

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

**Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών
Σπουδών Υπολογιστικής Μηχανικής**

Μεταπτυχιακή Εργασία

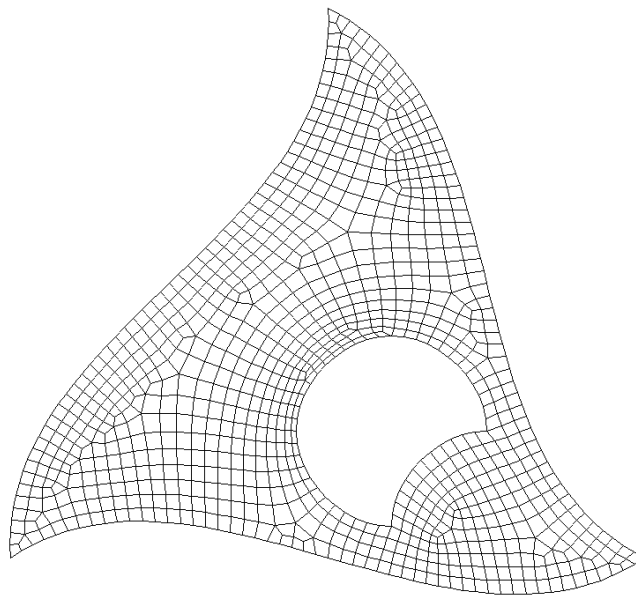
**Γένεση πλέγματος τετραπλευρικών στοιχείων
στο επίπεδο με τη Μέθοδο Επίστρωσης**

Κωνσταντίνος Μπασκουρέλος

επιβλέπων καθηγητής : Κυριάκος Γιαννάκογλου

Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών ΕΜΠ

Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής & Βελτιστοποίησης



Αθήνα, Ιούλιος 2015

Περιεχόμενα

Περίληψη.....	5
Κεφ. 1 : Γενικές θεωρήσεις για την σημασία και την κατασκευή πλεγμάτων....	6
1. Η σημασία του πλέγματος στην αριθμητική επίλυση.....	6
2. Σύντομη ανασκόπηση βασικών τεχνικών πλεγματοποίησης.....	7
3. Πλεονεκτήματα και δυσκολίες γένεσης τετραπλευρικών και εξαεδρικών πλεγμάτων.....	8
Κεφ. 2 : Η Μέθοδος Επίστρωσης.....	11
1. Εισαγωγή.....	11
2. Σύντομη περιγραφή του αλγόριθμου.....	12
3. Γεωμετρική θεμελίωση της Μεθόδου Επίστρωσης.....	13
3.1 Έγκυρα τετράπλευρα.....	13
3.2 Ποιότητα τετράπλευρων.....	14
3.3 Έλεγχος του μεγέθους των στοιχείων.....	14
3.4 Ομαλοί και ανώμαλοι κόμβοι.....	15
3.5 Μέτωπα.....	16
3.6 Γωνία και είδη κόμβων.....	17
3.7 Γένεση τετράπλευρων στους κόμβους.....	19
3.7.1 Κόμβος τερματισμού.....	20
3.7.2 Κόμβος πλευράς.....	20
3.7.3 Κόμβος γωνίας.....	21
3.7.4 Κόμβος αναστροφής.....	22
3.8 Ραφές.....	23
3.8.1 Ραφή σε εσωτερικό κόμβο.....	24
3.8.2 Ραφή μετάβασης.....	26
3.8.3 Ραφή σε συνοριακό κόμβο.....	27
3.9 Ρύθμιση μετώπου : σφήνες και πτυχώσεις.....	28
3.9.1 Εισαγωγή σφηνών.....	28
3.9.2 Σχηματισμός πτυχώσεων.....	30

4.	Αρχικοποίηση μετώπων και εκκίνηση της σάρωσή τους.....	31
4.1	Κατηγοριοποίηση των κόμβων.....	31
4.2	Προσδιορισμός σχήματος του μετώπου.....	32
4.3	Επιλογή κόμβου εκκίνησης και γένεση του πρώτου στοιχείου.....	35
5.	Παραλλαγές στη διαδικασία γένεσης των στοιχείων : η εκδοχή των Blacker - Stephenson και των White - Kinney.....	38
6.	Διόρθωση τομών και εγγύτητας των στοιχείων.....	44
7.	Ομαλοποίηση.....	47
7.1	Ομαλοποίηση κόμβων του μετώπου.....	47
7.1.1	Ισοπαραμετρική ομαλοποίηση.....	48
7.1.2	Ρύθμιση μήκους ακμών.....	49
7.1.3	Ομαλοποίηση γωνιών.....	49
7.2	Ομαλοποίηση εσωτερικών κόμβων.....	51
7.3	Τοπικότητα της ομαλοποίησης.....	51
8.	Κλείσιμο του μετώπου.....	53
9.	Καθαρισμός πλέγματος.....	54
9.1	Συγχώνευση τετράπλευρων σε εσωτερικούς κόμβους με δυο προσαρτημένα τετράπλευρα.....	55
9.2	Διαγραφή τετράπλευρου για εξάλειψη ανώμαλων κόμβων.....	55
9.3	Ομαλοποίηση γωνίας σε εσωτερικό κόμβο με τρία προσαρτημένα τετράπλευρα.....	56
9.4	Βελτίωση συνοριακού τετράπλευρου με εσωτερική γωνία που υπερβαίνει τις 165°	56
10.1	Λεπτομερής περιγραφή του αλγόριθμου PM-WK.....	60
10.2	Περιγραφή επιμέρους διεργασιών.....	60
10.2.1	Δεδομένα εισαγωγής και προεπεξεργασία τους.....	60
10.2.2	Διεργασίες κατά τη γένεση νέου στοιχείου.....	61
10.2.3	Διεργασίες μετά από τη σάρωση μετώπου.....	62
11.	Παραλλαγές και βελτιώσεις της PM.....	63
Κεφ. 3 : Προγραμματιστική υλοποίηση και παραδείγματα.....		64
1.	Οργάνωση του προγράμματος και δομές δεδομένων.....	64
2.	Παραδείγματα πλεγματοποίησης με την PM-WK.....	67

<u>Παράρτ. Α</u> : Έλεγχος της πυκνότητας του πλέγματος.....	81
A1. Τοπικό μέγεθος πλέγματος (lms).....	81
A2. Καθορισμός πυκνότητας με πλέγμα υποβάθρου.....	82
A3. Καθορισμός πυκνότητας με πηγές.....	83
A3.1 Σημειακή πηγή.....	83
A3.2 Παράδειγμα σημειακής πηγής.....	84
<u>Παράρτ. Β</u> : Γένεση κόμβων σε καμπύλες.....	85
B1. Εισαγωγή.....	85
B2. Διακριτοποίηση ευθύγραμμων τμημάτων.....	86
B2.1 Το μήκος του τμήματος είναι μεγαλύτερο από τα lms και των δυο άκρων του.....	86
B2.2 Το μήκος του τμήματος είναι μεγαλύτερο από μόνον ένα από τα lms και των άκρων του.....	89
<u>Παράρτ. Γ</u> : Κριτήρια ποιότητας τετράπλευρων.....	90
<u>Παράρτ. Δ</u> : Εισαγωγή στη θεωρία των Συνδεσμικών Λιστών.....	92
Αναφορές και Βιβλιογραφία.....	95

Επισημαίνεται ότι η αναφορά σε μια σχέση ή σε ένα σχήμα στο κείμενο, διακρίνεται από το ότι η αρίθμηση των σχέσεων είναι πάντα εντός παρενθέσεων :
“σχ. (x)” σημαίνει “σχέση (x)” ενώ “σχ. x” σημαίνει “σχήμα x”.

Κάθε κεφάλαιο και παράρτημα έχει την δική του αρίθμηση σχέσεων και σχημάτων.
Η αναφορά σε σχέση, σχήμα ή παράγραφο που δεν ανήκει στο τρέχον κεφάλαιο, γίνεται αναγράφοντας το κεφάλαιο όπου βρίσκεται :
σχ. (x/Y) δηλώνει τη σχέση x του κεφαλαίου Y κλπ.

Η αρίθμηση των παρατηρήσεων είναι ενιαία για όλο το κείμενο.

Τα σχ. 7-10, 13-15 και 17-18 του κεφ. 2 αναπαράγονται εκ της [13].

Τα δεδομένα για το σύνορο στις δοκιμές 2,3,5,6 του κεφ. 3 επίσης ελήφθησαν από τη [13].

Περίληψη

Στην παρούσα εργασία μελετάται και υλοποιείται προγραμματιστικά μια μέθοδος γένεσης πλέγματος τετραπλευρικών στοιχείων στο επίπεδο, συγκεκριμένα η Μέθοδος Επίστρωσης (Paving Method - PM).

Αρχικά, στο κεφ. 1, σχολιάζεται σύντομα η σημασία του πλέγματος για την αριθμητική επίλυση, τα πλεονεκτήματα των πλεγμάτων με τετράπλευρα και η δυσκολία γένεσής τους.

Το κεφ. 2 αφορά εξολοκλήρου την PM. Αρχικά διατυπώνεται μια πολύ απλοποιημένη εκδοχή του αλγόριθμου*, απαλλαγμένη από σχεδόν όλες τις έννοιες της PM. Ακολούθως, παρουσιάζονται όλοι οι ορισμοί και τα γεωμετρικά στοιχεία στα οποία θεμελιώνεται η PM και εξετάζονται λεπτομερώς όλες οι επιμέρους διεργασίες της. Γίνεται αναφορά στις δυο κύριες εκδοχές της PM και σχολιάζονται τα πλεονεκτήματα και οι αδυναμίες τους. Παρουσιάζεται λεπτομερώς ο αλγόριθμος της πιο ισχυρής εκδοχής και συζητούνται τα διάφορα σημεία του.

Στο κεφ. 3 δείχνονται κάποια παραδείγματα πλεγματοποίησης με το πρόγραμμα που γράφηκε για να δοκιμαστεί η προτεινόμενη τεχνική.

Τέλος, στα παραρτήματα, παρουσιάζονται κάποια θέματα από τη Θεωρία Πλεγμάτων που είναι χρήσιμα στην κατασκευή ενός γενέτη και εφαρμόστηκαν στην γραφή του δοκιμαστικού προγράμματος. Συγκεκριμένα, παρουσιάζεται μια τεχνική διακριτοποίησης καμπύλων, κριτήρια ποιότητας τετράπλευρων και μια σύντομη εισαγωγή στη θεωρία των Συνδεσμικών Λιστών.

* Ο πλήρης αλγόριθμος δεν μπορεί να διατυπωθεί πριν εξεταστούν η θεωρία και τα παρελκόμενα που τον αφορούν διότι δεν θα είναι κατανοητός στον αναγνώστη.

Κεφάλαιο 1

Γενικές θεωρήσεις για την σημασία και την κατασκευή πλεγμάτων

1. Η σημασία του πλέγματος στην αριθμητική επίλυση.

Για την επίλυση Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων με κάποια αριθμητική τεχνική, π.χ. FDM, FEM, BEM, MoM¹, ένα σημαντικό στοιχείο είναι το πλέγμα που αναπαριστά σε διακριτή μορφή το χωρίο του προβλήματος. Το πλέγμα αποτελεί το μέσο επί του οποίου οι διαφορικές εξισώσεις προσεγγίζονται από αλγεβρικές σχέσεις και περιγράφονται διακριτά συνεχείς ποσότητες. Σε προβλήματα μεγάλης κλίμακας ή/και πολυπλοκότητας, ο ρόλος του πλέγματος στην αριθμητική επίλυση έχει μεγάλη σημασία.

Η αποδοτικότητα (efficiency) της αριθμητικής επίλυσης εκτιμάται από την ακρίβεια της λύσης² και τον απαιτούμενο υπολογιστικό χρόνο³. Η ακρίβεια της λύσης αφορά το σφάλμα στους κόμβους του πλέγματος και το σφάλμα της παρεμβολής σε σημεία εκτός των κόμβων. Συνοπτικά, οι κυριότερες αιτίες σφαλμάτων είναι :

- το μαθηματικό μοντέλο περιγράφει το φυσικό φαινόμενο προσεγγιστικά,
- η αριθμητική προσέγγιση του μαθηματικού μοντέλου (διακριτοποιημένες εξισώσεις),
- οι αριθμητικές πράξεις (σφάλμα στρογγύλευσης & αποκοπής),
- η απόσταση και η διάταξη των κόμβων (δηλ. το μέγεθος και το σχήμα των κελιών του πλέγματος),
- η παρεμβολή των διακριτών τιμών της αριθμητικής λύσης,

Η αξιόπιστη εκτίμηση αυτών σφαλμάτων στην λύση είναι γενικά δύσκολη · ωστόσο, είναι προφανές ότι οι ποιοτικές και ποσοτικές ιδιότητες του πλέγματος είναι σημαντικές για τα δυο τελευταία.

Ο υπολογιστικός χρόνος εξαρτάται από τους αλγόριθμους που εφαρμόζονται (δηλ. το πλήθος των πράξεων), την ταχύτητα του υπολογιστή και τον χρόνο για την προετοιμασία/προεπεξεργασία των δεδομένων (preprocessing). Επ' αυτών, η γένεση ενός εκλεπτυσμένου πλέγματος απαιτεί περισσότερο χρόνο και ενδεχομένως μνήμη και πράξεις · ωστόσο, ένα εκλεπτυσμένο πλέγμα μπορεί να αυξήσει την ακρίβεια χωρίς άσκοπη αύξηση του πλήθους των κόμβων και των κελιών. Η δημιουργία του καταλληλότερου πλέγματος γίνεται εκτιμώντας αυτούς τους αντικρουόμενους παράγοντες, ποιοτικά και ποσοτικά. Γενικά, επιδιώκεται να αναπτυχθούν τεχνικές γένεσης

¹ FDM : Finite Differences Method (μέθοδος πεπερασμένων διαφορών)
 FEM : Finite Element Method (μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων)
 BEM : Boundary Element Method (μέθοδος συνοριακών στοιχείων)
 MoM : Method of Moments (μέθοδος των ροπών)

² Εφεξής, η αναφορά στη λύση θα αφορά πάντα την αριθμητική λύση.
 Όταν εννοείται η αναλυτική λύση αυτό θα αναφέρεται σαφώς.

³ Εναλλακτικά από το πλήθος των πράξεων.

πλεγμάτων που παρέχουν μεγάλη ακρίβεια με μικρό υπολογιστικό κόστος. Η χρήση τέτοιων τεχνικών συνεισφέρει σημαντικά στην αποδοτικότητα της αριθμητικής επίλυσης μεγάλων/πολύπλοκων προβλημάτων. Από τα παραπάνω, η σημασία της γένεσης πλεγμάτων στην αριθμητική επίλυση είναι προφανής.

Οι πρώτες μέθοδοι γένεσης πλεγμάτων χρονολογούνται από τη δεκαετία του 1960, μέχρι δε περίπου τα μέσα της δεκαετίας του '80 είχαν αναπτυχθεί όλες οι βασικές τεχνικές (αλγεβρικές, ελλειπτικές, υπερβολικές, Delaunay και προελαύνοντος μετώπου). Ταυτόχρονα, η ανάπτυξη ταχύτερων αλγόριθμων επίλυσης και ισχυρότερων υπολογιστών έκανε εφικτή την μελέτη προβλημάτων μεγαλύτερης γεωμετρικής και φυσικής πολυπλοκότητας. Περίπου το 1985, το πιο χρονοβόρο τμήμα των προσομοιώσεων ήταν η δημιουργία του πλέγματος και ήταν πλέον φανερό η ανάγκη να αυτοματοποιηθεί η πλεγματοποίηση όσο το δυνατόν. Η δεκαετία του 1990 αποτέλεσε ορόσημο για την γένεση πλεγμάτων. Τότε καταβλήθηκαν μεγάλες προσπάθειες για αυτόματη πλεγματοποίηση, διασύνδεση με τα συστήματα CAD και μελετήθηκε η προσαρμογή των πλεγμάτων στις απαιτήσεις ακρίβειας. Για τα θέματα αυτά εκδόθηκε ένα πλήθος από πραγματείες. Τέλος, αναπτύχθηκε εκτεταμένα λογισμικό γενικής χρήσης, ικανό να παράγει πλέγμα σε αυθαίρετες γεωμετρίες για πρακτικά προβλήματα, πράγμα που έφερε την πλεγματοποίηση στην καθημερινή πρακτική. Σήμερα πλέον, η γένεση πλεγμάτων αποτελεί αυτόνομο επιστημονικό τομέα, ώριμο και συμπληρωματικό των αριθμητικών μεθόδων και αναγνωρισμένης σημασίας.

2. Σύντομη ανασκόπηση βασικών τεχνικών πλεγματοποίησης.

Τα πλέγματα και οι αντίστοιχες τεχνικές γένεσής τους, ταξινομούνται σε δυο κύρια είδη : δομημένα και μη-δομημένα. Το κριτήριο είναι ο τρόπος με τον οποίο είναι οργανωμένοι τοπικά οι κόμβοι. Τα δομημένα πλέγματα παράγονται από κάποια απεικόνιση μεταξύ του φυσικού χωρίου και ενός χωρίου αναφοράς · το μέγεθος, το σχήμα και η συνδεσιμότητα (connectivity) των κελιών καθορίζονται από αυτή την απεικόνιση και το σύστημα συντεταγμένων που υιοθετείται. Στα μη-δομημένα πλέγματα, η χωροθέτηση των κελιών δεν σχετίζεται με κάποιο σύστημα συντεταγμένων, τα δε γεωμετρικά χαρακτηριστικά τους και η συνδεσιμότητα ποικίλουν τοπικά. Εκτός από τον παραπάνω διαχωρισμό, υπάρχουν πλέγματα που φέρουν χαρακτηριστικά και από τα δυο είδη : τμηματικώς δομημένα (block structured), επικαθήμενα (overset) και υβριδικά.

Οι πρώτες τεχνικές γένεσης πλεγμάτων αφορούσαν δομημένα πλέγματα τετράπλευρων⁴ και γεωμετρικά χωρία⁵ απλού σχήματος, τα οποία μπορούν εύκολα να απεικονιστούν σε καρτεσιανά συστήματα συν/νων. Το θεμέλιο αυτών των τεχνικών είναι ένας μετασχηματισμός μεταξύ ενός χωρίου αναφοράς και του χωρίου του προβλήματος. Στην πιο απλή εκδοχή, οι σχέσεις μετασχηματισμού είναι συναρτήσεις διγραμμικής (bilinear) ή υπερπεπερασμένης (transfinite) παρεμβολής ή κάποιο πολυώνυμο · οι γενέτες αυτοί λέγονται αλγεβρικού τύπου [11]. Περαιτέρω, για τον έλεγχο της πυκνότητας και ομαλότητας των πλεγματικών γραμμών, αναπτύχθηκαν μέθοδοι που βασίζονται σε επίλυση PDEs⁶ ή/και άλλες βοηθητικές σχέσεις. Τέτοιοι είναι οι γενέτες ελλειπτικού και υπερβολικού τύπου [11].

⁴ Πλέγματα τριγώνων παράγονται εύκολα φέροντας την διαγώνιο των τετράπλευρων.

⁵ Εφεξής, για συντομογραφικούς λόγους, θα αναφέρονται και ως “γεωμετρίες”.

⁶ PDEs : Partial Differential Equations (μερικές διαφορικές εξισώσεις)

Σε αρκετά προβλήματα, τα δομημένα πλέγματα πλεονεκτούν σημαντικά από τα μη-δομημένα [1]· επίσης, η προγραμματιστική υλοποίηση των τεχνικών τους είναι απλή στην βασική τους εκδοχή. Γι' αυτό, οι μέθοδοι γένεσης δομημένων πλεγμάτων παραμένουν δημοφιλείς, τόσο σε μικρά δοκιμαστικά προγράμματα όσο και σε εμπορικό λογισμικό μεγάλης κλίμακας.

Τα μη-δομημένα πλέγματα, ειδικά τα τριγωνικά και τετραεδρικά, είναι κατάλληλα για ακανόνιστες, πολύπλοκες γεωμετρίες όπου η εφαρμογή δομημένου πλεγματος είναι γεωμετρικά δύσκολη ή αδύνατη. Επίσης, επειδή το μέγεθος των κελιών και η συνδεσιμότητα μπορούν τοπικά να μεταβάλλονται, είναι ευέλικτα σε μεθόδους προσαρμογής⁷. Για τη γένεση τριγωνικών και τετραεδρικών στοιχείων, οι βασικές μέθοδοι είναι ο τριγωνισμός Delaunay, η Μέθοδος Προελαύνοντος Μετώπου (Advancing Front Method - AFM) και η Οκταδεντρική Διαμέριση (Octree Method - OctM). Ένα πλήθος άλλων μεθόδων υπάρχει ως παραλλαγές και συνδυασμοί αυτών [14]. Μη-δομημένα πλέγματα τετράπλευρων ή εξάεδρων είτε λαμβάνονται από ένα αντίστοιχο πλέγμα τριγώνων ή τετράεδρων με διάσπαση ή/και ένωση των στοιχείων (indirect meshing), είτε σχηματίζονται άμεσα. Οι κυριότερες τεχνικές είναι [14] η Μέθοδος Επίστρωσης (Paving Method - PM), η Μέθοδος Μέσης Γραμμής (Medial Line Method - MLM) και οι αντίστοιχές τους στον χώρο, Μέθοδος Επάλειψης (Plastering) και Μέσης Επιφάνειας (Medial Surface Method - MSM).

Οι τεχνικές για μη-δομημένα πλέγματα είναι γενικά πολύπλοκες και η προγραμματιστική τους εφαρμογή συχνά απαιτεί εξειδικευμένες δομές δεδομένων· ωστόσο, παρέχουν μεγάλο βαθμό αυτοματισμού ακόμη και σε πολύ δύσκολες περιπτώσεις.

Τέλος, μια άλλη κατηγορία μεθόδων αφορά τη γένεση πλεγμάτων σε επιφάνειες (surface meshing). Τα επιφανειακά πλέγματα είτε χρησιμοποιούνται αυτόνομα, είτε αποτελούν προκαταρκτικό δεδομένο για πλεγματοποίηση στον χώρο. Οι μέθοδοι γένεσης επιφανειακών πλεγμάτων βασίζονται σε παρόμοιες ιδέες με τις αντίστοιχες για το επίπεδο και τον χώρο καθώς και σε έννοιες από την Διαφορική Γεωμετρία και τα γραφικά των συστημάτων CAD (καμπύλες NURBS κλπ).

3. Πλεονεκτήματα και δυσκολίες γένεσης τετραπλευρικών και εξαεδρικών πλεγμάτων.

Τετραπλευρικά και εξαεδρικά πλέγματα είναι η καλύτερη επιλογή για πολλές εφαρμογές, κάτι που φαίνεται πιο εύκολα εμπειρικά παρά μαθηματικά. Τα αριθμητικά πειράματα δείχνουν ότι τα τριγωνικά και τετραεδρικά στοιχεία 1ης τάξης⁸ παρέχουν μικρή ακρίβεια στον υπολογισμό των αγνώστων και μόνον τα 2ης τάξης συναγωνίζονται επάξια τα αντίστοιχα τετραπλευρικά και εξαεδρικά [4],[5]. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι του Benzley [2] όπου χρησιμοποιούνται τετραεδρικά και εξαεδρικά στοιχεία στην ανάλυση της κάμψης και στρέψης μιας απλής δοκού, πακτωμένης στο ένα άκρο. Υποθέτοντας ελαστικό υλικό, τα τετράεδρα 2ης και τα εξάεδρα 1ης τάξης δίνουν εξίσου καλά αποτελέσματα, τα δε τετράεδρα 1ης τάξης έχουν χειρότερες επιδόσεις. Για ελαστοπλαστικό υλικό, το αποτέλεσμα με πλέγμα εξάεδρων είναι σημαντικά καλύτερο απ' ότι με τετράεδρα.

⁷ Π.χ., είναι εύκολο να εμπλουτιστεί μια περιοχή με επιπλέον τρίγωνα αν χρειάζεται. Αντίθετα, σε ένα δομημένο πλέγμα, εισαγωγή νέων στοιχείων είναι αδύνατη. Ωστόσο, η ευελιξία αυτή αφορά κυρίως το επίπεδο και τα τρίγωνα. Η πύκνωση με τετράπλευρα είναι δυσκολότερη, στον δε χώρο πύκνωση με εξάεδρα δεν είναι πάντα εφικτή.

⁸ Ως 1ης ή 2ης τάξης θεωρούνται εκείνα που έχουν 2 ή 3 κόμβους σε κάθε πλευρά και άρα συναρτήσεις σχήματος γραμμικές ή τετραγωνικές αντίστοιχα.

Επίσης, το μητρώο ακαμψίας ενός πλέγματος με ισοπαραμετρικά τρίγωνα 1ης τάξης έχει γενικά μεγαλύτερους διαγώνιους και μικρότερους μη διαγώνιους όρους από το αντίστοιχο με τετράπλευρα [3]. επομένως, η απόκρισή του στις φορτίσεις είναι μικρότερη, δηλ. είναι πιο “άκαμπτο” από το τετραπλευρικό. Η εξήγηση είναι ότι το τετραπλευρικό στοιχείο έχει έναν κόμβο περισσότερο, άρα επιπλέον βαθμούς ελευθερίας που δίνουν πιο αξιόπιστες σχέσεις παρεμβολής.

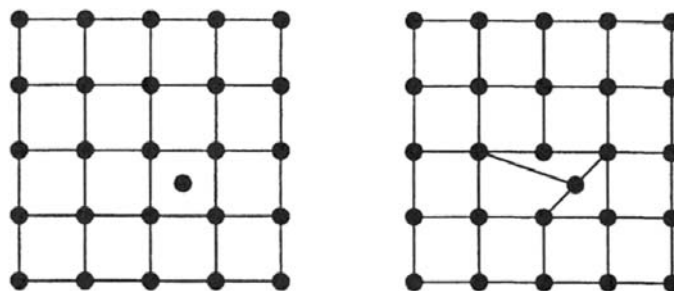
Ακόμη, η επιφάνεια ενός τετράπλευρου καλύπτεται από 2 τρίγωνα, ο δε όγκος ενός εξαέδρου από τουλάχιστον 5 τετράεδρα· ως εκ τούτου, τα τετραπλευρικά και κυρίως τα εξαεδρικά πλέγματα είναι πιο οικονομικά από τα αντίστοιχα τριγωνικά και τετραεδρικά.

Οι καλές αριθμητικές επιδόσεις και η οικονομία τους σε υπολογιστικούς πόρους δικαιολογούν την προτίμηση των τετραπλευρικών και εξαεδρικών πλεγμάτων στις αριθμητικές μεθόδους. Στην Μηχανική Ρευστών επιδιώκεται η κάλυψη του χωρίου να γίνεται όσο το δυνατόν με δομημένο πλέγμα και οι περιοχές με ακανόνιστο σχήμα να καλύπτονται με μη-δομημένα εξαέδρα· επίσης, στις προσομοιώσεις πλαστικών παραμορφώσεων χρησιμοποιούνται σχεδόν πάντα εξαέδρα.

Επισημαίνεται πάντως ότι επειδή το τρίγωνο και το τετράεδρο είναι τα απλούστερα γεωμετρικά σχήματα, προσαρμόζονται πιο εύκολα σε ακανόνιστες γεωμετρικές· ως εκ τούτου, αποτελούν τον κανόνα στις εφαρμογές όπου πρωταρχικές απαιτήσεις είναι η ευκολία και η ακρίβεια στη γεωμετρική προσέγγιση. Π.χ., στην ανακατασκευή και απλούστευση επιφάνειας (surface reconstruction, simplification & surface level of detail) καθώς και σε πολλούς στοιχειώδεις αλγόριθμους γραφικών χρησιμοποιούνται σχεδόν αποκλειστικώς τρίγωνα.

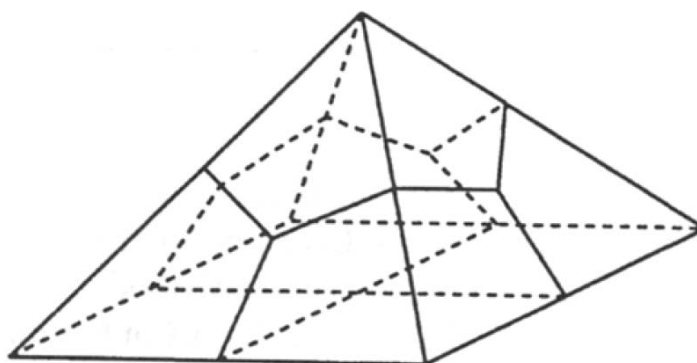
Εξάλλου, υπάρχουν αριθμητικές τεχνικές που θεμελιώνονται θεωρητικά σε τρίγωνα και τετράεδρα, π.χ. η Μέθοδος των Ρομών (Method of Moments - MoM) με την οποία λύνονται ολοκληρωτικές εξισώσεις του ηλεκτρομαγνητισμού : μια από τις πιο χρηστικές εκδοχές αυτής της τεχνικής βασίζεται στις συναρτήσεις βάσης RWG (Rao-Wilton-Glisson basis) που είναι ζεύγη τριγώνων.

Παρά την καλή τους αριθμητική συμπεριφορά, η γένεση τετραπλευρικών και εξαεδρικών πλεγμάτων, μη-δομημένων, είναι γενικά πολύ δύσκολη. Τα τετραπλευρικά και κυρίως τα εξαεδρικά πλέγματα είναι πολύ “δύσκαμπτες” γεωμετρικές δομές· η μεταβολή των γεωμετρικών και τοπολογικών χαρακτηριστικών τους είναι δύσκολη. Π.χ., έστω το δομημένο πλέγμα που δείχνεται στο σχ. 1. Ζητείται να εισαχθεί ένας επιπλέον κόμβος μεταβάλλοντας το πλέγμα μόνον τοπικά. Η εισαγωγή του κόμβου παράγει εκφυλισμένα τετράπλευρα. Σε μια αντίστοιχη κατάσταση στον χώρο η εισαγωγή του κόμβου είναι αδύνατη.



σχ. 1 : Εισαγωγή ενός νέου κόμβου σε ένα δομημένο πλέγμα τετράπλευρων.

Από αυτό το αντιπαράδειγμα φαίνεται ότι οι τεχνικές εισαγωγής κόμβων τύπου Delaunay, τόσο αποτελεσματικές για πλέγματα τριγώνων και τετραέδρων, δεν εφαρμόζονται για εξάεδρα, η δε χρήση τους σε τετράπλευρα είναι προβληματική. Επίσης προβληματική είναι και η εφαρμογή μεθόδων προελαύνοντος μετώπου (AFM). Στον χώρο, πολλοί αλγόριθμοι γένεσης τετραέδρων εκκινούν από ένα επιφανειακό πλέγμα και καλύπτουν τον όγκο στρώμα με στρώμα με τεχνικές AFM. Η ιδέα αυτή γενικά δεν λειτουργεί για εξάεδρα, ακόμη και σε πολύ απλές δομές. Π.χ., στο σχ. 2 δείχνεται μια πυραμίδα, της οποίας η βάση έχει χωριστεί σε τέσσερα και οι έδρες της σε τρία τετράπλευρα. Έχει δειχτεί [6] ότι ένα εξαεδρικό πλέγμα, προσαρμοσμένο στο δοθέν επιφανειακό, υπάρχει μεν αλλά όλες οι γνωστές λύσεις έχουν εκφυλισμένα ή μηδενικού όγκου στοιχεία. Η αποτυχία της εισαγωγής κόμβων (Delaunay type meshing) και της απλής προώθησης μετώπων (AFM type meshing) περιορίζει σημαντικά τους τρόπους γένεσης εξαεδρικών πλεγμάτων.



σχ. 2: Επιφανειακό πλέγμα πυραμίδας.

Στο επίπεδο τα πράγματα είναι καλύτερα, η γένεση τετραπλευρικών πλεγμάτων μπορεί φαινομενικά να γίνει εύκολα : απλώς γεννάται ένα πλέγμα τριγώνων και τα τρίγωνα συνδυάζονται ανά ζεύγη ή διασπώνται σε τετράπλευρα (έμμεσες μέθοδοι). Ωστόσο, απλοϊκή εφαρμογή τέτοιων ιδεών παράγει στοιχεία μέτριας ποιότητας⁹ και που απέχουν πολύ από το να είναι ορθογώνια κοντά στα σύνορα¹⁰. Από όλα αυτά, φαίνεται ότι η γένεση τετραπλευρικών και εξαεδρικών πλεγμάτων γενικά παρουσιάζει μεγάλες δυσκολίες - και πάντως περισσότερες από τη γένεση τριγωνικών ή τετραεδρικών.

Ειδικά σε ότι αφορά τα τετράπλευρα, μια τεχνική με καλά αποτελέσματα είναι η Μέθοδος Επίστρωσης (Paving Method - PM) [7]. Η τεχνική αυτή είναι του τύπου AFM αλλά λαμβάνει ειδική μέριμνα για να παραχθούν υψηλής ποιότητας τετράπλευρα. Η PM αποτελεί το κύριο αντικείμενο του παρόντος κειμένου και εξετάζεται λεπτομερώς στο κεφ. 2.

⁹ Η έννοια της ποιότητας των τετραπλευρών εξετάζεται στο παράρτ. Γ.

¹⁰ Αυτή είναι μια σημαντική απαίτηση σε αρκετά προβλήματα, π.χ. ροής και οριακών στρωμάτων.

Κεφάλαιο 2

Η Μέθοδος Επίστρωσης

1. Εισαγωγή.

Η Μέθοδος Επίστρωσης (Paving Method - PM) εφευρέθηκε από τους Blacker και Stephenson [7] περίπου το 1991. Είναι μια τεχνική προελαύνοντος μετώπου, η οποία εκκινεί από μια διακριτοποίηση του συνόρου και καλύπτει το εσωτερικό του χωρίου με τετράπλευρα που σχηματίζονται κατά σειρές. Η PM χρησιμοποιώντας βοηθητικά μια πληθώρα τεχνικών επιτυγχάνει υψηλή ποιότητα στοιχείων και σύγκλιση¹¹ ακόμη και σε πολύ ακανόνιστες γεωμετρίες. Εξαιτίας των δυσκολιών που ενέχει η γένεση τετράπλευρων, η PM αλγοριθμικά είναι σημαντικά πιο πολύπλοκη από την AFM για τρίγωνα. Συνοπτικά, τα κύρια χαρακτηριστικά της είναι :

- Είναι άμεση μέθοδος γένεσης τετράπλευρων (δεν βασίζεται σε ένωση και διάσπαση τριγώνων).
- Είναι του τύπου προελαύνοντος μετώπου. Το μέτωπο εκκινεί από το σύνορο και καλύπτει το εσωτερικό του χωρίου με σειρές τετράπλευρων.
- Το παραγόμενο πλέγμα αποτελείται μόνον από τετράπλευρα και εξαρτάται από τη διακριτοποίηση του συνόρου.
- Αντίθετα με άλλες μεθόδους, ομαλοποίηση γίνεται όχι μόνον στο τελικό πλέγμα, αλλά και ενδιάμεσως, κατά τη γένεση των στοιχείων.
- Ειδικές διαδικασίες εφαρμόζονται για να εξασφαλιστεί η σύγκλιση και η ποιότητα των στοιχείων (“ραφή” και “πτυχώσεις” στοιχείων, ειδικές τεχνικές ομαλοποίησης).

Η επιτυχία του βασικού αλγόριθμου των Blacker & Stephenson οδήγησε σε κάποιες παραλλαγές της PM με αυξημένες δυνατότητες· εν προκειμένω αξίζει να αναφερθούν δύο. Οι Cass et al. [8] γενίκευσαν την PM σε επιφάνειες στον χώρο. Οι White & Kinney [9] τροποποίησαν τον αρχικό αλγόριθμο ώστε η κάλυψη του χωρίου να γίνεται ανά στοιχείο (element by element approach)¹² αντί ανά γραμμή¹³ (στρώση) στοιχείων (row by row approach), πράγμα που - μαζί με άλλες βελτιώσεις - προσδίδει στον αλγόριθμο μεγαλύτερη ευρωστία¹⁴ (robustness). Η PM έχει υλοποιηθεί σε αρκετά εμπορικά λογισμικά με χαρακτηριστικότερο το CUBIT.

¹¹ Με την έννοια ότι παράγεται πλέγμα και δεν αποτυγχάνει ο αλγόριθμος.

¹² Η εκδοχή αυτή είναι που υλοποιήθηκε προγραμματιστικά στην προκειμένη εργασία.

¹³ Για τον ορισμό της “γραμμής στοιχείων” βλ. §3.7.1.

¹⁴ Ως “ευρωστία” χαρακτηρίζεται η δυνατότητα ενός προγράμματος να ανταπεξέρχεται σε αριθμητικούς υπολογισμούς με προβλήματα ακρίβειας και σε γεωμετρικές διαμορφώσεις που δεν είναι τετριμμένες. Ένα εύρωστο πρόγραμμα δεν “κρεμάει”, ούτε εκτελεί ατέρμονους βρόχους εξαιτίας αριθμητικών λαθών. Ένας εύρωστος αλγόριθμος επιστρέφει πάντα συνεπή αποτελέσματα για φυσιολογικά δεδομένα και χειρίζεται εκφυλισμένες και ειδικές περιπτώσεις με αναμενόμενο τρόπο. Ένας εύρωστος αλγόριθμος μπορεί να αποτύχει αλλά η αποτυχία του είναι ελεγχόμενη και τερματίζει με τρόπο προβλέψιμο, εύλογο και συνεπή με τα δεδομένα του.

2. Σύντομη περιγραφή του αλγόριθμου.

Στην PM υπεισέρχεται ένα μεγάλο πλήθος γεωμετρικών ορισμών και διεργασιών. Οι διεργασίες αυτές, κυρίως στην εκδοχή των White & Kinney [9], αλληλεπιδρούν μεταξύ τους με μη ακολουθιακό τρόπο · ως εκ τούτου, η προγραμματιστική της υλοποίηση είναι εκτενής και εξαιρετικά πολύπλοκη. Εν προκειμένω, παρουσιάζεται πολύ συνοπτικά η ροή εκτέλεσης ενός γενέτη PM. Τονίζεται ότι η λεπτομερής περιγραφή του αλγόριθμου γίνεται στη §10, αφού προηγουμένως παρουσιαστούν όλα τα θεωρητικά στοιχεία και οι διεργασίες που υπεισέρχονται στην PM.

1. Εισαγωγή και προκαταρκτική επεξεργασία δεδομένων.

Τα δεδομένα εισόδου του αλγόριθμου είναι το σύνορο του χωρίου, το οποίο δίνεται ως μια ακολουθία προσανατολισμένων ευθύγραμμων τμημάτων. Εισάγονται επίσης δεδομένα για τον καθορισμό του επιθυμητού μεγέθους των στοιχείων (πυκνότητα του πλέγματος).

2. Λήψη τρέχοντος μετώπου.

Λαμβάνεται ένα μέτωπο από τα υπάρχοντα¹⁵ για να δημιουργηθούν στοιχεία επ' αυτού.

3. Έλεγχος εκφυλισμού του μετώπου.

Η γένεση στοιχείων στο τρέχον μέτωπο μπορεί να γίνει μόνο αν αυτό περιέχει τουλάχιστον επτά ακμές που δεν έχουν σαρωθεί ακόμη. Αλλιώς, αν περιέχει έξι ή λιγότερες, το μέτωπο κλείνει με κατάλληλο τρόπο και διαγράφεται.

4. Προετοιμασία τρέχοντος μετώπου και αρχικοποίηση της σάρωσής του.

Στο τρέχον μέτωπο γίνεται μια πληθώρα προκαταρκτικών διεργασιών ώστε να ξεκινήσει η γένεση των στοιχείων. Οι διεργασίες αυτές αφορούν τον προσδιορισμό διαφόρων γεωμετρικών χαρακτηριστικών, επιλογή του καταλληλότερου κόμβου για την εκκίνηση της σάρωσης και τη γένεση του πρώτου στοιχείου. Αν κατά τη διάρκεια όλων αυτών προκύψει κάποιο πρόβλημα, λαμβάνεται μέριμνα στη ροή εκτέλεσης και ο αλγόριθμος είτε συνεχίζεται είτε τερματίζεται.

5. Σάρωση του μετώπου και γένεση στοιχείων επ' αυτού.

Το τρέχον μέτωπο της PM σαρώνεται με αφητηρία το πρώτο στοιχείο, το οποίο σχηματίστηκε προηγουμένως. Κατά τη σάρωση παράγονται στοιχεία και το μέτωπο βαίνει προς το εσωτερικό του χωρίου · αυτό συνεχίζεται μέχρι να σαρωθεί όλο το μέτωπο ή η σάρωση να διακοπεί για κάποιο λόγο · σε κάθε περίπτωση, η ροή εκτέλεσης τροποποιείται καταλλήλως. Κατά τη γένεση των στοιχείων ελέγχεται η ποιότητά τους και η γεωμετρική ορθότητα των μετώπων¹⁶. Επίσης, μετά από την ολοκλήρωση ή την παύση της σάρωσης του μετώπου, γίνονται διεργασίες βελτιώσεων στα στοιχεία όλων των μετώπων.

Όταν η σάρωση του τρέχοντος μετώπου εγκαταλειφθεί, είτε επιλέγεται άλλο μέτωπο για να σαρωθεί (βήμα (2) παραπάνω), είτε, αν δεν υπάρχουν άλλα μέτωπα, ο αλγόριθμος προχωρεί σε τερματισμό.

¹⁵ Στην PM μπορούν να υπάρχουν περισσότερα από ένα μέτωπα, βλ. §3.5.

¹⁶ Π.χ., δεν πρέπει να προκύπτουν τεμνόμενα μέτωπα.

6. Ομαλοποίηση και καθαρισμός του πλέγματος.

Όταν όλα τα μέτωπα σαρωθούν πλήρως, το πλέγμα ουσιωδώς έχει δημιουργηθεί και η πλεγματοποίηση με την PM έχει περατωθεί. Στο στάδιο αυτό, το πλέγμα υφίσταται ομαλοποίηση και (προαιρετικά) διάφορες διεργασίες τελικών βελτιώσεων, τυπικές στη γένεση πλεγμάτων. Το τελικό πλέγμα μπορεί πλέον να παραδοθεί για χρήση.

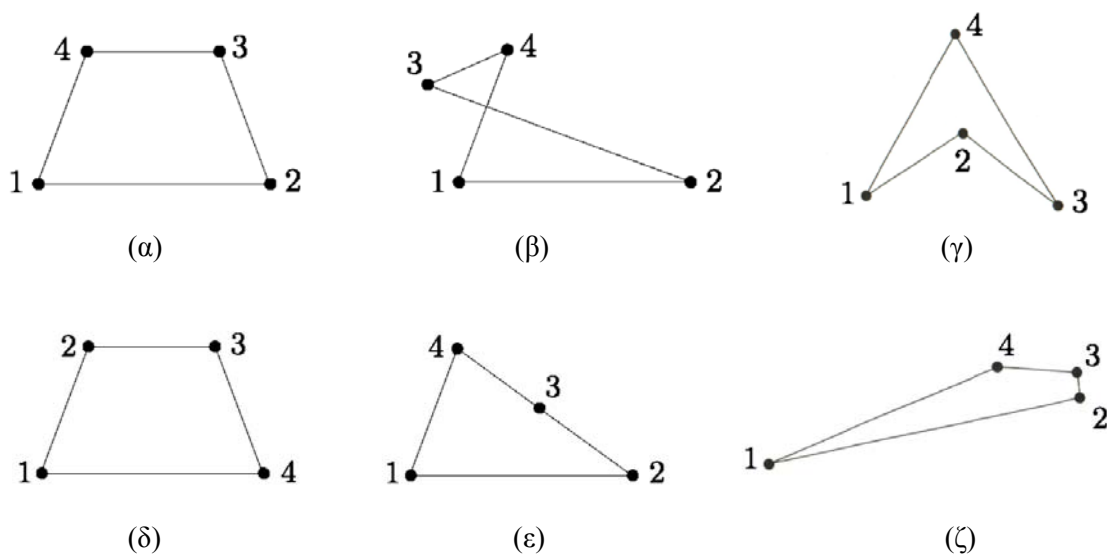
Η παραπάνω περιγραφή απλώς δίνει γενικά τη ροή εκτέλεσης ενός αλγόριθμου προέλαυσης μετώπου · είναι πολύ αδρή και δεν περιέχει σχεδόν καμιά έννοια της PM. Ωστόσο, αποτελεί ένα χρήσιμο πλαίσιο μέχρι να εξεταστούν όλοι οι ορισμοί και οι διεργασίες της PM · τότε, η παραπάνω ροή επαναδιατυπώνεται με τις απαραίτητες λεπτομέρειες και σαφήνεια (βλ. §10) ώστε να μπορεί πλέον να υλοποιηθεί σε πρόγραμμα.

3. Γεωμετρική θεμελίωση της Μεθόδου Επίστρωσης.

Η PM θεμελιώνεται σε ένα σύνολο γεωμετρικών ορισμών και διαμορφώσεων, πολλοί εκ των οποίων αναπτύχθηκαν ειδικά για τη μέθοδο αυτή · οι περισσότερες διεργασίες της PM αφορούν επεξεργασία αυτών των διαμορφώσεων. Τα θεμελιώδη αυτά στοιχεία εξετάζονται παρακάτω.

3.1 Έγκυρα τετράπλευρα.

Ένα τετράπλευρο στην PM θεωρείται “έγκυρο” (valid) όταν οι εσωτερικές του γωνίες έχουν τιμές από 10° έως 180° και η φορά σάρωσής του είναι θετική (αντιωρολογιακή) · επίσης, οι πλευρές του δεν πρέπει να τέμνονται (flipped). Περιπτώσεις έγκυρων και μη έγκυρων τετράπλευρων δείχνονται στο σχ. 1.



σχ. 1: Διάφορες διαμορφώσεις τετράπλευρων. Μόνον το (α) είναι έγκυρο.

3.2 Ποιότητα τετράπλευρων¹⁷.

Εφόσον ένα τετράπλευρο είναι έγκυρο, η ποιότητά του αποτιμάται με κάποιο κριτήριο που μετρά την απόκλιση του από την ιδανική περίπτωση, το τετράγωνο. Μια σχέση απλή, αλλά επιτυχής στην πράξη, είναι

$$q = 1 - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_{(\text{mod}(i+1,4))} \quad (1)$$

όπου \mathbf{e}_i είναι το μοναδιαίο διάνυσμα της i πλευράς του τετράπλευρου και $\text{mod}(a,b)$ η συνάρτηση που δίνει το υπόλοιπο της διαίρεσης των a, b . Η (1) δίνει ουσιωδώς τον μέσο όρο των τεσσάρων γωνιών. Το q λαμβάνει τιμές μεταξύ 0 και 1 και όσο μεγαλύτερο είναι, τόσο το τετράπλευρο είναι καλύτερο. Για τη μέγιστη τιμή, 1, το τετράπλευρο είναι ορθογώνιο που είναι το ιδανικό ζητούμενο για τις γωνίες. Το συνιστώμενο κατώφλι είναι $q = 0.5$.

Η (1) αφορά μόνον τις γωνίες του τετράπλευρου. Το μήκος των πλευρών είναι σκόπιμο να ελέγχεται χωριστά από τις γωνίες διότι σε πολλές εφαρμογές απαιτούνται ορθογώνια (επιμηκυμένα), όχι τετράγωνα. Ένας απλός τρόπος είναι να συγκρίνεται το μήκος κάθε πλευράς με τις γειτονικές της : αν ο λόγος των μηκών ξεπερνά μια τιμή, π.χ. το 2, το τετράπλευρο θεωρείται κακής ποιότητας. Σε ότι αφορά την PM, ένα τέτοιο κριτήριο είναι δευτερεύον · ακόμη κι όταν δεν ικανοποιείται, το τετράπλευρο είναι αποδεκτό ώστε να διευκολύνεται η σύγκλιση του αλγόριθμου.

3.3 Έλεγχος του μεγέθους των στοιχείων¹⁸.

Αν δεν χρησιμοποιηθεί ειδικός τρόπος, το μέγεθος των παραγόμενων στοιχείων καθορίζεται αποκλειστικά από την αρχική διακριτοποίηση του συνόρου. Έστω ότι από κάποιον κόμβο φέρεται ένα τμήμα για να σχηματιστεί η πλευρά ενός νέου στοιχείου · το μήκος της νέας πλευράς καθορίζεται από το τοπικό μέγεθος πλέγματος (local mesh size - lms)¹⁹ που πρέπει να έχει ο νέος κόμβος. Προφανώς, μεταβάλλοντας το lms των κόμβων ελέγχεται το μέγεθος των στοιχείων, όλοι δε οι τρόποι ελέγχου της πλεγματικής πυκνότητας αφορούν τρόπους να τίθεται και να μεταβάλλεται το lms.

Όταν η πυκνότητα του πλέγματος τίθεται ορίζοντας το lms στους συνοριακούς κόμβους²⁰ (nodal lms control), το lms υπολογίζεται οπουδήποτε εντός του χωρίου με την ακόλουθη συνάρτηση [8] :

¹⁷ Για άλλα χρήσιμα κριτήρια βλ. παράρτ. Γ.

¹⁸ Πριν την ανάγνωση της τρέχουσας παραγράφου συνιστάται η ανάγνωση του παραρτ. Α1.

¹⁹ Υπενθυμίζεται ότι η πυκνότητα του πλέγματος καθορίζεται από το τοπικό μέγεθος πλέγματος (local mesh size - lms) το οποίο εκφράζει το μέγιστο μήκος που επιτρέπεται να έχουν οι πλευρές των στοιχείων, δηλ. το μέγεθός τους. Για πυκνό πλέγμα το lms πρέπει να είναι μικρό και αντιστρόφως. Υπό αυτή την έννοια, οι όροι “πυκνότητα πλέγματος”, “μέγεθος στοιχείων”, και lms είναι ισοδύναμοι και εναλλάξιμοι. Βλ. παράρτ. Α1.
Το lms δεν πρέπει να συγχέεται με το lfs (local feature size) που είναι παρόμοια έννοια αλλά ορίζεται εντελώς διαφορετικά.

²⁰ Κατά την διακριτοποίηση (refinement) του συνόρου, το lms υπολογίζεται και αποθηκεύεται για όλους τους συνοριακούς κόμβους, συνεπώς είναι πάντα γνωστό σ' αυτούς είτε δίνεται από τον χρήστη ως εξωτερικό δεδομένο για κάποιους εξ αυτών είτε όχι.

$$\delta = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^2}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^2}} \quad (2)$$

όπου είναι

- \mathbf{r}_i : η θέση των κόμβων του συνόρου,
- δ_i : το lms στον συνοριακό κόμβο i ,
- \mathbf{r} : η θέση όπου ζητείται το lms,
- δ : το ζητούμενο lms στη θέση \mathbf{r} ,
- n : το συνολικό πλήθος των συνοριακών κόμβων²¹.

Η (2) ορίζει ένα βαθμωτό πεδίο που καλύπτει ολόκληρο το χωρίο και υπολογίζει το lms ως σταθμισμένη μέση τιμή των lms των συνοριακών κόμβων. Η σημαντική της ιδιότητα είναι ότι ομαλοποιεί κατά το δυνατόν τη μετάβαση μεταξύ τιμών lms που διαφέρουν πολύ, δηλ. τη μετάβαση από μικρά σε μεγάλα στοιχεία. Η χρήση αυτής της συνάρτησης είναι κοστοβόρα διότι πρέπει να υπολογίζεται για κάθε νέο κόμβο που θα εισαχθεί. Όταν το μέγεθος των στοιχείων τίθεται δίνοντας το lms με πλέγμα υποβάθρου ή/και με πηγές (background ή spot lms control), αντί της (2) εφαρμόζονται οι κατάλληλες σχέσεις (βλ. παράρτ. Α).

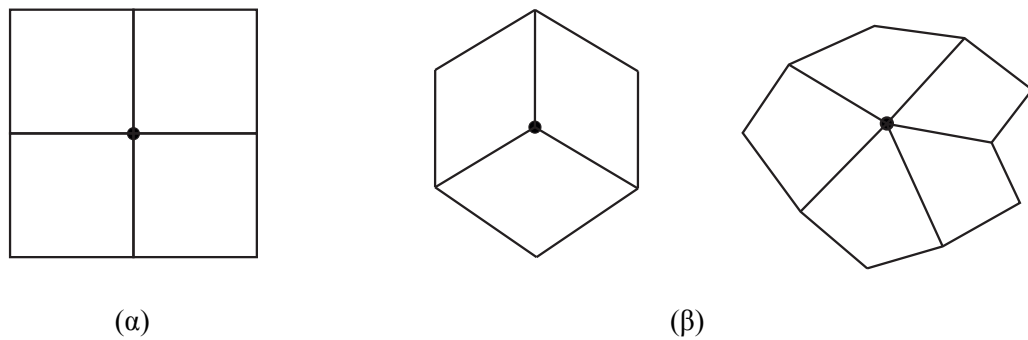
Με χρήση μόνον της (2), η αρχική διακριτοποίηση του συνόρου είναι όπως αναφέρθηκε το μόνο δεδομένο του αλγόριθμου που καθορίζει το τελικό αποτέλεσμα. Στην PM, όπως και στην AFM, η χρήση μιας σχέσης όπως η (2) είναι ο συνηθέστερος τρόπος για τη μεταβολή της πυκνότητας του πλέγματος · οι άλλες τεχνικές (πλέγμα υποβάθρου και πηγές) έχουν περιορισμένη χρήση. Ο λόγος είναι ότι οι πράξεις για πολύ μικρά τμήματα ή/και μεγάλη διαβάθμιση πύκνωσης είναι επιρρεπείς σε σφάλματα²² και εξαντλούν ευκολότερα την ευρωστία του αλγόριθμου · τότε η σύγκλιση δεν είναι εξασφαλισμένη. Επομένως, στην PM μπορούν να χρησιμοποιηθούν με ασφάλεια μόνον πηγές με μεγαλύτερο lms από τα lms του συνόρου ή του πλέγματος υποβάθρου. Με αυτόν τον τρόπο, παράγεται ένα πλέγμα που είναι πυκνό κοντά στο σύνορο και αραιό στο εσωτερικό του χωρίου.

3.4 Ομαλοί και ανώμαλοι κόμβοι.

Σε έναν κόμβο πρέπει ιδανικά να επισυνάπτονται 4 τετράπλευρα και ει δυνατόν ώστε η σύνθεση των τεσσάρων να είναι επίσης τετράπλευρο · τέτοιος σχηματισμός είναι έκφανση υψηλής ποιότητας του πλέγματος σε τοπικό επίπεδο. Κάθε κόμβος στον οποίο προσαρτώνται 4 τετράπλευρα λέγεται ομαλός ή κανονικός (regular). Όταν τα προσαρτημένα τετράπλευρα είναι περισσότερα ή λιγότερα από 4 ο κόμβος λέγεται ανώμαλος (irregular).

²¹ Όλων των κόμβων που έχει τελικά το σύνορο (μετά από την πύκνωσή του).

²² Π.χ., προσδιορισμός της τομής δύο πολύ μικρών τμημάτων ή δυο τμημάτων που το μήκος τους διαφέρει κατά τάξεις μεγέθους.

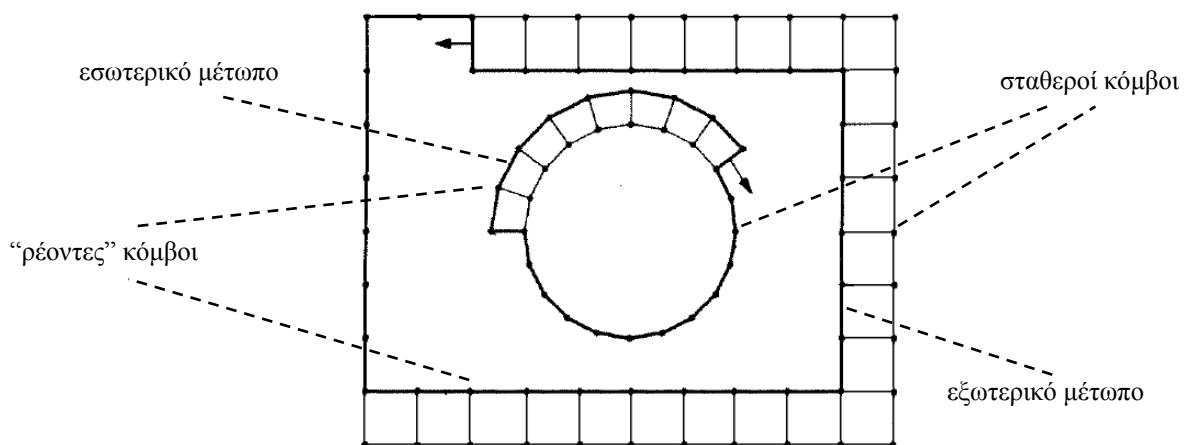


σγ. 2 : Προσαρτημένα τετράπλευρα σε κόμβο.
α) ομαλός, β) ανώμαλος.

3.5 Μέτωπα.

Τα μέτωπα αποτελούν το βασικότερο γεωμετρικό στοιχείο της PM και πολλές διεργασίες αφορούν επεξεργασία των γεωμετρικών τους δεδομένων. Εν προκειμένω θα παρουσιαστούν τα κύρια χαρακτηριστικά τους.

Στην PM, τα μέτωπα (fronts) είναι κυκλικές ακολουθίες (loops) προσανατολισμένων ευθύγραμμων τμημάτων, άρτιων στο πλήθος, που αρχικά προέρχονται από τη διακριτοποίηση του συνόρου· στη μορφή αυτή αποτελούν το κύριο δεδομένο εισόδου της PM.



σγ. 3 : Εξωτερικό και εσωτερικό μέτωπο σε χωρίο.

Αρχικώς τα μέτωπα αντιστοιχούν στα σύνορα. Για το εξωτερικό σύνορο υπάρχει ένα εξωτερικό μέτωπο με θετική φορά (ήτοι αντιωρολογιακή), για δε κάθε οπή ένα αντίστοιχο εσωτερικό μέτωπο με αρνητική φορά. Καθώς ένα μέτωπο σαρώνεται και γεννώνται τα τετράπλευρα, μπορεί να διασπαστεί σε δύο ή να συνδεθεί με κάποιο άλλο· έτσι, στην αρχή υπάρχει μόνον ένα εξωτερικό μέτωπο (ήτοι με θετική φορά) αλλά κατά την όλη διαδικασία μπορεί περιστασιακά να εμφανιστούν περισσότερα.

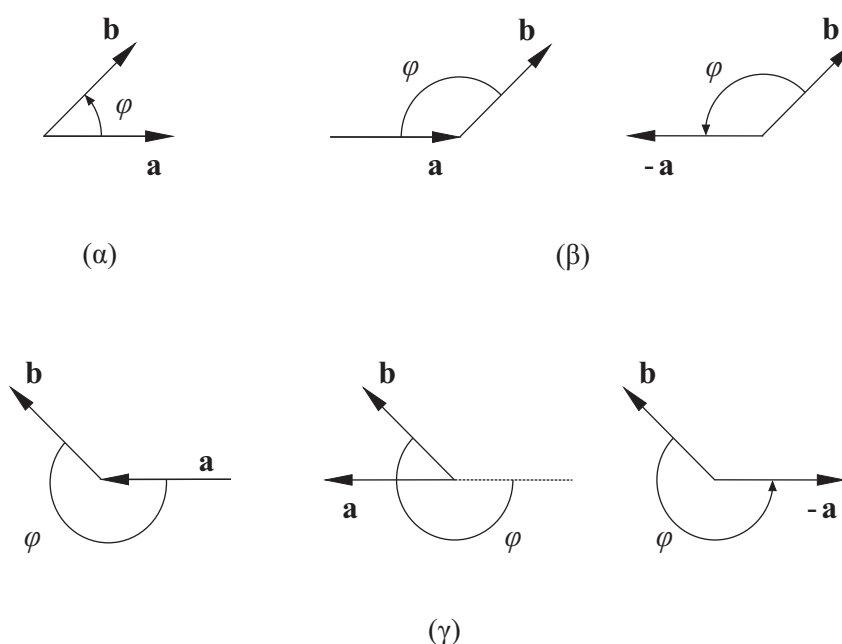
Γενικά το πλήθος των μετώπων και τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά τους δεν παραμένουν σταθερά. Επίσης, σε κάθε μέτωπο η σάρωση των τμημάτων του γίνεται με αυστηρά ακολουθιακό τρόπο. Όταν ένα μέτωπο σαρωθεί πλήρως, παύει να υφίσταται πλέον.

Όλα αυτά είναι σε αντίθεση με αντίστοιχους χειρισμούς στην AFM. Εκεί υπάρχει μόνον ένα μέτωπο, με προσανατολισμένα μεν τμήματα αλλά όχι αναγκαστικώς διαδοχικά. Τα τμήματα των οπών απλώς αποθηκεύονται μαζί με εκείνα του εξωτερικού συνόρου, η δε σειρά αποθήκευσής τους μπορεί να είναι άτακτη διότι στην AFM, η επιλογή του τμήματος για τη γένεση κάποιου στοιχείου είναι άσχετη με τη γεωμετρική θέση του²³.

Τονίζεται ότι στα σύνορα, οι κόμβοι δεν μπορούν να μετακινηθούν, να διαγραφούν ή να εισαχθούν νέοι διότι αυτό θα μεταβάλλει τη διακριτοποίηση του συνόρου· επομένως, διεργασίες των μετώπων όπως η ραφή, η ρύθμιση και η ομαλοποίηση δεν μπορούν να γίνουν (ή απαιτούν ειδική μέριμνα) αν ο κόμβος είναι συνοριακός.

3.6 Γωνία και είδη κόμβων.

Σε κάθε κόμβο του τρέχοντος μετώπου αντιστοιχίζεται η εσωτερική²⁴ γωνία που σχηματίζουν οι δυο διαδοχικές ακμές του μετώπου οι οποίες πρόσκεινται στον κόμβο. Οι κόμβοι κατατάσσονται σε κατηγορίες ανάλογα με την τιμή της γωνίας τους²⁵.



σχ. 4 : α) Προσανατολισμένη γωνία διανυσμάτων στο επίπεδο.

β) εφαρμογή για διαδοχικά διανύσματα σε εξωτερικό και

γ) σε εσωτερικό μέτωπο.

²³ Υπενθυμίζεται ότι στην AFM, για λόγους ευρωστίας του αλγόριθμου, επιλέγεται πάντα το μεγαλύτερο από τα διαθέσιμα τμήματα, ανεξάρτητα από τη θέση του στο τρέχον μέτωπο.

²⁴ Για τις οπές, ως εσωτερικό θεωρείται το χωρίο που πλεγματοποιείται, όχι το εσωτερικό της οπής.

²⁵ Οι λόγοι αυτής της κατάταξης θα φανούν αργότερα.

Ως γνωστόν, στο επίπεδο η προσανατολισμένη γωνία φ δυο διανυσμάτων \mathbf{a} , \mathbf{b} δίνεται από τις σχέσεις

$$\cos \varphi = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}, \quad \sin \varphi = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} \quad (3.α, β)$$

Η σωστή τιμή της φ (δηλ. το σωστό τεταρτημόριο) βρίσκεται με διερεύνηση του προσήμου των (3). Επειδή τα διανύσματα των μετώπων είναι διαδοχικά, πρέπει να προσεχτεί η σειρά και το πρόσημο των \mathbf{a} , \mathbf{b} στις (3). Όπως δείχνεται στο σχ. 1, αν δυο διαδοχικά διανύσματα του μετώπου, εσωτερικού ή εξωτερικού, είναι τα \mathbf{a} , \mathbf{b} , τότε η ζητούμενη γωνία φ βρίσκεται εφαρμόζοντας τις (3) για τα διανύσματα \mathbf{b} , $-\mathbf{a}$.

Η κατάταξη των κόμβων γίνεται συγκρίνοντας τις εσωτερικές γωνίες τους με προκαθορισμένα διαστήματα τιμών, τα διαστήματα αυτά δεν έχουν αυστηρά πέρατα αλλά ορίζονται με εύρη ανοχών σ_i . Συγκεκριμένα, ανάλογα με την τιμή της γωνίας φ υπάρχουν επτά είδη κόμβων, εκ των οποίων τα τέσσερα είναι κύρια, τα δε τρία δεν καθορίζονται σαφώς :

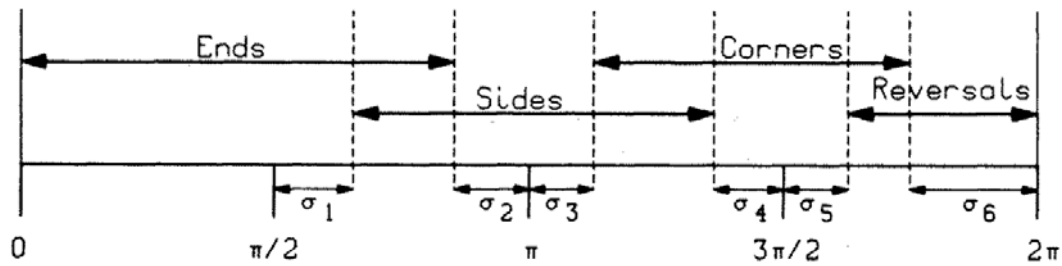
- κόμβος τερματισμού γραμμής ή απλά τερματισμού (row end node)
 $\varphi \leq \pi/2 + \sigma_1$
- αμφίβολος κόμβος τερματισμού ή πλευράς (ambiguous row end or side node)
 $\pi/2 + \sigma_1 < \varphi \leq \pi - \sigma_2$.
- κόμβος πλευράς (row side node)
 $\pi - \sigma_2 < \varphi \leq \pi + \sigma_3$.
- αμφίβολος κόμβος πλευράς ή γωνίας (ambiguous row side or corner node)
 $\pi + \sigma_3 < \varphi \leq 3\pi/2 - \sigma_4$.
- κόμβος γωνίας (row corner node)
 $3\pi/2 - \sigma_4 < \varphi \leq 3\pi/2 + \sigma_5$.
- αμφίβολος κόμβος γωνίας ή αναστροφής (ambiguous row corner or reversal node)
 $3\pi/2 + \sigma_5 < \varphi \leq 2\pi - \sigma_6$.
- κόμβος αναστροφής (row reversal node)
 $2\pi - \sigma_6 < \varphi$.

Ένας αμφίβολος κόμβος μπορεί να ανήκει σε οποιοδήποτε από τα δυο είδη. Με τις ανοχές παρέχονται περισσότερες επιλογές σε κάποιες γεωμετρικές διεργασίες (βλ. §4.3) αυξάνοντας έτσι την ευελιξία του αλγόριθμου. Ωστόσο, οι τιμές των ανοχών πρέπει να εξασφαλίζουν ότι ένας κόμβος μπορεί να ανήκει το πολύ σε δύο είδη. Οι παρακάτω τιμές αποδείχθηκαν επιτυχείς στην πράξη

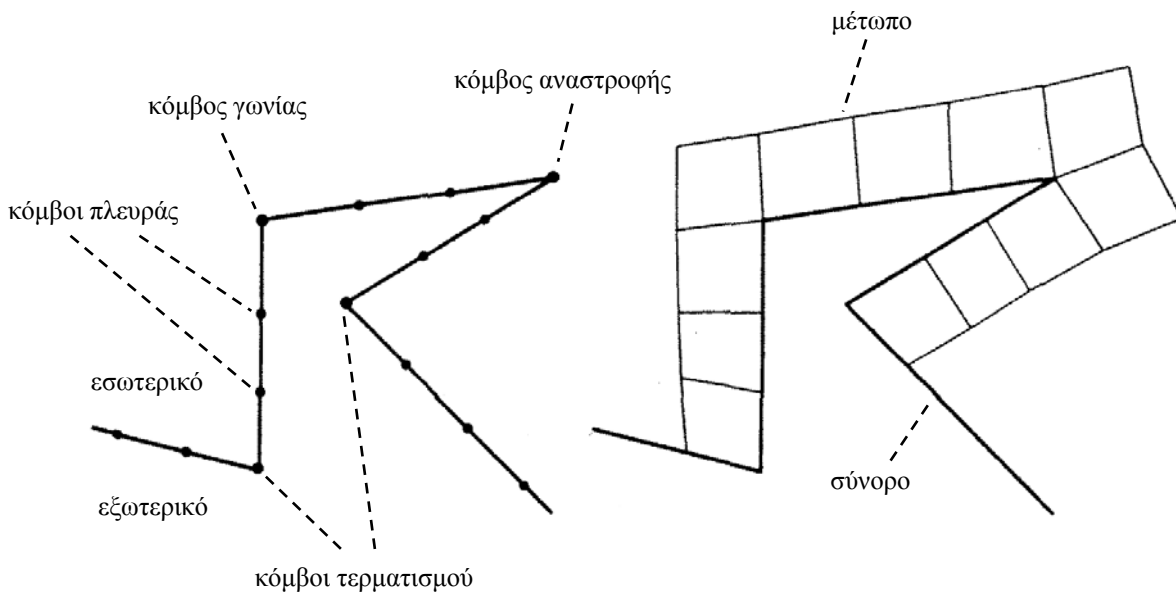
$$\sigma_1 = 40^\circ, \quad \sigma_2 = 30^\circ, \quad \sigma_3 = 45^\circ, \quad \sigma_4 = 45^\circ, \quad \sigma_5 = 10^\circ, \quad \sigma_6 = 72^\circ$$

Τα διαστήματα γωνιών για την ταξινόμηση των κόμβων δείχνονται²⁶ στο σχ. 5 και η γεωμετρική τους ερμηνεία στο σχ. 6.

²⁶ αναπαράγονται εκ της [7].



σγ. 5 : Διαστήματα γωνιών για την κατάταξη των κόμβων..



σγ. 6 : Γεωμετρική ερμηνεία διαφόρων ειδών κόμβων.

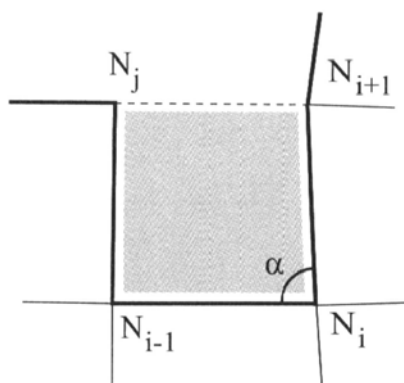
3.7 Γένεση τετράπλευρων στους κόμβους.

Σε κάθε κόμβο του μετώπου η γένεση των τετράπλευρων γίνεται “προβάλλοντας” εκ του κόμβου νέους κόμβους σε κατάλληλη απόσταση και γωνία · έτσι, σχηματίζονται οι πλευρές των νέων στοιχείων. Η θέση των νέων κόμβων εξαρτάται από το είδος του εξεταζόμενου κόμβου και την απόσταση των αμέσως προηγούμενων και επόμενων κόμβων. Σε ένα μέτωπο, οι νέοι κόμβοι και τα στοιχεία παράγονται πάντα διαδοχικά, κατά μήκος του μετώπου καθώς σαρώνεται. Ακολουθώντας, παρουσιάζονται οι γεωμετρικές λεπτομέρειες για την τοποθέτηση των νέων κόμβων και τη γένεση των τετράπλευρων.

3.7.1 Κόμβος τερματισμού.

Στα μέτωπα που ορίζονται σαφώς κόμβοι τερματισμού²⁷, σε αυτούς ξεκινά και σταματά η σάρωση του μετώπου. Το τμήμα του μετώπου μεταξύ δύο κόμβων τερματισμού λέγεται “γραμμή” (row) και γενικότερα είναι το τμήμα του όπου επικαθεται μια στρώση στοιχείων. Προφανώς, σε ένα μέτωπο που έχει πολλούς κόμβους τερματισμού, ορίζονται και πολλές γραμμές, οι οποίες πρέπει να σαρωθούν όλες για να επικαλυφθεί ολόκληρο από στοιχεία. Διευκρινίζεται ότι οι γραμμές ενός μετώπου αφορούν τις στρώσεις των στοιχείων επάνω στο περίγραμμα που αποτελεί το μέτωπο, όχι στρώσεις επικαθήμενες η μια πάνω στην άλλη. Η έννοια των γραμμών στο μέτωπο είναι σημαντική διότι η σάρωση και η προέλαυσή του οργανώνονται κατά γραμμές, βλ. §10.1.

Η γένεση του πρώτου στοιχείου και η εκκίνηση της σάρωσης εξετάζονται λεπτομερώς παρακάτω. Για την περάτωση της σάρωσης, σε ένα κόμβο τερματισμού N_i δεν εισάγεται νέος κόμβος διότι θα συμπίπτει ή θα είναι πολύ κοντά σε έναν υπάρχοντα κόμβο N_{i+1} , βλ. σχ. 7. Αρκεί μόνον η γένεση του τετράπλευρου από τους ήδη υπάρχοντες κόμβους N_i , N_{i+1} , N_j και N_{i-1} .



σχ. 7: Γένεση στοιχείου σε κόμβο τερματισμού.

3.7.2 Κόμβος πλευράς.

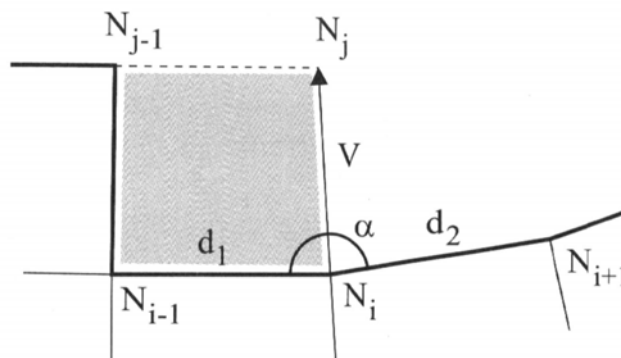
Η διαμόρφωση για την γένεση νέου στοιχείου σε κόμβο πλευράς δείχνεται στο σχ. 8. Από τον τρέχοντα κόμβο πλευράς N_i φέρεται ένα διάνυσμα \mathbf{V} με πέρασ έναν νέο κόμβο N_j . Το \mathbf{V} πρέπει να διχοτομεί την εσωτερική γωνία α του N_i και το μήκος του δίνεται από τη σχέση

$$|\mathbf{V}| = \frac{(d_1 + d_2)/2}{\sin(\alpha/2)} \quad (4)$$

όπου d_1 , d_2 είναι τα μήκη των ακμών που ορίζουν την γωνία α .

²⁷ Όπως θα δειχθεί παρακάτω, υπάρχουν μέτωπα που δεν έχουν καθόλου κόμβους τερματισμού ή έχουν μόνο έναν · σε αυτές τις περιπτώσεις η εκκίνηση ή συνέχιση της σάρωσης απαιτεί ειδική μέριμνα.

Ο όρος με το ημίτονο βοηθά να εξομαλύνονται τυχόν ανωμαλίες του μετώπου. Το νέο τετράπλευρο ορίζεται από τους κόμβους N_i , N_j , N_{j-1} , N_{i-1} . Ας παρατηρηθεί ότι αφού δημιουργηθεί το νέο στοιχείο, ο κόμβος πλευράς N_i μετατρέπεται πλέον σε κόμβο τερματισμού, έτοιμο για την γένεση του επόμενου στοιχείου. Αυτό συμβαίνει και με τα υπόλοιπα είδη κόμβων που εξετάζονται παρακάτω.



σχ. 8 : Γένεση στοιχείου σε κόμβο πλευράς.

3.7.3 Κόμβος γωνίας.

Η διαμόρφωση για την γένεση νέου στοιχείου σε κόμβο γωνίας δείχνεται στο σχ. 9. Στην περίπτωση αυτή, από τον κόμβο γωνίας N_i άγονται τρία διανύσματα V_j , V_k και V_l , με αντίστοιχα πέρατα τα N_j , N_k , N_l . Τα διανύσματα αυτά πρέπει να διαιρούν την γωνία α του N_i σε $1/3$, $1/2$ και $2/3$ μέρη αντιστοίχως²⁸, το δε μήκος τους δίνεται από τις σχέσεις

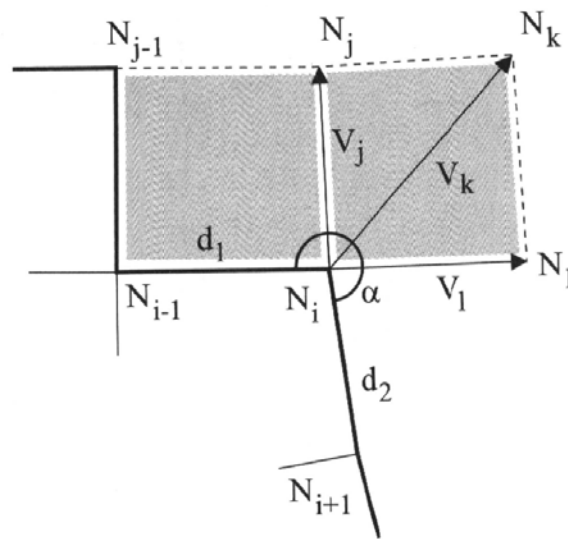
$$|V_j| = \frac{(d_1 + d_2)/2}{\sin(\alpha/3)}$$

$$|V_k| = \sqrt{2}|V_j| \quad (5. \alpha, \beta, \gamma)$$

$$|V_l| = |V_j|$$

Οι κόμβοι N_i , N_j , N_{j-1} , N_{i-1} και N_i , N_l , N_k , N_j σχηματίζουν δυο νέα τετράπλευρα. Ας παρατηρηθεί ότι στον κόμβο γωνίας N_i , με την προώθηση του μετώπου δημιουργείται ένας νέος κόμβος γωνίας, N_k .

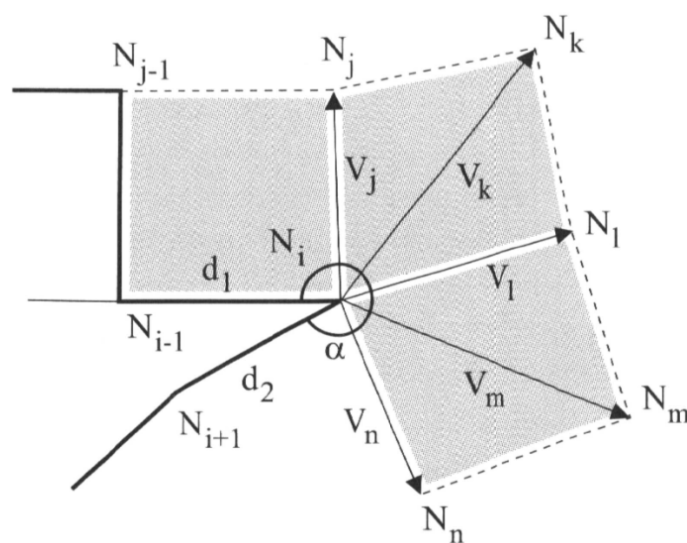
²⁸ Μετρώντας την γωνία αντιωρολογιακά με αφετηρία το αντίστοιχο διάνυσμα.



σχ. 9: Γένεση στοιχείου σε κόμβο γωνίας.

3.7.4 Κόμβος αναστροφής.

Η γένεση νέων στοιχείων σε κόμβο αναστροφής γίνεται όπως στις προηγούμενες περιπτώσεις, βλ. σχ. 10. Εν προκειμένω, από τον κόμβο αναστροφής N_i άγονται τα πέντε διανύσματα V_j, V_k, V_l, V_m, V_n , με αντίστοιχα πέρατα τα N_j, N_k, N_l, N_m, N_n .



σχ. 10: Γένεση στοιχείου σε κόμβο αναστροφής.

Τα διανύσματα αυτά πρέπει να διαιρούν την γωνία α του N_i σε $1/4$, $3/8$, $1/2$, $5/8$ και $3/4$ μέρη αντιστοίχως, το μήκος τους υπολογίζεται από τις σχέσεις

$$|\mathbf{V}_j| = \frac{(d_1 + d_2)/2}{\sin(\alpha/4)}$$

$$|\mathbf{V}_k| = |\mathbf{V}_m| = \sqrt{2} |\mathbf{V}_j| \quad (6.a, \beta, \gamma)$$

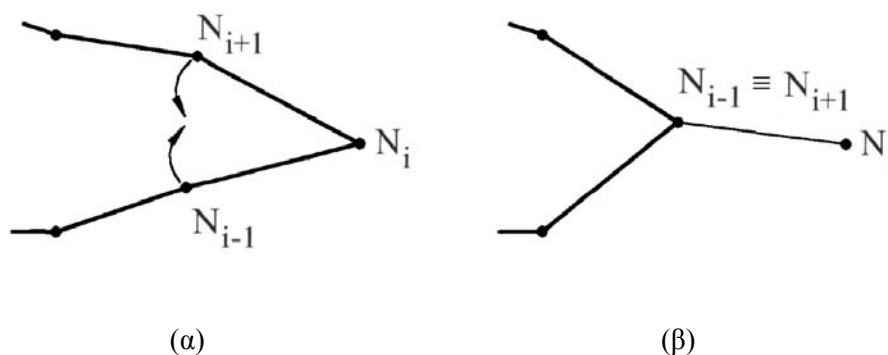
$$|\mathbf{V}_l| = |\mathbf{V}_j| = |\mathbf{V}_n|$$

Τρία νέα τετράπλευρα σχηματίζονται από τις τετράδες των κόμβων $N_i, N_j, N_{j-1}, N_{i-1}$, N_i, N_l, N_k, N_j και N_i, N_l, N_m, N_n .

Όπως φαίνεται στο σχ. 10, ένας κόμβος αναστροφής παράγει δυο νέους κόμβους γωνίας και δεν παράγεται από καμιά άλλη διεργασία. Γενικά, οι πολύ μεγάλες εσωτερικές γωνίες εξαλείφονται ήδη από την πρώτη στρώση στοιχείων, γι' αυτό ένας κόμβος αναστροφής συναντάται μόνον στο σύνορο - αν υπάρχει εξαρχής εκεί.

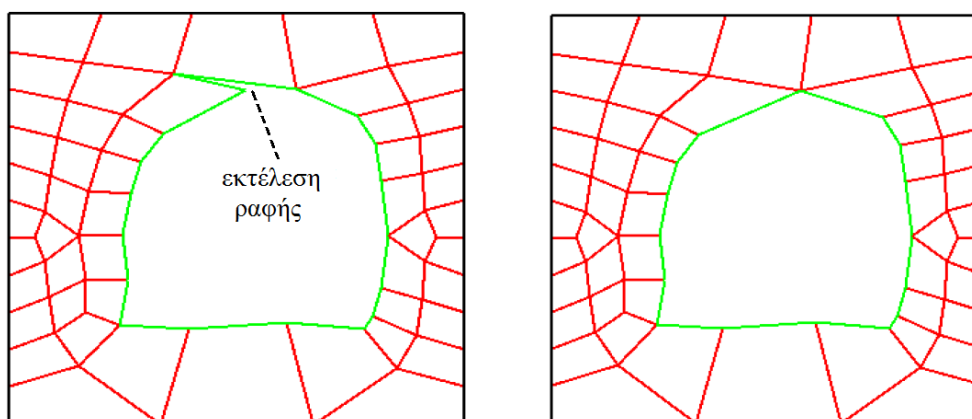
3.8 Ραφές.

Η ραφή είναι μια γεωμετρική διεργασία της PM με την οποία ταυτίζονται δυο ακμές του μετώπου για να εξαλειφθούν γωνίες με πολύ μικρές ή αρνητικές τιμές. Τέτοιες γωνίες, στο εσωτερικό του πλέγματος φαίνονται ως ρωγμές, στο δε σύνορο μπορεί να μοιάζουν με πολύ στενές μύτες ή εσοχές. Τα κριτήρια για την εκτέλεση ραφής είναι η τιμή της γωνίας του κόμβου, το πλήθος των στοιχείων που πρόσκεινται στον κόμβο, και το αν ο κόμβος είναι εσωτερικός ή συνοριακός.



σχ. 11: Ταύτιση ακμών και κόμβων για την πραγματοποίηση ραφής.
α) πριν τη ραφή, β) μετά από τη ραφή.

Η ραφή γίνεται στον τρέχοντα κόμβο μετά τη γένεση των στοιχείων επ' αυτού και εφόσον ισχύουν κάποια κριτήρια. Όταν η γωνία του κόμβου είναι αρνητική, τα τετράπλευρα επικαλύπτονται και η ραφή είναι απαραίτητη για τη διόρθωσή τους.



σγ. 12 : Ραφή σε μέτωπο.

Μετά από τη ραφή πρέπει να γίνεται ομαλοποίηση για να αποκαθίσταται η ποιότητα των γειτονικών στοιχείων που διαταράσσονται.

Ανάλογα με τη θέση του κόμβου και το μήκος των τμημάτων, υπάρχουν τρεις περιπτώσεις ραφής :

- ραφή σε εσωτερικό κόμβο,
- ραφή μετάβασης,
- ραφή σε συνοριακό κόμβο.

Οι περιπτώσεις αυτές εξετάζονται ακολούθως.

3.8.1 Ραφή σε εσωτερικό κόμβο.

Η ραφή σε εσωτερικό κόμβο είναι η πιο κοινή περίπτωση. Το κριτήριο είναι ότι πρέπει να ισχύει²⁹ [10]

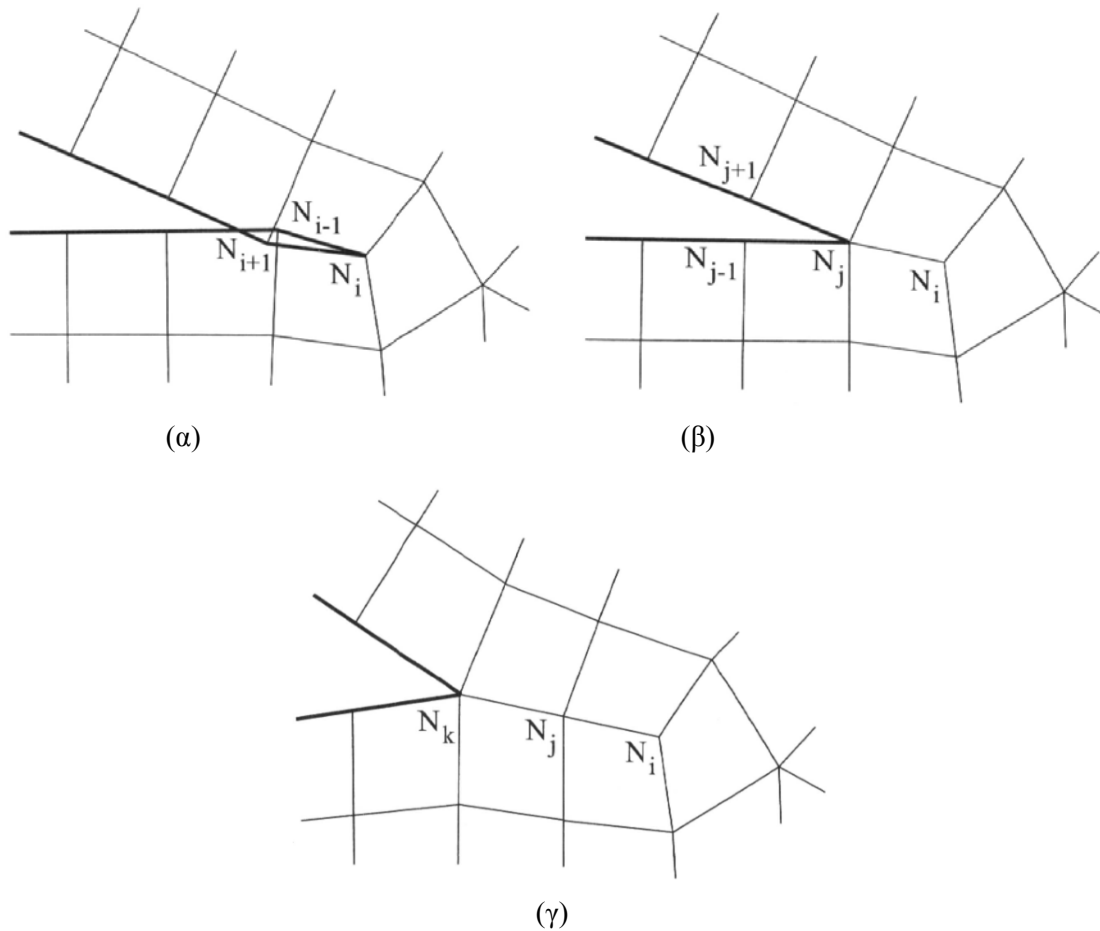
$$\left\{ \begin{array}{l} N_E \geq 2 : \alpha < 0 , \\ N_E \geq 4 : \alpha < \varepsilon_1 , \\ N_E < 4 : \alpha < \varepsilon_2 \end{array} \right\}, \quad (7.α, β, γ)$$

$$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 \quad (7.δ)$$

όπου α είναι η εσωτερική γωνία του κόμβου και N_E το πλήθος των προσκείμενων στοιχείων στον κόμβο. Τα $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι κατώφλια για την τιμή της γωνίας · συνιστάται να τίθεται $\varepsilon_1 = 35^\circ$ και $\varepsilon_2 = 10^\circ$.

²⁹ Αυτή η συνθήκη είναι ελαφρώς διαφορετική από την συνιστώμενη των Blacker & Stephenson [7] αλλά επιτυγχάνει το ίδιο ή καλύτερο αποτέλεσμα.

Το νόημα της (7) είναι ότι η εκτέλεση της ραφής ευνοείται³⁰ όταν στον κόμβο πρόσκεινται τουλάχιστον 4 στοιχεία· όταν είναι λιγότερα από 4, η ραφή γίνεται αν η γωνία είναι πολύ μικρή διότι μόνον τότε επιφέρει αισθητή βελτίωση. Επίσης, αν η γωνία είναι αρνητική, η ραφή γίνεται οπωσδήποτε για να διορθωθούν τα στοιχεία.



σχ. 13 : Ραφή σε εσωτερικό κόμβο.

α) αρνητική γωνία στον κόμβο N_i ,

β) ταύτιση των κόμβων N_{i-1} , N_{i+1} ,

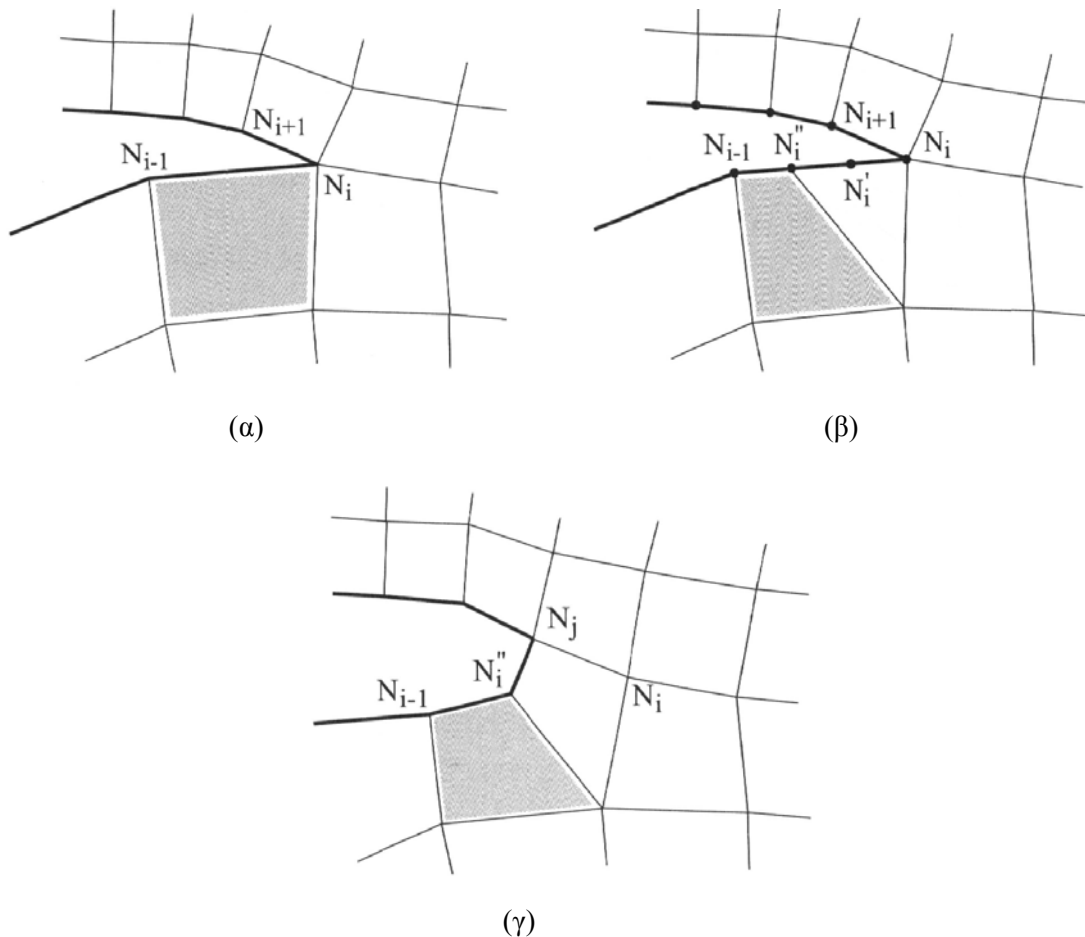
γ) ταύτιση των κόμβων N_{j-1} , N_{j+1} .

Ένα τυπικό παράδειγμα ραφής δείχνεται στο σχ. 13. Στον κόμβο N_i υπάρχουν 3 στοιχεία, η δε γωνία είναι αρνητική που σημαίνει ότι δυο στοιχεία επικαλύπτονται και η ραφή είναι αναπόφευκτη. Οι κόμβοι N_{i-1} και N_{i+1} ταυτίζονται σε έναν νέο κόμβο, έστω N_j , βλ. σχ. 13β. Η νέα γωνία δεν είναι πλέον αρνητική αλλά το κριτήριο ραφής εξακολουθεί να ισχύει, συνεπώς γίνεται ραφή και στον νέο κόμβο. Γενικά, αν σε έναν κόμβο γίνει ραφή, οι ραφές συνεχίζονται μέχρι να σχηματιστεί μια αρκούντως μεγάλη γωνία. Έτσι, με την όλη διαδικασία η γωνία του μετώπου μεγαλώνει και καλυτερεύει η ποιότητα των στοιχείων.

³⁰ Όσο μεγαλύτερο είναι το ε_1 από το ε_2 , τόσο πιθανότερη είναι η εκτέλεση ραφής σε κόμβο με 4 και πλέον στοιχεία.

3.8.2 Ραφή μετάβασης.

Η ραφή μετάβασης είναι ειδική περίπτωση ραφής σε εσωτερικό κόμβο. Συγκεκριμένα, σε μια ραφή τα τμήματα που θα ταυτιστούν είναι πιθανόν να έχουν πολύ διαφορετικά μήκη, κάτι που προξενεί στοιχεία πολύ κακής ποιότητας. Για να αποφευχθεί αυτό, τροποποιούνται κατάλληλα τα μήκη των τμημάτων και παράγεται ένα νέο τετράπλευρο³¹, ώστε στην τελική διαμόρφωση όλα τα στοιχεία να έχουν αποδεκτή ποιότητα.



σχ. 14 : Ραφή μετάβασης (transition seaming).

- α) αρχική διαμόρφωση,
- β) προσθήκη νέων κόμβων και στοιχείου σφήνας,
- γ) διαμόρφωση μετά την ραφή.

Η διαδικασία δείχνεται στο σχ. 14. Στον κόμβο N_i πρέπει να γίνει ραφή και να ταυτιστούν οι κόμβοι N_{i-1} και N_{i+1} . Ωστόσο, εξαιτίας του πολύ άνισου μήκους των δυο τμημάτων, θα παραχθεί ένα απαράδεκτο τετράπλευρο. Για να αποτραπεί αυτό, σχηματίζεται ένα νέο στοιχείο - σφήνα, βλ. σχ. 14β. Για το στοιχείο αυτό εισάγονται δυο νέοι κόμβοι στο μέτωπο, N'_i και N''_i . Αυτοί οι κόμβοι τίθενται σε απόσταση 1/3

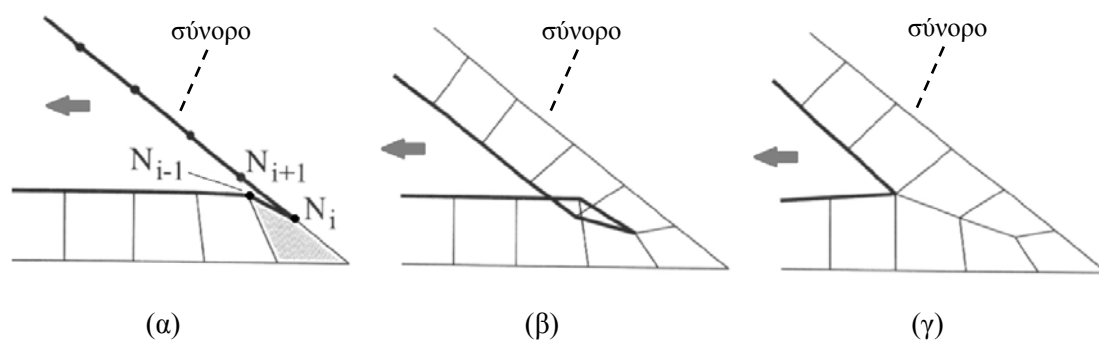
³¹ Το τετράπλευρο αυτό είναι όπως λέγεται ένα στοιχείο -“σφήνα” (wedge element).

και $2/3$ κατά μήκος του μακρύτερου τμήματος. Ακολούθως, ο κόμβος N_i του αρχικού (σκιασμένου) στοιχείου αντικαθίσταται με τον N_i'' και μπορούν πλέον να ταυτιστούν οι N_i' και N_{i+1} (δηλ. να γίνει η ραφή) χωρίς προβλήματα. Στο σχ. 14γ δείχνεται το τελικό αποτέλεσμα μετά από την ομαλοποίηση.

Η ραφή μετάβασης διαφέρει από τη γενική περίπτωση μόνον στο ότι πριν την εκτέλεσή της πρέπει να εισαχθεί στο πλέγμα το στοιχείο - σφήνα. Κριτήριο για την εισαγωγή αυτού του στοιχείου, είναι ο λόγος μηκών των τμημάτων να μην ξεπερνά ένα κατώφλι · η συνιστώμενη τιμή του είναι [7] 2.5.

3.8.3 Ραφή σε συνοριακό κόμβο.

Τέτοιες ραφές γίνονται όταν στο σύνορο υπάρχουν μικρές γωνίες (εν είδη ρωγμών) και απαιτούν ιδιαίτερη μέριμνα. Σε ένα σύνορο το πλήθος και η θέση των κόμβων είναι πάγια · οι κόμβοι δεν μπορούν να μετακινηθούν, να διαγραφούν ή να εισαχθούν νέοι. Ως εκ τούτου, τυχόν στοιχεία που έχουν συνοριακούς κόμβους και διαταράσσονται με τη ραφή, δεν μπορούν να βελτιωθούν με ομαλοποίηση. Στην περίπτωση αυτή, η λύση είναι να αναβληθεί προσωρινά η εκτέλεση της ραφής.



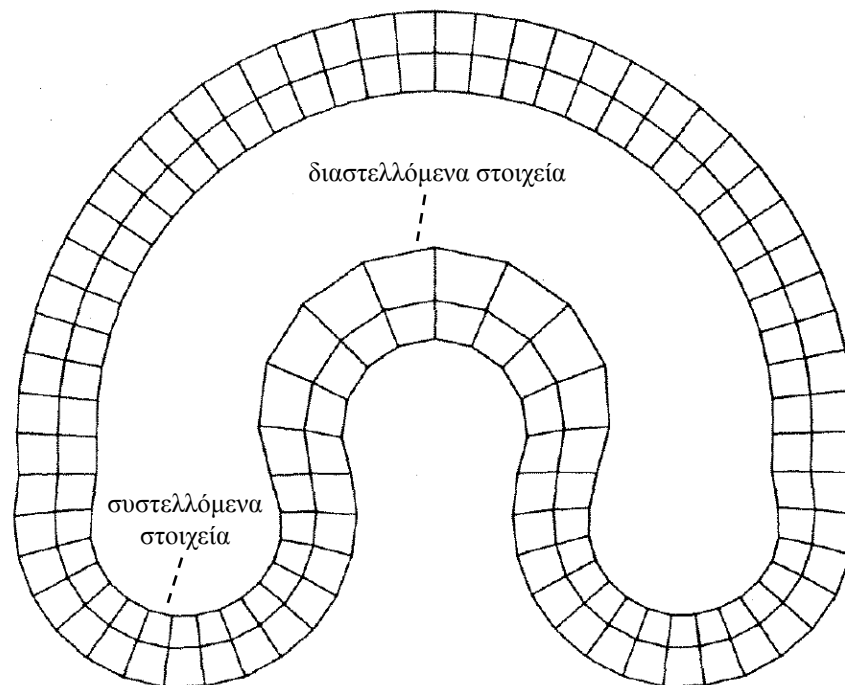
σχ. 15 : Ραφή στο σύνορο.

- α) αρχική διαμόρφωση, αναβολή ραφής,
- β) ανάπτυξη του συνοριακού μετώπου,
- γ) διαμόρφωση μετά την ραφή και ομαλοποίηση.

Μια τυπική περίπτωση δείχνεται στο σχ. 15. Κατά την επίστρωση του εξωτερικού μετώπου, στον κόμβο N_i σχηματίζεται μια μικρή γωνία, το δε τετράπλευρο είναι σχεδόν εκφυλισμένο σε τρίγωνο. Αν γίνει ραφή στον N_i (δηλ. ταύτιση των N_{i-1} και N_{i+1}) χωρίς καμιά μέριμνα, η γωνία θα εξαλειφθεί αλλά το στοιχείο θα χειροτερέψει ακόμη περισσότερο - και χωρίς δυνατότητα βελτίωσης αφού οι κόμβοι N_i και N_{i+1} είναι αμετακίνητοι. Η ραφή αναβάλλεται και η επίστρωση του μετώπου συνεχίζεται. Στη συγκεκριμένη θέση παράγονται επικαλυπτόμενα στοιχεία που είναι καταρχήν απαράδεκτα. Ωστόσο, όταν η επίστρωση της γραμμής ολοκληρωθεί ή διακοπεί για κάποιον λόγο, οι κόμβοι του σαρώνονται και γίνεται ραφή όπου χρειάζεται (βλ. §10.2.3) · έτσι διορθώνονται τα στοιχεία και προκύπτει η διαμόρφωση του σχ. 15γ. Η αναβολή ή όχι της ραφής γίνεται ελέγχοντας εκ των προτέρων την ποιότητα που θα έχουν τα στοιχεία προσκείμενα στον κόμβο N_i αν η ραφή εκτελεστεί αμέσως.

3.9 Ρύθμιση μετώπου : σφήνες και πτυχώσεις.

Καθώς τα μέτωπα επιστρώνονται με στοιχεία και βαίνουν στο εσωτερικό του χωρίου, η μορφή τους μεταβάλλεται - και συνεπώς και τα στοιχεία που γεννώνται επ' αυτών. Ειδικότερα, όταν προωθείται ένα κυρτό³² τμήμα του μετώπου, τα στοιχεία διαστέλλονται (τέντωμα)· ομοίως, σε ένα κοίλο τμήμα του συστέλλονται (πτύχωση). Αλλαγές τέτοιου είδους καταστρέφουν την ομοιομορφία στο μέγεθος και το σχήμα των τετράπλευρων, κυρίως δε όταν η καμπυλότητα του μετώπου είναι μεγάλη ή/και μεταβάλλεται σημαντικά. Το πρόβλημα αυτό εξαλείφεται εισάγοντας στο μέτωπο πρόσθετα στοιχεία, ούτως αποκαλούμενα “σφήνες” (wedges), ή συγχωνεύοντας ήδη υπάρχοντα (tucks). Αυτή η διεργασία λέγεται ρύθμιση του μετώπου (row adjustment) και περιγράφεται παρακάτω. Όπως και στη ραφή, μετά από ρύθμιση του μετώπου πρέπει να γίνεται τοπική ομαλοποίηση. Τονίζεται ότι η ρύθμιση του μετώπου μπορεί να γίνει μόνον σε κόμβους που δεν ανήκουν στο σύνορο³³.



σχ. 16 : Ανεπιθύμητη συστολή και διαστολή των στοιχείων.

3.9.1 Εισαγωγή σφηνών.

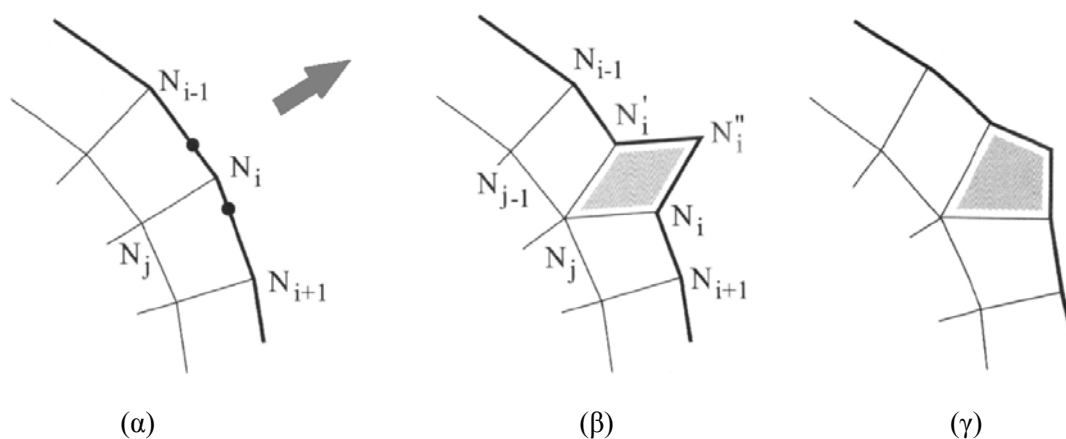
Όπως αναφέρθηκε πριν, η διαστολή των τετράπλευρων στα κυρτά τμήματα του μετώπου αντιμετωπίζεται με την εισαγωγή νέων τετράπλευρων που έχουν μορφή σφήνας· αυτό μπορεί να παρομοιαστεί με σπάσιμο του στρώματος των στοιχείων και κάλυψη του ανοίγματος με ένα πρόσθετο στοιχείο. Το στοιχείο αυτό διαχωρίζει δυο τετράπλευρα που προηγουμένως ήταν συνεχόμενα.

³² Εν προκειμένω, το μέτωπο θεωρείται κοίλο ή κυρτό καθώς παρατηρείται από το εσωτερικό του χωρίου.

³³ Οι λόγοι εξηγούνται στην §3.8.3.

Τα κριτήρια για την εισαγωγή μιας σφήνας στο μέτωπο είναι δύο. Κατά το πρώτο, το γωνιακό άνοιγμα του μετώπου πρέπει να είναι τουλάχιστον 90° και να έχει ένα τμήμα³⁴ με κόμβους πλευράς μόνον³⁵, όπου η εσωτερική γωνία τους ξεπερνά τις 183° . Στα τμήματα αυτά πρέπει ιδανικά να τίθεται μια σφήνα κάθε 90° . ωστόσο, αυτό δεν είναι δεσμευτικό και μπορούν να δοκιμαστούν διάφορα πλήθη σφηνών, ανάλογα με το γωνιακό άνοιγμα και το πλήθος των κόμβων πλευράς του τμήματος.

Το δεύτερο κριτήριο³⁶ είναι ο λόγος του επιθυμητού προς το πραγματικό μήκος να ξεπερνά κάποιο κατώφλι· συνιστάται η τιμή 1.25. Επιθυμητό μήκος είναι το l_{ms} του εξεταζόμενου κόμβου και βρίσκεται από τη σχ. (2).



σχ. 17: Εισαγωγή σφήνας σε διαστελλόμενο μέτωπο.
Το βέλος δείχνει την κατεύθυνση προέλασης του μετώπου.

Η διαδικασία για την εισαγωγή μιας σφήνας δείχνεται στο σχ. 17. Έστω ότι η εισαγωγή θα γίνει στον κόμβο N_i . Αρχικά, στο μέτωπο πρέπει να εισαχθούν δυο νέοι κόμβοι. Έστω ότι $\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j$ είναι οι θέσεις των κόμβων N_i και N_j .

Η θέση των νέων κόμβων N'_i και N''_i είναι αντίστοιχα

$$\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i + \frac{1}{3} \overrightarrow{N_i N_{i-1}}$$

και

$$\mathbf{r}''_i = \mathbf{r}_i + \mathbf{r}'_i - \mathbf{r}_j$$

Ακολούθως, ο N_i μετακινείται στη θέση

$$\mathbf{r}_i \rightarrow \mathbf{r}_i + \frac{1}{3} \overrightarrow{N_i N_{i+1}}.$$

³⁴ Εν προκειμένω, ως τμήμα εννοείται μια ακολουθία ακμών, όχι μια μεμονωμένη ακμή του.

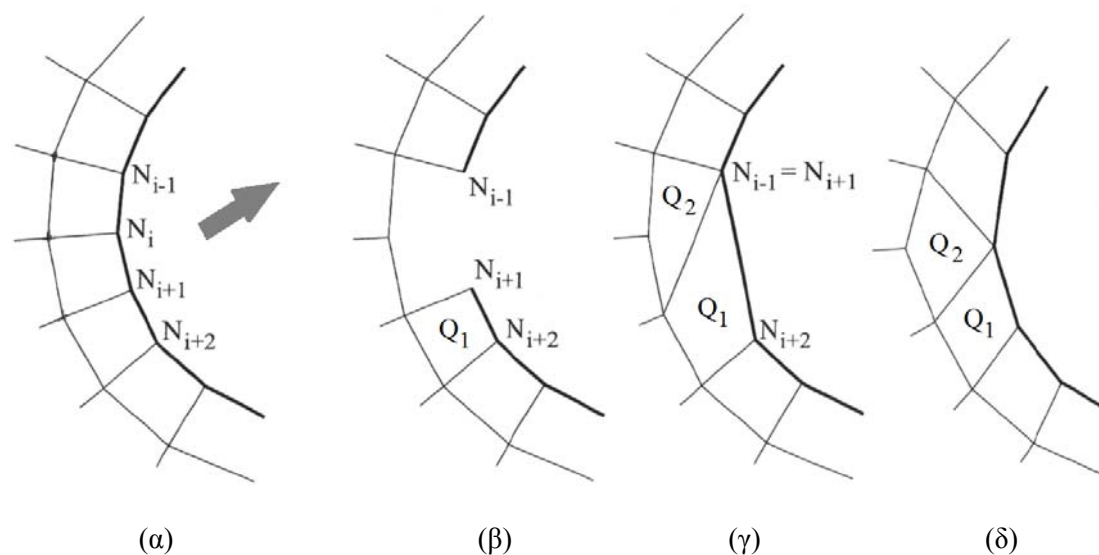
³⁵ Ο εντοπισμός των τμημάτων με μόνον κόμβους πλευράς, ο υπολογισμός του γωνιακού ανοίγματος του μετώπου και το πλήθος των σφηνών που πρέπει να εισαχθούν, αποτελούν προγραμματιστικά θέματα και δεν θα εξεταστούν εδώ.

³⁶ Από την πράξη φάνηκε ότι το πρώτο κριτήριο γενικά είναι επαρκές και το δεύτερο μπορεί να παραλειφθεί χωρίς επιπτώσεις.

Οι κόμβοι N_i, N_i'', N_i', N_j ορίζουν τη σφήνα που εισάγεται στο μέτωπο · επίσης, η συνδεσιμότητα των γειτονικών στοιχείων τροποποιείται καταλλήλως. Στο σχ. 17γ δείχνεται η τελική διαμόρφωση, μετά από την ομαλοποίηση.

3.9.2 Σχηματισμός πτυχώσεων.

Η συστολή των τετράπλευρων σε κοίλα τμήματα του μετώπου αντιμετωπίζεται συγχωνεύοντας δύο διαδοχικά στοιχεία σε ένα · αυτό μπορεί να παρομοιαστεί με τον σχηματισμό πτυχώσεων. Τα κριτήρια για τη δημιουργία μιας πτυχώσης είναι ίδια με εκείνα για σφήνες³⁷, με μόνη διαφορά ότι η εσωτερική γωνία των κόμβων πρέπει να είναι μικρότερη από 173° .



σχ. 18: Σχηματισμός πτυχώσης σε συστελλόμενο μέτωπο.
Το βέλος δείχνει την κατεύθυνση προέλασης του μετώπου.

Η διαδικασία για τον σχηματισμό μιας πτυχώσης δείχνεται στο σχ. 18. Έστω ότι η πτύχωση θα γίνει στον κόμβο N_i . Αρχικά, ο N_i και τα δύο προσκείμενα σ' αυτόν στοιχεία διαγράφονται, βλ. σχ. 18β. Ακολούθως, ο N_{i+1} μετακινείται στη θέση του N_{i-1} και δημιουργείται το νέο τετράπλευρο Q_2 στη θέση των δυο διαγραμμένων, βλ. σχ. 18γ · επίσης τροποποιείται το Q_1 . Η τελική διαμόρφωση μετά από την ομαλοποίηση δείχνεται στο σχ. 18δ.

Επισημαίνεται ότι, για να γίνει πτύχωση σε έναν κόμβο πρέπει επ' αυτού και επί του επόμενου να πρόσκεινται ακριβώς 2 στοιχεία. Επίσης, τα προκείμενα στον κόμβο στοιχεία δεν πρέπει να έχουν συνοριακούς κόμβους διότι δεν θα μπορεί να γίνει ομαλοποίηση και να βελτιωθούν, αν απαιτείται.

³⁷ Ο υπολογισμός του γωνιακού ανοίγματος, του πλήθους και της θέσης των πτυχώσεων είναι επίσης ίδιος.

4. Αρχικοποίηση μετώπων και εκκίνηση της σάρωσή τους.

Παρακάτω θα παρουσιαστεί λεπτομερώς η διαδικασία με την οποία αρχικοποιούνται τα μέτωπα και ξεκινά η σάρωση επ' αυτών, ήτοι όλες οι σχετικές διεργασίες (κατηγοριοποίηση των κόμβων, προσδιορισμός σχήματος του μετώπου και γένεση του αρχικού στοιχείου). Τα θέματα αυτά αποτελούν βασικές διεργασίες της PM και ο χειρισμός τους αποτελεί σημαντικό τμήμα του αλγορίθμου³⁸.

4.1 Κατηγοριοποίηση των κόμβων.

Το πλήθος των στοιχείων που παράγονται σε κάποιον κόμβο καθορίζεται από την γωνία που σχηματίζουν οι δυο διαδοχικές ακμές του μετώπου, οι οποίες πρόσκεινται στον κόμβο. Επιπλέον, όπως θα εξηγηθεί αργότερα, η μορφή του μετώπου καθορίζει τον τρόπο που κλείνει το μέτωπο. Και στις δυο περιπτώσεις³⁹ απαιτείται χειρισμός του μετώπου ανάλογα με τις γωνίες που σχηματίζουν οι ακμές του, άρα πρέπει να προσδιοριστεί η γωνία σε κάθε κόμβο. Ωστόσο, η άμεση χρήση των γωνιών δεν είναι βολική. Είναι πιο πρακτικό η γωνία στους κόμβους να χρησιμοποιείται ως κριτήριο για την κατάταξη των κόμβων σε κατηγορίες και ο χειρισμός του μετώπου να γίνεται ανάλογα με το είδος των κόμβων⁴⁰.

Ειδικότερα, για κάθε κόμβο υπολογίζεται η εσωτερική προσανατολισμένη γωνία των δύο ακμών που πρόσκεινται στον κόμβο· ανάλογα με αυτή τη γωνία οι κόμβοι κατατάσσονται στα είδη που εξετάστηκαν στην §3.6. Η κατηγοριοποίηση αυτή χρησιμοποιείται αρχικά για να προσδιοριστεί το πρωτεύον σχήμα (primitive shape) του μετώπου⁴¹. Επειδή για κάποια είδη κόμβων τα διαστήματα των αντίστοιχων γωνιών μερικώς επικαλύπτονται, κάθε κόμβος μπορεί αρχικά να ανήκει ταυτόχρονα έως και σε δυο είδη (αμφίβολος κόμβος).

Ωστόσο, πριν αρχίσει η γένεση των στοιχείων στο μέτωπο, οι κόμβοι του πρέπει να κατηγοριοποιηθούν μονοσήμαντα. Για την τελεσίδικη κατάταξη των κόμβων, καθένας τους συγκρίνεται με όλα τα ζεύγη (τρία) των επικαλυπτόμενων ειδών· ο εξεταζόμενος κόμβος κατατάσσεται στο είδος εκείνο που δίνει τους λιγότερους ανώμαλους κόμβους όταν γεννώνται τα στοιχεία.

Η μορφή σε ψευδοκώδικα είναι π.χ.

```
for each node  $N_i$  of current front
{
  selectOneNodeType( $N_i$ , nElem, NODE_END,    NODE_SIDE);
  selectOneNodeType( $N_i$ , nElem, NODE_SIDE,   NODE_CORNER);
  selectOneNodeType( $N_i$ , nElem, NODE_CORNER, NODE_REVERSAL);
}
```

όπου nElem είναι το πλήθος των στοιχείων που ήδη υπάρχουν στον κόμβο N_i , τα δε υπόλοιπα σύμβολα είναι προφανούς σημασίας.

Το μέγιστο πλήθος στοιχείων που μπορούν να πρόσκεινται σε κάθε είδος κόμβου είναι γνωστό· ειδικότερα είναι 1,2,3 και 4 στοιχεία για το NODE_END, NODE_SIDE, NODE_CORNER και NODE_REVERSAL αντίστοιχα, βλ. σχ. 7-10.

³⁸ Βλ. §10 όπου ο αλγόριθμος περιγράφεται λεπτομερώς.

³⁹ Ας παρατηρηθεί ότι η πρώτη περίπτωση αφορά το μέτωπο τοπικά ενώ η δεύτερη ολικά.

⁴⁰ Αυτός είναι ο λόγος κατάταξης των κόμβων σε είδη.

⁴¹ Εξετάζεται στην §4.2.

Υπενθυμίζεται ότι ένας κόμβος θεωρείται ομαλός όταν σε αυτόν πρόσκεινται ακριβώς 4 στοιχεία, βλ. §3.4. Η συνάρτηση `selectOneNodeType` υπολογίζει πόσα στοιχεία γεννώνται στον κόμβο N_i όταν ανήκει σε καθένα από τα δυο είδη (π.χ. για τα `NODE_END` και `NODE_SIDE` είναι ένα και δυο αντίστοιχα) και επιπλέον προσθέτει τυχόν στοιχεία που είναι ήδη προσαρτημένα στον N_i από προηγούμενες διεργασίες. Ο N_i κατατάσσεται σε εκείνο από τα δυο είδη για το οποίο το άθροισμα των στοιχείων είναι 4, ήτοι στο είδος για το οποίο είναι ομαλός. Αν το άθροισμα των παραγόμενων στοιχείων δεν είναι 4 για κανένα είδος, δηλ. ο N_i είναι ανώμαλος και στις δυο περιπτώσεις, τότε επιλέγεται να ανήκει σε ένα εξ αυτών στην τύχη. Στον συγκεκριμένο ψευδοκώδικα η `selectOneNodeType` θεωρείται ότι κάνει τα παραπάνω μόνον για το ζεύγος επικαλυπτόμενων ειδών που ανήκει ο N_i · για να εξασφαλιστεί ότι αυτό το ζεύγος θα βρεθεί και θα εξεταστεί, η `selectOneNodeType` καλείται και για τα τρία ζεύγη.

4.2 Προσδιορισμός σχήματος του μετώπου.

Το πλέγμα που παράγεται με την PM εξαρτάται από το είδος των κόμβων και τον κόμβο εκκίνησης · δεδομένου ότι πρώτο μέτωπο είναι το εξωτερικό σύνορο του χωρίου, είναι σημαντικό οι κόμβοι του να καταταγούν στα είδη που θα δώσουν το καλύτερο αποτέλεσμα για το πλέγμα⁴². Η κατάταξη των κόμβων του εξωτερικού μετώπου βοηθιείται πολύ θεωρώντας ότι το μέτωπο έχει ένα συγκεκριμένο σχήμα - διότι από αυτό μπορεί να προσδιοριστεί μονοσήμαντα το είδος των κόμβων του⁴³. Τονίζεται ότι σε οποιοδήποτε μέτωπο, πριν αρχίσει η γένεση των στοιχείων οι κόμβοι του πρέπει να έχουν καταταγεί σε ένα από τα 4 δυνατά είδη μονοσήμαντα · αλλιώς, στις αμφίβολες περιπτώσεις δεν μπορούν να παραχθούν στοιχεία.

Τρία βασικά σχήματα μπορούν να αναγνωριστούν : ορθογώνιο παραλληλόγραμμα, τρίγωνο και ημικύκλιο. Δεν απαιτείται ακριβής γεωμετρική ταύτιση του μετώπου με κάποιο εκ των παραπάνω · απλώς θεωρείται ότι το μέτωπο έχει το σχήμα στο οποίο “ταιριάζει” περισσότερο. Το σχήμα ορίζεται από κόμβους τερματισμού · συγκεκριμένα, 4 κόμβους για το παραλληλόγραμμα, 3 για το τρίγωνο και 2 για το ημικύκλιο. Π.χ., ένα τριγωνικό μέτωπο πρέπει να έχει ακριβώς τρεις κόμβους τερματισμού. Συνήθως ένα μέτωπο αρχικά έχει περισσότερους κόμβους τερματισμού από το αναγκαίο πλήθος · έτσι, για την επιλογή του σχήματος και των κατάλληλων κόμβων εξετάζονται όλοι οι δυνατοί συνδυασμοί των κόμβων του και γίνεται επιλογή με κάποια κριτήρια.

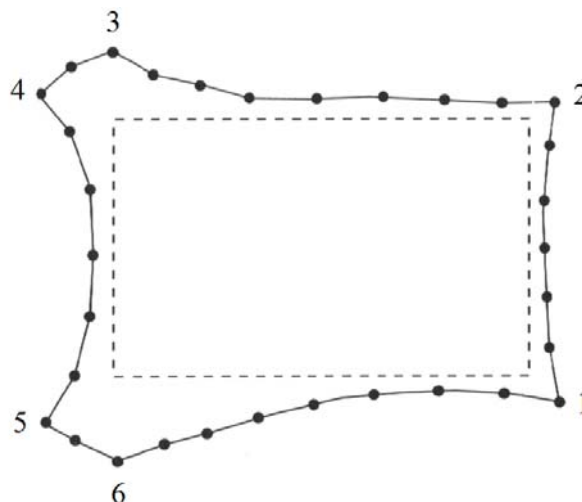
Καταρχήν, η αναζήτηση του σχήματος μπορεί να γίνει μόνον όταν το μέτωπο είναι εξωτερικό και δεν υπάρχουν κόμβοι αναστροφής και γωνιών. Οι διαθέσιμοι κόμβοι πρέπει να είναι μόνον τύπου πλευράς⁴⁴ ή τερματισμού ή αμφίβολοι κόμβοι πλευράς/τερματισμού · διαφορετικά, στο μέτωπο δεν αποδίδεται σχήμα. Ένας τέτοιος αμφίβολος κόμβος λέγεται υποψήφιος κόμβος τερματισμού. Το βέλτιστο σχήμα του μετώπου προσδιορίζεται ερευνώντας συνδυαστικά (combinatorial search) όλους τους απλούς και υποψήφιους κόμβους τερματισμού.

⁴² Ως καλύτερο αποτέλεσμα θεωρείται το πλέγμα με τους λιγότερους ανώμαλους κόμβους, ώστε μακροσκοπικά να τείνει όσο το δυνατόν στην ιδανική διαμόρφωση, το τετράγωνο.

⁴³ Επισημαίνεται ότι η εύρεση του σχήματος του εξωτερικού μετώπου δεν είναι αναγκαία · οι κόμβοι του μπορούν να κατηγοριοποιηθούν και χωρίς αυτό. Ωστόσο, το κατάλληλο σχήμα, όταν υπάρχει, υπαγορεύει την καλύτερη δυνατή κατηγοριοποίηση των κόμβων.

⁴⁴ Αν και στην παρούσα υλοποίηση δεν εφαρμόστηκε, ένας αμφίβολος κόμβος πλευράς/γωνίας πρέπει να ταξινομείται ως κόμβος πλευράς, ώστε να αυξάνονται οι πιθανότητες να αποδοθεί βασικό σχήμα.

Ένα παράδειγμα δείχνεται στο σχ. 19. Το εξωτερικό μέτωπο έχει δύο απλούς κόμβους τερματισμού (τους 1,2) και τέσσερις υποψήφιους κόμβους τερματισμού (τους 3,4,5,6). Έστω ότι θα ελεγχθεί αν το σχήμα του μετώπου είναι παραλληλόγραμμο, το οποίο έχει ακριβώς 4 κόμβους τερματισμού⁴⁵. εξετάζονται οι κόμβοι 1,2 με όλους τους συνδυασμούς που δίνουν οι 3,4,5 και 6, ήτοι οι τετράδες (1,2,3,4), (1,2,3,5) κλπ. Επισημαίνεται ότι όταν υπάρχουν απλοί κόμβοι τερματισμού, πάντα προτιμώνται σε σχέση με τους υποψήφιους.



σχ. 19 : Απλοί και υποψήφιοι κόμβοι τερματισμού σε πρωτεύον σχήμα μετώπου.

Για να είναι αποδεκτό ένα σχήμα για κάποιο μέτωπο, πρέπει να είναι “έγκυρο” (valid). Η εγκυρότητα ενός σχήματος ορίζεται με συγκεκριμένους κανόνες [15]. Καταρχήν, σε κάθε περίπτωση οι ακμές του μετώπου πρέπει να είναι άρτιες στο πλήθος. Με αυτή την προϋπόθεση, οι κανόνες εγκυρότητας για τα τρία σχήματα είναι οι ακόλουθοι :

ορθογώνιο παραλληλόγραμμο

- υπάρχουν τέσσερις κόμβοι τερματισμού (ορίζουν τέσσερις μάκρο-πλευρές⁴⁶),
- για το πλήθος των ακμών των πλευρών ισχύει

$$n_1 + n_2 + n_3 + n_4 \geq 4 \quad (8)$$

τρίγωνο

- υπάρχουν τρεις κόμβοι τερματισμού (ορίζουν τρεις μάκρο-πλευρές),
- κάθε πλευρά πρέπει να έχει τουλάχιστον δύο ακμές, ήτοι

$$n_1 \geq 2, \quad n_2 \geq 2, \quad n_3 \geq 2 \quad (9)$$

- για το πλήθος των ακμών σε κάθε πλευρά ισχύει

$$n_1 + n_2 \geq n_3 + 2, \quad n_2 + n_3 \geq n_1 + 2, \quad n_3 + n_1 \geq n_2 + 2 \quad (10)$$

⁴⁵ Στην παρούσα υλοποίηση της PM, για τα τρία σχήματα που αναζητούνται, οι απλοί κόμβοι πρέπει να είναι το πολύ 4. Αν είναι περισσότεροι, το μέτωπο δεν έχει αναγνωρίσιμο σχήμα.

⁴⁶ Ως μάκρο-πλευρά μπορεί να οριστεί η πλευρά που αποτελείται από μια ομάδα διαδοχικών ακμών του μετώπου και προφανώς είναι μια τεθλασμένη γραμμή.

ημικόκλιο

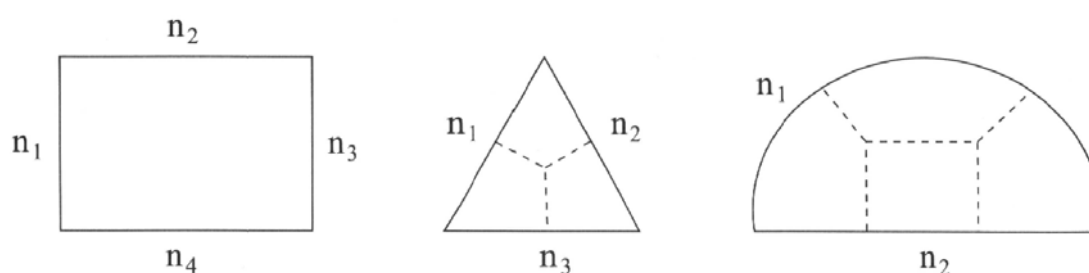
- υπάρχουν δυο κόμβοι τερματισμού (ορίζουν δυο μακρο-πλευρές),
- για το πλήθος των ακμών των δύο πλευρών ισχύει

$$n_1 \geq n_2 + 4 \quad (11)$$

Για ένα μέτωπο⁴⁷ είναι δυνατόν να είναι έγκυρα περισσότερα από ένα σχήματα· η τελική επιλογή γίνεται με κριτήρια ποιότητας για κάθε υποψήφιο σχήμα. Η ποιότητα ενός έγκυρου σχήματος αποτιμάται

- με το πλήθος των ανώμαλων κόμβων που παράγονται κατά την επίστροφή και
- με το άθροισμα των διαφορών των γωνιών από την ιδανική γωνία για κάθε είδος κόμβου.

Συγκεκριμένα, σαρώνονται οι κόμβοι που ενδέχεται να ορίσουν ένα υποψήφιο σχήμα και υπολογίζεται το πλήθος των στοιχείων που πρόσκεινται σε καθέναν τους. Οι κόμβοι αυτοί είναι είτε κόμβοι τερματισμού (απλοί ή υποψήφιοι), είτε κόμβοι πλευράς. Σε έναν κόμβο τερματισμού γεννάται ένα στοιχείο, σε έναν κόμβο πλευράς δύο· σε αυτά προστίθενται όσα στοιχεία είναι ήδη προσαρτημένα στον κόμβο. Αν το άθροισμα δεν είναι 4, ο κόμβος είναι ανώμαλος. Επιπλέον, υπολογίζεται η γωνία⁴⁸ στον κόμβο και βρίσκεται η διαφορά της από την ιδανική τιμή· σε έναν κόμβο τερματισμού η ιδεατή τιμή είναι 90° ενώ σε έναν κόμβο πλευράς 180° . Η διαδικασία αυτή γίνεται για όλα τα υποψήφια σχήματα και τελικά επιλέγεται εκείνο που δίνει τους λιγότερους ανώμαλους κόμβους και το μικρότερο άθροισμα διαφορών από τις ιδανικές γωνίες⁴⁹. Οι ιδανικές τιμές 90° και 180° με τις οποίες συγκρίνονται οι γωνίες, ευνοούν το παραλληλόγραμμο. Το σχήμα αυτό είναι ιδιαίτερα επιθυμητό διότι μπορεί να κλείσει χωρίς να παραχθούν ανώμαλοι κόμβοι, ενώ με το τρίγωνο ή το ημικόκλιο παράγονται ιδανικά ένας ή δύο ανώμαλοι κόμβοι αντίστοιχα, βλ. σχ. 20.



σχ. 20 : Προτερόντα σχήματα μετώπου και ανώμαλοι κόμβοι.

⁴⁷ Υπενθυμίζεται ότι πρέπει να είναι εξωτερικό.

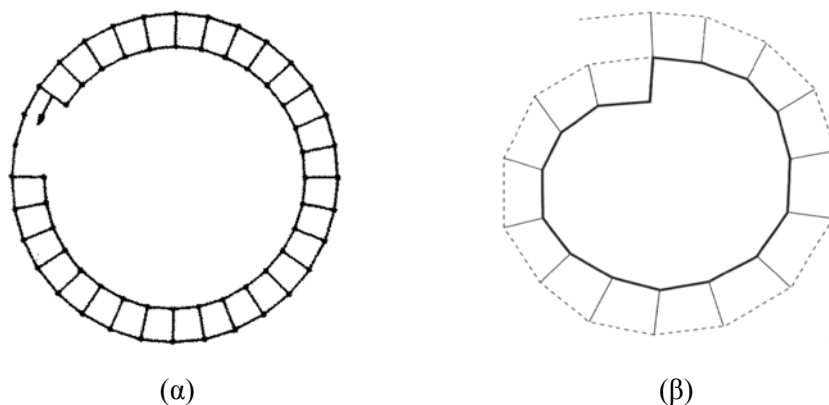
⁴⁸ Η εσωτερική γωνία, δηλ. η γωνία στο εσωτερικό του χωρίου που ορίζει το μέτωπο.

⁴⁹ Μια επιπλέον συνθήκη που τίθεται βοηθητικά είναι ότι, αν το πλήθος των ανώμαλων κόμβων είναι μηδέν και το άθροισμα των γωνιακών αποκλίσεων είναι μικρότερο από 45° , το σχήμα είναι επίσης αποδεκτό.

Μόλις αναγνωριστεί το σχήμα του μετώπου, οι κόμβοι του κατηγοριοποιούνται ξανά, αυτή τη φορά τελεσίδικα και μονοσήμαντα, σύμφωνα με το επιλεγθέν σχήμα. Μετά από αυτό, όλοι οι κόμβοι είναι πλέον είτε απλοί κόμβοι τερματισμού είτε κόμβοι πλευράς. Το επιλεγθέν σχήμα του μετώπου διατηρείται μέχρι να διακοπεί η επίστρωση του μετώπου⁵⁰· πάντως δεν παραμένει εσαεί σταθερό, ούτε κληροδοτείται σε νέα μέτωπα - αντίθετα, επικαιροποιείται καταλλήλως. Π.χ., ένα μέτωπο μπορεί αρχικά να θεωρηθεί ορθογώνιο, η επικάλυψή του να διακοπεί προσωρινά, και όταν αργότερα συνεχιστεί να επικαιροποιηθεί και να θεωρηθεί ημικύκλιο. Έτσι ο αλγόριθμος αυτοδιορθώνεται και προσαρμόζεται κάθε φορά στα τρέχοντα δεδομένα.

4.3 Επιλογή κόμβου εκκίνησης και γένεση του πρώτου στοιχείου.

Μετά από τη μονοσήμαντη κατάταξη των κόμβων του μετώπου, μπορεί πλέον να ξεκινήσει η γένεση των στοιχείων του. Η διαδικασία αυτή πρέπει να ξεκινά και να τελειώνει σε έναν κόμβο τερματισμού, όμως αυτό δεν είναι πάντα δυνατό. Υπάρχουν γεωμετρίες στις οποίες δεν είναι σαφές ποιός πρέπει να είναι ο πρώτος κόμβος, ή/και τότε θα σταματήσει η σάρωση, π.χ. ένα κυκλικό ή σπειροειδές μέτωπο, βλ. σχ. 21.



σχ. 21 : Γεωμετρίες όπου η επιλογή του κόμβου τερματισμού δεν είναι σαφής.

Για να αποφευχθεί να εξετάζονται συγκεκριμένες ειδικές περιπτώσεις γεωμετριών, ο πρώτος κόμβος επιλέγεται με μια σειρά κανόνων που καλύπτουν όλες τις περιπτώσεις.

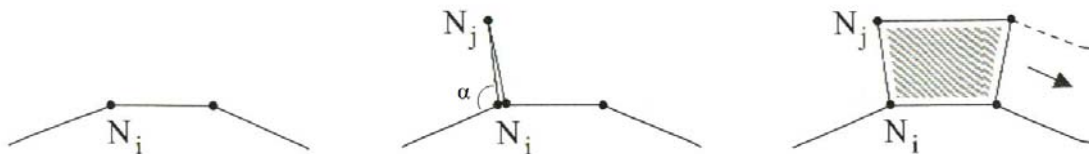
- Αν για το μέτωπο έχει αναγνωριστεί ένα πρωτεύον σχήμα, η επικάλυψή του μπορεί να ξεκινήσει από οποιονδήποτε κόμβο τερματισμού.
- Αν υπάρχει τουλάχιστον ένας κόμβος γωνίας ή αναστροφής, και τουλάχιστον ένας κόμβος τερματισμού, απλός ή υπονήφιος, ως πρώτος κόμβος επιλέγεται ο κόμβος τερματισμού.
- Αν υπάρχει τουλάχιστον ένας κόμβος γωνίας ή αναστροφής, και κανένας κόμβος τερματισμού, απλός ή υπονήφιος, ως πρώτος κόμβος επιλέγεται ο κόμβος γωνίας ή αναστροφής με τη μικρότερη εσωτερική γωνία.

⁵⁰ Οι λόγοι που μπορεί να γίνει διακοπή της επικάλυψης του μετώπου αναφέρονται στη §10.2.2 και εξετάζονται και παρακάτω.

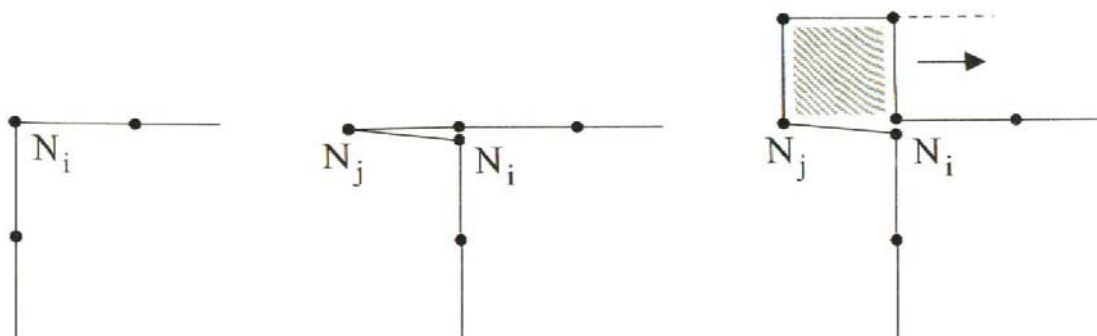
- Αν στο μέτωπο υπάρχουν μόνον κόμβοι πλευράς, επιλέγεται ως πρώτος εκείνος με την μικρότερη εσωτερική γωνία.

Οι παραπάνω κανόνες εξασφαλίζουν ότι πάντα θα βρίσκεται κάποιος κατάλληλος κόμβος για να ξεκινήσει η γένεση των στοιχείων, ακόμα κι όταν δεν υπάρχει κόμβος τερματισμού. Όμως, η τελευταία περίπτωση απαιτεί ιδιαίτερη μέριμνα · το θέμα αυτό εξετάζεται ακολούθως.

Έστω τα σχ. 7-10 στα οποία δείχνεται η γένεση των στοιχείων για κάθε είδος κόμβου. Ας παρατηρηθεί ότι το πρώτο στοιχείο δημιουργείται πάντα σε μια γωνία του μετώπου, δηλ. σε μια περιοχή όπου το μέτωπο είναι κοίλο και υπάρχουν ήδη τουλάχιστον δυο τμήματα που αποτελούν άμεσα δυο πλευρές του στοιχείου · το πρώτο στοιχείο σχηματίζεται ορίζοντας το ένα ή τα δυο ελλείποντα τμήματα. Όταν δεν υπάρχει κόμβος τερματισμού υπάρχει μόνον ένα τμήμα ή κανένα · συνεπώς, πρέπει να δημιουργηθεί μια κοιλότητα (γωνία) όπου θα σχηματιστεί το πρώτο στοιχείο. Ο κόμβος N_i όπου σχηματίζεται αυτή η γωνία, για να μην διαταραχθεί η συνδεσιμότητα των στοιχείων, διπλασιάζεται, ήτοι στην ίδια ακριβώς θέση τίθεται ένας δεύτερος κόμβος N'_i όπου όμως αφορά την ανάπτυξη του μετώπου από την άλλη πλευρά⁵¹. Αυτό δείχνεται στα σχ. 22 και 23.



σχ. 22 : Γένεση αρχικού στοιχείου σε κόμβο πλευράς.



σχ. 23 : Γένεση αρχικού στοιχείου σε κόμβο γωνιάς ή αναστροφής.

⁵¹ Ο διπλασιασμός του κόμβου για την δημιουργία της γωνιάς είναι απλώς μια προγραμματιστική τεχνική που υιοθετήθηκε στην παρούσα υλοποίηση και δεν αφορά την μέθοδο καθαυτή. Π.χ., η γωνιά θα μπορούσε να δημιουργηθεί με τον ίδιο, υπάρχοντα κόμβο N_i φροντίζοντας κατάλληλα την συνδεσιμότητα των στοιχείων.

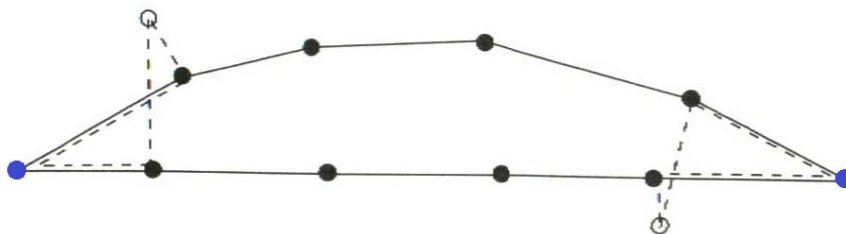
Από τον κόμβο N'_i φέρονται ένα ή δυο τμήματα που ορίζουν την γωνία όπου θα σχηματιστεί το στοιχείο· τα πέρατα των τμημάτων αυτών είναι νέοι κόμβοι που θα εισαχθούν στο πλέγμα, π.χ. στο σχ. 22 ο N_j . Το μήκος των τμημάτων καθορίζεται κατά τα γνωστά από το lms^{52} των νέων κόμβων, π.χ. στο σχ. 22, του N_j . Ο N'_i αποθηκεύεται με τρόπο ώστε η σειρά σάρωσης των κόμβων να είναι⁵³

$$\dots N_{i-1} \leftrightarrow N'_i \leftrightarrow N_j \leftrightarrow N_i \leftrightarrow N_{i+1} \dots$$

Οι τρεις κόμβοι N_{i-1} , N'_i , N_j σχηματίζουν μια κοιλότητα και ο N'_i ταξινομείται ως κόμβος τερματισμού· έτσι, μπορεί πλέον να δημιουργηθεί το πρώτο στοιχείο και να ξεκινήσει η επίστρωση του μετώπου.

Στις περισσότερες γεωμετρίες ο παραπάνω τρόπος παρέχει και έναν κόμβο τερματισμού στον οποίο διακόπτεται η διαδικασία όταν η επίστρωση του μετώπου ολοκληρωθεί· ωστόσο, για γεωμετρίες όπως το σπирάλ του σχ. 21 αυτό δεν αρκεί. Σε τέτοιες περιπτώσεις, η επίστρωση είτε συνεχίζεται επ' αόριστον (π.χ. όσο μπορεί να αναπτυχθεί το σπирάλ) είτε τίθεται ως συνθήκη διακοπής να σαρωθεί ένας από τους νέους κόμβους που έχουν δημιουργηθεί.

Ακόμη και με όλα τα παραπάνω, υπάρχουν γεωμετρίες όπου η επίστρωση δεν μπορεί ξεκινήσει διότι το παραγόμενο αρχικό τετράπλευρο είναι άκυρο ή δεν πληρεί τα κριτήρια ποιότητας· ένα τυπικό παράδειγμα δείχνεται στο σχ. 24.



σχ. 24: Αποτυχία εκκίνησης της επίστρωσης σε μέτωπο λόγω άκυρου αρχικού στοιχείου.

Στο σχ. 24 το μέτωπο είναι ημικύκλιο και έχει δυο κόμβους τερματισμού. Για τον σχηματισμό του στοιχείου, ο κόμβος N_{i+1} θα έπρεπε κανονικά να βρίσκεται μέσα στο μέτωπο αλλά το lms του τον τοποθετεί στο εξωτερικό του μετώπου και παράγεται ένα διπλωμένο (flipped) τετράπλευρο που είναι απαράδεκτο. Σε τέτοιες περιπτώσεις η ακολουθούμενη διαδικασία είναι η εξής. Η επίστρωση αδυνατεί να ξεκινήσει λόγω του άκυρου τετράπλευρου. Το προβληματικό μέτωπο σημειώνεται με κάποια σημαία (flag) και ο αλγόριθμος προχωρεί στο επόμενο. Είναι πιθανόν ότι αν επικαλυφθεί ένα σωστό μέτωπο και μετά ενωθεί με ένα προβληματικό, το πρόβλημα μπορεί να αρθεί κατά τη συνένωση χωρίς περαιτέρω μέριμνα. Αν κατά τη σάρωση των μετώπων βρεθεί κάποιο μέτωπο σημειωμένο ως προβληματικό, τα κριτήρια ποιότητας και εγκυρότητας των στοιχείων παρακάμπτονται και ακατάλληλα στοιχεία μπορούν να

⁵² Βλ. §3.3 και παράρτ. Α.

⁵³ Επισημαίνεται πάλι ότι αυτό αφορά την προγραμματιστική λύση του προβλήματος κι όχι την τεχνική καθεαυτό.

γίνουν αποδεκτά. Έτσι, ένα στοιχείο που κανονικά είναι απορριπτέο γίνεται δεκτό προσωρινά ως αρχικό και ξεκινά η επίστροφή του μετώπου. Επειδή στην PM, μετά από τη σάρωση κάθε μετώπου γίνεται ομαλοποίηση και βελτίωση (ραφές, σφήνες και πτυχώσεις), υπάρχει μεγάλη πιθανότητα να διορθωθεί το προβληματικό στοιχείο. Αν αυτό αποτύχει, ο αλγόριθμος σαρώνει έναν προς έναν τους κόμβους του μετώπου και επιχειρεί να άρει τυχόν τομές των τμημάτων και άλλα προβλήματα. Αν και αυτό δεν διορθώσει το πρόβλημα, ο αλγόριθμος αποτυγχάνει.

5. Παραλλαγές στη διαδικασία γένεσης των στοιχείων : η εκδοχή των Blacker - Stephenson και των White - Kinney.

Όπως ήδη αναφέρθηκε στην §1, η PM συναντάται σε δυο βασικές παραλλαγές : στην εκδοχή των Blacker & Stephenson (PM-BS) [7] που είναι η αρχική, και στην εκδοχή των White & Kinney (PM-WK)⁵⁴ [9] που αποτελεί σημαντική βελτίωση της πρώτης. Εν προκειμένω θα εξεταστούν οι διαφορές των δύο αυτών παραλλαγών και τα πλεονεκτήματά της δεύτερης⁵⁵.

Και στις δυο εκδοχές, τα στοιχεία παράγονται επιστρώνοντας γραμμές⁵⁶ (rows) και η γένεσή τους ακολουθεί τους κανόνες της §3.7. Ωστόσο, στην PM-BS η βασική στρατηγική είναι ότι κάθε γραμμή επιστρώνεται “τυφλά”, χωρίς κανέναν έλεγχο κατά τη γένεση των στοιχείων · τα στοιχεία παράγονται μαζικά (row by row paving), ο δε έλεγχος για τυχόν προβλήματα⁵⁷ και η αντιμετώπισή τους γίνεται μετά από την πλήρη στρώση κάθε γραμμής. Σημαντικό μειονέκτημα αυτής της στρατηγικής είναι ότι ο εντοπισμός τυχόν τομών ή/και της πλήρους επικάλυψης των στοιχείων μεταξύ τους μπορεί να αποτύχει εύκολα. Ως αποτέλεσμα, το μέτωπο επικαλύπτει λανθασμένα άλλα μέτωπα και τέλος ξεφεύγει στο εξωτερικό του χωρίου · στοιχεία συνεχίζουν να παράγονται ανεξέλεγκτα και ο αλγόριθμος “κρεμάει” (crash). Το πρόβλημα αυτό λέγεται “πρόβλημα διαφυγής” (breakout problem) ή κατάσταση διαφυγής και περιορίζει σημαντικά την ευρωστία του αλγόριθμου · εμφανίζεται κυρίως σε στενές περιοχές με μεγάλες αλλαγές στις γωνίες, σε περιοχές με μεγάλη αλλαγή της πλεγματοτικής πυκνότητας καθώς και σε επιφάνειες στον χώρο [8].

Μια απλή περίπτωση προβλήματος διαφυγής δείχνεται⁵⁸ στο σχ. 25. Ζητείται να πλεγματοποιηθεί ένα χωρίο με μια οπή. Η διακριτοποίηση στο εξωτερικό σύνορο είναι σημαντικά αραιότερη από της οπής. Η πρώτη στρώση στο εξωτερικό μέτωπο αποτελείται από δυο στοιχεία, εκ των οποίων το ένα καλύπτει πλήρως το μέτωπο της οπής. Οι έλεγχοι εγγύτητας και τομών αποτυγχάνουν να εντοπίσουν την επικάλυψη. Έτσι, μετά από την πρώτη στρώση (2 στοιχεία) του εξωτερικού μετώπου, η γένεση στοιχείων στο εσωτερικό μέτωπο ξεφεύγει στο άπειρο. Γενικά, επειδή στην PM-BS οι στρώσεις των στοιχείων γίνονται μαζικά και “τυφλά”, σε ακανόνιστες γεωμετρίες η πιθανότητα κατάστασης διαφυγής είναι μεγάλη.

⁵⁴ Εφεξής υιοθετούνται οι συντομογραφίες

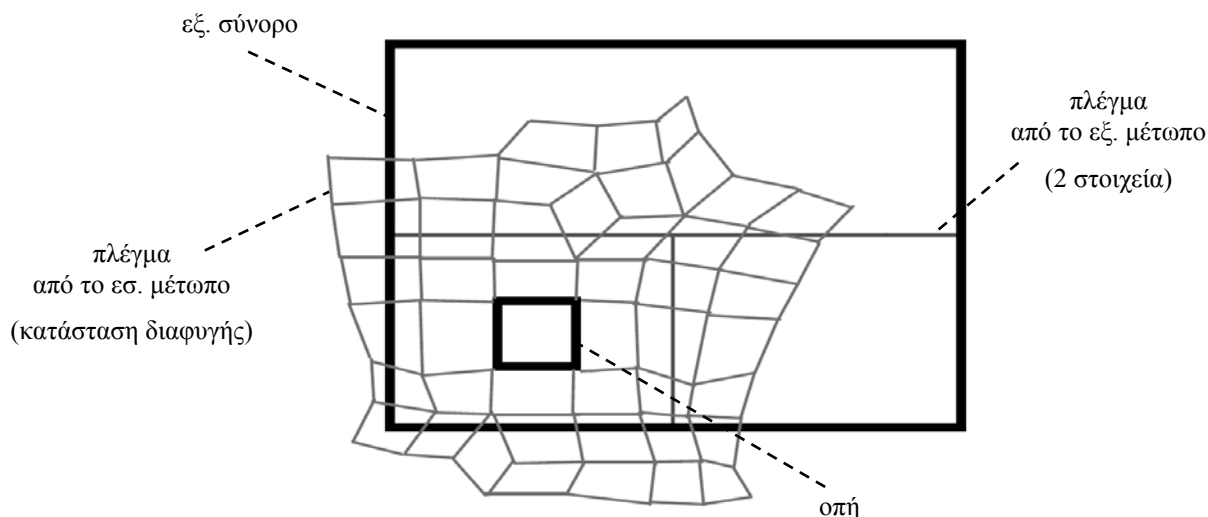
PM-BS : Paving Method of Blacker & Stephenson και
PM-WK : Paving Method of White & Kinney

⁵⁵ Η PM-WK είναι αυτή που γενικά υιοθετείται στην παρούσα εργασία και η ροή εκτέλεσής της περιγράφεται στις §10.1 και §10.2.2.

⁵⁶ Υπενθυμίζεται ότι ως “γραμμή” (row) θεωρείται το τμήμα του μετώπου μεταξύ δύο κόμβων τερματισμού και γενικότερα το τμήμα του όπου επικάθεται μια στρώση στοιχείων, βλ. §3.7.1. Επίσης, υπενθυμίζεται ότι υπάρχουν μέτωπα στα οποία υπάρχει μόνον ένας ή κανένας κόμβος τερματισμού, π.χ. ένας κύκλος ή σπирάλ, βλ σχ. 21.

⁵⁷ Άκουρα ή κακής ποιότητας τετράπλευρα, τομές με άλλα στοιχεία κλπ. Βλ. §10.2.2.

⁵⁸ Αναπαράγεται εκ της [9].



σχ. 25 : Περίπτωση προβλήματος διαφυγής.

Στην PM-WK ο αλγόριθμος είναι οργανωμένος διαφορετικά · το μέτωπο επιστρώνεται μεν κατά γραμμές αλλά ο έλεγχος και η αντιμετώπιση τυχόν προβλημάτων γίνονται άμεσα, μετά από τη γένεση κάθε στοιχείου (element by element paving). Επιπλέον, αν κάποιο πρόβλημα δεν μπορεί να διορθωθεί, η επιστροφή της τρέχουσας γραμμής διακόπτεται και επιλέγεται άλλο μέτωπο. Υιοθετώντας την στρατηγική της επιστροφής ανά στοιχείο, οι μηχανισμοί που απομακρύνουν το πρόβλημα διαφυγής και αυξάνουν σημαντικά την ευρωστία του αλγόριθμου είναι περισσότεροι και πιο αποτελεσματικοί. Π.χ.,

- Περισσότεροι έλεγχοι εγγύτητας και τομών⁵⁹.
Ανάλογα με το είδος του κόμβου, ελέγχονται δυο ή τρεις ακμές · συγκριτικά, στην PM-BS ο έλεγχος των ακμών σε μια γραμμή αφορά μία ή δύο.
- Αν τυχόν τομές ή επικάλυψη των μετώπων δεν μπορούν να διορθωθούν, υπάρχει δυνατότητα ανάκλησης (undo) του τελευταίου στοιχείου μόνον και συνέχιση της διαδικασίας σε άλλα μέτωπα.

Μια πολύ αφαιρετική παράσταση της ροής εκτέλεσης των PM-BS και PM-WK δείχνεται⁶⁰ στο σχ. 26. Οι βασικές προσθήκες της PM-WK είναι φανερές. Ουσιωδώς πρόκειται για δυο ρουτίνες εκ των οποίων η μια σχηματίζει τα στοιχεία και η άλλη εκτελεί μια σειρά ελέγχων για να αποφασιστεί αν το στοιχείο γίνει αποδεκτό ή όχι. Ειδικότερα, υιοθετώντας την ορολογία της [9], οι ρουτίνες αυτές είναι οι παρακάτω :

FaceFactory(...)

Στη ρουτίνα αυτή, στον τρέχοντα κόμβο του μετώπου, τίθενται οι νέοι κόμβοι και σχηματίζονται τα νέα τετράπλευρα⁶¹ (σύμφωνα με την §3.6). Σε κάθε κόμβο, ανάλογα με το είδος του υπάρχουν ένα έως τρία στάδια γένεσης τετράπλευρων · τα τετράπλευρα δημιουργούνται διαδοχικά, ένα σε κάθε στάδιο.

⁵⁹ Εξετάζεται στην §6.

⁶⁰ Αναπαράγεται εκ της [9].

⁶¹ Προφανώς αυτά γίνονται καλώντας εξ αυτής άλλες εξειδικευμένες ρουτίνες.

Σε κάθε κόμβο, το στάδιο γένεσης που έχει περατωθεί αποθηκεύεται· έτσι, αν η γένεση των στοιχείων διακοπεί πριν ολοκληρωθούν όλα τα στάδια, μελλοντικά συνεχίζεται στον κόμβο από το στάδιο στο οποίο σταμάτησε⁶².

FaceMonitor(...)

Η ρουτίνα αυτή καλείται από την FaceFactory και διενεργεί μια σειρά ελέγχων με τους οποίους αποφαινεται αν το τετράπλευρο που μόλις δημιουργήθηκε είναι αποδεκτό ή όχι· ταυτόχρονα επιτελεί διάφορες διεργασίες για να διορθωθούν (αν είναι δυνατόν) τυχόν προβλήματα.

Η FaceMonitor καταρχήν ελέγχει την εγκυρότητα και την ποιότητα του τετράπλευρου. Αν τα κριτήρια ποιότητας έχει ζητηθεί να παρακαμφθούν (βλ. §4.3), ο έλεγχος αυτός δεν λαμβάνεται υπόψη. Ακολουθώντας, επιχειρούνται ραφές στα πέρατα της νέας ακμής⁶³· αν επιτύχουν, η ροή επιστρέφει στη FaceFactory δηλώνοντας ότι το στοιχείο είναι αποδεκτό, ότι το τυχόν πρόβλημα (αν υπήρχε) διορθώθηκε και ότι πρέπει να γίνουν διεργασίες ρύθμισης και επικαιροποίησης⁶⁴ των μετώπων (ομαλοποίηση, ραφή κλπ). Αν οι ραφές δεν είναι επιτυχείς ή δεν χρειάζονται, όλες οι νέες ακμές ελέγχονται για προβλήματα εγγύτητας ή τομών με άλλα μέτωπα. Αν δεν βρεθεί κάτι, η ροή επιστρέφει στην FaceFactory δηλώνοντας απλώς ότι το στοιχείο είναι αποδεκτό. Διαφορετικά, υπάρχουν ακμές που τέμνονται ή είναι πολύ κοντά. Τότε επιχειρείται να βρεθεί ο καλύτερος συνδυασμός μεταξύ των δύο ακμών· αυτό γίνεται ενώνοντας τις προβληματικές ακμές μεταξύ τους ή με γειτονικές τους, πράγμα που ουσιαστικά οδηγεί στην διάσπαση ενός μετώπου σε δύο ή στην ένωση δυο μετώπων σε ένα⁶⁵. Η διεργασία αυτή τροποποιεί τα τετράπλευρα που πρόσκεινται σε αυτές τις ακμές. Από τους εφικτούς συνδυασμούς ένωσης των ακμών, επιλέγεται εκείνος που παράγει τα τετράπλευρα με την μεγαλύτερη ποιότητα, και μεγαλύτερη από κάποιο κατώφλι. Αν η ένωση των ακμών πραγματοποιηθεί, η ροή εκτέλεσης επιστρέφει στην FaceFactory δηλώνοντας ότι το στοιχείο είναι μεν αποδεκτό αλλά πρέπει να γίνουν διεργασίες ρύθμισης και επικαιροποίησης των μετώπων, όπως απαιτείται και για την ραφή. Τέλος, αν η ένωση των ακμών δεν μπορεί να γίνει, η ροή επιστρέφει στην FaceFactory δηλώνοντας ότι η γένεση του στοιχείου πρέπει να ανακληθεί (undo).

Η FaceFactory οδηγεί την ροή ανάλογα με το αποτέλεσμα της FaceMonitor. Αν η επιστροφή της FaceMonitor δηλώνει απλώς αποδοχή του στοιχείου, τότε συνεχίζεται η γένεση του επόμενου στοιχείου, στον ίδιο κόμβο (επόμενο στάδιο) ή σε διαφορετικό κόμβο.

Αν η επιστροφή της FaceMonitor δηλώνει αποδοχή του στοιχείου και ρύθμιση των μετώπων, η γένεση στο τρέχον μέτωπο διακόπτεται και η ροή επιστρέφει στο κύριο πρόγραμμα. Γίνονται οι απαραίτητες ρυθμίσεις και επικαιροποίηση των μετώπων⁶⁶ και επιλέγεται ένα άλλο μέτωπο για τη συνέχιση της διαδικασίας.

⁶² Π.χ., σε έναν κόμβο γωνίας που γεννώνται δύο στοιχεία, αφού σχηματιστεί το πρώτο στοιχείο (πρώτο στάδιο) η γένεση μπορεί για κάποιον λόγο να διακοπεί. Αργότερα, όταν ο κόμβος αυτός ληφθεί ξανά, συνεχίζεται με το δεύτερο στοιχείο (δεύτερο στάδιο).

⁶³ Το ένα πέρασ είναι ο αρχικός κόμβος και το άλλο ο νέος κόμβος που δημιουργήθηκε.

⁶⁴ Εύρεση ξανά του πρωτεύοντος σχήματος, του είδους των κόμβων του και του κόμβου αφετηρίας της σάρωσης. Με την ραφή και την ένωση/διάσπαση μετώπων αυτά τα δεδομένα μεταβάλλονται.

⁶⁵ Τονίζεται ιδιαίτερος ότι η διάσπαση ή ένωση μετώπων επιτρέπεται μόνο αν τα νέα μέτωπα έχουν άρτιο πλήθος κόμβων. Όπως επισημαίνεται στην §10.2.1, μόνο τότε μπορεί να παραχθεί πλέγμα αποκλειστικώς από τετράπλευρα.

⁶⁶ Η επικαιροποίηση μπορεί να γίνει όταν επιλέγονται τα μέτωπα, δηλ. πριν αρχίσει ή συνεχιστεί η σάρωσή τους.

Τέλος, αν η επιστροφή της FaceMonitor δηλώνει ανάκληση του στοιχείου, το στοιχείο διαγράφεται, η γένεση στο τρέχον μέτωπο διακόπτεται και η ροή επιστρέφει στο κύριο πρόγραμμα. Και πάλι γίνονται ρυθμίσεις και επικαιροποίηση στο προβληματικό μέτωπο και επιλέγεται ένα άλλο μέτωπο για τη συνέχιση της διαδικασίας.

Η παραπάνω ροή⁶⁷ δεν είναι αυστηρά δεσμευτική αλλά υποδεικνύει έναν τρόπο οργάνωσης και την πληθώρα των διαθέσιμων επιλογών και μηχανισμών ελέγχου στην PM-WK, σαφώς περισσότεροι απ' ότι στην PM-BS. Η πιο αξιοσημείωτη δυνατότητα είναι η ανάκληση του στοιχείου όταν το πρόβλημα δεν μπορεί να διορθωθεί. Στην PM-BS όπου τα στοιχεία γεννώνται μαζικά, κατά στρώσεις, το αντίστοιχο⁶⁸ έχει μικρή πρακτική χρησιμότητα και δεν εφαρμόζεται. Στη στρατηγική γένεσης κατά γραμμές, επειδή ανακαλούνται και επανατοποθετούνται στρώσεις στοιχείων, το πλήθος των δυνατών θέσεων εισαγωγής είναι γενικά μικρό ή πολύ μικρό · έτσι, μετά από την ανάκληση μιας γραμμής στοιχείων οι δυνατότητες προώθησης του μετώπου μειώνονται (αφού η ανακληθείσα στρώση δεν πρέπει να τοποθετηθεί ξανά στην ίδια αποτυχημένη θέση). Αντίθετα, στην PM-WK, επειδή γίνεται ανάκληση μεμονωμένων στοιχείων, οι δυνατές θέσεις εισαγωγής είναι πολλές και η αφαίρεση ενός στοιχείου (δηλ. έως δύο κόμβους) έχει ελάχιστη επίπτωση στις δυνατότητες να προωθηθεί το μέτωπο. Επιπλέον, όταν ανακαλείται μια ακμή και ο αλγόριθμος ερευνά πώς θα ενώσει ή θα διασπάσει το μέτωπο με τον καλύτερο τρόπο, αυτό ουσιωδώς είναι μια διεργασία βελτιστοποίησης και γίνεται συχνά στη γένεση κατά στοιχείο · έτσι, η δυνατότητα να βρεθούν οι καλύτερες θέσεις εισαγωγής των στοιχείων είναι μεγάλες.

Ένα παράδειγμα δείχνεται στο σχ. 27. Δείχνεται ένα απλό χωρίο με τη διακριτοποίηση του συνόρου του και την πλεγματοποίηση σε κάποιο ενδιάμεσο στάδιο. Το νέο στοιχείο είναι απαράδεκτο. Η PM-BS θα επιχειρήσει να διορθώσει τις τομές των τμημάτων. Η PM-WK, θα ανακαλέσει το νέο στοιχείο και θα επιχειρήσει να βρει πιο κατάλληλο κόμβο για να συνεχίσει - που εν προκειμένω είναι πολύ καλύτερη λύση.

Επίσης, στην PM-WK όλα τα στοιχεία που γεννώνται ελέγχεται ότι έχουν αρκούντως καλή ποιότητα. Ένα στοιχείο κακής ποιότητας μπορεί να προξενήσει την εισαγωγή των επόμενων στοιχείων σε λάθος θέσεις και να δημιουργηθεί πρόβλημα διαφυγής. Στην PM-BS η ποιότητα των στοιχείων ελέγχεται αφού τοποθετηθεί μια πλήρης στρώση και το πρόβλημα διαφυγής μπορεί να προξενηθεί από κάποιο κακό στοιχείο πριν η στρώση της γραμμής ολοκληρωθεί (δηλ. πριν τον έλεγχο) · αυτό δεν μπορεί να συμβεί στην PM-WK διότι εκεί ένα κακό στοιχείο θα διορθωθεί ή θα απορριφθεί άμεσα. Το ίδιο ισχύει και για το πρόβλημα της τυχόν πλήρους επικάλυψης ενός μετώπου από κάποιο άλλο.

Μειονέκτημα της PM-WK είναι ότι κάποιες φορές οι τομές δεν διορθώνονται βέλτιστα διότι, αφού δεν είναι πλήρως στρωμένη η γραμμή, τα στοιχεία που υπάρχουν και μπορούν να συνδυαστούν είναι λιγοστά. Αντίθετα, στην PM-BS οι δυνατότητες βέλτιστης διόρθωσης τυχόν τομών είναι μέγιστες διότι μπορούν να χρησιμοποιηθούν όχι μόνον τα άμεσα τεμνόμενα στοιχεία αλλά και γειτονικά τους, κατά μήκος της στρώσης.

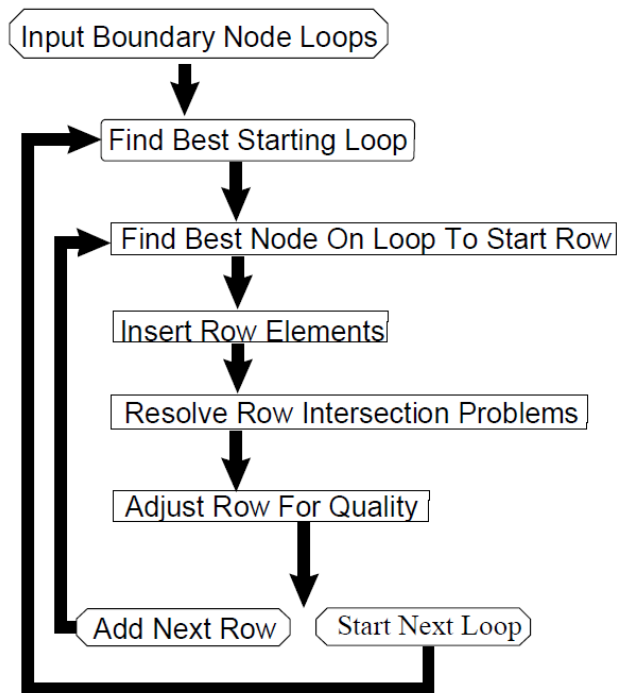
Στο σχ. 28 δείχνεται ένα παράδειγμα⁶⁹ μιας επιφάνειας που πλεγματοποιήθηκε από την PM-BS και PM-WK. Τα δυο πλέγματα δείχνονται πριν από τον τελικό τους καθαρισμό. Κανένα εκ των δύο δεν έχει τέλεια στοιχεία · ωστόσο, η PM-WK παράγει στοιχεία που δεν τέμνουν τα γεωμετρικά σύνορα, ένδειξη της υπεροχής της έναντι της PM-BS.

⁶⁷ Επισημαίνεται ότι η παρούσα περιγραφή του αλγόριθμου συμβαδίζει και συμπληρώνει εκείνη που δίνεται στις §4.3, §10.1 και §10.2.

⁶⁸ Δηλ. η ανάκληση μιας γραμμής (στρώσης) στοιχείων. Αυτό είναι το αντίστοιχο στην PM-BS. Μεμονωμένα στοιχεία στην PM-BS δεν μπορούν να ανακληθούν.

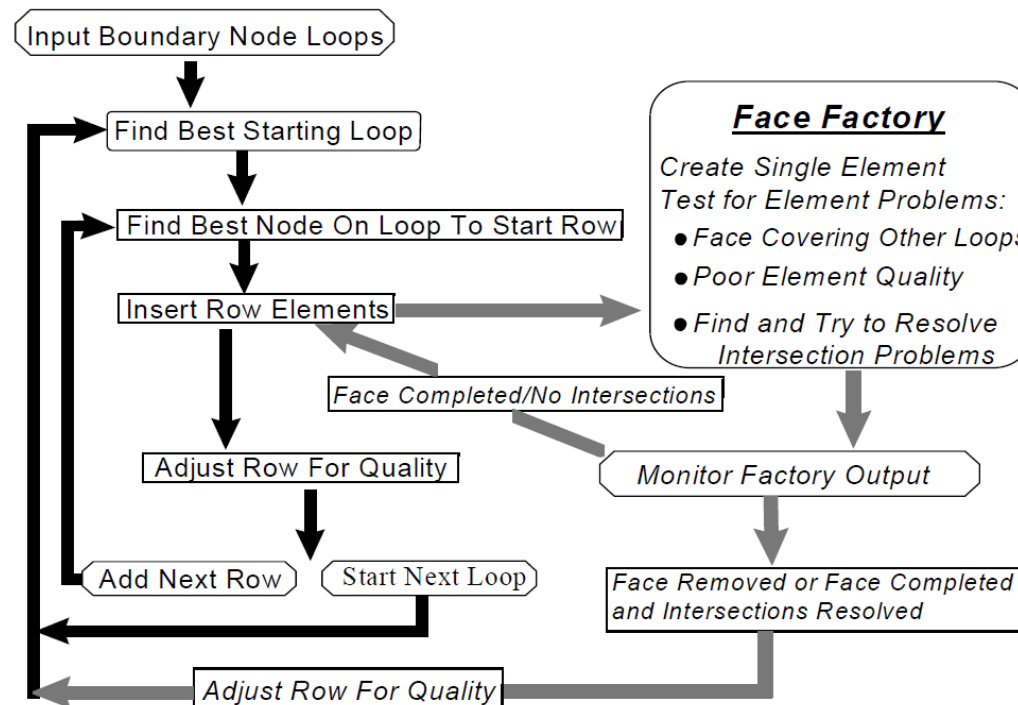
⁶⁹ Αναπαράγεται εκ της [9].

PM - BS



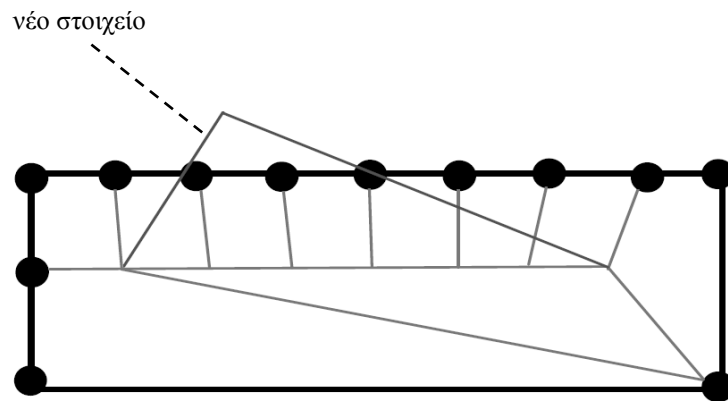
(α)

PM - WK

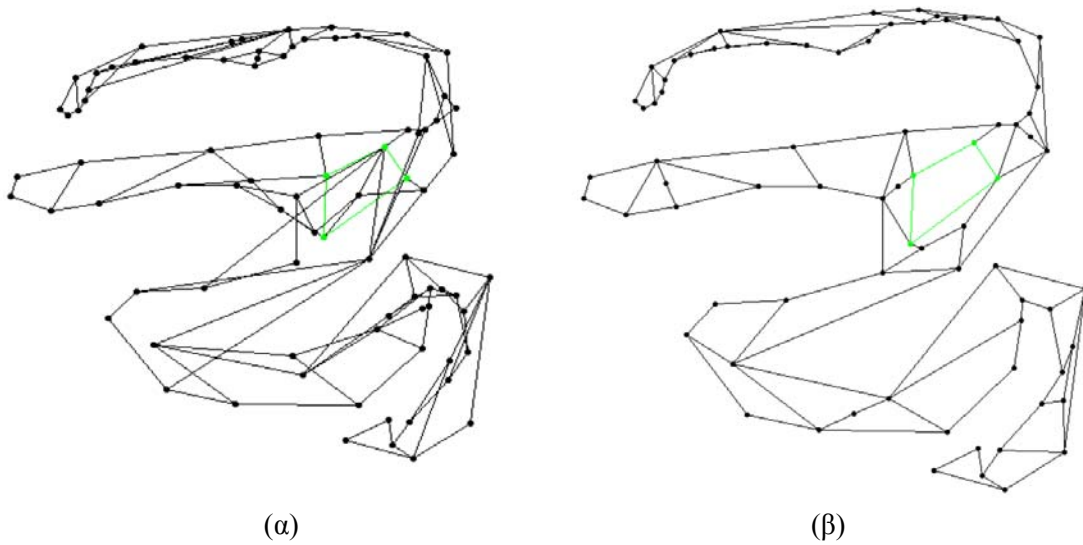


(β)

σχ. 26 : Κύρια Διαγράμματα ροής των δύο βασικών εκδοχών της Μεθόδου Επιστροφής.
α) εκδοχή των Blacker & Stephenson (PM-BS),
β) εκδοχή των White & Kinney (PM-WK).



σχ. 27 : Ενδιάμεσο στάδιο πλεγματοποίησης με την PM.



σχ. 28 : Διακριτοποίηση επιφάνειας με τη Μέθοδο Επίστρωσης (με πράσινο σημειώνεται το τελικό στοιχείο).
α) PM-BS, β) PM-WK.

6. Διόρθωση τομών και εγγύτητας των στοιχείων.

Καθώς τα μέτωπα αναπτύσσονται, πλησιάζουν μεταξύ τους και συχνά προξενούνται τομές μεταξύ των στοιχείων. Μερικές φορές μια τομή εκδηλώνεται ως αρνητική γωνία κόμβου και μπορεί να διορθωθεί με ραφή, βλ. σχ. 13. Γενικά όμως, οι ακμές που τέμνονται απαιτούν ειδική μέριμνα. Συγγενές πρόβλημα είναι και η υπερβολική εγγύτητα στοιχείων που ανήκουν σε διαφορετικά μέτωπα ή στοιχείων μη γειτονικών (ακολουθιακά) στο ίδιο μέτωπο. Αυτό μπορεί να προξενήσει στοιχεία κακής ποιότητας, επίσης τομές, και στη χειρότερη περίπτωση οπές στο πλέγμα. Ακολούθως εξετάζεται συνοπτικά πώς διορθώνονται αυτά τα προβλήματα. Η τεχνική αφορά την PM-WK την οποία αφορά πρωταρχικά το παρόν κείμενο⁷⁰.

Στην PM-WK, έλεγχοι τομής και εγγύτητας γίνονται μόλις σχηματιστεί ένα τετράπλευρο. Καταρχήν, ελέγχεται αν το νέο στοιχείο επικαλύπτει πλήρως την ακμή κάποιου μετώπου⁷¹. Ο έλεγχος αυτός πρέπει να γίνεται πρώτος διότι αν προκύψει θετικός, το νέο τετράπλευρο πρέπει αναγκαστικά να ανακληθεί (undo) άμεσα και οι προσπάθειες να διορθωθούν τυχόν τομές ή εγγύτητα, ακόμα κι αν είναι επιτυχείς, δεν έχουν νόημα. Ο έλεγχος για τομές και εγγύτητα γίνεται αντιπαραβάλλοντας κάθε νέα ακμή με τις ακμές όλων των μετώπων.

Η εγγύτητα των ακμών αποτιμάται με τη σχέση

$$P = \beta_1 P_{dist} + \beta_2 P_{perp} \quad (12)$$

όπου τα β_1, β_2 είναι συντελεστές και τα P_{dist}, P_{perp} είναι όροι που εξαρτώνται αντίστοιχα από την απόσταση και την γωνία των ακμών.

Το P_{dist} δίνεται από την

$$P_{dist} = \frac{d}{S} \quad (13)$$

με

$$S = \gamma \frac{l_1 + l_2}{2} \quad (14)$$

όπου d είναι η μικρότερη απόσταση μεταξύ των δύο τμημάτων⁷², l_1, l_2 τα μήκη τους και $\gamma = 0.45$.

Το S στη (14) είναι ο λεγόμενος “χώρος κόλλησης” (sticky space) που εκφράζει ότι τα δυο τμήματα είναι αρκούντως κοντά για να ενωθούν ή - αν ο χώρος επαρκεί - να εισαχθεί μεταξύ τους ένα νέο στοιχείο. Ο ορισμός αυτός υιοθετεί την παραδοχή ότι τα τμήματα είναι παράλληλα και απέναντι, κάτι που γενικά δεν συμβαίνει. Ο όρος P_{perp} αντισταθμίζει την παραβίαση αυτής της παραδοχής και δίνεται από την

$$P_{perp} = 1 - \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 \quad (15)$$

όπου $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ είναι τα μοναδιαία διανύσματα των δύο τμημάτων.

⁷⁰ Η εγγύτητα διορθώνεται με ένωση ή διάσπαση μετώπων, ο τρόπος είναι ίδιος για τις PM-BS και PM-WK. Αντίθετα, η διόρθωση των τομών στην PM-BS γίνεται ελαφρώς διαφορετικά, βλ. [7], και δεν θα εξεταστεί καθώς το κείμενο εστιάζει στην PM-WK.

⁷¹ Αυτό περιλαμβάνει και την περίπτωση όπου το νέο στοιχείο επικαλύπτει πλήρως ένα ήδη υπάρχον.

⁷² Για λόγους ευκολίας είναι αρκετό να υπολογίζονται οι αποστάσεις των άκρων των δυο τμημάτων και να λαμβάνεται η μικρότερη εξ αυτών (δηλ. να αγνοείται η κάθετη απόσταση και η περίπτωση ενδιάμεσων σημείων).

Τα β_1, β_2 είναι ουσιωδώς τα βάρη συμμετοχής των P_{dist}, P_{perp} στην (12). Η τιμή του β_1 πρέπει να εξασφαλίζει ότι αν τα τμήματα είναι αρκούντως μακριά, η εγγύτητά τους είναι μικρή, ανεξάρτητα από τον την τιμή του P_{perp} με την οποία λαμβάνεται υπόψη ο προσανατολισμός τους. Τα β_1, β_2 τίθενται εμπειρικά και συστήνεται⁷³ $\beta_1 = 1$ και $\beta_2 = 0.25$.

Όταν είναι $P < 1$, οι ακμές θεωρείται ότι είναι κοντά⁷⁴ και πρέπει να ενωθούν· επίσης, όταν τέμνονται είναι προφανώς $P = 0$.

Ο παραπάνω έλεγχος εγγύτητας, κι επίσης ο έλεγχος τομών, γίνονται μόλις σχηματιστεί το νέο στοιχείο⁷⁵. Όλα τα νέα του τμήματα εξετάζονται με τα τμήματα όλων των μετώπων και συλλέγονται ως υποψήφια για δοκιμές εκείνα που θα βρεθούν προβληματικά (δηλ. όποια εμπλέκονται σε τομές ή υπερβολική εγγύτητα), καθώς και τα μέτωπα στα οποία ανήκουν⁷⁶.

Με αυτά τα δεδομένα, δοκιμάζεται η σύνδεση των κόμβων των υποψήφιων ακμών με όλους τους κόμβους των υποψήφιων μετώπων και αποτιμάται το αποτέλεσμα. Με κάθε πιθανή σύνδεση παράγεται ένα νέο τετράπλευρο, το οποίο πρέπει να είναι έγκυρο και αποδεκτής ποιότητας. Από όλες τις εφικτές συνδέσεις, επιλέγεται εκείνη που δίνει το καλύτερο στοιχείο. Επίσης, τονίζεται ότι το τροποποιημένο μέτωπο που θα προκύψει πρέπει να έχει άρτιο πλήθος κόμβων, αλλιώς η σύνδεση δεν επιτρέπεται.

Η σύνδεση γίνεται με την ένωση ή διάσπαση των δύο μετώπων⁷⁷ που ανήκουν οι ακμές, οπότε δύο μέτωπα συγχωνεύονται ή παράγεται ένα νέο. Λόγω αυτών των αλλαγών, η διαδικασία της σάρωσης στο αρχικό μέτωπο διακόπτεται. Για τα νέα μέτωπα σημειώνεται ότι εκκρεμεί επικαιροποίησή τους (νέο πρωτεύον σχήμα κλπ) και εκτελούνται οι γνωστές διεργασίες βελτίωσης των στοιχείων (ραφή και ρύθμιση των μετώπων). Η ροή εκτέλεσης συνεχίζει με επιλογή άλλου μετώπου για σάρωση.

Στο σχ. 29 δείχνεται ένα παράδειγμα διόρθωσης εγγύτητας⁷⁸. Το νέο στοιχείο (γκριζαρισμένο) βρίσκεται πολύ κοντά σε μια ακμή του μετώπου και η μελλοντική εισαγωγή στοιχείων σε αυτή την περιοχή θα είναι προβληματική. Όπως φαίνεται στη μεγέθυνση, λόγω της εγγύτητας υπάρχει μια βαθιά εσοχή και το επόμενο στοιχείο θα είναι πολύ κακής ποιότητας και δύσκολο να διορθωθεί. Με τη διάσπαση του μετώπου το πρόβλημα εξαλείφεται.

Ομοίως, στο σχ. 30 δείχνεται ένα παράδειγμα διόρθωσης τομής. Για τον σχηματισμό του νέου στοιχείου άγονται δυο ακμές οι οποίες όμως τέμνουν τις ακμές ενός άλλου μετώπου (ή είναι πολύ κοντά τους). Το πρόβλημα διορθώνεται ενώνοντας τα μέτωπα. Τα παραγόμενα στοιχεία έχουν ελαφρώς χειρότερη ποιότητα από την αρχική τους αλλά θα βελτιωθούν με τις διεργασίες βελτίωσης και την ομαλοποίηση που θα ακολουθήσουν.

⁷³ Η προέλευση όλων αυτών των σχέσεων και η γεωμετρική σημασία τους δείχνονται στην [8].

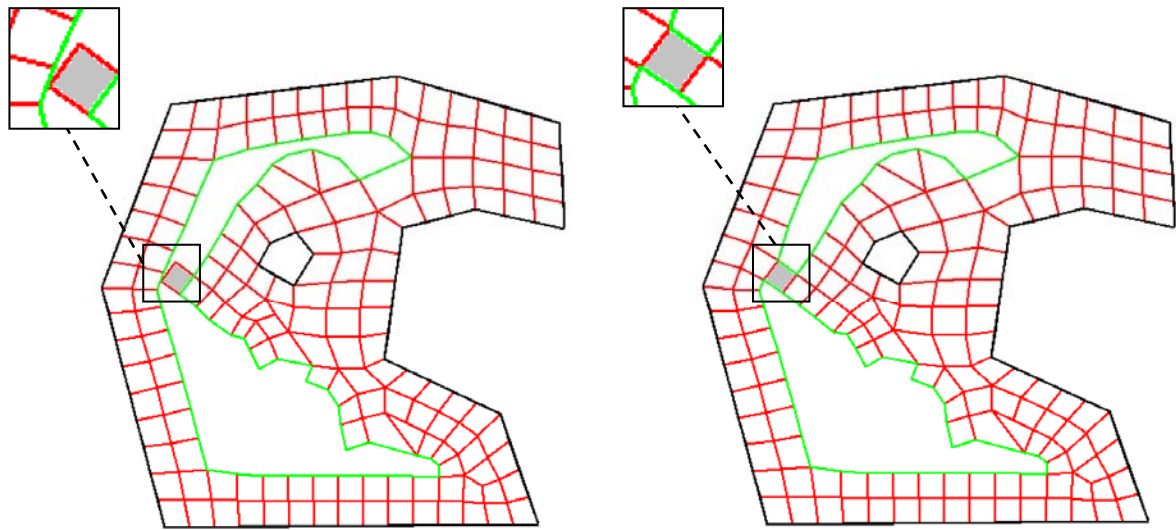
⁷⁴ Διευκρινίζεται ότι το P εκφράζει απόσταση. Ως εκ τούτου, μικρή εγγύτητα (δηλ. απομακρυσμένα τμήματα) σημαίνει μεγάλη τιμή του P και αντιστρόφως.

⁷⁵ Σύμφωνα με την οργάνωση της §5, αυτό γίνεται κατά το τρέχον στάδιο του κόμβου, εντός της FaceMonitor.

⁷⁶ Διευκρινίζεται ότι για κάθε νέο στοιχείο, πρώτα βρίσκονται όλες οι προβληματικές ακμές και μετά διορθώνονται. Δεν διορθώνεται κάθε ακμή αμέσως μόλις βρεθεί.

⁷⁷ Η υλοποίηση αυτής της διεργασίας είναι κυρίως προγραμματιστικό θέμα και δεν θα εξεταστεί εδώ.

⁷⁸ Αναπαράγεται εκ της [9].



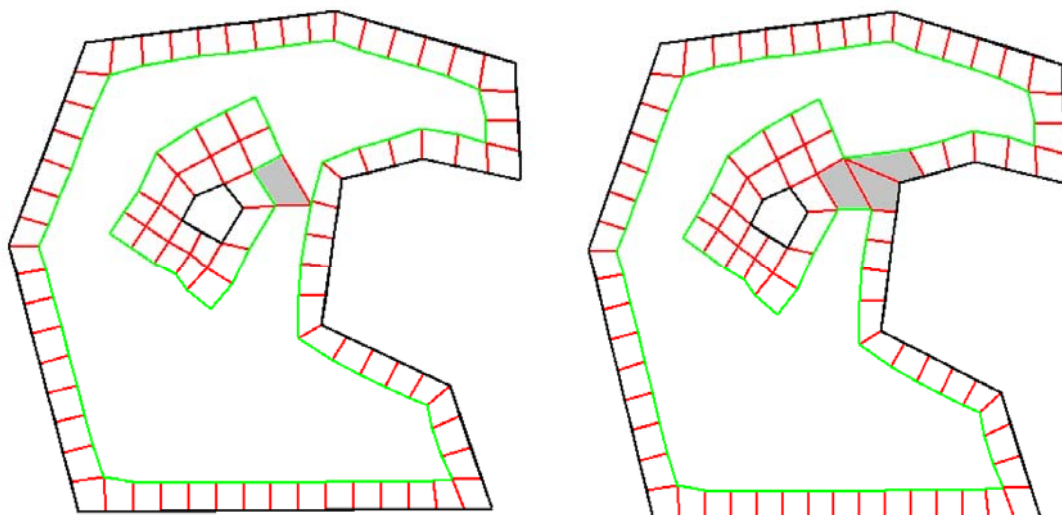
(α)

(β)

σχ. 29 : Διόρθωση εγγύτητας με διάσπαση μετώπου.

α) πριν τη διάσπαση του μετώπου, το επόμενο στοιχείο θα έχει πολύ κακή ποιότητα και είναι δύσκολο να διορθωθεί.

β) μετά από τη διάσπαση του μετώπου σε δύο μέτωπα, τα επόμενα στοιχεία που θα δημιουργηθούν έχουν αποδεκτή ποιότητα.



(α)

(β)

σχ. 30 : Διόρθωση τομής (ή εγγύτητας) με ένωση δύο μετώπων.

α) το τρέχον στοιχείο (δείχνεται με γκρίζο χρώμα) έχει ακμή που τέμνει ένα μέτωπο (ή είναι πολύ κοντά του).

β) τα δυο μέτωπα ενώνονται σε ένα εξαλείφοντας την τομή. Με γκρίζο χρώμα δείχνονται τα στοιχεία που τροποποιούνται.

7. Ομαλοποίηση.

Αντίθετα με άλλες μεθόδους όπου γίνεται τελευταία, μπορεί δε ακόμη και να παραλειφθεί, η ομαλοποίηση στην PM είναι μεγίστης σημασίας και εφαρμόζεται μετά από κάθε διεργασία που τροποποιεί το πλέγμα. Συγκεκριμένα, εφαρμόζεται μετά από ραφή, ρύθμιση μετώπων (σφήνες και πτυχώσεις) και διόρθωση τομών και εγγύτητας. Όλες αυτές οι διεργασίες παραμορφώνουν το μέτωπο και τα στοιχεία τοπικώς περί αυτού. Η ομαλοποίηση επιχειρεί να εξαλείψει αυτές τις τοπικές παραμορφώσεις και να διατηρήσει τα καλά χαρακτηριστικά του μετώπου· ως εκ τούτου, είναι σημαντική όχι μόνον για τους εσωτερικούς κόμβους αλλά και για τους “ρέοντες” κόμβους που αποτελούν το μέτωπο. Η ομαλοποίηση του μετώπου γίνεται με ειδικούς τρόπους και συναντάται μόνον στην PM· η ομαλοποίηση των εσωτερικών κόμβων ακολουθεί και γίνεται με κάποιον συνήθη τρόπο. Παρακάτω εξετάζονται αυτές οι διεργασίες.

7.1 Ομαλοποίηση κόμβων του μετώπου.

Γενικά είναι σημαντικό κατά τη γένεση των τετράπλευρων να διατηρείται το μέγεθος⁷⁹ και η καθετότητα των ακμών τους διότι έτσι παράγονται στρώσεις τετράπλευρων μακροσκοπικά ομοιόμορφες⁸⁰· αυτό έχει ως αποτέλεσμα λιγότερους ανώμαλους κόμβους και το πλέγμα τοπικά να τείνει στην ιδανική μορφή για τετράπλευρα, το τετράγωνο. Για την επίτευξη αυτών των απαιτήσεων, το τρέχον μέτωπο ομαλοποιείται με τρεις τρόπους :

- ισοπαραμετρική ομαλοποίηση Δ_A ,
- ρύθμιση μήκους ακμών Δ_B ,
- ομαλοποίηση γωνιών Δ_C .

όπου τα Δ_A , Δ_B , Δ_C είναι διανύσματα με διαστάσεις μήκους, τα οποία προστίθενται ως διορθώσεις στα διανύσματα θέσης των κόμβων.

Η ισοπαραμετρική ομαλοποίηση εφαρμόζεται ανεξαιρέτως σε όλους τους κόμβους του μετώπου, ενώ οι άλλες δύο εφαρμόζονται μόνον στους κόμβους όπου το πλήθος N_E των προσκειμένων στοιχείων είναι ακριβώς δύο.

Ειδικότερα, η συνολική διόρθωση Δ_i που προτίθεται στο διάνυσμα θέσης κάθε κόμβου είναι

$$\Delta_i = \begin{cases} \Delta_A + \frac{\Delta_B + \Delta_C}{2}, & N_E = 2 \\ \Delta_A, & N_E \neq 2 \end{cases} \quad (16)$$

Ακολουθώς παρουσιάζεται ο υπολογισμός των Δ_A , Δ_B , Δ_C .

⁷⁹ Ή να μεταβάλλεται ομαλά, σύμφωνα με τις απαιτήσεις της πυκνότητας που έχουν τεθεί.

⁸⁰ Το ότι τα στοιχεία είναι καλής ποιότητας δεν εξασφαλίζει ότι και οι στρώσεις τους θα είναι ομοιόμορφες και ευθυγραμμισμένες.

7.1.1 Ισοπαραμετρική ομαλοποίηση.

Η ισοπαραμετρική ομαλοποίηση επιδιώκει να μετατρέψει τα τετράπλευρα της τελευταίας στρώσης σε παραλληλόγραμμα.

Έστω ο κόμβος N_i του μετώπου με διάνυσμα θέσης \mathbf{r}_i και n το πλήθος των προσαρτημένων επ' αυτού στοιχείων. Καθένα εκ των προσαρτημένων στοιχείων k ορίζεται από τους κόμβους N_i και N_{ka}, N_{kb}, N_{kc} με αντίστοιχα διανύσματα θέσης $\mathbf{r}_{ka}, \mathbf{r}_{kb}, \mathbf{r}_{kc}$. Η θέση \mathbf{r}'_i του N_i μετά από την ομαλοποίηση δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{r}'_i = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\mathbf{r}_{ka} + \mathbf{r}_{kb} - \mathbf{r}_{kc}) \quad (17)$$

Θεωρώντας ότι τα στοιχεία έχουν θετική (αντιωρολογιακή) φορά, ο κόμβος N_{kb} του στοιχείου k βρίσκεται διαγωνίως απέναντι από τον N_i .

Η διόρθωση που πρέπει να προστεθεί στην αρχική θέση του N_i είναι προφανώς

$$\Delta_A = \mathbf{r}'_i - \mathbf{r}_i \quad (18)$$

Όταν οι διαστάσεις των προσαρτημένων στοιχείων στον N_i διαφέρουν πολύ, αντί της (1) είναι πιο κατάλληλη η [17]

$$\mathbf{r}'_i = \frac{\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{l_k} \mathbf{r}_{ka} + \mathbf{r}_{kb} - \mathbf{r}_{kc} \right)}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{l_k}} \quad (19.a)$$

όπου το

$$l_k = \frac{|\mathbf{r}_{kc} - \mathbf{r}_i| + |\mathbf{r}_{ka} - \mathbf{r}_i|}{2} \quad (19.β)$$

λέγεται χαρακτηριστικό μήκος.

Π.χ. στη διάδοση ρωγμών, πλησίον της ρωγμής υπάρχουν πολύ μικρά στοιχεία, τα οποία συνδέονται με μεγαλύτερα στοιχεία περίξ αυτών. Σε τέτοιες περιπτώσεις η (17) παραμορφώνει τα μικρά τετράπλευρα ενώ με την (19) η μεταβολή των διαστάσεών τους είναι ομαλή.

Όπως αναφέρθηκε, η ισοπαραμετρική ομαλοποίηση μετατοπίζει τους κόμβους του μετώπου ώστε τα τετράπλευρα της τελευταίας στρώσης να τείνουν να γίνουν παραλληλόγραμμα. Ωστόσο, η ορθογωνιότητα και το μέγεθός τους δεν διατηρούνται· αυτό είναι ιδιαίτερος έντονο στους κόμβους όπου πρόσκεινται δύο στοιχεία. Τέτοιοι είναι κυρίως οι κόμβοι του μετώπου και σ' αυτούς γίνονται επιπλέον αλλαγές της θέσης τους ώστε να ληφθεί υπόψη το επιθυμητό μήκος και γωνία⁸¹.

⁸¹ Αυτό εξηγεί την (16).

7.1.2 Ρύθμιση μήκους ακμών.

Έστω ο κόμβος N_i του μετώπου ο οποίος παρήχθη εκ του κόμβου N_j με τις διαδικασίες της §3.6. Τα διανύσματα θέσης τους είναι αντίστοιχα $\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j$.

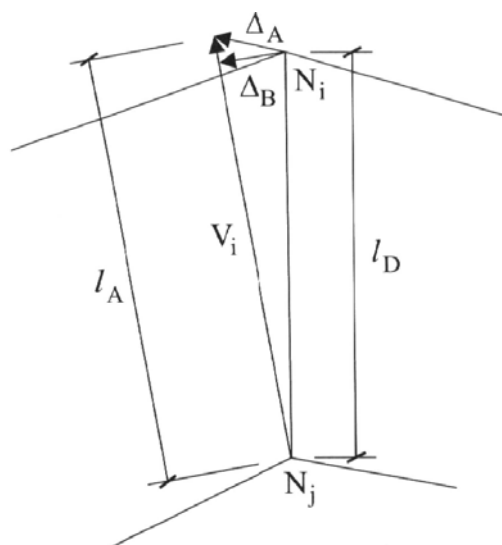
Επίσης, έστω $l_D = |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|$ η απόσταση⁸² των N_i, N_j

και $l_A = |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}'_i|$ η απόσταση των N_i, N_j μετά από την εφαρμογή της ισοπαραμετρικής ομαλοποίησης Δ_A στον N_i .

Με αυτά τα δεδομένα, η αλλαγή στη θέση του N_i για την ρύθμιση του μήκους της ακμής $N_i N_j$ είναι

$$\Delta_B = \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i + (\Delta_A + \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \frac{l_D}{l_A} \quad (20)$$

Η διόρθωση αυτή ρυθμίζει το μήκος της ακμής (όχι όμως και τον προσανατολισμό της) ώστε να διατηρείται το μέγεθος των στοιχείων.



σχ. 31 : Ρύθμιση μήκους ακμών.

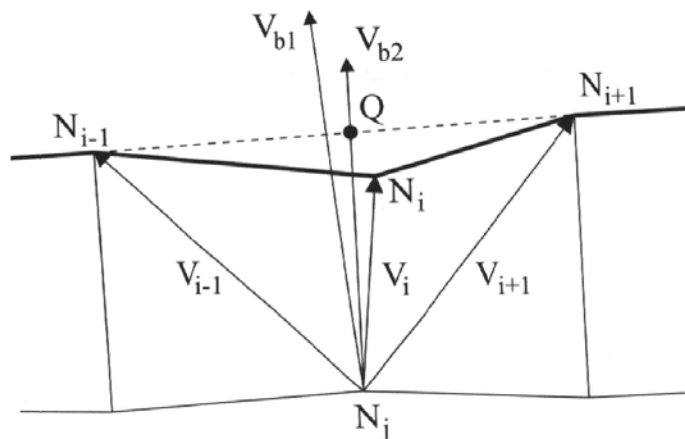
Τα διανύσματα Δ_A και Δ_B είναι διορθώσεις που προστίθενται στο αρχικό διάνυσμα θέσης του κόμβου N_i .

7.1.3 Ομαλοποίηση γωνιών.

Έστω οι τρεις κόμβοι του μετώπου N_{i-1}, N_i, N_{i+1} και ο εσωτερικός κόμβος N_j , εκ του οποίου παράγεται ο N_i , βλ. σχ. 32. Έστω επίσης τα διανύσματα $\mathbf{V}_{i-1}, \mathbf{V}_i, \mathbf{V}_{i+1}$ της σχετικής θέσης των κόμβων αυτών ως προς τον N_j .

⁸² Αυτό είναι το μήκος του διανύσματος με το οποίο τέθηκε ο N_i εκ του N_j . Το μήκος αυτό δίνεται με μια εκ των (4), (5), (2) και ουσιαστικά είναι το l_{ms} του N_j .

Από τον κόμβο N_j άγεται το διάνυσμα V_{b1} , αδιάφορου μήκους, που διχοτομεί την γωνία των V_{i-1} , V_{i+1} και ακολούθως το V_{b2} που διχοτομεί την γωνία των V_{b1} , V_i . Το διάνυσμα V_{b2} δείχνει την κατεύθυνση της νέας θέσης του κόμβου N_i .



σχ. 32 : Γεωμετρικά μεγέθη για την ομαλοποίηση γωνίας.
Ζητούμενο είναι ο υπολογισμός του διανύσματος V_{b2} .

Περαιτέρω, έστω Q η τομή του τμήματος $N_{i-1} N_{i+1}$ με ένα τμήμα αρκούντως μεγάλου μήκους στην κατεύθυνση του V_{b2} και τα μήκη l_Q και l_D που ορίζονται ως

$$l_Q = |\overline{N_j Q}|$$

και⁸²

$$l_D = |V_i|$$

Το μήκος του V_{b2} λαμβάνεται ίσο με

$$|V_{b2}| = \begin{cases} \frac{l_Q + l_D}{2}, & l_D > l_Q \\ l_D, & l_D \leq l_Q \end{cases} \quad (21)$$

Η αλλαγή στη θέση του N_i για την ομαλοποίηση της γωνίας του είναι

$$\Delta_C = V_{b2} - V_i \quad (22)$$

Η διόρθωση αυτή τείνει να κάνει τις ακμές του στοιχείου κάθετες μεταξύ τους και διορθώνει το μήκος του τμήματος $N_j N_i$ ώστε να μειωθεί η κυμάτωση του μετώπου.

7.2 Ομαλοποίηση εσωτερικών κόμβων.

Η ομαλοποίηση των εσωτερικών κόμβων γίνεται θεωρώντας τους κόμβους του μετώπου προσωρινά σταθερούς και είναι μια διαδικασία γνωστή από άλλες μεθόδους πλεγματοποίησης. Ο απλούστερος τρόπος είναι η λεγόμενη λαπλασιανή ομαλοποίηση μήκους (length-weighted laplacian smoothing).

Έστω N_i είναι ο κόμβος που θα μετακινηθεί, με n προσκείμενα στοιχεία. Επίσης, έστω V_j η σχετική ως προς τον N_i θέση των μη διαγωνίως απέναντι κόμβων του. Η αλλαγή στη θέση του N_i είναι

$$\Delta_i = \frac{\sum_{j=1}^n |V_j| V_j}{\sum_{j=1}^n |V_j|} \quad (23)$$

Η διόρθωση αυτή επιχειρεί να θέσει τους εσωτερικούς κόμβους σε ίση απόσταση μεταξύ τους και συνήθως επαναλαμβάνεται τρεις έως πέντε φορές.

Στην [7] συστήνεται να προστίθεται στο V_j και η διόρθωση για την ομαλοποίηση της γωνίας που περιγράφηκε πριν, ήτοι η

$$\Delta_{C_j} = V_{b2} - V_j \quad (24)$$

Τότε αντί του V_j χρησιμοποιείται το διάνυσμα

$$C_j = V_j + \Delta_{C_j} \quad (25)$$

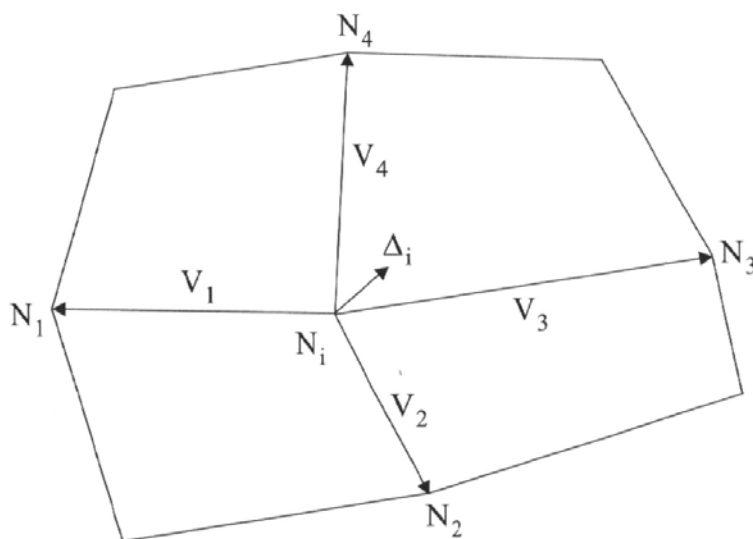
και (1) γίνεται

$$\Delta_i = \frac{\sum_{j=1}^n |C_j| C_j}{\sum_{j=1}^n |C_j|} \quad (26)$$

Η προσθήκη αυτή, εκτός από την ισοκατανομή των κόμβων, βοηθά επιπλέον να παραμείνουν κάθετες στο σύνορο οι ακμές των συνοριακών στοιχείων.

7.3 Τοπικότητα της ομαλοποίησης.

Η ομαλοποίηση στην PM είναι μια πολύ κοστοβόρα διεργασία, επειδή γίνεται σχεδόν σε κάθε βήμα. Ως εκ τούτου, είναι αναγκαία κάποια μέριμνα επιτάχυνσης ή περιορισμού του κόστους της, έστω και στοιχειώδης. Ο απλούστερος τρόπος είναι να περιοριστεί μόνον στις περιοχές που διαταράσσονται περισσότερο αντί στο πλήρες πλέγμα - ειδικά για τους εσωτερικούς κόμβους.



σχ. 33 : Ομαλοποίηση σε εσωτερικό κόμβο με λαπλασιανό ομαλοποιητή.

Καθώς το μέτωπο προωθείται στην περιοχή που θα επικαλυφθεί, οι κόμβοι όπισθεν αυτού διαταράσσονται ελάχιστα από κάποια απόσταση και μετά· επομένως μπορούν να εξαιρεθούν από την ομαλοποίηση χωρίς συνέπειες στην ποιότητα του πλέγματος. Πρακτικά, οι κόμβοι μετά από περίπου τρεις στρώσεις κάτω από το μέτωπο δεν επηρεάζονται από τις αλλαγές του μετώπου. Περιορίζοντας την ομαλοποίηση των εσωτερικών κόμβων στις τρεις πρώτες στρώσεις του μετώπου αντί σε όλους, αποφεύγονται άσκοπες πράξεις και εξοικονομείται σημαντικός χρόνος. Η εξοικονόμηση μπορεί να είναι ακόμη μεγαλύτερη αν δεν γίνεται σε όλο το μέτωπο αλλά μόνον γύρω από τους διαταρασσόμενους κόμβους, πχ. στις ραφές, γύρω από τις ακμές που ράβονται.

Επειδή πρόκειται για μη-δομημένα πλέγματα, οι στρώσεις των στοιχείων δεν είναι αναγκαστικά ευθυγραμμισμένες και ομοιόμορφες· ως εκ τούτου, οι έννοιες του βάθους των στρώσεων και της έρευνας κάθετα προς το μέτωπο συχνά είναι ασαφείς. Έτσι, ένας κόμβος μπορεί να σαρωθεί για ομαλοποίηση περισσότερες από μια φορές, ανάλογα με την διάταξη των στρώσεων. Επίσης, η κάθετη προς τις στρώσεις έρευνα φαίνεται καταρχήν αδύνατη διότι σε ένα στοιχείο δεν υπάρχει άμεση γνώση των γειτονικών του· ωστόσο, από τη λίστα των προσκείμενων στοιχείων κάθε κόμβου, τα γειτονικά στοιχεία καθενός μπορούν να προσδιοριστούν και η έρευνα όπισθεν του μετώπου είναι εφικτή⁸³.

Στο τέλος της πλεγματοποίησης, η ομαλοποίηση εφαρμόζεται ανεξαιρέτως σε όλους τους εσωτερικούς κόμβους όπως σε όλες τις μεθόδους.

⁸³ Αυτά αποτελούν καθαρώς προγραμματιστικά θέματα που δεν θα εξεταστούν εδώ, δείχνουν όμως πόσο σημαντική είναι μια σωστή δομή δεδομένων για την αναπαράσταση του πλέγματος.

8. Κλείσιμο του μετώπου.

Αν κατά τον έλεγχο εκφυλισμού του μετώπου⁸⁴ διαπιστωθεί ότι το μέτωπο περιέχει έξι κόμβους ή λιγότερους, τότε πρέπει να κλείσει και να πάψει να υφίσταται. Ανάλογα με την μορφή του, οι εναπομείναντες κόμβοι του ενώνονται με συγκεκριμένους τρόπους και σχηματίζονται τα τελευταία στοιχεία (κανένα ως τέσσερα). Ειδικότερα, αν απομένουν⁸⁵

- 2 κόμβοι, το μέτωπο απλώς διαγράφεται.
- 4 κόμβοι, σχηματίζεται ένα τελευταίο τετράπλευρο και το μέτωπο διαγράφεται.
- 6 κόμβοι, απαιτούνται ειδικές διεργασίες που εξετάζονται παρακάτω.

Στην τελευταία περίπτωση, ανάλογα με τη μορφή του μετώπου, ενδεχομένως τίθενται νέοι κόμβοι εντός αυτού και σχηματίζονται από δύο έως τέσσερα στοιχεία. Η μορφή του μετώπου βρίσκεται με παρόμοιο τρόπο όπως και για την προετοιμασία του για την εκκίνηση της σάρωσης⁸⁶. Ειδικότερα, ταξινομούνται οι κόμβοι του σε είδη και μετά ταξινομούνται πάλι, τελεσίδικα αυτή τη φορά, βλ. §4.2. Από αυτή τη διαδικασία προσδιορίζονται κάποιοι κόμβοι τερματισμού. Οι ακολουθίες των ακμών μεταξύ αυτών των κόμβων θεωρείται ότι αποτελούν μάκρο-πλευρές, ανάλογα δε με το πλήθος των πλευρών αυτών επιλέγεται αν, πού και πόσοι νέοι κόμβοι θα τοποθετηθούν και πώς θα ενωθούν για να σχηματιστούν τα τελευταία τετράπλευρα.

Οι πιθανές μορφές (διαμορφώσεις) που μπορεί να έχει ένα μέτωπο έτοιμο να κλείσει δείχνονται στον πιν. 1. Για κάθε μορφή αναγράφεται το πλήθος των κόμβων τερματισμού (δείχνονται με μπλε), το πλήθος των ακμών μεταξύ τους και δείχνονται οι τυχόν νέοι κόμβοι που πρέπει να εισαχθούν. Π.χ., η μορφή 3-1-1-1 ορίζεται από 4 κόμβους τερματισμού, μεταξύ των οποίων υπάρχουν 3,1,1 και 1 ακμές αντίστοιχα, ενώ στο εσωτερικό του μετώπου πρέπει να εισαχθούν δυο νέοι κόμβοι⁸⁷ (δείχνονται με πράσινο). Η ένωση των κόμβων δείχνεται με την στικτή γραμμή · όπως φαίνεται σχηματίζονται 4 τετράπλευρα με τα οποία το μέτωπο κλείνει.

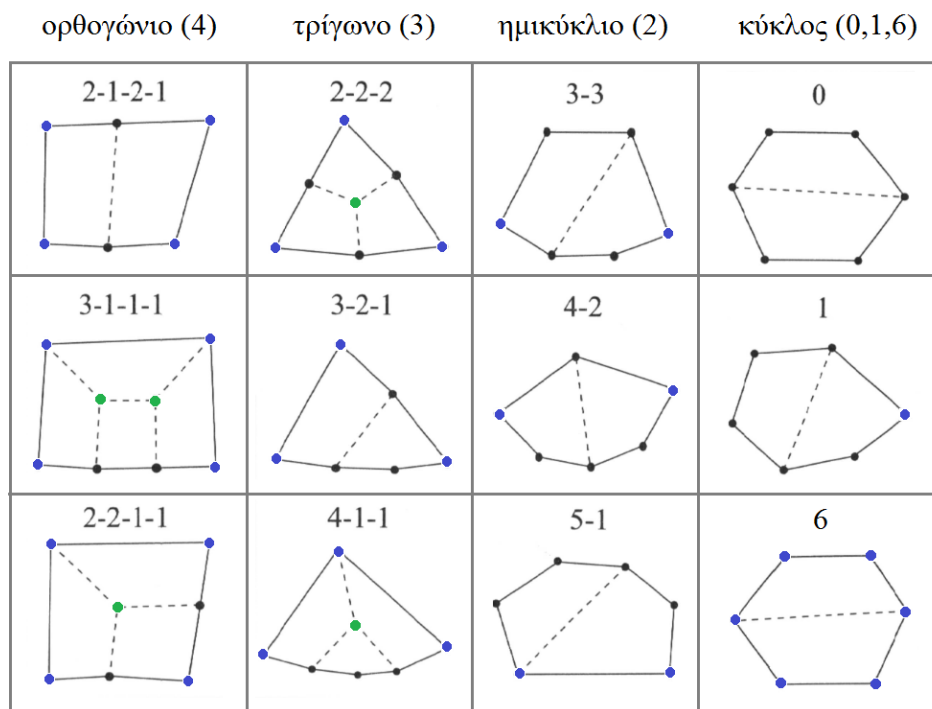
Στην πράξη, οι μη συμμετρικές μορφές του πίνακα πρέπει να διερευνηθούν και να βρεθεί μεταξύ ποιών κόμβων τερματισμού υπάρχει η αντίστοιχη ακολουθία ακμών. Π.χ., στην μορφή 3-1-1-1 η ακολουθία των 3 ακμών μπορεί να βρίσκεται σε οποιαδήποτε από τις τέσσερις πλευρές του υποτιθέμενου ορθογωνίου. Τα ονόματα των σχημάτων αναγράφονται μόνο για λόγους αναφοράς διότι στην πράξη η μορφή επιλέγεται με το πλήθος των κόμβων τερματισμού, χωρίς να αποδίδεται κάποιο σχήμα στο μέτωπο. Τέλος, επισημαίνεται ότι κάποια από αυτά τα τετράπλευρα που παράγονται κατά το κλείσιμο του μετώπου, έχουν πολύ κακή ποιότητα αλλά αυτό δεν ενοχλεί διότι θα διορθωθούν με την ομαλοποίηση που θα ακολουθήσει.

⁸⁴ Βλ. §2 και κυρίως §10.1.

⁸⁵ Υπενθυμίζεται ότι ένα μέτωπο έχει πάντα άρτιο πλήθος κόμβων (βλ. §10.2.1 και §3.5), συνεπώς αποκλείεται να απομένουν 5, 3 ή 1 κόμβοι.

⁸⁶ Στην προκείμενη περίπτωση η διαδικασία είναι πολύ απλούστερη. Δεν αναζητείται κάποιος κόμβος εκκίνησης σάρωσης και επίσης τα πιθανά σχήματα για κλείσιμο του μετώπου προσδιορίζονται με σαφή τρόπο (δεν υπάρχει ανάγκη συνδυαστικής έρευνας σε σχέση με το είδος των κόμβων). Το μόνο που χρειάζεται είναι να μην υπάρχουν αμφίβολοι κόμβοι.

⁸⁷ Ειδικά στην διαμόρφωση αυτή, η θέση των νέων κόμβων βρίσκεται προσεγγιστικά. Τα τετράπλευρα μπορεί να έχουν κακή ποιότητα αλλά θα διορθωθούν με την ομαλοποίηση.

**πιν. 1 :** Δυνατές διαμορφώσεις του μετώπου πριν το κλείσιμο.

Δείχνονται

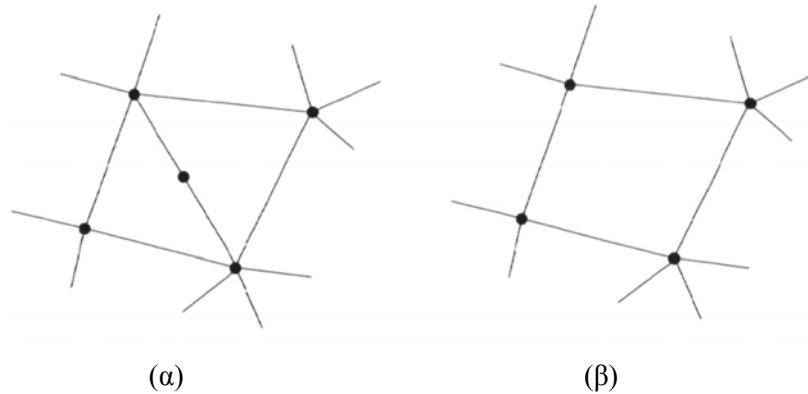
- με μαύρο οι κόμβοι πλευράς,
- με μπλε οι κόμβοι τερματισμού,
- με πράσινο οι νέοι κόμβοι που εισάγονται.

9. Καθαρισμός του πλέγματος.

Ο καθαρισμός είναι το τελευταίο σύνολο διεργασιών που υφίσταται το πλέγμα πριν παραδοθεί από την ΡΜ. Σε πολύπλοκα χωρία ή/και αν έγινε περιστασιακά παράκαμψη των κριτηρίων ποιότητας κατά τη γένεση, μπορεί στο πλέγμα να υπάρχουν ανεπιθύμητες διαμορφώσεις που δεν βελτιώνονται με την ομαλοποίηση. Οι διαμορφώσεις αυτές μπορεί να είναι απλώς ανεκτές, π.χ. ανώμαλοι κόμβοι, στοιχεία με μεγάλο λόγο πλευρών ή/και μεγάλες εσωτερικές γωνίες, μπορεί όμως και να είναι απαράδεκτες, π.χ. εκφυλισμένα στοιχεία. Ο καθαρισμός του πλέγματος αποσκοπεί στην εξάλειψη τέτοιων ατελειών. Σε αντίθεση με την ομαλοποίηση που αλλάζει μόνο τη θέση των κόμβων, ο καθαρισμός μεταβάλλει και την συνδεσιμότητά τους, δηλ. τα τοπολογικά χαρακτηριστικά του πλέγματος. Ο καθαρισμός είναι κύρια η αντικατάσταση των ανεπιθύμητων διαμορφώσεων με άλλες καλύτερης μορφής και γενικά οποιαδήποτε άλλη βελτίωση γίνεται σε αυτή τη φάση. Μετά από τον καθαρισμό μπορεί να ξαναγίνει ομαλοποίηση στους εσωτερικούς κόμβους. Στη βιβλιογραφία προτείνεται ένα πλήθος διαμορφώσεων που βελτιώνουν το πλέγμα, βλ. [18]-[19]. Παρακάτω εξετάζονται οι πιο χρήσιμες περιπτώσεις.

9.1 Συγχώνευση τετράπλευρων σε εσωτερικούς κόμβους με δυο προσαρτημένα τετράπλευρα.

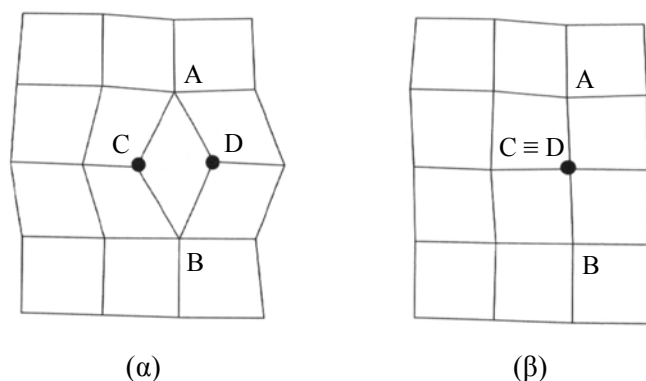
Η διαμόρφωση αυτή δείχνεται στο σχ. 34. Η διόρθωση αφαιρεί τον κόμβο με τις δυο πλευρές και τα δυο τετράπλευρα συγχωνεύονται σε ένα⁸⁸.



σχ. 34 : Διαγραφή εσωτερικού κόμβου με δυο προσκείμενα στοιχεία.

9.2 Διαγραφή τετράπλευρου για εξάλειψη ανώμαλων κόμβων.

Στο σχ. 35 δείχνεται μια διαμόρφωση όπου ένα τετράπλευρο υπάρχει υπό μορφή σφήνας μεταξύ άλλων. Οι κόμβοι που το απαρτίζουν είναι ανώμαλοι· στους A,B πρόσκεινται πέντε και στους C,D τρία στοιχεία. Η διαμόρφωση αυτή συναντάται και σε άλλες παραλλαγές, π.χ. στον κόμβο A θα μπορούσε να είναι προσαρτημένα τρία τετράπλευρα. Η ταύτιση των C,D εξαλείφει το τετράπλευρο και καθιστά τους περισσότερους κόμβους ομαλούς (εν προκειμένω όλους).



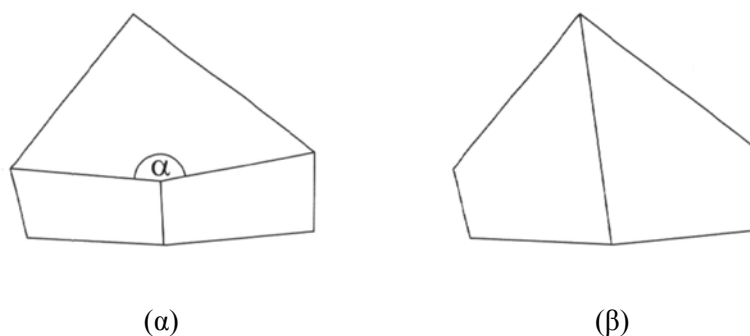
σχ. 35 : Διαγραφή τετράπλευρου και εξάλειψη ανώμαλων κόμβων.

⁸⁸ Τα δυο τετράπλευρα δεν είναι αναγκαστικώς εφικλισμένα σε τρίγωνα όπως δείχνεται εδώ.

9.3 Ομαλοποίηση γωνίας σε εσωτερικό κόμβο με τρία προσαρτημένα τετράπλευρα.

Σε αυτή τη διαμόρφωση αναζητούνται αποκλειστικώς εσωτερικοί κόμβοι με τρία τετράπλευρα. Σε έναν τέτοιο κόμβο υπολογίζεται η εσωτερική γωνία σε κάθε προσαρτημένο τετράπλευρο και υπάρχουν δυο περιπτώσεις :

- Όταν η μέγιστη εκ των τριών γωνιών α υπερβαίνει τις 100° , τότε ο κόμβος καταργείται και τα τρία τετράπλευρα συγχωνεύονται σε δύο, βλ. σχ. 3.
- Όταν η μέγιστη εκ των τριών γωνιών α είναι μικρότερη από 100° , τότε ο κόμβος μετακινείται καταλλήλως ώστε όλες οι εσωτερικές γωνίες του να είναι 120° .



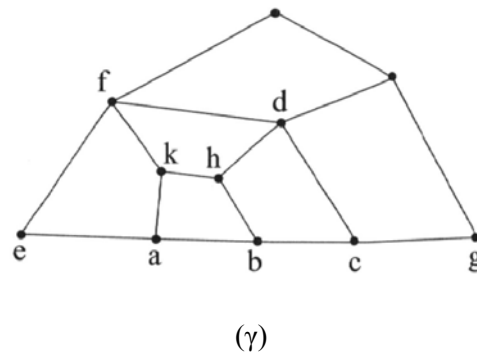
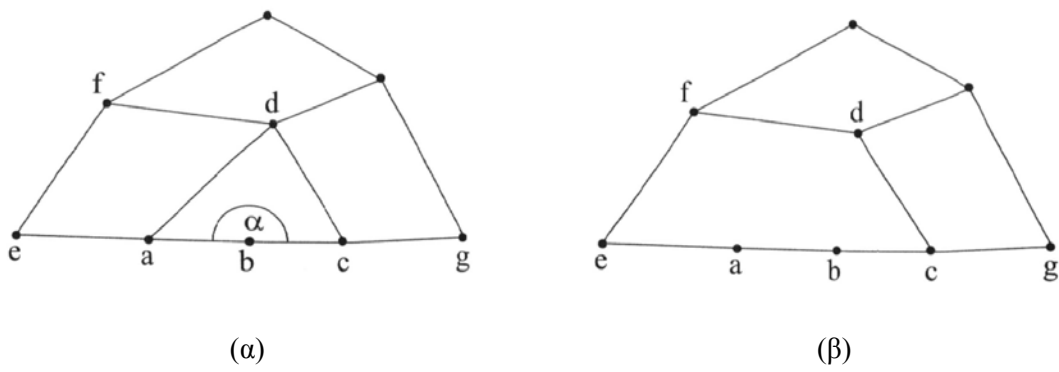
σχ. 36 : Συγχώνευση τετράπλευρων σε εσωτερικό κόμβο με γωνία που υπερβαίνει τις 100° .

9.4 Βελτίωση συνοριακού τετράπλευρου με εσωτερική γωνία που υπερβαίνει τις 165° .

Όταν ένα συνοριακό τετράπλευρο έχει γωνία που υπερβαίνει τις 165° , το πλέγμα μπορεί να βελτιωθεί σημαντικά με μια ειδική διαδικασία [13] που εισάγει επιπλέον τετράπλευρα. Η αρχική και η τελική διαμόρφωση δείχνονται στο σχ. 37. Τα βήματα για τη λήψη της τελικής διαμόρφωσης είναι τα ακόλουθα :

- Εντοπίζεται η μικρότερη γωνία dab ή dcb εκ των δύο.
- Επιλέγεται το προσαρτημένο τετράπλευρο που μοιράζεται τον κόμβο με την μικρότερη εσωτερική γωνία. Στην περίπτωση του σχ. 37 είναι το $adfe$. Τα δυο τετράπλευρα $abcd$ και $adfe$ θεωρούνται ως ενιαίο πολύγωνο, βλ. σχ. 37β.
- Επί του πολυγώνου αυτού τίθεται δυο νέοι κόμβοι, h, k . Η ακριβής θέση τους είναι αδιάφορη αρκεί να είναι εύλογα κατανεμημένοι στο νέο πολύγωνο. Π.χ., το h μπορεί να τεθεί στο μέσο του ad και το k στο κέντρο του τριγώνου ahf , βλ. σχ. 37γ.
- Τα τετράπλευρα $abcd$ και $adfe$ διαγράφονται και αντικαθίστανται από τα τέσσερα νέα στοιχεία $abhk$, $bcdh$, $dfkh$ και $feak$, βλ. σχ. 37δ.

Η γωνία abc έχει πλέον χωριστεί σε δύο, άνισες μεν αλλά καθόλα αποδεκτές.



σγ. 37: Βελτίωση του πλέγματος σε συνοριακό τετράπλευρο με εσωτερική γωνία που υπερβαίνει τις 165° .

10.1 Λεπτομερής περιγραφή του αλγόριθμου PM-WK.

Έχοντας πλέον εξετάσει όλα τα θεωρητικά στοιχεία και τις διεργασίες που υπεισέρχονται στην PM (ειδικά στην PM-WK [9]), μπορεί πλέον να διατυπωθεί ο αλγόριθμος με την απαραίτητη λεπτομέρεια για την υλοποίησή του σε πρόγραμμα. Έτσι, η ροή εκτέλεσης του κύριου μέρους ενός γενέτη PM-WK είναι περίπου ως ακολούθως^{89,90}.

1. Εισαγωγή και προκαταρκτική επεξεργασία δεδομένων.

Τα δεδομένα εισόδου για την πλεγματοποίηση αφορούν το σύνορο του χωρίου (και τυχόν οπές), το οποίο δίνεται ως ένα σύνολο σημείων με καθορισμένη σειρά. Τα σημεία αυτά ορίζουν προσανατολισμένα ευθύγραμμα τμήματα που θα αποτελέσουν το αρχικό μέτωπο της PM. Επίσης, δίνονται δεδομένα για την πυκνότητα του πλέγματος, δηλ. το μέγεθος των στοιχείων που θα παραχθούν. Προς χρήση αυτών των δεδομένων γίνονται κάποιες προκαταρκτικές διεργασίες. Συγκεκριμένα, καθορίζονται τα σύνορα τυχόν οπών, ορίζονται δεδομένα για τον έλεγχο της πυκνότητας του πλέγματος⁹¹ και όλα τα σύνορα πυκνώνονται κατάλληλα· τέλος, προετοιμάζονται οι δομές δεδομένων που απαιτούνται για τον αλγόριθμο της PM.

2. Λήψη τρέχοντος μετώπου.

Λαμβάνεται ένα μέτωπο από τα υπάρχοντα⁹² και εκκινεί ή συνεχίζεται ο αλγόριθμος της PM (επίστρωση του χωρίου). Η επιλογή δεν ακολουθεί κάποιο συγκεκριμένο κριτήριο. Το μέτωπο είναι πιθανόν να είχε επιλεγεί και προγενέστερα αλλά για διάφορους λόγους η επίστρωσή του να μην ολοκληρώθηκε.

3. Έλεγχος εκφυλισμού του μετώπου.

Το τρέχον μέτωπο της PM μπορεί να αναπτυχθεί περαιτέρω, μόνο αν περιέχει τουλάχιστον επτά ελεύθερους κόμβους (επτά ελεύθερες⁹³ ακμές). Τότε η ροή εκτέλεσης συνεχίζεται παρακάτω.

Αλλιώς, αν περιέχει έξι κόμβους ή λιγότερους, το μέτωπο πρέπει να κλείσει και να διαγραφεί. Ανάλογα με την μορφή του, οι κόμβοι αυτοί ενώνονται με συγκεκριμένους τρόπους και σχηματίζονται τα τελευταία στοιχεία. Ακολούθως, αν υπάρχουν άλλα μέτωπα, η ροή εκτέλεσης επανέρχεται στη λήψη του επόμενου (2), διαφορετικά ο αλγόριθμος προχωρεί σε διαδικασίες επιτυχούς τερματισμού (6).

⁸⁹ Εξαιτίας του μεγάλου πλήθους διεργασιών και του πεπλεγμένου τρόπου που σχετίζονται μεταξύ τους, δεν είναι σκόπιμο να παρασταθεί η εκτέλεση σε λογικό διάγραμμα, ακόμη και για το κύριο μέρος του αλγόριθμου, καθώς δεν θα βοηθήσει στην κατανόηση.

Εν προκειμένω, η λεκτική περιγραφή του αλγόριθμου είναι πιο σαφής.

Μια πολύ αδρή παράσταση της ροής εκτέλεσης δείχνεται στο σχ. 26β.

⁹⁰ Η περιγραφή που ακολουθεί εδώ - αλλά και γενικά σε όλο κείμενο - ανταποκρίνεται πιστά στην προγραμματιστική υλοποίηση της PM-WK που έγινε στην παρούσα μελέτη.

⁹¹ Πλέγμα υποβάθρου, πηγές κλπ., βλ. παράρτ. Α2.

⁹² Όπως εξηγείται στην §3.5, στην PM μπορούν να υπάρχουν περισσότερα από ένα μέτωπα που κατά το κλείσιμό τους παράγουν από κανένα ως τέσσερα τετράπλευρα (βλ. §8), ο δε αλγόριθμος τερματίζεται όταν κλείσουν όλα. Αντίθετα, στην AFM υπάρχει μόνον ένα μέτωπο που όταν κλείνει σχηματίζει πάντα ένα τρίγωνο και τερματίζει τον αλγόριθμο.

⁹³ Ελεύθερα με την έννοια ότι στο τρέχον μέτωπο δεν έχουν ακόμη σαρωθεί για να σχηματιστούν στοιχεία.

4. Προετοιμασία τρέγοντος μετώπου και αρχικοποίηση της σάρωσής του.

Πριν ξεκινήσει η γένεση στοιχείων στο τρέχον μέτωπο, εκτελούνται επ' αυτού κάποιες προκαταρκτικές διεργασίες. Συγκεκριμένα, καθορίζεται (i) το είδος των κόμβων του και (ii) το πρωτεύον σχήμα του · επίσης, (iii) επιλέγεται ο κόμβος απ' όπου θα ξεκινήσει η γένεση των στοιχείων (βλ. §3.5 και §4). Αυτές οι γεωμετρικές πληροφορίες είναι απαραίτητες για τη σάρωση του μετώπου και τη γένεση των τετράπλευρων που έπονται⁹⁴. Επίσης, είναι πιθανόν ένα μέτωπο να έχει σαρωθεί προγενέστερα αλλά η σάρωση για κάποιον λόγο να μην ολοκληρώθηκε · τότε, τα γεωμετρικά δεδομένα είναι εν μέρη γνωστά και απλώς επικαιροποιούνται.

Μετά από αυτές τις διεργασίες σχηματίζεται το πρώτο τετράπλευρο · με γνωστά πλέον τα γεωμετρικά δεδομένα του μετώπου, η ροή εκτέλεσης προχωρά παρακάτω, στη γένεση των υπολοίπων (5).

Είναι πιθανόν όμως, λόγω της μορφής του μετώπου, η γένεση αποδεκτού αρχικού στοιχείου να είναι αδύνατη⁹⁵. Τότε η εκτέλεση μπορεί :

- α) να επιστρέψει στην επιλογή ενός άλλου μετώπου (2),
- β) να προχωρήσει (5) με το ακατάλληλο στοιχείο προσωρινά αποδεκτό,
- γ) να τερματιστεί ανεπιτυχώς, εφόσον το πρόβλημα δεν επιδέχεται λύση.

Σε περίπτωση προβλήματος οι δυνατότητες αυτές δοκιμάζονται με την παραπάνω σειρά και ταυτόχρονα αποθηκεύεται ποιά έχει υιοθετηθεί ως τώρα για το προβληματικό μέτωπο. Στις περιπτώσεις (α) και (β) υπάρχει πιθανότητα το πρόβλημα να διορθωθεί αργότερα από μεταγενέστερες γεωμετρικές διεργασίες. Στην (α), το μέτωπο που προσωρινά εγκαταλείπεται, θα επιλεγεί ξανά αργότερα. Στην (γ), ο αλγόριθμος έχει αποτύχει και δεν μπορεί να παραχθεί πλέγμα · πιθανόν με άλλη διακριτοποίηση του συνόρου ή/και δεδομένα πύκνωσης η πλεγματοποίηση να επιτευχθεί.

5. Σάρωση του μετώπου και γένεση στοιχείων επ' αυτού.

Σαρώνεται το τρέχον μέτωπο της PM. Διευκρινίζεται ότι η σάρωση γίνεται κατά γραμμές (rows), οι οποίες οριοθετούνται από κόμβους τερματισμού, βλ. §3.7.1. Αφετηρία είναι είτε το πρώτο στοιχείο που μόλις παρήχθη (4), είτε ένας νέος κόμβος αφετηρίας, αν πρόκειται για μέτωπο που είχε εγκαταλειφθεί και ξαναδοκιμάζεται. Η γένεση των στοιχείων συνεχίζεται μέχρι

- α) να σαρωθεί μια πλήρης γραμμή του μετώπου⁹⁶,
- β) να αντιμετωπιστεί κάποιο πρόβλημα.

Στην περίπτωση (α), αν το μέτωπο έχει σαρωθεί πλήρως, τότε κλείνει. Ανεξαρτήτως αυτού, αν υπάρχουν άλλα μέτωπα, η εκτέλεση επιστρέφει στην λήψη άλλου μετώπου (2). Διαφορετικά, αν όλα τα μέτωπα έχουν σαρωθεί πλήρως, η εκτέλεση προχωρά στις διεργασίες τερματισμού της πλεγματοποίησης (6).

Μετά από τη γένεση κάθε στοιχείου, η συνέχιση ή όχι της σάρωσης (και άρα της γένεσης στοιχείων), ελέγχεται από το είδος των κόμβων. Όταν η σάρωση διακοπεί, ο έλεγχος αν το μέτωπο επικαλύφθηκε πλήρως γίνεται όπως και στο (3) από το πλήθος των ελεύθερων κόμβων που απομένουν.

⁹⁴ Υπενθυμίζεται ότι, η εκκίνηση και η διακοπή της σάρωσης ελέγχονται με κριτήριο το είδος των κόμβων (τερματισμού κλπ), άρα το δεδομένο αυτό πρέπει να είναι γνωστό.

⁹⁵ Το πρόβλημα μπορεί να είναι στοιχείο αναδιπλωμένο (flipped) ή απαράδεκτης ποιότητας ή να τέμνει κάποιο άλλο στοιχείο.

⁹⁶ Δεδομένου ένα μέτωπο συνήθως έχει πολλούς κόμβους τερματισμού (άρα πολλές γραμμές), το μέτωπο συνήθως επιλέγεται πολλές φορές, μέχρι σαρωθούν όλες και να καλυφθεί πλήρως.

Στην (β), η σάρωση διακόπτεται χωρίς να ολοκληρωθεί η επίστρωση της γραμμής, εξαιτίας κάποιου προβλήματος όπως στο (4). Αν το μέτωπο έχει περισσότερους από 6 ελεύθερους κόμβους⁹⁷, θα εγκαταλειφθεί προσωρινά και η ανάπτυξή του θα συνεχιστεί στο μέλλον.

Ακολουθώντας, όλα τα μέτωπα σαρώνονται και γίνονται διεργασίες βελτίωσης της ποιότητας των στοιχείων (ομαλοποίηση, ραφές και σφήνες/πτυχώσεις). Αν η σάρωση της γραμμής στο τρέχον μέτωπο διακόπηκε πρόωρα (β), οι διεργασίες αυτές ενδέχεται να διορθώσουν το πρόβλημα που προκάλεσε τη διακοπή. Τελικά, η ροή εκτέλεσης επιστρέφει στην λήψη άλλου μετώπου (2).

6. Ομαλοποίηση και καθαρισμός του πλέγματος.

Μετά από το κλείσιμο και τη διαγραφή όλων των μετώπων, το χωρίο έχει καλυφθεί πλήρως με στοιχεία και ο αλγόριθμος έχει ουσιαστικά περατωθεί. Στο σημείο αυτό, γίνονται στο πλέγμα κάποιες διεργασίες τελικών βελτιώσεων. Καταρχήν, γίνεται ομαλοποίηση σε ολόκληρο το πλέγμα⁹⁸. Ακολουθώντας, διορθώνονται τυχόν εκφυλισμένα τετράπλευρα και άλλες ατέλειες που δεν διορθώθηκαν με την ομαλοποίηση⁹⁹. Επίσης, συσσωματώματα τετράπλευρων συγκεκριμένης μορφής (patterns) μπορούν να τροποποιηθούν με προκαθορισμένο τρόπο, ώστε η ποιότητα του πλέγματος να βελτιωθεί περαιτέρω· τέλος, μπορεί να ξαναγίνει ομαλοποίηση. Μετά από όλα αυτά, η πλεγματοποίηση με την PM είναι πλέον περατωμένη.

10.2 Περιγραφή επιμέρους διεργασιών.

Στον παραπάνω αλγόριθμο, ορισμοί και διεργασίες που είναι μεγάλης σημασίας ή/και χαρακτηριστικές για την PM έχουν ήδη εξεταστεί λεπτομερώς στις §3-§8. Επιπλέον, στην ανωτέρω περιγραφή θα δοθούν μερικές πρόσθετες επεξηγήσεις.

10.2.1 Δεδομένα εισαγωγής και προεπεξεργασία τους.

Όπως αναφέρθηκε, κύριο δεδομένο εισόδου της PM είναι τα προσανατολισμένα ευθύγραμμα τμήματα που αποτελούν το σύνορο του χωρίου. Ο προσανατολισμός των τμημάτων δηλώνει τη φορά σάρωσης του συνόρου και απαιτείται για δυο λόγους. Καταρχήν, το χωρίο μπορεί να έχει οπές, δηλ. εσωτερικά σύνορα τα οποία πρέπει να σαρώνονται με αντίθετη φορά από το εξωτερικό σύνορο· επομένως, η φορά σάρωσης πρέπει να είναι συνεπής και καθορισμένη¹⁰⁰ για να διακρίνονται οι δυο περιπτώσεις. Επιπλέον, μια συνεπής φορά σάρωσης, τόσο για τα σύνορα όσο και για τα στοιχεία, είναι απαραίτητη σε μεταγενέστερες διεργασίες.

Αρχικά επιτρέπεται να υπάρχει μόνον ένα εξωτερικό σύνορο (external loop ή front), οι δε οπές (internal loops ή fronts) μπορεί να είναι οσοσδήποτε αλλά εντός του εξωτερικού συνόρου. Οι ακολουθίες των προσανατολισμένων τμημάτων στις οποίες διακριτοποιούνται τα σύνορα, αποτελούν τα αρχικά μέτωπα (loops ή fronts) της PM. Τα μέτωπα δεν πρέπει να τέμνονται ή να εφάπτονται μεταξύ τους.

⁹⁷ Αλλιώς, είναι πλήρως σαρωμένο και πρέπει να κλείσει και να διαγραφεί.

⁹⁸ Η ομαλοποίηση που γινόταν ως τώρα στο (5) αφορούσε για λόγους οικονομίας μόνον μερικές σειρές κόμβων εκατέρωθεν του τρέχοντος μετώπου, βλ. §7.3.

⁹⁹ Αυτό μπορεί να συμβεί σε πολύπλοκες γεωμετρίες ή/και αν έγινε περιστασιακά χαλάρωση των κριτηρίων ποιότητας όπως αναφέρθηκε στα (4), (5).

¹⁰⁰ Εν προκειμένω θετική (αντιωρολογιακή), ώστε να είναι θετική η εξωστρεφής κάθετη και τα χωρία να έχουν θετικό εμβαδόν.

Μεταγενέστερα, κατά τη γένεση των στοιχείων, το αρχικό εξωτερικό μέτωπο μπορεί να διασπαστεί σε δύο, κι έτσι να προκύψουν περισσότερα του ενός εξωτερικά μέτωπα¹⁰¹.

Επίσης, είναι δυνατόν τα σύνορα να δίνονται ως καμπύλες CAD, ήτοι splines, NURBS κ.α.· ωστόσο, κι αυτές πρέπει εσχάτως να διακριτοποιηθούν σε ευθύγραμμα τμήματα διότι τα αρχικά μέτωπα, το θεμελιώδες δεδομένο της PM, είναι ακολουθίες προσανατολισμένων ευθύγραμμων τμημάτων.

Η αρχική διακριτοποίηση του συνόρου επηρεάζει σημαντικά τη μορφή του τελικού πλέγματος καθώς αποτελεί το αρχικό μέτωπο όπου εκκινεί η γένεση των στοιχείων. Επ' αυτού, τονίζεται ιδιαίτερος ότι όλα τα μέτωπα πρέπει να έχουν υποχρεωτικά άρτιο πλήθος κόμβων διότι μόνον τότε μπορεί να παραχθεί πλέγμα που περιέχει αποκλειστικώς τετράπλευρα. Η διακριτοποίηση (refinement) των συνοριακών ακμών γίνεται σύμφωνα με τις απαιτήσεις για την επιθυμητή πυκνότητα του πλέγματος. Για να είναι πιο ευέλικτη αυτή η διαδικασία, όλα τα τμήματα διακριτοποιούνται δίχως περιορισμό στο πλήθος των κόμβων τους εκτός όμως από το τελευταίο· σ' αυτό λαμβάνεται μέριμνα ώστε το συνολικό πλήθος των κόμβων να προκύψει άρτιο. Ως τελευταίο τμήμα επιλέγεται το μεγαλύτερο διότι έτσι βοηθιέται η ευρωστία του αλγόριθμου.

Τα δεδομένα με τα οποία ορίζεται η επιθυμητή πλεγματική πυκνότητα (δηλ. το μέγεθος των στοιχείων) μπορεί να είναι ένα πλέγμα υποβάθρου, πηγές και τα συναφή τους, βλ. παράρτ. Α. Η διακριτοποίηση τμημάτων υπό τις απαιτήσεις επιθυμητού μήκους περιγράφεται λεπτομερώς στο παράρτ. Β.

10.2.2 Διεργασίες κατά τη γένεση νέου στοιχείου.

Μόλις σχηματιστεί ένα νέο στοιχείο, ελέγχεται αν είναι έγκυρο και καλής ποιότητας, βλ. §3.1, 2. Αν δεν είναι, τότε απορρίπτεται και η σάρωση διακόπτεται.

Εφόσον το νέο στοιχείο είναι έγκυρο, επιχειρείται ραφή στους κόμβους του, βλ. §3.8. Αν η ραφή είναι επιτυχής, εφαρμόζεται τοπική ομαλοποίηση¹⁰², το τετράπλευρο γίνεται αποδεκτό και η σάρωση διακόπτεται.

Αν για οποιονδήποτε λόγο η ραφή δεν εκτελεστεί, (π.χ. δεν χρειάζεται να γίνει), εξετάζεται αν το νέο στοιχείο τέμνει, καλύπτεται εξολοκλήρου ή είναι απαράδεκτα κοντά σε κάποιο άλλο¹⁰³, βλ. §6. Αν δεν συμβαίνει κάτι εξ αυτών, το νέο στοιχείο είναι αποδεκτό και η σάρωση συνεχίζεται. Αλλιώς, το νέο τετράπλευρο είναι προβληματικό. Τότε εξετάζεται αν το πρόβλημα μπορεί να διορθωθεί ενώνοντας δυο ακμές, πράγμα που γίνεται ενώνοντας το μέτωπο με κάποιο άλλο ή διασπώντας το σε δύο. Είτε αυτό παράγει αποδεκτά στοιχεία είτε όχι, η σάρωση διακόπτεται¹⁰⁴.

Η ραφή και η ένωση/διάσπαση του μετώπου γίνονται πραγματικά μόνον αν το αποτέλεσμα τους είναι επιτυχές. Η εκτέλεσή τους αλλάζει τα γεωμετρικά δεδομένα του μετώπου (πρωτεύον σχήμα και είδος κόμβων), γι αυτό η σάρωση διακόπτεται ώστε να επικαιροποιηθούν τα μέτωπα. Σε κάθε περίπτωση που η σάρωση διακοπεί, η εκτέλεση συνεχίζεται σύμφωνα με ότι αναφέρθηκε προηγουμένως στα (4),(5) για την περίπτωση προβλήματος (επιλογή άλλου μετώπου κλπ).

¹⁰¹ Δύο μέτωπα μπορεί επίσης να ενωθούν, βλ. §6. Έτσι, το πλήθος των μετώπων δεν παραμένει αναγκαστικά σταθερό, σε αντίθεση με την AFM όπου υπάρχει πάντα μόνον ένα μέτωπο.

¹⁰² Μετά από κάθε μεμονωμένη ραφή πρέπει να πάντα γίνεται και τοπική ομαλοποίηση για να διορθώνονται τυχόν στοιχεία που διαταράσσονται.

¹⁰³ Αν έχει γίνει ραφή, τότε σίγουρα δεν υφίσταται κανένα από αυτά τα προβλήματα.

¹⁰⁴ Στην πρώτη περίπτωση επειδή πρέπει να γίνει επικαιροποίηση στα διαταρασσόμενα μέτωπα, στην δεύτερη επειδή είναι αναπόφευκτη.

Από τα παραπάνω είναι σαφές ότι τα προβλήματα που ενδέχεται να διακόψουν τη σάρωση ενός μετώπου¹⁰⁵ ή να μην επιτρέψουν καν την εκκίνησή της, είναι δύο : το σχηματιζόμενο τετράπλευρο

- είναι άκυρο ή κακής ποιότητας,
- τέμνει ή βρίσκεται πολύ κοντά σε κάποιο άλλο μέτωπο.

Αμέσως μετά τη γένεση ενός στοιχείου ελέγχεται αν υφίσταται κάποιο από τα προβλήματα αυτά, η δε ραφή και η διάσπαση/ένωση του μετώπου αποσκοπούν στην άμεση διόρθωσή του. Είτε το πρόβλημα διορθωθεί είτε όχι, το μέτωπο εγκαταλείπεται και δοκιμάζεται άλλο · όταν πρόκειται για την εκκίνηση της σάρωσης, εναλλακτικά μπορεί το στοιχείο να γίνει αποδεκτό προσωρινά και να δοκιμαστεί το ίδιο μέτωπο με άλλα γεωμετρικά δεδομένα (κατάταξη κόμβων και κόμβος αφετηρίας). Οι γεωμετρικές διεργασίες επί του νέου μετώπου (ή επί του ίδιου με άλλα γεωμετρικά χαρακτηριστικά) ενδέχεται να εξαλείψουν το πρόβλημα.

Η παραπάνω ροή εκτέλεσης δεν είναι δεσμευτική και μπορεί να εφαρμοστεί με διάφορες παραλλαγές. Ωστόσο, το σημαντικό είναι ότι οι εκτεταμένοι έλεγχοι και οι προσπάθειες να διορθωθούν τυχόν προβληματικά στοιχεία γίνονται αμέσως μόλις το στοιχείο σχηματιστεί¹⁰⁶ (element by element paving), όχι αφού σαρωθεί μια πλήρης γραμμή (δηλ μια ομάδα στοιχείων) του μετώπου (row by row paving).

10.2.3 Διεργασίες μετά από τη σάρωση μετώπου.

Όταν η γένεση των στοιχείων στο τρέχον μέτωπο¹⁰⁷ ολοκληρωθεί ή διακοπεί πρόωρα, εφαρμόζεται μια πληθώρα από γεωμετρικές διεργασίες. Συγκεκριμένα,

- **α)** γίνεται ομαλοποίηση στο τρέχον μέτωπο και σε μερικές σειρές κόμβων εκατέρωθεν του τρέχοντος¹⁰⁸.
- **β)** επιχειρείται ραφή¹⁰⁹ σε όλους τους κόμβους του μετώπου, επαναληπτικά, μέχρις ότου δεν χρειάζεται άλλο.
- **γ)** στο μέτωπο επιχειρούνται σφήνες και πτυχώσεις, βλ. §3.9.
Εφόσον γίνει έστω και μία, το μέτωπο ομαλοποιείται ξανά. Η διαδικασία αυτή συνεχίζεται επαναληπτικά μέχρις ότου δεν χρειάζεται άλλο.
- **δ)** τα **(β)** και **(γ)** εφαρμόζονται επαναληπτικά μέχρις ότου δεν απαιτείται.

Με την ομαλοποίηση, τις ραφές και τις σφήνες/πτυχώσεις διορθώνονται τυχόν προβληματικά τετράπλευρα και βελτιώνεται η ποιότητά τους. Αυτό επηρεάζει τοπικά τη μορφή του πλέγματος · η επαναληπτική εφαρμογή των διαδικασιών βοηθά να διατηρηθεί η ποιότητα των στοιχείων σε ολόκληρο το πλέγμα. Όπως και πριν, η ροή εκτέλεσης των ανωτέρω δεν είναι δεσμευτική.

¹⁰⁵ Υπενθυμίζεται ότι η σάρωση γίνεται μεταξύ κόμβων τερματισμού, κατά “γραμμές”, βλ. παρατ. 96. Όταν η επίστροφή μιας γραμμής ολοκληρωθεί, η σάρωση διακόπτεται φυσιολογικά (όχι λόγω προβλήματος) ενώ δεν έχει σαρωθεί όλο το μέτωπο.

¹⁰⁶ Όπως εξηγείται στην §5, αυτή είναι η ειδοποιός διαφορά της εκδοχής των White & Kinney [9] από των Blacker και Stephenson [7].

¹⁰⁷ Σωστότερα στην τρέχουσα γραμμή (row) του μετώπου.

¹⁰⁸ Το ιδανικό θα ήταν να γίνεται ομαλοποίηση σε όλο το πλέγμα αλλά στην παρούσα φάση δεν είναι σκόπιμο για λόγους οικονομίας.

¹⁰⁹ Υπενθυμίζεται η παρατ. 103.

11. Παραλλαγές και βελτιώσεις της PM.

Η επιτυχία του αρχικού αλγόριθμου των Blacker & Stephenson [7] ώθησαν περαιτέρω την ανάπτυξη της PM. Η σημαντικότερη βελτίωση είναι η εκδοχή των White & Kinney [9] που παρουσιάστηκε λεπτομερώς παραπάνω. Πέραν αυτής, η PM δοκιμάστηκε σε διάφορες εφαρμογές και προτάθηκαν αρκετές βελτιώσεις που αύξησαν τις δυνατότητές της ακόμη περισσότερο. Ακολουθώς συνοψίζονται οι πιο αξιόλογες εξ αυτών.

Οι Cass et al. [8] γενίκευσαν την PM σε τρισδιάστατες επιφάνειες κάνοντας τις απαραίτητες αλλαγές ώστε οι γεωμετρικές διεργασίες να ισχύουν και σε επιφάνειες στον χώρο.

Οι Stephenson et al. [20] ανέπτυξαν την αντίστοιχη της PM στον χώρο, γνωστή ως Μέθοδο Επάλειψης (Plastering Method), για παραγωγή εξάεδρων.

Οι Kawamura et al. [17] εφάρμοσαν την PM σε προβλήματα ρωγμών και υπέδειξαν αλλαγές στην ομαλοποίηση ώστε να λαμβάνεται υπόψη η διαφορά μεγέθους μεταξύ των μικρών στοιχείων πέριξ των ρωγμών και των μεγαλύτερων με τα οποία συνδέονται.

Οι Ladeinde & Alabi [21] διατύπωσαν ένα σύνολο κανόνων για το κλείσιμο του μετώπου με τους οποίους δεν απαιτείται η εξέταση συγκεκριμένων περιπτώσεων και είναι ανεξάρτητοι από τη μορφή του χωρίου.

Ο Nowotny [22] συνδύασε την PM με μια τεχνική αποδόμησης του χωρίου σε μικρότερα χωρία, γεωμετρικώς απλούστερα, καθένα εκ των οποίων επικαλύπτεται ανεξάρτητα · έτσι ελαττώνεται ο χρόνος της πλεγματοποίησης.

Οι Rens et al. [23] χρησιμοποίησαν την PM για τη γένεση τριγώνων με έλεγχο του προσανατολισμού τους (directional control).

Ο Rees [24] ανέπτυξε μια μέθοδο πλεγματοποίησης που βασίζεται στην PM αλλά επιτρέπει τη γένεση και τριγωνικών στοιχείων για να αποφευχθούν τα παραμορφωμένα τετράπλευρα.

Τέλος, αξιοσημείωτη είναι η μέθοδος των Owen et al. [24]. Πρόκειται για μια τεχνική ονόματι Q-Morph που παράγει αποκλειστικώς τετράπλευρα, εναλλακτική της PM. Η Q-Morph χρησιμοποιεί τις αρχές της PM και της AFM για να παράγει τετράπλευρα συνδυάζοντας τρίγωνα (indirect quad meshing) και, γενικά, είναι περίπου το ίδιο εύρωστη με την PM.

Κεφάλαιο 3

Προγραμματιστική υλοποίηση και παραδείγματα

1. Οργάνωση του προγράμματος και δομές δεδομένων.

Στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας αναπτύχθηκε ένας γενέτης PM-WK που φέρει τις δυνατότητες και την ροή εκτέλεσης της μεθόδου όπως παρουσιάστηκε στο κεφ. 2. Λόγω του μεγάλου πλήθους των διεργασιών και της πλεγμένης ροής εκτέλεσης, η προγραμματιστική υλοποίηση της PM-WK είναι μακροσκελής και εξαιρετικά πολύπλοκη · ως εκ τούτου, η γραφή ενός τέτοιου προγράμματος δεν είναι τετριμμένη και απαιτεί προσοχή στον σχεδιασμό και την οργάνωσή του. Ακολουθώς δίνονται μερικές βασικές υποδείξεις για την γραφή του κώδικα που είναι γενικά χρήσιμες στην ανάπτυξη τέτοιου λογισμικού.

Το πρόγραμμα αποτελείται από τρία κύρια μέρη : είσοδο δεδομένων, επεξεργασία και έξοδο/αποθήκευση · ο σκοπός καθενός είναι προφανής. Ακόμη όμως και αυτός ο απλοϊκός διαχωρισμός παρουσιάζει δυσκολίες εξαιτίας του πλήθους και της πολυπλοκότητας των απαιτούμενων δεδομένων. Η οργάνωση του κώδικα διευκολύνεται σημαντικά συντάσσοντας τα ομοειδή δεδομένα σε κατάλληλες δομές. Τα τρία θεμελιώδη γεωμετρικά στοιχεία της PM είναι ο κόμβος, το μέτωπο και το πλέγμα. Τα στοιχεία αυτά αναπαρίστανται με δομές που ενθυλακώνουν τις ιδιότητές τους που παρουσιάστηκαν στη θεωρία και διευκολύνουν την αλγοριθμική τους επεξεργασία.

Στην PM, όπως σε όλες τις τεχνικές μη-δομημένων πλεγμάτων, το πλήθος των κόμβων και των στοιχείων που περιέχει το τελικό πλέγμα είναι αρχικά άγνωστο · επιπλέον, κόμβοι, μέτωπα και στοιχεία δημιουργούνται και διαγράφονται συνεχώς κατά την επεξεργασία. Ως εκ τούτου, η χρήση απλών πινάκων (arrays, vectors) για αποθήκευση και επεξεργασία δεδομένων είναι ακατάλληλη καθώς οι διαστάσεις τους είναι εν γένει πάγιες. Για τους κόμβους και τα μέτωπα η πιο κατάλληλη δομή είναι η κυκλική, αμφίδρομη, συνδεσμική λίστα (Circular Double Linked List - CDLL), βλ. παράρτ. Δ. Τα στοιχεία μιας CDLL μπορούν να προσθαφαιρούνται εύκολα και να σαρώνονται ατέρμονα προς οποιαδήποτε κατεύθυνση.

Η κυκλική ακολουθία των κόμβων καθενός μετώπου αναπαριστάται εύλογα από μια CDLL. Ένα ενδεικτικό απόσπασμα είναι περίπου

```
typedef struct node_s
{
    struct node_s *Next;
    struct node_s *Prev;
    int          TypeFlag;
    int          Id;
    double       Angle;
    double       lms;
    int          PrevNodeId;
    int          NextNodeId;
}
NODE;
```


Εν προκειμένω, NODE είναι το δομικό (μεμονωμένο) στοιχείο της CDLL και αφορά έναν κόμβο. Έχει δείκτες στο επόμενο και στο προηγούμενο στοιχείο (δηλ. στον επόμενο και στον προηγούμενο κόμβο) και επίσης περιέχει και άλλα δεδομένα του κόμβου όπως το είδος, τη γωνία του, το lms κλπ. Μια τέτοια CDLL αποτελείται από τόσα στοιχεία (τύπου NODE) όσα είναι οι κόμβοι του μετώπου.

Όμοια, ένα μέτωπο αναπαριστάται από μια δομή που περιέχει ένα δείκτη προς την ακολουθία των κόμβων του (δηλ. την αντίστοιχη CDLL των κόμβων του) και τα υπόλοιπα δεδομένα που το αφορούν · συγκεκριμένα το πρωτεύον σχήμα του, το πλήθος των κόμβων και δείκτες στο επόμενο και στο προηγούμενο μέτωπο.

Ενδεικτικά περίπου ως εξής

```
typedef struct loop_s
{
    int          TypeFlag;
    int          PrimShape;
    struct loop_s *Next;
    struct loop_s *Prev;
    int          NNodes;
    NODE        *CurrNode;
}
LOOP;
```

Όπως παραπάνω, LOOP είναι ένα μεμονωμένο στοιχείο της CDLL και αφορά ένα μέτωπο. Ο δείκτης CurrNode δείχνει προς ένα στοιχείο της CDLL των κόμβων του μετώπου, δηλ. προς τον τρέχοντα κόμβο. Μέσω του CurrNode υπάρχει πρόσβαση από το μέτωπο στην ακολουθία των κόμβων του. Η CDLL των μετώπων αποτελείται από τόσα στοιχεία (τύπου LOOP) όσα είναι τα μέτωπα.

Τέλος, ολόκληρο το πλέγμα αναπαριστάται από μια δομή που περιέχει όλα τα απαραίτητα δεδομένα καθώς και έναν δείκτη στο τρέχον μέτωπο. Ένα απόσπασμα είναι περίπου

```
typedef struct
{
    double      Maxx, Maxy;
    double      Minx, Miny;

    int         ctrl;
    BGMDATA    *bgd;

    int         NBndNodes;
    double     *BndNodeAllMSvalues;

    int         NNodes;
    double     **NodeCoords;
    int         *NodeFlag;

    int         NQuads;
    int         **QuadNodes;

    int         *NQpN1;
    int         **QpN1;

    int         NLoops;
    LOOP       *CurrLoop;
}
PAVEDMESH;
```

Στη δομή του πλέγματος περιέχονται μεταξύ άλλων τα δεδομένα πυκνώσης (επίσης αναπαριστώνται από μια κατάλληλη δομή), το πλήθος, οι συν/νες και το είδος των κόμβων (εσωτερικοί ή συνοριακοί), διανύσματα που περιέχουν τα προσκείμενα τετράπλευρα κάθε κόμβου, το πλήθος των μετώπων κλπ. Ο δείκτης `CurrLoop` δείχνει προς ένα στοιχείο της CDLL της οποίας στοιχεία είναι τα μέτωπα, δηλ. προς το τρέχον μέτωπο. Μέσω του `CurrLoop` υπάρχει πρόσβαση από το πλέγμα στην ακολουθία των μετώπων του.

Όλες οι διεργασίες που αφορούν κόμβους και μέτωπα (εισαγωγή και διαγραφή κόμβων, ένωση και διάσπαση μετώπων κ.α.) γίνονται με κατάλληλες ρουτίνες επί των CDLL (σάρωση, εισαγωγή, διαγραφή στοιχείων κλπ).

Τέτοιες δομές και άλλα παρελκόμενα (τεχνικές αναζήτησης, βέλτιστοι τρόποι αποθήκευσης κ.α.) είναι τυπικές στη γένεση πλεγμάτων και ανάλογα με την εφαρμοζόμενη μέθοδο μπορεί να έχουν μεγάλη σημασία¹¹⁰. Τα θέματα αυτά στα πλαίσια της πλεγματοποίησης συζητούνται γενικά στην [11]. Επίσης, στην [12] παρουσιάζεται μια πολύ γενική δομή, κατάλληλη για πολλά είδη πλεγμάτων και τα δεδομένα τους.

Σε κάποια τμήματα του προγράμματος χρησιμοποιούνται πίνακες των οποίων οι διαστάσεις περιστασιακά μεταβάλλονται, π.χ. τα στοιχεία που πρόσκεινται σε κάθε κόμβο. Σε αυτές τις περιπτώσεις η μεταβολή της χωρητικότητας των πινάκων γίνεται με προκαθορισμένο βήμα¹¹¹ και πάντως όχι ανά μονάδα (δηλ. όχι ανά στοιχείο). Αυτό βοηθά στην ταχύτητα και στην καλύτερη εκμετάλλευση της μνήμης.

Η ευρωστία ενός αλγόριθμου είναι επίσης ένα σημαντικό ζήτημα, σχολιάστηκε δε ακροθιγώς στην παραρ. 13. Η PM-WK είναι αλγοριθμικά εύρωστη υπό την έννοια ότι μπορεί να ανταπεξέλθει επιτυχώς σε γεωμετρίες στις οποίες τείνει να παραχθεί ακατάλληλο πλέγμα ή/και εμποδίζεται η γένεση των στοιχείων¹¹². Η ευρωστία της PM-WK οφείλεται στους εκτεταμένους ελέγχους και στις δυνατότητες διόρθωσης των προβλημάτων και των εκφυλισμών. Ωστόσο, μόνον αυτό δεν αρκεί. Απαιτείται να είναι εύρωστη και η καθεαυτό υλοποίηση των ελέγχων και των διορθώσεων. Π.χ., πράξεις με τιμές που διαφέρουν κατά τάξεις μεγέθους, έλεγχος τομών σε τμήματα σχεδόν παράλληλα, πολλαπλές ρίζες σε εξισώσεις είναι μερικές διεργασίες που μπορεί να προξενήσουν λανθασμένο αποτέλεσμα και τελικά κατάσταση διαφυγής. Σε τέτοιους υπολογισμούς πρέπει να λαμβάνεται ιδιαίτερη μέριμνα · η τυφλή αύξηση της ακρίβειας απομακρύνει πολλά προβλήματα αλλά σε δύσκολες περιπτώσεις είναι επισφαλής. Μια συζήτηση της αριθμητικής και γεωμετρικής ευρωστίας με προσανατολισμό στον εντοπισμό τομών γίνεται στην [26]. Ένας άλλος τρόπος αντιμετώπισης τέτοιων προβλημάτων είναι με αριθμούς προσαρμοζόμενης ακρίβειας [27].

Τα παραπάνω είναι οι σημαντικότερες ιδιαιτερότητες που θέτει η γραφή ενός τέτοιου προγράμματος. Σε ότι αφορά την ίδια την μέθοδο, το πρόγραμμα ακολουθεί σχεδόν πιστά τον αλγόριθμο όπως παρουσιάζεται στις §10, §4 και §5 του κεφ. 2.

Τέλος, επισημαίνεται ότι, για τη διακριτοποίηση των συνόρων υπό δεδομένες απαιτήσεις πυκνώσης χρησιμοποιήθηκε η τεχνική του παραρτ. Β.

¹¹⁰ Π.χ. μια ειδική δομή μπορεί να χρησιμοποιείται για να βρίσκεται γρήγορα το στοιχείο που περιέχει έναν δεδομένο κόμβο

¹¹¹ Συνήθως ορίζεται να είναι πολλαπλάσιο του 8.

¹¹² Π.χ. στενόμακρες περιοχές, περιοχές με μεγάλες αλλαγές στις γωνίες ή/και μεγάλες διαφορές της πυκνώσης. Σε τέτοιες περιπτώσεις η PM-WK είτε θα παράγει πλέγμα είτε θα τερματίσει, ανεπιτυχώς μεν αλλά ελεγχόμενα. Διευκρινίζεται ότι ευρωστία δεν σημαίνει υποχρεωτικά επιτυχής πλεγματοποίηση (αυτό είναι η σύγκλιση) αλλά ελεγχόμενος και εύλογος τερματισμός.

2. Παραδείγματα πλεγματοποίησης με την PM-WK.

Ακολούθως παρατίθεται μια σειρά δοκιμών της PM-WK με το πρόγραμμα που γράφηκε για την παρούσα εργασία. Δεν επιδιώχθηκε λεπτομερής υπολογιστική μελέτη¹¹³ ούτε έγινε σύγκριση με άλλες μεθόδους· ωστόσο, επιδεικνύονται οι δυνατότητες της PM-WK σε πλεγματοποίηση διαφόρων απαιτήσεων και δυσκολίας.

δοκιμή #1 : δοκιμαστικό χωρίο “Ορθογώνιο”

Στην πρώτη δοκιμή γίνεται πλεγματοποίηση ενός ορθογωνίου με πύκνωση στη μια κορυφή του. Το ορθογώνιο έχει διαστάσεις 1x1 και το lms στις κορυφές του είναι αντίστοιχα 0.2, 0.05, 0.2 και 0.2.

Στο σχ. 1 δείχνεται το πλέγμα όπως προκύπτει από την PM-WK καθώς και μετά από τον καθαρισμό του. Στον κάναβο που δίνει η PM υπάρχουν ελάχιστα τετράπλευρα που είναι αναδιπλωμένα και τέμνονται. Οι ατέλειες αυτές οφείλονται στην περιστασιακή χαλάρωση των κριτηρίων ποιότητας που γίνεται για να προχωρήσει η γένεση και να κλείσει το μέτωπο¹¹⁴. Ο καθαρισμός διορθώνει αυτά τα προβλήματα, μετά δε και από την ομαλοποίηση το πλέγμα είναι έτοιμο για χρήση.

δοκιμή #2 : δοκιμαστικό χωρίο “Καμπύλο τρίγωνο με οπή”

Στην δεύτερη δοκιμή πλεγματοποιείται ένα τριγωνικό χωρίο με καμπύλες πλευρές και μια οπή. Το περιέχον ορθογώνιο του χωρίου (axis aligned bounding box - AABB) έχει διαστάσεις 10x10. Το lms στις τρεις κορυφές του τριγώνου και στους κόμβους που ορίζουν την οπή τίθεται 0.2. Χρησιμοποιώντας την τεχνική του παραρτ. Β, κάθε καμπύλη πλευρά έχει μετά την διακριτοποίησή της 53 κόμβους (συνολικά 156), το δε περίγραμμα της οπής 47 κόμβους.

Το αποτέλεσμα δείχνεται στο σχ. 3α. Το πλέγμα που λαμβάνεται από την PM έχει 1028 κόμβους και 926 τετράπλευρα. Στο κυρτό τμήμα του εσωτερικού συνόρου μπορούν να παρατηρηθούν οι σφήνες που εισάγονται για να περιοριστεί η διαστολή των στοιχείων· διακρίνονται επίσης οι περιοχές όπου συναντώνται οι στρώσεις από τα διάφορα μέτωπα. Το πλέγμα είναι καθόλα αποδεκτό, ωστόσο υπάρχουν μερικά τετράπλευρα σχεδόν εκφυλισμένα ή κακής ποιότητας. Με τον καθαρισμό και την τελική ομαλοποίηση εξαλείφονται αυτές ατέλειες και το τελικό πλέγμα, σχ. 3β, είναι σχεδόν άριστο.

δοκιμή #3 : δοκιμαστικό χωρίο “Ίππος”

Στην τρίτη δοκιμή η PM-WK εφαρμόζεται σε ένα χωρίο πολύπλοκου σχήματος, με σύνορο που έχει κοίλα και κυρτά τμήματα, στενώσεις και εξογκώσεις ποικίλων μεγεθών. Το AABB του χωρίου έχει διαστάσεις 515x620. Το σύνορο αποτελείται συνολικά 542 κόμβους καθένας εκ των οποίων έχει lms 5.

¹¹³ Υπό την έννοια ότι δεν υπολογίστηκε η ποιότητα των πλεγμάτων και η ταχύτητα εκτέλεσης.

¹¹⁴ Στην πραγματικότητα, αυτά τα προβλήματα δеноφείλονται στον αλγόριθμο της PM αλλά στην προγραμματιστική του υλοποίηση που για λόγους ευκολίας έγινε εδώ με κάποιους συμβιβασμούς στη ροή των ελέγχων. Αυτό τελικά δεν ενοχλεί διότι τα ελάχιστα άκυρα στοιχεία που ξεφεύγουν από τον κύριο έλεγχο, εντοπίζονται και διορθώνονται πάντα κατά τον καθαρισμό. Θεωρητικά, ο αλγόριθμος της PM δεν επιτρέπει να παραχθεί πλέγμα με άκυρα τετράπλευρα σε καμιά περίπτωση.

Το πρωτογενές πλέγμα που δίνει η PM-WK αποτελείται από 2460 κόμβους και 2208 τετράπλευρα, σχ. 5. Το πλέγμα αυτό είναι γενικά καλό αλλά περιέχει αρκετά τετράπλευρα στα όρια του εκφυλισμού· επίσης, περιέχει δυο τετράπλευρα που είναι απαράδεκτα. Στο σχ. 6 δείχνεται το τελικό πλέγμα, μετά από τον καθαρισμό και την ομαλοποίηση, το οποίο είναι απαλλαγμένο από όλα αυτά και πρακτικά είναι σχεδόν άριστο.

δοκιμή #4 : δοκιμαστικό χωρίο “Δίσκος με οπές”

Το χωρίο της τέταρτης δοκιμής είναι ένας κυκλικός δίσκος με 15 πολυγωνικές οπές. Το AABB του χωρίου έχει διαστάσεις 7x7. Η περιφέρεια του δίσκου και οι οπές αποτελούνται από 304 και 1104 κόμβους αντίστοιχα, το δε lms έχει τεθεί σε όλους τους ίσο με 0.185.

Η πλεγματοποίηση αυτού του χωρίου είναι ιδιαίτερα δύσκολη. Οι οπές είναι άτακτα χωροθετημένες και κάποιες απέχουν ελάχιστα μεταξύ τους· τα μέτωπα που έχουν αφετηρία το σύνορο αυτών των οπών δεν έχουν αρκετό χώρο να αναπτυχθούν και η σύγκλιση είναι αργή. Αυτή είναι μια γεωμετρία όπου η PM-BS γενικά αποτυγχάνει - εκτός αν τεθεί lms πολύ μικρότερο από την ελάχιστη απόσταση των οπών, πράγμα που δεν είναι πρακτικό. Η PM-WK ανταπεξέρχεται πολύ καλύτερα και συγκλίνει. Το πλέγμα που παράγεται περιέχει 3173 κόμβους και 2483 τετράπλευρα, βλ. σχ. 7. Όπως και παραπάνω, το πρωτογενές πλέγμα έχει μερικά προβλήματα αλλά το τελικό, σχ. 8, είναι άριστο.

δοκιμές #5 και #6 : δοκιμαστικό χωρίο “Δέντρο” και “Πιτηνό”

Σε αυτές τις δοκιμές πλεγματοποιούνται δυο χωρία σχετικά απλού σχήματος. Το πρώτο έχει AABB με διαστάσεις 15x17, το δε περίγραμμά του αποτελείται από 94 κόμβους με lms 0.5. Το τελικό πλέγμα έχει 255 κόμβους και 207 τετράπλευρα.

Το δεύτερο χωρίο έχει AABB με διαστάσεις 480x340 και το περίγραμμά του αποτελείται από 108 κόμβους με lms 10. Το τελικό πλέγμα έχει 295 κόμβους και 240 στοιχεία. Τα τελικά πλέγματα δείχνονται στα σχ. 9 & 10 αντίστοιχα.

δοκιμή #7 : δοκιμαστικό χωρίο “Νησί”

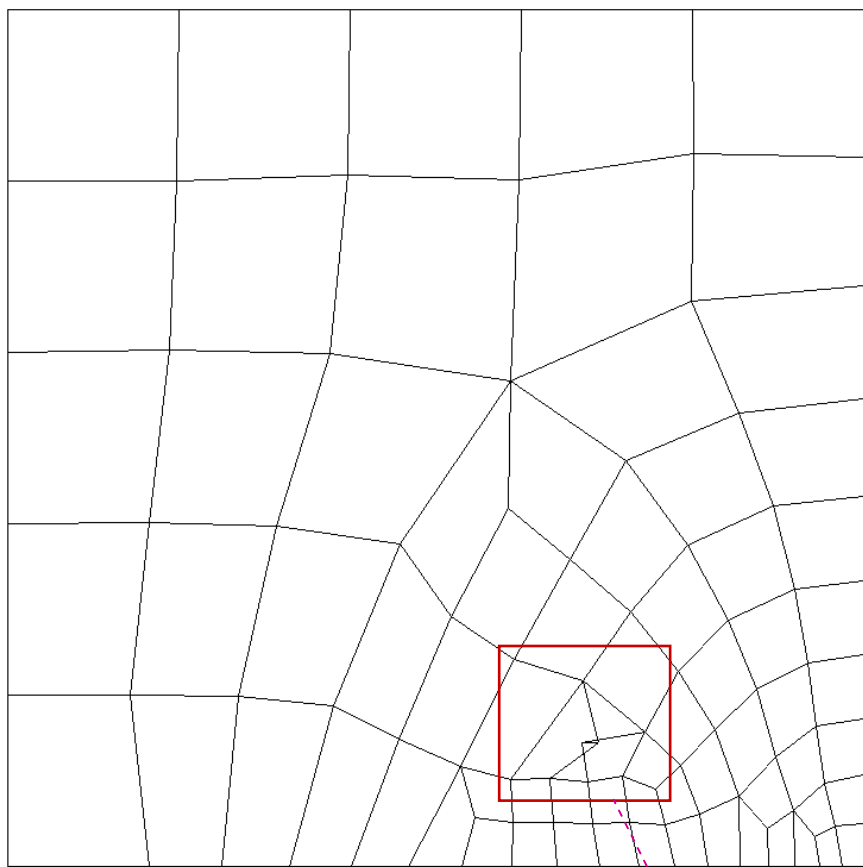
Στη τελευταία δοκιμή το χωρίο έχει πολύπλοκο σύνορο, με πολλές εσοχές και εξογκώσεις μικρού μεγέθους που εναλλάσσονται άτακτα. Το AABB του χωρίου έχει διαστάσεις 13380x11435. Το σύνορο αποτελείται από 356 κόμβους με lms 150. Το τελικό πλέγμα έχει 2158 κόμβους και 1920 τετράπλευρα.

Το συμπέρασμα από τις παραπάνω δοκιμές είναι ότι με την PM-WK μπορούν να πλεγματοποιηθούν με επιτυχία χωρία γεωμετρικώς πολύπλοκα και ότι γενικά εκδηλώνει τις ιδιότητες που αναμένονται από την θεωρία.

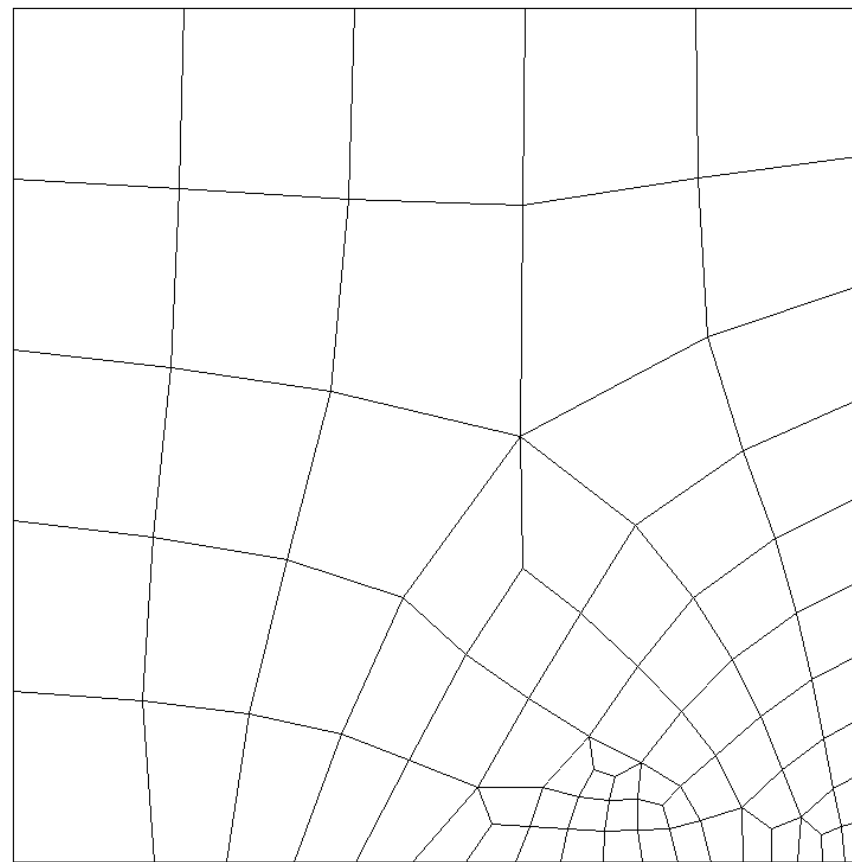
Θεωρητικά, το πρωτογενές πλέγμα που λαμβάνεται με την PM-WK είναι υψηλής ποιότητας λόγω των πολλαπλών ελέγχων και των μηχανισμών απόρριψης των ακατάλληλων στοιχείων. Στην πράξη όμως το πλέγμα μπορεί να έχει μικρές ατέλειες, ενίοτε και άκυρα στοιχεία. Οι δοκιμές έδειξαν ότι τα ανεπιθύμητα στοιχεία είναι στατιστικώς ελάχιστα, οφείλονται δε στην προγραμματιστική υλοποίηση του αλγόριθμου κι όχι σε θεωρητική αδυναμία της μεθόδου.

Σε όλα τα πλέγματα είναι φανερή η διάταξη των στοιχείων κατά στρώσεις, στην κατεύθυνση όπου το αντίστοιχο μέτωπο εκτείνεται και προελαύνει. Τα προβλήματα σύγκλισης και οι τυχόν ατέλειες του πλέγματος εμφανίζονται συνήθως στις περιοχές όπου διάφορα μέτωπα συναντώνται και πρέπει να ενωθούν καταλλήλως. Ο επιτυχής σχηματισμός στοιχείων σε αυτές τις περιοχές εξαρτάται από την τοπική γεωμετρία (κατεύθυνση προέλαυσης, μέγεθος στοιχείων, διαθέσιμος χώρος) και συχνά μπορεί να γίνει συμβιβασμός της ποιότητας των στοιχείων προκειμένου να ενωθούν τα μέτωπα και να προχωρήσει η γένεση. Ο καθαρισμός είναι ένα πολύ σημαντικό στάδιο όπου τέτοιες ατέλειες μπορούν να εντοπιστούν και να διορθωθούν, γι αυτό πρέπει να γίνεται πάντα, όχι απλά ως διεργασία βελτίωσης αλλά και ως τελευταίος μηχανισμός ελέγχου και διορθώσεων.

Επίσης, η τοποθέτηση τετράπλευρων όσο το δυνατόν συντεταγμένα, είναι ένα χαρακτηριστικό επιθυμητό στις προσομοιώσεις. Όπως φαίνεται στα παραπάνω παραδείγματα, η PM το εκδηλώνει σε μεγάλο βαθμό - αντίθετα με τις περισσότερες τεχνικές που παράγουν τετράπλευρα με σύνθεση τριγώνων (indirect meshing).



(α)

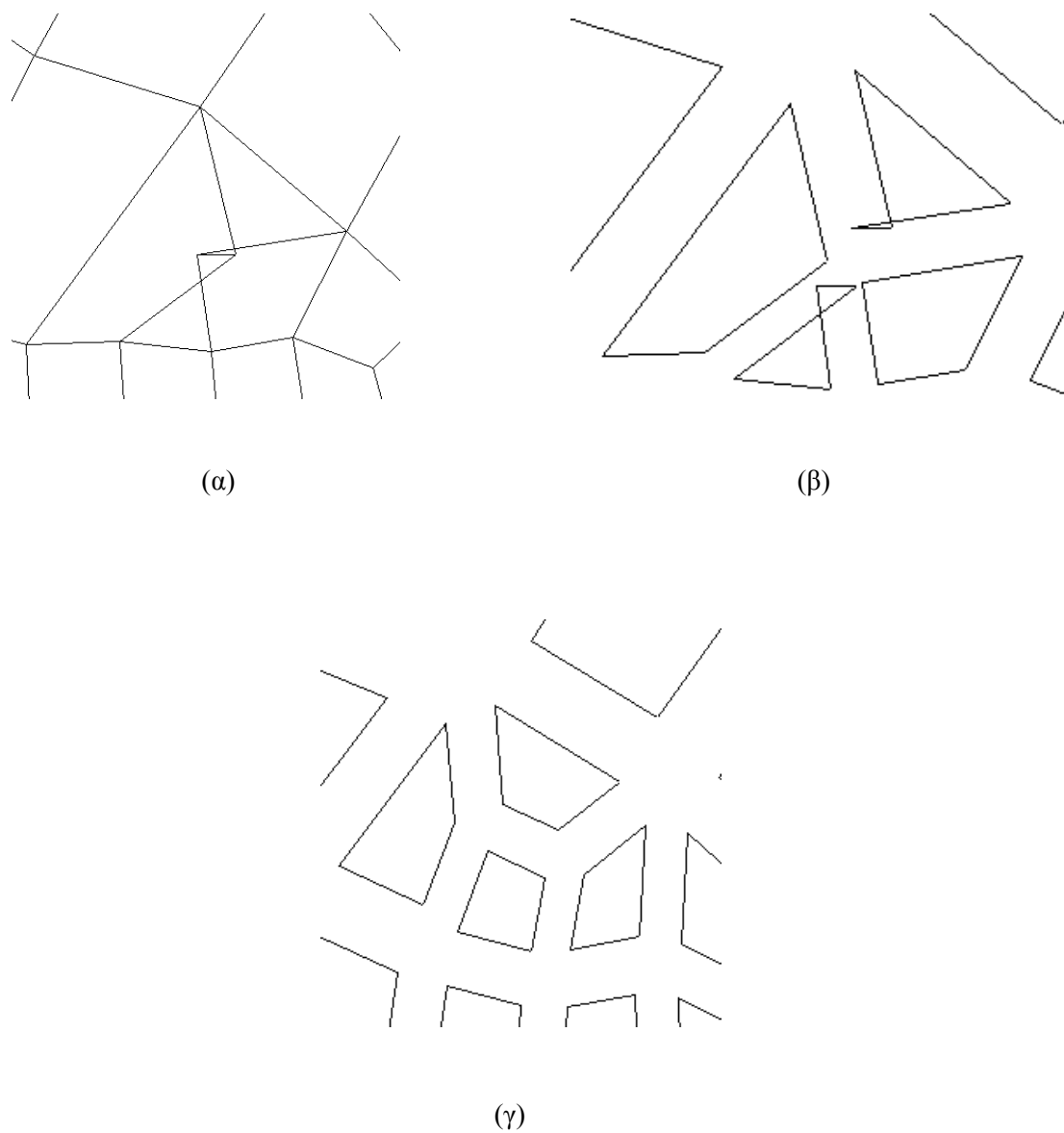


(β)

σχ. 1: Δοκιμαστικό χωρίο "Ορθογώνιο".

α) πλέγμα όπως προκύπτει από την PM-WK,

β) πλέγμα μετά από τον καθαρισμό και την ομαλοποίηση.

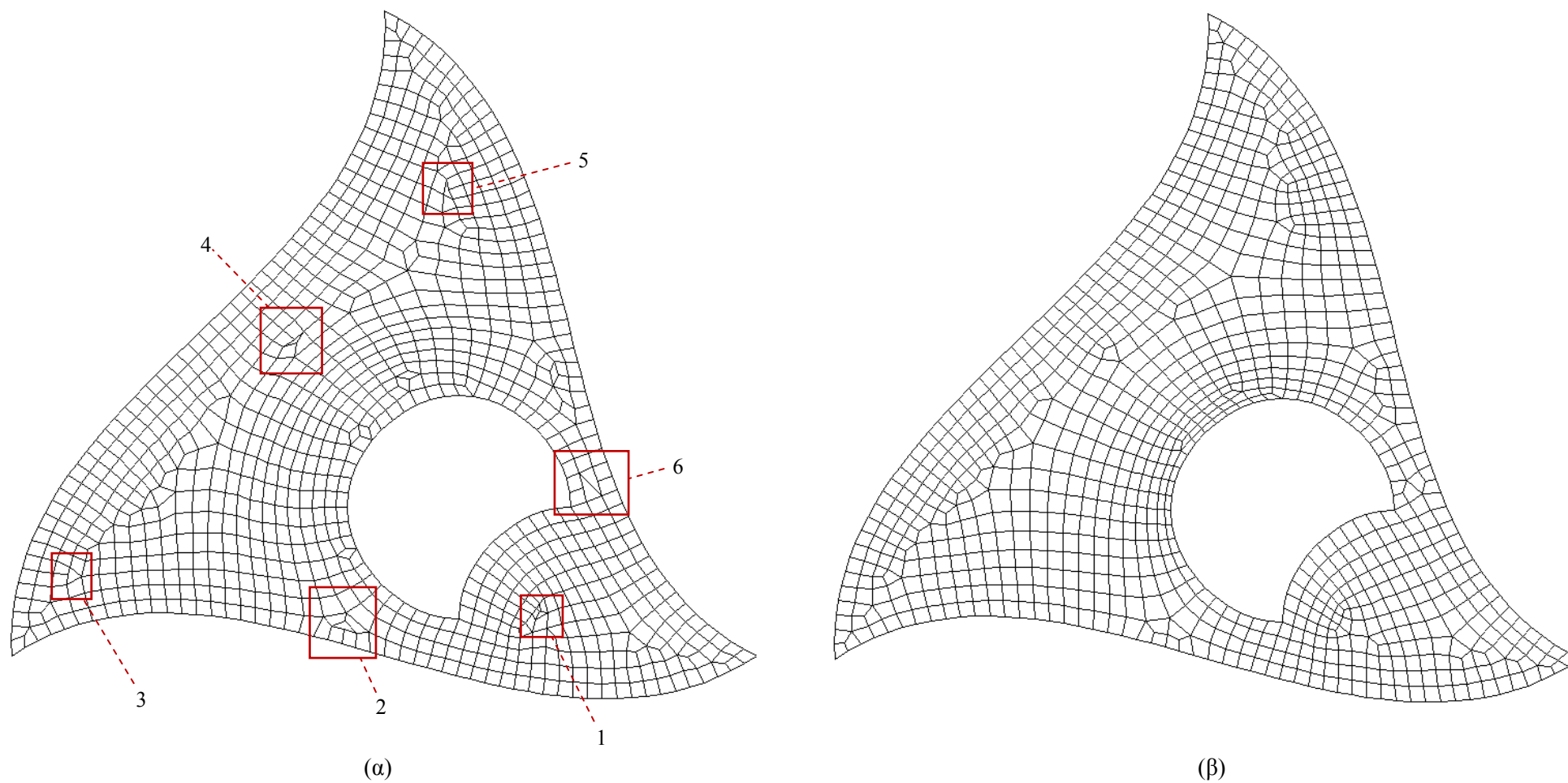


σχ. 2: Μεγέθυνση λεπτομέρειας του σχ. 1α.

α) απλή μεγέθυνση,

β) μεγέθυνση και συρρίκνωση των στοιχείων.

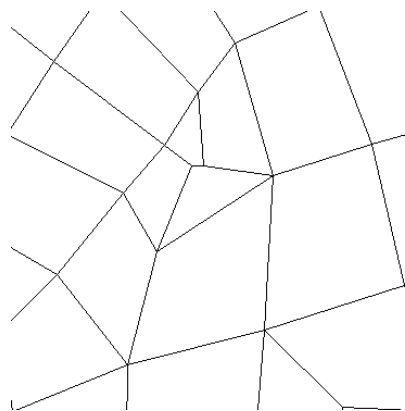
γ) τα στοιχεία μετά από τον καθαρισμό, διορθωμένα.



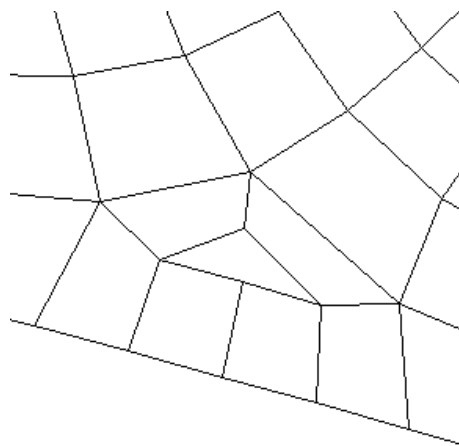
σχ. 3 : Δοκιμαστικό χωρίο "Καμπύλο τρίγωνο με οπή".

α) πλέγμα όπως προκύπτει από την PM-WK,

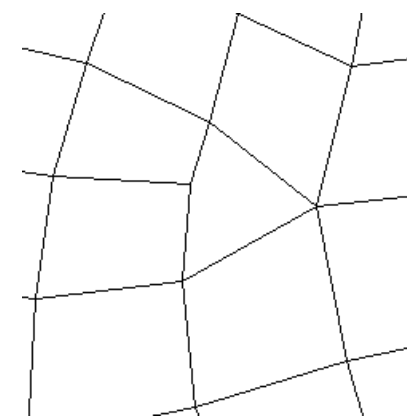
β) πλέγμα μετά από τον καθαρισμό και την ομαλοποίηση.



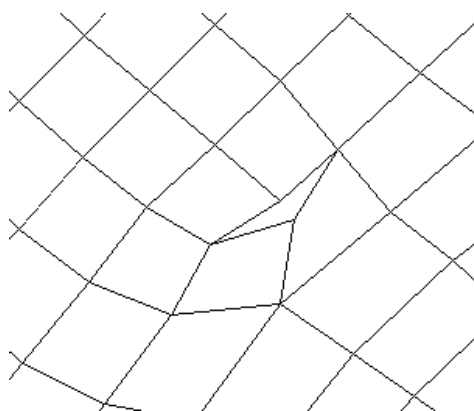
(1)



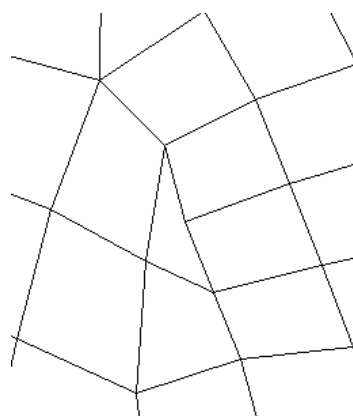
(2)



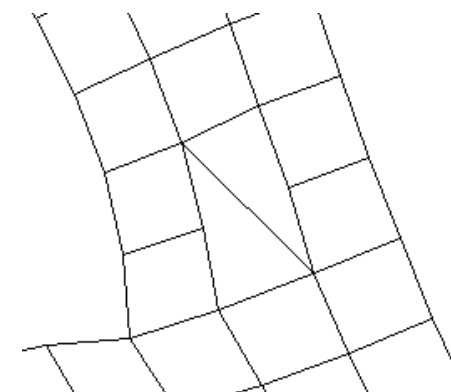
(3)



(4)

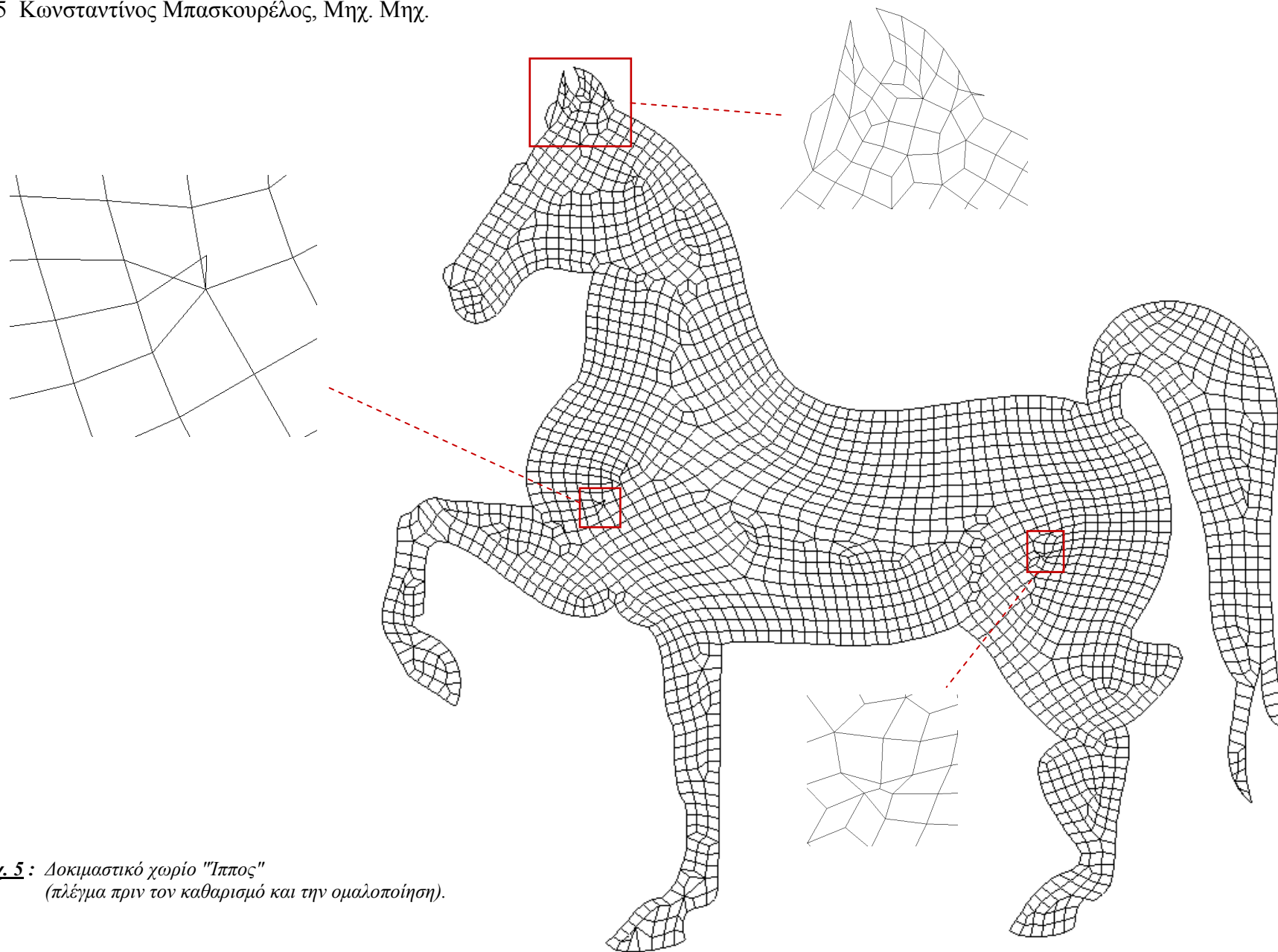


(5)

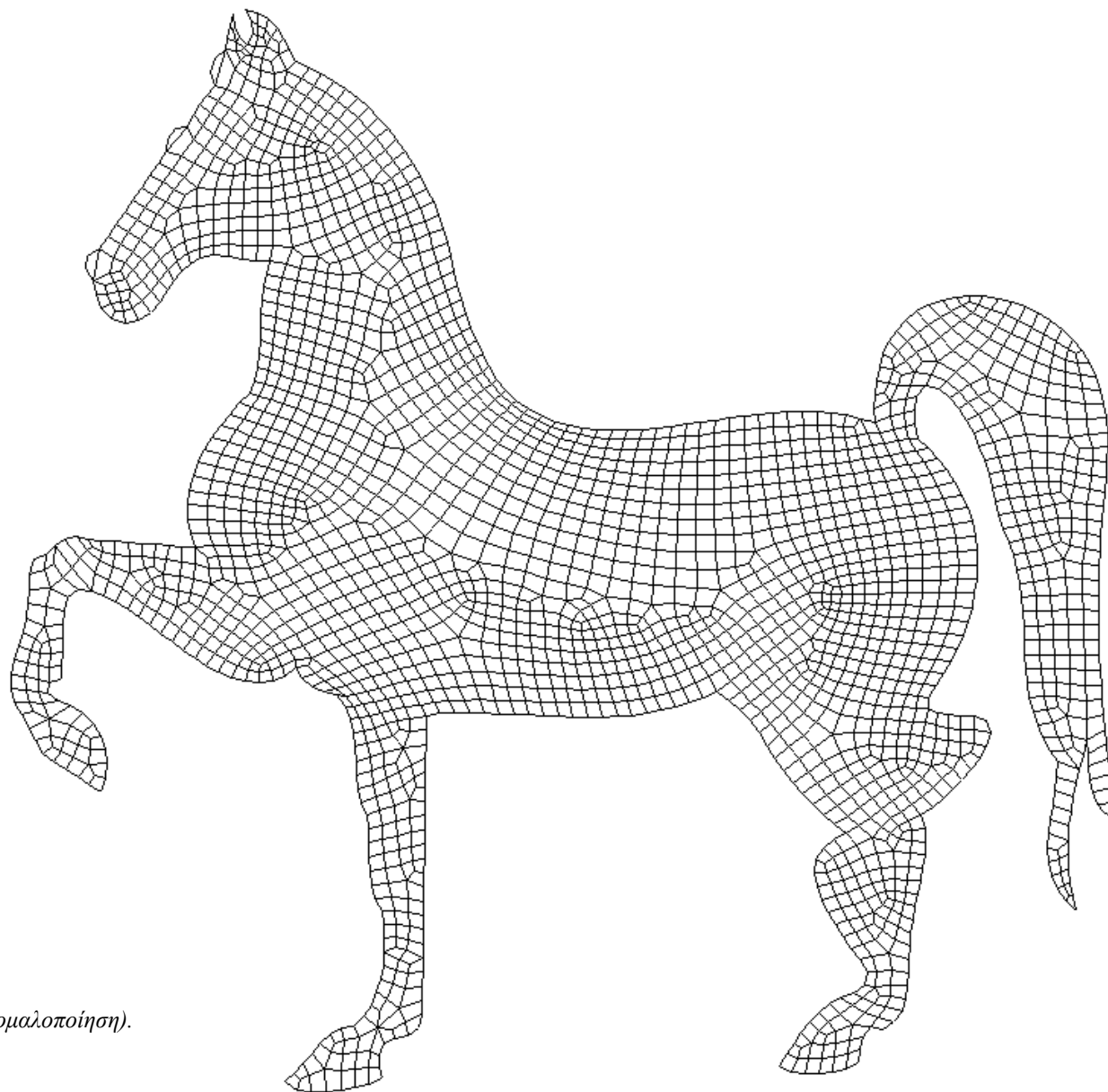


(6)

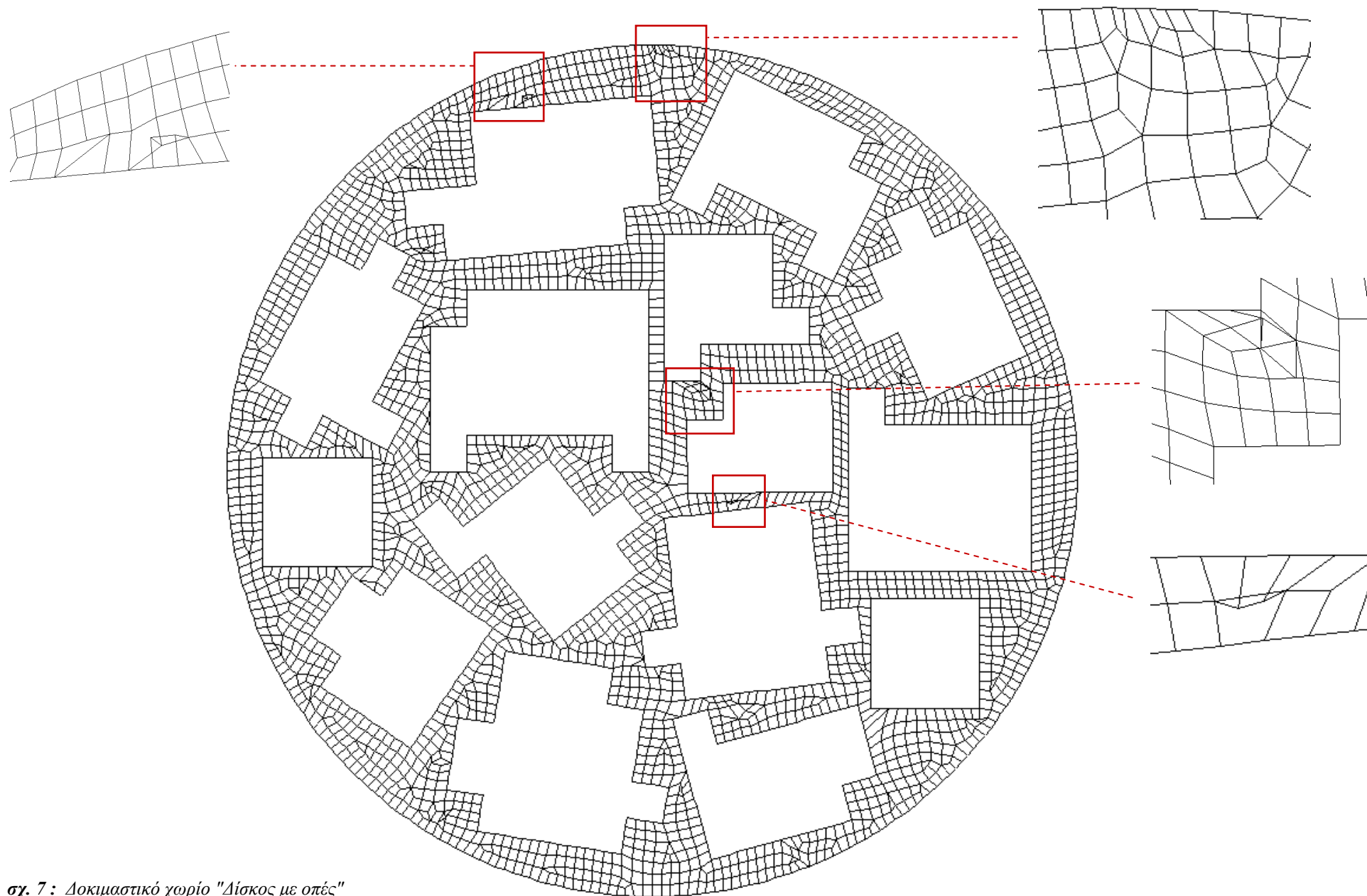
σχ. 4: Μεγέθυνση λεπτομερειών του σχ.3α
(πλέγμα πριν τον καθαρισμό και την ομαλοποίηση).



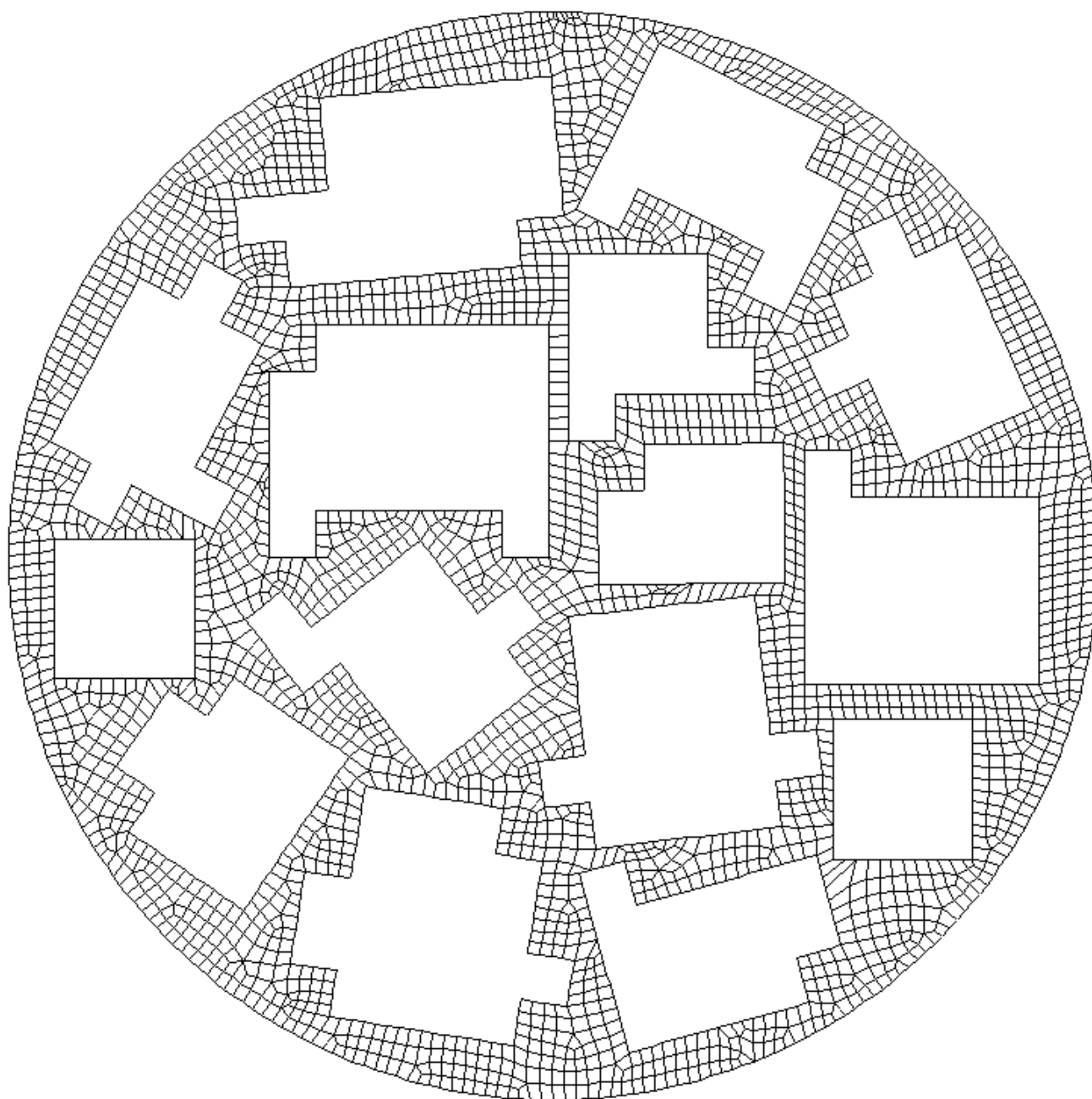
σχ. 5 : Δοκιμαστικό χωρίο "Ίππος"
(πλέγμα πριν τον καθαρισμό και την ομαλοποίηση).



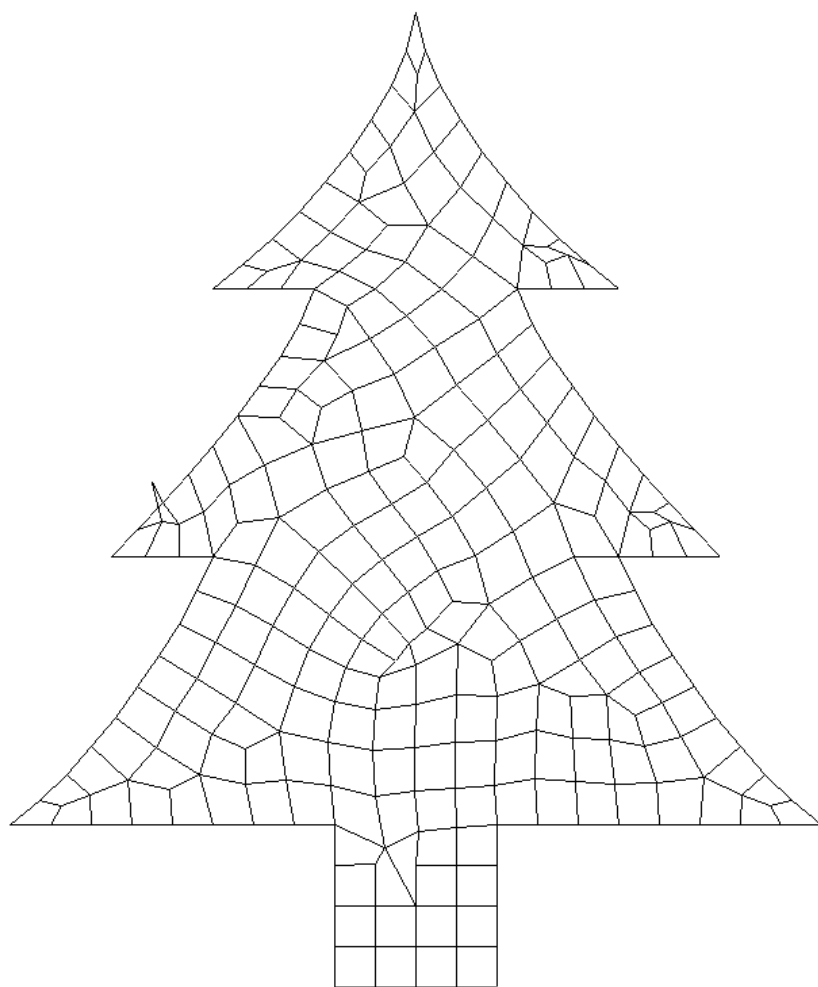
σχ. 6: Δοκιμαστικό χωρίο "Ίππος"
(πλέγμα μετά από τον καθαρισμό και την ομαλοποίηση).



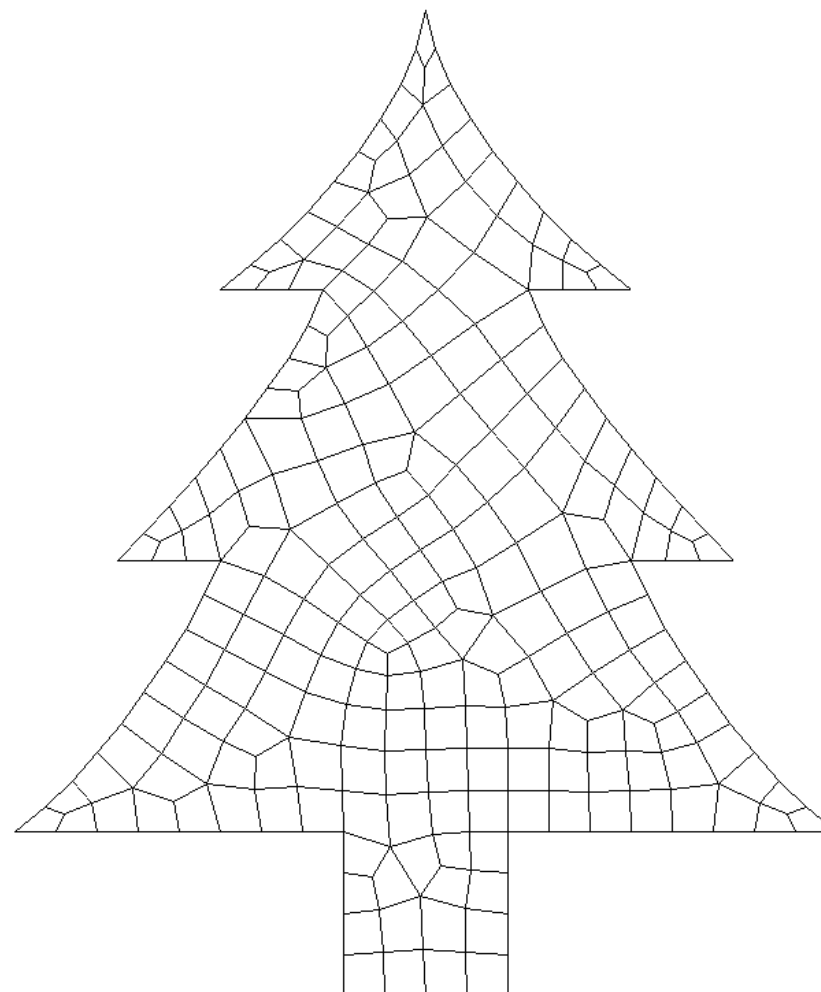
σχ. 7: Δοκιμαστικό χωρίο "Δίσκος με οπές"
(πλέγμα πριν τον καθαρισμό και την ομαλοποίηση).



σχ. 8 : Δοκιμαστικό χωρίο "Δίσκος με οπές"
(πλέγμα μετά από τον καθαρισμό και την ομαλοποίηση).



(α)

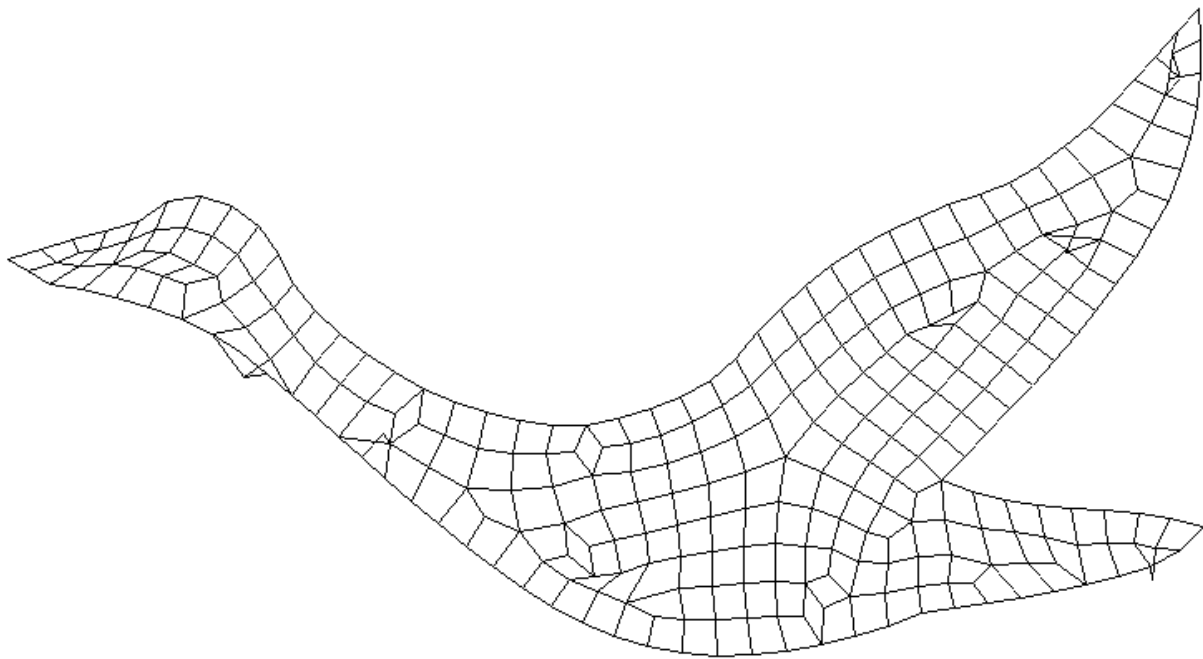


(β)

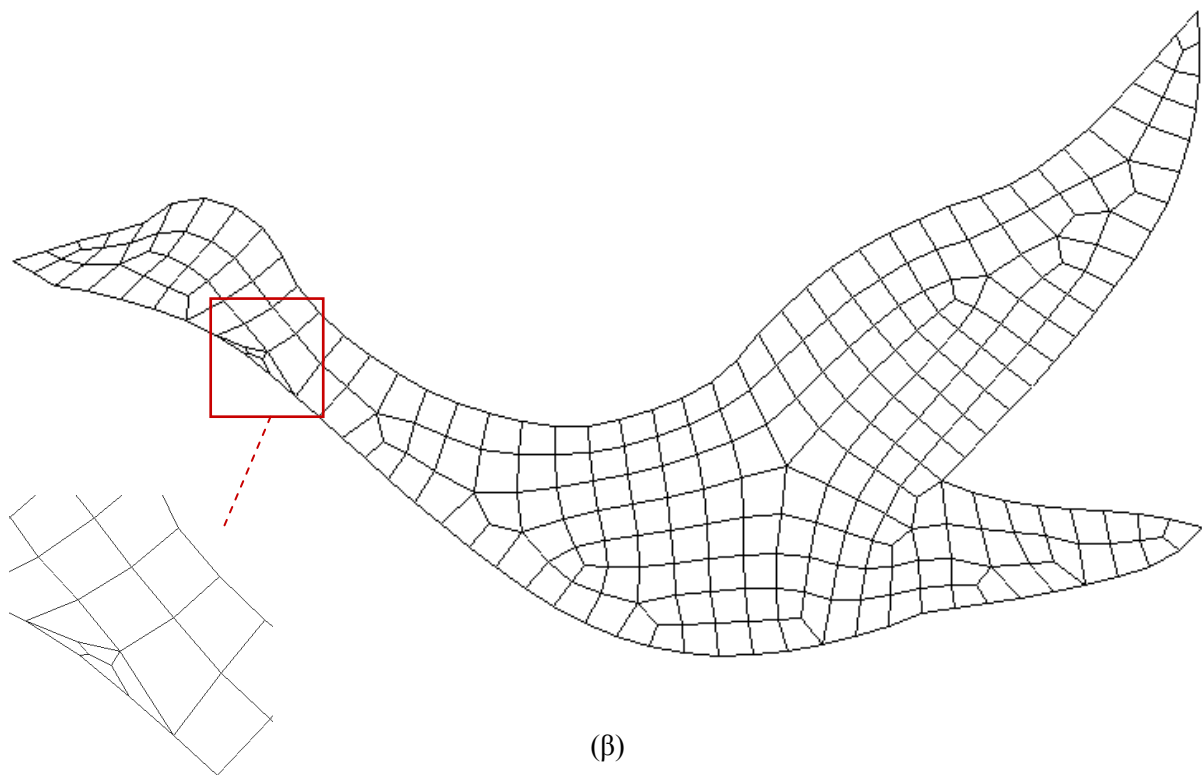
σχ. 9: Δοκιμαστικό χωρίο "Δέντρο".

α) πλέγμα όπως προκύπτει από την PM-WK,

β) πλέγμα μετά από τον καθαρισμό και την ομαλοποίηση.



(α)



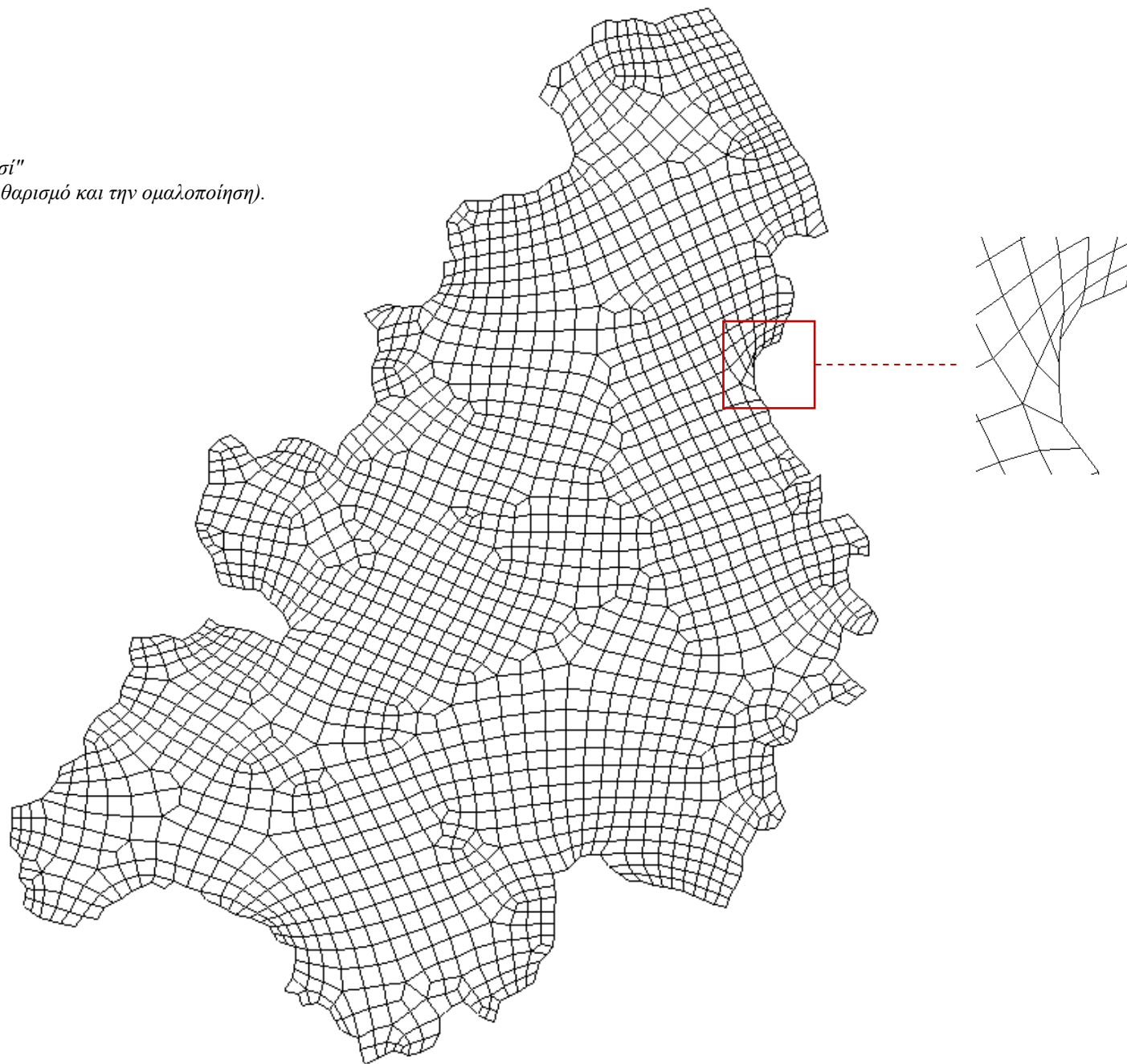
(β)

σχ. 10 : Δοκιμαστικό χωρίο "Πτηνό".

α) πλέγμα όπως προκύπτει από την PM-WK,

β) πλέγμα μετά από τον καθαρισμό και την ομαλοποίηση.

σχ. 11: Δοκιμαστικό χωρίο "Νησί"
(πλέγμα μετά από τον καθαρισμό και την ομαλοποίηση).



Παράρτημα Α : Έλεγχος της πυκνότητας του πλέγματος.

Όλες οι μέθοδοι γένεσης πλεγμάτων ενσωματώνουν κριτήρια που επιδιώκουν την καλύτερη δυνατή ποιότητα των παραγόμενων στοιχείων· ωστόσο, συχνά υπάρχει η ανάγκη να ελέγχεται το μέγεθος των στοιχείων ανεξάρτητα από το αποτέλεσμα των εγγενών διαδικασιών. Έτσι, πρέπει να υπάρχει δυνατότητα να διαφοροποιείται η πυκνότητα του πλέγματος στις περιοχές του κατά τη βούληση του χρήστη¹¹⁵.

A1. Τοπικό μέγεθος πλέγματος (lms).

Το μέγεθος των στοιχείων μπορεί να ελεγχθεί εύκολα ορίζοντας ένα κατώφλι για κάποια γεωμετρική παράμετρο το οποίο δεν πρέπει να ξεπεραστεί. Αυτό μπορεί να είναι π.χ. το ύψος του τριγώνου, η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου κλπ. Ο αμεσότερος έλεγχος επιτυγχάνεται όταν τεθεί κάποιο κατώφλι για τις πλευρές των στοιχείων. Συγκεκριμένα, το μέγιστο επιτρεπτό μήκος των πλευρών θεωρείται ως παράμετρος και λέγεται τοπικό μέγεθος πλέγματος (local mesh size - lms)¹¹⁶. Το lms μπορεί να αναφέρεται σε στοιχείο ή σε κόμβο· στην πρώτη περίπτωση (elemental lms), είναι το μέγιστο επιτρεπτό μήκος για όλες τις πλευρές του στοιχείου· στην δεύτερη (nodal lms), είναι το μέγιστο επιτρεπτό μήκος για όλα τα τμήματα που συνδέονται στον κόμβο¹¹⁷. Θέτοντας το lms σε όλα τα στοιχεία ή κόμβους, καθορίζεται το μέγεθος των στοιχείων, δηλ. η πυκνότητα του πλέγματος.

Για τη γένεση ενός πλέγματος συνήθως χρησιμοποιείται ένα αρχικό πλέγμα ή σύνορο, πολύ αραιό. Όταν η πυκνότητα τίθεται με κομβικό lms (nodal lms control), τότε κάθε τμήμα δεν επιτρέπεται να είναι μεγαλύτερο από το lms των κόμβων στα άκρα του· αν αυτό δεν ισχύει, τότε χωρίζεται σε μικρότερα τμήματα κατά τρόπο που να πληρείται αυτή η απαίτηση¹¹⁸. Παρόμοια τακτική ακολουθείται και αν η πυκνότητα τίθεται με στοιχειακό lms (elemental lms control). Γενικά είναι πιο απλό να θεωρείται ότι το lms πρωτογενώς αφορά τους κόμβους κι όχι τα στοιχεία¹¹⁹· έτσι, όταν σε ένα πλέγμα η πυκνότητα τίθεται με στοιχειακό lms, αυτό θα μετατρέπεται στην ισοδύναμή του κομβική τιμή. Η μετατροπή είναι εύκολη: τα lms των στοιχείων που συνδέονται σε κάποιον κόμβο αθροίζονται και βρίσκεται η μέση τιμή τους στον κόμβο· κάνοντάς το αυτό για όλους τους κόμβους, το στοιχειακό lms μετατρέπεται στο ισοδύναμο κομβικό lms.

Το lms δεν είναι ανάγκη να δίνεται από τον χρήστη. Είναι δυνατόν να γίνει μια προκαταρκτική ανάλυση και εκτίμηση σφάλματος σε ένα αραιό πλέγμα και να υπολογιστεί το lms που απαιτείται για να παραμένει το σφάλμα σε συγκεκριμένα όρια. Ουσιωδώς υπολογίζεται η απαιτούμενη πυκνότητα πλέγματος από το επιθυμητό σφάλμα. Τέτοιες τεχνικές είναι μεγάλης σημασίας για την προσαρμοστική γένεση πλεγμάτων (adaptive mesh generation).

¹¹⁵ Ενίοτε είναι επιθυμητό να ελέγχεται κατά βούληση και ο προσανατολισμός των στοιχείων αλλά αυτό δεν θα εξεταστεί εδώ.

¹¹⁶ Συχνά αναφέρεται και ως πλεγματική παράμετρος (mesh parameter). Ωστόσο, ο όρος lms είναι πιο σαφής δεδομένου ότι ως πλεγματική παράμετρος μπορούν να χαρακτηριστούν και μεγέθη που δεν αφορούν το μέγεθος των στοιχείων.

¹¹⁷ Επειδή μια πλευρά ορίζεται από δυο κόμβους, στην περίπτωση αυτή το μήκος της ορίζεται σταθμίζοντας κατάλληλα τα lms των δυο κόμβων.

¹¹⁸ Η σωστή εφαρμογή αυτής της διαδικασίας δείχνεται στο παράρτ. Β.

¹¹⁹ Αυτό φαίνεται στο παράρτ. Β όπου για την διακριτοποίηση των τμημάτων χρησιμοποιείται το κομβικό lms.

A2. Καθορισμός πυκνότητας με πλέγμα υποβάθρου.

Το μέγιστο μέγεθος ενός στοιχείου ή των πλευρών του μπορεί επίσης να καθοριστεί από τη θέση του στοιχείου σε ένα δευτερεύον πλέγμα, βοηθητικό του κύριου πλέγματος. Το βοηθητικό αυτό πλέγμα είναι τρόπον τινά ένα “υπόστρωμα” όπου επικάθεται το κύριο και λέγεται πλέγμα υποβάθρου. Δεδομένου ότι το αρχικό κύριο πλέγμα¹²⁰ περιέχεται στο πλέγμα υποβάθρου, θέτοντας το lms στο πλέγμα υποβάθρου, αυτό “κληροδοτείται” στο κύριο πλέγμα.

Το πλέγμα υποβάθρου χρειάζεται μόνον για να τεθεί το lms που θα έχουν οι διάφορες περιοχές του κύριου και επομένως μπορεί να είναι πάρα πολύ αραιό¹²¹. Το lms τίθεται στο πλέγμα υποβάθρου με τους τρόπους που αναφέρθηκαν παραπάνω (nodal ή elemental). Για την εύρεση του lms σε ένα σημείο P του κυρίου πλέγματος υπάρχουν διάφορες περιπτώσεις· εξαρτάται από το πώς δίνεται το lms στο πλέγμα υποβάθρου και τη θέση του P :

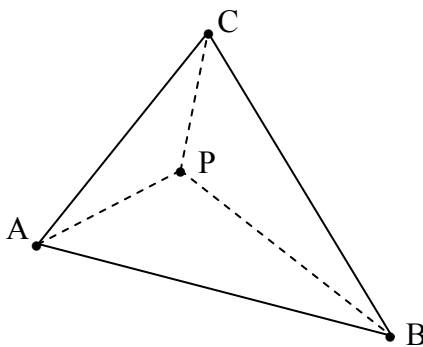
- Στο πλέγμα υποβάθρου δίνεται το lms στοιχειακά (elemental lms control). Βρίσκεται το στοιχείο υποβάθρου στο οποίο περιέχεται το P · το lms στο P είναι απλώς το lms του στοιχείου αυτού.
- Στο πλέγμα υποβάθρου δίνεται το lms κομβικά (nodal lms control). Βρίσκεται το στοιχείο υποβάθρου στο οποίο περιέχεται το P · με τους κόμβους του και το P σχηματίζονται τρία τρίγωνα· το lms στο P υπολογίζεται με παρεμβολή των κομβικών lms από τα εμβαδά των τριγώνων, βλ. σχ. 1, σύμφωνα με τη σχέση

$$\delta_P = \frac{\delta_A \Delta_{BCP} + \delta_B \Delta_{CAP} + \delta_C \Delta_{ABP}}{\Delta_{ABC}} \quad (1)$$

όπου είναι

- δ_P : το ζητούμενο lms στο σημείο P ,
- δ_A : το lms στον κόμβο A ,
- Δ_{ABC} : το εμβαδόν του τριγώνου ABC ,

και όμοια και για τα άλλα. Αν το P συμπίπτει με κάποιον κόμβο του πλέγματος υποβάθρου ή βρίσκεται επί της πλευράς κάποιου στοιχείου του, πρέπει να ληφθεί κατάλληλη μέριμνα (υπολογίζονται μέσοι όροι κλπ).



σχ. 1 : Γεωμετρία για τον υπολογισμό του κομβικού lms σε σημείο εντός τριγώνου.

¹²⁰ Μπορεί να πρόκειται απλώς για το αρχικό σύνορο.

¹²¹ Διευκρινίζεται ότι το lms τίθεται στο πλέγμα υποβάθρου αλλά αφορά το μέγεθος των στοιχείων του κύριου πλέγματος. Το πλέγμα υποβάθρου (τα στοιχεία του) δίνεται άμεσα από τον χρήστη.

A3. Καθορισμός πυκνότητας με πηγές.

Η χρήση των λεγόμενων “πηγών” (sources ή spots) αποτελεί έναν τρόπο να ελέγχεται η πυκνότητα του πλέγματος με μεγαλύτερη ευελιξία απ’ ό τι με το πλέγμα υποβάθρου. Αυτό διευκολύνει πολύ όταν απαιτείται πυκνό πλέγμα σε περιοχές που είναι δύσκολο να καλυφθούν με το πλέγμα υποβάθρου, π.χ. το εσωτερικό ενός κύκλου ή κατά μήκος μιας ευθείας. Οι πηγές αποτελούν μια προσθήκη στο πλέγμα υποβάθρου για καλύτερο τοπικό έλεγχο στο μέγεθος των στοιχείων και μπορούν να είναι δύο ειδών : σημειακές ή ακολουθίες (point ή line spots). Οι ακολουθίες πηγών είναι απλώς μια σειρά συνδεδεμένων σημειακών πηγών. Παρακάτω εξετάζονται αυτά τα δυο είδη.

A3.1 Σημειακή πηγή.

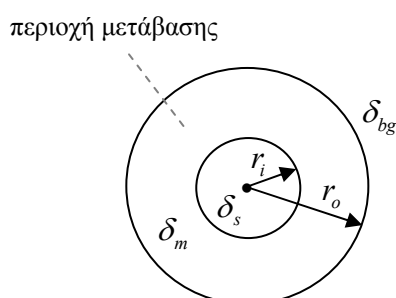
Η σημειακή πηγή είναι ουσιαδώς δύο ομόκεντροι κύκλοι στο εσωτερικό των οποίων υπολογίζεται κατάλληλα το lms ¹²². Ειδικότερα, μια σημειακή πηγή ορίζεται από τις εξής παραμέτρους :

- το κέντρο C και τις ακτίνες r_i και r_o των δυο ομόκεντρων κύκλων,
- το lms δ_s στο C.

Έστω ότι σε κάποιο σημείο P του πλέγματος υποβάθρου το lms είναι δ_{bg} , ανεξάρτητα από την παρουσία της πηγής · έστω επίσης ότι $d(P, C)$ είναι η απόσταση των P και C. Τότε, το lms δ_m λόγω της πηγής, δίνεται από τη σχέση

$$\delta_m = \begin{cases} \delta_s, & d(C, P) < r_i \\ \delta_s + \frac{d(C, P) - r_i}{r_o - r_i} (\delta_{bg} - \delta_s), & r_i \leq d(C, P) < r_o \\ \delta_{bg}, & d(C, P) \geq r_o \end{cases} \quad (2)$$

Όπως φαίνεται στο σχ. 2, η σημειακή πηγή αποτελείται από δυο περιοχές. Η μια είναι ο εσωτερικός κυκλικός δίσκος όπου το lms είναι σταθερό και τίθεται από τον χρήστη. Η άλλη είναι ο δακτύλιος που ορίζουν οι δυο κύκλοι και αποτελεί μια ζώνη μετάβασης από το εσωτερικό στο εξωτερικό της πηγής. Σε αυτή την ενδιάμεση ζώνη το lms βρίσκεται με γραμμική παρεμβολή από την (2).



σχ. 2 : Η σημειακή πηγή.

¹²² Το lms αυτό θεωρείται κομβικό ή στοιχειακό ανάλογα με το τι έχει οριστεί στο πλέγμα υποβάθρου όπου τίθεται η πηγή.

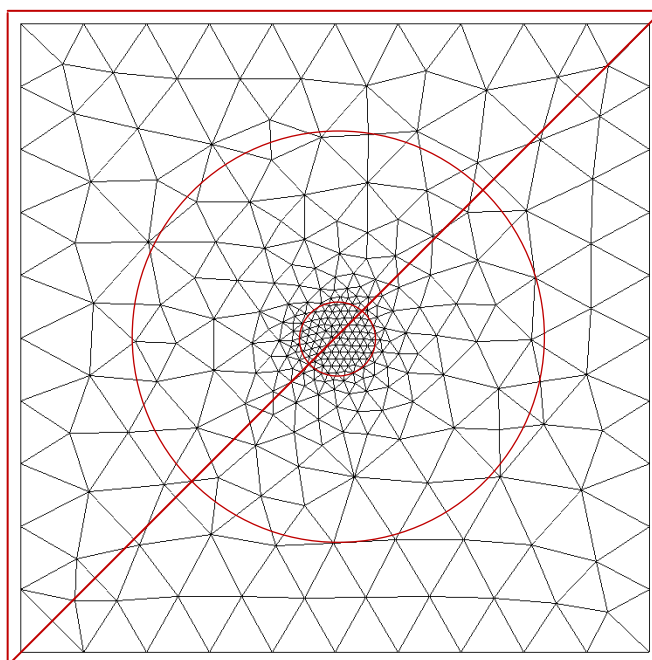
Δυο ή περισσότερες σημειακές πηγές μπορούν να συζευχθούν μεταξύ τους και να αποτελέσουν τη λεγόμενη ακολουθία πηγών [13]. Ειδικότερα, η σύζευξη εννοείται ως προς το ότι υπάρχει επήρεια από τις δυο πηγές ταυτόχρονα, υφίσταται δε κατά μήκος του τμήματος που συνδέει τα κέντρα των πηγών. Στην περιοχή επήρειας μιας ακολουθίας πηγών, το lms υπολογίζεται με σχέσεις παρεμβολής όπως η (2) αλλά πιο πολύπλοκες [13].

A3.2 Παράδειγμα σημειακής πηγής.

Στο σχ. 3 δείχνεται ένα τετραγωνικό χωρίο που διακριτοποιήθηκε με την AFM. Τα χαρακτηριστικά της διακριτοποίησης είναι :

- διαστάσεις χωρίου 40x40,
- έλεγχος πυκνότητας με πλέγμα υποβάθρου 2 τριγώνων και πηγή,
- το lms δίνεται στις 4 γωνίες του πλέγματος υποβάθρου ίσο με 4 (nodal lms),
- η πηγή έχει ακτίνες $r_i = 2$, $r_o = 10$ και lms ίσο με 0.5 στον εσωτερικό δίσκο.

Έξω από την πηγή το lms υπολογίζεται με την (1)¹²³ ενώ εντός αυτής δίνεται από την (2). Η σημαντική παρατήρηση στη δοκιμή αυτή είναι η μεγάλη ακτίνα του εξωτερικού κύκλου. Αυτό είναι απαραίτητο: η μεταβολή του lms από 0.5 στο 4 είναι μεγάλη, συνεπώς η περιοχή μετάβασης πρέπει να είναι αρκούντως μεγάλη για να μεταβληθεί ομαλά το μέγεθος των στοιχείων · διαφορετικά, στην περιοχή μετάβασης μπορεί να παραχθούν στοιχεία κακής ποιότητας. Αυτό είναι ένα μειονέκτημα των σημειακών πηγών που βασίζονται σε γραμμική παρεμβολή.



σχ. 3 : Σημειακή πηγή και πλέγμα υποβάθρου σε δοκιμαστικό χωρίο.

¹²³ Επισημαίνεται ότι δεν χρησιμοποιείται η (2/2) αλλά η (1).

Η (2/2) εφαρμόζεται όταν δίνεται το κομβικό lms στο αρχικό κύριο πλέγμα (ή στο σύνορό του). Όταν χρησιμοποιείται πλέγμα υποβάθρου όπως εδώ, τότε εφαρμόζεται η (1).

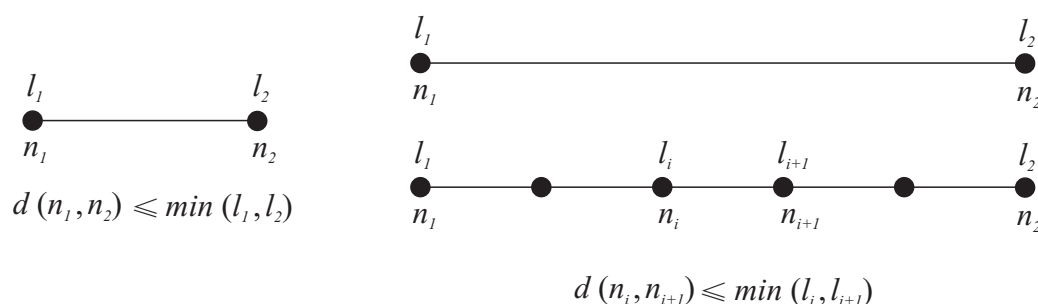
Παράρτημα Β : Γένεση κόμβων σε καμπύλες.

Β1. Εισαγωγή.

Στο παράρτημα αυτό θα παρουσιαστεί μια τεχνική για τη γένεση κόμβων επάνω σε ευθύγραμμα τμήματα και καμπύλες. Στη βιβλιογραφία υπάρχει γενική αντιμετώπιση του θέματος [12]. ωστόσο, η παρούσα τεχνική [13] είναι σχετικά απλή και στην πράξη αποδείχθηκε επαρκής και αποτελεσματική. Η τεχνική αυτή μπορεί να αποτελέσει το θεμέλιο στο οποίο να στηριχτεί η κατασκευή ενός γεννήτορα επίπεδων μη-δομημένων πλεγμάτων¹²⁴.

Επισημαίνεται ότι ο χειρισμός των ευθύγραμμων τμημάτων και των καμπύλων γίνεται χωριστά, δηλ. η διακριτοποίησή τους γίνεται με διαφορετικές ρουτίνες. Ωστόσο, η μέθοδος διακριτοποίησης είναι ίδια και για τα δύο.

Η γενική ιδέα είναι ότι κατά μήκος ενός ευθύγραμμου τμήματος ή μιας καμπύλης τίθενται νέοι κόμβοι ώστε να ικανοποιούνται οι απαιτήσεις που τέθηκαν για το τοπικό μέγεθος του πλέγματος (lms). Εν προκειμένω, το lms είναι τελικώς τιμές μηκών που αντιστοιχίζονται στους κόμβους^{125,126}. Το τμήμα μεταξύ δυο κόμβων πληρεί το lms που έχει προδιαγραφεί αν το μήκος του δεν ξεπερνά κανένα από τα δυο lms που έχουν τεθεί στα άκρα του, βλ. σχ. 1α. Όταν αυτή η απαίτηση δεν πληρείται, το τμήμα πρέπει να χωριστεί περαιτέρω θέτοντας κατά μήκος του επιπλέον κόμβους.



σχ. 1: Το κριτήριο για το τοπικό μέγεθος πλέγματος (lms) σε κάποιο τμήμα.

α) το μήκος του τμήματος είναι μικρότερο από τα lms στα άκρα του, άρα το κριτήριο ικανοποιείται.

β) το μήκος του τμήματος είναι μεγαλύτερο από τα lms στα άκρα του, άρα το κριτήριο δεν ικανοποιείται και εισάγονται επιπλέον κόμβοι.

Το πλήθος αυτών των νέων κόμβων και τα lms που τους αποδίδονται υπολογίζονται με παρεμβολή από τα lms των άκρων του αρχικού τμήματος. Η παρεμβολή αυτή γίνεται με τρόπο ώστε τα νέα τμήματα που ορίζονται να ικανοποιούν τα lms των νέων κόμβων, βλ. σχ. 1β.

¹²⁴ Χρησιμοποιήθηκε στην παρούσα υλοποίηση της PM για την διακριτοποίηση των συνόρων.

¹²⁵ Είναι φανερό ότι πρόκειται για το κομβικό (nodal) lms. Εδώ οφείλεται και η προτίμηση να θεωρείται ότι το lms αφορά πρωτογενώς τους κόμβους που αναφέρθηκε στην §Α1.

¹²⁶ Ως εκ τούτου, το lms παραπέμπει ευθέως στο μήκος του τμήματος, υπό αυτή δε την έννοια οι όροι “lms” και “μήκος τμήματος” μπορούν να χρησιμοποιούνται εναλλακτικά.

Όπως αναφέρθηκε, η μέθοδος αυτή εφαρμόζεται με τον ίδιο τρόπο είτε πρόκειται για ευθύγραμμα τμήματα είτε για καμπύλες · κάποιες ιδιαιτερότητες που έχει η εφαρμογή της στις καμπύλες θα αναφερθούν όπου κρίνεται σκόπιμο.

B2. Διακριτοποίηση ευθύγραμμων τμημάτων.

Για την διακριτοποίηση ενός ευθύγραμμου τμήματος με τον παραπάνω τρόπο, υπάρχουν τρεις διαφορετικές περιπτώσεις. Στην πρώτη περίπτωση, το μήκος του τμήματος είναι μικρότερο από τα l_{ms} των άκρων του· έτσι, δεν απαιτείται να διακριτοποιηθεί περαιτέρω. Στην δεύτερη περίπτωση, το μήκος του τμήματος είναι μεγαλύτερο από τα l_{ms} και των δυο άκρων του. Στην τρίτη, είναι μεγαλύτερο από το l_{ms} του ενός άκρου και μικρότερο από το l_{ms} του άλλου. Οι δυο αυτές περιπτώσεις απαιτούν διαφορετικό χειρισμό και ακολούθως εξετάζονται χωριστά.

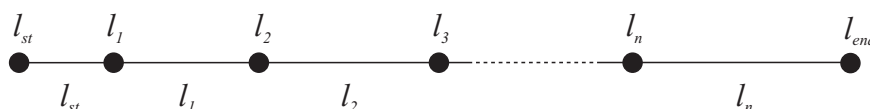
B2.1 Το μήκος του τμήματος είναι μεγαλύτερο από τα l_{ms} και των δυο άκρων του.

Έστω ότι l_{st} , l_{end} είναι τα l_{ms} στην αρχή και στο πέρας του εξεταζόμενου τμήματος · ας υποτεθεί ότι $l_{st} < l_{end}$. Έστω n το πλήθος των νέων κόμβων που πρέπει να εισαχθούν. Έστω επίσης ότι τα μήκη των τμημάτων που δημιουργούνται από την εισαγωγή των νέων κόμβων είναι ίσα με το μικρότερο από τα l_{ms} των άκρων τους. Όλα αυτά τα τμήματα αποτελούν ένα νέο τμήμα μήκους s στο οποίο η επικαμπύλια απόσταση των ακραίων κόμβων ισούται με¹²⁷

$$s = d(n_{st}, n_{end}) = l_{st} + l_{n_1} + l_{n_2} \dots + l_{n_n} \quad (1)$$

Ωστόσο, για να είναι ομαλή η μετάβαση μεταξύ των τιμών l_{st} και l_{end} , τα l_{ms} των νέων, ενδιάμεσων κόμβων πρέπει να υπολογιστούν με κατάλληλη παρεμβολή. Εν προκειμένω επιλέγεται το μήκος κάθε νέου τμήματος να σχετίζεται με το μήκος του προηγούμενου τμήματος γεωμετρικά, ήτοι τα μήκη των νέων τμημάτων να αποτελούν μια γεωμετρική σειρά με λόγο a . Έτσι είναι¹²⁸

$$\begin{aligned} s &= l_{st} + a l_{st} + a^2 l_{st} + \dots + a^n l_{st} \\ &= l_{st} (1 + a + a^2 + \dots + a^n) \\ &= \frac{l_{st} (1 - a^{n+1})}{1 - a} \end{aligned} \quad (2)$$



σχ. 2: Εισαγωγή νέων κόμβων σε τμήμα που δεν πληρεί το ζητούμενο l_{ms} στους ακραίους κόμβους του.

¹²⁷ Τονίζεται ότι το s δεν ισούται με το μήκος του αρχικού τμήματος.

¹²⁸ Επισημαίνεται ότι η εισαγωγή n κόμβων δημιουργεί $n + 1$ τμήματα.

Επίσης, για το l_{ms} l_{end} στο πέρας του τμήματος μπορεί να τεθεί

$$l_{end} = a^{n+1} l_{st} \quad (3)$$

Οι (2) και (3) αποτελούν ένα σύστημα του οποίου η λύση δίνει τα a και n . Ειδικότερα, αντικαθιστώντας την (3) στην (2) είναι

$$s = \frac{l_{st} \left(1 - \frac{l_{end}}{l_{st}} \right)}{1 - a} \quad (4)$$

και λύνοντας ως προς a δίνει

$$a = \frac{s - l_{st} + l_{end}}{s} \quad (5)$$

Με το a γνωστό, το n υπολογίζεται αμέσως από την (3), ήτοι

$$n = \frac{\ln(l_{end}/l_{st})}{\ln a} - 1 \quad (6)$$

Από την (6) είναι προφανές ότι για το n είναι απίθανο να προκύψει ακέραια τιμή. Έτσι, ως πλήθος των κόμβων λαμβάνεται το n στρογγυλεμένο προς τα πάνω,

$$\bar{n} = \lceil n \rceil \quad (7)$$

Εν προκειμένω, είναι σκόπιμο να υπάρχει δυνατότητα επιλογής αν το \bar{n} θα παραμείνει όπως προκύπτει από την (7) ή αν θα διορθώνεται κατάλληλα η τιμή του ώστε να είναι κατ' επιλογήν άρτιος ή περιττός. Έτσι, στην ρουτίνα που κάνει τον υπολογισμό τίθεται ένα όρισμα που δείχνει τι επιλογή ζητείται. Αν το \bar{n} ζητείται να είναι άρτιος ή περιττός ελέγχεται η τιμή του και αν δεν είναι, αυξάνεται κατά 1. Στο νέο \bar{n} αντιστοιχεί ένας νέος λόγος \bar{a} που δίνεται από τη σχέση

$$\bar{a} = \left(\frac{l_{end}}{l_{st}} \right)^{\frac{1}{1+\bar{n}}} \quad (8)$$

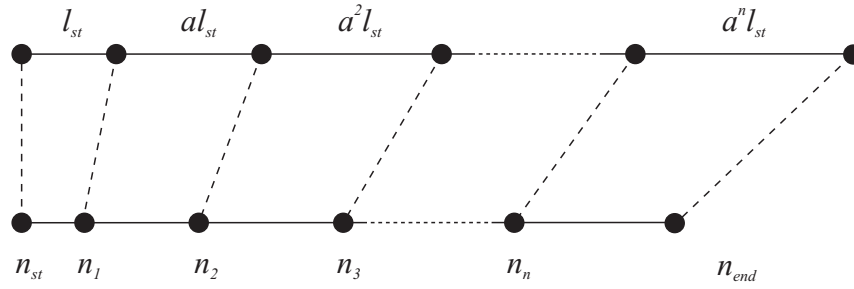
Το συνολικό μήκος του αρχικού τμήματος υπολογίζεται ξανά για το \bar{a} από την (2),

$$\bar{s} = \frac{l_{st} (1 - \bar{a}^{\bar{n}+1})}{1 - \bar{a}} \quad (9)$$

Αν το n έχει αυξηθεί, ήτοι $\bar{n} > n$, θα είναι και $\bar{s} > s$. Συνεπώς, το νέο μήκος \bar{s} πρέπει να μικρύνει ώστε να εξισωθεί με το αρχικό s , βλ. σχ. 3. Αυτό γίνεται με χρήση ενός βοηθητικού παράγοντα β ,

$$\beta = s/\bar{s} \quad (10)$$

που μεταθέτει ελαφρά τις θέσεις των νέων κόμβων προς την αρχή του τμήματος.



σχ. 3 : Μεταφορά της θέσης των νέων κόμβων ώστε το τελικό μήκος του τμήματος να συμπίπτει με το αρχικό.

Έτσι, η τελική θέση κάθε νέου κόμβου δίνεται από την αναδρομική σχέση¹²⁹

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_0 &= \mathbf{x}_{st} \\ \mathbf{x}_i &= \mathbf{x}_{i-1} + \beta \alpha^{i-1} l_{st} \underbrace{\frac{\mathbf{x}_{end} - \mathbf{x}_{st}}{s}}_{\gamma}, \quad i = 1, \dots, \bar{n} \end{aligned} \quad (11)$$

όπου \mathbf{x}_i είναι το διάνυσμα θέσης κάθε κόμβου και \mathbf{x}_{st} , \mathbf{x}_{end} η αρχή και το πέρας του αρχικού τμήματος.

Τα lms στους νέους κόμβους βρίσκονται με όμοια σχέση, ήτοι

$$\begin{aligned} l_0 &= l_{st} \\ l_i &= l_{i-1} + \beta \alpha^{i-1} l_{st} \underbrace{\frac{l_{end} - l_{st}}{s}}_{\gamma'}, \quad i = 1, \dots, \bar{n} \end{aligned} \quad (12)$$

Αν τα lms l_{st} , l_{end} είναι ίσα μεταξύ τους¹³⁰, οι παραπάνω πράξεις απλοποιούνται σημαντικά. Στην περίπτωση αυτή όλα τα νέα τμήματα είναι ίσα μεταξύ τους (ιδανικά είναι $l = l_{st} = l_{end}$). Τότε, η (7) που δίνει το πλήθος των νέων κόμβων γίνεται

$$\bar{n} = \left\lceil \frac{s}{l} \right\rceil - 1 \quad (13)$$

Όπως και παραπάνω, το \bar{n} μπορεί να αυξηθεί κατά 1 για να γίνει άρτιος ή περιττός αν αυτό ζητείται· οι θέσεις των νέων κόμβων και τα αντίστοιχά τους lms δίνονται από τις

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_i &= \mathbf{x}_{st} + \frac{i}{\bar{n} + 1} (\mathbf{x}_{end} - \mathbf{x}_{st}), \\ l_i &= l \end{aligned} \quad (14)$$

με $i = 0, \dots, \bar{n}$.

¹²⁹ Υπενθυμίζεται ότι το s δεν ισούται με το πραγματικό μήκος του αρχικού τμήματος, βλ. παρατ. 127. Γι αυτό, το μήκος πρέπει να πολλαπλασιαστεί με έναν επιπλέον παράγοντα ώστε να αναχθεί στο πραγματικό μήκος. Αυτή είναι η έννοια των γ και γ' που δείχνονται στις (11) και (12).

¹³⁰ Εφόσον είναι πραγματικοί, αρκεί η διαφορά τους να είναι μικρότερη από ένα κατώφλι ακρίβειας.

B2.2 Το μήκος του τμήματος είναι μεγαλύτερο από μόνον ένα από τα lms των άκρων του.

Όταν το μήκος του εξεταζόμενου τμήματος είναι μεγαλύτερο από το lms του ενός άκρου και μικρότερο από του άλλου άκρου, η διαδικασία είναι ελαφρώς διαφορετική. Όπως και παραπάνω, για να γίνεται ομαλά η μετάβαση μεταξύ των τιμών l_{st} και l_{end} , οι θέσεις των νέων κόμβων πρέπει να υπολογιστούν με παρεμβολή. Εδώ επιλέγεται η απόσταση κάθε νέου κόμβου από τον προηγούμενο να σχετίζεται με το lms του προηγούμενου κόμβου γραμμικά, ήτοι η παρεμβολή είναι γραμμική.

Ας υποθεθεί ότι $l_{st} < s < l_{end}$. Εφαρμόζοντας γραμμική παρεμβολή, οι σχέσεις που δίνουν τις θέσεις και τα lms των νέων κόμβων καταρχήν είναι

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_{st} \quad (15)$$

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_{i-1} + l_{i-1} \frac{\mathbf{x}_{end} - \mathbf{x}_{st}}{s}, \quad i = 1, \dots, \bar{n}$$

$$l_0 = l_{st} \quad (16)$$

$$l_i = l_{i-1} + l_{i-1} \frac{l_{end} - l_{st}}{s}, \quad i = 1, \dots, \bar{n}$$

Επειδή τα μήκη των νέων τμημάτων συνδέονται με μια ακανόνιστη αναδρομική σχέση, το πλήθος \bar{n} των νέων κόμβων είναι άγνωστο και δεν μπορεί να υπολογιστεί άμεσα. Ωστόσο, προγραμματιστικά είναι εύκολο να βρεθεί : το εξεταζόμενο τμήμα σαρώνεται με έναν βρόχο και μετράται πόσες φορές¹³¹ μπορεί να εφαρμοστεί π.χ. η (16) μέχρι να γίνει $l_i \geq l_{end}$.

Επιπλέον, αν ζητείται το \bar{n} να είναι άρτιος ή περιττός και δεν είναι, η τιμή του προσαυξάνεται κατά 1. Σε αυτή την περίπτωση, ο τελευταίος κόμβος που εισάγεται, θα βρίσκεται σχεδόν πάντα έξω από το εξεταζόμενο τμήμα, το δε συνολικό μήκος του διακριτοποιημένου τμήματος θα είναι μεγαλύτερο του αρχικού. Επομένως, το νέο μήκος \bar{s} πρέπει να συσταλεί ώστε να εξισωθεί με το αρχικό, s . Αυτό γίνεται και πάλι με τον παράγοντα β που ορίστηκε στη (10), ήτοι

$$\beta = s/\bar{s} \quad (10)$$

όπου

$$\bar{s} = |\mathbf{x}_{\bar{n}} - \mathbf{x}_{st}| \quad (17)$$

Έτσι, οι σχέσεις που δίνουν τις θέσεις και τα lms των νέων κόμβων τελικά είναι

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_{st} \quad (18)$$

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_{i-1} + \beta l_{i-1} \frac{\mathbf{x}_{end} - \mathbf{x}_{st}}{s}, \quad i = 1, \dots, \bar{n}$$

$$l_0 = l_{st} \quad (19)$$

$$l_i = l_{i-1} + \beta l_{i-1} \frac{l_{end} - l_{st}}{s}, \quad i = 1, \dots, \bar{n}$$

¹³¹ Προφανώς το αποτέλεσμα θα είναι πάντα ακέραιος.

Παράρτημα Γ : Κριτήρια ποιότητας τετράπλευρων.

Ήδη αναφέρθηκε στην §1/1 η επήρεια του πλέγματος στο σφάλμα της αριθμητικής λύσης. Ως εκ τούτου, χρειάζεται να αποτιμάται η ποιότητα του πλέγματος υπό την έννοια ότι για την ελαχιστοποίηση του σφάλματος το πλέγμα πρέπει να είναι βέλτιστο. Με αυτή την αφετηρία, προτάθηκαν διάφοροι τρόποι ορισμού και κριτήρια (δείκτες) της ποιότητας, τόσο των στοιχείων μεμονωμένα όσο και του πλέγματος συνολικά. Έτσι, υπάρχει μια μεγάλη ποικιλία κριτηρίων, κατάλληλων για υπολογισμό της ποιότητας σε όλες τις πρακτικές περιπτώσεις : πλέγματα επίπεδα, χωρικά, επιφανειακά, ανισότροπα, με τρίγωνα, τετράπλευρα, εξάεδρα κ.α. Τα κριτήρια αυτά αφορούν το σχήμα των στοιχείων ή/και στατιστικά μεγέθη γεωμετρικών και τοπολογικών ιδιοτήτων.

Σε ότι αφορά μεμονωμένα στοιχεία, ένας δείκτης ποιότητας (quality measure) είναι μια συνάρτηση γνησίως μονότονη, αναλλοίωτη υπό μεταφορά, στροφή, ανάκλαση και ομοιόμορφη κλιμάκωση (scaling). Η συνάρτηση αυτή πρέπει να λαμβάνει το ολικό της μέγιστο όταν το στοιχείο έχει το βέλτιστο σχήμα¹³² και το ολικό της ελάχιστο για τις εκφυλισμένες περιπτώσεις. Για τρίγωνα, το βέλτιστο σχήμα είναι το ισόπλευρο τρίγωνο, για δε τα παραλληλόγραμμα το τετράγωνο. Για λόγους ευκολίας, το πεδίο τιμών ενός τέτοιου δείκτη συχνά ανάγεται στο $[0,1]$. Μπορούν να οριστούν πολλές συναρτήσεις που ικανοποιούν τον παραπάνω ορισμό¹³³, κάποιες δε εξ αυτών που αφορούν τετράπλευρα μη-δομημένων πλεγμάτων είναι οι ακόλουθες.

κριτήριο γωνίας

Ήδη αναφέρθηκε στην §3.2/2 και είναι αυτό που χρησιμοποιείται στην PM :

$$q = 1 - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_{(\text{mod}(i+1,4))} \quad (1)$$

όπου \mathbf{e}_i είναι το μοναδιαίο διάνυσμα της i πλευράς του τετράπλευρου και $\text{mod}(a,b)$ η συνάρτηση που δίνει το υπόλοιπο της διαίρεσης των a, b .

κριτήριο στρέβλωσης (skew)

$$q = \max(\cos(\alpha)) \quad (2)$$

όπου α είναι η γωνία μεταξύ των ακμών του τετράπλευρου, βλ. σχ. 1α.

κριτήριο κωνικότητας (taper)

$$q = \frac{4 \min(A_1, A_2, A_3, A_4)}{A} \quad (3)$$

όπου A είναι το εμβαδόν του τετράπλευρου και A_i τα εμβαδά των τριγώνων που ορίζονται από το κέντρο του και τις κορυφές του, βλ. σχ. 1β.

¹³² Υπό την έννοια της ελαχιστοποίησης του σφάλματος.

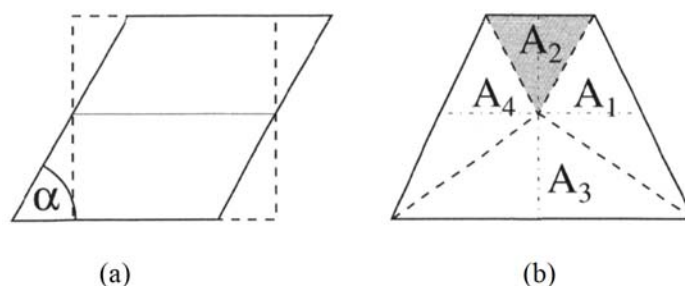
¹³³ Μπορεί να αποδειχτεί ότι όλες είναι ισοδύναμες μεταξύ τους

κριτήριο ελάχιστης γωνίας

Η ελάχιστη εσωτερική γωνία του τετράπλευρου.

κριτήριο μέγιστης γωνίας

Η μέγιστη εσωτερική γωνία του τετράπλευρου.



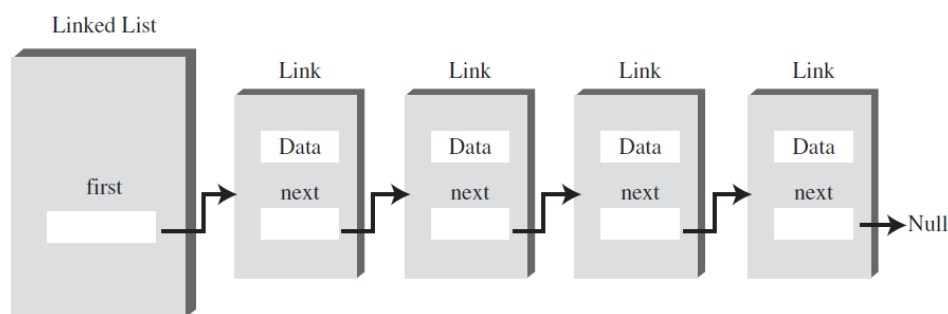
σχ. 1 : Γεωμετρική ερμηνεία κριτηρίων ποιότητας.
α) στρέβλωση, β) κωνικότητα.

Η ολική ποιότητα του πλέγματος υπολογίζεται από τα χαρακτηριστικά και την ποιότητα όλων των στοιχείων του, ωστόσο δεν υπάρχει ένας καθολικά αποδεκτός ορισμός της. Σε κάποιες περιπτώσεις αρκεί ένα στοιχείο κακής ποιότητας για να αχρηστευτεί όλο το πλέγμα, ειδικά στην CFD¹³⁴. τότε προτείνεται [12] να χρησιμοποιείται ως δείκτης συνολικής ποιότητας η ποιότητα του χειρότερου στοιχείου. Αντίθετα, άλλες μελέτες [16] παραβλέπουν τα μεμονωμένα στοιχεία κακής ποιότητας και συστήνουν τη χρήση κάποιου στατιστικού μεγέθους όπως τον γεωμετρικό μέσο της ποιότητας όλων των στοιχείων ή την κανονικοποιημένη τυπική απόκλιση των μηκών των πλευρών τους. Κάποιες προσομοιώσεις απαιτούν ειδικές ιδιότητες από το πλέγμα και χρησιμοποιούνται κριτήρια ποιότητας προσαρμοσμένα στις απαιτήσεις τους. Ωστόσο, στις περισσότερες περιπτώσεις τα κριτήρια που μετρούν απλές γεωμετρικές ιδιότητες των στοιχείων είναι επαρκή.

¹³⁴ CFD : Computational Fluid Mechanics (Υπολογιστική Μηχανική Ρευστών).

Παράρτημα Δ : Εισαγωγή στη θεωρία των Συνδεσμικών Λιστών.

Συνδεσμική Λίστα (linked list - LL) λέγεται μια συλλογή στοιχείων δεδομένων που είναι οργανωμένα και προσπελάσιμα με σειριακό (ακολουθιακό) τρόπο. Σε έναν πίνακα (array ή vector) τα στοιχεία είναι αποθηκευμένα σε διαδοχικές θέσεις μνήμης και οποιοδήποτε στοιχείο είναι άμεσα προσπελάσιμο με έναν δείκτη (index)· αυτός ο δείκτης ουσιαστικά συναρτά τη θέση του στοιχείου στον πίνακα με τη θέση μνήμης όπου είναι αποθηκευμένο· έτσι, ένα στοιχείο ενδιαφέροντος μπορεί να βρεθεί άμεσα. Αντίθετα, σε μια LL τα στοιχεία είναι αποθηκευμένα οπουδήποτε στη μνήμη (πάντως όχι αναγκαστικά σε διαδοχικές θέσεις) και δεν μπορούν να προσπελαστούν άμεσα. Κάθε στοιχείο μιας LL περιέχει έναν δείκτη μνήμης (pointer) ο οποίος δείχνει τη θέση της μνήμης όπου βρίσκεται το επόμενο στοιχείο της ακολουθίας. Για την προσπέλαση ή την εύρεση ενός συγκεκριμένου στοιχείου, η LL σαρώνεται ακολουθώντας τους δείκτες κάθε στοιχείου από το πρώτο στοιχείο της μέχρι να βρεθεί το ζητούμενο. Η θεμελιώδης αυτή αρχή δείχνεται στο σχ. 1.



σχ. 1 : Θεμελιώδης αρχή απλής συνδεσμικής λίστας.

Η σύνδεση των στοιχείων μιας LL μέσω δεικτών παρέχει κάποιες εξαιρετικά χρήσιμες δυνατότητες που δεν υπάρχουν στους πίνακες. Οι διαστάσεις ενός πίνακα είναι γενικά άγιες· η αυξομείωση του μεγέθους ενός πίνακα είναι μεν εφικτή αλλά άκομψη και έχει κόστος στην ταχύτητα και στη μνήμη. Π.χ., αν χρειαστεί να αυξηθεί το μέγεθος ενός πίνακα, πρέπει όλα τα στοιχεία του να αντιγραφούν σε έναν νέο μεγαλύτερο πίνακα, δηλ. σε μια άλλη περιοχή μνήμης. Η αντιγραφή αυτή επιβραδύνει και τείνει να κατακερματίσει μνήμη - ειδικά αν γίνεται συχνά¹³⁵. Ακόμη χειρότερα, αν χρειαστεί να εισαχθεί ένα νέο στοιχείο περίπου ενδιάμεσα στον πίνακα, όλα τα στοιχεία μετά από την επιθυμητή θέση εισαγωγής πρέπει να μετακινηθούν μια θέση πίσω ώστε να ελευθερωθεί χώρος για το νέο· όμοια, αν διαγραφεί ένα στοιχείο, πρέπει όλα τα ακόλουθά του να μετακινηθούν μια θέση εμπροσθεν για να καλυφθεί η κενή θέση.

¹³⁵ Όταν εφαρμόζεται κάτι τέτοιο, είθιστα η αύξηση να γίνεται κατά προκαθορισμένα βήματα (π.χ. ανά 10 ή 100 στοιχεία) και πάντως όχι ανά ένα στοιχείο. Αυτό υιοθετήθηκε και στο δοκιμαστικό πρόγραμμα που γράφηκε.

Όταν πρόκειται για πίνακες μεγάλου μεγέθους και οι διεργασίες αυτές γίνονται συχνά, είναι πολύ χρονοβόρες. Αντίθετα, σε μια LL είναι πολύ εύκολο να εισαχθούν νέα στοιχεία σε οποιαδήποτε θέση, να διαγραφούν και να αναδιαταχθούν ήδη υπάρχοντα. Αυτές οι δυνατότητες (αποδοτικότητα στην εισαγωγή, αναδιάταξη και διαγραφή στοιχείων) αποτελούν το κύριο πλεονέκτημα της LL έναντι του πίνακα. Ως εκ τούτου, οι LL χρησιμοποιούνται σε διεργασίες όπου

- η διάταξη των δεδομένων είναι εγγενώς ακολουθιακή,
- η προσπέλαση των δεδομένων γενικά δεν είναι τυχαία (random) και η επεξεργασία τους γίνεται ακολουθιακά,
- απαιτείται συχνά δυναμική διαχείριση της μνήμης στην επεξεργασία των δεδομένων (εισαγωγή/διαγραφή στοιχείων),
- δεν υπάρχει απαίτηση αποθήκευσης σε διαδοχικές θέσεις μνήμης.

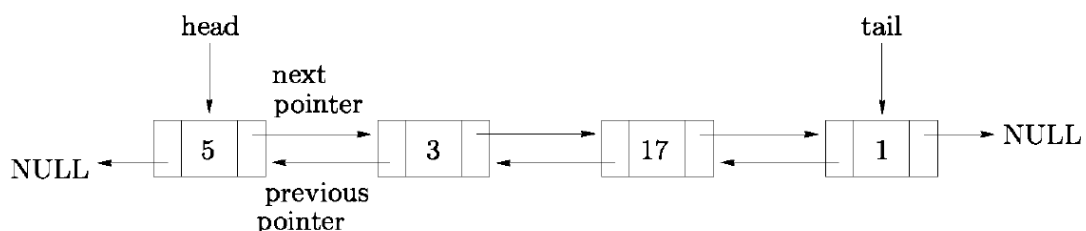
Οι περισσότερες από αυτές τις απαιτήσεις ισχύουν στην γένεση μη-δομημένων πλεγμάτων· ως αποτέλεσμα, η χρήση των συνδεσμικών λιστών στη γραφή τέτοιων προγραμμάτων είναι σχεδόν αναγκαιότητα.

Για προφανείς λόγους, τα στοιχεία μιας LL συχνά λέγονται “κόμβοι” (nodes) ή “δεσμοί” (links). Κάθε κόμβος περιέχει το κύριο δεδομένο καθώς και έναν δείκτη προς τον επόμενο κόμβο. Ο πρώτος και ο τελευταίος κόμβος λέγονται “κεφαλή” (head) και “ουρά” (tail) αντίστοιχα και συνήθως περιέχουν κάποια ειδική μεταβλητή που σηματοδοτεί την αρχή και το πέρας της λίστας.

Ανάλογα με τον τρόπο που υλοποιούνται τα παραπάνω, υπάρχουν διάφορα είδη συνδεσμικών λιστών. Αξιοσημείωτες παραλλαγές είναι η αμφίδρομη ή διπλή λίστα (Double Linked List - DLL), η κυκλική λίστα (Circular Linked List - CLL) και η αμφίδρομη κυκλική λίστα (Circular Double Linked List - CDLL) που αποτελεί συνδυασμό αυτών.

Οι κόμβοι μιας DLL περιέχουν έναν επιπλέον δείκτη και προς τον προηγούμενο κόμβο καθιστώντας εφικτή τη σάρωση και προς την ανάποδη κατεύθυνση. Στην CLL, ο δείκτης του τελευταίου στοιχείου δείχνει το πρώτο¹³⁶, οπότε η σάρωση των στοιχείων μπορεί να είναι ατέρμονη. Η CDLL έχει τις ιδιότητες των DLL και CLL, ήτοι σάρωση αμφίδρομη και ατέρμονη.

Ένα παράδειγμα διπλής λίστας (DLL) δείχνεται στο σχ. 2. Εν προκειμένω τα δεδομένα είναι απλοί αριθμοί, η δε αρχή και το πέρας της λίστας (head, tail) σηματοδοτούνται με κενούς δείκτες (null).



σχ. 2: Αμφίδρομη συνδεσμική λίστα.

¹³⁶ Σε μια απλή λίστα ο δείκτης του πρώτου και του τελευταίου κόμβου είναι κενός (null).

Σε μια LL, η εισαγωγή, αναδιάταξη και διαγραφή των στοιχείων γίνεται απλώς αλλάζοντας τον στόχο των δεικτών · τα στοιχεία δεν μετακινούνται στη μνήμη κι αυτό είναι που κάνει τις LL τόσο αποδοτικές σε τέτοιες διεργασίες. Η σάρωση επίσης γίνεται όπως αναφέρθηκε ακολουθώντας τους δείκτες. Για όλες αυτές τις διεργασίες και τις συναφείς τους πρέπει να γραφούν οι κατάλληλες ρουτίνες, ανάλογα με το είδος και την υλοποίηση της LL. Π.χ., για την DLL του σχ. 2 μπορεί να είναι

αναζήτηση για ένα στοιχείο x :

```
Procedure ListContains (List , x)
  node ← head(List)
  WHILE node ≠ NULL AND node.value ≠ x
    node ← node.next
  END WHILE
  RETURN node (if node ≠ NULL, then x is present in the list)
```

εισαγωγή τη λίστα ενός νέου στοιχείου x μετά από δεδομένη θέση :

```
Procedure ListAppend (List , current , x)
  node ← newNode
  node.value ← x
  node.next ← current.next ; node.prev ← current
  current.next.prev ← node ; current.next ← node
```

Οι συμβολισμοί στα παραπάνω αποσπάσματα είναι προφανείς. Όλες οι συναφείς διεργασίες που χρειάζονται υλοποιούνται με παρόμοιο τρόπο. Σε ότι αφορά την Μέθοδο Επίστρωσης, ήδη αναφέρθηκε στο κεφ. 3 ότι η πιο εύλογη αναπαράσταση και αποθήκευση των μετώπων και των κόμβων είναι με αμφίδρομες κυκλικές λίστες (CDLL). Λόγω της μεγάλης πρακτικής τους χρησιμότητας, οι συνδεσμικές λίστες μελετώνται εκτενώς σε όλα τα βιβλία Δομών Δεδομένων, π.χ. [28], η δε εφαρμογή τους σε θέματα πλεγματοποίησης είναι κοινοτοπία και δεν παρουσιάζει δυσκολίες.

Αναφορές και Βιβλιογραφία

- [1] “*Quality & Control - Two reasons why Structured Grids aren't going away*”,
J. Chawner,
<http://www.pointwise.com/theconnector/March-2013/Structured-Grids-in-Pointwise.shtml>,
PointWise, 2013.
- [2] “*A comparison of all hexagonal and all tetrahedral finite element meshes for elastic and elastic-plastic analysis*”,
S. Benzley, E. Perry, K. Merkley, B. Clark, G. Sjaardema,
Proc. 4th International Meshing Roundtable, Sandia National Laboratories, Albuquerque, p. 179–192, 1995.
- [3] *Computational Fluid Dynamics 2nd ed.*,
T. Chung,
p. 315, Cambridge University Press, 2010.
- [4] “*On Isoparametric vs Linear Strain Triangular Elements*”,
J. Stricklin, W. Ho, E. Richardson, W. Haisler,
International Journal for Numerical Methods in Engineering,
vol. 11, p. 1041-1055, 1977.
- [5] “*A Performance Study of Tetrahedral and Hexahedral Elements in 3D Finite Element Structural Analysis*”,
A. Cifuentes, A. Kalbag,
Finite Elements in Analysis and Design,
vol. 12, p. 313-318, 1992.
- [6] “*Characterization of the quadrilateral meshes of a surface which admit a compatible hexahedral mesh of the enclosed volume*”,
S. Mitchell,
Proc. STACS '96, Grenoble, 1996.
- [7] “*Paving: A new approach to automated quadrilateral mesh generation*”,
T. D. Blacker, M. B. Stephenson,
International Journal for Numerical Methods in Engineering,
vol. 32, p. 811-847, 1991.
- [8] “*Generalized 3D Paving: An automatic quadrilateral surface mesh generation algorithm*”,
R. J. Cass, S. E. Benzley, R. J. Meyers, T. D. Blacker,
International Journal for Numerical Methods in Engineering,
vol. 39, p. 1475-1489, 1996.
- [9] “*Redesign of the paving algorithm: Robustness enhancements through element by element meshing mesh generation algorithm*”,
D. R. White, P. Kinney,
Proc. of the 6th International Meshing Roundtable, p. 323-335, 1997.

- [10] *Quadrilateral mesh generation using paving method*,
J. H. Kim,
CS294-5 Project 2, August 1999.
- [11] *Mesh Generation, applications to Finite Elements 2nd ed.*,
P. J. Frey, P. L. George,
Wiley, 2008.
- [12] *Delaunay Triangulation and Meshing*,
P. L. George, H. Borouchaki,
Hermes, Paris, 1998.
- [13] *Finite Element Mesh Generation*,
B. H. Topping, B. Cheng,
Saxe-Coburg Publications, 2002.
- [14] *A survey of Unstructured Mesh Generation Technology*,
S. Owen,
Department of Civil & Environmental Engineering,
Carnegie Mellon University, Pittsburgh, PA, 1998.
- [15] “*Using conjoint meshing primitives to generate quadrilateral and hexahedral elements in irregular regions*”,
M. B. Stephenson, T.D. Blacker,
ASME, Computers in Engineering Conference, p. 163-172, 1989.
- [16] “*Proposal Benchmarks for 3D Unstructured Tetrahedral Mesh Optimization*”,
J. Dompierre, P. Labbe, F. Guibault, R. Camareri
Report CERCA R98-91, Ecole Polytechnique Montreal,
Centre de Recherche en Calcul Applique 5160, H3X 2H9,
Canada, September, 1998.
- [17] “*Development of an automatic quadrilateral mesh generation for the simulation of curved crack growth*”,
Y. Kawamura, Y. Mu, Y. Sumi,
Trans. of Japan Society for Computational Engineering and Science,
Paper no 19990024, 1999.
- [18] “*CleanUp: Improving Quadrilateral Finite Element Meshes*”,
P. Kinney,
Proc. of the 6th International Meshing Roundtable, p. 449-461, 1997.
- [19] “*Post refinement element shape improvement for quadrilateral meshes*”,
M. L. Staten, S. A. Canann,
ASME, Trends in Unstructured Mesh Generation, p. 6-16, 1997.
- [20] “*Plastering: a new approach to automated 3D hexahedral mesh generation*”,
M. B. Stephenson, S. A. Canann, T. D. Blacker,
Technical Report SAND89-2192, Sandia National Laboratories,
Albuquerque, New Mexico, 1992.

- [21] “*A high-quality advancing front technique using recursive domain subdivision*”,
F. Ladeinde, K. Alabi.,
Proc.. 6th Int. Conf. Numerical Grid Generation in Computational
Field Simulations, p. 431-446, 1998.
- [22] “*Quadrilateral mesh generation via geometrically optimized domain decomposition*”,
D. Nowotny,
Proc. of the 6th International Meshing Roundtable, p. 309-320, 1997.
- [23] “*A two dimensional paving mesh generator for triangles with controllable aspect ratio and quadrilaterals with high quality*”,
B. van Rens, D. Brokken, W. Brekelmans, F. Baaijens,
Engineering with Computers, vol. 14 (3), p. 248-259, 1998.
- [24] “*Combining quadrilateral and triangular meshing using the advancing front approach*”,
M. Rees,
Proc. of the 6th International Meshing Roundtable, p. 337-348, 1997.
- [25] “*Q-Morph: An indirect approach to advancing front quad meshing*”,
S. Owen, M. Straten, S. Canann, S. Saigal,
International Journal for Numerical Methods in Engineering,
vol. 44, p. 1317-1340, 1999.
- [26] *Real Time Collision Detection*,
C. Ericson,
Morgan Kaufman, 2005.
- [27] *Adaptive Precision Floating-Point Arithmetic and Fast Robust Predicates for Computational Geometry*,
J. R. Schewchuk,
Technical Report CMU-CS-96-140, Carnegie Melon University, 1996.
- [28] *Data Abstraction and Problem Solving with C++ 5th ed*,
M. Carrano,
Addison Wesley, 2006.