



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΝΑΥΠΗΓΩΝ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΘΑΛΑΣΣΙΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ

**Διφασική Ροή Σταθερής Κατάστασης σε Αγωγούς
Μεταφοράς Ρευστών**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

του

ΘΕΟΔΟΣΙΟΥ ΤΣΑΟΥΣΗ

Επιβλέπων: Σπυρίδων Μαυράκος

Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Οκτώβριος 2015

Πίνακας περιεχομένων

1 Εισαγωγή	2
2 Μόνιμη κρουστική ροή (steady slug flow)	4
2.1 Ανάλυση μίας μονάδας slug (slug unit) και παρουσίαση χαρακτηριστικών μεγεθών.....	4
2.2 Εύρεση μήκους φιλμ.....	7
2.3 Σχήμα του φιλμ.....	8
2.4 Ανάλυση των παραγόντων.....	9
2.5 Βοηθητικές σχέσεις.....	12
2.5.1 Μεταφορική ταχύτητα (Translational velocity).....	12
2.5.2 Ταχύτητα του υγρού στην περιοχή του slug.....	13
2.5.3 Ποσοστού του υγρού σε μία τυχαία διατομή του αγωγού, στην περιοχή του φιλμ...	14
2.6 Υπολογισμός πιέσεων.....	15
2.7 Διαδικασία επίλυσης διαφορικής εξίσωσης.....	15
3 Δυναμικό πρόβλημα	17
3.1 Περιγραφή τρόπου επίλυσης του προβλήματος.....	17
3.2 Περιγραφή φαινομένου.....	17
3.3 Επίλυση του συστήματος των μερικών διαφορικών εξισώσεων στο Matlab.....	18
4 Αριθμητικά αποτελέσματα	20
4.1 Αποτελέσματα προβλήματος μόνιμης κατάστασης.....	20
4.1.1 Παρουσίαση αποτελεσμάτων για: $u_{LS} = 0.2 \text{ m/s}$ και $u_{GS} = 2 \text{ m/s}$	21
4.1.1.1 Γωνία $\beta=0^\circ$	22
4.1.1.2 Γωνία $\beta=10^\circ$	23

4.1.1.3 Γωνία $\beta=30^\circ$	27
4.1.1.4 Γωνία $\beta=60^\circ$	32
4.1.1.5 Γωνία $\beta=70^\circ$	36
4.1.2 Παρουσίαση αποτελεσμάτων για : $u_{LS} = 1 \text{ m/s}$ και $u_{GS} = 2 \text{ m/s}$	40
4.1.2.1 Γωνία $\beta=0^\circ$	40
4.1.2.2 Γωνία $\beta=10^\circ$	44
4.1.2.3 Γωνία $\beta=30^\circ$	47
4.1.2.4 Γωνία $\beta=60^\circ$	50
4.1.2.5 Γωνία $\beta=70^\circ$	53
4.1.3 Παρουσίαση αποτελεσμάτων για: $u_{LS} = 0.4 \text{ m/s}$ και $u_{GS} = 6 \text{ m/s}$	57
4.1.3.1 Γωνία $\beta=0^\circ$	57
4.1.3.2 Γωνία $\beta=10^\circ$	61
4.1.3.3 Γωνία $\beta=30^\circ$	64
4.1.3.4 Γωνία $\beta=60^\circ$	67
4.1.3.5 Γωνία $\beta=70^\circ$	70
4.1.4 Παρουσίαση αποτελεσμάτων για: $u_{LS} = 0.8 \text{ m/s}$ και $u_{GS} = 2 \text{ m/s}$	73
4.1.4.1 Γωνία $\beta=0^\circ$	73
4.1.4.2 Γωνία $\beta=10^\circ$	77
4.1.4.3 Γωνία $\beta=30^\circ$	80
4.1.4.4 Γωνία $\beta=60^\circ$	83
4.1.4.5 Γωνία $\beta=70^\circ$	86
4.2 Αποτελέσματα προβλήματος ασταθούς κατάστασης.....	89
4.2.1 Παρουσίαση αποτελεσμάτων για: $u_{LS} = 0.2 \text{ m/s}$ και $u_{GS} = 2 \text{ m/s}$	90
4.2.1.1 Γωνία $\beta=10^\circ$	90
4.2.1.2 Γωνία $\beta=30^\circ$	91
4.2.1.3 Γωνία $\beta=60^\circ$	92

5 Σχολιασμός αποτελεσμάτων προβλήματος μόνιμης κατάστασης.....	94
5.1 Σχολιασμός μορφής του φιλμ.....	94
5.2 Σχολιασμός σύγκλισης μεθόδου.....	94
5.3 Σχολιασμός αποτελεσμάτων ταχυτήτων.....	95
5.4 Σχολιασμός αποτελεσμάτων μεταβολής πιέσεων.....	95
Παράρτημα.....	96
Βιβλιογραφία-Παραπομπές.....	100

Πρόλογος

Η παρούσα διπλωματική εργασία παρουσιάζει τα αποτελέσματα της μελέτης του φαινομένου της κρουστικής ροής (slug flow) σε αγωγούς μεταφοράς ρευστών. Αποτελείται από 5 κεφάλαια.

Στο πρώτο κεφάλαιο, το οποίο είναι μία εισαγωγή, περιγράφεται αρχικά σε ποιες ναυπηγικές εφαρμογές μπορεί να εμφανιστεί και τι προβλήματα δημιουργεί στους αγωγούς. Έπειτα, γίνεται ο διαχωρισμός της ροής σε μόνιμη κατάσταση και ασταθή κατάσταση. Επιπλέον, παρουσιάζονται οι μορφές της ροής, ανάλογα με το αν ο αγωγός είναι οριζόντιος, κεκλιμένος ή κατακόρυφος.

Το δεύτερο κεφάλαιο πραγματεύεται τη ροή μόνιμης κατάστασης. Διατυπώνονται κάποιες παραδοχές και εξηγούνται τα μεγέθη των οποίων ο υπολογισμός προσδιορίζει πλήρως τη ροή. Έπειτα παρατίθενται ο τρόπος υπολογισμού κάθε μεγέθους, οι εξισώσεις που επιλύθηκαν καθώς και οι βοηθητικές σχέσεις που χρησιμοποιήθηκαν. Ακόμη, γίνεται μια ανάλυση και επεξήγηση των παραγόντων που εμφανίζονται στην κύρια διαφορική εξίσωση.

Στο τρίτο κεφάλαιο γίνεται μια περιγραφή του φαινομένου όταν υπεισέρχεται στις εξισώσεις και ο παράγοντας του χρόνου. Τότε η ροή γίνεται ασταθής. Έπειτα, ακολουθεί μια συνοπτική επεξήγηση του τρόπου επίλυσης του προβλήματος στο Matlab.

Το τέταρτο κεφάλαιο αφορά την παρουσίαση των αριθμητικών αποτελεσμάτων, τόσο της ροής μόνιμης κατάστασης όσο και της ασταθούς, για ένα πλήθος περιπτώσεων που εξετάστηκαν.

Στο πέμπτο κεφάλαιο γίνεται ένας γενικός σχολιασμός των αποτελεσμάτων του προβλήματος μόνιμης κατάστασης.

Στο παράρτημα παρατίθενται οι βασικοί κώδικες Matlab που γράφτηκαν και χρησιμοποιήθηκαν για την επίλυση των διαφορικών εξισώσεων. Στο τέλος της εργασίας υπάρχουν η βιβλιογραφία και οι παραπομπές.

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

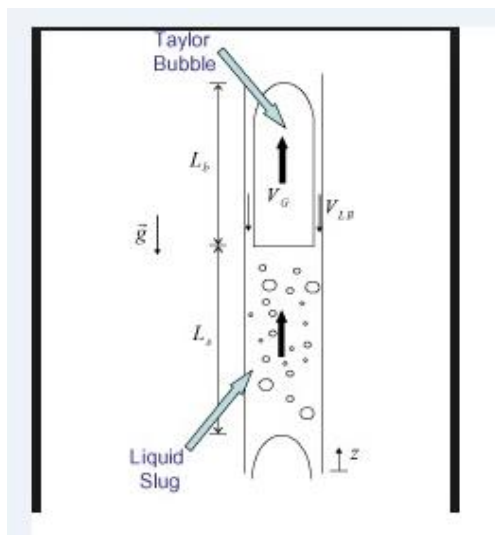
Ένα μεγάλο μέρος των παγκόσμιων αναγκών για πετρέλαιο και υδρογονάνθρακες καλύπτεται από την άντλησή τους από τους πυθμένες των θαλασσών. Στην περιοχή που εντοπίζονται τα κοιτάσματα, εγκαθίστανται διαφόρων τύπων πλωτές πλατφόρμες και εξέδρες. Από τα πιο σημαντικά στοιχεία του πλωτού συστήματος εξόρυξης είναι οι εύκαμπτοι αγωγοί (risers), οι οποίοι αφενός θα βοηθήσουν στην άντληση, αφετέρου θα μεταφέρουν το πετρέλαιο, για εκατοντάδες μέτρα, από τον πυθμένα στις κατάλληλες δεξαμενές της πλατφόρμας.

Αυτοί οι αγωγοί, καθώς είναι εκτεθειμένοι, υπόκεινται σε πλήθος φορτίσεων, οι οποίες προέρχονται αφενός από το ίδιο το περιβάλλον, όπως κύματα, αφετέρου από δυνάμεις που μπορεί να προέρχονται από τις κινήσεις των πλοίων.

Ωστόσο υψηλές φορτίσεις μπορεί να προέλθουν και από την ίδια τη ροή, μέσα στον αγωγό. Δονήσεις και κραδασμοί μπορούν να προκαλέσουν τάσεις που αλλάζουν συνεχώς στο χρόνο, με αποτέλεσμα την επιπλέον καταπόνηση του αγωγού και τον κίνδυνο αστοχίας λόγω υπερβολικής κάμψης, κόπωσης και τοπικού λυγισμού. Η ροή, λόγω της οποίας μπορούν να προκληθούν τα παραπάνω φαινόμενα ονομάζεται στη διεθνή βιβλιογραφία ως: κρουστική ροή (slug flow). Αυτό το είδος διασπαστικής ροής μπορεί να προκαλέσει ταχύτατες αλλαγές τόσο στην κατανομή της μάζας όσο και της πίεσης κατά μήκος του αγωγού, γεγονός που επιφέρει δονήσεις. Έχει αποδειχθεί ότι μπορεί να προκαλέσει πολύ μεγάλες, κυμαινόμενες, αξονικές τάσεις και έτσι να αποτελέσει, όπως προαναφέρθηκε, έναν επιπλέον παράγοντα καταπόνησης του αγωγού σε κόπωση. Βασικό χαρακτηριστικό της είναι ότι πρόκειται για μια διακοπτόμενη ροή. Είναι ένα από τα πιο σύνθετα είδη ροής με ασταθή φύση και χαρακτηριστικά.

Η παρούσα μελέτη χωρίζεται ουσιαστικά σε δύο μέρη. Στο πρώτο υπολογίζονται αναλυτικά όλα τα μεγέθη που απαιτούνται προκειμένου να γίνουν γνωστά τα χαρακτηριστικά της ροής. Αυτή η ανάλυση αφορά το μόνιμο πρόβλημα, δηλαδή τη διασπαστική ροή μόνιμης κατάστασης, στην οποία θεωρείται ότι τα χαρακτηριστικά μένουν αναλλοίωτα με το χρόνο. Η βάση για την επίλυση αυτού του προβλήματος ήταν η δημοσίευση των Taitel and Barnea [1]. Στο δεύτερο μέρος επιχειρείται μια προσέγγιση της λύσης του πλήρους προβλήματος, το οποίο αφορά το δυναμικό κομμάτι και στο οποίο υπεισέρχεται και ο χρόνος. Γι' αυτή την ανάλυση χρησιμοποιήθηκαν οι σχέσεις από τη δημοσίευση των Issa and Kempf [2].

Όταν ο αγωγός είναι κατακόρυφος το αέριο εκτείνεται εκατέρωθεν του άξονα συμμετρίας του αγωγού, σε μεγάλες φυσαλίδες, όπως μία σφαίρα, την οποία περιβάλλει ένα λεπτό φιλμ υγρού. Αυτές είναι γνωστές ως φυσαλίδες Taylor. Σε αυτή την περίπτωση το φιλμ του υγρού, λόγω της βαρύτητας, επιταχύνεται και κινείται αντίθετα από τη ροή, δηλαδή προς τα πίσω. Ένα τέτοιο παράδειγμα φαίνεται στο σχήμα 1.1.



Σχήμα 1.1: Φυσαλίδες Taylor σε κατακόρυφο αγωγό

Όταν ο αγωγός είναι οριζόντιος ή κεκλιμένος υπάρχουν υγρά (liquid) slugs, τα οποία είναι τμήματα του αγωγού κατειλημμένα με υγρό που μπορεί να περιέχουν και μικρές φυσαλίδες αερίου, τότε αποκαλείται αεροποιημένο υγρό (aerated liquid), να εναλλάσσονται, με τυχαία συχνότητα, με μια περιοχή του αγωγού όπου στο πάνω μέρος υπάρχει μια μεγάλη, επιμήκης φυσαλίδα αερίου και στο κάτω μέρος υπάρχει φιλμ υγρού.

Υπάρχουν δύο βασικοί μηχανισμοί οι οποίοι αλλάζουν μια στρωτή ροή σε ροή slug. Ο πρώτος αφορά τη δημιουργία οριακού στρώματος μεταξύ των δύο φάσεων. Ο δεύτερος μηχανισμός αφορά τη συσσώρευση υγρού λόγω στιγμιαίας ανισορροπίας μεταξύ της πίεσης και των βαρυτικών δυνάμεων, με αποτέλεσμα και πάλι μια διατομή να καταλαμβάνεται πλήρως από υγρό. Φυσικά, slugs μπορούν να σχηματιστούν με συνδυασμό και των δύο προαναφερθέντων μηχανισμών με αποτέλεσμα να αλληλεπιδρούν μεταξύ τους, να μεταβάλλονται τα χαρακτηριστικά τους κατά τη ροή μέσα στον αγωγό, ή ακόμα και να ενώνονται μεταξύ τους. Η ροή αυτή χωρίζεται σε δύο κατηγορίες: 1) μόνιμης κατάστασης (steady state slug flow) και 2) ασταθούς (unsteady slug flow).

Το μήκος μίας μονάδας slug l_u , αποτελείται από δύο τμήματα: το πρώτο είναι το υγρό slug και το μήκος του συμβολίζεται με l_s , και το δεύτερο είναι η περιοχή του φιλμ, με μήκος l_f , δηλαδή:

$$l_u = l_s + l_f \quad (2.1)$$

Τα μεγέθη που αναφέρονται στη ζώνη των slugs και ενδιαφέρουν στα πλαίσια αυτής της μελέτης είναι τα εξής:

- Το ποσοστό του υγρού σε μια τυχαία διατομή (liquid holdup, R_s) κατά μήκος του αγωγού, το οποίο θεωρητικά παίρνει τιμές από 0 έως 1. Η τιμή $R_s=0$, αναφέρεται σε μία διατομή που έχει μόνο αέριο και η τιμή $R_s=1$, περιγράφει μία διατομή πλήρως κατειλημμένη από υγρό.
- Η μέση ταχύτητα του υγρού u_L
- Η μέση ταχύτητα των φυσαλίδων u_b

Σημειώνεται ότι οι παραπάνω ταχύτητες εν γένει δεν είναι ίσες και το slug θεωρείται ομογενές, κινούμενο με ταχύτητα u_L .

Η περιοχή του φιλμ, όπως ήδη έχει αναφερθεί, για οριζόντιους και κεκλιμένους αγωγούς, αποτελείται από ένα φιλμ υγρού στο κάτω μέρος του αγωγού και μια μεγάλη επιμήκη φυσαλίδα αερίου στο πάνω μέρος. Στους κατακόρυφους αγωγούς, υπάρχει πλήρης συμμετρία, με τη φυσαλίδα στο κέντρο του αγωγού και ένα λεπτό φιλμ να την περιβάλλει. Τα κύρια μεγέθη που χρησιμοποιούνται στους υπολογισμούς γι' αυτή την περιοχή είναι:

- Η σχετική ταχύτητα με την οποία κινείται η μονάδα του slug u_t
- Η ταχύτητα των μορίων του υγρού στο φιλμ u_f
- Η ταχύτητα των μορίων του αερίου u_G

Σημειώνεται ότι οι ταχύτητες του υγρού και του αερίου δεν είναι σταθερές, αλλά αλλάζουν κατά μήκος του φιλμ καθώς διαφοροποιείται το πάχος του.

Βασικές παραδοχές του προβλήματος είναι ότι και τα δύο ρευστά θεωρούνται ασυμπίεστα και σταθερής πυκνότητας. Παράμετροι του προβλήματος αποτελούν οι επιφανειακές, υποθετικές ταχύτητες (superficial velocities) των δύο ρευστών που είναι άμεσα συνδεδεμένες με την παροχή τους, η κλίση και η διάμετρος του αγωγού, οι ταχύτητες “σύρσης” (drift velocities) και οι ταχύτητες των φυσαλίδων (bubble velocities), και βεβαίως οι φυσικές ιδιότητες των δύο ρευστών, δηλαδή η πυκνότητα και το κινηματικό τους ιξώδες. Ως επιφανειακή ταχύτητα ορίζεται η υποθετική ταχύτητα που θα είχε το ρευστό, αν έρεε μόνο αυτό στον αγωγό. Δίνεται από τη σχέση:

$$u_i = \frac{Q_i}{A} \quad (2.2)$$

όπου $i = l, g$ για υγρό και αέριο αντίστοιχα, Q_i (m^3/s) είναι η παροχή του αντίστοιχου ρευστού και A το εμβαδό της διατομής.

Σκοπός στο πρώτο κομμάτι της μελέτης ήταν ο υπολογισμός όλων των μεγεθών που προσδιορίζουν και χαρακτηρίζουν τη συμπεριφορά των ρευστών στις δύο περιοχές της μονάδας του slug. Αυτά είναι τα εξής:

- ✓ το ύψος του φιλμ του υγρού σε κάθε θέση,
- ✓ τα ποσοστά του υγρού και του αερίου σε κάθε θέση στην περιοχή του φιλμ, καθώς και στη ζώνη του slug,
- ✓ οι ταχύτητες των μορίων και των δύο ρευστών σε κάθε θέση στη ζώνη του φιλμ,
- ✓ η ταχύτητα με την οποία κινείται το υγρό στην ζώνη του slug,
- ✓ οι αναπτυσσόμενες τριβές ανάμεσα στο υγρό και στα τοιχώματα του αγωγού, τις τριβές ανάμεσα στο αέριο και τα τοιχώματα, καθώς και τις αναπτυσσόμενες τάσεις στη διεπιφάνεια των δύο ρευστών,
- ✓ οι μεταβολές της πίεσης σε κάθε θέση, τόσο στο εσωτερικό του υγρού, όσο και του αερίου.

Χρησιμοποιώντας αυτά τα δεδομένα μπορούν να υπολογισθούν οι επαγόμενες δυνάμεις και φορτίσεις του αγωγού λόγω της ροής και άρα να προβλεφθεί μια σωστή σχεδίαση.

2.2 Εύρεση μήκους φιλμ

Για την εύρεση του μήκους του φιλμ σε κάθε περίπτωση, ανάλογα με την κλίση του αγωγού και τις επιφανειακές ταχύτητες, χρησιμοποιείται μια σχέση, η οποία εξάγεται από την αρχή διατήρησης της μάζας για το υγρό. Από τη δημοσίευση των Taitel and Barnea, για τη διατήρηση μάζας σε μία μονάδα slug, χρησιμοποιούνται δύο μέθοδοι. Η πρώτη αφορά την ολοκλήρωση της ροής του υγρού κατά τη διέλευση του slug unit από μια σταθερή διατομή, η οποία οδηγεί στη σχέση:

$$W_L = \frac{1}{t_u} \cdot \left(u_L \cdot A \cdot R_s \cdot \rho_L \cdot t_s + \int_0^{t_f} u_f \cdot A \cdot R_f \cdot \rho_L \cdot dt \right) \quad (2.3)$$

όπου W_L είναι η εκάστοτε παροχή του υγρού.

Για τη δεύτερη μέθοδο χρησιμοποιείται ο όγκος του υγρού σε ένα slug unit και έτσι εξάγεται η σχέση:

$$W_L = \frac{1}{t_u} \cdot \left(\rho_L \cdot A \cdot R_s \cdot l_s + \int_0^{l_f} \rho_L \cdot A \cdot R_f \cdot dx \right) - X \quad (2.4)$$

Ο όρος στην παρένθεση είναι η μάζα του υγρού σε ένα slug unit και X είναι η ποσότητα του υγρού που κινείται προς τα πίσω και απορροφάται από το slug που το ακολουθεί. Αυτή η ποσότητα δίνεται από τη σχέση:

$$X = (u_t - u_f) \cdot \rho_L \cdot A \cdot R_f \quad (2.5)$$

Συνδυάζοντας τις παραπάνω, προκύπτει η σχέση:

$$u_{LS} = u_L \cdot R_s + u_t \cdot (1 - R_s) \cdot \frac{l_f}{l_u} - \frac{u_t}{l_u} \cdot \int_0^{l_f} a_f dx \quad (2.6)$$

Έτσι για δεδομένη επιφανειακή ταχύτητα υγρού, το μήκος του φιλμ προκύπτει με δοκιμές, μέχρι να ικανοποιηθεί η εξίσωση (2.6).

2.3 Σχήμα του φιλμ

Το σχήμα του φιλμ, δηλαδή το ύψος του σε κάθε θέση, έχει μια πολύ σύνθετη δομή, ειδικά προς το τέλος του υγρού slug. Πρόκειται για ένα τρισδιάστατο πρόβλημα, το οποίο ξεφεύγει από τα πλαίσια αυτής της εργασίας. Για αυτό τον λόγο, το πρόβλημα απλοποιείται κάνοντας κάποιες προσεγγίσεις και χρησιμοποιώντας τελικά τη θεωρία της ροής σε αγωγό σε μια διάσταση. Προκειμένου να προσδιοριστεί το ύψος του φιλμ σε κάθε θέση, $h_f(z)$, και η ταχύτητα σε κάθε θέση στο φιλμ, $u_f(z)$, εφαρμόζονται εξισώσεις διατήρησης της ορμής στην περιοχή του φιλμ. Αυτές καταλήγουν στη διαφορική εξίσωση:

$$\frac{dh_f}{dz} = \frac{\frac{\tau_f S_f}{A_f} - \frac{\tau_G S_G}{A_G} - \tau_i S_i \left(\frac{1}{A_f} + \frac{1}{A_G} \right) + (\rho_L - \rho_G) g \sin \beta}{(\rho_L - \rho_G) g \cos \beta - \rho_L v_f \frac{(u_t - u_L) R_s}{R_f^2} \frac{dR_f}{dh_f} - \rho_G v_G \frac{(u_t - u_b)(1 - R_s)}{(1 - R_f)^2} \frac{dR_f}{dh_f}} \quad (2.7)$$

Επιλύοντας αυτή τη μη γραμμική διαφορική εξίσωση αριθμητικά, με τη βοήθεια του Matlab, υπολογίζεται το ύψος του φιλμ σε κάθε θέση και κατ' επέκταση και άλλα μεγέθη που συνδέονται άμεσα με αυτό, όπως οι ταχύτητες u_f και u_G , οι τριβές, πόσο μέρος της διατομής καλύπτεται από υγρό και πόσο από αέριο και τις υδραυλικές διαμέτρους.

2.4 Ανάλυση των παραγόντων

Οι τρεις πρώτοι όροι του αριθμητή σχετίζονται με τις διατμητικές τάσεις που αναπτύσσονται κατά τη ροή των δύο ρευστών. Πρόκειται ουσιαστικά για τρεις διαφορετικές τριβές: η πρώτη δημιουργείται ανάμεσα στο υγρό και στα τοιχώματα του αγωγού (τ_f), η δεύτερη ανάμεσα στο αέριο και στα τοιχώματα του αγωγού (τ_G) και η τρίτη αναπτύσσεται στη διεπιφάνεια των δύο ρευστών, λόγω της σχετικής τους κίνησης (τ_i). Δίνονται από τις εξής σχέσεις:

$$\tau_f = f_f (\rho_L |u_f| u_f / 2) \quad (2.8)$$

$$\tau_G = f_G (\rho_G |u_G| u_G / 2) \quad (2.9)$$

$$\tau_i = f_i (\rho_G |u_G - u_f| (u_G - u_f) / 2) \quad (2.10)$$

όπου f οι συντελεστές τριβής για κάθε περίπτωση και ρ οι πυκνότητες των ρευστών. Οι συντελεστές τριβής για λείους, μη τραχείς αγωγούς, δίνονται τη σχέση του Blasius:

$$f_f = C_f (D_h u_f / \nu_L)^n \quad (2.11)$$

Οι υδραυλικές διαμέτροι δίνονται από τις σχέσεις:

$$D_{hf} = \frac{4A_f}{S_f} \quad (2.12)$$

$$D_{hG} = \frac{4A_G}{S_G + S_i} \quad (2.13)$$

Για στρωτή ροή ισχύει: $C_f = C_g = 16$ και $n = -1$. Για τον προσδιορισμό των A και S , χρησιμοποιούνται απλές γεωμετρικές σχέσεις που συνδέουν αυτά τα μεγέθη με την αντίστοιχη επίκεντρη γωνία q , η οποία δίνεται από τη σχέση:

$$q = 2 \arccos \left(1 - \frac{h_f}{D/2} \right) \quad (2.14)$$

Συνεπώς προκύπτουν:

$$A_f = \frac{\left(\frac{D}{2}\right)^2}{2} (q - \sin q) \quad (2.15)$$

$$A_G = \pi \frac{D^2}{4} - A_f \quad (2.16)$$

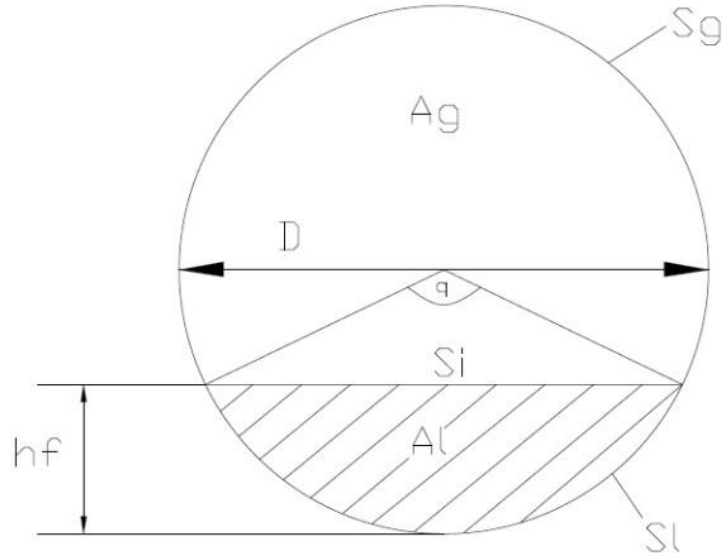
$$S_f = q \frac{D}{2} \quad (2.17)$$

$$S_G = \pi D - S_f \quad (2.18)$$

Για τη διεπιφάνεια των δύο ρευστών ισχύει:

$$S_i = \frac{D}{2} \sqrt{2 - 2 \cos q} \quad (2.19)$$

Ο προσδιορισμός του συντελεστή τριβής στη διεπιφάνεια των ρευστών αποτελεί πιο σύνθετο πρόβλημα. Για μικρές ταχύτητες υγρού και αερίου μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο τύπος για λείους αγωγούς. Ωστόσο για κυματώδη διεπιφάνεια, το φαινόμενο γίνεται πιο σύνθετο και έτσι απαιτείται μια προσέγγιση του συντελεστή. Για κυματώδη στρωματοποιημένη ροή θεωρείται $f_i = 0.014$. Στο σχήμα 2.2 φαίνονται όλα τα γεωμετρικά στοιχεία της διατομής που εμφανίζονται στους τύπους.



Σχήμα 2.2: Γεωμετρικά στοιχεία διατομής

Ο τρίτος παράγοντας του αριθμητή και ο πρώτος του παρονομαστή σχετίζονται με τις πυκνότητες του υγρού και του αερίου, καθώς και με την κλίση του αγωγού. Ο δεύτερος όρος του παρονομαστή περιέχει τις σχετικές ταχύτητες των μορίων του υγρού ως προς τη μεταφορική ταχύτητα,

$$v_f = u_t - u_f \quad (2.20)$$

την μεταφορική ταχύτητα u_t , την ταχύτητα του υγρού στην περιοχή του slug u_L , το ποσοστό του υγρού στην περιοχή του slug R_s , το ποσοστό του υγρού στην περιοχή του φιλμ, R_f και τον παράγοντα $\frac{dR_f}{dh_f}$. Ο τρίτος όρος του παρονομαστή περιέχει τις σχετικές ταχύτητες των μορίων του αερίου ως προς τη μεταφορική ταχύτητα,

$$v_G = u_t - u_G \quad (2.21)$$

την μεταφορική ταχύτητα u_t , την ταχύτητα των φυσαλίδων στην περιοχή του slug u_b , τα ποσοστά του αερίου (void fraction) τόσο στην περιοχή του slug, όσο και στο φιλμ $a_s = 1 - R_s$ και $a_f = 1 - R_f$ και τον παράγοντα $\frac{dR_f}{dh_f}$.

2.5 Βοηθητικές σχέσεις

2.5.1 Μεταφορική ταχύτητα (Translational velocity)

Περιγράφει την ταχύτητα της μονάδας του slug και σχετίζεται τόσο με την επιμήκη φυσαλίδα, όσο και με τις μικρές διασκορπισμένες φυσαλίδες της ζώνης του slug. Είναι μεγαλύτερη από τη ταχύτητα των μορίων του αερίου στο εσωτερικό της φυσαλίδας. Στα πλαίσια αυτής της εργασίας, η ταχύτητα αυτή δίνεται από τη σχέση:

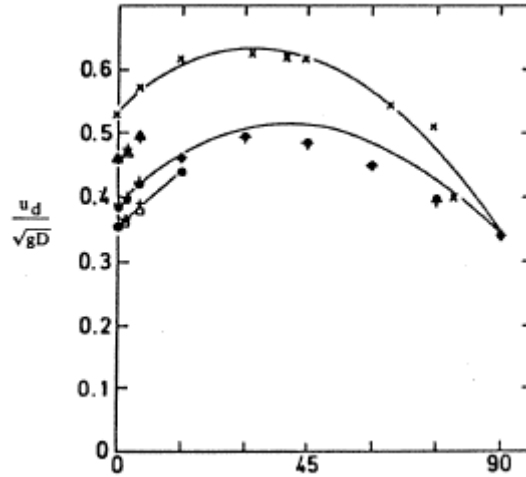
$$u_t = Cu_s + u_d \quad (2.22)$$

Όπου:

$$u_s = u_{LS} + u_{GS} \quad (2.23)$$

είναι η ταχύτητα του “μίγματος” στην περιοχή του slug και ισούται με το άθροισμα των επιφανειακών ταχυτήτων των δύο ρευστών. Η σχέση (2.22) αποδεικνύει ότι η σχετική ταχύτητα μπορεί να εκφραστεί ως ένας γραμμικός συνδυασμός των ταχυτήτων του μίγματος και της ταχύτητας σύρσης. Ο συντελεστής C σχετίζεται με τη συνεισφορά του μέρους της ταχύτητας του μίγματος και μια καλή προσέγγιση για στρωτή ροή (laminar flow), είναι $C = 2$.

Η ταχύτητα “σύρσης”, u_d , ορίζεται ως η ταχύτητα με την οποία διαδίδεται μια μεγάλη επιμήκης φυσαλίδα σε στάσιμο υγρό. Γενικά παρουσιάζει μια ιδιόμορφη συμπεριφορά, σύμφωνα με την οποία αυξάνει καθώς μειώνεται η κλίση σε σχέση με την κατακόρυφο, παρουσιάζει την μέγιστη τιμή της μέσα σε ένα εύρος κλίσεων 40-60 μοίρες και μετά μειώνεται καθώς πλησιάζει την οριζόντια θέση. Ενδεικτικό είναι το σχήμα 2.3, όπου παρουσιάζεται η αδιάστατη ταχύτητα σύρσης συναρτήσει της γωνίας.



Σχήμα 2.3: Μεταβολή αδιάστατης ταχύτητας “σύρσης” συναρτήσει της κλίσης του αγωγού

2.5.2 Ταχύτητα του υγρού στην περιοχή του slug

Για τη ταχύτητα του υγρού στην περιοχή του slug, ισχύει:

$$u_L = \frac{u_s - u_b a_s}{R_s} \quad (2.24)$$

Για την ταχύτητα u_b που θεωρείται ότι έχουν οι φυσαλίδες στην περιοχή του slug, θεωρείται:

$$u_b = Bu_s + u_0 \quad (2.25)$$

όπου u_0 είναι η ταχύτητα ελεύθερης ανύψωσης (free rise velocity) μιας φυσαλίδας που εμπλέκεται σε ένα πλήθος φυσαλίδων και είναι μικρότερη από την ταχύτητα ελεύθερης ανύψωσης μιας απομονωμένης φυσαλίδας. Πρόκειται όμως για μια ειδική ανάλυση, που δεν αφορά την παρούσα εργασία και για αυτό λαμβάνονται συγκεκριμένες τιμές της ταχύτητας

των φυσαλίδων, ανάλογα με την κλίση του αγωγού. Το ποσοστό του υγρού στην περιοχή του slug, συνδέεται άμεσα με τη ταχύτητα του μίγματος με την εξής προσεγγιστική σχέση:

$$R_s = \frac{1}{1 + \left(\frac{u_s}{8.66}\right)^{1.39}} \quad (2.26)$$

2.5.3 Ποσοστού του υγρού σε μία τυχαία διατομή του αγωγού, στην περιοχή του φιλμ

Συμβολίζεται με R_f και δίνεται από τη σχέση:

$$R_f = (1/\pi) \left\{ \pi - \cos^{-1} [2(h_f/D) - 1] + [2(h_f/D) - 1] \sqrt{1 - [2(h_f/D) - 1]^2} \right\} \quad (2.27)$$

ενώ ο παράγοντας $\frac{dR_f}{dh_f}$ θα δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{dR_f}{dh_f} = \frac{4}{\pi D} \sqrt{1 - \left(2\frac{h_f}{D} - 1\right)^2} \quad (2.28)$$

2.6 Υπολογισμός πιέσεων

Από τη διατήρηση της ορμής, τόσο για το υγρό όσο και το αέριο στην περιοχή του φιλμ, προκύπτουν οι δύο παρακάτω εξισώσεις:

$$\rho_L v_f \frac{\partial v_f}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\tau_f S_f}{A_f} - \frac{\tau_i S_i}{A_f} + \rho_L g \sin \beta - \rho_L g \cos \beta \frac{\partial h_f}{\partial z} \quad (2.29)$$

$$\rho_L v_G \frac{\partial v_G}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\tau_G S_G}{A_G} + \frac{\tau_i S_i}{A_G} + \rho_G g \sin \beta - \rho_G g \cos \beta \frac{\partial h_f}{\partial z} \quad (2.30)$$

Έχοντας υπολογίσει αρχικά το ύψος του φιλμ σε κάθε θέση εύκολα προκύπτουν οι αντίστοιχες τιμές για τις διατμητικές τάσεις, για τα γεωμετρικά στοιχεία της διατομής και οι σχετικές ταχύτητες. Έτσι μπορούν να υπολογιστούν αριθμητικά οι τιμές της πίεσης κατά μήκος του φιλμ, δίνοντας μια αρχική τιμή σε κάποια χαρακτηριστική θέση του φιλμ. Θέτοντας την πίεση στο τέλος του φιλμ ίση με το 0, $P(l_f) = 0$, υπολογίζεται ουσιαστικά η μεταβολή της πίεσης. Το διάστημα ολοκλήρωσης έχει ήδη υπολογισθεί για την επίλυση της εξίσωσης (2.7) από την εξίσωση (2.6).

2.7 Διαδικασία επίλυσης διαφορικής εξίσωσης

Η επίλυση της διαφορικής εξίσωσης γίνεται αριθμητικά, με τη βοήθεια του Matlab και της εντολής *ode45*. Προκειμένου να επιλυθεί η εξίσωση, με αριθμητική ολοκλήρωση με την μέθοδο Runge-Kutta που χρησιμοποιεί η *ode45*, πρέπει να εισαχθούν δύο δεδομένα. Πρέπει να δοθεί μια αρχική τιμή της συνάρτησης στη θέση $z = 0$, δηλαδή το $h_f(0)$, και επιπλέον να οριστεί το διάστημα στο οποίο θα γίνει η ολοκλήρωση και το οποίο ταυτίζεται με το μήκος του φιλμ. Η αρχική τιμή που ζητείται υπολογίζεται ως εξής: Επιλύεται η εξίσωση (2.27) ως προς h_f , κάνοντας την αντικατάσταση $R_f = R_s$. Το R_s υπολογίζεται από τη σχέση (2.26). Έτσι εξάγεται η τιμή h_s . Έπειτα εξάγεται η τιμή h_c , θέτοντας τον

παρονομαστή της εξίσωσης (2.7) ίσο με το 0. Σαν αρχική τιμή στο πρόβλημα εισάγεται η μικρότερη από τις δύο τιμές. Το δεύτερο δεδομένο, όπως προαναφέρθηκε, είναι το μήκος του φιλμ. Αυτό εξάγεται επαναληπτικά με δοκιμές, μέχρις ότου ικανοποιηθεί η εξίσωση (2.6). Η ολοκλήρωση πραγματοποιείται από το 0 έως το l_f , με όσο σημεία διακριτοποίησης οριστούν, προσδιορίζοντας το κατάλληλο βήμα. Έχοντας γράψει το κυρίως πρόγραμμα, καλείται η συνάρτηση *ode45* και δίνοντας τα δύο παραπάνω δεδομένα-inputs, επιλύεται η εξίσωση και αποκτώνται οι τιμές για το ύψος του φιλμ του υγρού σε κάθε θέση. Τέλος, μετά από κάθε περίπτωση, πραγματοποιείται ένας έλεγχος σύγκλισης της μεθόδου (convergence test). Αυτό γίνεται ώστε να ελεγχθεί ότι η μορφή της καμπύλης παραμένει ακριβώς η ίδια ανεξάρτητα από το πλήθος των ενδιάμεσων σημείων του διαστήματος.

Κεφάλαιο 3

Δυναμικό πρόβλημα

3.1 Περιγραφή τρόπου επίλυσης του προβλήματος

Το παρόν μέρος της εργασίας σχετίζεται με την εύρεση αποτελεσμάτων για το δυναμικό κομμάτι, το οποίο και αποτελεί το πλήρες πρόβλημα. Τα αποτελέσματα που θα παρουσιαστούν είναι προσεγγιστικά. Χρησιμοποιούνται τα αποτελέσματα για το ύψος του φιλμ, για τα ποσοστά της διατομής που είναι κατειλημμένα από αέριο, για την κατανομή των πιέσεων και των δυνάμεων τριβής που έχουν εξαχθεί από το στατικό πρόβλημα. Εισάγοντας αυτά τα δεδομένα και κάνοντας κάποιες παραδοχές επιλύονται οι μερικές διαφορικές εξισώσεις που διέπουν το πλήρες πρόβλημα και έτσι εξάγονται τα αποτελέσματα για τις ταχύτητες των δύο ρευστών συναρτήσει της θέσης και του χρόνου.

3.2 Περιγραφή φαινομένου

Η γενικότερη θεωρία και ανάλυση αυτού του κομματιού εστιάζει στην δημιουργία, την ανάπτυξη και την εξέλιξη της ροής των slugs του υγρού μέσα στους αγωγούς. Η γενική εικόνα της ροής παραμένει σταθερή, δηλαδή slugs υγρού ρέουν εναλλάξ με μεγάλες φυσαλίδες αερίου με τυχαία, όμως, πλεόν συχνότητα. Ροή slug μπορεί να προκύψει από στρωματοποιημένη ροή, μέσω των δύο μηχανισμών που αναφέρθηκαν για τη ροή μόνιμης κατάστασης, δηλαδή την ανάπτυξη υδροδυναμικών ασταθειών και τη συσσώρευση υγρού λόγω στιγμιαίας ανισορροπίας της πίεσης και των βαρυτικών δυνάμεων που μπορεί να προκληθεί λόγω κυματισμών μέσα στον αγωγό. Στην πρώτη περίπτωση, μικρά κύματα που υπάρχουν φυσιολογικά στην επιφάνεια του υγρού μπορούν μέσω ενός μηχανισμού να γίνουν ολοένα μεγαλύτερα, μέχρις ότου η στάθμη του υγρού να καταλάβει ολόκληρη τη διατομή, δημιουργώντας slugs. Όμως σε αυτή την περίπτωση, τα slugs δε θεωρούνται ως ένα σώμα και έτσι υπάρχει η δυνατότητα αυτά να αναπτυχθούν εάν το μπροστινό τους μέρος ρέει πιο γρήγορα από το πίσω, σε αντίθετη περίπτωση θα διαλύονταν. Στην πραγματική ροή συμβαίνουν όλα τα παραπάνω, με αποτέλεσμα κάποια slugs να μεγαλώνουν, άλλα να διαλύονται και άλλα να συγχωνεύονται όταν ρέουν με διαφορετική ταχύτητα.

Οι εξισώσεις που περιγράφουν το σύστημα, βασίζονται στις αρχές διατήρησης της μάζας, της ορμής και της ενέργειας και είναι οι παρακάτω:

$$\frac{\partial(\rho_g a_g)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_g a_g u_g)}{\partial x} = -\dot{m}_b \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial(\rho_l a_l)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_l a_l u_l)}{\partial x} = \dot{m}_b \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial(\rho_g a_g u_g)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_g a_g u_g^2)}{\partial x} = -a_g \frac{\partial P}{\partial x} + \rho_g a_g g \sin \beta + F_{gw} + F_i \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial(\rho_l a_l u_l)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_l a_l u_l^2)}{\partial x} = -a_l \frac{\partial P}{\partial x} - \rho_l a_l g \frac{\partial h}{\partial x} \cos \beta + \rho_l a_l g \sin \beta + F_{lw} - F_i \quad (3.4)$$

Με τη βοήθεια του Matlab και με χρήση της συνάρτησης *pdepe*, θα επιλυθεί το σύστημα των εξισώσεων (3.3),(3.4), θα προκύψουν οι τιμές των ταχυτήτων του υγρού και του αερίου συναρτήσει της θέσης και του χρόνου, δηλαδή $u(x,t)$ και θα εξαχθούν τα αντίστοιχα γραφήματα. Σημειώνεται ότι όπως και στο στατικό πρόβλημα, η ανάλυση βασίζεται στη θεωρία της ροής σε μια διάσταση x .

3.3 Επίλυση του συστήματος των μερικών διαφορικών εξισώσεων στο Matlab

Για να είναι εφικτό να χρησιμοποιηθεί η συνάρτηση *pdepe* και άρα να λυθεί αριθμητικά το σύστημα, δηλαδή να προσδιοριστούν οι τιμές των ταχυτήτων σε κάθε θέση και κάθε χρονική στιγμή, πρέπει πρώτα από όλα να τροποποιηθούν οι εξισώσεις σε συγκεκριμένη μορφή, μέσω της οποίας θα οριστούν οι κατάλληλες παράμετροι που χρειάζεται σα δεδομένα η συνάρτηση. Η μορφή αυτή είναι η ακόλουθη:

$$c(x,t,u, \frac{\partial u}{\partial x}) \frac{\partial u}{\partial t} = x^{-m} \frac{\partial}{\partial x} (x^m f(x,t,u, \frac{\partial u}{\partial x})) + s(x,t,u, \frac{\partial u}{\partial x}) \quad (3.5)$$

Οι όροι που πρέπει να προσδιοριστούν είναι οι εξής:

- Ο συντελεστής m που εκφράζει τη συμμετρία του προβλήματος. Με απλή σύγκριση των σχέσεων προκύπτει: $m = 0$
- Ο όρος c , είναι ένας πίνακας, ο οποίος λόγω των θετικών στοιχείων που περιέχει,

εκφράζει παραβολικές εξισώσεις. Έχει τα εξής στοιχεία: $c = \begin{bmatrix} \rho_g a_g \\ \rho_l a_l \end{bmatrix}$

- Ο όρος f , γνωστός ως flux term, ορίζεται ως: $f = \begin{bmatrix} -\rho_g a_g u_g^2 \\ -\rho_l a_l u_l^2 \end{bmatrix}$

- Ο όρος s , γνωστός ως source term, περιέχει ουσιαστικά τους υπόλοιπους όρους της εξίσωσης καθώς και τους όρους από την ανάλυση του $\frac{\partial(\rho_g a_g u_g^2)}{\partial x}$ και ορίζεται ως:

$$s = \begin{bmatrix} -a_g \frac{\partial P_g}{\partial x} + \rho_g a_g g \sin \beta + F_{gw} + F_i - \rho_g u_g^2 \frac{\partial a_g}{\partial x} \\ -a_l \frac{\partial P_l}{\partial x} - \rho_l a_l g \frac{\partial h}{\partial x} \cos \beta + \rho_l a_l g \sin \beta + F_{lw} - F_i - \rho_l u_l^2 \frac{\partial a_l}{\partial x} \end{bmatrix}$$

Το διάστημα ολοκλήρωσης εδώ δεν είναι το μήκος του φιλμ, αλλά ορίζεται μια αυθαίρετη τιμή. Ωστόσο, η επίλυση των μερικών διαφορικών εξισώσεων απαιτεί οριακές και συνοριακές συνθήκες. Σαν οριακές συνθήκες για $t = 0$, λαμβάνονται οι τιμές των ταχυτήτων των δύο ρευστών, που έχουν ήδη υπολογιστεί από το στατικό πρόβλημα στη θέση $x = 0$. Αντιστοίχως, σα συνοριακές συνθήκες λαμβάνονται οι τιμές των ταχυτήτων στα δύο άκρα

του φιλμ, που έχουν προσδιοριστεί, δηλαδή ορίζονται οι τιμές για $\begin{cases} u_f(0,t) \\ u_f(1_f,t) \end{cases}$ και

αντιστοίχως $\begin{cases} u_g(0,t) \\ u_g(1_f,t) \end{cases}$.

Κεφάλαιο 4

Αριθμητικά αποτελέσματα

4.1 Αποτελέσματα προβλήματος μόνιμης κατάστασης

Χρησιμοποιώντας τα δεδομένα από τη δημοσίευση των Issa and Kempf που δείχνει τους συνδυασμούς των επιφανειακών ταχυτήτων των δύο ρευστών για τους οποίους μια ροή μπορεί να θεωρηθεί slug, επιλέγονται τα παρακάτω ζεύγη τιμών (κάποιες τιμές είναι οριακές):

1. $u_{LS} = 0.2 \text{ m/s}$ και $u_{GS} = 2 \text{ m/s}$
2. $u_{LS} = 1 \text{ m/s}$ και $u_{GS} = 2 \text{ m/s}$
3. $u_{LS} = 0.4 \text{ m/s}$ και $u_{GS} = 6 \text{ m/s}$
4. $u_{LS} = 0.8 \text{ m/s}$ και $u_{GS} = 2 \text{ m/s}$

Οι υπολογισμοί γίνονται για τις γωνίες: $\beta=0^\circ, 10^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 70^\circ$. Εισάγονται, στα δεδομένα στο κυρίως πρόγραμμα, οι ταχύτητες σύρσης και οι ταχύτητες των φυσαλίδων συναρτήσει της κλίσης του αγωγού [3]. Οι τιμές παρουσιάζονται στον πίνακα 1.

Πίνακας 1: Ταχύτητες σύρσης και ταχύτητες φυσαλίδων συναρτήσει της κλίσης του αγωγού

β ($^\circ$)	0	10	30	60	70
ud (m/s)	0.33	0.37	0.41	0.38	0.26
ub (m/s)	0.63	0.73	0.93	1	0.83

Για διάμετρο του αγωγού λαμβάνονται οι τυποποιημένες διαστάσεις: $D_{outer} = 0.429 \text{ m}$ και $D_{inner} = 0.385 \text{ m}$. Στα πλαίσια των υπολογισμών θα γίνει χρήση μόνο της εσωτερικής διαμέτρου. Τα ρευστά τα οποία θα χρησιμοποιηθούν είναι το μεθάνιο (CH_4) και το αργό

πετρέλαιο κατηγορίας crude oil 48. Τα φυσικά χαρακτηριστικά του μεθανίου στους 20°C είναι [4]:

- Πυκνότητα $\rho_g = 0.675 \text{ kg} / \text{m}^3$
- Κινηματικό ιξώδες $\nu_g = 1.615 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 / \text{s} = 16.15 \text{ cSt}$

Για το πετρέλαιο, στους 15.5°C, ισχύει [5]:

- Πυκνότητα $\rho_l = 790 \text{ kg} / \text{m}^3$
- Κινηματικό ιξώδες $\nu_l = 3.8 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s} = 3.8 \text{ cSt}$

Θα παρουσιαστούν τα αποτελέσματα του στατικού προβλήματος, συναρτήσει της γωνίας, σε μορφή διαγραμμάτων, για το ύψος του φιλμ σε κάθε θέση, $h_f(z)$, άρα ουσιαστικά εξάγεται το σχήμα του περιγράμματος της φυσαλίδας, για τις ταχύτητες των ρευστών σε κάθε θέση μέσα στο φιλμ και για τις πιέσεις. Επιπλέον παρατίθεται και το διάγραμμα σύγκλισης της μεθόδου για κάθε περίπτωση.

4.1.1 Παρουσίαση αποτελεσμάτων για: $u_{LS} = 0.2 \text{ m/s}$ και $u_{GS} = 2 \text{ m/s}$

Μελετάται η περίπτωση, που η επιφανειακή ταχύτητα του αερίου είναι αρκετά μεγαλύτερη από την αντίστοιχη του υγρού, καθώς $\frac{u_{GS}}{u_{LS}} = 10$. Στα σχήματα παρουσιάζεται

αρχικά η μορφή του φιλμ του υγρού και γίνεται έλεγχος σύγκλισης της μεθόδου ανάλογα με το πλήθος των σημείων διαμέρισης του διαστήματος. Έπειτα παρουσιάζονται τα διαγράμματα για τα προφίλ των ταχυτήτων του αερίου και του υγρού, καθώς και αυτά για τις μεταβολές των πιέσεων των ρευστών. Επιπλέον λόγω ιδιομορφίας της καμπύλης μεταβολής της πίεσης του αερίου, παρουσιάζονται δύο επιπλέον διαγράμματα της ίδια καμπύλης, αλλά με αύξηση του πλήθους των σημείων διαμέρισης, ώστε να σχολιαστεί η αλλαγή της μορφής της καμπύλης.

4.1.1.1 Γωνία $\beta=0^\circ$

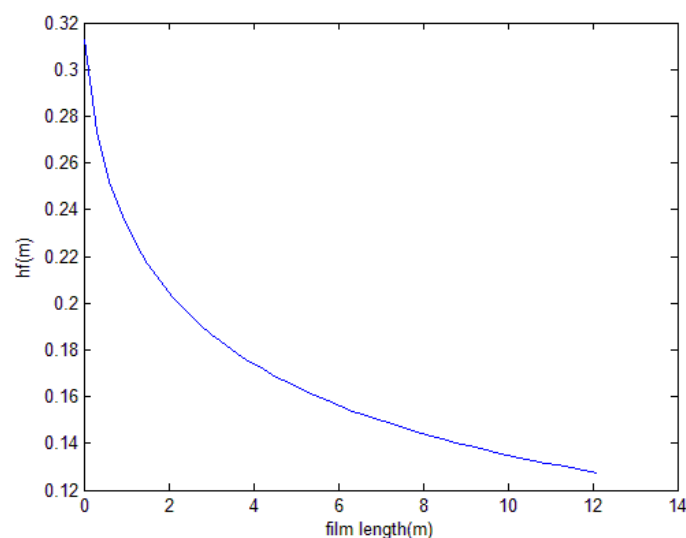
Από την εξίσωση (2.23) προκύπτει για τη ταχύτητα του μίγματος ότι $u_s = 2.2m/s$, και από αυτό το αποτέλεσμα σε συνδυασμό με τη (2.26) είναι $R_s = 0.8704$. Επιλύοντας τη (2.27) για $R_f = R_s$, προκύπτει μια αρχική τιμή $h_s = h_f(0) = 0.3129m$. Για τη ταχύτητα του υγρού στο μίγμα, από τη (2.24), είναι: $u_L = 2.4337m/s$. Η μεταφορική ταχύτητα, από τη σχέση (2.22) είναι $u_i = 4.73m/s$. Θέτοντας τον παρονομαστή της διαφορικής εξίσωσης (2.7), ίσο με το 0 και επιλύοντας ως προς h_f , προκύπτει ότι δεν υπάρχει η τιμή h_c , που να την ικανοποιεί. Όπως αναφέρεται μέσα στη δημοσίευση των Taitel and Barnea μια καλή υπόθεση για το μήκος της περιοχής του slug είναι 1.5m. Ο όρος του ολοκληρώματος υπολογίζεται στο Matlab με την εντολή *trapz*, έχοντας την κατανομή του ποσοστού της διατομής που καταλαμβάνεται από αέριο a_f . Επιλύοντας τη διαφορική εξίσωση (2.7), αποκτώνται οι τιμές $h_f(z)$ και άρα αυτομάτως οι τιμές του ποσοστού του υγρού, $R_f(z)$, μέσω της (2.27). Ωστόσο, ανεξάρτητα της τιμής του μήκους του φιλμ που εξετάζεται, ακόμη και της τάξης εκατοντάδων μέτρων έως και 9000m (νούμερο που δεν αντικατοπτρίζει φυσικά την πραγματικότητα), οι τιμές δε συγκλίνουν ποτέ και η εξίσωση (2.6) δεν ικανοποιείται. Οπότε, δεν υπάρχει συγκεκριμένο μήκος φιλμ, το οποίο να εναλλάσσεται με slugs. Το μήκος του φιλμ δηλαδή είναι “άπειρο”. Αέριο και υγρό ρέουν ταυτόχρονα μέσα στον αγωγό χωρίς να σχηματίζονται slugs, υπό αυτές τις συνθήκες.

4.1.1.2 Γωνία $\beta=10^\circ$

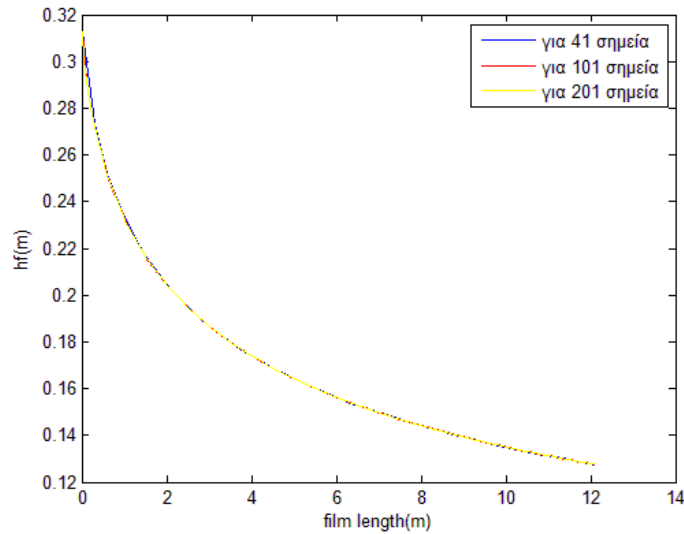
Για τις νέες τιμές των μεταφορικών ταχυτήτων και του υγρού στην περιοχή slug, καθώς και για τη νέα γωνία, δεν προκύπτει ρίζα του παρονομαστή. Η ρίζα της (2.27) παραμένει η ίδια, αφού δεν άλλαξαν οι επιφανειακές ταχύτητες των ρευστών. Τα δεδομένα που αφορούν αυτή την περίπτωση και χρησιμεύουν στην εύρεση της ρίζας του παρονομαστή καθώς και του φιλμ, συνοψίζονται στον πίνακα 2. Στα σχήματα 4.1 έως 4.7 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα.

Πίνακας 2: Δεδομένα αρχικών υπολογισμών για κλίση του αγωγού 10°

$R_s(m)$	0.8704
$h_s(m)$	0.3129
$u_t(m/s)$	4.77
$u_L(m/s)$	2.4188
$l_f(m)$	12.1
$l_s(m)$	1.5
$l_u(m)$	13.6
$\int_0^{l_f} a_f dx$	6.9978



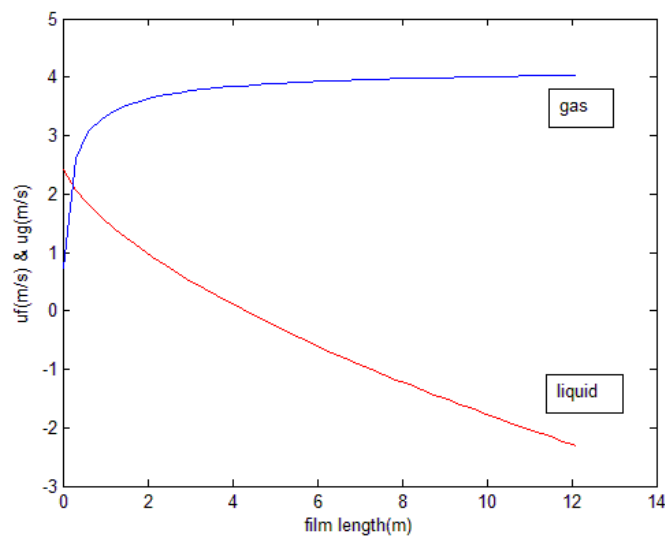
Σχήμα 4.1: Μορφή του φιλμ, για κλίση του αγωγού 10° και $u_{LS} = 0.2 m/s$, $u_{GS} = 2 m/s$



Σχήμα 4.2: Έλεγχος σύγκλισης, για κλίση του αγωγού 10° και $u_{LS} = 0.2 \text{ m/s}$,

$$u_{GS} = 2 \text{ m/s}$$

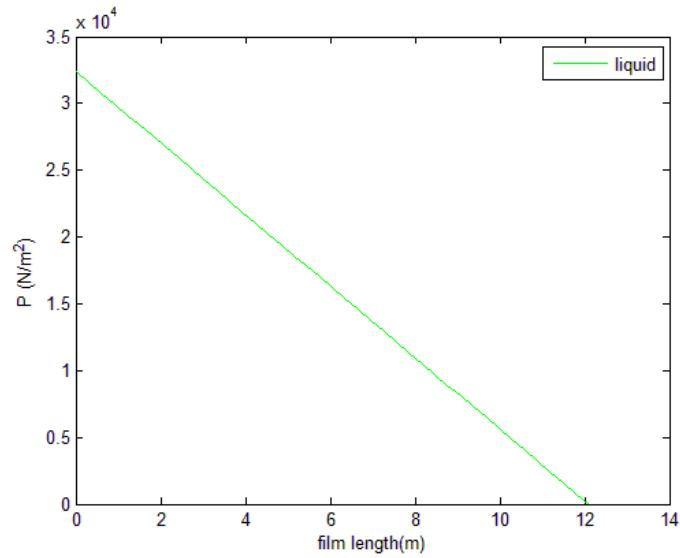
Στο σχήμα 4.2 παρουσιάζεται η μορφή του φιλμ, αλλά με αύξηση του πλήθους των σημείων διακριτοποίησης, ώστε να ελεγχθεί η σύγκλιση της μεθόδου, κατά πόσο δηλαδή οι καμπύλες ταυτίζονται.



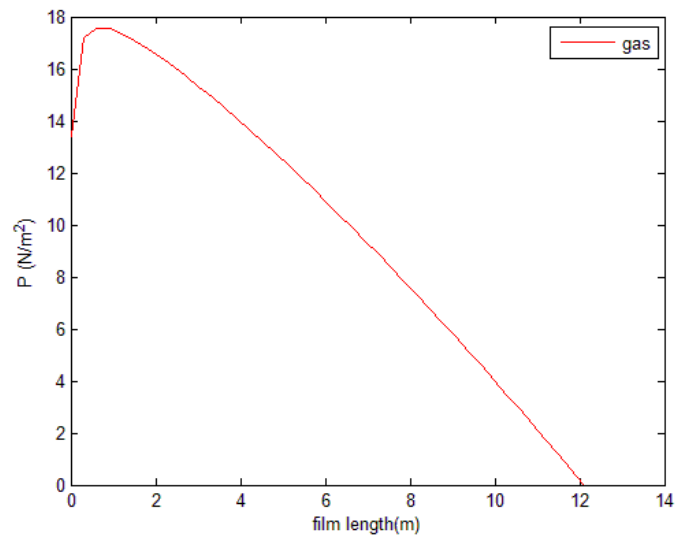
Σχήμα 4.3 : Προφίλ ταχυτήτων, για κλίση του αγωγού 10° και $u_{LS} = 0.2 \text{ m/s}$,

$$u_{GS} = 2 \text{ m/s}$$

Το αρνητικό πρόσημο στη ταχύτητα του υγρού στο σχήμα 4.3, είναι αναμενόμενο καθώς λόγω της κλίσης του αγωγού, μέρος του υγρού, από κάποιο σημείο και μετά ,εδώ στα 4.5 m περίπου, γυρίζει προς τα πίσω λόγω της επίδρασης της βαρύτητας.

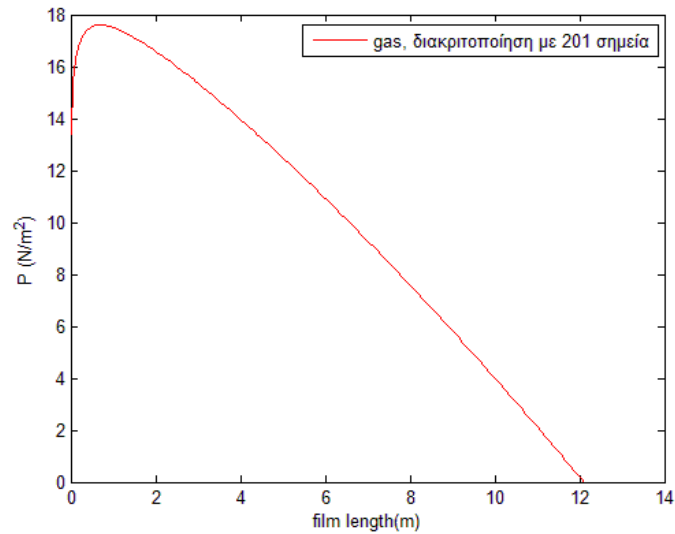


Σχήμα 4.4: Μεταβολή πίεσης υγρού, για κλίση του αγωγού 10° και $u_{LS} = 0.2 \text{ m/s}$,
 $u_{GS} = 2 \text{ m/s}$

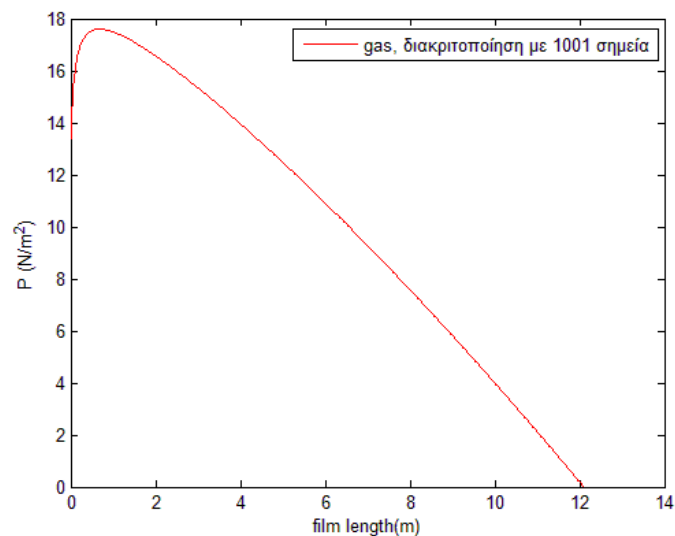


Σχήμα 4.5: Μεταβολή πίεσης αερίου, για κλίση του αγωγού 10° και $u_{LS} = 0.2 \text{ m/s}$,
 $u_{GS} = 2 \text{ m/s}$

Στο σχήμα 4.5, παρατηρείται ότι από το 0.5 m περίπου μέχρι και τα 2 m, υπάρχει μια ιδιαίτερη διαμόρφωση στην καμπύλη. Σε σύγκριση με το σχήμα 4.1 στην ίδια περιοχή, προκύπτει σε διάστημα 1.5 m πτώση του φιλμ κατά 11 cm περίπου και στα υπόλοιπα 10 m του φιλμ, πτώση άλλα 8 cm. Στα πρώτα 2 m δηλαδή, η καμπύλη είναι πιο απότομη. Στα σχήματα 4.6 και 4.7, αυξάνοντας το πλήθος των σημείων διαμέρισης από 41 σε 201 κι έπειτα σε 1001, το καμπύλο αυτό μέρος εξομαλύνεται, χωρίς να σχηματίζονται γωνίες.



Σχήμα 4.6: Μεταβολή πίεσης αερίου, με αύξηση των σημείων διαμέρισης από 41 σε 201, για κλίση του αγωγού 10° και $u_{LS} = 0.2 \text{ m/s}$, $u_{GS} = 2 \text{ m/s}$



Σχήμα 4.7: Μεταβολή πίεσης αερίου, με αύξηση των σημείων διαμέρισης από 41 σε 1001, για κλίση του αγωγού 10° και $u_{LS} = 0.2 \text{ m/s}$, $u_{GS} = 2 \text{ m/s}$

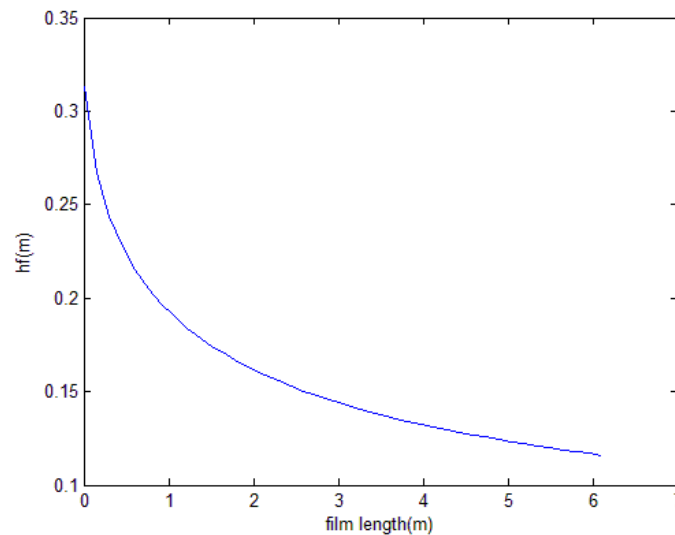
Αυτός ο έλεγχος πραγματοποιήθηκε και για το υγρό, αλλά λόγω της ομαλότητας της καμπύλης και της έλλειψης κάποιας ιδιομορφίας, η εικόνα είναι ακριβώς η ίδια, ανεξαρτήτου του πλήθους των σημείων διαμέρισης του διαστήματος, και άρα οι τιμές συγκλίνουν απόλυτα.

4.1.1.3 Γωνία $\beta=30^\circ$

Η αρχική τιμή του φιλμ, $h_f(0)$, παραμένει η ίδια. Τα δεδομένα για τους αρχικούς υπολογισμούς παρουσιάζονται στον πίνακα 3. Στα σχήματα 4.8 έως 4.15 παρουσιάζονται τα αντίστοιχα αποτελέσματα.

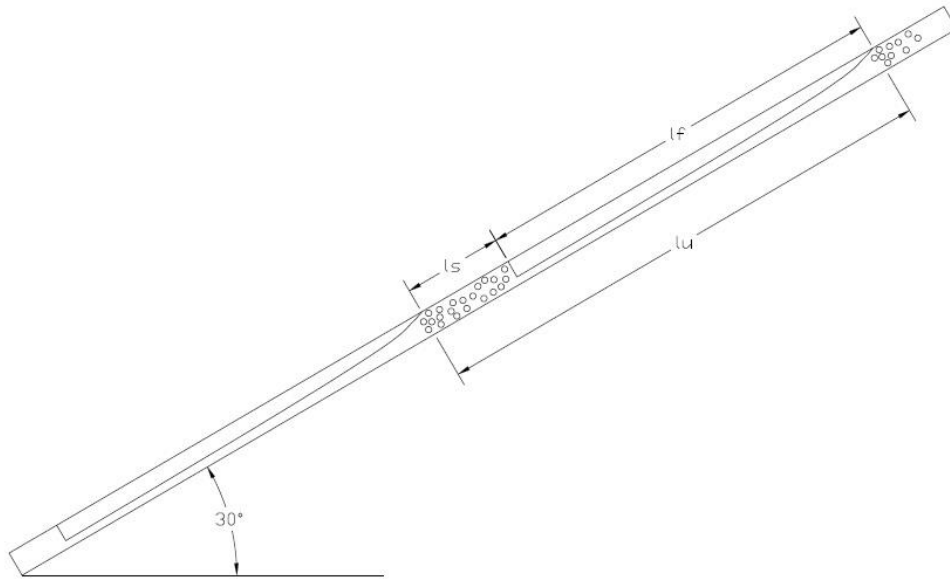
Πίνακας 3: Δεδομένα αρχικών υπολογισμών για κλίση του αγωγού 30°

$R_s(m)$	0.8704
$h_s(m)$	0.3129
$u_t(m/s)$	4.81
$u_L(m/s)$	2.3891
$l_f(m)$	6.11
$l_s(m)$	1.5
$l_u(m)$	7.61
$\int_0^{l_f} a_f dx$	3.7645



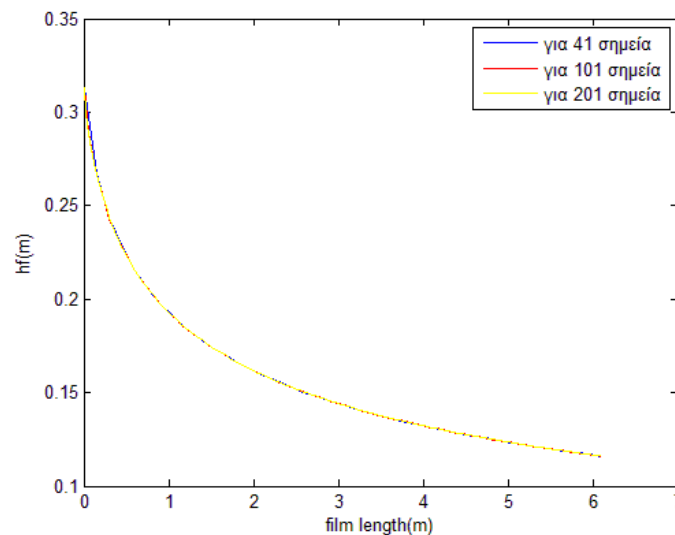
Σχήμα 4.8 : Μορφή του φιλμ, για κλίση του αγωγού 30° και $u_{LS} = 0.2 m/s$, $u_{GS} = 2 m/s$

Από σύγκριση των σχημάτων 4.8 και 4.1 παρατηρείται ότι αφενός το μήκος του φιλμ μειώνεται πολύ σε σχέση με την περίπτωση των 10° , σχεδόν υποδιπλασιάζεται, αφετέρου είναι πιο απότομη η κλίση της καμπύλης, καθώς στα πρώτα 2 m του φιλμ η πτώση του ύψους του είναι περίπου 15cm, ενώ στα υπόλοιπα 4 m περίπου, η πτώση είναι 4cm.

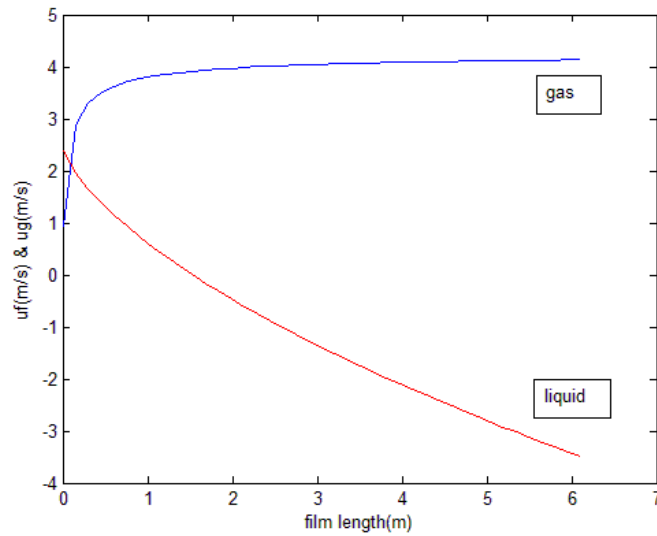


Σχήμα 4.9: Προσομοίωση ροής μέσα σε αγωγό, με πραγματικά νούμερα, με χρήση του AutoCad 2015

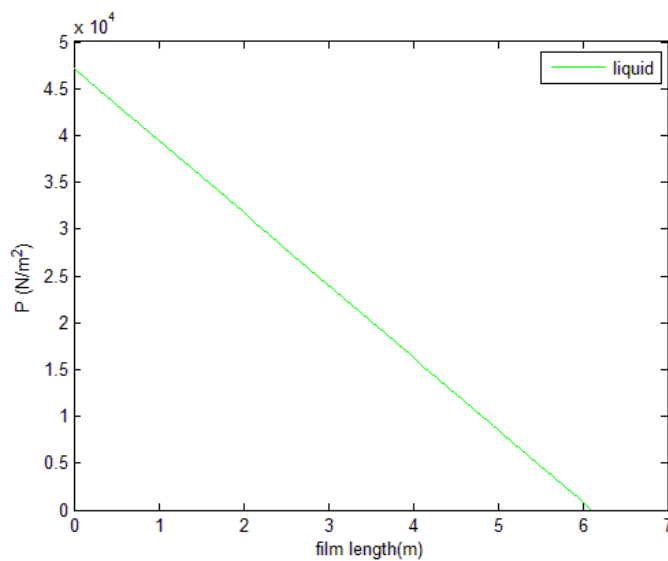
Στο σημείο αυτό επιχειρήθηκε να αναπαραστεί πλήρως η ροή μέσα στον αγωγό, χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα για το ύψος του φιλμ κατά μήκος της ροής. Με χρήση του AutoCad 2015, προέκυψε το σχήμα 4.9.



Σχήμα 4.10: Έλεγχος σύγκλισης, για κλίση του αγωγού 30° και $u_{LS} = 0.2 \text{ m/s}$,
 $u_{GS} = 2 \text{ m/s}$

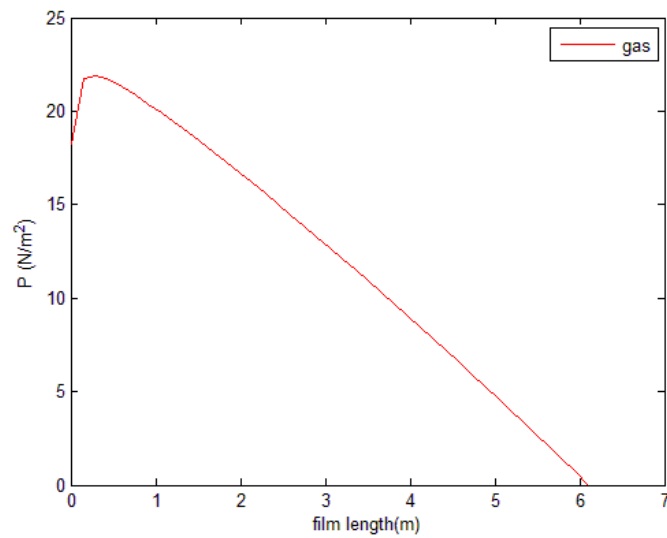


Σχήμα 4.11: Προφίλ ταχυτήτων, για κλίση του αγωγού 30° και $u_{LS} = 0.2 \text{ m/s}$,
 $u_{GS} = 2 \text{ m/s}$



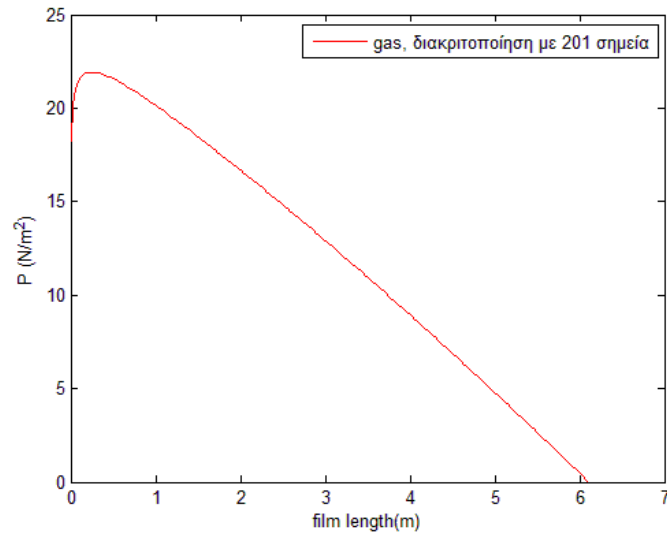
Σχήμα 4.12: Μεταβολή πίεσης υγρού, για κλίση του αγωγού 30° και $u_{LS} = 0.2 \text{ m/s}$,
 $u_{GS} = 2 \text{ m/s}$

Από σύγκριση των σχημάτων 4.4 και 4.12, φαίνεται ότι η πίεση στην αρχή του φιλμ είναι μεγαλύτερη. Επίσης από την αντιστοίχιση των τιμών των πιέσεων σε κάθε θέση του φιλμ, προκύπτει ότι η κλίση της ευθείας είναι μεγαλύτερη.

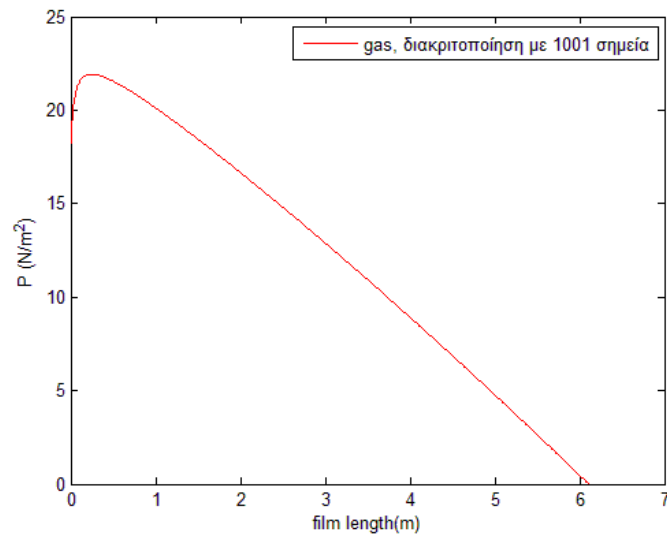


Σχήμα 4.13: Μεταβολή πίεσης αερίου, για κλίση του αγωγού 30° και $u_{LS} = 0.2 \text{ m/s}$,
 $u_{GS} = 2 \text{ m/s}$

Από το σχήμα 4.13 όμοια με την περίπτωση του υγρού, τόσο η τιμή της πίεσης στη θέση 0, όσο και η τιμή της πίεσης στην κορυφή είναι μεγαλύτερες σε σχέση με την περίπτωση των 10° .



Σχήμα 4.14: Μεταβολή πίεσης αερίου, με αύξηση των σημείων διαμέρισης από 41 σε 201, για κλίση του αγωγού 30° και $u_{LS} = 0.2 \text{ m/s}$, $u_{GS} = 2 \text{ m/s}$



Σχήμα 4.15: Μεταβολή πίεσης αερίου, με αύξηση των σημείων διαμέρισης από 41 σε 1001, για κλίση του αγωγού 30° και $u_{LS} = 0.2 \text{ m/s}$, $u_{GS} = 2 \text{ m/s}$

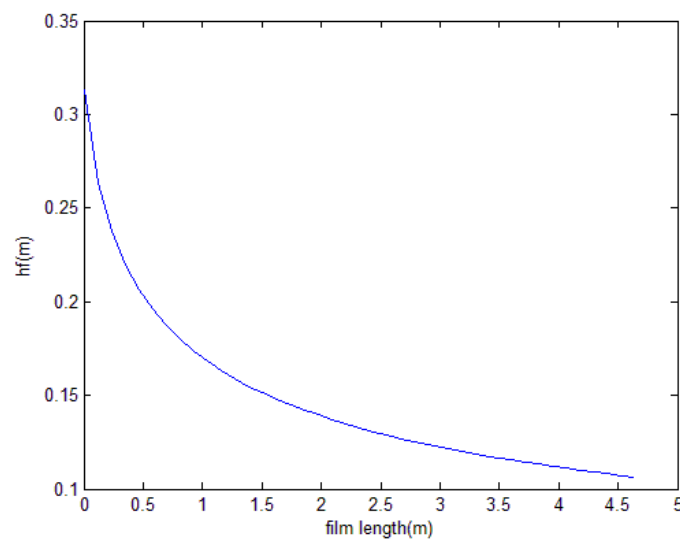
Στα σχήματα 4.14 και 4.15, όπου αυξήθηκε το πλήθος των σημείων διαμέρισης, ομαλοποιήθηκε και η κορυφή της καμπύλης.

4.1.1.4 Γωνία $\beta=60^\circ$

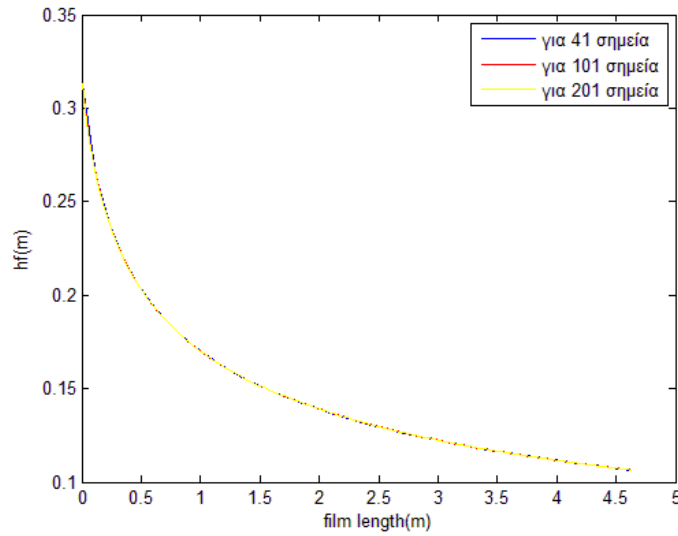
Τα δεδομένα των αρχικών υπολογισμών παρουσιάζονται στον πίνακα 4. Στα σχήματα 4.16 έως 4.22 παρουσιάζονται τα αντίστοιχα αποτελέσματα.

Πίνακας 4: Δεδομένα αρχικών υπολογισμών για κλίση του αγωγού 60°

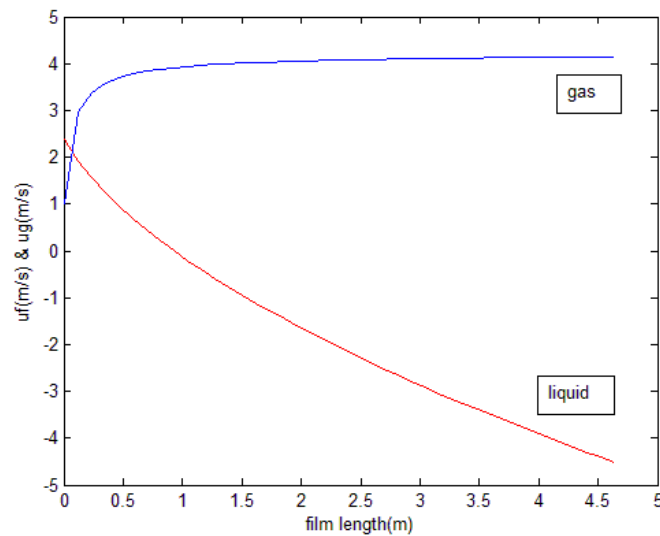
$R_s(m)$	0.8704
$h_s(m)$	0.3129
$u_t(m/s)$	4.78
$u_L(m/s)$	2.3786
$l_f(m)$	4.64
$l_s(m)$	1.5
$l_u(m)$	6.14
$\int_0^{l_f} a_f dx$	3.0028



Σχήμα 4.16: Μορφή του φιλμ, για κλίση του αγωγού 60° και $u_{LS} = 0.2 m/s$, $u_{GS} = 2 m/s$

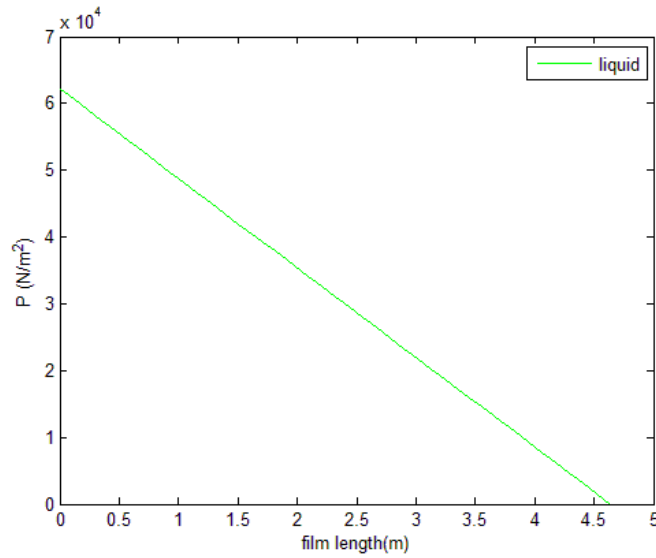


Σχήμα 4.17: Έλεγχος σύγκλισης, για κλίση του αγωγού 60° και $u_{LS} = 0.2 \text{ m/s}$,
 $u_{GS} = 2 \text{ m/s}$

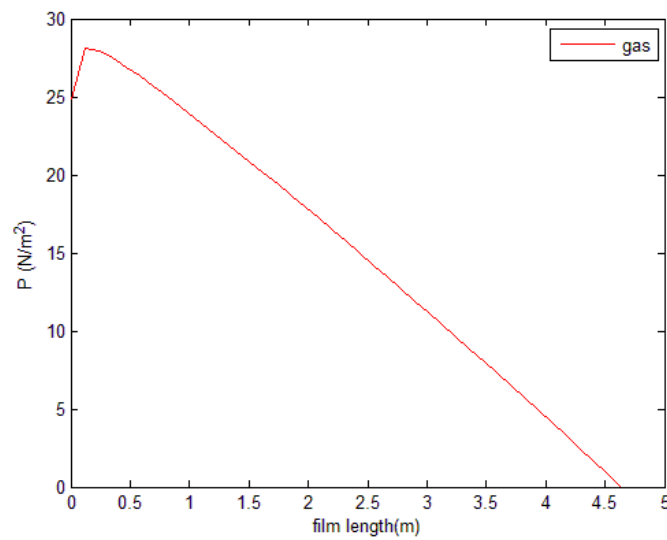


Σχήμα 4.18: Προφίλ ταχυτήτων, για κλίση του αγωγού 60° και $u_{LS} = 0.2 \text{ m/s}$,
 $u_{GS} = 2 \text{ m/s}$

Από το σχήμα 4.18 φαίνεται ότι με την αύξηση της κλίσης του αγωγού, αυξήθηκε κατά μέτρο και η ταχύτητα του υγρού, προς τα πίσω. Ωστόσο η ταχύτητα του αερίου, παραμένει ουσιαστικά σταθερή, καθώς αυξήθηκε μόνο κατά 0.012 m/s σε σχέση με την περίπτωση των 30° , (σχήμα 4.11).



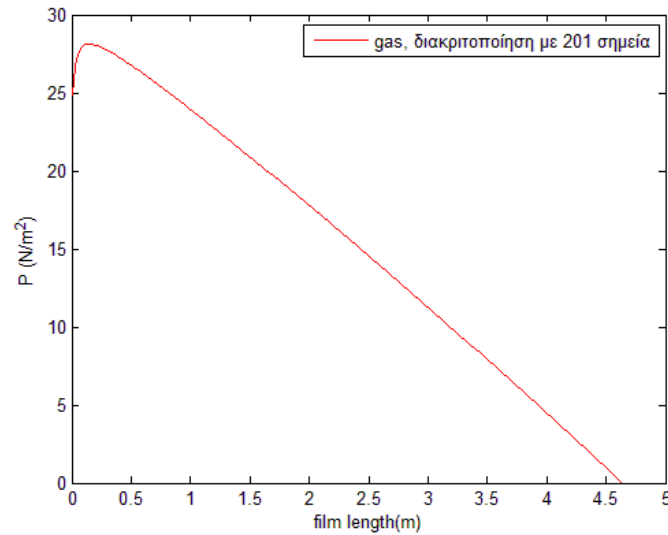
Σχήμα 4.19: Μεταβολή πίεσης υγρού, για κλίση του αγωγού 60° και $u_{LS} = 0.2 \text{ m/s}$,
 $u_{GS} = 2 \text{ m/s}$



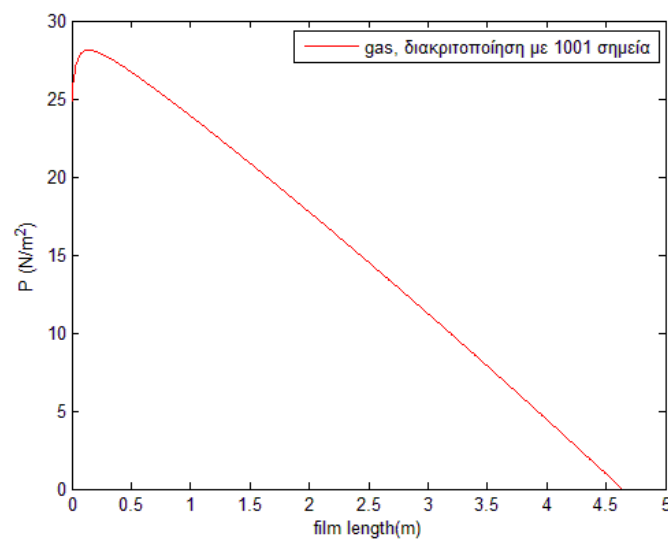
Σχήμα 4.20: Μεταβολή πίεσης αερίου, για κλίση του αγωγού 60° και $u_{LS} = 0.2 \text{ m/s}$,
 $u_{GS} = 2 \text{ m/s}$

Από το σχήμα 4.20 φαίνεται ότι το η καμπύλη ξεκινά από μεγαλύτερη τιμή στη θέση 0, ενώ παράλληλα στην κορυφή της, η καμπυλότητα αντικαθίσταται από γωνία. Το αρχικό τμήμα της καμπύλης που είναι εφαπτομενικό στον άξονα της πίεσης, είναι μικρότερου

μήκους σε σχέση με τις προηγούμενες περιπτώσεις. Η γωνία ομαλοποιείται στα σχήματα 4.21 και 4.22.



Σχήμα 4.21: Μεταβολή πίεσης αερίου, με αύξηση των σημείων διαμέρισης από 41 σε 201, για κλίση του αγωγού 60° και $u_{LS} = 0.2 \text{ m/s}$, $u_{GS} = 2 \text{ m/s}$



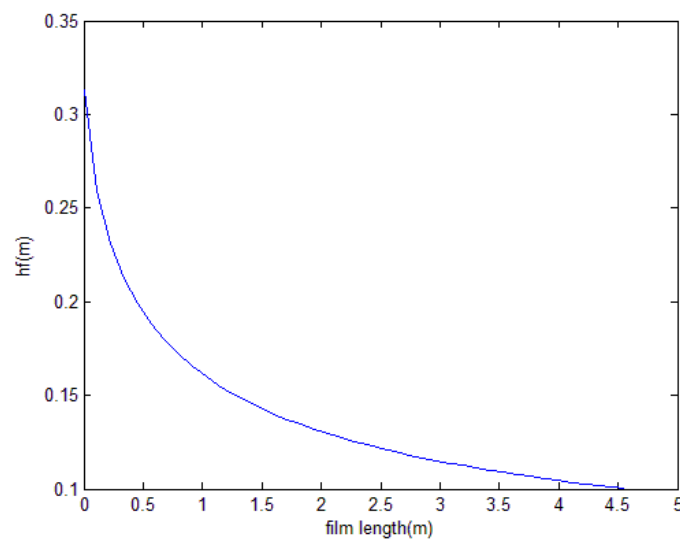
Σχήμα 4.22: Μεταβολή πίεσης αερίου, με αύξηση των σημείων διαμέρισης από 41 σε 1001, για κλίση του αγωγού 60° και $u_{LS} = 0.2 \text{ m/s}$, $u_{GS} = 2 \text{ m/s}$

4.1.1.5 Γωνία $\beta=70^\circ$

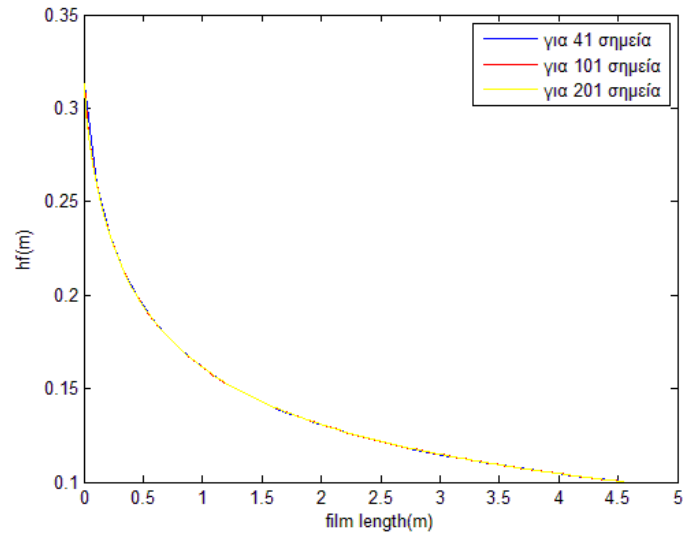
Τα δεδομένα των αρχικών υπολογισμών παρατίθενται στον πίνακα 5. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στα σχήματα 4.23 έως 4.28.

Πίνακας 5: Δεδομένα αρχικών υπολογισμών για κλίση του αγωγού 70°

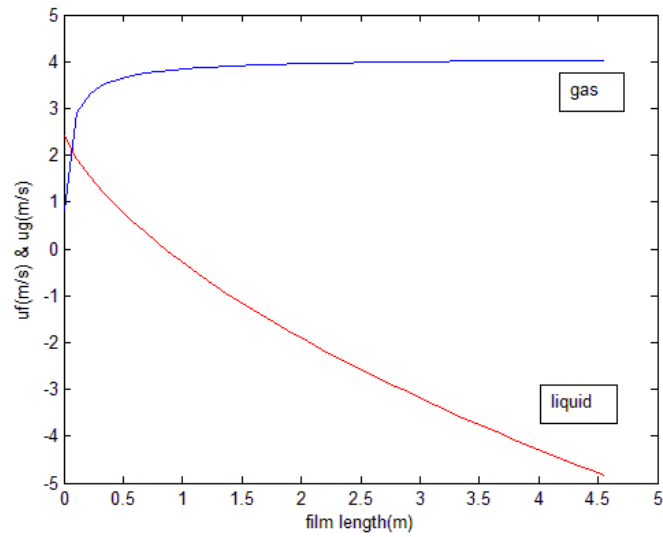
$R_s(m)$	0.8704
$h_s(m)$	0.3129
$u_t(m/s)$	4.66
$u_L(m/s)$	2.404
$l_f(m)$	4.56
$l_s(m)$	1.5
$l_u(m)$	6.06
$\int_0^{l_f} a_f dx$	3.0514



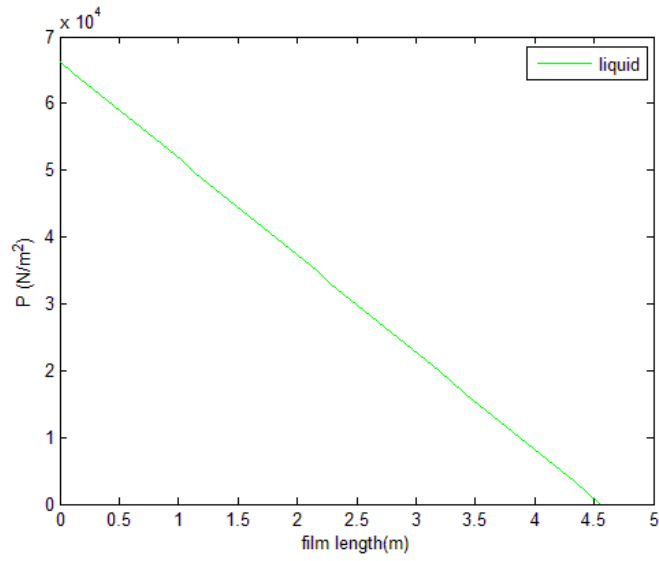
Σχήμα 4.23: Μορφή του φιλμ, για κλίση του αγωγού 70° και $u_{LS} = 0.2 m/s$, $u_{GS} = 2 m/s$



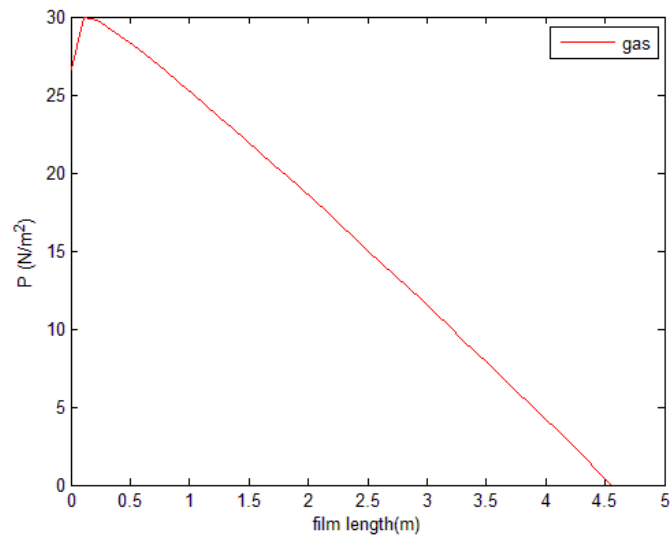
Σχήμα 4.24: Έλεγχος σύγκλισης, για κλίση του αγωγού 70° και $u_{LS} = 0.2 \text{ m/s}$,
 $u_{GS} = 2 \text{ m/s}$



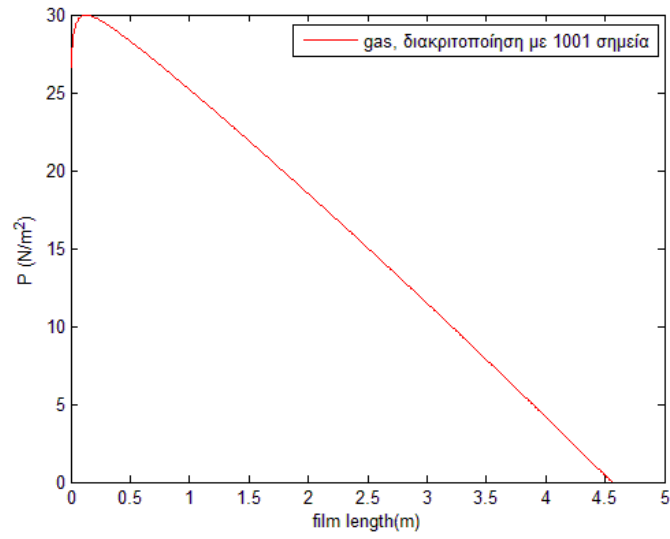
Σχήμα 4.25: Προφίλ ταχυτήτων, για κλίση του αγωγού 70° και $u_{LS} = 0.2 \text{ m/s}$,
 $u_{GS} = 2 \text{ m/s}$



Σχήμα 4.26: Μεταβολή πίεσης υγρού, για κλίση του αγωγού 70° και $u_{LS} = 0.2 \text{ m/s}$,
 $u_{GS} = 2 \text{ m/s}$



Σχήμα 4.27: Μεταβολή πίεσης αερίου, για κλίση του αγωγού 70° και $u_{LS} = 0.2 \text{ m/s}$,
 $u_{GS} = 2 \text{ m/s}$



Σχήμα 4.28: Μεταβολή πίεσης αερίου, με αύξηση των σημείων διαμέρισης από 41 σε 1001, για κλίση του αγωγού 70° και $u_{LS} = 0.2 \text{ m/s}$, $u_{GS} = 2 \text{ m/s}$

4.1.2 Παρουσίαση αποτελεσμάτων για : $u_{LS} = 1 \text{ m/s}$ και $u_{GS} = 2 \text{ m/s}$

Σε αυτή την περίπτωση, ο λόγος των ταχυτήτων των δύο ρευστών είναι: $\frac{u_{GS}}{u_{LS}} = 2$.

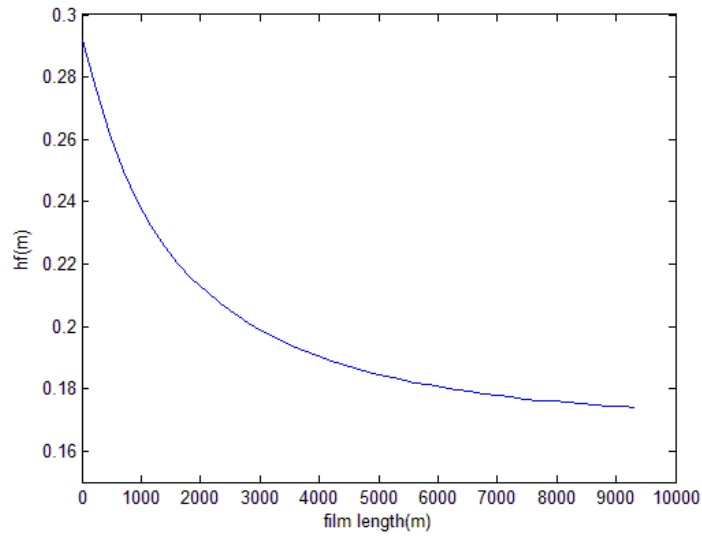
Μελετάται εδώ η περίπτωση, που αφενός η επιφανειακή ταχύτητα του αερίου είναι λίγο μεγαλύτερη από την αντίστοιχη του υγρού, αφετέρου έχει αυξηθεί η ταχύτητα του υγρού σαν απόλυτο μέγεθος. Όμοια με την υποενότητα 4.1.1, παρουσιάζεται αρχικά η μορφή του φιλμ του υγρού και γίνεται έλεγχος σύγκλισης της μεθόδου. Έπειτα παρουσιάζονται τα διαγράμματα για τα προφίλ των ταχυτήτων του αερίου και του υγρού, καθώς και αυτά για τις μεταβολές των πιέσεων των ρευστών.

4.1.2.1 Γωνία $\beta=0^\circ$

Εφόσον έχουν αλλάξει οι επιφανειακές ταχύτητες των ρευστών, έχει αλλάξει και η ταχύτητα του μίγματος, λόγω της σχέσης (2.23) η οποία πλέον είναι: $u_s = 3 \text{ m/s}$. Έτσι διαφοροποιείται και το ποσοστό του υγρού και κατά συνέπεια η αρχική τιμή του φιλμ στη θέση 0, εφόσον δεν υπάρχει ρίζα του παρονομαστή. Αυτό ισχύει για όλες τις γωνίες. Τα δεδομένα για τους αρχικούς υπολογισμούς παρουσιάζονται στον πίνακα 6 και τα αποτελέσματα στα σχήματα 4.29 έως 4.34.

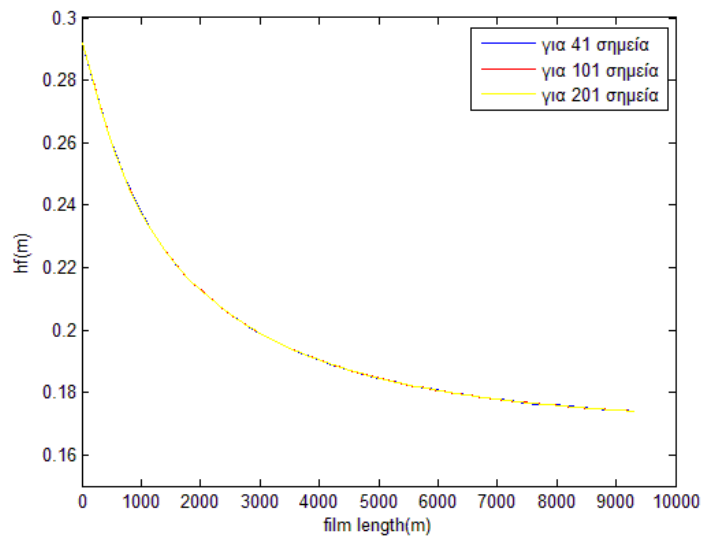
Πίνακας 6: Δεδομένα αρχικών υπολογισμών για οριζόντιο αγωγό

$R_s (m)$	0.8136
$h_s (m)$	0.2919
$u_t (m/s)$	6.33
$u_L (m/s)$	3.5430
$l_f (m)$	9330
$l_s (m)$	1.5
$l_u (m)$	9331.5
$\int_0^{l_f} a_f dx$	4515.3

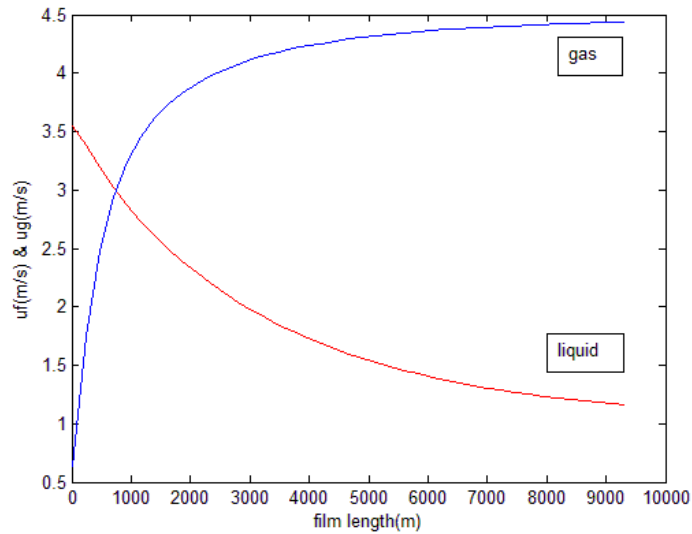


Σχήμα 4.29: Μορφή του φιλμ, για οριζόντιο αγωγό και $u_{LS} = 1 \text{ m/s}$, $u_{GS} = 2 \text{ m/s}$

Το σχήμα 4.29 δείχνει ότι φιλμ έχει μήκος 9330 m και μετά από αυτό ακολουθεί η ζώνη των slugs. Ωστόσο πρακτικά αυτό δεν έχει εφαρμογή, καθώς δεν υπάρχει αγωγός με τόσο μεγάλο μήκος. Προκύπτει το συμπέρασμα, ότι αέριο και υγρό ρέουν ταυτόχρονα μέσα στον αγωγό, χωρίς να δημιουργούνται ποτέ slugs.

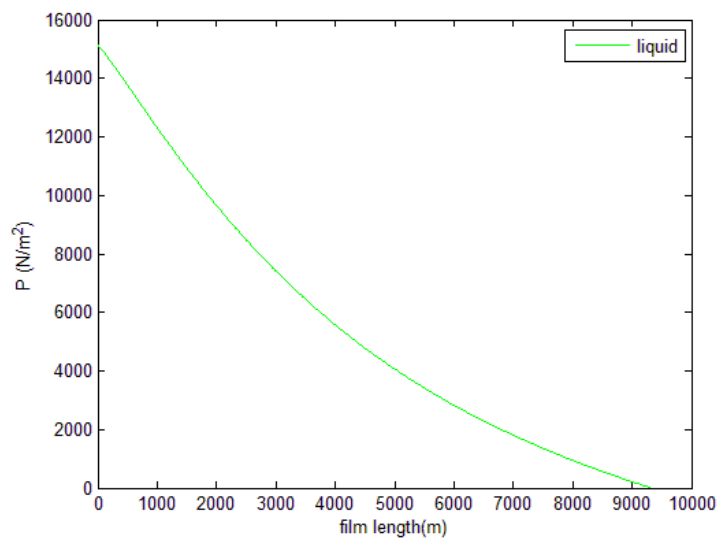


Σχήμα 4.30: Έλεγχος σύγκλισης, για οριζόντιο αγωγό και $u_{LS} = 1 \text{ m/s}$, $u_{GS} = 2 \text{ m/s}$



Σχήμα 4.31: Προφίλ ταχυτήτων, για οριζόντιο αγωγό και $u_{LS} = 1 \text{ m/s}$, $u_{GS} = 2 \text{ m/s}$

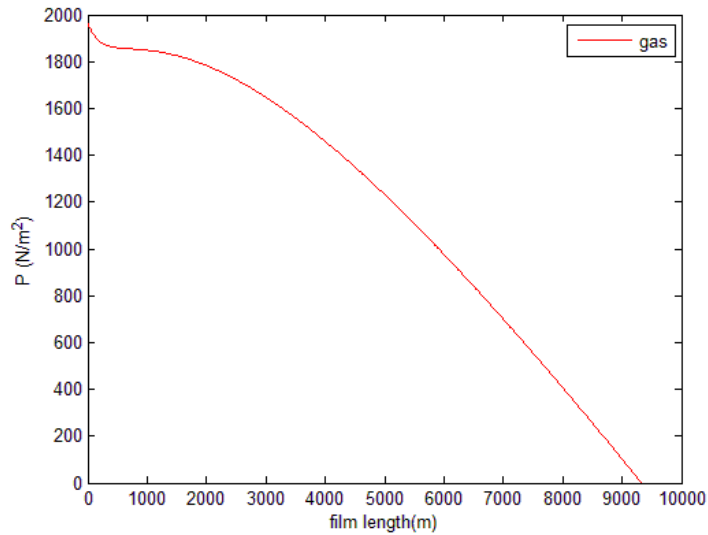
Στο σχήμα 4.31 εξετάζονται οι ταχύτητες του υγρού και του αερίου για μηδενική κλίση. Εφόσον ο αγωγός είναι οριζόντιος, η ταχύτητα του υγρού παραμένει θετική στο τέλος του φιλμ, καθώς δεν υπάρχει μέρος του που να κινείται προς τα πίσω, όπως στις περιπτώσεις των κεκλιμένων αγωγών, λόγω της επίδρασης της βαρύτητας.



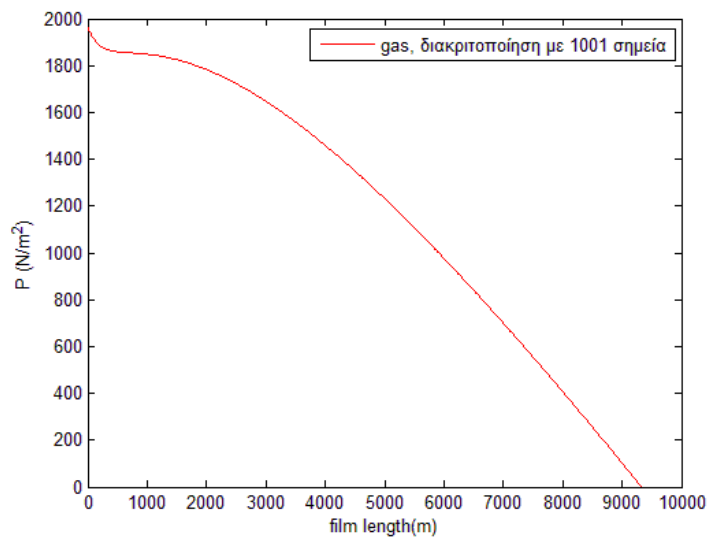
Σχήμα 4.32: Μεταβολή πίεσης υγρού, για οριζόντιο αγωγό και $u_{LS} = 1 \text{ m/s}$, $u_{GS} = 2 \text{ m/s}$

Από το σχήμα 4.32 και σε σύγκριση με τις προηγούμενες περιπτώσεις, υπάρχει μια μικρή καμπυλότητα που στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω, από τα 2000 m έως και τα 6000 m

περίπου. Επίσης, στις τιμές της μεταβολής της πίεσης, φαίνεται να αντιστοιχούν χαμηλότερες τιμές.



Σχήμα 4.33: Μεταβολή πίεσης αερίου, για οριζόντιο αγωγό και $u_{LS} = 1 \text{ m/s}$, $u_{GS} = 2 \text{ m/s}$



Σχήμα 4.34: Μεταβολή πίεσης αερίου, για οριζόντιο αγωγό και $u_{LS} = 1 \text{ m/s}$, $u_{GS} = 2 \text{ m/s}$

Αντίθετα με την περίπτωση του υγρού, από το σχήμα 4.34 εξάγεται ότι η πίεση εντός του αερίου παίρνει πολύ μεγαλύτερες τιμές, της τάξης των 65 ως και 100 φορών πάνω, ανάλογα την περίπτωση. Επίσης, αλλάζει η κυρτότητα της καμπύλης, στα πρώτα μέτρα του

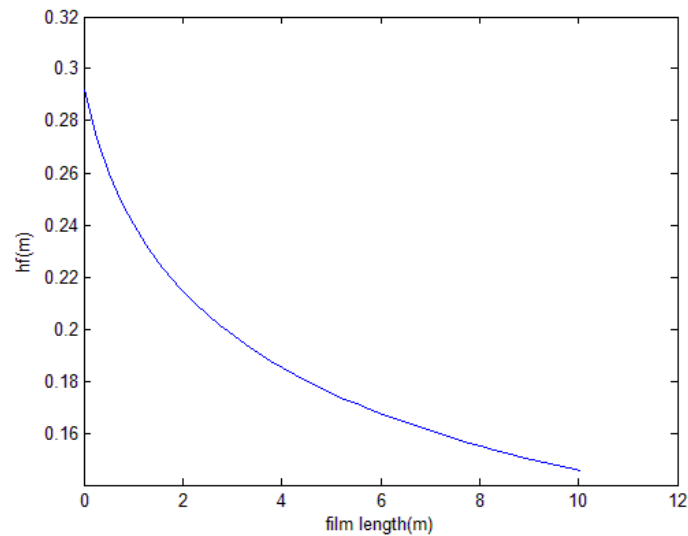
φιλμ -0 ως 1000 m-. Επίσης παρατηρείται μια μικρή καμπυλότητα, στο διάστημα από τα 1000 m ως και τα 4000m.

4.1.2.2 Γωνία $\beta=10^\circ$

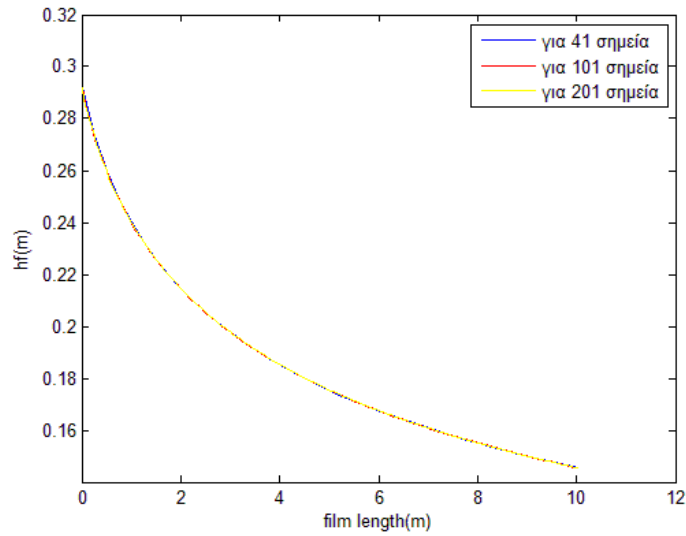
Τα δεδομένα των αρχικών υπολογισμών παρουσιάζονται στον πίνακα 7. Τα αποτελέσματα για αυτή την περίπτωση παρουσιάζονται στα σχήματα 4.35 έως 4.39.

Πίνακας 7: Δεδομένα αρχικών υπολογισμών για κλίση του αγωγού 10°

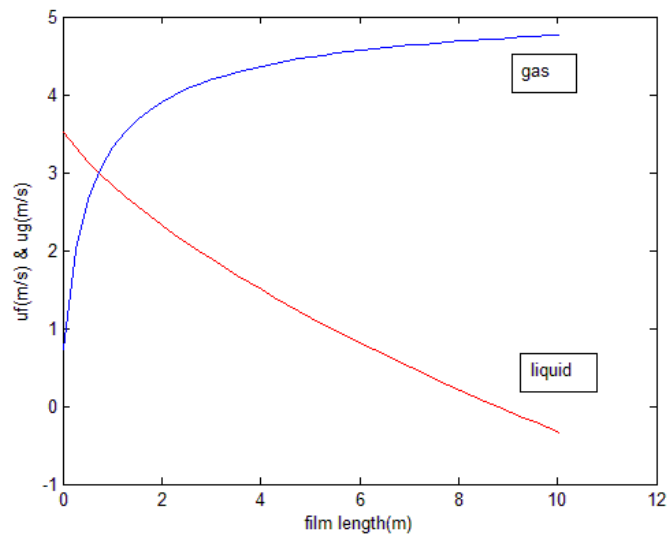
$R_s(m)$	0.8136
$h_s(m)$	0.2919
$u_t(m/s)$	6.37
$u_L(m/s)$	3.5201
$l_f(m)$	10.05
$l_s(m)$	1.5
$l_u(m)$	11.55
$\int_0^{l_f} a_f dx$	5.2535



Σχήμα 4.35: Μορφή του φιλμ, για κλίση του αγωγού 10° και $u_{LS} = 1 m/s$, $u_{GS} = 2 m/s$



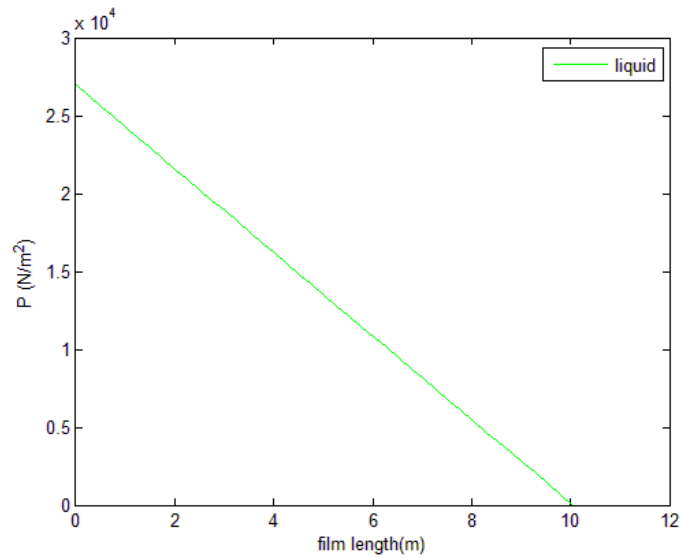
Σχήμα 4.36: Έλεγχος σύγκλισης, για κλίση του αγωγού 10° και $u_{LS} = 1 \text{ m/s}$, $u_{GS} = 2 \text{ m/s}$



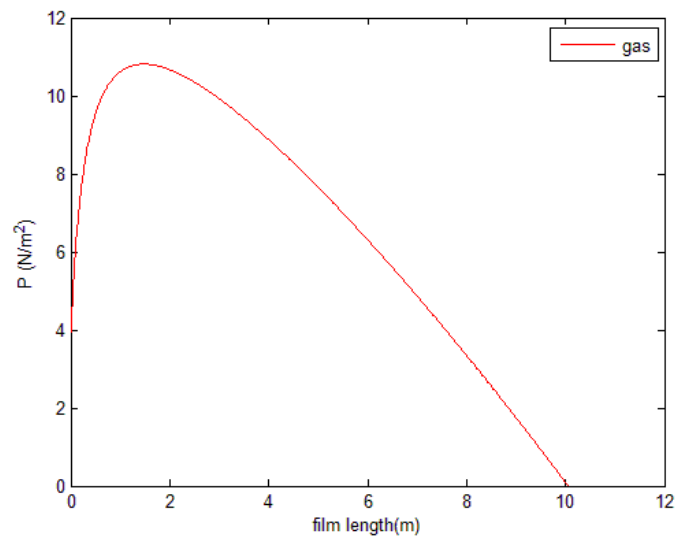
Σχήμα 4.37: Προφίλ ταχυτήτων, για κλίση του αγωγού 10° και $u_{LS} = 1 \text{ m/s}$, $u_{GS} = 2 \text{ m/s}$

Από το σχήμα 4.37 προς το τέλος του φιλμ, από τα 8.5m περίπου και μετά, η ταχύτητα του υγρού γίνεται αρνητική, λόγω της κλίσης του αγωγού. Επίσης, συγκρίνοντας τις τιμές σε σχέση με την περίπτωση του οριζώντιου αγωγού του σχήματος 4.31, φαίνεται το υγρό να κινείται με μικρότερες ταχύτητες. Για το αέριο, η γενική μορφή της καμπύλης παραμένει

περίπου σταθερή με την προηγούμενη περίπτωση, σχήμα 4.31, ελαφρώς μετατοπισμένη προς τα πάνω κατά 0.2 m/s , περίπου. Ωστόσο, από αντιστοίχιση των τιμών των ταχυτήτων σε διάφορες θέσεις κατά μήκος του φιλμ, προκύπτει ότι αυτές είναι πολύ υψηλότερες, σε αντίθεση με το υγρό. Για παράδειγμα στα 6m, η ταχύτητα του αερίου είναι περίπου 4.5 m/s , ενώ πριν στην ίδια θέση ήταν 0.8 m/s .



Σχήμα 4.38: Μεταβολή πίεσης υγρού, για κλίση του αγωγού 10° και $u_{LS} = 1\text{ m/s}$,
 $u_{GS} = 2\text{ m/s}$



Σχήμα 4.39: Μεταβολή πίεσης αερίου, για κλίση του αγωγού 10° και $u_{LS} = 1\text{ m/s}$,
 $u_{GS} = 2\text{ m/s}$

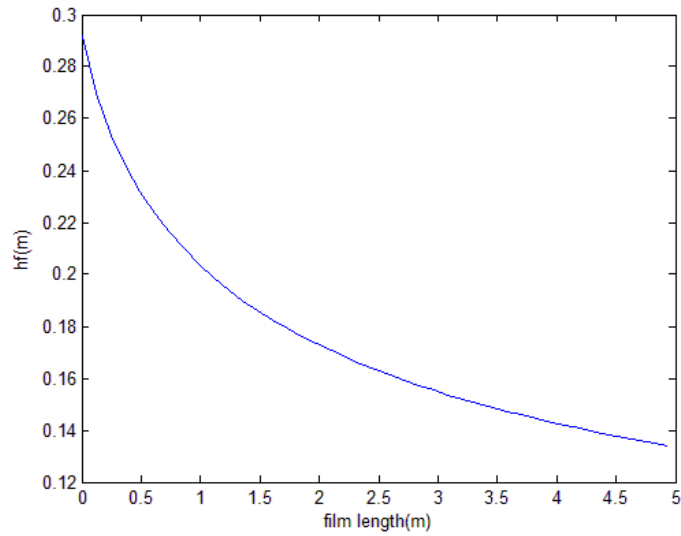
Από το σχήμα 4.38, εξάγεται ότι η κατανομή της πίεσης του υγρού, έχει γραμμική μορφή, ενώ οι τιμές είναι της τάξης κάποιων δεκάδων χιλιάδων, όπως δηλαδή στις περισσότερες περιπτώσεις. Για το αέριο, η γενική μορφή της καμπύλης είναι η ίδια, αλλά διαφοροποιείται το πάνω μέρος της, στην καμπυλότητα που παρουσιάζει, η οποία φαίνεται να “καταλαμβάνει” μεγαλύτερο μέρος του φιλμ, από το 1 m περίπου, μέχρι και τα 3 m.

4.1.2.3 Γωνία $\beta=30^\circ$

Τα δεδομένα των αρχικών υπολογισμών παρουσιάζονται στον πίνακα 8 και τα αντίστοιχα αποτελέσματα στα σχήματα 4.40 έως 4.44.

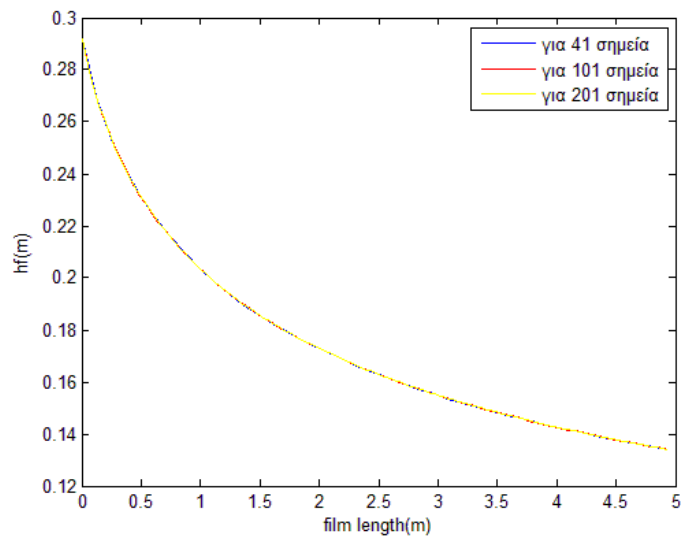
Πίνακας 8: Δεδομένα αρχικών υπολογισμών για κλίση του αγωγού 30°

$R_s(m)$	0.8136
$h_s(m)$	0.2919
$u_t(m/s)$	6.41
$u_L(m/s)$	3.4743
$l_f(m)$	4.94
$l_s(m)$	1.5
$l_u(m)$	6.44
$\int_0^{l_f} a_f dx$	2.7561

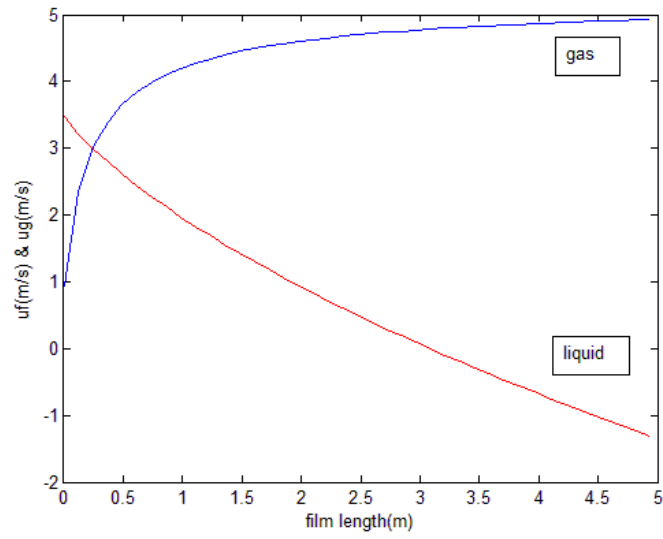


Σχήμα 4.40: Μορφή του φιλμ, για κλίση του αγωγού 30° και $u_{LS} = 1 \text{ m/s}$, $u_{GS} = 2 \text{ m/s}$

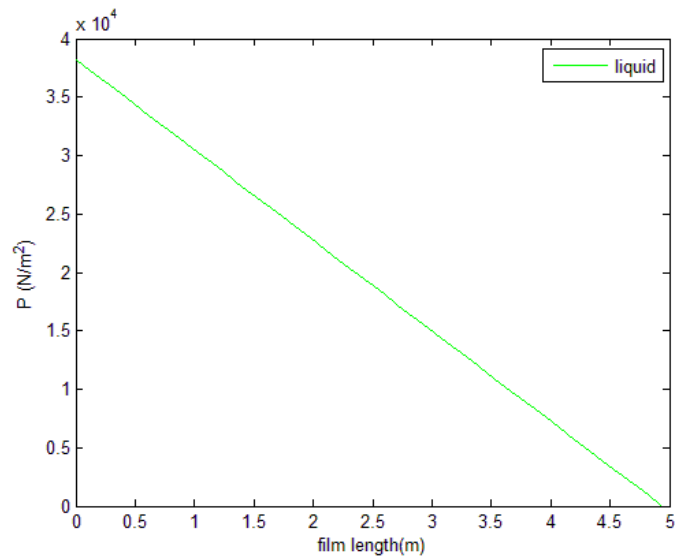
Από σύγκριση των σχημάτων 4.40 και 4.35, εξάγεται ότι το μήκος του φιλμ υποδιπλασιάζεται περίπου, ενώ η πτώση του ύψους του είναι μεγαλύτερη σε σχέση με την περίπτωση των 10° καθώς και η κλίση της καμπύλης είναι πιο απότομη.



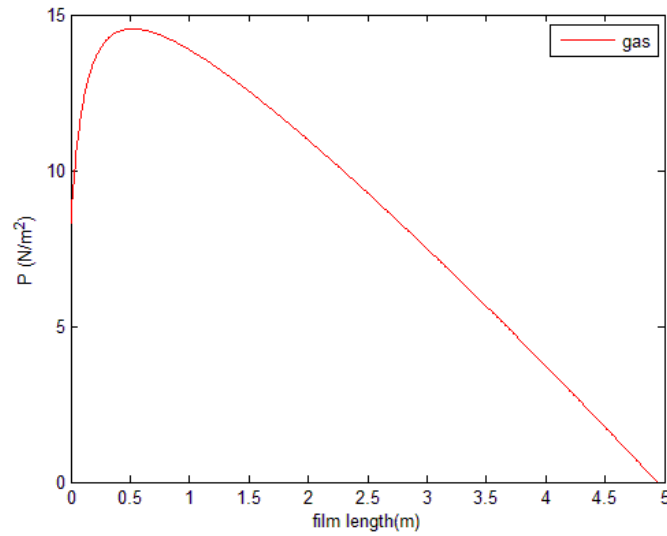
Σχήμα 4.41: Έλεγχος σύγκλισης, για κλίση του αγωγού 30° και $u_{LS} = 1 \text{ m/s}$, $u_{GS} = 2 \text{ m/s}$



Σχήμα 4.42: Προφίλ ταχυτήτων, για κλίση του αγωγού 30° και $u_{LS} = 1 \text{ m/s}$, $u_{GS} = 2 \text{ m/s}$



Σχήμα 4.43: Μεταβολή πίεσης υγρού, για κλίση του αγωγού 30° και $u_{LS} = 1 \text{ m/s}$,
 $u_{GS} = 2 \text{ m/s}$



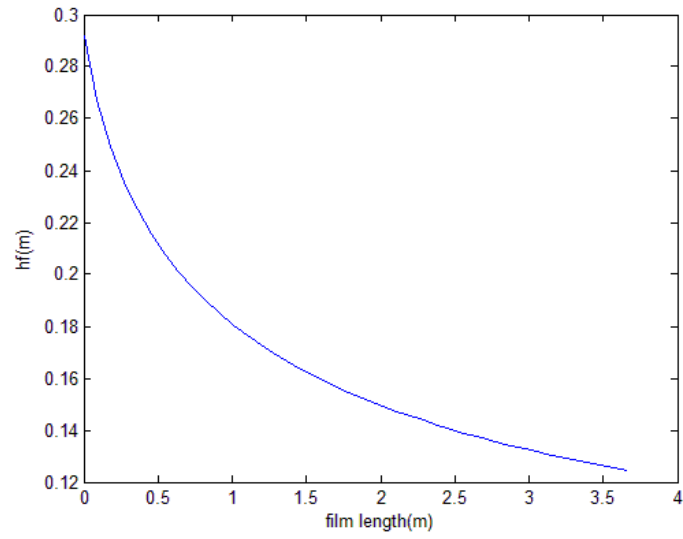
Σχήμα 4.44: Μεταβολή πίεσης αερίου, για κλίση του αγωγού 30° και $u_{LS} = 1 \text{ m/s}$,
 $u_{GS} = 2 \text{ m/s}$

4.1.2.4 Γωνία $\beta=60^\circ$

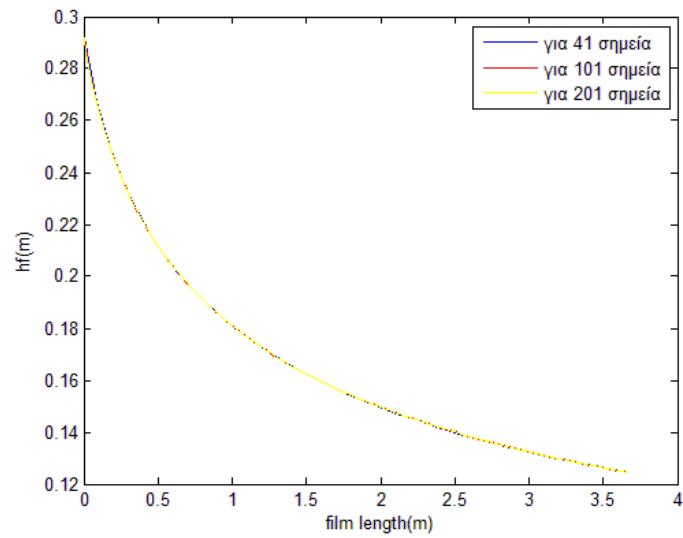
Τα δεδομένα των αρχικών υπολογισμών παρουσιάζονται στον πίνακα 9 και τα αντίστοιχα αποτελέσματα στα σχήματα 4.45 έως 4.49.

Πίνακας 9: Δεδομένα αρχικών υπολογισμών για κλίση του αγωγού 60°

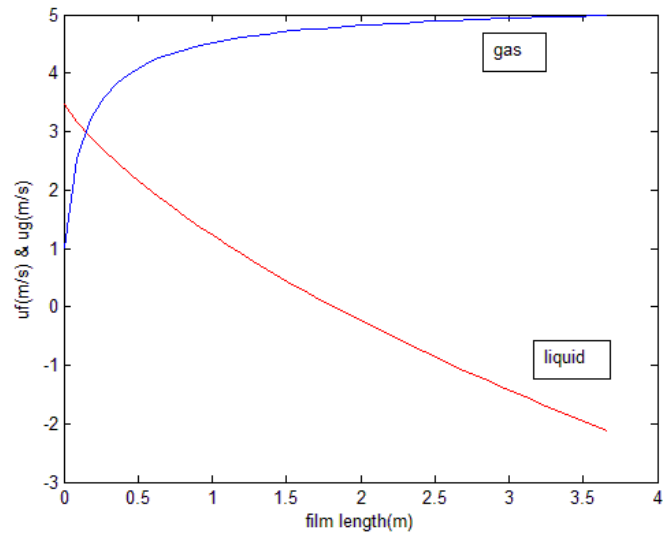
$R_s (m)$	0.8136
$h_s (m)$	0.2919
$u_t (m/s)$	6.38
$u_L (m/s)$	3.4582
$l_f (m)$	3.66
$l_s (m)$	1.5
$l_u (m)$	5.16
$\int_0^{l_f} a_f dx$	2.1480



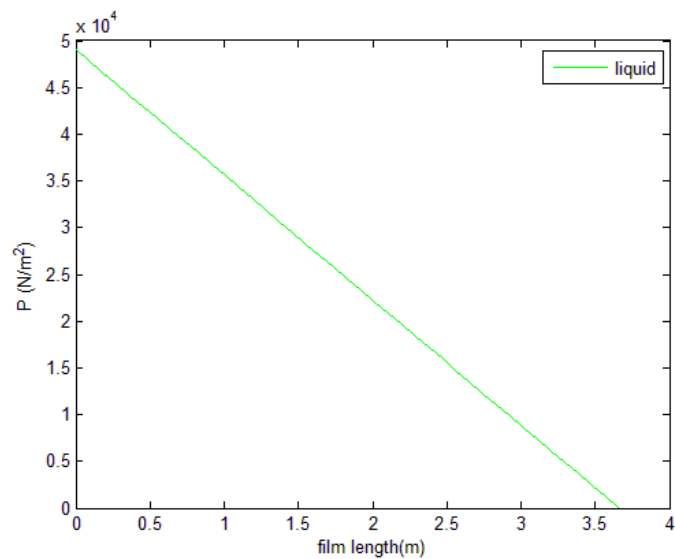
Σχήμα 4.45: Μορφή του φιλμ, για κλίση του αγωγού 60° και $u_{LS} = 1 \text{ m/s}$, $u_{GS} = 2 \text{ m/s}$



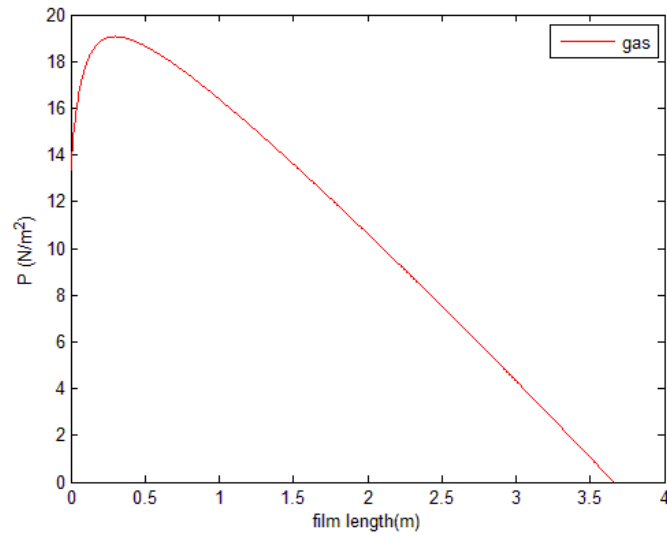
Σχήμα 4.46: Έλεγχος σύγκλισης, για κλίση του αγωγού 60° και $u_{LS} = 1 \text{ m/s}$, $u_{GS} = 2 \text{ m/s}$



Σχήμα 4.47: Προφίλ ταχυτήτων, για κλίση του αγωγού 60° και $u_{LS} = 1 \text{ m/s}$, $u_{GS} = 2 \text{ m/s}$



Σχήμα 4.48: Μεταβολή πίεσης υγρού, για κλίση του αγωγού 60° και $u_{LS} = 1 \text{ m/s}$,
 $u_{GS} = 2 \text{ m/s}$



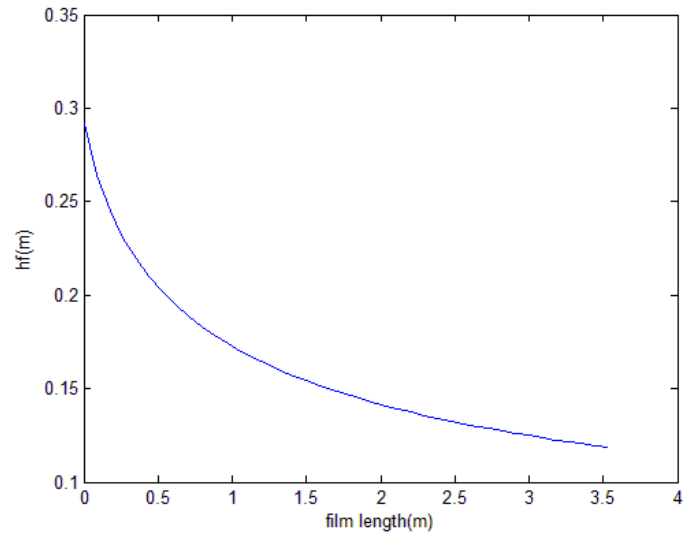
Σχήμα 4.49: Μεταβολή πίεσης αερίου, για κλίση του αγωγού 60° και $u_{LS} = 1 \text{ m/s}$,
 $u_{GS} = 2 \text{ m/s}$

4.1.2.5 Γωνία $\beta=70^\circ$

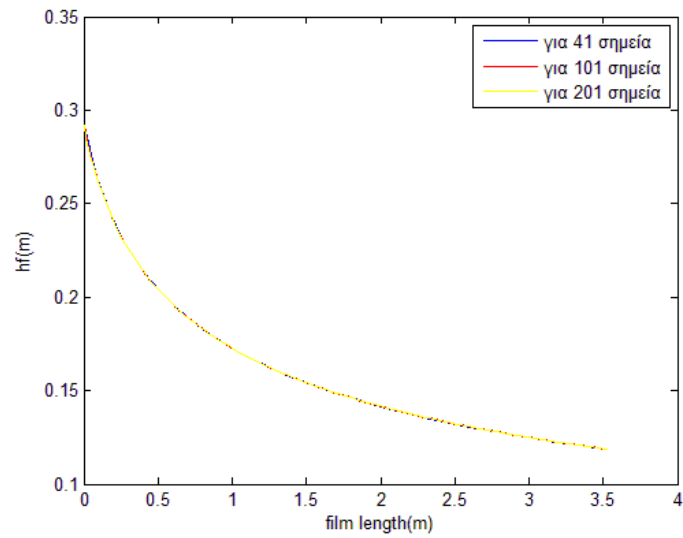
Τα δεδομένα των αρχικών υπολογισμών παρουσιάζονται στον πίνακα 10 και τα αντίστοιχα αποτελέσματα στα σχήματα 4.50 έως 4.54.

Πίνακας 10: Δεδομένα αρχικών υπολογισμών για κλίση του αγωγού 70°

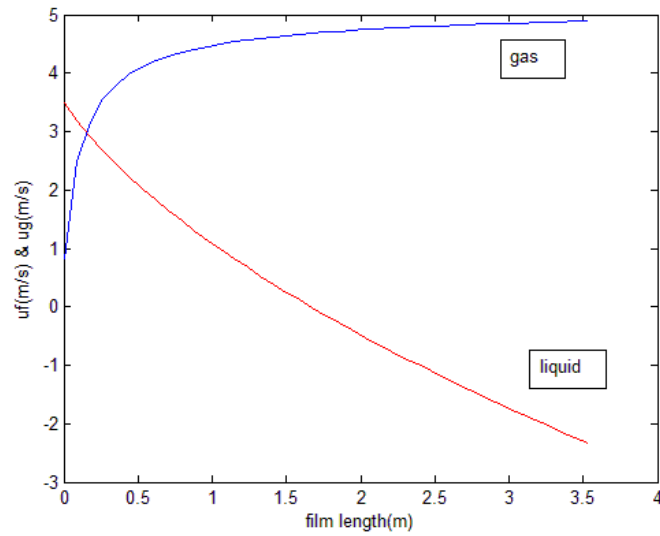
$R_s (m)$	0.8136
$h_s (m)$	0.2919
$u_t (m/s)$	6.26
$u_L (m/s)$	3.4972
$l_f (m)$	3.53
$l_s (m)$	1.5
$l_u (m)$	5.03
$\int_0^{l_f} a_f dx$	2.1397



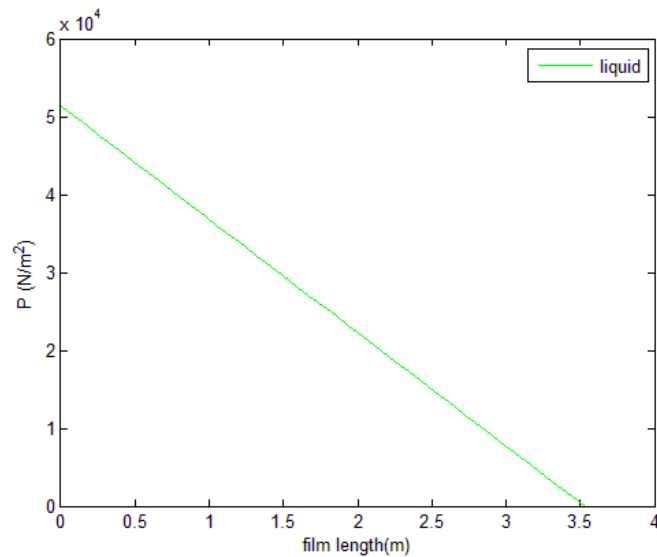
Σχήμα 4.50: Μορφή του φιλμ, για κλίση του αγωγού 70° και $u_{LS} = 1 \text{ m/s}$, $u_{GS} = 2 \text{ m/s}$



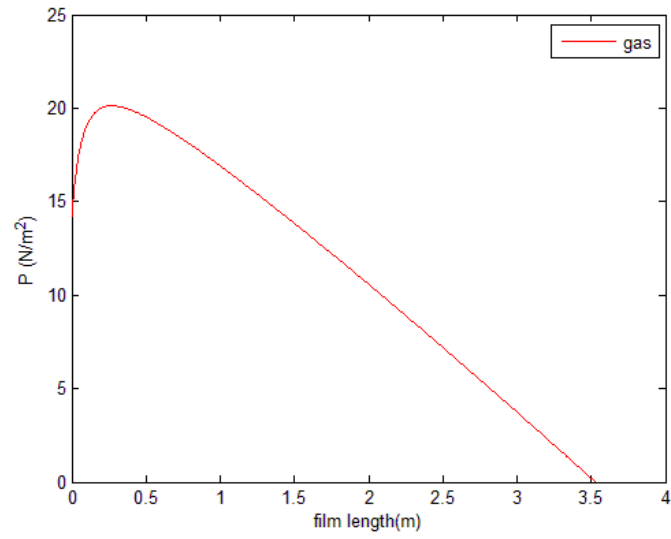
Σχήμα 4.51: Έλεγχος σύγκλισης, για κλίση του αγωγού 70° και $u_{LS} = 1 \text{ m/s}$, $u_{GS} = 2 \text{ m/s}$



Σχήμα 4.52: Προφίλ ταχυτήτων, για κλίση του αγωγού 70° και $u_{LS} = 1 \text{ m/s}$, $u_{GS} = 2 \text{ m/s}$



Σχήμα 4.53: Μεταβολή πίεσης υγρού, για κλίση του αγωγού 70° και $u_{LS} = 1 \text{ m/s}$,
 $u_{GS} = 2 \text{ m/s}$



Σχήμα 4.54: Μεταβολή πίεσης αερίου, για κλίση του αγωγού 70° και $u_{LS} = 1 \text{ m/s}$,
 $u_{GS} = 2 \text{ m/s}$

4.1.3 Παρουσίαση αποτελεσμάτων για: $u_{LS} = 0.4 \text{ m/s}$ και $u_{GS} = 6 \text{ m/s}$

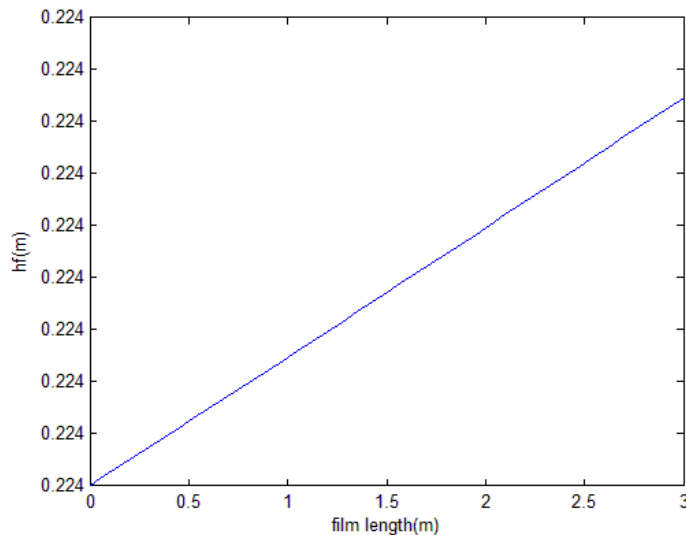
Σε αυτή την περίπτωση, λαμβάνεται ακόμη μεγαλύτερος λόγος ταχυτήτων των δύο ρευστών, καθώς: $\frac{u_{Gs}}{u_{LS}} = 15$. Όμοια με τις προηγούμενες υποενότητες, παρουσιάζεται αρχικά η μορφή του φιλμ του υγρού και γίνεται έλεγχος σύγκλισης της μεθόδου. Έπειτα παρουσιάζονται τα διαγράμματα για τα προφίλ των ταχυτήτων του αερίου και του υγρού, καθώς και αυτά για τις μεταβολές των πιέσεων των ρευστών.

4.1.3.1 Γωνία $\beta=0^\circ$

Από την εξίσωση (2.23) προκύπτει για τη ταχύτητα του μίγματος ότι $u_s = 6.4 \text{ m/s}$, και από αυτό το αποτέλεσμα σε συνδυασμό με τη (2.26) δίνει $R_s = 0.6036$ και προκύπτει η αρχική τιμή $h_s = h_f(0) = 0.2240 \text{ m}$. Για τη ταχύτητα του υγρού στο μίγμα, από τη (2.24), είναι: $u_L = 10.1898 \text{ m/s}$. Η μεταφορική ταχύτητα είναι $u_t = 13.13 \text{ m/s}$. Όμοια με τις προηγούμενες περιπτώσεις, δεν υπάρχει τιμή h_c , που να μηδενίζει τον παρονομαστή, όπως και για τις υπόλοιπες γωνίες αυτής της περίπτωσης. Σε αυτή την περίπτωση, όμως, δεν υπάρχει κάποια τιμή του φιλμ που να ικανοποιεί την εξίσωση (2.6). Ωστόσο πρέπει να γίνουν δύο παρατηρήσεις:

- 1) Το δεύτερο μέλος της, δίνει αποτελέσματα από $6.1 - 6.2 \text{ m/s}$, νούμερο δηλαδή κοντά στην τιμή της επιφανειακής ταχύτητας του αερίου.
- 2) Ανεξάρτητα του μήκους του φιλμ, οι τιμές του ύψους του φιλμ του υγρού κατά μήκος του αγωγού, παραμένουν πρακτικά σταθερές. Παρατηρούνται μόνο μικρές αλλαγές στο τρίτο και κάποιες φορές στο τέταρτο δεκαδικό ψηφίο, με αποτέλεσμα να μη σχηματίζεται το καμπύλο τμήμα της φυσαλίδας το οποίο παραμένει πρακτικά οριζόντιο. Ενδεικτικά παρατίθενται τα σχήματα 4.55 έως 4.60 προς επιβεβαίωση των παραπάνω.

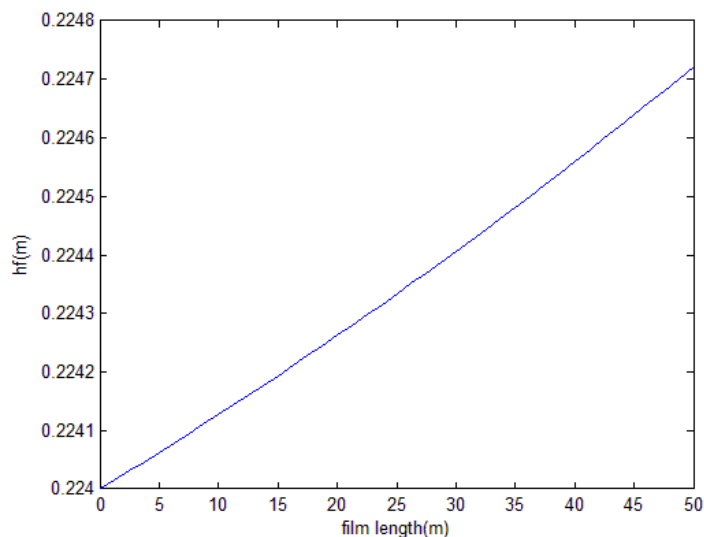
- Μήκος φιλμ: $3m$. Το δεύτερο μέλος της εξίσωσης (2.6), με αντικατάσταση όλων των μεγεθών δίνει την τιμή: $6.152m/s$. Όλα τα ψηφία είναι ίδια μέχρι και το τέταρτο δεκαδικό. Το αποτέλεσμα φαίνεται στο σχήμα 4.55.



Σχήμα 4.55: Σταθερή μορφή του φιλμ, για οριζόντιο αγωγό και $u_{LS} = 0.4 m/s$,

$$u_{GS} = 6 m/s$$

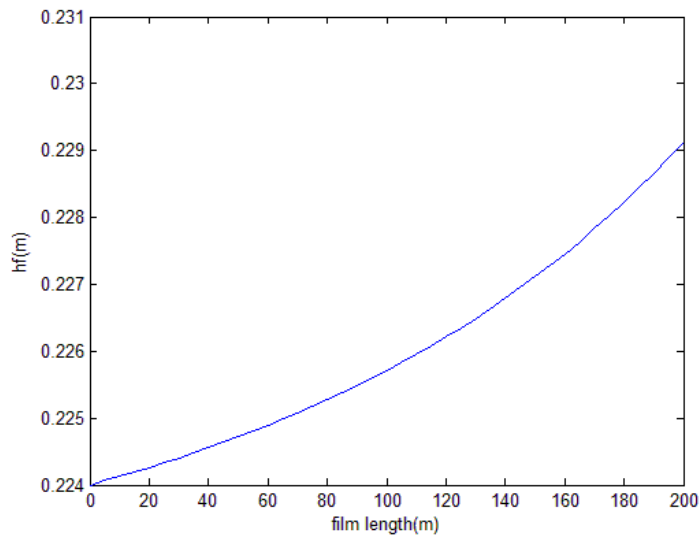
- Μήκος φιλμ: $50m$. Όμοια, το δεύτερο μέλος της εξίσωσης (2.6) δίνει: $6.152m/s$. Υπάρχουν διαφορές στο τέταρτο δεκαδικό ψηφίο. Το αποτέλεσμα φαίνεται στο σχήμα 4.56.



Σχήμα 4.56: Μορφή του φιλμ, πρακτικά σταθερή, για οριζόντιο αγωγό και $u_{LS} = 0.4 m/s$,

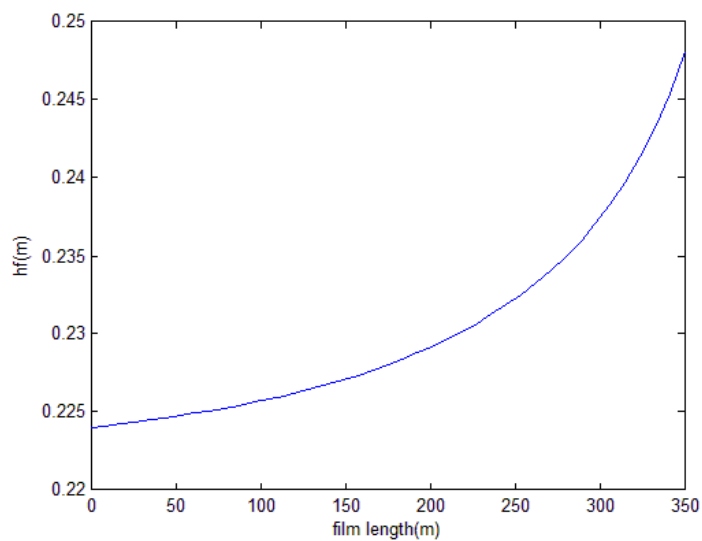
$$u_{GS} = 6 m/s$$

- Μήκος φιλμ: $200m$. Το δεύτερο μέλος της εξίσωσης (2.6) έχει τιμή: $6.152m/s$. Σημειώνονται πλέον μικρές αλλαγές στο τρίτο δεκαδικό ψηφίο. Το αποτέλεσμα φαίνεται στο σχήμα 4.57.



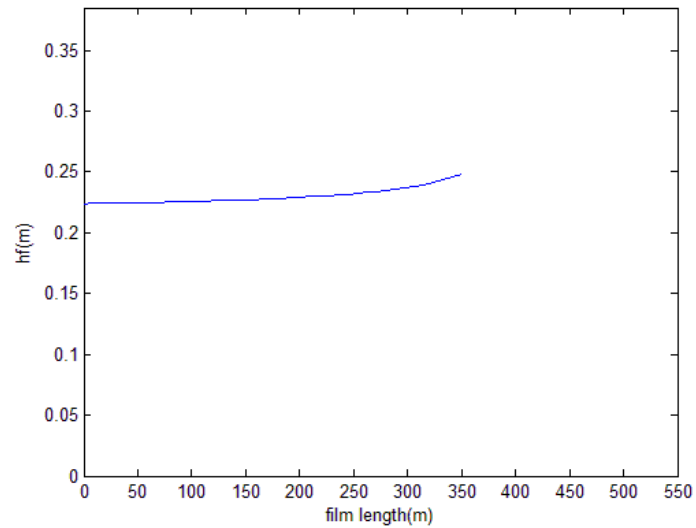
Σχήμα 4.57: Μορφή του φιλμ, περίπου σταθερή, για οριζόντιο αγωγό και $u_{LS} = 0.4 m/s$,
 $u_{GS} = 6 m/s$

- Μήκος φιλμ: $350m$. Το δεύτερο μέλος της εξίσωσης (2.6) έχει τιμή : $6.412m/s$. Το αποτέλεσμα φαίνεται στο σχήμα 4.58.



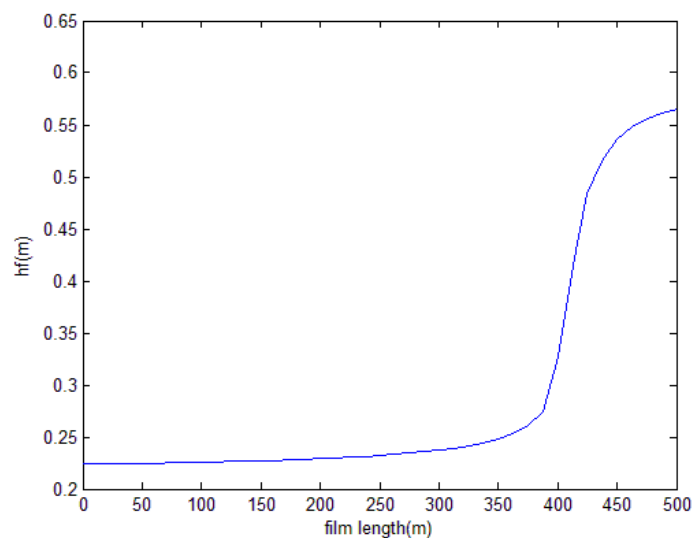
Σχήμα 4.58: Μικρές αλλαγές στην μορφή του φιλμ, για οριζόντιο αγωγό και
 $u_{LS} = 0.4 m/s$, $u_{GS} = 6 m/s$

Στο σχήμα 4.58, που παρατηρούνται κάποιες μικρές αλλαγές, προσαρμόζοντας τον άξονα του ύψους του φιλμ στη διάμετρο του αγωγού, προκύπτει το σχήμα 4.59.



Σχήμα 4.59: Η προηγούμενη μορφή του φιλμ, με άξονες προσαρμοσμένους στη διάμετρο του αγωγού, για οριζόντιο αγωγό και $u_{LS} = 0.4 \text{ m/s}$, $u_{GS} = 6 \text{ m/s}$

- Για ακόμη μεγαλύτερα μήκη φιλμ, όπως 500m προκύπτουν μιγαδικές τιμές του ύψους και ενδεικτικά παρατίθεται το προκύπτον διάγραμμα:



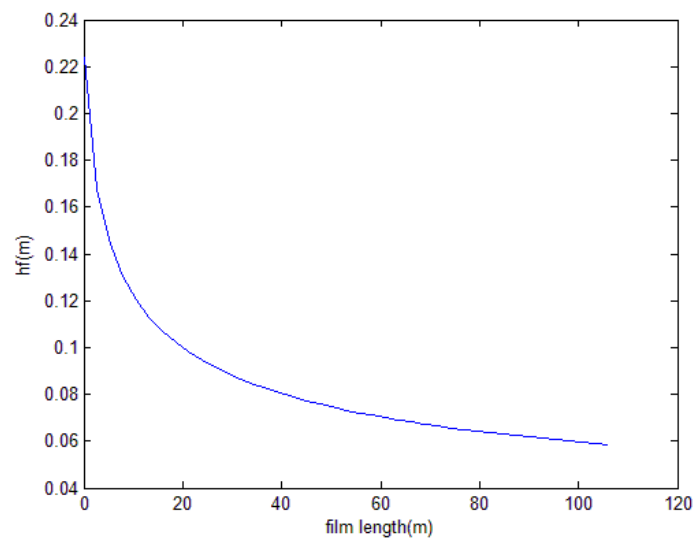
Σχήμα 4.60: Η μορφή του φιλμ έχει ακανόνιστο σχήμα, παίρνει μιγαδικές τιμές, για οριζόντιο αγωγό και $u_{LS} = 0.4 \text{ m/s}$, $u_{GS} = 6 \text{ m/s}$

4.1.3.2 Γωνία $\beta=10^\circ$

Τα δεδομένα των αρχικών υπολογισμών συνοψίζονται στον πίνακα 11. Τα αποτελέσματα που προκύπτουν παρουσιάζονται στα σχήματα 4.61 έως 4.65.

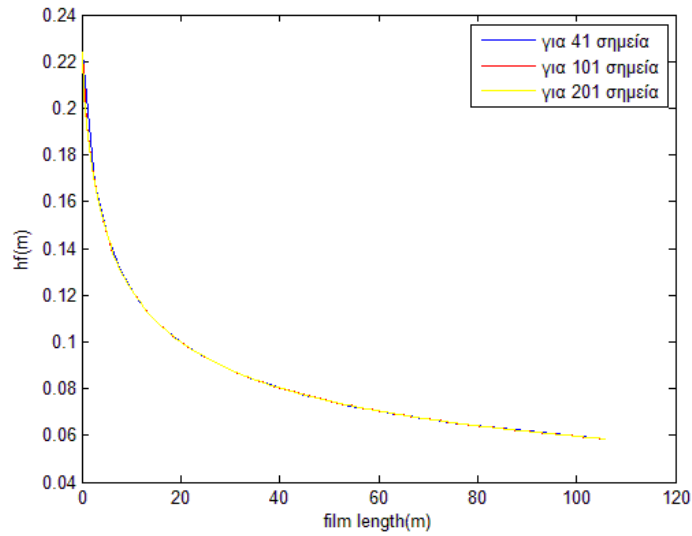
Πίνακας 11: Δεδομένα αρχικών υπολογισμών για κλίση του αγωγού 10°

$R_s(m)$	0.6036
$h_s(m)$	0.2240
$u_t(m/s)$	13.17
$u_L(m/s)$	10.1241
$l_f(m)$	105.9
$l_s(m)$	1.5
$l_u(m)$	107.4
$\int_0^{l_f} a_f dx$	88.5444



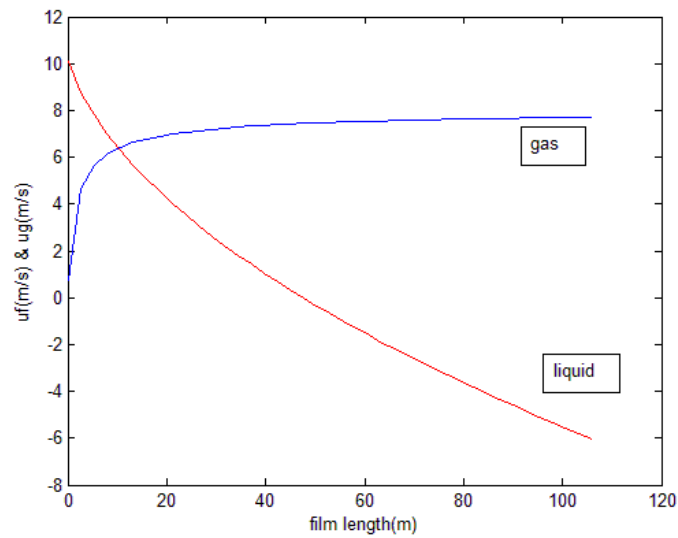
Σχήμα 4.61: Μορφή του φιλμ, για κλίση του αγωγού 10° και $u_{LS} = 0.4 m/s$, $u_{GS} = 6 m/s$

Από το σχήμα 4.61, σε σύγκριση με τα σχήματα 4.1 και 4.35, τις αντίστοιχες περιπτώσεις δηλαδή των 10° , το ύψος του φιλμ είναι αρκετά μικρότερο στο τέλος του.



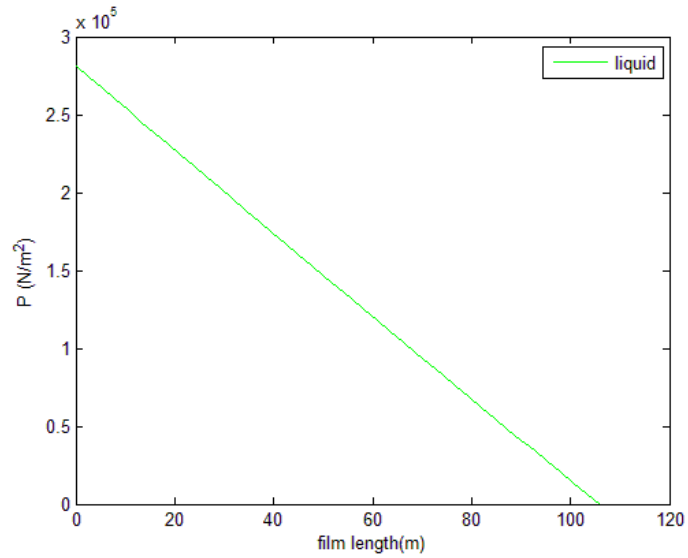
Σχήμα 4.62: Έλεγχος σύγκλισης, για κλίση του αγωγού 10° και $u_{LS} = 0.4 \text{ m/s}$,
 $u_{GS} = 6 \text{ m/s}$

Από το σχήμα 4.62, παρατηρείται μια μικρή απόκλιση των τιμών στα πρώτα 5m του φιλμ. Έπειτα οι τιμές συγκλίνουν ικανοποιητικά.



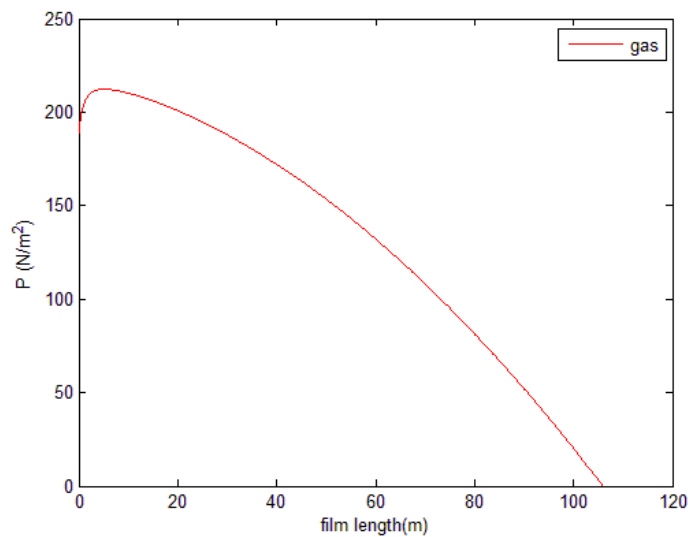
Σχήμα 4.63: Προφίλ ταχυτήτων, για κλίση του αγωγού 10° και $u_{LS} = 0.4 \text{ m/s}$,
 $u_{GS} = 6 \text{ m/s}$

Στο σχήμα 4.63 παρατηρείται ότι από τα 45m και μετά, το υγρό κινείται προς τα πίσω με μεγαλύτερες ταχύτητες σε σχέση με τις αντίστοιχες περιπτώσεις.



Σχήμα 4.64: Μεταβολή πίεσης υγρού, για κλίση του αγωγού 10° και $u_{LS} = 0.4 \text{ m/s}$,
 $u_{GS} = 6 \text{ m/s}$

Όπως αποδεικνύεται από το σχήμα 4.64, η γενική μορφή της καμπύλης παραμένει ίδια, αλλά αυξάνεται η τιμή της πίεσης, η οποία πλέον γίνεται της τάξης μερικών εκατοντάδων χιλιάδων.



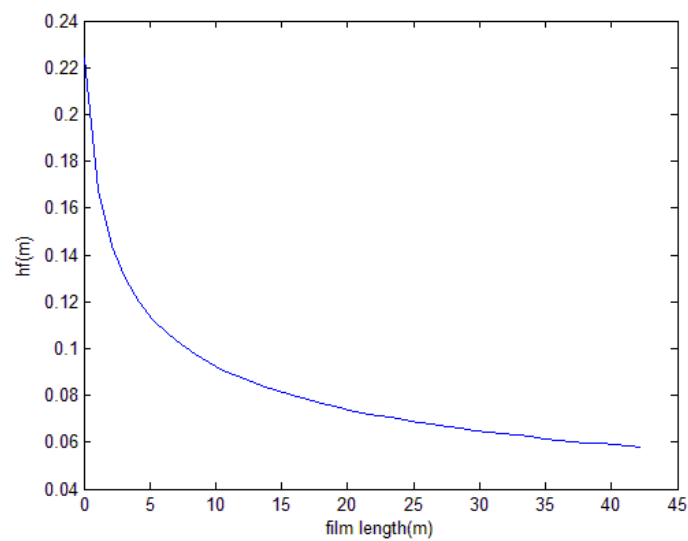
Σχήμα 4.65: Μεταβολή πίεσης αερίου, για κλίση του αγωγού 10° και $u_{LS} = 0.4 \text{ m/s}$,
 $u_{GS} = 6 \text{ m/s}$

4.1.3.3 Γωνία $\beta=30^\circ$

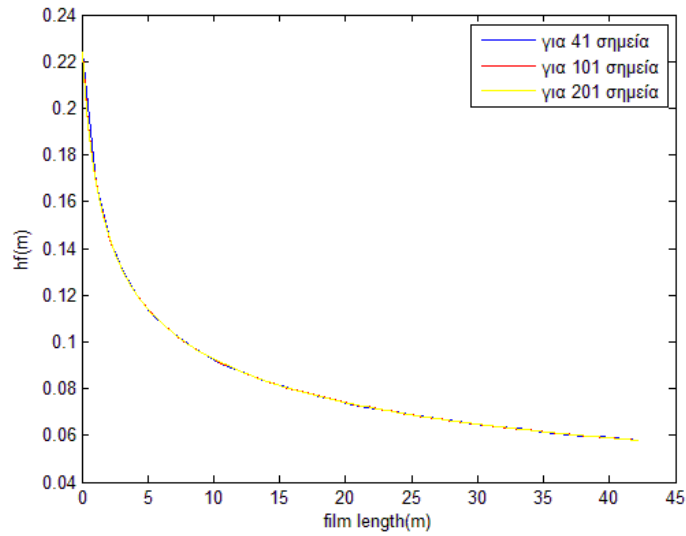
Τα δεδομένα των αρχικών υπολογισμών παρουσιάζονται στον πίνακα 12 και τα αντίστοιχα αποτελέσματα στα σχήματα 4.66 έως 4.70.

Πίνακας 12: Δεδομένα αρχικών υπολογισμών για κλίση του αγωγού 30°

$R_s(m)$	0.6036
$h_s(m)$	0.2240
$u_t(m/s)$	13.21
$u_L(m/s)$	9.9928
$l_f(m)$	42.3
$l_s(m)$	1.5
$l_u(m)$	43.8
$\int_0^{l_f} a_f dx$	35.4383

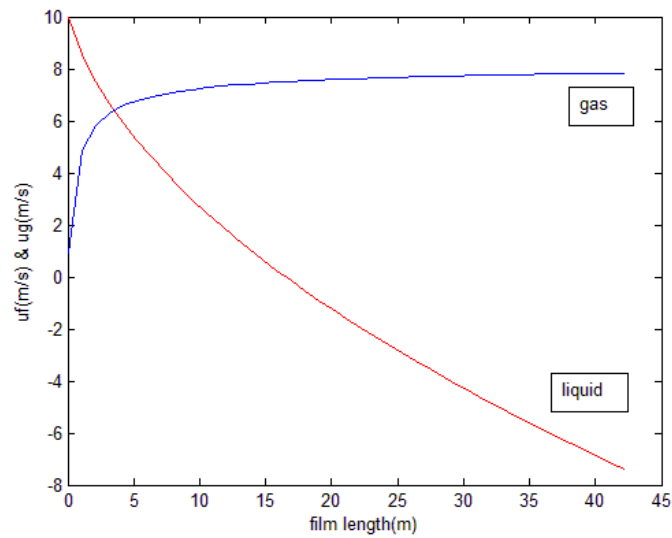


Σχήμα 4.66: Μορφή του φιλμ, για κλίση του αγωγού 30° και $u_{LS} = 0.4 m/s$, $u_{GS} = 6 m/s$



Σχήμα 4.67: Έλεγχος σύγκλισης, για κλίση του αγωγού 30° και $u_{LS} = 0.4 \text{ m/s}$,

$$u_{GS} = 6 \text{ m/s}$$

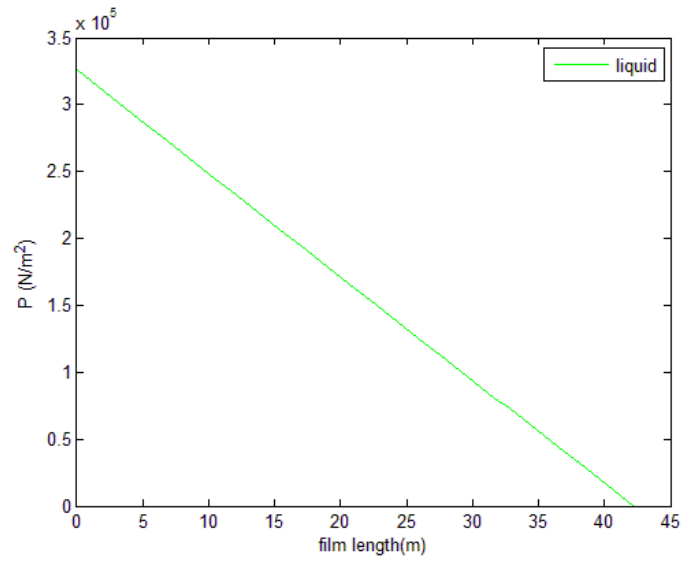


Σχήμα 4.68: Προφίλ ταχυτήτων, για κλίση του αγωγού 30° και $u_{LS} = 0.4 \text{ m/s}$,

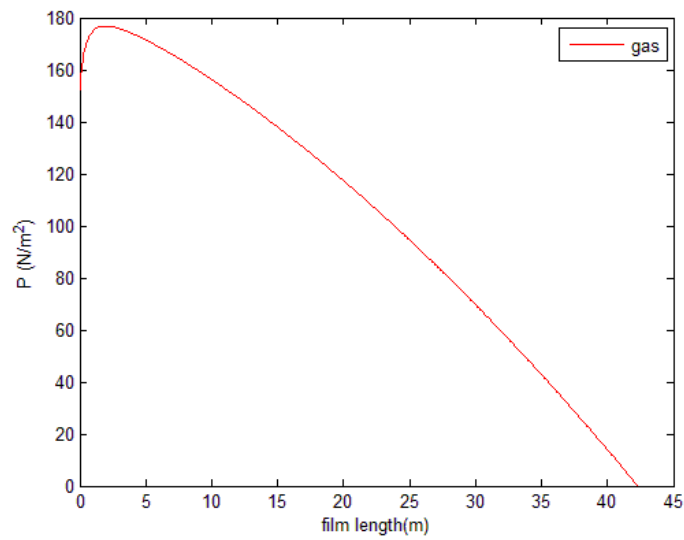
$$u_{GS} = 6 \text{ m/s}$$

Από το σχήμα 4.68, παρατηρείται μικρότερη επίδραση της αύξησης της γωνίας κλίσης στις ταχύτητες των ρευστών, οι οποίες είναι παραπλήσιες με την περίπτωση των 10° .

Ωστόσο, από σύγκριση με τα σχήματα 4.11 και 4.42, σε σχέση δηλαδή με τις 30° των περιπτώσεων 1 και 2 έχουν αρκετά μεγαλύτερες τιμές.



Σχήμα 4.69: Μεταβολή πίεσης υγρού, για κλίση του αγωγού 30° και $u_{LS} = 0.4 \text{ m/s}$,
 $u_{GS} = 6 \text{ m/s}$



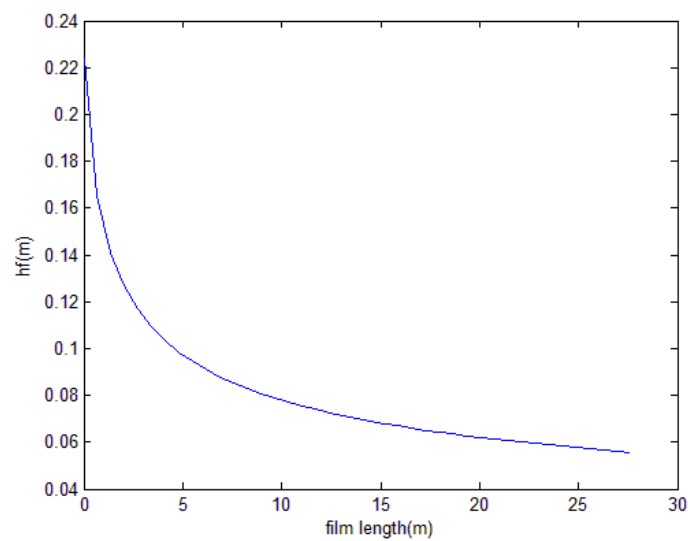
Σχήμα 4.70: Μεταβολή πίεσης αερίου, για κλίση του αγωγού 30° και $u_{LS} = 0.4 \text{ m/s}$,
 $u_{GS} = 6 \text{ m/s}$

4.1.3.4 Γωνία $\beta=60^\circ$

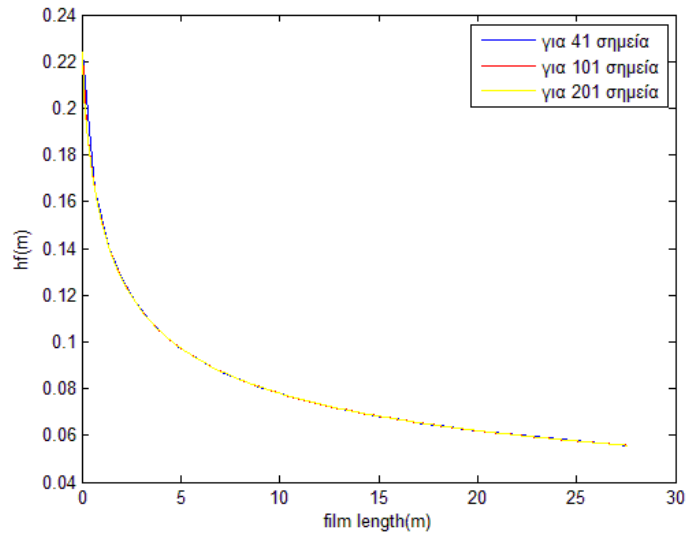
Τα δεδομένα των αρχικών υπολογισμών παρατίθενται στον πίνακα 13 και τα αντίστοιχα αποτελέσματα στα σχήματα 4.71 έως 4.75.

Πίνακας 13: Δεδομένα αρχικών υπολογισμών για κλίση του αγωγού 60°

$R_s(m)$	0.6036
$h_s(m)$	0.2240
$u_t(m/s)$	13.18
$u_L(m/s)$	9.9468
$l_f(m)$	27.62
$l_s(m)$	1.5
$l_u(m)$	29.12
$\int_0^{l_f} a_f dx$	23.3284

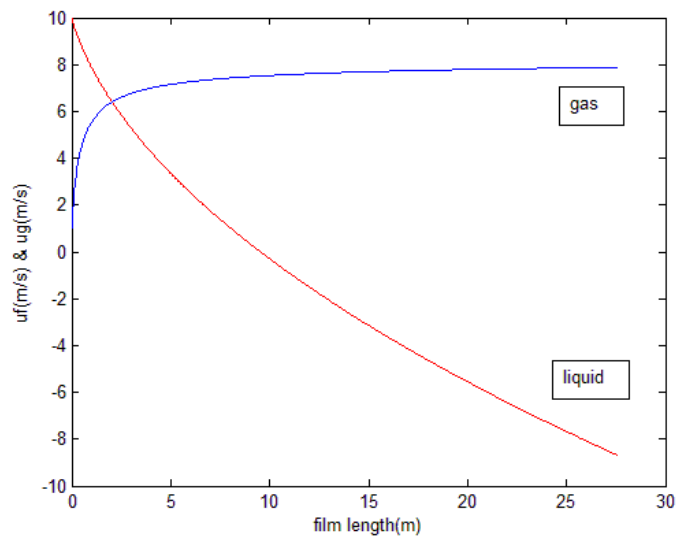


Σχήμα 4.71: Μορφή του φιλμ, για κλίση του αγωγού 60° και $u_{LS} = 0.4 m/s$, $u_{GS} = 6 m/s$

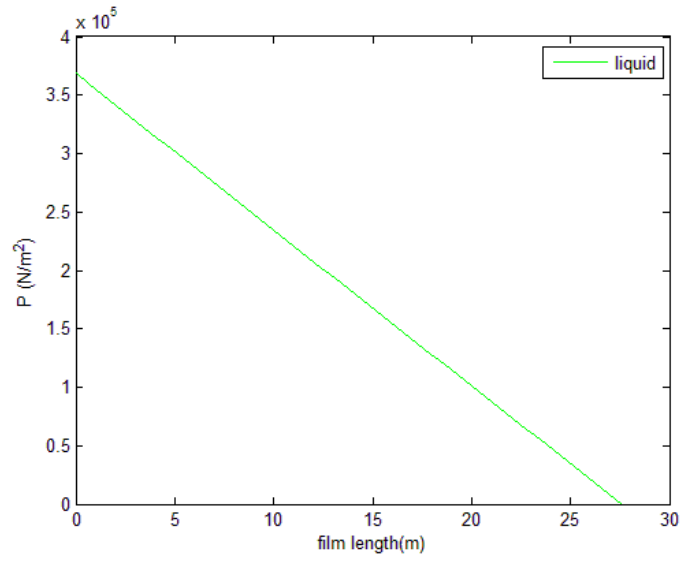


Σχήμα 4.72: Έλεγχος σύγκλισης, για κλίση του αγωγού 60° και $u_{LS} = 0.4 \text{ m/s}$,
 $u_{GS} = 6 \text{ m/s}$

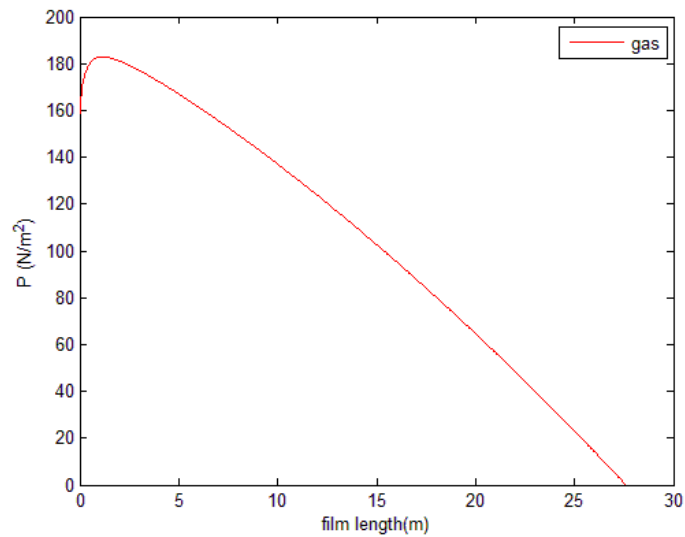
Από το σχήμα 4.72, παρατηρείται μια μικρή απόκλιση των τιμών στα δύο πρώτα μέτρα του φιλμ.



Σχήμα 4.73: Προφίλ ταχυτήτων, για κλίση του αγωγού 60° και $u_{LS} = 0.4 \text{ m/s}$,
 $u_{GS} = 6 \text{ m/s}$



Σχήμα 4.74: Μεταβολή πίεσης υγρού, για κλίση του αγωγού 60° και $u_{LS} = 0.4 \text{ m/s}$,
 $u_{GS} = 6 \text{ m/s}$



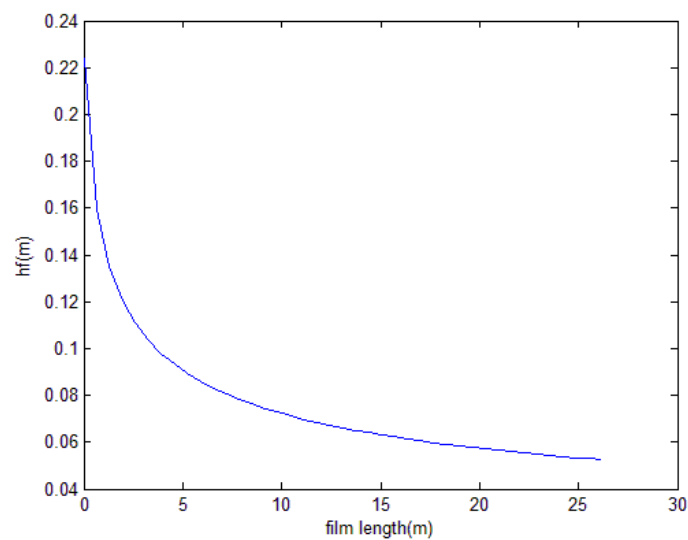
Σχήμα 4.75: Μεταβολή πίεσης αερίου, για κλίση του αγωγού 60° και $u_{LS} = 0.4 \text{ m/s}$,
 $u_{GS} = 6 \text{ m/s}$

4.1.3.5 Γωνία $\beta=70^\circ$

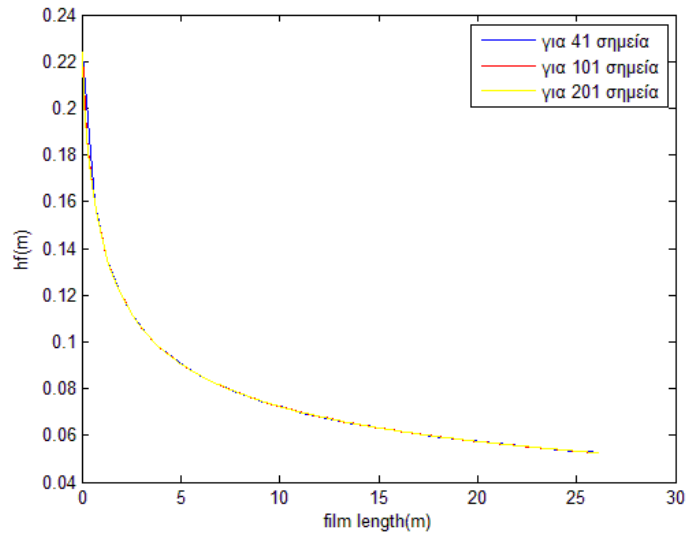
Τα δεδομένα των αρχικών υπολογισμών παρουσιάζονται στον πίνακα 14 και τα αντίστοιχα αποτελέσματα στα σχήματα 4.76 έως 4.80.

Πίνακας 14: Δεδομένα αρχικών υπολογισμών για κλίση του αγωγού 70°

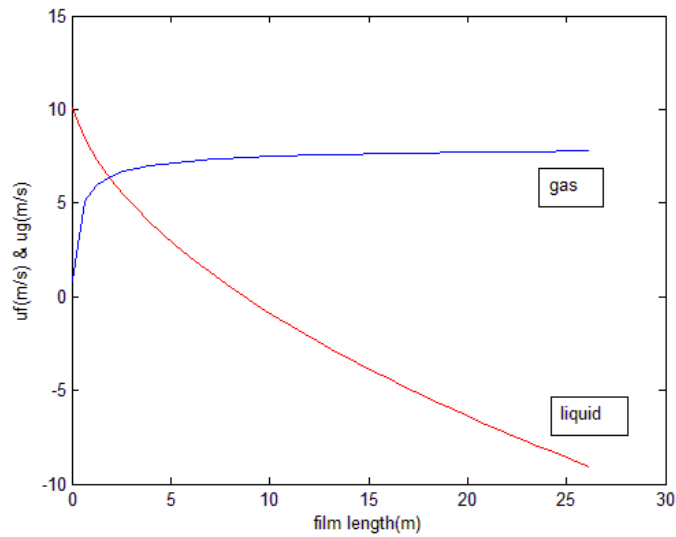
$R_s(m)$	0.6036
$h_s(m)$	0.2240
$u_t(m/s)$	13.06
$u_L(m/s)$	10.0584
$l_f(m)$	26.15
$l_s(m)$	1.5
$l_u(m)$	27.65
$\int_0^{l_f} a_f dx$	22.3727



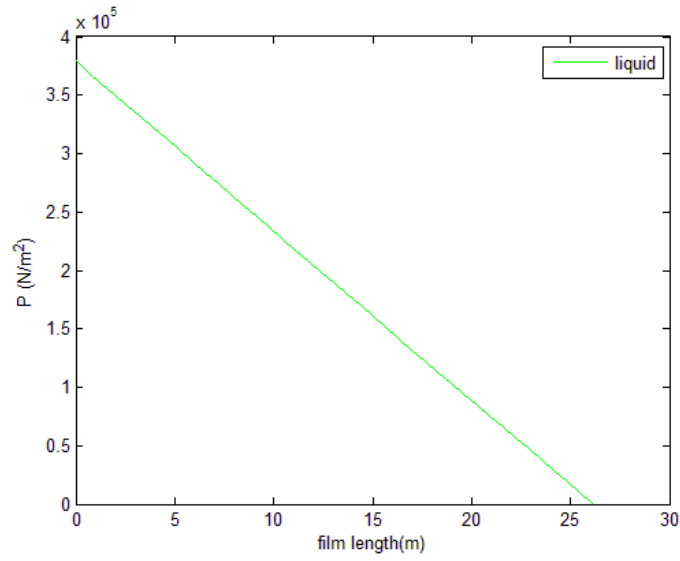
Σχήμα 4.76: Μορφή του φιλμ, για κλίση του αγωγού 70° και $u_{LS} = 0.4 m/s$, $u_{GS} = 6 m/s$



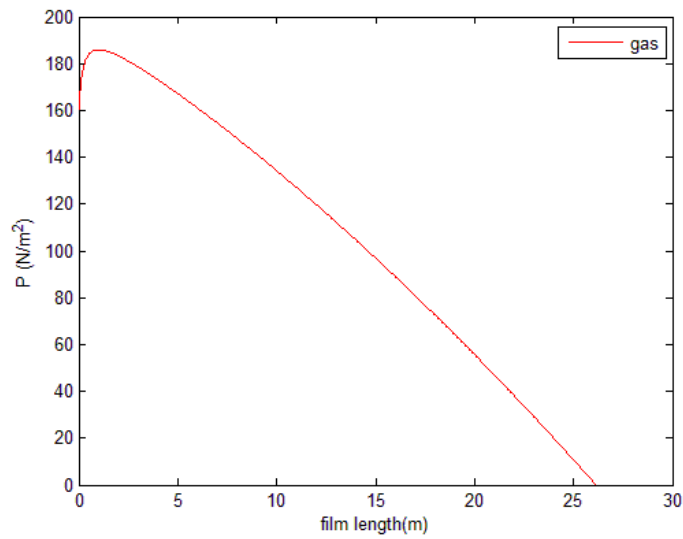
Σχήμα 4.77: Έλεγχος σύγκλισης, για κλίση του αγωγού 70° και $u_{LS} = 0.4 \text{ m/s}$,
 $u_{GS} = 6 \text{ m/s}$



Σχήμα 4.78: Προφίλ ταχυτήτων, για κλίση του αγωγού 70° και $u_{LS} = 0.4 \text{ m/s}$,
 $u_{GS} = 6 \text{ m/s}$



Σχήμα 4.79: Μεταβολή πίεσης υγρού, για κλίση του αγωγού 70° και $u_{LS} = 0.4 \text{ m/s}$,
 $u_{GS} = 6 \text{ m/s}$



Σχήμα 4.80: Μεταβολή πίεσης αερίου, για κλίση του αγωγού 70° και $u_{LS} = 0.4 \text{ m/s}$,
 $u_{GS} = 6 \text{ m/s}$

4.1.4 Παρουσίαση αποτελεσμάτων για: $u_{LS} = 0.8 \text{ m/s}$ και $u_{GS} = 2 \text{ m/s}$

Σε αυτή την περίπτωση, ο λόγος των ταχυτήτων των δύο ρευστών είναι: $\frac{u_{GS}}{u_{LS}} = 2.5$.

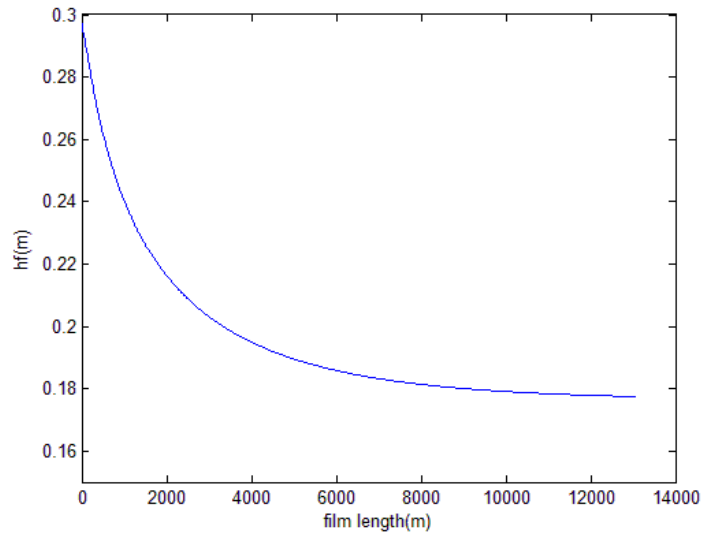
Όμοια με τις προηγούμενες υποενότητες, παρουσιάζεται αρχικά η μορφή του φιλμ του υγρού και γίνεται έλεγχος σύγκλισης της μεθόδου. Έπειτα παρουσιάζονται τα διαγράμματα για τα προφίλ των ταχυτήτων του αερίου και του υγρού, καθώς και αυτά για τις μεταβολές των πιέσεων των ρευστών.

4.1.4.1 Γωνία $\beta=0^\circ$

Εφόσον έχουν αλλάξει οι επιφανειακές ταχύτητες των ρευστών, έχει αλλάξει και η ταχύτητα του μίγματος, η οποία πλέον είναι: $u_s = 2.8 \text{ m/s}$. Επειδή δεν υπάρχει ρίζα του παρονομαστή, σαν αρχική τιμή στο πρόβλημα θεωρείται η ρίζα h_s . Αυτό ισχύει για όλες τις γωνίες. Τα δεδομένα για τους αρχικούς υπολογισμούς παρουσιάζονται παρακάτω.

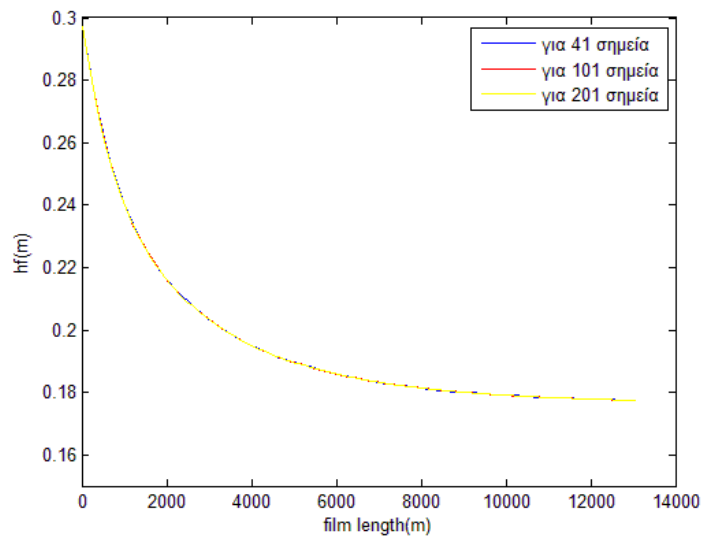
Πίνακας 15: Δεδομένα αρχικών υπολογισμών για οριζόντιο αγωγό

$R_s (m)$	0.8277
$h_s (m)$	0.2970
$u_t (m/s)$	5.93
$u_L (m/s)$	3.2517
$l_f (m)$	13070
$l_s (m)$	1.5
$l_u (m)$	13071.5
$\int_0^{l_f} a_f dx$	6420.4

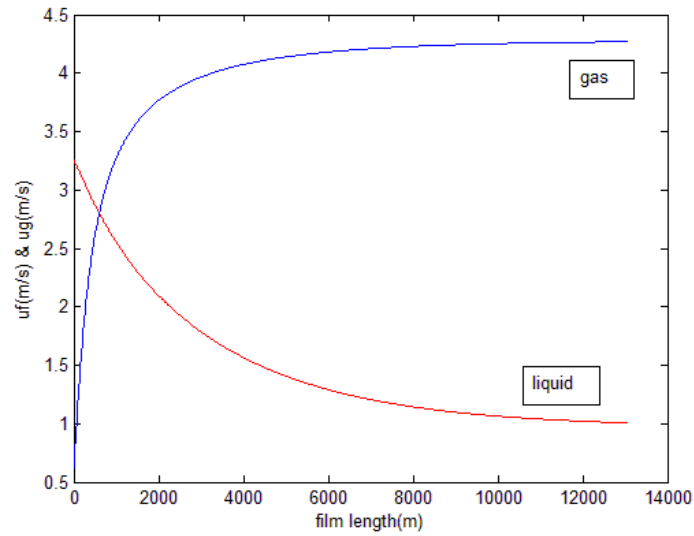


Σχήμα 4.81: Μορφή του φιλμ, για οριζόντιο αγωγό και $u_{LS} = 0.8 \text{ m/s}$, $u_{GS} = 2 \text{ m/s}$

Από το σχήμα 4.81, όμοια με το σχήμα 4.29 της περίπτωσης 2, σχηματίζεται ένα φιλμ υγρού πρακτικά απείρου μήκους, που δεν μπορεί να συμβεί στην πραγματικότητα και πρόκειται για μια θεωρητική εφαρμογή.

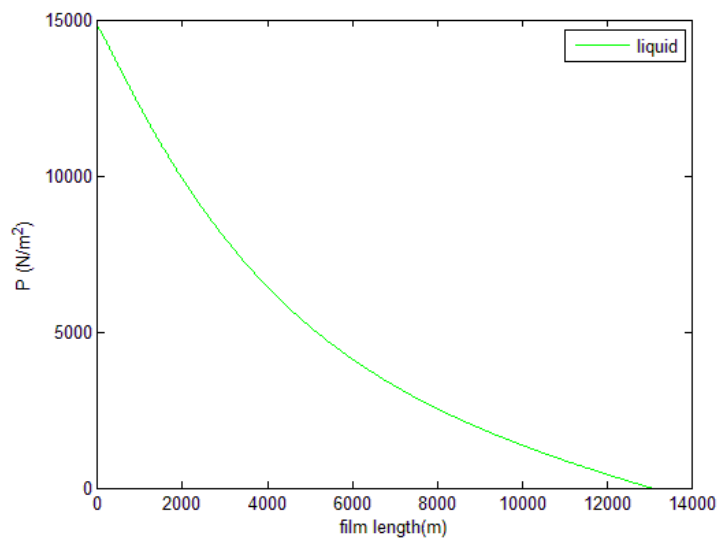


Σχήμα 4.82: Έλεγχος σύγκλισης, για οριζόντιο αγωγό και $u_{LS} = 0.8 \text{ m/s}$, $u_{GS} = 2 \text{ m/s}$



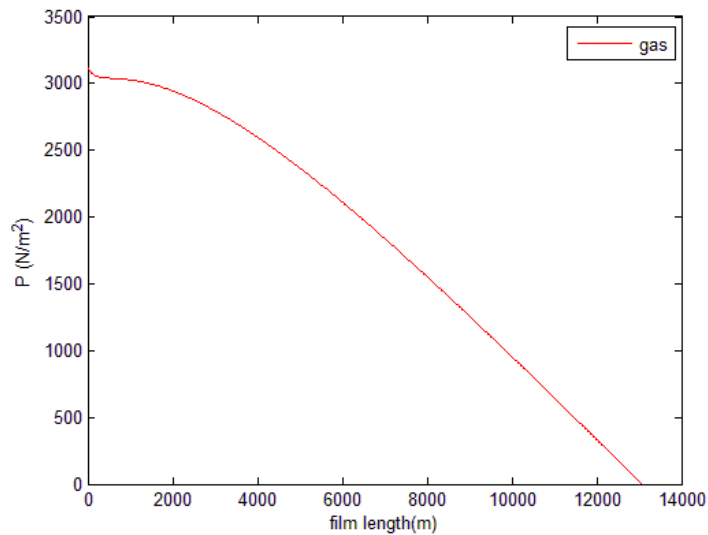
Σχήμα 4.83: Προφίλ ταχυτήτων, για οριζόντιο αγωγό και $u_{LS} = 0.8 \text{ m/s}$, $u_{GS} = 2 \text{ m/s}$

Όπως φαίνεται από το σχήμα 4.83, στο τέλος του φιλμ, η ταχύτητα του υγρού παραμένει θετική, αφού ο αγωγός είναι οριζόντιος, οπότε δεν υπάρχει μέρος του που να κινείται προς τα πίσω, όπως στις περιπτώσεις των κεκλιμένων αγωγών.



Σχήμα 4.84: Μεταβολή πίεσης υγρού, για οριζόντιο αγωγό και $u_{LS} = 0.8 \text{ m/s}$,
 $u_{GS} = 2 \text{ m/s}$

Το σχήμα 4.84 δείχνει ότι από τα 2000m έως και τα 8000m περίπου, υπάρχει μια μικρή καμπυλότητα που στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω. Επιπλέον οι τιμές της πίεσης έχουν μικρότερη τιμή σε σχέση με τις άλλες περιπτώσεις.



Σχήμα 4.85: Μεταβολή πίεσης αερίου, για οριζόντιο αγωγό και $u_{LS} = 0.8 \text{ m/s}$,
 $u_{GS} = 2 \text{ m/s}$

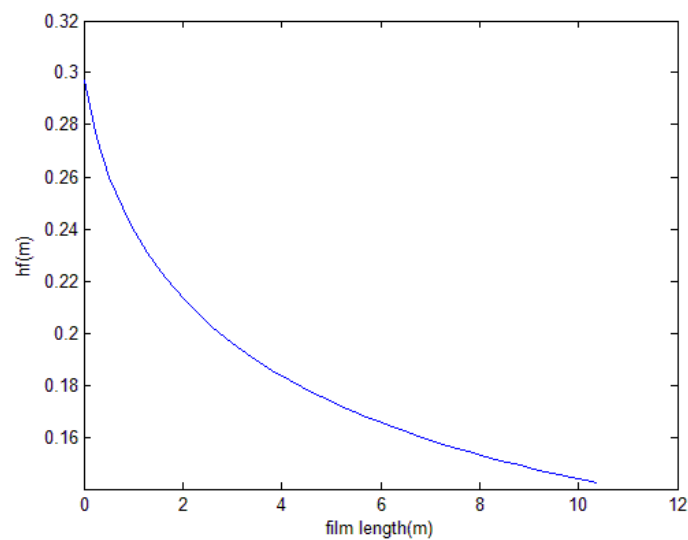
Επίσης από το σχήμα 4.85, φαίνεται ότι αλλάζει η κυρτότητα της καμπύλης, στα πρώτα μέτρα του φιλμ -0 ως 1000m-. Επίσης παρατηρείται μια μικρή καμπυλότητα, στο διάστημα από τα 1000 ως και τα 4000m.

4.1.4.2 Γωνία $\beta=10^\circ$

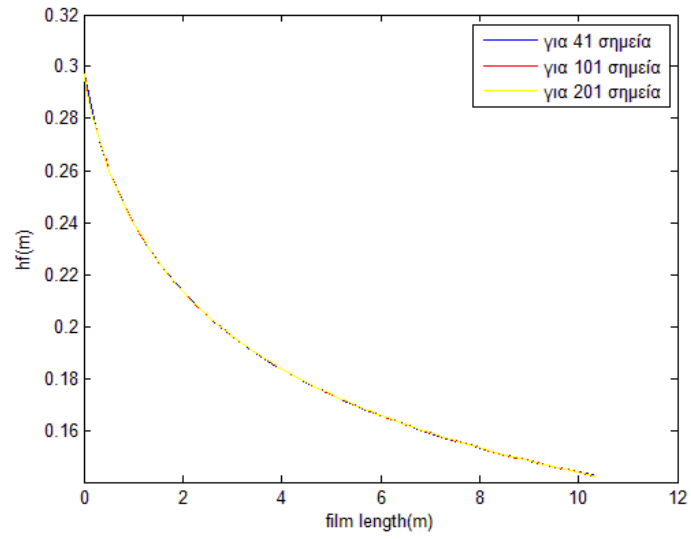
Τα δεδομένα των αρχικών υπολογισμών παρουσιάζονται στον πίνακα 16 και τα αποτελέσματα στα σχήματα 4.86 έως 4.90.

Πίνακας 16: Δεδομένα αρχικών υπολογισμών για κλίση του αγωγού 10°

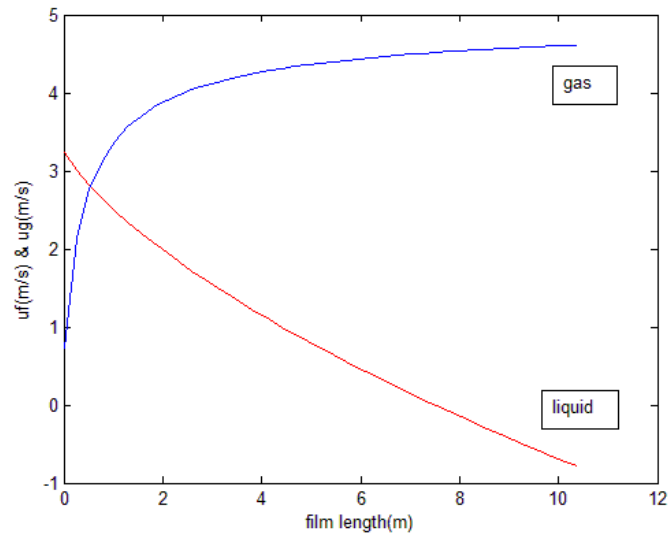
$R_s(m)$	0.8277
$h_s(m)$	0.2970
$u_t(m/s)$	5.97
$u_L(m/s)$	3.2309
$l_f(m)$	10.38
$l_s(m)$	1.5
$l_u(m)$	11.88
$\int_0^{l_f} a_f dx$	5.5170



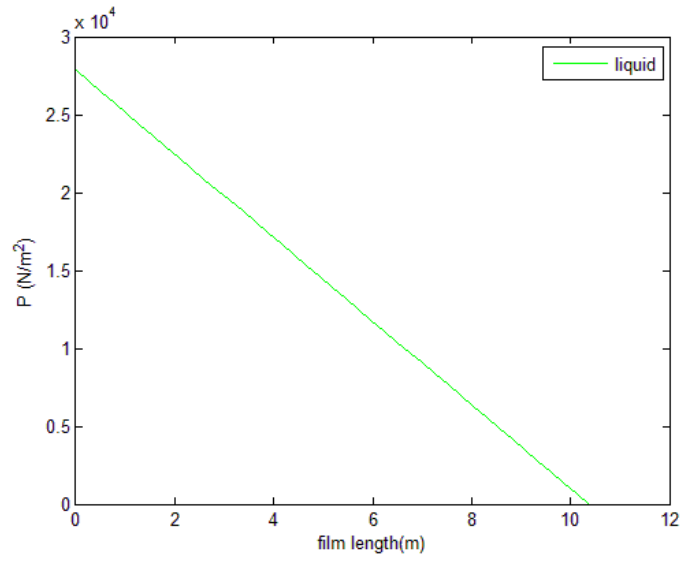
Σχήμα 4.86: Μορφή του φιλμ, για κλίση του αγωγού 10° και $u_{LS} = 0.8 m/s$, $u_{GS} = 2 m/s$



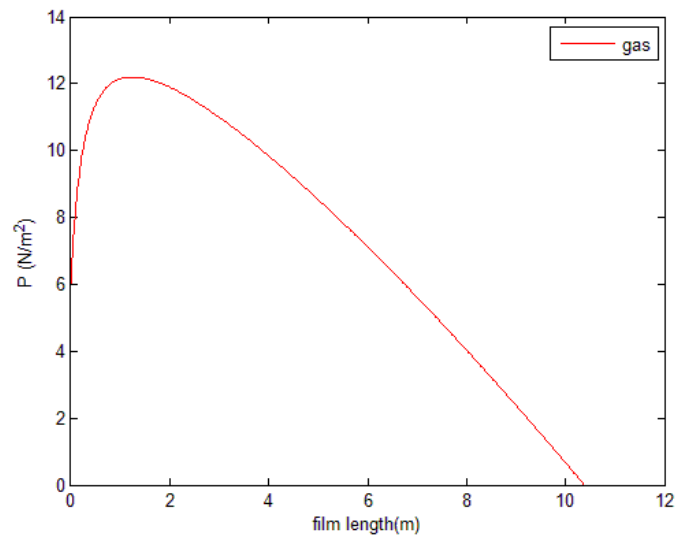
Σχήμα 4.87: Έλεγχος σύγκλισης, για κλίση του αγωγού 10° και $u_{LS} = 0.8 \text{ m/s}$,
 $u_{GS} = 2 \text{ m/s}$



Σχήμα 4.88: Προφίλ ταχυτήτων, για κλίση του αγωγού 10° και $u_{LS} = 0.8 \text{ m/s}$,
 $u_{GS} = 2 \text{ m/s}$



Σχήμα 4.89: Μεταβολή πίεσης υγρού, για κλίση του αγωγού 10° και $u_{LS} = 0.8 \text{ m/s}$,
 $u_{GS} = 2 \text{ m/s}$



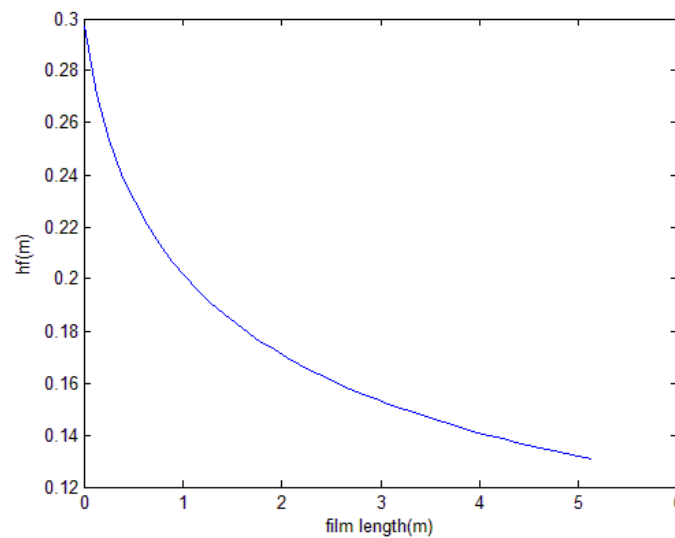
Σχήμα 4.90: Μεταβολή πίεσης αερίου, για κλίση του αγωγού 10° και $u_{LS} = 0.8 \text{ m/s}$,
 $u_{GS} = 2 \text{ m/s}$

4.1.4.3 Γωνία $\beta=30^\circ$

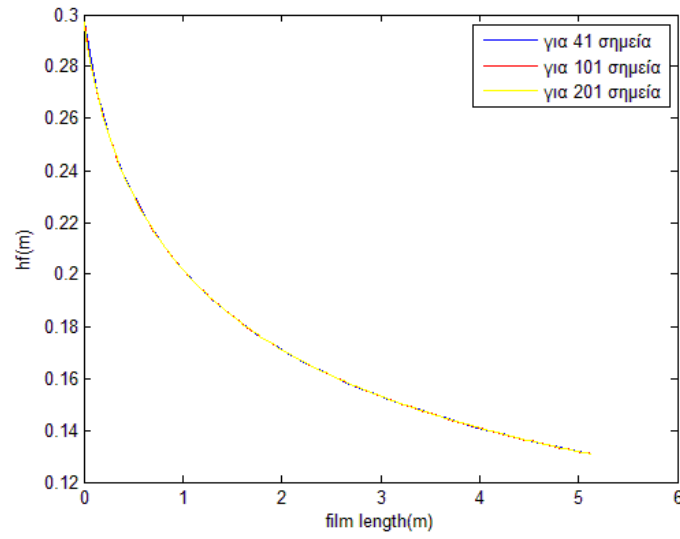
Τα δεδομένα των αρχικών υπολογισμών παρουσιάζονται στον πίνακα 17 και τα αντίστοιχα αποτελέσματα στα σχήματα 4.91 έως 4.95.

Πίνακας 17: Δεδομένα αρχικών υπολογισμών για κλίση του αγωγού 30°

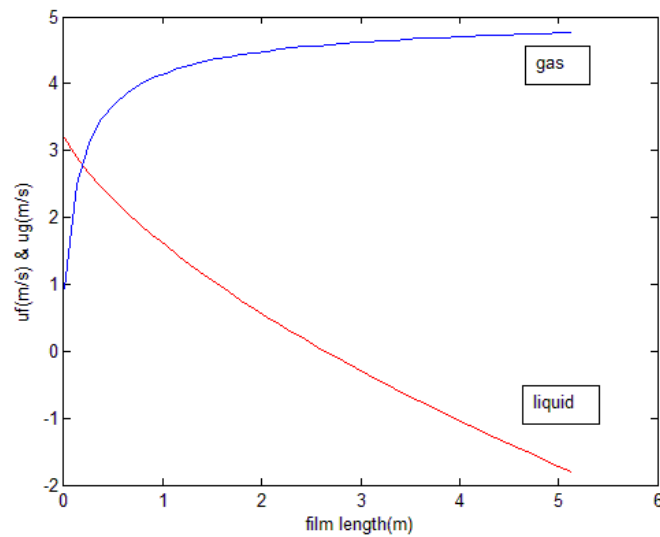
$R_s(m)$	0.8277
$h_s(m)$	0.2970
$u_t(m/s)$	6.01
$u_L(m/s)$	3.1893
$l_f(m)$	5.13
$l_s(m)$	1.5
$l_u(m)$	6.63
$\int_0^{l_f} a_f dx$	2.9115



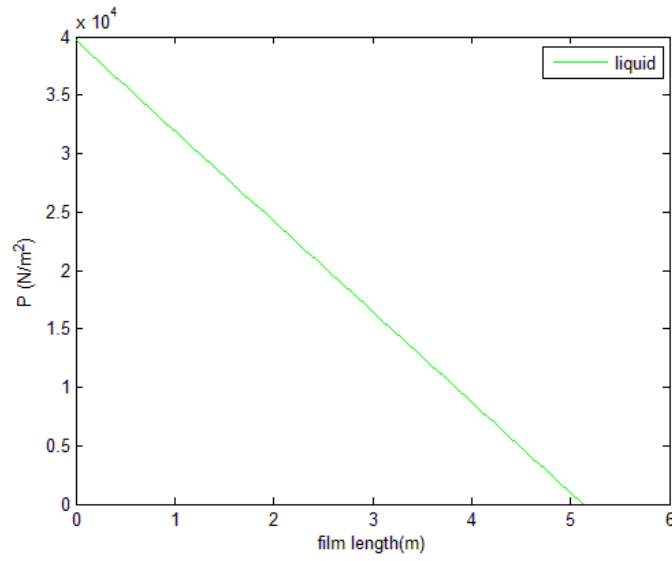
Σχήμα 4.91: Μορφή του φιλμ, για κλίση του αγωγού 30° και $u_{LS} = 0.8 m/s$, $u_{GS} = 2 m/s$



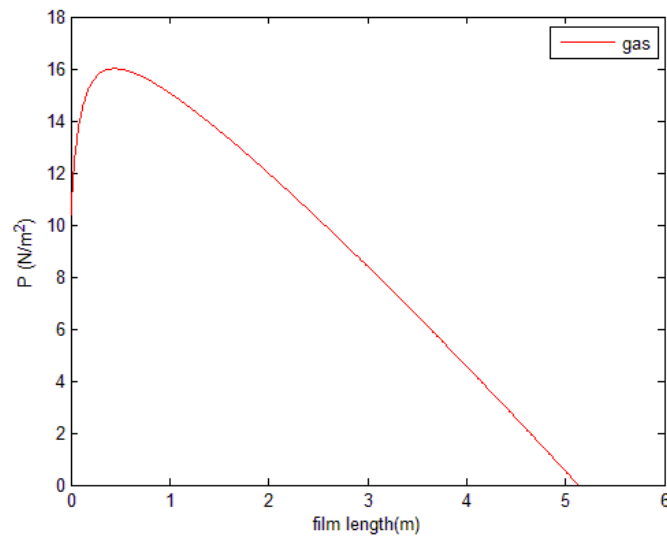
Σχήμα 4.92: Έλεγχος σύγκλισης, για κλίση του αγωγού 30° και $u_{LS} = 0.8 \text{ m/s}$,
 $u_{GS} = 2 \text{ m/s}$



Σχήμα 4.93: Προφίλ ταχυτήτων, για κλίση του αγωγού 30° και $u_{LS} = 0.8 \text{ m/s}$,
 $u_{GS} = 2 \text{ m/s}$



Σχήμα 4.94: Μεταβολή πίεσης υγρού, για κλίση του αγωγού 30° και $u_{LS} = 0.8 \text{ m/s}$,
 $u_{GS} = 2 \text{ m/s}$



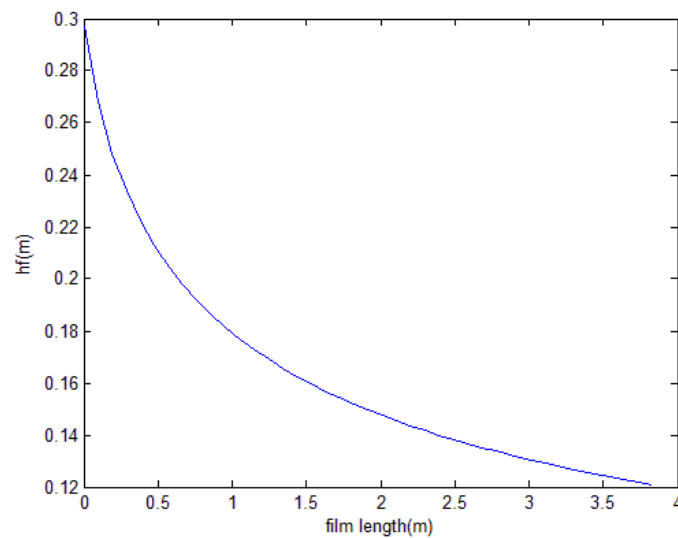
Σχήμα 4.95: Μεταβολή πίεσης αερίου, για κλίση του αγωγού 30° και $u_{LS} = 0.8 \text{ m/s}$,
 $u_{GS} = 2 \text{ m/s}$

4.1.4.4 Γωνία $\beta=60^\circ$

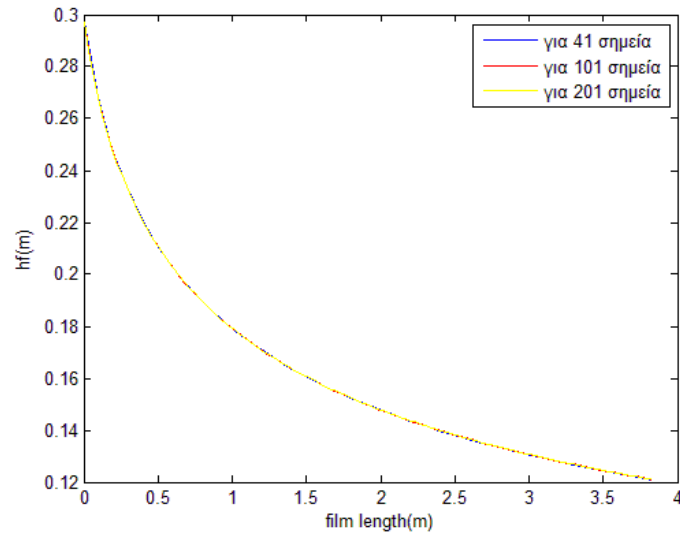
Τα δεδομένα των αρχικών υπολογισμών παρουσιάζονται στον πίνακα 17 και τα αντίστοιχα αποτελέσματα στα σχήματα 4.96 έως 4.100.

Πίνακας 18: Δεδομένα αρχικών υπολογισμών για κλίση του αγωγού 60°

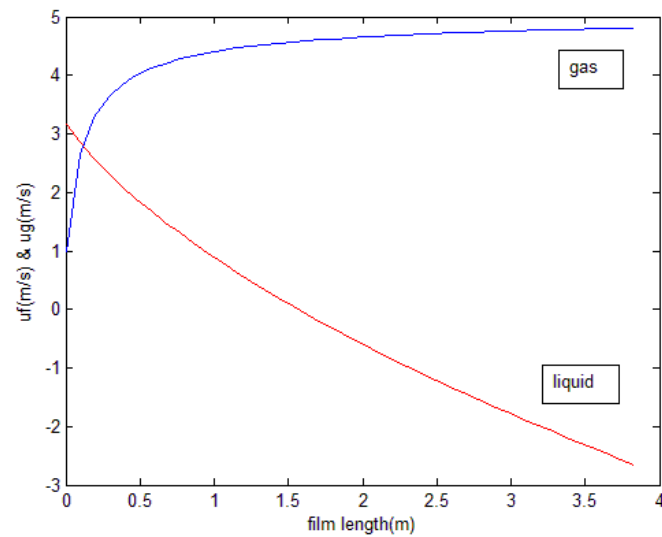
$R_s(m)$	0.8277
$h_s(m)$	0.2970
$u_t(m/s)$	5.98
$u_L(m/s)$	3.1747
$l_f(m)$	3.83
$l_s(m)$	1.5
$l_u(m)$	5.33
$\int_0^{l_f} a_f dx$	2.2884



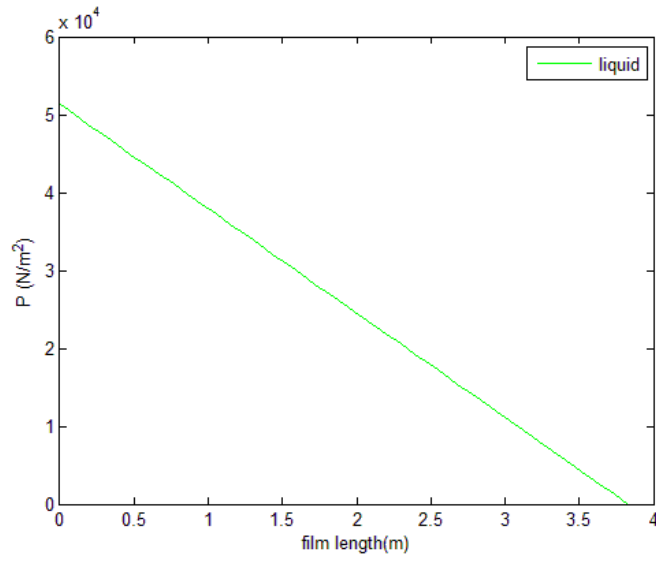
Σχήμα 4.96: Μορφή του φιλμ, για κλίση του αγωγού 60° και $u_{LS} = 0.8 m/s$, $u_{GS} = 2 m/s$



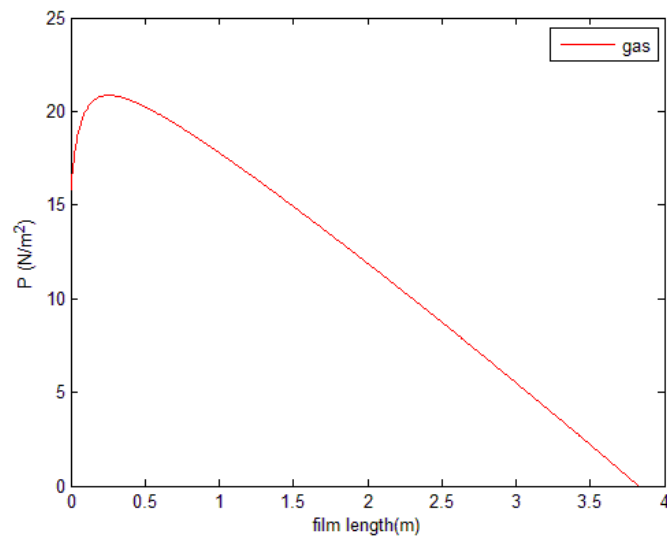
Σχήμα 4.97: Έλεγχος σύγκλισης, για κλίση του αγωγού 60° και $u_{LS} = 0.8 \text{ m/s}$,
 $u_{GS} = 2 \text{ m/s}$



Σχήμα 4.98: Προφίλ ταχυτήτων, για κλίση του αγωγού 60° και $u_{LS} = 0.8 \text{ m/s}$,
 $u_{GS} = 2 \text{ m/s}$



Σχήμα 4.99: Μεταβολή πίεσης υγρού, για κλίση του αγωγού 60° και $u_{LS} = 0.8 \text{ m/s}$,
 $u_{GS} = 2 \text{ m/s}$



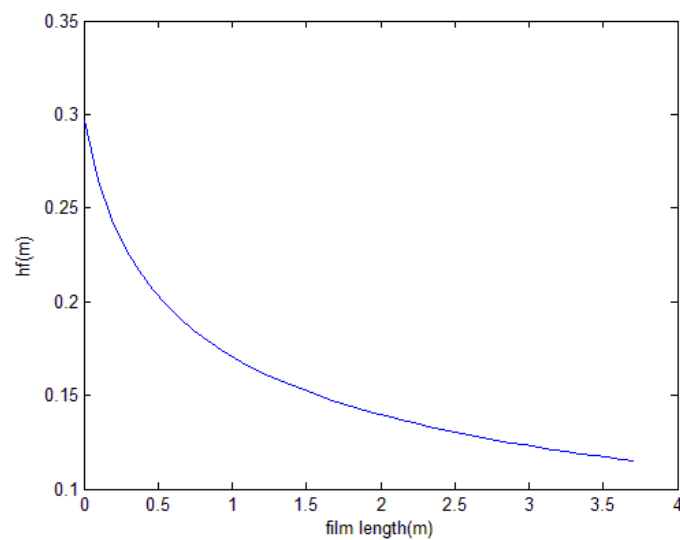
Σχήμα 4.100: Μεταβολή πίεσης αερίου, για κλίση του αγωγού 60° και $u_{LS} = 0.8 \text{ m/s}$,
 $u_{GS} = 2 \text{ m/s}$

4.1.4.5 Γωνία $\beta=70^\circ$

Τα δεδομένα των αρχικών υπολογισμών παρουσιάζονται στον πίνακα 17 και τα αντίστοιχα αποτελέσματα στα σχήματα 4.101 έως 4.105.

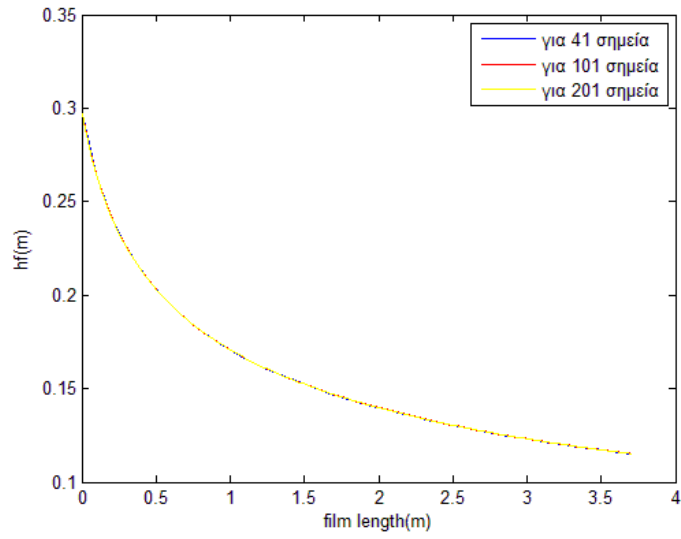
Πίνακας 19: Δεδομένα αρχικών υπολογισμών για κλίση του αγωγού 70°

$R_s(m)$	0.8277
$h_s(m)$	0.2970
$u_t(m/s)$	5.86
$u_L(m/s)$	3.2101
$l_f(m)$	3.71
$l_s(m)$	1.5
$l_u(m)$	5.21
$\int_0^{l_f} a_f dx$	2.2910

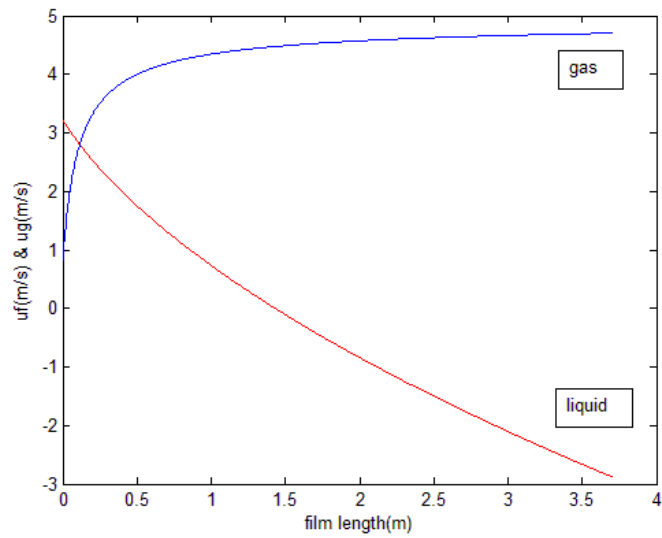


Σχήμα 4.101: Μορφή του φιλμ, για κλίση του αγωγού 70° και $u_{LS} = 0.8 m/s$,

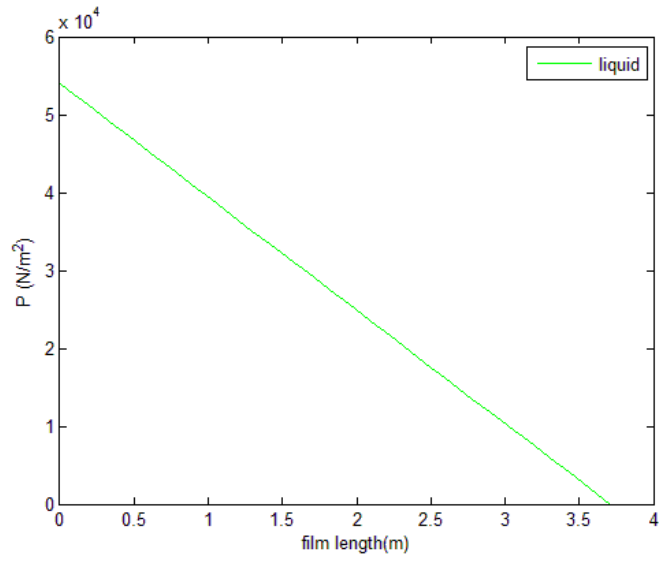
$$u_{GS} = 2 m/s$$



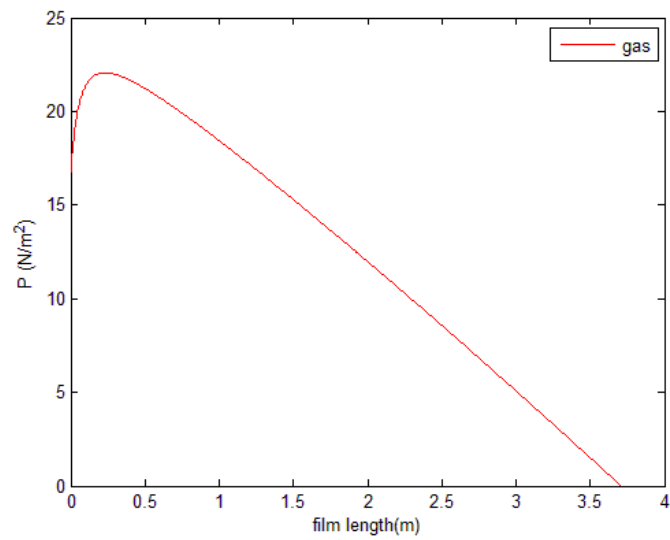
Σχήμα 4.102: Έλεγχος σύγκλισης, για κλίση του αγωγού 70° και $u_{LS} = 0.8 \text{ m/s}$,
 $u_{GS} = 2 \text{ m/s}$



Σχήμα 4.103: Προφίλ ταχυτήτων, για κλίση του αγωγού 70° και $u_{LS} = 0.8 \text{ m/s}$,
 $u_{GS} = 2 \text{ m/s}$



Σχήμα 4.104: Μεταβολή πίεσης υγρού, για κλίση του αγωγού 70° και $u_{LS} = 0.8 \text{ m/s}$,
 $u_{GS} = 2 \text{ m/s}$



Σχήμα 4.105: Μεταβολή πίεσης αερίου, για κλίση του αγωγού 70° και $u_{LS} = 0.8 \text{ m/s}$,
 $u_{GS} = 2 \text{ m/s}$

4.2 Αποτελέσματα προβλήματος ασταθούς κατάστασης

Σε αυτό το υποκεφάλαιο, παρουσιάζονται κάποια διαγράμματα-αποτελέσματα που προέκυψαν από την επίλυση του δυναμικού προβλήματος. Τα διαγράμματα αυτά δίνουν τις ταχύτητες των δύο ρευστών συναρτήσει της θέσης, προς μία πάντα κατεύθυνση, έστω x , και του χρόνου, είναι δηλαδή της μορφής $u(x, t)$. Τα αποτελέσματα που εξάγονται είναι προς διερεύνηση και συμπλήρωση, καθώς η διαδικασία της επίλυσης των μερικών διαφορικών εξισώσεων, είναι προσεγγιστική. Αυτό ισχύει διότι τα δεδομένα που χρησιμοποιήθηκαν είναι τα αποτελέσματα που έχουν εξαχθεί από το στατικό πρόβλημα. Έτσι, χρησιμοποιούνται οι τιμές για:

- το ύψος του φιλμ και από αυτές υπολογίζεται η μερική παράγωγος $\frac{\partial h}{\partial x}$,
- τα ποσοστά της διατομής που είναι κατειλημμένα από αέριο, a_l και a_g , υπολογίζονται οι τιμές $\frac{\partial a_l}{\partial x}$, $\frac{\partial a_g}{\partial x}$,
- τις πιέσεις των δύο ρευστών P_l , P_g και από αυτές υπολογίζονται οι τιμές $\frac{\partial P_l}{\partial x}$ και $\frac{\partial P_g}{\partial x}$.

Οι τιμές των μερικών παραγώγων υπολογίζονται με χρήση των πεπερασμένων διαφορών με τη γενική σχέση:

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{v_k - v_{k-1}}{\Delta z} \quad (4.1)$$

Για την επίλυση των εξισώσεων, όπως ήδη αναφέρθηκε, έγιναν κάποιες παραδοχές. Αυτές είναι οι εξής:

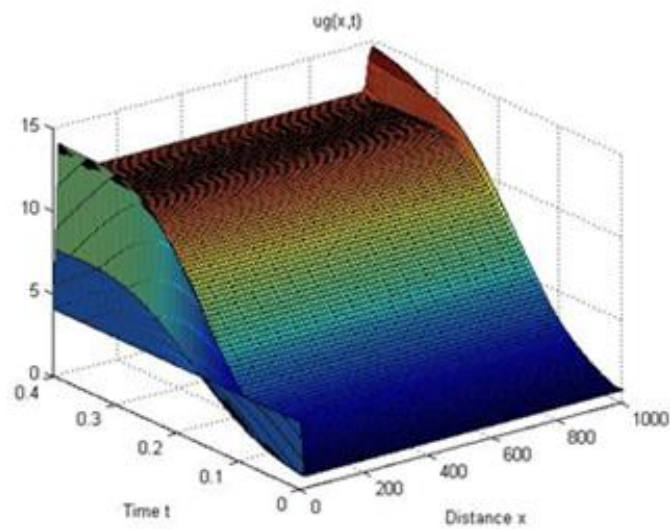
- ✓ Οι πυκνότητες ρ_l και ρ_g , των δύο ρευστών, θεωρούνται σταθερές, ανεξάρτητες του χρόνου και της θέσης κατά μήκος του αγωγού. Τα δύο ρευστά δηλαδή είναι ασυμπίεστα, $\rho_i(x, t) = const$, $i = l, g$
- ✓ Οι τιμές των ποσοστών του αερίου παραμένουν σταθερές με το χρόνο, και εξαρτώνται μόνο από τη θέση, δηλαδή $a_i(t) = const$, $i = l, g$
- ✓ Η εφαρμογή γίνεται για πολύ μεγαλύτερο μήκος φιλμ σε σχέση με αυτό που έχει προκύψει από την αντίστοιχη περίπτωση του στατικού προβλήματος. Οι τιμές είναι $l_f = 500m$ και $l_f = 1000m$.

Προκειμένου να τροποποιηθούν οι εξισώσεις στην μορφή που απαιτείται, γίνεται ο μετασχηματισμός της σχέσης 4.2, τόσο για το υγρό όσο και το αέριο.

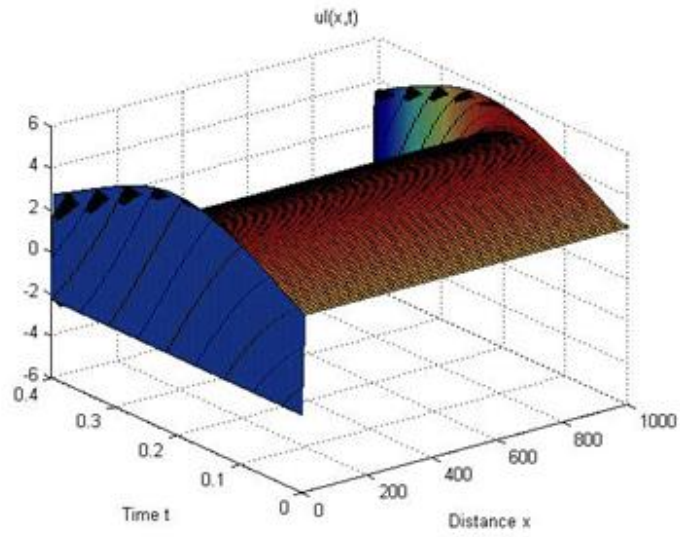
$$\frac{\partial(\rho_l a_l u_l^2)}{\partial x} = \rho_l \frac{\partial a_l}{\partial x} u_l^2 + \rho_l a_l \frac{\partial u_l^2}{\partial x} \quad (4.2)$$

4.2.1 Παρουσίαση αποτελεσμάτων για: $u_{LS} = 0.2 \text{ m/s}$ και $u_{GS} = 2 \text{ m/s}$

4.2.1.1 Γωνία $\beta=10^\circ$

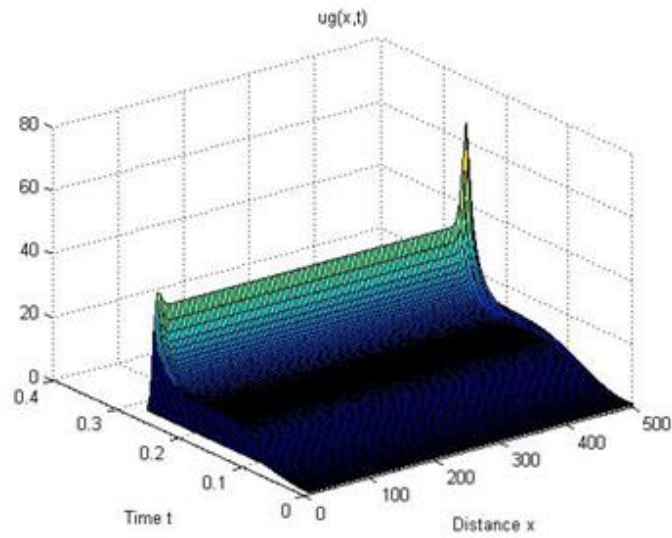


Σχήμα 4.106: Ταχύτητα αερίου, $u_g(x,t)$

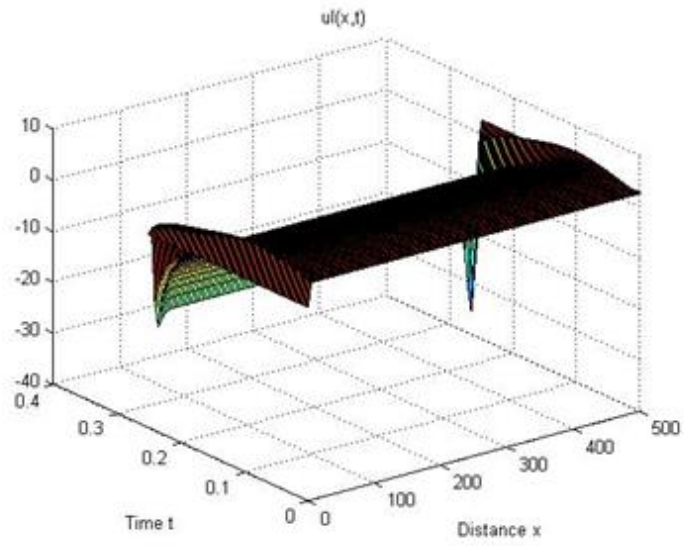


Σχήμα 4.107: Ταχύτητα υγρού, $u_l(x,t)$

4.2.1.2 Γωνία $\beta=30^\circ$

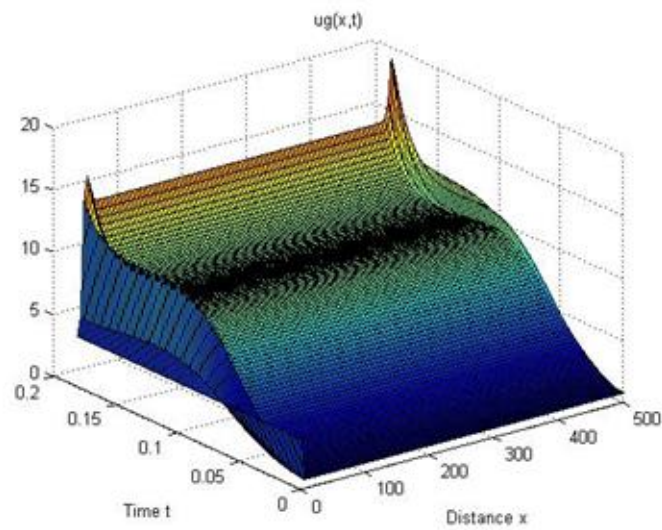


Σχήμα 4.108: Ταχύτητα αερίου, $u_g(x,t)$

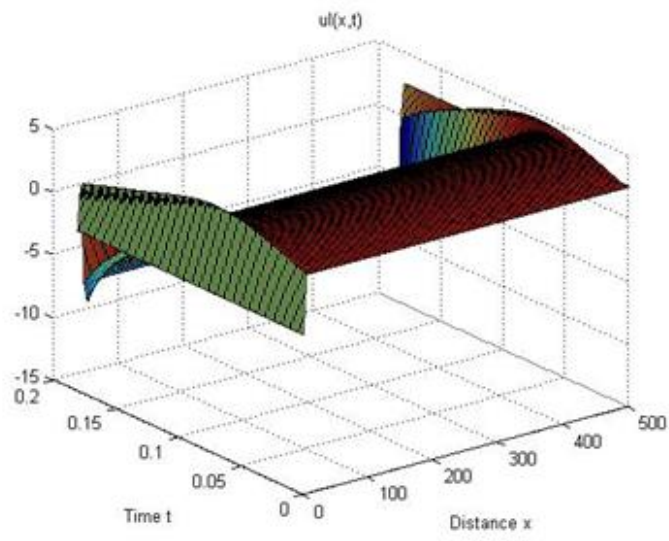


Σχήμα 4.109: Ταχύτητα υγρού, $u_l(x,t)$

4.2.1.3 Γωνία $\beta=60^\circ$



Σχήμα 4.110: Ταχύτητα αερίου, $u_g(x,t)$



Σχήμα 4.111: Ταχύτητα υγρού, $u_l(x,t)$

Κεφάλαιο 5

Σχολιασμός αποτελεσμάτων προβλήματος μόνιμης κατάστασης

5.1 Σχολιασμός μορφής του φιλμ

Όπως εξάγεται από τις αντίστοιχες εικόνες, η γενική μορφή του φιλμ παραμένει σταθερή. Στις περιπτώσεις που εξετάστηκαν, για οριζόντιους αγωγούς είτε δεν προέκυπτε κάποιο μήκος φιλμ, καθώς δεν ικανοποιούνταν ποτέ η εξίσωση (2.6), είτε το μήκος που προέκυπτε ήταν πολύ μεγάλο, πρακτικά άπειρο, της τάξης των 9000 m και παραπάνω, οπότε δεν έχει πρακτική εφαρμογή. Αυτό το γεγονός μπορεί να οφείλεται σε διάφορους παράγοντες. Ενδέχεται, αρχικά, λόγω των επιφανειακών ταχυτήτων που έχουν επιλεγεί για τα συγκεκριμένα ρευστά, να μη σχηματίζεται ποτέ φιλμ, στην οριζόντια θέση. Ακόμη η ταχύτητα του αερίου μπορεί να μην είναι αρκετά υψηλή ώστε να “έλξει” το υγρό, μέσω των τάσεων στη διεπιφάνεια, προς το πάνω μέρος του αγωγού ώστε να σχηματιστεί ένα είδος κύματος. Επιπλέον σημαντικός παράγοντας είναι και η μεγάλη διάμετρος του αγωγού που έχει επιλεγθεί και συνδέεται άμεσα με τον αριθμό Froude:

$$Fn = \frac{U}{\sqrt{g \cdot D}} \quad (5.1)$$

Επίσης από τα αποτελέσματα εξάγεται το συμπέρασμα ότι με την αύξηση της κλίσης του αγωγού, μειώνεται το μήκος του φιλμ.

5.2 Σχολιασμός σύγκλισης μεθόδου

Η λύση των διαφορικών εξισώσεων, όπως ήδη σχολιάστηκε, είναι αριθμητική. Οπότε πρέπει να σχολιαστεί και η σύγκλιση της μεθόδου. Η σύγκλιση των αποτελεσμάτων για την μορφή του φιλμ, προκύπτει ότι αυτή είναι ικανοποιητική. Μικρές αποκλίσεις παρατηρούνται στην περίπτωση 3 των επιφανειακών ταχυτήτων $u_{LS} = 0.4m/s$ και $u_{GS} = 6m/s$. Πλήρης, επίσης, είναι η ταύτιση των καμπυλών της ταχύτητας. Αναφορικά με τη σύγκλιση της μεθόδου για τις πιέσεις, διαφορές παρατηρούνται στα διαγράμματα μεταβολής της πίεσης του αερίου, στο καμπύλο τμήμα του σχήματος. Με μικρό αριθμό σημείων διαμέρισης,

σχηματίζονται κάποιες γωνίες, οι οποίες εξομαλύνονται πλήρως με αύξηση του πλήθους των σημείων. Η σύγκλιση των αποτελεσμάτων της μεταβολής της πίεσης για το υγρό είναι πλήρης, καθώς οι καμπύλες ταυτίζονται απόλυτα. Άλλωστε είναι αναμενόμενο, λόγω της απλής μορφής του διαγράμματος.

5.3 Σχολιασμός αποτελεσμάτων ταχύτητων

Για δεδομένες επιφανειακές ταχύτητες των δύο ρευστών, ανάλογα την κλίση του αγωγού μπορούν να προκύψουν κάποια συμπεράσματα. Για το αέριο, η γενική μορφή της καμπύλης παραμένει περίπου η ίδια, όπως και οι τιμές των ταχυτήτων. Παρατηρείται μια μικρή κατακόρυφη μετατόπιση της καμπύλης προς μεγαλύτερες τιμές, με την αύξηση της κλίσης του αγωγού, προσαρμοσμένη πάντα στο αντίστοιχο μήκος του φιλμ. Ακόμη παρατηρείται ότι η γενική μορφή της ταχύτητας του αερίου, ακολουθεί εκείνη της μορφής του φιλμ, στραμμένη κατά 90° . Για το υγρό, όπως ήδη σχολιάστηκε, η ταχύτητα είναι θετική για οριζόντιους αγωγούς καθόλο το μήκος του φιλμ, ενώ σε κεκλιμένους αγωγούς, ένα μέρος του κινείται προς τα πίσω, λόγω της επίδρασης της βαρύτητας. Όσο αυξάνεται η γωνία, το υγρό κινείται προς τα πίσω με όλο και μεγαλύτερες ταχύτητες. Επιπλέον με την αύξηση της κλίσης, αυξάνεται και το μέρος του υγρού που κινείται προς τα πίσω, δηλαδή μειώνεται το μήκος του φιλμ από το 0 μέχρι και την απόσταση που αποκτάται η αρνητική ταχύτητα του υγρού.

5.4 Σχολιασμός αποτελεσμάτων μεταβολής πιέσεων

Η μεταβολή της πίεσης του υγρού παρουσιάζεται, σχεδόν, γραμμική. Εξαίρεση αποτελούν τα σχήματα για τις δύο περιπτώσεις των οριζόντιων αγωγών, όπου εμφανίζεται μια καμπυλότητα. Επιπλέον με αύξηση της κλίσης, αυξάνεται η αρχική τιμή της μεταβολής, καθώς επίσης η καμπύλη γίνεται πιο απότομη. Οι τιμές είναι πάντα της τάξης $10^4 - 10^5$. Αναφορικά με το αέριο, η συμπεριφορά της καμπύλης μεταβάλλεται περισσότερο ανάλογα την περίπτωση που εξετάζεται. Σε κάποιες εικόνες φαίνεται να παρουσιάζει μια καμπυλότητα στην κορυφή, στην περιοχή του φιλμ που εμφανίζεται πιο απότομη πτώση του ύψους του φιλμ. Σε άλλες περιπτώσεις η κορυφή του καμπύλου τμήματος φτάνει σε μικρότερες τιμές, αλλά έχει μεγαλύτερο εύρος, -για μεγαλύτερο μήκος φιλμ-. Μπορεί να θεωρηθεί ότι, όπως και στην καμπύλη της ταχύτητας του αερίου, η γενική μορφή της καμπύλης ακολουθεί περίπου εκείνη της μορφής του φιλμ. Εξαίρεση αποτελούν τα σχήματα 4.33 και 4.34 που εμφανίζεται μια διαφορετική καμπυλότητα.

Παράρτημα

Παρακάτω παρατίθενται, αναλυτικά, οι κώδικες Matlab, που γράφτηκαν και χρησιμοποιήθηκαν για τον υπολογισμό όλων των μεγεθών.

Π1:Κώδικας για την επίλυση της συνήθους διαφορικής εξίσωσης

```
function [ dhf ] = diaf( z,hf )
D=0.385;      % η διάμετρος του αγωγού
g=9.81;
b=0.523;     % η κλίση του αγωγού σε rad
uliq_super=0.2 ; % επιφανειακή ταχύτητα υγρού
ugas_super=2 ; % επιφανειακή ταχύτητα αερίου
C=2;
ud=0.41;     % ταχύτητα "σύρσης" για τη δεδομένη γωνία
ub=0.93;     % ταχύτητα φυσαλίδων στη ζώνη του slug, για δεδομένη γωνία
Cf=Cf;
Cg=Cg;
n=-1;
pl=790;      % πυκνότητα υγρού σε kg/m^3, εδώ αργόπετρέλαιο κατηγορίας 48
vl=3.8*10^(-6); % κινηματικό ιξώδες υγρού m^2/s=cSt
pg=0.675;    % πυκνότητα αερίου σε kg/m^3, εδώ αργόπετρέλαιο κατηγορίας 48
vg=1.615*10^(-5); % κινηματικό ιξώδες αερίου m^2/s=cSt
us=uliq_super+ugas_super
ut=C*us+ud
Rs=1/(1+(us/8.66)^1.39)
as=1-Rs
ul=(us-ub*as)/Rs

q=2*acos(1-hf/(D/2))

Af=(D/2)^2*(q-sin(q))
Sf=q*D/2
Dhf=4*Af/Sf
Rf=(1/pi)*(pi-acos(2.*(hf/D)-1)+(2.*(hf/D)-1).*sqrt(1-(2.*(hf/D)-1).^2))
af=1-Rf
uf=ut-(ut-ul)*(Rs./Rf)
ff=Cf*(Dhf.*uf/vl).^n
tf=ff*pl.*uf.^2/2

Ag=pi*D^2/4-Af
Si=(D/2)*sqrt(2-2*cos(q))
Sg=pi*D-Sf
Dhg=(4*Ag)/(Sg+Si)
ug=ut-(ut-ub).*(as./af)
fg=Cg*(Dhg.*ug/vg).^n
tg=fg*pg.*ug.^2/2

fi=0.014;
ti=fi*(pg*(ug-uf).^2/2)

vf=ut-uf
vg=ut-ug
A=(4/(pi*D)).*sqrt(1-(2.*hf/D-1).^2)

dhf=(tf.*Sf./Af-tg.*Sg./Ag-ti.*Si.*(1./Af+1./Ag)+(pl-pg)*g*sin(b))/( (pl-pg)*g*cos(b)-
pl.*vf.*A.*(ut-ul).*Rs./Rf.^2-pg.*vg.*A.*(ut-ub).(1-Rs)./(1-Rf).^2)

end
```

```

film_length=[0:6.11/40:6.11]; % μήκος φιλμ και το αντίστοιχο βήμα για διακριτοποίηση 41 στοιχείων
initial=0.3129; % η αρχική τιμή που έχει υπολογιστεί
[z,hf]=ode45(@diaf, film_length, initial) % κλήση συνάρτησης ode45
plot(z,hf,'b');
xlabel('film length(m)')
ylabel('hf(m)')

```

Π2:Κώδικας για τον υπολογισμό των πιέσεων υγρού και αερίου

Υγρό

```

p1=790;
g=9.81;
b=1.221;
dz=3.71/40 % ισοδιάστημα
P1(41)=0 % πίεση ίση με το 0, στο τέλος του φιλμ

for k=40:-1:1

    A1(k)=p1*((vf(k+1)+vf(k))/2)*((vf(k)-vf(k+1))/dz)
    A2(k)=((tf(k+1)+tf(k))/2)*((Sf(k+1)+Sf(k))/2)/((Af(k+1)+Af(k))/2)
    A3(k)=((ti(k+1)+ti(k))/2)*((Si(k+1)+Si(k))/2)/((Af(k+1)+Af(k))/2)
    A4=p1*g*sin(b)
    A5(k)=p1*g*cos(b)*(hf(k)-hf(k+1))/dz

    P1(k)=dz*(-A1(k)+A2(k)-A3(k)+A4-A5(k))+P1(k+1)

end

plot(z,P1,'g')
xlabel('film length(m)')
ylabel('P (N/m^2)')
legend('liquid')

```

Αέριο

```

pg=0.675;
g=9.81;
b=1.221;
dz=3.71/1000 % ισοδιάστημα
Pg(1001)=0 % πίεση ίση με το 0, στο τέλος του φιλμ

for k=1000:-1:1

    A1(k)=pg*((vg(k+1)+vg(k))/2)*((vg(k)-vg(k+1))/dz)
    A2(k)=((tg(k+1)+tg(k))/2)*((Sg(k+1)+Sg(k))/2)/((Ag(k+1)+Ag(k))/2)
    A3(k)=((ti(k+1)+ti(k))/2)*((Si(k+1)+Si(k))/2)/((Ag(k+1)+Ag(k))/2)
    A4=pg*g*sin(b)
    A5(k)=pg*g*cos(b)*(hf(k)-hf(k+1))/dz

    Pg(k)=dz*(-A1(k)+A2(k)+A3(k)+A4-A5(k))+Pg(k+1)

end

plot(z,Pg,'r')
xlabel('film length(m)')
ylabel('P (N/m^2)')
legend('gas')

```

Π3: Κώδικες για την επίλυση των μερικών διαφορικών εξισώσεων

Π3α: Προσδιορισμός πινάκων c,f,s

```
function [ c,f,s ] = proseggisi_pde( x,t,u,DuDx)

D=0.385;
ZZ=pi*D^2/4;
Cg=16;
Cf=16;
n=-1;
pl=790;
pg=0.675;
vl=3.8*10^(-6);
vg=1.615*10^(-5);
g=9.81;
b=0.523;

Dhg= % υδραυλική διάμετρος για αέριο
Dhf= % υδραυλική διάμετρος για υγρό
Pg= % πιέσεις αερίου από λύση προβλήματος μόνιμης κατάστασης ;
DpDxg= % παραγωγή πίεσης αερίου ως προς την κατεύθυνση της ροής
DpDxl= % παραγωγή πίεσης υγρού ως προς την κατεύθυνση της ροής
Sg= % τόξο διατομής κατειλημμένης από αέριο

Fgw=(1/2)*(Cg.*(Dhg.*u(2)/vg).^n*pg.*abs(u(2))*u(2)).*Sg/ZZ ; % δύναμη τριβής (N/m), μεταξύ
αερίου και αγωγού

fi=0.014;
Si= % μήκος διεπιφάνειας
Fi=(fi*(pg.*abs(u(2)-u(1))*(u(2)-u(1))/2)).*Si/ZZ; % δύναμη τριβής στη διεπιφάνεια (N/m)
Sf= % τόξο διατομής κατειλημμένης από υγρό

Flw=(1/2)*(Cf.*(Dhf.*u(1)/vl).^n*pl.*abs(u(1))*u(1)).*Sf/ZZ; % δύναμη τριβής (N/m), μεταξύ υγρού
και αγωγού

DhDx= % παραγωγή ύψους φιλμ ως προς την κατεύθυνση της ροής
al= % ποσοστό υγρού στη διατομή
ag= % ποσοστό αερίου στη διατομή
DalDx= % παραγωγή ποσοστού υγρού στη διατομή ως προς την κατεύθυνση της ροής
DagDx= % παραγωγή ποσοστού αερίου στη διατομή ως προς την κατεύθυνση της ροής

c = [pg.*ag; pl.*al];

f = [-pg*ag.*u(2).^2; -pl*al.*u(1).^2];

s = [-ag.*DpDxg+pg*ag*g*sin(b)+Fgw+Fi-pg*u(2).^2.*DagDx; -al.*DpDxl-
pl*g*al.*DhDx*cos(b)+pl*al*g*sin(b)+Flw-Fi-pl*u(1).^2.*DalDx];

end
```

Π3β: Προσδιορισμός συνοριακών συνθηκών

```
function [ pl,q1,pr,qr ] = proseggisi_pde_bc( xl,ul,xr,ur,t )

pl= [ul(1)+2.3034; ul(2)-4.0334]; % για αριστερό άκρο
q1= [0; 0]; % για αριστερό άκρο
pr= [ur(1)-2.4189; ur(2)-0.7297]; % για δεξιό άκρο
qr= [0; 0]; % για δεξιό άκρο

end
```


Π3γ: Προσδιορισμός οριακών συνθηκών

```
function u0 = proseggisi_pde_ic(x)

u0 = [2.4189; 0.7297];

end
```

Π3δ: Κλήση συνάρτησης pdepe και επίλυση εξισώσεων

```
function nea_proseggisi

m=0;
x=linspace(0,500,100); % ορισμός πίνακα-στήλης απόστασης

t=linspace(0,0.18,100); % ορισμός πίνακα-στήλης χρόνου

sol = pdepe(m,@proseggisi_pde,@proseggisi_pde_ic,proseggisi_pde_bc,x,t); % κλήση συνάρτησης pdepe
u1 = sol(:,:,1);
u2 = sol(:,:,2);

figure
surf(x,t,u1)
title('u1(x,t)')
xlabel('Distance x')
ylabel('Time t')

figure
surf(x,t,u2)
title('u2(x,t)')
xlabel('Distance x')
ylabel('Time t')

end
```

Βιβλιογραφία-Παραπομπές

[1] Taitel, Y., Barnea, D., 1990. Two-Phase Slug Flow. Faculty of Engineering, Department of Fluid Mechanics and Heat Transfer, Tel-Aviv University, Ramat-Aviv 69978, Israel.

[2] Issa, R., I., Kempf, M.H.W., 2003. Simulation of slug flow in horizontal and nearly horizontal pipes with the two fluid model. Department of Mechanical Engineering, Imperial College of Science, Technology and Medicine, Exhibition Road, London SW7 2BX, UK.

[3] Hout, van R., Barnea, D., Shemer, L., 2002. Translational velocities of elongated bubbles in continuous slug flow. Department of Fluid Mechanics and Heat Transfer, Faculty of Engineering Tel-Aviv University, Tel-Aviv 69978, Israel.

[4] http://www.engineeringtoolbox.com/gas-density-d_158.html

[5] http://www.engineeringtoolbox.com/liquids-densities-d_743.html

[6] Ortega, A., Rivera, A., Nydal, O., J., Larsen, C., M., OMAE2012-83316. On the dynamic response of flexible risers caused by internal slug flow. Norwegian University of Science and Technology. Trondheim, Norway.

[7] Patel, M., H., Seyed, F., B., October 1989. Internal flow-induced behavior of flexible risers. Department of Mechanical Engineering, University College London, Torrington Place, London WC1E7JE, UK.

[8] Bonizzi, M., Issa, R., I., 2003. A model for simulating gas bubble entrainment in two-phase horizontal slug flow. Department of Mechanical Engineering, Imperial College, Exhibition Road, London SW7 2BX, UK.

[9]: Issa, R., December 2009. Melbourne Australia. Simulation of Intermittent Flow in Multiphase Oil and Gas Pipelines. Department of Mechanical Engineering, Imperial College, London SW7 2AZ and Multiphase Simulation Ltd., London W6 0NB, UK.

[10]: Kjelby, T., K., Henkes, R., A., W., M., Nydal, O., J., 2013. Lagrangian slug flow modeling and sensitivity on hydrodynamic slug initiation methods in a severe slugging case.

[11]: P. Howard. Spring 2005. Partial Differential Equations in Matlab 7.0