έχουν διαστάσεις αντίστροφου μήκους, όπως και το κυματόνισμα. Οι συζυγείς μεταβλητές είναι το μήκος στον ευθύ χώρο ή χώρο θέσεων –πεδίο εισόδου- και οι χωρικές συχνότητες στον αντίστροφο χώρο ή χώρο ορμών- περιθλαστικό πεδίο. Στις εκφράσεις (1.19) η γωνία θ σχηματίζεται από τον οπτικό άξονα και την ακτίνα στο επίπεδο της περιθλαστικής κατανομής. Έτσι, οι χαμηλές συχνότητες αντιστοιχούν σε κυματόνισμα κοντά στον οπτικό άξονα ($\theta \ll, \sin\theta \ll$) και εκφράζουν τα αδρά χαρακτηριστικά του σήματος, κυρίως τη φωτεινότητα του, ενώ οι υψηλές συχνότητες αντιστοιχούν σε κυματόνισμα μακριά από τον οπτικό άξονα ($\theta \gg, \sin\theta \gg$) και εκφράζουν τα λεπτά χαρακτηριστικά τους σήματος.

Για να ισχύει, λοιπόν, η προσέγγιση *Fraunhofer* πρέπει και η πηγή αλλά και η οθόνη παρατήρησης να βρίσκονται σε πολύ μεγάλη απόσταση από το περιθλόν άνοιγμα, αρκετά μέτρα ίσως. Η συνθήκη αυτή μπορεί πρακτικά να πραγματοποιηθεί σε πολύ μικρότερο χώρο στο εργαστήριο με δύο συγκλίνοντες φακούς: έναν παραλληλιστή φακό που τοποθετείται μετά την πηγή σε απόσταση ίση με την εστιακή του απόσταση και έτσι παραλληλίζει τη δέσμη της. Έτσι για την περιοχή που η ένταση της προσπίπτουσας ακτινοβολίας είναι σταθερή και το μέτωπο κύματος παράλληλο ικανοποιείται το πρώτο ζεύγος συνθηκών *Fraunhofer*.

Για να ικανοποιήσουμε τη συνθήκη ότι σε κάθε σημείο του πετάσματος παρατήρησης συμβάλλουν παράλληλες ακτίνες από τα διάφορα σημεία του περιθλόντος ανοίγματος, πρέπει να τοποθετήσουμε την οθόνη παρατήρησης αρκετά μακριά από το περιθλόν άνοιγμα. Ωστόσο, αν στην πορεία των παράλληλων ακτίνων που εξέρχονται από το περιθλόν άνοιγμα τοποθετήσουμε ένα συγκλίνοντα φακό, τότε στο εστιακό επίπεδο του θα σχηματιστεί ο περιθλαστικός σχηματισμός με κέντρο συμμετρίας τον οπτικό άξονα, δηλαδή το σημείο που θα σχηματιζόταν το εστιακό σημείο της αρχικής παράλληλης δέσμης αν δεν παρεμβαλλόταν το περιθλόν άνοιγμα.



Στην πράξη λοιπόν ένας συγκλίνων φακός μεταφέρει το επίπεδο *Fraunhofer* στο εστιακό του επίπεδο, που απέχει απόσταση f .

Α'4 Περίθλαση από Σχισμή

Το περιθλόν άνοιγμα είναι μια σχισμή που στη μία διάσταση, έστω την x , έχει πλάτος a , ενώ εκτείνεται άπειρα στην y διάσταση. Είναι σαν ένα ορθογώνιο άνοιγμα, όπου η μία διάσταση είναι πολύ μεγαλύτερη απ' την άλλη. Θα υποθέσουμε ότι ισχύουν οι συνθήκες περίθλασης *Fraunhofer*. Στο άνοιγμα προσπίπτει σύμφωνη ακτινοβολία με μήκος κύματος λ , επίπεδο μέτωπο κύματος και σταθερό πλάτος. Έτσι η κατανομή πεδίου στην είσοδο θα έχει μονοδιάστατη διαμόρφωση:

$$E(x_1, y_1) = E_0 \exp[i\varphi] \operatorname{rect}\left(\frac{x_1}{a}\right) \quad 1.20$$

Η μορφή της συνάρτησης $\operatorname{rect}(x/a)$ είναι ένα μονοδιάστατο βήμα, που έχει τιμές 0 για $-x < -a/2$ και για $x > a/2$ και τιμές 1 για $-a/2 < x < a/2$.

Η περιθλαστική κατανομή *Fraunhofer* σε ένα πέτασμα παρατήρησης που απέχει απόσταση z υπολογίζεται εφαρμόζοντας τη σχέση (1.18):

$$E(x_0, y_0) = A \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{rect}\left(\frac{x_1}{a}\right) \exp\left[-i \frac{2\pi}{\lambda z} (x_0 x_1)\right] dx_1 \sim \int_{-a/2}^{a/2} \exp[-2\pi i f_x x_1] dx_1 \quad 1.21$$

Όπου $f_x = x_0/\lambda z$ οι χωρικές συχνότητες. Το ολοκλήρωμα είναι η συνάρτηση $\alpha \operatorname{sinc}(a f_x)$:

$$E(x_0, y_0) \sim \int_{-a/2}^{a/2} \exp[-i f_x x_1] dx_1 = \operatorname{sinc}(a f_x) = \operatorname{sinc}(a x_0/\lambda z) \quad 1.22$$

Η συνάρτηση sinc , με πλήρες όνομα *Cardinal Sine function* έχει τον εξής ορισμό:

$$\lim \operatorname{sinc}(t) = 1, \text{ για } t = 0 \text{ και } \operatorname{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}, \text{ για } t \neq 0 \quad 1.23$$

Εκφράζουμε την παράμετρο \bar{a} , τη γωνιακή παράμετρο περίθλασης που αντιστοιχεί στο πλάτος σχισμής a , μήκος κύματος λ και απόσταση παρατήρησης z ως:

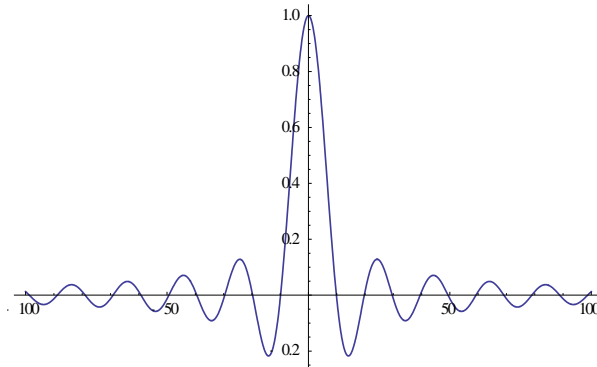
$$\bar{a} = \frac{1}{2} k \frac{a x_0}{z} = \pi \frac{a x_0}{\lambda z} = \pi \left(\frac{a}{\lambda}\right) \sin \theta_x \quad 1.24$$

Όπου θ_x είναι η γωνία μεταξύ της κάθετης στο άνοιγμα και της ακτίνας παρατήρησης.

Έτσι το περιθλαστικό πεδίο θα εκφράζεται από την σχέση

$$\text{περιθλαστικό πεδίο} \sim \operatorname{sinc}(\bar{a}/\pi) = (\sin \bar{a})/\bar{a} \quad 1.25$$

Η συνάρτηση $(\sin \bar{a})/\bar{a}$ έχει περιοδικά ισαπέχοντα μέγιστα και ελάχιστα κάθε φορά που η γωνιακή παράμετρος \bar{a} παίρνει τιμές ακέραιων πολλαπλασίων του π (*rad*):

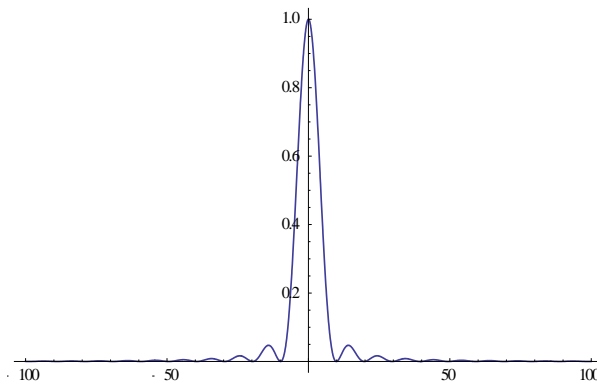


Συνάρτηση *sinc* ($\bar{\alpha}/\pi$)

Ενώ ενδιάμεσα εμφανίζονται εναλλαγές φάσης.

Η φωτεινή ένταση του περιθλαστικού μετασχηματισμού προκύπτει από το μέτρο του περιθλαστικού πεδίου στο τετράγωνο –δηλαδή το μέτρο του πεδίου επί το μιγαδικό συζυγές του. Έτσι :

$$\text{φωτεινή ένταση περιθλαστικής κατανομής } I(x_0, y_0) \sim \frac{(\sin^2 \bar{\alpha})}{\bar{\alpha}^2} \quad 1.26$$



Περιθλαστική κατανομή φωτεινής έντασης από απλή σχισμή

Η φωτεινή ένταση της περιθλαστικής κατανομής έχει μονοδιάστατη ανάπτυξη στο επίπεδο xz και είναι συμμετρική ως προς το επίπεδο που ορίζει ο μεγάλος άξονας της σχισμής με τον άξονα z . Εξασθενίζει γρήγορα με τη γωνιακή απομάκρυνση σχηματίζοντας μέγιστο-λοβούς – και ελάχιστο- μηδενική ένταση. Η μέγιστη τιμή της έντασης παρατηρείται ακριβώς στο κέντρο της περιθλαστικής κατανομής.

Το πρώτο ελάχιστο παρουσιάζεται για τιμές της χαρακτηριστικής γωνιακής παραμέτρου $\bar{\alpha} = +\pi \text{ rad}$. Συμμετρικά, το πρώτο ελάχιστο παρουσιάζεται για $\bar{\alpha} = -\pi \text{ rad}$. Δηλαδή το πάχος του κεντρικού μέγιστου λοβού αντιστοιχεί σε εύρος της γωνιακής παραμέτρου 2π . Σε κάθε πλευρά της περιθλαστικής κατανομής παρουσιάζονται περιοδικά μέγιστα και ελάχιστα που ισαπέχουν κατά γωνιακή παράμετρο π . Έτσι ο κεντρικός λοβός έχει 'πάχος' διπλάσιο των πλάγιων λοβών.

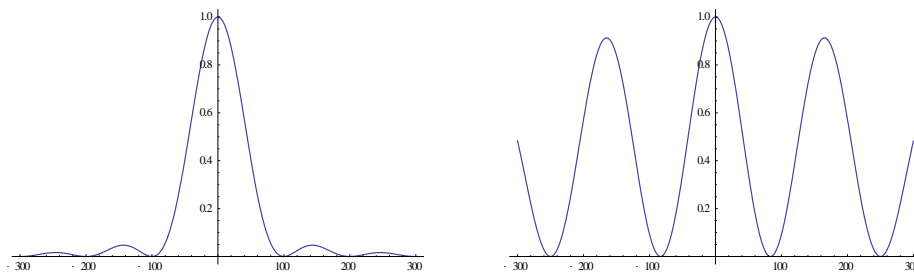
Μπορούμε να εκφράσουμε είτε σε μονάδες γωνιακής παραμέτρου περίθλασης $\bar{\alpha}$, σε αποστάσεις x_0 στο πέτασμα ή σε γωνία θ_x μεταξύ της κάθετης στο άνοιγμα και της ακτίνας παρατήρησης, με την προσέγγιση $\sin \theta \approx \theta$ (γωνία εκφρασμένη σε rad).

Για εκφράσεις σε γωνία παρατήρησης θ_x , η χαρακτηριστική ποσότητα είναι η γωνία λ/α , που παραμένει σταθερή, ανεξάρτητα από την απόσταση παρατήρησης z . Έτσι η γωνιακή διαμόρφωση της φωτεινής έντασης στο περιθλαστικό σχηματισμό είναι σταθερή και απλώς μεγαθύνεται για μεγαλύτερες αποστάσεις από το άνοιγμα. Η γωνία λ/α έχει μια ιδιαίτερα απλή έκφραση, και δίνει το γωνιακό διαχωρισμό των ελαχίστων, το γωνιακό πάχος των πλάγιων λοβών, και το μισό του γωνιακού πλάτους του κεντρικού λοβού. Ελάχιστα έντασης εμφανίζονται σε $m \lambda/\alpha$, όπου ο ακέραιος $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ εκφράζει την τάξη περίθλασης.

Το γωνιακό εύρος λοβού λ/α εξαρτάται μόνο από δύο παράγοντες, το μήκος κύματος λ και το πλάτος α της σχισμής. Έτσι η διαμόρφωση περίθλασης έχει μικρότερο γωνιακό άνοιγμα για μικρότερο λόγο λ/α .

Αν το μήκος κύματος είναι πολύ μικρότερο από το πλάτος της σχισμής (ή ισοδύναμα το πλάτος του ανοίγματος είναι πολύ μεγαλύτερο από το μήκος κύματος) τότε η χαρακτηριστική γωνία λ/α θα είναι πολύ μικρή και έτσι ο περιθλαστικός σχηματισμός τείνει προς τη γεωμετρική σκιά του ανοίγματος. Στο όριο $\lim \lambda \rightarrow 0$ η περιθλαστική κατανομή δίνει τη γεωμετρική σκιά του ανοίγματος! Αντίθετα όσο μικραίνει το εύρος του ανοίγματος σε σχέση με το μήκος κύματος, στο όριο $\lim \alpha \rightarrow \lambda$ τείνουμε στο όριο της σημειακής πηγής, και η χαρακτηριστική γωνία αυξάνει.

Είναι ενδιαφέρον να συγκρίνουμε την περιθλαστική κατανομή φωτεινής έντασης που προκύπτει από μια σχισμή πλάτους α με την ένταση κατανομής που προκύπτει από συμβολή δύο οπών που απέχουν απόσταση d του πειράματος *Young*.



Σύγκριση περιθλαστικών κατανομών απλής σχισμής πάχους α και κατανομής έντασης από δύο οπές που απέχουν απόσταση d .

Είναι φανερό ότι τα δύο φαινόμενα έχουν μεγάλο βαθμό συγγένειας και εμφανίζουν αρκετά κοινά στοιχεία. Είναι και τα δύο εκδηλώσεις της κυματικής φύσης του φωτός, και για να εκδηλωθούν απαιτείται κάποιος βαθμός συμφωνίας στο προσπίπτον κύμα. Το πόσο εκτείνεται ο περιθλαστικός σχηματισμός βρίσκεται σε άμεση σχέση με το βαθμό συμφωνίας του προσπίπτοντος κύματος. Για μικρό βαθμό συμφωνίας θα υπάρχουν λίγοι κροσσοί στη συμβολή και λίγοι λοβοί στη περίθλαση.

Μπορούμε να θεωρήσουμε το πείραμα *Young* ως φαινόμενο περίθλασης, αν θέσουμε ως περιθλόν άνοιγμα το σχήμα των δύο μικρών σχισμών. Έτσι στην οθόνη παρατήρησης το περιθλαστικό πεδίο είναι ο μετασχηματισμός *Fourier* της κατανομής εισόδου, και η φωτεινή ένταση είναι το τετράγωνο του πεδίου.

Θεωρούμε ότι οι οπές δεν έχουν σημειακό αλλά συγκεκριμένο μέγεθος, πάχους α και τα κέντρα τους απέχουν απόσταση d . Είναι σαφές ότι κάθε μια από τις σχισμές θα δώσει ξεχωριστά τον αντίστοιχο ανεξάρτητο περιθλαστικό σχηματισμό που αντιστοιχεί σε σχισμή πάχους α , με τον κύριο λοβό να εμφανίζει τον πρώτο μηδενισμό σε γωνία λ/α .

Θεωρούμε ότι το προσπίπτον πεδίο είναι ένα επίπεδο μέτωπο κύματος σταθερού μέτρου E παράλληλο με τον οπτικό άξονα του συστήματος z . Τότε το πεδίο που εξέρχεται από τη μια σχισμή, εστώ P_1 θα έχει επίσης μέτωπο κύματος αλλά οι παράλληλες δέσμες έχουν κλίση ως προς τον οπτικό άξονα

$$E_{P_1} = E \exp \left[i \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} r \right) \right] \exp \left[i \left(\frac{2\pi \left(\frac{d}{2} \right) x}{\lambda z} \right) \right] = E_P \exp \left[i \left(\frac{\pi d x}{\lambda z} \right) \right] \quad 1.27$$

Όπου $\frac{x}{z} = \sin \theta_x$ και οι αποστάσεις x μετρώνται πάνω στην οθόνη παρατήρησης που απέχει απόσταση z . Η κλίση της δέσμης καθορίζεται από τη μετατόπιση της σχισμής ως προς τον οπτικό άξονα που είναι $d/2$.

Το πεδίο από τη δεύτερη σχισμή P_2 θα είναι

$$E_{P_2} = E \exp \left[i \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} r \right) \right] \exp \left[i \left(\frac{2\pi \left(-\frac{d}{2} \right) x}{\lambda z} \right) \right] = E_P \exp \left[i \left(-\frac{\pi d x}{\lambda z} \right) \right] \quad 1.28$$

Μιας και αντιστοιχεί σε μετατόπιση $-d/2$. Θα είναι και αυτό επίπεδο μέτωπο κύματος αλλά με αντίθετη κλίση αυτή του P_1 .

Οι δύο περιθλαστικοί σχηματισμοί που προκύπτουν από την ξεχωριστή δράση των σχισμών βρίσκονται και οι δύο πάνω στον ίδιο οπτικό άξονα z και διαφέρουν μόνο ως προς τη φάση τους λόγω της διαφορετικής κλίσης των δεσμών με το πέτασμα. Η φωτεινή ένταση που προκαλείται μόνο από τη μία σχισμή κάθε φορά έχει ακριβώς την ίδια περιθλαστική κατανομή.

Τώρα δεν μπορούμε να αγνοήσουμε ότι στο πέτασμα παρατήρησης έχουμε την ταυτόχρονη παρουσία δύο κυμάτων, που είναι σύμφωνες. Η συνολική διαταραχή θα προκύψει από τη γραμμική επαλληλία των δύο κυμάτων, θα έχουμε έναν παράγοντα συμβολής που εξαρτάται από τη μέση απόσταση των δύο πηγών d . Ο παράγοντας συμβολής είναι απλά μια συνημιτοειδής συνάρτηση με χωρική περιοδικότητα $\lambda z/d$ και γωνιακή περιοδικότητα λ/d . Αυτό προκύπτει αν προσθέσουμε γραμμικά τα δύο πεδία στο πέτασμα παρατήρησης, E_{P_1}, E_{P_2} . Θα έχουμε τότε

$$E_{O\Lambda} = E_{P_1} + E_{P_2} = E_P \left(\exp \left[i \left(\frac{\pi d x}{\lambda z} \right) \right] + \exp \left[i \left(-\frac{\pi d x}{\lambda z} \right) \right] \right) = 2 E_P \cos \left[\frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta_x \right] \quad 1.29$$

Έτσι η φωτεινή ένταση του περιθλαστικού σχηματισμού των δύο σχισμών είναι το γινόμενο του περιθλαστικού σχηματισμού που προκύπτει από μια μόνο σχισμή, πολλαπλασιασμένο επί τον παράγοντα συμβολής

$$I_{\DeltaΥΟ \text{ ΣΧΙΣΜΩΝ}} = \underbrace{\frac{\sin^2\left(\frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta_x\right)}{\left(\frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta_x\right)^2}}_{\text{παράγοντας περίθλασης}} \times \underbrace{\cos^2\left[\frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta_x\right]}_{\text{παράγοντας συμβολής}} \quad 1.30$$

Σε σύγκριση με την ανεξάρτητη περιθλαστική κατανομή από μία σχισμή, η συνδυασμένη περιθλαστική κατανομή μπορεί να θεωρηθεί ως διαμόρφωση κατά πλάτος της φέρουσας συχνότητας. Η κατά πλάτος διαμόρφωση εξαρτάται από την ανεξάρτητη περιθλαστική κατανομή, που η κύριά της παράμετρος, το εύρος λοβού, είναι αντίστροφα ανάλογη του πλάτους a της σχισμής. Η φέρουσα συχνότητα έχει περιοδικότητα που είναι σε αντίστροφα ανάλογη σχέση με την απόσταση d των μέσων των δύο σχισμών.

Για πολύ μικρό πλάτος σχισμών, $a \approx \lambda$, η κατά πλάτος διαμόρφωση της φέρουσας συχνότητας θα είναι πολύ αργή μεταβολή και ουσιαστικά δεν θα αντιληφθούμε διαφορά από την ημιτονικής μορφής κατανομή που θα έχουμε αν αγνοήσουμε πλήρως τον περιθλαστικό παράγοντα.

Για μεγάλο πλάτος σχισμών ή για πυκνή απόσταση σχισμών, έτσι ώστε $d \approx a$, η κατά πλάτος διαμόρφωση θα παρουσιάσει επιπλέον ελάχιστα μέσα στους περιθλαστικούς λοβούς. Ο αριθμός αυτός θα αντιστοιχεί στο λόγο d/a .

Βιβλιογραφία

- Fraboni, S. (2011). "Two and three slit electron interference and diffraction experiments".
Am. Journ. Phys. 79 (6).
- Hibbs, R. Feynman (1965). *Quantum Mechanics and Path Integrals*. New York: McGraw-Hill ,
3rd. ed.
- Jonsson, C. (1961). "Elektroneninterferenzen an mehreren kunstlich hergestellten
Feinspalten". *Z.Phys.* 161 (4).
- R.P. Feynman, R. L. (1963). *The Feynman Lectures on Physics*. Reading, MA: Addison-Wesley.
- Stegun, M. A. (1965). *Handbook of Mathematical Functions*. New York: Dover.
- M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics: Electromagnetic Theory of Propagation,
Interference and Diffraction of Light*, 4th ed. (Pergamon, Oxford, 1969).
- R.P. Feynman, *Feynman's Thesis: A New Approach to Quantum Theory* (Laurie M. Brown) .
- Mathieu Beau (2011). "Feynman Path Integral approach to electron diffraction for one and
two slits, analytical results" ,Dublin Institute for Advanced Studies
- Lewis H. Ryder. *Quantum Field Theory* , 2nd ed. University of Kent at Canterbury
- Fernando Chaos U.,L Chaos-Cador and E. Ley-Koo, *Free-particle and harmonic-oscillator
propagators in two and three dimensions* ,2002