ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΕΚΡΗΞΗ ΛΥΣΕΩΝ ΣΕ ΜΗ-ΤΟΠΙΚΑ ΚΑΙ ΕΚΦΥΛΙΣΜΕΝΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΔΙΗΘΗΣΗΣ ΚΑΙ ΠΟΡΩΔΩΝ ΜΕΣΩΝ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΔΗΜΗΤΡΙΟΥ Α. ΝΤΟΓΚΑ
Διπλωματούχου Ναυπηγού Μηχανολόγου Μηχανικού Ε.Μ.Π.

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ:
Δ. ΤΖΑΝΕΤΗΣ
Ομότιμος Καθηγητής Ε.Μ.Π.

ΑΘΗΝΑ, Δεκέμβριος 2015

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΕΚΡΗΞΗ ΛΥΣΕΩΝ ΣΕ ΜΗ-ΤΟΠΙΚΑ ΚΑΙ ΕΚΦΥΛΙΣΜΕΝΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΔΙΗΘΗΣΗΣ ΚΑΙ ΠΟΡΩΔΩΝ ΜΕΣΩΝ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΔΗΜΗΤΡΙΟΥ Α. ΝΤΟΓΚΑ
Διπλωματούχου Ναυπηγού Μηχανολόγου Μηχανικού Ε.Μ.Π.

ΤΡΙΜΕΛΗΣ ΣΥΜΒΟΥΛΕΥΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ:

1.Δ.ΤΖΑΝΕΤΗΣ, Ομ.Καθ.Ε.Μ.Π.(Επιβλέπων)
2.Κ.ΚΥΡΙΑΚΗ, Καθ.Ε.Μ.Π.
3.Β.ΠΑΠΑΝΙΚΟΛΑΟΥ, Καθ.Ε.Μ.Π.

ΕΠΤΑΜΕΛΗΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ:

1.Δ.ΤΖΑΝΕΤΗΣ, Ομ.Καθ.Ε.Μ.Π.(Επιβλέπων)
2.Κ.ΚΥΡΙΑΚΗ, Καθ.Ε.Μ.Π.
3.Β.ΠΑΠΑΝΙΚΟΛΑΟΥ, Καθ.Ε.Μ.Π.
4.Α.ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΠΟΥΛΟΣ, Αν.Καθ.Ε.Μ.Π.
5.Δ.ΓΚΙΝΤΙΔΗΣ, Αν.Καθ.Ε.Μ.Π.
6.Χ.ΝΙΚΟΛΟΠΟΥΛΟΣ, Αν.Καθ.Παν.Αιγαίου
7.Ι.ΚΑΡΑΦΥΛΛΗΣ, Επ.Καθ.Ε.Μ.Π.

ΑΘΗΝΑ, Δεκέμβριος 2015

... Στη μνήμη των γονιών μου, Αναστασίου και Ελένης,

... στη σύντροφο της ζωής μου Πόπη,

... στον επιβλέποντα Καθηγητή μου,
... στα αδέρφια μου Βασιλική και Νίκο.

... με το Μηδέν και το Άπειρο να συμφιλιωθούμε.

(Κώστας Καρυωτάκης,
ποιητής με τραγική κατάληξη, που χωρίς να είναι Μαθηματικός
ή Φυσικός, με τη φράση του αυτή αγγίζει και το νου και τη ψυχή μας).

Ευχαριστίες

Στην όλη μου προσπάθεια για την ολοκλήρωση της εργασίας αυτής, θέλω να ευχαριστήσω πολλούς, που με βοήθησαν, μου συμπαραστάθηκαν, μου έδιναν δύναμη και αυτοπεποίθηση όταν αισθανόμουν ότι αυτά τα τελευταία με εγκατέλειπαν. Πρώτα από όλα όμως θέλω να ευχαριστήσω το Θεό, που μου έδωσε υγεία, πίστη και καθαρό μυαλό για να μπορέσω να ανταπεξέλθω στο μεγάλο αλλά όμορφο και πολύ ενδιαφέρον ταξίδι που ξεκίνησα το 2006 σε ηλικία 51 ετών, για την εκπόνηση Διδακτορικής διατριβής. Ήταν όνειρο ζωής και πυξίδα μου ήταν η ακόρεστη αγάπη μου για τα Μαθηματικά.

Ένα σύντομο ιστορικό.

2006. Μόλις είχα τελειώσει επιτυχώς τις διετείς Μεταπτυχιακές μου σπουδές στη Σχολή των Ναυπηγών - Μηχανολόγων, όπου επέλεξα Διπλωματική εργασία πάνω στα Μαθηματικά. Θεωρία Floquet πάνω σε περιοδικές συναρτήσεις. Επιβλέπων Καθηγητής μου ο κ.Δημήτρης Τζανετής. Δύσκολο θέμα, αλλά τα κατάφερα. Βαθμός εργασίας: 10.

Τότε σκέφτηκα να συνεχίσω σε Διδακτορικό πάνω στα Μαθηματικά. Μη γραμμικές Μερικές Διαφορικές εξισώσεις, παραβολικού τύπου και συγκεκριμένα εξίσωση Διάχυσης με μη τοπικό όρο πηγής, και μελέτη για την περίπτωση έκρηξης των λύσεων σε πεπερασμένο χρόνο. Με επιβλέποντα Καθηγητή τον κ.Δημ.Τζανετή, και μέλη της τριμελούς Επιτροπής τους Καθηγητές κ.Κυριακή Κυριάκη και κ.Βασίλη Παπανικολάου.

Ήταν όμως υποχρεωτικό και βεβαίως απαραίτητο η παρακολούθηση επτά μαθημάτων, μεταπτυχιακού επιπέδου, πάνω σε θέματα που θα μου συμπλήρωναν τις γνώσεις μου. Ένα χρόνο διήρκεσαν τα μαθήματα αυτά, όπου τα παρακολούθησα ανελλιπώς με πρωτοφανές, (κατά τη δική μου κρίση), ενδιαφέρον για την ηλικία μου. Οι νέες γνώσεις που μου προσέφεραν κυρίως πάνω στη Μαθηματική Ανάλυση και στη μη γραμμική θεωρία των Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων, μου διεύρυναν κυριολεκτικά τον ορίζοντα πάνω στην Επιστήμη των Μαθηματικών. Δεν έμαθα απλώς νέες έννοιες. Βίωσα νέες έννοιες, που, όσο και να ακούγεται τραβηγμένο, μου άλλαξαν τρόπο σκέψης, όχι μόνο στα Μαθηματικά, αλλά γενικότερα στην αντιμετώπιση των ανθρώπων και των πραγμάτων. Πολλοί υποστηρίζουν ότι τα Μαθηματικά τους ζαλίζουν. Εμένα περιέργως με χαλάρωναν, μου δημιουργούσαν πνευματική αλλά και ψυχική ηρεμία. Το ταξίδι που ξεκίνησα έγινε ένα όμορφο, ονειρικό ταξίδι. Που συνεχίζεται και θα συνεχίζεται όσο οι πνευματικές μου δυνατότητες μου το επιτρέπουν.

Το εάν τα κατάφερα δεν το γνωρίζω. Γνωρίζω όμως ότι κατάφερα να ταξιδέψω στο χρόνο και να γυρίσω στην ηλικία των 30 χρόνων. Και το κυριότερο, να παλέψω. Τώρα, μετά από επτά χρόνια μελέτης και προσπάθειας, καταθέτω τη διατριβή μου. Εσείς θα την κρίνετε.

Εγώ απλώς, και με όλη τη σεμνότητα, θέλω να ευχαριστήσω τη σύντροφο της ζωής μου Καλλιόπη, που με στήριζε συνέχεια, με ενέπνεε με την εμπιστοσύνη που έδειχνε για την απόφασή μου αυτή, και για κάποιες στιγμές ψυχαγωγίας που ίσως να της στέρησα.

Ευχαριστώ τους εκλιπόντες γονείς μου, Αναστάσιο και Ελένη, που μου κληρονόμησαν το σεβασμό στη μάθηση, και την απεριόριστη Αγάπη τους.

Ευχαριστώ τα αδέρφια μου Βασιλική και Νίκο, που πάντα με συμβούλευαν και ήταν δίπλα μου.

Ευχαριστώ Όλους τους Καθηγητές που με διδάξανε. Χωρίς τις γνώσεις αυτές που μου δώσανε, η προσπάθειά μου θα είχε φοβερά εμπόδια. Τους αγαπώ και τους σέβομαι απεριόριστα.

Όλα αυτά καλώς έχουν. Υπάρχει όμως ένα κεντρικό πρόσωπο, σα να λέμε ο κυρίως Πρωταγωνιστής, που βρίσκεται συνεχώς και ανελλιπώς δίπλα μου σε Όλο το ταξίδι αυτό. Βρίσκεται σαν επιβλέπων Καθηγητής μου αλλά, πάνω από όλα, σα Φίλος μου. Είναι το πρόσωπο αυτό που με βοήθησε αποτελεσματικά, που ακούραστα ήταν στο πλευρό μου, που συνεργαζόμασταν ώρες ατέλειωτες, που μου προσέφερε τις γνώσεις του, που με απέραντη αγάπη προσπαθούσε ο ίδιος προσωπικά να με βγάλει από τις όποιες δύσκολες καταστάσεις προέκυπταν. Πολλές φορές ξενυχτώντας.

Είναι το πρόσωπο που πολλές φορές ανέχτηκε και δικαιολόγησε ορισμένα μου άγχη, που ανθρώπινα ξεπηδούσαν από μέσα μου. Που χωρίς αυτόν δεν θα μπορούσα τίποτα να πετύχω. Και μάλιστα στα 60 μου.

Κύριε Καθηγητά μου, κύριε Δημήτρη Τζανετή, από βάθους καρδιάς, σε ΕΥΧΑΡΙΣΤΩ.

Δημήτριος Ντόγκας
Δεκέμβριος 2015

Περίληψη.

Μελετούμε το μη-τοπικό πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών με μη γραμμική διάχυση (Διήθηση):

$u_t = \Delta K(u) + \lambda f(u)/\left(\int_\Omega f(u)dx\right)^p, \ x \in \Omega, \ t > 0,$

$\mathcal{B}K(u) := \partial K(u)/\partial \hat{n} + \beta(x)K(u) = 0, \ x \in \partial\Omega, \ t > 0$

όπου, $0 < p < 1$, Ω φραγμένος τόπος του $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, με αρκούντως λείο σύνορο $\partial\Omega$. Αρχικές συνθήκες $u_0(x) \in C(\bar{\Omega})$, με συμπαγή φορέα εντός του πεδίου Ω, μη αρνητικες, όχι ταυτοτικά μηδέν. $K(s)$ και $f(s)$ είναι πραγματικές συναρτήσεις, θετικές, αύξουσες και κυρτές, για $s > 0$. Εάν $K'(0) = 0$ έχουμε εκφυλισμό του παραβολικού τελεστή για $u = 0$, και εάν $f(0) = 0$, έχουμε λύση με χρονικά επεκτεινόμενο φορεά. Θεωρούμε γενικευμένες λύσεις (πολύ ασθενείς λύσεις). Ορίζουμε την έννοια της έκρηξης της λύσης σε πεπερασμένο χρόνο.

Στο Κεφάλαιο 2 δίνουμε τον ορισμό για τα πάνω - κάτω ζεύγη λύσεων. Επίσης ορίζουμε τους μέσους όρους Steklov για μία συνάρτηση.

Στο Κεφάλαιο 4 αποδεικνύουμε έκρηξη για το πρόβλημα Neumann για κάθε $\lambda > 0$ και για όλα τα $u_0(x) \geq 0$. Επίσης για τα προβλήματα Dirichlet ή Robin, (όταν το πεδίο Ω είναι κυρτό), είτε για αρκούντως μεγάλα λ και για όλα τα $u_0(x) \geq 0$ είτε για αρκούντως μεγάλες αρχικές συνθήκες $u_0(x)$ ανεξάρτητα με την τιμή της παραμέτρου λ. Υποθέτουμε κάποιες συνθήκες μεταξυ των $K(s)$ και $f(s)$.

Στο Κεφάλαιο 5 εξετάζουμε το φαινόμενο της πεπερασμένης ταχύτητας διάδοσης της διαταραχής για το εκφυλισμένο μη-τοπικό πρόβλημα Διήθησης.

Στο Κεφάλαιο 7 μελετούμε την ευστάθεια των λύσεων του στάσιμου μη-τοπικού προβλήματος Διήθησης, όταν το διάγραμμα διακλάδωσης είναι κλειστό από δεξιά.

Στο Κεφάλαιο 8 αποδεικνύουμε έκρηξη για το τοπικό πρόβλημα Διήθησης, υπό ορισμενες συνθηκες μεταξύ $K(s)$ και $f(s)$ και κατάλληλα αρχικά δεδομένα, όταν $\lambda > \lambda^*$.

Στο Κεφάλαιο 9 και για το μη-τοπικό πρόβλημα γραμμικής διάχυσης, αποδεικνύουμε έκρηξη της λύσης υπό κατάλληλες αρχικές συνθήκες, όταν $\lambda > \lambda^*$.

Στο Κεφάλαιο 10 και για το μη-τοπικό πρόβλημα Διήθησης, αποδεικνύουμε έκρηξη της λύσης σε πεπερασμένο χρόνο για $\lambda > \lambda^*$, υπό ορισμενες συνθηκες μεταξύ $K(s)$ και $f(s)$ και κατάλληλα αρχικά δεδομένα.

Τέλος, στα υπόλοιπα κεφάλαια αναπτύσσονται τεχνικές που χρησιμοποιούνται στα ανωτέρω κεφάλαια.

Abstract.

We study the following Initial-Boundary Non-Local problem, with Nonlinear Diffusion (Filtration):
$u_t = \Delta K(u) + \lambda f(u)/\left(\int_\Omega f(u)dx\right)^p,\ x \in \Omega,\ t > 0,$
$\mathcal{B}K(u) := \partial K(u)/\partial \hat{n} + \beta(x)K(u) = 0,\ x \in \partial\Omega,\ t > 0$
where $0 < p < 1$, Ω boundary domain in $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, with smooth enough boundary $\partial\Omega$. Initial conditions $u_0(x) \in C(\bar{\Omega})$, with compact support in the domain Ω, non negative and non identical zero. $K(s)$ and $f(s)$ are real functions, positive, increasing and convex, for $s > 0$. If $K'(0) = 0$ the parabolic operator becomes degenerate for $u = 0$, and if $f(0) = 0$, we have solution with expended in time support. So, we consider generalized solutions (very weak solutions). We define the notion of Blow-up of solutions in finite time.

In Chapter 2 we give the definition of the Lower-Upper solution pairs. Moreover we give the definition of Steklov averages for a function.

In Chapter 4 we prove blow-up in finite time of the solutions for the Neumann problem, for every $\lambda > 0$ and for all $u_0(x) \geq 0$. The same holds for the Dirichlet or Robin problems, (when the domain Ω is convex), either for large enough λ and for all $u_0(x) \geq 0$ or for big enough initial conditions $u_0(x)$, independently of the value of parameter λ. We suppose some conditions between $K(s)$ and $f(s)$.

In Chapter 5 we discus about the finite speed of propagation for the support of the solution, for the degenerate Non-Local Filtration problem.

In Chapter 7 we study the stability of solutions for the stable Non-Local Filtration problem, when the bifurcation diagram is bounded and turns to the left.

In Chapter 8 we prove finite time blow-up for the Local Filtration problem, under some conditions between $K(s)$ and $f(s)$ and appropriate initial data, when $\lambda > \lambda^*$.

In Chapter 9 we prove finite time blow-up for the solutions for the Non-Local diffusion problem, for appropriate initial data, when $\lambda > \lambda^*$.

In Chapter 10 we prove finite time blow-up for the solutions for the Non-Local Filtration problem, under some conditions between $K(s)$ and $f(s)$ and appropriate initial data, when $\lambda > \lambda^*$.

Finally, in the rest of the chapters, we develop methods which are used in the above chapters.

Περιεχόμενα

Παρουσίαση των κεφαλαίων

Στο **Κεφάλαιο 1** και στην πρώτη παράγραφο, κάνουμε μία αρχική παρουσίαση του προβλήματος, δηλαδή του μη-τοπικού προβλήματος αρχικών-συνοριακών τιμών με μη γραμμική διάχυση και μη γραμμικές συνοριακές συνθήκες (Filtration problem) και εστιάζουμε την προσοχή μας στη μη τοπικότητα στον όρο πηγής, αναφέροντας μερικά σημαντικά φυσικά φαινόμενα στα οποία, κατά τη μαθηματική τους μοντελοποίηση, εμφανίζεται το ολοκλήρωμα $\left(\int_\Omega f(u)dx\right)^p$ στον παρονομαστή του όρου πηγής.

Στη δεύτερη παράγραφο περιγράφουμε εν συντομία τη σταδιακή εξέλιξη του μαθηματικού μοντέλου, από τό απλό πρόβλημα διάχυσης μέχρι το πρόβλημα που εξετάζουμε. Γίνεται αναφορά για αρχικές συνθήκες $u_0(x) \geq 0$ με συμπαγή φορέα εντός του πεδίου Ω, που αποτελεί την **πρώτη βασική πρωτοτυπία της διατριβής**. Η παραδοχή $K'(0) = 0$ θα οδηγήσει στον εκφυλισμό του παραβολικού τελεστή για τις τιμές $u = 0$, που σε συνδυασμό με την ύπαρξη μη εξαναγκασμένης αντίδρασης, ($f(0) = 0$), θα δημιουργήσει το χρονικά επεκτεινόμενο σύνορο του φορέα της λύσης μας, με πεπερασμένη ταχύτητα. Αυτό είναι και **η κύρια πρωτοτυπία της διατριβής**, αφού όπως θα δούμε, θα απαιτηθεί να εργασθούμε με γενικευμένες λύσεις. Τέλος, θεωρούμε ότι η $f(s)$ είναι μία αύξουσα συνάρτηση, γεγονός που δυσκολεύει δραματικά τους υπολογισμούς αφού δεν ισχύουν απ΄ ευθείας οι κλασσικές μέθοδοι σύγκρισης των παραβολικών προβλημάτων. Και αυτό είναι μία **σημαντική πρωτοτυπία της διατριβής μας.**

Στην τρίτη παράγραφο κάνουμε μνεία του μη-τοπικού προβλήματος Πορώδους Μέσου (porous media), το οποίο είναι υποπερίπτωση του προβλήματος διήθησης.
Στην τέταρτη παράγραφο αναπτύσουμε μαθηματικά την περίπτωση του εκφυλισμού του παραβολικού τελεστή για τις τιμές $u = 0$.

Στη πέμπτη παράγραφο εισάγουμε την έννοια των Γενικευμένων λύσεων, εστιάζοντας την προσοχή μας στις ασθενείς και στις πολύ ασθενείς λύσεις. Αιτιολογούμε την επιλογή των πολύ ασθενών λύσεων για την εν γένει εξέταση του εκφυλισμένου προβλήματος.

Στην έκτη παράγραφο κάνουμε μία μαθηματική ανάλυση για την περίπτωση όπου έχουμε αρχικές συνθήκες με συμπαγή φορέα εντός του Ω και λύση με επεκτεινόμενο χρονικά φορέα.

Τέλος, στην έβδομη παράγραφο αναφερόμαστε εκτενώς στο φαινόμενο της έκρηξης (blow-up), που αποτελεί και τη βασική έρευνα της διατριβής αυτής. Ορίζουμε την έννοια της έκρηξης της λύσης σε πεπερασμένο χρόνο.

Στο **Κεφάλαιο 2** μελετούμε το γενικευμένο πρόβλημα διήθησης.

Στην πρώτη παράγραφο διατυπώνουμε το μη-τοπικό πρόβλημα διήθησης σε πολύ ασθενή μορφή, δίνουμε τον ορισμό για τα πάνω - κάτω ζεύγη λύσεων σε πολύ ασθενή μορφή και αποδεικνύουμε την ύπαρξη ενός τουλάχιστον τέτοιου ζεύγους.

Στη δεύτερη παράγραφο διατυπώνουμε και αποδεικνύουμε μιά γενική αρχή σύγκρισης για το μη-τοπικό πρόβλημα διήθησης σε πολύ ασθενή μορφή, όταν $f(s)$ αύξουσα συνάρτηση. Η διατύπωση και η απόδειξη σε πολύ ασθενή μορφή **είναι πρωτότυπη εργασία στη διατριβή αυτή**. (Η αρχική ιδέα για την περίπτωση των κλασσικών λύσεων υπάρχει στις εργασίες των κ.κ. Τζανετή, Καβαλλάρη, Λάτου, στις οποίες και βασιστήκαμε). Επίσης δίνουμε τον ορισμό των μέσων όρων Steklov για μία συνάρτηση. Η χρήση των μέσων όρων Steklov στην μελέτη της έκρηξης της λύσης σε μη-τοπικά προβλήματα διήθησης **αποτελεί πρωτότυπη εργασία στη διατριβή αυτή.**

Τέλος, στην τρίτη παράγραφο, αποδεικνύουμε την τοπική ύπαρξη και τη μοναδικότητα της λύσης για το μη-τοπικό πρόβλημα διήθησης σε πολύ ασθενή μορφή. Και εδώ βασιστήκαμε, όπως και παραπάνω σε εργασίες των κ.κ. Τζανετή, Καβαλλάρη, Λάτου, που αναφέρονται όμως σε κλασσικές λύσεις. Η διατύπωση και η απόδειξη σε πολύ ασθενή μορφή, **είναι πρωτότυπη εργασία στη διατριβή αυτή**.

Στο **Κεφάλαιο 3**, διατυπώνουμε και αποδεικνύουμε μερικές μεθόδους σύγκρισης για το μη-τοπικό πρόβλημα διήθησης σε πολύ ασθενή μορφή, που είναι χρήσιμες στην μελέτη παρόμοιων προβλημάτων. Όπως και προηγούμενα, η αρχική ιδέα για την περίπτωση των κλασσικών λύσεων υπάρχει σε εργασίες των κ.κ. Τζανετή, Καβαλλάρη, Λάτου, στις οποίες και πάλι βασιστήκαμε. Η διατύπωση όμως και η απόδειξη **σε πολύ ασθενή μορφή, είναι πρωτότυπη εργασία στη διατριβή αυτή.**

Θέλουμε να τονίσουμε ότι αν και τα ανωτέρω θέματα είχαν αντιμετωπισθεί για την περίπτωση των κλασσικών λύσεων στις εργασίες των ανωτέρω Καθηγητών - Ερευνητών, η περίπτωση των αρχικών συνθηκών με συμπαγή φορέα εντός του πεδίου ορισμού (δηλαδή όχι αυστηρά θετικές σε όλο το πεδίο) σε συνδυασμό με $f(0) = 0$, θα οδηγούσε σε εκφυλισμό του προβλήματος, **γεγονός που είχε επισημανθεί και είχε χαρακτηρισθεί ως ανοικτό πρόβλημα για περαιτέρω έρευνα. Στην παρούσα διατριβή ασχολούμαστε ακριβώς με αυτά τα ανοικτά θέματα (γενικευμένες λύσεις, λύσεις με χρονικά επεκτεινόμενο φορέα, πεπερασμένη**

ταχύτητα διάδοσης της διαταραχής κλπ).

Στο **Κεφάλαιο 4** εξετάζεται η περίπτωση της έκρηξης της λύσης για το πρόβλημα 1.1. Συγκεκριμένα αποδεικνύουμε έκρηξη της πολύ ασθενούς λύσης για το εκφυλισμένο μη-τοπικό πρόβλημα διήθησης και για το εκφυλισμένο μη-τοπικό πρόβλημα Πορώδους Μέσου. Κατά κύριο λόγο χρησιμοποιούμε τη μέθοδο Kaplan, την ανισότητα Jensen και τις ιδιότητες των μέσων όρων Steklov.

Συγκεκριμένα αποδεικνύουμε έκρηξη για το πρόβλημα Neumann για κάθε $\lambda > 0$ και για όλα τα $u_0(x) \geq 0$. Επίσης για τα προβλήματα Dirichlet ή Robin, (όταν το πεδίο Ω είναι κυρτό), είτε για αρκούντως μεγάλα λ και για όλα τα $u_0(x) \geq 0$ είτε για αρκούντως μεγάλες αρχικές συνθήκες $u_0(x)$ ανεξάρτητα με την τιμή της παραμέτρου λ. Όπως και προηγούμενα, τονίζουμε ότι η απόδειξη των ανωτέρω **για τα εκφυλισμένα μη-τοπικά προβλήματα, είναι πρωτότυπη εργασία στη διατριβή αυτή.**

Στο **Κεφάλαιο 5** εξετάζουμε το φαινόμενο της πεπερασμένης ταχύτητας διάδοσης της διαταραχής για το εκφυλισμένο μη-τοπικό πρόβλημα.

Στο **Κεφάλαιο 6** και στις δύο πρώτες παραγράφους, αναφερόμαστε εκτενώς στα διαγράμματα διακλάδωσης του τοπικού στάσιμου προβλήματος διήθησης, διατυπώνοντας τα πιό βασικά θεωρήματα από τη θεωρία διακλάδωσης των ελλειπτικών προβλημάτων.

Στην τρίτη παράγραφο κάνουμε μία εφαρμογή των ανωτέρω γνωστών θεωρημάτων στο πρόβλημά μας. Η βασική έρευνά μας είναι να ελέγξουμε εάν υπάρχουν συναρτήσεις $K(s)$ και $f(s)$ με $f(0) = 0$, τέτοιες ώστε το διάγραμμα διακλάδωσης του τοπικού στάσιμου προβλήματος διήθησης να είναι κλειστό από δεξιά. Η έρευνα αυτή είναι αναγκαία ώστε να γνωρίζουμε εάν υπάρχει κάποιο $\lambda^* < \infty$, για να εξετάσουμε στη συνέχεια τι συμβαίνει για $\lambda > \lambda^*$. Η απάντηση είναι θετική. Σημειώνουμε ότι για να είναι κλειστό από δεξιά το διάγραμμα διακλάδωσης του στάσιμου μη-τοπικού προβλήματος διήθησης, αναγκαία προϋπόθεση είναι να είναι κλειστό από δεξιά το διάγραμμα διακλάδωσης του στάσιμου τοπικού προβλήματος διήθησης. Το σημαντικό αυτό συμπέρασμα που αποδεικνύουμε στη διατριβή αυτή, **αποτελεί πρωτότυπη εργασία.** Για πεπερασμένα και από δεξιά ανοικτά διαγράμματα, η μελέτη των προβλημάτων είναι ανοικτά προβλήματα.

Στο **Κεφάλαιο 7** μελετούμε την ευστάθεια των λύσεων του στάσιμου μη-τοπικού προβλήματος διήθησης, όταν το διάγραμμα διακλάδωσης είναι κλειστό από δεξιά. Οπως θα τεκμηριώσουμε αναλυτικά στο αντίστοιχο κεφάλαιο, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο αναστροφής προς τα αριστερά.

Στην πρώτη παράγραφο αναφέρουμε μερικές προκαταρκτικές έννοιες.

Στη δεύτερη παράγραφο αποδεικνύουμε ότι ο κάτω κλάδος είναι ευσταθής, χρησιμοποιώντας κλασσικά ζεύγη πάνω - κάτω λύσεων, ενώ στην τρίτη παράγραφο αποδεικνύουμε ότι ο πάνω κλάδος είναι ασταθής. Η μέθοδος που ακολουθούμε για την απόδειξη βασίζεται σε πρωτοπόρες εργασίες των Καθηγητών A.A.Lacey και Δ.Τζανετή, όπου κάναμε τις απαραίτητες τροποποιήσεις (όχι εύκολες) για τις ανάγκες του προβλήματός μας και κυρίως για την περίπτωση όπου η $f(s)$ είναι αύξουσα συνάρτηση, οπότε χρειάστηκε να χρησιμοποιήσουμε ζεύγη πάνω - κάτω λύσεων αντί των απλών πάνω ή/και κάτω λύσεων. **Η τροποποίηση αυτή της μεθόδου είναι πρωτότυπη εργασία στη διατριβή αυτή.**

Τέλος, στην τέταρτη παράγραφο, αποδεικνύουμε ότι η ταυτοτικά μηδενική λύση είναι ασταθής για οποιεσδήποτε αρχικές συνθήκες, όταν $\lambda > \lambda^*$. Το συμπέρασμα αυτό είναι σημαντικό για τη μελέτη της έκρηξης της λύσης όταν $\lambda > \lambda^*$. **Η διατύπωση και η απόδειξη αυτή είναι πρωτότυπη εργασία της διατριβής αυτής.**

Τα Κεφάλαια 8, 9 και 10 *είναι τα βασικότερα κεφάλαια της διατριβής, αφορούν την έκρηξη της λύσης για $\lambda > \lambda^*$,* **οι δε μέθοδοι και αποδείξεις για την έκρηξη αποτελούν πρωτότυπες εργασίες της διατριβής αυτής.**

Στο **Κεφάλαιο 8** αποδεικνύουμε την έκρηξη για το τοπικό πρόβλημα Διήθησης, όταν $\lambda > \lambda^*$. Παραθέτουμε δύο αποδείξεις: Στην πρώτη (βασική), θεωρούμε τις εξισώσεις εξ' αρχής πάνω σε όλο το θεμελιώδες πεδίο, ενώ στη δεύτερη, οι εξισώσεις μας ≪ακολουθούν≫ τον επεκτεινόμενο φορέα της λύσης. Η δεύτερη απόδειξη έχει το πλεονέκτημα ότι παρακολουθούμε την φυσική εξέλιξη του φαινομένου.

Στο **Κεφάλαιο 9** ασχολούμαστε με το μη-τοπικό πρόβλημα γραμμικής διάχυσης και αποδεικνύουμε έκρηξη της λύσης *υπό κατάλληλες αρχικές συνθήκες* όχι ταυτοτικά μηδέν, όταν $\lambda > \lambda^*$ με $0 < p < 1$.

Στο **Κεφάλαιο 10** εξετάζουμε το μη-τοπικό πρόβλημα διήθησης (περίπτωση μη γραμμικής διάχυσης) και αποδεικνύουμε έκρηξη της λύσης σε πεπερασμένο χρόνο για $\lambda > \lambda^*$, *υπό κατάλληλες αρχικές συνθήκες* όχι ταυτοτικά μηδέν, όταν $0 < p < 1$. Επίσης στην ενότητα 10.1 αποδεικνύουμε ότι το φάσμα του αντίστοιχου στάσιμου προβλήματος είναι άνω φραγμένο.

Σημείωση

Σχετικά με τη Βιβλιογραφία που έχω παραθέσει στο τέλος (βιβλία και δημοσιεύσεις), στα περισσότερα από αυτά γίνονται παραπομπές μέσα στο κείμενο, στα αντίστοιχα σημεία. Εχω όμως συμπεριλάβει και ορισμένα βιβλία και δημοσιευμένα άρθρα χωρίς να παραπέμπω σε αυτά. Θεώρησα όμως σκόπιμο να υπάρχουν στη Βιβλιογραφία γιατί αφορούν γενικά θέματα Μαθηματικής Ανάλυσης, θεωρία μη γραμμικών μερικών διαφορικών εξισώσεων, τα οποία άπτονται της όλης διατριβής, με βοήθησαν στην κατανόηση των διαφόρων εννοιών και μπορούν να χρησιμεύσουν σε όποιον θελήσει να ασχοληθεί και να επεκτείνει τα θέματα που θίγω στη διατριβή αυτή.

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγικά. Ανάλυση των προβλημάτων.

1.1 Παρουσίαση του προβλήματος

Στη διατριβή αυτή μελετούμε το παρακάτω μη-τοπικό πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών με μη γραμμική διάχυση και μη γραμμικές συνοριακές συνθήκες (Filtration problem):

$$u_t = \Delta K(u) + \frac{\lambda f(u)}{\left(\int_\Omega f(u)dx\right)^p}, \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \tag{1.1α'}$$

$$\mathcal{B}(K(u)) := \frac{\partial K(u)}{\partial \hat{n}} + \beta(x)K(u) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0, \tag{1.1β'}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \geq 0, \quad x \in \Omega, \tag{1.1γ'}$$

όπου $0 < p < 1$, $\hat{n}$ είναι το με κατεύθυνση προς τα έξω μοναδιαίο κάθετο διανυσματικό πεδίο (παράγωγος κατά κατεύθυνση) και Ω είναι ένας φραγμένος τόπος (ανοικτό συνεκτικό σύνολο) του $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, με αρκούντως λείο σύνορο $\partial\Omega$. Θέτουμε ως αρχικές συνθήκες $u_0(x) \in C(\bar{\Omega})$, $u_0(x) \geq 0$ και $u_0(x)$ όχι ταυτοτικά μηδέν.

Επιπρόσθετα, για συνοριακές συνθήκες Dirichlet ή Robin, απαιτούμε, για λόγους συμβατότητας, η $K(u_0)$ ή η $u_0(x)$, ανάλογα με το πρόβλημα, να φθίνει κοντά στο σύνορο $\partial\Omega$ με κατάλληλο τρόπο, όπου αυτό είναι απαραίτητο ή είναι εφικτό (βλ. [111]). Η συνάρτηση u είναι μία κλασσική λύση για το πρόβλημα (1.1) εάν ικανοποιεί το πρόβλημα (1.1) και $u \in C^{2,1}_{x,t}\left(\Omega \times (0,T)\right) \cap C\left(\bar{\Omega} \times [0,T)\right)$, για κάποιο $T > 0$, (βλ. [98, 141]). Είναι επίσης πιθανό η παραβολικού τύπου εξίσωση να καταστεί εκφυλισμένη, ανάλογα με τις παραδοχές που έχουμε κάνει για τη μη γραμμική συνάρτηση διαχυσης $K(u)$ και για το μη γραμμικό όρο αντίδρασης $f(u)$.

Εισάγουμε συνοριακές συνθήκες της μορφής $\mathcal{B}(K(u))$ ή $\mathcal{B}(u)=0$. Αυτού του τύπου οι συνθήκες είναι απόρροια του νόμου Fourier για την διάχυση και την διατήρηση της μάζας, ή της θερμικής αγωγιμότητας και της διατήρησης της ενέργειας, για κλασσικές λύσεις, β $(0 \leq \beta = \beta(x) \leq \infty)$ είναι $C^{1+\alpha}(\partial\Omega)$, $\alpha = 0$, οποτεδήποτε είναι φραγμένη. $\beta \equiv 0$, $\beta \equiv \infty$, $0 < \beta < \infty$ σημαίνει Neumann, Dirichlet και Robin συνοριακές συνθήκες αντίστοιχα. Σημειώνουμε ότι δύναται να έχουμε συνοριακές συνθήκες μεικτού τύπου στο $\partial\Omega$, δηλαδή Dirichlet στο $\partial\Omega_1$, Neumann στο $\partial\Omega_2$, με $\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2 = \partial\Omega$. Οι παράμετροι λ, p είναι θετικές με $p \in (0,1)$.

Η συνάρτηση $f(s)$ και η μη αρνητική παράμετρος λ παριστάνουν κάποια φυσικά μεγέθη και μαζί με τον εκθέτη p εξαρτώνται από τη φύση του προβλήματος.

Σχετικά με τη μη τοπικότητα στον όρο πηγής.

Πολλά από τα κλασικά προβλήματα που μοντελοποιούν φυσικά φαινόμενα λαμβάνουν υπόψη τους τις παραμέτρους μεταβολής του φαινομένου μόνο τοπικά, αγνοώντας τυχόν εξάρτηση του, είτε από γειτονικές (χωρικές) περιοχές είτε από προγενέστερες ή μεταγενέστερες χρονικές στιγμές. Για παράδειγμα, η εξίσωση θερμότητας δίνει το ρυθμό μεταβολής της θερμοκρασίας σε κάποιο σημείο και για κάποια χρονική στιγμή σε σχέση με την τοπική χωρική εξάρτηση της θερμοκρασίας.

Αντίθετα, στα μη-τοπικά προβλήματα, οι ποσότητες μεταβάλλονται συναρτήσει των τιμών τους σε ορισμένα ή σε όλα τα (χωρικά) σημεία εξέλιξης του φαινομένου, ή σε προγενέστερους χρόνους, γεγονός το οποίο οφείλεται, είτε σε αλληλεπίδραση εξ΄ αποστάσεως είτε στην επίδραση κάποιας άλλης εξωγενούς φυσικής παραμέτρου.

Οσον αφορά το μη τοπικό όρο της αντίδρασης του προβλήματος (1.1), αυτός εμφανίζεται:

- κατά τη μοντελοποίηση φαινομένων Ωμικού τύπου θέρμανσης (βλ. [3, 9, 46, 47, 94, 95, 134]).
- στη διάτμηση μετάλλων υποκειμένων σε παραμορφώσεις λόγω εφαρμογής υψηλών

τάσεων (βλ. [14, 15, 16]).

- στη θεωρία βαρυτικής ισορροπίας πολυτροπικών αστέρων (βλ. [87]).

- στην έρευνα της πλήρους τυρβώδους ροής, χρησιμοποιώντας αναλλοίωτα μέτρα στην εξίσωση Euler [25].

- στη μοντελοποίηση της ανάφλεξης συμπιεστών αερίων (βλ. [10, 117]).

- στη μοντελοποίηση της συσσωμάτωσης των κυττάρων εξ΄ αιτίας αλληλεπιδράσεων με κάποια χημική ουσία (chemotaxis), (βλ. [146]).

- στην εξάπλωση ενός πληθυσμού βακτηριδίων (βλ. [30]), κλπ.

Για περισσότερη βιβλιογραφία σχετικά με τις εφαρμογές των μη-τοπικών προβλημάτων μπορεί κανείς να δει την εργασία [127].

Στις απλούστερες των περιπτώσεων, όταν η μη-τοπικότητα εμφανίζεται στο μη γραμμικό όρο πηγής, τότε οι (μη γραμμικές) μη-τοπικές εξισώσεις διατηρούν τον ελλειπτικό, παραβολικό ή υπερβολικό χαρακτήρα τους. Ακόμη όμως και σ΄ αυτές τις περιπτώσεις, τα χαρακτηριστικά της συμπεριφοράς των λύσεων αλλάζουν εντελώς λόγω της ύπαρξης του μη-τοπικού όρου.

Έπίσης αρκετά συχνά, μαθηματικά εργαλεία όπως η αρχή μεγίστου και οι τεχνικές σύγκρισης παύουν να ισχύουν (βλ. [134]).Ένα κοινό χαρακτηριστικό, για πολλά χρονοεξαρτώμενα μη-τοπικά προβλήματα, είναι ότι έχουν το ίδιο στάσιμο πρόβλημα.

Ένα λογικό σημείο αφετηρίας για τη μελέτη των προβλημάτων αυτών, είναι να καταλάβει κανείς τη συμπεριφορά των μη-τοπικών (στάσιμων) ελλειπτικών προβλημάτων και κατόπιν να πάει στις αντίστοιχες μη-τοπικές χρονοεξαρτώμενες (εξελικτικές) εξισώσεις παραβολικού ή υπερβολικού τύπου. Ώστόσο, για περισσότερο πολύπλοκους μη-τοπικούς όρους, γίνεται πολύ δύσκολη ακόμη και η ταξινόμηση των ιδίων των εξισώσεων.

Στον τομέα των φυσικών επιστημών, θεωρίες που σχετίζονται με την αλλαγή φάσης της υλικής κατάστασης, αποτελούνται από όρους διαφόρων διατεταγμένων παραμέτρων, οι οποίοι σχετίζονται με την πυκνότητα, τη συγκέντρωση ή την ατομική διάταξη του υλικού.

Παλαιότερες θεωρίες, όπως αυτές του Van der Waals, των Ginzburg-Landau και των Cahn-Hilliard, περιελάμβαναν την επίδραση του ρυθμού μεταβολής των θερμοδυναμικών ποσοτήτων ως προς κάθε μία από τις διατεταγμένες παραμέτρους και συνεπώς οι αντίστοιχες εξισώσεις αποτέλεσαν τα πρωταρχικά μοντέλα με μη-τοπική επίδραση.

Τα τελευταία χρόνια, εξετάζονται πολλά από τα ήδη υπάρχοντα συμβατικά τοπικά μοντέλα και κατασκευάζονται νέα πιο ακριβή (καλλίτερη προσέγγιση) μη-τοπικά, τα οποία μόνο στις πιο απλές περιπτώσεις απλοποιούνται σε τοπικά.

1.2 Σταδιακή εξέλιξη του μαθηματικού μοντέλου.

Για τη βαθύτερη κατανόηση του προβλήματος (1.1), πρέπει να παραθέσουμε και να αναλύσουμε τις απλοποιημένες αρχικές μορφές του, που θα αναδείξουν το ρόλο του κάθε όρου που συμμετέχει στο πρόβλημα (1.1). Ξαναγράφουμε το (1.1):

$$\begin{aligned} u_t = \Delta K(u) + \frac{\lambda f(u)}{\left(\int_\Omega f(u)dx\right)^p}, \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \\ B(K(u)) := \frac{\partial K(u)}{\partial \hat{n}} + \beta(x)K(u) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x) \geq 0, \quad x \in \Omega, \end{aligned}$$

A1) Το πιο απλό πρόβλημα αφορά την **απλή εξίσωση διάχυσης**. Για ευκολία στην επεξήγηση της εξέλιξης του μοντέλου, θα θεωρήσουμε στην αρχή ότι έχουμε συνοριακές συνθήκες Dirichlet και αυστηρά θετικές αρχικές συνθήκες:

$$\begin{aligned} & u_t = \Delta u, \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \\ & u = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0, \\ & u(x,0) = u_0(x) > 0, \quad x \in \Omega. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Το πρόβλημα αυτό δεν εμφανίζει όρο ανάδρασης, η λύση τείνει στο μηδέν καθώς ο χρόνος τείνει στο άπειρο και έχει αντιμετωπισθεί πλήρως. Εχουμε κλασσική λύση, (Βλ. [9, 10, 16], κλπ.

B1) Ύπαρξη **όρου πηγής** (ή απόσβεσης) στο δεύτερο μέλος:

$$
\begin{aligned}
&u_t = \Delta u + \lambda f(u), \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \\
&u = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0, \\
&u(x,0) = u_0(x) > 0, \quad x \in \Omega.
\end{aligned} \tag{1.3}
$$

Το πρόβλημα αυτό έχει αντιμετωπισθεί εκτενώς. (Βλ. [12, 23, 24, 119, 123, 147] κλπ. Έχουμε κλασσική τοπική λύση. Ανάλογα με τη μη γραμμικότητα της συνάρτησης $f(s)$ και την τιμή της θετικής παραμέτρου λ, μπορεί να έχουμε ολική λύση, ολική μη φραγμένη λύση (δηλαδή υπάρχει μία τουλάχιστον ακολουθία $(x_n, t_n)_{n\in N}$ και ένα τουλάχιστον x^*, με $u(x_n, t_n) \to \infty$ καθώς $(x_n, t_n) \to (x^*, t^*), n \to \infty$, όπου $t^* = \infty$, ή, στην περίπτωση ολικού απειρισμού $u(x,t) \to \infty$, $t_n \to \infty$ για κάθε x, είτε έκρηξη της λύσης σε πεπερασμένο χρόνο ($t^* < \infty$). Για τα περί εκρήξεως της λύσης, θα αναφερθούμε εκτενώς σε επόμενο κεφάλαιο.

Γ1) Ύπαρξη **μη-τοπικότητας στον όρο πηγής** (ή απόσβεσης) στο δεύτερο μέλος:

$$
\begin{aligned}
&u_t = \Delta u + \frac{\lambda f(u)}{\left(\int_\Omega f(u)dx\right)^p}, \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \\
&u = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0, \\
&u(x,0) = u_0(x) > 0, \quad x \in \Omega.
\end{aligned} \tag{1.4}
$$

Το πρόβλημα αυτό έχει αντιμετωπισθεί εν μέρει. Εχουμε κλασσική τοπική λύση, και ανάλογα με τη μη γραμμικότητα της συνάρτησης $f(s)$, μπορεί να έχουμε ολική λύση, ολική μη φραγμένη λύση, ή έκρηξη σε πεπερασμένο χρόνο. (Βλ. [73, 97, 132], καθώς επίσης και τις δημοσιεύσεις [74, 76, 78, 79, 103, 104, 106]).

Η περίπτωση όπου $p < 0$ είναι σχετικά πιο απλή, αφού είναι πιο εύκολο να οδηγηθούμε σε κάποια μονοτονία του όρου αντίδρασης (πηγή ή απόσβεση) (βλ. [119]. Εάν $p > 0$, το πρόβλημα δυσκολεύει αφού, πέραν της μη εξασφάλισης κάποιας μονοτονίας, δεν ισχύουν οι κλασσικές απ' ευθείας αρχές σύγκρισης όταν η $f(s)$ είναι γνησίως αύξουσα, (βλ. [39, 134]).

Όλα τα παραπάνω προβλήματα, πολύ γνωστά στη βιβλιογραφία, αφορούν την περίπτωση της **γραμμικής διάχυσης**. Γνωρίζουμε όμως πολύ καλά ότι σε πολλά φυσικά φαινόμενα η διάχυση είναι μη γραμμική. Υπενθυμίζουμε ότι στη γραμμική διάχυση το μαθηματικό μοντέλο οδηγεί σε διαταραχές που μεταδίδονται με άπειρη ταχύτητα, (μη αποδεκτό φυσικό φαινόμενο, που δίνει όμως καλή προσέγγιση, γι' αυτό και το χρησιμοποιούμε). Τα ανωτέρω προβλήματα για την περίπτωση της μη γραμμικής διάχυσης, (στην περίπτωση που εξετάζουμε, η μη γραμμική διάχυση συνίσταται από την συνάρτηση $K(u)$), διαμορφώνονται ως εξής:

A2) **Απλή μη γραμμική** εξίσωση διάχυσης (Διήθηση):

$$\begin{aligned} &u_t = \Delta K(u), \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \\ &u = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0, \\ &u(x,0) = u_0(x) > 0, \quad x \in \Omega. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Το πρόβλημα αυτό δεν εμφανίζει όρο ανάδρασης, η λύση τείνει στο μηδέν καθώς ο χρόνος τείνει στο άπειρο και έχει αντιμετωπισθεί πλήρως. Εχουμε κλασσική λύση (βλ. [123, 141]).

B2) Ύπαρξη **όρου πηγής** (ή απόσβεσης) στο δεύτερο μέλος:

$$\begin{aligned} &u_t = \Delta K(u) + \lambda f(u), \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \\ &u = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0, \\ &u(x,0) = u_0(x) > 0, \quad x \in \Omega. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Το πρόβλημα αυτό έχει αντιμετωπισθεί εκτενώς. Εχουμε κλασσική τοπική λύση. Ανάλογα με τη σχέση μεταξύ των δύο μη γραμμικών συναρτήσεων $K(s)$ και $f(s)$ καθώς και την τιμή της θετικής παραμέτρου λ, μπορεί να έχουμε ολική λύση, ολική μη φραγμένη λύση ή έκρηξη της λύσης σε πεπερασμένο χρόνο.

Γ2) Ύπαρξη **μη-τοπικότητας στον όρο πηγής** (ή απόσβεσης) στο δεύτερο μέλος:

$$\begin{aligned} &u_t = \Delta K(u) + \frac{\lambda f(u)}{\left(\int_\Omega f(u)dx\right)^p}, \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \\ &u = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0, \\ &u(x,0) = u_0(x) > 0, \quad x \in \Omega. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Το πρόβλημα αυτό έχει αντιμετωπισθεί εν μέρει. Έχουμε κλασσική τοπική λύση και ανάλογα με τη σχέση μεταξύ των δύο μη γραμμικών συναρτήσεων $K(s)$ και $f(s)$ καθώς και την τιμή της θετικής παραμέτρου λ, μπορεί να έχουμε ολική λύση, ολική μη φραγμένη λύση ή έκρηξη της λύσης σε πεπερασμένο χρόνο. Όπως και στη γραμμική διάχυση έτσι και εδώ δεν ισχύουν οι κλασσικές αρχές σύγκρισης όταν η συνάρτηση f είναι αύξουσα, και εάν $p > 0$, το πρόβλημα δυσκολεύει, για τους ίδιους λόγους. (Βλ. [97, 98]).

Το παραπάνω πρόβλημα (1.7) είναι προφανώς και το πιο δύσκολο. Το πρόβλημα (1.1) που μελετάμε στην παρούσα διατριβή είναι αυτής της μορφής, πλην όμως κατά πολύ πιο επιβαρυμένο με επιπλέον δυσκολίες που από μόνες τους το κατατάσσουν σε τελείως διαφορετική κατηγορία. Οι επιπλέον δυσκολίες οφείλονται σε πραγματικές συνθήκες που υπεισέρχονται κατά κόρο στα φυσικά φαινόμενα και προσεγγίζουν έτι περαιτέρω τη φυσική πραγματικότητα.

Θα καταγράψουμε συνοπτικά μία-μία τις επιπλέον δυσκολίες, αιτιολογώντας συγχρόνως και την αναγκαιότητα συνεκτίμησης αυτών, στη συνέχεια δε, θα προβούμε στη διαμόρφωση του τελικού προς μελέτη μοντέλου (1.1), εξετάζοντας διεξοδικά από μαθηματικής πλευράς τα νέα στοιχεία που θα προκύψουν.

1) **Αρχικές συνθήκες** $u_0(x) \geq 0$ και συγκεκριμένα **με συμπαγή φορέα** εντός του πεδίου Ω.

Σε όλες τις προηγούμενες περιπτώσεις, θεωρήσαμε ότι οι αρχικές συνθήκες είναι αυστηρά θετικές στο πεδίο Ω, περιοριστική υπόθεση που είχε ως αποτέλεσμα να μας οδηγήσει σε κλασσικές λύσεις, απλοποιώντας σημαντικά τη μελέτη του προβλήματος. Είναι όμως προφανές ότι στην πράξη θα έχουμε και αρχικές συνθήκες που δεν θα είναι θετικές σε όλο το πεδίο, αλλά μόνο σε ένα συμπαγές υποσύνολο αυτού. Αυτό συμβαίνει σε όλες τις περιπτώσεις που έχουμε διάχυση (μετάδοση) θερμότητας μέσω ψυχρού μέσου, διάχυση ενός ρευστού μέσω άλλου, στην εξάπλωση ενός πληθυσμού βακτηριδίων σε γειτονικές περιοχές μη μολυσμένες, κλπ.
Η αναγκαιότητα θεώρησης αρχικών συνθηκών με συμπαγή φορέα εντός του Ω είναι εκ των ων ουκ άνευ. Από μαθηματικής πλευράς, το γεγονός αυτό αλλάζει άρδην όλα τα πλάνα και τις χρησιμοποιούμενες μεθόδους επίλυσης.

2) **Εκφυλισμός του παραβολικού τελεστή** για τις τιμές $u = 0$ όταν $K'(0) = 0$. Εάν $K'(0) = 0$, ο παραβολικός τελεστής $\Delta K(u) = K^{''}(u)\,|\nabla u|^2 + K^{'}(u)\Delta u$ καθίσταται εκφυλισμένος στις περιπτώσεις όπου $u = 0$, (βλ. [35, 38, 36, 49, 123, 148]).

3) **Μη εξαναγκασμένη αντίδραση** (unforced case), δηλαδή $f(0) = 0$. Η συνθήκη αυτή είναι πέρα για πέρα κοντά στην πραγματικότητα, καθόσον σημαίνει ότι σε "ψυχρό" μέσο δεν θα έχουμε έκλυση θερμότητας, σε υποσύνολα με μηδενική συγκέντρωση κάποιας ουσίας, δεν θα εμφανίζονται "εκ του μηδενός" μόρια της ουσίας αυτής, σε περιοχές που δεν έχουν προσβληθεί οι ιστοί, αυτοί δεν θα προσβάλλονται απότομα "ως δια μαγείας", κλπ. Το $f(0) = 0$ αφήνει το φαινόμενο **να εξελιχθεί αποκλειστικά μέσω της διάχυσης**, γεγονός που θα δημιουργήσει, όπως θα αναπτυχθεί αναλυτικά στη συνέχεια, το χρονικά επεκτεινόμενο σύνορο του φορέα της λύσης μας, φαινόμενο άκρως σημαντικό από φυσικής πλευράς, και πολύ ενδιαφέρον από μαθηματικής (βλ. [19, 27, 84, 91].

4) $f(s)$ **αύξουσα συνάρτηση**. Σε πολλά φυσικά φαινόμενα η αντίδραση αυξάνει όσο αυξάνει το μέγεθος - μεταβλητή. Από μαθηματικής πλευράς τα πράγματα δυσκολεύουν δραματικά αφού, λόγω της ύπαρξης του μη τοπικού όρου, δεν ισχύουν οι κλασσικές αρχές σύγκρισης, ένα βασικό εργαλείο στη μελέτη των παραβολικών προβλημάτων, γραμμικών και μη γραμμικών, (βλ. [134]).

Καθίσταται προφανές ότι στο εξεταζόμενο πρόβλημα (1.1) έχουμε λάβει υπόψη τις πλέον δυσμενείς συνθήκες, που όμως προέκυψαν από φυσικές αναγκαιότητες. Γι' αυτό και καθιστούν ενδιαφέρουσα τη μελέτη του από μαθηματικής πλευράς αλλά κυρίως από την πλευρά των εφαρμογών.

Πέραν των ανωτέρω συνθηκών και επειδή σκοπός της παρούσας είναι κυρίως η μελέτη των περιπτώσεων που έχουμε έκρηξη της λύσης σε πεπερασμένο χρόνο, θα πρέπει να εισάγουμε και τις παρακάτω συνθήκες για την συνάρτηση $f(s)$, ώστε να μην αποκλεισθεί το ενδεχόμενο της έκρηξης:

$$\int_b^\infty \frac{ds}{f^{1-p}(s)} < \infty \text{ για κάποιο } b \geq 0 \text{ και } f^{1-p}(s) \text{ κυρτή.} \tag{1.8}$$

Τελικό Μαθηματικό μοντέλο.

Ως εκ τούτου, το μαθηματικό μας μοντέλο διαμορφώνεται ως εξής:

$$u_t = \Delta K(u) + \frac{\lambda f(u)}{\left(\int_\Omega f(u)dx\right)^p}, \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \tag{1.9α′}$$

$$u(x,t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0, \tag{1.9β′}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \geq 0, \quad x \in \Omega, \tag{1.9γ′}$$

όπου οι αρχικές συνθήκες είναι μη ταυτοτικά μηδέν και έχουν συμπαγή φορέα εντός του πεδίου Ω. Επίσης, για τις μη γραμμικές συναρτήσεις $K(s)$ και $f(s)$ δεχόμαστε:

$$K(s),\ K'(s),\ K''(s) > 0 \text{ για } s > 0 \text{ και } K(0) > 0,\ K'(0) = 0,\ K''(0) \geq 0, \tag{1.10α′}$$

$$f(s),\ f'(s),\ f''(s) > 0 \text{ για } s > 0 \text{ και } f(0) = 0,\ f'(0) \geq 0, \tag{1.10β′}$$

$$\int_b^\infty \frac{ds}{f^{1-p}(s)} < \infty \text{ για κάποιο } b > 0. \tag{1.10γ′}$$

Στο σημείο αυτό πρέπει να αναφέρουμε μία ειδική περίπτωση του προβλήματος της διήθησης και συγκεκριμένα το πρόβλημα της διάχυσης μέσα σε πορώδη μέσα (porous medium), που από μόνο του έχει γίνει αντικείμενο επισταμένης έρευνας, καθόσον συναντάται πολύ συχνά σε φυσικά φαινόμενα (βλ. [6, 32, 89, 136, 137, 139, 141]).

1.3 Πορώδη μέσα (porous media)

Εάν $K(u) = u^m$, $m > 1$, $m \in \mathbb{R}$, τότε η (1.1) καθίσταται το μη-τοπικό πρόβλημα Πορώδους Μέσου (ΠΜ), με αργή διάχυση (slow diffusion).
Σημείωση. Εάν $m < 1$ έχουμε την περίπτωση της γρήγορης διάχυσης (fast diffusion), σημαντική περίπτωση από φυσικής πλευράς με ευρύ ερευνητικό πεδίο, που όμως δεν θα ασχοληθούμε στη παρούσα εργασία.

$$u_t = \Delta u^m + \frac{\lambda f(u)}{\left(\int_\Omega f(u)dx\right)^p}, \quad x \in \Omega,\ t > 0, \tag{1.11α′}$$

$$\mathcal{B}(u) = \frac{\partial u^m}{\partial \hat{n}} + \beta(x) u^m = 0, \quad x \in \partial\Omega,\ t > 0, \tag{1.11β′}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \geq 0, \quad x \in \Omega. \tag{1.11γ′}$$

Εάν $u_0(x) \geq 0$ αλλά όχι ταυτοτικά μηδέν στο Ω, δηλαδή ή $u_0(x)$ έχει συμπαγή φορέα ή $u(x,t) = 0$ στο $\partial\Omega$, αυτό συνεπάγεται μία εκφυλισμένη, παραβολικού τύπου, εξίσωση (αυτό οφείλεται στην απώλεια της ομοιόμορφης παραβολικότητας του προβλήματος, (βλ. [123]).

Το βασικό κίνητρό μας να εξετάσουμε την (1.11α′) αναφορικά με τον όρο αγωγιμότητας Δu^m (ή $\nabla \cdot u^{m-1} \nabla u$), προέρχεται από το [135]. Στο [135], μελετάται η εξίσωση θερμότητας του πλάσματος $u_t = (u^3 u_x)_x + \lambda f(u) / \left(\int_{-1}^{1} f(u) dx \right)^2$ για $f(s)$ θετική και φθίνουσα. Συγκεκριμένα, εισάγεται ο όρος αγωγιμότητας $(u^4)_{xx}$ ή $(u^3 u_x)_x$, όπου ο όρος u^3 αφορά τη μεταφορά θερμότητας προερχόμενη κυρίως από την θερμική ακτινοβολία, ακολουθώντας το νόμο των Stefan-Boltzman για την εκπομπή της θερμικής ακτινοβολίας. Στην πραγματικότητα, η εξίσωση (1.11α′) είναι μία γενίκευση της εξίσωσης θερμότητας του πλάσματος. Το πρόβλημα (1.1) μπορεί να θεωρηθεί σαν μία γενίκευση του (1.11).

Ακολουθεί εμπεριστατωμένη ανάλυση όσων αναφέρονται στο προηγούμενο κεφάλαιο.

1.4 Εκφυλισμός του παραβολικού τελεστή για τις τιμές $u = 0$.

Ας εξετάσουμε τη διαφορική εξίσωση (1.1α′) στη γενική της μορφή, δηλαδή για σχεδόν γραμμικές παραβολικές εξισώσεις με λείους συντελεστές.

$$u_t = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(u, \nabla u, x, t) u_{x_i x_j} + a(u, \nabla u, x, t) \tag{1.12}$$

Όπως αναφέρεται εκτενώς στη βιβλιογραφία, (βλ. [123]), η παραπάνω εξίσωση είτε σε προβλήματα συνοριακών τιμών (με λείες συνοριακές συνθήκες και εφαρμογή της συνθήκης συμβατότητας στο σύνορο) είτε σε προβλήματα Cauchy, διαθέτει τοπικά κλασσικές λύσεις, υπό την προϋπόθεση να είναι ομοιόμορφα παραβολική. Αυτό σημαίνει ότι:

$$\nu(p) \|r\|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(p, q, x, t) r_i r_j \leq \mu(p) \|r\|^2, \tag{1.13}$$

για αυθαίρετο $t \in [0,T)$, $x \in \bar{\Omega}$, $p \geq 0$, $q, r \in \mathbb{R}^N$, όπου οι συνεχείς συναρτήσεις $\nu(p)$, $\mu(p)$ είναι αυστηρά θετικές. Η συνθήκη (1.13) σημαίνει ότι ο δεύτερης τάξης ελλειπτικός τελεστής στη (1.12) είναι μη εκφυλισμένος (non-degenerate) και ότι ο πίνακας $\|a_{ij}\|$ είναι ορισμένος θετικά.

Επίσης, η τοπική επιλυσιμότητα έχει αποδειχθεί για εξισώσεις γενικότερης μορφής όπως:

$$u_t = F(u, \nabla u, \Delta u, x, t),$$

(βλ. [123]). Στην περίπτωση αυτή, η συνθήκη ομοιόμορφης παραβολικότητας παίρνει τη μορφή:

$$\nu(p) \leq \frac{\partial F(p,q,r,x,t)}{\partial r} \leq \mu(p), \tag{1.14}$$

όπου $p = u \in \mathbb{R}^+$, $q = \nabla u \in \mathbb{R}^N$, $r = \Delta u \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^N$, $t \in \mathbb{R}^+$.

Έστω τώρα το τοπικό πρόβλημα,

$$u_t - \Delta K(u) = f(u), \tag{1.15α$'$}$$

$$u_0(x) \geq 0,\ x \in \Omega,\ u_0 \in C(\Omega),\ \sup u_0 < \infty, \tag{1.15β$'$}$$

$$u(x,t) = 0,\ x \in \partial\Omega,\ t \in (0,T). \tag{1.15γ$'$}$$

Για το πρόβλημα αυτό, η συνθήκη ομοιόμορφης παραβολικότητας έχει την εξης πολύ απλή μορφή, όπως προκύπτει από την παρακάτω πρόταση, (βλ. [123]):

Πρόταση 1. *Έστω ότι οι συναρτήσεις $K(u)$, $f(u)$ είναι αρκούντως λείες για $u \geq 0$, και $f(0) = 0$. Εάν ισχύει η συνθήκη,*

$$K'(u) \geq \varepsilon_0 = const > 0,\ \text{για}\ u > 0, \tag{1.16}$$

τότε υπάρχει τοπική κλασσική λύση για το ανωτέρω πρόβλημα. Επιπλέον, εάν u_0 όχι ταυτοτικά ίση με το 0 στο $\bar{\Omega}$, τότε $u(x,t) > 0$ στο Ω για όλα τα αποδεκτά $t > 0$.

Επομένως, μία μη αρνητική λύση μιάς ομοιόμορφα παραβολικής εξίσωσης, είναι αυστηρά θετική οπουδήποτε στο πεδίο ορισμού της. Με άλλα λόγια, στα φαινόμενα μετάδοσης θερμότητας που περιγράφονται από τέτοιες εξισώσεις (ομοιόμορφα παραβολικές), οι διαταραχές μεταδίδονται με "άπειρη ταχύτητα". Ακόμα και στο πρόβλημα Cauchy, εάν η αρχική συνάρτηση u_0 έχει συμπαγή φορέα, ακόμα και αν δεν είναι καθόλου διαφορίσιμη, η τοπική λύση θα είναι κλασσική και αυστηρά θετική στο $\mathbb{R}^N$ για όλους τους χρόνους που αυτή ορίζεται.

Έστω τώρα ότι δεν ισχύει η συνθήκη (1.16). Τότε για τα προβλήματα συνοριακών συνθηκών όπου η αρχική συνάρτηση u_0 έχει συμπαγή φορέα εντός του πεδίου Ω, αλλά και για προβλήματα Cauchy, ενδέχεται και η λύση να έχει συμπαγή φορέα για κάθε $t > 0$. Ακόμη περισσότερο, ενδέχεται να μην ορίζονται οι πρώτες παράγωγοι, χρονικές και χωρικές στα σημεία που η λύση γίνεται μηδέν. Επομένως δεν μπορούμε να μιλάμε για κλασσικές λύσεις, και θα πρέπει να στραφούμε στην εύρεση ασθενών γενικευμένων λύσεων, (βλ. [123]).

Σχόλιο 2. *Στα συνοριακά προβλήματα που εξετάζουμε, θα θεωρήσουμε κυρίως συνθήκες Dirichlet. Αυτό είναι λογικό γιατί μας ενδιαφέρουν οι περιπτώσεις όπου η αρχική συνάρτηση $u_0(x)$ έχει συμπαγή φορέα εντός του Ω, οπότε η συνθήκη στο σύνορο θα είναι κατ΄ αρχάς $u = 0$. Άλλωστε οι συνθήκες Robin στο σύνορο, που δεν εξαρτώνται από το χρόνο, δεν διαφοροποιούν την ουσία του προβλήματος. Μόνο συνθήκες Robin της μορφής $u(x,t) = u_1(x,t)$, $x \in \partial\Omega$, όπου η συνάρτηση u_1 είναι υπεργραμμική ως προς το χρόνο αλλάζουν άρδην τη μορφή της λύσης. Αυτές όμως οι περιπτώσεις αφορούν κυρίως τις περιπτώσεις έκρηξης στο σύνορο, που δεν είναι στο αντικείμενο της παρούσας εργασίας. Οσον αφορά τις συνοριακές συνθήκες Neumann, αυτές κατά κανόνα απλοποιούν το πρόβλημα.*

1.5 Γενικευμένες λύσεις.

Θεωρούμε πάλι το τοπικό πρόβλημα. Αναφερόμαστε σε αυτό και λόγω απλότητας στην μορφή, αλλά κυρίως διότι, όσα αναφέρονται στο κεφάλαιο αυτό για το τοπικό πρόβλημα, ισχύουν και για το μη-τοπικό.

$$u_t - \Delta K(u) = f(u),\ x \in \Omega,\ t \in (0,T), \tag{1.17α'}$$

$$u_0(x) \geq 0,\ x \in \Omega, \tag{1.17β'}$$

$$u(x,t) = 0,\ x \in \partial\Omega,\ t \in (0,T). \tag{1.17γ'}$$

Με δεδομένο ότι $u_0 \in C(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, το ερώτημα είναι να βρεθεί μία τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση $u = u(x,t)$ ορισμένη στο $\Omega \times (0,T)$ που να επιλύει τις ανωτέρω εξισώσεις υπό κάποια ασθενή μορφή που θα ορίσουμε επακριβώς κατωτέρω. Επιπλέον, η λύση θα πρέπει να ανήκει σε τέτοιο συναρτησιακό χώρο που να εξασφαλίζεται η μοναδικότητα και η συνεχής εξάρτηση από τα δεδομένα.

Ασθενείς λύσεις. Πρώτα θα εισάγουμε την έννοια της ασθενούς λύσης, χωρίς να αναφερθούμε στις αρχικές και συνοριακές συνθήκες.
Μία ασθενής λύση του προβλήματος (1.17) είναι μία τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση $u \in C((0,T); L_1(\Omega))$, τέτοια ώστε:
(ι) $K(u) \in C((0,T); W^{1,1}_{loc}(\Omega))$,
(ιι) η ταυτότητα, για $u = u(x,t)$ και $\eta = \eta(x,t)$

$$\int_0^T \int_\Omega (\nabla K(u) \cdot \nabla \eta - u\eta_t) dxdt = \int_0^T \int_\Omega f(u)\eta dxdt, \tag{1.18}$$

να αληθεύει για κάθε δοκιμαστική συνάρτηση $\eta \in C^1_c(\Omega \times (0,T))$, (βλ. [141], σελ.85).

Πολύ ασθενείς λύσεις, (χωρίς να αναφερθούμε στις αρχικές και συνοριακές συνθήκες.) Μία "πολύ ασθενής λύση" του προβλήματος (1.17) είναι μία τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση $u \in C((0,T); L_1(\Omega))$, τέτοια ώστε:
(ι) $K(u) \in C((0,T); L_1(\Omega))$,
(ιι) η ταυτότητα

$$\int_0^T \int_\Omega (K(u)\Delta\eta + u\eta_t + f(u)\eta) dxdt = 0, \tag{1.19}$$

να αληθεύει για κάθε δοκιμαστική συνάρτηση $\eta \in C^{2,1}_c(\Omega \times (0,T))$.

Ασθενείς, πολύ ασθενείς λύσεις.

Αφού λόγω της εκφυλισμένης παραβολικότητας αποκλείσαμε την περίπτωση των κλασσικών λύσεων, το ερώτημα πλέον που εύλογα τίθεται είναι να εστιάσουμε την προσοχή μας στις ασθενείς ή στις πολύ ασθενείς λύσεις. Εάν $u_0(x) > 0,\ x \in \Omega$, δεν υπάρχει θέμα καθόσον οι λύσεις μας θα είναι κλασσικές.

Στην εργασία αυτή μας ενδιαφέρει η περίπτωση όπου οι αρχικές συνθήκες έχουν φορέα ένα συμπαγές υποσύνολο του Ω. Όπως θα παρουσιάσουμε αναλυτικά σε επόμενο κεφάλαιο, η λύση μας θα έχει και αυτή συμπαγή φορέα, που θα επεκτείνεται χρονικά με πεπερασμένη ταχύτητα. Πάνω στο σύνορο του φορέα της λύσης, οι πρώτης τάξης χωρικές παράγωγοι δεν ορίζονται. Παρουσιάζεται δηλαδή ένα “jump discontinuity” στις πρώτες χωρικές και χρονικές παραγώγους.

Εάν επιλέξουμε να ασχοληθούμε με ασθενείς λύσεις, ο εμφανιζόμενος στην εξίσωση όρος $\nabla K(u)$ θα πρέπει να ορίζεται παντού, άρα και στο επεκτεινόμενο σύνορο. Ας τον αναλύσουμε:

$$\nabla K(u) = K^{'}(u)\nabla u. \tag{1.20}$$

Πάνω στο σύνορο του φορέα της λύσης θα έχουμε $u = 0$ οπότε $K^{'}(u) = 0$ και σύμφωνα με τα προηγούμενα, ο όρος ∇u δεν ορίζεται. Ο προβληματισμός μας θα σταματούσε εδώ και θα απορρίπταμε εκ των προτέρων την ιδέα των ασθενών λύσεων, εάν δεν υπήρχε ο φυσικός νόμος του Darcy που αναφέρει σαφώς ότι ακόμη και στο μετακινούμενο σύνορο η ροή (θερμική, συγκέντρωση κλπ) είναι συνεχής.

Από τις εξισώσεις παραγωγής του μαθηματικού μοντέλου, η θερμική ροή είναι ακριβώς το γινόμενο $-K^{'}(u)\nabla u$. Δηλαδή παρότι το ∇u δεν ορίζεται, το γινόμενο $K^{'}(u)\nabla u$ ορίζεται και είναι συνεχές. Αυτό σημαίνει ότι, εάν επιλέξουμε τις ασθενείς λύσεις, θα πρέπει είτε να φροντίζουμε να μη διασπάται το γινόμενο αυτό, γεγονός που δυσχεραίνει πολύ τις πράξεις, είτε να επιλέξουμε τις ενεργειακές λύσεις, π.χ. στο χώρο $W^{1,1}_{loc}(\Omega)$. Στην εργασία όμως αυτή ενδιαφερόμαστε για τους λιγότερους δυνατούς περιορισμούς. Γι΄ αυτό και επιθυμούμε ο συναρτησιακός μας χώρος να είναι ο $L_1(\Omega)$. Για το λόγο αυτό επιλέγουμε την έννοια των **πολύ ασθενών λύσεων**.

Ας εκφράσουμε λοιπόν την εξίσωσή (1.17) σε **πολύ ασθενή μορφή**, συμεριλαμβάνοντας και τις αρχικές συνθήκες (οι συνοριακές συνθήκες είναι Dirichlet δηλαδή μηδέν και επομένως δεν υπεισέρχονται στην εξίσωση). Η διατύπωση είναι η εξης:

Η παρακάτω εξίσωση, για $u = u(x,t)$,

$$\int_0^T \int_\Omega (K(u)\Delta\eta + u\eta_t + f(u)\eta)dxdt + \int_\Omega u_0(x)\eta(x,0)dx = 0, \tag{1.21}$$

θα πρέπει να αληθεύει για κάθε συνάρτηση $\eta = \eta(x,t) \in C^{2,1}\left(\bar{\Omega} \times [0,T]\right)$ που μηδενίζεται στο $\partial\Omega \times [0,T]$ και για $t = T$.

Οι πολύ ασθενείς λύσεις θα είναι το γενικό πλαίσιο μέσα στο οποίο θα κινηθούμε. Παρόλα αυτά θα υπάρχουν και κάποιες περιπτώσεις που θα δουλεύουμε με κλασικές λύσεις, όταν η μορφή του προβλήματος το επιτρέπει ή δεν το περιορίζει. Επίσης θα εξετάσουμε και κάποιες περιπτώσεις όπου έχουμε συνοριακές συνθήκες Robin ή Neumann.

1.6 Αρχικές συνθήκες με συμπαγή φορέα εντός του Ω - Λύση με επεκτεινόμενο χρονικά φορέα.

Ας εξετάσουμε τώρα την εξίσωση (1.17) καταργώντας την πηγή $f(u)$, (όρος αντίδρασης):

$$u_t = \Delta(K(u)) = \nabla \cdot (K^{'}(u)\nabla u), \quad t > 0, \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^N. \tag{1.22}$$

Η εξίσωση αυτή μπορεί να γραφεί και ως,

$$u_t = K^{'}(u)\Delta u + K^{''}(u) \left|\nabla u\right|^2. \tag{1.23}$$

Στα σημεία εκείνα όπου $K^{'}(0) = 0$ αλλά $|\nabla u| \neq 0$, η εξίσωση εκφυλίζεται σε πρώτης τάξης και η λύση οδεύει κατά μήκος χαρακτηριστικών καμπυλών (eikonal, Hamilton-Jacobi εξισώσεις), (βλ. [141], σελ. 3). Αυτό σημαίνει ότι εάν τα αρχικά μας δεδομένα είναι μία συνάρτηση με συμπαγή φορέα στο πεδίο Ω, τότε ο φορέας της λύσης μεταβάλλεται με την παρέλευση του χρόνου, σχηματίζοντας ένα σύνορο (interface) το οποίο μεταβάλλεται με το χρόνο.

Επισημαίνουμε ότι η περίπτωση $K^{''}(0) = 0$ δεν επηρεάζει την κατάσταση. Αυτό δεν προκύπτει από την παραπάνω σχέση, προκύπτει όμως σαφώς εάν εκτελέσουμε το λεγόμενο **μετασχηματισμό πίεσης**, (βλ. [141], πρόβλημα 2.5, σελ. 29). Θα αναφερθούμε εμπεριστατωμένα σε αυτόν στο Σχόλιο 23 του Κεφαλαίου 5.

Το σύνορο αυτό διαχωρίζει την περιοχή όπου η λύση είναι θετική (θετικό σύνολο) από την περιοχή όπου η λύση παραμένει μηδέν (μηδενικό σύνολο). Με όρους συνολοθεωρίας μπορούμε να εκφράσουμε τα ανωτέρω ως ακολούθως:

Θετικό σύνολο, $P(u) = \{(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+ : u(x,t) > 0\}$, και

Μηδενικό σύνολο, $Z(u) = \{(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+;\ u(x,t) = 0\}$.

Για κάθε $t > 0$ μπορούμε να ορίσουμε τα δύο αυτά σύνολα ως εξής, (παραλείποντας λόγω απλότητας το u):

$P(t) := \{x \in \Omega;\, u(x,t) > 0,\ \text{για κάποιο } t > 0\}$, ανοικτό σύνολο.
$Z(t) := \{x \in \Omega;\, u(x,t) = 0,\ \text{για κάποιο } t > 0\}$, κλειστό σύνολο.

Επομένως το σύνορο μπορεί να ορισθεί ως:

$$S(t) := \bar{P}(t) \cap \bar{Z}(t), \quad t > 0. \tag{1.24}$$

Στο θετικό σύνολο, η λύση είναι λεία και επομένως κλασσική. Όμως, πάνω στο σύνορο $S(t)$ η λύση παρουσιάζει ασυνέχεια στις πρώτης τάξης παραγώγους (χωρικές ή/και χρονικές). Αυτός ακριβώς είναι και ο λόγος που θεωρούμε γενικευμένες λύσεις.

Προτού διατυπώσουμε το πρόβλημα σε (πολύ) ασθενή μορφή, θα πρέπει πρώτα να μελετήσουμε τις ιδιότητες διάδοσης του φορέα της λύσης, ή ισοδυνάμως του συνόρου αυτής. Είναι σκόπιμο, για την καλύτερη κατανόηση του φαινομένου, να ξεκινήσουμε με απλούστερα προβλήματα και βαθμιαία να καταλήξουμε στο σύνθετο πρόβλημα, όπου και θα χρησιμοποιήσουμε, όποτε μπορούμε, τα συμπεράσματα που θα αποκομίσουμε από τα απλούστερα προβλήματα.

α) Για την εξίσωση Πορώδους Μέσου.

Έστω $K(u) = u^m$, με $m > 1$, δηλαδή η περίπτωση της "αργής διάχυσης" (slow diffusion). Μελετούμε το πρόβλημα σε μία χωρική διάσταση με $\Omega \equiv \mathbb{R}$. Οι απλοποιήσεις αυτές θα μας επιτρέψουν να εξάγουμε συγκεκριμένα αποτελέσματα που θα ισχύσουν και σε πιό γενικές περιπτώσεις, τουλάχιστον ποιοτικά.

Υποθέτουμε ότι $\text{supp}u_0 = [x_1, x_2]$, $(-\infty < x_1 < x_2 < +\infty)$ και u είναι μία γενικευμένη λύση του,

$$u_t = \Delta u^m, \tag{1.25}$$

στο $Q = \mathbb{R} \times (0, \infty)$. Σημειώνουμε ότι,

$$\widehat{P} = \{(x,t);\ u(x,t) > 0,\ t > 0\}, \tag{1.26α'}$$

$$P(t) = \{x;\ u(x,t) > 0,\ t > 0\}, \tag{1.26β'}$$

$$S_1(t) = \inf P(t), \quad S_2(t) = \sup P(t). \tag{1.26γ'}$$

Λόγω της συνέχειας της u, το $P(t)$ είναι ένα ανοικτό σύνολο. Τώρα, για κάθε $t > 0$, $S_i(t)$, $(i = 1, 2)$ είναι πεπερασμένο, (βλ. [68]). Ορίζουμε ως $x_i = S_i(t)$, $(i = 1, 2)$ το ελεύθερο σύνορο της u.

Στο βιβλίο των Z.Wu, J.Zhao, J.Yin, H.Li, Nonlinear Diffusion Equations σελ.74, (βλ. [147]), αναφέρεται ότι:

"*Έστω ότι* $m > 1$. *Τότε* $(-1)^i S_i(t)$, $(i = 1, 2)$ *αυξάνει και*

$$\lim_{t\to\infty} (-1)^i S_i(t) = +\infty,\ (i = 1, 2)." \tag{1.27}$$

Σύμφωνα με το ανωτέρω και για την περίπτωση της αργής διάχυσης, όταν η λύση είναι ολική ως προς το χρόνο οι διαταραχές διαδίδονται μέχρι το άπειρο με ταχύτητα μετάδοσης πεπερασμένη.

Αυτό σημαίνει ότι το σύνορο του φορέα της λύσης δεν μπορεί να απειρισθεί σε πεπερασμένο χρόνο, αφού η ταχύτητα μετάδοσης είναι πεπερασμένη. Επίσης η ταχύτητα επέκτασης του συνόρου δεν δύναται να γίνει μηδέν σε πεπερασμένο χρόνο, διότι τότε δεν θα ίσχυε $\lim_{t\to\infty} (-1)^i S_i(t) = +\infty$, $(i = 1, 2)$.

Σε προβλήματα Cauchy και με βάση τη σχέση (1.27), συνάγουμε ότι δεν είναι δυνατόν να έχουμε λύση με φραγμένο φορέα όταν $t \to \infty$, δηλαδή όταν η λύση μας είναι ολική. Ισοδύναμα σημαίνει ότι σε προβλήματα με συνοριακές συνθήκες Dirichlet, Robin, Neumann, εάν η λύση μας είναι ολική (είτε είναι φραγμένη είτε είναι μη φραγμένη), θα έχουμε οπωσδήποτε θετικοποίηση της λύσης μέσα στο πεδίο Ω, και μάλιστα σε πεπερασμένο χρόνο.

β) Για το πρόβλημα Διήθησης χωρίς πηγή.

Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, εξετάζουμε το πρόβλημα σε μία χωρική διάσταση, με $\Omega \equiv \mathbb{R}$. (Πρόβλημα Cauchy).

$$u_t = (K^{'}(u) u_x)_x = (K(u))_{xx}. \tag{1.28}$$

Εξετάζουμε αν υπάρχουν ειδικές λύσεις, όπως λύσεις ομοιότητας ή λύσεις τύπου οδεύοντος κύματος. (Λεπτομερή θεωρία για τέτοιου είδους λύσεις βλ. π.χ. [69, 141]).

Έτσι κατασκευάζουμε (αναζητούμε) την ειδική αυτο-όμοια (self-similar) λύση, τύπου οδεύοντος κύματος, (βλ. [123], σελ.15). Οι υπολογισμοί που ακολουθούν πάρθηκαν από το βιβλίο αυτό και παρατίθενται ως έχουν λόγω της σημασίας των συμπερασμάτων. Στό το Σχόλιο (3) θέτουμε τους δικούς μας προβληματισμούς.

$$u_s(t,x) = f_s(\xi), \quad \xi = x - \lambda t, \tag{1.29}$$

όπου $\lambda > 0$ είναι η ταχύτητα διάδοσης του θερμικού κύματος. Αντικαθιστώντας την έκφραση (1.29) στην (1.28), λαμβάνουμε για $f_s(\xi) \geq 0$ την εξίσωση:

$$\frac{d}{d\xi}\left(K^{'}(f_s)\frac{df_s}{d\xi}\right) + \lambda\frac{df_s}{d\xi} = 0,$$

ή ισοδυνάμως,

$$K^{'}(f_s)\frac{df_s}{d\xi} + \lambda f_s = C. \tag{1.30}$$

Θέτοντας $C = 0$ (η επιλογή αυτή θα αποσαφηνισθεί στη συνέχεια), καταλήγουμε στην,

$$\frac{K^{'}(f_s)}{f_s}\frac{df_s}{d\xi} = -\lambda. \tag{1.31}$$

Ας υποθέσουμε ότι,

$$\int_0^1 \frac{K^{'}(\eta)}{\eta}d\eta < \infty, \tag{1.32}$$

έτσι ώστε η συνάρτηση

$$\Phi(u) = \int_0^u \frac{K^{'}(\eta)}{\eta}d\eta, \;\; u \geq 0; \;\; \Phi(0) = 0,$$

να έχει έννοια. Από την (1.31) προκύπτει ότι,

$$\Phi(f_s(\xi)) = -\lambda(\xi - \xi_0), \;\; \xi \leq \xi_0 = const.$$

Εάν θέσουμε $\xi_0 = 0$, θα έχουμε,

$$f_s(\xi) = \Phi^{-1}(-\lambda\xi), \;\; \xi \leq 0,$$

όπου Φ^{-1} είναι η αντίστροφη συνάρτηση της Φ (είναι καλά ορισμένη λόγω της αυστηρής μονοτονίας της Φ). Επεκτείνουμε την f_s στο χωρίο $\{\xi > 0\}$ ταυτοτικά ίση με μηδέν. Από την (1.30) προκύπτει ότι η θερμική ροή $-K^{'}(f_s)f_s^{'}$ είναι συνεχής **και** στο σημείο

$\xi = 0$ για $C = 0$.

Τελικά καταλήγουμε στην ακόλουθη λύση αυτο-ομοιότητας:

$$u_s(x,t) = \Phi^{-1}(\lambda(\lambda t - x)_+); \;\; t > 0, \;\; x \in \mathbb{R}, \tag{1.33}$$

όπου έχουμε εισάγει το συμβολισμό $(k)_+ = k$ εάν $k \geq 0$, και 0 εάν $k < 0$.

Θέτουμε $T_0 = \Phi(\infty)/\lambda^2 \leq \infty$. Τότε η (1.33) μπορεί να θεωρηθεί ως η λύση στο $(0, T_0) \times \mathbb{R}_+$ του προβλήματος συνοριακών τιμών για την εξίσωση (1.28) με συνθήκες:

$$u(x,0) = 0, \;\; x > 0; \quad u(0,t) = \Phi^{-1}(\lambda^2 t), \;\; 0 < t < T_0. \tag{1.34}$$

Επομένως εάν ισχύει η συνθήκη (1.32), το πρόβλημα (1.28), (1.34) έχει λύση όπου η θερμική ροή (heat flux) είναι παντού συνεχής, και έχει *συμπαγή φορέα* στο x για κάθε $t \in (0, T_0)$:

$$u_s(x,t) \equiv 0, \;\; x \geq \lambda t, \;\; t \in (0, T_0).$$

Ως εκ τούτου η εξίσωση (1.28) περιγράφει *διαδικασίες με πεπερασμένη ταχύτητα διάδοσης της διαταραχής*, με $\lambda > 0$. Στο σημείο όπου $u_s > 0$, η λύση του προβλήματος είναι κλασσική αλλά δεν είναι αναγκαστικά αρκούντως λεία στο σύνορο (μέτωπο) του θερμικού κύματος, $x_f(t) = \lambda t$, στο οποίο βεβαίως και μηδενίζεται.

Είναι σημαντικό να τονίσουμε ότι η συνθήκη (1.32) δεν είναι μόνο ικανή αλλά είναι και αναγκαία για να έχουμε πεπερασμένες ταχύτητες διάδοσης της διαταραχής για διεργασίες που περιγράφονται από την εξίσωση (1.17), (βλ.[123]).

Εάν η $K(s)$ είναι κυρτή, θετική και αύξουσα με $K(0) = 0$, $K'(0) = 0$, τότε ισχύει η συνθήκη (1.32) με $\Phi(\infty) = \int_0^\infty \frac{K'(\eta)}{\eta} d\eta = \infty$, που σημαίνει ότι $T_0 = \Phi(\infty)/\lambda^2 = \infty$ και επομένως η λύση $u(x,t)$ είναι ολική ως προς το χρόνο.

Οταν έχουμε φραγμένο χωρίο $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ με αρκούντως λείο σύνορο και τα αρχικά δεδομένα $u_0(x) \geq 0$ έχουν συμπαγή φορέα $\omega \subset \Omega$, τότε, η αυστηρή θετικότητα της ταχύτητας διάδοσης, το γεγονός ότι το σύνορο επεκτείνεται μέχρι το άπειρο όταν η λύση είναι ολική ως προς το χρόνο, εξασφαλίζει ότι το θετικό σύνολο $P(t)$ θα γίνει ίσο με το χωρίο Ω σε πεπερασμένο χρόνο, έστω t_p, $(P(t_p) = \Omega)$. Μετά από την χρονική αυτή στιγμή, η λύση μας θα γίνει θετική και επομένως κλασσική.

Το ότι $0 < t_p < \infty$ σημαίνει ότι για κάθε $x \in \mathrm{R}$ υπάρχει κάποιος πεπερασμένος χρόνος t_x κατά τον οποίον $u(x, t_x) > 0$, (βλέπε [123], σελ.25).

Σχόλιο 3. *Άπειρη ταχύτητα διάδοσης της διαταραχής για το μη εκφυλισμένο, γραμμικό πρόβλημα διάχυσης.*

Έστω το απλό κλασσικό πρόβλημα διάχυσης,

$$u_t = \Delta u, \quad t > 0, \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^N, \tag{1.35}$$

με οποιεσδήποτε αρχικές συνθήκες μη αρνητικές και μη ταυτοτικά μηδέν, και με συνοριακές συνθήκες Dirichlet. Στην περίπτωση αυτή $K(u) = u$ και η σχέση (1.32) θα δώσει:

$$\int_0^1 \frac{K^{'}(\eta)}{\eta} d\eta = \int_0^1 \frac{1}{\eta} d\eta = \ln \eta|_0^1 = \infty,$$

οπότε η ταχύτητα διάδοσης της διαταραχής θα είναι άπειρη. Δηλαδή καταλήγουμε με κάποιον άλλο τρόπο στη γνωστή αυτή διαπίστωση.

Θα συνδέσουμε τώρα τη σχέση (1.32) που αφορά την ταχύτητα διάδοσης της διαταραχής με τη σχέση $K^{'}(0) = 0$ και $K^{'}(0) > 0$ όταν $K(s)$ κυρτή θετική συνάρτηση.

1) $K^{'}(0) = 0$.

Έστω ότι η κυρτή συνάρτηση $K(s)$ στο διάστημα $(0, 1)$ συμπεριφέρεται σαν τη δυναμοσυνάρτηση s^p με $p > 1$. Θα έχουμε:

$$\int_0^1 \frac{K^{'}(\eta)}{\eta} d\eta \sim p \int_0^1 \frac{\eta^{p-1}}{\eta} d\eta = p \int_0^1 \eta^{p-2} d\eta = \frac{p}{p-1} \, \eta^{p-1}\Big|_0^1$$

$$= \frac{p}{p-1} 1^{p-1} - \frac{p}{p-1} 0^{p-1} = \frac{p}{p-1} < \infty,$$

και επομένως η ταχύτητα διάδοσης της διαταραχής θα είναι πεπερασμένη.

2) $K^{'}(0) > 0$.

Για οποιαδήποτε κυρτή συνάρτηση $K(s)$. Θα έχουμε:

$$\int_0^1 \frac{K^{'}(\eta)}{\eta} d\eta = \int_0^1 K^{'}(\eta) d\ln\eta = K^{'}(\eta)\ln\eta\Big|_0^1 - \int_0^1 \ln\eta dK^{'}(\eta)$$
$$= K^{'}(1)\ln 1 - K^{'}(0)\ln 0 - \int_0^1 \ln\eta K^{''}(\eta)d\eta. \tag{1.36}$$

Επειδή η $K(s)$ είναι κυρτή και θετική, έπεται ότι $K^{''}(s) > 0$ και επομένως στο διάστημα $(0,1)$ θα έχει ένα ελάχιστο $c > 0$. Επίσης στο ίδιο διάστημα η συνάρτηση $\ln(s)$ είναι αρνητική, οπότε θα ισχύει η ανισότητα:

$$K^{''}(\eta) \geq c > 0 \Rightarrow \ln(\eta)K^{''}(\eta) \leq c\ln(\eta) \Rightarrow$$

$$\int_0^1 \ln\eta K^{''}(\eta)d\eta \leq c\int_0^1 \ln\eta d\eta = c(|\eta\ln\eta - \eta|_0^1) = c\left(1\ln 1 - 1 - \eta\ln\eta|_{\eta=0} + 0\right).$$

Θα άρουμε την απροσδιοριστία της συνάρτησης $\eta\ln\eta$ στο σημείο μηδέν, εφαρμόζοντας τον κανόνα L' Hospital.

$$\lim_{\eta\to 0}(\eta\ln\eta) = \lim_{\eta\to 0}\left(\frac{(\ln\eta)'}{(\eta^{-1})'}\right) = \lim_{\eta\to 0}\left(-\frac{\eta^{-1}}{\eta^{-2}}\right) = \lim_{\eta\to 0}(-\eta) = 0.$$

Επομένως θα ισχύει,

$$\int_0^1 \ln\eta K^{''}(\eta)d\eta \leq -c \Rightarrow -\int_0^1 \ln\eta K^{''}(\eta)d\eta \geq c,$$

και η σχέση 1.36 γίνεται:

$$\int_0^1 \frac{K^{'}(\eta)}{\eta}d\eta = K^{'}(1)\ln 1 - K^{'}(0)\ln 0 - \int_0^1 \ln\eta K^{''}(\eta)d\eta \geq K^{'}(1)\ln 1 - K^{'}(0)\ln 0 + c$$
$$= 0 + \infty + c \Rightarrow \int_0^1 \frac{K^{'}(\eta)}{\eta}d\eta = \infty$$

που σημαίνει ότι έχουμε άπειρη ταχύτητα διάδοσης της διαταραχής.

Βεβαίως τα θεωρήματα αυτά υποθέτουν λύσεις ολικές ως προς το χρόνο και δεν διευκρινίζουν τι συμβαίνει εάν έχουμε έκρηξη της λύσης σε πεπερασμένο χρόνο.

Το σημείο αυτό λοιπόν είναι και το πιό κατάλληλο για να μιλήσουμε για το φαινόμενο της έκρηξης (blow-up) της λύσης σε πεπερασμένο χρόνο.

1.7 Εκρηξη (blow-up)

Ας θεωρήσουμε την πιο απλή μορφή ενός προβλήματος αρχικών - συνοριακών συνθηκών, με γραμμική διάχυση Δu και μη γραμμικό όρο αντίδρασης $f(u)$.

$$u_t - \Delta u = f(u), \;\; x \in \Omega, \; t \in (0, T), \tag{1.37α'}$$

$$u(x, 0) = u_0(x) > 0, \;\; x \in \Omega, \tag{1.37β'}$$

$$u(x, t) = 0, \; x \in \partial\Omega, \;\; t \in (0, T). \tag{1.37γ'}$$

Είναι γνωστό ότι η λύση του προβλήματος (1.37) κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις για τη συνάρτηση $f(u)$, τις αρχικές συνθήκες $u_0(x)$ και το χωρίο Ω, παύει να υπάρχει σε πεπερασμένο χρόνο (βλ. [65, 90, 96, 144], και πολλά άλλα). Εφόσον όμως η λύση u του (1.37) εξακολουθεί να υπάρχει για όσο χρόνο είναι φραγμένη, έπεται τελικά ότι η u παύει να υπάρχει σε πεπερασμένο χρόνο μόνο λόγω έκρηξης (blow-up), (βλ. Bebernes [15] Picard type argument, Souplet [127]).

Ορισμός 4. *Θα λέμε ότι η λύση u του (1.37) εκρήγνυται σε πεπερασμένο χρόνο, (blow-up), αν υπάρχει $t^* < \infty$ τέτοιο ώστε:*

$$\lim_{t \to t^*-} \sup \|u(\cdot, t)\|_\infty = \infty, \tag{1.38}$$

ή ισοδύναμα αν υπάρχει $t^* < \infty$ και ακολουθία (t_n) τέτοια ώστε $t_n \to t^*-$ καθώς $n \to \infty$ και

$$\lim_{n \to \infty} \|u(\cdot, t_n)\|_\infty = \infty. \tag{1.39}$$

Προτού προχωρήσουμε σε περαιτέρω λεπτομέρειες που αφορούν τη φύση της έκρηξης, θα εστιάσουμε την προσοχή μας σε μία πολύ σημαντική παρατήρηση του J. Ball (βλ. [7, 8]).

Για τις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις η μη επεκτασιμότητα (non extendability) ή αλλιώς η μη ολική ύπαρξη (no global existence) είναι ισοδύναμη με έκρηξη (βλ. Hartman [15]). Ωστόσο, αυτό δεν ισχύει πάντα για απειροδιάστατα προβλήματα αρχικών τιμών, όπως αυτά που προκύπτουν από τις μερικές διαφορικές εξισώσεις, εξαιτίας της συνύπαρξης μη ισοδύναμων νορμών, καθεμία από τις οποίες δίνει και ένα διαφορετικό μέτρο για το μέγεθος της λύσης (βλ. [7, 8]).

Επομένως για τις μερικές διαφορικές εξισώσεις δεν είναι δυνατόν να συσχετίζεται η μη ολική ύπαρξη με την έκρηξη. Έτσι είναι πιθανό κάποια λύση να μην επεκτείνεται περαιτέρω χρονικά, επειδή χάνει τη λειότητά της. Για ένα παράδειγμα μη ολικής ύπαρξης που δεν οφείλεται σε έκρηξη, βλ. [7].

Πρέπει επίσης να παρατηρήσουμε ότι η έκρηξη μπορεί να αντιστοιχεί σε διαφορετικά φυσικά φαινόμενα, ανάλογα με το πρόβλημα. Έτσι υπάρχουν περιπτώσεις που απεικονίζει ένα πραγματικό φαινόμενο (θερμική έκρηξη, ανάφλεξη, σπάσιμο ενός υλικού κ.τ.λ) ενώ άλλες φορές εκφράζει την αποτυχία ενός μαθηματικού μοντέλου να περιγράψει το φυσικό πρόβλημα κοντά σε κάποιο χρόνο, το χρόνο έκρηξης.

Π.χ., εάν το μαθηματικό μοντέλο αφορά τη δια του Ωμικού φαινομένου θέρμανση ενός σύρματος, (βλ. [78, 82, 94, 95, 134, 135], τότε το ότι έχουμε έκρηξη της λύσης σε πεπερασμένο χρόνο σημαίνει απλά ότι από όποιο υλικό και αν κατασκευαστεί ο συρμάτινος αγωγός, η θερμοκρασία θα γίνει πολύ μεγάλη (έκρηξη) και στη συνέχεια αυτός θα τακεί σε πεπερασμένο χρόνο (πλήρης έκρηξη).

Αντιθέτως, εάν η χρονοεξαρτώμενη λύση συγκλίνει σε μία στάσιμη λύση, (βλ. [43, 79]), τότε μπορούμε να επιλέξουμε τέτοια υλικά και αρχικές συνθήκες ώστε το μέγιστο της στάσιμης λύσης να μην ξεπερνά την θερμοκρασία αστοχίας του υλικού, λαμβάνοντας υπόψη και τους κατάλληλους συντελεστές ασφαλείας. Μπορούμε δηλαδή να ελέγξουμε την εξέλιξη του φαινομένου.

Στην περίπτωση της έκρηξης σε πεπερασμένο χρόνο, είναι αδύνατο να αποφύγουμε την κατάρευση του υλικού. Το μόνο που ίσως μπορούμε είναι η επιμήκυνση του χρόνου έκρηξης.

Έκρηξη σε μιά συνήθη διαφορική εξίσωση. Το πιο απλό παράδειγμα είναι αυτό μιάς τετραγωνικής εξίσωσης. Θεωρούμε το ακόλουθο πρόβλημα με μεταβλητή

$u = u(t)$.

$$u_t = u^2,\ \ t > 0,\ \ u(0) = a.$$

Για δεδομένα $a > 0$ είναι άμεσο ότι υπάρχει μοναδική λύση στο χρονικό διάστημα $0 < t < T$, όπου $T = 1/a$ και η οποία θα δίνεται από τον τύπο:

$$u(t) = \frac{1}{T - t}.$$

Η λύση είναι μιά ομαλή συνάρτηση για χρόνους μικρότερους του T. Καθώς $t \to T^-$, η $u(t) \to \infty$, δηλαδή η λύση εκρήγνυται και παύει να υπάρχει. Εάν ο μη γραμμικός όρος είναι γενικά μία συνάρτηση f συνεχής και θετική στο $[a, +\infty)$, οπότε έχουμε το πρόβλημα,

$$u_t = f(u),\ t \geq 0,\ u(0) = 0,$$

τότε η συνθήκη $\int_a^\infty \frac{ds}{f(s)} < +\infty$ είναι ικανή και αναγκαία για την ύπαρξη έκρηξης σε πεπερασμένο χρόνο $t^* = \int_a^\infty \frac{ds}{f(s)} < +\infty$, για οποιαδήποτε λύση με θετικά αρχικά δεδομένα. Η σχέση αυτή ονομάζεται συνθήκη Osgood στη θεωρία των ΣΔΕ και παρουσιάσθηκε για πρώτη φορά το 1898, (βλ. [61]).

Στις μερικές διαφορικές εξισώσεις η συνάρτηση u εξαρτάται και από το χώρο και από το χρόνο. Συγκεκριμένα εάν στην παραπάνω εξίσωση υπεισέλθει και ο όρος διάχυσης Δu, οπότε σχηματισθεί το πρόβλημα 1.37, αποδεικνύεται ότι η ανωτέρω συνθήκη είναι μεν αναγκαία για να έχουμε έκρηξη της λύσης σε πεπερασμένο χρόνο, αλλά όχι όμως και ικανή, (βλ. [12]).

Επομένως λογικό είναι να αναρωτηθεί κανείς αν υπάρχει κάποια συνθήκη ικανή να δώσει έκρηξη. Η απάντηση δίνεται από την ακόλουθη πρόταση, όπου το πρόβλημά μας παραμετροποιείται με τη θετική παράμετρο λ, (βλ. [12, 72]).

Πρόταση 5. *Έστω $f(s) > 0$, $f'(s) \geq 0$, $f''(s) \geq 0$ για $s \geq 0$ και $\int_0^\infty \frac{ds}{f(s)} < \infty$. Αν επιπρόσθετα $\lambda > \lambda^* := \lambda_1 \sup\{\frac{s}{f(s)} : s \geq 0\}$, τότε η μοναδική λύση του,*

$$u_t - \Delta u = \lambda f(u),\ \ (x,t) \in (\Omega \times [0, T)), \tag{1.40α'}$$

$$u(x,t) = 0,\ x \in \partial\Omega,\ \ t \in (0, T), \tag{1.40β'}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{1.40γ'}$$

εκρήγνυται σε (πεπερασμένο) χρόνο t^*, όπου,

$$t^* < \int_0^\infty \frac{ds}{\lambda f(s) - \lambda_1 s} := T_0 < \infty. \tag{1.41}$$

Απόδειξη. Ορίζουμε $\alpha(t) = \int_\Omega \phi(x)u(x,t)dx$, όπου ϕ είναι η μη αρνητική ιδιοσυνάρτηση που αντιστοιχεί στην πρωτεύουσα ιδιοτιμή λ_1 του $-\Delta$, με $\int_\Omega \phi(x)dx = 1$. Από την (3) λόγω της ταυτότητας του Green προκύπτει ότι:

$$\alpha'(t) = \lambda \int_\Omega \phi f(u)dx - \lambda_1 \alpha(t), \ \ \text{για} \ \ t > 0.$$

Επίσης είναι $\alpha(0) = \alpha_0 := \int_\Omega \phi u_0 dx$. Λόγω τώρα της ανισότητας Jensen παίρνουμε ότι:

$$\alpha'(t) \geq \lambda f(\alpha) - \lambda_1 \alpha, \ \ \text{για} \ \ t > 0.$$

Θεωρώντας $\lambda > \lambda^* := \lambda_1 \sup\{\frac{s}{f(s)} : s \geq 0\}$ θα ισχύει $\lambda f(\alpha) - \lambda_1 \alpha > 0$, και λόγω της υπόθεσης $\int_0^\infty \frac{ds}{f(s)} < \infty$ προκύπτει ότι $\alpha(t) \to \infty$ καθώς $t \to T_0^-$, όπου $T_0 = \int_0^\infty \frac{ds}{\lambda f(s) - \lambda_1 s} < \infty$. Το συμπέρασμα της πρότασης προκύπτει επειδή $\alpha(t) = \int_\Omega \phi(x)u(x,t)dx \leq \| u(\cdot,t) \|_\infty$. □

Δώσαμε την απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος, παρότι υπάρχει εκτενώς στην βιβλιογραφία, μόνο και μόνο για να παρουσιάσουμε τη μέθοδο Kaplan ή μέθοδο της πρώτης ιδιοτιμής, μία μέθοδο που θα χρησιμοποιήσουμε κατά κύριο λόγο γιά την απόδειξη της έκρηξης της λύσης στην παρούσα διατριβή.

Τι παρατηρούμε. Παρατηρούμε ότι με τη μέθοδο αυτή, στην ουσία, αποδεικνύουμε την έκρηξη σε πεπερασμένο χρόνο του χωρικού ολοκληρώματος $\alpha(t) = \int_\Omega \phi(x)u(x,t)dx$. Λόγω της σχέσης $\int_\Omega \phi(x)u(x,t)dx < \max\limits_{x\in\Omega} \phi(x) \int_\Omega u(x,t)dx$, έπεται ότι έχουμε έκρηξη στο t_1 του ολοκληρώματος $\int_\Omega u(x,t)dx$, που δεν είναι άλλο από τη νόρμα της u στο χώρο Lebesque $L_1(\Omega)$, με την προϋπόθεση βέβαια ότι η λύση επεκτείνεται σε "ασθενή" μορφή μέχρι τη χρονική στιγμή t_1.

Ο κύριος σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η μελέτη του φαινομένου της έκρηξης των λύσεων υπό την πολύ ασθενή μορφή τους. Δηλαδή θεωρούμε ότι η λύση $u(x,t) = u(t)(x)$ είναι μία συνεχής συνάρτηση από το $(0,T) \to L_1(\Omega)$, (βλ. [7, 10, 26, 79]). Επομένως, είναι άμεσο επακόλουθο να μας ενδιαφέρει η έκρηξη της L_1 νόρμας και όχι η έκρηξη της L_∞ νόρμας.

Η έκρηξη της L_1 νόρμας σε πεπερασμένο χρόνο είναι πιο "σημαντικό φαινόμενο" με κάποια έννοια σε ορισμένα φαινόμενα από την L_∞ έκρηξη. Επίσης θα πρέπει να σημειώσουμε τα παρακάτω:

1) Η L_1 έκρηξη συνεπάγεται την L_∞ έκρηξη. Το αντίθετο δεν ισχύει. Αυτό προκύπτει άμεσα από την συνθήκη εγκλεισμού των L_p χώρων: (βλ. [1, 7]),

$$L_1 \supset L_p \supset L_q \supset L_\infty, \text{ όπου } 1 < p < q < \infty. \tag{1.42}$$

Αυτό σημαίνει ότι μπορεί να έχουμε έκρηξη της $\| u(\cdot,t) \|_\infty$ σε κάποια χρονική στιγμή $t^* < \infty$, οπότε η λύση μας παύει να υπάρχει στον $L_\infty(\Omega)$, είναι δυνατόν όμως να υφίσταται στον $L_1(\Omega)$ (ή και σε κάποιον $L_q(\Omega)$, $q < \infty$). Δεν θα αναφερθούμε στην μετά την έκρηξη ύπαρξη (βλ. [92, 45, 118, 58, 140, 24]), που είναι τεράστιο ερευνητικό πεδίο, αλλά μιλάμε για τη στιγμή της έκρηξης t^*.

2) Η L_1 έκρηξη είναι η καταστροφή της λύσης στην ασθενέστερη μορφή της. Πράγματι εάν έχουμε έκρηξη της L_1 νόρμας, τότε η λύση μας παύει να υπάρχει σε κάποιον από τους γνωστούς συναρτησιακούς χώρους.

3) Η L_1 νόρμα ισούται με το ολοκλήρωμα $\int_\Omega u(x,t)dx$ το οποίο με τη σειρά του, από φυσικής απόψεως, αντιστοιχεί στη ολική μάζα της λύσης μας. Είναι άλλο να έχουμε απερισμό της θερμοκρασίας σε κάποια χρονική στιγμή σε κάποιο μεμονωμένο σημείο και άλλο να έχουμε, σε μερικές περιπτώσεις, απειρισμό της ολικής θερμότητας (μάζας) που περιέχεται στο χρονικά εξελισσόμενο φαινόμενο.

Ενα παράδειγμα έκρηξης της L_∞ νόρμας σε πεπερασμένο χρόνο ενώ την ίδια χρονική στιγμή η L_1 νόρμα παραμένει πεπερασμένη, δίνει ο P.Quittner - Ph.Souplet (βλ. [119], Θεώρημα 24.1, Λήμμα 24.2), για το πρόβλημα,

$$\begin{aligned} &u_t - \Delta u = u^p, \quad x \in \Omega,\ t > 0, \\ &u = 0, \quad x \in \partial\Omega,\ t > 0, \\ &u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \end{aligned} \tag{1.43}$$

όπου $p > 1, \Omega = B_R, u_0 \in L_\infty(\Omega),\ u_0 \geq 0$, ακτινικά συμμετρική μη αύξουσα συνάρτηση. Τότε, (βλέπε απόδειξη στο βιβλίο αυτό), $\lim\limits_{t\to T} \|u(\cdot,x)\|_\infty = \infty$, αλλά $\limsup\limits_{t\to T} \|u(\cdot,x)\|_q < \infty$ για $1 \leq q < q_c = n(p-1)/2$.

Ένα άλλο σημείο στο οποίο εστιάζεται η προσοχή των ερευνητών που μελετούν φαινόμενα έκρηξης, είναι η φύση της έκρηξης. Έτσι προσπαθούμε κάθε φορά να απαντήσουμε στα εξής ερωτήματα: (βλ. [61, 73] και άλλοι),

- ΠΟΤΕ γίνεται η έκρηξη,
- ΠΟΥ γίνεται, δηλαδή σε ποιά σημεία του χώρου,
- ΠΩΣ γίνεται, δηλαδή με ποιό τρόπο απειρίζεται η λύση στο χρόνο έκρηξης.

Μέχρι τώρα είναι γνωστές οι παρακάτω μορφές έκρηξης:

(α) **Σημειακή έκρηξη** (Single point blow-up). Στην περίπτωση αυτή υπάρχει σημείο $x_0 \in \bar{\Omega}$ και ακολουθία σημείων (x_m, t_m) με $t_m \uparrow t^*-,\ x_m \to x_0$, ώστε $u(x_m,t_m) \to \infty$ καθώς $m \to \infty$.

(β) **Πλήρης έκρηξη** (Complete blow-up). Με τον όρο πλήρη έκρηξη, εννοούμε $\limsup_{t\to t^*-} \| u(\cdot,t) \|_\infty = \infty$ και $u(x,t) \equiv \infty$ για κάθε $x \in \Omega$ και $t > t^*$.

(γ) **Ολική έκρηξη** (Global blow-up). Τότε έχουμε ότι $\limsup_{t\to t^*-} u(x,t) = \infty$ για κάθε $x \in \Omega$.

(δ) **Τοπική έκρηξη** (Regional blow-up). Τότε υπάρχει Ω_1 με $\bar{\Omega}_1 \subseteq \Omega$ και $\mu(\Omega_1) \neq 0$ (μ: μέτρο Lebesque) έτσι ώστε $\limsup_{t\to t^*-} u(x,t) = \infty$ για κάθε $x \in \Omega_1$. Προφανώς η τοπική έκρηξη είναι μία ειδική περίπτωση της ολικής έκρηξης (συνήθως χρησιμοποιούμε τον όρο ολική έκρηξη για να περιγράψουμε τις δύο αυτές καταστάσεις).

(ε) **Μερική έκρηξη** (Partial blow-up). Στην περίπτωση αυτή ισχύει ότι $\limsup_{t\to t^*-} \| u(\cdot,t) \|_\infty = \infty$, αλλά για $t > t^*$ η λύση $u(x,t)$ υπάρχει με κάποια ασθενή μορφή ή και κλασική ακόμα, για κάθε $x \in \Omega$.

Είναι φανερές οι ακόλουθες σχέσεις ανάμεσα στα διάφορα είδη έκρηξης

$$\text{ΟΛΙΚΗ} \Rightarrow \text{ΤΟΠΙΚΗ} \Rightarrow \text{ΠΛΗΡΗΣ}$$

και

$$\text{ΜΕΡΙΚΗ} \Rightarrow \text{ΣΗΜΕΙΑΚΗ}$$

Κλείνουμε την παράγραφο αυτή εισάγοντας την έννοια της απόκλισης των χρονοεξαρτωμένων λύσεων.

Ορισμός 6. *Θα λέμε ότι η λύση u του προβλήματος (1.37) αποκλίνει αν υπάρχει ακολουθία (t_n) τέτοια ώστε $t_n \to \infty$ καθώς $n \to \infty$ και*

$$\lim_{n\to\infty} \| u(\cdot, t_n) \| = \infty.$$

Η λύση u^* του μη-τοπικού προβλήματος (1.1), με $\Omega = (-1, 1)$, όπως αναφέρεται στην εργασία [96], στην κρίσιμη τιμή λ^* αποκλίνει και μάλιστα,

$$u^*(x,t) \to \infty \ \text{καθώς} \ t \to \infty,$$

για κάθε $x \in (-1, 1)$, δηλαδή η απόκλιση της u^* είναι ολική.

Τώρα μπορούμε να εξετάσουμε ένα από τα σημαντικότερα σημεία της παρούσας διατριβής. Όπως είδαμε παραπάνω, εάν η λύση μας στο πρόβλημα Cauchy:

$$u_t - \Delta K(u) = f(u), \ \ x \in \mathbb{R}^N, \ t > 0, \tag{1.44α'}$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \geq 0, \tag{1.44β'}$$

όπου οι αρχικές συνθήκες έχουν συμπαγή φορέα, είναι ολική, τότε του $t \to \infty$, ο φορέας της λύσης τείνει στο $\mathbb{R}^N$. Αυτό σημαίνει ότι εάν αντί για πρόβλημα Cauchy έχουμε πρόβλημα Dirichlet σε ένα φραγμένο χωρίο $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, τότε σε κάποιο πεπερασμένο χρόνο t_p, ο φορέας της λύσης θα ταυτισθεί με το Ω.

Τι γίνεται όμως εάν η λύση μας, για το πρόβλημα Cauchy, εκρήγνυται σε πεπερασμένο χρόνο T; Ο φορέας της λύσης στη χρονική στιγμή T θα είναι πάλι ο $\mathbb{R}^N$ ή μήπως *μπορεί να είναι και φραγμένος;*

Η απάντηση στο ερώτημα αυτό είναι καθοριστικής σημασίας.

Ας υποθέσουμε ότι αντί για το πρόβλημα Cauchy είχαμε ένα πρόβλημα Dirichlet σε κάποιο φραγμένο χωρίο Ω. Τότε, προτού ο φορέας της λύσης "αγγίξει" το σύνορο $\partial\Omega$, οι συνοριακές συνθήκες πάνω στο $\partial\Omega$ στην ουσία δεν επηρρεάζουν την εξέλιξη του φαινομένου και το πρόβλημα κατ' ουσίαν είναι πρόβλημα Cauchy (βλ. [141], σελ.334).

Συγκεκριμένα στη σελίδα αυτή ο Vazquez αναφέρει επί λέξει:

... In the theory of the homogeneous Dirichlet problem, the ZKB is an acceptable solution as long as the free boundary does not reach the exterior boundary $\partial\Omega$ (this happens though in a finite time).

Τώρα, εάν στο προηγούμενο ερώτημα για το πρόβλημα Cauchy ο φορέας της λύσης τη στιγμή της έκρηξης ήταν όλος ο $\mathbb{R}^N$, μεταφερόμενοι στο συνοριακό πρόβλημα, θα είχαμε θετικοποίηση της λύσης πάνω στο Ω σε χρόνο t_p μικρότερο του χρόνου έκρηξης T, που σημαίνει ότι για το χρονικό διάστημα $[t_p, T)$ η λύση μας θα είναι κλασσική.

Η μελέτη επομένως της έκρηξης θα μπορούσε να γίνει με τη θεωρία των κλασσικών λύσεων και όχι των γενικευμένων συναρτήσεων που εμείς ακολουθούμε.

Η απάντηση στο ερώτημα αυτό είναι ξεκάθαρη. Τόσο στο [123] όσο και στο άρθρο του Ryuichi Suzuki [128] αναφέρεται ότι για το πρόβλημα Cauchy σε μία διάσταση,

$$u_t - \Delta u^m = u^k, \;\; x \in \mathbb{R}, \;\; t > 0, \tag{1.45α'}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \geq 0, \tag{1.45β'}$$

με συμπαγή φορέα, εάν $k/m > 1$, τότε του $t \to T^-$ ο φορέας παραμένει φραγμένος και ίσος με $(-x_T, +x_T)$, όπου $x_T < \infty$.

Μετατρέποντας το πρόβλημα Cauchy σε πρόβλημα Dirichlet πάνω στο χωρίο $\Omega = (-a, +a)$ με $a > x_T$, θα έχουμε έκρηξη της λύσης προτού ο φορέας της λύσης 'αγγίξει' το σύνορο $\partial\Omega$. Οι όποιες συνοριακές συνθήκες δεν θα έχουν καμμία επίδραση αφού, απλούστατα, ο φορέας της λύσης, **δηλαδή η διαταραχή**, δεν θα έχει φθάσει ποτέ στο σύνορο $\partial\Omega$ και επομένως καμμία αλληλεπίδραση δεν θα έχει συντελεσθεί με το σύνορο. Η λύση μας θα είναι θετική στο $(-x_T, +x_T)$, ίση με μηδέν στο σύνολο $(-a, -x_T) \cup (+x_T, +a)$ και χωρίς πρώτες μερικές παραγώγους στο $\partial(-x_T, +x_T) = \{-x_T, x_T\}$.

Επομένως, η μελέτη του προβλήματος αυτού απαιτεί τη χρήση γενικευμένων λύσεων (πολύ ασθενών).

Βεβαίως το παραπάνω παράδειγμα αφορά τη μία χωρική διάσταση. Λογικό να αφορά και τις ακτινικά συμμετρικές λύσεις στον $\mathbb{R}^N$, και δεν ξέρουμε εάν ισχύει ή δεν ισχύει στην γενική περίπτωση των μη συμμετρικών προβλημάτων.

Το σίγουρο είναι ότι όσο το θέμα αυτό παραμένει άγνωστο, η σωστή αντιμετώπιση του προβλήματος της έκρηξης απαιτεί τη χρήση γενικευμένων λύσεων, όταν έχουμε λύση με επεκτεινόμενο φορέα.

Πέραν όμως όλων των ανωτέρω, το να δουλέψουμε με γενικευμένες λύσεις, μας προσφέρει τη δυνατότητα να μελετήσουμε ακόμη πιο γενικά προβλήματα όπως π.χ. όταν οι αρχικές συνθήκες $u_0(x)$ δεν είναι συνεχείς αλλά ανήκουν απλώς στον $L_1(\Omega)$, (ολοκληρώσιμες αρχικές συνθήκες).

Οι γενικευμένες λύσεις ίσως είναι οι καταλληλότερες για τη μελέτη φυσικών φαινομένων που μοντελοποιούνται μαθηματικά. Και αυτό διότι δεν επικεντρώνονται στην τιμή της συνάρτησης $u(x,t)$ σε μεμονωμένα σημεία, αλλά στην ουσία αντικαθιστούν αυτές από ολοκληρώματα της μορφής $\int_{t_1}^{t_2}\int_{\omega} u(x,t)dxdt$, όπου το διάστημα (t_1,t_2) είναι όσο μικρό θέλουμε, το δε μέτρο του ω είναι και αυτό όσο μικρό θέλουμε.

1.8 Μελέτη του μη-τοπικού προβλήματος διήθησης.

Έχουμε αναπτύξει και περιγράψει, πάντα μέσα στα πλαίσια της παρούσας εργασίας, το σκεπτικό γύρω από το πρόβλημά μας. Σκοπός μας είναι η εξέταση για το εάν υπάρχουν λύσεις που εκρήγνυνται σε πεπερασμένο χρόνο, ή στην περίπτωση των ολικών λύσεων, η ασυμπτωτική συμπεριφορά αυτών, για το πρόβλημα:

$$u_t = \Delta K(u) + \frac{\lambda f(u)}{\left(\int_{\Omega} f(u)dx\right)^p}, \quad x\in\Omega, \quad t>0, \tag{1.46α'}$$

$$u(x,t) = 0, \quad x\in\partial\Omega, \quad t>0, \tag{1.46β'}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \geq 0, \quad x \in \Omega, \tag{1.46γ'}$$

όπου οι αρχικές συνθήκες έχουν συμπαγή φορέα μέσα στο Ω, και με τις προϋποθέσεις που έχουμε θέσει για τις συναρτήσεις $K(s)$ και $f(s)$, δηλαδή,

$$K(s),\ K'(s),\ K''(s) > 0 \ \text{ για } \ s > 0 \ \text{ και } \ K(0) > 0,\ K'(0) = 0,\ K''(0) \geq 0,$$

$$f(s) > 0,\ f'(s) > 0,\ f''(s) > 0 \ \text{ για } \ s > 0 \ \text{ και } \ f(0) = 0,\ f^{'}(0) \geq 0,$$
$$\int_b^\infty \frac{ds}{f^{1-p}(s)} < \infty \ \text{ για κάποιο } \ b > 0.$$

Στο επόμενο κεφάλαιο θα εκφράσουμε το πρόβλημα αυτό υπό την πολύ ασθενή μορφή του, και θα το μελετήσουμε.

Κεφάλαιο 2

Γενικευμένο πρόβλημα Διήθησης. Ύπαρξη και μοναδικότητα της λύσης

2.1 Προκαταρκτικά.

2.1.1 Διατύπωση του μη-τοπικού προβλήματος Διήθησης σε πολύ ασθενή μορφή. Πολύ ασθενείς λύσεις.

Ορισμός 7. *Μία συνάρτηση $u \in C((t_1,t_2);L_1(\Omega))$ ορισμένη στο $\Omega_{t_1,t_2} := \Omega \times (t_1,t_2)$ θα ονομάζεται πολύ ασθενής λύση του προβλήματος (1.1) εάν $u, K(u), f(u) \in L_1(\Omega_{t_1,t_2})$ και συγχρόνως ικανοποιείται η ταυτότητα:*

$$\int_\Omega [u\eta]_{t_1}^{t_2} dx - \int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega u\eta_t dxds - \int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega K(u)\Delta\eta dxds - \lambda\int_{t_1}^{t_2}\frac{\int_\Omega f(u)\eta dx}{\left(\int_\Omega f(u)dx\right)^p} ds = 0, \tag{2.1α$'$}$$

$$\forall\, t_1,t_2 : 0 \le t_1 < t_2 \le T, \quad \forall\, \eta \in C^\infty((t_1,t_2);C^\infty(\Omega)) \;\; \text{με } \eta = \eta(x,t) \ge 0,$$

$$\text{με συνοριακές συνθήκες } \frac{\partial\eta}{\partial\hat{n}} + \beta\eta = 0 \text{ στο } \partial\Omega, \text{ όπου } 0 \le \beta = \beta(x) \le \infty. \tag{2.1β$'$}$$

- *Για το πρόβλημα Dirichlet έχουμε $\beta(x) \equiv \infty$ και $\eta \in C^\infty((t_1,t_2);C_c^\infty(\Omega))$,*
- *Για το πρόβλημα Robin έχουμε $\beta(x) > 0$,*

- *Για το πρόβλημα Neumann έχουμε $\beta(x) \equiv 0$,*

όπου $C_c^\infty(\Omega)$ είναι ο χώρος όλων των $C^\infty-$ συναρτήσεων με συμπαγή φορέα στο Ω, βλέπε επίσης [40, 141].

Μπορούμε επίσης απλά να πούμε ότι η u είναι μία λύση του (1.1) με την έννοια των κατανομών, εάν ικανοποιείται η (2.1). Για το πρόβλημα (2.1α′), το ολοκλήρωμα πάνω στο σύνορο γίνεται μηδέν, δηλαδή,

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_{\partial\Omega} \left(\eta \frac{\partial K(u)}{\partial \hat{n}} - K(u) \frac{\partial \eta}{\partial \hat{n}} \right) d\sigma(x) \right\} ds = 0, \tag{2.2}$$

και επομένως δεν εμφανίζεται στην (2.1α′). Αυτό συμβαίνει πάντα όταν χρησιμοποιούμε την πολύ ασθενή διατύπωση του προβλήματος (1.1). Επί της ουσίας, για την (2.1α′), χρειαζόμαστε μόνο $\eta \in C_{x,t}^{2,1}$ ή την ίδια λειότητα αλλά με συμπαγή φορέα στο Ω, $\left(\eta \in C_{c^{x,t}}^{2,1}\right)$. Επιπλέον, εάν πάρουμε $t_1 = 0$, $t_2 = T$ και δοκιμαστική συνάρτηση $\eta = \eta(x,t)$ που να μηδενίζεται για $t = T$, τότε το πρώτο κατά σειρά ολοκλήρωμα της (2.1α′) γίνεται $\int_\Omega u_0(x)\eta_0(x)dx$, όπου $\eta_0(x) = \eta(x,0)$. Τέλος, εάν $t_1 = 0$, τα αρχικά δεδομένα μπορούν να θεωρηθούν υπό την έννοια,

$$\lim_{t \to 0+} \int_\Omega \eta(x,t)u(x,t)dx = \int_\Omega \eta_0(x)u_0(x)dx. \tag{2.3}$$

2.1.2 Πάνω - κάτω ζεύγη λύσεων σε πολύ ασθενή μορφή για το μη τοπικό πρόβλημα Διήθησης. Ορισμός.

Σε αντίθεση με την περίπτωση φθίνουσας συνάρτησης $f(s)$, όπου ισχύει άμεσα η αρχή σύγκρισης σε ασθενή μορφή, όταν η $f(s)$ είναι αύξουσα, η ύπαρξη πάνω και κάτω λύσεων με τη συνήθη έννοια δεν εξασφαλίζει (χρησιμοποιώντας μεθόδους σύγκρισης) την ύπαρξη λύσης κείμενης μεταξύ αυτών, ούτε για το πρόβλημα (1.1) ούτε για το πρόβλημα (2.1), (βλ. [39, 98]).

Προκειμένου να χρησιμοποιήσουμε κατάλληλες συνθήκες σύγκρισης που να μας εξασφαλίζουν την ύπαρξη λύσης για το πρόβλημα (2.1), εισάγουμε την έννοια του πάνω - κάτω ζεύγους λύσεων υπό ασθενή μορφή.

Ορισμός 8. *Για δύο συναρτήσεις* $z = z(x,t), v = v(x,t) \in C((t_1,t_2); L_1(\Omega))$, *έστω ο τελεστής* V *οριζόμενος από τη σχέση:*

$$\begin{aligned} V(z,v;\eta) : &= \int_{\Omega} [z\eta]_{t_1}^{t_2} dx - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} z\eta_t dx ds \\ &- \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} K(z)\Delta\eta dx ds - \lambda \int_{t_1}^{t_2} \frac{\int_{\Omega} f(z)\eta dx}{\left(\int_{\Omega} f(v) dx\right)^p} ds, \end{aligned} \tag{2.4}$$

$\forall\, t_1, t_2 : 0 \le t_1 < t_2 \le T, \quad \forall\, \eta \in C^{\infty}((t_1,t_2); C_c^{\infty}(\Omega))$ *με* $\eta \ge 0$.

Τότε το (z,v) *θα ονομάζεται πολύ ασθενές ζεύγος πάνω - κάτω λύσεων για το πρόβλημα (2.1), εάν ισχύουν οι κατωτέρω σχέσεις:*

$$V(z,v;\eta) \le 0 \le V(v,z;\eta), \quad x \in \Omega, \quad t_1 \le t \le t_2, \tag{2.5α$'$}$$

$$0 \le \int_{\Omega} \eta_0(x) z(x,0) dx \le \int_{\Omega} \eta_0(x) u(x,0) dx \le \int_{\Omega} \eta_0(x) v(x,0) dx, \tag{2.5β$'$}$$

$\forall\, t_1, t_2 : 0 \le t_1 < t_2 \le T$ *και* $\forall\, \eta$ *που ικανοποιεί την* $(2.1b)$.

Σχόλιο 9. *Το ολοκλήρωμα πάνω στο σύνορο δεν εμφανίζεται στην (2.4) καθόσον,*

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial\Omega} \left\{ \eta \left[\frac{\partial K(z)}{\partial \hat{n}} - \frac{\partial K(v)}{\partial \hat{n}} \right] - [K(z) - K(v)] \frac{\partial \eta}{\partial \hat{n}} \right\} d\sigma(x) ds \le 0,$$

(για το πρόβλημα Dirichlet $\eta = 0$ *και* $\frac{\partial \eta}{\partial \hat{n}} < 0$, *για το Neumann* $\frac{\partial \eta}{\partial \hat{n}} = 0$ *και για το Robin* $\frac{\partial \eta}{\partial \hat{n}} + \beta(x)\eta = 0$ *στο* $\partial\Omega$, $\eta = \eta(x,t)$*).*

2.1.3 Υπαρξη πάνω - κάτω ζεύγους λύσεων για το-μη τοπικό πρόβλημα Διήθησης

Λήμμα 10. *(βλ. [98]). Εστω ότι οι* $Z = Z(t), V = V(t) \le b < \infty$ *ικανοποιούν τις ανισότητες:*

$$\begin{aligned} &Z_t - \Lambda f(Z) \le 0 \le V_t - \bar{\Lambda} f(V), \quad 0 < t < \hat{T} < \infty, \\ &Z(0) = Z_0 \le u_0(x) \le V(0) = V_0 \end{aligned}$$

Το Z_0 πρέπει να είναι διάφορο του μηδενός, ειδάλλως ο παρονομαστής στην έκφραση του πάνω - κάτω ζεύγους λύσεων θα ήταν μηδέν, λόγω του ότι $f(0) = 0$.

Επίσης, $Z_0 \leq u_0(x),\ 0 \leq u_0(x)$. Γι' αυτό θέτουμε $Z_0 = \varepsilon > 0$ αρκούντως μικρό για $x \in \omega \subset supp(u_0(x)) \subset\subset \Omega$ και $Z_0 = 0,\ x \in \Omega/\omega$.

Θέτουμε $\Lambda = \lambda/f^p(b)|\Omega|^p < \bar{\Lambda} = \lambda/f^p(Z_0)|\omega|^p$, για κάποιο $b \gg 1$ αρκούντως μεγάλο. Τότε (Z, V) είναι ένα ζεύγος πάνω - κάτω λύσεων του προβλήματος (2.1) και

$$0 \leq Z(t) \leq V(t).$$

Απόδειξη. Εστω T_{max} είναι ο μέγιστος χρόνος ύπαρξης της V, ($V(t) \to \infty$ καθώς $t \to T_{\max}^-$). Το γεγονός ότι $0 \leq Z \leq V$ προκύπτει με απ' ευθείας ολοκλήρωση.

$$\int_{Z_0}^{Z(t)} \frac{ds}{f(s)} \leq \Lambda t < \bar{\Lambda} t \leq \int_{V_0}^{V(t)} \frac{ds}{f(s)} \leq \int_{Z_0}^{V(t)} \frac{ds}{f(s)} < \int_0^{\infty} \frac{ds}{f(s)} < \infty \Rightarrow Z(t) \leq V(t)$$

Λόγω της επιλογής του $\Lambda, \bar{\Lambda}$, συνεπάγεται ότι (Z, V) είναι ένα ζεύγος πάνω - κάτω λύσεων του προβλήματος (2.1).

$\square$

Για να προχωρήσουμε στην απόδειξη της ύπαρξης και της μοναδικότητας της λύσης του προβλήματός μας, διατυπώνουμε και αποδεικνύουμε στην επόμενη παράγραφο ένα σημαντικό και αναγκαίο θεώρημα σύγκρισης. Θα το αποδείξουμε πρώτα για κλασσικές λύσεις και μετά για πολύ ασθενείς λύσεις.

2.2 Γενική Αρχή σύγκρισης για το μη-τοπικό πρόβλημα Διήθησης, ανεξάρτητα της λύσης.

2.2.1 Για κλασσικές λύσεις.

Το πρόβλημά μας είναι το (1.1) όπου, για απλούστευση, θεωρούμε συνθήκες Dirichlet στο σύνορο, δηλαδή:

$$u_t = \Delta K(u) + \frac{\lambda f(u)}{\left(\int_\Omega f(u)dx\right)^p}, \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \tag{2.6α'}$$

$$u(x,t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0, \tag{2.6β'}$$

$$u(x,0) = u_0(x) > 0, \quad x \in \Omega. \tag{2.6γ'}$$

Εστω τώρα δύο συναρτήσεις $z = z(x,t)$, $v = v(x,t) \in C((0,\infty); L_1(\Omega))$ και ο τελεστής S, όπως αυτός ορίσθηκε προηγούμενα αλλά στην κλασσική μορφή:

$$S(z;v) = z_t - \Delta K(z) - \frac{\lambda f(z)}{\left(\int_\Omega f(v)dx\right)^p}, \tag{2.7}$$

$$S(z;v) = z_t - \Delta K(z) - \frac{\lambda f(z)}{\left(\int_\Omega f(v)dx\right)^p}. \tag{2.8}$$

Τότε το (z,v) θα ονομάζεται **διατεταγμένο ζεύγος** για το πρόβλημα (2.1), εάν ικανοποιούνται τα ακόλουθα:

$$S(z;v) < S(v;z), \quad x \in \Omega, \quad t \in (0,T), \tag{2.9α'}$$

$$z(x,t) \le v(x,t), \quad x \in \partial\Omega, \quad t \in (0,T), \tag{2.9β'}$$

$$0 \le z(x,0) < v(x,0), \quad x \in \Omega, \tag{2.9γ'}$$

Η ονομασία διατεταγμένο ζεύγος που δώσαμε, δικαιολογείται πλήρως από το παρακάτω θεώρημα το οποίο και θα αποδείξουμε.

(Τονίζουμε ότι το ζεύγος αυτό *δεν είναι κατ΄ ανάγκη ζεύγος πάνω - κάτω λύσεων* του προβλήματος, αφού σύμφωνα με τον ορισμό του, δεν το συνδέουμε με τις αρχικές συνθήκες της όποιας λύσης μας, οι δε αντίστοιχοι τελεστές δεν είναι εκατέρωθεν του μηδενός, μπορεί δηλαδή να είναι και οι δύο θετικοί ή και οι δύο αρνητικοί).

Θεώρημα 11. *Εάν ισχύουν οι ανισότητες,*

$$S(z;v) = z_t - \Delta K(z) - \frac{\lambda f(z)}{\left(\int_\Omega f(v)dx\right)^p} < v_t - \Delta K(v) - \frac{\lambda f(v)}{\left(\int_\Omega f(z)dx\right)^p} = S(v;z)$$

και $z_0 < v_0$, *τότε* $z < v$.

Απόδειξη. Δια της εις άτοπον απαγωγής. Εστω ότι το συμπέρασμα είναι ψευδές. Τότε θα υπάρχει για πρώτη φορά μία χρονική στιγμή $\bar{t}$ και ένα σημείο $\bar{x} \in \Omega$ όπου $z(\bar{x},\bar{t}) = v(\bar{x},\bar{t})$ με $z(x,\bar{t}) < v(x,\bar{t})$ για $x \neq \bar{x}$.
Επομένως τη χρονική αυτή στιγμή $\bar{t}$ θα ισχύει ότι: $\int_\Omega f(z)dx < \int_\Omega f(v)dx$, λόγω του ότι η συνάρτηση $f(s)$ είναι αύξουσα.

Ισχύει ότι:

$$\Delta K(v) - \Delta K(z) = K^{''}(v)\Delta v + K^{'}(v)\left|\nabla v\right|^2 - K^{''}(z)\Delta z - K^{'}(z)\left|\nabla z\right|^2.$$

Οι υπολογισμοί μέχρι το τέλος της απόδειξης αναφέρονται στο σημείο $(\bar{x},\bar{t})$.

Έτσι θα έχουμε ότι $z(\bar{x},\bar{t}) = v(\bar{x},\bar{t})$ οπότε $K^{'}(z(\bar{x},\bar{t})) = K^{'}(v(\bar{x},\bar{t}))$ και $K^{''}(z(\bar{x},\bar{t})) = K^{''}(v(\bar{x},\bar{t}))$, και η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$\Delta K(v) - \Delta K(z) = K^{''}(z)(\Delta v - \Delta z) + K^{'}(z)\left[|\nabla v|^2 - |\nabla z|^2\right] = K^{''}(z)\Delta(v-z),$$

λόγω του ότι θα έχουμε, $\nabla z(\bar{x},\bar{t}) = \nabla v(\bar{x},\bar{t})$.
Από την ανισοτική σχέση μεταξύ των δύο τελεστών και λαμβάνοντας υπόψη ότι $f(z) = f(v)$, παίρνουμε:

$$(v-z)_t = v_t - z_t > \Delta K(v) + \frac{\lambda f(v)}{\left(\int_\Omega f(z)dx\right)^p} - \Delta K(z) - \frac{\lambda f(z)}{\left(\int_\Omega f(v)dx\right)^p} =$$

$$K^{''}(z)\Delta(v-z) + \lambda f(z)\left(\frac{1}{\left(\int_\Omega f(z)dx\right)^p} - \frac{1}{\left(\int_\Omega f(v)dx\right)^p}\right) =$$

$$K^{''}(z)\Delta(v-z) + \lambda f(z)\left(\frac{\left(\int_\Omega f(v)dx\right)^p - \left(\int_\Omega f(z)dx\right)^p}{\left(\int_\Omega f(z)dx\right)^p\left(\int_\Omega f(v)dx\right)^p}\right)$$

(Αναφερόμαστε πάντα στο σημείο $(\bar{x},\bar{t})$). Θα ισχύει ότι, $\Delta v > \Delta z$, $\left(\int_\Omega f(v)dx\right)^p - \left(\int_\Omega f(z)dx\right)^p > 0$, $K^{''}(s) > 0$, $f(s) > 0$ και $v_t \leq z_t$, οπότε λαμβάνουμε:

$$0 \geq (v-z)_t > 0$$

το οποίο είναι άτοπο.

2.2.2 Για πολύ ασθενείς λύσεις.

Εστω δύο συναρτήσεις $z = z(x,t)$, $v = v(x,t) \in C((t_1,t_2);L_1(\Omega))$ και ο τελεστής V (σε πολύ ασθενή μορφή):

$$V(z;v) := \tag{2.10}$$

$$\int_\Omega [z\eta]_{t_1}^{t_2} dx - \int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega z\eta_t dxds - \int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega K(z)\Delta\eta\, dxds - \lambda\int_{t_1}^{t_2}\frac{\int_\Omega f(z)\eta dx}{\left(\int_\Omega f(v)dx\right)^p}ds$$

$$\forall\, t_1,t_2 : 0 \le t_1 < t_2 \le T, \quad \forall\, \eta \in C^\infty((t_1,t_2);C_c^\infty(\Omega)).$$

Τότε το (z,v) θα ονομάζεται **διατεταγμένο ζεύγος** για το πρόβλημα (2.1), (πολύ ασθενής μορφή), εάν ικανοποιούνται τα ακόλουθα:

$$V(z;v) < V(v;z), \quad x\in\Omega, \quad t_1 \le t \le t_2, \tag{2.11α'}$$

$$\frac{\partial K(z)}{\partial\hat{n}} + \beta(x)K(z) \le \frac{\partial K(v)}{\partial\hat{n}} + \beta(x)K(v), \quad x\in\partial\Omega, \quad t_1\le t\le t_2, \tag{2.11β'}$$

$$0 \le z(x,0) < v(x,0), \quad x\in\Omega, \tag{2.11γ'}$$

$$\forall\, t_1,t_2 :\ 0\le t_1 < t_2 \le T \quad \text{και} \quad \forall\,\eta\in C^\infty((t_1,t_2);C_c^\infty(\Omega)).$$

(Τονίζουμε ότι το ζεύγος αυτό *δεν είναι κατ' ανάγκη ζεύγος πάνω - κάτω λύσεων* του προβλήματος, αφού σύμφωνα με τον ορισμό του, δεν το συνδέουμε με τις αρχικές συνθήκες της όποιας λύσης μας, οι δε αντίστοιχοι τελεστές δεν είναι εκατέρωθεν του μηδενός, μπορεί δηλαδή να είναι και οι δύο θετικοί ή και οι δύο αρνητικοί).

Θεώρημα 12. *Εστω οι συναρτήσεις $z(x,t)$ και $v(x,t)$, οι οποίες ικανοποιούν τις σχέσεις (2.11). Τότε $z(x,t) < v(x,t)$, $\forall\, x\in\Omega$, $\forall\, t :\ 0 < t < T$.*

Πριν την απόδειξη του θεωρήματος αυτού, πρέπει να παραθέσουμε τους εξής προβληματισμούς:

Από τον ορισμό της πολύ ασθενούς μορφής των εξισώσεών μας, δημιουργείται αναπόφευκτα μία σημαντική δυσκολία στον μαθηματικό χειρισμό αυτών, κυρίως λογω του εμφανιζόμενου όρου $\int_\Omega [z\eta]_{t_1}^{t_2}dx$ στο αριστερό μέλος. Δεν μπορούμε να απαλείψουμε αυτόν, γιατί θα έπρεπε να διατηρήσουμε μέσα στο ολοκλήρωμα την πρώτη χρονική παράγωγο της λύσης. Αυτό όμως δεν δύναται να γίνει αποδεκτό διότι απλούστατα, στην περίπτωση των πολύ ασθενών λύσεων, δεν διασφαλίζεται η ύπαρξη της πρώτης χρονικής παραγώγου.

Μία ιδέα για την αντιμετώπιση της δυσκολίας αυτής είναι, αντί της ίδιας της λύσης, να εμφανίσουμε στην εξίσωση το *Μέσο Όρο Steklov* αυτής. Στην επόμενη παράγραφο ορίζουμε τους μέσους όρους Steklov μιάς συνάρτησης, αναφέρουμε τις βασικές ιδιότητές τους και τέλος διατυπώνουμε την πολύ ασθενή μορφή του προβλήματος βάσει αυτών των μέσων όρων, αποδεικνύοντας συγχρόνως το ισοδύναμο των δύο αυτών ορισμών.

2.2.3 Μέσοι όροι Steklov.

Ορίζουμε τώρα το μέσο όρο Steklov $u_h(x,t)$ για μία συνάρτηση $u(x,t)$, (βλ. [38]):

$$\begin{aligned} &u_h(x,t) = \frac{1}{h}\int_{t-h}^{t} u(x,s)ds \quad ή \quad u_h(x,t) = \frac{1}{h}\int_{t}^{t+h} u(x,s)ds, \\ &0 < h \leq T - t. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Για τη συνάρτηση αυτή, **υπάρχει** η πρώτη χρονική παράγωγος και είναι ίση με:

$$\frac{d}{dt}u_h(x,t) = u_{h,t} = \frac{1}{h}\left(u(x,t) - u(x,t-h)\right). \tag{2.13}$$

Οι μέσοι όροι Steklov έχουν τις παρακάτω κύριες ιδιότητες, τις οποίες και θα χρησιμοποιήσουμε ευρέως στην απόδειξη της έκρηξης των πολύ ασθενών λύσεων.

$(\mathbf{S_1})$ $\lim\limits_{h\to 0} u_h = u$, στον $L_1(\Omega)$, (βλ. [38], σελ.11),

$(\mathbf{S_2})$ $u_{t,h} = \left(\frac{d}{dt}u(x,t)\right)_h = \frac{d}{dt}u_h(x,t) = u_{h,t}$,

$(\mathbf{S_3})$ $(f(u))_h \geq f(u_h)$ όταν $f(u)$ κυρτή, $(f(u))_h \leq f(u_h)$ όταν $f(u)$ κοίλη.

$(\mathbf{S_4})$ $\left(\int_\Omega u dx\right)_h = \int_\Omega u_h dx$,

$(\mathbf{S_5})$ Εάν $v \leq (\geq) u$, τοτε $v_h \leq (\geq) u_h$

Παραθέτουμε την απόδειξη της ιδιότητας (S_3), στην περίπτωση που η $f(u)$ είναι κυρτή. Ανάλογη είναι και η απόδειξη όταν η $f(u)$ είναι κοίλη.

$$
\begin{aligned}
(f(u(x,t)))_h = \frac{1}{h}\int_{t-h}^{t} f(u(x,s))ds &\geq \frac{1}{h}(t-t+h)f\left(\frac{1}{t-t+h}\int_{t-h}^{t} u(x,s)ds\right) \\
&= f\left(\frac{1}{h}\int_{t-h}^{t} u(x,s)ds\right) = f(u_h(x,t)).
\end{aligned}
$$

Οι ιδιότητες S_2, S_4 και S_5 είναι προφανείς.

Η πολύ ασθενής διατύπωση του προβλήματος (2.1) μπορεί επίσης να γραφεί και υπό τη μορφή μέσων όρων Steklov. Θέτοντας $t_1 = t-h, t_2 = t$ (ή $t_1 = t, t_2 = t+h$), πολλαπλασιάζοντας με $h > 0$ και επιλέγοντας σαν δοκιμαστική συνάρτηση την $0 \leq \eta = \eta(x) \in C^\infty(\Omega)$, καταλήγουμε στη μορφή Steklov η οποία είναι ισοδύναμη με την αρχική μορφή.

Υπό τη μορφή μέσων όρων Steklov, ο ανωτέρω ορισμός διαμορφώνεται ισοδύναμα σε:

$$
V(z;v) = \int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega z_t \eta dx ds - \int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega K(z)\Delta\eta dx ds - \lambda\int_{t_1}^{t_2} \frac{\int_\Omega f(z)\eta dx}{\left(\int_\Omega f(v)dx\right)^p} ds,
$$

$$
\forall\, t_1, t_2 : 0 \leq t_1 < t_2 \leq T \quad \text{και} \quad \forall\, \eta \in C^\infty((t_1,t_2); C_c^\infty(\Omega)).
$$

Εάν θέσουμε $t_1 = t-h,\ t_2 = t,\ h \leq T-t$, παίρνουμε:

$$
\begin{aligned}
V(z;v) &= \int_{t-h}^{t}\int_\Omega z_t \eta dx ds - \int_{t-h}^{t}\int_\Omega K(z)\Delta\eta dx ds - \lambda\int_{t-h}^{t} \frac{\int_\Omega f(z)\eta dx}{\left(\int_\Omega f(v)dx\right)^p} ds \\
&= \int_\Omega\int_{t-h}^{t} z_t \eta ds dx - \int_\Omega\int_{t-h}^{t} K(z)\Delta\eta ds dx - \lambda\int_\Omega \eta\left\{\int_{t-h}^{t} \frac{f(z)}{\left(\int_\Omega f(v)dx\right)^p} ds\right\} dx \\
&= \frac{1}{h}\int_\Omega \eta\int_{t-h}^{t} z_t ds dx - \frac{1}{h}\int_\Omega \Delta\eta\int_{t-h}^{t} K(z) ds dx - \lambda\frac{1}{h}\int_\Omega \eta\left\{\int_{t-h}^{t} \frac{f(z)}{\left(\int_\Omega f(v)dx\right)^p} ds\right\} dx \\
&= \int_\Omega \eta z_{t,h} dx - \int_\Omega \Delta\eta\left[K(z)\right]_h dx - \lambda\int_\Omega \eta\left[\frac{f(z)}{\left(\int_\Omega f(v)dx\right)^p}\right]_h dx \\
&= \frac{d}{dt}\int_\Omega \eta z_h dx - \int_\Omega \Delta\eta\left[K(z)\right]_h dx - \lambda\int_\Omega \eta\left[\frac{f(z)}{\left(\int_\Omega f(v)dx\right)^p}\right]_h dx \qquad (2.14)
\end{aligned}
$$

όπου η συνάρτηση $\eta = \eta(x,t)$ δεν εξαρτάται από την παράμετρο h.

Οπως αναφέραμε προηγουμένως, η σχέση αυτή είναι ισοδύναμη με την αρχική.

$$V(z;v) :=$$

$$\int_\Omega [z\eta]_{t_1}^{t_2} dx - \int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega z\eta_t dxds - \int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega K(z)\Delta\eta\, dxds - \lambda\int_{t_1}^{t_2}\frac{\int_\Omega f(z)\eta dx}{\left(\int_\Omega f(v)dx\right)^p}ds.$$

Επανερχόμαστε τώρα στην απόδειξη της αρχής σύγκρισης, χρησιμοποιώντας τους μέσους όρους Steklov των λύσεων.

2.2.4 Απόδειξη του θεωρήματος 12

Έχουμε:

$$V(z;v) < V(v;z) \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \eta z_h dx - \int_\Omega \Delta\eta\left[K(z)\right]_h dx - \lambda\int_\Omega \eta\left[\frac{f(z)}{\left(\int_\Omega f(v)dx\right)^p}\right]_h dx <$$

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \eta v_h dx - \int_\Omega \Delta\eta\left[K(v)\right]_h dx - \lambda\int_\Omega \eta\left[\frac{f(v)}{\left(\int_\Omega f(z)dx\right)^p}\right]_h dx$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\int_\Omega \eta z_h dx - \frac{d}{dt}\int_\Omega \eta v_h dx + \int_\Omega \Delta\eta\left[K(v)\right]_h dx - \int_\Omega \Delta\eta\left[K(z)\right]_h dx +$$

$$+\lambda\int_\Omega \eta\left[\frac{f(v)}{\left(\int_\Omega f(z)dx\right)^p}\right]_h dx - \lambda\int_\Omega \eta\left[\frac{f(z)}{\left(\int_\Omega f(v)dx\right)^p}\right]_h dx < 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\int_\Omega \eta(z-v)_h dx + \int_\Omega \Delta\eta\left[K(v)-K(z)\right]_h dx +$$

$$+\lambda\int_\Omega \eta\left[\frac{f(v)}{\left(\int_\Omega f(z)dx\right)^p} - \frac{f(z)}{\left(\int_\Omega f(v)dx\right)^p}\right]_h dx < 0.$$

Επειδή για τις αρχικές συνθήκες υποθέσαμε ότι $z_0(x) < v_0(x)$ εντός του Ω, έστω ότι σε κάποια χρονική $t = t_1$ υπάρχει κάποιο "μικρό" υποσύνολο $\omega \subset\subset \Omega$ με $meas(\omega) > 0$ στο οποίο έχουμε $z(x,t) = v(x,t)$ και $z_h(x,t) < v_h(x,t)$, ενώ στο σύνολο Ω/ω :

$z(x,t) < v(x,t)$ για κάθε $0 \leq t \leq t_1$. Είναι προφανές, ότι καθώς $h \to 0$ θα έχουμε ότι $z_h \to z$ και $v_h \to v$ με $z = v$. Η παραπάνω ανισότητα γίνεται:

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega/\omega} \eta(z-v)_h dx + \frac{d}{dt}\int_{\omega} \eta(z-v)_h dx + \int_{\Omega/\omega} \Delta\eta \left[K(v) - K(z)\right]_h dx +$$

$$+\lambda \int_{\omega} \eta \left[\frac{f(v)\left(\int_\Omega f(v)dx\right)^p - f(z)\left(\int_\Omega f(z)dx\right)^p}{\left(\int_\Omega f(z)dx\right)^p\left(\int_\Omega f(v)dx\right)^p}\right]_h dx < 0.$$

Όπως στο προηγούμενο θεώρημα, επιλέγουμε μία δοκιμαστική συνάρτηση $\eta(x,t)$ τέτοια ώστε $\eta = 0$, $\frac{\partial \eta}{\partial \hat{n}} = 0$ στο $\partial\Omega$, $\eta = 0$ στο Ω/ω και $\eta > 0$ στο ω. Η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$\frac{d}{dt}\int_{\omega} \eta(z-v)_h dx + \int_{\omega} \Delta\eta \left[K(v) - K(z)\right]_h dx +$$

$$+\lambda \int_{\omega} \eta \left[\frac{f(v)\left(\int_\Omega f(v)dx\right)^p - f(z)\left(\int_\Omega f(z)dx\right)^p}{\left(\int_\Omega f(z)dx\right)^p\left(\int_\Omega f(v)dx\right)^p}\right]_h dx < 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{h}\int_{\omega} \eta \left\{(z-v)(x,t_1) - (z-v)(x,t_1-h)\right\} dx + \int_{\omega} \Delta\eta \left[K(v) - K(z)\right]_h dx +$$

$$+\lambda \int_{\omega} \eta \left[\frac{f(v)\left(\int_\Omega f(v)dx\right)^p - f(z)\left(\int_\Omega f(z)dx\right)^p}{\left(\int_\Omega f(z)dx\right)^p\left(\int_\Omega f(v)dx\right)^p}\right]_h dx < 0$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{h}\int_{\omega} \eta(z-v)(x,t_1-h) dx + \int_{\omega} \Delta\eta \left[K(v) - K(z)\right]_h dx +$$

$$+\lambda \int_{\omega} \eta \left[\frac{f(v)\left(\int_\Omega f(v)dx\right)^p - f(z)\left(\int_\Omega f(z)dx\right)^p}{\left(\int_\Omega f(z)dx\right)^p\left(\int_\Omega f(v)dx\right)^p}\right]_h dx < 0.$$

Για $h > 0$ έχουμε $z(x,t_1-h) < v(x,t_1-h) \Rightarrow (z-v)(x,t_1-h) < 0$, οπότε, καθώς $h \to 0$, ο όρος $-\frac{1}{h}\int_\omega \eta(z-v)(x,t_1-h)dx$ παραμένει μη αρνητικός. Παρομοίως, καθώς $h \to 0$, καθένας από τους υπόλοιπους όρους τείνει:

$$\int_{\omega} \Delta\eta \left[K(v) - K(z)\right]_h dx \to 0,$$

(διότι $\left[K(v) - K(z)\right]_h \underset{h\to 0}{\to} K(v) - K(z)$ και $v = z \Rightarrow K(v) = K(z)$),

$$\int_{\omega} \eta \left[\frac{f(v)\left(\int_\Omega f(v)dx\right)^p - f(z)\left(\int_\Omega f(z)dx\right)^p}{\left(\int_\Omega f(z)dx\right)^p\left(\int_\Omega f(v)dx\right)^p}\right]_h dx$$

$$\to \int_\omega \eta \frac{f(v)\left(\int_\Omega f(v)dx\right)^p - f(z)\left(\int_\Omega f(z)dx\right)^p}{\left(\int_\Omega f(z)dx\right)^p\left(\int_\Omega f(v)dx\right)^p}dx$$

$$= \int_\omega \eta \frac{f(v)\left\{\left(\int_\Omega f(v)dx\right)^p - \left(\int_\Omega f(z)dx\right)^p\right\}}{\left(\int_\Omega f(z)dx\right)^p\left(\int_\Omega f(v)dx\right)^p}dx$$

$$= \int_\omega \eta \frac{f(v)\left\{\left(\int_{\Omega/\omega} f(v)dx\right)^p + \left(\int_\omega f(v)dx\right)^p - \left(\int_{\Omega/\omega} f(z)dx\right)^p - \left(\int_\omega f(z)dx\right)^p\right\}}{\left(\int_\Omega f(z)dx\right)^p\left(\int_\Omega f(v)dx\right)^p}dx$$

$$= \int_\omega \eta \frac{f(v)\left\{\left(\int_{\Omega/\omega} f(v)dx\right)^p - \left(\int_{\Omega/\omega} f(z)dx\right)^p\right\}}{\left(\int_\Omega f(z)dx\right)^p\left(\int_\Omega f(v)dx\right)^p}dx > 0.$$

(διότι $\left(\int_{\Omega/\omega} f(v)dx\right)^p > \left(\int_{\Omega/\omega} f(z)dx\right)^p$).

Αρα, καθώς $h \to 0$ έχουμε:

$$0 < \frac{d}{dt}\int_\omega \eta(z-v)_h dx + \int_\omega \Delta\eta\left[K(v) - K(z)\right]_h dx +$$

$$+\lambda \int_\omega \eta \left[\frac{f(v)\left(\int_\Omega f(v)dx\right)^p - f(z)\left(\int_\Omega f(z)dx\right)^p}{\left(\int_\Omega f(z)dx\right)^p\left(\int_\Omega f(v)dx\right)^p}\right]_h dx < 0,$$

το οποίο είναι άτοπο.

2.3 Ύπαρξη και μοναδικότητα της λύσης για το μη-τοπικό πρόβλημα Διήθησης σε πολύ ασθενή μορφή

Πρόταση 13. *(Τοπική ύπαρξη και μοναδικότητα). Εάν η συνάρτηση f ικανοποιεί τις (1.10β′) και (1.10γ′), είναι Lipschitz συνεχής, η λύση u ορίζεται στο $\Omega_T = \Omega \times (0,T)$, με u, $K(u)$, $f(u) \in L_1(\Omega_T)$ και $u_0(x) \geq 0$, με u_0 όχι ταυτοτικά μηδέν και με συμπαγή φορέα, τότε υπάρχει μία μοναδική πολύ ασθενής λύση $u(x,t;\lambda)$ για το πρόβλημα (2.1) στον $L_1(\Omega_T)$ για κάθε $\lambda > 0$ και για κάποιο $T > 0$.*

Η απόδειξη στηρίζεται στη χρήση των ζευγών πάνω - κάτω λύσεων της προηγούμενης παραγράφου 2.1.3. (βλέπε και [40, 98]).

Θεωρούμε δύο επαναληπτικά σχήματα $\underline{u}_n, \bar{u}_n$, με $\underline{u}_0 = Z$ και $\bar{u}_0 = V$ σύμφωνα με τις παρακάτω σχέσεις:

$$V(\underline{u}_n; \bar{u}_n) :=$$
$$\int_\Omega [\underline{u}_n \eta]_0^t dx - \int_0^t \int_\Omega \underline{u}_n \eta_t dx ds - \int_0^t \int_\Omega K(\underline{u}_n) \Delta\eta dx ds - \lambda \int_0^t \frac{\int_\Omega f(\underline{u}_{n-1})\eta dx}{\left(\int_\Omega f(\bar{u}_{n-1}) dx\right)^p} ds = 0$$

και

$$V(\bar{u}_n; \underline{u}_n) :=$$
$$\int_\Omega [\bar{u}_n \eta]_0^t dx - \int_0^t \int_\Omega \bar{u}_n \eta_t dx ds - \int_0^t \int_\Omega K(\bar{u}_n) \Delta\eta dx ds - \lambda \int_0^t \frac{\int_\Omega f(\bar{u}_{n-1})\eta dx}{\left(\int_\Omega f(\underline{u}_{n-1}) dx\right)^p} ds = 0,$$

και κατασκευάζουμε δύο μονότονες ακολουθίες που συγκλίνουν στη λύση του προβλήματος (2.1).

Πρόταση 14. *Εστω $(Z;V)$, $Z \leq V$, ένα ζεύγος πάνω - κάτω λύσεων της (2.1) και $\underline{u}_n, \bar{u}_n$ ικανοποιούν τις παραπάνω σχέσεις για $n = 1,2,3,...$ με $\underline{u}_0 = Z$ και $\bar{u}_0 = V$, και αρχικές συνθήκες $\underline{u}_n(x,0) = \bar{u}_n(x,0) = u_0(x)$. Τότε θα έχουμε:*

$$\underline{u}_0 \leq \underline{u}_1 \leq ... \leq \underline{u}_{n-1} \leq \underline{u}_n \leq ..... \leq \bar{u}_n \leq \bar{u}_{n-1} \leq ... \leq \bar{u}_1 \leq \bar{u}_0.$$

Απόδειξη. Με τη μέθοδο της επαγωγής. □

1΄ βήμα. Μονοτονία της $\underline{u}_n, \bar{u}_n$. Αληθεύει για $n=1$

$$\int_\Omega [\underline{u}_1\eta]_0^t dx - \int_0^t\int_\Omega \underline{u}_1\eta_t dxds - \int_0^t\int_\Omega K(\underline{u}_1)\Delta\eta dxds - \lambda\int_0^t \frac{\int_\Omega f(\underline{u}_0)\eta dx}{\left(\int_\Omega f(\bar{u}_0)dx\right)^p}ds = 0$$
$$\int_\Omega [\underline{u}_0\eta]_0^t dx - \int_0^t\int_\Omega \underline{u}_0\eta_t dxds - \int_0^t\int_\Omega K(\underline{u}_0)\Delta\eta dxds - \lambda\int_0^t \frac{\int_\Omega f(\underline{u}_0)\eta dx}{\left(\int_\Omega f(\bar{u}_0)dx\right)^p}ds \le 0$$
$$\Rightarrow \int_\Omega [\underline{u}_1\eta]_0^t dx - \int_0^t\int_\Omega \underline{u}_1\eta_t dxds - \int_0^t\int_\Omega K(\underline{u}_1)\Delta\eta dxds \ge$$
$$\int_\Omega [\underline{u}_0\eta]_0^t dx - \int_0^t\int_\Omega \underline{u}_0\eta_t dxds - \int_0^t\int_\Omega K(\underline{u}_0)\Delta\eta dxds,$$

(διότι $\underline{u}_0 = Z$ και $\bar{u}_0 = V$ είναι ένα πάνω - κάτω ζεύγος λύσεων και $\underline{u}_1(x,0) = \underline{u}_0(x,0) = u_0(x)$).

Χρησιμοποιώντας την αρχή σύγκρισης σε πολύ ασθενή μορφή για το απλό πρόβλημα διήθησης, παίρνουμε $\underline{u}_1 \ge \underline{u}_0$. (Ομοίως $\bar{u}_1 \le \bar{u}_0$).

Υποθέτουμε ότι αληθεύει για $k = n-1$, ($\underline{u}_{n-1} \ge \underline{u}_{n-2}$). Θα δείξουμε ότι αληθεύει για $k=n$:

$$\int_\Omega [\underline{u}_n\eta]_0^t dx - \int_0^t\int_\Omega \underline{u}_n\eta_t dxds - \int_0^t\int_\Omega K(\underline{u}_n)\Delta\eta dxds - \lambda\int_0^t \frac{\int_\Omega f(\underline{u}_{n-1})\eta dx}{\left(\int_\Omega f(\bar{u}_{n-1})dx\right)^p}ds$$
$$= \int_\Omega \left[\underline{u}_{n-1}\eta\right]_0^t dx - \int_0^t\int_\Omega \underline{u}_{n-1}\eta_t dxds - \int_0^t\int_\Omega K(\underline{u}_{n-1})\Delta\eta dxds - \lambda\int_0^t \frac{\int_\Omega f(\underline{u}_{n-2})\eta dx}{\left(\int_\Omega f(\bar{u}_{n-2})dx\right)^p}ds$$
$$\Rightarrow \left\{\int_\Omega [\underline{u}_n\eta]_0^t dx - \int_0^t\int_\Omega \underline{u}_n\eta_t dxds - \int_0^t\int_\Omega K(\underline{u}_n)\Delta\eta dxds\right\}$$
$$- \left\{\int_\Omega \left[\underline{u}_{n-1}\eta\right]_0^t dx - \int_0^t\int_\Omega \underline{u}_{n-1}\eta_t dxds - \int_0^t\int_\Omega K(\underline{u}_{n-1})\Delta\eta dxds\right\}$$
$$=\lambda\int_0^t \frac{\int_\Omega f(\underline{u}_{n-1})\eta dx}{\left(\int_\Omega f(\bar{u}_{n-1})dx\right)^p}ds - \lambda\int_0^t \frac{\int_\Omega f(\underline{u}_{n-2})\eta dx}{\left(\int_\Omega f(\bar{u}_{n-2})dx\right)^p}ds \ge 0,$$

λόγω των ανισοτήτων,

$$\underline{u}_{n-1} \ge \underline{u}_{n-2} \Rightarrow f(\underline{u}_{n-1}) \ge f(\underline{u}_{n-2}) \Rightarrow \int_\Omega f(\underline{u}_{n-1})\eta dx \ge \int_\Omega f(\underline{u}_{n-2})\eta dx > 0,$$
$$\bar{u}_{n-1} \le \bar{u}_{n-2} \Rightarrow f(\bar{u}_{n-1}) \le f(\bar{u}_{n-2}) \Rightarrow \frac{1}{\left(\int_\Omega f(\bar{u}_{n-1})dx\right)^p} \ge \frac{1}{\left(\int_\Omega f(\bar{u}_{n-2})dx\right)^p} > 0,$$

και πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη,

$$\Rightarrow \frac{\int_\Omega f(\underline{u}_{n-1})\eta dx}{\left(\int_\Omega f(\bar{u}_{n-1})dx\right)^p} \geq \frac{\int_\Omega f(\underline{u}_{n-2})\eta dx}{\left(\int_\Omega f(\bar{u}_{n-2})dx\right)^p}.$$

Εφαρμόζοντας πάλι την αρχή σύγκρισης, έχουμε $\underline{u}_n \geq \underline{u}_{n-1}$. (Ομοίως $\bar{u}_n \leq \bar{u}_{n-1}$).

2΄ βήμα. $\underline{u}_n \leq \bar{u}_n$, ομοίως με τη μέθοδο της επαγωγής.
Για $n = 1$ έχουμε:

$$\int_\Omega [\underline{u}_1\eta]_0^t dx - \int_0^t\int_\Omega \underline{u}_1\eta_t dxds - \int_0^t\int_\Omega K(\underline{u}_1)\Delta\eta dxds - \lambda\int_0^t \frac{\int_\Omega f(\underline{u}_0)\eta dx}{\left(\int_\Omega f(\bar{u}_0)dx\right)^p}ds = 0,$$

και

$$\int_\Omega [\bar{u}_1\eta]_0^t dx - \int_0^t\int_\Omega \bar{u}_1\eta_t dxds - \int_0^t\int_\Omega K(\bar{u}_1)\Delta\eta dxds - \lambda\int_0^t \frac{\int_\Omega f(\bar{u}_0)\eta dx}{\left(\int_\Omega f(\underline{u}_0)dx\right)^p}ds = 0.$$

Άρα θα ισχύει:

$$\begin{aligned}&\left\{\int_\Omega [\underline{u}_1\eta]_0^t dx - \int_0^t\int_\Omega \underline{u}_1\eta_t dxds - \int_0^t\int_\Omega K(\underline{u}_1)\Delta\eta dxds\right\}\\ &-\left\{\int_\Omega [\bar{u}_1\eta]_0^t dx - \int_0^t\int_\Omega \bar{u}_1\eta_t dxds - \int_0^t\int_\Omega K(\bar{u}_1)\Delta\eta dxds\right\}\\ =&\lambda\int_0^t \frac{\int_\Omega f(\underline{u}_0)\eta dx}{\left(\int_\Omega f(\bar{u}_0)dx\right)^p}ds - \lambda\int_0^t \frac{\int_\Omega f(\bar{u}_0)\eta dx}{\left(\int_\Omega f(\underline{u}_0)dx\right)^p}ds \leq 0.\end{aligned}$$

Λόγω της $u_0 \leq \bar{u}_0$ και από την αρχή σύγκρισης, έχουμε $\underline{u}_1 \leq \bar{u}_1$.

Υποθέτουμε ότι αληθεύει για $k = n-1$, ($\underline{u}_{n-1} \leq \bar{u}_{n-1}$). Θα δείξουμε ότι αληθεύει για $k = n$:

$$\int_\Omega [\underline{u}_n\eta]_0^t dx - \int_0^t\int_\Omega \underline{u}_n\eta_t dxds - \int_0^t\int_\Omega K(\underline{u}_n)\Delta\eta dxds - \lambda\int_0^t \frac{\int_\Omega f(\underline{u}_{n-1})\eta dx}{\left(\int_\Omega f(\bar{u}_{n-1})dx\right)^p}ds = 0,$$

και

$$\int_\Omega [\bar{u}_n\eta]_0^t dx - \int_0^t\int_\Omega \bar{u}_n\eta_t dxds - \int_0^t\int_\Omega K(\bar{u}_n)\Delta\eta dxds - \lambda\int_0^t \frac{\int_\Omega f(\bar{u}_{n-1})\eta dx}{\left(\int_\Omega f(\underline{u}_{n-1})dx\right)^p}ds = 0.$$

Άρα θα έχουμε,

$$\begin{aligned}&\left\{\int_\Omega [\underline{u}_n\eta]_0^t dx - \int_0^t\int_\Omega \underline{u}_n\eta_t dxds - \int_0^t\int_\Omega K(\underline{u}_n)\Delta\eta dxds\right\}\\ &-\left\{\int_\Omega [\bar{u}_n\eta]_0^t dx - \int_0^t\int_\Omega \bar{u}_n\eta_t dxds - \int_0^t\int_\Omega K(\bar{u}_n)\Delta\eta dxds\right\}\\ =&\lambda\int_0^t \frac{\int_\Omega f(\underline{u}_{n-1})\eta dx}{\left(\int_\Omega f(\bar{u}_{n-1})dx\right)^p}ds - \lambda\int_0^t \frac{\int_\Omega f(\bar{u}_{n-1})\eta dx}{\left(\int_\Omega f(\underline{u}_{n-1})dx\right)^p}ds \le 0.\end{aligned}$$

Λόγω της $\underline{u}_{n-1} \le \bar{u}_{n-1}$ και από την αρχή σύγκρισης, παίρνουμε $\underline{u}_n \le \bar{u}_n$.

3′ βήμα. $\underline{u}_n \to \underline{u}$ και $\bar{u}_n \to \bar{u}$ καθώς $n \to \infty$ και $\underline{u} \le \bar{u}$.

Απόδειξη. Είναι άμεση συνέπεια του ότι το ζεύγος $(Z;V)$ είναι φραγμένο.

□

4′ βήμα. Οι συναρτήσεις $\underline{u}, \bar{u}$ είναι πολύ ασθενείς λύσεις της: $V(\underline{u};\bar{u}) = V(\bar{u};\underline{u}) = 0$, $x \in \Omega$, $t > 0$.

Απόδειξη. Lebesque, $\underline{u}_n \to \underline{u}, \quad \bar{u}_n \to \bar{u}$.

□

5′ βήμα. Έχουμε $\underline{u} \le \bar{u}$. Αποδεικνύουμε κατωτέρω ότι $\underline{u} \ge \bar{u}$, βάσει του παρακάτω Λήμματος το οποίο και αποδεικνύουμε:

Λήμμα 15. *Εάν η συνάρτηση $f(s)$ είναι Lipschitz συνεχής, τότε θα ισχύει $\underline{u} \ge \bar{u}$. Σημειώνουμε ότι μας αρκεί να είναι Lipschitz συνεχής μόνο από τη μία πλευρά, δηλαδή $f(a+b) - f(b) \le La$ όπου L είναι μία θετική σταθερά και $0 < a < R$ για κάποιο R. Το ίδιο αληθεύει και για την συνάρτηση $K(s)$.*

Απόδειξη. (Ακολουθούμε παρόμοια τακτική όπως στα [39, 98]). Έστω $\underline{u}^\varepsilon = \underline{u} + \varepsilon e^{\sigma t} > \underline{u}$ για κάποιο $\varepsilon > 0$. Στην πραγματικότητα χρησιμοποιούμε $0 < \varepsilon \ll 1, \quad \varepsilon e^{\sigma t} < \varepsilon e^{\sigma T} = R$ και L συγκεκριμένο. Υπολογίζουμε τον κατωτέρω τελεστή:

$$V(\underline{u}^\varepsilon;\bar{u}) = \int_\Omega [\underline{u}^\varepsilon\eta]_{t_1}^{t_2} dx - \int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega \underline{u}^\varepsilon\eta_t dxds - \int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega K(\underline{u}^\varepsilon)\Delta\eta dxds - \\ -\lambda\int_{t_1}^{t_2} \frac{\int_\Omega f(\underline{u}^\varepsilon)\eta dx}{\left(\int_\Omega f(\bar{u})dx\right)^p}ds$$

$$(\ \eta = 0, \frac{\partial \eta}{\partial \hat{n}} = 0 \text{ για } x \in \partial\Omega, t > 0 \text{ και } \eta \geq 0 \text{ για } x \in \Omega, t > 0)$$

$$= \int_\Omega \left[\eta \underline{u} + \eta \varepsilon e^{\sigma t}\right]_{t_1}^{t_2} dx - \int_{t_1}^{t_2} \int_\Omega (\underline{u} + \varepsilon e^{\sigma t}) \eta_t dx ds - \int_{t_1}^{t_2} \int_\Omega K(\underline{u} + \varepsilon e^{\sigma t}) \Delta \eta dx ds$$

$$-\lambda \int_{t_1}^{t_2} \frac{\int_\Omega f(\underline{u} + \varepsilon e^{\sigma t}) \eta dx}{\left(\int_\Omega f(\bar{u}) dx\right)^p} ds \geq$$

$$\geq \int_\Omega [\eta \underline{u}]_{t_1}^{t_2} dx + \int_\Omega \left[\eta \varepsilon e^{\sigma t}\right]_{t_1}^{t_2} dx - \int_{t_1}^{t_2} \int_\Omega \underline{u} \eta_t dx ds - \int_{t_1}^{t_2} \int_\Omega \varepsilon e^{\sigma t} \eta_t dx ds -$$

$$- \int_{t_1}^{t_2} \int_\Omega K(\underline{u}) \Delta \eta dx ds - \int_{t_1}^{t_2} \int_\Omega L \varepsilon e^{\sigma t} \Delta \eta dx ds -$$

$$-\lambda \int_{t_1}^{t_2} \frac{\int_\Omega f(\underline{u}) \eta dx}{\left(\int_\Omega f(\bar{u}) dx\right)^p} ds - \lambda \int_{t_1}^{t_2} \frac{\int_\Omega L \varepsilon e^{\sigma t} \eta dx}{\left(\int_\Omega f(\bar{u}) dx\right)^p} ds =$$

$$= V(\underline{u}; \bar{u}) + \int_\Omega \eta(t_2) \varepsilon e^{\sigma t_2} dx - \int_\Omega \eta(t_1) \varepsilon e^{\sigma t_1} dx - \varepsilon \int_{t_1}^{t_2} e^{\sigma t} \frac{d}{dt} \left(\int_\Omega \eta dx \right) ds -$$

$$-L\varepsilon \int_{t_1}^{t_2} e^{\sigma t} \left(\int_\Omega \Delta \eta dx \right) ds - \lambda L \varepsilon \int_{t_1}^{t_2} \frac{e^{\sigma t}}{\left(\int_\Omega f(\bar{u}) dx\right)^p} \left(\int_\Omega \eta dx \right) ds = V(\underline{u}; \bar{u}) + A,$$

όπου:

$$A = \int_\Omega \eta(t_2) \varepsilon e^{\sigma t_2} dx - \int_\Omega \eta(t_1) \varepsilon e^{\sigma t_1} dx - \varepsilon \int_{t_1}^{t_2} e^{\sigma t} \frac{d}{dt} \left(\int_\Omega \eta dx \right) ds -$$

$$-L\varepsilon \int_{t_1}^{t_2} e^{\sigma t} \left(\int_\Omega \Delta \eta dx \right) ds - \lambda L \varepsilon \int_{t_1}^{t_2} \frac{e^{\sigma t}}{\left(\int_\Omega f(\bar{u}) dx\right)^p} \left(\int_\Omega \eta dx \right) ds.$$

Έχουμε:

$$\max_{(t_1,\, t_2)} \frac{d}{dt} \left(\int_\Omega \eta dx \right) = k_1 < \infty,$$

$$\max_{(t_1,\, t_2)} \int_\Omega \Delta \eta dx = k_2 < \infty,$$

$$\max_{(t_1,\, t_2)} \int_\Omega \eta dx = k_3 < \infty,$$

$$\min_{(t_1,\, t_2)} \left(\int_\Omega f(\bar{u}) dx \right)^p = k_4 > 0, \ (\text{διότι } f(\bar{u}) \not\equiv 0).$$

Επίσης ισχύει,

$$\int_\Omega \eta(x, t_2) \varepsilon e^{\sigma t_2} dx - \int_\Omega \eta(x, t_1) \varepsilon e^{\sigma t_1} dx = \varepsilon e^{\sigma t_2} \int_\Omega \eta(x, t_2) dx - \varepsilon e^{\sigma t_1} \int_\Omega \eta(x, t_1) dx =$$

$$= \int_\Omega \eta(x,t_2)dx \left\{ \varepsilon e^{\sigma t_2} - \varepsilon e^{\sigma t_1} \frac{\int_\Omega \eta(x,t_1)dx}{\int_\Omega \eta(x,t_2)dx} \right\},$$

όπου,

$$\frac{\int_\Omega \eta(x,t_1)dx}{\int_\Omega \eta(x,t_2)dx} = k_5 < \infty, \quad \int_\Omega \eta(x,t_2)dx = k_6 < \infty.$$

Με βάση τα ανωτέρω θα έχουμε:

$$A \geq k_6 \varepsilon (e^{\sigma t_2} - k_5 e^{\sigma t_1}) - \varepsilon k_1 \int_{t_1}^{t_2} e^{\sigma t} ds - L\varepsilon k_2 \int_{t_1}^{t_2} e^{\sigma t} ds - \lambda L \varepsilon \frac{k_3}{k_4} \int_{t_1}^{t_2} e^{\sigma t} ds =$$

$$= k_6 \varepsilon e^{\sigma t_2} - k_6 \varepsilon k_5 e^{\sigma t_1} - \frac{\varepsilon k_1}{\sigma} e^{\sigma t_2} + \frac{\varepsilon k_1}{\sigma} e^{\sigma t_1} - \frac{L\varepsilon k_2}{\sigma} e^{\sigma t_2} + \frac{L\varepsilon k_2}{\sigma} e^{\sigma t_1} -$$

$$- \frac{\lambda L \varepsilon k_3}{\sigma k_4} e^{\sigma t_2} + \frac{\lambda L \varepsilon k_3}{\sigma k_4} e^{\sigma t_1} =$$

$$= e^{\sigma t_2} \left\{ k_6 \varepsilon - k_6 \varepsilon k_5 e^{\sigma(t_1 - t_2)} - \frac{\varepsilon k_1}{\sigma} + \frac{\varepsilon k_1}{\sigma} e^{\sigma(t_1-t_2)} - \frac{L\varepsilon k_2}{\sigma} + \frac{L\varepsilon k_2}{\sigma} e^{\sigma(t_1-t_2)} - \right.$$

$$\left. - \frac{\lambda L \varepsilon k_3}{\sigma k_4} + \frac{\lambda L \varepsilon k_3}{\sigma k_4} e^{\sigma(t_1-t_2)} \right\}.$$

Επειδή $t_1 - t_2 < 0$ και η παράμετρος σ είναι αυθαίρετη, μπορούμε να επιλέξουμε το σ τόσο μεγάλο ώστε οι ανωτέρω παρενθέσεις να καταστούν θετικές. Επειδή $e^{\sigma t_2} > 0$, μπορούμε να λάβουμε αυστηρές πλέον ανισότητες:

$$\left. \begin{array}{l} V(\underline{u}^\varepsilon; \bar{u}) > V(\underline{u}; \bar{u}) \\ V(\underline{u}; \bar{u}) = V(\bar{u}; \underline{u}) \end{array} \right\} \Rightarrow V(\underline{u}^\varepsilon; \bar{u}) > V(\bar{u}; \underline{u})$$

Επειδή $\underline{u}^\varepsilon(x,0) = \underline{u}(x,0) + \varepsilon e^{\sigma \cdot 0} = \underline{u}(x,0) + \varepsilon > \bar{u}(x,0)$, από το Θεώρημα 12 συμπεραίνουμε ότι: $\underline{u}^\varepsilon > \bar{u} \Rightarrow \underline{u} + \varepsilon e^{\sigma t} > \bar{u}$, οπότε καθώς $\varepsilon \to 0$ παίρνουμε $\underline{u} \geq \bar{u}$.

Η σχέση αυτή μαζί με την $\underline{u} \leq \bar{u}$ μας δίνει $\underline{u} = \bar{u} = u$. □

Μερικά σχόλια - συμπεράσματα, επί της υποενότητας (2.2.1).

Θέλουμε να επισημάνουμε ότι το Θεώρημα (11) αναφέρεται και ισχύει για τη συγκεκριμένη μορφή της εξίσωσης (2.6α′) του προβλήματος (2.6), δηλαδή την:

$$u_t = \Delta K(u) + \frac{\lambda f(u)}{\left(\int_\Omega f(u)dx\right)^p}, \quad x \in \Omega, \quad t > 0. \tag{2.15}$$

Ειδικότερα, μελετώντας το μη τοπικό πρόβλημα (2.6) και με βάση κυρίως την εμφάνιση του συναρτησιακού $\Phi u = \int_\Omega f(u)dx$, επινοήθηκαν οι τελεστές,

$$S(z;v) = z_t - \Delta K(z) - \frac{\lambda f(z)}{\left(\int_\Omega f(v)dx\right)^p} \text{ και } S(v;z) = v_t - \Delta K(v) - \frac{\lambda f(v)}{\left(\int_\Omega f(z)dx\right)^p}.$$

Το αληθές του Θεωρήματος (11), δηλαδή το ότι, “ *εάν ισχύουν οι σχέσεις*:

$$S(z;v) < S(v;z),\ x \in \Omega,\ t \in (0,T), \tag{2.16α$'$}$$

$$z(x,t) \leq v(x,t),\ x \in \partial\Omega,\ t \in (0,T), \tag{2.16β$'$}$$

$$0 \leq z(x,0) < v(x,0),\ x \in \Omega, \tag{2.16γ$'$}$$

τότε $z < v,\ x \in \partial\Omega,\ t \in (0,T)$ ”, από καθαρά πλευράς υπολογισμών, βασίστηκε κυρίως στην παρακάτω τελική ανισότητα, όπως προκύπτει από την απόδειξη του θεωρήματος αυτού:

$$0 \geq v_t - z_t > K''(z)\Delta(v-z) + \lambda f(z)\left(\frac{\left(\int_\Omega f(v)dx\right)^p - \left(\int_\Omega f(z)dx\right)^p}{\left(\int_\Omega f(z)dx\right)^p\left(\int_\Omega f(v)dx\right)^p}\right). \tag{2.17}$$

Αναφερόμαστε πάντα στο σημείο $(\bar{x},\bar{t}))$, όπου, έστω, για πρώτη φορά η συνάρτηση $z(x,t)$ θα εφάπτεται της συνάρτησης $v(x,t)$. Μιλάμε για επαφή επειδή οι συναρτήσεις $z(x,t)$ και $v(x,t)$ είναι λείες.
Θα ισχύει ότι, $\Delta v > \Delta z$, οπότε το άτοπο θα προκύψει από το πρόσημο της:

$$\left(\int_\Omega f(v)dx\right)^p - \left(\int_\Omega f(z)dx\right)^p,$$

και από το πρόσημο και μονοτονία των:

$$K''(s), \text{ και } f(s).$$

Αν και οι τρεις αυτές ποσότητες είναι θετικές (ή μη αρνητικές) και η $f(s)$ αύξουσα, τότε θα προκύψει άτοπο, που θα αποδεικνύει το αληθές του θεωρήματος.

Στην περίπτωση του προβλήματος που εξετάζουμε, και οι τρεις ποσότητες είναι θετικές. Επομένως το Θεώρημα (11) ισχύει.

Τώρα, για την καλύτερη κατανόηση της σύνδεσης των τελεστών του ζεύγους πάνω - κάτω συναρτήσεων με τη μορφή της εξίσωσης (2.6α′), εξετάζουμε και άλλες μορφές εξισώσεων που περιέχουν συναρτησιακή εξάρτηση.

Α) Εστω ότι η συνάρτηση $f(s)$ είναι φθίνουσα, τότε θα έχουμε,

$$\left(\int_{\Omega} f(v)dx\right)^p - \left(\int_{\Omega} f(z)dx\right)^p < 0,$$

δεν προκύπτει άτοπο, και η χρησιμοποίηση του ζεύγους πάνω - κάτω λύσεων δεν είναι δυνατή. **Αντιθέτως**, στην περίπτωση αυτή μπορεί να εφαρμοσθεί χωρίς πρόβλημα η κλασσική έννοια των πάνω - κάτω λύσεων, με αντίστοιχους τελεστές τους,

$$S(z) = z_t - \Delta K(z) - \frac{\lambda f(z)}{\left(\int_{\Omega} f(z)dx\right)^p}. \qquad (\text{Αντίστοιχα για τον } S(v)).$$

Η κρίσιμη ανισότητα (2.17) θα γινόταν,

$$0 \geq v_t - z_t > K''(z)\Delta(v - z) + \lambda f(z) \left(\frac{\left(\int_{\Omega} f(z)dx\right)^p - \left(\int_{\Omega} f(v)dx\right)^p}{\left(\int_{\Omega} f(z)dx\right)^p \left(\int_{\Omega} f(v)dx\right)^p} \right),$$

η διαφορά $\left(\int_{\Omega} f(z)dx\right)^p - \left(\int_{\Omega} f(v)dx\right)^p$ θα ήταν θετική και θα οδηγόμαστε σε άτοπο.

Β) Η συνάρτηση $K(s)$ να μην είναι κυρτή (convex) αλλά να είναι κοίλη (concave). Τότε στην ανισότητα (2.17) ο όρος $K''(z)$ θα ήταν αρνητικός, και δεν θα οδηγούμαστε σε άτοπο.

Γ) Το κλάσμα στο δεύτερο μέλος της εξίσωσης (2.6α′) να είχε αρνητικό πρόσημο. Είναι εύκολο να συμπεράνουμε ότι στην περίπτωση αυτή θα ίσχυαν τα αντίθετα. Δηλαδή εάν η $f(s)$ ήταν αύξουσα θα έπρεπε να χρησιμοποιήσουμε τον κλασσικό ορισμό των πάνω - κάτω ζευγών, ενώ για $f(s)$ φθίνουσα τότε θα έπρεπε να χρησιμοποιήσουμε το ζεύγος πάνω - κάτω λύσεων.

Οι επί μέρους περιπτώσεις είναι πολλές. Ακόμα μια προσέγγιση στο θέμα αυτό κάνουμε στο επόμενο Κεφάλαιο 3.

Τέλος, για την περίπτωση των πολύ ασθενών λύσεων, ισχύει το αντίστοιχο Θεώρημα (12).

Κεφάλαιο 3

Μέθοδοι Σύγκρισης για το μη-Τοπικό πρόβλημα Διήθησης

Στο Κεφάλαιο 2 και προκειμένου να αποδείξουμε την ύπαρξη και τη μοναδικότητα της λύσης στο μη τοπικό πρόβλημα Διήθησης (2.1), αποδείξαμε και χρησιμοποιήσαμε μία αρχή σύγκρισης χωρίς να αναφερόμαστε στη λύση του προβλήματος. Αυτό ήταν απαραίτητο αφού δεν είχαμε αποδείξει την ύπαρξη λύσης.

Στο κεφάλαιο αυτό θα διατυπώσουμε και θα αποδείξουμε μερικά θεωρήματα σύγκρισης για τα πάνω - κάτω **ζεύγη λύσεων** του μη τοπικού προβλήματος Διήθησης, σε κλασσική και σε πολύ ασθενή μορφή, που σχετίζονται όμως με την υπάρχουσα πλέον (τουλάχιστον τοπική) λύση.

Τα θεωρήματα αυτά είναι αναγκαία για τη μελέτη του προβλήματος της μη τοπικής Διήθησης, αφού για την περίπτωσή μας η συνάρτηση πηγή είναι αύξουσα και ως γνωστόν δεν ισχύουν οι κλασσικές αρχές σύγκρισης. Η κλασσική μορφή μας ενδιαφέρει διότι έχει εφαρμογή στη μελέτη ευστάθειας της λύσης όταν από μία χρονική στιγμή και μετά η λύση μας είναι θετική σε όλο το χωρίο και άρα κλασσική λύση, ενώ η πολύ ασθενής μορφή έχει εφαρμογή στην περίπτωση της έκρηξης της λύσης σε πεπερασμένο χρόνο όπου βεβαίως δεν γνωρίζουμε εάν η λύση μας, τη στιγμή της έκρηξης, είναι παντού θετική στο χωρίο (και άρα κλασσική) ή έχει συμπαγή φορέα γνήσιο υποσύνολο του χωρίου, οπότε και θα παραμένει μιά πολύ ασθενής λύση.

3.1 Μέθοδοι σύγκρισης, ζεύγος πάνω - κάτω λύσεων

Το πρόβλημά μας είναι το (1.1) όπου, για απλούστευση, θεωρούμε συνθήκες Dirichlet στο σύνορο, δηλαδή:

$$u_t = \Delta K(u) + \frac{\lambda f(u)}{\left(\int_\Omega f(u)dx\right)^p}, \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \tag{3.1α'}$$

$$u(x,t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0, \tag{3.1β'}$$

$$u(x,0) = u_0(x) > 0, \quad x \in \Omega. \tag{3.1γ'}$$

Πρόταση 16. *Εάν ισχύουν οι ανισότητες,*

$$S(z;v) = z_t - \Delta K(z) - \frac{\lambda f(z)}{\left(\int_\Omega f(v)dx\right)^p} < 0 < v_t - \Delta K(v) - \frac{\lambda f(v)}{\left(\int_\Omega f(z)dx\right)^p} = S(v;z)$$

και $z_0 < u_0 < v_0$, τότε $z < u < v$, όπου $u(x,t)$ είναι λύση του προβλήματος (3.1).

Απόδειξη. Δια της εις άτοπον απαγωγής. Εστω ότι το συμπέρασμα είναι ψευδές. Διακρίνουμε τρείς περιπτώσεις, (βλ. και σχημα 3.1):

α) περίπτωση. Υπάρχει για πρώτη φορά μία χρονική στιγμή $\bar{t}$ και ένα σημείο $\bar{x} \in \Omega$ όπου $z(\bar{x},\bar{t}) = u(\bar{x},\bar{t})$ με $z(x,\bar{t}) < u(x,\bar{t})$ για $x \neq \bar{x}$, και $u(x,\bar{t}) < v(x,\bar{t})$ $\forall x \in \Omega$. Τη χρονική αυτή στιγμή $\bar{t}$ θα ισχύει ότι: $\int_\Omega f(z)dx < \int_\Omega f(u)dx$ και $\int_\Omega f(u)dx < \int_\Omega f(v)dx$.

Σε αυτό το σημείο $(\bar{x},\bar{t})$ θα έχουμε:

$$\Delta K(u) - \Delta K(z) = K''(u)\Delta u + K'(u)\left|\nabla u\right|^2 - K''(z)\Delta z - K'(z)\left|\nabla z\right|^2 =$$

$$K''(z)(\Delta u - \Delta z) + K'(z)\left[|\nabla u|^2 - |\nabla z|^2\right] = K''(z)\Delta(u-z),$$

επειδή $K''(z(\bar{x},\bar{t})) = K''(u(\bar{x},\bar{t}))$, $K'(z(\bar{x},\bar{t})) = K'(u(\bar{x},\bar{t}))$, $\nabla u(\bar{x},\bar{t}) = \nabla z(\bar{x},\bar{t})$. Επιπλέον θα ισχύει, $\Delta(u-z) > 0$, $(u-z)_t \leq 0$, οπότε λαμβάνουμε,

$$0 \geq (u-z)_t = u_t - z_t > \Delta K(u) + \frac{\lambda f(u)}{\left(\int_\Omega f(u)dx\right)^p} - \Delta K(z) - \frac{\lambda f(z)}{\left(\int_\Omega f(v)dx\right)^p} =$$

$$K''(z)\Delta(u-z) + \lambda f(z)\left(\frac{1}{\left(\int_\Omega f(u)dx\right)^p} - \frac{1}{\left(\int_\Omega f(v)dx\right)^p}\right) >$$

$$K^{''}(z)\Delta(u-z)+\lambda f(z)\left(\frac{1}{\left(\int_\Omega f(u)dx\right)^p}-\frac{1}{\left(\int_\Omega f(u)dx\right)^p}\right)=K^{''}(z)\Delta(u-z)>0$$

λόγω του ότι $K^{''}(s)>0$. Επομένως, $0\geq (u-z)_t>0$, το οποίο είναι άτοπο.

β) περίπτωση. Υπάρχει για πρώτη φορά μία χρονική στιγμή $\bar{t}$ και ένα σημείο $\bar{x}\in\Omega$ όπου $u(\bar{x},\bar{t})=v(\bar{x},\bar{t})$ με $u(x,\bar{t})<v(x,\bar{t})$ για $x\neq\bar{x}$, και $z(x,\bar{t})<u(x,\bar{t})$ $\forall x\in\Omega$. Τη χρονική αυτή στιγμή $\bar{t}$ θα ισχύει ότι: $\int_\Omega f(z)dx<\int_\Omega f(u)dx$ και $\int_\Omega f(u)dx<\int_\Omega f(v)dx$.

Στο σημείο $(\bar{x},\bar{t})$ θα ισχύει:

$$\Delta K(u)-\Delta K(v)=K^{''}(v)\Delta(u-v),$$

βάσει του ότι στο σημείο αυτό αληθεύουν οι σχέσεις:

$$K^{''}(u(\bar{x},\bar{t}))=K^{''}(v(\bar{x},\bar{t})),\ K^{'}(u(\bar{x},\bar{t}))=K^{'}(v(\bar{x},\bar{t})),\ \nabla u(\bar{x},\bar{t})=\nabla v(\bar{x},\bar{t}).$$

Επιπλέον θα ισχύει,

$$\Delta(u-v)<0 \ \text{ και } \ (u-v)_t>0,$$

οπότε τελικά παίρνουμε:

$$0<(u-v)_t=u_t-v_t<\Delta K(u)+\frac{\lambda f(u)}{\left(\int_\Omega f(u)dx\right)^p}-\Delta K(v)-\frac{\lambda f(v)}{\left(\int_\Omega f(z)dx\right)^p}=$$

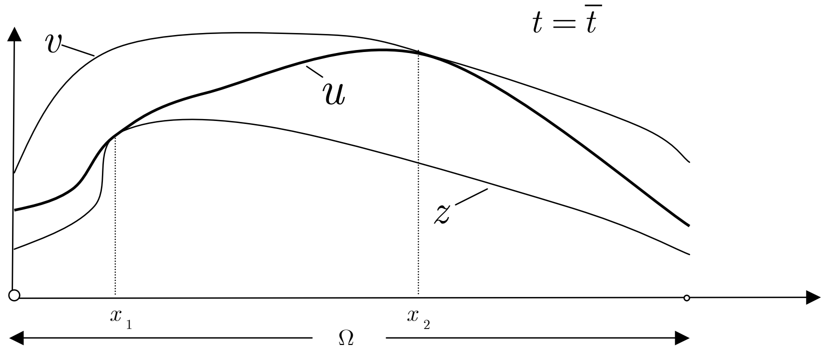
$$K^{''}(v)\Delta(u-v)+\lambda f(v)\left(\frac{1}{\left(\int_\Omega f(u)dx\right)^p}-\frac{1}{\left(\int_\Omega f(z)dx\right)^p}\right)<$$

$$K^{''}(v)\Delta(u-v)+\lambda f(v)\left(\frac{1}{\left(\int_\Omega f(u)dx\right)^p}-\frac{1}{\left(\int_\Omega f(u)dx\right)^p}\right)=K^{''}(v)\Delta(u-v)<0,$$

λόγω του ότι $K^{''}(s)>0$. Επομένως, $0<(u-v)_t<0$, το οποίο είναι άτοπο.

γ) περίπτωση. Υπάρχει για πρώτη φορά μιά χρονική στιγμή $\bar{t}$ και σημεία $x_1,x_2\in\Omega$ όπου $z(x_1,\bar{t})=u(x_1,\bar{t})$ και $u(x_2,\bar{t})=v(x_2,\bar{t})$.

Τη στιγμή αυτή $\bar{t}$ θα ισχύει, $\int_\Omega f(z)dx<\int_\Omega f(u)dx$ και $\int_\Omega f(u)dx<\int_\Omega f(v)dx$.



Σχήμα 3.1:

Στο σημείο $(x_1, \bar{t})$ θα έχουμε,

$$\Delta K(u) - \Delta K(z) = K^{''}(z)\Delta(u - z),$$

καθόσον,

$$K^{''}(z(x_1,\bar{t})) = K^{''}(u(x_1,\bar{t})), \quad K^{'}(z(x_1,\bar{t})) = K^{'}(u(x_1,\bar{t})), \quad \nabla u(x_1,\bar{t}) = \nabla z(x_1,\bar{t}).$$

Επιπλέον,

$$\Delta(u - z) > 0, \; (u - z)_t < 0,$$

οπότε,

$$0 > (u-z)_t = u_t - z_t > \Delta K(u) + \frac{\lambda f(u)}{\left(\int_\Omega f(u)dx\right)^p} - \Delta K(z) - \frac{\lambda f(z)}{\left(\int_\Omega f(v)dx\right)^p} =$$

$$K^{''}(z)\Delta(u-z) + \lambda f(z)\left(\frac{1}{\left(\int_\Omega f(u)dx\right)^p} - \frac{1}{\left(\int_\Omega f(v)dx\right)^p}\right) >$$

$$K^{''}(z)\Delta(u-z) + \lambda f(z)\left(\frac{1}{\left(\int_\Omega f(u)dx\right)^p} - \frac{1}{\left(\int_\Omega f(u)dx\right)^p}\right) = K^{''}(z)\Delta(u-z) > 0,$$

λόγω του ότι $K^{''}(s) > 0$. Επομένως, $0 > (u - z)_t > 0$, το οποίο είναι άτοπο.

3.2 Αρχή σύγκρισης για πολύ ασθενές ζεύγος πάνω - κάτω λύσεων

Στο Κεφάλαιο 2 έχουμε αποδείξει την ύπαρξη λύσης για το συγκεκριμένο πρόβλημα (2.1).

Θα αποδείξουμε τώρα ότι εάν $V(z;v) < 0 < V(v;z)$ και $0 \leq z_0 < u_0 < v_0$, τότε $z(x,t) < u(x,t) < v(x,t)$, $x \in \Omega$, $t \in (0,T)$, όπου $u(x,t)$ είναι η λύση του προβλήματος.

Όμως ΔΕΝ γνωρίζουμε εάν $V(z;u) < V(u;z)$ ή $V(u;v) < V(v;u)$. Εκείνο που γνωρίζουμε είναι ότι ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις:

$$V(z;v) = \frac{d}{dt}\int_\Omega \eta z_h dx - \int_\Omega \Delta\eta \left[K(z)\right]_h dx - \lambda\int_\Omega \eta\left[\frac{f(z)}{\left(\int_\Omega f(v)dx\right)^p}\right]_h dx < 0,$$

$$V(u;u) = \frac{d}{dt}\int_\Omega \eta u_h dx - \int_\Omega \Delta\eta \left[K(u)\right]_h dx - \lambda\int_\Omega \eta\left[\frac{f(u)}{\left(\int_\Omega f(u)dx\right)^p}\right]_h dx = 0,$$

$$V(v;z) = \frac{d}{dt}\int_\Omega \eta v_h dx - \int_\Omega \Delta\eta \left[K(v)\right]_h dx - \lambda\int_\Omega \eta\left[\frac{f(v)}{\left(\int_\Omega f(z)dx\right)^p}\right]_h dx > 0.$$

Η απόδειξη θα γίνει με τη μέθοδο της εις άτοπον απαγωγής.

Έστω ότι $z < u < v$ είναι εσφαλμένο. Τότε θα πρέπει να ισχύει μία από τις κάτωθι τρεις περιπτώσεις:

α) περίπτωση. Έστω ότι σε κάποια χρονική στιγμή $t = t_1$ υπάρχει κάποιο "μικρό" υποσύνολο $\omega \subset\subset \Omega$ με $meas(\omega) > 0$, στο οποίο ισχύει $z(x,t) = u(x,t)$ και $z_h(x,t) < u_h(x,t)$, ενώ στο συμπλήρωμά του Ω/ω ισχύει: $z(x,t) < u(x,t)$ για κάθε $0 \leq t \leq t_1$.

Βεβαίως, καθώς $h \to 0 : z_h \to z = u \leftarrow u_h$, και $z < v, u < v$. Θα έχουμε:

$$V(z;v) = \frac{d}{dt}\int_\Omega \eta z_h dx - \int_\Omega \Delta\eta \left[K(z)\right]_h dx - \lambda\int_\Omega \eta\left[\frac{f(z)}{\left(\int_\Omega f(v)dx\right)^p}\right]_h dx < 0$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega/\omega} \eta\frac{d}{dt}z_h dx + \int_\omega \eta\frac{d}{dt}z_h dx - \int_{\Omega/\omega} \Delta\eta \left[K(z)\right]_h dx - \int_\omega \Delta\eta \left[K(z)\right]_h dx$$
$$-\lambda\int_{\Omega/\omega} \eta\left[\frac{f(z)}{\left(\int_\Omega f(v)dx\right)^p}\right]_h dx - \lambda\int_\omega \eta\left[\frac{f(z)}{\left(\int_\Omega f(v)dx\right)^p}\right]_h dx < 0,$$

και

$$
\begin{aligned}
V(u;u) &= \frac{d}{dt}\int_\Omega \eta u_h dx - \int_\Omega \Delta\eta\left[K(u)\right]_h dx - \lambda\int_\Omega \eta\left[\frac{f(u)}{\left(\int_\Omega f(u)dx\right)^p}\right]_h dx = 0\\
&\Rightarrow \int_{\Omega/\omega}\eta\frac{d}{dt}u_h dx + \int_\omega \eta\frac{d}{dt}u_h dx - \int_{\Omega/\omega}\Delta\eta\left[K(u)\right]_h dx - \int_\omega \Delta\eta\left[K(u)\right]_h dx\\
&- \lambda\int_{\Omega/\omega}\eta\left[\frac{f(u)}{\left(\int_\Omega f(u)dx\right)^p}\right]_h dx - \lambda\int_\omega \eta\left[\frac{f(u)}{\left(\int_\Omega f(u)dx\right)^p}\right]_h dx = 0.
\end{aligned}
$$

Όμως, και στην περίπτωση αυτή, το (z,v) παραμένει ένα ζεύγος πολύ ασθενών πάνω - κάτω λύσεων για το πρόβλημά μας (2.1) όπου u είναι η λύση του. Άρα, οι ανωτέρω σχέσεις πρέπει να ισχύουν για κάθε δοκιμαστική συνάρτηση η.

Επιλέγουμε μία δοκιμαστική συνάρτηση $\eta(x,t)$ τέτοια ώστε $\eta = 0, \frac{\partial\eta}{\partial\hat{n}} = 0$ στο $\partial\Omega$, $\eta = 0$ στο Ω/ω και $\eta > 0$ στο ω. Η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$
\int_\omega \eta\frac{d}{dt}z_h dx - \int_\omega \Delta\eta\left[K(z)\right]_h dx - \lambda\int_\omega \eta\left[\frac{f(z)}{\left(\int_\Omega f(v)dx\right)^p}\right]_h dx < 0
$$

και

$$
\int_\omega \eta\frac{d}{dt}u_h dx - \int_\omega \Delta\eta\left[K(u)\right]_h dx - \lambda\int_\omega \eta\left[\frac{f(u)}{\left(\int_\Omega f(u)dx\right)^p}\right]_h dx = 0.
$$

Αφαιρώντας τις σχέσεις αυτές, παίρνουμε:

$$
\begin{aligned}
&\int_\omega \eta\frac{d}{dt}z_h dx - \int_\omega \Delta\eta\left[K(z)\right]_h dx - \lambda\int_\omega \eta\left[\frac{f(z)}{\left(\int_\Omega f(v)dx\right)^p}\right]_h dx\\
&- \int_\omega \eta\frac{d}{dt}u_h dx + \int_\omega \Delta\eta\left[K(u)\right]_h dx + \lambda\int_\omega \eta\left[\frac{f(u)}{\left(\int_\Omega f(u)dx\right)^p}\right]_h dx < 0\\
&\Rightarrow \int_\omega \eta\frac{d}{dt}(z_h - u_h)dx - \int_\omega \Delta\eta\left[K(z) - K(u)\right]_h dx\\
&+\lambda\int_\omega \eta\left[\frac{f(u)}{\left(\int_\Omega f(u)dx\right)^p} - \frac{f(z)}{\left(\int_\Omega f(v)dx\right)^p}\right]_h dx < 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow \int_\omega \eta(z-u)_{h,t} dx - \int_\omega \Delta\eta \left[K(z)-K(u)\right]_h dx \\
&+\lambda \int_\omega \eta \left[\frac{f(u)\left(\int_\Omega f(v)dx\right)^p - f(z)\left(\int_\Omega f(u)dx\right)^p}{\left(\int_\Omega f(u)dx\right)^p \left(\int_\Omega f(v)dx\right)^p} \right]_h dx < 0 \\
&\Rightarrow \frac{1}{h} \int_\omega \eta \left\{(z-u)(x,t_1) - (z-u)(x,t_1-h)\right\} dx - \int_\omega \Delta\eta \left[K(z)-K(u)\right]_h dx \\
&+\lambda \int_\omega \eta \left[\frac{f(u)\left(\int_\Omega f(u)dx\right)^p - f(z)\left(\int_\Omega f(u)dx\right)^p}{\left(\int_\Omega f(u)dx\right)^p \left(\int_\Omega f(v)dx\right)^p} \right]_h dx < 0.
\end{aligned}
$$

Όμως, για $t = t_1$, έχουμε $z = u$ στο ω. Επομένως θα ισχύει:

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{h} \int_\omega \eta \left\{(z-u)(x,t_1-h)\right\} dx - \int_\omega \Delta\eta \left[K(z)-K(u)\right]_h dx \\
&+\lambda \int_\omega \eta \left[\frac{f(u)-f(z)}{\left(\int_\Omega f(v)dx\right)^p} \right]_h dx < 0.
\end{aligned}
$$

Για $h > 0$ έχουμε $z(x,t_1-h) < u(x,t_1-h) \Rightarrow (z-u)(x,t_1-h) < 0$ και $-\frac{1}{h}\int_\omega \eta\left\{(z-u)(x,t_1-h)\right\}dx > 0$.
Επομένως, καθώς $h \to 0$ ο όρος $-\frac{1}{h}\int_\omega \eta(z-v)(x,t_1-h)dx$ παραμένει μη αρνητικός.

Παρομοίως, καθώς $h \to 0$ καθένας από τους υπόλοιπους όρους τείνει:

$\int_\omega \Delta\eta \left[K(z)-K(u)\right]_h dx \to \int_\omega \Delta\eta \left(K(z)-K(u)\right) dx = 0$, διότι $z = u$ στο $\omega \Rightarrow K(z) = K(u)$ στο ω.

$\int_\omega \eta \left[\frac{f(u)-f(z)}{\left(\int_\Omega f(v)dx\right)^p}\right]_h dx \to \left(\int_\Omega f(v)dx\right)^{-p} \int_\omega \eta \left(f(u)-f(z)\right) dx = 0$, διότι $u = z$ στο $\omega \Rightarrow f(u) = f(z)$ στο ω.

Καταλήγουμε ότι, καθώς $h \to 0$, $0 \le -\frac{1}{h}\int_\omega \eta\left\{(z-u)(x,t_1-h)\right\}dx < 0$, το οποίο είναι άτοπο.

Ακριβώς με τον ίδιο τρόπο χειριζόμαστε τις δύο άλλες περιπτώσεις. Οι αντίστοιχες προτάσεις είναι:

β) περίπτωση. Έστω ότι σε κάποια χρονική στιγμή $t = t_1$ υπάρχει ένα "μικρό" υποσύνολο $\omega \subset\subset \Omega$ με $meas(\omega) > 0$, στο οποίο ισχύει $u(x,t) = v(x,t)$ και $u_h(x,t) < v_h(x,t)$, ενώ στο συμπλήρωμά του Ω/ω : $u(x,t) < v(x,t)$ για κάθε $0 \le t \le t_1$. Είναι προφανές ότι, καθώς $h \to 0 : u_h \to u = v \leftarrow v_h$, και $z < u, z < v$, κλπ, και με ακριβώς ίδιο σκεπτικό όπως στην α) περίπτωση, οδηγούμαστε σε άτοπο.

γ) περίπτωση. Έστω ότι σε κάποια χρονική στιγμή $t = t_1$ υπάρχουν δύο "μικρά" υποσύνολα ω_1, $\omega_2 \subset\subset \Omega$ με $meas(\omega_1)$, $meas(\omega_2) > 0$, για τα οποία ισχύει:

- στο μεν ω_1: $z(x,t) = u(x,t)$ και $z_h(x,t) < u_h(x,t)$, ενώ στο συμπλήρωμα Ω/ω_1 : $z(x,t) < u(x,t)$ για κάθε $0 \le t \le t_1$,

- στο δε ω_2: $u(x,t) = v(x,t)$ και $u_h(x,t) < v_h(x,t)$, ενώ στο συμπλήρωμα Ω/ω_2 : $u(x,t) < v(x,t)$ για κάθε $0 \le t \le t_1$,

και με ακριβώς ίδιο σκεπτικό όπως στην α) περίπτωση, οδηγούμαστε σε άτοπο.

3.3 Παραβολικές εξισώσεις με συναρτησιακή εξάρτηση από τη συνάρτηση. Σχόλια - Συμπεράσματα.

Η εξίσωση στο πρόβλημα που εξετάζουμε στην παρούσα εργασία, περιέχει στο δεύτερο μέλος παράσταση η οποία δεν είναι μια συνάρτηση της λύσης αλλά εξαρτάται συναρτησιακά από αυτή, είναι δηλαδή ένα συναρτησιακό.

Το συναρτησιακό είναι το χωρικό ολοκλήρωμα $\left(\int_\Omega f(u)dx\right)^p$ που υπάρχει στον παρανομαστή και που είναι τελικά μια συνάρτηση μόνο του χρόνου.

Ποιά είναι η βασική δυσκολία που ανακύπτει στην περίπτωση ύπαρξης συναρτησιακού στην εξίσωση. Είναι ότι δεν ισχύουν, στη γενική περίπτωση, τα θεωρήματα ύπαρξης λύσης μεταξύ πάνω και κάτω λύσεων, που ως γνωστό ισχύουν όταν δεν υπάρχει συναρτησιακό.

Στο άρθρο "Existence and Invariance for Parabolic Functional Equations" των

J.Bebernes and R.Ely, γίνεται διερεύνηση του προβλήματος αυτού, στην γενική περίπτωση, όπου έχουμε συμπεριλάβει και αρχικές - συνοριακές συνθήκες.

$$Lu = f(x, t, u, \Phi u), \quad (x, t) \in D_T \tag{3.2}$$

$$u(x, t) = \psi(x, t), \quad (x, t) \in B_T. \tag{3.3}$$

Εδώ L είναι ομοιόμορφα παραβολικός τελεστής και Φ είναι ένας λείος τελεστής.

Στο άρθρο αυτό εξετάζεται το ερώτημα της ύπαρξης λύσεων του προβλήματος, (3.2)-(3.3) υποθέτοντας την ύπαρξη πάνω και κάτω λύσεων. Για την πληρέστερη κατανόηση του θέματος, μεταφέρουμε μερικές απόψεις όπως αυτές αναγράφονται στο άρθρο.

Εάν η συνάρτηση f στην (3.2) δεν έχει συναρτησιακή εξάρτηση Φu, τότε, ως γνωστό το προβλημα (3.2)-(3.3) έχει μια λύση u μεταξύ μιας κάτω λύσης α και μιας πάνω λύσης β.

Υπενθυμίζουμε τον κλασσικό ορισμό της κάτω - πάνω λύσης:

Μια συνάρτηση $\alpha \in C^{2,1}(D_T)$ είναι κάτω λύση του (3.2)-(3.3) εάν $\alpha(x,t) \leq \psi(x,t)$ για $(x,t) \in B_T$ και ικανοποιεί τη σχέση $L\alpha(x,t) \leq f(x,t,\alpha)$ για $(x,t) \in D_T$. Οι πάνω λύσεις ορίζονται ανάλογα.

Εάν όμως η f εξαρτάται συναρτησιακά από την u (στην περίπτωσή του προβλήματος (1)-(2) μέσω της Φ), η ύπαρξη πάνω και κάτω λύσεων υπό τον κλασσικό ορισμό δεν εγγυάται την ύπαρξη λύσης για το (3.2)-(3.3) που να κείται μεταξύ της α και της β. Π.χ. στο παρακάτω παράδειγμα που υπάρχει στο άρθρο,

$$y' = -y, \tag{3.4}$$

$$y(0) = 1. \tag{3.5}$$

οι συναρτήσεις $\alpha(t) \equiv 0$ και $\beta(t) \equiv 1$ είναι μεν κάτω και πάνω λύσεις, αλλά η μοναδική λύση $y(t) = 1 - 1/2t$ δεν κείται στο διάστημα $[0,1]$ για $t \geq 0$.

Ένα άλλο παράδειγμα, στο ίδιο άρθρο, είναι το ακόλουθο:

$$u_t - u_{xx} = -6 \int_{-1}^{1} u dx, \quad (x,t) \in (-1,1) \times (0, \infty), \tag{3.6}$$

$$u(x,0) = x^2, \quad x \in [-1,1], \tag{3.7}$$

$$u(-1,t) = u(1,t) = 1, \quad t \in (0,\infty).$$

Ομοίως οι $\alpha(x,t) \equiv 0$ και $\beta(x,t) \equiv 1$ είναι κάτω και πάνω λύσεις, αλλά $u_t(0,0) = -2 < 0$. Επομένως $u(0,t) < 0$ για $t > 0$ αρκούντως μικρό. Είναι προφανές ότι εάν θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε τις πάνω και κάτω λύσεις σε παραβολικά προβλήματα που περιέχουν κάποια συναρτησιακή εξάρτηση, θα πρέπει, τουλάχιστον, να τροποποιήσουμε κατάλληλα τον ορισμό.

Αυτό ακριβώς κάνουμε στην παρούσα εργασία. Από το άρθρο των J. Bebernes and R. Ely και από τα παραπάνω παραδείγματα καθίσταται σαφές ότι στην γενική μορφή ύπαρξης ενός συναρτησιακού, η εύρεση και διατύπωση ενός νέου ενιαίου ορισμού πάνω και κάτω λύσεων, τέτοιου ώστε να εξασφαλίζεται η ύπαρξη λύσης κείμενης μεταξύ αυτών, είναι τουλάχιστον πολύ δύσκολη και ίσως αμφιβόλου αξιοπιστίας. Εμείς όμως δεν θέλουμε να βρούμε έναν ορισμό πάνω και κάτω λύσεων για τη γενική περίπτωση ύπαρξης ενός συναρτησιακού κάπου μέσα στην εξίσωση, αλλά ΜΟΝΟ για την εξίσωση που μας ενδιαφέρει, με την συγκεκριμένη μορφή. Δηλαδή την:

$$u_t - \Delta K(u) = \frac{\lambda f(u)}{\left(\int_\Omega f(u)dx\right)^p}$$

όπου $Lu = u_t - \Delta K(u)$ και $\Phi u = \int_\Omega f(u)dx$.

Το ότι το συναρτησιακό είναι στον **παρανομαστή**, το δεύτερο μέλος είναι **θετικό**, η συνάρτηση $f(s)$ είναι **αύξουσα** και ότι $p > 0$, μας οδήγησε στην διατύπωση του παρακάτω ορισμού για ζεύγος πάνω - κάτω λύσεων, που είναι κατάλληλος, δηλαδή αποδεικνύουμε ότι υπάρχει λύση κείμενη μεταξύ των λύσεων αυτών. Στην απόδειξη που δώσαμε χρησιμοποιήσαμε και τις τέσσερεις παραπάνω δεδομένες καταστάσεις. Π.χ. εάν το δεύτερο μέλος ήταν αρνητικό, τότε η ύπαρξη ζεύγους πάνω - κάτω λύσεων με τον ορισμό που δώσαμε, δεν συνεπάγεται την ύπαρξη λύσης κείμενης μεταξύ των συναρτήσεων του ζεύγους. Επισημαίνουμε ότι η ένοια αυτή του ζεύγους προήλθε από την συγκεκριμένη μορφή του προβλήματος που εξετάζουμε, και το εάν μπορεί να εφαρμοσθεί και σε άλλες περιπτώσεις θα πρέπει να εξετάζεται διεξοδικά και κατά περίπτωση.

Ο ορισμός που δώσαμε για το ζεύγος πάνω - κάτω λύσεων είναι ο ακόλουθος:

Ορισμός 17. *Για δύο συναρτήσεις $z = z(x,t), v = v(x,t) \in C((0,\infty); L_1(\Omega))$, έστω ο τελεστής S οριζόμενος από τη σχέση:*

$$S(z,v) := z_t - \Delta z - \frac{\lambda f(z)}{\left(\int_\Omega f(v)dx\right)^p}$$

$$S(v,z) := v_t - \Delta v - \frac{\lambda f(v)}{\left(\int_\Omega f(z)dx\right)^p}$$

Τότε το (z,v) θα ονομάζεται ζεύγος πάνω - κάτω λύσεων του προβλήματος, εάν ισχύουν οι κατωτέρω σχέσεις:

$$S(z,v) \leq 0 \leq S(v,z), \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \tag{3.8α'}$$

$$0 \leq z(x,0) \leq u(x,0) \leq v(x,0), \tag{3.8β'}$$

όπου $u(x,0)$ οι αρχικές συνθήκες που έχουν τεθεί για τη λύση του προβλήματος.

Το *σημαντικότατο κέρδος* που έχουμε από τον ορισμό αυτό είναι ότι μπορούμε να αποδείξουμε, και αποδείξαμε στο Πόρισμα (13), ότι, εάν ισχύουν οι προϋποθέσεις του ορισμού αυτού, τότε υπάρχει λύση $u(x,t)$ και ισχύει, $z(x,t) \leq u(x,t) \leq v(x,t)$ γιά κάθε $x \in \Omega$ και για κάθε t με $t \in (0, T_{max})$, όπου T_{max} είναι ο μέγιστος χρόνος ύπαρξης της συνάρτησης $v(x,t)$.

Επίσης με τα Θεωρήματα (11) και (12) αποδείξαμε ότι ο ορισμός αυτός του ζεύγους, υπό μία τροποποιημένη μορφή απαλλαγμένη από το ερώτημα της ύπαρξης ή μη λύσης, συνεπάγεται μία ανισοτική διάταξη μεταξύ των συναρτήσεων $z(x,t)$ και $v(x,t)$ για $t \in (0, T_{max})$. Και στην περίπτωση αυτή, βασιστήκαμε στη συγκεκριμένη μορφή της εξίσωσης του μη-τοπικού προβλήματος διήθησης.

Επανερχόμενοι στο ανωτέρω παράδειγμα, στο οποίο υπάρχει συναρτησιακή εξάρτηση $(\int_{-1}^{1} udx)$, το ότι οι συναρτήσεις α και β είναι πάνω - κάτω λύσεις με τον κλασσικό ορισμό, όντως δεν οδηγούν στην ύπαρξη λύσης μεταξύ αυτών. Δηλαδή η χρήση μιάς τέτοιας συνεπαγωγής θα οδηγούσε σε προφανές λάθος.

Όμως, ούτε ο ορισμός που εισάγουμε στην εργασία αυτή θα οδηγούσε σε λάθος συμπεράσματα σχετικά με το ανωτέρω παράδειγμα. Οι συγκεκριμένες ως άνω συναρτήσεις α και β, με βάση τον ορισμό του ζεύγους, ΔΕΝ αποτελούν ζεύγος πάνω - κάτω λύσεων. Και τούτο διότι:

$$S(\alpha,\beta) = \alpha_t - \alpha_{xx} + 6\int_{-1}^{1} \beta dx = 12 > 0$$

$$S(\beta,\alpha)=\beta_t-\beta_{xx}+6\int_{-1}^{1}\alpha dx=0=0$$

δηλαδή $S(\alpha,\beta)>S(\beta,\alpha)$ που σημαίνει ότι οι συναρτήσεις $\alpha(x,t)$ και $\beta(x,t)$ δεν αποτελούν ζεύγος κάτω - πάνω λύσεων, οπότε δεν συμπεραίνουμε απολύτως τίποτα για τη λύση του προβλήματος, όπως πολύ σωστά επισημαίνουν οι συντάκτες του άρθρου. Αυτό προφανώς συνέβη διότι η μορφή της εξίσωσης δεν είναι η "ενδεδειγμένη". Π.χ. το δεύτερο μέλος είναι αρνητικό.

Στο σημείο αυτό, και για το πρόβλημα που εξετάζουμε στη διατριβή μας αυτή, κρίνουμε σκόπιμο να αποδείξουμε ότι η έννοια του ζεύγους πάνω - κάτω λύσεων με ύπαρξη λύσης κειμένης μεταξύ αυτών, είναι αυστηρά ποιό περιοριστική έννοια από την έννοια των κλασσικών πάνω - κάτω λύσεων.

Θεώρημα 18. *Έστω $F(L)=\{z(x,t),\,v(x,t)\,:\,z,v$ κάτω - πάνω λύσεις με βάση τον κλασσικό ορισμό $\}$, και $F^1(L)=\{z(x,t),\,v(x,t)\,:\,z,v$ ζεύγος κάτω - πάνω λύσεων με βάση τον ορισμό του ζεύγους $\}$. Τότε, $F^1(L)\subset F(L)$ γνήσιο.*

Απόδειξη.
Έστω $(z,v)\in F^1(L)$ που σημαίνει $S(z,v)\le 0\le S(v,z)$, δηλαδή ισχύει η σχέση:

$$z_t-\Delta z-\frac{\lambda f(z)}{\left(\int_\Omega f(v)dx\right)^p}\le 0\le v_t-\Delta v-\frac{\lambda f(v)}{\left(\int_\Omega f(z)dx\right)^p}.$$

Όμως $\left(\int_\Omega f(v)dx\right)^p\ge\left(\int_\Omega f(z)dx\right)^p$, οπότε η σχέση επεκτείνεται ως εξής:

$$z_t-\Delta z-\frac{\lambda f(z)}{\left(\int_\Omega f(z)dx\right)^p}\le z_t-\Delta z-\frac{\lambda f(z)}{\left(\int_\Omega f(v)dx\right)^p}\le 0,$$

$$0\le v_t-\Delta v-\frac{\lambda f(v)}{\left(\int_\Omega f(z)dx\right)^p}\le v_t-\Delta v-\frac{\lambda f(v)}{\left(\int_\Omega f(v)dx\right)^p}.$$

Άρα,

$$z_t-\Delta z-\frac{\lambda f(z)}{\left(\int_\Omega f(z)dx\right)^p}\le 0\le v_t-\Delta v-\frac{\lambda f(v)}{\left(\int_\Omega f(v)dx\right)^p},$$

δηλαδή, $L(z)\le 0\le L(v)$, που σημαίνει $(z,v)\in F(L)$.
Άρα $F^1(L)$ (γνήσιο) υποσύνολο του $F(L)$.

Αντιστρόφως.
Έστω $(z,v) \in F(L)$ που σημαίνει $L(z) \leq 0 \leq L(v)$, ήτοι,

$$z_t - \Delta z - \frac{\lambda f(z)}{\left(\int_\Omega f(z)dx\right)^p} \leq 0 \leq v_t - \Delta v - \frac{\lambda f(v)}{\left(\int_\Omega f(v)dx\right)^p}.$$

Με βάση την ανισότητα $\left(\int_\Omega f(v)dx\right)^p \geq \left(\int_\Omega f(z)dx\right)^p$ είναι προφανές ότι δεν μπορούμε να συνάγουμε ότι, $z_t - \Delta z - \frac{\lambda f(z)}{\left(\int_\Omega f(v)dx\right)^p} \leq 0 \leq v_t - \Delta v - \frac{\lambda f(v)}{\left(\int_\Omega f(z)dx\right)^p}$, και κατ΄ ακολουθία δεν συνάγεται ότι $(z,v) \in F^1(L)$.

Συμπερασματικά οι όποιες "ενστάσεις" για την ύπαρξη λύσης μεταξύ πάνω και κάτω λύσεων, αφορούν πάνω και κάτω λύσεις με βάση τον κλασσικό ορισμό και για μορφή εξισώσεων **διαφορετική από αυτή που εξετάζουμε**, όσον αφορά τη θέση του συναρτησιακού κλπ.

Οι ανισοτικές σχέσεις που ακολουθεί το ζεύγος πάνω - κάτω λύσεων, αναλύονται διεξοδικά και αποδεικνύονται στις υποενότητες 3.1 και 3.2 του παρόντος Κεφαλαίου.

Κεφάλαιο 4

Έκρηξη

Στο Κεφάλαιο αυτό εξετάζουμε το ενδεχόμενο έκρηξης των λύσεων για το πρόβλημα (2.1). Συγκεκριμένα αποδεικνύουμε έκρηξη της πολύ ασθενούς λύσης για το εκφυλισμένο μη τοπικό πρόβλημα Διήθησης, και για το εκφυλισμένο μη τοπικό πρόβλημα Πορώδους Μέσου. Κατά κύριο λόγο χρησιμοποιούμε τη μέθοδο Kaplan και την ανισότητα Jensen, τις ιδιότητες των μέσων όρων Steklov, αφού πρώτα έχουμε διατυπώσει το πρόβλημά μας σε πολύ ασθενή μορφή.

(Σημειώνουμε ότι στις εργασίες [14, 78, 94, 95, 97, 104, 117, 134] αλλά και σε άλλες, το μη τοπικό πρόβλημα αντιμετωπίζεται στην κλασσική του μορφή - κλασσικές λύσεις - και κυρίως με φθίνουσα τη συνάρτηση f. Εδώ, και στα περισσότερα από τα επόμενα κεφάλαια, εξετάζουμε την περίπτωση των πολύ ασθενών λύσεων, λόγω του εκφυλισμού του προβλήματος, και για αύξουσα συνάρτηση f. Οι θεωρήσεις αυτές καθιστούν την παρούσα διατριβή, σε πολλά σημεία, καινοτόμο).

Θα αποδείξουμε ότι έχουμε έκρηξη στις ακόλουθες περιπτώσεις:

- **Για το πρόβλημα Neumann.** Για κάθε $\lambda > 0$ και για όλα τα $u_0(x) \geq 0$.
- **Για τα προβλήματα Dirichlet ή Robin όταν Ω είναι κυρτό.**
    1. Για αρκούντως μεγάλα λ και για όλα τα $u_0(x) \geq 0$.
    2. Για αρκούντως μεγάλες αρχικές συνθήκες $u_0(x)$ ανεξάρτητα με την τιμή της παραμέτρου $\lambda, (\lambda > 0)$.

Και στις δύο περιπτώσεις απαιτούμε οι συναρτήσεις $K(s)$ και $f(s)$ να ικανοποιούν μία συγκεκριμένη συνθήκη.

4.1 Το πρόβλημα Neumann.

Έχουμε $\beta(x) \equiv 0$ και θεωρούμε το ακόλουθο πρόβλημα υπό τη μορφή μέσων όρων Steklov:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_\Omega \eta u_h dx - \int_\Omega K_h(u)\Delta\eta dx - \lambda\frac{1}{h}\int_t^{t+h}\frac{\int_\Omega f(u)\eta dx}{\left(\int_\Omega f(u)dx\right)^p}ds \\ -\frac{1}{h}\int_t^{t+h}\left\{\int_{\partial\Omega}\left(\eta\frac{\partial K(u)}{\partial\hat{n}} - K(u)\frac{\partial\eta}{\partial\hat{n}}\right)d\sigma(x)\right\}ds = 0,\end{aligned} \tag{4.1}$$

$$\frac{1}{h}\int_t^{t+h}\left(\int_{\partial\Omega}\eta\frac{\partial K(u)}{\partial\hat{n}}d\sigma(x)\right)ds = 0, \quad \int_\Omega \eta(x)u(x,0)dx \geq 0,$$

$0 \leq t \leq T-h$ και για κάθε $\eta(x) \in C^\infty(\Omega)$, $\eta(x) \geq 0$.

Εδώ χρησιμοποιήσαμε σαν δοκιμαστική συνάρτηση τη σταθερή συνάρτηση $\eta = \eta(x) \equiv 1,\ x \in \bar{\Omega}$.

Ως εκ τούτου το ολοκλήρωμα στο σύνορο είναι μηδέν και παραλείπεται.

Πρόταση 19. *Εστω Ω φραγμένο χωρίο στον $\mathbb{R}^N$ και $f(s)$ τέτοια ώστε να ικανοποιούνται οι (1.10β′ και 1.10γ′). Τότε η L_1-νόρμα της λύσης $u(x,t)$ του προβλήματος (4.1) εκρήγνυται σε πεπερασμένο χρόνο για όλες τις τιμές της παραμέτρου $\lambda > 0$ και για κάθε $u_0(x) \geq 0$ ($u_0(x)$ όχι ταυτοτικά μηδέν).*

Απόδειξη. Για το πρόβλημα (4.1) και λαμβανομένου υπόψη ότι $\eta = \eta(x) \equiv 1, x \in \bar{\Omega}$. καταλήγουμε στα ακόλουθα:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_\Omega u_h dx &= \lambda\frac{1}{h}\int_t^{t+h}\frac{\int_\Omega f(u)dx}{\left(\int_\Omega f(u)dx\right)^p}ds \\ &= \lambda\frac{1}{h}\int_t^{t+h}\left(\int_\Omega f(u)dx\right)^{1-p}ds, \quad (\text{Jensen στην } f) \\ &\geq \lambda\frac{1}{h}\int_t^{t+h}\left(|\Omega|\, f\left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega udx\right)\right)^{1-p}ds, \\ &\qquad\qquad (\text{ορισμός μέσων όρων Steklov}) \\ &= \lambda\,|\Omega|\left[\left(f\left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega udx\right)\right)^{1-p}\right]_h\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lambda \left|\Omega\right| \left[f^{1-p} \left(\frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u dx \right) \right]_h \\
&\geq \lambda \left|\Omega\right| f^{1-p} \left(\frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u_h dx \right),
\end{aligned}
$$

(υπό την προϋπόθεση ότι f^{1-p} κυρτή συνάρτηση, και λόγω των ιδιοτήτων $S_3 - S_4$ των μέσων όρων Steklov).

Θέτουμε $A_h(t) = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u_h(x,t)dx$, με $A_h(t) \to A(t) = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u(x,t)dx$ καθώς $h \to 0+$ για κάθε $t \geq 0$, και η ανωτέρω ανισότητα γίνεται:

$$
\frac{d}{dt} A_h(t) \geq \lambda f^{1-p} \left(A_h(t) \right), \text{ ή } \int_{A_h(0)}^{A_h(t)} \frac{ds}{f^{1-p}(s)} \geq \lambda t,
$$

που συνεπάγεται,

$$
t \leq \frac{1}{\lambda} \int_{A_h(0)}^{A_h(t)} \frac{ds}{f^{1-p}(s)} \leq \frac{1}{\lambda} \int_{A_h(0)}^{\infty} \frac{ds}{f^{1-p}(s)} < \infty,
$$

από τη συνθήκη (1.10γ′) $\int_{b>0}^{\infty} \frac{ds}{f^{1-p}(s)} < \infty$ και επειδή $A_h(0) = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u_h(x,0)dx > 0$.

Επομένως συμπεραίνουμε ότι:

$$
A_h(t) = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u_h dx = \frac{1}{|\Omega|} \left\| u_h(\cdot,t) \right\|_{L_1} \to \infty, \quad t \to t_h^* \leq \frac{1}{\lambda} \int_{A_h(0)}^{\infty} \frac{ds}{f^{1-p}(s)} < \infty.
$$

Η παράμετρος h είναι ένας αυθαίρετος θετικός αριθμός, όσο μικρός θέλουμε. Επομένως, περνώντας στο όριο καθώς $h \to 0+$ και λόγω της ιδιότητας S_1 των μέσων όρων Steklov, λαμβάνουμε:

$$
A_h(t) \to A(t) = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u dx = \frac{1}{|\Omega|} \left\| u(\cdot,t) \right\|_{L_1} \text{ και } t_h^* \to t^* \leq \int_{A(0)}^{\infty} \frac{ds}{f^{1-p}(s)} < \infty.
$$

Τελικά καταλήγουμε ότι,

$$
\left\| u(\cdot,t) \right\|_{L_1} \to \infty \text{ καθώς } t \to t^* \leq \frac{1}{\lambda} \int_{A(0)}^{\infty} \frac{ds}{f^{1-p}(s)} < \infty,
$$

που σημαίνει ότι η L_1-νόρμα της λύσης $u(\cdot,t)$ εκρήγνυται (απειρίζεται) σε πεπερασμένο χρόνο t^*.

4.2 Τα προβλήματα Dirichlet και Robin.

4.2.1 Έκρηξη για αρκούντως μεγάλα λ ($\lambda \gg 1$)

Το πρόβλημα (2.1) σε πολύ ασθενή (Steklov) μορφή είναι:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_\Omega \eta u_h dx - \frac{1}{h}\int_{t-h}^{t}\int_\Omega K(u)\Delta\eta dx ds - \lambda\frac{1}{h}\int_{t-h}^{t}\frac{\int_\Omega f(u)\eta dx}{\left(\int_\Omega f(u)dx\right)^p}ds \\ - \frac{1}{h}\int_{t-h}^{t}\left\{\int_{\partial\Omega}\left(\eta\frac{\partial K(u)}{\partial\hat{n}} - K(u)\frac{\partial\eta}{\partial\hat{n}}\right)d\sigma(x)\right\}ds = 0,\end{aligned} \tag{4.2α′}$$

$$\frac{1}{h}\int_{t-h}^{t}\left\{\int_{\partial\Omega}\left(\eta\left[\frac{\partial K(u)}{\partial\hat{n}} + \beta(x)K(u)\right]\right)d\sigma(x)\right\}ds = 0, \tag{4.2β′}$$

$$0 < \beta(x) \leq \infty, \quad \int_\Omega \eta(x,0)u(x,0)dx \geq 0,$$

όπου $\eta(x,t) \in C_c^\infty(\Omega_T)$ ή $C^\infty(\Omega_T)$, για τα προβλήματα Dirichlet ή Robin, αντίστοιχα, και $\eta(x) \geq 0$. Επομένως και στις δύο περιπτώσεις το ολοκλήρωμα στο σύνορο καθίσταται μηδέν.

Θεωρούμε τώρα το εξής πρόβλημα ιδιοτιμών:

$$-\Delta\phi = \mu\phi, \quad x \in \Omega \tag{4.3α′}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial\hat{n}} + \beta(x)\phi = 0, \quad x \in \partial\Omega \tag{4.3β′}$$

όπου $\mu > 0$, $\phi = \phi(x) > 0$, $x \in \Omega$ και $0 \leq \inf_\Omega \varphi(x) \leq \varphi(x) \leq \bar{k} = \max_\Omega \varphi(x)$.

Πρόταση 20. *Εστω ότι ισχύει η ακόλουθη συνθήκη:*

$$\int_\Omega \left[f^{1-p}(u(x,t)) - K(u(x,t))\right]\varphi(x)dx > 0. \tag{4.4}$$

Τότε, για αρκούντως μεγάλα λ, ($\lambda > \lambda_0 = \mu\left[(\gamma+1)/k\right]^p > 0$), υπάρχει ένας χρόνος $t^* < \infty$, τέτοιος ώστε η πολύ ασθενής λύση του προβλήματος (4.2) να εκρήγνυται σε πεπερασμένο χρόνο υπό την έννοια της L_1-νόρμας.

Απόδειξη. Λαμβάνουμε την ιδιοσυνάρτηση $\varphi(x)$ τέτοια ώστε $\int_\Omega \varphi(x)dx = 1$, (κανονικοποιημένη) για να μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα Jensen στην απλή της μορφή. Επιλέγοντας σαν δοκιμαστική συνάρτηση τη συνάρτηση $\varphi(x)$ του προβλήματος (4.3), ($\eta = \varphi$ στο (4.2), και ο όρος πάνω στο σύνορο στην (4.2β′) γίνεται μηδέν), οπότε και έχουμε:

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega}\varphi u_h dx - \frac{1}{h}\int_{t-h}^{t}\int_{\Omega}K(u)\Delta\varphi dx ds = \lambda\frac{1}{h}\int_{t-h}^{t}\frac{\int_{\Omega}f(u)\varphi dx}{\left(\int_{\Omega}f(u)dx\right)^{p}}ds,$$

ή

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega}\phi u_h dx + \mu\frac{1}{h}\int_{t-h}^{t}\int_{\Omega}\phi K(u)dx ds = \lambda\frac{1}{h}\int_{t-h}^{t}\frac{\int_{\Omega}f(u)\phi dx}{\left(\int_{\Omega}f(u)dx\right)^{p}}ds.$$

Λόγω της (4.4) λαμβάνουμε:

$$\int_{\Omega}\left[f^{1-p}(u(x,t)) - K(u(x,t))\right]\varphi(x)dx > 0,$$

ή

$$\int_{t-h}^{t}\int_{\Omega}\phi f^{1-p}(u)dx ds > \int_{t-h}^{t}\int_{\Omega}\phi K(u)dx ds,$$

οπότε παίρνουμε την ανισότητα:

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega}\phi u_h dx + \mu\frac{1}{h}\int_{t-h}^{t}\int_{\Omega}\phi f^{1-p}(u)dx ds > \lambda\frac{1}{h}\int_{t-h}^{t}\frac{\int_{\Omega}f(u)\phi dx}{\left(\int_{\Omega}f(u)dx\right)^{p}}ds. \tag{4.5}$$

Στο σημείο αυτό επισημαίνουμε ότι η μέθοδος των παράλληλα μετακινούμενων επιπέδων (parallel moving planes), που ως γνωστόν ισχύει για κλασσικές λύσεις, μπορεί να επεκταθεί και στην περίπτωση που έχουμε εκφυλισμό της παραβολικότητας, χρησιμοποιώντας προσεγγιστικές μεθόδους, υπό την προϋπόθεση ότι οι αρχικές συνθήκες φθίνουν καταλλήλως κοντά στο σύνορο $\partial\Omega$, βλέπε για λεπτομέρειες στο [111] και στην επισυναπτόμενη βιβλιογραφία. Βάσει αυτής της μεθόδου (βλέπε επίσης [81]), εφόσον Ω είναι κυρτό χωρίο και $f(s)$ είναι αύξουσα συνάρτηση, υπάρχει ένα σχετικά συμπαγές σύνολο $\Omega_0 \subset \Omega, (\bar{\Omega}_0 \subset \Omega)$ και ένας θετικός ακέραιος γ, τέτοιοι ώστε:

$$\int_{\Omega}f(u)dx \leq (\gamma+1)\int_{\Omega_0}f(u)dx,$$

όπου $\gamma = \gamma(\Omega) \in N^*$. Εστω $k = \inf_{x\in\Omega_0}\varphi(x)$. Λόγω της $\bar{\Omega}_0 \subset \Omega$, χρησιμοποιώντας την αρχή μεγίστου, όπως αναφέρεται στο [111], έχουμε $k > 0$, οπότε:

$$\int_{\Omega}f(u)dx \leq \frac{\gamma+1}{k}\int_{\Omega_0}f(u)\phi(x)dx \leq \frac{\gamma+1}{k}\int_{\Omega}f(u)\phi(x)dx. \tag{4.6}$$

Τώρα, από την (4.6), η βασική μας ανισότητα (4.5) γίνεται:

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega}\phi u_h dx+\mu\frac{1}{h}\int_{t-h}^{t}\int_{\Omega}\phi f^{1-p}(u)dxds>\frac{\lambda k^p}{(\gamma+1)^p}\frac{1}{h}\int_{t-h}^{t}\left(\int_{\Omega}f(u)\phi dx\right)^{1-p}ds.$$

Εφαρμόζοντας την ανισότητα Jensen στον όρο $\int_{\Omega}\varphi f^{1-p}(u)dx$, (με την αντίστροφη μορφή της καθόσον η συνάρτηση s^{1-p} είναι κοίλη), λαμβάνουμε:

$$\int_{\Omega}\varphi f^{1-p}(u)dx\leq\left(\int_{\Omega}\varphi f(u)dx\right)^{1-p}.$$

Ως εκ τούτου καταλήγουμε στην ανισότητα:

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega}\varphi u_h dx+\mu\frac{1}{h}\int_{t-h}^{t}\left(\int_{\Omega}\varphi f(u)dx\right)^{1-p}ds>\frac{\lambda k^p}{(\gamma+1)^p}\frac{1}{h}\int_{t-h}^{t}\left(\int_{\Omega}\varphi f(u)dx\right)^{1-p}ds,$$

ή,

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega}\phi u_h dx>\left(\frac{\lambda k^p}{(\gamma+1)^p}-\mu\right)\frac{1}{h}\int_{t-h}^{t}\left(\int_{\Omega}\phi f(u)dx\right)^{1-p}ds.$$

Τώρα, εάν ισχύει,

$$c=\lambda k^p\,(\gamma+1)^{-p}-\mu>0,\ \text{ή}\ \lambda>\mu\,(\gamma+1)^p\,k^{-p},\tag{4.7}$$

και εφαρμόζοντας πάλι ανισότητα Jensen στην f, παίρνουμε:

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega}\phi u_h dx>c\frac{1}{h}\int_{t-h}^{t}\left(f\left(\int_{\Omega}\phi u dx\right)\right)^{1-p}ds=c\frac{1}{h}\int_{t-h}^{t}f^{1-p}\left(\int_{\Omega}\phi u dx\right)ds=$$

$$\text{(ορισμός των μέσων όρων Steklov)}\ =c\left[f^{1-p}\left(\int_{\Omega}\varphi u dx\right)\right]_h\geq cf^{1-p}\left(\int_{\Omega}\varphi u_h dx\right).$$

(ιδιότητα Steklov-S_3, υποθέτοντας ότι f^{1-p} κυρτή και Steklov-S_4).

Θέτουμε $A(t)=\int_{\Omega}\varphi(x)u(x,t)dx$ οπότε $A_h(t)=\int_{\Omega}\varphi u_h dx$, και έχουμε:

$$\frac{d}{dt}\left(A_h(t)\right)>cf^{1-p}\left(A_h(t)\right),\ \text{ή}\ \int_{A_h(0)}^{A_h(t)}\frac{ds}{f^{1-p}(s)}>ct,$$

$$\text{ή}\quad t<\frac{1}{c}\int_{A_h(0)}^{A_h(t)}\frac{ds}{f^{1-p}(s)}<\frac{1}{c}\int_{A_h(0)}^{\infty}\frac{ds}{f^{1-p}(s)}=t_h^*<\infty,$$

από την (1.10γ′) και λόγω του ότι $A_h(0) = \int_\Omega \varphi(x) u_h(x,0)dx > 0$.

Επομένως, καθώς $t \to t_h^*-$, συνεπάγεται ότι $A_h(t) \to \infty$ και λόγω του ότι η σύγκλιση αυτή ισχύει για κάθε $h > 0$, μπορούμε να περάσουμε στο όριο καθώς $h \to 0$ και να λάβουμε:

$$A(t) \to \infty \text{ καθώς } t \to t^* \leq \frac{1}{c} \int_{A(0)}^{\infty} \frac{ds}{f^{1-p}(s)} < \infty.$$

Εχουμε:

$$A(t) = \int_\Omega \varphi u dx \leq \bar{k} \int_\Omega u dx = \bar{k} \left\| u(\cdot,t) \right\|_{L_1}, \text{ όπου } \bar{k} = \max_{x\in\Omega} \phi(x).$$

Τελικά καταλήγουμε στο ότι:

$$\left\| u(\cdot,t) \right\|_{L_1} \to \infty \text{ καθώς } t \to T^*- \leq t^* \leq \frac{1}{c} \int_{A(0)}^{\infty} \frac{ds}{f^{1-p}(s)} < \infty, \tag{4.8}$$

όπου T^* είναι ο χρόνος έκρηξης για την L_1-νόρμα, $c = \lambda k^p (\gamma+1)^{-p} - \mu > 0$ και για κάθε $\lambda > \frac{\mu(\gamma+1)^p}{k^p}$.

Αποδείχθηκε επομένως η έκρηξη της L_1-νόρμας της $u(\cdot,t)$ σε πεπερασμένο χρόνο.

4.2.2 Έκρηξη για αρκούντως μεγάλα αρχικά δεδομένα

Έκρηξη μπορεί να έχουμε επίσης όταν τα αρχικά μας δεδομένα είναι αρκούντως μεγάλα. Τα ακόλουθα αποτελέσματα ισχύουν για κάθε $\lambda > 0$.

Θεώρημα 21. *Εστω το πρόβλημα (2.1), Ω κυρτό, και να ισχύει ότι,*

$$\int_\Omega \big(f^{1-q}(u(x,t)) - K(u(x,t))\big)\phi(x)dx > 0, \quad \text{για } 0 < p < q < 1. \tag{4.9}$$

Τότε η λύση $u(x,t)$ του προβλήματος (2.1), με $0 < \beta(x) \leqslant \infty$ για το πρόβλημα Dirichlet ή Robin, εκρήγνυται όσον αφορά την L_1 νόρμα, σε πεπερασμένο χρόνο, για αρχικά δεδομένα αρκούντως μεγάλα $u_0 \geqslant 0$, $A_0 = \int_\Omega \phi u_0\, dx \geqslant \delta$, όπου το δ προσδιορίζεται από τη σχέση (4.13), και $\phi(x)$ ικανοποιεί το εξής πρόβλημα ιδιοτιμών:

$$-\Delta\phi = \mu\phi, \quad x \in \Omega, \tag{4.10α$'$}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial\hat{n}} + \beta(x)\phi = 0, \quad x \in \partial\Omega, \tag{4.10β$'$}$$

με $\mu > 0$, $\phi = \phi(x) > 0$, $0 \leqslant \min\limits_\Omega \phi(x) \leqslant \phi(x) \leqslant \bar{k} = \max\limits_\Omega \phi(x)$.

Απόδειξη. Επιλέγουμε $\int_\Omega \phi(x)dx = 1$, ώστε η ανισότητα Jensen να ισχύει στην απλή της μορφή. Με δοκιμαστική συνάρτηση την $\phi(x)$, όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, η εξίσωση λαμβάνει την πολύ ασθενή μορφή της:

$$\frac{d}{dt}\int_{t-h}^t\int_\Omega \phi u dx ds + \mu\int_{t-h}^t\int_\Omega \phi K(u) dx ds = \lambda\int_{t-h}^t \frac{\int_\Omega f(u)\phi dx}{\left(\int_\Omega f(u)dx\right)^p}ds, \quad \forall\, h > 0,\ h < T-t.$$

Εξ υποθέσεως έχουμε:

$$\int_\Omega \left[f^{1-q}(u(x,t)) - K(u(x,t))\right]\, \phi(x)dx > 0,$$

$$\text{δηλαδή,} \quad \int_{t-h}^t\int_\Omega \phi f^{1-q}(u) dx ds > \int_{t-h}^t\int_\Omega \phi K(u) dx ds,$$

οπότε καταλήγουμε στην ανισότητα:

$$\frac{d}{dt}\int_{t-h}^t\int_\Omega \phi u\, dx ds + \mu\int_{t-h}^t\int_\Omega \phi f^{1-q}(u) dx ds > \lambda\int_{t-h}^t \frac{\int_\Omega f(u)\phi\, dx}{\left(\int_\Omega f(u)dx\right)^p}\, ds. \tag{4.11}$$

Από τη μέθοδο των παράλληλα μετακινούμενων επιπέδων, όπως και προηγούμενα, και για $\gamma = \gamma(\Omega) \in N^*$, $k = \inf_{x \in \Omega_0} \phi(x)$, $\bar{\Omega}_0 \subset \Omega$, λαμβάνουμε τη σχέση:

$$\int_\Omega f(u)dx \leqslant \frac{\gamma+1}{k} \int_{\Omega_0} f(u)\phi(x)dx \leqslant \frac{\gamma+1}{k} \int_\Omega f(u)\phi(x)dx.$$

Με βάση αυτή την ανισότητα, η κύρια ανισότητά μας (4.11) γίνεται:

$$\frac{d}{dt}\int_{t-h}^t \int_\Omega \phi u \, dx ds + \mu \int_{t-h}^t \int_\Omega \phi f^{1-q}(u) dx ds > \frac{\lambda k^p}{(\gamma+1)^p} \int_{t-h}^t \left(\int_\Omega f(u)\phi \, dx \right)^{1-p} ds.$$

Εφαρμόζοντας την ανισότητα Jensen στον όρο $\int_\Omega \phi f^{1-q}(u)dx$ (αντίστροφη μορφή καθόσον η συνάρτηση s^{1-p} είναι κοίλη), παίρνουμε:

$$\int_\Omega \phi f^{1-q}(u)dx \leqslant \left(\int_\Omega \phi f(u)dx \right)^{1-q},$$

οπότε, φθάνουμε στην ανισότητα:

$$\frac{d}{dt}\int_{t-h}^t \int_\Omega \phi u dx ds + \mu \int_{t-h}^t \left(\int_\Omega \phi f(u)dx \right)^{1-q} ds > \frac{\lambda k^p}{(\gamma+1)^p} \int_{t-h}^t \left(\int_\Omega \phi f(u)dx \right)^{1-p} ds$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\int_{t-h}^t \int_\Omega \phi u dx ds > \frac{\lambda k^p}{(\gamma+1)^p} \int_{t-h}^t \left(\int_\Omega \phi f(u)dx \right)^{1-p} ds - \mu \int_{t-h}^t \left(\int_\Omega \phi f(u)dx \right)^{1-q} ds$$

$$> \frac{\lambda k^p}{(\gamma+1)^p} \left\{ \int_{t-h}^t \left(\int_\Omega \phi f(u)dx \right)^{1-p} ds - \frac{(\gamma+1)^p \mu}{\lambda k^p} \int_{t-h}^t \left(\int_\Omega \phi f(u)dx \right)^{1-q} ds \right\}.$$

Θέτουμε: $(\gamma+1)^p \mu / \lambda k^p = c$, οπότε:

$$\frac{c}{\mu}\frac{d}{dt}\int_{t-h}^t \int_\Omega \phi u dx ds > \int_{t-h}^t \left(\int_\Omega \phi f(u)dx \right)^{1-p} ds - c \int_{t-h}^t \left(\int_\Omega \phi f(u)dx \right)^{1-q} ds$$

$$= \int_{t-h}^t \left\{ \left(\int_\Omega \phi f(u)\, dx \right)^{1-p} - c \left(\int_\Omega \phi f(u)dx \right)^{1-q} \right\} ds$$

$$= \int_{t-h}^t \left(\int_\Omega \phi f(u)\, dx \right)^{1-p} \left\{ 1 - \frac{c}{\left(\int_\Omega \phi f(u)\, dx \right)^{q-p}} \right\} ds$$

$$> \int_{t-h}^t f^{1-p} \left(\int_\Omega \phi u \, dx \right) \left\{ 1 - \frac{c}{f^{q-p}\left(\int_\Omega \phi u \, dx \right)} \right\} ds.$$

Θέτουμε $A(t) = \int_\Omega \phi u \, dx$ και παίρνουμε:

$$\frac{c}{\mu}\frac{d}{dt}\int_{t-h}^{t} A(r)dr > \int_{t-h}^{t} f^{1-p}\left(A(r)\right)\left\{1 - \frac{c}{f^{q-p}\left(A(r)\right)}\right\} dr. \tag{4.12}$$

Τώρα έχουμε: $q-p > 0 \Rightarrow f^{q-p}(s)$ αύξουσα συνάρτηση $\Rightarrow \frac{1}{f^{q-p}(s)}$ φθίνουσα συνάρτηση, $s > 0$, $f(0) = 0$, $f^{q-p}(s)$ μη φραγμένη (ειδάλλως $f^{q-p}(s) < M \Rightarrow f(s) < M^{\frac{1}{q-p}}$ το οποίο είναι άτοπο αφού $f(s) > 0$, $f'(s) > 0$, $f''(s) > 0$), και άρα $\frac{1}{f^{q-p}(s)} \underset{s\to 0}{\to} \infty$, $\frac{1}{f^{q-p}(s)} \underset{s\to\infty}{\to} 0$ οπότε συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση:

$$g(s) = 1 - \frac{c}{f^{q-p}(s)} \tag{4.13}$$

έχει ακριβώς μία θετική ρίζα, έστω δ_0. Η συνάρτηση $g(s)$ είναι αυστηρά αύξουσα, οπότε: $g(s) > 0$, $\forall s > \delta_0$.

Μπορούμε να επιλέξουμε το $\delta = \delta_0 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ όσο μικρό θέλουμε, και επομένως λόγω της (4.11) θα έχουμε:

$$\frac{c}{\mu}\frac{d}{dt}\int_{t-h}^{t} A(r)dr > \int_{t-h}^{t} f^{1-p}\left(A(r)\right)\left\{1 - \frac{c}{f^{q-p}\left(A^*\right)}\right\} dr, \tag{4.14}$$

$\forall A(r) > A^* = A(0) = \delta = \delta_0 + \varepsilon$. Θέτουμε $\Lambda := 1 - c/f^{q-p}\left(A^*\right) > 0$ και πεπερασμένο. Ως εκ τούτου, η ανισότητα (4.12) γίνεται:

$$\frac{c}{\mu\Lambda}\frac{1}{h}\frac{d}{dt}\int_{t-h}^{t} A(r)dr > \frac{1}{h}\int_{t-h}^{t} f^{1-p}\left(A(r)\right)\, dr$$

$$\Rightarrow \frac{c}{\mu\Lambda}\frac{d}{dt}A_h(t) > \left|f^{1-p}\left(A(t)\right)\right|_h \geqslant f^{1-p}\left(A_h(t)\right),$$

όπου $A_h(t) = \int_\Omega \phi u_h \, dx$. Θέτουμε $c/\mu\Lambda = C$ οπότε καταλήγουμε:

$$C\frac{d}{dt}A_h(t) > f^{1-p}\left(A_h(t)\right) \Rightarrow \frac{dA_h(t)}{f^{1-p}\left(A_h(t)\right)} > \frac{1}{C}dt \Rightarrow \int_{A_h(0)}^{A_h(t)} \frac{ds}{f^{1-p}(s)} > \frac{1}{C}t$$

$$\Rightarrow t < C\int_{A_h(0)}^{A_h(t)} \frac{ds}{f^{1-p}(s)} < C\int_{A_h(0)}^{\infty} \frac{ds}{f^{1-p}(s)} = t^* < \infty, \text{ (λόγω της συνθήκης (1.10γ'))}.$$

Αυτό σημαίνει ότι, $A_h(t) \to \infty$ καθώς $t \to t^* = C\int_{A_h(0)}^{\infty} \frac{ds}{f^{1-p}(s)} < \infty$, για $A_h(0) = \int_\Omega \phi u_h(0)\, dx \geqslant \delta$, $\forall h > 0$.

Επομένως, καθώς $h \to 0$, η σύγκλιση αυτή παραμένει αληθής, και έχουμε:

$A(t) \to \infty$ καθώς $t \to \bar{t} = C \int_{A(0)}^{\infty} \frac{ds}{f^{1-p}(s)} < \infty$, για $A(0) = \int_\Omega \phi u_0 \, dx \geqslant \delta = \delta_0 + \varepsilon$, και $C = \frac{c}{\mu \Lambda}$, $\Lambda := 1 - \frac{c}{f^{q-p}(A^*)}$, $c = \frac{(\gamma+1)^p \mu}{\lambda k^p}$, $A^* = \delta = \delta_0 + \varepsilon$, όπου δ_0 είναι η μοναδική θετική ρίζα της $g(s) = 1 - \frac{c}{f^{q-p}(s)}$, $\varepsilon > 0$ όσο μικρό θέλουμε.

Ομως, $A(t) = \int_\Omega \phi u \, dx \leqslant \bar{k} \int_\Omega u \, dx$, $\bar{k} = \max\limits_{x \in \Omega}(\phi(x)) < \infty$. Αυτό σημαίνει ότι:

$$\int_\Omega u(\cdot, t) \, dx = \|u(\cdot, t)\|_{L_1} \to \infty \;\; \text{καθώς} \;\; t \to \bar{t} < \infty, \tag{4.15}$$

και επομένως έχουμε έκρηξη της L_1 νόρμας της $u(\cdot, t)$ σε πεπερασμένο χρόνο.

Κεφάλαιο 5

Πεπερασμένη ταχύτητα διάδοσης της διαταραχής για το μη-τοπικό πρόβλημα

Για το φαινόμενο της πεπερασμένης ταχύτητας της διαταραχής, (λύση με χρονικά επεκτεινόμενο φορέα με ταχύητα πεπερασμένη), έχουν δημοσιευθεί αρκετές εργασίες γνωστών ερευνητών πάνω στο θέμα αυτό. Ενδεικτικά αναφέρουμε τις εργασίες [19, 27, 31, 36, 37, 38, 54, 84, 89, 91, 107, 122, 123, 145] η μελέτη των οποίων βοήθησε στην κατανόηση του φαινομένου. Όμως, σε καμμία από αυτές δεν μελετάται η περίπτωση της μη τοπικότητας στον όρο πηγή, και το κυριότερο δεν ερευνάται η πιθανότητα να έχουμε έκρηξη της λύσης ενώ την ίδια στιγμή, ο φορέας της λύσης συνεχίζει να επεκτείνεται.

Τα δύο τελευταία ερωτήματα θα συζητήσουμε στο κεφάλαιο αυτό.

Έστω το πρόβλημα της Διήθησης με μη-τοπικότητα στον όρο πηγής:

$$u_t = \Delta K(u) + \lambda \frac{f(u)}{\left(\int_\Omega f(u)\right)^p}, t > 0, x \in \Omega \subset \mathbb{R}^N, p > 0, \tag{5.1α'}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \geq 0, x \in \Omega, u_0 \in C(\Omega), \sup u_0 < \infty, \tag{5.1β'}$$

$$u(x,t) = 0, t \in (0,T), x \in \partial\Omega, \tag{5.1γ'}$$

όπου η αρχική συνάρτηση $u_0(x)$ έχει συμπαγή φορέα $\omega \subset \Omega$, $K'(0) = 0$ και $f(0) = 0$.

Θα εξετάσουμε εάν το μη-τοπικό αυτό πρόβλημα, υπό τις ανωτέρω υποθέσεις, εμφανίζει την ιδιότητα της πεπερασμένης ταχύτητας διάδοσης της διαταραχής (δηλαδή λύση με φορέα που επεκτείνεται χρονικά με πεπερασμένη ταχύτητα).

Η διαδικασία που θα ακολουθήσουμε θα είναι η εξής:

Θεωρούμε το ακόλουθο πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών (χωρίς πηγή):

$$w_t = \Delta K(w), \quad t > 0,\ x \in \Omega, \tag{5.2α'}$$

$$w(x,0) = u_0(x) \geq 0,\ x \in \Omega,\ u_0 \in C(\Omega),\ \sup u_0 < \infty,\ \operatorname{supp} u_0 \subset \Omega, \tag{5.2β'}$$

$$w(x,t) = 0, \quad t \in (0,T),\ x \in \partial\Omega, \tag{5.2γ'}$$

με λύση τη συνάρτηση $w(x,t)$.

Εστω τώρα ότι η συνάρτηση $u(x,t)$ είναι η λύση στο πρόβλημα αρχικών και συνοριακών συνθηκών:

$$u_t = \Delta K(u) + \lambda \frac{f(u)}{\left(\int_\Omega f(u)\right)^p}, \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \tag{5.3α'}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \geq 0,\ x \in \Omega,\ \ u_0 \in C(\Omega),\ \ \sup u_0 < \infty,\ \ \operatorname{supp} u_0 \subset \Omega, \tag{5.3β'}$$

$$u(x,t) = 0,\ \ x \in \partial\Omega,\ \ t \in (0,T). \tag{5.3γ'}$$

Επειδή $\lambda \frac{f(u)}{\left(\int_\Omega f(u)\right)^p} \geq 0$ θα έχουμε ότι $u_t \geq \Delta K(u), t > 0, x \in \Omega$, και λαμβάνοντας υπόψη τις αρχικές και συνοριακές συνθήκες συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση $u(x,t)$ είναι μία άνω (γενικευμένη) λύση του προβλήματος (5.2).

Επίσης, η μηδενική συνάρτηση $z(x,t) \equiv 0$ είναι μία κάτω λύση του προβλήματος (5.2), καθόσον,

$$\begin{aligned}
&0 = z_t \leq \Delta K(z) = 0, \qquad \text{(υπενθυμίζουμε ότι } K(0) = 0\text{)},\\
&0 \equiv z(x,0) \leq w(x,0), x \in \Omega,\\
&0 \equiv z(x,t) \leq 0 = w(x,t), t \geq 0, x \in \partial\Omega.
\end{aligned}$$

Όμως για το πρόβλημα (5.2) ισχύουν οι κλασσικές αρχές σύγκρισης, οπότε καταλήγουμε στο ότι,

$$0 \equiv z(x,t) \leq w(x,t) \leq u(x,t), \text{ στο } (0,T) \times \Omega.$$

Η συνάρτηση $w(x,t)$ είναι η λύση στο πρόβλημα (5.2) το οποίο είναι το απλό πρόβλημα Διήθησης χωρίς όρο αντίδρασης. Από τα προηγούμενα Θεωρήματα συνάγεται ότι η λύση $w(x,t)$ καθίσταται θετική σε όλο το Ω μέσα σε πεπερασμένο χρόνο $t_{p0} > 0$.

Από την ανισότητα $w(x,t) \leq u(x,t)$ στο $(0,T) \times \Omega$ συμπεραίνουμε ότι η λύση $u(x,t)$ του προβλήματός μας γίνεται και αυτή θετική σε όλο το Ω εντός πεπερασμένου χρονικού διαστήματος $(0, t_p)$ με $t_p \leq t_{p0}$, δηλαδή $u(x,t) > 0$ στο $\Omega, \forall t \geq t_p$, όπου t_p είναι πεπερασμένο.

Ένα ερώτημα που λογικά αναφύεται είναι εάν ο χρόνος αυτός μπορεί να είναι μηδέν, γεγονός που σημαίνει άπειρη ταχύτητα επέκτασης του φορέα της λύσης του προβλήματος Διήθησης (με ένα μη αρνητικό όρο αντίδρασης - πηγή), παρόλο που η ταχύτητα διάδοσης είναι πεπερασμένη όταν **δεν** έχουμε όρο πηγής.

Αυτό όμως δεν μπορεί να ισχύει, διότι το άπειρο ή το πεπερασμένο της ταχύτητας μετάδοσης της διαταραχής εξαρτάται **μόνο** από τον όρο διάχυσης, δηλαδή τη συνάρτηση $K(s)$ και όχι από τον όρο πηγής.

Σχόλιο 22. *Έχουμε αναφέρει πολλές φορές ότι η ροή θερμότητας* $-K'(u)\nabla u$ *είναι συνεχής σε όλο το χωρίο* Ω. *Αυτό είναι επακόλουθο του νόμου του Darcy. Αυτό παραμένει αληθές και για το πρόβλημα που εξετάζουμε παρότι έχουμε θεωρήσει γενικευμένες λύσεις οι οποίες δεν έχουν παραγώγους πρώτης και δεύτερης τάξης. Η εξήγηση είναι απλή. Στη θετική περιοχή η λύση είναι κλασσική, οπότε η κλίση* ∇u *ορίζεται και είναι μάλιστα λεία συνάρτηση.*

Στο συνεχώς επεκτεινόμενο σύνορο (μέτωπο), όπου $u = 0$, *παρόλο ότι η κλίση είναι ασυνεχής (από αυστηρά θετική ή αρνητική γίνεται απότομα μηδέν), ισχύει ότι* $K'(0) = 0 \Rightarrow -K'(u)\nabla u\big|_{u=0} = 0$ *και επομένως η διάδοση θερμότητας προς τη ψυχρή (μηδέν) περιοχή γίνεται κατά τρόπο συνεχή, όπου βεβαίως η θερμική ροή παραμένει μηδέν. Ως εκ τούτου, η συνθήκη* $K'(0) = 0$, *που προκαλεί τον εκφυλισμό του προβλήματος, είναι η ίδια συνθήκη που διατηρεί τη συνέχεια της θερμικής ροής, μία πολύ σημαντική φυσική ιδιότητα.*

Σχόλιο 23. *Μετασχηματισμός πίεσης της εξίσωσης Διήθησης. (Ο όρος αυτός αναφέρεται στο [141], οι δε κατωτέρω υπολογισμοί έγιναν από τον γράφοντα βάσει μιας* *άσκησης χωρίς τη λύση της, που υπάρχει στο βιβλίο αυτό [141]).*

Η εξίσωση, $u_t = \Delta K(u)$, γράφεται σε "συντηρητική" (conservative) μορφή ως, $u_t + \nabla \cdot (uV) = 0$, όπου η ταχύτητα $V = -\nabla v$ και $v(x,t)$ είναι η μεταβλητή πίεσης, μία ονομασία που έρχεται σε απόλυτη συμφωνία με τους φυσικούς νόμους. Η εξίσωση αυτή γράφεται:

$$u_t + \nabla \cdot (uV) = 0 \Rightarrow u_t = \nabla \cdot (u(-V)) = \nabla \cdot u\nabla v.$$

Η αρχική μας εξίσωση είναι:

$$u_t = \Delta K(u) = \nabla \cdot K^{'}(u)\nabla u = \nabla \cdot u\frac{K^{'}(u)}{u}\nabla u = \nabla \cdot u\nabla \int_0^u \frac{K^{'}(s)}{s}ds.$$

Επομένως, έχουμε, *(Μετασχηματισμός πίεσης)*:

$$\nabla \cdot u\nabla v = \nabla \cdot u\nabla \int_0^u \frac{K^{'}(s)}{s}ds \Rightarrow v = \int_0^u \frac{K^{'}(s)}{s}ds. \tag{5.4}$$

Άρα, η μεταβλητή πίεσης $v(x,t)$ επιλύει την ακόλουθη εξίσωση: (Θα χρησιμοποιήσουμε τη σχέση $K^{'}(u)\nabla u = u\nabla v$, η οποία προκύπτει από τις προηγούμενες σχέσεις),

$$\begin{aligned}
v_t = \frac{d}{dt}\int_0^u \frac{K^{'}(s)}{s}ds = \frac{K^{'}(u)}{u}u_t = \frac{K^{'}(u)}{u}\Delta K(u) = \frac{K^{'}(u)}{u}\left(\nabla \cdot K^{'}(u)\nabla u\right)\\
= \frac{K^{'}(u)}{u}(\nabla \cdot u\nabla v) = \frac{K^{'}(u)}{u}(\nabla u \cdot \nabla v + u\Delta v)\\
= \frac{K^{'}(u)}{u}\nabla u \cdot \nabla v + \frac{K^{'}(u)}{u}u\Delta v = \nabla \int_0^u \frac{K^{'}(s)}{s}ds \cdot \nabla v + K^{'}(u)\Delta v\\
= \nabla v \cdot \nabla v + K^{'}(u)\Delta v \;\Rightarrow\; v_t = K^{'}(u)\Delta v + |\nabla v|^2.
\end{aligned}$$

Εάν είχαμε απλώς αναπτύξει την Λαπλασιανή $\Delta K(u)$, θα είχαμε λάβει:

$$u_t = \Delta K(u) = K^{'}(u)\Delta u + K^{''}(u)\,|\nabla u|^2.$$

Από την εξίσωση όμως αυτή, δεν μπορούμε να εξάγουμε τη συνθήκη σύμφωνα με την οποία θα έχουμε πεπερασμένη ταχύτητα διάδοσης του συνόρου (και άρα του συμπαγούς φορέα της λύσης), αφού θα χρειαζόμασταν, πέραν του $K^{'}(0) = 0$, και μιά νέα συνθήκη $K^{''}(0) \neq 0$, που όμως **δεν είναι αναγκαία**, διότι όπως προκύπτει από την εξίσωση πίεσης, το μόνο που χρειαζόμαστε είναι $K^{'}(0) = 0$, δηλαδή η εξ αρχής τεθείσα συνθήκη.

Από τη σχέση του μετασχηματισμού πίεσης,

$$v = \int_0^u \frac{K'(s)}{s} ds \tag{5.5}$$

παρατηρούμε ότι η συνθήκη για πεπερασμένη ταχύτητα διάδοσης,

$$\int_0^u \frac{K'(s)}{s} ds < \infty \text{ για κάθε } 0 < u < \infty,$$

συνεπάγεται ότι η πίεση παραμένει πεπερασμένη. Τώρα, εάν $\int_0^u \frac{K'(s)}{s} ds = \infty$ για κάποιο $0 < u < \infty$, αυτό σημαίνει ότι η πίεση γίνεται άπειρη, που συνεπάγεται και την άπειρη ταχύτητα διάδοσης της διαταραχής.

Από τα παραπάνω, αντιλαμβανόμαστε ότι ο μετασχηματισμός πίεσης είναι ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο στη μελέτη των σχεδόν γραμμικών, εκφυλισμένων, παραβολικών προβλημάτων.

Ένα τελευταίο σχόλιο.

Σχόλιο 24. *Άπειρη ταχύτητα διάδοσης της διαταραχής ή άμεση θετικοποίηση της λύσης σε ολόκληρο το χωρίο;*

Θεωρούμε το πρόβλημα,

$$u_t = \Delta K(u) + Q(u),\ \ x \in \Omega \subset \mathrm{R}^N,\ \ t \in (0,T),\ \ T > 0,$$

$$u(x,0) = u_0(x) \geq 0,\ \ x \in \Omega,\ \ \operatorname{supp} u_0 = \omega \subset\subset \Omega,$$

$$u(x,t) = 0,\ \ x \in \partial\Omega,\ \ t \in [0,T),$$

$$K(u) > 0,\ u > 0,\ K(0) = 0,\ K'(0) = 0; \quad Q(u) > 0,\ u > 0,$$

στις εξής δύο παραλλαγές:

α) $Q(0) = 0$

Στην περίπτωση αυτή, ο όρος πηγής δεν παράγει καμμία θερμότητα στη ψυχρή περιοχή $\{x \in \Omega : u(x,t) = 0\}$, και λόγω του $K'(0) = 0$ θα δημιουργηθεί ένα χρονικά επεκτεινόμενο ελεύθερο σύνορο, που θα διαχωρίζει το θετικό από το μηδενικό σύνολο, και το οποίο θα μετακινείται με πεπερασμένη ταχύτητα.

β) $Q(0) > 0$

Στην περίπτωση αυτή, η συνάρτηση πηγής θα παράξει αμέσως θετική θερμότητα σε όλη τη ψυχρή περιοχή $\{x \in \Omega : u(x,t) = 0\}$ **ανεξάρτητα** από το εάν $K^{'}(0) = 0$. Ως εκ τούτου, η άμεση αυτή θετικοποίηση της λύσης, δεν οφείλεται σε επέκταση του συνόρου με άπειρη ταχύτητα, αλλά στο ότι η συνάρτηση πηγής $Q(0) > 0$ παράγει θερμότητα ακόμη και πάνω στη ψυχρή περιοχή. Η λύση καθίσταται αυτόματα κλασσική, χωρίς να αντιβαίνει σε κανένα φυσικό νόμο, αφού δεν οφείλεται στο "μη φυσικό" φαινόμενο της άπειρης ταχύτητας διάδοσης της διαταραχής.

Κεφάλαιο 6

Διαγράμματα Διακλάδωσης για το τοπικό πρόβλημα Διήθησης. Συναρτήσεις με $f(0) = 0$.

6.1 Προκαταρκτικά

Έστω το χρονοεξαρτώμενο τοπικό πρόβλημα αρχικών - συνοριακών τιμών,

$$u_t - \Delta K(u) = \lambda f(u), \tag{6.1α'}$$

$$u_0 \geqslant 0, \quad x \in \Omega, \tag{6.1β'}$$

$$u = 0, \quad x \in \partial\Omega,\ t \in (0, T), \tag{6.1γ'}$$

για κάποιο $T > 0$, με τις παραδοχές που έχουμε θέσει για τις συναρτήσεις μας, δηλαδή:

$$K(s), f(s) \text{ κυρτές, θετικές, αύξουσες για } s > 0, K(0) = K^{'}(0) = 0, f(0) = 0.$$

Οι συνθήκες $K^{'}(0) = 0, f(0) = 0$ είναι οι γνωστές συνθήκες για να έχουμε λύση με επεκτεινόμενο φορέα όταν οι αρχικές συνθήκες έχουν φορέα συμπαγές υποσύνολο του χωρίου Ω.

Η συνθήκη $K(0) = 0$ μας χρειάζεται διότι θέλουμε η αντίστροφος συνάρτηση $K^{-1}(s)$ να έχει πεδίο ορισμού όλους τους θετικούς αριθμούς συν το μηδέν. Η εξίσωσή μας δεν επηρεάζεται καθόλου καθόσον, εάν $K(0) = c > 0$ τότε $\Delta(K(v) - c) = \Delta K(v)$ και η συνάρτηση $K(v) - c$ θα είναι θετική, αύξουσα και κυρτή, με $K(0) - c = 0$.

Θέλουμε να μελετήσουμε την περίπτωση έκρηξης σε πεπερασμένο χρόνο για $\lambda > \lambda^*$, που σημαίνει $\limsup_{t\to t^*-} \|u(\cdot,t)\| = 0$ με $t^* = T_{\max} < \infty$, όταν το λ^* ανήκει στο φάσμα του στάσιμου προβλήματος.

Συνεπώς θεωρούμε το αντίστοιχο ελλειπτικό (στάσιμο) πρόβλημα,

$$-\Delta K(v) = \lambda f(v), \tag{6.2α$'$}$$

$$v > 0, x \in \Omega, \tag{6.2β$'$}$$

$$v = 0, x \in \partial\Omega, \tag{6.2γ$'$}$$

και θέλουμε να μελετήσουμε την περίπτωση όπου το λ^* ανήκει στο φάσμα (αν δεν α-νήκει το πρόβλημα είναι δυσκολότερο και παραμένει ανοικτό), και δεν υπάρχει καμμία λύση $v(x)$ για $\lambda > \lambda^*$, υπάρχει μία κλασσική λύση για $\lambda = \lambda^*$, το οποίο σημαίνει ότι καθώς $\lambda \to \lambda^*-$ η λύση παραμένει φραγμένη. Συνεπώς, η καμπύλη διακλάδωσης στρέ-φεται προς τα αριστερά στο σημείο $(\lambda^*, \|v^*(\cdot)\|)$ στο διάγραμμα $\lambda - \|v(x)\|$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$, $v \in C^2(\Omega)$ και επίσης υπάρχουν τουλάχιστον δύο λύσεις για $\lambda_0 < \lambda < \lambda^*$ για κάποιο $\lambda_0 \geqslant 0$.

Το ερώτημα που εύλογα τίθεται είναι:

Υπάρχουν συναρτήσεις $K(s)$ και $f(s)$, κυρτές, θετικές και αύξουσες για $s > 0$, με $K(0) = K'(0) = 0$ και $f(0) = 0$, προϋποθέσεις που έχουμε θέσει στο χρονοεξαρτώμενο πρόβλημα, τέτοιες ώστε το διάγραμμα διακλάδωσης του προβλήματος (6.2) να έχει σχήμα $\supset$ (κλειστό φάσμα, ύπαρξη σημείου αναστροφής - turning point);

Για την εξέταση του προβλήματος αυτού, εκτελούμε τον μετασχηματισμό:

$$K(v) = w \Rightarrow v = K^{-1}(w) \Rightarrow f(v) = f\left(K^{-1}(w)\right) = g(w), g = f \circ K^{-1},$$

οπότε το πρόβλημα (6.2) μετασχηματίζεται στο ισοδύναμο:

$$-\Delta w = \lambda g(w), \tag{6.3α$'$}$$

$$w > 0,\ x \in \Omega, \tag{6.3β$'$}$$

$$w = 0,\ x \in \partial\Omega. \tag{6.3γ$'$}$$

Επίσης ισχύει η ισοδυναμία: εάν το πρόβλημα (6.2) έχει μία λύση $v(\lambda)$ τότε και το πρόβλημα (6.3) θα έχει επίσης μία λύση $w(\lambda)$ - και αντιθέτως - εάν το πρόβλημα (6.2) δεν έχει καμμία λύση, το ίδιο θα συμβαίνει και για το πρόβλημα (6.3).

Αυτό σημαίνει ότι το λ^*, (εάν υπάρχει τέτοιο), θα είναι το ίδιο και για τα δύο προβλήματα.

Άρα, αρκεί να μελετήσουμε το πρόβλημα (6.3), το οποίο είναι απλούστερο, δηλαδή να βρούμε για ποιές συναρτήσεις $g(s)$ θα έχουμε διαγράμματα διακλάδωσης τύπου $\supset$. Εάν προσδιορίσουμε τέτοιες συναρτήσεις, τότε εύκολα θα προσδιορίσουμε και τις κατάλληλες συναρτήσεις $K(s)$ και $f(s)$.

Από τον μετασχηματισμό $g(s) = f(K^{-1}(s))$, λαμβάνουμε:

$$g(0) = 0, \text{ και } g^{'}(s) = (f(K^{-1}(s)))^{'} = \frac{f^{'}(K^{-1}(s))}{K'(s)} \Rightarrow g^{'}(0) = \frac{f^{'}(K^{-1}(0))}{K'(0)} = \frac{f^{'}(0)}{0}.$$

Ήτοι, για την τιμή της πρώτης παραγώγου στο μηδέν, εάν $f^{'}(0) > 0$ τότε $g^{'}(0) = +\infty$ και εάν $f^{'}(0) = 0$ τότε $g^{'}(0) \in [0, \infty]$.

Παρατηρούμε ότι $f^{'}(0)$ δεν μπορεί να είναι αρνητικό, αφού σε αντίθετη περίπτωση, θα υπήρχε ένα διάστημα $(0, \delta)$ στο οποίο $f(s) < 0$, το οποίο είναι άτοπο λόγω του θετικού της $f(s)$.

Έχοντας υπόψη τα ανωτέρω, προχωρούμε στη μελέτη του διαγράμματος διακλάδωσης του προβλήματος (6.3), επισημαίνοντας το γεγονός ότι η σχέση $g(0) = 0$ θα προκαλέσει αρκετές δυσκολίες. Παραδείγματος χάριν, δε μπορούμε να εφαρμόσουμε τις γνωστές μεθόδους για τις εκθετικές συναρτήσεις.

Στο σημείο αυτό θέλουμε να τονίσουμε ότι η βιβλιογραφία πάνω στο πεδίο αυτό είναι τεράστια. Για την πληρότητα των πηγών που μελετήσαμε και αντλήσαμε στοιχεία, αναφέρουμε ενδεικτικά μερικές πολύ χρήσιμες εργασίες ή/και βιβλία. (Βλ. [3, 4, 5, 12, 20, 23, 28, 29, 34, 86, 115, 120, 124, 125, 131, 132, 133, 143]).

Θα παραθέσουμε μερικά συμπεράσματα χρήσιμα για όσα θα ακολουθήσουν. Αρχίζουμε με μερικά πολύ γνωστά θεωρήματα, που αφορούν το πρόβλημα (6.3), (βλ. [12]), αφού όμως πρώτα παραθέσουμε μερικές έννοιες - ορισμούς, που αφορούν τη ασυμπτωτική συμπεριφορά των συναρτήσεων, και τις οποίες θα τις χρησιμοποιήσουμε συχνά.

α) Μία συνάρτηση $g(u)$ θα ονομάζεται **υπεργραμμική** (superlinear) εάν:

$$\left(\frac{g(u)}{u}\right)' \geqslant 0. \tag{6.4}$$

Ισοδυνάμως θα έχουμε:

$$\left(\frac{g(u)}{u}\right)' \geqslant 0 \Rightarrow \frac{g'(u)u - g(u)}{u^2} \geqslant 0 \Rightarrow g'(u) \geqslant \frac{g(u)}{u}, \quad \text{ή} \quad \frac{ug'(u)}{g(u)} = K_g(u) \geqslant 1.$$

Ο συντελεστής αυτός μετρά το ρυθμό αύξησης της συνάρτησης.

β) Μία συνάρτηση $g(u)$ θα ονομάζεται **υπογραμμική** (sublinear) εάν ισχύουν οι αντίθετες ανισότητες.

γ) Μία συνάρτηση $g(u)$ θα ονομάζεται **κυρτή** (convex) εάν $g''(u) \geqslant 0$, και **κοίλη** (concave) εάν $g''(u) \leqslant 0$.

Επισήμανση. Μία κυρτή συνάρτηση δεν είναι υποχρεωτικά υπεργραμμική κοντά στο μηδέν. Όμως ισχύει ότι:
δ) Εάν $g(u)$ κυρτή και $g(0) = 0$, τότε είναι και υπεργραμμική.

Συνεχίζουμε με μερικά σημαντικά θεωρήματα.

Θεώρημα 25. *(Ικανή συνθήκη) Εάν υπάρχει κάποιο $a > 0$ τέτοιο ώστε $g(w) \geqslant aw$ για $w \geqslant 0$, τότε θα υπάρχει $\lambda^* > 0$ τέτοιο ώστε για $\lambda > \lambda^*$, η (6.3) δεν έχει καμμία θετική λύση.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι $g(w) \geqslant aw$ για $w \geqslant 0$. Έστω ϕ_1 η θετική ιδιοσυνάρτηση για την πρώτη ιδιοτιμή λ_1. Πολλαπλασιάζοντας την (6.3α΄) με ϕ_1 και ολοκληρώνοντας πάνω στο Ω, θα έχουμε:

$$-\int_\Omega \varphi_1 \Delta w dx = \lambda \int_\Omega \varphi_1 g(w) dx \Rightarrow -\int_\Omega w \Delta \varphi_1 dx = \lambda \int_\Omega \varphi_1 g(w) dx$$

$$\Rightarrow \lambda_1 \int_\Omega \varphi_1 w dx = \lambda \int_\Omega \varphi_1 g(w) dx \geqslant \lambda a \int_\Omega \varphi_1 w dx.$$

Επομένως, εάν η (6.3) έχει μιά θετική λύση, τότε $\lambda \leqslant \lambda_1/a \leqslant \lambda^*$.

Πόρισμα 26. *Εάν $g(u) > 0, u > 0$, $g(0) > 0$, και $\left(\frac{g(u)}{u}\right)^{'}$ αλλάζει πρόσιμο από τα αρνητικά στα θετικά ακριβώς μιά φορά για κάποιο $u = \beta > 0$, τότε υπάρχει κάποιο $a > 0$ τέτοιο ώστε $g(u) \geqslant au$ για $u \geqslant 0$, οπότε σύμφωνα με το Θεώρημα 25 θα υπάρχει κάποιο $\lambda^* > 0$ τέτοιο ώστε για $\lambda > \lambda^*$, η (6.3) δεν έχει καμμία θετική λύση.*
Απόδειξη. *(Βλ. Junping Shi [124]).*

Πόρισμα 27. *Στην περίπτωση όπου $g(0) = 0$, το Πόρισμα 26 είναι αληθές εάν και μόνο εάν $g^{'}(0) > 0$.*
Απόδειξη. Εστω $g(0) = 0$ και $g^{'}(0) = 0$. Είναι εύκολο να δούμε ότι δεν υπάρχει κανένα $a > 0$ τέτοιο ώστε $g(u) \geqslant au$ για $u \geqslant 0$. Ομως εάν $g^{'}(0) > 0$ το Πόρισμα 26 ισχύει.

Προφανώς, στην περίπτωσή μας, ψάχνουμε για υπό-υπέρ γραμμικές συναρτήσεις, διότι θέλουμε επιπλέον να ισχύει $\int_b^\infty \frac{ds}{g(s)} < \infty$ για κάποιο $b \geqslant 0$.

Τα ανωτέρω θεωρήματα, μολονότι βασικά, δε δίνουν καμμιά πληροφορία για τη μορφή του διαγράμματος διακλάδωσης. Αφορούν μόνο το supremum του φάσματος.

Πρόσφατα, οι Ambrosetti, Brezis και Cerami μελέτησαν την εξίσωση (6.3) επί ενός οποιουδήποτε χωρίου με λείο σύνορο, για $g(s) = s^q + s^p$, με $0 < q < 1 < p \leqslant \frac{n+2}{n-2}$, και απέδειξαν την ύπαρξη δύο θετικών λύσεων όταν $\lambda \in (0, \lambda^*)$, δηλαδή το φάσμα του στάσιμου προβλήματος έχει σημείο αναστροφής.

Για τη συνάρτηση $g(s)$, εκτελούμε τους υπολογισμούς:
$g(0) = 0$ και $g^{'}(s) = qs^{q-1} + ps^{p-1} = \frac{q}{s^{1-q}} + ps^{p-1}$, οπότε $g^{'}(0) = \infty$. Επίσης, $\int_b^\infty \frac{ds}{g(s)} = \int_b^\infty \frac{ds}{s^q+s^p} < \int_b^\infty \frac{ds}{s^p} < \infty$, καθόσον $p > 1$. Επιπλέον, σύμφωνα με τα Πορίσματα (27) και (26), υπάρχει ένα $a > 0$ τέτοιο ώστε $g(s) \geqslant as, s \geqslant 0$.

Όντως, $g(s) > 0$ για $s > 0$, $g(0) = 0$, $g^{'}(0) > 0$, και, $\left(\frac{g(s)}{s}\right)^{'} = \left(\frac{s^q+s^p}{s}\right)^{'} = \frac{qs^q+ps^p-s^q-s^p}{s^2} = \frac{(p-1)s^p-(1-q)s^q}{s^2} \Rightarrow (p-1)\,s^p - (1-q)\,s^q = 0 \Rightarrow s^{p-q} = \frac{1-q}{p-1} \Rightarrow s = \left(\frac{1-q}{p-1}\right)^{\frac{1}{p-q}}$, οπότε $\left(\frac{g(s)}{s}\right)^{'}$ αλλάζει πρόσημο από τα αρνητικά στα θετικά ακριβώς μιά φορά, στο σημείο $s = \left(\frac{1-q}{p-1}\right)^{\frac{1}{p-q}} > 0$.

Συνάγουμε ότι η συνάρτηση $g(s) = s^q + s^p$ είναι όντως μία από τις υποψήφιες για τις οποίες το διάγραμμα διακλάδωσης θα έχει σημείο αναστροφής. Παρόλα αυτά, θα χρειασθεί να αναλύσουμε ακόμα περισσότερο το διάγραμμα διακλάδωσης. Μιά βαθύτερη μελέτη θα συνεισφέρει σημαντικά στη συνέχεια της εργασίας μας.

Μιά πρώτη προσπάθεια έγινε στις αρχές της δεκαετίας του 80 από τον Lions. Στο τέλος της εργασίας του ο Lions κατέδειξε ότι μία μέθοδος για την εκτίμηση της μορφής του διαγράμματος διακλάδωσης των λύσεων του (6.3) είναι η αντικατάσταση του τελεστή $-\Delta w$ με $\lambda_1 w$ οπότε η (6.3) απλοποιείται στην απλή εξίσωση $\lambda_1 w = \lambda g(w)$, όπου λ_1 είναι η πρώτη ιδιοτιμή της $-\Delta$ στο $H_1^0(\Omega)$. Εάν οι μη γραμμικές συναρτήσεις δεν είναι πολύπλοκες (δηλαδή χωρίς πολλά σημεία καμπής), το ακριβές σχήμα του διαγράμματος διακλάδωσης της (6.3) είναι όμοιο με το γράφημα της $\lambda_1 w = \lambda g(w)$, και εάν το χωρίο μας είναι $\Omega = B_n$ δηλαδή η μοναδιαία μπάλα στον $\mathbb{R}^n$, τότε το διάγραμμα διακλάδωσης της (6.3) είναι μία περιστροφή του γραφήματος της $s/g(s)$.

Όλα τα ανωτέρω είναι πολύ χρήσιμα, και μας καθοδηγούν στις αναζητήσεις μας. Όμως χρειαζόμαστε περισσότερα. Για το λόγο αυτό κρίνουμε σκόπιμο να παραθέσουμε το ελάχιστα αναγκαίο θεωρητικό υπόβαθρο, το οποίο οικοδομήθηκε κυρίως από τις πρωτοποριακές εργασίες των Crandall και Rabinowitz [34] καθώς και από τις εργασίες του Junping Shi [124], από όπου και αντλήσαμε το περισσότερο, θεωρητικό, υλικό.

Σκοπός μας είναι να χρησιμοποιήσουμε μερικά βασικά θεωρήματα της θεωρίας διακλάδωσης για να μελετήσουμε το δικό μας πρόβλημα (μη-τοπικότητα, $f(0) = 0$) και κυρίως να ερευνήσουμε την περίπτωση ύπαρξης καμπύλης διακλάδωσης με μορφή $\supset$, δηλαδή να έχουμε φάσμα φραγμένο και κλειστό.

6.2 Βασικά Θεωρήματα Διακλάδωσης

Στα επόμενα θεωρήματα και για λόγους ομοιομορφίας με αντίστοιχες εργασίες στη βιβλιογραφία, χρησιμοποιούμε το γράμμα u για τη λύση στο στάσιμο πρόβλημα, και το w για τη λύση των γραμμικοποιημένων εξισώσεων. Επίσης, χρησιμοποιούμε την u σαν την ανεξάρτητη μεταβλητή στη συνάρτηση g, ώστε το γράμμα s να χρησιμοποιηθεί ως η πραγματική μεταβλητή στις παραμετρικές εξισώσεις της καμπύλης διακλάδωσης.

Τα βασικά θεωρήματα που παραθέτουμε παρακάτω για την πληρέστερη παρουσίαση του προβλήματος, υπάρχουν σε όλη την αντίστοιχη Βιβλιογραφία. Εμείς ανατρέξαμε κυρίως στο βιβλίο του Juping Shi, [124] για τις βασικές θεωρητικές έννοιες.

Ξαναγράφουμε λοιπόν το πρόβλημα (6.3) ως εξής:

$$\Delta u + \lambda g(u) = 0,\ x \in \Omega \subset \mathbb{R}^N, \tag{6.5α$'$}$$

$$u > 0,\ x \in \Omega, \tag{6.5β$'$}$$

$$u = 0,\ x \in \partial\Omega. \tag{6.5γ$'$}$$

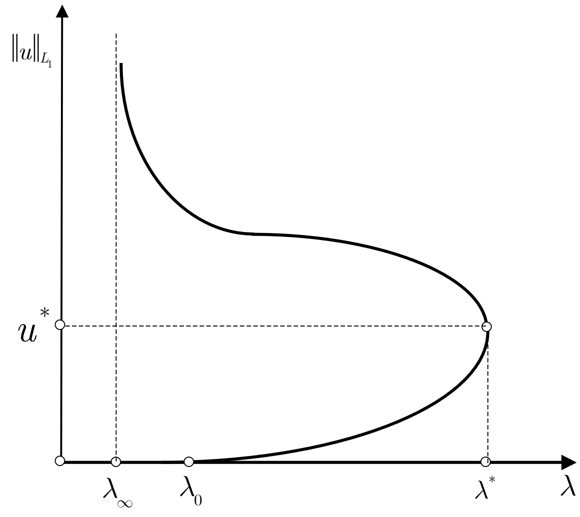
Για να γίνει σαφές το τι παριστάνουν οι διάφορες παράμετροι, παραθέτουμε ένα ενδεικτικό σχήμα μιάς καμπύλης διακλάδωσης, (βλ.σχημα 6.1).

- $(\lambda_0, 0)$ είναι το σημείο όπου έχουμε διακλάδωση από την τετριμμένη λύση.
- (λ_∞, ∞) είναι το σημείο όπου έχουμε διακλάδωση από το άπειρο.
- (λ^*, u^*) είναι ένα σημείο αλλαγής κατεύθυνσης, (turning point), όπου έχουμε διακλάδωση (υπό ευρεία έννοια) λόγω της στροφής του διαγράμματος.

Σημειώνουμε ότι, ανάλογα με τη μη γραμμική συνάρτηση g, το λ_0 μπορεί να είναι μηδέν, θετικό ή άπειρο. Το ίδιο ισχύει και για το λ_∞.

Θα ορίσουμε την καμπύλη διακλάδωσης παραμετρικά με ανεξάρτητη παράμετρο το s. Θα έχουμε: $\lambda = \lambda(s)$ και $u = u(s)$, $s \in \mathbb{R}$.

Το σημαντικότερο θεώρημα στη θεωρία διακλάδωσης είναι το θεώρημα Πεπλεγμένης Συνάρτησης (Implicit Function Theorem).



Σχήμα 6.1:

Θεώρημα 28. *(Θεώρημα Πεπλεγμένης Συνάρτησης).*

Έστω $(\lambda_\kappa, u_\kappa)$ μία θετική λύση στο (6.5) και ας υποθέσουμε ότι το γραμμικοποιημένο πρόβλημα,

$$\Delta w + \lambda_\kappa g^{'}(u_\kappa)w = 0, \ x \in \Omega, \tag{6.6α′}$$

$$w = 0, \ x \in \partial\Omega, \tag{6.6β′}$$

$$w > 0, \ x \in \Omega, \tag{6.6γ′}$$

δεν έχει καμμία μη τετριμμένη λύση. Τότε, όλες οι θετικές λύσεις της (6.5) κοντά στο $(\lambda_\kappa, u_\kappa)$ έχουν την παραμετρική μορφή $(\lambda(s), u_\kappa + sw + z(s))$ για $s \in (-\delta, \delta)$ και κάποιο $\delta > 0$, όπου w είναι η λύση του προβλήματος:

$$\Delta w + \lambda_\kappa g^{'}(u_\kappa)w = -g(u_\kappa), \ x \in \Omega, \tag{6.7α′}$$

$$w = 0, \ x \in \partial\Omega, \tag{6.7β′}$$

$$w > 0, \ x \in \Omega, \tag{6.7γ′}$$

και

$$\lambda(0) = \lambda_\kappa, \ \lambda^{'}(0) \neq 0, \ z(0) = z^{'}(0) = 0.$$

Θεώρημα 29. *(Διακλάδωση από την τετριμμένη λύση). Εάν $g(0) = 0$ και $g^{'}(0) > 0$ και $\lambda_0 = \lambda_1/g^{'}(0)$, τότε όλες οι θετικές λύσεις της (6.5) κοντά στο $(\lambda_0, 0)$ έχουν τη* *μορφή* $(\lambda(s), u(s)) = (\lambda(s), sw + z(s))$ *για* $s \in (0,\delta)$ *και κάποιο* $\delta > 0$, *όπου* w *είναι η λύση του προβλήματος,*

$$\Delta w + \lambda_i w = 0,\ x \in \Omega, \tag{6.8α'}$$

$$w = 0,\ x \in \partial\Omega, \tag{6.8β'}$$

$$w > 0,\ x \in \Omega, \tag{6.8γ'}$$

με

$$i = 1,\ \lambda(0) = \lambda_0,\ z(0) = z^{'}(0) = 0.$$

Θεώρημα 30. *(Διακλάδωση από το άπειρο.)*

Έστω $g^{'}(\infty) = \lim\limits_{u\to\infty} g(u)/u \in (0,\infty)$ *και* $\lambda_\infty = \lambda_i/g^{'}(\infty)$. *Τότε όλες οι θετικές λύσεις της (6.5) κοντά στο* (λ_∞, ∞) *έχουν τη μορφή* $(\lambda(s), sw + z(s))$ *για* $s \in (\delta, \infty)$ *και κάποιο* $\delta > 0$, *όπου* w *είναι η λύση της (6.8) με* $i = 1$, $\lim\limits_{s\to\infty} \lambda(s) = \lambda_\infty$, *και* $\|z(s)\| = o(s)$ *του* $s \to \infty$.

Θεώρημα 31. *(Διακλάδωση σε σημείο αναστροφής, (turning point).)*

Έστω (λ^*, u^*) *μία θετική λύση της (6.5) και υποθέτουμε ότι η γραμμικοποιημένη εξίσωση (6.6) έχει μία μοναδική μη τετριμμένη λύση* w, *που ικανοποιεί τη σχέση:*

$$\int_\Omega g(u^*) w dx \neq 0. \tag{6.9}$$

Τότε, όλες οι θετικές λύσεις της (6.5) κοντά στο (λ^*, u^*) *έχουν τη μορφή* $(\lambda(s), u^* + sw + z(s))$ *για* $s \in (-\delta, \delta)$ *και κάποιο* $\delta > 0$, *όπου* $\lambda(0) = \lambda^*, \lambda^{'}(0) = 0$, $z(0) = z^{'}(0) = 0$.

Θα εφαρμόσουμε αυτά τα θεωρήματα για να καθορίσουμε τα $\lambda_0, \lambda_\infty$ καθώς και την κατεύθυνση της καμπύλης διακλάδωσης στο σημείο αναστροφής, για την υπό εξέταση συνάρτηση $g(u)$.

Στο σημείο αυτό θα διατυπώσουμε και θα αποδείξουμε ένα πολύ σημαντικό θεώρημα.

Θεώρημα 32. *Εάν μιά συνάρτηση* g *είναι είτε παντού υπεργραμμική είτε παντού υπογραμμική, τότε το πρόβλημα (6.5) δεν έχει εκφυλισμένη λύση, και επομένως το διάγραμμα διακλάδωσης δεν έχει κανένα σημείο αναστροφής. (βλ. [124]).*

Απόδειξη. Έστω ότι η (λ^*, u^*) είναι εκφυλισμένη λύση. Πολλαπλασιάζουμε την (6.5) με w, την (6.6) με u^*, αφαιρούμε και ολοκληρώνουμε στο χωρίο, οπότε παίρνουμε:

$$0 = \int_\Omega (w\Delta u^* - u^*\Delta w)dx = \lambda \int_\Omega \left(g^{'}(u^*)u^* - g(u^*)\right) wdx.$$

Όμως, με βάση την υπόθεση, η $g^{'}(u)u - g(u)$ δεν αλλάζει πρόσημο στο $[0, \infty)$ και η w είναι θετική. Επομένως, καταλήγουμε σε άτοπο. (Ειδάλλως, $f(u) = u$, γραμμική).

Άρα δεν υπάρχουν εκφυλισμένες λύσεις και επομένως ούτε σημεία αναστροφής, αφού στα σημεία αναστροφής η λύση είναι εκφυλισμένη.

Σχόλιο 33. *Ως γνωστόν, για την εκθετική συνάρτηση $g(u) = e^u$ υπάρχουν σημεία αναστροφής. Όμως δεν υπάρχει αντίφαση διότι παρόλο που η e^u είναι κυρτή συνάρτηση, στο διάστημα $[0, 1]$ είναι υπογραμμική και όχι υπεργραμμική. (Αυτό συμβαίνει διότι $e^0 = 1 > 0$). Πράγματι, $K_{e^u}(u) = \frac{u(e^u)^{'}}{e^u} = u$, και η εκθετική συνάρτηση είναι υπογραμμική στο διάστημα $[0, 1]$ ενώ είναι υπεργραμμική στο $[1, \infty)$. Όλα αυτά είναι πολύ σημαντικά στη μελέτη της μορφής των διαγραμμάτων διακλάδωσης.*

6.3 Εφαρμογή στο πρόβλημά μας

Σύμφωνα με τα θεωρήματα των προηγουμένων παραγράφων, πρέπει να κατασκευάσουμε συναρτήσεις g για τις οποίες η $\left(\frac{g(u)}{u}\right)'$ αλλάζει πρόσημο. Μάλιστα, πρέπει να αλλάζει πρόσημο από τα αρνητικά στα θετικά, δηλαδή να είναι υπό-υπέρ-γραμμική (sub-sup) συνάρτηση, διότι εάν ήταν υπέρ-υπο-γραμμική, τότε η αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη του λ^*, δηλαδή η $\int_b^\infty \frac{du}{g(u)} < \infty$, δεν θα ίσχυε.

Η υπό εξέταση συνάρτηση $g(u) = u^q + u^p$, με $0 < q < 1 < p < (n+2)/(n-2)$, είναι όντως υπό-υπέρ-γραμμική.

Στη συνέχεια θα προσδιορίσουμε τις παραμέτρους $\lambda_0, \lambda_\infty$.

Από το Θεώρημα 29, προκύπτει ότι $\lambda_0 = \lambda_1/g'(0)$. Όμως, $g'(0) = \lim\limits_{u\to 0} g'(u) = \infty$, οπότε $\lambda_0 = \lambda_1/\lim\limits_{u\to 0} g'(u) = 0$.

Από το Θεώρημα 30, προκύπτει ότι $\lambda_\infty = \lambda_1/g'(\infty)$, όπου $g'(\infty) = \lim\limits_{u\to\infty} g(u)/u$. Όμως, $g'(\infty) = \lim\limits_{u\to\infty} g(u)/u = \lim\limits_{u\to\infty}(u^q + u^p)/u = \lim\limits_{u\to\infty}(u^{q-1} + u^{p-1}) = \infty$, οπότε, $\lambda_\infty = \lambda_1/\infty = 0$.

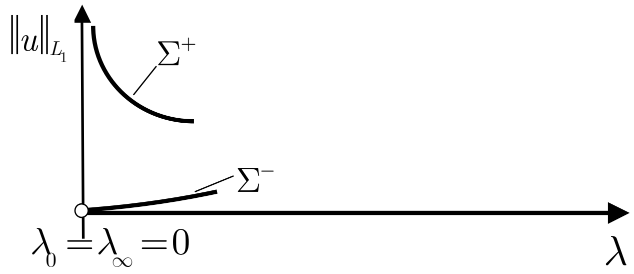
Ακολούθως, θα προσδιορίσουμε την κατεύθυνση της καμπύλης στα δύο αυτά σημεία διακλάδωσης.

Για το σκοπό αυτό, παραθέτουμε δύο πορίσματα από το βιβλίο του Juping Shi (βλ. [124]). Βάσει του Πορίσματος 2.5.7 του βιβλίου αυτού, μπορούμε να διατυπώσουμε την ακόλουθη πρόταση αναφορικά με την περίπτωση που εξετάζουμε:

Πρόταση 34. *Υποθέτουμε ότι το $(\lambda_0, 0)$ είναι ένα σημείο όπου έχουμε διακλάδωση από την τετριμμένη (μηδενική) λύση, και $(\lambda(s), u(s))$, $s \in (0, \delta)$, είναι η θετική καμπύλη των λύσεων του Θεωρήματος (29).*

Εάν η g είναι υπογραμμική ή υπό-υπέρ-γραμμική, τότε $(\lambda(s), u(s))$ είναι υπερκρίσιμη, που σημαίνει ότι $\lambda(s) \geqslant \lambda_0, s \in (0, \delta)$, δηλαδή η καμπύλη κατευθύνεται προς τα δεξιά. (Βλέπε Ορισμό 2.2.1 στο βιβλίο του Juping Shi).

Η συνάρτηση $g(u) = u^q + u^p$, είναι υπό-υπέρ-γραμμική, με $\lambda_0 = 0$. Σύμφωνα με την ανωτέρω πρόταση, $\lambda(s) \geqslant 0, s \in (0, \delta)$, και στο σημείο διακλάδωσης $(0, 0)$, η καμπύλη



Σχήμα 6.2:

κατευθύνεται στα δεξιά.

Βάσει του Πορίσματος 2.5.8 του βιβλίου αυτού, η ακόλουθη πρόταση είναι αληθής για την περίπτωση που εξετάζουμε:

Πρόταση 35. *Υποθέτουμε ότι (λ_∞, ∞) είναι ένα σημείο όπου έχουμε διακλάδωση από το άπειρο, και $(\lambda(s), u(s))$, $s \in (\delta, \infty)$, είναι η καμπύλη θετικών λύσεων του Θεωρήματος 30.*

Εάν η g είναι υπό-υπέρ-γραμμική, με $g(0) = 0$, (οπότε η g θα είναι επίσης κοίλη - κυρτή), τότε $(\lambda(s), u(s))$ είναι υπερκρίσιμη, που σημαίνει ότι $\lambda(s) \geqslant \lambda_\infty, s \in (\delta, \infty)$.

Η συνάρτηση $g(u) = u^q + u^p$ είναι υπό-υπέρ-γραμμική, με $g(0) = 0$ και με $\lambda_\infty = 0$. Σύμφωνα με την ανωτέρω πρόταση, στο σημείο διακλάδωσης $(0, \infty)$, η καμπύλη κατευθύνεται προς τα δεξιά, καθόσον $\lambda(s) \geqslant 0, s \in (\delta, \infty)$.

Μέχρι στιγμής, έχουμε καταλήξει ότι η καμπύλη διακλάδωσης για τη συνάρτηση $g(u) = u^q + u^p$, με $0 < q < 1 < p < (n+2)/(n-2)$ έχει, ποιοτικά, τη μορφή του Σχήματος 6.2.

Τώρα, επεκτείνουμε την καμπύλη Σ^- προς τα δεξιά, όσο αυτό είναι δυνατόν. Όμως, γνωρίζουμε ότι δεν υπάρχει λύση για κάποιο $\lambda > 0$ και μετά, λόγω του ότι $g(u) > au$, $a > 0$, $u \geqslant 0$. Ορίζουμε ως $\lambda^* = \sup\{\lambda > 0 :$ η (6.5) έχει θετική λύση για αυτό το λ στο $\Sigma^-\} > 0$. Επομένως, η Σ^- είτε αναστρέφεται προς τα πίσω (αριστερά) στο λ^* είτε απειρίζεται στο λ^* από την αριστερή μεριά του λ^*.

Εάν η Σ^- απειρίζεται στο σημείο λ^*, τότε λ^* καθίσταται ένα σημείο διακλάδωσης όπου θα έχουμε διακλάδωση από το άπειρο. Από την Πρόταση 35 όμως, για τη συνάρτησή μας, όταν η καμπύλη έμφανίζει διακλάδωση από το άπειρο, αυτή μπορεί να είναι μόνο υπερκρίσιμη, που σημαίνει ότι κατευθύνεται προς τα δεξιά. Αυτό όμως είναι άτοπο καθόσον το λ^* είναι το supremum του φάσματος. Ως εκ τούτου, η Σ^- πρέπει να στρέφεται προς τα αριστερά στο λ^*, οπότε το λ^* είναι σημείο αναστροφής.

Μετά την αναστροφή προς τα αριστερά, η Σ^- θα ενωθεί με το τμήμα Σ^+ της καμπύλης, το οποίο προέκυψε από τη διακλάδωση στο σημείο (λ_∞, ∞), λόγω της συνέχειας της καμπύλης διακλάδωσης, σύμφωνα με το Θεώρημα Πεπλεγμένης Συνάρτησης.

Επιστρέφουμε στο αρχικό μας τοπικό πρόβλημα Διήθησης,

$$-\Delta K(v) = \lambda f(v),\ x \in \Omega,$$

$$v = 0,\ x \in \partial\Omega,$$

$$v > 0,\ x \in \Omega,$$

το οποίο μετά το μετασχηματισμό,

$$K(v) = w \Rightarrow v = K^{-1}(w) \Rightarrow f(v) = f\left(K^{-1}(w)\right) = g(w), \tag{6.10}$$

καταλήγει στο ισοδύναμο πρόβλημα,

$$-\Delta w = \lambda g(w),\ x \in \Omega, \tag{6.11α'}$$

$$w = 0,\ x \in \partial\Omega, \tag{6.11β'}$$

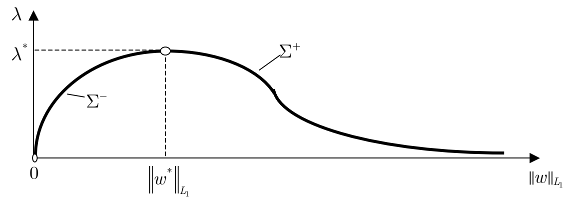
$$w > 0,\ x \in \Omega. \tag{6.11γ'}$$

Με βάση τα λεχθέντα για τη συνάρτηση $g(s)$, πρέπει επιπλέον να ισχύει:

$$g(w) = w^q + w^p, 0 < q < 1 < p < \frac{n+2}{n-2}. \tag{6.12}$$

Τέτοιες συναρτήσεις σαφώς και υπάρχουν. Εάν π.χ., $K(v) = v^k, f(v) = v^{k_1} + v^{k_2}$, με $1 < k_1 < k < k_2$ και $\frac{k_2}{k} < \frac{n+2}{n-2}$, που δίνει $\frac{k_1}{k} = q < 1$, $\frac{k_2}{k} = p > 1$ και $p < \frac{n+2}{n-2}$.

Πράγματι, $w = v^k \Rightarrow v = w^{1/k} \Rightarrow f(v) = v^{k_1} + v^{k_2} = (w^{1/k})^{k_1} + (w^{1/k})^{k_2} = w^{k_1/k} + w^{k_2/k} = w^q + w^p = g(w)$.



Σχήμα 6.3:

Για τη συνάρτηση αυτή, $g(w)$, αποδείξαμε ότι το διάγραμμα διακλάδωσης έχει μορφή $\supset$, με $0 < \lambda^* < \infty$. Έχουμε όμως αποδείξει ότι το ισοδύναμο πρόβλημα,

$$-\Delta K(v) = \lambda f(v),\ x \in \Omega,$$

$$v = 0,\ x \in \partial\Omega,$$

$$v > 0,\ x \in \Omega,$$

έχει φραγμένο φάσμα, με το ίδιο μέγιστο, λ^*. Επιπρόσθετα, οι συναρτήσεις K και f ικανοποιούν τις απαιτήσεις που έχουμε θέσει για το χρονοεξαρτώμενο πρόβλημα, δηλαδή η $K(v)$ είναι κυρτή με $K(0) = K^{'}(0) = 0$, και η $f(v)$ είναι και αυτή κυρτή με $f(0) = 0$.

Επίσης,

$$\int_b^\infty \frac{K^{'}(s)}{f(s)}ds = \int_b^\infty \frac{ks^{k-1}}{s^{k_1} + s^{k_2}}ds < k\int_b^\infty \frac{s^{k-1}}{s^{k_2}}ds = k\int_b^\infty \frac{ds}{s^{k_2-k+1}} < \infty,$$

διότι $k_2 - k + 1 > 1$.

Επιπλέον,

$$\int_0^1 \frac{K^{'}(s)}{s}ds = k\int_0^1 \frac{s^{k-1}}{s}ds = k\int_0^1 s^{k-2}ds = \frac{k}{k-1}\left[s^{k-1}\right]_0^1 = \frac{k}{k-1} < \infty,$$

καθόσον $k - 1 > 0$. Σύμφωνα με τη σχέση (1.32) του Κεφαλαίου 1, αυτό σημαίνει ότι ο συμπαγής φορέας της λύσης $u(x,t)$ επεκτείνεται με πεπερασμένη ταχύτητα.

Επανερχόμενοι στο στάσιμο πρόβλημα (6.11), εάν στρέψουμε κατάλληλα το διάγραμμα διακλάδωσης $\lambda - w$, θα λάβουμε το Σχήμα 6.3.

Στον κλάδο Σ^- η $\lambda(w)$ είναι αύξουσα. Όμως $\lambda(w) = \lambda(v^k) = \Lambda(v), 1 < k$, οπότε,

$$\frac{d\Lambda(v)}{dv} = \frac{d\lambda(v^k)}{dv} = kv^{k-1}\frac{d\lambda(v)}{dv} > 0,$$

και το τμήμα Σ_v^- της καμπύλης $\Lambda - v$ είναι επίσης αυξανόμενο.

Στον κλάδο Σ^+ η $\lambda(w)$ είναι φθίνουσα, οπότε,

$$\frac{d\Lambda(v)}{dv} = \frac{d\lambda(v^k)}{dv} = kv^{k-1}\frac{d\lambda(v)}{dv} < 0$$

και το τμήμα Σ_v^+ της καμπύλης $\Lambda - v$ είναι επίσης φθίνον.

Επιπλέον, καθώς $\|w\| \to \infty$, $\lambda(\|w\|) \to 0$. Επομένως, καθώς $\|v\| \to \infty \Rightarrow \left\|v^k\right\| \to \infty \quad \Rightarrow \lambda(\left\|v^k\right\|) \to 0 \Rightarrow \Lambda(\|v\|) \to 0$.

Κλείνοντας την ενότητα αυτή, συμπεραίνουμε ότι η καμπύλη διακλάδωσης $\Lambda - v$ έχει παρόμοιο $\supset$ σχήμα με την καμπύλη $\lambda - w$ και με το ίδιο $\Lambda^* = \lambda^*$.

Μερικά συμπεράσματα

Α) Ως γενικό συμπέρασμα σύμφωνα με τα αναφερθέντα ανωτέρω, μπορούμε να πούμε ότι για το εάν το τοπικό στάσιμο πρόβλημα Διήθησης,

$$-\Delta K(v) = \lambda f(v),$$

έχει διάγραμμα διακλάδωσης με κλειστό φράγμα, και συγκεκριμένα εάν έχει τη μορφή $\supset$, εξαρτάται άμεσα από το ισοδύναμο πρόβλημα,

$$-\Delta w = \lambda g(w).$$

Οι απαραίτητες συνθήκες που βρήκαμε για τη συνάρτηση $g(s)$, μεταφέρονται στη συνάρτηση $f\left(K^{-1}\right)(s) = g(s)$.

Αποδείξαμε την ύπαρξη μιάς τουλάχιστον οικογένειας τέτοιων συναρτήσεων $K(s)$ και $f(s)$. Μπορούμε όμως να γενικεύσουμε τα συμπεράσματα και να συμπεριλάβουμε

συνθήκες για πιό γενικές συναρτήσεις $K(s)$ και $f(s)$.
Δηλαδή:

1. Η συνάρτηση $f\left(K^{-1}\right)(s)$ να είναι υπό - υπέρ-γραμμική,

2. $(f\left(K^{-1}\right))(0) = 0$. Αυτό προκύπτει από τις σχέσεις: $K(0) = 0 \Rightarrow K^{-1}(0) = 0 \Rightarrow (f\left(K^{-1}\right))(0) = f(0) = 0$,

3. $(f\left(K^{-1}\right))'(0) > 0$, αναγκαία προϋπόθεση βάσει του Πορίσματος 27 του παρόντος κεφαλαίου, και βεβαίως η αρχική μας συνθήκη:

$$\int_b^\infty \frac{K'(s)}{f(s)} ds < \infty, \quad \text{για } b \geq 0.$$

B) Το διάγραμμα διακλάδωσης που μελετήσαμε στο κεφάλαιο αυτό αφορά το τοπικό πρόβλημα Διήθησης. Το μη τοπικό πρόβλημα που εξετάζουμε μπορεί να έχει το ίδιο αλλά μπορεί να έχει και διαφορετικό διάγραμμα διακλάδωσης, προφανώς λόγω της ύπαρξης του ολοκληρώματος στον παρανομαστή.

Όπως έχουμε ήδη διαπιστώσει στο Κεφάλαιο 7, τα δύο προβλήματα, τοπικό και μη τοπικό, συνδέονται μέσω της σχέσης:

$$\lambda(\mu) = \mu \left(\int_\Omega f(w) dx \right)^p,$$

η οποία μπορεί να μας οδηγήσει, υπό ορισμένες προϋποθέσεις, στην εύρεση του διαγράμματος του μη τοπικού προβλήματος από αυτό του τοπικού.

Για τις περιπτώσεις που εξετάζουμε, εάν το διάγραμμα διακλάδωσης του τοπικού προβλήματος έχει σχήμα $\supset$, τότε και το μη τοπικό **ενδέχεται** να έχει και αυτό διάγραμμα της ίδιας μορφής. Εάν όμως, αντίστροφα, το διάγραμμα διακλάδωσης του τοπικού, παρότι έχει φραγμένο φάσμα για την παράμετρο λ, δεν έχει σχήμα $\supset$, τότε του $\mu \to \mu^*$ θα έχουμε $\int_\Omega f(w)dx \to \infty$ και επομένως $\lambda \to \infty$, (σύμφωνα με την ανωτέρω σχέση), και το μη τοπικό πρόβλημα δεν θα έχει φραγμένο φάσμα. Αρα **αναγκαία** προϋποθεση για να έχουμε φραγμένο φάσμα (ανοικτό ή κλειστό) για το μη τοπικό πρόβλημα είναι το διάγραμμα διακλάδωσης του τοπικού να έχει σχήμα $\supset$.

Η συνθήκη αυτή όμως **δεν είναι και ικανή**. Η μορφή του διαγράμματος διακλάδωσης του μη τοπικού εξαρτάται από το που τείνει η παράσταση,

$$\lambda(\mu) = \mu \left(\int_\Omega f(w)dx \right)^p, \text{ καθώς το } \mu \to 0 \text{ και συγχρόνως } \int_\Omega f(w)dx \to \infty,$$

δηλαδή τα ενδεχόμενα είναι ανοιχτά. Όμως τα πιθανά ενδεχόμενα είναι μόνο τρία:

1) Το όριο της παράστασης να είναι το $+\infty$. Τότε για το μη τοπικό πρόβλημα, το φάσμα είναι μη φραγμένο.

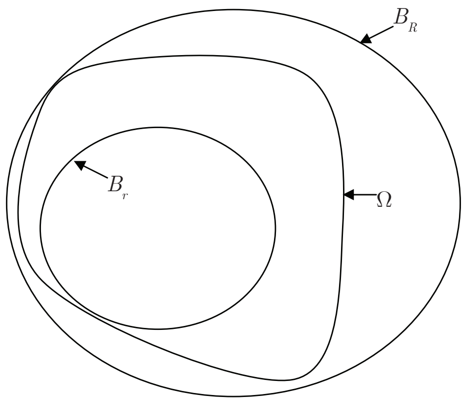
2) Το όριο της παράστασης να είναι ένας πεπερασμένος θετικός αριθμός. Τότε για το μη τοπικό πρόβλημα, το φάσμα είναι φραγμένο και ενδεχομένως τύπου $\supset$.

3) Το όριο της παράστασης να είναι το μηδέν. Τότε για το μη τοπικό πρόβλημα, το φάσμα είναι φραγμένο και τύπου $\supset$.

Γ) Επισημαίνουμε ότι οι μορφές των διαγραμμάτων διακλάδωσης που εξετάσαμε στο κεφάλαιο αυτό **ισχύουν σίγουρα** όταν το χωρίο Ω είναι η μπάλα B_N στο χώρο $\mathbb{R}^N$ με ακτίνα r πεπερασμένη. Το πρόβλημα για την **ακριβή μορφή** του διαγράμματος διακλάδωσης σε οποιοδήποτε φραγμένο χωρίο Ω είναι ένα πρόβλημα ανοικτό. Στην παρούσα διατριβή όμως δεν μας ενδιαφέρει με ακρίβεια η μορφή του, αλλά απλώς εάν υπάρχει περίπτωση να έχει μορφή $\supset$. Μπορούμε να εκτιμήσουμε γενικά την κατάσταση με την παρακάτω απλή προσέγγιση.

Εστω Ω το χωρίο μας, με αρκούντως λείο σύνορο. Επίσης έστω B_r η μέγιστη σε αυτό εγγεγραμμένη μπάλα, και B_R η ελάχιστη περιγεγραμμένη μπάλα. (βλ.σχήμα 6.4).

Το πρόβλημά μας οριζόμενο στη εσωτερική μπάλα έχει διάγραμμα διακλάδωσης μορφής $\supset$. Το ίδιο ισχύει εάν σαν χωρίο θεωρήσουμε την εξωτερική μπάλα. Τώρα, δεδομένου ότι το φάσμα θα είναι φραγμένο και στην περίπτωση που το χωρίο μας είναι το Ω (αφού το φραγμένο του φάσματος εξαρτάται από τις συναρτήσεις $K(s)$ και $f(s)$ και όχι από τη μορφή του χωρίου), και με δεδομένου ότι η ασυμμετρία του χωρίου **κατά κανόνα** περιπλέκει τη μορφή του διαγράμματος διακλάδωσης, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι υπάρχουν περιπτώσεις διαγραμμάτων διακλάδωσης με μορφή $\supset$ και σε γενικής μορφής φραγμένα χωρία, με αρκούντως λείο σύνορο.



Σχήμα 6.4:

Στα Κεφάλαια 9 και 10 που θα ασχοληθούμε με μη τοπικά προβλήματα, θα εξετάσουμε αναλυτικότερα το φραγμένο ή μη του φάσματος.

Κεφάλαιο 7

Ευστάθεια των λύσεων του στάσιμου μη-τοπικού προβλήματος.

7.1 Προκαταρκτικά

Το **χρονοεξαρτώμενο μη-τοπικό** πρόβλημα που εξετάζουμε είναι:

$$u_t - \Delta K(u) = \frac{\lambda f(u)}{\left(\int_\Omega f(u)dx\right)^p}, \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \tag{7.1α'}$$

$$u(x,t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0, \tag{7.1β'}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \geq 0, \quad x \in \Omega, \tag{7.1γ'}$$

όπου οι αρχικές συνθήκες έχουν συμπαγή φορέα μέσα στο Ω. Επίσης,

$$K(s), K'(s), K''(s) > 0 \text{ για } s > 0 \text{ και } K(0) > 0, K'(0) = 0, K''(0) \geq 0, \tag{7.2α'}$$

$$f(s), f'(s), f''(s) > 0 \text{ για } s > 0 \text{ και } f(0) = 0, f'(0) \geq 0, \tag{7.2β'}$$

$$\int_b^\infty \frac{ds}{f^{1-p}(s)} < \infty \text{ για κάποιο } b > 0. \tag{7.2γ'}$$

Το αντίστοιχο **στάσιμο μη-τοπικό** πρόβλημα είναι:

$$\Delta K(w) + \frac{\lambda f(w)}{\left(\int_\Omega f(w)dx\right)^p} = 0, \quad x \in \Omega, \tag{7.3α'}$$

$$w(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \tag{7.3β'}$$

Θέτουμε, $\lambda/\left(\int_\Omega f(w)dx\right)^p = \mu$, οπότε λαμβάνουμε το **ισοδύναμο τοπικό** πρόβλημα για την $w = w(x)$:

$$\Delta K(w) + \mu f(w) = 0, \;\; x \in \Omega, \tag{7.4α'}$$

$$w(x) = 0, \;\; x \in \partial\Omega, \tag{7.4β'}$$

$$\lambda(\mu) = \mu \left(\int_\Omega f(w)dx\right)^p. \tag{7.4γ'}$$

Σκοπός μας είναι να εξετάσουμε την ασυμπτωτική ευστάθεια (ή μη) των λύσεων του χρονοεξαρτώμενου προβλήματος (7.1). Για να έχει έννοια η μελέτη αυτή θα πρέπει το αντίστοιχο στάσιμο πρόβλημα (7.3) να έχει τουλάχιστον μία λύση. Επομένως αναφερόμαστε σε εκείνα τα λ που ανήκουν στο φάσμα του στάσιμου προβλήματος.

Σε προηγούμενο κεφάλαιο αποδείξαμε ότι υπό τις συνθήκες που έχουμε θέσει για τις συναρτήσεις K και f, το στάσιμο πρόβλημα (7.3) έχει φραγμένο φάσμα.

Η πλέον γενική περίπτωση μιάς τέτοιας μελέτης είναι όταν το φάσμα είναι κλειστό και η μορφή του διαγράμματος διακλάδωσης είναι τύπου $\supset$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα $\lambda^* < \infty$ θετικό τέτοιο ώστε για κάθε $\lambda \in (0, \lambda^*)$ το στάσιμο πρόβλημα (7.3) να έχει μία τουλάχιστον θετική κλασσική λύση, και για $\lambda = \lambda^*$ ακριβώς μία κλασσική λύση.

Η ανάλυση που ακολουθεί σχετίζεται με τη σύγκλιση ή μη των λύσεων του χρονοεξαρτώμενου προβλήματος σε μία λύση του στάσιμου καθώς ο χρόνος τείνει στο άπειρο, ανάλογα με τις αρχικές συνθήκες οι οποίες και καθορίζουν το εάν οι λύσεις του προβλήματος (7.1) είναι ολικές ως προς το χρόνο. Επειδή οι λύσεις του στάσιμου προβλήματος (7.3) είναι πάντα θετικές και ως εκ τούτου κλασσικές, η μελέτη θα γίνει για την περίπτωση κλασσικών λύσεων.

Η παραδοχή αυτή δεν είναι σε βάρος της γενικότητας, αφού και στην περίπτωση που έχουμε λύση με χρονικά επεκτεινόμενο φορέα εντός του χωρίου Ω και άρα πολύ ασθενή, όπως έχουμε δείξει σε προηγούμενο κεφάλαιο, **εάν η λύση είναι ολική ως προς το χρόνο, θα θετικοποιηθεί σε πεπερασμένο χρόνο, οπότε και θα γίνει κλασσική**.

Τώρα, επειδή η συνάρτηση $f(s)$ είναι αύξουσα, για να μπορέσουμε να εφαρμόσουμε αρχές σύγκρισης θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε ζεύγη πάνω - κάτω λύσεων για το πρόβλημα (7.1).

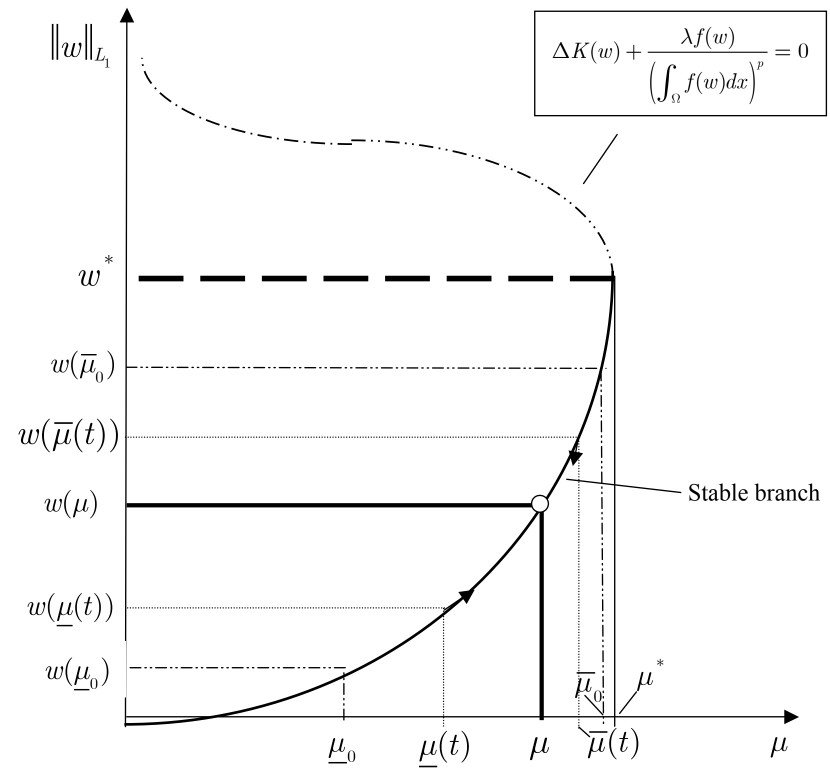
Υπενθυμίζουμε ότι $(z(x,t); v(x,t))$ είναι ένα ζεύγος πάνω - κάτω λύσεων για το πρόβλημα (7.1) εάν:

$$S(z;v) := z_t - \Delta K(z) - \frac{\lambda f(z)}{\left(\int_\Omega f(v)dx\right)^p} \leq 0 \leq v_t - \Delta K(v) - \frac{\lambda f(v)}{\left(\int_\Omega f(z)dx\right)^p} =: S(v;z), \tag{7.5α'}$$

$$z_0(x) \leq u_0(x) \leq v_0(x). \tag{7.5β'}$$

όπου για απλούστευση, θεωρούμε συνθήκες Dirichlet στο σύνορο,

Στις επόμενες δύο παραγράφους θα εξετάσουμε την ευστάθεια των λύσεων του στασίμου, υποθέτοντας ότι το διάγραμμα διακλάδωσης αποτελείται από δύο κλάδους. Η γενική περίπτωση ενός ελικοειδούς διαγράμματος, μπορεί να είναι πολύ πιό σύνθετη, μπορεί όμως να εξετασθεί με βάση τις μεθόδους που αναπτύσουμε παρακάτω.



Σχήμα 7.1:

7.2 Ευσταθής κλάδος, κλασσικά ζεύγη πάνω - κάτω λύσεων

Εξετάζουμε ως προς την ευστάθεια πρώτα τον κάτω κλάδο του διαγράμματος διακλάδωσης (βλέπε σχήμα 7.1).

Η μέθοδος που ακολουθούμε είναι η εξής: Γράφουμε τις συναρτήσεις $z(x,t)$ και $v(x,t)$ στη εξής μορφή, (παραμετρικοποίηση ως προς το χρόνο t, βασιζόμενοι σε παρόμοιο σκεπτικό με αυτό των [98]):

$$z(x,t) = \underline{w}(x;\underline{\mu}(t)) = \underline{w}, \tag{7.6α'}$$

$$v(x,t) = \overline{w}(x;\overline{\mu}(t)) = \overline{w}, \tag{7.6β'}$$

όπου $w(x;\mu)$ είναι λύσεις του τοπικού στάσιμου προβλήματος (7.4) και $\mu(t)$ είναι συνάρτηση του t, με αρχικές συνθήκες, $z_0 = \underline{w}_0 > 0$ και $v_0 = \overline{w}_0 < w^*$.

Θεωρούμε την περίπτωση:

$$u_0(x) \leq v_0(x) = \overline{w}_0(x) < w^*(x). \tag{7.7}$$

Στη συνέχεια αναζητούμε συνθήκες για τις $\underline{\mu}(t)$ και $\overline{\mu}(t)$ τέτοιες ώστε:

α) $(z(x,t); v(x,t))$ να είναι ένα ζεύγος πάνω - κάτω λύσεων για το πρόβλημα (7.1), και,

β) $z(x,t), v(x,t)$ να συγκλίνουν στην $w(x,\mu)$, λύση του προβλήματος (7.4), καθώς το $t \to \infty$.

Θα δουλέψουμε λοιπόν ως εξής:

α) Για να είναι το $(z(x,t); v(x,t)) = (\underline{w}; \overline{w})$ ζεύγος πάνω - κάτω λύσεων του προβλήματος (7.1) θα πρέπει να ισχύει:

$$S(z;v) := z_t - \Delta K(z) - \frac{\lambda f(z)}{\left(\int_\Omega f(v)dx\right)^p} = \underline{w}_\mu \dot{\underline{\mu}} + \frac{\underline{\lambda} f(\underline{w})}{\left(\int_\Omega f(\underline{w})dx\right)^p} - \frac{\lambda f(\underline{w})}{\left(\int_\Omega f(\overline{w})dx\right)^p} \leq 0,$$

και

$$S(v;z) := v_t - \Delta K(v) - \frac{\lambda f(v)}{\left(\int_\Omega f(z)dx\right)^p} = \overline{w}_\mu \dot{\overline{\mu}} + \frac{\overline{\lambda} f(\overline{w})}{\left(\int_\Omega f(\overline{w})dx\right)^p} - \frac{\lambda f(\overline{w})}{\left(\int_\Omega f(\underline{w})dx\right)^p} \geq 0.$$

Επομένως θα πρέπει:

$$\begin{aligned}
\underline{w}_\mu \dot{\underline{\mu}} + & \frac{\underline{\lambda} f(\underline{w})}{\left(\int_\Omega f(\underline{w})dx\right)^p} - \frac{\lambda f(\underline{w})}{\left(\int_\Omega f(\overline{w})dx\right)^p} \leq 0, \qquad \text{ή} \\
\dot{\underline{\mu}} &\leq \left(\frac{\lambda}{\left(\int_\Omega f(\overline{w})dx\right)^p} - \frac{\underline{\lambda}}{\left(\int_\Omega f(\underline{w})dx\right)^p} \right) \frac{f(\underline{w})}{\underline{w}_\mu} \\
&= \left(\frac{\mu \left(\int_\Omega f(w)dx\right)^p}{\left(\int_\Omega f(\overline{w})dx\right)^p} - \underline{\mu} \right) \frac{f(\underline{w})}{\underline{w}_\mu} \\
&= \left(\mu \left(\int_\Omega f(w)dx \right)^p - \underline{\mu} \left(\int_\Omega f(\overline{w})dx \right)^p \right) \frac{f(\underline{w})}{\underline{w}_\mu \left(\int_\Omega f(\overline{w})dx\right)^p}
\end{aligned}$$

και

$$\overline{w}_\mu \dot{\overline{\mu}} + \frac{\overline{\lambda} f(\overline{w})}{\left(\int_\Omega f(\overline{w})dx\right)^p} - \frac{\lambda f(\overline{w})}{\left(\int_\Omega f(\underline{w})dx\right)^p} \geq 0 \qquad ή$$

$$\dot{\overline{\mu}} \geq \left(\frac{\lambda}{\left(\int_\Omega f(\underline{w})dx\right)^p} - \frac{\overline{\lambda}}{\left(\int_\Omega f(\overline{w})dx\right)^p} \right) \frac{f(\overline{w})}{\overline{w}_\mu}$$

$$= \left(\frac{\mu \left(\int_\Omega f(w)dx\right)^p}{\left(\int_\Omega f(\underline{w})dx\right)^p} - \overline{\mu} \right) \frac{f(\overline{w})}{\overline{w}_\mu}$$

$$= \left(\mu \left(\int_\Omega f(w)dx \right)^p - \overline{\mu} \left(\int_\Omega f(\underline{w})dx \right)^p \right) \frac{f(\overline{w})}{\overline{w}_\mu \left(\int_\Omega f(\underline{w})dx\right)^p}.$$

Μπορούμε να επιλέξουμε το ζεύγος $\left(\underline{w} = \underline{w}(\underline{\mu});\ \overline{w} = \overline{w}(\overline{\mu})\right)$ τέτοιο ώστε,

$$\mu \left(\int_\Omega f(w)dx \right)^p - \underline{\mu} \left(\int_\Omega f(\overline{w})dx \right)^p > 0 \text{ και } \mu \left(\int_\Omega f(w)dx \right)^p - \overline{\mu} \left(\int_\Omega f(\underline{w})dx \right)^p < 0,$$

δηλαδή,

$$\underline{\mu} \left(\int_\Omega f(\overline{w})dx \right)^p < \mu \left(\int_\Omega f(w)dx \right)^p < \overline{\mu} \left(\int_\Omega f(\underline{w})dx \right)^p$$

$$\Rightarrow \underline{\mu} \left(\int_\Omega f(\overline{w})dx \right)^p < \lambda < \overline{\mu} \left(\int_\Omega f(\underline{w})dx \right)^p,$$

βασιζόμενοι στη συνέχεια της καμπύλης $\|w\| - \mu$.

Με την επιλογή αυτή θα έχουμε:

$$0 < \dot{\underline{\mu}} \leq \left(\mu \left(\int_\Omega f(w)dx \right)^p - \underline{\mu} \left(\int_\Omega f(\overline{w})dx \right)^p \right) \frac{f(\underline{w})}{\underline{w}_\mu \left(\int_\Omega f(\overline{w})dx\right)^p}.$$

Θέτουμε,

$$0 < \dot{\underline{\mu}} = \left(\mu \left(\int_\Omega f(w)dx \right)^p - \underline{\mu} \left(\int_\Omega f(\overline{w})dx \right)^p \right) \inf_{x \in \Omega} \frac{f(w)}{w_\mu \left(\int_\Omega f(w)dx\right)^p}.$$

Ομοίως,

$$0 > \dot{\overline{\mu}} \geq \left(\mu \left(\int_\Omega f(w)dx\right)^p - \overline{\mu}\left(\int_\Omega f(\underline{w})dx\right)^p\right) \frac{f(\overline{w})}{\overline{w}_\mu \left(\int_\Omega f(\underline{w})dx\right)^p}$$
$$\Rightarrow 0 < -\dot{\overline{\mu}} \leq \left(\overline{\mu} \left(\int_\Omega f(\underline{w})dx\right)^p - \mu\left(\int_\Omega f(w)dx\right)^p\right) \frac{f(\overline{w})}{\overline{w}_\mu \left(\int_\Omega f(\underline{w})dx\right)^p}.$$

Θέτουμε,

$$0 < -\dot{\overline{\mu}} = \left(\overline{\mu} \left(\int_\Omega f(\underline{w})dx\right)^p - \mu\left(\int_\Omega f(w)dx\right)^p\right) \inf_{x\in\Omega} \frac{f(w)}{w_\mu \left(\int_\Omega f(w)dx\right)^p}$$
$$\Rightarrow 0 > \dot{\overline{\mu}} = \left(\mu \left(\int_\Omega f(w)dx\right)^p - \overline{\mu}\left(\int_\Omega f(\underline{w})dx\right)^p\right) \inf_{x\in\Omega} \frac{f(w)}{w_\mu \left(\int_\Omega f(w)dx\right)^p}.$$

Επίσης θέτουμε,

$$\inf_{x\in\Omega} \frac{f(w)}{w_\mu \left(\int_\Omega f(w)dx\right)^p} = c > 0,$$

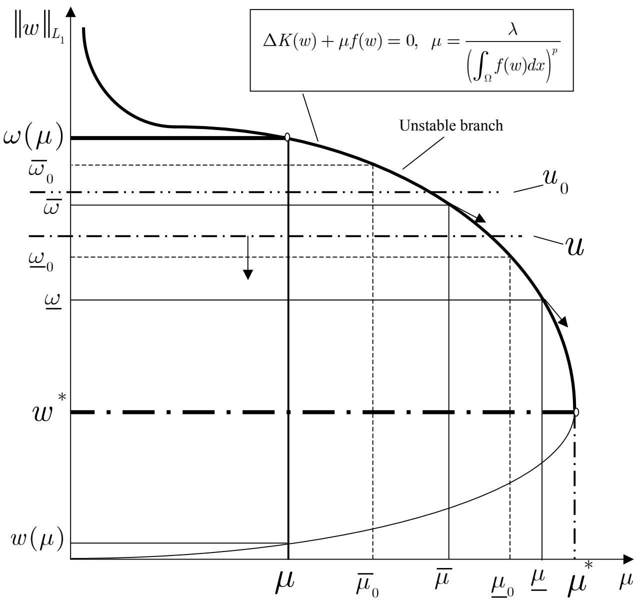
και οι διαφορικές εξισώσεις για τις $\underline{\mu}$, $\overline{\mu}$ γίνονται:

$$0 < \dot{\underline{\mu}} = c\left(\mu \left(\int_\Omega f(w)dx\right)^p - \underline{\mu}\left(\int_\Omega f(\overline{w})dx\right)^p\right), \qquad \text{και} \tag{7.8}$$

$$0 > \dot{\overline{\mu}} = c\left(\mu \left(\int_\Omega f(w)dx\right)^p - \overline{\mu}\left(\int_\Omega f(\underline{w})dx\right)^p\right). \tag{7.9}$$

Επομένως, $\underline{\mu}(t) \nearrow$, $\overline{\mu}(t) \searrow$, $\underline{w} \nearrow$, $\overline{w} \searrow$, και είναι προφανές ότι καθώς $t \to \infty$, $\underline{\mu}(t) \to \mu$, $\overline{\mu}(t) \to \mu$, $z = \underline{w} \to w$, $v = \overline{w} \to w$, λαμβάνοντας υπόψη ότι $u_0(x) \leq v_0(x) = \overline{w}_0(x) < w^*(x)$.

Όμως, $z \leq u \leq v$ και άρα συμπεραίνουμε ότι καθώς $t \to \infty$, η $u(x,t) \to w(x;\mu)$, υπό την προϋπόθεση ότι $u_0(x) < w^*(x)$.



Σχήμα 7.2:

7.3 Ασταθής κλάδος, κλασσικά ζεύγη πάνω - κάτω λύσεων

Τώρα θα εξετάσουμε ως προς την ευστάθεια τον πάνω κλάδο του διαγράμματος διακλάδωσης (βλέπε σχήμα 7.2).

Γράφουμε πάλι τις συναρτήσεις $z(x,t)$ και $v(x,t)$ υπό τη μορφή $z(x,t) = \underline{\omega}(x;\underline{\mu}(t)) = \underline{\omega}$ και $v(x,t) = \overline{\omega}(x;\overline{\mu}(t)) = \overline{\omega}$, όπου $\omega(x,\mu)$ είναι λύσεις του τοπικού στάσιμου προβλήματος (7.4), **που αντιστοιχούν στον πάνω κλάδο του διαγράμματος διακλάδωσης**, και μ είναι συνάρτηση του t, με αρχικές συνθήκες $z_0 = \underline{\omega}_0$ και $v_0 = \overline{\omega}_0$.

Για τον πάνω κλάδο ισχύει, $\omega_\mu < 0$. Θεωρούμε την περίπτωση,

$$w^*(x) \leq u_0(x) \leq \omega(x,\mu). \tag{7.10}$$

Εξετάζουμε τώρα εάν μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα ζεύγος $\underline{\omega}(\underline{\mu}), \overline{\omega}(\overline{\mu})$ με αρχικές συνθήκες $w^*(x) \leq \underline{\omega}_0(x) \leq u_0(x) \leq \overline{\omega}_0(x) \leq \omega(x;\mu)$, ώστε να ισχύουν οι ακόλουθες ανισότητες:

$$\mu\left(\int_\Omega f(\omega)dx\right)^p < \overline{\mu}\left(\int_\Omega f(\underline{\omega})dx\right)^p < \underline{\mu}\left(\int_\Omega f(\overline{\omega})dx\right)^p. \tag{7.11}$$

Όμως,

$\overline{\mu}\left(\int_\Omega f(\underline{\omega})dx\right)^p < \underline{\mu}\left(\int_\Omega f(\overline{\omega})dx\right)^p$, ισχύει πάντοτε.

$\mu\left(\int_\Omega f(\omega)dx\right)^p < \underline{\mu}\left(\int_\Omega f(\overline{\omega})dx\right)^p$, ισχύει εάν $\overline{\mu}$ και $\overline{\omega}$ είναι αρκούντως κοντά στα μ και ω αντιστοίχως, και $\underline{\mu} \gg \mu$.

$$\mu\left(\int_\Omega f(\omega)dx\right)^p < \overline{\mu}\left(\int_\Omega f(\underline{\omega})dx\right)^p \Rightarrow \frac{\mu}{\overline{\mu}} < \frac{\left(\int_\Omega f(\underline{\omega})dx\right)^p}{\left(\int_\Omega f(\omega)dx\right)^p}.$$

Η τελευταία ανισότητα μπορεί να ικανοποιηθεί εάν οι συναρτήσεις $\overline{\omega}$ και $\underline{\omega}$ παραμένουν αρκούντως πλησίον η μία στην άλλη. Η συνέχεια της καμπύλης διακλάδωσης εξασφαλίζει ότι οι προϋποθέσεις αυτές δύναται να ικανοποιηθούν.

Από τις παραπάνω ανισότητες παίρνουμε:

$$\mu\left(\int_\Omega f(\omega)dx\right)^p < \underline{\mu}\left(\int_\Omega f(\overline{\omega})dx\right)^p \Rightarrow \mu\left(\int_\Omega f(\omega)dx\right)^p - \underline{\mu}\left(\int_\Omega f(\overline{\omega})dx\right)^p < 0, \text{ και}$$

$$\mu\left(\int_\Omega f(\omega)dx\right)^p < \overline{\mu}\left(\int_\Omega f(\underline{\omega})dx\right)^p \Rightarrow \mu\left(\int_\Omega f(\omega)dx\right)^p - \overline{\mu}\left(\int_\Omega f(\underline{\omega})dx\right)^p < 0.$$

Επομένως, έχουμε:

$$\dot{\underline{\mu}} \geq \left(\mu\left(\int_\Omega f(\omega)dx\right)^p - \underline{\mu}\left(\int_\Omega f(\overline{\omega})dx\right)^p\right)\frac{f(\underline{\omega})}{\underline{\omega}_\mu\left(\int_\Omega f(\overline{\omega})dx\right)^p}.$$

Ισχύει ότι,

$$\mu\left(\int_\Omega f(\omega)dx\right)^p - \underline{\mu}\left(\int_\Omega f(\overline{\omega})dx\right)^p < 0 \text{ και } \underline{\omega}_\mu < 0,$$

οπότε λαμβάνουμε:

$$\dot{\underline{\mu}} \geq \left(\mu\left(\int_\Omega f(\omega)dx\right)^p - \underline{\mu}\left(\int_\Omega f(\overline{\omega})dx\right)^p\right)\frac{f(\underline{\omega})}{\underline{\omega}_\mu\left(\int_\Omega f(\overline{\omega})dx\right)^p} > 0$$

$$\Rightarrow \dot{\underline{\mu}} \geq \left(\underline{\mu}\left(\int_\Omega f(\overline{\omega})dx\right)^p - \mu\left(\int_\Omega f(\omega)dx\right)^p\right)\frac{f(\underline{\omega})}{|\underline{\omega}_\mu|\left(\int_\Omega f(\overline{\omega})dx\right)^p} > 0,$$

και θέτουμε:

$$0 < \dot{\underline{\mu}} = \left(\underline{\mu}\left(\int_\Omega f(\overline{\omega})dx\right)^p - \mu\left(\int_\Omega f(\omega)dx\right)^p\right)\sup_{x\in\Omega}\frac{f(\underline{\omega})}{|\underline{\omega}_\mu|\left(\int_\Omega f(\overline{\omega})dx\right)^p}, \qquad (7.12)$$

οπότε η συνάρτηση $\underline{\mu}(t)$ αυξάνει με το χρόνο t που σημαίνει ότι η $z(x,t) = \underline{\omega}(x,\underline{\mu}(t))$ φθίνει με το χρόνο t και επομένως αποκλίνει από τη στάσιμη λύση $\omega(\mu)$, λόγω του ότι $\underline{\omega}_0(x) \leq \omega(x;\mu)$.

Επίσης, έχουμε:

$$\dot{\overline{\mu}} \leq \left(\mu\left(\int_\Omega f(\omega)dx\right)^p - \overline{\mu}\left(\int_\Omega f(\underline{\omega})dx\right)^p\right)\frac{f(\overline{\omega})}{\overline{\omega}_\mu\left(\int_\Omega f(\underline{\omega})dx\right)^p}.$$

Όμως, $\mu\left(\int_\Omega f(\omega)dx\right)^p - \overline{\mu}\left(\int_\Omega f(\underline{\omega})dx\right)^p < 0$ και $\underline{\omega}_\mu < 0$, οπότε παίρνουμε:

$$\begin{aligned} 0 < \dot{\overline{\mu}} &\leq \left(\mu\left(\int_\Omega f(\omega)dx\right)^p - \overline{\mu}\left(\int_\Omega f(\underline{\omega})dx\right)^p\right)\frac{f(\overline{\omega})}{\overline{\omega}_\mu\left(\int_\Omega f(\underline{\omega})dx\right)^p} \\ \Rightarrow 0 < \dot{\overline{\mu}} &\leq \left(\overline{\mu}\left(\int_\Omega f(\underline{\omega})dx\right)^p - \mu\left(\int_\Omega f(\omega)dx\right)^p\right)\frac{f(\overline{\omega})}{|\overline{\omega}_\mu|\left(\int_\Omega f(\underline{\omega})dx\right)^p}. \end{aligned}$$

Θέτουμε,

$$0 < \dot{\overline{\mu}} = \left(\overline{\mu}\left(\int_\Omega f(\underline{\omega})dx\right)^p - \mu\left(\int_\Omega f(\omega)dx\right)^p\right)\inf_{x\in\Omega}\frac{f(\overline{\omega})}{|\overline{\omega}_\mu|\left(\int_\Omega f(\underline{\omega})dx\right)^p}, \qquad (7.13)$$

και η συνάρτηση $\overline{\mu}(t)$ αυξάνει με το χρόνο t που σημαίνει ότι η $v(x,t) = \overline{\omega}(x,\overline{\mu}(t))$ φθίνει με το χρόνο t και επομένως αποκλίνει από τη στάσιμη λύση $\omega(\mu)$, λόγω του ότι $\overline{\omega}_0(x) \leq \omega(x;\mu)$.

Οι συναρτήσεις $z(x,t) = \underline{\omega}(x;\underline{\mu}(t))$ και $v(x,t) = \overline{\omega}(x;\overline{\mu}(t))$ αποκλίνουν από τη στάσιμη λύση $\omega(\mu)$ προς την ίδια κατεύθυνση (και οι δύο είναι φθίνουσες), οπότε από την ανισότητα $z(x,t) \leq u(x,t) \leq v(x,t)$ συμπεραίνουμε ότι η λύση $u(x,t)$ αποκλίνει και αυτή από τη στάσιμη λύση $\omega(\mu)$ φθίνοντας, για οποιαδήποτε αρχικά δεδομένα $\omega(\mu) > u_0(x) \geq w^*(x)$. Αυτό ισχύει για κάθε στάσιμη λύση $\omega(\mu)$ που αντιστοιχεί στον πάνω κλάδο του διαγράμματος διακλάδωσης, στην περίπτωση βεβαίως που ο κλάδος αυτός φθίνει συναρτήσει του μ.

Καταλήξαμε στο ανωτέρω συμπέρασμα γιατί υπάρχει τουλάχιστον ένα τέτοιο ζεύγος πάνω - κάτω λύσεων $(z; v) := \big(\underline{\omega}(\underline{\mu}); \overline{\omega}(\overline{\mu})\big)$ που ικανοποιεί τις ανισότητες:

$$\mu \left(\int_\Omega f(\omega) dx \right)^p < \overline{\mu} \left(\int_\Omega f(\underline{\omega}) dx \right)^p < \underline{\mu} \left(\int_\Omega f(\overline{\omega}) dx \right)^p . \tag{7.14}$$

Σημειώνουμε περαιτέρω, ότι η λύση $u(x,t)$ φθίνει όσο $\underline{\mu}, \overline{\mu}$ παραμένουν μεγαλύτερα ή ίσα με μ^*, δηλαδή όσο οι συναρτήσεις $\underline{\omega}(\underline{\mu}), \overline{\omega}(\overline{\mu})$ ανήκουν στον πάνω κλάδο. Θα υπάρξει επομένως ένας χρόνος $t^* > 0$ πεπερασμένος ή άπειρος, όπου η $u(x,t)$ θα γίνει ίση με την $w^*(x)$.

Εάν ο χρόνος αυτός είναι πεπερασμένος, μπορούμε να θεωρήσουμε τη συνάρτηση $w^*(x) = u(x, t^*)$ ως τις νέες αρχικές συνθήκες για τη λύση $u(x,t)$, και ακολουθώντας τη διαδικασία που περιγράψαμε για τον κάτω κλάδο, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι καθώς $t^* < t \to \infty$, η $u(x,t) \to w(\mu)$, δηλαδή στην αντίστοιχη στάσιμη λύση του κάτω κλάδου.

Πριν προχωρήσουμε στα επόμενα κεφάλαια που αφορούν την έκρηξη της λύσης σε τοπικά και σε μη τοπικά προβλήματα όταν $\lambda > \lambda^*$, είναι χρήσιμο να εξετάσουμε την ευστάθεια ή μη της ταυτοτικά μηδενικής λύσης, στην περίπτωση που $\lambda > \lambda^*$.

7.4 Η ταυτοτικά μηδενική λύση είναι ασταθής για οποιεσδήποτε αρχικές συνθήκες, όταν $\lambda > \lambda^*$.

Ως γνωστόν, η λύση $u(x,t)$ της εξίσωσης διάχυσης έχει την ιδιότητα ημιομάδας, (βλ. [10]):

$$S(t+s) = S(t) \circ S(s). \tag{7.15}$$

Αυτό σημαίνει ότι εάν τη χρονική στιγμή s η λύση είναι $u(x,s) := u_s(x)$, μπορούμε να θεωρήσουμε τη συνάρτηση αυτή σαν τις νέες αρχικές συνθήκες, το ≪χρονόμετρο≫ θα αρχίσει από το μηδέν (μετατόπιση της αρχής του χρόνου), και η λύση του προβλήματος,

$$v_t - \Delta K(v) = \lambda f(v),\ x \in \Omega,\ t > 0,$$

$$v_0(x) = u_s(x),\ x \in \Omega,$$

θα είναι ακριβώς ίδια με τη λύση $u(x,t)$ του αρχικού μας προβλήματος, θεωρώντας την τελευταία για χρόνους μεγαλύτερους από s. Συγκεκριμένα θα ισχύει:

$$v(x,t) = u(x,t+s).$$

Έστω $u(x,t_p)$ είναι η λύση του προβλήματός μας τη χρονική στιγμή t_p κατά την οποία αυτή καθίσταται θετική σε όλο το χωρίο. Δηλαδή η στιγμή t_p είναι η πρώτη χρονική στιγμή κατά την οποία $\omega(t) = \Omega$. Τότε θα ισχύει $u(x,t_p) > 0$, $x \in \Omega$, και εάν θεωρήσουμε αυτήν ως τα νέα αρχικά δεδομένα, η λύση μας καθίσταται κλασσική από τη χρονική αυτή στιγμή t_p και μετά. Τονίζουμε ότι ο χρόνος t_p είναι πεπερασμένος.

Επομένως, μετά τη χρονική αυτή στιγμή, t_p, η λύση θα εξελίσεται σύμφωνα με το ακόλουθο πρόβλημα:

$$v_t - \Delta K(v) = \lambda f(v),\ x \in \Omega,\ t > 0, \tag{7.16α'}$$

$$v(x,0) = u(x,t_p) > 0,\ \text{ή}\ v_0(x) = u_{t_p}(x) > 0,\ x \in \Omega. \tag{7.16β'}$$

Εάν θεωρήσουμε τώρα το πρόβλημα:

$$z_t - \Delta K(z) = \lambda^* f(z) < \lambda f(z), \tag{7.17α'}$$

$$0 < z(x,0) < \min\left(v_0(x), w^*\right), \tag{7.17β′}$$

για $\lambda > \lambda^*$, από την κλασσική αρχή σύγκρισης θα έχουμε ότι:

$$v(x,t) > z(x,t), \quad t > 0.$$

Επομένως, εάν ο μέγιστος χρόνος ύπαρξης $T_{\max}$ της $v(x,t)$ είναι άπειρος, θα ισχύει:

$$\lim_{t\to\infty} v(x,t) > \lim_{t\to\infty} z(x,t) = w^*(x),$$

οπότε λόγω της σχέσης $u(x,t+s) = v(x,t)$ όπου s πεπερασμένος, το ίδιο θα ισχύει και για τη λύση u.

Ως εκ τούτου συμπεραίνουμε ότι η τετριμμένη μηδενική λύση είναι ασταθής.

Προφανώς, εάν $T_{\max} < \infty$, τότε έχουμε έκρηξη σε πεπερασμένο χρόνο, οπότε και πάλι η μηδενική λύση είναι ασταθής.

Κεφάλαιο 8

Έκρηξη για το τοπικό πρόβλημα Διήθησης, όταν $\lambda > \lambda^*$.

8.1 Προκαταρκτικά.

Θεωρούμε το τοπικό πρόβλημα διήθησης της μορφής: $u_t = \Delta K(u) + \lambda f(u)$, με αρχικά δεδομένα $u_0 \geq 0$ και συνοριακές συνθήκες Dirichlet, όπου f, f', $f'' > 0$. Αποδεικνύουμε έκρηξη των λύσεων για $\lambda > \lambda^*$ και για κατάλληλα $u_0(x) \geq 0$ με συμπαγή και συνεκτικό φορέα στο χωρίο Ω. Το πρόβλημα εκφυλίζεται στο επίπεδο $u = 0$ οπότε ο φορέας της λύσης επεκτείνεται με το χρόνο. Για το λόγο αυτό θα θεωρήσουμε γενικευμένες λύσεις.

Το πρόβλημα που θα εξετάσουμε είναι το ακόλουθο:

$$u_t = \Delta K(u) + \lambda f(u), \quad x \in \Omega,\ t \in (0, \mathrm{T}), \tag{8.1α'}$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{8.1β'}$$

$$u(x, t) = 0, \quad x \in \partial\Omega,\ t \in (0, \mathrm{T}), \tag{8.1γ'}$$

για κάποιο $T > 0$ και $u_0(x) \geq 0$ με συνεκτικό και συμπαγή φορέα στο Ω, όπου Ω κυρτό χωρίο στον $\mathbb{R}^N$. Επίσης υποθέτουμε:

$$f(s) > 0,\ f^{'}(s) > 0,\ f^{''}(s) > 0 \ \text{ για } \ s > 0, \ \text{ με } f(0) = 0, \tag{8.2α'}$$

$$K(s) > 0,\ K^{'}(s) > 0,\ K^{''}(s) > 0 \ \text{ για } \ s > 0, \ \text{ με } K^{'}(0) = 0. \tag{8.2β'}$$

(Επίσης, μπορούμε να πάρουμε $K(0) = 0$ χωρίς καμμία επίδραση στη Λαπλασιανή).

Επιπλέον,

$$\int_b^\infty \frac{K^{'}(s)}{f(s)} ds < \infty, \quad \forall\, b > 0, \tag{8.3}$$

και

$$\int_0^u \frac{K^{'}(s)}{s} ds < \infty \quad \forall\, 0 < u < \infty, \tag{8.4}$$

δηλαδή η συνθήκη για πεπερασμένη ταχύτητα διάδοσης της διαταραχής.

Στο κεφάλαιο αυτό θα εξετάσουμε το ενδεχόμενο της έκρηξης σε πεπερασμένο χρόνο της λύσης $u(x,t)$ του ανωτέρω προβλήματος υπό κατάλληλες αρχικές συνθήκες όχι ταυτοτικά μηδέν, όταν$\lambda > \lambda^*$.

Επειδή έχουμε υποθέσει $K^{'}(0) = 0$, $f(0) = 0$, $u_0(x) \geq 0$ με συνεκτικό και συμπαγή φορέα στο Ω, έπεται ότι το πρόβλημα θα είναι εκφυλισμένο στο επίπεδο $u = 0$ με λύση που θα έχει συμπαγή και επεκτεινόμενο φορέα εντός του Ω, και επομένως θα πρέπει να δουλέψουμε σε πολύ ασθενή μορφή.

Η εξίσωση, σε πολύ ασθενή μορφή, είναι:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_\Omega u_t \eta dx dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_\Omega \eta \Delta K(u) dx dt + \lambda \int_{t_1}^{t_2} \int_\Omega \eta f(u) dx dt \tag{8.5}$$

όπου $\eta(x,t)$, (ή απλώς $\eta(x)$), είναι μία δοκιμαστική συνάρτηση.

Το αντίστοιχο στάσιμο πρόβλημα είναι:

$$\Delta K(w) + \lambda f(w) = 0, \;\; x \in \Omega, \tag{8.6α$'$}$$

$$w(x) = 0, \;\; x \in \partial\Omega. \tag{8.6β$'$}$$

Όπως είναι γνωστό, για το πρόβλημα αυτό υπάρχουν συναρτήσεις $K(s)$ και $f(s)$ τέτοιες ώστε το διάγραμμα διακλάδωσης να έχει μορφή $\supset$, (δηλαδή, φραγμένο, κλειστό, με σημείο αναστροφής προς τα αριστερά), και να υπάρχει ένα $0 < \lambda^* < \infty$ τέτοιο ώστε για $0 < \lambda < \lambda^*$ το στάσιμο πρόβλημα να έχει δύο τουλάχιστον κλασσικές λύσεις, για $\lambda = \lambda^*$ μία κλασσική λύση και για $\lambda^* < \lambda$ καμμία λύση, ούτε κλασσική ούτε γενικευμένη.

Επιπρόσθετα, στο σημείο $\lambda = \lambda^*$, η καμπύλη διακλάδωσης στρέφει προς τα αριστερά.

8.2 Η περίπτωση της έκρηξης.

Θα θεωρήσουμε εξ' αρχής τη λύση μας πάνω σε ολόκληρο το χωρίο Ω.

Η εξίσωση σε πολύ ασθενή μορφή, χρησιμοποιώντας τους μέσους όρους Steklov είναι:

$$\int_t^{t+h}\int_\Omega u_t \eta dxdt = \int_t^{t+h}\int_\Omega \eta \Delta K(u) dxdt + \lambda \int_t^{t+h}\int_\Omega \eta f(u) dxdt, \quad h>0. \quad (8.7)$$

όπου για αντί $\int_{t_1}^{t_2}$ έχουμε θέσει $\int_t^{t+h}$.

Η γραμμικοποιημένη εξίσωση στο σημείο αναστροφής (λ^*, w^*) του διαγράμματος του στάσιμου προβλήματος είναι:

$$\Delta(K^{'}(w^*)\phi) + \lambda^* f^{'}(w^*)\phi = 0, \quad x\in\Omega, \quad (8.8)$$

η οποία, λόγω της αναστροφής της καμπύλης, έχει λύση $\phi(x)$, θετική.

Στο χρονοεξαρτώμενο πρόβλημα, σαν δοκιμαστική συνάρτηση λαμβάνουμε την $\eta = \eta(x) = K^{'}(w^*(x))\phi(x)$ και μετά την εφαρμογή της ταυτότητας Green, παίρνουμε την εξίσωση:

$$\int_t^{t+h}\int_\Omega K^{'}(w^*)\phi u_t dxdt = \int_t^{t+h}\int_\Omega \Delta(K^{'}(w^*)\phi)K(u)dxdt + \lambda \int_t^{t+h}\int_\Omega K^{'}(w^*)\phi f(u)dxdt$$

$$= -\lambda^* \int_t^{t+h}\int_\Omega f^{'}(w^*)\phi K(u)dxdt + \lambda \int_t^{t+h}\int_\Omega K^{'}(w^*)\phi f(u)dxdt.$$

Προσθαφαιρούμε τον όρο $\lambda^* \int_t^{t+h}\int_\Omega K^{'}(w^*)\phi f(u)dxdt$ στο δεύτερο μέλος της εξίσωσης και έχουμε:

$$\int_t^{t+h}\int_\Omega K^{'}(w^*)\phi u_t dxdt =$$

$$= \lambda^* \int_t^{t+h}\int_\Omega \Big(K^{'}(w^*)\phi f(u) - f^{'}(w^*)\phi K(u)\Big) dxdt + (\lambda - \lambda^*) \int_t^{t+h}\int_\Omega K^{'}(w^*)\phi f(u)dxdt$$

$$= (\lambda-\lambda^*)I_B + \lambda^* \int_t^{t+h}\int_\Omega \Big(K^{'}(w^*)\phi f(u) - f^{'}(w^*)\phi K(u)\Big) dxdt.$$

όπου $I_B = \int_t^{t+h}\int_\Omega K^{'}(w^*)\phi f(u)dxdt > 0$. Λόγω του ότι $\lambda > \lambda^*$, λαμβάνουμε:

$$\int_{t}^{t+h}\int_{\Omega} K^{'}(w^{*})\phi u_{t}dxdt > \lambda^{*}\int_{t}^{t+h}\int_{\Omega}\Big(K^{'}(w^{*})f(u) - f^{'}(w^{*})K(u)\Big)\phi dxdt. \quad (8.9)$$

Ακολούθως, υπολογίζουμε το χωρικό ολοκλήρωμα στο δεύτερο μέλος.

Επειδή το χωρίο Ω είναι κυρτό και η $f(s)$ είναι αύξουσα, υπάρχει ένα $\Omega_0 \subset \Omega$ και ένας θετικός ακέραιος $\gamma \in Z^{+}$ τέτοια ώστε,

$$\int_{\Omega} f(u)dx \le (\gamma+1)\int_{\Omega_0} f(u)dx \Rightarrow \int_{\Omega_0} f(u)dx \ge \frac{1}{(\gamma+1)}\int_{\Omega} f(u)dx$$

$$\Rightarrow \varphi K^{'}(m)\int_{\Omega_0} f(u)dx \ge \frac{\varphi K^{'}(m)}{(\gamma+1)}\int_{\Omega} f(u)dx$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega_0} \phi K^{'}(w^{*})f(u)dx \ge \frac{\varphi K^{'}(m)}{(\gamma+1)}\int_{\Omega} f(u)dx$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} \phi K^{'}(w^{*})f(u)dx > \int_{\Omega_0} \phi K^{'}(w^{*})f(u)dx \ge \frac{\varphi K^{'}(m)}{(\gamma+1)}\int_{\Omega} f(u)dx, \quad (8.10)$$

Θέσαμε $\varphi = \min\limits_{x\in\Omega_0}\phi(x) > 0 \quad m = \min\limits_{x\in\Omega_0} w^{*}(x) > 0.$

Άρα, το χωρικό ολοκλήρωμα στο δεύτερο μέλος της σχέσης (8.9) είναι:

$$\int_{\Omega}\Big(K^{'}(w^{*})f(u) - f^{'}(w^{*})K(u)\Big)\phi dx = \int_{\Omega} K^{'}(w^{*})f(u)\phi dx - \int_{\Omega} f^{'}(w^{*})K(u)\phi dx$$

$$> \frac{\phi K^{'}(m)}{(\gamma+1)}\int_{\Omega} f(u)dx - \Phi f^{'}(M)\int_{\Omega} K(u)dx$$

$$= \frac{\phi K^{'}(m)}{(\gamma+1)}\left[\int_{\Omega} f(u)dx - \frac{(\gamma+1)\Phi f^{'}(M)}{\phi K^{'}(m)}\int_{\Omega} K(u)dx\right] =$$

$$= c_0\left[\int_{\Omega} f(u)dx - c_1\int_{\Omega} K(u)dx\right] = c_0\int_{\Omega}(f(u) - c_1 K(u))dx$$

όπου θέσαμε

$$\frac{\phi K^{'}(m)}{(\gamma+1)} = c_0, \quad \frac{(\gamma+1)\Phi f^{'}(M)}{\phi K^{'}(m)} = c_1$$

Καταλήγουμε δηλαδή στην ανισότητα:

$$\int_{t}^{t+h}\int_{\Omega} K^{'}(w^{*})\phi u_{t}dxdt > \lambda^{*}\int_{t}^{t+h} c_0\int_{\Omega}(f(u) - c_1 K(u))dxdt. \quad (8.11)$$

Τώρα, από τη σχεση (8.3) συνάγεται ότι θα υπάρχει ένας αριθμός $S_0 \geq 0$ ώστε εάν $0 < a < 1$, τότε για κάθε $s > S_0$:

$$\frac{af(s)}{K'(s)} > c_1 s \Rightarrow af(s) > c_1 K^{'}(s)s$$

Όμως η $K(s)$ είναι κυρτή, θετική, με $K(0) = 0$. Άρα θα είναι υπεργραμμική για κάθε $s > 0$, (βλ.[124] σελ.34), και μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση $\frac{sK^{'}(s)}{K(s)} > 1 \Rightarrow K^{'}(s) > \frac{K(s)}{s}, \ \forall s > 0$. Επομένως θα ισχύει:

$$af(s) > c_1 \frac{K(s)}{s} s = c_1 K(s) \Rightarrow af(s) - c_1 K(s) > 0, \ \forall s > S_0$$

Προφανώς ένας τέτοιος αριθμός είναι η μεγαλύτερη λύση της εξίσωσης $af(s) - c_1 K(s) = 0$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

Α) Εάν $S_0 = 0$ (πάντοτε υπάρχει μία τέτοια ρίζα αφού $f(0) = K(0)$), δηλαδή $af(s) - c_1 K(s) > 0$ ή $af(s) > c_1 K(s)$ για κάποιο $0 < a < 1$ και για κάθε $s > 0$, τότε η λύση θα εκρήγνυται σε πεπερασμένο χρόνο για οποιαδήποτε αρχικά δεδομένα. Πράγματι, για κάθε $s > 0$ θα ισχύει:

$$af(s) - c_1 K(s) > 0 \Rightarrow f(s) - (1-a)f(s) - c_1 K(s) > 0$$

$$\Rightarrow f(s) - c_1 K(s) > (1-a)f(s) > 0$$

και η σχέση (8.11) γίνεται:

$$\int_t^{t+h} \int_\Omega K^{'}(w^*)\phi u_t dx dt > \lambda^* \int_t^{t+h} \left(c_0 \int_\Omega (f(u) - c_1 K(u)) dx \right) dt$$

$$> \lambda^* \int_t^{t+h} \left(c_0 \int_\Omega (1-a) f(u) dx \right) dt = \lambda^* c_0 (1-a) \int_t^{t+h} \left(\int_\Omega f(u) dx \right) dt$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με τον όρο $1/h$, εκφράζουμε την σχέση σε μορφή μέσων όρων Steklov:

$$\frac{1}{h} \int_t^{t+h} \int_\Omega K^{'}(w^*)\phi u_t dx dt > \lambda^* c_0 (1-a) \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \left(\int_\Omega f(u) dx \right) dt$$

$$\Rightarrow \int_\Omega K^{'}(w^*)\phi \left(\frac{1}{h} \int_t^{t+h} u_t dt \right) dx > c_2 \int_\Omega \left(\frac{1}{h} \int_t^{t+h} f(u) dt \right) dx, \quad (\lambda^* c_0 (1-a) = c_2)$$

$$\Rightarrow \int_\Omega K^{'}(w^*)\phi u_{t,h}dx > c_2\int_\Omega f(u)_h dx > c_2\int_\Omega f(u_h)dx > c_2\int_\Omega \frac{K^{'}(w^*)\phi}{K^{'}(M)\Phi} f(u_h)dx$$

(διότι η $f(u)$ είναι κυρτή),

$$= \frac{c_2}{K^{'}(M)\Phi}\int_\Omega K^{'}(w^*)\phi f(u_h)dx = c_3\int_\Omega K^{'}(w^*)\phi f(u_h)dx. \quad (\text{όπου}\frac{c_2}{K^{'}(M)\Phi} = c_3)$$

Κανονικοποιούμε την $\phi(x)$ ώστε $\int_\Omega K^{'}(w^*)\phi dx = 1$, και έχουμε:

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega K^{'}(w^*)\phi u_h dx > c_3 f\left(\int_\Omega K^{'}(w^*)\phi u_h dx\right)$$

διότι η $f(s)$ είναι κυρτή. Θέτουμε $A_h(t) = \int_\Omega K^{'}(w^*)\phi u_h dx$ και λαμβάνουμε:

$$\frac{d}{dt}A_h(t) > c_3 f\left(A_h(t)\right).$$

Τώρα, με βάση τις ιδιότητες των μέσων όρων Steklov έχουμε ότι, καθώς $h \to 0$, το $A_h(t) \to A(t)$ και $u_h \to u$. Συνεπώς, η ανισότητα γίνεται, (ανισοϊσότητα λόγω της λήψης του ορίου):

$$\frac{d}{dt}A(t) \geq c_3 f\left(A(t)\right) \tag{8.12}$$

όπου $A(t) = \int_\Omega K^{'}(w^*)\phi u dx$.
Άρα,

$$c_3 dt \leq \frac{dA(t)}{f\left(A(t)\right)} \Rightarrow \int_0^t d\tau \leq \frac{1}{c_3}\int_{A(0)}^{A(t)}\frac{d\tau}{f\left(\tau\right)} \Rightarrow t \leq \frac{1}{c_3}\int_{A(0)}^{\infty}\frac{d\tau}{f\left(\tau\right)} = t_0^* < \infty.$$

Ήτοι, καθώς το $t \to t_0^*$, η $A(t) = \int_\Omega K^{'}(w^*)\phi u dx \to \infty$

Ισχύει όμως, $\int_\Omega K^{'}(w^*)\phi u dx < K^{'}(M)\Phi\int_\Omega u dx$, και επομένως:

$$\|u\|_{L_1(\Omega)} = \int_\Omega u dx \to \infty, \quad t \to t^* \sim t_0^* < \infty$$

Επομένως, έχουμε έκρηξη της L_1-νόρμας της λύσης $u(x,t)$ σε πεπερασμένο χρόνο.

B) Εάν $S_0 > 0$, τότε, για $0 < s < S_0$ θα ισχύει ότι,

$$\min_{0<s<S_0}\left(f(s) - c_1 K(s)\right) > -L, \ \ 0 < L < \infty,$$

ενώ για $s > S_0$ ϑα ισχύει:

$$f(s) - c_1 K(s) > (1-a) f(s) > 0.$$

Υπολογίζουμε το χωρικο ολοκλήρωμα στο δεύτερο μέλος της σχέσης (8.11):

$$c_0 \int_\Omega (f(u) - c_1 K(u))dx = c_0 \int\limits_{\Omega: u \geq S_0} (f(u) - c_1 K(u))dx + c_0 \int\limits_{\Omega: u < S_0} (f(u) - c_1 K(u))dx$$

$$> c_0(1-a) \int\limits_{\Omega: u \geq S_0} f(u)dx - c_0 L \int\limits_{\Omega: u < S_0} dx > c_0(1-a) \int\limits_{\Omega: u \geq S_0} f(u)dx - c_0 L \left|\Omega\right|$$

$$= c_0(1-a) \int\limits_{\Omega} f(u)dx - c_0(1-a) \int\limits_{\Omega: u < S_0} f(u)dx - c_0 L \left|\Omega\right|$$

$$> c_0(1-a) \int\limits_{\Omega} f(u)dx - c_0(1-a) f(S_0) \left|\Omega\right| - c_0 L \left|\Omega\right|$$

$$= c_1 \int\limits_{\Omega} f(u)dx - c_2$$

έχοντας ϑέσει $\quad c_0(1-a) = c_1 \quad$ και $\quad c_0(1-a) f(S_0) \left|\Omega\right| + c_0 L \left|\Omega\right| = c_2.$

Επομένως η σχέση (8.11) γίνεται:

$$\int_t^{t+h} \int_\Omega K^{'}(w^*) \phi u_t dx dt > \lambda^* \int_t^{t+h} \left(c_1 \int_\Omega f(u)dx - c_2 \right) dt$$

$$= \lambda^* c_1 \int_t^{t+h} \int_\Omega f(u) dx dt - \lambda^* c_2 h$$

$$> \lambda^* c_1 \int_t^{t+h} \int_\Omega \frac{K^{'}(w^*)\phi}{K^{'}(M)\Phi} f(u) dx dt - \lambda^* c_2 h$$

$$= \frac{\lambda^* c_1}{K'(M)\Phi} \int_t^{t+h} \int_\Omega K^{'}(w^*) \phi f(u) dx dt - \lambda^* c_2 h$$

$$= c_3 \int_t^{t+h} \int_\Omega K^{'}(w^*) \phi f(u) dx dt - c_4 h, \quad (\text{όπου} \frac{\lambda^* c_1}{K'(M)\Phi} = c_3, \quad \lambda^* c_2 = c_4)$$

Πολλαπλασιάζοντας, όπως και στην περίπτωση (Α), και τα δύο μέλη με τον όρο $1/h$ εκφράζουμε τη σχέση σε μορφή μέσων όρων Steklov:

$$\frac{1}{h}\int_t^{t+h}\int_\Omega K^{'}(w^*)\phi u_t dxdt > c_3\frac{1}{h}\int_t^{t+h}\left(\int_\Omega K^{'}(w^*)\phi f(u)dx\right)dt - c_4 h\frac{1}{h}$$

$$\Rightarrow \int_\Omega K^{'}(w^*)\phi\left(\frac{1}{h}\int_t^{t+h} u_t dt\right)dx > c_3\int_\Omega K^{'}(w^*)\phi\left(\frac{1}{h}\int_t^{t+h} f(u)dt\right)dx - c_4$$

$$\Rightarrow \int_\Omega K^{'}(w^*)\phi u_{t,h}dx > c_3\int_\Omega K^{'}(w^*)\phi f(u)_h dx - c_4$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\int_\Omega K^{'}(w^*)\phi u_h dx > c_3\int_\Omega K^{'}(w^*)\phi f(u_h)dx - c_4.$$

Κανονικοποιούμε την $\phi(x)$ ώστε $\int_\Omega K^{'}(w^*)\phi dx = 1$, και έχουμε:

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega K^{'}(w^*)\phi u_h dx > c_3 f\left(\int_\Omega K^{'}(w^*)\phi u_h dx\right) - c_4$$

διότι η $f(s)$ είναι κυρτή. Θέτουμε $A_h(t) = \int_\Omega K^{'}(w^*)\phi u_h dx$ και λαμβάνουμε:

$$\frac{d}{dt}A_h(t) > c_3 f\left(A_h(t)\right) - c_4 = c_3\left(f\left(A_h(t)\right) - c_5\right)$$

όπου $c_5 = c_4/c_3 > 0$.

Τώρα, με βάση τις ιδιότητες των μέσων όρων Steklov έχουμε ότι, καθώς $h \to 0$, το $A_h(t) \to A(t)$ και $u_h \to u$. Συνεπώς, η ανισότητα γίνεται, (ανισοϊσότητα λόγω της λήψης του ορίου):

$$\frac{d}{dt}A(t) \geq c_3\left(f\left(A(t)\right) - c_5\right) \tag{8.13}$$

όπου $A(t) = \int_\Omega K^{'}(w^*)\phi u dx$.

Προφανώς, η $f(r) - c_5 = 0$ έχει οπωσδήποτε μία (και μόνο μία) θετική πραγματική ρίζα, την $f^{-1}(c_5)$, διότι $f(0) = 0, c_5 > 0$ και η $f(r)$ γνησίως αυξουσα. Τότε και η $af(r) - c_5 = 0$ με $a \in (0,1)$ θα έχει μία μοναδική ρίζα, έστω $S_1 > 0$.

Επειδή η $f(r)$ είναι αύξουσα, θα έχουμε για κάθε $r > S_1$: $af(r) - c_5 > 0 \Rightarrow f(r) - (1-a)f(r) - c_5 > 0 \Rightarrow f(r) - c_5 > (1-a)f(r)$, δηλαδή,

$$\frac{d}{dt}A(t) \geq c_3\left(f\left(A(t)\right) - c_5\right) > 0, \ \ \forall A(t) > S_1.$$

Εάν $A(t_0) > S_1 \Rightarrow f\left(A(t_0)\right) - c_5 > 0$ για κάποιο $0 \leq t_0 < \infty$, θα έχουμε:

$$\frac{d}{dt}A(t) \geq c_3\left(f\left(A(t)\right) - c_5\right) > 0 \Rightarrow c_3 dt \leq \frac{dA(t)}{f\left(A(t)\right) - c_5}$$

$$\Rightarrow c_3 \int_{t_0}^{t} d\tau \leq \int_{A(t_0)}^{A(t)} \frac{d\tau}{f(\tau) - c_5} \Rightarrow t - t_0 \leq \frac{1}{c_3}\int_{A(t_0)}^{\infty} \frac{d\tau}{f(\tau) - c_5} = t_2 < \infty$$

$$\Rightarrow t \leq t_0 + t_2 = \hat{t} < \infty.$$

Ήτοι, καθώς το $t \to \hat{t}$ η $A(t) = \int_\Omega K^{'}(w^*)\phi u dx \to \infty$

Ισχύει όμως, $\int_\Omega K^{'}(w^*)\phi u dx < K^{'}(M)\Phi \int_\Omega u dx$, οπότε:

$$\|u\|_{L_1(\Omega)} = \int_\Omega u dx \to \infty, \quad t \to t^* \sim \hat{t} < \infty$$

Επομένως, έχουμε έκρηξη της L_1-νόρμας της λύσης $u(x,t)$ σε πεπερασμένο χρόνο.

Μερικά συμπεράσματα.

Στο κεφάλαιο αυτό εξετάσαμε το τοπικό πρόβλημα Διήθησης και αποδείξαμε ότι για $\lambda > \lambda^*$ έχουμε έκρηξη της λύσης σε πεπερασμένο χρόνο για κατάλληλες αρχικές συνθήκες μη αρνητικές και μη ταυτοτικά μηδέν.

Η μελέτη μας αφορούσε την περίπτωση εκφυλισμένου παραβολικού τελεστή και για αυτό θέσαμε $K^{'}(0) = 0$.

Επίσης, λόγω του ότι οι αρχικές μας συνθήκες είχαν συμπαγή φορέα εντός του χωρίου Ω, μας ενδιέφερε η λύση να έχει και αυτή συμπαγή φορέα, και για αυτό υποθέσαμε $f(0) = 0$. Για να έχουμε και πεπερασμένη ταχύτητα διάδοσης της διαταραχής θέσαμε τη γνωστή συνθήκη:

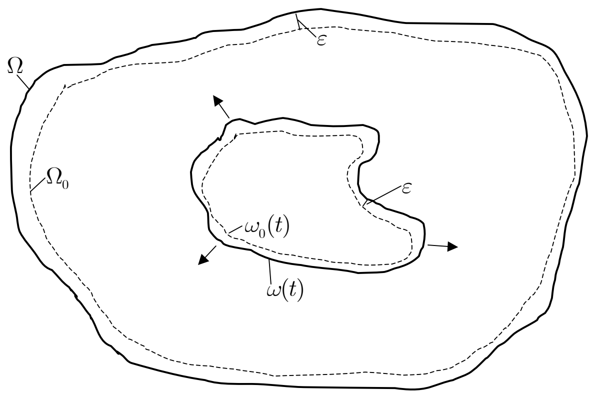
$$\int_0^u \frac{K^{'}(s)}{s} ds < \infty \text{ για κάθε } 0 < u < \infty,$$

που μας υποχρεώνει στην αναζήτηση πολύ ασθενών (γενικευμένων) λύσεων.

Η μελέτη της έκρηξης των λύσεων συνδυασμένη με ΟΛΕΣ τις ανωτέρω παραδοχές, αποτελεί πρωτότυπη εργασία. Μερικά θέματα προς περαιτέρω εξέταση που αναφύονται από το κεφάλαιο αυτό είναι τα εξής:

1) Αν μπορούμε να βρούμε σχέσεις μεταξύ των αρχικών συνθηκών, των συναρτήσεων $K(u)$ και $f(u)$ και του χωρίου Ω (μορφή και μέτρο), τέτοιες ώστε να έχουμε έκρηξη της λύσης προτού το επεκτεινόμενο σύνορο του φορέα της λύσης αγγίξει το $\partial\Omega$.

2) Το γνωστό πλέον ερώτημα, εάν δηλαδή μπορούμε να αντικαταστήσουμε την απαίτηση να είναι το χωρίο Ω, κυρτό με κάποια άλλη λιγότερο περιοριστική.



Σχήμα 8.1:

8.3 Δεύτερη απόδειξη (ακολουθώντας τον επεκτεινόμενο φορέα της λύσης).

Μία πρώτη ιδέα για να αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα αυτό, είναι να θεωρήσουμε ένα συμπαγές και συνεκτικό υποσύνολο $\omega_0(t)$ αρκούντως κοντά στο $\omega(t)$, το οποίο θα επεκτείνεται καθώς το $\omega(t)$ επεκτείνεται, και, όταν το $\omega(t)$ γίνει ίσο με το Ω, τότε το $\omega_0(t)$ να γίνει ίσο με το Ω_0 (βλ. Σχήμα 8.1).

Ας προχωρήσουμε τώρα στη μελέτη των εξισώσεων του προβλήματος.
Η γραμμικοποιημένη εξίσωση για την εκφυλισμένη λύση w^* είναι:

$$\Delta(K^{'}(w^*)\phi) + \lambda^* f^{'}(w^*)\phi = 0,\ x \in \Omega, \tag{8.14}$$

η οποία, λόγω του εκφυλισμού, έχει μία θετική λύση $\varphi(x)$.

Πολλαπλασιάζουμε με $\eta = \eta(x) = K^{'}(w^*(x))\varphi(x)$ το χρονοεξαρτώμενο πρόβλημα, και μετά την εφαρμογή της ταυτότητας Green, παίρνουμε την εξίσωση:

$$\int_t^{t+h}\int_\Omega K^{'}(w^*)\varphi u_t dxdt = h\int_\Omega K^{'}(w^*)\varphi\left(\frac{1}{h}\int_t^{t+h} u_t dt\right)dx = h\int_\Omega K^{'}(w^*)\varphi u_{h,t}dx$$
$$= \int_t^{t+h}\int_\Omega \Delta(K^{'}(w^*)\varphi)K(u)dxdt + \lambda\int_t^{t+h}\int_\Omega K^{'}(w^*)\varphi f(u)dxdt$$
$$= -\lambda^*\int_t^{t+h}\int_\Omega f^{'}(w^*)\varphi K(u)dxdt + \lambda\int_t^{t+h}\int_\Omega K^{'}(w^*)\varphi f(u)dxdt,$$

όπου στο πρώτο μέλος εμφανίσαμε το μέσο όρο Steklov της λύσης u ώστε να έχει έννοια η πρώτη χρονική παράγωγός της, ενώ στο δεύτερο μέλος αφήσαμε τα χρονικά όρια ολοκλήρωσης από t στο $t+h$, αφού δεν έχουμε χρονικές παραγώγους. Προφανώς και οι δύο εκφράσεις είναι ισοδύναμες.

Προσθαφαιρούμε τον όρο $\lambda^* \int_t^{t+h} \int_\Omega K^{'}(w^*)\phi f(u)dxdt$ στο δεξιό μέλος και έχουμε:

$$h\int_\Omega K^{'}(w^*)\varphi u_{h,t}dx =$$

$$= \lambda^* \int_t^{t+h}\int_\Omega \Big(K^{'}(w^*)\phi f(u) - f^{'}(w^*)\phi K(u)\Big)\, dxdt + (\lambda - \lambda^*)\int_t^{t+h}\int_\Omega K^{'}(w^*)\phi f(u)dxdt$$

$$= (\lambda-\lambda^*)I_B + \lambda^*\int_t^{t+h}\int_\Omega \Big(K^{'}(w^*)\phi f(u) - f^{'}(w^*)\phi K(u)\Big)\, dxdt,$$

όπου έχουμε θέσει, $I_B = I_B(t) = \int_t^{t+h}\int_\Omega K^{'}(w^*)\varphi f(u)dxdt$, το οποίο είναι μη αρνητικό για $\lambda - \lambda^* > 0$ και $h > 0$, οπότε λαμβάνουμε την ανισότητα:

$$h\int_\Omega K^{'}(w^*)\varphi u_{h,t}dx > \lambda^*\int_t^{t+h}\int_\Omega \Big(K^{'}(w^*)f(u) - f^{'}(w^*)K(u)\Big)\,\phi dxdt.$$

Προσθαφαιρούμε τον όρο $K^{'}(w^*)f(w^*)$ στη δεξιά ολοκληρωτέα ποσότητα, η οποία και γίνεται:

$$K^{'}(w^*)f(u) - f^{'}(w^*)K(u) = K^{'}(w^*)f(u) - f^{'}(w^*)K(u) + K^{'}(w^*)f(w^*) - K^{'}(w^*)f(w^*)$$

$$= \left(f(u) - f(w^*)\right)K^{'}(w^*) - f^{'}(w^*)K(u) + f(w^*)K^{'}(w^*),$$

οπότε έχουμε την ανισότητα,

$$h\int_\Omega K^{'}(w^*)\varphi u_{h,t}dx > \tag{8.15}$$

$$> \lambda^*\int_t^{t+h}\int_\Omega \Big\{\left(f(u)-f(w^*)\right)K^{'}(w^*) - f^{'}(w^*)K(u) + K^{'}(w^*)f(w^*)\Big\}\,\phi dxdt.$$

Εκτελούμε τους υπολογισμούς:

$$\Delta K(w^*) + \lambda^* f(w^*) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda^* K^{'}(w^*)f(w^*)\varphi + K^{'}(w^*)\varphi\Delta K(w^*) = 0$$

$$\Rightarrow \int_\Omega \Big(\lambda^* K^{'}(w^*) f(w^*)\phi + K^{'}(w^*)\phi \Delta K(w^*)\Big) dx = 0$$

$$\Rightarrow \int_\Omega \lambda^* K^{'}(w^*) f(w^*)\phi dx = -\int_\Omega K^{'}(w^*)\phi \Delta(K(w^*)) dx =$$

$$= -\int_\Omega K(w^*)\Delta(K^{'}(w^*)\phi) dx$$

(επειδή $\Delta(K^{'}(w^*)\phi) + \lambda^* f^{'}(w^*)\phi = 0$)

$$\Rightarrow \lambda^* \int_\Omega K^{'}(w^*) f(w^*)\phi dx = \lambda^* \int_\Omega K(w^*) f^{'}(w^*)\phi dx$$

$$\Rightarrow \int_\Omega K^{'}(w^*) f(w^*)\phi dx = \int_\Omega K(w^*) f^{'}(w^*)\phi dx, \tag{8.16}$$

σχέση, η οποία **από μόνη της εχει ενδιαφέρον**. Αντικαθιστώντας την ανωτέρω σχέση στην (8.15), παίρνουμε:

$$h \int_\Omega K^{'}(w^*)\varphi u_{h,t} dx >$$

$$> \lambda^* \int_t^{t+h} \int_\Omega \Big\{ (f(u) - f(w^*)) K^{'}(w^*) - f^{'}(w^*)K(u) + K(w^*) f^{'}(w^*) \Big\} \phi dx dt$$

$$= \lambda^* \int_t^{t+h} \int_\Omega \Big\{ (f(u) - f(w^*)) K^{'}(w^*) - (K(u) - K(w^*)) f^{'}(w^*) \Big\} \phi dx dt.$$

Διαιρούμε το χωρίο Ω σε $\omega(t)$ και $\Omega/\omega(t)$ και η ανωτέρω ανισότητα δίνει:

$$h \int_{\omega(t)} K^{'}(w^*)\varphi u_{h,t} dx + h \int_{\Omega/\omega(t)} K^{'}(w^*)\varphi u_{h,t} dx >$$

$$> \lambda^* \int_t^{t+h} \int_{\omega(t)} \Big\{ (f(u) - f(w^*)) K^{'}(w^*) - (K(u) - K(w^*)) f^{'}(w^*) \Big\} \phi dx dt$$

$$+ \lambda^* \int_t^{t+h} \int_{\Omega/\omega(t)} \Big\{ (f(u) - f(w^*)) K^{'}(w^*) - (K(u) - K(w^*)) f^{'}(w^*) \Big\} \phi dx dt$$

$$= \lambda^* \int_t^{t+h} \int_{\omega(t)} \Big\{ (f(u) - f(w^*)) K^{'}(w^*) - (K(u) - K(w^*)) f^{'}(w^*) \Big\} \phi dx dt$$

$$+ \lambda^* \int_t^{t+h} \int_{\Omega/\omega(t)} \Big\{ f^{'}(w^*)K(w^*) - f(w^*)K^{'}(w^*) \Big\} \phi dx dt$$

$$= \lambda^* \int_t^{t+h} \int_{\omega(t)} \left\{ (f(u) - f(w^*)) K^{'}(w^*) - (K(u) - K(w^*)) f^{'}(w^*) \right\} \phi dx dt + I_0,$$

όπου,

$$I_0 = \lambda^* \int_t^{t+h} \int_{\Omega/\omega(t)} \left\{ f^{'}(w^*) K(w^*) - f(w^*) K^{'}(w^*) \right\} \phi dx dt. \tag{8.17}$$

Επειδή $h \int_{\Omega/\omega(t)} K^{'}(w^*) \varphi u_{h,t} dx = 0$, καταλήγουμε στο:

$$h \int_{\omega(t)} K^{'}(w^*) \varphi u_{h,t} dx - I_0 >$$

$$> \lambda^* \int_t^{t+h} \int_{\omega(t)} \left\{ (f(u) - f(w^*)) K^{'}(w^*) - (K(u) - K(w^*)) f^{'}(w^*) \right\} \phi dx dt. \tag{8.18}$$

Από το σημείο αυτό, προχωρούμε ως εξής:

Για κάθε συμπαγή φορέα $\omega(t) \subseteq \Omega$, θεωρούμε ένα υποσύνολο $\overline{\omega_0(t)} \subset \omega(t)$ οριζόμενο ως:

$$\omega_0(t) = \{ x \in \omega(t) / dist(x, \partial(\omega(t)) > \varepsilon \}, \tag{8.19}$$

όπου το $\varepsilon > 0$ είναι αρκούντως μικρό.

Σε αυτά τα χρονικά επεκτεινόμενα υποσύνολα, ορίζουμε τις ακόλουθες χρονικά εξαρτώμενες συναρτήσεις:

$$m(t) = \min_{x \in \omega_0(t)} w^* > 0, \tag{8.20α'}$$

$$\phi(t) = \min_{x \in \omega_0(t)} \varphi > 0, \tag{8.20β'}$$

$$\psi(t) = \min_{x \in \omega_0(t)} u > 0, \tag{8.20γ'}$$

καθώς και τις σταθερές:

$$M = \max_{x \in \Omega} w^* > 0, \tag{8.21α'}$$

$$\Phi = \max_{x \in \Omega} \varphi > 0. \tag{8.21β'}$$

Επίσης θεωρούμε το υποσύνολο $\overline{\Omega_0} \subset \Omega$, οριζόμενο ως:

$$\Omega_0 = \{ x \in \Omega / dist(x, \partial\Omega > \varepsilon \}. \tag{8.22}$$

Ορίζουμε τις ακόλουθες σταθερές:

$$m = \min_{x\in\Omega_0} w^* > 0, \tag{8.23α'}$$

$$\phi = \min_{x\in\Omega_0} \varphi > 0. \tag{8.23β'}$$

Παρατηρούμε ότι εάν ο χρόνος ύπαρξης της λύσης είναι αρκούντως μεγάλος, τότε θα υπάρχει μία χρονική στιγμή t_p τέτοια ώστε $\omega(t_p) = \Omega$. Στην περίπτωση αυτή θα έχουμε, $\omega_0(t) = \Omega_0, \forall t \geqslant t_p$.

Επομένως συνάγουμε ότι $\forall t > 0, \omega_0(t) \subseteq \Omega_0$.

Βάσει της κατασκευής του Ω_0, έχουμε ότι,

$$m = \min_{x\in\Omega_0} w^* = \min_{t>0} m(t) = \min_{t>0}\left(\min_{x\in\omega_0(t)} w^*\right) > 0 \tag{8.24}$$

και

$$\phi = \min_{x\in\Omega_0} \varphi = \min_{t>0} \phi(t) = \min_{t>0}\left(\min_{\omega_0(t)} \varphi\right) > 0. \tag{8.25}$$

Διαιρούμε τώρα το χωρίο $\omega(t)$ στο $\omega_0(t)$ και στο $\omega(t)/\omega_0(t)$. Η κύρια ανισότητα (8.18) γίνεται:

$$h\int_{\omega(t)} K^{'}(w^*)\varphi u_{h,t}dx - I_0 >$$

$$> \lambda^*\int_t^{t+h}\int_{\omega_0(t)}\Big\{\left(f(u)-f(w^*)\right)K^{'}(w^*) - \left(K(u)-K(w^*)\right)f^{'}(w^*)\Big\}\phi dxdt$$

$$+\lambda^*\int_t^{t+h}\int_{\omega(t)/\omega_0(t)}\Big\{\left(f(u)-f(w^*)\right)K^{'}(w^*) - \left(K(u)-K(w^*)\right)f^{'}(w^*)\Big\}\phi dxdt.$$

Θέτουμε,

$$I(t) = \lambda^*\int_t^{t+h}\int_{\omega(t)/\omega_0(t)}\Big\{\left(f(u)-f(w^*)\right)K^{'}(w^*) - \left(K(u)-K(w^*)\right)f^{'}(w^*)\Big\}\phi dxdt, \tag{8.26}$$

και παίρνουμε:

$$h\int_{\omega(t)} K^{'}(w^*)\varphi u_{h,t}dx - I_0 - I(t) >$$

$$> \lambda^*\int_t^{t+h}\int_{\omega_0(t)}\Big\{\left(f(u)-f(w^*)\right)K^{'}(w^*) - \left(K(u)-K(w^*)\right)f^{'}(w^*)\Big\}\phi dxdt. \tag{8.27}$$

Από τη συνθήκη αύξησης (8.3) μεταξύ των συναρτήσεων $f(s)$ και $K(s)$, λαμβάνουμε:

$$\frac{f(s)}{K'(s)} > c_1 s + c_2, \quad s >> 1, \tag{8.28}$$

όπου c_1, c_2 θετικές σταθερές, που θα καθορισθούν αργότερα. Τώρα εάν $0 < S < \infty$ είναι η μεγαλύτερη ρίζα της εξίσωσης:

$$\frac{f(\hat{S})}{K'(\hat{S})} = c_1 \hat{S} + c_2, \tag{8.29}$$

ορίζουμε δύο υποσύνολα $\omega_0^p(t)$ και $\omega_0^n(t)$ του $\omega_0(t)$ ως ακολούθως:

$$\omega_0^p(t) = \{x \in \omega_0(t) : u(x,t) > S + M\}, \tag{8.30α$'$}$$

$$\omega_0^n(t) = \{x \in \omega_0(t) : 0 < u(x,t) \leqslant S + M\}, \tag{8.30β$'$}$$

όπου $M = \max\limits_{x\in\Omega} w^*$. Επομένως $\omega_0^p(t) \cup \omega_0^n(t) = \omega_0(t)$ και $\omega_0^p(t) \cap \omega_0^n(t) = \emptyset$.

Βάσει των ανωτέρω, το χωρικό ολοκλήρωμα στο δεξιό μέλος της (8.27) γράφεται:

$$\int_{\omega_0(t)} \left\{ (f(u) - f(w^*))\, K^{'}(w^*) - (K(u) - K(w^*))\, f^{'}(w^*) \right\} \phi dx =$$

$$= \int_{\omega_0^p(t)} \left\{ (f(u) - f(w^*))\, K^{'}(w^*) - (K(u) - K(w^*))\, f^{'}(w^*) \right\} \phi dx$$

$$+ \int_{\omega_0^n(t)} \left\{ (f(u) - f(w^*))\, K^{'}(w^*) - (K(u) - K(w^*))\, f^{'}(w^*) \right\} \phi dx.$$

Υπολογίζουμε κάθε ολοκλήρωμα χωριστά.

$$I_{p(t)} = \int_{\omega_0^p(t)} \left\{ (f(u) - f(w^*))\, K^{'}(w^*) - (K(u) - K(w^*))\, f^{'}(w^*) \right\} \phi dx$$

$$= \int_{\omega_0^p(t)} \left\{ (f(u) - f(w^*))\, K^{'}(w^*) - K^{'}(\xi)(u - w^*) f^{'}(w^*) \right\} \phi dx, \quad w^* \leqslant \xi \leqslant u$$

$$\geqslant \int_{\omega_0^p(t)} \left\{ (f(u) - f(w^*))\, K^{'}(w^*) - K^{'}(u)(u - w^*) f^{'}(w^*) \right\} \phi dx$$

$$= \int_{\omega_0^p(t)} K^{'}(w^*) \left\{ (f(u) - f(w^*)) - \frac{f^{'}(w^*)}{K^{'}(w^*)} K^{'}(u)(u - w^*) \right\} \phi dx \Rightarrow$$

$$I_{p(t)} \geqslant \int_{\omega_0^p(t)} K^{'}(w^*)\left\{f(u) - f(M) - \frac{f^{'}(M)}{K^{'}(m)}K^{'}(u)u\right\}\phi dx. \tag{8.31}$$

Λόγω του ότι $u \in \omega_0^p(t) = \{u > S + M\}$, θα έχουμε:

$$\frac{f(u)}{K^{'}(u)} > c_1 u + c_2 \Rightarrow f(u) > c_1 K^{'}(u)u + c_2 K^{'}(u) > c_1 K^{'}(u)u + c_2 K^{'}(M).$$

Εάν ορίσουμε,

$$c_1 = 2\frac{f^{'}(M)}{K^{'}(m)}, \text{ και } c_2 = 2\frac{f(M)}{K^{'}(M)}, \text{ θα λάβουμε:}$$

$$f(u) > c_1 K^{'}(u)u + c_2 K^{'}(M) = 2\frac{f^{'}(M)}{K^{'}(m)}K^{'}(u)u + 2\frac{f(M)}{K^{'}(M)}K^{'}(M)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}f(u) > \frac{f^{'}(M)}{K^{'}(m)}K^{'}(u)u + f(M)$$

$$\Rightarrow -f(M) - \frac{f^{'}(M)}{K^{'}(m)}K^{'}(u)u > -\frac{1}{2}f(u).$$

Αντικαθιστώντας στην (8.31), η ολοκληρωτέα ποσότητα του $I_{p(t)}$ γίνεται:

$$f(u) - f(M) - \frac{f^{'}(M)}{K^{'}(m)}K^{'}(u)u > f(u) - \frac{1}{2}f(u) = \frac{1}{2}f(u) > 0,$$

και

$$I_{p(t)} > \frac{1}{2}\int_{\omega_0^p(t)} K^{'}(w^*)f(u)\phi dx > \frac{1}{2}K^{'}(m)\varphi\int_{\omega_0^p(t)} f(u)dx = c_3\int_{\omega_0^p(t)} f(u)dx, \tag{8.32}$$

όπου $c_3 = \frac{1}{2}K^{'}(m)\varphi > 0$.

Σχόλιο 36. *Η συνάρτηση $f(s)$ είναι εξ υποθέσεως κυρτή, με $f(0) = 0$. Γενικώς, εάν $f(0) \geqslant 0$, $f^{'}(0) \geqslant 0$ και $f^{''}(0) > 0$, τότε θα μπορούσαμε να την αντικαταστήσουμε με μία μικρότερη συνάρτηση $g(s)$, κυρτή, για $s \geqslant 0$. Π.χ. $f(s) \geqslant f(s) - f(0) - sf^{'}(0) = \frac{1}{2}f^{''}(0)s^2 = g(s)$, και τότε $g(0) = g^{'}(0) = 0$, το οποίο θα ήταν χρήσιμο εάν θέλαμε, πέραν της απόδειξης της έκρηξης που είναι και ο σκοπός της παρούσας εργασίας, να εκτιμήσουμε και το χρόνο έκρηξης. Στην περίπτωση αυτή, θα πρέπει να επεκτείνουμε τη συνάρτηση $f(s)$ για $s < 0$, ως μία άρτια συνάρτηση, $f(-s) = f(s)$.*

Τώρα υπολογίζουμε το άλλο ολοκλήρωμα, (στο χωρίο $\omega_0^n(t)$).

$$I_{n(t)} = \int_{\omega_0^n(t)} \left\{ \left(f(u) - f(w^*)\right) K^{'}(w^*) - \left(K(u) - K(w^*)\right) f^{'}(w^*) \right\} \phi dx$$

$$\geqslant \int_{\omega_0^n(t)} \left\{ \left(f(0) - f(w^*)\right) K^{'}(w^*) - \left(K(S+M) - K(0)\right) f^{'}(w^*) \right\} \phi dx$$

$$= - \int_{\omega_0^n(t)} \left\{ f(w^*) K^{'}(w^*) + K(S+M) f^{'}(w^*) \right\} \phi dx$$

$$\geqslant - \int_{\omega_0^n(t)} \left\{ f(M) K^{'}(M) + K(S+M) f^{'}(M) \right\} \Phi dx$$

$$= -\Phi \left\{ f(M) K^{'}(M) + K(S+M) f^{'}(M) \right\} \|\omega_n(t)\| = -c_4,$$

όπου $-c_4 < 0$.

Κατόπιν αυτών, η κύρια ανισότητα (8.27) γίνεται:

$$\begin{aligned} h\int_{\omega(t)} K^{'}(w^*)\varphi u_{h,t} dx - I_0 - I(t) > & \\ &> \lambda^* \int_t^{t+h} (I_{p(t)} + I_{n(t)}) dt \\ &> \lambda^* \int_t^{t+h} (c_3 \int_{\omega_0^p(t)} f(u) dx - c_4) dt \\ &= \lambda^* c_3 \int_t^{t+h} \int_{\omega_0^p(t)} f(u) dx dt - \lambda^* c_4 h. \end{aligned} \tag{8.33}$$

Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα:

$$\int_{\omega_0^p(t)} f(u) dx = \int_{\omega_0^p(t)} f(u) dx + \int_{\omega_0^n(t)} f(u) dx - \int_{\omega_0^n(t)} f(u) dx >$$

$$> \int_{\omega_0(t)} f(u) dx - \int_{\omega_0^n(t)} \max_{\omega_0^n(t)} f(u) dx = \int_{\omega_0(t)} f(u) dx - f(S+M) \left\|\omega_0^n(t)\right\|.$$

Οπότε η σχέση (8.33) γίνεται:

$$h \int_{\omega(t)} K^{'}(w^*) \varphi u_{h,t} dx - I_0 - I(t) >$$

$$> \lambda^* c_3 \int_t^{t+h} \left(\int_{\omega_0(t)} f(u)dx - f(S+M) \left\| \omega_0^n(t) \right\| \right) dt - \lambda^* c_4 h$$

$$= \lambda^* c_3 \int_t^{t+h} \int_{\omega_0(t)} f(u)dxdt - \lambda^* c_3 f(S+M) \int_t^{t+h} \| \omega_0^n(t) \| dt - \lambda^* c_4 h$$

$$> \lambda^* c_3 \int_t^{t+h} \int_{\omega_0(t)} f(u)dxdt - \lambda^* c_3 f(S+M) \left\| \Omega \right\| h - \lambda^* c_4 h$$

$$= \lambda^* c_3 \int_t^{t+h} \int_{\omega_0(t)} f(u)dxdt - \left(\lambda^* c_3 f(S+M) \left\| \Omega \right\| + \lambda^* c_4 \right) h.$$

Θέτουμε, $\lambda^* c_3 f(S+M) \left\| \Omega \right\| + \lambda^* c_4 = c_5$, και έχουμε:

$$h \int_{\omega(t)} K^{'}(w^*) \varphi u_{h,t} dx - I_0 - I(t) >$$

$$> \lambda^* c_3 \int_t^{t+h} \int_{\omega_0(t)} f(u)dxdt - c_5 h$$

$$> \lambda^* c_3 \int_t^{t+h} \int_{\omega_0(t)} \frac{K^{'}(w^*)\varphi}{K^{'}(M)\Phi} f(u)dxdt - c_5 h$$

$$= \frac{\lambda^* c_3}{K^{'}(M)\Phi} \int_t^{t+h} \int_{\omega_0(t)} K^{'}(w^*) \phi f(u)dxdt - c_5 h.$$

Θέτουμε $\frac{\lambda^* c_3}{K^{'}(M)\Phi} = c_6 > 0$, διότι $c_3 > 0$. Σημειώνουμε ότι θέλουμε $c_6 > 0$, καθόσον το c_6 θα είναι ο πολλαπλασιαστής του ολοκληρώματος στο δεξιό μέλος. Έχουμε:

$$h \int_{\omega(t)} K^{'}(w^*) \varphi u_{h,t} dx - I_0 - I(t) > c_6 \int_t^{t+h} \int_{\omega_0(t)} K^{'}(w^*) \phi f(u)dxdt - c_5 h. \qquad (8.34)$$

Τώρα θα υπολογίσουμε τα ολοκληρώματα I_0 και $I(t)$. Εχουμε:

$$I_0 = \lambda^* \int_t^{t+h} \int_{\Omega/\omega(t)} \left\{ f^{'}(w^*)K(w^*) - f(w^*)K^{'}(w^*) \right\} \phi dxdt$$

$$\geqslant \lambda^* \int_t^{t+h} \int_{\Omega/\omega(t)} \left\{ f^{'}(m)K(m) - f(M)K^{'}(M) \right\} \varphi dxdt.$$

Στη δυσμενέστερη περίπτωση όπου $f^{'}(m)K(m) - f(M)K^{'}(M) = c_8 < 0$, θα έχουμε:

$$I_0 \geqslant \lambda^* c_8 \Phi \int_t^{t+h} \| \Omega/\omega(t) \| dt \geqslant \lambda^* c_8 \Phi \left\| \Omega \right\| h \geqslant c_9 h, \quad \lambda^* c_8 \Phi \left\| \Omega \right\| = c_9 < 0. \qquad (8.35)$$

Για το άλλο ολοκλήρωμα,

$$I(t)=\lambda^*\int_t^{t+h}\int_{\omega(t)/\omega_0(t)}\Big\{\left(f(u)-f(w^*)\right)K^{'}(w^*)-\left(K(u)-K(w^*)\right)f^{'}(w^*)\Big\}\phi dxdt,$$

υπολογίζουμε την ολοκληρωτέα ποσότητα:

$$\begin{aligned}&\left(f(u)-f(w^*)\right)K^{'}(w^*)-\left(K(u)-K(w^*)\right)f^{'}(w^*)=\\&=f^{'}(\xi)(u-w^*)K^{'}(w^*)-\left(K(u)-K(w^*)\right)f^{'}(w^*)\\&\geqslant f^{'}(w^*)(u-w^*)K^{'}(w^*)-\left(K(u)-K(w^*)\right)f^{'}(w^*)\end{aligned}$$

(αληθεύει. Εάν $u<w^*\Rightarrow u<\xi<w^*, u-w^*<0$. Εάν $u>w^*\Rightarrow u>\xi>w^*, u-w^*>0$)

$$\begin{aligned}&=f^{'}(w^*)\Big((u-w^*)K^{'}(w^*)-K(u)+K(w^*)\Big)\\&=-f^{'}(w^*)\Big(K(u)-K(w^*)-(u-w^*)K^{'}(w^*)\Big)\\&=-f^{'}(w^*)\Big(K(u)-uK^{'}(w^*)+w^*K^{'}(w^*)-K(w^*)\Big)\\&=-f^{'}(w^*)K(u)+f^{'}(w^*)uK^{'}(w^*)-f^{'}(w^*)w^*K^{'}(w^*)+f^{'}(w^*)K(w^*)\\&\geqslant f^{'}(m)K(m)+f^{'}(m)uK^{'}(m)-f^{'}(M)K(u)-f^{'}(M)MK^{'}(M)\\&=-f^{'}(M)K(u)+f^{'}(m)K^{'}(m)u+f^{'}(m)K(m)-f^{'}(M)MK^{'}(M)\\&=-f^{'}(M)\left(K(u)-\frac{f^{'}(m)K^{'}(m)}{f^{'}(M)}u+\frac{f^{'}(M)MK^{'}(M)-f^{'}(m)K(m)}{f^{'}(M)}\right)\\&=-k_1\left(K(u)-k_2u+k_3\right),\end{aligned}$$

όπου,

$$f^{'}(M)=k_1,\quad \frac{f^{'}(m)K^{'}(m)}{f^{'}(M)}=k_2,\quad \frac{f^{'}(M)MK^{'}(M)-f^{'}(m)K(m)}{f^{'}(M)}=k_3>0,$$

οπότε το ολοκλήρωμα $I(t)$ γίνεται:

$$I(t)\geqslant -k_1\lambda^*\int_t^{t+h}\int_{\omega(t)/\omega_0(t)}\left(K(u)-k_2u+k_3\right)\varphi dxdt$$

$$=\lambda^*\int_t^{t+h}\left\{-k_1\int_{\omega(t)/\omega_0(t)}\left(K(u)-k_2u\right)\varphi dx-k_1k_3\int_{\omega(t)/\omega_0(t)}\varphi dx\right\}dt$$

$$> \lambda^* \int_t^{t+h} \left\{ -k_1 \int_{\omega(t)/\omega_0(t)} (K(u) - k_2 u)\, \varphi dx - k_1 k_3 \Phi \left\| \omega(t)/\omega_0(t) \right\| \right\} dt$$

$$> \lambda^* \int_t^{t+h} \left\{ -k_1 \int_{\omega(t)/\omega_0(t)} (K(u) - k_2 u)\, \varphi dx - k_1 k_3 \Phi \left\| \Omega \right\| \right\} dt, \quad k_1 k_3 \Phi \left\| \Omega \right\| = k_4$$

$$= \lambda^* \int_t^{t+h} \left\{ -k_1 \int_{\omega(t)/\omega_0(t)} (K(u) - k_2 u)\, \varphi dx - k_4 \right\} dt$$

$$= \lambda^* \int_t^{t+h} \left(-k_1 \int_{\omega(t)/\omega_0(t)} (K(u) - k_2 u)\, \varphi dx \right) dt - k_4 \lambda^* h.$$

Αρα,

$$I(t) > \lambda^* \int_t^{t+h} \left(-k_1 \int_{\omega(t)/\omega_0(t)} (K(u) - k_2 u)\, \varphi dx \right) dt - k_4 \lambda^* h. \tag{8.36}$$

Η ανισότητα (8.34) γίνεται:

$$h \int_{\omega(t)} K^{'}(w^*) \varphi u_{h,t} dx - I_0 - I(t) > c_6 \int_t^{t+h} \int_{\omega_0(t)} K^{'}(w^*) \phi f(u) dx dt - c_5 h$$

$$\Rightarrow h \int_{\omega(t)} K^{'}(w^*) \varphi u_{h,t} dx >$$

$$> c_6 \int_t^{t+h} \int_{\omega_0(t)} K^{'}(w^*) \varphi f(u) dx dt - c_5 h + I_0 + I(t), \quad c_5 + k_4 \lambda^* - c_9 = k_5$$

$$> c_6 \int_t^{t+h} \int_{\omega_0(t)} K^{'}(w^*) \varphi f(u) dx dt - k_5 h + \lambda^* \int_t^{t+h} \left(-k_1 \int_{\omega(t)/\omega_0(t)} (K(u) - k_2 u)\, \varphi dx \right) dt$$

$$= c_6 \int_t^{t+h} \int_{\omega_0(t)} K^{'}(w^*) \varphi f(u) dx dt - k_5 h - k_1 \lambda^* \int_t^{t+h} \left(\int_{\omega(t)/\omega_0(t)} (K(u))\, \varphi dx \right) dt +$$

$$+ k_1 k_2 \lambda^* \int_t^{t+h} \left(\int_{\omega(t)/\omega_0(t)} u \varphi dx \right) dt$$

$$= c_6 \int_t^{t+h} \int_{\omega_0(t)} K^{'}(w^*) \phi f(u) dx dt - k_5 h$$

$$- \int_t^{t+h} \int_{\omega(t)} k_1 \lambda^* K(u) \phi dx dt + \int_t^{t+h} \int_{\omega_0(t)} k_1 \lambda^* K(u) \phi dx dt$$

$$+ \int_t^{t+h} \int_{\omega(t)} k_1 k_2 \lambda^* u \phi dx dt - \int_t^{t+h} \int_{\omega_0(t)} k_1 k_2 \lambda^* u \phi dx dt$$

$$= \int_t^{t+h} \int_{\omega_0(t)} \Big(c_6 K^{'}(w^*) f(u) + k_1 \lambda^* K(u) - k_1 k_2 \lambda^* u \Big) \varphi dx dt$$

$$-k_1 \lambda^* \int_t^{t+h} \int_{\omega(t)} \left(K(u) - k_2 u \right) \phi dx dt - k_5 h$$

$$> \int_t^{t+h} \int_{\omega_0(t)} \Big(c_6 K^{'}(m) f(u) + k_1 \lambda^* K(u) - k_1 k_2 \lambda^* u \Big) \phi dx dt$$

$$-k_1 \lambda^* \int_t^{t+h} \int_{\omega(t)} \left(K(u) - k_2 u \right) \phi dx dt - k_5 h.$$

Τώρα, εάν $\omega(t) \subset \Omega_0$, μπορούμε να πάρουμε $\varepsilon = 0 \Rightarrow \omega_0(t) = \omega(t)$, καθόσον τα ελάχιστα m και φ δύναται να θεωρηθούν στο Ω_0. Επομένως:

$$\int_t^{t+h} \int_{\omega_0(t)} \Big(c_6 K^{'}(m) f(u) + k_1 \lambda^* K(u) - k_1 k_2 \lambda^* u \Big) \phi dx dt$$

$$-k_1 \lambda^* \int_t^{t+h} \int_{\omega(t)} \left(K(u) - k_2 u \right) \phi dx dt - k_5 h$$

$$= \int_t^{t+h} \int_{\omega(t)} \Big(c_6 K^{'}(m) f(u) + k_1 \lambda^* K(u) - k_1 k_2 \lambda^* u \Big) \phi dx dt$$

$$- \int_t^{t+h} \int_{\omega(t)} k_1 \lambda^* \left(K(u) - k_2 u \right) \phi dx dt - k_5 h$$

$$= \int_t^{t+h} \int_{\omega(t)} c_6 K^{'}(m) f(u) \varphi dx dt - k_5 h$$

$$= \int_t^{t+h} \int_{\Omega} c_6 K^{'}(m) f(u) \varphi dx dt - k_5 h.$$

Ως εκ τούτου καταλήγουμε στη σχέση,

$$h \int_{\omega(t)} K^{'}(w^*) \varphi u_{h,t} dx > \int_t^{t+h} \int_{\Omega} c_6 K^{'}(m) f(u) \phi dx dt - k_5 h. \tag{8.37}$$

Το $\omega(t)$ είναι ο φορέας της λύσης, άρα,

$$h \int_{\omega(t)} K^{'}(w^*) \varphi u_{h,t} dx = h \int_{\Omega} K^{'}(w^*) \varphi u_{h,t} dx,$$

και η σχέση (8.37) γίνεται:

$$h\int_\Omega K^{'}(w^*)\varphi u_{h,t}dx >$$

$$> \int_t^{t+h}\int_\Omega c_6K^{'}(m)f(u)\phi dxdt - k_5h$$

$$= c_6K^{'}(m)\int_t^{t+h}\int_\Omega f(u)\phi dxdt - k_5h$$

$$> c_6K^{'}(m)\int_t^{t+h}\int_\Omega \frac{K^{'}(w^*)}{K^{'}(M)}f(u)\phi dxdt - k_5h$$

$$= \frac{c_6K^{'}(m)}{K^{'}(M)}\int_t^{t+h}\int_\Omega K^{'}(w^*)f(u)\phi dxdt - k_5h, \quad \frac{c_6K^{'}(m)}{K^{'}(M)} = c_{20}$$

οπότε,

$$h\int_\Omega K^{'}(w^*)\varphi u_{h,t}dx > c_{20}\int_t^{t+h}\int_\Omega K^{'}(w^*)f(u)\phi dxdt - k_5h. \tag{8.38}$$

Τώρα, εάν $\omega(t) = \Omega$ θα ισχύει:

$$\int_t^{t+h}\int_{\omega_0(t)}\Big(c_6K^{'}(m)f(u) + k_1\lambda^*K(u) - k_1k_2\lambda^*u\Big)\phi dxdt$$

$$-k_1\lambda^*\int_t^{t+h}\int_{\omega(t)}\left(K(u) - k_2u\right)\phi dxdt - k_5h$$

$$= \int_t^{t+h}\int_{\Omega_0}\Big(c_6K^{'}(m)f(u) + k_1\lambda^*K(u) - k_1k_2\lambda^*u\Big)\phi dxdt$$

$$-k_1\lambda^*\int_t^{t+h}\int_\Omega\left(K(u) - k_2u\right)\phi dxdt - k_5h$$

$$= \int_t^{t+h}\int_{\Omega_0}\Big(c_6K^{'}(m)f(u) + k_1\lambda^*K(u)\Big)\varphi dxdt - k_1k_2\lambda^*\int_t^{t+h}\int_{\Omega_0}u\varphi dxdt$$

$$-k_1\lambda^*\int_t^{t+h}\int_\Omega\left(K(u) - k_2u\right)\phi dxdt - k_5h$$

$$> \phi\int_t^{t+h}\int_\Omega\frac{1}{\gamma+1}\Big(c_6K^{'}(m)f(u) + k_1\lambda^*K(u)\Big)dxdt - k_1k_2\lambda^*\int_t^{t+h}\int_\Omega u\varphi dxdt$$

$$-\int_t^{t+h}\int_\Omega \left(k_1\lambda^* K(u) - k_1\lambda^* k_2 u\right)\phi dxdt - k_5 h$$

(επειδή $c_6K^{'}(m)f(u)+k_1\lambda^*K(u)$ είναι αύξουσα και το χωρίο Ω είναι κυρτό)

$$> \frac{\phi}{\Phi}\int_t^{t+h}\int_\Omega \frac{1}{\gamma+1}\Big(c_6K^{'}(m)f(u)+k_1\lambda^*K(u)\Big)\varphi dxdt - k_1k_2\lambda^*\int_t^{t+h}\int_\Omega u\varphi dxdt$$

$$-\int_t^{t+h}\int_\Omega \left(k_1\lambda^* K(u) - k_1\lambda^* k_2 u\right)\phi dxdt - k_5 h$$

$$= \int_t^{t+h}\int_\Omega \left(\frac{c_6K^{'}(m)\phi}{(\gamma+1)\Phi}f(u) + \frac{k_1\lambda^*\phi}{(\gamma+1)\Phi}K(u) - k_1k_2\lambda^* u - k_1\lambda^*K(u) + k_1k_2\lambda^* u\right)\varphi dxdt$$
$$-k_5 h$$

$$= \int_t^{t+h}\int_\Omega \left(\frac{c_6K^{'}(m)\phi}{(\gamma+1)\Phi}f(u) + \frac{k_1\lambda^*\phi}{(\gamma+1)\Phi}K(u) - k_1\lambda^*K(u)\right)\varphi dxdt - k_5 h$$

$$= \frac{1}{(\gamma+1)\Phi}\int_t^{t+h}\int_\Omega \Big(c_6K^{'}(m)\phi f(u) + k_1\lambda^*\left(\phi-(\gamma+1)\Phi\right)K(u)\Big)\varphi dxdt - k_5 h.$$

Θέλουμε,

$$c_6K^{'}(m)\phi f(u) + k_1\lambda^*\left(\phi-(\gamma+1)\Phi\right)K(u) > \frac{1}{2}c_6K^{'}(m)\phi f(u). \tag{8.39}$$

Σχόλιο 37. *Θέσαμε στο δεξιό μέλος τον όρο αυτό, διότι θέλουμε να διατηρήσουμε κάποιο πολλαπλάσιο της κυρτής συνάρτησης $f(s)$, η ύπαρξη της οποίας θα μας οδηγήσει στην έκρηξη.*

Επομένως,

$$\frac{1}{2}c_6K^{'}(m)\phi f(u) > k_1\lambda^*\left((\gamma+1)\Phi-\phi\right)K(u)$$
$$\Rightarrow f(u) > \frac{2k_1\lambda^*\left((\gamma+1)\Phi-\phi\right)}{c_6K^{'}(m)\phi}K(u).$$

Όμως, $k_1 = f^{'}(M), c_6 = \dfrac{\lambda^* c_3}{K^{'}(M)\Phi}, c_3 = \dfrac{1}{2}K^{'}(m)\varphi$, οπότε,

$$\frac{2k_1\lambda^*\left((\gamma+1)\Phi-\phi\right)}{c_6K^{'}(m)\phi} = \frac{4K^{'}(M)\Phi f^{'}(M)\lambda^*\left((\gamma+1)\Phi-\phi\right)}{\lambda^*K^{'}(m)\phi K^{'}(m)\phi}$$
$$= \frac{4K^{'}(M)f^{'}(M)\Phi\left(\gamma\frac{\Phi}{\phi}+\frac{\Phi}{\phi}-1\right)}{\left(K^{'}(m)\right)^2\phi} = c.$$

$$\text{Επίσης,}\quad \frac{\Phi}{\phi}=\frac{\max\limits_{x\in\Omega}\varphi}{\min\limits_{x\in\Omega_0}\varphi}\geqslant\frac{\max\limits_{x\in\Omega_0}\varphi}{\min\limits_{x\in\Omega_0}\varphi}\geqslant 1 \text{ στο } \Omega,\ \text{οπότε } c>0.$$

Τώρα, οι $K^{'}(m)$ και ϕ εξαρτώνται από το χωρίο Ω_0 το οποίο με τη σειρά του εξαρτάται από το γ.

Άρα, στο υποσύνολο Ω_0 αντιστοιχεί μία σταθερά γ, για την οποία οι $K^{'}(m)$ και ϕ είναι συγκεκριμένες, που σημαίνει ότι c είναι μία συγκεκριμένη θετική σταθερά.

Επομένως θέλουμε να ισχύει $f(u)>cK(u)$, το οποίο ικανοποιείται για $u>s_k$, σαν αποτέλεσμα της τεθείσας προϋπόθεσης:

$$\int_b^\infty \frac{K^{'}(s)}{f(s)}ds<\infty \Rightarrow \frac{f(s)}{K^{'}(s)}>cs\Rightarrow f(s)>csK^{'}(s). \tag{8.40}$$

Όμως η συνάρτηση $K(s)$ είναι υπεργραμμική, που σημαίνει, $\frac{sK^{'}(s)}{K(s)}>1\Rightarrow sK^{'}(s)>K(s)$, οπότε συνάγουμε ότι,

$$f(s)>cK(s),\ \text{για } s\gg 1. \tag{8.41}$$

Ως εκ τούτου θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
h\int_{\omega(t)}K^{'}(w^*)\varphi u_{h,t}dx &>\\
&>\frac{1}{(\gamma+1)\Phi}\int_t^{t+h}\int_\Omega\left(\frac{1}{2}c_6K^{'}(m)\varphi f(u)\right)\phi dxdt-k_5h\\
&=\frac{c_6K^{'}(m)\varphi}{2(\gamma+1)\Phi}\int_t^{t+h}\int_\Omega f(u)\phi dxdt-k_5h\\
&>\frac{c_6K^{'}(m)\varphi}{2(\gamma+1)\Phi}\int_t^{t+h}\int_\Omega\frac{K^{'}(w^*)}{K^{'}(M)}f(u)\phi dxdt-k_5h\\
&=\frac{c_6K^{'}(m)\varphi}{2(\gamma+1)K^{'}(M)\Phi}\int_t^{t+h}\int_\Omega K^{'}(w^*)f(u)\phi dxdt-k_5h,\quad \frac{c_6K^{'}(m)\varphi}{2(\gamma+1)K^{'}(M)\Phi}=c_{21},
\end{aligned}$$

οπότε,

$$\begin{aligned}
&h\int_{\omega(t)}K^{'}(w^*)\varphi u_{h,t}dx>c_{21}\int_t^{t+h}\int_\Omega K^{'}(w^*)f(u)\phi dxdt-k_5h\\
\Rightarrow\ &h\int_{\Omega}K^{'}(w^*)\varphi u_{h,t}dx>c_{21}\int_t^{t+h}\int_\Omega K^{'}(w^*)f(u)\phi dxdt-k_5h.
\end{aligned}$$

Έτσι και στις δύο περιπτώσεις, είτε $\omega(t) \subset \Omega_0$ είτε $\omega(t) = \Omega$, θα έχουμε:

$$h \int_\Omega K^{'}(w^*)\varphi u_{h,t} dx > c_{22} \int_t^{t+h} \int_\Omega K^{'}(w^*) f(u) \phi dx dt - k_5 h, \tag{8.42}$$

όπου $c_{22} = \min(c_{20}, c_{21})$, και μετά από μιά χρονική στιγμή t_1 κατά την οποία η u καθίσταται μεγαλύτερη από s_2.

Από εδώ και πέρα η έκρηξη είναι αναπόφευκτη. Έτσι έχουμε:

$$h \int_\Omega K^{'}(w^*)\varphi u_{h,t} dx > c_{22} \int_t^{t+h} \int_\Omega K^{'}(w^*) f(u) \phi dx dt - k_5 h$$

$$\Rightarrow \int_\Omega K^{'}(w^*)\varphi u_{h,t} dx > c_{22} \int_\Omega K^{'}(w^*)\phi \left(\frac{1}{h} \int_t^{t+h} f(u) dr \right) dx - \frac{1}{h} k_5 h$$

$$\Rightarrow \int_\Omega K^{'}(w^*)\varphi u_{h,t} dx >$$

$$> c_{22} \int_\Omega K^{'}(w^*)\phi f(u)_h dx - k_5 > c_{22} \int_\Omega K^{'}(w^*)\phi f(u_h) dx - k_5 > c_{22} f \left(\int_\Omega K^{'}(w^*)\phi u_h dx \right) - k_5$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \int_\Omega K^{'}(w^*)\phi u_h dx > c_{22} f \left(\int_\Omega K^{'}(w^*)\phi u_h dx \right) - k_5.$$

Θέτουμε,

$$A_h(t) = \int_\Omega K^{'}(w^*)\phi u_h dx, \tag{8.43}$$

και παίρνουμε

$$\frac{d}{dt} A_h(t) > c_{22} f\left(A_h(t)\right) - k_5. \tag{8.44}$$

Θέλουμε να ισχυει $c_{22} f\left(A_h(t)\right) - k_5 > 0 \Rightarrow c_{22} f\left(\int_\Omega K^{'}(w^*)\phi u_h dx\right) - k_5 > 0 \Rightarrow \int_\Omega K^{'}(w^*)\phi u_h dx > f^{-1}(k_5/c_{22}) = k_{10}$.

Αυτό πάντοτε επιτυγχάνεται, καθόσον η λύση $u(x,t)$ είναι μη φραγμένη. Για παράδειγμα, μία ικανή συνθήκη είναι η εξης:

$$\int_\Omega K^{'}(w^*)\phi u_h dx > \int_\Omega K^{'}(m)\varphi u_h dx = K^{'}(m)\varphi\int_\Omega u_h dx > k_{10}$$
$$\Rightarrow \int_\Omega u_h dx > \frac{k_{10}}{K^{'}(m)\varphi} = k_{11} \Rightarrow \|u_h\|_{L_1(\Omega)} > k_{11},$$

πάντοτε επιτυγχανόμενη μετά από μία χρονική στιγμή $\hat{t}_1$.

Έχοντας εξασφαλίσει την ύπαρξη ενός τέτοιου χρόνου $\hat{t}_1$, λαμβάνουμε:

$$\frac{dA_h(t)}{c_{22}f\left(A_h(t)\right) - k_5} > dt \Rightarrow \int_{A_h(\hat{t}_1)}^{A_h(t)} \frac{dr}{c_{22}f\left(r\right) - k_5} > t - \hat{t}_1$$

$$\Rightarrow t - \hat{t}_1 < \int_{A_h(\hat{t}_1)}^{A_h(t)} \frac{dr}{c_{22}f\left(r\right) - k_5} < \int_{A_h(\hat{t}_1)}^{\infty} \frac{dr}{c_{22}f\left(r\right) - k_5} = \hat{t}_2 < \infty$$
$$\Rightarrow t < \hat{t}_1 + \hat{t}_2 = \hat{t}_3.$$

Αυτό σημαίνει ότι, $A_h(t) = \int_\Omega K^{'}(w^*)\phi u_h dx \to \infty$, του $t \to \hat{t}_3$.
Η ανωτέρω σχέση αληθεύει για κάθε $h > 0$, οπότε στέλνοντας το $h \to 0$ έχουμε:

$$\int_\Omega K^{'}(w^*)\phi u dx \to \infty, \text{ καθώς } t \to \hat{t}_4 < \infty.$$

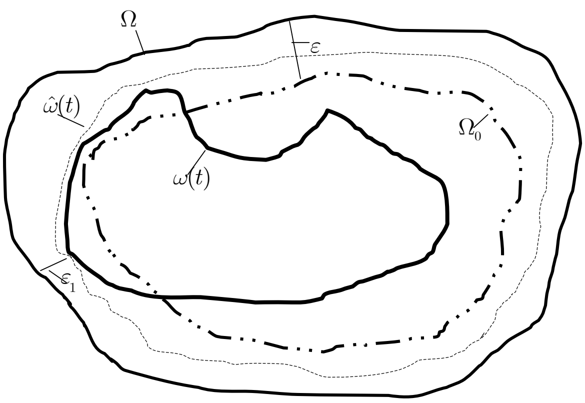
($\hat{t}_4$ ενδεχομένως να είναι διαφορετικό του $\hat{t}_2$, αλλά πάντοτε $< \infty$).

Όμως, $\int_\Omega K^{'}(w^*)\phi u dx < K^{'}(M)\Phi\int_\Omega u dx$, όπου θέσαμε $M = \sup_x w^* < \infty$ και $\Phi = \sup_x \phi < \infty$, που σημαίνει ότι,

$$K^{'}(M)\Phi\int_\Omega u dx \to \infty \Rightarrow \int_\Omega u dx \to \infty$$
$$\Rightarrow \|u\|_{L_1(\Omega)} \to \infty, \text{ καθώς } t \to t^* < \infty. \tag{8.45}$$

Επομένως, έχουμε έκρηξη σε πεπερασμένο χρόνο της L_1- νόρμας της λύσης $u(x,t)$.

Η τελευταία περίπτωση είναι όταν $\omega(t)\cap\Omega_0 \neq \emptyset$, $meas(\omega(t)\cap\Omega_0) > 0$, και $\omega(t) \subset \Omega$. Ένα ενδεικτικό σχήμα της περίπτωσης αυτής είναι το Σχήμα 8.2.



Σχήμα 8.2:

Έστω

$$\varepsilon_1 = dist(\omega(t), \Omega) = \min_{x\in\omega(t)} (dist(x, \partial\Omega)). \tag{8.46}$$

Θεωρούμε το υποσύνολο $\hat{\omega}(t)$, οριζόμενο ως,

$$\hat{\omega}(t) = \{x \in \Omega / dist(x, \partial\Omega) > \varepsilon_1\}. \tag{8.47}$$

Είναι προφανές από το Σχήμα 8.2 ότι,

$$\varepsilon_1 < \varepsilon,\ \omega(t) \subset \hat{\omega}(t) \subset \Omega,\ \text{και}\ \Omega_0 \subset \hat{\omega}(t).$$

Τώρα, επειδή το Ω είναι κυρτό χωρίο, το $\hat{\omega}(t)$ θα είναι επίσης κυρτό, ως αποτέλεσμα της κατασκευής του.

Στο σημείο αυτό και προς αποφυγή επαναλήψεων, περιγράφουμε την ακολουθούμενη διαδικασία, η οποία είναι:

1. $\int_{\omega(t)} dx = \int_{\hat{\omega}(t)} dx$, (διότι $\omega(t)$ είναι ο φορέας της λύσης).

2. $\hat{\omega}(t)$ κυρτό σημαίνει ότι υπάρχει μία σταθερά $\gamma > 0$ τέτοια ώστε $\int_{\Omega_0} f(u)dx > \frac{1}{\gamma+1}\int_{\hat{\omega}(t)} f(u)dx$ (από το θεώρημα των παράλληλα μετακινούμενων επιπέδων).

3. Εκτελούμε τούς ίδιους υπολογισμούς όπως προηγούμενα, πάνω στο χωρίο Ω_0, και βασιζόμενοι στην ανωτέρω ανισότητα, μεταφέρουμε την ανισότητα με την ίδια φορά

στο χωρίο $\hat{\omega}(t)$ και επομένως και στο $\omega(t)$, και τελικά στο Ω.

4. Οι υπολογισμοί για την απόδειξη της έκρηξης, γίνονται ακριβώς όπως στην προηγούμενη περίπτωση.

Παρόλα αυτά, και μιλώντας όχι αυστηρά, μπορούμε να πούμε ότι η χρονική διάρκεια κατά την οποία $\omega(t) \cap \Omega_0 \neq \emptyset$ και $\omega(t) \subset \Omega$, είναι πεπερασμένη, και επομένως δεν επηρρεάζει την περίπτωση της έκρηξης σε πεπερασμένο χρόνο, παρά μόνον τη χρονική στιγμή της έκρηξης. Επίσης υπενθυμίζουμε ότι η σταθερά ε είναι ένας μικρός θετικός αριθμός.

Κεφάλαιο 9

Έκρηξη των λύσεων του μη τοπικού προβλήματος όταν $\lambda > \lambda^*$.

Εξετάζουμε την ύπαρξη, μοναδικότητα και την έκρηξη των λύσεων $u = u(x,t;\lambda)$ σε ένα μη-τοπικό παραβολικό πρόβλημα για την εξίσωση $u_t = \Delta u + \lambda f(u)/\left(\int_\Omega f(u)dx\right)^p$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, για $\lambda > 0$ και $0 < p < 1$, με αρχικά δεδομένα $u_0 \geq 0$ και κατάλληλες συνοριακές συνθήκες. Η συνάρτηση f είναι θετική, αύξουσα και κυρτή, και $1/f^{(1-p)}$ είναι ολοκληρώσιμη στο άπειρο. Ο κύριος σκοπός μας είναι να αποδείξουμε, με βάση μία παραδοχή για το λ-φάσμα, ότι η λύση u εκρήγνυται σε πεπερασμένο χρόνο t^*, για $\lambda > \lambda^*$ και για κατάλληλες $u_0(x) \geq 0$. Εδώ, λ^* είναι το supremum των λ τέτοιο ώστε για $\lambda \leq \lambda^*$ να υπάρχει στάσιμη λύση.

9.1 Εισαγωγή

Αποδεικνύουμε την έκρηξη των λύσεων για το ακόλουθο μη-τοπικό πρόβλημα αρχικών - συνοριακών συνθηκών:

$$u_t = \Delta u + \frac{\lambda f(u)}{\left(\int_\Omega f(u)dx\right)^p}, \quad x \in \Omega, \;\; t > 0, \tag{9.1α′}$$

$$\mathcal{B}(u) = \frac{\partial u}{\partial n} + \beta(x)u = 0, \quad x \in \partial\Omega, \;\; t > 0, \tag{9.1β′}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \geq 0, \quad x \in \Omega, \tag{9.1γ′}$$

όπου Ω είναι ένα φραγμένο χωρίο του $\mathbb{R}^N$ με αρκούντως λείο σύνορο $\partial\Omega$ και n είναι το προς τα έξω μοναδιαίο κάθετο διανυσματικό πεδίο. Για λόγους πρακτικούς, θεωρούμε μη αρνητικά αρχικά δεδομένα. Επισης για να έχουμε κλασσικές λύσεις, αρκεί τα αρχικά δεδομένα $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ ή $u_0 \in L^2(\Omega)$. Θέτουμε συνοριακές συνθήκες της μορφής $\mathcal{B}(u)$. Οι συνθήκες αυτές είναι απόρροια του νόμου Fourier για τη διάχυση και της διατήρησης της μάζας, ή της θερμικής αγωγιμότητας και της διατήρησης της ενέργειας. Η συνάρτηση $0 \leq \beta = \beta(x) \leq \infty$, είναι $C^{1+\alpha}(\partial\Omega)$, $\alpha > 0$, όποτε αυτή είναι φραγμένη ($\beta \equiv 0$, $\beta \equiv \infty$, $0 < \beta < \infty$ σημαίνει Neumann, Dirichlet και Robin συνοριακές συνθήκες αντίστοιχα). Οι παράμετροι λ, p είναι θετικές με $p \in (0,1)$ και η συνάρτηση f ικανοποιεί:

$$f(s) > 0,\ f^{'}(s) > 0,\ f^{''}(s) > 0,\ \text{για } s \geq 0, \tag{9.2α'}$$

$$\int_0^\infty \frac{ds}{f^{1-p}(s)} < \infty, \tag{9.2β'}$$

π.χ. $f(s) = (1+s)^{1+k}$ για $k > p/(1-p)$ ή $f(s) = e^s$.

Το πρόβλημα αυτό περιγράφει διάφορα φυσικά φαινόμενα, όπως αναφέρονται στις εργασίες των Bebernes-Lacey [15] και Bebernes-Li-Talaga [16]. Στο [64], οι Gao-Feng Zheng αποδεικνύουν έκρηξη για το πρόβλημα (1), όταν $f(u) = e^u$, χρησιμοποιώντας ενεργειακές μεθόδους και συναρτησιακά Liapunov. Συγκεκριμένα η συνάρτηση $f(u) = e^u$ δέχεται ένα συναρτησιακό Liapunov της μορφής

$$E(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda}{1-p}\int_\Omega e^u dx.$$

Υπενθυμίζουμε ότι για μη-τοπικά προβλήματα με f αύξουσα, η αρχή μεγίστου δεν ισχύει ως έχει, όπως συμβαίνει στα τοπικά προβλήματα. Παρ'ολα αυτά, μπορεί να εφαρμοστούν τεχνικές σύγκρισης με τη χρήση ζευγών πάνω και κάτω λύσεων, βλ. [13].

Μία διαφορετική μέθοδος έχει δοθεί από τον Bellout, στο [17]. Η μέθοδος αυτή ο-νομάζεται concavity μέθοδος, και παρέχει ένα κριτήριο έκρηξης για τοπικά προβλήματα.

Στο κεφάλαιο αυτό γενικεύουμε, αναφορικά με την συνάρτηση f, τα αποτελέσματα του [64] χωρίς τη χρήση κάποιου συναρτησιακού Liapunov, και για οποιαδήποτε συνάρτηση f που ικανοποιεί την (9.2), χρησιμοποιώντας την επονομαζόμενη φασματική μέθοδο ή μέθοδο Kaplan, βλ. [12, 90, 119] και τις σχετικές αναφορές.

Τέλος, το κεφάλαιο αυτό έχει οργανωθεί ως εξής: στην ενότητα 9.2 εξετάζουμε εν συντομία την ύπαρξη και τη μοναδικότητα των λύσεων του (9.1), καθώς επίσης και τα αντίστοιχα τοπικά και μη τοπικά στάσιμα προβλήματα. Στην ενότητα 9.3 για λόγους πληρότητας και συνάφειας, αναφέρουμε αποτελέσματα [81], για την έκρηξη των λύσεων για αρκούντως μεγάλα λ και για αρκούντως μεγάλα αρχικά δεδομένα. Το κυρίως αποτέλεσμα παρουσιάζεται στην ενότητα 9.4, υπό μία παραδοχή στο φάσμα της παραμέτρου λ και με κατάλληλα αρχικά δεδομένα, αποδεικνύουμε έκρηξη για $\lambda > \lambda^*$ όπου λ^* είναι το supremum του λ τέτοιο ώστε για $\lambda \leq \lambda^*$ να υπάρχει στάσιμη λύση για το μη τοπικό πρόβλημα. Τέλος, στην ενότητα 9.5, συνοψίζουμε τα αποτελέσματα.

9.2 Ύπαρξη, μοναδικότητα και στάσιμο πρόβλημα.

9.2.1 Ύπαρξη και μοναδικότητα για το παραβολικό πρόβλημα.

Ύπαρξη και μοναδικότητα των λύσεων για το πρόβλημα (9.1), προκύπτει από την κλασσική θεωρία των Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων, με την προϋπόθεση ότι $u_0 \in L^2(\Omega)$, $\sup_x u_0 < \infty$, βλ.[15, 88]. Η μη επεκτασιμότητα της λύσης οφείλεται στην έκρηξη.

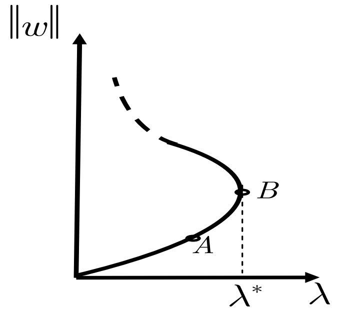
Μία άλλη μέθοδος για την απόδειξη της ύπαρξης λύσης για το πρόβλημα (9.1) είναι μέσω της ολοκληρωτικής αναπαράστασης. Συγκεκριμένα, στο $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, για μία μετρήσιμη και φραγμένη $u_0(x)$, το πρόβλημα (9.1) δύναται να γραφεί σε ολοκληρωτική μορφή Green:

$$u(x,t) = \lambda \int_0^t \int_\Omega g(x,y,t-s) \frac{f(u(y,s))}{\left(\int_\Omega f(u(y,s))dy\right)^p} dyds + \int_\Omega g(x,y,t) u_0(y) dy, \quad (9.3)$$

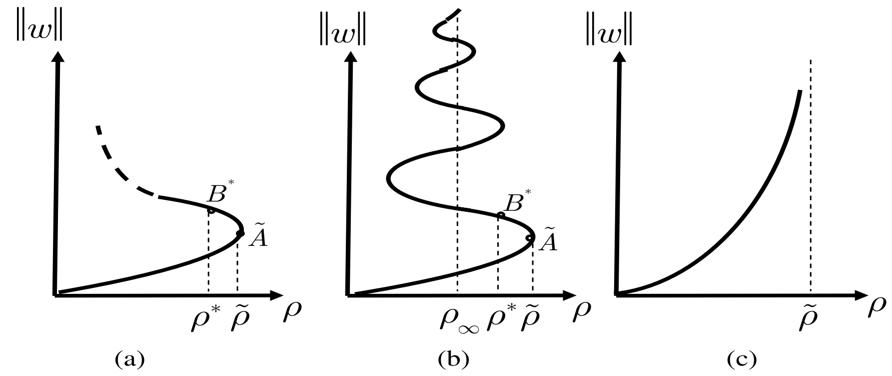
όπου g είναι η συνάρτηση Green για την εξίσωση θερμότητας με συνοριακές συνθήκες $\mathcal{B}(g) = 0$. Θέτοντας $v_n(u_n)$ αντί για u στο αριστερό μέλος της (9.3) και $v_{n-1}(u_{n-1})$ αντί για u στον αριθμητή και $u_{n-1}(v_{n-1})$ στον παρανομαστή στο δεξιό μέλος της (9.3), για

$n \geq 1$ και παίρνοντας $u_0 \equiv v_0 \equiv 0$, καταλήγουμε, περνώντας στο όριο και ακολουθώντας τα standard επαναληπτικά σχήματα Picard, στο ότι εάν $\lambda > 0$, $f(s) \geq c > 0$ και Lipschitz για $s \in (a, b)$, όπου $a < \min\{0, \inf u_0\} \leq u \leq \max\{0, \sup u_0\} < b$, τότε υπάρχει μία μοναδική λύση u για το πρόβλημα (9.1) και (9.3). Επιπρόσθετα, η λύση συνεχίζει να υφίσταται όσο αυτή παραμένει μικρότερη ή ίση του b. Αυτό σημαίνει ξανά ότι η λύση παύει να υπάρχει μόνο λόγω έκρηξης. Λόγω του ότι f είναι αύξουσα, μερικά από τα παραπάνω αποτελέσματα μπορούν να εξαχθούν χρησιμοποιώντας ζεύγη πάνω - κάτω λύσεων, βλ.[95].

Επίσης, ύπαρξη και μοναδικότητα των λύσεων του (9.1) μπορεί να αποδειχθεί και με μεθόδους σύγκρισης. Σε αντίθεση με την περίπτωση φθίνουσας $f(s)$, βλ.[94, 105], όπου ισχύει η κλασσική αρχή μεγίστου, όταν η $f(s)$ είναι αύξουσα συνάρτηση, δεν ισχύει για το πρόβλημα (9.1), μία άμεση αρχή σύγκρισης. Επιπλέον, η ύπαρξη πάνω και κάτω λύσης με την κλασσική έννοια, δεν εξασφαλίζει την ύπαρξη λύσης για το πρόβλημα (9.1), κείμενης μεταξύ αυτών των δύο. Για να μπορέσουμε να εφαρμόσουμε τεχνικές σύγκρισης, πρέπει να εισάγουμε την έννοια του ζεύγους πάνω κάτω λύσης, βλ.[13, 94, 98].



Σχήμα 9.1: *Διάγραμμα διακλάδωσης για το μη-τοπικό πρόβλημα.*



Σχήμα 9.2: *Διάγραμμα διακλάδωσης για το τοπικό πρόβλημα.*

9.2.2 Το μη τοπικό στάσιμο πρόβλημα.

Το αντίστοιχο μη τοπικό στάσιμο πρόβλημα του (9.1) είναι:

$$\Delta w(x) + \frac{\lambda f(w(x))}{\left(\int_\Omega f(w(x))dx\right)^p} = 0, \quad x \in \Omega, \quad \mathcal{B}(w(x)) = 0, \ x \in \partial\Omega, \tag{9.4}$$

ενώ το αντίστοιχο τοπικό είναι:

$$\Delta\, w(x) + \rho f(w(x)) = 0, \ \ x \in \Omega, \quad \mathcal{B}(w(x)) = 0, \ x \in \partial\Omega, \tag{9.5}$$

όπου $\rho = \lambda / \left(\int_\Omega f(w(x))dx\right)^p$; λ είναι η μη τοπική παράμετρος, ενώ ρ είναι η τοπική. Θα λέμε ότι η $w = w(x) > 0$ είναι κλασσική λύση του (9.4) ή του (9.5), εάν $w = w(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$.

Για το πρόβλημα (9.4), όπου η f ικανοποιεί την (9.2α′), υποθέτουμε ότι υπάρχει μια κρίσιμη τιμή του $\lambda^* < \infty$ τέτοια ώστε εάν $\lambda > \lambda^*$ το πρόβλημα (9.4) δεν έχει καμία λύση, ενώ για $0 < \lambda < \lambda^*$ έχει μία τουλάχιστον λύση, (συγκεκριμένα έχει ακριβώς δύο διακριτές μη αρνητικές λύσεις και για $\lambda = \lambda^* < \infty$ έχει ακριβώς μία λύση. Η περίπτωση αυτή ονομάζεται περίπτωση κλειστού φάσματος. Τα διαγράμματα του σχήματος 9.1, του σχήματος 9.2(a) και του 9.2(b) έχουν κλειστό φάσμα, ενώ το σχήμα 9.2(c) έχει ανοικτό φάσμα. Ονομάζουμε αυτήν την υπόθεση, αναφορικά με τα $\|w\|$-διαγράμματα του σχήματος 9.1 κλειστό και αριστερά του λ^* και 9.2(a), 9.2(b) κλειστό και αριστερά του ρ^*, λ -υπόθεση.

Η μορφή αυτή είναι απολύτως σωστή για συγκεκριμένες μη γραμμικές συναρτήσεις· για παράδειγμα η $f(w) = e^w$, $n = 1, 2$ και $0 < p < 1$, όντως για $0 < \lambda < \lambda^*$ το πρόβλημα έχει ακριβώς δύο λύσεις, ενώ για κάποιες περιπτώσεις για $p \geq 1$ έχει μια μοναδική λύση για οποιοδήποτε $\lambda > 0$, βλ. [15]. Η μορφή των διαγραμμάτων διακλάδωσης, για γενικές περιπτώσεις είναι ακόμα άγνωστη και αποτελεί ανοικτό ερώτημα τόσο για τα τοπικά όσο και για τα μη τοπικά προβλήματα.

Υπόθεση (H). Τελικά, και για όσα έπονται, θεωρούμε ότι ισχύει η λ -υπόθεση. Με άλλα λόγια, υποθέτουμε την περίπτωση κλειστού φάσματος και ότι το το μη τοπικό διάγραμμα απόκρισης (διακλάδωσης) αποτελείται από μία συνεχώς διαφορίσιμη καμπύλη. Η καμπύλη αυτή στρέφεται στο λ^* και το $(\lambda^*, \|w^*\|)$ είναι το σημείο αναστροφής του διαγράμματος, (βλ.σχήμα 9.1).

Επίσης, για λόγους απλοποίησης, μπορούμε να υποθέσουμε ότι για $\lambda \in (\lambda^* - \varepsilon,\ \lambda^*)$, για κάποιο $0 < \varepsilon \leq 1$, υπάρχουν δύο ακριβώς κλασσικές διακεκριμένες μη αρνητικές λύσεις $w, \bar{w}$ με $\|\bar{w}\| > \|w\|$, και μόνο μία στο $\lambda = \lambda^*$. Είναι γνωστό ότι παρόμοιες περιπτώσεις ισχύουν επίσης για τα διαγράμματα διακλάδωσης του τοπικού προβλήματος (9.5), βλ. σχήματα 9.2(a), 9.2(b). Πιο συγκεκριμένα, τα διαγράμματα διακλάδωσης (τα ρ -διαγράμματα) για το τοπικό πρόβλημα είναι όπως στο σχήμα 9.2, (βλ.[15]). Επιπρόσθετα, υποθέτουμε ότι η καμπύλη διακλάδωσης του σχήματος 9.1 αντιστοιχεί στις καμπύλες διακλάδωσης του σχήματος 9.2(a) ή 9.2(b). Η περίπτωση όπου το λ -διάγραμμα του σχήματος 9.1 αντιστοιχεί στο ρ -διάγραμμα του σχήματος 9.2(c), μνημονεύεται στο τέλος της ενότητας 9.4.

9.3 Έκρηξη: Καμία υπόθεση για το φάσμα του στάσιμου προβλήματος.

Στην ενότητα αυτή, και για λόγους πληρότητας, επαναδιατυπώνουμε εν συντομία τα αποτελέσματα του [81], (βλ.επίσης [98]) για την εξίσωση διήθησης. Επισημαίνουμε, ότι για την περίπτωση αυτή, δεν απαιτείται καμία υπόθεση για το φάσμα του στάσιμου προβλήματος, σε αντίθεση με τα αναφερόμενα στην επόμενη ενότητα.

Έκρηξη για τα προβλήματα Dirichlet και Robin για μεγάλα λ.
Έστω $(\rho,\,\Psi(x))$, με $\rho=\rho(\Omega)>0$ το πρωτεύον ιδιοζεύγος της $-\Delta$, δηλαδή η συνάρτηση $\Psi(x)$ επαληθεύει το πρόβλημα:

$$-\Delta\Psi(x)=\rho\Psi(x),\;\; x\in\Omega,\;\; \mathcal{B}(\Psi)=\frac{\partial\Psi}{\partial n}+\beta\Psi(x)=0,\;\; x\in\partial\Omega, \tag{9.6}$$

Είναι γνωστό ότι η $\Psi(x)$ έχει σταθερό πρόσημο στο Ω, $\Psi(x)>0$ και κανονικοποιείται έτσι ώστε $\|\Psi\|_1=\int_\Omega\Psi(x)dx=1$. Εφαρμόζοντας την μέθοδο Kaplan, καταλήγουμε στο παρακάτω αποτέλεσμα (έκρηξη της λύσης), [81].

Πρόταση 38. *Έστω Ω κυρτό χωρίο του $\mathbb{R}^N$, τότε η λύση $u(x,t)$ του (9.1) με συνοριακές συνθήκες Dirichlet ή Robin, εκρήγνυται σε πεπερασμένο χρόνο για αρκούντως μεγάλες τιμές της παραμέτρου λ, δεδομένου ότι $u_0\in L^2(\Omega)$.*

Για την απόδειξη της Πρότασης 38, βλ. [81]. Εδώ, η κυρτότητα του χωρίου Ω και η σχέση (9.8) είναι απαιτητά, (βλ. κατωτέρω).

Λόγω της κυρτότητας και του γεγονότος ότι η συνάρτηση f είναι αύξουσα, μπορούμε να κατασκευάσουμε, εφαρμόζοντας την μέθοδο των παράλληλα μετακινούμενων επιπέδων, [67, 111], βλ. επίσης [81], ένα σχετικά συμπαγές σύνολο $\bar{\Omega}_0\subset\Omega$ τέτοιο ώστε:

$$\int_\Omega f(u)dx\le(k+1)\int_{\bar{\Omega}_0}f(u)dx, \tag{9.7}$$

για κάποιο $k\in\mathbb{N}$. Έστω $m=\min_{x\in\bar{\Omega}_0}\Psi(x)$, τότε με βάση το ότι $\bar{\Omega}_0\subset\Omega$ και την αρχή μεγίστου, έχουμε ότι $m>0$, οπότε από τη σχέση (9.7) συνεπάγεται ότι:

$$\int_\Omega f(u)dx\le\frac{k+1}{m}\int_{\bar{\Omega}_0}f(u)\Psi(x)dx\le\frac{k+1}{m}\int_\Omega f(u)\Psi(x)dx$$

άρα,

$$\left(\int_\Omega f(u)dx\right)^{-p} \geq \left(\frac{m}{k+1}\right)^p \left(\int_\Omega f(u)\Psi(x)dx\right)^{-p}. \tag{9.8}$$

Η σχέση (9.8) πρόκειται να χρησιμοποιηθεί στην επόμενη παράγραφο.

Έκρηξη για μεγάλα αρχικά δεδομένα.
Έκρηξη μπορεί να έχουμε και για αρκούντως μεγάλα (υπό κάποια έννοια) αρχικά δεδομένα. Πάλι η κυρτότητα του χωρίου Ω, λόγω της κλασματικής μορφής του μη τοπικού όρου πηγής, απαιτείται για την απόδειξη, χωρίς όμως να απαιτείται κάποιος άλλος περιορισμός. Συγκεκριμένα, ισχύουν τα ακόλουθα, [81]:

Πρόταση 39. *Έστω Ω κυρτό χωρίο του $\mathbb{R}^N$, τότε η λύση $u(x,t)$ του (9.1) εκρήγνυται σε πεπερασμένο χρόνο για αρκούντως μεγάλα αρχικά δεδομένα $u_0(x) \in L^2(\Omega)$.*

Έκρηξη για το πρόβλημα Neumann. Ας υποθέσουμε τώρα ότι $\beta(x) = 0$ για κάθε $x \in \partial\Omega$, δηλαδή η u ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες Neumann. Στην περίπτωση αυτή, το αντίστοιχο στάσιμο πρόβλημα:

$$\Delta w + \frac{\lambda f(w)}{\left(\int_\Omega f(w)dx\right)^p} = 0, \quad x \in \Omega, \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0, \; x \in \partial\Omega, \tag{9.9}$$

δεν επιδέχεται καμίας μορφής λύση για κανένα $\lambda > 0$. Όντως, εάν υποθέσουμε ότι το πρόβλημα (9.9) έχει μία λύση $w(x)$, τότε εφαρμόζοντας την αρχή μεγίστου, θα ίσχυε ότι $w(x) > 0$ στο Ω, αφού $f(s)$ είναι θετική. Επομένως, η $w(x)$ θα είχε ένα ελάχιστο στο $x_0 \in \partial\Omega$ και από το συνοριακό Λήμμα του Hopf θα είχαμε ότι $\frac{\partial w}{\partial n}(x_0) < 0$ ερχόμενο σε αντίθεση με τις συνοριακές συνθήκες Neumann. Εναλλακτικά, εάν ολοκληρώναμε την εξίσωση του προβλήματος (9.9) θα καταλήγαμε στο ότι $0 = \lambda/\left(\int_\Omega f(w)dx\right)^{1-p}$, το οποίο είναι άτοπο. Το γεγονός αυτό αποδεικνύει ότι η χρονοεξαρτώμενη λύση $u(x,t)$ είναι μη φραγμένη για $\lambda > 0$. Συγκεκριμένα, ισχύουν τα ακόλουθα, [81]: (Σημειώνουμε ότι στην περίπτωση αυτή δεν απαιτείται το χωρίο Ω να είναι κυρτό).

Πρόταση 40. *Έστω Ω φραγμένο χωρίο του $\mathbb{R}^N$ με λείο σύνορο. Τότε η λύση $u(x,t)$ του (9.1) με συνοριακές συνθήκες Neumann εκρήγνυται σε πεπερασμένο χρόνο για κάθε $\lambda > 0$ υπό την προϋπόθεση ότι $u_0 \in L^2(\Omega)$.*

Επίσης ισχύει ένα συμπληρωματικό αποτέλεσμα στην Πρόταση 40 όταν $\int_b^\infty ds/f(s) = \infty$ για κάθε $b > 0$. Εάν θέσουμε $M(t) = \max_{x\in\bar{\Omega}} u(x,t)$ τότε, δεδομένου ότι η $f(s)$

είναι αύξουσα και θετική, καταλήγουμε ότι η $M(t)$ ικανοποιεί:

$$\dot{M}(t) = dM/dt \leq \lambda f(M)/\left(\int_\Omega f(u)dx\right)^p \leq \lambda f(M)/(f(0)\,|\Omega|)^p,$$

το οποίο οδηγεί στο $\int_{M(0)}^{M(t)} ds/f(s) \leq \lambda t/(f(0)\,|\Omega|)^p$. Από την τελευταία σχέση συνάγουμε ότι η $M(t)$ καθίσταται μη φραγμένη σε άπειρο χρόνο, δηλαδή στην περίπτωση αυτή το πρόβλημα (9.1) έχει μία ολική ως προς το χρόνο μη φραγμένη λύση, (υπενθυμίζουμε ότι $0 < p < 1$).

9.4 Έκρηξη για $\lambda > \lambda^*$. Η λ -υπόθεση στο στάσιμο πρόβλημα.

Σύμφωνα με την ενότητα 9.2, υποθέτουμε ότι το μη τοπικό στάσιμο πρόβλημα έχει διάγραμμα διακλάδωσης όπως στο σχήμα 9.1, δηλαδή ισχύει η λ -υπόθεση. Θεωρούμε επίσης ότι οι μη τοπικές λύσεις του σχήματος 9.1 αντιστοιχούν στις τοπικές λύσεις του σχήματος 9.2(a) ή 9.2(b), αλλά όχι του σχήματος 9.2(c). Θα αιτιολογήσουμε στο τέλος της ενότητας αυτής, γιατί το σχήμα 9.2(c) εξαιρείται. Όπως έχουμε τονίσει, η υπόθεση αυτή αληθεύει για ορισμένες ειδικές περιπτώσεις (μικρές διαστάσεις, ακτινική συμμετρία, κλπ.), βλ. [15].

Είναι γνωστό ότι το αντίστοιχο γραμμικοποιημένο πρόβλημα του τοπικού στάσιμου προβλήματος (9.5), είναι:

$$\Delta\phi(x) + \rho f'(w(x))\phi(x) = \nu\phi(x),\ x \in \Omega,\ \ \mathcal{B}(w(x)) = 0,\ x \in \partial\Omega, \tag{9.10}$$

Πρόταση 41. *Έστω ότι ικανοποιείται η υπόθεση (H) για το $\lambda-$ φάσμα. Τότε το σημείο αναστροφής B του σχήματος 9.1 αντιστοιχεί στο B^* του σχήματος 9.2(a) ή 9.2(b) και η κρίσιμη τιμή λ^* αντιστοιχεί στο ρ^*, το οποίο με τη σειρά του αντιστοιχεί στην πρωτεύουσα ιδιοτιμή $\nu > 0$ του προβλήματος (9.10).*

Απόδειξη. Έστω ότι το ζεύγος $(\nu,\,\phi)$ είναι το πρωτεύον ιδιοζεύγος, τότε το $\nu < 0$ ($\nu > 0$) αντιστοιχεί στην ελάχιστη $w = w(x\,;\,\rho) = \underline{w}$, (μέγιστη $w = w(x\,;\,\rho) = \bar{w},\ \bar{w} > \underline{w}$) λύση και $\tilde{\nu} = 0$ αντιστοιχεί στη $\tilde{w}(x)$, στο σημείο αναστροφής $\tilde{A} = (\tilde{\rho},\,\|\tilde{w}(x)\|)$ του σχήματος 9.2(a) ή 9.2(b).

Θεωρούμε τώρα μία απεικόνιση $s \to (\rho(s),\,w(x\,;\,s))$ η οποία είναι δύο φορές συνεχώς διαφορίσιμη από το $(-\delta,\,\delta)$ στο $[0,\,L) \times C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$, για κάποιο $\delta > 0$ και $L \geq \tilde{\rho}$. Τότε, για το τμήμα της καμπύλης, που αντιστοιχεί στο διάστημα $(\tilde{\rho}-\varepsilon,\, \tilde{\rho}),\ 0<\varepsilon\ll 1$, έχουμε $\rho(0)=\tilde{\rho},\ w(x;0)=\tilde{w},\ \rho^{'}(0)=0,\ w^{'}(x;0)=dw(x;0)/ds=\tilde{\phi}(x)$ όπου $(\tilde{\nu},\, \tilde{\phi})$ είναι το πρωτεύον ιδιοζεύγος του (9.10), με $\phi=\tilde{\phi}>0,\ \nu=\tilde{\nu}=0$ και $w=\tilde{w}$, [33].

Τώρα, από τη σχέση $\lambda=\rho\left(\int_\Omega f(w)dx\right)^p$, και υποθέτοντας ότι τα $\lambda,\ \rho,\ w$, εξαρτώνται από την παράμετρο $s\in(-\delta,\, \delta)$ και παραγωγίζοντας σε σχέση με το s , παίρνουμε:

$$\lambda^{'}(s)=\rho^{'}(s)\left(\int_\Omega f(w)dx\right)^p+\rho p\left(\int_\Omega f(w)dx\right)^{p-1}\left(\int_\Omega f^{'}(w)w^{'}(x;s)dx\right) \tag{9.11}$$

Στο $s=0$, έχουμε:

$$\lambda^{'}(0)=\tilde{\rho}p\left(\int_\Omega f(\tilde{w})dx\right)^{p-1}\left(\int_\Omega f^{'}(\tilde{w})\tilde{\phi}(x)dx\right)>0.$$

Το τελευταίο σημαίνει ότι $\lambda^{'}(0)>0$ και $\tilde{A}$ είναι η εικόνα του A, δηλαδή $A\leftrightarrow\tilde{A}$. Λόγω της συνέχειας της καμπύλης, το τόξο $\widehat{AB}$ αντιστοιχεί στο τόξο $\widehat{\tilde{A}B^*}$, ήτοι $A=(\lambda,\, \|w(x)\|)\to\tilde{A}=(\tilde{\rho},\, \|\tilde{w}(x)\|)$ και $B=(\lambda^*,\, \|w^*(x)\|)\to B^*=(\rho^*,\, \|w^*(x)\|)$. Ως εκ τούτου, για το σημείο αναστροφής $B=(\lambda^*,\, \|w^*(x)\|)$ του σχήματος 9.1 έχουμε ότι, $B\leftrightarrow B^*$. □

Τώρα θα διατυπώσουμε το κυρίως αποτέλεσμα του κεφαλαίου αυτού.

Θεώρημα 42. *Έστω Ω κυρτό χωρίο του $\mathbb{R}^N$ και ότι ικανοποιείται η υπόθεση (H) για το $\lambda-$φάσμα. Τότε η λύση $u(x,t)$ του προβλήματος (9.1) με συνοριακές συνθήκες Dirichlet ή Robin και $u_0(x)\geq 0$ με $u_0\in L^2(\Omega)$, εκρήγνυται σε πεπερασμένο χρόνο για κάθε $\lambda>\lambda^*$.*

Η απόδειξη του Θεωρήματος είναι άμεση συνέπεια των επόμενων τριών Λημμάτων:

Λήμμα 43. *Έστω $s=A(t)=\int_\Omega\phi^*u(x,t)dx\geq S_0,\quad t\geq 0$, όπου το S_0 είναι η μεγαλύτερη ρίζα της εξίσωσης $af^{(1-p)}(s)-c_1s-c_2=0$, για κάποιες σταθερές $a,\ c_1,\ c_2$ τότε η λύση $u(x,t)$ εκρήγνυται σε πεπερασμένο χρόνο.*

Απόδειξη. Είναι γνωστό ότι από το προβλημα (9.10) μπορούμε να λάβουμε, (βλ.[33], σελ.216):

$$\Delta\phi^*(x)+\rho^*f^{'}(w^*(x))\phi^*=\nu^*\phi^*,\ x\in\Omega,\ \ \mathcal{B}(\phi^*(x))=0,\ x\in\partial\Omega, \tag{9.12}$$

με $\phi^*>0$ και $\nu^*>0$.

Έχουμε επίσης: $\rho^* \left(\int_\Omega f(w^*)dx\right)^p = \lambda^*$ και $\rho^* = \lambda^* / \left(\int_\Omega f(w^*)dx\right)^p = c\lambda^*$ όπου $c = 1/\left(\int_\Omega f(w^*)dx\right)^p$. Πρέπει να τονίσουμε ότι η τιμή λ^* είναι η τετμημένη του σημείου αναστροφής $(\lambda^*, \|w^*(x)\|)$ του μη τοπικού διαγράμματος διακλάδωσης στο σχήμα 9.1.

Εφαρμόζοντας τώρα το θεώρημα των παράλληλα μετακινούμενων επιπέδων στο πρόβλημα (9.1), καθόσον το Ω είναι κυρτό, $f'(s) > 0$, καταλήγουμε στο ότι, βλ. επίσης (9.8), υπάρχει ένα υποσύνολο Ω_0, $\bar{\Omega}_0 \subset \Omega$ και ένας θετικός αριθμός k τέτοια ώστε:

$$\left(\frac{k+1}{m}\right)^p \left(\int_\Omega \phi^* f(u)dx\right)^p \geq \left(\int_\Omega f(u)dx\right)^p \tag{9.13}$$

όπου $m = \min_{x\in\bar{\Omega}_0} \phi^* > 0$.

Επιπλέον, το ολοκλήρωμα $\int_\Omega \phi^* F(u)dx \geq I > 0$, όπου I είναι μία σταθερά. Πράγματι, από την σχέση (9.13) έχουμε:

$$\begin{aligned}\int_\Omega \phi^* F(u)dx = \frac{\int_\Omega \phi^* f(u)dx}{\left(\int_\Omega f(u)dx\right)^p} \geq & \frac{m}{k+1}\left(\int_\Omega f(u)dx\right)^{1-p} \\ \geq & \frac{m}{k+1}\left(|\Omega|\, f(0)\right)^{1-p} = I > 0.\end{aligned} \tag{9.14}$$

Θέτουμε $u = v + w^*$, και η εξίσωση $u_t - \Delta u = \lambda F(u)$, όπου $F(u) := f(u)/\left(\int_\Omega f(u)dx\right)^p$ και $c = 1/\left(\int_\Omega f(w^*)dx\right)^p$, γίνεται, [90]:

$$\begin{aligned} v_t = u_t &= \Delta v + \Delta w^* + \lambda F(u) = \Delta v - \rho^* f(w^*) + \lambda F(u) \\ &= \Delta v - \lambda^* F(w^*) + \lambda F(u) + \lambda^* F(u) - \lambda^* F(u) \\ &= \Delta v + (\lambda - \lambda^*)F(u) + \lambda^*(F(u) - F(w^*)). \end{aligned} \tag{9.15}$$

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της (9.15) με ϕ^*, την ιδιοσυνάρτηση του γραμμικοποιημένου προβλήματος (9.12), ολοκληρώνουμε στο Ω, οπότε λαμβάνουμε:

$$J = \int_\Omega \phi^* u_t dx = \int_\Omega \phi^* v_t dx \tag{9.16}$$

$$= \int_\Omega v\Delta\phi^* dx + (\lambda - \lambda^*)\int_\Omega \phi^* F(u)dx + \lambda^* \int_\Omega \phi^*(F(u) - F(w^*))dx$$

$$\geq -\nu^* \int_\Omega \phi^* w^* dx - \rho^* \int_\Omega v f'(w^*)\phi^* dx + (\lambda - \lambda^*)\int_\Omega \phi^* F(u)dx +$$

$$+\lambda^*\int_\Omega \phi^*(F(u)-F(w^*))dx$$

$$=(\lambda-\lambda^*)\int_\Omega \phi^* F(u)dx+\lambda^*\int_\Omega \phi^*\left[F(u)-cf(w^*)-cvf^{'}(w^*)-\frac{\nu^*}{\lambda^*}w^*\right]dx$$

$$=(\lambda-\lambda^*)\int_\Omega \phi^* F(u)dx+$$

$$+\lambda^*\int_\Omega \phi^*\left[\frac{f(u)}{\left(\int_\Omega f(u)dx\right)^p}-cf(w^*)-cvf^{'}(w^*)-\frac{\nu^*}{\lambda^*}w^*\right]dx$$

$$=(\lambda-\lambda^*)\int_\Omega \phi^* F(u)dx+$$

$$+\lambda^*\int_\Omega\left[\frac{f(u)\phi^*}{\left(\int_\Omega f(u)dx\right)^p}-\phi^*[cf(w^*)+cvf^{'}(w^*)+\frac{\nu^*}{\lambda^*}w^*]\right]dx.$$

Από τη σχέση (9.13), θέτοντας $A(t)=\int_\Omega u\phi^* dx$, $c_0=(m/(k+1))^p>0$, παίρνοντας $\int_\Omega \phi^* dx=1$ και το ότι $u=v+w^*\Rightarrow -v=w^*-u\Rightarrow -v>-u$, έχουμε:

$$J\geq(\lambda-\lambda^*)\int_\Omega \phi^* F(u)dx+\lambda^* c_0\left(\int_\Omega \phi^* f(u)dx\right)^{1-p}-\lambda^* cf(M^*)-\lambda^* cf^{'}(M^*)\int_\Omega \phi^* u dx$$

$$-\nu^* M^*$$

$$\geq(\lambda-\lambda^*)\int_\Omega \phi^* F(u)dx+\lambda^*\left[c_0 f^{1-p}(A)-cf^{'}(M^*)A-cf(M^*)-\nu^* M^*/\lambda^*\right]$$

$$\geq(\lambda-\lambda^*)I+\lambda^*\left[c_0 f^{1-p}(A)-cf^{'}(M^*)A-cf(M^*)-\nu^* M^*/\lambda^*\right]$$

$$=(\lambda-\lambda^*)I+\lambda^*(c_0 f^{1-p}(A)-c_1 A-c_2)$$

όπου $c_1=cf^{'}(M^*)$, $c_2=cf(M^*)+\nu^* M^*/\lambda^*$ και $-cvf^{'}(w^*)\phi^*\geq -cuf^{'}(w^*)\phi^*$, $u\geq 0$.

Για να φθάσουμε στην προηγούμενη σχέση, υπενθυμίζουμε ότι έχουμε χρησιμοποιήσει: την κυρτότητα του Ω, το θεώρημα των παράλληλα μετακινούμενων επίπεδων, την ανισότητα Jensen και το ότι $\int_\Omega \phi^* dx=1$. Τελικά, για $\lambda>\lambda^*$ έχουμε:

$$A^{'}(t)\geq(\lambda-\lambda^*)I+\lambda^*(c_0 f^{1-p}(A)-c_1 A-c_2)\geq\lambda^*(c_0 f^{1-p}(A)-c_1 A-c_2). \quad (9.17)$$

Τώρα, επιστρέφοντας στη σχέση (9.17) και λόγω της (9.2) λαμβάνουμε:

$$af^{(1-p)}(s)>(c_1 s+c_2),\ \text{για}\ s\geq S_0,\quad af^{(1-p)}(s)-c_1 s-c_2=0, \quad (9.18)$$

για κάποιο $a \in (0, c_0)$ και $S_0 > 0$, όπου S_0 είναι η μεγαλύτερη λύση της προηγούμενης εξίσωσης. Σημειώνουμε ότι η σχέση (9.2β′) συνεπάγεται ότι η f^{1-p} είναι υπεργραμμική στο άπειρο, επομένως $af^{(1-p)}(s) - c_1 s - c_2 > 0$ είτε για κάθε $s > S_0 > 0$ είτε για κάθε $s > 0$ εάν η εξίσωση (9.18) δεν έχει λύσεις. Στις περιπτώσεις αυτές, η $A(t)$ μπορεί να επεκταθεί μέχρι το άπειρο. Ισχύει επίσης, $A(t) = \int_\Omega \phi^*(x)u(x,t)dx \le ||u||_\infty$.

$$t \le \int_{A_0}^{A(t)} \frac{ds}{c_0 f^{1-p}(s) - c_1 s - c_2} \le \int_{A_0}^{\infty} \frac{ds}{c_0 f^{1-p}(s) - c_1 s - c_2}$$
$$\le \int_{A_0}^{\infty} \frac{ds}{(c_0 - a) f^{1-p}(s)} \le \Lambda \int_{A_0}^{\infty} \frac{ds}{f^{1-p}(s)} = T < \infty, \qquad (9.19)$$

όπου $\Lambda \ge 1/(c_0 - a)$.

□

Για να ολοκληρωθεί η απόδειξη, πρέπει να εξετάσουμε την περίπτωση όπου $s = A(t) \in (0, S_0]$. Για το σκοπό αυτό χρειαζόμαστε το επόμενο λήμμα. Πρώτα όμως πρέπει να δώσουμε τον ορισμό. Εισάγουμε την έννοια της ασθενούς λύσης για το πρόβλημα (9.1).

Ορισμός 44. *Η συνάρτηση $u = u(x,t)$ ονομάζεται μία L^1-λυση του προβλήματος (9.1) στο $(0, T]$ για κάποιο $T > 0$, εάν*

$$(a)\ \ u \in C((0,T]\,;\, L^1(\bar\Omega)), \qquad (b)\ \ f(u) \in L^1(\bar\Omega_T),$$

και η u ικανοποιεί:

$$\int_\Omega [u\psi]_\sigma^t dx - \int_\sigma^t \int_\Omega u\psi_t dx d\tau = \int_\sigma^t \int_\Omega (u\Delta\psi + \lambda\psi F(u)) dx d\tau, \qquad (9.20)$$

όπου $F(u) = f(u)/(\int_\Omega f(u)dx)^p$ και για κάθε $\psi = \psi(x,t) \in C^2(\bar\Omega_T)$ με συνοριακές συνθήκες $\frac{\partial\psi}{\partial n} + \beta(x)\psi = 0,\ x \in \partial\Omega$ και $0 \le \sigma < t \le T$.

Λήμμα 45. *Έστω $s = A(t) \in (0, S_0],\ \ t \ge 0$, τότε η λύση $u(x,t)$ είτε εκρήγνυται σε πεπερασμένο χρόνο είτε ξεπερνά το S_0 οπότε πάλι εκρήγνυται.*

Απόδειξη. Η απόδειξη ολοκληρώνεται στα τρία επόμενα βήματα.
Βήμα 1. Λόγω της κυρτότητας του Ω και χρησιμοποιώντας το θεώρημα των παράλληλα μετακινούμενων επιπέδων στο πρόβλημα (9.1), λαμβάνουμε:

$$\left(\int_\Omega u dx\right)^p \le \left(\frac{(k+1)}{m}\right)^p \left(\int_\Omega \phi^* u dx\right)^p \le c_0^{-p} S_0^p. \qquad (9.21)$$

Ομοίως έχουμε (βλ. 9.14):

$$\left(\int_\Omega f(u)dx\right)^p \leq \left(\frac{(k+1)}{m}\right)^p \left(\int_\Omega \phi^* f(u)dx\right)^p. \tag{9.22}$$

Από το πρόβλημα (9.1), για $\lambda > \lambda^*$, πολλαπλασιάζοντας με ϕ^* και ολοκληρώνοντας στο Ω, παίρνουμε,

$$A'(t) = \int_\Omega u\Delta\phi^* + \lambda \int_\Omega \phi^* F(u)dx,$$

ή ολοκληρώνοντας πάλι στο $(0,t)$ έχουμε,

$$S_0 \geq A(t) - A(0) \geq -c_3 S_0 t + \lambda \int_0^t (\int_\Omega \phi^* F(u)dx)d\tau, \text{ όπου } c_3 = \rho^* f'(M^*).$$

Από την τελευταία σχέση και χρησιμοποιώντας παράλληλα επίπεδα, βλέπε (9.13), λαμβάνουμε:

$$\left(\int_0^t \int_\Omega f(u)dxd\tau\right)^p \leq \left(\frac{(k+1)}{m}\right)^p \left(\int_0^t \int_\Omega \phi^* f(u)dxd\tau\right)^p \leq \frac{c_0^{-p}}{\lambda}(1+c_3 t)S_0. \tag{9.23}$$

Από τη σχέση (9.20) και τις εκτιμήσεις (9.21), (9.23), παίρνουμε ότι u είναι μία ασθενής λύση για το πρόβλημα (9.1), με την έννοια του Ορισμού 1.

Βήμα 2. Έστω ότι η $u(x,t)$ είναι μία ολική χρονικά λύση, κλασσική ή ασθενής· Σε αντίθετη περίπτωση θα είχαμε έκρηξη. Υπάρχουν δύο περιπτώσεις: (ι). u ομοιόμορφα φραγμένη, (ιι). u μη φραγμένη. Η περίπτωση (ιι) σημαίνει ότι:

$$\limsup_{t\to\infty} ||u(\cdot,t)|| = \infty; \ \liminf_{t\to\infty} ||u(\cdot,t)|| < N^* < \infty, \text{ ή } \exists (t_m), \ t_m \to \infty, \ u(x,t_m) < N^*,$$

όπου N^* μία σταθερά. Και στις δύο περιπτώσεις (ι) και (ιι), υπάρχει μία ακολουθία t_n (t_n είναι υπακολουθία της t_m στην περίπτωση (ιι)), τέτοια ώστε $u(x,t_n) < N^*$, $u(x,t_n) \to w(x)$ σημειακά και $\int_\Omega u(x,t_n)dx < N^*|\Omega|$. Εφαρμόζοντας τώρα το Θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue, παίρνουμε ότι $\int_\Omega u(x,t_n)dx \to \int_\Omega w(x)dx$. Επιπλέον, $\int_\Omega f(u(x,t_n))dx \to \int_\Omega f(w(x))dx$, επειδή η f είναι αύξουσα.

Βήμα 3. Λογω του ότι η $\psi(x,t)$ μπορεί να επιλεχθεί αυθαίρετα, επιλέγουμε $\psi(x,t) = \varphi(t)\xi(x)$ τέτοια ώστε: $0 \leq \xi(x) \in C^2(\bar{\Omega})$ με $\frac{\partial \xi}{\partial n} + \beta\xi = 0, \ x \in \partial\Omega$. Με τέτοια ψ στην ασθενή μορφή (9.20) και πολλαπλασιάζοντας με $1/t$, παίρνουμε:

$$\frac{1}{t}\int_0^t\int_\Omega u(x,\tau)\varphi'(\tau)\xi(x)dxd\tau+\frac{1}{t}\int_0^t\int_\Omega\left[u\Delta\xi+\lambda F(u)\xi\right]\varphi(\tau)dxd\tau$$
$$=\frac{1}{t}\int_\Omega[u(x,\tau)\varphi(\tau)]_0^t\xi(x)dx. \tag{9.24}$$

Αντικαθιστώντας το t με t_n, λαμβάνοντας υπόψη τις εκτιμήσεις (9.21), (9.23) και το όριο $t_n\to\infty$, συνάγουμε:

$$\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n}\int_\Omega u\varphi'(\tau)\xi(x)dxd\tau\leq\frac{1}{t_n}\|\xi\|\;\|u(\cdot,t_n)\|_{L^1(\Omega)}\int_0^{t_n}\varphi'(\tau)d\tau\to 0,\ \text{ας }t_n\to\infty, \tag{9.25}$$

και

$$\frac{1}{t_n}\int_\Omega[u\varphi(\tau)]_0^{t_n}\xi dx\leq\frac{1}{t_n}\|\xi\|\,\|u(\cdot,t_n)\|_{L^1(\Omega)}\varphi(t_n)\to 0,\ \text{ας }t_n\to\infty. \tag{9.26}$$

Επομένως, από τις σχέσεις (9.24), (9.25) και (9.26) έχουμε:

$$\int_\Omega[w\Delta\xi+\lambda F(w)\xi]dx=\int_\Omega\left[w\Delta\xi+\lambda\frac{f(w)}{(\int_\Omega f(w))^p}\xi\right]dx=0,$$

για οποιοδήποτε ξ. Η τελευταία σχέση σημαίνει ότι υπάρχει μία ασθενής λύση w, υπό την παραπάνω έννοια, για $\lambda>\lambda^*$, ή ισοδύναμα για $\rho>\tilde{\rho}$. Πράγματι, εάν $\rho\leq\tilde{\rho}$, τότε w θα είναι μία κλασσική λύση του προβλήματος (9.5) οπότε $\lambda=\rho(\int_\Omega f(w)dx)^p\in(0,\lambda^*)$, το οποίο αποτελεί αντίφαση, καθόσον $\lambda>\lambda^*$. Τότε όμως, είναι γνωστό ότι το τοπικό πρόβλημα (9.5) δεν έχει καμμία λύση, ούτε κλασσική ούτε ασθενή. Αυτό οδηγεί σε αντίφαση καθόσον υποθέσαμε ότι η λύση $u(x,t)$ ήταν ολική ως προς το χρόνο. Επομένως η λύση είναι τοπική χρονικά οπότε και εκρήγνυται σε πεπερασμένο χρόνο.

Εάν το s υπερβεί το S_0 τότε από το Λήμμα 1 συνάγουμε ότι η λύση εκρήγνυται. Αυτό ολοκληρώνει το Λήμμα. □

Λήμμα 46. *Έστω $af^{(1-p)}(s)-c_1s-c_2>0$, για κάθε $s>0$, τότε η λύση $u(x,t)$ εκρήγνυται σε πεπερασμένο χρόνο.*

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το Λήμμα 1 για κάθε $A_0\geq 0$. □

Τα παραπάνω τρία Λήμματα αποδεικνύουν το Θεώρημα.

Συνάγουμε ότι, για την περίπτωση όπου το διάγραμμα του σχήματος 9.1 αντιστοιχεί στο διάγραμμα του σχήματος 9.2(a) ή 9.2(b) και ισχύει η λ υπόθεση, η $A(t)$ εκρήγνυται σε πεπερασμένο χρόνο T και η έκρηξη της $A(t)$ συνεπάγεται την έκρηξη της $u(x,t)$. Επομένως καταλήγουμε στο ότι η $u(x,t)$ εκρήγνυται σε πεπερασμένο χρόνο $t^* \leq T$ δηλαδή $\|u(\cdot,t)\| \to \infty$ καθώς $t \to t^*-$.

Το ενδεχόμενο το διάγραμμα του σχήματος 9.1 να αντιστοιχεί στο διάγραμμα του σχήματος 9.2(c), δεν μπορεί να αληθεύει. Πράγματι, από το σχήμα 9.1 έχουμε:

$$\lambda = \underline{\rho} \left(\int_{\Omega} f(\underline{w}) dx \right)^p = \bar{\rho} \left(\int_{\Omega} f(\bar{w}) dx \right)^p . \tag{9.27}$$

και $\|\bar{w}\| > \|\underline{w}\|$, τότε $\bar{\rho} > \underline{\rho}$ στο σχήμα 9.2(c). Από την άλλη μεριά, πάλι από το σχήμα 9.2(c), παίρνουμε: $\bar{w} > \underline{w}$ (στην πραγματικότητα $\|\bar{w}\| > \|\underline{w}\|$ μας δινει $\bar{w} > \underline{w}$, υπενθυμίζουμε ότι σε κάθε λ αντιστοιχεί μία μοναδική λύση w) και από τη σχέση (9.27) συνεπάγεται ότι $\underline{\rho} > \bar{\rho}$, το οποίο αντίκειται στην προηγούμενη διάταξη μεταξύ των $\rho's$.

9.5 Συμπεράσματα.

Σε αυτήν την εργασία, ο κύριος σκοπός μας είναι να αποδείξουμε την έκρηξη σε πεπερασμένο χρόνο των λύσεων του προβλήματος (9.1) υπό μία παραδοχή για το λ-φάσμα· πραγματικά η λ-υπόθεση ισχύει (βλ. στο τέλος της ενότητας 9.2). Ακριβέστερα, η λύση u εκρήγνυται σε πεπερασμένο χρόνο t^*, για $\lambda > \lambda^*$ και για οποιοδήποτε $u_0(x) \geq 0$. Εδώ, το λ^* είναι το supremum των λ τέτοιο ώστε για $\lambda \leq \lambda^*$ υπάρχουν στάσιμες λύσεις στο μη-τοπικό στάσιμο πρόβλημα.

Αποδεικνύουμε την έκρηξη, συγκρίνοντας τη λύση u με τη λύση μιάς Συνήθους Διαφορικής Εξίσωσης, για την οποία η λύση της εκρήγνυται, βλ. ([12], π. 54). Θεωρήσαμε ότι $u_0(x) \geq 0$ αλλά τα παραπάνω συμπεράσματα μπορούν εύκολα να επεκταθούν και για $u_0(x) \in \mathbb{R}$, βλ. [90].

Επίσης, για λόγους πληρότητας, υπενθυμίσαμε κάποια αποτελέσματα έκρηξης για αρκούντως μεγάλες τιμές της παραμέτρου λ, ($\lambda > \lambda_0$ για κάποιο λ_0 , βλ. [81]) χωρίς να θέτουμε κανένα περιορισμό για το φάσμα των λ και χωρίς να καθορίσουμε άνω τιμή για το λ, δηλαδή ένα λ^*. Στην πραγματικότητα, τα αποτελέσματα του κεφαλαίου αυτού καλύπτουν το κενό μεταξύ του λ^* και του λ_0, $\lambda^* < \lambda_0$.

Επίσης, αναπτύξαμε εν συντομία, την τοπική ύπαρξη και μοναδικότητα των λύσεων του προβλήματος (9.1) χρησιμοποιώντας διάφορες μεθόδους. Τέλος, συμπεράναμε ότι οι λύσεις παύουν να υπάρχουν λόγω έκρηξης.

Μια ενδιαφέρουσα ερώτηση είναι να δοθεί μια απάντηση για τη δομή του συνόλου στα σημεία του οποίου έχουμε έκρηξη. Έχει αποδειχθεί στο [16] ότι στην περίπτωση της ακτινικής συμμετρίας, για $f(s) = e^s$ και $N = 1, 2$, η έκρηξη λαμβάνει χώρα μόνο στην αρχή $r = 0$. Εικάζουμε ότι το ίδιο μπορεί να αποδειχθεί για γενικότερες συναρτήσεις και μεγαλύτερες διαστάσεις. Επιπλέον, εάν το Ω είναι κυρτό, είναι δυνατόν να αποδειχθεί, ακολουθώντας μία προσέγγιση των Friedman-McLeod (βλ.[48]), ότι το σύνολο της έκρηξης (δηλαδή το σύνολο που περιλαμβάνει όλα τα σημεία όπου έχουμε έκρηξη) κείται σε ένα συμπαγές υποσύνολο του Ω.

Η περίπτωση όπου $p > 1$ είναι επίσης ένα ενδιαφέρον πρόβλημα προς εξέταση και μπορεί να αποτελέσει το αντικείμενο μιάς μελλοντικής εργασίας. Τελειώνοντας, η περίπτωση $p = 1$ παραμένει ένα ανοικτό και δύσκολο πρόβλημα.

Κεφάλαιο 10

Έκρηξη των λύσεων του μη τοπικού προβλήματος Διήθησης όταν $\lambda > \lambda^*$.

Στο κεφάλαιο αυτό θα εξετάσουμε το μη τοπικό πρόβλημα Διήθησης (περίπτωση μη γραμμικής Διάχυσης), πάλι αναφορικά με την έκρηξη της λύσης σε πεπερασμένο χρόνο για $\lambda > \lambda^*$, *υπό κατάλληλες αρχικές συνθήκες* όχι ταυτοτικά μηδέν, όταν $0 < p < 1$. Το πρόβλημά μας είναι, θεωρώντας συνοριακές συνθήκες Dirichlet:

$$u_t = \Delta K(u) + \lambda \frac{f(u)}{\left(\int_\Omega f(u)dx\right)^p}, \quad 0 < p < 1, \tag{10.1}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \geq 0, \quad x \in \Omega,$$

$$u(x,t) = 0, \quad x \in \vartheta\Omega, \quad t \in (0,T),$$

με τις εξής παραδοχές για τις συναρτήσεις f και K:

$$f(s) \text{ θετική, αύξουσα, κυρτή, με } f(0) > 0, \ \int_b^\infty \frac{ds}{f^{1-p}(s)} < \infty, \ b > 0, \tag{10.2}$$

$$K(s) \text{ θετική, αύξουσα, κυρτή, με } K(0) = 0 \text{ και } \int_c^\infty \frac{K'(s)}{f^{1-p}(s)} < \infty \tag{10.3}$$

Ως συνήθως θεωρούμε ότι το χωρίο Ω είναι κυρτό. Επίσης, όπως και στο προηγούμενο κεφάλαιο, η συνθήκη που θέσαμε $f(0) > 0$ εξασφαλίζει ότι η λύση μας θα γίνει αμέσως θετική σε όλο το Ω και επομένως θα είναι κλασσική. Η επιλογή αυτή έγινε διότι μας ενδιαφέρει περισσότερο η μέθοδος που θα ακολουθήσουμε για την απόδειξη της έκρηξης και όχι τόσο η μελέτη του προβλήματος σε πολύ ασθενή μορφή. Το κυριότερο σημείο δυσκολίας είναι η μη τοπικότητα στον όρο πηγή και η ύπαρξη της μη γραμμικής συνάρτησης $K(u)$.

Το πρόβλημα αυτό μπορεί να θεωρηθεί ως μία γενίκευση του προβλήματος (9.1) του Κεφαλαίου 9.

Στην περίπτωσή μας το αντίστοιχο μη τοπικό στάσιμο πρόβλημα του (10.1) είναι:

$$\Delta K(w(x)) + \frac{\lambda f(w(x))}{\left(\int_\Omega f(w(x))dx\right)^p} = 0, \quad x \in \Omega, \quad w(x) = 0, \ x \in \partial\Omega, \tag{10.4}$$

ενώ το αντίστοιχο τοπικό είναι:

$$\Delta\, K(w(x)) + \rho f(w(x)) = 0, \ x \in \Omega, \quad w(x) = 0, \ x \in \partial\Omega, \tag{10.5}$$

με $\rho = \lambda / \left(\int_\Omega f(w)dx\right)^p$.

Όπως και στην ενότητα 9.2, υποθέτουμε ότι το μη τοπικό στάσιμο πρόβλημα έχει διάγραμμα διακλάδωσης όπως στο σχήμα 9.1, δηλαδή ισχύει η λ -υπόθεση. Ομοίως θεωρούμε ότι οι μη τοπικές λύσεις του σχήματος 9.1 αντιστοιχούν στις τοπικές λύσεις του σχήματος 9.2(a) ή 9.2(b), αλλά όχι του σχήματος 9.2(c). Όπως έχουμε τονίσει, η υπόθεση αυτή αληθεύει για ορισμένες ειδικές περιπτώσεις (μικρές διαστάσεις, ακτινική συμμετρία, κλπ.), βλ. [15].

Με τρόπο παρόμοιο με αυτόν του κεφαλαιου 9, αποδεικνύεται ότι ισχύει η πρόταση 47, δηλαδή:

Πρόταση 47. *Έστω ότι ικανοποιείται η υπόθεση (H) για το $\lambda-$ φάσμα. Τότε το σημείο αναστροφής B του σχήματος 9.1 αντιστοιχεί στο B^* του σχήματος 9.2(a) ή 9.2(b) και η κρίσιμη τιμή λ^* αντιστοιχεί στο ρ^* , το οποίο με τη σειρά του αντιστοιχεί στην πρωτεύουσα ιδιοτιμή $\nu > 0$ του προβλήματος (10.6).*

Είναι γνωστό ότι το αντίστοιχο γραμμικοποιημένο πρόβλημα του τοπικού στάσιμου προβλήματος (10.5), είναι:

$$\Delta(K'(w^*)\phi^*) + \rho^* f'(w^*)\phi^* = \nu^*\phi^*, \ \ x \in \Omega \tag{10.6}$$

με $\phi^* > 0$ και $\nu^* > 0$.

Έχουμε επίσης: $\rho^* \left(\int_\Omega f(w^*)dx\right)^p = \lambda^*$ και $\rho^* = \lambda^*/\left(\int_\Omega f(w^*)dx\right)^p = c\lambda^*$ όπου $c = 1/\left(\int_\Omega f(w^*)dx\right)^p$. Πρέπει να τονίσουμε ότι η τιμή λ^* είναι η τετμημένη του σημείου αναστροφής $(\lambda^*, \|w^*(x)\|)$ του μη τοπικού διαγράμματος διακλάδωσης στο σχήμα 9.1.

Στην ενότητα 10.1 του κεφαλαίου αυτού, γίνεται μια προσπαθεια για να αποδείξουμε ότι το αντίστοιχο στάσιμο πρόβλημα έχει διάγραμμα διακλάδωσης με φραγμένο φάσμα.

Τώρα μπορούμε να διατυπώσουμε το θεώρημα:

Θεώρημα 48. *Έστω Ω φραγμένο κυρτό χωρίο του $\mathbb{R}^N$ και ότι ικανοποιείται η υπόθεση (H) για το $\lambda-$φάσμα. Τότε η λύση $u(x,t)$ του προβλήματος (10.1) με συνοριακές συνθήκες Dirichlet (εύκολα μπορεί να επεκταθεί και συνθήκες Robin) και $\int_\Omega \phi^*(x)u(x,t_0)dx \geq \tau,\ \ t_0 \geq 0$, με $u_0 \in L^2(\Omega)$, εκρήγνυται σε πεπερασμένο χρόνο για κάθε $\lambda > \lambda^*$, όπου τ είναι λύση (μοναδική) της εξίσωσης $bf^{(1-p)}(s) - c_9 = 0$, εάν βεβαίως υπάρχει λύση, για κάποιες σταθερές b, c_9. Εάν η εξίσωση δεν έχει θετική, πραγματική λύση, που ισοδυναμεί με $f^{(1-p)}(0) > c_9/b$, τότε έχουμε έκρηξη για οποιεσδήποτε $u_0(x) \geq 0$.*

Απόδειξη.
Θέτουμε $u = v+w^*$ και η εξίσωση $u_t - \Delta K(u) = \lambda F(u)$, όπου $F(u) := f(u)/(\int_\Omega f(u)dx)^p$ και $c = 1/(\int_\Omega f(w^*)dx)^p$, γίνεται:

$$v_t = u_t = \Delta K(u) + \lambda F(u) = \Delta K(v+w^*) + \Delta K(w^*) - \Delta K(w^*) + \lambda F(u)$$

$$= \Delta K(v+w^*) - \Delta K(w^*) - \rho^* f(w^*) + \lambda F(u)$$

$$= \Delta\left(K(v+w^*) - K(w^*)\right) - \rho^* f(w^*) + \lambda F(u)$$

Όμως $K(w^*+v) - K(w^*) = K'(\xi(x,t))v(x,t)$, με $\xi(x,t)$ μεταξύ w^* και w^*+v ή w^*+v και w^*, ανάλογα με το πρόσημο της v. Άρα:

$$v_t = u_t = \Delta\left(K'(\xi)v\right) - \rho^* f(w^*) + \lambda F(u)$$

$$= \Delta\left(K'(\xi)v\right) - \lambda^* F(w^*) + \lambda F(u) + \lambda^* F(u) - \lambda^* F(u)$$

$$= \Delta\left(K'(\xi)v\right) + (\lambda - \lambda^*)F(u) + \lambda^*\left(F(u) - F(w^*)\right). \tag{10.7}$$

Πολλαπλασιάζουμε τη σχέση (10.7) με $K^{'}(w^*)\phi^*$, όπου ϕ^* η πρωτεύουσα ιδιοσυνάρτηση του γραμμικοποιημένου προβλήματος (10.6), ολοκληρώνουμε στο Ω, και παίρνουμε:

$$
\begin{aligned}
J(t) &= \int_\Omega K^{'}(w^*)\phi^* u_t dx = \int_\Omega K^{'}(w^*)\phi^* v_t dx = \qquad (10.8)\\
&= \int_\Omega K^{'}(w^*)\phi^* \Delta\left(K^{'}(\xi)v\right) dx + (\lambda - \lambda^*)\int_\Omega K^{'}(w^*)\phi^* F(u) dx +\\
&\qquad + \lambda^* \int_\Omega K^{'}(w^*)\phi^* \left(F(u) - F(w^*)\right) dx\\
&= \int_\Omega v K^{'}(\xi)\Delta(K^{'}(w^*)\phi^*) dx + (\lambda - \lambda^*)\int_\Omega K^{'}(w^*)\phi^* F(u) dx +\\
&\qquad + \lambda^* \int_\Omega K^{'}(w^*)\phi^* \left(F(u) - F(w^*)\right) dx,
\end{aligned}
$$

όπου εφαρμόσαμε ταυτότητα Green. Λόγω της σχέσης (10.6), θα έχουμε:

$$
\begin{aligned}
J(t) &= \int_\Omega v K^{'}(\xi)(\nu^*\phi^* - \rho^* f^{'}(w^*)\phi^*) dx + (\lambda - \lambda^*)\int_\Omega K^{'}(w^*)\phi^* F(u) dx +\\
&\qquad + \lambda^* \int_\Omega K^{'}(w^*)\phi^* \left(F(u) - F(w^*)\right) dx\\
&> \nu^* \int_\Omega v\phi^* K^{'}(\xi) dx - \rho^* \int_\Omega f^{'}(w^*)\phi^* K^{'}(\xi) v dx + \lambda^* \int_\Omega K^{'}(w^*)\phi^* \left(F(u) - F(w^*)\right) dx\\
&= \nu^* \int_\Omega u\phi^* K^{'}(\xi) dx - \nu^* \int_\Omega w^*\phi^* K^{'}(\xi) dx - \rho^* \int_\Omega f^{'}(w^*)\phi^* K^{'}(\xi) v dx +\\
&\qquad + \lambda^* \int_\Omega K^{'}(w^*)\phi^* \left(F(u) - F(w^*)\right) dx\\
&\geq -\nu^* \int_\Omega \phi^* w^* K^{'}(\xi) dx - \rho^* \int_\Omega v f^{'}(w^*)\phi^* K^{'}(\xi) dx + \lambda^* \int_\Omega K^{'}(w^*)\phi^* \left(F(u) - F(w^*)\right) dx\\
&= \lambda^* \int_\Omega K^{'}(w^*)\phi^* \left(F(u) - cf(w^*)\right) dx - \nu^* \int_\Omega \phi^* w^* K^{'}(\xi) dx - \rho^* \int_\Omega v f^{'}(w^*)\phi^* K^{'}(\xi) dx\\
&> \int_\Omega \left(\lambda^* K^{'}(w^*)\phi^* F(u) - \lambda^* K^{'}(w^*)\phi^* c f(w^*) - \lambda^*\phi^* K^{'}(\xi) c v f^{'}(w^*) - \nu^* K^{'}(\xi)\phi^* w^*\right) dx\\
&= \lambda^* \int_\Omega \phi^* \left(K^{'}(w^*)F(u) - K^{'}(w^*) c f(w^*) - K^{'}(\xi) c v f^{'}(w^*) - \frac{\nu^*}{\lambda^*} K^{'}(\xi) w^*\right) dx\\
&= \lambda^* \int_\Omega \left(K^{'}(w^*)\frac{\phi^* f(u)}{(\int_\Omega f(u)dx)^p} - \phi^*\left(K^{'}(w^*) c f(w^*) + K^{'}(\xi) c v f^{'}(w^*) + \frac{\nu^*}{\lambda^*} K^{'}(\xi) w^*\right)\right) dx
\end{aligned}
$$

Εφαρμόζουμε το θεώρημα των παράλληλα μετακινούμενων επιπέδων, καθόσον το Ω είναι κυρτό και $f^{'}(s) > 0$. Δηλαδή υπάρχει ένα υποσύνολο Ω_0, $\bar{\Omega}_0 \subset \Omega$ και ένας θετικός αριθμός k τέτοια ώστε:

$$\int_{\Omega} f(u)\,dx \leq (k+1) \int_{\overline{\Omega}_0} f(u)\,dx \leq (k+1) \int_{\overline{\Omega}_0} \frac{K^{'}(w^*)\phi^*}{K^{'}(m^*)\varphi^*} f(u)\,dx =$$

$$= \frac{(k+1)}{K^{'}(m^*)\varphi^*} \int_{\overline{\Omega}_0} K^{'}(w^*)\phi^* f(u)\,dx$$

$$\Rightarrow \left(\int_{\Omega} f(u)\,dx\right)^p \leq \frac{(k+1)^p}{(K^{'}(m^*)\varphi^*)^p} \left(\int_{\Omega} K^{'}(w^*)\phi^* f(u)\,dx\right)^p, \tag{10.9}$$

όπου $m^* = \min\limits_{x\in\bar{\Omega}_0} w^* > 0$ και $\varphi^* = \min\limits_{x\in\bar{\Omega}_0} \phi^* > 0$. Επομένως,

$$J(t) = \lambda^* \frac{(K^{'}(m^*)\varphi^*)^p}{(k+1)^p} \int_{\Omega} \frac{K^{'}(w^*)\phi^* f(u)}{\left(\int_{\Omega} K^{'}(w^*)\phi^* f(u)\,dx\right)^p} dx -$$

$$-\lambda^* \int_{\Omega} \phi^* \left(K^{'}(w^*)cf(w^*) + K^{'}(\xi)cvf^{'}(w^*) + \frac{\nu^*}{\lambda^*} K^{'}(\xi)w^*\right) dx$$

$$= \lambda^* \frac{(K^{'}(m^*)\varphi^*)^p}{(k+1)^p} \left(\int_{\Omega} K^{'}(w^*)\phi^* f(u)\,dx\right)^{1-p} -$$

$$-\lambda^* \int_{\Omega} \phi^* \left(K^{'}(w^*)cf(w^*) + K^{'}(\xi)cvf^{'}(w^*) + \frac{\nu^*}{\lambda^*} K^{'}(\xi)w^*\right) dx$$

$$\left(\text{όπου } \ \lambda^* \frac{(K^{'}(m^*)\varphi^*)^p}{(k+1)^p} = c_1 \ \right)$$

$$= c_1 \left(\int_{\Omega} K^{'}(w^*)\phi^* f(u)\,dx\right)^{1-p} -$$

$$-\lambda^* \int_{\Omega} \phi^* \left(K^{'}(w^*)cf(w^*) + cK^{'}(\xi)f^{'}(w^*)u - cK^{'}(\xi)f^{'}(w^*)w^* + \frac{\nu^*}{\lambda^*} K^{'}(\xi)w^*\right) dx$$

$$\geq c_1 \left(\int_{\Omega} K^{'}(w^*)\phi^* f(u)\,dx\right)^{1-p} -$$

$$-\lambda^* \int_{\Omega} \phi^* \left(K^{'}(M^*)cf(M^*) + cK^{'}(\xi)f^{'}(w^*)u - cK^{'}(\xi)f^{'}(w^*)w^* + \frac{\nu^*}{\lambda^*} K^{'}(\xi)w^*\right) dx$$

$$\left(\text{όπου } M^* = \max_{x\in\Omega} w^*(x). \quad \text{Θέτουμε } \ K^{'}(M^*)cf(M^*) = c_2\right)$$

$$\geq c_1\left(\int_\Omega K^{'}(w^*)\phi^* f(u)\,dx\right)^{1-p} - \lambda^*\int_\Omega \phi^*\left(c_2 + cK^{'}(\xi)f^{'}(M^*)u + \frac{\nu^*}{\lambda^*}K^{'}(\xi)M^*\right)dx$$

$$= c_1\left(\int_\Omega K^{'}(w^*)\phi^* f(u)\,dx\right)^{1-p} -$$

$$-\int_\Omega c_2\lambda^*\phi^* dx - \int_\Omega c\lambda^* K^{'}(\xi)f^{'}(M^*)\phi^* u dx - \int_\Omega \nu^* K^{'}(\xi)\phi^* M^* dx$$

$$\geq c_1\left(\int_\Omega K^{'}(w^*)\phi^* f(u)\,dx\right)^{1-p} -$$

$$-\int_\Omega c_2\lambda^*\Phi^* dx - \int_\Omega c\lambda^* K^{'}(\xi)f^{'}(M^*)\Phi^* u dx - \int_\Omega \nu^* K^{'}(\xi)\Phi^* M^* dx$$

(όπου θέσαμε $\Phi^* = \max_{x\in\Omega}\phi^*(x)$)

$$= c_1\left(\int_\Omega K^{'}(w^*)\phi^* f(u)\,dx\right)^{1-p} - c_2\lambda^*\Phi^*|\Omega| - c\lambda^* f^{'}(M^*)\Phi^*\int_\Omega K^{'}(\xi)u dx - \nu^*\Phi^* M^*\int_\Omega K^{'}(\xi)dx$$

(όπου θέσαμε $c_2\lambda^*\Phi^*|\Omega| = c_3$) $c\lambda^* f^{'}(M^*)\Phi^* = c_4, \quad \nu^*\Phi^* M^* = c_5$

$$= c_1\left(\int_\Omega K^{'}(w^*)\phi^* f(u)\,dx\right)^{1-p} - c_4\int_\Omega K^{'}(\xi)u dx - c_5\int_\Omega K^{'}(\xi)dx - c_3.$$

Τελικά καταλήγουμε στη σχέση:

$$J(t) > c_1\left(\int_\Omega K^{'}(w^*)\phi^* f(u)\,dx\right)^{1-p} - c_4\int_\Omega K^{'}(\xi)u dx - c_5\int_\Omega K^{'}(\xi)dx - c_3 \quad (10.10)$$

Εάν $u \leq w^*$ τότε $v \leq 0$ οπότε $\xi(x,t) \leq w^*(x) \Rightarrow \xi(x,t) \leq M^*$ και η σχέση (10.10) γίνεται:

$$J(t) > c_1\left(\int_\Omega K^{'}(w^*)\phi^* f(u)\,dx\right)^{1-p} - c_4\int_\Omega K^{'}(M^*)u dx - c_5\int_\Omega K^{'}(M^*)dx - c_3$$

$$= c_1\left(\int_\Omega K^{'}(w^*)\phi^* f(u)\,dx\right)^{1-p} - c_4 K^{'}(M^*)\int_\Omega u dx - c_5 K^{'}(M^*)|\Omega| - c_3.$$

Θέτουμε $c_4 K^{'}(M^*) = c_6, \quad c_5 K^{'}(M^*)|\Omega| + c_3 = c_7$ και έχουμε:

$$J(t) > c_1\left(\int_\Omega K^{'}(w^*)\phi^* f(u)\,dx\right)^{1-p} - c_6\int_\Omega u dx - c_7$$

Εάν $w^* < u \Rightarrow 0 < v \Rightarrow w^* < \xi < w^* + v = u$ και η σχέση (10.10) γίνεται:

$$J(t) > c_1 \left(\int_\Omega K^{'}(w^*)\phi^* f(u)\, dx \right)^{1-p} - c_4 \int_\Omega K^{'}(u) u dx - c_5 \int_\Omega K^{'}(u) dx - c_3$$

$$= c_1 \left(\int_\Omega K^{'}(w^*)\phi^* f(u)\, dx \right)^{1-p} - \int_\Omega \Big(c_4 K^{'}(u) u + c_5 K^{'}(u) \Big) dx - c_3$$

$$= c_1 \left(\int_\Omega K^{'}(w^*)\phi^* f(u)\, dx \right)^{1-p} - \int_\Omega K^{'}(u)\, (c_4 u + c_5) dx - c_3.$$

Από τη σχέση (10.3) έπεται ότι για οποιαδήποτε c_4, c_5 και a με $0 < a < 1$, θα υπάρχει κάποιο S_0 πεπερασμένο, ώστε για $s > S_0$ να ισχύει: $\frac{af^{1-p}(s)}{K^{'}(s)} > c_4 s + c_5$ και επομένως $K^{'}(s)(c_4 s + c_5) < af^{1-p}(s)$.

Έστω (προς το γενικότερο) $w^* < S_0$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις για την u.

Εάν $w^* < u \le S_0$ τότε:

$$J(t) > c_1 \left(\int_\Omega K^{'}(w^*)\phi^* f(u)\, dx \right)^{1-p} - \int_\Omega K^{'}(S_0)\, (c_4 S_0 + c_5) dx - c_3$$

$$> c_1 \left(\int_\Omega K^{'}(w^*)\phi^* f(u)\, dx \right)^{1-p} - K^{'}(S_0)\, (c_4 S_0 + c_5)\, |\Omega| - c_3$$

$$= c_1 \left(\int_\Omega K^{'}(w^*)\phi^* f(u)\, dx \right)^{1-p} - c_8,$$

όπου θέσαμε $K^{'}(S_0)\, (c_4 S_0 + c_5)\, |\Omega| + c_3 = c_8$.

Εάν $S_0 < u$ τότε:

$$J(t) > c_1 \left(\int_\Omega K^{'}(w^*)\phi^* f(u)\, dx \right)^{1-p} - \int_\Omega a f^{1-p}(u) dx - c_3.$$

Τελικά θα έχουμε:

$$\int_\Omega K^{'}(w^*)\phi^* u_t dx > c_1 \left(\int_\Omega K^{'}(w^*)\phi^* f(u)\, dx \right)^{1-p} - c_4 \int_\Omega K^{'}(\xi) u dx - c_5 \int_\Omega K^{'}(\xi) dx - c_3 =$$

$$= c_1 \left(\int\limits_{\Omega: u \le w^*} K^{'}(w^*)\phi^* f(u) dx \right)^{1-p} - c_4 \int\limits_{\Omega: u \le w^*} K^{'}(\xi) u dx - c_5 \int\limits_{\Omega: u \le w^*} K^{'}(\xi) dx - c_3 +$$

$$+c_1\left(\int\limits_{\Omega:w^*<u\leq S_0} K^{'}(w^*)\phi^* f(u)dx\right)^{1-p} - c_4\int\limits_{\Omega:w^*<u\leq S_0} K^{'}(\xi)udx - c_5\int\limits_{\Omega:w^*<u\leq S_0} K^{'}(\xi)dx - c_3 +$$

$$+c_1\left(\int\limits_{\Omega:S_0<u} K^{'}(w^*)\phi^* f(u)dx\right)^{1-p} - c_4\int\limits_{\Omega:S_0<u} K^{'}(\xi)udx - c_5\int\limits_{\Omega:S_0<u} K^{'}(\xi)dx - c_3 >$$

$$> c_1\left(\int_{\Omega:u\leq w^*} K^{'}(w^*)\phi^* f(u)\,dx\right)^{1-p} - c_6\int_{\Omega:u\leq w^*} udx - c_7 +$$

$$+c_1\left(\int_{\Omega:w^*<u\leq S_0} K^{'}(w^*)\phi^* f(u)\,dx\right)^{1-p} - c_8 +$$

$$+c_1\left(\int_{\Omega:S_0<u} K^{'}(w^*)\phi^* f(u)\,dx\right)^{1-p} - \int_{\Omega:S_0<u} af^{1-p}(u)dx - c_3$$

$$> c_1\left(\int_{\Omega:u\leq w^*} K^{'}(w^*)\phi^* f(u)\,dx\right)^{1-p} - c_6 M^* |\Omega| - c_7 +$$

$$+c_1\left(\int_{\Omega:w^*<u\leq S_0} K^{'}(w^*)\phi^* f(u)\,dx\right)^{1-p} - c_8 +$$

$$+c_1\left(\int_{\Omega:S_0<u} K^{'}(w^*)\phi^* f(u)\,dx\right)^{1-p} - \int_{\Omega:S_0<u} af^{1-p}(u)dx - c_3$$

$$= c_1\left(\int_{\Omega} K^{'}(w^*)\phi^* f(u)\,dx\right)^{1-p} - \int_{\Omega:S_0<u} af^{1-p}(u)dx - c_3 - c_6 M^* |\Omega| - c_7 - c_8$$

(θέτουμε $c_3 + c_6 M^* |\Omega| + c_7 + c_8 = c_9$)

$$= c_1\left(\int_{\Omega} K^{'}(w^*)\phi^* f(u)\,dx\right)^{1-p} - \int_{\Omega:S_0<u} af^{1-p}(u)dx - c_9$$

$$= c_1\left(\int_{\Omega} K^{'}(w^*)\phi^* f(u)\,dx\right)^{1-p} - \left(\int_{\Omega} af^{1-p}(u)dx - \int_{\Omega:u\leq S_0} af^{1-p}(u)dx\right) - c_9$$

$$= c_1\left(\int_{\Omega} K^{'}(w^*)\phi^* f(u)\,dx\right)^{1-p} - \int_{\Omega} af^{1-p}(u)dx + \int_{\Omega:u\leq S_0} af^{1-p}(u)dx - c_9$$

$$> c_1\left(\int_{\Omega} K^{'}(w^*)\phi^* f(u)\,dx\right)^{1-p} - a\int_{\Omega} f^{1-p}(u)dx - c_9$$

(ισχύει $\int_\Omega f^{1-p}(u)dx \le \left(\int_\Omega f(u)dx\right)^{1-p}$ ανισότητα Jensen για κοίλες συναρτήσεις, αφού η συνάρτηση $(.)^{1-p}$, για $0<p<1$, είναι κοίλη)

$$> c_1 \left(\int_\Omega K^{'}(w^*)\phi^* f(u)\,dx \right)^{1-p} - a\left(\int_\Omega f(u)dx\right)^{1-p} - c_9$$

$$> c_1 \left(\int_\Omega K^{'}(w^*)\phi^* f(u)\,dx \right)^{1-p} - a\left(\frac{k+1}{K^{'}(m^*)\varphi^*}\int_\Omega K^{'}(w^*)\phi^* f(u)\,dx\right)^{1-p} - c_9$$

$$= c_1 \left(\int_\Omega K^{'}(w^*)\phi^* f(u)\,dx \right)^{1-p} - a\frac{(k+1)^{1-p}}{(K^{'}(m^*)\varphi^*)^{1-p}}\left(\int_\Omega K^{'}(w^*)\phi^* f(u)\,dx\right)^{1-p} - c_9$$

$$= \left(c_1 - a\frac{(k+1)^{1-p}}{(K^{'}(m^*)\varphi^*)^{1-p}}\right)\left(\int_\Omega K^{'}(w^*)\phi^* f(u)\,dx\right)^{1-p} - c_9. \qquad (10.11)$$

$$\text{Θέτουμε } \; c_1 = \lambda^*\frac{(K^{'}(m^*)\varphi^*)^p}{(k+1)^p}.$$

Η σταθερά $a \in (0,1)$ είναι στην επιλογή μας. Επιλέγουμε ένα τέτοιο a ώστε να ισχύει:

$$c_1 - a\frac{(k+1)^{1-p}}{(K^{'}(m^*)\varphi^*)^{1-p}} > 0 \Rightarrow \frac{\lambda^*(K^{'}(m^*)\varphi^*)^p}{(k+1)^p} - \frac{a(k+1)^{1-p}}{(K^{'}(m^*)\varphi^*)^{1-p}} =$$

$$= \frac{\lambda^*(K^{'}(m^*)\varphi^*)^p(K^{'}(m^*)\varphi^*)^{1-p} - a(k+1)^p(k+1)^{1-p}}{(k+1)^p(K^{'}(m^*)\varphi^*)^{1-p}} = \frac{\lambda^*K^{'}(m^*)\varphi^* - a(k+1)}{(k+1)^p(K^{'}(m^*)\varphi^*)^{1-p}} > 0$$

$$\Rightarrow \lambda^*K^{'}(m^*)\varphi^* - a(k+1) > 0 \Rightarrow a < \frac{\lambda^*K^{'}(m^*)\varphi^*}{k+1}.$$

Επιλέγουμε $0 < a < \min\left(1\,,\ \frac{\lambda^*K^{'}(m^*)\varphi^*}{k+1}\right)$. Θα έχουμε:

$$\frac{\lambda^*K^{'}(m^*)\varphi^* - a(k+1)}{(k+1)^p(K^{'}(m^*)\varphi^*)^{1-p}} = b > 0.$$

Επομένως η σχέση (10.11) γίνεται:

$$\int_\Omega K^{'}(w^*)\phi^* u_t dx > b\left(\int_\Omega K^{'}(w^*)\phi^* f(u)\,dx\right)^{1-p} - c_9$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\int_\Omega K^{'}(w^*)\phi^* u dx > bf^{1-p}\left(\int_\Omega K^{'}(w^*)\phi^* u\,dx\right) - c_9$$

Θέτουμε $A(t) = \displaystyle\int_\Omega K^{'}(w^*)\phi^* u\,dx$ και λαμβάνουμε τη συνήθη διαφορική ανισότητα:

$$\frac{dA(t)}{dt} > bf^{1-p}\left(A(t)\right) - c_9 \tag{10.12}$$

Εάν $f^{1-p}(0) > c_9/b$ τότε $bf^{1-p}(s) - c_9 > 0$ για κάθε $s > 0$ διότι η $f^{1-p}(s)$ είναι αύξουσα με $f^{1-p}(0) > 0$. Στην περίπτωση αυτή έχουμε έκρηξη της λύσης σε πεπερασμένο χρόνο, για οποιεσδήποτε αρχικές συνθήκες μη αρνητικές.

Εάν υπάρχει ρίζα (μοναδική), έστω η τ τότε, εάν για κάποιο $0 \le t_0 < \infty$, $A(t_0) > \tau$, θα έχουμε έκρηξη της λύσης σε πεπερασμένο χρόνο. Πράγματι, η σχέση (10.12) γίνεται:

$$dt < \frac{dA(t)}{bf^{1-p}\left(A(t)\right) - c_9} \Rightarrow \int_{t_0}^{t} d\tau < \int_{A(t_0)}^{A(t)} \frac{d\tau}{bf^{1-p}(\tau) - c_9} \le \int_{A(t_0)}^{\infty} \frac{d\tau}{bf^{1-p}(\tau) - c_9} =$$

$$= t_1 < \infty \Rightarrow t - t_0 < t_1 \Rightarrow t < t_0 + t_1 = \hat{t} < \infty$$

Ήτοι, καθώς το $t \to \hat{t}$, $\quad A(t) = \int_\Omega K^{'}(w^*)\phi^* u dx \to \infty$.

Ισχύει όμως, $\int_\Omega K^{'}(w^*)\phi^* u dx < K^{'}(M^*)\Phi^* \int_\Omega u dx$, οπότε:

$$\|u\|_{L_1(\Omega)} = \int_\Omega u dx \to \infty, \quad t \to t^* \sim \hat{t} < \infty.$$

Επομένως, έχουμε έκρηξη της L_1- νόρμας της λύσης $u(x,t)$ σε πεπερασμένο χρόνο.

10.1 Άνω φράγμα για το φάσμα του στάσιμου.

Το αντίστοιχο στάσιμο μη τοπικό πρόβλημα είναι:

$$\Delta K(w) + \frac{\lambda f(w)}{\left(\int_\Omega f(w)\, dx\right)^p} = 0 \tag{10.13}$$

Πολλαπλασιάζουμε με την πρωτεύουσα ιδιοσυνάρτηση ϕ της εξίσωσης ιδιοτιμών,

$$\Delta\phi = -\mu\phi$$

και ολοκληρώνουμε στο χωρίο Ω:

$$\int_\Omega \phi \Delta K(w) dx + \frac{\lambda \int_\Omega \phi f(w) dx}{\left(\int_\Omega f(w)\, dx\right)^p} = 0$$

Εφαρμόζουμε ταυτότητα Green:

$$\int_\Omega K(w)\Delta\phi dx + \frac{\lambda\int_\Omega \phi f(w)dx}{\left(\int_\Omega f(w)\,dx\right)^p} = 0 \Rightarrow \mu\int_\Omega K(w)\phi dx = \frac{\lambda\int_\Omega \phi f(w)dx}{\left(\int_\Omega f(w)\,dx\right)^p}. \quad (10.14)$$

Απο το θεώρημα των παράλληλα μετακινούμενων επιπέδων για την $f(s)$, καθόσον το χωρίο Ω είναι κυρτό και η f αύξουσα, υπάρχει $\Omega_0 \subset \Omega$ και $k > 0$ ώστε να έχουμε τελικα:

$$\int_\Omega f(w)\,\phi\,dx \geq \frac{m}{k+1}\int_\Omega f(w)\,dx$$

όπου $m = \min\limits_{x\in\overline{\Omega}_0} \phi(x)\ > 0$.

Άρα η σχέση (10.14) γίνεται:

$$\int_\Omega K(w)\phi dx \geq \frac{\lambda m}{\mu(k+1)}\frac{\int_\Omega f(w)\,dx}{\left(\int_\Omega f(w)\,dx\right)^p} = \frac{\lambda m}{\mu(k+1)}\left(\int_\Omega f(w)\,dx\right)^{1-p}.$$

Από την ανισότητα Jensen για κοίλες συναρτήσεις έχουμε ότι:

$$\int_\Omega f^{1-p}(w)\,dx \leq \left(\int_\Omega f(w)\,dx\right)^{1-p}.$$

Οπότε θα έχουμε:

$$\Phi\int_\Omega K(w)dx \geq \int_\Omega K(w)\phi dx \geq \frac{\lambda m}{\mu(k+1)}\int_\Omega f^{1-p}(w)\,dx,$$

όπου θέσαμε $\Phi = \max\limits_{x\in\Omega}\phi(x)$. Άρα:

$$\int_\Omega f^{1-p}(w)\,dx \leq \frac{\mu\Phi(k+1)}{\lambda m}\int_\Omega K(w)dx.$$

Θέτουμε $\frac{\mu\Phi(k+1)}{m} = c_1$ και η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$\int_\Omega f^{1-p}(w)\,dx \leq \int_\Omega \frac{c_1}{\lambda}K(w)dx. \quad (10.15)$$

Τώρα, η συνάρτηση $K(s)$ είναι και αυτή θετική και αύξουσα. Άρα μπορούμε να εφαρμόσουμε πάλι το θεώρημα των παράλληλα μετακινούμενων επιπέδων και να βρούμε ένα υποσύνολο Ω_1 και μια σταθερά $\gamma > 0$ τέτοια ώστε:

$$\int_\Omega K(w)\,dx \leq (\gamma+1)\int_{\overline{\Omega}_1} K(w)\,dx.$$

Από τη σχέση αυτή και την (10.15) παίρνουμε:

$$\int_{\overline{\Omega}_1} f^{1-p}(w)\,dx \leq \int_{\Omega} f^{1-p}(w)\,dx \leq \int_{\Omega} \frac{c_1}{\lambda} K(w)dx \leq \frac{c_1(\gamma+1)}{\lambda} \int_{\overline{\Omega}_1} K(w)\,dx$$

$$\Rightarrow \int_{\overline{\Omega}_1} f^{1-p}(w)\,dx \leq \frac{c_1(\gamma+1)}{\lambda} \int_{\overline{\Omega}_1} K(w)\,dx. \qquad (10.16)$$

Από τη σχέση (10.3) έπεται ότι θα υπάρχει θετικός αριθμός S_0 ώστε:

$$f^{1-p}(s) > c_2 K(s) \;\text{ για } s \geq S_0, \text{ με } c_2 \text{ θετική σταθερά της επιλογής μας.}$$

Αυτό ισχύει διότι $\frac{f^{1-p}(s)}{K'(s)} > c_2 s \Rightarrow f^{1-p}(s) > c_2 s K'(s)$ για κάποιο $S_0 > 0$. Όμως $\frac{sK'(s)}{K(s)} > 1 \Rightarrow sK'(s) > K(s)$, καθόσον η $K(s)$ είναι κυρτή, θετική, αύξουσα, με $K(0) = 0$ και επομένως θα είναι υπεργραμμική για κάθε $s > 0$. (βλ.[124] σελ.34).

Τώρα, για $s > S_0$ θα ισχύει:

$$\frac{f^{1-p}(s)}{K(s)} > c_2, \;\; s \geq S_0.$$

Για $m_1 \leq s < S_0$, όπου $m_1 = \min_{x\in\bar{\Omega}_1} w(x)$ θα ισχύει:

$$\frac{f^{1-p}(s)}{K(s)} > \frac{f^{1-p}(m_1)}{K(S_0)} = c_3.$$

Επομένως για κάθε $s \geq m_1 = \min_{x\in\bar{\Omega}_1} w(x)$ θα έχουμε:

$$\frac{f^{1-p}(s)}{K(s)} > \min(c_2, c_3) = c_4 \Rightarrow f^{1-p}(s) > c_4 K(s).$$

Η σχέση (10.16) γίνεται:

$$\frac{c_1(\gamma+1)}{\lambda} \int_{\overline{\Omega}_1} K(w)\,dx \geq \int_{\overline{\Omega}_1} f^{1-p}(w)\,dx \geq c_4 \int_{\overline{\Omega}_1} K(w)\,dx$$

$$\Rightarrow \frac{c_1(\gamma+1)}{\lambda} \geq c_4 \Rightarrow \lambda \leq \frac{c_1(\gamma+1)}{c_4} = \frac{c_1(\gamma+1)}{\min\left(c_2, \frac{f^{1-p}(m_1)}{K(S_0)}\right)}$$

και

$$\lambda^* = \sup \lambda \leq \hat{\lambda} = \max_{0<m_1\leq\infty} \left[\frac{c_1(\gamma+1)}{\min\left(c_2, \frac{f^{1-p}(m_1)}{K(S_0)}\right)} \right] < \infty.$$

Το $\hat{\lambda}$ είναι ένα άνω φράγμα για το φάσμα του στάσιμου προβλήματος, αφού δεν εξαρτάται από τις στάσιμες λύσεις $w(x)$, αλλά μόνο από τις συναρτήσεις $f(s)$ και $K(s)$ και το χωρίο Ω. Πράγματι, όσο και να αυξάνονται οι $w(x)$ και επομένως και τα m_1 και τα $f^{1-p}(m_1)$, η παραπάνω σχέση εξαρτάται από το $\min\left(c_2, \frac{f^{1-p}(m_1)}{K(S_0)}\right)$, το οποίο είναι πεπερασμένο και θετικό διότι το c_2 είναι αυστηρά θετικό και πεπερασμένο και το $\frac{f^{1-p}(m_1)}{K(S_0)}$ είναι και αυτό αυστηρά θετικό, αφού το ελάχιστό του είναι $\frac{f^{1-p}(0)}{K(S_0)} > 0$.

Δηλαδή για κάθε $c_2 > 0$ (που θα αντιστοιχεί ένα $S_0 < \infty$), θα έχουμε και ένα άνω φράγμα, ΘΕΤΙΚΟ και ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ. Επομένως, σε κάποιο c_2 θα αντίστοιχεί και το ελάχιστο των άνω φραγμάτων, δηλαδή το λ^*.

Μερικά συμπεράσματα.

Στο κεφάλαιο αυτό εξετάσαμε το μη τοπικό πρόβλημα Διήθησης και αποδείξαμε ότι για $\lambda > \lambda^*$ έχουμε έκρηξη της λύσης σε πεπερασμένο χρόνο για κατάλληλες αρχικές συνθήκες μη αρνητικές και μη ταυτοτικά μηδέν.

Η μελέτη μας αφορούσε την περίπτωση $f(0) > 0$, οπότε ανεξάρτητα του εκφυλισμένου ή όχι του παραβολικού τελεστή, (είτε $K^{'}(0) = 0$ είτε $K^{'}(0) > 0$), η λύση μας θα είναι αμέσως θετική και άρα κλασσική.

Άπό το Κεφάλαιο 7 έχουμε αποδείξει ότι υπάρχουν συναρτήσεις $K(s)$ και $f(s)$ (που πληρούν τις αρχικές τεθείσες συνθήκες), τέτοιες ώστε το διάγραμμα διακλάδωσης του εξεταζομένου προβλήματος να έχει μορφή $\supset$, (φραγμένο και κλειστό φάσμα για την παράμετρο λ).

Η μελέτη της έκρηξης των λύσεων συνδυασμένη με ΟΛΕΣ τις ανωτέρω παραδοχές, αποτελεί πρωτότυπη εργασία.

Μερικά θέματα προς περαιτέρω εξέταση που αναφύονται από το κεφάλαιο αυτό είναι τα εξής:

1) Να θεωρήσουμε την περίπτωση $f(0) = 0$ και $K^{'}(0) = 0$, που σημαίνει ότι θα πρέπει να δουλέψουμε με την πολύ ασθενή μορφή του προβλήματος.

2) Στην ανωτέρω περίπτωση 1), να εξετάσουμε αν μπορούμε να βρούμε σχέσεις μεταξύ των αρχικών συνθηκών, των συναρτήσεων $K(u)$ και $f(u)$ και του χωρίου Ω (μορφή και μέτρο), τέτοιες ώστε να έχουμε έκρηξη της λύσης προτού το επεκτεινόμενο σύνορο του φορέα της λύσης αγγίξει το $\partial\Omega$, δηλαδή ολική έκρηξη (έκρηξη σε συμπαγές υποσύνολο).

3) Το γνωστό πλέον ερώτημα, εάν δηλαδή μπορούμε να αντικαταστήσουμε την απαίτηση να είναι το χωρίο Ω κυρτό με κάποια άλλη λιγότερο γεωμετρικά περιοριστική.

Βιβλιογραφία

[1] N.V.Afanas'eva and A.F.Tedeev, Theorems on the existence and nonexistence of solutions of the Cauchy problem for degenerate parabolic equations with nonlocal source,Ukranian Math. J., Vol. 57, No. 11, (2005), 1687-1711. [1]

[2] N.D.Alikakos, R.Rostamian, Large Time Behavior of Solutions of Neumann Boundary Value Problem for the Porous Medium Equation, Indiana University Mathematics, Vol.30, No.5 (1981).

[3] W.Allegretto and H.Xie, A non-local thermistor problem, Euto. J. Appl. Math. 6 (1995), 83-94.

[4] A.Ambrosetti, H.Brezis and G.Cerami, Combined Effects of Concave and Convex Nonlinearities in Some Elliptic Problems, Journal of Functional Analysis 122, (1994), 519-543.

[5] H.Arango and J.Cossio, Explicit construction, uniqueness, and bifurcation curves of solutions for a nonlinear Dirichlet problem in a ball, Nonlinear Differential Equations, Electron. J. Di. Eqns., Conf. 05,(2000), pp. 1-12.

[6] D.G.Aronson and L.A.Peletier, Large Time Behaviour of Solutions of the Porous Medium Equation in Bounded Domains, journal of differential equations 39 (1981), 378-412.

[7] J.M.Ball, Remarks on blow-up and nonexistence theorems for nonlinear evolution equations, Quart. J. Math. Oxford, (2), 28 (1977), 473-486.

[1] Βασική Βιβλιογραφία

[8] J.M.Ball, Finite time blow-up in nonlinear problems, Nonlinear Evolution Equations (1977), Academic Press, 189-205.

[9] A.Barabanova, The blow-up of solutions of a nonlocal thermistor problem, Appl. Math. Lett. 9, No. 1, (1996), 59-63.

[10] J.W.Bebernes and A.Bressan, Thermal behavior for a confined reactive gas, J. Diff. Eqns. 44 (1982), 118-133.

[11] J.Bebernes, A.Bressan and A.A.Lacey, Total Blow-Up versus Single Point Blow-Up, Journal of Differential Equations 73 (1988), 3-44.

[12] J.W.Bebernes and D.Eberly, *Mathematical Problems from Combustion Theory*, Springer-Verlag, New York, 1989.

[13] J. W. Bebernes and R. Ely, Existence and invariance for parabolic functional equations, *Nonlinear Anal. TMA,* **7** (1983), 1225–1235.

[14] J.W.Bebernes and P.Talaga, Non-local problems modelling shear banding, Comm. Appl. Nonlin. Anal.3 (1996), 79–103.

[15] J.W.Bebernes and A.A.Lacey, Global existence and finite time blow-up for a class of non-local parabolic problems, Adv. Diff. Eqns. 2 (1997), 927-953.

[16] J.W.Bebernes, C.Li and P.Talaga, Single-point blow-up for non-local parabolic problems, Physica D 134 (1999), 48–60.

[17] H. Bellout, A criterion for blow-up of solutions to semilinear heat equations, *SIAM J. Math. Anal.* ***18*** *(1987), 722–727.*

[18] M.Bertsch, L.A.Peletier, The Asymptotic Profile of Solutions of Degenerate Diffusion Equations, Department of Mathematics University at Leiden, (Received February 5, 1983)

[19] B.Bouffandeau, D.Bresch, B.Desjardins and E.Grenier, Existence of compactly supported solutions for a degenerate nonlinear parabolic equation with nonlipschitz source term. Methods and Applications of Analysis, Vol.16, No.1, March 2009, pp.045-054.

[20] H.Brezis - J.L.Vazquez, Blow-up solutions of some nonlinear elliptic problems. Revista Matematica de la Universidad Complutense de Madrid, Volumen 10, numero 2, (1997).

[21] C.J.Budd, G.J.Collins and V.A.Galaktionov, An Asymptotic and Numerical Description of Self-Similar Blow-up in Quasilinear Parabolic Equations.

[22] J.G.Burnell, A.A.Lacey and G.C.Wake, Steady states of the reaction-diffusion equations, part i, Questions of existence and continuity of solution branches, J. Austral Math. Soc. Ser. B 24 (1983), 374-391.

[23] J.G.Burnell, A.A.Lacey and G.C.Wake, Steady states of the reaction-diffusion equations, part ii, Uniqueness of solutions and some special cases, J. Austral. Math. Soc. Ser. B 24 (1983), 392-416.

[24] X.Cabre, Extremal Solutions and Instantaneous Complete Blow-up for Elliptic and Parabolic Problems, ICREA and Universitat Politecnica de Catalunya Departament de Matematica Aplicada 1.

[25] E.Caglioti, P.L.Lions, C.Marchioro, M.Pulvirenti, A special class of stationary flows for two-dimensinal Euler equations: A statistical mechanics description, Comm. Math. Phys.143 (1992), 501–525.

[26] J.A.Carrillo, On a nonlocal elliptic equation with decreasing nonlinearity arising in plasma physics and heat conduction, Nonlinear Anal. TMA, 32 (1998), 97-115.

[27] J.A.Carrillo, M.P.Gualdani, G.Toscani, Finite speed of propagation in porous media by mass transportation methods.

[28] N.Chafee and E.F.Infante, Bifurcation and stability for a nonlinear parabolic Partial Differential Equation, Bulletin of the American Mathematical Society, Volume 80, Number 1, January 1974.

[29] K.J.Chen, Bifurcation and multiplicity results for a nonhomogeneous semilinear elliptic problem, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2008 (2008), No. 152, pp. 1-19.

[30] M.Chiphot and B.Lovat, Some Remarks on non local elliptic and parabolic problems, Nonlinear Anal. TMA 30, No. 7, (1997), 4619-4627.

[31] W.Chunpeng and Y.Jingxue, Travelling wave fronts of a degenerate parabolic equation with non-divergence form, J.Partial Diff. Eqs. 16 (2003), 62-74.

[32] C.Cortazar, M.del Pino and M.Elgueta, Description of regional blow-up in a porous-medium equation, Electronic Journal of Differential Equations, Conference 08, 2002, pp 85-101.

[33] M. G. Crandall, P. H. Rabinowitz, Some Continuation and Variational Methods for Positive Solutions of Nonlinear Elliptic Eigenvalue Problems, *Arch. Rational Mech. Anal.,* ***58*** *(1975), no. 3, 207–218.*

[34] M.G.Crandall and P.H.Rabinowitz, Bifurcation, Perturbation of Simple Eigenvalues, and Linearized Stability, (This research was sponsored by the United States Army under Contract No. DA-31-124-ARO-D-462), Received February 20, 1973.

[35] P.Daskalopoulos and C.E.Kenig, Degenerate diffusions, Bulletin (new series) of the American Mathematical Society, Volume 47, Number 1, January 2010, Pages 171-176.

[36] J.I.Diaz, Solutions with compact support for some degenerate parabolic problems, Nolinear Analysis, Theory, Methods and Applications, Vol.3, No 6, (1979) pp. 831-847.

[37] J.I.Diaz, On the Haim Brezis pioneering contributions on the location of free boundaries, March 4, 2005.

[38] E.DiBenedetto, *Degenerate Parabolic Equations.* Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[39] D.Dogas and D.E.Tzanetis, Blow-up of solutions for a non-local degenerate Filtration and Porous Medium problem, Bulletin of the Greek Mathematical Society, Volume 57, 2010 (175-187).

[40] D.A.Dogas, D.E.Tzanetis, Existence and asymptotic behaviour of solutions for a non- local degenerate Filtration and Porous Medium problem.(Preprint).

[41] J.W.Dold, V.A.Galaktionov, A.A.Lacey and J.L.Vazquez, Rate of Approach to a Singular Steady State in Quasilinear Reaction-Diffusion Equations, Ann.Scuola Norm. Sup. Pisa CI. Sci.(4) Vol.XXVI (1998), pp.663-687.

[42] R.Ferreira, A.de Pablo, J.L.Vazquez, Classification of blow-up with nonlinear diffusion and localized reaction, (Preprint submitted to Elsevier Science 23 January 2006. Work partially supported by DGICYT grant BFM2002-04572, Spain).

[43] M.Fila, Boundeness of global solutions of nonlinear diffusion equations, J. Diff. Eqns. 98 (1992), 226-240.

[44] M.Fila, Boundedness of global solutions of nonlocal parabolic equations, Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications, Vol. 30, No. 2, (1997) pp. 877-885.

[45] M.Fila, H.Matano, P.Polacik, Immediate regularization after blow-up, November 19, 2004.

[46] A.C.Fowler, I.Frigaard and S.D.Howison, Temperature surges in current-limiting circuit devices, SIAM J. Appl. Math. 52 (1992), 998-1011.

[47] P.Freitas and M.Grinfeld, Multiplicity and stability of stationary solutions of an equation modelling Ohmic heating, Appl. Math. Lett., 7, No. 3, (1994), 1-6.

[48] A. Friedman and B. McLeod, Blow-up of positive solutions of semilinear heat equations, *Indiana Univ. Math. J.* ***34*** *(1985), 425–447.*

[49] A.Friedman and B.Mcleod, Blow-up of Solutions of Nonlinear Degenerate Parabolic Equations. (This work is partially supported by National Science Foundation Grant DMS-8420896, U.S. Army Grant DAJA-3481C-0220, and a grant from the U.K. Science and Engineering Research Council).

[50] H.Fujita, On the blowing up of solutions of the Cauchy problem for ut = u+u1+, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. 13 (1966) 109-124.

[51] H.Fujita, On the nonlinear equations u+eu = 0 and vt = v+ev, Bull. Amer. Math. Soc., 75 (1969), 132-135.

[52] V.A.Galaktionov, Conditions for global non-existence and localization of solutions of the Cauchy problem for a class of non-linear parabolic equations, U.S.S.R. Comput.Maths.Math. Phys. Vol.23, Mo.6, (1983), pp.36-44.

[53] V.A.Galaktionov and S.A.Posashkov, A method of investigating unbounded solutions of quasilinear parabolic equations, U.S.S.R. Comput. Maths. Math. Phys., Vo1.28,No.3 (1988), pp.148-156.

[54] V.A.Galaktionov, Accurate estimates for the amplitude and support of unbounded solutions of the non-linear heat-conduction equation with a source, U.S.S.R. Comput. Maths. Math. Phys., Vol.30,No.2 (1990), pp.67-74.

[55] V.A.Galaktionov, Best possible upper bound for blowup solutions of the quasilinear heat conduction equation with source, Siam J. Math. Anal. Vol. 22, No. 5, September 1991, pp.1293-1302.

[56] V.A.Galaktionov and S.A.Posashkov, Monotonicity in Time and Stationary Solutions for a Quasilinear Heat Equation with Source. Revista Matematica de la Universidad Complutense de Madrid, Volumen 4, numero 2 y 3,(1991).

[57] V.A.Galaktionov, On a Blow-up Set for the Quasilinear Heat Equation ut=(usux)x+u(s+1). Journal of Differential Equations 101, (1993), 66-79.

[58] V.A.Galaktionv and J.L.Vazquez, Necessary and Sufficient Conditions for Complete Blow-Up and Extinction for One-Dimensional Quasilinear Heat Equations, Arch. Rational Mech. Anal. 129 (1995) 225-244.

[59] V.A.Galaktionov and A.A.Lacey, Monotonicity in time of large solutions to a nonlinear heat equation, Rocky Mountain Journal of Mathematics, Volume 28, Number 4, winter 1998.

[60] V.A.Galaktionov and H.A.Levine, A general approach to critical Fujita exponents in nonlinear parabolic problems, Nonlinear Anal. TMA,34 (1998), 1005-1027.

[61] V.A.Galaktionov and J.L.Vazquez. The Problem Of Blow-Up in Nonlinear Parabolic Equations. Discrete and Continuous Dynamical Systems, Volume 8, Number 2, April 2002, pp. 399-433

[62] V.A.Galaktionov, Concavity and B-concavity of solutions of quasilinear filtration equations.

[63] V.A.Galaktionov, Asymptotic Self-Similar Global Blow-up for a Quasilinear Heat Equation.

[64] Gao-Feng Zheng, On finite-time blow-up for a nonlocal parabolic problem arising from shear bands in metals, *Proc. of the Amer. Math. Soc.,V.* ***135****, no 5, (2007), 1487–1494.*

[65] F.Gazzola, Finite-time Blow-up and global solutions for some Nonlinear Parabolic Equations, Differential and Integral Equations Volume 17 Numbers 9-10 September/October 2004, 983-1012.

[66] M.Ghergu, V.D.Radulescu, *Singular Elliptic Problems. Bifurcation and Asymptotic Analysis.* (Clarendon press - Oxford 2008).

[67] B. Gidas, W-M. Ni and L. Nirenberg, Symmetry and related properties via the maximum principle, *Comm. Math. Phys.,* ***68*** *(1979), 209–243.*

[68] B.H.Gilding - R.Kersner. The Characterization of Reaction-Convection-Diffusion Processes by Travelling Waves. journal of differential equations 124, 2779 (1996), Article No. 0002, 27-79.

[69] B.H.Gilding and R.Kersner, *Travelling waves in nonlinear diffusion-convection-reaction*, Computer and Automation Research Institute, Hungarian Academy of Sciences, Budapest, Hungary, Memorandum No. 1585, June 2001.

[70] C.Gui and X.Kang, Localization for a porous medium type equation in high dimensions, Transactions of the American Mathematical Society, Volume 356, Number 11, Pages 4273-4285.

[71] W.C.Huang, S.H.Wang, On the evolution and qualitative behaviors of bifurcation curves for a boundary value problem, Nonlinear Analysis 69 (2008) 2209-2222.

[72] S.Kaplan, On the growth of solutions of quasilinear parabolic equations, Comm. Pure Appl. Math. 16 (1963), 305-330.

[73] N.I.Kavallaris, *Έκρηξη και ολική ύπαρξη των λύσεων ορισμένων μη τοπικών προβλημάτων ωμικού τύπου.* (Phd Thesis), Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, (2000).

[74] N.I.Kavallaris and D.E.Tzanetis, Behaviour of a non-local reactive-convective problem with variable velocity in ohmic heating of food, Banach Center Publications, Volume, Institute of Mathematics Polish Academy of Sciences, Warszawa 200.

[75] N.I.Kavallaris and D.E.Tzanetis, Behavior of Critical Solutions of a Nonlocal Hyperbolic Problem in Ohmic Heating of Foods, Applied Mathematics E-Notes, 2 (2002), 59-65.

[76] N.I.Kavallaris and D.E.Tzanetis, Blow-up and stability of a nonlocal diffusion-convection problem arising in ohmic heating of foods, Differential and Integral Equations Volume 15, Number 3, March 2002, Pages 271-288.

[77] N.I.Kavallaris, D.E.Tzanetis, An Ohmic heating non-local diffusion-convection problem for the Heaviside function, ANZIAM J.44(E) pp 114-142, 2002.

[78] N.I.Kavallaris, C.V.Nikolopoulos and D.E.Tzanetis, Estimates of blow-up time for a non-local problem modelling an Ohmic heating process, Euro. Jnl of Applied Mathematics (2002), vol. 13, pp. 337-351.

[79] N.I.Kavallaris, Asymptotic behaviour and blow-up for a nonlinear diffusion problem with a non-local source term, Proc. of the Edin. Math. Soc., 47, (2004), 375-395.

[80] N.I.Kavallaris, A.A.Lacey and D.E.Tzanetis, Global existence and divergence of critical solutions of a non-local parabolic problem in Ohmic heating process, Nonlin. Anal. TMA 58 (2004), 787-812.

[81] N.I.Kavallaris, D.E.Tzanetis, On the blow-up of a non-local parabolic problem, Appl. Math. Letters 19, (2006), 921-925.

[82] N.I.Kavallaris and T.Nadzieja, On the blow-up of the non-local thermistor problem, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society (2007) 50, 389-409.

[83] H. B. Keller and D. S. Cohen, Some positone problems suggested by nonlinear heat generation, *J. Math. Mech.* ***16*** *(1967), 1361–1376.*

[84] B.F.Knerr, The behavior of the support of solutions of the equation of nonlinear heat conduction with absorption in one dimension, Transactions of the American Mathematical Society, Volume 249, Number 2, May 1979.

[85] P.Korman and J.Shi, Instability and exact multiplicity of solutions of semilinear equations, Nonlinear Differential Equations, Electron. J. Di. Eqns., Conf. 05, (2000), pp.311-322.

[86] A.Kristaly and N.S.Papageorgiou, Multiplicity theorems for semilinear elliptic problems depending on a parameter, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society (2009) 52, 171-180.

[87] A.Krzywicki and T.Nadzieja, Some results concerning the Poisson-Boltzmann equation, Zastosowania Mat. (Appl. Math. (Warsaw)) 21 (1991), 265-272.

[88] O. A. Ladyzenskaja, V. A. Solonnikov and N. N. Ural'ceva, "Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type", *Transl. Math. Monog.,Vol.* ***23****, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., (1968).*

[89] A.A.Lacey, Moving boundary problems in the flow of liquid through porous media, Austral. Math. Soc. (Series B) 24 (1982), 171-193.

[90] A.A.Lacey, Mathematical analysis of thermal runaway for spatially inhomogeneous reactions, SIAM J. Appl. Math. 43 (1983), 1350-1366

[91] A.A.Lacey, Initial Motion of the Free Boundary for a Non-linear Diffusion Equation, IMA Journal of Applied Mathematics (1983) 31, 113-119.

[92] A.A.Lacey and D.E.Tzanetis, Complete blow-up for a semilinear diffusion equation with a sufficiently large initial condition, IMA J. Appl. Math. 41 (1988), 207-215.

[93] A.A.Lacey and G.C.Wake, Critical initial conditions for spatially-distributed thermal explosions, J.Austral.Math.Soc. Ser. B 33(1992), 350-362.

[94] A.A.Lacey, Thermal runaway in a non-local problem modelling Ohmic heating. Part I: Model derivation and some special cases, Euro. J. Appl. Math.6 (1995), 127-144.

[95] A.A.Lacey, Thermal runaway in a non-local problem modelling Ohmic heating. Part II: General proof of blow-up and asymptotics of runaway, Euro. J. Appl. Math. 6 (1995), 201-224.

[96] A.A.Lacey, Diffusion models with blow-up, Journal of Computational and Applied Mathematics 97 (1998), 39-49.

[97] E.A.Latos, *Μαθηματική Ανάλυση της έκρηξης λύσεων σε τοπικά και μη-τοπικά προβλήματα Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων.* (Phd Thesis), Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, (2010).

[98] E.A.Latos, D.E.Tzanetis, Existence and Blow-up of solutions for a non-local Filtration and Porous Medium problem. Proc. of the Edin. Math. Soc. 53, (2010), 195-209.

[99] P.Laurencot and J.L.Vazquez, Localized non-diffusive asymptotic patterns for nonlinear parabolic equations with gradient absorption, (This work was supported by Spanish Project MTM-2005-08760-C02-01).

[100] K.A.Lee and J.L.Vazquez, Geometrical properties of solutions of the Porous Medium equation for large times.

[101] H.Levine and P.Sacks, Some existence and nonexistence theorems for solutions of degenerate parabolic equations, J. Diff. Eqns. 52, (1984), 135-161.

[102] H.A.Levine, The role of critical exponents in blow-up theorems, Siam Review, Vol. 32, No. 2 June 1990, pp.262-288.

[103] F.Liang, Asymptotic Behavior of a degenerate nonlocal parabolic equation.

[104] F.Liang, Existence and uniqueness for a nonlocal elliptic problem in heat conduction.

[105] F.Liang, G.Liu and Y.Li On a nonlocal problem modelling Ohmic heating in planar domains, Acta Mathematica Sinica, (Engl. Ser.), 29 (2013), no. 3, 523•534.

[106] G.Liu, F.Liang and Y.Li, Asymptotic behavior of a nonlocal parabolic problem in ohmic heating process.

[107] B.M.Marino, L.P.Thomas, R.Gratton, J.A.Diez and S.Betelu, Waiting-time solutions of a nonlinear diffusion equation. Experimental study of a creeping flow near a waiting front, Physical Review E, Volume 54, Number 3, September 1996.

[108] J.Matos, Blow-up of critical and aubcritical norms in semilinear heat equations. (This work was supported by JNICT, fellowship PRAXIS XXI/BD/4016/94).

[109] N.Mizoguchi and J.L.Vazquez, Multiple Blow-up for Nonlinear Heat Equations at Different Places and Different Times, March 22, 2007. (This work was supported by Spanish Project MTM-2005-08760-C02-01).

[110] K.Mochizuki and R.Suzuki, Critical exponent and critical blow-up for quasilinear parabolic equations, Israel Journal of Mathematics 98 (1997), 141-156.

[111] W.M.Ni, P.E.Sacks and J.Tavantzis, On the asymptotic behavior of solutions of certain quasilinear parabolic equations, J. Diff. Eqns. 54, (1984), 97-120.

[112] C.V.Nikolopoulos, D.E.Tzanetis, Blow-up time estimates for a non-local reactive-convective problem modelling sterilization of food, Banach Center Publications, Volume, Institute of Mathematics Polish Academy of Sciences, Warszawa 2000.

[113] J. Ockendon, S. Howison, A. Lacey and A. Movchan, *Applied Partial Differential Equations*, Oxford Univercity Press, 1999.

[114] On a Liouville-type theorem and the Fujita blow-up phenomeno, Proceedings of the American Mathematical Society, Volume 132, Number 3 (2003), Pages 807-813.

[115] T.Ouyang and J.Shi, Exact Multiplicity of Positive Solutions for a Class of Semilinear Problem, Journal of Differential Equations 158, (1999),94-151.

[116] A.de Pablo, An introduction to the problem of blow-up for semilinear and quasilinear parabolic equations, Serie a Conferencias, Seminarios y Trabajos de Matematica.

[117] C.V.Pao, Blowing-up of solutions for a nonlocal reaction-diffusion problem in combustion theory, J. Math. Anal. Appl. 166 (1992), 591-600.

[118] F.Quiros, J.D.Rossi, J.L.Vazquez, Complete blow-up and thermal avalanche for heat equations with nonlinear boundary conditions.

[119] P.Quittner - Ph.Souplet. *Superlinear Parabolic Problems. Blow-up, Global existence and Steady states.*

[120] V.D.Radulescu, *Qualitative Analysis of Nonlinear Elliptic Partial Differential Equations. Monotonicity, Analytic, and Variational Methods*, Contemporary Mathematics and Its Applications, Volume 6, Hindawi Publishing Corporation.

[121] M.Al Refai, N.I.Kavallaris, Bounds and critical parameters for a class of nonlocal problems, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2006(2006), No. 29, pp.1-16.

[122] J.M.Roquejoffre, Eventual monotonicity and convergence to travelling fronts for the solutions of parabolic equations in cylinders, Ann. Inst. Henri Poincare, Vol.14, no 4 (1997), p. 499-552.

[123] A.A.Samarskii,V.A.Galaktionov, S.P.Kurdyumov and A.P.Mikhailov, *Blow-up in Quasilinear Parabolic Equations.* Walter de Gruyter, Berlin, 1995.

[124] J.Shi. *Bifurcation Theory of Nonlinear Elliptic Equations*

[125] J.Shi, Exact multiplicity of solutions to superlinear and sublinear problems, Nonlinear Analysis 50 (2002) 665-687.

[126] P.Shi and M.Wang, Long Time Behavior of Solutions of Nonlinear Diffusion Problem with Nonlocal Source Terms, IMA Journal of Applied Mathematics.

[127] P.Souplet, Blow-up in nonlocal reaction-diffusion equations, SIAM J. Math. Anal. 29, No. 6, (1998), 1301-1334.

[128] R.Suzuki. On Blow-up Sets and Asymptotic Behavior of Interfaces of One Dimensional Quasilinear Degenerate Parabolic Equations. Publ. RIMS, Kyoto Univ.27 (1991), 375-398

[129] R.Suzuki, Complete blow-up for quasilinear degenerate parabolic equations, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, 130A, (2000), 877-908.

[130] E.Sylwestrzak, Iterations for nonlocal elliptic problems, Banach Center Publications, Volume, Institute of Mathematics Polish Academy of Sciences, Warszawa 2000.

[131] M.Tang, Exact multiplicity for semilinear elliptic Dirichlet problems involving concave and convex nonlinearities, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, 133A (2003),705-717.

[132] D.E.Tzanetis, *Global existence and asymptotic behavior of unbounded solutions for the semilinear heat equation (Phd Thesis)*, Heriot-Watt University, Edinburgh (1986).

[133] D.E.Tzanetis, Asymptotic behaviour and blow-up of some unbounded solutions for a semilinear heat equation, Proc. Edin. Math. Soc. 39 (1996), 81-96.

[134] D.E.Tzanetis, Blow-up of radially symmetric solutions of a non-local problem modelling Ohmic heating

[135] D.E.Tzanetis and P.M.Vlamos, A nonlocal problem modelling Ohmic heating with variable thermal conductivity, Nonl. Anal. RWA 2, (2001) 443-454.

[136] J.L.Vazquez, C8-Regularity of Solutions and Interfaces of the Porous Medium Equation, IMA Preprint Series 344, September 1987.

[137] J.L.Vazquez, Asymptotic behaviour for the porous medium equation posed in the whole space, J.evol.equ. 2 (2002).

[138] J.L.Vazquez, Failure of the Strong Maximum Principle in Nonlinear Diffusion. Existence of Needles. (Author partially supported by MCYT Project BMF2002-04572-C02-02 (Spain) and EU Programme TMR FMRX-CT98-0201).

[139] J.L.Vazquez, The Porous Medium Equation. New contractivity results, (Author partially supported by MCYT Project BMF2002-04572-C02-02 Spain and EU Programme TMR FMRX-CT98-0201).

[140] J.L.Vazquez, The problems of blow-up for nonlinear heat equations. Complete blow-up and avalanche formation, Rend. Mat. Acc. Lincei, s.9,v.15 (2004),281-300,

[141] J.L.Vazquez, *The Porous Medium equation: Mathematical theory*, Oxford Mathematical Monographs, Madrid, 2007.

[142] S.H.Wang, Bifurcation of an equation arising in Porous-Medium combustion, IMA Journal of Applied Mathematics 56 (1996), 219-234.

[143] S.H.Wang and T.S.Yeh, A complete classification of bifurcation diagrams of a Dirichlet problem with concave-convex nonlinearities, J. Math. Anal. Appl. 291 (2004), 128-153

[144] F.B.Weissler, Existence and non-existence of global solutions for a semilinear heat equation, Israel Journal of Mathematics, Vol.38, Nos.1-2, (1981).

[145] M.Winkler, Propagation versus Constancy of Support in the Degenerate Parabolic Equation ut = f(u)u, Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste Vol. XXXVI (2004),1-15.

[146] G.Wolansky, A critical parabolic estimate and application to non-local equations arising in chemotaxis, Appl. Anal. 66, (1997), 291-321.

[147] Z.Wu, J.Zhao, J.Yin, H.Li, *Nonlinear Diffusion Equations*, Published by World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.

[148] J.Yin, S.Wang, Y.Ke, A class of degenerate parabolic equations with a concentrated nonlinear source, Nonlinear Analysis 72 (2010), 123-131.

Βιβλιογραφία

[1] R.A.Adams, *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York (1975). [2]

[2] H.Amann, Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in ordered Banach Spaces, SIAM Rev. 18 (1976), 620-709.

[3] A.Ambrosetti, A.Malchiodi, *Nonlinear analysis and semilinear elliptic problems*, Cambridge University Press 2007.

[4] Σπ.Αργυρός, *Σημειώσεις Παραδόσεων Πραγματικής Ανάλυσης (Δεύτερη έκδοση)*, Τμήμα Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο. Ιανουάριος 2003.

[5] Σπ.Αργυρός, *Σημειώσεις Παραδόσεων Συναρτησιακής Ανάλυσης (Δεύτερη έκδοση)*, Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο. Μάϊος 2004.

[6] A.Blanchet, M.Bonforte, J.Dolbeault, G.Grillo and J.L.Vazquez, Hardy-Poincare inequalities and applications to nonlinear diffusions, (2006).

[7] H.Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer New York Dordrecht Heidelberg London.

[8] Γ.Δάσιος, Κ.Κυριάκη, *Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις*, Αθήνα 1994.

[9] L.Debnath, *Nonlinear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*, Second Edition, Birkhauser, Boston.

[2] Βιβλιογραφία γενικού υποβάθρου

[10] L.C.Evans, *Partial Differential Equations, Graduate studies in mathematics*, vol. 19, American Mathematical Society, 1991.

[11] I.Fonseca, G.Leoni, *Modern Methods in the Calculus of Variations-Lp Spaces*, 2007 Springer Science+Business Media.

[12] B.Gidas,W.M.Ni and L.Nirenberg, Symmetry and related properties via the maximum principle, Comm. Math. Phys. 68 (1979), 209-243.

[13] D.Gilbarg and N.S.Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order (2nd Edition)*, Springer-Verlag, Berlin 1993.

[14] *Handbook of Differential Equations. Stationary Partial Differential Equations Volume i*, 2004, Elsevier.

[15] P.Hartman, *Ordinary Differential Equations*, John Wiley and Sons Inc., New York, (1964).

[16] F.John, *Partial Differential Equations (4th Edition)*, Appl. Math. Sc., 1, Springer-Verlag, 1982.

[17] Kuttler, *Lecture Notes For Math 641 and 642*, October 8, 2006.

[18] G.M.Lieberman, *Second Order Parabolic Differential Equations*, Iowa State University, British Library Cataloguing-in-Publication Data, (A catalogue record for this book is available from the British Library). First published 1996.

[19] B.G.Pachpatte, *Mathematical Inequalities*, North-Holland Mathematical Library.

[20] N.S.Papageorgiou, S.Kyritsi-Yiallourou, *Handbook of Applied Analysis*, Springer Dordrecht Heidelberg London New York.

[21] P.Pucci, J.Serrin, *The Maximum Principle*, Birkhouser, Basel - Boston - Berlin.

[22] Rudin, *Functional Analysis.*

[23] F.Sauvigny, *Partial Differential Equations 1 - Foundations and Integral Representations.*

[24] F.Sauvigny, *Partial Differential Equations 2 - Functional Analytic Methods.* Springer Berlin Heidelberg New York.

[25] J.Shi, *Lectures on solution set of semilinear elliptic equations*, (Tokyo Metropolitan University), February 16th, 2005.

[26] R.E.Showalter, *Monotone Operators in Banach Space and Nonlinear Partial Differential Equations*, Mathematical Surveys and Monographs, Volume 49, American Mathematical Society.

[27] *Σημειώσεις Δυναμικών Συστημάτων*. Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο. Ιανουάριος 2006.

[28] N.Σταυρακάκης, *Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις. Γραμμική και μη Γραμμική Θεωρία*, Αθήνα 1997.