



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

Τομέας Σημάτων, Ελέγχου και Ρομποτικής
Εργαστήριο Όρασης Υπολογιστών, Επικοινωνίας Λόγου και Επεξεργασίας Σημάτων

Γεωδαιτικές Ενεργές Καμπύλες και Μέθοδος Πεπερασμένων Στοιχείων για Κατάτμηση σε Γράφους

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΤΟΥ

Νικολάου Α. Κολοτούρου

Επιβλέπων: Πέτρος Μαραγκός
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Οκτώβριος 2015



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

Τομέας Σημάτων, Ελέγχου και Ρομποτικής
Εργαστήριο Όρασης Υπολογιστών, Επικοινωνίας Λόγου και
Επεξεργασίας Σημάτων

Γεωδαιτικές Ενεργές Καμπύλες και Μέθοδος Πεπερασμένων Στοιχείων για Κατάτμηση σε Γράφους

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΤΟΥ

Νικολάου Α. Κολοτούρου

Επιβλέπων: Πέτρος Μαραγκός
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 30η Οκτωβρίου 2015.

(Υπογραφή)

(Υπογραφή)

(Υπογραφή)

.....
Πέτρος Μαραγκός
Καθηγητής
Ε.Μ.Π.

.....
Γεώργιος Παπαβασιλόπουλος
Καθηγητής
Ε.Μ.Π.

.....
Γεράσιμος Ποταμιάνος
Αναπληρωτής Καθηγητής
Πανεπιστημίου Θεσσαλίας

Αθήνα, Οκτώβριος 2015

(Υπογραφή)

.....
Νικόλαος Α. Κολοτούρος

Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

Copyright © Νικόλαος Α. Κολοτούρος, 2015.

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Περίληψη

Τα προβλήματα κατάτμησης δεδομένων πάνω σε γράφους είναι πολύ χρήσιμα σε μία μεγάλη κατηγορία επιστημονικών κλάδων. Υπάρχει μια πληθώρα δεδομένων τα οποία μπορούν να μοντελοποιηθούν με χρήση γράφων, από εικόνες και γεωγραφικά δεδομένα μέχρι και τα κοινωνικά δίκτυα. Πολλές φορές λοιπόν είναι αναγκαίο να μπορέσει να γίνει κατηγοριοποίηση των δεδομένων σε ένα γράφο σε ομάδες, με βάση κάποιο ή κάποια χαρακτηριστικά τους. Ανά καιρούς έχουν αναπτυχθεί διάφορες μέθοδοι που χειρίζονται το θέμα αυτό στη βιβλιογραφία, η καθεμία με τα πλεονεκτήματα και τους περιορισμούς της.

Στην παρούσα εργασία προσεγγίζονται το πρόβλημα της κατάτμησης χρησιμοποιώντας ιδέες από τον τομέα της Όρασης Υπολογιστών και συγκεκριμένα από τις Γεωδαιτικές Ενεργές Καμπύλες. Το πρόβλημα της κατάτμησης μετασχηματίζεται στο πρόβλημα της γεωμετρικής εξέλιξης καμπυλών και η δυσκολία έγκειται στην αποτελεσματική μετατροπή του χωρικά συνεχούς αυτού μοντέλου σε μια διακριτοποιημένη εκδοχή η οποία μπορεί να εφαρμοστεί σε γράφους. Έχουν προταθεί διάφορες μέθοδοι για το σκοπό αυτό με ικανοποιητικά αποτελέσματα. Στην παρούσα εργασία εξετάζεται μια εναλλακτική προσέγγιση χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων.

Αρχικά γίνεται θεωρητική παρουσίαση της μεθόδου και ακολούθως εξετάζεται η απόδοσή της στην ανίχνευση γνωστών γεωμετρικών σχημάτων και συνδυασμού αυτών. Στη συνέχεια γίνεται σύγκριση με προηγούμενες μεθόδους και αναλύονται τα πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα της καθώς και πιθανούς περιορισμούς για τη χρήση της. Έπειτα παρουσιάζονται μερικές ενδεικτικές εφαρμογές στις οποίες μπορεί η μέθοδος αυτή να χρησιμοποιηθεί, ενώ στο τέλος γίνεται εξαγωγή γενικών συμπερασμάτων και καταδεικνύονται μερικοί από τους πιθανούς μελλοντικούς προσανατολισμούς της έρευνας.

Λέξεις-κλειδιά: γεωδαιτικές ενεργές καμπύλες, γράφοι Delaunay, μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων, κατάτμηση σε γράφους, εξέλιξη καμπυλών, μέθοδοι επιπεδοσυνόλων

Abstract

Data segmentation problems on graphs are very useful in a large number of branches. There is a wide variety of information that can be modeled using graphs, from images and geographical data to social networks. Thus, many times it is necessary to divide the data into clusters based on one or more features. There have been developed several methods that deal with this topic, each with its own advantages and disadvantages.

This thesis deals with the problem of segmentation using ideas from Computer Vision, and specifically from Geodesic Active Contours. The segmentation problem is now transformed into a curve evolution problem and its difficulty comes from the fact that this continuous in space model needs to be efficiently discretized in order to be applied on graphs. Several methods have been developed for this purpose that yield satisfactory results. In this thesis we examine an alternative approach using Finite Elements method.

First of all, the theoretical aspects of this method are presented and additionally we examine its efficiency in detecting some well known geometrical shapes and combinations of them. Subsequently we compare this method with previous ones and analyze its advantages and disadvantages as well as potential limitations. We also present some notional applications where this method can be used, whereas in the end we summarize the results and illustrate some future research directions.

Keywords: geodesic active contours, Delaunay graphs, finite elements method, segmentation on graphs, curve evolution, levelset methods

Ευχαριστίες

Αρχικά θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα αυτής της διπλωματικής, καθηγητή κ. Πέτρο Μαραγκό που μου ανέθεσε το θέμα αυτό αλλά και για τις καθοριστικές συμβουλές και κατευθύνσεις που μου έδωσε καθ' όλη την πορεία μέχρι την ολοκλήρωση της παρούσας εργασίας. Θα ήθελα να τον ευχαριστήσω επίσης για τη συμβολή του στη μύησή μου στον κόσμο της Επεξεργασίας Σημάτων και Όρασης Υπολογιστών μέσα από τα μαθήματά του τα προηγούμενα χρόνια.

Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω θερμά και το Χρήστο Σακαρίδη που μου πρόσφερε απλόχερα τον κώδικα που ανέπτυξε στα πλαίσια της δικής του διπλωματικής και με βοήθησε στο πλαίσιο των συγκρίσεων που έγιναν.

Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια και τους φίλους μου που με στηρίζουν όλα αυτά τα χρόνια, αλλά και τους υπόλοιπους καθηγητές μου που μου ενέπνευσαν τη δίψα για μάθηση.

Περιεχόμενα

Περίληψη	i
Abstract	iii
Ευχαριστίες	v
Περιεχόμενα	vii
Κατάλογος σχημάτων	xi
1 Εισαγωγή	1
1.1 Γενικά για την Όραση Υπολογιστών	1
1.2 Προβλήματα γραφημάτων	2
1.3 Αντικείμενο και διάρθρωση διπλωματικής	3
2 Το πρόβλημα των Γεωδαιτικών Ενεργών Καμπυλών	5
2.1 Εισαγωγή	5
2.2 Διατύπωση του προβλήματος	6
2.3 Εξαγωγή της εξίσωσης εξέλιξης της καμπύλης	7
2.4 Μια εναλλακτική θεώρηση: Χρήση επιπεδοσυνόλων	8
2.5 Ένα οπτικό παράδειγμα	9
2.6 Ευστάθεια και μοναδικότητα της λύσης	9
3 Γεωδαιτικές Ενεργές Καμπύλες σε Γράφους	13
3.1 Μέθοδοι γράφων στην Όραση Υπολογιστών	13
3.2 Στοιχεία Θεωρίας Γραφημάτων	14
3.2.1 Ορισμοί	14
3.2.2 Χρήσιμα γραφήματα	15
3.3 Προηγούμενα αποτελέσματα	19
3.3.1 Προσέγγιση κλίσης	19
3.3.2 Προσέγγιση απόκλισης-καμπυλότητας	20
3.3.3 Ο τελικός αλγόριθμος	21
3.4 Γενικός Σχολιασμός	21

4	Προσέγγιση με τη μέθοδο Πεπερασμένων Στοιχείων	23
4.1	Εισαγωγή	23
4.2	Μετατροπή του προβλήματος στην ασθενή μορφή	24
4.3	Προσέγγιση Galerkin	25
4.4	Εφαρμογή της μεθόδου σε γράφους	26
4.5	Οι συναρτήσεις πυραμίδες	27
4.6	Μερικοί υπολογισμοί	29
4.7	Χρονική εξέλιξη της λύσης	32
4.8	Υπολογιστική πολυπλοκότητα αλγορίθμου	35
4.9	Διερεύνηση σύγκλισης της μεθόδου	37
5	Πειραματική εφαρμογή της νέας μεθόδου	39
5.1	Εισαγωγή	39
5.2	Μερικά συμπληρωματικά στοιχεία	39
5.3	Αναγνώριση μεμονωμένων αντικειμένων	40
5.3.1	Αναγνώριση κυκλικού αντικειμένου	40
5.3.2	Αναγνώριση τριγωνικού αντικειμένου	41
5.3.3	Αναγνώριση μη κυρτού αντικειμένου	41
5.4	Αναγνώριση πολλαπλών αντικειμένων	43
5.4.1	Αναγνώριση 3 κυκλικών αντικειμένων	45
5.4.2	Αναγνώριση διαφορετικών αντικειμένων	47
5.4.3	Μια σύνθετη περίπτωση	49
5.5	Αναγνώριση αντικειμένων σε περιβάλλον θορύβου	51
5.5.1	Περίπτωση Γκαουσιανού θορύβου	51
5.5.2	Περίπτωση θορύβου τύπου salt and pepper	54
5.6	Εφαρμογή σε εικόνες	54
5.6.1	Αναλυτικοί υπολογισμοί	54
5.6.2	Πειραματικά αποτελέσματα	61
5.6.3	Σύγκριση με άλλες μεθόδους	63
6	Σύγκριση με άλλες μεθόδους	67
6.1	Γενικά Στοιχεία	67
6.2	Πειραματικά αποτελέσματα σε δυαδικές εικόνες	70
6.2.1	Επίδραση πλήθους κορυφών	70
6.2.2	Προσέγγιση συνάρτησης τερματισμού	73
6.2.3	Τελική μορφή συνάρτησης επιπεδοσυνόλων	75
6.2.4	Χρονικό βήμα	77
6.3	Πειραματικά αποτελέσματα σε γκριζες εικόνες	78
6.4	Μερικά συμπεράσματα	82
7	Μερικές Εφαρμογές	85
7.1	Εισαγωγή	85
7.2	Εφαρμογή σε γεωγραφικά δεδομένα	86
7.2.1	Συμπληρωματικά στοιχεία	86

7.2.2	Αποτελέσματα δημοψηφίσματος στην Αθήνα	87
7.2.3	Αποτελέσματα δημοψηφίσματος στην Επικράτεια	89
7.3	Εφαρμογή σε πραγματικές εικόνες	91
8	Συμπεράσματα	95
8.1	Αποτελέσματα διπλωματικής	95
8.2	Βασικές συνεισφορές	96
8.3	Μελλοντικός προσανατολισμός έρευνας	97
A'	Χρήσιμα Μαθηματικά Εργαλεία	99
A'.1	Διανυσματικοί Χώροι	99
A'.2	Χώροι Sobolev	102
A'.3	Εφαρμογές σε Προβλήματα Συνοριακών Τιμών	104
	Βιβλιογραφία	105

Κατάλογος σχημάτων

1.1	Σχηματισμός γράφων από εικόνες	3
2.1	Παράδειγμα χρήσης της μεθόδου G.A.C. σε εικόνα διαστάσεων 375 × 380 pixels	10
3.1	Γεωμετρικός γράφος με $N = 1000$ και $\rho = N^{-1/2} \approx 0.0316$. .	16
3.2	Γεωμετρικός γράφος με $N = 1000$ και $\rho = N^{-1/3} = 0.1$	17
3.3	Γεωμετρικός γράφος με $N = 1000$ και $\rho = 3/5N^{-1/3} = 0.06$. .	17
3.4	Διάγραμμα Voronoi με 300 σημεία	18
3.5	Τριγωνοποίηση Delaunay που αντιστοιχεί στο προηγούμενο διάγραμμα	18
4.1	Συνάρτηση ϕ_i	28
4.2	Φορέας και τρίγωνα που αντιστοιχούν στην ϕ_i	29
4.3	Φορέας και κοινά τρίγωνα που αντιστοιχούν στις ϕ_i, ϕ_j	31
4.4	Η προσέγγιση \bar{u}_0 της αρχικής συνθήκης	34
4.5	Τριγωνισμός Κανονικού πλέγματος	35
4.6	Απεικόνιση αραιότητας της Ιακωβιανής	36
5.1	Κυκλικό αντικείμενο	41
5.2	Εξέλιξη επιπεδοσυνόλων για το κυκλικό αντικείμενο	42
5.3	Συνάρτηση u μετά τη σύγκλιση για το κυκλικό αντικείμενο . .	42
5.4	Αποτέλεσμα ανίχνευσης κυκλικού αντικειμένου	43
5.5	Τριγωνικό αντικείμενο	43
5.6	Εξέλιξη επιπεδοσυνόλων για το τριγωνικό αντικείμενο	44
5.7	Συνάρτηση u μετά τη σύγκλιση για το τριγωνικό αντικείμενο .	44
5.8	Αποτέλεσμα ανίχνευσης τριγωνικού αντικειμένου	45
5.9	Μη κυρτό αντικείμενο	45
5.10	Εξέλιξη επιπεδοσυνόλων για το μη κυρτό αντικείμενο	46
5.11	Συνάρτηση u μετά τη σύγκλιση για το μη κυρτό αντικείμενο . .	46
5.12	Αποτέλεσμα ανίχνευσης μη κυρτού αντικειμένου	47
5.13	3 κυκλικά αντικείμενα	47
5.14	Εξέλιξη επιπεδοσυνόλων για τα 3 κυκλικά αντικείμενα	48
5.15	Συνάρτηση u μετά τη σύγκλιση για τα 3 κυκλικά αντικείμενα .	48

5.16	Αποτέλεσμα ανίχνευσης για τα 3 κυκλικά αντικείμενα	49
5.17	2 διαφορετικά αντικείμενα	49
5.18	Εξέλιξη επιπεδοσυνόλων για τα 2 διαφορετικά αντικείμενα	50
5.19	Συνάρτηση u μετά τη σύγκλιση για τα 2 διαφορετικά αντικείμενα	50
5.20	Αποτέλεσμα ανίχνευσης για τα 2 διαφορετικά αντικείμενα	51
5.21	Μια σύνθετη περίπτωση	51
5.22	Εξέλιξη επιπεδοσυνόλων για τη σύνθετη περίπτωση	52
5.23	Συνάρτηση u μετά τη σύγκλιση για τη σύνθετη περίπτωση	52
5.24	Αποτέλεσμα ανίχνευσης για τη σύνθετη περίπτωση	53
5.25	Τετραγωνικό αντικείμενο σε γράφο 2000 κορυφών	53
5.26	Ιδανική συνάρτηση εικόνας	54
5.27	Τετραγωνικό αντικείμενο	54
5.28	Εξέλιξη επιπεδοσυνόλων για την περίπτωση του γκαουσιανού θορύβου	55
5.29	Αποτέλεσμα αναγνώρισης με γκαουσιανό θόρυβο	55
5.30	Τετραγωνικό αντικείμενο	56
5.31	Εξέλιξη επιπεδοσυνόλων για την περίπτωση του γκαουσιανού θορύβου	56
5.32	Αποτέλεσμα αναγνώρισης με γκαουσιανό θόρυβο	57
5.33	Η κλίση της συνάρτησης $\phi_i, \nabla \phi_i$	57
5.34	Η αρίθμηση των τριγώνων $\phi_i, \nabla \phi_i$	60
5.35	Διαδική εικόνα με 5 αντικείμενα διάστασης 128×128 pixels	62
5.36	Προτεινόμενη μέθοδος - Εξέλιξη καμπύλων πάνω στην εικόνα	62
5.37	Προτεινόμενη Μέθοδος - Συνάρτηση επιπεδοσυνόλων μετά τη σύγκλιση	63
5.38	Αποτέλεσμα κατάτμησης με τη μέθοδο Sparse-Field level-set	64
5.39	Εναλλακτικό αποτέλεσμα κατάτμησης με τη μέθοδο Sparse- Field level-set	65
6.1	Ανίχνευση τετραγωνικού αντικειμένου με γράφο 1000 κορυφών	71
6.2	Ανίχνευση τετραγωνικού αντικειμένου με γράφο 2000 κορυφών	71
6.3	Ανίχνευση 2 κυκλικών αντικειμένων με γράφο 1000 κορυφών	72
6.4	Ανίχνευση 2 κυκλικών αντικειμένων με γράφο 2000 κορυφών	73
6.5	Διάβρωση αντικειμένου αυξάνοντας το πλήθος των επαναλή- ψεων για τη μέθοδο Sakaridis et al. [30][24]	73
6.6	Συνάρτηση g με γράφο 1000 σημείων και $\sigma = 0.01$ για τετρα- γωνικό αντικείμενο	74
6.7	Συνάρτηση g με γράφο 1000 σημείων και $\sigma = 0.005$ για τετρα- γωνικό αντικείμενο	74
6.8	Συνάρτηση g με γράφο 2000 σημείων και $\sigma = 0.01$ για τετρα- γωνικό αντικείμενο	75
6.9	Συνάρτηση g με γράφο 2000 σημείων και $\sigma = 0.005$ για τετρα- γωνικό αντικείμενο	75

6.10	Συνάρτηση g με γράφο 1000 σημείων και $\sigma = 0.01$ για τα 2 αντικείμενα	76
6.11	Συνάρτηση g με γράφο 1000 σημείων και $\sigma = 0.005$ για τα 2 αντικείμενα	76
6.12	Συνάρτηση g με γράφο 2000 σημείων και $\sigma = 0.01$ για τα 2 αντικείμενα	77
6.13	Συνάρτηση g με γράφο 2000 σημείων και $\sigma = 0.005$ για τα 2 αντικείμενα	77
6.14	Συνάρτηση επιπεδοσυνόλων u για γράφο 2000 σημείων	78
6.15	Συνάρτηση επιπεδοσυνόλων u για γράφο 2000 σημείων	78
6.16	Γκρίζα εικόνα διαστάσεων 246×300 pixels	79
6.17	Προτεινόμενη μέθοδος - Συνάρτηση τερματισμού g	79
6.18	Προτεινόμενη μέθοδος - Αποτέλεσμα ανίχνευσης	80
6.19	Προτεινόμενη μέθοδος - Συνάρτηση επιπεδοσυνόλων u	80
6.20	Μέθοδος Sakaridis et al. [30][24] - Συνάρτηση τερματισμού g	80
6.21	Μέθοδος Sakaridis et al. [30][24] - Αποτέλεσμα ανίχνευσης	81
6.22	Μέθοδος Sakaridis et al. [30][24] - Συνάρτηση επιπεδοσυνόλων u	81
6.23	Μέθοδος Sakaridis et al. [30][24] με γράφο 6000 κορυφών - Συνάρτηση τερματισμού g	81
6.24	Μέθοδος Sakaridis et al. [30][24] με γράφο 6000 κορυφών - Αποτέλεσμα ανίχνευσης	82
6.25	Μέθοδος Sakaridis et al. [30][24] με γράφο 6000 κορυφών - Συνάρτηση επιπεδοσυνόλων u	82
7.1	Γράφος μητροπολιτικής περιοχής Αθηνών	87
7.2	Γραφική απεικόνιση αποτελεσμάτων δημοψηφίσματος	88
7.3	Η συνάρτηση των αποτελεσμάτων στην μητροπολιτική περιοχή της Αθήνας μετά από βαθυπερατό φιλτράρισμα	88
7.4	Εξέλιξη G.A.C. στο γράφο της μητροπολιτικής περιοχής της Αθήνας	89
7.5	Συνάρτηση επιπεδοσυνόλων	90
7.6	Γράφος Ελληνικής Επικράτειας	90
7.7	Γραφική απεικόνιση αποτελεσμάτων δημοψηφίσματος στην Επικράτεια	91
7.8	Η συνάρτηση των αποτελεσμάτων στην Επικράτεια μετά από βαθυπερατό φιλτράρισμα	92
7.9	Εξέλιξη G.A.C. στο γράφο της Επικράτειας	93
7.10	Συνάρτηση επιπεδοσυνόλων στο γράφο της Επικράτειας	93
7.11	Εξέλιξη G.A.C. στην εικόνα με διαστάσεις 282×282 pixels	94
7.12	Συνάρτηση επιπεδοσυνόλων για την εικόνα	94
7.13	Κατάτμηση μετά από υποδειγματοληψία	94

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Γενικά για την Όραση Υπολογιστών

Με τον όρο Όραση Υπολογιστών αναφερόμαστε στον κλάδο που ασχολείται με την ανάλυση και επεξεργασία εικόνων —στατικών και κινούμενων— και γενικότερα οπτικών δεδομένων. Αποτελεί κομμάτι της προσπάθειας του ανθρώπου να κατανοήσει και να μιμηθεί τα αντίστοιχα συστήματα επεξεργασίας οπτικής πληροφορίας που διαθέτουν οι ζωντανοί οργανισμοί, τα οποία μετατρέπουν τα οπτικά ερεθίσματα που λαμβάνουν από το περιβάλλον σε χρήσιμη για αυτούς πληροφορία. Συγγενείς επιστημονικές περιοχές είναι η Επεξεργασία Εικόνων και τα Γραφικά Υπολογιστών και πολλές φορές τα όρια που διαχωρίζουν τους τομείς αυτούς είναι δυσδιάκριτα. Η κύρια διαφορά τους είναι ότι η Όραση Υπολογιστών συνήθως επικεντρώνεται στην επεξεργασία των οπτικών δεδομένων με στόχο την εξαγωγή ορισμένων χρήσιμων χαρακτηριστικών, η επεξεργασία εικόνων συνήθως δεν περιλαμβάνει το στάδιο εξαγωγής πληροφοριών ενώ τα Γραφικά Υπολογιστών προσπαθούν να συνθέσουν εικόνες με βάση χαρακτηριστικά —την αντίθετη δηλαδή πορεία από την Όραση Υπολογιστών.

Η Όραση Υπολογιστών ξεκίνησε να αναπτύσσεται στο δεύτερο μισό του 20^{ου} αιώνα ως ένας από τους τομείς του καινούριου τότε κλάδου της Τεχνητής Νοημοσύνης. Έκτοτε έχει εξελιχθεί σε έναν αυτόνομο κλάδο με ένα μεγάλο εύρος εφαρμογών και πληθώρα σημαντικών ερευνητών που βοήθησαν στην ταχεία εξέλιξη του. Πλέον οι μέθοδοι που αναπτύχθηκαν στην Όραση Υπολογιστών είναι ευρέως διαδεδομένες και αναπόσπαστα στοιχεία καθημερινών συσκευών, όπως για παράδειγμα η αναγνώριση προσώπων στις φωτογραφικές μηχανές.

Μερικά από τα προβλήματα με τα οποία ασχολείται η Όραση Υπολογιστών μεταξύ άλλων είναι:

- Η αναγνώριση αντικειμένων μέσα σε εικόνες και η ταυτοποίηση των αντικειμένων αυτών
- Η αναγνώριση ανθρώπινων δράσεων, όπως χειρονομίες και στάσεις του

σώματος σε κινούμενες εικόνες

- Η εκτίμηση και παρακολούθηση κίνησης σε βίντεο
- Η αποκατάσταση της ποιότητας αλλοιωμένων εικόνων
- Η ανακατασκευή 3-D σκηνών από εικόνες

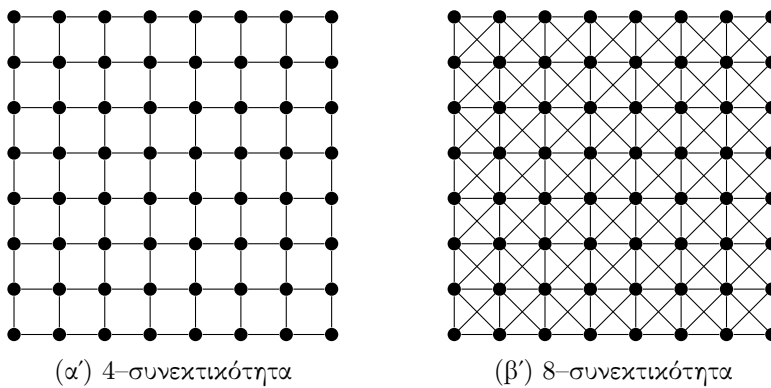
Η Όραση Υπολογιστών είναι πολύ χρήσιμη και σε διάφορους τομείς της επιστήμης και της τεχνολογίας. Μερικές από τις εφαρμογές που χρησιμοποιούνται είναι:

- Έλεγχος ρομποτικών μηχανισμών που διαθέτουν οπτικούς αισθητήρες
- Αυτόματη πλοήγηση οχημάτων
- Ανάλυση και επεξεργασία ιατρικών εικόνων
- Αυτόματη παρακολούθηση γεγονότων και επίβλεψη διεργασιών
- Συστήματα αλληλεπίδρασης ανθρώπου υπολογιστή
- Δημιουργία βάσεων δεδομένων εικόνων για αναζήτηση με βάση εικόνες
- Προηγμένα συστήματα ασφαλείας που στηρίζονται στην αναγνώριση χαρακτηριστικών του ανθρώπινου ματιού (ίριδα και αμφιβληστροειδής)

1.2 Προβλήματα γραφημάτων

Τα τελευταία χρόνια έχει ξεκινήσει μια προσπάθεια συνδυασμού 2 φαινομενικά διαφορετικών επιστημονικών κλάδων, αυτών της Θεωρίας Γραφημάτων και της Όρασης Υπολογιστών. Οι γράφοι είναι ένα πολύ ισχυρό εργαλείο το οποίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη μοντελοποίηση πολλών τύπων δεδομένων, από χωρικά αφηρημένες έννοιες όπως είναι για παράδειγμα τα κοινωνικά δίκτυα μέχρι και γεωγραφικά και γενικά δεδομένα στα οποία οι θέσεις των κορυφών του γράφου στο επίπεδο ή στο χώρο είναι αυστηρώς προσδιορισμένες από πριν.

Με βάση το σκεπτικό αυτό κάθε ψηφιακή εικόνα μπορεί να θεωρηθεί σαν ένας γράφος με τα pixels της εικόνας να είναι οι κορυφές του γράφου και οι ακμές του να καθορίζονται από τη συνεκτικότητα που επιβάλλουμε. Δηλαδή στην περίπτωση της κλασσικής 4-συνεκτικότητας κάθε κορυφή του γράφου (pixel) συνδέεται με τις 4 γειτονικές της που βρίσκονται (πάνω κάτω αριστερά και δεξιά αυτής, σχηματίζοντας ένα κανονικό πλέγμα (regular grid). Στην περίπτωση της 8-συνεκτικότητας κάθε κορυφή συνδέεται επιπλέον με τις 4 διαγώνιες γύρω από αυτήν, δημιουργώντας έναν πιο σύνθετο σε δομή γράφομα (βλ. σχήμα 1.1). Επομένως πολλές από τις μεθόδους που έχουν αναπτυχθεί στην Όραση Υπολογιστών μπορούν να θεωρηθούν ότι εφαρμόζονται στους παραπάνω ειδικής μορφής γράφους.



Σχήμα 1.1: Σχηματισμός γράφων από εικόνες

Εχμεταλλευόμενοι το γεγονός αυτό, τέθηκε το εξής ερώτημα: *Μπορούν οι μέθοδοι αυτές να τροποποιηθούν κατάλληλα ώστε να εφαρμόζονται σε πιο γενικού τύπου γράφους;* Σε πολλές περιπτώσεις αυτό είναι εφικτό. Ένα από τα πιο σημαντικά προβλήματα που μελετήθηκε ήταν το πρόβλημα της κατάτμησης δεδομένων πάνω σε γράφους. Το πρόβλημα αυτό είναι πολύ πιο γενικό και δεν περιορίζεται στα πλαίσια του αντικείμενου της Όρασης Υπολογιστών. Η Όραση Υπολογιστών όμως μπορεί να δώσει το ερέθισμα μέσα από τις αποτελεσματικές μεθόδους που έχουν αναπτυχθεί, έτσι ώστε να προσπαθήσει κανείς να εφαρμόσει τις ιδέες αυτές πάνω σε πιο αυθαίρετες δομές όπως αυτές των γράφων.

1.3 Αντικείμενο και διάρθρωση διπλωματικής

Η παρούσα διπλωματική επικεντρώνεται στη μελέτη της μεθόδου των Γεωδαιτικών Ενεργών Καμπυλών πάνω σε γράφους. Οι Γεωδαιτικές Ενεργές Καμπύλες¹ έχουν εφαρμοστεί με επιτυχία για την αναγνώριση αντικειμένων σε εικόνες. Το πρόβλημα της εύρωστης αποτελεσματικής προσαρμογής της μεθόδου σε πιο γενικά γραφήματα από τις εικόνες παραμένει ακόμα ανοιχτό. Έχουν αναπτυχθεί διάφορες προσεγγίσεις οι οποίες έδωσαν πολύ καλά αποτελέσματα ([12],[30],[24]) σε γράφους αυθαίρετης δομής. Στην παρούσα εργασία επιχειρήθηκε μια διαφορετική προσέγγιση χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων (για μια λεπτομερή περιγραφή της μεθόδου παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο [18]). Η μέθοδος αυτή για την επίλυση προβλημάτων Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων έχει εφαρμοστεί με επιτυχία μεταξύ άλλων σε προβλήματα Ηλεκτρομαγνητισμού, Ρευστοδυναμικής κλπ. Έχει το πλεονέκτημα ότι μπορεί να χειριστεί πολύπλοκες γεωμετρίες και οριακές συνθήκες με κομψό και συμπαγή μαθηματικό τρόπο.

Στο Κεφάλαιο 2 της εργασίας παρουσιάζεται το πρόβλημα των Γεωδαιτι-

¹Μερικές φορές θα αναφέρονται και ως GAC για χάριν συντομίας

κών Ενεργών Καμπυλών και η θεωρητική θεμελίωσή του και είναι απαραίτητο για την κατανόηση βασικών εννοιών που αναπτύσσονται στη συνέχεια. Στο Κεφάλαιο 3 γίνεται μελέτη και συνοπτική ανάλυση των προηγούμενων μεθόδων που αναπτύχθηκαν για το πρόβλημα των GAC σε γράφους και αναλύονται τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματά τους. Στο Κεφάλαιο 4 παρουσιάζεται αναλυτικά η προτεινόμενη μέθοδος και το μαθηματικό της υπόβαθρο. Στο Κεφάλαιο 5 γίνεται μια πρώτη πειραματική αξιολόγηση της προτεινόμενης μεθόδου ενώ στο Κεφάλαιο 6 συγκρίνεται η μέθοδος με άλλες προηγούμενες. Στο Κεφάλαιο 7 παρουσιάζονται μερικές ενδεικτικές εφαρμογές ενώ στο τελευταίο κεφάλαιο γίνεται μια συνολική κριτική της μεθόδου και διερευνώνται πιθανές μελλοντικές κατευθύνσεις της έρευνας. Τέλος, στο παράρτημα γίνεται συνοπτική αναφορά σε μαθηματικές έννοιες που χρειάζονται για την ακριβή θεμελίωση της μεθόδου Πεπερασμένων Στοιχείων, η οποίες θεωρήθηκε σκόπιμο να παραλειφθούν από το κύριο σώμα της εργασίας.

Κεφάλαιο 2

Το πρόβλημα των Γεωδαιτικών Ενεργών Καμπυλών

2.1 Εισαγωγή

Οι ενεργές καμπύλες, δηλαδή καμπύλες που εξελίσσονται με το χρόνο στο χώρο μιας εικόνας έχουν χρησιμοποιηθεί αρκετά στον τομέα της Όρασης Υπολογιστών. Μια συνήθης εφαρμογή τους είναι η ανίχνευση αντικειμένων πάνω σε εικόνες. Οι ενεργές καμπύλες προκύπτουν ως λύσεις προβλημάτων ελαχιστοποίησης συναρτησιακών που σχετίζονται με τη μορφή της καμπύλης και της εικόνας στο χώρο της οποίας εξελίσσονται. Αυτό που προσπαθούν να επιτύχουν είναι να διαχωρίσουν αντικείμενα από το περιβάλλον τους, με την εξέλιξη της καμπύλης να σταματά στα όρια των αντικειμένων.

Έχουν κατά καιρούς προταθεί αρκετά μοντέλα ενεργών καμπυλών, όπως τα κλασσικά “snakes” (βλ. [19]) κλπ. Τα απλοϊκά αρχικά αυτά μοντέλα εξελίχθηκαν και βελτιώθηκαν με την πάροδο του χρόνου προκειμένου να εξαλειφθούν οι διάφορες αδυναμίες τους. Αρχικά οι μέθοδοι που εφαρμόστηκαν επιχειρούσαν την ελαχιστοποίηση συναρτησιακών μεταξύ διαδοχικών χρονικών βημάτων κάτι το οποίο αφ’ ενός ήταν ιδιαίτερα χρονοβόρο και αφ’ ετέρου παρουσίαζε το σημαντικό μειονέκτημα ότι δε μπορούσε να χειριστεί τοπολογικές αλλαγές στην καμπύλη, για παράδειγμα να χωριστεί σε 2 ή περισσότερες ανεξάρτητες καμπύλες στην περίπτωση που υπάρχουν περισσότερα του ενός αντικείμενα προς αναγνώριση. Τα προβλήματα αυτά αντιμετωπίστηκαν σε ένα μεγάλο μέρος χρησιμοποιώντας γνώσεις από το Λογισμό Μεταβολών που επέτρεψαν μια διαφορετική προσέγγιση στο πρόβλημα η οποία έδωσε ώθηση για την ανάπτυξη του τομέα αυτού. Στη συνέχεια του κεφαλαίου αυτού θα παρουσιαστούν μέθοδοι με τις οποίες η εξέλιξη της καμπύλης μπορεί να μοντελοποιηθεί με μια διαφορική εξίσωση η οποία επιτρέπει τον χειρισμό τοπολογικών αλλαγών στην καμπύλη.

2.2 Διατύπωση του προβλήματος

Οι Γεωδαιτικές Ενεργές Καμπύλης (θα αναφέρονται και ως GAC εφεξής) αναπτύχθηκαν αρχικά από την ομάδα των Caselles, Kimmel και Sapiro [6] συνδυάζοντας ιδέες από ελαχιστοποίηση συναρτησιακών και εξέλιξη καμπυλών με επιπεδοσύνολα. Με το μοντέλο αυτό εξέλιξαν τις ήδη υπάρχουσες μεθόδους και αντιμετώπισαν σε μεγάλο μέρος τα μειονεκτήματά τους. Παραβλέποντας προς στιγμήν τον τρόπο που οδήγησε στην τελική μορφή του προς ελαχιστοποίηση συναρτησιακού (παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο [6] για περισσότερες λεπτομέρειες) το πρόβλημα τέθηκε ως εξής:

Πρόβλημα 1. Έστω \mathcal{C} το σύνολο των καμπυλών στο χώρο μιας διδιάστατης εικόνας $I(x, y)$. Να βρεθεί η καμπύλη $\vec{C} \in \mathcal{C}$ με $\vec{C}(p) = (x(p), y(p)) \in \mathbb{R}^2$ η οποία ελαχιστοποιεί το συναρτησιακό

$$J(\vec{C}) = \int_0^1 g(\|\nabla I(\vec{C}(p))\|) \|\vec{C}(p)\| dp \quad (2.1)$$

Στην εργασία αυτή θα θεωρήσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι ο χώρος κάθε διδιάστατης εικόνας είναι το μοναδιαίο τετράγωνο, $\Omega = [0, 1]^2$. Προφανώς κάθε εικόνα μετά από κατάλληλη κλιμάκωση μπορεί να περιοριστεί στο χωρίο αυτό. Σε κάποιες περιπτώσεις που αυτό όμως θα αναφέρεται ρητά το χωρίο θα είναι κάποιο κυρτό υποσύνολο του μοναδιαίου τετραγώνου (είτε ορθογώνιο είτε ένα πιο γενικό κυρτό πολύγωνο).

Το προς ελαχιστοποίηση συναρτησιακό ουσιαστικά εκφράζει το μήκος της καμπύλης σε ένα χώρο Riemann με τη μετρική στο χώρο αυτό να καθορίζεται από την εικόνα I μέσω της συνάρτησης g . Οπότε το πρόβλημα που πρέπει να επιλυθεί είναι το πολύ γνωστό από το Λογισμό Μεταβολών γεωδαιτικό πρόβλημα σε ένα μη-Ευκλείδειο χώρο. Ο όρος γεωδαιτικό πρόβλημα είναι το πρόβλημα εύρεσης της καμπύλης με το ελάχιστο μήκος όπου το μήκος αποτελεί μια γενίκευση της κλασσικής έννοιας και που εξαρτάται από τη μετρική του χώρου. Με βάση τα προηγούμενα μπορεί να γίνει μια άμεση σύγκριση με τη μέθοδο των graph cuts ([4])

Η συνάρτηση g που εξαρτάται από την εικόνα είναι μια συνάρτηση με τις ιδιότητες

$$\begin{aligned} g(x) &\rightarrow 1, \text{ όταν } x \rightarrow 0 \\ g(x) &\rightarrow 0, n \text{ όταν } x \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Συχνά αναφέρεται ως edge-stopping function (συνάρτηση τερματισμού στις ακμές). Ο λόγος πίσω από αυτή την ονομασία είναι σχετικά προφανής. Σαν όρισμα της g χρησιμοποιείται η κλίση της συνάρτησης της εικόνας I . Έτσι, στα σημεία που υπάρχουν ισχυρές ακμές, δηλαδή το $\|\nabla I\|$ είναι μεγάλο, η g παίρνει τιμές κοντά στο 0 ενώ εκεί που η εικόνα είναι ομαλή ($\|\nabla I\| \approx 0$) παίρνει τιμές κοντά στο 1. Η χρησιμότητα της θα φανεί στη συνέχεια. Μια τυπική μορφή της συνάρτησης αυτής που θα χρησιμοποιηθεί και στη μελέτη

στα επόμενα κεφάλαια είναι η

$$g(x) = \frac{1}{1 + \lambda x^2}$$

για κάποια θετική σταθερά λ .

2.3 Εξαγωγή της εξίσωσης εξέλιξης της καμπύλης

Στην Ευκλείδεια περίπτωση γνωρίζουμε ότι η “συντομότερη” καμπύλη μεταξύ 2 σημείων είναι ευθεία. Στην περίπτωση που μελετάμε όμως εμείς κάτι τέτοιο δεν ισχύει εν γένει. Για να υπολογίσουμε την καμπύλη που ελαχιστοποιεί την (2.1) χρειάζεται να χρησιμοποιήσουμε ιδέες από Λογισμό Μεταβολών και πιο συγκεκριμένα τις εξισώσεις Euler-Lagrange ακολουθώντας τη διαδικασία που περιγράφεται στο [29]. Αν θέσουμε $u(p) = \|\vec{C}'(p)\|$ όπου $\{\vec{C}'(p) = (x(p), y(p))\}$ το διάνυσμα της ταχύτητας της καμπύλης και $F(p, x, y, x', y') = g(\|\nabla I(\vec{C}(p))\|)\|\vec{C}'(p)\|$ παίρνουμε:

$$F_x = g_x u, F_y = g_y u, F_{x'} = g \frac{x'}{u}, F_{y'} = g \frac{y'}{u}$$

Η εξίσωση Euler-Lagrange είναι

$$\frac{d}{dp} F_{x'} = F_x, \frac{d}{dp} F_{y'} = F_y$$

Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω μετά από λίγους αλγεβρικούς χειρισμούς βρίσκουμε ότι η καμπύλη \vec{C} πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση

$$\left(g\kappa + \nabla g \cdot \vec{N}_o \right) \vec{N}_o = - \left(g\kappa - \nabla g \cdot \vec{N}_i \right) \vec{N}_i = \mathbf{0} \quad (2.2)$$

όπου με κ συμβολίζουμε την καμπυλότητα της καμπύλης και με \vec{N}_o και \vec{N}_i το εξωτερικό και το εσωτερικό κάθετο διάνυσμα σε κάθε σημείο της αντίστοιχα. Επειδή η εξίσωση αυτή εν γένει δε μπορεί να επιλυθεί θα χρησιμοποιήσουμε την τεχνική που είναι γνωστή σαν gradient descent. Συγκεκριμένα εισάγουμε μια τεχνητή παράμετρο t η οποία αντιστοιχεί σε κάποια “χρονική” μεταβλητή και ξεκινώντας από μια αρχική καμπύλη την εξελίσσουμε με βάση την εξίσωση

$$\frac{\partial \vec{C}}{\partial t} = - \left(g\kappa + \nabla g \cdot \vec{N}_o \right) \vec{N}_o \quad (2.3)$$

Μετά από την παρέλευση ενός αρχούντως μεγάλου χρονικού διαστήματος αναμένουμε η καμπύλη να προσεγγίζει μια σταθερή κατάσταση (steady-state solution), δηλαδή $\frac{\partial \vec{C}}{\partial t} = \mathbf{0}$ και τότε και το δεύτερο μέλος της (2.3) θα ισούται με το μηδενικό διάνυσμα οπότε θα ικανοποιείται η εξίσωση Euler-Lagrange (2.2).

2.4 Μια εναλλακτική θεώρηση: Χρήση επιπεδοσυνόλων

Το παραπάνω μοντέλο έχει αφ' ενός το μειονέκτημα ότι απαιτεί την επίλυση ενός συστήματος διαφορικών εξισώσεων, αφού η καμπύλη \vec{C} περιγράφεται από τις 2 συντεταγμένες της στο επίπεδο και αφ' ετέρου δεν είναι εύκολο να χειριστούν οι διάφορες τοπολογικές αλλαγές στην καμπύλη όπως για παράδειγμα να γίνει διαχωρισμός της σε 2 ή περισσότερες καμπύλες όπως προαναφέρθηκε. Αντ' αυτού προτάθηκε στα [22] και [25] μια νέα αποτελεσματική προσέγγιση η οποία κάνει χρήση των επιπεδοσυνόλων. Αν $u(x, y)$ είναι μια βαθμωτή συνάρτηση ορισμένη στο επίπεδο τότε ορίζουμε ως επιπεδοσύνολο σε επίπεδο c (συχνά αναφέρεται και ως ισούψής καμπύλη) το σύνολο των σημείων στα οποία η u λαμβάνει την τιμή c . Πιο φορμαλιστικά,

$$L_c(u) = \{(x, y) : u(x, y) = c\}$$

Θεωρούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας από εδώ και έπειτα ότι λαμβάνουμε το επιπεδοσύνολο στο μηδενικό επίπεδο (δηλαδή $c = 0$). Έχοντας επιλέξει μια αρχική καμπύλη \vec{C}_0 μπορούμε να τη μοντελοποιήσουμε με χρήση επιπεδοσυνόλων ορίζοντας τη συνάρτηση u_0 ως την προσημασμένη συνάρτηση απόστασης από την καμπύλη, δηλαδή

$$u_0(x, y) = \begin{cases} 0, & (x, y) \in \vec{C}_0 \\ - \inf_{(a,b) \in \vec{C}_0} \|(x-a, y-b)\|, & (x, y) \in \text{interior}(\vec{C}_0) \\ \inf_{(a,b) \in \vec{C}_0} \|(x-a, y-b)\|, & (x, y) \in \text{exterior}(\vec{C}_0) \end{cases} \quad (2.4)$$

Σε κάθε χρονική στιγμή η ζητούμενη καμπύλη $\vec{C}(t)$ ισούται με το μηδενικό επιπεδοσύνολο της συνάρτησης $u(x, y, t)$ με $u(x, y, 0) = u_0(x, y)$. Είναι δηλαδή

$$\vec{C}(t) = \{(x, y) : u(x, y, t) = 0\}$$

Εφαρμόζοντας τις ιδέες που μόλις αναφέρθηκαν, μπορεί ναδειχθεί ότι η συνάρτηση u πρέπει να εξελίσσεται με βάση την εξίσωση $u_t = V_i \|\nabla u\|$ όπου V_i η εσωτερική κάθετη ταχύτητα στην καμπύλη, δηλαδή $V_i = g\kappa - \nabla g \cdot \vec{N}_i$. Μπορεί ναδειχθεί επίσης και ότι το εσωτερικό κάθετο διάνυσμα και η καμπυλότητα της καμπύλης μπορούν να εκφραστούν συναρτήσει της u ως $\vec{N}_i = -\nabla u / \|\nabla u\|$ και $\kappa = \text{div}(\nabla u / \|\nabla u\|)$ αντίστοιχα. Χρησιμοποιώντας όλες τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει τελικά ότι η συνάρτηση u πρέπει να εξελίσσεται με βάση τη μερική διαφορική εξίσωση

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \text{div} \left(g(I) \frac{\nabla u}{\|\nabla u\|} \right) \|\nabla u\|$$

Για πρακτικούς λόγους συχνά προσθέτουμε κι έναν επιπλέον όρο στην εξίσωση που αντιστοιχεί σε μια δύναμη μπαλονιού πολλαπλασιασμένη επί τη

συνάρτηση g . Αυτή είναι μια δύναμη της μορφής $g\beta\vec{N}_i$ όπου στην περίπτωση μας που έχουμε θεωρήσει $u < 0$ στο εσωτερικό το β είναι μια θετική σταθερά. Η εξίσωση της εξέλιξης της καμπύλης γίνεται λοιπόν

$$\frac{\partial \vec{C}}{\partial t} = - \left(g\beta + g\kappa - \nabla g \cdot \vec{N}_i \right) \vec{N}_i$$

Στην παραπάνω εξίσωση παρατηρούμε 3 όρους. Ο πρώτος αντιστοιχεί σε μια δύναμη μπαλονιού που έχει την τάση να “τραβά” την καμπύλη προς τα μέσα, σταματώντας όμως στα σημεία που η κλίση της εικόνας είναι μεγάλη όπως για παράδειγμα στα όρια μεταξύ αντικειμένων. Ο δεύτερος όρος αντιστοιχεί στη δύναμη καμπυλότητας η οποία οδηγεί κι αυτή σε εξομάλυνση της καμπύλης σταματώντας όμως όπως και η προηγούμενη σε ισχυρές ακμές. Τέλος ο τρίτος όρος λειτουργεί σταθεροποιητικά έλκοντας την καμπύλη στα σημεία όπου υπάρχουν ισχυρές ακμές. Η τιμή της σταθεράς β επιλέγεται έτσι ώστε η ποσότητα εντός της παρένθεσης να παραμένει θετική. Τελικά, ξαναγράφοντας την τελευταία σχέση χρησιμοποιώντας επιπεδοσύνολα, η διαφορική εξίσωση που μοντελοποιεί την εξέλιξη της συνάρτησης u είναι η

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left(\operatorname{div} \left(g(I) \frac{\nabla u}{\|\nabla u\|} \right) + g\beta \right) \|\nabla u\| \quad (2.5)$$

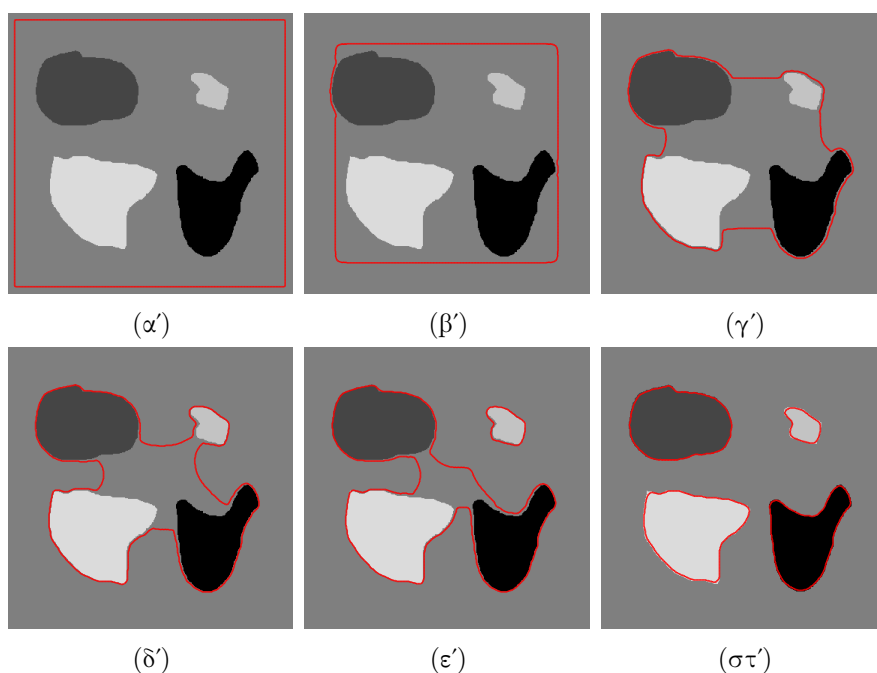
Η εξίσωση αυτή θα είναι αυτή που θα μας απασχολήσει στα επόμενα κεφάλαια της εργασίας.

2.5 Ένα οπτικό παράδειγμα

Στο σημείο αυτό θα παρουσιάσουμε με ένα οπτικό παράδειγμα τη μέθοδο των Γεωδαιτικών Ενεργών Καμπυλών. Για το σκοπό αυτό θεωρούμε μια εικόνα διαστάσεων 375×380 pixels με 4 αντικείμενα στο εσωτερικό της τα οποία καλούμαστε να αναγνωρίσουμε. Στο σχήμα 2.1 φαίνεται η εξέλιξη των καμπυλών πάνω στην εικόνα καθώς και το αποτέλεσμα ανίχνευσης. Παρατηρούμε ότι η καμπύλη αρχικά συρρικνώνεται με τρόπο ομοιόμορφο, στη συνέχεια η εξέλιξη σταματά κοντά στα όρια των αντικειμένων και έπειτα διαχωρίζεται σε επί μέρους ανεξάρτητες καμπύλες που ανιχνεύουν κάθε ένα από τα αντικείμενα.

2.6 Ευστάθεια και μοναδικότητα της λύσης

Ένα τελευταίο αλλά πολύ σημαντικό σημείο που δεν εξετάσαμε μέχρι στιγμής είναι η ύπαρξη και η μοναδικότητα της λύσης του προβλήματος (2.5). Είναι ένα πολύ δύσκολο πρόβλημα καθώς πρόκειται για μια μη γραμμική μερική διαφορική εξίσωση, ένας τομέας που άρχισε να αναπτύσσεται και να μελετάται τις τελευταίες δεκαετίες λόγω της χρησιμότητας των εξισώσεων αυτών σε πρακτικά προβλήματα.



Σχήμα 2.1: Παράδειγμα χρήσης της μεθόδου G.A.C. σε εικόνα διαστάσεων 375×380 pixels

Ένα επιπλέον πρόβλημα που ανακύπτει είναι ότι μπορεί η λύση ενός μη γραμμικού προβλήματος (αν υπάρχει) να είναι εν γένει μη ομαλή, πράγμα που συμβαίνει και στην περίπτωση μας. Η συνάρτηση u καθώς εξελίσσεται σταματά σε όρια αντικειμένων με αποτέλεσμα να δημιουργούνται απότομες μεταβολές ή και ασυνέχειες (shocks). Στα σημεία αυτά προφανώς η παράγωγος δεν ορίζεται οπότε η διαφορική εξίσωση δεν έχει κάποιο φυσικό νόημα. Η u δηλαδή δεν μπορεί να αποτελεί πάντοτε μια κλασσική λύση της διαφορικής εξίσωσης. Χρειάζεται να μετασχηματίσουμε το πρόβλημα σε μια πιο γενική ή αφηρημένη μορφή ώστε να αντιμετωπίζονται αυτές οι παθογένειες και να απαιτήσουμε η u να είναι λύση αυτού ακριβώς του προβλήματος. Η u τότε θα ονομάζεται ασθενής λύση του (2.5). Προφανώς κάθε κλασσική λύση θα αποτελεί και ασθενή λύση, με το αντίστροφο να μην ισχύει κατ' ανάγκη. Στη θεωρία των μη γραμμικών μερικών διαφορικών εξισώσεων μια μορφή ασθενούς λύσης που χρησιμοποιείται είναι οι λεγόμενες λύσεις ιξώδους (viscosity solutions). Για περισσότερες λεπτομέρειες ο αναγνώστης καλείται να ανατρέξει στη σχετική βιβλιογραφία.

Μπορούμε τώρα να διατυπώσουμε το θεώρημα που αποδείχθηκε στο [6] και αφορά τη λύση του προβλήματος (2.5).

Θεώρημα 1. Έστω $W^{1,\infty}$ ο χώρος των φραγμένων Lipschitz συναρτήσεων στο \mathbb{R}^2 . Υποθέτουμε ότι για τη g ισχύουν οι ιδιότητες $g \geq 0$, $\sup_{x \in \mathbb{R}^2} \|\nabla g^{1/2}(x)\| < \infty$ και $\sup_{x \in \mathbb{R}^2} |\Delta g(x)| < \infty$. Έστω ακόμα ότι για την αρχική συνθήκη u_0 του προβλήματος ισχύει $u_0 \in BUC(\mathbb{R}^2) \cap W^{1,\infty}$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

- Η εξίσωση (2.5) έχει μοναδική λύση ιξώδους

$$u \in C([0, \infty) \times \mathbb{R}^2) \cap L^\infty(0, T; W^{1, \infty})$$

για όλα τα $T < \infty$. Επίσης η u ικανοποιεί τη σχέση

$$\inf u_0 \leq u(t, x) \leq \sup u_0.$$

- Έστω $v \in C([0, \infty) \times \mathbb{R}^2)$ η λύση ιξώδους του προβλήματος (2.5) που αντιστοιχεί στην αρχική συνθήκη $v_0 \in C(\mathbb{R}^2) \cap W^{1, \infty}$. Τότε

$$\|u(t, \cdot) - v(t, \cdot)\|_\infty \leq \|u_0 - v_0\|_\infty.$$

Δηλαδή η λύση του προβλήματος είναι ευσταθής.

Μια τελευταία παρατήρηση που πρέπει να επισημανθεί είναι ότι το πρόβλημα (2.5) πρέπει να λυθεί με μηδενικές συνοριακές συνθήκες Neumann στο σύνορο, πράγμα που είναι και απαραίτητο για να ισχύει το προηγούμενο θεώρημα. Δηλαδή το πρόβλημα των γεωδαιτικών ενεργών καμπυλών μπορεί να διατυπωθεί σε συμπαγή μορφή ως εξής

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \left(\operatorname{div} \left(g(I) \frac{\nabla u}{\|\nabla u\|} \right) + g\beta \right) \|\nabla u\| \\ \nabla u \cdot \mathbf{n} &= 0 \text{ στο σύνορο } \Gamma = \partial\Omega \\ u(0, x, y) &= u_0(x, y) \end{aligned}$$

με την u_0 να αποτελεί την προσημασμένη συνάρτηση απόστασης από την αρχική καμπύλη (2.4).

Στα επόμενα κεφάλαια θα δούμε πως μπορούμε να προσεγγίσουμε τη λύση του προβλήματος αυτού πάνω σε γράφους όπου έχουμε στη διάθεση μας αντί για το μοναδιαίο τετράγωνο ένα πεπερασμένο σύνολο σημείων του και να μελετήσουμε τις δυσκολίες που καλούμαστε να αντιμετωπίσουμε.

Κεφάλαιο 3

Γεωδαιτικές Ενεργές Καμπύλες σε Γράφους

3.1 Μέθοδοι γράφων στην Όραση Υπολογιστών

Αναφέρθηκε σε προηγούμενο κεφάλαιο ότι ένα σημαντικό κομμάτι της Όρασης Υπολογιστών μελετά μεθόδους γράφων. Υπάρχει μια πληθώρα μεθόδων που έχουν αναπτυχθεί για το σκοπό αυτό. Μερικές από τις πρώτες εργασίες που δημοσιεύτηκαν πάνω στο θέμα αυτό ασχολήθηκαν με το κομμάτι της Μαθηματικής Μορφολογίας (βλ. [27],[17],[10]). Οι ερευνητές αυτοί επιχείρησαν να μεταφέρουν τις ιδέες της Μαθηματικής Μορφολογίας σε γράφους και να γενικεύσουν τις έννοιες τελεστών όπως είναι το γνωστό dilation, erosion, opening, closing αλλά και άλλους πιο σύνθετους. Άλλες ομάδες ερευνητών επιχείρησαν να γενικεύσουν τις έννοιες των διαφορικών τελεστών και εξισώσεων πάνω σε γράφους είτε σε καθαρά θεωρητικό επίπεδο (βλ. [2]) είτε εφαρμόζοντας επιπλέον τις ιδέες τους για την επεξεργασία και βελτίωση ποιότητας και κατάτμηση εικόνων (βλ. [26], [3], [13]). Η καινοτομία που εισήχθη και έδωσε βελτιωμένα αποτελέσματα σε σχέση με τις κλασικές μεθόδους είναι ότι η “εγγύτητα” 2 pixels δεν εξαρτάται μόνο από τη γεωμετρική τους θέση στο χώρο αλλά και από ένα μέτρο χρωματικής διαφοράς.

Η παρούσα εργασία επικεντρώνεται στις μεθόδους κατάτμησης πάνω σε γράφους. Μια δημοφιλής τεχνική η οποία χρησιμοποιείται σε εικόνες είναι το watershed. Σε μια σειρά άρθρων επιχειρήθηκε η δημιουργία ενός αποτελεσματικού πλαισίου για την εφαρμογή του watershed σε γράφους (βλ. [8], [9], [7]) και έγινε σύνδεση της μεθόδου watershed με αυτή των graph-cuts. Η μέθοδος των graph-cuts από την άλλη είναι μια από τις πιο ευρέως διαδεδομένες και αποτελεσματικές μεθόδους κατάτμησης σε γράφους. Στα [4] και [5] παρουσιάστηκε η σύνδεση των graph-cuts με το γεωδαιτικό πρόβλημα και τη μέθοδο GAC και αναπτύχθηκαν αποδοτικοί αλγόριθμοι για την επίλυση του θεμελιώδους προβλήματος με το οποίο συνδέονται, το πρόβλημα max-flow/min-cut. Παράλληλα, μια άλλη μέθοδος που προτάθηκε στο [16] βασίζεται στον αλγόριθμο

του τυχαίου περιπατητή (random walker) και παρουσιάζει αρκετό ενδιαφέρον.

Για το τέλος αφήσαμε τις μεθόδους που βασίζονται στις γεωδαιτικές ενεργές καμπύλες. Οι πρώτες ιδέες που μετέφεραν το πρόβλημα αυτό σε γράφους αυθαίρετης δομής διατυπώθηκαν στο [12] και στη συνέχεια βελτιώθηκαν περαιτέρω στο [30]. Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιαστούν με περισσότερη λεπτομέρεια και θα αναλυθούν τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματά τους καθώς είναι η πιο συγγενής οικογένεια μεθόδων με αυτήν που προτείνεται στην παρούσα εργασία.

3.2 Στοιχεία Θεωρίας Γραφημάτων

3.2.1 Ορισμοί

Πριν προχωρήσουμε στην παρουσίαση των 2 προαναφερθεισών μεθόδων κρίνεται σκόπιμο να γίνει μια συνοπτική εισαγωγή σε βασικές έννοιες από τη Θεωρία Γραφημάτων έτσι ώστε ο αναγνώστης να αποκτήσει οικειότητα με την ορολογία που θα χρησιμοποιηθεί στη συνέχεια της εργασίας. Για περισσότερες λεπτομέρειες και αποδείξεις των διάφορων αποτελεσμάτων παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο [11].

Ένα *γράφημα* ή *γράφος* G είναι ένα διατεταγμένο ζεύγος δύο συνόλων V και E τα οποία είναι ξένα μεταξύ τους. Τα στοιχεία του συνόλου V καλούνται *κορυφές* του γράφου ενώ τα στοιχεία του συνόλου E το οποίο είναι υποσύνολο του συνόλου των μη διατεταγμένων ζευγών του V καλούνται *ακμές* του γράφου. Το γράφημα G συμβολίζεται και ως $G(V, E)$.

Ο πληθάνριθμος του συνόλου V δηλαδή το $|V| = |V(G)|$ ονομάζεται *τάξη* του γραφήματος ενώ ο αριθμός $|E| = |E(G)|$, δηλαδή το πλήθος των ακμών ονομάζεται *μέγεθος* του γραφήματος.

Αν αντιστοιχίσουμε σε κάθε ακμή του γράφου έναν πραγματικό αριθμό w που τον ονομάζουμε *βάρος* της ακμής τότε το γράφημα που προκύπτει ονομάζεται *γράφημα με βάρη*. Τα βάρη μπορούν π.χ. να περιγράφουν κάποιο μέτρο απόστασης μεταξύ των κορυφών ή το κόστος μετάβασης από μια κορυφή σε μια άλλη. Σημειώνεται ότι η απλή περίπτωση που δεν έχουμε βάρη μπορεί να αναχθεί στη δεύτερη θεωρώντας απλά ότι όλα τα βάρη ισούνται με τη μονάδα.

Δύο κορυφές $u, v \in V$ καλούνται *γειτονικές* αν η ακμή $uv \in E$. Ονομάζουμε *γειτονιά* μιας κορυφής $u \in V$ το σύνολο $N_u = \{v \in V : uv \in E\}$, δηλαδή το σύνολο που περιέχει όλες τις κορυφές που είναι γειτονικές στη u . Στην ανάλυση που θα κάνουμε υποθέτουμε ότι σε ένα γράφημα δεν υπάρχουν ακμές από μία κορυφή στον εαυτό της. Τα γραφήματα αυτά ονομάζονται *απλά*.

Ορίζουμε ως *βαθμό* μιας κορυφής $d(u)$ το μέγεθος της γειτονιάς της, δηλαδή $d(u) = |N(u)|$. Ορίζουμε επίσης ως *ελάχιστο* και *μέγιστο* βαθμό του γραφήματος G τις ποσότητες $\delta(G) = \min_{u \in V} d(u)$ και $\Delta(G) = \max_{u \in V} d(u)$.

Ένα γράφημα H καλείται *υπογράφημα* του γραφήματος G αν $V(H) \subseteq V(G)$ και $E(H) \subseteq E(G)$. Αν επιπλέον το H περιέχει όλες τις ακμές μεταξύ

των κορυφών του H οι οποίες περιλαμβάνονται στο $E(G)$ τότε το H καλείται επαγόμενο υπογράφημα του G .

Ονομάζουμε μονοπάτι σε ένα γράφο μια ακολουθία κορυφών (u_1, u_2, \dots, u_n) στην οποία κάθε κορυφή εμφανίζεται μία μόνο φορά και επίσης όλες οι διαδοχικές κορυφές συνδέονται με ακμές. Ορίζουμε επίσης ως κύκλο μια ακολουθία κορυφών $(u_1, u_2, \dots, u_n, u_1)$ όπου οι πρώτοι n όροι της ακολουθίας είναι ένα μονοπάτι και επίσης υπάρχει η ακμή $u_n u_1$.

Ένα γράφημα καλείται συνεκτικό αν και μόνο αν για κάθε 2 κορυφές του υπάρχει τουλάχιστον ένα μονοπάτι που τις ενώνει. Συνεκτική συνιστώσα ενός γραφήματος G είναι ένα maximal επαγόμενο υπογράφημα του G το οποίο είναι συνεκτικό. Προφανώς από τον ορισμό ένα συνεκτικό γράφημα αποτελείται από μία συνεκτική συνιστώσα.

Τομή (cut) $C(A, B)$ σε ένα γράφημα όπου είναι μια διαμέριση του σε 2 συνεκτικές συνιστώσες A, B αφαιρώντας τις ακμές μεταξύ των 2 αυτών συνιστωσών. Το σύνολο ακμών της τομής είναι το σύνολο $E_C = \{uv \in E(G) : u \in V(A), v \in V(B)\}$. Σε ένα γράφημα χωρίς βάρη το μέγεθος της τομής είναι ίσο με το πλήθος των ακμών που περιέχει. Σε ένα γράφημα με βάρη αυτό ισούται με το άθροισμα των βαρών που έχουμε αντιστοιχίσει σε κάθε ακμή.

3.2.2 Χρήσιμα γραφήματα

Γεωμετρικός τυχαίος γράφος

Θα μελετήσουμε τους γεωμετρικούς τυχαίους γράφους σε ένα δισδιάστατο χωρίο και συγκεκριμένα στο μοναδιαίο τετράγωνο $S = [0, 1]^2$.

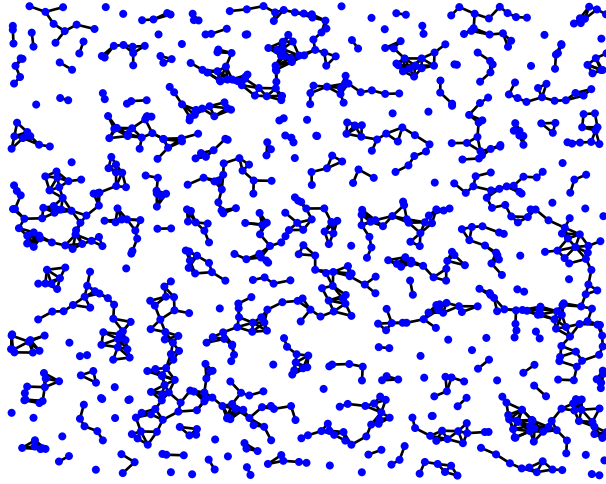
Ο τρόπος κατασκευής τους είναι απλός. Επιλέγουμε αρχικά με τυχαίο τρόπο N το πλήθος σημεία στο S . Ένας δημοφιλής τρόπος για την επιλογή αυτή είναι να πραγματοποιηθεί ανεξάρτητα με βάση την ομοιόμορφη κατανομή στο S . Τα σημεία αυτά αποτελούν το σύνολο κορυφών του γράφου. Στη συνέχεια 2 κορυφές ενώνονται με ακμή αν η Ευκλείδεια απόστασή τους είναι μικρότερη από ρ . Ένας γεωμετρικός τυχαίος γράφος θα συμβολίζεται εφεξής ως $R(N, \rho)$.

Γίνεται εύκολα αντιληπτό ότι η παράμετρος ρ παίζει καθοριστικό ρόλο στη μορφή και τις ιδιότητες του γράφου. Διαισθητικά, κρατώντας σταθερό το πλήθος των κορυφών του γράφου όσο μειώνουμε την παράμετρο απόστασης ρ τόσο πιο “αραιός” είναι ο γράφος με την έννοια ότι λιγότερα σημεία συνδέονται με ακμές. Παράλληλα αυξάνεται και η πιθανότητα ο γράφος να μην είναι συνεκτικός, κάτι που στις εφαρμογές μας είναι ανεπιθύμητο. Αντίθετα όσο αυξάνουμε το ρ τόσο περισσότερες κορυφές συνδέονται μεταξύ τους με ακμή και ο προκύπτων γράφος είναι συνεκτικός με πολύ μεγάλη πιθανότητα. Παρ’ όλα αυτά μπορούμε να πούμε ότι κατά κάποιον τρόπο εκφυλίζεται η έννοια της γειτονιάς, αφού πλέον κορυφές που βρίσκονται σε μεγάλη απόσταση μεταξύ τους καταλήγουν να είναι γειτονικές. Το τελευταίο μπορεί να έχει αρνητική επιδράσεις σε περιπτώσεις όπου θέλουμε να υπολογίσουμε μεγέθη όπως η κλίση μιας

συνάρτησης ορισμένης στις κορυφές του γράφου. Ένα άλλο μειονέκτημα είναι ότι για μεγάλα μεγέθη γειτονιών οι υπολογισμοί που χρειάζεται να γίνουν είναι αρκετά χρονοβόροι. Μια καλή τιμή για την παράμετρο ρ με βάση τους περιορισμούς που διατυπώθηκαν παραπάνω είναι η $\rho = \frac{3}{5}N^{-1/3}$ όπως μελετήθηκε στο [30].

Τέλος όσον αφορά τη σύνδεση με το πλαίσιο που μελετήσαμε στην προηγούμενη ενότητα, μπορούμε να ορίσουμε ως βάρη των ακμών του γράφου το αντίστροφο της ευκλείδειας απόστασης των κορυφών της ακμής, δηλαδή $w_{uv} = \|u - v\|^{-1}$.

Στα σχήματα 3.1-3.3 εικονίζονται μερικοί γεωμετρικοί τυχαίοι γράφοι για διάφορες τιμές των παραμέτρων. Παρατηρώντας τα μπορούμε να επαληθεύ-



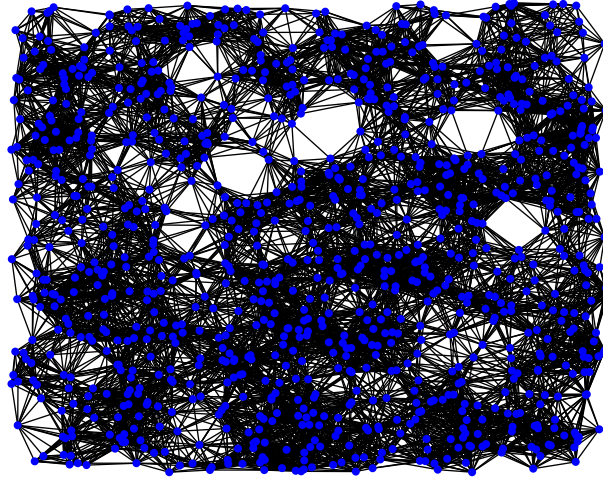
Σχήμα 3.1: Γεωμετρικός γράφος με $N = 1000$ και $\rho = N^{-1/2} \approx 0.0316$

σουμε και εποπτικά ότι στην πρώτη περίπτωση ο γράφος είναι πολύ “αραιός” και μάλιστα δεν είναι συνεκτικός, στη δεύτερη περίπτωση είναι υπερβολικά πυκνός ενώ στην τρίτη περίπτωση επιτυγχάνουμε ένα trade-off μεταξύ των επιθυμητών ιδιοτήτων του γράφου.

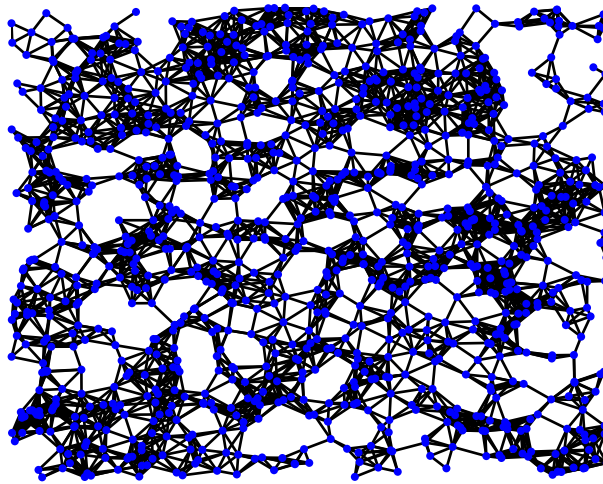
Γράφος Delaunay

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε τους γράφους Delaunay οι οποίοι θα χρησιμοποιηθούν στην προσέγγιση των GAC.

Η ιδέα πίσω από την κατασκευή τους είναι σχετικά απλή. Έστω N σημεία τοποθετημένα στο μοναδιαίο τετράγωνο τα οποία τα ονομάζουμε γεννήτορες. Το διάγραμμα Voronoi των σημείων αυτών είναι μια διαμέριση του μοναδιαίου τετραγώνου σε N περιοχές με βάση κάποια συνάρτηση απόστασης. Συγκεκριμένα σε κάθε σημείο γεννήτορα P_i αντιστοιχούμε μια περιοχή R_i η οποία είναι το σύνολο των σημείων του επιπέδου τα οποία βρίσκονται πλησιέστερα στο σημείο αυτό σε σχέση με τους άλλους γεννήτορες. Δηλαδή αν $\{P_i\}_{i=1}^N$ τα



Σχήμα 3.2: Γεωμετρικός γράφος με $N = 1000$ και $\rho = N^{-1/3} = 0.1$



Σχήμα 3.3: Γεωμετρικός γράφος με $N = 1000$ και $\rho = 3/5 N^{-1/3} = 0.06$

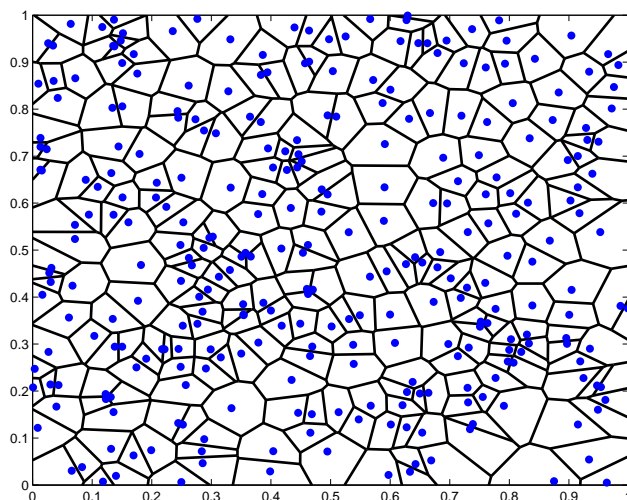
σημεία θα είναι

$$R_i = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|P_i - (x, y)\| < \|P_j - (x, y)\|, \forall j \neq i\}$$

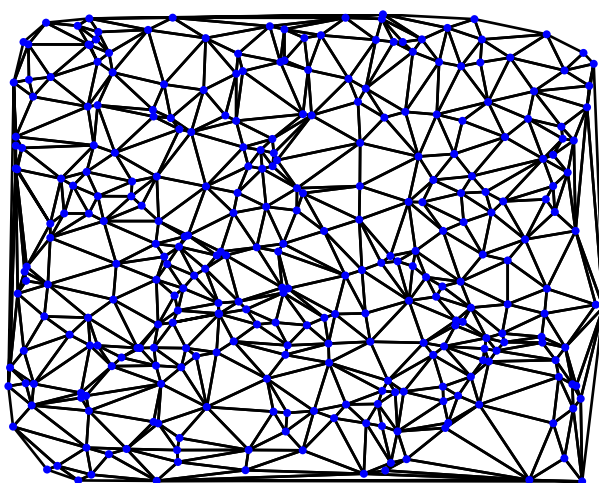
Συνήθως χρησιμοποιούμε την L_2 (ευκλείδεια) απόσταση. Οι περιοχές που προκύπτουν τότε είναι πολυγωνικές. Ο γράφος Delaunay μπορεί να κατασκευαστεί από το διάγραμμα Voronoi επιλέγοντας σαν σύνολο κορυφών του γράφου τα σημεία P_i και ενώνοντας με ακμές όλα τα σημεία P_i, P_j των οποίων οι περιοχές R_i, R_j έχουν κάποια κοινή πλευρά.

Το μόνο που έχουμε αφήσει ανοικτό μέχρι στιγμής είναι ο τρόπος επιλογής των σημείων. Αυτός μπορεί να γίνει είτε με τυχαίο τρόπο όπως στην περίπτωση των γεωμετρικών τυχαίων γράφων είτε με βάση κάποιον από τους αλγορίθμους

που επιτυγχάνουν “καλό” τριγωνισμό ορθογώνιων και εν γένει πολυγωνικών χωρίων. Τα πλεονεκτήματα της δεύτερης περίπτωσης θα αναλυθούν όταν γίνει μελέτη σύγκλισης της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων. Στα σχήματα 3.4 και 3.5 μπορούμε να δούμε τα βήματα κατασκευής ενός γράφου Delaunay όπως περιγράφηκαν παραπάνω.



Σχήμα 3.4: Διάγραμμα Voronoi με 300 σημεία



Σχήμα 3.5: Τριγωνοποίηση Delaunay που αντιστοιχεί στο προηγούμενο διάγραμμα

3.3 Προηγούμενα αποτελέσματα

Στις προηγούμενες εργασίες μελετήθηκαν οι GAC σε γραφήματα και κυρίως στους γεωμετρικούς τυχαίους γράφους. Το κύριο κομμάτι των προσπαθειών επικεντρώθηκε στην αποτελεσματική διακριτοποίηση της εξίσωσης (2.5), κάτι το οποίο αποδείχθηκε ιδιαίτερα απαιτητικό. Όταν τα σημεία είναι τοποθετημένα με τυχαίο τρόπο στο μοναδιαίο τετράγωνο και όχι με τη μορφή ορθογωνίου πλέγματος δεν υπάρχουν προφανείς σχέσεις για την προσέγγιση της κλίσης, της απόκλισης καθώς και των υπόλοιπων διαφορικών τελεστών. Κοιτώντας την (2.5) μπορούμε να δούμε ότι χρειάζεται να βρεθούν αποτελεσματικές και εύρωστες προσεγγίσεις για το μέτρο και την κατεύθυνση της κλίσης βαθμωτών συναρτήσεων καθώς και για την απόκλιση διανυσματικών συναρτήσεων.

3.3.1 Προσέγγιση κλίσης

Μια απλή αλλά αρκετά αποτελεσματική προσέγγιση για το μέτρο της κλίσης της συνάρτησης u στην κορυφή v είναι η σχέση που προτάθηκε στο [12]

$$\|\nabla u(v)\| \approx \max_{w \in N(v)} \frac{u(w) - u(v)}{\|w - v\|}$$

η οποία συγκλίνει στην πραγματική τιμή της κλίσης στο όριο των μεγάλων γράφων [12]. Αν επιπλέον θεωρήσουμε ότι ο γράφος είναι αρκετά ομογενής, δηλαδή οι αποστάσεις μεταξύ των γειτονικών κορυφών είναι περίπου ίσες με d από την προηγούμενη σχέση η κλίση μπορεί να προσεγγιστεί μετά την απλοϊφή της πολλαπλασιαστικής σταθεράς ως

$$\|\nabla u(v)\| \approx \max_{w \in N(v)} \{u(w) - u(v)\} \quad (3.1)$$

Η τελευταία αυτή σχέση είναι αυτή που χρησιμοποιήθηκε τελικά για την εξαγωγή των αποτελεσμάτων. Ένα πλεονέκτημα, πέραν της απλότητάς της είναι ότι μπορεί να σχετιστεί και με ιδέες από τη μαθηματική μορφολογία στο πλαίσιο των γράφων.

Έχοντας τώρα μια καλή προσέγγιση για το μέτρο της κλίσης χρειάζεται να υπολογιστεί και η κατεύθυνσή της. Αυτό είναι ένα αρκετά πιο σύνθετο πρόβλημα και είναι δύσκολο να βρεθεί μια εύρωστη προσέγγιση. Μία από τις επιλογές είναι να θεωρήσουμε σαν κατεύθυνση της κλίσης την κατεύθυνση της ακμής που αντιστοιχεί στη μέγιστη μεταβολή. Αυτή η κάπως απλοϊκή προσέγγιση δε δίνει όμως πάντοτε ικανοποιητικά αποτελέσματα. Μια εναλλακτική θεώρηση είναι η κατεύθυνση να υπολογιστεί σαν ο σταθμισμένος μέσος όρος των κατευθύνσεων των ακμών με βάρη τις αντίστοιχες μεταβολές της συνάρτησης, δηλαδή

$$\frac{\nabla u}{\|\nabla u\|}(v) = \frac{\sum_{w \sim v} (u(w) - u(v)) \mathbf{e}_{vw}}{\|\sum_{w \sim v} (u(w) - u(v)) \mathbf{e}_{vw}\|}$$

Στο [30] προτάθηκε ένας εναλλακτικός τρόπος υπολογισμού της κλίσης ο οποίος βασίζεται σε διακριτοποίηση μιας ολοκληρωτικής σχέσης. Συγκεκριμένα,

$$\nabla u(v) = \frac{\sum_{w \sim v} (u(w) - u(v)) \mathbf{e}_{vw} \Delta \phi_w}{\pi} \quad (3.2)$$

όπου $\Delta \phi_w$ ένας παράγοντας που αναπαριστά το μέγεθος της γωνίας που καταλαμβάνει ο γείτονας w στη γειτονιά της v και που ισούται με την ημιδιαφορά των γωνιών που σχηματίζουν με τον x -άξονα οι επόμενη και η προηγούμενη κορυφή αριθμώντας τις με ανθρωπολογιακή φορά. Η νέα αυτή προσέγγιση πετυχαίνει καλύτερα αποτελέσματα όσον αφορά τον υπολογισμό της κατεύθυνσης της κλίσης αλλά εμφανίζει προβλήματα στην ορθή εκτίμηση του μέτρου της. Εν κατακλείδι μπορούμε να καταλήξουμε στη σχέση (3.1) για το μέτρο της κλίσης και στην (3.2) για την κατεύθυνσή της.

3.3.2 Προσέγγιση απόκλισης-καμπυλότητας

Το επόμενο κομμάτι απαιτεί την εύρεση μιας καλής προσέγγισης για την απόκλιση μιας διανυσματικής συνάρτησης ορισμένης στις κορυφές του γράφου. Οι ιδέες που προτάθηκαν βασίζονται στη διακριτοποίηση της ολοκληρωτικής σχέσης

$$\operatorname{div}(\mathbf{F}(\mathbf{x})) = \lim_{S \rightarrow \{\mathbf{x}\}} \frac{\oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds}{|S|}$$

δηλαδή αν έχουμε μια κλειστή επιφάνεια S που περικλείει το σημείο \mathbf{x} και υπολογίσουμε το λόγο του επικαμπύλιου ολοκληρώματος της \mathbf{F} στο σύνορο της επιφάνειας προς το εμβαδόν της επιφάνειας τότε το κλάσμα αυτό τείνει στην τιμή της απόκλισης του πεδίου \mathbf{F} καθώς η επιφάνεια τείνει να συρρικνωθεί στο σημείο \mathbf{x} .

Η πρώτη απόπειρα διακριτοποίησης της παραπάνω σχέσης όπως αυτή διατυπώθηκε στο [12] στηριζόταν στην επιλογή ως επιφάνειας S του πολυγωνικού χωρίου που ορίζεται από τους γείτονες μιας κορυφής. Η προσέγγιση αυτή έχει ως σημαντικό μειονέκτημα ότι εν γένει το χωρίο που προκύπτει δεν είναι κλειστό και φραγμένο με αποτέλεσμα το πρόβλημα να είναι κακώς τοποθετημένο [30]. Για το λόγο αυτό προτάθηκε στο [30] ένας νέος τρόπος κατασκευής της επιφάνειας S βασισμένη στις γωνίες που καταλαμβάνει ο κάθε γείτονας όπως αυτές ορίστηκαν προηγούμενα. Πιο συγκεκριμένα, το σύνορό της είναι μια κατά τμήματα κυκλική καμπύλη με ακτίνες που καθορίζονται από τα μήκη των ακμών και μέγεθος γωνιών τις ποσότητες $\Delta \phi$.

Έχοντας λοιπόν μια σχέση για την απόκλιση σε γράφους μπορεί να γίνει ο υπολογισμός της καμπυλότητας

$$\kappa = \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\|\nabla u\|} \right)$$

χρησιμοποιώντας το προσεγγιστικό πεδίο κλίσης που υπολογίστηκε προηγουμένως. Αποδείχθηκε μάλιστα στο [30] ότι η προσέγγιση αυτή συγκλίνει στην πραγματική τιμή της κλίσης στο όριο των μεγάλων γράφων στα σημεία που η πραγματική κλίση της συνάρτησης είναι μη μηδενική. Επίσης, για τη βελτίωση και την εξομάλυνση των αποτελεσμάτων είναι χρήσιμο πολλές φορές να γίνει μια μικρή εξομάλυνση των παραπάνω τιμών που υπολογίστηκαν, όπως για παράδειγμα ένα φίλτράρισμα ενδιάμεσης τιμής.

3.3.3 Ο τελικός αλγόριθμος

Το τελευταίο κομμάτι πριν τη συνολική εφαρμογή του αλγορίθμου είναι ο υπολογισμός της συνάρτησης g πάνω στην εικόνα. Αρχικά η εικόνα πρέπει να φιλτραριστεί με χρήση ενός φίλτρου εξομάλυνσης πάνω στο γράφο. Μια απλή και αποτελεσματική ιδέα είναι να θεωρήσουμε ότι η τιμή σε κάθε κορυφή προκύπτει ως ο σταθμισμένος μέσος όρος των τιμών στην κορυφή και τη γειτονιά της. Έπειτα το μέτρο της κλίσης μπορεί να υπολογιστεί εύκολα μέσω της (3.1). Προχωρώντας λοιπόν στη συνολική εφαρμογή του αλγορίθμου, η χρονική παράγωγος υπολογίζεται από την εμπρόσθια διαφορά

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u(t_{n+1}) - u(t_n)}{\Delta t}$$

όπου Δt το χρονικό βήμα της μεθόδου. Επομένως η εξίσωση της εξέλιξης παίρνει τη μορφή

$$u_{n+1} = u_n + \Delta t \left(g(I) \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u_n}{\|\nabla u_n\|} \right) \|\nabla u_n\| + \nabla g(I) \cdot \nabla u_n \right) \quad (3.3)$$

Η προσέγγιση αυτή είναι πρώτης τάξης ως προς το χρόνο και επειδή ανήκει στην κατηγορία των άμεσων μεθόδων Euler χρειάζεται προσοχή στην επιλογή του χρονικού βήματος έτσι ώστε η μέθοδος να είναι ευσταθής.

3.4 Γενικός Σχολιασμός

Οι παραπάνω μέθοδοι έδωσαν ικανοποιητικά αποτελέσματα στις περισσότερες περιπτώσεις παρά τις δυσκολίες στην αποτελεσματική προσέγγιση ορισμένων μεγεθών λόγω της μη-κανονικότητας των τυχαίων γράφων. Ένας από τους βασικούς λόγους είναι οι εξομαλύνσεις των υπολογιζόμενων τιμών στα διάφορα στάδια εφαρμογής των αλγορίθμων. Παράλληλα η εφαρμογή των παραπάνω αλγορίθμων σε γράφους με διαφορετική δομή, όπως π.χ. οι γράφοι Delaunay έδωσε παραπλήσια αν όχι καλύτερα αποτελέσματα. Ένα ακόμα σημαντικό στοιχείο είναι ότι μπορούν να προγραμματιστούν έτσι ώστε να είναι αρκετά ταχείες. Παρόλα αυτά παραμένει ανοικτό ακόμα το ζήτημα της αποτελεσματικότητάς τους όταν οι συναρτήσεις τα διάφορα μεγέθη των οποίων καλούμαστε να υπολογίσουμε είναι αρκετά μη ομαλές, γεγονός που συμβαίνει συχνά κατά την εξέλιξη του αλγορίθμου και κοντά στα όρια των αντικειμένων.

Στην επόμενη ενότητα θα προτείνουμε μια νέα μέθοδο η οποία είναι απαλλαγμένη εν πολλοίς από αυτά τα ζητήματα καθότι προσεγγίζει το πρόβλημα από διαφορετική οπτική γωνία. Στη μέθοδο αυτή δεν γίνεται προσέγγιση σημειακών τιμών της λύσης σε μεμονωμένα σημεία, δηλαδή τις κορυφές του γράφου αλλά προσεγγίζουμε τη λύση σαν συνάρτηση. Ένα ακόμα πλεονέκτημα της μεθόδου αυτής είναι ότι δε χρειάζονται διακριτοποιημένες εκδοχές των διαφόρων διαφορικών τελεστών. Οι τιμές αυτές μπορούν να υπολογίζονται αναλυτικά από τις θεωρούμενες κατά το βήμα της προσέγγισης συναρτήσεις. Όλα αυτά βέβαια δεν έρχονται χωρίς κάποιο επιπλέον κόστος. Το αντίτιμο που πρέπει να πληρωθεί είναι η επίλυση σε κάθε χρονικό βήμα ενός μη γραμμικού συστήματος. Η νέα μέθοδο θα περιγραφεί με σαφήνεια στα επόμενα κεφάλαια.

Κεφάλαιο 4

Προσέγγιση με τη μέθοδο Πεπερασμένων Στοιχείων

4.1 Εισαγωγή

Οι προηγούμενες μέθοδοι προσέγγισης του προβλήματος εντάσσονται στην κατηγορία των μεθόδων πεπερασμένων διαφορών. Το πλεονέκτημα αυτών των μεθόδων είναι ότι συνήθως είναι υπολογιστικά ταχείες και απλές στην υλοποίηση. Στις περιπτώσεις που τα χωρία είναι σχετικά απλά και οι διαφορικοί τελεστές μπορούν να προσεγγιστούν εύκολα με τις αντίστοιχες διακριτές σχέσεις αποδίδουν πολύ καλά. Για την εφαρμογή τους όμως απαιτείται το χωρίο να προσεγγιστεί με ένα κανονικό ορθογώνιο πλέγμα (regular grid) κάτι που δεν ισχύει στην περίπτωση των γεωμετρικών τυχαίων γράφων. Όταν δεν συμβαίνει αυτό τότε οι διακριτοποιημένες σχέσεις για την προσέγγιση των διαφορικών τελεστών γίνονται αρκετά πολύπλοκες και χάνουν σε ακρίβεια. Όπως είδαμε άλλωστε στο προηγούμενο κεφάλαιο βασικό ζήτημα των προηγούμενων μεθόδων είναι η αποτελεσματική προσέγγιση του τελεστή της απόκλισης, που σχετίζεται με τον όρο καμπυλότητας.

Την αδυναμία αυτή έρχεται να καλύψει η μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων. Στη μέθοδο αυτή όπως θα γίνει φανερό και στη συνέχεια δε χρειάζεται να προσεγγίσουμε με διακριτές σχέσεις τους διαφορικούς τελεστές, αλλά αντ' αυτού προβάλλουμε τη λύση σε κάποιο πεπερασμένο υπόχωρο ενός χώρου συναρτήσεων και υπολογίζουμε τους τελεστές αναλυτικά από τη μορφή των συναρτήσεων. Για την συνοπτική περιγραφή μερικών από τις μαθηματικές έννοιες που χρησιμοποιούνται στο κεφάλαιο αυτό ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στο Παράρτημα της εργασίας.

4.2 Μετατροπή του προβλήματος στην ασθενή μορφή

Αρχικά θα χρειαστεί να τροποποιήσουμε λίγο τη μορφή της (2.5) ώστε να μπορεί να εφαρμοστεί η μέθοδος. Συγκεκριμένα διαιρούμε με τον παράγοντα $\|\nabla u\|$ και η εξίσωση γίνεται

$$\frac{1}{\|\nabla u\|} \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div} \left(g_I \frac{\nabla u}{\|\nabla u\|} \right) + \beta \quad (4.1)$$

όπου με g_I συμβολίζουμε τη $g_I(x, y) = g(\|\nabla I(x, y)\|)$ την edge-stopping συνάρτηση που εξαρτάται από την εικόνα.

Θα εξετάσουμε αρχικά το πιο γενικό πρόβλημα

$$\begin{aligned} D(u) \frac{\partial u}{\partial t} &= \operatorname{div} (C(u) \nabla u) + F(u) \\ \nabla u \cdot \mathbf{n} &= 0 \text{ στο σύνορο } \Gamma = \partial\Omega \\ u(0, x, y) &= u_0(x, y) \end{aligned} \quad (4.2)$$

το οποίο ανάγεται στην εξίσωση του προβλήματος των γεωδαιτικών ενεργών καμπυλών στην περίπτωση που $D(u) = 1/\|\nabla u\|$, $C(u) = g_I/\|\nabla u\|$ και $F(u) = \beta g_I$. Μπορούμε τώρα να προχωρήσουμε στη διατύπωση της μεθόδου.

Έστω $\Omega = [0, 1]^2$ και $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση του χώρου $H^1(\Omega)$. Πολλαπλασιάζουμε και τα 2 μέλη της (4.2) με τη ϕ και ολοκληρώνουμε σε όλο το Ω . Είναι επομένως

$$\iint_{\Omega} D(u) \frac{\partial u}{\partial t} \phi \, dx dy = \iint_{\Omega} \operatorname{div} (C(u) \nabla u) \phi \, dx dy + \iint_{\Omega} F(u) \phi \, dx dy$$

Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Green για τα διπλά ολοκληρώματα

$$\iint_{\Omega} f \operatorname{div} (F) \, dx dy = - \iint_{\Omega} \nabla f \cdot F \, dx dy + \oint_{\partial\Omega} f F \cdot \mathbf{n} \, ds$$

όπου $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ και $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ η προηγούμενη σχέση γίνεται

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} D(u) \frac{\partial u}{\partial t} \phi \, dx dy &= - \iint_{\Omega} C(u) \nabla u \cdot \nabla \phi \, dx dy + \oint_{\Gamma} \phi C(u) \nabla u \cdot \mathbf{n} \, ds \\ &\quad + \iint_{\Omega} F(u) \phi \, dx dy \end{aligned}$$

Από τη συνοριακή συνθήκη του προβλήματος όμως βλέπουμε ότι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα στο σύνορο του Ω μηδενίζεται και άρα η προηγούμενη

εξίσωση γράφεται ως

$$\iint_{\Omega} D(u) \frac{\partial u}{\partial t} \phi \, dx dy = - \iint_{\Omega} C(u) \nabla u \cdot \nabla \phi \, dx dy + \iint_{\Omega} F(u) \phi \, dx dy, \\ \forall \phi \in H^1(\Omega)$$

η οποία καλείται ασθενής μορφή του προβλήματος (4.2). Μπορούμε για ευκολία να ορίσουμε

$$B(u; v, w) = \iint_{\Omega} D(u) v w \, dx dy = \langle D(u) v, w \rangle$$

και

$$E(v, w) = - \iint_{\Omega} C(v) \nabla v \cdot \nabla w \, dx dy + \iint_{\Omega} F(v) w \, dx dy \\ = \langle C(v) \nabla v, \nabla w \rangle + \langle F(v), w \rangle$$

οπότε η ασθενής μορφή μπορεί να γραφτεί ως

$$B(u; \dot{u}, \phi) = E(u, \phi), \quad \forall \phi \in H^1(\Omega) \quad (4.3)$$

4.3 Προσέγγιση Galerkin

Μέχρι τώρα δεν κάναμε κάποια αριθμητική προσέγγιση. Μετατρέψαμε απλά τη μερική διαφορική εξίσωση σε μία κατά κάποιον τρόπο ισοδύναμη ολοκληρωτική μορφή. Στο κομμάτι αυτό θα επιχειρήσουμε να προσεγγίσουμε τη λύση χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Galerkin. Συγκεκριμένα έστω V_n ένας υπόχωρος του $H^1(\Omega)$ διάστασης n και $\{\phi\}_1^n$ μια βάση αυτού του υπόχωρου. Η προσέγγιση της λύσης με συναρτήσεις του υπόχωρου αυτού, έστω \bar{u} θα είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των συναρτήσεων βάσης. Επειδή το πρόβλημα όμως εξαρτάται και από το χρόνο επιτρέπουμε οι συντελεστές του γραμμικού συνδυασμού να έχουν χρονική εξάρτηση. Θα είναι δηλαδή

$$\bar{u} = \sum_{i=1}^n c_i(t) \phi$$

Είμαστε λοιπόν έτοιμοι στο σημείο αυτό να κάνουμε τη λεγόμενη προσέγγιση Galerkin. Απαιτούμε η (4.3) να ισχύει όχι για όλες τις συναρτήσεις του χώρου H^1 αλλά μόνο για τις συναρτήσεις βάσης του V_n και αντικαθιστούμε τη u με την προσέγγισή της \bar{u} . Οπότε έχουμε

$$B(\bar{u}; \partial \bar{u} / \partial t, \phi_i) = E(\bar{u}, \phi_i), \quad \text{για } i = 1, 2, \dots, n$$

Δεδομένου ότι

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = \sum_{i=1}^n \dot{c}_i(t) \phi_i$$

το πρόβλημα ανάγεται στην επίλυση ενός μη γραμμικού συστήματος συνήθων διαφορικών εξισώσεων για τον προσδιορισμό των συντελεστών c που είναι της μορφής

$$A(\mathbf{c})\dot{\mathbf{c}} = \mathbf{b}(\mathbf{c}) \quad (4.4)$$

για το οποίο έχουν αναπτυχθεί αρκετές αποτελεσματικοί μέθοδοι. Επανερχόμενοι στο πρόβλημα των γεωδαιτικών ενεργών καμπυλών θα βρούμε την ακριβή μορφή των συντελεστών της διαφορικής εξίσωσης. Είναι

$$B(\bar{u}; \partial \bar{u} / \partial t, \phi_i) = F(\bar{u}, \phi_i) \iff \iint_{\Omega} \frac{1}{\|\nabla \bar{u}\|} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \phi_i \, dx dy = - \iint_{\Omega} g_I \frac{\nabla \bar{u}}{\|\nabla \bar{u}\|} \cdot \nabla \phi_i \, dx dy + \iint_{\Omega} \beta g_I \phi_i \, dx dy$$

και αντικαθιστώντας τη μορφή της προσέγγισης

$$\iint_{\Omega} \frac{1}{\|\nabla \sum_{j=1}^n c_j(t) \phi_j\|} \sum_{j=1}^n \dot{c}_j(t) \phi_j \phi_i \, dx dy = - \iint_{\Omega} g_I \frac{\nabla \sum_{j=1}^n c_j(t) \phi_j}{\|\nabla \sum_{j=1}^n c_j(t) \phi_j\|} \cdot \nabla \phi_i \, dx dy + \iint_{\Omega} \beta g_I \phi_i \, dx dy$$

Κάνοντας μια μικρή αναδιάταξη στην παραπάνω εξίσωση παίρνουμε τελικώς ότι

$$\sum_{j=1}^n \dot{c}_j(t) \iint_{\Omega} \frac{1}{\|\sum_{j=1}^n c_j(t) \nabla \phi_j\|} \phi_j \phi_i \, dx dy = - \iint_{\Omega} g_I \frac{\sum_{j=1}^n c_j(t) \nabla \phi_j \cdot \nabla \phi_i}{\|\sum_{j=1}^n c_j(t) \nabla \phi_j\|} \, dx dy + \iint_{\Omega} \beta g_I \phi_i \, dx dy$$

και άρα τα στοιχεία των πινάκων $A_{n \times n}$ και $b_{n \times 1}$ είναι

$$(A)_{ij} = \iint_{\Omega} \frac{1}{\|\sum_{j=1}^n c_j(t) \nabla \phi_j\|} \phi_i \phi_j \, dx dy, \quad (4.5)$$

$$(b)_i = - \iint_{\Omega} g_I \frac{\sum_{j=1}^n c_j(t) \cdot \nabla \phi_i \nabla \phi_j}{\|\sum_{j=1}^n c_j(t) \nabla \phi_j\|} \, dx dy + \iint_{\Omega} \beta g_I \phi_i \, dx dy \quad (4.6)$$

4.4 Εφαρμογή της μεθόδου σε γράφους

Η μέθοδος που αναπτύχθηκε παραπάνω θα χρησιμοποιηθεί για να προσεγγίσουμε τις γεωδαιτικές ενεργές καμπύλες σε γράφους. Δε μπορεί όμως να

εφαρμοστεί σε αυθαίρετα γραφήματα. Συγκεκριμένα απαιτούμε να είναι ένας γράφος Delaunay. Αυτό μας περιορίζει μόνο ως προς το σύνολο ακμών του γράφου. Όπως αναφέρθηκε και σε προηγούμενο κεφάλαιο οι κορυφές του μπορεί να τοποθετηθούν είτε με τυχαίο τρόπο, για αντιπαραβολή αποτελεσμάτων με τις προηγούμενες μεθόδους που αναπτύχθηκαν στα [12] και [30], είτε με βάση κάποιον από τους γνωστούς αλγορίθμους τριγωνισμού. Στην πρώτη περίπτωση το χωρίο που προκύπτει βεβαίως δεν είναι το μοναδιαίο τετράγωνο αλλά μια κυρτή πολυγωνική περιοχή που αποτελεί υποσύνολο του. Ένα μειονέκτημα της επιλογής αυτής είναι ότι ενδέχεται να υπάρχουν κορυφές στο σύνορο του χωρίου που είναι απομακρυσμένες αλλά συνδέονται με ακμές, με πιθανές επιπτώσεις στη σύγκλιση της μεθόδου.

Το επόμενο βήμα είναι η εύρεση του υπόχωρου του $H^1(\Omega)$ στον οποίο θα γίνει η προσέγγιση καθώς και μιας βάσης του. Αυτό αποτελεί το αντικείμενο της επόμενης ενότητας.

4.5 Οι συναρτήσεις πυραμίδες

Έστω $\{T_i\}_1^m$ τα τρίγωνα του τριγωνισμού Delaunay. Θα επιχειρήσουμε να προσεγγίσουμε τη λύση της εξίσωσης στο χώρο S των συνεχών συναρτήσεων που είναι κατά τμήματα πολυωνυμικές μέχρι πρώτου βαθμού σε κάθε τρίγωνο, δηλαδή

$$S = \{f \in C(\Omega) : f|_{T_i} = a_i x + b_i y + c_i, \text{ για } i = 1, \dots, m\} \quad (4.7)$$

Μπορεί κανείς να δει άμεσα ότι η συναρτήσεις του χώρου αυτού εν γένει δεν είναι παραγωγίσιμες στις πλευρές των τριγώνων. Αυτό όμως δεν μας απασχολεί όταν το πρόβλημα είναι στην ασθενή μορφή. Είναι γνωστό ότι οι τιμές της συνάρτησης πάνω σε ευθείες ή εν γένει σε καμπύλες δεν επηρεάζουν την τιμή των ολοκληρωμάτων, καθότι οι ευθείες είναι σύνολα μηδενικού μέτρου στο επίπεδο.

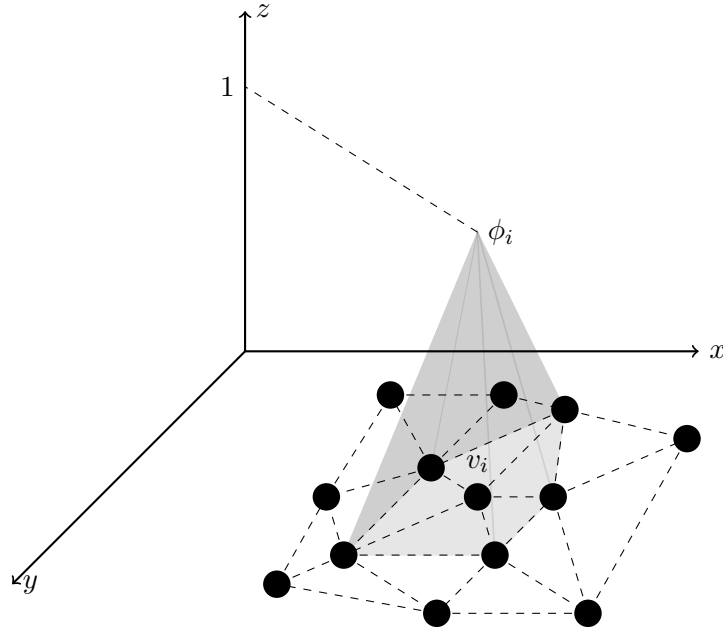
Θα μπορούσε κάλλιστα να αναρωτηθεί κανείς γιατί δεν επιλέχθηκε ένας άλλος υπόχωρος του H^1 που περιέχει πιο ομαλές συναρτήσεις. Πράγματι, θα μπορούσε να γίνει μια τέτοια επιλογή γιατί γνωρίζουμε ότι στην περίπτωση των γραμμικών παραβολικών εξισώσεων αν χρησιμοποιούσαμε για παράδειγμα έναν υπόχωρο του $C^2(\Omega)$, δηλαδή των συναρτήσεων με συνεχείς παραγώγους μέχρι και δεύτερης τάξης θα επιτυγχάναμε σύγκλιση υψηλότερης τάξης. Ένα λεπτό σημείο όμως είναι ότι για να έχουμε σύγκλιση μεγαλύτερης τάξης θα πρέπει και η λύση του προβλήματος (2.5) να είναι αρκούντως ομαλή, κάτι που γενικά δεν ισχύει.

Το τελευταίο που απομένει είναι η εύρεση μιας βάσης για το χώρο αυτό. Κριτήρια για την επιλογή της βάσης είναι οι συναρτήσεις της να έχουν όσο το δυνατό μικρότερο φορέα (support) ανά 2 έτσι ώστε να απλοποιείται σημαντικά ο υπολογισμός των ολοκληρωμάτων. Μια τέτοια οικογένεια συναρτήσεων είναι οι συναρτήσεις στέγες. Η κατασκευή τους είναι απλή. Για κάθε κορυφή (κόμβο)

v_i κατασκευάζουμε μια συνάρτηση ϕ_i με τις ιδιότητες

$$\phi_i(v_i) = 1, \text{ και } \phi_i(v_j) = 0, \forall j \neq i \quad (4.8)$$

και επιπλέον η ϕ_i να είναι γραμμική σε κάθε τρίγωνο. Η μορφή μιας τέτοιας συνάρτησης φαίνεται στο σχήμα 4.1. Πιο φορμαλιστικά είναι



Σχήμα 4.1: Συνάρτηση ϕ_i

$$\phi_i(x, y) = \alpha_{i,r}x + \beta_{i,r}y + \gamma_{i,r}, (x, y) \in T_r$$

για κάποιες σταθερές $\alpha_{i,r}, \beta_{i,r}, \gamma_{i,r}$ που παίρνουν διαφορετικές τιμές σε κάθε τρίγωνο και εξαρτώνται μόνο από τη γεωμετρία του τριγωνισμού. Οι τιμές τους υπολογίζονται με βάση τις ιδιότητες που πρέπει να ικανοποιεί κάθε συνάρτηση ϕ_i (4.8). Επίσης μπορούμε να δούμε εύκολα ότι η κλίση της συνάρτησης ϕ_i είναι σταθερή σε κάθε τρίγωνο και ίση με

$$\nabla \phi_i|_{T_r} = (\alpha_{i,r}, \beta_{i,r})$$

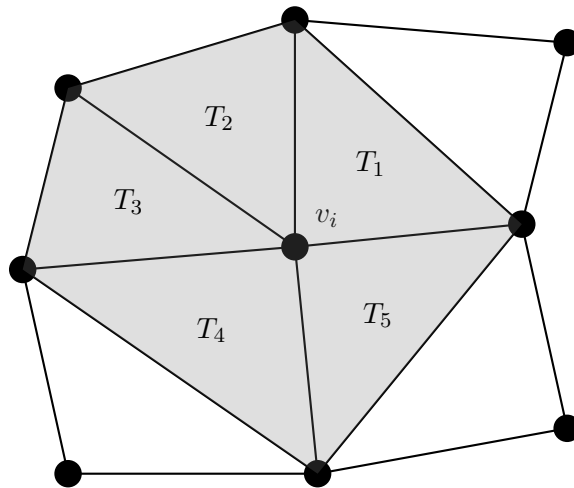
Μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι οι φορείς δύο τέτοιων συναρτήσεων ϕ_i, ϕ_j έχουν επικάλυψη το πολύ σε 2 τρίγωνα, κι αυτό συμβαίνει για γειτονικούς κόμβους. Σε όλες τις άλλες περιπτώσεις δεν υπάρχει επικάλυψη οπότε η μήτρα A της εξίσωσης (4.4) είναι “αραιή”, κάτι που άλλωστε ήταν και το ζητούμενο. Επίσης οι διαφορικοί τελεστές που περιλαμβάνονται στις εξισώσεις (4.5) και (4.6) περιλαμβάνουν χωρικές παραγώγους μέχρι πρώτης τάξης, οπότε χρησιμοποιώντας τις συναρτήσεις αυτές μπορούμε να υπολογίσουμε αναλυτικά τις εκφράσεις τους. Για το τέλος θα διατυπώσουμε την επόμενη πρόταση χωρίς απόδειξη (ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει σε κάποιο σχετικό σύγγραμμα).

Πρόταση 1. Οι συναρτήσεις πυραμίδες $\{\phi_i\}_1^n$ όπως ορίστηκαν παραπάνω αποτελούν μια βάση του χώρου S .

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω πρόταση μπορούμε επίσης έμμεσα να διαπιστώσουμε ότι η διάσταση του υπόχωρου S είναι ίση με το πλήθος των κορυφών του γράφου Delaunay.

4.6 Μερικοί υπολογισμοί

Στην ενότητα αυτή θα κάνουμε ενδεικτικά κάποιους υπολογισμούς συντελεστών για να δειχθεί πως αυτό μπορεί να γίνει. Η διαδικασία αυτή μπορεί να φαίνεται δύσκολη με μια πρώτη ματιά αλλά μπορεί να προγραμματιστεί εύκολα σε έναν ηλεκτρονικό υπολογιστή. Αρχικά θα υπολογίσουμε τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα A , $(A)_{ii}$. Στο σχήμα 4.2 βλέπουμε την κορυφή i μαζί με τα τρίγωνα που αντιστοιχούν στη γειτονιά της. Ο αριθμός των τριγώνων δεν είναι απαραίτητα αυτός που εμφανίζεται στο παρόν σχήμα. Θα είναι λοιπόν



Σχήμα 4.2: Φορέας και τρίγωνα που αντιστοιχούν στην ϕ_i

$$\begin{aligned} (A)_{ii} &= \iint_{\Omega} \frac{\phi_i^2}{\|\sum_{j=1}^n c_j(t) \nabla \phi_j\|} dx dy \\ &= \sum_{r=1}^m \iint_{T_r} \frac{\phi_i^2}{\|\sum_{j=1}^n c_j(t) \nabla \phi_j\|} dx dy \end{aligned}$$

όπου T_r το r -οστό τρίγωνο που αντιστοιχεί στην κορυφή v_i . Στο r -οστό τρίγωνο συνυπάρχουν 3 συναρτήσεις ϕ , η ϕ_i και οι $\phi_{k(r)}$, $\phi_{l(r)}$ όπου $v_{k(r)}$, $v_{l(r)}$

οι άλλες κορυφές του τριγώνου. Επομένως στο τρίγωνο T_r είναι

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n c_j(t) \nabla \phi_j &= c_i \nabla \phi_i + c_{k(r)} \nabla \phi_{k(r)} + c_{l(r)} \nabla \phi_{l(r)} \\ &= c_i(\alpha_{i,r}, \beta_{i,r}) + c_{k(r)}(\alpha_{k(r),r}, \beta_{k(r),r}) + c_{l(r)}(\alpha_{l(r),r}, \beta_{l(r),r}) \end{aligned}$$

σταθερά σε κάθε τρίγωνο. Χρησιμοποιούμε δείκτες της μορφής $k(r)$ για να τονίσουμε ότι οι κορυφές αυτές είναι διαφορετικές σε κάθε τρίγωνο. Επίσης ο δεύτερος δείκτης r στους συντελεστές των διανυσμάτων χρειάζεται για να δειχθεί με σαφήνεια ότι πρόκειται για τους συντελεστές στο συγκεκριμένο τρίγωνο, καθώς είναι διαφορετικοί για κάθε συνάρτηση σε κάθε τρίγωνο. Για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο αριθμητικής ολοκλήρωσης

$$\iint_T f(x, y) \, dx dy = \frac{E(T)}{3} (f(P_1) + f(P_2) + f(P_3))$$

όπου P_1, P_2, P_3 τα μέσα των πλευρών του τριγώνου. Ο τύπος αυτός ολοκληρώνει ακριβώς συναρτήσεις μέχρι δευτέρου βαθμού ως προς x, y κάτι που ισχύει στην περίπτωση μας. Στα μέσα των πλευρών του τριγώνου, αφού η ϕ_i είναι γραμμική θα είναι

$$\phi_i(P_1) = \phi_i(P_2) = \frac{1}{2}$$

και

$$\phi_i(P_3) = 0$$

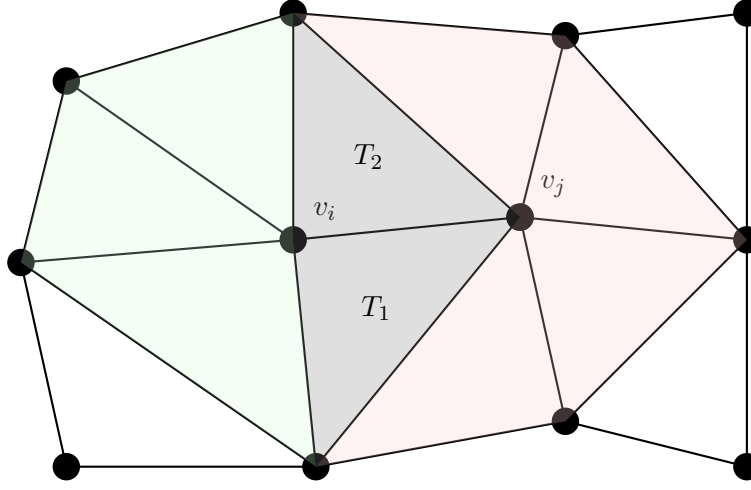
όπου P_3 το μέσο που αντιστοιχεί στην πλευρά με κορυφές τις $v_{k(r)}, v_{l(r)}$ ενώ

$$E(T_r) = \frac{1}{2} \|(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_{k(r)}) \times (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_{l(r)})\|$$

με \mathbf{v}_i το διάνυσμα που αντιστοιχεί στις συντεταγμένες που αντιστοιχούν στην κορυφή v_i . Άρα

$$\begin{aligned} (A)_{ii} &= \sum_{r=1}^m \frac{E(T_r)}{3} \frac{1/4 + 1/4 + 0}{\|c_i(\alpha_{i,r}, \beta_{i,r}) + c_{k(r)}(\alpha_{k(r),r}, \beta_{k(r),r}) + c_{l(r)}(\alpha_{l(r),r}, \beta_{l(r),r})\|} \\ &= \sum_{r=1}^m \frac{\|(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_{k(r)}) \times (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_{l(r)})\|}{12 \cdot \|c_i(\alpha_{i,r}, \beta_{i,r}) + c_{k(r)}(\alpha_{k(r),r}, \beta_{k(r),r}) + c_{l(r)}(\alpha_{l(r),r}, \beta_{l(r),r})\|} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Τώρα αν v_i, v_j δύο γειτονικές κορυφές αναλύσαμε προηγουμένως ότι υπάρχει επικάλυψη σε 2 μόνο τρίγωνα όπως μπορούμε να δούμε και από το σχήμα 4.3. Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία με πριν θα έχουμε


 Σχήμα 4.3: Φορέας και κοινά τρίγωνα που αντιστοιχούν στις ϕ_i, ϕ_j

$$\begin{aligned}
 (A)_{ij} &= \sum_{r=1}^2 \frac{E(T_r)}{3} \frac{1/2 \cdot 1/2 + 1/2 \cdot 0 + 0 \cdot 1/2}{\|c_i(\alpha_{i,r}, \beta_{i,r}) + c_j(\alpha_{j,r}, \beta_{j,r}) + c_{k(r)}(\alpha_{k(r),r}, \beta_{k(r),r})\|} \\
 &= \sum_{r=1}^2 \frac{\|(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) \times (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_{k(r)})\|}{24 \cdot \| \|c_i(\alpha_{i,r}, \beta_{i,r}) + c_j(\alpha_{j,r}, \beta_{j,r}) + c_{k(r)}(\alpha_{k(r),r}, \beta_{k(r),r})\| \|} \\
 (4.10)
 \end{aligned}$$

όπου $k(r), r = 1, 2$ η τρίτη κορυφή που αντιστοιχεί στα δύο κοινά τους τρίγωνα. Φανερά από τα παραπάνω μπορούμε να δούμε ότι ο πίνακας A είναι συμμετρικός, αφού $(A)_{ij} = (A)_{ji}$.

Πριν προχωρήσουμε στους υπολογισμούς του διανύσματος b πρέπει να αναλυθεί πως θα γίνει η προσέγγιση της συνάρτησης g_I . Αυτό περιγράφεται με σαφήνεια στο επόμενο κεφάλαιο. Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε ως γεγονός ότι η g_I είναι τμηματικά σταθερή σε κάθε τρίγωνο (δεν είναι συνεχής αλλά αυτό δεν αποτελεί πρόβλημα καθώς η ανάλυση γίνεται σε κάθε τρίγωνο ξεχωριστά). Επομένως θα είναι

$$\begin{aligned}
 (b)_i &= - \sum_{r=1}^m g_I|_{T_r} \cdot E(T_r) \frac{(c_i(t)\nabla\phi_i|_{T_r} + c_{k(r)}(t)\nabla\phi_{k(r)}|_{T_r} + c_{l(r)}\nabla\phi_{l(r)}|_{T_r}) \cdot \nabla\phi_i|_{T_r}}{\|c_i(t)\nabla\phi_i|_{T_r} + c_{k(r)}(t)\nabla\phi_{k(r)}|_{T_r} + c_{l(r)}\nabla\phi_{l(r)}|_{T_r}\|} \\
 &\quad + \sum_{r=1}^m \beta g_I|_{T_r} \cdot \frac{E(T_r)}{3} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0 \right) \\
 &= - \sum_{r=1}^m g_I|_{T_r} E(T_r) \frac{(c_i(t)\nabla\phi_i|_{T_r} + c_{k(r)}(t)\nabla\phi_{k(r)}|_{T_r} + c_{l(r)}\nabla\phi_{l(r)}|_{T_r}) \cdot \nabla\phi_i|_{T_r}}{\|c_i(t)\nabla\phi_i|_{T_r} + c_{k(r)}(t)\nabla\phi_{k(r)}|_{T_r} + c_{l(r)}\nabla\phi_{l(r)}|_{T_r}\|} \\
 &\quad + \sum_{r=1}^m \beta g_I|_{T_r} \frac{2E(T_r)}{3} \\
 (4.11)
 \end{aligned}$$

με

$$\nabla\phi_i|_{T_r} = (\alpha_{i,r}, \beta_{i,r})$$

κατά τα γνωστά όπως και πριν.

4.7 Χρονική εξέλιξη της λύσης

Έχοντας υπολογίσει τη μορφή των συντελεστών των πινάκων A και b απομένει πλέον η μελέτη της εξέλιξης της λύσης στο χρόνο. Προφανώς δε μπορεί να βρεθεί αναλυτική έκφραση για τη χρονική εξέλιξη του συστήματος (4.4). Χρειάζεται να εφαρμόσουμε κάποιες από τις γνωστές μεθόδους διακριτοποίησης, όπως οι μέθοδοι Euler.

Έστω $0 = t_1, t_2, \dots, t_k = T$ μια διακριτοποίηση του χρονικού ορίζοντα $[0, T]$ εντός του οποίου θέλουμε να υπολογίσουμε τη λύση. Θα συμβολίζουμε με U^n την προσέγγιση της τιμής της συνάρτησης \bar{u} τη χρονική στιγμή t_n . Θα είναι δηλαδή

$$U^n = \sum_{i=1}^N c_i^n \phi_i$$

όπου c_i^n η προσέγγιση του $c_i(n\Delta t)$. Προς αποφυγήν σύγχυσης με τους συμβολισμούς, στο κομμάτι αυτό θα συμβολίζουμε με N το πλήθος των κορυφών του γράφου, αντί για το n που χρησιμοποιήθηκε στις προηγούμενες ενότητες και που τώρα παριστάνει χρονικές στιγμές. Οπότε είμαστε έτοιμοι να εφαρμόσουμε κάποια από τις προσεγγιστικές μεθόδους για την εύρεση της λύσης του προβλήματος αρχικών τιμών. Αν χρησιμοποιήσουμε την άμεση μέθοδο Euler η ασθενής μορφή του προβλήματος γίνεται

$$B \left(U^n; \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t}, \phi_i \right) = E(U^n, \phi_i)$$

ή ισοδύναμα

$$\langle D(U^n) \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t}, \phi_i \rangle = \langle C(U^n) \nabla U^n, \nabla \phi_i \rangle + \langle F(U^n), \phi_i \rangle$$

Η παραπάνω σχέση γραμμένη ως προς τους συντελεστές \mathbf{c} είναι

$$A(\mathbf{c}^n) \frac{\mathbf{c}^{n+1} - \mathbf{c}^n}{\Delta t} = \mathbf{b}(\mathbf{c}^n)$$

όπου Δt το χρονικό βήμα της μεθόδου. Υποθέτοντας επιπλέον ότι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος για όλες τις τιμές του \mathbf{c} που μας ενδιαφέρουν η προηγούμενη εξίσωση γίνεται

$$\mathbf{c}^{n+1} = \mathbf{c}^n + \Delta t (A(\mathbf{c}^n))^{-1} \mathbf{b}(\mathbf{c}^n)$$

Η μέθοδος αυτή είναι η πιο απλή στον προγραμματισμό της, παρουσιάζει όμως συχνά προβλήματα ευστάθειας. Στη γενική περίπτωση χρειάζεται να κρατήσουμε το χρονικό βήμα πολύ μικρό σε σχέση με το χωρικό.

Μια άλλη μέθοδος με την ίδια τάξη σύγκλισης με την άμεση Euler αλλά απαλλαγμένη από προβλήματα ευστάθειας είναι η πεπλεγμένη (implicit) μέθοδος Euler. Στην περίπτωση η ασθενής μορφή γίνεται

$$B \left(U^{n+1}; \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t}, \phi_i \right) = E(U^{n+1}, \phi_i)$$

ή ισοδύναμα

$$\langle D(U^{n+1}) \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t}, \phi_i \rangle = \langle C(U^{n+1}) \nabla U^{n+1}, \nabla \phi_i \rangle + \langle F(U^{n+1}), \phi_i \rangle$$

Γράφοντας την αντίστοιχη σχέση για τους συντελεστές \mathbf{c} παίρνουμε

$$A(\mathbf{c}^{n+1}) \frac{\mathbf{c}^{n+1} - \mathbf{c}^n}{\Delta t} = b(\mathbf{c}^{n+1})$$

οπότε για τον υπολογισμό της νέας τιμής της λύσης σε κάθε βήμα απαιτείται η επίλυση του μη γραμμικού συστήματος εξισώσεων

$$\mathbf{f}(\mathbf{c}^{n+1}; \mathbf{c}^n) = A(\mathbf{c}^{n+1}) (\mathbf{c}^{n+1} - \mathbf{c}^n) - \Delta t \cdot b(\mathbf{c}^{n+1}) = 0 \quad (4.12)$$

Δεδομένου ότι αναμένουμε οι τιμές της λύσης σε διαδοχικές χρονικές στιγμές να είναι σχετικά κοντά μεταξύ τους δε χρειάζεται να γίνει χρήση κάποιας σύνθετης μεθόδου για την επίλυση του μη γραμμικού συστήματος αυτού. Αν ισχύει η υπόθεση που μόλις αναφέρθηκε τότε χρησιμοποιώντας τη μέθοδο σταθερού σημείου ξεκινώντας με αρχική προσέγγιση την τιμή που προκύπτει άροντας ένα βήμα της απλής μεθόδου Euler τότε αναμένουμε γρήγορη σύγκλιση στη λύση της εξίσωσης. Εναλλακτικά θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε τη γνωστή μέθοδο Newton-Raphson η οποία όμως είναι πιο “βαριά” υπολογιστικά.

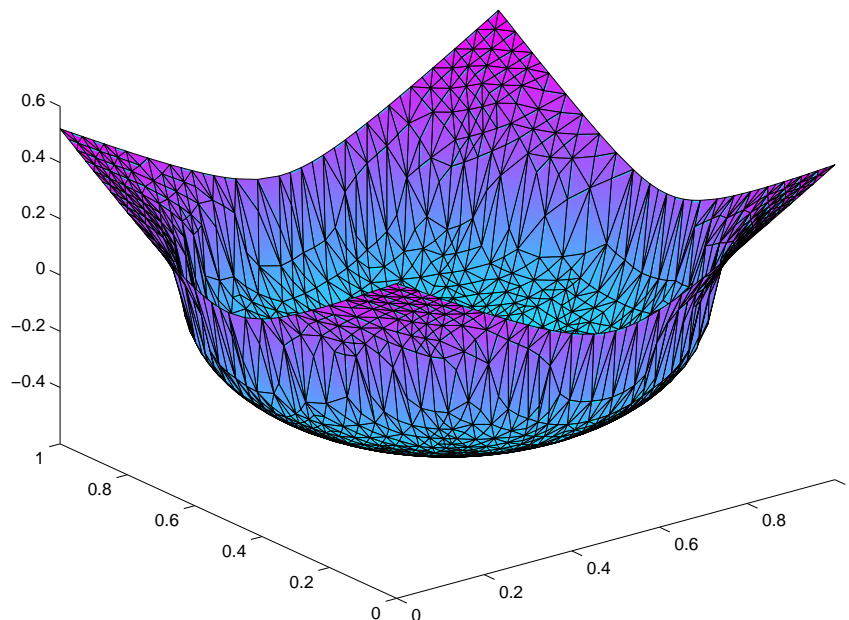
Μία ακόμα βελτίωση με την οποία μπορούμε να πετύχουμε τετραγωνική σύγκλιση ως προς το χρόνο είναι η μέθοδος Crank-Nicolson. Σε αυτή προσεγγίζουμε όπως και πριν την παράγωγο με τη διαφορά $(U^{n+1} - U^n)/\Delta t$ αλλά την τιμή της \bar{u} χρονική στιγμή t_n την προσεγγίζουμε με το μέσο όρο των τιμών τις 2 χρονικές στιγμές. Δηλαδή

$$B \left(\frac{U^{n+1} + U^n}{2}; \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t}, \phi_i \right) = E \left(\frac{U^{n+1} + U^n}{2}, \phi_i \right)$$

Το τελευταίο μέρος αφορά το κομμάτι των αρχικών συνθηκών. Η προσέγγιση της αρχικής συνθήκης $u(0, x, y) = u_0(x, y)$ μπορεί να γίνει θεωρώντας $c_i(0) = u_0(v_i)$ όπου v_i οι κορυφές του γράφου και συνεπώς

$$\bar{u}_0 = \sum_{i=1}^n c_i(0) \phi_i = \sum_{i=1}^n u_0(v_i) \phi_i$$

Με την επιλογή αυτή η \bar{u}_0 θα ταυτίζεται με τη u_0 στις κορυφές του γράφου (προκύπτει άμεσα από τον ορισμό των συναρτήσεων ϕ_i) ενώ θα λειτουργεί σαν γραμμική παρεμβολή σε κάθε τρίγωνο. Στο σχήμα 4.4 παρουσιάζεται η προσέγγιση της αρχικής συνθήκης u_0 (προσημασμένη συνάρτηση απόστασης από τον κύκλο $(x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2 = 0.23$) με τη μέθοδο που προτάθηκε προηγουμένως. Μια πιο ορθή επιλογή όμως αντί της προηγούμενης απλής προσέγγισης θα ήταν η προβολή της συνάρτησης u_0 στο χώρο S . Γνωρίζουμε από



Σχήμα 4.4: Η προσέγγιση \bar{u}_0 της αρχικής συνθήκης

τη Συναρτησιακή Ανάλυση ότι αυτό μπορεί να γίνει εύκολα χρησιμοποιώντας τον πίνακα της βάσης

$$\Phi = \begin{bmatrix} \langle \phi_1, \phi_1 \rangle & \langle \phi_1, \phi_2 \rangle & \dots & \langle \phi_1, \phi_N \rangle \\ \langle \phi_2, \phi_1 \rangle & \langle \phi_2, \phi_2 \rangle & \dots & \langle \phi_2, \phi_N \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle \phi_N, \phi_1 \rangle & \langle \phi_N, \phi_2 \rangle & \dots & \langle \phi_N, \phi_N \rangle \end{bmatrix}$$

Αν ορίσουμε επιπλέον

$$\psi = \begin{bmatrix} \langle u_0, \phi_1 \rangle \\ \langle u_0, \phi_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle u_0, \phi_N \rangle \end{bmatrix}$$

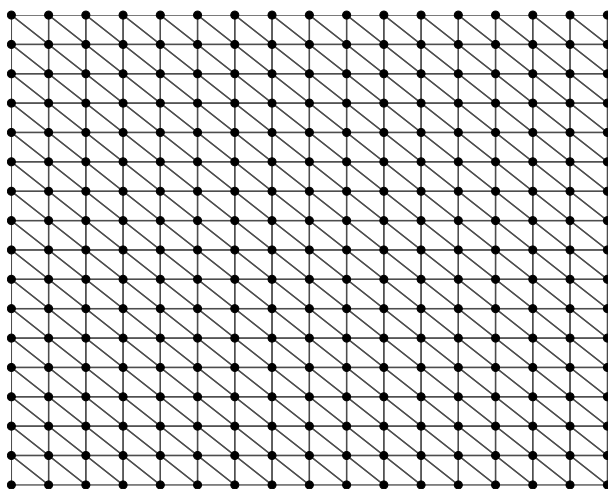
τότε έχουμε ότι

$$\mathbf{c}(0) = \Phi^{-1}\psi$$

Η τελευταία προσέγγιση είναι η βέλτιστη ως προς τη νόρμα του σφάλματος. Επειδή βέβαια ο υπολογισμός των ολοκληρωμάτων που περιλαμβάνει όσον αφορά το ψ είναι λίγο σύνθετος στην πράξη θα χρησιμοποιηθεί η προηγούμενη προσέγγιση και αυτή θα την κρατήσουμε για το κομμάτι της θεωρητικής ανάλυσης.

4.8 Υπολογιστική πολυπλοκότητα αλγορίθμου

Στην ενότητα αυτή θα μελετηθεί η ασυμπτωτική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου που αναπτύχθηκε. Για λόγους απλότητας θα εξεταστεί η περίπτωση που οι κορυφές του γράφου είναι τοποθετημένες πάνω σε ένα κανονικό πλέγμα όπως φαίνεται στο σχήμα 4.5. Ανάλογα αποτελέσματα χωρίς ιδιαίτερες διαφορές μπορούν να εξαχθούν και για τις υπόλοιπες περιπτώσεις. Η αρίθμηση των κόμβων γίνεται κατά γραμμές, δηλαδή $1, 2, 3, \dots, \sqrt{N}$ για την πρώτη γραμμή και εν συνεχεία με τον ίδιο τρόπο για τις υπόλοιπες.



Σχήμα 4.5: Τριγωνισμός Κανονικού πλέγματος

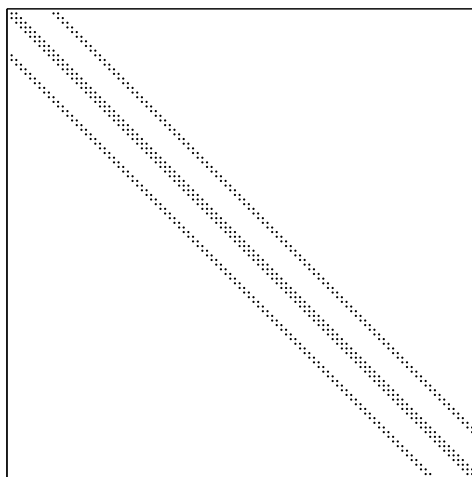
Θα εξετάσουμε την περίπτωση που η χρονική προσέγγιση της λύσης γίνεται μέσω της πεπλεγμένης μεθόδου Euler και το μη γραμμικό σύστημα που προκύπτει (4.12) επιλύεται με χρήση της μεθόδου Newton-Raphson. Αν J η Ιακωβιανή της συνάρτησης \mathbf{f} και \mathbf{y}_0 η αρχική προσέγγιση της λύσης του συστήματος τότε η εξίσωση ανανέωσης είναι η

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n - J^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{y}_n)$$

με αρχική προσέγγιση να επιλέγεται η τιμή στο προηγούμενο βήμα δεδομένου ότι αναμένουμε οι τιμές μεταξύ 2 διαδοχικών χρονικών βημάτων να είναι σχετικά κοντά μεταξύ τους. Μια άλλη επιλογή θα μπορούσε να είναι η εκτέλεση ενός βήματος της άμεσης μεθόδου Euler και την επιλογή αυτής σαν αρχική προσέγγιση για ακόμα ταχύτερη σύγκλιση.

Η επίλυση όμως διαδοχικών γραμμικών συστημάτων, το κόστος των οποίων είναι της τάξης των N^3 πράξεων είναι απαγορευτικό. Εδώ υπεισέρχεται το πλεονέκτημα της αραιότητας της αναπαράστασης. Μπορούμε να δούμε ότι σε κάθε συνιστώσα της f έστω την i -οστή υπεισέρχεται μόνον ο συντελεστής c_i καθώς και οι συντελεστές των γειτονικών προς την i -οστή κορυφή κόμβων. Συνεπώς η Ιακωβιανή μήτρα παρουσιάζει αξιοσημείωτη αραιότητα. Συγκεκριμένα, όπως

εικονίζεται και στο σχήμα 4.6, ο πίνακας είναι ταινιωτός με το πλάτος της ταινίας να είναι \sqrt{N} σε κάθε κατεύθυνση. Μια προφανής εξήγηση είναι ότι οι πιο απομακρυσμένοι (με βάση την αρίθμηση που κάναμε) κόμβοι είναι οι κάθετοι από πάνω και κάτω που απέχουν ο καθένας απόσταση \sqrt{N} από την κορυφή που βρισκόμαστε.



Σχήμα 4.6: Απεικόνιση αραιότητας της Ιακωβιανής

Εχμεταλλευόμενοι το γεγονός αυτό το πλήθος των πράξεων που απαιτείται για την επίλυση του συστήματος ελαττώνεται κατά μία τάξη μεγέθους χρησιμοποιώντας LU παραγοντοποίηση. Το κόστος της LU παραγοντοποίησης για ταινιωτούς $N \times N$ πίνακες με πλάτος ταινίας ℓ είναι $O(N\ell^2)$ με $\ell = \sqrt{N}$ στην περίπτωσή μας, άρα έχουμε τετραγωνική πολυπλοκότητα συνολικά για την επίλυση του συστήματος σε κάθε επανάληψη της Newton-Raphson. Ο εκ νέου υπολογισμός των στοιχείων της Ιακωβιανής σε κάθε βήμα γίνεται σε γραμμικό χρόνο, αφού μόνο 7 στοιχεία είναι μη μηδενικά σε κάθε γραμμή. Αν k λοιπόν το πλήθος των επαναλήψεων της μεθόδου Newton-Raphson μέχρι τη σύγκλιση - το οποίο χ.β.γ. θεωρούμε ότι είναι πρακτικά σταθερό για όλες τις χρονικές στιγμές - τότε κάθε χρονικό βήμα απαιτεί $O(kN^2)$ πράξεις. Τέλος αν εξελίξουμε την καμπύλη για συνολικό χρόνο T με βήμα Δt τότε θα χρειαστεί να υπολογίσουμε $m = T/\Delta t$ χρονικά βήματα, άρα τελικά ο αλγόριθμος έχει συνολική πολυπλοκότητα (mkN^2) . Στην πράξη το k είναι πολύ μικρό σε σύγκριση με τους άλλους όρους και δε μεταβάλλεται ιδιαίτερα με το μέγεθος του συστήματος οπότε επιδρά απλά σαν ένας πολλαπλασιαστικός παράγοντας. Μπορούμε δηλαδή με πολύ καλή προσέγγιση να πούμε ότι η πολυπλοκότητα είναι $O(mN^2)$. Το αποτέλεσμα αυτό δεν είναι κακό για γράφους μεσαίου μεγέθους, δηλαδή γράφους με 1000 έως 4000 κορυφές. Μάλιστα σε σύγκριση με τη μέθοδο [30] ο χρόνος εκτέλεσης του αλγορίθμου είναι παραπλήσιος, αν όχι μικρότερος, και οφείλεται στη δυνατότητα επιλογής μικρότερου χρονικού βήματος. Αυξάνοντας όμως το πλήθος των κορυφών κι άλλο αρχίζει να υστερεί

σε απόδοση λόγω της τετραγωνικής πολυπλοκότητας ως προς το πλήθος των κορυφών (ενώ η μέθοδος [30] αντίστοιχα έχει γραμμική στην περίπτωση των γράφων Delaunay). Το γεγονός αυτό θέτει ένα σοβαρό περιορισμό στην εφαρμογή της σε αρκετά μεγάλους γράφους, όπως για παράδειγμα είναι οι εικόνες. Πράγματι, το πλήθος των πράξεων που απαιτείται για μια εικόνα 256×256 είναι 16 φορές μεγαλύτερο από αυτό για μια εικόνα 128×128 και η διαφορά αυτή αυξάνει ακόμα περισσότερο για μεγαλύτερες εικόνες.

4.9 Διερεύνηση σύγκλισης της μεθόδου

Ένα από τα σημεία που αφήσαμε ανοιχτά είναι κατά πόσον η προτεινόμενη μέθοδος συγκλίνει, στο όριο των μεγάλων γράφων, στη λύση της διαφορικής εξίσωσης. Πρόκειται για ένα εξαιρετικά δύσκολο πρόβλημα που απαιτεί μεταξύ άλλων πολύ καλές γνώσεις Συναρτησιακής Ανάλυσης. Για τα γραμμικά παραβολικά προβλήματα έχει αποδειχθεί ότι η μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων συγκλίνει στην ασθενή λύση της διαφορικής εξίσωσης. Έχει αποδειχθεί επίσης ότι για κάποιες κατηγορίες μη γραμμικών παραβολικών προβλημάτων η μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων επίσης συγκλίνει. Η απόδειξη για τη διαφορική εξίσωση που μελετάμε, αν υπάρχει, θα μπορούσε να εξαχθεί με τρόπο παρόμοιο με αυτόν στο [14]. Κάτι τέτοιο όμως ξεφεύγει από τα πλαίσια της εργασίας αυτής, με την έννοια ότι θα αποτελέσει το αντικείμενο μιας αυτοτελούς εργασίας.

Για το λόγο αυτό στην ενότητα αυτή θα περιγράψουμε απλώς μια στρατηγική που θα μπορούσε να ακολουθηθεί κανείς για την απόδειξη του ζητούμενου. Θα συμβολίσουμε με $u(t)$ τη λύση του ασθενούς προβλήματος

$$B(u; \dot{u}, \phi) = E(u, \phi), \forall \phi \in H^1(\Omega)$$

και με $\bar{u}(t)$ την προσέγγιση Galerkin, δηλαδή τη λύση του προηγούμενου προβλήματος περιορισμένου στον υπόχωρο S

$$B(\bar{u}; \partial \bar{u} / \partial t, \phi) = E(\bar{u}, \phi), \forall \phi \in S$$

που είναι ισοδύναμο με τη μορφή

$$B(\bar{u}; \partial \bar{u} / \partial t, \phi_i) = E(\bar{u}, \phi_i), i = 1, \dots, N$$

δεδομένου ότι οι B, E είναι γραμμικές ως προς το τελευταίο όρισμά τους και κάθε διάνυσμα του υπόχωρου μπορεί να γραφεί σαν γραμμικός συνδιασμός των διανυσμάτων βάσης. Τέλος με U^n συμβολίζουμε την προσέγγιση της $\bar{u}(t_n)$, δηλαδή της προσέγγισης Galerkin τη χρονική στιγμή t_n που υπολογίζεται από την εξίσωση

$$B \left(U^{n+1}; \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t}, \phi_i \right) = E(U^{n+1}, \phi_i), i = 1, \dots, N. \quad (4.13)$$

όταν εφαρμόζουμε την πεπλεγμένη μέθοδο Euler. Ιδανικά θα θέλαμε να δείξουμε ότι

$$\|u(t) - \bar{u}(t)\| \leq C_1 h^k$$

και

$$\|\bar{u}(t_n) - U^n\| \leq C_2 \Delta t$$

όπου h η μέγιστη απόσταση μεταξύ γειτονικών κορυφών (ή ισοδύναμα η μέγιστη πλευρά κάποιου τριγώνου) και k ένας θετικός αριθμός. Τότε χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα θα είχαμε

$$\begin{aligned} \|u(t_n) - U^n\| &= \|u(t_n) - \bar{u}(t_n) + \bar{u}(t_n) - U^n\| \\ &\leq \|u(t_n) - \bar{u}(t_n)\| + \|\bar{u}(t_n) - U^n\| \\ &\leq C(\Delta t + h^k) \end{aligned}$$

οπότε όταν $N \rightarrow \infty$ και $\Delta t \rightarrow 0$ η πλήρως διακριτοποιημένη λύση θα τείνει στην πραγματική. Όταν μιλάμε βέβαια για σύγκλιση δεν εννοούμε σημειακή σύγκλιση αλλά σύγκλιση ως προς τη νόρμα του χώρου $L_2(\Omega)$, δηλαδή σε κάθε χρονική στιγμή t_n η νόρμα της διαφοράς της πραγματικής λύσης τη χρονική στιγμή αυτή από τη λύση του (4.13) θα τείνει στο 0.

Κεφάλαιο 5

Πειραματική εφαρμογή της νέας μεθόδου

5.1 Εισαγωγή

Στο κομμάτι αυτό της εργασίας θα γίνει πειραματική αξιολόγηση της μεθόδου με στόχο την αναγνώριση αντικειμένων σε εικόνες. Θα ξεκινήσουμε αρχικά από απλά σχήματα και στη συνέχεια θα εξετάσουμε την αποτελεσματικότητα της μεθόδου σε πιο σύνθετα σχήματα και σε εικόνες που περιλαμβάνουν πολλαπλά αντικείμενα. Επίσης θα γίνει σχολιασμός της επίδρασης των διάφορων παραμέτρων του μοντέλου στο τελικό αποτέλεσμα αναγνώρισης καθώς και οι περιορισμοί της μεθόδου που προτάθηκε.

5.2 Μερικά συμπληρωματικά στοιχεία

Στο πλαίσιο της θεωρητικής ανάλυσης μελετήσαμε τη μ.δ.ε. στην ακριβή της μορφή. Προκειμένου όμως να μπορεί να επιλυθεί με ευσταθή και εύρωστο τρόπο με χρήση υπολογιστή πρέπει να γίνει μια μικρή τροποποίηση. Συγκεκριμένα, στα σημεία όπου εμφανίζεται σαν παρονομαστής η ποσότητα $\|\nabla u\|$ προσθέτουμε στον προηγούμενο αριθμό μια μικρή θετική σταθερά ε η οποία είναι της τάξης του $10^{-4} - 10^{-6}$. Ο λόγος πίσω από αυτή την τροποποίηση είναι για να αποφύγουμε να συμβεί διαίρεση με το μηδέν σε σημεία που η συνάρτηση u γίνεται πολύ ομαλή λόγω της μεταφοράς του όρου που σχετίζεται με το μέτρο της κλίσης στο πρώτο μέλος της (2.5). Οπότε η εξίσωση που θα επιλυθεί είναι η ελαφρά τροποποιημένη

$$\left(\frac{1}{\|\nabla u\| + \varepsilon} \right) \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div} \left(g_I \frac{\nabla u}{\|\nabla u\| + \varepsilon} \right) + \beta g_I$$

Ένα σημείο που έχει μείνει ακόμα ανοικτό είναι ο υπολογισμός μέτρου της κλίσης της εικόνας I . Για λόγους ευρωστίας πρέπει όμως να εξομαλύνουμε πρώτα την εικόνα με κάποιο βαθυπερατό φίλτρο. Το φιλτράρισμα μπορεί να γίνει

μιμούμενοι τη διαδικασία της συνέλιξης πάνω σε γράφους. Πιο συγκεκριμένα αν ορίσουμε

$$G_\sigma(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$$

Η φιλτραρισμένη εκδοχή της εικόνας προκύπτει ως

$$I_\sigma(u) = \frac{1}{1/\sqrt{2\pi\sigma^2} + \sum_{v \sim u} G_\sigma(\|u - v\|)} \left(I(u) + \sum_{v \sim u} I(v) G_\sigma(\|u - v\|) \right)$$

Ο πολλαπλασιαστικός όρος στην αρχή χρειάζεται έτσι ώστε να εξασφαλίσουμε ότι θα είναι ένα φίλτρο σταθμισμένου μέσου όρου.

Αξίζει να τονιστεί ότι τη μέθοδο αυτή δεν μας ενδιαφέρει να υπολογίσουμε την τιμή της κλίσης στα μεμονωμένα σημεία - κορυφές του γράφου. Αντ' αυτού δεδομένου ότι η g_I υπεισέρχεται στις σχέσεις μόνο μέσω ολοκληρωμάτων αρκεί να υπολογίσουμε την τιμή της σε κάθε τρίγωνο. Αυτό μπορεί να γίνει “προβάλλοντας” τη συνάρτηση στο χώρο S (4.7) δηλαδή ορίζοντας την

$$\bar{I}_\sigma = \sum_{i=1}^N I_\sigma(v_i) \phi_i$$

όποτε θα είναι

$$\nabla \bar{I}_\sigma = \sum_{i=1}^N I_\sigma(v_i) \nabla \phi_i$$

και άρα

$$\|\nabla \bar{I}_\sigma\| = \left\| \sum_{i=1}^N I_\sigma(v_i) \nabla \phi_i \right\|$$

Προηγουμένως χρησιμοποιήσαμε τον όρο προβολή εντός εισαγωγικών γιατί η \bar{I}_σ δεν είναι πράγματι η προβολή της I_σ στο χώρο S_1 , αλλά μια συνάρτηση κοντά σε αυτήν.

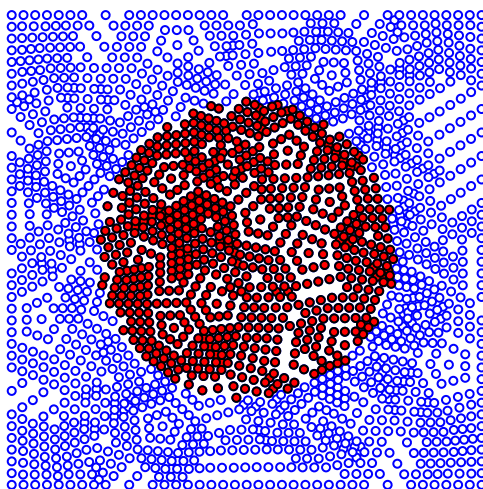
5.3 Αναγνώριση μεμονωμένων αντικειμένων

Στην εξαγωγή των αποτελεσμάτων χρησιμοποιήσαμε γράφους με περίπου $N = 2000$ κορυφές και χρονικό βήμα $\Delta t = 0.001$. Όπως θα δούμε και στο επόμενο κεφάλαιο μπορούμε να πάρουμε εξίσου καλά αποτελέσματα και με γράφους με αρκετά λιγότερες κορυφές. Οι τιμές αυτές επιλέχθηκαν απλώς για καλύτερη γραφική παρουσίαση των αποτελεσμάτων.

5.3.1 Αναγνώριση κυκλικού αντικειμένου

Στο κομμάτι των δυαδικών εικόνων θεωρούμε ότι η εικόνα παίρνει την τιμή 0 στο παρασκήνιο και την τιμή 1 στα αντικείμενα. Θα ξεκινήσουμε από την απλή

περίπτωση που καλούμαστε να αναγνωρίσουμε ένα κυκλικό αντικείμενο όπως φαίνεται στο σχήμα 5.1¹. Αυτή η περίπτωση είναι η πιο εύκολη και δεν αναμένουμε ιδιαίτερες δυσκολίες. Πράγματι στα σχήματα 5.2-5.4 βλέπουμε κατά σειρά την εξέλιξη της καμπύλης, την τελική συνάρτηση u καθώς και το αποτέλεσμα της ανίχνευσης πάνω στο γράφο. Όσον αφορά το σχήμα που παρουσιάζει το αποτέλεσμα αναγνώρισης, με πράσινο χρώμα σημειώνονται οι κορυφές που ανιχνεύθηκαν σωστά, με κόκκινο χρώμα αυτές που ανιχνεύθηκαν λανθασμένα (δηλαδή δεν ανήκουν στο αρχικό αντικείμενο) και με μαύρο χρώμα αυτές που δεν ανιχνεύθηκαν αλλά ανήκουν στο αρχικό αντικείμενο.



Σχήμα 5.1: Κυκλικό αντικείμενο

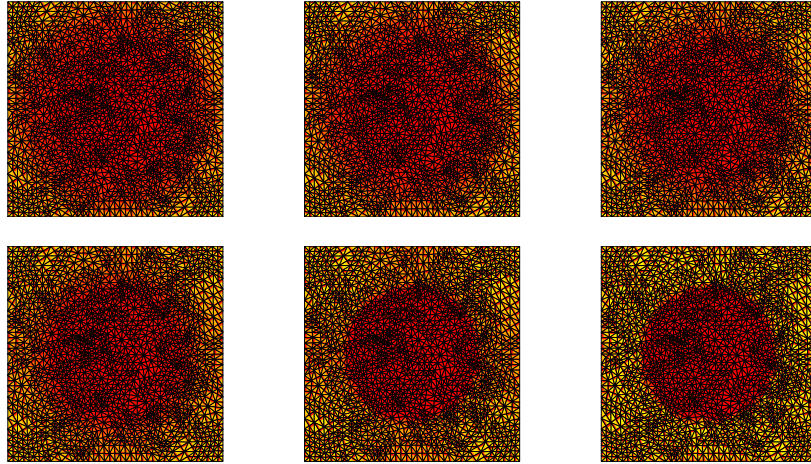
5.3.2 Αναγνώριση τριγωνικού αντικειμένου

Στο κομμάτι αυτό καλούμαστε να αναγνωρίσουμε ένα ελαφρώς πιο δύσκολο αντικείμενο, ένα τρίγωνο. Η μεγαλύτερη δυσκολία οφείλεται στο γεγονός ότι το περίγραμμα δεν είναι ομαλό αλλά εμφανίζονται σε αυτό γωνίες. Όπως μπορούμε να δούμε και στα σχήματα 5.5 έως 5.8 το αποτέλεσμα της ανίχνευσης είναι πάρα πολύ ικανοποιητικό.

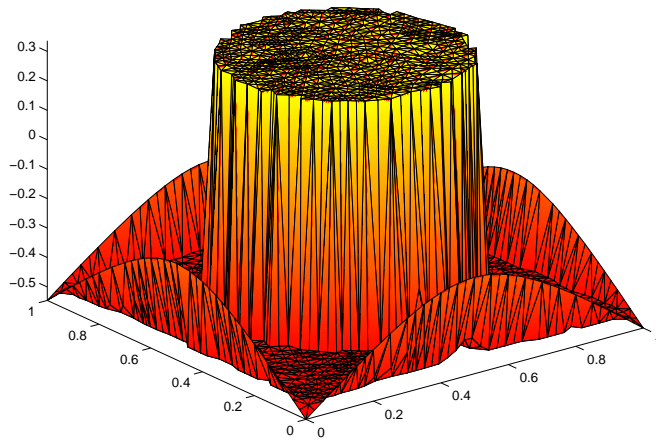
5.3.3 Αναγνώριση μη κυρτού αντικειμένου

Για το τέλος της πρώτης ενότητας θα εξετάσουμε τη δυνατότητα του αλγορίθμου να ανιχνεύσει ένα αρκετά πιο δύσκολο αντικείμενο, που μοιάζει με ένα ανάποδο ελληνικό Π. Τα 2 προηγούμενα σχήματα που ανιχνεύσαμε ήταν

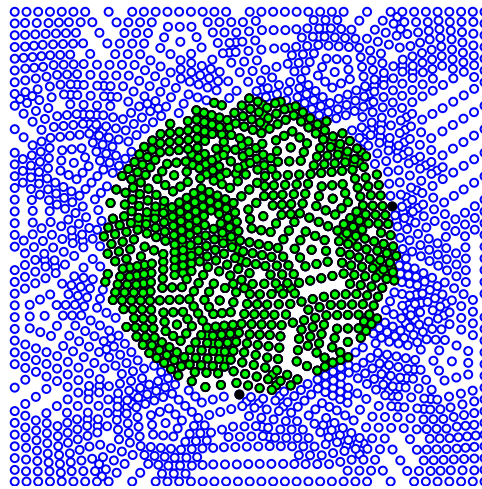
¹Τα γεωμετρικά μοτίβα που φαίνονται να σχηματίζονται από τις θέσεις των κορυφών του γράφου δημιουργούνται από τον αλγόριθμο που πραγματοποιεί τον τριγωνισμό του μοναδιαίου τετραγώνου (βλ. [15], [23]). Μπορούν να εξαλειφθούν είτε με εξ' ολοκλήρου τυχαιοποίηση της διαδικασίας είτε με μικρές τυχαίες μετατοπίσεις των κορυφών από τις αρχικές τους θέσεις (jiggling)



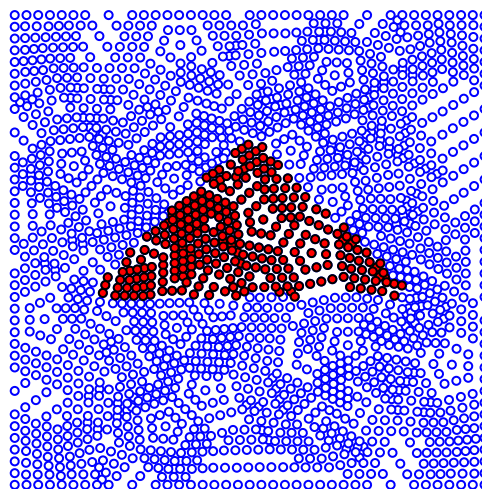
Σχήμα 5.2: Εξέλιξη επιπεδοσυνόλων για το κυκλικό αντικείμενο



Σχήμα 5.3: Συνάρτηση u μετά τη σύγκλιση για το κυκλικό αντικείμενο



Σχήμα 5.4: Αποτέλεσμα ανίχνευσης κυκλικού αντικειμένου

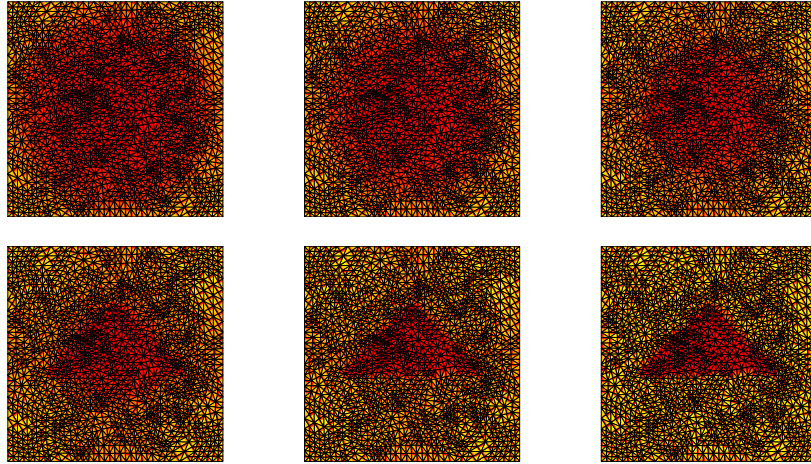


Σχήμα 5.5: Τριγωνικό αντικείμενο

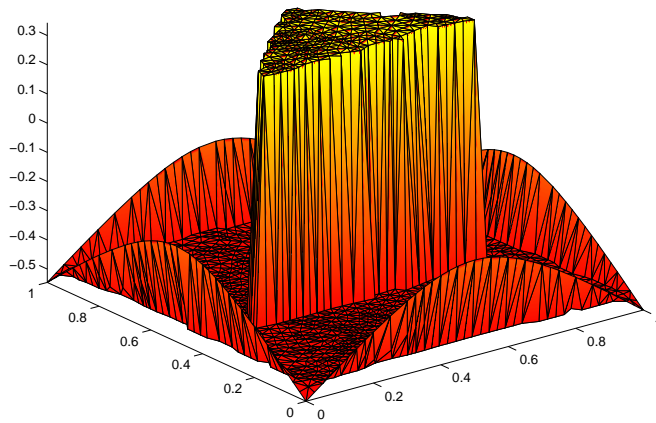
κυρτά σχήματα, κάτι που δεν ισχύει για το παρόν. Κοιτάζοντας τα σχήματα 5.9 έως 5.12 μπορούμε να δούμε ότι και σε αυτή την περίπτωση η απόδοση του αλγορίθμου είναι πολύ καλή.

5.4 Αναγνώριση πολλαπλών αντικειμένων

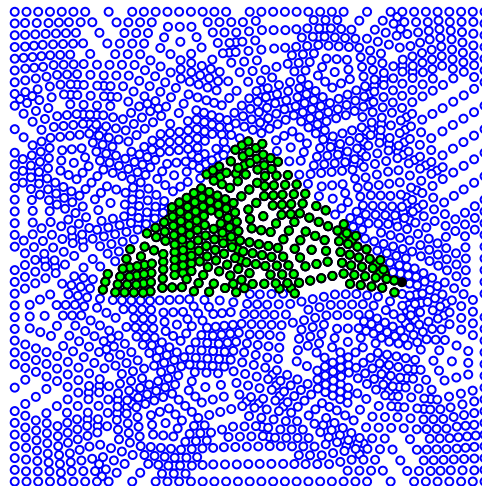
Στην ενότητα αυτή θα εξετάσουμε την απόδοση του αλγορίθμου στις περιπτώσεις αναγνώρισης πολλαπλών αντικειμένων. Η πιο σημαντική διαφορά σε σχέση με τα προηγούμενα προβλήματα είναι ότι πλέον έχουμε τοπολογικές αλλαγές στην ενεργό καμπύλη, δηλαδή αυτή χρειάζεται να χωριστεί σε 2 και περισσότερες καμπύλες που εξελίσσονται ανεξάρτητα. Ένας σημαντικός πα-



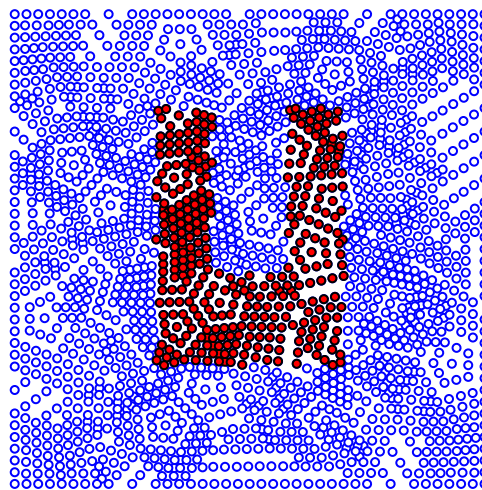
Σχήμα 5.6: Εξέλιξη επιπεδοσυνόλων για το τριγωνικό αντικείμενο



Σχήμα 5.7: Συνάρτηση u μετά τη σύγκλιση για το τριγωνικό αντικείμενο



Σχήμα 5.8: Αποτέλεσμα ανίχνευσης τριγωνικού αντικειμένου

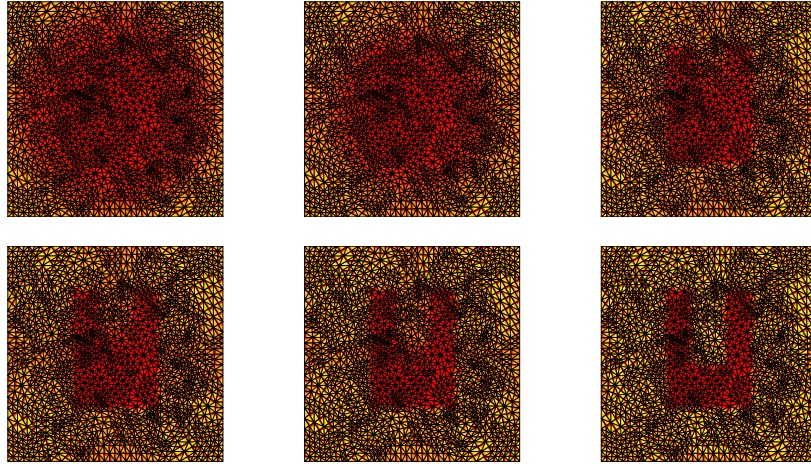


Σχήμα 5.9: Μη κυρτό αντικείμενο

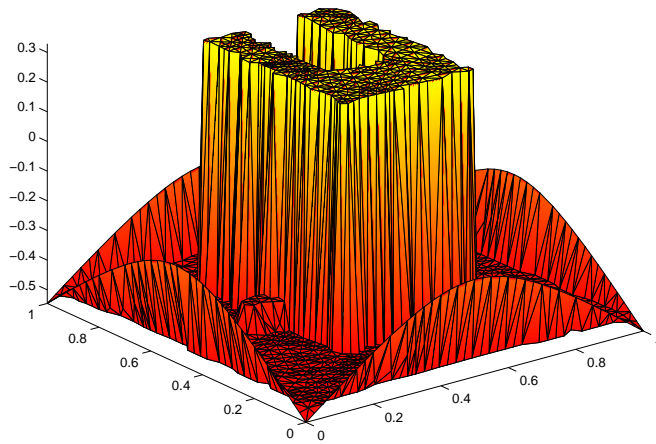
ράγοντας που πρέπει να ληφθεί υπ'όψιν είναι ότι στις περιοχές μεταξύ των αντικειμένων πρέπει η εκτίμηση του μέτρου της κλίσης της εικόνας να είναι αρκετά απότομη (sharp) έτσι ώστε η καμπύλη να μπορεί να προχωρήσει, να χωριστεί και να σταματήσει στη συνέχεια στα όρια των αντικειμένων.

5.4.1 Αναγνώριση 3 κυκλικών αντικειμένων

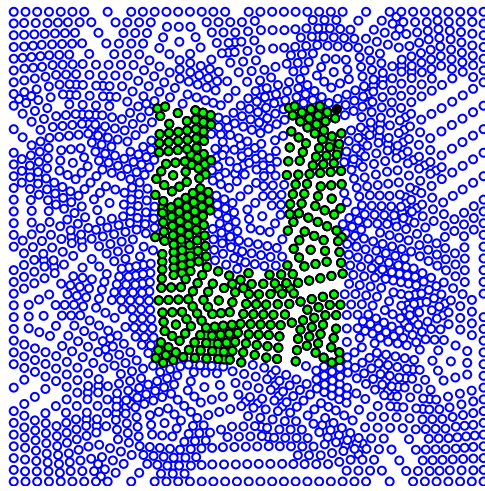
Σε αντιστοιχία με τα προηγούμενα ξεκινάμε από την απλή περίπτωση αναγνώρισης κυκλικών αντικειμένων. Η διαδικασία αναγνώρισης φαίνεται στα σχήματα 5.13 έως 5.16. Και σε αυτήν την περίπτωση ο αλγόριθμος συγκλίνει χωρίς ιδιαίτερες δυσκολίες.



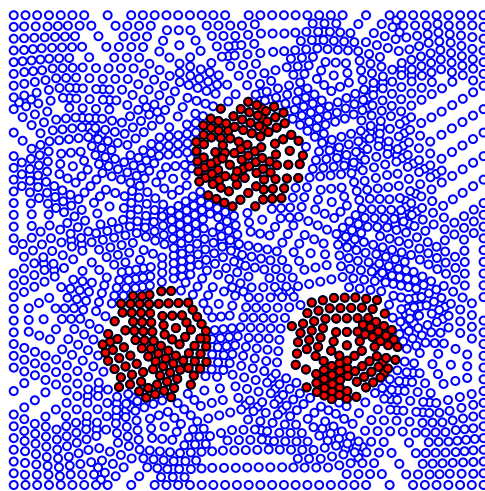
Σχήμα 5.10: Εξέλιξη επιπεδοσυνόλων για το μη κυρτό αντικείμενο



Σχήμα 5.11: Συνάρτηση u μετά τη σύγκλιση για το μη κυρτό αντικείμενο



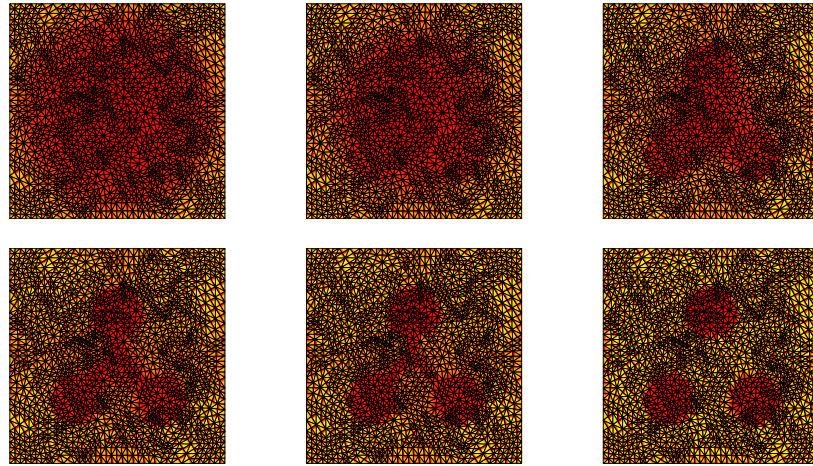
Σχήμα 5.12: Αποτέλεσμα ανίχνευσης μη κυρτού αντικειμένου



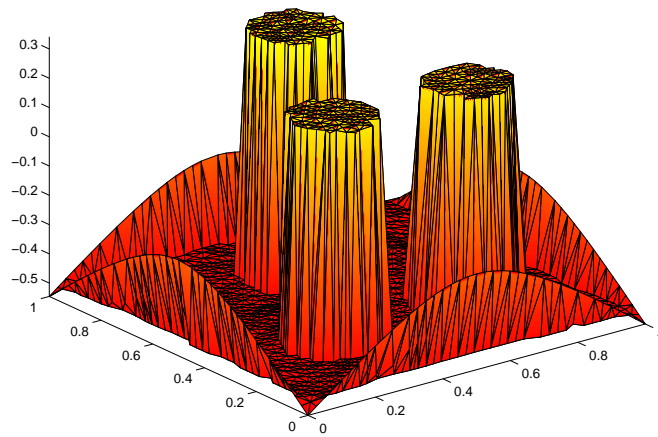
Σχήμα 5.13: 3 κυκλικά αντικείμενα

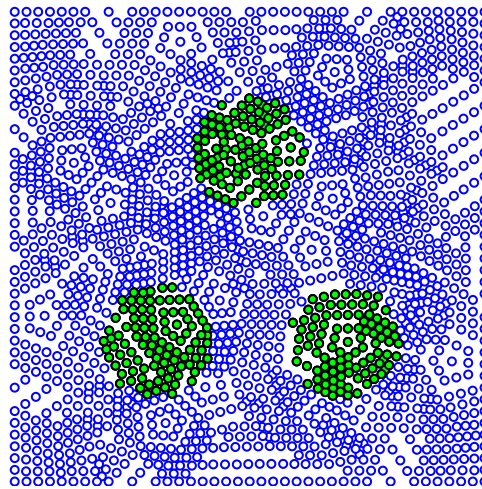
5.4.2 Αναγνώριση διαφορετικών αντικειμένων

Στην περίπτωση αυτή θα εξετάσουμε την απόδοση του αλγορίθμου στην αναγνώριση ενός τριγωνικού και 2 κυκλικών αντικειμένων. Η περίπτωση αυτή είναι αρκετά πιο δύσκολη από την προηγούμενη και χρειάστηκε να παρέλθει περισσότερος χρόνος μέχρι τη σύγκλιση. Όπως όμως μπορούμε να δούμε και στα σχήματα 5.17 - 5.20 το αποτέλεσμα της ανίχνευσης ήταν και πάλι πολύ ικανοποιητικό.

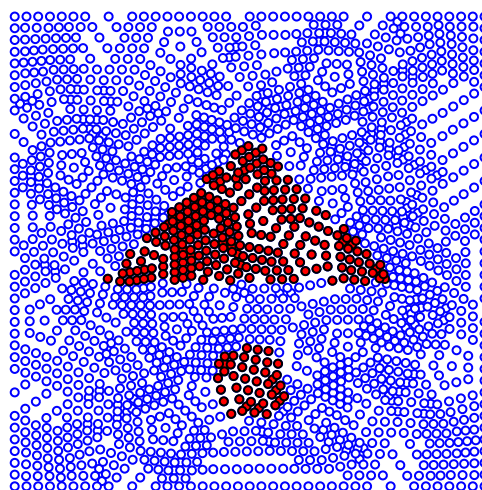


Σχήμα 5.14: Εξέλιξη επιπεδοσυνόλων για τα 3 κυκλικά αντικείμενα

Σχήμα 5.15: Συνάρτηση u μετά τη σύγκλιση για τα 3 κυκλικά αντικείμενα



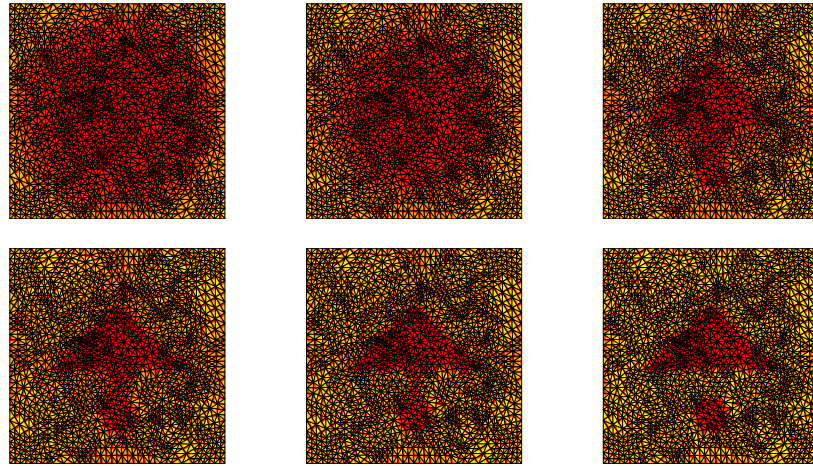
Σχήμα 5.16: Αποτέλεσμα ανίχνευσης για τα 3 κυκλικά αντικείμενα



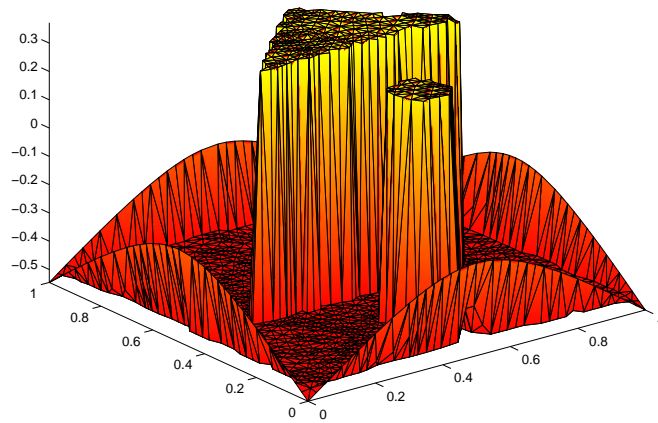
Σχήμα 5.17: 2 διαφορετικά αντικείμενα

5.4.3 Μια σύνθετη περίπτωση

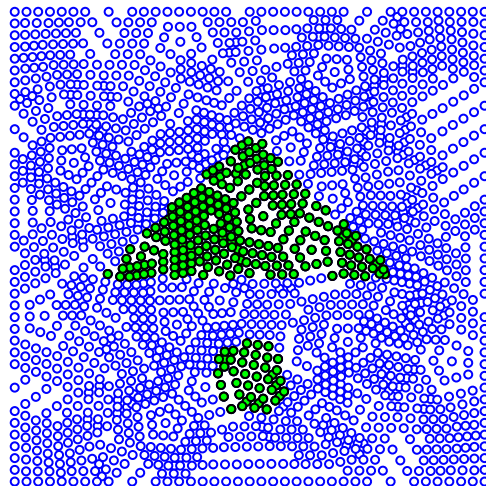
Σαν τελευταία εφαρμογή στην περίπτωση των δυαδικών εικόνων αφήσαμε την πολύ δύσκολη περίπτωση που φαίνεται στα σχήμα 5.21 - 5.24. Στην περίπτωση αυτή ο αλγόριθμος χρειάστηκε σχεδόν το διπλάσιο χρόνο μέχρι τη σύγκλιση.



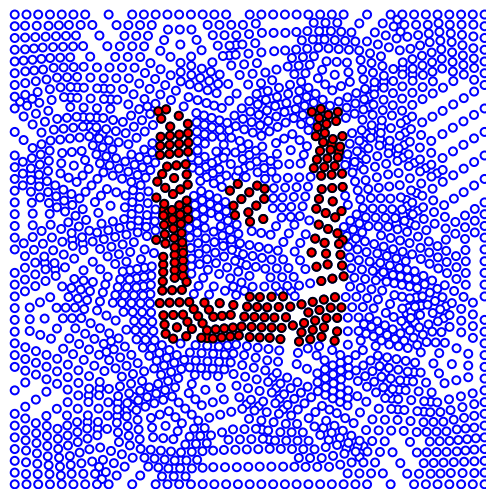
Σχήμα 5.18: Εξέλιξη επιπεδοσυνόλων για τα 2 διαφορετικά αντικείμενα



Σχήμα 5.19: Συνάρτηση u μετά τη σύγκλιση για τα 2 διαφορετικά αντικείμενα



Σχήμα 5.20: Αποτέλεσμα ανίχνευσης για τα 2 διαφορετικά αντικείμενα

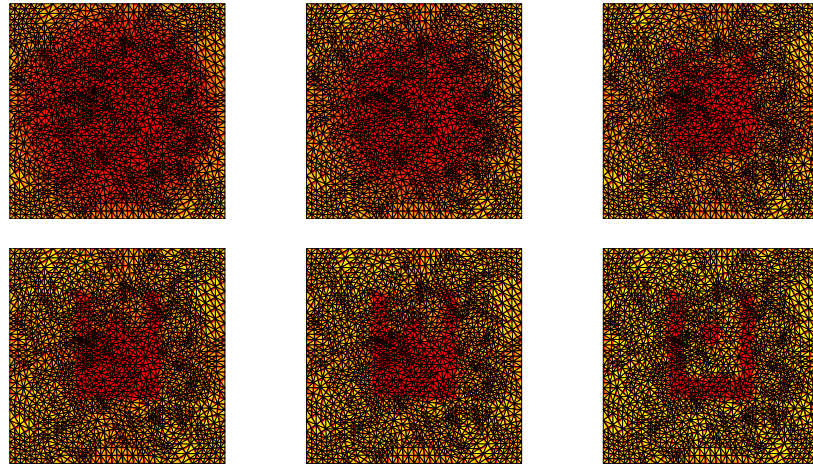


Σχήμα 5.21: Μια σύνθετη περίπτωση

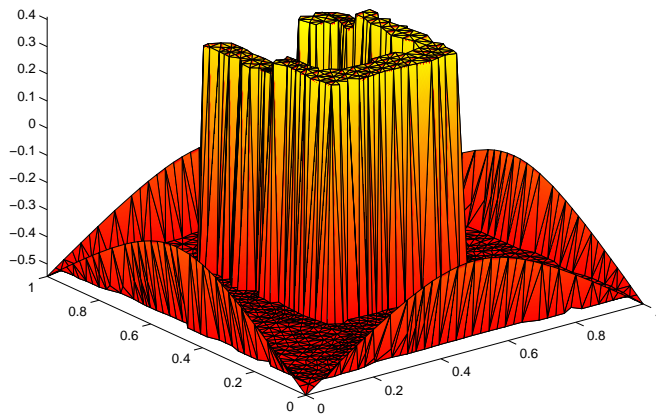
5.5 Αναγνώριση αντικειμένων σε περιβάλλον θορύβου

5.5.1 Περίπτωση Γκαουσιανού θορύβου

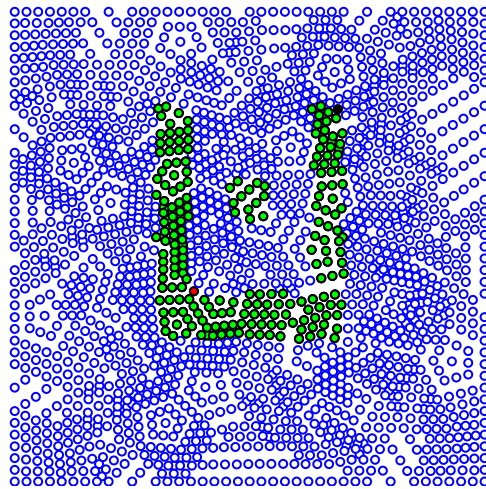
Αρχικά θα εξετάσουμε την περίπτωση ανίχνευσης ενός τετραγωνικού αντικειμένου σε περιβάλλον όπου υπάρχει έντονος γκαουσιανός θόρυβος. Το αντικείμενο που καλούμαστε να αναγνωρίσουμε φαίνεται στο σχήμα 5.25, με τη συνάρτηση εικόνας (με τιμή 1 στις κορυφές του αντικειμένου και 0 αλλού) να φαίνεται με τη σειρά της στο σχήμα 5.26. Ο γράφος που χρησιμοποιείται έχει περίπου 2000 κορυφές. Στο σχήμα 5.27 βλέπουμε τη θορυβώδη εκδοχή



Σχήμα 5.22: Εξέλιξη επιπεδοσυνόλων για τη σύνθετη περίπτωση

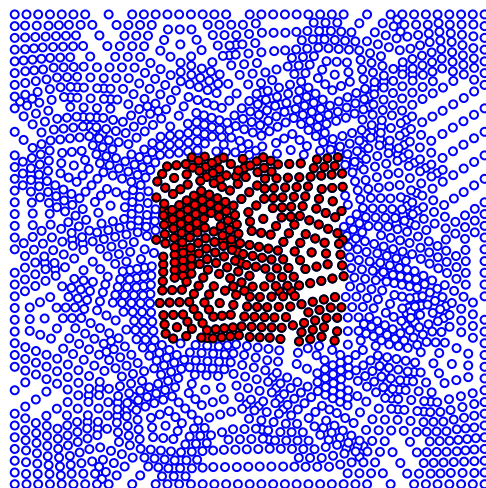


Σχήμα 5.23: Συνάρτηση u μετά τη σύγκλιση για τη σύνθετη περίπτωση

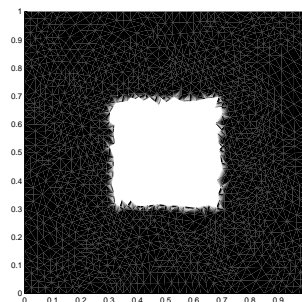


Σχήμα 5.24: Αποτέλεσμα ανίχνευσης για τη σύνθετη περίπτωση

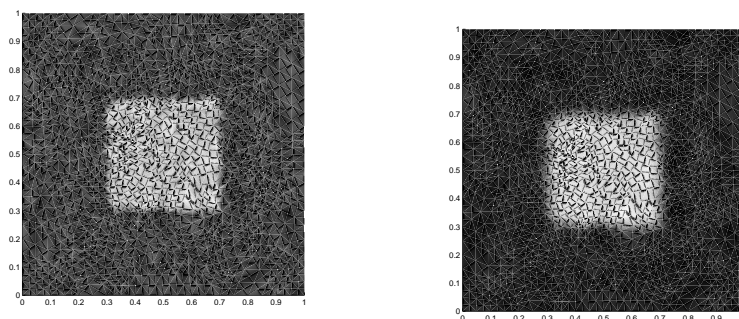
της συνάρτησης καθώς και αυτή που προκύπτει μετά από βαθυπερατό φιλτράρισμα. Στη συνέχεια στο σχήμα 5.28 βλέπουμε την εξέλιξη των επιπεδοσυνόλων κατά την εφαρμογή του αλγορίθμου και τέλος στο σχήμα 5.29 το αποτέλεσμα αναγνώρισης. Όπως αναμέναμε, το αποτέλεσμα αναγνώρισης δεν είναι τέλειο αφού ο θόρυβος ήταν πολύ ισχυρός, αλλά εντούτοις αποτυπώνει σχετικά καλά το τετραγωνικό αντικείμενο. Σημειώνεται ότι στην περίπτωση αυτή δεν επιχειρήσαμε να αλλάξουμε τις παραμέτρους του αλγορίθμου αλλά κρατήθηκαν ίδιες με τα προηγούμενα πειράματα.



Σχήμα 5.25: Τετραγωνικό αντικείμενο σε γράφο 2000 κορυφών



Σχήμα 5.26: Ιδανική συνάρτηση εικόνας



(α) Συνάρτηση εικόνας με γκαουσιανό θόρυβο (β) Φιλτραρισμένη συνάρτηση εικόνας

Σχήμα 5.27: Τετραγωνικό αντικείμενο

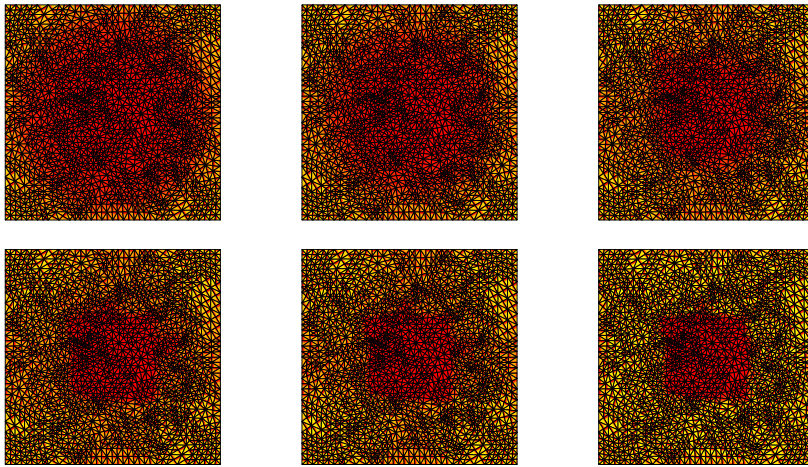
5.5.2 Περίπτωση θορύβου τύπου salt and pepper

Στο σημείο αυτό θα εξετάσουμε την απόδοση του αλγορίθμου σε διαφορετικό τύπο θορύβου, θόρυβο που μοιάζει με τον κλασικό salt and pepper noise στις εικόνες. Το προς αναγνώριση σχήμα είναι το ίδιο με πριν. Στα σχήματα 5.30 έως 5.32 παρουσιάζεται η διαδικασία αναγνώρισης κατ' αναλογία με πριν. Τα αποτελέσματα είναι παραπλήσια με την περίπτωση του γκαουσιανού θορύβου. Θα μπορούσαμε να επιτύχουμε πιθανότατα καλύτερα αποτελέσματα χρησιμοποιώντας φιλτράρισμα ενδιάμεσης τιμής που όπως γνωρίζουμε είναι ιδανικό στην περίπτωση του θορύβου αυτού.

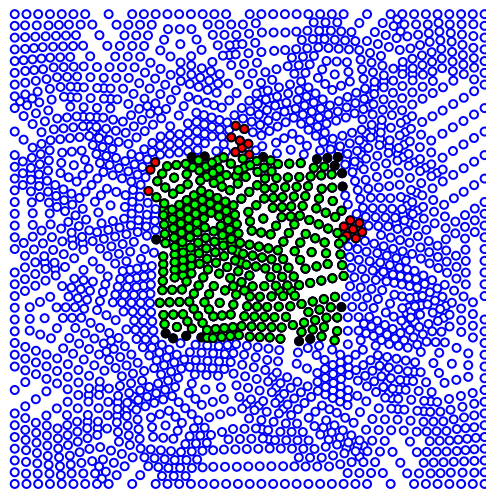
5.6 Εφαρμογή σε εικόνες

5.6.1 Αναλυτικοί υπολογισμοί

Στο τελικό αυτό κομμάτι της εργασίας θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο όχι σε γράφους Delaunay με αυθαίρετη δομή αλλά σε εικόνες οι οποίες ουσιαστικά είναι γράφοι με τις κορυφές τους να αποτελούν σημεία ενός ορθογωνίου



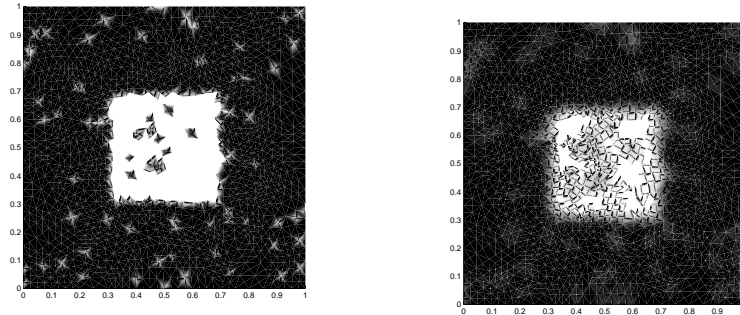
Σχήμα 5.28: Εξέλιξη επιπεδοσυνόλων για την περίπτωση του γκαουσιανού θορύβου



Σχήμα 5.29: Αποτέλεσμα αναγνώρισης με γκαουσιανό θόρυβο

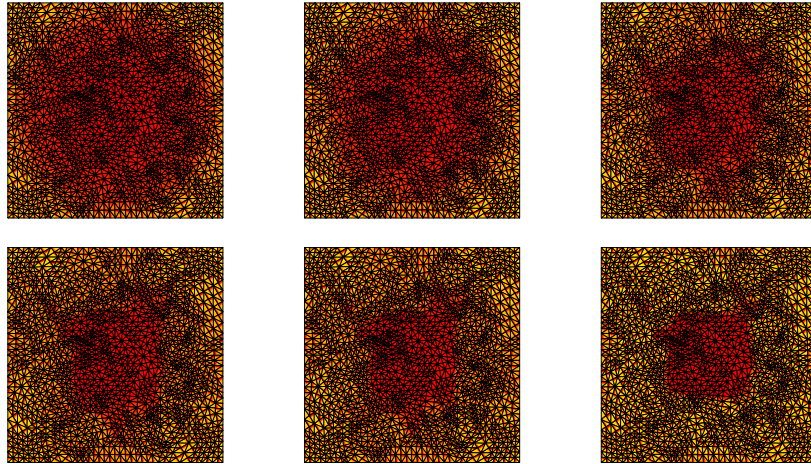
πλέγματος. Θα μελετηθεί η συμπεριφορά σε σχέση με την ακρίβεια και την αποδοτικότητα του αλγορίθμου και θα γίνει σύγκριση με γνωστές μεθόδους που έχουν αναπτυχθεί και που είναι εξαιρετικά αποδοτικές.

Όπως μπορούμε να δούμε και στο σχήμα 4.5 η εικόνα είναι ένας γράφος Delaunay με την πολύ συγκεκριμένη αυτή μορφή. Στους υπολογισμούς που θα γίνουν (οι οποίοι είναι εξειδίκευση των υπολογισμών που έγιναν στις εξισώσεις (4.9), (4.10) και (4.11)) θα επικεντρωθούμε στους εσωτερικούς κόμβους και όχι σε αυτούς του συνόρου. Η δεύτερη περίπτωση είναι μια ειδικότερη και απλούστερη και θα μπορούσαμε να τη συμπεριλάβουμε αλλά η προσήλωση στις μαθηματικές λεπτομέρειες με περίπλοκες εξισώσεις θα καθιστούσε την εργα-



(α') Συνάρτηση εικόνας με θόρυβο τύπου salt and pepper (β') Φιλτραρισμένη συνάρτηση εικόνας

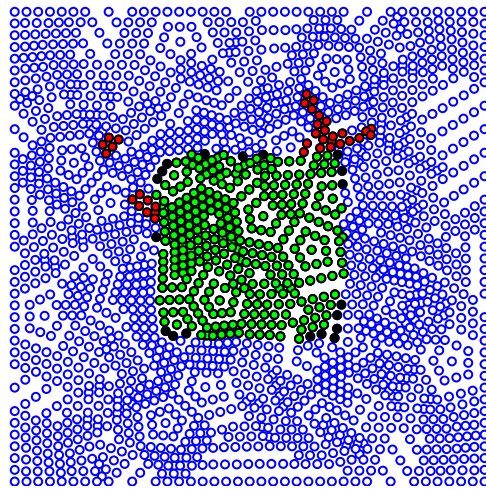
Σχήμα 5.30: Τετραγωνικό αντικείμενο



Σχήμα 5.31: Εξέλιξη επιπεδοσυνόλων για την περίπτωση του γκαουσιανού θορύβου

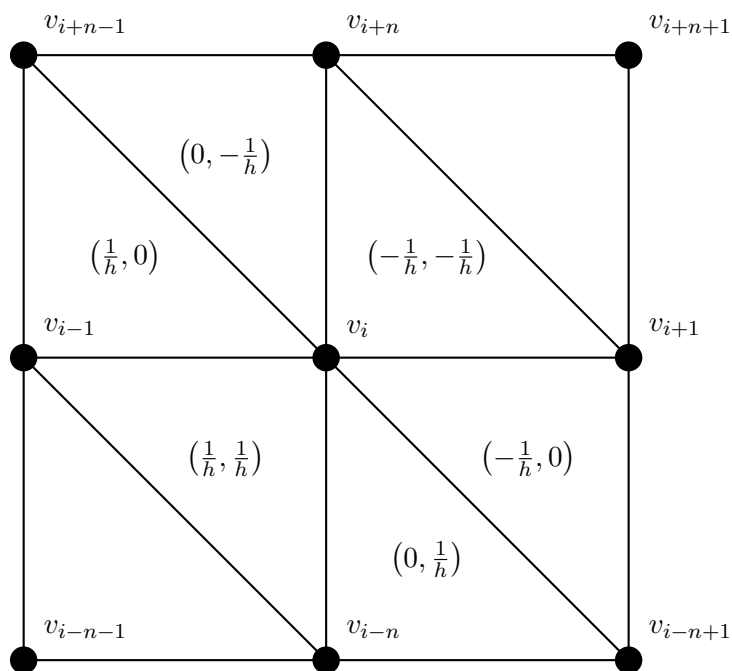
σία αυτή κουραστική και δυσανάγνωστη χωρίς να προσφέρει κάποια επιπλέον ουσία.

Αρχικά θεωρούμε μια εικόνα διαστάσεων $n \times n$ και τον αντίστοιχο γράφο πλέγμα που προκύπτει από αυτήν. Πρόκειται για ένα γράφο $N = n \times n$ κόμβων συνολικά. Το βήμα στην οριζόντια και την κάθετη κατεύθυνση ισούται με $h = \frac{1}{n-1}$ κι έτσι το χωρίο που προκύπτει είναι το μοναδιαίο τετράγωνο. Παράλληλα μπορούμε να δούμε ότι σε κάθε εσωτερικό κόμβο αντιστοιχούν ακριβώς 6 τρίγωνα. Η κανονικότητα αυτή της δομής του γράφου κάνει τις σχέσεις απλούστερες και διευκολύνει τον προγραμματισμό της μεθόδου. Στο σχήμα 5.33 μπορούμε να δούμε τη μορφή της κλίσης της συνάρτησης ϕ_i σε έναν τυχόντα εσωτερικό κόμβο i . Η κλίση είναι η ίδια στα αντίστοιχα τρίγωνα κάθε κόμβου καθώς δεν επηρεάζεται από χωρικές μετατοπίσεις. Επομένως από



Σχήμα 5.32: Αποτέλεσμα αναγνώρισης με γκαουσιανό θόρυβο

το σχήμα αυτό μπορούμε να υπολογίσουμε την κλίση κάθε συνάρτησης ϕ_i σε κάθε τρίγωνο που μας ενδιαφέρει.



Σχήμα 5.33: Η κλίση της συνάρτησης ϕ_i , $\nabla\phi_i$

Επομένως, βασιζόμενοι στη σχέση (4.9), το σχήμα 5.33 και το γεγονός ότι το εμβαδό κάθε τριγώνου ισούται με $\frac{h^2}{2}$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
(A)_{ii} = \frac{h^2}{12} & \left(\frac{1}{\|c_i(0, \frac{1}{h}) + c_{i-n}(-\frac{1}{h}, -\frac{1}{h}) + c_{i-n+1}(\frac{1}{h}, 0)\|} \right. \\
& + \frac{1}{\|c_i(-\frac{1}{h}, 0) + c_{i-n+1}(0, -\frac{1}{h}) + c_{i+1}(\frac{1}{h}, \frac{1}{h})\|} \\
& + \frac{1}{\|c_i(-\frac{1}{h}, -\frac{1}{h}) + c_{i+1}(\frac{1}{h}, 0) + c_{i+n}(0, \frac{1}{h})\|} \\
& + \frac{1}{\|c_i(0, -\frac{1}{h}) + c_{i+n}(\frac{1}{h}, \frac{1}{h}) + c_{i+n-1}(-\frac{1}{h}, 0)\|} \\
& + \frac{1}{\|c_i(\frac{1}{h}, 0) + c_{i+n-1}(0, \frac{1}{h}) + c_{i-2}(-\frac{1}{h}, -\frac{1}{h})\|} \\
& \left. + \frac{1}{\|c_i(\frac{1}{h}, \frac{1}{h}) + c_{i-1}(-\frac{1}{h}, 0) + c_{i-n}(0, -\frac{1}{h})\|} \right)
\end{aligned}$$

Αναπτύσσοντας περαιτέρω τη σχέση αυτή παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}
(A)_{ii} = \frac{h^3}{12} & \left(\frac{1}{\sqrt{(c_{i-n+1} - c_{i-n})^2 + (c_i - c_{i-n})^2}} \right. \\
& + \frac{1}{\sqrt{(c_{i+1} - c_i)^2 + (c_{i+1} - c_{i-n+1})^2}} \\
& + \frac{1}{\sqrt{(c_{i+1} - c_i)^2 + (c_{i+n} - c_i)^2}} \\
& + \frac{1}{\sqrt{(c_{i+n} - c_{i+n-1})^2 + (c_{i+n} - c_i)^2}} \\
& + \frac{1}{\sqrt{(c_i - c_{i-1})^2 + (c_{i+n-1} - c_{i-1})^2}} \\
& \left. + \frac{1}{\sqrt{(c_i - c_{i-1})^2 + (c_i - c_{i-n})^2}} \right)
\end{aligned}$$

Στην περίπτωση τώρα που χρησιμοποιήσουμε την τροποποιημένη μορφή του παρονομαστή για να αποφύγουμε τυχόν μηδενικούς παρονομαστές η σχέση

γίνεται

$$(A)_{ii} = \frac{h^3}{12} \left(\frac{1}{\sqrt{(c_{i-n+1} - c_{i-n})^2 + (c_i - c_{i-n})^2 + \varepsilon h}} \right. \\ + \frac{1}{\sqrt{(c_{i+1} - c_i)^2 + (c_{i+1} - c_{i-n+1})^2 + \varepsilon h}} \\ + \frac{1}{\sqrt{(c_{i+1} - c_i)^2 + (c_{i+n} - c_i)^2 + \varepsilon h}} \\ + \frac{1}{\sqrt{(c_{i+n} - c_{i+n-1})^2 + (c_{i+n} - c_i)^2 + \varepsilon h}} \\ + \frac{1}{\sqrt{(c_i - c_{i-1})^2 + (c_{i+n-1} - c_{i-1})^2 + \varepsilon h}} \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{(c_i - c_{i-1})^2 + (c_i - c_{i-n})^2 + \varepsilon h}} \right)$$

για κάποια μικρή σταθερά ε .

Εργαζόμενοι αντίστοιχα και χρησιμοποιώντας τη σχέση (4.10) μπορούμε να βρούμε ότι

$$(A)_{i,i+1} = \frac{h^3}{24} \left(\frac{1}{\sqrt{(c_{i+1} - c_i)^2 + (c_{i+1} - c_{i-n+1})^2 + \varepsilon h}} \right. \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{(c_{i+1} - c_i)^2 + (c_{i+n} - c_i)^2 + \varepsilon h}} \right)$$

$$(A)_{i,i+n} = \frac{h^3}{24} \left(\frac{1}{\sqrt{(c_{i+1} - c_i)^2 + (c_{i+n} - c_i)^2 + \varepsilon h}} \right. \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{(c_{i+n} - c_{i+n-1})^2 + (c_{i+n} - c_i)^2 + \varepsilon h}} \right)$$

$$(A)_{i,i+n-1} = \frac{h^3}{24} \left(\frac{1}{\sqrt{(c_i - c_{i-1})^2 + (c_{i+n-1} - c_{i-1})^2 + \varepsilon h}} \right. \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{(c_{i+n} - c_{i+n-1})^2 + (c_{i+n} - c_i)^2 + \varepsilon h}} \right)$$

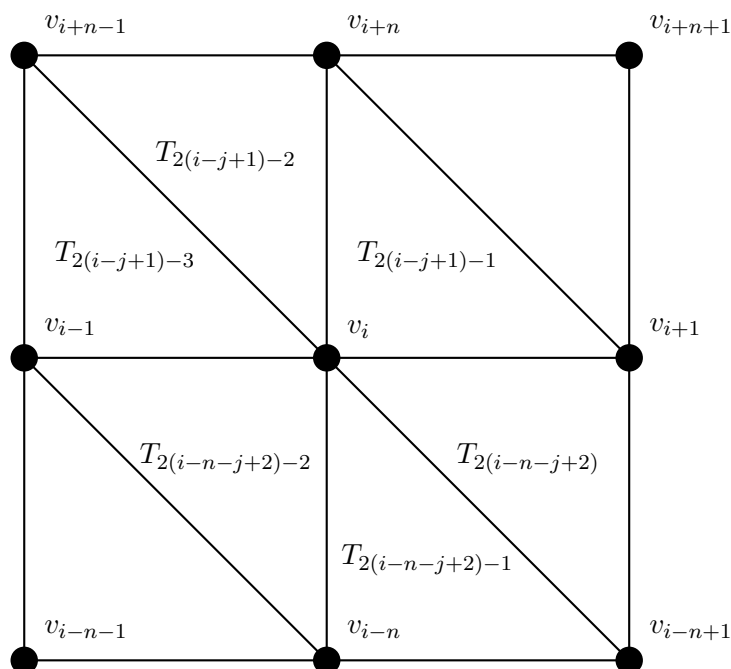
$$(A)_{i,i-1} = \frac{h^3}{24} \left(\frac{1}{\sqrt{(c_i - c_{i-1})^2 + (c_{i+n-1} - c_{i-1})^2 + \varepsilon h}} \right. \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{(c_i - c_{i-1})^2 + (c_i - c_{i-n})^2 + \varepsilon h}} \right)$$

$$(A)_{i,i-n} = \frac{h^3}{24} \left(\frac{1}{\sqrt{(c_i - c_{i-1})^2 + (c_i - c_{i-n})^2 + \varepsilon h}} + \frac{1}{\sqrt{(c_{i-n+1} - c_{i-n})^2 + (c_i - c_{i-n})^2 + \varepsilon h}} \right)$$

$$(A)_{i,i-n+1} = \frac{h^3}{24} \left(\frac{1}{\sqrt{(c_{i-n+1} - c_{i-n})^2 + (c_i - c_{i-n})^2 + \varepsilon h}} + \frac{1}{\sqrt{(c_{i+1} - c_i)^2 + (c_{i+1} - c_{i-n+1})^2 + \varepsilon h}} \right)$$

ενώ για όλα τα υπόλοιπα j , οι συντελεστές $(A)_{ij}$ είναι μηδενικοί.

Απομένει λοιπόν ο υπολογισμός των συντελεστών του διανύσματος. Στο γράφο υπάρχουν $2 \cdot (n-1)^2$ τρίγωνα και η αρίθμησή τους γίνεται με τη σειρά κατά γραμμή και εν συνεχεία κατά στήλη. Επομένως στο σχήμα 5.34 βλέπουμε την αρίθμηση των τριγώνων γύρω από τον κόμβο i . Με j συμβολίζουμε τη γραμμή στην οποία βρίσκεται ο i -οστός κόμβος.



Σχήμα 5.34: Η αρίθμηση των τριγώνων ϕ_i , $\nabla\phi_i$

Επομένως

$$\begin{aligned}
 (b)_i = & \frac{h^2 g (T_{2(i-n-j+2)-1})}{2} \left(\frac{2}{3}\beta - \frac{c_i (0, \frac{1}{h}) \cdot (0, \frac{1}{h}) + c_{i-n} (0, \frac{1}{h}) \cdot (-\frac{1}{h}, -\frac{1}{h})}{\frac{1}{h} \sqrt{(c_{i-n+1} - c_{i-n})^2 + (c_i - c_{i-n})^2 + \varepsilon}} \right) \\
 & + \frac{h^2 g (T_{2(i-n-j+2)})}{2} \left(\frac{2}{3}\beta - \frac{c_i (-\frac{1}{h}, 0) \cdot (-\frac{1}{h}, 0) + c_{i+1} (\frac{1}{h}, \frac{1}{h}) \cdot (-\frac{1}{h}, 0)}{\frac{1}{h} \sqrt{(c_{i+1} - c_i)^2 + (c_{i+n} - c_i)^2 + \varepsilon}} \right) \\
 & + \frac{h^2 g (T_{2(i-j+1)-1})}{2} \left(\frac{2}{3}\beta - \frac{c_i (-\frac{1}{h}, -\frac{1}{h}) \cdot c_{i+1} (\frac{1}{h}, 0) \cdot (-\frac{1}{h}, -\frac{1}{h}) + c_{i+n} (0, \frac{1}{h}) \cdot (-\frac{1}{h}, -\frac{1}{h})}{\frac{1}{h} \sqrt{(c_{i+1} - c_i)^2 + (c_{i+n} - c_{i1})^2 + \varepsilon}} \right) \\
 & + \frac{h^2 g (T_{2(i-j+1)-2})}{2} \left(\frac{2}{3}\beta - \frac{c_i (0, -\frac{1}{h}) \cdot (0, -\frac{1}{h}) + c_{i+n} (\frac{1}{h}, \frac{1}{h}) \cdot (0, -\frac{1}{h})}{\sqrt{(c_i - c_{i-1})^2 + (c_{i+n-1} - c_{i-1})^2 + \varepsilon h}} \right) \\
 & + \frac{h^2 g (T_{2(i-j+1)-3})}{2} \left(\frac{2}{3}\beta - \frac{c_i (\frac{1}{h}, 0) \cdot (\frac{1}{h}, 0) + c_{i-1} (-\frac{1}{h}, -\frac{1}{h}) \cdot (\frac{1}{h}, 0)}{\frac{1}{h} \sqrt{(c_i - c_{i-1})^2 + (c_{i+n-1} - c_{i-1})^2 + \varepsilon}} \right) \\
 & + g (T_{2(i-n-j+2)-2}) \left(\frac{2}{3}\beta - \frac{c_i (\frac{1}{h}, \frac{1}{h}) \cdot (\frac{1}{h}, \frac{1}{h}) + c_{i-1} (-\frac{1}{h}, 0) \cdot (\frac{1}{h}, \frac{1}{h}) + c_{i-n} (0, -\frac{1}{h}) \cdot (\frac{1}{h}, \frac{1}{h})}{\sqrt{(c_i - c_{i-1})^2 + (c_i - c_{i-n})^2 + \varepsilon h}} \right)
 \end{aligned}$$

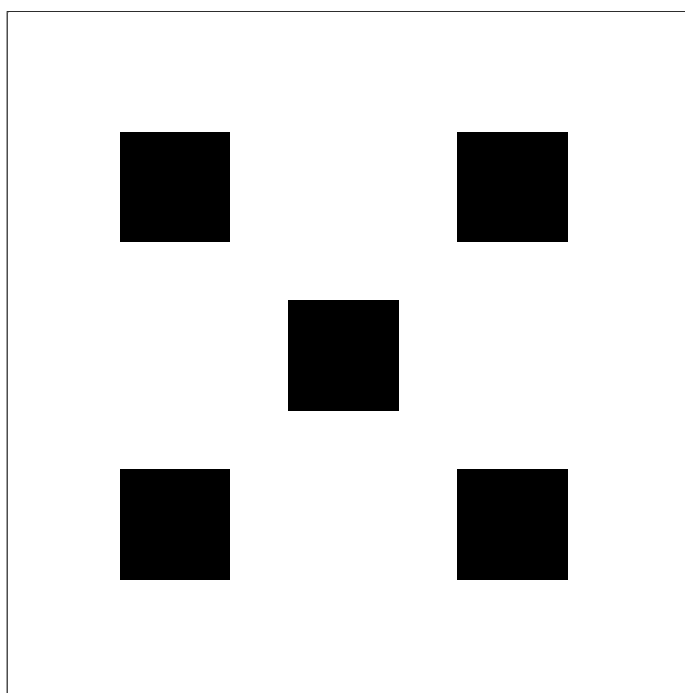
και μετά από μερικές πράξεις προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
 (b)_i = & \frac{h^2 g (T_{2(i-n-j+2)-1})}{2} \left(\frac{2}{3}\beta - \frac{\frac{1}{h}(c_i - c_{i-n})}{\sqrt{(c_{i-n+1} - c_{i-n})^2 + (c_i - c_{i-n})^2 + \varepsilon h}} \right) \\
 & + \frac{h^2 g (T_{2(i-n-j+2)})}{2} \left(\frac{2}{3}\beta - \frac{\frac{1}{h}(c_i - c_{i+1})}{\sqrt{(c_{i+1} - c_i)^2 + (c_{i+n} - c_i)^2 + \varepsilon h}} \right) \\
 & + \frac{h^2 g (T_{2(i-j+1)-1})}{2} \left(\frac{2}{3}\beta - \frac{\frac{1}{h}(2c_i - c_{i+1} - c_{i+n})}{\sqrt{(c_{i+1} - c_i)^2 + (c_{i+n} - c_{i1})^2 + \varepsilon h}} \right) \\
 & + \frac{h^2 g (T_{2(i-j+1)-2})}{2} \left(\frac{2}{3}\beta - \frac{\frac{1}{h}(c_i - c_{i+n})}{\sqrt{(c_i - c_{i-1})^2 + (c_{i+n-1} - c_{i-1})^2 + \varepsilon h}} \right) \\
 & + \frac{h^2 g (T_{2(i-j+1)-3})}{2} \left(\frac{2}{3}\beta - \frac{\frac{1}{h}(c_i - c_{i-1})}{\sqrt{(c_i - c_{i-1})^2 + (c_{i+n-1} - c_{i-1})^2 + \varepsilon h}} \right) \\
 & + \frac{h^2 g (T_{2(i-n-j+2)-2})}{2} \left(\frac{2}{3}\beta - \frac{\frac{1}{h}(2c_i - c_{i-1} - c_{i-n})}{\sqrt{(c_i - c_{i-1})^2 + (c_i - c_{i-n})^2 + \varepsilon h}} \right)
 \end{aligned}$$

5.6.2 Πειραματικά αποτελέσματα

Έχοντας πλέον ολοκληρώσει τη θεωρητική ανάλυση μπορούμε να ελέγξουμε την απόδοση της μεθόδου στην πράξη. Για το σκοπό αυτό θα χρησιμοποιηθεί μια τεχνητή δυαδική εικόνα διαστάσεων 128×128 η οποία περιλαμβάνει 5 διακριτά τετραγωνικά αντικείμενα. Η εικόνα αυτή φαίνεται στο σχήμα 5.35.

Η αρχική καμπύλη αυτή τη φορά επιλέγεται να είναι η περιφέρεια ενός τετραγώνου η οποία περικλείει τα προς ανίχνευση αντικείμενα. Η επιλογή αυτή υπαγορεύεται με φυσικό τρόπο από τη δομή του γράφου, με τις κορυφές να είναι τοποθετημένες πάνω σε τετραγωνικό πλέγμα. Στο σχήμα 5.36 φαίνεται η



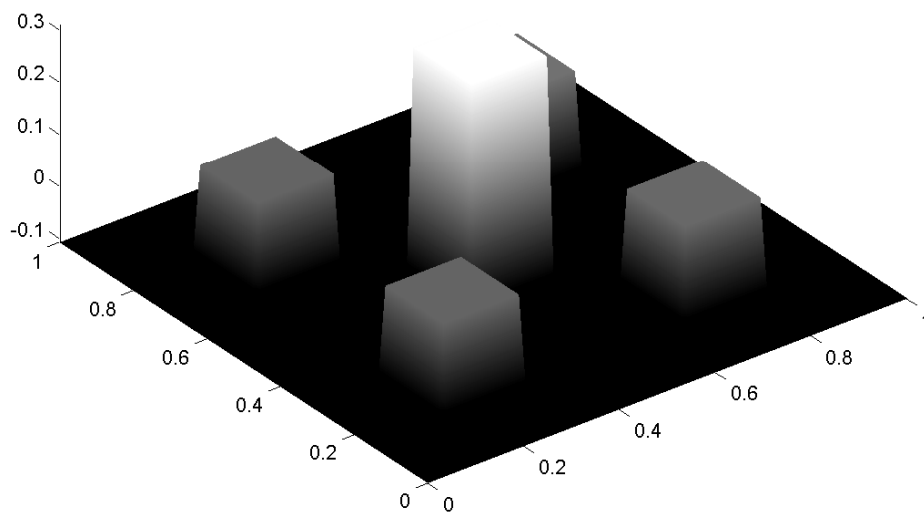
Σχήμα 5.35: Δυαδική εικόνα με 5 αντικείμενα διάστασης 128×128 pixels

εξέλιξη των καμπυλών πάνω στην εικόνα. Με μαύρο χρώμα επισημαίνονται οι περιοχές στο εσωτερικό των καμπυλών. Παρατηρούμε ότι η μέθοδος κατορθώνει να ανιχνεύσει με επιτυχία τα αντικείμενα της εικόνας.



Σχήμα 5.36: Προτεινόμενη μέθοδος - Εξέλιξη καμπύλων πάνω στην εικόνα

Για λόγους πληρότητας, στο σχήμα 5.37 παραθέτουμε και τη συνάρτηση επιπεδοσυνόλων μετά τη σύγκλιση. Παρατηρούμε ότι έχει επέλθει σύγκλιση, αφού η u είναι κατά τμήματα σταθερή με άλματα ασυνέχειας στα όρια των αντικειμένων.

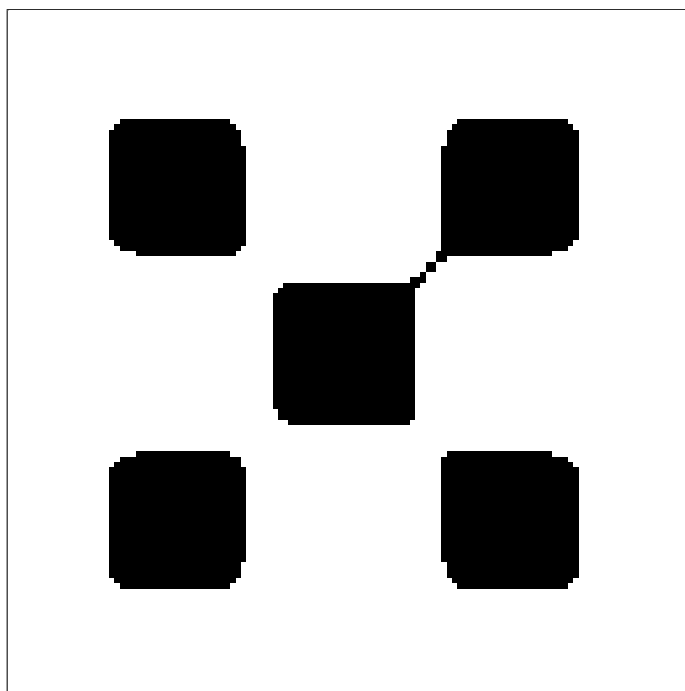


Σχήμα 5.37: Προτεινόμενη Μέθοδος - Συνάρτηση επιπεδοσυνόλων μετά τη σύγκλιση

5.6.3 Σύγκριση με άλλες μεθόδους

Στο τελευταίο κομμάτι θα συγκρίνουμε το προηγούμενο αποτέλεσμα με μεθόδους που έχουν χρησιμοποιηθεί ευρέως σε εικόνες. Συγκεκριμένα θα γίνει αντιπαραβολή με τη μέθοδο `activecontour` η οποία υπάρχει στο πακέτο λογισμικού MATLAB και χρησιμοποιεί τη μέθοδο `Sparse-Field level-set` παρόμοια με αυτή που περιγράφεται στο [28]. Το κύριο χαρακτηριστικό της μεθόδου αυτής αλλά και άλλων παρόμοιων είναι ότι είναι εξαιρετικά γρήγορες και μπορούν να χρησιμοποιηθούν ακόμα σε *real time* εφαρμογές. Έχουν επίσης γραμμική υπολογιστική πολυπλοκότητα ως προς το πλήθος των pixels της εικόνας, επιτρέποντας έτσι την εφαρμογή τους σε μεγάλες εικόνες, της τάξης των *megapixels*. Το αποτέλεσμα της κατάτμησης της ίδιας 128×128 εικόνας που χρησιμοποιήθηκε και πριν φαίνεται στο σχήμα 5.38.

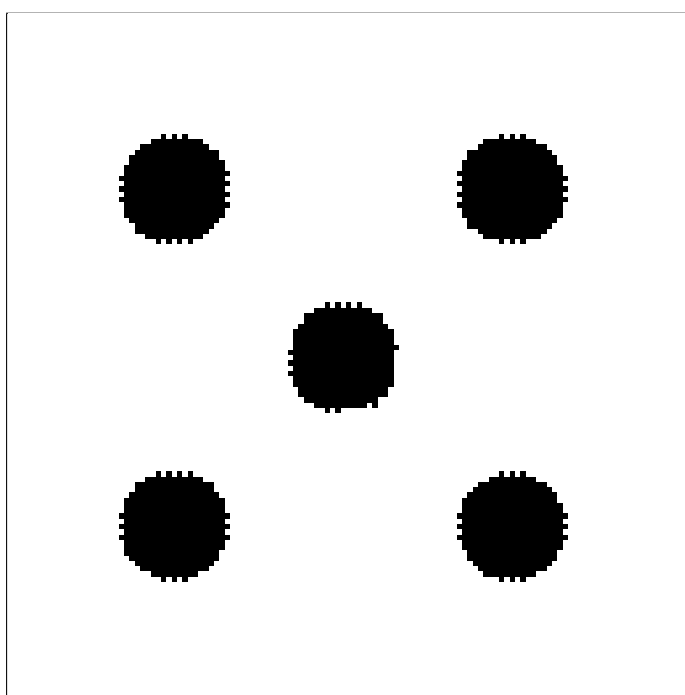
Παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει πλήρης διαχωρισμός μεταξύ των αντικειμένων και ότι επίσης υπάρχουν κάποια σφάλματα στα όρια των αντικειμένων. Πειρα-



Σχήμα 5.38: Αποτέλεσμα κατάτμησης με τη μέθοδο Sparse-Field level-set

ματιζόμενοι με την παράμετρο εξομάλυνσης της καμπύλης κατορθώσαμε τον πλήρη διαχωρισμό με αντίτιμο βέβαια τα αυξημένα σφάλματα στην αποτύπωση του περιγράμματος των αντικειμένων. Το αποτέλεσμα φαίνεται στο σχήμα 5.39.

Ο κύριος λόγος που δεν έχουμε ένα άριστο αποτέλεσμα είναι πιθανότατα το μικρό μέγεθος της εικόνας. Πράγματι, αν επιχειρήσουμε κατάτμηση της ίδιας εικόνας αλλά με πολλαπλάσιες διαστάσεις (π.χ. 1024×1024) το αποτέλεσμα είναι πάρα πολύ καλό χωρίς ιδιαίτερη χρονική επιβάρυνση. Εδώ ακριβώς έγκειται και το πλεονέκτημα των μεθόδων αυτών. Ο αλγόριθμος που προτάθηκε στην εργασία αυτή να μεν έχει εξαιρετική συμπεριφορά ως προς την κατάτμηση και την πιστή αποτύπωση των περιγραμμάτων των αντικειμένων αλλά εντούτοις η υπολογιστική του πολυπλοκότητα καθιστά απαγορευτική την εφαρμογή του σε εικόνες μεσαίου και μεγάλου μεγέθους. Προφανώς κανείς είναι διατεθειμένος να θυσιάσει λίγη ακρίβεια με αντάλλαγμα υποπολλαπλάσιο χρόνο εκτέλεσης. Εξάλλου τα οποία μικρά σφάλματα μπορούν εν συνεχεία να διορθωθούν με περαιτέρω επεξεργασία του αποτελέσματος κατάτμησης, όπως για παράδειγμα ένα reconstruction opening η closing.



Σχήμα 5.39: Εναλλακτικό αποτέλεσμα κατάτμησης με τη μέθοδο Sparse-Field level-set

Κεφάλαιο 6

Σύγκριση με άλλες μεθόδους

Στο κεφάλαιο αυτό θα προχωρήσουμε σε σύγκριση της μεθόδου που προτάθηκε με τη μέθοδο που αναπτύχθηκε στο [30]. Η σύγκριση θα γίνει διεξοδικά, μελετώντας τις διάφορες πτυχές των 2 αλγορίθμων και θα γίνει προσπάθεια ερμηνείας των αποτελεσμάτων η οποία μπορεί να υποδείξει πιθανούς τρόπους βελτίωσης των μεθόδων. Για λόγους συντομίας στη συνέχεια του κειμένου με τον όρο πρώτη μέθοδο θα αναφερόμαστε στη μέθοδο [30] ενώ με τον όρο δεύτερη στη μέθοδο της παρούσας εργασίας.

6.1 Γενικά Στοιχεία

Όπως αναφέραμε και στα προηγούμενα κεφάλαια οι μέθοδοι χρησιμοποιούν διαφορετικό τρόπο προσέγγισης της λύσης της διαφορικής εξίσωσης. Η μέθοδος [30] εντάσσεται στην κατηγορία των μεθόδων πεπερασμένων διαφορών. Στις μεθόδους αυτές προσπαθούμε να υπολογίσουμε τις τιμές της συνάρτησης λύσης σε πεπερασμένα το πλήθος σημεία διακριτοποιώντας τους διαφορικούς τελεστές. Στη μέθοδο που προτάθηκε και που χρησιμοποιεί πεπερασμένα στοιχεία δεν κάνουμε προσέγγιση της λύσης σημειακά, αλλά μέσω μιας συνάρτησης η οποία ανήκει σε κάποιο χώρο συναρτήσεων πεπερασμένης διάστασης. Μπορούμε έτσι να έχουμε σε πολλές περιπτώσεις κάτι ανάλογο του subpixel accuracy. Η σύγκλιση δε νοείται σημειακά, αλλά μέσω της νόρμας του χώρου συναρτήσεων που έχουμε θεωρήσει. Οι δύο τρόποι σύγκλισης είναι διαφορετικοί, δε μπορούμε να πούμε όμως ότι κάποιος από τους 2 υπερτερεί γενικά. Είναι κάτι που εξαρτάται από την εφαρμογή.

Ένα πλεονέκτημα της πρώτης μεθόδου είναι ότι μπορεί να εφαρμοστεί σε γράφους με αυθαίρετη δομή, ενώ η νέα προσέγγιση μπορεί να εφαρμοστεί μόνο σε γράφους με δομή Delaunay. Υπάρχει όμως ένα μεγάλο πλήθος από τέτοια γραφήματα, οπότε αυτό δεν αποτελεί σοβαρό περιορισμό. Μπορεί να εφαρμοστεί για παράδειγμα σε ολόκληρες εικόνες, αφού το ορθογώνιο πλέγμα που

αποθηκεύονται οι εικόνες τριγωνοποιείται πολύ απλά, με χρήση των διαγωνίων των ορθογωνίων. Από τα αποτελέσματα που εξάχθηκαν στο [30] όμως μπορούμε να δούμε ότι η μέθοδος αποδίδει πολύ καλύτερα σε γράφους Delaunay, καθώς αυτοί παρουσιάζουν καλύτερα γεωμετρικά χαρακτηριστικά που βοηθούν στην καλύτερη προσέγγιση των τελεστών και εξέλιξη της καμπύλης.

Ένα ακόμη γεγονός που επισημάνθηκε στα προηγούμενα κεφάλαια, είναι η δυσκολία προσέγγισης των διαφόρων διαφορικών τελεστών στην πρώτη μέθοδο. Ακόμα κι αν η κλίση εκτιμηθεί με καλή ακρίβεια, όταν πρέπει να υπολογιστεί η καμπυλότητα, δηλαδή η απόκλιση της κλίσης τα αποτελέσματα αναπόφευκτα θα είναι όχι και τόσο ακριβή. Χρειάζεται μεγάλο πλήθος κορυφών στο γράφο, έτσι ώστε η απόσταση των γειτονικών κορυφών να είναι αρκούντως μικρή για να μην έχουμε μεγάλα σφάλματα. Αλλά ακόμα και για μεγάλο πλήθος κορυφών για να πάρουμε μια ομαλή προσέγγιση που δεν επηρεάζεται από τυχόν μικρές μεταβολές των τιμών της συνάρτησης σε γειτονικές κορυφές χρειάζεται να φιλτράρουμε τα αποτελέσματα με κάποια μέθοδο (πχ φίλτρο median) ώστε να εξομαλύνουμε τις τιμές που λαμβάνουμε. Στη μέθοδο που χρησιμοποιεί πεπερασμένα στοιχεία απαιτείται ο υπολογισμός χωρικών παραγώγων πρώτης τάξης μόνο, ο οποίος μάλιστα υπολογίζονται και αναλυτικά. Επίσης διάφορα σφάλματα στις εκτιμήσεις ή και σχετικά απότομες μεταβολές των εκτιμήσεων από σημείο σε σημείο εξομαλύνονται μέσω της ολοκλήρωσης, η οποία τις εξαλείφει στο σύνολό τους σχεδόν. Μπορούμε λοιπόν να χρησιμοποιήσουμε γράφους με αρκετά μικρότερο πλήθος κορυφών και να πάρουμε εξίσου καλά αποτελέσματα. Ο κύριος περιορισμός ο οποίος σε σύνθετα σχήματα απαιτεί πιο μεγάλους γράφους είναι η ανάγκη εκτίμησης της κλίσης στα όρια των αντικειμένων έτσι ώστε η εξέλιξη να σταματά σε αυτά. Για παράδειγμα, όπως θα δούμε και στις επόμενες ενότητες, στην περίπτωση ενός κυκλικού αντικειμένου, για μικρο πλήθος κορυφών, η μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων μπορεί και σταματά στα όρια ενώ η πρώτη μέθοδος αποτυγχάνει.

Ένα κρίσιμο ζήτημα είναι η σύγκριση της υπολογιστικής πολυπλοκότητας των δύο αλγορίθμων. Με μια πρώτη ματιά μπορεί κάποιος να πει ότι η πρώτη μέθοδος είναι ταχύτερη, γιατί σε κάθε βήμα απαιτεί απλώς τον υπολογισμό των προσεγγίσεων των διαφορικών τελεστών σε κάθε σημείο και η ανανέωση της τιμής της συνάρτησης μέσω της εξίσωσης (3.3). Στην περίπτωση συγκεκριμένα των γράφων Delaunay, το μέγεθος της γειτονιάς κάθε κορυφής δεν εξαρτάται από το πλήθος των κορυφών (είναι περίπου 6). Επομένως η εξέλιξη του αλγορίθμου σε κάθε βήμα μπορεί να υπολογιστεί σε γραμμικό χρόνο ως προς το πλήθος των κορυφών. Στη περίπτωση βέβαια των γεωμετρικών τυχαίων γράφων που το μέγεθος της γειτονιάς αυξάνει με το πλήθος των κορυφών η πολυπλοκότητα είναι μεγαλύτερη. Στη μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων κάθε βήμα απαιτεί μεγαλύτερο υπολογιστικό φόρτο. Συγκεκριμένα απαιτείται η επίλυση ενός μη γραμμικού συστήματος εξισώσεων, το οποίο εν γένει είναι υπολογιστικά βαρύ. Εντούτοις, αν προσέξουμε καλύτερα το σύστημα που καλούμαστε να λύσουμε είναι αραιό, αφού τα περισσότερα στοιχεία του πίνακα και κατ'επέκταση της Ιακωβιανής είναι μηδενικά. Παρόλα αυτά ακόμα υπάρχει διαφορά, η οποία μπορεί

να γίνεται ολοένα και πιο αισθητή σε μεγάλους γράφους.

Στην παραπάνω ανάλυση παραλείψαμε βέβαια ένα πολύ ουσιαστικό χαρακτηριστικό που εξισορροπεί την διαφορά αυτή, την εξέλιξη στο χρόνο. Η μέθοδος [30] ανήκει στην κατηγορία των μεθόδων που ονομάζονται *υπό συνθήκη ευσταθείς*, δηλαδή η ευστάθεια τους εξαρτάται από το λόγο του χρονικού προς το χωρικό βήμα, όπως παρατηρήθηκε στο [30] και [22] για παραπλήσιες μεθόδους. Μια από τις αναγκαίες συνθήκες για μια μεγάλη κατηγορία προβλημάτων είναι ο λόγος

$$\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \leq c$$

για κάποια άγνωστη γενικά σταθερά c όπου Δt και Δx το χρονικό και χωρικό βήμα αντίστοιχα. Παρατηρούμε δηλαδή ότι αν θέλουμε μεγάλη ακρίβεια στο χώρο είμαστε αναγκασμένοι να χρησιμοποιήσουμε πάρα πολύ μικρό χρονικό βήμα. Για παράδειγμα αν $\Delta x \equiv 10^{-2}$ το χρονικό βήμα πρέπει να είναι της τάξης του 10^{-4} , γεγονός που κάνει την εξέλιξη του αλγορίθμου αισθητά πιο αργή. Μια εκτίμηση του χωρικού βήματος Δx σε γράφους μπορεί να θεωρηθεί η μέση τιμή της απόστασης γειτονικών κορυφών. Αντίθετα στη μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων, αν επιλύσουμε την εξίσωση εξέλιξης με κάποια ολικά ευσταθή μέθοδο όπως η πεπλεγμένη Euler ή η Crank-Nicolson τότε έχουμε ευστάθεια της λύσης ανεξάρτητα από τις τιμές χωρικών και χρονικών βημάτων. Δεδομένου ότι μας ενδιαφέρει η ακρίβεια στο χώρο κι όχι η χρονική εξέλιξη της λύσης μπορούμε να επιλέξουμε πολύ μεγαλύτερο χρονικό βήμα κι έτσι οι δύο μέθοδοι έχουν παραπλήσιο χρόνο εξέλιξης. Στην πράξη όμως δεν είναι αλήθεια ότι χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Euler παίρνουμε μια ολικά ευσταθή μέθοδο. Αυτό ισχύει για τα γραμμικά προβλήματα και σε σύνθετα μη γραμμικά δε μπορούμε να γνωρίζουμε εκ των προτέρων τη συμπεριφορά της. Εντούτοις μας προϊδεάζει για ένα σημαντικά μεγαλύτερο εύρος τιμών από το οποίο μπορεί να γίνει επιλογή του χρονικού βήματος.

Πριν προχωρήσουμε σε παρουσίαση όλων των παραπάνω παρατηρήσεων με πειραματικά αποτελέσματα θα κάνουμε μια μικρή νύξη και στον υπολογισμό της κλίσης της εικόνας στο χώρο της οποίας εξελίσσονται οι ενεργές καμπύλες. Η πρώτη προσέγγιση υπολογίζει την κλίση σε μια κορυφή μέσω της μέγιστης μεταβολής της συνάρτησης από την κορυφή στη γειτονιά, δηλαδή

$$\nabla I(u) = \max_{v \sim u} \{d(v) - d(u)\}$$

Η προσέγγιση στη μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων δεν υπολογίζει την τιμή της κλίσης σε κάθε κορυφή, αλλά σε κάθε τρίγωνο του γράφου, μέσω των παραγώγων των συναρτήσεων πυραμίδων. Σε κάθε τρίγωνο υπεισέρχονται 3 τέτοιες συναρτήσεις, αυτές που αντιστοιχούν στις κορυφές του τριγώνου. Το πλεονέκτημα της μεθόδου αυτής σε σχέση με αυτή της μέγιστης μεταβολής είναι ότι δίνει πιο “λεπτές” και ακριβείς εκτίμησης της κλίσης, αφού εξετάζεται κάθε φορά τι συμβαίνει μόνο σε ένα τρίγωνο. Δηλαδή αν σε μία κορυφή αντιστοιχούν 6 γείτονες και συνεπώς 6 τρίγωνα, αν υπάρχει μεγάλη μεταβολή

στην τιμή της συνάρτησης στην κατεύθυνση μιας κορυφής μόνο, τότε η κλίση θα είναι μικρή σε όλα τα τρίγωνα πλην αυτών που συνυπάρχουν οι κορυφές αυτές. Έτσι μπορούμε να ανιχνεύσουμε πολύ πιο αποτελεσματικά τα όρια των αντικειμένων. Στην πρώτη μέθοδο θα παίρναμε ότι η κλίση της συνάρτησης εικόνας θα είναι μεγάλη σε όλη την περιοχή επιρροής της κορυφής, επομένως στα όρια κοντινών αντικειμένων είναι πιο δύσκολος ο αποτελεσματικός υπολογισμός της κλίσης με αποτέλεσμα η ενεργή καμπύλη να μη μπορεί να διαχωριστεί στα όρια αυτά. Αξίζει να σημειωθεί ότι στη μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων η κλίση που υπολογίζεται είναι μια ασυνεχής συνάρτηση, αλλά αυτό δεν αποτελεί πρόβλημα καθώς μετά υπεισέρχεται σε ολοκληρωτικές σχέσεις.

Τέλος στην πρώτη μέθοδο όπως μπορούμε να δούμε από την εξίσωση (3.3) απαιτείται ο υπολογισμός της κλίσης της συνάρτησης g κάτι που όπως αναμένουμε είναι δύσκολο να δώσει πολύ ακριβή αποτελέσματα, καθώς αποτελεί προσέγγιση της δεύτερης παραγώγου μέσω της προσέγγισης της πρώτης (η συνάρτηση g είναι μια συνάρτηση που εξαρτάται από την παράγωγο της εικόνας). Αντίθετα στη μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων δε χρειάζεται να γίνει ο υπολογισμός αυτός, καθώς η συνάρτηση g μέσω των ιδιοτήτων των διαφορικών τελεστών μπορεί να ενσωματωθεί μέσα στο όρισμα της απόκλισης (βλέπε εξίσωση (4.1)).

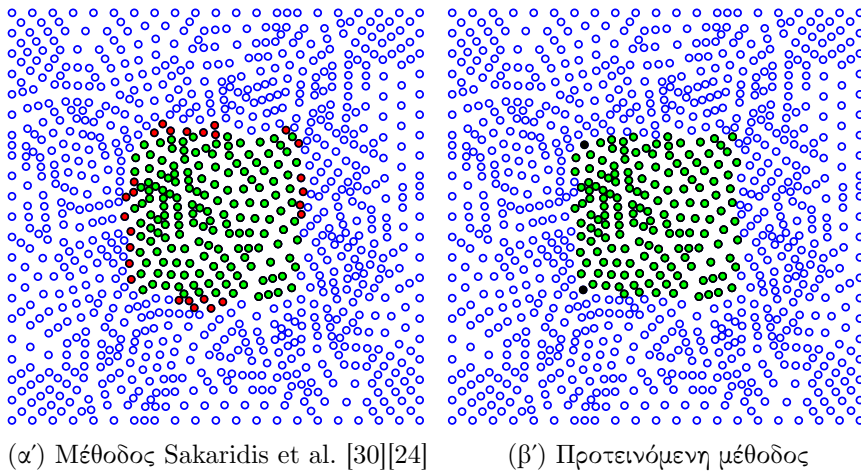
6.2 Πειραματικά αποτελέσματα σε δυαδικές εικόνες

Στις συγκρίσεις που θα κάνουμε θα χρησιμοποιήσουμε τους ίδιους γράφους και στις δύο μεθόδους ώστε να μπορεί να γίνει άμεση αντιπαραβολή των αποτελεσμάτων. Τα σχήματα που αναφέρονται στη μέθοδο Σακαρίδη παρήχθησαν με τη βοήθεια του κώδικα που ο ίδιος ανέπτυξε στο πλαίσιο του [30] και μοιράστηκε μαζί μου για να κάνω τις συγκρίσεις. Με πράσινο χρώμα σημειώνονται οι κορυφές που ανιχνεύθηκαν σωστά, με κόκκινο χρώμα αυτές που ανιχνεύθηκαν λανθασμένα (δηλαδή δεν ανήκουν στο αρχικό αντικείμενο) και με μαύρο χρώμα αυτές που δεν ανιχνεύθηκαν αλλά ανήκουν στο αρχικό αντικείμενο. Στα σχήματα επομένως το προς αναγνώριση αντικείμενο μπορεί να ταυτοποιηθεί από τις μαύρες και πράσινες κορυφές, ενώ το αποτέλεσμα της αναγνώρισης από τις κόκκινες και πράσινες.

6.2.1 Επίδραση πλήθους κορυφών

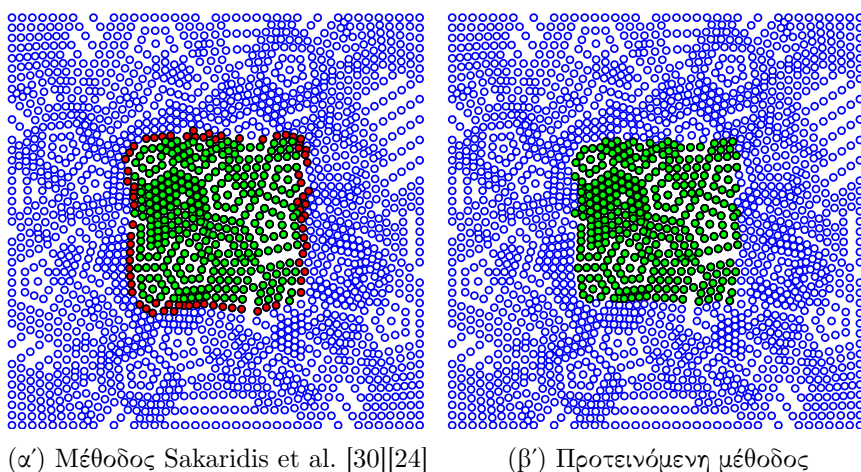
Αρχικά θα μελετήσουμε τη συμπεριφορά των αλγορίθμων στις περιπτώσεις γράφων με λίγες κορυφές και την ικανότητά τους να ανιχνεύσουν με επιτυχία τα αντικείμενα. Αναφέραμε βέβαια και πριν ότι δεν έχει νόημα να επιχειρήσουμε ανίχνευση κοντινών αντικειμένων ή με σύνθετα περιγράμματα καθώς δε μπορούμε να έχουμε επαρκή ανάλυση στο χώρο για την εκτίμηση της κλίσης. Αρχικά θα θεωρήσουμε ένα γράφο με περίπου 1000 κορυφές και θα επιχειρή-

σουμε να ανιχνεύσουμε ένα τετραγωνικό αντικείμενο στο κέντρο του. Στο σχήμα 6.1 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της ανίχνευσης. Παρατηρούμε ότι



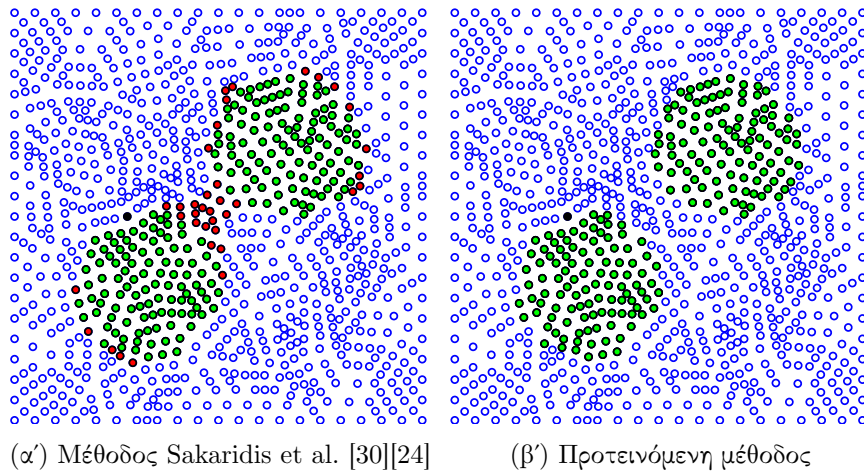
Σχήμα 6.1: Ανίχνευση τετραγωνικού αντικειμένου με γράφο 1000 κορυφών

η δεύτερη μέθοδος παρουσιάζει καλύτερη συμπεριφορά από την αρχική αφού το πλήθος των λαθών είναι μικρότερο. Στη συνέχεια θα εξετάσουμε το ίδιο σχήμα αλλά με διπλάσιο αριθμό κορυφών, της τάξης του 2000 (Σχήμα 6.2). Παρατηρούμε και πάλι ότι η μέθοδος 2 παρουσιάζει καλύτερα αποτελέσματα αφού ανιχνεύει το αντικείμενο με ακρίβεια 100%. Η πρώτη μέθοδος κατορθώνει να προσεγγίσει το σχήμα και τη μορφή του αντικειμένου αλλά παρουσιάζει μικρό σφάλμα στα όρια του. Συγκεκριμένα ανιχνεύει λανθασμένα μια επιπλέον “συστάδα” κορυφών του περιγράμματος, όπως μπορούμε να διαπιστώσουμε από τα γραφήματα. Στο επόμενο σκέλος θα εξετάσουμε τη δυνατότητα ανίχνευσης 2



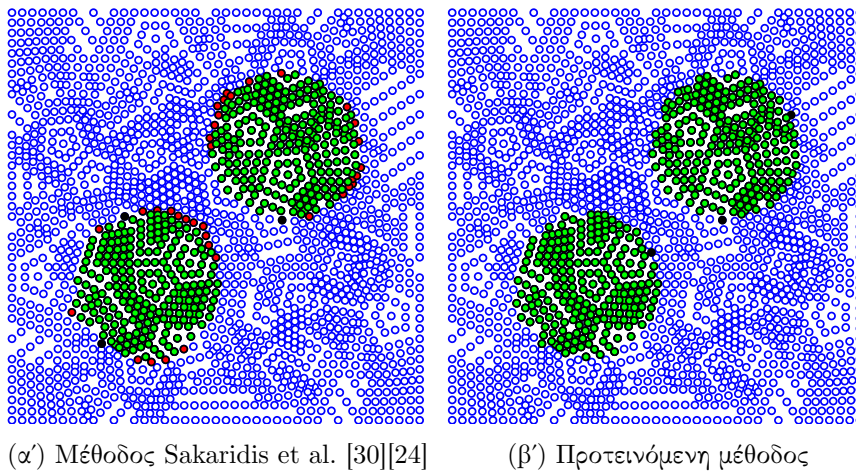
Σχήμα 6.2: Ανίχνευση τετραγωνικού αντικειμένου με γράφο 2000 κορυφών

κοντινών διαφορετικών αντικειμένων με γράφους 1000 και 2000 κορυφών αντίστοιχα, όπως και πριν. Στην περίπτωση των γράφων με 1000 κορυφές (Σχήμα 6.3) βλέπουμε ότι η πρώτη μέθοδος αποτυγχάνει να διαχωρίσει τα δύο αντικείμενα. Αυτό οφείλεται κατά βάση στον υπολογισμό της κλίσης της εικόνα πάνω το γράφο, όπως θα αναλύσουμε στη συνέχεια. Δοκιμάζοντας να μεταβάλλουμε την τυπική απόκλιση του γκαουσιανού φίλτρου έτσι ώστε να επιτύχουμε καλύτερο διαχωρισμό των αντικειμένων παρατηρήσαμε ότι πλέον η εξέλιξη δε σταματά στα όρια των αντικειμένων κάτι που έχει καταστροφικό αποτέλεσμα στη διαδικασία της αναγνώρισης. Η δεύτερη μέθοδος αποδίδει εξαιρετικά αποτυπώνοντας πιστά τα αντικείμενα με σφάλμα να υπάρχει σε 2 μόνο κορυφές που μπορεί να θεωρηθεί αμελητέο. Έπειτα εξετάζουμε την περίπτωση του γρά-



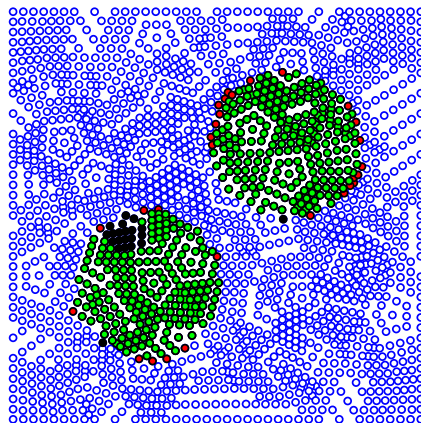
Σχήμα 6.3: Ανίχνευση 2 κυκλικών αντικειμένων με γράφο 1000 κορυφών

φου με 2000 κορυφές (Σχήμα 6.4). Η δεύτερη μέθοδος αποδίδει πολύ καλά εκ νέου ενώ βλέπουμε ότι και η πρώτη μέθοδος καταφέρνει το διαχωρισμό των αντικειμένων. Για να το πετύχουμε όμως αυτό χρειάστηκε να μειώσουμε την τυπική απόκλιση του γκαουσιανού φίλτρου στο μισό που όπως όμως επισημάναμε και πριν ενδέχεται να παρουσιάσει προβλήματα σχετικά με τον τερματισμό του αλγορίθμου στα όρια των αντικειμένων. Επίσης ήταν αναγκαίο να μειωθεί ο αριθμός των επαναλήψεων και αυτό οφείλεται στο γεγονός που μόλις αναφέραμε. Αν αφήσουμε τον αλγόριθμο να εξελιχθεί πολύ στο χρόνο η συνάρτηση των επιπεδοσυνόλων τείνει να ξεπεράσει το φράγμα που επιβάλλουν τα όρια των αντικειμένων με αποτέλεσμα τη διάβρωση αρχικά και στη συνέχεια την “εξαφάνισή” τους. Κάτι τέτοιο παραβιάζει την αρχή της ευρωστίας αφού θα έπρεπε με αύξηση του αριθμού των επαναλήψεων να επέρχεται σύγκλιση. Σε πολλές περιπτώσεις με σύνθετα σχήματα απαιτείται ένας μεγάλος αριθμός επαναλήψεων ως τη σύγκλιση επομένως δεν είναι καλή επιλογή να διαλέξουμε μικρό αριθμό. Επίσης δεν είναι δυνατόν να γνωρίζουμε εκ των προτέρων αν ένα σχήμα απαιτεί μικρό πλήθος επαναλήψεων. Στο σχήμα 6.5 φαίνεται ακριβώς το



Σχήμα 6.4: Ανίχνευση 2 κυκλικών αντικειμένων με γράφο 2000 κορυφών

πρόβλημα που αναφέραμε.

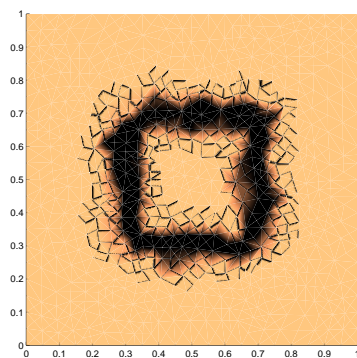


Σχήμα 6.5: Διάβρωση αντικειμένου αυξάνοντας το πλήθος των επαναλήψεων για τη μέθοδο Sakaridis et al. [30][24]

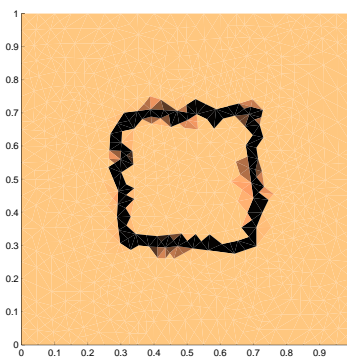
6.2.2 Προσέγγιση συνάρτησης τερματισμού

Στην ενότητα αυτή θα προσπαθήσουμε να συγκρίνουμε τις μεθόδους ως προς την εκτίμηση της συνάρτησης τερματισμού g που παίζει καθοριστικό ρόλο στο τελικό αποτέλεσμα και θα αναλύσουμε τη δυνατότητα επαρκούς διαχωρισμού. Θα συγκρίνουμε τα αποτελέσματα χρησιμοποιώντας ίδιες τιμές για την τυπική απόκλιση του γκαουσιανού φίλτρου και στις δύο μεθόδους έτσι ώστε να είναι πιο δίκαιη η σύγκριση. Στα σχήματα που ακολουθούν οι ανοιχτόχρωμες αποχρώσεις αντιστοιχούν σε τιμές τις g κοντά στο 1 ενώ οι σκοτεινές περιοχές σε τιμές της g κοντά στο 0. Αρχικά εξετάζουμε την περίπτωση του

τετραγώνου από την προηγούμενη ενότητα. Στα σχήματα 6.6 και 6.7 βλέπουμε τον υπολογισμό της συνάρτησης g για ένα γράφο με 1000 κορυφές και για δύο διαφορετικές τιμές της τυπικής απόκλισης. Μπορούμε να παρατηρήσουμε αυτό που επισημάναμε και πριν, το γεγονός δηλαδή ότι οι ακμές στα όρια των αντικειμένων είναι πιο λεπτές στη δεύτερη μέθοδο. Στα σχήματα 6.8 και 6.9

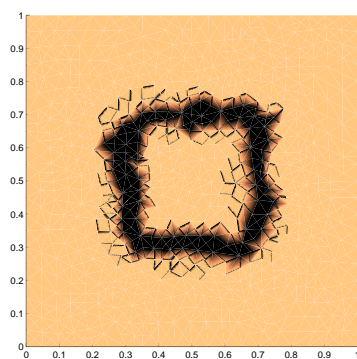


(α') Μέθοδος Sakaridis et al. [30][24]

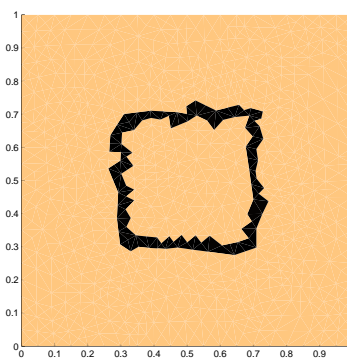


(β') Προτεινόμενη μέθοδος

Σχήμα 6.6: Συνάρτηση g με γράφο 1000 σημείων και $\sigma = 0.01$ για τετραγωνικό αντικείμενο



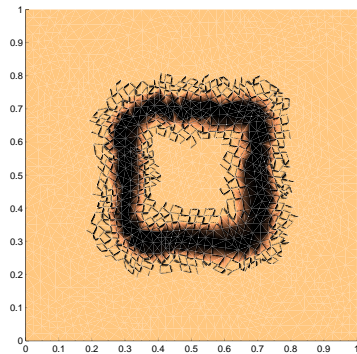
(α') Μέθοδος Sakaridis et al. [30][24]



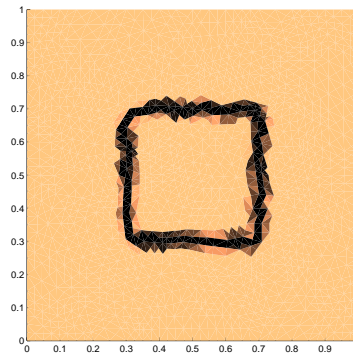
(β') Προτεινόμενη μέθοδος

Σχήμα 6.7: Συνάρτηση g με γράφο 1000 σημείων και $\sigma = 0.005$ για τετραγωνικό αντικείμενο

εικονίζονται τα ίδια σχήματα για γράφο με 2000 ακμές. Διαπιστώνουμε ότι η διαφορά στο πάχος των ακμών έχει μειωθεί σε σχέση με πριν. Παράλληλα στα σχήματα 6.10 έως και 6.13 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για 2 κοινά αντικείμενα, ένα τρίγωνο κι έναν κύκλο. Εδώ φαίνεται ακόμα πιο καθαρά η ανάγκη για μικρό πάχος των ακμών. Στην περίπτωση της μεθόδου 1 τα 2 αντικείμενα μόλις που είναι διαχωρίσιμα για μικρή τιμή του σ ενώ στη δεύτερη μέθοδο ακόμα για μικρούς γράφους τα αντικείμενα είναι διαχωρίσιμα.

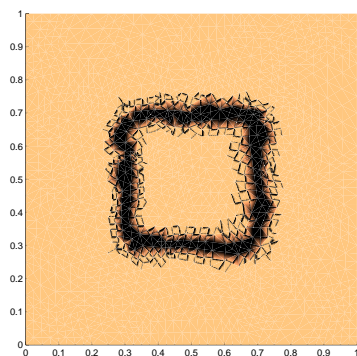


(α') Μέθοδος Sakaridis et al. [30][24]

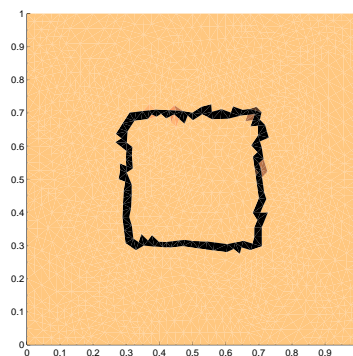


(β') Προτεινόμενη μέθοδος

Σχήμα 6.8: Συνάρτηση g με γράφο 2000 σημείων και $\sigma = 0.01$ για τετραγωνικό αντικείμενο



(α') Μέθοδος Sakaridis et al. [30][24]

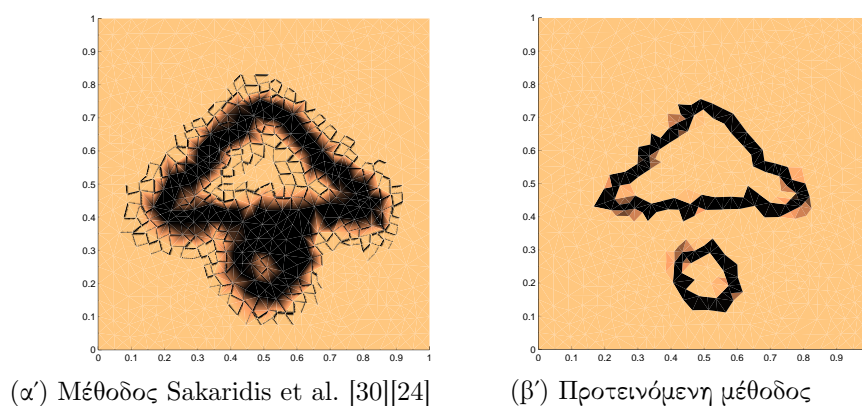


(β') Προτεινόμενη μέθοδος

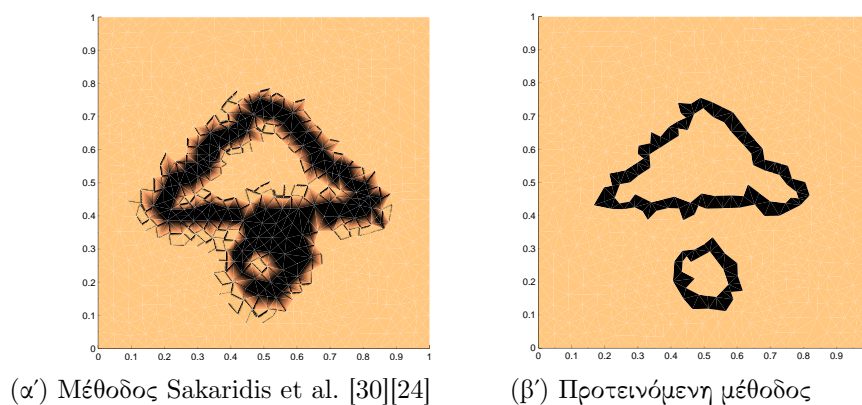
Σχήμα 6.9: Συνάρτηση g με γράφο 2000 σημείων και $\sigma = 0.005$ για τετραγωνικό αντικείμενο

6.2.3 Τελική μορφή συνάρτησης επιπεδοσυνόλων

Στην ενότητα αυτή θα συγκρίνουμε την τελική μορφή της συνάρτησης επιπεδοσυνόλων για τις δύο μεθόδους και θα σχολιάσουμε μερικά σημαντικά στοιχεία. Επειδή στη μέθοδο που προτείναμε η συνάρτηση επιπεδοσυνόλων παίρνει αρνητικές τιμές στο εσωτερικό της καμπύλης στα γραφήματα φαίνεται η συνάρτηση $-u$ για αντιπαραβολή με την πρώτη μέθοδο. Στο σχήμα 6.14 βλέπουμε τις συναρτήσεις επιπεδοσυνόλων για ένα γράφο 2000 κορυφών σε ένα σύνθετο σχήμα. Οι παρατηρήσεις που μπορούμε να κάνουμε είναι οι εξής. Αρχικά στη μέθοδο 2 παρατηρούμε ότι υπάρχει μια απότομη μεταβολή της συνάρτησης u στα άκρα. Αυτό είναι φυσιολογικό καθώς επιβάλλεται από τις συνοριακές συνθήκες που καθορίζουν ότι δεν υπάρχει μεταβολή των τιμών στα άκρα στην κάθετη κατεύθυνση (συνοριακές συνθήκες Neumann). Παρ'όλα αυτά ελάχι-

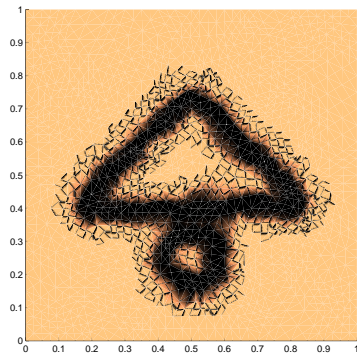


Σχήμα 6.10: Συνάρτηση g με γράφο 1000 σημείων και $\sigma = 0.01$ για τα 2 αντικείμενα

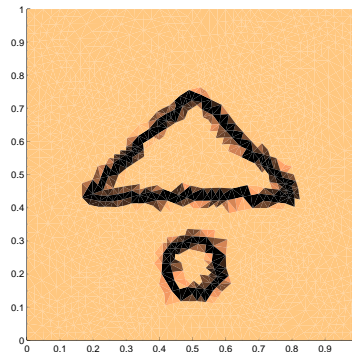


Σχήμα 6.11: Συνάρτηση g με γράφο 1000 σημείων και $\sigma = 0.005$ για τα 2 αντικείμενα

στα μακριά από το σύνορο η τιμή της συνάρτησης ομαλοποιείται όπως επίσης και στα σημεία που λαμβάνει θετικές τιμές. Βλέπουμε δηλαδή ότι έχει επέλθει σύγκλιση γιατί κοιτώντας τη διαφορική εξίσωση η χρονική παράγωγος μηδενίζεται είτε στα σημεία που η κλίση της συνάρτησης είναι 0 (στα επίπεδα σημεία της) είτε στα όρια των αντικειμένων που η συνάρτηση g μηδενίζεται. Στην περίπτωση της πρώτης μεθόδου η συνάρτηση είναι ομαλή κοντά στο σύνορο καθώς η διαφορική εξίσωση εξελίσσεται με ελεύθερες συνοριακές συνθήκες στα άκρα. Παράλληλα εντός του αντικειμένου η συνάρτηση επιπεδοσυνόλων είναι λιγότερο ομαλή από αυτή που προκύπτει στη δεύτερη περίπτωση. Μια τελευταία παρατήρηση είναι ότι στη δεύτερη μέθοδο βλέπουμε ότι η συνάρτηση παρουσιάζει μεγαλύτερο εύρος τιμών σε σχέση με την πρώτη, συγκεκριμένα παίρνει τιμές στο διάστημα $[-0.5, 0.3]$ σε σχέση με το $[-0.2, 0.1]$ της πρώτης μεθόδου.

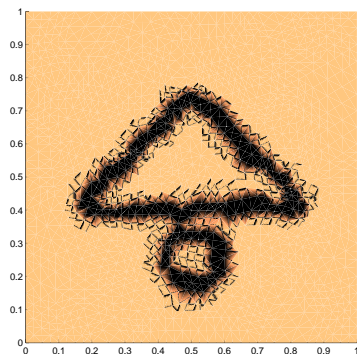


(α') Μέθοδος Sakaridis et al. [30][24]

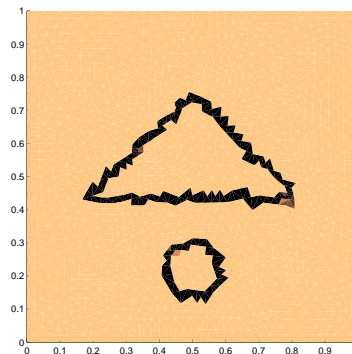


(β') Προτεινόμενη μέθοδος

Σχήμα 6.12: Συνάρτηση g με γράφο 2000 σημείων και $\sigma = 0.01$ για τα 2 αντικείμενα



(α') Μέθοδος Sakaridis et al. [30][24]



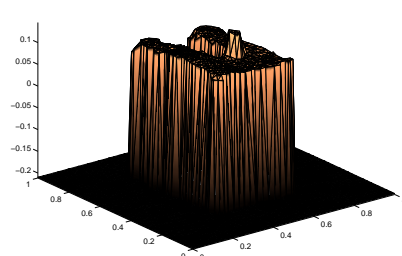
(β') Προτεινόμενη μέθοδος

Σχήμα 6.13: Συνάρτηση g με γράφο 2000 σημείων και $\sigma = 0.005$ για τα 2 αντικείμενα

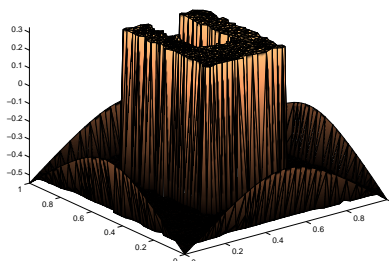
δου. Αυτό μπορεί ίσως να θεωρηθεί σαν ένας δείκτης μεγαλύτερης ευρωστίας. Βλέποντας ακόμα και το σχήμα 6.15 που αντιστοιχεί στην αναγνώριση ενός σταυροειδούς αντικειμένου οι παρατηρήσεις μας επιβεβαιώνονται κι εδώ. Παρά το γεγονός ότι και οι δύο αλγόριθμοι αναγνωρίζουν επιτυχώς το αντικείμενο η συνάρτηση επιπεδοσυνόλων που προκύπτει με τη δεύτερη μέθοδο είναι πολύ πιο ομαλή στο εσωτερικό του αντικειμένου.

6.2.4 Χρονικό βήμα

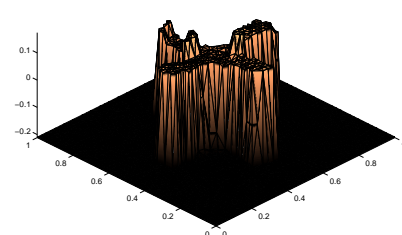
Για το τέλος αφήσαμε το κομμάτι που αφορά τον καθορισμό του χρονικού βήματος. Στα πειραματικά αποτελέσματα που λάβαμε στη δεύτερη μέθοδο χρησιμοποιήθηκε χρονικό βήμα $\Delta t_2 = 0.01$ ενώ στην πρώτη $\Delta t_1 = 0.005$. Δοκιμάζοντας να αυξήσουμε το χρονικό βήμα στη δεύτερη περίπτωση, η μέθοδος



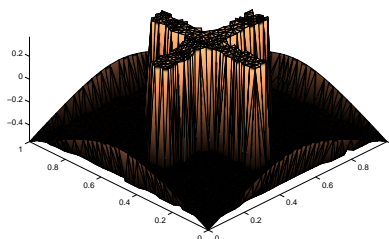
(α') Μέθοδος Sakaridis et al. [30][24]



(β') Προτεινόμενη μέθοδος

Σχήμα 6.14: Συνάρτηση επιπεδοσυνόλων u για γράφο 2000 σημείων

(α') Μέθοδος Sakaridis et al. [30][24]



(β') Προτεινόμενη μέθοδος

Σχήμα 6.15: Συνάρτηση επιπεδοσυνόλων u για γράφο 2000 σημείων

δεν απέδιδε καλά σε σύνθετα σχήματα. Επίσης η πρώτη μέθοδος χρειάζεται κατά μέσο όρο χρόνο $T_1 = 400 \cdot \Delta t_1 = 2$. Αντίθετα για την δεύτερη μέθοδο χρειάζεται χρόνος $t_2 = 10 \cdot \Delta t_2 = 0.1$. Έτσι παρά το γεγονός ότι η κάθε επανάληψη του δεύτερου αλγορίθμου απαιτεί πολύ μεγαλύτερο χρόνο από αυτή του πρώτου, η διαφορά εξισορροπείται από το συνολικό πλήθος των χρονικών βημάτων που πρέπει να εκτελεστούν.

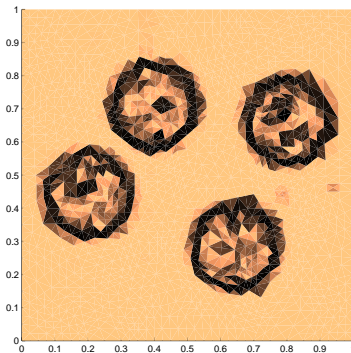
6.3 Πειραματικά αποτελέσματα σε γκριζες εικόνες

Στο κομμάτι αυτό θα μελετήσουμε τους αλγορίθμους ως προς την ικανότητα ανίχνευσης αντικειμένων σε γκριζες εικόνες. Συγκεκριμένα, η εικόνα που θα χρησιμοποιήσουμε είναι η εικόνα του σχήματος 6.16. Στην περίπτωση της δεύτερης μεθόδου κατορθώσαμε να πετύχουμε το διαχωρισμό των αντικειμένων χρησιμοποιώντας γράφο με 2000 κορυφές. Κάτι τέτοιο δεν ήταν δυνατό στην πρώτη μέθοδο λόγω της ανεπαρκούς δυνατότητας διαχωρισμού των κοντινών αντικειμένων. Στα σχήματα 6.17 έως 6.19 βλέπουμε τη συνάρτηση τερματι-



Σχήμα 6.16: Γκρίζα εικόνα διαστάσεων 246×300 pixels

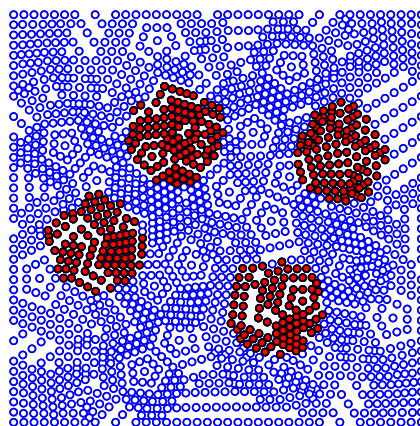
σμού, το αντικείμενο στο γράφο καθώς και τη συνάρτηση επιπεδοσυνόλων για τη δεύτερη μέθοδο. Παρατηρούμε ότι το αποτέλεσμα της ανίχνευσης είναι



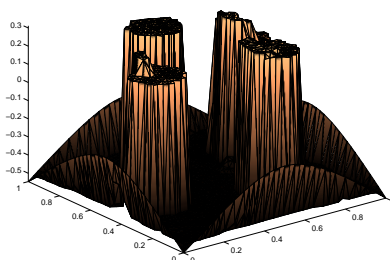
Σχήμα 6.17: Προτεινόμενη μέθοδος - Συνάρτηση τερματισμού g

πολύ καλό, καθώς εντοπίζει με ακρίβεια τα όρια των τεσσάρων αντικειμένων. Η συνάρτηση επιπεδοσυνόλων δεν είναι τελείως επίπεδη στο εσωτερικό των αντικειμένων. Αυτό υποδεικνύει ότι θα έπρεπε ίσως να αφήσουμε τον αλγόριθμο να εξελιχθεί για λίγο χρόνο ακόμα έως ότου επέλθει ακριβής σύγκλιση. Αυτό δε μας επηρεάζει βέβαια αφού ήδη η συνάρτηση επιπεδοσυνόλων έχει το σωστό πρόσημο στην περιοχή αυτή. Επισημαίνεται ότι για λόγους σύγκρισης με την πρώτη μέθοδο η συνάρτηση u απεικονίζεται με αντίθετο πρόσημο.

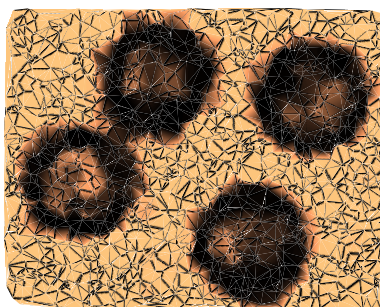
Στη συνέχεια παρουσιάζονται τα αντίστοιχα σχήματα για τη μέθοδο [30], χρησιμοποιώντας δηλαδή γράφο 2000 κορυφών. Οι παράμετροι που επιλέχθηκαν είναι οι βέλτιστες όπως επιλέχθηκαν στο [30]. Παρατηρούμε ότι αν και φαίνεται η μέθοδος να ανιχνεύει σε ένα βαθμό τα αντικείμενα υπάρχει ένα μεγάλο πρόβλημα. Η μέθοδος για το συνδυασμό αυτό των παραμέτρων είναι αστα-



Σχήμα 6.18: Προτεινόμενη μέθοδος - Αποτέλεσμα ανίχνευσης

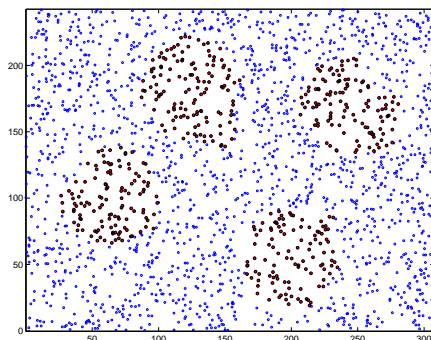


Σχήμα 6.19: Προτεινόμενη μέθοδος - Συνάρτηση επιπεδοσυνόλων u

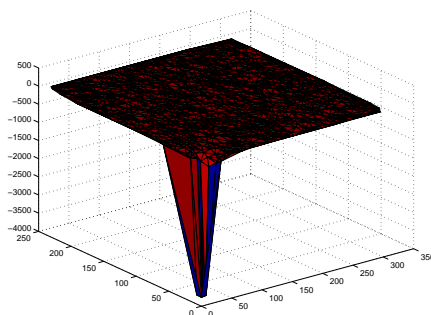


Σχήμα 6.20: Μέθοδος Sakaridis et al. [30][24] - Συνάρτηση τερματισμού g

θής. Μπορούμε να δούμε παρατηρώντας τη συνάρτηση των επιπεδοσυνόλων ότι αυτή παίρνει τιμές της τάξης του 10^5 κάτι που σαφώς είναι ανεπιθύμητο. Μια λύση θα μπορούσε να είναι η περαιτέρω ελάττωση του χρονικού βήματος, κάτι όμως που θα έκανε τη μέθοδο υπερβολικά αργή. Στα σχήματα 6.23, 6.25 και 6.24 μπορούμε να δούμε τα αντίστοιχα αποτελέσματα μεταβάλλοντας το πλή-

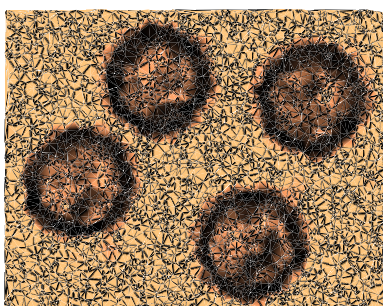


Σχήμα 6.21: Μέθοδος Sakaridis et al. [30][24] - Αποτέλεσμα ανίχνευσης



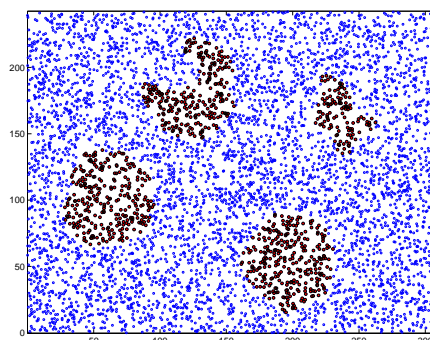
Σχήμα 6.22: Μέθοδος Sakaridis et al. [30][24] - Συνάρτηση επιπεδοσυνόλων u

θος των κορυφών σε 6000 αναζητώντας καλύτερο αποτέλεσμα. Πράγματι αυτή τη φορά η μέθοδος είναι ευσταθής. Εντούτοις δεν αναγνωρίζει επιτυχώς τα 4 αντικείμενα. Για τη βελτίωση του αποτελέσματος μπορούν να χρησιμοποιηθούν γράφοι οι οποίοι δεν είναι χωρικά ομογενείς, όπως για παράδειγμα γράφος δημιουργημένος μέσω watershed όπως περιγράφεται στην εργασία [30]. Πρέπει

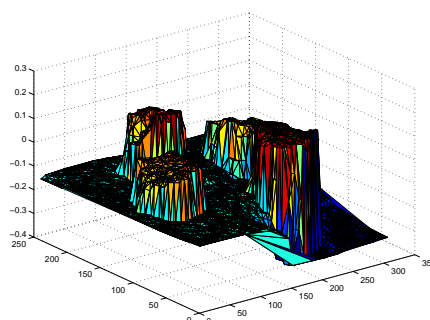


Σχήμα 6.23: Μέθοδος Sakaridis et al. [30][24] με γράφο 6000 κορυφών - Συνάρτηση τερματισμού g

να τονιστεί ότι όπως βρέθηκε στο [30] ο παράγοντας β που καθορίζει την τα-



Σχήμα 6.24: Μέθοδος Sakaridis et al. [30][24] με γράφο 6000 κορυφών - Αποτέλεσμα ανίχνευσης



Σχήμα 6.25: Μέθοδος Sakaridis et al. [30][24] με γράφο 6000 κορυφών - Συναρτήση επιπεδοσυνόλων u

χύτητα της δύναμης μπαλονιού πρέπει να μειωθεί σημαντικά κατ' απόλυτη τιμή έτσι ώστε να πάρουμε καλά αποτελέσματα. Αυτό όμως καθιστά τη σύγκλιση πολύ πιο αργή κι έτσι ο αλγόριθμος πρέπει να τρέξει για δεκαπλάσιο σχεδόν πλήθος επαναλήψεων για να προσεγγίσουμε τη σύγκλιση. Το γεγονός αυτό σε συνδυασμό με το γεγονός ότι στη μέθοδο που προτείναμε δε χρειάζεται μεταβολή της παραμέτρου αυτού κάνει τη δεύτερη μέθοδο κατά πολύ υπολογιστικά ταχύτερη. Επίσης το συμπέρασμα που μπορεί να εξαχθεί, πέραν από την ταχύτητα της διαδικασίας είναι ότι ακόμα και με μικρό πλήθος κορυφών του γράφου η δεύτερη μέθοδος λειτουργεί εξαιρετικά στην πιο δύσκολη περίπτωση των γκριζών εικόνων.

6.4 Μερικά συμπεράσματα

Έχοντας κατά νου τα πειραματικά αποτελέσματα που εξάγαμε προηγουμένως θα προχωρήσουμε σε κριτική αξιολόγηση των δύο μεθόδων. Η πρώτη παρατήρηση είναι ότι η προτεινόμενη μέθοδος συμπεριφέρεται πολύ καλύτερα σε γράφους με μικρό πλήθος κορυφών. Μοναδική προϋπόθεση είναι οι κορυφές

να είναι τόσες όσες χρειάζεται έτσι ώστε να μπορεί να προσεγγιστεί η κλίση της συνάρτησης εικόνας στα όρια μεταξύ των αντικειμένων. Όσο αυξάνουμε το πλήθος των κορυφών τότε η απόδοση των δύο μεθόδων γίνεται παραπλήσια. Δηλαδή στο όριο των μεγάλων γράφων αναμένουμε σύγκλιση στην ακριβή λύση της διαφορικής εξίσωσης.

Επιπλέον παρατηρήσαμε ότι η προτεινόμενη μέθοδος ανιχνεύει πιο πιστά τα περιγράμματα των αντικειμένων. Συγκεκριμένα, η μέθοδος [30] παρ' ότι ανιχνεύει πολύ καλά τη μορφή του περιγράμματος συνήθως το αποτέλεσμα της αναγνώρισης περιλαμβάνει και το εξωτερικό περίγραμμα του αντικειμένου, το οποίο όμως δεν ανήκει στο αντικείμενο.

Ένα άλλο στοιχείο είναι η υπεροχή της προτεινόμενης μεθόδου στην εκτίμηση του μέτρου της κλίσης της συνάρτησης εικόνας η οποία δίνει λεπτότερες ακμές και κατά συνέπεια διαχωρισμός κοντινών αντικειμένων με μικρούς σχετικά γράφους. Αυτό είναι κι ένα από τα κυριότερα προβλήματα που αντιμετωπίζει η μέθοδος [30] σε μικρούς γράφους.

Παράλληλα ευεργετική επίδραση στη μέθοδο που προτάθηκε έχει και το γεγονός ότι δε χρειάζεται να υπολογιστεί η κλίση της συνάρτησης g , η προσέγγιση της οποίας είναι δύσκολη αν ο γράφος δεν είναι αρκούντως μεγάλος αφού αποτελεί προσέγγιση δεύτερης τάξης. Θα μπορούσε επομένως να γίνει τροποποίηση του αλγορίθμου της μεθόδου [30] ώστε ο όρος που περιλαμβάνει τη συνάρτηση g να ενσωματωθεί εντός του τελεστή g όπως στη μέθοδο που προτάθηκε στην εργασία αυτή και να συγκριθεί με την αρχική ιδέα ώστε να διαπιστωθεί αν έχει θετική επίδραση.

Επιπροσθέτως αξίζει να σημειωθεί ότι η προτεινόμενη μέθοδος είναι αρκετά εύρωστη αφού λειτουργεί σωστά για ένα μεγάλο εύρος τιμών των παραμέτρων, όπως το πλήθος των κορυφών του γράφου, η τυπική απόκλιση του βαθυπερατού φιλτραρίσματος και το χρονικό βήμα. Στα πειράματα που κάναμε πήραμε πολύ καλά αποτελέσματα αφήνοντας αμετάβλητες τις τιμές των παραμέτρων αυτών για μια μεγάλη κατηγορία σχημάτων και εικόνων. Αντίθετα στη μέθοδο [30] έπρεπε να πειραματιζόμαστε με τις τιμές τους ώστε να πετύχουμε το καλύτερο κάθε φορά αποτέλεσμα.

Εξετάζοντας τέλος τη χρονική πολυπλοκότητα των μεθόδων το συμπέρασμα που μπορεί να εξαχθεί είναι ότι στις περιπτώσεις των μικρών γράφων και της γκριζας εικόνας η δεύτερη μέθοδος είναι ταχύτερη και αυτό οφείλεται αποκλειστικά στο γεγονός ότι μπορούμε να διαλέξουμε πολλαπλάσιο χρονικό βήμα σε σχέση με αυτό της πρώτης μεθόδου. Σε μεγάλους γράφους όμως η ψαλίδα αυτή κλείνει γρήγορα και από κάποιο σημείο και μετά (περίπου 4000 κορυφές) η μέθοδος [30] είναι ταχύτερη επειδή στη μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων η πολυπλοκότητα είναι τετραγωνική ως προς το πλήθος των κορυφών του γράφου όπως αναλύθηκε σε προηγούμενο κεφάλαιο.

Κεφάλαιο 7

Μερικές Εφαρμογές

7.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα επικεντρωθούμε σε μερικές εφαρμογές της μεθόδου που αναπτύξαμε. Αρχικά θα εξετάσουμε ένα πρόβλημα που ξεφεύγει από το στενό πλαίσιο του τομέα της Όρασης Υπολογιστών. Θα ασχοληθούμε με γενικότερα προβλήματα κατάκτησης με βάση κάποιο (μονοδιάστατο) χαρακτηριστικό σε δεδομένα που μπορούν να παρασταθούν σε μορφή γράφου. Το χαρακτηριστικό αυτό είναι μία πραγματική συνάρτηση ορισμένη πάνω στις κορυφές του γράφου ο οποίος για τις ανάγκες της μεθόδου πρέπει να είναι ένας γράφος Delaunay. Η άλλη εφαρμογή θα είναι η χρήση της μεθόδου που αναπτύχθηκε σε εικόνες οι οποίες αποτελούν μια ειδική περίπτωση γράφου, ένα κανονικό πλέγμα.

Αφού οι G.A.C. αφορούν γεωμετρική εξέλιξη καμπυλών μια ιδανική εφαρμογή τους είναι σε γράφους που σχηματίζονται από γεωγραφικά δεδομένα. Δηλαδή έχοντας διαθέσιμο ένα σύνολο θέσεων που εκφράζεται μέσω γεωγραφικών συντεταγμένων και μια συνάρτηση ορισμένη στις θέσεις αυτές (για παράδειγμα το ποσοστό της ανεργίας στις μεγαλύτερες ευρωπαϊκές πόλεις ή η ετήσια ποσότητα βροχής στα διάφορα μέρη Ελλάδας) σχηματίζουμε το γράφο Delaunay που προκύπτει με κορυφές τα σημεία που διαθέτουμε και εφαρμόζουμε τη μέθοδο που αναπτύξαμε ύστερα από κατάλληλη επεξεργασία των δεδομένων. Η χρήση του γράφου Delaunay έχει το πλεονέκτημα ότι γειτονικές περιοχές συνδέονται μεταξύ τους και μάλιστα με τρόπο τέτοιο έτσι ώστε το προκύπτον γράφημα να παραμένει επίπεδο (γεγονός που οφείλεται στον τρόπο δημιουργίας του μέσω του διαγράμματος Voronoi) και επίσης το χωρίο που προκύπτει είναι κυρτό, κάτι που είναι επιθυμητό καθώς συμβάλλει στην ομαλότητα της λύσης της διαφορικής εξίσωσης. Ένα διόλου αμελητέο μειονέκτημα όμως αποτελεί το γεγονός ότι ενδέχεται να υπάρχουν κορυφές του γράφου οι οποίες συνδέονται με ακμές μεγάλου μήκους. Αυτό μπορεί να συμβεί στις κορυφές που βρίσκονται στο όριο (περίγραμμα) και έχει αρνητική επίδραση στη σύγκλιση της λύσης της διαφορικής εξίσωσης. Στην παρούσα εργασία η κύρια

εφαρμογή θα είναι η κατάτμηση του χάρτη της Ελλάδας καθώς και της ευρύτερης περιοχής της Αθήνας με βάση τα αποτελέσματα του δημοψήφισματος της 5ης Ιουλίου 2015.

Όσον αφορά το κομμάτι των εικόνων, αρχικά θα επιχειρηθεί να γίνει εξαγωγή της ακριβής μορφής των συντελεστών του συστήματος και στη συνέχεια μετά τη θεωρητική μελέτη θα γίνει εφαρμογή και σχολιασμός της απόδοσης της μεθόδου.

7.2 Εφαρμογή σε γεωγραφικά δεδομένα

7.2.1 Συμπληρωματικά στοιχεία

Πριν γίνει η παρουσίαση της εφαρμογής του αλγορίθμου χρειάζεται να παρουσιαστούν κάποια επιπλέον στοιχεία που είναι απαραίτητα για την κατανόηση και που δεν είχε χρειαστεί να αναφερθούν μέχρι στιγμής. Το πρώτο κομμάτι αφορά την τοποθέτηση των κορυφών του γράφου στο μοναδιαίο τετράγωνο και το δεύτερο την τιμή της ενσωμάτουσας συνάρτησης.

Αρχικά, οι θέσεις των κορυφών των γράφων που διαθέτουμε πάνω στην επιφάνεια της Γης εκφράζονται μέσω του γεωγραφικού πλάτους και μήκους τους (ϕ και λ αντιστοίχα). Χρειάζεται συνεπώς το ζεύγος αυτό των τιμών (ϕ, λ) να μετατραπεί σε ένα άλλο ζεύγος (x, y) που εκφράζει τη θέση των κορυφών πάνω στο επίπεδο. Αυτό μπορεί να γίνει μέσω του μετασχηματισμού

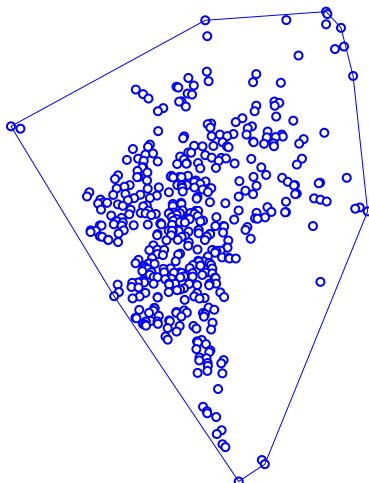
$$\begin{aligned} x &= \lambda \\ y &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} \right) \end{aligned}$$

η οποία είναι μια μορφή μερκατορικής ή κυλινδρικής προβολής όπως είναι γνωστό από τη χαρτογραφία. Επιπλέον κανονικοποιούμε τις συντεταγμένες αυτές ώστε τα σημεία να βρίσκονται εντός του μοναδιαίου τετραγώνου με κατάλληλη μετατόπιση και εν συνεχεία κλιμάκωση.

Παράλληλα αν f η ενσωμάτουσα συνάρτηση, την οποία επιλέξαμε να αντιστοιχεί στο ποσοστό του ΟΧΙ στο δημοψήφισμα, την κανονικοποιούμε για να πάρει τιμές εντός του διαστήματος $[0, 1]$ διαιρώντας όλες τις τιμές με τη μέγιστη τιμή της f . Συν τοις άλλοις το βαθυπερατό φιλτράρισμα που παρουσιάσαμε σε προηγούμενο κεφάλαιο έχει τον περιορισμό ότι λαμβάνει υπόψιν μόνο τις τιμές στη γειτονιά μιας κορυφής, οπότε ακόμα και αν αυξήσουμε κατά πολύ την τυπική απόκλιση σ της γκαουσιανής δε μπορούμε να επιτύχουμε φιλτράρισμα μεγάλης κλίμακας. Για να λύσουμε το πρόβλημα αυτό προτείνουμε μια επέκταση βασισμένη στην ιδέα των ASF (alternating sequential filtering με διαδοχικά closing και opening). Συγκεκριμένα επαναλαμβάνουμε διαδοχικά βαθυπερατό φιλτράρισμα για αρκετές (5-10) φορές ώστε η συνάρτηση f να γίνει αρκούντως ομαλή χωρίς απότομες διακυμάνσεις και “θόρυβο” σε μεμονωμένες κορυφές.

7.2.2 Αποτελέσματα δημοψηφίσματος στην Αθήνα

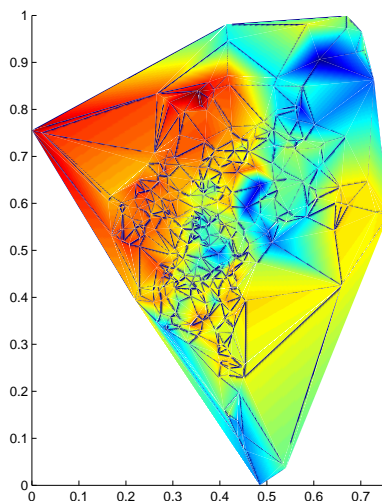
Αρχικά θα επιχειρήσουμε να κάνουμε κατάτμηση της ευρύτερης μητροπολιτικής περιοχής της Αθήνας σε επιμέρους περιοχές με βάση τα αποτελέσματα ανά εκλογικό τμήμα. Τα δεδομένα αντλήθηκαν από την ιστοσελίδα του Πρωτοδικείου Αθηνών. Απουσιάζουν τα δεδομένα από τις εκλογικές περιφέρειες του Πειραιά καθώς τα αποτελέσματα του δημοψηφίσματος ανά εκλογικό τμήμα δεν ήταν διαθέσιμα μέχρι τη στιγμή που γραφόταν η παρούσα εργασία. Χρησιμοποιήθηκαν λοιπόν τμήματα από τις εκλογικές περιφέρειες Α' και Β' Αθηνών καθώς και από μερικούς κοντινούς δήμους της Αττικής. Στο σχήμα 7.1 βλέπουμε τις κορυφές του γράφου Delaunay που προκύπτει ο με κορυφές τις γεωγραφικές θέσεις των εκλογικών τμημάτων και το κυρτό περίβλημά του. Το χωρίο στο οποίο θα επιλυθεί η εξίσωση εξέλιξης των ενεργών καμπυλών είναι το κυρτό περίβλημα (convex hull) των κορυφών του γράφου.



Σχήμα 7.1: Γράφος μητροπολιτικής περιοχής Αθηνών

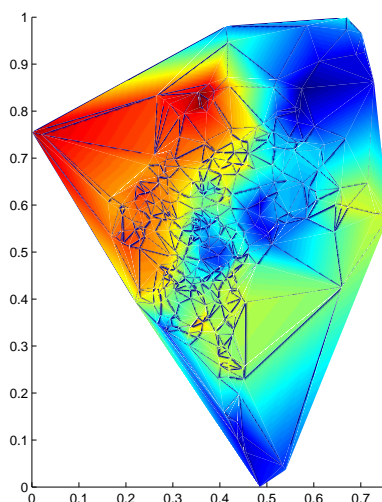
Στη συνέχεια, στο σχήμα 7.2 μπορούμε να δούμε τη γραφική απεικόνιση των αποτελεσμάτων του δημοψηφίσματος πάνω στις κορυφές του γράφου. Με μία πρόχειρη ματιά μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι υπάρχει μία σαφής υπεροχή του “ΟΧΙ” στα δυτικά προάστια και αντίστοιχα μια υπεροχή του “ΝΑΙ” στα βόρεια προάστια. Επίσης στο κέντρο της Αθήνας και σε κοντινές σε αυτό περιοχές όπως το Ψυχικό το “ΟΧΙ” εμφανίζει μειωμένα ποσοστά, κάτω από τη μέση τιμή του. Αυτήν ακριβώς την περιοχή θα επιχειρήσουμε να ανιχνεύσουμε καθώς οι δύο προαναφερθείσες περιοχές που βρίσκονται κοντά στο σύνορο του γράφου δε μπορούν να εντοπιστούν με χρήση GAC. Θα χρειαζόμασταν επιπλέον κορυφές που εκτείνονται πέραν των περιοχών αυτών έτσι ώστε η αρχική καμπύλη να περικλείει το σύνολο των κορυφών των περιοχών αυτών.

Πριν προχωρήσουμε στην εφαρμογή του αλγορίθμου πρέπει να φιλτράρουμε την εικόνα, όπως αναφέρθηκε και πριν. Επειδή η συνάρτηση που απεικονίζει τα



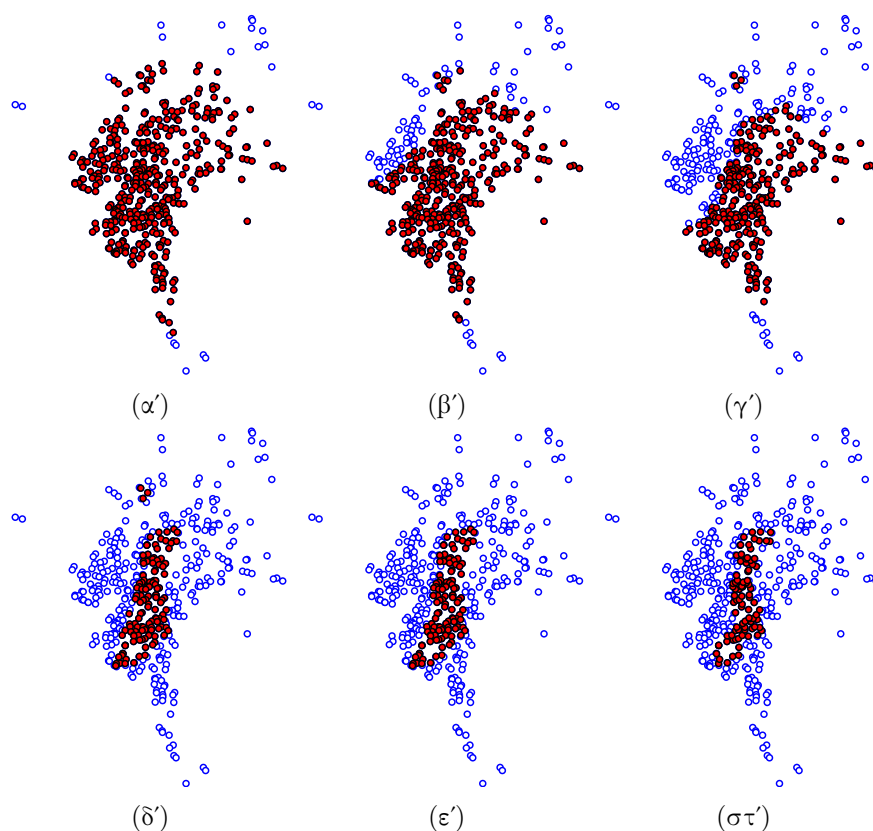
Σχήμα 7.2: Γραφική απεικόνιση αποτελεσμάτων δημοψηφίσματος

αποτελέσματα είναι σχετικά ομαλή δεν απαιτείται επαναλαμβανόμενο φιλτράρισμα για μεγαλύτερη εξομάλυνση. Στο σχήμα 7.3 βλέπουμε τη συνάρτηση αποτελεσμάτων έπειτα από βαθυπερατό φιλτράρισμα με γκαουσιανή τυπικής απόκλισης $\sigma = 0.1$.



Σχήμα 7.3: Η συνάρτηση των αποτελεσμάτων στην μητροπολιτική περιοχή της Αθήνας μετά από βαθυπερατό φιλτράρισμα

Είμαστε λοιπόν πλέον έτοιμοι για την εφαρμογή του αλγορίθμου. Στο σχήμα 7.4 βλέπουμε την εξέλιξη της καμπύλης πάνω στο γράφο μαζί με το τελικό αποτέλεσμα ανίχνευσης ενώ στο σχήμα 7.5 τη συνάρτηση επιπεδοσυ-

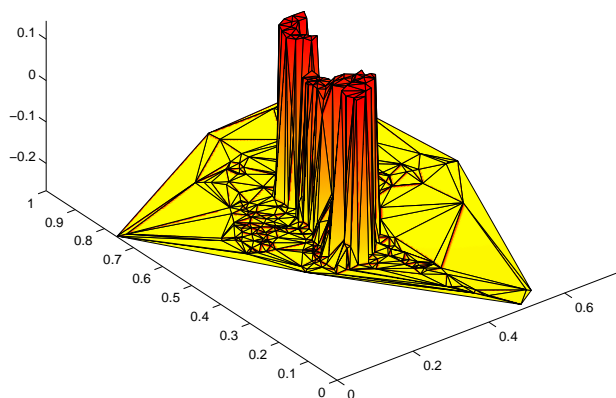


Σχήμα 7.4: Εξέλιξη G.A.C. στο γράφο της μητροπολιτικής περιοχής της Αθήνας

νόλων μετά τη σύγκλιση. Παρατηρούμε ότι ο αλγόριθμος ανίχνευσε επιτυχώς την περιοχή που περιγράψαμε κατά την οπτική εξέταση των δεδομένων παρά τους περιορισμούς που υπήρχαν και οι οποίοι σχετίζονταν με το μικρό πλήθος κορυφών του γράφου (της τάξης των 600) αλλά και τις μεγάλες αποστάσεις μεταξύ γειτονικών κορυφών στο σύνορο του χωρίου. Για την αντιστάθμιση των αρνητικών επιπτώσεων των παραπάνω παραμέτρων χρησιμοποιήθηκε ελαφρώς μικρότερο χρονικό βήμα για να γίνει πιο ομαλή εξέλιξη της συνάρτησης επιπεδοσυνόλων.

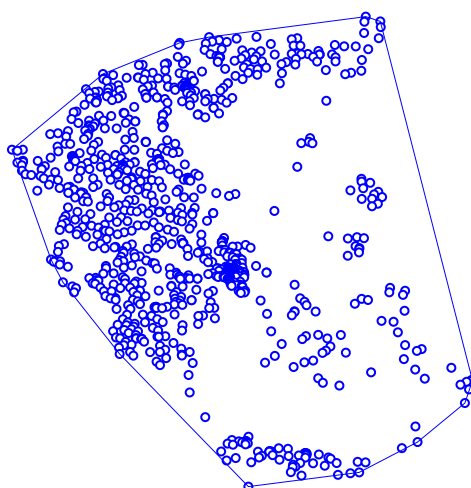
7.2.3 Αποτελέσματα δημοψηφίσματος στην Επικράτεια

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε το ίδιο πρόβλημα αλλά σε όλη την επικράτεια χρησιμοποιώντας τα δεδομένα ανά δημοτική ενότητα αυτή τη φορά. Τα στοιχεία εξήχθησαν από την ιστοσελίδα του Υπουργείου Εσωτερικών και περιλαμβάνουν όλη την ηπειρωτική και νησιωτική Ελλάδα με εξαίρεση τη νήσο Καστελόριζο το οποίο παραλείφθηκε λόγω της πολύ απομακρυσμένης γεωγραφικής θέσης του η οποία πιθανόν να αλλοιώνει την ποιότητα των αποτε-



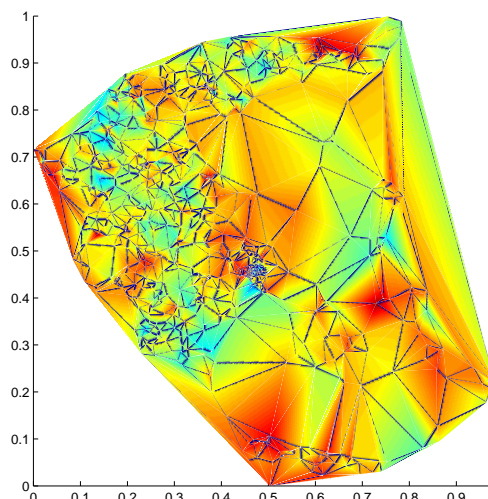
Σχήμα 7.5: Συνάρτηση επιπεδοσυνόλων

λεσμάτων. Στο σχήμα 7.6 βλέπουμε τις κορυφές του γράφου Delaunay που παράχθηκε καθώς και το κυρτό περίβλημά τους. Κοιτώντας τον παρατηρούμε ότι χωρίζεται σε 3 περιοχές ανάλογα με την πυκνότητα των κορυφών, στην περιοχή των νήσων στην οποία οι κορυφές είναι αραιά τοποθετημένες, στην περιοχή της ηπειρωτικής Ελλάδας όπου έχουμε μέτρια πυκνότητα και τέλος στην περιοχή των μεγάλων αστικών κέντρων Αθήνας και Θεσσαλονίκης όπου υπάρχει αυξημένη πυκνότητα. Αυτό μας προδιαθέτει να αναμένουμε διαφορετική ανάλυση -διακριτική ικανότητα- στις διάφορες περιοχές κατά την εφαρμογή του αλγορίθμου.



Σχήμα 7.6: Γράφος Ελληνικής Επικράτειας

Στη συνέχεια, στο σχήμα 7.7 μπορούμε να δούμε τη γραφική απεικόνιση των αποτελεσμάτων του δημοψηφίσματος πάνω στις κορυφές του γράφου. Κοι-



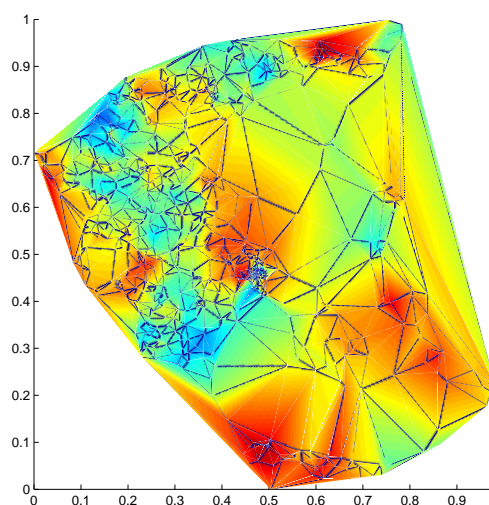
Σχήμα 7.7: Γραφική απεικόνιση αποτελεσμάτων δημοψηφίσματος στην Επικράτεια

τώντας το γράφημα αυτό παρατηρούμε ότι η επιφάνεια της συνάρτησης αποτελεσμάτων είναι ιδιαίτερα τραχεία με απότομες χωρικές μεταβολές. Στο σημείο αυτό υπεισέρχεται το φιλτράρισμα που περιγράψαμε προηγουμένως για να γίνει εξομάλυνση σε μεγαλύτερη κλίμακα. Στο συγκεκριμένο πείραμα επαναλάβαμε το φιλτράρισμα 5 φορές και πήραμε το αποτέλεσμα που φαίνεται στο σχήμα 7.8. Η φιλτραρισμένη εκδοχή παρουσιάζει πολύ καλύτερες ιδιότητες αναφορικά με την ομοιογένεια της συνάρτησης και πλέον γίνονται περισσότερο εμφανείς επιμέρους περιοχές (clusters) πάνω στο γράφο, όπως για παράδειγμα ένα μεγάλο τμήμα της Πελοποννήσου μαζί με την ευρύτερη περιοχή της Αθήνας.

Στη συνέχεια, στο σχήμα 7.9 βλέπουμε την εξέλιξη των καμπυλών κατά την εφαρμογή των αλγορίθμων, ενώ στο σχήμα 7.10 φαίνεται η συνάρτηση επιπεδοσυνόλων.

7.3 Εφαρμογή σε πραγματικές εικόνες

Για το τέλος θα εξετάσουμε την απόδοση του αλγορίθμου σε πραγματικές εικόνες. Η εικόνα που χρησιμοποιούμε προέρχεται από τη βάση δεδομένων Berkeley [21] και για την ακρίβεια είναι μια μικρότερη εκδοχή της αρχικής εικόνας. Αρχικά θα επιχειρήσουμε κατάτμηση της εικόνας με τον πλήρη γράφο που αποτελείται από όλα τα pixels και κατασκευάζεται σύμφωνα με αυτά που ειπώθηκαν στα προηγούμενα κεφάλαια. Στα σχήματα 7.11 και 7.12 βλέπουμε την εξέλιξη της καμπύλης πάνω στην εικόνα καθώς και τη συνάρτηση επιπε-

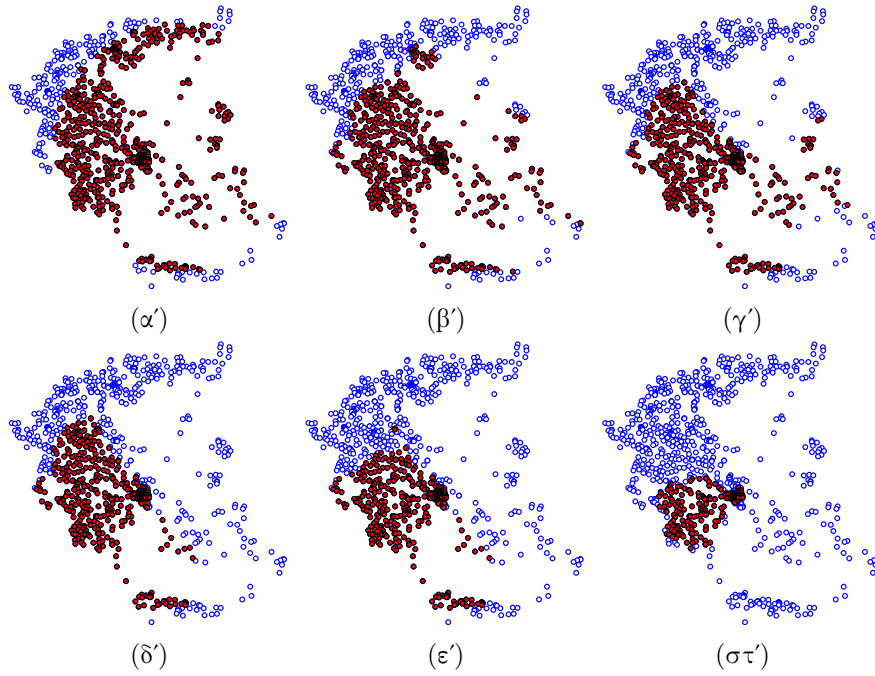


Σχήμα 7.8: Η συνάρτηση των αποτελεσμάτων στην Επικράτεια μετά από βαθυπερατό φιλτράρισμα

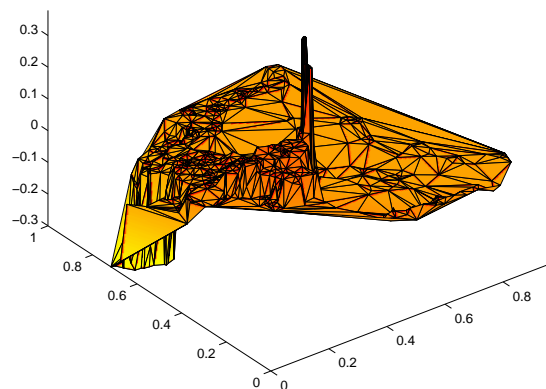
δοσυνόλων μετά τη σύγκλιση.

Όπως αναφέραμε και προηγουμένως η διαδικασία εξέλιξης των καμπυλών στον πλήρη γράφο της εικόνας ο οποίος έχει $282 \cdot 282 \approx 80,000$ κορυφές είναι ιδιαίτερα χρονοβόρα διαδικασία. Έτσι παρ'όλο που τα αποτελέσματα είναι άκρως ικανοποιητικά η μέθοδος με την παρούσα μορφή δεν είναι αποδοτική για τη χρήση σε εφαρμογές που απαιτούν ταχύτητα. Μία από τις λύσεις που μπορούμε να εφαρμόσουμε δίχως την τροποποίηση του πυρήνα του αλγορίθμου είναι η υποδειγματοληψία της εικόνας και η εφαρμογή του αλγορίθμου στο γράφο που προκύπτει. Στο σχήμα 7.13 βλέπουμε το αποτέλεσμα κατάτμησης μετά την υποδειγματοληψία με γράφους 2000 και 4000 κορυφών, σημαντικά μικρότερων σε σχέση με τον αρχικό.

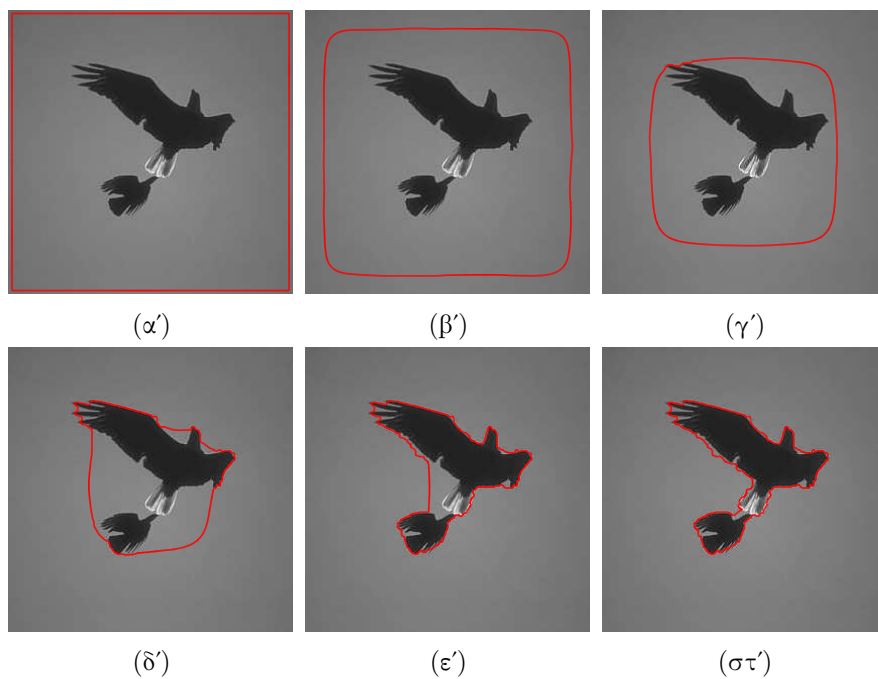
Παρατηρούμε ότι το αποτέλεσμα – ειδικά στη δεύτερη περίπτωση – είναι πολύ ικανοποιητικό και προσεγγίζει αυτό με τον πλήρη γράφο έχοντας μειώσει σημαντικά το χρόνο εκτέλεσης.



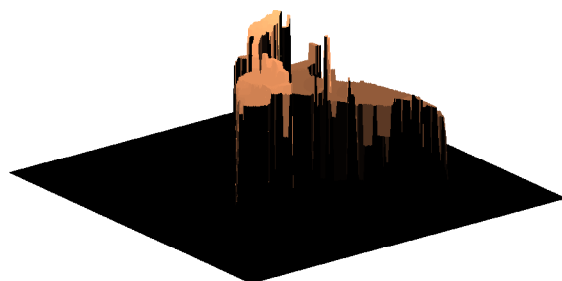
Σχήμα 7.9: Εξέλιξη G.A.C. στο γράφο της Epikrateias



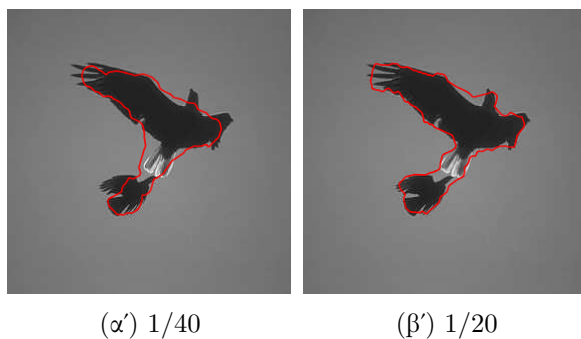
Σχήμα 7.10: Συνάρτηση επιπεδοσυνόλων στο γράφο της Epikrateias



Σχήμα 7.11: Εξέλιξη G.A.C. στην εικόνα με διαστάσεις 282×282 pixels



Σχήμα 7.12: Συνάρτηση επιπεδοσυνόλων για την εικόνα



Σχήμα 7.13: Κατάτμηση μετά από υποδειγματοληψία

Κεφάλαιο 8

Συμπεράσματα

8.1 Αποτελέσματα διπλωματικής

Όπως αναφέρθηκε και καταδείχθηκε στα προηγούμενα κεφάλαια η προτεινόμενη μέθοδος παρουσιάζει πολύ καλά αποτελέσματα και εύρωστη συμπεριφορά για ένα μεγάλο εύρος των παραμέτρων που ρυθμίζουν το μοντέλο. Στο [30] παρατηρήθηκε ότι η απόδοση της μεθόδου GAC βελτιώνεται αν θεωρήσουμε γράφους με δομή Delaunay. Περιοριζόμενοι λοιπόν σε αυτήν την κατηγορία γραφημάτων, αν χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων μπορούμε να βελτιώσουμε ακόμα περισσότερο την απόδοση στα σημεία που οι προηγούμενες μέθοδοι [30] και [12] αντιμετώπιζαν δυσκολίες, δηλαδή σε γράφους με μικρό σχετικά πλήθος κορυφών. Σε αυτούς τους γράφους είναι δύσκολη η αποτελεσματική εκτίμηση των διαφορικών τελεστών, ειδικά στα σημεία που επιχειρούνται προσεγγίσεις δεύτερης τάξης. Για γράφους με μεγάλο πλήθος κορυφών δεν υπάρχουν ουσιαστικές διαφορές στην απόδοση της προτεινόμενης και των προαναφερθεισών μεθόδων. Όμως επισημάναμε ότι η μέθοδος που χρησιμοποιεί πεπερασμένα στοιχεία έχει τετραγωνική πολυπλοκότητα ως προς το πλήθος των κορυφών του γράφου, κάτι που καθιστά σχεδόν απαγορευτική την εφαρμογή της σε μεγάλους γράφους, όπως αυτοί που προκύπτουν από μεσαίου και μεγάλου μεγέθους εικόνες. Επομένως η μέθοδος αυτή δε μπορεί να αντικαταστήσει τις μεθόδους [30] και [12] σε όλο το φάσμα των πιθανών εφαρμογών. Στη συνέχεια παρουσιάζονται συνοπτικά τα αποτελέσματα της σύγκρισης των παραπάνω μεθόδων.

Προτεινόμενη μέθοδος

Πλεονεκτήματα

- Καλύτερη απόδοση σε μικρούς γράφους
- Λεπτότερες ακμές κατά τον υπολογισμό της κλίσης

- Δυνατότητα επιλογής σχετικά μεγάλου χρονικού βήματος λόγω της χρήσης της πεπλεγμένης μεθόδου Euler
- Πιο εύρωστη στις μεταβολές των παραμέτρων του μοντέλου
- Ομαλότητα συνάρτησης επιπεδοσυνόλων μετά τη σύγκλιση

Μειονεκτήματα

- Πρόβλημα σε μεγάλους γράφους λόγω της ασυμπτωτικής πολυπλοκότητας
- Μπορεί να χρησιμοποιηθεί μόνο σε γράφους με δομή Delaunay

Μέθοδος Σακαρίδη

Πλεονεκτήματα

- Μπορεί να εφαρμοστεί σε γράφους αυθαίρετης δομής
- Μπορεί να εφαρμοστεί χωρίς πρόβλημα σε μεγάλους γράφους λόγω της γραμμικής πολυπλοκότητας ως προς το πλήθος των κορυφών στην περίπτωση των γράφων Delaunay

Μειονεκτήματα

- Δυσκολία στην εκτίμηση των διαφορικών τελεστών σε μικρούς γράφους
- Περιορισμός στην επιλογή του χρονικού βήματος, μπορεί να χρειαστεί να γίνει πολύ μικρό σε μεγάλους γράφους

Μιλώντας ποσοτικά, όταν εννοούμε μικρούς γράφους αναφερόμαστε σε γράφους με το πολύ 2000 κορυφές. Το όριο μέχρι το οποίο συνιστάται η χρήση της προτεινόμενης μεθόδου τοποθετείται κάπου ανάμεσα στις 4000 και 6000 κορυφές. Από το σημείο αυτό και μετά ανοίγει η ψαλίδα της ταχύτητας μεταξύ των δύο μεθόδων οπότε η βελτίωση στην απόδοση που παίρνουμε με την πρώτη μέθοδο είναι πολύ μικρή σε σχέση με τον επιπλέον χρόνο που απαιτείται για την εκτέλεση του αλγορίθμου.

8.2 Βασικές συνεισφορές

Οι βασικές συνεισφορές της διπλωματικής αυτής εργασίας μπορούν να συνοψιστούν στα ακόλουθα:

- Μελετήθηκαν αναλυτικά και αξιολογήθηκαν οι ήδη υπάρχουσες μέθοδοι που ασχολούνται με το πρόβλημα των Γεωδαιτικών Ενεργών Καμπυλών σε γράφους.

- Εξετάστηκε μια διαφορετική προσέγγιση χρησιμοποιώντας πεπερασμένα στοιχεία αντί πεπερασμένων διαφορών για την επίλυση της διαφορικής εξίσωσης των GAC σε γράφους για να αντιμετωπιστούν γνωστές δυσκολίες των προηγούμενων μεθόδων.
- Παρουσιάστηκε με αναλυτικό τρόπο το θεωρητικό υπόβαθρο και έγινε αυστηρή θεμελίωση της μεθόδου αυτής
- Προτάθηκαν διαφορετικές μέθοδοι για τη διακριτοποίηση ως προς το χρόνο και αναλύθηκαν τα πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα της καθεμιάς από αυτές.
- Υπολογίστηκε η ασυμπτωτική πολυπλοκότητα της μεθόδου υποδεικνύοντας το εύρος εφαρμογών στο οποίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί.
- Πραγματοποιήθηκε εκτενής πειραματική εφαρμογή της μεθόδου σε τεχνητά αλλά και πραγματικά δεδομένα και έγινε αξιολόγησή της.
- Έγινε εκτενής σύγκριση με παρόμοιες μεθόδους στα ίδια δεδομένα για την εξαγωγή χρήσιμων συμπερασμάτων.

Μετά την αξιολόγηση των αποτελεσμάτων μπορούμε να προσθέσουμε τα ακόλουθα

- Η μέθοδος που προτάθηκε μπορεί να χρησιμοποιηθεί με επιτυχία τόσο και τεχνητά όσο και σε πραγματικά προβλήματα.
- Αντιμετώπιστηκαν σε μεγάλο μέρος τους τα προβλήματα που αντιμετώπιζαν οι προηγούμενες μέθοδοι σε γράφους με μικρό πλήθος κορυφών.
- Οι προσεγγίσεις της κλίσης και των άλλων ποσοτήτων που υπεισέρχονται στο πρόβλημα δίνουν πολύ καλά αποτελέσματα, και επίσης η τελική συνάρτηση επιπεδοσυνόλων είναι πολύ ομαλή μετά τη σύγκλιση.
- Η επιτυχής αυτή εναλλακτική προσέγγιση ανοίγει το δρόμο για δοκιμή παρόμοιων μεθόδων και σε άλλα προβλήματα της Όρασης Υπολογιστών, αφού πλην πιθανώς ελάχιστων εξαιρέσεων, τα πεπερασμένα στοιχεία δεν είχαν χρησιμοποιηθεί στον κλάδο αυτό.

8.3 Μελλοντικός προσανατολισμός έρευνας

Η μέθοδος που προτάθηκε στην παρούσα εργασία παρουσιάστηκε με τρόπο διεξοδικό, αλλά δεν έχουν αναλυθεί όλες οι πτυχές της. Υπάρχουν ορισμένα κομμάτια που δε εθίχθησαν και εξετάστηκαν στα πλαίσια της εργασίας αυτής.

Ένα σημαντικό κομμάτι αφορά τη σύγκριση της μεθόδου με μεθόδους Graph Cuts, για να γίνει άμεση σύγκριση της απόδοσης των μεθόδων. Στην παρούσα διπλωματική προχωρήσαμε σε συγκρίσεις μόνο με άλλες μεθόδους

ενεργών καμπύλων, θα ήταν καλό επομένως να διαμορφωθεί μια σφαιρική εικόνα της αποδοτικότητας του αλγορίθμου σε σχέση με μια άλλη κατηγορία μεθόδων.

Ένας ακόμη μελλοντικός προσανατολισμός είναι να διερευνηθεί το κατά πόσον μπορεί να βελτιωθεί η μέθοδος και να μειωθεί η ασυμπτωτική πολυπλοκότητά της. Κάτι τέτοιο εκ πρώτης όψης φαίνεται ένα δύσκολο εγχείρημα. Από την άλλη, τυχόν απόδειξη ότι η μείωση της ασυμπτωτικής πολυπλοκότητας είναι ανέφικτη είναι εξίσου σημαντική συνεισφορά αφού θα οριοθετούσε πλήρως τις δυνατότητες χρήσης της μεθόδου.

Παράλληλα θα ήταν καλό να γίνει θεωρητική απόδειξη της σύγκλισης της προσέγγισης στο όριο των μεγάλων γράφων. Για το σκοπό αυτό όμως απαιτούνται άριστες γνώσεις μαθηματικών, ιδιαίτερα στον τομέα της Συναρτησιακής Ανάλυσης, γεγονός που καθιστά το εγχείρημα ιδιαίτερος απαιτητικό. Ίσως μάλιστα να ξεφεύγει εντελώς και από τον τομέα της Όρασης Υπολογιστών και να υπεισέρχεται σε αυτόν των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών.

Τέλος, θα μπορούσε να επιχειρηθεί η εφαρμογή μεθόδων πεπερασμένων στοιχείων και σε άλλα γνωστά προβλήματα της Όρασης Υπολογιστών, όπως για παράδειγμα στις Scale Space PDEs ή και στην Eikonal PDE και να γίνει σύγκριση με τις ήδη υπάρχουσες μεθόδους.

Παράρτημα Α΄

Χρήσιμα Μαθηματικά Εργαλεία

Στην ενότητα αυτή θα παραθέσουμε μερικά στοιχεία από τους Γραμμικούς Χώρους και τη Συναρτησιακή Ανάλυση που θα χρειαστούν στα επόμενα κεφάλαια. Οι έννοιες θα διατυπωθούν συνοπτικά και χωρίς αποδείξεις καθ' όσον δεν αποτελούν το κύριο αντικείμενο της εργασίας. Παραπέμπουμε τον αναγνώστη στη σχετική βιβλιογραφία (βλ. [20], [1]).

Α΄.1 Διανυσματικοί Χώροι

Ορισμός 1. Ονομάζουμε διανυσματικό χώρο πάνω σε ένα σώμα K ένα σύνολο V εφοδιασμένο με 2 πράξεις, την πρόσθεση

$$+ : V \times V \rightarrow V, (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{y}$$

και το βαθμωτό πολλαπλασιασμό με συντελεστές από το σώμα K ,

$$\cdot : K \times V \rightarrow V, (\lambda, \mathbf{x}) \rightarrow \lambda \cdot \mathbf{x} \text{ ή } \lambda \mathbf{x}$$

έτσι ώστε $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$ και $\lambda, \mu \in K$ να ισχύουν

- $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$ (αντιμεταθετική ιδιότητα)
- $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$ (προσεταιριστική ιδιότητα)
- Υπάρχει $\mathbf{0} \in V$ τέτοιο ώστε $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$ (ουδέτερο στοιχείο)
- Για κάθε $\mathbf{x} \in V$ υπάρχει $-\mathbf{x} \in V$ τέτοιο ώστε $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ (αντίθετο στοιχείο)
- $(\lambda + \mu)\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{x}$ (επιμεριστική ως προς την πρόσθεση του K)
- $\lambda(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \lambda\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}$ (επιμεριστική ως προς την πρόσθεση του V)

- $(\lambda\mu)\mathbf{x} = \lambda(\mu\mathbf{x})$
- $1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$

Αν $K = \mathbb{R}$ τότε ο V λέγεται πραγματικός διανυσματικός χώρος, ενώ αν $K = \mathbb{C}$ τότε λέγεται μιγαδικός. Παραδείγματα διανυσματικών χώρων είναι ο \mathbb{R}^n και ο χώρος των συνεχών συναρτήσεων που ορίζονται σε ένα κλειστό διάστημα.

Στη συνέχεια θα ορίσουμε τους χώρους με νόρμα και τους χώρους με εσωτερικό γινόμενο.

Ορισμός 2. Έστω ένας διανυσματικός χώρος V πάνω σε ένα σώμα K . Ορίζουμε ως νόρμα τον V μια απεικόνιση $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ με τις ιδιότητες

- $\|\mathbf{x}\| > 0$ αν $\forall \mathbf{x} \in V, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ και $\|\mathbf{x}\| = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}$,
- $\|\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda|\|\mathbf{x}\|, \forall \lambda \in K,$
- $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ (τριγωνική ανισότητα)

Ένας διανυσματικός χώρος εφοδιασμένος με μία νόρμα ονομάζεται γραμμικός χώρος με νόρμα. Η νόρμα μπορεί να θεωρηθεί σαν μία γενίκευση της έννοιας του μήκους σε αφηρημένους χώρους. Παραδείγματα νορμών είναι η γνωστή Ευκλείδεια νόρμα στον \mathbb{R}^n με

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2},$$

ενώ στο χώρο $C([a, b])$ των συνεχών συναρτήσεων στο διάστημα $[a, b]$ μπορούμε να ορίσουμε τη νόρμα

$$\|f\| = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$$

Έπειτα θα ορίσουμε τις έννοιες του εσωτερικού γινομένου και του χώρου με εσωτερικό γινόμενο, που γενικεύουν την έννοια της ορθογωνιότητας σε αφηρημένους χώρους.

Ορισμός 3. Ονομάζουμε εσωτερικό γινόμενο μια απεικόνιση $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία για κάθε $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ και $\lambda, \mu \in K$ ικανοποιεί τις ιδιότητες

- $\langle \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \lambda\langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \mu\langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle,$
- $\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^*,$
- $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$ και $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \implies \mathbf{x} = \mathbf{0}.$

Στην περίπτωση που $K = \mathbb{R}$ η δεύτερη ιδιότητα γίνεται $\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle$, δηλαδή το εσωτερικό γινόμενο είναι αντιμεταθετικό. Ένας διανυσματικός χώρος εφοδιασμένος με εσωτερικό γινόμενο ονομάζεται διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο.

Επίσης αν έχουμε ένα εσωτερικό γινόμενο μπορούμε να ορίσουμε και μια νόρμα στο χώρο αυτό παίρνοντας $\|\mathbf{x}\| = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle^{1/2}$. Το αντίστροφο προφανώς δεν ισχύει εν γένει. Παραδείγματα εσωτερικών γινομένων κατ' αντιστοιχία με πριν είναι το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο στον \mathbb{R}^n που ορίζεται ως

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad (\text{A'.1})$$

και από το οποίο επάγεται η Ευκλείδεια νόρμα. Στο χώρο $C([a, b])$ μπορούμε να ορίσουμε το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f g^* dx \quad (\text{A'.2})$$

και αντίστοιχα τη νόρμα που επάγεται από αυτό

$$\|f\| = \left(\int_a^b |f|^2 dx \right)^{1/2}$$

Ακολούθως θα ορίσουμε την έννοια του πλήρους χώρου.

Ορισμός 4. Έστω ο διανυσματικός χώρος V με νόρμα $\|\cdot\|_V$. Λέμε ότι η ακολουθία (\mathbf{x}_n) είναι ακολουθία *Cauchy* αν

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^* : \forall m, n \geq N \implies \|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_n\| < \varepsilon.$$

Ορισμός 5. Λέμε ότι ένας διανυσματικός χώρος V με νόρμα είναι *πλήρης* αν κάθε ακολουθία *Cauchy* συγκλίνει σε κάποιο διάνυσμα του χώρου V .

Ένας πλήρης χώρος με νόρμα ονομάζεται χώρος Banach, ενώ ένας πλήρης χώρος με εσωτερικό γινόμενο ονομάζεται χώρος Hilbert. Μπορούμε να δείξουμε ότι ο \mathbb{R}^n εφοδιασμένος με την Ευκλείδεια νόρμα είναι χώρος Banach, ενώ ο \mathbb{R}^n με το εσωτερικό γινόμενο (A'.1) είναι ένας χώρος Hilbert. Όμως ο χώρος των συνεχών συναρτήσεων εφοδιασμένος με το εσωτερικό γινόμενο (A'.2) δεν είναι χώρος Hilbert γιατί το όριο ακολουθίας συνεχών συναρτήσεων δεν είναι πάντα συνεχής συνάρτηση. Είναι όμως πάντα μετρήσιμη συνάρτηση.

Με βάση τα παραπάνω θα επεκτείνουμε το χώρο των συνεχών συναρτήσεων ώστε να γίνει πλήρης. Η διαδικασία αυτή ονομάζεται *πλήρωση*. Αποδεικνύεται ότι μικρότερος δυνατός πλήρης χώρος με το εσωτερικό γινόμενο (A'.2) είναι ο χώρος των τετραγωνικά ολοκληρώσιμων κατά Lebesgue συναρτήσεων που

συμβολίζεται με L_2 . Φορμαλιστικά αν $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ορίζουμε το χώρο $L_2(\Omega)$ ο οποίος είναι ο χώρος των μετρήσιμων συναρτήσεων f του Ω τέτοιες ώστε

$$\int_{\Omega} |f|^2 dm < \infty$$

Επειδή όμως ισχύει $\|f\| = 0 \iff f = 0$ σχεδόν παντού, τα στοιχεία του χώρου αυτού δεν είναι συναρτήσεις αλλά οικογένειες συναρτήσεων (κλάσεις ισοδυναμίας) με τη σχέση ισοδυναμίας να ορίζεται ως

$$f \sim g \iff f = g \text{ σχεδόν παντού στο } \Omega.$$

Με την έννοια σχεδόν παντού εννοούμε ότι ισχύει παντού εκτός από ένα σύνολο που έχει μηδενικό μέτρο Lebesgue. Παραδείγματα συνόλων μηδενικού μέτρου είναι τα μεμονωμένα σημεία και αριθμήσιμα σύνολα στο \mathbb{R} , οι ευθείες στο \mathbb{R}^2 , κ.ο.κ. Στα επόμενα θα θεωρήσουμε ότι $K = \mathbb{R}$. Επομένως θα αναφερόμαστε στο χώρο $L^2(\Omega)$ ο οποίος είναι ο χώρος των τετραγωνικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων στο Ω εφοδιασμένος με το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} fg dm \quad (\text{A'.3})$$

A'.2 Χώροι Sobolev

Μια πολύ σημαντική κατηγορία γραμμικών χώρων με εφαρμογή στα προβλήματα συνοριακών τιμών είναι οι χώροι Sobolev. Πρόκειται για χώρους συναρτήσεων στους οποίους γενικεύεται η έννοια της παραγώγου. Πριν προχωρήσουμε στη θεμελίωσή τους όμως χρειάζονται μερικοί προκαταρκτικοί ορισμοί.

Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Ορίζουμε έναν πολυδείκτη $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ο οποίος είναι μια διατεταγμένη συλλογή n το πλήθος ακεραίων. Ορίζουμε επίσης σαν μήκος του a την ποσότητα $|a| = \sum_{i=1}^n a_i$. Αν μια συνάρτηση f είναι m φορές παραγωγίσιμη στο Ω τότε για $|a| \leq m$ ορίζουμε την a -παραγώγο της ως

$$\partial^a f = \frac{\partial^{|a|} f}{\partial x_1^{a_1} \partial x_2^{a_2} \dots \partial x_n^{a_n}}$$

Συμβολίζουμε με $C_c^\infty(\Omega)$ το σύνολο των συναρτήσεων του Ω που έχουν συμπαγή φορέα. Αν $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ και $f \in C^m(\Omega)$ τότε ο κανόνας της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες γίνεται

$$\int_{\Omega} f \partial^a \phi dx = (-1)^{|a|} \int_{\Omega} \partial^a f \phi dx$$

η γραμμένους με βάση το εσωτερικό γινόμενο του L^2 (A'.3)

$$\langle f, \partial^a \phi \rangle = (-1)^{|a|} \langle \partial^a f, \phi \rangle$$

Μιμούμενοι την ιδιότητα αυτή για τις παραγώγους θα ορίσουμε μια γενικευμένη παράγωγο γνωστή ως a - L_2 -παραγώγος.

Ορισμός 6. Η συνάρτηση $g \in L_2(\Omega)$ είναι μια a - L_2 -παράγωγος της συνάρτησης $f \in L^2(\Omega)$ αν ισχύει

$$\langle g, \phi \rangle = (-1)^{|a|} \langle f, \partial^a \phi \rangle$$

για κάθε $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ και γράφουμε $g = \partial^a f$.

Μπορούμε πλέον λοιπόν να ορίσουμε παραγώγους για ένα μεγάλο πλήθος συναρτήσεων που δεν έχουν κλασσική παράγωγο. Για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x) = |x|$ που δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0 έχει L_2 -παράγωγο, την

$$g(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

Ο ορισμός αυτός είναι μια καλή γενίκευση με την έννοια ότι δεν είναι όλες οι συναρτήσεις του L_2 παραγωγίσιμες. Κλασσικό παράδειγμα οι συναρτήσεις με άλματα ασυνέχειας όπως η συνάρτηση Heaviside.

Ορισμός 7. Ο χώρος Sobolev $H^m(\Omega)$ είναι ο χώρος των συναρτήσεων $f \in L_2(\Omega)$ που έχουν L_2 -παράγωγους $\partial^a f \in L_2(\Omega)$, για κάθε $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ με $|a| \leq m$. Ορίζουμε επίσης $H^0(\Omega) = L_2(\Omega)$.

Στον $H^m(\Omega)$ ορίζεται το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle f, g \rangle_m = \sum_{|a| \leq m} \int_{\Omega} \partial^a f \partial^a g \, dx = \sum_{|a| \leq m} \langle \partial^a f, \partial^a g \rangle$$

και η αντίστοιχη νόρμα

$$\|f\|_m = \langle f, f \rangle_m^{1/2}$$

Για παράδειγμα στον $H^1(\Omega)$ το εσωτερικό γινόμενο είναι

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle_1 &= \sum_{|a| \leq 1} \langle \partial^a f, \partial^a g \rangle \\ &= \langle f, g \rangle + \langle \nabla f, \nabla g \rangle. \end{aligned}$$

Οι χώροι Sobolev είναι πολύ χρήσιμοι στην επίλυση των μερικών διαφορικών εξισώσεων καθώς με τη βοήθεια τους μπορούμε να θεμελιώσουμε την ασθενή ολοκληρωτική τους μορφή. Αν $f \in H^1(\Omega)$ και $\Gamma = \partial\Omega$ το σύνορο του Ω τότε αποδεικνύεται ότι μπορεί να οριστεί η συνάρτηση ίχνος στο σύνορο, $f|_{\Gamma}$ και το χώρος Sobolev

$$H_0^1(\Omega) = \{f \in H^1(\Omega) : f|_{\Gamma} = 0\}.$$

Ο χώρος αυτός είναι χρήσιμος στην επίλυση προβλημάτων με ομογενείς συνοριακές συνθήκες Dirichlet. Επίσης αν $f \in H^2(\Omega)$ αποδεικνύεται ότι μπορεί να οριστεί η κάθετη παράγωγος της f στο Γ με

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} = \nabla f|_{\Gamma} \cdot \mathbf{n}$$

όπου \mathbf{n} το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο Γ με φορά προς τα έξω.

Α'.3 Εφαρμογές σε Προβλήματα Συνοριακών Τιμών

Στην ενότητα αυτή θα γίνει μια μικρή εισαγωγή στο πως μπορεί να μετατραπεί μια μερική διαφορική εξίσωση στην ασθενή της μορφή με χρήση των εργαλείων που διατυπώσαμε στις προηγούμενες ενότητες. Έστω το ελλειπτικό πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{στο } \Omega = [0, 1]^2 \\ u = 0 & \text{στο } \Gamma = \partial\Omega \end{cases}$$

Πολλαπλασιάζουμε και τα 2 μέλη της εξίσωσης με μια συνάρτηση $\phi \in H_0^1(\Omega)$ και ολοκληρώνουμε σε όλο το μοναδιαίο τετράγωνο. Η προηγούμενη εξίσωση τότε γίνεται

$$\iint_{\Omega} -\Delta u \phi \, dx = \iint_{\Omega} f \phi \, dx$$

Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Green η προηγούμενη σχέση γίνεται

$$\iint_{\Omega} \nabla u \nabla \phi \, dx - \oint_{\Gamma} \phi \nabla u \cdot \mathbf{n} \, ds = \iint_{\Omega} f \phi \, dx$$

και αφού η ϕ μηδενίζεται στο σύνορο η εξίσωση γράφεται

$$\iint_{\Omega} \nabla u \nabla \phi \, dx = \iint_{\Omega} f \phi \, dx$$

ή σε συναρτησιακή μορφή με χρήση του εσωτερικού γινομένου

$$\langle \nabla u, \nabla \phi \rangle = \langle f, \phi \rangle, \quad \forall \phi \in H_0^1([0, 1]^2)$$

Αυτή ακριβώς είναι η ασθενής μορφή του προβλήματος. Μια κλασσική λύση πάντα θα είναι και ασθενής. Το αντίστροφο όμως δεν ισχύει πάντοτε. Αν τώρα εναλλακτικά αντί για ομογενείς συνθήκες Dirichlet είχαμε ομογενείς συνθήκες Neumann, $\nabla u \cdot \mathbf{n} = 0$ στο Γ , τότε η συνάρτηση ϕ με την οποία θα πολλαπλασιάζαμε θα ήταν συνάρτηση του χώρου $H^1(\Omega)$ αφού δεν απαιτούμε κατ' ανάγκη μηδενισμό των τιμών της συνάρτησης στο σύνορο.

Βιβλιογραφία

- [1] R. Adams, J. Fournier , *Sobolev Spaces*, 2nd ed., Pure and Applied Mathematics, vol. 140, Academic Press, 2003.
- [2] A. Bensoussan and J. Menaldi, “Difference Equations on Weighted Graphs”,*J. Convex Anal.*, vol. 12, no. 1, pp. 13–44, 2005. .
- [3] S. Bogleux, A. Elmoataz and M. Melkemi, “Discrete Regularization on Weighted Graphs for Image and Mesh Filtering”,*Proc. SSVM*, 2007, pp. 128–139.
- [4] Y. Boykov and V. Kolmogorov, “Computing geodesics and minimal surfaces via graph cuts”, *Proc. Int. Conf. Comput. Vis.* , 2003, pp. 26–33.
- [5] Y. Boykov and V. Kolmogorov, “An experimental comparison of min-cut/max-flow algorithms for energy minimization in vision”, *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.* , vol. 26, no. 9, pp. 1124–1137, 2004.
- [6] V.Caselles, R. Kimmel and G. Sapiro, “Geodesic Active Contours”, *Int’l J. Comp. Vision*, vol. 22, 1997.
- [7]) C. Couprie, L. Grady, L. Najman and H. Talbot “Power Watershed: A Unifying Graph-Based Optimization Framework”, *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, vol. 33,pp. 1384–1398, 2011.
- [8] J. Cousty, G. Bertrand, L. Najman and M. Couprie, “Watershed Cuts: Minimum Spanning Forests and the Drop of Water Principle”, *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, vol. 31,pp. 1362–1374, 2009.
- [9] J. Cousty, G. Bertrand, L. Najman and M. Couprie, “Watershed Cuts: Thinnings, Shortest Path Forests and Topological Watersheds”, *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, vol. 32,pp. 925–939, 2010.
- [10] J. Cousty, L. Najman and J. Serra, “Some morphological operators in graph spaces”, *Proc. Int. Symp. Math. Morphol.*, LNCS 5720, 2009.
- [11] R. Diestel, *Graph Theory*, 4th ed., Springer, 2010.

- [12] K. Drakopoulos and P. Maragos, “Active contours on graphs: Multiscale morphology and graphcuts”, *IEEE J. of Selected Topics Signal Process.*, vol. 6, no. 7, pp. 780–794, 2012.
- [13] A. Elmoataz, O. Lezoray and S. Bougleux, “Nonlocal Discrete Regularization on Weighted Graphs: A Framework for Image and Manifold Processing”, *IEEE Trans. on Image Process*, vol. 17, 2008.
- [14] K. Eriksson and C. Johnson, “Error Estimates and Automatic Step Control for Nonlinear Parabolic Problems, I”, *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 24, no.1, 1987.
- [15] P. L. George, *Automatic Mesh Generation — Application to Finite Element Methods*, Wiley, 1991.
- [16] L. Grady, “Random Walks for Image Segmentation”, *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, Vol. 28, pp. 1768–1783, 2006.
- [17] H. J. A. M. Heijmans, P. Nacken, A. Toet, and L. Vincent, “Graph Morphology”, *Journal of Visual Communication and Image Representation*, vol 3., pp. 24–38, 1992.
- [18] D. Hutton, *Fundamentals of Finite Element Analysis*, McGraw-Hill, 2013
- [19] M. Kass, A. Witkin, and D. Terzopoulos, “Snakes: Active contour models”, *Int. J. Comput. Vis.*, vol. 1, no. 4, pp. 321–331, 1988.
- [20] E. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications*, Wiley, 1989.
- [21] D. Martin, C. Fowlkes, D. Tal and J. Malik, “A Database of Human Segmented Natural Images and its Application to Evaluating Segmentation Algorithms and Measuring Ecological Statistics”, *Proc. 8th Int’l Conf. Comput. Vis.*, vol. 2, pp. 416–423, 2001.
- [22] S.J. Osher and J.A. Sethian, “Fronts propagation with curvature dependent speed: Algorithms based on Hamilton- Jacobi formulations”, *Journal of Computational Physics*, no.79, pp. 12–49, 1988.
- [23] P.- O. Persson, G. Strang, “A Simple Mesh Generator in MATLAB”, *SIAM Review*, Volume 46 (2), pp. 329–345, June 2004.
- [24] C. Sakaridis, K. Drakopoulos and P. Maragos, “Geodesic Contours on Arbitrary Graphs”, under preparation for publication, 2015.
- [25] J.A. Sethian, “A review of recent numerical algorithms for hypersurfaces moving with curvature dependent speed: Algorithms based on Hamilton–Jacobi formulations”, *Journal of Computational Physics* no. 31, pp. 131–161, 1989.

-
- [26] V. Ta, A. Elmoataz and O. Lezoray, “Nonlocal PDEs-Based Morphology on Weighted Graphs for Image and Data Processing”, *IEEE Trans. on Image Process*, vol. 20, 2011.
- [27] L. Vincent, “Graphs and Mathematical Morphology”, *Signal Processing*, vol. 16, pp. 365–388, 1989.
- [28] R. T. Whitaker, “A level-set approach to 3d reconstruction from range data”, *International Journal of Computer Vision*, Volume 29, Issue 3, pp.203–231, 1998.
- [29] Π. Μαραγκός, “Ανάλυση Εικόνων και Όραση Υπολογιστών”, Lecture Notes ΕΜΠ, 2005.
- [30] Χ. Σακαρίδης, “Γεωδαιτικές Ενεργές Καμπύλες σε Αυθαίρετους Γράφους”, Διπλωματική Εργασία, ΕΜΠ, 2014.