Εθνικο Μετσοβιο Πολυτεχνειο

Σχολη Εφαρμοσμενων Μαθηματικων και Φυσικων Επιστημων

Κεντρικό Οριακό Θεώρημα για Μαρκοβιανές Αλυσίδες

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Συγγραφέας:
Ιωάννης Κερεστετζης

Επιβλέπων Καθηγητής:
Μιχαήλ Λουλακης

Τομέας Μαθηματικών

Αθήνα
Σεπτέμβριος 2015

Εθνικο Μετσοβιο Πολυτεχνειο

Σχολη Εφαρμοσμενων Μαθηματικων και Φυσικων Επιστημων

Κεντρικό Οριακό Θεώρημα για Μαρκοβιανές Αλυσίδες

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Συγγραφέας:
Ιωάννης Κερεστετζης

Επιβλέπων Καθηγητής:
Μιχαήλ Λουλακης

Τριμελής εξεταστική επιτροπή:

- Καρώνη-Ρίτσαρντσον Χρυσηίς, Καθηγήτρια
- Λουλάκης Μιχαήλ, Επίκουρος Καθηγητής
- Ψαράκος Παναγιώτης, Καθηγητής

Τομέας Μαθηματικών

Αθήνα
Σεπτέμβριος 2015

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Μιχαήλ Λουλάκη για την καθοδήγηση και τη σημαντική βοήθεια του καθ' όλη τη διάρκεια εκπόνησης της παρούσας διπλωματικής. Επιπλέον, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου και τους φίλους μου που με στήριξαν όλα αυτά τα χρόνια ώστε να ολοκληρώσω με επιτυχία τις σπουδές μου.

Περίληψη

Η διπλωματική εργασία έχει ως θέμα τις διακυμάνσεις γύρω από το νόμο των Μεγάλων Αριθμών για προσθετικά συναρτησιακά μαρκοβιανών διαδικασιών.
Η μελέτη των Οριακών Θεωρημάτων για Μαρκοβιανές Αλυσίδες προέκυψε από την ανάγκη μελέτης φαινομένων διάχυσης στη Στατιστική Μηχανική. Έτσι, ενώ από τη δεκαετία του 1930 οι Kolmogorov και Doeblin ξεκίνησαν να ασχολούνται με τα Οριακά Θεωρήματα για Μαρκοβιανές Αλυσίδες, ήταν τη δεκαετία του 1960 όταν ξεκίνησε η συστηματική έρευνα γύρω από τις συνθήκες εφαρμογής του Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος για προσθετικά συναρτησιακά μαρκοβιανών Αλυσίδων. Η μελέτη των συνθηκών αυτών, υποπεριπτώσεων τους καθώς και εφαρμογών που απορρέουν από το Θεώρημα, τόσο στη Στατιστική Μηχανική όσο και σε άλλους κλάδους, εντάθηκε τις προηγούμενες δεκαετίες και συνεχίζεται μέχρι σήμερα.
Ο Ισχυρός Νόμος των Μεγάλων Αριθμών μας λέει ότι για ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών $\{X_n : n \geq 0\}$, ισχύει

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i \xrightarrow{a.s.} E[X_i].$$

Με βάση το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα, έχουμε ότι

$$\sqrt{N}[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i - E(X_i)] \xrightarrow{d} N(0,\sigma^2),$$

δηλαδή η διαφορά της δειγματικής μέσης τιμής ενός μεγάλου αριθμού ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών από το όριο της ακολουθεί προσεγγιστικά την κανονική κατανομή.
Το ζήτημα είναι το τι συμβαίνει για την περίπτωση μιας μαρκοβιανής αλυσίδας $X = \{X_i : i = 0, 1, 2, ...\}$ και την εφαρμογή του Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος για προσθετικά συναρτησιακά των X_i.
Γνωρίζουμε από το Εργοδικό Θεώρημα ότι αν μια μαρκοβιανή αλυσίδα έχει στάσιμη κατανομή π και η f είναι μια συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ με $E_\pi[|f(x)|] < \infty$, τότε για $n \to \infty$, ισχύει ότι

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(X_i) \to E_\pi[f(X)].$$

όπου μπορεί να θεωρηθεί χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $E_\pi[f(X)] = 0$.
Αυτό που θα αναζητήσουμε και θα τεκμηριώσουμε στην εργασία αυτή είναι οι συνθήκες ώστε να εφαρμοστεί το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα για το άθροισμα των $f(X_i)$ ώστε να ακολουθεί αυτό προσεγγιστικά κανονική κατανομή. Συγκεκριμένα, θα μελετήσουμε τι πρέπει να ικανοποιεί μια τέτοια συνάρτηση f, ποιες είναι οι πιο γενικές συνθήκες κάτω από τις οποίες ισχύει το Θεώρημα και κυρίως ποιες είναι οι διακυμάνσεις στην εφαρμογή του, δηλαδή με τι πρέπει να πολλαπλασιαστεί η ποσότητα $\sum_{i=1}^{N} f(X_i)$ ώστε στο όριο που αυτή συγκλίνει να βρίσκεται κάτι μη τετριμμένο και ποιό είναι αυτό το μη τετριμμένο. Θα αποδείξουμε, δηλαδή, ότι κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες ισχύει ότι

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^{N} f(X_i) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2).$$

για συγκεκριμένη σ^2, την τιμή της οποίας θα εξετάσουμε.
Στο τέλος, θα αναπτυχθούν ορισμένες βασικές εφαρμογές ώστε να φανούν τα συμπεράσματα των παραπάνω. Η σημαντικότερη αφορά στο φαινόμενο αυτοδιάχυσης σωματιδίων, πρόβλημα που σε μεγάλο βαθμό δημιούργησε την ανάγκη εξέτασης του Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος για προσθετικά συναρτησιακά μαρκοβιανών διαδικασιών.

Abstract

This bachelor thesis' main subject is the fluctuations around the Law of Large Numbers for additive functionals of markov processes.
The study of limit theorems for markov chains was necessitated of studying diffusion phenomena in Statistical Mechanics. Thus, while Kolmogorov and Doeblin started studying the limit theorems for markov chains since 30's, it was in 60's when a systematic investigation around the conditions of the adjustment of the Central Limit Theorem (CLT) for additive functionals of markov processes started. The study of these conditions, some subindents of them and of the applications that originate from the CLT, so in Statistical Mechanics as in other applied areas, was intensified the last decades and continues up to date.
The strong law of large numbers informs us that for a sequence of independent and identically distributed random variables $\{X_n : n \geq 0\}$,

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i \xrightarrow{a.s.} E[X_i].$$

Then, according to the CLT,

$$\sqrt{N}[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i - E(X_i)] \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2),$$

which means that the difference between the sample mean of a large number of independent and identically distributed random variables and its limit follows approximately the gaussian distribution.

Our topic is what happens in case of a markov chain $X = \{X_i : i = 0, 1, 2, ...\}$ and the application of the CLT for additive functionals of X_i.
By the Ergodic Theorem, we know that if a markov chain has a unique invariant measure π and f is a function in $\mathbb{R}$ such that $E_\pi[|f(x)|] < \infty$, then as $n \to \infty$,

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(X_i) \xrightarrow{a.s.} E_\pi[f(X)].$$

where one can assume that $E_\pi[f(X)] = 0$.
What we are looking for in this thesis are conditions for the adjustment of

the CLT for the sum of $f(X_i)$ so that it follows approximately the gaussian distribution. Specifically, we will study which conditions f, has to satisfy so that CLT can be established and the size of the fluctuations in its application: which is the amount that we have to multiply the $\sum_{i=1}^{N} f(X_i)$ so that its limit consists of a non-trivial term and which is this one. In other words, we are going to prove that under certain conditions,

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^{N} f(X_i) \xrightarrow{D} N(0, \sigma^2).$$

for a certain σ^2, the value of which we are going to examine.
Finally, some basic examples of the CLT will be developped so that the results above can be applied. The main application concerns the self-difussivity of interactive paricles: this is a problem which, to a great extent, created the necessity of the study of CLT for additive functionals of markov chains.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Εισαγωγή στη Θεωρία Πιθανοτήτων

Η Θεωρία Πιθανοτήτων είναι η μαθηματική επιστήμη που ασχολείται με την ποσοτική μελέτη διαδικασιών με αβέβαιο αποτέλεσμα. Τέτοιες διαδικασίες αναφέρονται ως 'πειράματα τύχης' και βασικός σκοπός της Θεωρίας Πιθανοτήτων είναι να υπολογίσει τις πιθανότητες πραγματοποίησης των διάφορων ενδεχομένων των 'πειραμάτων' αυτών. Σε κάθε περίπτωση, για να προχωρήσει κανείς στη μελέτη της συμπεριφοράς των Μαρκοβιανών Αλυσίδων, των οριακών θεωρημάτων και της διακύμανσης αυτών, είναι απαραίτητο να κατανοήσει πρώτα τις θεμελιώδεις έννοιες της Θεωρίας Πιθανοτήτων.

1.1.1 Αξιωματικός Ορισμός της Πιθανότητας

Ορισμός 1.1. *Έστω Ω κάποιο σύνολο το οποίο καλούμε δειγματικό χώρο. Μια **σ-άλγεβρα** $\mathscr{F}$ πάνω στο σύνολο Ω είναι μια οικογένεια υποσυνόλων του Ω που έχει τις παρακάτω ιδιότητες:*

i) $\emptyset \in \mathscr{F}$

ii) $A \in \mathscr{F} \Rightarrow A^c \equiv \Omega \backslash A \in \mathscr{F}$

iii) $A_1, A_2, ... \in \mathscr{F} \Rightarrow A := \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{F}$.

Ορισμός 1.2. *Ένα **μέτρο πιθανότητας** P επάνω σε ένα μετρήσιμο χώρο $(\Omega, \mathscr{F})$ είναι μια απεικόνιση $P : \mathscr{F} \to [0,1]$ με τις ιδιότητες*

i) Για κάθε $A \in \mathscr{F}, P(A) \geq 0$

ii) $P(\Omega) = 1$

iii) Αν $A_1, A_2, ... \in \mathscr{F}$ *και τα* $\{A_i\}$ *είναι ανά δύο ξένα, τότε*

$$P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Ορισμός 1.3. *Αν θεωρήσουμε ένα σύνολο Ω, μια σ-άλγεβρα $\mathscr{F}$ πάνω σε αυτό και ένα μέτρο πιθανότητας P, τότε η τριάδα $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ καλείται* ***χώρος πιθανότητας****.*

Οι παραπάνω ορισμοί συνιστούν τον αξιωματικό ορισμό της πιθανότητας, όπως αυτός δόθηκε το 1933 από το Ρώσο μαθηματικό A. Kolmogorov.

1.1.2 Μετρησιμότητα, Τυχαίες Μεταβλητές και Ανεξαρτησία

Ιδιαίτερη σημασία στη Θεωρία Πιθανοτήτων έχει η έννοια της τυχαίας μεταβλητής, η οποία προκύπτει από την εξίσου σημαντική έννοια της μετρησιμότητας ενός συνόλου.

Ορισμός 1.4. *Έστω Ω κάποιο σύνολο. Τα υποσύνολα F του Ω που ανήκουν στη σ-άλγεβρα $\mathscr{F}$ αποκαλούνται* ***$\mathscr{F}$-μετρήσιμα****.*

Ορισμός 1.5. *Έστω Ω κάποιο σύνολο. Η συνάρτηση $Y : \Omega \to \mathbb{R}^d$ αποκαλείται* ***$\mathscr{F}-$μετρήσιμη*** *αν*

$$Y^{-1}(U) = \{w \in \Omega : Y(\omega) \in U\} \in \mathscr{F}$$

για κάθε ανοιχτό σύνολο $U \in \mathbb{R}^d$.

Ορισμός 1.6. ***Τυχαία μεταβλητή*** *είναι μια $\mathscr{F}-$μετρήσιμη συνάρτηση $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ όπου $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ είνια ένας χώρος πιθανοτήτων.*

Ορισμός 1.7. *Δύο τυχαίες μεταβλητές X, Y καλούνται* ***ανεξάρτητες*** *όταν*

$$P(\{X \in A\} \cap \{Y \in B\}) = P(X \in A)P(Y \in B)$$

για όλα τα διαστήματα $A, B \subset \mathbb{R}$.
Αντίστοιχα, για ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $X_1, ..., X_n$ θα πρέπει

$$P[\bigcap_{i=1}^{n}(X_i \in B_i)] = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \in B_i)$$

για όλα τα διαστήματα $B_1, ...B_n \subset \mathbb{R}$.

Πρακτικά, οι τυχαίες μεταβλητές X_i είναι ανεξάρτητες αν οι σ-άλγεβρες που παράγονται από τις τυχαίες μεταβλητές είναι ανεξάρτητες.

Θεώρημα 1.8. *Αν X, Y ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με $E[|X|], E[|Y|] < \infty$, τότε $E[XY] = E[X]E[Y]$.*

Ορισμός 1.9. *Θεωρούμε ένα χώρο πιθανοτήτων* $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ *και ένα* $\omega \in \Omega$. *Τότε, η συνάρτηση* $X : \mathscr{F} \to \mathbb{R}$ *η οποία ορίζεται κατά τρόπο ώστε*

$$X(\omega) = \boldsymbol{1}_A = \begin{cases} x, & x > 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

είναι μια τυχαία μεταβλητή αν το σύνολο $A \subset \Omega$ *είναι ένα γεγονός, δηλαδή αν* $A \in \mathscr{F}$. *Η τυχαία μεταβλητή αυτή ονομάζεται* ***δείκτρια συνάρτηση*** *του συνόλου* A.

1.1.3 Μέση Τιμή και Διασπορά Τυχαίων Μεταβλητών

Πέρα από τον προσδιορισμό της τυχαίας μεταβλητής, έχει αξία να μελετηθούν και δύο θεμελιώδη χαρακτηριστικά αυτής, δηλαδή η μέση τιμή και η διασπορά, ποσότητες οι οποίες δίνουν από μόνες του αρκετές πληροφορίες για μια τυχαία μεταβλητή.

Ορισμός 1.10. *Η* ***μέση τιμή*** *μιας τυχαίας μεταβλητής* X, *ορίζεται ως:*

$$E[X] = \int_\Omega X(\omega)dP(\omega) = \int_{\mathbb{R}^d} x d\mu_X(x) = \int_{\mathbb{R}^d} x\mu_X(dx)$$

Αντίστοιχα, η μέση τιμή μιας συνάρτησης g *μιας τυχαίας μεταβλητής ορίζεται ως:*

$$E[g(X)] = \int_\Omega g(X(\omega))dP(\omega) = \int_{\mathbb{R}^d} g(x)d\mu_X(x) = \int_{\mathbb{R}^d} g(x)\mu_X(dx)$$

Σημαντικές ιδιότητες της μέσης τιμής είναι τόσο η ανισότητα $Holder$ η οποία έχει σαν υποπερίπτωση την ανισότητα $Cauchy - Schwarz$ όσο και η ανισότητα Jensen. Συγκεκριμένα,

Θεώρημα 1.11. ***Ανισότητα Holder.***
Έστω X, Y *τυχαίες μεταβλητές. Ισχύει ότι*

$$\{E[|XY|^r]\}^{1/r} \leq \{E[|X|^p]\}^{1/p} E[|Y|^q]\}^{1/q},$$

όπου $p, q, r > 0$ *και* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$. *Στην ειδική περίπτωση όπου* $r = 1, p = q = 2$ *έχουμε την ανισότητα* ***Cauchy-Schwarz.***

Θεώρημα 1.12. ***Ανισότητα Jensen.***
Έστω X *τυχαία μεταβλητή,* $I \subseteq \mathbb{R}$ *και* $f : I \to \mathbb{R}$ *κυρτή συνάρτηση με* $P(X \in I) = 1, E[|X|] < \infty$ *και* $E[f(X)] < \infty$. *Τότε,* $f(E[X]) \leq E[f(X)]$.

Η έννοια της μέσης τιμής μας βοηθάει να ορίσουμε και ένα χώρο χρήσιμο για τη Θεωρία Πιθανοτήτων και τους σχετικούς κλάδους.

Ορισμός 1.13. *Το σύνολο όλων των τυχαίων μεταβλητών X για τις οποίες ισχύει $\|X\|_p = E[|X|^p]^{1/p} < \infty$ αποτελεί ένα χώρο που ονομάζεται* ***χώρος L^p****. Η ποσότητα $\|X\|_p$ αποτελεί μια νόρμα για το χώρο αυτό. Στην ειδική περίπτωση όπου $p = 2$, αποδεικνύεται ότι ο L^2 είναι ένας χώρος Hilbert με εσωτερικό γινόμενο το $\langle X, Y\rangle = E[XY]$.*
Οι συναρτήσεις για τις οποίες ισχύει $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2dx < \infty$ ή αλλιώς $\langle f, f\rangle < \infty$ καλούνται ***τετραγωνικά ολοκληρώσιμες****.*

Ορισμός 1.14. ***Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης****. Αν $(X_n)_{n\geq 0}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών και X τυχαία μεταβλητή έτσι ώστε $X_n \xrightarrow{a.s.} X$, τότε*

$$\lim_{n\to\infty} E[X_n] = E[\lim_{n\to\infty} X_n] = E[X].$$

Ορισμός 1.15. ***Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης****. Αν $(X_n)_{n\geq 0}$ αύξουσα ακολουθία τυχαίων μεταβλητών και X, Y τυχαίες μεταβλητές έτσι ώστε $X_n \xrightarrow{a.s.} X$, $E[Y] < \infty$ και $|X_n| \leq Y$ για κάθε $n = 0, 1, 2, ...$, τότε $E[|X|] < \infty$ και*

$$\lim_{n\to\infty} E[X_n] = E[\lim_{n\to\infty} X_n] = E[X].$$

Ορισμός 1.16. *Ως η* ***διακύμανση*** *της τυχαίας μεταβλητής X ορίζεται η ποσότητα*

$$Var(X) = E[(X - E[X])^2].$$

Η διακύμανση συχνά συμβολίζεται και ως σ^2.

1.1.4 Δεσμευμένη Μέση Τιμή

Ορισμός 1.17. *Έστω ένας χώρος $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ και $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$ είναι μια σ-άλγεβρα. Για X τυχαία μεταβλητή στον $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ με $E[X] < \infty$, η* ***δεσμευμένη ή υπό συνθήκη μέση τιμή*** *της X ως προς τη σ-άλγεβρα $\mathscr{G}$ συμβολίζεται ως $E[X \mid \mathscr{G}]$ και ορίζεται ως η τυχαία μεταβλητή Y με τις εξής ιδιότητες:*

i) Η Y είναι $\mathscr{G}-$μετρήσιμη, δηλαδή $Y \in \mathscr{G}$.

ii) Ισχύει

$$\int_A XdP = \int_A YdP$$

για κάθε $A \in \mathscr{G}$.

Πέρα από τον ορισμό, έχει σημασία να αναφερθούν και οι βασικές ιδιότητες της δεσμευμένης μέσης τιμής.

Θεώρημα 1.18. *i) $E(aX + bY \mid \mathscr{G}) = aE(X \mid \mathscr{G}) + bE(Y \mid \mathscr{G})$.*

ii) $E(E(X \mid \mathscr{G})) = E[X]$.

iii) Αν η X είναι ανεξάρτητη από την $\mathscr{G}$, τότε $E(X \mid \mathscr{G}) = E[X]$.

iv) Αν η X είναι $\mathscr{G}-$μετρήσιμη,τότε $E(X \mid \mathscr{G}) = X$.

1.1.5 Σύγκλιση τυχαίων Μεταβλητών και Κεντρικό Οριακό Θεώρημα

Τα οριακά θεωρήματα πραγματεύονται την οριακή συμπεριφορά ακολουθιών τυχαίων μεταβλητών. Για να μελετηθούν, όμως, πρέπει πρώτα να οριστούν οι διάφοροι τρόποι σύγκλισης ακολουθιών τυχαίων μεταβλητών.
Για τους επόμενους ορισμούς, θεωρούμε ότι βρισκόμαστε σε χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ και ότι έχουμε μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $\{X_n : n = 1, 2, ...\}$ καθώς και μία τυχαία μεταβλητή X σε αυτόν.

Ορισμός 1.19. *Η $\{X_n\}$ συγκλίνει **κατά πιθανότητα** στην X αν για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει*

$$\lim_n P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0.$$

Συμβολικά, $X_n \xrightarrow{P} X$.

Ορισμός 1.20. *Η $\{X_n\}$ συγκλίνει **σχεδόν βεβαίως** στην X αν*

$$P(\{\omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}) = 1.$$

Συμβολικά, $X_n \xrightarrow{a.s.} X$.

Ορισμός 1.21. *Η $\{X_n\}$ συγκλίνει **ασθενώς** στην X αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ όπου X συνεχής και οι X_n, X συμβολίζουν συναρτήσεις κατανομής, ισχύει*

$$\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega).$$

Συμβολικά, $X_n \xrightarrow{\alpha} X$.

Ορισμός 1.22. *Η $\{X_n\}$ συγκλίνει **κατά κατανομή** στην X αν*

$$F_{X_n} \xrightarrow{\alpha} F_X.$$

Συμβολικά, $X_n \xrightarrow{d} X$.

Ορισμός 1.23. *Η $\{X_n\}$ συγκλίνει **κατά μέσον p-τάξης** στην X αν*

$$E(|X_n|^p) < \infty \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}, E(|X|^p) < \infty \text{ και } \lim_n E(|X_n - X|^p) = 0.$$

Συμβολικά, $X_n \xrightarrow{L_p} X$.

Ορισμός 1.24. *Έστω τυχαία μεταβλητή X. Ονομάζεται* ***χαρακτηριστική συνάρτηση*** *της τυχαίας μεταβλητής X η συνάρτηση $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ η οριζόμενη ως ακολούθως*

$$\varphi(t) = E(e^{itX}), t \in \mathbb{R}$$

.

Ορισμός 1.25. ***Θεώρημα Levy.*** *Έστω ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $\{X_n : n = 1, 2, ...\}$ με συνάρτηση κατανομής $F_n, n = 1, 2, ...$ και χαρακτηριστική συνάρτηση $\phi_n, n = 1, 2, ...$ αντίστοιχα. Τότε:*

i) Αν X τυχαία μεταβλητή με χαρακτηριστική συνάρτηση ϕ και $X_n \xrightarrow{d} X$, τότε $\phi_n(t) \to \phi(t)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

ii) Αν για κάθε $t \in \mathbb{R}$ υπάρχει το όριο $\lim_{n\to\infty} \phi_n(t)$ και η συνάρτηση $g(t) = \lim_{n\to\infty} \phi_n(t)$ είναι συνεχής στο $t = 0$, τότε η g είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση κάποιας τυχαίας μεταβλητής X και ισχύει $X_n \xrightarrow{d} X$.

Θεώρημα 1.26. ***Κεντρικό Οριακό Θεώρημα.*** *Έστω $\{X_n : n = 1, 2, ...\}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με πεπερασμένη μέση τιμή $\mu= E(X_n)$ και διασπορά $\sigma^2 = V(X_n)$. Αν $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k (n = 1, 2, ...)$, τότε*

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{d} Z \sim N(0, 1)$$

.

1.2 Εισαγωγή στις Στοχαστικές Διαδικασίες

Ορισμός 1.27. *Μια παραμετρισμένη συλλογή τυχαίων μεταβλητών $\{X_t\}_{t\in T}$ οι οποίες ορίζονται σε ένα χώρο πιθανοτήτων $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ και παίρνουν τιμές στο $\mathbb{R}^d$ ονομάζεται* ***στοχαστική διαδικασία*** *ή στοχαστική ανέλιξη.*

1.2.1 Είδη Στοχαστικών Ανελίξεων

Διάφορα είδη στοχαστικών ανελίξεων θα εμφανισθούν στα επόμενα κεφάλαια και ως εκ τούτου είναι σημαντικό να γίνει αναφορά στο τι εκφράζει το καθένα από αυτά.

Ορισμός 1.28. *Μια στοχαστική ανέλιξη $\{X_t : t \geq 0\}$ καλείται* ***ανεξαρτήτων προσαυξήσεων*** *αν για κάθε n και κάθε $t_0 < t_1 < ... < t_n$ οι διαφορές $Y(t_j) = X(t_j) - X(t_{j-1}), j = 1, 2, ..., n$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές.*

Ορισμός 1.29. *Μια στοχαστική ανέλιξη $\{X_t : t \geq 0\}$ καλείται* ***στάσιμων προσαυξήσεων*** *αν οι τυχαίες μεταβλητές $X(t + s) - X(t)$ έχουν την ίδια κατανομή για όλα τα t.*

Ορισμός 1.30. *Μια στοχαστική ανέλιξη* $\{X_t : t \geq 0\}$ *καλείται* ***γκαουσιανή*** *αν για κάθε* n *και κάθε* $t_0 < t_1 < ... < t_n$ *οι τυχαίες μεταβλητές* $X(t_1), ..., X(t_n)$ *ακολουθούν τη* n*-διάστατη κανονική κατανομή.*

1.2.2 Μαρκοβιανές Αλυσίδες

Η κατηγορία με την οποία θα ασχοληθούμε περισσότερο είναι αυτή των μαρκοβιανών αλυσίδων.

Ορισμός 1.31. *Μια στοχαστική ανέλιξη* $\{X_t : t \geq 0\}$ *σε διακριτό χρόνο καλείται* ***Μαρκοβιανή*** *αν για κάθε* $n < m$ *και κάθε* $t_0 < t_1 < ... < t_n < ... < t_m$ *ισχύει* $P[X(t_n+1), ..., X(t_m) \mid X(t_1), X(t_2), ..., X(t_n)] = P[X(t_n+1), ..., X(t_m) \mid X(t_n)]$. *Με αντίστοιχο τρόπο ορίζεται η μαρκοβιανή διαδικασία και στο συνεχή χρόνο.*
Μαρκοβιανή αλυδίδα *καλείται η μαρκοβιανή στοχαστική ανέλιξη της οποίας ο χώρος καταστάσεων είναι διακριτός.*

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιηθούν ορισμένες έννοιες και ιδιότητες μαρκοβιανών αλυσίδων ή καταστάσεων αυτών. Συγκεκριμένα, ο αναγνώστης θα πρέπει να γνωρίζει πότε μια αλυσίδα καλείται παροδική, γνήσια επαναληπτική, περιοδική ή απεριοδική, μη-υποβιβάσιμη.
Μια χρήσιμη ιδιότητα των μαρκοβιανών αλυσίδων σε διακριτό χρόνο αφορά στον πίνακα μετάβασης πιθανοτήτων της, τον οποίο συνηθίζουμε να συμβολίζουμε με P. Ο P μπορεί να θεωρηθεί σαν ένας φραγμένος τελεστής που ορίζεται στο χώρο της αλυσίδας. Τότε, για f στο $C_b(E)$ ορίζεται η $Pf : E \to E$ ως

$$(Pf)(x) = \sum_{y \in E} P(x,y) f(y) = \mathbb{E}[X_1 \mid X_0 = x].$$

Μάλιστα, αν η f ανήκει στον $L^2(\pi)$, τότε από την ανισότητα Schwarz προκύπτει ότι το Pf ανήκει επίσης στον $L^2(\pi)$.
Ιδιαίτερα κρίσιμη είναι η έννοια της στάσιμης ή αναλλοίωτης κατανομής. Συγκεκριμένα, ένα μέτρο πιθανότητας π λέγεται **αναλλοίωτο** για την αλυσίδα αν $\pi P = \pi$. Αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν η ακολουθία των τυχαίων μεταβλητών $\{X_j : j \geq 0\}$ είναι στάσιμη ως προς $\mathbb{P}_\pi$. Στη συνέχεια, θα συμβολίζουμε με E_π την αναμενόμενη τιμή ως προς το μέτρο π, ενώ με $\mathbb{E}_\pi$ την αναμενόμενη τιμή ως προς το μέτρο $\mathbb{P}_\pi$.
Ένα αναλλοίωτο μέτρο π είναι τώρα **εργοδικό** αν κάθε φραγμένη συνάρτηση f που ικανοποιεί την $(I-P)f = 0$ είναι $\pi-$σχεδόν βεβαίως παντού σταθερή. Εναλλακτικά, το π είναι εργοδικό αν και μόνο αν η ακολουθία των τυχαίων μεταβλητών $\{X_j : j \geq 0\}$ είναι εργοδική ως προς το χώρο $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}_\pi)$. Τέλος, ένα μέτρο πιθανότητας π καλείται **αντιστρέψιμο** αν ο P είναι συμμετρικός τελεστής στον $L^2(\pi)$:

$$\langle Pf, g \rangle_\pi = \langle f, Pg \rangle_\pi$$

για κάθε f, g στον $L^2(\pi)$. Είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι ένα μέτρο π είναι αντιστρέψιμο αν και μόνο αν ικανοποιεί τη συνθήκη ισορροπίας:

$$\pi(x)P(x,y) = \pi(y)P(y,x)$$

για κάθε x, y στον E.
Προφανώς, ένα αντιστρέψιμο μέτρο πιθανότητας είναι πάντα αναλλοίωτο, εφόσον

$$(\pi P)(x) = \sum_{y\in E} \pi(y)P(y,x) = \sum_{y\in E} \pi(x)P(x,y) = \pi(x).$$

Τέλος, θεμελιώδες Θεώρημα για τις μαρκοβιανές αλυσίδες και χρήσιμο για τη συνέχεια είναι το **Εργοδικό Θεώρημα**:

Θεώρημα 1.32. *Αν μια μαρκοβιανή αλυσίδα είναι εργοδική με στάσιμη κατανομή π και f είναι μια συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ με $E_\pi[|f(x)|] < \infty$, τότε για $n \to \infty$, ισχύει*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(X_i) \xrightarrow{a.s.} E_\pi[f(x)]$$

1.2.3 Martingales

Θεωρούμε ότι βρισκόμαστε σε χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathscr{F}, P)$.

Ορισμός 1.33. *Μια αύξουσα ακολουθία σ-αλγεβρών $(\mathscr{F}_n)_{n\geq 0}$ με $(\mathscr{F}_n) \subseteq \mathscr{F}, n \geq 0$ λέγεται* ***διήθηση*** *στον $(\Omega, \mathscr{F}, P)$.*

Ορισμός 1.34. *Μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $(X_n)_{n\geq 0}$ λέγεται* ***προσαρμοσμένη*** *στη διήθηση $\mathscr{F}_n$ αν για κάθε $n = 0, 1, ...$ η X_n είναι $\mathscr{F}_n-$μετρήσιμη.*

Ορισμός 1.35. *Μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $(M_n)_{n\geq 0}$ λέγεται $(\mathscr{F}_n)-$Martingale αν:*

i) $E[|M_n|] < \infty$ *για κάθε* $n \geq 0$

ii) *η* M_n *είναι προσαρμοσμένη στην* $(\mathscr{F}_n)$

iii) $E[M_n \mid \mathscr{F}_m] = M_m$ *για κάθε* $0 \leq m \leq n$

Ανισότητα Doob:
Αν $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ μη-αρνητικό τετραγωνικά ολοκληρώσιμο submartingale ως προς διήθηση $\mathscr{F}_n$, τότε

$$E|\max_{k\leq n} X_k|^2 \leq 4E|X_n|^2.$$

Κεφάλαιο 2

Οριακά Θεωρήματα για Μαρκοβιανές Αλυσίδες σε διακριτό χρόνο

2.1 Εισαγωγή

Θεωρούμε μια Μαρκοβιανή αλυσίδα $\{X_j : j \geq 0\}$ σε έναν μετρήσιμο χώρο καταστάσεων Ε, στάσιμη και εργοδική ως προς το μέτρο πιθανότητας π. Αναζητούμε τις ικανές και αναγκαίες συνθήκες ώστε για μια συνάρτηση $V : E \to \mathbb{R}$ να εξασφαλίζεται το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα για την ποσότητα

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} V(X_j). \tag{2.1}$$

Υποθέτουμε ότι $E_\pi[V] = 0$, όπου E_π είναι η αναμενόμενη τιμή ως προς το μέτρο πιθανότητας π. Συμβολίζουμε ως P τον πίνακα μετάβασης πιθανοτήτων της Μαρκοβιανής αλυσίδας και θεωρούμε ότι η συνάρτηση V ανήκει στον $L^2(\pi)$, δηλαδή ότι είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη ως προς π. Υποθέτουμε ότι υπάρχει λύση της εξίσωσης Poisson

$$V = (I - P)f \tag{2.2}$$

για κάποια συνάρτηση f στον $L^2(\pi)$, όπου I είναι ο μοναδιαίος πίνακας.

Για $j \geq 1$, θεωρούμε την

$$Z_j = f(X_j) - (Pf)(X_{j-1}). \tag{2.3}$$

Τότε, παρατηρούμε ότι το $M_0 = 0, M_N = \sum_{j=0}^{N} Z_j$ είναι ένα Martingale ως προς τη διήθηση $\{F_j : j \geq 0\}$, όπου $F_j = \sigma(X_0, ..., X_j)$ και έτσι ώστε

$$\sum_{j=0}^{N-1} V(X_j) = M_N - f(X_N) + f(X_0). \tag{2.4}$$

Εφόσον η f είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη, οι όροι $f(X_N)$ και $f(X_0)$ πολλαπλασιασμένοι επί $N^{1/2}$ μηδενίζονται για $N \to \infty$ και επομένως το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα για το

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} V(X_j)$$

θα προκύψει από το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα για το martingale M_N.

Παρατήρηση. *Μια συνηθισμένη περίπτωση στην οποία ικανοποιείται η εξίσωση Poisson $(I-P)f = V$ για συνάρτηση V μέσης τιμής 0 είναι όταν έχουμε μη-υποβιβάσιμη Μαρκοβιανή αλυσίδα σε πεπερασμένο χώρο καταστάσεων. Για να ικανοποιείται η εξίσωση Poisson, θα πρέπει να ισχύει:*

$$Range(I-P) \supset [\pi]^{\perp} \Leftrightarrow (Range(I-P))^{\perp} \subset [\pi] \Leftrightarrow Ker((I-P)^{\intercal}) \subset [\pi]$$

το οποίο ικανοποιείται αφού αν $x \in Ker((I-P)^{\intercal})$, τότε

$(I-P^{\intercal})x = 0 \Rightarrow x^{\intercal}(I-P) = 0 \Rightarrow x^{\intercal}P = x^{\intercal} \Rightarrow x$ *πολλαπλάσιο της αναλλοίωτης π.*

2.2 Κεντρικό Οριακό Θεώρημα για προσθετικά συναρτησιακά μαρκοβιανών αλυσίδων που ικανοποιούν την εξίσωση Poisson

Θεώρημα 2.1. *Θεωρούμε μια μια Μαρκοβιανή αλυσίδα $\{X_j\}$ σε μετρήσιμο χώρο καταστάσεων E με στάσιμο και εργοδικό μέτρο πιθανοτήτων π και συνάρτηση $V : E \to \mathbb{R}$ στον $L^2(\pi)$ που έχει μέση τιμή 0 ως προς π. Υποθέτουμε ότι υπάρχει λύση της εξίσωσης Poisson, έστω f, στον $L^2(\pi)$. Τότε, για κάθε x στον E, όταν $N \to \infty$, η ποσότητα*

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{N-1} V(X_j).$$

συγκλίνει κατά κατανομή ως προς P_x σε μια γκαουσιανή τυχαία μεταβλητή μέσης τιμής 0 και διακύμανσης

$$\sigma^2(V) = E_\pi[f^2] - E_\pi[(Pf^2)].$$

Απόδειξη. *Θεωρούμε μια συνάρτηση* V *στον* $L^2(\pi)$ *και μια αρχική κατάσταση* x *στον* E. *Από υπόθεση, υπάρχει λύση της εξίσωσης Poisson* f *στον* $L^2(\pi)$. *Επιπλέον, θεωρούμε την ακολουθία τυχαίων μεταβλητών* $\{Z_j : j \geq 1\}$ *που ορίζεται από την*

$$Z_j = f(X_j) - Pf(X_{j-1}) \tag{2.5}$$

Η ακολουθία $\{Z_j : j \geq 1\}$ *είναι προσαρμοσμένη στη διήθηση της μαρκοβιανής αλυσίδας* $\mathscr{F}_j = \sigma(X_0, ..., X_j)$. *Έστω* $M_0 = 0, M_j = \sum_{k=1}^{j} Z_k$. *Προκύπτει άμεσα ότι το* $\{M_j : j \geq 0\}$ *είναι ένα Martingale προσαρμοσμένο στη διήθηση* $\{\mathscr{F}_j : j \geq 0\}$. *Επιπλέον, ισχύει ότι*

$$\sum_{j=0}^{N-1} V(X_j) = M_N - f(X_N) + f(X_0) \tag{2.6}$$

- *Θεωρούμε αρχικά ότι η συνάρτηση* f *είναι φραγμένη.*

Τότε, οι τυχαίες μεταβλητές $\{Z_j : j \geq 1\}$ *είναι φραγμένες. Επιπλέον, για* $|\theta|$ *πολύ μικρό, ορίζουμε την*

$$A_j(\theta) := log\mathbb{E}[exp\{i\theta Z_j\} \mid \mathscr{F}_{j-1}]. \tag{2.7}$$

Σταθεροποιούμε ένα θ *στο* $\mathbb{R}$. *Τότε, έχουμε ότι*

$$M_N = \sum_{j=0}^{N-1} V(X_j) + f(X_N) - f(X_0)$$

και

$$M_{N-1} = \sum_{j=0}^{N-1} V(X_j) + f(X_{N-1}) - f(X_0)$$

Αφαιρώντας κατά μέλη, προκύπτει ότι

$$M_N = M_{N-1} + f(X_N) - f(X_{N-1}) + V(X_{N-1}) =$$

$$= M_{N-1} + f(X_{N-1}) - Pf(X_{N-1}) + f(X_N) - f(X_{N-1}) =$$

$$= M_{N-1} + f(X_n) - (Pf)(X_{N-1}) = M_{N-1} + Z_N$$

άρα

$$\mathbb{E}_x[exp\{\frac{i\theta}{\sqrt{N}} M_N - \sum_{j=1}^{N} A_j \frac{\theta}{\sqrt{N}}\}] =$$

$$= \mathbb{E}_x[exp\{\frac{i\theta}{\sqrt{N}} M_{N-1} + \frac{i\theta}{\sqrt{N}} Z_N - \sum_{j=1}^{N} A_j \frac{\theta}{\sqrt{N}} \mid \mathscr{F}_{N-1}\}] =$$

$$= \mathbb{E}_x[exp\{\frac{i\theta}{\sqrt{N}} M_{N-1} - \sum_{j=1}^{N} A_j \frac{\theta}{\sqrt{N}}\}]\mathbb{E}[exp\frac{i\theta}{\sqrt{N}} Z_N \mid \mathscr{F}_{N-1}\}] =$$

$$= \mathbb{E}_x[exp\{\frac{i\theta}{\sqrt{N}}M_{N-1} - \sum_{j=1}^{N} A_j \frac{\theta}{\sqrt{N}}\}]e^{A_N}(\frac{\theta}{\sqrt{N}}) =$$

$$= \mathbb{E}[exp\{i\frac{\theta}{\sqrt{N}}(M_{N-2} + Z_{N-1}) - \sum_{j=1}^{N-1} A_j(\frac{\theta}{\sqrt{N}} \mid \mathscr{F}_{n-2})\}] =$$

$$= ... = e^{i\frac{\theta Z_1}{\sqrt{N}} - A_1(\frac{\theta}{\sqrt{N}})} = 1.$$

Άρα, τελικά,

$$\mathbb{E}_x[exp\{\frac{i\theta}{\sqrt{N}}M_N - \sum_{j=1}^{N} A_j \frac{\theta}{\sqrt{N}}\}] = 1. \tag{2.8}$$

Από το ανάπτυγμα Taylor δεύτερου βαθμού προκύπτει ότι

$$\sum_{j=1}^{N} A_j(\theta/\sqrt{N}) = -\frac{\theta^2}{2N}\sum_{j=1}^{N} \mathbb{E}_x[{Z_j}^2 \mid \mathscr{F}_{j-1}] + \frac{1}{\sqrt{N}}R_N \tag{2.9}$$

για κάποια τυχαία μεταβλητή R_N άνω φραγμένη από μια σταθερά. Εφόσον

$$\mathbb{E}_x[Z_j^2 \mid \mathscr{F}_{j-1}] = (Pf^2)(X_{j-1}) - (Pf)^2(X_{j-1}), \tag{2.10}$$

από το εργοδικό θεώρημα, όταν $N \uparrow \infty$, το $\sum_{j=1}^{N} A_j(\theta/\sqrt{N})$ συγκλίνει σχεδόν βεβαίως κατά μέτρο P_x στο

$$-(\theta^2/2)\mathbb{E}_\pi[(Pf^2) - (Pf)^2] = -(\theta^2/2)\mathbb{E}_\pi[f^2 - (Pf)^2]. \tag{2.11}$$

Τότε, από την (2.9) προκύπτει ότι

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}_x[exp\{(i\theta)/(\sqrt{N})M_N\}] = e^{-\theta^2\sigma^2/2}, \tag{2.12}$$

όπου $\sigma^2 = E_\pi[f^2 - (Pf)^2]$. Εφόσον $\sum_{j=0}^{N} V(X_j) = M_N - f(X_N) + f(X_0)$, το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα για την ποσότητα $\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=0}^{N} V(X_j)$ προκύπτει άμεσα από το παραπάνω.

- Έστω τώρα ότι η f δεν είναι φραγμένη, αλλά ότι ανήκει στον $L^2(\pi)$. Θεωρούμε μια ακολουθία φραγμένων συναρτήσεων $\{f_n : n \geq 1\}$ που συγκλίνουν στην f στον $L^2(\pi)$. Για ένα συγκεκριμένο $n \geq 1$, θεωρούμε την$Z_j^{(n)} = f_n(X_j) - Pf_n(X_{j-1}), j \geq 1$και την$M_0^{(n)} = 0, M_j(n) = \sum_{k=1}^{j} Z_k^{(n)}$ που είναι Martingale ως προς την ακολουθία $\{Z_j^{(n)} : j \geq 1\}$. Με βάση το πρώτο σκέλος της απόδειξης, για κάθε $n \geq 1$,

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}_x[exp\{(i\theta/\sqrt{N})M_N^{(n)}]\}] = e^{-\theta^2{\sigma_n}^2/2}, \tag{2.13}$$

όπου ${\sigma_n}^2 = \mathbb{E}_\pi[f_n^2 - (Pf_n)^2]$. *Εφόσον όμως το* $\mathbb{E}_\pi[f_n^2 - (Pf_n)^2]$ *συγκλίνει στο* $E_\pi[f^2 - (Pf)^2]$, *το μόνο που μένει για να αποδειχθεί το θεώρημα είναι να δειχθεί ότι*

$$\lim_{n\to\infty} \limsup_{N\to\infty} |\mathbb{E}_x[exp\{(i\theta/\sqrt{N})M_N^{(n)}]\}] - \mathbb{E}_x[exp\{(i\theta/\sqrt{N})M_N\}]| = 0 \quad (2.14)$$

Εφόσον τώρα $|exp\{ix\} - exp\{iy\}| \leq |x - y|$, *η προηγούμενη διαφορά είναι απολύτως φραγμένη*

$$\frac{\theta}{\sqrt{N}}\mathbb{E}_x[|M_N^{(n)} - M_N|] \leq \{\frac{\theta^2}{N}\mathbb{E}_x[(M_N^{(n)} - M_N)^2]\}^{1/2}, \quad (2.15)$$

όπου στο τελευταίο βήμα εφαρμόστηκε η ανισότητα Schwarz. Χρησιμοποιώντας την αναπαράσταση των Martingales $M_N, M_N^{(n)}$ *με όρους των ακολουθιών* $\{Z_j : J \geq 1\}, \{Z_j^{(n)} : J \geq 1\}$ *και την ορθογωνιότητα αυτών στον* $L^2(P_x)$, *καταλήγουμε ότι η παράσταση μέσα στις αγκύλες θα ισούται με*

$$\frac{\theta^2}{N}\sum_{j=1}^{N} E_x[(Z_j^{(n)} - Z_j)^2]\}^{1/2}. \quad (2.16)$$

Θεωρώντας τώρα την ακολουθία $F_n = f_n - f$ *έτσι ώστε* $Z_j^{(n)} - Z_j = F_n(X_j) - PF_n(X_{j-1})$, *η (2.17) γίνεται*

$$\frac{\theta^2}{N}\sum_{j=1}^{N}\{(P^j F_n^2)(x) - [P^{j-1}(PF_n)^2](x)\}. \quad (2.17)$$

Από το εργοδικό θεώρημα, το παραπάνω συγκλίνει σχεδόν βεβαίως στο $\theta^2 E_\pi[F_n^{(2)} - (PF_n)^2]$. *Αυτή η ποσότητα όμως μηδενίζεται όταν* $n \uparrow \infty$ *εφόσον το* F_n *συγκλίνει στον* $L^2(\pi)$ *στο 0. Αυτό αποδεικνύει το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα για το Martingale* M_N *και τελικά για το* $\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=1}^{N-1} V(X_j)$.

2.3 Προϋποθέσεις για τη γενίκευση του Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος για προσθετικά συναρτησιακά αντιστρέψιμων μαρκοβιανών Αλυσίδων

2.3.1 Κεντρικό Οριακό Θεώρημα για Martingales

Η ύπαρξη λύσης της εξίσωσης Poisson δεν είναι τετριμμένη. Παρόλα αυτά, όπως θα δούμε παρακάτω η εξίσωση $\lambda f_\lambda + (I - P)f_\lambda = V$ έχει πάντα λύση για λ > 0. Με βάση αυτό, εξετάζουμε το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα για τα martingales. Συγκεκριμένα, θεωρούμε μια ακολουθία στάσιμων και εργοδικών τυχαίων μεταβλητών $\{Z_j : j \geq 1\}$ προσαρμοσμένων στη διήθηση $\{\mathscr{F}_j\}$ τέτοιες ώστε

$$\mathbb{E}[Z_1^2] < \infty, \qquad \mathbb{E}[Z_{j+1} \mid \mathscr{F}_j] = 0, \quad j \geq 0 \tag{2.18}$$

Η ακολουθία αυτών ονομάζεται ¨διαφορές Martingales' καθώς ορίζουν τα Martingales $\{M_j : j \geq 0\}$ με $M_0 = 0, M_j = \sum_{k=1}^{j} Z_k$. Τα Martingales αυτά έχουν αναμενόμενη τιμή 0 και είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμα ως προς τη διήθηση $\{\mathscr{F}_j\}$.

Θεώρημα 2.2. *Έστω ο χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathscr{F}, P), \{\mathscr{F}_j : j \geq 0\}$ μια άυξουσα διήθηση και $\{Z_j : j \geq 1\}$ μια ακολουθία στάσιμων και εργοδικών τυχαίων μεταβλητών προσαρμοσμένων στη διήθηση $\{\mathscr{F}_j\}$ τέτοιες ώστε*

$$\mathbb{E}[Z_1^2] < \infty, \qquad \mathbb{E}[Z_{j+1} \mid \mathscr{F}_j] = 0, \quad j \geq 0$$

Τότε, η ποσότητα $N^{-1/2}M_N$ συγκλίνει κατά κατανομή, για $N \uparrow \infty$ σε μια γκαουσιανή τυχαία μεταβλητή μέσης τιμής 0 και διακύμανσης $\sigma^2 = \mathbb{E}[Z_1^2]$.

Απόδειξη. - Αν η ακολουθία $\{Z_j : j \geq 1\}$ είναι φραγμένη, η απόδειξη προκύπτει από το εργοδικό θεώρημα. Έστω, λοιπόν, ότι $|Z_1| \leq C_0$ για κάποια σταθερά C_0. Εφόσον τα $\{Z_j : j \geq 1\}$ είναι ¨διαφορές Martingales¨, ισχύει ότι

$$\mathbb{E}[\sum_{k=j+1}^{j+K} Z_k \mid \mathscr{F}_j] = 0$$

για κάθε $j \geq 0, K \geq 1$. Όμως, για $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $|e^{ix} - 1 - ix| \leq x^2/2$. Άρα,

$$|\mathbb{E}[exp\{i\theta \sum_{k=j+1}^{j+K} Z_k \mid \mathscr{F}_j] - 1| =$$

$$= |\mathbb{E}[exp\{i\theta \sum_{k=j+1}^{j+K} Z_k\}\mathscr{F}_j] - 1 - i\theta \sum_{k=j+1}^{j+K} Z_k \mid \mathscr{F}_j]| \leq \frac{\theta^2}{2}\mathbb{E}[(\sum_{k=j+1}^{j+K} Z_k)^2 \mid \mathscr{F}_j].$$

Όμως, εφόσον τα $\{Z_j : j \geq 1\}$ είναι ¨διαφορές Martingales¨, αντικαθιστούμε την έκφραση $(\sum_k Z_k)^2$ από την $\sum_k Z_k^2$ καταλήγοντας τελικά ότι $|\mathbb{E}[exp\{i\theta \sum_{k=j+1}^{j+K} Z_k \mid \mathscr{F}_j] - 1| \leq (\theta C_0)^2 K/2$. Για $|\theta| \leq 1/\sqrt{K}C_0$, η παράσταση φράσσεται τελικά από το 1/2. Για θ σε αυτήν την περιοχή και για $j \geq 1$, ορίζουμε την

$$A_j(\theta) := log\mathbb{E}[exp\{i\theta \sum_{k=(j-1)K+1}^{jK} Z_k\} \mid F_{(j-1)K}].$$

Σταθεροποιούμε ένα K τέτοιο ώστε $1 \ll K \ll N$ και ορίζουμε το $m_j := M_{jK}$ για $j \geq 0$. Για κάθε θ το $exp\{i\theta m_j - \sum_{k=1}^{j} A_k(\theta)\}$ είναι ένα εκθετικό Martingale ως προς τη διήθηση $\{\mathscr{F}_{jK} : j \geq 0\}$, μέσης τιμής 1. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $N = lK$ για κάποιον ακέραιο l και σταθεροποιούμε ένα $\vartheta \in \mathbb{R}$. Το ανάπτυγμα Taylor τρίτης τάξης για N αρκετά μεγάλο δίνει

$$\sum_{j=1}^{l} A_j(\theta/\sqrt{N}) = -\frac{\theta^2}{2N} \sum_{j=1}^{l} \mathbb{E}[\sum_{k=(j-1)K+1}^{jK} Z_k^2 \mid F(j-1)K] + \frac{K^2}{\sqrt{N}} R_{N,K}$$

για κάποιες τυχαίες μεταβλητές $R_{N,K}$ που φράσσονται ανεξαρτήτως των N και K. Εφόσον το $\{exp\{i\theta m_j - \sum_{1 \leq k \leq j} A_k(\theta)\} : j \geq 0\}$ είναι ένα εκθετικό Martingale μέσης τιμής 1, για κάθε $\vartheta \in \mathbb{R}$ και N αρκετά μεγάλο, έχουμε ότι

$$1 = \mathbb{E}[exp\{i(\theta/\sqrt{N})m_l - \sum_{k=1}^{l} A_k(\theta/\sqrt{N})\}] =$$

$$= \mathbb{E}[exp\{\frac{i\theta}{\sqrt{N}} M_N + \frac{\theta^2}{2N} \sum_{k=jK+1}^{(j+1)K} Z_k^2 \mid \mathscr{F}_j k] - \frac{K^2}{\sqrt{N}} R_{N,K}\}].$$

Όμως, θα αποδείξουμε πιο κάτω ότι

$$\lim_{K\to\infty} \sup_{l \geq 1} \mathbb{E}[|exp\{\frac{\theta^2}{2N} \sum_{j=0}^{l-1} \mathbb{E}[\sum_{k=jK+1}^{(j+1)K} (Z_k^2 - \sigma^2) \mid F_{jK}]\} - 1|] = 0. \tag{2.19}$$

Τότε, εφόσον τα R_N, K είναι ομοιόμορφα φραγμένες τυχαίες μεταβλητές, για κάθε $\vartheta \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\lim_{N\to\infty} E[exp\{\frac{i\theta}{\sqrt{N}} M_N + \frac{\theta^2 \sigma^2}{2}\}] = 1$$

που αποδεικνύει το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα για τα martingales. Για να ολοκληρωθεί αυτό το σκέλος της απόδειξης, αρκεί να αποδειχθεί η σχέση (2.20). Η έκφραση μέσα στις αγκύλες φράσσεται από μια σταθερά που εξαρτάται από τα C_0 και ϑ. Εφόσον τώρα $|e^x - 1| \leq |x|e^{|x|}, x \in \mathbb{R}$, η αναμενόμενη τιμή της (2.20) θα είναι μικρότερη ή ίση από το

$$\frac{C_1 \theta^2}{l} \sum_{j=1}^{l} \mathbb{E}[|\frac{1}{K} \sum_{k=jK+1}^{(j+1)K} (Z_k^2 - \varsigma^2)\}]$$

για κάποια σταθερά C_1. Εφόσον $\{Z_k\}$ είναι μια στάσιμη ακολουθία, η παραπάνω παράσταση δεν εξαρτάται από το l και άρα ισούται με

$$C_1 \theta^2 E[|\frac{1}{K} \sum_{k=1} K(Z_k^2 - \sigma^2)|]. \tag{2.20}$$

Από το εργοδικό θεώρημα, η σχέση (2.21) μηδενίζεται για $K \uparrow \infty$

-Έστω τώρα η γενική περίπτωση όπου τα $\{Z_j : j \geq 0\}$ δεν είναι φραγμένα. Η απόδειξη βασίζεται στο πρώτο σκέλος προσεγγίζοντας αυτήν τη φορά τα $\{Z_j : j \geq 0\}$ από φραγμένες "διαφορές Martingales".
Ορίζουμε αρχικά μια cut-off συνάρτηση $\varphi_{\varkappa} : \mathbb{R} \to [-\kappa, \varkappa]$ για $\varkappa \geq 1$. Μία τέτοια είναι για παράδειγμα η $\varphi_{\kappa}(x) = x1\{|x| \leq \kappa\}$
Ορίζουμε τότε την ακολουθία

$$Z_j^{(\kappa)} := \varphi_{\varkappa}(Z_j) - E[\varphi_{\kappa}(Z_j) \mid \mathscr{F}_{j-1}]$$

για $j \geq 1$. Η $\{Z_j^{(\kappa)} : j \geq 1\}$ αποτελεί μια ακολουθία φραγμένων "διαφορών Martingales". Όμως, αν και η $\{\varphi_{\kappa}(Z_j)\}$ κληρονομεί τη στασιμότητα και την εργοδικότητα από την $\{Z_j : j \geq 1\}$, η $\{(Z_j)^{\kappa} : j \geq 1\}$ δεν τις διατηρεί κατ' ανάγκην.
Θεωρούμε τώρα την $\sigma_{\kappa}^2 := E[\varphi_{\kappa}(Z_1)^2]$. Από το θεώρημα κυριαρχούμενης σύγκλισης, το σ_{κ}^2 συγκλίνει στο σ^2 για $\kappa \uparrow \infty$. Επιπλέον, το $Z_1^{(\kappa)}$ συγκλίνει στο Z_1 στον $L^2(\pi)$, για $\kappa \uparrow \infty$, αφού $E[Z_1 \mid F_0] = 0$ και άρα

$$\mathbb{E}[(Z_1 - Z_1^{(\kappa)})^2] \leq \mathbb{E}[Z_1^2 1\{|Z_1| > \kappa\}].$$

Έστω τώρα $\{M_j^{(\kappa)} : j \geq 0\}$ το Martingale που σχετίζεται με την ακολουθία $\{Z_j^{(\kappa)} : j \geq 1\}$ και ορίζεται ως εξής: $M_0^{(k)} := 0, M_N^{(k)} := \sum_{1 \leq j \leq N} Z_j^{(\kappa)}, N \geq 1$.
Θα αποδείξουμε στη συνέχεια ότι

$$\lim_{k \to \infty} \lim_{N \to \infty} |\mathbb{E}[exp\{(i\theta/\sqrt{N})M_N^{(\kappa)}\}] - e^{-\theta^2\sigma_{\kappa}^2/2}| = 0 \qquad (2.21)$$

Όμως, γνωρίζουμε ότι το $exp\{-\theta^2\sigma_{\kappa}^2/2\}$ συγκλίνει, για $\varkappa \uparrow \infty$, στο $exp\{-\theta^2\sigma^2/2\}$.
Αυτό που μένει είναι να δείξουμε ότι η διαφορά

$$\mathbb{E}[exp\{(i\theta/\sqrt{N})M_N\}] - \mathbb{E}[exp\{(i\theta/\sqrt{N})M_N^{(\kappa)}\}]$$

μηδενίζεται για $N \uparrow \infty$ και $\kappa \uparrow \infty$
Όμως, εφόσον $|e^{ix} - e^{iy}| \leq |x - y|$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, από την ανισότητα Schwarz η πάνω σχέση φράσσεται από το

$$\theta\{\frac{1}{N}\mathbb{E}[(M_N^{(\varkappa)} - M_N)^2]\}^{1/2}.$$

Επειδή οι τυχαίες μεταβλητές $\{Z_j - Z_j^{(\varkappa)} : j \geq 1\}$ είναι ορθογώνιες, η παραπάνω έκφραση είναι ίση με $\mathbb{E}[(Z_j - Z_j^{(\varkappa)})^2]$ που είναι μικρότερη ή ίση από το $E[Z_1^2 1\{|Z_1| > \varkappa\}]$ το οποίο μηδενίζεται για $\varkappa \uparrow \infty$.

Μένει τώρα η απόδειξη της σχέσης (2.22). Επειδή η ακολουθία $\{Z_j^{(\varkappa)} : j \geq 1\}$ μπορεί να μην είναι ούτε στάσιμη ούτε εργοδική, η απόδειξη της παραπάνω σχέσης δεν προκύπτει αντίστοιχα με το πρώτο σκέλος της απόδειξης. Η ποσότητα που πρέπει να εκτιμήσουμε είναι το εκθετικό του

$$\frac{\theta^2}{2N}\sum_{j=0}^{l-1}\mathbb{E}[\sum_{k=jK+1}^{(j+1)K}(Z_k^{(\kappa)})^2 \mid F_{jK}] =$$

$$= \frac{\theta^2}{2N}\sum_{j=0}^{l-1}\mathbb{E}[\sum_{k=jK+1}^{(j+1)K}\{\varphi_\kappa(Z_k)^2 - \mathbb{E}[\varphi_\kappa(Z_k) \mid Fk-1]^2\} \mid F_{jK}]$$

Όμως, παρατηρούμε ότι ο όρος $E[\varphi_\kappa(Z_k) \mid Fk-1]^2$ είναι θετικός με εκθετικό που φράσσεται από το 1. Επιπλέον, για δοσμένο κ, η ακολουθία $\{\varphi_\kappa(Z_k) : j \geq 1\}$ είναι στάσιμη και εργοδική και άρα από τη σχέση (2.20), το $\varphi_\kappa(Z_k)^2$ μπορεί να αντικατασταθεί από το σ_κ^2 στο εκθετικό.
Τελικά απομένει η εκτίμηση του

$$\mathbb{E}[|exp\{\frac{\theta^2-}{2N}\sum_{j=0}^{l-1}\mathbb{E}[\sum_{k=jK+1}^{(j+1)K}\mathbb{E}[\varphi_\kappa(Z_k) \mid Fk-1]^2 \mid FjK]\} - 1|].$$

Εφόσον η ποσότητα μέσα στο εκθετικό είναι αρνητική και $1 - e^{-x} \leq x$ για $x \geq 0$, η προηγούμενη έκφραση φράσσεται άνω από το

$$\frac{\theta^2}{2N}\sum_{k=1}^{N}\mathbb{E}[\mathbb{E}[\varphi_\kappa(Z_k) \mid Fk-1]^2].$$

Αφαιρώντας κατά Z_k τη δεσμευμένη αναμενόμενη τιμή, η οποία δεν επηρεάζει τη συνολική αναμενόμενη τιμή και εφαρμόζοντας την ανισότητα Schwarz, φράσσουμε την προηγούμενη σχέση από την $(\theta^2/2)E[Z_1^2 1\{|Z_1| > \varkappa\}]$ η οποία μηδενίζεται για $\varkappa\uparrow\infty$. Αυτό αποδεικνύει τη σχέση (2.22) και ολοκληρώνει και το δεύτερο σκέλος της απόδειξης. □

Ακολούθως, αναφέρεται το αντίστοιχο Θεώρημα που ισχύει για δεσμευμένες μέσες τιμές:

Θεώρημα 2.3. *Έστω ο χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathscr{F}, P), \{\mathscr{F}_j : j \geq 0\}$ μια αύξουσα διήθηση και $\{Z_j : j \geq 1\}$ μια ακολουθία στάσιμων και εργοδικών τυχαίων μεταβλητών προσαρμοσμένων στη διήθηση $\{\mathscr{F}_j\}$ τέτοιες ώστε*

$$\mathbb{E}[Z_1^2] < \infty, \qquad \mathbb{E}[Z_{j+1} \mid \mathscr{F}_j] = 0, \quad j \geq 0$$

Τότε,

$$\lim_{N\to\infty}\mathbb{E}[|E[exp\{(i\theta/\sqrt{N})M_N/\sqrt{N}\} \mid \mathscr{F}_0] - e^{-\theta^2\sigma^2/2}|] = 0,$$

όπου $\sigma^2 = \mathbb{E}[Z_1^2]$.

2.3.2 Αντιστρέψιμες Μαρκοβιανές Αλυσίδες και Διακύμανση

Καθοριστικό ρόλο στην προσπάθεια γενίκευσης του Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος για τις Μαρκοβιανές αλυσίδες παίζουν οι αντιστρέψιμες Μαρκοβιανές αλυσίδες και η διακύμανση τους. Αν θεωρήσουμε V μια τετραγωνικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση συνάρτηση στο πλαίσιο αντιστρέψιμων Μαρκοβιανών αλυσίδων, τότε καλούμαστε να εξετάσουμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά της διακύμανσης της ποσότητας $\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=0}^{N-1} V(X_j)$. Αναζητούμε δηλαδή τις συνθήκες ώστε να υπάρχει και να είναι πεπερασμένο το παρακάτω όριο:

$$\sigma^2(V) = \lim_{N\to\infty} \mathbb{E}_\pi[(\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=0}^{N-1} V(X_j))^2]. \tag{2.22}$$

Σταθεροποιούμε ένα αναλλοίωτο μέτρο πιθανότητας π και μια συνάρτηση V στον $L^2(\pi)$. Τότε, έχουμε ότι

$$\mathbb{E}_\pi[(\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=0}^{N-1} V(X_j))^2] = \frac{1}{N}\sum_{j,k=0}^{N-1} \mathbb{E}_\pi[V(X_j)V(X_k)] =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} \mathbb{E}_\pi[V(X_j)^2] + \frac{2}{N}\sum_{j<k} \mathbb{E}_\pi[V(X_j)V(X_k)]. \tag{2.23}$$

Εφόσον το π είναι αναλλοίωτο μέτρο, ισχύει $\mathbb{E}_\pi[V(X_j)^2] = \langle V, V\rangle_\pi$ και για $j < k$, ισχύει $\mathbb{E}_\pi[V(X_j)V(X_k)] = \langle V, P^{k-j}V\rangle_\pi$. Ο δεύτερος όρος της (2.24) δίνει τότε

$$\frac{2}{N}\sum_{j<k} \langle V, P^{k-j}V\rangle_\pi = 2\sum_{i=1}^{N-1} [1-(i/N)]\langle V, P^i V\rangle_\pi.$$

Τελικά,

$$\mathbb{E}_\pi[(\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=0}^{N-1} V(X_j))^2] = \langle V, V\rangle_\pi + 2\sum_{i=1}^{N-1} [1-i/N)]\langle V, P^i V\rangle_\pi.$$

Για να εκτιμήσουμε την δεύτερη έκφραση, βασιζόμαστε στο φασματικό θεώρημα του τελεστή P. Εφόσον ο P είναι συμμετρικός στον $L^2(\pi)$, όλες οι ιδιοτιμές του είναι πραγματικές και ισχύει

$$P = \int_{\mathbb{R}} \varphi dE_\varphi$$

και επειδή το φάσμα του περιέχεται στο διάστημα $[-1, 1]$,

$$P = \int_{-1}^{1} \varphi dE_\varphi.$$

Αυτό μας επιτρέπει να αναπαραστήσουμε το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle V, P^k V\rangle_\pi = \langle V, \int_{-1}^{1} \varphi^k dE_\varphi V\rangle_\pi = \int_{-1}^{1} \varphi^k d\langle V, E_\varphi V\rangle_\pi.$$

Αντικαθιστούμε το $d\langle V, E_\varphi V\rangle_\pi$ με το φασματικό μέτρο $\mu_\nu(d\varphi)$ του V, όπου το μ_ν είναι ένα πεπερασμένο μέτρο στο $[-1, 1]$ με συνολική μάζα ίση με $\langle V, V\rangle_\pi$. Άρα,

$$E_\pi[(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} V(X_j))^2] = \langle V, V\rangle_\pi + 2\int_{-1}^{1} \sum_{i=1}^{N-1} [1 - i/N)]\varphi^i \mu_\nu(d\varphi).$$

Ο δεύτερος όρος στην προηγούμενη σχέση μπορεί να γραφτεί ως

$$2\int_{-1}^{1} \sum_{i=1}^{N-1} [1 - i/N)]^+ \varphi^i \mu_\nu(d\varphi),$$

όπου το a^+ παριστάνει τη θετική τιμή του a. Για $-1 \leq \varphi \leq 0$, προκύπτει ότι η ποσότητα $2\int_{-1}^{1} \sum\limits_{i=1}^{N-1} [1 - i/N)]^+ \varphi^i$ είναι φραγμένη από μια σταθερά και ότι συγκλίνει στο $\varphi/(1-\varphi)$ για $N \uparrow \infty$. Από την άλλη μεριά, για $0 \leq \varphi \leq 1$, το $\sum_{i\geq 1}[1 - (i/N)]^+ \varphi^i$ αυξάνεται προς το $\varphi/(1-\varphi)$. Επομένως, από τη μονότονη και κυριαρχούμενη σύγκλιση, το προηγούμενο ολοκλήρωμα συγκλίνει στο $2\int_{-1}^{1} \dfrac{\varphi}{1-\varphi} \mu_\nu(d\varphi)$. Τελικά, αποδεικνύεται το παρακάτω:

Λήμμα 2.4. *Για κάθε συνάρτηση V στον $L^2(\pi) < \infty$, ισχύει $\sigma^2(V) < \infty$ αν και μόνο αν*

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{1-\varphi} \mu_\nu(d\varphi). \tag{2.24}$$

Τότε,

$$\sigma^2(V) = \int_{-1}^{1} \frac{1+\varphi}{1-\varphi} \mu_\nu(d\varphi) \tag{2.25}$$

Οι προηγούμενοι υπολογισμοί για το $\sigma^2(V)$ μας οδηγούν στη μελέτη ενός χώρου Hilbert. Συγκεκριμένα, εφόσον ο P είναι ένας τελεστής φραγμένος από το 1, ο $I - P$ είναι μη-αρνητικός έτσι ώστε το

$$\langle f, g\rangle_1 = \langle f, (I-P)g\rangle_\pi$$

να ορίζει ένα ημι-εσωτερικό εσωτερικό γινόμενο στον $L^2(\pi)$. Είναι ημι-εσωτερικό επειδή $\langle 1, 1\rangle_1 = 0$. Ορίζουμε ως $\mathscr{H}_1$ το χώρο Hilbert που επάγεται από τον

$L^2(\pi)$ εφοδιασμένο με το εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle$ όπως αυτό ορίστηκε παραπάνω. Ορίζουμε ως $\|\cdot\|_1$ τη νόρμα που συνδέεται με αυτό το εσωτερικό γινόμενο. Ο χώρος $\mathscr{H}_1$ και οι ιδιότητες του θα μελετηθούν εκτενέστερα στο επόμενο κεφάλαιο.

2.3.3 Η επιλύσιμη εξίσωση

Όπως είδαμε νωρίτερα, η εφαρμογή του Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος εξασφαλίζεται για τις περιπτώσεις όπου η εξίσωση Poisson έχει λύση, όμως η περίπτωση αυτή δεν είναι η τετριμμένη. Προκύπτει η ανάγκη εύρεσης μιας αντίστοιχης εξίσωσης που να έχει πάντα λύση. Η λεγόμενη και ′ επιλύσιμη εξίσωση ′ που καλύπτει αυτήν την ανάγκη είναι η

$$\lambda f_\lambda + (I-P)f_\lambda = V, \tag{2.26}$$

όπου $\lambda \geq 0$. Η εξίσωση αυτή έχει πάντα λύση στον $L^2(\pi)$ επειδή το $(1+\lambda)I-P$ είναι αντιστρέψιμο για $\lambda \geq 0$. Η απόδειξη του Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος για το $N^{-1/2}\sum_{0\leq j<N} V(X_j)$ θα βασιστεί στα επόμενα λήμματα που αφορούν στην επιλύσιμη εξίσωση.

Λήμμα 2.5. *Έστω f_λ η λύση της επιλύσιμης εξίσωσης (2.27) για κάποια συνάρτηση V μέσης τιμής 0 με πεπερασμένη διακύμανση $\sigma^2(V)$. Τότε,*

$$\lim_{\lambda\to 0} \lambda\langle f_\lambda, f_\lambda\rangle_\pi = 0.$$

Απόδειξη. Αφού η f_λ είναι η λύση της επιλύσιμης εξίσωσης (2.27),

$$\lambda\langle f_\lambda, f_\lambda\rangle_\pi = \lambda E_\pi[\{[(1+\lambda)I-P]^{-1}V\}^2] = \int_{-1}^{1} \frac{\lambda}{(1+\lambda-\varphi)^2}\mu_\nu(d\varphi). \tag{2.27}$$

Εφόσον $\lambda/(1+\lambda-\phi)^2 \leq (1-\varphi)^{-1}$ και το $\mu_\nu(d\varphi)$ ενσωματώνει το $(1-\varphi)^{-1}$, από το θεώρημα κυριαρχούμενης σύγκλισης, το προηγούμενο ολοκλήρωμα μηδενίζεται για $\lambda \downarrow 0$. □

Λήμμα 2.6. *Έστω f_λ η λύση της επιλύσιμης εξίσωσης (2.27) για κάποια συνάρτηση V μέσης τιμής 0 με πεπερασμένη διακύμανση $\sigma^2(V)$. Η ακολουθία f_λ είναι Cauchy στον $\mathscr{H}_1$: για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\lambda_0 > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $\lambda_1, \lambda_2 < \lambda_0$ να ισχύει*

$$\langle f_{\lambda_1} - f_{\lambda_2}, (I-P)(f_{\lambda_1} - f_{\lambda_2})\rangle_\pi < \varepsilon.$$

Απόδειξη. Αφού η f_λ είναι η λύση της επιλύσιμης εξίσωσης (2.27), ισχύει

$$\langle f_{\lambda_1} - f_{\lambda_2}, (I-P)(f_{\lambda_1} - f_{\lambda_2})\rangle_\pi =$$

$$= \int_{-1}^{1} (1-\varphi)\{\frac{1}{1+\lambda_2-\varphi} - \frac{1}{1+\lambda_1-\varphi}\}^2 \mu_\nu(d\varphi) =$$
$$= \int_{-1}^{1} \frac{(1-\varphi)(\lambda_2-\lambda_1)^2}{[1+\lambda_1-\varphi]^2[1+\lambda_2-\varphi]^2}\mu_\nu(d\varphi)$$

Εφόσον η ολοκληρωτέα παράσταση είναι φραγμένη από το $(1-\varphi)^{-1}$ και το φασματικό μέτρο της V ενσωματώνει το $(1-\varphi)^{-1}$, το ολοκλήρωμα συγκλίνει στο 0 για $\lambda_1, \lambda_2 \downarrow 0$. $\square$

Προκύπτει, μάλιστα, με υπολογισμούς ότι

$$\sigma^2(V) = \lim_{\lambda\to 0}\langle f_\lambda, (I-P^2)f_\lambda\rangle_\pi. \tag{2.28}$$

Πράγματι, εφόσον η f_λ είναι λύση της επιλύσιμης εξίσωσης (2.27), από τη φασματική αναπαράσταση του τελεστή P, ισχύει

$$\langle f_\lambda, (I-P^2)f_\lambda\rangle_\pi = \int_{-1}^{1}\frac{1-\varphi^2}{(1+\lambda-\varphi)^2}\mu_\nu(d\varphi)$$

Εφόσον η ολοκληρωτέα παράσταση είναι φραγγμένη από το $(1-\varphi)^{-1}$, από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης, για $\lambda \downarrow 0$, η προηγούμενη σχέση συγκλίνει στο

$$\int_{-1}^{1}\frac{1+\varphi}{1-\varphi}\mu_\nu(d\varphi),$$

που ισούται με το $\sigma^2(V)$ όπως αποδείχθηκε παραπάνω.

2.4 Κεντρικό Οριακό Θεώρημα για Αντιστρέψιμες Μαρκοβιανές Αλυσίδες

Πλέον, είναι δυνατόν να αποδειχθεί το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα για τα προσθετικά συναρτησιακά αντιστρέψιμων μαρκοβιανών αλυσίδων. Αν θεωρήσουμε μια συνάρτηση V με μέση τιμή 0 στον $L^2(\pi)$ και απαιτήσουμε η διακύμανση της ως προς το χρόνο να είναι πεπερασμένη, τότε θα χρησιμοποιήσουμε τη λύση

της επιλύσιμης εξίσωσης (2.27).
Για $N \geq 1$, έχουμε

$$\sum_{j=0}^{N-1} V(X_j) = \lambda \sum_{j=0}^{N-1} f_\lambda(X_j) + \sum_{j=0}^{N-1} \{f_\lambda(X_j) - (Pf_\lambda)(X_j)\} =$$

$$= M_N^\lambda + f_\lambda(X_0) - f_\lambda(X_N) + \lambda \sum_{j=0}^{N-1} f_\lambda(X_j), \tag{2.29}$$

όπου το $\{M_N^\lambda : N \geq 0\}$ είναι το Martingale προσαρμοσμένο στη διήθηση $\{\mathscr{F}_j : j \geq 0\}, \mathscr{F}_j = \sigma(X_0, ..., X_j)$ που ορίζεται ως:

$$M_0^\lambda = 0, \quad M_N^\lambda := \sum_{j=1}^{N} Z_j^\lambda$$

για $Z_j^\lambda = f_\lambda(X_j) - (Pf_\lambda)(X_j), j \geq 1$.

Λήμμα 2.7. *Για κάθε $N \geq 1$, όσο $\lambda \downarrow 0$, το M_N^λ συγκλίνει στον $L^2(\mathbb{P}_\pi)$ σε κάποια τυχαία μεταβλητή M_N. Η συγκλίνουσα διαδικασία $\{M_j : j \geq 0\}$ είναι ένα martingale προσαρμοσμένο στη διήθηση $\{\mathscr{F}_j\}$ και ισχύει*

$$\sum_{j=0}^{N-1} V(X_j) = M_N + R_N \tag{2.30}$$

για κάποια τυχαία μεταβλητή R_N στον $L^2(\mathbb{P}_\pi)$.

Απόδειξη. Για δεδομένο N, για να αποδείξουμε τη σύγκλιση του martingale M_N^λ, αρκεί να δείξουμε ότι κάθε όρος $Z_j^\lambda = f_\lambda(X_j) - (Pf_\lambda)(X_{j-1})$ συγκλίνει στον $L^2(\mathbb{P}_\pi)$.
Θα δείξουμε ότι η ακολουθία αυτή είναι Cauchy. Για $0 < \lambda_1 < \lambda_2$, εφόσον ο P είναι συμμετρικός τελεστής και το π είναι αναλλοίωτο μέτρο, ισχύει

$$\mathbb{E}_\pi[(f_{\lambda_2}(X_{j+1}) - f_{\lambda_1}(X_{j+1}) - (Pf_{\lambda_2})(X_j) + (Pf_{\lambda_1})(X_j))^2] =$$

$$= E_\pi[(f_{\lambda_2} - f_{\lambda_1})^2] - E_\pi[(Pf_{\lambda_2} - Pf_{\lambda_1})^2] = \langle f_{\lambda_2} - f_{\lambda_1}, (I - P^2)f_{\lambda_2} - f_{\lambda_1}\rangle_\pi.$$

Εφόσον $I + P \leq 2I$ και $I - P \geq 0$, ισχύει $I - P^2 = (I - P)(I + P) \leq 2(I - P)$. Επομένως, η ποσότητα αυτή είναι φραγμένη από το

$$2\langle f_{\lambda_2} - f_{\lambda_1}, (I - P)(f_{\lambda_2} - f_{\lambda_1})\rangle_\pi$$

το οποίο μηδενίζεται για $\lambda_1, \lambda_2 \downarrow 0$ με βάση το Λήμμα 2.6. Αποδείξαμε δηλαδή ότι το M_N^λ είναι μια ακολουθία Cauchy στον $L^2(\mathbb{P}_\pi)$, για $\lambda \downarrow 0$. Συγκεκριμένα, συγκλίνει σε κάποια διαδικασία M_N, που είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμο martingale εφόσον η σύγκλιση γίνεται στον $L^2(\mathbb{P}_\pi)$. Για να ολοκληρωθεί η απόδειξη, χρησιμοποιούμε τη σχέση (2.30). Εφόσον το αριστερό μέλος είναι ανεξάρτητο του λ και εφόσον ο πρώτος όρος συγκλίνει στο M_N για $\lambda \downarrow 0$, οι υπόλοιποι όροι θα πρέπει να συγκλίνουν σε κάποια τυχαία μεταβλητή ανεξάρτητη του λ την οποίο συμβολίζουμε ως R_N. $\square$

Λήμμα 2.8. *Για το ανάπτυγμα του όρου $\sum_{0 \leq j < N} V(X_j)$ του προηγούμενου λήμματος, ισχύει ότι το $N^{-1/2} R_N$ συγκλίνει στο 0 στον $L^2(\mathbb{P}_\pi)$ για $N \uparrow \infty$.*

Απόδειξη. Με βάση τη σχέση (2.30) και το λήμμα (2.7), ισχύει ότι

$$R_N = {M_N}^\lambda - M_N + f_\lambda(X_0) - f_\lambda(X_N) + \lambda \sum_{j=0}^{N-1} f_\lambda(X_j)$$

για κάθε $\lambda > 0$. Διαλέγουμε το $\lambda = N^{-1}$ και ισχυριζόμαστε ότι κάθε όρος στο δεξί μέλος της προηγούμενης σχέσης, διαιρεμένος με το $\sqrt{N}$ μηδενίζεται στον $L^2(\mathbb{P}_\pi)$. Από την ανισότητα Schwarz και από τη στατιμότητα του π,

$$\frac{1}{N}\mathbb{E}_\pi[(\lambda \sum_{j=0}^{N-1} f_\lambda(X_j))^2] \leq \frac{1}{N} E_\pi[f_\lambda^2] = \lambda \langle f_\lambda, f_\lambda \rangle_\pi$$

Όμως, στο λήμμα 2.5 αποδείξαμε ότι αυτή η ποσότητα μηδενίζεται για $\lambda \downarrow 0$. Αντίστοιχα, οι ποσότητες $N^{-1/2} f_\lambda(X_N)$ και $N^{-1/2} f_\lambda(X_0)$ μηδενίζονται στον $L^2(\mathbb{P}_\pi)$ για $N \uparrow \infty$.
Απομένουν οι όροι με το martingale. Από την ορθογωνιότητα των προσαυξήσεων των martingales και από τη στασιμότητα προκύπτει ότι

$$N^{-1}\mathbb{E}_\pi[(M_N^\lambda - M_N)^2] = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} \mathbb{E}_\pi[(Z_j^\lambda - Z_j)^2] = \mathbb{E}_\pi[(Z_1^\lambda - Z_1)^2].$$

Όμως, στο λήμμα 2.7 δείξαμε ότι η ποσότητα αυτή μηδενίζεται για $N \uparrow \infty$ και άρα αποδεικνύεται το ζητούμενο. $\square$

Με βάση τα παραπάνω, καταλήγουμε στο βασικό συμπέρασμα του κεφαλαίου:

Θεώρημα 2.9. *Θεωρούμε μια Μαρκοβιανή Αλυσίδα $\{X_j : j \geq 0\}$ σε έναν μετρήσιμο χώρο καταστάσεων E, εργοδική και αντιστρέψιμη ως προς αναλλοίωτο μέτρο π. Έστω $V : E \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση στον $L^2(\pi)$ με μέση τιμή 0 και πεπερασμένη διακύμανση ως προς το χρόνο ($\sigma^2(V) < \infty$). Τότε, ως προς $\mathbb{P}_\pi$, η ποσότητα*

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} V(X_j)$$

συγκλίνει κατά κατανομή σε μια γκαουσιανή τυχαία μεταβλητή μηδενικής μέσης τιμής και διακύμανσης $\sigma^2(V)$.

Απόδειξη. Στο λήμμα 2.7 δείξαμε ότι κάθε τυχαία μεταβλητή Z_j^λ συγκλίνει στον $L^2(\mathbb{P}_\pi)$ για $\lambda \downarrow 0$. Έστω Z_j το όριο της κάθε μίας. Ισχυριζόμαστε ότι η ακολουθία $\{Z_j : j \geq 1\}$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος 2.2 ως προς τη διήθηση $\mathscr{F}_j = \sigma(X_0, X_1, ..., X_j), j \geq 0$ και το μέτρο πιθανότητας $\mathbb{P}_\pi$.
Η ακολουθία $\{Z_j\}$ κληρονομεί από την $\{Z_j^\lambda\}$ τη στασιμότητα και τη μετρησιμότητα ως προς τη διήθηση $\{Z_j\}$. Εφόσον η Z_j^λ συγκλίνει στην Z_j στον $L^2(\mathbb{P}_\pi)$ και εφόσον τα $\{Z_j^\lambda\}$ είναι διαφορές Martingales ως προς τη διήθηση $\{\mathscr{F}_j\}$,

$$\mathbb{E}_\pi[Z_1^2] < \infty \ \text{ και } \ \mathbb{E}_\pi[Z_{j+1} \mid \mathscr{F}_j] = 0, j \geq 0.$$

Για να εφαρμοστεί το Θεώρημα 2.2, αρκεί να δείξουμε ότι η ακολουθία $\{Z_j\}$ είναι εργοδική. Έστω ν το μέτρο πιθανότητας στον $E \times E$ που ορίζεται από το $\nu(x, y) := \pi(x)P(x, y)$. Για $\lambda > 0$, έστω η ακολουθία $\Psi_\lambda : E \times E \to \mathbb{R}$ που ορίζεται ως $\Psi_\lambda := f_\lambda(y) - Pf_\lambda(x)$. Παρατηρούμε ότι $Z_k^\lambda = \Psi_\lambda(X_k, X_{k-1})$. Επιπλέον,

$$\|\Psi_\lambda\|_\nu^2 = \frac{1}{2}\langle f_\lambda, (I - P^2)f_\lambda\rangle_\pi \leq \|f_\lambda\|_1^2.$$

Συγκεκριμένα, από το λήμμα 2.7, η Ψ_λ είναι μια ακολουθία Cauchy στον $L^2(\nu)$. Συμβολίζουμε με Ψ το όριο της. Εφόσον $Z_k^\lambda = \Psi_\lambda(X_k, X_{k-1}), Z_k = \Psi(X_k, X_{k-1})$ για $k \geq 2$. Αυτό αποδεικνύει ότι η ακολουθία Z_k είναι εργοδική. Τώρα ικανοποιούνται όλες οι υποθέσεις του Θεωρήματος 2.2 Επομένως, το $N^{-1/2}M_N$ συγκλίνει κατά κατανομή σε μια γκαουσιανή τυχαία μεταβλητή μηδενικής μέσης τιμής και διακύμανσης

$$\sigma^2 = \mathbb{E}_\pi[Z_1^2] = \lim_{\lambda\to 0} \mathbb{E}_\pi[(Z_1^\lambda)^2] = \lim_{\lambda\to 0}\langle f_\lambda, (I - P^2)f_\lambda\rangle_\pi.$$

Από την (2.29), η έκφραση αυτή ισούται με το $\sigma^2(V)$.
Από το λήμμα 2.8, το $N^{-1/2}R_N$ συγκλίνει στο 0 στον $L^2(\mathbb{P}_\pi)$. Τότε, από το ανάπτυγμα (2.31), το $N^{-1/2}\sum_{0\leq j\leq N} V(X_j)$ συγκλίνει κατά κατανομή σε μια γκαουσιανή τυχαία μεταβλητή μέσης τιμής 0 και διακύμανσης $\sigma^2(V)$. □

Με βάση και την προηγούμενη παράγραφο, αποδεικνύεται ότι όχι μόνο η ακολουθία $N^{-1/2}\sum_{j=0}^{N-1} V(X_j)$ συγκλίνει κατά κατανομή σε μια γκαουσιανή τυχαία μεταβλητή, αλλά επιπλέον η διακύμανση αυτής της ακολουθίας συγκλίνει στη διακύμανση της συγκλίνουσας κατανομής.

2.5 Παράδειγμα

Έστω Μαρκοβιανή αλυσίδα με καταστάσεις A,B και πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης τον $S=\begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$.
Στην κατάσταση A έχουμε ανταμοιβή α, δηλαδή $V(A)=\alpha$ και στην κατάσταση B έχουμε ανταμοιβή β, δηλαδή $V(B)=\beta$.
Τα ερωτήματα που τίθενται είναι το τι ισχύει προσεγγιστικά για την ποσότητα $\dfrac{V(X_1)+...+V(X_n)}{n}$ σύμφωνα με το Εργοδικό Θεώρημα, το αν ικανοποιείται το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα για την ποσότητα $\gamma_n\dfrac{V(X_1)+...+V(X_n)}{n} - E_\pi[V(X)]$ και με δεδομένο ότι ισχύει $\gamma_n\dfrac{V(X_1)+...+V(X_n)}{n} - E_\pi[V(X)] \xrightarrow{d} Z$, το ποιές είναι οι τιμές των γ_n και Z.

Προφανώς, βρισκόμαστε σε μετρήσιμο χώρο καταστάσεων και πιο συγκεκριμένα σε πεπερασμένο.
Εφόσον ο πίνακας μετάβασης S της Μαρκοβιανής αλυσίδας είναι ο $\begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$,
ισχύει ότι $S = R\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}R^{-1}$,
όπου $\lambda = 1-p-q$ ιδιοτιμή με ιδιοδιανύσματα τα $\overrightarrow{r_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ και $\overrightarrow{r_2} = \begin{pmatrix} p \\ -q \end{pmatrix}$.
Τελικά, $S^n = R\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}R^{-1} = \dfrac{1}{p+q}\begin{pmatrix} q & p \\ q & p \end{pmatrix} + \dfrac{1-p-q}{p+q}\begin{pmatrix} p & -p \\ -q & q \end{pmatrix}$
άρα $\lim_n S^n = \dfrac{1}{p+q}\begin{pmatrix} q & p \\ q & p \end{pmatrix}$, δηλαδή αναλλοίωτη είναι η $\pi = [\dfrac{q}{p+q}, \dfrac{p}{p+q}]$.
Η Μαρκοβιανή αλυσίδα είναι προφανώς εργοδική και αντιστρέψιμη ως προς π.
Από το Εργοδικό Θεώρημα ισχύει ότι $\dfrac{V(X_1)+...+V(X_n)}{n} \to E_\pi[V(X)]$ για $n\to\infty$.
Για την αναμενόμενη τιμή της $V(X)$ κατά π ισχύει:

$$E_\pi[V(X)] = \sum_x \pi V(x) = \pi V(A) + \pi V(B) =$$

$$= \alpha\frac{q}{p+q} + \beta\frac{p}{p+q} = \frac{\alpha q + \beta p}{p+q}.$$

Θεωρώ την ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $W(X_j) = V(X_j) - E_\pi[V(X)]$ για την οποία ισχύει προφανώς ότι $E_\pi[W(X)] = 0$. Η W είναι διπλά ολοκληρώσιμη ως προς π, ενώ η διακύμανση της ως προς το χρόνο είναι πεπερασμένη.
Συγκεκριμένα, η τιμή της βρίσκεται από τη σχέση $\sigma^2(W) = \langle f, (I-S^2)f\rangle$, όπου η f είναι η λύση της εξίσωσης Poisson $(I-S)f = W$.
Με βάση το Θεώρημα (2.9) οι προϋποθέσεις του οποίου ικανοποιούνται, ισχύει

ότι η ποσότητα

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n} W(X_j)$$

συγκλίνει κατά κατανομή σε μια γκαουσιανή τυχαία μεταβλητή μηδενικής μέσης τιμής και διακύμανσης $\sigma^2(W)$. Βρίσκοντας ότι η λύση της εξίσωσης Poisson είναι η $f = \begin{pmatrix} \dfrac{\alpha-\beta}{p+q} \\ 0 \end{pmatrix}$, και άρα $(Sf) = \begin{pmatrix} \dfrac{(\alpha-\beta)(1-p)}{p+q} \\ \dfrac{(\alpha-\beta)q}{p+q} \end{pmatrix}$, προκύπτει ότι

$$\sigma^2(V) = E_\pi[f^2] - E_\pi[(Sf^2)] =$$

$$= \frac{q}{p+q}\frac{(\alpha-\beta)^2}{(p+q)^2} - [\frac{q}{p+q}\frac{(1-p)^2(\alpha-\beta)^2}{(p+q)^2} + \frac{p}{p+q}\frac{q^2(\alpha-\beta)^2}{(p+q)^2}] =$$

$$= \frac{(\alpha-\beta)^2}{(p+q)^3}pq(2-p-q).$$

Τελικά, από το Θεώρημα 2.9, έχουμε ότι

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n} W(X_j) \xrightarrow{d} Z,$$

όπου $Z \backsim N(0,\sigma^2(W))$ ή αλλιώς

$$\frac{V(X_1)+...+V(X_n)}{\sqrt{n}} - \frac{C(\alpha,\beta,p,q)}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} \sigma(W)Z',$$

όπου $Z' \backsim N(0,1)$.

Κεφάλαιο 3

Οριακά Θεωρήματα για Μαρκοβιανές Διαδικασίες σε Συνεχή Χρόνο

3.1 Εισαγωγή και χρήσιμοι χώροι για τη συνέχεια

Στόχος του κεφαλαίου αυτού είναι η επέκταση των ιδεών του προηγούμενου σε Μαρκοβιανές διαδικασίες σε συνεχή χρόνο που έχουν στάσιμο και εργοδικό μέτρο πιθανότητας, χωρίς να απαιτείται να είναι αντιστρέψιμες ως προς αυτό. Υποθέτουμε αρχικά ότι βρισκόμαστε σε ένα χώρο καταστάσεων, έστω E, με στάσιμο και εργοδικό μέτρο που συμβολίζουμε με π. Θεωρούμε μια συνάρτηση $V : E \to \mathbb{R}$ στον $L^2(\pi)$ τέτοια ώστε $\langle V \rangle_\pi = 0$. Το αντικείμενο αυτού του κεφαλαίου είναι να βρεθούν οι συνθήκες που απαιτούνται για τη V ώστε να ικανοποιείται το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα για την ποσότητα

$$\frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^t V(X_s) ds. \tag{3.1}$$

Πριν, όμως, προχωρήσουμε στην επεξεργασία που απαιτείται για να αποδειχθεί τελικά αυτό, πρέπει πρώτα να μελετήσουμε διάφορους χώρους που αφορούν σε συναρτήσεις και τελεστές, αρκετοί από τους οποίους έχουν εμφανιστεί μάλιστα ήδη στην εργασία. Θα εξετάσουμε πρώτα χώρους που αφορούν στη διακριτή περίπτωση και στη συνέχεια θα δούμε πως στη συνεχή αντιστοιχίζονται οι ίδιοι, ενώ επιπλέον είναι απαραίτητοι και πρόσθετοι χώροι με τις ιδιότητες τους.

Έστω μια συνάρτηση f στον $L^2(\pi)$, το αναλλοίωτο μέτρο π και το ημι-εσωτερικό γινόμενο όπως ορίστηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Τότε, ισχύει

$$\langle f, (I - P)f \rangle_\pi = \sum_{x,y \in E} \pi(x)P(x,y)f(x)[f(x) - f(y)].$$

Όμως, εφόσον το π είναι αναλλοίωτο, $\pi(x)P(x,y) = \pi(y)P(y,x)$ και άρα η παραπάνω σχέση γράφεται ως

$$(1/2)\sum_{x,y\in E}\pi(x)P(x,y)f(x)[f(x)-f(y)]+(1/2)\sum_{x,y\in E}\pi(y)P(y,x)f(x)[f(x)-f(y)].$$

Εναλλάσσοντας τα x,y στο δεύτερο σκέλος και προσθέτοντας, καταλήγουμε ότι

$$\langle f,(I-P)f\rangle_\pi = (1/2)\sum_{x,y\in E}\pi(x)P(x,y)f(x)[f(x)-f(y)]^2. \tag{3.2}$$

Θεωρούμε τώρα ότι το δεξί μέλος της προηγούμενης σχέσης αποτελεί τη νόρμα $\|f\|_1^2$ που είναι καλά ορισμένη για κάθε συνάρτηση $f: E\to\mathbb{R}$. Έστω $\widehat{\mathbb{D}}$ ο χώρος των συναρτήσεων $f: E\to\mathbb{R}$ τέτοιες ώστε $\|f\|_1<\infty$:

$$\widehat{\mathbb{D}} = \{f: E\to\mathbb{R} : \|f\|_1<\infty\}.$$

Προκύπτει ότι η $\|\cdot\|_1$ είναι ημι-νόρμα.
Θεωρούμε τώρα στον $\widehat{\mathbb{D}}$ τη σχέση ισοδυναμίας $\sim$ ώστε να ισχύει ότι $f\sim g$ αν $\|f-g\|_1=0$, δηλαδή αν $f-g$ είναι σταθερό. Ορίζουμε τότε ως $\mathbb{D}$ την κλάση ισοδυναμίας του $\widehat{\mathbb{D}}$: $\mathbb{D}=\widehat{\mathbb{D}}\,|_\sim$. Αποδεικνύεται ότι ο **χώρος** $\mathbb{D}$ είναι πλήρης. Εφόσον τώρα η νόρμα $\|\cdot\|_1$ ικανοποιεί τον κανόνα του παραλληλογράμμου, ο $\mathbb{D}$ είναι ένας χώρος Hilbert με εσωτερικό γινόμενο το $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ που ορίζεται από την $\langle f,g\rangle_1=(1/4)\{\|f+g\|_1^2-\|f-g\|_1^2\}$ ή αλλιώς

$$\langle g,f\rangle_1 = (1/2)\sum_{x,y\in E}\pi(x)P(x,y)[f(x)-f(y)][g(x)-g(y)] \tag{3.3}$$

για κάθε συνάρτηση f,g στον $\mathbb{D}$.
Εφόσον $(a-b)^2\le 2a^2+2b^2$, προκύπτει από τη σχέση (3.2) ότι $\|f\|_1^2\le 2\|f\|^2$ για κάθε συνάρτηση f στον $L^2(\pi)$ και άρα ο $L^2(\pi)$ εμπεριέχεται στον $\mathbb{D}$. Επομένως, μπορεί να οριστεί ένας υπόχωρος του $\mathbb{D}$ που να παράγεται από τις συναρτήσεις του $L^2(\pi)$ και τον οποίο καλούμε **χώρο** $\mathscr{H}_1$ έτσι ώστε

$$L^2(\pi)\subset\mathscr{H}_1\subset\mathbb{D}.$$

Για f στον $L^2(\pi)$, ορίζουμε τώρα την ημι-νόρμα

$$\|f\|_{-1}^2 = \sup_{g\in L^2(\pi)}\{2\langle f,g\rangle_\pi - \langle g,g\rangle_1\}. \tag{3.4}$$

Εφόσον ισχύει $\|g\|_1^2\le 2\|g\|^2$, από την προηγούμενη σχέση προκύπτει ότι $2\|f\|_{-1}^2\ge\|f\|^2$. Ειδικότερα, η $\|\cdot\|_{-1}$ είναι μια νόρμα στον $L^2(\pi)$.
Ορίζουμε τώρα ως **χώρο** $\mathscr{H}_{-1}$ το σύνολο των συναρτήσεων του $L^2(\pi)$ με πεπερασμένη $\|\cdot\|_{-1}$, δηλαδή $\mathscr{H}_{-1}=\{h\in L^2(\pi), \|h\|_{-1}<\infty\}$. Αποδεικνύεται ότι

ο $\mathscr{H}_{-1}$ είναι πλήρης. Επιπλέον, εφόσον η νόρμα $\|\cdot\|_{-1}$ ικανοποιεί τον κανόνα του παραλληλογράμμου, ο $\mathscr{H}_{-1}$ είναι χώρος Hilbert με εσωτερικό γινόμενο το $\langle\cdot,\cdot\rangle_{-1}$ που δίνεται από την πολικότητα

$$\langle f,g\rangle_{-1} = \frac{1}{4}\{\|f+g\|_{-1}^2 - \|f-g\|_{-1}^2\}.$$

Μάλιστα, ο $\mathscr{H}_{-1}$ εμπεριέχεται στον $L^2(\pi)$ έτσι ώστε να ισχύει

$$\mathscr{H}_{-1} \subset L^2(\pi) \subset \mathscr{H}_1.$$

Επιπλέον, αποδεικνύεται ότι κάθε συνάρτηση g στον $\mathscr{H}_{-1}$ μπορεί να αναπαρασταθεί ως $(I-P)G$ για κάποια συνάρτηση G στον $\mathscr{H}_1$ έτσι ώστε $\|g\|_{-1} = \|G\|_1$. Προκύπτει, μάλιστα, ότι η $(I-P): \mathscr{H}_1 \to \mathscr{H}_{-1}$ είνια ισομετρία.
Ανισότητα Schwarz:
Για κάθε f στον $\mathscr{H}_{-1}$ και g στον $L^2(\pi)$, ισχύει

$$\langle f,g\rangle_\pi^2 \leq \langle f,f\rangle_{-1}\langle g,g\rangle_1. \tag{3.5}$$

Μεταβαίνοντας τώρα στην περίπτωση των μαρκοβιανών διαδικασιών σε συνεχή χρόνο, εμφανίζονται και άλλοι χώροι που θα πρέπει να εξεταστούν.
Αν έχουμε έναν πλήρη και διαχωρίσιμο μετρικό χώρο Ε με τη Borel σ-άλγεβρα του $\mathscr{E}$, τότε ορίζεται ως $B(E)$ ο χώρος των φραγμένων μετρήσιμων συναρτήσεων στο Ε και ως $C_0(E)$ ο χώρος των συνεχών συναρτήσεων στο Ε που μηδενίζονται στο άπειρο. Ο τελευταίος μπορεί να θεωρηθεί σαν ένας χώρος Banach με νόρμα την $\|f\| = \sup_x|f(x)|$.
Έστω τώρα $D([0,\infty),E)$ ο χώρος όλων των συναρτήσεων $X:[0,\infty)\to E$ που είναι δεξιά συνεχείς και έχουν αριστερό όριο. Ορίζουμε ως $\Pi_s : D([0,\infty),E) \to E, s\geq 0$ τις προβολές που ορίζονται από την $\Pi_s(X) = X_s$. Η μικρότερη σ-άλγεβρα στον $D([0,\infty),E)$ που κάνει τις προβολές $\Pi_s, s\geq 0$ μετρήσιμες είναι η $\mathscr{F}^0$, ενώ αντίστοιχα η $\mathscr{F}_t^0$ είναι η μικρότερη σ-άλγεβρα για την οποία οι προβολές $\Pi_s, 0\leq s\leq t$, είναι μετρήσιμες.
Επιπλέον, θεωρούμε $\{P_t : t\geq 0\}$ μια αυστηρά μαρκοβιανή, Feller ημι-ομάδα γραμμικών τελεστών στον $C_0(E)$ και μια μαρκοβιανή διαδικασία στον Ε που να σχετίζεται με την $\{P_t : t\geq 0\}$. Τότε, αυτή μπορεί να θεωρηθεί ως μια οικογένεια μέτρων πιθανότητας $\{P_x : x\in E\}$ που ορίζονται στον $(D([0,\infty),E),\mathscr{F}^0)$ έτσι ώστε:

i) $\mathbb{P}_x[X_0 = x] = 1$ για κάθε $x\in E$.

ii) Για κάθε $A\in\mathscr{F}_0$, η προβολή $x\to\mathbb{P}_x[A]$ είναι μετρήσιμη.

iii) Για κάθε $x\in E, f\in C_0(E)$,

$$\mathbb{E}_x[f(X_{t+s}) \mid \mathscr{F}_s^0] = (P_tf)(X_s),\ \ \mathbb{P}_x \text{ σχεδόν βεβαίως.}$$

Αποδεικνύεται ότι υπάρχει πάντα μοναδική μαρκοβιανή διαδικασία που να σχετίζεται με κάποια Feller ημι-ομάδα.

Θα λέμε ότι ένα μέτρο πιθανότητας π στον E είναι στάσιμο ως προς την ημι-ομάδα $\{P_t : t \geq 0\}$ αν $\langle P_t f\rangle_\pi = \langle f\rangle_\pi$ για κάθε $f \in C_0(E)$, όπου $\langle\cdot\rangle_\pi$ είναι η αναμενόμενη τιμή ως προς π.

Έστω τώρα $L^2(\pi)$ ο χώρος Hilbert των π-τετραγωνικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων, $\langle\cdot\rangle_\pi$ το εσωτερικό γινόμενο στον $L^2(\pi)$ και $\|\cdot\|_\pi$ η νόρμα που προκύπτει από αυτό. Αντίστοιχα ορίζονται και το εσωτερικό γινόμενο και η νόρμα στον $L^p(\pi), p \geq 2$. Λέμε ότι το μέτρο πιθανότητας π είναι εργοδικό αν κάθε $f \in L^1(\pi)$ τέτοια ώστε $P_t f = f$ για κάθε $t \geq 0$, είναι σταθερή $\pi-$σχεδόν βεβαίως.

Θεωρούμε τώρα το **γεννήτορα** L της ημι-ομάδας στον $L^2(\pi)$ και $\mathscr{D}(L)$ το πεδίο ορισμού αυτού. Έστω $\mathscr{C} \subset \mathscr{D}(L)$ ένας **πυρήνας** του γεννήτορα L, όπου με την έννοια του πυρήνα εννοούμε εδώ τον πυκνό υπόχωρο ως προς το $\mathscr{D}(L)$. Συμβολίζουμε με L^* το συμπληρωματικό(adjoint) γεννήτορα του L στον $L^2(\pi)$ και υποθέτουμε ότι $\mathscr{C} \subset \mathscr{D}(L^*)$. Εφόσον το π είναι αναλλοίωτο, ο L^* είναι ο ίδιος γεννήτορας της μαρκοβιανής διαδικασίας. Στον $\mathscr{C}$ μπορούμε να ορίσουμε τον $S = (1/2)(L + L^*)$ και $A := (1/2)(L - L^*)$ το συμμετρικό και αντι-συμμεντρικό μέρος του γεννήτορα αντίστοιχα. Αποδεικνύεται ότι τα πεδία ορισμού των γεννητόρων L, L^* και S περιέχονται στον $\mathscr{H}_1$. Στον πυρήνα $\mathscr{C}$ ορίζεται η ημι-νόρμα $\|\cdot\|_1$ που ορίζεται ως

$$\|f\|_1^2 = \langle f, (-L)f\rangle_\pi. \tag{3.6}$$

Ορίζεται επίσης στον $\mathscr{C}$ η σχέση ισοδυναμίας $\sim_1$ ώστε $f \sim_1 g$ αν $\|f - g\|_1 = 0$, καθώς επίσης και ο $\mathscr{G}$ ως ο χώρος με νόρμα $(\mathscr{C}\ |_{\sim_1}, \|\cdot\|_1)$. Η νόρμα που ορίστηκε παραπάνω ικανοποιεί το νόμο του παραλληλογράμμου έστι ώστε ο $\mathscr{H}_1$ ως η πλήρωση του $\mathscr{G}_1$ ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|_1$, να είναι χώρος Hilbert με εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ που δίνεται από την πολικότητα:

$$\langle f, g\rangle_1 = \frac{1}{4}\{\|f+g\|_1^2 - \|f-g\|_1^2\}.$$

Αν τώρα $S = (1/2)(L + L^*)$, τότε

$$\|f\|_1^2 = \langle f, (-L)f\rangle_\pi = \langle f, (-S)f\rangle_\pi. \tag{3.7}$$

Επιπλέον, για κάθε f, g στον $\mathscr{C}$,

$$\langle f, g\rangle_1 = \langle f, (-S)g\rangle_\pi. \tag{3.8}$$

και $\|c\|_1 = 0$ για κάθε σταθερά c. Όπως προκύπτει, οι $\mathscr{H}_1$ και $L^2(\pi)$ δεν είναι γενικά ο ένας υπόχωρος του άλλου, παρόλα αυτά όταν ο L είναι φραγμένος, ισχύει $L^2(\pi) \subset \mathscr{H}_1$.

Μια σημαντική ιδιότητα του $\mathscr{C}$ είναι ότι αν αυτός αποτελεί πυρήνα για ένα γεννήτορα G, τότε για κάθε συνάρτηση f στο πεδίο ορισμού του G, υπάρχει ακολουθία $\{f_k : k \geq 1\}$ στον $\mathscr{C}$ τέτοια ώστε οι f_k, Gf_k να συγκλίνουν στις f, Gf αντίστοιχα. Εξ' ορισμού, ο $\mathscr{H}_1$ αποτελείται από τις ακολουθίες $\{f_n : n \geq 1\}$ των συναρτήσεων στον πυρήνα $\mathscr{C}$ που είναι Cauchy στον $\mathscr{H}_1$. Ισχυριζόμαστε ότι αν μια ακολουθία συγκλίνει στον $L^2(\pi)$ σε κάποια συνάρτηση f, ταυτίζουμε την ακολουθία με την f και λέμε ότι η f ανήκει στον $\mathscr{H}_1$. Πράγματι, αν $\{f_n : n \geq 1\}$,$\{g_n : n \geq 1\}$ είναι δύο ακολουθίες συναρτήσεων στον πυρήνα $\mathscr{C}$ που είναι Cauchy στον $\mathscr{H}_1$ και συγκλίνουν στον $L^2(\pi)$ για κάποια συνάρτηση f, η $f_n - g_n$ μηδενίζεται στον $\mathscr{H}_1$ για $n \uparrow \infty$. Αν F είναι το όριο της $f_n - g_n$ στον $\mathscr{H}_1$ και ορίσουμε μια συνάρτηση h στον πυρήνα $\mathscr{C}$, από τη σχέση (3.8) και επειδή $\{f_n : n \geq 1\}$ και $\{g_n : n \geq 1\}$ συγκλίνουν στον $L^2(\pi)$ στην f,

$$\langle F, h\rangle_1 = \lim_{n\to\infty} \langle f_n - g_n, h\rangle_1 = \lim_{n\to\infty} \langle f_n - g_n, (-S)h\rangle_\pi = 0.$$

Επειδή ο $\mathscr{C}$ είναι πυκνός στον $\mathscr{H}_1$, τότε $F = 0$ και αποδεικνύεται ο ισχυρισμός. Το παραπάνω μας επιτρέπει να εισάγουμε την έννοια των προσεγγιστικών ακολουθιών. Θεωρούμε ένα χώρο Hilbert $\mathscr{H}$ που να αποτελεί την πλήρωση ενός υποχώρου $\mathscr{C}_0$ του $L^2(\pi)$ εφοδιασμένο με το εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathscr{H}}$. Μια ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n : n \geq 1\}$ στον $\mathscr{C}_0$ τέτοια ώστε το f_n συγκλίνει στο f στον $L^2(\pi)$ και η f_n είναι Cauchy στον $\mathscr{H}$ καλείται $(\mathscr{C}_0, \mathscr{H})$-προσεγγιστική ακολουθία της f. Ως εκ τούτου, λέμε ότι η ακολουθία $\{f_n : n \geq 1\}$ στον $L^2(\pi)$ ανήκει στον $\mathscr{H}_1$ αν υπάρχει $(\mathscr{C}_0, \mathscr{H})$-προσεγγιστική ακολουθία της f.
Αντίστοιχα με την πρώτη περιγραφή του $\mathscr{H}_{-1}$, για κάθε f στον $L^2(\pi)$, ορίζεται η νόρμα του $\mathscr{H}_{-1}$ που αποτελεί το δυϊκό του $\mathscr{H}_1$:

$$\|f\|_{-1}^2 = \sup_{g\in\mathscr{C}} \{2\langle f, g\rangle_\pi - \|g\|_1^2\}. \tag{3.9}$$

Ακολουθούν ορισμένες ιδιότητες των χώρων $\mathscr{H}_1$ και $\mathscr{H}_{-1}$ οι οποίες θα αναφερθούν με τις αποδείξεις τους.

Ιδιότητα 1. *Ο S μπορεί να επεκταθεί ως φραγμένος τελεστής από τον $\mathscr{H}$ στον $\mathscr{H}_{-1}$.*

Απόδειξη. Ισχυριζόμαστε ότι η Sf ανήκει στον $\mathscr{H}_{-1}$ για κάθε f στον $\mathscr{C}$. Πράγματι, για κάθε g στον $\mathscr{C}$, εφόσον $-S$ είναι ένας μη-αρνητικός τελεστής, από την ανισότητα Schwarz,

$$\langle Sf, g\rangle_\pi^2 \leq \langle (-S)f, f\rangle_\pi \langle (-S)g, g\rangle_\pi = \|f\|_1^2 \|g\|_1^2.$$

Άρα, από τη σχέση (3.9) ισχύει τελικά ότι $\|Sf\|_{-1} \leq \|f\|_1$. □

Ιδιότητα 2. *Ο $\mathscr{H}_{-1}$ είναι η κλειστότητα του $\{Sf : f \in \mathscr{C}\}$.*

Απόδειξη. Έστω g στο $L^2(\pi)\cap\mathscr{H}_{-1}$ και f στον $\mathscr{C}$. Μόλις αποδείξαμε ότι το Sf ανήκει στον $\mathscr{H}_{-1}$. Ισχυριζόμαστε ότι

$$\langle g,(-S)f\rangle_{-1}=\langle g,f\rangle_\pi. \tag{3.10}$$

Πράγματι, εφόσον το εσωτερικό γινόμενο στον $\mathscr{H}_{-1}$ ορίζεται μέσω της πολικότητας μας δίνει ότι

$$\langle g,(-S)f\rangle_{-1}=\frac{1}{4}[\|g-Sf\|_{-1}^2-\|g+Sf\|_{-1}^2].$$

Από την (3.9) έχουμε ότι

$$\|g-Sf\|_{-1}^2=\sup_{h\in\mathscr{C}}\{2\langle g-Sf,h\rangle_\pi-\|h\|_1^2\}.$$

Εφόσον οι f και h ανήκουν στον $\mathscr{C}$, από την (3.8) έχουμε ότι $\langle(-S)f,h\rangle_\pi=\langle f,h\rangle_1$. Έτσι,

$$2\langle(-S)f,h\rangle_\pi-\|h\|_1^2=\|f\|_1^2-\|h-f\|_1^2$$

ώστε

$$\|g-Sf\|_{-1}^2=\|f\|_1^2+\sup_{h\in\mathscr{C}}\{2\langle g,h\rangle_\pi-\|h-f\|_1^2\}.$$

Εφόσον η f ανήκει στον $\mathscr{C}$, αντικαθιστώντας την h με $h'=f-h$, προκύπτει οτι

$$\|g-Sf\|_{-1}^2=\|f\|_1^2+2\langle g,f\rangle_\pi+\|g\|_{-1}^2.$$

Αντικαθιστώντας τώρα την f με $-f$,

$$\|g+Sf\|_{-1}^2=\|f\|_1^2-2\langle g,f\rangle_\pi+\|g\|_{-1}^2.$$

που αποδεικνύει την (3.10). Με βάση αυτό τώρα, ο $\mathscr{H}_{-1}\cap L^2(\pi)$ περιέχεται στην $\mathscr{H}_{-1}$-κλειστότητα του $\{Sf : f\in\mathscr{C}\}$: έστω g στον $\mathscr{H}_{-1}\cap L^2(\pi)$ και υποθέτουμε ότι $\langle g,Sf\rangle_{-1}=0$ για κάθε f στον $\mathscr{C}$. Από την (3.10), $\langle g,f\rangle_\pi=0$ για κάθε f στον $\mathscr{C}$. Αυτό συνεπάγεται ότι $g=0$ στον $L^2(\pi)$ επειδή ο πυρήνας $\mathscr{C}$ είναι πυκνός στον $L^2(\pi)$ και από την (3.9), $g=0$ στον $\mathscr{H}_{-1}$. Επειδή, όμως, ο $\mathscr{H}_{-1}$ είναι η κλειστότητα του $\mathscr{H}_{-1}\cap L^2(\pi)$, προκύπτει το ζητούμενο. □

Ιδιότητα 3. *Επέκταση του εσωτερικού γινομένου $\langle\cdot,\cdot\rangle_\pi$ στον $\mathscr{H}_1\times\mathscr{H}_{-1}$.*

Απόδειξη. Από τη σχέση (3.9) προκύπτει ότι για κάθε συνάρτηση f στον $\mathscr{C}$ και για κάθε συνάρτηση g στον $L^2(\pi)\cap\mathscr{H}_{-1}$,

$$|\langle f,g\rangle_\pi|\le\|f\|_1\|g\|_{-1}. \tag{3.11}$$

Πράγματι, έστω τέτοιες συναρτήσεις f,g και $\alpha\in\mathbb{R}$. Αφού αf ανήκει στον $\mathscr{C}$, από τη σχέση (3.9),

$$2\alpha\langle f,g\rangle_\pi\le\alpha^2\|f\|_1^2+\|g\|_{-1}^2.$$

Διαιρώντας με α και ελαχιστοποιώντας ως προς αυτό, αποδεικνύεται η (3.11).
Το εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle_\pi$ μπορεί να επεκταθεί στο $\mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_{-1}$: θεωρούμε μια συνάρτηση g στον $\mathscr{H}_{-1}$ και f στον $\mathscr{H}_1$. Θεωρούμε μια ακολουθία $\{g_n : n \geq 1\}$ στον $L^2(\pi)$ που να συγκλίνει στην g στον $\mathscr{H}_{-1}$. Ορίζουμε το

$$\langle f, g \rangle_\pi := \lim_{n\to\infty} \langle f_n, g_n \rangle_\pi.$$

Με βάση την (3.11), ο ορισμός δεν εξαρτάται από την ακολουθία που επιλέχθηκε. Επιπλέον, από την ανισότητα Schwarz προκύπτει ότι

$$|\langle f, g \rangle_\pi| = \lim_{n\to\infty} |\langle f_n, g_n \rangle_\pi| \leq \lim_{n\to\infty} \|f_n\|_1 \|g_n\|_{-1} = \|f\|_1 \|g\|_{-1}. \tag{3.12}$$

Η επέκταση του εσωτερικού γινομένου $\langle \cdot, \cdot \rangle_\pi$ στον $\mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_{-1}$ μας επιτρέπει να γενικεύσουμε τη σχέση (3.8). Για f, g στον $\mathscr{H}_1$,

$$\langle f, (-S)g \rangle_\pi = \langle f, g \rangle_1. \tag{3.13}$$

Από την ιδιότητα 1, η Sg ανήκει στον $\mathscr{H}_{-1}$. Το αριστερό μέλος της παραπάνω σχέσης νοείται ως το επεκτατεμένο εσωτερικό γινόμενο μεταξύ μιας συνάρτησης f στον $\mathscr{H}_1$ με μια συνάρτηση Sg στον $\mathscr{H}_{-1}$, ενώ το δεξί μέλος ως ένα συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο στον $\mathscr{H}_1$. Για να αποδείξουμε την (3.13), θεωρούμε τις ακολουθίες $\{f_n : n \geq 1\}, \{g_n : n \geq 1\}$ των συναρτήσεων στον $\mathscr{C}$ που συγκλίνουν αντίστοιχα στην f και τη g στον $\mathscr{H}_1$. Από την ιδιότητα 1, η Sg_n συγκλίνει στην Sg στον $\mathscr{H}_{-1}$. Εφόσον η Sg_n ανήκει στον $L^2(\pi)$, από τον ορισμό της επέκτασης του εσωτερικού γινομένου και από την (3.8),

$$\langle f, (-S)g \rangle_\pi = \lim_{n\to\infty} \langle f_n, (-S)g_n \rangle_\pi = \lim_{n\to\infty} \langle f_n, g_n \rangle_1 = \langle f, g \rangle_1,$$

όπου η τελευταία ισότητα ισχύει επειδή οι f_n, g_n συγκλίνουν στις f, g στον $\mathscr{H}_1$ αντίστοιχα.
Παρομοίως, μπορούμε να επεκτείνουμε την (3.10) και να δείξουμε ότι

$$\langle g, (-S)f \rangle_{-1} = \langle f, g \rangle_\pi \tag{3.14}$$

για κάθε $f \in \mathscr{H}_1$ και $g \in \mathscr{H}_{-1}$. Θεωρούμε μια ακολουθία $\{f_n : n \geq 1\}$ (αντίστοιχα μια $\{g_n : n \geq 1\}$) στον $\mathscr{C}$ (αντίστοιχα στον $L^2(\pi) \cap \mathscr{H}_{-1}$) που να συγκλίνει στην f (αντίστοιχα στην g). Από την ιδιότητα 1, η Sf_n συγκλίνει στην Sf στον $\mathscr{H}_{-1}$. Επομένως, από την ιδιότητα 3 και την (3.10), ισχύει

$$\langle f, g \rangle_\pi = \lim_{n\to\infty} \langle f_n, g_n \rangle_\pi = \lim_{n\to\infty} \langle (-S)f_n, g_n \rangle_1 = \langle (-S)f, g \rangle_{-1}$$

που αποδεικνύει τη σχέση (3.14). □

Ιδιότητα 4. *Ο $-S$ είναι ισομετρική ισοδυναμία μεταξύ των $\mathscr{H}_1$ και $\mathscr{H}_{-1}$ και ισχύει $\mathscr{H}_{-1} = S\mathscr{H}_1$.*

Απόδειξη. Στην ιδιότητα 1 αποδείξαμε ότι $S\mathscr{H}_1 \subset \mathscr{H}_{-1}$. Αντίστροφα, έστω h στον $\mathscr{H}_{-1}$. Από την ιδιότητα 2, υπάρχει ακολουθία $\{f_n : n \geq 1\}$ στον $\mathscr{C}$ τέτοια ώστε η Sf_n συγκλίνει στην h στον $\mathscr{H}_{-1}$. Από το πρώτο μέρος του ισχυρισμού, η $\{f_n : n \geq 1\}$ είναι Cauchy στον $\mathscr{H}_1$ και επομένως συγκλίνει σε κάποια f στον $\mathscr{H}_1$. Από την ιδιότητα 1, η Sf_n συγκλίνει στην Sf στον $\mathscr{H}_{-1}$. Άρα, $h = \lim_n Sf_n = Sf$, όπου τα όρια θεωρούνται στον $\mathscr{H}_{-1}$. Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι για κάθε h στον $\mathscr{H}_{-1}$ υπάρχει f στον $\mathscr{H}_1$ έτσι ώστε $Sf = h$. □

Ιδιότητα 5. *Ασθενής σύγκλιση στον $\mathscr{H}_1$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι μια ακολουθία $\{f_n : n \geq 1\}$ συγκλίνει ασθενώς σε κάποια f στον $\mathscr{H}_1$. Τότε, για κάθε g στον $\mathscr{H}_{-1}$,

$$\lim_{n\to\infty} \langle f_n, g\rangle_\pi = \langle f, g\rangle_\pi.$$

Πράγματι, έστω g στον $\mathscr{H}_{-1}$. Από την προηγούμενη ιδιότητα, υπάρχει h στον $\mathscr{H}_1$ τέτοια ώστε $g = (-S)h$. Επομένως, από την (3.13) και την ασθενή σύγκλιση της f_n στην f στον $\mathscr{H}_1$,

$$\lim_{n\to\infty} \langle f_n, g\rangle_\pi = \lim_{n\to\infty} \langle f_n, (-S)h\rangle_\pi = \lim_{n\to\infty} \langle f_n, h\rangle_1 =$$

$$= \langle f, h\rangle_1 = \langle f, (-S)h\rangle_\pi = \langle f, g\rangle_\pi.$$

□

Ιδιότητα 6. *Ο $\mathscr{H}_{-1}$ είναι ο δυϊκός του $\mathscr{H}_1$.*

Απόδειξη. Ο χώρος $\mathscr{H}_{-1}$ μπορεί να θεωρηθεί ως ο χώρος των φραγμένων γραμμικών συναρτησιακών στον $\mathscr{H}_1$.
Έστω μια φραγμένη γραμμική συνάρτηση $l : \mathscr{H}_1 \to \mathbb{R}$. Υπάρχει συνάρτηση g στον $\mathscr{H}_{-1}$ τέτοια ώστε

$$l(f) = \langle f, g\rangle_\pi$$

για κάθε f στον $\mathscr{H}_{-1}$. Αφού ο $\mathscr{H}_1$ είναι χώρος Hilbert, από το Θεώρημα αναπαράστασης του Riesz, υπάρχει συνάρτηση h στον $\mathscr{H}_1$ τέτοια ώστε

$$l(f) = \langle f, h\rangle_1 = \langle f, (-S)h\rangle_\pi$$

για κάθε $f \in \mathscr{H}_1$. Η τελευταία ισότητα προκύπτει από τη σχέση (3.13). Από την άλλη, υποθέτουμε ότι η g ανήκει στον $\mathscr{H}_{-1}$. Τότε, η $l(f) = \langle f, g\rangle_\pi$ ορίζει ένα φραγμένο συναρτησιακό στον $\mathscr{H}_1$ λόγω της (3.12). □

Ιδιότητα 7. *Επαρκείς συνθήκες ώστε να ανήκει μια συνάρτηση στον $\mathscr{H}_{-1}$.*

Απόδειξη. Από την (3.9), μια συνάρτηση f στον $L^2(\pi)$ ανήκει στον $\mathscr{H}_{-1}$ αν και μόνο αν υπάρχει πεπερασμένη σταθερά C_0 τέτοια ώστε

$$\langle f, g\rangle_\pi \leq C_0 \|g\|_1$$

για κάθε $g \in \mathscr{C}$. Τότε, $\|f\|_{-1} \leq C_0$. □

Ιδιότητα 8. *Αντικατάσταση του πυρήνα $\mathscr{C}$ από το $\mathscr{D}(S)$.*

Απόδειξη. Έχουμε ήδη δει ότι οι χώροι $\mathscr{D}(L)$ και $\mathscr{D}(S)$ περιέχονται στον $\mathscr{H}_1$. Για κάθε f στον $\mathscr{D}(L)$, g στον $\mathscr{D}(S)$,

$$\|f\|_1^2 = \langle f, (-L)f\rangle_\pi, \quad \|g\|_1^2 = \langle g, (-S)g\rangle_\pi, \quad \langle f, g\rangle_1 = \langle f, (-S)g\rangle_\pi.$$

Πράγματι, έστω οι ακολουθίες $\{f_n : n \geq 1\}$, $\{g_n : n \geq 1\}$ στον $\mathscr{C}$ τέτοιες ώστε οι f_n, g_n, Lf_n, Sg_n συγκλίνουν στον $L^2(\pi)$ για $n \uparrow \infty$ στις f, g, Lf, Sg αντίστοιχα. Αφού, όμως, από υπόθεση, η f αντιπροσωπεύει στον $\mathscr{H}_1$ την Cauchy ακολουθία $\{f_n : n \geq 1\}$, από την (3.8),

$$\|f\|_1^2 = \lim_{n\to\infty} \|f_n\|_1^2 = \lim_{n\to\infty} \langle f_n, (-S)f_n\rangle_\pi = \lim_{n\to\infty} f_n, (-L)f_n\rangle_\pi = \langle f, (-L)f\rangle_\pi.$$

Η τρίτη ισότητα προκύπτει από το γεγονός ότι η f_n ανήκει στον $\mathscr{C}$ που είναι πυρήνας τόσο για τον S όσο και για τον L. Για παρόμοιους λόγους, $\|g\|_1^2 = \langle g, (-S)g\rangle_\pi$ και $\langle f, g\rangle_1 = \langle f, (-S)g\rangle_\pi$.
Με βάση, όμως, την ιδιότητα 1, η Sf ανήκει στον $\mathscr{H}_{-1}$ για κάθε f στον $\mathscr{D}(S)$ για την οποία ισχύει $\|Sf\|_{-1} \leq \|f\|_1$.
Μπορούμε να αντικαταστήσουμε στη σχέση (3.9) τον πυρήνα $\mathscr{C}$ από τον $\mathscr{D}(L)$, αφού για κάθε συνάρτηση g στον $\mathscr{D}(L)$ υπάρχει ακολουθία $\{g_n : n \geq 1\}$ στον $\mathscr{C}$ τέτοια ώστε οι g_n, Lg_n συγκλίνουν στον $L^2(\pi)$ στις g, Lg αντίστοιχα. Το ίδιο γίνεται για τον $\mathscr{D}(s)$ στη θέση του $\mathscr{D}(L)$.
Τελικά, ισχυριζόμαστε ότι για κάθε g στον $L^2(\pi) \cap \mathscr{H}_{-1}$ και για κάθε f στον $\mathscr{D}(S)$,

$$\langle g, (-S)f\rangle_{-1} = \langle g, f\rangle_\pi.$$

Η πρόταση αυτή αποδεικνύεται όπως αποδείχθηκε η ιδιότητα 2, αντικαθιστώντας στον ορισμό (3.9) της $\mathscr{H}_{-1}$ νόρμας τον πυρήνα $\mathscr{C}$ από το πεδίο ορισμού $\mathscr{D}(S)$. □

Τέλος, δηλώνουμε ως ω την τροχιά του $D(\mathbb{R}_+, E)$. Έστω $\{\theta_t : t \geq 0\}$ η ημι-ομάδα των τελεστών μετατόπισης $\theta_t : D(\mathbb{R}_+, E) \to D(\mathbb{R}_+, E), (\theta_t\omega)(s) = \omega(t+s)$. Αν το π είναι αναλλοίωτο εργοδικό μέτρο, το $\mathbb{P}_\pi$ είναι αναλλοίωτο και εργοδικό υπό τη ροή των μετασχηματισμών.

3.2 Κεντρικό Οριακό Θεώρημα για προσθετικά συναρτησιακά μαρκοβιανών διαδικασιών που ικανοποιούν την εξίσωση Poisson

Έστω μια συνάρτηση $V : E \to \mathbb{R}$ στον $L^2(\pi)$ τέτοια ώστε $\langle V \rangle_\pi = 0$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει λύση f στον $\mathscr{D}(L)$ της εξίσωσης Poisson

$$-Lf = V. \tag{3.15}$$

Τότε, το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα για την ποσότητα $\frac{1}{\sqrt{t}}\int_0^t V(X_s)ds$ θα προκύψει από το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα για Martingales που θα παρουσιαστεί στη συνέχεια. Συγκεκριμένα, εφόσον η f ανήκει στο πεδίο ορισμού του γεννήτορα L, το

$$M_t = f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t (Lf)(X_s)ds$$

είναι ένα martingale προσαρμοσμένο στη διήθηση $\{\mathscr{F}_s : s \geq 0\}$.
Αν τώρα υποθέσουμε ότι και η f^2 ανήκει στον $\mathscr{D}(L)$, τότε μπορούμε να υπολογίσουμε την προβλεπόμενη τετραγωνική μεταβολή του M_t η οποία συμβολίζεται με $\langle M, M\rangle_t$, είναι ένα supermartingale και ορίζεται ως η ποσότητα $E[(M_t - M_s)^2 \mid \mathscr{F}_s]$. Από το ανάπτυγμα Doob έχουμε ότι $\langle M, M\rangle_t$=$M_t^2 - Z_t$ όπου το Z_t άρα το $M_t^2 - \langle M, M\rangle_t$ είναι martingale.

Πρόταση 3.1. *Με τα παραπάνω δεδομένα, η προβλεπόμενη τετραγωνική μεταβολή του martingale M_t ισούται με*

$$\langle M, M\rangle_t = \int_0^t [(Lf^2)(X_s) - 2f(X_s)(Lf)(X_s)]ds.$$

Απόδειξη. Έχουμε ότι:

$$E[M_t^2 - \langle M, M\rangle_t \mid \mathscr{F}_s] = M_s^2 - \langle M, M\rangle_s \Rightarrow$$

$$E[M_t^2 - M_s^2 \mid \mathscr{F}_s] = E[\langle M, M\rangle_t - \langle M, M\rangle_s \mid \mathscr{F}_s] \Rightarrow$$

$$E[(M_t - M_s)^2 - 2M_s^2 + 2M_tM_s \mid \mathscr{F}_s] = E[\langle M, M\rangle_t - \langle M, M\rangle_s \mid \mathscr{F}_s] \Rightarrow$$

$$E[(M_t - M_s)^2 \mid \mathscr{F}_s] + 2M_sE[M_t - M_s \mid \mathscr{F}_s] = E[\langle M, M\rangle_t - \langle M, M\rangle_s \mid \mathscr{F}_s] \Rightarrow$$

$$E[(M_t - M_s)^2 \mid \mathscr{F}_s] = E[\langle M, M\rangle_t - \langle M, M\rangle_s \mid \mathscr{F}_s] \tag{3.16}$$

εφόσον τα M_t, M_s είναι martingales. Όμως, ισχύει

$$M_t - M_s = f(X_t) - f(X_s) - \int_s^t (Lf)(X_q)dq, \quad \text{άρα}$$

$$E[(M_t - M_s)^2 \mid \mathscr{F}_s] = E[(f(X_t) - f(X_s) - \int_s^t (Lf)(X_q)dq)^2 \mid \mathscr{F}_s] =$$

$$= E[(f(X_t) - f(X_s))^2 + (\int_s^t (Lf)(X_q)dq)^2 - 2(f(X_t) - f(X_s)\int_s^t (Lf)(X_q)dq \mid \mathscr{F}_s].$$

Για $t \to s$, μηδενίζεται ο όρος $(\int_s^t (Lf)(X_q)dq)^2$ και άρα η προηγούμενη ποσότητα ισούται με

$$E[f^2(X_t) + f^2(X_s) - 2f(X_t)f(X_s) - 2(f(X_t) - f(X_s))\int_s^t (Lf)(X_q)dq \mid \mathscr{F}_s].$$

Εφόσον, τώρα, το $f^2(X_t) - \int_s^t (Lf^2)(X_s)ds$ είναι martingale, $E[f^2(X_t) \mid \mathscr{F}_s] = f^2(X_s) + \int_s^t (Lf^2)(X_q)dq$ άρα τελικά η προηγούμενη σχέση ισούται με

$$E[2f^2(X_s) - 2f(X_t)f(X_s) + \int_s^t (Lf^2)(X_q)dq - 2(f(X_t) - f(X_s))\int_s^t (Lf)(X_q)dq \mid \mathscr{F}_s] =$$

$$= E[-2f(X_s)(f(X_t) - f(X_s)) - 2(f(X_t) - f(X_s))\int_s^t (Lf)(X_q)dq \mid \mathscr{F}_s + \int_s^t (Lf^2)(X_q)dq =$$

$$= -2f(X_s)E(\int_s^t (Lf)(X_q)dq) \mid \mathscr{F}_s) + 2f(X_s)E[\int_s^t (Lf)(X_q)dq \mid \mathscr{F}_s] -$$

$$-2E[f(X_t)\int_s^t (Lf)(X_q)dq \mid \mathscr{F}_s] + E[\int_s^t (Lf^2)(X_q)dq \mid \mathscr{F}_s] =$$

$$= E[\int_s^t (Lf^2)(X_q)dq \mid \mathscr{F}_s] - 2E[f(X_t)\int_s^t (Lf)(X_q)dq \mid \mathscr{F}_s]. \qquad (3.17)$$

Όμως,

$$E[f(X_t)\int_s^t (LF)(X_q)dq \mid \mathscr{F}_s] = E[\int_s^t f(X_t)(Lf)(X_q)dq \mid \mathscr{F}_s] =$$

$$= \int_s^t E[f[X_t)(Lf)(X_q) \mid \mathscr{F}_s]dq = \int_s^t E[E[f(X_t)(Lf)(X_q) \mid \mathscr{F}_q] \mid \mathscr{F}_s]dq =$$

$$= \int_s^t E[(Lf)(X_q)(f(X_q) + \int_q^t (Lf)(X_r)dr) \mid \mathscr{F}_q] \mid \mathscr{F}_s]dq =$$

$$= \int_s^t E[(Lf)(X_q)f(X_q) + \int_q^t (Lf)(X_r)dr(Lf)(X_q)dq \mid \mathscr{F}_s].$$

Τελικά, η σχέση (3.17) γίνεται:

$$-2E[\int_s^t (Lf)(X_q)f(X_q)dq \mid \mathscr{F}_s] + E[\int_s^t (Lf^2)(X_q)dq \mid \mathscr{F}_s] -$$

$$-2E[\int_s^t \int_q^t (Lf)(X_r)(Lf)(X_q)drdq \mid \mathscr{F}_s] =$$

$$= E[\int_s^t (Lf^2(X_q) - 2f(X_q)(Lf)(X_q))dq \mid \mathscr{F}_s].$$

$\square$

Με βάση αυτό και όπως θα αποδείξουμε παρακάτω η αναμενόμενη τιμή της θα ισούται με

$$\mathbb{E}_\pi[\langle M, M\rangle_t] = 2t\langle f, (-L)f\rangle_\pi. \tag{3.18}$$

Αν τώρα μόνον η f ανήκει στον $\mathscr{D}(L)$, τότε ο προηγούμενος υπολογισμός δεν ισχύέι, παρόλα αυτά η $\langle M, M\rangle_t$ παραμένει ένα αύξων προσθετικό συναρτησιακό με αναμενόμενη τιμή την $2t\langle f, (-L)f\rangle_\pi$.

Εφόσον η f είναι η λύση της εξίσωσης Poisson, μπορούμε να ξαναγράψουμε τα προσθετικά συναρτησιακά του martingale ως εξής:

$$\frac{1}{\sqrt{t}}\int_0^t V(X_s)ds = \frac{M_t}{\sqrt{t}} + \frac{f(X_0) - f(X_t)}{\sqrt{t}}. \tag{3.19}$$

Αφού, όμως, η f ανήκει στον $L^2(\pi)$ και το μέτρο είναι στάσιμο, η ποσότητα $[f(X_0) - f(X_t)]/\sqrt{t}$ μηδενίζεται στον $L^2(\mathbb{P}_\pi)$ για $t \uparrow \infty$. Επομένως, αυτό που μένει είναι να αποδειχθεί το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα για το martingale M_t. Παρατηρούμε ότι το M_t έχει στάσιμες προσαυξήσεις επειδή το X_t ως προς $\mathbb{P}_\pi$ είναι στάσιμο. Επιπλέον, επειδή το π είναι εργοδικό, η ποσότητα $t^{-1}\langle M, M\rangle_t$ συγκλίνει στον $L^1(\mathbb{P}_\pi)$, για $t \uparrow \infty$ στο $2\langle f, (-L)f\rangle_\pi$. Όπως θα δούμε στην επόμενη παράγραφο, το $t^{-1/2}M_t$ και επομένως και το $t^{-1/2}\int_0^t V(X_s)ds$ συγκλίνει κατά κατανομή σε μια γκαουσιανή τυχαία μεταβλητή μηδενικής μέσης τιμής και διακύμανσης $\sigma^2(V) = 2\langle f, (-L)f\rangle_\pi$.

3.3 Κεντρικό Οριακό Θεώρημα για Martingales

Έστω ο χώρος $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ και ένα δεξιά συνεχές, τετραγωνικά ολοκληρώσιμο Martingale $\{M_t : t \geq 0\}$ ως προς τη διήθηση $\{\mathscr{F}_t : t \geq 0\}$. Υποθέτουμε ότι $M_0 = 0$ και συμβολίζουμε με $\langle M, M\rangle_t$ την αναμενόμενη τετραγωνική μεταβολή.

Θεώρημα 3.2. *Υποθέτουμε ότι οι προσαυξήσεις του Martingale M_t είναι στάσιμες και ότι η αναμενόμενη τετραγωνική μεταβολή συγκλίνει στον $L^1(P)$ στο $\sigma^2 = \mathbb{E}M_1^2$, δηλαδή*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}|\frac{\langle M, M\rangle_n}{n} - \sigma^2| = 0.$$

Τότε, η κατανομή του $M_t/\sqrt{t}$ δεσμευμένη ως προς $\mathscr{F}_0$ συγκλίνει κατά πιθανότητα, για $t \uparrow \infty$ σε μια γκαουσιανή κατανομή μηδενικής μέσης τιμής και διακύμανσης σ^2:

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}[|\mathbb{E}[e^{i\theta M_t/\sqrt{t}} \mid \mathscr{F}_0] - e^{-\sigma^2\theta^2/2}|] = 0.$$

για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$.

Η απόδειξη βασίζεται στο επόμενο λήμμα το οποίο υποβαθμίζει το πρόβλημα στην απόδειξη του Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος για πεπερασμένες φορές.

Λήμμα 3.3. *Υπό τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος (3.1), ισχύει ότι*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\{\sup_{n\le t\le n+1} |\mathbb{E}[e^{i\theta M_t/\sqrt{t}} \mid \mathscr{F}_0] - \mathbb{E}[e^{i\theta M_n/\sqrt{n}} \mid \mathscr{F}_0]|\} = 0. \tag{3.20}$$

Απόδειξη. Η διαφορά των δεσμευμένων αναμενόμενων τιμών της σχέσης (3.20) ισούται με

$$\mathbb{E}[(e^{i\theta[M_t/\sqrt{t}-M_n/\sqrt{n}]} - 1)e^{i\theta M_n/\sqrt{n}} \mid \mathscr{F}_0].$$

Εφόσον το M_t είναι Martingale, αφαιρούμε μέσα στην παρένθεση την έκφραση $\theta(M_t/\sqrt{t} - M_n/\sqrt{n})$. Επειδή όμως για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $|e^{ix} - 1 - ix| \le x^2/2$, καταλήγουμε ότι η παραπάνω έκφραση είνα φραγμένη από το

$$\frac{\theta^2}{2}\mathbb{E}[(\frac{M_t}{\sqrt{t}} - \frac{M_n}{\sqrt{n}})^2 \mid \mathscr{F}_0].$$

Προσθαφαιρώντας τώρα το $M_n/\sqrt{t}$ και εφόσον $(\alpha+b)^2 \le 2(\alpha^2+b^2)$, η προηγούμενη δεσμευμένη αναμενόμενη τιμή είναι μικρότερη ή ίση από το

$$\frac{\theta^2}{t}\mathbb{E}[\langle M,M\rangle_t - \langle M,M\rangle_n \mid \mathscr{F}_0] + \theta^2(1-\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{t}})^2\mathbb{E}[\frac{\langle M,M\rangle_n}{n} \mid \mathscr{F}_0].$$

Αντικαθιστώντας το t με n ή $n+1$, έχουμε τελικά ότι η αναμενόμενη τιμή της (3.20) είναι φραγμένη από το

$$\frac{\theta^2}{n+1}\mathbb{E}[\langle M,M\rangle_t - \langle M,M\rangle_n \mid \mathscr{F}_0] + \theta^2(1-\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}})^2\mathbb{E}[\frac{\langle M,M\rangle_n}{n} \mid \mathscr{F}_0].$$

Εφόσον όμως το $\langle M,M\rangle_n/n$ συγκλίνει για $n\uparrow\infty$ στον $L^1(P)$ στο σ^2, ισχύει το ζητούμενο. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.2:
Θέλουμε να δείξουμε ότι η δεσμευμένη αναμενόμενη τιμή $\mathbb{E}[e^{i\theta M_N/\sqrt{N}} \mid \mathscr{F}_0]$ συγκλίνει στον $L^1(P)$ στο $e^{-\theta^2\sigma^2/2}$, για $N\uparrow\infty$ και για κάθε $\theta\in\mathbb{R}$. Για να φτάσουμε στο $\mathbb{E}[e^{i\theta M_N/\sqrt{N}} \mid \mathscr{F}_0]$, θα χρησιμοποιήσουμε έναν αναδρομικό τύπο για την ποσότητα $\mathbb{E}[e^{i\theta M_{j+1}/\sqrt{N}} \mid \mathscr{F}_0]$
Ορίζουμε τη στάσιμη ακολουθία $Z_j := M_j - M_{j-1}, j \ge 1$ η οποία είναι προφανώς προσαρμοσμένη στη διήθηση $\{\mathscr{F}_j : j \ge 0\}$. Τότε, $M_0 = 0, M_j = \sum_{1\le k\le j} Z_k$.
Θα χρησιμοποιήσουμε το ανάπτυγμα

$$e^{i\alpha} = 1 + i\alpha - \alpha^2/2 - R(\alpha)\alpha^2$$

όπου $R(\alpha) := \alpha^{-2}\int_0^\alpha d\alpha_1 \int_0^{\alpha_1}(e^{ix}-1)dx$. Επομένως, $|R(\alpha)| \le 1, \alpha\in\mathbb{R}$. Συμβολίζουμε τώρα με $\mathbb{E}_0[\cdot]$ τη δεσμευμένη αναμενόμενη τιμή $\mathbb{E}[\cdot \mid \mathscr{F}_0]$. Εφόσον το $\{M_j : j\ge 0\}$ είναι προσαρμοσμένο στη διήθηση $\{\mathscr{F}_j\}$ και ισχύει $E_0[Z_{j+1} \mid \mathscr{F}_j] = 0$,

$$\mathbb{E}_0[e^{i(\theta/\sqrt{N})M_{j+1}}] = \mathbb{E}_0[e^{i(\theta/\sqrt{N})M_j} E_0[e^{i(\theta/\sqrt{N})Z_{j+1}} \mid \mathscr{F}_j]] =$$

$$= \mathbb{E}_0[e^{i(\theta/\sqrt{N})M_j}\{1 + \mathbb{E}_0[e^{i(\theta/\sqrt{N})Z_{j+1}} - 1 - \frac{i\theta}{\sqrt{N}}Z_{j+1} \mid \mathscr{F}_j]\}].$$

Ερευνώντας τώρα το $e^{\theta^2\sigma^2}$, θα βρούμε έναν αναδρομικό τύπο για την ποσότητα $e^{\theta^2\sigma^2 j/(2N)}\mathbb{E}_0[e^{i(\theta/\sqrt{N})M_j}]$. Έχουμε ότι

$$e^{\theta^2\sigma^2(j+1)/(2N)}\mathbb{E}_0[e^{i(\theta/\sqrt{N})M_{j+1}}] - e^{\theta^2\sigma^2 j/(2N)}\mathbb{E}_0[e^{i(\theta/\sqrt{N})M_j}] =$$

$$= e^{\theta^2\sigma^2(j+1)/(2N)}\{\mathbb{E}_0[e^{i(\theta/\sqrt{N}M_{j+1}}] - \mathbb{E}_0[e^{i(\theta/\sqrt{N})M_j}]\}+$$

$$+e^{\theta^2\sigma^2(j+1)/(2N)}(1 - e^{-\theta^2\sigma^2/(2N)})\mathbb{E}_0[e^{i(\theta/\sqrt{N})M_j}]. \tag{3.21}$$

Όμως, από το ανάπτυγμα του $e^{i\alpha}$ ισχύει ότι

$$\mathbb{E}_0[e^{i(\theta/\sqrt{N})M_{j+1}}] =$$

$$= \mathbb{E}_0[e^{i(\theta/\sqrt{N})M_j}] - \frac{\theta^2}{2N}\mathbb{E}_0[e^{i(\theta/\sqrt{N})M_j}Z_{j+1}^2] -$$

$$-\frac{\theta^2}{N}\mathbb{E}_0[e^{i(\theta/\sqrt{N})M_j}Z_{j+1}^2 R(\theta Z_{j+1}/\sqrt{N})].$$

Άρα, η (3.21) ισούται με

$$-\frac{\theta^2}{2N}e^{\theta^2\sigma^2(j+1)/(2N)}\mathbb{E}_0[e^{i(\theta/\sqrt{N})M_j}(Z_{j+1}^2 - \sigma^2)] -$$

$$-\frac{\theta^2}{2N}e^{\theta^2\sigma^2(j+1)/(2N)}\mathbb{E}_0[e^{i(\theta/\sqrt{N})M_j}Z_{j+1}^2 R(\theta Z_{j+1}/\sqrt{N})] +$$

$$+e^{\theta^2\sigma^2(j+1)/(2N)}\{1 - \frac{(\theta\sigma)^2}{2N} - e^{-\theta^2\sigma^2/(2N)}\}\mathbb{E}_0[e^{i(\theta/\sqrt{N})M_j}].$$

Επειδή $M_0 = 0$ προσθέτοντας από $j = 0$ ως $N - 1$ καταλήγουμε ότι το $e^{\theta^2\sigma^2/2}\mathbb{E}_0[e^{i(\theta/\sqrt{N})M_N}] - 1$ ισούται με

$$-\frac{\theta^2}{2N}\sum_{j=1}^{N-1} e^{\theta^2\sigma^2(j+1)/(2N)}\mathbb{E}_0[e^{i(\theta/\sqrt{N})M_j}(Z_{j+1}^2 - \sigma^2)] -$$

$$-\frac{\theta^2}{2N}\sum_{j=0}^{N-1} e^{\theta^2\sigma^2(j+1)/(2N)}\mathbb{E}_0[e^{i(\theta/\sqrt{N})M_j}Z_{j+1}^2 R(\theta Z_{j+1}/\sqrt{N})] +$$

$$+\sum_{j=0}^{N-1} e^{\theta^2\sigma^2(j+1)/(2N)}\{1 - \frac{(\theta\sigma)^2}{2N} - e^{-\theta^2\sigma^2/(2N)}\}\mathbb{E}_0[e^{i(\theta/\sqrt{N})M_j}] \tag{3.22}$$

Για να ολοκληρωθεί η απόδειξη του Θεωρήματος, αρκεί να δειχθεί ότι η (3.22) μηδενίζεται στον $L^1(P)$ για $N \uparrow \infty$. Θα εξετάσουμε καθένα από τους τρεις όρους ξεχωριστά.

- Ο τρίτος όρος είναι απολύτως φραγμένος από το C_0/N για κάποια σταθερά

C_0.
- Για το δεύτερο όρο, για αυθαίρετα μικρό $\varepsilon > 0$ η έκφραση φράσσεται από το

$$\frac{C_0}{N}\sum_{j=1}^{N-1}\mathbb{E}[Z_{j+1}^2 \mid R(\theta Z_{j+1}/\sqrt{N}) \mid \mathbf{1}\{|\theta Z_{x+1}| \geq \varepsilon\sqrt{N}\}]+$$

$$+\frac{C_0}{N}\sum_{j=1}^{N-1}\mathbb{E}[Z_{j+1}^2 \mid R(\theta Z_{j+1}/\sqrt{N}) \mid \mathbf{1}\{|\theta Z_{x+1}| < \varepsilon\sqrt{N}\}]$$

για κάποια σταθερά C_0 που εξαρτάται από τα θ και σ^2. Από τη στασιμότητα των $\{Z_j : j \geq 1\}$ η οποία προκύπτει από τη στασιμότητα των προσαυξήσεων του martingale και την οριοθέτηση της R, προκύπτει ότι ο πρώτος όρος της παραπάνω σχέσης είναι μικρότερος ή ίσος από το

$$C_0\mathbb{E}[Z_1^2\mathbf{1}\{|\theta Z_1| \geq \varepsilon\sqrt{N}\}]$$

για κάποια σταθερά C_0. Εφόσον το $Z_1 = M_1$ ανήκει στον $L^2(P)$, η παραπάνω έκφραση μηδενίζεται για $N \uparrow \infty$.
Από την άλλη μεριά, ο δεύτερος όρος είναι άνω φραγμένος από το

$$C_0 \sup_{|h|\leq\varepsilon}|R(h) \mid \mathbb{E}[Z_1^2].$$

Η έκφραση αυτή μηδενίζεται όμως για $\varepsilon \downarrow 0$ με βάση τον τύπο της R.
- Για τον πρώτο όρο, εφόσον το $M_t^2 - \langle M, M\rangle_t$ είναι martingale με δεσμευμένες αναμενόμενες τιμές, αντικαθιστούμε το Z_{j+1}^2 με το $Y_{j+1} = \langle M, M\rangle_{j+1} - \langle M, M\rangle_j$. Παρατηρούμε ότι οι τυχαίες μεταβλητές $\{Y_j : j \geq 1\}$ είναι θετικές και ότι, από υπόθεση, το $N^{-1}\sum_{j=1}^{N} Y_j = \langle M, M\rangle_N/N$ συγκλίνει στον $L^1(P)$ στο σ^2.
Σταθεροποιούε ένα $K \geq 1$ και χωρίζουμε τα $\Lambda_N = \{0, ..., N-1\}$ σε $l = [n/k]$ συνεχόμενα υποδιαστήματα K ή $K+1$ στοιχείων:

$$\Lambda_N = \bigcup_{m=1}^{l} I_m,\; I_m \cap I_n = \varnothing \,\text{για}\, m \neq n,$$

$$I_m = \{j_m, ..., j_m + K - 1\} \;\text{ή}\; I_m = \{j_m, ..., j_m + K\}$$

για κάποιο ακέραιο j_m. Πρέπει τώρα να εκτιμήσουμε την ποσότητα

$$\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N-1} e^{j\beta/N}\mathbb{E}_0[e^{i(\theta/\sqrt{N}})M_j\{\sigma^2 - Y_{j+1}\}] =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{l}\sum_{j\in I_k} e^{j\beta/N}\mathbb{E}_0[e^{i(\theta/\sqrt{N}})M_j\{\sigma^2 - Y_{j+1}\}].$$

για κάποια σταθερά β στο $\mathbb{R}$. Για να χρησιμοποιήσουμε το Νόμο των Μεγάλων Αριθμών για τις τυχαίες μεταβλητές Y_j, θα πρέπει να αντικαταστήσουμε τα Y_{j+1} με το άθροισμα $\sum_{j\in I_k} Y_{j+1}$. Με βάση αυτό, η αναμενόμενη τιμή της απόλυτης τιμής της προηγούμενης έκφρασης είναι ίση με

$$\frac{CK}{N} + \frac{1}{N} e^{j_k \beta/N} E[|\sum_{j\in I_k} e^{i(\theta/\sqrt{N})} M_j\{\sigma^2 - Y_{j+1}\}]$$

για κάποια σταθερά $C = C(\beta, \sigma)$. Ο δεύτερος όρος αυτού του αθροίσματος είναι μικρότερος ή ίσος από το

$$\frac{C}{N}\sum_{k=1}^{l} |I_k| \mathbb{E}[|\frac{1}{|I_k|}\sum_{j\in I_k}\{\sigma^2 - Y_{j+1}\}|]+$$

$$\frac{C}{N}\sum_{k=1}^{l} \mathbb{E}[|\sum_{j\in I_k}\{e^{i(\theta/\sqrt{N})M_j} - e^{i(\theta/\sqrt{N})M_{j_k}}\}\{\sigma^2 - Y_{j+1}\}|].$$

για κάποια σταθερά $C = C(\beta)$. Υποθέτουμε ότι όλα τα διαστήματα I_m έχουν το ίδιο μήκος K. Εφόσον η $\{Y_j : j \geq 1\}$ είναι στάσιμη ακολουθία στον $L^1(P)$, ο πρώτος όρος ισούται με

$$C\mathbb{E}[|\frac{1}{K}\sum_{j=1}^{K}\{\sigma^2 - Y_{j+1}\}|] = C\mathbb{E}[|\frac{\langle M, M\rangle_K}{K} - \sigma^2|],$$

που συγκλίνει στο 0 για $K \uparrow \infty$ από υπόθεση. Για τον ίδιο λόγο, ο δεύτερος όρος είναι άνω φραγμένος από το

$$\frac{C}{K}\sum_{j=1}^{K} \mathbb{E}[|e^{i(\theta/\sqrt{N}M_j} - 1|\{\sigma^2 + Y_{j+1}\}].$$

Εφόσον τώρα το Y_j ανήκει στον $L^1(P)$, από το Θεώρημα Κυριαρχούμενης Σύγκλισης, για κάθε $K \geq 1$, η παραπάνω έκφραση μηδενίζεται για $N \uparrow \infty$ και έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη.

3.4 Προϋποθέσεις για τη γενίκευση του Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος για προσθετικά συναρτησιακά μαρκοβιανών διαδικασιών

3.4.1 Η επιλύσιμη εξίσωση

Έστω μια συνάρτηση V στον $L^2(\pi) \cap \mathscr{H}_{-1}$, $\lambda > 0$ και θεωρούμε την εξίσωση

$$\lambda f_\lambda - L f_\lambda = V. \tag{3.23}$$

Την εξίσωση αυτή θα αποκαλούμε από εδώ και πέρα ¨επιλύσιμη εξίσωση¨.
Παρατηρούμε ότι το $f_\lambda = (\lambda - L)^{-1}V$ ανήκει στο πεδίο ορισμού του γεννήτορα L. Παίρνοντας το εσωτερικό γινόμενο του κάθε μέρους επί f_λ, προκύπτει ότι

$$\lambda\langle f_\lambda, f_\lambda\rangle_\pi + \|f_\lambda\|_1^2 = \langle V, f_\lambda\rangle_\pi. \tag{3.24}$$

Ως εκ τούτου, από την ανισότητα Schwarz,

$$\lambda\langle f_\lambda, f_\lambda\rangle_\pi + \|f_\lambda\|_1^2 \leq \|f_\lambda\|_1 \|V_\lambda\|_{-1}.$$

έτσι ώστε $\|f_\lambda\|_1 \leq \|V\|_{-1}$. Επομένως, ισχύει ότι

$$\lambda\langle f_\lambda, f_\lambda\rangle_\pi + \|f_\lambda\|_1^2 \leq \|V\|_{-1}^2. \tag{3.25}$$

Με βάση αυτό, καταλήγουμε ότι το λf_λ μηδενίζεται στον $L^2(\pi)$ για $\lambda \downarrow 0$ και ότι το $\{f_\lambda : 0 < \lambda \leq 1\}$ σχηματίζει μια φραγμένη ακολουθία στον $\mathscr{H}_{-1}$ και είναι επομένως προσυμπαγής.
Επιπλέον, η σχέση (3.25) μας δίνει άλλη μια συνέπεια:

Λήμμα 3.4. *Το $(\lambda - L)^{-1}$ επεκτείνεται από το $L^2(\pi)$σε μια φραγμένη, 1-1 και επί συνάρτηση από το $\mathscr{H}_{-1}$ στο $\mathscr{H}_1$. Επιπλέον, για κάθε $V \in \mathscr{H}_{-1}$ έχουμε ότι*

$$\|(\lambda - L)^{-1}V\|_1 \leq \|V\|_{-1}.$$

Στη συνέχεια θα επιδιώξουμε να βρούμε επαρκείς συνθήκες ώστε να ισχύει το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα για το $t^{-1/2}\int_0^t V(X_s)ds$, εξετάζοντας την ασυμπτωτική συμπεριφορά για $\lambda \downarrow 0$ των λύσεων f_λ της επιλύσιμης εξίσωσης. Πρώτα, όμως, πρέπει να εξετάσουμε μια κατηγορία martingales τα οποία έχουν ήδη εμφανισθεί και θα εμφανίζονται στη συνέχεια.

3.4.2 Dynkin's Martingales

Έστω μια συνάρτηση f στο πεδίο ορισμού του γεννήτορα L. Dynkin's Martingales καλούνται τα $M_t = f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t (Lf)(X_s)ds, t \geq 0$. Παρατηρούμε ότι τα martingales αυτά μπορούν με βάση τον ορισμό τους να μην είναι δεξιά συνεχή επειδή οι συναρτήσεις στο πεδίο ορισμού του γεννήτορα μπορούν να μην είναι συνεχείς. Παρόλα αυτά, χρειαζόμαστε τη δεξιά συνέχεια αυτών κυρίως για την ύπαρξη της αναμενόμενης τετραγωνικής μεταβολής τους, η οποία βασίζεται στο ανάπτυγμα Doob-Meyer, το οποίο και την απαιτεί. Με τρόπο που ξεφεύγει από τα πλαίσια αυτής της εργασίας, μπορούμε τελικά να απαιτήσουμε και να εξασφαλίσουμε ότι τα Dynkin's martingales θα είναι δεξιά συνεχή.

Πρόταση 3.5. *Έστω M_t το πιο πάνω Martingale που σχετίζεται με μια συνάρτηση f στο πεδίο ορισμού του γεννήτορα. Τότε*

$$\mathbb{E}_\pi[\langle M, M\rangle_t] = 2t\|f\|_1^2. \tag{3.26}$$

Απόδειξη. Αφού το M_t είναι martingale που μηδενίζεται για $t = 0$, αναπτύσσοντας το τετράγωνο του έχουμε ότι

$$\mathbb{E}_\pi[(M_t)^2] = \mathbb{E}_\pi[\{\int_0^t (Lf)(X_s)ds\}^2 - 2f(X_t)\int_0^t (Lf)(X_s)ds] =$$

$$= -2\int_0^t (Lf)(X_s)\{f(X_t) - \int_s^t (Lf)(X_r)dr\}ds =$$

$$= -2\int_0^t (Lf)(X_s)\{f(X_t) - f(X_s) - \int_s^t (Lf)(X_r)dr + f(X_s)\}ds =$$

$$= -2\int_0^t (Lf)(X_s)\{M_t - M_s + f(X_s)\}ds = -2f(X_s)\int_0^t (Lf)(X_s)$$

άρα επειδή $\langle M, M\rangle_t = M_t^2 - Z_t$ όπου το Z_t είναι martingale, δηλαδή $E_\pi[Z_t] = 0$ με $Z_0 = 0$, προκύπτει ότι $\mathbb{E}_\pi[(M_t)^2] = 2t\|f\|_1^2$. □

3.4.3 Εκτιμήσεις για τη χρονοδιακύμανση

Έστω V μια συνάρτηση στον $L^2(\pi)$ μέσης τιμής 0 και $\mathscr{C}$ ο πυρήνας για τους τελεστές L και L^*. Ισχύει

$$\sigma^2(V) = \limsup_{t\to\infty} \mathbb{E}_\pi[(\frac{1}{\sqrt{t}}\int_0^t V(X_s)ds)^2].$$

Εφόσον το π είναι αναλλοίωτο, μια αλλαγή μεταβλητών θα μας δώσει ότι η αναμενόμενη τιμή στο δεξί μέλος της προηγούμενης σχέσης ισούται με

$$\frac{1}{t}\int_0^t ds\int_0^t \mathbb{E}_\pi[V(X_{|s-r|})V(X_0)]dr =$$

$$= \frac{1}{t}\int_0^t ds\int_0^t \langle P_{|s-r|}V, V\rangle_\pi dr = 2\int_0^t [1-(s/t)]\langle P_s V, V\rangle_\pi ds.$$

Τελικά, προκύπτει ότι

$$\sigma^2(V) = 2\limsup_{t\to\infty}\int_0^\infty [1-(s/t)]^+\langle P_s V, V\rangle_\pi ds. \tag{3.27}$$

Το όριο αυτό δεν είναι δεδομένο ούτε ότι είναι πεπερασμένο αλλά ούτε και ότι υπάρχει.

Στην αντιστρέψιμη περίπτωση, ισχύει $\langle P_s V, V\rangle_\pi = \langle P_{s/2}V, P_{s/2}V\rangle_\pi$, το ολοκλήρωμα είναι τότε μια αύξουσα συνάρτηση του t και από το Θεώρημα Μονότονης σύγκλισης προκύπτει ότι

$$\sigma^2(V) = 2\lim_{t\to\infty}\int_0^\infty [1-(s/t)]^+\langle P_s V, V\rangle_\pi ds = 2\int_0^\infty \langle P_s V\rangle_\pi ds.$$

Στη γενική περίπτωση, θα πρέπει να υποθέσουμε ότι η συνάρτηση V ανήκει στο χώρο $\mathscr{H}^{-1}$. Θα δείξουμε δηλαδή ότι αν $V \in \mathscr{H}^{-1} \cap L^2(\pi)$, θα υπάρχει μια σταθερά C_0 τέτοια ώστε

$$\sigma^2(V) \leq C_0 \|V\|_{-1}^2. \tag{3.28}$$

Λήμμα 3.6. *Έστω $T > 0$ και μια συνάρτηση V στο $L^2(\pi) \cap \mathscr{H}^{-1}$. Τότε,*

$$\mathbb{E}_\pi[\sup_{0 \leq t \leq T} (\int_0^t V(X_s) ds)^2] \leq 24T \|V\|_{-1}^2.$$

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Υποθέτουμε αρχικά ότι υπάρχει συνάρτηση h στον πυρήνα $\mathscr{C}$ τέτοια ώστε

$$\|Sh - V\|_\pi \leq \varepsilon, \ \|h\|_1 \leq \|V\|_{-1} + \varepsilon \tag{3.29}$$

Η υπόθεση αυτή θα αποσυρθεί στο τέλος της απόδειξης.
Γνωρίζουμε ότι η $\{\mathscr{F}_s : s \geq 0\}$ είναι η αύξουσα διήθηση που αντιστοιχεί στην $\{X_r : 0 \leq r \leq s\}$. Εφόσον η h ανήκει στο πεδίο ορισμού του γεννήτορα, μπορούμε να ορίσουμε ένα martingale M_t ως προς τη διήθηση $\{\mathscr{F}_s : s \geq 0\}$ με μέση τιμή 0 τέτοιο ώστε

$$M_t = h(X_t) - h(X_0) - \int_0^t (Lh)(X_s) ds.$$

Με αντίστοιχο τρόπο, ορίζουμε τη διήθηση $\{\mathscr{F}_t^- : t \in [0,T]\}$ που είναι αύξουσα προς τα πίσω και αντιστοιχεί στην $\{X_{T-t} : t \in [0,T]\}$. Γνωρίζουμε ότι ο L^* αντιπροσωπεύει το συμπληρωματικό του γεννήτορα L ως προς το αναλλοίωτο μέτρο π. Εφόσον υποθέσαμε ότι ο $\mathscr{C}$ είναι ο πυρήνας του L^*, η h ανήκει στο πεδίο ορισμού του L^*. Ορίζεται τώρα η διαδικασία $\{M_t^- : 0 \leq t \leq T\}$ με

$$M_t^- = h(X_{T-t}) - h(X_T) - \int_0^t (L^* h)(X_{T-s}) ds$$

που είναι ένα martingale ως προς τη διήθηση $\{\mathscr{F}_t^- : t \in [0,T]\}$ ως προς $\mathbb{P}_\pi$ και καλείται προς τα πίσω Martingale. Μια αλλαγή μεταβλητών μας δίνει

$$M_T^- - M_{T-t}^- = h(X_0) - h(X_t) - \int_0^t (L^* h)(X_{T-s}) ds.$$

Επομένως,

$$M_t + M_T^- - M_{T-t}^- = -2 \int_0^t (Sh)(X_s) ds = -2 \int_0^t \{V(X_s) - R(X_s)\} ds,$$

όπου $R := V - Sh$. Επομένως,

$$\mathbb{E}_\pi[\sup_{0 \leq t \leq T} (\int_0^t V(X_s) ds)^2] =$$

$$= \frac{1}{4}\mathbb{E}_\pi[\sup_{0\le t\le T}(M_t + M_T^- - M_{T-t}^- - 2\int_0^t R(X_s)ds)^2].$$

Με βάση, όμως, τη σχέση (3.29) ισχύει $\|R\|_\pi \le \varepsilon$, οπότε από τις ανισότητες Schwarz και Doob,η προηγούμενη έκφραση είναι άνω φραγμένη από το

$$4\{2\mathbb{E}_\pi[(M_T^-)^2] + \mathbb{E}_\pi[(M_T)^2] + T^2\varepsilon^2\}.$$

Από την Πρόταση 3.5, οι διακυμάνσεις των martingales αυτών είναι και οι δύο ίσες με $2T\|h\|_1^2 \le 2T(\|V\|_{-1}+\varepsilon)^2$. Η προηγούμενη έκφραση είναι φραγμένη από το $24T(\|V\|_{-1}+\varepsilon)^2 + 4T^2\varepsilon^2$. Επομένως, για $\varepsilon \downarrow 0$, καταλήγουμε στο ζητούμενο. Απομένει τώρα ο ισχυρισμός της σχέσης (3.29).
Έστω $\varepsilon > 0$. Για $\lambda > 0$ συμβολίζουμε με h_λ τη λύση της επιλύσιμης εξίσωσης έχοντας όπου L το S και όπου V το $-V$. Από τη σχέση (3.25) υπάρχει λ αρκετά μικρό για το οποίο ισχύει $\|Sh_\lambda - V\|_\pi \le \varepsilon$ και $\|h_\lambda\|_1 \le \|V\|_{-1}$. Εφόσον το h_λ ανήκει στο πεδίο ορισμού του S, υπάρχει h στον πυρήνα $\mathscr{C}$ τέτοιο ώστε $\|h-h_\lambda\|_\pi \le \varepsilon$, $\|Sh - Sh_\lambda\|_\pi \le \varepsilon$. Επομένως, $\|Sh_\lambda - V\|_\pi \le 2\varepsilon$ και $\|h\|_1 \le \|h_\lambda\|_1 + \|h-h_\lambda\|_1 \le \|V\|_{-1}+\varepsilon$ επειδή $\|g\|_1^2 \le \|g\|_\pi\|Sg\|_\pi$ για κάθε g στο πεδίο ορίσμου του S. Η σχέση αυτή ολοκληρώνει την απόδειξη του ισχυρισμού και συνολικά του λήμματος. □

Με βάση το παραπάνω, προκύπτει ότι $\sigma^2(V) \le 24\|V\|_{-1}^2$.

3.5 Κεντρικό Οριακό Θεώρημα για προσθετικά συναρτησιακά μαρκοβιανών διαδικασιών

Από τη σχέση (3.25) προκύπτει άμεσα ότι

$$\sup_{0<\lambda\le 1}\lambda\|f_\lambda\|_\pi^2 < \infty \quad \text{και} \quad \sup_{0<\lambda\le 1}\|f_\lambda\|_1 < \infty \tag{3.30}$$

Ο στόχος μας σε αυτό το κεφάλαιο είναι να δείξουμε ότι το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα για το $t^{-1/2}\int_0^t V(X_s)ds$ ισχύει αν ικανοποιούνται οι ισχυρότερες από τις προηγούμενες εξής συνθήκες:

$$\lim_{\lambda\to 0}\lambda\|f_\lambda\|_\pi^2 = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{\lambda\to 0}\|f_\lambda - f\|_1 = 0 \tag{3.31}$$

για κάποια f στον $\mathscr{H}_1$.
Διευκρινιστικά, αν βρισκόμαστε σε χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}_\pi)$ και έχουμε σ-άλγεβρα $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$, θα λέμε ότι ο νόμος μιας στοχαστικής διαδικασίας $\{Y_t : t \ge 0\}$ δεσμευμένης ως προς την $\mathscr{G}$ συγκλίνει κατά πιθανότητα σε μια γκαουσιανή κατανομή μέσης τιμής 0 και διακύμανσης σ^2 αν

$$\lim_{t\to\infty}\mathbb{E}[|\mathbb{E}[e^{i\theta Y_t} \mid \mathscr{G}] - e^{-\sigma^2\theta^2/2}|] = 0$$

για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$.

Θεώρημα 3.7. *Έστω μια συνάρτηση V στο $L^2(\pi) \cap \mathscr{H}_{-1}$ και f στον $\mathscr{H}_1$ τέτοια ώστε*

$$\lim_{\lambda \to 0} \lambda \|f_\lambda\|_\pi^2 = 0 \quad \textit{και} \quad \lim_{\lambda \to 0} \|f_\lambda - f\|_1 = 0,$$

όπου f_λ η λύση της επιλύσιμης εξίσωσης. Τότε, ο νόμος του $\dfrac{1}{\sqrt{t}} \int_0^t V(X_s) ds$ δεσμευμένου προς $\mathscr{F}_0$ συγκλίνει κατά πιθανότητα σε μια γκαουσιανή κατανομή με μέση τιμή μηδέν και διακύμανση

$$\sigma^2(V) = 2 \lim_{\lambda \to 0} \|f_\lambda\|_1^2.$$

Από τις σχέσεις (3.24) και (3.31) προκύπτει ότι η ασυμπτωτική διακύμανση $\sigma^2(V)$ ισούται με

$$\sigma^2(V) = 2 \lim_{\lambda \to 0} \|f_\lambda\|_1^2 = 2 \lim_{\lambda \to 0} \langle V, f_\lambda \rangle_\pi. \tag{3.32}$$

Η κεντρική ιδέα είναι πάλι να εκφράσουμε το $\int_0^t V(X_s) ds$ σαν το άθροισμα ενός martingale και ενός όρου που μηδενίζεται, εκμεταλλευόμενοι πια την επιλύσιμη εξίσωση. Για κάθε $\lambda > 0$, ορίζουμε το martingale M_t^λ ως εξής:

$$M_t^\lambda = f_\lambda(X_t) - f_\lambda(X_0) - \int_0^t (L f_\lambda)(X_s) ds$$

έτσι ώστε

$$\int_0^t V(X_s) ds = M_t^\lambda + f_\lambda(X_0) - f_\lambda(X_t) + \lambda \int_0^t f_\lambda(X_s) ds. \tag{3.33}$$

Ορίζουμε τώρα ως R_t^λ το υπόλοιπο:

$$R_t^\lambda := f_\lambda(X_0) - f_\lambda(X_t) + \lambda \int_0^t f_\lambda(X_s) ds.$$

Πρόταση 3.8. *Έστω συνάρτηση V στο $L^2(\pi) \cap \mathscr{H}_{-1}$ και f στον $\mathscr{H}_1$ τέτοια ώστε*

$$\lim_{\lambda \to 0} \lambda \|f_\lambda\|_\pi^2 = 0 \quad \textit{και} \quad \lim_{\lambda \to 0} \|f_\lambda - f\|_1 = 0.$$

Τότε, η ποσότητα $t^{-1/2} R_t^\lambda$ μηδενίζεται στον $L^2(\mathbb{P}_\pi)$ για $\lambda \downarrow 0$ και τότε για $t \uparrow \infty$:

$$\lim_{t \to \infty} \lim_{\lambda \to \infty} \|t^{-1/2} R_t^\lambda\|_\pi = 0.$$

Η απόδειξη του παραπάνω Θεωρήματος βασίζεται στα δύο επόμενα λήμματα.

Λήμμα 3.9. *Τα martingales $\{M_t^\lambda : t \geq 0\}$ συγκλίνουν στον $L^2(\mathbb{P}_\pi)$, για $\lambda \downarrow 0$, σε ένα τετραγωνικά ολοκληρώσιμο martingale $\{M_t : t \geq 0\}$: για κάθε $T > 0$,*

$$\lim_{\lambda \to\ 0} E_\pi [\sup_{t \in [0,T]} (M_t^\lambda - M_t^{\lambda'})^2] = 0.$$

Απόδειξη. Έστω $T > 0$. Για $\lambda, \lambda' > 0$, εφόσον το π είναι αναλλοίωτο, από την πρόταση 3.5, η αναμενόμενη τιμή για την τετραγωνική μεταβολή του martingale $M_t^\lambda - M_t$ ισούται με

$$2T\langle (f_\lambda - f_{\lambda'}), (-L)(f_\lambda - f_{\lambda'})\rangle_\pi = 2T\|f_\lambda - f_{\lambda'}\|_1^2.$$

Από υπόθεση, όμως, η f_λ συγκλίνει στον $\mathscr{H}_1$. Συγκεκριμένα, η M_t^λ είναι μια Cauchy ακολουθία στον $L^2(\mathbb{P}_\pi)$ και συγκλίνει σε κάποιο συγκεκριμένο M_T. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το M_T είναι δεξιά συνεχές, τετραγωνικά ολοκληρώσιμο martingale. □

Με βάση το παραπάνω λήμμα και τη σχέση (3.33), το R_t^λ συγκλίνει στον $L^2(\mathbb{P}_\pi)$ για $\lambda \downarrow 0$. Συμβολίζουμε αυτό το όριο ως $\{R_t : t \geq 0\}$ έτσι ώστε να ισχύει:

$$\int_0^t V(X_s)ds = M_t + R_t. \tag{3.34}$$

Λήμμα 3.10. *Το $t^{-1/2}R_t$ μηδενίζεται στον $L^2(\mathbb{P}_\pi)$ για $t \uparrow \infty$.*

Απόδειξη. Από τις σχέσεις (3.33) και (3.34) προκύπτει ότι

$$\frac{R_t}{\sqrt{t}} = \frac{1}{\sqrt{t}}\{M_t^\lambda - M_t + f_\lambda(X_0) - f_\lambda(X_t) + \lambda\int_0^t f_\lambda(X_s)ds\}. \tag{3.35}$$

Απομονώνουμε τώρα τον κάθε όρο του δεξιού μέλους της προηγούμενης σχέσης. Εφόσον το M_t^λ συγκλίνει στο M_t στον $L^2(\mathbb{P}_\pi)$,

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_\pi[(M_t^\lambda - M_t)^2] = \frac{1}{t}\lim_{\lambda'\to 0}\mathbb{E}_\pi[(M_t^\lambda - M_t^{\lambda'})^2].$$

Με βάση τώρα το προηγούμενο λήμμα η παραπάνω έκφραση ισούται με

$$2\lim_{\lambda'\to 0}\|f_\lambda - f_{\lambda'}\|_1^2 = 2\|f_\lambda - f\|_1^2.$$

όπου στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιήθηκε η σχέση (3.31) που λέει ότι η f_λ συγκλίνει στον $\mathscr{H}_1$ σε κάποια f. Εξετάζουμε τώρα τον όρο R_t^λ που εμφανίζεται στη σχέση (3.35). Έχουμε ότι

$$E_\pi[(t^{-1/2}R_t^\lambda)^2] \leq$$

$$\leq 3t^{-1}\mathbb{E}_\pi[f_\lambda(X_t)^2] + 3t^{-1}\mathbb{E}_\pi[f_\lambda(X_0)^2] + 3t^{-1}\lambda^2\mathbb{E}_\pi[\{\int_0^t f_\lambda(X_s)ds\}^2].$$

Επειδή η $\{X_t : t \geq 0\}$ είναι στάσιμη ως προς αρχική κατανομή π, έχουμε ότι οι δύο πρώτοι όροι του δεξιού μέλους της παραπάνω σχέσης κάνουν μαζί $6t^{-1}\|f_\lambda\|_\pi^2$. Από την άλλη μεριά, από την ανισότητα Schwarz, ο τρίτος όρος φράσσεται από το $3t\lambda^2\|f_\lambda\|_\pi^2$. Τελικά, καταλήγουμε ότι

$$\frac{1}{t}E_\pi[R_t^2] \leq 2\|f_\lambda - f\|_1^2 + 2(6t^{-1} + 3t\lambda^2)\|f_\lambda\|_\pi^2$$

για κάθε $\lambda > 0$. Θέτοντας $\lambda = t^{-1}$ και με βάση τη σχέση (3.31), καταλήγουμε στο ζητούμενο. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.7. Ισχυριζόμαστε ότι το martingale της σχέσης (3.34) ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος 3.2. Προφανώς, οι προσαυξήσεις του είναι στάσιμες. Εφόσον το π είναι αναλλοίωτο μέτρο, η συνάρτηση μετατόπισης $\{\theta_t : t \geq 0\}$ είναι ένα μέτρο ημιροής στο χώρο $(D(\mathbb{R}_+, E), \mathscr{D}, \mathbb{P}_\pi)$, όπου $\mathscr{D}$ είναι το Borel σ-πεδίο του $D(\mathbb{R}_+, E)$.
Αφού το $\langle M, M\rangle_1$ έχει πεπερασμένη αναμενόμενη τιμή και το $\mathbb{P}_\pi$ είναι εργοδικό ως προς τις μετατοπίσεις, από το Εργοδικό Θεώρημα του Kingman, έχουμε ότι το $t^{-1}\langle M, M\rangle_t$ συγκλίνει σχεδόν βεβαίως και στον $L^1(\mathbb{P}_\pi)$ στο $\mathbb{E}_\pi[\langle M, M\rangle_1]$. Άρα, από το Θεώρημα 3.2, ο νόμος του $M_t/\sqrt{t}$ δεσμευμένο από το $\mathscr{F}_0$ συγκλίνει κατά πιθανότητα, για $t \uparrow \infty$ σε μια γκαουσιανή κατανομή μηδενικής μέσης τιμής και με διακύμανση

$$\mathbb{E}_\pi[\langle M, M\rangle_1] = E_\pi[M_1^2] = \lim_{\lambda\to 0} \mathbb{E}_\pi[(M_1^\lambda)^2] =$$

$$= \lim_{\lambda\to 0} \mathbb{E}_\pi[\langle M^\lambda, M^\lambda\rangle_1] = 2\lim_{\lambda\to 0} \|f_\lambda\|_1^2.$$

όπου το τελευταίο βήμα ισχύει λόγω της Πρότασης 3.5.
Τέλος, χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα (3.34), παρατηρούμε ότι για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$

$$|\mathbb{E}_\pi[e^{i\theta\int_0^t V(X_s)ds/\sqrt{t}} \mid \mathscr{F}_0] - E_\pi[e^{i\theta M_t/\sqrt{t}} \mid \mathscr{F}_0]| \leq \mathbb{E}_\pi[|\theta R_t|/\sqrt{t} \mid \mathscr{F}_0].$$

Από το λήμμα 3.10, όμως, το παραπάνω μηδενίζεται για $t \uparrow \infty$ στον $L^2(\mathbb{P}_\pi)$.

Πόρισμα 3.11. *Έστω μια συνάρτηση V στο $L^2(\pi) \cap \mathscr{H}^{-1}$ και f στον $\mathscr{H}_1$ τέτοια ώστε*

$$\lim_{\lambda\to 0} \lambda\|f_\lambda\|_\pi^2 = 0 \quad \textit{και} \quad \lim_{\lambda\to 0} \|f_\lambda - f\|_1 = 0,$$

όπου f_λ είναι η λύση της επιλύσιμης εξίσωσης. Τότε, η διακύμανση του $t^{-1/2}\int_0^t V(X_s)ds$ συγκλίνει στην ασυμπτωτική διακύμανση $\sigma^2(V)$:

$$\lim_{t\to\infty} E_\pi[(\frac{1}{\sqrt{t}}\int_0^t V(X_s)ds)^2] = \sigma^2(V).$$

Απόδειξη. Επανερχόμαστε στο ανάπτυγμα της (3.34). Από το λήμμα 3.10, την απόδειξη του Θεωρήματος 3.7 και τη σχέση (3.32) έχουμε ότι

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}_\pi[(\frac{1}{\sqrt{t}}\int_0^t V(X_s)ds)^2] = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\mathbb{E}_\pi[M_t^2] =$$

$$= \lim_{t\to\infty} \mathbb{E}_\pi[\langle M, M\rangle_t] = 2\lim_{\lambda\to 0} \|f_\lambda\|_1^2 = \sigma^2(V).$$

□

Παρατήρηση 3.12. *Στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.7 δείξαμε ότι η τετραγωνική μεταβολή του martingale M_t του αναπτύγματος (3.34) συγκλίνει σχεδόν βεβαίως (a.s.) στη ασυμπτωτική διακύμανση $\sigma^2(V)$:*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\langle M, M\rangle_t = \sigma^2(V) \ \ \mathbb{P}_\pi\, a.s.$$

Παρατήρηση 3.13. *Στο Θεώρημα 3.7 δεν απαιτήσαμε την ύπαρξη κοινού πυρήνα για τα L και L^*.*

Είμαστε τώρα έτοιμοι να αποδείξουμε το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα υπό τη συνθήκη ότι είναι φραγμένη η $\mathscr{H}^{-1}$ νόρμα του $\{Lf_\lambda : 0 < \lambda \leq 1\}$.

Θεώρημα 3.14. *Υποθέτουμε ότι το Lf_λ ανήκει στον $\mathscr{H}^{-1}$, $0 < \lambda \leq 1$ και ότι*

$$\sup_{0<\lambda\leq 1} \|Lf_\lambda\|_{-1} < \infty. \tag{3.36}$$

Τότε, ο νόμος του $\dfrac{1}{\sqrt{t}} \int_0^t V(X_s)ds$ δεσμευμένου προς $\mathscr{F}_0$ συγκλίνει κατά πιθανότητα σε μια γκαουσιανή κατανομή με μέση τιμή μηδέν και διακύμανση

$$\sigma^2(V) = 2 \lim_{\lambda\to 0} \|f_\lambda\|_1^2.$$

Παρατήρηση 3.15. *Παρατηρούμε ότι*

$$\sup_{0<\lambda\leq 1} \|Lf_\lambda\|_{-1} < \infty \quad \textit{αν και μόνο αν} \quad \sup_{0<\lambda\leq 1} \|\lambda f_\lambda\|_{-1} < \infty \tag{3.37}$$

εφόσον το V ανήκει στον $\mathscr{H}^{-1}$.

Η απόδειξη του Θεωρήματος προκύπτει άμεσα από το Θεώρημα 3.7 και το παρακάτω λήμμα.

Λήμμα 3.16. *Έστω μια συνάρτηση V στο $\mathscr{H}_{-1} \cap L^2(\pi)$ και $\{f_\lambda : \lambda \geq 0\}$ η λύση της επιλύσιμης εξίσωσης. Υποθέτουμε ότι $\sup_{\lambda>0} \|Lf_\lambda\|_{-1} \leq C_0$ για κάποια πεπερασμένη σταθερά C_0. Τότε, υπάρχει συνάρτηση f στον $\mathscr{H}_1$ τέτοια ώστε*

$$\lim_{\lambda\to 0} \lambda \|f_\lambda\|_\pi^2 = 0 \quad \textit{και} \quad \lim_{\lambda\to 0} \|f_\lambda - f\|_1 = 0 \tag{3.38}$$

Απόδειξη. Έχουμε αποδείξει ήδη ότι

$$\sup_{0<\lambda\leq 1} \|f_\lambda\|_1 \leq \|V\|_{-1} \quad \text{και} \quad \sup_{0<\lambda\leq 1} \lambda \|f_\lambda\|_\pi^2 \leq \|V\|_{-1}^2.$$

Ειδικότερα, το λf_λ συγκλίνει στο 0 στον $L^2(\pi)$, για $\lambda \downarrow 0$. Από εκεί και πέρα, η απόδειξη θα βασιστεί σε συγκεκριμένους ισχυρισμούς. □

Ισχυρισμός 1. *Το Lf_λ συγκλίνει ασθενώς στον $\mathscr{H}^{-1}$ για $\lambda \downarrow 0$ στο $-V$.*

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι $\lim_{\lambda\to 0} \lambda f_\lambda = 0$ ασθενώς στον $\mathscr{H}_{-1}$. Αφού το $\sup_{\lambda>0} \|Lf_\lambda\|_{-1}$ είναι φραγμένο, θα είναι φραγμένο και το $\sup_{\lambda>0} \|\lambda f_\lambda\|_{-1}$. Άρα, κάθε ακολουθία $\{\lambda_n f_{\lambda_n} : n \geq 1\}$ είναι ασθενώς προσυμπαγής στον $\mathscr{H}_{-1}$ όπου $\lambda_n \downarrow 0$. Θα δείξουμε ότι το 0 είναι το μόνο ασθενές οριακό σημείο.

Υποθέτουμε ότι η $\lambda_n f_{\lambda_n}$ συγκλίνει ασθενώς στην g στον $\mathscr{H}_{-1}$. Από τη σχέση (3.14) και επειδή η λf_λ συγκλίνει αυστηρά στο 0 στον $L^2(\pi)$, για κάθε $h \in \mathscr{C}$,

$$\langle g, (-S)h\rangle_{-1} = \lim_{n\to\infty} \langle \lambda_n f_{\lambda_n}, (-S)h\rangle_{-1} = \lim_{n\to\infty} \langle \lambda_n f_{\lambda_n}, h\rangle_\pi = 0.$$

Από την ιδιότητα 2 στην αρχή του κεφαλαίου, το $\{Sf : f \in \mathscr{C}\}$ είναι πυκνό στον $\mathscr{H}_{-1}$ έτσι ώστε $g = 0$.
Με τον ίδιο τρόπο, αφού το $\sup_{\lambda>0} \|f_\lambda\|_1$ είναι φραγμένο, κάθε ακολουθία $\lambda_n \downarrow 0$ έχει μια υπακολουθία που συμβολίζουμε επίσης λ_n, για την οποία η f_{λ_n} συγκλίνει ασθενώς στον $\mathscr{H}_1$ σε κάποια συνάρτηση που συμβολίζεται W. □

Ισχυρισμός 2. *Το W ικανοποιεί τη σχέση $\|W\|_1^2 = \langle W, V\rangle_\pi$.*

Απόδειξη. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Mazur στις ακολουθίες $f_{\lambda_n}, Lf_{\lambda_n}$ έχουμε ακολουθίες g_n, Lg_n που συγκλίνουν αυστηρά στον $\mathscr{H}_1$ στην W και στον $\mathscr{H}_{-1}$ στην $-V$ αντίστοιχα. Όμως, κάθε τέτοια ακολουθία g_n ανήκει στον $\mathscr{D}(L)$. Από τη μία μεριά, εφόσον η g_n (αντίστοιχα η Lg_n) συγκλίνει αυστηρά στον $\mathscr{H}_1$ (αντίστοιχα στον $\mathscr{H}_{-1}$) στη W (αντίστοιχα στην $-V$), το $\langle g_n, Lg_n\rangle_\pi$ συγκλίνει στο $\langle W, V\rangle_\pi$. Από την άλλη μεριά, το $-\langle g_n, Lg_n\rangle_\pi = \|g_n\|_1^2$ συγκλίνει στο $\|W_1^2\|$. Άρα, τελικά, $\|W\|_1^2 = \langle W, V\rangle_\pi$. □

Ισχυρισμός 3. *Ισχύει $\lim_{\lambda\to 0} \lambda \|f_\lambda\|_\pi^2 = 0$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε, προς απαγωγή σε άτοπο, ότι το $\lambda\|f_\lambda\|_\pi^2$ δεν συγκλίνει στο 0 για $\lambda \downarrow 0$. Τότε, θα υπάρχει $\epsilon > 0$ και υπακολουθία $\lambda_n \downarrow 0$ τέτοια ώστε $\lambda_n \|f_{\lambda_n}\|_\pi^2 \geq \epsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αποδείξαμε, δηλαδή, την ύπαρξη μιας υπακολουθίας λ'_n για την οποία η $f_{\lambda'_n}$ να συγκλίνει ασθενώς στον $\mathscr{H}_1$ σε κάποια W που να ικανοποιεί την $\langle W, V\rangle_\pi = \|W\|_1^2$. Εφόσον η f_λ είναι η λύση της επιλύσιμης εξίσωσης,

$$\limsup_{n'\to\infty} \|f_{\lambda_{n'}}\|_1^2 \leq \limsup_{n'\to\infty} (\lambda_{n'} \|f_{\lambda_{n'}}\|_\pi^2 + \|f_{\lambda_{n'}}\|_1^2) = \limsup_{n'\to\infty} \langle f_{\lambda_{n'}}, V\rangle_\pi =$$
$$= \langle W, V\rangle_\pi = \|W\|_1^2 \leq \limsup_{n'\to\infty} \|f_{\lambda_{n'}}\|_1^2. \tag{3.39}$$

Η δεύτερη ισότητα βασίστηκε στην Ιδιότητα 5 της αρχής του κεφαλαίου. Οι ανισότητες αυτές οδηγούν σε άτοπο την υπόθεση ότι $\lambda_n \|f_{\lambda_n}\|_\pi^2 \geq \epsilon$ για κάθε n, άρα τελικά ισχύει το ζητούμενο. □

Ισχυρισμός 4. *Η f_λ συγκλίνει αυστηρά στον $\mathscr{H}_1$ για $\lambda \downarrow 0$.*

Απόδειξη. Από τον προηγούμενο ισχυρισμό, η $f_{\lambda_{n'}}$ συγκλίνει αυστηρά στην W στον $\mathscr{H}_1$. Συγκεκριμένα, όλες οι ακολουθίες λ_n έχουν υπακολουθίες $\lambda_{n'}$ για τις οποίες οι $f_{\lambda_{n'}}$ συγκλίνουν αυστηρά στον $\mathscr{H}_1$. Για να δείξουμε ότι η f_λ συγκλίνει αυστηρά, μένει να ελέγξουμε τη μοναδικότητα του ορίου. Θεωρούμε δύο φθίνουσες ακολουθίες λ_n, μ_n που μηδενίζονται για $n \uparrow \infty$. Συμβολίζουμε με W_1, W_2 τα όρια των f_{λ_n}, f_{μ_n} αντίστοιχα στον $\mathscr{H}_1$. Αφού η f_λ είναι λύση της επιλύσιμης εξίσωσης,

$$\langle \lambda_n f_{\lambda_n} - \mu_n f_{\mu_n}, f_{\lambda_n} - f_{\mu_n} \rangle_\pi + \|f_{\lambda_n} - f_{\mu_n}\|_1^2 = 0 \tag{3.40}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επειδή, όμως, οι f_{λ_n}, f_{μ_n} συγκλίνουν αυστηρά στις W_1, W_2 στον $\mathscr{H}_1$,

$$\lim_{n\to\infty} \|f_{\lambda_n} - f_{\mu_n}\|_1^2 = \|W_1 - W_2\|_1^2. \tag{3.41}$$

Από την άλλη μεριά, αφού το $\lambda \|f_\lambda\|_\pi^2$ μηδενίζεται για $\lambda \downarrow 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \langle \lambda_n f_{\lambda_n} - \mu_n f_{\mu_n}, f_{\lambda_n} - f_{\mu_n} \rangle_\pi = -\lim_{n\to\infty} (\langle \lambda_n f_{\lambda_n}, f_{\mu_n} \rangle_\pi + \langle \mu_n f_{\mu_n}, f_{\lambda_n} \rangle_\pi).$$

Κάποιοι από τους όρους πιο πάνω μηδενίζονται για $n \uparrow \infty$. Πράγματι,

$$\lambda_n \langle f_{\lambda_n}, f_{\mu_n} \rangle_\pi = \lambda_n f_{\lambda_n}, f_{\mu_n} - W_2 \rangle_\pi + \lambda_n \langle f_{\lambda_n}, W_2 \rangle_\pi.$$

Τα εσωτερικά αυτά γινόμενα πρέπει να γίνουν αντιληπτά ως το εσωτερικό γινόμενο μιας συνάρτησης $\lambda_n f_{\lambda_n}$ στον $\mathscr{H}_{-1}$ με τις συναρτήσεις $f_{\mu_n} - W_2, W_2$ αντίστοιχα στον $\mathscr{H}_1$. Από την ανισότητα Schwarz, ο πρώτος όρος στο δεξί μέλος της σχέσης είναι άνω φραγμένος από το $\|\lambda_n f_{\lambda_n}\|_{-1} \|f_{\mu_n} - W_2\|_1$, το οποίο μηδενίζεται αφού το λf_λ είναι φραγμένο στον $\mathscr{H}_{-1}$ και η f_{μ_n} συγκλίνει στην W_2 στον $\mathscr{H}_1$. Για να δείξουμε ότι ο δεύτερος όρος της προηγούμενης σχέσης μηδενίζεται επίσης, θεωρούμε ένα $\epsilon > 0$. Αφού ο $\mathscr{H}_1$ αποτελεί την πλήρωση του $\mathscr{C}$, υπάρχει συνάρτηση $g \in \mathscr{C}$ τέτοια ώστε $\|W_2 - g\|_1 \leq \epsilon$. Από την ανισότητα Schwarz ο δεύτερος όρος είναι απόλυτα φραγμένος από το $\sup_{0<\lambda\leq 1} \|\lambda f_\lambda\|_{-1}\epsilon + |\langle \lambda_n f_{\lambda_n}, g \rangle_\pi|$. Αφού το λf_λ μηδενίζεται στον $L^2(\pi)$ για $\lambda \downarrow 0$, ο δεύτερος όρος μηδενίζεται για $n \uparrow \infty$ και άρα προκύπτει το ζητούμενο. □

Τα παραπάνω μας επιτρέπουν να δώσουμε εναλλακτικές απαιτούμενες συνθήκες ώστε να εφαρμόζεται το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα για προσθετικά συναρτησιακά μαρκοβιανών Αλυσίδων. Έχουμε ήδη δείξει ότι η οικογένεια $\{f_\lambda : 0 < \lambda \leq 1\}$ είναι ασθενώς προσυμπαγής στον $\mathscr{H}_1$. Υποθέτουμε ότι η f_λ συγκλίνει ασθενώς στον $\mathscr{H}_1$, για $\lambda \downarrow 0$, σε κάποια W και ότι ισχύει η λεγόμενη και 'ενεργειακή ταυτότητα':

$$\|W\|_1^2 = \langle W, V \rangle_\pi. \tag{3.42}$$

Θεώρημα 3.17. *Έστω μια συνάρτηση V στο $L^2(\pi) \cap \mathscr{H}_{-1}$ και υποθέτουμε ότι η f_λ συγκλίνει ασθενώς στον $\mathscr{H}_1$, για $\lambda \downarrow 0$, σε κάποια W που ικανοποιεί τη σχέση $\|W\|_1^2 = \langle W, V \rangle_\pi$. Τότε, ισχύει*

$$\lim_{\lambda\to 0} \lambda \|f_\lambda\|_\pi^2 = 0 \quad \textit{και} \quad \lim_{\lambda\to 0} \|f_\lambda - W\|_1 = 0$$

και τελικά ο νόμος του $\frac{1}{\sqrt{t}}\int_0^t V(X_s)ds$ *δεσμευμένου προς* $\mathscr{F}_0$ *συγκλίνει κατά πιθανότητα σε μια γκαουσιανή κατανομή με μέση τιμή μηδέν και διακύμανση*

$$\sigma^2(V) = 2\lim_{\lambda\to 0}\|f_\lambda\|_1^2.$$

Απόδειξη. Από τον ισχυρισμό 3 έχουμε ότι $\lim_{\lambda\to 0}\lambda\|f_\lambda\|_\pi^2 = 0$. Επιπλέον, από την (3.39), η f_λ συγκλίνει αυστηρά στη W στον $\mathscr{H}_1$ για $\lambda \downarrow 0$. Επομένως, ισχύουν οι συνθήκες της (3.31) και άρα από το Θεώρημα 3.7 προκύπτει το ζητούμενο. □

3.6 Υποπεριπτώσεις του Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος

Έστω μια συνάρτηση V στο $L^2(\pi)\cap\mathscr{H}_{-1}$. Θα παρουσιάσουμε δύο περιπτώσεις όπου οι συνθήκες εξασφαλίζουν ότι η λύση της επιλύσιμης εξίσωσης f_λ ικανοποιεί τη σχέση (3.36) και άρα ικανοποιείται το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα. Υποθέτουμε ότι ο $\mathscr{C}$ είναι ο πυρήνας για τους τελεστές L και L^*.

3.6.1 Αντιστρεψιμότητα

Υποθέτουμε ότι ο γεννήτορας L είναι αυτο-συζυγής (self-adjoint) στον $L^2(\pi)$. Τότε, όπως είδαμε στην Ιδιότητα 8 στην αρχή του κεφαλαίου, το Lf ανήκει στον $\mathscr{H}_{-1}$ για κάθε $f\in\mathscr{D}(L)$ και

$$\|Lf\|_{-1} \le \|f\|_1.$$

Στην πραγματικότητα, ισχύει η ισότητα. Συγκεκριμένα, στην αντιστρέψιμη περίπτωση η (3.36) προκύπτει από στοιχειώδη υπολογισμό της (3.30).
Επίσης, η ασυμπτωτική διακύμανση ισούται με $\sigma^2(V) = 2\|V\|_{-1}^2$. Πράγματι, αυτό προκύπτει παίρνοντας στην επιλύσιμη εξίσωση το εσωτερικό γινόμενο στον $\mathscr{H}_{-1}$ ως προς V και στα δύο μέλη. Το δεξί μέλος ισούται με $\|V\|_{-1}^2$, ενώ το αριστερό ισούται με

$$\langle\lambda f_\lambda, V\rangle_{-1} + \langle -Lf_\lambda, V\rangle_{-1}.$$

Όμως, από τον ισχυρισμό 1 της προηγούμενης παραγράφου, η λf_λ συγκλίνει ασθενώς στο 0 στον $\mathscr{H}_{-1}$ για $\lambda\downarrow 0$. Ειδικότερα, ο πρώτος όρος μηδενίζεται στο όριο. Από την άλλη μεριά, από την ιδιότητα 8 στην αρχή του κεφαλαίου, $\langle -Lg, h\rangle_{-1} = \langle g, h\rangle_\pi$ αν η g ανήκει στον $\mathscr{D}(L)$ και η h στον $L^2(\pi)\cap\mathscr{H}_{-1}$. Συγκεκριμένα, $\langle -Lf_\lambda, V\rangle_{-1} = \langle f_\lambda, V\rangle_\pi$ και άρα από την (3.32),

$$\sigma^2(V) = 2\lim_{\lambda\to 0}\langle f_\lambda, V\rangle_\pi = 2\|V\|_{-1}^2.$$

3.6.2 Φασματικό χάος

Υποθέτουμε ότι ο γεννήτορας L ικανοποιεί τις συνθήκες φασματικού χάους: υπάρχει μια σταθερά γ τέτοια ώστε

$$\|f\|_\pi^2 - \langle f\rangle_\pi^2 \le \gamma\langle(-L)f, f\rangle_\pi \tag{3.43}$$

για κάθε συνάρτηση f στον $\mathscr{D}(L)$.

Θεώρημα 3.18. *Έστω $V \in Ł^2(\pi)$ τέτοια ώστε $\langle V\rangle_\pi = 0$ και υποθέτουμε ότι ο γεννήτορας L ικανοποιεί τις συνθήκες φασματικού χάους. Τότε, ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος 3.7.*

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι η σχέση (3.43) συνεπάγεται ότι ο $L_0^2(\pi)$, ο χώρος των τετραγωνικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων με μηδενική μέση τιμή, εμπεριέχεται στον $\mathscr{H}_{-1}$. Πράγματι, για κάθε συνάρτηση f ορθογώνια ως προς τις σταθερές στον $L^2(\pi)$ και για κάθε g που ανήκει στον κοινό πυρήνα των L και L^*, έχουμε ότι

$$\langle f, g\rangle_\pi^2 \le \|f\|_\pi^2\{\|g\|_\pi^2 - \langle g\rangle_\pi^2\} \le \gamma\|f\|_\pi^2\|g\|_1^2.$$

Από αυτήν την εκτίμηση προκύπτει ότι

$$\|f\|_{-1}^2 \le \gamma\|f\|_\pi^2 \tag{3.44}$$

για κάθε συνάρτηση $f \in Ł_0^2(\pi)$. Αυτό συνεπάγεται ότι $V \in \mathscr{H}_{-1}$ και ότι $\lim_{\lambda\to 0}\lambda\|f_\lambda\|_{-1} = 0$, λόγω της (3.25) που με τη σειρά της δίνει την (3.36). Από το Θεώρημα 3.14, προκύπτει το ζητούμενο. □

Κεφάλαιο 4

Εφαρμογή στη Στατιστική Μηχανική

4.1 Διαδικασία απλού αποκλεισμού

Μία ιδιαίτερα σημαντική εφαρμογή του Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος για προσθετικά συναρτησιακά μαρκοβιανών αλυσίδων αποτελούν τα συστήματα σωματιδίων που αλληλεπιδρούν μεταξύ τους. Στο πιο συνηθισμένο τέτοιο σύστημα έχει δοθεί ο όρος διαδικασία απλού αποκλεισμού (simple exclussion process). Στο σύστημα αυτό, σωματιδία πραγματοποιούν στον $\mathbb{Z}^d$ τυχαίους περιπάτους συνεχούς χρόνου. Θεωρούμε το χώρο $\mathbb{X} = \{0,1\}^{\mathbb{Z}^d}$ με την τοπολογία γινόμενο ώστε ο X να είναι μετρήσιμος και συμπαγής.
Τα σωματίδια κινούνται στις διπλανές θέσεις με πιθανότητα να βρεθούν από τη θέση z στην θέση $x+z$ ίση με $p(x)$ και $\sum_{x\in\mathbb{Z}^d} p(x) = 1$. Στη συμμετρική περίπτωση ισχύει ότι $p(x) = p(-x)$ και άρα $\sum_{x\in\mathbb{Z}^d} = 0$.
Θεωρούμε ότι σε κάθε θέση μπορεί να βρίσκεται το πολύ 1 σωματίδιο και ότι δεν επιτρέπεται ένα σωματίδιο να πηδήξει πάνω από κάποιο άλλο. Ορίζουμε τις καταστάσεις του $\mathbb{X}$ έτσι ώστε να έχουμε ότι $\eta(x) = 1$ αν η θέση $x \in \mathbb{Z}^d$ είναι κατειλλημένη και $\eta(x) = 0$ διαφορετικά.
Κάθε σωματίδιο, αφού περιμένει εκθετικό χρόνο, επιλέγει τυχαία μια από τις γειτονικές θέσεις στην οποία σκοπεύει να μεταβεί και εφόσον η θέση δεν είναι κατειλημμένη, μεταπηδά εκεί.
Αν $\mathscr{C}$ είναι ο πυρήνας των κυλινδρικών συναρτήσεων οι οποίες έχουν τη μορφή $f(\eta) = \Phi(\eta_{x1}, ..., \eta_{x_k}), x_1, ..., x_k \in \mathbb{Z}^d$, τότε ο γεννήτορας του L ορίζεται από την

$$(Lf)(\eta) = \sum_{x,y\in\mathbb{Z}^d} p(y)\eta(x)[1-\eta(x+y)][f(\sigma^{x,x+y}\eta) - f(\eta)].$$

όπου

$$(\sigma^{x,y}\eta)(z) = \begin{cases} \eta(y), & z = x \\ \eta(x), & z = y \\ \eta(z), & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Επίσης, για $0 \le \alpha \le 1$, θεωρούμε ως ν_α το γινόμενο πάνω από όλα τα σημεία του $\mathbb{Z}^d$ μέτρων πιθανότητας Bernoulli της παραμέτρου α, το οποίο αποδεικνύεται ότι είναι εργοδικό και αναλλοίωτο. Αυτό σημαίνει ότι οι μεταβλητές $\{\eta(x), x \in \mathbb{Z}^d\}$ ως προς ν_α είναι ανεξάρτητες με

$$\nu_\alpha\{\eta(x) = 1\} = a = 1 - \nu_\alpha\{\eta(x) = 0\}.$$

Όπως είναι φανερό, ισχύει ότι

$$E_{\nu_\alpha}[\eta(x)] = \nu_\alpha\{\eta(x) = 1\} = \alpha,$$

όπου E_{ν_α} είναι η αναμενόμενη τιμή ως προς το μέτρο ν_α. Επομένως, η παράμετρος α εκφράζει την πυκνότητα των σωματιδίων στον $\mathbb{Z}^d$.

Θεώρημα 4.1. *Έστω ένας τυχαίος περίπατος τέτοιος ώστε $p(x) = p(-x)$. Σταθεροποιούμε ένα $0 < a < 1$ και θεωρούμε μια κυλινδρική συνάρτηση V στον $\mathscr{H}_{-1}$ μέσης τιμής 0. Τότε, ως προς $\mathbb{P}_{\nu_\alpha}$, η ποσότητα*

$$\frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^t V(\eta_s) ds$$

συγκλίνει κατά κατανομή, για $t \uparrow \infty$, σε μια γκαουσιανή τυχαία μεταβλητή με διακύμανση $\sigma^2(V) = 2\|V\|_{-1}^2$.

4.2 Αυτοδιάχυση σωματιδίων

Στην παραπάνω διαδικασία μπορούμε τώρα να εξετάσουμε ένα σωματίδιο το οποίο σημαδεύουμε και το οποίο βρίσκεται κατά σύμβαση στην αρχή της διαδικασίας.
Δηλώνουμε ως $\{Z_t, t \ge 0\}$ τη θέση του τη στιγμή t. Θα εξετάσουμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά της Z_t. Αν δεν υπήρχαν άλλα σωματίδια, η Z_t θα εξελισσόταν ως ένας συνεχής τυχαίος περίπατος για τον οποίο τα οριακά θεωρήματα θα ήταν γνωστά. Η αλληλεπίδραση του προσημασμένου σωματιδίου με τα άλλα σωματίδια μεταβάλλει τη δυναμική του και η εξέταση του απαιτεί νέα δεδομένα και εργαλεία.
Θεωρούμε την εξέλιξη του περιβάλλοντος ως προς το προσημασμένο σωματίδιο. Αυτό σημαίνει ότι η αρχή θεωρείται εκεί που βρίσκεται το σωματίδιο και ότι κάθε φορά που το σωματίδιο αυτό θα προχωράει κατά x, θα μεταφέρουμε όλο το σχηματισμό κατά $-x$ ώστε να παραμένει το σωματίδιο μας στην αρχή.
Εξαιτίας της παρουσίας άλλων σωματιδίων, η $\{Z_t : t \ge 0\}$ δεν αποτελεί μια μαρκοβιανή διαδικασία, όμως το ζεύγος $\{(Z_t, \eta_t) : t \ge 0\}$ αποτελεί.
Αν συμβολίσουμε ως $\{\theta_x : x \in \mathbb{Z}^d\}$ το σύνολο των μεταθέσεων στον $\mathbb{X}$ έτσι ώστε

$$(\theta_x \eta)(y) = \eta(x + y)$$

για κάθε x, y στον $\mathbb{Z}^d$ και ένα σχηματισμό η στον $\mathbb{X}$, τότε η διαμόρφωση όπως γίνεται αντιληπτή από τη θέση του προσημασμένου σωματιδίου θα είναι η

$$\xi_t = \theta_{Z_t}\eta_t.$$

Η $\{(Z_t, \xi_t) : t \geq 0\}$ είναι και αυτή μαρκοβιανή διαδικασία. Ο γεννήτορας $\mathscr{L}$ της παραπάνω διαδικασία είναι ο $\mathscr{L} = \mathscr{L}_0 + \mathscr{L}_r$, όπου το

$$(\mathscr{L}_0 f)(\xi) = \sum_{x,y\in\mathbb{Z}^d_*} p(y-x)\xi(x)[1-\xi(y)][f(\sigma^{x,y}\xi) - f(\xi)],$$

αντιστοιχεία στα άλματα του περιβάλλοντος και το

$$(\mathscr{L}_\tau f)(\xi) = \sum_{x,y\in\mathbb{Z}^d_*} p(z)[1-\xi(z)][f(\tau_z\xi) - f(\xi)]$$

σε άλματα του προσημασμένου σωματιδίου, ενώ

$$(\tau_z\xi)(y) = \begin{cases} \xi(z), & y = -x \\ \xi(y+z), & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Στη συμμετρική περίπτωση, ο $\mathscr{L}$ είναι αυτοσυζυγής. Πράγματι,

$$\langle \mathscr{L} f(\eta), g(\eta)\rangle_{\nu^*_\alpha} = \int_0^* \mathscr{L} f(\xi) g(\xi) d\nu^*_\alpha(\xi) =$$

$$= \int_0^t \sum_{x,y\in\mathbb{Z}^d_*} p(y-x)\xi(x)[1-\xi(y)][f(\sigma^{x,y}\xi) - f(\xi)]g(\xi)d\nu^*_\alpha(\xi) =$$

$$= \int_0^t \sum_{x,y\in\mathbb{Z}^d_*} p(y-x)\xi(x)[1-\xi(y)]f(\sigma^{x,y}\xi)g(\xi)d\nu^*_\alpha(\xi) -$$

$$- \int_0^t \sum_{x,y\in\mathbb{Z}^d_*} p(y-x)\xi(x)[1-\xi(y)]f(\xi)g(\xi)d\nu^*_\alpha(\xi) =$$

$$(\text{θέτοντας } \xi' = \sigma^{x,y}\xi) = \int_0^t \sum_{x,y\in\mathbb{Z}^d_*} p(y-x)\xi(x)[1-\xi(y)]f(\xi')g(\sigma^{xy}\xi')d\nu^*_\alpha(\xi') -$$

$$- \int_0^t \sum_{x,y\in\mathbb{Z}^d_*} p(y-x)\xi(x)[1-\xi(y)]f(\xi)g(\xi)d\nu^*_\alpha(\xi) =$$

$$= \int_0^t \sum_{x,y\in\mathbb{Z}^d_*} p(y-x)\xi(x)[1-\xi(y)][g(\sigma^{x,y}\xi) - g(\xi)]f(\xi)d\nu^*_\alpha(\xi) =$$

$$= \langle f(\eta), \mathscr{L} g(\eta)\rangle_{\nu^*_\alpha}.$$

Αντίστοιχα με πριν, θεωρούμε τα μέτρα Bernoulli στον $\mathbb{Z}_*^d = \mathbb{Z}^d \backslash \{0\}$, τα οποίο συμβολίζουμε με ν_α^* και τα οποία αποδεικνύεται ότι είναι αναλλοίωτα και εργοδικά στη συμμετρική περίπτωση.
Η μέση μετατόπιση του προσημασμένου σωματιδίου θα είναι ίση με $\sum x \in \mathbb{Z}^d xp(x) = 0$. Εφόσον το ν_α^* είναι αναλλοίωτο, η θέση στην οποία το σωματίδιο επιλέγει να πηδήξει είναι άδεια με πιθανότητα $1-\alpha$. Τότε, όπως αποδεικνύεται, η μέση μετατόπιση ως προς την αναλλοίωτη κατάσταση είναι ίση με 0.
Παρατηρούμε ότι $\xi_t(0) = (\theta_{Z_t}\eta_t)(0) = \eta(Z_t) = 1$. Για $0 \le \alpha \le 1$, αν ν_α^* το μέτρο-γινόμενο Bernoulli στον $\mathbb{X}^*$, έχουμε ότι

$$\nu_\alpha^*\{\xi : \xi(x) = 1\} = \alpha$$

για κάθε x στον $\mathbb{Z}_*^d$.
Για z τέτοιο ώστε $p(z) > 0$ και για $0 \le s < t$, ορίζουμε ως $N_{[s,t]}^Z$ το συνολικό αριθμό των αλμάτων του σωματιδίου από την αρχική θέση ως το z στο χρονικό διάστημα $[s,t]$. Με τον ίδιο τρόπο ορίζεται το $N_{[s,t]}^{x,y}$ για άλματα από το x στο y, ενώ θεωρούμε ότι $N_t^Z = N_{[0,t]}^z$, $N_t^{x,y} = N_{[0,t]}^{x,y}$.

Λήμμα 4.2. *Έστω x, y, z στον $\mathbb{Z}_*^d$ έτσι ώστε $p(z) > 0$, $p(y-x) > 0$ και*

$$M_t^z = N_t^z - \int_0^t p(z)[1 - \xi_s(z)]ds$$

$$M_t^{x,y} = N_t^{x,y} - \int_0^t p(y-x)[1 - \xi_s(y)]ds.$$

Τότε, τα $\{M_t^z : p(z) > 0\}, \{M_t^{x,y} : x, y \in \mathbb{Z}_*^d, p(y-x) > 0\}$ είναι ορθογώνια martingales με τετραγωνική μεταβολή

$$\langle M^z, M^z \rangle_t = \int_0^t p(z)[1-\xi_s(z)]ds, \quad \langle M^{x,y}, M^{x,y} \rangle_t = \int_0^t p(y-x)\xi_s(x)[1-\xi_s(y)]ds.$$

Το τελευταίο προκύπτει από τη Θεωρία των διαδικασιών Poisson: αν έχουμε μια διαδικασία Poisson με ρυθμό $p(t)$ που εξαρτάται από το χρόνο, τότε το martingale $M_t = N_t - \int_0^t p(s)ds$ έχει τετραγωνική μεταβολή ίση με $\langle M, M \rangle_t = \int_0^t p(s)ds$.

Για κυλινδρική συνάρτηση $f : \mathbb{X}^* \to \mathbb{R}$, το

$$M_t^f = f(\xi_t) - f(\xi_0) - \int_0^t (\mathscr{L} f)(\xi_s)ds \tag{4.1}$$

είναι Dynkin's martingale. Μάλιστα, προκύπτει ότι

$$M_t^f = \sum_{x,y \in \mathbb{Z}_*^d} \int_0^t (T^{x,y} f)(\xi_{s-})dM_s^{x,y} + \sum_{x \in \mathbb{Z}_*^d} \int_0^t (T^z f)(\xi_{s-})dM_s^z, \tag{4.2}$$

όπου

$$(T^{x,y}g)(\xi) = g(\sigma^{x,y}\xi) - g(\xi), \quad (T^z g)(\xi) = g(\theta_z\xi) - g(\xi).$$

Από την Πρόταση 3.5, έχουμε ότι

$$\mathbb{E}_{\nu_\alpha^*}[(M_t^f)^2] = 2t\mathscr{D}(f) \tag{4.3}$$

όπου

$$\mathscr{D}(f) = \langle f, (-Lf)\rangle_{\nu_\alpha} = \langle f, (-Sf)\rangle_{\nu_\alpha} = (1/4)\sum_{x,z\in\mathbb{Z}^d} s(z)\int [f(\sigma^{x,x+z}\eta) - f(\eta)]^2\nu_\alpha(d\eta).$$

Θεώρημα 4.3. *Σταθεροποιούμε ένα $0 \le \alpha \le 1$. Τότε, για $t \uparrow \infty$, το Z_t/t συγκλίνει κατά $\mathbb{P}_{\nu_\alpha^*}$-σχεδόν βεβαίως στο 0.*

Απόδειξη. Η θέση του προσημασμένου σωματιδίου τη χρονική στιγμή t δίνεται από την

$$Z_t = \sum_{z\in\mathbb{Z}_*^d} zN_t^z = \sum_{z\in\mathbb{Z}_*^d} zM_t^z + \int_0^t \overline{V}(\xi_s)ds \tag{4.4}$$

όπου $\overline{V}$ είναι η κυλινδρική συνάρτηση που δίνεται από την $\overline{V}(\xi) = \sum_{x\in\mathbb{Z}_*^d} xp(x)[1-\xi(x)]$. Η τετραγωνική μεταβολή του διανυσματικού martingale $M_t = \sum_{x\in\mathbb{Z}_*^d} xM_t^x$ είναι φραγμένη από μία σταθερά $C_0 t$. Αυτό συμβαίνει καθώς

$$\mathbb{E}_{\nu_\alpha}(\langle M\rangle_t) = \mathbb{E}_{\nu_\alpha}(M_t^2) = t(1-\alpha)\sum_z p(z) \le t(1-\alpha)C = C_0 t.$$

Τελικά, το M_t/t συγκλίνει στο 0 σχεδόν βεβαίως. Από την άλλη, αφού το $\mathbb{P}_{\nu_\alpha^*}$ είναι εργοδικό, για $t \uparrow \infty$, το $t^{-1}\int_0^t \overline{V}(\xi_s)ds$ συγκλίνει σχεδόν βεβαίως στο $E_{\nu_\alpha^*}[\overline{V}] = 0$. Άρα, προκύπτει το ζητούμενο. □

Ένα άλλο σημαντικό αποτέλεσμα προκύπτει από το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα για τη θέση του σωματιδίου. Το $Z_t/\sqrt{t}$ συγκλίνει κατά κατανομή σε μια γκαουσιανή τυχαία μεταβλητή μέσης τιμής 0 και με συνδιακύμανση που δίνεται από το λεγόμενο πίνακα αυτοδιάχυσης $D(\alpha)$ και η οποία εξαρτάται από την πυκνότητα των σωματιδίων που περιβάλλουν το προσημασμένο σωματίδιο. Το αποτέλεσμα αυτό έχει ως τώρα αποδειχθεί για τη συμμετρική περίπτωση, καθώς και για μη-συμμετρικές περιπτώσεις διάστασης $d \ge 3$.

Θεώρημα 4.4. *Έστω συμμετρικός τυχαίος περίπατος. Τότε, ως προς μέτρο $\mathbb{P}_{\nu_\alpha^*}$, η ποσότητα*

$$\frac{Z_t}{\sqrt{t}}$$

συγκλίνει κατά κατανομή, για $t \uparrow \infty$, σε ένα γκαουσιανό διάνυσμα με πίνακα συνδιακύμανσης $D(a)$ που είναι πεπερασμένος και θετικά ορισμένος.

Απόδειξη. Η θέση του προσημασμένου σωματιδίου τη χρονική στιγμή t δίνεται από την

$$Z_t = \sum_{x \in \mathbb{Z}_*^d} z N_t^z = \sum_{x \in \mathbb{Z}_*^d} z M_t^z + \int_0^t V(\xi_s) ds \tag{4.5}$$

όπου $V(\xi) = \sum_{x \in \mathbb{Z}_*^d} x p(x)\{\alpha - \xi(x)\}$. Έστω τώρα διάνυσμα $e \in \mathbb{R}^d$ και $V_e = eV$. Θεωρούμε την επιλύσιμη εξίσωση

$$\lambda u_\lambda - \mathscr{L} u_\lambda = Ve.$$

Θα αποδείξουμε το παραπάνω Θεώρημα υποθέτοντας ότι για κάθε $a \in \mathbb{R}^d$,

$$Ve \in \mathscr{H}_{-1} \quad \text{και} \quad \sup_{0<\lambda\leq 1} \|\mathscr{L} u_\lambda\|_{-1} < \infty.$$

η οποία ικανοποιείται στη συμμετρική περίπτωση με βάση το λήμμα 4.5.
Η κεντρική ιδέα της απόδειξης είναι η αντικατάσταση του προσθετικού συναρτησιακού $\int_0^t V(a)(\xi_s)ds$ από το άθροισμα ενός martingale m_t και ενός αμελητέου όρου και στη συνέχεια η απόδειξη του Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος για το martingale $M_t + m_t$, όπου $M_t = \sum_z zeM_t^z$. Τότε, θα προκύψει ότι

$$Z_t e = M_t + m_t^\lambda + R_t^\lambda \tag{4.6}$$

όπου το m_t^λ ικανοποιεί τη σχέση (4.3).
Λόγω της σύγκλισης των m_t^λ και R_t^λ προκύπτει ότι

$$Z_t e = M_t + m_t + R_t \tag{4.7}$$

Από τη σύγκλιση του R_t στο 0 και την εφαρμογή του Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος για το άθροισμα των martingales $M_t + m_t$, προκύπτει το ζητούμενο. Συγκεκριμένα, έχουμε ότι η τετραγωνική μεταβολή τους ισούται με

$$\langle M+m, M+m\rangle_t = \sum_{x,y \in \mathbb{Z}_*^d} p(y-x) \int_0^t \xi_s(x)[1-\xi_s(y)]\Psi_{x,y}(\xi_s)]^2 ds +$$

$$+ \sum_{z \in \mathbb{Z}_*^d} p(z) \int_0^t \xi_s(x)[1-\xi_s(z)]\{ez + \Psi_z(\xi_s)\}^2 ds.$$

όπου $\Psi_{x,y}(\xi_s) = T^{x,y}u$ και $\Psi_z(\xi_s) = T^z u$.
Από το Εργοδικό Θεώρημα, το $t^{-1}\langle M+m, M+m\rangle_t$ συγκλίνει σχεδόν βεβαίως ως προς $\mathbb{P}_{\nu_\alpha}$ και στον $L^1(\mathbb{P}_{\nu_\alpha})$. Επομένως, από το Θεώρημα 3.2, το $t^{-1/2}\langle M_t + m_t\rangle$ και επομένως και το $Z_t/\sqrt{t}$ συγκλίνει κατά κατανομή σε μια γκαουσιανή τυχαία μεταβλητή διακύμανσης $D(\alpha)$ που ικανοποιεί το

$$eD(\alpha)e = \sum_{x,y \in \mathbb{Z}_*^d} p(y-x) \int_0^t \xi(x)[1-\xi(y)]\Psi_{x,y}(\xi)]^2 \nu_\alpha(d\xi) + \sum_{z \in \mathbb{Z}_*^d} p(z) \int_0^t [1-\xi(z)]\Psi_z(\xi)]^2 \nu_\alpha(d\xi).$$

Αποδεικνύεται, ότι ο $D(\alpha)$ είναι πεπερασμένος και θετικά ορισμένος. □

Λήμμα 4.5. *Έστω κυλινδρική συνάρτηση V_e όπως αυτή του προηγούμενου Θεωρήματος. Τότε, η V_e ανήκει στον $\mathscr{H}_{-1}$ και ισχύει $\|Ve\|_{-1}^2 \leq C_0\chi(\alpha)|e|^2$.*

Απόδειξη. Έστω μια κυλινδρική συνάρτηση f. Η Ve είναι ίση με

$$V_e = \sum_{x\in\mathbb{Z}_*^d}(ex)(\alpha - \xi(x))p(x) =$$

$$= \sum_{x\in\mathbb{Z}_*^d}(ex)\alpha p(x) - \sum_{x\in\mathbb{Z}_*^d}(ex)\xi(x)p(x) =$$

$$= \sum_{x\in\mathbb{Z}_*^d}(ex)\xi(e)p(x) - \sum_{x\in\mathbb{Z}_*^d}(ex)\xi(x)p(x) =$$

$$= \sum_{x\in\mathbb{Z}_*^d}(ex)(\xi(e) - \xi(x)p(x).$$

Τότε,

$$\langle Ve, f\rangle_{\nu_\alpha^*} = \int Ve(\xi)f(\xi)d\nu_\alpha^*(\xi) = \sum_{x\in\mathbb{Z}_*^d}(ex)p(x)\int(\xi(e) - \xi(\eta)f(\xi)d\nu_\alpha^*(\xi) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1}(ex)p(x)\int(\xi(y_{i+1}) - \xi(y_i)f(\xi)d\nu_\alpha^*(\xi) = (1/2)\sum_{i=0}^{n-1}\langle\xi(y_{i+1}) - \xi(y_i), T6y_1, Y_1 + 1f\rangle_{\nu_\alpha^*}.$$

Από την ανισότητα $ab \leq \epsilon a^2 + (1/4\epsilon)b^2$, έχουμε ότι η προηγούμενη έκφραση είναι μικρότερη ή ίση από

$$\frac{1}{2}nA\alpha(1-\alpha) + \frac{1}{4A}\sum_{i=0}^{n-1}E_{\nu_\alpha^*}[(T_{y_i,y_{i+1}}f)^2]$$

για κάθε $A > 0$. Τελικά, προσθέτοντας για όλα τα x για τα οποία $p(x) > 0$, καταλήγουμε ότι

$$\langle Ve, f\rangle_{\nu_\alpha^*} \leq C_0A\alpha(1-\alpha)|e|^2 + \frac{C_0}{A}\mathscr{D}_0(f)$$

για κάθε $A > 0$ και για σταθερά C_0. Ελαχιστοποιώντας την προηγούμενη έκφραση ως προς A, προκύπτει το ζητούμενο. □

Βιβλιογραφία

[1] Brzezniak Z, Zastawniak T, Basic Stochastic Processes, Springer, 2002

[2] Cuny Christophe, Peligrad1 Magda, Central limit theorem started at a point for additive functionals of reversible Markov chains, University of New Caledonia, 2009

[3] Feller W, An introduction to Probability Theory and its Applications, 1971

[4] Galin L. Jones, On the Markov Chain Central Limit Theorem, University of Minnesota

[5] Geyer Charles, Mira Antonietta, On non-reversible markov chains

[6] Karatzas Ioannis, Shreve Steven, Brownian Motion and Stochastic Calculus, 1996

[7] Komorowski Tomasz, Landim Claudio, Olla Stefano, Fluctuations in Markov Processes - Time Symmetry and Martingale Approximation, Springer, 2012

[8] Kowalski E, Spectral Theory in Hilbert Spaces, ETH Zurich

[9] Krengel Ulrich, Ergodic Theorems, 1985

[10] Monique Jeanblanc, Jump Processes, CIMPA School, 2007

[11] Olla Stefano, Central Limit Theorems for tagged particles and for diffusions in random environment, Cirm, Luminy, 2000

[12] Riesz Frigyes, Nagy Bela, Functional Analysis, 1956

[13] Βασιλείου Γ, Στοχαστικά Χρηματοοικονομικά, 2001

[14] Γιαννακόπουλος Α.Ν, Στοχαστική Ανάλυση και εφαρμογές στη Χρηματοοικονομική, Εκδόσεις Ζήτη, 2003

[15] Κοκολάκης Γ. και Σπηλιώτης Ι, Εισαγωγή στις Πιθανότητες, Εκδόσεις Συμεών, 2002

[16] Χρυσαφίνου Ουρανία, Εισαγωγή στις Στοχαστικές Ανελίξεις, Εκδόσεις Ζήτη, 2008

[17] Δημήτρης Χελιώτης, Εισαγωγή στο Στοχαστικό Λογισμό - Σημειώσεις