



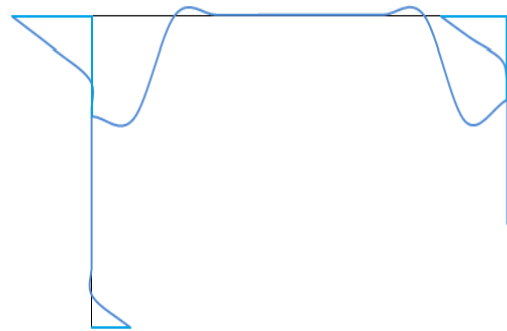
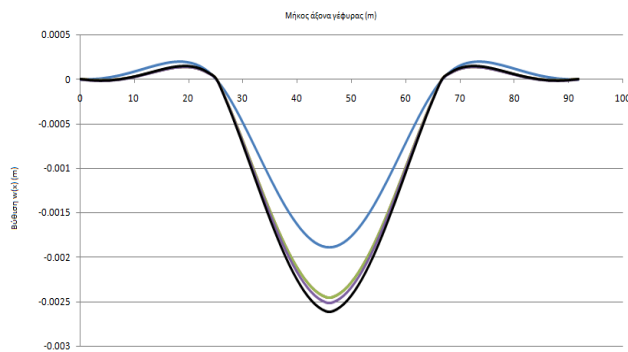
ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΔΟΜΟΣΤΑΤΙΚΗΣ

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΣΤΑΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΝΤΙΣΕΙΣΜΙΚΩΝ ΕΡΕΥΝΩΝ

ΕΞΕΛΙΓΜΕΝΕΣ ΘΕΩΡΙΕΣ ΔΟΚΟΥ ΣΤΗ ΜΗΤΡΩΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΡΑΒΔΩΤΩΝ ΦΟΡΕΩΝ



Διπλωματική Εργασία

Καπασακάλης Κωνσταντίνος

Επιβλέποντες : Σαπουντζάκης Ευάγγελος, Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αμαλία Αργυρίδη, υπ. Διδάκτορας Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Νοέμβρης 2015

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Εισαγωγή.....	1
1 Στοιχεία θεωρίας ελαστικότητας.....	3
1.1 Βασικοί Ορισμοί.....	3
1.2 Τρισδιάστατη ελαστικότητα.....	4
1.2.1 Τάσεις.....	4
1.2.2 Μετατοπίσεις - Παραμορφώσεις.....	7
1.2.3 Καταστατικές Εξισώσεις – Παραδοχές Γραμμικής Ελαστικότητας.....	10
1.2.4 Τα τρία Θεμελιώδη Προβλήματα της Ελαστικότητας.....	12
2 Διατμητικές παραμορφώσεις στο χωρικό στοιχείο δοκού – Ομοιόμορφη διάτμηση.....	17
2.1 Προκαταρκτικές έννοιες.....	17
2.2 Θεωρία δοκού Timoshenko.....	20
2.3 Ομοιόμορφη διάτμηση.....	24
2.4 Κέντρο Διάτμησης – Συντεταγμένες κέντρου διάτμησης.....	27
2.5 Διορθωτικοί συντελεστές διάτμησης - Συντελεστές διατμητικής παραμόρφωσης.....	27
2.6 Τοπικό Μητρώο Στιβαρότητας.....	28
3 Ανομοιόμορφη στρέψη ράβδου.....	33
3.1 Εισαγωγή.....	33
3.2 Μετατοπίσεις, παραμορφώσεις, τάσεις.....	35
3.2.1 Μετατοπίσεις.....	35
3.2.2 Παραμορφώσεις.....	37
3.2.3 Τάσεις.....	37
3.3 Προσδιορισμός της πρωτογενούς και δευτερογενούς συνάρτησης στρέβλωσης.....	39
3.4 Εντατικά μεγέθη , εξίσωση ισορροπίας , συνοριακές συνθήκες.....	41
3.5 Τοπικό Μητρώο Στιβαρότητας – Τοπικά Μητρώα Επικόμβιων Μετακινήσεων και Δράσεων.....	47
4 Ανομοιόμορφη διάτμηση.....	53
4.1 Προκαταρκτικές έννοιες και παραδοχές.....	53
4.2 Διατμητική υστέρηση.....	54

4.3	Μετατοπίσεις, παραμορφώσεις, τάσεις.....	54
3.2.1	Μετατοπίσεις.....	54
3.2.2	Παραμορφώσεις.....	62
3.2.3	Τάσεις.....	63
4.4	Εντατικά μεγέθη , καθολικές εξίσωση ισορροπίας , συνοριακές συνθήκες.....	65
4.5	Συναρτήσεις διατμητικής στρέβλωσης, τοπικές εξισώσεις ισορροπίας.....	68
4.6	Τοπικό Μητρώο Στιβαρότητας – Τοπικά Μητρώα Επικόμβιων Μετακινήσεων και Δράσεων.....	71
5	Γενικευμένη Στρέβλωση.....	75
5.1	Εισαγωγή-Προκαταρκτικές έννοιες.....	75
5.2	Μετατοπίσεις, παραμορφώσεις, τάσεις.....	79
5.3	Καθολικές εξισώσεις ισορροπίας.....	85
5.4	Συναρτήσεις στρέβλωσης λόγω διάτμησης.....	90
5.5	Συναρτήσεις στρέβλωσης λόγω στρέψης.....	93
5.6	Τοπικό Μητρώο Στιβαρότητας-Τοπικά Μητρώα Επικόμβιων Μετακινήσεων και Δράσεων.....	94
6	Αριθμητικό παράδειγμα μέρος 'Α : χωρικό πλαίσιο κοίλης ορθογωνικής διατομής.....	101
6.1	Εισαγωγή.....	101
6.2	Γεωμετρικά χαρακτηριστικά διατομής RHS 500X300X20.....	102
6.3	Μητρώα στιβαρότητας στοιχείων.....	103
6.4	Σύγκριση αποτελεσμάτων.....	112
6.4.1	Σύγκριση κινηματικών μεγεθών.....	112
6.4.2	Σύγκριση εντατικών μεγεθών.....	116
6.4.3	Σύγκριση τάσεων.....	123
7	Αριθμητικό παράδειγμα μέρος 'Β : καμπύλη γέφυρα κιβωτιοειδούς διατομής.....	127
7.1	Εισαγωγή.....	127
7.2	Γεωμετρικά χαρακτηριστικά κιβωτιοειδούς διατομής.....	128
7.3	Σύγκριση αποτελεσμάτων.....	129
7.3.1	Σύγκριση κινηματικών μεγεθών.....	129

7.3.2	Σύγκριση εντατικών μεγεθών	131
7.3.3	Σύγκριση τάσεων.....	134
Συμπεράσματα		139
Βιβλιογραφία		141

Εισαγωγή

Η παρούσα διπλωματική εργασία πραγματεύεται την επιρροή των στρεπτικών και διατμητικών στρεβλώσεων στη μητρική ανάλυση ραβδωτών φορέων, προσπαθώντας να αναδείξει τη σπουδαιότητα των παραμορφώσεων αυτών στον υπολογισμό των κινηματικών, εντατικών και τασικών μεγεθών της ράβδου. Προκειμένου να πραγματοποιηθεί αυτό κρίθηκε απαραίτητο η διπλωματική αυτή να έχει την εξής δομή:

- Κεφάλαιο1: Στοιχεία θεωρίας ελαστικότητας. Επεξηγείται η θεωρία ελαστικότητας στον βαθμό που είναι αναγκαίο προκειμένου στη συνέχεια να γίνει αντιληπτή η θεωρία στρέψης και διάτμησης.
- Κεφάλαιο2: Διατμητικές παραμορφώσεις στο χωρικό στοιχείο δοκού – Ομοιόμορφη διάτμηση. Αναλύεται η θεωρία Ομοιόμορφης διάτμησης εφαρμοσμένη στη μητρική ανάλυση ραβδωτών φορέων.
- Κεφάλαιο3: Ανομοιόμορφη στρέψη ράβδου. Αναλύεται η θεωρία Ανομοιόμορφης στρέψης εφαρμοσμένη στη μητρική ανάλυση ραβδωτών φορέων.
- Κεφάλαιο4: Ανομοιόμορφη διάτμηση. Αναλύεται η θεωρία Ανομοιόμορφης διάτμησης εφαρμοσμένη στη μητρική ανάλυση ραβδωτών φορέων.
- Κεφάλαιο5: Γενικευμένη Σρέβλωση. Παρουσιάζεται η θεωρία Γενικευμένης στρέβλωσης εφαρμοσμένη στη μητρική ανάλυση ραβδωτών φορέων.
- Κεφάλαιο6: Αριθμητικό παράδειγμα μέρος 'Α : χωρικό πλαίσιο κοίλης ορθογωνικής διατομής. Παρουσιάζεται χωρικό πλαίσιο και επιλύεται με τις προαναφερθείσες μεθόδους, με την θεωρία δοκού Euler-Bernoulli καθώς και με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων η οποία έγινε στο λογισμικό FEMAP_NASTRAN, και γίνεται σύγκριση στα κινηματικά, εντατικά και τασικά μεγέθη του φορέα.
- Κεφάλαιο7: Αριθμητικό παράδειγμα μέρος 'B : καμπύλη γέφυρα κιβωτιοειδούς διατομής. Παρουσιάζεται καμπύλη γέφυρα και επιλύεται με τις προαναφερθείσες μεθόδους, με την θεωρία δοκού Euler-Bernoulli καθώς και με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων η οποία έγινε στο λογισμικό FEMAP_NASTRAN, και γίνεται σύγκριση στα κινηματικά, εντατικά και τασικά μεγέθη του φορέα.

Στο σημείο αυτό είναι πολύ σημαντικό να ευχαριστήσω τους επιβλέποντες της παρούσας διπλωματικής εργασίας κ. Σαπουντζάκη Ευάγγελο (Καθηγητή ΕΜΠ) και την Αμαλία Αργυρίδη (Υποψήφια Διδάκτορα ΕΜΠ) για τη συνεχή βοήθεια, καθοδήγηση και επίλυση αποριών καθ' όλο το χρονικό διάστημα που διήρκησε η εργασία αυτή. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου και τους φίλους μου για την στήριξη που μου παρείχαν.

Αθήνα, Νοέμβριος 2015

Κεφάλαιο 1 : Στοιχεία Θεωρίας Ελαστικότητας

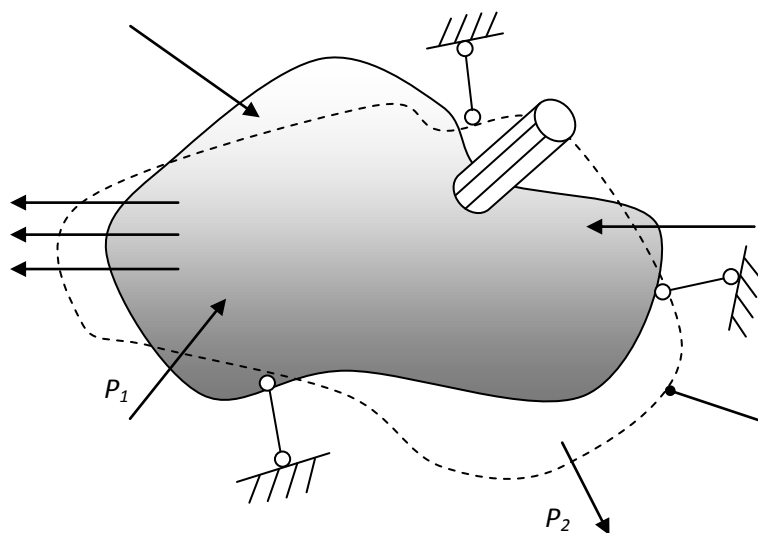
1.1.Βασικοί Ορισμοί

Θεωρούμε το στερεό παραμορφώσιμο σώμα, με δομή χωρίς ασυνέχειες του Σχήματος 1.1.1, επί του οποίου επιβάλλονται εξωτερικές δυνάμεις (καθολικές – επιφανειακές). Αποκόπτοντας και απομονώνοντας το αριστερό τμήμα (Σχήμα 1.1.1, Σχήμα 1.1.2), εμφανίζεται στην επιφάνεια της επίπεδης τομής μια συνισταμένη εσωτερική δύναμη ΔF , η οποία είναι ισοπολική των δυνάμεων του δεξιού τμήματος. Συμβολίζοντας το εμβαδόν της επιφάνειας τομής ως A , ορίζουμε ως τάση στο όριο του λόγου

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta A} \quad (1.1.1)$$

όπου

ΔA : ένα στοιχειώδες τμήμα της επιφάνειας που τείνει να μηδενιστεί



Σχήμα 1.1.1 Ελαστικό σώμα υπό την ενέργεια εξωτερικών δυνάμεων

Στη γενική περίπτωση, όπου η δύναμη ΔP έχει τυχαία διεύθυνση, ορίζουμε το κάθετο στην επιφάνεια διάνυσμα \vec{n} , οπότε αναλύοντας το διάνυσμα της δύναμης σε μια συνιστώσα παράλληλη στο \vec{n} (ΔP_n) και μια συνιστώσα κάθετη στο \vec{n} (ΔP_t) και άρα συνεπίπεδη στην επιφάνεια A , εξάγουμε τους παρακάτω ορισμούς :

Ορθή Τάση :

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta P_n}{\Delta A} \quad (1.1.2)$$

Διατμητική Τάση :

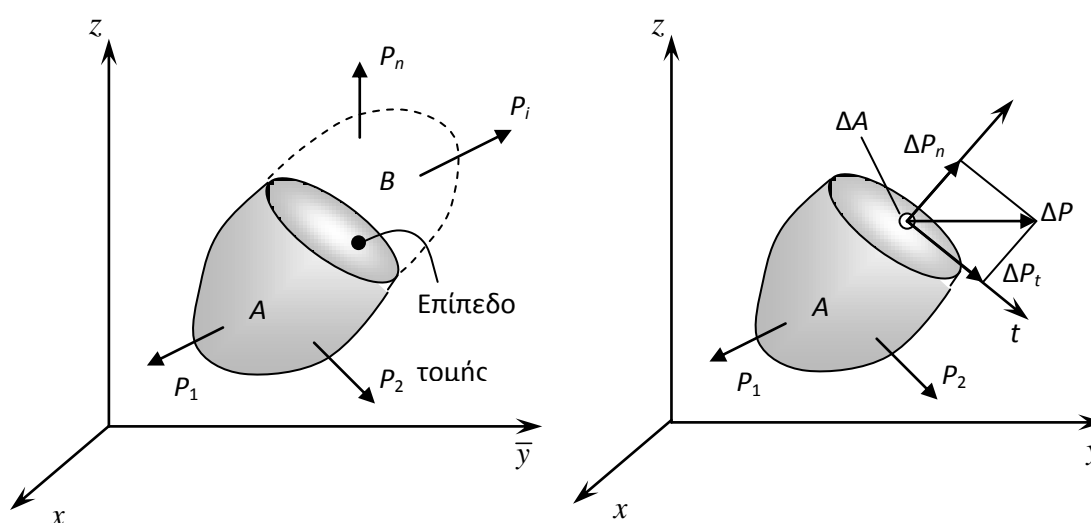
$$\tau = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta P_t}{\Delta A} \quad (1.1.3)$$

Με βάση τα παραπάνω ορίζουμε τη διάτμηση ως εξής :

Διάτμηση είναι το εντατικό αποτέλεσμα το οποίο οφείλεται στις αναπτυσσόμενες διατμητικές τάσεις. Οι διατμητικές τάσεις σε συνδυασμό με τις ορθές τάσεις αποκαθιστούν την ισορροπία για

κάθε στοιχειώδες τμήμα ενός στερεού σώματος, ενώ ταυτόχρονα είναι υπαίτιες για εσωτερικές παραμορφώσεις, δημιουργώντας με αυτόν τον τρόπο ένα μηχανισμό μεταβίβασης της εξωτερικής καταπόνησης του σώματος (καθολικές – επιφανειακές δυνάμεις) στο εσωτερικό του.

Είναι λοιπόν προφανές ότι κατά τον σχεδιασμό των έργων πολιτικού μηχανικού είναι απαραίτητος ο ακριβέστερος, όσο το δυνατόν, υπολογισμός των εσωτερικών εντατικών μεγεθών (ορθές και διατμητικές τάσεις), καθώς και των προκαλούμενων παραμορφώσεων. Μια λύση στο πρόβλημα αυτό δίνει η **Θεωρία της Ελαστικότητας**. Η Θεωρία της Ελαστικότητας, παρά τις όποιες παραδοχές κάνει για τη φύση των σωμάτων, αποτελεί ένα αρκετά ακριβές μαθηματικό εργαλείο, με το οποίο έχοντας ως δεδομένα την γεωμετρία, την εξωτερική φόρτιση και τις μηχανικές ιδιότητες του υλικού μπορούμε να προσδιορίσουμε πλήρως την εσωτερική καταπόνηση ενός σώματος με τον υπολογισμό των τάσεων και των παραμορφώσεων σε κάθε σημείο του.



Σχήμα 1.1.2 Επίπεδη τομή σε ελαστικό σώμα

1.2. Τρισδιάστατη Ελαστικότητα

Στη γενικότερη περίπτωση κάθε πρόβλημα πολιτικού μηχανικού αντιμετωπίζεται από τη Θεωρία Ελαστικότητας στον τρισδιάστατο χώρο. Όπως προαναφέρθηκε, η εσωτερική απόκριση ενός σώματος σε εξωτερική καταπόνηση περιγράφεται από τις αναπτυσσόμενες τάσεις και τις προκαλούμενες παραμορφώσεις.

1.2.1. Τάσεις

Για τον καθορισμό της έννοιας της τάσεως στον τρισδιάστατο χώρο θεωρούμε ένα στοιχειώδες τμήμα του υλικού, μορφής κύβου με απειροστές διαστάσεις (dx, dy, dz), οι πλευρές του οποίου είναι παράλληλες στα επίπεδα του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων $Oxyz$ (Σχήμα 1.2.1). Σε κάθε πλευρά του κύβου ασκούνται δυνάμεις οι οποίες εάν διαιρεθούν με την επιφάνεια και αναλυθούν σε συνιστώσες παράλληλες στους άξονες x, y, z προκύπτουν οι παρακάτω συνιστώσες των τάσεων σε μητρική μορφή

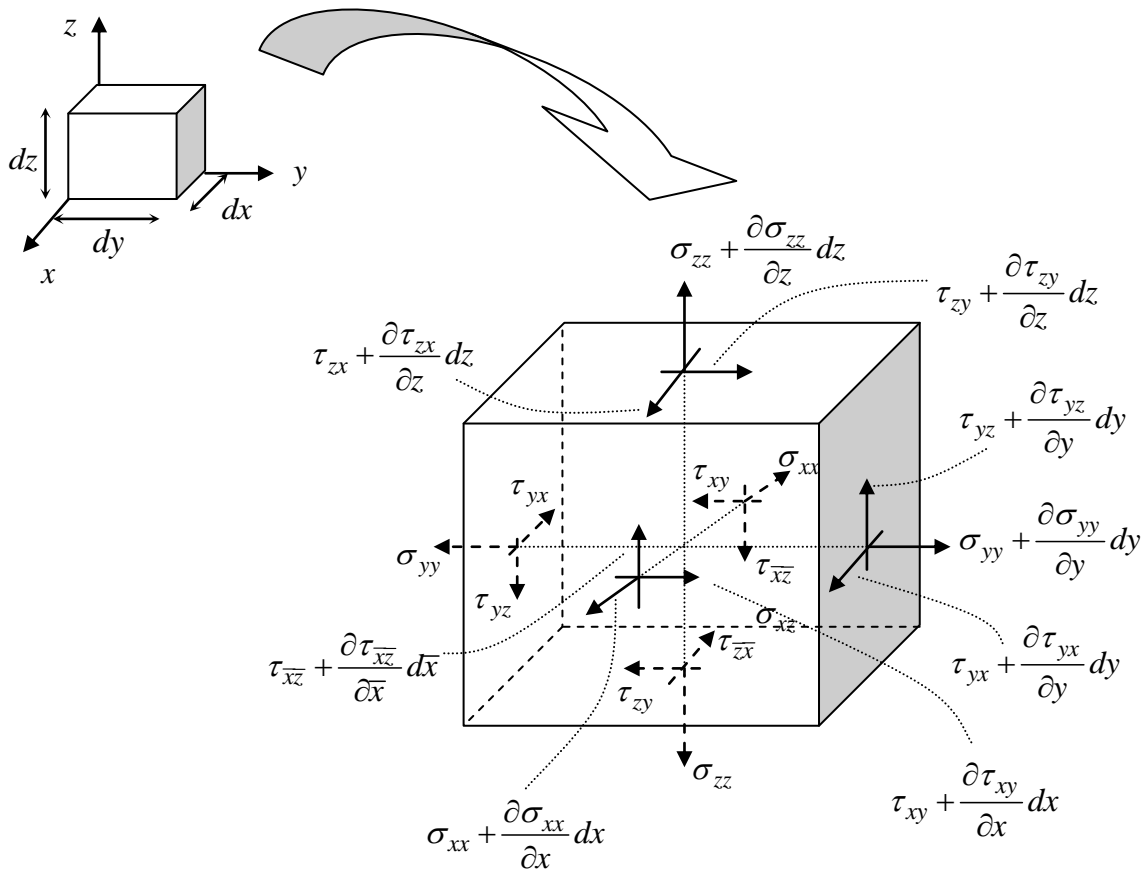
$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (1.2.1)$$

όπου

$\sigma_{ii}(i=x, y, z)$: οι ορθές τάσεις

$\tau_{ij}(i,j=x, y, z)$: οι διατμητικές τάσεις

Όπως είναι γνωστό το παραπάνω μητρώο αποτελεί έναν συμμετρικό τανυστή 2^{ης} τάξης. Οι συνιστώσες των τάσεων αποτελούν συναρτήσεις της θέσης του σημείου στο ελαστικό σώμα. Επομένως μεταβάλλονται κατά την μετακίνηση του επιπέδου αναφοράς κατά dx, dy, dz . Τη μεταβολή αυτή την εκφράζουμε με τη βοήθεια του αναπτύγματος Taylor, διατηρώντας τους δύο πρώτους όρους (Σχήμα 1.2.1).



Σχήμα 1.2.1 Συνιστώσες τάσεων σε στοιχειώδη κύβο διαστάσεων dx, dy, dz

Επισημαίνουμε σε αυτό το σημείο τα εξής :

- Οι δείκτες i, j στον συμβολισμό τ_{ij} δηλώνουν αντίστοιχα τη διεύθυνση του κάθετου διανύσματος στο επίπεδο και τη διεύθυνση του διανύσματος της συνιστώσας των τάσεων.
- Ορίζουμε ως θετικές ορθές τάσεις τις εφελκυστικές και ως αρνητικές τις θλιπτικές.

Όσον αφορά τις διατμητικές, θεωρούμε ότι αυτές είναι θετικές εάν έχουν την φορά των θετικών αξόνων του καρτεσιανού συστήματος, εφόσον η αντίστοιχη θετική ορθή τάση έχει κι αυτή φορά θετικού άξονα. Αντίστοιχα εάν η ορθή τάση έχει φορά αντίθετη του θετικού άξονα, οι θετικές φορές των διατμητικών αντιστρέφονται.

Εφαρμόζοντας στον στοιχειώδη κύβο (Σχήμα 1.2.1) τις εξισώσεις ισορροπίας κατά τις τρεις διευθύνσεις x, y, z προκύπτουν (εφαρμόζοντας απλή άλγεβρα) οι παρακάτω σχέσεις :

$$\text{Διεύθυνση } x : \quad \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + p_x = 0 \quad (1.2.2)$$

$$\text{Διεύθυνση } y : \quad \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + p_y = 0 \quad (1.2.3)$$

$$\text{Διεύθυνση } z : \quad \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + p_z = 0 \quad (1.2.4)$$

όπου

p_x, p_y, p_z : οι συνιστώσες του διανύσματος της δύναμης πεδίου ανά μονάδα όγκου

Σημειώνουμε ότι οι τρεις εξισώσεις ροπών έχουν ήδη χρησιμοποιηθεί για την εξαγωγή των σχέσεων, σύμφωνα με το θεώρημα Cauchy

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}, \tau_{zx} = \tau_{xz} \quad (1.2.5)$$

Τέλος είναι χρήσιμο για την περαιτέρω ανάλυση που θα ακολουθήσει να παραθέσουμε τη σχέση μεταξύ των συνιστωσών του τανυστή των τάσεων που δρουν σε ένα σημείο O και του διανύσματος τάσης σ_n που δρα σε επίπεδο τυχούσας διεύθυνσης, η οποία χαρακτηρίζεται από ένα κάθετο στο επίπεδο διάνυσμα \vec{n} που διέρχεται από το O . Θεωρούμε το στοιχειώδες τετράεδρο (Σχήμα 1.2.2). Εφαρμόζοντας τις συνθήκες ισορροπίας για τη διεύθυνση \vec{x} θα έχουμε

$$\tau_{nx} \cdot dS - \sigma_{xx} \cdot dS_x - \tau_{yx} \cdot dS_y - \tau_{zx} \cdot dS_z - f_x \cdot dV = 0 \quad (1.2.6)$$

όπου

dS_x, dS_y, dS_z, dS, dV : το εμβαδόν των πλευρών OAC, OAB, OBC, ABC και ο όγκος του τετραπλεύρου αντίστοιχα

Ισχύει ότι

$$dS_x = dS \cdot \lambda_{nx} \quad (1.2.7)$$

$$dS_y = dS \cdot \lambda_{ny} \quad (1.2.8)$$

$$dS_z = dS \cdot \lambda_{nz} \quad (1.2.9)$$

$$dV = dS \cdot h \quad (1.2.10)$$

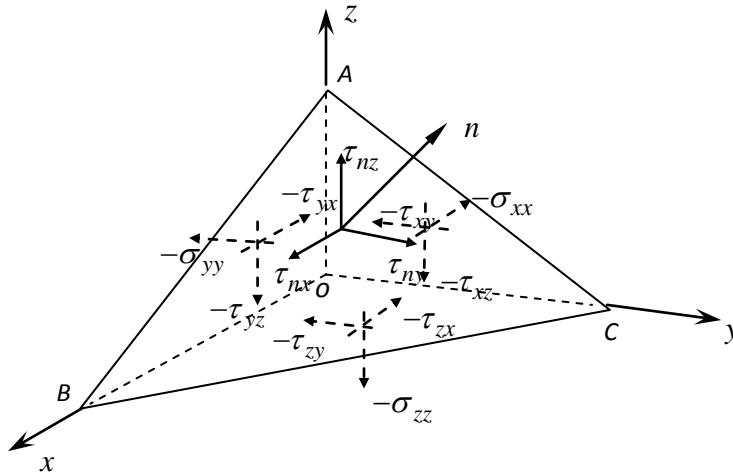
όπου

h : η απόσταση της πλευράς ABC από το O και λ_{ni} ($i = x, y, z$) τα συνημίτονα των γωνιών που σχηματίζει το διάνυσμα \vec{n} με τους άξονες x, y, z

Αντικαθιστώντας τις (1.2.7)-(1.2.10) στην εξίσωση ισορροπίας (1.2.6) προκύπτει

$$\begin{aligned} \tau_{nx} \cdot dS - \sigma_{xx} \cdot dS \cdot \lambda_{nx} - \tau_{yx} \cdot dS \cdot \lambda_{ny} - \tau_{zx} \cdot dS \cdot \lambda_{nz} - f_x \cdot dS \cdot h = 0 \rightarrow \\ \tau_{nx} - \sigma_{xx} \cdot \lambda_{nx} - \tau_{yx} \cdot \lambda_{ny} - \tau_{zx} \cdot \lambda_{nz} - f_x \cdot h = 0 \end{aligned} \quad (1.2.11)$$

Ομοίως και για τις διευθύνσεις y και z .



Σχήμα 1.2.2 Συνιστώσες των τάσεων επιπέδου τυχούσης διεύθυνσης \vec{n}

Για τετράεδρο με απειροελάχιστες διαστάσεις ($h \rightarrow 0$) και με τη βοήθεια του θεωρήματος Cauchy προκύπτουν τελικά οι παρακάτω σχέσεις

$$\tau_{xn} = \sigma_{xx} \cdot \lambda_{nx} + \tau_{xy} \cdot \lambda_{ny} + \tau_{xz} \cdot \lambda_{nz} \quad (1.2.12)$$

$$\tau_{yn} = \tau_{yx} \cdot \lambda_{nx} + \sigma_{yy} \cdot \lambda_{ny} + \tau_{yz} \cdot \lambda_{nz} \quad (1.2.13)$$

$$\tau_{zn} = \tau_{zx} \cdot \lambda_{nx} + \tau_{zy} \cdot \lambda_{ny} + \sigma_{zz} \cdot \lambda_{nz} \quad (1.2.14)$$

Οι παραπάνω σχέσεις όπως θα δούμε παρακάτω χρησιμοποιούνται για να εκφράσουν τις συνοριακές συνθήκες στα προβλήματα Τρισδιάστατης Ελαστικότητας.

1.2.2.Μετατοπίσεις – Παραμορφώσεις

Με την προϋπόθεση ότι το υλικό σώμα στηρίζεται έτσι ώστε να εμποδίζονται οι μετακινήσεις στερεού σώματος, κάτω από την επενέργεια εξωτερικών φορτίσεων το σώμα παραμορφώνεται και επομένως κάθε υλικό σημείο του θα υφίσταται μετατοπίσεις. Οι μετατοπίσεις αυτές περιγράφονται από το λεγόμενο **πεδίο μετατοπίσεων**, δηλαδή συναρτήσεις της θέσης του σημείου (x, y, z) που εκφράζουν τις μετατοπίσεις κατά τις τρεις διευθύνσεις x, y και z

$$\text{Μετατόπιση κατά } x : \quad u = u(x, y, z) \quad (1.2.15)$$

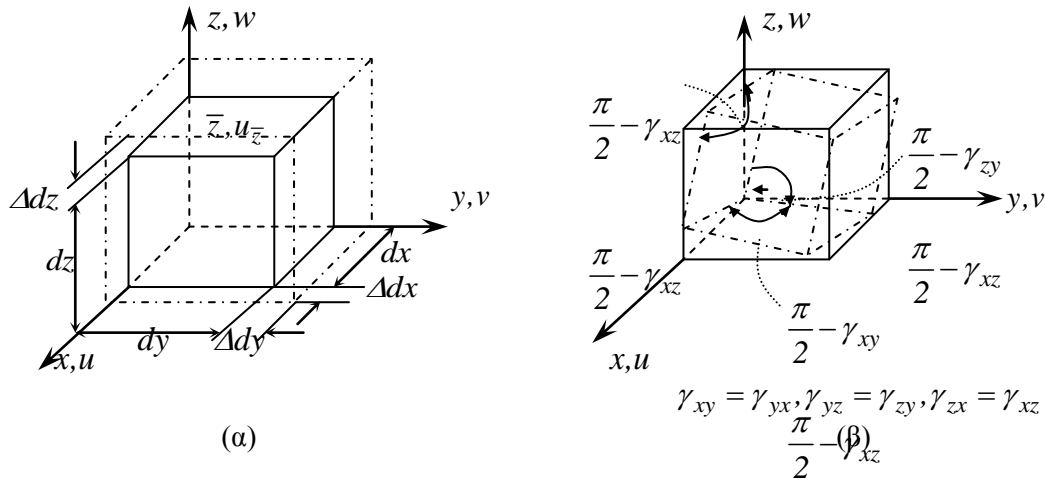
$$\text{Μετατόπιση κατά } y : \quad v = v(x, y, z) \quad (1.2.16)$$

$$\text{Μετατόπιση κατά } z : \quad w = w(x, y, z) \quad (1.2.17)$$

Για να συσχετίσουμε τις μετατοπίσεις με τις παραμορφώσεις θεωρούμε πάλι τον στοιχειώδη κύβο, διαστάσεων dx, dy, dz (Σχήμα 1.2.3 α,β). Επισημαίνουμε ότι στα πλαίσια της ελαστικής θεωρίας υιοθετούμε την **παραδοχή των μικρών μετατοπίσεων**. Έτσι ορίζουμε τις ορθές

παραμορφώσεις ως τον λόγο μεταβολής του μήκους προς το αρχικό μήκος. Π.χ. κατά τη διεύθυνση x θα είναι

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\Delta dx}{dx} \quad (1.2.18)$$



Σχήμα 1.2.3 Παραμόρφωση στοιχειώδους κύβου: ορθές παραμορφώσεις(α), διατμητικές παραμορφώσεις(β).

Όπως και με τις συνιστώσες των τάσεων, έτσι κι εδώ εκφράζουμε τη μεταβολή των τιμών των μετατοπίσεων από σημείο σε σημείο με τη βοήθεια του αναπτύγματος Taylor $\left(\Delta dx = \frac{\partial u}{\partial x} dx \right)$. Άρα τελικά προκύπτει

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1.2.19)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (1.2.20)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (1.2.21)$$

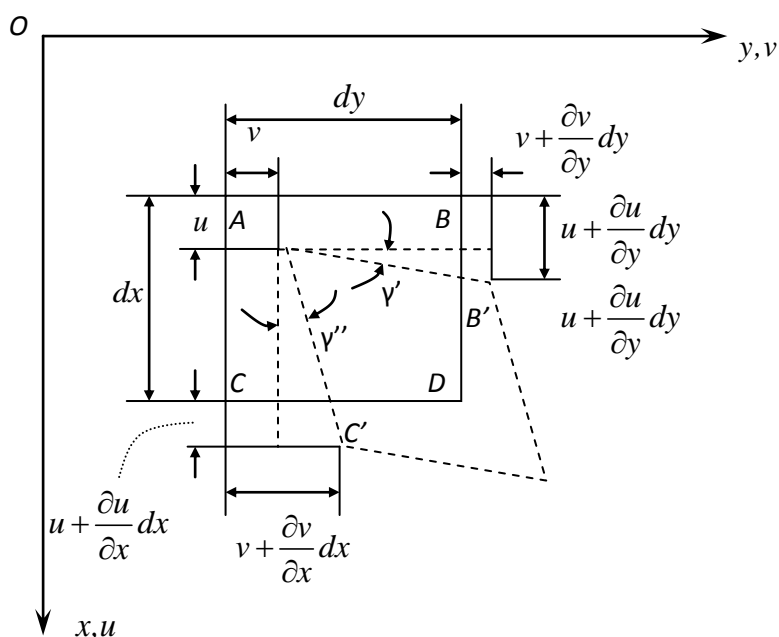
Οι διατμητικές παραμορφώσεις εκφράζουν την στροφή των αρχικά κάθετων εδρών του κύβου. Εξετάζοντας την προβολή της έδρας στο Καρτεσιανό επίπεδο xOy (Σχήμα 1.2.4), ορίζουμε τη διατμητική παραμόρφωση

$$\gamma_{xy} = \gamma' + \gamma'' = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \gamma_{yx} \quad (1.2.22)$$

Ομοίως ορίζονται οι διατμητικές παραμορφώσεις στα επίπεδα yz και zx

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \gamma_{zy} \quad (1.2.23)$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \gamma_{xz} \quad (1.2.24)$$



Σχήμα 1.2.4 Διατμητικές παραμορφώσεις στοιχειώδους κύβου στο επίπεδο xOy

Όμοια λοιπόν με τις τάσεις, ορίζεται ο συμμετρικός τανυστής 2^{ης} τάξης, ο οποίος καθορίζει πλήρως την παραμόρφωση που υφίσταται το σώμα σ' ένα υλικό του σημείο με συντεταγμένες (x, y, z) .

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2} \cdot \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \cdot \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \cdot \gamma_{yx} & \varepsilon_{yy} & \frac{1}{2} \cdot \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \cdot \gamma_{zx} & \frac{1}{2} \cdot \gamma_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (1.2.25)$$

Όπως παρατηρούμε από τις εξισώσεις (1.2.19)-(1.2.24) οι συνιστώσες της παραμόρφωσης $\varepsilon_{ij}(x, y, z)$ ($i, j = x, y, z$) εκφράζονται μονοσήμαντα σαν συναρτήσεις των u, v και w . Ας θεωρήσουμε το αντίστροφο πρόβλημα, δηλαδή ας υποθέσουμε ότι οι $\varepsilon_{ij}(x, y, z)$ είναι γνωστές συναρτήσεις και θέλουμε να εκφράσουμε τις συνιστώσες u, v, w συναρτήσεις αυτών. Παρατηρούμε ότι έχουμε έξι εξισώσεις για τρεις αγνώστους. Χρησιμοποιώντας τις τρεις από αυτές και λύνοντας ως προς u, v και w , θα προκύψουν τιμές οι οποίες, εν γένει, δεν θα ικανοποιούν τις υπόλοιπες τρεις εξισώσεις. Επομένως οι συναρτήσεις $\varepsilon_{ij}(x, y, z)$ δεν μπορεί να είναι αυθαίρετες, αλλά θα πρέπει να ικανοποιούν ορισμένες εξισώσεις. Οι εξισώσεις αυτές ονομάζονται **εξισώσεις συμβιβαστού**. Οι εξισώσεις συμβιβαστού αποτελούν τη μαθηματική διατύπωση της συνθήκης συνέχειας του

παραμορφώσιμου σώματος. Δηλαδή θέτουν περιορισμούς στη μορφή των εξισώσεων $\varepsilon_{ij}(x, y, z)$, έτσι ώστε να επιτυγχάνεται η σύνδεση των παραμορφωμένων κύβων και να μην λύεται η συνέχεια του υλικού. Οι εξισώσεις συμβιβαστού προκύπτουν από τις σχέσεις (1.2.19)-(1.2.24) με απαλοιφή των συνιστωσών των μετατοπίσεων και ύστερα από διαδοχικές παραγωγίσεις. Έτσι καταλήγουμε στις παρακάτω εξισώσεις

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (1.2.26)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \quad (1.2.27)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} \quad (1.2.28)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right] = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x \partial y} \quad (1.2.29)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right] = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z} \quad (1.2.30)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} \right] = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x \partial z} \quad (1.2.31)$$

1.2.3. Καταστατικές Εξισώσεις – Παραδοχές Γραμμικής Ελαστικότητας

Με όσα έχουν αναφερθεί συμπεραίνουμε ότι το πρόβλημα της τρισδιάστατης ελαστικότητας προσδιορίζεται από 15 αγνώστους :

Έξι συνιστώσες τάσεων

Έξι συνιστώσες παραμορφώσεων

Τρεις συνιστώσες μετατοπίσεων

Όμως μέχρι τώρα έχουμε παρουσιάσει μόνο 9 εξισώσεις :

Τρεις εξισώσεις ισοροπίας

Έξι εξισώσεις μετατοπίσεων – παραμορφώσεων

Οι εξισώσεις συμβιβαστού δεν αποτελούν πρόσθετες (ανεξάρτητες) εξισώσεις που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την επίλυση. Απλά εκφράζουν τους περιορισμούς για την μορφή των συναρτήσεων $\varepsilon_{ij}(x, y, z)$, ώστε να μην καταλύεται η συνέχεια του υλικού.

Επομένως το πρόβλημα είναι 6 φορές αόριστο. Στη θεωρία της ελαστικότητας αίρεται αυτή η αοριστία με την εισαγωγή σχέσεων που συνδέουν τις τάσεις με τις παραμορφώσεις. Οι εξισώσεις αυτές ονομάζονται **καταστατικές εξισώσεις**. Στην ουσία εισάγουν τις μηχανικές ιδιότητες που χαρακτηρίζουν το υλικό. Οι μηχανικές ιδιότητες βασίζονται σε κάποιες παραδοχές που γίνονται στα πλαίσια της Ελαστικής Θεωρίας (νόμος του Hooke). **Στο εξής θα θεωρούμε ότι ισχύουν οι ακόλουθες παραδοχές :**

➤ Το υλικό είναι **ομοιογενές**. Επομένως οι μηχανικές ιδιότητες είναι ίδιες για κάθε σημείο του υλικού.

- Το υλικό είναι **ισότροπο**. Δηλαδή οι ιδιότητες ενός σημείου του υλικού παραμένουν ίδιες, ανεξαρτήτως της διεύθυνσης την οποία εξετάζουμε.
- Το υλικό είναι **γραμμικά ελαστικό**. Αυτό σημαίνει ότι κάθε συνιστώσα των τάσεων είναι γραμμικός συνδυασμός των συνιστωσών των παραμορφώσεων. Επίσης με τον μηδενισμό των επιβαλλόμενων τάσεων το υλικό επανέρχεται στην αρχική απαραμόρφωτη κατάσταση. Ισχύει λοιπόν η σχέση

$$\sigma_{ij} = k_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl} \quad (1.2.32)$$

όπου ισχύει η σύμβαση πρόσθεσης των δεικτών

Με βάση τις παραπάνω παραδοχές οι καταστατικές εξισώσεις σε μητρική μορφή γράφονται

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{12} & 0 & 0 & 0 \\ k_{12} & k_{11} & k_{12} & 0 & 0 & 0 \\ k_{12} & k_{12} & k_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (k_{11}-k_{12}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (k_{11}-k_{12}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (k_{11}-k_{12}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \end{bmatrix} \quad (1.2.33)$$

Για να βρούμε τις σταθερές k_{11} και k_{12} (ελαστικές σταθερές) εκτελούμε πειράματα απλού εφελκυσμού $\left(\varepsilon = \frac{\sigma}{E}, \varepsilon_{εγκαρσια} = -\nu \cdot \frac{\sigma}{E} \right)$ και απλής διάτμησης $(\tau = G \cdot \gamma)$. Οπότε προκύπτουν

$$k_{11} = \frac{E \cdot (1-\nu)}{(1+\nu) \cdot (1-2\nu)}, \quad k_{12} = \frac{\nu \cdot E}{(1+\nu) \cdot (1-2\nu)}, \quad (k_{11}-k_{12}) = 2 \cdot G \quad (1.2.34)$$

όπου

E : μέτρο ελαστικότητας

$G = \frac{E}{2 \cdot (1+\nu)}$: μέτρο διάτμησης

ν : λόγος Poisson ($0 < \nu < 0,5$)

Οι καταστατικές εξισώσεις έχουν τη μορφή

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{(1+\nu) \cdot (1-2\nu)} \left[(1-\nu) \cdot \varepsilon_{xx} + \nu \cdot (\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) \right] \quad (1.2.35)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{(1+\nu) \cdot (1-2\nu)} \left[(1-\nu) \cdot \varepsilon_{yy} + \nu \cdot (\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{xx}) \right] \quad (1.2.36)$$

$$\sigma_{zz} = \frac{E}{(1+\nu) \cdot (1-2\nu)} \left[(1-\nu) \cdot \varepsilon_{zz} + \nu \cdot (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \right] \quad (1.2.37)$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2 \cdot (1+\nu)} \cdot \gamma_{xy} \quad (1.2.38)$$

$$\tau_{yz} = \frac{E}{2 \cdot (1+\nu)} \cdot \gamma_{yz} \quad (1.2.39)$$

$$\tau_{zx} = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} \cdot \gamma_{zx} \quad (1.2.40)$$

ή

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} \cdot \left[\sigma_{xx} - \nu \cdot (\sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \right] \quad (1.2.41)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} \cdot \left[\sigma_{yy} - \nu \cdot (\sigma_{zz} + \sigma_{xx}) \right] \quad (1.2.42)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E} \cdot \left[\sigma_{zz} - \nu \cdot (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \right] \quad (1.2.43)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2 \cdot (1 + \nu)}{E} \cdot \tau_{xy} \quad (1.2.44)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{2 \cdot (1 + \nu)}{E} \cdot \tau_{yz} \quad (1.2.45)$$

$$\gamma_{zx} = \frac{2 \cdot (1 + \nu)}{E} \cdot \tau_{zx} \quad (1.2.46)$$

1.2.4. Τα τρία Θεμελιώδη Προβλήματα της Ελαστικότητας

Συνοψίζοντας τα προηγούμενα παρατηρούμε ότι το μαθηματικό πρόβλημα της ελαστικότητας έγκειται στον υπολογισμό 15 αγνώστων

Έξι συνιστώσες τάσεων

Έξι συνιστώσες παραμορφώσεων

Τρεις συνιστώσες μετατοπίσεων

Επίσης έχουμε ένα σύστημα 15 διαφορικών εξισώσεων

Τρεις εξισώσεις ισορροπίας

Έξι εξισώσεις παραμορφώσεων - μετατοπίσεων

Έξι εξισώσεις τάσεων – παραμορφώσεων

Επομένως το πρόβλημα επιδέχεται λύση (που όπως αποδεικνύεται είναι μοναδική). Η επίλυση όμως των διαφορικών εξισώσεων οδηγεί σε γενική λύση. Για να βρούμε την ειδική λύση του προβλήματος θα πρέπει να λάβουμε υπόψη μας την ταυτόχρονη ικανοποίηση επιπρόσθετων συνθηκών στα σύνορα του παραμορφώσιμου σώματος, τις λεγόμενες **συνοριακές συνθήκες**. Έτσι λοιπόν ανάλογα με τη φύση των συνοριακών συνθηκών προκύπτουν τα τρία θεμελιώδη προβλήματα.

1) Πρόβλημα Neumann

Στο πρόβλημα αυτό οι συνοριακές συνθήκες αφορούν την εντατική κατάσταση στα σύνορα του παραμορφώσιμου σώματος. Εάν Γ είναι το σύνολο των σημείων που απαρτίζουν το σύνορο, τότε με βάση τις σχέσεις (1.2.12)-(1.2.14) έχουμε

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} \cdot \lambda_{nx} + \tau_{xy} \cdot \lambda_{ny} + \tau_{xz} \cdot \lambda_{nz} &= \sigma_{xn} \\ \tau_{yx} \cdot \lambda_{nx} + \sigma_{yy} \cdot \lambda_{ny} + \tau_{yz} \cdot \lambda_{nz} &= \sigma_{yn} \\ \tau_{zx} \cdot \lambda_{nx} + \tau_{zy} \cdot \lambda_{ny} + \sigma_{zz} \cdot \lambda_{nz} &= \sigma_{zn} \end{aligned} \quad , \text{ για κάθε σημείο στο σύνορο } \Gamma \quad (1.2.47)$$

2) Πρόβλημα Dirichlet

Στο πρόβλημα αυτό δίνονται οι συνοριακές συνθήκες που περιγράφουν τις μετατοπίσεις των σημείων του συνόλου Γ

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u \\ v(x, y, z) &= v, \text{ για κάθε σημείο στο σύνορο } \Gamma \\ w(x, y, z) &= w \end{aligned} \quad (1.2.48)$$

3) Μικτό Πρόβλημα

Στο πρόβλημα αυτό δίνονται οι τάσεις για τα σημεία (x, y, z) του συνόρου Γ_u και οι μετατοπίσεις των σημείων του συνόρου Γ_v , όπου $\Gamma_u \cup \Gamma_v = \Gamma$.

Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι στα πλαίσια της θεωρίας των μικρών παραμορφώσεων οι συνοριακές συνθήκες λαμβάνονται υπόψη για τη γεωμετρία του φορέα που αντιστοιχεί στην **απαραμόρφωτη** κατάσταση που είναι δεδομένη και όχι στην παραμορφωμένη που συνιστά ζητούμενο του προβλήματος. Λόγω των μικρών μετακινήσεων η διαφορά της παραμορφωμένης από την απαραμόρφωτη κατάσταση είναι επουσιώδης και αμελείται.

Ανάλογα με τη φύση του προβλήματος, μπορούμε απαλείφοντας κάποιους αγνώστους να μειώσουμε το συνολικό αριθμό των διαφορικών εξισώσεων. Στην περίπτωση που επιλέγονται ως βασικοί άγνωστοι οι 6 συνιστώσες των τάσεων χρησιμοποιούμε τις 6 εξισώσεις συμβιβαστού [σχέσεις(1.2.26)-(1.2.31)] (στις οποίες ήδη έχει γίνει η απαλοιφή των u, v, w), όπου εκφράζουμε με τη βοήθεια των σχέσεων(1.2.41)-(1.2.46) τις συνιστώσες ε_{ij} συναρτήσει των τ_{ij} . Καταλήγουμε έτσι σε ένα σύστημα 6 εξισώσεων με 6 αγνώστους ($\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$)

$$(1 + \nu) \cdot \nabla^2 \sigma_{xx} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} = 0 \quad (1.2.49)$$

$$(1 + \nu) \cdot \nabla^2 \sigma_{yy} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} = 0 \quad (1.2.50)$$

$$(1 + \nu) \cdot \nabla^2 \sigma_{zz} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} = 0 \quad (1.2.51)$$

$$(1 + \nu) \cdot \nabla^2 \tau_{xy} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x \partial y} = 0 \quad (1.2.52)$$

$$(1 + \nu) \cdot \nabla^2 \tau_{yz} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y \partial z} = 0 \quad (1.2.53)$$

$$(1 + \nu) \cdot \nabla^2 \tau_{zx} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z \partial x} = 0 \quad (1.2.54)$$

όπου

$\Theta = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}$: η πρώτη αναλλοίωτος του τανυστή των τάσεων

$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$: ο τελεστής Laplace

Οι παραπάνω εξισώσεις είναι γνωστές ως **εξισώσεις Beltrami – Michel**. Έτσι η περίπτωση του προβλήματος Neumann ανάγεται στον υπολογισμό των συναρτήσεων $\tau_{ij}(x, y, z)$, έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι εξισώσεις Beltrami – Michel (1.2.49)-(1.2.54) και οι συνοριακές συνθήκες με τη μορφή των σχέσεων(1.2.12)-(1.2.14).

Το πρόβλημα της ελαστικότητας θα μπορούσε επίσης να εκφραστεί από ένα σύστημα τριών εξισώσεων που θα έχουν ως αγνώστους τις συνιστώσες των μετατοπίσεων u, v, w . Για τον σκοπό αυτό στις τρεις εξισώσεις ισορροπίας (1.2.2)-(1.2.4) αντικαθιστούμε τις συνιστώσες τ_{ij} συναρτήσεων των ε_{ij} με τη βοήθεια των καταστατικών εξισώσεων. Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις παραμορφώσεων – μετατοπίσεων (1.2.19)-(1.2.24) εκφράζουμε τις συνιστώσες των παραμορφώσεων συναρτήσεων των u, v, w οπότε καταλήγουμε στις παρακάτω εξισώσεις, γνωστές ως εξισώσεις Lamé

$$\nabla^2 u + \frac{1}{1-2\nu} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{P_x}{G} = 0 \quad (1.2.55)$$

$$\nabla^2 v + \frac{1}{1-2\nu} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \frac{P_y}{G} = 0 \quad (1.2.56)$$

$$\nabla^2 w + \frac{1}{1-2\nu} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial z} + \frac{P_z}{G} = 0 \quad (1.2.57)$$

όπου

$$\Psi = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} : \text{η πρώτη αναλλοίωτος του τανυστή των παραμορφώσεων}$$

Για το μεν πρόβλημα Dirichlet η λύση δίνεται από το σύστημα των εξισώσεων (1.2.55)-(1.2.57) με ταυτόχρονη ικανοποίηση των συνοριακών συνθηκών

$$u(x, y, z) = u \quad (1.2.58)$$

$$v(x, y, z) = v \quad , \text{για κάθε σημείο } (x, y, z) \text{ στο σύνορο } \Gamma \quad (1.2.59)$$

$$w(x, y, z) = w \quad (1.2.60)$$

Ενώ για το πρόβλημα Neumann η λύση δίνεται από το σύστημα των εξισώσεων (1.2.55)-(1.2.57) με συνοριακές συνθήκες

$$\tau_{xn} = \lambda \cdot \Psi \cdot \lambda_{nx} + G \left[2 \frac{\partial u}{\partial x} \lambda_{nx} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \lambda_{ny} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \lambda_{nz} \right] \quad (1.2.61)$$

$$\tau_{yn} = \lambda \cdot \Psi \cdot \lambda_{ny} + G \left[2 \frac{\partial v}{\partial y} \lambda_{ny} + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \lambda_{nz} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \lambda_{nx} \right] \quad (1.2.62)$$

$$\tau_{zn} = \lambda \cdot \Psi \cdot \lambda_{nz} + G \left[2 \frac{\partial w}{\partial z} \lambda_{nz} + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \lambda_{nx} + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \lambda_{ny} \right] \quad (1.2.63)$$

όπου

$$\lambda = \frac{G \cdot (2 \cdot G - E)}{E - 3 \cdot G} : \text{σταθερά η οποία εξαρτάται από τις ελαστικές σταθερές } E \text{ και } G$$

Οι παραπάνω σχέσεις προέκυψαν από τις σχέσεις (1.2.12)-(1.2.14) στις οποίες εκφράσαμε τις συνιστώσες τ_{ij} συναρτήσεων των ε_{ij} ($i, j = x, y, z$) μέσω των σχέσεων (1.2.35)-(1.2.40) και στη συνέχεια συναρτήσεων των u, v, w με τη βοήθεια των σχέσεων (1.2.19)-(1.2.24).

Τέλος για το μικτό πρόβλημα οι συνοριακές συνθήκες απαρτίζονται από τις σχέσεις (1.2.61)-(1.2.63) για το σύνολο Γ_u και από τις σχέσεις (1.2.58)-(1.2.60) για το σύνολο Γ_v .

Συνεπώς τρία θεμελιώδη προβλήματα, θεωρητικά, προσδιορίζουν με ακρίβεια την εντατική και παραμορφωσιακή κατάσταση οποιουδήποτε σώματος με τυχούσα γεωμετρία και εξωτερική φόρτιση και προφανώς δίνουν μια ακριβή λύση και στο πρόβλημα των καμπτόμενων δοκών με διάτμηση, έχοντας ως μόνες παραδοχές :

- **Τις μικρές παραμορφώσεις του σώματος**
- **Την ομοιομορφία και την ισοτροπία του υλικού**
- **Την ελαστική (γραμμική) φύση του υλικού**

Οι παραπάνω παραδοχές δεν δημιουργούν μεγάλες ανακρίβειες. Σε ορισμένες περιπτώσεις βρίσκονται πολύ κοντά στην πραγματικότητα, όπως π.χ σε προεντεταμένους φορείς (γέφυρες) και σε φορείς όπου η μέγιστη τάση δεν ξεπερνά το όριο αναλογίας του υλικού. Παρόλα αυτά η επίλυση των διαφορικών εξισώσεων του τρισδιάστατου ελαστικού προβλήματος παρουσιάζει μεγάλες δυσκολίες. Υπάρχει εν τούτοις μια κατηγορία προβλημάτων στα οποία τόσο η φύση του σώματος όσο και ο τρόπος επιβολής της φόρτισης επιβάλλουν ορισμένες απλοποιήσεις. Σε αυτές τις περιπτώσεις με την εισαγωγή ορισμένων πρόσθετων παραδοχών μεταπίπτουμε στο πρόβλημα της **διδιάστατης ελαστικότητας** ή αλλιώς στο **επίπεδο εντατικό πρόβλημα**.

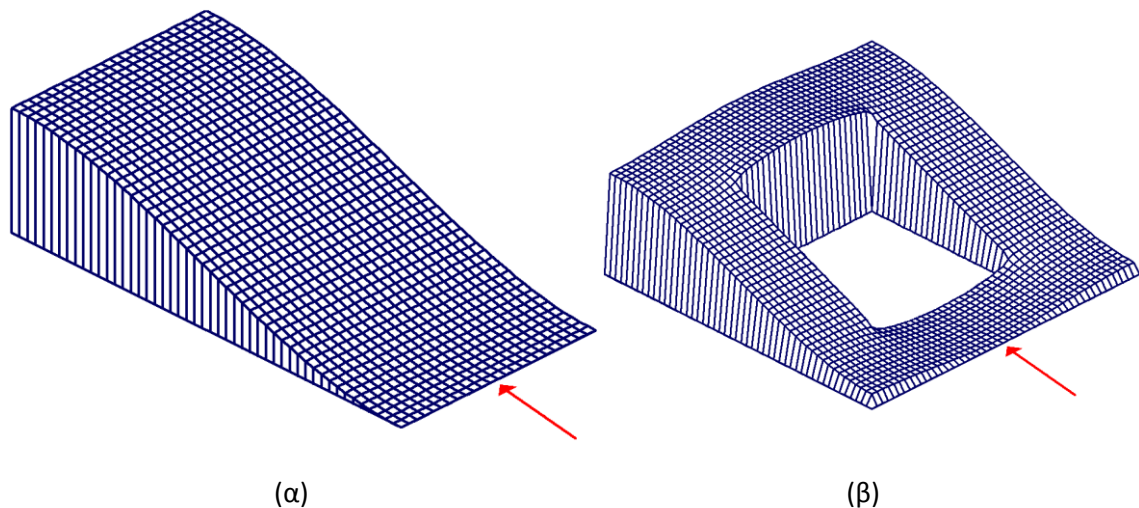
Κεφάλαιο 2 : Διατμητικές παραμορφώσεις στο χωρικό στοιχείο δοκού – Ομοιόμορφη διάτμηση

2.1. Προκαταρκτικές έννοιες

Διατμητική τάση σε ραβδωτό στοιχείο φορέα αναπτύσσεται λόγω εγκάρσιας φόρτισης. Στην περίπτωση ράβδου που η τέμνουσα δύναμη κατά το μήκος της είναι σταθερή και οι διαμήκεις μετατοπίσεις που προκαλούν στρέβλωση δεν παρεμποδίζονται, η εφαρμοζόμενη διατμητική φόρτιση αναλαμβάνεται μόνο από διατμητικές τάσεις οι οποίες μεγιστοποιούνται στο σύνορο. Η διάτμηση αυτή ονομάζεται **ομοιόμορφη** (Love 1952, Sokolnikoff 1956, Timoshenko and Goodier 1951).

Αντίθετα, εάν η τέμνουσα δύναμη μεταβάλλεται κατά μήκος της ράβδου ή/και η διατμητική στρέβλωση παρεμποδίζεται λόγω φόρτισης ή συνθηκών στήριξης, η διάτμηση στη ράβδο αναπτύσσεται ανομοιόμορφα και η διάτμηση ονομάζεται **ανομοιόμορφη**.

Η στρέβλωση (Σχ. 2.1.) που προκαλείται λόγω διάτμησης είναι σημαντικά μικρότερη σε σχέση με αυτήν λόγω στρέψης, με αποτέλεσμα να μπορούμε να αγνοούμε τις αναπτυσσόμενες τάσεις στρέβλωσης, λόγω διάτμησης, στην ανάλυση. Συνεπώς, η ένταση (τάσεις) σε ράβδους λόγω εγκάρσιας φόρτισης μπορεί να προσδιοριστεί με την θεώρηση ομοιόμορφης διάτμησης, ενώ στην παραμορφωσιακή κατάσταση η επιρροή της στρέβλωσης (λόγω διάτμησης) λαμβάνεται έμμεσα με την βοήθεια διορθωτικών συντελεστών διάτμησης.

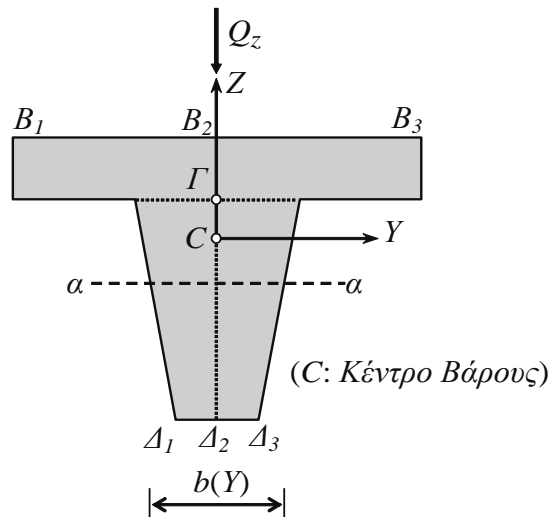


Σχ. 2.1.Στρέβλωση λόγω τέμνουσας δύναμης ορθογωνικής (α) και κοίλης τετραγωνικής (β) διατομής

Ο πρώτος που έλαβε υπόψη την επιρροή της διατμητικής παραμόρφωσης μέσω διορθωτικών συντελεστών διάτμησης είναι ο Timoshenko, για αυτό το λόγο η θεωρία δοκού που λαμβάνει υπόψη τη διατμητική παραμόρφωση είναι γνωστή ως *θεωρία Timoshenko*. Σημειώνεται ότι ο αντίστροφος του διορθωτικού συντελεστή διάτμησης (κ) καλείται συντελεστής διατμητικής παραμόρφωσης ($\alpha=1/\kappa$). Άρα, για την λύση του προβλήματος της ομοιόμορφης διάτμησης είναι

αναγκαίος ο υπολογισμός των διατμητικών τάσεων στο εσωτερικό της διατομής, η θέση του κέντρου διάτμησης S καθώς επίσης και οι συντελεστές διατμητικής παραμόρφωσης.

Η 'ακριβής' διατύπωση του προβλήματος της **ομοιόμορφης** διάτμησης περιγράφεται από προβλήματα συνοριακών τιμών, τα οποία μορφώνονται με τη βοήθεια της θεωρίας ελαστικότητας. Η μόρφωση των προβλημάτων αυτών στην παρούσα εργασία γίνεται με βάση το πεδίο των μετατοπίσεων, η οποία έχει το πλεονέκτημα ότι αποτελεί το πρώτο βήμα για την επίλυση του προβλήματος της ανομοιόμορφης διάτμησης (κεφάλαιο 4).



Σχ. 2.2. Χονδρότοιχη διατομή μορφής πλακοδοκού

Στην πράξη προσεγγιστικά οι διατμητικές τάσεις σε χονδρότοιχες διατομές (σχήμα 2.2.) με έναν άξονα συμμετρίας (π.χ. τον Z) και εγκάρσια δύναμη Q_z κατά τη διεύθυνση αυτού, υπολογίζονται από την εξίσωση :

$$\tau_{xz} = \frac{Q_z S_Y^{cut}}{I_{YY} b} \quad (2.1.1)$$

που προκύπτει από την **Τεχνική Θεωρία διάτμησης**, η οποία παρουσιάζει αρκετά μειονεκτήματα, τα κύρια των οποίων είναι :

- Ισχύει για διατομές με άξονα συμμετρίας.
- Δεν ισχύει για διατομές πολλαπλής συνοχής.
- Δεν λαμβάνει υπόψη το λόγο Poisson.
- Στηρίζεται στην παραδοχή ότι οι διατμητικές τάσεις κατά το πλάτος b της τομής είναι σταθερά κατανεμημένες, που δεν ισχύει.
- Σύμφωνα με την εξ.(2.1.1) φαίνεται πως στα ακραία σημεία της διατομής κατά τον άξονα z η στατική ροπή μηδενίζεται και επομένως και η διατμητική τάση στα σημεία αυτά είναι 0, το οποίο βέβαια δεν ισχύει παντού.

- Παρατηρώντας την εξ.(2.1.1), στις θέσεις απότομης μεταβολής του πλάτους b της διατομής οι διατμητικές τάσεις παρουσιάζουν άλμα, το οποίο δεν δικαιολογείται, διότι θα έπρεπε να υπάρχει κάποια συγκεντρωμένη δύναμη στη θέση αυτή.

Αντίστοιχα στις λεπτότοιχες ράβδους, λόγω της ιδιαιτερότητας του πάχους τους, ο υπολογισμός των διατμητικών τάσεων μπορεί να γίνει σύμφωνα με την **Θεωρία Λεπτότοιχων Ράβδων** (Vlasov, 1964, 1965) οι κύριες παραδοχές της οποίας είναι :

- Οι διατμητικές τάσεις στη διεύθυνση του πάχους των τοιχωμάτων της διατομής θεωρούνται σταθερές.
- Οι διατμητικές τάσεις έχουν διεύθυνση παράλληλη προς τη μέση γραμμή της διατομής.
- Η φορά των διατμητικών τάσεων είναι τέτοια ώστε η συνολική δύναμη λόγω των διατμητικών τάσεων να είναι ίση με την εγκάρσια δύναμη που καταπονεί τη διατομή.
- Στα ελεύθερα άκρα των τοιχωμάτων οι διατμητικές ροές μηδενίζονται.
- Σε κάθε κόμβο της διατομής (τομή μέσων γραμμών) πρέπει για λόγους ισορροπίας το αλγεβρικό άθροισμα όλων των εισερχόμενων και εξερχόμενων διατμητικών ροών να μηδενίζεται. Αυτή είναι η αιτία που η διατμητική ροή συγκρίνεται με τη ροή νερού.
- Για φόρτιση Q_z και θεωρώντας κύριο σύστημα αξόνων, το μέτρο των διατμητικών τάσεων υπολογίζεται από τη σχέση :

$$\tau_{xs} = \frac{|q_s|}{t} \quad (2.1.2)$$

όπου t το πάχος του τοιχώματος στη θέση υπολογισμού της τάσης και q_s η διατμητική ροή στα τοιχώματα της διατομής, που ορίζεται ως :

$$q_s = (q_s^o) + (q_s^c) = \left(\frac{Q_z S_Y^{cut}}{I_Y} \right) + \left(- \frac{\int q_s^o ds}{\int \frac{ds}{t}} \right) \quad (2.1.3)$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι και στις χονδρότοιχες διατομές, στις οποίες είδαμε τα μειονεκτήματα με την εξ.(2.1.1), και στις λεπτότοιχες διατομές, όπου δεν υπάρχουν σαφή όρια εφαρμογής της Θεωρία Λεπτότοιχων Ράβδων όπως επίσης γιατί είναι πολύ σημαντικός ο 'ακριβής' υπολογισμός των διατμητικών τάσεων, η πλέον ενδεδειγμένη μέθοδος υπολογισμού των διατμητικών τάσεων είναι η επίλυση του 'ακριβούς' προβλήματος ομοιόμορφης διάτμησης. Οι παραδοχές που αφορούν το πρόβλημα της ομοιόμορφης διάτμησης ράβδου τυχούσας και σταθερής διατομής είναι οι ακόλουθες:

- Η ράβδος είναι ευθύγραμμη.
- Εγκάρσιες παραμορφώσεις της διατομής σε κατάσταση φόρτισης δεν αναπτύσσονται, οπότε το σχήμα της διατομής διατηρείται, δηλαδή αγνοείται η παραμόρφωση εντός του επιπέδου της διατομής ($\gamma_{yy} = \gamma_{zz} = \gamma_{yz} = 0$).
- Το υλικό, από το οποίο αποτελείται η ράβδος, θεωρείται ισότροπο, συνεχές και γραμμικώς ελαστικό, οπότε ισχύουν οι μαθηματικές σχέσεις της γραμμικής θεωρίας ελαστικότητας.

- Η διατομή μπορεί λόγω διατμητικής παραμόρφωσης να στρεβλώνει ελεύθερα.
- Η διατομή της ράβδου μετά την παραμόρφωση δεν παραμένει κάθετη στον άξονα αναφοράς, δηλαδή οι εγκάρσιες διατμητικές παραμορφώσεις δεν αγνοούνται ($\gamma_{xy} \neq 0, \gamma_{xz} \neq 0$).

Αμέσως μετά θα παρουσιαστεί η θεωρία δοκού Timoshenko και στη συνέχεια θα αναλυθεί το πρόβλημα της ομοιόμορφης διάτμησης ράβδου τυχούσας και σταθερής διατομής, χωρίς την εμφάνιση στρεπτικών ροπών.

2.2. Θεωρία δοκού Timoshenko

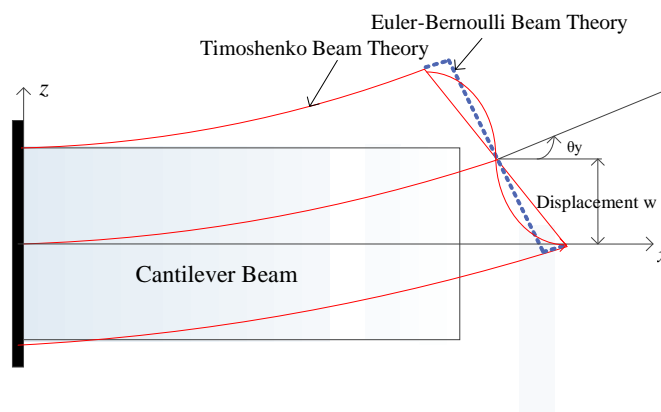
Στην ενότητα αυτή αναλύεται η θεωρία δοκού Timoshenko, κατά την οποία θεωρούμε ράβδο μήκους L , διατομής τυχόντος σχήματος, η οποία καταλαμβάνει το διδιάστατο χωρίο Ω περιοριζόμενο από το σύνορο Γ και αποτελούμενη από ομογενές, ισότροπο και γραμμικά ελαστικό υλικό, με μέτρο ελαστικότητας E και μέτρο διάτμησης G . Η ράβδος υποβάλλεται σε συγκεντρωμένα ή κατανεμημένα εγκάρσια φορτία $q_y(x), q_z(x)$ κατά τους άξονες y, z ή/και σε συγκεντρωμένες ή κατανεμημένες καμπτικές ροπές $m_Y(x), m_Z(x)$ κατά τους άξονες Y, Z .

Σύμφωνα με την παραδοχή της θεωρίας δοκού Timoshenko η διατομή παραμένει επίπεδη και μετά την παραμόρφωση, επομένως αγνοείται η στρέβλωση της διατομής (Σχ.2.3.), οι συνιστώσες μετατόπισης τυχόντος σημείου της ράβδου κατά τους κύριους διατμητικούς άξονες X, Y και Z που διέρχονται από το κέντρο βάρους της διατομής θα δίδονται από τις σχέσεις :

$$u = \theta_Y(X) \cdot Z - \theta_Z(X) Y \quad (2.2.1\alpha)$$

$$v = v(X) \quad (2.2.1\beta)$$

$$w = w(X) \quad (2.2.1\gamma)$$



Σχ. 2.3. Πρόβλεπος υποβαλλόμενος σε εγκάρσιο φορτίο

όπου $\theta_Y(X)$, $\theta_Z(X)$ είναι οι γωνίες στροφής της διατομής στη θέση X . Με τη βοήθεια των σχέσεων μετατοπίσεων – παραμορφώσεων της τρισδιάστατης θεωρίας ελαστικότητας, οι συνιστώσες του τανυστή παραμόρφωσης λαμβάνονται ως :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{d\theta_Y}{dx} Z - \frac{d\theta_Z}{dx} Y \quad (2.2.2\alpha)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.2.2\beta)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.2.2\gamma)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \left(-\theta_Z + \frac{dv}{dx} \right) \quad (2.2.2\delta)$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = 0 \quad (2.2.2\epsilon)$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \left(\theta_Y + \frac{dw}{dx} \right) \quad (2.2.2\sigma\tau)$$

Με τη βοήθεια των σχέσεων (2.2.2) και των καταστατικών εξισώσεων τάσεων-παραμορφώσεων της τρισδιάστατης θεωρίας ελαστικότητας στο ισότροπο υλικό της ράβδου, οι συνιστώσες του τανυστή τάσης λαμβάνονται ως :

$$\sigma_{xx} = E \cdot \varepsilon_{xx} = E \left(\frac{d\theta_Y}{dx} Z - \frac{d\theta_Z}{dx} Y \right) \quad (2.2.3\alpha)$$

$$\sigma_{yy} = 0 \quad (2.2.3\beta)$$

$$\sigma_{zz} = 0 \quad (2.2.3\gamma)$$

$$\tau_{xy} = 2G \cdot \varepsilon_{xy} = G \left(-\theta_Z + \frac{dv}{dx} \right) \quad (2.2.3\delta)$$

$$\tau_{yz} = 0 \quad (2.2.3\epsilon)$$

$$\tau_{xz} = 2G \cdot \varepsilon_{xz} = G \left(\theta_Y + \frac{dw}{dx} \right) \quad (2.2.3\sigma\tau)$$

Ολοκληρώνοντας τις συνιστώσες του τανυστή τάσης στο χωρίο Ω της διατομής, τα εντατικά μεγέθη σε διατομή της ράβδου γράφονται ως :

$$M_Y = \int_{\Omega} \sigma_{xx} Z \cdot d\Omega = E \left(\theta'_Y \int_{\Omega} Z^2 d\Omega - \theta'_Z \int_{\Omega} YZ d\Omega \right) = E (\theta'_Y \cdot I_{YY} - \theta'_Z \cdot I_{YZ}) \quad (2.2.4\alpha)$$

$$M_Z = - \int_{\Omega} \sigma_{xx} Y \cdot d\Omega = -E \left(\theta'_Y \int_{\Omega} YZ d\Omega - \theta'_Z \int_{\Omega} Y^2 d\Omega \right) = E (\theta'_Z \cdot I_{ZZ} - \theta'_Y \cdot I_{YZ}) \quad (2.2.4\beta)$$

$$Q_y = \int_{\Omega} \tau_{xy} d\Omega = G \int_{\Omega} \left(-\theta_Z + \frac{dv}{dx} \right) d\Omega \quad (2.2.4\gamma)$$

$$Q_z = \int_{\Omega} \tau_{xz} d\Omega = G \int_{\Omega} \left(\theta_Y + \frac{dw}{dx} \right) d\Omega \quad (2.2.4\delta)$$

όπου

$$I_{YY} = \int_{\Omega} Z^2 d\Omega \quad I_{ZZ} = \int_{\Omega} Y^2 d\Omega \quad I_{YZ} = \int_{\Omega} YZ d\Omega \quad (2.2.5\alpha,\beta,\gamma)$$

είναι οι ροπές αδράνειας και το γινόμενο αδράνειας της διατομής.

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, για να λάβουμε υπόψη την επιρροή της διατμητικής παραμόρφωσης (στη στρέβλωση), η οποία στο πεδίο των μετατοπίσεων έχει αγνοηθεί, είναι αναγκαία η χρήση κατάλληλων διορθωτικών συντελεστών διάτμησης. Πιο συγκεκριμένα, στη θεωρία δοκού Timoshenko ο διορθωτικός αυτός συντελεστής διάτμησης προκύπτει ως ο λόγος της μέσης τιμής όλων των αναπτυσσόμενων στη διατομή διατμητικών τάσεων διαιρεμένη με την τιμή της διατμητικής τάσης στο κέντρο βάρους της διατομής. Έτσι, οι αντιστάσεις σε διάτμηση της διατομής της ράβδου κατά Timoshenko προσδιορίζονται ως

$$GA_y = \kappa_y GA = \frac{GA}{\alpha_y}, \quad GA_z = \kappa_z GA = \frac{GA}{\alpha_z}, \quad GA_{yz} = \kappa_{yz} GA = \frac{GA}{\alpha_{yz}} \quad (2.2.6\alpha,\beta,\gamma)$$

όπου ο αντίστροφος του διορθωτικού συντελεστή διάτμησης (κ) καλείται συντελεστής διατμητικής παραμόρφωσης ($a = 1/\kappa$).

Αντικαθιστώντας στις εξισώσεις ισορροπίας στοιχειώδους τμήματος δοκού

$$\frac{dQ_y}{dx} + q_y = 0 \quad \frac{dQ_z}{dx} + q_z = 0 \quad (2.2.7\alpha,\beta)$$

$$\frac{dM_Z}{dx} + Q_y + m_Z = 0 \quad \frac{dM_Y}{dx} - Q_z + m_Y = 0 \quad (2.2.8\alpha,\beta)$$

τις σχέσεις (2.2.4) των εντατικών μεγεθών και λαμβάνοντας υπόψη αντί του πλήρους εμβαδού της διατομής της δοκού τις επιφάνειες διάτμησης της A_y , A_z (προκειμένου να ληφθεί έμμεσα υπόψη η επιρροή της στρέβλωσης) μορφώνονται οι εξισώσεις ισορροπίας στοιχειώδους τμήματος δοκού ως

$$-GA_y \left(-\frac{d\theta_Z}{dx} + \frac{d^2v}{dx^2} \right) = q_y \quad -GA_z \left(\frac{d\theta_Y}{dx} + \frac{d^2w}{dx^2} \right) = q_z \quad (2.2.9\alpha,\beta)$$

$$-EI_{ZZ} \frac{d^2\theta_Z}{dx^2} + EI_{YZ} \frac{d^2\theta_Y}{dx^2} - GA_y \left(-\theta_Z + \frac{dv}{dx} \right) = m_Z \quad (2.2.10\alpha)$$

$$-EI_{YY} \frac{d^2\theta_Y}{dx^2} + EI_{YZ} \frac{d^2\theta_Z}{dx^2} + GA_z \left(\theta_Y + \frac{dw}{dx} \right) = m_Y \quad (2.2.10\beta)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (2.2.9-10) έτσι ώστε να απαλειφθούν οι στροφές θ_Y , θ_Z και μετά από πράξεις, οι εξισώσεις ισορροπίας στοιχειώδους τμήματος δοκού γράφονται ως

$$\text{κατά τον άξονα } y : EI_{ZZ} \frac{d^4v}{dx^4} + EI_{YZ} \frac{d^4w}{dx^4} = q_y - \frac{dm_Z}{dx} - \frac{EI_{ZZ}}{GA_y} \frac{d^2q_y}{dx^2} - \frac{EI_{YZ}}{GA_z} \frac{d^2q_z}{dx^2} \quad (2.2.11)$$

$$\text{κατά τον άξονα } z : EI_{YY} \frac{d^4w}{dx^4} + EI_{YZ} \frac{d^4v}{dx^4} = q_z + \frac{dm_Y}{dx} - \frac{EI_{YY}}{GA_z} \frac{d^2q_z}{dx^2} - \frac{EI_{YZ}}{GA_y} \frac{d^2q_y}{dx^2} \quad (2.2.12)$$

Έτσι, το πρόβλημα της κάμψης δοκού υπό εγκάρσια ή/και καμπτική φόρτιση λαμβάνοντας υπόψη την επιρροή των διατμητικών παραμορφώσεων (δοκός *Timoshenko*) ανάγεται στην επίλυση των διαφορικών εξισώσεων τέταρτης τάξης ως προς τις εγκάρσιες μετατοπίσεις $v = v(X)$, $w = w(X)$ που δίδονται από τις σχέσεις (2.2.11-12). Η λύση των εξισώσεων αυτών εξαρτάται αφενός από τη φόρτιση της ράβδου και αφετέρου από τις συνθήκες στήριξης της στο σύνορο ή και στο εσωτερικό της. Οι πλέον γενικές γραμμικές συνοριακές συνθήκες στα άκρα της ράβδου περιγράφονται από τις σχέσεις

$$\text{κατά τον άξονα } y : a_{y1}v + a_{y2}Q_y = a_{y3} \quad \beta_{y1}\theta_Z + \beta_{y2}M_Z = \beta_{y3} \quad (2.2.13\alpha,\beta)$$

$$\text{κατά τον άξονα } z : a_{z1}w + a_{z2}Q_z = a_{z3} \quad \beta_{z1}\theta_Y + \beta_{z2}M_Y = \beta_{z3} \quad (2.2.14\alpha,\beta)$$

όπου τα εντατικά μεγέθη δίνονται από τις σχέσεις

$$M_Y = -EI_{YY} \frac{d^2w}{dx^2} - \frac{EI_{YY}}{GA_z} q_Z - EI_{YZ} \frac{d^2v}{dx^2} - \frac{EI_{YZ}}{GA_y} q_Y \quad (2.2.15\alpha)$$

$$M_Z = EI_{ZZ} \frac{d^2v}{dx^2} + \frac{EI_{ZZ}}{GA_y} q_Y + EI_{YZ} \frac{d^2w}{dx^2} + \frac{EI_{YZ}}{GA_z} q_Z \quad (2.2.15\beta)$$

$$Q_y = -EI_{ZZ} \frac{d^3 v}{dx^3} - EI_{YZ} \frac{d^3 w}{dx^3} - m_Z - \frac{EI_{ZZ}}{GA_y} \frac{dq_Y}{dx} - \frac{EI_{YZ}}{GA_z} \frac{dq_Z}{dx} \quad (2.2.15\gamma)$$

$$Q_z = -EI_{YY} \frac{d^3 w}{dx^3} - EI_{YZ} \frac{d^3 v}{dx^3} + m_Y - \frac{EI_{YY}}{GA_z} \frac{dq_Z}{dx} - \frac{EI_{YZ}}{GA_y} \frac{dq_Y}{dx} \quad (2.2.15\delta)$$

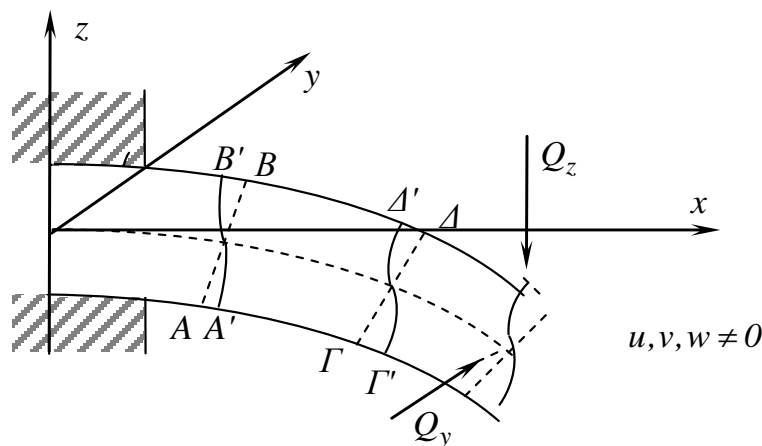
και τα και κινηματικά από τις σχέσεις

$$\theta_Y = -\frac{dw}{dx} - \frac{EI_{YY}}{GA_z} \frac{d^3 w}{dx^3} - \frac{EI_{YZ}}{GA_z} \frac{d^3 v}{dx^3} + \frac{m_Y}{GA_z} - \frac{EI_{YY}}{(GA_z)^2} \frac{dq_Z}{dx} - \frac{EI_{YZ}}{GA_y GA_z} \frac{dq_Y}{dx} \quad (2.2.16\alpha)$$

$$\theta_Z = \frac{dv}{dx} + \frac{EI_{ZZ}}{GA_y} \frac{d^3 v}{dx^3} + \frac{EI_{YZ}}{GA_y} \frac{d^3 w}{dx^3} + \frac{m_Z}{GA_y} + \frac{EI_{ZZ}}{(GA_y)^2} \frac{dq_Y}{dx} + \frac{EI_{YZ}}{GA_y GA_z} \frac{dq_Z}{dx} \quad (2.2.16\beta)$$

2.3. Ομοιόμορφη διάτμηση

Στην ενότητα αυτή αναλύεται μια εναλλακτική διατύπωση του προβλήματος της ομοιόμορφης διάτμησης ράβδου τυχούσας και σταθερής διατομής, με την διαφορά ότι τώρα λαμβάνεται υπόψη η επιρροή της στρέβλωσης στο πεδίο των μετατοπίσεων όπως θα δούμε αργότερα, παρουσιάζοντας αποτελεσματική μέθοδο για τον υπολογισμό των διατμητικών τάσεων της θεωρίας καμπτόμενων ράβδων Euler-Bernoulli, των συντελεστών διατμητικής παραμόρφωσης α της θεωρίας καμπτόμενων ράβδων Timoshenko καθώς και της θέσης του κέντρου διάτμησης S .



Σχ. 2.4. Στρέβλωση των διατομών προβόλου λόγω διατμητικών τάσεων

Έτσι θεωρείται ράβδος μήκους L , διατομής τυχόντος σχήματος, η οποία καταλαμβάνει το διδιάστατο χωρίο Ω περιοριζόμενο από το σύνορο Γ και αποτελούμενη από ομογενές, ισότροπο και γραμμικώς ελαστικό υλικό, με μέτρο ελαστικότητας E και μέτρο διάτμησης G . Η ράβδος υποβάλλεται σε συγκεντρωμένο φορτίο Q (με συνιστώσες Q_y, Q_z κατά τους άξονες y, z ,

αντίστοιχα), το οποίο εφαρμόζεται στο κέντρο διάτμησης της διατομής της, σε απόσταση L από το πακτωμένο (οι μετατοπίσεις που προκαλούν στρέβλωση δεν παρεμποδίζονται) άκρο της (Σχ.2.4.).

Το τυχόν σημείο $P(Y, Z)$ της διατομής, λόγω της διατμητικής καταπόνησης που υφίσταται, μετατοπίζεται στη θέση $P'(Y', Z')$. Οι συνιστώσες μετατόπισης του u, v και w κατά τους άξονες X, Y και Z , αντίστοιχα, λαμβάνοντας υπόψη την ομοιόμορφη κατά μήκος της δοκού στρέβλωση δίδονται από τις σχέσεις (Sarountzakis and Protonotariou 2008)

$$u = \theta_Y(X) \cdot Z - \theta_Z(X)Y + \phi_c(Y, Z) \quad (2.3.1)$$

$$v = v(X) \quad (2.3.2)$$

$$w = w(X) \quad (2.3.3)$$

όπου αγνοώντας τις διατμητικές παραμορφώσεις (θεωρία δοκού Euler- Bernoulli)

$$\theta_Y(X) = -\frac{\partial w}{\partial x}, \quad \theta_Z(X) = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.3.4\alpha, \beta)$$

και $\phi_c(Y, Z)$ είναι η συνάρτηση στρέβλωσης λόγω διάτμησης ως προς το κέντρο βάρους της διατομής. Η συνάρτηση $\phi_c(Y, Z)$ εξαρτάται μόνο από τη γεωμετρία της διατομής, δηλαδή αποτελεί παράμετρο αυτής και είναι ανεξάρτητη της συντεταγμένης X . Εκφράζει τη μετατόπιση των σημείων της διατομής της ράβδου κατά τον διαμήκη άξονά της X , δηλαδή τη στρέβλωση, λόγω των αναπτυσσόμενων διατμητικών τάσεων (Σχ.2.4.).

Από την τρισδιάστατη θεωρία ελαστικότητας, οι ανηγμένες παραμορφώσεις τυχόντος σημείου της διατομής, με μετατοπίσεις v, w κατά τους άξονες Y, Z , αντίστοιχα και διαμήκη μετατόπιση u κατά τον άξονα X προκύπτουν ως :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \theta_Y}{\partial x} Z - \frac{\partial \theta_Z}{\partial x} Y \quad (2.3.5\alpha)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.3.5\beta, \gamma)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \left(-\theta_Z + \frac{\partial \phi_c}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial \phi_c}{\partial y} \quad (2.3.5\delta)$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = 0 \quad (2.3.5\epsilon)$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \left(\theta_Y + \frac{\partial \phi_c}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial \phi_c}{\partial z} \quad (2.3.5\sigma)$$

Και αντίστοιχα οι συνιστώσες του τανυστή τάσης λαμβάνονται ως :

$$\sigma_{xx} = E \cdot \varepsilon_{xx} = E \left(\frac{\partial \theta_Y}{\partial x} Z - \frac{\partial \theta_Z}{\partial x} Y \right) \quad (2.3.6\alpha)$$

$$\sigma_{yy} = 0 \quad (2.3.6\beta)$$

$$\sigma_{zz} = 0 \quad (2.3.6\gamma)$$

$$\tau_{xy} = 2G \cdot \varepsilon_{xy} = G \frac{\partial \phi_c}{\partial y} \quad (2.3.6\delta)$$

$$\tau_{yz} = 0 \quad (2.3.6\epsilon)$$

$$\tau_{xz} = 2G \cdot \varepsilon_{xz} = G \frac{\partial \phi_c}{\partial z} \quad (2.3.6\sigma)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις, και με την βοήθεια της πρώτης εξίσωσης ισορροπίας των τάσεων απουσία μαζικών δυνάμεων της τρισδιάστατης θεωρίας ελαστικότητας, μετά από πράξεις λαμβάνεται η διαφορική εξίσωση του προβλήματος της ομοιόμορφης διάτμησης ως (Sarountzakis and Protonotariou 2008) :

$$\nabla^2 \phi_c (Y, Z) = \frac{\partial^2 \phi_c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_c}{\partial z^2} = - \frac{1}{G(I_{YY}I_{ZZ} - I_{YZ}^2)} \left[(Q_z I_{ZZ} - Q_y I_{YZ}) Z + (Q_y I_{YY} - Q_z I_{YZ}) Y \right] \quad (2.3.7)$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι οι κάθετες τάσεις στο σύνορο της διατομής της ράβδου είναι μηδενικές, και με τη βοήθεια των σχέσεων (2.3.6), η συνοριακή συνθήκη για τη συνάρτηση στρέβλωσης $\phi_c (Y, Z)$ διαμορφώνεται ως :

$$\tau_{xn} = \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z = 0 \quad (2.3.8)$$

ή

$$\frac{\partial \phi_c}{\partial n} = 0 \quad (2.3.9)$$

Επομένως, η συνάρτηση στρέβλωσης λόγω διάτμησης $\phi_c (Y, Z)$ προκύπτει από την επίλυση του ακόλουθου προβλήματος Neumann διαφορικής εξίσωσης Poisson :

$$\nabla^2 \phi_c (Y, Z) = - \frac{1}{G(I_{YY}I_{ZZ} - I_{YZ}^2)} \left[(Q_z I_{ZZ} - Q_y I_{YZ}) Z + (Q_y I_{YY} - Q_z I_{YZ}) Y \right] \quad (2.3.10\alpha)$$

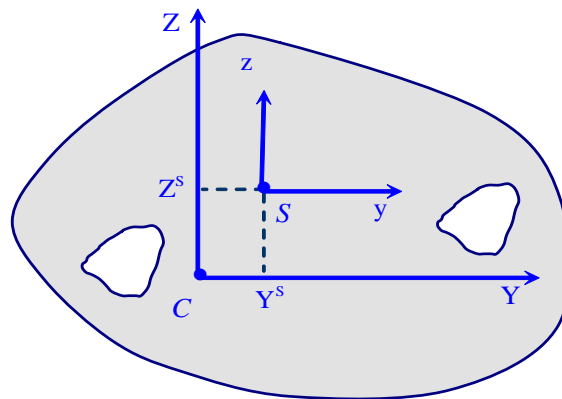
στο χωρίο Ω

$$\frac{\partial \phi_c}{\partial n} = 0 \quad \text{στο σύνορο } \Gamma \quad (2.3.10\beta)$$

2.4. Κέντρο Διάτμησης - Συντεταγμένες κέντρου διάτμησης

Οι συντεταγμένες του κέντρου διάτμησης θα προκύψουν από την εξίσωση ισοροπίας της εξωτερικά επιβαλλόμενης στρεπτικής ροπής ασκούμενη στο κέντρο διάτμησης, με την εσωτερικά αναπτυσσόμενη στρεπτική ροπή που αναπτύσσεται από τις διατμητικές τάσεις λόγω τέμνουσας. Η εξίσωση ισοροπίας είναι :

$$Q_z \cdot Y^S - Q_y \cdot Z^S = \int_{\Omega} (\tau_{xz} \cdot Y - \tau_{xy} \cdot Z) d\Omega \quad (2.4.1)$$



Σχ. 2.5. Θέση του κέντρου διάτμησης S ως προς το κέντρο βάρους C.

Και τελικά οι συντεταγμένες του κέντρου διάτμησης είναι :

$$Y^S = G \int_{\Omega} \left(y \frac{\partial \phi_{cy}}{\partial z} - z \frac{\partial \phi_{cy}}{\partial y} \right) d\Omega \quad (2.4.2)$$

$$Z^S = G \int_{\Omega} \left(y \frac{\partial \phi_{cz}}{\partial z} - z \frac{\partial \phi_{cz}}{\partial y} \right) d\Omega \quad (2.4.3)$$

2.5. Διορθωτικοί συντελεστές διάτμησης - Συντελεστές διατμητικής παραμόρφωσης

Μια εύχρηστη διατύπωση των συντελεστών διατμητικής παραμόρφωσης επιτυγχάνεται με την βοήθεια ενεργητικής μεθόδου (Bach und Baumann 1924, Stojek 1964, Gruttmann and Wagner 2001), σύμφωνα με την οποία η ακριβής ενέργεια παραμόρφωσης της δοκού, οφειλόμενη στις διατμητικές τάσεις όπως αυτές προκύπτουν από τη θεωρία ελαστικότητας, ισούται με την προσεγγιστική ενέργεια παραμόρφωσης δοκού, οφειλόμενη στις διατμητικές τάσεις όπως αυτές προκύπτουν από τη θεωρία Timoshenko. Πιο συγκεκριμένα :

$$U_{exact} = \int_{\Omega} \frac{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2}{2G} d\Omega \quad (2.5.1)$$

$$U_{appr} = \frac{\alpha_y Q_y^2}{2AG} + \frac{\alpha_z Q_z^2}{2AG} + \frac{\alpha_{yz} Q_y Q_z}{AG} \quad (2.5.2)$$

Και συνεπώς προκύπτει :

$$\frac{\alpha_y Q_y^2}{2AG} + \frac{\alpha_z Q_z^2}{2AG} + \frac{\alpha_{yz} Q_y Q_z}{AG} = \int_{\Omega} \frac{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2}{2G} d\Omega \quad (2.5.3)$$

Αντικαθιστώντας κατάλληλα προκύπτουν οι συντελεστές διατμητικής παραμόρφωσης :

$$\alpha_y = \frac{AG^2}{Q_y^2} \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial \phi_{cy}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_{cy}}{\partial z} \right)^2 \right] d\Omega \quad (2.5.4)$$

$$\alpha_z = \frac{AG^2}{Q_z^2} \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial \phi_{cz}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_{cz}}{\partial z} \right)^2 \right] d\Omega \quad (2.5.5)$$

$$\begin{aligned} \alpha_{yz} = & \frac{AG^2}{Q_y Q_z} \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial \phi_{cyz}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_{cyz}}{\partial z} \right)^2 \right] d\Omega - \frac{AG^2}{Q_y Q_z} \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial \phi_{cz}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_{cz}}{\partial z} \right)^2 \right] d\Omega \\ & - \frac{AG^2}{Q_y Q_z} \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial \phi_{cy}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_{cy}}{\partial z} \right)^2 \right] d\Omega \end{aligned} \quad (2.5.6)$$

Τελικά έχουμε τις αντιστάσεις σε διάτμηση της διατομής της ράβδου κατά Timoshenko :

$$GA_y = \frac{GA}{\alpha_y}, \quad GA_z = \frac{GA}{\alpha_z}, \quad GA_{yz} = \frac{GA}{\alpha_{yz}} \quad (2.5.7\alpha, \beta, \gamma)$$

2.6. Τοπικό Μητρώο Στιβαρότητας

Θεωρούμε χωρικό πρισματικό στοιχείο μήκους L και σταθερής τυχούσας διατομής αποτελούμενης από ομογενές, ισότροπο και γραμμικά ελαστικό υλικό, με μέτρο ελαστικότητας E και μέτρο διάτμησης G , το οποίο καταλαμβάνει περιοχή Ω του επιπέδου y, z , το οποίο καταπονείται αξονικά, διατμητικά καθώς και με καμπτικές ροπές.

Το μητρώο των επικόμβιων μετακινήσεων του στοιχείου στο τοπικό σύστημα αξόνων, λαμβάνοντας υπόψη τους ήδη γνωστούς 6 β.ε. του κλασικού χωρικού στοιχείου χωρικού πλαισίου είναι :

Πιο συγκεκριμένα, τα στοιχεία k_{m2}^i ($m=2,3,5,6,8,9,11,12$) του τοπικού μητρώου στιβαρότητας (2.6.3) προκύπτουν ως οι αντιδράσεις του αμφίπακτου στοιχείου για μοναδιαία εγκάρσια μετατόπιση $u_y^{ij} = 1$ στη θέση $x = 0$ και επομένως

$$\alpha_{y1} = \alpha_{y3} = \alpha_{z1} = \beta_{y1} = \beta_{z1} = 1, \quad \alpha_{y2} = \alpha_{z2} = \alpha_{z3} = \beta_{y2} = \beta_{y3} = \beta_{z2} = \beta_{z3} = 0$$

στη θέση $x = 0$ (2.6.6α)

$$\alpha_{y1} = \alpha_{z1} = \beta_{y1} = \beta_{z1} = 1, \quad \alpha_{y2} = \alpha_{y3} = \alpha_{z2} = \alpha_{z3} = \beta_{y2} = \beta_{y3} = \beta_{z2} = \beta_{z3} = 0$$

στη θέση $x = L$ (2.6.6β)

Επίσης, τα στοιχεία k_{m3}^i ($m=2,3,5,6,8,9,11,12$) του τοπικού μητρώου στιβαρότητας (2.6.3) προκύπτουν ως οι αντιδράσεις του αμφίπακτου στοιχείου για μοναδιαία εγκάρσια μετατόπιση $u_z^{ij} = 1$ στη θέση $x = 0$ και επομένως

$$\alpha_{z1} = \alpha_{z3} = \alpha_{y1} = \beta_{y1} = \beta_{z1} = 1, \quad \alpha_{z2} = \alpha_{y2} = \alpha_{y3} = \beta_{y2} = \beta_{y3} = \beta_{z2} = \beta_{z3} = 0$$

στη θέση $x = 0$ (2.6.7α)

$$\alpha_{y1} = \alpha_{z1} = \beta_{y1} = \beta_{z1} = 1, \quad \alpha_{y2} = \alpha_{y3} = \alpha_{z2} = \alpha_{z3} = \beta_{y2} = \beta_{y3} = \beta_{z2} = \beta_{z3} = 0$$

στη θέση $x = L$ (2.6.7β)

Όμοια, τα στοιχεία k_{m5}^i ($m=2,3,5,6,8,9,11,12$) του τοπικού μητρώου στιβαρότητας (2.6.3) προκύπτουν ως οι αντιδράσεις του αμφίπακτου στοιχείου για μοναδιαία καμπτική στροφή $\theta_Y^{ij} = 1$ στη θέση $x = 0$ και επομένως

$$\alpha_{y1} = \alpha_{z1} = \beta_{y1} = \beta_{z1} = \beta_{z3} = 1, \quad \alpha_{z2} = \alpha_{z3} = \alpha_{y2} = \alpha_{y3} = \beta_{y2} = \beta_{y3} = \beta_{z2} = 0$$

στη θέση $x = 0$ (2.6.8α)

$$\alpha_{y1} = \alpha_{z1} = \beta_{y1} = \beta_{z1} = 1, \quad \alpha_{y2} = \alpha_{y3} = \alpha_{z2} = \alpha_{z3} = \beta_{y2} = \beta_{y3} = \beta_{z2} = \beta_{z3} = 0$$

στη θέση $x = L$ (2.6.8β)

Επίσης, τα στοιχεία k_{m6}^i ($m=2,3,5,6,8,9,11,12$) του τοπικού μητρώου στιβαρότητας (2.6.3) προκύπτουν ως οι αντιδράσεις του αμφίπακτου στοιχείου για μοναδιαία καμπτική στροφή $\theta_Z^{ij} = 1$ στη θέση $x = 0$ και επομένως

$$\alpha_{y1} = \alpha_{z1} = \beta_{z1} = \beta_{y1} = \beta_{y3} = 1, \quad \alpha_{z2} = \alpha_{z3} = \alpha_{y2} = \alpha_{y3} = \beta_{z2} = \beta_{z3} = \beta_{y2} = 0$$

στη θέση $x = 0$ (2.6.9α)

$$\alpha_{y1} = \alpha_{z1} = \beta_{y1} = \beta_{z1} = 1, \quad \alpha_{y2} = \alpha_{y3} = \alpha_{z2} = \alpha_{z3} = \beta_{y2} = \beta_{y3} = \beta_{z2} = \beta_{z3} = 0$$

στη θέση $x = L$ (2.6.9β)

Τέλος, τα στοιχεία k_{mn}^i ($m=2,3,5,6,8,9,11,12$, $n=8,9,11,12$) του τοπικού μητρώου στιβαρότητας (2.6.3) προκύπτουν ως οι αντιδράσεις του αμφίπακτου στοιχείου για αντίστοιχες μοναδιαίες μετακινήσεις με τις προαναφερθείσες, στη θέση $x = L$ του ραβδωτού στοιχείου.

Υπενθυμίζεται εδώ ότι οι συνιστώσες μετατόπισης v και w που προκύπτουν από την επίλυση του συστήματος διαφορικών εξισώσεων (2.6.4), εκτός από το τμήμα που οφείλεται στην κάμψη, περιλαμβάνουν και τη συμβολή της διατμητικής παραμόρφωσης. Σύμφωνα με τη θεωρία Timoshenko, η προαναφερθείσα συμβολή της διατμητικής παραμόρφωσης λαμβάνεται υπόψη με τη βοήθεια των ορισμών των επιφανειών διάτμησης κατά τη διεύθυνση των αξόνων y και z , οι οποίες σύμφωνα με τις σχέσεις (2.5.7) δίνονται ως

$$A_y = \kappa_y A = \frac{1}{a_y} A \quad A_z = \kappa_z A = \frac{1}{a_z} A \quad (2.6.10\alpha,\beta)$$

όπου A είναι το εμβαδόν της επιφάνειας της διατομής. Τέλος οι διορθωτικοί συντελεστές διάτμησης, a_y , a_z δίνονται από τις σχέσεις (2.5.4), (2.5.5), αντίστοιχα.

Αναφορικά με το μητρώο επικόμβιων φορτίσεων, θεωρώντας ότι η δοκός υποβάλλεται σε συνδυασμό φορτίσεων από ανομοιόμορφα κατανεμημένο ή/και συγκεντρωμένο εγκάρσιο φορτίο $q_y = q_y(x)$ και $q_z = q_z(x)$ κατά μήκος των αξόνων y , z , αντίστοιχα καθώς και καμπτικές ροπές $m_y = m_y(x)$, $m_z = m_z(x)$ κατά μήκος των αξόνων Y , Z , αντίστοιχα, ο υπολογισμός των στοιχείων του μητρώου (2.6.2) επιτυγχάνεται με τη βοήθεια των σχέσεων (2.2.15), οι οποίες γράφονται ως

$$M_Y^{ij} = -EI_{YY}w''(0) - \frac{EI_{YY}}{GA_z}q_z(0) - EI_{YZ}v''(0) - \frac{EI_{YZ}}{GA_y}q_y(0) \quad (2.6.11\alpha)$$

$$M_Z^{ij} = EI_{ZZ}v''(0) + \frac{EI_{ZZ}}{GA_y}q_y(0) + EI_{YZ}w''(0) + \frac{EI_{YZ}}{GA_z}q_z(0) \quad (2.6.11\beta)$$

$$Q_y^{ij} = -EI_{ZZ}v'''(0) - EI_{YZ}w'''(0) - m_z(0) - \frac{EI_{ZZ}}{GA_y}q'_y(0) - \frac{EI_{YZ}}{GA_z}q'_z(0) \quad (2.6.11\gamma)$$

$$Q_z^{ij} = -EI_{YY}w'''(0) - EI_{YZ}v'''(0) + m_y(0) - \frac{EI_{YY}}{GA_z}q'_z(0) - \frac{EI_{YZ}}{GA_y}q'_y(0) \quad (2.6.11\delta)$$

$$M_Y^{ik} = -EI_{YY}w''(L) - \frac{EI_{YY}}{GA_z}q_z(L) - EI_{YZ}v''(L) - \frac{EI_{YZ}}{GA_y}q_y(L) \quad (2.6.11\epsilon)$$

$$M_Z^{ik} = EI_{ZZ}v''(L) + \frac{EI_{ZZ}}{GA_y}q_y(L) + EI_{YZ}w''(L) + \frac{EI_{YZ}}{GA_z}q_z(L) \quad (2.6.11\sigma)$$

$$Q_y^{ik} = -EI_{ZZ}v'''(L) - EI_{YZ}w'''(L) - m_z(L) - \frac{EI_{ZZ}}{GA_y}q'_y(L) - \frac{EI_{YZ}}{GA_z}q'_z(L) \quad (2.6.11\zeta)$$

$$Q_z^{ik} = -EI_{YY}w'''(L) - EI_{YZ}v'''(L) + m_y(L) - \frac{EI_{YY}}{GA_z}q'_z(L) - \frac{EI_{YZ}}{GA_y}q'_y(L) \quad (2.6.11\eta)$$

χρησιμοποιώντας τις παραγώγους των κινηματικών μεγεθών v , w , οι οποίες υπολογίζονται μετά την επίλυση του πιο κάτω προβλήματος συνοριακών τιμών

$$EI_{ZZ} \frac{d^4 v}{dx^4} + EI_{YZ} \frac{d^4 w}{dx^4} = q_y - \frac{dm_z}{dx} - \frac{EI_{ZZ}}{GA_y} \frac{d^2 q_y}{dx^2} - \frac{EI_{YZ}}{GA_z} \frac{d^2 q_z}{dx^2}$$

στο εσωτερικό του στοιχείου (2.6.12α)

$$EI_{YY} \frac{d^4 w}{dx^4} + EI_{YZ} \frac{d^4 v}{dx^4} = q_z + \frac{dm_y}{dx} - \frac{EI_{YY}}{GA_z} \frac{d^2 q_z}{dx^2} - \frac{EI_{YZ}}{GA_y} \frac{d^2 q_y}{dx^2}$$

στο εσωτερικό του στοιχείου (2.6.12β)

$$v^{ij} = w^{ij} = 0 \quad (a_{y1}^{ij} = a_{z1}^{ij} = 1, a_{y2}^{ij} = a_{y3}^{ij} = a_{z2}^{ij} = a_{z3}^{ij} = 0) \quad \text{στο άκρο } j \quad (2.6.12\gamma)$$

$$\theta_Z^{ij} = \theta_Y^{ij} = 0 \quad (\beta_{y1}^{ij} = \beta_{z1}^{ij} = 1, \beta_{y2}^{ij} = \beta_{y3}^{ij} = \beta_{z2}^{ij} = \beta_{z3}^{ij} = 0) \quad \text{στο άκρο } j \quad (2.6.12\delta)$$

$$v^{ik} = w^{ik} = 0 \quad (a_{y1}^{ik} = a_{z1}^{ik} = 1, a_{y2}^{ik} = a_{y3}^{ik} = a_{z2}^{ik} = a_{z3}^{ik} = 0) \quad \text{στο άκρο } k \quad (2.6.12\epsilon)$$

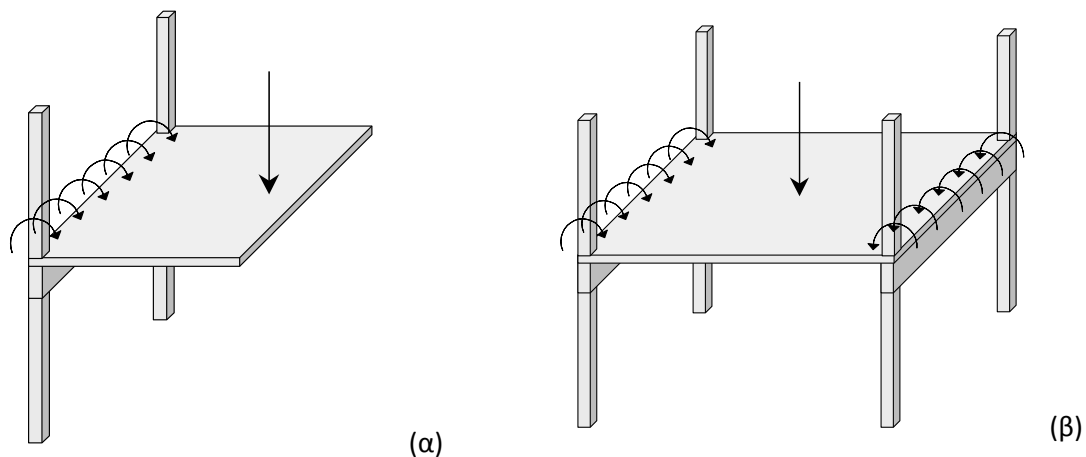
$$\theta_Z^{ik} = \theta_Y^{ik} = 0 \quad (\beta_{y1}^{ik} = \beta_{z1}^{ik} = 1, \beta_{y2}^{ik} = \beta_{y3}^{ik} = \beta_{z2}^{ik} = \beta_{z3}^{ik} = 0) \quad \text{στο άκρο } k \quad (2.6.12\sigma)$$

Κεφάλαιο 3 : Ανομοιόμορφη στρέψη ράβδου

3.1 Εισαγωγή

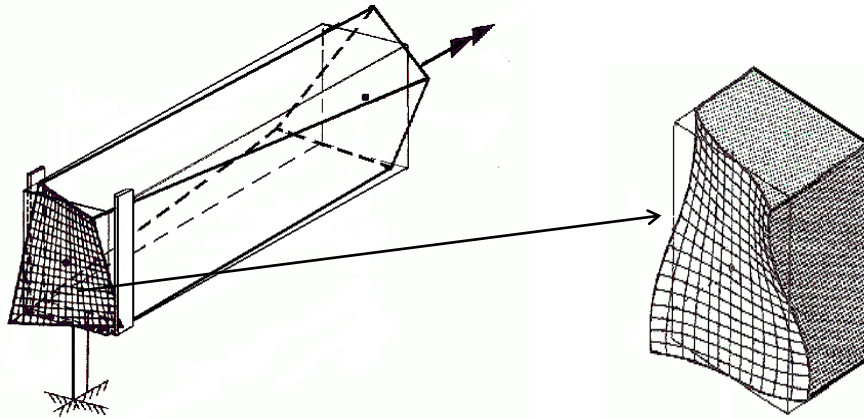
Στρέψη ράβδου καλείται η φόρτιση κατά την οποία ζεύγος δυνάμεων επιδρά σε διατομή, έτσι ώστε το επίπεδο του ζεύγους να είναι κάθετο στον άξονα της ράβδου και το ελεύθερο διάνυσμα της ροπής M_t του ζεύγους να έχει τη διεύθυνση του άξονα της ράβδου. Στα ραβδωτά στοιχεία στρέψη εμφανίζεται όταν το επίπεδο της εξωτερικής φόρτισης δεν διέρχεται από το κέντρο διάτμησης S .

Ως στατική ένταση η στρέψη μπορεί να είναι είτε άμεση είτε έμμεση (Σχ.3.1.) Στην περίπτωση της άμεσης στρέψης, οι στρεπτικές ροπές είναι απαραίτητες για την ισορροπία του φορέα, ενώ στην έμμεση στρέψη οι στρεπτικές ροπές αναπτύσσονται αποκλειστικά λόγω της παρεμπόδισης της γωνιακής παραμόρφωσης εισαγόμενη από παρακείμενα στοιχεία.



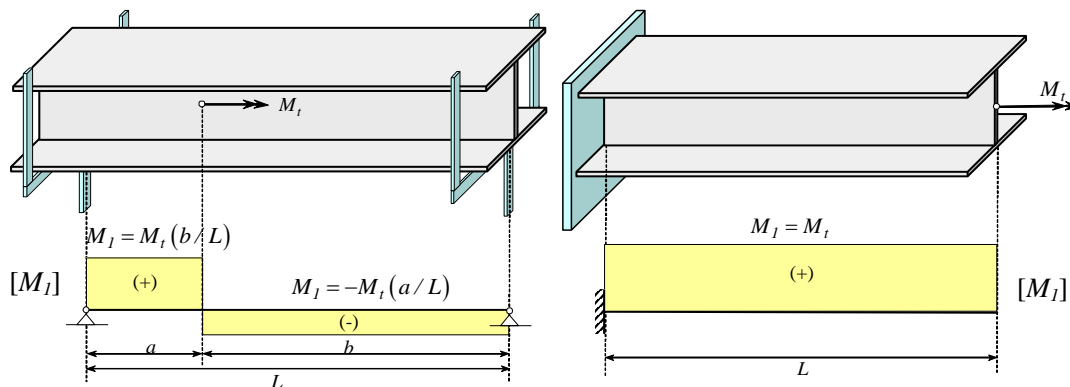
Σχ. 3.1. Παραδείγματα άμεσης (α) και έμμεσης (β) στρέψης δοκού

Επιπλέον, η στρέψη χαρακτηρίζεται ως ομοιόμορφη ή ανομοιόμορφη ανάλογα με το είδος της στρεπτικής φόρτισης και το κατά πόσο αναπτύσσεται ανεμπόδιστα η στρέβλωση. Πιο συγκεκριμένα, η στρέψη κατά Saint Venant, η αλλιώς ελεύθερη, είναι ομοιόμορφη κατά μήκος της ράβδου και η στρέβλωση μπορεί να αναπτυχθεί ανεμπόδιστα (Σχ. 3.2.) .



Σχ. 3.2. Ανεμπόδιση στρέβλωση ορθογωνικής διατομής

Στην περίπτωση κατά την οποία οι διαμήκεις μετατοπίσεις που προκαλούν στρέβλωση παρεμποδίζονται λόγω είτε φόρτισης είτε συνθηκών στήριξης, τότε η στρέψη καλείται ανομοιόμορφη (Σχ. 3.3).



Σχ. 3.3. Ανομοιόμορφη στρέψη ράβδων λόγω παρεμπόδισης της στρέβλωσης

Στη συνέχεια παρουσιάζεται η **ελαστική θεωρία ανομοιόμορφης στρέψης** με δυνάμεις στρέβλωσης ως γενική περίπτωση και η ανεμπόδιση στρέψη Saint Venant ως μερική περίπτωση της προηγούμενης.

Παραδοχές ελαστικής θεωρίας στρέψης

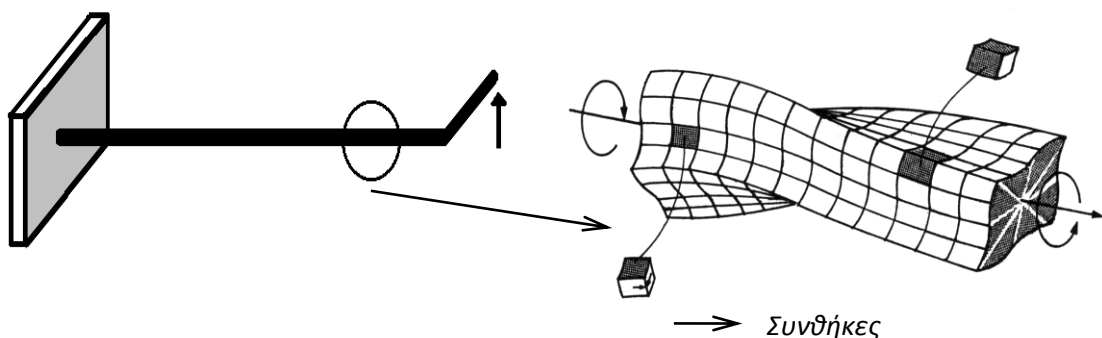
- Η ράβδος είναι ευθύγραμμη.
- Η ράβδος υπόκειται μόνο σε περιστροφή περί το διαμήκη άξονά της, όπου ο άξονας στροφής μπορεί να τοποθετείται ελεύθερα. Μετατοπίσεις κάθετες στον άξονα της ράβδου (εκτροπή) δεν υπάρχουν.

- Εγκάρσιες παραμορφώσεις της διατομής σε κατάσταση φόρτισης δεν αναπτύσσονται, δηλαδή το σχήμα της διατομής διατηρείται ($\gamma_{yz} = 0$).
- Η διατομή της ράβδου είναι σταθερή.
- Η πρωτογενής (κύρια) στρέβλωση της ράβδου είναι ανάλογη της σχετικής γωνίας στρεπτικής στροφής των διατομών ανά μονάδα μήκους.
- Η στροφή της διατομής θεωρείται τόσο μικρή, ώστε το τόξο με καλή προσέγγιση να μπορεί να αντικατασταθεί από τη χορδή του.
- Το υλικό της ράβδου θεωρείται ομογενές, ισότροπο, συνεχές και γραμμικά ελαστικό και συνεπώς ισχύουν οι σχέσεις της γραμμικής θεωρίας ελαστικότητας.
- Η κατανομή των δυνάμεων στα άκρα της ράβδου είναι τέτοια, ώστε να τηρούνται όλες οι προαναφερθείσες παραδοχές.

Συγκεκριμένα για την **ανεμπόδιση ομοιόμορφη στρέψη Saint Venant** ισχύει η πρόσθετη παραδοχή:

- Οι διαμήκεις μετατοπίσεις που προκαλούν στρέβλωση δεν παρεμποδίζονται και είναι ίδιες για κάθε διατομή και ανεξάρτητες από τις διαμήκεις συντεταγμένες.

Από την τελευταία παραδοχή είναι φανερό ότι το πεδίο εφαρμογής της ομοιόμορφης στρέψης είναι πολύ περιορισμένο, αν μάλιστα παρατηρηθεί ότι στη ράβδο του Σχ.3.4, η οποία αποτελεί την άμεση εφαρμογή της ομοιόμορφης στρέψης, αντικατάσταση της στρεπτικής στήριξης πάκτωσης με διχαλωτή στήριξη δίνει μηχανισμό. Η διαπίστωση αυτή οδηγεί εύκολα στην αναγκαιότητα διερεύνησης του προβλήματος της ανομοιόμορφης στρέψης.



Σχ. 3.4. Ανεμπόδιση στρέβλωση μακριά από τη στήριξη

3.2. Μετατοπίσεις , παραμορφώσεις , τάσεις

3.2.1. Μετακινήσεις

Θεωρείται ευθύγραμμη πρισματική ράβδος τυχούσας διατομής, η οποία υποβάλλεται σε τυχούσα συγκεντρωμένη ή κατανεμημένη στρεπτική φόρτιση $m_t = m_t(x)$ περί τον επιμήκη άξονα της x (Σχ. 3.5.α). Αποτέλεσμα της στρεπτικής αυτής καταπόνησης είναι η στροφή της διατομής της ράβδου ως προς ως προς το κέντρο διάτμησης S κατά γωνία $\theta_x(x)$. Στη συνέχεια θα θεωρούμε ότι το κέντρο διάτμησης S ταυτίζεται με το κέντρο συστροφής της διατομής της ράβδου εφόσον δεν επιβάλλεται κατασκευαστικά κάποιο άλλο κέντρο συστροφής.

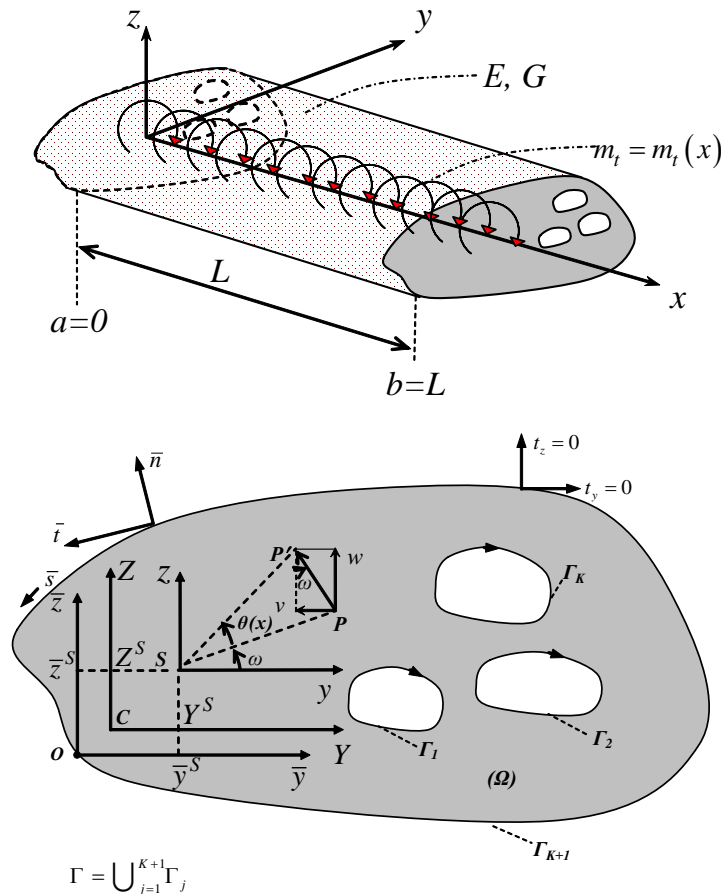
Λόγω της προαναφερθείσας στροφής της διατομής ως προς το κέντρο διάτμησης S κατά γωνία $\theta_x(x)$ και με βάση τις προαναφερθείσες παραδοχές, οι συνιστώσες μετατόπισης u, v, w αναφορικά με το σύστημα αξόνων Δxyz , κατά τους άξονες x, y, z , αντίστοιχα, τυχόντος σημείου της ράβδου θεωρούνται ως (Sapountzakis and Mokos 2003a, Μώκος 2007) :

$$u = \theta'_x(x) \phi_S^P(y, z) + \phi_S^S(x, y, z) \quad (3.2.1.1\alpha)$$

$$v = -z\theta_x(x) \quad (3.2.1.1\beta)$$

$$w = y\theta_x(x) \quad (3.2.1.1\gamma)$$

όπου $\theta'_x(x) = d\theta_x/dx$ είναι η σχετική γωνία στροφής δύο γειτονικών διατομών της ράβδου ανηγμένη στη μονάδα μήκους, $\phi_S^P(y, z)$ είναι η **πρωτογενής** συνάρτηση στρέβλωσης ως προς το κέντρο διάτμησης S , η οποία χαρακτηρίζεται και ως κύρια συνάρτηση στρέβλωσης, ενώ $\phi_S^S(x, y, z)$ είναι η **δευτερογενής** συνάρτηση στρέβλωσης ως προς το κέντρο διάτμησης S . Η πρωτογενής συνάρτηση στρέβλωσης ϕ_S^P εκφράζει την κύρια στρέβλωση u που προκύπτει για μοναδιαία σχετική γωνία στροφής ($\theta'_x(x) = 1$) και εξαρτάται μόνο από τη γεωμετρία της διατομής, δηλαδή αποτελεί παράμετρο αυτής και είναι ανεξάρτητη της συντεταγμένης x .



Σχ. 3.5. Πρισματική ράβδος υποβαλλόμενη σε στρεπτική ροπή M_t (α) διατομής τυχόντος σχήματος που καταλαμβάνει το διδιάστατο χωρίο Ω (β).

Σύμφωνα με την ανεμπόδιστη ομοιόμορφη στρέψη *Saint Venant*, η σχετική γωνία στροφής θα πρέπει να είναι σταθερή ($\theta'_x = c$), ενώ σύμφωνα με την ανομοιόμορφη στρέψη με δυνάμεις στρέβλωσης, η σχετική γωνία στροφής είναι συνάρτηση της διαμήκουσ συντεταγμένης x , $\theta'_x = \theta'_x(x)$.

3.2.2. Παραμορφώσεις

Σύμφωνα με τις σχέσεις παραμορφώσεων – μετατοπίσεων της τρισδιάστατης θεωρίας ελαστικότητας για μικρές μετατοπίσεις και αντικαθιστώντας τις συνιστώσες μετατόπισης από τις εξισώσεις (3.2.1.1) έχουμε :

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{xx}^P + \varepsilon_{xx}^S = \frac{\partial u^P}{\partial x} + \frac{\partial u^S}{\partial x} = \theta'_x(x) \phi_S^P(y, z) + \frac{\partial \phi_S^S(x, y, z)}{\partial x} \quad (3.2.2.1\alpha)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3.2.2.1\gamma)$$

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{xy}^P + \varepsilon_{xy}^S = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{\partial u^P}{\partial y} + \frac{\partial u^S}{\partial y} \right) \right] = \frac{1}{2} \theta'_x(x) \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - z \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial \phi_S^S(x, y, z)}{\partial y} \quad (3.2.2.1\delta)$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = 0 \quad (3.2.2.1\epsilon)$$

$$\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{xz}^P + \varepsilon_{xz}^S = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial w}{\partial x} + \left(\frac{\partial u^P}{\partial z} + \frac{\partial u^S}{\partial z} \right) \right] = \frac{1}{2} \theta'_x(x) \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + y \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial \phi_S^S(x, y, z)}{\partial z} \quad (3.2.2.1\sigma\tau)$$

3.2.3. Τάσεις

Στη συνέχεια, λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις τάσεων – παραμορφώσεων σύμφωνα με τον νόμο του Hooke και αγνοώντας τη δευτερογενή ορθή παραμόρφωση της σχέσης (3.2.2.1α), οι συνιστώσες του τανυστή τάσεως Cauchy μετά την αντικατάσταση των συνιστωσών του τανυστή παραμόρφωσης από τις σχέσεις (3.2.2.1) προκύπτουν ως :

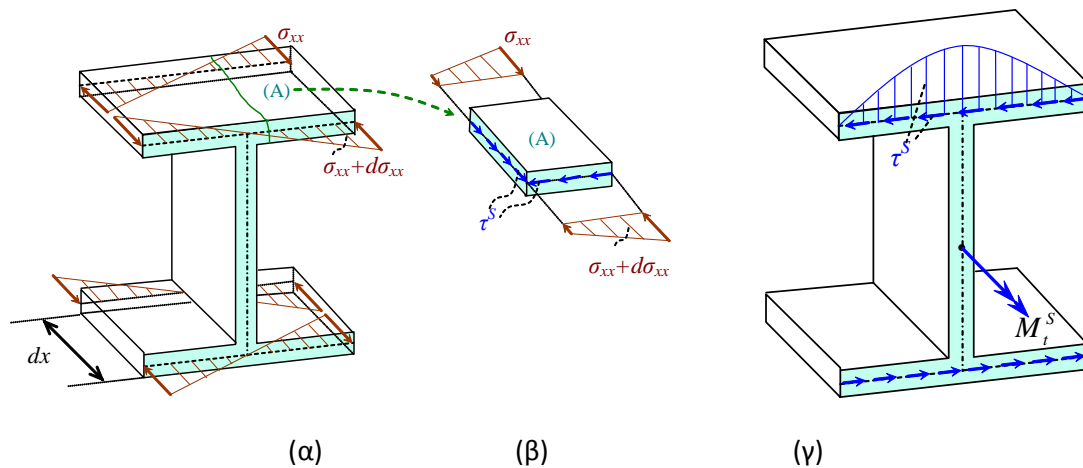
$$\sigma_{xx} = \sigma_{xx}^P + \sigma_{xx}^S = E \left(\varepsilon_{xx}^P + \varepsilon_{xx}^S \right) = \underbrace{E \theta'_x(x) \phi_S^P(y, z)}_{\text{πρωτογενής}} \quad (3.2.3.1\alpha)$$

$$\sigma_{yy} = 0 \quad \sigma_{zz} = 0 \quad (3.2.3.1\beta, \gamma)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{xy}^P + \tau_{xy}^S = 2G \left(\varepsilon_{xy}^P + \varepsilon_{xy}^S \right) = \underbrace{G \theta'_x(x) \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - z \right)}_{\text{πρωτογενής}} + \underbrace{G \frac{\partial \phi_S^S(x, y, z)}{\partial y}}_{\text{δευτερογενής}} \quad (3.2.3.1\delta)$$

$$\tau_{yz} = 0 \quad (3.2.3.1\epsilon)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{xz}^P + \tau_{xz}^S = 2G(\varepsilon_{xz}^P + \varepsilon_{xz}^S) = \underbrace{G\theta'_x(x)}_{\text{πρωτογενής}} \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + y \right) + \underbrace{G \frac{\partial \phi_S^S(x, y, z)}{\partial z}}_{\text{δευτερογενής}} \quad (3.2.3.1\sigma)$$



Σχ. 3.6. Ορθές και διατμητικές τάσεις λόγω στρέβλωσης.

Στην σχέση (3.2.3.1α) βλέπουμε τις ορθές τάσεις λόγω στρέβλωσης και στο εξής θα συμβολίζονται ως σ_{xx}^w . Όσο αφορά τη διάσπαση των διατμητικών τάσεων, αυτό δικαιολογείται από την ισορροπία των ορθών τάσεων από στρέβλωση σε στοιχειώδες τμήμα της διατομής (Σχ. 3.6.β). Συνεπώς, σε ράβδο τυχούσας διατομής υποβαλλόμενης σε ανομοιόμορφη στρέψη, αναπτύσσονται ορθές τάσεις σ_{xx}^w οι οποίες είναι ανάλογες με την πραγματοποιούμενη στρέβλωση και μεταβάλλονται κατά μήκος του άξονα x της ράβδου (Σχ. 3.6.α).

Πιο συγκεκριμένα, για τις διατμητικές τάσεις εξετάζοντας την τομή A του Σχ.3.6.β παρατηρείται ότι η στοιχειώδης μεταβολή $d\sigma_{xx}^w$ των ορθών τάσεων από στρέβλωση μπορεί να εξισορροπηθεί μόνο από διατμητικές τάσεις κατά μήκος της τομής A και οι οποίες με τη βοήθεια του θεωρήματος Cauchy οδηγούν στην ανάπτυξη των δευτερογενών διατμητικών τάσεων τ^S (Σχ. 3.6.γ) στο επίπεδο της διατομής. Έτσι, σύμφωνα με τα προηγούμενα τόσο οι πρωτογενείς διατμητικές τάσεις (οι οποίες εκφράζουν τις διατμητικές τάσεις της ομοιόμορφης στρέψης *Saint Venant* με τη διαφορά ότι η γωνία στροφής ανά μονάδα μήκους δεν είναι σταθερή) όσο και οι ορθές τάσεις από στρέβλωση προκύπτουν από τις πρωτογενείς παραμορφώσεις, ενώ οι δευτερογενείς διατμητικές τάσεις προκύπτουν από την ισορροπία των διαμήκων ορθών τάσεων στρέβλωσης σ_{xx}^w , που συμβολίζονται και ως σ_{xx}^w .

3.3. Προσδιορισμός της πρωτογενούς $\phi_S^P(y, z)$ και δευτερογενούς $\phi_S^S(x, y, z)$ συνάρτησης στρέβλωσης

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (3.2.3.1) στην πρώτη εξίσωση ισορροπίας της θεωρίας ελαστικότητας απουσία μαζικών δυνάμεων λαμβάνεται

$$\frac{\partial \sigma_{xx}^w}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}^P}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}^P}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xy}^S}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}^S}{\partial z} = 0 \quad (3.3.1)$$

Από τη σχέση (3.3.1) βλέπουμε ότι η εντατική κατάσταση της ράβδου υποκείμενης σε στρεπτική καταπόνηση προκύπτει από την επαλληλία των πρωτογενών τ^P , των δευτερογενών τ^S διατμητικών τάσεων και των ορθών τάσεων από στρέβλωση σ_{xx}^w . Προκειμένου να ικανοποιηθεί η εξίσωση (3.3.1) απαιτείται ο μηδενισμός τόσο των όρων που προέρχονται από τις πρωτογενείς διατμητικές τάσεις

$$\frac{\partial \tau_{xy}^P}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}^P}{\partial z} = 0 \quad (3.3.2)$$

όσο και αυτών που προέρχονται από την ορθή και τις δευτερογενείς διατμητικές τάσεις από στρέβλωση.

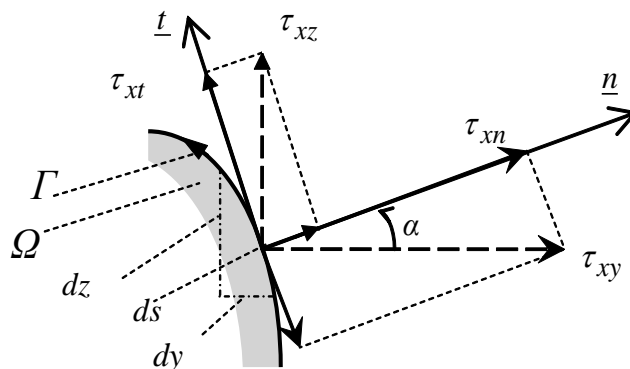
$$\frac{\partial \tau_{xy}^S}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}^S}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{xx}^w}{\partial x} = 0 \quad (3.3.3)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (3.2.3.1) στις σχέσεις (3.3.2, 3.3.3) προκύπτει :

$$\nabla^2 \phi_S^P = \frac{\partial^2 \phi_S^P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_S^P}{\partial z^2} = 0 \quad (3.3.4)$$

$$\nabla^2 \phi_S^S = \frac{\partial^2 \phi_S^S}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_S^S}{\partial z^2} = -\frac{E\theta_x'''(x)}{G} \phi_S^P \quad (3.3.5)$$

Για τη μόνρφωση των **συνοριακών συνθηκών** της πρωτογενούς και της δευτερογενούς συνάρτησης στρέβλωσης παρατηρούνται οι διατμητικές τάσεις στο σύνορο της διατομής. Εξετάζοντας τη στοιχειώδη επιφάνεια $dydz$ με τη βοήθεια του σχήματος 3.7 εύκολα προκύπτει ότι :



Σχ. 3.7. Διατμητικές τάσεις στο σύνορο της διατομής

$$\tau_{xn} = \tau_{xy}n_y + \tau_{xz}n_z \quad (3.3.6)$$

$$\tau_{xt} = -\tau_{xy}n_z + \tau_{xz}n_y \quad (3.3.7)$$

Αντικαθιστώντας την πρώτη ισότητα των σχέσεων (3.2.3.1,στ) που εκφράζουν τη διάσπαση των διατμητικών τάσεων σε πρωτογενείς και δευτερογενείς στις σχέσεις (3.3.6, 3.3.7) προκύπτει

$$\tau_{xn}^P = \tau_{xy}^P n_y + \tau_{xz}^P n_z \quad \tau_{xt}^P = -\tau_{xy}^P n_z + \tau_{xz}^P n_y \quad (3.3.8\alpha,\beta)$$

$$\tau_{xn}^S = \tau_{xy}^S n_y + \tau_{xz}^S n_z \quad \tau_{xt}^S = -\tau_{xy}^S n_z + \tau_{xz}^S n_y \quad (3.3.9\alpha,\beta)$$

Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις των πρωτογενών και δευτερογενών διατμητικών τάσεων που δίδονται από τις σχέσεις (3.2.3.1δ,στ) στις σχέσεις (3.3.8, 3.3.9) λαμβάνονται τα πρωτογενή και δευτερογενή τμήματα τόσο των κάθετων όσο και των εφαπτομενικών διατμητικών τάσεων στο σύνορο της διατομής ως

$$\tau_{xn}^P = G\theta'_x(x) \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial n} - zn_y + yn_z \right) \quad \tau_{xt}^P = G\theta'_x(x) \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial t} + yn_y + zn_z \right) \quad (3.3.10\alpha,\beta)$$

$$\tau_{xn}^S = G \frac{\partial \phi_S^S}{\partial n} \quad \tau_{xt}^S = G \frac{\partial \phi_S^S}{\partial t} \quad (3.3.10\gamma,\delta)$$

Επίσης, επειδή η ράβδος είναι αφόρτιστη κατά τη διαμήκη κατεύθυνση στην παράπλευρη επιφάνεια της πρέπει για λόγους ισορροπίας οι κάθετες διατμητικές τάσεις στο σύνορο της να μηδενίζονται :

$$\tau_{xn}^P = 0 \quad \tau_{xn}^S = 0 \quad (3.3.11\alpha,\beta)$$

Με αντικατάσταση τώρα των σχέσεων (3.3.10α, 3.3.10γ) στις σχέσεις (3.3.11α,β) και λαμβάνοντας υπόψη ότι $G\theta'_x \neq 0$, η συνοριακή συνθήκη της πρωτογενούς συνάρτησης στρέβλωσης δίνεται ως

$$\frac{\partial \phi_S^P}{\partial n} = zn_y - yn_z \quad (3.3.12)$$

και αυτή της δευτερογενούς συνάρτησης στρέβλωσης ως

$$\frac{\partial \phi_S^S}{\partial n} = 0 \quad (3.3.13)$$

Συμπερασματικά έχουμε λοιπόν ότι για τον προσδιορισμό της πρωτογενούς $\phi_S^P(y, z)$ και δευτερογενούς $\phi_S^S(x, y, z)$ συνάρτησης στρέβλωσης απαιτείται η λύση των πιο κάτω προβλημάτων (Sapountzakis and Mokos 2003a, Μώκος 2007):

1. Πρόβλημα Neumann της διαφορικής εξίσωσης Laplace

$$\nabla^2 \phi_S^P = \frac{\partial^2 \phi_S^P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_S^P}{\partial z^2} = 0 \quad \text{στο εσωτερικό του χωρίου της διατομής } \Omega \quad (3.3.13\alpha)$$

$$\frac{\partial \phi_S^P}{\partial n} = zn_y - yn_z \quad \text{στο σύνορο της διατομής } \Gamma \quad (3.3.13\beta)$$

2. Πρόβλημα Neumann της διαφορικής εξίσωσης Poisson

$$\nabla^2 \phi_S^S = \frac{\partial^2 \phi_S^S}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_S^S}{\partial z^2} = -\frac{E\theta_x'''}{G} \phi_S^P \quad \text{στο εσωτερικό του } \Omega \quad (3.3.14\alpha)$$

$$\frac{\partial \phi_S^S}{\partial n} = 0 \quad \text{στο σύνορο της διατομής } \Gamma \quad (3.3.14\beta)$$

3.4 Εντατικά μεγέθη , εξίσωση ισορροπίας , συνοριακές συνθήκες

Με ολοκλήρωση των διατμητικών τάσεων τ_{xy} και τ_{xz} στο επίπεδο της διατομής προκύπτει η στρεπτική ροπή :

$$M_t = \int_{\Omega} (\tau_{xz}y - \tau_{xy}z) d\Omega \quad (3.4.1)$$

Προσθαφαιρώντας τους όρους $\partial \phi_S^P / \partial y$ και $\partial \phi_S^P / \partial z$ η σχέση (12.3.1) γράφεται ως

$$M_t = \int_{\Omega} \left[\tau_{xy} \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - z - \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} \right) + \tau_{xz} \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + y - \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} \right) \right] d\Omega \quad (3.4.2)$$

ή

$$M_t = \int_{\Omega} \left[\tau_{xy} \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - z \right) + \tau_{xz} \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + y \right) \right] d\Omega + \int_{\Omega} \left(-\tau_{xy} \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - \tau_{xz} \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} \right) d\Omega \quad (3.4.3)$$

Εισάγοντας την προσέγγιση διάσπασης των διατμητικών τάσεων σε πρωτογενείς και δευτερογενείς, όπως αναπτύχθηκε στο προηγούμενο υποκεφάλαιο και θεωρώντας ότι το πρωτογενές τμήμα τους αφορά τον πρώτο όρο του αθροίσματος του δεξιού μέλους της σχέσης (3.4.3) και το δευτερογενές τμήμα τους τον δεύτερο όρο, η σχέση (3.4.3) γράφεται ως

$$M_t = \int_{\Omega} \left[\tau_{xy}^P \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - z \right) + \tau_{xz}^P \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + y \right) \right] d\Omega + \int_{\Omega} \left(-\tau_{xy}^S \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - \tau_{xz}^S \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} \right) d\Omega \quad (3.4.4)$$

Έτσι, στην ανομοιόμορφη στρέψη σε κάθε διατομή της ράβδου ισχύει η σχέση

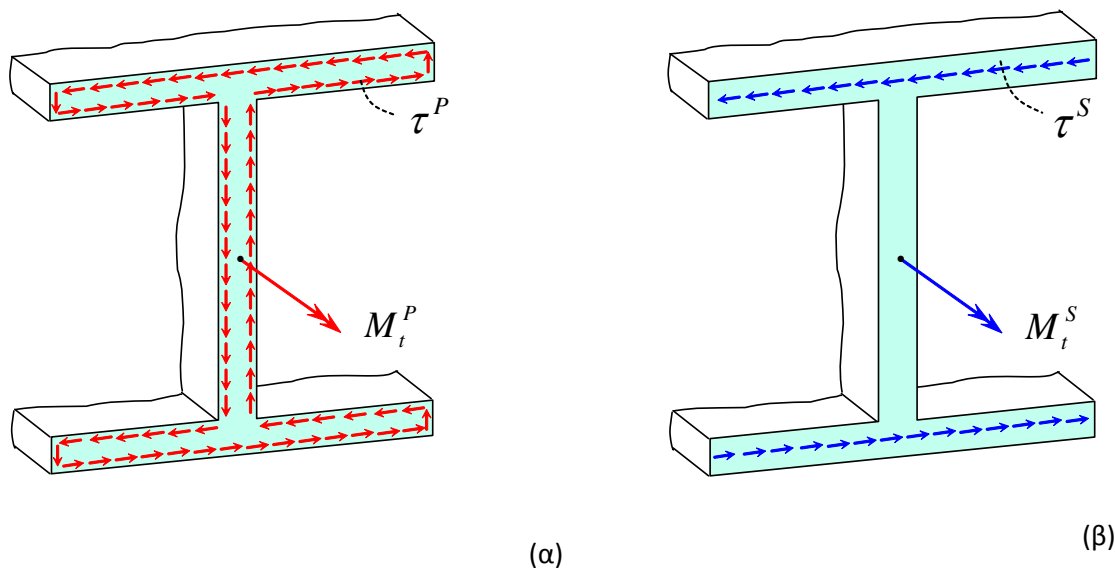
$$M_t = M_t^P + M_t^S \quad (3.4.5)$$

όπου έχει τεθεί

$$M_t^P = \int_{\Omega} \left[\tau_{xy}^P \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - z \right) + \tau_{xz}^P \left(\frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + y \right) \right] d\Omega \quad (3.4.6\alpha)$$

$$M_t^S = \int_{\Omega} \left(-\tau_{xy}^S \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - \tau_{xz}^S \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} \right) d\Omega \quad (3.4.6\beta)$$

δηλαδή ως M_t^P ονομάζεται η συνισταμένη ροπή των πρωτογενών και ως M_t^S αυτή των δευτερογενών διατμητικών τάσεων. Επομένως, στην περίπτωση της ανομοιόμορφης στρέψης, η στρεπτική ροπή της διατομής χωρίζεται σε πρωτογενές τμήμα M_t^P , το οποίο προέρχεται από πρωτογενείς διατμητικές τάσεις τ^P λόγω στρέψης (όπως στην ομοιόμορφη στρέψη) και σε δευτερογενές τμήμα M_t^S , το οποίο προέρχεται από την παρεμπόδιση της στρέβλωσης (Σχ.3.8).



Σχ.3.8 Διανομή πρωτογενών (α) και δευτερογενών (β) διατμητικών τάσεων και προκύπτουσες στρεπτικές ροπές

Με τη βοήθεια του θεωρήματος Gauss – Green και μετά από πράξεις (Sapountzakis and Mokoš 2003a, Μώκος 2007) το πρωτογενές M_t^P και το δευτερογενές M_t^S τμήμα της στρεπτικής ροπής γράφονται ως

$$M_t^P = GI_t \frac{d\theta_x(x)}{dx} = GI_t \theta'_x(x) \quad (3.4.7\alpha)$$

$$M_t^S = -EC_S \frac{d^3\theta_x(x)}{dx^3} = -EC_S \theta_x'''(x) \quad (3.4.7\beta)$$

όπου έχει τεθεί

$$I_t = \int_{\Omega} \left(y^2 + z^2 + y \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} - z \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} \right) d\Omega \quad (3.4.8\alpha)$$

$$C_S = \int_{\Omega} \left(\phi_S^P \right)^2 d\Omega \quad (3.4.8\beta)$$

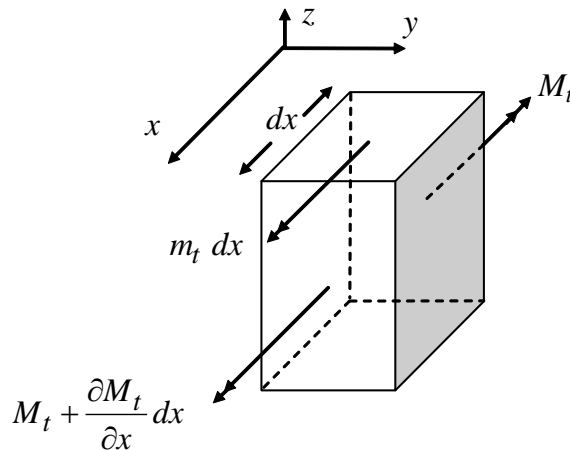
Το μέγεθος I_t ονομάζεται στρεπτική ροπή αδράνειας κατά *Saint Venant* ή στρεπτική σταθερά και η ποσότητα GI_t ονομάζεται στρεπτική αντίσταση της διατομής. Επίσης, το μέγεθος C_S ονομάζεται σταθερά στρέβλωσης και η ποσότητα EC_S αντίσταση στρέβλωσης της διατομής. Τονίζεται ότι η στρεπτική σταθερά είναι ανεξάρτητη της θέσης του συστήματος συντεταγμένων, ενώ η σταθερά στρέβλωσης αναφέρεται στο κέντρο συστορφής S .

Για να διατυπώσουμε την εξίσωση ισορροπίας στο πρόβλημα της ανομοιόμορφης στρέψης ομογενούς ισότροπης ράβδου θεωρείται η ισορροπία στοιχειώδους τμήματος μήκους dx της ράβδου έναντι στρεπτικών ροπών και σύμφωνα με το Σχ.3.9 προκύπτει

$$M_t + \frac{\partial M_t}{\partial x} dx - M_t + m_t dx = 0 \quad (3.4.9)$$

ή μετά τις σχετικές πράξεις

$$\frac{\partial M_t}{\partial x} = -m_t \quad (3.4.10)$$



Σχ.3.9 Εντατικά μεγέθη σε τμήμα ελαστικής ράβδου υποβαλλόμενης σε τυχούσι συγκεντρωμένη ή κατανεμημένη στρεπτική φόρτιση $m_t = m_t(x)$ περί τον επιμή άξονα της x

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (3.4.5), (3.4.7α) και (3.4.7β) στη σχέση (3.4.10) προκύπτει η σχέση

$$m_t = -GI_t \theta_x'' + EC_S \theta_x''' \quad (3.4.11)$$

η οποία αποτελεί τη διαφορική εξίσωση ισορροπίας τέταρτης τάξης της ομογενούς ισότροπης ράβδου υποβαλλόμενης σε ανομοιόμορφη στρέψη και η οποία είναι ανεξάρτητη των στρεπτικών συνοριακών συνθηκών. Συνδυάζοντας τις σχέσεις (3.4.10), (3.4.11) και ολοκληρώνοντας εύκολα προκύπτει ότι

$$M_t = GI_t \theta_x' - EC_S \theta_x'' \quad (3.4.12)$$

Η σχέση (3.4.12) αποτελεί τη διαφορική εξίσωση ισορροπίας τρίτης τάξης της ομογενούς ισότροπης ράβδου υποβαλλόμενης σε ανομοιόμορφη στρέψη.

Στη συνέχεια, σε αναλογία με τις καμπτικές ροπές M_y, M_z ορίζεται ένα νέο στατικό μέγεθος, το οποίο ονομάζεται **δίρροπο στρέβλωσης** και το οποίο δίνεται από τη σχέση

$$M_w = - \int_{\Omega} \phi_S^P \sigma_{xx}^w d\Omega \quad (3.4.13)$$

Το δίρροπο στρέβλωσης ορίσθηκε διότι ορθές τάσεις αναπτύσσονται, αλλά δεν υπάρχει ένταση που να τις δικαιολογεί, επομένως η ελαστική ενέργεια λόγω ορθών τάσεων θα αγνοούνταν. Αντικαθιστώντας την έκφραση της ορθής συνιστώσας τάσης σ_{xx}^w από τη σχέση (3.2.3.1α) στη σχέση (3.4.13), η τελευταία γράφεται ως

$$M_w = -E\theta_x'' \int_{\Omega} (\phi_S^P)^2 d\Omega \quad (3.4.14)$$

ή από την σχέση (3.4.8β)

$$M_w = -EC_S \frac{d^2\theta_x}{dx^2} = -EC_S\theta_x'' \quad (3.4.15)$$

και επομένως η σχέση (3.2.3.1α) μπορεί να γραφεί και με τη μορφή

$$\sigma_{xx}^w = -\frac{M_w}{C_S} \phi_S^P \quad (3.4.16)$$

Από την σχέση (3.3.16) βλέπουμε ότι το δίρροπο στρέβλωσης είναι εντατικό μέγεθος με γενικά χαρακτηριστικά εντατικού μεγέθους της θεωρίας ελαστικότητας. Συνδυάζοντας τις σχέσεις (3.4.7β) και (3.4.15) προκύπτει η σχέση που συσχετίζει τη δευτερογενή στρεπτική ροπή και το δίρροπο στρέβλωσης ως

$$\frac{dM_w}{dx} = M_t^S \quad (3.4.17)$$

Η λύση του προβλήματος της ανομοιόμορφης στρέψης, για τον υπολογισμό των αναπτυσσόμενων τάσεων, ανάγεται λοιπόν στην επίλυση της διαφορικής εξίσωσης τετάρτης τάξης ως προς τη γωνία στρόφης $\theta_x(x)$ της διατομής της ράβδου που δίνεται από τη σχέση (3.4.11). Η λύση της εξίσωσης αυτής εξαρτάται αφενός από τη στρεπτική φόρτιση της ράβδου και αφετέρου από τις στρεπτικές συνθήκες στήριξης της στο σύνορο ή και στο εσωτερικό της. Οι πλέον **γενικές γραμμικές συνοριακές συνθήκες** στα άκρα της ράβδου περιγράφονται από τις σχέσεις

$$a_1\theta_x + a_2M_t = a_3 \quad (3.4.18\alpha)$$

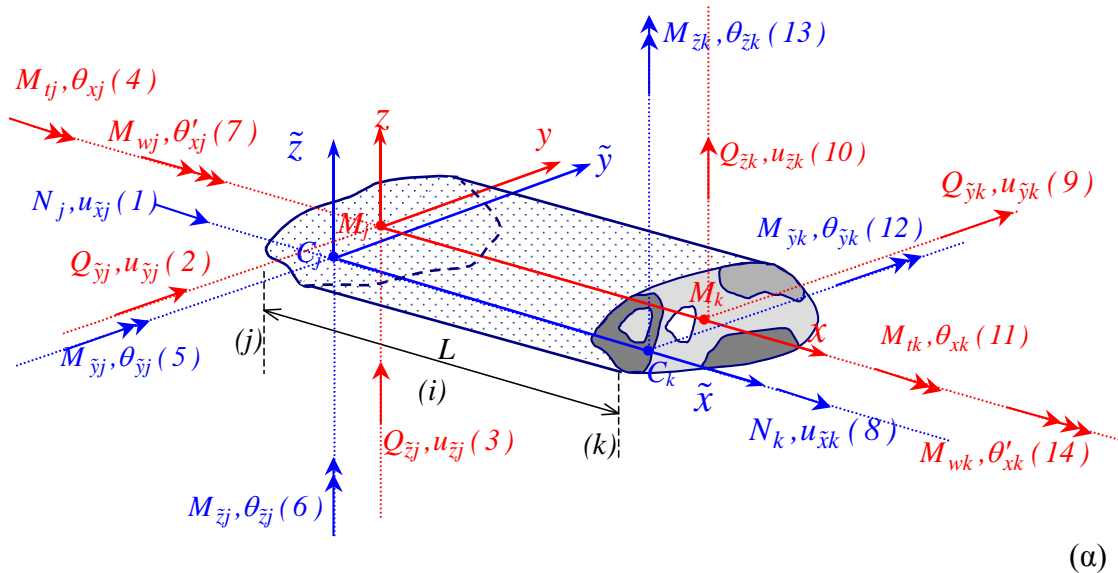
$$\beta_1\theta_x' + \beta_2M_w = \beta_3 \quad (3.4.18\beta)$$

Τέλος, ορίζεται ο Συντελεστής Στρεπτικής Απόσβεσης (ε) σύμφωνα με την σχέση :

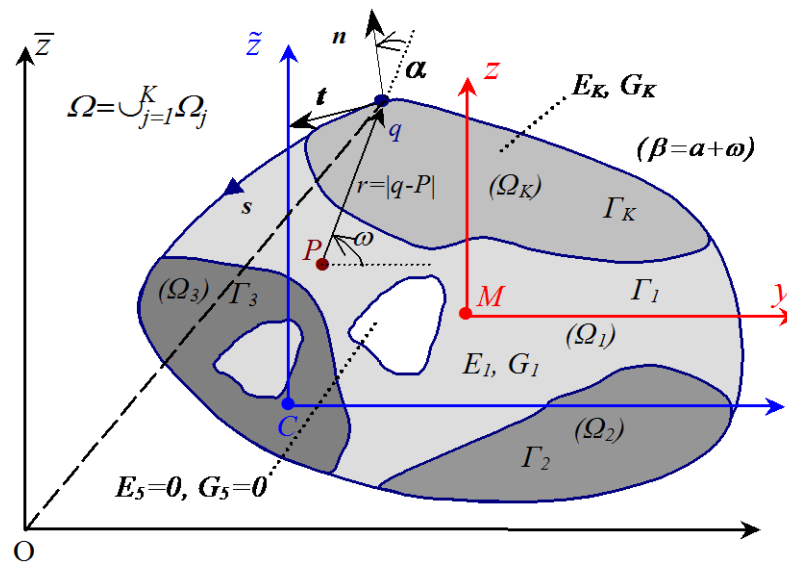
$$\varepsilon = L \sqrt{\frac{GI_t}{EC_S}} \quad (3.4.19)$$

Μέσω του συντελεστή αυτού προσδιορίζεται ποιοτικά το κατά πόσο η στρέψη είναι ανομοιόμορφη ή ομοιόμορφη. Οι Ramm and Hofmann (1995) δίδουν για τον τρόπο ανάπτυξης της στρέψης τα εξής όρια για τον προαναφερθέντα συντελεστή :

- για $\varepsilon \leq 1$ αναπτύσσονται κυρίως δευτερογενείς διατμητικές τάσεις και ορθές τάσεις από στρέβλωση (ανομοιόμορφη στρέψη).
- για $1 < \varepsilon \leq 15$ αναπτύσσονται πρωτογενείς, δευτερογενείς διατμητικές τάσεις και ορθές τάσεις από στρέβλωση (ανομοιόμορφη στρέψη).
- για $\varepsilon > 15$ αναπτύσσονται κυρίως πρωτογενείς διατμητικές τάσεις (ομοιόμορφη στρέψη).



(α)



(C: Κέντρο βάρους, M: Κέντρο διάτμησης ≡ Κέντρο στρέψης)

(β)

Σχ.3.10. Πρισματικό στοιχείο υποβαλλόμενο σε στρεπτική φόρτιση (α) με τυχούσα σταθερή διατομή που καταλαμβάνει το χωρίο Ω (β).

3.5. Τοπικό Μητρώο Στιβαρότητας – Τοπικά Μητρώα Επικόμβιων Μετακινήσεων και Δράσεων

Θεωρείται χωρικό πρισματικό στοιχείο μήκους L και σταθερής τυχούσας διατομής αποτελούμενης από ομογενές, ισότροπο και γραμμικά ελαστικό υλικό, με μέτρο ελαστικότητας E και μέτρο διάτμησης G , το οποίο καταλαμβάνει περιοχή Ω του επιπέδου \bar{y}, \bar{z} (Σχ.3.10).

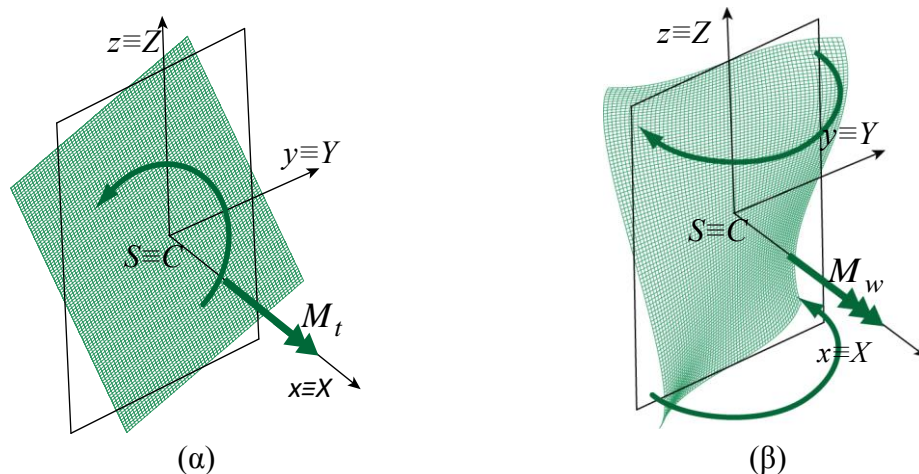
Προκειμένου να συμπεριληφθεί η συμπεριφορά έναντι στρέβλωσης κατά τη μελέτη του προαναφερθέντος στοιχείου, εισάγεται στα δύο άκρα του στοιχείου έβδομος βαθμός ελευθερίας στους ήδη γνωστούς έξι β.ε. του κλασικού στοιχείου χωρικού πλαισίου. Ο πρόσθετος αυτός β.ε. είναι η πρώτη παράγωγος κατά τον άξονα του στοιχείου της γωνίας στροφής $\theta_x'(x) = d\theta_x / dx$, ο οποίος όπως προαναφέρθηκε δηλώνει τον ρυθμό μεταβολής της γωνίας στροφής θ_x κατά μήκος του στοιχείου ή αλλιώς τη στρεπτική καμπυλότητα της διατομής και ονομάζεται συστροφή (Σχ.3.11). Έτσι, το μητρώο των επικόμβιων μετακινήσεων του στοιχείου στο τοπικό σύστημα αξόνων, όπως φαίνεται και στο Σχ.3.10.α μπορεί να γραφεί ως

$$\{D^i\}^T = \{u_x^{ij} \quad u_y^{ij} \quad u_z^{ij} \quad \theta_x^{ij} \quad \theta_y^{ij} \quad \theta_z^{ij} \quad u_x^{ik} \quad u_y^{ik} \quad u_z^{ik} \quad \theta_x^{ik} \quad \theta_y^{ik} \quad \theta_z^{ik} \quad \theta_x^{ik}\} \quad (3.5.1)$$

και το αντίστοιχο μητρώο των επικόμβιων δράσεων ως

$$\{A^i\}^T = \{N^{ij} \quad Q_y^{ij} \quad Q_z^{ij} \quad M_t^{ij} \quad M_y^{ij} \quad M_z^{ij} \quad M_w^{ij} \quad N^{ik} \quad Q_y^{ik} \quad Q_z^{ik} \quad M_t^{ik} \quad M_y^{ik} \quad M_z^{ik} \quad M_w^{ik}\} \quad (3.5.2)$$

όπου M_t είναι η στρεπτική ροπή στα άκρα του στοιχείου και η οποία δίνεται από τις σχέσεις (3.4.5) και (3.4.7) και M_w είναι η ροπή στρέβλωσης λόγω στρεπτικής καμπυλότητας (δίρροπο) στις ίδιες διατομές και η οποία δίνεται από τη σχέση (3.4.15) (Σχ.3.11.).



Σχ.3.11. Θετική γωνία στροφής ορθογωνικής διατομής και αντίστοιχο διάνυσμα θετικής στρεπτικής ροπής (α). Πρωτογενής στρέβλωση ορθογωνικής διατομής και αντίστοιχο διάνυσμα θετικής ροπής στρέβλωσης (β).

Τα μητρώα επικόμβιων μετακινήσεων και επικόμβιων δράσεων, που δίνονται από τις σχέσεις (3.5.1), (3.5.2), συνδέονται με το 14x14 τοπικό μητρώο στιβαρότητας του στοιχείου χωρικού πλαισίου, το οποίο γράφεται ως

$$\left[k^i \right] = \begin{bmatrix}
 k_{11}^i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{18}^i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & k_{22}^i & 0 & 0 & 0 & k_{26}^i & 0 & 0 & k_{29}^i & 0 & 0 & 0 & k_{2,13}^i & 0 \\
 0 & 0 & k_{33}^i & 0 & k_{35}^i & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{3,10}^i & 0 & k_{3,12}^i & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & k_{T1}^i & 0 & 0 & k_{T2}^i & 0 & 0 & 0 & -k_{T1}^i & 0 & 0 & k_{T5}^i \\
 0 & 0 & k_{53}^i & 0 & k_{55}^i & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{5,10}^i & 0 & k_{5,12}^i & 0 & 0 \\
 0 & k_{62}^i & 0 & 0 & 0 & k_{66}^i & 0 & 0 & k_{69}^i & 0 & 0 & 0 & k_{6,13}^i & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & k_{T2}^i & 0 & 0 & k_{T3}^i & 0 & 0 & 0 & -k_{T2}^i & 0 & 0 & k_{T4}^i \\
 \hline
 k_{81}^i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{88}^i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & k_{92}^i & 0 & 0 & 0 & k_{96}^i & 0 & 0 & k_{99}^i & 0 & 0 & 0 & k_{9,13}^i & 0 \\
 0 & 0 & k_{10,3}^i & 0 & k_{10,5}^i & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{10,10}^i & 0 & k_{10,12}^i & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -k_{T1}^i & 0 & 0 & -k_{T2}^i & 0 & 0 & 0 & k_{T5}^i & 0 & 0 & -k_{T5}^i \\
 0 & 0 & k_{12,3}^i & 0 & k_{12,5}^i & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{12,10}^i & 0 & k_{12,12}^i & 0 & 0 \\
 0 & k_{13,2}^i & 0 & 0 & 0 & k_{13,6}^i & 0 & 0 & k_{13,9}^i & 0 & 0 & 0 & k_{13,13}^i & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & k_{T5}^i & 0 & 0 & k_{T4}^i & 0 & 0 & 0 & -k_{T5}^i & 0 & 0 & k_{T6}^i
 \end{bmatrix}$$

(3.5.3)

Οι συντελεστές k_{lm}^i ($l,m=1,2,3,5,6,8,9,10,12,13$) του μητρώου της σχέσης (3.5.3) προέρχονται από το γνωστό 12x12 μητρώο στιβαρότητας του κλασικού στοιχείου χωρικού πλαισίου, σύμφωνα με την κλασική θεωρία δοκού, ενώ τα νέα στοιχεία $k_{T1}^i, k_{T2}^i, k_{T3}^i, k_{T4}^i, k_{T5}^i, k_{T6}^i$ υπολογίζονται όπως περιγράφεται στα επόμενα:

➤ Στοιχεία k_{T1}^i, k_{T5}^i

Το στοιχείο k_{T1}^i (στοιχείο (4,4) του μητρώου στιβαρότητας), σύμφωνα με τον ορισμό στοιχείου μητρώου στιβαρότητας, δηλώνει την προκύπτουσα στρεπτική ροπή M_t^{ij} στο άκρο j του αμφίπακτου μέλους i λόγω μοναδιαίας στρεπτικής στροφής $\theta_x^{ij} = 1$ της στήριξης στο άκρο j . Έτσι, λαμβάνοντας υπόψη την απουσία φόρτισης στο στοιχείο, το πρόβλημα συνοριακών τιμών των εξισώσεων (3.4.11), (3.4.18) γράφεται ως

$$-GI_t \theta_x'' + EC_S \theta_x''' = 0 \quad (3.5.4)$$

$$\theta_x^{ij} = 1 \quad (a_1^{ij} = a_3^{ij} = 1, a_2^{ij} = 0) \quad \text{στο άκρο } j \quad (3.5.5\alpha)$$

$$\theta_x^{ij} = 0 \quad (\beta_1^{ij} = 1, \beta_2^{ij} = \beta_3^{ij} = 0) \quad \text{στο άκρο } j \quad (3.5.5\beta)$$

$$\theta_x^{ik} = 0 \quad (a_1^{ik} = 1, a_2^{ik} = a_3^{ik} = 0) \quad \text{στο άκρο } k \quad (3.5.5\gamma)$$

$$\theta_x^{ik} = 0 \quad (\beta_1^{ik} = 1, \beta_2^{ik} = \beta_3^{ik} = 0) \quad \text{στο άκρο } k \quad (3.5.5\delta)$$

Από την επίλυση του προβλήματος συνοριακών τιμών των εξισώσεων (3.5.4-5) υπολογίζεται η γωνία στροφής $\theta_x(x)$ της διατομής του στοιχείου καθώς και οι παράγωγοι της σε κάθε διατομή του και το ζητούμενο στοιχείο k_{T1}^i δίνεται με τη βοήθεια της σχέσης (3.4.12) ως

$$k_{T1}^i = M_t(0) = GI_t \theta_x'(0) - EC_S \theta_x'''(0) \quad (3.5.6)$$

Ο υπολογισμός του στοιχείου k_{T5}^i (στοιχείο (11,11) του μητρώου στιβαρότητας) επιτυγχάνεται με ανάλογη διαδικασία με αυτήν του στοιχείου k_{T1}^i λαμβάνοντας υπόψη ότι το στοιχείο k_{T5}^i , σύμφωνα με τον ορισμό στοιχείου μητρώου στιβαρότητας, δηλώνει την προκύπτουσα στρεπτική ροπή M_t^{ik} στο άκρο k του αμφίπακτου μέλους i λόγω μοναδιαίας στρεπτικής στροφής $\theta_x^{ik} = 1$ της στήριξης στο άκρο k .

➤ **Στοιχεία k_{T3}^i, k_{T6}^i**

Το στοιχείο k_{T3}^i (στοιχείο (7,7) του μητρώου στιβαρότητας), σύμφωνα με τον ορισμό στοιχείου μητρώου στιβαρότητας, δηλώνει την προκύπτουσα ροπή στρέβλωσης M_w^{ij} στο άκρο j του αμφίπακτου μέλους i λόγω μοναδιαίας συστροφής $\theta_x^{ij} = 1$ της στήριξης στο άκρο j . Έτσι, λαμβάνοντας υπόψη την απουσία φόρτισης στο στοιχείο, το πρόβλημα συνοριακών τιμών των εξισώσεων (3.4.11), (3.4.18) γράφεται ως

$$-GI_t \theta_x'' + EC_S \theta_x''' = 0 \quad (3.5.7)$$

$$\theta_x^{ij} = 0 \quad (a_1^{ij} = 1, a_2^{ij} = a_3^{ij} = 0) \quad \text{στο άκρο } j \quad (3.5.8\alpha)$$

$$\theta_x^{ij} = 1 \quad (\beta_1^{ij} = \beta_3^{ij} = 1, \beta_2^{ij} = 0) \quad \text{στο άκρο } j \quad (3.5.8\beta)$$

$$\theta_x^{ik} = 0 \quad (a_1^{ik} = 1, a_2^{ik} = a_3^{ik} = 0) \quad \text{στο άκρο } k \quad (3.5.8\gamma)$$

$$\theta_x^{ik} = 0 \quad (\beta_1^{ik} = 1, \beta_2^{ik} = \beta_3^{ik} = 0) \quad \text{στο άκρο } k \quad (3.5.8\delta)$$

Από την επίλυση του προβλήματος συνοριακών τιμών των εξισώσεων (3.5.7-8) υπολογίζεται η γωνία στροφής $\theta_x(x)$ της διατομής του στοιχείου καθώς και οι παράγωγοι της σε κάθε διατομή του και το ζητούμενο στοιχείο k_{T3}^i δίνεται με τη βοήθεια της σχέσης (3.4.15) ως

$$k_{T3}^i = M_w(0) = -EC_S \theta_x''(0) \quad (3.5.9)$$

Ο υπολογισμός του στοιχείου k_{T6}^i (στοιχείο (14,14) του μητρώου στιβαρότητας) επιτυγχάνεται με ανάλογη διαδικασία με αυτήν του στοιχείου k_{T3}^i λαμβάνοντας υπόψη ότι το στοιχείο k_{T6}^i δηλώνει την προκύπτουσα ροπή στρέβλωσης M_w^{ik} στο άκρο k του αμφίπακτου μέλους i λόγω μοναδιαίας συστροφής $\theta_x^{ik} = 1$ της στήριξης στο άκρο k .

➤ **Στοιχείο k_{T2}^i**

Το στοιχείο k_{T2}^i (στοιχείο (7,4) του μητρώου στιβαρότητας), σύμφωνα με τον ορισμό στοιχείου μητρώου στιβαρότητας, δηλώνει την προκύπτουσα ροπή στρέβλωσης M_w^{ij} στο άκρο j του αμφίπακτου μέλους i λόγω μοναδιαίας στρεπτικής στροφής $\theta_x^{ij} = 1$ της στήριξης στο άκρο j . Έτσι, λαμβάνοντας υπόψη την απουσία φόρτισης στο στοιχείο, το πρόβλημα συνοριακών τιμών των εξισώσεων (3.4.11), (3.4.18) γράφεται ως

$$-GI_t\theta_x'' + EC_S\theta_x'''' = 0 \quad (3.5.10)$$

$$\theta_x^{ij} = 1 \quad (a_1^{ij} = a_3^{ij} = 1, a_2^{ij} = 0) \quad \text{στο άκρο } j \quad (3.5.11\alpha)$$

$$\theta_x^{ij} = 0 \quad (\beta_1^{ij} = 1, \beta_2^{ij} = \beta_3^{ij} = 0) \quad \text{στο άκρο } j \quad (3.5.11\beta)$$

$$\theta_x^{ik} = 0 \quad (a_1^{ik} = 1, a_2^{ik} = a_3^{ik} = 0) \quad \text{στο άκρο } k \quad (3.5.11\gamma)$$

$$\theta_x^{ik} = 0 \quad (\beta_1^{ik} = 1, \beta_2^{ik} = \beta_3^{ik} = 0) \quad \text{στο άκρο } k \quad (3.5.11\delta)$$

Από την επίλυση του προβλήματος συνοριακών τιμών των εξισώσεων (3.5.10-11) υπολογίζεται η γωνία στροφής $\theta_x(x)$ της διατομής του στοιχείου καθώς και οι παράγωγοι της σε κάθε διατομή του και το ζητούμενο στοιχείο k_{T2}^i δίνεται με τη βοήθεια της σχέσης (3.4.15) ως

$$k_{T3}^i = M_w(0) = -EC_S\theta_x''(0) \quad (3.5.12)$$

➤ **Στοιχείο k_{T4}^i**

Το στοιχείο k_{T4}^i (στοιχείο (14,7) του μητρώου στιβαρότητας), σύμφωνα με τον ορισμό στοιχείου μητρώου στιβαρότητας, δηλώνει την προκύπτουσα ροπή στρέβλωσης M_w^{ik} στο άκρο k του αμφίπακτου μέλους i λόγω μοναδιαίας συστροφής $\theta_x^{ij} = 1$ της στήριξης στο άκρο j . Έτσι, λαμβάνοντας υπόψη την απουσία φόρτισης στο στοιχείο, το πρόβλημα συνοριακών τιμών των εξισώσεων (3.4.11), (3.4.18) γράφεται ως

$$-GI_t\theta_x'' + EC_S\theta_x'''' = 0 \quad (3.5.13)$$

$$\theta_x^{ij} = 0 \quad (a_1^{ij} = 1, a_2^{ij} = a_3^{ij} = 0) \quad \text{στο άκρο } j \quad (3.5.14\alpha)$$

$$\theta_x^{ij} = 1 \quad (\beta_1^{ij} = \beta_3^{ij} = 1, \beta_2^{ij} = 0) \quad \text{στο άκρο } j \quad (3.5.14\beta)$$

$$\theta_x^{ik} = 0 \quad (a_1^{ik} = 1, a_2^{ik} = a_3^{ik} = 0) \quad \text{στο άκρο } k \quad (3.5.14\gamma)$$

$$\theta_x^{ik} = 0 \quad (\beta_1^{ik} = 1, \beta_2^{ik} = \beta_3^{ik} = 0) \quad \text{στο άκρο } k \quad (3.5.14\delta)$$

Από την επίλυση του προβλήματος συνοριακών τιμών των εξισώσεων (3.5.13-14) υπολογίζεται η γωνία στροφής $\theta_x(x)$ της διατομής του στοιχείου καθώς και οι παράγωγοι της σε κάθε διατομή του και το ζητούμενο στοιχείο k_{T4}^i δίνεται με τη βοήθεια της σχέσης (3.4.15) ως

$$k_{T4}^i = M_w(L) = -EC_S\theta_x''(L) \quad (3.5.15)$$

Έτσι, σύμφωνα με τους Reilly (1972) και Friemann (1993), οι προαναφερθέντες συντελεστές k_{Tn}^i ($n=1,2,3,4,5,6$) του μητρώου στιβαρότητας της σχέσης (3.5.3) δίνονται από τις σχέσεις

$$k_{T1}^i = k_o\lambda \sinh e \quad k_{T2}^i = k_{T5}^i = k_o(\cosh e - 1) \quad (3.5.16\alpha,\beta)$$

$$k_{T3}^i = k_{T6}^i = k_o\left(L \cosh e - \frac{1}{\lambda} \sinh e\right) \quad k_{T4}^i = k_o\left(\frac{1}{\lambda} \sinh e - L\right) \quad (3.5.16\gamma,\delta)$$

όπου

$$\lambda = \sqrt{\frac{GI_t}{EC_S}} \quad k_o = \frac{GI_t}{2(1-C) + e \sinh e} \quad e = L\lambda \quad (3.5.17\alpha, \beta, \gamma)$$

Αναφορικά με το μητρώο ακραίων δράσεων του χωρικού στοιχείου i (για τον υπολογισμό των δράσεων παγίωσης), θεωρώντας ότι το στοιχείο αυτό υποβάλλεται στην τυχούσα συγκεντρωμένη ή κατανεμημένη στρεπτική φόρτιση $m_t^i = m_t^i(x)$, ο υπολογισμός των στοιχείων του μητρώου που αφορούν στις στρεπτικές ροπές M_t^{ij} , M_t^{ik} και τις ροπές στρέβλωσης M_w^{ij} , M_w^{ik} (λόγω στρεπτικής καμπυλότητας) επιτυγχάνεται με τη βοήθεια των σχέσεων (3.4.12), (3.4.15), οι οποίες γράφονται ως

$$M_t^{ij} = GI_t \theta_x'(0) - EC_S \theta_x'''(0) \quad M_t^{ik} = GI_t \theta_x'(L) - EC_S \theta_x'''(L) \quad (3.5.18\alpha, \beta)$$

$$M_w^{ij} = -EC_S \theta_x''(0) \quad M_w^{ik} = -EC_S \theta_x''(L) \quad (3.5.18\gamma, \delta)$$

χρησιμοποιώντας τις παραγώγους της γωνίας στροφής θ_x , οι οποίες υπολογίζονται μετά την επίλυση του πιο κάτω προβλήματος συνοριακών τιμών

$$-GI_t (\theta_x'')^i + EC_S (\theta_x''')^i = m_t^i(x) \quad \text{στο εσωτερικό του στοιχείου} \quad (3.5.19)$$

$$\theta_x^{ij} = 0 \quad (a_1^{ij} = 1, a_2^{ij} = a_3^{ij} = 0) \quad \text{στο άκρο } j \quad (3.5.20\alpha)$$

$$\theta_x^{ij} = 0 \quad (\beta_1^{ij} = 1, \beta_2^{ij} = \beta_3^{ij} = 0) \quad \text{στο άκρο } j \quad (3.5.20\beta)$$

$$\theta_x^{ik} = 0 \quad (a_1^{ik} = 1, a_2^{ik} = a_3^{ik} = 0) \quad \text{στο άκρο } k \quad (3.5.20\gamma)$$

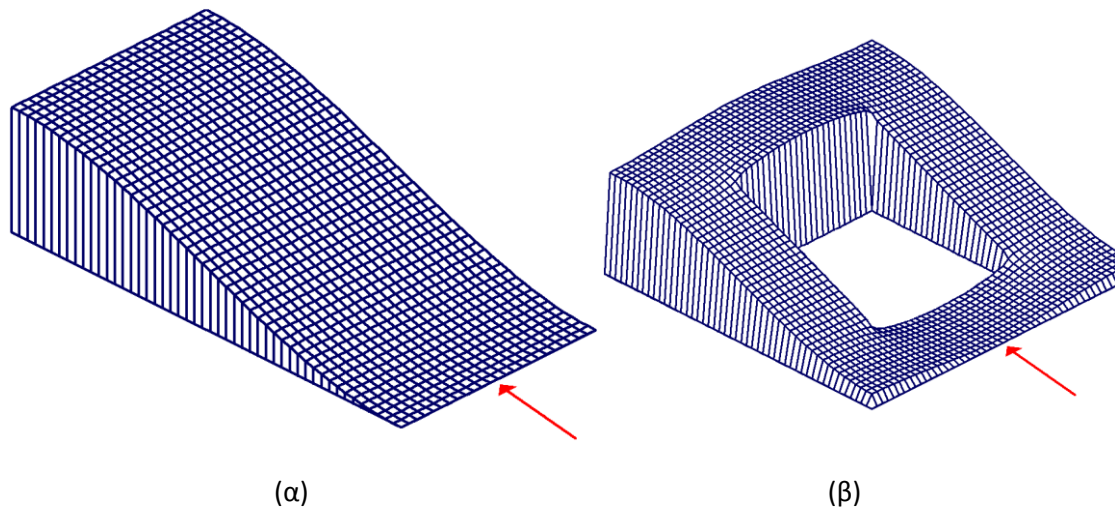
$$\theta_x^{ik} = 0 \quad (\beta_1^{ik} = 1, \beta_2^{ik} = \beta_3^{ik} = 0) \quad \text{στο άκρο } k \quad (3.5.20\delta)$$

Για την ολοκλήρωση της ανάλυσης χωρικού φορέα ακολουθούνται κατά τα λοιπά τα βήματα της μεθόδου άμεσης στιβαρότητας, υιοθετώντας την παραδοχή ότι κατά τη μόρφωση των μητρώων μετασχηματισμού A_{SF}^i των στοιχείων του φορέα η στρέβλωση της ακραίας διατομής παραμένει αμετάβλητη.

Κεφάλαιο 4 : Ανομοιόμορφη διάτμηση

4.1 Προκαταρκτικές έννοιες και παραδοχές

Όπως αναφέραμε στην ενότητα 2.1, οι διατμητικές τάσεις λόγω τέμνουσας δύναμης, στη γενική περίπτωση αναπτύσσονται ανομοιόμορφα στη διατομή της ράβδου, με άμεσο αποτέλεσμα την ανομοιόμορφη κατανομή των διατμητικών παραμορφώσεων. Η ανομοιόμορφη αυτή κατανομή οδηγεί στη διατμητική στρέβλωση της διατομής προς τη διαμήκη διεύθυνση, δηλαδή στην αναίρεση της παραδοχής Bernoulli περί επιπεδότητας διατομής (Σχ. 4.1.).



Σχ. 4.1. Στρέβλωση λόγω τέμνουσας δύναμης ορθογωνικής (α) και κοίλης τετραγωνικής (β) διατομής.

Στο κεφάλαιο αυτό θα αναλυθεί το πρόβλημα της ανομοιόμορφης διάτμησης ράβδου τυχούσας και σταθερής διατομής με τουλάχιστον ένα άξονα συμμετρίας, χωρίς την εμφάνιση στρεπτικών ροπών, δηλαδή όλα τα διατμητικά φορτία ασκούνται στο κέντρο διάτμησης της διατομής της ράβδου. Η ανομοιόμορφη κατανομή στρέβλωσης κατά μήκος της ράβδου λαμβάνεται υπόψη με τη βοήθεια ανεξάρτητης παραμέτρου στρέβλωσης, η οποία πολλαπλασιάζει τη συνάρτηση στρέβλωσης που προκύπτει με βάση τη θεωρία ομοιόμορφης διάτμησης που παρουσιάστηκε στο κεφάλαιο 2.

Παραδοχές ελαστικής θεωρίας ανομοιόμορφης διάτμησης

Οι παραδοχές που αφορούν το πρόβλημα της ανομοιόμορφης διάτμησης είναι ίδιες με αυτές του προβλήματος ομοιόμορφης διάτμησης, με μόνη διαφορά την παραδοχή της ομοιόμορφης και μη παρεμποδιζόμενης στρέβλωσης η οποία τροποποιείται σε :

- Οι διαμήκεις μετατοπίσεις της ράβδου χωρίζονται σε πρωτογενές και δευτερογενές τμήμα. Το πρωτογενές τμήμα είναι ανάλογο της γωνίας στροφής λόγω κάμψης περί τον κεντροβαρικό άξονα, ενώ το δευτερογενές αντιστοιχεί στη στρέβλωση, η οποία θεωρείται

ανομοιόμορφη. Η στρέβλωση είναι ανάλογη της συνάρτησης στρέβλωσης (που προκύπτει με βάση τη θεωρία ομοιόμορφης διάτμησης Saint-Venant) με συντελεστή αναλογίας την ανεξάρτητη παράμετρο στρέβλωσης που προαναφέρθηκε, η οποία είναι μεταβλητή κατά μήκος της ράβδου (‘ένταση’ της στρέβλωσης της διατομής).

Μέσω της παραδοχής αυτής αιρείται οποιοσδήποτε περιορισμός τόσο στις συνθήκες στήριξης όσο και στη φόρτιση της ράβδου.

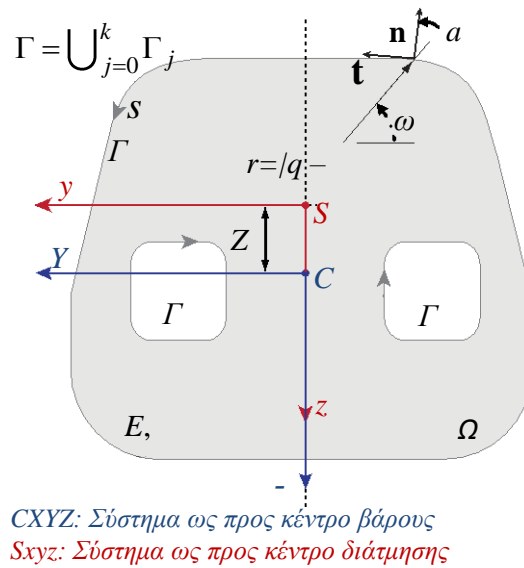
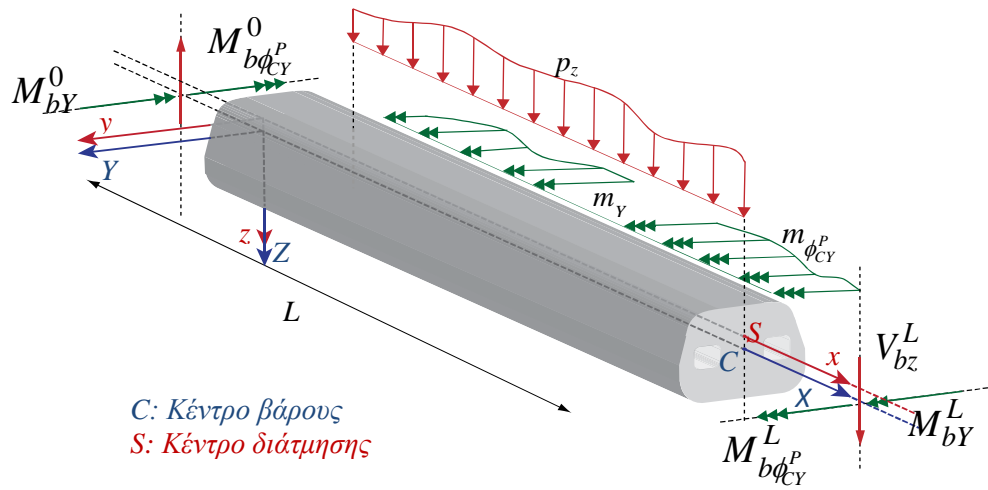
4.2 Διατμητική υστέρηση

Η επιρροή της ανομοιόμορφης διάτμησης ράβδων σχετίζεται κυρίως με την τροποποίηση της κατανομής των ορθών τάσεων στην επιφάνεια της διατομής (Σχ.4.1). Το φαινόμενο αυτό προκαλείται από την ανομοιόμορφη κατανομή της διατμητικής στρέβλωσης και είναι γνωστό ως φαινόμενο διατμητικής υστέρησης. Η επιρροή του άνω φαινομένου, στα πλαίσια των σύγχρονων κανονισμών για κατασκευές Πολιτικού Μηχανικού, λαμβάνεται υπόψη μέσω του «συνεργαζόμενο πλάτους», η απλοποιητική αυτή προσέγγιση βέβαια ενδέχεται να μην αποδίδει σωστά την πραγματική συμπεριφορά του φορέα επειδή η επιρροή της διατμητικής υστέρησης εν γένει δεν είναι σταθερή σε όλο το μήκος της δοκού, ενώ εξαρτάται από τη μορφή της διατομής καθώς και από τη μορφή της εξωτερικής φόρτισης.

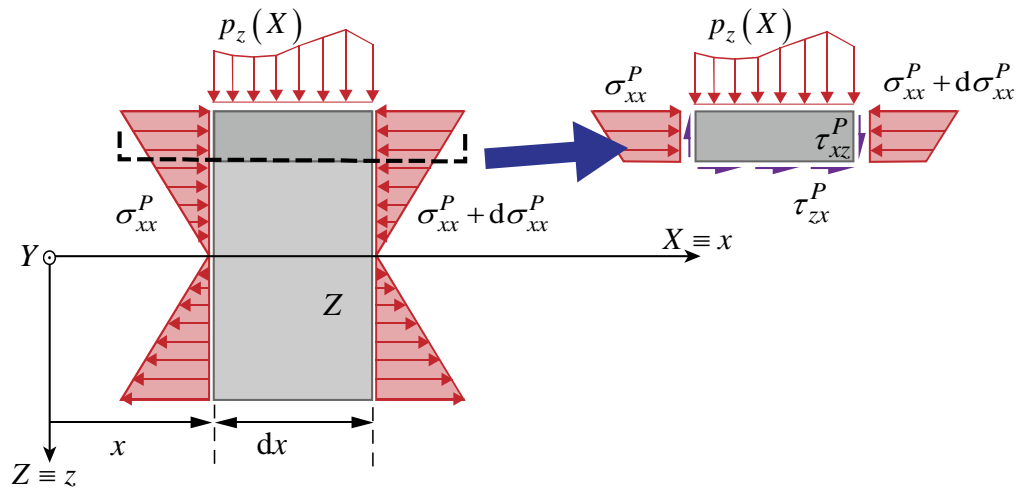
4.3 Μετακινήσεις, παραμορφώσεις, τάσεις

4.3.1 Μετακινήσεις

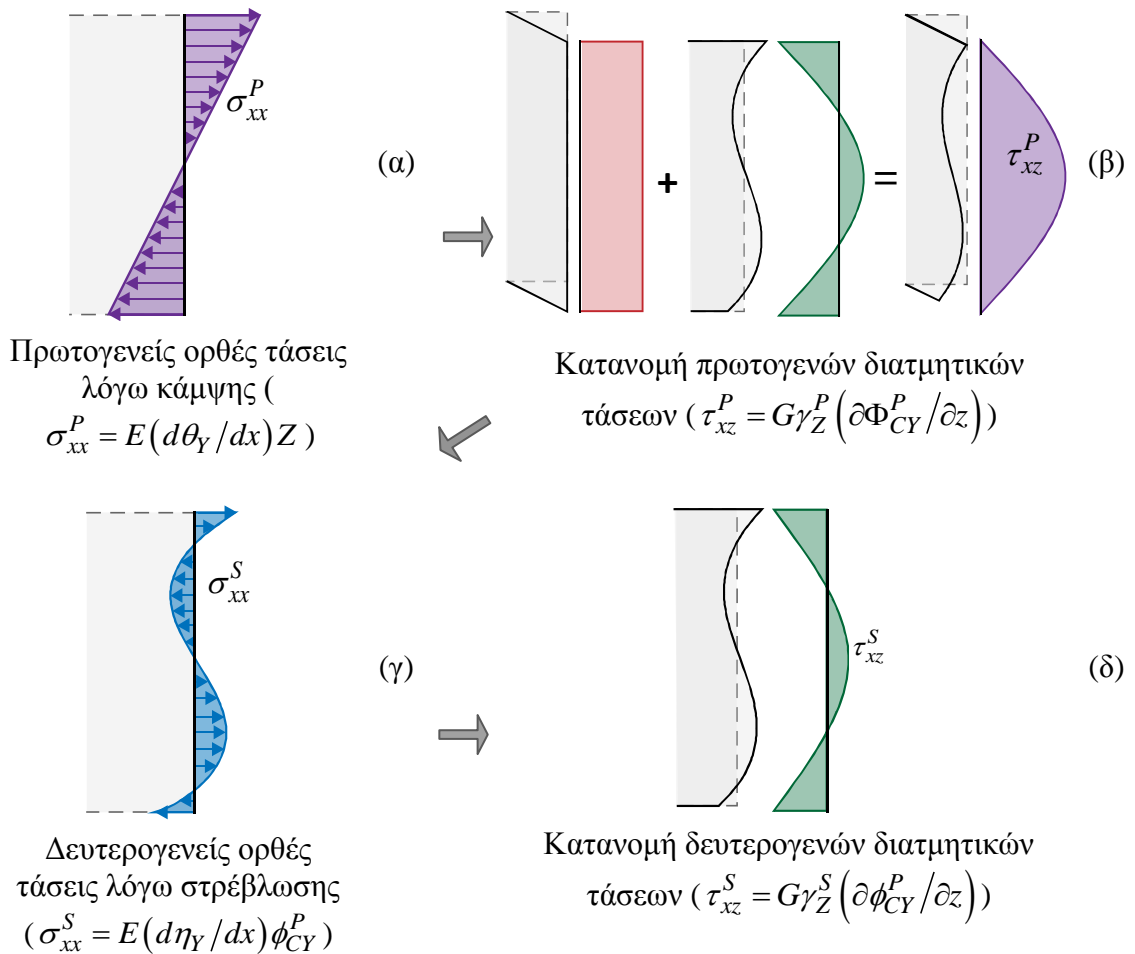
Θεωρείται ράβδος μήκους L , διατομής τυχόντος σχήματος με τουλάχιστον ένα άξονα συμμετρίας (χωρίς άρση της γενικότητας λαμβάνεται ο άξονας Z), η οποία καταλαμβάνει το διδιάστατο χωρίο Ω (του οποίου το σύνορο συμβολίζεται με Γ), αποτελούμενη από ομογενές, ισότροπο και γραμμικά ελαστικό υλικό, με μέτρο ελαστικότητας E , μέτρο διάτμησης G και λόγο Poisson ν . Στο Σχ. 4.2. $CXYZ$ είναι το κύριο καμπτικό σύστημα αξόνων που διέρχεται από το κέντρο βάρους C της διατομής, $Sxyz$ είναι το σύστημα αξόνων που διέρχεται από το κέντρο διάτμησης S της διατομής, ενώ Z_S είναι η συντεταγμένη του κέντρου διάτμησης S της διατομής ως προς το σύστημα $CXYZ$. Η δοκός υποβάλλεται σε συνδυασμό φορτίσεων από ανομοιόμορφα κατανομημένο ή/και συγκεντρωμένο εγκάρσιο φορτίο $p_z = p_z(X)$ κατά τον άξονα z , καμπτική ροπή $m_Y = m_Y(X)$ κατά τον άξονα Y , καθώς και ροπή στρέβλωσης (διρροπή) $m_{\phi_{CY}}^P = m_{\phi_{CY}}^P(X)$ (Σχ. 4.2.α), η οποία θα οριστεί αργότερα στην ενότητα 4.4, ενώ στηρίζεται με τις πλέον γενικές γραμμικές συνοριακές συνθήκες (περιλαμβάνεται ελαστική στήριξη). Η πιθανή εξωτερική φόρτιση $m_{\phi_{CY}}^P$ (διατμητική διρροπή στρέβλωσης σε αναλογία με τη στρεπτική διρροπή στρέβλωσης της ανομοιόμορφης θεωρίας στρέψης (κεφάλαιο 3)) που παρουσιάζεται στο Σχ. 4.2.α θα επεξηγηθεί αργότερα στην ενότητα 4.4.



Σχ. 4.2. Πρισματική ράβδος υποβαλλόμενη σε τυχούσα καμπτοδιατμητική φόρτιση και σε αντιδράσεις στηρίξεων στα άκρα (α) με διατομή τυχόντος μονοσυμμετρικού σχήματος που καταλαμβάνει το διδιάστατο χωρίο Ω (β).



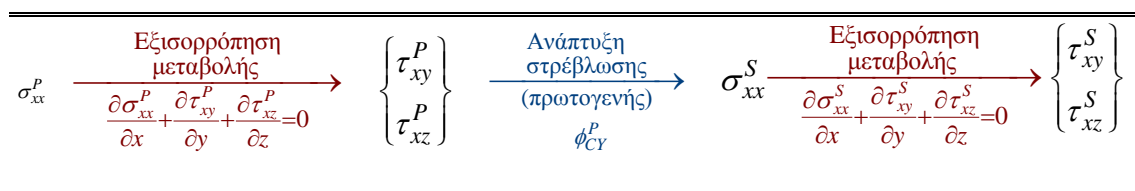
Σχ.4.3. Μηχανισμός ανάπτυξης πρωτογενών διατμητικών τάσεων τ_{xz}^P καθ' ύψος ορθογωνικής διατομής.



Σχ.4.4. Ακολουθία ανάπτυξης τάσεων σε δοκό ορθογωνικής διατομής υπό κάμψη, σύμφωνα με το προσομοίωμα A.

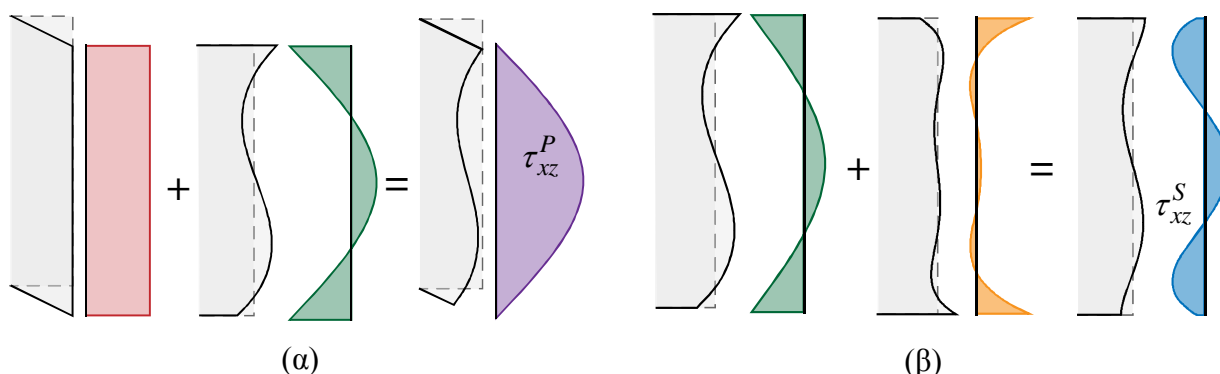
Λόγω της προαναφερθείσας τυχούσας φόρτισης καθώς και των πιθανών δεσμεύσεων, η ράβδος κάμπτεται με μεταβλητή καμπτική ροπή κατά τα μήκος του άξονα της. Η μεταβαλλόμενη καμπτική ροπή αναπαριστά τη μεταβολή των πρωτογενών ορθών τάσεων σ_{xx}^P (λόγω κάμψης) κατά μήκος του άξονα της ράβδου. Η εξισορρόπηση της μεταβολής αυτής οδηγεί στην ανάπτυξη διατμητικών τάσεων σε οριζόντια τομή (Σχ. 4.3). Σύμφωνα με το θεώρημα Cauchy συμπεραίνεται ότι αντίστοιχες διατμητικές τάσεις αναπτύσσονται στο επίπεδο της διατομής της ράβδου. Εάν υιοθετηθεί η παραδοχή ότι επίπεδες διατομές της απαραμόρφωτης ράβδου παραμένουν επίπεδες και μετά την παραμόρφωση (θεωρίες δοκού Euler-Bernoulli ή Timoshenko) οι προαναφερθείσες διατμητικές τάσεις αποκτούν σταθερή κατανομή στο επίπεδο της διατομής. Παρ' όλα αυτά η σταθερή αυτή κατανομή παραβιάζει την τοπική ισορροπία μια και η απαίτηση μηδενικών τάσεων στις παρειές της ράβδου δεν ικανοποιείται. Έτσι, οι προαναφερθείσες διατμητικές τάσεις έχουν ανομοιόμορφη κατανομή σε όλο το χωρίο της διατομής έτσι ώστε να ικανοποιείται τόσο η τοπική ισορροπία όσο και η απαίτηση μηδενικού διανύσματος διατμητικής τάσης τ_{xn} στην παράπλευρη επιφάνεια της ράβδου. Οι ανομοιόμορφα κατανεμημένες διατμητικές αυτές τάσεις στη συνέχεια θα καλούνται **πρωτογενείς** ή **διατμητικές** τάσεις κατά St.Venant (τ_{xy}^P, τ_{xz}^P) και οδηγούν τη διατομή σε στρέβλωση (Σχ. 13.5β). Επιπρόσθετα, λόγω της ανομοιόμορφης κατανομής της στρέβλωσης αυτής κατά μήκος της δοκού αναπτύσσεται **δευτερογενής** κατανομή **ορθών** τάσεων σ_{xx}^S (Σχ. 13.5γ). Αυτή η επιπρόσθετη κατανομή των ορθών τάσεων είναι υπεύθυνη για το φαινόμενο της **διατμητικής υστέρησης** και λαμβάνεται υπόψη χρησιμοποιώντας ανεξάρτητη μεταβλητή στρέβλωσης, η οποία πολλαπλασιάζει τη συνάρτηση στρέβλωσης, η οποία εξαρτάται από τη γεωμετρία της διατομής. Η μεταβαλλόμενη κατανομή των δευτερογενών ορθών τάσεων κατά μήκος της δοκού έχει ως αποτέλεσμα την ανάπτυξη **δευτερογενών διατμητικών τάσεων** τ_{xy}^S, τ_{xz}^S (Σχ. 13.5δ), οι οποίες εξισορροπούν την κατανομή των σ_{xx}^S . Η ακολουθία ανάπτυξης τάσεων που περιγράφηκε στα προηγούμενα παρουσιάζεται σχηματικά στον Πίνακα 13.1 και θα αναφέρεται στα επόμενα συνοπτικά ως **προσομοίωμα A**, για το πρόβλημα της ανομοιόμορφης κάμψης.

Πίνακας 4.1. Ακολουθία ανάπτυξης τάσεων στο πρόβλημα ανομοιόμορφης κάμψης.



Ωστόσο, από το Σχ. 13.5δ συμπεραίνεται κατ' αναλογία με τη θεωρία δοκού Timoshenko, ότι οι δευτερογενείς διατμητικές τάσεις που εμφανίζονται από τη χρήση της ανεξάρτητης παραμέτρου στρέβλωσης αδυνατούν να ικανοποιήσουν τη συνοριακή συνθήκη περί μηδενισμού του διανύσματος διατμητικής τάσης τ_{xn} στην παράπλευρη επιφάνεια της ράβδου. Έτσι, στην παρούσα μεθοδολογία, για να απαλειφθεί η ασυνέπεια αυτή εφαρμόζεται τροποποιημένο πεδίο τάσεων με

την υιοθέτηση πρόσθετης συνάρτησης στρέβλωσης προς ‘διόρθωση’ των δευτερογενών διατμητικών τάσεων τ_{xy}^S, τ_{xz}^S (Σχ. 13.6) και η προκύπτουσα ακολουθία ανάπτυξης τάσεων θα αναφέρεται στα επόμενα συνοπτικά ως **προσομοίωμα Β**. Αξίζει εδώ να σημειωθεί ότι εξάλειψη της προαναφερθείσας ασυνέπειας θα μπορούσε να επιτευχθεί, επεκτείνοντας την ακολουθία ανάπτυξης τάσεων του προσομοιώματος Α συνυπολογίζοντας τη συμβολή ανώτερων όρων τάσεων (ανάπτυξη τριτογενών ορθών τάσεων σ_{xx}^T λόγω μεταβαλλόμενης δευτερογενούς στρέβλωσης κατά μήκος της ράβδου, ακόλουθη ανάπτυξη τριτογενών διατμητικών τάσεων τ_{xy}^T, τ_{xz}^T , ακόλουθη ανάπτυξη τεταρτογενών ορθών τάσεων σ_{xx}^Q , κ.ο.κ.) έως ότου το σφάλμα που εισάγεται σε κάθε στάδιο από τη μη ικανοποιητική κατανομή διατμητικών τάσεων να είναι αμελητέο (Ferradi et al. 2013). Ωστόσο η θεώρηση αυτή οδηγεί σε διατύπωση ιδιαίτερως πολύπλοκων διαφορικών εξισώσεων ως προς αυξημένο αριθμό κινηματικών αγνώστων. Αντίθετα η τασική διόρθωση που πραγματοποιείται σύμφωνα με το προσομοίωμα Β, οδηγεί σε ‘ικανοποιητικά’ ακριβή προσδιορισμό τάσεων (όπως θα φανεί στην ενότητα 13.5) σε σχέση με το αρχικό προσομοίωμα Α, χωρίς την αντίστοιχη αύξηση του αριθμού των κινηματικών αγνώστων.



Κατανομή πρωτογενών διατμητικών τάσεων $(\tau_{xz}^P = G\gamma_Z^P (\partial\Phi_{CY}^P / \partial z))$ Κατανομή δευτερογενών διατμητικών τάσεων $(\tau_{xz}^S = G\gamma_Z^S (\partial\Phi_{CY}^S / \partial z))$

Σχ.4.5. Κατανομή πρωτογενών (α) και δευτερογενών (β) διατμητικών τάσεων σε δοκό ορθογωνικής διατομής υπό κάμψη, σύμφωνα με το βελτιωμένο προσομοίωμα Β.

Προκειμένου να ληφθεί υπόψη η προαναφερθείσα ανομοιόμορφη στρέβλωση της ράβδου, ένας νέος βαθμός ελευθερίας προστίθεται στους ήδη γνωστούς της ‘κλασικής’ θεωρίας δοκού. Ο πρόσθετος αυτός β.ε. είναι η παράμετρος στρέβλωσης $\eta_Y (X)$, η οποία περιγράφει την ‘ένταση’ στρέβλωσης της διατομής κατά μήκος της ράβδου, η οποία ορίζεται από την πρωτογενή συνάρτηση στρέβλωσης $\phi_{CY}^P (Y, Z)$, που εξαρτάται από τη γεωμετρία της διατομής (βλ. πρόβλημα ομοιόμορφης διάτμησης Saint-Venant, που παρουσιάστηκε στο κεφάλαιο 11). Έτσι, η ‘πραγματική’

παραμορφωμένη εικόνα της διατομής λόγω στρέβλωσης (Σχ.13.7) θα δίνεται από το γινόμενο $\eta_Y(X)\phi_{CY}^P(Y,Z)$ σε κάθε σημείο της ράβδου.

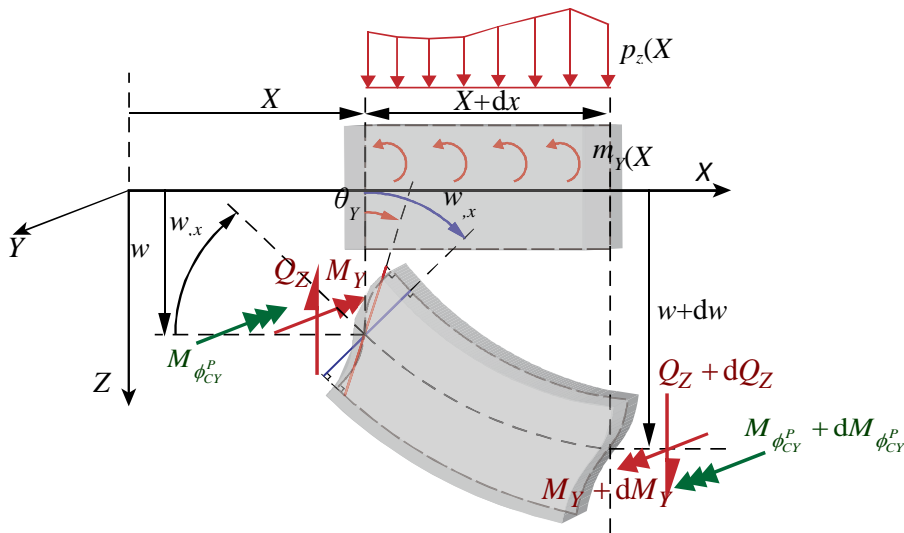
Το εντατικό μέγεθος που αντιστοιχεί στον βαθμό ελευθερίας που περιγράφηκε στην προηγούμενη παράγραφο είναι η ροπή διατμητικής στρέβλωσης $M_{\phi_{CY}^P}$ (δίρροπή) κατά μήκος της ράβδου (Σχ. 13.7α), η οποία αντιπροσωπεύει την κατανομή των δευτερογενών ορθών τάσεων σ_{xx}^S και της οποίας η στοιχειώδης μεταβολή εξισορροπείται από την αντίστοιχη δευτερογενή τέμνουσα Q_z^S , η οποία προκύπτει από τις δευτερογενείς κατανομές διατμητικών τάσεων τ_{xz}^S, τ_{xy}^S . Το δίρροπο διατμητικής στρέβλωσης $M_{\phi_{CY}^P}$ αποτελεί ανώτερης τάξης εντατικό μέγεθος που αναπτύσσεται στη θεωρία ανομοιόμορφης διάτμησης (Σχ. 13.7) κατ' αναλογία με το δίρροπο στρέβλωσης της κλασικής θεωρίας ανομοιόμορφης στρέψης (βλ. κεφάλαιο 12) (Σχ. 13.8).

Ακολουθώντας τις προαναφερθείσες παρατηρήσεις, οι συνιστώσες μετατόπισης $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ αναφορικά με το κεντροβαρικό σύστημα αξόνων $CXYZ$ κατά τους άξονες X, Y, Z , αντίστοιχα, τυχόντος σημείου της ράβδου δίνονται ως (Dikaros and Sapountzakis 2014a)

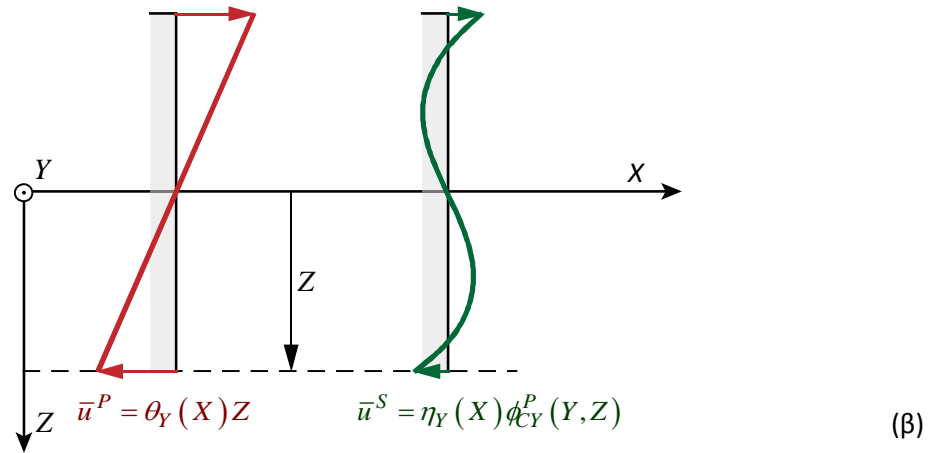
$$\bar{u}(X,Y,Z) = \bar{u}^P(X,Y,Z) + \bar{u}^S(X,Y,Z) = \theta_Y(X)Z + \eta_Y(X)\phi_{CY}^P(Y,Z) \quad (4.3.1.1\alpha)$$

$$\bar{v}(X,Y,Z) = 0 \quad (4.3.1.1\beta)$$

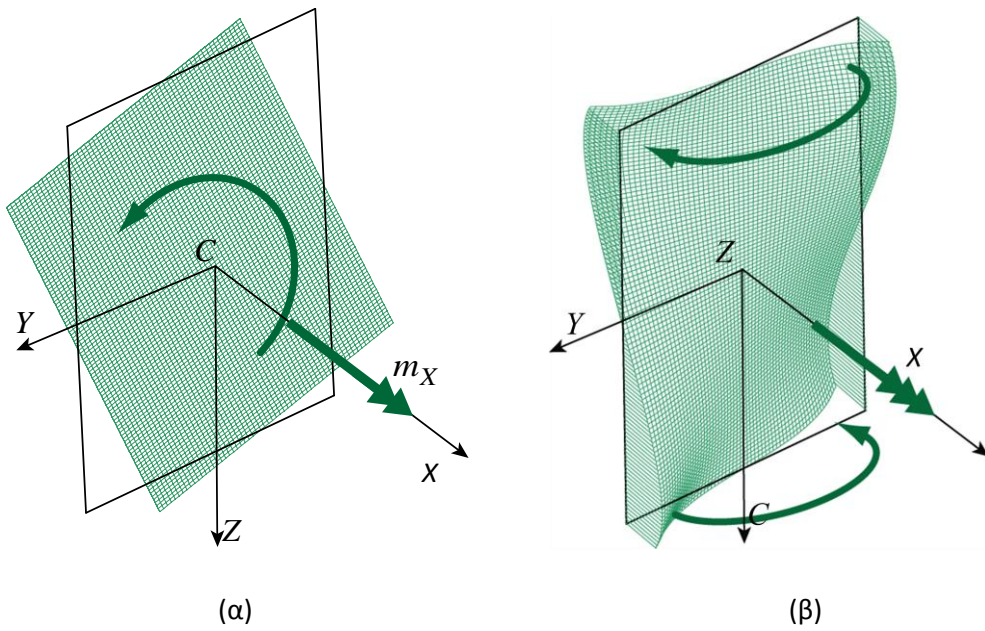
$$\bar{w}(X,Y,Z) = w(X) \quad (4.3.1.1\gamma)$$

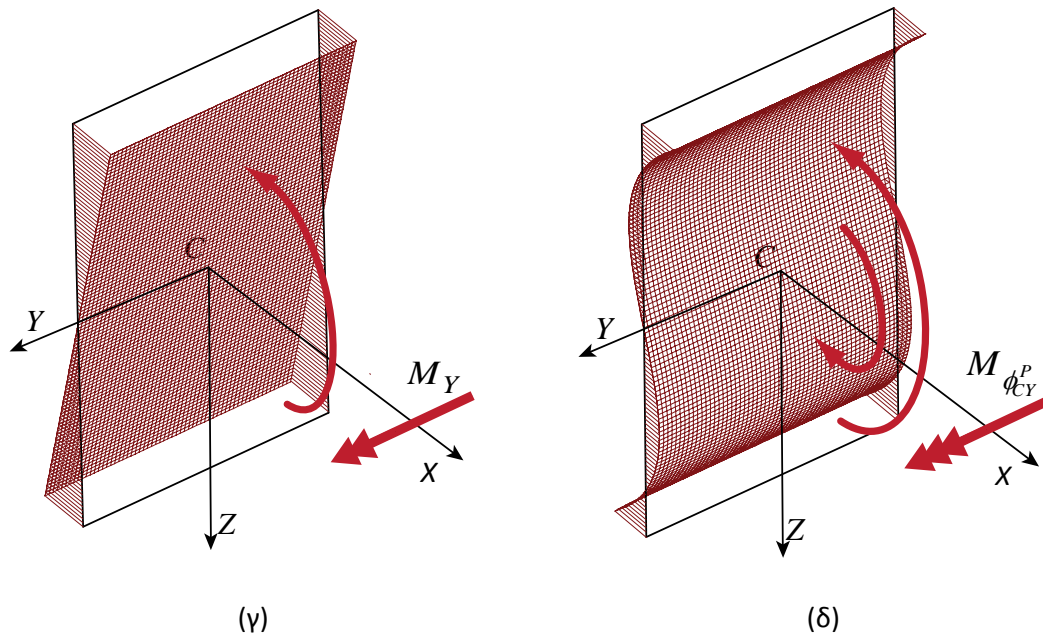


(α)



Σχ.4.6. Απειροστό στοιχείο πρισματικής ράβδου υποβαλλόμενο σε τυχούσα εξωτερική καμπτική φόρτιση (α). Πρωτογενής \bar{u}^P και δευτερογενής \bar{u}^S συνιστώσα αξονικής μετακίνησης της διατομής (β).





Σχ.4.7. Θετική στρεπτική (α) και καμπτική (γ) στροφή ορθογωνικής διατομής και αντίστοιχα θετικά διανύσματα ροπής. Αντίστοιχη στρεπτική (β) και διατμητική (δ) στρέβλωση ορθογωνικής διατομής και θετικά διανύσματα διρρόπου στρέβλωσης.

όπου \bar{u}^P , \bar{u}^S είναι η πρωτογενής και η δευτερογενής, αντίστοιχα συνιστώσα της αξονικής μετατόπισης, $w(X)$ είναι η εγκάρσια μετατόπιση του κέντρου βάρους C , ενώ $\theta_Y(X)$ είναι η γωνία στροφής της διατομής περί τον κεντροβαρικό άξονα Y λόγω κάμψης. Όπως προαναφέρθηκε, στην εξίσωση (13.3.1) $\phi_{CY}^P(Y, Z)$ είναι η πρωτογενής διατμητική συνάρτηση στρέβλωσης ως προς το κέντρο βάρους C της διατομής και $\eta_Y(X)$ η αδιάστατη παράμετρος στρέβλωσης που εισάγεται έτσι ώστε να ληφθεί υπόψη η ανομοιόμορφη κατανομή της στρέβλωσης λόγω διάτμησης ('ένταση' στρέβλωσης της διατομής). Η συνάρτηση $\phi_{CY}^P(Y, Z)$ εξαρτάται μόνο από τη γεωμετρία της διατομής, δηλαδή αποτελεί παράμετρο αυτής και είναι ανεξάρτητη της συντεταγμένης X . Εκφράζει τη μετατόπιση των σημείων της διατομής της ράβδου κατά τον διαμήκη άξονά της X , δηλαδή τη στρέβλωση, λόγω των αναπτυσσόμενων διατμητικών τάσεων. Αξίζει να σημειωθεί ότι στην περίπτωση κατά την οποία αγνοούνται οι διατμητικές παραμορφώσεις, στη σχέση (13.3.1α) αμελείται ο όρος $\eta_Y(X)\phi_{CY}^P(Y, Z)$ που οφείλεται στη στρέβλωση της διατομής και επιπλέον τίθεται (βλ. και εξίσωση (13.3.3στ) της επόμενης παραγράφου)

$$\theta_Y(X) = -\frac{dw}{dx} \quad (4.3.1.2)$$

4.3.2 Παραμορφώσεις

Λαμβάνοντας υπόψη τους ορισμούς πρωτογενών και δευτερογενών ορθών και διατμητικών τάσεων που δόθηκαν κατά την περιγραφή της ακολουθίας ανάπτυξης τάσεων σύμφωνα με το προσομοίωμα A (βλ. Πίνακα 13.1), οι μη μηδενικές συνιστώσες του τανυστή παραμόρφωσης (σχέσεις 13.3.3α,δ,στ) μπορούν να γραφούν ως

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{xx}^P + \varepsilon_{xx}^S = \underbrace{\frac{d\theta_Y}{dx} Z}_{\text{πρωτογενής}} + \underbrace{\frac{d\eta_Y}{dx} \phi_{CY}^P}_{\text{δευτερογενής}} \quad (4.3.2.1\alpha)$$

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{xy}^P + \varepsilon_{xy}^S = \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} + \theta_Y \right) \left(\frac{\partial Z}{\partial y} + \frac{\partial \phi_{CY}^P}{\partial y} \right)}_{\text{πρωτογενής}} + \underbrace{\frac{1}{2} \left(\eta_Y - \frac{dw}{dx} - \theta_Y \right) \frac{\partial \phi_{CY}^P}{\partial y}}_{\text{δευτερογενής}} \quad (4.3.2.1\beta)$$

$$\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{xz}^P + \varepsilon_{xz}^S = \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} + \theta_Y \right) \left(\frac{\partial Z}{\partial z} + \frac{\partial \phi_{CY}^P}{\partial z} \right)}_{\text{πρωτογενής}} + \underbrace{\frac{1}{2} \left(\eta_Y - \frac{dw}{dx} - \theta_Y \right) \frac{\partial \phi_{CY}^P}{\partial z}}_{\text{δευτερογενής}} \quad (4.3.2.1\gamma)$$

Θεωρώντας τις ποσότητες $\gamma_Z^P = dw/dx + \theta_Y$, $\gamma_Z^S = \eta_Y - dw/dx - \theta_Y$ ως πρωτογενή και δευτερογενή ‘μέση’ ανηγμένη διατμητική παραμόρφωση, αντίστοιχα, οι σχέσεις (13.3.4) γράφονται ως

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{xx}^P + \varepsilon_{xx}^S = \underbrace{\frac{d\theta_Y}{dx} Z}_{\text{πρωτογενής}} + \underbrace{\frac{d\eta_Y}{dx} \phi_{CY}^P}_{\text{δευτερογενής}} \quad (4.3.2.2\alpha)$$

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{xy}^P + \varepsilon_{xy}^S = \underbrace{\frac{1}{2} \gamma_Z^P \left(\frac{\partial Z}{\partial y} + \frac{\partial \phi_{CY}^P}{\partial y} \right)}_{\text{πρωτογενής}} + \underbrace{\frac{1}{2} \gamma_Z^S \frac{\partial \phi_{CY}^P}{\partial y}}_{\text{δευτερογενής}} \quad (4.3.2.2\beta)$$

$$\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{xz}^P + \varepsilon_{xz}^S = \underbrace{\frac{1}{2} \gamma_Z^P \left(\frac{\partial Z}{\partial z} + \frac{\partial \phi_{CY}^P}{\partial z} \right)}_{\text{πρωτογενής}} + \underbrace{\frac{1}{2} \gamma_Z^S \frac{\partial \phi_{CY}^P}{\partial z}}_{\text{δευτερογενής}} \quad (4.3.2.2\gamma)$$

4.3.3 Τάσεις

Επίσης, λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις τάσεων – παραμορφώσεων σύμφωνα με τον νόμο του Hooke, οι συνιστώσες του ταυυστή τάσεως Cauchy μετά την αντικατάσταση των συνιστωσών του ταυυστή παραμόρφωσης από τις σχέσεις (13.3.3β,γ,ε), (13.3.5) προκύπτουν ως

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xx}^P + \sigma_{xx}^S = E(\varepsilon_{xx}^P + \varepsilon_{xx}^S) = E \underbrace{\frac{d\theta_Y}{dx} Z}_{\text{πρωτογενής}} + E \underbrace{\frac{d\eta_Y}{dx} \phi_{CY}^P}_{\text{δευτερογενής}} \quad (4.3.3.1\alpha)$$

$$\sigma_{yy} = 0 \quad \sigma_{zz} = 0 \quad (4.3.3.1\beta,\gamma)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{xy}^P + \tau_{xy}^S = 2G(\varepsilon_{xy}^P + \varepsilon_{xy}^S) = G\gamma_Z^P \left(\frac{\partial Z}{\partial y} + \frac{\partial \phi_{CY}^P}{\partial y} \right) + G\gamma_Z^S \frac{\partial \phi_{CY}^P}{\partial y} \quad (4.3.3.1\delta)$$

πρωτογενής δευτερογενής

$$\tau_{yz} = 0 \quad (4.3.3.1\epsilon)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{xz}^P + \tau_{xz}^S = 2G(\varepsilon_{xz}^P + \varepsilon_{xz}^S) = G\gamma_Z^P \left(\frac{\partial Z}{\partial z} + \frac{\partial \phi_{CY}^P}{\partial z} \right) + G\gamma_Z^S \frac{\partial \phi_{CY}^P}{\partial z} \quad (4.3.3.1\sigma\tau)$$

πρωτογενής δευτερογενής

Οι εξισώσεις (13.3.6) αποτελούν το πεδίο τάσεων σύμφωνα με το προσομοίωμα A. Ωστόσο, όπως αναφέρθηκε και στα προηγούμενα, πρέπει να δοθεί προσοχή στους όρους $G\gamma_Z^S \left(\partial \phi_{CY}^P / \partial y \right)$, $G\gamma_Z^S \left(\partial \phi_{CY}^P / \partial z \right)$ καθόσον δεν δύνανται να αντιπροσωπεύσουν μία αποδεκτή κατανομή δευτερογενών διατμητικών τάσεων και οδηγούν σε παραβίαση των τοπικών εξισώσεων ισορροπίας κατά μήκος του άξονα και της απαίτησης μηδενικών διατμητικών τάσεων στην παράπλευρη επιφάνεια της δοκού (Σχ.13.5δ). Η παρατήρηση αυτή είναι ανάλογη με τις αντίστοιχες παρατηρήσεις στη θεωρία δοκού Timoshenko. Συνεπώς, ενδέχεται να προκύψουν σημαντικές αποκλίσεις στις υπολογισθείσες τάσεις κοντά σε στηρίξεις ή σε συγκεντρωμένα φορτία (Mokos and Sarountzakis 2011, Tsipiras and Sarountzakis 2012, Ferradi et al. 2013). Στη συνέχεια, εφαρμόζεται διόρθωση των διατμητικών τάσεων χωρίς να αυξάνεται ο αριθμός των καθολικών κινηματικών αγνώστων. Έτσι, εισάγεται πρόσθετη συνάρτηση στρέβλωσης $\phi_{CY}^S(Y, Z)$ (βλ. Σχ.13.6β) στις σχέσεις (13.3.6δ,στ) και οι μη μηδενικές συνιστώσες του ταυυστή τάσης τροποποιούνται ως

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xx}^P + \sigma_{xx}^S = E \underbrace{\frac{d\theta_Y}{dx} Z}_{\text{πρωτογενής}} + E \underbrace{\frac{d\eta_Y}{dx} \phi_{CY}^P}_{\text{δευτερογενής}} \quad (4.3.3.2\alpha)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{xy}^P + \tau_{xy}^S = \underbrace{G\gamma_Z^P \left(\frac{\partial Z}{\partial y} + \frac{\partial \phi_{CY}^P}{\partial y} \right)}_{\text{πρωτογενής}} + \underbrace{G\gamma_Z^S \left(\frac{\partial \phi_{CY}^P}{\partial y} + \frac{\partial \phi_{CY}^S}{\partial y} \right)}_{\text{δευτερογενής}} \quad (4.3.3.2\beta)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{xz}^P + \tau_{xz}^S = \underbrace{G\gamma_Z^P \left(\frac{\partial Z}{\partial z} + \frac{\partial \phi_{CY}^P}{\partial z} \right)}_{\text{πρωτογενής}} + \underbrace{G\gamma_Z^S \left(\frac{\partial \phi_{CY}^P}{\partial z} + \frac{\partial \phi_{CY}^S}{\partial z} \right)}_{\text{δευτερογενής}} \quad (4.3.3.2\gamma)$$

ή πιο συνοπτικά ως

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xx}^P + \sigma_{xx}^S = E \underbrace{\frac{d\theta_Y}{dx} Z}_{\text{πρωτογενής}} + E \underbrace{\frac{d\eta_Y}{dx} \phi_{CY}^P}_{\text{δευτερογενής}} \quad (4.3.3.3\alpha)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{xy}^P + \tau_{xy}^S = \underbrace{G\gamma_Z^P \frac{\partial \Phi_{CY}^P}{\partial y}}_{\text{πρωτογενής}} + \underbrace{G\gamma_Z^S \frac{\partial \Phi_{CY}^S}{\partial y}}_{\text{δευτερογενής}} \quad (4.3.3.3\beta)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{xz}^P + \tau_{xz}^S = \underbrace{G\gamma_Z^P \frac{\partial \Phi_{CY}^P}{\partial z}}_{\text{πρωτογενής}} + \underbrace{G\gamma_Z^S \frac{\partial \Phi_{CY}^S}{\partial z}}_{\text{δευτερογενής}} \quad (4.3.3.3\gamma)$$

όπου έχει τεθεί

$$\Phi_{CY}^P = Z + \phi_{CY}^P \quad \Phi_{CY}^S = \phi_{CY}^P + \phi_{CY}^S \quad (4.3.3.4\alpha,\beta)$$

Οι συναρτήσεις στρέβλωσης Φ_{CY}^P , Φ_{CY}^S της σχέσης (13.3.9), για τις οποίες θα γίνει λόγος σε επόμενη ενότητα, μπορούν να καθοριστούν διατυπώνοντας προβλήματα συνοριακών τιμών εκμεταλλευόμενοι την τοπική εξίσωση ισορροπίας κατά τη διαμήκη έννοια και την αντίστοιχη συνοριακή συνθήκη. Όμοια διόρθωση των διατμητικών τάσεων έχει παρουσιαστεί στην εργασία των Genoese et al. (2013). Οι εξισώσεις (13.3.8) περιγράφουν το πεδίο τάσεων σύμφωνα με το προσομοίωμα Β.

4.4 Εντατικά μεγέθη, καθολικές εξισώσεις ισορροπίας, συνοριακές συνθήκες

Οι κινηματικοί άγνωστοι $w(X)$, $\theta_Y(X)$, $\eta_Y(X)$ του προβλήματος (ακολουθώντας το προσομοίωμα Β) θα προσδιοριστούν από καθολικές εξισώσεις ισορροπίας, οι οποίες θα διατυπωθούν με τη βοήθεια του λογισμού των μεταβολών. Προς τούτο ορίζονται στη συνέχεια τα παρακάτω εντατικά μεγέθη (Σχ.13.7α)

$$M_Y = \int_{\Omega} \sigma_{xx} Z \, d\Omega \quad (4.4.1\alpha)$$

$$M_{\phi_{CY}^P} = \int_{\Omega} \sigma_{xx} \phi_{CY}^P \, d\Omega \quad (4.4.1\beta)$$

$$Q_z^P = \int_{\Omega} \left(\tau_{xy} \frac{\partial \Phi_{CY}^P}{\partial y} + \tau_{xz} \frac{\partial \Phi_{CY}^P}{\partial z} \right) d\Omega \quad (4.4.1\gamma)$$

$$Q_z^S = - \int_{\Omega} \left(\tau_{xy} \frac{\partial \Phi_{CY}^S}{\partial y} + \tau_{xz} \frac{\partial \Phi_{CY}^S}{\partial z} \right) d\Omega \quad (4.4.1\delta)$$

Τα εντατικά μεγέθη που ορίζονται στις σχέσεις (13.4.1α,β,γ,δ) αποτελούν την καμπτική ροπή περί τον άξονα Y , τη ροπή διατμητικής στρέβλωσης (διρροπή) και το πρωτογενές και δευτερογενές τμήμα της τέμνουσας δύναμης Q_z ($Q_z = Q_z^P + Q_z^S$) κατά τον άξονα z , αντίστοιχα. Επιπλέον, οι γεωμετρικές σταθερές της ράβδου μπορούν να προκύψουν από τις παρακάτω σχέσεις (Dikaros and Sapountzakis 2014a, Park et al. 1997, Ferradi et al. 2013)

$$A = \int_{\Omega} d\Omega \quad S_Y = \int_{\Omega} Z \, d\Omega \quad S_Z = \int_{\Omega} Y \, d\Omega \quad (4.4.2\alpha, \beta, \gamma)$$

$$I_{YY} = \int_{\Omega} Z^2 \, d\Omega \quad I_{ZZ} = \int_{\Omega} Y^2 \, d\Omega \quad I_{YZ} = \int_{\Omega} YZ \, d\Omega \quad (4.4.2\delta, \epsilon, \sigma)$$

$$S_{\phi_{CY}^P} = \int_{\Omega} \phi_{CY}^P \, d\Omega \quad (4.4.2\zeta)$$

$$I_{ij} = \int_{\Omega} (i)(j) \, d\Omega, \quad i = Y, Z, \phi_{CY}^P, \quad j = \phi_{CY}^P \quad (4.4.2\eta)$$

$$D_{ij} = \int_{\Omega} [\nabla(i) \cdot \nabla(j)] \, d\Omega, \quad i, j = \Phi_{CY}^P, \Phi_{CY}^S \quad (4.4.2\theta)$$

όπου $\nabla \equiv (\partial/\partial y)\mathbf{i}_Y + (\partial/\partial z)\mathbf{i}_Z$ είναι ο τελεστής κλίσης και \mathbf{i}_Y , \mathbf{i}_Z τα μοναδιαία διανύσματα κατά μήκος των αξόνων Y , Z , αντίστοιχα. Έχοντας υπόψη ότι $CXYZ$ είναι το κύριο κεντροβαρικό καμπτικό σύστημα αξόνων και εκμεταλλευόμενοι τις συνθήκες ορθογωνικότητας των συναρτήσεων στρέβλωσης (οι οποίες θα αναφερθούν στην ενότητα 13.5) προκύπτουν οι παρακάτω σχέσεις

$$S_Y = S_Z = S_{\phi_{CY}^P} = 0 \quad (4.4.3\alpha)$$

$$I_{YZ} = I_{Z\phi_{CY}^P} = 0 \quad (4.4.3\beta)$$

$$D_{\Phi_{CY}^P \Phi_{CY}^S} = 0 \quad (4.4.3\gamma)$$

Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις των τάσεων (εξ. (13.3.8)) στις σχέσεις (13.4.1) και λαμβάνοντας υπόψη τους ορισμούς (13.4.2) και τις σχέσεις (13.4.3), τα εντατικά μεγέθη υπολογίζονται συναρτήσει των κινηματικών μεγεθών ως

$$M_Y = EI_{YY} \frac{d\theta_Y}{dx} \quad (4.4.4\alpha)$$

$$M_{\phi_{CY}^P} = EI_{\phi_{CY}^P \phi_{CY}^P} \frac{d\eta_Y}{dx} \quad (4.4.4\beta)$$

$$Q_z^P = GD_{\phi_{CY}^P \phi_{CY}^P} \gamma_Z^P \quad (4.4.4\gamma)$$

$$Q_z^S = -GD_{\phi_{CY}^S \phi_{CY}^S} \gamma_Z^S \quad (4.4.4\delta)$$

Η ποσότητα $GD_{\phi_{CY}^P \phi_{CY}^P}$ που πολλαπλασιάζει τη ‘μέση’ πρωτογενή διατμητική παραμόρφωση γ_Z^P , παρουσιάζει αντιστοιχία με τη διατμητική στιβαρότητα της θεωρίας Timoshenko. Έτσι, ο απλούστερος συμβολισμός GA_Z^P μπορεί να υιοθετηθεί για την ποσότητα αυτή. Ομοίως, η ποσότητα $GD_{\phi_{CY}^S \phi_{CY}^S}$ αναφέρεται σε δευτερογενή διατμητική στιβαρότητα λόγω της ανομοιόμορφης διατμητικής στρέβλωσης και μπορεί να συμβολιστεί ως GA_Z^S . Στη συνέχεια, για να διατηρηθεί η συμβατότητα με την κλασική σημειογραφία, θα χρησιμοποιηθούν οι ανωτέρω απλοποιημένοι συμβολισμοί. Συνεπώς, η πρωτογενής και δευτερογενής τέμνουσα γράφονται ως

$$Q_z^P = GA_Z^P \gamma_Z^P \quad Q_z^S = -GA_Z^S \gamma_Z^S \quad (4.4.5\alpha, \beta)$$

Για την εξαγωγή των καθολικών διαφορικών εξισώσεων ισορροπίας, θα χρησιμοποιηθεί η Αρχή Δυνατών Έργων λαμβάνοντας τις δυνατές μεταβολές των κινηματικών μεγεθών w , θ_Y και η_Y (και των παραγώγων τους). Η Αρχή Δυνατών Έργων αγνοώντας μαζικές δυνάμεις (στατικό πρόβλημα), μπορεί να γραφεί ως (Bathe 1996)

$$\underbrace{\int_V (\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) dV}_{\delta W_{\text{int}}} = \underbrace{\int_{\text{Lat}} (t_x \delta \bar{u} + t_y \delta \bar{v} + t_z \delta \bar{w}) dF}_{\delta W_{\text{ext}}} \quad (4.4.6)$$

όπου παραλήφθηκαν οι όροι τάσεων που δεν παράγουν έργο. Με $\delta(\)$ συμβολίζονται δυνατές ποσότητες, V είναι ο όγκος της ράβδου στην αρχική (απαραμόρφωτη) κατάσταση και με F υποδηλώνεται η παράπλευρη επιφάνεια της. Στην παραπάνω σχέση (13.4.6) οι ποσότητες δW_{int} , δW_{ext} αποτελούν τα δυνατά έργα λόγω παραμόρφωσης της ράβδου και λόγω των εξωτερικώς επιβαλλόμενων φορτίων, αντίστοιχα, ενώ t_x , t_y , t_z είναι οι συνιστώσες του διανύσματος τάσεως που ασκείται στην παράπλευρη επιφάνεια της ράβδου συμπεριλαμβανομένων των ακραίων διατομών. Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις των συνιστωσών του ταυυστή παραμόρφωσης (13.3.5), τους ορισμούς των εντατικών μεγεθών (13.4.1) και γνωρίζοντας ότι τα εξωτερικά εφαρμοζόμενα

φορτία σχετίζονται με τις συνιστώσες του διανύσματος τάσης στην παράπλευρη επιφάνεια της δοκού t_x, t_y, t_z σύμφωνα με τις σχέσεις

$$p_z = \int_{\Gamma} t_z \, ds \quad (4.4.7\alpha)$$

$$m_Y = \int_{\Gamma} t_x Z \, ds \quad (4.4.7\beta)$$

$$m_{\phi_{CY}^P} = \int_{\Gamma} t_x \phi_{CY}^P \, ds \quad (4.4.7\gamma)$$

από την εξίσωση (13.4.6) μπορούν να παραχθούν οι διαφορικές εξισώσεις Euler-Lagrange ως

$$-\frac{dQ_Z}{dx} = p_Z \quad (4.4.8\alpha)$$

$$-\frac{dM_Y}{dx} + Q_Z = m_Y \quad (4.4.8\beta)$$

$$-\frac{dM_{\phi_{CY}^P}}{dx} - Q_z^S = m_{\phi_{CY}^P} \quad (4.4.8\gamma)$$

μαζί με τις αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες του προβλήματος ως

$$\left[(Q_Z - V_{bZ}) \delta w \right]_{x=0}^{x=L} = 0 \quad (4.4.9\alpha)$$

$$\left[(M_Y - M_{bY}) \delta \theta_Y \right]_{x=0}^{x=L} = 0 \quad (4.4.9\beta)$$

$$\left[(M_{\phi_{CY}^P} - M_{b\phi_{CY}^P}) \delta \eta_Y \right]_{x=0}^{x=L} = 0 \quad (4.4.9\gamma)$$

όπου $V_{bZ}, M_{bY}, M_{b\phi_{CY}^P}$ είναι οι αντιδράσεις στα άκρα της ράβδου ($x = 0, L$). Από τις τελευταίες σχέσεις (13.4.9) διαχωρίζονται οι κινηματικές από τις φυσικές συνθήκες στα σημεία $x = 0, L$ ως

$$\delta w = 0 \quad \text{ή} \quad V_{bZ} = Q_Z \quad (4.4.10\alpha)$$

$$\delta \theta_Y = 0 \quad \text{ή} \quad M_{bY} = M_Y \quad (4.4.10\beta)$$

$$\delta \eta_Y = 0 \quad \text{ή} \quad M_{b\phi_{CY}^P} = M_{\phi_{CY}^P} \quad (4.4.10\gamma)$$

Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις των εντατικών μεγεθών (13.4.4) στις διαφορικές εξισώσεις (13.4.8) προκύπτουν οι καθολικές διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας της δοκού συναρτήσει των κινηματικών μεγεθών ως (Dikaros and Sarountzakis 2014a)

$$-G \left(A_Z^P + A_Z^S \right) \left(\frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{d\theta_Y}{dx} \right) + GA_Z^S \frac{d\eta_Y}{dx} = p_z \quad (4.4.11\alpha)$$

$$-EI_{YY} \frac{d^2\theta_Y}{dx^2} + G(A_Z^P + A_Z^S) \left(\frac{dw}{dx} + \theta_Y \right) - GA_Z^S \eta_Y = m_Y \quad (4.4.11\beta)$$

$$-EI_{\phi_{CY}^P \phi_{CY}^P} \frac{d^2\eta_Y}{dx^2} + GA_Z^S \left(\eta_Y - \frac{dw}{dx} - \theta_Y \right) = m_{\phi_{CY}^P} \quad (4.4.11\gamma)$$

Επίσης, προκειμένου να είναι δυνατόν να εξεταστεί και η περίπτωση ελαστικών στηρίξεων στα άκρα της δοκού, οι συνοριακές συνθήκες διατυπώνονται στην πλέον γενική τους μορφή ως

$$\alpha_1 w + \alpha_2 V_{bZ} = \alpha_3 \quad (4.4.12\alpha)$$

$$\beta_1 \theta_Y + \beta_2 M_{bY} = \beta_3 \quad (4.4.12\beta)$$

$$\gamma_1 \eta_Y + \gamma_2 M_{b\phi_{CY}^P} = \gamma_3 \quad (4.4.12\gamma)$$

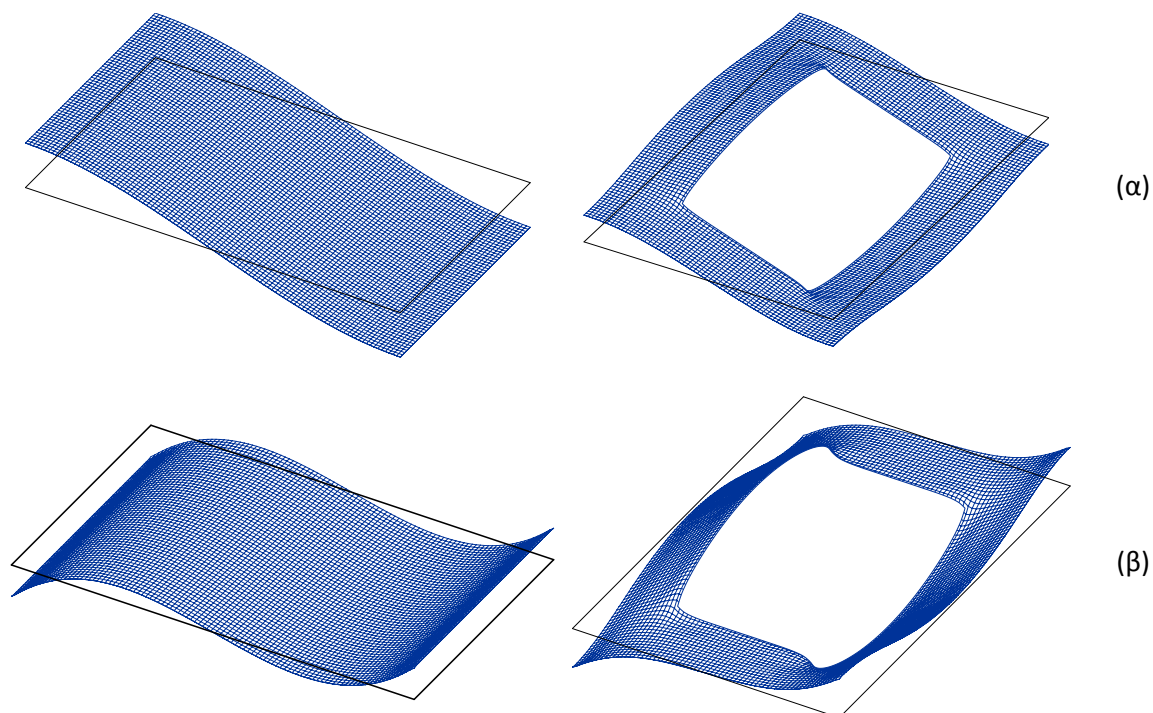
Οι συντελεστές $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$ ($k=1,2,3$) λαμβάνουν τιμές ανάλογα με τις συνθήκες στήριξης που επικρατούν στα άκρα της δοκού, στις οποίες συμπεριλαμβάνεται και η περίπτωση ελαστικής στήριξης. (π.χ. για την περίπτωση της πλήρους πάκτωσης ισχύει ότι $\alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1 = 1$, $\alpha_2 = \alpha_3 = \beta_2 = \beta_3 = \gamma_2 = \gamma_3 = 0$).

4.5 Συναρτήσεις διατμητικής στρέβλωσης, τοπικές εξισώσεις ισορροπίας

Η ανάλυση που περιγράφηκε στην προηγούμενη ενότητα υποθέτει ότι οι συναρτήσεις στρέβλωσης Φ_{CY}^P, Φ_{CY}^S ως προς το κύριο καμπτικό κεντροβαρικό σύστημα έχουν ήδη οριστεί. Οι συναρτήσεις στρέβλωσης προσδιορίζονται χρησιμοποιώντας την τοπική εξίσωση ισορροπίας στην κατά μήκος διεύθυνση και της αντίστοιχης συνοριακής συνθήκης ως

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \text{ στο } \Omega, \forall X \in (0, L) \quad (4.5.1\alpha)$$

$$\tau_{xn} = \tau_{xy} n_Y + \tau_{xz} n_Z = 0 \text{ στο } \Gamma, \forall X \in (0, L) \quad (4.5.1\beta)$$



Σχ.4.8. Πρωτογενείς συναρτήσεις διατμητικής στρέβλωσης Φ_{CY}^P (α) και ϕ_{CY}^P (β).

όπου n_Y, n_Z είναι τα συνημίτονα κατεύθυνσης ως προς τους άξονες Y, Z , αντίστοιχα. Για τον υπολογισμό της συνάρτησης στρέβλωσης Φ_{CY}^P (Σχ. 13.9α), το πεδίο τάσεων (13.3.8) χρησιμοποιείται, θεωρώντας αρχικά μόνο τις πρωτογενείς ορθές σ_{xx}^P και διατμητικές τ_{xy}^P, τ_{xz}^P τάσεις (αγνοούνται οι δευτερογενείς διατμητικές τ_{xy}^S, τ_{xz}^S και ορθές σ_{xx}^S τάσεις). Είναι γνωστό από το κλασικό πρόβλημα ομοιόμορφης διάτμησης κατά St.Venant, ότι οι πρωτογενείς διατμητικές τάσεις τ_{xy}^P, τ_{xz}^P εξισορροπούν τη μεταβολή των ορθών τάσεων λόγω κάμψης (σ_{xx}^P) (βλ. Πίνακα 13.1). Συνεπώς, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (13.5.1), (13.4.4α,γ), έχοντας υπόψη ότι ισχύει η εξίσωση ισορροπίας (13.4.8β) και θεωρώντας ότι $m_Y = 0$ για την αποφυγή υπολογισμού συνάρτησης στρέβλωσης εξαρτώμενης από την εξωτερική φόρτιση, διαμορφώνεται πρόβλημα συνοριακών τιμών ως (Dikaros and Sapountzakis 2014a)

$$\nabla^2 \bar{\Phi}_{CY}^P = Z \quad \text{στο } \Omega, \forall X \in (0, L) \quad (4.5.2\alpha)$$

$$\frac{\partial \bar{\Phi}_{CY}^P}{\partial n} = 0 \quad \text{στο } \Gamma, \forall X \in (0, L) \quad (4.5.2\beta)$$

όπου $\bar{\Phi}_{CY}^P = -\left(I_{YY}/A_Z^P\right)\Phi_{CY}^P$. Ο συμβολισμός $\partial/\partial n$ υποδεικνύει την παράγωγο ως προς το εξωτερικό κάθετο διάνυσμα στο σύνορο \mathbf{n} (παράγωγος κατά κατεύθυνση). Αφού προσδιοριστεί η $\bar{\Phi}_{CY}^P$ από την επίλυση του προβλήματος συνοριακών τιμών (13.5.2), η γεωμετρική σταθερά A_Z^P μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας τον ορισμό (13.4.2θ) ως

$$A_Z^P = \frac{(I_{YY})^2}{D_{\bar{\Phi}_{CY}^P \bar{\Phi}_{CY}^P}} \quad (4.5.3)$$

Σε αυτό το σημείο η συνάρτηση στρέβλωσης ϕ_{CY}^P που καθορίζει τη μορφή της κατανομής των ορθών τάσεων λόγω στρέβλωσης, μπορεί να υπολογιστεί μέσω της σχέσης (13.3.9α) (Σχ. 13.9β). Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (13.3.9α), (13.5.3) και εφαρμόζοντας το θεώρημα Gauss-Green αποδεικνύεται ότι η ϕ_{CY}^P πληρεί τη συνθήκη ορθογωνικότητας, $\langle \phi_{CY}^P, Z \rangle = \int_{\Omega} Z \phi_{CY}^P d\Omega = 0$, το οποίο υποδεικνύει ότι οι ορθές τάσεις λόγω της ϕ_{CY}^P δεν παράγουν επιπρόσθετη καμπτική ροπή.

Όπως έχει περιγραφεί στην ενότητα 13.3, προκειμένου να διορθωθούν οι τάσεις τ_{xy}^S, τ_{xz}^S χρησιμοποιείται επιπρόσθετη συνάρτηση στρέβλωσης λόγω διάτμησης ϕ_{CY}^S . Η συνάρτηση αυτή υπολογίζεται έμμεσα από την Φ_{CY}^S , η οποία μπορεί να προσδιοριστεί μέσω απαίτησης της ανεξάρτητης εξισορρόπησης των ορθών τάσεων σ_{xx}^S λόγω της ϕ_{CY}^S στρέβλωσης από τις δευτερογενείς διατμητικές τάσεις τ_{xy}^S, τ_{xz}^S (βλ. Πίνακα 13.1) στην εξίσωση (13.5.1) (Mokos and Sapountzakis 2011, Ferradi et al. 2013). Η θεώρηση αυτή επιτρέπει τη μόρφωση του παρακάτω προβλήματος συνοριακών τιμών (Dikaros and Sapountzakis 2014a)

$$\nabla^2 \tilde{\Phi}_{CY}^S = \phi_{CY}^P \quad \text{στο } \Omega, \forall X \in (0, L) \quad (4.5.4\alpha)$$

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}_{CY}^S}{\partial n} = 0 \quad \text{στο } \Gamma, \forall X \in (0, L) \quad (4.5.4\beta)$$

Για την αποφυγή της σύζευξης μεταξύ των Q_z^P και Q_z^S είναι απαραίτητο να επιλεγεί κατάλληλη ϕ_{CY}^S έτσι ώστε να ικανοποιείται η σχέση $D_{\Phi_{CY}^P \Phi_{CY}^S} = \int_{\Omega} (\nabla \Phi_{CY}^P \cdot \nabla \Phi_{CY}^S) d\Omega = 0$. Αυτή η απαίτηση μπορεί να ικανοποιηθεί ορίζοντας την $\bar{\Phi}_{CY}^S$ ως

$$\bar{\Phi}_{CY}^S = \tilde{\Phi}_{CY}^S + ZC_Y \quad (4.5.5)$$

όπου η σταθερά C_Y ορίζεται ως

$$C_Y = -\frac{D_{\Phi_{CY}^P} \tilde{\Phi}_{CY}^S}{D_{Z\Phi_{CY}^P}} = \frac{I_{\phi_{CY}^P} \phi_{CY}^P}{A_Z^P} \quad (4.5.6)$$

Όμοια με την προηγούμενη διαδικασία, χρησιμοποιώντας τις (13.4.4β,δ), έχοντας υπόψη την εξίσωση ισορροπίας (13.4.8γ) και θεωρώντας ότι $m_{\phi_{CY}^P} = 0$, μπορεί να δειχθεί ότι $\bar{\Phi}_{CY}^S = -\left(I_{\phi_{CY}^P} \phi_{CY}^P / A_Z^S\right) \Phi_{CY}^S$. Τότε, η γεωμετρική σταθερά A_Z^S μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας τον ορισμό (13.4.2θ) ως

$$A_Z^S = \frac{\left(I_{\phi_{CY}^P} \phi_{CY}^P\right)^2}{D_{\Phi_{CY}^S} \bar{\Phi}_{CY}^S} \quad (4.5.7)$$

4.6 Τοπικό Μητρώο Στιβαρότητας – Τοπικά Μητρώα Επικόμβιων Μετακινήσεων και Δράσεων

Θεωρείται χωρικό πρισματικό στοιχείο μήκους L και σταθερής τυχούσας διατομής αποτελούμενης από ομογενές, ισότροπο και γραμμικά ελαστικό υλικό, με μέτρο ελαστικότητας E και μέτρο διάτμησης G , το οποίο καταλαμβάνει περιοχή Ω του επιπέδου y, z . Το στοιχείο υποβάλλεται σε συνδυασμό φορτίσεων από ανομοιόμορφα κατανεμημένο ή/και συγκεντρωμένο αξονικό φορτίο $p_x = p_x(X)$ κατά μήκος του άξονα X , εγκάρσιο φορτίο $p_y = p_y(x)$ και $p_z = p_z(x)$ κατά μήκος των αξόνων y, z , αντίστοιχα, καμπτικές ροπές $m_Y = m_Y(x)$, $m_Z = m_Z(x)$ κατά μήκος των αξόνων Y, Z , αντίστοιχα καθώς και ροπές διατμητικής στρέβλωσης (διρροπές) $m_{\phi_{CY}^P} = m_{\phi_{CY}^P}(x)$ και $m_{\phi_{CZ}^P} = m_{\phi_{CZ}^P}(x)$.

Σύμφωνα με όσα παρουσιάστηκαν στην ενότητα 4.3, προκειμένου να ληφθούν υπόψη οι προαναφερθείσες ανομοιόμορφες διατμητικές στρεβλώσεις της ράβδου, δύο νέοι βαθμοί ελευθερίας προστίθενται στους ήδη γνωστούς έξι β.ε. του κλασικού στοιχείου χωρικού πλαισίου. Οι πρόσθετοι αυτοί β.ε. είναι οι παράμετροι στρέβλωσης $\eta_Y(X)$, $\eta_Z(X)$, οι οποίες περιγράφουν την 'ένταση' της διατμητικής στρέβλωσης της διατομής κατά μήκος της ράβδου. Η στρέβλωση αυτή ορίζεται από τις πρωτογενείς συναρτήσεις στρέβλωσης $\phi_{CY}^P(Y, Z)$, $\phi_{CZ}^P(Y, Z)$ που εξαρτώνται από τη γεωμετρία της διατομής. Έτσι, η 'πραγματική' παραμορφωμένη εικόνα της διατομής λόγω διατμητικής στρέβλωσης σε κάθε σημείο της ράβδου δίνεται από το άθροισμα $\eta_Y(X) \phi_{CY}^P(Y, Z) + \eta_Z(X) \phi_{CZ}^P(Y, Z)$.

Τα εντατικά μεγέθη που αντιστοιχούν στους βαθμούς ελευθερίας που περιγράφηκαν στην προηγούμενη παράγραφο είναι οι ροπές διατμητικής στρέβλωσης $M_{\phi_{CY}^P}$, $M_{\phi_{CZ}^P}$ (διρροπές) κατά

$$-G\left(A_Y^P + A_Y^S\right)\left(\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d\theta_Z}{dx}\right) + GA_Y^S \frac{d\eta_Z}{dx} = p_y \quad (4.6.4\alpha)$$

$$-G\left(A_Z^P + A_Z^S\right)\left(\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{d\theta_Y}{dx}\right) + GA_Z^S \frac{d\eta_Y}{dx} = p_z \quad (4.6.4\beta)$$

$$-EI_{ZZ} \frac{d^2\theta_Z}{dx^2} + G\left(A_Y^P + A_Y^S\right)\left(\frac{dv}{dx} + \theta_Z\right) - GA_Y^S \eta_Z = m_Z \quad (4.6.4\gamma)$$

$$-EI_{YY} \frac{d^2\theta_Y}{dx^2} + G\left(A_Z^P + A_Z^S\right)\left(\frac{dw}{dx} + \theta_Y\right) - GA_Z^S \eta_Y = m_Y \quad (4.6.4\delta)$$

$$-EI_{\phi_{CZ}^P \phi_{CZ}^P} \frac{d^2\eta_Z}{dx^2} + GA_Y^S \left(\eta_Z - \frac{dv}{dx} - \theta_Z\right) = m_{\phi_{CZ}^P} \quad (4.6.4\epsilon)$$

$$-EI_{\phi_{CY}^P \phi_{CY}^P} \frac{d^2\eta_Y}{dx^2} + GA_Z^S \left(\eta_Y - \frac{dw}{dx} - \theta_Y\right) = m_{\phi_{CY}^P} \quad (4.6.4\sigma\tau)$$

υποκείμενου στις αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες στα άκρα της ράβδου ($x=0, L$), οι οποίες γράφονται ως

$$\alpha_{y1}v + \alpha_{y2}V_{bY} = \alpha_{y3} \quad \alpha_{z1}w + \alpha_{z2}V_{bZ} = \alpha_{z3} \quad (4.6.5\alpha,\beta)$$

$$\beta_{y1}\theta_Z + \beta_{y2}M_{bZ} = \beta_{y3} \quad \beta_{z1}\theta_Y + \beta_{z2}M_{bY} = \beta_{z3} \quad (4.6.5\gamma,\delta)$$

$$\gamma_{y1}\eta_Z + \gamma_{y2}M_{b\phi_{CZ}^P} = \gamma_{y3} \quad \gamma_{z1}\eta_Y + \gamma_{z2}M_{b\phi_{CY}^P} = \gamma_{z3} \quad (4.6.5\epsilon,\sigma\tau)$$

μηδενίζοντας τις συναρτήσεις $p_y = p_z = m_Z = m_Y = m_{\phi_{CZ}^P} = m_{\phi_{CY}^P} = 0$ εξωτερικής φόρτισης και θέτοντας κατάλληλες τιμές στους συντελεστές $\alpha_{yk}, \alpha_{zk}, \beta_{yk}, \beta_{zk}, \gamma_{yk}, \gamma_{zk}$ ($k=1,2,3$) ώστε να μορφώνονται κατάλληλες συνοριακές συνθήκες. Έτσι, π.χ. τα στοιχεία k_{m2}^i ($m=2,3,5,6,7,8,10,11,13,14,15,16$) του τοπικού μητρώου στιβαρότητας (4.6.3) προκύπτουν ως οι αντιδράσεις του αμφίπακτου στοιχείου για μοναδιαία εγκάρσια μετατόπιση v κατά τον άξονα Y στη θέση $x=0$ και επομένως

$$\begin{aligned} \alpha_{y1} = \alpha_{y3} = \alpha_{z1} = \beta_{y1} = \beta_{z1} = \gamma_{y1} = \gamma_{z1} &= 1 \\ \alpha_{y2} = \alpha_{z2} = \alpha_{z3} = \beta_{y2} = \beta_{y3} = \beta_{z2} = \beta_{z3} = \gamma_{y2} = \gamma_{y3} = \gamma_{z2} = \gamma_{z3} &= 0 \end{aligned} \quad \text{στη θέση } x=0 \quad (4.6.6\alpha)$$

$$\begin{aligned} \alpha_{y1} = \alpha_{z1} = \beta_{y1} = \beta_{z1} = \gamma_{y1} = \gamma_{z1} &= 1 \\ \alpha_{y2} = \alpha_{z2} = \alpha_{y3} = \alpha_{z3} = \beta_{y2} = \beta_{y3} = \beta_{z2} = \beta_{z3} = \gamma_{y2} = \gamma_{y3} = \gamma_{z2} = \gamma_{z3} &= 0 \end{aligned} \quad \text{στη θέση } x=L \quad (4.6.6\beta)$$

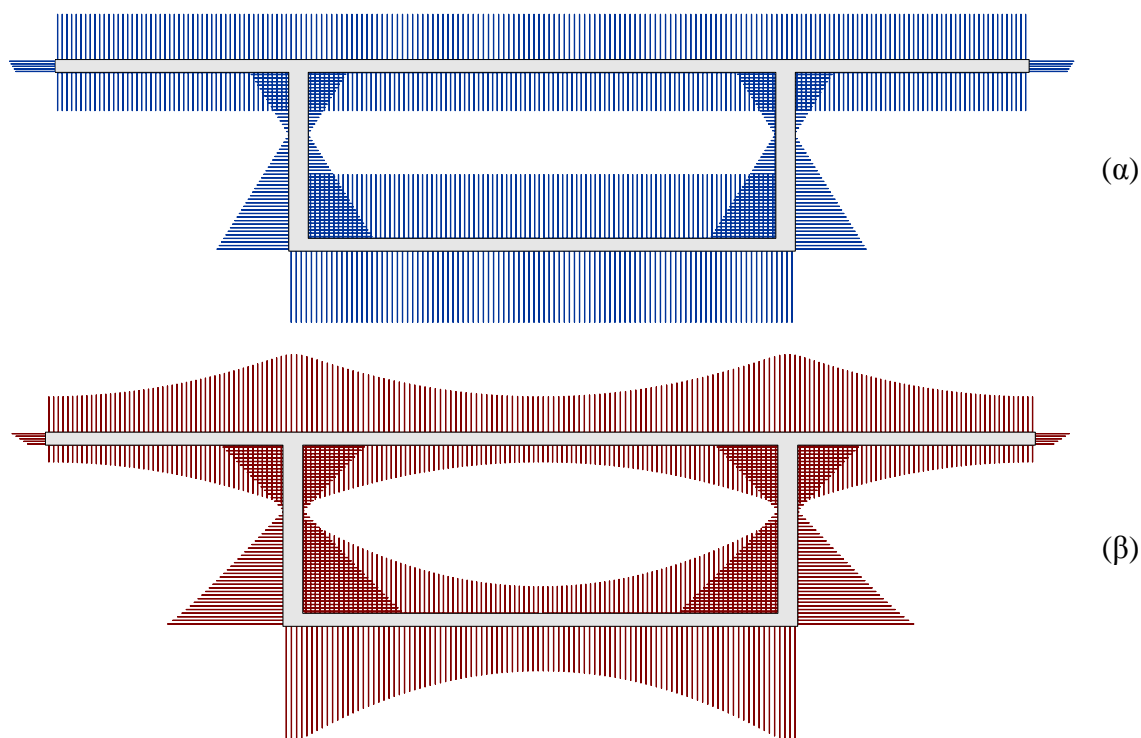
Αναφορικά με το μητρώο επικόμβιων φορτίσεων, θεωρώντας ότι η δοκός υποβάλλεται στο τυχόν συγκεντρωμένο ή κατανεμημένο αξονικό φορτίο $p_x = p_x(X)$ κατά μήκος του άξονα X , εγκάρσιο φορτίο $p_y = p_y(x)$ και $p_z = p_z(x)$ κατά μήκος των αξόνων y, z , αντίστοιχα, σε καμπτικές ροπές $m_Y = m_Y(x)$, $m_Z = m_Z(x)$ κατά μήκος των αξόνων Y, Z , αντίστοιχα καθώς και

σε ροπές διατμητικής στρέβλωσης (διρροπές) $m_{\phi_{CY}}^P = m_{\phi_{CY}}^P(x)$ και $m_{\phi_{CZ}}^P = m_{\phi_{CZ}}^P(x)$, ο υπολογισμός των στοιχείων του μητρώου (4.6.2) επιτυγχάνεται και πάλι από την επίλυση του συστήματος διαφορικών εξισώσεων (4.6.4) για κατάλληλες τιμές των συντελεστών $\alpha_{yi}, \alpha_{zi}, \beta_{yi}, \beta_{zi}$ και γ_{yi}, γ_{zi} ($i=1,2,3$) και πιο συγκεκριμένα για $\alpha_{y1} = \beta_{y1} = \gamma_{y1} = 1$, $\alpha_{z1} = \beta_{z1} = \gamma_{z1} = 1$ και $\alpha_{y2} = \alpha_{y3} = \beta_{y2} = \beta_{y3} = \gamma_{y2} = \gamma_{y3} = 0$, $\alpha_{z2} = \alpha_{z3} = \beta_{z2} = \beta_{z3} = \gamma_{z2} = \gamma_{z3} = 0$ στα άκρα του στοιχείου j ($x=0$) και k ($x=L$). Αξίζει να σημειωθεί ότι οι σχέσεις (13.6.5) αποτελούν τις πλέον γενικές γραμμικές συνοριακές συνθήκες που σχετίζονται με το πρόβλημα, συμπεριλαμβάνοντας την ελαστική στήριξη ή δέσμευση.

Κεφάλαιο 5 : Γενικευμένη Στρέβλωση

5.1. Εισαγωγή - Προκαταρκτικές έννοιες

Η ανάλυση ραβδωτών φορέων υπό κάμψη συναντάται συχνά στην καθημερινή πρακτική του μηχανικού. Στην πλειοψηφία των περιπτώσεων, για την ανάλυση των εν λόγω φορέων υιοθετούνται οι παραδοχές θεωρίας δοκού Euler-Bernoulli, ενώ όταν η διατμητική παραμόρφωση δεν είναι αμελητέα τότε χρησιμοποιείται η θεωρία δοκού που είναι γνωστή ως θεωρία Timoshenko (βλ. Κεφάλαιο 2). Ωστόσο και οι δύο αυτές θεωρίες υποθέτουν ότι οι διατομές παραμένουν επίπεδες μετά την παραμόρφωση.

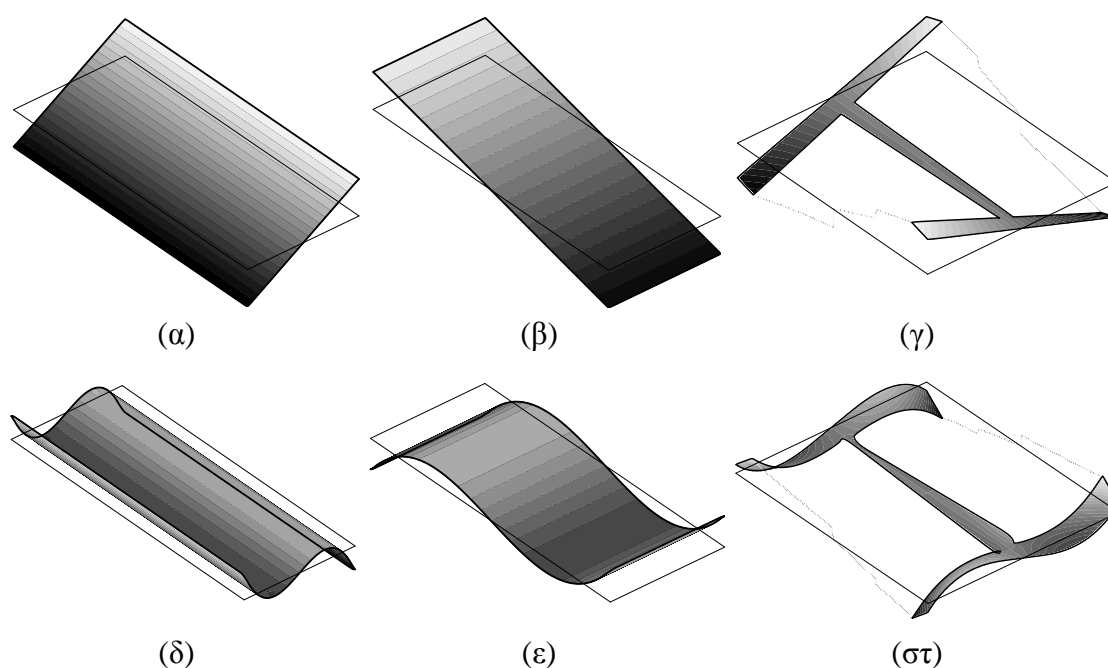


Σχ. 5.1. Κατανομή ορθών τάσεων $|\sigma_{xx}|$ κατά μήκος του συνόρου κιβωτιοειδούς διατομής στη θέση στήριξης ράβδου μορφής προβόλου υποβαλλόμενου σε ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο p_z σύμφωνα με την κλασική θεωρία δοκού (α) και λαμβάνοντας υπόψη την ανομοιόμορφη διάτμηση (β).

Διατηρώντας την παραδοχή αυτή η διατύπωση των εξισώσεων ισορροπίας παραμένει απλή. Παρόλα αυτά, δεν είναι δυνατό να ληφθεί υπόψη το φαινόμενο της «διατμητικής υστέρησης» (shear lag), το οποίο έχει παρατηρηθεί πριν από αρκετές δεκαετίες κυρίως σε κιβωτιοειδείς και πτυχωτούς φορείς (Reissner 1946, Malcolm and Redwood 1970, Moffatt and Dowling 1975). Το φαινόμενο της διατμητικής υστέρησης σχετίζεται με τη σημαντική τροποποίηση της κατανομής των ορθών τάσεων στην επιφάνεια της διατομής (Σχ. 5.1), η οποία ενδέχεται να αποκλίνει σημαντικά από τη γνωστή τριγωνική κατανομή που προσδιορίζεται από τις κλασικές θεωρίες κάμψης δοκών, ιδιαίτερα κοντά στις θέσεις σύνδεσης στοιχείων (π.χ. κορμός, πέλμα) της διατομής (Razaqpur and Li

1991). Το φαινόμενο αυτό προκαλείται από την ανομοιόμορφη κατανομή της διατμητικής στρέβλωσης (βλ. Κεφάλαιο 4, Dikaros and Sarountzakis 2014a).

Στα πλαίσια των σύγχρονων κανονισμών για κατασκευές Πολιτικού Μηχανικού, η σημασία του φαινομένου της διατμητικής υστέρησης σε καμπτόμενους φορείς έχει αναγνωρισθεί. Ωστόσο, στην προσπάθεια να απλοποιηθεί η ανάλυση, η επιρροή του ως άνω φαινομένου συνιστάται να λαμβάνεται υπόψη μέσω της θεώρησης του «συνεργαζόμενου πλάτους» (Eurocode 3 part 1.5, 2004, Eurocode 4 parts 1.1, 2 2004). Αυτή η απλοποιητική προσέγγιση, ενδέχεται να μην αποδίδει σωστά την πραγματική συμπεριφορά του φορέα, καθώς η επιρροή της διατμητικής υστέρησης εν γένει δεν είναι σταθερή κατά μήκος του ραβδόμορφου στοιχείου, ενώ εξαρτάται τόσο από τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της διατομής όσο και από τη μορφή της εξωτερικής φόρτισης (Ie and Kosmatka 1992).



Σχ. 5.2. Κατανομή ορθών τάσεων λόγω κάμψης (α,β), πρωτογενής στρεπτική στρέβλωση (γ), διατμητική στρέβλωση (δ,ε) και δευτερογενής στρεπτική στρέβλωση (στ).

Γενικεύοντας το πρόβλημα της ανάλυσης του φαινομένου της διατμητικής υστέρησης, όμοιες θεωρήσεις με αυτές που αφορούν την κάμψη δοκών μπορούν να υιοθετηθούν και στο πρόβλημα της στρέψης. Είναι γνωστό ότι ράβδος υποβαλλόμενη σε τυχόν στρεπτικό φορτίο υπό γενικές συνοριακές συνθήκες υπόκειται σε ανομοιόμορφη στρέψη (βλ. Κεφάλαιο 3, Vlasov 1963, Sarountzakis and Mokos 2003b) με άμεσο αποτέλεσμα την ανάπτυξη ορθών τάσεων εξαιτίας της παρεμπόδισης της (πρωτογενούς) στρεπτικής στρέβλωσης (Σχ. 15.2γ). Στην περίπτωση κατά την οποία οι δευτερογενείς διατμητικές παραμορφώσεις (ΔΔΠ) είναι σημαντικές, η επιρροή τους πρέπει να ληφθεί υπόψη στην ανάλυση (κατ' αναλογία με την θεωρία Timoshenko). Επίσης, σύμφωνα με όσα παρουσιάστηκαν στο Κεφάλαιο 4, η στρέβλωση λόγω δευτερογενών διατμητικών παραμορφώσεων (Σχ. 5.2στ) έχει αντίστοιχη επιρροή με το φαινόμενο της διατμητικής υστέρησης σε καμπτόμενη δοκό, δηλαδή τροποποιεί την αρχική κατανομή ορθών τάσεων. Αξίζει εδώ να σημειωθεί ότι λόγω της πολυπλοκότητας του προβλήματος της στρέψης, απλοποιητικές θεωρήσεις

όπως το συνεργαζόμενο πλάτος, δεν μπορούν να εφαρμοστούν για τον προσδιορισμό της συμπεριφοράς του φορέα.

Στην προσπάθεια διερεύνησης της επιρροής του φαινομένου της διατμητικής υστέρησης, η χρήση στοιχείων δοκού που βασίζονται στις λεγόμενες Θεωρίες Δοκού Ανώτερης Τάξης (Higher-Order Beam Theories) (El Fatmi and Ghazouani 2011), τα οποία λαμβάνουν υπόψη την ανομοιόμορφη κατανομή των στρεβλώσεων παρουσιάζει αυξημένο ενδιαφέρον λόγω των σημαντικών πλεονεκτημάτων που παρέχουν έναντι πιο πολύπλοκων προσομοιωμάτων (Tahan et. al. 1997, Katsikadelis and Sapountzakis 2002, Gupta et. al. 2010). Τα στοιχεία δοκού είναι πρακτικά στη χρήση τους, έχουν σημαντικά μικρότερες υπολογιστικές απαιτήσεις, ενώ βοηθούν στην καλύτερη κατανόηση και διερεύνηση των δομικών φαινομένων, τα οποία μπορούν να μελετηθούν ανεξάρτητα. Επιπρόσθετα, λόγω της εύκολης παραμετροποίησης όλων των απαραίτητων δεδομένων, τα στοιχεία δοκού είναι καταλληλότερα για παραμετρικές αναλύσεις από πολλές άλλες προσεγγίσεις, οι οποίες στις περισσότερες περιπτώσεις απαιτούν την κατασκευή πολλαπλών προσομοιωμάτων. Κατά τη διάρκεια των τελευταίων ετών, έχουν προταθεί διάφορες θεωρήσεις για την ανάλυση της ανομοιόμορφης στρέβλωσης σε πρισματικές ράβδους, οι περισσότερες εκ των οποίων βασίζονται στις παραδοχές των θεωριών λεπτότοιχων διατομών (Vlasov 1963). Στην πλειοψηφία των εργασιών αυτών, εξετάζονται συγκεκριμένες μορφές ομογενών ή σύμμικτων διατομών (κυρίως κιβωτιοειδούς μορφής), στις οποίες υιοθετούνται προκαθορισμένα πολυώνυμα για την περιγραφή της στρέβλωσης λόγω διάτμησης των πελμάτων τους, ενώ σε ορισμένες από τις εργασίες αυτές, η διατμητική παραμόρφωση των κορμών της διατομής αμελείται. Οι παραπάνω παραδοχές περιορίζουν το εύρος εφαρμογής των εργασιών αυτών καθώς τίθενται περιορισμοί αναφορικά με το σχήμα της διατομής και τη διεύθυνση της εξωτερικής φόρτισης. Επίσης σε ορισμένες εργασίες η στρεπτική συμπεριφορά του φορέα δεν εξετάζεται καθόλου, ενώ όπου αναλύεται, γίνεται χρήση της κλασικής θεωρίας ανομοιόμορφης στρέψης. Διατυπώσεις στοιχείων λεπτότοιχων ράβδων χωρίς την υιοθέτηση των παραπάνω απλοποιητικών παραδοχών έχουν παρουσιαστεί στις εργασίες (Hjelmstad 1987, Chang and Hijazi 1989, Koo and Cheung 1989, Laudiero and Savoia 1990, Koo and Wu 1992, Prokić 2002, Vieira et. al. 2013) με χρήση είτε αναλυτικών μεθόδων επίλυσης είτε της Μεθόδου Πεπερασμένων Στοιχείων (FEM). Από τις ανωτέρω ερευνητικές προσπάθειες μόνο αυτές των εργασιών (Chang and Hijazi 1989, Laudiero and Savoia 1990, Prokić 2002, Vieira et. al. 2013) λαμβάνουν υπόψη την επιρροή της διατμητικής υστέρησης στο πρόβλημα της στρέψης.

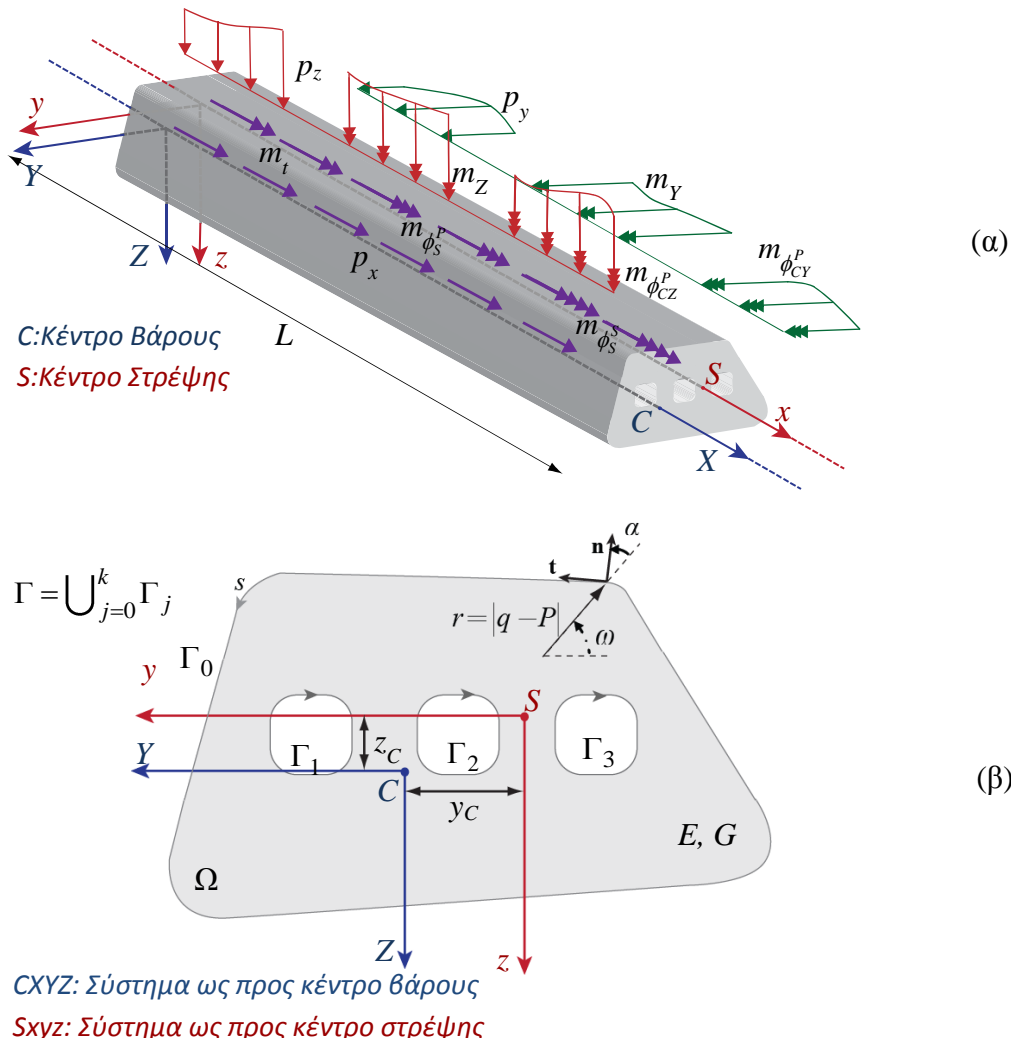
Από την ανασκόπηση της διεθνούς βιβλιογραφίας προκύπτει ότι σχετικά περιορισμένες είναι οι ερευνητικές εργασίες που έχουν δημοσιευθεί σχετικά με την εισαγωγή της ανομοιόμορφης στρέβλωσης στη στρεπτοκαμπτική ανάλυση δοκών χωρίς την υιοθέτηση των παραδοχών λεπτότοιχων διατομών. Οι Park et al. (1997) παρουσίασαν διατύπωση του προβλήματος για δοκούς τυχούσας διατομής υπό κάμψη και στρέψη βασισμένη στη Μέθοδο Πεπερασμένων Στοιχείων, αν και εμφάνισαν αποτελέσματα μόνο για λεπτότοιχες στρεπτόμενες δοκούς. Οι El Fatmi (2007a,b), El Fatmi and Ghazouani (2011) και Ghazouani and El Fatmi (2010, 2011) εξέτασαν το πρόβλημα St.Venant λαμβάνοντας υπόψη την ανομοιόμορφη διατμητική και στρεπτική στρέβλωση σε ομογενείς και σύμμικτες δοκούς τυχαίας διατομής, χωρίς να εξετάσουν την επιρροή της διατμητικής υστέρησης στην στρέψη. Οι Le Corvec and Filippou (2011) παρουσίασαν θεώρηση βασισμένη στη Μέθοδο Πεπερασμένων Στοιχείων για ελαστική και ελαστοπλαστική ανάλυση ράβδων τυχαίας διατομής, χρησιμοποιώντας βαθμούς ελευθερίας σε χαρακτηριστικά σημεία του χωρίου της διατομής προκειμένου να περιγράψουν τη στρέβλωση λόγω στρέψης και διάτμησης. Οι Ferradi et al. (2013) παρουσίασαν μελέτη βασισμένη στη Μέθοδο Πεπερασμένων Στοιχείων για

ομογενείς ράβδους τυχούσας διατομής χρησιμοποιώντας αριθμό συναρτήσεων στρέβλωσης για κάθε διεύθυνση. Πολύ πρόσφατα οι Genoese et al. (2013) δημοσίευσαν έρευνα που χρησιμοποιούν τη Μέθοδο Πεπερασμένων Στοιχείων βασισμένη σε μεικτή ενεργειακή αρχή. Παρόλα αυτά στην τελευταία αυτή εργασία η διατμητική υστέρηση λόγω στρέψης δεν λαμβάνεται υπόψη.

Στο παρόν κεφάλαιο, που αποτελεί επέκταση των προηγούμενων κεφαλαίων παρουσιάζεται η γενικευμένη ανάλυση ομογενών ράβδων τυχούσας διατομής (λεπτότοιχης ή χονδρότοιχης) λαμβάνοντας υπόψη την επιρροή της ανομοιόμορφης στρέβλωσης και των διατμητικών παραμορφώσεων (διατμητική υστέρηση από κάμψη και στρέψη). Η ράβδος υποβάλλεται σε συνδυασμό φορτίσεων που περιλαμβάνουν τυχαία κατανομημένο ή συγκεντρωμένο αξονικό φορτίο, εγκάρσιο φορτίο, καμπτικές ροπές, στρεπτικές ροπές και ροπές στρέβλωσης (διρροπές). Οι ανομοιόμορφες κατανομές της στρέβλωσης λαμβάνονται υπόψη χρησιμοποιώντας τέσσερις ανεξάρτητες παραμέτρους στρέβλωσης, οι οποίες πολλαπλασιάζουν δύο συναρτήσεις διατμητικής στρέβλωσης (μία σε κάθε διεύθυνση) (βλ. Κεφάλαιο 4) και δύο συναρτήσεις στρεπτικής στρέβλωσης, αντίστοιχα, που προσδιορίζονται λύνοντας αντίστοιχα προβλήματα συνοριακών τιμών. Αξίζει εδώ να αναφερθεί ότι το πεδίο τάσεων από την παραπάνω κινηματική υπόθεση οδηγεί σε παραβίαση της τοπικής εξίσωσης ισορροπίας κατά τη διαμήκη έννοια και της αντίστοιχης συνοριακής συνθήκης (Genoese et al. 2013) λόγω της ανακρίβειας που προκύπτει στις διατμητικές τάσεις (παρόμοια διαπίστωση έχει προκύψει αναφορικά με τη διόρθωση της κατανομής των δευτερογενών διατμητικών τάσεων στο κεφάλαιο 4). Με εξαίρεση την εργασία των Genoese et al. (2013), στις προαναφερθείσες ερευνητικές προσπάθειες της διεθνούς βιβλιογραφίας το πεδίο τάσεων πηγάζει απ' ευθείας από τις κινηματικές παραδοχές που έχουν χρησιμοποιηθεί χωρίς διόρθωση, ενώ στις εργασίες (Chang and Hijazi 1989, Ferradi et al. 2013) επιτυγχάνεται διόρθωση προσθέτοντας ανώτερες συναρτήσεις στρέβλωσης πολλαπλασιαζόμενες με αντίστοιχες ανεξάρτητες παραμέτρους στρέβλωσης. Παρόλο που η προσέγγιση αυτή συγκλίνει στην πραγματική λύση, ο αυξημένος αριθμός των βαθμών ελευθερίας οδηγεί σε πιο σύνθετη διατύπωση. Διαφορετικές προσεγγίσεις όπως αυτές που παρουσιάζονται στις εργασίες (Prokić 2002, Le Corvec and Filippou 2011) δεν απαιτούν αντίστοιχη διόρθωση, ωστόσο οδηγούν σε μεγάλο αριθμό αγνώστων στις καθολικές εξισώσεις ισορροπίας. Στο παρόν κεφάλαιο για να διατηρηθεί κατά το δυνατόν η απλότητα της θεώρησης, θα αποφευχθεί η επαύξηση των αγνώστων στις καθολικές εξισώσεις ισορροπίας και θα πραγματοποιηθεί διόρθωση του τασικού πεδίου με τη βοήθεια των τοπικών εξισώσεων ισορροπίας κατά το διαμήκη άξονα της δοκού. Θα διατυπωθούν δέκα προβλήματα συνοριακών τιμών ως προς τις μετατοπίσεις και στροφές του ραβδωτού στοιχείου καθώς και τις ανεξάρτητες παραμέτρους στρέβλωσης. Παρουσιάζονται πρόσθετες γεωμετρικές σταθερές, οι οποίες προκύπτουν λόγω στρέβλωσης.

Παραδοχές ελαστικής γενικευμένης ανάλυσης ράβδων με επιρροή στρέβλωσης και διατμητικών παραμορφώσεων

Οι παραδοχές που αφορούν τη γενικευμένη ανάλυση ράβδων με επιρροή στρέβλωσης και διατμητικών παραμορφώσεων είναι οι ίδιες με αυτές των προβλημάτων της ανομοιόμορφης διάτμησης (που παρουσιάστηκαν στο κεφάλαιο 4) και της ανομοιόμορφης στρέψης με επιρροή δευτερογενών στρεπτικών παραμορφώσεων, με μόνη διαφορά το τυχόν σχήμα της διατομής (δεν απαιτείται η ύπαρξη άξονα συμμετρίας).

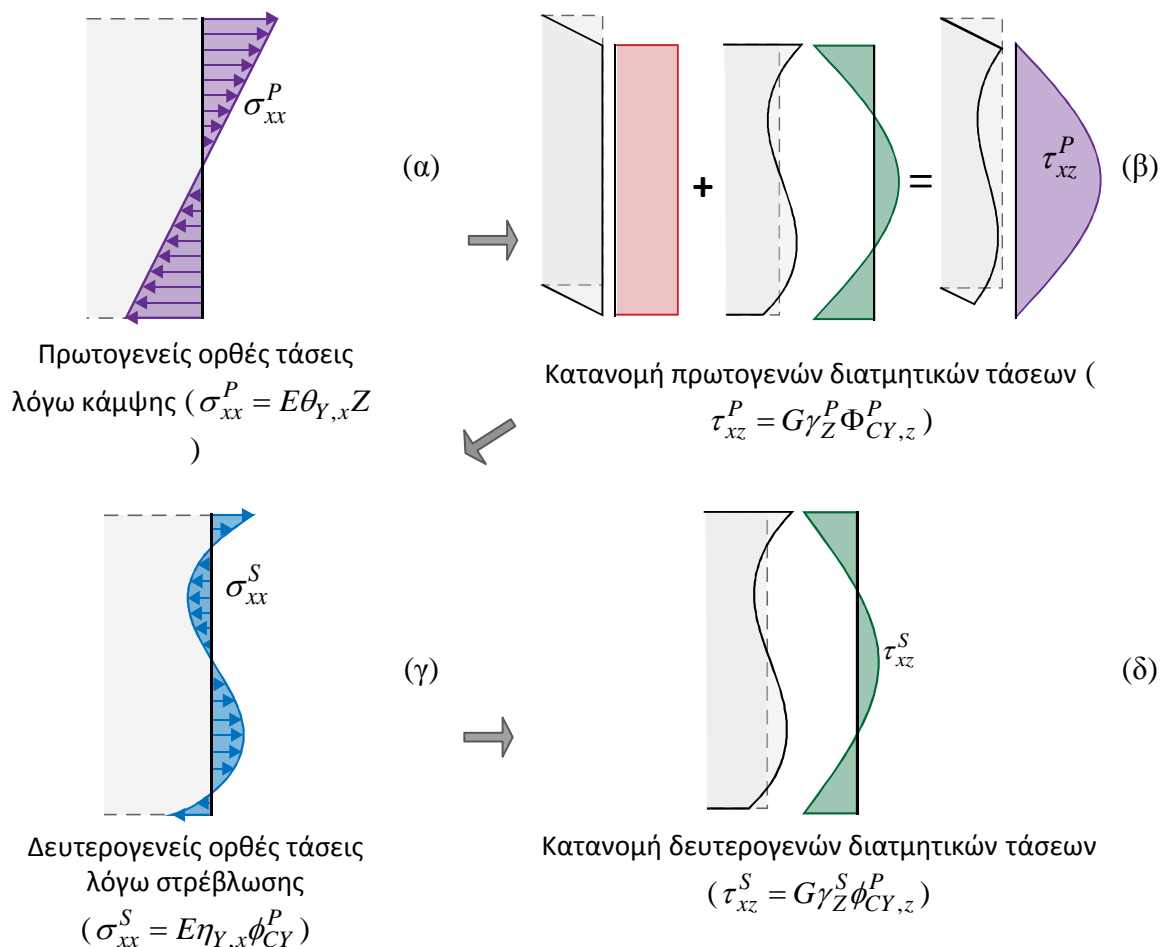


Σχ. 5.3. Πρισματική ράβδος υποβαλλόμενη σε αξονική-καμπτική-στρεπτική φόρτιση (α), τυχούσας ομογενούς διατομής που καταλαμβάνει το διδιάστατο χωρίο Ω (β).

5.2. Μετατοπίσεις, παραμορφώσεις, τάσεις

Θεωρείται πρισματική ράβδος μήκους L , διατομής τυχόντος σχήματος, η οποία καταλαμβάνει το διδιάστατο χωρίο Ω του επιπέδου yz (Σχ. 5.3), αποτελούμενη από ομογενές, ισότροπο και γραμμικά ελαστικό υλικό, με μέτρο ελαστικότητας E , μέτρο διάτμησης G και λόγο Poisson ν . Το σύνορο Γ του χωρίου Ω είναι τμηματικά λείο, δηλαδή μπορεί να περιλαμβάνει πεπερασμένο αριθμό γωνιών. Στο Σχ. 5.3 $CXYZ$ είναι το κύριο καμπτικό σύστημα αξόνων διερχόμενο από τα κέντρα βάρους C των διατομών, ενώ y_C, z_C είναι οι συντεταγμένες του κέντρου βάρους ως προς το σύστημα αξόνων $Sxyz$, το οποίο διέρχεται από τα κέντρα στρέψης (κέντρα διάτμησης εφόσον δεν επιβάλλεται κατασκευαστικά κάποιο άλλο κέντρο συστροφής) S με άξονες παράλληλους ως προς τους αντίστοιχους του $CXYZ$. Η δοκός υποβάλλεται σε συνδυασμό φορτίσεων από ανομοιόμορφα κατανεμημένο ή/και συγκεντρωμένο αξονικό φορτίο $p_x = p_x(X)$ κατά μήκος του άξονα X , εγκάρσιο φορτίο $p_y = p_y(x)$ και $p_z = p_z(x)$ κατά μήκος των αξόνων y, z , αντίστοιχα, στρεπτικές ροπές $m_t = m_t(x)$ κατά μήκος του άξονα x , καμπτικές ροπές $m_y = m_y(x)$, $m_z = m_z(x)$ κατά μήκος των αξόνων Y, Z , αντίστοιχα καθώς και ροπές

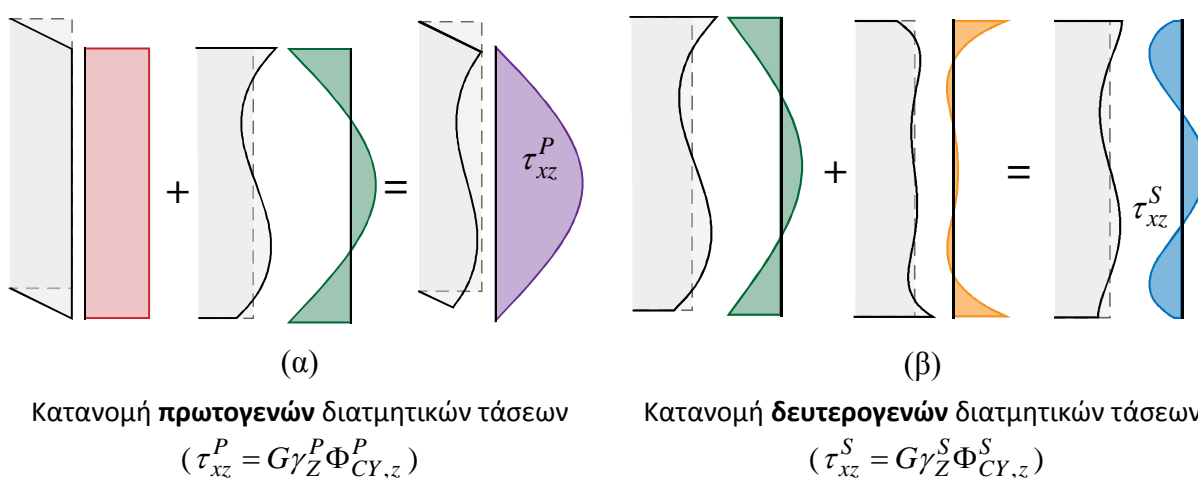
στρέβλωσης (διρροπές) $m_{\phi_S^P} = m_{\phi_S^P}(x)$, $m_{\phi_S^S} = m_{\phi_S^S}(x)$, $m_{\phi_{CY}^P} = m_{\phi_{CY}^P}(x)$ και $m_{\phi_{CZ}^P} = m_{\phi_{CZ}^P}(x)$ (Σχ. 5.3), οι οποίες θα ορισθούν αργότερα στην ενότητα 5.3.



Σχ. 5.4. Ακολουθία ανάπτυξης τάσεων σε δοκό ορθογωνικής διατομής υπό κάμψη, σύμφωνα με το προσομοίωμα A.

Υπό την επενέργεια της προαναφερθείσας τυχούσας φόρτισης και των πιθανών δεσμεύσεων, η ράβδος κάμπτεται ή/και στρέφεται. Αναφορικά με την **ανομοιόμορφη καμπτική** συμπεριφορά της ράβδου σημειώνονται τα ακόλουθα. Είναι γνωστό ότι η μεταβαλλόμενη καμπτική ροπή αναπαριστά τη μεταβολή των **πρωτογενών ορθών** τάσεων λόγω κάμψης (σ_{xx}^P) κατά μήκος του άξονα της ράβδου. Η εξισορρόπηση της προαναφερθείσας μεταβολής των ορθών τάσεων σε στοιχειώδες τμήμα ράβδου οδηγεί στην ανάπτυξη διατμητικών τάσεων σε οριζόντια τομή καθ' ύψος της διατομής (Σχ. 13.4). Λαμβάνοντας υπόψη το θεώρημα Cauchy συμπεραίνεται ότι αντίστοιχες διατμητικές τάσεις αναπτύσσονται στο επίπεδο της διατομής της ράβδου. Σε αντίθεση με την υπόθεση της θεωρίας δοκού Timoshenko, οι διατμητικές αυτές τάσεις έχουν ανομοιόμορφη κατανομή σε όλο το χωρίο της διατομής έτσι ώστε να ικανοποιείται η τοπική ισορροπία και η απαίτηση μηδενικού διανύσματος διατμητικής τάσης τ_{xn} στην παράπλευρη επιφάνεια της ράβδου (Σχ. 5.4β). Οι διατμητικές αυτές τάσεις στη συνέχεια θα καλούνται **πρωτογενείς** ή **διατμητικές** τάσεις κατά St.Venant (τ_{xz}^P, τ_{xy}^P) και οδηγούν τη διατομή σε στρέβλωση (Σχ. 5.4β). Επιπρόσθετα, λόγω της ανομοιόμορφης κατανομής αυτής της στρέβλωσης κατά μήκος της δοκού αναπτύσσεται

δευτερογενής κατανομή **ορθών** τάσεων σ_{xx}^S (Σχ. 5.4γ). Αυτή η επιπρόσθετη κατανομή των ορθών τάσεων είναι υπεύθυνη για το φαινόμενο της διατμητικής υστέρησης και λαμβάνεται υπόψη χρησιμοποιώντας ανεξάρτητη μεταβλητή στρέβλωσης, η οποία πολλαπλασιάζει τη συνάρτηση στρέβλωσης και η οποία εξαρτάται από τη γεωμετρία της διατομής (Dikaros and Sarountzakis 2014a). Η ανομοιόμορφη στρέβλωση έχει ως αποτέλεσμα την ανάπτυξη **δευτερογενών διατμητικών** τάσεων τ_{xz}^S, τ_{xy}^S (Σχ. 5.4δ), οι οποίες εξισορροπούν την κατανομή των σ_{xx}^S . Ωστόσο, από το Σχ. 5.4δ συμπεραίνεται κατ'αναλογία με τη θεωρία δοκού Timoshenko, ότι οι δευτερογενείς διατμητικές τάσεις που εμφανίζονται με τη χρήση της ανεξάρτητης παραμέτρου στρέβλωσης αδυνατούν να ικανοποιήσουν τη συνοριακή συνθήκη περί μηδενισμού του τ_{xz} στην παράπλευρη επιφάνεια της ράβδου. Στην ανάλυση που ακολουθεί, για να απαλειφθεί η προαναφερθείσα ασυνέπεια υιοθετείται τροποποιημένο πεδίο τάσεων με την πρόσθεση συνάρτησης στρέβλωσης προς 'διόρθωση' των τ_{xz}^S, τ_{xy}^S (Σχ. 5.5).

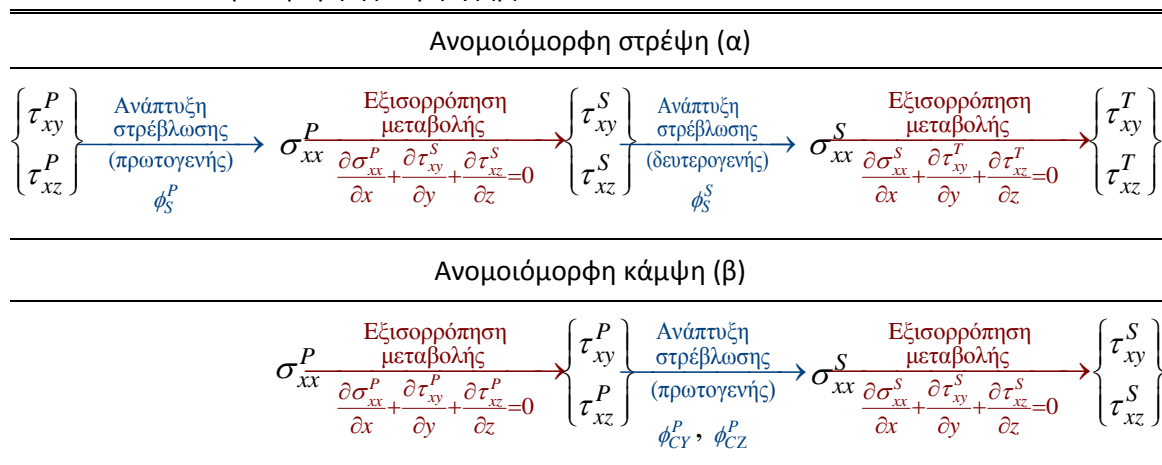


Σχ. 5.5. Κατανομή πρωτογενών (α) και δευτερογενών (β) διατμητικών τάσεων σε δοκό ορθογωνικής διατομής υπό κάμψη, σύμφωνα με το βελτιωμένο προσομοίωμα Β.

Αντίστοιχες παρατηρήσεις μπορούν να διατυπωθούν και για το πρόβλημα της **ανομοιόμορφης στρέψης** με δευτερογενείς διατμητικές παραμορφώσεις (ΔΔΠ) (Mokos and Sarountzakis 2011, Tsipiras and Sarountzakis 2014). Έτσι, στην ανάλυση που ακολουθεί, για να ληφθεί υπόψη και η στρεπτική διατμητική υστέρηση, λαμβάνεται υπόψη η κατανομή των ορθών τάσεων λόγω της δευτερογενούς στρεπτικής στρέβλωσης ϕ_S^S (Tsipiras and Sarountzakis 2014) (δευτερογενείς ορθές τάσεις λόγω στρέβλωσης σ_{xx}^S). Η κατανομή αυτή εξισορροπείται από τις τριτογενείς διατμητικές τάσεις τ_{xz}^T, τ_{xy}^T , οι οποίες όμοια με την ανάλυση της διατμητικής υστέρησης στην κάμψη, απαιτούν διόρθωση, η οποία επιτυγχάνεται με επιπρόσθετη συνάρτηση στρεπτικής στρέβλωσης.

Η ακολουθία ανάπτυξης τάσεων που περιγράφηκε στις δύο προηγούμενες παραγράφους παρουσιάζεται σχηματικά στον Πίνακα 5.1, τόσο για το πρόβλημα της ανομοιόμορφης στρέψης όσο και για αυτό της ανομοιόμορφης κάμψης.

Πίνακας 5.1. Ακολουθία ανάπτυξης τάσεων στο πρόβλημα ανομοιόμορφης στρέψης (α) και ανομοιόμορφης κάμψης (β).



Ακολουθώντας τις προαναφερθείσες παρατηρήσεις και πραγματοποιώντας ανάλυση ως προς το σύστημα $Sxyz$, οι μετατοπίσεις τυχόντος σημείου της ράβδου δίνονται ως

$$\bar{u}(x, y, z) = \bar{u}^P(x, y, z) + \bar{u}^S(x, y, z) = \underbrace{u(x) + \theta_Y(x)Z - \theta_Z(x)Y + \eta_x(x)\phi_S^P(y, z)}_{\text{πρωτογενής}} + \underbrace{\eta_Y(x)\phi_{CY}^P(y, z) + \eta_Z(x)\phi_{CZ}^P(y, z) + \xi_x(x)\phi_S^S(y, z)}_{\text{δευτερογενής}} \quad (5.2.1\alpha)$$

$$\bar{v}(x, y, z) = v(x) - z\theta_x(x) \quad (5.2.1\beta)$$

$$\bar{w}(x, y, z) = w(x) + y\theta_x(x) \quad (5.2.1\gamma)$$

όπου \bar{u} , \bar{v} , \bar{w} είναι οι αξονικές και εγκάρσιες μετατοπίσεις ως προς το σύστημα αξόνων $Sxyz$, ενώ με \bar{u}^P , \bar{u}^S συμβολίζονται οι πρωτογενείς και δευτερογενείς αξονικές μετατοπίσεις της διατομής, αντίστοιχα. Επιπλέον, οι συναρτήσεις $v(x)$, $w(x)$ περιγράφουν τη μετατόπιση του κέντρου στρέψης S , ενώ η $u(x)$ υποδηλώνει τη ‘μέση’ αξονική μετατόπιση της διατομής. Οι συναρτήσεις $\theta_Y(x)$, $\theta_Z(x)$ είναι οι γωνίες στροφής λόγω κάμψης περί τους κεντροβαρικούς άξονες Y , Z , αντίστοιχα. Οι μεταβλητές $\eta_x(x)$, $\xi_x(x)$ είναι οι ανεξάρτητες παράμετροι στρέβλωσης που εισήχθησαν για την περιγραφή της ανομοιόμορφης κατανομής πρωτογενούς και δευτερογενούς στρεπτικής στρέβλωσης, αντίστοιχα, ενώ οι $\eta_Y(x)$, $\eta_Z(x)$ για την περιγραφή της ανομοιόμορφης κατανομής πρωτογενούς διατμητικής στρέβλωσης κατά την κάμψη περί τους άξονες Y , Z , αντίστοιχα (Κεφάλαιο 4, Dikaros and Sapountzakis 2014a). $\phi_S^P(y, z)$, $\phi_S^S(y, z)$ είναι η πρωτογενής και δευτερογενής συνάρτηση στρεπτικής στρέβλωσης ως προς το κέντρο στρέψης S (Κεφάλαιο 3), ενώ $\phi_{CY}^P(y, z)$, $\phi_{CZ}^P(y, z)$ είναι οι πρωτογενείς συναρτήσεις διατμητικής στρέβλωσης ως προς το κέντρο βάρους της διατομής C (Κεφάλαιο 4). Τέλος, ισχύει $Z = z - z_C$, $Y = y - y_C$.

Με τη βοήθεια του πεδίου μετατοπίσεων που περιγράφεται από τις σχέσεις (5.2.1), εφαρμόζοντας τις σχέσεις παραμορφώσεων-μετατοπίσεων της τρισδιάστατης θεωρίας ελαστικότητας για μικρές μετατοπίσεις και το νόμο τάσεων-παραμορφώσεων του Hooke, οι συνιστώσες του τανυστή τάσεων Cauchy στο χωρίο Ω προκύπτουν ως

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= E\varepsilon_{xx} = E(\bar{u}_{,x}^P + \bar{u}_{,x}^S) = \\ &= \underbrace{E(u_{,x} + \theta_{Y,x}Z - \theta_{Z,x}Y + \eta_{x,x}\phi_S^P)}_{\text{πρωτογενής}} + \underbrace{E[\eta_{Y,x}\phi_{CY}^P + \eta_{Z,x}\phi_{CZ}^P + \xi_{x,x}\phi_S^S]}_{\text{δευτερογενής}} \end{aligned} \quad (5.2.2\alpha)$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} = G(\bar{v}_{,x} + \bar{u}_{,y}) = \\ &= G \left[\underbrace{\gamma_Z^P (Z_{,y} + \phi_{CY,y}^P) + \gamma_Y^P (Y_{,y} + \phi_{CZ,y}^P) + \gamma_x^P (-z + \phi_{S,y}^P)}_{\text{πρωτογενής}} \right] + \\ &+ G \left[\underbrace{\gamma_Z^S \phi_{CY,y}^P + \gamma_Y^S \phi_{CZ,y}^P + \gamma_x^S (\phi_{S,y}^P + \phi_{S,y}^S)}_{\text{δευτερογενής}} \right] + \underbrace{G\gamma_x^T \phi_{S,y}^S}_{\text{τριτογενής}} \end{aligned} \quad (5.2.2\beta)$$

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= G\gamma_{xz} = G(\bar{w}_{,x} + \bar{u}_{,z}) = \\ &= G \left[\underbrace{\gamma_Z^P (Z_{,z} + \phi_{CY,z}^P) + \gamma_Y^P (Y_{,z} + \phi_{CZ,z}^P) + \gamma_x^P (y + \phi_{S,z}^P)}_{\text{πρωτογενής}} \right] + \\ &+ G \left[\underbrace{\gamma_Z^S \phi_{CY,z}^P + \gamma_Y^S \phi_{CZ,z}^P + \gamma_x^S (\phi_{S,z}^P + \phi_{S,z}^S)}_{\text{δευτερογενής}} \right] + \underbrace{G\gamma_x^T \phi_{S,z}^S}_{\text{τριτογενής}} \end{aligned} \quad (5.2.2\gamma)$$

όπου με $(\cdot)_{,i}$ υποδηλώνεται η παραγωγή ως προς i ενώ $\gamma_Z^P = w_{,x} + \theta_Y$, $\gamma_Y^P = v_{,x} - \theta_Z$, $\gamma_x^P = \theta_{x,x}$, $\gamma_Z^S = \eta_Y - w_{,x} - \theta_Y$, $\gamma_Y^S = \eta_Z - v_{,x} + \theta_Z$, $\gamma_x^S = \eta_x - \theta_{x,x}$ και $\gamma_x^T = \xi_x - \eta_x + \theta_{x,x}$ είναι οι “μέσες” ανηγμένες διατμητικές παραμορφώσεις. Στις εξισώσεις (5.2.2β,γ) οι όροι των πρωτογενών διατμητικών τάσεων αποτελούν τις διατμητικές τάσεις κατά St. Venant (τ_{xz}^P , τ_{xy}^P) (El Fatmi and Ghazouani 2011), ενώ οι υπόλοιποι όροι αποτελούν τις διατμητικές τάσεις λόγω στρέβλωσης (τ_{xz}^S , τ_{xy}^S , τ_{xz}^T , τ_{xy}^T) που προκύπτουν από τη χρήση των ανεξάρτητων παραμέτρων στρέβλωσης. Οι ανωτέρω τάσεις (5.2.2) μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη μόνωση των καθολικών εξισώσεων ισορροπίας. Ωστόσο, όπως αναφέρεται και ανωτέρω, πρέπει να δοθεί προσοχή στους όρους $G\gamma_Z^S \phi_{CY,i}^P$, $G\gamma_Y^S \phi_{CZ,i}^P$, $G\gamma_x^T \phi_{S,i}^S$ ($i = y, z$) καθόσον δεν δύνανται να αντιπροσωπεύσουν μία αποδεκτή κατανομή διατμητικών τάσεων και οδηγούν σε παραβίαση των τοπικών εξισώσεων ισορροπίας κατά μήκος του άξονα και της απαίτησης μηδενικών διατμητικών τάσεων στην παράπλευρη επιφάνεια της δοκού (Σχ.15.4δ). Η παρατήρηση αυτή είναι ανάλογη με τις αντίστοιχες παρατηρήσεις στη θεωρία δοκού Timoshenko και στη θεωρία ανομοιομορφής στρέψης με ΔΔΠ. Συνεπώς, ενδέχεται να προκύψουν σημαντικές αποκλίσεις στις υπολογισθείσες τάσεις κοντά στις στηρίξεις ή σε συγκεντρωμένα φορτία (Mokos and Sarountzakis 2011, Tspiras and Sarountzakis 2014, Ferradi et al. 2013). Όπως αναφέρθηκε και στην εισαγωγή, σε πολλές εργασίες της διεθνούς βιβλιογραφίας οι παραπάνω όροι χρησιμοποιούνται χωρίς διόρθωση (El

Fatmi and Ghazouani 2011, Laudiero and Savoia 1990). Στην ανάλυση που ακολουθεί, παρουσιάζεται διόρθωση των τάσεων χωρίς να αυξάνεται ο αριθμός των καθολικών κινηματικών αγνώστων. Έτσι, εισάγονται τρεις πρόσθετες συναρτήσεις στρέβλωσης $\phi_{CY}^S(y, z)$, $\phi_{CZ}^S(y, z)$, $\phi_S^T(y, z)$ στις σχέσεις (5.2β,γ) και οι συνιστώσες του τανυστή τάσεων Cauchy στο χωρίο Ω τροποποιούνται ως

$$\sigma_{xx} = E \underbrace{\left(u_{,x} + Z\theta_{Y,x} - Y\theta_{Z,x} + \eta_{x,x}\phi_S^P \right)}_{\text{πρωτογενής}} + E \underbrace{\left[\eta_{Y,x}\phi_{CY}^P + \eta_{Z,x}\phi_{CZ}^P + \xi_{x,x}\phi_S^S \right]}_{\text{δευτερογενής}} \quad (5.2.3\alpha)$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy} = & G \underbrace{\left\{ \gamma_Z^P \Phi_{CY,y}^P + \gamma_Y^P \Phi_{CZ,y}^P + \gamma_x^P \left(-z + \phi_{S,y}^P \right) \right\}}_{\text{πρωτογενής}} + \\ & + G \underbrace{\left(\gamma_Z^S \Phi_{CY,y}^S + \gamma_Y^S \Phi_{CZ,y}^S + \gamma_x^S \Phi_{S,y}^S \right)}_{\text{δευτερογενής}} + \underbrace{G \gamma_x^T \Phi_{S,y}^T}_{\text{τριτογενής}} \end{aligned} \quad (5.2.3\beta)$$

$$\begin{aligned} (\tau_{xz}) = & G \underbrace{\left[\gamma_Z^P \Phi_{CY,z}^P + \gamma_Y^P \Phi_{CZ,z}^P + \gamma_x^P \left(y + \phi_{S,z}^P \right) \right]}_{\text{πρωτογενής}} + \\ & + G \underbrace{\left(\gamma_Z^S \Phi_{CY,z}^S + \gamma_Y^S \Phi_{CZ,z}^S + \gamma_x^S \Phi_{S,z}^S \right)}_{\text{τριτογενής}} + \underbrace{G \gamma_x^T \Phi_{S,z}^T}_{\text{τριτογενής}} \end{aligned} \quad (5.2.3\gamma)$$

όπου

$$\Phi_{CY}^P = Z + \phi_{CY}^P \quad \Phi_{CY}^S = \phi_{CY}^P + \phi_{CY}^S \quad (5.2.4\alpha,\beta)$$

$$\Phi_{CZ}^P = Y + \phi_{CZ}^P \quad \Phi_{CZ}^S = \phi_{CZ}^P + \phi_{CZ}^S \quad (5.2.4\gamma,\delta)$$

$$\Phi_S^S = \phi_S^P + \phi_S^S \quad \Phi_S^T = \phi_S^S + \phi_S^T \quad (5.2.4\epsilon,\sigma\tau)$$

Οι συναρτήσεις στρέβλωσης (5.2.4), για τις οποίες θα γίνει λόγος σε επόμενη ενότητα, μπορούν να καθοριστούν διατυπώνοντας προβλήματα συνοριακών τιμών εκμεταλλευόμενοι την τοπική εξίσωση ισορροπίας κατά τη διαμήκη έννοια και την αντίστοιχη συνοριακή συνθήκη. Όμοια διόρθωση έχει παρουσιαστεί στην εργασία των Genoese et al. (2013), στην οποία όμως συμπεριλαμβάνεται μόνο η πρωτογενής στρέβλωση στο πρόβλημα στρέψης. Στη συνέχεια του κεφαλαίου γίνεται διάκριση αναφορικά με το ποιό παραμορφωσιακό και τασικό πεδίο χρησιμοποιείται για την εξαγωγή των καθολικών εξισώσεων ισορροπίας. Η διατύπωση που χρησιμοποιεί τις συνιστώσες του τανυστή τάσεων (5.2.2) (οι οποίες πηγάζουν απευθείας από τις κινηματικές παραδοχές) θα αναφέρεται ως **προσομοίωμα A** (Σχ.5.4), ενώ η διατύπωση που αναφέρεται στις διορθωμένες συνιστώσες του τανυστή τάσεων (5.2.3) θα αναφέρεται ως **προσομοίωμα B** (Σχ.5.5).

5.3.Καθολικές εξισώσεις ισορροπίας

Για να διατυπωθούν οι διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας του προσομοιώματος Β, χρησιμοποιείται η Αρχή Δυνατών Έργων

$$\delta W_{\text{int}} = \delta W_{\text{ext}} \quad (5.3.1)$$

όπου

$$\delta W_{\text{int}} = \int_V (\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) dV \quad (5.3.2\alpha)$$

$$\delta W_{\text{ext}} = \int_{\text{Lat}} (t_x \delta \bar{u} + t_y \delta \bar{v} + t_z \delta \bar{w}) dF \quad (5.3.2\beta)$$

Στις ανωτέρω εξισώσεις, το $\delta(\cdot)$ υποδηλώνει δυνατές ποσότητες, t_x, t_y, t_z είναι οι συνιστώσες του διανύσματος τάσεως που ασκούνται στην παράπλευρη επιφάνεια F της ράβδου συμπεριλαμβανομένων των ακραίων διατομών, ενώ με V υποδηλώνεται ο όγκος της δοκού. Επιπλέον, τα εντατικά μεγέθη της δοκού (Σχ.5.6) μπορούν να οριστούν ως

$$N = \int_{\Omega} \sigma_{xx} d\Omega \quad (5.3.3\alpha)$$

$$M_Y = \int_{\Omega} \sigma_{xx} Z d\Omega \quad M_Z = - \int_{\Omega} \sigma_{xx} Y d\Omega \quad (5.3.3\beta, \gamma)$$

$$M_{\phi_S^P} = \int_{\Omega} \sigma_{xx} \phi_S^P d\Omega \quad M_{\phi_S^S} = \int_{\Omega} \sigma_{xx} \phi_S^S d\Omega \quad (5.3.3\delta, \epsilon)$$

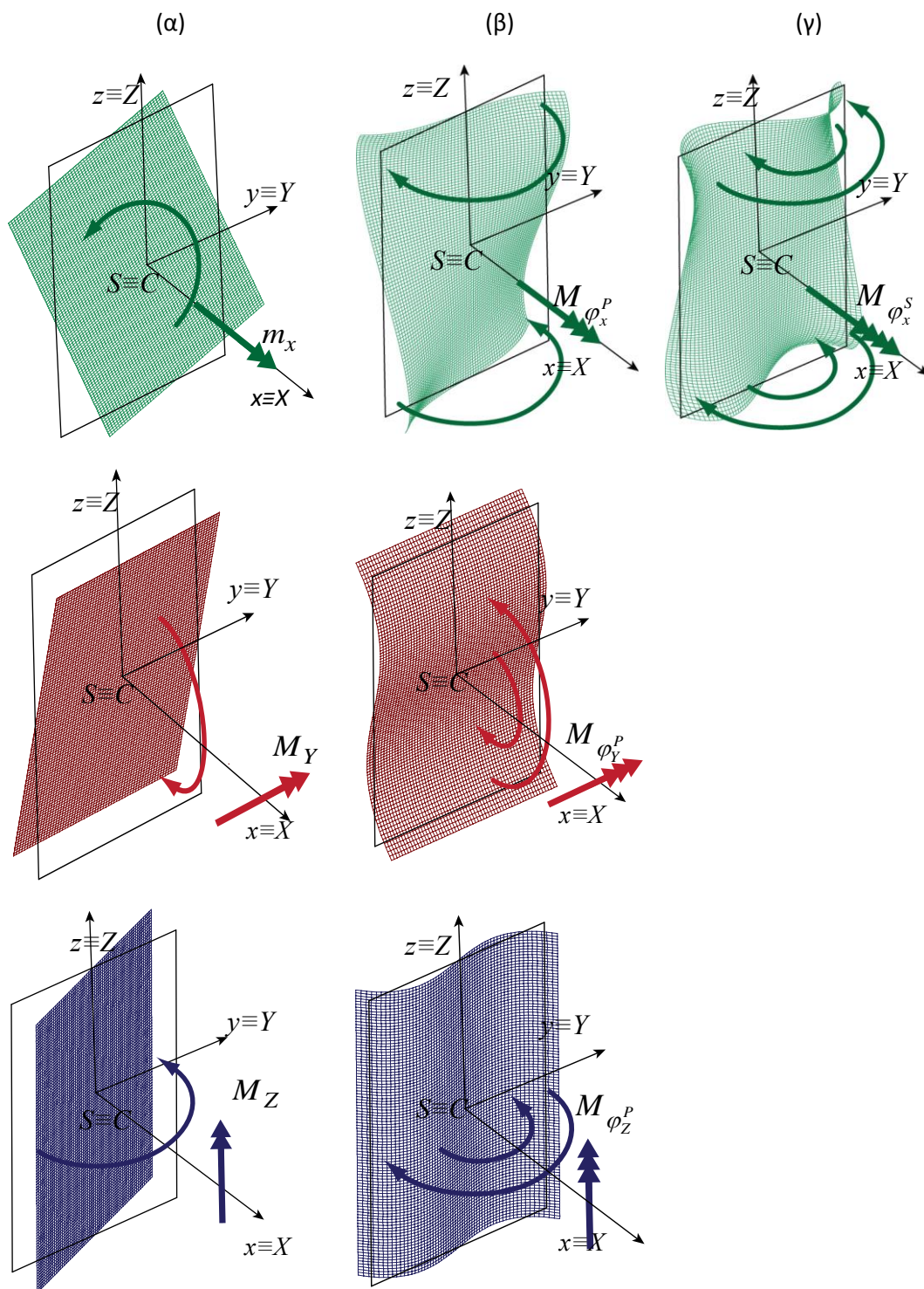
$$M_{\phi_{CY}^P} = \int_{\Omega} \sigma_{xx} \phi_{CY}^P d\Omega \quad M_{\phi_{CZ}^P} = \int_{\Omega} \sigma_{xx} \phi_{CZ}^P d\Omega \quad (5.3.3\sigma, \zeta)$$

$$Q_y^P = \int_{\Omega} (\tau_{xy} \Phi_{CZ,y}^P + \tau_{xz} \Phi_{CZ,z}^P) d\Omega \quad Q_y^S = - \int_{\Omega} (\tau_{xy} \Phi_{CZ,y}^S + \tau_{xz} \Phi_{CZ,z}^S) d\Omega \quad (5.3.3\eta, \theta)$$

$$Q_z^P = \int_{\Omega} (\tau_{xy} \Phi_{CY,y}^P + \tau_{xz} \Phi_{CY,z}^P) d\Omega \quad Q_z^S = - \int_{\Omega} (\tau_{xy} \Phi_{CY,y}^S + \tau_{xz} \Phi_{CY,z}^S) d\Omega \quad (5.3.3\iota, \kappa)$$

$$M_t^P = \int_{\Omega} [\tau_{xy} (\phi_{S,y}^P - z) + \tau_{xz} (\phi_{S,z}^P + y)] d\Omega \quad (5.3.3\lambda)$$

$$M_t^S = - \int_{\Omega} (\tau_{xy} \Phi_{S,y}^S + \tau_{xz} \Phi_{S,z}^S) d\Omega \quad M_t^T = \int_{\Omega} (\tau_{xy} \Phi_{S,y}^T + \tau_{xz} \Phi_{S,z}^T) d\Omega \quad (5.3.3\mu, \nu)$$



Σχ.5.6. Θετικές στροφές ορθογωνικής διατομής και αντίστοιχα θετικά διανύσματα ροπών (α). Πρωτογενείς στρεβλώσεις ορθογωνικής διατομής και αντίστοιχα θετικά διανύσματα πρωτογενών ροπών στρέβλωσης (β) Δευτερογενής στρέβλωση ορθογωνικής διατομής και αντίστοιχο θετικό διάνυσμα δευτερογενούς ροπής στρέβλωσης (γ).

όπου M_i ($i = Y, Z$) είναι οι καμπτικές ροπές, M_i ($i = \phi_S^P, \phi_{CY}^P, \phi_{CZ}^P, \phi_S^S$) είναι οι ροπές στρέβλωσης (διρροπές), ενώ οι όροι Q_i^j ($i = y, z$, $j = P, S$) υποδηλώνουν το πρωτογενές και δευτερογενές τμήμα των τεμνουσών δυνάμεων Q_i ($i = y, z$). Σημειώνεται, ότι οι δευτερογενείς τέμνουσες δυνάμεις συχνά στη βιβλιογραφία αναφέρονται και ως δι-τέμνουσες (*bishear stress resultants*), καθώς εξισορροπούν τις διρροπές. Όμοια, οι όροι M_t^j ($j = P, S, T$) αφορούν το πρωτογενές, δευτερογενές και τριτογενές τμήμα, αντίστοιχα, της στρεπτικής ροπής M_t . Επιπλέον, οι γεωμετρικές σταθερές της ράβδου μπορούν να προκύψουν από τις παρακάτω σχέσεις (Dikaros and Sapountzakis 2014b,c, Park et al. 1997, Ferradi et al. 2013)

$$A = \int_{\Omega} d\Omega \quad S_Y = \int_{\Omega} Z d\Omega \quad S_Z = \int_{\Omega} Y d\Omega \quad (5.3.4\alpha, \beta, \gamma)$$

$$I_{YY} = \int_{\Omega} Z^2 d\Omega \quad I_{ZZ} = \int_{\Omega} Y^2 d\Omega \quad I_{YZ} = \int_{\Omega} YZ d\Omega \quad (5.3.4\delta, \epsilon, \sigma\tau)$$

$$S_i = \int_{\Omega} (i) d\Omega, \quad i = \phi_S^P, \phi_{CY}^P, \phi_{CZ}^P, \phi_S^S \quad (5.3.4\zeta)$$

$$I_{ij} = \int_{\Omega} (i)(j) d\Omega, \quad i, j = y, z, \phi_S^P, \phi_{CY}^P, \phi_{CZ}^P, \phi_S^S \quad (5.3.4\eta)$$

$$D_{ij} = \int_{\Omega} [\nabla(i) \cdot \nabla(j)] d\Omega, \quad i, j = \Phi_S^S, \Phi_{CY}^P, \Phi_{CY}^S, \Phi_{CZ}^P, \Phi_{CZ}^S, \Phi_S^T \quad (5.3.4\theta)$$

$$I_t^P = \int_{\Omega} (y^2 + z^2 - z\phi_{S,y}^P + y\phi_{S,z}^P) d\Omega \quad (5.3.4\iota)$$

όπου $\nabla \equiv (\cdot)_{,y} \mathbf{i}_y + (\cdot)_{,z} \mathbf{i}_z$ είναι ο τελεστής κλίσης και $\mathbf{i}_y, \mathbf{i}_z$ τα μοναδιαία διανύσματα κατά μήκος των αξόνων y, z , αντίστοιχα. Οι σταθερές $I_{\phi_{CY}^P \phi_{CY}^P}$ ($i = Y, Z$) αποτελούν τις σταθερές διατμητικής στρέβλωσης (βλ. κεφάλαιο 4), ενώ οι σταθερές $I_{\phi_S^P \phi_S^P}, I_{\phi_S^S \phi_S^S}$ αποτελούν τις σταθερές πρωτογενούς και δευτερογενούς στρεπτικής στρέβλωσης, αντίστοιχα. Αξίζει εδώ να σημειωθεί ότι η σταθερά $I_{\phi_S^P \phi_S^P}$ ταυτίζεται με τη σταθερά στρέβλωσης C_S της κλασικής θεωρίας ανομοιόμορφης στρέψης (βλ. κεφάλαιο 3). Με τη βοήθεια των σχέσεων (5.3.4), έχοντας υπόψη ότι $CXYZ$ είναι το κύριο κεντροβαρικό καμπτικό σύστημα αξόνων, ότι S είναι το κέντρο στρέψης της διατομής και εκμεταλλευόμενοι τις συνθήκες ορθογωνικότητας των συναρτήσεων στρέβλωσης (οι οποίες θα αναφερθούν στην ενότητα 5.4) προκύπτουν οι παρακάτω σχέσεις

$$S_Y = S_Z = S_{\phi_S^P} = S_{\phi_{CY}^P} = S_{\phi_{CZ}^P} = S_{\phi_S^S} = 0 \quad (5.3.5\alpha)$$

$$I_{YZ} = I_{Y\phi_{CZ}^P} = I_{Z\phi_{CY}^P} = I_{Y\phi_S^P} = I_{Z\phi_S^P} = I_{Y\phi_S^S} = I_{Z\phi_S^S} = I_{\phi_S^P \phi_S^S} = 0 \quad (5.3.5\beta)$$

$$D_{\Phi_{CY}^P \Phi_{CY}^S} = D_{\Phi_{CZ}^P \Phi_{CZ}^S} = D_{\Phi_S^S \Phi_S^T} = 0 \quad (5.3.5\gamma)$$

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (5.2.3), (5.3.3), (5.3.4) και (5.3.5), οι εκφράσεις των εντατικών μεγεθών μπορούν να γραφούν συναρτήσει των κινηματικών μεγεθών ως

$$N = EAu_{,x} \quad M_Y = EI_{YY}\theta_{Y,x} \quad M_Z = EI_{ZZ}\theta_{Z,x} \quad (5.3.6\alpha, \beta, \gamma)$$

$$M_{\phi_S^P} = E \left(I_{\phi_S^P \phi_S^P} \eta_{x,x} + I_{\phi_{CY}^P \phi_S^P} \eta_{Y,x} + I_{\phi_{CZ}^P \phi_S^P} \eta_{Z,x} \right) \quad (5.3.6\gamma)$$

$$M_{\phi_S^S} = E \left(I_{\phi_{CY}^P \phi_S^S} \eta_{Y,x} + I_{\phi_{CZ}^P \phi_S^S} \eta_{Z,x} + I_{\phi_S^S \phi_S^S} \xi_{x,x} \right) \quad (5.3.6\delta)$$

$$M_{\phi_{CY}^P} = E \left(I_{\phi_{CY}^P \phi_S^P} \eta_{x,x} + I_{\phi_{CY}^P \phi_{CY}^P} \eta_{Y,x} + I_{\phi_{CY}^P \phi_S^S} \xi_{x,x} \right) \quad (5.3.6\epsilon)$$

$$M_{\phi_{CZ}^P} = E \left(I_{\phi_{CZ}^P \phi_S^P} \eta_{x,x} + I_{\phi_{CZ}^P \phi_{CZ}^P} \eta_{Z,x} + I_{\phi_{CZ}^P \phi_S^S} \xi_{x,x} \right) \quad (5.3.6\sigma\tau)$$

$$Q_y^P = GD_{\Phi_{CZ}^P \Phi_{CY}^P} \gamma_Y^P \quad (5.3.6\zeta)$$

$$Q_y^S = -G \left(D_{\Phi_{CZ}^S \Phi_{CZ}^S} \gamma_Y^S + D_{\Phi_{CZ}^S \Phi_S^S} \gamma_x^S + D_{\Phi_{CZ}^S \Phi_S^T} \gamma_x^T \right) \quad (5.3.6\eta)$$

$$Q_z^P = GD_{\Phi_{CY}^P \Phi_{CZ}^P} \gamma_Z^P \quad (5.3.6\theta)$$

$$Q_z^S = -G \left(D_{\Phi_{CY}^S \Phi_{CY}^S} \gamma_Z^S + D_{\Phi_{CY}^S \Phi_S^S} \gamma_x^S + D_{\Phi_{CY}^S \Phi_S^T} \gamma_x^T \right) \quad (5.3.6\iota)$$

$$M_t^P = GI_t^P \gamma_x^P = GI_t^P \theta_{x,x} \quad (5.3.6\kappa)$$

$$M_t^S = -G \left(D_{\Phi_S^S \Phi_S^S} \gamma_x^S + D_{\Phi_{CZ}^S \Phi_S^S} \gamma_Y^S + D_{\Phi_{CY}^S \Phi_S^S} \gamma_Z^S \right) \quad (5.3.6\lambda)$$

$$M_t^T = G \left(D_{\Phi_S^T \Phi_S^T} \gamma_x^T + D_{\Phi_{CZ}^S \Phi_S^T} \gamma_Y^S + D_{\Phi_{CY}^S \Phi_S^T} \gamma_Z^S \right) \quad (5.3.6\mu)$$

Σημειώνεται εδώ ότι για την εξαγωγή των εξισώσεων (5.3.6), εκτός των σχέσεων (5.3.5) έχει υιοθετηθεί πρόσθετη απλοποίηση, η οποία αφορά την απαλοιφή όλων των συζευγμένων όρων λόγω κάμψης, ακολουθώντας την ανάλυση που παρουσιάζεται στην εργασία (Dong et al. 2013), σύμφωνα με την οποία το κύριο καμπτικό σύστημα οδηγεί σε πλήρη αποσύζευξη των καμπτικών και διατμητικών εντατικών μεγεθών. Όλοι οι όροι που οδηγούν σε σύζευξη της κάμψης με τη στρέψη διατηρούνται.

Οι ποσότητες GD_{ii} ($i = \Phi_{CY}^P, \Phi_{CZ}^P$) που πολλαπλασιάζουν τις γ_Z^P και γ_Y^P αντίστοιχα, παρουσιάζουν αντιστοιχία με τις διατμητικές δυσκαμψίες της θεωρίας Timoshenko. Έτσι, ο απλούστερος συμβολισμός GA_i^P ($i = Z, Y$) μπορεί να υιοθετηθεί για τις ποσότητες αυτές. Ομοίως, οι ποσότητες GD_{ii} ($i = \Phi_{CY}^S, \Phi_{CZ}^S$) αναφέρονται σε δευτερογενείς διατμητικές δυσκαμψίες λόγω της ανομοιόμορφης διατμητικής στρέβλωσης και μπορούν να συμβολιστούν ως GA_i^S ($i = Z, Y$). Τέλος, οι ποσότητες GD_{ii} ($i = \Phi_S^S, \Phi_S^T$) αναφέρονται στη δευτερογενή (Mokos and Sarountzakis 2011) και τριτογενή αντίσταση σε στρέψη και μπορούν επίσης να συμβολιστούν ως GI_t^S, GI_t^T , αντίστοιχα. Στη συνέχεια, για να διατηρηθεί η συμβατότητα με την κλασική σημειογραφία, θα χρησιμοποιηθούν οι ανωτέρω απλοποιημένοι συμβολισμοί.

Χρησιμοποιώντας τις εκφράσεις των συνιστωσών του τανυστή τάσης (5.2.3), τους ορισμούς των εντατικών μεγεθών (5.3.3) και εφαρμόζοντας την Αρχή Δυνατών Έργων (5.3.1), οι διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας της ράβδου προκύπτουν ως

$$-N_{,x} = p_x \quad (5.3.7\alpha)$$

$$-Q_{y,x} = p_y \quad -Q_{z,x} = p_z \quad (5.3.7\beta,\gamma)$$

$$-M_{Z,x} - Q_y = m_Z \quad -M_{Y,x} + Q_z = m_Y \quad (5.3.7\delta,\epsilon)$$

$$-M_{\phi_{CZ}^P,x} - Q_y^T = m_{\phi_{CZ}^P} \quad -M_{\phi_{CY}^P,x} - Q_z^T = m_{\phi_{CY}^P} \quad (5.3.7\sigma\tau,\zeta)$$

$$-M_{t,x} = m_t \quad -M_{\phi_S^P,x} - M_t^S - M_t^T = m_{\phi_S^P} \quad -M_{\phi_S^S,x} + M_t^T = m_{\phi_S^S} \quad (5.3.7\eta,\theta)$$

όπου τα εξωτερικά εφαρμοζόμενα φορτία συνδέονται με τις συνιστώσες του διανύσματος τάσης στην παράπλευρη επιφάνεια της δοκού t_x, t_y, t_z σύμφωνα με τις σχέσεις

$$p_i(x) = \int_{\Gamma} t_i \, ds, \quad i = x, y, z \quad (5.3.8\alpha)$$

$$m_i(x) = \int_{\Gamma} t_z y - t_y z \, ds \quad (5.3.8\beta)$$

$$m_Y(x) = \int_{\Gamma} t_x Z \, ds \quad m_Z(x) = -\int_{\Gamma} t_x Y \, ds \quad (5.3.8\gamma, \delta)$$

$$m_i(x) = \int_{\Gamma} t_x(i) \, ds, \quad i = \phi_S^P, \phi_{CY}^P, \phi_{CZ}^P, \phi_S^S \quad (5.3.8\epsilon)$$

Χρησιμοποιώντας τις εκφράσεις (5.3.6), οι κύριες διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας της ράβδου (5.3.7) διατυπώνονται συναρτήσει των κινηματικών μεγεθών ως

$$-EAu_{,xx} = p_x \quad (5.3.9\alpha)$$

$$\begin{aligned} -G(A_Y^P + A_Y^S)(v_{,xx} - \theta_{Z,x}) + GA_Y^S \eta_{Z,x} + G(D_{\Phi_{CZ}^S \Phi_S^S} - D_{\Phi_{CZ}^S \Phi_S^T})(\eta_{x,x} - \theta_{x,xx}) + \\ + GD_{\Phi_{CZ}^S \Phi_S^T} \xi_{x,x} = p_y \end{aligned} \quad (5.3.9\beta)$$

$$\begin{aligned} -G(A_Z^P + A_Z^S)(w_{,xx} + \theta_{Y,x}) + GA_Z^S \eta_{Y,x} + G(D_{\Phi_{CY}^S \Phi_S^S} - D_{\Phi_{CY}^S \Phi_S^T})(\eta_{x,x} - \theta_{x,xx}) + \\ + GD_{\Phi_{CY}^S \Phi_S^T} \xi_{x,x} = p_z \end{aligned} \quad (5.3.9\gamma)$$

$$\begin{aligned} -EI_{ZZ} \theta_{Z,xx} - G(A_Y^P + A_Y^S)(v_{,x} - \theta_Z) + GA_Y^S \eta_Z + \\ + G(D_{\Phi_{CZ}^S \Phi_S^S} - D_{\Phi_{CZ}^S \Phi_S^T})(\eta_x - \theta_{x,x}) + GD_{\Phi_{CZ}^S \Phi_S^T} \xi_x = m_Z \end{aligned} \quad (5.3.9\delta)$$

$$\begin{aligned} -EI_{YY} \theta_{Y,xx} + G(A_Z^P + A_Z^S)(w_{,x} + \theta_Y) - GA_Z^S \eta_Y + \\ - G(D_{\Phi_{CY}^S \Phi_S^S} - D_{\Phi_{CY}^S \Phi_S^T})(\eta_x - \theta_{x,x}) - GD_{\Phi_{CY}^S \Phi_S^T} \xi_x = m_Y \end{aligned} \quad (5.3.9\epsilon)$$

$$\begin{aligned} -E(I_{\phi_{CZ}^P \phi_S^P} \eta_{x,xx} + I_{\phi_{CZ}^P \phi_{CZ}^P} \eta_{Z,xx} + I_{\phi_{CZ}^P \phi_S^S} \xi_{x,xx}) + GA_Y^S (\eta_Z - v_{,x} + \theta_Z) + \\ + G(D_{\Phi_{CZ}^S \Phi_S^S} - D_{\Phi_{CZ}^S \Phi_S^T})(\eta_x - \theta_{x,x}) + GD_{\Phi_{CZ}^S \Phi_S^T} \xi_x = m_{\phi_{CZ}^P} \end{aligned} \quad (5.3.9\sigma\tau)$$

$$\begin{aligned} -E(I_{\phi_{CY}^P \phi_S^P} \eta_{x,xx} + I_{\phi_{CY}^P \phi_{CY}^P} \eta_{Y,xx} + I_{\phi_{CY}^P \phi_S^S} \xi_{x,xx}) + GA_Z^S (\eta_Y - w_{,x} - \theta_Y) + \\ + G(D_{\Phi_{CY}^S \Phi_S^S} - D_{\Phi_{CY}^S \Phi_S^T})(\eta_x - \theta_{x,x}) + GD_{\Phi_{CY}^S \Phi_S^T} \xi_x = m_{\phi_{CY}^P} \end{aligned} \quad (5.3.9\zeta)$$

$$\begin{aligned} -G(I_t^P + I_t^S + I_t^T) \theta_{x,xx} + G(I_t^S + I_t^T) \eta_{x,x} - GI_t^T \xi_{x,x} + \\ + G(D_{\Phi_{CZ}^S \Phi_S^S} - D_{\Phi_{CZ}^S \Phi_S^T})(\eta_{Z,x} - v_{,xx} + \theta_{Z,x}) + G(D_{\Phi_{CY}^S \Phi_S^S} - D_{\Phi_{CY}^S \Phi_S^T}) \cdot \end{aligned}$$

$$\cdot(\eta_{Y,x} - w_{,xx} - \theta_{Y,x}) = m_t \quad (5.3.9\eta)$$

$$\begin{aligned} -E \left(I_{\phi_S^P \phi_S^S} \eta_{x,xx} + I_{\phi_{CY}^P \phi_S^S} \eta_{Y,xx} + I_{\phi_{CZ}^P \phi_S^S} \eta_{Z,xx} \right) + G \left(I_t^S + I_t^T \right) (\eta_x - \theta_{x,x}) - GI_t^T \xi_x + \\ + G \left(D_{\Phi_{CZ}^S \Phi_S^S} - D_{\Phi_{CZ}^S \Phi_S^T} \right) (\eta_Z - v_{,x} + \theta_Z) + G \left(D_{\Phi_{CY}^S \Phi_S^S} - D_{\Phi_{CY}^S \Phi_S^T} \right) \cdot \\ \cdot (\eta_Y - w_{,x} - \theta_Y) = m_{\phi_S^P} \end{aligned} \quad (5.3.9\theta)$$

$$\begin{aligned} -E \left(I_{\phi_{CY}^P \phi_S^S} \eta_{Y,xx} + I_{\phi_{CZ}^P \phi_S^S} \eta_{Z,xx} + I_{\phi_S^S \phi_S^S} \xi_{x,xx} \right) + GI_t^T (\xi_x - \eta_x + \theta_{x,x}) + \\ + GD_{\Phi_{CZ}^S \Phi_S^T} (\eta_Z - v_{,x} + \theta_Z) + GD_{\Phi_{CY}^S \Phi_S^T} (\eta_Y - w_{,x} - \theta_Y) = m_{\phi_S^S} \end{aligned} \quad (5.3.9\iota)$$

Στις ανωτέρω διαφορικές εξισώσεις (5.3.9) εφαρμόζονται οι αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες του προβλήματος, οι οποίες δίνονται ως

$$a_1 u + a_2 N_b = \alpha_3 \quad \beta_1 v + \beta_2 V_{by} = \beta_3 \quad \gamma_1 w + \gamma_2 V_{bz} = \gamma_3 \quad (5.3.10\alpha, \beta, \gamma)$$

$$\bar{\beta}_1 \theta_Z + \bar{\beta}_2 M_{bZ} = \bar{\beta}_3 \quad \bar{\gamma}_1 \theta_Y + \bar{\gamma}_2 M_{bY} = \bar{\gamma}_3 \quad (5.3.10\delta, \epsilon)$$

$$\tilde{\beta}_1 \eta_Z + \tilde{\beta}_2 M_{b\phi_{CZ}^P} = \tilde{\beta}_3 \quad \tilde{\gamma}_1 \eta_Y + \tilde{\gamma}_2 M_{b\phi_{CY}^P} = \tilde{\gamma}_3 \quad (5.3.10\sigma\tau, \zeta)$$

$$\delta_1 \theta_x + \delta_2 M_{bt} = \delta_3 \quad \bar{\delta}_1 \eta_x + \bar{\delta}_2 M_{b\phi_S^P} = \bar{\delta}_3 \quad \tilde{\delta}_1 \xi_x + \tilde{\delta}_2 M_{b\phi_S^S} = \tilde{\delta}_3 \quad (5.3.10\eta, \theta, \iota)$$

στα άκρα της δοκού ($x = 0, L$), όπου οι αντιδράσεις $N_b, V_{by}, V_{bz}, M_{bZ}, M_{bY}, M_{b\phi_{CZ}^P}, M_{b\phi_{CY}^P}, M_{bt}, M_{b\phi_S^P}, M_{b\phi_S^S}$ δίνονται από τις σχέσεις (5.3.6), όταν αυτές εφαρμόζονται στα άκρα της ράβδου. Τέλος, $\alpha_k, \beta_k, \bar{\beta}_k, \tilde{\beta}_k, \gamma_k, \bar{\gamma}_k, \tilde{\gamma}_k, \delta_k, \bar{\delta}_k, \tilde{\delta}_k$ ($k = 1, 2, 3$) είναι συναρτήσεις που ορίζονται στα άκρα της ράβδου ($x = 0, L$). Οι συνοριακές συνθήκες (5.3.10) είναι οι πλέον γενικές συνοριακές συνθήκες του προβλήματος, συμπεριλαμβανομένης και της ελαστικής στήριξης. Είναι εμφανές ότι όλοι οι τύποι των συμβατικών συνοριακών συνθηκών (πάκτωση, απλή στήριξη, ελεύθερο άκρο, ελαστική στήριξη) μπορούν να προκύψουν από τις εξισώσεις αυτές, με κατάλληλες τιμές των συναρτήσεων αυτών (π.χ. για πακτωμένο άκρο είναι $\alpha_1 = \beta_1 = \bar{\beta}_1 = \tilde{\beta}_1 = \gamma_1 = \bar{\gamma}_1 = \tilde{\gamma}_1 = \delta_1 = \bar{\delta}_1 = \tilde{\delta}_1 = 1$, $\alpha_2 = \alpha_3 = \beta_2 = \beta_3 = \bar{\beta}_2 = \bar{\beta}_3 = \tilde{\beta}_2 = \tilde{\beta}_3 = \gamma_2 = \bar{\gamma}_3 = \tilde{\gamma}_2 = \tilde{\gamma}_3 = \delta_2 = \delta_3 = \bar{\delta}_2 = \bar{\delta}_3 = \tilde{\delta}_2 = \tilde{\delta}_3 = 0$).

Τέλος, σημειώνεται ότι οι εξισώσεις που διέπουν το πρόβλημα συνοριακών τιμών για το προσομοίωμα Α μπορούν να προκύψουν χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (5.2.2) αντί των (5.2.3), τροποποιώντας τις εξισώσεις (5.3.3), (5.3.4) με αντικατάσταση των $\Phi_{CY}^S, \Phi_{CZ}^S, \Phi_S^T$ από τις $\phi_{CY}^P, \phi_{CZ}^P, \phi_S^S$, αντίστοιχα, και εφαρμόζοντας τα ίδια βήματα που παρουσιάζονται στις εξισώσεις (5.3.6)-(5.3.10).

5.4. Συναρτήσεις στρέβλωσης λόγω διάτμησης $\Phi_{CY}^P, \Phi_{CZ}^P, \Phi_{CY}^S, \Phi_{CZ}^S$

Η ανάλυση που περιγράφηκε στην προηγούμενη ενότητα υποθέτει ότι οι συναρτήσεις στρέβλωσης $\Phi_{CY}^P, \Phi_{CZ}^P, \Phi_{CY}^S, \Phi_{CZ}^S$ ως προς το κύριο κεντροβαρικό καμπτικό σύστημα (απαιτούμενες για το προσομοίωμα Β) έχουν ήδη οριστεί. Οι συναρτήσεις στρέβλωσης

προσδιορίζονται σε κάθε διεύθυνση ανεξάρτητα (μη λαμβάνοντας υπόψη στο στάδιο αυτό τη στρεπτική και αξονική παραμόρφωση της ράβδου), χρησιμοποιώντας την τοπική εξίσωση ισορροπίας στην κατά μήκος διεύθυνση και την αντίστοιχη συνοριακή συνθήκη ως

$$\sigma_{xx,x} + \tau_{xy,y} + \tau_{xz,z} = 0 \text{ στο } \Omega, \quad \forall x \in (0, L) \quad (5.4.1\alpha)$$

$$\tau_{xn} = \tau_{xy}n_y + \tau_{xz}n_z = 0 \text{ στο } \Gamma, \quad \forall x \in (0, L) \quad (5.4.1\beta)$$

όπου n_y, n_z είναι τα συνημίτονα κατεύθυνσης του εξωτερικού κάθετου διανύσματος \mathbf{n} (Σχ. 5.3β) ως προς τους άξονες y, z , αντίστοιχα. Εξετάζοντας κάθε συνάρτηση στρέβλωσης Φ_{Ci}^P ($i = Y, Z$) ξεχωριστά χρησιμοποιείται το πεδίο τάσεων (5.2.3) αγνοώντας αρχικά τις δευτερογενείς διατμητικές τάσεις (τ_{xy}^S, τ_{xz}^S) και τις ορθές τάσεις λόγω στρέβλωσης (σ_{xx}^S). Είναι γνωστό από το κλασικό πρόβλημα ομοιόμορφης διάτμησης κατά St.Venant, ότι οι πρωτογενείς διατμητικές τάσεις τ_{xy}^P, τ_{xz}^P ισορροπούν τις ορθές τάσεις λόγω κάμψης (σ_{xx}^P) (βλ. Πίνακα 5.1). Έτσι, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (5.4.1), (5.3.6β,γ,η,ι), έχοντας υπόψη ότι ισχύουν οι εξισώσεις ισορροπίας (5.3.7δ,ε) και θεωρώντας ότι $m_i = 0$ ($i = Y, Z$) για την αποφυγή υπολογισμού συναρτήσεων στρέβλωσης εξαρτώμενων από την εξωτερική φόρτιση, διαμορφώνεται πρόβλημα συνοριακών τιμών σε κάθε διεύθυνση ως

$$\nabla^2 \bar{\Phi}_{CY}^P = Z \text{ στο } \Omega, \quad \forall x \in (0, L) \quad (5.4.2\alpha)$$

$$\bar{\Phi}_{CY,n}^P = 0 \text{ στο } \Gamma, \quad \forall x \in (0, L) \quad (5.4.2\beta)$$

$$\nabla^2 \bar{\Phi}_{CZ}^P = Y \text{ στο } \Omega, \quad \forall x \in (0, L) \quad (5.4.2\gamma)$$

$$\bar{\Phi}_{CZ,n}^P = 0 \text{ στο } \Gamma, \quad \forall x \in (0, L) \quad (5.4.2\delta)$$

όπου $\bar{\Phi}_{CY}^P = -(I_{YY}/A_Z^P)\Phi_{CY}^P$, $\bar{\Phi}_{CZ}^P = -(I_{ZZ}/A_Y^P)\Phi_{CZ}^P$, $(\cdot)_{,n}$ συμβολίζει την παράγωγο ως προς το εξωτερικό κάθετο διάνυσμα στο σύνορο \mathbf{n} (παράγωγος κατά κατεύθυνση). Μετά τον προσδιορισμό της $\bar{\Phi}_{Ci}^P$ ($i = Y, Z$) από την επίλυση του προβλήματος συνοριακών τιμών (5.4.2), οι γεωμετρικές σταθερές A_i^P ($i = Y, Z$) μπορούν να υπολογιστούν χρησιμοποιώντας την εξίσωση (5.3.4η) ως

$$A_Y^P = \frac{(I_{ZZ})^2}{D_{\bar{\Phi}_{CZ}^P \bar{\Phi}_{CZ}^P}} \quad A_Z^P = \frac{(I_{YY})^2}{D_{\bar{\Phi}_{CY}^P \bar{\Phi}_{CY}^P}} \quad (5.4.3\alpha, \beta)$$

Ακολούθως, οι συναρτήσεις στρέβλωσης ϕ_{Ci}^P ($i = Y, Z$) που καθορίζουν τη μορφή των ορθών τάσεων λόγω στρέβλωσης μπορούν να υπολογιστούν μέσω των σχέσεων (5.2.4γ,ε). Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (5.2.4γ,ε) και (5.4.3) και εφαρμόζοντας το θεώρημα Gauss-Green, αποδεικνύεται ότι οι ϕ_{Ci}^P ($i = Y, Z$) πληρούν τη συνθήκη ορθογωνικότητας, $\langle \phi_{Ci}^P, i \rangle = \int_{\Omega} (i) \phi_{Ci}^P d\Omega = 0$, το οποίο υποδεικνύει ότι οι ορθές τάσεις λόγω των ϕ_{Ci}^P ($i = Y, Z$) δεν παράγουν επιπρόσθετες καμπτικές ροπές. Σημειώνεται εδώ ότι στη διεθνή βιβλιογραφία ((Dikaros and Sapountzakis 2014a, El Fatmi and Ghazouani 2011, Ferradi et al. 2013, Genoese et al. 2013), για

να αρθεί η σύζευξη αυτή απαιτείται η προαναφερθείσα συνθήκη ορθογωνικότητας μετά ή κατά τη διάρκεια του υπολογισμού των συναρτήσεων στρέβλωσης.

Όπως έχει περιγραφεί στην ενότητα 5.2, για να εφαρμοστεί το προσομοίωμα B, χρησιμοποιούνται επιπρόσθετες συναρτήσεις στρέβλωσης λόγω διάτμησης ϕ_{Ci}^S ($i = Y, Z$) για να διορθώσουν τις δευτερογενείς διατμητικές τάσεις τ_{xy}^S, τ_{xz}^S . Οι συναρτήσεις αυτές υπολογίζονται έμμεσα από τις Φ_{Ci}^S ($i = Y, Z$), οι οποίες μπορούν να προσδιοριστούν μέσω απαίτησης της ανεξάρτητης εξισορρόπησης των ορθών τάσεων σ_{xx}^S λόγω των ϕ_{Ci}^P ($i = Y, Z$) από τις δευτερογενείς διατμητικές τάσεις τ_{xy}^S, τ_{xz}^S στην εξίσωση (5.4.1) (βλ. Πίνακα 5.1) (Mokos and Sarountzakis 2011, Ferradi et al. 2013). Η θεώρηση αυτή επιτρέπει τη μόρφωση του παρακάτω προβλήματος συνοριακών τιμών σε κάθε διεύθυνση

$$\nabla^2 \tilde{\Phi}_{Ci}^S = \phi_{Ci}^P, (i = Y, Z) \text{ στο } \Omega, \forall x \in (0, L) \quad (5.4.4\alpha)$$

$$\tilde{\Phi}_{Ci,n}^S = 0 \text{ στο } \Gamma, \forall x \in (0, L) \quad (5.4.4\beta)$$

Για την αποφυγή της σύζευξης μεταξύ των Q_i^P και Q_i^S ($i = z, y$), είναι απαραίτητο να επιλεγούν κατάλληλες ϕ_{Ci}^S ($i = Y, Z$), έτσι ώστε να ικανοποιείται η σχέση $D_{\Phi_{Ci}^P \Phi_{Ci}^S} = \int_{\Omega} (\nabla \Phi_{Ci}^P \cdot \nabla \Phi_{Ci}^S) d\Omega = 0$. Η απαίτηση αυτή μπορεί να ικανοποιηθεί ορίζοντας τις $\bar{\Phi}_{Ci}^S$ ($i = Y, Z$) ως

$$\bar{\Phi}_{CY}^S = \tilde{\Phi}_{CY}^S + ZC_Y \quad \bar{\Phi}_{CZ}^S = \tilde{\Phi}_{CZ}^S + YC_Z \quad (5.4.5)$$

όπου οι σταθερές C_i ($i = Y, Z$) υπολογίζονται ως

$$C_Y = -\frac{D_{\Phi_{CY}^P \tilde{\Phi}_{CY}^S}}{D_{Z\Phi_{CY}^P}} = \frac{I_{\phi_{CY}^P \phi_{CY}^P}}{A_Z^P} \quad C_Z = -\frac{D_{\Phi_{CZ}^P \tilde{\Phi}_{CZ}^S}}{D_{Y\Phi_{CZ}^P}} = \frac{I_{\phi_{CZ}^P \phi_{CZ}^P}}{A_Y^P} \quad (5.4.6)$$

Όμοια με την προηγούμενη διαδικασία, χρησιμοποιώντας τις (5.3.6στ,ζ,θ,κ) (αγνοώντας τους συζευγμένους όρους λόγω στρέψης), έχοντας υπόψη τις εξισώσεις ισορροπίας (5.3.7ε,στ) και θεωρώντας ότι $m_{\phi_{Ci}^P} = 0$ ($i = Y, Z$) μπορεί να δειχθεί ότι $\bar{\Phi}_{CY}^S = -\left(I_{\phi_{CY}^P \phi_{CY}^P} / A_Z^S\right) \Phi_{CY}^S$, $\bar{\Phi}_{CZ}^S = -\left(I_{\phi_{CZ}^P \phi_{CZ}^P} / A_Y^S\right) \Phi_{CZ}^S$. Συνεπώς, οι γεωμετρικές σταθερές A_i^S ($i = Y, Z$) μπορούν να υπολογιστούν χρησιμοποιώντας την σχέση (5.3.4η) ως

$$A_Y^S = \frac{\left(I_{\phi_{CZ}^P \phi_{CZ}^P}\right)^2}{D_{\bar{\Phi}_{CZ}^S \bar{\Phi}_{CZ}^S}} \quad A_Z^S = \frac{\left(I_{\phi_{CY}^P \phi_{CY}^P}\right)^2}{D_{\bar{\Phi}_{CY}^S \bar{\Phi}_{CY}^S}} \quad (5.4.7)$$

5.5.Συναρτήσεις στρέβλωσης λόγω στρέψης ϕ_S^P , Φ_S^S , Φ_S^T

Όμοια με την προηγούμενη ενότητα, οι συναρτήσεις στρέβλωσης λόγω στρέψης ορίζονται εκμεταλλευόμενοι την τοπική εξίσωση ισορροπίας (5.4.1) και θεωρώντας μόνο τις τάσεις λόγω στρέψης. Η πρωτογενής συνάρτηση στρέβλωσης ϕ_S^P απορρέει από τις διατμητικές τάσεις τ_{xy}^P , τ_{xz}^P και υπολογίζεται μέσω του ίδιου προβλήματος συνοριακών τιμών που έχει διατυπωθεί και στην ‘κλασική’ θεωρία ανομοιόμορφης στρέψης (πρόβλημα St. Venant ομοιόμορφης στρέψης) ως

$$\nabla^2 \phi_S^P = 0 \text{ στο } \Omega, \forall x \in (0, L) \quad (5.5.1\alpha)$$

$$\phi_{S,n}^P = zn_y - yn_z \text{ στο } \Gamma, \forall x \in (0, L) \quad (5.5.1\beta)$$

Σημειώνεται ότι για να είναι η ϕ_S^P η πρωτογενής συνάρτηση στρεπτικής στρέβλωσης, η ανάλυση πρέπει να διεξαχθεί ως προς το κέντρο στρέψης S , το οποίο καθορίζεται με την διαδικασία που παρουσιάζεται στα κεφάλαια 2, 4 (Sapountzakis and Mokos 2003).

Ακολουθώντας τη μεθοδολογία που παρουσιάστηκε στην προηγούμενη ενότητα, η δευτερογενής συνάρτηση στρεπτικής στρέβλωσης Φ_S^S μπορεί να προσδιοριστεί μέσω απαίτησης της εξισορρόπησης των πρωτογενών ορθών τάσεων σ_{xx}^P που προκύπτουν από τη ϕ_S^P από τις δευτερογενείς διατμητικές τάσεις τ_{xy}^S , τ_{xz}^S (βλ. Πίνακα 5.1) με τη βοήθεια της τοπικής εξίσωσης ισορροπίας (5.4.1). Η θεώρηση αυτή επιτρέπει τη μόρφωση του ακόλουθου προβλήματος συνοριακών τιμών

$$\nabla^2 \bar{\Phi}_S^S = \phi_S^P \text{ στο } \Omega, \forall x \in (0, L) \quad (5.5.2\alpha)$$

$$\bar{\Phi}_{S,n}^S = 0 \text{ στο } \Gamma, \forall x \in (0, L) \quad (5.5.2\beta)$$

όπου $\bar{\Phi}_S^S = -\left(I_{\phi_S^P \phi_S^P} / I_t^S\right) \Phi_S^S$. Χρησιμοποιώντας την (5.3.4η), η δευτερογενής στρεπτική σταθερά I_t^S υπολογίζεται ως

$$I_t^S = \frac{\left(I_{\phi_S^P \phi_S^P}\right)^2}{D_{\bar{\Phi}_S^S \bar{\Phi}_S^S}} \quad (5.5.3)$$

ενώ η ϕ_S^S μπορεί να οριστεί με τη βοήθεια της εξίσωσης (5.2.4α).

Το τελευταίο πρόβλημα συνοριακών τιμών, αναφορικά με τον προσδιορισμό της τριτογενούς συνάρτησης στρεπτικής στρέβλωσης Φ_S^T προκύπτει από την εξισορρόπηση των δευτερογενών ορθών τάσεων σ_{xx}^S (που προκύπτουν από τη ϕ_S^S) από τις τριτογενείς διατμητικές τάσεις τ_{xy}^T , τ_{xz}^T (βλ. Πίνακα 5.1) και πάλι με τη βοήθεια της τοπικής εξίσωσης ισορροπίας (5.4.1) ως

$$\nabla^2 \tilde{\Phi}_S^T = \phi_S^S \text{ στο } \Omega, \forall x \in (0, L) \quad (5.5.4\alpha)$$

$$\tilde{\Phi}_{S,n}^T = 0 \text{ στο } \Gamma, \forall x \in (0, L) \quad (5.5.4\beta)$$

Όμοια με την προηγούμενη ενότητα, για να αποφευχθεί η σύζευξη μεταξύ M_t^S και M_t^T , είναι απαραίτητο να επιλεγεί κατάλληλη ϕ_S^T έτσι ώστε να ισχύει η σχέση $D_{\Phi_S^S \Phi_S^T} = \int_{\Omega} (\nabla \Phi_S^S \cdot \nabla \Phi_S^T) d\Omega$. Έτσι, η $\bar{\Phi}_S^T$ προκύπτει ως

$$\bar{\Phi}_S^T = \tilde{\Phi}_S^T + C_{\phi_S^P} \phi_S^P \quad (5.5.5)$$

όπου

$$C_{\phi_S^P} = -\frac{D_{\Phi_S^S \tilde{\Phi}_S^T}}{D_{\Phi_S^S \phi_S^P}} = \frac{I_{\phi_S^S \phi_S^S}}{I_t^S} \quad (5.5.6)$$

και $\bar{\Phi}_S^T = -\left(I_{\phi_S^S \phi_S^S} / I_t^T\right) \Phi_S^T$. Τέλος, χρησιμοποιώντας την εξίσωση (5.3.4η), η τριτογενής στρεπτική σταθερά I_t^T υπολογίζεται ως

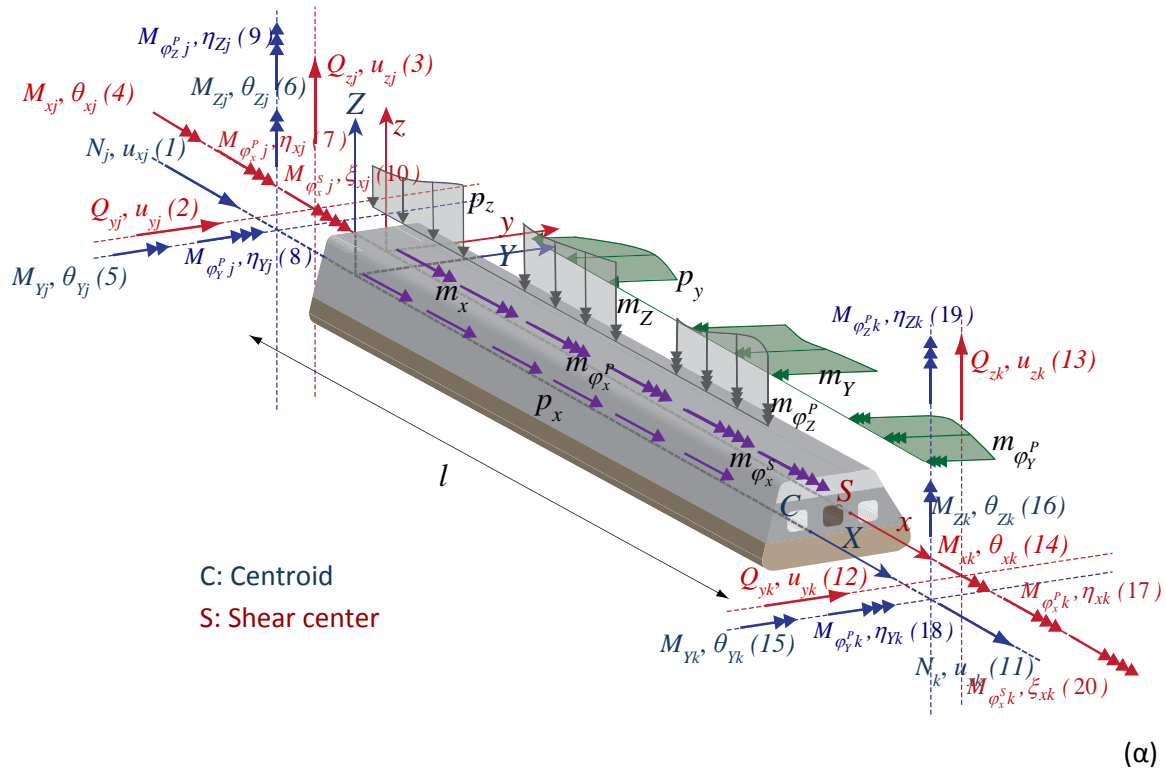
$$I_t^T = \frac{\left(I_{\phi_S^S \phi_S^S}\right)^2}{D_{\bar{\Phi}_S^T \bar{\Phi}_S^T}} \quad (5.5.7)$$

Σημειώνεται ότι όλα τα προβλήματα συνοριακών τιμών (5.4.2), (5.4.4), (5.5.1), (5.5.2), (5.5.4) που προαναφέρθηκαν έχουν λύση, εφόσον η συνθήκη $\int_{\Gamma} (i_{,n}) ds = 0$, ($i = \bar{\Phi}_{Cj}^P, \tilde{\Phi}_{Cj}^S, \phi_S^P, \bar{\Phi}_S^S, \tilde{\Phi}_S^T$, $j = Y, Z$) (Muskhelishvili 1963) ικανοποιείται. Αξίζει επίσης να σημειωθεί ότι, εφόσον τα προβλήματα (5.4.2), (5.4.4), (5.5.1), (5.5.2), (5.5.4) έχουν συνοριακές συνθήκες τύπου Neumann, κάθε συνάρτηση στρέβλωσης περιέχει τυχαία σταθερά ολοκλήρωσης υποδεικνύοντας παράλληλη μετακίνηση της διατομής κατά μήκος του άξονα της ράβδου. Ο υπολογισμός των σταθερών αυτών επιτυγχάνεται όπως παρουσιάζεται στο κεφάλαιο 3 (Sapountzakis and Mokos 2003).

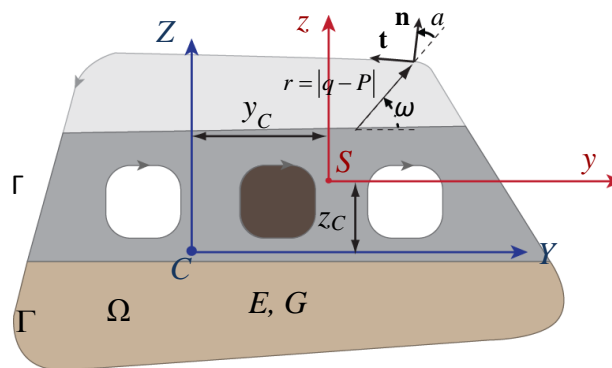
5.6. Τοπικό Μητρώο Στιβαρότητας – Τοπικά Μητρώα Επικόμβιων Μετακινήσεων και Δράσεων

Θεωρείται χωρικό πρισματικό στοιχείο μήκους L , διατομής τυχόντος σχήματος, η οποία καταλαμβάνει το διδιάστατο χωρίο Ω του επιπέδου yz (Σχ. 5.7), αποτελούμενη από ομογενές, ισότροπο και γραμμικά ελαστικό υλικό, με μέτρο ελαστικότητας E , μέτρο διάτμησης G και λόγο Poisson ν . Στο Σχ. 5.7 $CXYZ$ είναι το κύριο καμπτικό σύστημα αξόνων διερχόμενο από τα κέντρα βάρους C των διατομών, ενώ y_C, z_C είναι οι συντεταγμένες του κέντρου βάρους ως προς το σύστημα αξόνων $Sxyz$, το οποίο διέρχεται από τα κέντρα στρέψης (κέντρα διάτμησης εφόσον δεν επιβάλλεται κατασκευαστικά κάποιο άλλο κέντρο συστροφής) S με άξονες παράλληλους ως προς τους αντίστοιχους του $CXYZ$. Το στοιχείο υποβάλλεται σε συνδυασμό φορτίσεων από ανομοιόμορφα κατανεμημένο ή/και συγκεντρωμένο αξονικό φορτίο $p_x = p_x(X)$ κατά μήκος του άξονα X , εγκάρσιο φορτίο $p_y = p_y(x)$ και $p_z = p_z(x)$ κατά μήκος των αξόνων y, z ,

αντίστοιχα, στρεπτικές ροπές $m_t = m_t(x)$ κατά μήκος του άξονα x , καμπτικές ροπές $m_Y = m_Y(x)$, $m_Z = m_Z(x)$ κατά μήκος των αξόνων Y, Z , αντίστοιχα καθώς και ροπές στρέβλωσης (διρροπές) $m_{\phi_S^P} = m_{\phi_S^P}(x)$, $m_{\phi_S^S} = m_{\phi_S^S}(x)$, $m_{\phi_{CY}^P} = m_{\phi_{CY}^P}(x)$ και $m_{\phi_{CZ}^P} = m_{\phi_{CZ}^P}(x)$ (Σχ. 15.7).



(α)



(β)

Σχ. 5.7. Πρισματικό στοιχείο υποβαλλόμενο σε εγκάρσια, στρεπτική και αξονική φόρτιση (α) με τυχούσα σταθερή διατομή που καταλαμβάνει το χωρίο Ω (β). **ομογενές**

Σύμφωνα με όσα παρουσιάστηκαν στην ενότητα 5.3, προκειμένου να ληφθούν υπόψη οι προαναφερθείσες ανομοιομορφες διατμητικές και στρεπτικές στρεβλώσεις της ράβδου, τέσσερις νέοι βαθμοί ελευθερίας προστίθενται στους ήδη γνωστούς έξι β.ε. του κλασικού στοιχείου χωρικού πλαισίου. Οι δύο από τους τέσσερις πρόσθετους β.ε. είναι οι ανεξάρτητες παράμετροι στρεπτικής στρέβλωσης $\eta_x(x)$, $\xi_x(x)$ που εισήχθησαν για την περιγραφή της ανομοιομορφης κατανομής πρωτογενούς και δευτερογενούς στρεπτικής στρέβλωσης, αντίστοιχα και οι δύο υπόλοιποι οι ανεξάρτητες παράμετροι διατμητικής στρέβλωσης $\eta_Y(x)$, $\eta_Z(x)$ που εισήχθησαν για την

περιγραφή της ανομοιόμορφης κατανομής πρωτογενούς διατμητικής στρέβλωσης κατά την κάμψη περί τους άξονες Y, Z , αντίστοιχα. Οι πρόσθετοι αυτοί β.ε. περιγράφουν την 'ένταση' των αντίστοιχων στρεβλώσεων της διατομής κατά μήκος της ράβδου. Έχοντας ήδη αναφέρει ότι $\phi_S^P(y, z), \phi_S^S(y, z)$ είναι η πρωτογενής και δευτερογενής συνάρτηση στρεπτικής στρέβλωσης ως προς το κέντρο στρέψης S και $\phi_{CY}^P(y, z), \phi_{CZ}^P(y, z)$ είναι οι πρωτογενείς συναρτήσεις διατμητικής στρέβλωσης ως προς το κέντρο βάρους της διατομής C που εξαρτώνται από τη γεωμετρία της διατομής η 'πραγματική' παραμορφωμένη εικόνα της διατομής λόγω συνολικής στρέβλωσης σε κάθε σημείο της ράβδου δίνεται από το άθροισμα $\eta_x(x)\phi_S^P(y, z) + \eta_Y(X)\phi_{CY}^P(Y, Z) + \eta_Z(X)\phi_{CZ}^P(Y, Z) + \xi_x(x)\phi_S^S(y, z)$.

Τα εντατικά μεγέθη που αντιστοιχούν στους νέους βαθμούς ελευθερίας που περιγράφηκαν στην προηγούμενη παράγραφο είναι οι ροπές στρεπτικής $M_{\phi_S^P}, M_{\phi_S^S}$ και διατμητικής $M_{\phi_{CY}^P}, M_{\phi_{CZ}^P}$ στρέβλωσης (δίρροπές) κατά μήκος της ράβδου. Οι ροπές στρεπτικής στρέβλωσης $M_{\phi_S^P}, M_{\phi_S^S}$ αντιπροσωπεύουν τις κατανομές των πρωτογενών σ_{xx}^P και δευτερογενών σ_{xx}^S ορθών τάσεων από στρέψη, των οποίων η στοιχειώδης μεταβολή εξισορροπείται από την αντίστοιχη δευτερογενή M_t^S και τριτογενή M_t^T στρεπτική ροπή, η οποία προκύπτει από τις δευτερογενείς τ_{xz}^S, τ_{xy}^S και τριτογενείς τ_{xz}^T, τ_{xy}^T κατανομές διατμητικών τάσεων, αντίστοιχα. Όμοια, οι ροπές διατμητικής στρέβλωσης $M_{\phi_{CY}^P}, M_{\phi_{CZ}^P}$ αντιπροσωπεύουν τις κατανομές των δευτερογενών ορθών τάσεων σ_{xx}^S από κάμψη, των οποίων η στοιχειώδης μεταβολή εξισορροπείται από την αντίστοιχη δευτερογενή τέμνουσα Q_z^S, Q_y^S , η οποία προκύπτει από τις δευτερογενείς κατανομές διατμητικών τάσεων τ_{xz}^S, τ_{xy}^S . Τα δίρροπα στρεπτικής και διατμητικής στρέβλωσης αποτελούν ανώτερης τάξης εντατικά μεγέθη, που αναπτύσσονται κατ' αναλογία με το δίρροπο στρέβλωσης της κλασικής θεωρίας ανομοιόμορφης στρέψης (βλ. κεφάλαιο 3).

Έτσι, λαμβάνοντας υπόψη τους προαναφερθέντες 4 νέους β.ε. + 6 (γνωστοί β.ε. του κλασικού στοιχείου χωρικού πλαισίου) = 10 β.ε., το μητρώο των επικόμβιων μετακινήσεων του στοιχείου στο τοπικό σύστημα αξόνων, όπως φαίνεται και στο Σχ. 5.7 μπορεί να γραφεί ως

$$\{D^i\} = \begin{bmatrix} u_x^{ij} & u_y^{ij} & u_z^{ij} & \theta_x^{ij} & \theta_Y^{ij} & \theta_Z^{ij} & \eta_x^{ij} & \eta_Y^{ij} & \eta_Z^{ij} & \xi_x^{ij} & \vdots & u_x^{ik} & u_y^{ik} & u_z^{ik} & \theta_x^{ik} \\ \theta_Y^{ik} & \theta_Z^{ik} & \eta_x^{ik} & \eta_Y^{ik} & \eta_Z^{ik} & \xi_x^{ik} & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}^T \quad (5.6.1)$$

και το αντίστοιχο μητρώο των επικόμβιων δράσεων ως

$$\{A^i\} = \begin{bmatrix} N^{ij} & Q_y^{ij} & Q_z^{ij} & M_x^{ij} & M_Y^{ij} & M_Z^{ij} & M_{\phi_x^P}^{ij} & M_{\phi_Y^P}^{ij} & M_{\phi_Z^P}^{ij} & M_{\phi_x^S}^{ij} & \vdots & N^{ik} \\ Q_y^{ik} & Q_z^{ik} & M_x^{ik} & M_Y^{ik} & M_Z^{ik} & M_{\phi_x^P}^{ik} & M_{\phi_Y^P}^{ik} & M_{\phi_Z^P}^{ik} & M_{\phi_x^S}^{ik} & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}^T \quad (5.6.2)$$

Τα προαναφερθέντα μητρώα επικόμβιων μετακινήσεων και επικόμβιων δράσεων (σχέσεις (5.6.1), (5.6.2)) συνδέονται με το 20x20 τοπικό μητρώο στιβαρότητας του στοιχείου χωρικού πλαισίου, το οποίο γράφεται ως

$$+G\left(D_{\Phi_{CY}^S\Phi_S^S}-D_{\Phi_{CY}^S\Phi_S^T}\right)\left(\eta_{Y,x}-w_{,xx}-\theta_{Y,x}\right)=m_t \quad (5.6.4\zeta)$$

$$\begin{aligned} -E\left(I_{\phi_S^P\phi_S^S}\eta_{x,xx}+I_{\phi_{CY}^P\phi_S^P}\eta_{Y,xx}+I_{\phi_{CZ}^P\phi_S^P}\eta_{Z,xx}\right)+G\left(I_t^S+I_t^T\right)\left(\eta_x-\theta_{x,x}\right)-GI_t^T\xi_x+G\left(D_{\Phi_{CZ}^S\Phi_S^S}-D_{\Phi_{CZ}^S\Phi_S^T}\right) \\ \cdot\left(\eta_Z-v_{,x}+\theta_Z\right)+G\left(D_{\Phi_{CY}^S\Phi_S^S}-D_{\Phi_{CY}^S\Phi_S^T}\right)\cdot\left(\eta_Y-w_{,x}-\theta_Y\right)=m_{\phi_S^P} \end{aligned} \quad (5.6.4\eta)$$

$$\begin{aligned} -E\left(I_{\phi_{CY}^P\phi_S^S}\eta_{Y,xx}+I_{\phi_{CZ}^P\phi_S^S}\eta_{Z,xx}+I_{\phi_S^S\phi_S^S}\xi_{x,xx}\right)+GI_t^T\left(\xi_x-\eta_x+\theta_{x,x}\right)+GD_{\Phi_{CZ}^S\Phi_S^T}\left(\eta_Z-v_{,x}+\theta_Z\right)+ \\ +GD_{\Phi_{CY}^S\Phi_S^T}\left(\eta_Y-w_{,x}-\theta_Y\right)=m_{\phi_S^S} \end{aligned} \quad (5.6.4\theta)$$

υποκείμενου στις αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες στα άκρα της ράβδου ($x=0, L$), οι οποίες γράφονται ως

$$\beta_1 v + \beta_2 V_{by} = \beta_3 \quad \gamma_1 w + \gamma_2 V_{bz} = \gamma_3 \quad (5.6.5\alpha, \beta)$$

$$\bar{\beta}_1 \theta_Z + \bar{\beta}_2 M_{bZ} = \bar{\beta}_3 \quad \bar{\gamma}_1 \theta_Y + \bar{\gamma}_2 M_{bY} = \bar{\gamma}_3 \quad (5.6.5\gamma, \delta)$$

$$\tilde{\beta}_1 \eta_Z + \tilde{\beta}_2 M_{b\phi_{CZ}^P} = \tilde{\beta}_3 \quad \tilde{\gamma}_1 \eta_Y + \tilde{\gamma}_2 M_{b\phi_{CY}^P} = \tilde{\gamma}_3 \quad (5.6.5\epsilon, \sigma\tau)$$

$$\delta_1 \theta_x + \delta_2 M_{bt} = \delta_3 \quad \bar{\delta}_1 \eta_x + \bar{\delta}_2 M_{b\phi_S^S} = \bar{\delta}_3 \quad \tilde{\delta}_1 \xi_x + \tilde{\delta}_2 M_{b\phi_S^S} = \tilde{\delta}_3 \quad (5.6.5\zeta, \eta, \theta)$$

μηδενίζοντας τις συναρτήσεις $p_y = p_z = m_Z = m_Y = m_{\phi_{CZ}^P} = m_{\phi_{CY}^P} = m_t = m_{\phi_S^P} = m_{\phi_S^S} = 0$ εξωτερικής φόρτισης και θέτοντας κατάλληλες τιμές στους συντελεστές $\beta_k, \gamma_k, \delta_k, \bar{\beta}_k, \bar{\gamma}_k, \bar{\delta}_k, \tilde{\beta}_k, \tilde{\gamma}_k, \tilde{\delta}_k$ ($k=1,2,3$) ώστε να μορφώνονται κατάλληλες συνοριακές συνθήκες. Έτσι, π.χ. τα στοιχεία k_{m7}^i ($m=2,3,4,5,6,7,8,9,10,12,13,14,15,16,17,18,19,20$) του τοπικού μητρώου στιβαρότητας (5.6.3) προκύπτουν ως οι αντιδράσεις του αμφίπακτου στοιχείου για μοναδιαία παράμετρο στρεπτικής στρέβλωσης $\eta_x(0) = 1$, κατά τον άξονα x στη θέση $x=0$ και επομένως

$$\begin{aligned} \beta_1 = \gamma_1 = \delta_1 = \bar{\beta}_1 = \bar{\gamma}_1 = \bar{\delta}_1 = \tilde{\beta}_1 = \tilde{\gamma}_1 = \tilde{\delta}_1 = \bar{\delta}_3 = 1 \\ \beta_2 = \gamma_2 = \delta_2 = \bar{\beta}_2 = \bar{\gamma}_2 = \bar{\delta}_2 = \tilde{\beta}_2 = \tilde{\gamma}_2 = \tilde{\delta}_2 = \beta_3 = \gamma_3 = \delta_3 = \bar{\beta}_3 = \bar{\gamma}_3 = \tilde{\beta}_3 = \tilde{\gamma}_3 = \tilde{\delta}_3 = 0 \\ \text{στη θέση } x=0 \end{aligned} \quad (5.6.6\alpha)$$

$$\begin{aligned} \beta_1 = \gamma_1 = \delta_1 = \bar{\beta}_1 = \bar{\gamma}_1 = \bar{\delta}_1 = \tilde{\beta}_1 = \tilde{\gamma}_1 = \tilde{\delta}_1 = 1 \\ \beta_2 = \gamma_2 = \delta_2 = \bar{\beta}_2 = \bar{\gamma}_2 = \bar{\delta}_2 = \tilde{\beta}_2 = \tilde{\gamma}_2 = \tilde{\delta}_2 = \beta_3 = \gamma_3 = \delta_3 = \bar{\beta}_3 = \bar{\gamma}_3 = \bar{\delta}_3 = \tilde{\beta}_3 = \tilde{\gamma}_3 = \tilde{\delta}_3 = 0 \\ \text{στη θέση } x=L \end{aligned} \quad (5.6.6\beta)$$

Αναφορικά με το μητρώο επικόμβιων φορτίσεων, θεωρώντας ότι η δοκός υποβάλλεται στο τυχόν συγκεντρωμένο ή κατανεμημένο αξονικό φορτίο $p_x = p_x(X)$ κατά μήκος του άξονα X , εγκάρσιο φορτίο $p_y = p_y(x)$ και $p_z = p_z(x)$ κατά μήκος των αξόνων y, z , αντίστοιχα, σε στρεπτικές ροπές $m_t = m_t(x)$ κατά μήκος του άξονα x , καμπτικές ροπές $m_Y = m_Y(x)$, $m_Z = m_Z(x)$ κατά μήκος των αξόνων Y, Z , αντίστοιχα καθώς και σε ροπές στρέβλωσης (διρροπές) $m_{\phi_S^P} = m_{\phi_S^P}(x)$, $m_{\phi_S^S} = m_{\phi_S^S}(x)$, $m_{\phi_{CY}^P} = m_{\phi_{CY}^P}(x)$ και $m_{\phi_{CZ}^P} = m_{\phi_{CZ}^P}(x)$ (Σχ. 5.7), ο υπολογισμός των στοιχείων του μητρώου (15.6.2) επιτυγχάνεται και πάλι από την επίλυση του συστήματος διαφορικών εξισώσεων (15.6.4) για κατάλληλες τιμές των συντελεστών $\beta_k, \gamma_k, \delta_k$,

$\bar{\beta}_k, \bar{\gamma}_k, \bar{\delta}_k, \tilde{\beta}_k, \tilde{\gamma}_k, \tilde{\delta}_k$ ($k=1,2,3$) και πιο συγκεκριμένα για $\beta_1 = \gamma_1 = \delta_1 = \bar{\beta}_1 = \bar{\gamma}_1 = \bar{\delta}_1 = \tilde{\beta}_1 = \tilde{\gamma}_1 = \tilde{\delta}_1 = 1$, $\beta_2 = \gamma_2 = \delta_2 = \bar{\beta}_2 = \bar{\gamma}_2 = \bar{\delta}_2 = \tilde{\beta}_2 = \tilde{\gamma}_2 = \tilde{\delta}_2 = \beta_3 = \gamma_3 = \delta_3 = \bar{\beta}_3 = \bar{\gamma}_3 = \bar{\delta}_3 = \tilde{\beta}_3 = \tilde{\gamma}_3 = \tilde{\delta}_3 = 0$ στα άκρα του στοιχείου j ($x=0$) και k ($x=L$). Αξίζει να σημειωθεί ότι οι σχέσεις (5.6.5) αποτελούν τις πλέον γενικές γραμμικές συνοριακές συνθήκες που σχετίζονται με το πρόβλημα, συμπεριλαμβάνοντας την ελαστική στήριξη ή δέσμευση.

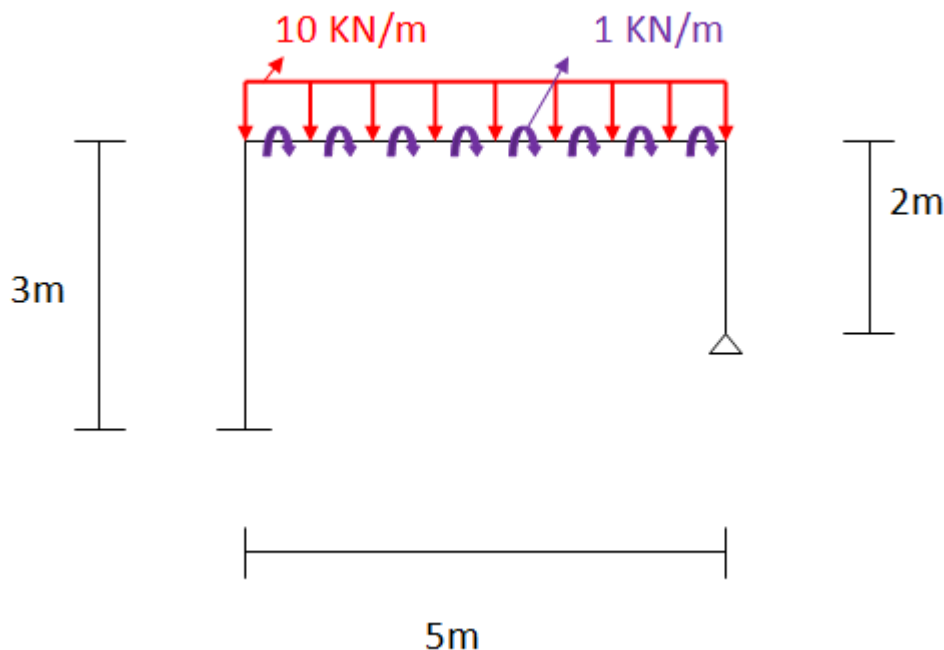
Κεφάλαιο 6 : Αριθμητικό παράδειγμα μέρος Α χωρικό πλαίσιο κοίλης ορθογωνικής διατομής

6.1 Εισαγωγή

Προκειμένου να διερευνηθεί η επιρροή της διατμητικής και στρεπτικής στρέβλωσης, εξετάζεται μεταλλικό ($E=210 \text{ GPa}$, $\nu=0.3$) χωρικό πλαίσιο, που αποτελείται από δύο άνισα υποστυλώματα στηριζόμενα σε μια πάκτωση και μια άρθρωση, υποβαλλόμενο σε κατακόρυφο ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο 10 kN/m και ομοιόμορφα κατανεμημένο στρεπτικό φορτίο 1 kNm/m (Σχ. 6.1.). Ο φορέας αποτελείται από πρότυπη κοίλη ορθογωνική διατομή RHS500x300x20 (Σχ. 6.2.).

Στην παρούσα εργασία χρησιμοποιήθηκαν 2 προσομοιώματα για την επίλυση του φορέα. Στο προσομοίωμα α) αγνοήθηκε πλήρως η ακαμψία των κόμβων, ενώ στο β) οι κόμβοι είναι πρακτικά άκαμπτοι. Αυτό επιτεύχθηκε στην επίλυση με ραβδωτά στοιχεία με τη χρήση στοιχείων που συντρέχουν στον κόμβο με γεωμετρικά χαρακτηριστικά 500 φορές μεγαλύτερα από αυτά της διατομής RHS500x300x20 , και στην επίλυση με πεπερασμένα στοιχεία προσομοιώνοντας τον κόμβο ως άκαμπο.

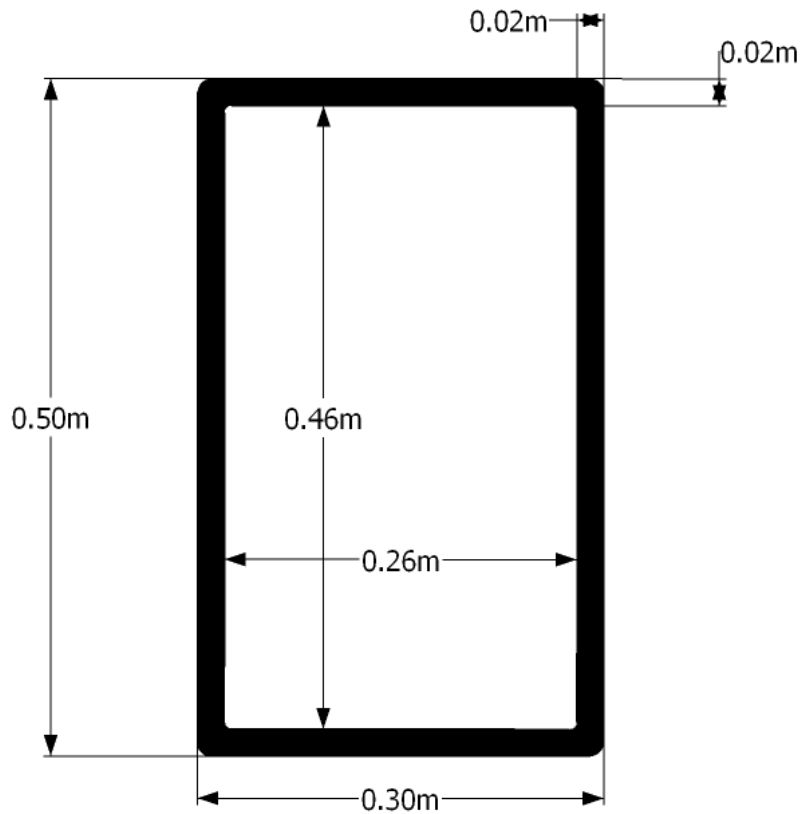
Τα αποτελέσματα των αναλύσεων συγκρίνονται με τα αντίστοιχα των θεωριών Euler-Bernoulli, Timoshenko-Ομοιόμορφη Διάτμηση, Ανομοιόμορφη Στρέψη, Γενικευμένη στρέβλωση καθώς και με τη μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων, και η σύγκριση γίνεται μεταξύ κινηματικών μεγεθών, εντατικών μεγεθών καθώς και αναπτυσσόμενων ορθών τάσεων σε χαρακτηριστικές διατομές.



Σχ. 6.1. Εμπρόσθια όψη χωρικού πλαισίου

6.2 Γεωμετρικά χαρακτηριστικά διατομής RHS 500X300X20

Στο Α μέρος των αριθμητικών εφαρμογών χρησιμοποιήθηκε διατομή RHS500x300x20 διαστάσεων $b=300\text{mm}$, $h=500\text{mm}$ και πάχος 20mm (Σχ. 6.2.), με τιμές των γεωμετρικών σταθερών που παρουσιάζονται στον Πίνακα 1.



Σχ. 6.2. Διατομή RHS500x300x20

Πίνακας 1 : Τιμές γεωμετρικών σταθερών διατομής RHS500x300x20

Γεωμετρική σταθερά	Τιμή	Μονάδα μέτρησης
A	3.03340 E-2	m^2
I_{yy}	1.01042 E-3	m^4
I_{zz}	4.49194 E-4	m^4
A_y	8.94076 E-3	m^2
A_z	1.82493 E-2	m^2

Γεωμετρική σταθερά	Τιμή	Μονάδα μέτρησης
I_t	9.80216 E-4	m^4
C_s	9.03594E-7	m^6
$I_{\phi_x^P \phi_x^P}$	8.94667 E-7	m^6
$I_{\phi_y^P \phi_y^P}$	2.85448 E-6	m^4
$I_{\phi_z^P \phi_z^P}$	1.48675 E-7	m^4
$I_{\phi_y^P \phi_x^P}$	-7.57998 E-9	m^5
$I_{\phi_z^P \phi_x^P}$	7.80773 E-10	m^5
$I_{\phi_x^S \phi_y^P}$	-4.27323 E-10	m^5
$I_{\phi_x^S \phi_z^P}$	-5.82498 E-10	m^5
$I_{\phi_x^S \phi_x^S}$	3.14321 E-8	m^6

6.3. Μητρώα στιβαρότητας στοιχείων

Τα μητρώα στιβαρότητας των στοιχείων του χωρικού πλαισίου, έχουν μορφωθεί σύμφωνα με τις παρακάτω θεωρίες :

- Euler-Bernoulli (12x12)
- Timoshenko – Ομοιόμορφη διάτμηση (12x12)
- Γενικευμένη στρέβλωση (20x20)

Παρακάτω παρουσιάζονται η μορφή των μητρώων στιβαρότητας σύμφωνα με κάθε θεωρία καθώς και τα μητρώα κάθε στοιχείου του φορέα.

Euler-Bernoulli

$$\begin{pmatrix} EA/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -EA/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12EI_z/L^3 & 0 & 0 & 0 & 6EI_z/L^2 & 0 & -12EI_z/L^3 & 0 & 0 & 0 & 6EI_z/L^2 \\ 0 & 0 & 12EI_y/L^3 & 0 & -6EI_y/L^2 & 0 & 0 & 0 & -12EI_y/L^3 & 0 & -6EI_y/L^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & GI_t/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -GI_t/L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6EI_y/L^2 & 0 & 4EI_y/L & 0 & 0 & 0 & 6EI_y/L^2 & 0 & 2EI_y/L & 0 \\ 0 & 6EI_z/L^2 & 0 & 0 & 0 & 4EI_z/L & 0 & -6EI_z/L^2 & 0 & 0 & 0 & 2EI_z/L \\ -EA/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & EA/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12EI_z/L^3 & 0 & 0 & 0 & -6EI_z/L^2 & 0 & 12EI_z/L^3 & 0 & 0 & 0 & 6EI_z/L^2 \\ 0 & 0 & -12EI_y/L^3 & 0 & 6EI_y/L^2 & 0 & 0 & 0 & 12EI_y/L^3 & 0 & -6EI_y/L^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -GI_t/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & GI_t/L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6EI_y/L^2 & 0 & 2EI_y/L & 0 & 0 & 0 & 6EI_y/L^2 & 0 & 4EI_y/L & 0 \\ 0 & 6EI_z/L^2 & 0 & 0 & 0 & 2EI_z/L & 0 & -6EI_z/L^2 & 0 & 0 & 0 & 4EI_z/L \end{pmatrix}$$

$$[K^1] = \begin{pmatrix} 2121847 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2121847 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 41924.773 & 0 & 0 & 0 & 62887.16 & 0 & -41924.8 & 0 & 0 & 0 & 62887.16 \\ 0 & 0 & 94305.87 & 0 & -141459 & 0 & 0 & 0 & -94305.9 & 0 & -141459 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 26390.43 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -26390.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -141459 & 0 & 282917.6 & 0 & 0 & 0 & 141458.8 & 0 & 141458.8 & 0 \\ 0 & 62887.16 & 0 & 0 & 0 & 125774.32 & 0 & -62887.2 & 0 & 0 & 0 & 62887.16 \\ -2121847 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2121847 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -41924.77 & 0 & 0 & 0 & -62887.16 & 0 & 41924.77 & 0 & 0 & 0 & -62887.2 \\ 0 & 0 & -94305.9 & 0 & 141458.8 & 0 & 0 & 0 & 94305.87 & 0 & 141458.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -26390.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 26390.43 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -141459 & 0 & 141458.8 & 0 & 0 & 0 & 141458.8 & 0 & 282917.6 & 0 \\ 0 & 62887.16 & 0 & 0 & 0 & 62887.16 & 0 & -62887.2 & 0 & 0 & 0 & 125774.3 \end{pmatrix}$$

$$[K^2] = \begin{pmatrix} 1273108 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1273108 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9055.751 & 0 & 0 & 0 & 22639.3776 & 0 & -9055.75 & 0 & 0 & 0 & 22639.38 \\ 0 & 0 & 20370.07 & 0 & -50925.2 & 0 & 0 & 0 & -20370.1 & 0 & -50925.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15834.26 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -15834.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -50925.2 & 0 & 169750.6 & 0 & 0 & 0 & 50925.17 & 0 & 84875.28 & 0 \\ 0 & 22639.378 & 0 & 0 & 0 & 75464.592 & 0 & -22639.4 & 0 & 0 & 0 & 37732.3 \\ -1273108 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1273108 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -9055.751 & 0 & 0 & 0 & -22639.3776 & 0 & 9055.751 & 0 & 0 & 0 & -22639.4 \\ 0 & 0 & -20370.1 & 0 & 50925.17 & 0 & 0 & 0 & 20370.07 & 0 & 50925.17 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -15834.3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 15834.26 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -50925.2 & 0 & 84875.28 & 0 & 0 & 0 & 50925.17 & 0 & 169750.6 & 0 \\ 0 & 22639.378 & 0 & 0 & 0 & 37732.296 & 0 & -22639.4 & 0 & 0 & 0 & 75464.59 \end{pmatrix}$$

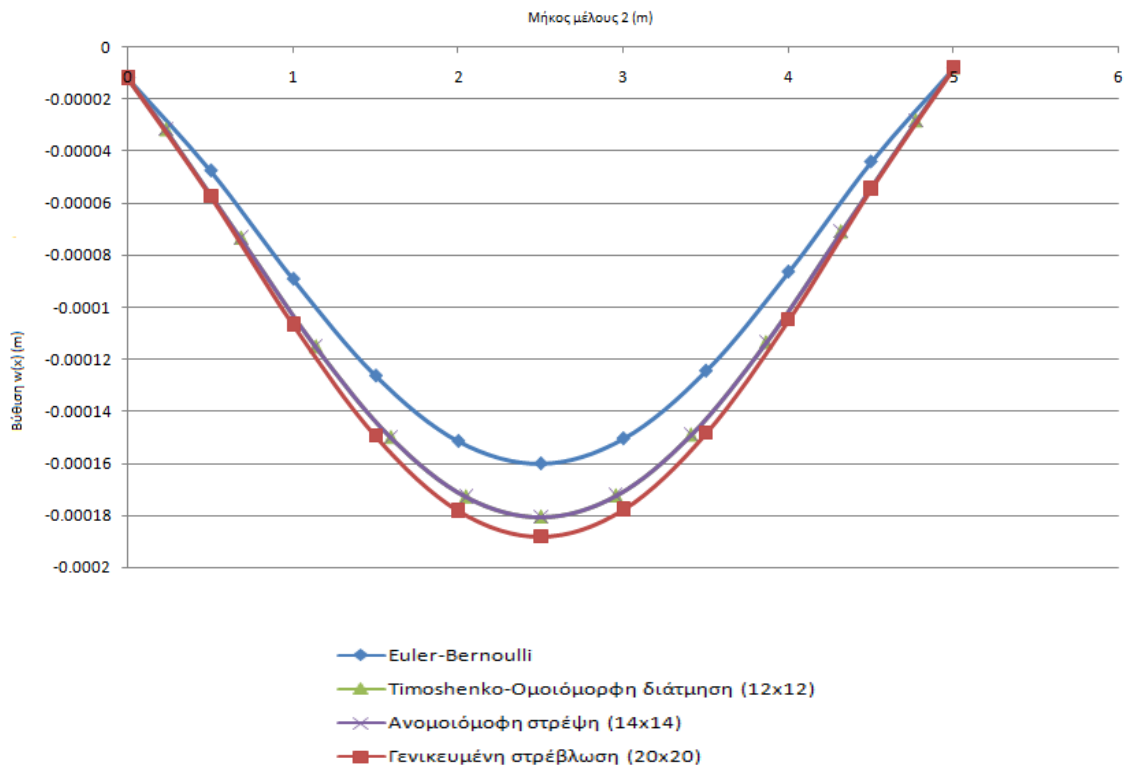
$$[K^3] = \begin{pmatrix} 3182770.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3182771 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 141496.11 & 0 & 0 & 0 & 141496.11 & 0 & -141496 & 0 & 0 & 0 & 141496.1 \\ 0 & 0 & 318282.3 & 0 & -318282 & 0 & 0 & 0 & -318282 & 0 & -318282 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 39585.65 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -39585.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -318282 & 0 & 424376.4 & 0 & 0 & 0 & 318282.3 & 0 & 212188.2 & 0 \\ 0 & 141496.11 & 0 & 0 & 0 & 188661.48 & 0 & -141496 & 0 & 0 & 0 & 94330.74 \\ -3182771 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3182771 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -141496.1 & 0 & 0 & 0 & -141496.11 & 0 & 141496.1 & 0 & 0 & 0 & -141496 \\ 0 & 0 & -318282 & 0 & 318282.3 & 0 & 0 & 0 & 318282.3 & 0 & 318282.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -39585.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 39585.65 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -318282 & 0 & 212188.2 & 0 & 0 & 0 & 318282.3 & 0 & 424376.4 & 0 \\ 0 & 141496.11 & 0 & 0 & 0 & 94330.74 & 0 & -141496 & 0 & 0 & 0 & 188661.5 \end{pmatrix}$$

$$[K^2] = \begin{pmatrix} 1273108 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1273108 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8520 & 0 & 0 & 0 & 21303 & 0 & -8520 & 0 & 0 & 0 & 21303 \\ 0 & 0 & 19054 & 0 & -47633 & 0 & 0 & 0 & -19054 & 0 & -47633 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15833 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -15833 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -47633 & 0 & 161519 & 0 & 0 & 0 & 47633 & 0 & 76645 & 0 \\ 0 & 21303 & 0 & 0 & 0 & 72125 & 0 & -21303 & 0 & 0 & 0 & 34393 \\ -1273108 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1273108 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8520 & 0 & 0 & 0 & -21303 & 0 & 8520 & 0 & 0 & 0 & -21303 \\ 0 & 0 & -19054 & 0 & 47633 & 0 & 0 & 0 & 19054 & 0 & 47633 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -15833 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 15833 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -47633 & 0 & 76645 & 0 & 0 & 0 & 47633 & 0 & 161519 & 0 \\ 0 & 21303 & 0 & 0 & 0 & 34393 & 0 & -21303 & 0 & 0 & 0 & 72125 \end{pmatrix}$$

$$[K^3] = \begin{pmatrix} 3182770 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3182770 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 101657 & 0 & 0 & 0 & 101657 & 0 & -101657 & 0 & 0 & 0 & 101657 \\ 0 & 0 & 222283 & 0 & -222283 & 0 & 0 & 0 & -222283 & 0 & -222283 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 39585 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -39585 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -222283 & 0 & 328374 & 0 & 0 & 0 & 222283 & 0 & 116190 & 0 \\ 0 & 101657 & 0 & 0 & 0 & 148823 & 0 & -101657 & 0 & 0 & 0 & 54493 \\ -3182770 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3182770 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -101657 & 0 & 0 & 0 & -101657 & 0 & 101657 & 0 & 0 & 0 & -101657 \\ 0 & 0 & -222283 & 0 & 222283 & 0 & 0 & 0 & 222283 & 0 & 222283 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -39585 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 39585 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -222283 & 0 & 116190 & 0 & 0 & 0 & 222283 & 0 & 328374 & 0 \\ 0 & 101657 & 0 & 0 & 0 & 54493 & 0 & -101657 & 0 & 0 & 0 & 148823 \end{pmatrix}$$

6.4. Σύγκριση αποτελεσμάτων

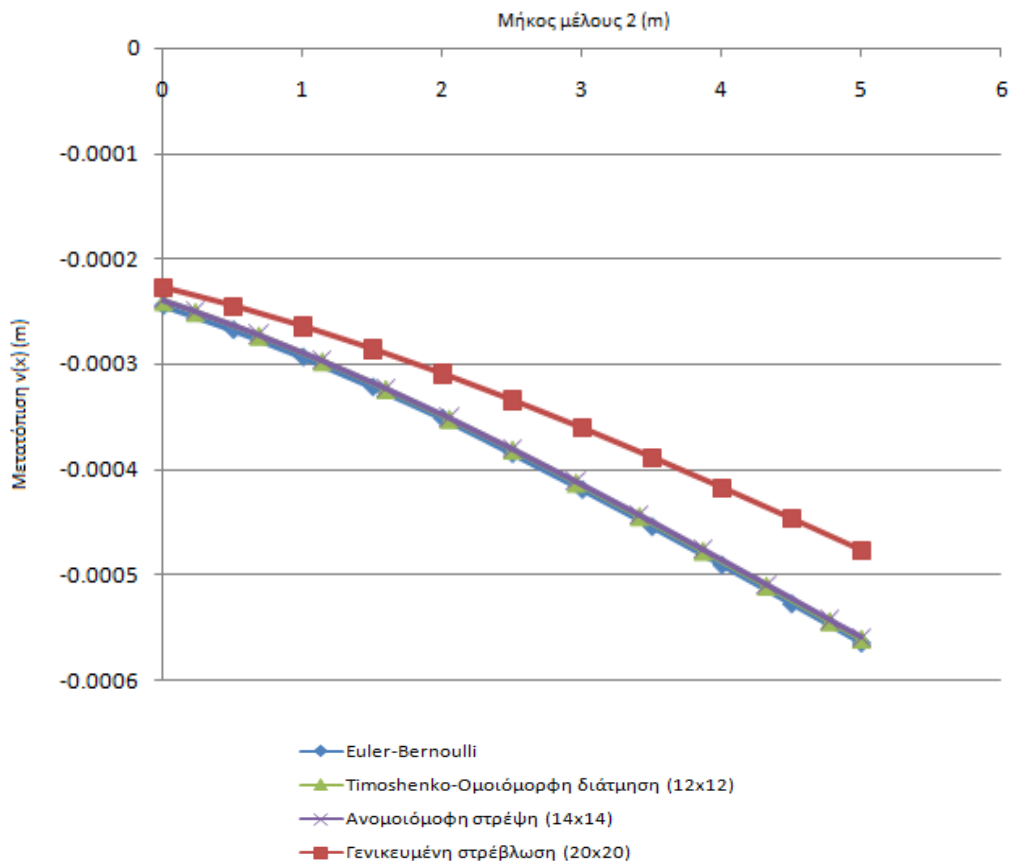
6.4.1. Σύγκριση κινηματικών μεγεθών



Σχ. 6.3. Βύθιση οριζώντιου μέλους $w(x)$, κατά το μήκος του

Πίνακας 2 : Σύγκριση μέγιστης βύθισης $w(x)$ οριζώντιου μέλους

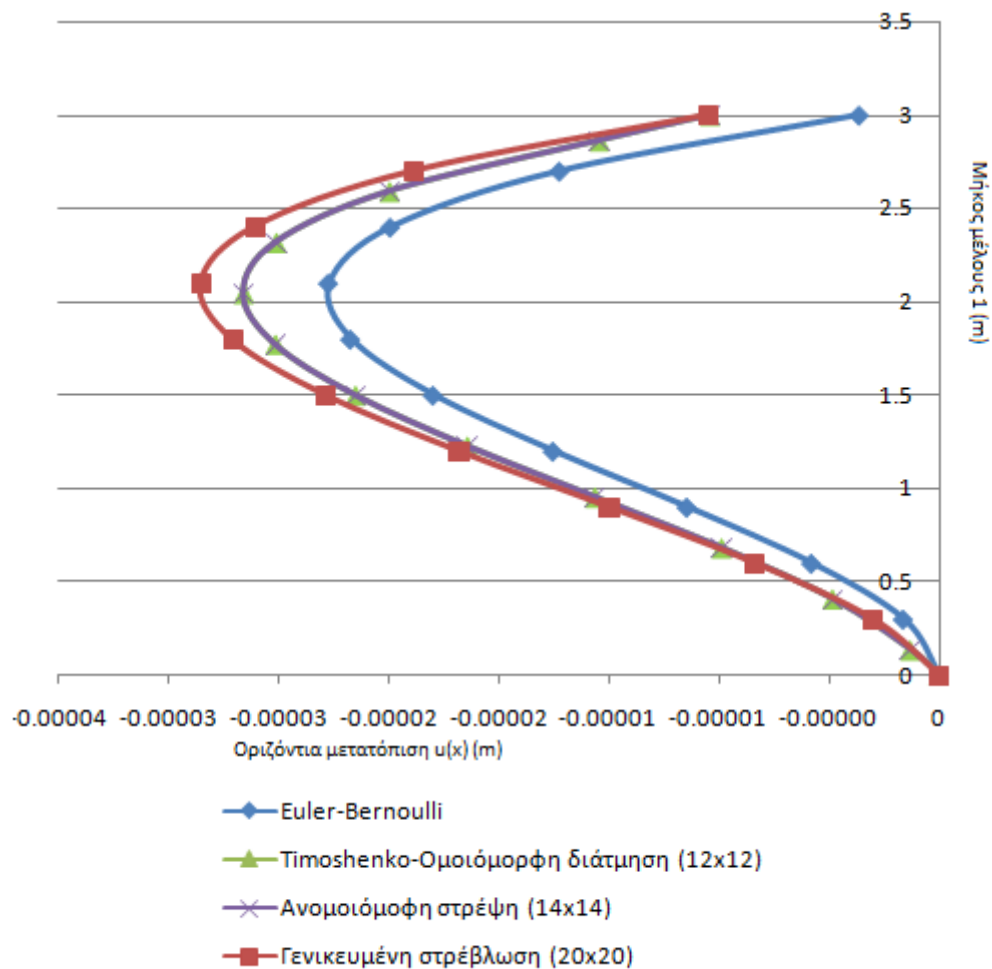
Συγκρινόμενο Μέγεθος (μονάδες)	Χωρίς στερεό κόμβο	Με στερεό κόμβο	Διαφορά %	Μέθοδος επίλυσης
Μέγιστη βύθιση $w(x)$ οριζώντιου μέλους (m)	-0.00016	-0.000114	40.3%	Euler-Bernoulli
	-0.0001807	-0.000138	31%	Timoshenko
	-0.0001807	-0.000138	31%	Ανομοιόμορφη Στρέψη – 14x14
	-0.000188	-0.0001393	35%	Γενικευμένη Στρέβλωση 20x20
	-	-0.0001342	-	Τρισδιάστατα Πεπερασμένα στοιχεία



Σχ. 6.4. Οριζόντια μετατόπιση $v(x)$ οριζόντιου μέλους, κατά το μήκος του

Πίνακας 3 : Σύγκριση μέγιστης οριζόντιας μετατόπισης $v(x)$ οριζόντιου μέλους

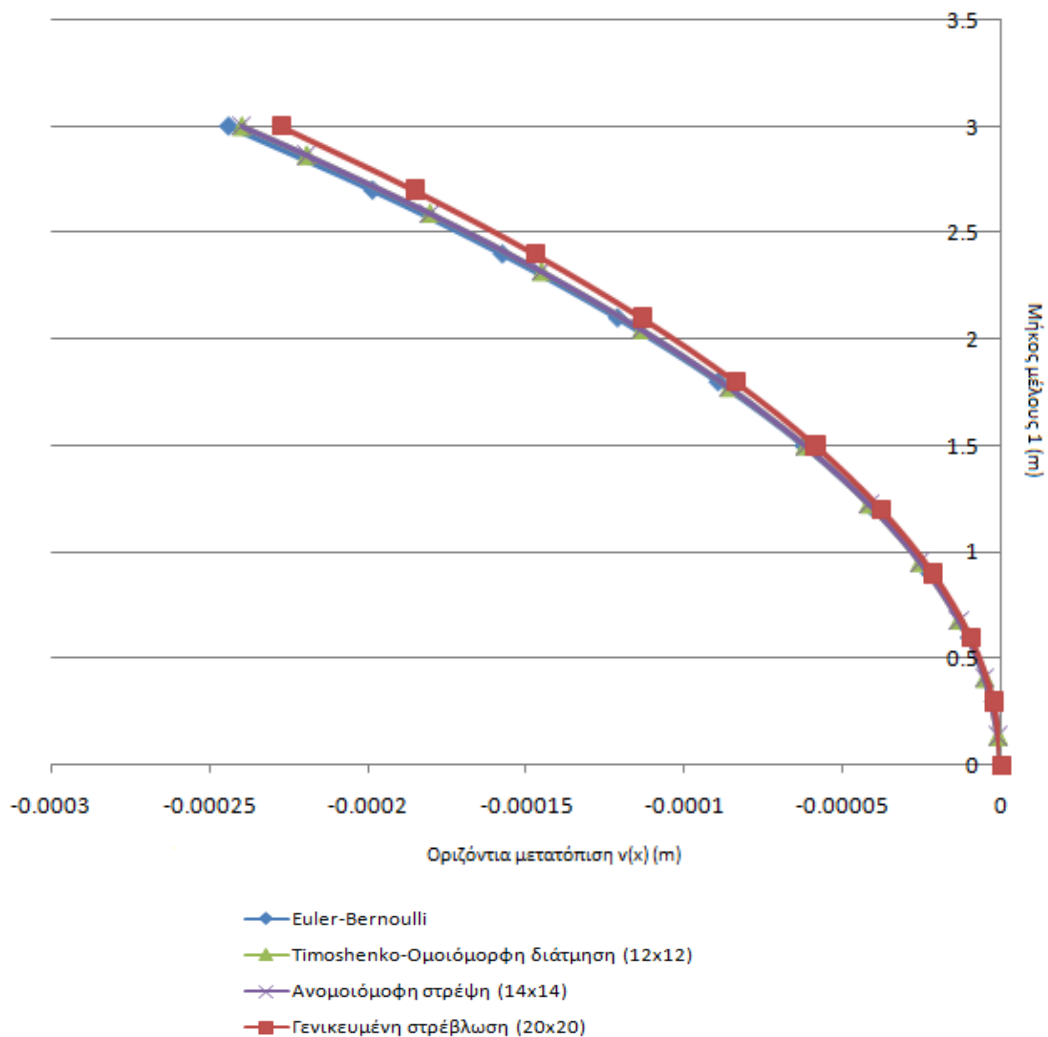
Συγκρινόμενο Μέγεθος (μονάδες)	Χωρίς στερεό κόμβο	Με στερεό κόμβο	Διαφορά %	Μέθοδος επίλυσης
Μέγιστη οριζόντια μετατόπιση $v(x)$ οριζόντιου μέλους (m)	-0.00056458	-0.000506	11.6%	Euler-Bernoulli
	-0.000561	-0.000507	10.7%	Timoshenko
	-0.000559	-0.000505	10.7%	Ανομοιόμορφη Στρέψη – 14x14
	-0.00047658	-0.000515	7.5%	Γενικευμένη Στρέβλωση 20x20
	-	-0.0005	-	Τρισδιάστατα Πεπερασμένα στοιχεία



Σχ. 6.5. Οριζόντια μετατόπιση $u(z)$ πακτωμένου υποστυλώματος, κατά το μήκος του

Πίνακας 4 : Σύγκριση οριζόντιας μετατόπισης $u(z)$ πακτωμένου υποστυλώματος

Συγκρινόμενο Μέγεθος (μονάδες)	Χωρίς στερεό κόμβο	Με στερεό κόμβο	Διαφορά %	Μέθοδος επίλυσης
Μέγιστη οριζόντια μετατόπιση $u(z)$ πακτωμένου υποστυλώματος (m)	-0.00002775	-0.0000304	8.7%	Euler-Bernoulli
	-0.00003163	-0.000037	14.5%	Timoshenko
	-0.00003163	-0.000037	14.5%	Ανομοιόμορφη Στρέψη – 14x14
	-0.00003356	-0.000039	14%	Γενικευμένη Στρέβλωση 20x20
	-	-0.0000349	-	Τρισδιάστατα Πεπερασμένα στοιχεία



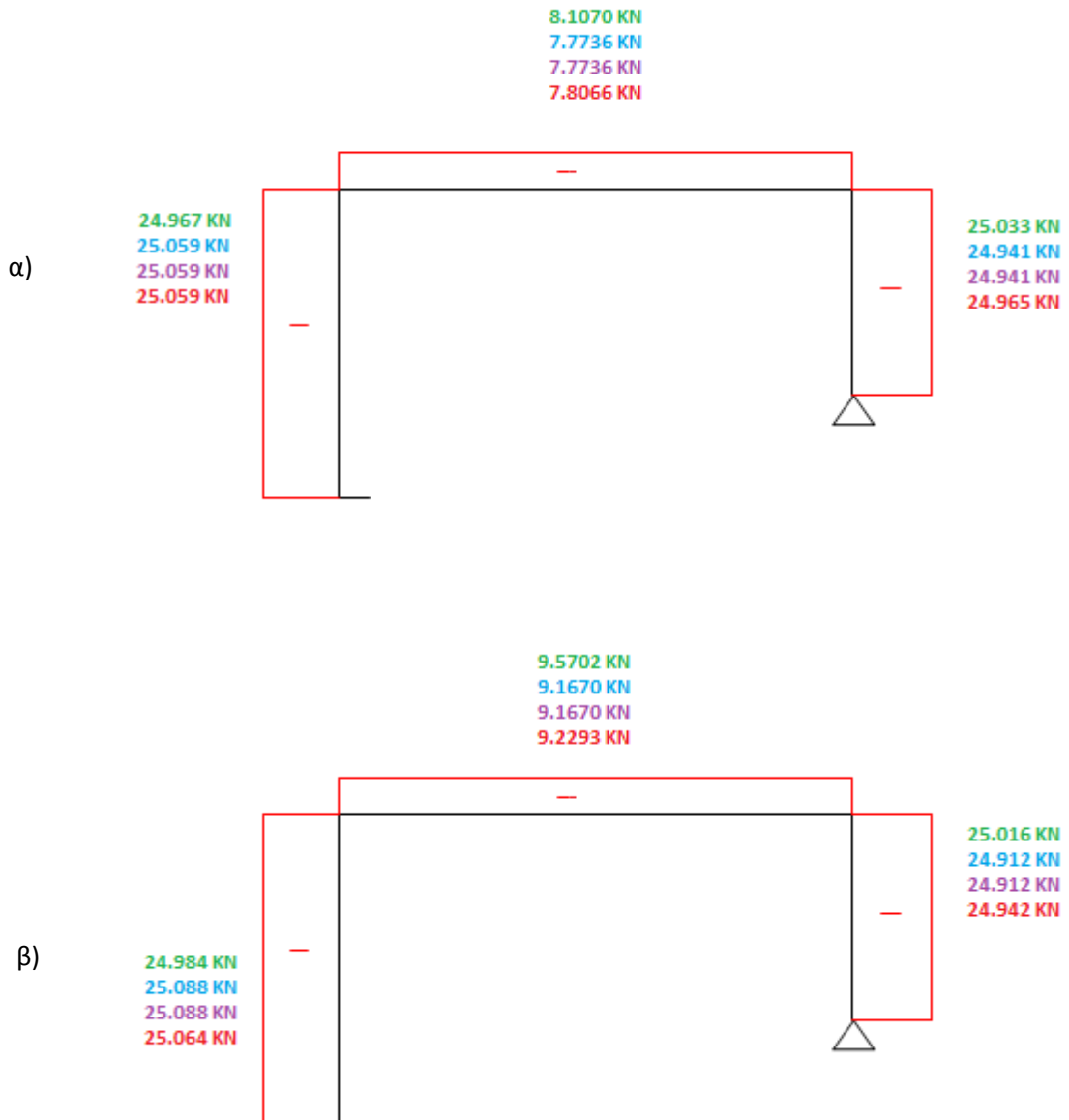
Σχ. 6.6. Οριζόντια μετατόπιση $v(z)$ πακτωμένου υποστυλώματος

Πίνακας 5 : Σύγκριση μέγιστης οριζόντιας μετατόπισης $v(z)$ πακτωμένου υποστυλώματος

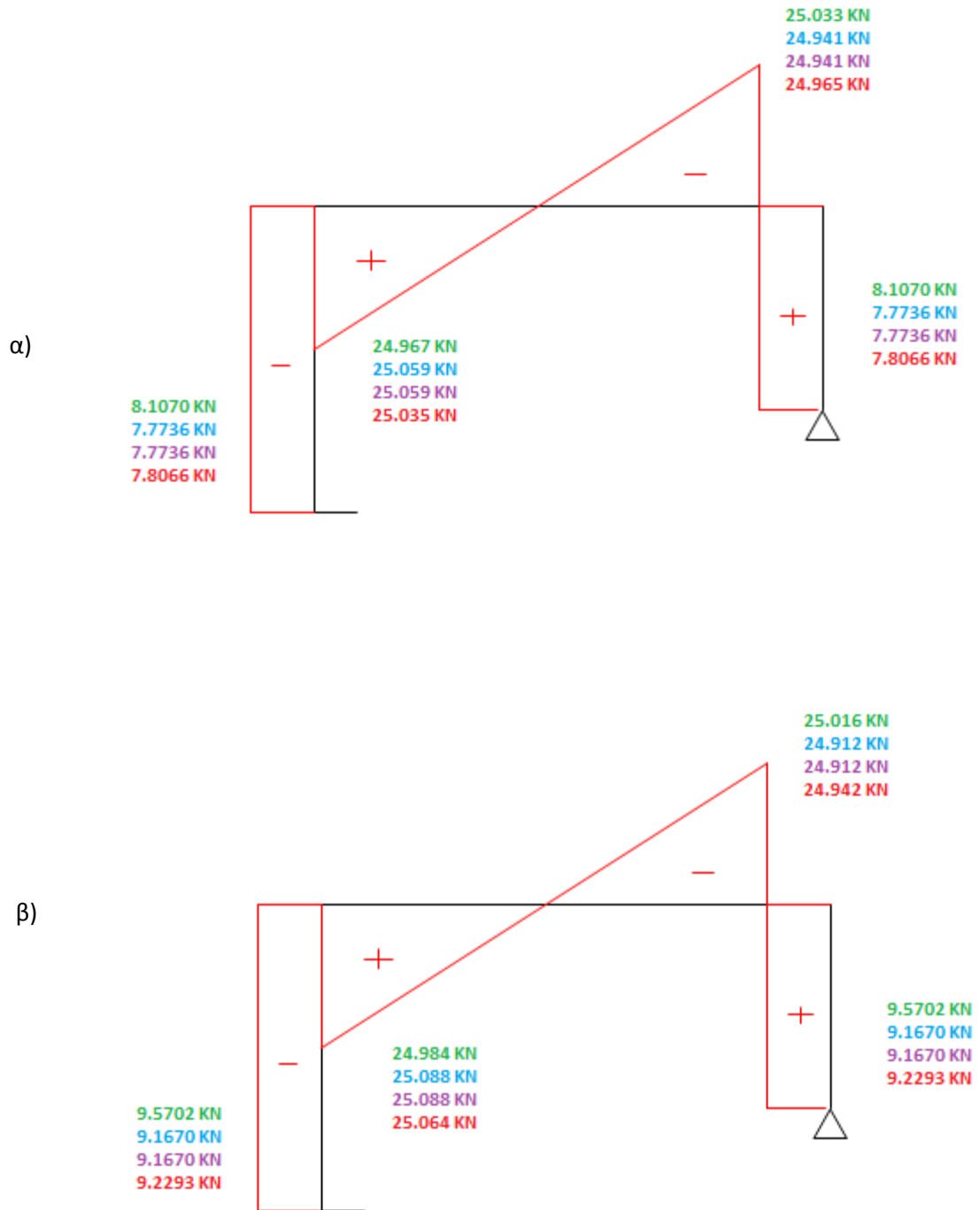
Συγκρινόμενο Μέγεθος (μονάδες)	Χωρίς στερεό κόμβο	Με στερεό κόμβο	Διαφορά %	Μέθοδος επίλυσης
Μέγιστη οριζόντια μετατόπιση $v(z)$ πακτωμένου υποστυλώματος (m)	-0.000244	-0.00023625	3.2%	Euler-Bernoulli
	-0.00023965	-0.0002295	4.5%	Timoshenko
	-0.00023965	-0.0002295	4.5%	Ανομοιόμορφη Στρέψη – 14x14
	-0.0002273	-0.0002394	5%	Γενικευμένη Στρέβλωση 20x20
	-	-0.0002412	-	Τρισδιάστατα Πεπερασμένα στοιχεία

6.4.2. Σύγκριση εντατικών μεγεθών

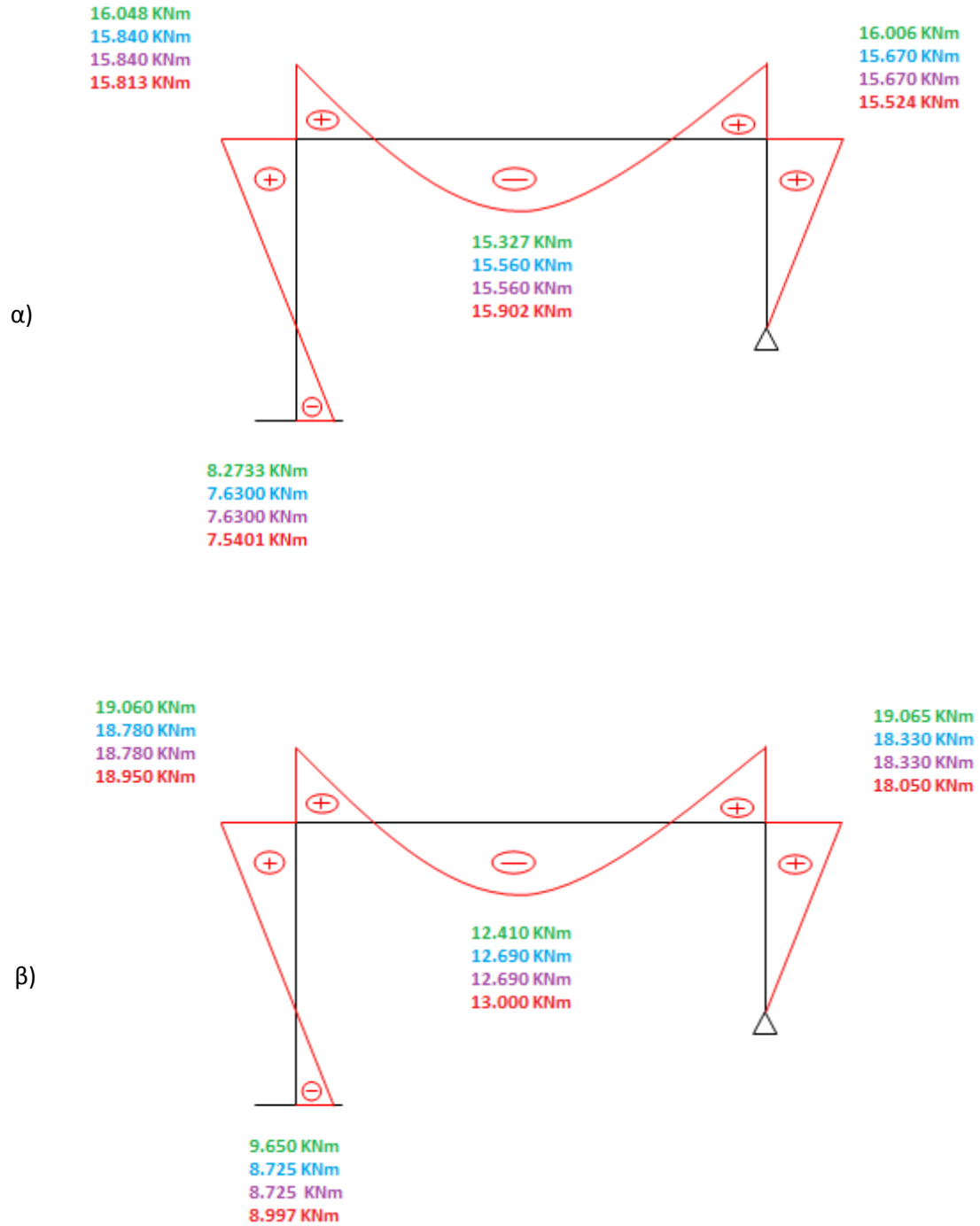
Euler - Bernoulli
 Timoshenko - Ομοιόμορφη διάτμηση
 Ανομοιόμορφη στρέψη - 14x14
 Γενικευμένη στρέβλωση - 20x20



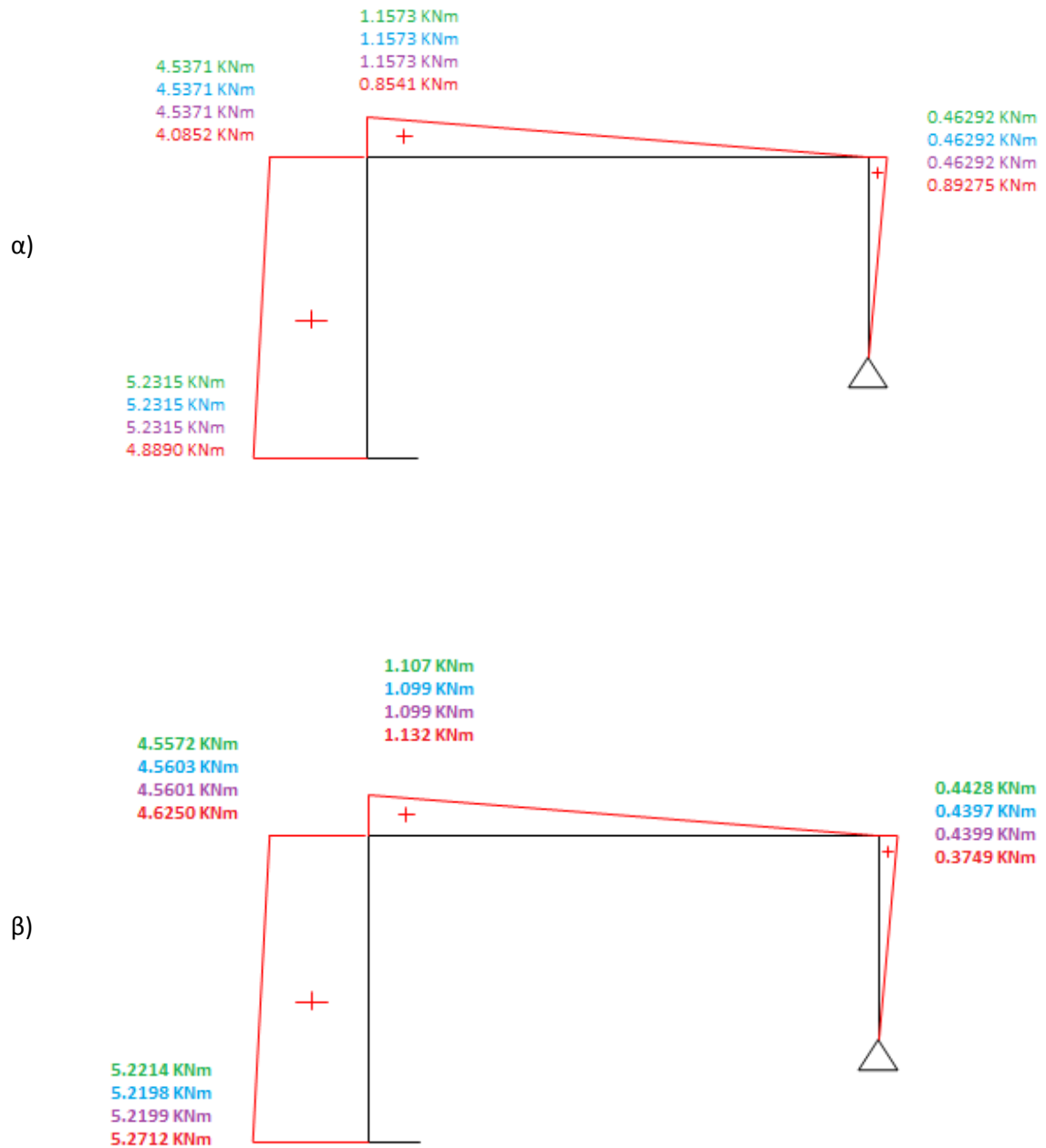
Σχ. 6.7. Διάγραμμα αξονικών δυνάμεων α) στο προσομοίωμα χωρίς στερεό κόμβο, β) στο προσομοίωμα με στερεό κόμβο



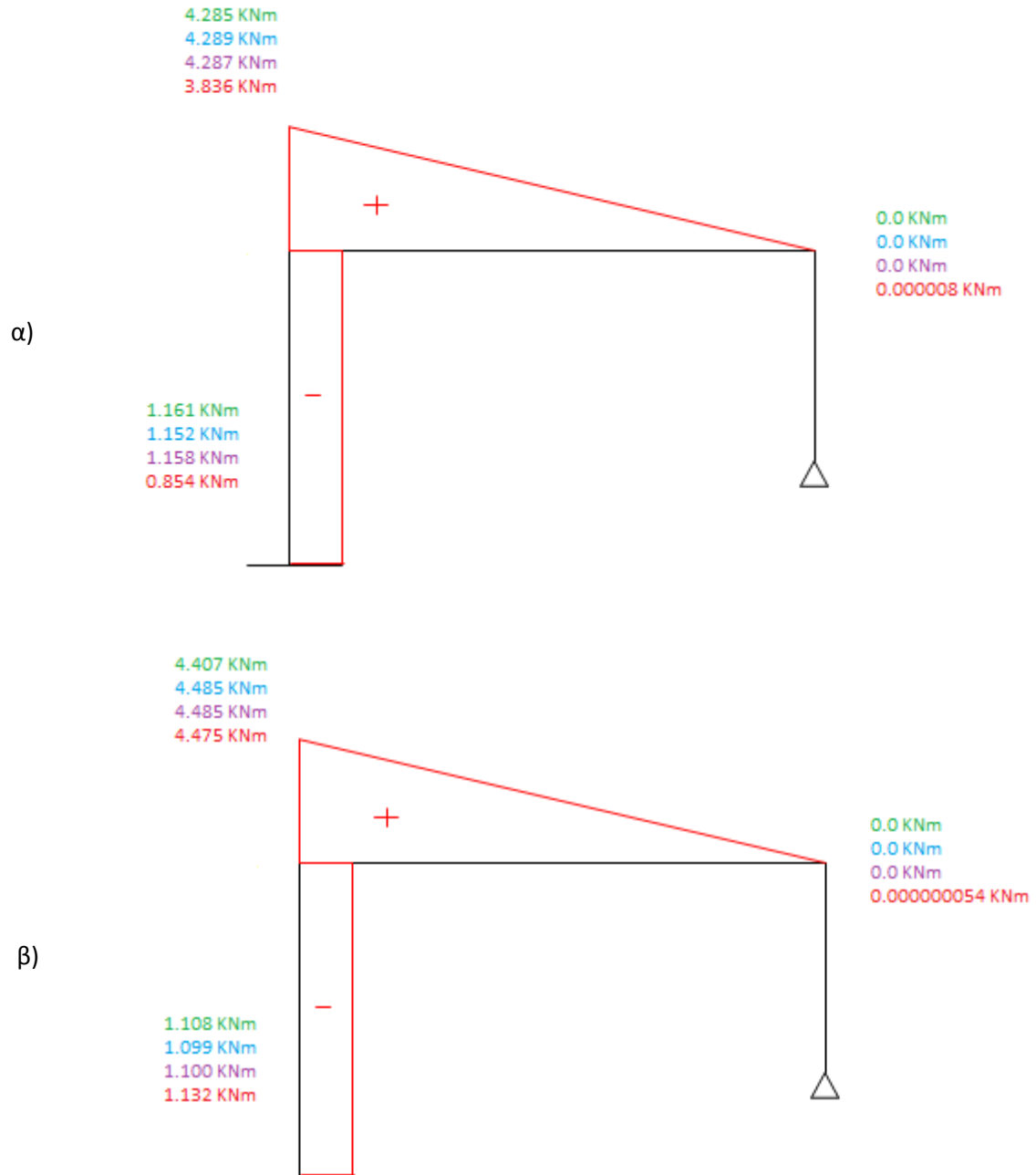
Σχ. 6.8. Διάγραμμα τεμνουσών δυνάμεων α) στο προσομοίωμα χωρίς στερεό κόμβο, β) στο προσομοίωμα με στερεό κόμβο



Σχ. 6.9. Διάγραμμα ροπών κάμψης εντός επιπέδου α) στο προσομοίωμα χωρίς στερεό κόμβο, β) στο προσομοίωμα με στερεό κόμβο

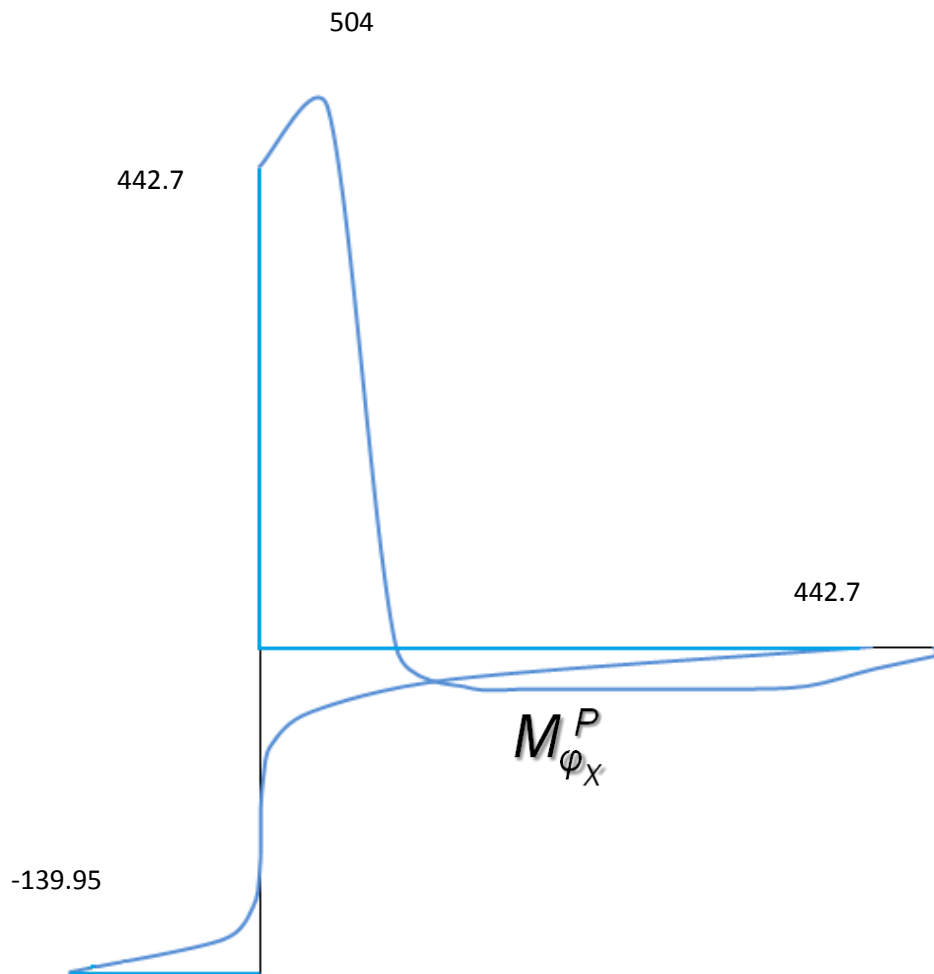


Σχ. 6.10. Διάγραμμα ροπών κάμψεως εκτός επιπέδου α) στο προσομοίωμα χωρίς στερεό κόμβο, β) στο προσομοίωμα με στερεό κόμβο

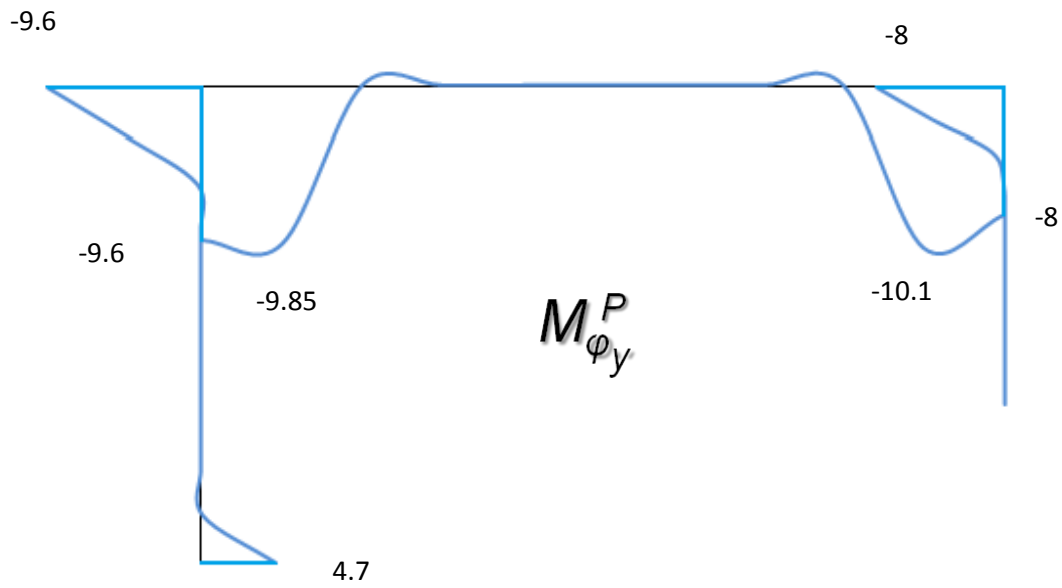


Σχ. 6.11. Διάγραμμα στρεπτικών ροπών α) στο προσομοίωμα χωρίς στερεό κόμβο, β) στο προσομοίωμα με στερεό κόμβο

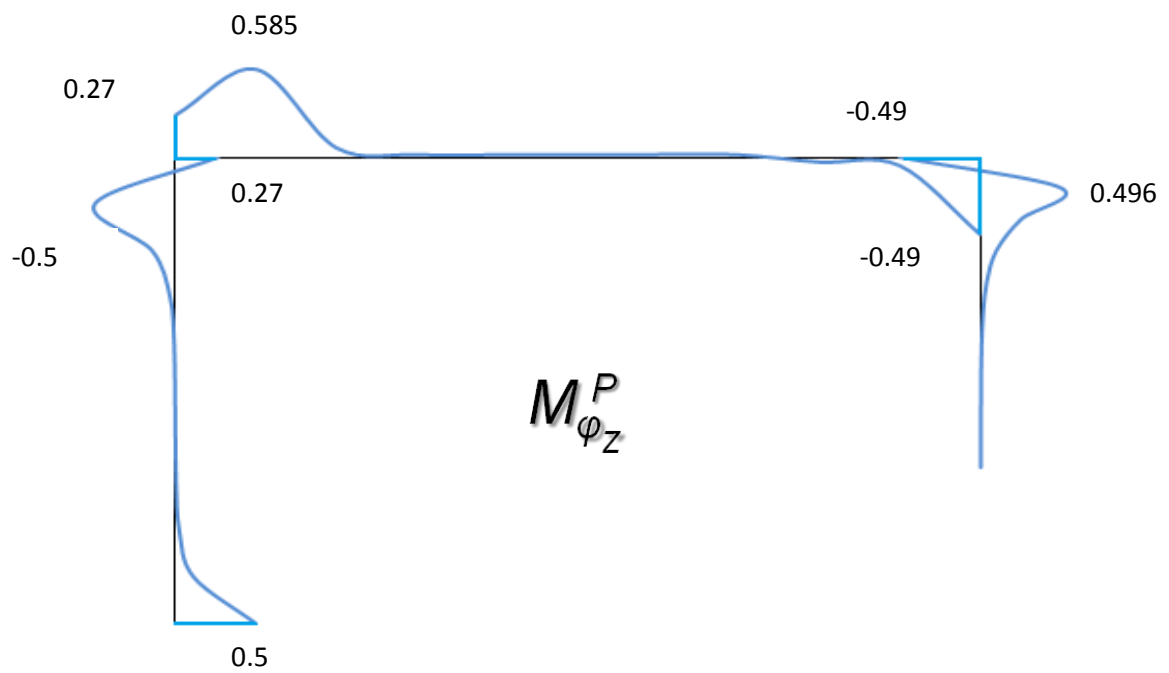
Παρουσιάζονται παρακάτω (Σχ.6.12. έως Σχ.6.15.) τα διαγράμματα εντατικών μεγεθών των διρροπών στρέβλωσης του πλαισίου. Τα δίρροπα στρέβλωσης εμφανίζουν χαμηλές τιμές στο μέσον των ράβδων, οι οποίες αυξάνουν εκθετικά πλησιάζοντας την πάκτωση (δέσμευση των κινηματικών μεγεθών $\eta_x, \eta_y, \eta_z, \xi_x$) και τους κόμβους (θέσεις ένωσης μελών) του πλαισίου.



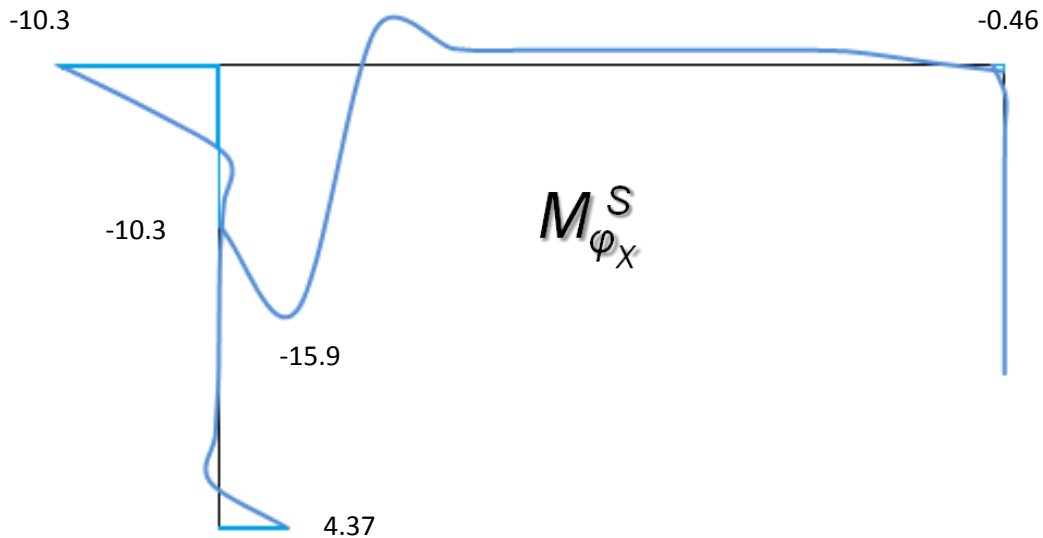
Σχ. 6.12. Διάγραμμα διρροπής πρωτογενούς στρεπτικής στέβλωσης $M_{\phi_x}^P$



Σχ. 6.13. Διάγραμμα διρροπής διατμητικής στέβλωσης $M_{\phi_y}^P$



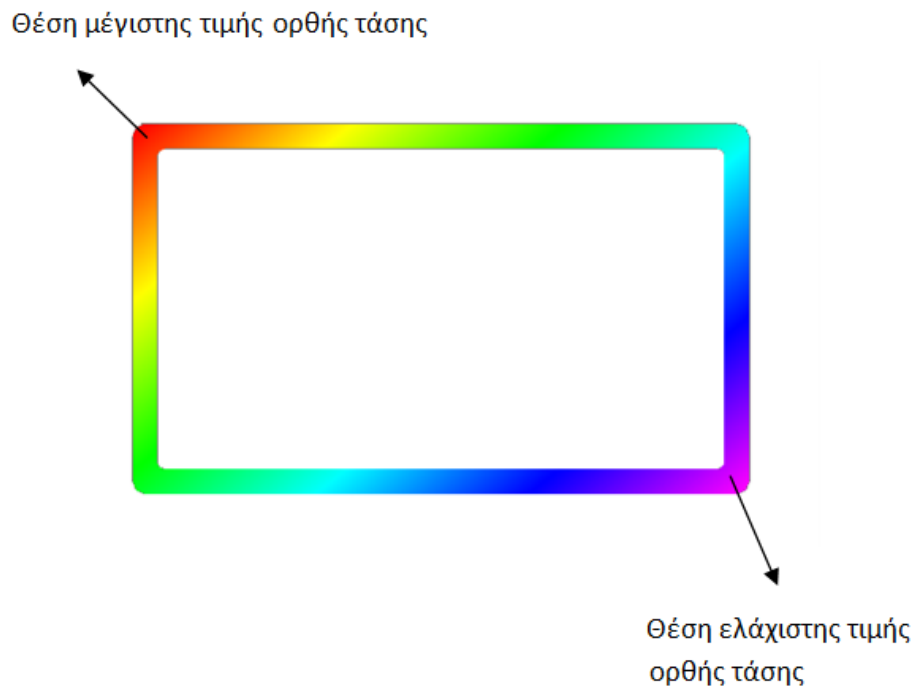
Σχ. 6.14. Διάγραμμα διρροπής διατμητικής στέβλωσης $M_{\phi_z}^P$



Σχ. 6.15. Διάγραμμα διρροπής δευτερογενούς στρεπτικής στέβλωσης $M_{\phi x}^S$

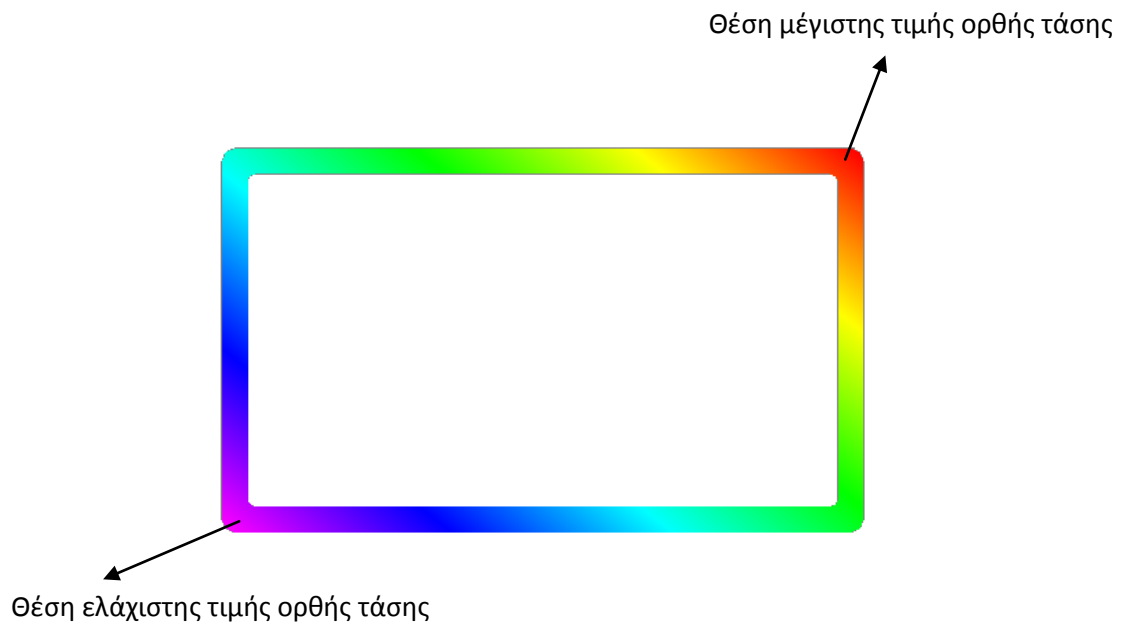
6.4.3. Σύγκριση τάσεων

Οι θεωρίες των Euler – Bernoulli και Timoshenko, έχοντας υιοθετήσει την παραδοχή της επιπεδότητας της διατομής, παρουσιάζουν κατανομές, στις οποίες οι ισοστασικές καμπύλες είναι ευθείες γραμμές. Δεν είναι σε θέση να προσεγγίσουν τις κατανομές τάσεων, όπως αυτές προκύπτουν από την ανάλυση με τη μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων. Αντίθετα, λαμβάνοντας υπόψη τη στρεπτική και διατμητική στρέβλωση, η παραγόμενη κατανομή προσεγγίζει εξαιρετικά την κατανομή των πεπερασμένων στοιχείων. Επίσης, η προσέγγιση είναι πολύ καλύτερη, στον αριθμητικό υπολογισμό της μέγιστης ορθής τάσης. Οι συγκρίσεις έγιναν σε διατομές του προσομοιώματος του φορέα με άκαμπτους κόμβους, στο οποίο τα εντατικά μεγέθη έχουν μεγαλύτερες τιμές στις χαρακτηριστικές διατομές.



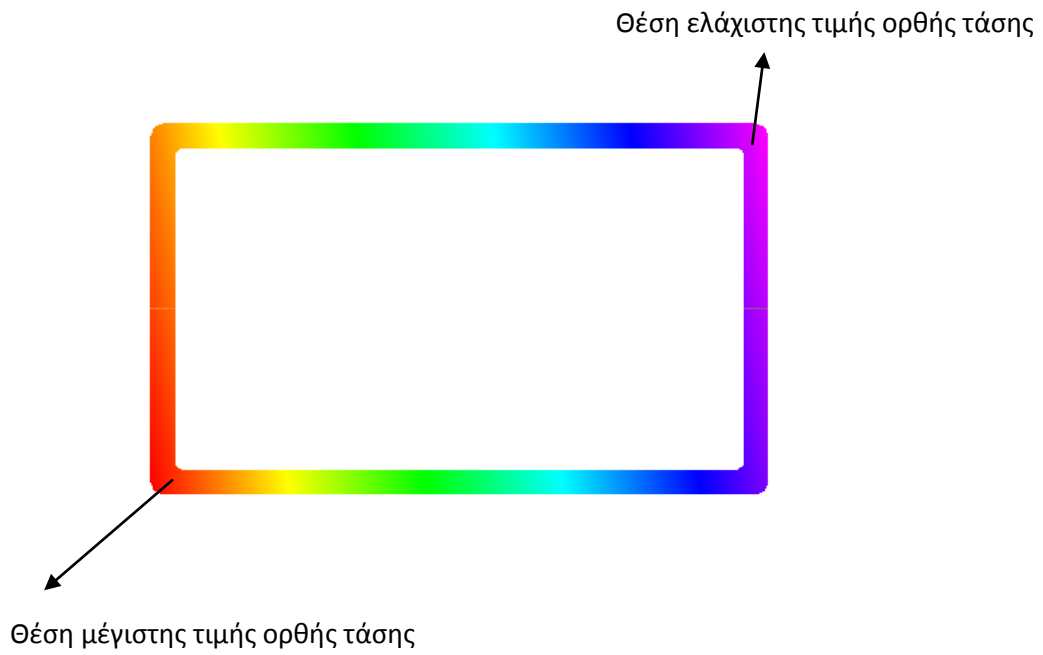
Σχ.6.12. Σύγκριση κατανομής ορθών τάσεων στην πάκτωση

Συγκρινόμενο Μέγεθος (μονάδες)	Μέγιστη ορθή τάση σ_{max}	Ελάχιστη ορθή τάση σ_{min}	Διαφορά % από επίλυση με πεπερασμένα στοιχεία σ_{max}	Διαφορά % από επίλυση με πεπερασμένα στοιχεία σ_{min}	Μέθοδος επίλυσης
σ_x (MPa)	3.181	-4.83	8.06%	10.55%	Euler-Bernoulli
	3.008	-4.662	13.06%	13.66%	Timoshenko
	3.008	-4.662	13.06%	13.66%	Ανομοιόμορφη Στρέψη – 14x14
	3.337	-4.639	3.55%	14.1%	Γενικευμένη Στρέβλωση 20x20
	3.460	-5.407	-	-	Τρισδιάστατα Πεπερασμένα στοιχεία



Σχ.6.13. Σύγκριση κατανομής ορθών τάσεων στην κεφαλή του πακτωμένου μέλους

Συγκρινόμενο Μέγεθος (μονάδες)	Μέγιστη ορθή τάση σ_{max}	Ελάχιστη ορθή τάση σ_{min}	Διαφορά % από επίλυση με πεπερασμένα στοιχεία σ_{max}	Διαφορά % από επίλυση με πεπερασμένα στοιχεία σ_{min}	Μέθοδος επίλυσης
σ_x (MPa)	4.634	-6.282	12.9%	12.3%	Euler-Bernoulli
	4.602	-6.256	13.5%	12.66%	Timoshenko
	4.602	-6.255	13.5%	12.67%	Ανομοιόμορφη Στρέψη – 14x14
	4.931	-6.234	7.3%	12.97%	Γενικευμένη Στρέβλωση 20x20
	5.32	-7.163	-	-	Τρισδιάστατα Πεπερασμένα στοιχεία



Σχ. 6.14. Σύγκριση κατανομών ορθών τάσεων στο άκρο του οριζόντιου μέλους

Συγκρινόμενο Μέγεθος (μονάδες)	Μέγιστη ορθή τάση σ_{max}	Ελάχιστη ορθή τάση σ_{min}	Διαφορά % από επίλυση με πεπερασμένα στοιχεία σ_{max}	Διαφορά % από επίλυση με πεπερασμένα στοιχεία σ_{min}	Μέθοδος επίλυσης
σ_x (MPa)	2.963	-3.587	29.45%	10.68%	Euler-Bernoulli
	2.911	-3.515	30.7%	12.47%	Timoshenko
	2.911	-3.516	30.7%	12.46%	Ανομοιόμορφη Στρέψη – 14x14
	3.571	-3.452	14.97%	14%	Γενικευμένη Στρέβλωση 20x20
	4.199	-4.016	-	-	Τρισδιάστατα Πεπερασμένα στοιχεία

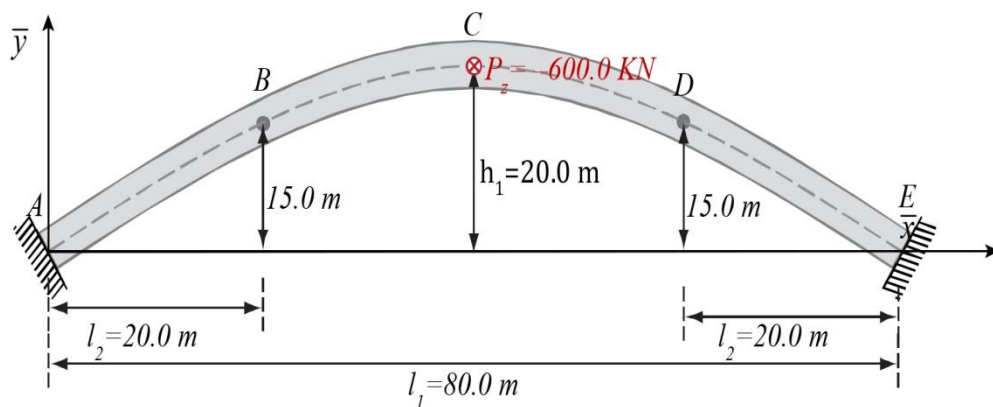
Κεφάλαιο 7 : Αριθμητικό παράδειγμα μέρος 'B καμπύλη γέφυρα κιβωτιοειδούς διατομής

7.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό, εξετάζεται μία καμπύλη γέφυρα από σκυρόδεμα ($E= 32\text{GPa}$, $\nu= 0.2$), πακτωμένη στα ακρόβαθρα (θέσεις A και E) και δεσμευμένη όσον αφορά την κατακόρυφη μετακίνηση της στις θέσεις B και D. Η διατομή της είναι κιβωτιοειδής και υποβάλλεται σε κατακόρυφο, ομοιόμορφα καταναμεμημένο φορτίο 50 kN/m στον άξονα και ένα κατακόρυφο συγκεντρωμένο φορτίο 600 kN στο μέσον της. Οι συντεταγμένες του άξονα της γέφυρας δίνονται παραμετρικά με τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} x &= 80 \cdot t \\ y &= 20 \cdot (-4 \cdot t^2 + 4 \cdot t) \end{aligned} \quad t \in [0, 1]$$

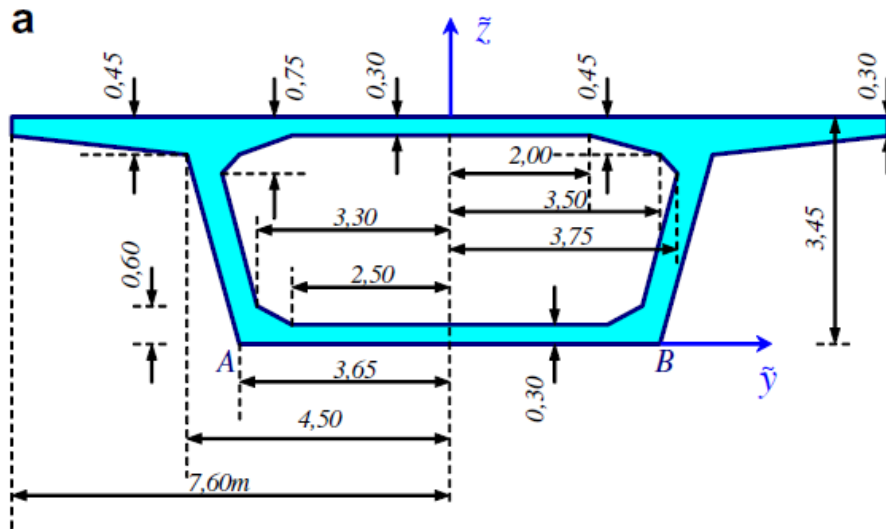
Τα αποτελέσματα των αναλύσεων συγκρίνονται με τα αντίστοιχα των θεωριών Euler-Bernoulli, Timoshenko-Ομοιόμορφη Διάτμηση, Ανομοιόμορφη Στρέψη, Γενικευμένη στρέβλωση καθώς και με τη μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων, και η σύγκριση γίνεται μεταξύ κινηματικών μεγεθών, εντατικών μεγεθών καθώς και αναπτυσσόμενων ορθών τάσεων σε χαρακτηριστικές διατομές.



Σχ. 7.1. Εξεταζόμενη καμπύλη γέφυρα

7.2 Γεωμετρικά χαρακτηριστικά κιβωτιοειδούς διατομής

Στην παρούσα εφαρμογή χρησιμοποιήθηκε κιβωτιοειδής διατομή, πλάτους καταστρώματος 15,20μ. και συνολικού ύψους 3,45μ (Σχ. 7.1.), με τιμές γεωμετρικών σταθερών όπως παρουσιάζονται παρακάτω (Πίνακας 1).



Σχ. 7.1. Γεωμετρικά χαρακτηριστικά εξεταζόμενης κιβωτιοειδούς διατομής

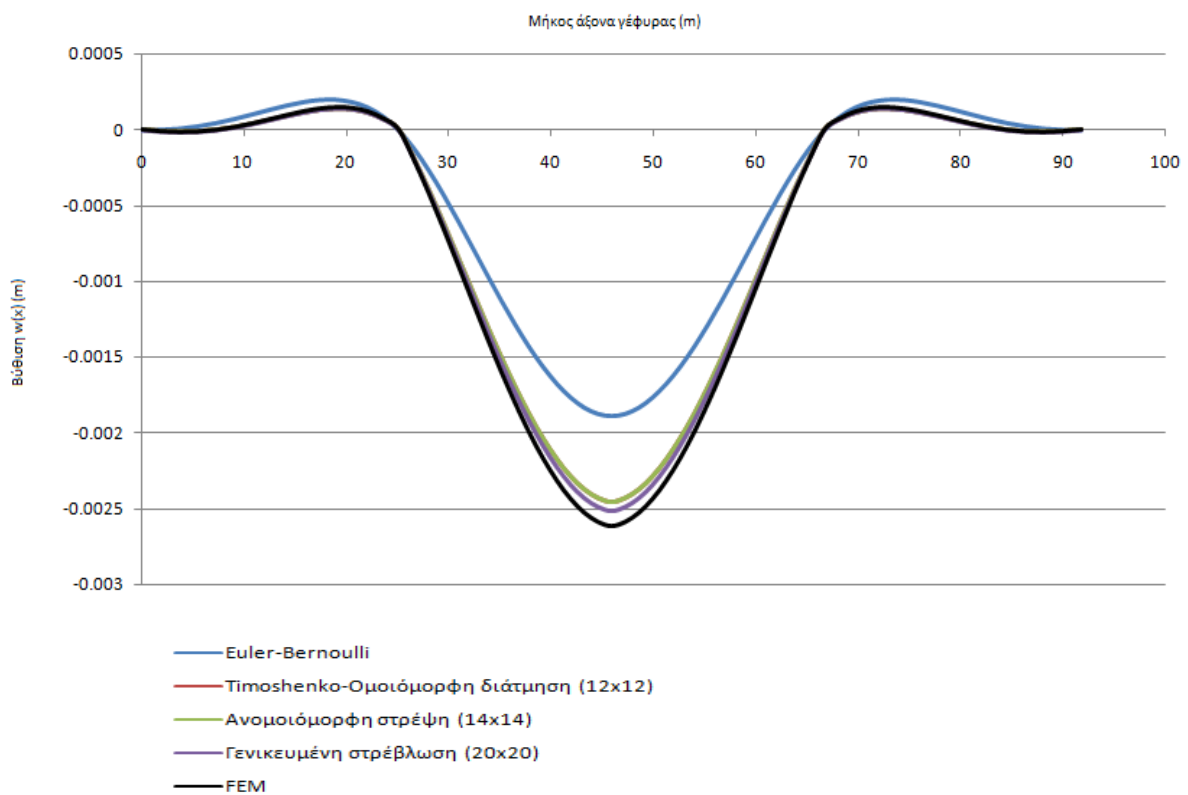
Πίνακας 1 : Τιμές γεωμετρικών σταθερών κιβωτιοειδούς διατομής

Γεωμετρική σταθερά	Τιμή	Μονάδα μέτρησης
A	1.12800000E+01	m ²
I _{yy}	1.86582458E+01	m ⁴
I _{zz}	1.69128155E+02	m ⁴
A _y	6.77123923E+00	m ²
A _z	2.51949388E+00	m ²
I _t	4.27703700E+01	m ⁴
C _s	6.28917900E+01	m ⁶
I _{φ_x^Pφ_x^P}	5.93901373E+01	m ⁶
I _{φ_y^Pφ_y^P}	1.03406453E+00	m ⁴

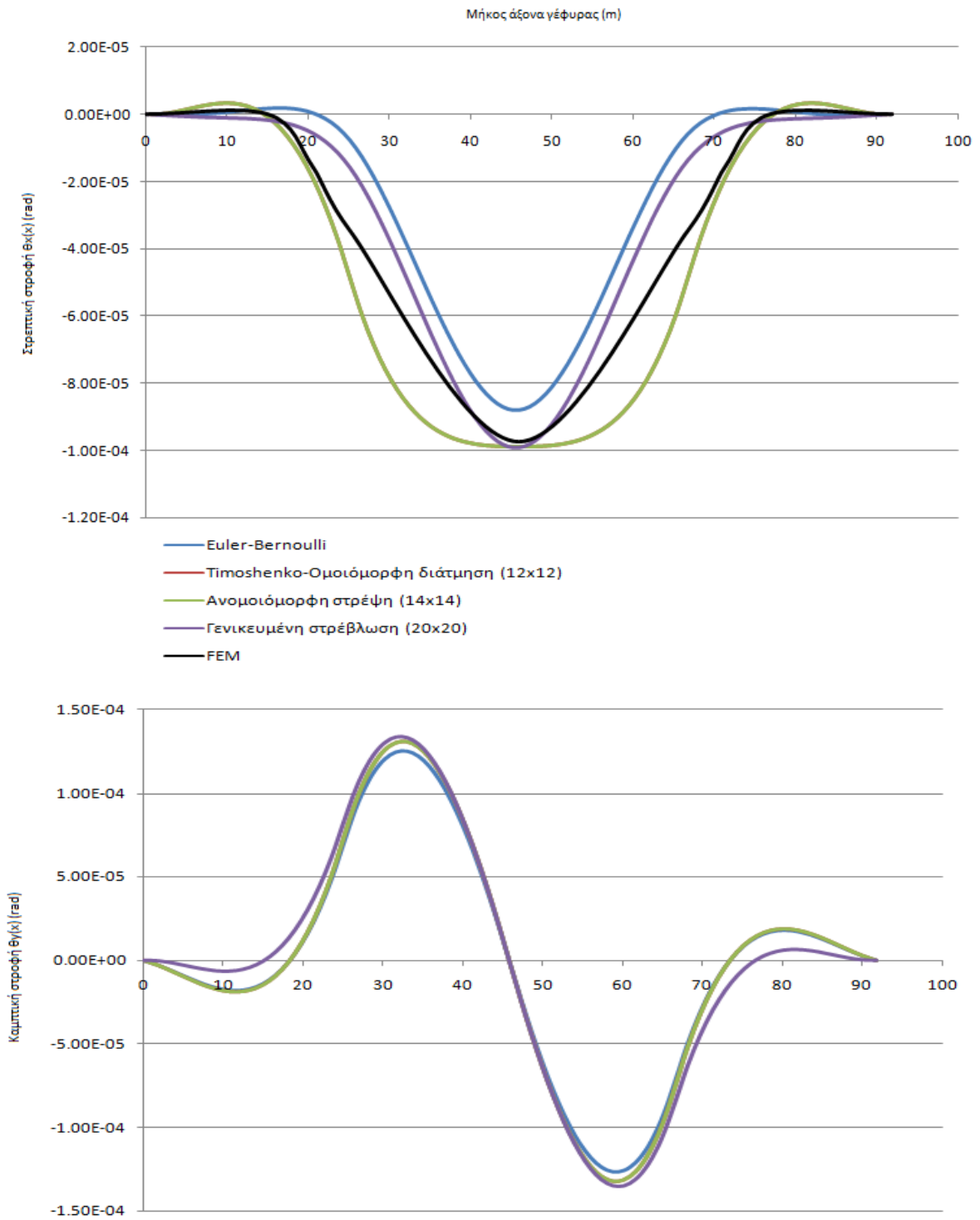
Γεωμετρική σταθερά	Τιμή	Μονάδα μέτρησης
$I_{\phi_z^P \phi_z^P}$	3.31586366E+00	m ⁴
$I_{\phi_y^P \phi_x^P}$	1.91801014E-02	m ⁵
$I_{\phi_z^P \phi_x^P}$	-2.52900456E+00	m ⁵
$I_{\phi_x^S \phi_y^P}$	4.30514488E-03	m ⁵
$I_{\phi_x^S \phi_z^P}$	3.60455513E+00	m ⁵
$I_{\phi_x^S \phi_x^S}$	1.05797152E+01	m ⁶

7.3. Σύγκριση αποτελεσμάτων

7.3.1. Σύγκριση κινηματικών μεγεθών

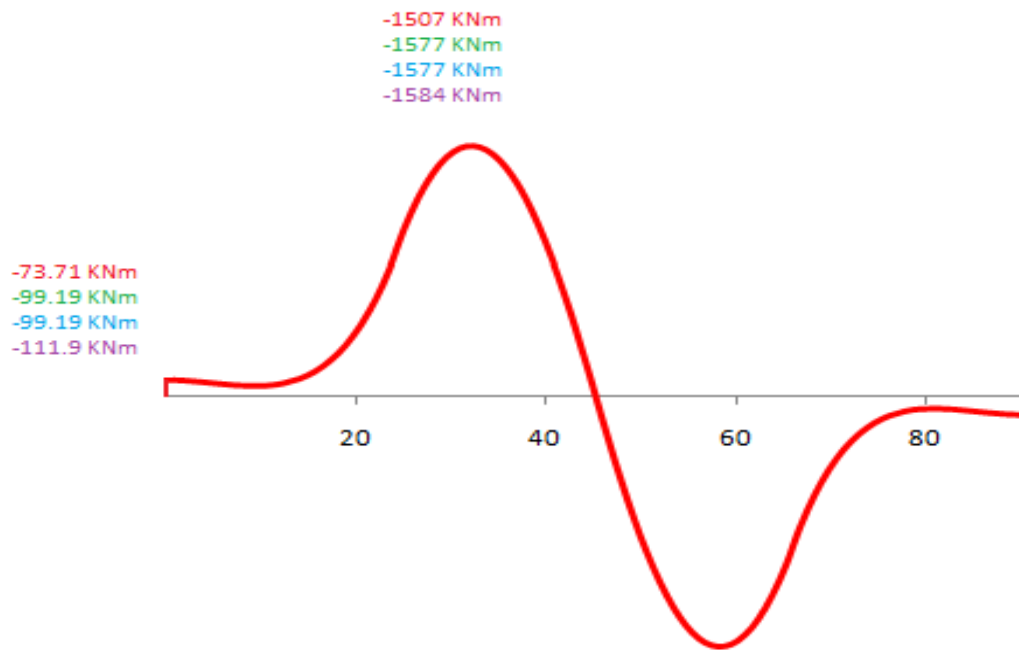


Σχ. 7.2. Βύθιση w(x) της γέφυρας, κατά το μήκος του άξονά της

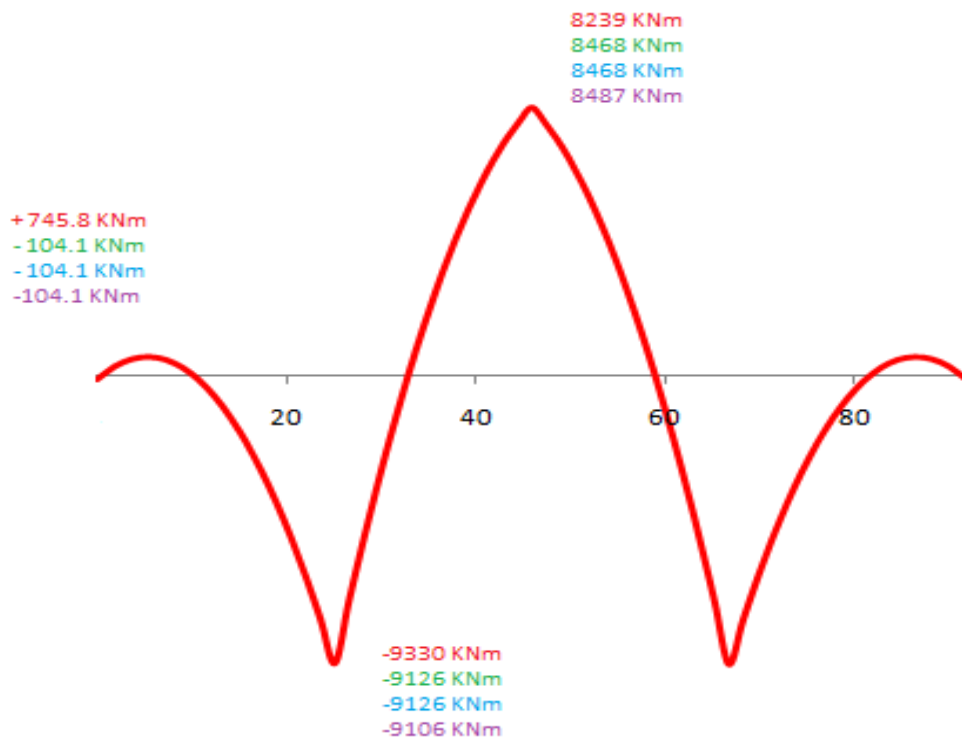


Σχ. 7.3. Στρεπτική στροφή $\theta(x)$ και καμπτική στροφή $\theta_g(x)$ αντίστοιχα, κατά το μήκος του άξονα της γέφυρας

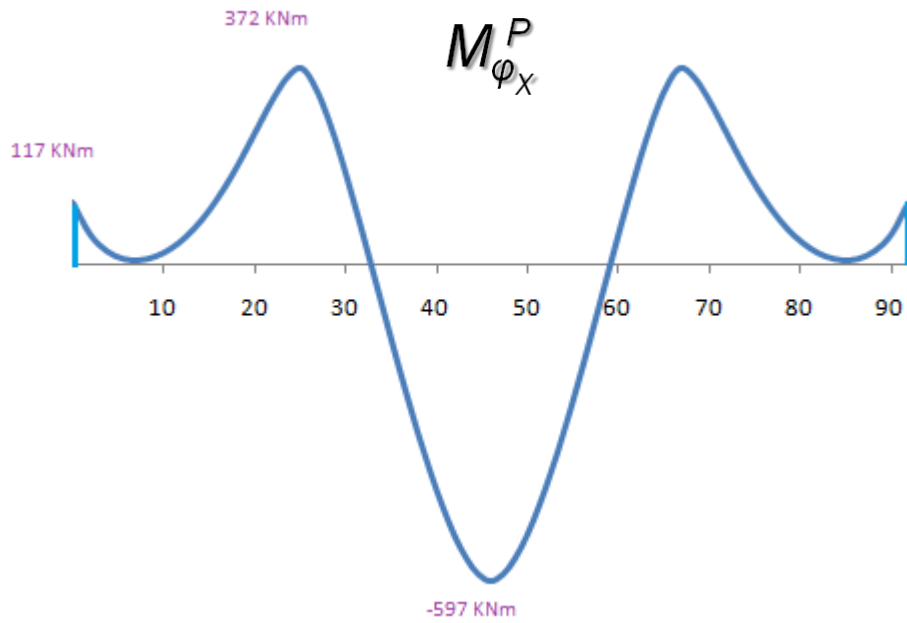
7.3.2. Σύγκριση εντατικών μεγεθών



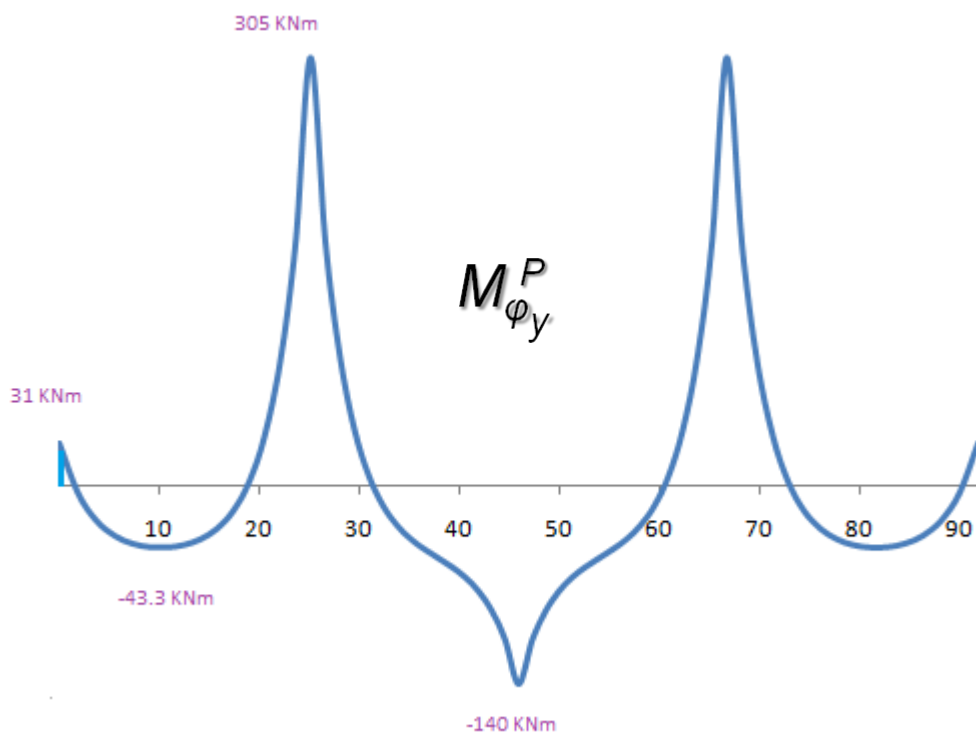
Σχ. 7.4. Διάγραμμα στρεπτικών ροπών



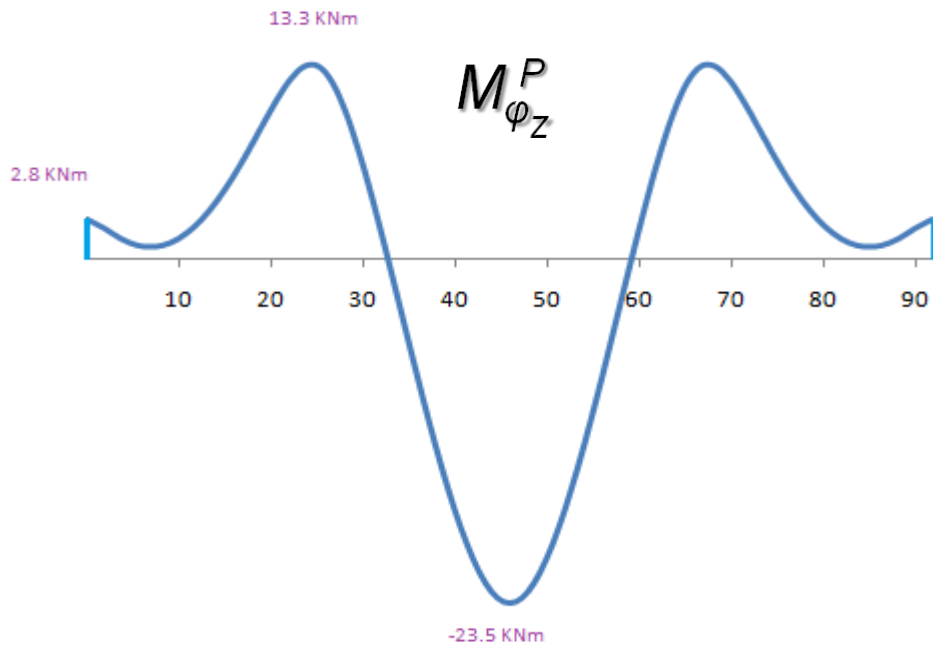
Σχ. 7.5. Διάγραμμα καμπτικών ροπών



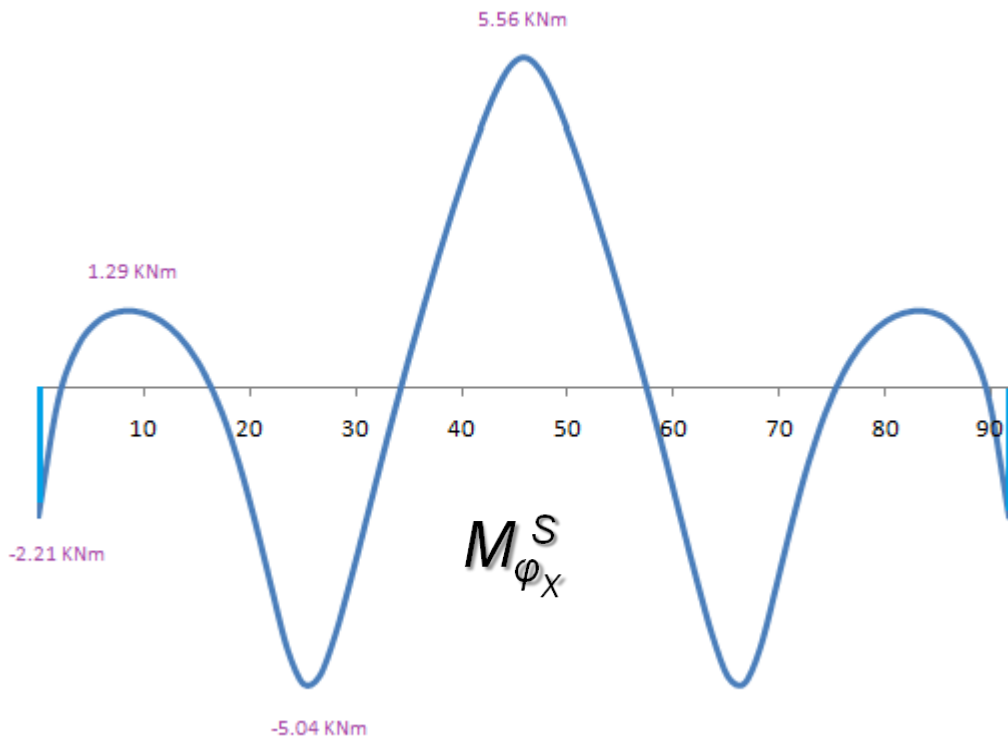
Σχ. 7.6. Διάγραμμα διρροπής πρωτογενούς στρεπτικής στέβλωσης $M_{\phi_x}^P$



Σχ. 7.7. Διάγραμμα διρροπής διατμητικής στέβλωσης $M_{\phi_y}^P$

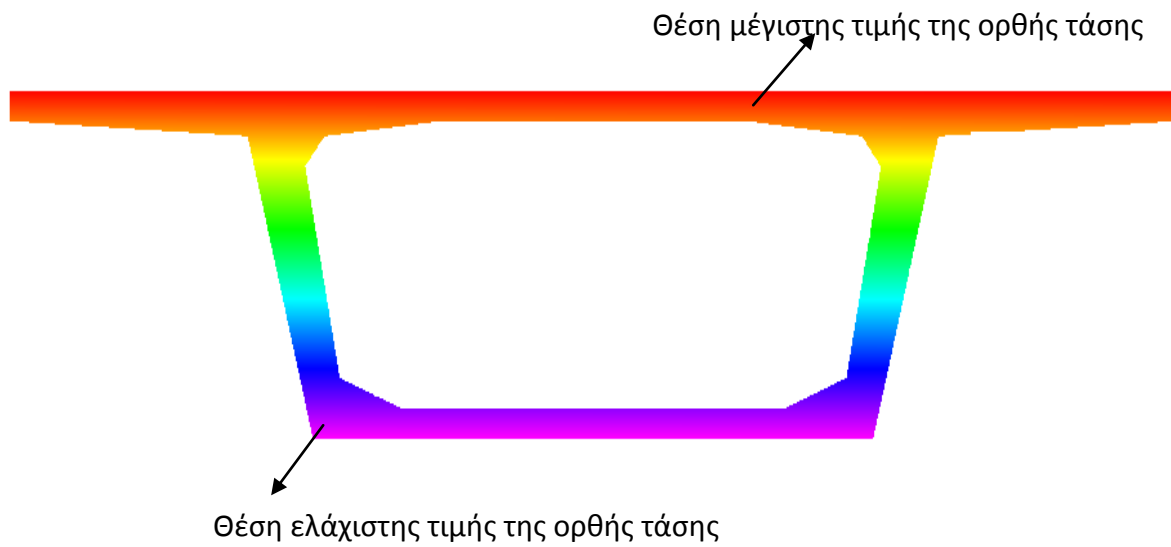


Σχ. 7.8. Διάγραμμα διρροπής διατμητικής στέβλωσης $M_{\phi_z}^P$



Σχ. 7.9 Διάγραμμα διρροπής δευτερογενούς στρεπτικής στέβλωσης $M_{\phi_x}^S$

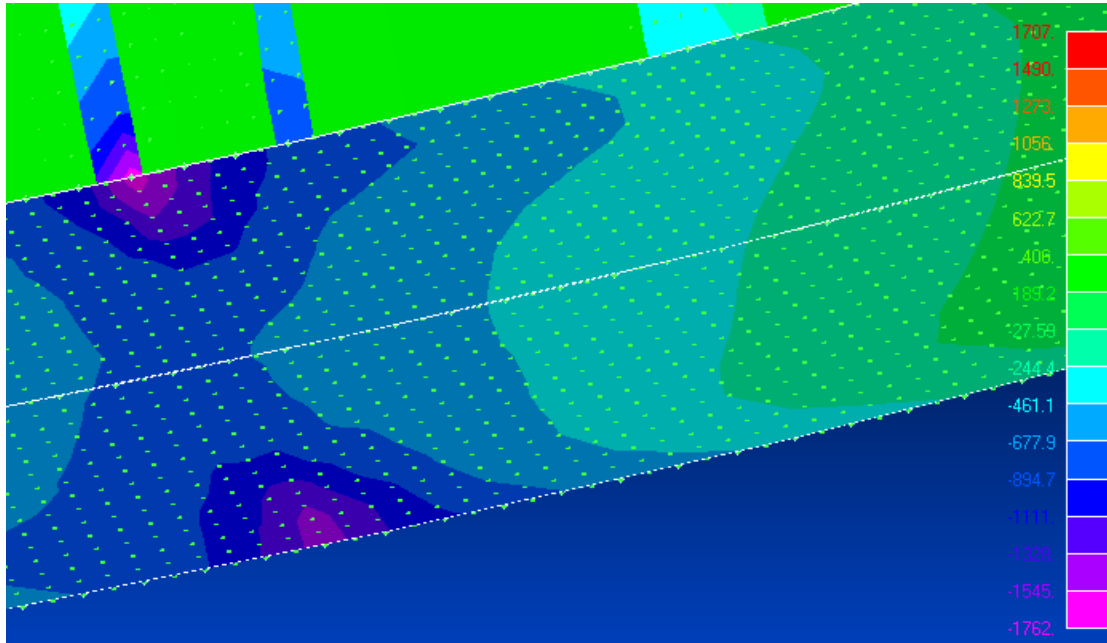
7.3.3. Σύγκριση τάσεων



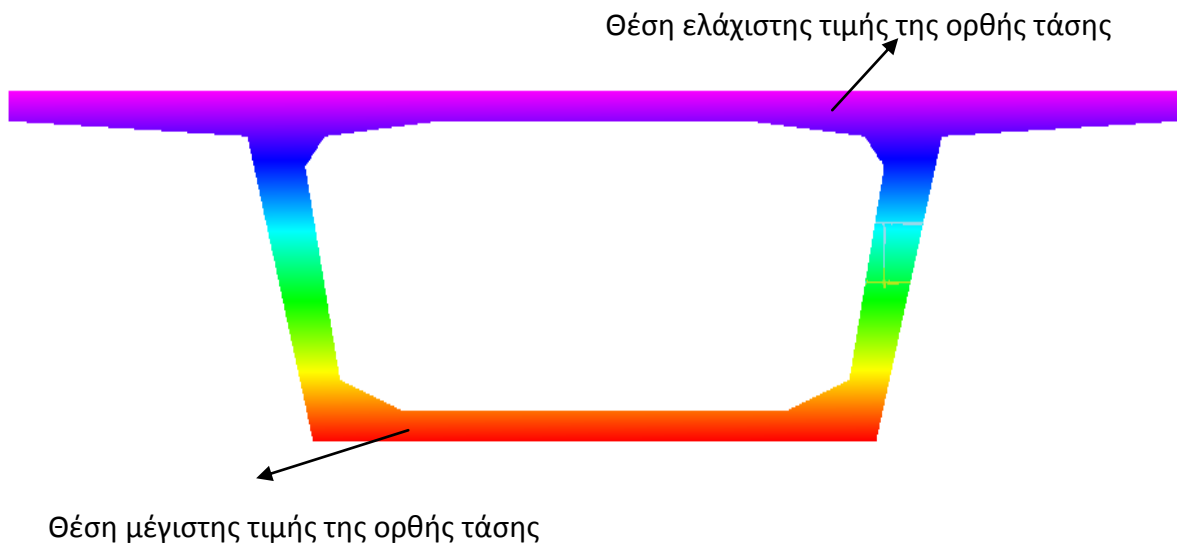
Σχ. 7.10. Σύγκριση κατανομής ορθών τάσεων στη θέση της κατακόρυφης δέσμευσης

Συγκρινόμενο Μέγεθος (μονάδες)	Μέγιστη ορθή τάση σ_{max}	Ελάχιστη ορθή τάση σ_{min}	Διαφορά % από επίλυση με πεπερασμένα στοιχεία σ_{max}	Διαφορά % από επίλυση με πεπερασμένα στοιχεία σ_{min}	Μέθοδος επίλυσης
σ_x (KPa)	637.2	-1054	25%	8.4%	Euler-Bernoulli
	623.1	-1031	26.7%	10.3%	Timoshenko
	623.1	-1031	26.7%	10.3%	Ανομοιόμορφη Στρέψη – 14x14
	1125.9	-1132.7	32%	1.5%	Γενικευμένη Στρέβλωση 20x20
	850	-1150	-	-	Τρισδιάστατα Πεπερασμένα στοιχεία

Για τις μέγιστες και ελάχιστες τιμές των τάσεων από την επίλυση με τα πεπερασμένα στοιχεία χρησιμοποιήθηκε μια μέση τιμή από τις περιοχές που εντοπίζονται οι τιμές αυτές, διότι εμφανίζονται πολύ μεγαλύτερες τάσεις σε συγκεκριμένα σημεία(Σχ.7.11.) λόγω της αριθμητικής επίλυσης, κάτι το οποίο δεν είναι ρεαλιστικό.



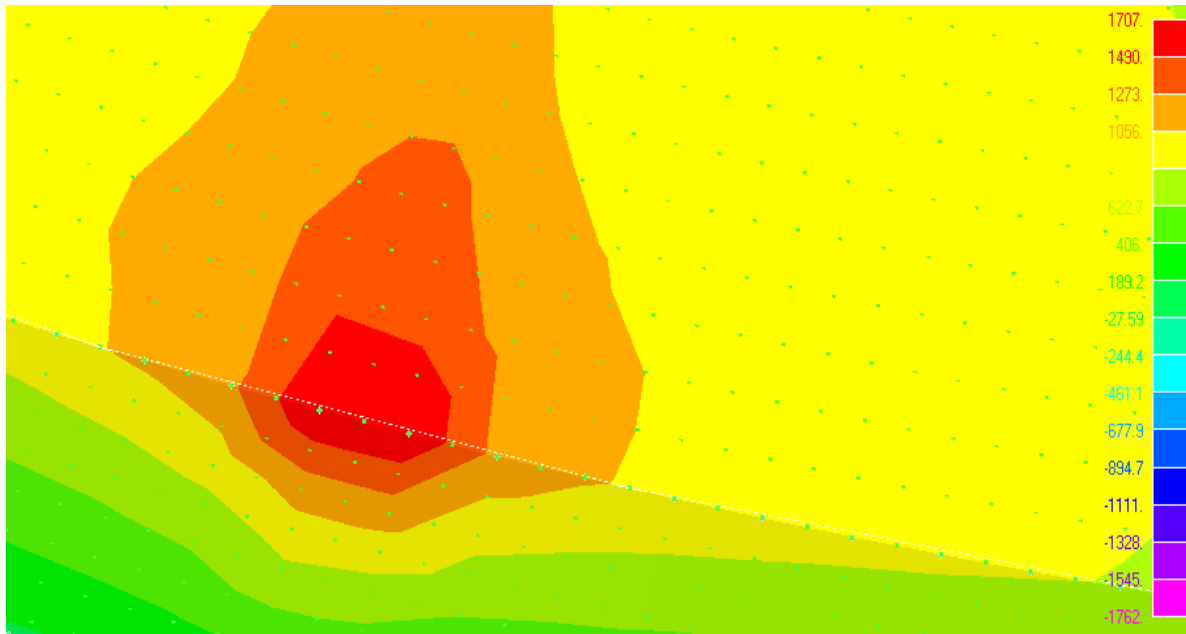
Σχ. 7.11. Υπερβολικές συγκεντρώσεις τάσεων λόγω αριθμητικής επίλυσης, στην θέση της κατακόρυφης δέσμησης



Σχ. 7.12. Σύγκριση κατανομής ορθών τάσεων στο μέσο του ανοίγματος

Συγκρινόμενο Μέγεθος (μονάδες)	Μέγιστη ορθή τάση σ_{max}	Ελάχιστη ορθή τάση σ_{min}	Διαφορά % από επίλυση με πεπερασμένα στοιχεία σ_{max}	Διαφορά % από επίλυση με πεπερασμένα στοιχεία σ_{min}	Μέθοδος επίλυσης
σ_x (KPa)	936.2	-564.2	25.6%	31.5%	Euler-Bernoulli
	961.8	-579.6	23.6%	29.6%	Timoshenko
	961.8	-579.6	23.6%	29.6	Ανομοιόμορφη Στρέψη – 14x14
	1008.7	-987.5	19.8%	19.9%	Γενικευμένη Στρέβλωση 20x20
	1259	-823	-	-	Τρισδιάστατα Πεπερασμένα στοιχεία

Παρατηρήθηκε και εδώ ότι στην θέση της μέγιστης τιμής της ορθής τάσης υπήρχε υψηλή συγκέντρωση της τάσης (Σχ.7.13.), η τιμή της οποίας δεν είναι αντιπροσωπευτική και για αυτό χρησιμοποιήθηκε μια μέση τιμή στην θέση αυτή.



Σχ. 7.13. Υπερβολική συγκέντρωση τάσεων λόγω αριθμητικής επίλυσης, στο μέσο του ανοίγματος

Συμπεράσματα

Στην παρούσα διπλωματική εργασία, διενεργήθηκαν 4 αναλύσεις με βάση τις θεωρίες Euler-Bernoulli και Timoshenko-Ομοιόμορφης διάτμησης (μητρική ανάλυση με μητρώο στιβαρότητας μέλους 12X12), Ανομοιόμορφης στρέψης (μητρική ανάλυση με μητρώο στιβαρότητας μέλους 14X14) και Γενικευμένης στρέβλωσης (μητρική ανάλυση με μητρώο στιβαρότητας μέλους 20X20), σε ένα μεταλλικό πλαίσιο και μια καμπύλη γέφυρα από σκυρόδεμα. Οι συγκρίσεις από τα εξαγόμενα αποτελέσματα έδειξαν τα παρακάτω :

- Στα κινηματικά μεγέθη, η θεωρία Timoshenko-Ομοιόμορφης διάτμησης και Ανομοιόμορφης στρέψης παρουσιάζουν ήδη σημαντικές διαφορές στις μέγιστες τιμές των κινηματικών μεγεθών, ενώ με την θεωρία Γενικευμένης στρέβλωσης παρατηρείται επιπλέον διαφορά στις τιμές αυτές (μέχρι και 25% διαφορά Euler-Bernoulli και Γενικευμένη στρέβλωση), καθώς και διαφορετική παραμορφωμένη κατάσταση στην περίπτωση της στρεπτικής στροφής της καμπύλης γέφυρας.

- Όσον αφορά τα εντατικά μεγέθη, και πάλι ήδη από τις θεωρίες Timoshenko-Ομοιόμορφης διάτμησης και Ανομοιόμορφης στρέψης βλέπουμε σημαντικές διαφορές συγκριτικά με τα αποτελέσματα της Euler-Bernoulli, και με τη θεωρία της Γενικευμένης στρέβλωσης οι διαφορές αμβλύνονται. Στην περίπτωση των καμπτικών ροπών στην καμπύλη γέφυρα παρατηρείται επιπλέον ότι η ροπή στην πάκτωση είναι κατά πολύ μικρότερη κατά απόλυτη τιμή και με αντίθετη φορά.

- Στην τιμή της μέγιστης αναπτυσσόμενης ορθής τάσης παρατηρήθηκε ότι υπήρχαν μεγάλες διαφορές όσον αφορά τις εξαγόμενες τιμές από την εκάστοτε μέθοδο αλλά και στις θέσεις στις οποίες εμφανιζόταν η μέγιστη τιμή αυτή και αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι στην θεωρία Γενικευμένης στρέβλωσης οι ισοστασικές γραμμές των θεωριών Euler-Bernoulli και Timoshenko-Ομοιόμορφης διάτμησης δεν εμφανίζονται διότι η βασική παραδοχή αυτών περί επιπεδότητας της διατομής στην παραμορφωμένη κατάσταση παύει να ισχύει.

Βιβλιογραφία

1. Σαπουντζάκης Ε.Ι. **Σημειώσεις μεταπτυχιακού μαθήματος** “Εφαρμοσμένη ανάλυση ραβδωτών και επιφανειακών φορέων”, ΔΠΜΣ Δομοστατικός Σχεδιασμός και Ανάλυση των Κατασκευών, ΕΜΠ, Αθήνα.
2. Sapountzakis EJ, Dikaros IC. Advanced 3D beam element of arbitrary composite cross section including generalized warping effects. *INTERNATIONAL JOURNAL FOR NUMERICAL METHODS IN ENGINEERING* 2015; **102**:44–78
3. Dikaros IC, Sapountzakis EJ. Generalized warping analysis of composite beams of arbitrary cross section by BEM part I: theoretical considerations and numerical implementation. *Journal of Engineering Mechanics* 2014; **140**: 04014062-1–04014062-14.
4. Dikaros IC, Sapountzakis EJ. Generalized warping analysis of composite beams of arbitrary cross section by BEM part II: numerical applications. *Journal of Engineering Mechanics* 2014; **140**:04014063-1–04014063-20.
5. Sapountzakis EJ, Mokos VG. Warping shear stresses in nonuniform torsion of composite bars by BEM. *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering* 2003; **192**:4337–4353.
6. Mokos VG, Sapountzakis EJ. Secondary torsional moment deformation effect by BEM. *International Journal of Mechanical Sciences* 2011; **53**:897–909.
7. Tspiras VJ, Sapountzakis EJ. Secondary torsional moment deformation effect in inelastic nonuniform torsion of bars of doubly symmetric cross section by BEM. *International Journal of Non-linear Mechanics* 2012; **47**:68–84.
8. El Fatmi R, Ghazouani N. Higher order composite beam theory built on Saint-Venant’s solution. Part-I: theoretical developments. *Composite Structures* 2011; **93**:557–566.
9. Sapountzakis EJ, Mokos VG. 3-D beam element of composite cross section including warping and shear deformation effects. *Computers and Structures* 2007; **85**:102–116.
10. Sapountzakis EJ, Tspiras VJ, Gkesos PG. Warping transmission in 3-D beam element including secondary torsional moment deformation effect. *SEECCM III, 3rd South-East European Conference on Computational Mechanics – AnECCOMAS and IACM Special Interest Conference, Greece, 2013*; 470–480.
11. Muskhelishvili NI. *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*. P. Noordhoff Ltd: Groningen, 1963, XXXI.
12. FEMAP for Windows. *Finite Element Modeling and Post-Processing Software. Help System Index*, Version 10. Siemens PLM Software: Plano, TX, 2008.