



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ
ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΘΕΜΑ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ:

ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ ΘΕΡΜΟΕΛΑΣΤΙΚΩΝ ΙΔΙΟΤΗΤΩΝ
ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΑΙΜΙΛΙΟΣ Π. ΣΙΔΕΡΙΔΗΣ

ΣΥΓΓΡΑΦΗ: ΝΙΚΟΛΟΥΔΗ ΧΡΙΣΤΙΝΑ

ΑΘΗΝΑ 2015

*Ευχαριστώ τους γονείς μου και
τον Άγγελο για όλη τους
τη βοήθεια και υποστήριξη.*

Περιεχόμενα

ΠΕΡΙΛΗΨΗ.....	3
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1:ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	4
1.1 ΟΡΙΣΜΟΣ ΣΥΝΘΕΤΟΥ ΥΛΙΚΟΥ.....	4
1.2 ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΕΞΕΛΙΞΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ.....	4
1.3 ΠΛΕΟΝΕΚΤΗΜΑΤΑ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ.....	9
1.4 ΕΓΚΛΕΙΣΜΑΤΑ.....	12
1.5 ΙΝΩΔΗ ΣΥΝΘΕΤΑ ΥΛΙΚΑ.....	13
1.6 ΚΟΚΚΩΔΗ ΣΥΝΘΕΤΑ ΥΛΙΚΑ.....	16
1.7 ΕΝΔΙΑΜΕΣΗ ΦΑΣΗ.....	17
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2:ΚΟΚΚΩΔΗ ΥΛΙΚΑ.....	22
2.1 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΕΤΡΟΥ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΚΟΚΚΩΔΩΝ ΥΛΙΚΩΝ.....	22
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΕΛΑΣΤΙΚΩΝ ΣΤΑΘΕΡΩΝ ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΦΑΣΗΣ.....	37
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ ΔΙΑΣΤΟΛΗΣ ΙΝΩΔΩΝ ΥΛΙΚΩΝ.....	54
4.1 ΔΙΑΜΗΚΗΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΘΕΡΜΙΚΗΣ ΔΙΑΣΤΟΛΗΣ.....	54
4.2 ΕΓΚΑΡΣΙΟΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΘΕΡΜΙΚΗΣ ΔΙΑΣΤΟΛΗΣ.....	56
4.3 ΣΥΓΚΡΙΣΕΙΣ ΘΕΩΡΗΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΩΝ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ.....	76
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5:ΘΕΡΜΟΜΗΧΑΝΙΚΗ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ ΙΝΩΔΩΝ ΥΛΙΚΩΝ.....	78
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ.....	88
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....	97

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Σε αυτή την διπλωματική εργασία, ένα απλοποιημένο θεωρητικό μοντέλο αναπτύχθηκε για την πρόβλεψη των θερμοελαστικών σταθερών και των λόγων Poisson ενός σύνθετου υλικού. Βάσει της μεθόδου αυτής, η οποία και χρησιμοποιήθηκε για την ανάπτυξη του μοντέλου μας, θεωρείται ότι ένας κύριος παράγοντας που επηρεάζει την μηχανική συμπεριφορά του σύνθετου υλικού είναι η ύπαρξη ενδιάμεσης φάσης μεταξύ του εγκλείσματος και της μήτρας, η οποία και έχει διαφορετικές φυσικοχημικές ιδιότητες σε σχέση με τις άλλες φάσεις που αποτελούν το υλικό. Ωστόσο, για να εκτιμηθούν οι σταθερές του σύνθετου υλικού συνολικά, έγινε προσπάθεια να καθοριστεί η μεταβολή των μηχανικών ιδιοτήτων της ενδιάμεσης φάσης λαμβάνοντας υπόψη κάποιες μεταβολές. Ακόμη εξετάζεται η επίδραση της θερμοκρασίας στη μηχανική συμπεριφορά σύνθετων ινωδών υλικών με βραχείες ίνες.

Εκτός από τα παραπάνω, που είναι και ο κύριος πυρήνας αυτής της διπλωματικής εργασίας, παρατίθενται πολλά θεωρητικά στοιχεία για τα σύνθετα υλικά, γενικότερα όπως επίσης και πολλές εικόνες, διαγράμματα και πίνακες που κάνουν την όλη προσπάθεια πιο κατανοητή στον ερευνητή-αναγνώστη.

ABSTRACT

In this thesis, a simplified theoretical model has been developed for the prediction of thermoelastic moduli and Poisson's ratio in composites. The method that has been used for the development of our model, considers that a main fact affecting the mechanical behavior of composite materials, is the existence of the mesophase layer, between fiber and matrix, which possesses different physic-chemical properties than those of the constituent phases. In order to evaluate the overall moduli of the composite, we try to determine the variation of the mechanical properties of the mesophase layer, taking into account some laws of variation. Also, we examine the effect of temperature in the mechanical behavior of fiber-reinforced composite materials.

Apart from these, which are the main core of this thesis, they are cited plenty of theoretical data about the composite materials in general as well as many pictures, diagrams and charts that make the whole effort more comprehensible for the researcher-reader.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1:ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 ΟΡΙΣΜΟΣ ΣΥΝΘΕΤΟΥ ΥΛΙΚΟΥ

Ο ορισμός του σύνθετου υλικού μπορεί να δοθεί ως εξής: Ένα υλικό, εξεταζόμενο μακροσκοπικώς, χαρακτηρίζεται ως σύνθετο όταν σχηματίζεται από το συνδυασμό δύο ή περισσότερων υλικών και έχει ιδιότητες διάφορες των αρχικών υλικών που το δημιούργησαν. Συνήθως τα υλικά αυτά παρουσιάζουν βελτίωση των ιδιοτήτων τους σε σχέση με τα επί μέρους υλικά που τα αποτελούν ή και εντελώς διαφορετικές ιδιότητες από αυτά.

Τις περισσότερες φορές το ένα εκ' των δύο διακρινόμενων υλικών «παίζει» το ρόλο της ενίσχυσης και καλείται έγκλεισμα και προσδίδει στο σύνθετο υλικό βελτιωμένες μηχανικές ιδιότητες ενώ το άλλο υλικό «παίζει» συνδετικό ρόλο και καλείται μήτρα, συνήθως είναι χαμηλής πυκνότητας και η συμμετοχή του στο σύνθετο εξασφαλίζει τη μέγιστη δυνατή εκμετάλλευση των ιδιοτήτων του εγκλείσματος.

1.2 ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΕΞΕΛΙΞΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό θα αναφέρουμε τη σταδιακή εξέλιξη των υλικών αυτών και τη χρήση τους από τον άνθρωπο δια μέσου των αιώνων. Από τη Βίβλο φαίνεται ότι οι Εβραίοι χρησιμοποίησαν άχυρο για να δώσουν μεγαλύτερη αντοχή στα λασπότουβλα. Οι Αιγύπτιοι χρησιμοποίησαν ένα είδος «κόντρα πλακέ» όταν κατάλαβαν ότι στρώματα ξύλου έχουν τη δυνατότητα να συνδυαστούν καταλλήλως ώστε να παρουσιάσουν ικανοποιητική αντοχή σε διάφορες κατευθύνσεις και να είναι ανθεκτικά στη διόγκωση και στη στρέβλωση, οι οποίες προκαλούνται από την υγρασία. Επίσης, στην Αίγυπτο και στη Μεσοποταμία εμφανίστηκαν σχεδίες από καλάμι παπύρου με προσθήκη ασφάλτου. Οι Ασύριοι κατασκεύασαν πλωτές γέφυρες με σανίδες εμποτισμένες με αδιάβροχη ασφαλτο. Το Μεσαίωνα κατασκευάστηκαν σπαθιά, ασπίδες και θώρακες από συνδυασμούς στρωμάτων διαφόρων μετάλλων. Στις μέρες μας ανακαλύφθηκαν τα ινώδη σύνθετα υλικά στα οποία ο λόγος αντοχής/βάρους και ακαμψίας/βάρους είναι αρκετά μεγάλος πράγμα πολύ σημαντικό για τις σύγχρονες κατασκευές όπως η αεροναυπηγική. Αυτό είναι, εν ολίγοις, το ιστορικό των σύνθετων υλικών. Είναι εμφανές με όσα αναφέραμε παραπάνω ότι ο άνθρωπος από τα πρώτα χρόνια της ύπαρξης του στη Γη είχε ενστικτωδώς αντιληφθεί την έννοια του σύνθετου υλικού, δηλαδή ότι ο συνδυασμός δυο ή περισσότερων υλικών, από μακροσκοπική άποψη, έδινε τη δυνατότητα κατασκευής ενός τρίτου, σύνθετου υλικού, το οποίο ικανοποιούσε ορισμένες «ποιοτικές απαιτήσεις» της κατασκευής στην οποία επρόκειτο να χρησιμοποιηθεί.

Η ταχύτητα με την οποία εξελίχθηκαν τα σύνθετα υλικά δεν είναι η ίδια δια μέσου της ιστορίας τους. Μέχρι και τον 19ο αιώνα η εξέλιξη αυτή είναι πολύ μικρή και τα σύνθετα υλικά του 19ου αιώνα δεν απέχουν και πάρα πολύ, από αυτά των αρχαίων Αιγυπτίων, Ελλήνων κλπ., ούτε από άποψη ποιότητας, ούτε από άποψη μεθόδου κατασκευής. Η ουσιαστική εξέλιξη των σύνθετων υλικών σημειώνεται τον 20ο αιώνα και μάλιστα τα τελευταία 30-35 έτη.

Οι ταχέως αναπτυσσόμενες εφαρμογές των σύνθετων υλικών, τα τελευταία χρόνια, δημιούργησαν μεγάλη αισιοδοξία για τη χρήση τους στο μέλλον. Αν και πολλά σύνθετα υλικά κατασκευάζονταν από τον άνθρωπο, εδώ και χιλιάδες χρόνια, η εφαρμογή τους στην υψηλή τεχνολογία, όπως στην αεροδιαστημική βιομηχανία, παρατηρείται μόνον τα τελευταία τριάντα χρόνια. Τα σύνθετα υλικά, τα πλαστικά και τα κεραμικά έχουν αναδειχθεί πολύ και τείνουν να επικρατήσουν σε καθημερινές εφαρμογές από τη δεκαετία

του '80 και μετά. Ο όγκος και ο αριθμός των εφαρμογών των σύνθετων υλικών έχει σταθερή ανάπτυξη και πρόσφατα τα υλικά αυτά έχουν κατακτήσει τις νέες αγορές. Οι περισσότεροι γνωρίζουν τα θαλάσσια σκάφη από «fiberglass» (Σχ. 1.2) και τα αθλητικά είδη από ίνες γραφίτη(Σχ. 1.1). Οι πιθανές εφαρμογές των σύνθετων υλικών περιορίζονται μόνο από τη φαντασία του ανθρώπινου είδους.



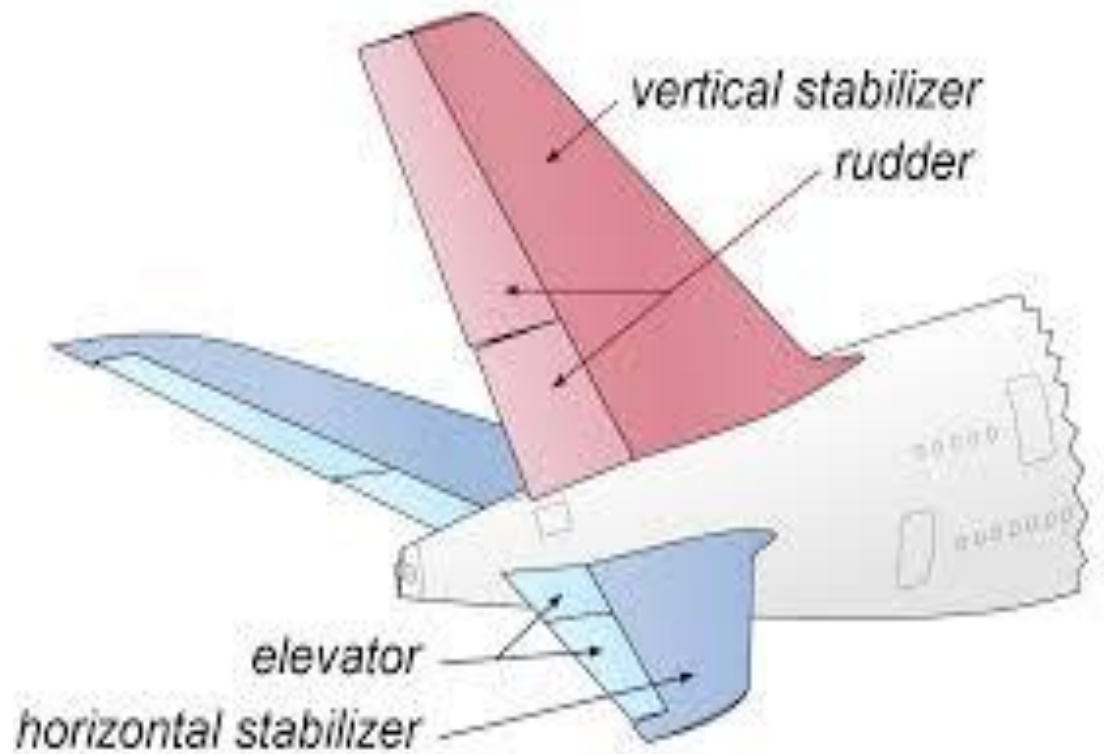
Σχ. 1.1



Σχ. 1.2

Οι δεξαμενές και τα μεγάλα δοχεία, τα οποία κατασκευάζονται με τη μέθοδο της περιτυλίξεως ινών υάλου, υπήρξαν η πρώτη εφαρμογή των μοντέρνων σύνθετων υλικών που χρησιμοποιήθηκε. Στη συνέχεια, στη δεκαετία του '60 ήρθαν οι ίνες βορίου, οι οποίες χρησιμοποιήθηκαν από την αεροπορία των Η.Π.Α για την κατασκευή αεροσκαφών, και σηματοδότησαν την ευρεία χρήση των σύνθετων υλικών σε αυτόν τον τομέα. Ο οριζόντιος σταθεροποιητής (horizontal stabilizer) (Σχ. 1.4) των αεροσκαφών F-111 υπήρξε το πρώτο τεμάχιο αεροσκάφους που κατασκευάστηκε από σύνθετο υλικό. Η παραγωγή σταθεροποιητών από σύνθετα υλικά για τα αεροσκάφη F-14 στην αρχή της δεκαετίας

του '70 ήταν ένα άλλο σημαντικό βήμα. Ακολούθησε ο σταθεροποιητής των F-15 και το πηδάλιο(rudder) και ο σταθεροποιητής για τα F-16.

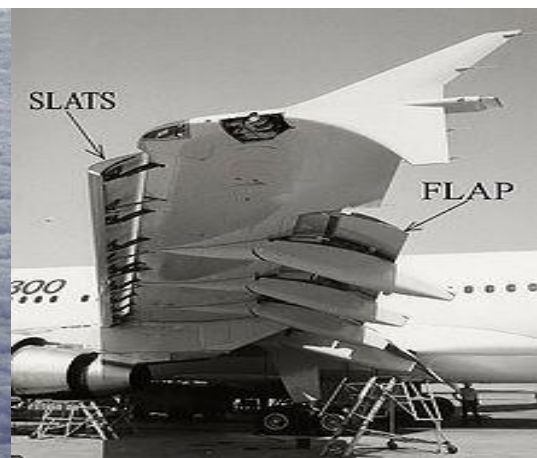


Σχ. 1.4

Στην αρχή της δεκαετίας του '80 το νεοεισερχόμενο Boeing767(Σχ. 1.5α) περιείχε σχεδόν δύο τόνους σύνθετου υλικού στις δοκούς δαπέδου και σε όλες τις επιφάνειες ελέγχου. Το γιγαντιαίο Σοβιετικό μεταγωγικό Antonov124, έχει συνολικά 5500Kg σύνθετου υλικού από τα οποία τα 2500Kg περιέχουν ίνες γραφίτη. Το πτερύγιο(flap) των AirbusA310-A300(Σχ. 1.5β) κατασκευασμένο όλο από σύνθετο υλικό, είναι μια εντυπωσιακή κατασκευή παρά την απλότητα του.



Σχ. 1.5α



Σχ. 1.5β

Σχεδόν όλα τα εμφανιζόμενα αεροσκάφη κάνουν εκτεταμένη χρήση των σύνθετων υλικών. Παραδείγματα είναι το αεροσκάφος Rafale της Dassault-Brequet, το Lavi της Ισραηλινής αεροπορικής βιομηχανίας, το JAS-39 Gripen της Σουηδικής Saab-Scania και το μαχητικό αεροσκάφος (European Fighter Aircraft) (Σχ. 1.6) της Βρετανίας, Γερμανίας, Ιταλίας και Ισπανίας.



Σχ. 1.6

Το 1986, το Voyager (Σχ. 1.7), ένα άλλο αεροπλάνο κατασκευασμένο εξολοκλήρου από σύνθετα υλικά δημιούργησε ένα παγκόσμιο ρεκόρ ταξιδεύοντας άνευ στάσεως. Το αεροπλάνο ήταν πολύ ελαφρύ και παρουσίασε καταπληκτική ελαστικότητα και ανθεκτικότητα έναντι των καταιγίδων που συνάντησε.



Σχ. 1.7

Σύνθετα υλικά υψηλής αντοχής από ίνες γραφίτη χρησιμοποιούνται επίσης για την κατασκευή των διπλών πηδαλίων μιας νέας επαναστατικού τύπου θαλαμηγού, μήκους 12 μέτρων, η οποία όπως και το Voyager καθιέρωσαν τη χρήση υλικών υψηλής τεχνολογίας σε καθημερινής χρήσης κατασκευές. Τα σύνθετα υλικά και η εξέλιξη του τρόπου επεξεργασίας τους, αποτέλεσαν έναν από τους βασικότερους παράγοντες για την ανάπτυξη της

σύγχρονης τεχνολογίας. Εκτός της αεροναυπηγικής βιομηχανίας, τα υψηλής τεχνολογίας σύνθετα υλικά βρίσκουν εφαρμογές και σε άλλους τομείς της σύγχρονης βιομηχανίας. Ναυτικά σκάφη, κουπιά, ποδήλατα(Σχ. 1.8), παντός είδους αθλητικά είδη (ρακέτες τένις, κοντάρια γκολφ κλπ.) και σχεδόν κάθε εξάρτημα όπου το βάρος, η ακαμψία και η αντοχή παίζουν σημαντικό ρόλο στη λειτουργικότητά του, είναι κατασκευασμένα από σύνθετα υλικά.



Σχ. 1.8

Οι ίνες αραμιδίου όπως το «Kevlar» και το «Nomex» χρησιμοποιούνται σήμερα σε δεκάδες εφαρμογές όπως π.χ. στα αλεξίσφαιρα(Σχ. 1.9α), στα ναυτικά σκοινιά(Σχ. 1.9β) στα κράνη (Σχ. 1.10β) ακόμα και σε γάντια υψηλών θερμοκρασιών(Σχ. 1.9γ).



Σχ. 1.9α



Σχ. 1.9β



Σχ. 1.9γ

Εκατοντάδες τόνοι σύνθετων υλικών με ίνες άνθρακα(carbon fiber) χρησιμοποιήθηκαν ως πρώτη ύλη, από το 1993, για την κατασκευή ρακετών του τένις(Σχ. 1.3) με αποτέλεσμα ρακέτες και σύνθετα υλικά να θεωρούνται έννοιες ταυτόσημες.



Σχ. 1.3

Το 1985 στη διάσκεψη της Εταιρείας Μηχανικών, που έλαβε χώρα στο Detroit των Η.Π.Α., εκφράστηκε η άποψη ότι η χρήση των σύνθετων υλικών στη βιομηχανία αυτοκινήτων (Σχ. 1.10α-καμπίνα αυτοκινήτου από ανθρακονήματα) θα είναι τόσο μεγάλη όσο και των ηλεκτρονικών συστημάτων. Σήμερα παρατηρούμε ότι αυτή η άποψη επαληθεύεται.



Σχ. 1.10α



Σχ. 1.10β

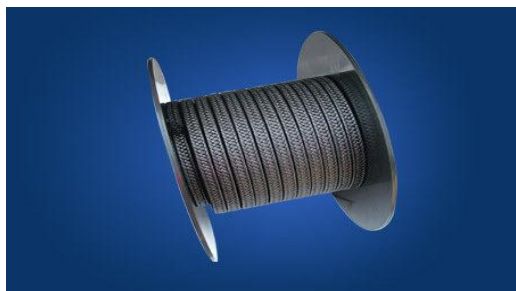
1.3 ΠΛΕΟΝΕΚΤΗΜΑΤΑ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

Οι ιδιότητες κάθε υλικού συμβατικού ή σύνθετου οι οποίες είναι σημαντικές από δομικής απόψεως μπορούν να διακριθούν σε μηχανικές και μη. Μηχανικές ιδιότητες ενός υλικού είναι η ακαμψία, η αντοχή, η ολκιμότητα, η σκληρότητα και η συμπεριφορά του υλικού σε κόπωση, ερπυσμό και χαλάρωση. Οι μη μηχανικές ιδιότητες ενός υλικού περιλαμβάνουν κυρίως την πυκνότητα, την θερμική συμπεριφορά και την αντίσταση σε διάβρωση του υλικού.

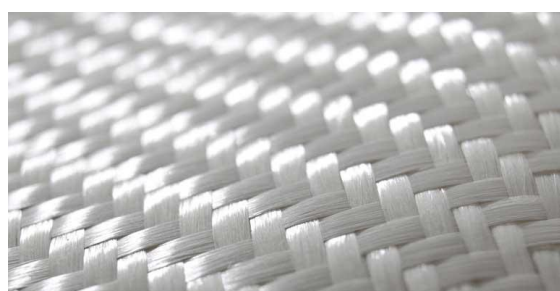
Τα σύνθετα υλικά, συνήθως διαθέτουν τις καλύτερες ιδιότητες των υλικών από τα οποία αποτελούνται, ενώ επιπλέον διαθέτουν και ιδιότητες τις οποίες κανένα από τα αρχικά υλικά δεν διέθετε. Έτσι οι γενικές ιδιότητες των σύνθετων υλικών οι οποίες τα καθιστούν ανώτερα από τα συμβατικά υλικά μπορεί να είναι οι εξής :

1. Αντοχή.
2. Ακαμψία.
3. Αντίσταση σε διάβρωση.
4. Αντίσταση σε παντός είδους φθορά κατά τη χρήση τους.
5. Κόστος.
6. Βάρος.
7. Συμπεριφορά σε κόπωση.
8. Θερμική μόνωση.
9. Θερμική αγωγιμότητα.
10. Ακουστική μόνωση.

Είναι όμως προφανές ότι ένα σύνθετο υλικό δεν διαθέτει όλες τις παραπάνω ιδιότητες ταυτοχρόνως, αφού δεν υπάρχει ποτέ τέτοια απαίτηση στην πράξη και αφού ορισμένες από τις ιδιότητες αυτές είναι ασυμβίβαστες μεταξύ τους (π.χ. θερμική μόνωση, θερμική αγωγιμότητα). Άρα κάθε σύνθετο υλικό κατασκευάζεται έτσι ώστε να διαθέτει μερικές από αυτές τις ιδιότητες.



Σχ. 1.12α (Ίνες Γραφίτη)



Σχ. 1.12β (Ίνες γυαλιού GFRP)

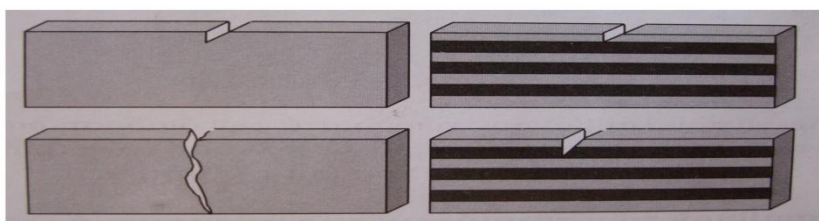
Παρακάτω θα δούμε πιο διεξοδικά τα πλεονεκτήματα των σύνθετων υλικών.

Άριστες μηχανικές ιδιότητες

Το πρώτο μεγάλο πλεονέκτημα των σύνθετων υλικών είναι οι άριστες μηχανικές τους ιδιότητες. Αρκετοί τύποι ινών επειδή διαθέτουν την προαπαιτούμενη αντοχή και δυσκαμψία έχουν αποτελέσει υλικά κατασκευής σε αεροδιαστημικές εφαρμογές και εντάσσονται στην κατηγορία των προηγμένων ινών. Οι ίνες βορίου και γραφίτη (Σχ. 1.12α) με την μορφή λεπτών νημάτων χαίρουν από τους ερευνητές μεγάλης εκτίμησης χάρη στην μεγάλη αντοχή και δυσκαμψία τους. Το λεπτό νήμα του βορίου έχει έξι φορές μεγαλύτερη αντοχή και δυσκαμψία από το αλουμίνιο και για αυτό είναι ευρύτατα διαδεδομένο στις αεροναυπηγικές κατασκευές. Τέλος να πούμε ότι το βόριο υπερίσχυσε στις εφαρμογές του γραφίτη εξαιτίας κάποιων μειονεκτημάτων του τελευταίου όπως μικρή διαστρωματική διατμητική αντοχή και χαμηλή αντοχή σε θλίψη. Οι δύο παραπάνω ιδιότητες οφείλονται στη χαμηλή αντοχή του υλικού στην κάθετη διεύθυνση των ινών του καθώς και στην δυσκολία επίτευξης ενός ισχυρού δεσμού στην διεπιφάνεια.

Ανάληψη φορτίου μετά την αστοχία

Ένα άλλο χαρακτηριστικό των σύνθετων υλικών είναι τα μεγάλα φορτία που εξακολουθούν να αναλαμβάνουν μετά από κάποια πιθανή αστοχία τους. Το παραπάνω χαρακτηριστικό παρατηρήθηκε αρκετές φορές σε στατικές δοκιμές σύνθετων υλικών. Για παράδειγμα παρατηρήθηκε ότι τα ινώδη σύνθετα που είναι ενισχυμένα με ίνες γυαλιού (GFRP) (Σχ. 1.12β) μετά την διαρροή τους εξακολουθούν να αναλαμβάνουν φορτία που φτάνουν το 85% της τάσης αστοχίας τους. Σε άλλες περιπτώσεις, το παραπάνω ποσοστό μπορεί να φτάσει στο 110% ή και 150% του ορίου διαρροής. Το φαινόμενο αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι μετά την αστοχία του υλικού συμβαίνει θραύση των ινών και έτσι η τάση μεταβιβάζεται σε πολλαπλές κατευθύνσεις μέσα στη μάζα του υλικού.



Σχ. 1.1 (μικρή ευαισθησία σύνθετων υλικών σε εγκοπές)

Μικρή ευαισθησία σε εγκοπές

Τα ινώδη σύνθετα υλικά παρουσιάζουν σχετικά μικρή ευαισθησία στην ύπαρξη εγκοπών ενώ η διάδοση των ρωγμών είναι περιορισμένη. Το γεγονός αυτό βελτιώνει την αντοχή του υλικού σε κόπωση. Αυτό επιβεβαιώθηκε και σε δοκιμές κόπωσης που έγιναν σε πραγματικές κατασκευές από σύνθετα υλικά όπου παρατηρήθηκε σημαντική αύξηση της διάρκειας ζωής σε σχέση με αυτή των αντίστοιχων μεταλλικών κατασκευών. Τέλος αν συγκρίνουμε την ανά μονάδα βάρους διάρκεια ζωής σε κόπωση των ινωδών σύνθετων υλικών με εκείνη των παραδοσιακών υλικών θα παρατηρήσουμε ότι τα ινώδη σύνθετα υλικά παρουσιάζουν πολύ αυξημένες τιμές σε σχέση με το τιτάνιο που είναι το ανθεκτικότερο από όλα τα μέταλλα σε κόπωση.

Μείωση αριθμού των τμημάτων της κατασκευής

Ένα άλλο πλεονέκτημα των σύνθετων υλικών είναι ο ελάχιστος αριθμός τμημάτων που απαιτούνται για μια κατασκευή. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα την ανάδειξη παράλληλων πλεονεκτημάτων, όπως χαμηλότερο κόστος επισκευής, παραγωγής και κατεργασίας, ενώ η κατασκευή παρέχει μεγαλύτερη αξιοπιστία η οποία και αποτελεί έναν πολύ σημαντικό παράγοντα στην αεροδιαστημική.

Βέλτιστες αεροδυναμικές επιφάνειες

Με την χρήση σύνθετων υλικών τύπου *sandwich* μπορούν εύκολα να κατασκευαστούν βέλτιστες αεροδυναμικές επιφάνειες που χαρακτηρίζονται από την διατήρηση του σχήματός τους ακόμα και κάτω από την επίδραση υψηλών φορτίων.

Αντίσταση στην διάβρωση

Η απόλυτη αντίσταση στην διάβρωση είναι ένα ασυνήθιστο χαρακτηριστικό των μεταλλικών κατασκευών. Αντίθετα, στα ενισχυμένα πλαστικά δεν παρατηρούνται φαινόμενα ηλεκτροχημικής διάβρωσης. Μόνο η ηλιακή ακτινοβολία μπορεί να προκαλέσει μια υποβάθμιση των ιδιοτήτων τους που όμως μπορεί να ελεγχθεί με την κατάλληλη προστασία του υλικού.

Απόσβεση σε ταλαντώσεις

Τα σύνθετά υλικά και ειδικά οι τύποι *sandwich* παρουσιάζουν μεγάλη απορρόφηση ενέργειας με αποτέλεσμα να αποσβάνουν τις μηχανικές ταλαντώσεις, ενώ παράλληλα μπορούν να χρησιμοποιηθούν και σαν ηχομονωτικά υλικά.

Αντοχή σε κρούσεις υψηλής ενέργειας

Η υψηλή αντοχή των ινωδών σύνθετων υλικών σε κρουστικά φορτία υψηλής ενέργειας έχει σαν αποτέλεσμα την περιορισμένη καταστροφή της κατασκευής και την διατήρηση του περιγράμματος στις περιοχές γύρω από την καταστροφή. Η διάτρηση που προκύπτει από την βαλλιστική κρούση περιορίζεται σε μία περιοχή του υλικού που είναι λίγο μεγαλύτερη από αυτή του βλήματος. Η συγκέντρωση των τάσεων γύρω από την περιοχή της καταστροφής στα μέταλλα είναι εξαιρετικά υψηλή ενώ αντίθετα στα ινώδη υλικά είναι σχετικά μικρή και στην περιοχή της διάτρησης δεν εμφανίζονται φαινόμενα ρωγμών.

Χαμηλό κόστος κατασκευής

Από τις διάφορες εφαρμογές των σύνθετων υλικών και ιδιαίτερα τις αεροναυπηγικές, έχει υπολογισθεί μια σημαντική μείωση του κόστους των κατασκευών. Μεγαλύτερη μείωση κόστους παρατηρείται σε περιπτώσεις που απαιτείται υψηλή δυσκαμψία.

Μείωση του βάρους της κατασκευής

Από τις πρώτες εφαρμογές των σύνθετων υλικών, προέκυψαν σημαντικές μειώσεις στο βάρος των κατασκευών. Οι μειώσεις αυτές μπορούν να φτάσουν ως και το 50% ενώ στις περισσότερες εφαρμογές κυμαίνονται μεταξύ 20-80%. Η μεγαλύτερη μείωση βάρους παρατηρείται στα πιο απλά κατασκευαστικά στοιχεία, όπως είναι οι άξονες, οι άτρακτοι, τα πλαίσια κ.α. Με την πρόοδο της έρευνας γύρω από την εξοικονόμηση βάρους αποδείχθηκε ότι σημαντική μείωση βάρους μπορούμε να πετύχουμε στις πτέρυγες των αεροσκαφών. Λόγω της υψηλής τιμής των ειδικών ιδιοτήτων των σύνθετων υλικών, μπορούν να κατασκευασθούν πτέρυγες με πολύ μικρότερο πάχος από εκείνο των παραδοσιακών από αλουμίνιο χωρίς επιπρόσθετα σχεδιαστικά σφάλματα.

Από τα παραπάνω πλεονεκτήματα που αναφέραμε είναι προφανές ότι τα σύνθετα υλικά πράγματι αποτελούν μια επανάσταση και οι προοπτικές που διαγράφονται για την εφαρμογή και παρά πέρα ανάπτυξή τους στο άμεσο και απώτερο μέλλον είναι λαμπρές.



Σχ. 1.2(Σύνθετο υλικό τύπου sandwich)

1.4 ΕΓΚΛΕΙΣΜΑΤΑ

Σύντομος ορισμός

Τα εγκλείσματα είναι ανόργανα υλικά που περικλείονται μέσα σε μία μήτρα. Υπάρχουν τρεις κύριες κατηγορίες εγκλεισμάτων βάσει του σχήματός τους:

- Εγκλείσματα σε μορφή κόκκων.
- Εγκλείσματα σε μορφή ινών.
- Εγκλείσματα σε μορφή νιφάδων.

Τα εγκλείσματα έχουν αρκετά μικρές διαστάσεις της τάξης του «Μίκρο». Τα σημαντικότερα πλεονεκτήματα των εγκλεισμάτων είναι ότι ελαττώνουν το κόστος του σύνθετου υλικού ενώ παράλληλα βελτιώνουν τις ποιοτικές του ιδιότητες.

Ταξινόμηση σύνθετων υλικών

Κατά τον πλέον γενικό τρόπο, τα σύνθετα υλικά δύνανται να ταξινομηθούν αναλόγως με τις ιδιότητες της μήτρας ή του εγκλεισματος. Έτσι ως προς την μήτρα διακρίνονται σε :

- α. Σύνθετα υλικά με μεταλλική μήτρα
- β. Σύνθετα υλικά με μη μεταλλική μήτρα

ενώ ως προς το έγκλεισμα σε :

- α. Σύνθετα υλικά με έγκλεισμα υπό μορφή κόκκων (κοκκώδη σύνθετα υλικά)
- β. Σύνθετα υλικά με έγκλεισμα υπό μορφή νιφάδων
- γ. Σύνθετα υλικά με έγκλεισμα υπό μορφή ινών (ινώδη σύνθετα υλικά)

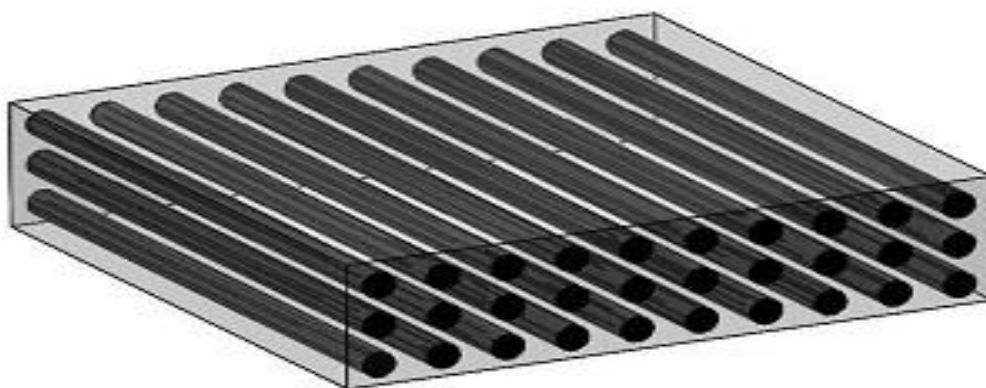
1.5 ΙΝΩΔΗ ΣΥΝΘΕΤΑ ΥΛΙΚΑ

Σύντομος ορισμός

Τα ινώδη σύνθετα υλικά αποτελούνται από έγκλεισμα υπό μορφή ινών μέσα σε μια μήτρα, η οποία δύνανται να είναι ένα οποιοδήποτε υλικό από την μεγάλη ποικιλία που χρησιμοποιείται.

Χαρακτηριστικά ινών

Μια ίνα χαρακτηρίζεται από τον πολύ μεγάλο λόγο μήκους/διαμέτρου που έχει. Οι ίνες διαφόρων υλικών είναι σε γενικές γραμμές αρκετά πιο ανθεκτικές από τα αντίστοιχα υλικά στη συνήθη μορφή τους. Για παράδειγμα, τα συνηθισμένα φύλλα υάλου θραύονται σε τάσεις μόνο μερικών MPa , ενώ οι ίνες υάλου δύνανται να έχουν αντοχή θραύσεως η οποία ανέρχεται από 2.8GPa έως 4.8GPa όταν αυτές διατίθενται στο εμπόριο, ενώ μέχρι 7.0GPa όταν αυτές έχουν παρασκευασθεί στο εργαστήριο. Αυτό προφανώς δείχνει ότι η γεωμετρία και η δομή μιας ίνας είναι αποφασιστικής σημασίας για τον υπολογισμό της αντοχής της και θα πρέπει να λαμβάνεται υπ' όψη στις σχετικές εφαρμογές. Το παράδοξο της ίνας, η οποία έχει διαφορετικές ιδιότητες από αυτές τις οποίες έχει το υλικό όταν δεν είναι διαμορφωμένο σε μορφή ίνας, οφείλεται στην πλέον τέλεια δομή της. Έτσι, εντός της ίνας οι κρύσταλλοι του υλικού είναι ευθυγραμμισμένοι κατά τον διαμήκη άξονα της ίνας. Επιπλέον υπάρχουν λιγότερες εσωτερικές ατέλειες στην ίνα σε σχέση με το σύννηθες υλικό το οποίο έχει άλλη τυχαία διαμόρφωση.



Σχ. 1.15 (Ινώδες υλικό με συνεχείς ίνες)

Ταξινόμηση ινών

Οι ίνες διακρίνονται σε δυο μεγάλες κατηγορίες:

Η πρώτη κατηγορία περιλαμβάνει ίνες με πολύ μεγάλο λόγο μήκους/διαμέτρου(συνεχείς ίνες) και με διάμετρο της τάξεως του μεγέθους των κρυστάλλων. Στον Πίνακα 1.1, δίνεται η αντοχή και η ακαμψία διαφόρων υλικών που χρησιμοποιούνται σε μορφή μακρών ινών. Σημειώνεται επίσης η πυκνότητα κάθε υλικού και οι λόγοι ακαμψίας/πυκνότητας και αντοχής/πυκνότητας, οι οποίοι είναι ενδεικτικοί της αποτελεσματικότητας της ίνας κυρίως σε κατασκευές «ευαίσθητες» στο θέμα βάρους όπως π.χ. αεροσκάφη και διαστημόπλοια.

Υλικό ίνας	Ειδικό Βάρος ρ (kN/m ³)	Εφελκυστική Αντοχή S(GPa)	Λόγος S/ ρ (Αντοχής/Ειδ.Β) ($\times 10^6$ m)	Εφελκυστικό Μέτρο ελ/τος	Λόγος E/ ρ (Ακαμψίας/Ειδ.Β) ($\times 10^6$ m)
Αργίλιο	26.3	0.62	24	73	2.8
Τιτάνιο	46.1	1.9	41	115	2.5
Χάλυβας	76.6	4.1	54	207	2.7
Ε-γυαλί	25.0	3.4	136	72	2.9
Σ-γυαλί	24.4	4.8	197	86	3.5
Άνθρακας	13.8	1.7	123	190	14.0
Βηρύλλιο	18.2	1.7	93	300	16.0
Βόριο	25.2	3.4	137	400	16.0
Γραφίτης	13.8	1.7	123	250	18.0

Πίνακας 1.1(Ιδιότητες ινών 1^{ης} κατηγορίας)

Η δεύτερη κατηγορία περιλαμβάνει ίνες οι οποίες έχουν διαμέτρους της ίδιας τάξης μεγέθους με τις πρώτες ύλες τους(βραχείες ίνες), δηλαδή της τάξης μεγέθους των κρυστάλλων. Επίσης έχουν πολύ μικρότερο μήκος σε σχέση με τις συνεχείς ίνες παρ' όλο που ο λόγος μήκους/διαμέτρου τους, δύναται να φθάσει σε μερικές εκατοντάδες. Τέλος ένα από τα βασικά χαρακτηριστικά τους είναι οι ελάχιστες ασυνέχειες που έχουν λόγω της πολύ καλής γεωμετρικής κρυσταλλικής κατανομής τους(κρυσταλλική ευθυγράμμιση). Ως

συνέπεια αυτού του γεγονότος είναι ότι παρουσιάζουν ανώτερες μηχανικές ιδιότητες από αυτές που παρουσιάζουν οι τυχαίες διαμορφώσεις των αντίστοιχων υλικών. Για παράδειγμα ο κοινός δομικός χάλυβας έχει αντοχή που κυμαίνεται μεταξύ 0.52GPa και 0.69GPa ενώ η θεωρητική αντοχή του φτάνει τα 20GPa. Η ασυμφωνία αυτή οφείλεται στις ατέλειες που παρουσιάζει η κρυσταλλική δομή του χάλυβος οι οποίες εμφανίζουν ασυνέχειες και από τις οποίες αρχίζει η διαρροή του χάλυβα σε τάσεις πολύ μικρότερες των θεωρητικών. Με την βέλτιστη διαμόρφωση του, δηλαδή σε μορφή βραχέων ινών, η αντοχή του χάλυβα μπορεί να φτάσει μέχρι και τα 13 GPa.

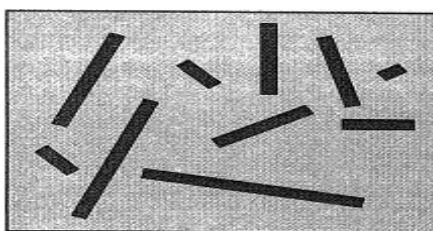
Υλικό ίνας	Ειδικό Βάρος ρ (kN/m ³)	Θεωρητική αντοχή $S(t)$ (GPa)	Πειραμ. αντοχή $S(e)$ (GPa)	Λόγος S/ρ (Αντοχής/Ε.Β.) ($\times 10^6 m$)	Μέτρο ελ/τας E (GN/m ²)	Λόγος E/ρ (Ακαμψίας/Ε.Β.) ($\times 10^6 m$)
Χαλκός	87.4	12	3.0	34	124	1.4
Νικέλιο	87.9	21	3.9	44	215	2.4
Χάλυβας	76.8	20	13.0	170	200	2.6
B ₄ C	24.7	45	6.7	270	450	18.0
SiC	31.2	83	11.0	350	840	27.0
Al ₂ O ₃	38.8	41	19.0	490	410	11.0
C	16.3	98	21.0	1300	980	60.0

Πίνακας 1.2(Ιδιότητες ινών 2^{ης} κατηγορίας)

Μία εναλλακτική ταξινόμηση των ινών θα ήταν εάν τις χωρίζαμε στις παρακάτω κατηγορίες:

- Ανόργανες ίνες
- Οργανικές ίνες

Στην πρώτη κατηγορία ανήκουν οι ίνες υάλου, άνθρακα, γραφίτη, βορίου, κ.α., ενώ στην δεύτερη, οι νεοεισερχόμενες ίνες αραμιδίου τύπου Kevlar, οι οποίες και εξελίσσονται συνεχώς στις μέρες μας.



Σχ. 1.16 (Βραχείες ίνες σε τυχαία διεύθυνση)

Να σημειώσουμε εδώ ότι όποια και να είναι τα χαρακτηριστικά των ινών και σε όποια κατηγορία και να ανήκουν αυτές είναι πρακτικά άχρηστες εάν δεν είναι «δεμένες» μέσα σε μια μήτρα. Ωστόσο η μήτρα χρησιμεύει για την προστασία των ινών, για την συγκράτηση τους, για την μεταφορά των τάσεων κ.α. Τα υλικά τα οποία χρησιμοποιούνται ως μήτρες έχουν συνήθως σημαντικά μικρότερη πυκνότητα, αντοχή και ακαμψία από τα υλικά τα οποία χρησιμοποιούνται ως ίνες.

1.6 ΚΟΚΚΩΔΗ ΣΥΝΘΕΤΑ ΥΛΙΚΑ

Τα κοκκώδη σύνθετα υλικά έχουν ως ενίσχυση σωματίδια(κόκκους) τα οποία είναι διασκορπισμένα στο εσωτερικό του υλικού της μήτρας. Οι κόκκοι μπορεί να είναι μεταλλικής φύσεως ή όχι και μπορούν να συνδυαστούν με διαφόρων τύπων μήτρες. Το μέγεθος των κόκκων ποικίλει και μπορεί να είναι από μερικά nm μέχρι κάποια μm. Για παράδειγμα οι μεγάλοι κόκκοι δεν ξεπερνούν σε διάμετρο τα 300μm ενώ οι μικροί κόκκοι έχουν διάμετρο μικρότερη από 100nm.

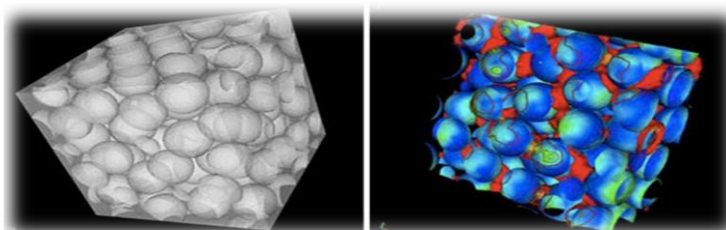
Οι διάφοροι συνδυασμοί μήτρας/κόκκων που μπορούν να επιτευχθούν, αναφέρονται παρακάτω. Έτσι, από αυτήν την άποψη έχουμε τέσσερις δυνατούς συνδυασμούς:

1. Υλικά μη μεταλλικού εγκλείσματος εντός μη μεταλλικής μήτρας

Το μη οπλισμένο σκυρόδεμα αποτελεί το πιο κοινό παράδειγμα ενός τέτοιου υλικού. Το σκυρόδεμα αποτελείται από κόκκους άμμου και πέτρας «δεμένους» με ένα μείγμα τσιμέντου και νερού, το οποίο έχει αντιδράσει χημικά και έχει σκληρύνει. Η αντοχή του σκυροδέματος αποδίδεται στην ύπαρξη κόκκων πέτρας. Επίσης φλούδες μη μεταλλικών υλικών, όπως ο μαρμαρυγίας ή το γυαλί, μπορούν να αποτελέσουν το κοκκώδες έγκλεισμα μιας γυάλινης ή πλαστικής μήτρας.

2. Υλικά μεταλλικού εγκλείσματος εντός μη μεταλλικής μήτρας

Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα τέτοιου υλικού είναι το έγκλεισμα χαλκού μέσα σε εποξειδική ρητίνη, που αυξάνει κατά πολύ την ηλεκτρική αγωγιμότητα αυτής. Επίσης είναι συνήθη τα σύνθετα υλικά με έγκλεισμα από το μέταλλο αυτό, υπό μορφή φλούδας. Σκοπός της παρασκευής τέτοιων σύνθετων υλικών είναι η δημιουργία ενός υλικού με βελτιωμένες μηχανικές ιδιότητες(αντοχή, μέτρο ελαστικότητας, όριο διαρροής), η αύξηση της ηλεκτρικής και θερμικής αγωγιμότητας καθώς και η μείωση του συντελεστή θερμικής διαστολής και της φθοράς της μήτρας.



Σχ. 1.17 (Μοντελοποιημένη κοκκώδης κατανομή σε μήτρα)

3. Υλικά μεταλλικού εγκλείσματος εντός μεταλλικής μήτρας

Τα υλικά αυτού του τύπου δεν είναι κράματα. Το μεταλλικό έγκλεισμα έχει

μορφή κόκκων μέσα στη μήτρα και δεν είναι διαλυμένο μέσα σε αυτήν, όπως είναι στα κράματα. Σαν παράδειγμα γι' αυτήν την κατηγορία μπορούμε να αναφέρουμε τους κόκκους μόλυβδου εντός κραμάτων χαλκού και χάλυβα, που σκοπό έχουν τη βελτίωση του χειρισμού του κράματος στις εργαλειομηχανές. Επίσης, πολλά μέταλλα που έχουν πολύτιμες ιδιότητες αλλά είναι εύθραυστα σε θερμοκρασία περιβάλλοντος, όπως είναι το χρώμιο, το βολφράμιο και το μολυβδαίνιο, μπορούν να αποτελέσουν το κοκκώδες έγκλεισμα άλλων μετάλλων τα οποία παρουσιάζουν όγκιμη συμπεριφορά σε θερμοκρασία περιβάλλοντος. Το σύνθετο υλικό που προκύπτει είναι όγκιμο στη θερμοκρασία αυτή και διαθέτει παράλληλα και κάποιες από τις ιδιότητες του εύθραυστου εγκλείσματος.

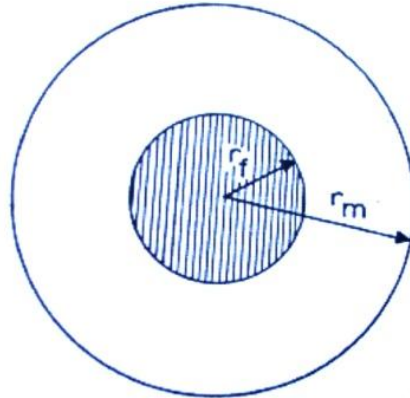
4. Υλικά μη μεταλλικού εγκλείσματος εντός μεταλλικής μήτρας

Μη μεταλλικά υλικά μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε μορφή κοκκώδους εγκλείσματος μέσα σε μεταλλική μήτρα. Τα υλικά που προκύπτουν ονομάζονται κεραμομέταλλα. Τα κεραμομέταλλα μπορούν να είναι δυο ειδών ανάλογα με το έγκλεισμα. Το πρώτο είδος είναι κεραμομέταλλα με κόκκους οξειδίου ενός μετάλλου μέσα σε μεταλλική μήτρα, τα οποία χρησιμοποιούνται στην κατασκευή εργαλείων και σε εφαρμογές υψηλής θερμοκρασίας όπου η αντίσταση στη διάβρωση είναι σημαντική. Το δεύτερο είδος είναι τα κεραμομέταλλα με κόκκους καρβιδίου ενός μετάλλου μέσα σε μεταλλική μήτρα. Έτσι, το καρβίδιο του βολφραμίου μέσα σε μήτρα κοβαλτίου χρησιμοποιείται σε τμήματα μηχανών τα οποία απαιτούν μεγάλη αντοχή στην οξειδωση και στη διάβρωση, ενώ έχει συντελεστή θερμικής διαστολής παραπλήσιο με αυτόν του χάλυβα και έτσι είναι κατάλληλο για χρήσεις σε βαλβίδες κ.α. Επίσης το καρβίδιο του τιτανίου μέσα σε μήτρα νικελίου ή κοβαλτίου χρησιμοποιείται συχνά σε εφαρμογές υψηλής θερμοκρασίας, όπως π.χ. σε διάφορα μέρη στροβιλομηχανών. Τέλος τα κεραμομέταλλα χρησιμοποιούνται στους πυρηνικούς αντιδραστήρες σαν καύσιμα.

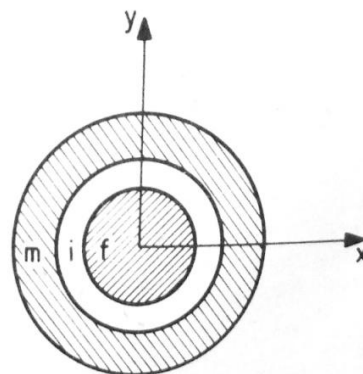
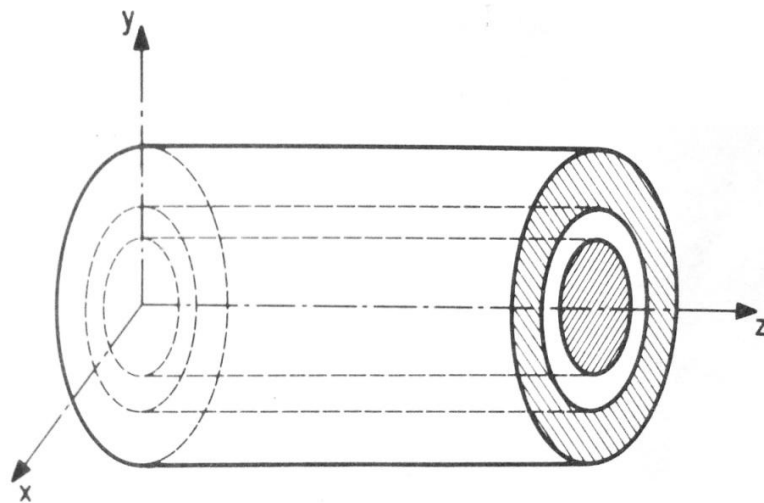
1.7 Η ΕΝΔΙΑΜΕΣΗ ΦΑΣΗ

Πριν την εισαγωγή της έννοιας της ενδιάμεσης φάσης τα θεωρητικά μοντέλα που χρησιμοποιούνταν για την ανάλυση των σύνθετων υλικών θεωρούσαν πάντοτε ότι η επαφή μεταξύ της μήτρας και του εγκλείσματος ήταν τέλεια. Σε ένα πραγματικό σύνθετο υλικό όμως, όπως μπορεί να παρατηρηθεί με τη βοήθεια μικροσκοπίων, οι επιφάνειες επαφής εγκλείσματος – μήτρας είναι τραχείες, ενώ υπάρχουν σημεία επί των συνόρων του εγκλείσματος και της μήτρας στα οποία δεν υπάρχει καθόλου επαφή. Οι ατέλειες αυτές που παρατηρούνται στα σύνορα του εγκλείσματος και της μήτρας έχουν τις περισσότερες φορές μέγεθος της τάξης μερικών μικρών και αυτό έχει σαν αποτέλεσμα τη δημιουργία πολύ έντονης συγκέντρωσης τάσεων γύρω από αυτές τις ατέλειες. Αυτή η συγκέντρωση τάσεων έχει ως αποτέλεσμα τη δημιουργία μικρορωγμών όταν το υλικό φορτίζεται μηχανικά ή θερμικά. Οι μικρορωγμές δε αυτές με τη σειρά τους αποτελούν στις περισσότερες περιπτώσεις την αιτία έναρξης θραύσης ενός συνθέτου υλικού. Όλα τα παραπάνω, καθώς και πολλά άλλα οδήγησαν τους ερευνητές να παραδεχτούν την ύπαρξη μιας τρίτης φάσης μέσα στο σύνθετο υλικό, της ενδιάμεσης φάσης, η οποία αποτελεί μια ζώνη ανωμαλιών που περιβάλλει το έγκλεισμα ενδιάμεση φάση είναι ανομοιογενής από τη φύση της. Για να συμπεριληφθεί όμως στα θεωρητικά μοντέλα των σύνθετων υλικών και να γίνει δυνατή η μελέτη της επίδρασης της στη μηχανική και θερμική συμπεριφορά του συνθέτου υλικού συχνά υποτίθεται ότι είναι ομογενής ή ότι τα ανομοιογενή χαρακτηριστικά της (όπως π.χ. η πυκνότητα της) μεταβάλλονται βάσει μιας

γνωστής σχέσης καθώς προσχωρούμε από το σύνορο του εγκλείσματος στο σύνορο τη μήτρας . Αυτές οι υποθέσεις στην περίπτωση των ινωδών υλικών είχαν σαν συνέπεια τη δημιουργία ενός βελτιωμένου μοντέλου έναντι αυτού που φαίνεται στο σχήμα 1.18. Στο βελτιωμένο αυτό μοντέλο συμπεριλαμβάνεται και η ενδιάμεση φάση (Σχ. 1.19). Για να είναι φυσικά δυνατή η χρησιμοποίηση του μοντέλου θα πρέπει να είναι γνωστή η περιεκτικότητα u_i της ενδιάμεσης φάσης στο μοντέλο να ισούται με την περιεκτικότητα αυτής στο σύνθετο υλικό .



Σχ. 1.18 (Διφασικό μοντέλο)



Σχ. 1.19 (Τριφασικό μοντέλο)

Ορισμός υαλώδους μεταβατικής θερμοκρασίας T_g

Στα άμορφα στερεά, όπως το γυαλί και κάποια άμορφα πολυμερή, δεν υπάρχει ένα καλά καθορισμένο σημείο πήξης, αλλά υφίστανται ένα εύρος θερμοκρασιών στο οποίο γίνεται η μετάβαση από συμπεριφορά ρευστού σε συμπεριφορά στερεού, σε μια διαδικασία που ονομάζεται υαλώδης μετάπτωση ή μετάβαση. Προσδιορίζεται (συμβατικά) μια θερμοκρασία υαλώδους μετάβασης T_g , ως το σημείο τομής των καμπυλών θερμοκρασίας-πυκνότητας που χαρακτηρίζουν τη ρευστή και στερεή κατάσταση του σχετικού υλικού, αντίστοιχα.

Θεωρητικός υπολογισμός πάχους ενδιάμεσης φάσης

Πιο αναλυτικά παρακάτω θα περιγραφεί η διαδικασία εύρεσης του πάχους της ενδιάμεσης φάσης. Ας θεωρήσουμε ένα στοιχείο ελέγχου κάνοντας χρήση του τριφασικού μοντέλου, το οποίο προκύπτει ουσιαστικά από το διφασικό μοντέλο με την προσθήκη της ενδιάμεσης φάσης, και είναι το δομικό «κύτταρο» για ένα ινώδες σύνθετο υλικό, το οποίο αποτελείται από μέσα προς τα έξω, από έγκλεισμα, ενδιάμεση φάση και μήτρα αντίστοιχα.

Αν ορίσουμε ως r_f , r_i , και r_m τις ακτίνες των περιοχών των φάσεων του παραπάνω μοντέλου, με τους δείκτες f , i , m να συμβολίζουν το έγκλεισμα, την ενδιάμεση φάση και την μήτρα αντίστοιχως, τότε οι αντίστοιχες κατ' όγκο περιεκτικότητες θα γράφονται ως:

$$U_f = \frac{r_f^2}{r_m^2}, \quad U_i = \frac{r_i^2 - r_f^2}{r_m^2}, \quad U_m = \frac{r_m^2 - r_i^2}{r_m^2} \quad (1.1)$$

Και επίσης θα ισχύει:

$$U_m = (1 - U_f - U_i) \quad (1.2)$$

Καθώς η κατ' όγκο περιεκτικότητα του εγκλείσματος αυξάνεται, το ποσοστό των μακρομορίων της μήτρας, τα οποία χαρακτηρίζονται από μειωμένη κινητικότητα, επίσης αυξάνεται. Αυτό ισοδυναμεί με αύξηση της κατ' όγκο περιεκτικότητας της ενδιάμεσης φάσης και οδηγεί στο συμπέρασμα το οποίο υπάρχει στην αναφορά [25] ότι δηλαδή υπάρχει μία σχέση ανάμεσα στο ΔC_p , το οποίο εκφράζει την απότομη μεταβολή της ειδικής θερμότητας στην υαλώδη μεταβατική περιοχή μιας ουσίας, και της κατ' όγκο περιεκτικότητας της ενδιάμεσης φάσης. Η σχέση αυτή για τα ινώδη υλικά εκφράζεται από τον παρακάτω τύπο [25],[20]:

$$\frac{(r_f + \Delta r)^2}{r_f^2} - 1 = \frac{\mu U_f}{1 - U_f} \quad (1.3)$$

Όπου Δr εκφράζει το πάχος της ενδιάμεσης φάσης και η παράμετρος μ δίνεται βάσει της αναφοράς [26] από τον τύπο:

$$\mu = 1 - \frac{\Delta C_p^f}{\Delta C_p^0} \quad (1.4)$$

Όπου ΔC_p^f είναι η απότομη μεταβολή της ειδικής θερμότητας για την πολυμερική μήτρα με έγκλεισμα, ενώ ΔC_p^0 είναι η απότομη μεταβολή της ειδικής θερμότητας για την πολυμερική μήτρα «σκέτη», χωρίς έγκλεισμα, στις αντίστοιχες υαλώδεις μεταβατικές θερμοκρασίες

τους.

Η σχέση (1.3), αφού $r_f + \Delta r$ ισούται ουσιαστικά με r_i , με την βοήθεια των σχέσεων (1.1), μπορεί να γραφτεί και σαν:

$$\frac{U_i}{U_f} = \frac{\mu U_f}{1 - U_f} \quad (1.5)$$

Η σχέση (1.5) μαζί με την (1.1) και την (1.2) εξάγουν την εξής σχέση:

$$constant = \frac{r_f^2}{r_i^2} = \frac{U_f}{U_f + U_i} = \frac{1 - U_f}{1 - U_f(1 - \mu)} \quad (1.6)$$

Τέλος υπολογίζοντας με την βοήθεια των DSC (differential scanning calorimetry) μετρήσεων, τα άλματα της ειδικής θερμότητας ΔC_p στην υαλώδη μετάβαση ενός ινώδους σύνθετου υλικού και του αντίστοιχου πολυμερούς του, από το οποίο είναι αποκλειστικά φτιαγμένη η μήτρα του σύνθετου υλικού, μπορούμε να εκτιμήσουμε τον παράγοντα μ και άρα και το πάχος της ενδιάμεσης φάσης αφού μας είναι γνωστή η κατ' όγκο περιεκτικότητα του εγκλείσματος.

Πειραματική περιγραφή και προσδιορισμός του πάχους και της κατ' όγκο περιεκτικότητας της ενδιάμεσης φάσης

Στο Εργαστήριο Αντοχής Υλικών του ΕΜΠ έχουν γίνει συστηματικές μετρήσεις θερμοχωρητικότητας επί δοκιμίων εποξειδικής ρητίνης και ινών γυαλιού. Παρακάτω θα περιγράψουμε μία από τις πειραματικές έρευνες [21],[22],[23] που έγιναν για την μέτρηση του πάχους και της κατ' όγκο περιεκτικότητας της ενδιάμεσης φάσης.

Στην συγκεκριμένη έρευνα χρησιμοποιήθηκαν ινώδη σύνθετα υλικά μονής κατεύθυνσης αποτελούμενα από μία εποξειδική μήτρα (Permaglass XE5/1, Permali Ltd., U.K) ενισχυμένη με συνεχείς ίνες γυαλιού τύπου-E. Το υλικό της μήτρας βασίσθηκε σε διγλυκιδυλαιθέρα της δισφαινόλης A, συνδυασμένο με σκληρυντή από αρωματική αμίνη (Araldite My 750/HT972, Ciba-Geigy, U.K). Οι ίνες γυαλιού είχαν διάμετρο $1,2 \times 10^{-5} \text{m}$ και η κατ' όγκο περιεκτικότητά τους ήταν 0.65.

Η κατ' όγκο περιεκτικότητα των ινών γυαλιού προσδιορίστηκε με το συνήθη τρόπο, δηλαδή καίγοντας δείγματα του ινώδους σύνθετου υλικού και ζυγίζοντας το υπόλοιπο. Έτσι η κατά μάζα περιεκτικότητα του γυαλιού υπολογίστηκε 79.6% (+/- 0.28%). Με την χρήση του αποτελέσματος αυτού και των τιμών των ειδικών πυκνοτήτων του γυαλιού ($\rho_g = 2.55 \text{gr/cm}^3$) και της εποξειδικής μήτρας ($\rho_e = 1.20 \text{gr/cm}^3$), και κάνοντας και κάποιους εύκολους υπολογισμούς, υπολογίζεται ότι η κατ' όγκο περιεκτικότητα των ινών γυαλιού του πειράματος μας είναι 0.65.

Από την άλλη μεριά, δοκίμια με διάμετρο 0.004m και πάχους που ποικίλει από 0.001m μέχρι 0.0015m, φτιαγμένα είτε από ινώδες σύνθετο υλικό σε διάφορες κατ' όγκο περιεκτικότητες είτε φτιαγμένα από το υλικό της μήτρας υποβλήθηκαν σε δοκιμές DSC, με θερμικό αναλυτή στην περιοχή της υαλώδους μεταβατικής θερμοκρασίας τους, έτσι ώστε

να προσδιορισθούν οι τιμές της ειδικής θερμότητάς τους.

Οι τιμές του παράγοντα μ (σχέση 1.4) εξήχθησαν από τις τιμές των αλμάτων των ειδικών θερμότητων της μήτρας ενισχυμένης με ίνες γυαλιού και της μη ενισχυμένης μήτρας, δηλαδή των ΔC_p^f και ΔC_p^0 αντίστοιχα, που υπολογίσθηκαν από τα $\Delta C_p = f(T)$ διαγράμματα σύμφωνα με το διάγραμμα του σχήματος 1.20. Οι τιμές του μ που προσδιορίσθηκαν από τα DSC τεστ, επιτρέπουν την εκτίμηση του πάχους της ενδιάμεσης φάσης για κάθε σύνθετο υλικό (για κάθε διαφορετική κατ' όγκο περιεκτικότητα σε έγκλεισμα).

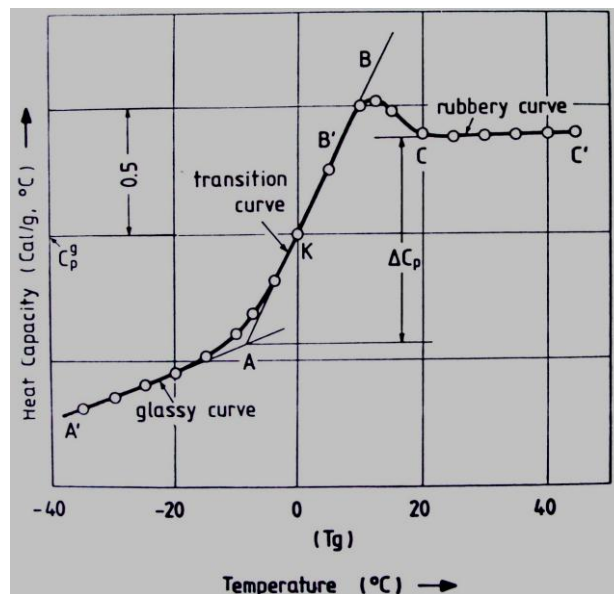
Έχει δειχθεί [20] ότι για της μια κατεύθυνσης ινώδη σύνθετα υλικά, υπάρχει μια παραβολική σχέση ανάμεσα στην κατ' όγκο περιεκτικότητα της ενδιάμεσης φάσης και στην κατ' όγκο περιεκτικότητα του εγκλείσματος.

Αυτή η σχέση είναι η εξής:

$$U_i = CU_f^2$$

Όπου με U_i και U_f συμβολίζουμε την κατ' όγκο περιεκτικότητα της ενδιάμεσης φάσης και του εγκλείσματος αντίστοιχα.

Η σταθερά C στην περίπτωση μας είναι ίση με 0.123 [24].



Σχ. 1.20

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2:ΚΟΚΚΩΔΗ ΥΛΙΚΑ

2.1 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΕΤΡΟΥ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΚΟΚΚΩΔΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

A) Διφασικό μοντέλο

Για να υπολογίσουμε το μέτρο ελαστικότητας θα πρέπει να θεωρήσουμε τα εξής:

- i) Η μήτρα και τα εγκλείσματα είναι ελαστικά, ιστροπικά και ομογενή.
- ii) Τα εγκλείσματα είναι σε σχήμα τελειά σφαίρα.
- iii) Τα εγκλείσματα είναι πολλά σε μέγεθος και η κατανομή τους είναι συνεχής, έτσι ώστε το σύνθετο να θεωρείται ένα ομογενές ιστροπικό υλικό.
- iv) Η κατ'ογκον περιεκτικότητα των εγκλεισμάτων είναι αρκετά μικρή έτσι ώστε η αλληλεπίδραση μεταξύ τους να είναι αμελητέα.
- v) Οι παραμορφώσεις που ασκούνται στο σύνθετο είναι αρκετά μικρές ώστε να διατηρούν τη γραμμικότητα τάσεων - παραμορφώσεων.

Για να βρούμε τις σχέσεις που δίνουν την έκφραση του μέτρου ελαστικότητας, θα θεωρήσουμε την κλασική θεωρία ελαστικότητας. Θεωρούμε κενή σφαίρα με εσωτερική ακτίνα $r_i=a$ και εξωτερική $r_f=b$. Στην εξωτερική επιφάνεια ασκούμε πίεση P_1 ενώ στην εσωτερική επιφάνεια δημιουργείται η πίεση P_0 που είναι η κοινή τάση. Λόγω σφαιρικής συμμετρίας συμφέρει να χρησιμοποιήσουμε τις σφαιρικές συντεταγμένες (r, θ, ϕ) . Έτσι στο διάνυσμα των μετατοπίσεων μόνο το u_r είναι διάφορο από το μηδέν. Έχουμε την τασική συνάρτηση:

$$\Phi=L/r+Mr^2$$

Αν εφαρμόσουμε αυτή τη συνάρτηση για τη μήτρα και το έγκλεισμα ξεχωριστά, έχουμε:

$$\Phi_f = \frac{A}{r} + Br^2$$

$$\Phi_m = \frac{C}{r} + Dr^2$$

Για να αποφύγουμε τον απειρισμό των τάσεων στο $r=0$ πρέπει $A=0$.

Έτσι:

$$\Phi_f = Br^2$$

Οι μετατοπίσεις δίνονται από τις εξής σχέσεις:

$$u_{r,f} = \frac{Br}{G_f}$$

$$u_{r,m} = \frac{-\frac{C}{r^2} + 2Dr}{2G_m}$$

$$u_{\theta,f} = u_{\theta,m} = u_{\phi,f} = u_{\phi,m} = 0$$

Και οι τάσεις:

$$\sigma_{r,f} = \frac{2(1+\nu_f)B}{1-2\nu_f}$$

$$\sigma_{\theta,f} = \frac{2(1+\nu_f)B}{1-2\nu_f}$$

$$\sigma_{\phi,f} = \frac{2(1+\nu_f)B}{1-2\nu_f}$$

$$\sigma_{r,m} = \frac{2C}{r^3} + \frac{2(1+\nu_m)D}{1-2\nu_m}$$

$$\sigma_{\theta,m} = -\frac{C}{r^3} + \frac{2(1+\nu_m)D}{1-2\nu_m}$$

$$\sigma_{\phi,m} = -\frac{C}{r^3} + \frac{2(1+\nu_m)D}{1-2\nu_m}$$

Οι οριακές συνθήκες είναι:

$$\sigma_{r,f} = \sigma_{r,m} = -P_0, \text{ για } r=a$$

$$\sigma_{r,m} = -P_1, \text{ για } r=b$$

Η λύση του συστήματος δίνει τις εκφράσεις για τα B, C και D:

$$B = \frac{-P_0(1-2\nu_f)}{2(1+\nu_f)}$$

$$C = \frac{(P_1 - P_0)a^3b^3}{2(b^3 - a^3)}$$

$$D = \frac{(a^3P_0 - b^3P_1)(1-2\nu_m)}{2(b^3 - a^3)(1+\nu_m)}$$

Αντικαθιστώντας αυτές στις εξισώσεις για τις μετατοπίσεις έχουμε:

$$u_{r,f} = \frac{r}{2G_f} \left[\frac{-P_0(1-2\nu_f)}{(1+\nu_f)} \right] = \frac{-P_0(1-2\nu_f)r}{E_f}$$

$$u_{r,m} = \frac{a^3 b^3 (P_0 - P_1)(1+\nu_m)}{2(b^3 - a^3)E_m} \frac{1}{r^2} + \frac{(1-2\nu_m)}{E_m} \frac{(a^3 P_0 - b^3 P_1)}{b^3 - a^3} r$$

Για να είναι συνεχείς οι μετατοπίσεις στη διεπιφάνεια, έχουμε την εξής οριακή συνθήκη:

$$u_{r,f} = u_{r,m}, \text{ για } r=a$$

Με $a^3/b^3 = \nu_f$ παίρνουμε:

$$\frac{-P_0(1-2\nu_f)}{E_f} = \frac{(1+\nu_m)(P_0 - P_1)}{2(1-\nu_f)E_m} + \frac{(1-2\nu_m)}{E_m} \frac{(\nu_f P_0 - P_1)}{1-\nu_f}$$

Λύνοντας ως προς P_0 :

$$P_0 = \frac{3(1-\nu_m)E_f}{[2\nu_f(1-2\nu_m) + 1 + \nu_m]E_f + 2(1-2\nu_f)(1-\nu_f)E_m} P_1$$

Θεωρούμε μια σταθερά λ ως το λόγο των P_0 και P_1 , δηλαδή:

$$\lambda = P_0 / P_1$$

Έτσι το λ ισούται με:

$$\lambda = \frac{3(1-\nu_m)E_f}{[2\nu_f(1-2\nu_m) + 1 + \nu_m]E_f + 2(1-2\nu_f)(1-\nu_f)E_m}$$

Το μετρό ελαστικότητας του σύνθετου E_c μπορεί να βρεθεί από την εξίσωση ενέργειας:

$$\frac{1}{2} \int_{V_c} \frac{P^2}{K_c} dV_c = \frac{1}{2} \int_{V_f} (\sigma_{r,f} \varepsilon_{r,f} + \sigma_{\theta,f} \varepsilon_{\theta,f} + \sigma_{\phi,f} \varepsilon_{\phi,f}) dV_f + \frac{1}{2} \int_{V_m} (\sigma_{r,m} \varepsilon_{r,m} + \sigma_{\theta,m} \varepsilon_{\theta,m} + \sigma_{\phi,m} \varepsilon_{\phi,m}) dV_m$$

Όπου K_c είναι ο συντελεστής διογκώσεως του σύνθετου. Έτσι βγαίνουν οι εξισώσεις για τις σφαιρικές συνιστώσες των τάσεων και παραμορφώσεων του υλικού:

$$\begin{aligned}
\sigma_{r,f} &= \sigma_{\theta,f} = \sigma_{\phi,f} = -P_0 \\
\varepsilon_{r,f} &= \frac{du_{r,f}}{dr} = \frac{-P_0(1-2\nu_f)}{E_f} \\
\varepsilon_{\theta,f} &= \varepsilon_{\phi,f} = \frac{u_{r,f}}{r} = \frac{-P_0(1-2\nu_f)}{E_f} \\
\sigma_{r,m} &= \frac{a^3 b^3 (P_1 - P_0)}{(b^3 - a^3)} \frac{1}{r^3} + \frac{a^3 P_0 - b^3 P_1}{b^3 - a^3} \\
\varepsilon_{r,m} &= \frac{du_{r,m}}{dr} = \frac{-a^3 b^3 (P_0 - P_1)(1 + \nu_m)}{(b^3 - a^3) E_m} \frac{1}{r^3} + \frac{(1 - 2\nu_m)}{E_m} \frac{(a^3 P_0 - b^3 P_1)}{b^3 - a^3} \\
\sigma_{\theta,m} &= \sigma_{\phi,m} = -\frac{a^3 b^3 (P_1 - P_0)}{2(b^3 - a^3)} \frac{1}{r^3} + \frac{a^3 P_0 - b^3 P_1}{b^3 - a^3} \\
\varepsilon_{\theta,m} &= \varepsilon_{\phi,m} = \frac{u_{r,m}}{r} = \frac{a^3 b^3 (P_0 - P_1)(1 + \nu_m)}{2(b^3 - a^3) E_m} \frac{1}{r^3} + \frac{(1 - 2\nu_m)}{E_m} \frac{(a^3 P_0 - b^3 P_1)}{b^3 - a^3}
\end{aligned}$$

Αν θέσουμε αυτές τις εξισώσεις στην εξίσωση του λ με τις αντικαταστάσεις:

$$a^3/b^3 = \nu_f, \quad P_0 = \lambda P_1 \quad \text{και} \quad K_c = E_c/3(1-2\nu_c)$$

και αν διαιρέσουμε κάθε όρο με P_1^2 , θα πάρουμε την τελική έκφραση για το μέτρο ελαστικότητας του σύνθετου υλικού:

$$\frac{2(1-2\nu_c)}{E_c} = \frac{2\lambda^2 \nu_f (1-2\nu_f)}{E_f} + \frac{1}{E_m} \left\{ \frac{\nu_f (1-\lambda)^2 (1+\nu_m) + 2(\lambda \nu_f - 1)^2 (1-2\nu_m)}{1-\nu_f} \right\}$$

Όπου ο λόγος Poisson ν_c του σύνθετου μπορεί να υπολογιστεί από την αντίστροφη σχέση του νόμου των φάσεων, δηλαδή:

$$\frac{1}{\nu_c} = \frac{\nu_f}{\nu_f} + \frac{\nu_m}{\nu_m}$$

Έχοντας σαν δεδομένα τα ακόλουθα στοιχεία:

$$E_f = 210 \times 10^9 \text{ (Pa)}$$

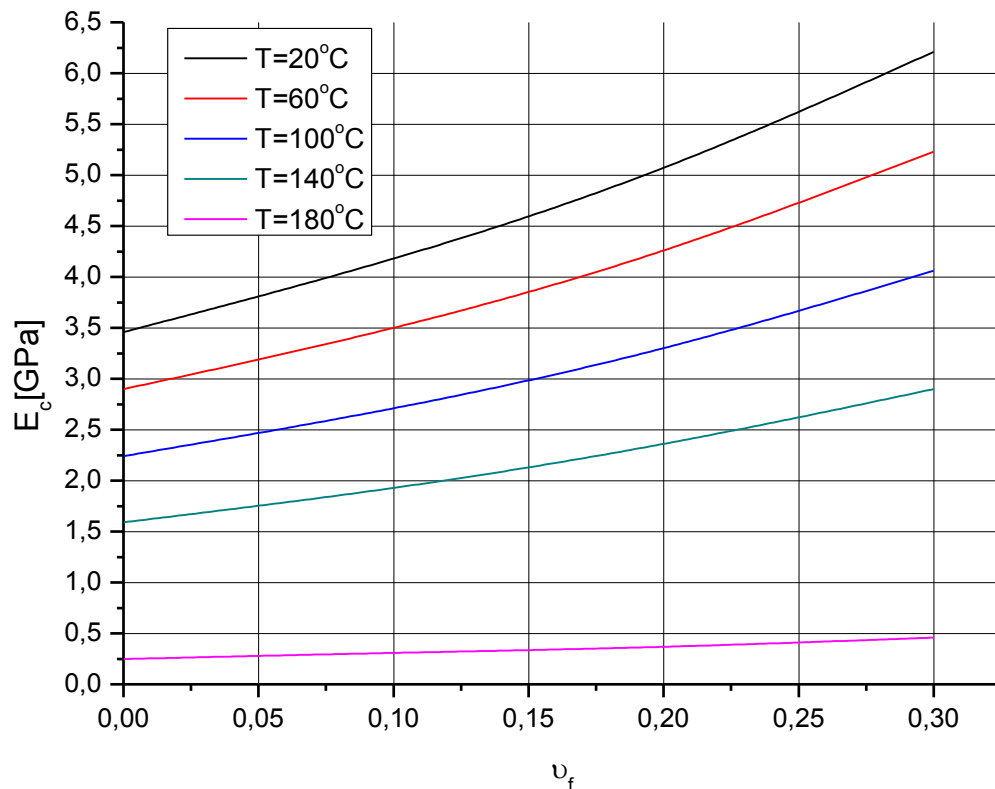
$$\nu_f = 0.29, \quad \nu_m = 0.35$$

και για τις διάφορες τιμές στις περιεκτικότητες της ν_f και E_m υπολογίζουμε το E_c για το διφασικό μοντέλο και συμπληρώνουμε τον πίνακα του σχ. 2.1.

ν_f	E_c [GPa]				
	T=20 °C	T=60 °C	T=100 °C	T=140 °C	T=180 °C
0.0	3.46	2.90	2.24	1.59	0.25
0.1	4.18	3.50	2.71	1.93	0.31
0.2	5.07	4.26	3.30	2.36	0.37
0.3	6.21	5.23	4.06	2.90	0.46

Σχ. 2.1

Έτσι φτιάχνουμε το Σχ.2.2:

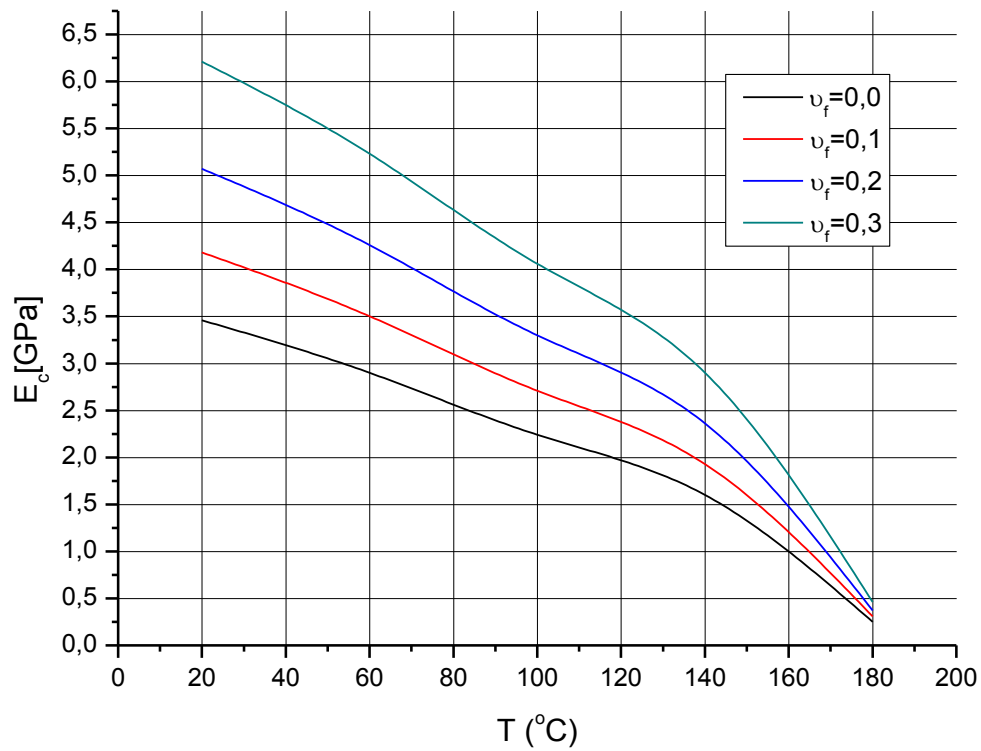


Σχ. 2.2

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία συμπληρώνουμε τον πίνακα του Σχ. 2.3 και φτιάχνουμε το Σχ. 2.4.

T[°C]	E_c [GPa]			
	$\nu_f=0.0$	$\nu_f=0.1$	$\nu_f=0.2$	$\nu_f=0.3$
20	3.46	4.18	5.07	6.21
60	2.90	3.50	4.26	5.23
100	2.24	2.71	3.30	4.06
140	1.60	1.93	2.36	2.90
180	0.25	0.31	0.37	0.46

Σχ. 2.3



Σχ. 2.4

Β) Τριφασικό μοντέλο

Όπως και πριν θεωρούμε πίεση P_1 που ασκείται στην εξωτερική επιφάνεια. Έχουμε την τασιακή συνάρτηση:

$$\Phi = L/r + Mr^2$$

Αν εφαρμόσουμε αυτή τη συνάρτηση για τη μήτρα, το έγκλεισμα και την ενδιάμεση φάση, έχουμε:

$$\Phi_f = \frac{A}{r} + Br^2$$

$$\Phi_m = \frac{C}{r} + Dr^2$$

$$\Phi_i = \frac{F}{r} + Hr^2$$

Για να αποφύγουμε τον απειρισμό των τάσεων στο $r=0$ πρέπει $A=0$.

Έτσι:

$$\Phi_f = Br^2$$

Οι μετατοπίσεις δίνονται από τις εξής σχέσεις:

$$Gu_r = \nabla\Phi$$

$$u_{r,f} = \frac{2B(1+\nu_f)r}{E_f}$$

$$u_{r,m} = \left(-\frac{C}{r^2} + 2Dr\right) \frac{(1+\nu_m)}{E_m}$$

$$u_{r,i} = \left(-\frac{F}{r^2} + 2Hr\right) \frac{(1+\nu_i)}{E_i}$$

Και οι τάσεις:

$$\sigma_{r,f} = \frac{2(1+\nu_f)B}{1-2\nu_f}$$

$$\sigma_{\theta,f} = \frac{2(1+\nu_f)B}{1-2\nu_f}$$

$$\sigma_{\phi,f} = \frac{2(1+\nu_f)B}{1-2\nu_f}$$

$$\sigma_{r,m} = \frac{2C}{r^3} + \frac{2(1+\nu_m)D}{1-2\nu_m}$$

$$\sigma_{\theta,m} = -\frac{C}{r^3} + \frac{2(1+\nu_m)D}{1-2\nu_m}$$

$$\sigma_{\phi,m} = -\frac{C}{r^3} + \frac{2(1+\nu_m)D}{1-2\nu_m}$$

$$\sigma_{r,i} = \frac{2F}{r^3} + \frac{2(1+\nu_i)H}{1-2\nu_i}$$

$$\sigma_{\theta,i} = -\frac{F}{r^3} + \frac{2(1+\nu_i)H}{1-2\nu_i}$$

$$\sigma_{\phi,i} = -\frac{F}{r^3} + \frac{2(1+\nu_i)H}{1-2\nu_i}$$

Οι οριακές συνθήκες είναι:

$$\sigma_{r,f} = \sigma_{r,i}, \text{ για } r=r_f \Rightarrow \frac{2(1+\nu_f)B}{1-2\nu_f} = \frac{2F}{r_f^3} + \frac{2(1+\nu_i)H}{1-2\nu_i},$$

$$\sigma_{r,m} = \sigma_{r,i}, \text{ για } r=r_i \Rightarrow \frac{2C}{r_i^3} + \frac{2(1+\nu_m)D}{1-2\nu_m} = \frac{2F}{r_i^3} + \frac{2(1+\nu_i)H}{1-2\nu_i}$$

$$u_{r,f} = u_{r,i}, \text{ για } r=r_f \Rightarrow \frac{2B(1+\nu_f)r_f}{E_f} = \left(-\frac{F}{r_f^2} + 2Hr_f\right) \frac{(1+\nu_i)}{E_i}$$

$$u_{r,m} = u_{r,i}, \text{ για } r = r_i \Rightarrow \left(-\frac{C}{r_i^2} + 2Dr_i \right) \frac{(1+v_m)}{E_m} = \left(-\frac{F}{r_i^2} + 2Hr_i \right) \frac{(1+v_i)}{E_i}$$

$$\sigma_{r,m} = -P_1, \text{ για } r = r_m \Rightarrow \frac{2C}{r_m^3} + \frac{2(1+v_m)D}{1-2v_m} = -P_1$$

Για να βρούμε τις εκφράσεις για τα B, C, D, F, H και να λύσουμε τις παραπάνω εξισώσεις θα χωρίσουμε σε κατηγορίες ανάλογα με τους νόμους που διέπουν τα E_i και v_i . Αυτοί οι νόμοι είναι:

i) Γραμμική μεταβολή

Θεωρούμε ότι

$$E_i(r) = P + Qr$$

$$v_i(r) = R + Sr \quad \text{με } r_f \leq r \leq r_i$$

Στο

$$r = r_f \Rightarrow E_i = E_f, v_i = v_f$$

$$r = r_i \Rightarrow E_i = E_m, v_i = v_m$$

Άρα έχουμε:

$$E_i(r) = \frac{E_f r_i - E_m r_f}{r_i - r_f} - \frac{E_f - E_m}{r_i - r_f} r$$

$$v_i(r) = \frac{v_f r_i - v_m r_f}{r_i - r_f} - \frac{v_f - v_m}{r_i - r_f} r$$

ii) Υπερβολική μεταβολή

Θεωρούμε ότι

$$E_i(r) = P + \frac{Q}{r}$$

$$v_i(r) = R + \frac{S}{r} \quad \text{με } r_f \leq r \leq r_i$$

Στο

$$r = r_f \Rightarrow E_i = E_f, v_i = v_f$$

$$r = r_i \Rightarrow E_i = E_m, v_i = v_m$$

Άρα έχουμε:

$$E_i(r) = \frac{E_f r_i - E_m r_f}{r_i - r_f} - \frac{(E_f - E_m) r_i r_f}{(r_i - r_f) r}$$

$$v_i(r) = \frac{v_f r_i - v_m r_f}{r_i - r_f} - \frac{(v_f - v_m) r_i r_f}{(r_i - r_f) r}$$

iii) Λογαριθμική μεταβολή

Θεωρούμε ότι

$$E_i(r) = P \ln \frac{Q}{r} \quad \mu\epsilon \quad r_f \leq r \leq r_i$$

$$v_i(r) = R \ln \frac{S}{r}$$

Στο

$$r = r_f \Rightarrow E_i = E_f, v_i = v_f$$

$$r = r_i \Rightarrow E_i = E_m, v_i = v_m$$

Άρα έχουμε:

$$E_i(r) = \frac{E_f - E_m}{\ln \frac{r_i}{r_f}} \ln \frac{r_i^{E_f/(E_f-E_m)}}{r \cdot r_f^{E_f/(E_f-E_m)}}$$

$$v_i(r) = \frac{v_f - v_m}{\ln \frac{r_i}{r_f}} \ln \frac{r_i^{v_f/(v_f-v_m)}}{r \cdot r_f^{v_f/(v_f-v_m)}}$$

iv) Παραβολική μεταβολή

Θεωρούμε ότι

$$E_i(r) = Nr^2 + Pr + Q \quad \mu\epsilon \quad r_f \leq r \leq r_i$$

$$v_i(r) = Rr^2 + Sr + T$$

Στο

$$r = r_i \Rightarrow \frac{dE_i}{dr} = 0, \frac{d^2E_i}{dr^2} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{dv_i}{dr} = 0, \frac{d^2v_i}{dr^2} < 0$$

Άρα έχουμε:

$$E_i(r) = \frac{E_f - E_m}{(r_i - r_f)^2} r^2 - \frac{2(E_f - E_m) r_i}{(r_i - r_f)^2} r + \frac{E_f r_i^2 + E_m r_f^2 - 2E_m r_i r_f}{(r_i - r_f)^2}$$

$$v_i(r) = \frac{v_f - v_m}{(r_i - r_f)^2} r^2 - \frac{2(v_f - v_m) r_i}{(r_i - r_f)^2} r + \frac{v_f r_i^2 + v_m r_f^2 - 2v_m r_i r_f}{(r_i - r_f)^2}$$

Το μέτρο ελαστικότητας του υλικού

Το μετρό ελαστικότητας του σύνθετου E_c μπορεί να βρεθεί από την εξίσωση ενέργειας:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{V_c} \frac{P_1^2}{K_c} dV_c &= \frac{1}{2} \int_{V_f} (\sigma_{r,f} \varepsilon_{r,f} + \sigma_{\theta,f} \varepsilon_{\theta,f} + \sigma_{\phi,f} \varepsilon_{\phi,f}) dV_f + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{V_m} (\sigma_{r,m} \varepsilon_{r,m} + \sigma_{\theta,m} \varepsilon_{\theta,m} + \sigma_{\phi,m} \varepsilon_{\phi,m}) dV_m + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{V_i} (\sigma_{r,i} \varepsilon_{r,i} + \sigma_{\theta,i} \varepsilon_{\theta,i} + \sigma_{\phi,i} \varepsilon_{\phi,i}) dV_i \end{aligned}$$

Όπου K_c είναι ο συντελεστής διογκώσεως του σύνθετου. Έτσι βγαίνουν οι εξισώσεις για τις συνιστώσες των παραμορφώσεων του υλικού:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{r,f} &= \frac{2(1+\nu_f)B}{E_f} \\ \varepsilon_{\theta,f} &= \frac{2(1+\nu_f)B}{E_f} \\ \varepsilon_{\phi,f} &= \frac{2(1+\nu_f)B}{E_f} \\ \varepsilon_{r,m} &= \left(\frac{2C}{r^3} + 2D \right) \frac{(1+\nu_m)}{E_m} \\ \varepsilon_{\theta,m} &= \left(-\frac{C}{r^3} + 2D \right) \frac{(1+\nu_m)}{E_m} \\ \varepsilon_{\phi,m} &= \left(-\frac{C}{r^3} + 2D \right) \frac{(1+\nu_m)}{E_m} \\ \varepsilon_{r,i} &= \left(\frac{2F}{r^3} + 2H \right) \frac{(1+\nu_i)}{E_i} \\ \varepsilon_{\theta,i} &= \left(-\frac{F}{r^3} + 2H \right) \frac{(1+\nu_i)}{E_i} \\ \varepsilon_{\phi,i} &= \left(-\frac{F}{r^3} + 2H \right) \frac{(1+\nu_i)}{E_i} \end{aligned}$$

Αν θεωρήσουμε την αντικατάσταση:

$$K_c = E_c / 3(1-2\nu_c),$$

θα πάρουμε την τελική έκφραση για το μέτρο ελαστικότητας του σύνθετου υλικού:

$$\frac{(1-2\nu_c)}{E_c} = \frac{(1+\nu_f)^2(1-2\nu_m)^2}{(1-2\nu_f)(1+\nu_m)^2 E_f} \nu_f + \frac{(1-2\nu_m)}{E_m} \nu_m + \frac{3(1-2\nu_m)^2 \nu_f}{(1+2\nu_m)^2 r_f^3} \int_{r_f}^{r_i} \frac{(1+\nu_i)^2}{(1-2\nu_i)} r^2 dr$$

Ο λόγος Poisson του υλικού

Ο λόγος Poisson του σύνθετου μπορεί να υπολογιστεί από τον νόμο των φάσεων συμπεριλαμβάνοντας την ενδιάμεση φάση:

$$V_c = V_f v_f + V_m v_m + V_i v_i$$

Η οποία μπορεί να γραφτεί ως:

$$V_c = V_f v_f + V_m v_m + \frac{3v_f}{r_m} \int_{r_f}^{r_i} v_i r^2 dr$$

Και μέσω των εξισώσεων:

$$v_f = \frac{r_f^3}{r_m^3}$$

$$v_i = \frac{r_i^3 - r_f^3}{r_m^3},$$

$$v_m = \frac{r_m^3 - r_i^3}{r_m^3}$$

έχουμε:

i) Γραμμική μεταβολή

$$V_c = V_f v_f + V_m v_m + [v_f (1 - v_m)^{1/3} - v_m v_f^{1/3}] \cdot [(1 - v_m)^{2/3} + v_f^{1/3} (1 - v_m)^{1/3} + v_f^{2/3}] + \frac{3}{4} (v_m - v_f) [(1 - v_m)^{1/3} + v_f^{1/3}] \cdot [(1 - v_m)^{2/3} + v_f^{2/3}]$$

ii) Υπερβολική μεταβολή

$$V_c = V_f v_f + V_m v_m + [v_m (1 - v_m)^{1/3} - v_f v_f^{1/3}] \cdot [(1 - v_m)^{2/3} + v_f^{1/3} (1 - v_m)^{1/3} + v_f^{2/3}] + \frac{3}{2} (v_f - v_m) [(1 - v_m)^{1/3} v_f^{1/3}] \cdot [(1 - v_m)^{1/3} + v_f^{1/3}]$$

iii) Λογαριθμική μεταβολή

$$V_c = V_f v_f + V_m v_m + \frac{v_f - v_m}{\ln\left(\frac{1 - v_m}{v_m}\right)^{1/3}} \cdot \left\{ (1 - v_m) \ln\left(\frac{1 - v_m}{v_m}\right)^{\frac{v_m}{3(v_f - v_m)}} - v_f \ln\left(\frac{1 - v_m}{v_f}\right)^{\frac{v_f}{3(v_f - v_m)}} + \frac{1}{3} (1 - v_m - v_f) \right\}$$

iv) Παραβολική μεταβολή

$$\begin{aligned}
 \nu_c = & \nu_f \nu_f + \nu_m \nu_m + \frac{1}{10[(1-\nu_m)^{1/3} - \nu_f^{1/3}]} \cdot \{6(\nu_f - \nu_m)[(1-\nu_m)^{5/3} - \nu_f^{5/3}] + \\
 & + 15(\nu_f - \nu_m)(1-\nu_m)^{1/3}[(1-\nu_m)^{4/3} - \nu_f^{4/3}] + 10[\nu_f(1-\nu_m)^{2/3} + \nu_m \nu_f^{2/3} - 2\nu_m(1-\nu_m)^{1/3} \nu_f^{1/3}] \cdot \\
 & \cdot (1-\nu_m - \nu_f)\}
 \end{aligned}$$

Έχοντας σαν δεδομένα τα ακόλουθα στοιχεία:

$$E_f = 210 \times 10^9 \text{ (Pa)}$$

$$\nu_f = 0.29, \nu_m = 0.36$$

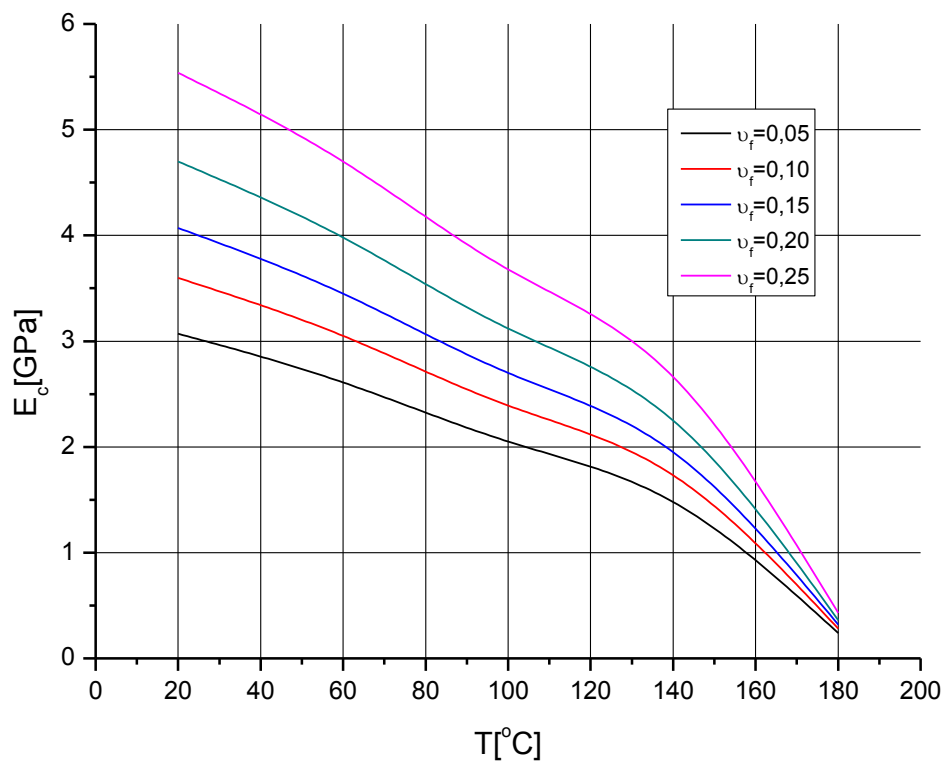
$$r_f = 75 \text{ (}\mu\text{m)}$$

και για τις διάφορες τιμές στις περιεκτικότητες της ν_f και E_m υπολογίζουμε το E_c για το τριφασικό μοντέλο και συμπληρώνουμε τον πίνακα του Σχ. 2.5.

ν_f	E_c [GPa]				
	T=20 °C	T=60 °C	T=100 °C	T=140 °C	T=180 °C
0.05	3.07	2.61	2.05	1.48	0.24
0.10	3.60	3.05	2.39	1.73	0.28
0.15	4.07	3.45	2.70	1.95	0.32
0.20	4.70	3.98	3.12	2.25	0.36
0.25	5.54	4.70	3.68	2.66	0.43

Σχ. 2.5

Έτσι φτιάχνουμε το Σχ. 2.6:

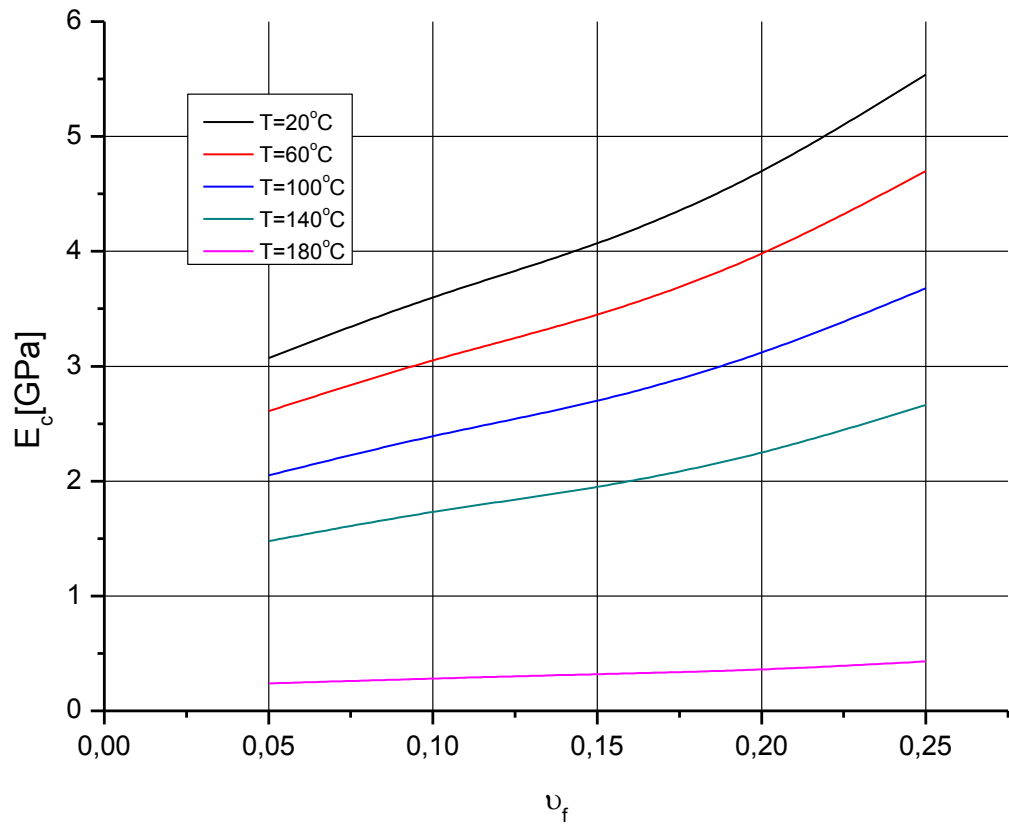


Σχ. 2.6

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία συμπληρώνουμε τον πίνακα του Σχ. 2.7 και φτιάχνουμε το Σχ. 2.8:

T [°C]	E _c [GPa]				
	ν _f = 0.05	ν _f = 0.10	ν _f = 0.15	ν _f = 0.20	ν _f = 0.25
20	3.07	3.60	4.07	4.70	5.54
60	2.61	3.05	3.45	3.98	4.70
100	2.05	2.39	2.70	3.12	3.68
140	1.48	1.73	1.95	2.25	2.66
180	0.24	0.28	0.32	0.36	0.43

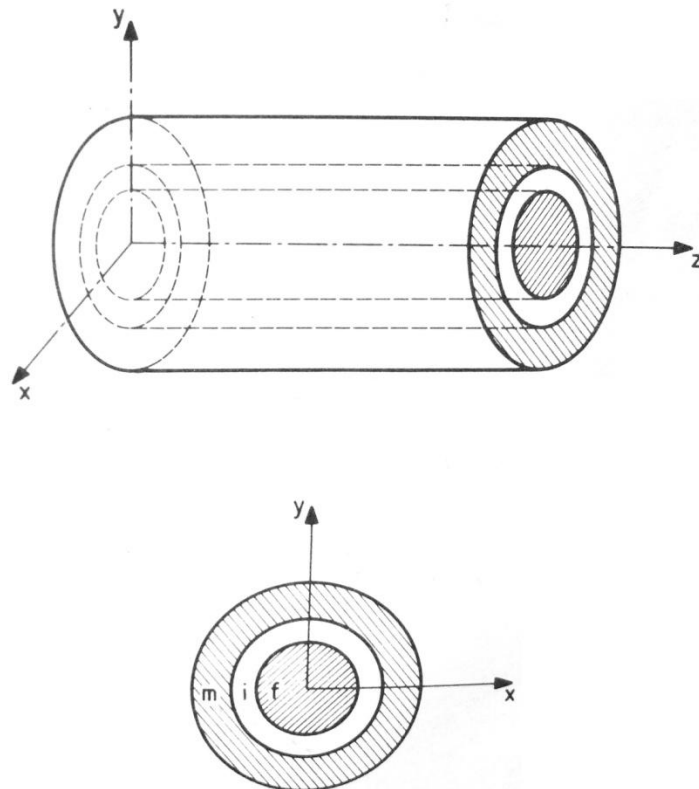
Σχ. 2.7



Σχ. 2.8

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΕΛΑΣΤΙΚΩΝ ΣΤΑΘΕΡΩΝ ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΦΑΣΗΣ

Όπως έχουμε δει μέχρι τώρα, κατά την παραγωγή του σύνθετου υλικού, λόγω της αλληλεπίδρασης του εγκλείσματος με την μήτρα, δημιουργείται η ενδιάμεση φάση η οποία και παίζει σημαντικό ρόλο στην γενική θερμομηχανική συμπεριφορά του σύνθετου. Στην παρακάτω μελέτη θεωρούμε το τριφασικό κυλινδρικό μοντέλο με ενδιάμεση φάση(Σχ. 3.1).



Σχ. 3.1 (Τριφασικό μοντέλο με ενδιάμεση φάση)

Με i, m, f θα συμβολίζουμε την ενδιάμεση φάση, την μήτρα και το έγκλεισμα αντίστοιχα. Γενικά θεωρούμε ότι οι μηχανικές ιδιότητες της ενδιάμεσης φάσης είναι μεταβλητές, μέσα στην περιοχή εμφάνισής της στο σύνθετο υλικό. Στο κυλινδρικό τριφασικό μοντέλο η μεταβλητότητα των μηχανικών ιδιοτήτων της ενδιάμεσης φάσης εξαρτάται κυρίως από την ακτίνα της. Έτσι λοιπόν και οι ελαστικές σταθερές και οι λόγοι Poisson της ενδιάμεσης φάσης σε ένα σύνθετο υλικό μπορούν να εκφραστούν με ένα πολυώνυμο n -βαθμού με μεταβλητή την ακτίνα r . Άρα θα έχουμε ότι:

$$E_i(r) = Ar^n + Br^{n-1} + Cr^{n-2} + \dots$$

Και

$$\nu_i(r) = A'r^n + B'r^{n-1} + C'r^{n-2} + \dots$$

Όπου $r_f \leq r \leq r_i$

Στην παρούσα μελέτη θα διερευνήσουμε τρεις απλές αλλά σημαντικές μεταβολές των ελαστικών σταθερών και των λόγων Poisson της ενδιάμεσης φάσης. Αυτές είναι η γραμμική, η υπερβολική και η παραβολική μεταβολή. Παρακάτω θα υπολογισθούν αυτές οι μεταβολές των ελαστικών σταθερών και των λόγων Poisson για το τριφασικό κυλινδρικό μοντέλο με ενδιάμεση φάση και θα παρουσιαστούν τα διαγράμματά τους ώστε να κατανοηθεί καλύτερα η διαφορά μεταξύ τους.

Θεωρούμε ότι $M_m \leq M_i(r) \leq M_f$ όταν $r_f \leq r \leq r_i$ και όταν το M συμβολίζει το διάμηκες μέτρο ελαστικότητας E_L , το εγκάρσιο μέτρο ελαστικότητας E_T και το διάμηκες μέτρο διατμήσεως G_{LT} ενώ θεωρούμε ότι $M_f \leq M_i(r) \leq M_m$ όταν $r_f \leq r \leq r_i$ και όταν το M συμβολίζει τον διαμήκη λόγο Poisson ν_{LT} και τον εγκάρσιο λόγο Poisson ν_{TT} . Να σημειώσουμε εδώ ότι η μελέτη της συνάρτησης $M_i(r)$ είναι πλήρως αντιπροσωπευτική της μελέτης των συναρτήσεων των ελαστικών σταθερών και των λόγων Poisson που θέλουμε να προσδιορίσουμε στην περιοχή της ενδιάμεσης φάσης και αυτό γιατί η θεωρητική διαδικασία που ακολουθείται για τον προσδιορισμό κάθε μίας από τις συναρτήσεις των ελαστικών σταθερών και των λόγων Poisson είναι ακριβώς η ίδια για όλες τις συναρτήσεις. Το μόνο που διαφέρει είναι οι τιμές των οριακών τους συνθηκών, που είναι και αναμενόμενο. Οι οριακές συνθήκες οι οποίες θα χρησιμοποιηθούν θα είναι:

$$\text{Για } r = r_f : M_i(r) = nM_f \quad (3.1)$$

$$\text{Για } r = r_i : M_i(r) = M_m \quad (3.2)$$

Δεχόμαστε δηλαδή ότι στο όριο με την μήτρα η ενδιάμεση φάση συμπεριφέρεται μηχανικά ακριβώς το ίδιο με την μήτρα. Αυτό σημαίνει ότι η επίδραση της μήτρας στην ενδιάμεση φάση είναι η μέγιστη, που είναι και λογικό αν αναλογιστεί κανείς ότι η ενδιάμεση φάση θεωρείται αλλοιωμένη μήτρα. Από την άλλη μεριά, στο όριο με το έγκλεισμα, υπάρχει και εκεί αλληλεπίδραση ανάμεσα στην ενδιάμεση φάση και το έγκλεισμα. Το μέγεθος αυτής της αλληλεπίδρασης καθορίζεται από τον συντελεστή n . Όσο μεγαλύτερη η αλληλεπίδραση τόσο μεγαλύτερος και ο συντελεστής. Για την μέγιστη αλληλεπίδραση ανάμεσα στο έγκλεισμα και την ενδιάμεση φάση θα πρέπει ο συντελεστής να παίρνει την τιμή 1 και άρα $M_i(r) = M_f$ για $r = r_f$. Τέλος ανάμεσα στα όρια αυτά δηλαδή ανάμεσα στο έγκλεισμα και στη μήτρα, η $M_i(r)$ μεταβάλλεται κατά τα γνωστά, ανάλογα με την μεταβολή που θα έχουμε επιλέξει, δηλαδή είτε με την γραμμική, είτε με την υπερβολική είτε με την παραβολική. Να σημειώσουμε ότι οι μετρήσεις και οι υπολογισμοί για τις παρακάτω υποενότητες έγιναν με βάση τις τιμές της μελέτης για το τριφασικό μοντέλο με ενδιάμεση φάση και παρουσιάζονται στον πίνακα του σχ. 3.2.

Υλικό	Μέτρο Ελαστικότητας $E(\text{GPa})$	Λόγος Poisson ν	Μέτρο διατμήσεως $G(\text{GPa})$
Εποξ. Ρητίνη	3.5	0.35	1.29
Υαλος	72	0.20	30

Σχ.3.2

Μελέτη γραμμικής μεταβολής

Σύμφωνα με αυτήν την μεταβολή η $M_i(r)$ μεταβάλλεται ως εξής:

$$M_i(r) = A + Br \quad \mu\epsilon \quad r_f \leq r \leq r_i$$

Εφαρμόζοντας τώρα και τις οριακές συνθήκες (3.1), (3.2) προκύπτει ότι:

$$A = nM_f + \frac{nM_f - M_m}{r_i - r_f} r_f$$

$$B = \frac{M_m - nM_f}{r_i - r_f}$$

Για τον υπολογισμό της μέσης τιμής της παραπάνω συνάρτησης $M_i(r)$ στην ενδιάμεση φάση θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \bar{M}_i &= \frac{1}{V_i} \int_{r_f}^{r_i} M_i(r) dV_i = \frac{1}{V_i} \int_{r_f}^{r_i} (A - Br) 2\pi h r dr = \frac{1}{V_i} 2\pi h \left[A \frac{r^2}{2} - B \frac{r^3}{3} \right]_{r_f}^{r_i} \\ \Rightarrow \bar{M}_i &= \frac{1}{V_i} 2\pi h \left[\frac{A}{2} (r_i^2 - r_f^2) - \frac{B}{3} (r_i^3 - r_f^3) \right] \\ &= \frac{1}{\pi h (r_i^2 - r_f^2)} 2\pi h \left[\frac{A}{2} (r_i^2 - r_f^2) - \frac{B}{3} (r_i^3 - r_f^3) \right] \\ &= \frac{2}{(r_i^2 - r_f^2)} \left[\frac{A}{2} (r_i^2 - r_f^2) - \frac{B}{3} (r_i^3 - r_f^3) \right] \end{aligned}$$

Άρα

$$\bar{M}_i = \frac{2}{(r_i^2 - r_f^2)} \left[\frac{A}{2} (r_i^2 - r_f^2) - \frac{B}{3} (r_i^3 - r_f^3) \right] \quad (3.3)$$

Όπου $V = \pi h r^2$ και άρα $dV = 2\pi h r dr$

Παρακάτω παρουσιάζουμε σε μορφή πινάκων τους μέσους όρους των ελαστικών σταθερών και των λόγων Poisson για την ενδιάμεση φάση στο κυλινδρικό τριφασικό μοντέλο με ενδιάμεση φάση, στην γραμμική μεταβολή για διάφορα n .

E_{IL} ΚΑΙ E_{IT} (GPa)						
	n	0.2	0.4	0.6	0.8	1
U_f						
0.10		8,94	16,14	23,33	30,52	37,71
0.20		8,94	16,12	23,31	30,50	37,68
0.30		8,93	16,11	23,29	30,47	37,65
0.40		8,93	16,10	23,27	30,44	37,61
0.50		8,92	16,09	23,25	30,42	37,58
0.60		8,92	16,08	23,23	30,39	37,55
0.70		8,91	16,06	23,21	30,36	37,51

Σχ. 3.3

G_{ILT} (GPa)						
	n	0.2	0.4	0.6	0.8	1
U_f						
0.10		3,64	6,64	9,64	12,63	15,63
0.20		3,64	6,63	9,63	12,62	15,62
0.30		3,64	6,63	9,62	12,61	15,60
0.40		3,64	6,62	9,61	12,60	15,59
0.50		3,63	6,62	9,60	12,59	15,57
0.60		3,63	6,61	9,60	12,58	15,56
0.70		3,63	6,61	9,59	12,57	15,55

Σχ. 3.4

V_{ILT} ΚΑΙ V_{ITT}						
	n	0.2	0.4	0.6	0.8	1
U_f						
0.10		0,1952	0,2151	0,2351	0,2551	0,2751
0.20		0,1953	0,2153	0,2352	0,2552	0,2752
0.30		0,1955	0,2154	0,2353	0,2553	0,2752
0.40		0,1956	0,2155	0,2355	0,2554	0,2753
0.50		0,1958	0,2157	0,2356	0,2555	0,2754
0.60		0,1959	0,2158	0,2357	0,2556	0,2754
0.70		0,1961	0,2159	0,2358	0,2557	0,2755

Σχ. 3.5

Μελέτη υπερβολικής μεταβολής

Σύμφωνα με αυτήν την μεταβολή η $M_i(r)$ μεταβάλλεται ως εξής:

$$M_i(r) = A + \frac{B}{r} \quad \text{με} \quad r_f \leq r \leq r_i$$

$$B = -\frac{(nM_f - M_m)2r_i}{(r_i - r_f)^2}$$

$$C = M_m + \frac{nM_f - M_m}{(r_i - r_f)^2} r_i^2$$

Για τον υπολογισμό της μέσης τιμής της συνάρτησης $M_i(r)$ στην ενδιάμεση φάση θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \bar{M}_i &= \frac{1}{V_i} \int_{r_f}^{r_i} M_i(r) dV_i = \frac{1}{V_i} \int_{r_f}^{r_i} (Ar^2 + Br + C) 2\pi h r dr \\ &= \frac{1}{\pi h (r_i^2 - r_f^2)} 2\pi h \left[\frac{A}{4} (r_i^4 - r_f^4) + \frac{B}{3} (r_i^3 - r_f^3) + \frac{C}{2} (r_i^2 - r_f^2) \right] \end{aligned}$$

Και άρα:

$$\bar{M}_i = \frac{2}{(r_i^2 - r_f^2)} \left[\frac{A}{4} (r_i^4 - r_f^4) + \frac{B}{3} (r_i^3 - r_f^3) + \frac{C}{2} (r_i^2 - r_f^2) \right] \quad (3.5)$$

Παρακάτω παρουσιάζουμε σε μορφή πινάκων τους μέσους όρους των ελαστικών σταθερών και των λόγων Poisson για την ενδιάμεση φάση στο τριφασικό μοντέλο με ενδιάμεση φάση στην παραβολική μεταβολή για διάφορα n .

E_{IL} και E_{IT} (GPa)					
n	0.2	0.4	0.6	0.8	1
ν_f					
0.10	7,13	11,92	16,71	21,51	26,30
0.20	7,12	11,91	16,69	21,48	26,26
0.30	7,12	11,90	16,67	21,45	26,23
0.40	7,11	11,88	16,65	21,42	26,20
0.50	7,11	11,87	16,63	21,40	26,16
0.60	7,10	11,86	16,62	21,37	26,13
0.70	7,10	11,85	16,60	21,35	26,10

Σχ. 3.6

G _{ILT} (GPa)					
n	0.2	0.4	0.6	0.8	1
u _f					
0.10	2,86	4,85	6,85	8,85	10,85
0.20	2,86	4,85	6,84	8,84	10,83
0.30	2,85	4,84	6,83	8,83	10,82
0.40	2,85	4,84	6,83	8,81	10,80
0.50	2,85	4,83	6,82	8,80	10,79
0.60	2,85	4,83	6,81	8,79	10,78
0.70	2,84	4,82	6,80	8,78	10,76

Σχ. 3.7

V _{ILT} και V _{ITT}					
n	0.2	0.4	0.6	0.8	1
u _f					
0.10	0,2468	0,2601	0,2735	0,2868	0,3001
0.20	0,2470	0,2603	0,2736	0,2869	0,3002
0.30	0,2471	0,2604	0,2737	0,2870	0,3002
0.40	0,2473	0,2605	0,2738	0,2870	0,3003
0.50	0,2474	0,2607	0,2739	0,2871	0,3004
0.60	0,2476	0,2608	0,2740	0,2872	0,3004
0.70	0,2477	0,2609	0,2741	0,2873	0,3005

Σχ. 3.8

Μελέτη παραβολικής μεταβολής

Σύμφωνα με αυτή την μεταβολή η $M_i(r)$ μεταβάλλεται ως εξής:

$$M_i(r) = Ar^2 + Br + C \quad \text{με } r_f \leq r \leq r_i$$

Για τον υπολογισμό των A, B, C εκτός από τις προαναφερθείσες οριακές θα θεωρήσουμε ότι η $M_i(r)$ για $r=r_i$ θα παρουσιάζει:

a) Ελάχιστο όταν θα συμβολίζει το διάμηκες και το εγκάρσιο μέτρο ελαστικότητας καθώς και το διάμηκες μέτρο διατμήσεως.

b) Μέγιστο όταν θα συμβολίζει τον διαμήκη και εγκάρσιο λόγο Poisson.

Και άρα:

$$\text{Για } r = r_i : \text{ για a): } \frac{dM_i(r)}{dr} = 0 \quad \text{με } \frac{d^2M_i(r)}{dr^2} > 0$$

$$\text{για b): } \frac{dM_i(r)}{dr} = 0 \quad \text{με } \frac{d^2M_i(r)}{dr^2} < 0$$

Έτσι βρίσκουμε ότι:

$$A = \frac{nM_f - M_m}{(r_i - r_f)^2}$$

$$B = -\frac{(nM_f - M_m)2r_i}{(r_i - r_f)^2}$$

$$C = M_m + \frac{nM_f - M_m}{(r_i - r_f)^2} r_i^2$$

Για τον υπολογισμό της μέσης τιμής της συνάρτησης $M_i(r)$ στην ενδιάμεση φάση θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \overline{M}_i &= \frac{1}{V_i} \int_{r_f}^{r_i} M_i(r) dV_i = \frac{1}{V_i} \int_{r_f}^{r_i} (Ar^2 + Br + C) 2\pi h r dr \\ &= \frac{1}{\pi h (r_i^2 - r_f^2)} 2\pi h \left[\frac{A}{4} (r_i^4 - r_f^4) + \frac{B}{3} (r_i^3 - r_f^3) + \frac{C}{2} (r_i^2 - r_f^2) \right] \end{aligned}$$

Και άρα:

$$\overline{M}_i = \frac{2}{(r_i^2 - r_f^2)} \left[\frac{A}{4} (r_i^4 - r_f^4) + \frac{B}{3} (r_i^3 - r_f^3) + \frac{C}{2} (r_i^2 - r_f^2) \right] \quad (4.1.5)$$

Παρακάτω παρουσιάζουμε σε μορφή πινάκων τους μέσους όρους των ελαστικών σταθερών και των λόγων Poisson για την ενδιάμεση φάση στο τριφασικό μοντέλο με ενδιάμεση φάση στην παραβολική μεταβολή για διάφορα n .

		E_{IL} και E_{IT} (GPa)				
	n	0.2	0.4	0.6	0.8	1
U_f						
0.10		7,13	11,92	16,71	21,51	26,30
0.20		7,12	11,91	16,69	21,48	26,26
0.30		7,12	11,90	16,67	21,45	26,23
0.40		7,11	11,88	16,65	21,42	26,20
0.50		7,11	11,87	16,63	21,40	26,16
0.60		7,10	11,86	16,62	21,37	26,13
0.70		7,10	11,85	16,60	21,35	26,10

Σχ. 3.9

G_{ILT} (GPa)						
	n	0.2	0.4	0.6	0.8	1
U_f						
0.10		2,86	4,85	6,85	8,85	10,85
0.20		2,86	4,85	6,84	8,84	10,83
0.30		2,85	4,84	6,83	8,83	10,82
0.40		2,85	4,84	6,83	8,81	10,80
0.50		2,85	4,83	6,82	8,80	10,79
0.60		2,85	4,83	6,81	8,79	10,78
0.70		2,84	4,82	6,80	8,78	10,76

Σχ. 3.10

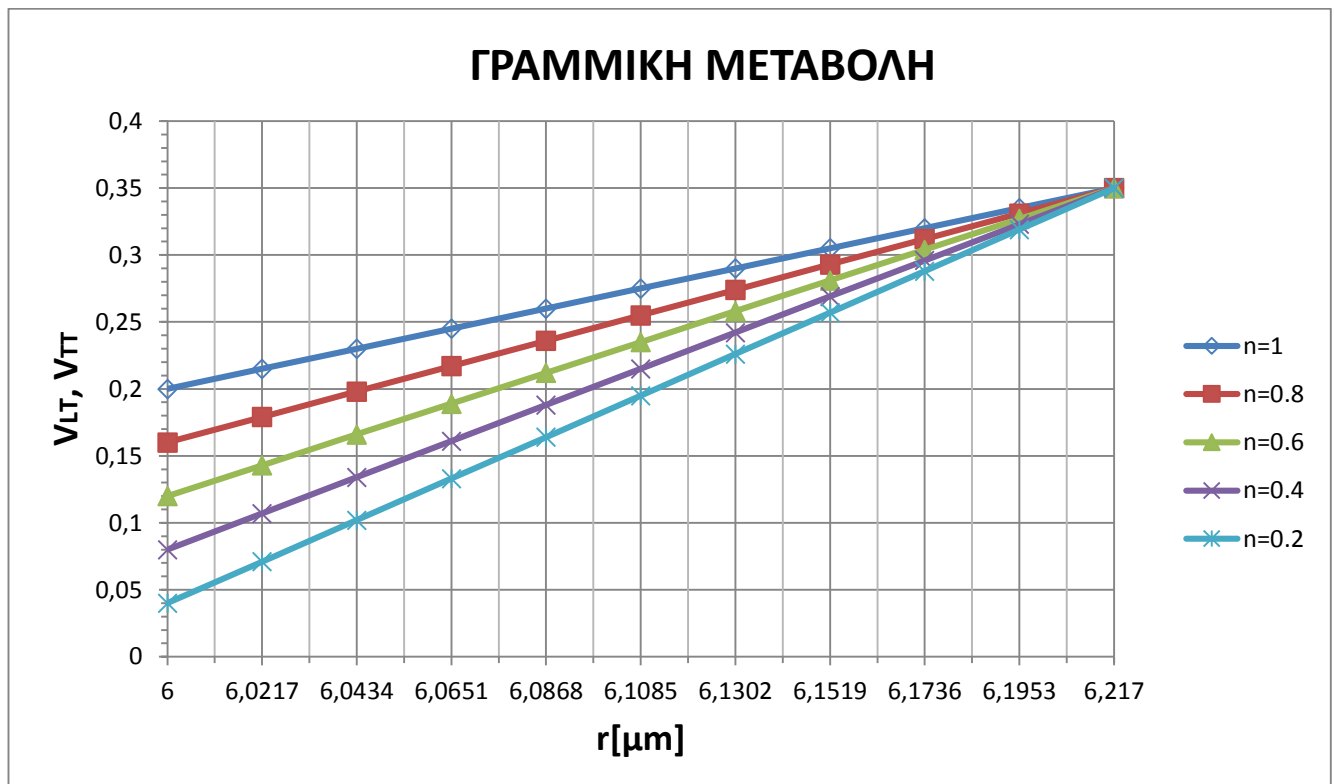
V_{ILT} ΚΑΙ V_{ITT}						
	n	0.2	0.4	0.6	0.8	1
U_f						
0.10		0,2468	0,2601	0,2735	0,2868	0,3001
0.20		0,2470	0,2603	0,2736	0,2869	0,3002
0.30		0,2471	0,2604	0,2737	0,2870	0,3002
0.40		0,2473	0,2605	0,2738	0,2870	0,3003
0.50		0,2474	0,2607	0,2739	0,2871	0,3004
0.60		0,2476	0,2608	0,2740	0,2872	0,3004
0.70		0,2477	0,2609	0,2741	0,2873	0,3005

Σχ. 3.11

ΛΟΓΟΙ POISSON ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΦΑΣΗΣ ΤΡΙΦΑΣΙΚΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΜΕΤΑΒΟΛΗ					
V_{LT}, V_{TT}					
$r(\mu\text{m})$	$n=1$	$n=0.8$	$n=0.6$	$n=0.4$	$n=0.2$
6	0,2	0,16	0,12	0,08	0,04
6,0217	0,215	0,179	0,143	0,107	0,071
6,0434	0,23	0,198	0,166	0,134	0,102
6,0651	0,245	0,217	0,189	0,161	0,133
6,0868	0,26	0,236	0,212	0,188	0,164
6,1085	0,275	0,255	0,235	0,215	0,195
6,1302	0,29	0,274	0,258	0,242	0,226
6,1519	0,305	0,293	0,281	0,269	0,257
6,1736	0,32	0,312	0,304	0,296	0,288
6,1953	0,335	0,331	0,327	0,323	0,319
6,217	0,35	0,35	0,35	0,35	0,35

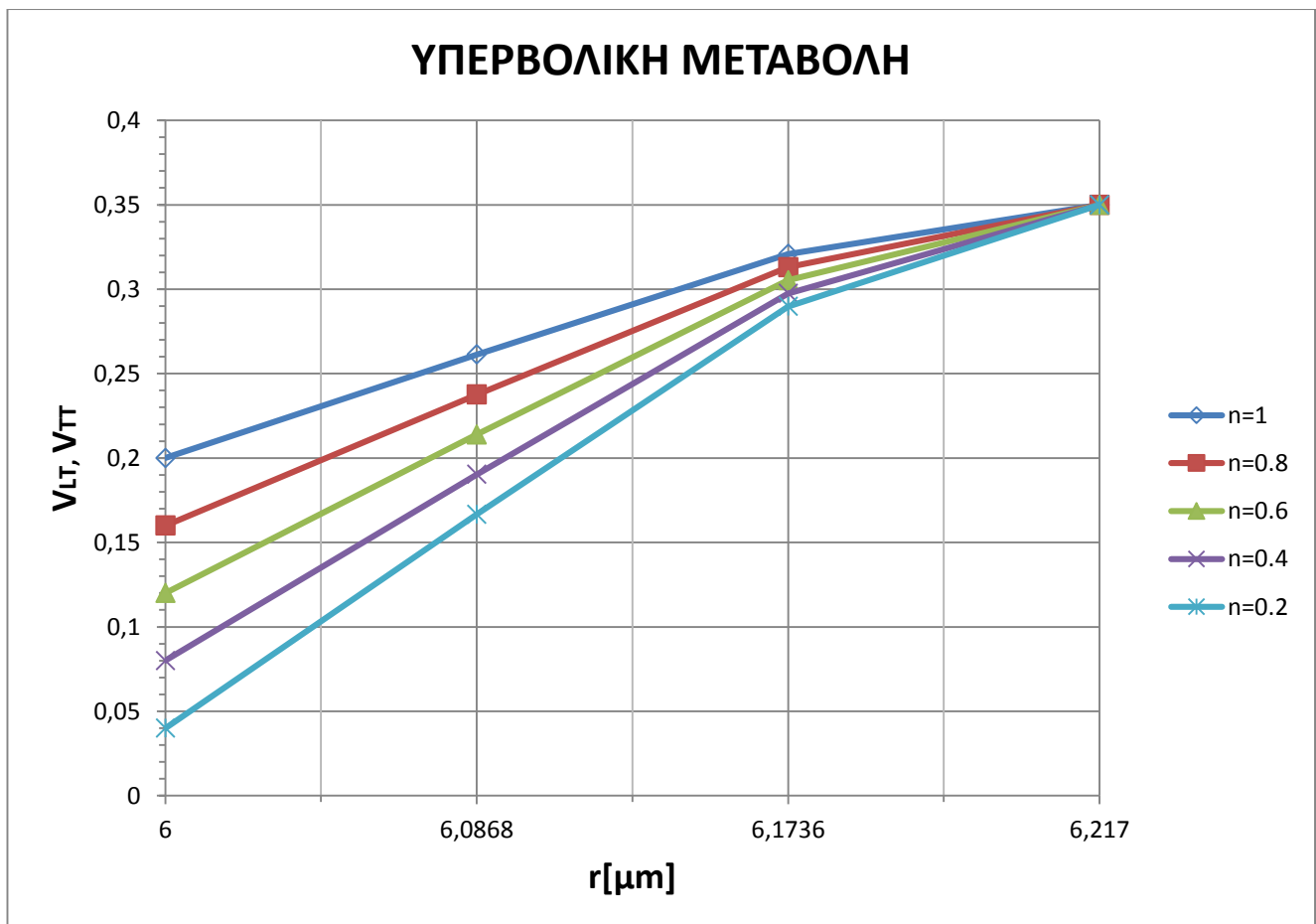
Σχ. 3.12



Σχ. 3.13

ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΗ ΜΕΤΑΒΟΛΗ					
V_{LT}, V_{TT}					
$r(\mu\text{m})$	$n=1$	$n=0.8$	$n=0.6$	$n=0.4$	$n=0.2$
6	0,2	0,16	0,12	0,08	0,04
6,0217	0,215486	0,179616	0,143746	0,107876	0,072005
6,0434	0,230862	0,199092	0,167321	0,135551	0,103781
6,0651	0,246127	0,218428	0,190728	0,163029	0,135329
6,0868	0,261283	0,237626	0,213968	0,19031	0,166652
6,1085	0,276332	0,256687	0,237043	0,217398	0,197753
6,1302	0,291274	0,275614	0,259954	0,244294	0,228634
6,1519	0,306111	0,294407	0,282704	0,271	0,259296
6,1736	0,320844	0,313069	0,305294	0,297518	0,289743
6,1953	0,335473	0,331599	0,327725	0,323851	0,319977
6,217	0,35	0,35	0,35	0,35	0,35

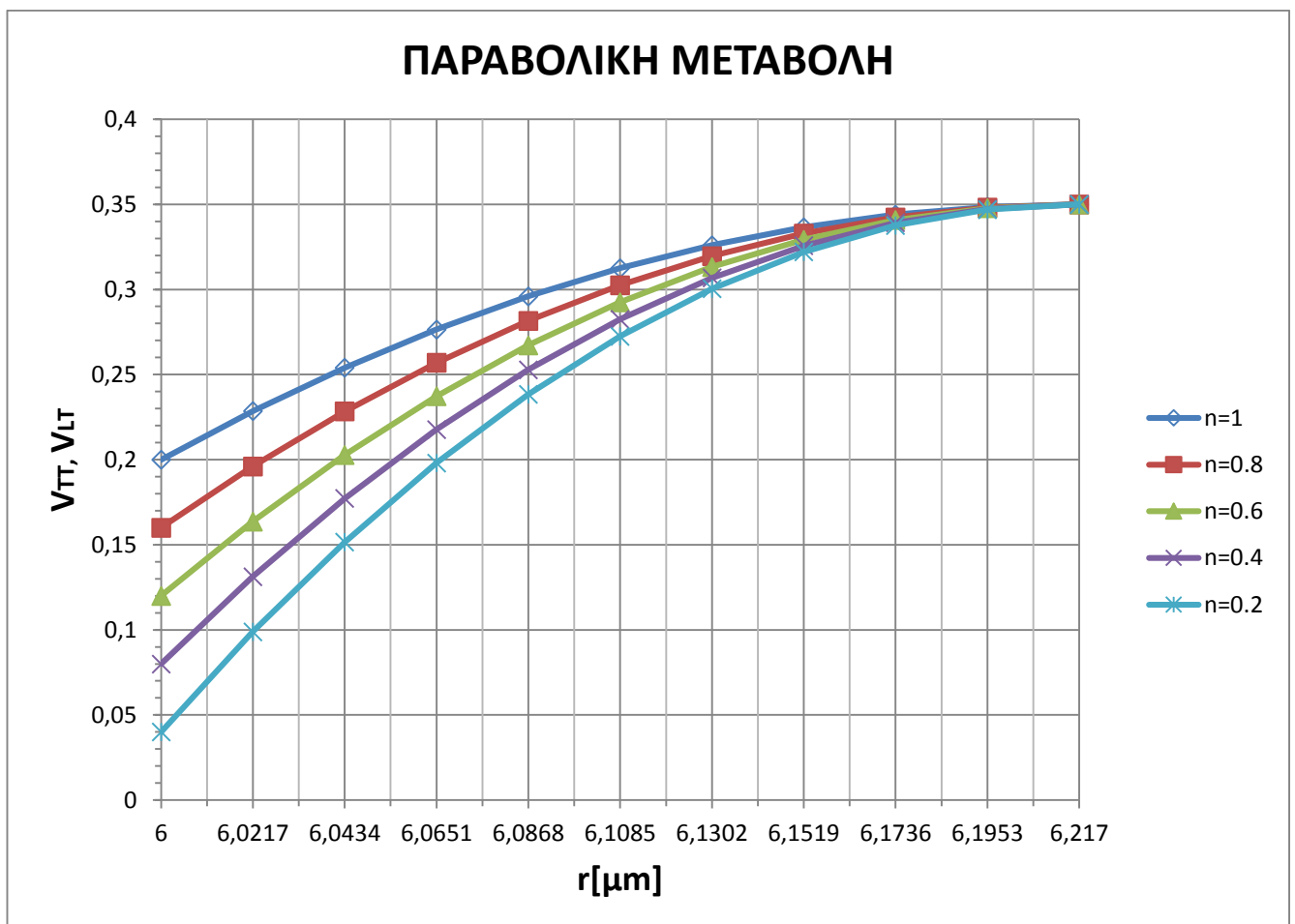
Σχ. 3.14



Σχ. 3.15

ΠΑΡΑΒΟΛΙΚΗ ΜΕΤΑΒΟΛΗ					
V_{LT}, V_{TT}					
$r(\mu\text{m})$	$n=1$	$n=0.8$	$n=0.6$	$n=0.4$	$n=0.2$
6	0,2	0,16	0,12	0,08	0,04
6,0217	0,2285	0,1961	0,1637	0,1313	0,0989
6,0434	0,254	0,2284	0,2028	0,1772	0,1516
6,0651	0,2765	0,2569	0,2373	0,2177	0,1981
6,0868	0,296	0,2816	0,2672	0,2528	0,2384
6,1085	0,3125	0,3025	0,2925	0,2825	0,2725
6,1302	0,326	0,3196	0,3132	0,3068	0,3004
6,1519	0,3365	0,3329	0,3293	0,3257	0,3221
6,1736	0,344	0,3424	0,3408	0,3392	0,3376
6,1953	0,3485	0,3481	0,3477	0,3473	0,3469
6,217	0,35	0,35	0,35	0,35	0,35

Σχ. 3.16

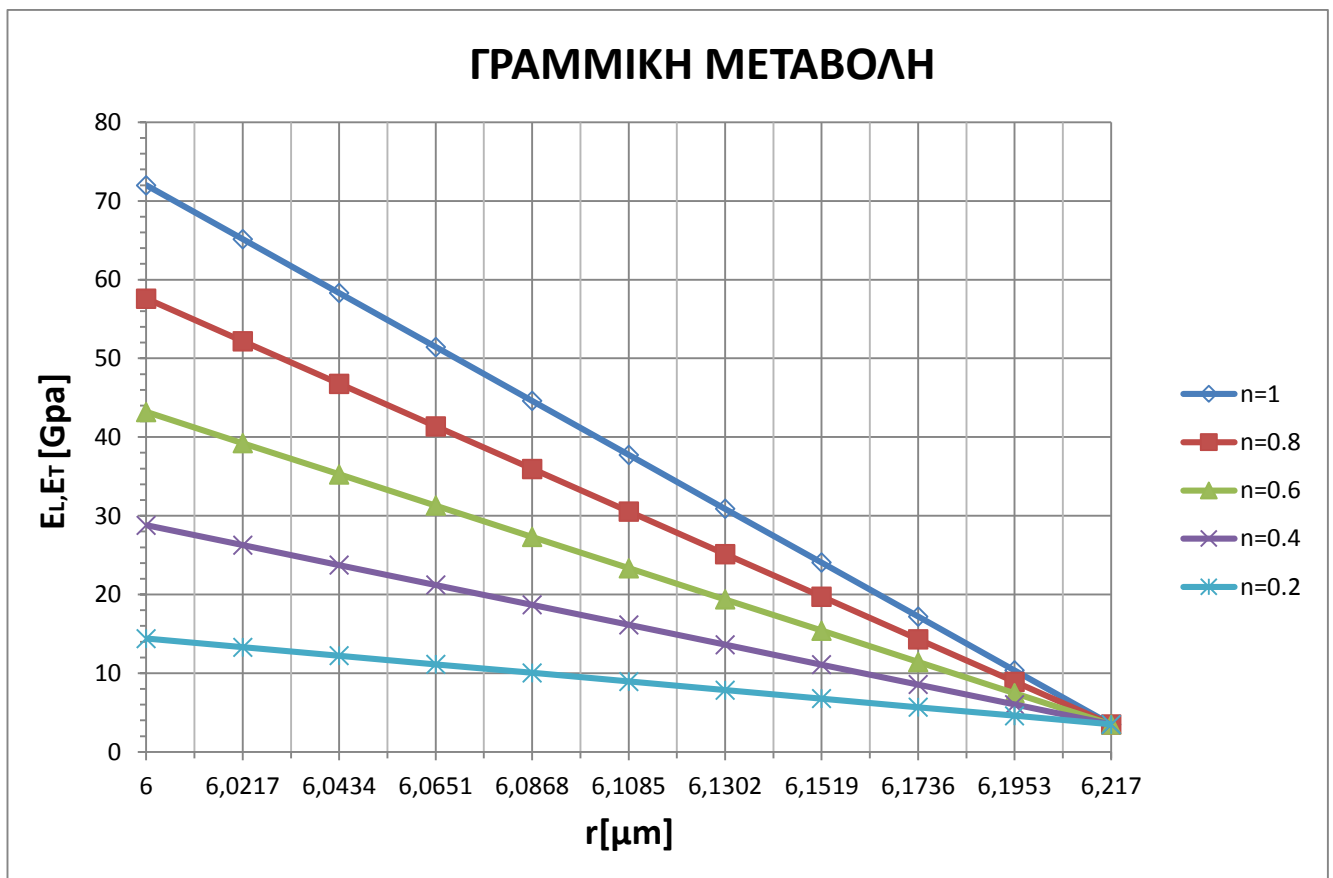


Σχ. 3.17

ΔΙΑΜΗΚΕΣ ΚΑΙ ΕΓΚΑΡΣΙΟ ΜΕΤΡΟ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΦΑΣΗΣ ΤΡΙΦΑΣΙΚΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΜΕΤΑΒΟΛΗ					
Ε _L , Ε _T					
r(μm)	n=1	n=0.8	n=0.6	n=0.4	n=0.2
6	72	57,6	43,2	28,8	14,4
6,0217	65,15	52,19	39,23	26,27	13,31
6,0434	58,3	46,78	35,26	23,74	12,22
6,0651	51,45	41,37	31,29	21,21	11,13
6,0868	44,6	35,96	27,32	18,68	10,04
6,1085	37,75	30,55	23,35	16,15	8,95
6,1302	30,9	25,14	19,38	13,62	7,86
6,1519	24,05	19,73	15,41	11,09	6,77
6,1736	17,2	14,32	11,44	8,56	5,68
6,1953	10,35	8,91	7,47	6,03	4,59
6,217	3,5	3,5	3,5	3,5	3,5

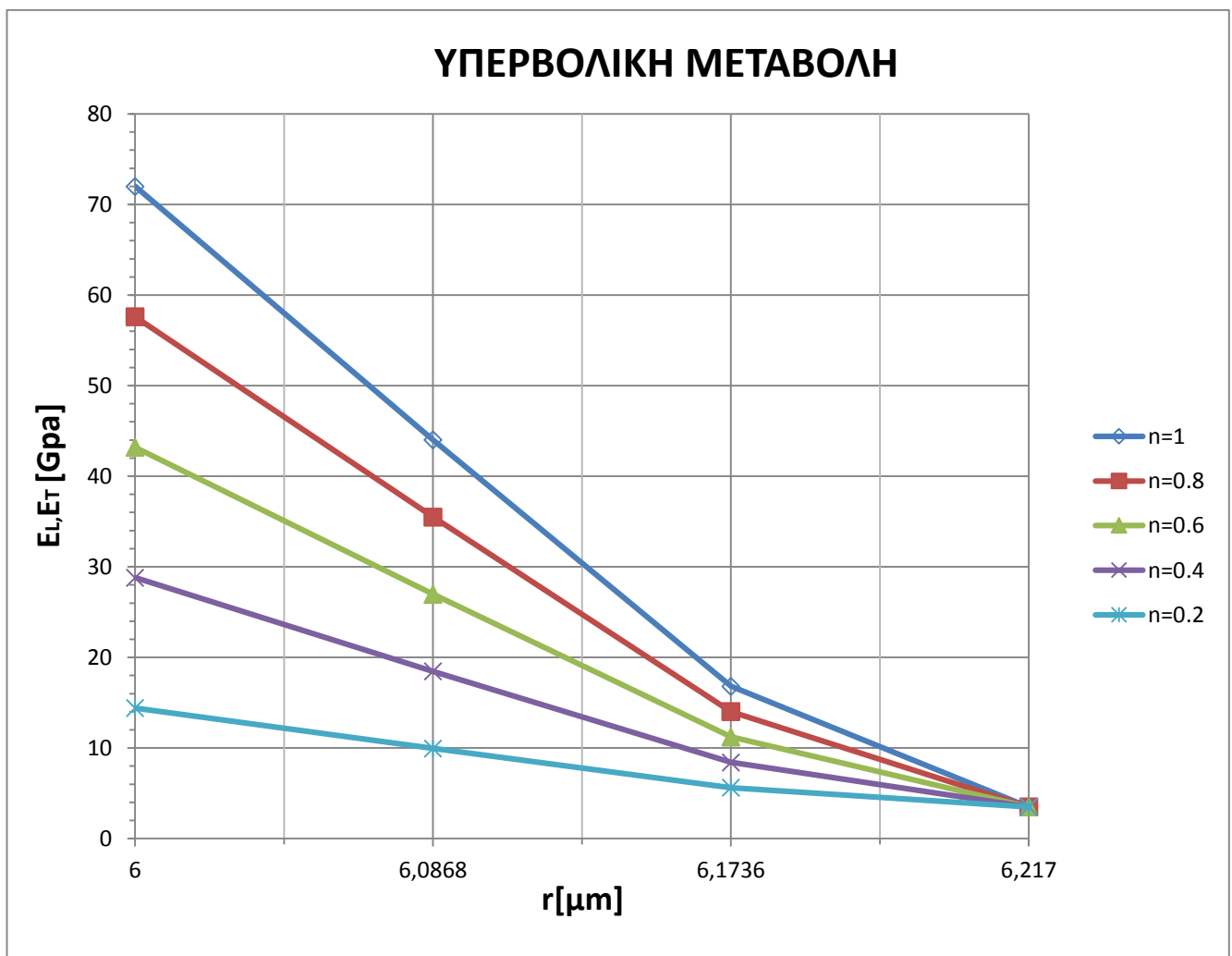
Σχ. 3.18



Σχ. 3.19

ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΗ ΜΕΤΑΒΟΛΗ					
E_L, E_T					
$r(\mu\text{m})$	$n=1$	$n=0.8$	$n=0.6$	$n=0.4$	$n=0.2$
6	72	57,6	43,2	28,8	14,4
6,0217	64,92784	52,01454	39,10124	26,18795	13,27465
6,0434	57,90646	46,46919	35,03192	23,59465	12,15738
6,0651	50,93533	40,96352	30,99171	21,01991	11,0481
6,0868	44,0139	35,49711	26,98032	18,46353	9,946737
6,1085	37,14165	30,06953	22,99742	15,92531	8,853196
6,1302	30,31805	24,68039	19,04272	13,40506	7,767397
6,1519	23,54259	19,32926	15,11592	10,90259	6,689259
6,1736	16,81476	14,01574	11,21673	8,417714	5,618699
6,1953	10,13406	8,739456	7,34485	5,950245	4,555639
6,217	3,5	3,5	3,5	3,5	3,5

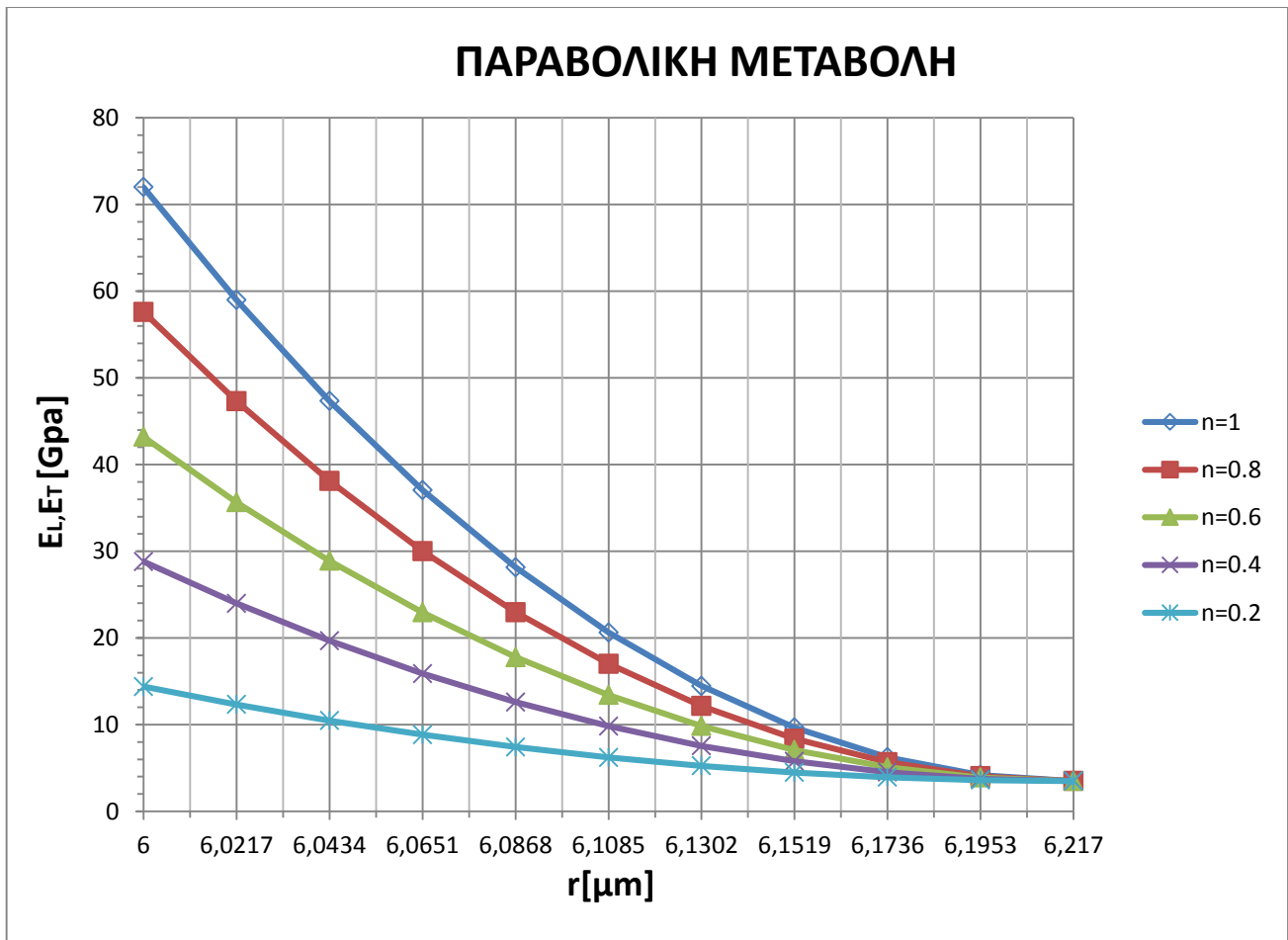
Σχ. 3.20



Σχ. 3.21

ΠΑΡΑΒΟΛΙΚΗ ΜΕΤΑΒΟΛΗ					
E_L, E_T					
$r(\mu\text{m})$	$n=1$	$n=0.8$	$n=0.6$	$n=0.4$	$n=0.2$
6	72	57,6	43,2	28,8	14,4
6,0217	58,985	47,321	35,657	23,993	12,329
6,0434	47,34	38,124	28,908	19,692	10,476
6,0651	37,065	30,009	22,953	15,897	8,841
6,0868	28,16	22,976	17,792	12,608	7,424
6,1085	20,625	17,025	13,425	9,825	6,225
6,1302	14,46	12,156	9,852	7,548	5,244
6,1519	9,665	8,369	7,073	5,777	4,481
6,1736	6,24	5,664	5,088	4,512	3,936
6,1953	4,185	4,041	3,897	3,753	3,609
6,217	3,5	3,5	3,5	3,5	3,5

Σχ. 3.22

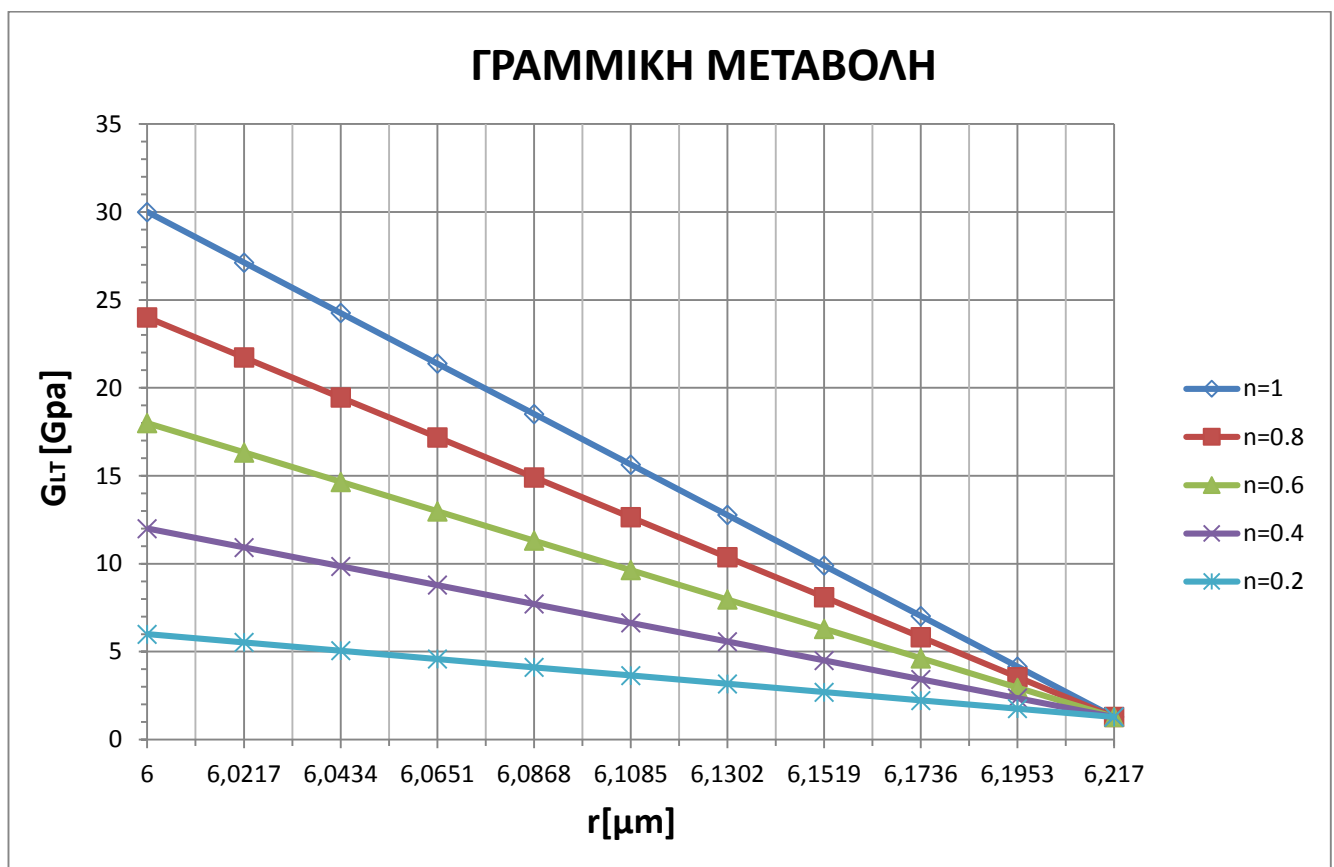


Σχ. 3.23

ΔΙΑΜΗΚΕΣ ΜΕΤΡΟ ΔΙΑΤΜΗΣΕΩΣ ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΦΑΣΗΣ ΤΡΙΦΑΣΙΚΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΜΕΤΑΒΟΛΗ					
G _{LT}					
r(μm)	n=1	n=0.8	n=0.6	n=0.4	n=0.2
6	30	24	18	12	6
6,0217	27,129	21,729	16,329	10,929	5,529
6,0434	24,258	19,458	14,658	9,858	5,058
6,0651	21,387	17,187	12,987	8,787	4,587
6,0868	18,516	14,916	11,316	7,716	4,116
6,1085	15,645	12,645	9,645	6,645	3,645
6,1302	12,774	10,374	7,974	5,574	3,174
6,1519	9,903	8,103	6,303	4,503	2,703
6,1736	7,032	5,832	4,632	3,432	2,232
6,1953	4,161	3,561	2,961	2,361	1,761
6,217	1,29	1,29	1,29	1,29	1,29

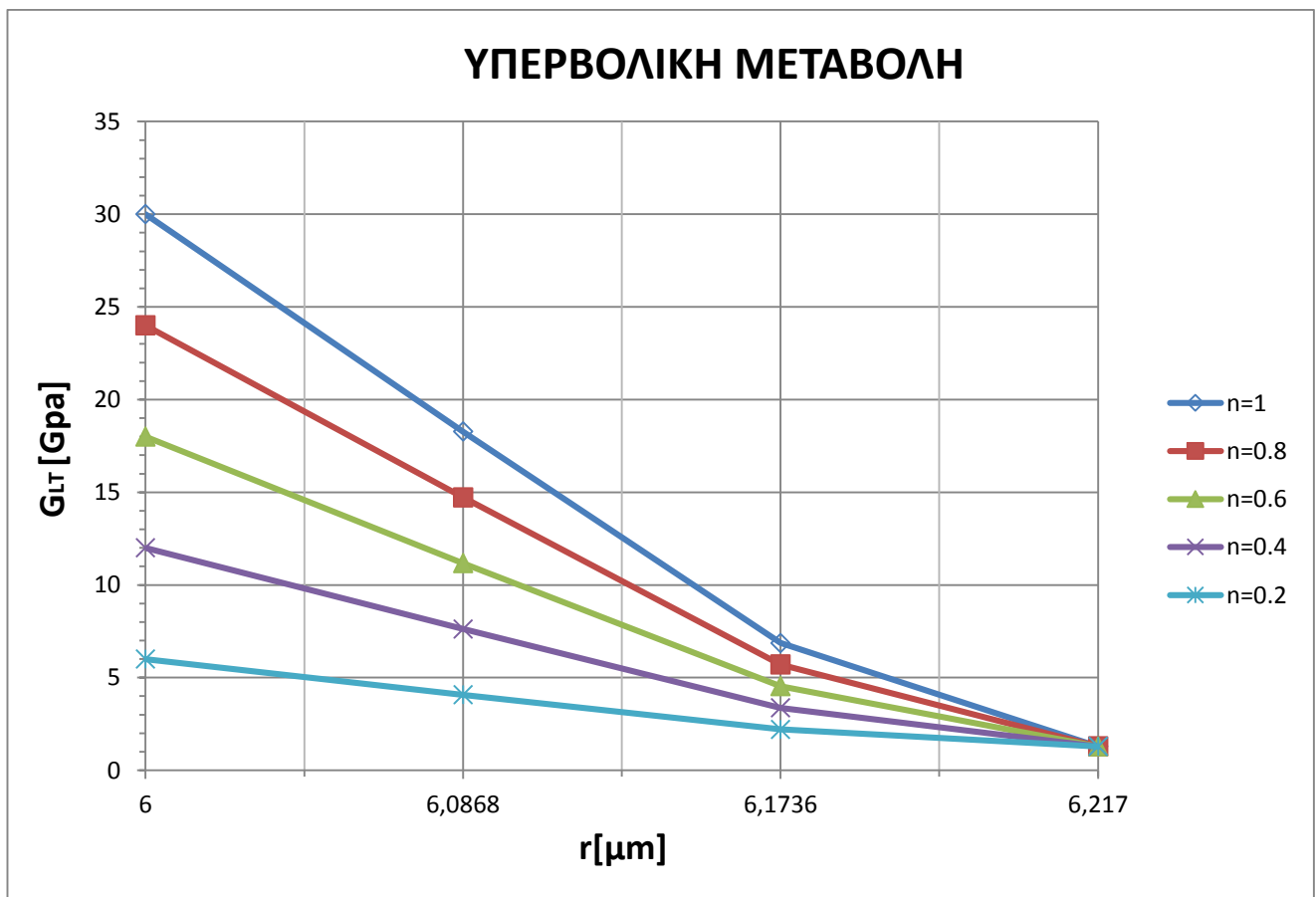
Σχ. 3.24



Σχ. 3.25

ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΗ ΜΕΤΑΒΟΛΗ					
G_{LT}					
$r(\mu\text{m})$	$n=1$	$n=0.8$	$n=0.6$	$n=0.4$	$n=0.2$
6	30	24	18	12	6
6,0217	27,03589	21,65535	16,2748	10,89426	5,513724
6,0434	24,09306	19,32753	14,562	9,79647	5,030941
6,0651	21,17129	17,01637	12,86145	8,706531	4,551612
6,0868	18,27035	14,72169	11,17303	7,624363	4,0757
6,1085	15,39002	12,44331	9,496597	6,549884	3,60317
6,1302	12,53009	10,18106	7,832038	5,483012	3,133986
6,1519	9,690332	7,934776	6,179221	4,423666	2,668111
6,1736	6,870536	5,70428	4,538024	3,371768	2,205511
6,1953	4,070495	3,489409	2,908324	2,327238	1,746152
6,217	1,29	1,29	1,29	1,29	1,29

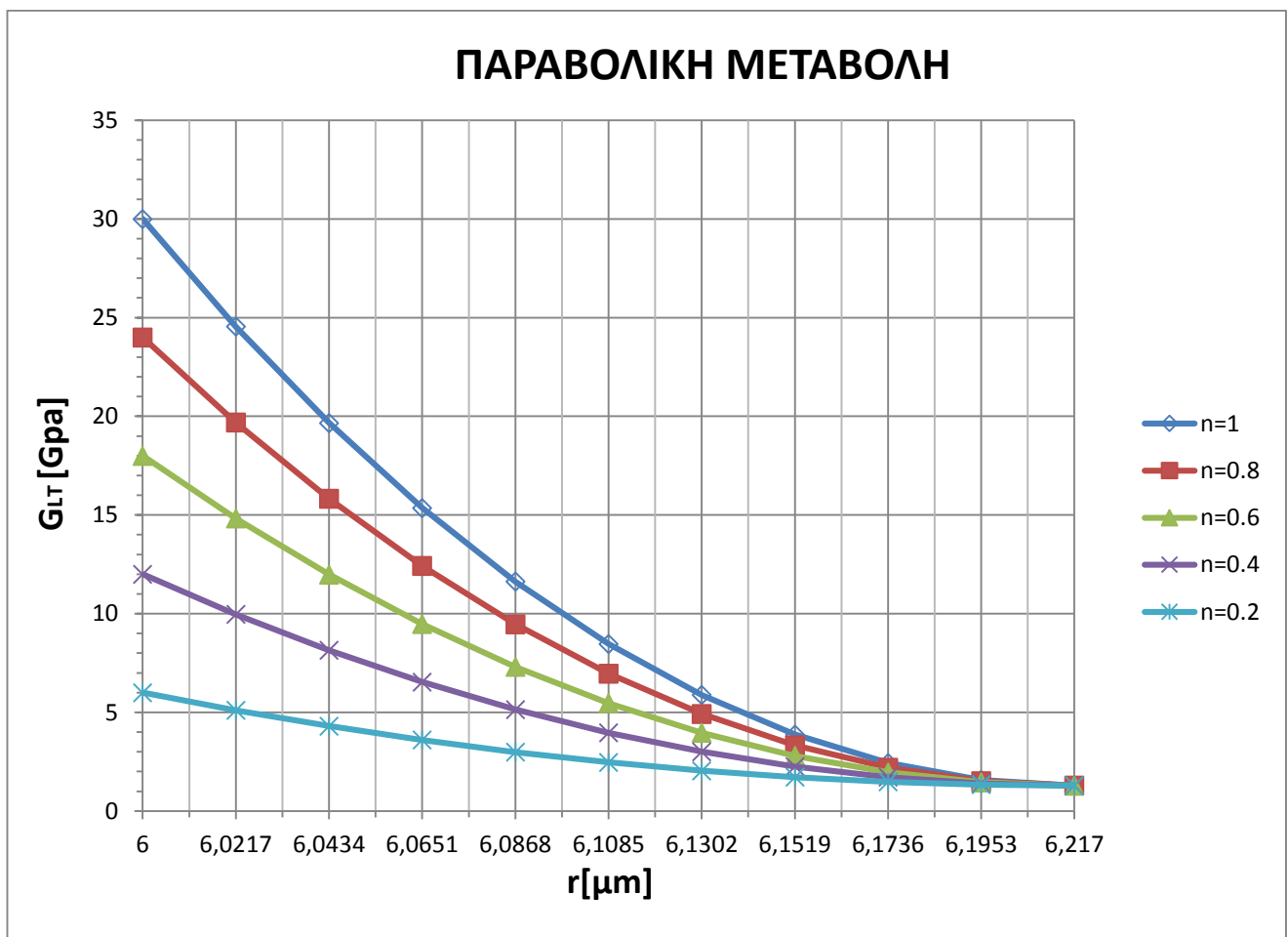
Σχ. 3.26



Σχ. 3.27

ΠΑΡΑΒΟΛΙΚΗ ΜΕΤΑΒΟΛΗ					
G _{LT}					
r(μm)	n=1	n=0.8	n=0.6	n=0.4	n=0.2
6	30	24	18	12	6
6,0217	24,5451	19,6851	14,8251	9,9651	5,1051
6,0434	19,6644	15,8244	11,9844	8,1444	4,3044
6,0651	15,3579	12,4179	9,4779	6,5379	3,5979
6,0868	11,6256	9,4656	7,3056	5,1456	2,9856
6,1085	8,4675	6,9675	5,4675	3,9675	2,4675
6,1302	5,8836	4,9236	3,9636	3,0036	2,0436
6,1519	3,8739	3,3339	2,7939	2,2539	1,7139
6,1736	2,4384	2,1984	1,9584	1,7184	1,4784
6,1953	1,5771	1,5171	1,4571	1,3971	1,3371
6,217	1,29	1,29	1,29	1,29	1,29

Σχ. 3.28



Σχ. 3.29

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ ΔΙΑΣΤΟΛΗΣ ΙΝΩΔΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

4.1 ΔΙΑΜΗΚΗΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΘΕΡΜΙΚΗΣ ΔΙΑΣΤΟΛΗΣ

Διαμήκης συντελεστής θερμικής διαστολής μέσω της θεωρίας αντοχής των υλικών.

Έστω το δοκίμιο του σχήματος 4.1α. Έστω x η ελεύθερη διαστολή των φάσεων λόγω της αύξησης της θερμοκρασίας ΔT . Έχουμε :

$$x_f = L_o \alpha_f \Delta T$$

$$x_i = L_o \alpha_i(r) \Delta T \quad (4.1a,b,c)$$

$$x_m = L_o \alpha_m \Delta T$$

Έστω k η εξαναγκασμένη διαστολή του υλικού. Οπότε οι παραμορφώσεις κατά τη διεύθυνση x :

$$\varepsilon_{x,f} = \frac{k_f}{L_o}$$

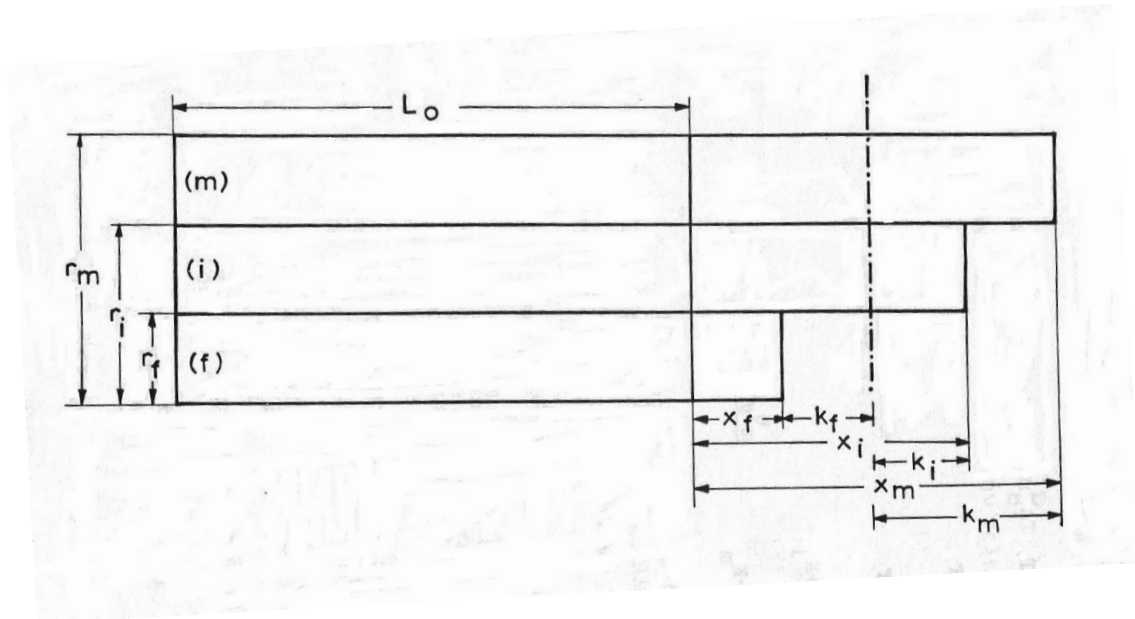
$$\varepsilon_{x,m} = \frac{k_m}{L_o} \quad (4.2a,b,c)$$

$$\varepsilon_{x,i} = \frac{k_i}{L_o}$$

Επίσης έχουμε:

$$x_i - x_f = k_f + k_i \quad (4.3a,b)$$

$$x_m - x_i = k_m - k_i$$



Σχ. 4.1α

Το εφελκυστικό φορτίο στο έγκλεισμα είναι ίσο με το θλιπτικό φορτίο στη μήτρα και το θλιπτικό φορτίο στην ενδιάμεση φάση. Έτσι:

$$\frac{k_f}{L_o} E_f A_f = \frac{k_i}{L_o} E_i(r) A_i + \frac{k_m}{L_o} E_m A_m \quad (4.4)$$

Με τις παραπάνω εξισώσεις βρίσκουμε τα k_f, k_m, k_i :

$$k_f = L_o \Delta T \times \frac{[\alpha_i(r) E_i(r) A_i + \alpha_m E_m A_m - \alpha_f (E_i(r) A_i + E_m A_m)]}{E_f A_f + E_m A_m + E_i(r) A_i}$$

$$k_m = L_o \Delta T \times \frac{[\alpha_m (E_i(r) A_i + E_f A_f) - (\alpha_i(r) E_i(r) A_i + \alpha_f E_f A_f)]}{E_f A_f + E_m A_m + E_i(r) A_i} \quad (4.5a,b,c)$$

$$k_i = L_o \Delta T \times \frac{[\alpha_i(r) (E_f A_f + E_m A_m) - (\alpha_f E_f A_f + \alpha_m E_m A_m)]}{E_f A_f + E_m A_m + E_i(r) A_i}$$

Αρά ο συντελεστής θερμικής διαστολής κατά μήκος μπορεί να βρεθεί από τη σχέση:

$k_f + x_f = a_L L_o \Delta T$, αντικαθιστώντας τα k_f, x_f . Έτσι:

$$a_L = \frac{\alpha_f E_f \nu_f + \alpha_m E_m \nu'_m + \alpha_i(r) E_i(r) \nu_i}{E_f \nu_f + E_m \nu'_m + E_i(r) \nu_i} \quad (4.6)$$

Το οποίο μπορεί να γραφεί ως:

$$a_L = \frac{\alpha_f E_f v_f + \alpha_m E_m v'_m + \frac{2}{r_m^2} \int_{r_f}^{r_i} \alpha_i(r) E_i(r) r dr}{E_f v_f + E_m v'_m + \frac{2}{r_m^2} \int_{r_f}^{r_i} E_i(r) r dr} \quad (4.7)$$

4.2 ΕΓΚΑΡΣΙΟΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΘΕΡΜΙΚΗΣ ΔΙΑΣΤΟΛΗΣ

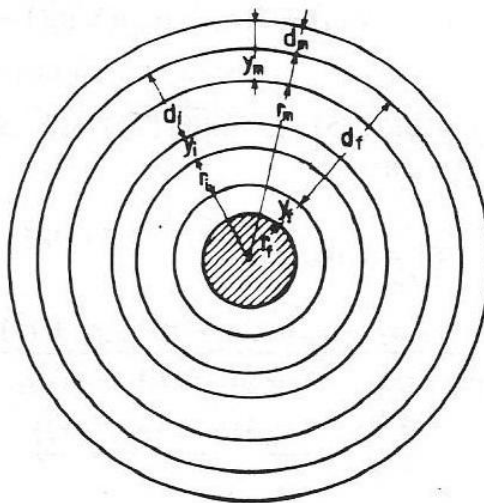
Α) Εγκάρσιος συντελεστής θερμικής διαστολής μέσω της θεωρίας αντοχής των υλικών

Έστω τώρα το σχήμα 4.1β. Έστω η ελεύθερη διαστολή των φάσεων γ λόγω της αύξησης της θερμοκρασίας ΔT και η εξαναγκασμένη d .

$$\begin{aligned} \varepsilon_{y,f} &= -v_f \varepsilon_{x,f} = -v_f \frac{[\alpha_i(r) E_i(r) A_i + \alpha_m E_m A_m - \alpha_f (E_i(r) A_i + E_m A_m)]}{E_f A_f + E_m A_m + E_i(r) A_i} \Delta T \Rightarrow \\ &\Rightarrow \varepsilon_{y,f} = v_f (a_L - a_f) \Delta T \\ \varepsilon_{y,m} &= -v_m \varepsilon_{x,m} = -v_m \frac{[\alpha_m (E_i(r) A_i + E_f A_f) - (\alpha_i(r) E_i(r) A_i + \alpha_f E_f A_f)]}{E_f A_f + E_m A_m + E_i(r) A_i} \Delta T \Rightarrow \\ &\Rightarrow \varepsilon_{y,m} = v_m (a_m - a_L) \Delta T \\ \varepsilon_{y,i} &= -v_i(r) \varepsilon_{x,i} = -v_i(r) \frac{[\alpha_i(r) (E_f A_f + E_m A_m) - (\alpha_f E_f A_f + \alpha_m E_m A_m)]}{E_f A_f + E_m A_m + E_i(r) A_i} \Delta T \Rightarrow \\ &\Rightarrow \varepsilon_{y,i} = v_i(r) (a_i(r) - a_L) \Delta T \end{aligned} \quad (4.8a,b,c)$$

Οι συνολικές παραμορφώσεις των τριών φάσεων είναι:

$$\begin{aligned} \varepsilon^t_{y,f} &= a_f \Delta T + \varepsilon_{y,f} = a_f \Delta T - v_f (a_L - a_f) \Delta T \\ \varepsilon^t_{y,m} &= a_m \Delta T - \varepsilon_{y,m} = a_m \Delta T - v_m (a_m - a_L) \Delta T \\ \varepsilon^t_{y,i} &= a_i(r) \Delta T - \varepsilon_{y,i} = a_i(r) \Delta T + v_i(r) (a_i(r) - a_L) \Delta T \end{aligned} \quad (4.9a,b,c)$$



Σχ.4.1β

Η συνολική παραμόρφωση του σύνθετου είναι:

$$\varepsilon'_{y,c} = \varepsilon'_{y,f} \nu_f + \varepsilon'_{y,m} \nu'_m + \varepsilon'_{y,i} \nu_i \quad (4.10)$$

Αντικαθιστώντας τις παραμορφώσεις που βρήκαμε παραπάνω και με $\varepsilon'_{y,c} = \alpha_T \Delta T$, έχουμε τελικά:

$$\alpha_T = (1 + \nu_f) a_f \nu_f + (1 + \nu_m) a_m \nu'_m + (1 + \nu_i(r)) a_i(r) \nu_i - \alpha_L \times (\nu_f \nu_f + \nu_m \nu'_m + \nu_i(r) \nu_i) \quad (4.11)$$

Η οποία μπορεί να γραφεί ως:

$$\begin{aligned} \alpha_T &= (1 + \nu_f) a_f \nu_f + (1 + \nu_m) a_m \nu'_m + \frac{2}{r_m^2} \int_{r_f}^{r_i} (1 + \nu_i(r)) a_i(r) dr - \\ &- \alpha_L (\nu_f \nu_f + \nu_m \nu'_m + \frac{2}{r_m^2} \int_{r_f}^{r_i} \nu_i(r) r dr) \Rightarrow \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\Rightarrow \alpha_T = (1 + \nu_f) a_f \nu_f + (1 + \nu_m) a_m \nu'_m + I_3 - \alpha_L (\nu_f \nu_f + \nu_m \nu'_m + I_4)$$

$$I_3 = \frac{2}{r_m^2} \int_{r_f}^{r_i} (1 + \nu_i(r)) a_i(r) dr,$$

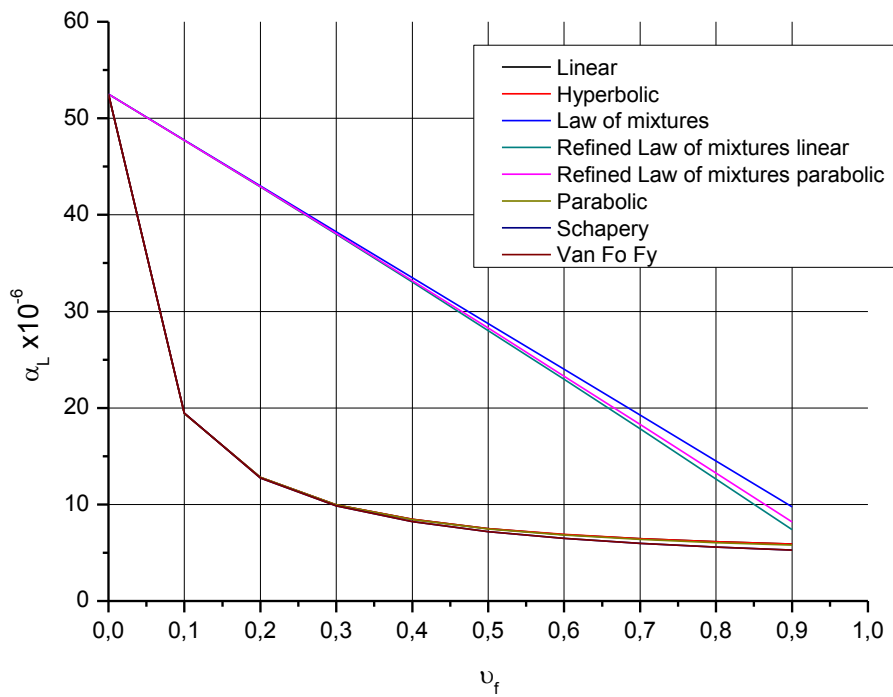
με

$$I_4 = \frac{2}{r_m^2} \int_{r_f}^{r_i} \nu_i(r) r dr$$

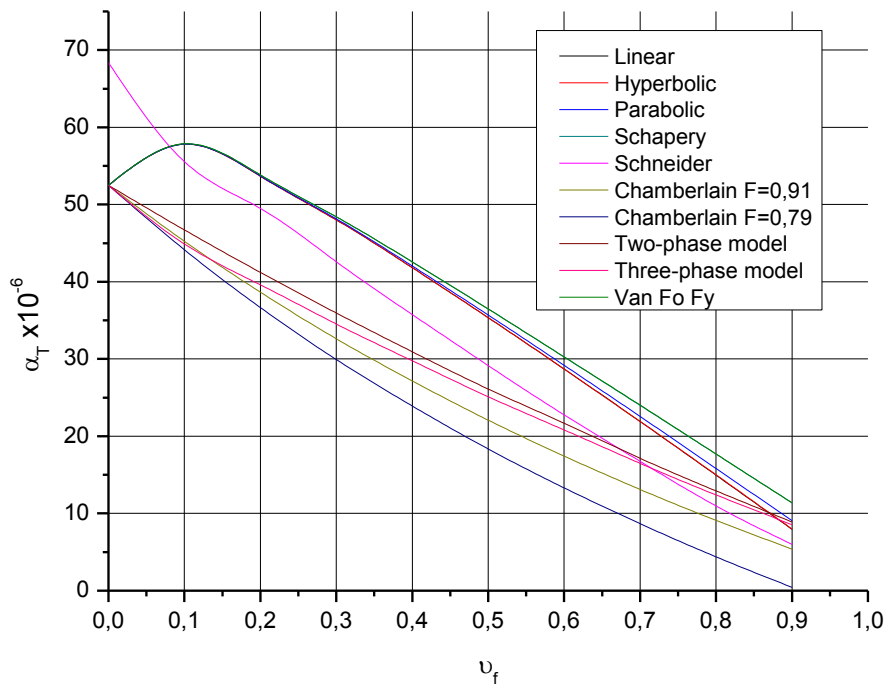
Οι τιμές των α_L και α_T που βρήκαμε μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να υπολογίσουμε τον γραμμικό συντελεστή θερμικής διαστολής α_θ που προκύπτει από τη σχέση

$$\alpha_\theta = \alpha_L \cos^2 \theta + \alpha_T \sin^2 \theta \quad (4.13)$$

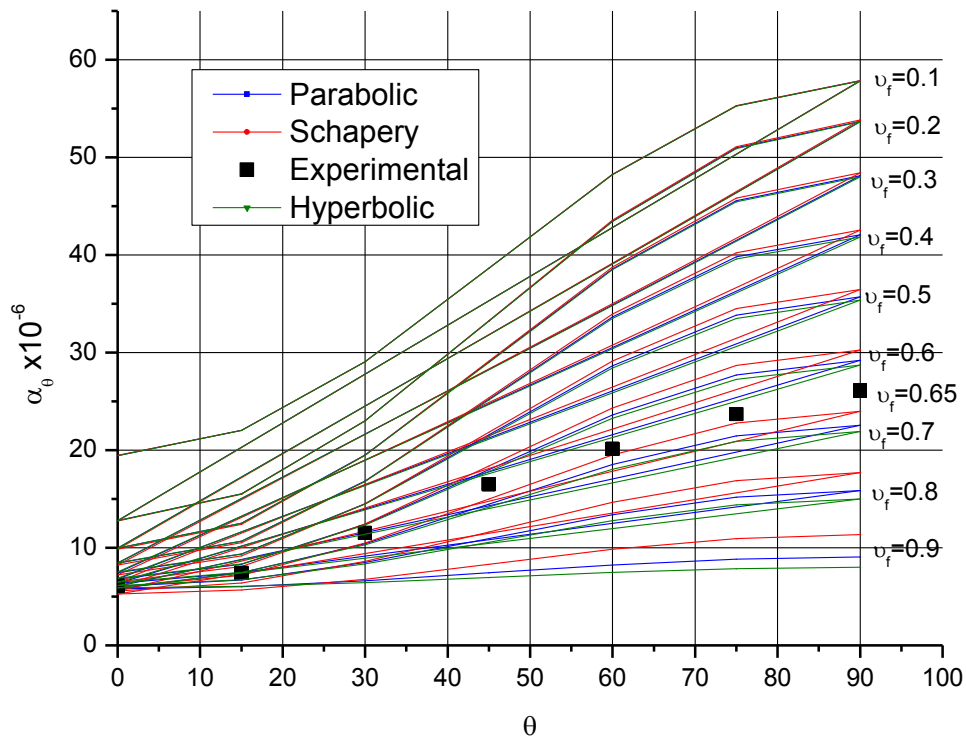
Παρακάτω παρουσιάζονται τα διαγράμματα των $\alpha_L, \alpha_T, \alpha_\theta, \nu_c$:



διάγραμμα 4.2.1



διάγραμμα 4.2.2



διάγραμμα 4.2.3

Β) Εγκάρσιος συντελεστής θερμικής διαστολής μέσω της θεωρίας ελαστικότητας

Διφασικό μοντέλο

Για τον υπολογισμό του εγκάρσιου συντελεστή θερμικής διαστολής θεωρούμε το διφασικό μοντέλο το οποίο αποτελείται από τις δυο φάσεις: τη μήτρα και την ίνα

Επειδή το πρόβλημα είναι αξονοσυμμετρικό θεωρούμε την τασική συνάρτηση Airy με τη χρήση της οποίας η συνθήκη συμβιβαστού γίνεται $\nabla^2 \Phi = 0$ της οποίας η λύση είναι:

$$\Phi = C_1 \ln r + C_2 r^2 \ln r + C_3 r^2 + C_4$$

Κάθε μια από τις φάσεις του υλικού χαρακτηρίζεται και από μια αντίστοιχη τασική συνάρτηση. Έτσι, οι εκφράσεις για τις τάσεις της κάθε μιας φάσεως είναι:

$$\begin{aligned}\sigma_{r,f} &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Phi_f}{\partial r} \Rightarrow \sigma_{r,f} = \frac{A}{r^2} + B(1 + 2 \ln r) + 2C \\ \sigma_{\theta,f} &= \frac{\partial^2 \Phi_f}{\partial r^2} \Rightarrow \sigma_{\theta,f} = -\frac{A}{r^2} + B(1 + 2 \ln r) + 2C \\ \sigma_{r,m} &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Phi_m}{\partial r} \Rightarrow \sigma_{r,m} = \frac{F}{r^2} + G(1 + 2 \ln r) + 2H \\ \sigma_{\theta,m} &= \frac{\partial^2 \Phi_m}{\partial r^2} \Rightarrow \sigma_{\theta,m} = -\frac{F}{r^2} + G(3 + 2 \ln r) + 2H\end{aligned}\quad (4.14a,b,c,d)$$

Για να αποφευχθεί ο απειρισμός των τάσεων στο $r=0$, οι σταθερές A και B πρέπει να είναι μηδέν. Δηλαδή $A=B=0$. Έτσι:

$$\sigma_{r,f} = \sigma_{\theta,f} = 2C \quad (4.15)$$

Επίσης ισχύει:

$$G = 0$$

Αρά καταλήγουμε στις εξισώσεις:

$$\begin{aligned}\sigma_{r,m} &= \frac{F}{r^2} + 2H \\ \sigma_{\theta,m} &= -\frac{F}{r^2} + 2H\end{aligned}\quad (4.16a,b)$$

Λαμβάνουμε επίσης υπόψη μας τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\sigma_{r,f} = -p_0 \text{ για } r=a$$

$$\sigma_{r,m} = -p_0 \text{ για } r=a$$

$$\text{και } \sigma_{r,m} = -p_1 \text{ για } r=b$$

Συνδυάζοντας τώρα αυτές τις σχέσεις έχουμε:

$$\sigma_{r,f} = -p_0 \Rightarrow 2C = -p_0 \quad (4.17)$$

Από τις παραπάνω παίρνουμε:

$$\sigma_{r,m} = -p_0 \Rightarrow \frac{F}{r^2} + 2H = -p_0. \text{ Για } r=a \text{ έχουμε:}$$

$$\frac{F}{a^2} + 2H = -p_0 \Rightarrow 2H = -\frac{F}{a^2} - p_0 \quad (4.18)$$

Επίσης έχουμε:

$$\sigma_{r,m} = -p_1 \Rightarrow \frac{F}{r^2} + 2H = -p_1. \text{ Για } r=b \text{ γίνεται:}$$

$\frac{F}{b^2} + 2H = -p_1$. Ακόμη παίρνουμε:

$$\frac{F}{b^2} - \frac{F}{a^2} - p_0 = -p_1 \Rightarrow F = \frac{(-p_1 + p_0)a^2b^2}{a^2 - b^2} \quad (4.19)$$

Έτσι υπολογίστηκαν οι άγνωστοι F, 2H και 2C.

Οι ακτινικές μετατοπίσεις των δυο φάσεων δίνονται ως:

$$u_{r,f} = \frac{r}{E_f} [2C - \nu_f(2C + 4\nu_f C)] \quad (4.20a,b)$$

$$u_{r,m} = \frac{r}{E_m} [2H - \frac{F}{r^2} - \nu_m(2H + \frac{F}{r^2} + 4\nu_m H)]$$

Οπού ν_f, ν_m οι λόγοι Poisson των δυο φάσεων.

Αντικαθιστούμε στις σχέσεις αυτές τα C, H και F με τα ίσα τους και με βάση τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\varepsilon_{\theta,f} = \frac{u_{r,f}}{r} \quad (4.21a,b)$$

$$\varepsilon_{\theta,m} = \frac{u_{r,m}}{r}$$

Παίρνουμε τελικά τους ακόλουθους τύπους που δίνουν τις παραμορφώσεις των δυο φάσεων:

$$\varepsilon_{\theta,f} = \frac{-p_0(1 + \nu_f)(1 - 2\nu_f)}{E_f} \quad (4.22a,b)$$

$$\varepsilon_{\theta,m} = \frac{1 + \nu_m}{E_m} \left[\frac{a^2 b^2 (p_1 - p_0)}{a^2 - b^2} \cdot \frac{1}{r^2} + \frac{p_0 a^2 - p_1 b^2}{b^2 - a^2} (1 - 2\nu_m) \right]$$

Προκειμένου να υπολογίσουμε τον εγκάρσιο συντελεστή θερμικής διαστολής του ινώδους υλικού μας εφαρμόζουμε τις ακόλουθες συνοριακές συνθήκες:

$$\varepsilon_{\theta,m} - \varepsilon_{\theta,f} = (\alpha_m - \alpha_f) \Delta T \text{ για } r=a. \quad (4.23)$$

Αντικαθιστούμε στα $\varepsilon_{\theta,m}$ και $\varepsilon_{\theta,f}$ τις παραπάνω σχέσεις :

$$\varepsilon_{\theta,m} - \varepsilon_{\theta,f} = \frac{1 + \nu_m}{E_m} \left[\frac{a^2 b^2 (p_1 - p_0)}{a^2 - b^2} \cdot \frac{1}{a^2} + \frac{p_0 a^2 - p_1 b^2}{b^2 - a^2} (1 - 2\nu_m) \right] + \frac{p_0(1 + \nu_f)(1 - 2\nu_f)}{E_f} = (\alpha_m - \alpha_f) \Delta T \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(1 + \nu_m)a^2 b^2 (p_1 - p_0)}{E_m (a^2 - b^2)} + \frac{(1 + \nu_m)(p_0 a^2 - p_1 b^2)(1 - 2\nu_m)}{E_m (b^2 - a^2)} + \frac{p_0(1 + \nu_f)(1 - 2\nu_f)}{E_f} = (\alpha_m - \alpha_f) \Delta T \quad (4.24)$$

Όμως, η $p_1=0$, δηλαδή δεν ασκείται εξωτερική πίεση παρά μόνο διαφορά θερμοκρασίας ΔT .
Αρά έχουμε:

$$\frac{(1+\nu_m)a^2b^2p_0E_f}{E_m(a^2-b^2)E_f} + \frac{(1+\nu_m)p_0a^2(1-2\nu_m)E_f}{E_m(b^2-a^2)E_f} + \frac{p_0(1+\nu_f)(1-2\nu_f)E_m(b^2-a^2)}{E_fE_m(b^2-a^2)} = (\alpha_m - \alpha_f)\Delta T \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1+\nu_m)a^2b^2p_0E_f + (1+\nu_m)p_0a^2(1-2\nu_m)E_f + p_0(1+\nu_f)(1-2\nu_f)E_m(b^2-a^2)$$

$$= (\alpha_m - \alpha_f)\Delta T \cdot E_m(b^2-a^2)E_f$$

Θέτω $[(\alpha_m - \alpha_f)\Delta T \cdot E_m(b^2-a^2)E_f] = A$ οπότε παίρνουμε:

$$p_0[(1+\nu_m)a^2b^2E_f + (1+\nu_m)a^2(1-2\nu_m)E_f + (1+\nu_f)(1-2\nu_f)E_m(b^2-a^2)] = A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_0 = \frac{(\alpha_m - \alpha_f)\Delta T \cdot E_m(b^2-a^2)E_f}{(1+\nu_m)a^2b^2E_f + (1+\nu_m)a^2(1-2\nu_m)E_f + (1+\nu_f)(1-2\nu_f)E_m(b^2-a^2)}$$

(4.25)

Διαιρώντας με b^2 και χρησιμοποιώντας τη σχέση $\frac{a^2}{b^2} = \nu_f$, καταλήγουμε στον τύπο:

$$p_0 = \frac{(\alpha_m - \alpha_f)\Delta T \cdot E_m(1-\nu_f)E_f}{(1+\nu_m)E_f + (1+\nu_m)\nu_f(1-2\nu_m)E_f + (1+\nu_f)(1-2\nu_f)E_m(1-\nu_f)} \quad (4.26)$$

Ο συντελεστής θερμικής διαστολής του σύνθετου δίνεται από τη σχέση:

$$(\epsilon_{\theta,m})_{r=b} = (\alpha_m - \alpha_f)\Delta T \quad (4.27)$$

Έχουμε $\epsilon_{\theta,m} = (\alpha_m - \alpha_f)\Delta T \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1+\nu_m}{E_m} \left[\frac{a^2b^2(p_1-p_0)}{a^2-b^2} \cdot \frac{1}{r^2} + \frac{p_0a^2-p_1b^2}{b^2-a^2} (1-2\nu_m) \right] = (\alpha_m - \alpha_f)\Delta T \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{(1+\nu_m)a^2p_0}{E_m(a^2-b^2)} + \frac{(1+\nu_m)a^2p_0(1-2\nu_m)}{E_m(b^2-a^2)} = (\alpha_m - \alpha_f)\Delta T$$

Διαιρούμε με b^2 και παίρνουμε :

$$-\frac{(1+\nu_m)a^2p_0}{E_m(a^2-b^2)} + \frac{(1+\nu_m)a^2p_0(1-2\nu_m)}{E_m(b^2-a^2)} = (\alpha_m - \alpha_f)\Delta T \Rightarrow$$

$$-\frac{(1+\nu_m)\nu_f p_0 + (1+\nu_m)\nu_f p_0(1-2\nu_m)}{E_m(\nu_f - 1)} = (\alpha_m - \alpha_f)\Delta T \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow p_0(1+v_m)v_f[1+(1-2v_m)] = (\alpha_m - \alpha_T)\Delta T \cdot E_m(1-v_f) \Rightarrow \\
&\Rightarrow p_0(1+v_m)v_f \cdot 2(1-v_m) = \alpha_m\Delta T \cdot E_m(1-v_f) - \alpha_T\Delta T \cdot E_m(1-v_f) \Rightarrow \\
&\Rightarrow \alpha_T = \frac{-p_0(1+v_m)v_f \cdot 2(1-v_m)}{\Delta T \cdot E_m(1-v_f)} + \frac{\alpha_m\Delta T \cdot E_m(1-v_f)}{\Delta T \cdot E_m(1-v_f)} \Rightarrow \\
&\Rightarrow \alpha_T = p_0 \cdot \frac{-(1+v_m)v_f \cdot 2(1-v_m)}{\Delta T \cdot E_m(1-v_f)} + \alpha_m
\end{aligned}
\tag{4.28}$$

Έτσι καταλήγουμε στην τελική έκφραση του εγκάρσιου συντελεστή θερμικής διαστολής για το διφασικό μοντέλο:

$$\alpha_T = \frac{2(\alpha_m - \alpha_f)E_f(1+v_m)v_f(1-v_m)}{(1+v_m)E_f + (1+v_m)v_f(1-2v_m)E_f + (1+v_f)(1-2v_f)E_m(1-v_f)} + \alpha_m \tag{4.29}$$

Έχοντας σαν δεδομένα τα ακόλουθα στοιχεία:

$$E_f=72 \times 10^9 \text{ (N/m}^2\text{)}, \quad E_m=3.5 \times 10^9 \text{ (N/m}^2\text{)}$$

$$v_f=0.20, \quad v_m=0.36$$

$$\alpha_f=5 \times 10^{-6} \text{ (}^\circ\text{C}^{-1}\text{)}, \quad \alpha_m=52.5 \times 10^{-6} \text{ (}^\circ\text{C}^{-1}\text{)}$$

και για τις διάφορες τιμές στις περιεκτικότητες της v_f υπολογίζουμε το συντελεστή α_T για το διφασικό μοντέλο και συμπληρώνουμε τον πίνακα του σχήματος 4.2.4.

Τριφασικό μοντέλο

Προκειμένου οι τιμές του συντελεστή α_T να προσεγγίζουν όσο το δυνατόν περισσότερο την πραγματικότητα χρησιμοποιούμε το τριφασικό μοντέλο που είναι μια βελτίωση του διφασικού και αποτελείται από τρεις φάσεις τη μήτρα, την ενδιάμεση φάση και την ίνα.

Επειδή και πάλι το πρόβλημα είναι αξονοσυμμετρικός ας θεωρήσαμε την τασική συνάρτηση $Airg$ με την χρήση της οποίας η συνθήκη συμβιβαστού γίνεται $\nabla^4 \Phi = 0$, της οποίας η λύση είναι:

$$\Phi = C_1 \ln r + C_2 r^2 \ln r + C_3 r^2 + C_4 \tag{4.30}$$

Κάθε μια από τις φάσεις του συνθέτου υλικού χαρακτηρίζεται και από μια αντίστοιχη τασική συνάρτηση. Οι εκφράσεις για τις τάσεις της κάθε μια φάσεως είναι:

$$\begin{aligned}
\sigma_{r,f} &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Phi_f}{\partial r} = \frac{A}{r^2} + B(1 + 2 \ln r) + 2C \\
\sigma_{\theta,f} &= \frac{\partial^2 \Phi_f}{\partial r^2} = -\frac{A}{r^2} + B(1 + 2 \ln r) + 2C \\
\sigma_{r,m} &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Phi_m}{\partial r} = \frac{F}{r^2} + G(1 + 2 \ln r) + 2H \\
\sigma_{\theta,m} &= \frac{\partial^2 \Phi_m}{\partial r^2} = -\frac{F}{r^2} + G(3 + 2 \ln r) + 2H \\
\sigma_{r,i} &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Phi_i}{\partial r} = \frac{K}{r^2} + L(1 + 2 \ln r) + 2M \\
\sigma_{\theta,i} &= \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial r^2} = -\frac{K}{r^2} + L(3 + 2 \ln r) + 2M
\end{aligned} \tag{4.31 a,b,c,d,e,f}$$

Για να αποφευχθεί ο απειρισμός των τάσεων στο $r=0$, οι σταθερές A και B πρέπει να είναι μηδέν. Δηλαδή $A=B=0$. Έτσι:

$$\sigma_{r,f} = \sigma_{\theta,f} = 2C \tag{4.32}$$

Για την ενδιάμεση φάση και τη μήτρα ισχύει:

$$G=L=0 \tag{4.33}$$

Έτσι έχουμε:

$$\begin{aligned}
\sigma_{r,m} &= \frac{F}{r^2} + 2H \\
\sigma_{\theta,m} &= -\frac{F}{r^2} + 2H \\
\sigma_{r,i} &= \frac{K}{r^2} + 2M \\
\sigma_{\theta,i} &= -\frac{K}{r^2} + 2M
\end{aligned} \tag{4.34 a,b,c,d}$$

Έχουμε αγνώστους τους K , M , F , H . Τους υπολογίζουμε από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\sigma_{r,f} = -p_0 \Rightarrow 2C = -p_0$$

$$\sigma_{r,i} = -p_0 \text{ για } r=a \Rightarrow \frac{K}{a^2} + 2M = -p_0 \tag{4.35 a,b,c}$$

$$\sigma_{r,i} = -p_1 \text{ για } r=b \Rightarrow \frac{K}{b^2} + 2M = -p_1$$

Από τις δυο τελευταίες εξισώσεις βρίσκουμε ότι:

$$K = \frac{(p_0 - p_1)a^2b^2}{a^2 - b^2} \quad (4.36)$$

$$\sigma_{r,m} = -p_1 \text{ για } r=b \Rightarrow \frac{F}{b^2} + 2H = -p_1$$

$$\sigma_{r,m} = -p_2 \text{ για } r=c \Rightarrow \frac{F}{c^2} + 2H = -p_2 \quad (4.37a,b)$$

Λύνοντας αυτές τις δυο τελευταίες εξισώσεις βρίσκουμε ότι:

$$F = \frac{(p_2 - p_1)c^2b^2}{c^2 - b^2} \quad (4.38)$$

Τέλος βρίσκουμε τους υπολοίπους αγνώστους:

$$2H = \frac{(p_1 - p_2)b^2}{c^2 - b^2} - \frac{p_2}{c^2}$$

$$2M = \frac{(p_1 - p_0)a^2}{a^2 - b^2} - p_1 \quad (4.39)$$

Οι ακτινικές μετατοπίσεις των τριών φάσεων δίνονται από τις σχέσεις:

$$u_{r,f} = \frac{r}{E_f} [2C - v_f(2C + 4v_f C)]$$

$$u_{r,m} = \frac{r}{E_m} [2H - \frac{F}{r^2} - v_m(2H + \frac{F}{r^2} + 4v_m H)] \quad (4.40 a,b,c)$$

$$u_{r,i} = \frac{r}{E_i} [2M - \frac{K}{r^2} - v_i(2M + \frac{K}{r^2} + 4v_i M)]$$

Οι παραμορφώσεις των τριών φάσεων προκύπτουν ως εξής:

$$\varepsilon_{\theta,f} = \frac{u_{r,f}}{r}$$

$$\varepsilon_{\theta,m} = \frac{u_{r,m}}{r} \quad (4.41 a,b,c)$$

$$\varepsilon_{\theta,i} = \frac{u_{r,i}}{r}$$

Αντικαθιστώντας στις παραπάνω σχέσεις τα M, H, C, K και F με τα ίσα τους υπολογίζονται οι παραμορφώσεις της κάθε μιας φάσης:

$$\varepsilon_{\theta,f} = \frac{-p_0(1+v_f)(1-2v_f)}{E_f}$$

$$\varepsilon_{\theta,m} = \frac{1+v_m}{E_m} \left[\frac{c^2 b^2 (p_2 - p_1)}{b^2 - c^2} \cdot \frac{1}{r^2} + \frac{p_1 b^2 - p_2 c^2}{c^2 - b^2} (1-2v_m) \right] \quad (4.42 \text{ a,b,c})$$

$$\varepsilon_{\theta,i} = \frac{1+v_i}{E_i} \left[\frac{a^2 b^2 (p_1 - p_0)}{a^2 - b^2} \cdot \frac{1}{r^2} + \frac{p_0 a^2 - p_1 b^2}{b^2 - a^2} (1-2v_i) \right]$$

Για τον υπολογισμό του εγκάρσιου συντελεστή θερμικής διαστολής α_T του τριφασικού μοντέλου μας λαμβάνουμε υπόψη μας τις ακόλουθες συνοριακές συνθήκες:

$$i) \varepsilon_{\theta,i} - \varepsilon_{\theta,f} = (\alpha_i - \alpha_f) \Delta T \quad \text{για } r=a. \quad (4.43)$$

Έχουμε:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\theta,i} - \varepsilon_{\theta,f} &= (\alpha_i - \alpha_f) \Delta T \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{1+v_i}{E_i} \left[\frac{a^2 b^2 (p_1 - p_0)}{a^2 - b^2} \cdot \frac{1}{a^2} + \frac{p_0 a^2 - p_1 b^2}{b^2 - a^2} (1-2v_i) \right] + \frac{p_0(1+v_f)(1-2v_f)}{E_f} &= (\alpha_i - \alpha_f) \Delta T \Rightarrow \\ \Rightarrow (1+v_i) a^2 b^2 (p_1 - p_0) E_f - a^2 (1+v_i) (p_0 a^2 - p_1 b^2) (1-2v_i) E_f + \\ + E_i (a^2 - b^2) p_0 a^2 (1+v_f) (1-2v_f) &= (\alpha_i - \alpha_f) \Delta T \cdot E_i (a^2 - b^2) a^2 E_f \Rightarrow \\ \Rightarrow p_1 a^2 b^2 E_f - p_0 a^2 b^2 E_f + v_i p_1 a^2 b^2 - v_i p_0 a^2 b^2 E_f - p_0 a^4 E_f + p_1 a^2 b^2 E_f + 3v_i p_0 a^4 E_f - \\ - 3v_i p_1 a^2 b^2 E_f + [E_i a^4 - E_i a^4 v_f - E_i a^2 b^2 + E_i a^2 b^2 v_f - 2E_i a^4 v_f^2 + 2E_i a^2 b^2 v_f^2] p_0 &= \\ = (\alpha_i - \alpha_f) \Delta T \cdot E_i (a^2 - b^2) a^2 E_f \end{aligned}$$

Διαιρούμε με c^2 και με βάση τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} \nu_m &= \frac{c^2 - b^2}{c^2} = 1 - \frac{b^2}{c^2} \\ \nu_i &= \frac{b^2 - a^2}{c^2} \quad (4.44 \text{ a,b,c}) \\ \nu_f &= \frac{a^2}{c^2} \end{aligned}$$

Έχουμε τα ακόλουθα:

$$\begin{aligned} p_0 [-(1-\nu_m) E_f - v_i (1-\nu_m) E_f - \nu_f E_f + 3v_i \nu_f E_f + E_i \nu_f - E_i \nu_f v_f - E_i (1-\nu_m) + \\ + E_i (1-\nu_m) v_f - 2E_i \nu_f v_f^2 + 2E_i (1-\nu_m) v_f^2] &= -p_1 (1-\nu_m) E_f - v_i p_1 (1-\nu_m) E_f + \\ + 3v_i (1-\nu_m) E_f + (\alpha_i - \alpha_f) \Delta T \cdot E_i (\nu_f - 1 + \nu_m) E_f \end{aligned}$$

Θέτουμε:

$$\begin{aligned} A &= -1 + \nu_m - \nu_i + \nu_i \nu_m - \nu_f + 3\nu_i \nu_f \\ B &= \nu_f - \nu_f \nu_f - 1 + \nu_m + \nu_f - \nu_f \nu_m - 2\nu_f \nu_f^2 + 2\nu_f^2 - 2\nu_m \nu_f^2 \end{aligned} \quad (4.45 \text{ a,b})$$

Οπότε καταλήγουμε στην ακόλουθη έκφραση για το p_0 :

$$p_0 = \frac{-p_1 E_f (1 - \nu_m)(1 + \nu_i) + 3\nu_i (1 - \nu_m) E_f + (\alpha_i - \alpha_f) \Delta T \cdot E_i (\nu_f - 1 + \nu_m) E_f}{E_f A + E_i B} \quad (4.46)$$

$$\ddot{u}) \varepsilon_{\theta,m} - \varepsilon_{\theta,i} = (\alpha_m - \alpha_i) \Delta T \quad \text{για } r=b \text{ και } p_2=0.$$

Έχουμε:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\theta,m} &= \frac{1 + \nu_m}{E_m} \left[\frac{c^2 b^2 (p_2 - p_1)}{b^2 - c^2} \cdot \frac{1}{r^2} + \frac{p_1 b^2 - p_2 c^2}{c^2 - b^2} (1 - 2\nu_m) \right] \Rightarrow \\ \varepsilon_{\theta,m} &= \frac{1 + \nu_m}{E_m} \left[\frac{-c^2 p_1}{b^2 - c^2} + \frac{p_1 b^2 (1 - 2\nu_m)}{c^2 - b^2} \right] \end{aligned}$$

και

$$\varepsilon_{\theta,i} = \frac{1 + \nu_i}{E_i} \left[\frac{a^2 p_1}{a^2 - b^2} + \frac{p_0 a^2 - p_1 b^2}{b^2 - a^2} (1 - 2\nu_i) \right]$$

Οπότε παίρνουμε:

$$\varepsilon_{\theta,m} - \varepsilon_{\theta,i} = (\alpha_m - \alpha_i)\Delta T \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1+v_m}{E_m} \left[\frac{-c^2 p_1}{b^2 - c^2} + \frac{p_1 b^2 (1-2v_m)}{c^2 - b^2} \right] - \frac{1+v_i}{E_i} \left[\frac{a^2 p_1}{a^2 - b^2} + \frac{p_0 a^2 - p_1 b^2}{b^2 - a^2} (1-2v_i) \right] =$$

$$= (\alpha_m - \alpha_i)\Delta T \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(1+v_m)p_1(c^2 + b^2 - 2v_m b^2)}{E_m(c^2 - b^2)} - \frac{(1+v_i)[(a^2 p_1 - a^2 p_0) - (p_0 a^2 - p_1 b^2)(1-2v_i)]}{E_i(a^2 - b^2)} =$$

$$= (\alpha_m - \alpha_i)\Delta T \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1+v_m)p_1(c^2 + b^2 - 2v_m b^2)E_i(a^2 - b^2) - (1+v_i)[(a^2 p_1 - a^2 p_0) - (p_0 a^2 - p_1 b^2)(1-2v_i)] \cdot E_m(c^2 - b^2) = (\alpha_m - \alpha_i)\Delta T \cdot E_m E_i (c^2 - b^2)(a^2 - b^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_1[(1+v_m)(c^2 + b^2 - 2v_m b^2)E_i(a^2 - b^2) - (a^2 + b^2 - b^2 2v_i + v_i a^2 + v_i b^2 - b^2 2v_i^2) \cdot E_m(c^2 - b^2)] - p_0[(-a^2 - 2v_i a^2 - v_i a^2 + 2v_i a^2) \cdot E_m(c^2 - b^2)] =$$

$$= (\alpha_m - \alpha_i)\Delta T \cdot E_m E_i (c^2 - b^2)(a^2 - b^2)$$

Διαιρούμε με c^2 και παίρνουμε:

$$p_1[(1+v_m)(2 - \nu_m - 2\nu_m + 2\nu_m \nu_m)E_i(a^2 - b^2) - (\nu_f + 1 - \nu_m - 2\nu_i + 2\nu_i \nu_m + \nu_i \nu_f + \nu_i - \nu_i \nu_m - 2\nu_i^2 + 2\nu_i^2 \nu_m) \cdot E_m(c^2 - b^2)] - p_0 \nu_f [(-1 + 2\nu_i - \nu_i + 2\nu_i^2) \cdot E_m(c^2 - b^2)] =$$

$$= (\alpha_m - \alpha_i)\Delta T \cdot E_m E_i (c^2 - b^2)(a^2 - b^2) \Rightarrow$$

Διαιρώντας ξανά με c^2 και θέτοντας:

$$Z = (1+v_m)(2 - \nu_m - 2\nu_m + 2\nu_m \nu_m)E_i(-\nu_i) - (\nu_f + 1 - \nu_m - 2\nu_i + 2\nu_i \nu_m + \nu_i \nu_f + \nu_i - \nu_i \nu_m - 2\nu_i^2 + 2\nu_i^2 \nu_m)E_m \nu_m$$

(4.47)

Παίρνουμε τα ακόλουθα:

$$p_1 Z = \left[\frac{-p_1 E_f (1 - \nu_m)(1 + \nu_i)}{E_f A + E_i B} + \frac{3\nu_i (1 - \nu_m) E_f + (\alpha_i - \alpha_f)\Delta T \cdot E_i (\nu_f - 1 + \nu_m) E_f}{E_f A + E_i B} \right] \cdot$$

$$\nu_f (-1 + \nu_i + 2\nu_i^2) \cdot E_m \nu_m - (\alpha_m - \alpha_i)\Delta T \cdot E_m E_i \nu_m \nu_i$$

$$\Theta \acute{\epsilon}\tau\omega C = \frac{3\nu_i (1 - \nu_m) E_f + (\alpha_i - \alpha_f)\Delta T \cdot E_i (\nu_f - 1 + \nu_m) E_f}{E_f A + E_i B} \quad (4.48)$$

$$p_1 = \left[\frac{C\nu_f(-1+\nu_i+2\nu_i^2) \cdot E_m\nu_m - (\alpha_m - \alpha_i)\Delta T \cdot E_m E_i \nu_m \nu_i}{Z + \frac{E_f(1-\nu_m)(1-\nu_i)}{E_f A + E_i B} \cdot \nu_f(-1+\nu_i+2\nu_i^2) \cdot E_m \nu_m} \right] \quad (4.49)$$

$$iii) \varepsilon_{\theta,m} = (\alpha_m - \alpha_T)\Delta T \text{ για } r=c \text{ και } p_2=0.$$

Μετά από πράξεις καταλήγουμε:

$$\alpha_T = \alpha_m - \frac{2(1-\nu_m^2)b^2 p_1}{E_m(c^2 - b^2)\Delta T}$$

Διαιρούμε με c^2 και παίρνουμε τον ακόλουθο τύπο:

$$\alpha_T = \alpha_m - \frac{2(1-\nu_m^2)(1-\nu_m)p_1}{E_m\nu_m\Delta T}$$

Αντικαθιστούμε το p_1 με το ίσο του που υπολογίστηκε πιο πάνω και έχουμε τον τελικό τύπο έκφρασης του συντελεστή θερμικής διαστολής του τριφασικού μοντέλου μας:

$$\alpha_T = \alpha_m - \frac{2(1-\nu_m^2)(1-\nu_m)}{E_m\nu_m\Delta T} \cdot \left[\frac{C\nu_f(-1+\nu_i+2\nu_i^2) \cdot E_m\nu_m - (\alpha_m - \alpha_i)\Delta T \cdot E_m E_i \nu_m \nu_i}{Z + \frac{E_f(1-\nu_m)(1-\nu_i)}{E_f A + E_i B} \cdot \nu_f(-1+\nu_i+2\nu_i^2) \cdot E_m \nu_m} \right] \quad (4.50)$$

Έχοντας σαν δεδομένα τα ακόλουθα μεγέθη:

$$E_f=72 \times 10^9 \text{ (N/m}^2\text{)}, \quad E_m=3.5 \times 10^9 \text{ (N/m}^2\text{)}$$

$$\nu_f=0.20, \quad \nu_m=0.35$$

$$\alpha_f=5 \times 10^{-6} \text{ (}^\circ\text{C}^{-1}\text{)}, \quad \alpha_m=52.5 \times 10^{-6} \text{ (}^\circ\text{C}^{-1}\text{)}$$

$$\nu_i=0.05 \quad \nu_i=0.3$$

και για τις διάφορες τιμές ν_f υπολογίζουμε το συντελεστή α_T για το τριφασικό μοντέλο. Οι τιμές του φαίνονται στον πίνακα του σχήματος 4.2.5.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΔΙΦΑΣΙΚΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ

$\alpha \times 10^{-6} (^{\circ}\text{C}^{-1})$	Τιμές εγκάρσιου συντελεστή θερμικής διαστολής α_T
u_f	
0.0	52.5
0.05	49.57
0.08	47.85
0.10	46.71
0.12	45.6
0.18	42.28
0.20	41.2
0.30	35.94
0.40	30.93
0.50	26.12
0.60	21.67
0.65	19.32
0.70	17.14
0.80	12.92
0.90	8.88

Σχ. 4.2.4

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΤΡΙΦΑΣΙΚΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ

$\alpha \times 10^{-6} (^{\circ}\text{C}^{-1})$	Τιμές εγκάρσιου συντελεστή θερμικής διαστολής α_T
u_f	
0.0	52.5
0.05	47.66
0.08	46.0
0.10	44.91
0.12	43.85
0.18	40.65
0.20	39.61
0.30	34.55
0.40	29.74
0.50	25.11
0.60	20.83
0.65	18.57
0.70	16.48
0.80	12.42
0.90	8.53

Σχ. 4.2.5

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Στην παράγραφο αυτή θα υπολογίσουμε το συντελεστή θερμικής διαστολής εφαρμόζοντας σχέσεις που περιγράφονται αναλυτικά στο παράρτημα μας .Πιο συγκεκριμένα :

- 1) Υπολογίζουμε το διαμήκη συντελεστή θερμικής διαστολής α_L για τις διάφορες περιεκτικότητες του εγκλείσματος v_f χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις Schapery, Van Fo Fy(Π.5) και του μοντέλου με την ενδιάμεση φάση καθώς και την εξίσωση του νόμου των φάσεων (Π.1). Οι τιμές φαίνονται στον ακόλουθο πίνακα:

$\alpha_L \times 10^{-6}$ ($^{\circ}\text{C}^{-1}$)	Μοντέλο με ενδιάμεση φάση	Schapery	Van Fo Fy	Νομός των φάσεων
v_f				
0.0	52.50	52.50	52.50	52.50
0.10	19.45	19.46	19.46	47.75
0.20	12.79	12.73	12.73	43.0
0.30	9.96	9.84	9.84	38.25
0.40	8.42	8.23	8.23	33.50
0.50	7.46	7.20	7.20	28.75
0.60	6.82	6.49	6.49	24.0
0.70	6.37	5.97	5.97	19.25
0.80	6.05	5.57	5.57	14.50
0.90	5.80	5.26	5.26	9.75

- 2) Υπολογίζουμε το εγκάρσιο συντελεστή θερμικής διαστολής α_T για τις διάφορες περιεκτικότητες του εγκλείσματος u_f χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις Schapery ,Schneider ,Chamberlain για $F=0.79$, Van Fo Fy και του μοντέλου με την ενδιάμεση φάση για $F=0.79$, τις εξισώσεις που δίνουν το γενικευμένο νόμο των φάσεων και το απλό νόμο των φάσεων. Οι τιμές παρουσιάζονται στο ακόλουθο πίνακα:

$\alpha \times 10^{-6}$	Εγκάρσιος συντελεστής θερμικής διαστολής α_T						
u_f	Parabolic	Schapery	Schneider	Chamberlain	Van Fo Fy	Γενικευμένος νόμος των φάσεων	Νόμος των φάσεων
0.0	52.50	52.50	68.35	52.50	52.50	70.88	52.50
0.10	57.84	57.57	55.56	45.26	57.87	64.29	47.75
0.20	53.70	53.83	49.48	45.64	53.83	57.70	43.00
0.30	48.13	48.41	42.60	32.61	48.41	51.12	38.25
0.40	42.05	42.54	35.75	27.15	42.54	44.53	33.50
0.50	35.71	36.46	29.13	22.10	36.46	37.94	28.75
0.60	29.20	30.26	22.79	17.44	30.26	31.35	24.00
0.70	22.57	24.00	16.74	13.12	24.00	24.76	19.25
0.80	15.85	17.69	10.98	9.11	17.69	18.18	14.50
0.90	9.05	11.36	5.99	5.36	11.36	11.59	9.75

3) Τέλος θα βρούμε τις τιμές του συντελεστή θερμικής διαστολής α_θ που προκύπτουν από τη σχέση $\alpha_\theta = \alpha_L \cos^2 \theta + \alpha_T \sin^2 \theta$ χρησιμοποιώντας τις τιμές α_L και α_T που προκύπτουν από το μοντέλο με την ενδιάμεση φάση για τις διάφορες τιμές της θ και τις διάφορες περιεκτικότητες u_f .

$\alpha \times 10^{-6}$	Συντελεστής θερμικής διαστολής α_θ						
u_f	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
0.0	52.50	52.50	52.50	52.50	52.50	52.50	52.50
0.10	19.45	22.01	29.04	38.63	48.24	55.26	27.84
0.20	12.79	15.52	23.02	33.23	43.46	50.95	53.50
0.30	9.96	12.51	19.50	29.02	38.6	45.56	48.13
0.40	8.42	10.66	26.82	25.22	33.63	39.79	42.05
0.50	7.46	9.35	14.52	21.56	27.64	33.81	35.71
0.60	6.82	8.31	12.41	17.99	23.6	27.7	29.20
0.70	6.37	7.45	10.42	14.46	18.52	21.47	22.57
0.80	6.05	6.7	8.5	10.94	13.4	15.18	15.85
0.90	5.80	6.01	6.61	7.42	5.97	8.82	9.05

Στον επόμενο πίνακα βλέπουμε τις τιμές του συντελεστή α_θ όταν χρησιμοποιήσουμε για τις τιμές του α_L και α_T τις εξισώσεις Schapery.

$\alpha \times 10^{-6}$	Συντελεστής θερμικής διαστολής α_{θ}						
U_f	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
0.0	52.50	52.50	52.50	52.50	52.50	52.50	52.50
0.10	19.46	22.02	29.06	38.64	48.26	55.3	57.84
0.20	12.73	15.5	22.3	33.23	43.55	51.07	53.83
0.30	9.84	12.74	19.5	29.10	38.76	45.81	48.141
0.40	8.23	10.52	16.8	25.37	33.95	40.24	42.54
0.50	7.20	9.14	14.51	21.82	29.14	34.5	36.46
0.60	6.49	8.07	12.42	18.36	24.31	28.66	30.26
0.70	6.97	7.17	10.47	14.97	19.5	22.8	24.00
0.80	5.57	6.37	8.6	11.62	14.66	16.87	17.69
0.90	5.26	5.66	6.78	8.3	9.8	10.95	11.36

4.3 ΣΥΓΚΡΙΣΕΙΣ ΘΕΩΡΗΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΩΝ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ

Τα αποτελέσματά της συμπεριφοράς ως προς τη θερμική διαστολή των ινωδών συνθέτων υλικών (εποξειδική ρητίνη ενισχυμένη με ίνες υάλου) φαίνονται στα Διαγράμματα 4.2.1, 4.2.2 και 4.2.4 για τους συντελεστές θερμικής διαστολής α_L , α_T και α_θ αντίστοιχα.

Στο Διάγραμμα 4.2.1 ο διαμήκης συντελεστής θερμικής διαστολής α_L χρησιμοποιώντας το μοντέλο με την ενδιάμεση φάση συγκρίνεται με τον νόμο των φάσεων [εξίσωση (Π.1)]. Παρατηρούμε ότι οι τύποι αυτοί δίνουν τιμές πολύ κάτω από τις αντίστοιχες του νόμου των φάσεων. Συνεπώς ο νόμος των φάσεων δε δύναται να θεωρηθεί ως μια καλή προσέγγιση για το διαμήκη συντελεστή θερμικής διαστολής λόγω της μεγάλης απόκλισης του και από τα πειραματικά αποτελέσματά. Οι καμπύλες στο χαμηλότερο σχήμα του ίδιου σχήματος δείχνουν τις τιμές α_L οι οποίες υπολογίστηκαν με αυτή θεωρία από την εξίσωση (Π.12) συγκρινόμενες με τις σχέσεις (Π.2) και (Π.8) των Schapery και Van Fo Fy αντιστοίχως.

Σε αυτές τις δυο σχέσεις παρατηρείται το ο διαμήκης συντελεστής θερμικής διαστολής είναι κατά κάποιο τρόπο ο μέσος ορός των συντελεστών της ίνας και της μήτρας.

Εντούτοις, αυτός ο μέσος ορός δεν αναφέρεται στη κατ' όγκον περιεκτικότητα αλλά στο γινόμενο της κατ' όγκον περιεκτικότητας και του μέτρου ελαστικότητας. Στην περίπτωση των συνθέτων υλικών εποξειδικής ρητίνης ενισχυμένης με ίνες υάλου, το μέτρο ελαστικότητας, E , της ίνας είναι 20 φορές μεγαλύτερο από εκείνο της μήτρας. Στην εξίσωση (Π.12) έχουμε την επίδραση της ενδιάμεσης φάσης. Συγκρίνοντας φαίνεται ότι ο παρονομαστής της εξίσωσης (Π.12) γίνεται μεγαλύτερος από εκείνον της εξίσωσης (Π.2) και (Π.8) δεδομένου ότι $E_i(r) > E_m$. Αντιθέτως ο αριθμητής της εξίσωσης (Π.12) δίνει μεγαλύτερες τιμές από εκείνες των άλλων σχέσεων δεδομένου ότι $\alpha_i(r) > \alpha_m$ και $u_m = u_m' + u_i$ όπου $u_m' = 1 - u_i - u_f$.

Ως αποτέλεσμα έχουμε ότι οι καμπύλες του α_L που υπολογίστηκαν με τη θεωρία η οποία λαμβάνει υπόψη την ενδιάμεση φάση είναι επάνω από εκείνες των Schapery και Van Fo Fy. Στο ίδιο σχήμα φαίνονται και οι πειραματικές τιμές α_L οι οποίες ελήφθησαν από το πείραμα του TMA και από τους Clements – Moore [11]. Η σύμπτωση μεταξύ θεωρίας και πειράματος είναι ικανοποιητική.

Στο Διάγραμμα 4.2.2 ο εγκάρσιος συντελεστής θερμικής διαστολής α_T , ο οποίος υπολογίστηκε χρησιμοποιώντας το διφασικό και τριφασικό μοντέλο, συγκρίνεται με τις τιμές που υπολογίστηκαν από τις εξισώσεις (Π.3) και (Π.9) των Schapery και Van Fo Fy αντιστοίχως.

Στο ίδιο διάγραμμα φαίνονται οι θεωρητικές προβλέψεις των Chamberlain και Schneider που δίνονται από τις εξισώσεις (Π.10) και (Π.11) αντιστοίχως και οι υπολογισθείσες τιμές με τη βοήθεια του νόμου των φάσεων.

Κατ' αρχήν είναι ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε πόσο πλησίον είναι ο εγκάρσιος συντελεστής θερμικής διαστολής ο προβλεπόμενος από τον Schapery προς το νόμο των φάσεων. Η αρχική αύξηση του συντελεστή εμφανώς οφείλεται στον αξονικό περιορισμό των ινών αφού η μήτρα θεωρείται πρακτικά ότι ευρίσκεται σε επίπεδη παραμορφωσιακή κατάσταση, εκτός των περιπτώσεων πολύ μικρής κατ' όγκων περιεκτικότητας.

Ο συντελεστής θερμικής διαστολής για επίπεδη παραμορφωσιακή κατάσταση είναι $(1 + \nu_m)\alpha_m$

Και ο αντίστοιχος νόμος των φάσεων είναι :

$$\alpha_c = \alpha_f \nu_f + (1 + \nu_m)\alpha_m \nu_m$$

ο οποίος φαίνεται επίσης στο Διάγραμμα 4.2.2.

Αυτός ο εγκάρσιος συντελεστής θερμικής διαστολής φαίνεται ότι συμφωνεί καλώς με τα αποτελέσματα τα προβλεπόμενα από τον Van Fo Fy (Π.9).

Επίσης παρατηρούμε ότι οι θεωρητικές τιμές που δίνονται λαμβάνοντας υπόψη τη θεωρία της ενδιάμεσης φάσης είναι μικρότερες από εκείνες του Schapery. Για να δούμε αυτό μπορούμε να ελέγξουμε τις δυο σχέσεις που δίνονται από τις εξισώσεις (Π.3) και (Π.13).

Ενώ, ο διαμήκης συντελεστής α_L ο οποίος υπολογίζεται από τη θεωρία της ενδιάμεσης φάσης δίνει τιμές μεγαλύτερες από εκείνες του Schapery όπως φαίνεται στο διάγραμμα 4.2.1. Το δεύτερο μέρος του δεξιού όρου ο οποίος εκφράζει το λόγο του Poisson του συνθέτου υλικού ν_{LT} , δίνει μεγαλύτερες τιμές από εκείνες της σχέσεως Schapery εξαιτίας του τμήματος τη μήτρας που μετασχηματίζεται σε ενδιάμεση φάση. Πράγματι:

$$\nu_f \nu_f + \nu_m \nu_m > \nu_f \nu_f + \nu_m \nu_m' + \nu_i(r) \nu_i$$

Με $\nu_m = \nu_m' + \nu_i$ λαμβάνουμε :

$$\nu_f \nu_f + \nu_m \nu_m' + \nu_m + \nu_i > \nu_f \nu_f + \nu_m \nu_m' + \nu_i(r) \nu_i$$

το οποίο είναι αληθές γιατί $\nu_m > \nu_i(r)$ σύμφωνα με την παρούσα θεωρία. Επίσης το αριστερό μέρος των δυο εξισώσεων συγκρινόμενο δίνει:

$$(1 + \nu_f) \alpha_f \nu_f + (1 + \nu_m) \alpha_m \nu_m > (1 + \nu_f) \alpha_f \nu_f + (1 + \nu_i(r)) \alpha_i(r) \nu_i + (1 + \nu_m) \alpha_m \nu_m'$$

Με $\nu_m = \nu_m' + \nu_i$

$$(1 + \nu_f) \alpha_f \nu_f + (1 + \nu_m) \alpha_m \nu_m' + (1 + \nu_m) \alpha_m \nu_i > (1 + \nu_f) \alpha_f \nu_f + (1 + \nu_i(r)) \alpha_i(r) \nu_i + (1 + \nu_m) \alpha_m \nu_m'$$

Το οποίο είναι αληθές γιατί $\nu_m > \nu_i(r)$ και $\alpha_m > \alpha_i(r)$. Επίσης μια άλλη παρατήρηση είναι η διαφορά η οποία υπάρχει μεταξύ των προβλεπόμενων θεωρητικών τιμών της θεωρίας της ενδιάμεσου φάσεως και των Schapery αφενός και εκείνων που δίνονται από την εξίσωση (Π.10) του Chamberlain αφετέρου.

Για την εξίσωση του Schneider αυτές οι διαφορές είναι πολύ μικρότερες. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι το μοντέλο του Chamberlain θεωρεί ισότροπα υλικά και επίπεδη εντατική κατάσταση. Η αξονική συνιστώσα της τάσεως θεωρείται ότι είναι μηδενική και στις δυο φάσεις στην ανάλυση κυλίνδρου μεγάλου πάχους και κατά συνέπεια εξαλείφεται οποιαδήποτε συνεισφορά στο εγκάρσιο συντελεστή διαστολής του συνθέτου υλικού διαμέσου της δημιουργίας αξονικών θλιπτικών τάσεων στη μήτρα. Η εξαίρεση αυτού του όρου στην ανάλυση Chamberlain συνεισφέρει στην απόκτηση χαμηλότερων τιμών από εκείνες

που προβλέπονται από τις άλλες θεωρίες. Μια γενικευμένη επίπεδη παραμορφωσιακή κατάσταση μπορεί να δώσει μια ακριβέστερη περιγραφή του συνθέτου υλικού αφού επιτρέπει την εισαγωγή της επιδράσεως Poisson. Στον ίδιο σχήμα φαίνονται και οι πειραματικές τιμές του α_T από το πείραμα του TMA και οι τιμές από Clements – Moore[11]. Η σύμπτωση μεταξύ θεωρίας και πειράματος είναι ικανοποιητική.

Στο Διάγραμμα 4.2.3 φαίνονται οι τιμές του συντελεστή της θερμικής διαστολής α_θ ως συνάρτηση της γωνίας θ του προσανατολισμού των ινών για διάφορες κατ' όγκων περιεκτικότητες ινών. Στο ίδιο διάγραμμα προς σύγκριση σχεδιάζονται οι καμπύλες που προκύπτουν από τις θεωρητικές προβλέψεις του Scharerly. Παρατηρούμε ότι οι προβλεπόμενες τιμές από τη θεωρία της ενδιάμεσης φάσης είναι μεγαλύτερες από εκείνες του Scharerly για μικρές γωνίες προσανατολισμού των ινών ενώ για μεγαλύτερες γωνίες θ παρατηρούνται αντίστροφα αποτελέσματα. Αυτό μπορεί να εξηγηθεί λαμβάνοντας υπόψη τα συμπεράσματα για τους συντελεστές α_L και α_T τα οποία αναφέρθηκαν προηγουμένως. Πράγματι οι τιμές του α_L είναι μεγαλύτερες στην θεωρία της ενδιάμεσης φάσης από εκείνες του Scharerly, ενώ για το συντελεστή α_T συμβαίνει το αντίστροφο φαινόμενο. Έτσι για μικρές γωνίες θ , του προσανατολισμού των ινών, επικρατεί ο όρος του α_L ο οποίος πολλαπλασιάζεται με το $\cos^2\theta$, ενώ για μεγάλες γωνίες θ επικρατεί ο όρος του α_T ο οποίος πολλαπλασιάζεται με $\sin^2\theta$.

Οι διαφορές των δυο θεωριών γίνονται μεγαλύτερες με την αύξηση της κατ' όγκων περιεκτικότητας των ινών η οποία αύξανε την έκταση τη ενδιάμεσου φάσεως. Στο ίδιο σχήμα φαίνονται και οι πειραματικές τιμές του συντελεστή α_θ οι οποίες ελήφθησαν από τα πειράματα θερμικής ανάλυσης (TMA).

Παρατηρούμε ότι η σύμπτωση θεωρίας και πειράματος είναι πολύ ικανοποιητική.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: ΘΕΡΜΟΜΗΧΑΝΙΚΗ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ ΙΝΩΔΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

Στην παράγραφο αυτή θα εξετάσουμε την θερμομηχανική συμπεριφορά ινωδών υλικών των οποίων οι ίνες είναι μικρού μήκους.

Συγκεκριμένα θα θεωρήσουμε ότι το σύνθετο υλικό θερμαίνεται κατά ΔT , ενώ συγχρόνως εφελκύεται κατά την διεύθυνση των ινών με μια σταθερή τάση σ_c . Θα προσδιορίσουμε την τάση σ_m που αναπτύσσεται στη μήτρα.

Για τον σκοπό αυτό, θα χρησιμοποιήσουμε ένα μοντέλο όμοιο με εκείνο του Rosen και το οποίο φαίνεται στο σχήμα 5.1.

Στο μοντέλο αυτό, η ίνα που έχει ακτίνα r_f , περιβάλλεται από την ενδιάμεση φάση ακτίνας r_i , και το όλο σύστημα περιβάλλεται από την μήτρα που έχει ακτίνα r_m .

Οι υποθέσεις που κάνουμε στην θεωρία που ακολουθεί, είναι οι εξής:

- 1) Οι τρεις φάσεις, συνδέονται πλήρως μεταξύ τους σε όλη την επιφάνεια επαφής τους.
- 2) Η ίνα και η μήτρα φέρουν μόνο εφελκυστικές τάσεις.
- 3) Η ενδιάμεση φάση φέρει μόνο διατμητικές τάσεις.

Η εφελκυστική δύναμη που αναπτύσσεται στην ίνα, θα είναι ανάλογη της διαφοράς των εφελκυστικών παραμορφώσεων που αναπτύσσονται στην μήτρα και στην ίνα καθώς και της διατμητικής τάσεως που αναπτύσσεται στην ενδιάμεση φάση.

Επομένως:

$$\frac{dN_f}{dz} = -2\pi \cdot r_f \tau = 2\pi \cdot r_f \frac{u_f - u_m}{r_i - r_f} G_i$$

$$\text{Αλλά } N_f = \frac{du_f}{dz} \cdot E_f \cdot \pi \cdot r_f^2 \Rightarrow \frac{dN_f}{dz} = \frac{du_f^2}{dz^2} E_f \cdot \pi \cdot r_f^2$$

$$2\pi \cdot r_f \frac{u_f - u_m}{r_i - r_f} G_i = \frac{du_f^2}{dz^2} E_f \pi \cdot r_f^2 \Rightarrow$$

$$\text{άρα } \Rightarrow \frac{du_f^2}{dz^2} E_f r_f - \frac{2G_i(u_f - u_m)}{r_i - r_f} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{du_f^2}{dz^2} - \frac{2G_i(u_f - u_m)}{E_f r_f (r_i - r_f)} = 0$$

Εάν καλέσουμε την ποσότητα $\frac{2G_i}{E_f r_f (r_i - r_f)} = n^2$ τότε θα έχουμε:

$$\frac{du_f^2}{dz^2} - n^2(u_f - u_m) = 0 \text{ και η λύση της εξίσωσης είναι:}$$

$$u_f = u_m + A \sinh nz + B \cosh nz$$

Οπότε:

$$\frac{du_f}{dz} = \frac{du_m}{dz} + An \cosh nz + Bn \sinh nz$$

Για τον προσδιορισμό των A και B χρησιμοποιούμε τις εξής συνθήκες:

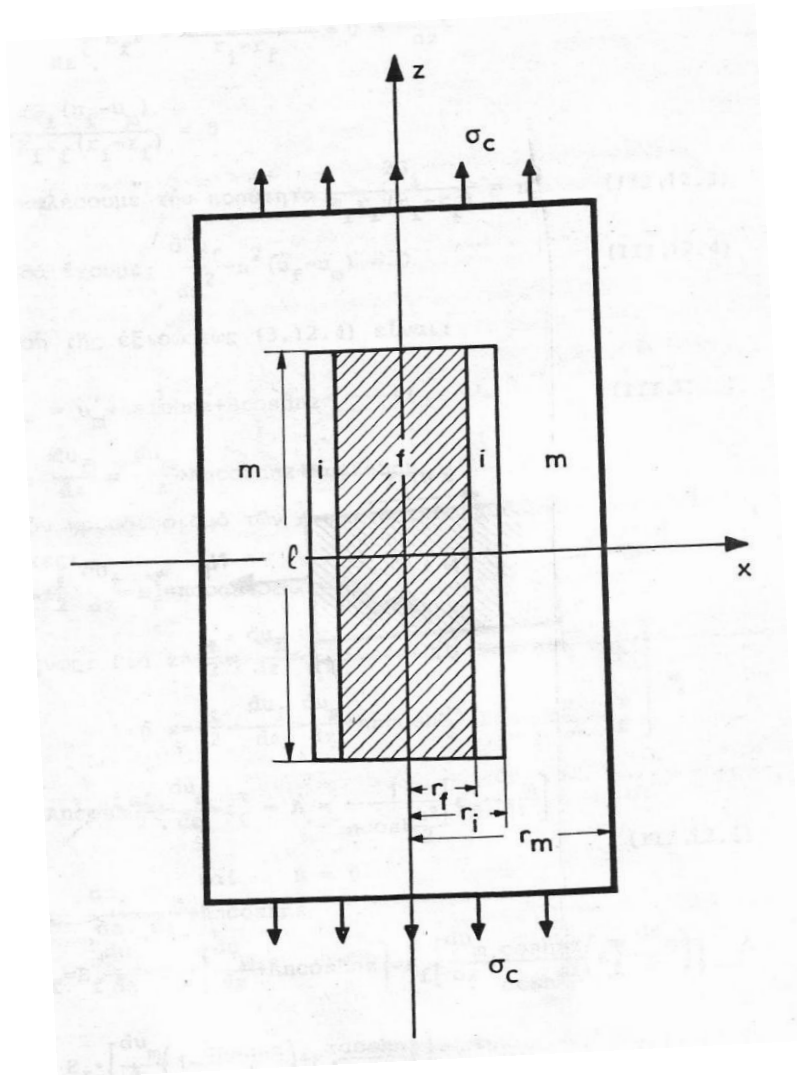
Για $z = \pm \frac{\ell}{2}$, $\frac{du_f}{dz} = \varepsilon_f^T$, όπου ε_f^T η παραμόρφωση της ίνας λόγω αύξησης

θερμοκρασίας.

$$\left. \begin{aligned} z = +\frac{\ell}{2} &\Rightarrow \frac{du_f}{dz} = \frac{du_m}{dz} + An \cosh n\frac{\ell}{2} + Bn \sinh n\frac{\ell}{2} = \varepsilon_f^T \\ z = -\frac{\ell}{2} &\Rightarrow \frac{du_f}{dz} = \frac{du_m}{dz} + An \cosh n\frac{\ell}{2} - Bn \sinh n\frac{\ell}{2} = \varepsilon_f^T \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

Επομένως

$$\Rightarrow \begin{cases} An \cosh n\frac{\ell}{2} + \frac{du_m}{dz} = \varepsilon_f^T \Rightarrow A = \frac{1}{n \cosh \frac{n\ell}{2}} \left[\varepsilon_f^T - \frac{du_m}{dz} \right] \\ B = 0 \end{cases}$$



Σχ. 5.1

Συνεπώς
$$\frac{du_f}{dz} = \frac{du_m}{dz} + An \cosh nz$$

$$\sigma_f = E_f \frac{du_f}{dz} = E_f \left[\frac{du_m}{dz} + An \cosh nz \right] = E_f \left[\frac{du_m}{dz} + \frac{\cosh nz}{\cosh \frac{nl}{2}} \left(\varepsilon_f^T - \frac{du_m}{dz} \right) \right] \Rightarrow$$

άρα

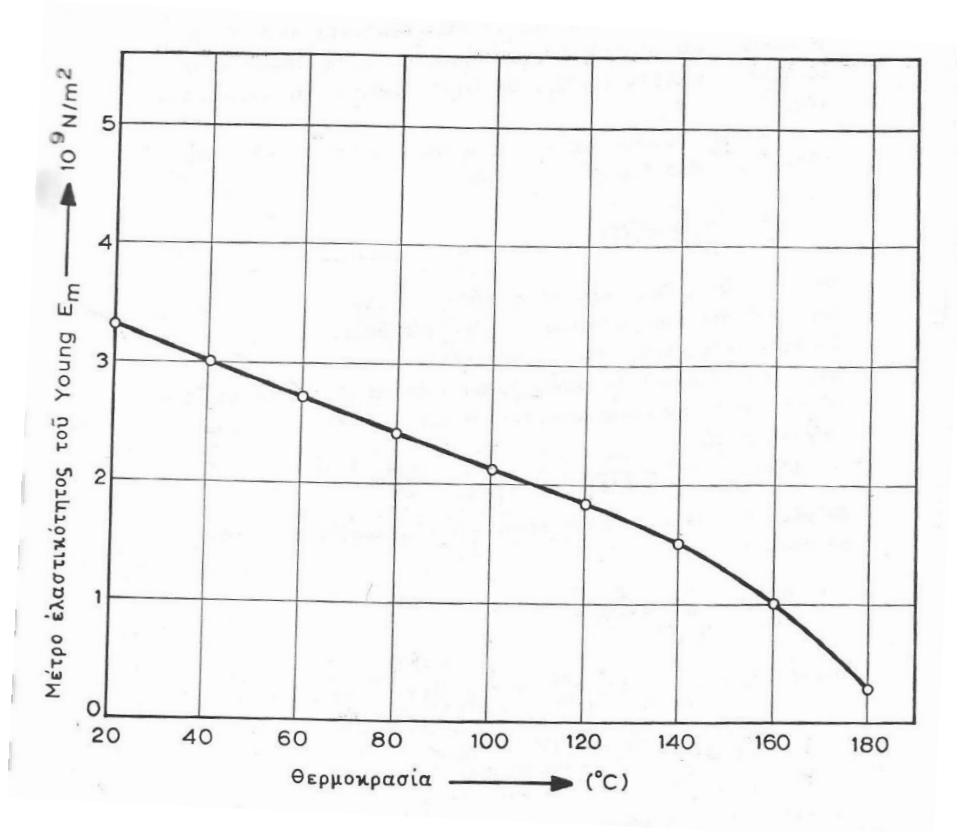
$$\Rightarrow \sigma_f = E_f \left[\frac{du_m}{dz} \left(1 - \frac{\cosh nz}{\cosh \frac{nl}{2}} \right) + \varepsilon_f^T \frac{\cosh nz}{\cosh \frac{nl}{2}} \right]$$

Η διατμητική τάση δίνεται από την σχέση :

$$\tau = -\frac{1}{2\pi r_f} \frac{dN_f}{dz} = -\frac{1}{2\pi r_f} \frac{2\pi r_f}{r_i - r_f} (u_f - u_m) G_i = -\frac{G_i}{r_i - r_f} A \sinh nz \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tau = -\frac{G_i}{r_i - r_f} \frac{\sinh nz}{n \cosh \frac{nl}{2}} \left[\varepsilon_f^T - \frac{du_m}{dz} \right]$$

Το μέτρο ελαστικότητας της μήτρας, εξαρτάται από την θερμοκρασία, και η μεταβολή του συναρτήσει της θερμοκρασίας φαίνεται στο σχ.5.2. Οι τιμές αυτές είναι πειραματικές.



Σχ.5.2

Η παραμόρφωση της μήτρας μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελείται από δυο όρους

$$\varepsilon_z^m = \frac{\sigma_m}{E_m(T)} + \varepsilon_z^m(T)$$

Όπου ο πρώτος όρος εξαρτάται τόσο από την μηχανική τάση, όσο και από την θερμοκρασία λόγω της μεταβολής του μέτρου ελαστικότητας καθώς μεταβάλλεται αυτή. Ο δεύτερος όρος είναι η συνολική παραμόρφωση η οποία εξαρτάται και αυτή τόσο από τη θερμοκρασία, όσο και από την επιβεβλημένη εξωτερικά τάση. Επομένως:

$$d\varepsilon_z^m = \frac{1}{E_m(T)} d\sigma_m + \left(-\frac{\sigma_m}{E_m^2(T)} \cdot \frac{dE_m(T)}{dT} + \frac{d\varepsilon_z^m(T)}{dT} \right) dT$$

Καλούμε συντελεστή θερμομηχανικής αλληλεπίδρασης την ποσότητα :

$$\alpha_m^{MT} = -\frac{\sigma_m}{E_m(T)} \cdot \frac{dE_m(T)}{dT}$$

Συνεπώς:

$$\varepsilon_z^m = \frac{\sigma_m}{E_m(T)} + (\alpha_m^{MT} + \alpha_m) \Delta T = \frac{\sigma_m}{E_m(T)} + \left(\alpha_m - \frac{\sigma_m}{E_m(T)} \cdot \frac{dE_m(T)}{dT} \right) \Delta T \Rightarrow$$

$$\frac{du_m}{dz} = \frac{\sigma_m}{E_m(T)} \left[1 - \frac{dE_m(T)}{E_m dT} \Delta T \right] + \alpha_m \Delta T$$

Από τον νόμο των φάσεων έχουμε:

$$\sigma_m \nu_m + \sigma_f \nu_f = \sigma_c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma_m \nu_m + E_f \nu_f \left[\frac{du_m}{dz} \left(1 - \frac{\cosh nz}{\cosh \frac{nl}{2}} \right) + \varepsilon_f^T \frac{\cosh nz}{\cosh \frac{nl}{2}} \right] = \sigma_c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma_m \nu_m + E_f \nu_f \left[\left(\frac{\sigma_m}{E_m(T)} \left[1 - \frac{dE_m(T)}{E_m dT} \Delta T \right] + \alpha_m \Delta T \right) \left(1 - \frac{\cosh nz}{\cosh \frac{nl}{2}} \right) + \varepsilon_f^T \frac{\cosh nz}{\cosh \frac{nl}{2}} \right] = \sigma_c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma_m \nu_m + E_f \nu_f \left[\frac{\sigma_m}{E_m(T)} \left(1 - \frac{dE_m(T)}{E_m dT} \Delta T \right) \left(1 - \frac{\cosh nz}{\cosh \frac{nl}{2}} \right) + \alpha_m \Delta T \left(1 - \frac{\cosh nz}{\cosh \frac{nl}{2}} \right) + \varepsilon_f^T \frac{\cosh nz}{\cosh \frac{nl}{2}} \right] = \sigma_c$$

$$\Rightarrow \sigma_m \left[\nu_m + \nu_f \frac{E_f}{E_m(T)} \left(1 - \frac{dE_m(T)}{dT} \Delta T \right) \left(1 - \frac{\cosh nz}{\cosh \frac{nl}{2}} \right) \right] =$$

$$= \sigma_c - E_f \nu_f \left[\alpha_m \Delta T \left(1 - \frac{\cosh nz}{\cosh \frac{nl}{2}} \right) + \varepsilon_f^T \frac{\cosh nz}{\cosh \frac{nl}{2}} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma_m = \frac{\sigma_c - E_f \nu_f \left[\alpha_m \Delta T \left(1 - \frac{\cosh nz}{\cosh \frac{nl}{2}} \right) + \varepsilon_f^T \frac{\cosh nz}{\cosh \frac{nl}{2}} \right]}{\nu_m + \nu_f \frac{E_f}{E_m(T)} \left(1 - \frac{dE_m(T)}{dT} \Delta T \right) \left(1 - \frac{\cosh nz}{\cosh \frac{nl}{2}} \right)}$$

Όπου ν_m η πραγματική κατ'όγκον περιεκτικότητα της μήτρας στην περίπτωση που θεωρούμε και την ενδιάμεση φάση.

Τα σύνθετα ινώδη υλικά που χρησιμοποιήθηκαν αποτελούνται από πλαστική μήτρα του τύπου MY750/HT972 και από ίνες γυαλιού του τύπου E-glass.

Οι ιδιότητες των δυο αυτών συνιστωσών, φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

	Μέτρο ελαστικότητας E (GPa)	Λόγος Poisson ν	Συντελεστής θερμικής διαστολής $\alpha \times 10^{-6}$	Περιεκτικότητα ν	Ακτίνα r
E-glass	70.0	0.20	5.0	0.65	6.0
Μήτρα	3.3	0.35	52.5	0.402	7.44

Λαμβάνοντας υπόψιν τα εξής μεγέθη:

$$l=60\text{mm} \quad G_m=1.22 \times 10^9 \text{ Pa}$$

$$\sigma_c=10^9 \text{ Pa} \quad G_f=30 \times 10^9 \text{ Pa}$$

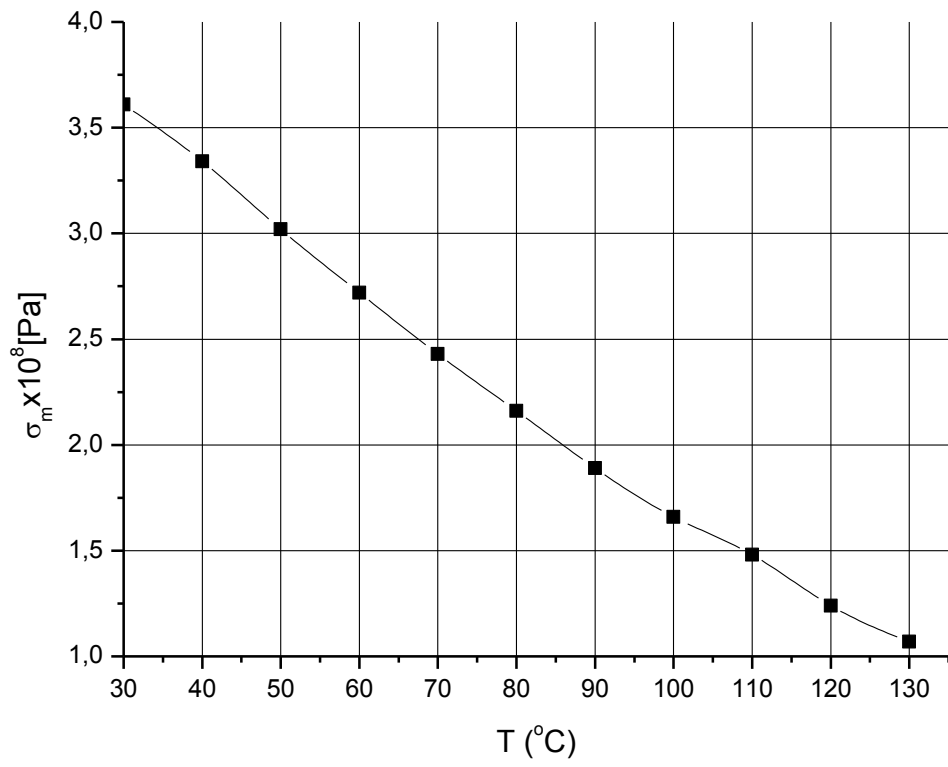
$$\Delta T=10 \text{ }^\circ\text{C} \quad \text{και τον πίνακα:}$$

$T [^{\circ}\text{C}]$	$\Delta T [^{\circ}\text{C}]$	$\varepsilon_f^T \times 10^6$	$E_m(T) [\text{GPa}]$	$1 - \frac{dE_m(T)}{E_m(T)dT} \Delta T$
30	10	58.73	3.10	1.048
40	20	116.36	3.00	1.100
50	30	173.16	2.85	1.158
60	40	229.00	2.70	1.222
70	50	283.95	2.55	1.294
80	60	337.92	2.40	1.375
90	70	390.74	2.24	1.469
100	80	443.04	2.10	1.571
110	90	495.63	2.00	1.675
120	100	545.10	1.82	1.824
130	110	595.43	1.70	1.971

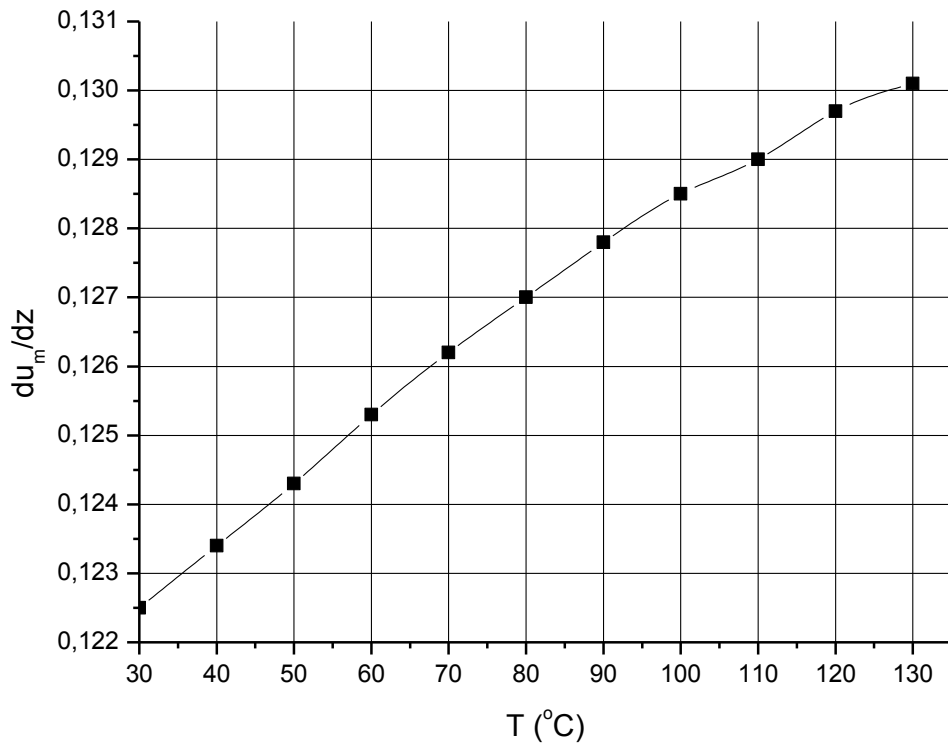
Κατασκευάζουμε τον πίνακα :

$T [^{\circ}\text{C}]$	$\sigma_m \times 10^8 [\text{Pa}]$	$\frac{du_m}{dz}$	$\sigma_f \times 10^9 [\text{Pa}]$
30	3.61	0.1225	1.37
40	3.34	0.1234	1.39
50	3.02	0.1243	1.40
60	2.72	0.1253	1.41
70	2.43	0.1262	1.43
80	2.16	0.1270	1.44
90	1.89	0.1278	1.45
100	1.66	0.1285	1.46
110	1.48	0.1290	1.47
120	1.24	0.1297	1.48
130	1.07	0.1301	1.49

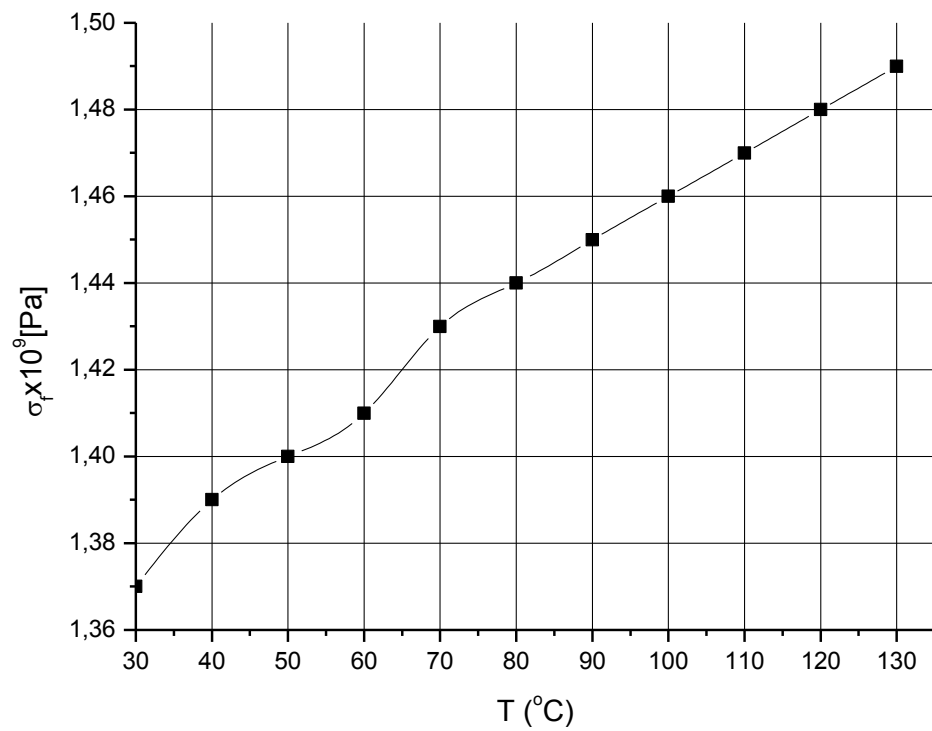
Και μέσω αυτού τα εξής διαγράμματα :



Σχ.5.3



Σχ.5.4



Σχ.5.5

Αποτελέσματα της θεωρίας:

Στα σχήματα (Σχ.5.3) έως και (Σχ.5.5) έχουν χαραχθεί οι μεταβολές, διάφορων χαρακτηριστικών μεγεθών, όπως αυτά προέκυψαν από την σχετική θεωρία που προηγήθηκε. Συγκεκριμένα, στο σχήμα 5.4 φαίνεται η μεταβολή της αξονικής παραμόρφωσης du_m/dz της μήτρας συναρτήσει της θερμοκρασίας, για μια δεδομένη εξωτερική φόρτιση του συνθέτου υλικού. Παρατηρούμε ότι η αξονική παραμόρφωση du_m/dz της μήτρας, αυξάνει αυξανόμενης της θερμοκρασίας(5.2). Το ίδιο συμβαίνει και για την αξονική τάση σ_f της ίνας (5.5). Ενώ η αξονική τάση στην μήτρα έχει αντίθετη μεταβολή (5.3).

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΘΕΡΜΙΚΗΣ ΔΙΑΣΤΟΛΗΣ ΤΩΝ ΙΝΩΔΩΝ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

Πολλές θεωρητικές αναλύσεις με τις οποίες προσδιορίζονται οι θερμικές ιδιότητες των ινωδών συνθέτων υλικών εμφανίζονται στη βιβλιογραφία. Οι αναλύσεις αυτές οφείλονται στους Turner, Kerner, Blackburn και Thomas και οι εξισώσεις τους προσδιορίζουν το συντελεστή θερμικής διαστολής των συνθέτων υλικών. Μερικές από αυτές τις εξισώσεις συνεκρίθησαν με πειραματικά αποτελέσματα αλλά σε ορισμένες περιπτώσεις υπήρξε μεγάλη απόκλιση μεταξύ θεωρίας και πειράματος. Εξαιρετικά άρθρα και μαθηματικές μελέτες οι οποίες βασίζονται στην αρχή ενέργειας υπάρχουν επίσης στη βιβλιογραφία. Μεταξύ άλλων προηγηθείσων εργασιών επί αυτού του θέματος αναφέρονται η μελέτη του Adams με τη βοήθεια των πεπερασμένων διαφορών για τετραγωνική διάταξη εγκλεισμάτων, η ανάλυση του προβλήματος για την αντοχή των υλικών από τον Gresczuk, η θεωρητική μελέτη για ένα αυτό-υπαρξιακό μοντέλο [self-consistent model] από τον Wakashima.

Εξάλλου χρησιμοποιώντας την αρχή των μεταβολών [variational principles] ο Levin εξέτασε το πρόβλημα στην γενική του μορφή. Θεώρησε τη βισκοελαστική συμπεριφορά του υλικού όταν αυτό δεχόταν θερμική διαστολή, ενώ οι Fahmi και Ragai – Ellozy εξέτασαν την περίπτωση θερμικής διαστολής των ινωδών συνθέτων υλικών κατά τη διεύθυνσή του πάχους. Μια συζήτηση επί αυτού του άρθρου έγινε από τον Pagano.

Στις προαναφερθείσες μελέτες της βιβλιογραφίας για τη μελέτη της θερμικής συμπεριφοράς των συνθέτων υλικών οι επιφάνειες των εγκλεισμάτων θεωρήθηκαν ως τέλειες μαθηματικές επιφάνειες, πράγμα το οποίο δεν συμβαίνει στην πραγματικότητα.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟΙ ΤΥΠΟΙ ΓΙΑ ΤΟ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗ ΘΕΡΜΙΚΗΣ ΔΙΑΣΤΟΛΗΣ ΣΤΑ ΙΝΩΔΗ ΣΥΝΘΕΤΑ ΥΛΙΚΑ

Ας θεωρήσουμε ένα σύνθετο υλικό το οποίο αποτελείται από δυο φάσεις ομοιογενείς και ισότροπες και γραμμικώς ελαστικές, την ίνα και τη μήτρα με συντελεστές θερμικής διαστολής α_f και α_m αντίστοιχα κι με $\alpha_m > \alpha_f$.

Ένα τέτοιο σύνθετο υλικό παρασκευάζεται σε μια θερμοκρασία μεγαλύτερη από αυτήν του περιβάλλοντος είτε είναι θερμοπλαστικό είτε θερμοσκληρυνόμενο. Κατά τη διάρκεια της διαδικασίας ψυχράνσεως η κάθε μια από τις δυο φάσεις συστέλλεται. Η συστολή όμως της μήτρας παρεμποδίζεται από το έγκλεισμα με αποτέλεσμα να δημιουργούνται θλιπτικές τάσεις γύρω από την ενδιάμεση επιφάνεια, οι οποίες μπορούν να αυξηθούν ή να ελαττωθούν από μη ελαστικές παραμορφώσεις στη μήτρα.

Όταν το σύνθετο υλικό θερμαίνεται, η μήτρα θέλει να διασταλεί περισσότερο από το έγκλεισμα, και εάν η ενδιάμεση επιφάνεια είναι ικανή να μεταβιβάσει τις τάσεις οι οποίες δημιουργούνται, η διαστολή της μήτρας θα ελαττωθεί. Στις παρακάτω αναφερόμενες θεωρητικές αναλύσεις θεωρήθηκε ότι η ενδιάμεση επιφάνεια είναι ικανή για αυτό.

1. Ο νόμος των φάσεων(Law of mixtures)

Εάν θεωρηθεί ότι δεν υπάρχει αλληλεπίδραση φάσεων, τότε αναμένεται ο συντελεστής θερμικής διαστολής να ακολουθήσει τον νόμο των φάσεων ο οποίος δίνεται από την σχέση:

$$\alpha_c = \alpha_f \nu_f + \alpha_m \nu_m \quad (\text{Π.1})$$

όμως, όπως αναφέρθηκε προηγουμένως λόγω της διαφοράς των συντελεστών θερμικής διαστολής των δυο φάσεων δημιουργούνται μικροτάσεις μεταξύ αυτών. Αυτές επηρεάζουν τη θερμική διαστολή του συνθέτου υλικού με συνέπεια να μην ακολουθεί αυτός το νόμο των φάσεων.

2. Η Εξίσωση Schapery

Μεταξύ των διαφόρων τύπων που προτείνονται για τον υπολογισμό του συντελεστή θερμικής διαστολής ενός ινώδους συνθέτου υλικού λαμβάνοντας υπόψη την αλληλεπίδραση των φάσεων είναι και ο τύπος του Schapery ο οποίος προσδιορίζει όρια για τους συντελεστές θερμικής διαστολής των ισότροπων υλικών αλλά και των συνθέτων υλικών τα οποία αποτελούνται από ισότροπες φάσεις χρησιμοποιώντας αρχές της θερμοελαστικότητας. Για ένα σύνθετο υλικό με ίνες μιας διεύθυνσεως δίνονται οι ακόλουθες εκφράσεις:

- Ο διαμήκης, δηλαδή κατά την διεύθυνση των ινών, συντελεστής θερμικής διαστολής α_L :

$$\alpha_L = \frac{E_f \alpha_f \nu_f + E_m \alpha_m \nu_m}{E_f \nu_f + E_m \nu_m} \quad (\text{Π.2})$$

- Ο εγκάρσιος, δηλαδή κατά την κάθετη διεύθυνση προς τις ίνες, συντελεστής α_T :

$$\alpha_T = (1 + \nu_f) \alpha_f \nu_f + (1 + \nu_m) \alpha_m \nu_m - \alpha_L (\nu_f \nu_f + \nu_m \nu_m) \quad (\text{Π.3})$$

3. Η εξίσωση Thomas

Στης αρχές της δεκαετίας του 1960 Thomas ανέπτυξε έναν εμπειρικό τύπο ο οποίος γράφεται ως :

$$\gamma_c^a = \gamma_f^a \nu_f + \gamma_m^a \nu_m \quad (\text{Π.4})$$

όπου, a: ο εκθέτης που μεταβάλλεται από -1 έως +1 και όπου γ είναι ο συντελεστής κυβικής διαστολής. Για ένα ισότροπο υλικό $\gamma = 3\alpha$ ενώ για ένα ινώδες σύνθετο υλικό με συνεχείς ίνες μια διεύθυνσης και ισότροπο στις δυο εγκάρσιες διευθύνσεις :

$$\gamma = \alpha_L + 2\alpha_T \quad (\text{Π.5})$$

Ο εμπειρικός χαρακτήρας της εξίσωσης του Thomas την καθιστά κατάλληλη για τα περισσότερα σύνθετα υλικά, χρησιμοποιώντας βέβαια πάντα το σωστό α .

4. Η εξίσωση Van Fo Fy

Οι προβλέψεις του Van Fo Fy για το προσδιορισμό των συντελεστών διαστολής δίνονται από τις εξής σχέσεις:

- Ο συντελεστής θερμικής διαστολής, α_L , κατά τη διεύθυνσή των ινών :

$$\alpha_L = \alpha_m - (\alpha_m - \alpha_f) \cdot \frac{(1 + \nu_m)E_f \nu_f - (1 + \nu_f)(E_L - E_m \nu_m)}{(\nu_m - \nu_f)E_L} \quad (\text{Π.8})$$

- Ο συντελεστής διαστολής α_T καθέτως προς τις ίνες:

$$\alpha_T = \alpha_m + (\alpha_m - \alpha_L)\nu_{LT} - (\alpha_m - \alpha_f)(1 + \nu_f) \cdot \frac{\nu_m - \nu_{LT}}{\nu_m - \nu_f} \quad (\text{Π.9})$$

όπου, E_L είναι το μέτρο ελαστικότητας κατά την διεύθυνσή των ινών και ν_{LT} ο διαμήκης λόγος Poisson του συνθέτου υλικού. Επειδή, όμως, οι τιμές οι οποίες υπολογίζονται από αυτές τις σχέσεις είναι πολύ ευαίσθητες στις μεταβολές του E_L , αποκλίσεις στις πειραματικές τιμές, εντός των ορίων των πειραματικών σφαλμάτων είναι δυνατόν να προκαλέσουν σημαντικές διαφορές στις υπολογιζόμενες τιμές των συντελεστών διαστολής.

5. Η εξίσωση Chamberlain

Ένα εναλλακτικό μοντέλο για τον υπολογισμό του εγκάρσιου συντελεστή διαστολής ενός συνθέτου υλικού με ίνες μιας διεύθυνσεως αναπτύχθηκε από το Chamberlain.

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις κυλίνδρων μεγάλου πάχους, για την περίπτωση μια κυλινδρικής ίνας η οποία ευρίσκεται εντός μήτρας με σχήμα κοίλου κυλίνδρου. Οι μετατοπίσεις στο εξωτερικό του κυλίνδρου συνδέονται με τον συντελεστή θερμικής διαστολής στην ακτινική διεύθυνση. Η έκφραση για το εγκάρσιο συντελεστή διαστολής α_T δίνεται ως :

$$\alpha_T = \alpha_m + \frac{2(\alpha_m - \alpha_f)\nu_f}{\nu_m(F - 1 + \nu_m) + (F + \nu_f) + E_m(1 - \nu_{LT})} \frac{F - 1 + \nu_m}{E_f} \quad (\text{Π.10})$$

Όπου F είναι ένας συντελεστής ο οποίος εξαρτάται από την κατανομή των ινών και ισούται με 0.9096 για εξαγωνική κατανομή και 0.7854 για τετραγωνική κατανομή των ινών.

6.Η εξίσωση Schneider

Μια άλλη μελέτη επί αυτού του θέματος έχει γίνει από τον Schneider ο οποίος θεώρησε εξαγωνική κατανομή στοιχείων, τα οποία αποτελούνται από μια κυλινδρική ίνα που περιβάλλεται από κοίλη κυλινδρική μήτρα. Η εξίσωση για τον εγκάρσιο συντελεστή διαστολής έχει τη μορφή της παρακάτω εξίσωσης:

$$\alpha_T = \alpha_m - (\alpha_m - \alpha_f) \cdot \frac{2(1 + \nu_m)(\nu_m^2 - 1)c}{1 + 1.1 \cdot \nu_f - \nu_m + 2\nu_m^2 c} - \frac{\nu \frac{E_f}{E_m}}{\frac{1}{c} + \frac{E_f}{E_m}} \quad (\text{Π.11})$$

$$\text{όπου: } c = \frac{1 + 1.1\nu_f}{1.1\nu_f - 1}.$$

Διαμήκης συντελεστής θερμικής διαστολής

Η εξίσωση για τον διαμήκη συντελεστή μπορεί να γραφτεί στην εξής μορφή:

$$\alpha_L = \frac{\alpha_f E_f \nu_f + \alpha_m E_m \nu'_m + \frac{2}{r_m^2} \int_{r_f}^{r_i} \alpha_i(r) E_i(r) r dr}{E_f \nu_f + E_m \nu'_m + \frac{2}{r_m^2} \int_{r_f}^{r_i} E_i(r) r dr} = \frac{\alpha_f E_f \nu_f + \alpha_m E_m \nu'_m + I_1}{E_f \nu_f + E_m \nu'_m + I_2} \quad (\text{Π.12})$$

Για να υπολογίσουμε το α_i πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τις εκφράσεις για τα $\alpha_i(r)$ και $E_i(r)$ για κάθε μεταβολή. Με

$$I_1 = \frac{2}{r_m^2} \int_{r_f}^{r_i} \alpha_i(r) E_i(r) r dr, \text{ το } I_1 \text{ μετρά τις αντικαταστάσεις των } \alpha_i(r) \text{ και } E_i(r)$$

$$I_2 = \frac{2}{r_m^2} \int_{r_f}^{r_i} E_i(r) r dr$$

και τις εξισώσεις

$$\nu_f = \frac{r_f^2}{r_m^2}$$

$$\nu_i = \frac{r_i^2 - r_f^2}{r_m^2}, \text{ γίνεται:}$$

$$\nu'_m = \frac{r_m^2 - r_i^2}{r_m^2}$$

Για τη γραμμική μεταβολή:

$$\begin{aligned}
 (I_1)_L &= \frac{6(E_f \sqrt{1-\nu'_m} - E_m \sqrt{\nu_f})(a_f \sqrt{1-\nu'_m} - a_m \sqrt{\nu_f})(1-\nu'_m - \nu_f)}{6(\sqrt{1-\nu'_m} - \sqrt{\nu_f})^2} + \\
 &+ \frac{4[(E_f \sqrt{1-\nu'_m} - E_m \sqrt{\nu_f})(a_m - a_f) - (E_f - E_m)(a_f \sqrt{1-\nu'_m} - a_m \sqrt{\nu_f})]}{6(\sqrt{1-\nu'_m} - \sqrt{\nu_f})^2} \times \\
 &\times \frac{(\sqrt{1-\nu'_m})^3 - \sqrt{\nu_f^3} - 3(E_f - E_m)(a_m - a_f)[(1-\nu'_m)^2 - \nu_f^2]}{6(\sqrt{1-\nu'_m} - \sqrt{\nu_f})^2}
 \end{aligned}$$

Για υπερβολική μεταβολή:

$$\begin{aligned}
 (I_1)_H &= \frac{(E_m \sqrt{1-\nu'_m} - E_f \sqrt{\nu_f})(a_m \sqrt{1-\nu'_m} - a_f \sqrt{\nu_f})(1-\nu'_m - \nu_f)}{(\sqrt{1-\nu'_m} - \sqrt{\nu_f})^2} + \\
 &+ \frac{2(E_f - E_m)(a_f - a_m)\nu_f(1-\nu'_m) \ln \sqrt{\frac{1-\nu'_m}{\nu_f}}}{(\sqrt{1-\nu'_m} - \sqrt{\nu_f})^2} + \\
 &+ \frac{2[(E_m \sqrt{1-\nu'_m} - E_f \sqrt{\nu_f})(a_f - a_m) + (E_f - E_m)(a_m \sqrt{1-\nu'_m} - a_f \sqrt{\nu_f})]}{(\sqrt{1-\nu'_m} - \sqrt{\nu_f})^2} \times \\
 &\times \frac{(\sqrt{1-\nu'_m})\nu_f(\sqrt{1-\nu'_m} - \sqrt{\nu_f})}{(\sqrt{1-\nu'_m} - \sqrt{\nu_f})^2}
 \end{aligned}$$

Για παραβολική μεταβολή:

$$\begin{aligned}
(I_1)_P &= \frac{(E_f - E_m)(a_f - a_m)}{3(\sqrt{1-\nu'_m} - \sqrt{\nu_f})^4} [(1-\nu'_m)^3 - \nu_f^3] - \\
&- \frac{8}{5} \left[\frac{(E_f - E_m)(a_f - a_m)}{(\sqrt{1-\nu'_m} - \sqrt{\nu_f})^4} \right] (\sqrt{1-\nu'_m}) [\sqrt{(1-\nu'_m)^5} - \sqrt{\nu_f^5}] + \\
&+ \left\{ \frac{[E_f(1-\nu'_m) + E_m\nu_f - 2E_m\sqrt{(1-\nu'_m)\nu_f}][a_f(1-\nu'_m) + a_m\nu_f - 2a_m\sqrt{(1-\nu'_m)\nu_f}]}{(\sqrt{1-\nu'_m} - \sqrt{\nu_f})^4} \right\} (1-\nu'_m - \nu_f) + \\
&+ \frac{1}{2} \left\{ \frac{(E_f - E_m)[a_f(1-\nu'_m) + a_m\nu_f - 2a_m\sqrt{(1-\nu'_m)\nu_f}]}{(\sqrt{1-\nu'_m} - \sqrt{\nu_f})^4} \right\} + \\
&+ \frac{4(E_f - E_m)(a_f - a_m)(1-\nu'_m) + (a_f - a_m)[E_f(1-\nu'_m) + E_m\nu_f - 2E_m\sqrt{(1-\nu'_m)\nu_f}]}{(\sqrt{1-\nu'_m} - \sqrt{\nu_f})^4} \times \\
&\times [(1-\nu'_m)^2 - \nu_f^2] - \frac{4}{3} \left\{ \frac{(E_f - E_m)[a_f(1-\nu'_m) + a_m\nu_f - 2a_m\sqrt{(1-\nu'_m)\nu_f}]}{(\sqrt{1-\nu'_m} - \sqrt{\nu_f})^4} \right\} + \\
&+ \frac{(a_f - a_m)[E_f(1-\nu'_m) + E_m\nu_f - 2E_m\sqrt{(1-\nu'_m)\nu_f}]}{(\sqrt{1-\nu'_m} - \sqrt{\nu_f})^4} \left\{ (\sqrt{1-\nu'_m}) [\sqrt{(1-\nu'_m)^3} - \sqrt{\nu_f^3}] \right\}
\end{aligned}$$

Αντίστοιχα για το I_2 :

Για τη γραμμική μεταβολή:

$$(I_2)_L = \frac{1}{3} [(E_f + 2E_m)(1-\nu'_m) - (2E_f + E_m)\nu_f + (E_f - E_m)\sqrt{(1-\nu'_m)\nu_f}]$$

Για υπερβολική μεταβολή:

$$(I_2)_H = (E_m\sqrt{1-\nu'_m} - E_f\sqrt{\nu_f})(\sqrt{1-\nu'_m} + \sqrt{\nu_f}) + 2(E_f - E_m)(\sqrt{(1-\nu'_m)\nu_f})$$

Για παραβολική μεταβολή:

$$\begin{aligned}
(I_2)_P &= \frac{3(E_f - E_m)(\sqrt{(1-\nu'_m)^3} + \sqrt{\nu_f}(1-\nu'_m) + \nu_f\sqrt{1-\nu'_m} + \sqrt{\nu_f^3})}{6(\sqrt{1-\nu'_m} - \sqrt{\nu_f})} - \\
&- \frac{8(E_f - E_m)(\sqrt{1-\nu'_m})(1-\nu'_m + \nu_f + \sqrt{(1-\nu'_m)\nu_f})}{6(\sqrt{1-\nu'_m} - \sqrt{\nu_f})} + \\
&+ \frac{6[E_f(1-\nu'_m) + E_m\nu_f - 2E_m\sqrt{(1-\nu'_m)\nu_f}](\sqrt{1-\nu'_m} + \sqrt{\nu_f})}{6(\sqrt{1-\nu'_m} - \sqrt{\nu_f})}
\end{aligned}$$

Εγκάρσιος συντελεστής θερμικής διαστολής

Έχουμε:

$$\alpha_T = (1 + \nu_f) a_f \nu_f + (1 + \nu_m) a_m \nu'_m + \frac{2}{r_m^2} \int_{r_f}^{r_i} (1 + \nu_i(r)) \alpha_i(r) dr -$$

$$- \alpha_L (\nu_f \nu_f + \nu_m \nu'_m + \frac{2}{r_m^2} \int_{r_f}^{r_i} \nu_i(r) r dr) \Rightarrow \quad (\Pi.13)$$

$$\Rightarrow \alpha_T = (1 + \nu_f) a_f \nu_f + (1 + \nu_m) a_m \nu'_m + I_3 - \alpha_L (\nu_f \nu_f + \nu_m \nu'_m + I_4)$$

$$I_3 = \frac{2}{r_m^2} \int_{r_f}^{r_i} (1 + \nu_i(r)) \alpha_i(r) dr,$$

με

$$I_4 = \frac{2}{r_m^2} \int_{r_f}^{r_i} \nu_i(r) r dr$$

Για να υπολογίσουμε το α_T πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τις εκφράσεις για τα $\alpha_i(r)$ και $\nu_i(r)$ για κάθε μεταβολή. Το I_3 μετρά τις αντικαταστάσεις των $\alpha_i(r)$ και $E_i(r)$ και τις εξισώσεις

$$\nu_f = \frac{r_f^2}{r_m^2}$$

$$\nu_i = \frac{r_i^2 - r_f^2}{r_m^2}, \text{ γίνεται:}$$

$$\nu'_m = \frac{r_m^2 - r_i^2}{r_m^2}$$

Για τη γραμμική μεταβολή:

$$(I_3)_L = \frac{6((1 + \nu_f)\sqrt{1 - \nu'_m} - (1 + \nu_m)\sqrt{\nu_f})(a_f\sqrt{1 - \nu'_m} - a_m\sqrt{\nu_f})(1 - \nu'_m - \nu_f)}{6(\sqrt{1 - \nu'_m} - \sqrt{\nu_f})^2} +$$

$$+ \frac{4[((1 + \nu_f)\sqrt{1 - \nu'_m} - (1 + \nu_m)\sqrt{\nu_f})(a_m - a_f) + (\nu_m - \nu_f)(a_f\sqrt{1 - \nu'_m} - a_m\sqrt{\nu_f})]}{6(\sqrt{1 - \nu'_m} - \sqrt{\nu_f})^2} \times$$

$$\times \frac{(\sqrt{1 - \nu'_m})^3 - \sqrt{\nu_f^3} + 3(\nu_m - \nu_f)(a_m - a_f)[(1 - \nu'_m)^2 - \nu_f^2]}{6(\sqrt{1 - \nu'_m} - \sqrt{\nu_f})^2}$$

Για υπερβολική μεταβολή:

$$\begin{aligned}
 (I_1)_H = & \frac{((1+v_m)\sqrt{1-v'_m} - (1+v_f)\sqrt{v_f})(a_m\sqrt{1-v'_m} - a_f\sqrt{v_f})(1-v'_m - v_f)}{(\sqrt{1-v'_m} - \sqrt{v_f})^2} + \\
 & + \frac{2(v_f - v_m)(a_f - a_m)v_f(1-v'_m) \ln \sqrt{\frac{1-v'_m}{v_f}}}{(\sqrt{1-v'_m} - \sqrt{v_f})^2} + \\
 & + \frac{2[(1+v_m)\sqrt{1-v'_m} - (1+v_f)\sqrt{v_f}](a_f - a_m) + (v_f - v_m)(a_m\sqrt{1-v'_m} - a_f\sqrt{v_f})}{(\sqrt{1-v'_m} - \sqrt{v_f})^2} \times \\
 & \times \frac{(\sqrt{1-v'_m})v_f(\sqrt{1-v'_m} - \sqrt{v_f})}{(\sqrt{1-v'_m} - \sqrt{v_f})^2}
 \end{aligned}$$

Για παραβολική μεταβολή:

$$\begin{aligned}
 (I_1)_P = & \frac{(v_f - v_m)(a_f - a_m)}{3(\sqrt{1-v'_m} - \sqrt{v_f})^4} [(1-v'_m)^3 - v_f^3] - \\
 & - \frac{8}{5} \frac{(v_f - v_m)(a_f - a_m)}{(\sqrt{1-v'_m} - \sqrt{v_f})^4} (\sqrt{1-v'_m}) [\sqrt{(1-v'_m)^5} - \sqrt{v_f^5}] + \\
 & + \left\{ \frac{[(1+v_f)(1-v'_m) + (1+v_m)v_f - 2(1+v_m)\sqrt{(1-v'_m)v_f}][a_f(1-v'_m) + a_mv_f - 2a_m\sqrt{(1-v'_m)v_f}]}{(\sqrt{1-v'_m} - \sqrt{v_f})^4} \right\} \times \\
 & \times (1-v'_m - v_f) + \\
 & + \frac{1}{2} \left\{ \frac{(v_f - v_m)[a_f(1-v'_m) + a_mv_f - 2a_m\sqrt{(1-v'_m)v_f}]}{(\sqrt{1-v'_m} - \sqrt{v_f})^4} + \right. \\
 & \left. + \frac{4(v_f - v_m)(a_f - a_m)(1-v'_m) + (a_f - a_m)[(1+v_f)(1-v'_m) + (1+v_m)v_f - 2(1+v_m)\sqrt{(1-v'_m)v_f}]}{(\sqrt{1-v'_m} - \sqrt{v_f})^4} \right\} \times \\
 & \times [(1-v'_m)^2 - v_f^2] - \frac{4}{3} \left\{ \frac{(v_f - v_m)[a_f(1-v'_m) + a_mv_f - 2a_m\sqrt{(1-v'_m)v_f}]}{(\sqrt{1-v'_m} - \sqrt{v_f})^4} + \right. \\
 & \left. + \frac{(a_f - a_m)[(1+v_f)(1-v'_m) + (1+v_m)v_f - 2(1+v_m)\sqrt{(1-v'_m)v_f}]}{(\sqrt{1-v'_m} - \sqrt{v_f})^4} \right\} (\sqrt{1-v'_m}) [\sqrt{(1-v'_m)^3} - \sqrt{v_f^3}]
 \end{aligned}$$

Αντίστοιχα για το I_2 :

Για τη γραμμική μεταβολή:

$$(I_4)_L = \frac{1}{3}[(v_f + 2v_m)(1 - v'_m) - (2v_f + v_m)v_f + (v_f - v_m)\sqrt{(1 - v'_m)v_f}]$$

Για υπερβολική μεταβολή:

$$(I_4)_H = ((1 + v_m)\sqrt{1 - v'_m} - (1 + v_f)\sqrt{v_f})(\sqrt{1 - v'_m} + \sqrt{v_f}) + 2(v_f - v_m)(\sqrt{(1 - v'_m)v_f})$$

Για παραβολική μεταβολή:

$$(I_4)_P = \frac{3(v_f - v_m)(\sqrt{(1 - v'_m)v_f})^3 + \sqrt{v_f}(1 - v'_m) + v_f\sqrt{1 - v'_m} + \sqrt{v_f^3}}{6(\sqrt{1 - v'_m} - \sqrt{v_f})} -$$

$$\frac{8(v_f - v_m)(\sqrt{1 - v'_m})(1 - v'_m + v_f + \sqrt{(1 - v'_m)v_f})}{6(\sqrt{1 - v'_m} - \sqrt{v_f})} +$$

$$+ \frac{6[(1 + v_f)(1 - v'_m) + (1 + v_m)v_f - 2(1 + v_m)\sqrt{(1 - v'_m)v_f}](\sqrt{1 - v'_m} + \sqrt{v_f})}{6(\sqrt{1 - v'_m} - \sqrt{v_f})}$$

BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Theocaris P. S., Spathis G. D., Sideridis E.P., *Fibre Sci and Technology*, Vol.17, p.169 (1982)
2. Theocaris P. S., Papanicolaou G. C. and Spathis G. D *Fibre Sci. and Technology*, Vol. 15, p.187(1981)
3. Theocaris P. S. and Papanikolaou G. C. , *Fibre Science and Technology*, Vol.12, 6, p.421(1979)
4. G. A. Papadopoulos, E. Sideridis, Study of Orthotropic materials: The Interphase Model and the Crack Initiation., *Archive of Applied Mechanics* 66 (1995) 111-125
5. Αιμ. Σιδερίδης, “Μελέτη της θερμομηχανικής συμπεριφοράς των κοκκωδών και ινωδών συνθέτων υλικών διά της θεωρίας της ενδιαμέσου φάσεως”, Διδακτορική διατριβή, ΕΜΠ (1998).
6. P.S. Theocaris, E.P. Sideridis, G.C Papanicolaou, “The Elastic Longitudinal Modulus and Poisson ’s Ratio of Fiber Composites” *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, Vol. 4, (October 1985)
7. E. Sideridis, “The Transverse Elastic Modulus of Fiber-Reinforced Composites as Defined by the Concept of Interphase” *Journal of Applied Polymer Science*, Vol. 48, 243-255 (1993)
8. Rosen B.W. , “Composites” (1974)
9. Theocaris P.S. , “The Unfolding Model for the Representation of the Interphase Layer in Composites”, *Proc. Nat. Acad. Athens*, Vol.59, No. II, pp.87-100 (1984)
10. Sih G.C. , Hilton P.D. , Badalian R. , Schenberger P.S and Villareal G. , “Fractured Mechanics for Fibrous Composites, ASTM STP 521 , pp. 98-132 (1973).
11. Clements L.L and Moore R.L. , *Composites*, 1, p.93 (1978).
12. Whitney J.M. and Riley M.B. , *AIAA Journal*, 4(9), p.1537 (1966).
13. S.W. Tsai, *NASA CR-71* (1964)
14. R.M. Orgrkiewicz and A.A.M. Sayigh, *J. Strain Analysis*, 6 (1971), 226.
15. Z. Hashin, *Int. J. Solids Structures*, 6 (1970), 797.
16. Γ. Παπανικολάου και Δ. Μουζάκης, «ΣΥΝΘΕΤΑ ΥΛΙΚΑ», Εκδόσεις Κλειδάριθμος (2007).
17. Bolley and weiner, “Theory of thermal stresses”, J.Wiley and Sons, Inc., New York, p.300, (1960).
18. S.Timoshenko and J.Goodier, “Theory of Elasticity”, Mc.Graw-Hill Book Co., New York, p.416, (1951).
19. B.Budiansky, “Thermal and Thermoelastic Properties of Isotropic Materials”, *J.Composite materials*, vol.4, p.286-295, (1970).
20. Theocaris P. S., “The Interphase and its Influence on the Mechanical Properties of Composites,” *New developments in the Characterization of Polymers in the Solid State*, *Advances in Polymer Science*, H. H. Kausch & H.C. Zachmann Editors, Springer Verlag Publ.(1984); see also P. S. Theocaris, “On the Evaluation of Adhesion Between Phases in Fiber Composites,” *Colloid and Polymer Journal* (1984).
21. E. Sideridis, “The Transverse Elastic Modulus of Fiber-Reinforced Composites as Defined by the Concept of Interphase” *Journal of Applied Polymer Science*, Vol. 48, 243-255 (1993)
22. E. Sideridis, “The In-Plane Shear Modulus of Fiber Reinforced Composites as

- Defined by the Concept of Interphase” Composites Science and Technology 31(1988) 35-53.
23. E. Sideridis, “The Off-Axis Elastic Constants of Unidirectional Glass Fibre Composites Defined by the Concept of Interphase”.
 24. Theocaris P.S. , “The Unfolding Model for the Representation of the Interphase Layer in Composites”, Proc. Nat. Acad. Athens, Vol.59, No. II, pp.87-100 (1984)
 25. Theocaris P. S. and Papanikolaou G. C. , Fibre Science and Technology, Vol.12, 6, p.421(1979)
 26. Yu.S. Lipatov, Physical Chemistry of Filled Polymers, Originally published “ Khimiya”(Moscow 1977). Translated from the Russian by R.J. Moseley, International Polymer Science and Technology Monograph No. 2