Εθνικο Μετσοβιο Πολυτεχνειο
Σχολη Ηλεκτρολογων Μηχανικων & Μηχανικων Υπολογιστων
Τομεας Μηχανολογικων Κατασκευων & Αυτοματου Ελεγχου
Εργαστηριο Αυτοματου Ελεγχου

Σχεδίαση τροχιάς για συνεργαζόμενους ρομποτικούς βραχίονες μεταφερόμενης βάσης

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΙΟΡΔΑΝΗΣ Σ. ΧΑΤΖΗΝΙΚΟΛΑΪΔΗΣ

Επιβλέπων : Κωνσταντίνος Ι. Κυριακόπουλος
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Οκτώβριος 2015

Εθνικο Μετσοβιο Πολυτεχνειο
Σχολη Ηλεκτρολογων Μηχανικων & Μηχανικων Υπολογιστων
Τομεας Μηχανολογικων Κατασκευων & Αυτοματου Ελεγχου
Εργαστηριο Αυτοματου Ελεγχου

Σχεδίαση τροχιάς για συνεργαζόμενους ρομποτικούς βραχίονες μεταφερόμενης βάσης

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΙΟΡΔΑΝΗΣ Σ. ΧΑΤΖΗΝΙΚΟΛΑΪΔΗΣ

Επιβλέπων : Κωνσταντίνος Ι. Κυριακόπουλος
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 30η Οκτωβρίου 2015.

.....	.....	.....
Κωνσταντίνος Κυριακόπουλος Καθηγητής Ε.Μ.Π.	Κωνσταντίνος Παπαοδυσσεύς Καθηγητής Ε.Μ.Π.	Γεώργιος Στασινόπουλος Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Οκτώβριος 2015

Ιορδάνης Σ. Χατζηνικολαΐδης
Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

Περίληψη

Τα τελευταία χρόνια η χρήση ρομποτικών βραχιόνων προσαρμοσμένων πάνω σε μεταφερόμενες βάσεις αποκτά όλο και μεγαλύτερο ερευνητικό ενδιαφέρον, καθώς επιτρέπει σε κλασσικούς ρομποτικούς βραχίονες να επεκτείνουν τον χώρο εργασίας τους σε όλο τον διαθέσιμο χώρο, και όχι μόνο σε αυτόν στον οποίο αρχικά τοποθετούνται. Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι αφενός η σχεδίαση μίας μεθόδου ελέγχου δύο τροχοφόρων ρομποτικών συστημάτων με στόχο την μεταφορά ενός αντικειμένου από ένα σημείο του τρισδιάστατου χώρου σε κάποιο άλλο σημείο, το οποίο θα επιλέγει ο ίδιος ο χειριστής τόσο σε επίπεδο θέσης όσο και σε επίπεδο προσανατολισμού, και αφετέρου η υλοποίηση της μεθοδολογίας αυτής σε ένα περιβάλλον προσομοίωσης, έτσι ώστε να καταδειχθούν εμφανέστερα τόσο οι δυνατότητες όσο και οι αδυναμίες της. Για τον σκοπό αυτό, εξετάζονται στο τέλος 4 σενάρια και γίνονται σχόλια τόσο πάνω σε αυτά όσο και σε κάποια ζητήματα που γίνονται εμφανή σε άλλες προσομοιώσεις. Για λόγους ευκολίας και χωρίς απώλεια της γενικότητας, το αντικείμενο παριστάνεται σε μορφή ράβδου.

Στο πρώτο τμήμα θα αναλυθεί το ρομποτικό σύστημα σε επίπεδο ευθείας κινηματικής αλλά και σε επίπεδο διαφορικής κινηματικής. Η ανάλυση αυτή θα παράξει τα απαραίτητα εργαλεία, έτσι ώστε να περάσουμε στην διαμόρφωση της μεθοδολογίας συνεργασίας, η οποία και αυτή με την σειρά της θα πραγματοποιηθεί σε κινηματικό επίπεδο.

Στο δεύτερο τμήμα θα διαμορφωθεί ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης, η επίλυση του οποίου κάθε χρονική στιγμή θα παράγει τις υπό μία έννοια βέλτιστες εντολές ταχύτητας που πρέπει να εισαχθούν στα ρομπότ, έτσι ώστε να πραγματοποιηθεί η προσέγγιση της επιθυμητής θέσης.

Στο τελευταίο τμήμα θα παρουσιαστούν κάποια σενάρια σε περιβάλλον προσομοίωσης, που ουσιαστικά θα καταδεικνύουν παραστατικά την προτεινόμενη μεθοδολογία. Τέλος, θα πραγματοποιηθούν κάποιες παρατηρήσεις επί των αποτελεσμάτων και θα δοθούν κατευθύνσεις για μελλοντική έρευνα.

Λέξεις κλειδιά

Κεντρικός έλεγχος, κινηματικός ελεγκτής, τροχοφόροι ρομποτικοί βραχίονες, συνεργαζόμενη μεταφορά αντικειμένου, θεωρία βελτιστοποίησης.

Abstract

In recent years the use of robotic arms mounted on mobile bases attracts an increasing research interest as it allows manipulators to expand their workspace across all the available space, and not to be restricted on the space available by their link's lengths. The purpose of this diploma dissertation is firstly to design a control method for two wheeled mobile manipulators which will allow them to transfer an object from one point in three-dimensional space to another point, which the operator himself selects in terms of pose and orientation, and secondly the implementation of this methodology in a simulation environment, in order to demonstrate clearly both the potential and the weaknesses of the proposed method. To this end, four simulations scenarios will be considered and comments will be made on them as well as on other scenarios not presented here. For simplicity and without loss of generality, the object is represented as a bar.

The first section will analyse the robotic system in terms of forward kinematics as well as forward differential kinematics. This analysis will generate the necessary tools which will allow the design of a cooperation methodology in purely kinematic terms.

In the second section we will formulate an optimization problem, the solution of which at each time step will generate in some sense optimal speed commands which must be send to the robot. This commands will force the robot to converge to the desired position.

In the final section we will present some scenarios in a simulated environment that effectively illustrate the proposed methodology. Finally, there will be some comments on the results and also future directions of further research will be provided.

Key words

Centralized control, kinematic controller, mobile manipulators, coordinate object transport, optimization theory.

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή αυτής της διατριβής, κ. Κυριακόπουλο Κωνσταντίνο, για τη συνεχή καθοδήγηση και για την εμπιστοσύνη του. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους φίλους μου για όλη τους την συμπαράσταση και τις ενδιαφέρουσες παρατηρήσεις τους κατά την εκπόνηση της διπλωματικής μου εργασίας. Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου και κυρίως τους γονείς μου και την αδερφή μου, οι οποίοι με υποστήριξαν και έκαναν δυνατή την απερίσπαστη ενασχόλησή μου τόσο με τη διπλωματική μου όσο και συνολικά με τις σπουδές μου.

Ιορδάνης Σ. Χατζηνικολαΐδης,

Αθήνα, 30η Οκτωβρίου 2015

Περιεχόμενα

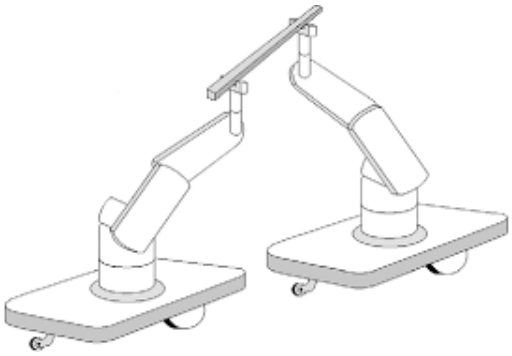
Κατάλογος σχημάτων

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή.

1.1 Διατύπωση του προβλήματος.

Η παρούσα διπλωματική εργασία καταπιάνεται με την ανάπτυξη μιας μεθοδολογίας, η οποία θα επιτρέπει σε δύο τροχοφόρους ρομποτικούς βραχίονες να μεταφέρουν ένα αντικείμενο από μια δεδομένη αρχική θέση σε μια επιθυμητή τελική θέση. Η επίλυση θα πραγματοποιείται κεντρικά, υπό την έννοια ότι θα υπάρχει ένας κεντρικός ελεγκτής που θα γνωρίζει κάθε χρονική στιγμή την διάταξη του κάθε συστήματος και με βάση την μεθοδολογία που θα αναπτυχθεί, θα αποστέλλει εντολές ταχυτήτων σε κάθε ρομποτικό σύστημα ξεχωριστά. Η μεθοδολογία αυτή θα αδιαφορεί για το σχήμα του αντικειμένου και θα ενδιαφέρεται μόνο για την σχετική θέση των δύο ρομποτικών συστημάτων. Τα συστήματα που επιλέχθηκαν προς εφαρμογή της μεθόδου είναι διαθέσιμα στο εμπόριο για εκπαιδευτικούς και ερευνητικούς σκοπούς.



Σχήμα 1.1: Συνεργασία ρομποτικών βραχιόνων μεταφερόμενης βάσης.

Τα ζητήματα των δυνάμεων και κατά πόσο το αντικείμενο μπορεί να μεταφερθεί λόγω βάρους, η κατανομή των δυνάμεων κλπ. δεν θα μελετηθούν, και συνεπώς θα θεωρήσουμε ότι αυτά ικανοποιούνται χωρίς προβλήματα σε κάθε περίπτωση. Δηλαδή, θα εξετάσουμε το ζήτημα από καθαρή κινηματική σκοπιά και μόνο. Επιπλέον, κάποιες επιθυμητές συμπεριφορές που εμφανίζονται πολύ συχνά στην πράξη, όπως αποφυγής εμποδίων, δεν θα ληφθούν υπόψη στην παρούσα εργασία. Συνεπώς, ο χώρος θα θεωρείται ότι περιέχει αποκλειστικά τα δύο ρομποτικά συστήματα και το αντικείμενο προς μεταφορά.

1.2 Η σημασία του προβλήματος.

Το ενδιαφέρον για την εφαρμογή των τροχοφόρων ρομποτικών συστημάτων σε μια σειρά καταστάσεων, όπως μεταφοράς αντικειμένων, ελέγχου, βαφής με σπρέι, συναρμολόγησης κ.ά, αποκτά τα τελευταία χρόνια όλο και μεγαλύτερο ενδιαφέρον. Το σύστημα ουσιαστικά αποτελείται από έναν κλασσικό ρομποτικό βραχίονα προσαρμοσμένο όμως πάνω σε μια κινητή βάση, η οποία κατ' επέκταση μεγαλώνει απεριόριστα τον χώρο εργασίας πάνω στο επίπεδο xy.

Οι ρομποτικοί βραχίονες έχουν αποτελέσει αντικείμενο μελέτης για πάρα πολλά χρόνια και τα μοντέλα ανοιχτών κινηματικών αλυσίδων είναι ικανοποιητικά γενικά. Οι πλατφόρμες από την άλλη πλευρά εμφανίζουν πολύ μεγαλύτερη ποικιλία, όπως π.χ. τροχοφόρες, με πόδια, υποβρύχιες, εναέριες κλπ., κάτι το οποίο κάνει την ανάλυσή τους κάπως πιο απαιτητική, λόγω αυτής ακριβώς της ποικιλίας. Προσαρμόζοντας έναν βραχίονα πάνω σε μια πλατφόρμα προστίθεται στο πρόβλημα μια επιπλέον περιπλοκότητα, καθώς συνδυάζονται δύο ανομοιογενή μεταξύ τους συστήματα. Συνδυάζοντας μάλιστα δύο τέτοια σε μία κλειστή κινηματική αλυσίδα δημιουργεί ακόμη περισσότερα προβλήματα προς αντιμετώπιση.

Η χρήση τέτοιων συστημάτων πάντως προβλέπεται να επεκταθεί τα επόμενα χρόνια, καθώς πλέον χρησιμοποιούνται ακόμα και σε διαστημικές εφαρμογές. Ένας τομέας στον οποίο τα συστήματα αυτά υπόσχονται πολλές εφαρμογές είναι η βιομηχανία, η αυτοματοποίηση της οποίας και η περιθωριοποίηση του ανθρώπινου παράγοντα γίνεται με μεγαλύτερο ρυθμό τα τελευταία χρόνια.

1.3 Προηγούμενη έρευνα.

Μεγάλο τμήμα της έρευνας των ρομπότ μεταφερόμενης βάσης αφορά αυτά που διαθέτουν μη-ολονομικές πλατφόρμες, καθώς τότε η κινηματική ικανότητα του συνολικού συστήματος είναι σημαντικά περιορισμένη όπως π.χ. αναλύουν οι [Papadopoulos and Poulakakis, 2000], τόσο σε επίπεδο κινηματικό όσο και σε δυναμικό. Ο [Seraji, 1998] παρουσιάζει τη μεθοδολογία στην οποία και θα βασιστούμε για την ενοποίηση των δύο συστατικών μερών του συστήματος, τόσο για ολονομικές όσο και για μη-ολονομικές πλατφόρμες. Οι [Yamamoto and Yun,] παρουσιάζουν μια μεθοδολογία σχεδιασμού και ελέγχου, λαμβάνοντας όμως υπόψη και τις δυναμικές εξισώσεις του συστήματος, ενώ οι [Bayle et al., 2002] παρουσιάζουν μια κινηματική μεθοδολογία για συστήματα που εμφανίζουν και πλεονάζοντες βαθμούς ελευθερίας. Τέλος, οι [Luca et al., 2006] παρουσιάζουν μια μεθοδολογία για μη-ολονομικά συστήματα, απομονώνοντας μόνο εξισώσεις που επιτρέπουν κίνηση και αυτομάτως ικανοποιώντας τους μη ολονομικούς περιορισμούς, καθώς και τρόπους εκμετάλλευσης των πλεοναζόντων βαθμών με διάφορες μεθόδους, όπως Extended Jacobian, Projected Gradient και Reduced Gradient.

Η συνεργασία δύο τέτοιων συστημάτων υλοποιήθηκε με τεχνικές που αναπτύχθηκαν αρχικά για ρομποτικούς βραχίονες. Η σημαντικότερη πηγή για σχετική βιβλιογραφία μαζί με τα πιο σημαντικά ερευνητικά αποτελέσματα παρουσιάζουν αναλυτικά οι [Siciliano and Khatib, 2008], οπότε δεν θα επαναληφθούν εδώ και συνεπώς κάθε ενδιαφερόμενος παραπέμπεται εκεί πέρα για περαιτέρω ανάλυση.

1.4 Συνεισφορά.

Στην παρούσα εργασία, έχοντας ως αναφορά κάποιες από τις αναλύσεις που αναφέρθηκαν παραπάνω, επεκτείνουμε τα υπάρχοντα αποτελέσματα και προσθέτουμε άλλα, όπου αυτό είναι απαραίτητο. Συγκεκριμένα, οι κινηματικές αναλύσεις των τροχοφόρων ρομποτικών βραχιόνων περιορίζονται συνήθως για λόγους απλότητας σε μια κινητή βάση με ένα βραχίονα δύο με τριών βαθμών ελευθερίας. Στην παρούσα εργασία θα ασχοληθούμε με έναν πολύ μεγαλύτερο βραχίονα, η κινηματική του οποίου αυξάνει την πολυπλοκότητα.

Σε πολλές περιπτώσεις το συνολικό σύστημα θεωρείται ότι αποτελείται από δύο διακριτά μέρη, την πλατφόρμα και τον βραχίονα. Στην παρούσα εργασία θα θεωρήσουμε το συνολικό σύστημα σαν μία ολότητα και θα συνδυάσουμε τα δύο διακριτά του μέρη σε ένα, στο οποίο και θα επικεντρώσουμε την ανάλυση. Έτσι θα μπορέσουμε να αντιμετωπίσουμε το συνολικό σύστημα σαν έναν ισοδύναμο βραχίονα, έχοντας συνεπώς τη δυνατότητα να εφαρμόσουμε όλα τα εργαλεία που είναι διαθέσιμα για αυτούς. Στους βραχίονες μια πρωταρχική αντίστροφη κινηματική ανάλυση γίνεται μέσω της αντιστροφής της ιακωβιανής. Στην εργασία αυτή θα δείξουμε την ακαταλληλότητα της μεθόδου αυτής και θα προτείνουμε μια μέθοδο με χρήση βελτιστοποίηση. Στον συγγραφέα δεν είναι γνωστή η εφαρ-

μογή μεθόδου βελτιστοποίησης σε τροχοφόρους χειριστές, παρά μόνο σε κλασσικούς ρομποτικούς βραχίονες.

Η συνεργασία των ρομποτικών τροχοφόρων βραχιόνων και των βραχιόνων γενικότερα μελετάται συνήθως σε δυναμικό επίπεδο, όπου τα εργαλεία ανάλυσης παρουσιάζουν μεγαλύτερη ποικιλία. Στην παρούσα εργασία η συνολική μοντελοποίηση, όπως έχει ήδη αναφερθεί, θα γίνει κινηματικά. Η κινηματική ανάλυση ενός τέτοιου πολύπλοκου συστήματος κλειστής κινηματικής αλυσίδας δεν είναι γνωστό να έχει πραγματοποιηθεί κάπου από τον συγγραφέα.

Τέλος, θα παρουσιαστεί μια μέθοδος αποφυγής μηχανικών ορίων των αρθρώσεων του βραχίονα, στην οποία θα λαμβάνει μέρος και η βάση του συστήματος, κάτι το οποίο δεν γνωρίζει ο συγγραφέας να έχει πραγματοποιηθεί σε κάποια άλλη εργασία.

1.5 Δομή της εργασίας.

Η δομή της εργασίας θα ακολουθήσει γενικά την εξής λογική: Στο επόμενο κεφάλαιο θα πραγματοποιηθεί μια πλήρης κινηματική και διαφορική κινηματική ανάλυση, που θα αφορά τόσο τον βραχίονα όσο και την πλατφόρμα ενός συγκεκριμένου ρομποτικού συστήματος μεταφερόμενης βάσης. Στη συνέχεια, οι κινηματικές εξισώσεις των δύο αυτών μερών θα συνδυαστούν, προκειμένου να παραχθεί μια συνολική κινηματική εξίσωση που να περιγράφει και τα δύο αυτά μέρη σαν μία ολότητα.

Στο επόμενο κεφάλαιο θα αναλυθεί αρχικά μια πρώτη προσέγγιση της κινηματικής ανάλυσης του συστήματος των δύο τροχοφόρων ρομπότ και θα εξηγηθούν οι λόγοι για τους οποίους τελικά εγκαταλείφθηκε. Στην συνέχεια, θα αναφερθεί η κεντρική μέθοδος επίλυσης κάνοντας χρήση της θεωρίας βελτιστοποίησης. Στο τέλος αυτού του κεφαλαίου θα αναφερθεί και μια μέθοδος αποφυγής μηχανικών ορίων που επεκτείνει την βασική μέθοδο.

Έπειτα, θα παρουσιαστούν τέσσερα σενάρια προσομοιώσεων, τα οποία θα καταδεικνύουν τις δυνατότητες της μεθόδου, στα οποία θα παρουσιαστούν στιγμιότυπα της κάθε προσομοίωσης καθώς και γραφικές παραστάσεις για την εξέλιξη του συνολικού σφάλματος.

Τέλος, θα πραγματοποιηθεί ένας σχολιασμός των αποτελεσμάτων των προσομοιώσεων, τονίζοντας τόσο θετικά όσο και αρνητικά στοιχεία της μεθόδου. Τα αρνητικά στοιχεία θα αποτελέσουν μάλιστα και τη βάση για κάποιες πιθανές μελλοντικές κατευθύνσεις με απώτερο στόχο την περαιτέρω βελτίωσή της.

Κεφάλαιο 2

Κινηματική ανάλυση του youBot.

Στο παρόν κεφάλαιο θα θέσουμε τις απαραίτητες βάσεις για την κινηματική μοντελοποίηση του συνολικού συστήματος. Στο πρώτο αυτό στάδιο θα ασχοληθούμε αποκλειστικά με την κινηματική δομή ενός συγκεκριμένου εμπορικού μοντέλου, δηλαδή του ρομπότ youBot της εταιρίας KUKA, το οποίο φαίνεται στο Σχήμα 2.1, αναλύοντας ξεχωριστά τα δύο βασικά του τμήματα, δηλαδή την πλατφόρμα και τον βραχίονα. Η ανάλυση θα γίνει τόσο σε επίπεδο ευθείας κινηματικής όσο και ευθείας διαφορικής, η οποία θα αποτελέσει και την βάση για την αντίστροφη κινηματική ανάλυση του youBot όσο και του συνολικού συστήματος.

Σχήμα 2.1: Το ρομποτικό σύστημα youBot.

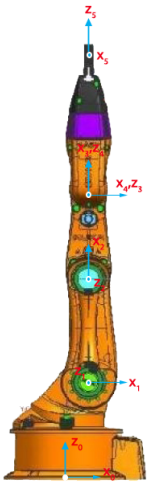
Το παραπάνω σύστημα αποτελείται από ένα βραχίονα 5 βαθμών ελευθερίας (DoF - Degrees of Freedom), ενώ η βάση είναι ολονομική παγκατευθυντική 3-DoF, καθώς έχει την δυνατότητα να κινηθεί οποιαδήποτε στιγμή προς οποιαδήποτε κατεύθυνση ή να εκτελέσει περιστροφή γύρω από τον άξονα z, όπως θα δειχθεί και αργότερα.

2.1 Κινηματική ανάλυση του ρομποτικού βραχίονα.

2.1.1 Ευθεία κινηματική ανάλυση με την μέθοδο Denavit-Hartenberg.

Αρχικά, απομονώνουμε τον ρομποτικό βραχίονα από την πλατφόρμα. Η κινηματική ανάλυσή του μπορεί να πραγματοποιηθεί με βασικά εργαλεία της ανάλυσης ρομποτικών βραχιόνων, όπως τη μέθοδο Denavit-Hartenberg. Με βάση την μεθοδολογία που παρουσιάζεται στο [Siciliano et al., 2009], ο πίνακας παραμέτρων για τον βραχίονα του Σχήματος 2.2 φαίνεται στον Πίνακα 2.1.

Με βάση τον παραπάνω πίνακα και τη μήτρα παραμέτρων της μεθόδου A_i^{i-1}, εφαρμόζοντας τον



Σχήμα 2.2: Ο βραχίονας μαζί με τα πλαίσια της μεθόδου Denavit-Hartenberg.

Πίνακας 2.1: Οι παράμετροι της μεθόδου Denavit-Hartenberg για τον βραχίονα του youBot.

Σύνδεσμος i	θ_i	d_i	α_i	a_i
1	q_1	0,1012	0,0330	90°
2	$q_2 + 90°$	0	0,1550	0
3	q_3	0	0.1348	0
4	$q_4 - 90°$	0	0	−90°
5	$q_5 - 90°$	0,1937	0	0

μετασχηματισμό $T = A_1^0(q_1)A_2^1(q_2)A_3^2(q_3)A_4^3(q_4)A_5^4(q_5)$ καταλήγουμε ότι:

$$T_m = \begin{bmatrix} s_1c_5 + c_1c_{234}s_5 & -s_1s_5 + c_1c_{234}c_5 & -c_1s_{234} & -0,1937c_1s_{234} - c_1(0,1348s_{23} + 0,155s_2 - 0,033) \\ -c_1c_5 + s_1c_{234}s_5 & c_1s_5 + s_1c_{234}c_5 & -s_1s_{234} & -0,1937s_1s_{234} - s_1(0,1348s_{23} + 0,155s_2 - 0,033) \\ s_{234}s_5 & s_{234}c_5 & c_{234} & 0,1937c_{234} + 0,1348c_{23} + 0,155c_2 + 0,1012 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

2.1.2 Ευθεία κινηματική ανάλυση με χρήση γενικευμένου διανύσματος θέσης - προσανατολισμού.

Η θέση της αρπάγης του βραχίονα δίνεται σε μορφή διανύσματος από τις τρεις πρώτες σειρές της τέταρτης στήλης του T, όπως προκύπτει από την Σχέση 2.1. Για να εκφράσουμε τον προσανατολισμό, αναζητούμε μια αναπαράσταση ελαχίστων παραμέτρων, το οποίο μπορεί να γίνει είτε μέσω των γωνιών Euler είτε κάνοντας χρήση τετραδόνιων (quaternions). Τα τετραδόνια γενικά πλεονεκτούν έναντι των γωνιών Euler λόγω της αριθμητικά γρηγορότερης σύνθεσης περιστροφών, της απλούστερης εξαγωγής της γωνίας και του άξονα περιστροφής, της συντομότερη παρεμβολής, και της έλλειψης gimbal lock σε αντίθεση με τις γωνίες Euler. Όμως, η εξαγωγή των Z-X-Z γωνιών Euler από την μήτρα περιστροφής της αρπάγης είναι αμεσότερη και συνεπώς θα προτιμηθεί. Η γενική μορφή των Z-X-Z γωνιών Euler [Diebel, 2006] είναι η ακόλουθη:

$$Z_1X_2Z_3 = Rot_z(a)Rot_x(b)Rot_z(g) = \begin{bmatrix} c_ac_g - s_ac_bs_g & -c_as_g - s_ac_bc_g & s_as_b \\ s_ac_g + c_ac_bs_g & c_ac_bc_g - s_as_g & -c_as_b \\ s_bs_g & s_bc_g & c_b \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

Από απλή επισκόπηση της μήτρας περιστροφής του τελικού εργαλείου στη Σχέση 2.1 και των

γωνιών Euler στη Σχέση 2.2 προκύπτει άμεσα ότι:

$$a = q_1 - \frac{\pi}{2} \tag{2.3a}$$
$$b = q_2 + q_3 + q_4 \tag{2.3b}$$
$$g = q_5 \tag{2.3c}$$

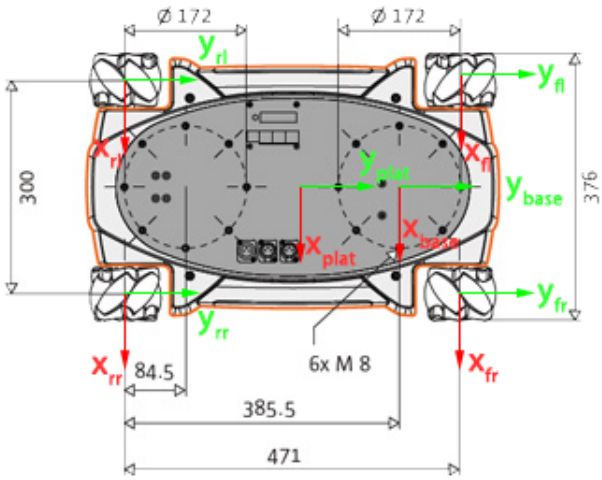
Επομένως το γενικευμένο διάνυσμα θέσης-προσανατολισμού του τελικού εργαλείου δράσης του βραχίονα παίρνει την ακόλουθη μορφή:

$$\vec{x}_m = \begin{bmatrix} -0,1937c_1s_{234} - c_1(0,1348s_{23} + 0,155s_2 - 0,033) \\ -0,1937s_1s_{234} - s_1(0,1348s_{23} + 0,155s_2 - 0,033) \\ 0,1937c_{234} + 0,1348c_{23} + 0,155c_2 + 0,1012 \\ q_1 - \frac{\pi}{2} \\ q_2 + q_3 + q_4 \\ q_5 \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

2.2 Διαφορική κινηματική ανάλυση της πλατφόρμας.

2.2.1 Πλήρης διαφορική κινηματική εξίσωση.

Για την κινηματική ανάλυση της πλατφόρμας [Muir and Neuman, 1987], τοποθετούμε τα πλαίσια που φαίνονται στο Σχήμα 2.3, δηλαδή θεωρούμε ένα ακίνητο πλαίσιο αναφοράς στο πάτωμα (F), ένα στο κέντρο της πλατφόρμας (R), και τέσσερα πλαίσια αναφοράς στα σημεία επαφής των τροχών με το πάτωμα (C_i). Στο Σχήμα φαίνεται και το πλαίσιο αναφοράς της βάσης του βραχίονα.



Σχήμα 2.3: Κάτοψη της πλατφόρμας μαζί με τα απαιτούμενα πλαίσια αναφοράς.

Αρχικά θεωρούμε την ιακωβιανή κάθε τροχού, η οποία περιγράφει τη συνεισφορά κάθε τροχού στην ταχύτητα του κέντρου της πλατφόρμας. Οι τρεις DoF του τροχού αναφέρονται ουσιαστικά στη δυνατότητα περιστροφής του γύρω από τον άξονά του, τη δυνατότητα περιστροφής των roller στην περιφέρειά του, και τη δυνατότητα περιστροφής του γύρω από το σημείο επαφής. Η γενική μορφή της ιακωβιανής του τροχού i είναι η ακόλουθη:

$$J_i = \begin{bmatrix} -R_i \sin({}^R\theta_{C_i}) & r_i \sin({}^R\theta_{C_i} + \eta_i) & {}^Rd_{C_{iy}} \\ R_i \cos({}^R\theta_{C_i}) & -r_i \cos({}^R\theta_{C_i} + \eta_i) & {}^Rd_{C_{ix}} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

Επομένως, για κάθε τροχό ξεχωριστά έχουμε:

$$
{}^{R}\vec{p}_p = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2}r & l_b \\ R & -\frac{\sqrt{2}}{2}r & -l_a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{J_{fr}} \begin{bmatrix} \omega_{1_x} \\ \omega_{1_r} \\ \omega_{1_z} \end{bmatrix} \tag{2.6a}
$$

$$
{}^{R}\vec{p}_p = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}r & l_b \\ R & -\frac{\sqrt{2}}{2}r & l_a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{J_{fl}} \begin{bmatrix} \omega_{2_x} \\ \omega_{2_r} \\ \omega_{2_z} \end{bmatrix} \tag{2.6b}
$$

$$
{}^{R}\vec{p}_p = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2}r & -l_b \\ R & -\frac{\sqrt{2}}{2}r & l_a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{J_{rl}} \begin{bmatrix} \omega_{3_x} \\ \omega_{3_r} \\ \omega_{3_z} \end{bmatrix} \tag{2.6c}
$$

$$
{}^{R}\vec{p}_p = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}r & -l_b \\ R & -\frac{\sqrt{2}}{2}r & -l_a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{J_{rr}} \begin{bmatrix} \omega_{4_x} \\ \omega_{4_r} \\ \omega_{4_z} \end{bmatrix} \tag{2.6d}
$$

όπου $R = 47,5mm$, $l_a = 158,5mm$ και $l_b = 228mm$. Παρατηρούμε ότι όλες οι ιακωβιανές είναι βαθμού 3.

Συνδυάζοντας τις παραπάνω εξισώσεις προκύπτει η πλήρης διαφορική κινηματική εξίσωση της πλατφόρμας:

$$
\begin{bmatrix} I_3 \\ I_3 \\ I_3 \\ I_3 \end{bmatrix} {}^{R}\vec{p}_p = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{w}_1 \\ \vec{w}_2 \\ \vec{w}_3 \\ \vec{w}_4 \end{bmatrix} \tag{2.7}
$$

Εφόσον η μήτρα των μοναδιαίων μητρών και η μήτρα των ιακωβιανών είναι πλήρους βαθμού, συμπεραίνουμε ότι η εξίσωση έχει πάντα μοναδική λύση και ότι η πλατφόρμα έχει 3 βαθμούς ελευθερίας.

2.2.2 Ευθεία και αντίστροφη διαφορική κινηματική λύση με βάση τη δυνατότητα οδήγησης.

Στην παραπάνω πλήρη διαφορική κινηματική εξίσωση της πλατφόρμας δεν έχουμε πληροφορίες από τους αισθητήρες ούτε για όλες τις ταχύτητες που εμφανίζονται, ούτε δυνατότητα οδήγησης όλων των ταχυτήτων κάθε τροχού. Συνεπώς, απομονώνουμε και μελετάμε τις συνιστώσες αυτές που παρουσιάζουν πρακτικό ενδιαφέρον. Συγκεκριμένα, δυνατότητα ανάγνωσης μέσω των αισθητήρων και δυνατότητα οδήγησης έχουμε μόνο στην περιστροφή περί του άξονα του τροχού. Παρ' όλα αυτά, είναι δυνατή η αξιοποίηση των ανεξάρτητων βαθμών ελευθερίας μέσω των δυνατοτήτων οδήγησης όσο και η δυνατότητα εξαγωγής της ταχύτητας της πλατφόρμας από τις μετρήσεις των αισθητήρων. Για

να απομονώσουμε τις συνιστώσες αυτές αντιστρέφουμε την ιακωβιανή κάθε τροχού και διατηρούμε την συνιστώσα που αφορά την ταχύτητα ω_{i_x}. Έτσι προκύπτει ότι:

$$\begin{bmatrix} \omega_{1_x} \\ \omega_{2_x} \\ \omega_{3_x} \\ \omega_{4_x} \end{bmatrix} = \frac{1}{R} \begin{bmatrix} -1 & 1 & l_{ab} \\ 1 & 1 & -l_{ab} \\ -1 & 1 & -l_{ab} \\ 1 & 1 & l_{ab} \end{bmatrix} {}^{R}\vec{p}_p \tag{2.8}$$

Επιπλέον, αναδιατάσσοντας την πλήρη κινηματική εξίσωση σε συνιστώσες που μπορούν να οδηγηθούν και σε συνιστώσες που δεν μπορούν να οδηγηθούν και κατόπιν λύνοντας την παραπάνω εξίσωση ως προς την ταχύτητα του κέντρου της πλατφόρμας προκύπτει ότι:

$${}^{R}\vec{p}_p = \frac{R}{4} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{l_{ab}} & -\frac{1}{l_{ab}} & -\frac{1}{l_{ab}} & \frac{1}{l_{ab}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{1_x} \\ \omega_{2_x} \\ \omega_{3_x} \\ \omega_{4_x} \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

Τέλος, με βάση την παραπάνω κινηματική ανάλυση προκύπτουν κάποια πολύ ενδιαφέροντα συμπεράσματα που αξίζει να τονιστούν. Πρώτον, αναδιατάσσοντας την πλήρη κινηματική εξίσωση με βάση τις συνιστώσες για τις οποίες έχουμε πληροφορίες από τους αισθητήρες, και μελετώντας την προκύπτουσα εξίσωση καταλήγουμε ότι υπάρχει επαρκή αισθητηριακή πληροφόρηση, καθώς η προκύπτουσα μήτρα έχει ορίζουσα $64(l_a + l_b)^2 \neq 0$, συνεπώς είναι πάντα αντιστρέψιμη και έχει λύση. Μάλιστα η πληροφορία είναι εύρωστη και είναι δυνατόν να αντιληφθούμε την ύπαρξη wheel slip μέσω των αισθητήρων. Δεύτερον, μελετώντας την ορίζουσα της προκύπτουσας εξίσωσης για τα χαρακτηριστικά οδήγησης, και αυτή είναι ίση με $64(l_a+l_b)^2 \neq 0$,επομένως καταλαβαίνουμε ότι υπάρχει επαρκής ικανότητα οδήγησης ώστε να μπορούμε να δημιουργήσουμε οποιαδήποτε ταχύτητα του κέντρου της πλατφόρμας. Ωστόσο, υπάρχει η περίπτωση να δημιουργηθεί πρόβλημα στην οδήγηση αν δοθούν αυθαίρετες εντολές, καθώς δεν είναι εύρωστη. Όσον αφορά το wheel slip υπάρχει η δυνατότητα να γίνει αυτό αντιληπτό μέσω των αισθητήρων, όπως αναφέρθηκε και πριν, καθώς για οποιεσδήποτε εντολές πρέπει να ικανοποιείται η παρακάτω συνθήκη:

$$\omega_{1_x} + \omega_{2_x} - \omega_{3_x} - \omega_{4_x} = 0 \tag{2.10}$$

Λύνοντας τη συνθήκη αυτή ως προς π.χ. την ταχύτητα ω_{4_x} και αντικαθιστώντας την στην εξίσωση 2.9, αυτή λαμβάνει την ακόλουθη μορφή:

$${}^{R}\vec{p}_p = \frac{R}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{l_{ab}} & 0 & -\frac{1}{l_{ab}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{1_x} \\ \omega_{2_x} \\ \omega_{3_x} \end{bmatrix} \tag{2.11}$$

2.3 Κινηματική ανάλυση της πλατφόρμας.

Παρόλο που η δυνατότητα ανεξάρτητου ελέγχου και των 3 DoF, η οποία εμφανίζεται στις παγκατευθυντικές ρομποτικές πλατφόρμες, είναι ένα πολύ σημαντικό πλεονέκτημα, η δυνατότητα για τον ακριβή εντοπισμό της θέσης σε πραγματικό χρόνο μέσω των αισθητήρων των τροχών είναι αδύνατη. Για την ακρίβεια, είναι δυνατό να υπολογιστεί με ακρίβεια ο προσανατολισμός της πλατφόρμας, ενώ η θέση της μπορεί να προκύψει δυστυχώς μόνο μέσω ολοκλήρωσης. Πιο συγκεκριμένα έχουμε για την ταχύτητα στο πλαίσιο αναφοράς του πατώματος:

$${}^{F}\dot{\vec{p}}_p = Rot_z({}^{F}\theta_p){}^{R}\dot{\vec{p}}_p = \begin{bmatrix} \cos({}^{F}\theta_p) & -\sin({}^{F}\theta_p) & 0 \\ \sin({}^{F}\theta_p) & \cos({}^{F}\theta_p) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} {}^{R}\dot{\vec{p}}_p$$

Για την τελευταία συνιστώσα έχουμε:

$$
\begin{aligned}
{}^{F}\omega_p = {}^{R}\omega_p = \frac{R}{4l_{ab}}(\omega_{1,x} - \omega_{2,x} - \omega_{3,x} + \omega_{4,x}) \Rightarrow \int {}^{F}\omega_p dt = \frac{R}{4l_{ab}} \int (\omega_{1,x} - \omega_{2,x} - \omega_{3,x} + \omega_{4,x}) dt \Rightarrow \\
{}^{F}\theta_p(t) = \frac{R}{4l_{ab}}(\theta_{1,x}(t) - \theta_{2,x}(t) - \theta_{3,x}(t) + \theta_{4,x}(t)) +^{F} \theta_p(0) - \frac{R}{4l_{ab}}(\theta_{1,x}(0) - \theta_{2,x}(0) - \theta_{3,x}(0) + \theta_{4,x}(0))
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

Συνεπώς, ο προσανατολισμός της πλατφόρμας μπορεί να υπολογιστεί οποιαδήποτε στιγμή με χρήση των μετρήσεων των αισθητήρων, όπως φαίνεται από την παραπάνω σχέση. Η θέση της πλατφόρμας υπολογίζεται μέσω ολοκλήρωσης σε κάθε διακριτή χρονική στιγμή, έχοντας δυστυχώς όλα τα προβλήματα που μπορεί να εμφανιστούν, όπως συσσώρευση σφαλμάτων ακρίβειας, θορύβου μετρήσεων, wheel slip κ.ά.

Γνωρίζοντας τις θέσεις x, y του πλαισίου αναφοράς R και υπολογίζοντας τον προσανατολισμό από την παραπάνω σχέση, η θέση της πλατφόρμας εύκολα υπολογίζεται ως:

$$
T_p = \begin{bmatrix} \cos({}^{F}\theta_p) & -\sin({}^{F}\theta_p) & 0 & {}^{F}x \\ \sin({}^{F}\theta_p) & \cos({}^{F}\theta_p) & 0 & {}^{F}y \\ 0 & 0 & 0 & 0.2464 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.13}
$$

Η παραπάνω σχέση μπορεί να παρασταθεί και σε γωνίες Z-X-Z Euler, με βάση την παρακάτω μορφή:

$$
\vec{x}_p = \begin{bmatrix} {}^{F}x \\ {}^{F}y \\ 0.0957 \\ {}^{F}\theta_p \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.14}
$$

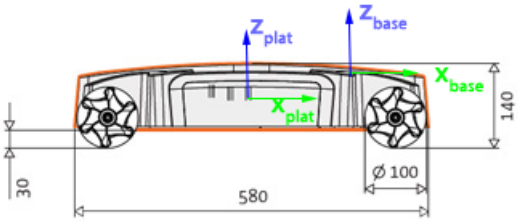
2.4 Κινηματική ανάλυση του συνολικού συστήματος.

Η κινηματική εξίσωση που περιγράφει την θέση του τελικού εργαλείου του youBot μπορεί να προκύψει κάνοντας χρήση των αποτελεσμάτων των προηγούμενων παραγράφων. Συγκεκριμένα, θεωρούμε ως δεδομένα την θέση ${}^{F}x$ και ${}^{F}y$ του συστήματος αναφοράς της πλατφόρμας, τον προσανατολισμό της ${}^{F}\theta_p$, καθώς και τις γωνίες των αρθρώσεων του βραχίονα. Ο μετασχηματισμός μεταξύ του πλαισίου αναφοράς της πλατφόρμας και του πλαισίου αναφοράς της βάσης του βραχίονα είναι σταθερός, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 2.4.

Με βάση τα παραπάνω κινηματικά δεδομένα, ο ομογενής μετασχηματισμός που δίνει την θέση και τον προσανατολισμό του τελικού εργαλείου δράσης διαμορφώνεται ως εξής:

$$
T_y = \begin{bmatrix} c_{1\theta}c_5 - c_{234}s_{1\theta}s_5 & -c_{1\theta}s_5 - c_{234}s_{1\theta}c_5 & s_{234}s_{1\theta} & x - 0.0013c_\theta - 0.1665s_\theta + c_1 s_\theta(0.193s_{234} + 0.135s_{23} + 0.155s_2 - 0.033) + c_\theta s_1(0.193s_{234} + 0.135s_{23} + 0.155s_2 - 0.033) \\ s_{1\theta}c_5 + c_{234}c_{1\theta}s_5 & -s_{1\theta}s_5 + c_{234}c_{1\theta}c_5 & -s_{234}c_{1\theta} & y + 0.1665c_\theta - 0.0013s_\theta - c_1 c_\theta(0.193s_{234} + 0.135s_{23} + 0.155s_2 - 0.033) + s_\theta s_1(0.193s_{234} + 0.135s_{23} + 0.155s_2 - 0.033) \\ s_{234}s_5 & s_{234}c_5 & c_{234} & 0.193c_{234} + 0.135c_{23} + 0.155cos(q2) + 0.2464 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.15}
$$

Ισοδύναμα, ο παραπάνω ομογενής μετασχηματισμός μπορεί να δοθεί μέσω των Z-X-Z γωνιών



Σχήμα 2.4: Πλάγια όψη της πλατφόρμας μαζί με το πλαίσιο αναφοράς της και το πλαίσιο αναφοράς της βάσης του βραχίονα.

Euler:

$$\vec{x}_y = \begin{bmatrix} x - 0.0013c_\theta - 0.1665s_\theta + c_1 s_\theta(0.193s_{234} + 0.135s_{23} + 0.155s_2 - 0.033) + c_\theta s_1(0.193s_{234} + 0.135s_{23} + 0.155s_2 - 0.033) \\ y + 0.1665c_\theta - 0.0013s_\theta - c_1 c_\theta(0.193s_{234} + 0.135s_{23} + 0.155s_2 - 0.033) + s_\theta s_1(0.193s_{234} + 0.135s_{23} + 0.155s_2 - 0.033) \\ 0.193c_{234} + 0.135c_{23} + 0.155c_2 + 0.2464 \\ q_1 + \theta \\ q_2 + q_3 + q_4 \\ q_5 \end{bmatrix} \tag{2.16}$$

2.5 Διαφορική κινηματική ανάλυση του συνολικού συστήματος.

2.5.1 Αναλυτική ιακωβιανή του συνολικού συστήματος.

Έχοντας καταστρώσει τις εξισώσεις που προσδιορίζουν τη θέση και τον προσανατολισμό του τελικού εργαλείου δράσης για το συνολικό σύστημα, το επόμενο βήμα είναι να καταστρώσουμε και τις εξισώσεις που θα μας δώσουν τη ταχύτητα του τελικού εργαλείου με βάση τις ταχύτητες όλως των παραμέτρων του συστήματος, δηλαδή της ταχύτητας των τροχών καθώς και της ταχύτητας των αρθρώσεων. Υπάρχουν διάφορες μεθοδολογίες που μας επιτρέπουν να συνδυάσουμε τις εξισώσεις της πλατφόρμας και του βραχίονα προκειμένου να το επιτύχουμε. Μια βασική κατηγορία εξ αυτών θεωρεί τα δύο αυτά συστήματα ως ξεχωριστά, και όλη η ανάλυση έγκειται στην υλοποίηση κατάλληλης μεθόδου ώστε να επιτευχθεί ομαλή συνεργασία αυτών των δύο συστημάτων. Άλλες μεθοδολογίες θεωρούν το πρόβλημα ως ένα μη γραμμικό πρόβλημα βελτιστοποίησης. Παρ' όλα αυτά, μια πιο φυσική ανάλυση μπορεί να πραγματοποιηθεί θεωρώντας το σύστημα ως μια ολότητα συνδυάζοντας κατάλληλα τόσο τις διαφορικές κινηματικές εξισώσεις της πλατφόρμας όσο και του βραχίονα [Seraji, 1998]. Με βάση τη μεθοδολογία αυτή, θεωρούμε αρχικά την ευθεία κινηματική εξίσωση του συστήματος, για την οποία έχουμε:

$$\begin{aligned} x = f(q_p, q_m) \quad \Rightarrow \quad \dot{x} &= \frac{\partial f}{\partial q_p}\dot{q}_p + \frac{\partial m}{\partial q_m}\dot{q}_m = J_p(q_p)\dot{q}_p + J_m(q_m)\dot{q}_m \Rightarrow \\ \dot{x} &= \begin{bmatrix} J_p(q_p) & J_m(q_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_p \\ \dot{q}_m \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2.17}$$

όπου $\dot{q}_p = \begin{bmatrix} {}^F\dot{x} & {}^F\dot{y} & {}^F\dot{\theta}_p \end{bmatrix}^T$ και $\dot{q}_m = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 & \dot{q}_2 & \dot{q}_3 & \dot{q}_4 & \dot{q}_5 \end{bmatrix}^T$.

Όμως σαν εισόδους στην πλατφόρμα θεωρούμε τις ταχύτητες των τροχών. Αυτές μπορούν να προκύψουν ως εξής:

$$\dot{q}_p = \begin{bmatrix} {}^F\dot{x} \\ {}^F\dot{y} \\ {}^F\dot{\theta}_p \end{bmatrix} = Rot_z({}^F\theta_p){}^R\vec{\dot{p}}_p = Rot_z({}^F\theta_p)\frac{R}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{l_{ab}} & 0 & -\frac{1}{l_{ab}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \omega_{1_x} \\ \omega_{2_x} \\ \omega_{3_x} \end{bmatrix} = G({}^F\theta_p)\begin{bmatrix} \omega_{1_x} \\ \omega_{2_x} \\ \omega_{3_x} \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

Συνεπώς, η εξίσωση 2.19 λαμβάνει την ακόλουθη μορφή:

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} J_p(q_p)G({}^F\theta_p) & J_m(q_m) \end{bmatrix}}_{J}\begin{bmatrix} u_p \\ u_m \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

με $u_p = \begin{bmatrix} \omega_{1_x} & \omega_{2_x} & \omega_{3_x} \end{bmatrix}^T$, $u_m = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 & \dot{q}_2 & \dot{q}_3 & \dot{q}_4 & \dot{q}_5 \end{bmatrix}^T$ και:

$$J_pG = \begin{bmatrix} -\frac{19}{3080000}(1665c_\theta - 10c_{1\theta}(-33+155s_2+135s_{23}+193s_{234})+3837s_\theta) & 0.0238c_\theta - 0.0238s_\theta & -\frac{19}{3080000}(2185c_\theta + 10c_{1\theta}(-33+155s_2+135s_{23}+193s_{234})+13s_\theta) \\ \frac{19}{3080000}(-1665s_\theta + 10s_{1\theta}(-33+155s_2+135s_{23}+193s_{234})+3837c_\theta) & 0.0238c_\theta + 0.0238s_\theta & \frac{1}{3080000}(-2185s_\theta - 10s_{1\theta}(-33+155s_2+135s_{23}+193s_{234})+13c_\theta) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0.062 & 0 & -0.062 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.20a)$$

$$J_m = \begin{bmatrix} (c_{1\theta}(0.193s_{234}+0.135s_{23}+0.155s_2-0.033)) & s_{1\theta}(0.193c_{234}+0.135c_{23}+0.155c_2) & s_{1\theta}(0.193c_{234}+0.135c_{23}) & 0.193c_{234}s_{1\theta} & 0 \\ (s_{1\theta}(0.193s_{234}+0.135s_{23}+0.155s_2-0.033)) & -c_{1\theta}(0.193c_{234}+0.135c_{23}+0.155c_2) & -c_{1\theta}(0.193c_{234}+0.135c_{23}) & -0.193c_{234}c_{1\theta} & 0 \\ 0 & -0.193s_{234}-0.135s_{23}-0.155s_2 & -0.193s_{234}-0.135s_{23}) & -0.193s_{234}) & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.20b)$$

Η παραπάνω ιακωβιανή αποτελεί την συνολική αναλυτική ιακωβιανή του συστήματος και μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε κάποιο σύστημα αντίστροφης κινηματικής κλειστού βρόχου. Ουσιαστικά, αντιμετωπίζουμε το συνολικό youBot με βάση αυτή την εξίσωση σαν έναν κλασσικό ρομποτικό βραχίονα και συνεπώς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε όλες τις διαθέσιμες μεθόδους αντίστροφης κινηματικής ανάλυσης που βρίσκονται στην βιβλιογραφία.

2.5.2 Γεωμετρική ιακωβιανή του συνολικού συστήματος.

Η γεωμετρική ιακωβιανή μπορεί να υπολογιστεί μέσω δύο μεθόδων. Με βάση την πρώτη μέθοδο, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η βάση ισοδυναμεί με μια στροφική άρθρωση γύρω από τον άξονα z και δυο πρισματικές αρθρώσεις ευθυγραμμισμένες με τους άξονες x και y αντίστοιχα. Έπειτα μπορούμε να την υπολογίσουμε μέσω των συνεχόμενων ομογενών μετασχηματισμών, όπως παρουσιάζεται και εδώ [Siciliano et al., 2009].

Με βάση την δεύτερη μέθοδο, αναζητούμε μετασχηματισμό της μορφής:

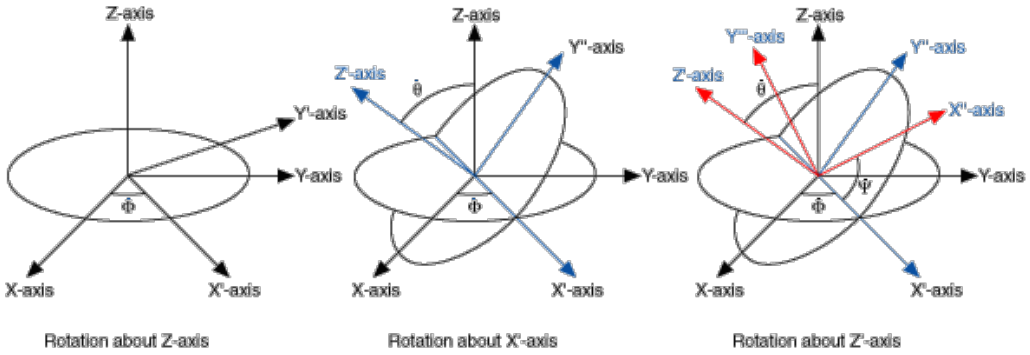
$$\vec{\omega}_e = K\vec{\dot{\phi}}_e$$

Με βάση το Σχήμα 2.5 μπορούμε να υπολογίσουμε την συνεισφορά κάθε περιστροφικής ταχύτητας στις συνιστώσες της γωνιακής ταχύτητας ως εξής:

- Λόγω ταχύτητας $\dot{\phi}$: $\begin{bmatrix} \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{bmatrix}^T = \dot{\phi}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$
- Λόγω ταχύτητας $\dot{\theta}$: $\begin{bmatrix} \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{bmatrix}^T = \dot{\theta}\begin{bmatrix} c_\phi & s_\phi & 0 \end{bmatrix}^T$
- Λόγω ταχύτητας $\dot{\psi}$: $\begin{bmatrix} \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{bmatrix}^T = \dot{\psi}\begin{bmatrix} s_\phi s_\theta & -c_\phi s_\theta & c_\theta \end{bmatrix}^T$

οπότε συνολικά έχουμε ότι:

$$\vec{\omega}_e = \begin{bmatrix} 0 & c_\phi & s_\phi s_\theta \\ 0 & s_\phi & -c_\phi s_\theta \\ 1 & 0 & c_\theta \end{bmatrix}\vec{\dot{\phi}}_e \quad (2.21)$$



Σχήμα 2.5: Σύνθεση στοιχειωδών περιστροφών για τον υπολογισμό της γωνιακής ταχύτητας.

Πολλαπλασιάζοντας με τις τελευταίες 3 γραμμές της ιακωβιανής, η γεωμετρική ιακωβιανή προκύπτει ως εξής:

$$J_pG = \begin{bmatrix} -\frac{19}{3080000}(1665c_\theta - 10c_{1\theta}(-33+155s_2+135s_{23}+193s_{234})+3837s_\theta) & 0.0238c_\theta - 0.0238s_\theta & -\frac{19}{3080000}(2185c_\theta + 10c_{1\theta}(-33+155s_2+135s_{23}+193s_{234})+13s_\theta) \\ \frac{19}{3080000}(-1665s_\theta + 10s_{1\theta}(-33+155s_2+135s_{23}+193s_{234})+3837c_\theta) & 0.0238c_\theta + 0.0238s_\theta & \frac{1}{3080000}(-2185s_\theta - 10s_{1\theta}(-33+155s_2+135s_{23}+193s_{234})+13c_\theta) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0.062 & 0 & -0.062 \end{bmatrix} \tag{2.22a}$$

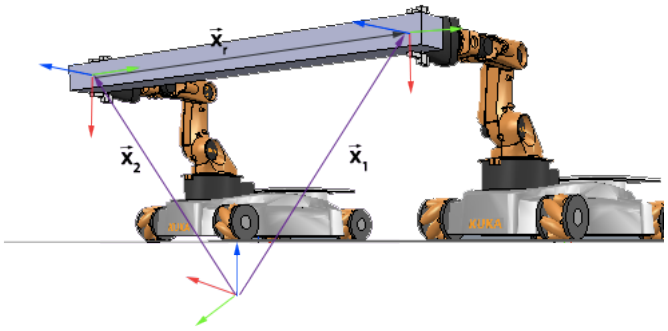
$$J_m = \begin{bmatrix} (c_{1\theta}(0.193s_{234}+0.135s_{23}+0.155s_2-0.033)) & s_{1\theta}(0.193c_{234}+0.135c_{23}+0.155c_2) & s_{1\theta}(0.193c_{234}+0.135c_{23}) & 0.193c_{234}s_{1\theta} & 0 \\ (s_{1\theta}(0.193s_{234}+0.135s_{23}+0.155s_2-0.033)) & -c_{1\theta}(0.193c_{234}+0.135c_{23}+0.155c_2) & -c_{1\theta}(0.193c_{234}+0.135c_{23}) & -0.193c_{234}c_{1\theta} & 0 \\ 0 & -0.193s_{234}-0.135s_{23}-0.155s_2 & -0.193s_{234}-0.135s_{23}) & -0.193s_{234}) & 0 \\ 0 & c_{1\theta} & c_{1\theta} & c_{1\theta} & s_{234}s_{1\theta} \\ 0 & s_{1\theta} & s_{1\theta} & s_{1\theta} & -s_{234}c_{1\theta} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & c_{234} \end{bmatrix} \tag{2.22b}$$

Σε αυτό το σημείο έχει ολοκληρωθεί η κινηματική ανάλυση του συνολικού συστήματος, μέσω της σύνθεσης των δύο διακριτών μερών του, δηλαδή της πλατφόρμας και του βραχίονα. Έχοντας καταστρώσει όλες τις προηγούμενες εξισώσεις, αναλύεται παρακάτω η μέθοδος που αναπτύχθηκε σε πρώτο στάδιο και η οποία απορρίφθηκε στην συνέχεια, για λόγους που θα γίνουν εμφανέστεροι παρακάτω. Έπειτα, θα αναλυθεί η καταληκτική μέθοδος, η οποία βασίζεται στην θεωρία βελτιστοποίησης και δίνει πολύ καλύτερα αποτελέσματα.

Κεφάλαιο 3

Συνεργασία τροχοφόρων ρομποτικών βραχιόνων.

Σκοπός των δύο πανομοιότυπων ρομποτικών συστημάτων είναι να μεταφέρουν ένα αντικείμενο, το οποίο μοντελοποιείται σε μορφή ράβδου, από μια προκαθορισμένη εφικτή αρχική θέση σε μία καθορισμένη τελική εφικτή θέση, διατηρώντας καθ' όλη την διάρκεια σταθερή λαβή, $\|\vec{x}_1 - \vec{x}_2\| = \|\vec{x}_r\|$, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 3.1. Συνεπώς, το συνολικό σύστημα αποτελεί μια κλειστή κινηματική αλυσίδα και ο συνολικός βαθμός ελευθερίας είναι μικρότερος του αθροιστικού, δηλαδή 16. Για την ακρίβεια, αυτός μπορεί να υπολογιστεί μέσω του τύπου του Grübler, [Tsai, 2008]. Προς τούτο, αρχικά επικεντρωνόμαστε στην πλατφόρμα. Αποτελείται από 4 mecanum τροχούς, έκαστος 3 DoF. Συνεπώς, από τον τύπο του Grübler για επίπεδους μηχανισμούς οι βαθμοί ελευθερίας της πλατφόρμας είναι:



Σχήμα 3.1: Περιορισμός για σταθερή λαβή των δύο youBot.

$$M = 3 \cdot (N - 1 - J) + \sum_{i=1}^{J} f_i = 3 \cdot (2 - 1 - 4) + \sum_{i=1}^{4} 3 = 3 \tag{3.1}$$

Με βάση το παραπάνω αποτέλεσμα, για να αποκτήσουμε τον βαθμό ελευθερίας της συνολικής διάταξης, μοντελοποιούμε την πλατφόρμα σαν μια επίπεδη άρθρωση 3 DoF. Συνεπώς, οι βαθμοί ελευθερίας της συνολικής κινηματικής αλυσίδας είναι:

$$M = 6 \cdot (N - 1 - J) + \sum_{i=1}^{J} f_i = 6 \cdot (12 - 1 - 12) + 2 \cdot (3 + \sum_{i=1}^{5} 1) = 10 \tag{3.2}$$

3.1 Αρχική προσέγγιση.

Σε ένα πρώτο στάδιο, με βάση τη μεθοδολογία που αναπτύχθηκε στο [Chiaccio et al., 1996], η οποία αναφέρεται αμιγώς σε ρομποτικούς βραχίονες, πραγματοποιήθηκε η εφαρμογή της στην περίπτωση που εξετάζουμε.

3.1.1 Ευθεία κινηματική.

Αρχικά, ορίζονται η απόλυτη και η σχετική θέση του συστήματος ως εξής:

$$\begin{aligned} \vec{p}_a &= \frac{1}{2}(\vec{p}_L + \vec{p}_F) \\ \vec{p}_r &= \vec{p}_F - \vec{p}_L \end{aligned}$$

και ο απόλυτος και σχετικός προσανατολισμός:

$$\begin{aligned} R_a &= R_L R_{k_{LF}} \left(\frac{\theta_{12}}{2}\right) \\ R_r &= R_F^L \end{aligned}$$

όπου k_{LF} είναι το μοναδιαίο διάνυσμα που πραγματοποιεί την περιστροφή από το πλαίσιο του δεύτερου ρομπότ στο πρώτο ενώ θ_{LF} η αντίστοιχη γωνία, και $R_F^L = R_L^T R_F$. Σε επίπεδο ταχυτήτων οι προηγούμενες σχέσεις λαμβάνουν την ακόλουθη μορφή:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{p}}_a &= \frac{1}{2}(\dot{\vec{p}}_L + \dot{\vec{p}}_F) \\ \dot{\vec{p}}_r &= \dot{\vec{p}}_F - \dot{\vec{p}}_L \\ \vec{\omega}_a &= \frac{1}{2}(\vec{\omega}_L + \vec{\omega}_F) \\ \vec{\omega}_r &= \vec{\omega}_F - \vec{\omega}_L \end{aligned}$$

3.1.2 Αντίστροφη κινηματική.

Με βάση την ευθεία διαφορική κινηματική του κάθε συστήματος ξεχωριστά, η οποία έχει αναπτυχθεί προηγουμένως, και αναλύοντας τη ταχύτητα στις δύο συνιστώσες, δηλαδή την απόλυτη και την σχετική ταχύτητα, η ευθεία διαφορική κινηματική του συνολικού συστήματος λαμβάνει την ακόλουθη μορφή:

$$\begin{bmatrix} \dot{\vec{p}}_a \\ \omega_a \\ \dot{\vec{p}}_r \\ \omega_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}J_L & \frac{1}{2}J_F \\ -J_L & J_F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_L \\ \dot{q}_F \end{bmatrix}$$

Θεωρώντας ως ιακωβιανή του συνολικού συστήματος J αυτή που διαμορφώνεται προηγουμένως, τότε διαμορφώνουμε το σύστημα κλειστού βρόχου που χαρακτηρίζεται από την παρακάτω εξίσωση:

$$K\vec{e} = J\dot{\vec{q}}$$

όπου K είναι ένας διαγώνιος πίνακας κερδών και $\vec{e}$ είναι το σφάλμα της τωρινής με την επιθυμητή θέση:

$$\vec{e} = \begin{bmatrix} \vec{e}_a \\ \vec{e}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{p}_{ad} - \vec{p}_a \\ \frac{1}{2}\left(\vec{n}_a \times \vec{n}_{ad} + \vec{s}_a \times \vec{s}_{ad} + \vec{a}_a \times \vec{a}_{ad}\right) \\ R_a\vec{p}_{rd} - \vec{p}_r \\ \frac{1}{2}R_1\left(\vec{n}_r \times \vec{n}_{rd} + \vec{s}_r \times \vec{s}_{rd} + \vec{a}_r \times \vec{a}_{rd}\right) \end{bmatrix}$$

Σημειώνεται ότι για λόγους ευκολίας, η σχετική θέση $\vec{p}_{rd}$ του leader και του follower είναι βολικότερο να οριστεί στο απόλυτο σύστημα μεταφοράς, στο οποίο για δεδομένη σταθερή άρθρωση είναι ένα σταθερό διάνυσμα. Επιπλέον, τα διανύσματα $\vec{n}$, $\vec{s}$ και $\vec{a}$ αποτελούν τις στήλες της αντίστοιχης μήτρας προσανατολισμού.

Το σύστημά μας είναι κινηματικά πλεονάζον, οπότε η αντιστροφή της ιακωβιανής μήτρας θα πρέπει να γίνει με κάποια μέθοδο ψευδοαντιστρόφου. Η χρήση της ψευδοαντίστροφης μήτρας κατά Moore-Penrose δεν είναι κατάλληλη, καθώς κοντά σε ιδιόμορφες διατάξεις, οι οποίες εμφανίζονται

αρκετά συχνά λόγω της κλειστής κινηματικής αλυσίδας, οι ταχύτητες που θα υπολογιστούν θα παραβιάζουν τα όρια ταχυτήτων των αρθρώσεων και θα παρουσιαστεί ανεπιθύμητη συμπεριφορά. Έτσι, προτιμάται η χρήση της μεθόδου αντιστροφής των αποσβεννύμενων ελαχίστων τετραγώνων, η οποία ορίζει τον αντίστροφο ως εξής:

$$J^{\dagger} = J^T \left(JJ^T + \lambda^2 J\right)^{-1} = \sum_i \frac{\sigma_i}{\sigma_i + \lambda_i^2} \vec{v}_i \vec{u}_i^T$$

οπού τα διανύσματα $\vec{v}_i$ και $\vec{u}_i$ υπολογίζονται μέσω της διάσπασης ιδιοτιμής και σ_i η αντίστοιχη ιδιοτιμή. Η μέθοδος αυτή αποτελεί ουσιαστικά έναν συμβιβασμό μεταξύ της ακρίβειας της λύσης και της ταχύτητας των αρθρώσεων, έτσι ώστε να περιοριστεί το μέγεθός της κοντά στις ιδιόμορφες διατάξεις. Σημαντικό παράγοντα επομένως έχει η επιλογή της παραμέτρου λ_i. Μια μέθοδος επιλογής της παραμέτρου αυτής για κάθε ιδιοτιμή μπορεί να πραγματοποιηθεί ως εξής:

$$\lambda_i^2 = \begin{cases} 0 & , \sigma_i \geq \epsilon \\ \left(1 - \left(\frac{\sigma_i}{\epsilon}\right)^2\right)^2 \lambda_{max}^2 & , \sigma_i < \epsilon \end{cases}$$

όπου το λ_{max} ορίζει τη μέγιστη τιμή του συντελεστή απόσβεσης, ενώ το ϵ ορίζει το μέγεθος της ιδιόμορφης περιοχής. Στο youBot του περιβάλλοντος προσομοίωσης παρατηρήθηκε ότι η ιδιοτιμή κάτω από την οποία αρχίζουν να εμφανίζονται προβλήματα είναι περίπου $\epsilon = 0.0025$.

Με χρήση αυτής της μεθόδου ψευδοαντιστροφής, καταλήγουμε στην ακόλουθη εξίσωση:

$$\dot{\vec{q}} = J^{\dagger}(K\vec{e}) + (I - J^{\dagger}J)\dot{\vec{q}}_0$$

όπου το διάνυσμα $\dot{\vec{q}}_0$ μπορεί να χρησιμοποιηθεί προκειμένου να εισαχθούν στην λύση κάποιες δευτερεύουσες συμπεριφορές, όπως αποφυγή μηχανικών ορίων, μεγιστοποίηση της ικανότητας χειρισμού, αποφυγή εμποδίων κ.λπ.

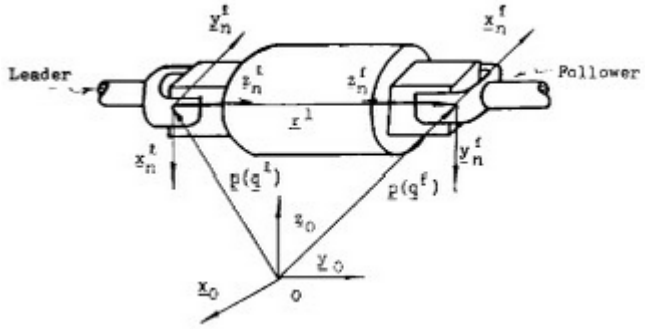
Συμπερασματικά, το πρόβλημα του μεγέθους των υπολογιζόμενων ταχυτήτων μπορεί κατά κάποιο τρόπο να αποφευχθεί με χρήση της προαναφερθείσας μεθόδου θυσιάζοντας όμως την ακρίβεια. Στην περίπτωση όμως που η τελική θέση έχει μοναδική λύση σε ιδιόμορφη διάταξη, όπως π.χ. αν απαιτείται έκταση και των δύο βραχιόνων στο μέγιστο ύψος, τότε η σύγκλιση παρουσιάζει σοβαρά προβλήματα. Άλλο ένα πρόβλημα που παρουσιάζει η μέθοδος αυτή είναι ότι οι υπολογιζόμενες εντολές ταχυτήτων μπορεί να οδηγήσουν το συνολικό σύστημα σε κλείδωμα, δηλαδή η διάταξη οδηγείται σε κάποια ιδιομορφία που οι υπολογιζόμενες εντολές ταχύτητας δεν είναι δυνατόν να παράξουν κίνηση. Επίσης, η σχετική λαβή των δύο μηχανισμών, παρ' όλο που επιλέγεται να είναι σταθερή, όπως είναι ξεκάθαρο από την προηγούμενη ανάλυση, δεν είναι απαραίτητο να συμβαίνει. Το λάθος της σχετικής θέσης $\vec{e}_r$ δεν είναι πάντα μηδενικό καθώς, ακόμα και αν επιλέξουμε πολύ μεγάλο κέρδος στις αντίστοιχες στήλες της μήτρας K, αυτό δεν μπορεί να εξασφαλιστεί.

Αυτά τα προβλήματα οδήγησαν στην τελική εγκατάλειψη αυτής της μεθόδου και στην αναζήτηση λύσης η οποία δεν θα απαιτεί την αντιστροφή της ιακωβιανής, και θα λαμβάνει υπόψη τυχόν περιορισμούς, όπως τα όρια των αρθρώσεων και των ταχυτήτων, τον περιορισμό για σταθερή λαβή, καθώς και ό,τι άλλους περιορισμούς επιθυμούμε να ορίσουμε, κατά αυστηρό τρόπο. Έτσι επιλέχθηκε να διατυπωθεί το πρόβλημα σαν πρόβλημα βελτιστοποίησης, στο οποίο μπορούμε να ορίσουμε περιορισμούς που θα ικανοποιούνται κατά εύρεση της βέλτιστης λύσης.

3.2 Περιορισμοί για δύο ρομπότ που μεταχειρίζονται ένα στερεό αντικείμενο.

Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, σκοπός των δύο ρομπότ είναι να μεταφέρουν ένα στερεό αντικείμενο από μια αρχική θέση σε μια προκαθορισμένη εφικτή τελική θέση. Κατά τη διάρκεια της κίνησης είναι απαραίτητο η λαβή του κάθε ρομπότ να ικανοποιεί κάποιους περιορισμούς, καθώς

θεωρούμε ότι αυτή είναι σταθερή, υπό την έννοια ότι δεν επιτρέπεται σχετική κίνηση και αλλαγή προσανατολισμού. Με αναφορά στα Σχήματα 3.1 και 3.2 οι ολονομικοί περιορισμοί για την θέση μπορούν να μοντελοποιηθούν ως εξής:



Σχήμα 3.2: Περιορισμός για σταθερή λαβή ως προς τα τελικά εργαλεία.

$$p(q^L) + R_0^e(q^L)r^l - p(q^F) = 0 \tag{3.3}$$

ενώ για τον προσανατολισμό είτε μέσω των μητρών περιστροφής είτε μέσω των γωνιών Euler:

$$R_0^e(q^L)^T R_0^e(q^F) = C : \text{Σταθερός πινακας} \tag{3.4a}$$

$$o(q^L) - o(q^F) = \text{Σταθερό} \tag{3.4b}$$

όπου επιλέγουμε τη δεύτερη σχέση λόγω του μικρότερου αριθμού απαραίτητων παραμέτρων. Επομένως, οι περιορισμοί θέσης αποτελούν 3 μη γραμμικές εξισώσεις, ενώ οι περιορισμοί προσανατολισμού αποτελούν άλλες 3 γραμμικές εξισώσεις.

Σε επίπεδο ταχυτήτων το παραπάνω σύστημα είναι γραμμικό και διαμορφώνεται ως εξής:

$$[J_{\text{γραμ.}}(q^L) + \frac{\partial(R_0^e(q^L)r^l)}{\partial q^L}]\dot{q}^L - J_{\text{γραμ.}}(q^F)\dot{q}^F = 0 \tag{3.5a}$$

$$J_{\text{γων.}}(q^L)\dot{q}^L - J_{\text{γων.}}(q^F)\dot{q}^F = 0 \tag{3.5b}$$

όπου, λόγω γραμμικότητας, οι γωνιακές ιακωβιανές είναι σταθερές.

Τέλος σημειώνεται ότι οι δείκτες L:Leader και F:Follower χρησιμοποιούνται προκειμένου να μπορούμε να ξεχωρίσουμε τα δυο ρομπότ. Επίσης, παρόμοια ανάλυση θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί στην περίπτωση που αντί για ένα σταθερό αντικείμενο είχαμε κάποιο εργαλείο, π.χ. πένσα, ή σφαιρική άρθρωση κ.λπ.

3.3 Διαμόρφωση των συνθηκών του προβλήματος.

Για την πραγματοποίηση της συνεργασίας των δύο ρομποτικών συστημάτων, θα διαμορφωθεί ένα πρόβλημα μη γραμμικής βελτιστοποίησης και στη συνέχεια θα αναλυθεί η διαδικασία επίλυσής του. Αρχικά διαμορφώνουμε τους περιορισμούς.

3.3.1 Μεταβλητές κατάστασης.

Ως μεταβλητές κατάστασης για κάθε youBot θεωρούμε τις $\begin{bmatrix} x & y & \theta & q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & q_5 \end{bmatrix}^T$, η γνώση των οποίων μας δίνει επακριβώς τη θέση και τον προσανατολισμό του τελικού εργαλείου δράσης. Οι 3 πρώτες αναφέρονται ως προς την πλατφόρμα, ενώ οι 5 τελευταίες αφορούν τον βραχίονα.

3.3.2 Ισοτικοί περιορισμοί.

Σύμφωνα με την ανάλυση της παραγράφου 3.1, υπάρχουν 3 μη γραμμικοί και 3 γραμμικοί ισοτικοί περιορισμοί που πρέπει να ικανοποιούνται πάντα. Μάλιστα, ο τελευταίος ισοτικός περιορισμός είναι της μορφής:

$$q_5^L = q_5^F$$

και συνεπώς μπορεί να αντικατασταθεί στις προηγούμενες σχέσεις και να απαλειφθεί από το πρόβλημα. Πραγματοποιώντας τις απαραίτητες αντικαταστάσεις, με την βοήθεια και των ισοτικών περιορισμών, οι 5 αυτοί περιορισμοί λαμβάνουν την ακόλουθη μορφή:

$$\begin{aligned} x^L - x^F - 0.0013(c_\theta^L - c_\theta^F) - 0.1665(s_\theta^L - s_\theta^F) + c_{q_1+\theta}^L(r_x c_{q_5}^L - r_y s_{q_5}^L) + s_{q_1+\theta}^L[0.135(s_{q_2}^L - s_{q_2}^F) + \\ + 0.155(s_{q_2+q_3}^L - s_{q_2+q_3}^F) - c_{q_2+q_3+q_4}^L(r_y c_{q_5}^L + r_x s_{q_5}^L) + r_z s_{q_2+q_3+q_4}^L] = 0 \end{aligned} \quad (3.6a)$$

$$\begin{aligned} y^L - y^F + 0.1665(c_\theta^L - c_\theta^F) - 0.0013(s_\theta^L - s_\theta^F) + s_{q_1+\theta}^L(r_x c_{q_5}^L - r_y s_{q_5}^L) - c_{q_1+\theta}^L[0.155(s_{q_2}^L - s_{q_2}^F) + \\ + 0.135(s_{q_2+q_3}^L - s_{q_2+q_3}^F) - c_{q_2+q_3+q_4}^L(r_y c_{q_5}^L + r_x s_{q_5}^L) + r_z s_{q_2+q_3+q_4}^L] = 0 \end{aligned} \quad (3.6b)$$

$$0.155(c_{q_2}^L - c_{q_2}^F) + 0.135(c_{q_2+q_3}^L - c_{q_2+q_3}^F) + s_{q_2+q_3+q_4}^L(r_y c_{q_5}^L + r_x s_{q_5}^L) + r_z c_{q_2+q_3+q_4}^L] = 0 \quad (3.6c)$$

$$q_1^L - q_1^F + \theta^L - \theta^F = 0 \quad (3.6d)$$

$$q_2^L - q_2^F + q_3^L - q_3^F + q_4^L - q_4^F = 0 \quad (3.6e)$$

Οι περιορισμοί αυτοί πρέπει να ικανοποιούνται κάθε χρονική στιγμή προκείμενου τα δυο ρομπότ να έχουν πάντα σταθερή λαβή ως προς το αντικείμενο.

3.3.3 Ανισοτικοί περιορισμοί.

Έκτος από τους παραπάνω ισοτικούς περιορισμούς, πρέπει να λάβουμε και υπόψη και τα όρια των μεταβλητών, τόσο σε επίπεδο μηχανικών ορίων των αρθρώσεων όσο και σε επίπεδο ταχυτήτων. Τα όρια των μηχανικών αρθρώσεων δίνονται από τον κατασκευαστή και μπορούν να εκφραστούν στην ακόλουθη μορφή:

$$q_{min_i} \leq q_i \leq q_{max_i} \quad (3.7)$$

με $q_{min} = -\begin{bmatrix}169° & 65° & 150° & 102° & 169°\end{bmatrix}^T$, $q_{max} = \begin{bmatrix}169° & 90° & 146° & 102° & 169°\end{bmatrix}^T$ σε rad. Όρια για τις μεταβλητές x, y, θ δεν υπάρχουν, καθώς μπορούμε να έχουμε οποιαδήποτε θέση στο επίπεδο και οποιοδήποτε προσανατολισμό της πλατφόρμας.

Για τα όρια των ταχυτήτων πρέπει να είμαστε πιο προσεκτικοί. Ο κατασκευαστής δίνει κάποια όρια τόσο για την πλατφόρμα όσο και για τις αρθρώσεις. Αυτά δίνονται παρακάτω, για τους τροχούς και τις αρθρώσεις ξεχωριστά:

$$-16rad/sec \leq \omega_i \leq 16rad/sec \quad (3.8a)$$

$$-2.5rad/sec \leq \dot{q}_i \leq 2.5rad/sec \quad (3.8b)$$

Επιπλέον για τις αρθρώσεις πρέπει να λάβουμε υπόψη και τον παρακάτω περιορισμό λόγω της διακριτοποίησης, θεωρώντας για την επόμενη θέση πως $q_{k+1} \approx q_k + \dot{q}_k T$:

$$\frac{q_{min_i} - q_k}{T} \leq \dot{q}_k \leq \frac{q_{max_i} - q_k}{T} \quad (3.9)$$

Τέλος, εφόσον το ρομπότ μπορεί να αναπτύξει κάποια πεπερασμένη επιτάχυνση, πρέπει να τη λάβουμε στα όρια των ταχυτήτων. Προς τούτο υποθέτουμε ότι πρέπει να σταματήσουμε την κίνηση του ρομπότ, με τον γρηγορότερο δυνατό τρόπο, δηλαδή με μέγιστη επιβράδυνση a_{max} έτσι ώστε να παραμείνουμε στα όρια των αρθρώσεων. Τότε, για κάποια χρονική στιγμή $t > t_k$ έχουμε για κάποια άρθρωση:

$$\begin{aligned} q(t) &= q_k + \dot{q}_k(t - t_k) - \frac{a_{max}}{2}(t - t_k)^2 \\ \dot{q}(t) &= \dot{q}_k - a_{max}(t - t_k) \end{aligned}$$

Στην πιο ακραία περίπτωση θα φτάσουμε κάποιο όριο στις αρθρώσεις, είτε το πάνω είτε το κάτω. Με βάση τις προηγούμενες σχέσεις, προκειμένου να μην συμβεί αυτό, αρκεί να περιορίσουμε τις ταχύτητες ως εξής:

$$-\sqrt{2a_{max}(q_k - q_{min_i})} \leq \dot{q}_k \leq \sqrt{2a_{max}(q_{max_i} - q_k)} \tag{3.10}$$

Τοποθετώντας όλες μαζί τις προηγούμενες ανισότητες, έχουμε τους περιορισμούς ταχύτητας 3.9a για τους τροχούς, ενώ για τις αρθρώσεις:

$$max\left\{\frac{q_{min_i} - q_k}{T}, \dot{q}_{min_i}, -\sqrt{2a_{max}(q_k - q_{min_i})}\right\} \leq \dot{q}_k \leq min\left\{\frac{q_{max_i} - q_k}{T}, \dot{q}_{max_i}, \sqrt{2a_{max}(q_{max_i} - q_k)}\right\} \tag{3.11}$$

3.4 Το πρόβλημα σε επίπεδο αρθρώσεων.

Στο επίπεδο της θέσης των αρθρώσεων το πρόβλημα διαμορφώνεται με βάση τις εξισώσεις στην Σχέση 3.6 και τους περιορισμούς στα όρια της Σχέσης 3.7. Ουσιαστικά πρόκειται για ένα πρόβλημα επίλυσης μη γραμμικών εξισώσεων με όρια για κάποιες από τις μεταβλητές, το οποίο αποτελεί ένα πολύ δύσκολο πρόβλημα. Μάλιστα, ο χώρος των δυνατών διατάξεων του συνολικού συστήματος διαμορφώνεται με βάση αυτές. Φυσικά, δεν αρκεί μόνο η λύση του προβλήματος αλλά και η εύρεση διαδρομής στο χώρο αυτό που θα μας οδηγεί στην επιθυμητή τελική θέση. Συνεπώς, ο χώρος των δυνατών διατάξεων διαμορφώνεται ως εξής:

$$\mathcal{C}_{clo} = \{q \in \mathcal{C} : \forall f_i, f_i(q) = 0, q_{min} \leq q \leq q_{max}\}$$

Ένας δυνατός τρόπος επίλυσης θα ήταν συνεπώς η αναζήτηση σε αυτό τον χώρο με χρήση κάποιου αλγορίθμου αναζήτησης, όπως π.χ. τον A^*. Αν περάσουμε όμως σε επίπεδο ταχυτήτων, το πρόβλημα είναι πολύ πιο εύκολα επιλύσιμο.

3.5 Επίλυση σε επίπεδο ταχυτήτων.

Με βάση την ιακωβιανή που έχει παρουσιαστεί στο προηγούμενο κεφάλαιο, η συνολική ιακωβιανή του συστήματος μπορεί να διαμορφωθεί ως εξής:

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix} \tag{3.12}$$

όπου J_1, J_2 αποτελούν τις ιακωβιανές του κάθε ρομπότ ξεχωριστά.

Με σκοπό την διαμόρφωση ενός συστήματος κλειστού βρόχου υπολογίζουμε το σφάλμα της παρούσας θέσης και προσανατολισμού για τον leader ως προς την επιθυμητή θέση και τον επιθυμητό προσανατολισμό, και της παρούσας θέσης και προσανατολισμού του follower ως προς το επιθυμητό. Το σφάλμα για τον καθένα ξεχωριστά, θεωρώντας ότι έχουμε διαθέσιμους τους ομογενείς μετασχηματισμούς T_d που αφορά την επιθυμητή τελική θέση, T_1 που αφορά την παρούσα θέση τον leader και T_2 που αφορά την παρούσα θέση τον follower, υπολογίζεται ως εξής:

$$e_L = \begin{bmatrix} p_d - p_1 \\ o_{e_1} \end{bmatrix} \tag{3.13a}$$

$$e_F = \begin{bmatrix} p_d + R_d r^l - p_2 \\ o_{e_2} \end{bmatrix} \tag{3.13b}$$

όπου το σφάλμα προσανατολισμού υπολογίζεται δοθέντος των μητρών επιθυμητού προσανατολισμού $R_d = \begin{bmatrix} \vec{n}_d & \vec{s}_d & \vec{a}_d \end{bmatrix}$, προσανατολισμού του τελικού εργαλείου του leader $R_1 = \begin{bmatrix} \vec{n}_1 & \vec{s}_1 & \vec{a}_1 \end{bmatrix}$ και προσανατολισμού του τελικού εργαλείου του follower $R_2 = \begin{bmatrix} \vec{n}_2 & \vec{s}_2 & \vec{a}_2 \end{bmatrix}$ ως εξής:

$$o_{e_1} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_d + \vec{s}_1 \times \vec{s}_d + \vec{a}_1 \times \vec{a}_d \tag{3.14a}$$

$$o_{e_2} = \vec{n}_2 \times \vec{n}_d + \vec{s}_2 \times \vec{s}_d + \vec{a}_2 \times \vec{a}_d \tag{3.14b}$$

με το σύμβολο $\times$ να υποδηλώνει εξωτερικό γινόμενο. Συνεπώς, το συνολικό σφάλμα διαμορφώνεται ως:

$$e = \begin{bmatrix} e_L \\ e_F \end{bmatrix} \tag{3.15}$$

Σε επίπεδο ταχυτήτων, διαμορφώνουμε μια αντικειμενική συνάρτηση προς ελαχιστοποίηση, η οποία θα έχει ως στόχο να μηδενίζει το παραπάνω σφάλμα. Με βάση την ευθεία διαφορική κινηματική ανάλυση η συνάρτηση αυτή μπορεί να υπολογιστεί με τον ακόλουθο τρόπο:

$$F = \|f(q) - x_d\|_2^2 \approx \|x + J\dot{q}dt - x_d\|_2^2 \text{ ή } F(\dot{q}) = \|J\dot{q}dt - e\|_2^2$$

Η συνάρτηση αυτή παρουσιάζει ένα ολικό ελάχιστο στην επιθυμητή θέση. Για την συνάρτηση αυτή έχουμε:

$$\begin{aligned} \|J\dot{q}dt - e\|_2^2 &= [J\dot{q}dt - e]^T [J\dot{q}dt - e] = dt^2 \dot{q}^T J^T J\dot{q} - dt\dot{q}^T J^T e - dte^T J\dot{q} + e^T e = \\ &= dt^2 \dot{q}^T J^T J\dot{q} - 2dte^T J\dot{q} + e^T e \end{aligned} \tag{3.16}$$

Συνεπώς, το πρόβλημα ελαχιστοποίησης διαμορφώνεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \min_{\dot{q}}. \quad & \dot{q}^T H\dot{q} + h^T \dot{q} \\ \text{s. t.} \quad & M\dot{q} = 0 \\ & \dot{q}_{min} \leq \dot{q} \leq \dot{q}_{max} \end{aligned} \tag{3.17}$$

με $H = dt^2 J^T J$ και $h = -2dtJ^T e$. Μάλιστα, η μήτρα H είναι πάντα θετικά ημιορισμένη και συμμετρική. Το γεγονός ότι είναι θετικά ημιορισμένη φαίνεται ως εξής:

$$x^T Hx = dt^2 x^T J^T Jx = dt^2 (Jx)^T (Jx) \geq 0$$

όπου γίνεται μηδενική όταν κάποια από τις ιδιοτιμές μηδενίζεται, δηλαδή σε κάποιο singularity. Επιπρόσθετα έχουμε ότι:

$$H^T = dt^2 \left(J^T J\right)^T = dt^2 J^T \left(J^T\right)^T = dt^2 J^T J = H$$

άρα και συμμετρική.

Οι περιορισμοί του παραπάνω προβλήματος είναι γραμμικοί συνεπώς και κυρτοί. Επιπλέον, και η αντικειμενική συνάρτηση είναι κυρτή. Αυτό μπορεί να αποδειχθεί με απευθείας εφαρμογή της συνθήκης κυρτότητας. Αυτή ορίζει ότι για να είναι μια συνάρτηση κυρτή πρέπει να ικανοποιεί την ακόλουθη ανισότητα:

$$F(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda F(x) + (1-\lambda)F(y) \quad \forall \lambda \in [0,1]$$

Για $\lambda = 0$ ή για $\lambda = 1$ είναι εμφανές ότι ισχύει η ισότητα. Για $\lambda \in (0,1)$ έχουμε για τα δύο μέλη της ανίσωσης ξεχωριστά:

$$\begin{aligned}
F(\lambda x + (1-\lambda)y) &= [y + \lambda(x-y)]^T H[y + \lambda(x-y)] + h^T[y + \lambda(x-y)] = \\
&= y^T Hy + \lambda(x-y)^T Hy + \lambda y^T H(x-y) + \lambda^2(x-y)^T H(x-y) + \\
&\quad + h^T y + \lambda h^T(x-y) = \\
&= y^T Hy + 2\lambda(x-y)^T Hy + \lambda^2(x-y)^T H(x-y) + h^T y + \lambda h^T(x-y) \\
\lambda F(x) + (1-\lambda)F(y) &= \lambda x^T Hx + \lambda h^T x + (1-\lambda)y^T Hy + (1-\lambda)h^T y = \\
&= \lambda x^T Hx + y^T Hy - \lambda y^T Hy + h^T y + \lambda h^T(x-y)
\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας στην ανισότητα προς απόδειξη, αρκεί να δειχθεί ότι:

$$2\lambda(x-y)^T Hy + \lambda^2(x-y)^T H(x-y) \leq \lambda(x^T Hx - y^T Hy)$$

Όμως, επειδή το λ είναι θετικό και μικρότερο του 1, ισχύει η παρακάτω ανίσωση:

$$\lambda^2(x-y)^T H(x-y) \leq \lambda(x-y)^T H(x-y)$$

Συνεπώς, ξεκινώντας από το αριστερό μέλος της προς απόδειξη ανίσωσης και χρησιμοποιώντας την προηγούμενη προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned}
2\lambda(x-y)^T Hy + \lambda^2(x-y)^T H(x-y) &\leq 2\lambda(x-y)^T Hy + \lambda(x-y)^T H(x-y) = \\
&= \lambda(x-y)^T Hy - \lambda(x-y)^T Hx = \\
&= \lambda(x-y)^T H(x-y) = \\
&= \lambda(x^T Hx - y^T Hy)
\end{aligned}$$

Οπότε και απεδείχθη.

Συνεπώς, τόσο η αντικειμενική συνάρτηση όσο και οι περιορισμοί του προβλήματος είναι κυρτοί. Η κυρτότητα εξασφαλίζει την αρχική μας υπόθεση για την αντικειμενική συνάρτηση, δηλαδή την ύπαρξη ενός ολικού ελαχίστου. Εφόσον ο εφικτός χώρος είναι μη κενός, η βέλτιστη λύση βρίσκεται ανάμεσα στις εφικτές λύσεις του προβλήματος.

Υπολογιστικά, το παραπάνω πρόβλημα θα μπορούσε να λυθεί με κάποια μέθοδο τετραγωνικού προγραμματισμού, όπως π.χ. τη μέθοδο του Wolfe. Σημειώνεται ότι κατά την λύση του προβλήματος, επειδή οι περιορισμοί ταχύτητας δεν επιτρέπουν την απευθείας επίτευξη του ελαχίστου αυτού, σε κάθε βήμα της προσομοίωσης το πρόβλημα καταλήγει σε λύση στο σύνορο του εφικτού χώρου που ορίζουν οι περιορισμοί, με συνεπακόλουθη μείωση της αντικειμενικής συνάρτησης. Συνεπώς σε κάθε βήμα της διακριτοποίησης καταλήγουμε κάθε φορά όλο και πιο κοντά στο ολικό ελάχιστο, και συμπεραίνουμε ότι το συνολικό σύστημα καταλήγει τελικώς στην επιθυμητή θέση.

3.6 Αποφυγή μηχανικών ορίων των αρθρώσεων.

Η απευθείας εφαρμογή της παραπάνω μεθόδου, παρ' ότι μπορεί να οδηγήσει στο σύστημα στην επιθυμητή τελική θέση, αντιμετωπίζει κάποια προβλήματα. Ένα από τα πλέον σημαντικά συμβαίνει όταν κάποια άρθρωση από τα δύο ρομπότ φτάσει στα μηχανικά του όρια. Τότε, αυτή πρακτικά απενεργοποιείται και χάνεται η δυνατότητα επενέργησή της. Προκειμένου να αποφύγουμε τέτοιες ανεπιθύμητες καταστάσεις θα διαμορφώσουμε άλλο ένα τετραγωνικό πρόβλημα βελτιστοποίησης, το οποίο θα δίνει ταχύτητες, που πρέπει να υπερτεθούν στην ήδη υπολογισμένη και οι οποίες θα εξασφαλίσουν εσωτερικές κινήσεις που δεν θα αλλάζουν τη θέση και τον προσανατολισμό του τελικού εργαλείου, αλλά μόνο την εσωτερική διάταξη και θα εξασφαλίζουν την απομάκρυνση από τα μηχανικά όρια.

3.6.1 Αντικειμενική συνάρτηση.

Η συνάρτηση προς ελαχιστοποίηση θα πρέπει να παρουσιάζει ένα ολικό ελάχιστο στο μέσο κάθε άρθρωσης, έτσι ώστε η ελαχιστοποίηση να οδηγεί κατά το δυνατόν πιο κοντά σε αυτό. Μια τετραγωνική συνάρτηση που ικανοποιεί αυτό το κριτήριο αποτελεί η ακόλουθη:

$$f(\dot{q}) = \frac{(\dot{q}+c)^T(\dot{q}+c)}{2} \tag{3.18}$$

όπου ως c ορίζεται με βάση το μέσο της κάθε άρθρωσης ως εξής:

$$c = k_g(q - q_{mid}) \tag{3.19}$$

με $k_g > 0$ κάποιο κέρδος και $q_{mid} = \begin{bmatrix} 0° & 25° & -4° & 0° & 0° \end{bmatrix}^T$. Τέλος, η συνάρτηση αυτή είναι ίδιας μορφής με αυτή που επιλέχθηκε στο αρχικό πρόβλημα, και συνεπώς παρουσιάζει ακριβώς τις ίδιες ιδιότητες και τα ίδια χαρακτηριστικά που αναλύθηκαν για την αντικειμενική συνάρτηση του πρωτεύοντος.

3.6.2 Περιορισμοί.

Η ελαχιστοποίηση της παραπάνω συνάρτησης θα πρέπει να μας εξασφαλίσει ότι δεν θα υπάρξει διαταραχή του πρωτεύοντος στόχου, δηλαδή της επίτευξης της επιθυμητής τελικής θέσης. Με στόχο αυτό εισάγουμε τον παρακάτω περιορισμό:

$$J\dot{q}_m = 0 \tag{3.20}$$

η ικανοποίηση του οποίου αυτομάτως μας εξασφαλίζει ότι η νέα υπερτιθέμενη ταχύτητα βρίσκεται στον μηδενοχώρο της ιακωβιανής και συνεπώς το τελικό εργαλείο παραμένει αμετάβλητο καθώς:

$$J(\dot{q} + \dot{q}_m) = J\dot{q} + J\dot{q}_m = \dot{x} + 0 = \dot{x}$$

Επίσης, η νέα ταχύτητα δεν πρέπει να παραβιάζει τον περιορισμό ταχυτήτων των δύο ρομπότ. Συνεπώς εισάγουμε και τον ακόλουθο περιορισμό:

$$M\dot{q}_m = 0 \tag{3.21}$$

αλλά ούτε και τα όρια ταχυτήτων. Για να το επιτύχουμε αυτό έχουμε:

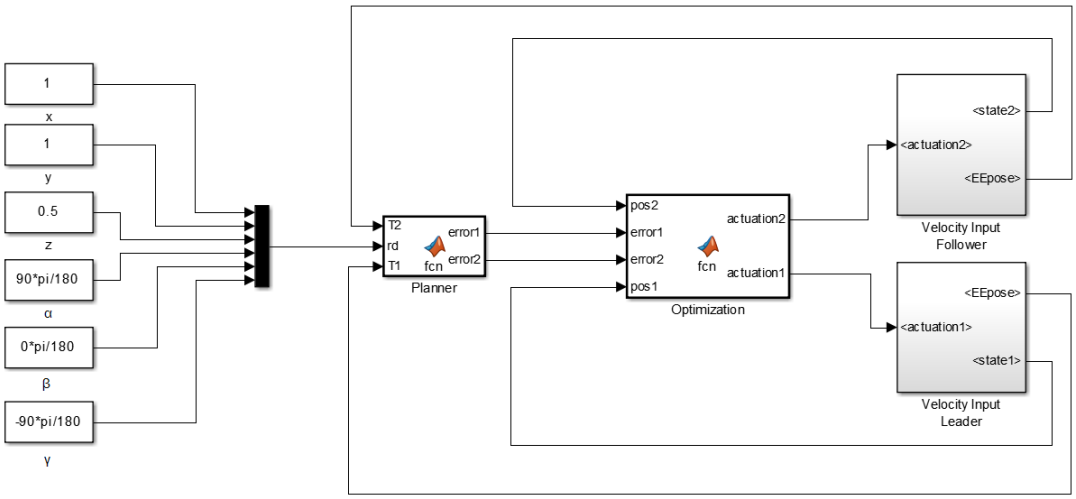
$$\dot{q}_{min} \leq \dot{q} + \dot{q}_m \leq \dot{q}_{max} \Rightarrow \dot{q}_{min} - \dot{q} \leq \dot{q}_m \leq \dot{q}_{max} - \dot{q} \tag{3.22}$$

Τέλος, αξίζει να σημειωθεί ότι η νέα αυτή ταχύτητα περιλαμβάνει και τις ταχύτητες των τροχών των βάσεων, οι οποίες όμως δεν υπεισέρχονται στην αντικειμενική συνάρτηση, παρά μόνο στους περιορισμούς. Με αυτό τον τρόπο εξασφαλίζουμε ότι και η πλατφόρμα θα κινηθεί με τέτοιο τρόπο ώστε να βρίσκονται οι μηχανικές αρθρώσεις κατά το δυνατό στο μέσο. Στις προσομοιώσεις που θα αναλυθούν στην συνέχεια αυτό γίνεται κυρίως εμφανές παρατηρώντας πως αφού η διάταξη έχει οδηγηθεί στην επιθυμητή θέση, οι πλατφόρμες κινούνται με τέτοιο τρόπο ώστε να βρεθεί η πρώτη άρθρωση στην θέση 0°.

Κεφάλαιο 4

Προσομοίωση προτεινόμενης μεθόδου.

Για την πειραματική επιβεβαίωση των όσων αναλύθηκαν στις προηγούμενες παραγράφους, πραγματοποιήσαμε μια σειρά προσομοιώσεων κάνοντας χρήση του περιβάλλοντος προσομοίωσης v-rep, σε συνεργασία με το Simulink. Ιεραρχικά, το Simulink πραγματοποιούσε αρχικά όλους τους υπολογισμούς, τους οποίους και τροφοδοτούσε στο v-rep, και στην συνέχεια λάμβανε ως ανατροφοδότηση τις μεταβλητές κατάστασης και των δύο ρομπότ, με διακριτοποίηση βήματος $dt = 0.05sec$. Το μοντέλο που χρησιμοποιήθηκε φαίνεται στην Εικόνα 4.1. Σημειώνεται ότι στην αριστερή πλευρά ο χρήστης ει-



Σχήμα 4.1: Το μοντέλο του συστήματος προσομοίωσης.

σάγει την επιθυμητή θέση και τον επιθυμητό προσανατολισμό, ο οποίος παραμετροποιείται με χρήση των RPY γωνιών, και οι οποίες αποτελούν τη σύμβαση που ακολουθεί το v-rep για τον προσανατολισμό όλων των αντικειμένων.

Στη συνέχεια προσομοιώθηκαν 4 σενάρια, τα οποία περιελάμβαναν για λόγους ποικιλίας τόσο κίνηση και στα 4 τεταρτημόρια του χώρου που ορίζει το περιβάλλον v-rep όσο και περιστροφές και προς τους τρεις άξονες. Για λόγους ευκολίας επιλέχθηκε σε κάθε περίπτωση να έχουμε ίδια αρχική κατάσταση και να αλλάζει μόνο ο τελικός στόχος. Η αρχική αυτή διάταξη φαίνεται στο Σχήμα 4.2.

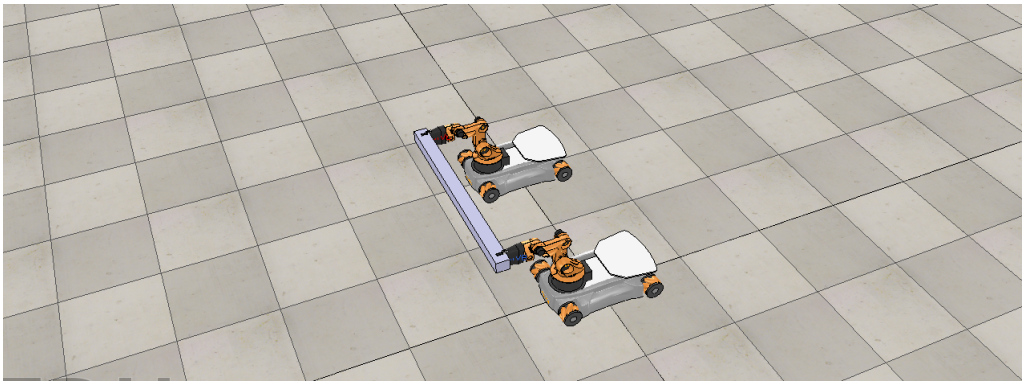
Ως σημείο αναφοράς θεωρούμε το σημείο που βρίσκεται στο κέντρο της αρπάγης του ρομπότ που βρίσκεται χαμηλότερα όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.2, το οποίο το ορίζουμε ως το ρομπότ 1. Οι συντεταγμένες και ο προσανατολισμός αυτού του σημείου είναι:

$$\vec{x}_{start} = \begin{bmatrix} 0 & 0.53 & 0.4 & -90° & 0° & 90° \end{bmatrix}^T \tag{4.1}$$

4.1 Σενάριο 1.

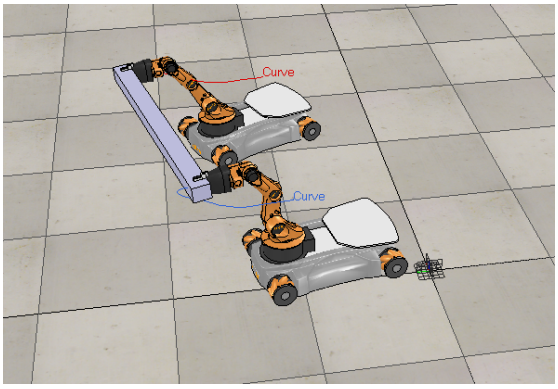
Στο Σενάριο 1, επιλέγεται για το σύστημα να μετακινηθεί από την παραπάνω αρχική θέση στην θέση με συντεταγμένες:

$$\vec{x}_{end_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0.5 & 90° & 0° & -90° \end{bmatrix}^T \tag{4.2}$$

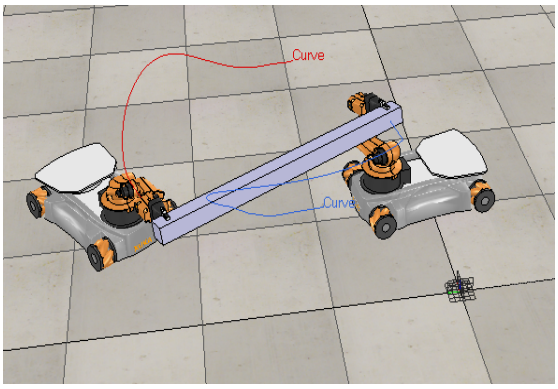


Σχήμα 4.2: Αρχική διάταξη.

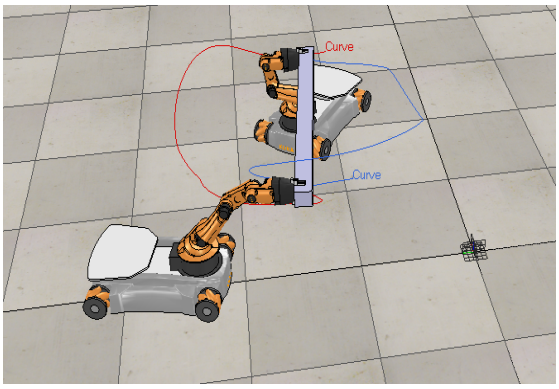
Ουσιαστικά, το τελικό εργαλείο του ρομπότ πρέπει να μετακινηθεί κατά 1m στον άξονα x, κατά 0.5m στον άξονα y, κατά 0.1m στον άξονα z και να περιστραφεί κατά 180° ως προς τον άξονα z. Τέσσερα χαρακτηριστικά στιγμιότυπα της προσομοίωσης φαίνονται συνολικά στο Σχήμα 4.3, οπού η τελική θέση φαίνεται στην τελευταία εικόνα του σχήματος.



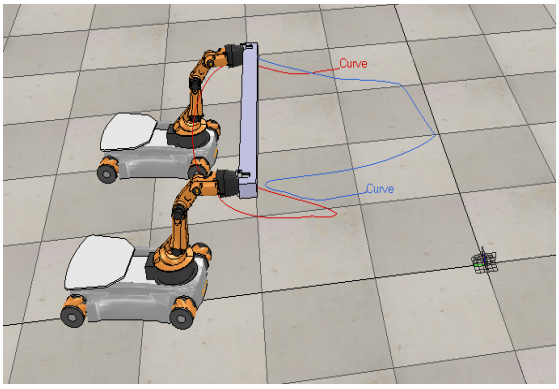
(a) Ενδιάμεσο στιγμιότυπο 1.



(b) Ενδιάμεσο στιγμιότυπο 2.



(c) Ενδιάμεσο στιγμιότυπο 3.



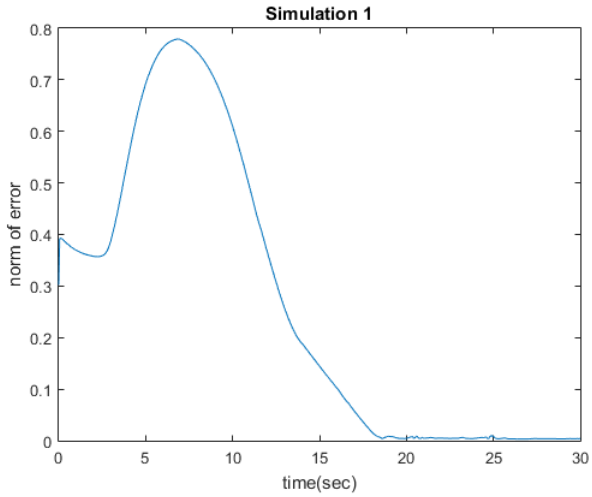
(d) Τελικό στιγμιότυπο.

Σχήμα 4.3: Στιγμιότυπα από την πρώτη προσομοίωση.

Στα στιγμιότυπα αυτά φαίνεται με μπλε καμπύλη η πορεία του τελικού εργαλείου του πρώτου ρομπότ, που αποτελεί και το σημείο αναφοράς, καθώς και με κόκκινη γραμμή η καμπύλη του ίδιου σημείου για το άλλο ρομπότ.

Στο Σχήμα 4.4 παρουσιάζεται η γραφική παράσταση της ευκλείδειας νόρμας του συνολικού $\vec{e}$ και για τα δύο συστήματα. Παρατηρούμε ότι μέχρι να πραγματοποιηθεί η περιστροφή του συστήματος, το λάθος μεγαλώνει έως ότου αυτή ολοκληρωθεί και το σύστημα μετακινηθεί στην τελική επιθυμητή

θέση.



Σχήμα 4.4: Η νόρμα του λάθους της πρώτης προσομοίωσης.

4.2 Σενάριο 2.

Στο δεύτερο σενάριο επιλέγεται το σύστημα να κινηθεί από την αρχική θέση στην τελική με συντεταγμένες:

$$\vec{x}_{end_2} = \begin{bmatrix} -0.9 & 0.7 & 0.25 & -145° & -30° & 55° \end{bmatrix}^T \tag{4.3}$$

Το τελικό εργαλείο του ρομπότ σε αυτή την περίπτωση θα κινηθεί στο δεύτερο τεταρτημόριο του χώρου, πραγματοποιώντας τόσο μια περιστροφή $35°$ γύρω από τον άξονα z όσο και μια περιστροφή από τους άξονες x και y κατά $55°$ και $30°$ αντίστοιχα, σε σχέση με την αρχική διάταξη. Τέσσερα στιγμιότυπα αυτού του σεναρίου φαίνονται στο Σχήμα 4.5.

Η ευκλείδεια νόρμα του λάθους για αυτή την περίπτωση φαίνεται στο Σχήμα 4.6, όπου αυτή την φορά μειώνεται συνεχόμενα.

4.3 Σενάριο 3.

Στο τρίτο σενάριο επιλέχθηκε το σύστημα να κινηθεί στην τελική θέση με συντεταγμένες:

$$\vec{x}_{end_3} = \begin{bmatrix} -0.8 & -0.8 & 0.72 & 0° & 0° & 60° \end{bmatrix}^T \tag{4.4}$$

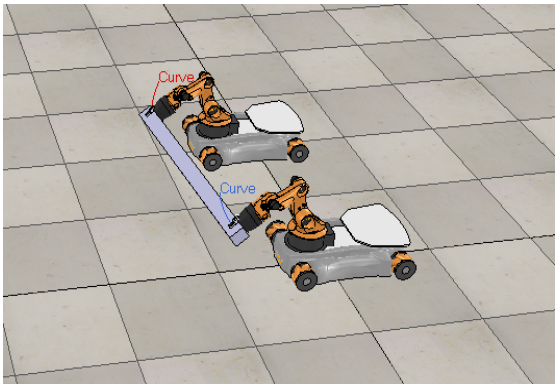
Ουσιαστικά ζητούμε την κίνηση του μηχανισμού στο τέταρτο τεταρτημόριο, με ταυτόχρονη πλήρη έκταση του βραχίονα. Τα τέσσερα στιγμιότυπα αυτής της προσομοίωσης φαίνονται στο Σχήμα 4.7, ενώ στο Σχήμα 4.8 παρουσιάζεται η γραφική παράσταση του λάθους:

4.4 Σενάριο 4.

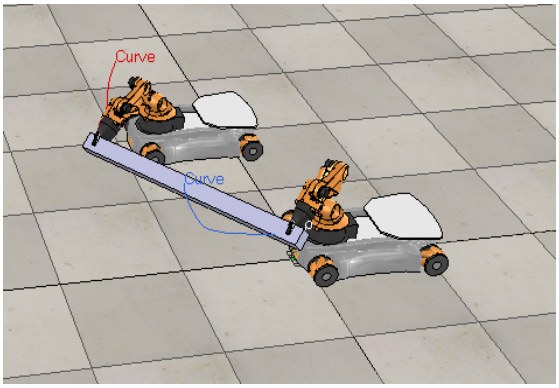
Στο τελευταίο σενάριο οι επιθυμητές τελικές συντεταγμένες που επιλέχθηκαν είναι οι ακόλουθες:

$$\vec{x}_{end_4} = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.6 & 0.2 & -90° & 30° & 80° \end{bmatrix}^T \tag{4.5}$$

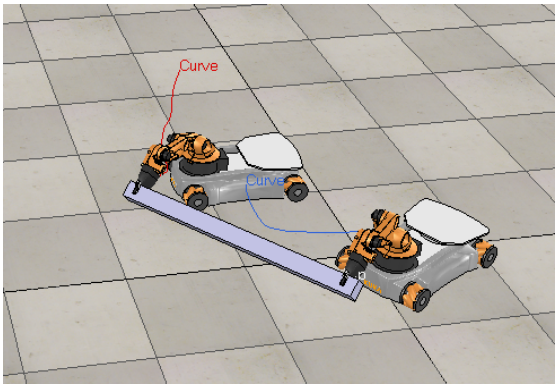
Το σύστημα θα μετακινηθεί στο τρίτο τεταρτημόριο του χώρου, εκτελώντας περιστροφές γύρω από τους άξονες y και z μόνο, κατά $30°$ και $10°$. Τα στιγμιότυπα και το λάθος αυτής της μεθόδου εμφανίζονται κατά τα γνωστά στο Σχήμα 4.9 και 4.10 αντίστοιχα.



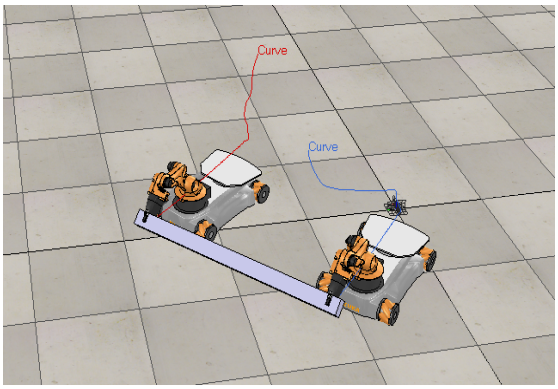
(a) Ενδιάμεσο στιγμιότυπο 1.



(b) Ενδιάμεσο στιγμιότυπο 2.

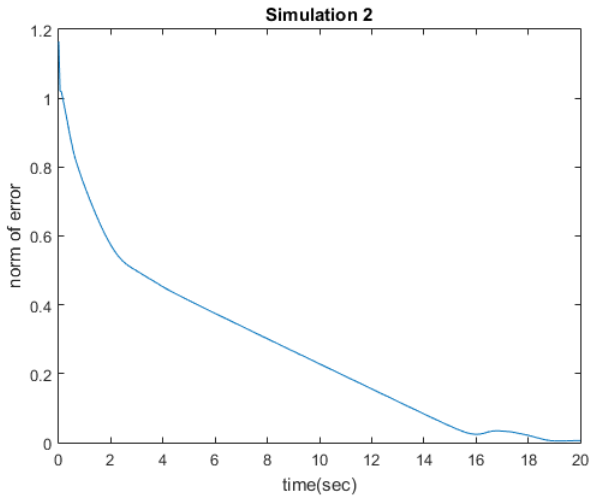


(c) Ενδιάμεσο στιγμιότυπο 3.

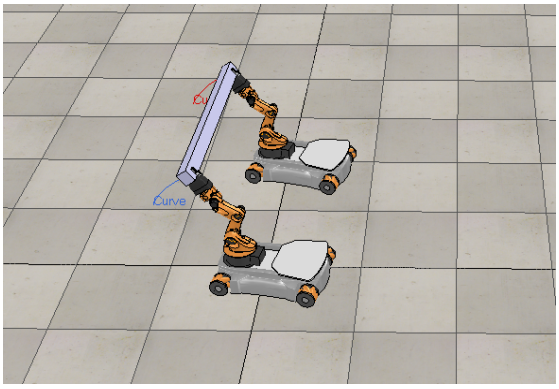


(d) Τελικό στιγμιότυπο.

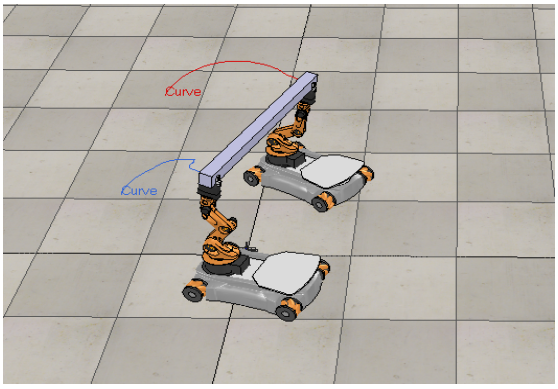
Σχήμα 4.5: Στιγμιότυπα από την δεύτερη προσομοίωση.



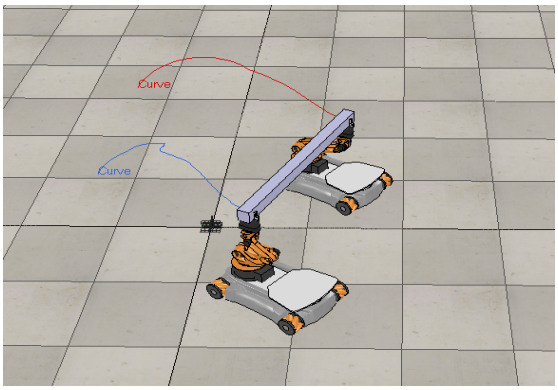
Σχήμα 4.6: Η νόρμα του λάθους της δεύτερης προσομοίωσης.



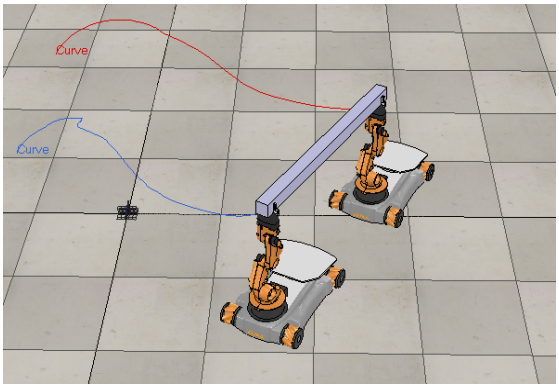
(a) Ενδιάμεσο στιγμιότυπο 1.



(b) Ενδιάμεσο στιγμιότυπο 2.

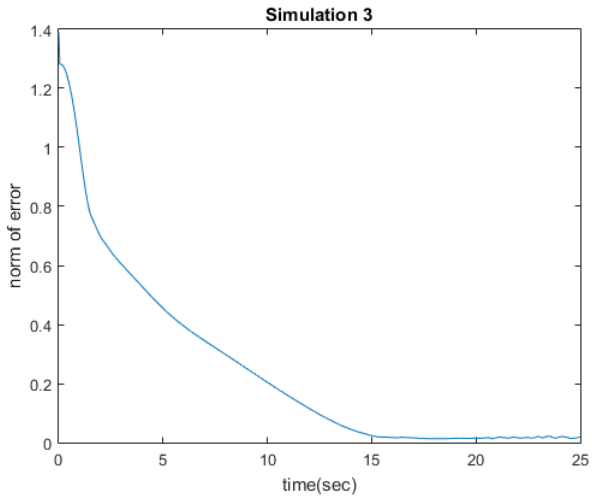


(c) Ενδιάμεσο στιγμιότυπο 3.

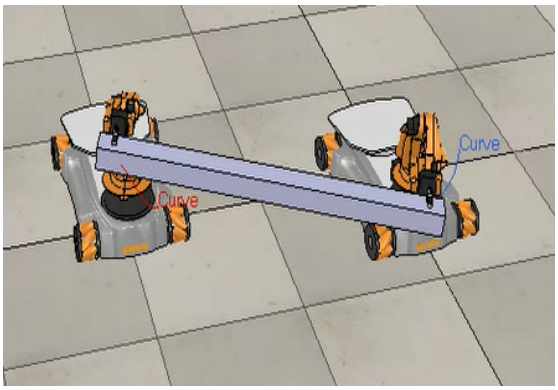


(d) Τελικό στιγμιότυπο.

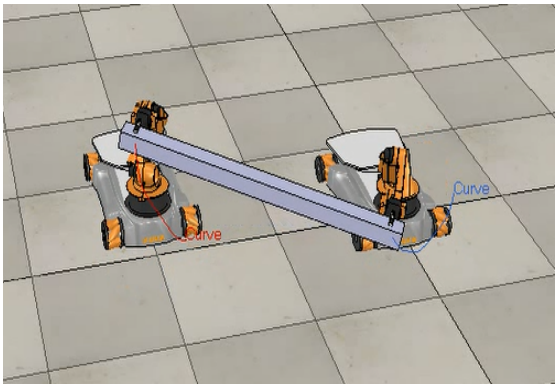
Σχήμα 4.7: Στιγμιότυπα από την τρίτη προσομοίωση.



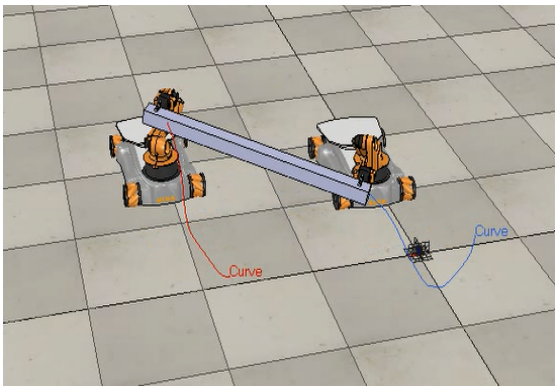
Σχήμα 4.8: Η νόρμα του λάθους της τρίτης προσομοίωσης.



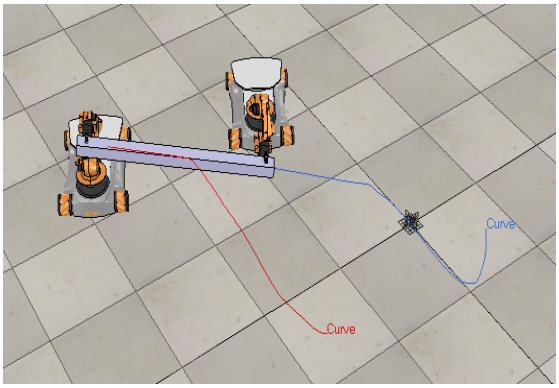
(a) Ενδιάμεσο στιγμιότυπο 1.



(b) Ενδιάμεσο στιγμιότυπο 2.

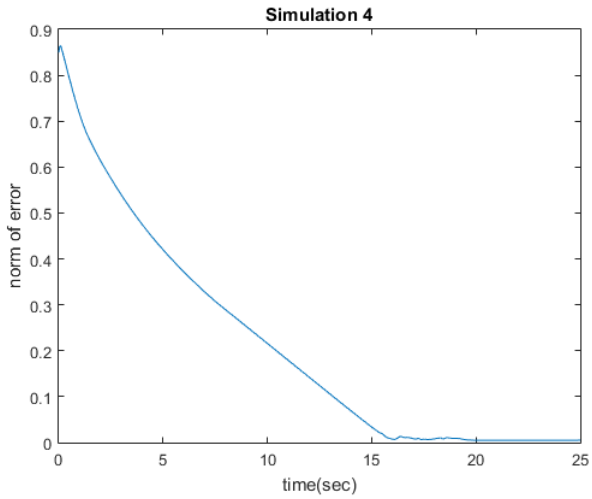


(c) Ενδιάμεσο στιγμιότυπο 3.



(d) Τελικό στιγμιότυπο.

Σχήμα 4.9: Στιγμιότυπα από την τέταρτη προσομοίωση.



Σχήμα 4.10: Η νόρμα του λάθους της τέταρτης προσομοίωσης.

Κεφάλαιο 5

Συμπεράσματα και μελλοντικές προοπτικές.

5.1 Τελικά συμπεράσματα.

Με βάση τις παραπάνω προσομοιώσεις, καθώς και με άλλες που δεν παρουσιάζονται παραπάνω αξίζει να πραγματοποιηθούν κάποιες σχετικές παρατηρήσεις. Κατ' αρχήν η επιτυχία της μεθόδου ως προς τη σύγκλιση είναι φανερή από τις γραφικές παραστάσεις που παρουσιάζουν το λάθος. Σε κάθε περίπτωση, παρ' όλο που μπορεί κατά την διάρκεια της προσομοίωσης να αυξηθεί έτσι ώστε το σύστημα να εκτελέσει κάποια απαραίτητη ενέργεια, όπως περιστροφή γύρω από κάποιον άξονα, στο τέλος πάντα τείνει προς το μηδέν. Καθ' όλη την διάρκεια της κίνησης τα ρομπότ σέβονται την απαίτηση για σταθερή λαβή, σε αντίθεση με την πρώτη προσέγγιση που αναφέρθηκε στο Κεφάλαιο 3. Προσομοιώσεις της μεθόδου αυτής δεν σέβονταν απόλυτα τη σταθερή λαβή και σε πολλές φάσεις στη διάρκεια της προσομοίωσης το σφάλμα της σχετικής τους θέσης ήταν διαφορετικό από το μηδέν. Αυτός αποτέλεσε έναν από τους σημαντικότερους λόγους για την τελική εγκατάλειψή της.

Όπως παρουσιάστηκε στο Κεφάλαιο 3, σε κάθε βήμα της προσομοίωσης απαιτείται η βελτιστοποίηση δύο καλά ορισμένων προβλημάτων τετραγωνικού προγραμματισμού. Παρ' όλο που θα μπορούσε να υλοποιηθεί κάποιος αλγόριθμος αναλυτικής επίλυσής του, επιλέχθηκε τελικά η χρήση της συνάρτηση quadprog με αλγόριθμο interior-point convex που είναι διαθέσιμη στο Matlab, και η οποία επιτυγχάνει ικανοποιητική σύγκλιση.

Τα προβλήματα μεγέθους των ταχυτήτων καθώς και των ορίων των αρθρώσεων εξαλείφονται πλήρως με την χρήση αυτής της μεθόδου, καθώς εντάσσονται ως απαραβίαστοι περιορισμοί. Συγκεκριμένα, στο σενάριο 3 επιλέγεται ως τελική θέση μια θέση που οδηγεί το σύστημα πάρα πολύ κοντά σε ιδιομορφία. Κλασσικές τεχνικές ψευδοαντιστροφής της ιακωβιανής μήτρας θα εμφάνιζαν σοβαρά προβλήματα σε αυτή, λόγω των υψηλών ταχυτήτων που θα υπολόγιζαν. Η χρήση κάποιας μεθόδου που θα λάμβανε υπόψη τα όρια αυτά των ταχυτήτων, σαν αυτή που προτείνεται στο [Flacco et al., 2015], θα βελτίωνε σαφώς την κατάσταση. Η μέθοδος αυτή υλοποιήθηκε προκειμένου να βελτιώσει τα προβλήματα της αρχικής μεθόδου. Παρ' όλα αυτά, σε τέτοιες καταστάσεις ιδιομορφιών η σύγκλιση γινόταν εξαιρετικά αργή. Αντιθέτως, το πρόβλημα βελτιστοποίησης δεν απαιτεί αντιστροφή της μήτρας και εξού δεν αντιμετωπίζει κανένα από αυτά τα προβλήματα.

Έπειτα, αξίζει να γίνει αναφορά και στην προτεινόμενη μέθοδο αποφυγής των μηχανικών ορίων των αρθρώσεων. Σε όλες τις περιπτώσεις γίνεται εμφανές ότι ο πρωταρχικός στόχος, δηλαδή η σύγκλιση στην επιθυμητή θέση δεν διαταράσσεται με την προσθήκη της, λόγω της ένταξης του περιορισμού των υπολογιζόμενων ταχυτήτων στον μηδενοχώρο της ιακωβιανής. Η ύπαρξή της γίνεται εμφανέστερη κατά το τέλος της προσομοίωσης, όπου και στα τέσσερα σενάρια οι πλατφόρμες περιστρέφονται προκειμένου να ευθυγραμμιστεί η εκάστοτε πρώτη άρθρωση με το κέντρο της, αναλαμβάνοντας οι ίδιες οποιαδήποτε απαιτούμενη περιστροφή ως προς τον άξονα z. Όλες οι αρθρώσεις συνεπώς τείνουν στην μηδενική τους θέση. Σε περίπτωση χρήσης κάποιας ψευδοαντίστροφης της ιακωβιανής αυτό θα ήταν πρακτικά αδύνατο, λόγω των ιδιομορφιών που εμφανίζονται στην διάταξη όταν οι αρθρώσεις μηδενίζονται.

Τέλος, η μέθοδος αυτή παρουσιάζει και κάποια σοβαρά προβλήματα, τα οποία απαιτούν περαιτέρω την εξέλιξή της. Συγκεκριμένα, το πρόβλημα που εμφανίζεται αρκετά συχνά στις προσομοιώσεις και εμποδίζει την τελική σύγκλιση είναι η σύγκρουση του συστήματος με τον εαυτό του. Σε αυτή την περίπτωση, οι εντολές ταχυτήτων δεν ικανοποιούνται λόγω της σύγκρουσης και επομένως η απαίτηση

για σταθερή λαβή σταματάει να υφίσταται. Αυτό αποτελεί ένα εξαιρετικό σημαντικό πρόβλημα, γιατί τότε ουσιαστικά η μέθοδος αποτυγχάνει, και οι περιπτώσεις αυτές δεν είναι και τόσο σπάνιες.

5.2 Μελλοντικές κατευθύνσεις.

Η βασική μελλοντική κατεύθυνση είναι ουσιαστικά η αντιμετώπιση του προβλήματος που προαναφέρθηκε. Πρέπει να υπάρξει κάποια περαιτέρω μελέτη έτσι ώστε να ληφθεί υπόψη στο πρόβλημα βελτιστοποίησης όλο το σύστημα, έτσι ώστε να αποφευχθούν πιθανές συγκρούσεις με τον εαυτό του. Στην περίπτωση που αντιμετωπιστεί και αυτό, δεν τίθεται κάποιο άλλο σοβαρό ζήτημα προς επίλυση.

Σε επόμενο στάδιο θα μπορούσαν να μελετηθούν κάποια χαρακτηριστικά, όπως αποφυγής εμποδίων, τα οποία στην πράξη είναι απαραίτητα. Επίσης, απαιτείται συστηματική μελέτη των δυνάμεων που αναπτύσσονται, οι οποίες δεν λαμβάνονται υπόψη στην κινηματική ανάλυση και στις οποίες προκύπτουν ζητήματα κατανομής των δυνάμεων μεταξύ των δύο συστημάτων για να αποφευχθεί π.χ. η ανατροπή κάποιου, ή το μέγεθος των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα, καθώς πολύ μεγάλες δυνάμεις μπορεί να το συνθλίψουν ή πολύ μικρές μπορεί να μην μπορούν να το συγκρατήσουν.

Βιβλιογραφία

[Bayle et al., 2002] Bayle, B., Fourquet, J.-Y., Lamiraux, F., and Renaud, M. (2002). Kinematic control of wheeled mobile manipulatiors. In *International Conference on Intelligent Robots and Systems*.

[Chiaccio et al., 1996] Chiaccio, P., Chiaverini, S., and Siciliano, B. (1996). Direct and inverse kinematics for coordinated motion tasks of a two-manipulator system. *Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 118.

[Diebel, 2006] Diebel, J. (2006). Representing attitude: Euler angles, unit quaternions, and rotation vectors.

[Flacco et al., 2015] Flacco, F., Luca, A. D., and Khatib, O. (2015). Control of redudant robots under hard joint constraints: Saturation in the null space. *IEEE Transactions on Robotics*.

[Luca et al., 2006] Luca, A. D., Oriolo, G., and Giordano, P. R. (2006). Kinematic modelling and redundancy resolution for nonholonomic mobile manipulators. In *IEEE International Conference on Robotics and Automation*.

[Muir and Neuman, 1987] Muir, P. F. and Neuman, C. P. (1987). Kinematic modeling of wheeled mobile robots. *Robotic Systems*, 4(2):281–340.

[Papadopoulos and Poulakakis, 2000] Papadopoulos, E. and Poulakakis, J. (2000). Planning and model-based control for mobile manipulators. *Proceedings IROS Conference on Intelligent Robots and Systems*.

[Seraji, 1998] Seraji, H. (1998). A unified approach to motion control of mobile manipulators. *The International Journal of Robotics Research*, 17(2):107–118.

[Siciliano and Khatib, 2008] Siciliano, B. and Khatib, O. (2008). *Springer Handbook of Robotics*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

[Siciliano et al., 2009] Siciliano, B., Sciavicco, L., Villani, L., and Oriolo, G. (2009). *Robotics: Modelling, Planning and Control*. Springer.

[Tsai, 2008] Tsai, L.-W. (2008). *Robot Analysis: The Mechanics of Serial and Parallel Manipulators*. Wiley-Interscience.

[Yamamoto and Yun,] Yamamoto, Y. and Yun, X. Coordinating locomotion and manipulation of a mobile manipulator.

Παράρτημα Α

Ευρετήριο συμβολισμών.

$^{A}\vec{p}_p$: Το διάνυσμα θέσης της πλατφόρμας $\vec{p}_p = \begin{bmatrix} p_{p,x} & p_{p,y} & \theta_p \end{bmatrix}^T$ ως προς το πλαίσιο αναφοράς Α.

A_i^{i-1}: Μήτρα θέσης και προσανατολισμού πλαισίου i σε σχέση με το πλαίσιο i-1.

c_i: Το συνημίτονο της άρθρωσης q_i.

$^{R}d_{C_{ix}}$: Θέση ως προς τον x του πλαισίου της πλατφόρμας του σημείου επαφής C_i.

$^{R}d_{C_{iy}}$: Θέση ως προς τον y του πλαισίου της πλατφόρμας του σημείου επαφής C_i.

F: Αντικειμενική συνάρτηση πρωτεύοντος προβλήματος.

f: Αντικειμενική συνάρτηση προβλήματος αποφυγής μηχανικών ορίων.

f_i: Βαθμοί ελευθερίας της άρθρωσης i.

I_i: Μοναδιαίος πίνακας διαστάσεων $[i \times i]$.

J: Ο αριθμός των αρθρώσεων ή η ιακωβιανή.

l_a: Απόσταση του σημείου επαφής ως προς τον άξονα x του κέντρου της πλατφόρμας.

l_b: Απόσταση του σημείου επαφής ως προς τον άξονα y του κέντρου της πλατφόρμας.

l_{ab}: Το άθροισμα των αποστάσεων των σημείων επαφής των τροχών από το πλαίσιο αναφοράς της πλατφόρμας.

M: Μήτρα περιορισμών ταχύτητας.

N: Ο αριθμός των συνδέσμων.

$\vec{p}$: Διάνυσμα θέσης $\vec{p} = \begin{bmatrix} p_x & p_y & p_z \end{bmatrix}^T$.

q_i: Η άρθρωση q_i του youBot, $i = 1, ..., 5$ ή το διάνυσμα κατάστασης του συστήματος.

q_{min}: Κάτω όριο γωνίας αρθρώσεων του συνολικού συστήματος.

q_{max}: Άνω όριο γωνίας αρθρώσεων του συνολικού συστήματος.

$\dot{q}$: Το διάνυσμα ταχύτητας του συνολικού συστήματος.

$\dot{q}_{min}$: Κάτω όριο ταχύτητας του συνολικού συστήματος.

$\dot{q}_{max}$: Άνω όριο ταχύτητας του συνολικού συστήματος.

R: Η ακτίνα του τροχού της πλατφόρμας ή μήτρα προσανατολισμού.

r: Η ακτίνα των roller της πλατφόρμας.

r_l: Θέση τελικού πλαισίου του leader ως προς τον follower.

s_i: Το ημίτονο της άρθρωσης q_i.

T_i: Ομογενής μετασχηματισμός του αντικειμένου i.

$\vec{w}_i$: Το διάνυσμα ταχυτήτων του τροχού i $\vec{w}_i = \begin{bmatrix} \omega_{i_x} & \omega_{i_r} & \omega_{i_z} \end{bmatrix}^T$.

$\vec{x}$: Γενικευμένο διάνυσμα θέσης και προσανατολισμού $\vec{x} = \begin{bmatrix} \vec{p} & \vec{\phi} \end{bmatrix}^T$.

η: Γωνία των roller ως προς τον τροχό.

${}^R\theta_{C_i}$: Γωνία πλαισίου αναφοράς τροχού i ως προς το πλαίσιο αναφοράς της πλατφόρμας.

$\vec{\phi}$: Διάνυσμα προσανατολισμού $\vec{\phi} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \end{bmatrix}^T$.

Παράρτημα Β

English version

NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS
SCHOOL OF ELECTRICAL & COMPUTER ENGINEERING
DIVISION OF MECHANICAL DESIGN & CONTROL SYSTEMS
CONTROL SYSTEMS LABORATORY

Trajectory Planning for Cooperating Mobile Manipulators

DIPLOMA PROJECT

IORDANIS S. CHATZINIKOLAIDIS

Supervisor : Kostantinos J. Kyriakopoulos
Professor N.T.U.A.

Athens, October 2015

NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS
SCHOOL OF ELECTRICAL & COMPUTER ENGINEERING
DIVISION OF MECHANICAL DESIGN & CONTROL SYSTEMS
CONTROL SYSTEMS LABORATORY

Trajectory Planning for Cooperating Mobile Manipulators

DIPLOMA PROJECT

IORDANIS S. CHATZINIKOLAIDIS

Supervisor : Kostantinos J. Kyriakopoulos
Professor N.T.U.A.

Approved by the examining committee on the October 30, 2015.

.....	.....	.....
Kostantinos Kyriakopoulos Professor N.T.U.A.	Kostantinos Papaodyssefs Professor N.T.U.A.	George Stassinopoulos Professor N.T.U.A.

Athens, October 2015

.....

Iordanis S. Chatzinikolaidis

Electrical and Computer Engineer

Contents

List of Figures

Chapter 1

Introduction

1.1 Problem statement

The purpose of this diploma thesis is the development of a methodology which will allow two wheeled mobile robotic arms to transfer an object from a given starting position to a desired final. The resolution scheme will be centralized, i.e. there will be a controller aware at every time of the layout of the two subsystems, and based on the methodology developed will send velocity commands in each subsystem separately. The shape of the object shall be unimportant and it is only of interest the relative position of the two robotic subsystems. The subsystems selected for the method's application are commercially available for educational and research purposes.

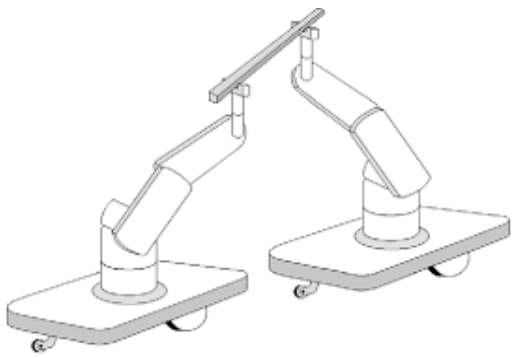


Figure 1.1: Cooperation of mobile manipulators

Issues relating to the magnitude of the applied forces and whether the object can be transported due to its weight, the distribution of forces between the two robots etc. will not be considered, and therefore we will assume that these are met in any case without problems. That is, we will examine the issue from a purely kinematic standpoint and only. In addition, certain desired behaviours that occur very often in practice, such as obstacle avoidance, will not be considered in this work. Therefore, the space will be assumed to contain only the two robotic systems and the transported object.

1.2 Problem's significance

In recent years, the implementation of wheeled mobile manipulators in a range of situations such as object transport, inspection, assembly etc., acquires more and more interest. The system essentially consists of a conventional robot arm mounted on a mobile platform, which thus extends the workspace to include the whole x-y plane.

Robotic manipulators have been studied for many years and the kinematic models of open chain mechanisms are generally satisfactory. The platforms on the other hand exhibit a wider variety of possible constructions, such as wheeled, legged, submarine, aerial, etc., which makes their analysis a little more demanding, exactly because of this variety. Mounting an arm on a mobile platform adds

further complexity to the problem, due to the heterogeneity of the two subsystems. Combining two mobile manipulators in a closed kinematic chain creates a wider range of issues to be dealt.

However, the use of mobile manipulators is generally considered to expand over the next few years, given the fact that they are now utilized even in space applications. One area where such systems are assumed to have great potential is industry, considering the rate of the automation's utilization and the widespread trend for the minimization of the human involvement.

1.3 Prior work

Much of the research on mobile manipulators is focused on those with non-holonomic platforms, since then the kinematics capabilities of the overall system is significantly limited. One such analysis could be found for example in [Papadopoulos and Poulakakis, 2000], where it is considered not only the kinematics but also the dynamics of the whole system. In [Seraji, 1998] a methodology is presented, which shall be utilized as the basis for the combination of the two distinct parts of the system, meaning the platform and the manipulator. The methodology is applied equally in both holonomic and non-holonomic platforms. In [Yamamoto and Yun,] a planning and control methodology is presented, taking into account both the kinematic and dynamic equations of the system. In [Bayle et al., 2002] an analysis in a kinematic level for systems with redundant degrees of freedom is presented. Finally, in [Luca et al., 2006] a methodology for systems with non-holonomic constraints is elaborated, isolating only the equations that allow movement and automatically satisfying the non-holonomic constraints, as well as methods for the utilization of the redundant degrees of freedom such as Extended Jacobian, Projected Gradient, and Reduced Gradient.

The cooperation of two mobile manipulators is implemented with techniques that were originally developed for robotic arms. The most important source of literature survey along with the most significant results are presented in detail in [Siciliano and Khatib, 2008], so they will not be repeated here. Therefore, whoever interested is referred there for further analysis.

1.4 Contribution

In this thesis, having as reference some of the analysis mentioned above, we extend the existing results and add more whenever necessary. In particular, the kinematic analysis of wheeled mobile robotic arms is usually limited for simplicity to a mobile platform with one arm of two up to three degrees of freedom. This thesis will deal with the kinematics of a much larger arm, which in essence increases complexity.

In many cases the entire system is considered as having two distinct parts, the platform and the arm. In this thesis the overall system will be considered as a whole and the two distinct parts will be combined into one system, on which the analysis will be focused. As a result, the overall system will be equivalent to a robotic arm, thus providing the capability to apply all the tools available for them. A basic inverse kinematics approach is done by inverting the jacobian matrix. In this work the inadequacy of this approach will be shown and a new method using optimization will be proposed. The author is unaware of the application of any optimization methodology in mobile manipulators, only in classical robotic arms.

The cooperation of wheeled mobile manipulators and manipulators in general is usually modelled in the level of dynamics, where the analysis tools are of greater variety and accuracy. In this study the modelling, as already mentioned, will be done at a kinematic level. The kinematic analysis of such a complex closed kinematic chain is unknown to the author.

Finally, we present a method for avoiding the mechanical limits of the arm's joints, which takes into account the platform too. Incorporating the platform's kinematics in the joint limit avoidance is unknown to have been done in any other prior work by the writer.

1.5 Structure

This diploma thesis is structured as follows: In the next chapter a kinematics and differential kinematics analysis will take place, encompassing both the arm as well as the platform of a specific mobile manipulator. Then, the kinematic equations of the two parts will be combined to produce an overall kinematic equation that describes the system as a whole.

The next chapter will begin by presenting an initial attempt for the kinematic modelling of the system of the two mobile manipulators and will explain the reasons why this method was abandoned. Then the central method using optimization theory will be elaborated. At the end of this chapter a method will be reported, which will allow avoidance of mechanical limits of the joints, as an extension to the central method.

Afterwards, four simulated scenarios will be presented, which will vividly demonstrate the potential of the proposed method. To this end, four snapshots of each simulation as well as graphs concerning the evolution of the overall error shall be included.

Finally, a discussion about the results of the simulations will take place, highlighting both positive and negative aspects of the method. Negative aspects will indeed be the basis for further improvements and some possible future directions will be considered too.

Chapter 2

Kinematic analysis of youBot

This chapter will lay the necessary foundations for the kinematic modelling of the overall system. At this first stage we will deal exclusively with the kinematic structure of a particular commercial model, i.e. the robot youBot by KUKA, which is shown in Figure 2.1, analysing separately the two main subsystems, i.e. the platform and the arm. The analysis will be done in terms of forward kinematics and forward differential kinematics, which will also constitute the basis for the inverse kinematics analysis of the youBot and the overall system.

Figure 2.1: The robotic system youBot by KUKA

This system is composed by a 5 degrees of freedom (DoF) manipulator, while the platform is holonomic omnidirectional 3-DoF, thus it is able to move at any time in any direction or perform rotation about the z axis, as it will be shown later.

2.1 Kinematic analysis of the manipulator

2.1.1 Forward kinematics using the Denavit-Hartenberg convention

Initially the robotic arm is isolated from the platform. The kinematic analysis may be performed by fundamental tools in robotic arms analysis such as the Denavit-Hartenberg convention. Based on the methodology outlined in [Siciliano et al., 2009], the table of parameters for the arm of Figure 2.2 are shown in Table 2.1.

Based on the previous table and along with the homogeneous matrix A_i^{i-1} of the DH convention,

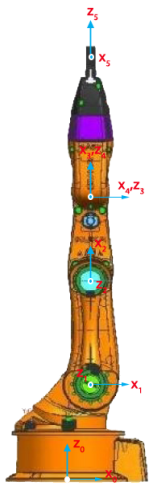


Figure 2.2: The manipulator with the link frames associated with the DH convention

Table 2.1: The table with the DH parameters for the youBot's arm

Link i	θ_i	d_i	α_i	a_i
1	q_1	0,1012	0,0330	90°
2	$q_2 + 90°$	0	0,1550	0
3	q_3	0	0.1348	0
4	$q_4 - 90°$	0	0	$-90°$
5	$q_5 - 90°$	0,1937	0	0

we apply the transformation $T = A_1^0(q_1)A_2^1(q_2)A_3^2(q_3)A_4^3(q_4)A_5^4(q_5)$ and we obtain that:

$$T_m = \begin{bmatrix} s_1c_5 + c_1c_{234}s_5 & -s_1s_5 + c_1c_{234}c_5 & -c_1s_{234} & -0,1937c_1s_{234} - c_1(0,1348s_{23} + 0,155s_2 - 0,033) \\ -c_1c_5 + s_1c_{234}s_5 & c_1s_5 + s_1c_{234}c_5 & -s_1s_{234} & -0,1937s_1s_{234} - s_1(0,1348s_{23} + 0,155s_2 - 0,033) \\ s_{234}s_5 & s_{234}c_5 & c_{234} & 0,1937c_{234} + 0,1348c_{23} + 0,155c_2 + 0,1012 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

2.1.2 Forward kinematics using generalized pose vector

The position of the manipulator's end effector is given as a vector in the first three rows of the fourth column of the above matrix. In order to express orientation, we are looking for a representation using minimum parameters, which is possible either through Euler angles or quaternions. Quaternions have generally an advantage with respect to Euler angles, due to the arithmetically faster rotation composition, the simplicity in extracting the associated angle and rotation axis, the faster interpolation, the lack of gimbal lock, etc. However, extracting the Z-X-Z Euler angles from the end effector's rotation matrix is much easier and thus utilized. The Z-X-Z Euler angles are represented as follows:

$$Z_1X_2Z_3 = Rot_z(a)Rot_x(b)Rot_z(g) = \begin{bmatrix} c_ac_g - s_ac_bs_g & -c_as_g - s_ac_bc_g & s_as_b \\ s_ac_g + c_ac_bs_g & c_ac_bc_g - s_as_g & -c_as_b \\ s_bs_g & s_bc_g & c_b \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

Comparison between the end effector's rotation matrix in Equation 2.1 and the Euler angles in

Equation 2.2 makes clear that:

$$a = q_1 - \frac{\pi}{2} \tag{2.3a}$$
$$b = q_2 + q_3 + q_4 \tag{2.3b}$$
$$g = q_5 \tag{2.3c}$$

Therefore, the generalized pose (position and orientation) of the manipulator's end effector is represented as:

$$\vec{x}_m = \begin{bmatrix} -0,1937c_1 s_{234} - c_1(0,1348s_{23} + 0,155s_2 - 0,033) \\ -0,1937s_1 s_{234} - s_1(0,1348s_{23} + 0,155s_2 - 0,033) \\ 0,1937c_{234} + 0,1348c_{23} + 0,155c_2 + 0,1012 \\ q_1 - \frac{\pi}{2} \\ q_2 + q_3 + q_4 \\ q_5 \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

2.2 Differential forward kinematic analysis of the platform

2.2.1 Composite platform equation

For the kinematic analysis of the platform [Muir and Neuman, 1987], we place the coordinate frames shown in Figure 2.3. In specific we consider a global coordinate frame on the floor (F), a coordinate frame in the center of the platform (R), and four coordinate frames at the point contacts of the wheels with the floor (C_i). In the figure below the coordinate frame of the base of the manipulator is shown too.

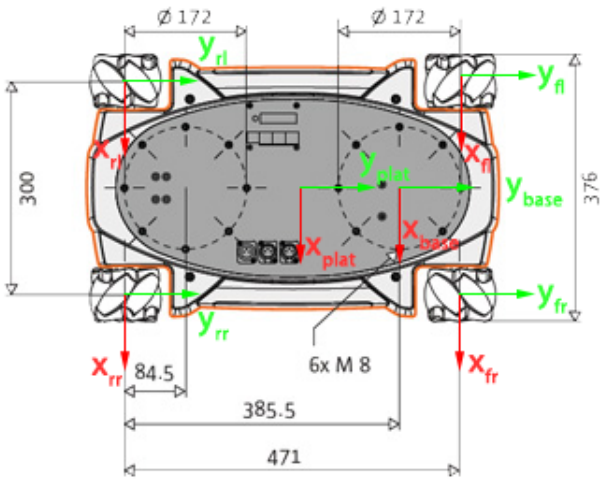


Figure 2.3: Down view of the platform along with the necessary coordinate frames

Initially we consider the jacobian of a single wheel, which describes the contribution of the wheel's velocity to the velocity of the platform. The three DoF of the wheel correspond to the wheel hub rotation, the roller rotation, and the rotation about the point of contact. The jacobian of each wheel i takes the following form:

$$J_i = \begin{bmatrix} -R_i \sin({}^R\theta_{C_i}) & r_i \sin({}^R\theta_{C_i} + \eta_i) & {}^R d_{C_{iy}} \\ R_i \cos({}^R\theta_{C_i}) & -r_i \cos({}^R\theta_{C_i} + \eta_i) & {}^R d_{C_{ix}} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

Thus, for each wheel we have respectively:

$$
{}^{R}\vec{p}_p = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2}r & l_b \\ R & -\frac{\sqrt{2}}{2}r & -l_a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{J_{fr}} \begin{bmatrix} \omega_{1_x} \\ \omega_{1_r} \\ \omega_{1_z} \end{bmatrix} \tag{2.6a}
$$

$$
{}^{R}\vec{p}_p = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}r & l_b \\ R & -\frac{\sqrt{2}}{2}r & l_a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{J_{fl}} \begin{bmatrix} \omega_{2_x} \\ \omega_{2_r} \\ \omega_{2_z} \end{bmatrix} \tag{2.6b}
$$

$$
{}^{R}\vec{p}_p = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2}r & -l_b \\ R & -\frac{\sqrt{2}}{2}r & l_a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{J_{rl}} \begin{bmatrix} \omega_{3_x} \\ \omega_{3_r} \\ \omega_{3_z} \end{bmatrix} \tag{2.6c}
$$

$$
{}^{R}\vec{p}_p = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}r & -l_b \\ R & -\frac{\sqrt{2}}{2}r & -l_a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{J_{rr}} \begin{bmatrix} \omega_{4_x} \\ \omega_{4_r} \\ \omega_{4_z} \end{bmatrix} \tag{2.6d}
$$

where $R = 47,5mm$, $l_a = 158,5mm$ and $l_b = 228mm$. We observe that the rank of all jacobian matrices is three, therefore they are full rank.

By combining the previous equations of motion of each wheel we obtain the composite robot equation:

$$
\begin{bmatrix} I_3 \\ I_3 \\ I_3 \\ I_3 \end{bmatrix} {}^{R}\vec{p}_p = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{w}_1 \\ \vec{w}_2 \\ \vec{w}_3 \\ \vec{w}_4 \end{bmatrix} \tag{2.7}
$$

Given that the composite matrix of the identity matrices and the composite jacobian matrix are full rank, we conclude that the previous equation has a unique solution and the platform has 3 DoF.

2.2.2 Sensed forward and actuated inverse solutions

In the previous composite platform equation there are not available information from the sensors for all velocity of each wheel. Moreover, it is impossible to actuate separately each available DoF. Therefore, of practical interest are those components that it is possible to be sensed or actuated. Specifically, the only available DoF which are possible to obtain by the sensors and actuate are those associated with the wheel hub rotation. Nevertheless, it is possible to exploit the available DoF for the two desired purposes: Calculate the platform's velocity from the sensors and actuate independently all three DoF of the platform. Isolation of those components is possible by inverting the jacobian of each wheel and keeping those components associated with the velocity ω_{i_x}. Thus:

$$
\begin{bmatrix} \omega_{1_x} \\ \omega_{2_x} \\ \omega_{3_x} \\ \omega_{4_x} \end{bmatrix} = \frac{1}{R} \begin{bmatrix} -1 & 1 & l_{ab} \\ 1 & 1 & -l_{ab} \\ -1 & 1 & -l_{ab} \\ 1 & 1 & l_{ab} \end{bmatrix} {}^{R}\vec{p}_p \tag{2.8}
$$

Furthermore, rearranging the composite platform equation into those components that can be actuated and those components can not be actuated, and then solving the above equation for the velocity of the platform's center we obtain that:

$$^{R}\vec{p_p} = \frac{R}{4}\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{l_{ab}} & -\frac{1}{l_{ab}} & -\frac{1}{l_{ab}} & \frac{1}{l_{ab}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \omega_{1_x} \\ \omega_{2_x} \\ \omega_{3_x} \\ \omega_{4_x} \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

Finally, the above kinematic analysis provides some very interesting results worth highlighting. First, rearranging the composite kinematic equation in terms of the components for which we have sensory information, and studying the resulting equation we conclude that there is sufficient sensory information, as the determinant of resulting matrix is $64(l_a+l_b)^2 \neq 0$, therefore it is always invertible and has a solution. In fact the available information is robust and can be exploited in order to determine the existence of wheel slip from the sensors' measurements. Secondly, by studying the determinant of the resulting equation for the driving characteristics, this is equal to $64(l_a+l_b)^2 \neq 0$ too, so we conclude that there is capability to command any velocity of the platform's center. However, arbitrary velocity input is impossible, because actuator conflict may occur. The wheel slip is possible to be detected by the sensors, as mentioned before, because for any velocity commands the following condition must be satisfied:

$$\omega_{1_x} + \omega_{2_x} - \omega_{3_x} - \omega_{4_x} = 0 \tag{2.10}$$

Solving the above equation for any velocity, e.g. the velocity ω_{4_x}, and substituting in equation 2.9 yields:

$$^{R}\vec{p_p} = \frac{R}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{l_{ab}} & 0 & -\frac{1}{l_{ab}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \omega_{1_x} \\ \omega_{2_x} \\ \omega_{3_x} \end{bmatrix} \tag{2.11}$$

2.3 Forward kinematics of the platform

Even though the ability to independently control the 3 DoF of the platform, which is a characteristic of omnidirectional platforms, is a very important advantage, it is impossible to calculate the platform's position in real time by means of the available sensory informationd. In specific, it is only possible to calculate exactly the orientation of the platform , whereas the position could be calculated through integration at each time step. The velocity in terms of the floor's coordinate system is:

$$^{F}\dot{\vec{p}}_p = Rot_z(^{F}\theta_p)^{R}\dot{\vec{p}}_p = \begin{bmatrix} \cos(^{F}\theta_p) & -\sin(^{F}\theta_p) & 0 \\ \sin(^{F}\theta_p) & \cos(^{F}\theta_p) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} {}^{R}\dot{\vec{p}}_p$$

From the last component of the above equation, the orientation is calculated as follows:

$$^{F}\omega_p = {}^{R}\omega_p = \frac{R}{4l_{ab}}(\omega_{1,x} - \omega_{2,x} - \omega_{3,x} + \omega_{4,x}) \Rightarrow \int {}^{F}\omega_p dt = \frac{R}{4l_{ab}}\int(\omega_{1,x} - \omega_{2,x} - \omega_{3,x} + \omega_{4,x})dt \Rightarrow$$
$$^{F}\theta_p(t) = \frac{R}{4l_{ab}}(\theta_{1,x}(t) - \theta_{2,x}(t) - \theta_{3,x}(t) + \theta_{4,x}(t)) +^{F} \theta_p(0) - \frac{R}{4l_{ab}}(\theta_{1,x}(0) - \theta_{2,x}(0) - \theta_{3,x}(0) + \theta_{4,x}(0)) \tag{2.12}$$

Therefore, the orientation of the platform can be calculated at any time by using the measurements of the sensors, as shown by the above relationship. The position of the platform is calculated by integration at each discrete time step, thus having unfortunately all the problems that such a technique might occur such as accuracy errors accumulation, measurement noise, wheel slip etc.

Knowing the position x-y of the R reference frame and calculating the orientation from the previous equation, the position of the platform is readily calculated as:

$$T_p = \begin{bmatrix} \cos({}^F\theta_p) & -\sin({}^F\theta_p) & 0 & {}^Fx \\ \sin({}^F\theta_p) & \cos({}^F\theta_p) & 0 & {}^Fy \\ 0 & 0 & 0 & 0.2464 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.13}$$

The above equation can be represented equally in terms of Z-X-Z Euler angles as follows:

$$\vec{x}_p = \begin{bmatrix} {}^Fx \\ {}^Fy \\ 0.0957 \\ {}^F\theta_p \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.14}$$

2.4 Forward kinematics of youBot

The equation that describes the pose of the youBot's end effector can be calculated by using the results of the previous sections. That is possible by regarding the position ${}^Fx$ and ${}^Fy$ of the platform's coordinate system, the orientation ${}^F\theta_p$ of the platform, and the angles of the arm's joints as known. The homogeneous transformation between the platform's coordinate system and arm's base coordinate systems is constant and a priori known, as it is shown in Figure 2.4.

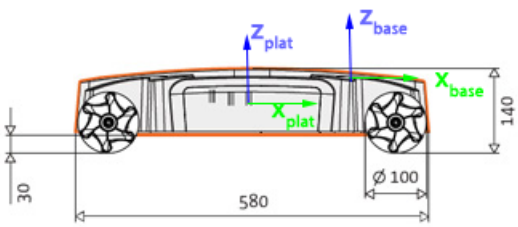


Figure 2.4: Side view of the platform with its coordinate frame and the arm's base coordinate frame

By considering all these inputs available, the homogeneous transformation that calculates the position and the orientation of the end effector is:

$$T_y = \begin{bmatrix} c_{1\theta}c_5 - c_{234}s_{1\theta}s_5 & -c_{1\theta}s_5 - c_{234}s_{1\theta}c_5 & s_{234}s_{1\theta} & x - 0.0013c_\theta - 0.1665s_\theta + c_1s_\theta(0.193s_{234} + 0.135s_{23} + 0.155s_2 - 0.033) + c_\theta s_1(0.193s_{234} + 0.135s_{23} + 0.155s_2 - 0.033) \\ s_{1\theta}c_5 + c_{234}c_{1\theta}s_5 & -s_{1\theta}s_5 + c_{234}c_{1\theta}c_5 & -s_{234}c_{1\theta} & y + 0.1665c_\theta - 0.0013s_\theta - c_1c_\theta(0.193s_{234} + 0.135s_{23} + 0.155s_2 - 0.033) + s_\theta s_1(0.193s_{234} + 0.135s_{23} + 0.155s_2 - 0.033) \\ s_{234}s_5 & s_{234}c_5 & c_{234} & 0.193c_{234} + 0.135c_{23} + 0.155cos(q2) + 0.2464 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.15}$$

Equivalently, the previous homogeneous transformation in terms of the Z-X-Z Euler angles is:

$$\vec{x}_y = \begin{bmatrix} x - 0.0013c_\theta - 0.1665s_\theta + c_1 s_\theta(0.193s_{234} + 0.135s_{23} + 0.155s_2 - 0.033) + c_\theta s_1(0.193s_{234} + 0.135s_{23} + 0.155s_2 - 0.033) \\ y + 0.1665c_\theta - 0.0013s_\theta - c_1 c_\theta(0.193s_{234} + 0.135s_{23} + 0.155s_2 - 0.033) + s_\theta s_1(0.193s_{234} + 0.135s_{23} + 0.155s_2 - 0.033) \\ 0.193c_{234} + 0.135c_{23} + 0.155c_2 + 0.2464 \\ q_1 + \theta \\ q_2 + q_3 + q_4 \\ q_5 \end{bmatrix} \tag{2.16}$$

2.5 Forward differential kinematics of youBot

2.5.1 Analytic jacobian of youBot

Having devised the equations that determine the position and the orientation of the end effector for the overall system, the next step is to calculate the equations that will yield its velocity based on the velocity of all the system parameters, i.e. the velocity of the wheels and the velocity of the joints. There are several methodologies that allow to combine the equations of the platform and the arm in order to achieve this. A basic category of them considers these two subsystems as separate, and the entire analysis is focused on implementing an appropriate method which will achieve smooth coordination. Other methodologies consider the problem as a non-linear optimization problem. Nevertheless, a more natural analysis can be performed by considering the system as a whole, that is by suitably combining the differential kinematic equations of the platform and the arm [Seraji, 1998]. Based on this methodology, the forward kinematic equation of the system is initially considered, for which we have:

$$\begin{aligned} x = f(q_p, q_m) \quad \Rightarrow \quad \dot{x} &= \frac{\partial f}{\partial q_p}\dot{q}_p + \frac{\partial m}{\partial q_m}\dot{q}_m = J_p(q_p)\dot{q}_p + J_m(q_m)\dot{q}_m \Rightarrow \\ \dot{x} &= \begin{bmatrix} J_p(q_p) & J_m(q_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_p \\ \dot{q}_m \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2.17}$$

where $\dot{q}_p = \begin{bmatrix} {}^F\dot{x} & {}^F\dot{y} & {}^F\dot{\theta}_p \end{bmatrix}^T$ and $\dot{q}_m = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 & \dot{q}_2 & \dot{q}_3 & \dot{q}_4 & \dot{q}_5 \end{bmatrix}^T$.

But the platform's inputs are the wheel velocities. They can be computed as follows:

$$\dot{q}_p = \begin{bmatrix} {}^F\dot{x} \\ {}^F\dot{y} \\ {}^F\dot{\theta}_p \end{bmatrix} = Rot_z({}^F\theta_p)\,{}^R\vec{\dot{p}}_p = Rot_z({}^F\theta_p)\frac{R}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{l_{ab}} & 0 & -\frac{1}{l_{ab}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \omega_{1_x} \\ \omega_{2_x} \\ \omega_{3_x} \end{bmatrix} = G({}^F\theta_p)\begin{bmatrix} \omega_{1_x} \\ \omega_{2_x} \\ \omega_{3_x} \end{bmatrix} \tag{2.18}$$

Equation 2.19 takes the following form:d

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} J_p(q_p)G({}^F\theta_p) & J_m(q_m) \end{bmatrix}}_{J} \begin{bmatrix} u_p \\ u_m \end{bmatrix} \tag{2.19}$$

with $u_p = \begin{bmatrix} \omega_{1_x} & \omega_{2_x} & \omega_{3_x} \end{bmatrix}^T$, $u_m = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 & \dot{q}_2 & \dot{q}_3 & \dot{q}_4 & \dot{q}_5 \end{bmatrix}^T$ and:

$$J_pG = \begin{bmatrix} -\frac{19}{3080000}(1665c_\theta - 10c_{1\theta}(-33 + 155s_2 + 135s_{23} + 193s_{234}) + 3837s_\theta) & 0.0238c_\theta - 0.0238s_\theta & -\frac{19}{3080000}(2185c_\theta + 10c_{1\theta}(-33 + 155s_2 + 135s_{23} + 193s_{234}) + 13s_\theta) \\ \frac{19}{3080000}(-1665s_\theta + 10s_{1\theta}(-33 + 155s_2 + 135s_{23} + 193s_{234}) + 3837c_\theta) & 0.0238c_\theta + 0.0238s_\theta & \frac{19}{3080000}(-2185s_\theta - 10s_{1\theta}(-33 + 155s_2 + 135s_{23} + 193s_{234}) + 13c_\theta) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0.062 & 0 & -0.062 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.20a}$$

$$J_m = \begin{bmatrix} (c_{1\theta}(0.193s_{234} + 0.135s_{23} + 0.155s_2 - 0.033)) & s_{1\theta}(0.193c_{234} + 0.135c_{23} + 0.155c_2) & s_{1\theta}(0.193c_{234} + 0.135c_{23}) & 0.193c_{234}s_{1\theta} & 0 \\ (s_{1\theta}(0.193s_{234} + 0.135s_{23} + 0.155s_2 - 0.033)) & -c_{1\theta}(0.193c_{234} + 0.135c_{23} + 0.155c_2) & -c_{1\theta}(0.193c_{234} + 0.135c_{23}) & -0.193c_{234}c_{1\theta} & 0 \\ 0 & -0.193s_{234} - 0.135s_{23} - 0.155s_2 & -0.193s_{234} - 0.135s_{23}) & -0.193s_{234}) & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.20b}$$

The above jacobian matrix constitutes the total analytic jacobian of the system and can be used in a closed loop inverse kinematics scheme. In essence, the total youBot is treated as a robotic arm and therefore we can use all the inverse kinematic methods available for them in the literature.

2.5.2 Geometric jacobian of youBot

The geometric Jacobian may be calculated by means of two methods. The first method assumes that the platform is equivalent to a rotational joint around the z-axis and two prismatic joints aligned with the x and y axes respectively. Then the geometric jacobian can be calculated through successive homogeneous transformations, as shown here [Siciliano et al., 2009].

In order to apply the second method, a transformation of the following form is required:

$$\vec{\omega}_e = K\dot{\vec{\phi}}_e$$

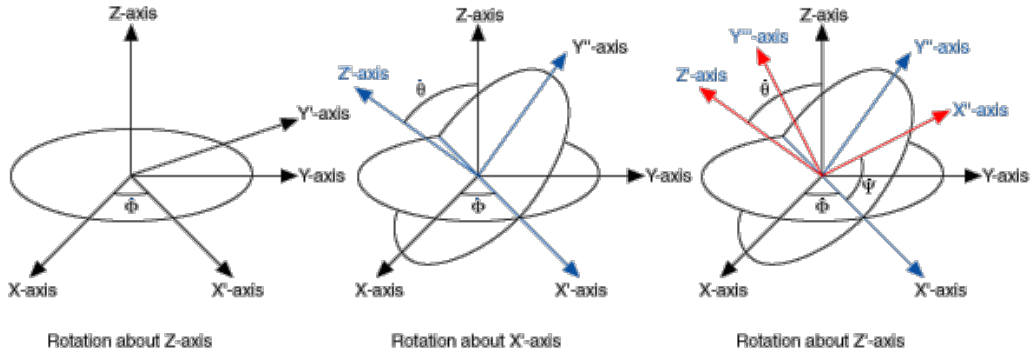


Figure 2.5: Composition of elementary rotations in order to compute the angular velocity

Having as reference Figure 2.5, the contribution of each rotational velocity component to the angular is calculated as follows:

- Component $\dot{\phi}$: $\begin{bmatrix}\omega_x & \omega_y & \omega_z\end{bmatrix}^T = \dot{\phi}\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}^T$
- Component $\dot{\theta}$: $\begin{bmatrix}\omega_x & \omega_y & \omega_z\end{bmatrix}^T = \dot{\theta}\begin{bmatrix}c_\phi & s_\phi & 0\end{bmatrix}^T$
- Component $\dot{\psi}$: $\begin{bmatrix}\omega_x & \omega_y & \omega_z\end{bmatrix}^T = \dot{\psi}\begin{bmatrix}s_\phi s_\theta & -c_\phi s_\theta & c_\theta\end{bmatrix}^T$

and the transformation is thus equal to:

$$\vec{\omega}_e = \begin{bmatrix} 0 & c_\phi & s_\phi s_\theta \\ 0 & s_\phi & -c_\phi s_\theta \\ 1 & 0 & c_\theta \end{bmatrix} \dot{\vec{\phi}}_e \tag{2.21}$$

By multiplying the last three lines of the analytic jacobian matrix with the above transformation the geometric jacobian is computed:

$$J_pG = \begin{bmatrix} -\frac{19}{3080000}(1665c_\theta - 10c_{1\theta}(-33 + 155s_2 + 135s_{23} + 193s_{234}) + 3837s_\theta) & 0.0238c_\theta - 0.0238s_\theta & -\frac{19}{3080000}(2185c_\theta + 10c_{1\theta}(-33 + 155s_2 + 135s_{23} + 193s_{234}) + 13s_\theta) \\ \frac{19}{3080000}(-1665s_\theta + 10s_{1\theta}(-33 + 155s_2 + 135s_{23} + 193s_{234}) + 3837c_\theta) & 0.0238c_\theta + 0.0238s_\theta & \frac{1}{3080000}(-2185s_\theta - 10s_{1\theta}(-33 + 155s_2 + 135s_{23} + 193s_{234}) + 13c_\theta) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0.062 & 0 & -0.062 \end{bmatrix} \tag{2.22a}$$

$$J_m = \begin{bmatrix} (c_{1\theta}(0.193s_{234} + 0.135s_{23} + 0.155s_2 - 0.033)) & s_{1\theta}(0.193c_{234} + 0.135c_{23} + 0.155c_2) & s_{1\theta}(0.193c_{234} + 0.135c_{23}) & 0.193c_{234}s_{1\theta} & 0 \\ (s_{1\theta}(0.193s_{234} + 0.135s_{23} + 0.155s_2 - 0.033)) & -c_{1\theta}(0.193c_{234} + 0.135c_{23} + 0.155c_2) & -c_{1\theta}(0.193c_{234} + 0.135c_{23}) & -0.193c_{234}c_{1\theta} & 0 \\ 0 & -0.193s_{234} - 0.135s_{23} - 0.155s_2 & -0.193s_{234} - 0.135s_{23}) & -0.193s_{234}) & 0 \\ 0 & c_{1\theta} & c_{1\theta} & c_{1\theta} & s_{234}s_{1\theta} \\ 0 & s_{1\theta} & s_{1\theta} & s_{1\theta} & -s_{234}c_{1\theta} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & c_{234} \end{bmatrix} \tag{2.22b}$$

At this point the kinematic analysis of the overall system has been completed by combining into one the two distinct parts, namely the platform and arm. Having devised all the previous equations, the following chapters begins by describing the method developed at a first stage and which was later rejected for reasons that will become more apparent later. Then, the final method will be explained, a method based on optimization theory, which gives much better results.

Chapter 3

Cooperation of mobile manipulators

The purpose of the two identical robotic systems is to carry an object, which is modelled as a bar, from a predetermined feasible initial position to a user-specified final position, maintaining throughout the motion the initial grip, $\|\vec{x}_1 - \vec{x}_2\| = \|\vec{x}_r\|$, as shown in Figure 3.1. Therefore, the overall system is

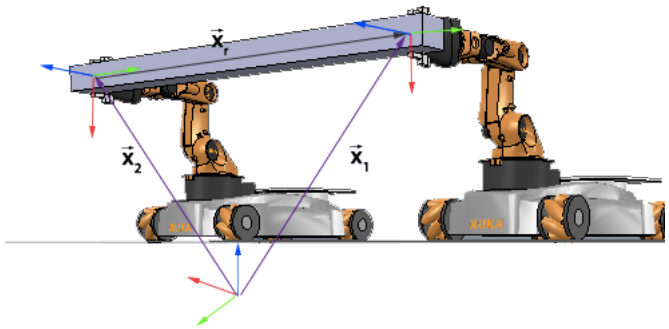


Figure 3.1: Constraint for a tight grip between two youBot

a closed kinematic chain and the total DoF are smaller than the sum of each youBot, i.e., 16. In fact, the chain's DoF can be calculated by Grübler's formula, [Tsai, 2008]. To this end, only the platform is initially considered. It consists of 4 mecanum wheels, each of 3 DoF. As a result, by Grübler's formula for planar mechanisms, the platform's DoF are:

$$M = 3 \cdot (N - 1 - J) + \sum_{i=1}^{J} f_i = 3 \cdot (2 - 1 - 4) + \sum_{i=1}^{4} 3 = 3 \tag{3.1}$$

Based on the above result, in order to obtain the DoF of the entire closed chain, the platform is modelled as a planar, 3 DoF joint. Therefore, the DoF of the chain are:

$$M = 6 \cdot (N - 1 - J) + \sum_{i=1}^{J} f_i = 6 \cdot (12 - 1 - 12) + 2 \cdot (3 + \sum_{i=1}^{5} 1) = 10 \tag{3.2}$$

3.1 Initial attempt

In a first attempt, based on the methodology presented in [Chiaccio et al., 1996], which was developed for fixed robotic arms, an application on our situation took place.

3.1.1 Forward kinematics

The absolute and relative position of the system are initially introduced:

$$\begin{aligned} \vec{p}_a &= \frac{1}{2}(\vec{p}_L + \vec{p}_F) \\ \vec{p}_r &= \vec{p}_F - \vec{p}_L \end{aligned}$$

and the absolute and relative orientation:

$$\begin{aligned} R_a &= R_L R_{k_{LF}} \left(\frac{\theta_{12}}{2} \right) \\ R_r &= R_F^L \end{aligned}$$

where k_{LF} is the unit vector which realizes the rotation from the coordinate frame of the second robot to the first, while θ_{LF} is the respective angle, and $R_F^L = R_L^T R_F$. At the velocity level, differentiating the position equations and considering the angular velocity, it is obtained that:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{p}}_a &= \frac{1}{2}(\dot{\vec{p}}_L + \dot{\vec{p}}_F) \\ \dot{\vec{p}}_r &= \dot{\vec{p}}_F - \dot{\vec{p}}_L \\ \vec{\omega}_a &= \frac{1}{2}(\vec{\omega}_L + \vec{\omega}_F) \\ \vec{\omega}_r &= \vec{\omega}_F - \vec{\omega}_L \end{aligned}$$

3.1.2 Inverse kinematics

Based on the forward differential kinematics of each system, which has been developed in the previous chapter, and analysing the two velocity components, i.e. the absolute and the relative velocity, the forward differential kinematics of the overall system takes the following form:

$$\begin{bmatrix} \dot{\vec{p}}_a \\ \omega_a \\ \dot{\vec{p}}_r \\ \omega_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}J_L & \frac{1}{2}J_F \\ -J_L & J_F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_L \\ \dot{q}_F \end{bmatrix}$$

Assuming that J is the system's jacobian matrix, a closed loop system is formed which is characterized by the following equation:

$$K\vec{e} = J\dot{\vec{q}}$$

where K is a diagonal gain matrix and $\vec{e}$ is the error between the current and desired pose:

$$\vec{e} = \begin{bmatrix} \vec{e}_a \\ \vec{e}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{p}_{ad} - \vec{p}_a \\ \frac{1}{2}\left(\vec{n}_a \times \vec{n}_{ad} + \vec{s}_a \times \vec{s}_{ad} + \vec{a}_a \times \vec{a}_{ad}\right) \\ R_a\vec{p}_{rd} - \vec{p}_r \\ \frac{1}{2}R_1\left(\vec{n}_r \times \vec{n}_{rd} + \vec{s}_r \times \vec{s}_{rd} + \vec{a}_r \times \vec{a}_{rd}\right) \end{bmatrix}$$

It is noted that for simplicity the relative position $\vec{p}_{rd}$ between the first and the second robot is easier computed when defined in the absolute coordinate frame, because for a tight grasp it is a constant vector. Moreover, the vectors $\vec{n}$, $\vec{s}$ και $\vec{a}$ constitute the columns of the respective orientation matrix.

Our system is kinematically redundant, in which case the jacobian's matrix inverse is realized by means of a pseudoinverse method. The use of the Moore-Penrose pseudoinverse is not appropriate, because when the system is close to a singularity - often occurring because of the closed kinematic chain - the calculated velocities will violate the joints' limits and undesirable behaviour will appear. Thus, the damped least squares method is used, which defines the inverse as follows:

$$J^\dagger = J^T \left(JJ^T + \lambda^2 J\right)^{-1} = \sum_i \frac{\sigma_i}{\sigma_i + \lambda_i^2} \vec{v}_i \vec{u}_i^T$$

where vectors $\vec{v}_i$ και $\vec{u}_i$ are calculated by performing SVD and σ_i the respective eigenvalue. This method constitutes essentially a compromise between the accuracy of the solution and the velocity of

the joints, so as to limit the values when close to singularities. Important factor thus has the choice of the parameter λ_i. A selection of this parameter for each eigenvalue can be performed as follows:

$$\lambda_i^2 = \begin{cases} 0 & , \sigma_i \geq \epsilon \\ \left(1 - \left(\frac{\sigma_i}{\epsilon}\right)^2\right)^2 \lambda_{max}^2 & , \sigma_i < \epsilon \end{cases}$$

where λ_{max} defines the maximum value of the damping factor, and ϵ defines the size of the singular region. For the youBot available in the simulation environment it was observed that when the eigenvalue is bellow $\epsilon = 0.0025$ problems start to arise.

By using this pseudoinverse method the following equation is formed:

$$\dot{\vec{q}} = J^{\dagger}(K\vec{e}) + (I - J^{\dagger}J)\dot{\vec{q}}_0$$

where the vector $\dot{\vec{q}}_0$ could be used in order to incorporate some desirable behaviours such as joint limit avoidance, manipulability maximization, obstacle avoidance, etc.

In conclusion, the problems concerning the magnitude of the calculated velocity could be somewhat mitigated by using the damped least squares method, but this is only possible by sacrificing the solution's accuracy. However, if the final pose has a unique solution at a singularity, e.g. if the extension of both arms is required, then the speed of convergence is greatly diminished. Another problem with this method is that the calculated velocity commands might cause the entire system to lock, i.e. the systems arrives at a singular configuration where the calculated velocity commands do not produce any movement. Also, the relative grasp between the two robots, as it is apparent from the previous analysis, is not necessarily constant; the error of the relative position $\vec{e}_r$ is not always zero. Even if we choose a very big gain in the corresponding columns of the matrix K, this can not be guaranteed.

These problems led to the decision of abandoning this method and in seeking a solution that would not require the jacobian matrix inversion, taking into account any restrictions such as joint and velocity limits ,tight grasp, and every other restrictions we wish to define in a strict manner. So it was decided to formulate the problem as an optimization problem, in which all constraints would be met at the optimal solution.

3.2 Constraints between two robots forming a tight grasp

As mentioned earlier, the purpose of the two robots is to carry a solid object from an initial position to a final feasible position. During the movement it is necessary for the robot's grasp to meet some restrictions, because it is considered tight in the sense that no relative movement and change of orientation is allowed. With reference to Figures 3.1 and 3.2 the holonomic constraints for the position can be modelled as follows:

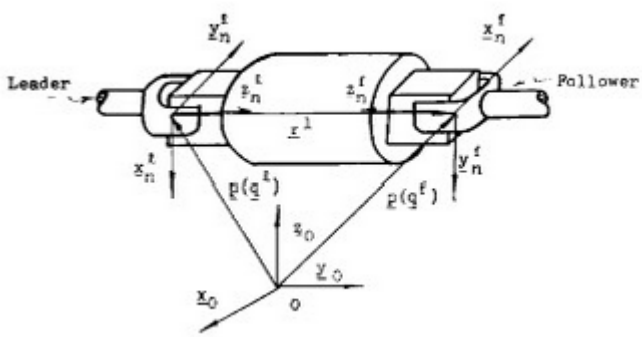


Figure 3.2: Constraint for tight grasp in terms of the end effectors

$$p(q^L) + R_0^e(q^L)r^l - p(q^F) = 0 \tag{3.3}$$

while for the orientation we use either the rotation matrices or the Euler angles:

$$R_0^e(q^L)^T R_0^e(q^F) = C : \text{Constant matrix} \tag{3.4a}$$

$$o(q^L) - o(q^F) = \text{Constant vector} \tag{3.4b}$$

where the second equation is chosen because of the smaller necessary number of parameter for representation. Thus, the position constraints consist of 3 non-linear equations, whereas the orientation constraints consist of 3 linear equations.

In the velocity level the system is linear and is defined as:

$$[J_{\gamma\rho\alpha\mu.}(q^L) + \frac{\partial(R_0^e(q^L)r^l)}{\partial q^L}]\dot{q}^L - J_{\gamma\rho\alpha\mu.}(q^F)\dot{q}^F = 0 \tag{3.5a}$$

$$J_{\gamma\omega\nu.}(q^L)\dot{q}^L - J_{\gamma\omega\nu.}(q^F)\dot{q}^F = 0 \tag{3.5b}$$

where, based on the equation's linearity, the jacobian matrices are constant.

Finally it is noted that the indices L: Leader and F: Follower are used so that we can distinguish the two robots. Also, a similar analysis could be utilized if instead of a solid object there was a tool, e.g. pliers, or a ball joint etc.

3.3 Optimization problem formulation

In order to realize the cooperation between the two robotic systems, a non-linear optimization problem will be derived. First of all the constraints are shaped.

3.3.1 State variables

As state variables for each youBot the variables $\begin{bmatrix} x & y & \theta & q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & q_5 \end{bmatrix}^T$ are considered, knowledge of which defines precisely the position and orientation of the end effector. The first 3 refer to the platform, while the last 5 refer to the arm.

3.3.2 Equality constraints

According to the analysis of section 3.1, there are 3 non-linear and 3 linear constraint, which must be always satisfied. In specific, the last linear constraint is of the form:

$$q_5^L = q_5^F + constant$$

and thus it can be replaced in the previous relationships and eliminated from the problem. Performing the necessary replacements and by using the linear equality constrains, the 5 constraints take the following form:

$$\begin{aligned} x^L - x^F - 0.0013(c_\theta^L - c_\theta^F) - 0.1665(s_\theta^L - s_\theta^F) + c_{q_1+\theta}^L(r_x c_{q_5}^L - r_y s_{q_5}^L) + s_{q_1+\theta}^L[0.135(s_{q_2}^L - s_{q_2}^F) + \\ + 0.155(s_{q_2+q_3}^L - s_{q_2+q_3}^F) - c_{q_2+q_3+q_4}^L(r_y c_{q_5}^L + r_x s_{q_5}^L) + r_z s_{q_2+q_3+q_4}^L] = 0 \end{aligned} \tag{3.6a}$$

$$\begin{aligned} y^L - y^F + 0.1665(c_\theta^L - c_\theta^F) - 0.0013(s_\theta^L - s_\theta^F) + s_{q_1+\theta}^L(r_x c_{q_5}^L - r_y s_{q_5}^L) - c_{q_1+\theta}^L[0.155(s_{q_2}^L - s_{q_2}^F) + \\ + 0.135(s_{q_2+q_3}^L - s_{q_2+q_3}^F) - c_{q_2+q_3+q_4}^L(r_y c_{q_5}^L + r_x s_{q_5}^L) + r_z s_{q_2+q_3+q_4}^L] = 0 \end{aligned} \tag{3.6b}$$

$$0.155(c^L_{q_2} - c^F_{q_2}) + 0.135(c^L_{q_2+q_3} - c^F_{q_2+q_3}) + s^L_{q_2+q_3+q_4}(r_y c^L_{q_5} + r_x s^L_{q_5}) + r_z c^L_{q_2+q_3+q_4}] = 0 \quad (3.6c)$$

$$q^L_1 - q^F_1 + \theta^L - \theta^F = 0 \quad (3.6d)$$

$$q^L_2 - q^F_2 + q^L_3 - q^F_3 + q^L_4 - q^F_4 = 0 \quad (3.6e)$$

These constraints must be satisfied at every time in order for the two robots to always maintain the tight grasp.

3.3.3 Inequality constrains

Apart from the previous equality constraints, the limits of the joint variables must be taken into account, both in terms of the mechanical limits as well as the velocity limits. The limits of mechanical joints are provided by the manufacturer and can be summarized as follows:

$$q_{min_i} \leq q_i \leq q_{max_i} \quad (3.7)$$

with $q_{min} = -\begin{bmatrix}169° & 65° & 150° & 102° & 169°\end{bmatrix}^T$, $q_{max} = \begin{bmatrix}169° & 90° & 146° & 102° & 169°\end{bmatrix}^T$ in rad. Limits for the variables x, y and θ do not exist because every position and orientation of the platform is possible. Velocity limits are given as:

$$-16rad/sec \leq \omega_i \leq 16rad/sec \quad (3.8a)$$

$$-2.5rad/sec \leq \dot{q}_i \leq 2.5rad/sec \quad (3.8b)$$

Furthermore, the following constraint must be taken into account for the joints because of the discretization, assuming that in the next pose $q_{k+1} \approx q_k + \dot{q}_k T$:

$$\frac{q_{min_i} - q_k}{T} \leq \dot{q}_k \leq \frac{q_{max_i} - q_k}{T} \quad (3.9)$$

Finally, given that the robot can develop some finite acceleration, this fact must be taken into account and incorporated into the velocity constraints. To this end it is assumed that the robot's motion should be stopped the fastest way possible, i.e. with maximum deceleration a_{max}, in order to remain between the joint limits. Then, at some time $t > t_k$ for a joint applies that:

$$\begin{aligned} q(t) &= q_k + \dot{q}_k(t - t_k) - \frac{a_{max}}{2}(t - t_k)^2 \\ \dot{q}(t) &= \dot{q}_k - a_{max}(t - t_k) \end{aligned}$$

In the most extreme case a joint's limit will be reached, either the top or the bottom. Based on the previous relationships and in order to prevent this, it is sufficient to limit the velocities as follows:

$$-\sqrt{2a_{max}(q_k - q_{min_i})} \leq \dot{q}_k \leq \sqrt{2a_{max}(q_{max_i} - q_k)} \quad (3.10)$$

Putting together all the previous inequalities, the velocity limits defined in 3.9a for the wheels exist, and for the joints:

$$max\left\{\frac{q_{min_i} - q_k}{T}, \dot{q}_{min_i}, -\sqrt{2a_{max}(q_k - q_{min_i})}\right\} \leq \dot{q}_k \leq min\left\{\frac{q_{max_i} - q_k}{T}, \dot{q}_{max_i}, \sqrt{2a_{max}(q_{max_i} - q_k)}\right\} \quad (3.11)$$

3.4 Problem definition in terms of the joints position

Considering only the position of the joints, the problem shall be formulated based on the equations 3.6 and constraints on the joints limits as given by inequality 3.7. The solution of a system of non-linear equations with limits for some of the variables is required, which is a very difficult problem. Indeed, a subspace of possible configurations of the overall system is formed based on them. Of course, it is not only enough to solve the problem, but also to find a path that will lead the system to the desired end position. Therefore, the subspace of possible configurations is formed as follows:

$$\mathcal{C}_{clo} = \{q \in \mathcal{C} : \forall f_i, f_i(q) = 0, q_{min} \leq q \leq q_{max}\}$$

A possible solution would then be to search in this subspace using a search algorithm, e.g. the A^*. But if the problem is considered at the velocity level, it is much more easily solvable.

3.5 Solution for the state variables velocities

Based on the jacobian matrix formulated in the previous chapter, the jacobian matrix of the whole system is formulated as follows:

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix} \tag{3.12}$$

where J_1, J_2 are the jacobian of each robot respectively.

In order to form a closed loop system, the calculation of the error between the present position and orientation of the leader relative to the desired position and the desired orientation, and the present position and orientation of the follower with respect to the desired must be computed. The error for each one, considering that the homogeneous transformations T_d for the desired final pose, T_1 for the leader's pose, and T_2 for the follower's pose are given, is calculated as follows:

$$e_L = \begin{bmatrix} p_d - p_1 \\ o_{e_1} \end{bmatrix} \tag{3.13a}$$

$$e_F = \begin{bmatrix} p_d + R_d r^l - p_2 \\ o_{e_2} \end{bmatrix} \tag{3.13b}$$

where the orientation error is calculated given the matrices of the desired final orientation $R_d = \begin{bmatrix} \vec{n}_d & \vec{s}_d & \vec{a}_d \end{bmatrix}$, the orientation of the leader's end effector $R_1 = \begin{bmatrix} \vec{n}_1 & \vec{s}_1 & \vec{a}_1 \end{bmatrix}$, and the orientation of the follower's end effector $R_2 = \begin{bmatrix} \vec{n}_2 & \vec{s}_2 & \vec{a}_2 \end{bmatrix}$ as follows:

$$o_{e_1} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_d + \vec{s}_1 \times \vec{s}_d + \vec{a}_1 \times \vec{a}_d \tag{3.14a}$$

$$o_{e_2} = \vec{n}_2 \times \vec{n}_d + \vec{s}_2 \times \vec{s}_d + \vec{a}_2 \times \vec{a}_d \tag{3.14b}$$

with symbol $\times$ denoting cross product. As a result the total error is calculated as:

$$e = \begin{bmatrix} e_L \\ e_F \end{bmatrix} \tag{3.15}$$

Considering the joint velocities, an objective function is formulated in order to nullify the error. Based on the forward differential kinematics, this function could be formulated as follows

$$F = \|f(q) - x_d\|_2^2 \approx \|x + J\dot{q}dt - x_d\|_2^2 \text{ ή } F(\dot{q}) = \|J\dot{q}dt - e\|_2^2$$

This function has a global minimum at the desired pose.

$$\begin{aligned} \|J\dot{q}dt - e\|_2^2 &= [J\dot{q}dt - e]^T [J\dot{q}dt - e] = dt^2 \dot{q}^T J^T J\dot{q} - dt\dot{q}^T J^T e - dte^T J\dot{q} + e^T e = \\ &= dt^2 \dot{q}^T J^T J\dot{q} - 2dte^T J\dot{q} + e^T e \end{aligned} \tag{3.16}$$

Therefore, the optimization problem is formulated as:

$$\begin{aligned} \min_{\dot{q}}. \quad & \dot{q}^T H \dot{q} + h^T \dot{q} \\ \text{s. t.} \quad & M\dot{q} = 0 \\ & \dot{q}_{min} \leq \dot{q} \leq \dot{q}_{max} \end{aligned} \tag{3.17}$$

with $H = dt^2 J^T J$ and $h = -2dtJ^T e$. Matrix H is always positive semi-definite and symmetric. The fact that it is positive semi-definite is shown as follows:

$$x^T H x = dt^2 x^T J^T J x = dt^2 \left(Jx\right)^T \left(Jx\right) \geq 0$$

where equality happens when any eigenvalue is zero, i.e. on a singularity. Furthermore, it follows that:

$$H^T = dt^2 \left(J^T J\right)^T = dt^2 J^T \left(J^T\right)^T = dt^2 J^T J = H$$

thus symmetrical.

The constraints of the optimization problem are linear and therefore convex. Moreover, the objective function is convex. This can be proved by the definition of a function's convexity, which states that a convex function must satisfy the following inequality:

$$F(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda F(x) + (1-\lambda)F(y) \quad \forall \lambda \in [0,1]$$

For $\lambda = 0$ or for $\lambda = 1$ it is clear that the equality stands. For $\lambda \in (0,1)$ each side is considered separately:

$$\begin{aligned} F(\lambda x + (1-\lambda)y) &= [y + \lambda(x-y)]^T H [y + \lambda(x-y)] + h^T [y + \lambda(x-y)] = \\ &= y^T H y + \lambda (x-y)^T H y + \lambda y^T H (x-y) + \lambda^2 (x-y)^T H (x-y) + \\ &\quad + h^T y + \lambda h^T (x-y) = \\ &= y^T H y + 2\lambda (x-y)^T H y + \lambda^2 (x-y)^T H (x-y) + h^T y + \lambda h^T (x-y) \\ \lambda F(x) + (1-\lambda)F(y) &= \lambda x^T H x + \lambda h^T x + (1-\lambda) y^T H y + (1-\lambda) h^T y = \\ &= \lambda x^T H x + y^T H y - \lambda y^T H y + h^T y + \lambda h^T (x-y) \end{aligned}$$

Substituting into the inequality which needs proof, it is sufficient to hold that:

$$2\lambda (x-y)^T H y + \lambda^2 (x-y)^T H (x-y) \leq \lambda (x^T H x - y^T H y)$$

But λ is positive and smaller than 1, thus the following inequality stands:

$$\lambda^2 (x-y)^T H (x-y) \leq \lambda (x-y)^T H (x-y)$$

Therefore, by considering the left side of the inequality which must hold and by using the previous inequality, the following is obtained:

$$\begin{aligned} 2\lambda (x-y)^T H y + \lambda^2 (x-y)^T H (x-y) &\leq 2\lambda (x-y)^T H y + \lambda (x-y)^T H (x-y) = \\ &= \lambda (x-y)^T H y - \lambda (x-y)^T H x = \\ &= \lambda (x-y)^T H (x-y) = \\ &= \lambda (x^T H x - y^T H y) \end{aligned}$$

and the proof has concluded.

As a result, both the objective function and the constraints of the problem are convex. Convexity ensures our initial assumption for the objective function, namely the existence of a global minimum. If the feasibility space is non empty, the optimum solution is among the feasible solutions of the problem.

Computationally the above problem could be solved by a method of quadratic programming, e.g. the Wolfe method. It is noted that during the solution of the problem, because the velocity limits do not allow the direct achievement of the minimum, at each step of the simulation the problem arrives at a solution on the boundary of the feasible region defined by the constraints, with a consequent reduction of the objective function. Therefore at each step of the discretization the simulation gets closer to the global minimum, and we conclude that the overall system ultimately converges to the desired pose.

3.6 Joint limit avoidance

Direct application of the above method, although it can lead the system to the desired final position, faces a number of problems. One of the most important takes place when any joint of the two robots reaches its mechanical limits. Then this joint is saturated and thus losing the possibility of being actuated in one direction. In order to avoid such an undesirable situation another quadratic optimization problem is formed, which calculates velocities to be superimposed on the already calculated and which will produce internal motions that will not change the position and orientation of the end effector, but only the internal configuration, ensuring as much as possible the avoidance of the mechanical limits.

3.6.1 Objective function

The selected objective function must have a global minimum in the middle of each joint. Then the minimization shall lead as closer to it as possible. A quadratic function satisfying this criterion is the following:

$$f(\dot{q}) = \frac{(\dot{q}+c)^T(\dot{q}+c)}{2} \tag{3.18}$$

where c is defined based on the middle of each joint:

$$c = k_g(q - q_{mid}) \tag{3.19}$$

with $k_g > 0$ a gain and $q_{mid} = \begin{bmatrix} 0° & 25° & -4° & 0° & 0° \end{bmatrix}^T$. Finally, this function is similar to the one selected in the primary problem, and thus shows exactly the same properties and the same characteristics.

3.6.2 Constraints

The minimization of the previous function should ensure that there will be no disturbance of the primary task, that of achieving the desired final position. To this end the following constraint is introduced:

$$J\dot{q}_m = 0 \tag{3.20}$$

satisfaction of which assures that the new superimposed velocity is contained in the jacobian's matrix null-space and as a result the end effector remains unchanged because:

$$J(\dot{q} + \dot{q}_m) = J\dot{q} + J\dot{q}_m = \dot{x} + 0 = \dot{x}$$

Moreover, this velocity shall not violate the velocity constraint between the two robots. Thus the following constraint is introduced:

$$M\dot{q}_m = 0 \tag{3.21}$$

but also not the velocity limits. This is achieved by including the following constraint:

$$\dot{q}_{min} \leq \dot{q} + \dot{q}_m \leq \dot{q}_{max} \Rightarrow \dot{q}_{min} - \dot{q} \leq \dot{q}_m \leq \dot{q}_{max} - \dot{q} \tag{3.22}$$

Finally, it is worth noting that this new velocity vector includes the wheel velocities of the platforms, which are not included in the objective function, but only to the constraints. In this way we ensure that the platform will move in such a way in order to help the joint limit avoidance. In the simulations included in the next chapter this becomes particularly evident by observing that after the system has arrived at the desired final position, the platforms move in such a way as to allow the first joint to reach position 0°.

Chapter 4

Simulations of the proposed method

For an experimental verification of the preceding paragraphs analysis, a series of simulations using the simulation environment v-rep in combination with Simulink was conducted. Hierarchically, Simulink initially made all calculations, which were supplied to v-rep, and then receiving feedback of the state variables for both robots, with discretization step $dt = 0.05sec$. The model used is shown in Figure 4.1. It is noted that on the left side the user enters the desired position and the desired orientation,

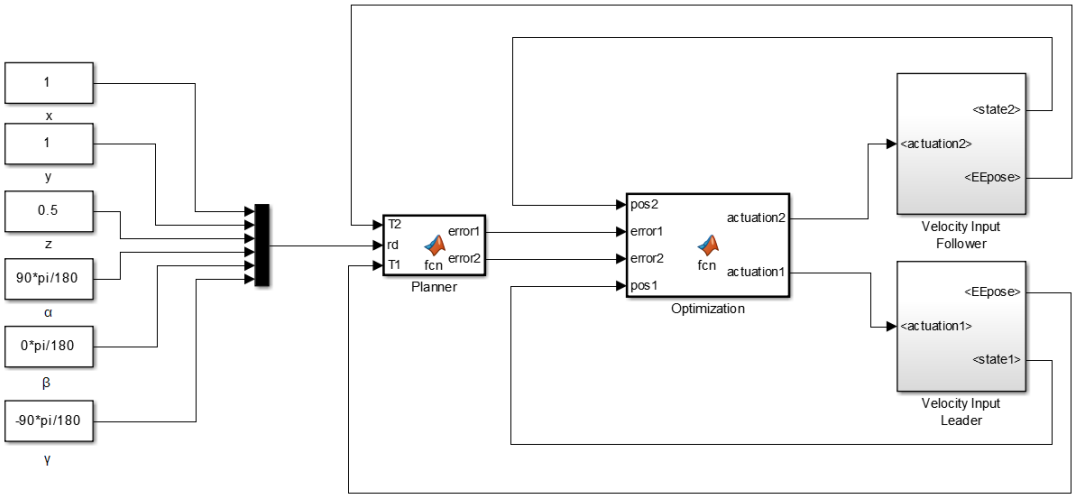


Figure 4.1: Model of the simulated system in Simulink

which is parametrized using RPY angles, the convention followed by v-rep for the orientation of all objects.

Then four scenarios were simulated, which included for the sake of variety final poses in all 4 quadrants of the workspace defined by v-rep and rotations in all three axes. For convenience it was chosen for all cases to have the same initial pose and only the final was changed. The initial configuration is shown in Figure 4.2.

As reference point, the point at the center of the gripper of the robot which is lower in Figure 4.2 was chosen, which was defined as robot 1. The coordinates and orientation of this point are:

$$\vec{x}_{start} = \begin{bmatrix} 0 & 0.53 & 0.4 & -90° & 0° & 90° \end{bmatrix}^T \tag{4.1}$$

4.1 Scenario 1

In Scenario 1 the system was commanded to move from the defined initial position to the position with coordinates:

$$\vec{x}_{end_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0.5 & 90° & 0° & -90° \end{bmatrix}^T \tag{4.2}$$

Essentially the final tool of the robot is moved 1m relative to axis x, 0.5m relative to y axis, by 0.1m relative to z axis, and rotated by 180° around z axis. Four characteristic snapshots of the simulation are shown in Figure 4.3, where the final position is shown in the last image of the figure.

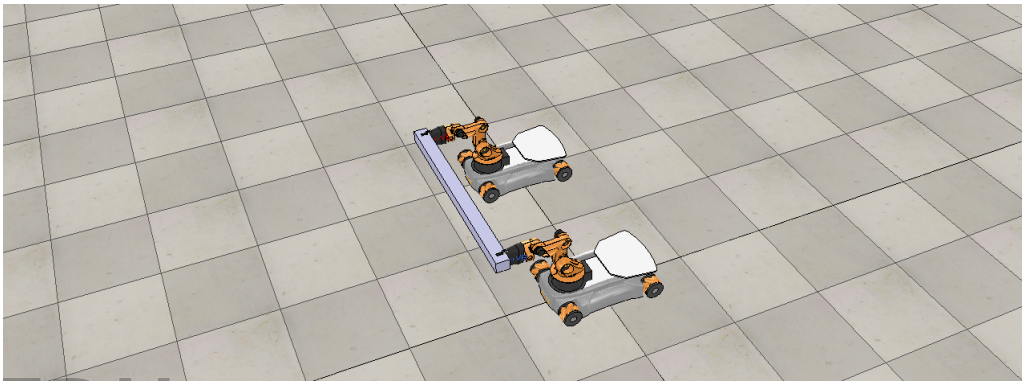
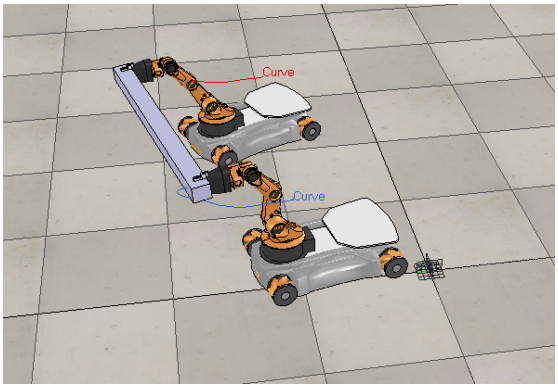
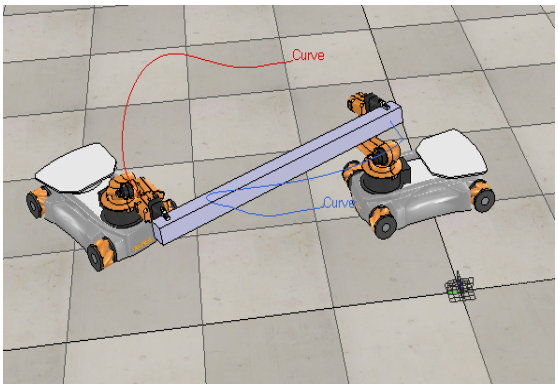


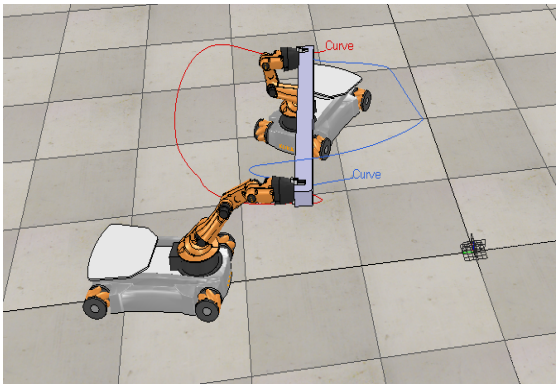
Figure 4.2: Initial configuration



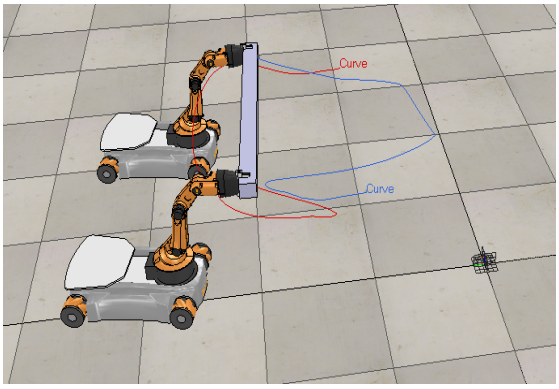
(a) Intermediate snapshot 1.



(b) Intermediate snapshot 2.



(c) Intermediate snapshot 3.



(d) Final snapshot

Figure 4.3: Snapshots from the first simulation

In these snapshots, in a blue curve the path of the tool of the first robot appears, which is the reference point, and in a red curve the path of the same point on the other robot appears too.

Figure 4.4 shows the graphical representation of the Euclidean norm of the total $\vec{e}$ for both systems. Note that until the rotation of the system is finished the error grows, while the system moves to the desired final position.

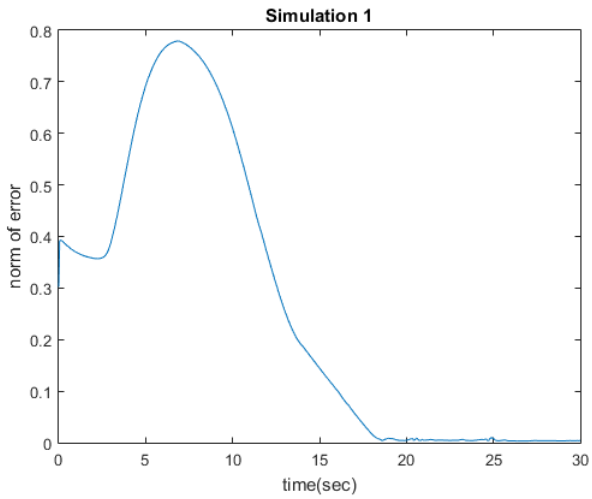


Figure 4.4: Euclidean norm of the first simulation's error

4.2 Scenario 2

In the second scenario the system is commanded to move from the initial position to the final with coordinates:

$$\vec{x}_{end_2} = \begin{bmatrix} -0.9 & 0.7 & 0.25 & -145° & -30° & 55° \end{bmatrix}^T \tag{4.3}$$

The end effector of the robot in this case moves in the second quadrant of the workspace, making both a rotation of 35° around z axis as well as a rotation around the axes x and y of 55° and 30° respectively, compared to the initial pose. Four instances of this scenario are shown in Figure 4.5.

The Euclidean norm of the error is shown in Figure 4.6, where in this case is continuously reduced.

4.3 Scenario 3

In the third scenario the system was commanded to move to the final pose with coordinates:

$$\vec{x}_{end_3} = \begin{bmatrix} -0.8 & -0.8 & 0.72 & 0° & 0° & 60° \end{bmatrix}^T \tag{4.4}$$

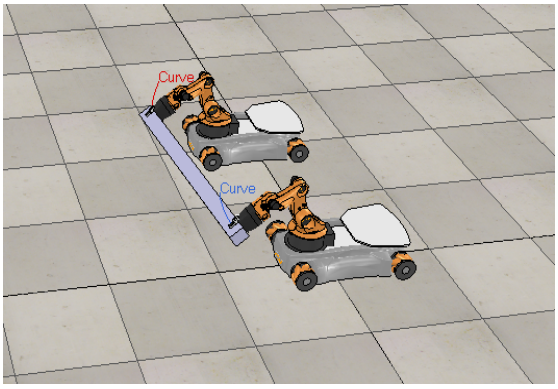
Essentially the system moves in the fourth quadrant, while the full extension of the arm is required. The four snapshots of this simulation are shown in Figure 4.7, while Figure 4.8 shows the graph of error's norm:

4.4 Scenario 4

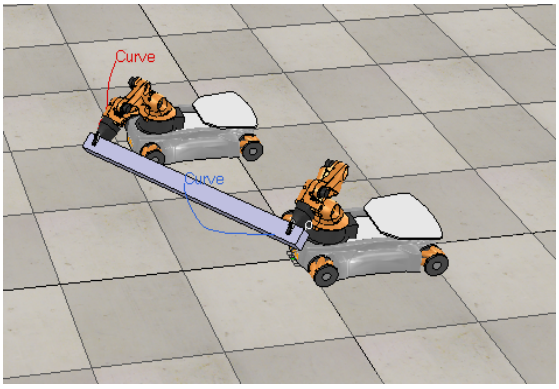
In the last scenario the desired coordinates were chosen as:

$$\vec{x}_{end_4} = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.6 & 0.2 & -90° & 30° & 80° \end{bmatrix}^T \tag{4.5}$$

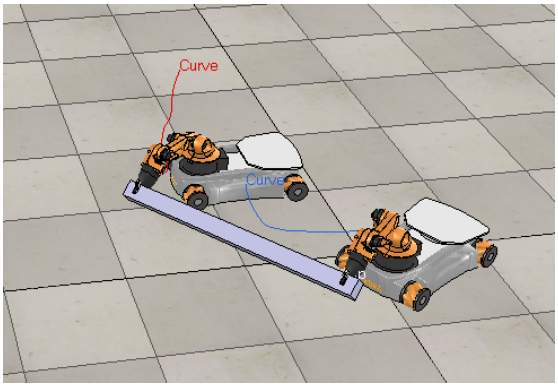
The system will move to the third quadrant of the workspace, performing rotations about the axes y and z only, of 30° and 10°. The snapshots and the error of this simulation are shown as usual in Figure 4.9 and 4.10 respectively.



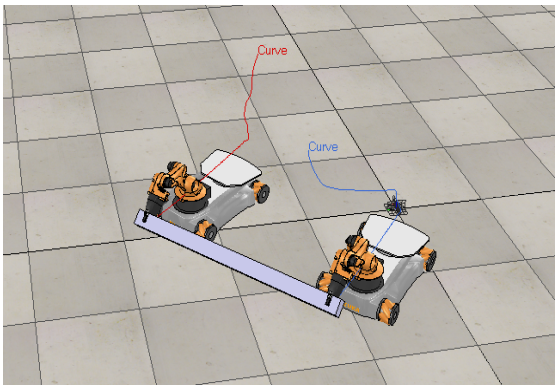
(a) Intermediate snapshot 1



(b) Intermediate snapshot 2



(c) Intermediate snapshot 3



(d) Final snapshot

Figure 4.5: Snapshots from the second simulation

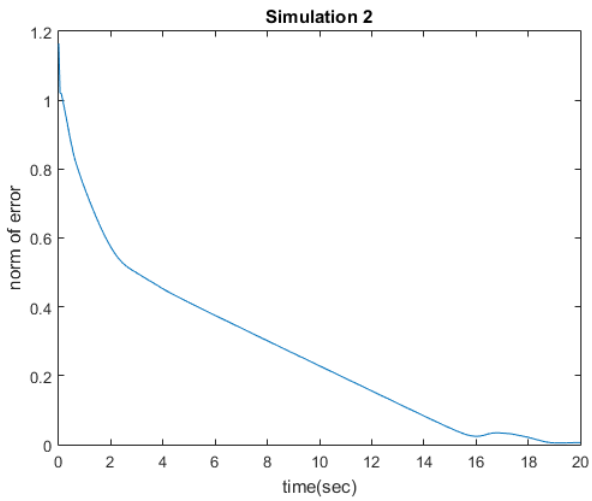
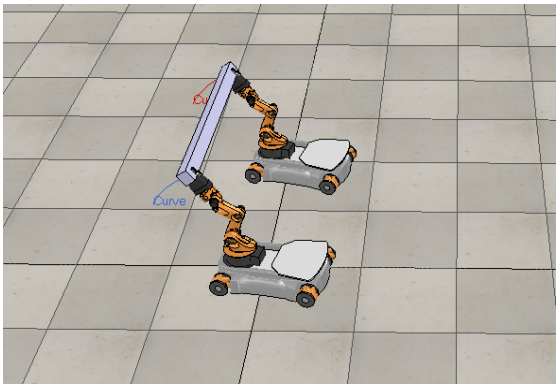
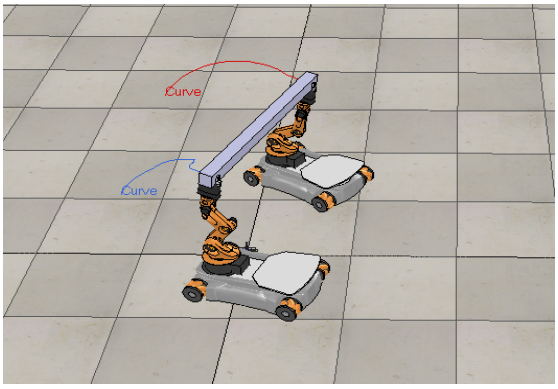


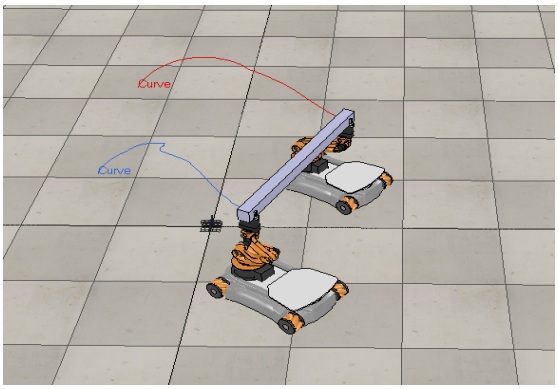
Figure 4.6: Euclidean norm of the second simulation's error



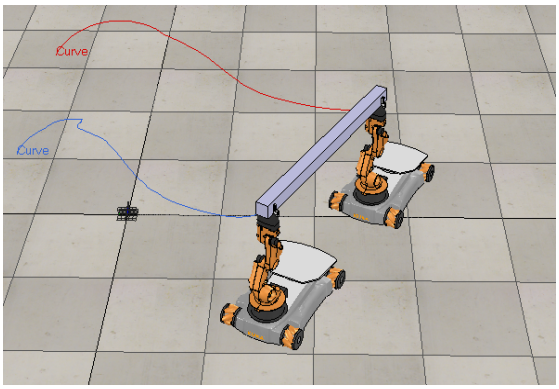
(a) Intermediate snapshot 1



(b) Intermediate snapshot 2



(c) Intermediate snapshot 3



(d) Final snapshot

Figure 4.7: Snapshots from the third simulation

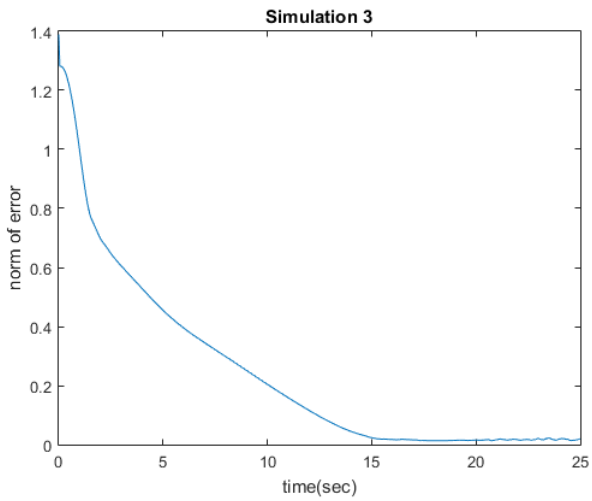
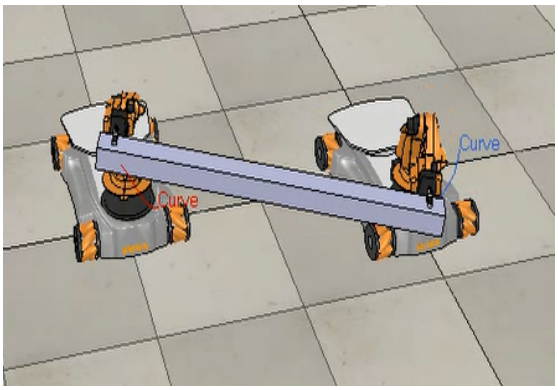
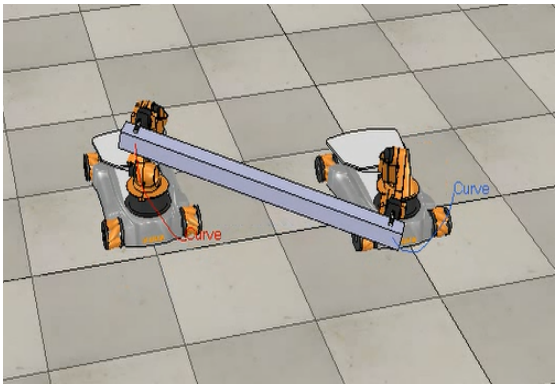


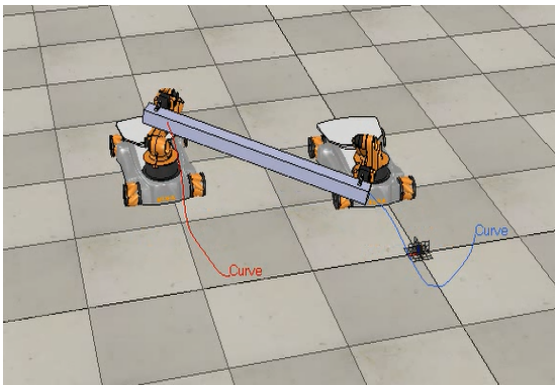
Figure 4.8: Euclidean norm of the third simulation's error



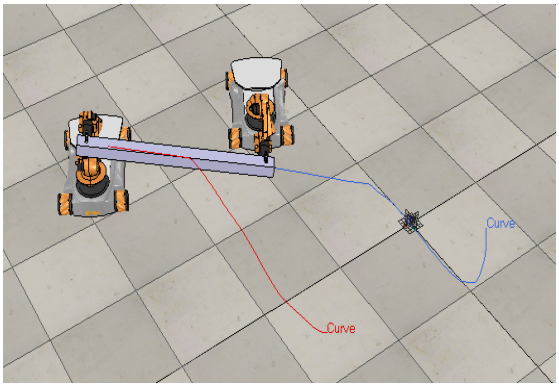
(a) Intermediate snapshot 1



(b) Intermediate snapshot 2



(c) Intermediate snapshot 3



(d) Final snapshot

Figure 4.9: Snapshots from the fourth simulation

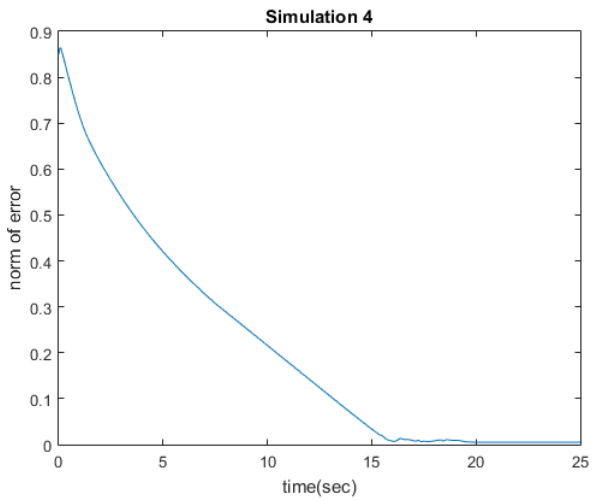


Figure 4.10: Euclidean norm of the fourth simulation's error

Chapter 5

Conclusion and future directions

5.1 Final conclusions

Based on these simulations, as well as others that are not shown here, some observations are worth mentioning. First of all, the convergence is apparent from the graphs showing the error. In any case, although the error is sometimes increasing during the simulations, so as the system to perform any necessary action, such as rotation about an axis, in the end it always tends to zero. Throughout the course of motion the two robots respect the tight grip requirement, as opposed to the first approach discussed in Chapter 3. Simulations of this method did not always respect the tight grip and at several times their relative error was different from zero. This was one of the major reasons for the method's abandonment.

As discussed in Chapter 3, in each step of the simulation optimization of two well posed quadratic programming problems is required. Although this could have been done using an analytic procedure, the function quadprog was eventually selected using the Matlab's available interior-point convex algorithm, which achieves satisfactory convergence.

The problems associated with the velocity's magnitude and the limits of the joints are completely eliminated through the proposed method, because they are posed as constraints. In particular, in Scenario 3 the final pose is chosen in a place that leads the system too close to a singularity. Classic techniques utilizing pseudoinverse of the jacobian matrix would pose serious problems, because of the high calculated velocities. Using any method that would take into account the velocity limits, such as the one proposed in [Flacco et al., 2015], would definitely improve the situation. This method was implemented in order to improve the results of the initial approach. Nevertheless, in situations were singularities arise, convergence was extremely slow. Instead, the optimization problem does not require the inverse of the matrix and hence does not suffer from any of these problems.

Furthermore, it is worth commending on the proposed method for avoiding the joints limits. In all cases it becomes clear that the primary objective, i.e. the convergence to the desired final pose is not disrupted, because of the inclusion of the constraint that the calculated velocities shall belong to the null-space of the jacobian. Its existence is evident at the end of the simulations, where in all four scenarios the platforms rotates in order to align the respective first joint to its center, performing themselves any required rotation around the z axis. All joints therefore tend to their central position as much as possible. By using the pseudoinverse of the jacobian this would have been practically impossible, given the associated singularities at these positions.

Finally, this method suffers from some serious problems that require further development. Specifically, a problem that occurs quite often in the simulations and prevents the final convergence is the collision of the system with itself. In this case the velocity commands are not executed due to the collision, and therefore the tight grip constraint is not guaranteed. This is an extremely important problem, because then essentially the method fails, and as already stated these cases are not so rare.

5.2 Future directions

The main future direction is effectively tackling the problem mentioned above. There must be a further study in order to incorporate into the optimization problem the system itself, so as to avoid possible self-collisions. If successfully tackled no other serious issue needs to be resolved.

In the next steps some highly desirable characteristics should be studied, such as obstacle avoidance, which in practice are necessary. Also, systematic calculation of the applied forces is required, which are not taken into account in the kinematic analysis; the resulting force distribution between the two systems must avoid for example to overturn the system, or to pay attention to the size of the forces exerted on the bar, because very large forces can crush it, while too small may not be able to hold it.

Bibliography

[Bayle et al., 2002] Bayle, B., Fourquet, J.-Y., Lamiraux, F., and Renaud, M. (2002). Kinematic control of wheeled mobile manipulatiors. In *International Conference on Intelligent Robots and Systems*.

[Chiaccio et al., 1996] Chiaccio, P., Chiaverini, S., and Siciliano, B. (1996). Direct and inverse kinematics for coordinated motion tasks of a two-manipulator system. *Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 118.

[Diebel, 2006] Diebel, J. (2006). Representing attitude: Euler angles, unit quaternions, and rotation vectors.

[Flacco et al., 2015] Flacco, F., Luca, A. D., and Khatib, O. (2015). Control of redudant robots under hard joint constraints: Saturation in the null space. *IEEE Transactions on Robotics*.

[Luca et al., 2006] Luca, A. D., Oriolo, G., and Giordano, P. R. (2006). Kinematic modelling and redundancy resolution for nonholonomic mobile manipulators. In *IEEE International Conference on Robotics and Automation*.

[Muir and Neuman, 1987] Muir, P. F. and Neuman, C. P. (1987). Kinematic modeling of wheeled mobile robots. *Robotic Systems*, 4(2):281–340.

[Papadopoulos and Poulakakis, 2000] Papadopoulos, E. and Poulakakis, J. (2000). Planning and model-based control for mobile manipulators. *Proceedings IROS Conference on Intelligent Robots and Systems*.

[Seraji, 1998] Seraji, H. (1998). A unified approach to motion control of mobile manipulators. *The International Journal of Robotics Research*, 17(2):107–118.

[Siciliano and Khatib, 2008] Siciliano, B. and Khatib, O. (2008). *Springer Handbook of Robotics*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

[Siciliano et al., 2009] Siciliano, B., Sciavicco, L., Villani, L., and Oriolo, G. (2009). *Robotics: Modelling, Planning and Control*. Springer.

[Tsai, 2008] Tsai, L.-W. (2008). *Robot Analysis: The Mechanics of Serial and Parallel Manipulators*. Wiley-Interscience.

[Yamamoto and Yun,] Yamamoto, Y. and Yun, X. Coordinating locomotion and manipulation of a mobile manipulator.

Appendix A

Nomenclature

$^{A}\vec{p}_p$: The position vector of the platform $\vec{p}_p = \begin{bmatrix} p_{p,x} & p_{p,y} & \theta_p \end{bmatrix}^T$ with respect to coordinate system A.

A_i^{i-1}: Homogeneous transformation matrix of frame i with respect to frame i-1.

c_i: The cosine of joint q_i.

$^{R}d_{C_{ix}}$: Position of the contract point C_i with respect to x of the platform's frame.

$^{R}d_{C_{iy}}$: Position of the contract point C_i with respect to y of the platform's frame.

F: Primal objective function

f: Objective function of the joint limit avoidance problem.

f_i: Degrees of freedom of joint i.

I_i: Identity matrix with dimensions $[i \times i]$.

J: Number of joints or the jacobian matrix.

l_a: Distance of the contact point with respect to x axis from the platform's center.

l_b: Distance of the contact point with respect to y axis from the platform's center.

l_{ab}: The sum of the distances of the wheel contract points from the platform's frame.

M: Matrix of velocity constraints.

N: Number of links.

$\vec{p}$: Position vector $\vec{p} = \begin{bmatrix} p_x & p_y & p_z \end{bmatrix}^T$.

q_i: Joint q_i of youBot, $i = 1, ..., 5$ or the system's state vector.

q_{min}: Lower angle limit of any joint of the system.

q_{max}: Upper angle limit of any joint of the system.

$\dot{q}$: Velocity vector of the system.

$\dot{q}_{min}$: Lower velocity limit of any joint of the system.

$\dot{q}_{max}$: Upper velocity limit of any joint of the system.

R: Platform's wheel radius or rotation matrix.

r: Radius of the platform's rollers.

r_l: Position of the leader's end effector with respect to the follower.

s_i: Sine of joint q_i.

T: Homogeneous transformation.

$\vec{w}_i$: Velocity vector of the wheel i $\vec{w}_i = \begin{bmatrix} \omega_{i_x} & \omega_{i_r} & \omega_{i_z} \end{bmatrix}^T$.

$\vec{x}$: Generalized position vector $\vec{x} = \begin{bmatrix} \vec{p} & \vec{\phi} \end{bmatrix}^T$.

η: Angle between the rollers and the wheel.

${}^R\theta_{C_i}$: Angle between the coordinate frame of the wheel i and the platform's frame.

$\vec{\phi}$: Orientation vector $\vec{\phi} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \end{bmatrix}^T$.