



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών
Τομέας Ρευστών
Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών
Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής
& Βελτιστοποίησης

Μετακίνηση-Προσαρμογή 2Δ και 3Δ Μη-Δομημένων
Πλεγμάτων με την Τεχνική των Στρεπτικών Ελατηρίων

Διπλωματική Εργασία

Αποστόλου Πέτρος

Επιβλέπων: Κυριάκος Χ. Γιαννάκογλου , Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, 2015

Ευχαριστίες

Ολοκληρώνοντας την εκπόνηση της διπλωματικής εργασίας μου θα ήθελα να εκφράσω τις ευχαριστίες μου προς κάποιους ανθρώπους, των οποίων η συμβολή ήταν καθοριστικής σημασίας καθ' όλη τη διάρκεια της ενασχόλησής μου. Αρχικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή της παρούσας εργασίας, κύριο Κυριάκο Γιαννάκογλου, ο οποίος μου έδωσε την ευκαιρία να συμμετάσχω σε ένα επιστημονικό περιβάλλον και να ασχοληθώ με ενδιαφέροντα θέματα. Επίσης, τον ευχαριστώ για το χρόνο, την κατανόηση και την υπομονή που διέθεσε από την επιλογή του θέματος έως και την επιμελή διόρθωση και περάτωσή του.

Ιδιαίτερα, ευχαριστώ τον διδάκτορα Ξενοφώντα Τρομπούκη του οποίου η συμβολή στο θέμα της εργασίας μου έπαιξε καθοριστικό ρόλο στην πρόοδο και ολοκλήρωσή της. Οφείλω να αναφέρω ότι παρά τον καθημερινό φόρτο της εργασίας του, ήταν πάντα πρόθυμος να μου συμπαραστέκεται σε ό,τι σχετικά με την εργασία προβλήματα και αν αντιμετώπιζα.

Επίσης, ευχαριστώ πολύ τον υποψήφιο διδάκτορα Κωνσταντίνο Σαμούχο, ο οποίος ανέλαβε αρχικά να με ενημερώσει για το θέμα της διπλωματικής εργασίας μου και να με φέρει σε πρώτη επαφή με διάφορες εκδόσεις λογισμικού του Εργαστηρίου Θερμικών Στροβιλομηχανών. Όποτε και αν χρειάστηκα τη βοήθειά του για απορίες και ερωτήσεις σε σχετικά με την εργασία μου θέματα, προθυμοποιήθηκε άμεσα να με στηρίξει. Τον ευχαριστώ επίσης για τη διαμόρφωση του περιβάλλοντος που χρησιμοποίησα για τη συγγραφή του κειμένου, γεγονός που με βοήθησε πολύ στην άμεση επεξεργασία του παρόντος κειμένου.

Επιπλέον, ευχαριστώ θερμά όλα τα μέλη της ερευνητικής ομάδας του Εργαστηρίου Θερμικών Στροβιλομηχανών, για την βοήθειά τους σε ποικίλα ζητήματα καθώς και για τη διαμόρφωση ενός ευχάριστου κλίματος διαλόγου σε θέματα εντός αλλά και εκτός ακαδημαϊκού ενδιαφέροντος.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω το θείο μου και φίλο Θάνο, ο οποίος δεν έπαψε σε κανένα χρονικό σημείο να στηρίζει την προσπάθειά μου, παρά τις καθημερινές εργασιακές και οικογενειακές δυσκολίες και πιθανόν αντιμετώπιζε.



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΡΕΥΣΤΩΝ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΘΕΡΜΙΚΩΝ ΣΤΡΟΒΙΛΟΜΗΧΑΝΩΝ
ΜΟΝΑΔΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ
ΡΕΥΣΤΟΔΥΝΑΜΙΚΗΣ & ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

Μετακίνηση-Προσαρμογή 2Δ και 3Δ Μη-Δομημένων Πλεγμάτων με την Τεχνική των Στρεπτικών Ελατηρίων

Πέτρος Αποστόλου

Επιβλέπων: Κυριάκος Χ. Γιαννάκογλου, Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, Σεπτέμβριος 2015

Περίληψη

Στην παρούσα διπλωματική εργασία αναπτύσσεται, προγραμματίζεται και δοκιμάζεται μια μέθοδος προσαρμογής μη-δομημένων υπολογιστικών πλεγμάτων, η οποία βρίσκει εφαρμογές σε προβλήματα στον τομέα της Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής (CFD) με μετακινούμενα όρια. Η μέθοδος αυτή είναι γνωστή από τη βιβλιογραφία με τον όρο “προσαρμογή μη-δομημένων πλεγμάτων με την τεχνική των στρεπτικών ελατηρίων” (unstructured mesh adaptation using torsional springs). Με τον όρο “προσαρμογή” (adaptation), εννοείται η μετακίνηση των εσωτερικών κόμβων του πλέγματος σύμφωνα με τη μετακίνηση του περιγράμματός του.

Η μέθοδος δέχεται ως είσοδο τις μετακινήσεις των οριακών κόμβων (boundary nodes), επεξεργάζεται τις δυνάμεις που ασκούνται από νοητά ελατήρια στους κόμβους, και τελικά, υπολογίζει τις μετατοπίσεις των εσωτερικών κόμβων (internal nodes) του πλέγματος. Μέσω αυτής της διαδικασίας, επιτυγχάνεται η προσαρμογή του πλέγματος προς τη θέση του μετατοπισμένου ορίου (contour) του.

Η χρησιμοποίηση αυτής της μεθόδου προσαρμογής, καθιστά μη αναγκαία την εκ νέου κατασκευή του πλέγματος (remeshing) σε υπολογιστικά προβλήματα που εμπλέκουν σύνθετες και μεταβαλλόμενες γεωμετρίες. Αντίθετα, προτείνει την προσαρμογή του αρχικού πλέγματος προς την επιφάνεια της παραμορφωμένης γεωμετρίας. Ως εκ τούτου, καθίσταται οικονομική από πλευράς υπολογιστικού χρόνου αλλά και ευέλικτη όσον αφορά την ανάγκη για συχνή παραμόρφωση του υπολογιστικού πλέγματος.

Η μέθοδος παραμόρφωσης του πλέγματος με την τεχνική των στρεπτικών ελατηρίων εφαρμόζεται σε αρκετά προβλήματα Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής, όπου εμπλέκονται γεωμετρίες με μετακινούμενα όρια. Μερικά παραδείγματα τέτοιου τύπου προβλημάτων είναι η ροή ρευστού γύρω από αεροτομή που υπόκειται σε εξαναγκασμένη ταλάντωση

(pitching airfoil), η ροή ρευστού στην επιφάνεια μιας πτέρυγας αεροσκάφους σε αλληλεπίδραση με ταλαντώσεις της κατασκευής (αεροελαστική μελέτη), η ροή ρευστού στα πτερύγια ενός συμπιεστή ελεγχόμενης διάχυσης κ.ο.κ.

Παρόλο που η χρήση της παρούσας μεθόδου δεν εξαρτάται από το είδος του πλέγματος που χρησιμοποιεί (δομημένο, μη-δομημένο, υβριδικό), στην παρούσα αργασία αναφέρεται η χρήση της για τη διαχείριση μη-δομημένου πλέγματος (unstructured mesh). Τα χρησιμοποιούμενα πλέγματα αποτελούνται από τριγωνικά ή τετραπλευρικά στοιχεία για διδιάστατα (2Δ), και τετραεδρικά για τριδιάστατα (3Δ) πλέγματα. Η ποιότητα των προσαρμοζόμενων με την τεχνική των στρεπτικών ελατηρίων πλεγμάτων είναι ανάλογη της ποιότητας των αρχικών πλεγμάτων. Επίσης, όσο αυξάνει το μέγεθος της παραμόρφωσης του ορίου, τόσο μειώνεται η ικανότητα της μεθόδου στο να προσαρμόσει το πλέγμα στο παραμορφωμένο όριο. Προφανώς, η ποιότητα του πλέγματος μεταβάλλεται ανάλογα με το είδος και το μέγεθος της παραμόρφωσης που δέχεται.

Η λειτουργία της μεθόδου εξετάζεται ως προς την προσαρμογή του πλέγματος σε περιπτώσεις στρεπτικής, καμπτικής αλλά και σύνθετης (στρεπτικής και καμπτικής ταυτόχρονα) παραμόρφωσης του ορίου. Τα 2Δ πλέγματα αφορούν α) μεμονωμένη αεροτομή και β) πτερύγωση στροβιλομηχανής και τα 3Δ μια πτέρυγα αεροσκάφους.

Τέλος, μέσω υπολογιστικών πειραμάτων διερευνώνται και σχολιάζονται τα όρια της μεθόδου και του προγραμματισθέντος λογισμικού για την προσαρμογή πλεγμάτων κατάλληλων για χρήση στην Υπολογιστική Ρευστοδυναμική με γεωμετρίες με κινούμενα όρια.



NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS
SCHOOL OF MECHANICAL ENGINEERING
FLUIDS DEPARTMENT
LABORATORY OF THERMAL TURBOMACHINES
PARALLEL CFD & OPTIMIZATION UNIT

2D and 3D Unstructured Mesh Displacement-Adaptation using Torsional Springs

Petros Apostolou

Advisor: Kyriakos C. Giannakoglou, Professor NTUA

Athens, September 2015

Abstract

This diploma thesis, is concerned with an unstructured mesh adaptation method, applied to Computational Fluid Dynamics (CFD) problems with moving boundaries. This method is known in the literature by the term "Unstructured Mesh Adaptation based on the Torsional Spring Analogy". By "adapting" (or "adjusting") is meant the displacement of the internal mesh nodes according to that of boundary nodes.

The method takes a prescribed displacement of the boundary nodes (nodes that are located along the contour of the mesh) as input, processes the forces exerted by a system of fictitious springs and, finally, computes the displacement field of the internal mesh nodes. Through this procedure, the adjustment of the grid is accomplished under the control of the displacement of the nodes lying on the contour.

The use of the spring analogy method makes it unnecessary to re-build the computational grid for a deformation of the surface of a tested geometry. Conversely, proposes the adjustment of the initial grid to the deformed boundary. Therefore, it is very advantageous in terms of computational time and flexible in case of frequent deformations of the mesh.

The use of the spring analogy method often refers to applications in CFD, involving geometries with moving boundaries. Some examples are the fluid flow around a pitching airfoil, the aeroelastic analysis of an aircraft wing, the blood flow in conditions of expansion and contraction of a heart etc.

The initial meshes used are unstructured, composed of triangular or quadrilateral elements for 2D and tetrahedral for 3D cases. The quality of the adapted mesh by the spring analogy method certainly depends upon the quality of the initial mesh.

Furthermore, the larger the displacement of the boundary nodes, the lower the capacity of the method to tailor the grid by maintaining the capacity of the initial mesh.

The method and the programmed software is tested in 2D cases of a) an isolated airfoil and b) a compressor blade rotated by various angles around a point and in 3D cases of the aeroelastic deformation (e.g. torsion and bending) of an aircraft wing. Finally, the limits of the method, for adjusting grids suitable for CFD applications with moving boundaries are discussed.

Περιεχόμενα

Περιεχόμενα	i
1 Εισαγωγή	1
2 Μέθοδοι Προσαρμογής 2Δ Μη-Δομημένων Πλεγμάτων	5
2.1 Ανάγκη για παραμόρφωση πλέγματος	5
2.2 Αναφορά σε Μεθόδους Προσαρμογής Πλέγματος	6
2.3 Τεχνική των Γραμμικών Ελατηρίων σε Πλέγμα Τριγωνικών Στοιχείων .	9
2.3.1 Συντελεστής δυσκαμψίας γραμμικού ελατηρίου	9
2.3.2 Ισοδύναμες δυνάμεις	9
2.3.3 Αλγόριθμος επίλυσης του συστήματος εξισώσεων	11
2.4 Τεχνική των Στρεπτικών Ελατηρίων σε Πλέγμα Τριγωνικών Στοιχείων	13
2.4.1 Συντελεστής δυσκαμψίας στρεπτικού ελατηρίου	14
2.4.2 Υπολογισμός γραμμικών μετατοπίσεων	16
2.4.3 Τριγωνικό μητρώο δυσκαμψίας-Ισοδύναμες δυνάμεις	20
2.4.4 Αλγόριθμος επίλυσης του συστήματος εξισώσεων	22
2.5 Τεχνική των Στρεπτικών Ελατηρίων σε Πλέγμα Τετραπλευρικών Στοι- χείων	23
2.5.1 Τετραπλευρικό μητρώο δυσκαμψίας-Ισοδύναμες δυνάμεις	24
2.5.2 Αλγόριθμος επίλυσης του συστήματος εξισώσεων	25
3 Μέθοδοι Προσαρμογής 3Δ Μη-Δομημένων Πλεγμάτων	27
3.1 Εισαγωγή	27
3.2 Μέθοδος των Στρεπτικών Ελατηρίων σε Πλέγμα Τετραεδρικών Στοιχείων	28
3.2.1 Διαμόρφωση τετραεδρικού στοιχείου	28
3.2.2 Προσδιορισμός θέσης-μετακίνησης κορυφής c	30
3.2.3 Τετραεδρικό μητρώο δυσκαμψίας-Ισοδύναμες δυνάμεις	32
3.2.4 Αλγόριθμος επίλυσης του συστήματος εξισώσεων	35
4 Εφαρμογές σε Μεμονωμένη Αεροτομή NACA12	37
4.1 Πλέγμα Τριγωνικών Στοιχείων	37
4.1.1 Περιγραφή του προβλήματος	37
4.1.2 Στρεπτική παραμόρφωση	38
4.1.3 Καμπτική παραμόρφωση	43
4.1.4 Σύνθετη παραμόρφωση	47

4.2	Πλέγμα Τετραπλευρικών Στοιχείων	51
4.2.1	Περιγραφή του προβλήματος	51
4.2.2	Στρεπτική παραμόρφωση	52
4.2.3	Καμπτική παραμόρφωση	56
4.2.4	Σύνθετη παραμόρφωση	60
5	Εφαρμογές σε Πτέρυγα Αεροσκάφους	65
5.1	Πλέγμα Τετραεδρικών Στοιχείων	65
5.1.1	Περιγραφή του προβλήματος	65
5.1.2	Παραμόρφωση της πτέρυγας σε στρέψη	66
5.1.3	Παραμόρφωση της πτέρυγας σε κάμψη	72
5.1.4	Σύνθετη παραμόρφωση της πτέρυγας	76
6	Εφαρμογές σε Πτερυγώσεις Στροβιλομηχανών	79
6.1	2Δ πτερύγωση συμπίεστή	79
6.1.1	Περιγραφή του προβλήματος	79
6.1.2	Στρεπτική παραμόρφωση	80
6.1.3	Καμπτική παραμόρφωση	83
6.1.4	Σύνθετη παραμόρφωση	86
7	Παράδειγμα επίλυσης της ροής σε 3Δ πλέγμα τετραεδρικών στοιχείων.	89
7.1	Οι χρονικά μόνιμες εξισώσεις Euler	89
7.1.1	Διατύπωση των εξισώσεων ροής σε διαφορική μορφή	89
7.1.2	Διακριτοποίηση του χωρίου ροής	91
7.1.3	Διακριτοποίηση των εξισώσεων	92
7.1.4	Επιβολή οριακών συνθηκών	94
7.2	Παρουσίαση της επίλυσης της ροής.	95
8	Ανακεφαλαίωση-Συμπεράσματα και Προτάσεις για περαιτέρω μελέτη	99
A'	Μέτρηση Ποιότητας Πλέγματος	101
A'.1	2Δ Πλέγμα Τριγωνικών Στοιχείων	101
A'.2	2Δ Πλέγμα Τετραπλευρικών Στοιχείων	103
A'.3	3Δ Πλέγμα Τετραεδρικών Στοιχείων	105
	Βιβλιογραφία	107

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Η κατασκευή ενός υπολογιστικού πλέγματος αποτελεί απαραίτητη διαδικασία για την επίλυση ενός υπολογιστικού προβλήματος που διέπεται από μερικές διαφορικές εξισώσεις. Τα υπολογιστικά πλέγματα χωρίζονται σε δύο βασικές κατηγορίες, τα δομημένα και τα μη-δομημένα. Τα δομημένα πλέγματα χαρακτηρίζονται από συγκεκριμένη συνδεσιμότητα των κόμβων. Από την άλλη πλευρά, τα μη-δομημένα πλέγματα συνθέτουν μια ψηφιοποίηση του Ευκλείδειου επίπεδου χώρου με απλά σχήματα όπως τρίγωνα, τετράπλευρα (2Δ) ή τετράεδρα (3Δ) σε ακανόνιστη διάταξη. Σε αντίθεση με τα δομημένα, τα μη-δομημένα πλέγματα απαιτούν μια λίστα σύνδεσης των στοιχείων τους, η οποία καθορίζει τον τρόπο με τον οποίο ένα δεδομένο σύνολο κορυφών συνθέτει τα επιμέρους στοιχεία και δίνει στο πλέγμα μια καθορισμένη δομή. Η λίστα αυτή σύνδεσης των σημείων του πλέγματος ονομάζεται συνδεσιμότητα του πλέγματος. Για τη διαχείριση τέτοιου τύπου πλεγμάτων απαιτείται η αποθήκευση της συνδεσιμότητας. Στην Υπολογιστική Ρευστοδυναμική (CFD), πλέγματα αυτού του τύπου συνήθως χρησιμοποιούνται σε περιπτώσεις ανάλυσης με τη μέθοδο των πεπερασμένων όγκων ή πεπερασμένων στοιχείων, όταν η γεωμετρία που πρέπει να αναλυθεί διαθέτει ακανόνιστη διάταξη.

Στο κείμενο αυτό παρουσιάζεται μια μέθοδος προσαρμογής μη-δομημένων πλεγμάτων σε μεταβαλλόμενα όρια με την τεχνική των στρεπτικών ελατηρίων. Αυτή η μέθοδος δίνει τη δυνατότητα διαχείρισης του πλέγματος σε προβλήματα που εμπλέκουν σώματα με κινούμενα όρια, στον τομέα της υπολογιστικής ρευστοδυναμικής, όπως λ.χ είναι η ταλάντωση μιας πτέρυγας αεροσκάφους.

Με τον όρο “προσαρμογή-μετακίνηση πλέγματος”, [1], εννοείται η κίνηση των εσωτερικών κόμβων του πλέγματος προς την κατεύθυνση που ορίζει η μετατόπιση των κόμβων που βρίσκονται στο περίγραμμά του. Χρησιμοποιώντας την τεχνική των στρεπτικών ελατηρίων, η μέθοδος είναι ικανή να προσαρμόζει το αρχικό πλέγμα στις εκάστοτε μεταβολές του περιγράμματός του. Ενδιαφέρον έχει και ο απαιτούμενος υπολογιστικός χρόνος για τη διαμόρφωση-προσαρμογή του νέου πλέγματος σε τέτοιες περιπτώσεις. Αναφορικά με αυτό το ζήτημα, η κατασκευή νέου πλέγματος εκ του μηδε-

νός, (remeshing) κάθε φορά που μεταβάλλεται η γεωμετρία του ορίου είναι ασύμφορη από πλευράς χρόνου. Αντίθετα, η μέθοδος των ελατηρίων μπορεί και προσαρμόζει το πλέγμα γρήγορα και κατάλληλα, σύμφωνα με τις μετατοπίσεις των κόμβων που βρίσκονται στο όριο. Με αυτόν τον τρόπο, τελικά, επιταχύνεται συνολικά η προσαρμογή του πλέγματος. Η αξία της μεθόδου οφείλεται στην ανάγκη για σχετικά γρήγορη και ευέλικτη (συχνά μεταβαλλόμενη) προσαρμογή πλεγμάτων σε εφαρμογές της υπολογιστικής ρευστοδυναμικής, κατά την παρουσία κινούμενων ορίων.

Μια ενδεικτική περίπτωση εφαρμογής της μεθόδου, αφορά μεθόδους αεροδυναμικής βελτιστοποίησης, στις οποίες βελτιστοποιείται η γεωμετρία σωμάτων ως προς την αεροδυναμική τους απόδοση. Στην περίπτωση αυτή, οι αρχικές γεωμετρικές παράμετροι σχεδιασμού, που επηρεάζουν την αεροδυναμική απόδοση του σώματος που εξετάζεται, μεταβάλλονται από κύκλο σε κύκλο βελτιστοποίησης. Συνεπώς, είναι αναγκαία η κατάλληλη διαχείριση του πλέγματος, έτσι ώστε να καθίσταται κατάλληλο για χρήση σε κάθε μεταβολή της γεωμετρίας του εξεταζόμενου σώματος. Η μέθοδος των στρεπτικών ελατηρίων μπορεί να επιταχύνει τη συνολική διαδικασία της βελτιστοποίησης, αφού για κάθε μεταβολή των τιμών των γεωμετρικών παραμέτρων του σώματος δεν απαιτεί την κατασκευή νέου πλέγματος εκ του μηδενός, γεγονός που θα οδηγούσε σε πρόσθετο υπολογιστικό κόστος.

Στο δεύτερο κεφάλαιο αναφέρονται δύο προσεγγίσεις της μεθόδου προσαρμογής μη-δομημένων πλεγμάτων. Οι δύο αυτές προσεγγίσεις, διαφέρουν ως προς τον τρόπο τοποθέτησης εικονικών ελατηρίων στο πλέγμα αλλά και στο είδος των ελατηρίων που χρησιμοποιούνται σε κάθε περίπτωση, αν δηλαδή είναι γραμμικά ή στρεπτικά. Με βάση λοιπόν το είδος των ελατηρίων, οι παραλλαγές της μεθόδου αναφέρονται ως “μέθοδος των γραμμικών ελατηρίων” (linear spring analogy method) και “μέθοδος των στρεπτικών ελατηρίων” (torsional spring analogy method) [[2],[3]]. Στην πρώτη από τις δύο, ορίζονται γραμμικά ελατήρια κατά μήκος των στοιχείων του πλέγματος. Οι συντελεστές δυσκαμψίας των ελατηρίων αυξάνουν τόσο, όσο μειώνονται τα μήκη των αντίστοιχων πλευρών. Η δεύτερη προσέγγιση ορίζει ένα νοητό στρεπτικό ελατήριο σε κάθε κόμβο του πλέγματος. Οι συντελεστές σκληρότητας των στρεπτικών ελατηρίων αυξάνουν, όταν η αντίστοιχη γωνία του στοιχείου του πλέγματος πρόκειται να πάρει μεγάλη τιμή ή τείνει στο μηδέν. Με τον τρόπο αυτό, ελέγχονται οι μεταβολές των κορυφών των στοιχείων του πλέγματος και συνεπώς, αποτρέπονται ενδεχόμενες διαστρεβλώσεις των στοιχείων του προκύπτοντος πλέγματος.

Στην ενότητα 2.1 παρουσιάζεται ο τρόπος λειτουργίας της μεθόδου των γραμμικών ελατηρίων σε 2Δ πλέγματα, η οποία δεν αποτελεί βασικό αντικείμενο της παρούσας διπλωματικής εργασίας αλλά αναφέρεται για λόγους πληρότητας. Στις υπόλοιπες ενότητες 2.2-2.4 παρουσιάζεται αναλυτικά η μέθοδος προσαρμογής με την τεχνική των στρεπτικών ελατηρίων και επεξηγείται αναλυτικά ο τρόπος λειτουργίας της κατά την προσαρμογή μη-δομημένων πλεγμάτων, τριγωνικών και τετραπλευρικών στοιχείων, με κινούμενα όρια.

Στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζεται η επέκταση της μεθόδου των στρεπτικών ελατηρίων με σκοπό την προσαρμογή 3Δ μη-δομημένου πλέγματος τετραεδρικών στοιχείων.

Το τέταρτο κεφάλαιο αναφέρεται σε εφαρμογές της μεθόδου προσαρμογής για την περίπτωση της μεμονωμένης αεροτομής NACA12. Η ενότητα 4.1 αναφέρεται σε πλέγματα με τριγωνικά και η 4.2 σε πλέγματα με τετραπλευρικά στοιχεία. Η αεροτομή εξαναγκάζεται σε παραμόρφωση-μετακίνηση λ.χ στρέψη, κάμψη και σε σύνθετη παραμόρφωση, χρησιμοποιείται το αναπτυχθέν λογισμικό και σχολιάζονται τα προκύπτοντα πλέγματα ως προς την ύπαρξη ανεστραμμένων τριγώνων. Επίσης, μέσω αλγεβρικών συναρτήσεων που εκφράζουν μετρικές ποιότητας ποσοτικοποιείται και αξιολογείται η ποιότητα του προκύπτοντος πλέγματος με τη χρήση του προγραμματισθέντος λογισμικού.

Το πέμπτο κεφάλαιο της παρούσας εργασίας παρουσιάζει την εφαρμογή της μεθόδου προσαρμογής πλέγματος για την περίπτωση μιας πτέρυγας αεροσκάφους. Σε αυτή την περίπτωση ενδιαφέρον παρουσιάζει η χρησιμοποίηση του αναπτυχθέντος λογισμικού για τους σκοπούς μιας "υποτιθέμενης" αεροελαστικής συμπεριφοράς της πτέρυγας σε αλληλεπίδρασης του ρευστού με τα στερεά τοιχώματα της επιφάνειάς της. Τα υπολογιστικά πειράματα αφορούν την προσαρμογή του πλέγματος μετά την ελαστική παραμόρφωση σε στρέψη, κάμψη ή και σε συνδυασμό στρέψης και κάμψης της επιφάνειας της πτέρυγας. Επίσης, διερευνώνται τα όρια λειτουργίας της μεθόδου για κάθε περίπτωση παραμόρφωσης όπως και στο προηγούμενο κεφάλαιο.

Οι εφαρμογές του έκτου κεφαλαίου αναφέρονται σε πτερυγώσεις θερμικών στροβιλομηχανών. Στην ενότητα 6.1 εφαρμόζεται η μέθοδος προσαρμογής σε πλέγμα για μια 2Δ πτερύγωση συμπιεστή. Οι περιπτώσεις παραμόρφωσης της πτερύγωσης είναι ίδιες με αυτές που περιγράφονται στα κεφάλαια 4 και 5.

Στο έβδομο κεφάλαιο πραγματοποιείται η ρευστοδυναμική επίλυση της ροής για την περίπτωση της παραμορφωμένης πτέρυγας. Μέσω των αποτελεσμάτων επίλυσης της ροής, διαπιστώνεται η χρησιμότητα της μεθόδου ως προς τη διαθεσιμότητα κατάλληλου για χρήση υπολογιστικού πλέγματος.

Τέλος, στο όγδοο κεφάλαιο γίνεται ανακεφαλαίωση, συνοψίζονται τα αποτελέσματα που προκύπτουν από τις εφαρμογές της μεθόδου και σχολιάζονται προτάσεις για περαιτέρω έρευνα.

Κεφάλαιο 2

Μέθοδοι Προσαρμογής 2Δ Μη-Δομημένων Πλεγμάτων

2.1 Ανάγκη για παραμόρφωση πλέγματος

Στην επίλυση της ροής για μια συγκεκριμένη γεωμετρία, απαιτείται η γένεση κατάλληλου υπολογιστικού πλέγματος. Σε μια ευρεία περιοχή της αεροδυναμικής βελτιστοποίησης, όπου αντικείμενό της αποτελεί η εύρεση των βέλτιστων μορφών ως προς ένα στόχο, πραγματοποιείται η επίλυση της ροής με στόχο την αξιολόγηση των υποψήφιων λύσεων, οι οποίες τελικά, θα οδηγήσουν στην εύρεση της βέλτιστης. Η διαδικασία της βελτιστοποίησης εξελίσσεται επαναληπτικά, γεγονός που σημαίνει ότι ανεξάρτητα από τη μέθοδο που χρησιμοποιείται, η γεωμετρία της προς βελτιστοποίησης μορφής τροποποιείται από κύκλο σε κύκλο βελτιστοποίησης. Ως εκ τούτου το πλέγμα πρέπει να προσαρμόζεται σε κάθε νέα μεταβολή της γεωμετρίας ώστε να καθίσταται κατάλληλο για χρήση από τον επιλύτη της ροής.

Επιπροσθέτως, σε προβλήματα αερολαστικότητας, όπου λαμβάνει χώρα η αλληλεπίδραση του ρευστού με στερεό τοίχωμα, όπως λ.χ η ταλάντωση μιας πτέρυγας αεροσκάφους, της οποίας τα στερεά τοιχώματα παραμορφώνονται ελαστικά λόγω των χρονικά μεταβαλλόμενων δυνάμεων που ασκούνται από τον αέρα, σε κάθε χρονικό βήμα απαιτείται η προσαρμογή του πλέγματος στην παραμορφωμένη επιφάνεια της πτέρυγας.

Στις παραπάνω περιπτώσεις και ειδικά σε βιομηχανικές εφαρμογές, με μεγάλα και τριδιάστατα πλέγματα, η επαναπλεγματοποίηση εκ του μηδενός συνοδεύεται από μεγάλο και πολλές φορές απαγορευτικό υπολογιστικό κόστος. Εναλλακτικά, χρησιμοποιούνται τεχνικές νοητών ελατηρίων (spring analogies) ως "έργαλεία προσαρμογής" του πλέγματος στις εκάστοτε μεταβολές του ορίου του. Με τέτοιου τύπου τεχνικές, καθορίζονται οι νέες θέσεις των κόμβων του πλέγματος αρκεί να είναι γνωστές οι μετατοπίσεις των οριακών του κόμβων. Με αυτόν τον τρόπο, η διαδικασία της βελτιστοποίησης επιταχύνεται, κάτι που είναι απαραίτητο ιδιαίτερα σε μια εποχή που χαρακτηρίζεται από μεγάλο ανταγωνισμό.

2.2 Αναφορά σε Μεθόδους Προσαρμογής Πλέγματος

Η ανάγκη για αποφυγή της επαναπλεγματοποίησης οδήγησε στην ανάπτυξη αρκετών μεθόδων προσαρμογής του πλέγματος προς τη νέα γεωμετρία. Μερικές από τις μεθόδους προσαρμογής διακρίνονται σε αυτές που εξασφαλίζουν καλύτερη ποιότητα πλέγματος έναντι άλλων, αλλά με μεγαλύτερο υπολογιστικό κόστος ή το ανάποδο. Γενικότερα, η αύξηση της ποιότητας του πλέγματος με μια μέθοδο προσαρμογής συνεπάγεται και αύξηση του υπολογιστικού κόστους.

Μία πρώτη μέθοδος προσαρμογής είναι η μετατόπιση του πλέγματος εφαρμόζοντας ένα τεχνητό νευρωνικό δίκτυο που υλοποιείται με συναρτήσεις ακτινικής βάσης (Radial Basis Functions, RBF) [4, 5]. Τα δίκτυα RBF λειτουργούν μετατοπίζοντας κάποιους κόμβους του πλέγματος γνωρίζοντας πρώτα τις μετατοπίσεις κάποιων άλλων κόμβων του πλέγματος που θεωρούνται ως κέντρα (οριακοί κόμβοι του πλέγματος ή μέρος αυτών) του μοντέλου αυτού.

Μια άλλη κατηγορία περιλαμβάνει μεθόδους προσαρμογής στις οποίες το υπολογιστικό πλέγμα αντιμετωπίζεται ως ένα ελαστικό στερεό σώμα [6, 7]. Οι ελαστικές εξισώσεις εκφράζουν την ισορροπία των ασκούμενων δυνάμεων και ροπών σε κάθε στοιχειώδες τμήμα του όγκου αυτού. Αυτές οι εξισώσεις εκφράζουν το σχήμα του υπολογιστικού πλέγματος, το οποίο προέκυψε από τις μετατοπίσεις των επιφανειακών κόμβων.

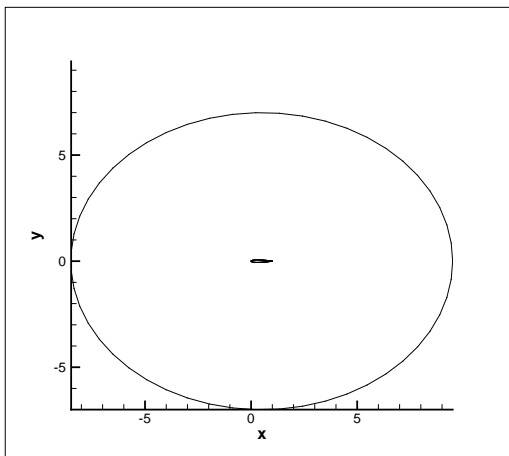
Στην τρίτη κατηγορία μεθόδων προσαρμογής του πλέγματος ορίζεται μια συνάρτηση στόχος, η οποία ποσοτικοποιεί μια έκφραση για την ποιότητα του πλέγματος και με τη διατύπωση ενός προβλήματος βελτιστοποίησης προκύπτουν οι νέες θέσεις των κόμβων του πλέγματος [8].

Υπάρχουν επίσης μέθοδοι όπου οι μετατοπίσεις των κόμβων του πλέγματος υπολογίζονται βάσει αλγεβρικών συναρτήσεων που συνδέουν τις μετατοπίσεις των κόμβων του πλέγματος με τις αντίστοιχες μετατοπίσεις των πλησιέστερων σε αυτούς οριακών κόμβων [9]. Οι μέθοδοι αυτής της κατηγορίας εξασφαλίζουν τη γρηγορότερη, αλλά χαμηλότερης ποιότητας, προσαρμογή του υπολογιστικού πλέγματος και χρησιμοποιούνται κυρίως σε εφαρμογές με μικρές παραμορφώσεις ή μετακινήσεις του εξεταζόμενου σώματος, όπως λ.χ. είναι οι 2D αεροελαστικές εφαρμογές μικρών διαστάσεων. Ένα σημαντικό πλεονέκτημα της παραπάνω μεθόδου είναι η χρησιμοποίηση τέτοιου τύπου αλγεβρικών συναρτήσεων για την αρχικοποίηση της επαναληπτικής διαδικασίας υπολογισμού των μετατοπίσεων των κόμβων του πλέγματος από άλλες μεθόδους προσαρμογής που σχετίζονται με τεχνικές νοητών ελατηρίων.

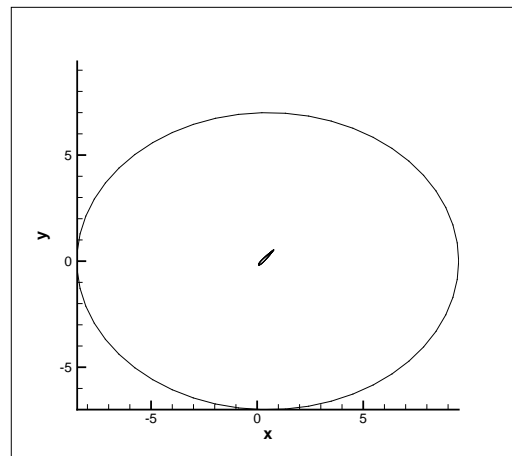
Η παρούσα διπλωματική εργασία αναφέρεται σε μια μέθοδο μετακίνησης-προσαρμογής του πλέγματος χρησιμοποιώντας τεχνικές νοητών ελατηρίων. Σύμφωνα με αυτήν, το πλέγμα αντιμετωπίζεται ως ένα σύστημα ελατηρίων όπου η παραμόρφωση ενός στοιχείου του πλέγματος περιορίζεται από γραμμικά ή στρεπτικά ελατήρια, τοποθετημένα πάνω στους κόμβους ή κατά μήκος των ακμών που ενώνουν τους κόμβους του υπολο-

γιστικού πλέγματος. Οι μετατοπίσεις των οριακών κόμβων του πλέγματος επηρεάζουν αυτές των εσωτερικών, οι οποίες υπολογίζονται από την επίλυση του συστήματος των εξισώσεων ισορροπίας δυνάμεων και ροπών στους κόμβους του πλέγματος. Σε αυτό το κεφάλαιο, αναλύεται ο τρόπος λειτουργίας μιας τέτοιας μεθόδου προσαρμογής του πλέγματος και αναφέρονται δύο προσεγγίσεις της βάσει του είδους των ελατηρίων που χρησιμοποιεί καθεμία. Κατά σειρά, στην ενότητα (2.1) παρουσιάζεται η τεχνική των “γραμμικών ελατηρίων” (linear spring analogy) [2], και στις ενότητες (2.2-2.3) η τεχνική των “στρεπτικών ελατηρίων” (torsional spring analogy) [3] για την προσαρμογή 2Δ πλεγμάτων με τριγωνικά, ενότητα (2.2), και τετραπλευρικά, ενότητα (2.3), στοιχεία. Στις προσεγγίσεις της μεθόδου αυτής, ο τρόπος υπολογισμού των μετατοπίσεων των κόμβων του πλέγματος είναι όμοιος. Η μέθοδος δέχεται ως είσοδο ένα αρχικό πλέγμα, το οποίο αντιστοιχεί σε συγκεκριμένη μορφή του ορίου. Το αρχικό αυτό πλέγμα χαρακτηρίζεται από τις συντεταγμένες των κόμβων, δηλαδή του συνόλου των σημείων που το αποτελούν, αλλά και τη συνδεσιμότητά του. Στη συνέχεια, η μέθοδος λαμβάνει από διαμορφωμένο αρχείο δεδομένων τις τιμές των μετατοπίσεων των κόμβων που βρίσκονται στο όριο του πλέγματος (το οποίο συνήθως αποτελεί το περίγραμμα της εξεταζόμενης γεωμετρίας) και προσαρμόζει το πλέγμα στο παραμορφωμένο όριο. Η συνδεσιμότητα προφανώς παραμένει αμετάβλητη.

Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα εφαρμογής αυτής της μεθόδου προσαρμογής του πλέγματος αποτελεί η παραμόρφωση της επιφάνειας μιας πτέρυγας αεροσκάφους. Θέλοντας λ.χ. να εξεταστεί η αεροελαστική συμπεριφορά της πτέρυγας, απαιτείται η προσαρμογή του πλέγματος για κάθε ελαστική παραμόρφωση της επιφάνειάς της. Η εφαρμογή αυτή παρουσιάζεται στο πέμπτο κεφάλαιο αυτής της εργασίας. Στο κεφάλαιο αυτό, οι εφαρμογές της μεθόδου σχετίζονται με την προσαρμογή του πλέγματος για την μεμονωμένη αεροτομή NACA12 (λ.χ για στρέψη ή κάμψη της αεροτομής). Στο σχήμα 2.1, αριστερά φαίνεται το περίγραμμα πριν την παραμόρφωση της αεροτομής σε στρέψη και δεξιά μετά από στρέψη υπό (μια πολύ μεγάλη, για τα προβλήματα που μας ενδιαφέρουν) γωνία τιμής $\varphi = 45^\circ$. Η μέθοδος κάνοντας χρήση της τεχνικής των στρεπτικών ελατηρίων (ενότητα 2.3), προσαρμόζει το πλέγμα στο παραμορφωμένο του όριο (που αποτελεί το περίγραμμα της αεροτομής μετά την παραμόρφωση). Το προκύπτον πλέγμα αφού αξιολογηθεί ως προς την ποιότητα και τον ενδεχόμενο σχηματισμό διαστρεβλώσεων-αναστροφών των στοιχείων του κρίνεται για την καταλληλότητα ως προς τη χρήση του με λογισμικά λ.χ. τύπου CFD.



(α')



(β')

Σχήμα 2.1: Περιγράμμα πλέγματος γύρω από αεροτομή: (α) αρχική θέση και (β) θέση μετά από στρέψη της αεροτομής κατά γωνία $\varphi = 45^\circ$.

2.3 Τεχνική των Γραμμικών Ελατηρίων σε Πλέγμα Τριγωνικών Στοιχείων

Στην ενότητα αυτή γίνεται παρουσίαση της μεθόδου των “γραμμικών ελατηρίων” (linear spring) [2] για 2Δ μη-δομημένα πλέγματα. Η μέθοδος των γραμμικών ελατηρίων δεν αποτελεί αντικείμενο της διπλωματικής εργασίας αλλά αναφέρεται για λόγους πληρότητας. Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή, ορίζεται ένα σύνολο από γραμμικά ελατήρια τοποθετημένα κατά μήκος των ακμών του πλέγματος. Τα γραμμικά ελατήρια λειτουργούν ως μηχανισμός αποφυγής της ταύτισης δύο κόμβων και, κατά συνέπεια, της εξαφάνισης-συγκερασμού στοιχείων του πλέγματος κατά την προσαρμογή του.

2.3.1 Συντελεστής δυσκαμψίας γραμμικού ελατηρίου

Τα ελατήρια εκφράζονται από ένα συντελεστή δυσκαμψίας, ο οποίος είναι αντιστρόφως ανάλογος του μήκους της πλευράς του πλέγματος στην οποία αναφέρεται. Ως εκ τούτου, όταν ένας κόμβος του πλέγματος τείνει να συμπέσει με κάποιο διπλανό του, δηλαδή το μήκος της πλευράς του στοιχείου που συνδέει τους δύο κόμβους τείνει να γίνεται ολοένα και μικρότερο, τότε ο συντελεστής που αναφέρεται σε αυτή την πλευρά παίρνει πολύ μεγάλη τιμή. Με αυτό τον τρόπο, τα ελατήρια ασκούν δυνάμεις αντίθετης φοράς ως προς την κίνηση των κόμβων, τέτοιες ώστε να αποτρέπεται τελικά η ταύτιση δύο ακραίων κόμβων της ακμής.

Ο συντελεστής δυσκαμψίας του γραμμικού ελατηρίου K_{ij} , για την πλευρά l_{ij} , που συνδέει τους κόμβους i και j , του τριγωνικού στοιχείου T_{ijk} του πλέγματος, όπως αναφέρεται και στην εργασία [2], υπολογίζεται ως:

$$K_{ij} = \frac{1}{l_{ij}} \quad (2.1)$$

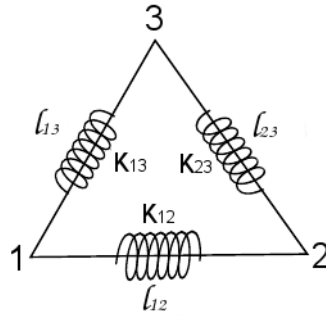
όπου $l_{ij} = (x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2$ το μέτρο της ακμής που συνδέει τους κόμβους i και j .

2.3.2 Ισοδύναμες δυνάμεις

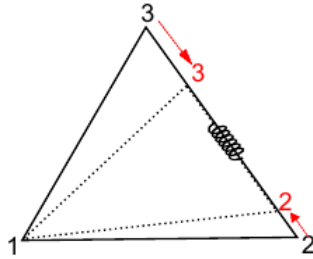
Η δύναμη που ασκείται από το ελατήριο της πλευράς l_{ij} στο κόμβο i λόγω της μετακίνησης του j ενός οποιουδήποτε τριγώνου T_{ijk} είναι

$$\vec{F}_{ij} = K_{ij}(\vec{P}_j^{new} - \vec{P}_i^{new}) = K_{ij}[(\vec{P}_j^{old} + \vec{Q}_j) - (\vec{P}_i^{old} + \vec{Q}_i)] \quad (2.2)$$

όπου $\vec{F}_{ij} = [\vec{F}_{ijx}, \vec{F}_{ijy}]^T$ το διάνυσμα της δύναμης που ασκείται στον κόμβο i α, K_{ij} η τιμή του συντελεστής δυσκαμψίας του γραμμικού ελατηρίου που αναφέρεται στην ακμή



Σχήμα 2.2: Γραμμικά ελατήρια κατά μήκος των πλευρών του τριγώνου και αντίστοιχοι συντελεστές σκληρότητας των ελατηρίων. Ο συντελεστής δυσκαμψίας K_{12} αναφέρεται στο γραμμικό ελατήριο που τοποθετείται κατά μήκος της ακμής l_{12} και είναι $K_{12} = \frac{1}{l_{12}}$ [9]



Σχήμα 2.3: Αποφυγή ταύτισης γειτονικών κόμβων 2 και 3 με την προσθήκη γραμμικού ελατηρίου κατά μήκος της πλευράς l_{23} . Καθώς μειώνεται το μήκος της πλευράς l_{23} , αυξάνει η τιμή του συντελεστή σκληρότητας, K_{23} του ελατηρίου, και εξασφαλίζεται η ελάχιστη απόσταση μεταξύ των γειτονικών κόμβων 2 και 3. [9]

l_{ij} . Επίσης, $\vec{P}_i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix}$ και $\vec{Q}_i = \begin{bmatrix} \delta x_i \\ \delta y_i \end{bmatrix}$ είναι τα διανύσματα θέσης και μετατόπισης ενός οποιουδήποτε κόμβου i του πλέγματος.

Η συνολική ισοδύναμη δύναμη που δέχεται ο κόμβος i από τα γραμμικά ελατήρια συναρτήσει όλων των πλευρών με τις οποίες συνδέεται μέσω ακμών του πλέγματος είναι

$$\sum_j^{N_{ei}} \vec{F}_{ij} = \sum_{j=1}^{N_{ei}} K_{ij} (\vec{P}_j - \vec{P}_i) \quad (2.3)$$

Ο αριθμός N_{ei} συμβολίζει τον αριθμό των γειτονικών κόμβων που συνδέονται μέσω ακμών με τον κόμβο i .

2.3.3 Αλγόριθμος επίλυσης του συστήματος εξισώσεων

Εφαρμόζοντας την ισορροπία των δυνάμεων σε όλους τους κόμβους του πλέγματος προκύπτει το γραμμικό σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων.

$$\sum \vec{F}_{ij} = 0 \quad (2.4)$$

$$\sum K_{ij}(\vec{P}_j^{new} - \vec{P}_i^{new}) = 0 \quad (2.5)$$

$$\sum K_{ij}(\vec{P}_j^{old} + \vec{Q}_j - \vec{P}_i^{old} - \vec{Q}_i) = 0 \quad (2.6)$$

όπου \vec{P} και \vec{Q} είναι τα αντίστοιχα διανύσματα θέσης και μετατόπισης στους άξονες x, y . Λύνοντας ως προς τις μετατοπίσεις προκύπτει

$$-(\sum_i K_{ij})\vec{Q}_i + \sum K_{ij}\vec{Q}_j + \sum K_{ij}(\vec{P}_j^{old} - \vec{P}_i^{old}) = 0 \quad (2.7)$$

$$-(\sum_i K_{ij})\vec{Q}_i + \sum K_{ij}\vec{Q}_j = -\sum K_{ij}(\vec{P}_j^{old} - \vec{P}_i^{old}) \quad (2.8)$$

Αν τα μητρώα δυσκαμψίας K_{ij} που εμφανίζονται στο αριστερό μέλος της εξίσωσης (2.8) χωριστούν σε διαγώνιο $K_{diag} = K_{ii}$ και μη-διαγώνιο $K_{offdiag} = K_{ij}, i \neq j$ μέρος, και το δεξί μέλος συμβολιστεί $\vec{B}_i = -\sum K_{ij}(\vec{P}_j^{old} - \vec{P}_i^{old})$ τότε ο τύπος του συστήματος επίλυσης γράφεται στη μορφή

$$\vec{Q}_i^n = \omega K_{diag}^{-1}(\vec{B}_i - K_{offdiag}\vec{Q}_j^n - K_{offdiag}\vec{Q}_j^{n-1}) + (1 - \omega)\vec{Q}_i^{n-1} \quad (2.9)$$

όπου ο δείκτης “ j ” αναφέρεται στους γειτονικούς κόμβους του i , ($j = Nei(i)$) και ο εκθέτης “ n ” στον αύξοντα αριθμό των επαναλήψεων. Η αριθμητική μέθοδος είναι γνωστή από τη βιβλιογραφία ως μέθοδος “Gauss-Seidel” με χαλάρωση, και μέσω αυτής υπολογίζονται οι μετατοπίσεις των εσωτερικών κόμβων \vec{Q}_i του πλέγματος, γνωρίζοντας τις τιμές των συντεταγμένων των κόμβων της προηγούμενης επανάληψης. Η τιμή του συντελεστή υποχαλάρωσης επιλέχθηκε $\omega \simeq 0.8$.

Ως οριακή συνθήκη δίνεται η σχέση

$$\vec{Q}_i = \vec{Q}_{i_{wall}}, \quad \forall i \in wall \quad (2.10)$$

Με $\vec{Q}_{i_{wall}}$ (ο δείκτης “wall” χαρακτηρίζει κάθε στερεό όριο) συμβολίζονται οι μετατοπίσεις των οριακών κόμβων του πλέγματος, οι τιμές των οποίων διαβάζονται από αποθηκευμένο αρχείο δεδομένων. Προφανώς, οι τιμές αυτών είναι μη-μηδενικές και το σύστημα υπολογίζει τις μετατοπίσεις των κόμβων του πλέγματος.

Γενικά υπάρχουν διάφορες σχέσεις που μπορούν να δοθούν ως επιβολή οριακών συνθηκών για την επίλυση ενός συστήματος εξισώσεων ανάλογα με την περίπτωση του προβλήματος. Για παράδειγμα, σε πλέγματα που αφορούν πτερυγώσεις στροβιλομηχανών οι οριακές συνθήκες αναφέρονται συνήθως σε συνθήκες εισόδου-εξόδου (inlet-outlet) της ροής και περιοδικότητας (periodic), ενώ για μεμονωμένες αεροτομές και πτέρυγες αεροσκαφών αναφέρονται συνήθως σε σημεία του πλέγματος που βρίσκονται αρκετά μακριά από την επιφάνεια της πτέρυγας (farfield). Σε αυτές τις περιπτώσεις, συνήθως, δεν απαιτούνται μετακινήσεις των κόμβων που βρίσκονται στις αντίστοιχες περιοχές και το σύστημα δέχεται ως λύση την $\vec{Q} = 0 \implies [x^{new}, y^{new}]^T = [x^{old}, y^{old}]^T$.

Για την αρχικοποίηση της επαναληπτικής διαδικασίας (initialization) δίνεται η εξίσωση

$$\vec{Q}_i = f(\hat{\mathbf{d}}_i) \vec{Q}_{i_{wall}} \quad (2.11)$$

που συνδέει τις μετατοπίσεις των κόμβων του πλέγματος με αυτές των οριακών. Η συνάρτηση $f(\hat{\mathbf{d}})$ εκφράζει ένα ποσοστό συσχετισμού της μετατόπισης ενός οποιουδήποτε κόμβου του πλέγματος, με αυτήν του πλησιέστερου σε αυτόν οριακό κόμβο της στερεής επιφάνειας και υπολογίζεται ως

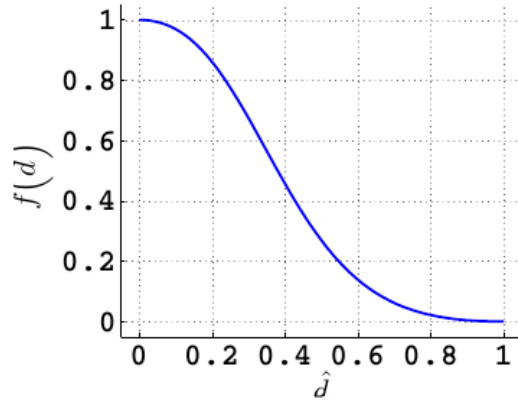
$$f(\hat{\mathbf{d}}) = \frac{f_2^2}{f_1^2 + f_2^2} \quad (2.12)$$

όπου

$$f_1(\hat{\mathbf{d}}) = \frac{e(1 - e^{\hat{\mathbf{d}}})}{-1 + e} \quad f_2(\hat{\mathbf{d}}) = \frac{e(1 - e^{1-\hat{\mathbf{d}}})}{1 - e} \quad (2.13)$$

Στην έκφραση (2.13), e είναι ο νεπέριος πραγματικός αριθμός και $\hat{\mathbf{d}}_i = \frac{d_i}{d_{max}}$ είναι η απόσταση d_i του κόμβου i του πλέγματος από τον πλησιέστερο σε αυτόν κόμβο της επιφάνειας του σώματος, αδιαστατοποιημένη ως προς την απόσταση d_{max} , που είναι η μέγιστη τιμή όλων των d_i . Η συνάρτηση (2.12) παίρνει τιμές στο διάστημα $[0, 1]$. Συγκεκριμένα, η συνάρτηση παίρνει τη μέγιστη τιμή της (τη μονάδα), $f(\hat{\mathbf{d}}) \rightarrow 1$ όταν η απόσταση τείνει να μηδενιστεί, $\hat{\mathbf{d}} \rightarrow 0$ και αντίστροφα, όταν η απόσταση τείνει στη μονάδα, $\hat{\mathbf{d}} \rightarrow 1$, η τιμή της συνάρτησης τείνει να μηδενιστεί, $f(\hat{\mathbf{d}}) \rightarrow 0$. Δηλαδή, όσο πλησιέστεροι είναι οι κόμβοι του πλέγματος στην επιφάνεια του αεροδυναμικού σώματος, τόσο μεγαλύτερη είναι και η μετακίνησή τους. Για την παραγωγή προσαρμοσμένου πλέγματος καλύτερης ποιότητας, στην περίπτωση που κάποιος κόμβος βρίσκεται πλησιέστερα στο μέσο οριακής ακμής (ή σε βαρύκεντρο οριακής πλευράς σε 3Δ πλέγμα), η μετατόπισή του σχετίζεται με το ημιάνθροισμα των μετατοπίσεων των κόμβων της πλησιέστερης οριακής ακμής (ή της μετατόπισης του βαρύκεντρου οριακής πλευράς). Στο σχήμα 2.4 απεικονίζεται το διάγραμμα της συνάρτησης (2.12) ως προς την απόσταση $\hat{\mathbf{d}}$.

Οι ανανεωμένες τιμές των συντεταγμένων των κόμβων του πλέγματος μετά την παρα-



Σχήμα 2.4: Γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(\hat{\mathbf{d}})$ με την έκφραση (2.12) [9].

μόρφωση είναι

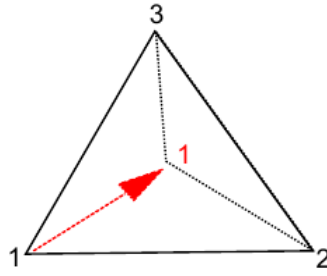
$$\vec{P}_i^n = \vec{P}_i^{n-1} + \vec{Q}_i^n \quad (2.14)$$

Τα διανύσματα \vec{P}_i^n και \vec{P}_i^{n-1} περιέχουν τις τιμές των καρτεσιανών συντεταγμένων του κόμβου i στην n -οστή και $(n - 1)$ -οστή επανάληψη αντίστοιχα. Το διάνυσμα \vec{Q}_i^n περιέχει τις τιμές των καρτεσιανών μετατοπίσεων του ίδιου κόμβου στην n -οστή επανάληψη.

Η χρήση της τεχνικής των γραμμικών ελατηρίων παρουσιάζει δυσκολίες ως προς την προσαρμογή του πλέγματος σε περιπτώσεις μεγάλων τιμών μετακίνησης του ορίου του καθώς και σε 3D εφαρμογές. Συγκεκριμένα, η μέθοδος των γραμμικών ελατηρίων αποτρέπει το μηδενισμό του μήκους της πλευράς ενός στοιχείου του πλέγματος, αλλά δεν αποτρέπει τον πιθανό μηδενισμό του εμβαδού της επιφάνειας του αντίστοιχου στοιχείου. Πράγματι, κατά την προσαρμογή του πλέγματος δεν υφίσταται κανένας μηχανισμός τέτοιος ώστε να εμποδίσει έναν κόμβο να προσεγγίσει την απέναντι πλευρά του στοιχείου που ανήκει και να οδηγήσει σε μηδενισμό του εμβαδού του στοιχείου αυτού. Αυτό φαίνεται στο σχήμα 2.5 όπου λόγω της μετακίνησης της κορυφής 1 προς την πλευρά l_{23} , προκαλείται ο μηδενισμός του εμβαδού του τριγωνικού στοιχείου T_{123} του πλέγματος.

2.4 Τεχνική των Στρεπτικών Ελατηρίων σε Πλέγμα Τριγωνικών Στοιχείων

Όπως προαναφέρθηκε, ενώ η τεχνική των γραμμικών ελατηρίων αποτρέπει το μηδενισμό των μηκών των πλευρών των στοιχείων του πλέγματος, δεν περιέχει κάποιο μηχανισμό για τον έλεγχο του εμβαδού των στοιχείων του κατά την προσαρμογή. Σε αυτήν



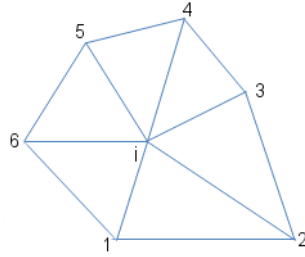
Σχήμα 2.5: Πιθανός εκφυλισμός τριγώνου T_{123} λόγω της μετατόπισης του κόμβου 1 προς την απέναντι πλευρά ℓ_{23} . [9]

την ενότητα, παρουσιάζεται η “τεχνική των στρεπτικών ελατηρίων” (torsional spring analogy)[3], η οποία στοχεύει στην κατασκευή ενός μηχανισμού ελέγχου του εμβαδού της επιφάνειας των στοιχείων του πλέγματος. Στην περίπτωση 2Δ υπολογιστικού πλέγματος τριγωνικών στοιχείων ορίζεται ένα στρεπτικό ελατήριο για κάθε κόμβο του πλέγματος που αποτελεί κορυφή τριγώνου. Το σχήμα 2.7 παριστά την εισαγωγή των στρεπτικών ελατηρίων στο τρίγωνο T_{123} . Με τη χρησιμοποίηση των στρεπτικών ελατηρίων που προτείνει η μέθοδος αυτή, εξασφαλίζεται αφενός μεν η μη-ταύτιση γειτονικών κόμβων (που συνδέονται με ακμή), αφετέρου δε ο μη-μηδενισμός του εμβαδού των τριγώνων κατά την προσαρμογή του πλέγματος. Πιο συγκεκριμένα, όταν μια κορυφή ενός τριγώνου τείνει να διαπεράσει μια απέναντι πλευρά, τότε τα στρεπτικά ελατήρια ασκούν ροπές που μεταφράζονται σε ισοδύναμες δυνάμεις στους κόμβους του πλέγματος έτσι ώστε να περιορίζονται οι μεταβολές των γωνιών των αντίστοιχων κορυφών αυτού του τριγώνου. Ο μηχανισμός αυτός στοχεύει στην ελαχιστοποίηση της δημιουργίας ανεστραμμένων τριγωνικών στοιχείων στο προσαρμοσμένο με την τεχνική των στρεπτικών ελατηρίων πλέγμα. Στην συνέχεια, επεξηγείται ο τρόπος λειτουργίας της μεθόδου των στρεπτικών ελατηρίων για την προσαρμογή 2Δ μη-δομημένων πλεγμάτων.

Τα στρεπτικά ελατήρια που θεωρούνται για έναν κόμβο i του πλέγματος ισούνται με τον αριθμό των στοιχείων (εδώ τριγώνων) που έχουν κοινό τον κόμβο i . Αν λ.χ σχηματίζονται N τρίγωνα με κοινό τον κόμβο i , τότε το πλήθος των στρεπτικών ελατηρίων που αναφέρονται στον κόμβο αυτό ισούται με N . Στο σχήμα 2.6 ο αριθμός των στρεπτικών ελατηρίων που αναφέρονται στον κόμβο i είναι ίσος με έξι, όσα δηλαδή είναι και τα τρίγωνα που σχηματίζονται με κοινή κορυφή τον κόμβο i ($T_{1i2}, T_{2i3}, T_{3i4}, T_{4i5}, T_{5i6}, T_{6i1}$).

2.4.1 Συντελεστής δυσκαμψίας στρεπτικού ελατηρίου

Όπως αναφέρεται στις εργασίες [3] και [10], το θεωρητικό στρεπτικό ελατήριο που αντιστοιχεί σε έναν κόμβο του πλέγματος, λ.χ στην κορυφή 1 ενός οποιουδήποτε τριγώνου T_{123} (τρίγωνο που αποτελείται από τους κόμβους 1, 2 και 3, σχήμα 2.7), ισοδυναμεί με



Σχήμα 2.6: Σχηματισμός έξι τριγωνικών στοιχείων με κοινό τον κόμβο i .

τον συντελεστή δυσκαμψίας C_1^{123} ο οποίος εκφράζεται από τη σχέση

$$C_1^{123} = \frac{1}{\sin^2 \theta_1^{123}} = \frac{\ell_{12}^2 \ell_{13}^2}{A_{123}^2} \quad (2.15)$$

όπου θ_1^{123} η γωνία του τριγώνου T_{123} που αντιστοιχεί στην κορυφή 1, ℓ_{12} και ℓ_{13} τα μήκη των ακμών που συνδέουν τους κόμβους 1,2 και 1,3 αντίστοιχα, και, A_{123} η τιμή του εμβαδού του τριγώνου T_{123} .

Σύμφωνα με τον τύπο της εξίσωσης (2.15), το τετράγωνο του ημιτόνου της γωνίας θ_1 είναι αντιστρόφως ανάλογο του συντελεστή δυσκαμψίας C_1 του τριγώνου T_{123} . Έτσι, για περιπτώσεις όπου η εν λόγω γωνία τείνει να πάρει πολύ μεγάλη ή πολύ μικρή τιμή, λ.χ. 180° ή 0° , το ημίτονο της γωνίας τείνει στο μηδέν, και άρα, ο συντελεστής δυσκαμψίας παίρνει απότομα πολύ μεγάλη τιμή. Το ημίτονο της γωνίας υψώνεται στο τετράγωνο για την αποφυγή αρνητικού προσήμου της τιμής του συντελεστή δυσκαμψίας. Ως εκ τούτου, κατά την κίνηση του πλέγματος αποφεύγονται οι πολύ μεγάλες και πολύ μικρές τιμές των γωνιών των τριγωνικών στοιχείων του.

Από τη σχέση (2.15) με κυκλικό μετασχηματισμό των δεικτών προκύπτουν οι εκφράσεις των συντελεστών δυσκαμψίας για κάθε κορυφή του τριγώνου T_{123} συναρτήσεως του εμβαδού A και των αντίστοιχων ακμών που σχηματίζουν την αντίστοιχη γωνία σε κάθε περίπτωση.

$$C_1 = \frac{\ell_{12}^2 \ell_{13}^2}{4A^2} \quad (2.16\alpha')$$

$$C_2 = \frac{\ell_{12}^2 \ell_{23}^2}{4A^2} \quad (2.16\beta')$$

$$C_3 = \frac{\ell_{13}^2 \ell_{23}^2}{4A^2} \quad (2.16\gamma')$$

Όπου:

ℓ_{12} : το μήκος της ακμής που συνδέει τους κόμβους 1 και 2 του τριγώνου T_{123} .

ℓ_{13} : το μήκος της ακμής που συνδέει τους κόμβους 1 και 3 του τριγώνου T_{123} .

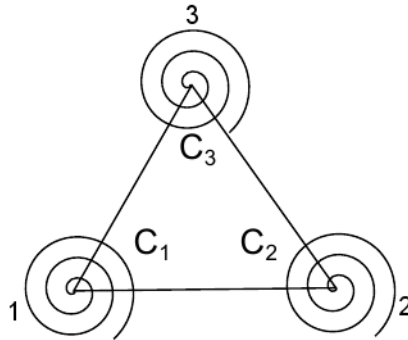
l_{23} : το μήκος της ακμής που συνδέει τους κόμβους 2 και 3 του τριγώνου T_{123} .

A : το εμβαδόν του τριγώνου T_{123} .

2.4.2 Υπολογισμός γραμμικών μετατοπίσεων

Στην περίπτωση 2Δ πλέγματος τριγωνικών στοιχείων η τεχνική των στρεπτικών ελατηρίων λειτουργεί βασιζόμενη σε μεταβολές των γωνιών των τριγώνων. Όπως αναφέρεται στο Κεφάλαιο 1, η μέθοδος υπολογίζει τις γραμμικές μετατοπίσεις των κόμβων του πλέγματος. Για τον λόγο αυτό, χρειάζεται να γίνει αρχικά ο συσχετισμός των μεταβολών των γωνιών με τις αντίστοιχες γραμμικές μετατοπίσεις των κόμβων του πλέγματος. Δηλαδή, η μεταβολή της γωνίας μιας κορυφής ενός τριγώνου αντιστοιχεί σε μια γραμμική μετατόπιση του κόμβου αυτού που αποτελεί την κορυφή της αντίστοιχης γωνίας.

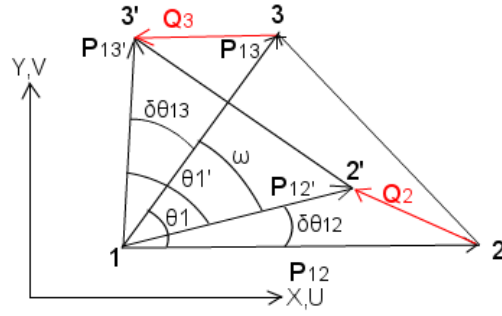
Για τον υπολογισμό των μετατοπίσεων των εσωτερικών κόμβων θεωρείται το τρίγωνο T_{123} αποτελούμενο από τους κόμβους 1, 2 και 3 του πλέγματος, [3]. Στο σχήμα 2.8 φαίνεται η μεταβολή της γωνίας της κορυφής 1 του τριγώνου T_{123} λόγω των μετατοπίσεων των κόμβων που αποτελούν τις κορυφές 2 και 3 του τριγώνου T_{123} . Οι τονισμοί στα 2 και 3 συμβολίζουν τις κορυφές του τριγώνου T_{123} μετατοπισμένες κατά τα αντίστοιχα διανύσματα μετατόπισης \vec{Q}_2 και \vec{Q}_3 . Επίσης με \vec{P}_{12} και \vec{P}_{13} συμβολίζονται τα διανύσματα θέσης με αρχή την κορυφή 1 και πέρας τις κορυφές 2 και 3 αντίστοιχα. Προφανώς, ισχύει $\vec{P}_{ij} = -\vec{P}_{ji}$. Ο συσχετισμός των μεταβολών των γωνιών των



Σχήμα 2.7: Στρεπτικά ελατήρια και συντελεστές σκληρότητας C_1, C_2 και C_3 σε κάθε κορυφή-κόμβο του τριγώνου T_{123} . [9]

κορυφών του T_{123} με τις μετατοπίσεις των κόμβων του επιτυγχάνεται χρησιμοποιώντας τη γεωμετρική ερμηνεία του εξωτερικού γινομένου δυο διανυσμάτων. Για τη γωνία $\delta\theta_{13}$ του σχήματος 2.8 προκύπτει

$$\|\vec{P}_{13} \times \vec{P}_{13}\| = \|\vec{P}_{13}\| \|\vec{P}_{13}\| \sin\delta\theta_{13} \quad (2.17)$$



Σχήμα 2.8: Μεταβολή της γωνίας θ_1 της αντίστοιχης κορυφής 1, λόγω της μετακίνησης των απέναντι κορυφών 2 και 3 του τριγώνου T_{123} . Με $P_{ij} = [(x_j - x_i), (y_j - y_i)]^T$ συμβολίζεται το διάνυσμα θέσης που ξεκινά από τον κόμβο i και έχει καταλήγει στον κόμβο j και με $Q_i = [U_i, V_i]^T$ το διάνυσμα μετατόπισης του κόμβου i . Οι μεταβλητές x, y περιέχουν τις τιμές των καρτεσιανών συντεταγμένων των κόμβων και οι U, V τις τιμές των μετατοπίσεων κατά τους άξονες x, y .

ή, ισοδύναμα,

$$\sin\delta\theta_{13} = \frac{\|\vec{P}_{13} \times \vec{P}_{i3}\|}{\|\vec{P}_{13}\| \|\vec{P}_{i3}\|} \quad (2.18)$$

Από το σχήμα 2.8, το διάνυσμα \vec{P}_{i3} γράφεται ως άθροισμα διανυσμάτων $\vec{P}_{i3} = \vec{P}_{13} + \vec{Q}_3$, και συνεπώς, η εξίσωση (2.18) μετασχηματίζεται ως

$$\sin\delta\theta_{13} = \frac{\|\vec{P}_{13} \times [\vec{P}_{13} + \vec{Q}_3]\|}{\|\vec{P}_{13}\| \|\vec{P}_{13} + \vec{Q}_3\|} \quad (2.19)$$

Θεωρώντας μικρές μετακινήσεις-περιστροφές των τριγώνων, ισχύουν οι προσεγγίσεις $\sin\delta\theta_{13} \simeq \delta\theta_{13}$ και $\|\vec{P}_{i3}\| \simeq \|\vec{P}_{13} + \vec{Q}_3\|$. Συνεπώς, στη συνέχεια, θεωρείται ότι $\|\vec{P}_{i3}\| = \|\vec{P}_{13}\| = \ell_{13}$.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, η έκφραση της γωνίας $\delta\theta_{13}$ είναι

$$\begin{aligned}\delta\theta_{13} &= \frac{\|\vec{P}_{13} \times [\vec{P}_{13} + \vec{Q}_3]\|}{\|\vec{P}_{13}\|^2} = \frac{\begin{vmatrix} x_{13} & x_{13} + U_3 \\ y_{13} & y_{13} + V_3 \end{vmatrix}}{l_{13}^2} = \frac{x_{13}(y_{13} + V_3) - y_{13}(x_{13} + U_3)}{l_{13}^2} \\ &= \frac{x_{13}V_3 - y_{13}U_3}{l_{13}^2}\end{aligned}\quad (2.20)$$

Εάν επίσης συμβολιστεί με $X_{13} = \frac{x_{13}}{l_{13}^2}$ και με $Y_{13} = \frac{y_{13}}{l_{13}^2}$, η σχέση (2.20) μετασχηματίζεται στη μορφή

$$\delta\theta_{13} = X_{13}V_3 - Y_{13}U_3 \quad (2.21)$$

Όμοια, η γωνία $\delta\theta_{12}$ που εκφράζει την μετατόπιση της κορυφής 2 ως προς την 1 εκφράζεται ως

$$\delta\theta_{12} = -X_{12}V_2 + Y_{12}U_2 \quad (2.22)$$

Στο σχήμα 2.8, η κορυφή 1 του τριγώνου T_{123} θεωρείται ως το ακίνητο σημείο αναφοράς για το υπόψη τρίγωνο. Στην πραγματικότητα όμως κάτι τέτοιο δεν ισχύει, εφόσον το πλέγμα μετακινείται προς το παραμορφωμένο του όριο. Δηλαδή, για τον υπολογισμό της συνολικής γωνιακής μετατόπισης της κορυφής 1 $\delta\theta_1$ συμπεριλαμβάνεται και ο όρος που εκφράζει τη μεταβολή της γωνία $\delta\theta_{11}$ λόγω της κίνησης του ίδιου κόμβου που αποτελεί αυτήν την κορυφή. Δηλαδή ισχύει ότι

$$\vec{\delta\theta}_1 = \vec{\delta\theta}_{11} + \vec{\delta\theta}_{12} + \vec{\delta\theta}_{13} \quad (2.23)$$

Για τον υπολογισμό του όρου $\delta\theta_{11}$, θεωρείται ότι ο όρος αυτός έχει τη μορφή των εκφράσεων των όρων $\delta\theta_{12}$ και $\delta\theta_{13}$, έστω δηλαδή ότι ισχύει $\delta\theta_{11} = aV_1 + bU_1$, με a και b δύο βαθμωτά μεγέθη, τα οποία υπολογίζονται θεωρώντας το τρίγωνο T_{123} ως ένα άκαμπτο σώμα, όπου για τις μετατοπίσεις των κορυφών του ισχύει ότι $U_1 = U_2 = U_3 = U$ και $V_1 = V_2 = V_3 = V$, για το οποίο η συνολική μετατόπιση της κορυφής 1 θεωρείται ίση με μηδέν. Συνδυάζοντας τις σχέσεις (2.21) έως (2.23) και λαμβάνοντας υπόψη την παραπάνω υπόθεση ισχύει

$$aV + bU - X_{12}V + Y_{12}U + X_{13}V - Y_{13}U = 0 \implies (a - X_{12} + X_{13})V + (b + Y_{12} - Y_{13})U = 0 \quad (2.24)$$

Συνεπώς, προκύπτουν οι σχέσεις

$$a - X_{12} + X_{13} = 0 \implies a = X_{12} - X_{13} \quad (2.25\alpha')$$

$$b + Y_{12} - Y_{13} = 0 \implies b = -Y_{12} + Y_{13} \quad (2.25\beta')$$

Άρα, η συνολική μεταβολή της γωνίας της κορυφής 1 συναρτήσει των γωνιακών μετακινήσεων των κορυφών 1, 2 και 3 του τριγώνου T_{123} προκύπτει ως

$$\vec{\delta\theta}_1 = (Y_{13} - Y_{12})U_1 - (X_{13} - X_{12})V_1 + Y_{12}U_2 - X_{12}V_2 - Y_{13}U_3 + X_{13}V_3 \quad (2.26)$$

Με κυκλική μετατόπιση των δεικτών 1, 2 και 3 προκύπτουν οι άλλες δύο εκφράσεις για τις συνολικές μετατοπίσεις των κορυφών που αναφέρονται στις κορυφές 2 και 3 αντίστοιχα. Συνολικά, οι εκφράσεις αυτές συγκεντρώνονται στις παρακάτω εξισώσεις

$$\vec{\delta\theta}_1 = (Y_{13} - Y_{12})U_1 - (X_{13} - X_{12})V_1 + Y_{12}U_2 - X_{12}V_2 - Y_{13}U_3 + X_{13}V_3 \quad (2.27\alpha')$$

$$\vec{\delta\theta}_2 = -Y_{21}U_1 + X_{21}V_1 + (Y_{21} - Y_{23})U_2 - (X_{21} - X_{23})V_2 + Y_{23}U_3 - X_{23}V_3 \quad (2.27\beta')$$

$$\vec{\delta\theta}_3 = Y_{31}U_1 - X_{31}V_1 - Y_{32}U_2 + X_{32}V_2 + (Y_{32} - Y_{31})U_3 - (X_{32} - X_{31})V_3 \quad (2.27\gamma')$$

Οι εξισώσεις (2.27) μπορούν να εκφραστούν μητρωϊκά με την παρακάτω εξίσωση που αναφέρεται στο τρίγωνο T_{123} του πλέγματος,

$$\vec{\Delta\theta}_{123} = \mathbf{R}_{123} \vec{Q}_{123} \quad (2.28)$$

όπου

$$\vec{\Delta\theta}_{123} = \begin{bmatrix} \vec{\delta\theta}_1 \\ \vec{\delta\theta}_2 \\ \vec{\delta\theta}_3 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

το διάνυσμα των μεταβολών με τις μεταβολές των γωνιών των κορυφών 1, 2 και 3 ενώ

$$\mathbf{R}_{123} = \begin{bmatrix} Y_{13} - Y_{12} & -X_{13} + X_{12} & Y_{12} & -X_{12} & -Y_{13} & X_{13} \\ -Y_{21} & X_{21} & Y_{21} - Y_{23} & -X_{21} + X_{23} & Y_{23} & -X_{23} \\ Y_{31} & -X_{31} & -Y_{32} & X_{32} & Y_{32} - Y_{31} & -X_{32} + X_{31} \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

είναι ο πίνακας συσχετισμού των γωνιακών μετατοπίσεων με τις γραμμικές μετατοπίσεις

των κορυφών του τριγώνου T_{123} που έχει διάσταση $[3 \times 6]$. Τέλος,

$$\vec{Q}_{123} = \begin{bmatrix} \vec{Q}_1 \\ \vec{Q}_2 \\ \vec{Q}_3 \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

είναι το διάνυσμα των μετατοπίσεων των κορυφών 1, 2 και 3 με διάσταση $[3 \times 1]$, όπου κάθε στοιχείο \vec{Q}_i έχει διάσταση $[2 \times 1]$ και είναι $\vec{Q}_i = [U_i, V_i]^T = [\delta x_i, \delta y_i]^T$ με $[U_i, V_i]^T$ την κατά x και κατά y συνιστώσα του διανύσματος μετατόπισης \vec{Q}_i του κόμβου i .

2.4.3 Τριγωνικό μητρώο δυσκαμψίας-Ισοδύναμες δυνάμεις

Αρχικά, επιδιώκεται ο προσδιορισμός των ροπών που ασκούνται στους κόμβους του πλέγματος, από τη δράση των στρεπτικών ελατηρίων, λόγω της παραμόρφωσης του πλέγματος.

Θεωρώντας και πάλι το τρίγωνο T_{123} , [3], προσδιορίζονται οι ροπές που αναπτύσσονται από τα στρεπτικά ελατήρια τα οποία αναφέρονται στις κορυφές 1, 2 και 3. Οι ροπές αυτές σε μητρωϊκή γραφή είναι

$$\vec{M}_{123} = \mathbf{C}_{123} \vec{\Delta\theta}_{123} \quad (2.32)$$

όπου

$$\vec{M}_{123} = \begin{bmatrix} \vec{M}_1 \\ \vec{M}_2 \\ \vec{M}_3 \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

το διάνυσμα των ροπών που αναπτύσσονται από τα ελατήρια στις κορυφές 1, 2 και 3 αντίστοιχα και

$$\mathbf{C}_{123} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

ο πίνακας των συντελεστών δυσκαμψίας των ελατηρίων με διάσταση $[3 \times 3]$.

Από τις σχέσεις (2.28) και (2.32) προκύπτει ότι

$$\vec{M}_{123} = [\mathbf{C}_{123} \mathbf{R}_{123}] \vec{Q}_{123} \quad (2.35)$$

Για τη μετατροπή των ροπών σε ισοδύναμες δυνάμεις που ασκούνται από τα ελατήρια στις κορυφές του τριγώνου T_{123} εφαρμόζεται ο γραμμικός μετασχηματισμός, [3]

$$\vec{F}_{123} = \mathbf{T}_{123} \vec{M}_{123} \quad (2.36)$$

με

$$\vec{F}_{123} = \begin{bmatrix} \vec{F}_1 \\ \vec{F}_2 \\ \vec{F}_3 \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

όπου κάθε στοιχείο F_i έχει διάσταση $[2 \times 2]$ και περιέχει τις τιμές των συνιστώσεων της διανυσματικής δύναμης που ασκείται στον κόμβο i , στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων. Δηλαδή, η δύναμη \vec{F}_i αναλύεται σε $\vec{F}_i = [F_{ix}, F_{iy}]^T$.

Επίσης, θεωρώντας το ισοζύγιο ενέργειας μεταξύ ροπών και ισοδύναμων δυνάμεων στους κόμβους του τριγώνου T_{123} προκύπτει ότι:

$$\vec{F}_{123}^T \vec{Q}_{123} = \vec{M}_{123}^T \vec{\Delta\theta}_{123} \quad (2.38)$$

και συνδυάζοντας τους τύπους (2.28) ως (2.38), συνεπάγεται

$$\mathbf{T}_{123} = \mathbf{R}_{123}^T \quad (2.39)$$

Συνεπώς, από τις σχέσεις (2.35), (2.36) και (2.39) προκύπτει η τελική έκφραση των ισοδύναμων δυνάμεων που ασκούνται από τα ελατήρια στις κορυφές 1, 2 και 3 του τριγωνικού στοιχείου T_{123} .

$$\vec{F}_{123} = [\mathbf{R}_{123}^T \mathbf{C}_{123} \mathbf{R}_{123}] \mathbf{Q}_{123} = \mathbf{K}_{123} \vec{Q}_{123} \quad (2.40)$$

όπου

$$\mathbf{K}_{123} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} = \mathbf{R}_{123}^T \mathbf{C}_{123} \mathbf{R}_{123} \quad (2.41)$$

είναι το συμμετρικό μητρώο δυσκαμψίας του τριγώνου T_{123} διαστάσεων $[6 \times 6]$, το οποίο είναι πίνακας διάστασης $[3 \times 3]$ όπου κάθε στοιχείο K_{ij} του έχει διάσταση $[2 \times 2]$, και ισχύει $K_{ij} = [K_{ij}]^T$.

Γενικεύοντας την εξίσωση (2.40) για κάθε τρίγωνο T_{ijk} του πλέγματος, ο πίνακας \vec{F}_{ijk} με τα διανύσματα των ισοδύναμων δυνάμεων που εφαρμόζονται στις κορυφές i , j και k , διατυπώνεται ως

$$\vec{F}_{ijk} = \mathbf{K}_{ijk} \vec{Q}_{ijk} \implies \begin{bmatrix} \vec{F}_i \\ \vec{F}_j \\ \vec{F}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ij} & K_{ik} \\ K_{ji} & K_{jj} & K_{jk} \\ K_{ki} & K_{kj} & K_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{Q}_i \\ \vec{Q}_j \\ \vec{Q}_k \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

Το ολικό μητρώο δυσκαμψίας \mathbf{K} προκύπτει από την υπέρθεση των μητρώων δυσκαμψίας κάθε τριγώνου T_{ijk} του πλέγματος.

2.4.4 Αλγόριθμος επίλυσης του συστήματος εξισώσεων

Εφαρμόζοντας την ισορροπία των δυνάμεων για όλους τους κόμβους i που αποτελούν κορυφές τριγώνων T_{ijk} του πλέγματος προκύπτει το γραμμικό σύστημα εξισώσεων

$$\sum \vec{F}_i = \vec{B}_i \quad (2.43)$$

όπου \vec{F}_i το διάνυσμα της δύναμης που ασκείται σε έναν οποιοδήποτε κόμβο i που αποτελεί κοινή κορυφή τριγώνων. Το δεξί μέλος \vec{B}_i δίνεται από την εξίσωση (2.47). Συνεπώς, για την περίπτωση του τριγώνου T_{ijk} ισχύει

$$\sum_{tri} (K_{ii} \vec{Q}_i^{loc} + K_{ij} \vec{Q}_j^{loc} + K_{ik} \vec{Q}_k^{loc}) = \vec{B}_i \quad (2.44)$$

όπου ο δείκτης “ tri ” συμβολίζει τα τρίγωνα που έχουν κοινό κόμβο τον i και ο “ loc ” την τοπική αρίθμηση των κόμβων i, j, k σε ένα συγκεκριμένο τρίγωνο. Εδώ αναφέρεται στο τρίγωνο T_{ijk} . Το ολικό σύστημα εξισώσεων προκύπτει από τη συνεισφορά όλων των τοπικών τριγώνων σε έναν συγκεκριμένο κόμβο i του πλέγματος και είναι

$$K_{diag} \vec{Q}_i + \sum_{tri} (K_{offdiag} \vec{Q}_j) = \vec{B}_i \quad (2.45)$$

όπου ο δείκτης “ j ” συμβολίζει “γείτονα” (κόμβος που συνδέεται άμεσα με ακμή) κόμβο του i .

Λύνοντας το σύστημα ως προς τη μετατόπιση \vec{Q}_i του i κόμβου προκύπτει ο τελικός τύπος του συστήματος επίλυσης

$$Q_i^n = \omega K_{diag} (\vec{B}_i - K_{offdiag} Q_j^n - K_{offdiag} Q_j^{n-1}) + (1 - \omega) Q_i^{n-1} \quad (2.46)$$

Ο όρος B_i στο δεξί μέλος της εξίσωσης (2.45) δίνεται από τη σχέση

$$\vec{B}_i = \begin{cases} 0, & \text{internal nodes} \\ K \vec{Q}_{i_{wall}}, & \text{wall nodes} \\ 0, & \text{far field/inlet - outlet/periodic nodes} \end{cases} \quad (2.47)$$

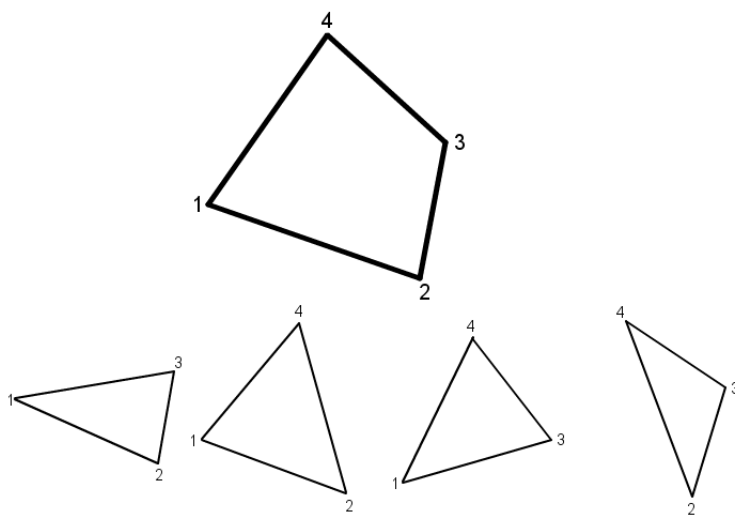
όπου “internal nodes” είναι οι εσωτερικοί κόμβοι, “wall nodes” οι οριακοί και “farfield/inlet-outlet/periodic” οι κόμβοι που βρίσκονται αντίστοιχα σε απομακρυσμένη από στερεή επιφάνεια απόσταση, στην είσοδο-έξοδο ροής ή παρουσιάζουν περιοδικότητα, λ.χ. πτερυγώσεις στροβιλομηχανών. Η λύση του συστήματος δεν είναι $\vec{Q} = 0$ παντού επειδή οι μετατοπίσεις των οριακών κόμβων $\vec{Q}_{i_{wall}}$ είναι μη-μηδενικές.

Το σύστημα επιλύεται επαναληπτικά υπολογίζοντας τις μετατοπίσεις των κόμβων του πλέγματος μετά την παραμόρφωση του ορίου, με τον τρόπο που περιγράφεται στην

υποενότητα 2.2.3, χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.10) για την αρχικοποίηση της επαναληπτικής διαδικασίας. Οι ανανεωμένες τιμές των συντεταγμένων των κόμβων του πλέγματος υπολογίζονται από τη σχέση (2.14).

2.5 Τεχνική των Στρεπτικών Ελατηρίων σε Πλέγμα Τετραπλευρικών Στοιχείων

Στην ενότητα αυτή, γίνεται εφαρμογή της μεθόδου των στρεπτικών ελατηρίων για την προσαρμογή πλεγμάτων τετραπλευρικών στοιχείων. Ο τρόπος με τον οποίο λειτουργεί η μέθοδος είναι όμοιος με αυτόν που αναπτύχθηκε στην ενότητα (2.3) για πλέγματα με τριγωνικά στοιχεία. Το μόνο σημείο που αλλάζει είναι ο προσδιορισμός του μητρώου δυσκαμψίας, έτσι ώστε να αναφέρεται σε τετράπλευρα. Δηλαδή, σκοπός της ενότητας αυτής είναι η κατάλληλη επεξεργασία του ήδη υπάρχοντος λογισμικού που χειρίζεται πλέγματα τριγωνικών στοιχείων, έτσι ώστε να μπορεί πλέον να χειρίζεται και πλέγματα τετραπλευρικών στοιχείων. Ο υπολογισμός του συνολικού μητρώου δυσκαμψίας είναι όμοιος με αυτόν που αναφέρθηκε στην ενότητα (2.3), με τη μόνη διαφορά ότι το στοιχείο του πλέγματος αποτελείται πλέον από τέσσερις κόμβους-κορυφές, σχηματίζοντας τετράπλευρο αντί για τρίγωνο.



Σχήμα 2.9: Διαμόρφωση διπλού τετραπλεύρου $2 \times Q_{1234}$ αποτελούμενο από τα τρίγωνα 123, 124, 134, 234

2.5.1 Τετραπλευρικό μητρώο δυσκαμψίας-Ισοδύναμες δυνάμεις

Οι γωνιακές μετατοπίσεις των κορυφών του τετραπλεύρου υπολογίζονται υποθέτοντας τη διαίρεσή του σε τέσσερα τρίγωνα. Ως εκ τούτου, δυο τετράπλευρα ($2 \times Q_{1234}$) προκύπτουν με την υπέρθεση των τριγώνων $T_{123}, T_{124}, T_{134}$ και T_{234} . Συνεπώς, όπως στη σχέση (2.30), ο πίνακας R_{123} που συσχετίζει τις γωνιακές με τις γραμμικές μετατοπίσεις του τριγώνου T_{123} που συνεισφέρει στο τετράπλευρο Q_{1234} , μετατρέπεται σε έναν πίνακα διαστάσεων $[3 \times 8]$ με μηδενικά στοιχεία της έβδομης και όγδοης στήλης:

$$\mathbf{R}_{123} = \begin{bmatrix} y_{13} - y_{12} & -x_{13} + x_{12} & y_{12} & -x_{12} & -y_{13} & x_{13} & 0 & 0 \\ -y_{21} & x_{21} & y_{21} - y_{23} & -x_{21} + x_{23} & y_{23} & -x_{23} & 0 & 0 \\ y_{31} & -x_{31} & -y_{32} & x_{32} & y_{32} - y_{31} & -x_{32} + x_{32} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

Για το τρίγωνο T_{123} ο πίνακας των συντελεστών δυσκαμψίας παραμένει ως έχει στην έκφραση (2.34),

$$\mathbf{C}_{123} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

Για την αποφυγή λαθών στους συμβολισμούς, από εδώ και στο εξής οι δείκτες "tri" και "quad" θα αναφέρονται σε τρίγωνο και τετράπλευρο αντίστοιχα. Άρα, το μητρώο δυσκαμψίας του τριγώνου K_{tri}^{quad} , συμμετέχει κατά 25% στον προσδιορισμό του μητρώου δυσκαμψίας των δύο τετραπλεύρων $2 \times K^{quad}$ και υπολογίζεται από την έκφραση:

$$\mathbf{K}_{tri}^{quad} = [\mathbf{R}_{tri}^{quad}]^T \mathbf{C}_{tri} \mathbf{R}_{tri}^{quad} \quad (2.50)$$

Ομοίως, ορίζονται οι υπόλοιποι τρεις πίνακες των τριγωνικών μητρώων δυσκαμψίας για κάθε ένα από τα τρίγωνα T_{234}, T_{134} και T_{124} .

Έτσι, το μητρώο δυσκαμψίας για τα δυο τετράπλευρα Q_{1234} προκύπτει υπερθέτοντας τέσσερα τριγωνικά μητρώα δυσκαμψίας, όπου οι δείκτες 1 έως 4 συμβολίζουν τα συνιστάμενα στο τετράπλευρο τρίγωνα $T_{123}, T_{124}, T_{134}$ και T_{234} ,

$$K^{quad} = K_1^{tri} + K_2^{tri} + K_3^{tri} + K_4^{tri} \quad (2.51)$$

Προτιμήθηκε η διαμόρφωση δυο τετραπλευρικών μητρώων δυσκαμψίας έναντι αυτής του ενός για λόγους βελτίωσης των αριθμητικών αποτελεσμάτων μετά δοκιμών της μεθόδου παραμόρφωσης του πλέγματος.

Η μορφή της εξίσωσης που εκφράζει τις ισοδύναμες δυνάμεις από τα ελατήρια στους

εσωτερικούς κόμβους του πλέγματος παραμένει αμετάβλητη και εκφράζεται ως

$$\vec{F} = \mathbf{K}\vec{Q} \quad (2.52)$$

όπου

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \vec{F}_1 \\ \vec{F}_2 \\ \vec{F}_3 \\ \vec{F}_4 \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

είναι ο πίνακας των ισοδύναμων δυνάμεων στις κορυφές 1, 2, 3 και 4 του τετραπλεύρου, και

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \vec{Q}_1 \\ \vec{Q}_2 \\ \vec{Q}_3 \\ \vec{Q}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [U_1 & V_1]^T \\ [U_2 & V_2]^T \\ [U_3 & V_3]^T \\ [U_4 & V_4]^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\delta x_1 & \delta y_1]^T \\ [\delta x_2 & \delta y_2]^T \\ [\delta x_3 & \delta y_3]^T \\ [\delta x_4 & \delta y_4]^T \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

ο πίνακας των μετατοπίσεων των κορυφών του τετραπλεύρου.

Ο πίνακας διαστάσεων $[8 \times 8]$ του τετραπλευρικού μητρώου δυσκαμψίας K_{quad} διατυπώνεται στη μορφή πίνακα διάστασης $[4 \times 4]$, όπου κάθε στοιχείο του \mathbf{K}_{ij} έχει διάσταση $[2 \times 2]$ και ισχύει $\mathbf{K}_{ij} = \mathbf{K}_{ij}^T$:

$$\mathbf{K}_{quad} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

Τελικά, το συνολικό μητρώο δυσκαμψίας \mathbf{K} προκύπτει από την υπέρθεση των μητρώων δυσκαμψίας κάθε (διπλού) τετραπλεύρου του πλέγματος.

2.5.2 Αλγόριθμος επίλυσης του συστήματος εξισώσεων

Το σύνολο των δυνάμεων που ασκούνται λ.χ. στον κόμβο i του πλέγματος είναι

$$\sum \vec{F}_i = \vec{B}_i \quad (2.56)$$

Για το τετράπλευρο Q_{ijmk} είναι

$$\sum_{quad} (K_{ii} \vec{Q}_i^{loc} + K_{ij} \vec{Q}_j^{loc} + K_{im} \vec{Q}_m^{loc} + K_{ik} \vec{Q}_k^{loc}) = \vec{B}_i \quad (2.57)$$

Άρα, το σύστημα των εξισώσεων για έναν οποιονδήποτε κόμβο i του πλέγματος προκύπτει από την συνεισφορά όλων των τετραπλεύρων σε αυτόν και είναι

$$K_{diag} \vec{Q}_i + \sum_{quad} (K_{offdiag} \vec{Q}_j) = \vec{B}_i \quad (2.58)$$

όπου εδώ ο δείκτης j συμβολίζει γειτονικούς (κόμβοι που συνδέονται άμεσα με ακμή) κόμβους του i .

Η μορφή του συστήματος επίλυσης δίνεται από τις σχέσεις (2.46), (2.47) με τους όρους της εξίσωσης να αναφέρονται σε τετράπλευρο. Οι σχέσεις αρχικοποίησης της επαναληπτικής διαδικασίας περιγράφονται επίσης στην ενότητα 2.2.3. Οι τιμές των συντεταγμένων των κόμβων ανανεώνονται προσθέτοντας στις παλιές τις υπολογισμένες τιμές των μετατοπίσεων, σχέση (2.14).

Κεφάλαιο 3

Μέθοδοι Προσαρμογής 3Δ Μη-Δομημένων Πλεγμάτων

3.1 Εισαγωγή

Στην ενότητα αυτή, παρουσιάζεται η λειτουργία της μεθόδου των στρεπτικών ελατηρίων για την προσαρμογή 3Δ πλεγμάτων τετραεδρικών στοιχείων. Γνωρίζοντας την παραμόρφωση του ορίου η μέθοδος υπολογίζει τις μετατοπίσεις των κόμβων του πλέγματος προς αυτό. Ο κώδικας που αναπτύχθηκε για τη λειτουργία της μεθόδου έχει ως στόχο τη μετακίνηση-προσαρμογή του πλέγματος προς την παραμορφωμένη επιφάνεια μιας 3Δ γεωμετρίας.

Η μέθοδος καθίσταται χρήσιμη από την πλευρά της συστηματικής διαθεσιμότητας του πλέγματος, σε εφαρμογές της υπολογιστικής ρευστοδυναμικής που εμπλέκουν 3Δ σώματα με κινούμενα όρια/επιφάνειες. Η προσαρμογή του πλέγματος συναντάται συχνά σε βιομηχανίες όπου υπάρχει μεγάλη ανάγκη για διαθεσιμότητα και χρήση 3Δ πλεγμάτων μεγάλων διαστάσεων. Σε τέτοιες περιπτώσεις η επιλογή της επαναπλεγματοποίησης εκ του μηδενός συνοδεύεται από τεράστιο, σχεδόν απαγορευτικό υπολογιστικό κόστος. Εν αντιθέσει, η εναλλακτική επιλογή της προσαρμογής συμφέρει ως προς τον υπολογιστικό χρόνο διαθεσιμότητας κατάλληλου υπολογιστικού πλέγματος. Ειδικότερα, στην αεροδυναμική βελτιστοποίηση, όπου υπάρχει ανάγκη για συχνή παραμόρφωση του πλέγματος, η χρήση μιας τέτοιας μεθόδου μπορεί να οδηγήσει σε σημαντικό ποσοστό οικονομίας του υπολογιστικού χρόνου που απαιτείται για την εξέλιξη της συνολικής διαδικασίας της βελτιστοποίησης.

3.2 Μέθοδος των Στρεπτικών Ελατηρίων σε Πλέγμα Τετραεδρικών Στοιχείων

Αναφορικά με τα στοιχεία του πλέγματος, το κάθε τετράεδρο αποτελείται από τέσσερις κορυφές (vertices), έξι ακμές (edges) και τέσσερις τριγωνικές έδρες ή βάσεις (faces). Για παράδειγμα, το τετράεδρο T_{1234} αποτελείται από τις κορυφές-κόμβους 1, 2, 3 και 4, η βάση B_1 είναι η βάση-έδρα του τετράεδρου που βρίσκεται απέναντι από την κορυφή 1 και ορίζουν οι υπόλοιπες τρεις κορυφές 2, 3 και 4 του τετράεδρου. Όμοια ορίζονται και οι βάσεις B_2 , B_3 και B_4 του τετράεδρου T_{1234} .

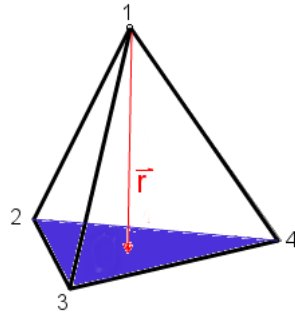
Όπως αναφέρθηκε στο δεύτερο κεφάλαιο, κατά την προσαρμογή του πλέγματος παρουσιάζεται το πρόβλημα της διείσδυσης μιας κορυφής ενός τριγώνου στην απέναντι πλευρά, οδηγώντας σε πιθανές διαστρεβλώσεις των τριγωνικών στοιχείων του. Για το λόγο αυτό, αναπτύχθηκε ένας μηχανισμός ελέγχου του εμβαδού των τριγώνων, έτσι ώστε να αντιστέκεται στον εκφυλισμό των τριγώνων κατά τη μετακίνηση του πλέγματος. Αυτό επιτεύχθηκε ορίζοντας νοητά στρεπτικά ελατήρια στους κόμβους του πλέγματος, τέτοια ώστε να αποτρέπουν το μηδενισμό της επιφάνειας των τριγωνικών (ενότητα 2.3) ή τετραπλευρικών (ενότητα 2.4) στοιχείων του. Σε περίπτωση 3Δ πλέγματος, παρουσιάζεται ένα αντίστοιχο πρόβλημα ως προς τη λειτουργία της μεθόδου. Σύμφωνα με αυτό, κατά τη μετακίνηση των κορυφών του τετράεδρου, είναι πιθανή η διείσδυση μιας κορυφής του στην απέναντι έδρα του. Αυτό μπορεί να οδηγήσει σε μηδενισμό ή να προσδώσει αρνητική τιμή στον όγκο του αντίστοιχου τετράεδρου, με συνέπεια τον εκφυλισμό του στοιχείου αυτού. Ως εκ τούτου, στόχος της μεθόδου αποτελεί η κατάλληλη διαχείριση του μηχανισμού ελέγχου των εμβαδων των τριγωνικών επιφανειών, που αναπτύχθηκε στην ενότητα (2.3), με τρόπο τέτοιο ώστε να οδηγεί τελικά στον έλεγχο των όγκων των τετραεδρικών στοιχείων του πλέγματος.

3.2.1 Διαμόρφωση τετραεδρικού στοιχείου

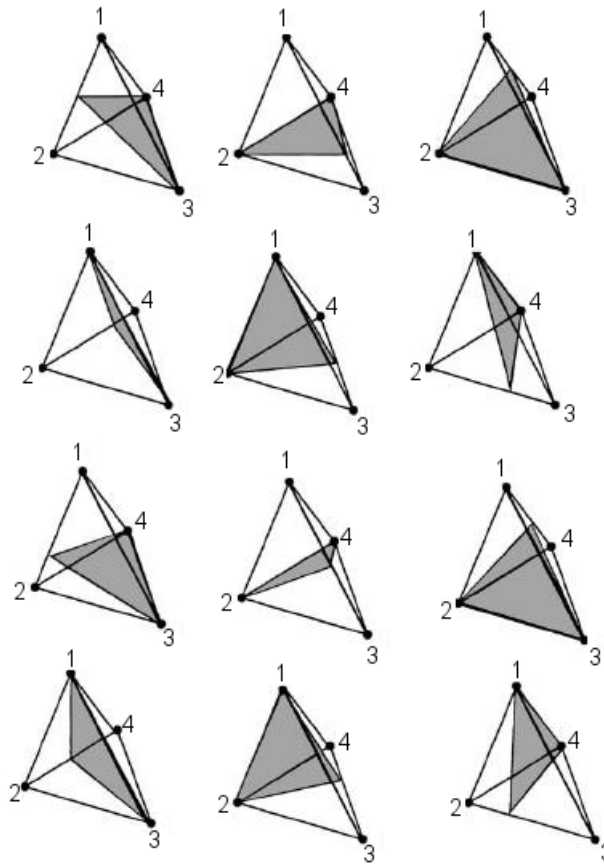
Αν σε μια προσπάθεια μετακίνησης του πλέγματος, η κορυφή 1 του τετράεδρου T_{1234} τείνει να διαπεράσει την απέναντι έδρα του B_1 , τότε ο όγκος του $V_{1234} \rightarrow 0$.

Με σκοπό την ανάπτυξη ενός μηχανισμού, τέτοιου ώστε να αποτρέπει το μηδενισμό του όγκου ενός οποιουδήποτε τετράεδρου T_{1234} , τοποθετούνται εσωτερικά στο τετράεδρο τρίγωνα. Κάθε τρίγωνο τοποθετείται με τρόπο τέτοιο ώστε να είναι κάθετο προς το επίπεδο μιας απέναντι έδρας του τετράεδρου. Προφανώς, τα τρίγωνα που ικανοποιούν αυτή τη συνθήκη είναι άπειρα. Για την κατασκευή του μηχανισμού ελέγχου του όγκου V_{1234} επιλέγεται η διαμόρφωση των δώδεκα εσωτερικών του T_{1234} τριγώνων, σχήμα 3.2.

Η διαμόρφωση των δώδεκα τριγώνων συνεπάγεται αύξηση του υπολογιστικού κόστους σε σχέση λ.χ. με αυτήν των τεσσάρων, αλλά προτιμήθηκε για λόγους βελτίωσης της μεθόδου.



Σχήμα 3.1: Μετακίνηση της κορυφής 1 προς την απέναντι έδρα-βάση B_1 , που αποτελείται από τους κόμβους-κορυφές 2, 3 και 4 του τετραέδρου T_{1234} . Το διάνυσμα \vec{r} έχει κατεύθυνση προς την απέναντι έδρα B_1 του τετραέδρου, η οποία αποτελείται από τις κορυφές-κόμβους 2, 3 και 4. Για $\|\vec{r}\| \rightarrow 0 \implies V_{1234} \rightarrow 0$.



Σχήμα 3.2: Διαμόρφωση δώδεκα εσωτερικών στο T_{1234} τριγώνων. [11]

Ο τρόπος τοποθέτησης των δώδεκα εσωτερικών τριγώνων είναι τέτοιος ώστε να περιορίζονται οι κινήσεις των κορυφών του τετραέδρου προς τις απέναντι έδρες του. Τρία από τα δώδεκα εσωτερικά στο T_{1234} τρίγωνα τοποθετούνται για τη μη-εισχώρησης μιας κορυφής του τετραέδρου στις απέναντι έδρες του. Τα τρίγωνα αυτά τοποθετούνται με

τρόπο ώστε καθένα από αυτά να είναι κάθετο προς το επίπεδο της απέναντι έδρας του τετραέδρου. Οι δύο από τις τρεις κορυφές κάθε τριγώνου ταυτίζονται με δύο κορυφές του τετραέδρου αντίστοιχα. Η τρίτη κορυφή τριγώνου δεν αποτελεί κορυφή του T_{1234} και ο προσδιορισμός της θέσης της αναφέρεται στην επόμενη υποενότητα.

Συνεπώς, για οποιοδήποτε τετράεδρο T_{1234} θεωρούνται συνολικά τέσσερις τριάδες τριγώνων όπου καθεμία είναι υπεύθυνη για τον έλεγχο της κίνηση μιας εκ των κορυφών του τετραέδρου προς τις απέναντι έδρες του αντίστοιχα.

Στις κορυφές των δώδεκα εσωτερικών τριγώνων τοποθετούνται στρεπτικά ελατήρια τα οποία λειτουργούν όπως αναφέρεται στην ενότητα 2.3, ελέγχοντας τις αντίστοιχες δώδεκα τριγωνικές επιφάνειες. Από το σχήμα 3.3, αν λόγω μιας παραμόρφωσης του πλέγματος η κορυφή λ.χ. 1 μετακινηθεί προς την απέναντι έδρα B_1 , τότε τα στρεπτικά ελατήρια του τριγώνου T_{1c3} αναπτύσσουν ροπές που μεταφράζονται σε ισοδύναμες δυνάμεις στους κόμβους που αποτελούν τις κορυφές 1,c,3 αυτού του τριγώνου. Ως εκ τούτου, αποτρέπεται η διείδυση της κορυφής 1 στην απέναντι ακμή l_{c3} . Όμως, η κορυφή 1 εκτός από κορυφή του T_{1c3} αποτελεί και κορυφή του T_{1234} , και συνεπώς, ο περιορισμός της μετακίνησής της προς την ακμή l_{c3} ισοδυναμεί με τον περιορισμό της κίνησής της προς την απέναντι έδρα B_1 του τετραέδρου. Με αυτήν τη διαδικασία, αποτρέπεται ο μηδενισμός του όγκου V_{1234} του T_{1234} , που θα οφειλόταν στην κίνηση της κορυφής 1 προς την απέναντι βάση B_1 . Με όμοιο τρόπο, άλλα δύο τρίγωνα τοποθετούνται κάθετα προς το επίπεδο των άλλων δυο εδρών του τετραέδρου με σκοπό τη μη-εισχώρηση της κορυφής 1 σε καθεμία από αυτές αντίστοιχα. Με τον ίδιο τρόπο δημιουργούνται συνολικά δώδεκα εσωτερικά στο T_{1234} τρίγωνα στα οποία οφείλεται ο έλεγχος των μετακινήσεων όλων των κορυφών του T_{1234} προς απέναντι έδρες, και τελικά, επιτυγχάνεται ο έλεγχος του όγκου V_{1234} του T_{1234} .

3.2.2 Προσδιορισμός θέσης-μετακίνησης κορυφής c

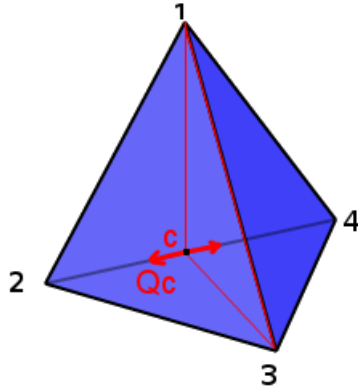
Ως κορυφή c συμβολίζεται η κορυφή του εσωτερικού στο τετράεδρο τριγώνου η οποία δεν αποτελεί κορυφή τετραέδρου. Γενικά, σε κάθε εσωτερικό τρίγωνο η κορυφή c τοποθετείται επί της ακμής που ορίζουν οι δύο υπόλοιπες κορυφές του τετραέδρου. Στην περίπτωση του σχήματος 3.3 η κορυφή c του T_{1c3} τοποθετείται επί της ακμής l_{24} που ορίζουν οι κορυφές 2 και 4 του T_{1234} .

Η μετατόπιση της κορυφής c του εσωτερικού τριγώνου $1c3$, συνδέεται γραμμικά με τις μετατοπίσεις των κορυφών 2 και 4 του τετραέδρου,

$$\vec{Q}_c = \lambda \vec{Q}_2 + (1 - \lambda) \vec{Q}_4 \quad (3.1)$$

όπου λ αδιάστατη γεωμετρική ποσότητα και \vec{Q}_2, \vec{Q}_4 οι διανυσματικές μετατοπίσεις των κορυφών 2 και 4 του τετραέδρου.

Από το σχήμα 3.3, εάν η κορυφή c ανήκει στην διεύθυνση της ακμής που ορίζουν οι



Σχήμα 3.3: Τοποθέτηση εσωτερικού στο τετράεδρο T_{1234} τριγώνου T_{1c3} με τρόπο τέτοιο ώστε τα επίπεδα που ορίζουν το τρίγωνο T_{1c3} και η τριγωνική βάση T_{234} του τετράεδρου να είναι κάθετα μεταξύ τους. Στις κορυφές του εσωτερικού τριγώνου T_{1c3} τοποθετούνται νοητά στρεπτικά ελατήρια τα οποία ασκώντας ροπές αποτρέπουν το μηδενισμό του εμβαδού του τριγώνου T_{1c3} και αυτό οδηγεί στον περιορισμό της μετακίνησης της εξεταζόμενης κορυφής 1 προς την απέναντι πλευρά του τετράεδρου.

κορυφές 2 και 4 του τετράεδρου τότε, [11], για την αδιάστατη ποσότητα λ ισχύει

$$\lambda = \frac{\|\vec{2c}\|}{\|\vec{24}\|}, \quad c \in \ell_{24} \quad (3.2)$$

ενώ, σε κάθε άλλη περίπτωση, ισχύει ότι

$$\lambda = \begin{cases} 1, & \text{αν } \vec{2c} \cdot \vec{24} > 0 \\ 0, & \text{αν } \vec{2c} \cdot \vec{24} \leq 0 \end{cases}$$

Στη συνέχεια, για τη διευκόλυνση των συμβολισμών, οι δείκτες “*tri*” και “*tetra*” αναφέρονται σε τρίγωνα και τετράεδρα αντίστοιχα.

3.2.3 Τετραεδρικό μητρώο δυσκαμψίας-Ισοδύναμες δυνάμεις

Για τον υπολογισμό του μητρώου δυσκαμψίας του τετραέδρου, σχηματίζονται δώδεκα τριγωνικά στοιχεία εσωτερικά του τετραέδρου, (3 για κάθε κορυφή). Αν οι κορυφές των εσωτερικών τριγώνων συμβολιστούν με τα γράμματα a, b, c , τότε η έκφραση του τοπικού (local) μητρώου δυσκαμψίας K_{loc}^{tri} του κάθε τριγώνου T_{tri} είναι

$$\mathbf{K}_{loc}^{tri} = \begin{bmatrix} K^{aa} & K^{ab} & K^{ac} \\ K^{ba} & K^{bb} & K^{bc} \\ K^{ca} & K^{cb} & K^{cc} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

όπου ο πίνακας \mathbf{K}_{loc}^{tri} έχει διάσταση $[3 \times 3]$. Το κάθε μητρώο \mathbf{K}^{ij} του πίνακα \mathbf{K}_{loc}^{tri} έχει διάσταση $[3 \times 3]$ με μηδενικά στοιχεία της τρίτης γραμμής και στήλης αντίστοιχα, εφόσον αναφέρεται σε επίπεδο. Δηλαδή, τα στοιχεία του πίνακα K_{loc}^{tri} είναι πίνακες της μορφής

$$\mathbf{K}^{ij} = \begin{bmatrix} K_{11}^{ij} & K_{12}^{ij} & 0 \\ K_{21}^{ij} & K_{22}^{ij} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Αν T είναι το μητρώο στροφής (διάστασης $[3 \times 3]$) από το ολικό (x_{gl}, y_{gl}, z_{gl}) στο τοπικό $(x_{loc}, y_{loc}, z_{loc})$ σύστημα συντεταγμένων, τότε ισχύουν οι μετασχηματισμοί, [9]

$$\vec{Q}_{loc}^{tri} = \mathbf{T} \vec{Q}_{gl}^{tri} \quad (3.5)$$

$$\vec{F}_{loc}^{tri} = \mathbf{T} \vec{F}_{gl}^{tri} \quad (3.6)$$

όπου $\vec{F}^{tri} = \begin{bmatrix} \vec{F}_a \\ \vec{F}_b \\ \vec{F}_c \end{bmatrix}$ είναι ο πίνακας των δυνάμεων από τα ελατήρια στους κόμβους a, b, c

που αποτελούν κορυφές οποιουδήποτε εσωτερικού T_{abc} , $\vec{Q}^{tri} = \begin{bmatrix} \vec{Q}_a \\ \vec{Q}_b \\ \vec{Q}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\delta x_a & \delta y_a & \delta z_a]^T \\ [\delta x_b & \delta y_b & \delta z_b]^T \\ [\delta x_c & \delta y_c & \delta z_c]^T \end{bmatrix}$

ο πίνακας των μετατοπίσεων αυτών των κορυφών, και, $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_{rot} & 0 & 0 \\ 0 & T_{rot} & 0 \\ 0 & 0 & T_{rot} \end{bmatrix}$ το υ-

πόψη μητρώο στροφής.

Τα στοιχεία της διαγωνίου T_{rot} του πίνακα T είναι πίνακες διάστασης $[3 \times 3]$ και προκύπτουν από τον πολλαπλασιασμό δύο πινάκων εκ των οποίων ο πρώτος T_x , εκφράζει στροφή ως προς τον άξονα x και ο δεύτερος, T_z στροφή ως προς τον z . Δηλαδή, είναι $T_{rot} = T_x T_z$.

Αυτό γίνεται ώστε το κάθετο διάνυσμα $\vec{n} = [n_x, n_y, n_z]^T$ από το τυχαίο επίπεδο xOy του κάθε εσωτερικού στο τετράεδρο τριγώνου να έρθει παράλληλα με τον άξονα z . Δηλαδή, θα πρέπει να ισχύει $\vec{n} \parallel \hat{z}$, με $\hat{z} = [0, 0, 1]^T$ το μοναδιαίο διάνυσμα του άξονα z .

Οι τύποι των πινάκων T_x και T_z είναι

$$T_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_x & -\sin\theta_x \\ 0 & \sin\theta_x & \cos\theta_x \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

και

$$T_z = \begin{bmatrix} \cos\theta_z & -\sin\theta_z & 0 \\ \sin\theta_z & \cos\theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

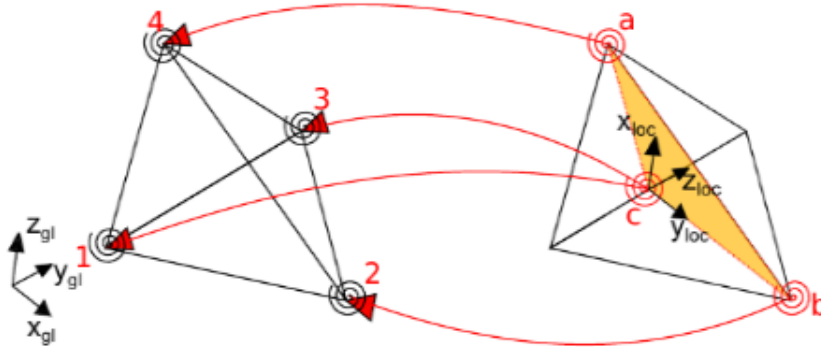
με $\theta_z = \arccos \frac{n_y}{\|\vec{n}_{xy}\|}$, και $\theta_x = \arccos \frac{n_z}{\|\vec{n}_{xyz}\|}$.

Επίσης, είναι $\|\vec{n}_{xy}\| = \sqrt{n_x^2 + n_y^2}$ και $\|\vec{n}_{xyz}\| = \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}$.

Ο Τύπος του πίνακα T_{rot} μετά τις πράξεις γινομένου των πινάκων T_x, T_z προκύπτει

$$T_{rot} = \begin{bmatrix} \cos\theta_z & -\sin\theta_z & 0 \\ \cos\theta_x \sin\theta_z & \cos\theta_x \cos\theta_z & -\sin\theta_x \\ \sin\theta_x \sin\theta_z & \sin\theta_x \cos\theta_z & \cos\theta_x \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Στο σχήμα 3.4 φαίνεται η μεταφορά του τριγώνου T_{abc} από το τοπικό στο ολικό σύστημα συντεταγμένων.



Σχήμα 3.4: Στροφή του τοπικού συστήματος αξόνων για τη μεταφορά του τριγώνου T_{abc} στο ολικό σύστημα αξόνων του τετραέδρου T_{1234} . [9]

Συνεπώς, αν

$$\mathbf{F}^{\text{tetra}} = \begin{bmatrix} \vec{F}_1 \\ \vec{F}_2 \\ \vec{F}_3 \\ \vec{F}_4 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{Q}^{\text{tetra}} = \begin{bmatrix} \vec{Q}_1 \\ \vec{Q}_2 \\ \vec{Q}_3 \\ \vec{Q}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\delta x_1 & \delta y_1 & \delta z_1]^T \\ [\delta x_2 & \delta y_2 & \delta z_2]^T \\ [\delta x_3 & \delta y_3 & \delta z_3]^T \\ [\delta x_4 & \delta y_4 & \delta z_4]^T \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

είναι οι πίνακες με τις ισοδύναμες δυνάμεις των ελατηρίων και τις μετατοπίσεις των κορυφών 1, 2, 3 και 4 του τετραέδρου T^{tetra} , τότε ισχύει η σχέση:

$$\mathbf{Q}_{\text{gl}}^{\text{tri}} = \mathbf{S}\mathbf{Q}_{\text{gl}}^{\text{tetra}} \quad (3.11)$$

όπου

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & I & 0 & 0 \\ \lambda I & 0 & (1-\lambda)I & 0 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

με I το μοναδιαίο πίνακα διάστασης $[3 \times 3]$. Για να είναι ενεργειακά ισοδύναμες οι δυνάμεις που ασκούνται στις κορυφές του τετραέδρου με εκείνες που ασκούνται στις κορυφές του τριγώνου, θα πρέπει να ισχύει

$$(\mathbf{F}_{\text{gl}}^{\text{tetra}})^T \mathbf{Q}_{\text{gl}}^{\text{tetra}} = (\mathbf{F}_{\text{gl}}^{\text{tri}})^T \mathbf{Q}_{\text{gl}}^{\text{tri}} \quad (3.13)$$

και χρησιμοποιώντας τη σχέση (3.11), η έκφραση (3.13) γίνεται στη μορφή

$$(\mathbf{F}_{\text{gl}}^{\text{tetra}})^T \mathbf{Q}_{\text{gl}}^{\text{tetra}} = (\mathbf{F}_{\text{gl}}^{\text{tri}})^T \mathbf{S}\mathbf{Q}_{\text{gl}}^{\text{tetra}} \quad (3.14)$$

δηλαδή, είναι

$$\mathbf{F}_{\text{gl}}^{\text{tetra}} = \mathbf{S}^T \mathbf{F}_{\text{gl}}^{\text{tri}} \quad (3.15)$$

Άρα, από τη σχέση (3.6) προκύπτει ότι

$$\mathbf{F}_{\text{gl}}^{\text{tetra}} = \mathbf{S}^T \mathbf{T}^T \mathbf{F}_{\text{loc}}^{\text{tri}} \quad (3.16)$$

Αντικαθιστώντας στο δεύτερο μέλος της σχέσης (3.16) τη δύναμη \mathbf{F} με το γινόμενο του συντελεστή δυσκαμψίας \mathbf{K} επί τη μετατόπιση \mathbf{Q} της αντίστοιχης κορυφής και χρησιμοποιώντας κατά σειρά τις σχέσεις (3.5) και (3.11), προκύπτει η έκφραση

$$\mathbf{F}_{\text{gl}}^{\text{tetra}} = (\mathbf{S}^T \mathbf{T}^T \mathbf{K}_{\text{loc}}^{\text{tri}} \mathbf{T} \mathbf{S}) \mathbf{Q}_{\text{gl}}^{\text{tetra}} \quad (3.17)$$

ή ισοδύναμα

$$\mathbf{F}_{\text{gl}}^{\text{tetra}} = \mathbf{K}_{\text{gl}}^{\text{tri}} \mathbf{Q}_{\text{gl}}^{\text{tetra}} \quad (3.18)$$

$$\mathbf{K}_{\text{gl}}^{\text{tri}} = \mathbf{S}^T \mathbf{T}^T \mathbf{K}_{\text{loc}}^{\text{tri}} \mathbf{T} \mathbf{S} \quad (3.19)$$

με $K_{\text{gl}}^{\text{tri}}$ τη συνεισφορά του μητρώου δυσκαμψίας του τριγωνικού στοιχείου T^{tri} στο μητρώο δυσκαμψίας K^{tetra} του τετραέδρου, το οποίο προκύπτει από τη συγκέντρωση

των δώδεκα μητρώων δυσκαμψίας των εσωτερικών στο τετράεδρο τριγώνων.

$$\mathbf{K}^{\text{tetra}} = \sum_{\text{tri}=1,12} \mathbf{K}_{\text{gl}}^{\text{tri}} \quad (3.20)$$

Το ολικό μητρώο δυσκαμψίας \mathbf{K} προκύπτει από τη σύνθεση των μητρώων δυσκαμψίας κάθε τετράεδρου $\mathbf{K}^{\text{tetra}}$.

3.2.4 Αλγόριθμος επίλυσης του συστήματος εξισώσεων

Εφαρμόζοντας την ισορροπία των δυνάμεων στους κόμβους των δώδεκα εσωτερικών τριγώνων που διαμορφώνουν το τετράεδρο και, κατ' επέκταση, σε όλα τα τετράεδρα του πλέγματος προκύπτει το σύστημα των εξισώσεων

$$\sum \vec{F}_i = \vec{B}_i \quad (3.21)$$

Έτσι, για το υπολογισμό των δυνάμεων ισορροπίας για το τετράεδρο T_{ijkl} του πλέγματος προκύπτει

$$\sum_{Tetra=i}^k \left(\sum_{Tri=i}^c K_{ii} \vec{Q}_i + K_{ij} \vec{Q}_j + K_{ic} \vec{Q}_c \right) = \vec{B}_i \quad (3.22)$$

Συνεπώς, για το 3Δ πλέγμα που αποτελείται λ.χ από N το πλήθος τετραεδρικά στοιχεία ισχύει

$$\sum_1^N \left[\sum_{Tetra=i}^k \left(\sum_{Tri=i}^c K_{ii} \vec{Q}_i + K_{ij} \vec{Q}_j + K_{ic} \vec{Q}_c \right) \right] = \vec{B}_i \quad (3.23)$$

όπου ο δείκτης “*Tetra*” αφορά τους κόμβους που αποτελούν κορυφές ενός οποιονδήποτε τετράεδρου T_{ijkl} και ο “*Tri*” αυτούς που αποτελούν τις κορυφές ενός (από τα δώδεκα) εσωτερικού στο τετράεδρο τριγώνου T_{ijc} . Όπως στην περίπτωση 2Δ πλέγματος (ενότητα 3.3.4), το ολικό σύστημα εξισώσεων για έναν οποιονδήποτε κόμβο i του πλέγματος προκύπτει από τη συγκέντρωση των τοπικών τετράεδρων που δίνουν συνεισφορά σε αυτόν τον κόμβο, και είναι

$$K_{diag} \vec{Q}_i + \sum_{tetra} (K_{offdiag} \vec{Q}_j) = \vec{B}_i \quad (3.24)$$

όπου εδώ, ο δείκτης j συμβολίζει “γείτονα” κόμβο του i που συνδέεται με αυτόν άμεσα με ακμή πλέγματος.

Η μορφή του γραμμικού συστήματος επίλυσης των εξισώσεων δίνεται από τις σχέσεις (2.46),(2.47) με τους αντίστοιχους όρους των δύο μελών της εξίσωσης να αναφέρονται στο 3Δ σύστημα αξόνων (x, y, z) . Οι σχέσεις για την αρχικοποίηση της επαναληπτικής

διαδικασίας δίνονται στην ενότητα 2.2.3.

Κεφάλαιο 4

Εφαρμογές σε Μεμονωμένη Αεροτομή NACA12

4.1 Πλέγμα Τριγωνικών Στοιχείων

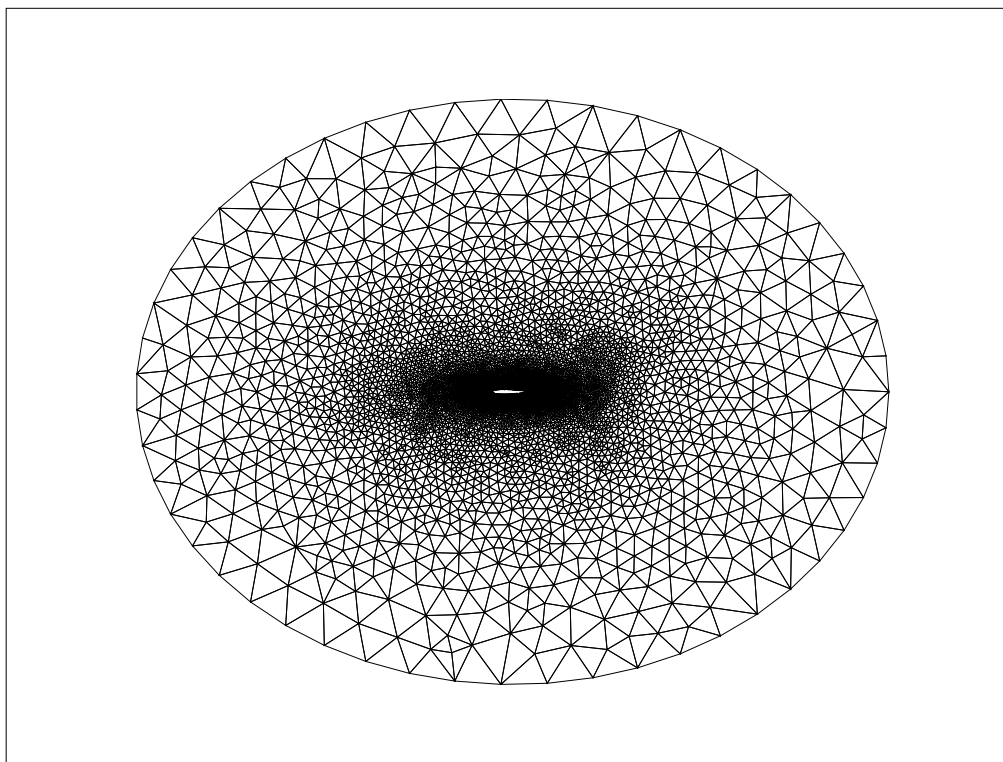
4.1.1 Περιγραφή του προβλήματος

Το θέμα αυτής της ενότητας αφορά την εφαρμογή της μεθόδου μετακίνησης-προσαρμογής του πλέγματος με την τεχνική των στρεπτικών ελατηρίων σε 2Δ πλέγμα τριγωνικών στοιχείων γύρω από μεμονωμένη αεροτομή (isolated airfoil). Πρόκειται για μια συμμετρική κατά τον άξονα x αεροτομή η οποία έχει μήκος χορδής ίσο με τη μονάδα. Οι κόμβοι που βρίσκονται επί της περιφέρειας της αεροτομής NACA12 αντιμετωπίζονται ως οριακοί κόμβοι του πλέγματος.

Σκοπός του κεφαλαίου αυτού είναι η εφαρμογή του λογισμικού που αναπτύχθηκε στο τρίτο κεφάλαιο και υλοποιεί την τεχνική αυτή, καθώς, και η διερεύνηση των ορίων λειτουργίας της μεθόδου σε περιπτώσεις παραμόρφωσης του πλέγματος. Για την εξέταση της αεροτομής ως προς την αεροελαστική της συμπεριφορά (αλληλεπίδραση ρευστού με τα στερεά τοιχώματα της αεροτομής) δίνεται η παραμόρφωση της αεροτομής (με κατάλληλα διαμορφωμένο αρχείο δεδομένων το οποίο περιέχει τις τιμές των μετατοπίσεων των οριακών κόμβων) και η μέθοδος κάνοντας χρήση της τεχνικής των στρεπτικών ελατηρίων υπολογίζει τις τιμές των συντεταγμένων των κόμβων του πλέγματος μετά την παραμόρφωση. Η συνδεσιμότητα παραμένη προφανώς αμετάβλητη.

Οι περιπτώσεις παραμόρφωσης της αεροτομής που έχουν επιλεγεί είναι, στρέψη, κάμψη, και, στρέψη και κάμψη ταυτόχρονα. Αυτό που προκαλεί ενδιαφέρον είναι η διακύμανση της ποιότητας του παραμορφωμένου πλέγματος για τις εκάστοτε παραμορφώσεις του ορίου του (με χρήση αλγεβρικών συναρτήσεων που ποσοτικοποιούν την ποιότητα του πλέγματος, Παράρτημα A'1) και πρωτίστως, η δημιουργία ανεστραμμένων τριγωνικών στοιχείων που καθιστούν το υπολογιστικό πλέγμα ακατάλληλο για χρήση

λ.χ με λογισμικό CFD.



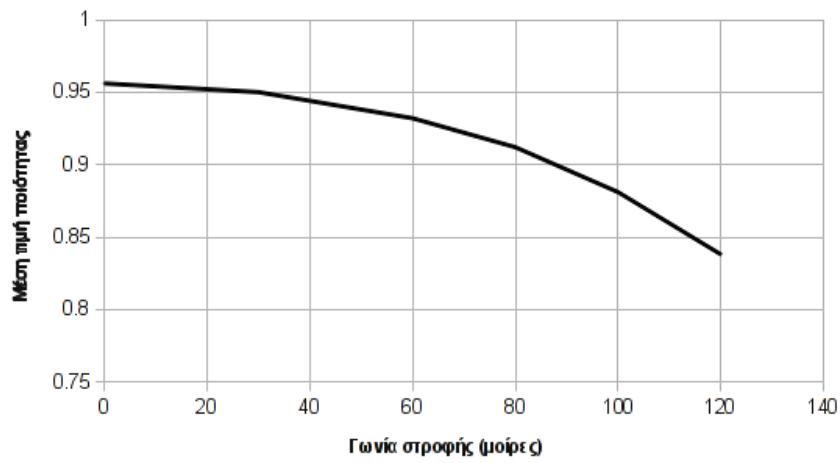
Σχήμα 4.1: Το πλέγμα του σχήματος αποτελείται από 7870 κόμβους, με 200 από αυτούς να αποτελούν τους οριακούς κόμβους οι οποίοι αποτελούν το περίγραμμα της αεροτομής NACA12, και από 15489 τριγωνικά στοιχεία.

4.1.2 Στρεπτική παραμόρφωση

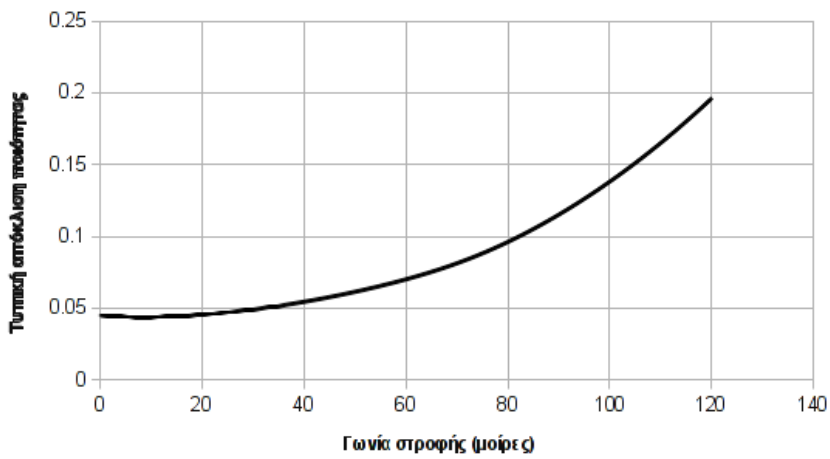
Στην περίπτωση αυτή, εξετάζεται η μέθοδος προσαρμογής του πλέγματος ως προς τη στρέψη της αεροτομής γύρω από σταθερό σημείο. Για τη διερεύνηση της μεθόδου ως προς τη δημιουργία ανεστραμμένων τριγώνων στο προκύπτον πλέγμα χρησιμοποιείται μια συνάρτηση που υπολογίζει το εμβαδόν κάθε τριγώνου κάνοντας χρήση του εξωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων που εκφράζουν ακμές του πλέγματος και έχουν κοινή αρχή έναν οποιονδήποτε κόμβο του. Αρχικά, κάνοντας εφαρμογή αυτής της συνάρτησης ορίσθηκε ως θετική φορά περιστροφής των τριγώνων η αντιωρολογιακή. Συνεπώς, ανεστραμμένα θεωρούνται εκείνα τα τρίγωνα για τα οποία η συνάρτηση που υπολογίζει το εμβαδόν έχει αρνητικό πρόσημο.

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις του Παραρτήματος Ά1 προκύπτει ο πίνακας 4.1 ο οποίος περιέχει τις μετρικές μέσης αναλογίας της ποιότητας του πλέγματος για διάφορες τιμές της γωνίας στροφής της αεροτομής.

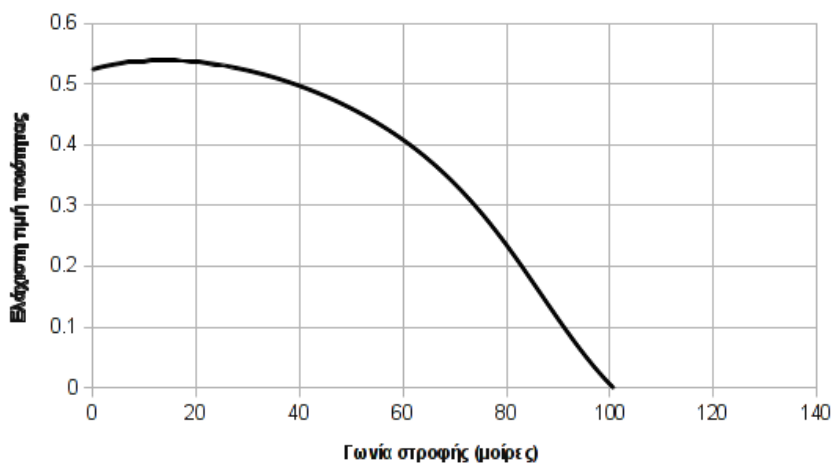
Στα σχήματα 4.3 και 4.4 φαίνεται το προσαρμοσμένο πλέγμα μετά την περιστροφή



(α')



(β')



(γ')

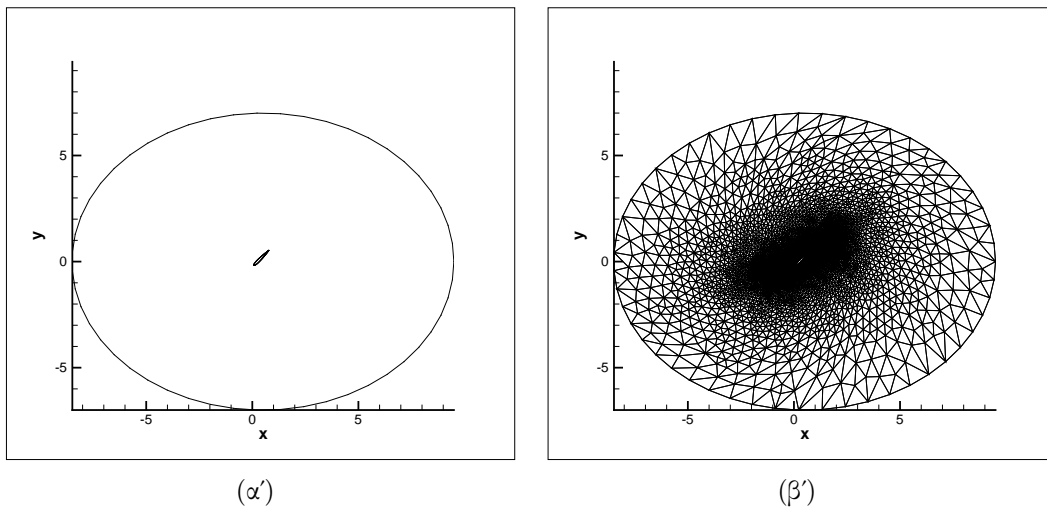
Σχήμα 4.2: Γραφική παράσταση: (α) της μέσης τιμής, (β) της τυπικής απόκλισης, και (γ) της ελάχιστης ποιότητας του πλέγματος συναρτήσει της γωνίας στροφής της αεροτομής.

Πίνακας 4.1: Αποτελέσματα μέσης τιμής, τυπικής απόκλισης και ελάχιστης τιμής της μετρικής ποιότητας του πλέγματος συναρτήσει της γωνίας στρέψης της αεροτομής

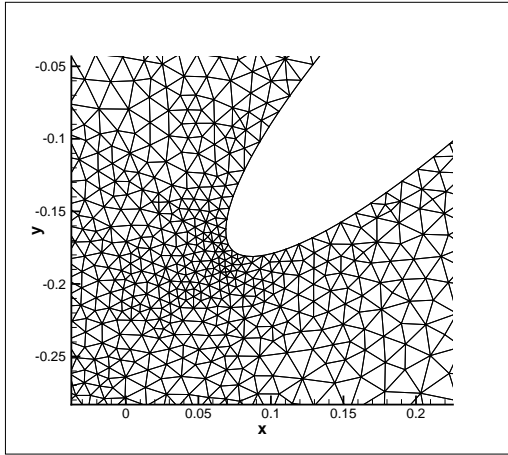
φ (μοίρες)	0	30	60	80	100	120
\bar{q}_e	0.956	0.950	0.932	0.912	0.881	0.838
σ_{q_e}	0.045	0.049	0.070	0.096	0.138	0.196
$q_{e,min}$	0.524	0.522	0.408	0.235	0.0058	0.000812

της αεροτομής κατά $\varphi = 45^\circ$. Στο πλέγμα αυτό δεν παρουσιάζονται ανεστραμμένα τριγωνικά στοιχεία και επίσης οι τιμές των μετρικών ποιότητάς του κυμαίνονται σε αρκετά υψηλές τιμές. Συνεπώς, το πλέγμα κρίνεται κατάλληλο για χρήση λ.χ. με λογισμικό CFD.

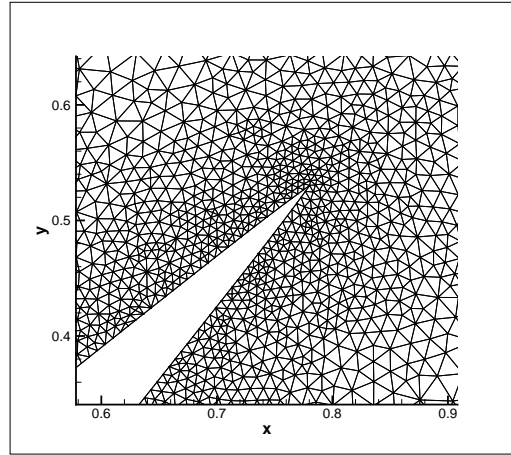
Στο σχήμα 4.5 παρουσιάζεται η περίπτωση στρέψης της αεροτομής κατά $\varphi_{crit} = 100^\circ$. Προφανώς, σε αυτή την περίπτωση η ποιότητα του πλέγματος μειώνεται, όμως η συνθήκη μη-εμφάνισης ανεστραμμένων τριγώνων εξακολουθεί να ισχύει και το πλέγμα και σε αυτή την περίπτωση είναι κατάλληλο για χρήση. Τα πρώτα ανεστραμμένα τρίγωνα δημιουργούνται στην ακραία περίπτωση παραμόρφωσης του πλέγματος σε στρέψη κατά $\varphi = 120^\circ$, όπου το πλέγμα καθίσταται πλέον ακατάλληλο για χρήση.



Σχήμα 4.3: (α) Παραμόρφωση της αεροτομής σε στρέψη υπό γωνία τιμής $\varphi = 45^\circ$, (β) προσαρμοσμένο με τη μέθοδο των στρεπτικών ελατηρίων πλέγμα.

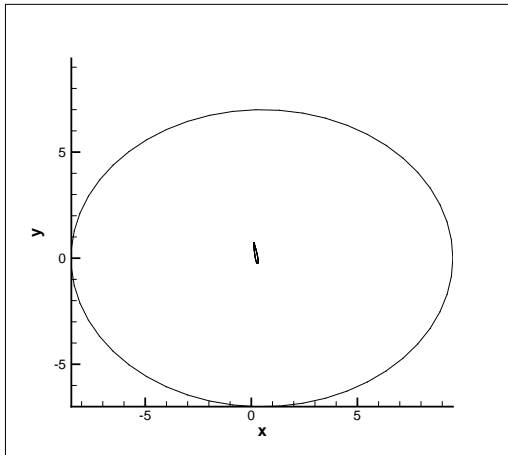


(α')

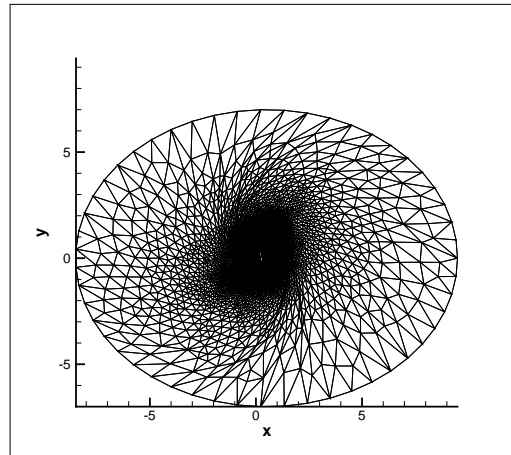


(β')

Σχήμα 4.4: Προσαρμοσμένο πλέγμα μετά την περιστροφή της αεροτομής κατά $\varphi = 45^\circ$: (α) μέτωπο προσβολής, (β) ακμή εκφυγής.

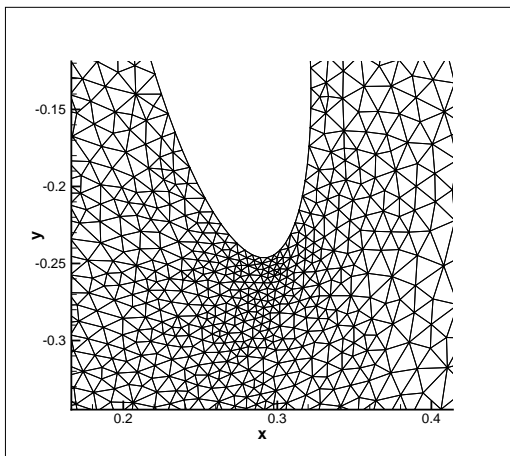


(α')

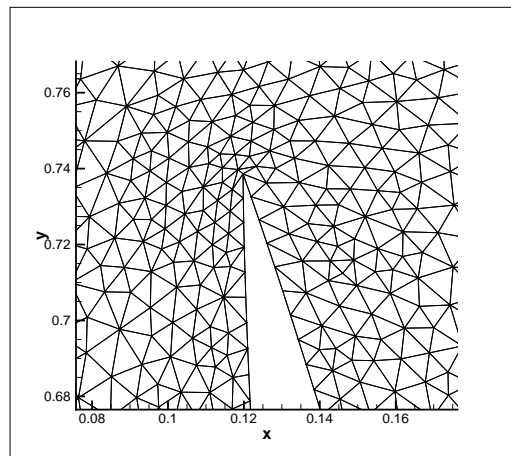


(β')

Σχήμα 4.5: (α) Παραμόρφωση της αεροτομής σε στρέψη κατά $\varphi_{crit} = 100^\circ$, (β) προσαρμοσμένο με τη μέθοδο των στρεπτικών ελατηρίων πλέγμα.



(α')



(β')

Σχήμα 4.6: Προσαρμοσμένο πλέγμα μετά την περιστροφή της αεροτομής κατά $\varphi_{crit} = 100^\circ$: (α) μέτωπο προσβολής, (β) ακμή εκφυγής.

4.1.3 Καμπτική παραμόρφωση

Στην περίπτωση αυτή, εξετάζεται η λειτουργία της μεθόδου για την προσαρμογή του πλέγματος κατά την κάμψη της αεροτομής. Η κάμψη της αεροτομής πραγματοποιείται ως προς τον κάθετο στην χορδή της αεροτομής άξονα (άξονας y). Το αδιαστατοποιημένο μήκος χορδής της αεροτομής είναι μία μονάδα, $l_c = 1$. Για τον υπολογισμό της καμπτικής παραμόρφωσης χρησιμοποιείται η συνάρτηση

$$s = x^2 \frac{s_{max}}{l_c} \quad (4.1)$$

όπου με x συμβολίζονται οι τιμές των συντεταγμένων των κόμβων επί της αεροτομής κατά τον άξονα x , και με s_{max} η μέγιστη τιμή κάμψης κατά τον άξονα y , η οποία εφαρμόζεται στον κόμβο του πλέγματος που αποτελεί την ακμή εκφυγής της αεροτομής.

Στον πίνακα 4.2 συγκεντρώνονται τα αποτελέσματα της μέσης τιμής, της τυπικής απόκλισης και της ελάχιστης ποιότητας του παραχθέντος πλέγματος με χρήση της τεχνικής των στρεπτικών ελατηρίων συναρτήσεως του μήκους κάμψης της αεροτομής.

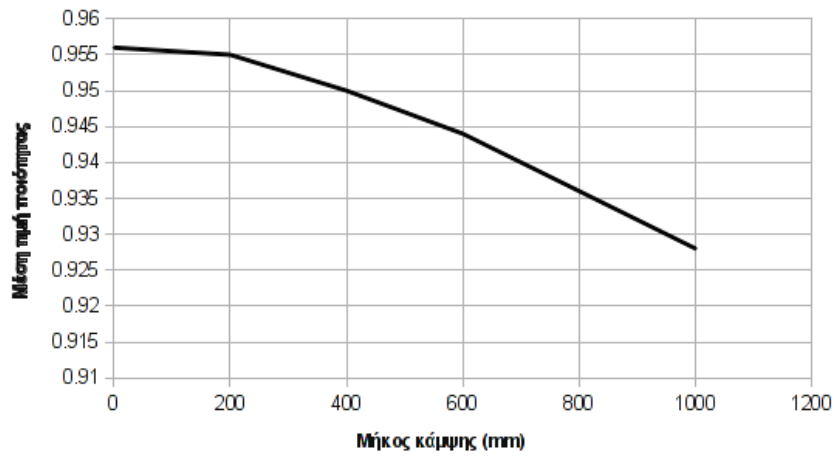
Πίνακας 4.2: Αποτελέσματα μέσης τιμής, τυπικής απόκλισης και ελάχιστης τιμής της μετρικής ποιότητας του πλέγματος συναρτήσεως του μήκους κάμψης της αεροτομής

$s(10^{-3})$	0	200	400	600	800	1000
\bar{q}_e	0.956	0.955	0.950	0.944	0.936	0.928
σ_{q_e}	0.045	0.046	0.050	0.056	0.064	0.074
$q_{e,min}$	0.524	0.519	0.515	0.290	0.016	0.107

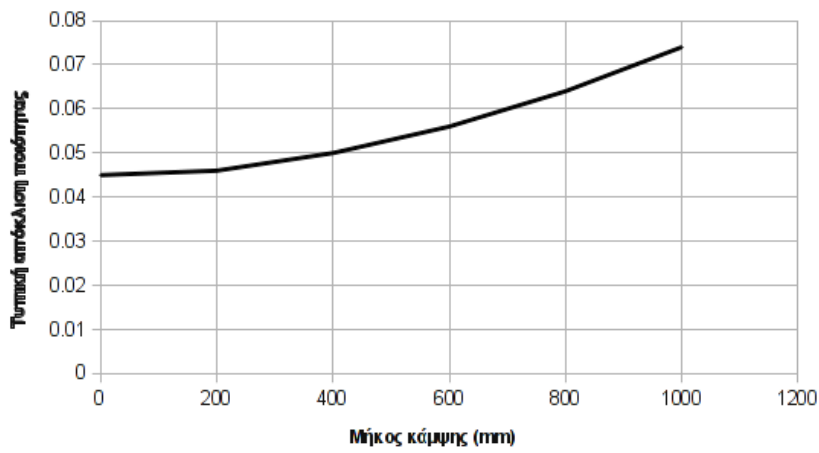
Στα σχήματα 4.8 και 4.9 φαίνεται το προσαρμοσμένο πλέγμα μετά την παραμόρφωση της αεροτομής, όπου έχει επιλεγθεί μήκος κάμψης τιμής $s = 0.25$. Το προκύπτον πλέγμα για αυτή την περίπτωση παραμόρφωσης χαρακτηρίζεται από υψηλή ποιότητα και είναι κατάλληλο για χρήση.

Στο σχήμα 4.10, παρουσιάζεται το προκύπτον πλέγμα μετά από την κάμψη της αεροτομής κατά $s_{crit} = 0.8$. Αυτή η περίπτωση αποτελεί την οριακή περίπτωση προσαρμογής ως προς την ύπαρξη ανεστραμμένων τριγώνων στο πλέγμα. Η ποιότητα του πλέγματος, όπως αναγράφεται στον πίνακα 4.2 παραμένει υψηλή και το πλέγμα είναι κατάλληλο για χρήση.

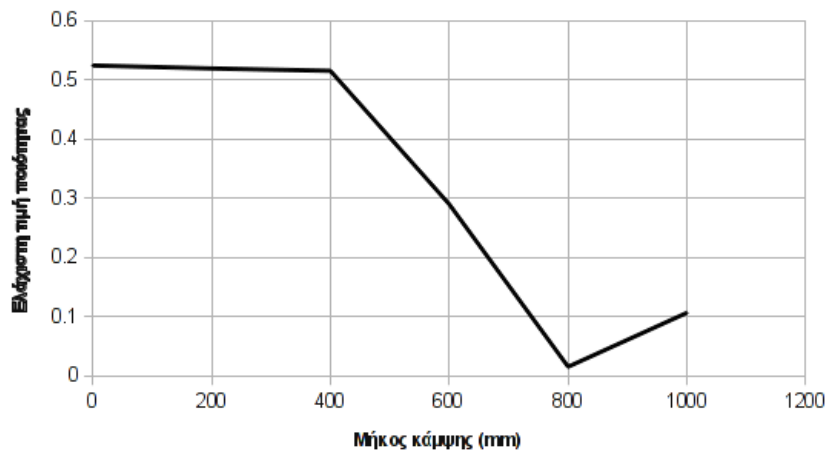
Η ακραία περίπτωση κάμψης της αεροτομής κατά $s = 1$ οδηγεί το προκύπτον πλέγμα στη δημιουργία ανεστραμμένων τριγωνικών στοιχείων και το πλέγμα κρίνεται ακατάλληλο για χρήση.



(α')

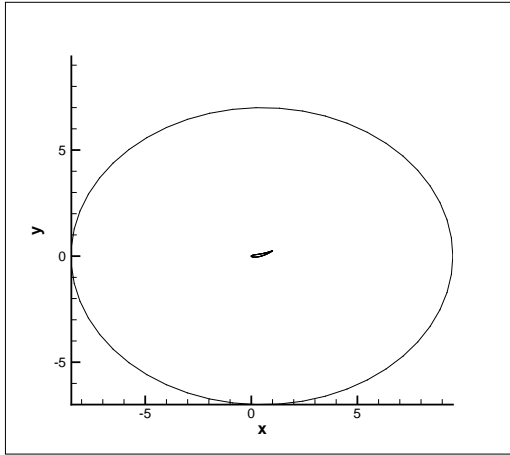


(β')

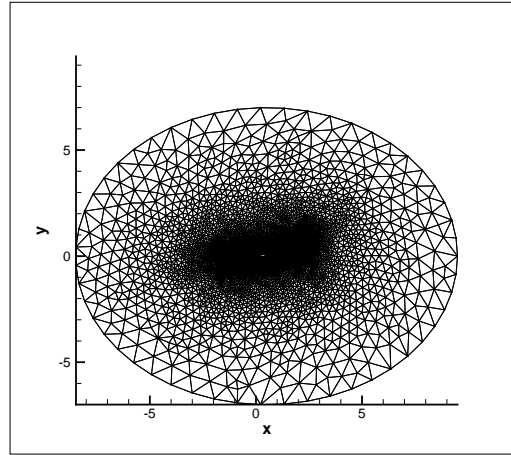


(γ')

Σχήμα 4.7: Γραφική παράσταση: (α) της μέσης τιμής, (β) της τυπικής απόκλισης, και (γ) της ελάχιστης ποιότητας του πλέγματος συναρτήσει του μήκους κόμης της αεροτομής.

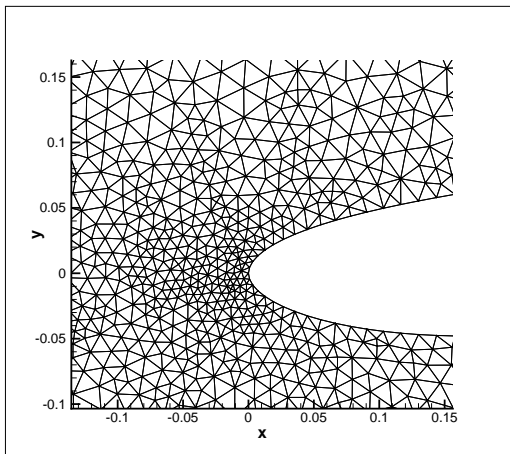


(α')

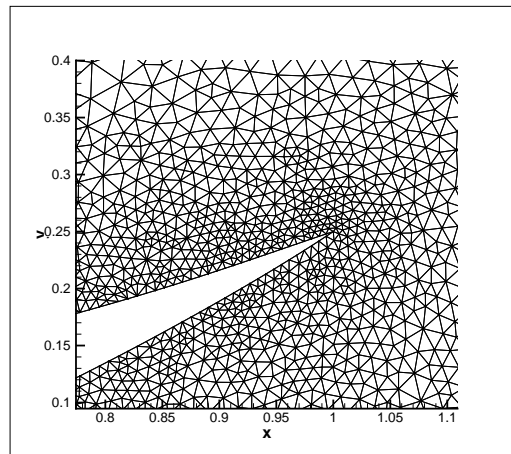


(β')

Σχήμα 4.8: (α) Παραμόρφωση αεροτομής σε κάμψη κατά $s = 0.25$, (β) προσαρμοσμένο με τη μέθοδο των στρεπτικών ελατηρίων πλέγμα.

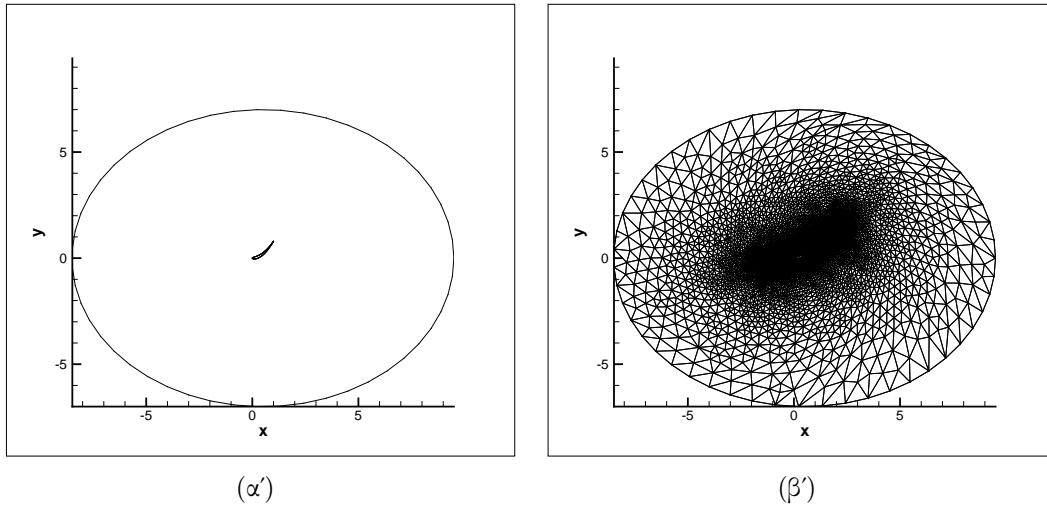


(α')

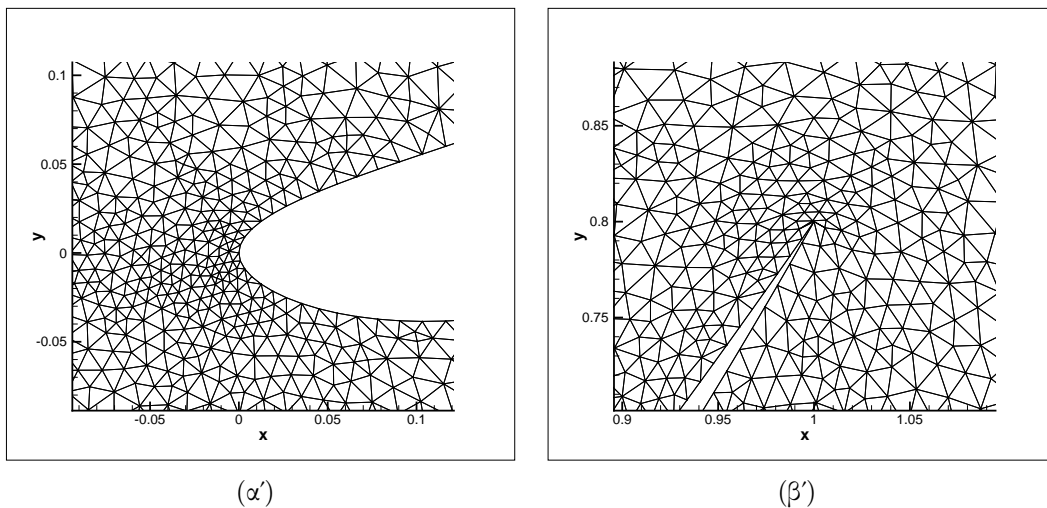


(β')

Σχήμα 4.9: Προσαρμοσμένο πλέγμα μετά την κάμψη της αεροτομής κατά $s = 0.25$: (α) μέτωπο προσβολής, (β) ακμή εκφυγής.



Σχήμα 4.10: (α) Παραμόρφωση της αεροτομής σε κάμψη κατά $s_{crit} = 0.8$, (β) προσαρμοσμένο με τη μέθοδο των στρεπτικών ελατηρίων πλέγμα.



Σχήμα 4.11: Προσαρμοσμένο πλέγμα μετά την κάμψη της αεροτομής κατά $s_{crit} = 0.8$: (α) μέτωπο προσβολής, (β) ακμή εκφυγής.

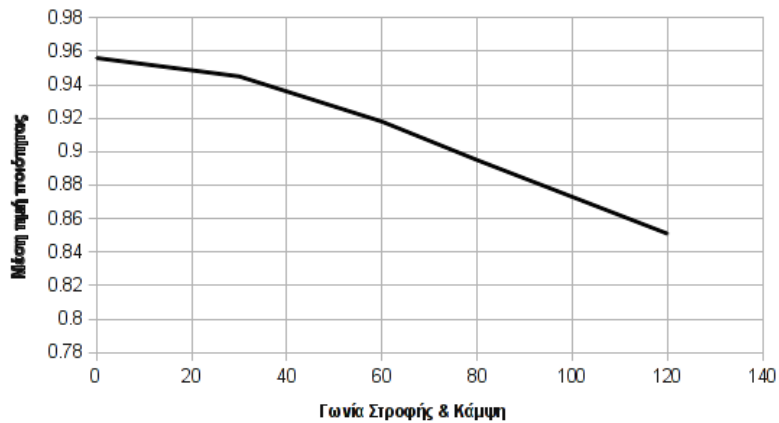
4.1.4 Σύνθετη παραμόρφωση

Στην περίπτωση αυτή, εξετάζεται η λειτουργία της μεθόδου για την προσαρμογή πλέγματος σε συνδυασμό στρέψης και κάμψης της αεροτομής ταυτόχρονα. Για τον υπολογισμό των μετακινήσεων των οριακών κόμβων του πλέγματος που βρίσκονται επί της αεροτομής, συνδυάζονται οι περιπτώσεις παραμόρφωσης των υποενοτήτων (4.1.1) και (4.2.2). Στον πίνακα 4.3 αναγράφονται τα αποτελέσματα των μετρικών τιμών ποιότητας του πλέγματος για διάφορες τιμές της σύνθετης παραμόρφωσης της αεροτομής σε στρέψη και κάμψη ταυτόχρονα. Στα σχήματα 4.13 και 4.14 παρουσιάζεται το

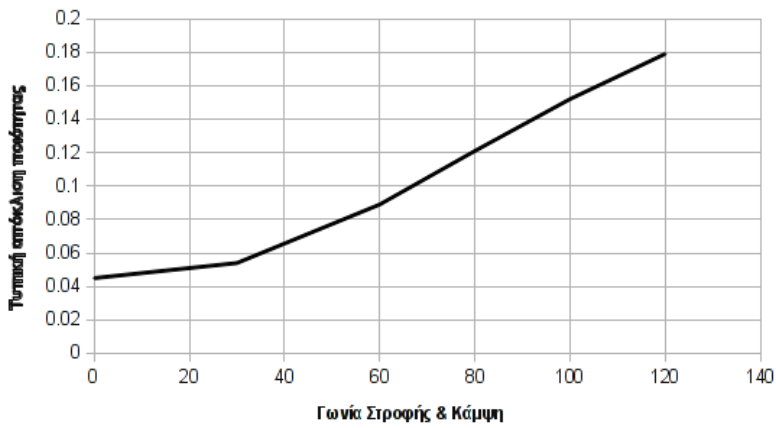
Πίνακας 4.3: Αποτελέσματα μέσης τιμής, τυπικής απόκλισης και ελάχιστης τιμής της μετρικής ποιότητας του πλέγματος συναρτήσει της γωνίας στρέψης και του μήκους κάμψης της αεροτομής ταυτόχρονα

φ (μοίρες) & $s(10^{-3})$	0 & 0	30 & 200	60 & 400	80 & 600	100 & 800	120 & 1000
\bar{q}_e	0.956	0.945	0.918	0.895	0.873	0.851
σ_{q_e}	0.045	0.054	0.089	0.121	0.152	0.179
$q_{e,min}$	0.524	0.516	0.175	0.0098	0.0027	0.0008

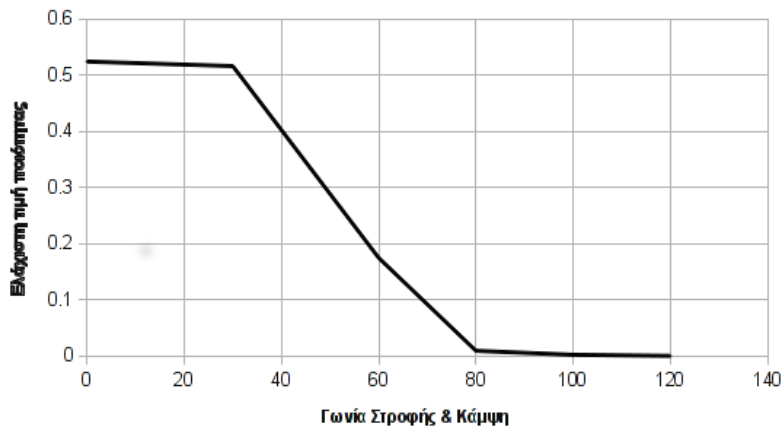
προσαρμοσμένο πλέγμα μετά τη σύνθετη παραμόρφωση της αεροτομής σε στρέψη κατά $\varphi = 45^\circ$ και σε κάμψη κατά $s = 0.25$. Από τον πίνακα 4.3 προκύπτει αρκετά υψηλή τιμή της μέσης τιμής της ποιότητας του πλέγματος, και συνεπώς, το πλέγμα προτείνεται για χρήση. Η δημιουργία ανεστραμμένων τριγώνων παρατηρείται ακριβώς μόλις ξεπεραστούν οι τιμές στρέψης $\varphi_{crit} = 65^\circ$ και κάμψης $s_{crit} = 0.65$ της αεροτομής. Το πλέγμα που προέκυψε μετά από αυτή την παραμόρφωση της αεροτομής είναι ακατάλληλο για χρήση και παρουσιάζεται στα σχήματα 4.15 και 4.16.



(α')

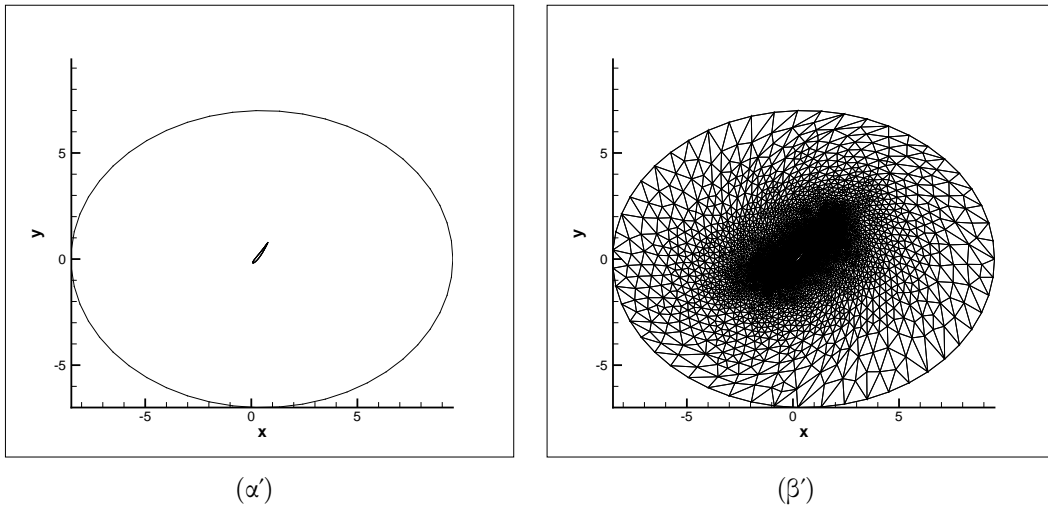


(β')

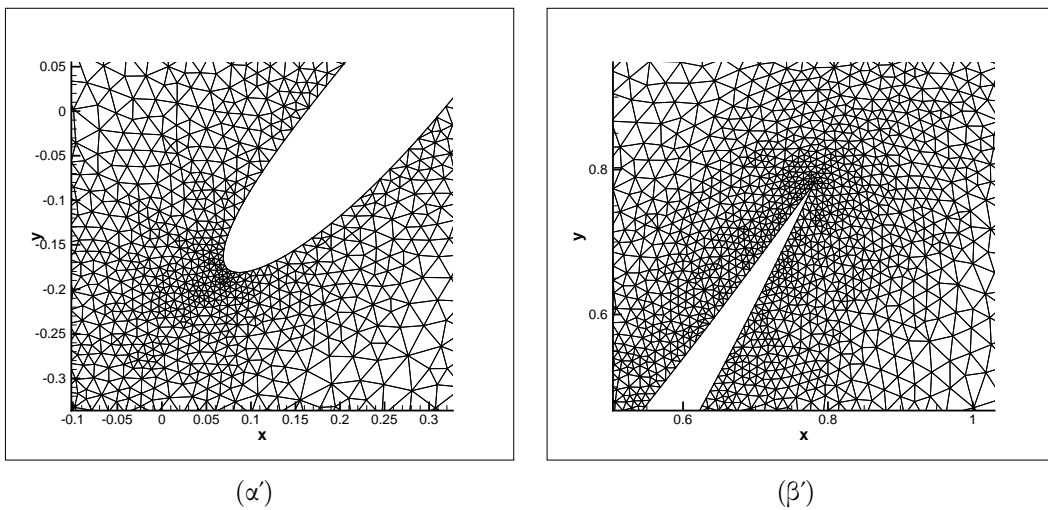


(γ')

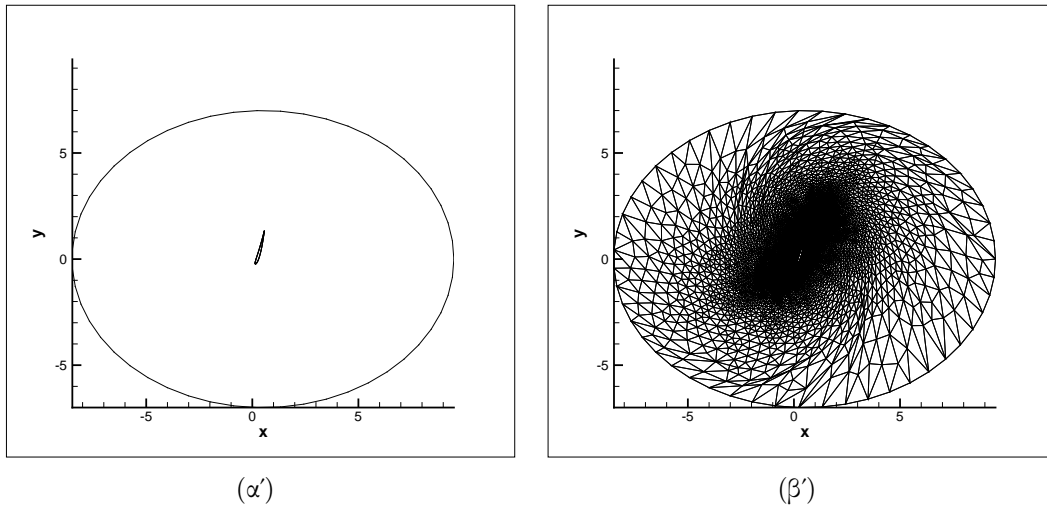
Σχήμα 4.12: Γραφική παράσταση: (α) της μέσης τιμής, (β) της τυπικής απόκλισης, και (γ) της ελάχιστης ποιότητας του πλέγματος συναρτήσει της γωνίας στροφής θ του μήκους κάμψης της αεροτομής ταυτόχρονα. (Στον άξονα x αναγράφονται μόνο οι τιμές τις γωνίας στροφής αλλά συμπεριλαμβάνονται και οι αντίστοιχες τιμές των μηκών κάμψης όπως αναφέρονται και στην πρώτη γραμμή του διαγράμματος 4.12(α')).



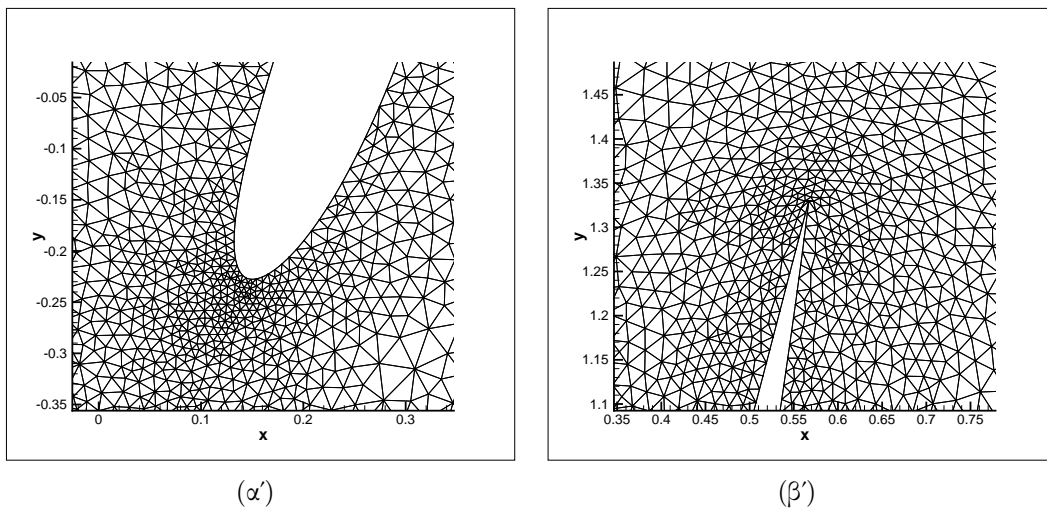
Σχήμα 4.13: (α) Σύνθετη παραμόρφωση της αεροτομής σε στρέψη κατά $\varphi = 45^\circ$ και σε κάμψη κατά $s = 0.25$, (β) προσαρμοσμένο πλέγμα με τη μέθοδο των στρεπτικών ελατηρίων.



Σχήμα 4.14: Προσαρμοσμένο πλέγμα μετά τη σύνθετη παραμόρφωση της αεροτομής σε στρέψη κατά $\varphi = 45^\circ$ και κάμψη κατά $s = 0.25$: (α) μέτωπο προσβολής, (β) ακμή εκφυγής.



Σχήμα 4.15: (α) Παραμόρφωση της αεροτομής σε στρέψη κατά $\varphi_{crit} = 65^\circ$ και σε κάμψη κατά $s_{crit} = 0.65$, (β) προσαρμοσμένο πλέγμα με τη μέθοδο των στρεπτικών ελατηρίων.

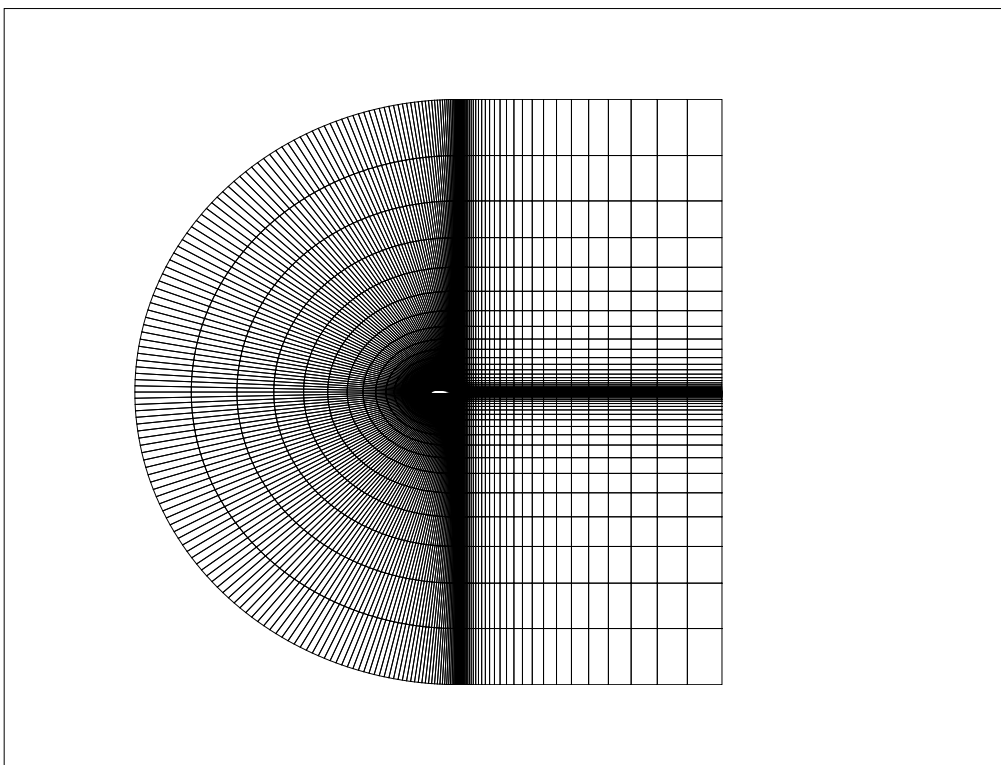


Σχήμα 4.16: Παραμόρφωση της αεροτομής σε στρέψη κατά $\varphi = 65^\circ$ και σε κάμψη κατά $s = 0.65$: (α) μέτωπο προσβολής, (β) ακμή εκφυγής.

4.2 Πλέγμα Τετραπλευρικών Στοιχείων

4.2.1 Περιγραφή του προβλήματος

Στην ενότητα αυτή, εξετάζεται η λειτουργία της μεθόδου για την προσαρμογή πλέγματος τετραπλευρικών στοιχείων. Τα πλέγματα αφορούν την αεροτομή της οποίας τα χαρακτηριστικά αναφέρονται στην ενότητα 4.1. Οι οριακοί κόμβοι του πλέγματος που αποτελούν το περίγραμμα της αεροτομής δέχονται παραμορφώσεις μέσω ενός αρχείου δεδομένων με κατάλληλη διαμόρφωση, και η μέθοδος, χρησιμοποιώντας την τεχνική των στρεπτικών ελατηρίων προσαρμόζει το πλέγμα στο παραμορφωμένο όριο. Οι περιπτώσεις παραμόρφωσης του ορίου του πλέγματος και ο έλεγχος ως προς τη δημιουργία ανεστραμμένων τετραπλευρικών στοιχείων στο προκύπτον πλέγμα είναι ίδιες με αυτές της ενότητας 4.1. Επίσης, χρησιμοποιούνται τα στατιστικά στοιχεία του παραρτήματος (Α.2) για τη μέτρηση της ποιότητας των παραχθέντων πλεγμάτων. Οι μετρικές αυτές βασίζονται στις γωνίες των τετραπλευρικών στοιχείων με το ιδανικό τετράπλευρο, δηλαδή το τετράγωνο, να αποτελείται από τέσσερις ορθές γωνίες. Προφανώς, αναμένεται η ελάττωση των τιμών των μετρικών ποιότητας μετά την παραμόρφωση του πλέγματος.



Σχήμα 4.17: Το πλέγμα του σχήματος αποτελείται από 7189 κόμβους, με 200 από αυτούς να αποτελούν τους οριακούς κόμβους οι οποίοι αποτελούν το περίγραμμα της αεροτομής NACA12, και από 6960 τετραπλευρικά στοιχεία.

4.2.2 Στρεπτική παραμόρφωση

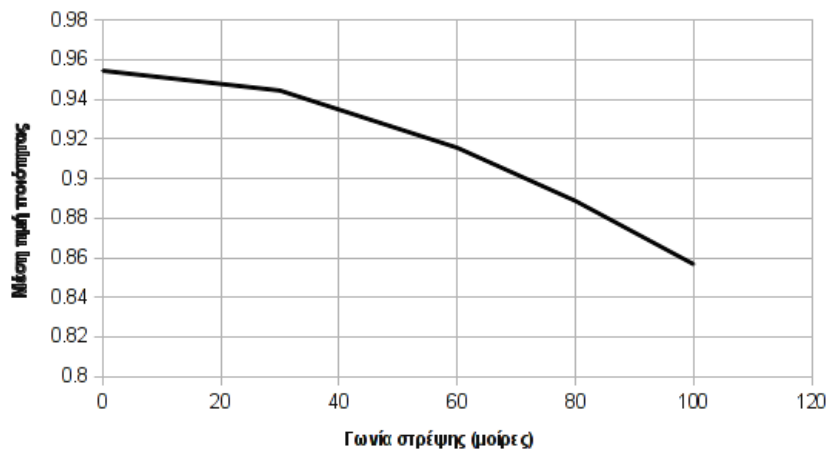
Στην περίπτωση αυτή, εξετάζεται η μέθοδος προσαρμογής του πλέγματος ως προς τη στροφή της αεροτομής γύρω από σημείο. Στον πίνακα 4.4 αναγράφονται τα αποτελέσματα των μετρικών ποιότητας του πλέγματος για διάφορες τιμές της γωνίας στροφής της αεροτομής.

Πίνακας 4.4: Αποτελέσματα μέσης τιμής, τυπικής απόκλισης και ελάχιστης τιμής της μετρικής ποιότητας του πλέγματος συναρτήσει της γωνίας στροφής της αεροτομής

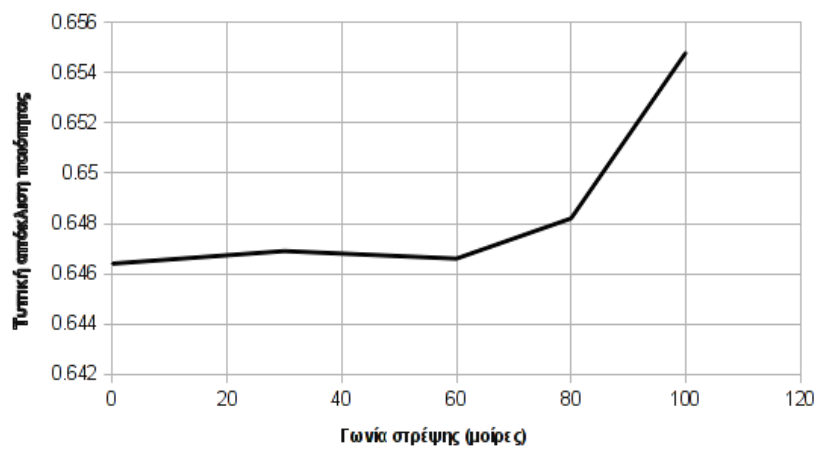
φ (μοίρες)	0	30	60	80	100
\bar{q}_e	0.9545	0.9445	0.9156	0.8887	0.8567
σ_{q_e}	0.6464	0.6469	0.6466	0.6482	0.6548
$q_{e,min}$	0.0176	0.0175	0.0174	0.0173	0.0172

Στα σχήματα 4.19 και 4.20 φαίνεται το προσαρμοσμένο πλέγμα μετά την περιστροφή της αεροτομής κατά $\varphi = 45^\circ$, όπου παρουσιάζονται υψηλές τιμές της μέσης τιμής της ποιότητας του πλέγματος. Το προκύπτον με τη μέθοδο των στρεπτικών ελατηρίων πλέγμα είναι κατάλληλο για χρήση.

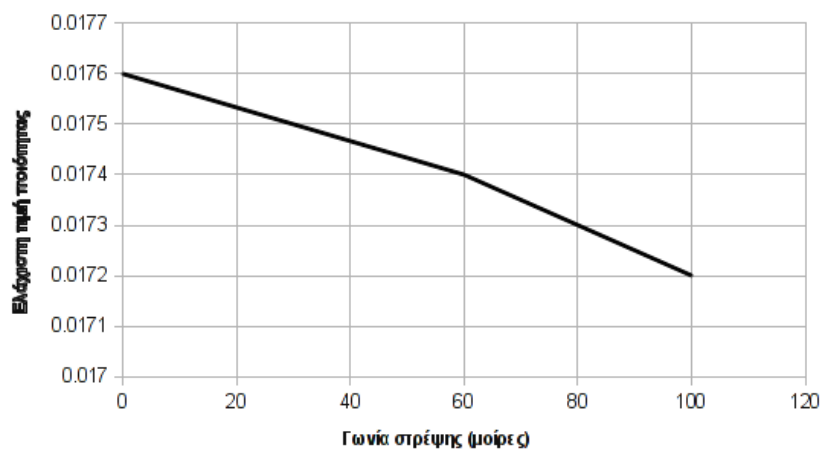
Το όριο της μεθόδου ως προς τη μη-εμφάνιση ανεστραμμένων στοιχείων προσεγγίζει οριακά την περίπτωση στρέψης της αεροτομής κατά $\varphi_{crit} = 110^\circ$. Οι μετρικές ποιότητας σε αυτή την περίπτωση έχουν ελαττωθεί σημαντικά. Παρότι δεν παρουσιάζονται στρεβλώσεις στα τετραπλευρικά στοιχεία, το πλέγμα αυτό δεν προτείνεται για χρήση. Στο σχήμα 4.21 φαίνεται το προσαρμοσμένο πλέγμα μετά την στρέψη της αεροτομής κατά $\varphi_{crit} = 110^\circ$.



(α')

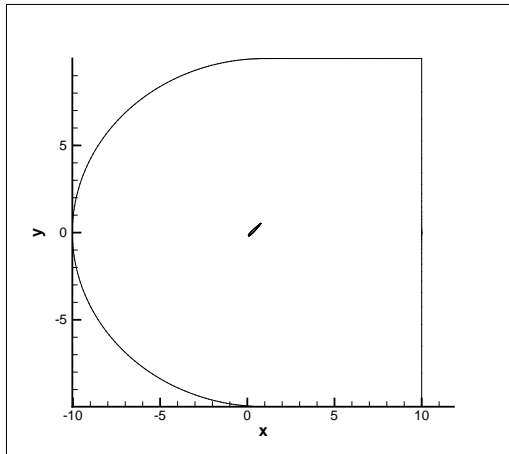


(β')

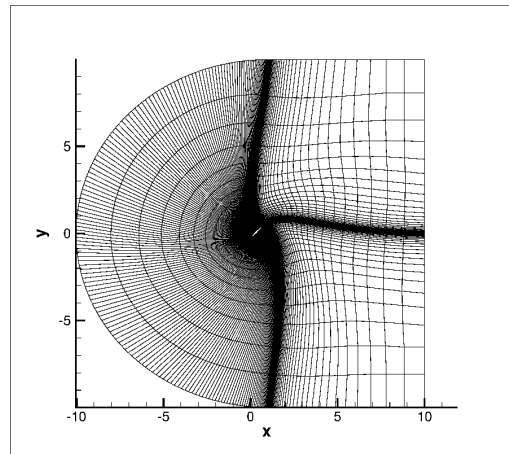


(γ')

Σχήμα 4.18: Γραφική παράσταση: (α) της μέσης τιμής, (β) της τυπικής απόκλισης, και (γ) της ελάχιστης ποιότητας του πλέγματος συναρτήσει της γωνίας στρέψης της αεροτομής.

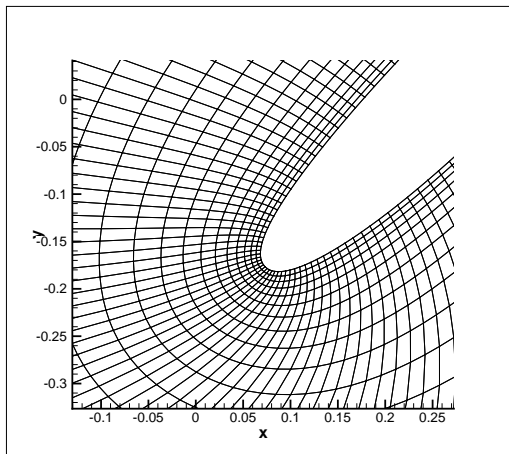


(α')

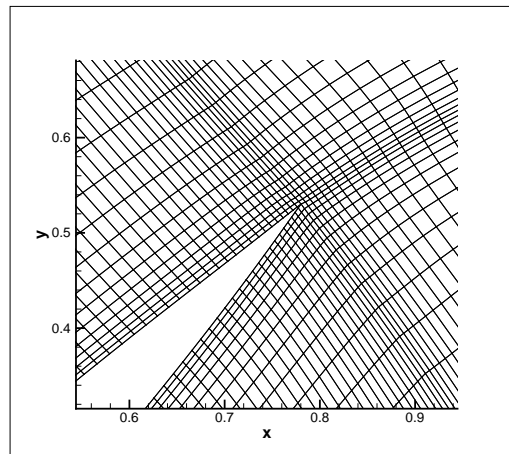


(β')

Σχήμα 4.19: (α) Παραμόρφωση της αεροτομής σε στρέψη κατά $\varphi = 45^\circ$, (β) προσαρμοσμένο με τη μέθοδο των στρεπτικών ελατηρίων πλέγμα.

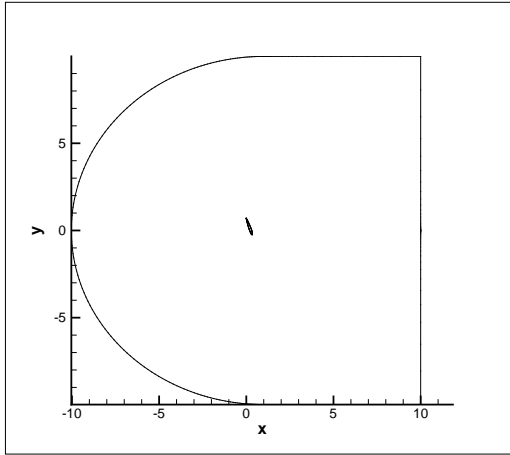


(α')

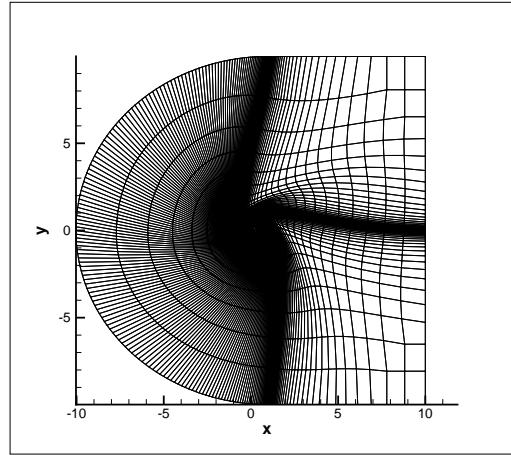


(β')

Σχήμα 4.20: Προσαρμοσμένο πλέγμα μετά την παραμόρφωση της αεροτομής σε στρέψη κατά $\varphi = 45^\circ$: (α) μέτωπο προσβολής, (β) ακμή εκφυγής.

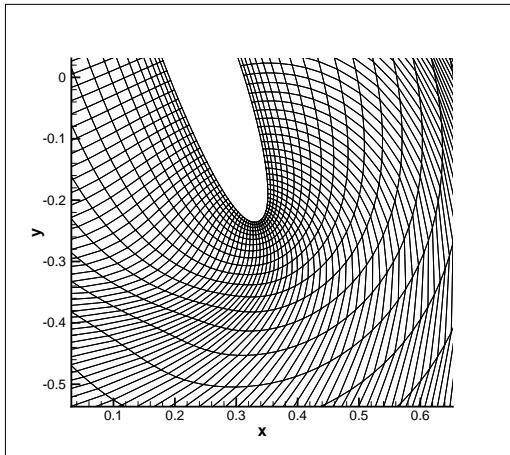


(α')

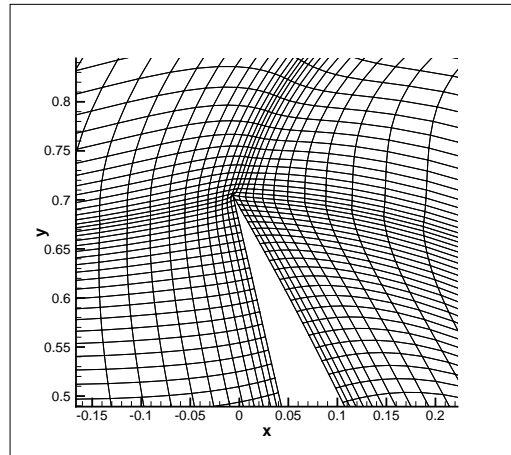


(β')

Σχήμα 4.21: Παραμόρφωση της αεροτομής σε στρέψη κατά $\varphi_{crit} = 110^\circ$, (β) προσαρμοσμένο με τη μέθοδο των στρεπτικών ελατηρίων πλέγμα.



(α')



(β')

Σχήμα 4.22: Προσαρμοσμένο πλέγμα μετά την παραμόρφωση της αεροτομής σε στρέψη κατά $\varphi_{crit} = 110^\circ$:(α) μέτωπο προσβολής, (β) ακμή εκφυγής.

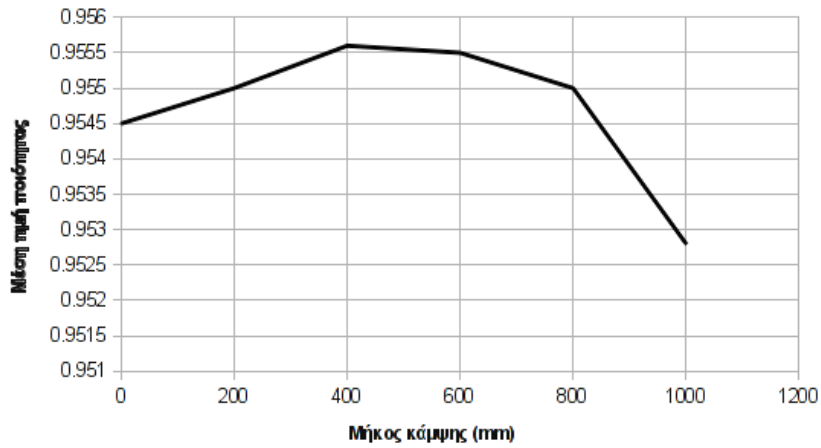
4.2.3 Καμπτική παραμόρφωση

Στην περίπτωση αυτή, εξετάζεται η λειτουργία της μεθόδου για την προσαρμογή του πλέγματος ως προς την κάμψη της αεροτομής και παρουσιάζονται τα αποτελέσματα από τη μέτρηση της ποιότητας του προκύπτοντος πλέγματος μετά την παραμόρφωση. Η κάμψη της αεροτομής πραγματοποιείται με τον τρόπο που αναφέρεται στην ενότητα 4.1.2.

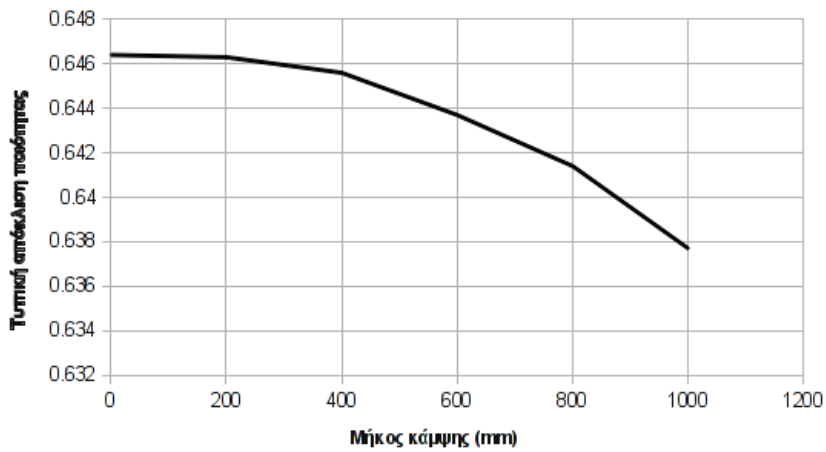
Πίνακας 4.5: Αποτελέσματα μέσης τιμής, τυπικής απόκλισης και ελάχιστης τιμής της μετρικής ποιότητας του πλέγματος συναρτήσει του μήκους κάμψης της αεροτομής

$s(10^{-3})$	0	200	400	600	800	1000
\bar{q}_e	0.9545	0.9550	0.9556	0.9555	0.9550	0.9528
σ_{q_e}	0.6464	0.6463	0.6456	0.6437	0.6414	0.6377
$q_{e,min}$	0.01764	0.01763	0.01763	0.01762	0.01761	0.01760

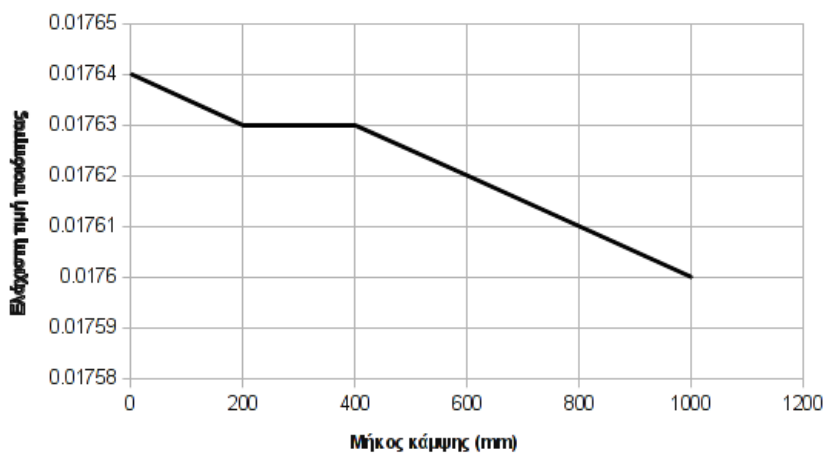
Τα σχήματα 4.24 και 4.25 παρουσιάζουν το προσαρμοσμένο πλέγμα μετά την παραμόρφωση της αεροτομής για μήκος κάμψης τιμής $s = 0.25$. Και σε αυτή την περίπτωση το προσαρμοσμένο πλέγμα διατηρεί υψηλή ποιότητα και δεν παρατηρούνται ανεστραμμένα τετραπλευρικά στοιχεία με αποτέλεσμα να προτείνεται για χρήση. Βάσει του πίνακα 4.5 το όριο της μεθόδου, λαμβάνοντας υπόψη τις τιμές των μετρικών ποιότητας του πλέγματος αλλά και τον έλεγχο ως προς τη δημιουργία ανεστραμμένων στοιχείων, φτάνει περίπου την τιμή κάμψης κατά $s_{crit} = 0.6$. Το σχήμα 4.26, παριστά αυτή την περίπτωση οριακής καμπτικής παραμόρφωσης της πτέρυγας με μήκος κάμψης $s_{crit} = 0.6$, δηλαδή, ίσο με τα 3/5 της τιμής του μήκους χορδής της αεροτομής.



(α')

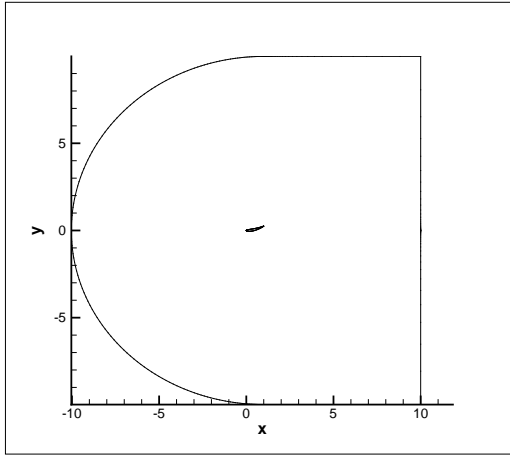


(β')

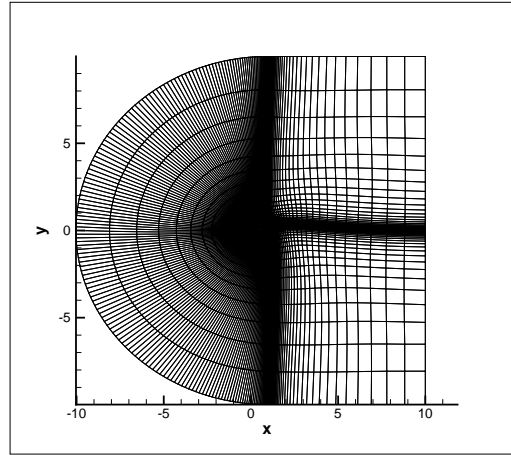


(γ')

Σχήμα 4.23: Γραφική παράσταση: (α) της μέσης τιμής, (β) της τυπικής απόκλισης, και (γ) της ελάχιστης ποιότητας του πλέγματος συναρτήσει του μήκους κάμψης της αεροτομής.

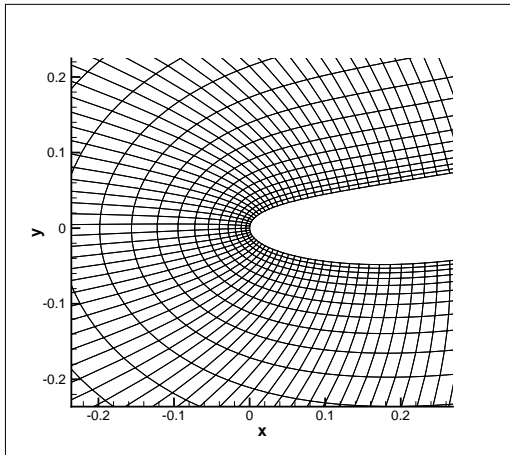


(α')

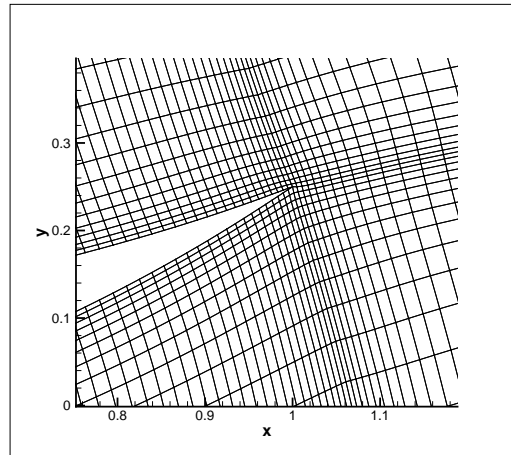


(β')

Σχήμα 4.24: (α) Παραμόρφωση της αεροτομής σε κάμψη κατά $s = 0.25$, (β) προσαρμοσμένο με τη μέθοδο των στρεπτικών ελατηρίων πλέγμα.

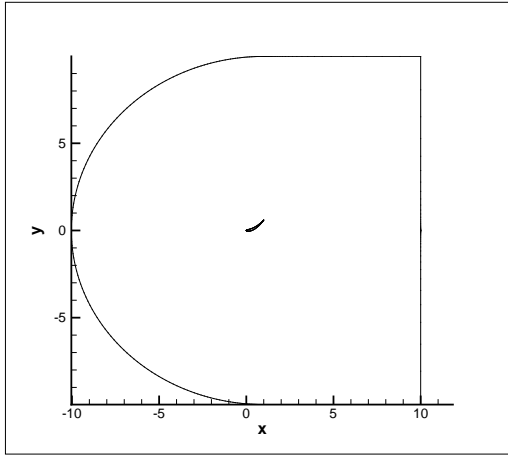


(α')

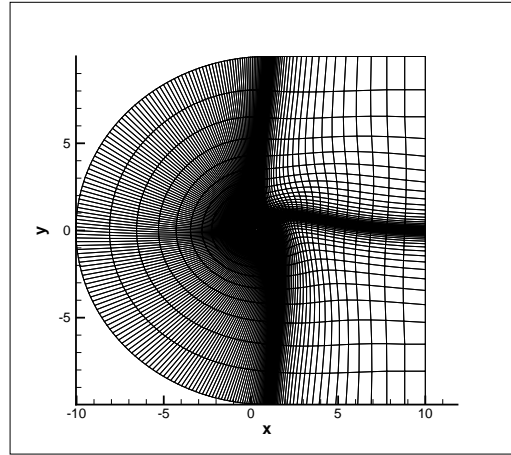


(β')

Σχήμα 4.25: Προσαρμοσμένο πλέγμα μετά την παραμόρφωση της αεροτομής σε κάμψη κατά $s = 0.25$:(α) μέτωπο προσβολής, (β) ακμή εκφυγής.

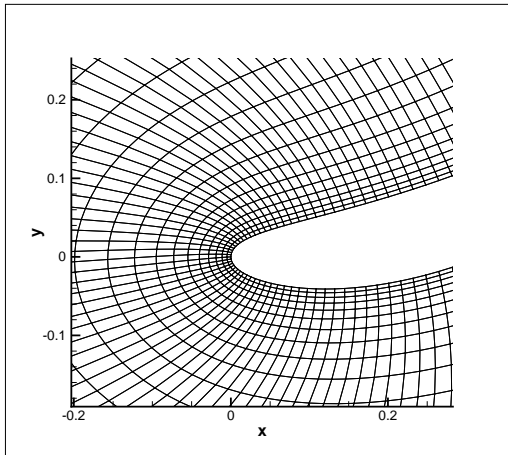


(α')

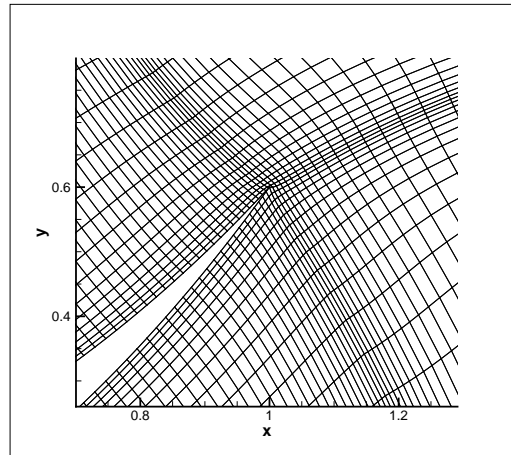


(β')

Σχήμα 4.26: (α) Παραμόρφωση της αεροτομής σε μέγιστη κάμψη κατά $s_{crit} = 0.6$, (β) προσαρμοσμένο με τη μέθοδο των στρεπτικών ελατηρίων πλέγμα.



(α')



(β')

Σχήμα 4.27: Προσαρμοσμένο πλέγμα μετά την κάμψη της αεροτομής κατά $s_{crit} = 0.6$: (α) μέτωπο προσβολής, (β) ακμή εκφυγής.

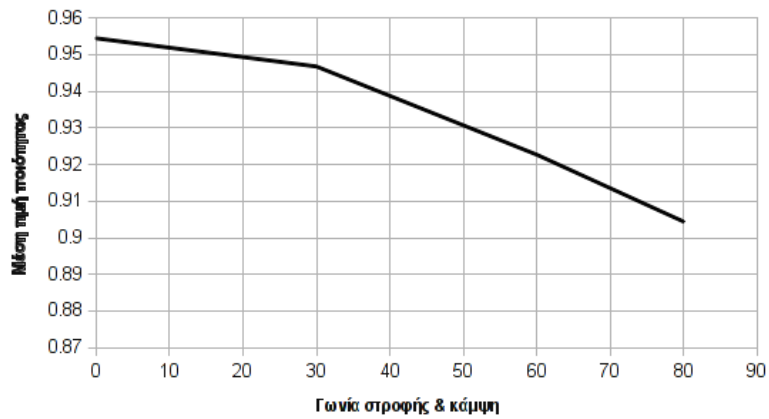
4.2.4 Σύνθετη παραμόρφωση

Αντίστοιχα με την περίπτωση της ενότητας 4.1.3 εξετάζεται η προσαρμογή του πλέγματος μετά από τη σύνθετη παραμόρφωση της αεροτομής σε στρέψη και κάμψη. Όμοια με τις προηγούμενες περιπτώσεις, ο πίνακας 4.6 αναγράφει τα αποτελέσματα των μετρικών ποιότητας του πλέγματος.

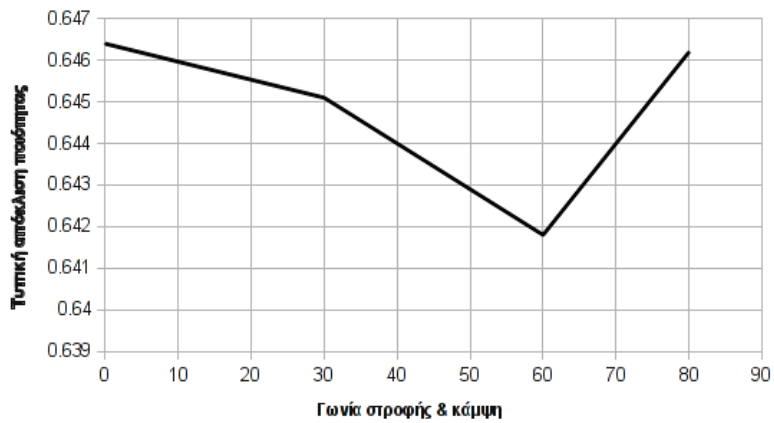
Τα σχήματα 4.29 και 4.30 δείχνουν το προσαρμοσμένο πλέγμα μετά την παραμόρφωση της αεροτομής σε στρέψη κατά $\varphi = 45^\circ$ και σε κάμψη κατά $s = 0.25$. Η ποιότητα του πλέγματος κυμαίνεται σε αρκετά υψηλές τιμές και ικανοποιείται η συνθήκη μη-εμφάνισης ανεστραμμένων τριγώνων καθιστώντας το πλέγμα κατάλληλο για χρήση. Η μέγιστη σύνθετη παραμόρφωση ως προς τη μη-εμφάνιση ανεστραμμένων τριγώνων στο προκύπτον πλέγμα προσεγγίζει οριακά τις $\varphi_{crit} = 75^\circ$ και κάμψη $s_{crit} = 0.60$ ταυτόχρονα. Στο σχήμα 4.31 φαίνεται το προσαρμοσμένο πλέγμα για την παραπάνω οριακή σύνθετη παραμόρφωση της αεροτομής.

Πίνακας 4.6: Αποτελέσματα μέσης τιμής, τυπικής απόκλισης και ελάχιστης τιμής της μετρικής ποιότητας του πλέγματος συναρτήσει της γωνίας στρέψης και του μήκους κάμψης της αεροτομής ταυτόχρονα

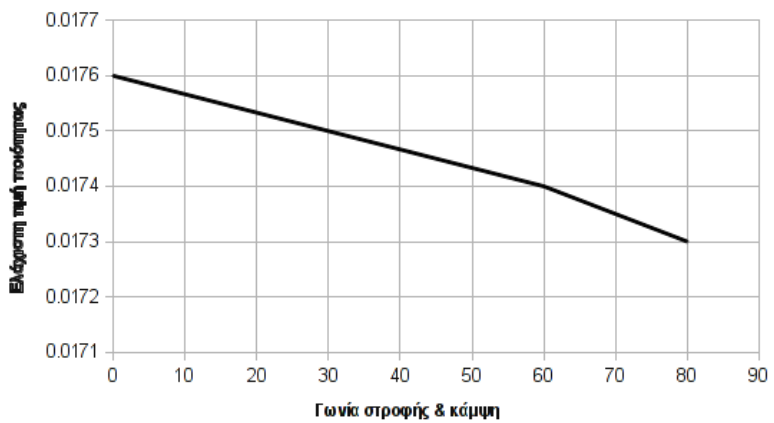
φ (μοίρες) & s (mm)	0 & 0	30 & 200	60 & 400	80 & 600
\bar{q}_e	0.9545	0.9468	0.9227	0.9044
σ_{q_e}	0.6464	0.6451	0.6418	0.6462
$q_{e,min}$	0.0176	0.0175	0.0174	0.0173



(α')

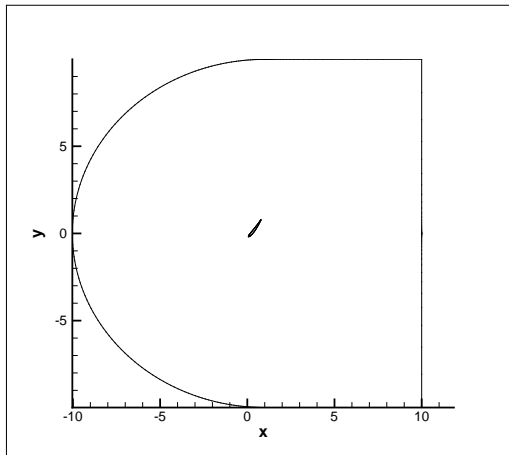


(β')

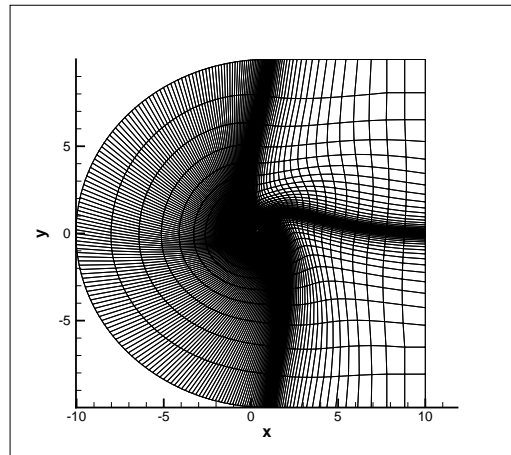


(γ')

Σχήμα 4.28: Γραφική παράσταση: (α) της μέσης τιμής, (β) της τυπικής απόκλισης, και (γ) της ελάχιστης ποιότητας του πλέγματος συναρτήσει της γωνίας στροφής θ του μήκους κάμψης της αεροτομής ταυτόχρονα. (Στον άξονα x αναγράφονται μόνο οι τιμές τις γωνίας στροφής αλλά συμπεριλαμβάνονται και οι αντίστοιχες τιμές των μηκών κάμψης του σχήματος 4.23).

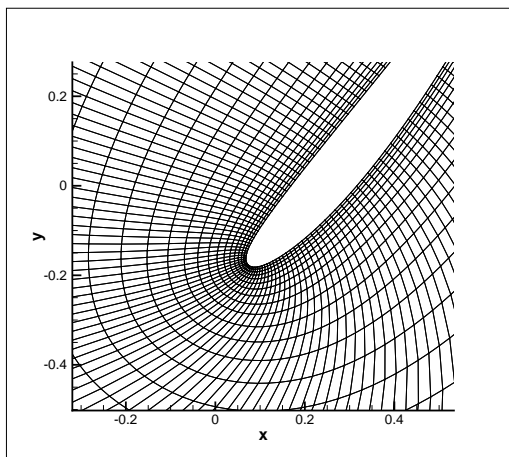


(α')

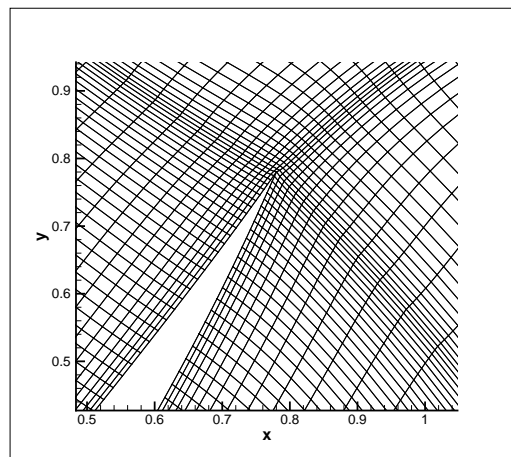


(β')

Σχήμα 4.29: (α) Παραμόρφωση της αεροτομής σε στρέψη κατά $\varphi = 45^\circ$ και σε κάμψη κατά $s = 0.25$, (β) προσαρμοσμένο με τη μέθοδο των στρεπτικών ελατηρίων πλέγμα.

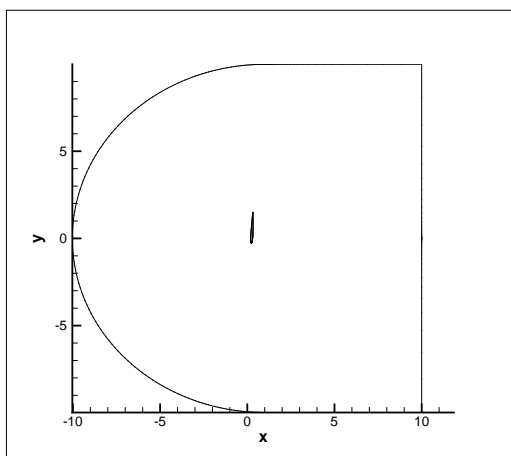


(α')

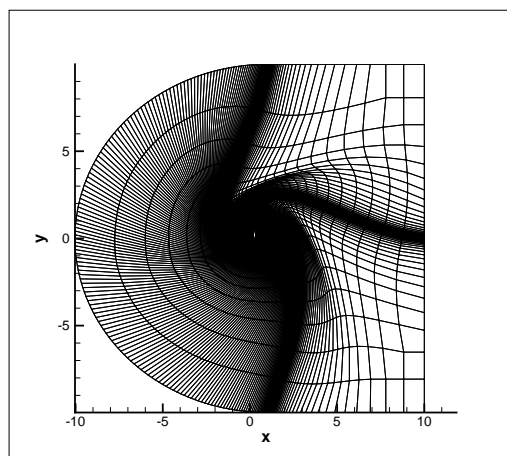


(β')

Σχήμα 4.30: Προσαρμοσμένο πλέγμα μετά την σύνθετη παραμόρφωση της αεροτομής σε στρέψη κατά $\varphi = 45^\circ$ και κάμψη κατά $s = 0.25$: (α) μέτωπο προσβολής, (β) ακμή εκφυγής.

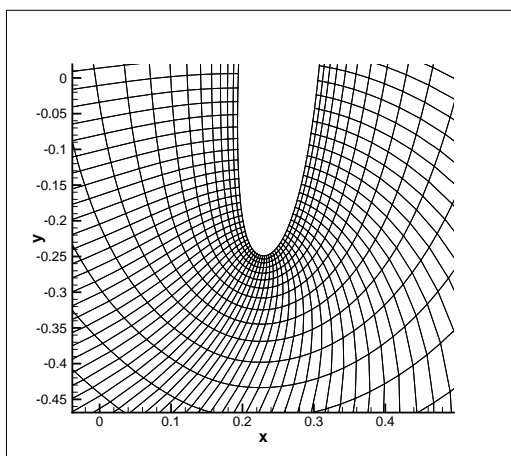


(α')

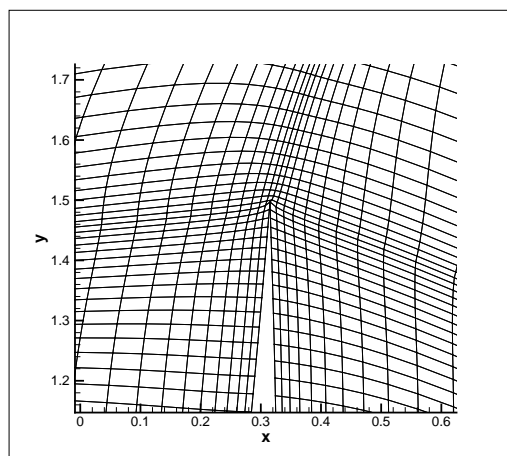


(β')

Σχήμα 4.31: (α) Παραμόρφωση της αεροτομής σε στρέψη κατά $\varphi_{crit} = 75^\circ$ και σε κάμψη κατά $s_{crit} = 0.60$, (β) προσαρμοσμένο με τη μέθοδο των στρεπτικών ελατηρίων πλέγμα.



(α')



(β')

Σχήμα 4.32: Προσαρμοσμένο πλέγμα μετά την σύνθετη παραμόρφωση της αεροτομής σε στρέψη κατά $\varphi_{crit} = 75^\circ$ και κάμψη κατά $s_{crit} = 0.60$: (α) μέτωπο προσβολής, (β) ακμή εκφυγής.

Κεφάλαιο 5

Εφαρμογές σε Πτέρυγα Αεροσκάφους

5.1 Πλέγμα Τετραεδρικών Στοιχείων

5.1.1 Περιγραφή του προβλήματος

Στην εφαρμογή αυτή παρουσιάζεται η μέθοδος των στρεπτικών ελατηρίων για την προσαρμογή 3D μη-δομημένου πλέγματος τετραεδρικών στοιχείων που αφορά μια πτέρυγα αεροσκάφους. Το πλέγμα αποτελείται από 72791 κόμβους και 341797 τετράεδρα.

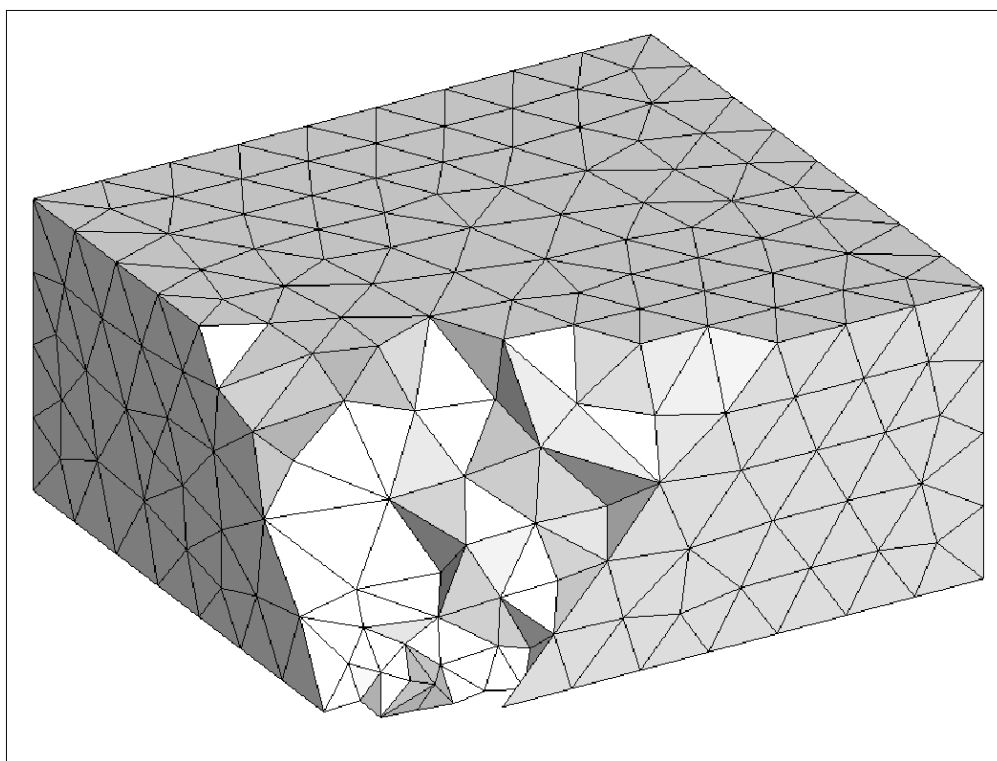
Η μέθοδος προσαρμογής με την τεχνική των στρεπτικών ελατηρίων δέχεται ως είσοδο την παραμόρφωση των οριακών κόμβων του πλέγματος (εδώ οριακοί κόμβοι θεωρούνται αυτοί που βρίσκονται επί της επιφάνειας της πτέρυγας) και κάνοντας χρήση της μεθόδου των στρεπτικών ελατηρίων υπολογίζει τις μετατοπίσεις των εσωτερικών κόμβων του πλέγματος.

Η μέθοδος εξετάζεται ως προς την προσαρμογή του πλέγματος μετά από ελαστική παραμόρφωση της επιφάνειας της πτέρυγας σε στρέψη (ενότητα 4.3.1), κάμψη (ενότητα 4.3.2) και στο συνδυασμό τους (ενότητα 4.3.3) ως προς τον άξονα μήκους της (άξονας z).

Το αδιάστατο μήκος της πτέρυγας έχει τιμή $L = 1.217$, ενώ το αντίστοιχο μήκος χορδής της πλησιέστερης στην άτρακτο του αεροσκάφους αεροτομής της πτέρυγας ισούται με $l_c^{max} = 0.8$, δηλαδή της αεροτομής της πτέρυγας με το μέγιστο μήκος χορδής.

Τα στοιχεία που παρουσιάζουν ενδιαφέρον μετά την ολοκλήρωση των υπολογιστικών πειραμάτων είναι ίδια με αυτά του πέμπτου κεφαλαίου, δηλαδή οι μετρικές ποιότητας των παραχθέντων πλεγμάτων τετραεδρικών στοιχείων (παράρτημα Α.3), και το όριο της μεθόδου προσαρμογής ως προς την εμφάνιση ανεστραμμένων τετραεδρικών στοιχείων

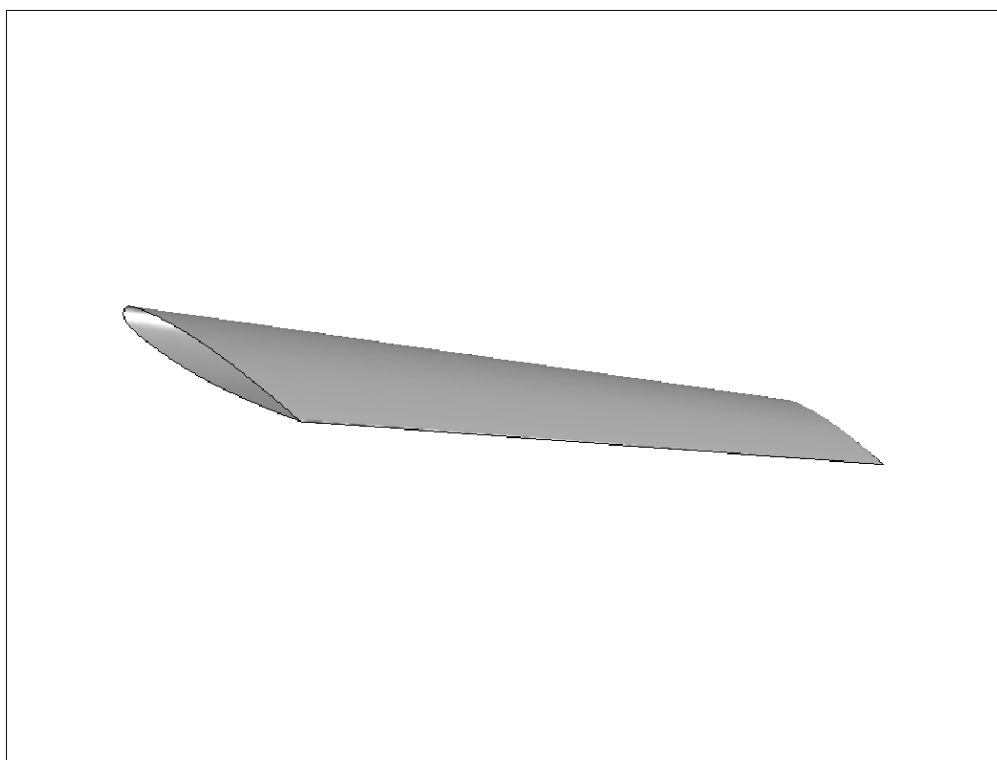
στο προκύπτον πλέγμα.



Σχήμα 5.1: Το πλέγμα είναι ένας κύβος που αποτελείται από 72791 κόμβους και από 341797 τετραεδρικά στοιχεία. Η πτέρυγα του αεροσκάφους βρίσκεται εντός του κύβου και φαίνεται στο σχήμα 5.2.

5.1.2 Παραμόρφωση της πτέρυγας σε στρέψη

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζεται η μέθοδος προσαρμογής του πλέγματος για την περίπτωση στρέψης της πτέρυγας ως προς το διαμήκη άξονά της. Ο υπολογισμός της συνολικής στρεπτικής παραμόρφωσης της επιφάνειας της πτέρυγας πραγματοποιείται με γραμμική παρεμβολή των συντεταγμένων των σημείων που αποτελούν τομές της πτέρυγας κατά μήκος του άξονά της. Η αρχική, και προφανώς, μέγιστη τιμή της γωνίας στρέψης φ αφορά τους κόμβους της πιο απομακρυσμένης από την άτρακτο του αεροσκάφους αεροτομής της πτέρυγας, δηλαδή εκείνους που έχουν τιμή συντεταγμένης $z_{max} = L = 1.217$. Όπου L είναι το μήκος της πτέρυγας και z ο άξονας που είναι παράλληλος με τον άξονα μήκους της πτέρυγας. Προφανώς, η πλησιέστερη στην άτρακτο του αεροσκάφους αεροτομή της πτέρυγας παραμένει αμετάβλητη. Έπειτα, η μέθοδος λαμβάνει με αρχείο εισόδου (το οποίο περιέχει τις τιμές των παραμορφώσεων των κόμβων της επιφάνειας της πτέρυγας στους άξονες x, y, z) την υπολογισμένη παραμόρφωση της επιφάνειας (Deformed Surface) της πτέρυγας και με χρήση της τεχνικής των στρεπτικών ελατηρίων προσαρμόζει το πλέγμα σε αυτήν.



Σχήμα 5.2: Το πλέγμα παριστά την πτέρυγα του αεροσκάφους της οποίας η επιφάνεια αποτελείται από 26498 κόμβους και 52856 τρίγωνα.

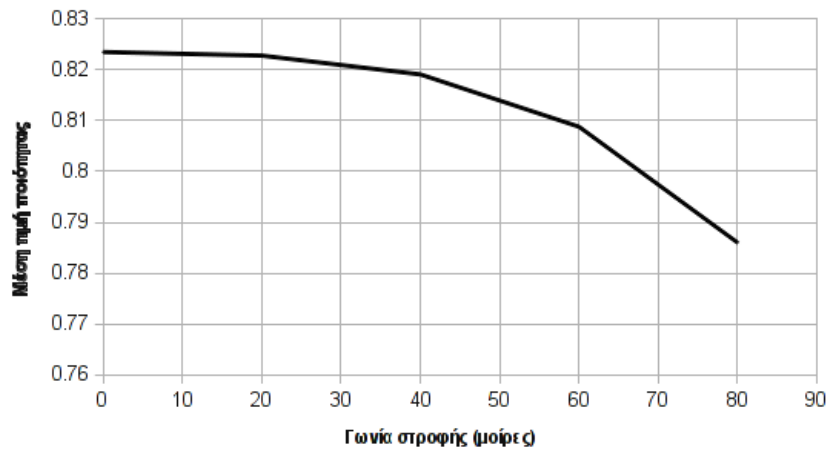
Στον πίνακα 5.1 συγκεντρώνονται τα αποτελέσματα των μετρικών ποιότητας του πλέγματος για διάφορες τιμές της γωνίας στρέψης της πτέρυγας. Τα αποτελέσματα σταματούν στην τιμή της γωνίας στρέψης της πτέρυγας για την οποία το προσαρμοσμένο πλέγμα κρίνεται ακατάλληλο για χρήση λόγω στρεβλώσεων και απότομης μείωσης της ποιότητας των στοιχείων του.

Πίνακας 5.1: Αποτελέσματα μέσης τιμής, τυπικής απόκλισης και ελάχιστης τιμής της μετρικής ποιότητας του πλέγματος συναρτήσει της γωνίας στροφής της πτέρυγας.

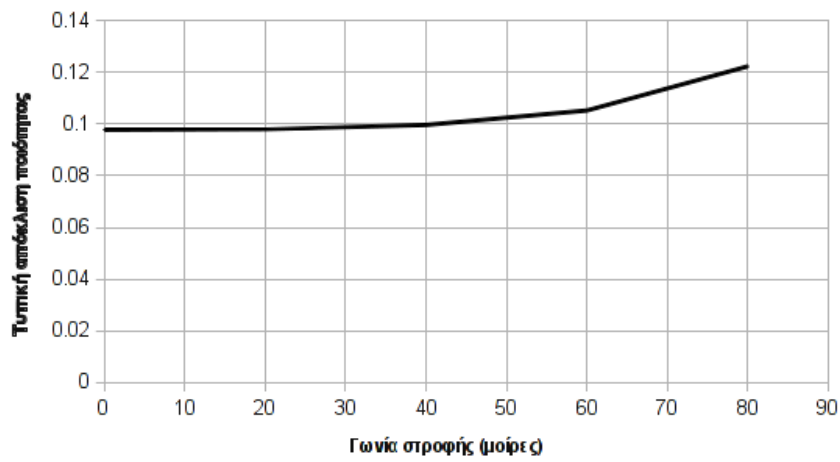
φ (μοίρες)	0	20	40	60	80
\bar{q}_e	0.8235	0.8228	0.8191	0.8088	0.7860
σ_{q_e}	0.0978	0.0981	0.0997	0.1053	0.1224
$q_{e,min}$	0.3954	0.3669	0.3409	0.1779	0.0146

Στο σχήμα 5.4 φαίνεται η επιφάνεια της πτέρυγας πριν και μετά την παραμόρφωση. Η τιμή της γωνίας στρέψης της πτέρυγας έχει επιλεγθεί $\varphi = 10^\circ$. Η ποιότητα του προσαρμοσμένου πλέγματος διατηρείται υψηλή και δεν παρατηρούνται ανεσταμένα τετραεδρικά στοιχεία. Συνεπώς, το πλέγμα αυτό κρίνεται κατάλληλο για χρήση. Στα σχήματα 5.5 και 5.6 παρουσιάζεται το προσαρμοσμένο με τη μέθοδο των ελατηρίων πλέγμα μετά την παραμόρφωση της επιφάνειας της πτέρυγας.

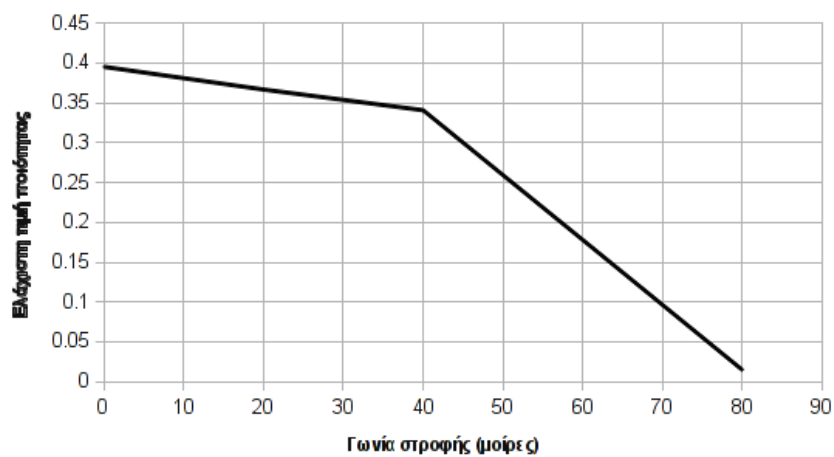
Με κατάλληλα υπολογιστικά πειράματα υπολογίζεται το όριο της μεθόδου, το οποίο



(α')



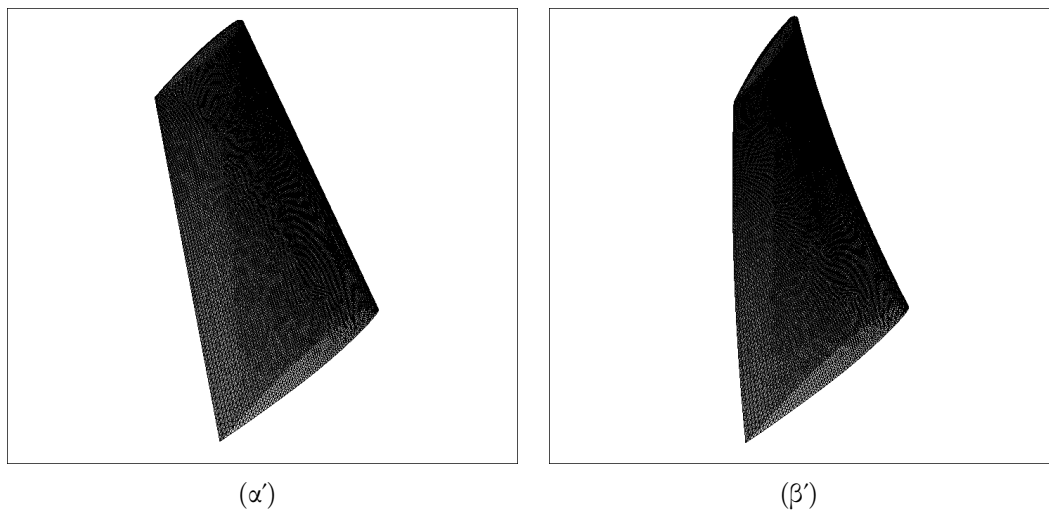
(β')



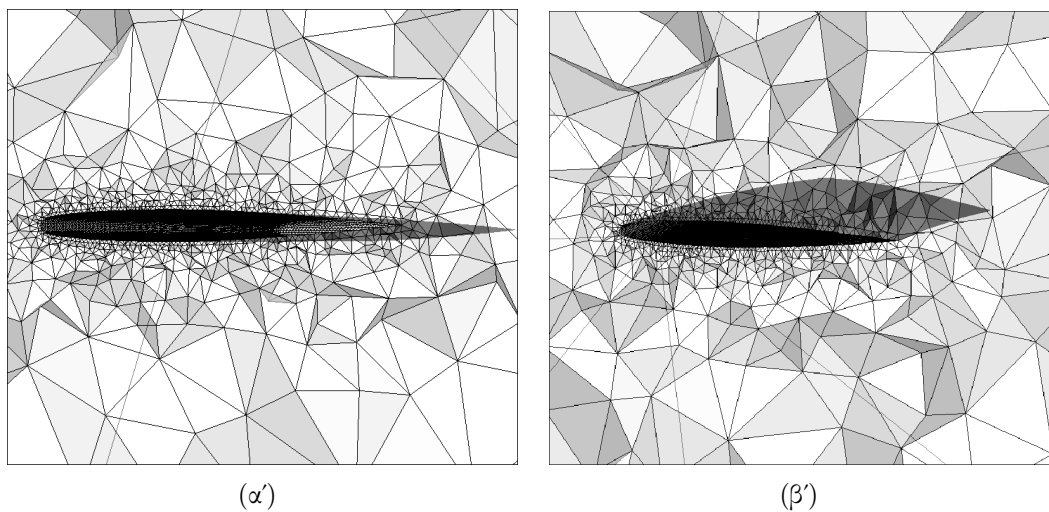
(γ')

Σχήμα 5.3: Γραφική παράσταση: (α) της μέσης τιμής, (β) της τυπικής απόκλισης, και (γ) της ελάχιστης ποιότητας του πλέγματος συναρτήσει της γωνίας στροφής της πτέρυγας.

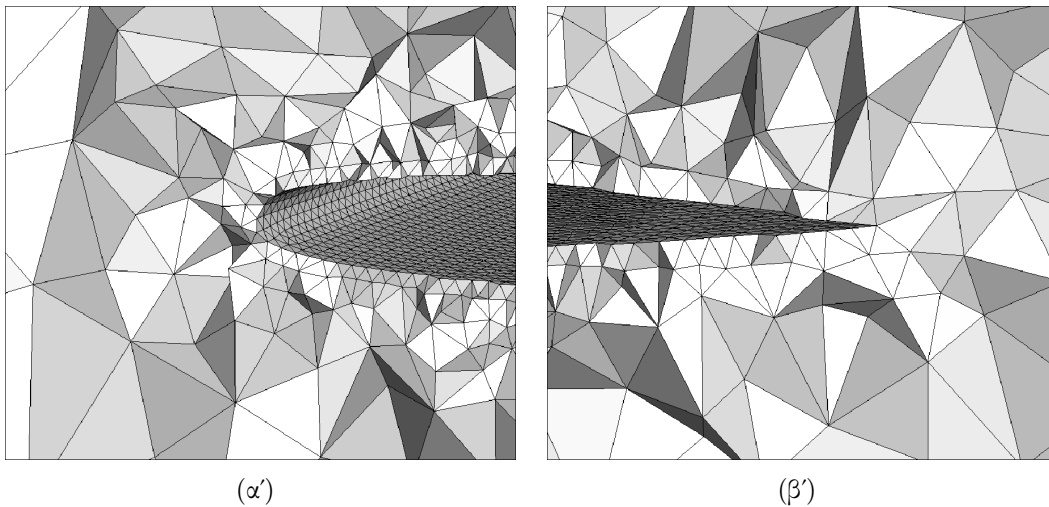
προσεγγίζει την οριακή γωνία στροφής της πτέρυγας κατά $\varphi_{crit} = 60^\circ$. Στα σχήματα 5.7 και 5.8 φαίνεται το προσαρμοσμένο πλέγμα μετά τη στρέψη κατά $\varphi_{crit} = 60^\circ$.



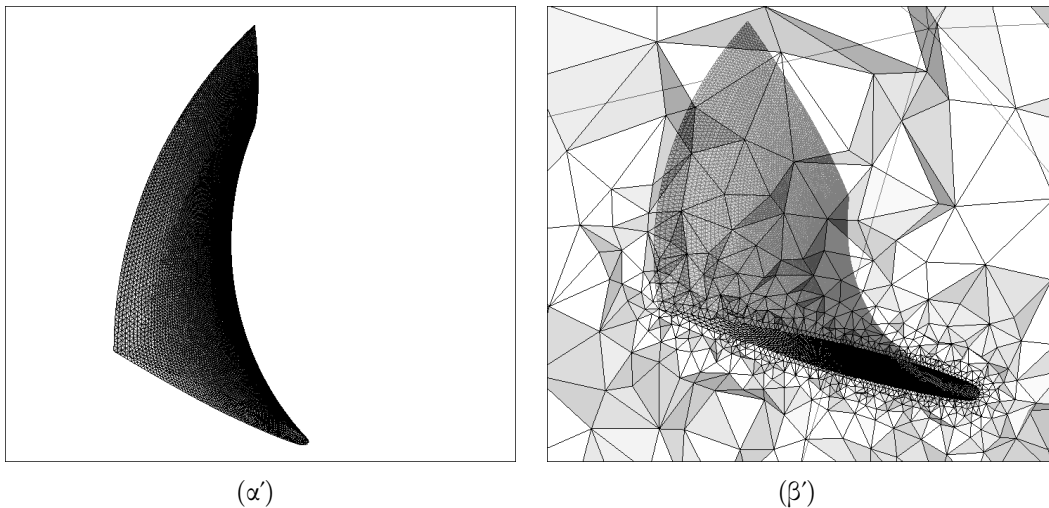
Σχήμα 5.4: (α) Πτέρυγα πριν την παραμόρφωση, (β) Πτέρυγα μετά την παραμόρφωση σε στρέψη κατά $\varphi = 10^\circ$.



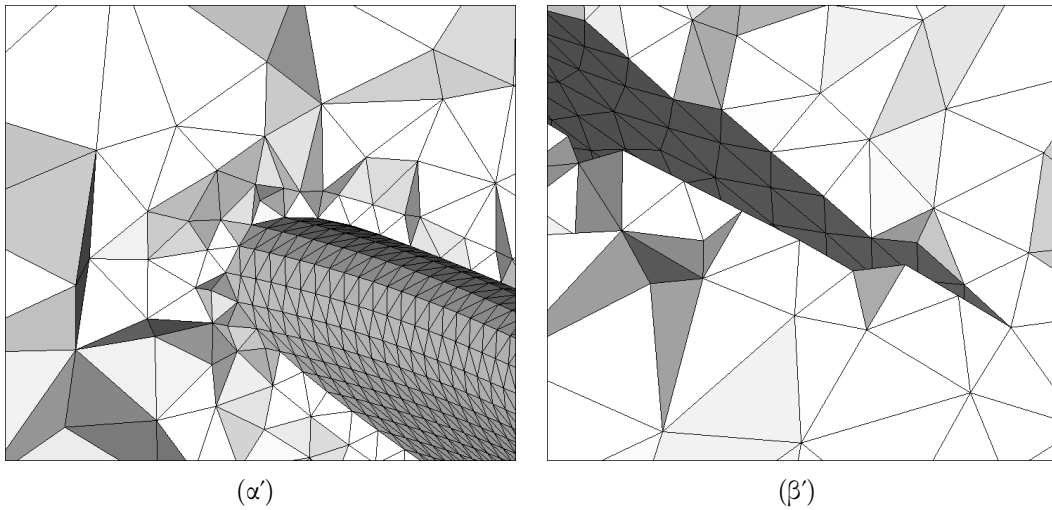
Σχήμα 5.5: (α) Αρχικό πλέγμα γύρω από την πτέρυγα, (β) Προσαρμοσμένο πλέγμα μετά την παραμόρφωση της επιφάνειας της πτέρυγας.



Σχήμα 5.6: Προσαρμοσμένο πλέγμα μετά την παραμόρφωση της επιφάνειας της πτέρυγας σε στρέψη κατά $\varphi = 10^\circ$: (α) μέτωπο προσβολής της πλησιέστερης στην άτρακτο του αεροσκάφους αεροτομής της πτέρυγας, (β) ακμή εκφυγής της πλησιέστερης στην άτρακτο του αεροσκάφους αεροτομής της πτέρυγας.



Σχήμα 5.7: Πτέρυγα μετά την παραμόρφωση σε στρέψη κατά $\varphi_{crit} = 60^\circ$, (β) προσαρμοσμένο πλέγμα μετά την παραμόρφωση της πτέρυγας.



Σχήμα 5.8: Προσαρμοσμένο πλέγμα μετά την παραμόρφωση της πτέρυγας σε στρέψη κατά $\varphi_{crit} = 60^\circ$: (α) μέτωπο προσβολής της πλησιέστερης στην άτρακτο του αεροσκάφους αεροτομής της πτέρυγας, (β) ακμή εκφυγής της πλησιέστερης στην άτρακτο του αεροσκάφους αεροτομής της πτέρυγας.

5.1.3 Παραμόρφωση της πτέρυγας σε κάμψη

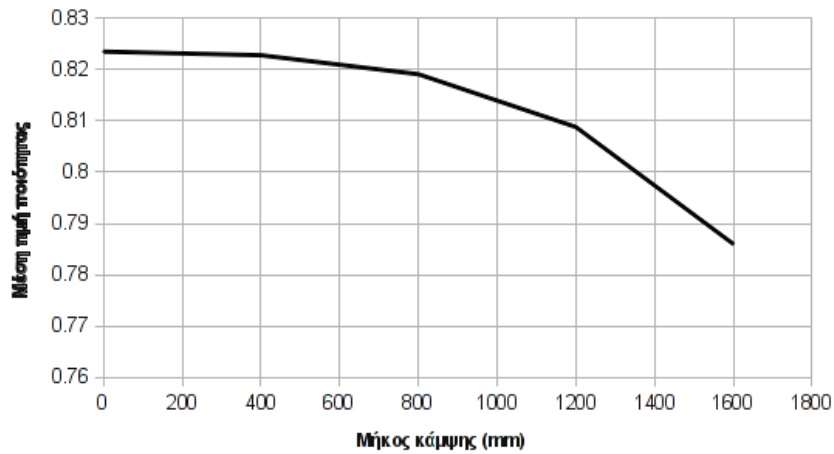
Σε αυτήν την παράγραφο, παρουσιάζεται η λειτουργία της μεθόδου προσαρμογής για την περίπτωση καμπτικής παραμόρφωσης της πτέρυγας. Για τον υπολογισμό της καμπτικής παραμόρφωσης της πτέρυγας χρησιμοποιήθηκε, όπως και στην περίπτωση της στρέψης, μια συνάρτηση γραμμικής παρεμβολής των μετατοπίσεων των σημείων του πλέγματος που βρίσκονται επί της επιφάνειας της πτέρυγας, ως προς το μήκος αυτής. Η μέθοδος χρησιμοποιώντας τα στρεπτικά ελατήρια όπως περιγράφεται στο τρίτο κεφάλαιο, δέχεται ως είσοδο αρχείο που περιέχει τις τιμές των μετατοπίσεων των οριακών κόμβων και υπολογίζει τις μετατοπίσεις των εσωτερικών κόμβων του πλέγματος. Το προκύπτον πλέγμα σχολιάζεται ως προς την ποιότητα μέσω στατιστικών στοιχείων. Επίσης, γίνεται ανίχνευση πιθανών αναστροφών των στοιχείων του και κρίνεται το αν το πλέγμα καθίσταται κατάλληλο για χρήση.

Στον πίνακα 5.2 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των μετρικών μέσης τιμής, τυπικής απόκλισης και ελάχιστης τιμής της ποιότητας του πλέγματος για διάφορες τιμές του μήκους κάμψης της πτέρυγας.

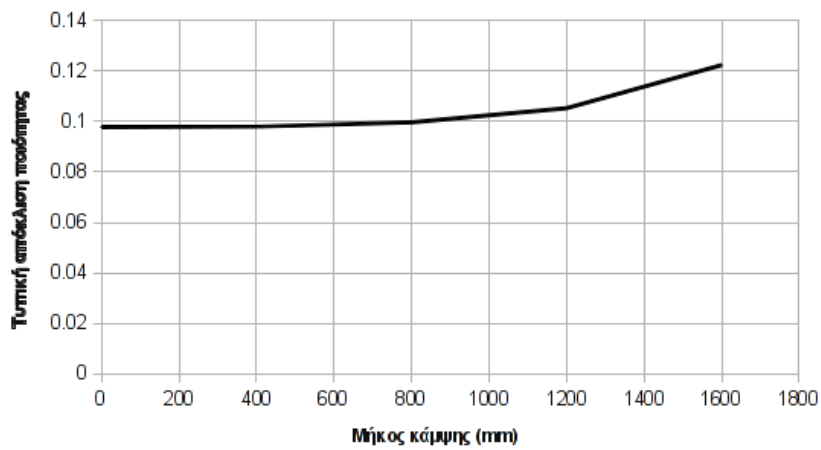
Πίνακας 5.2: Αποτελέσματα μέσης τιμής, τυπικής απόκλισης και ελάχιστης τιμής της μετρικής ποιότητας του πλέγματος συναρτήσει του μήκους κάμψης της πτέρυγας.

$s(10^{-3})$	0	400	800	1200	1600
\bar{q}_e	0.8235	0.8228	0.8191	0.8088	0.7860
σ_{q_e}	0.0978	0.0981	0.0997	0.1053	0.1224
$q_{e,min}$	0.3954	0.3669	0.3409	0.1779	0.0146

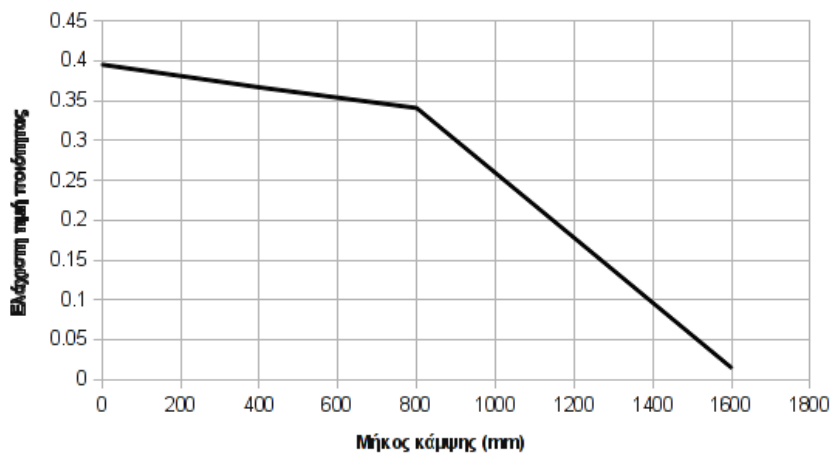
Στο σχήμα 5.10 παρουσιάζεται η πτέρυγα του αεροσκάφους μετά την παραμόρφωση σε κάμψη με τιμή $s = 0.5$, καθώς και το προσαρμοσμένο με τη μέθοδο των ελατηρίων πλέγμα. Οι τιμές των μετρικών υποδεικνύουν μείωση της ποιότητας του πλέγματος. Η συνθήκη μη-εμφάνισης ανεστραμμένων τετραέδρων ισχύει και το πλέγμα είναι οριακά κατάλληλο για χρήση. Για τις επόμενες τιμές του μήκους κάμψης του πίνακα 5.2 εμφανίζεται μεγάλη μείωση της ποιότητας του πλέγματος παρόλο που δεν σχηματίζονται ανεστραμμένα τετράεδρα στο πλέγμα. Αυτό είναι λογικό να οφείλεται σε μείωση των όγκων των τετραεδρικών στοιχείων του πλέγματος, χωρίς απαραίτητα οι όγκοι αυτοί να παίρνουν αρνητικές τιμές, που θα σήμαινε αναστροφές. Αυτό επαληθεύεται και από το διάγραμμα 5.9(γ') της ελάχιστης τιμής της ποιότητας του πλέγματος η οποία κυμαίνεται σε πολύ χαμηλά στάδια. Στο σχήμα 5.12 παρουσιάζεται η ακραία περίπτωση παραμόρφωσης του πλέγματος για κάμψη της πτέρυγας κατά $s = 1.5$. Προφανώς, το πλέγμα αυτό είναι ακατάλληλο για χρήση.



(α')

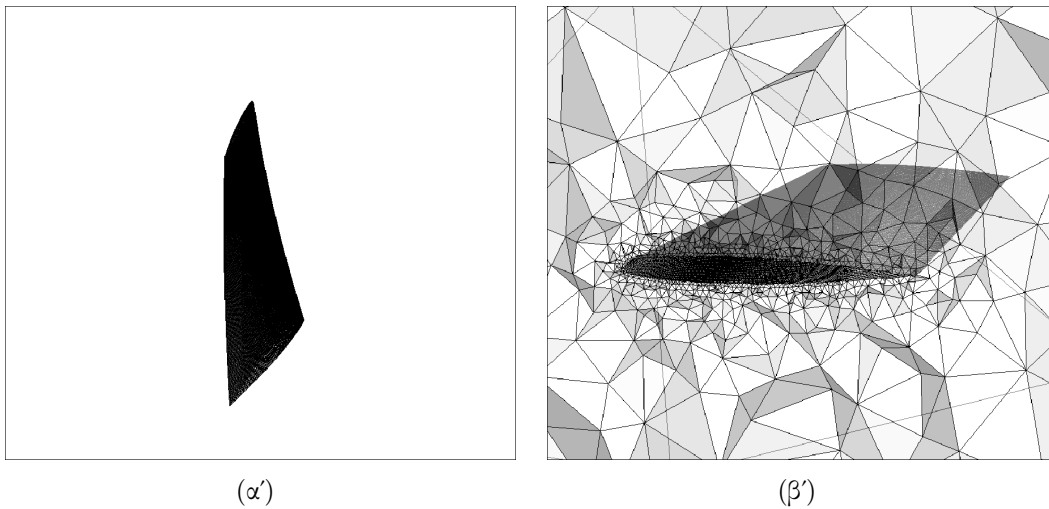


(β')

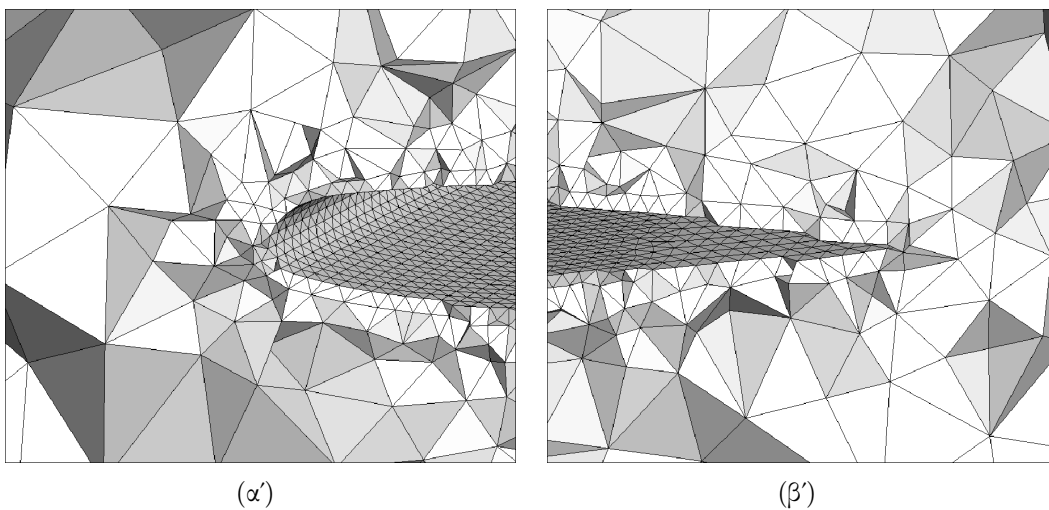


(γ')

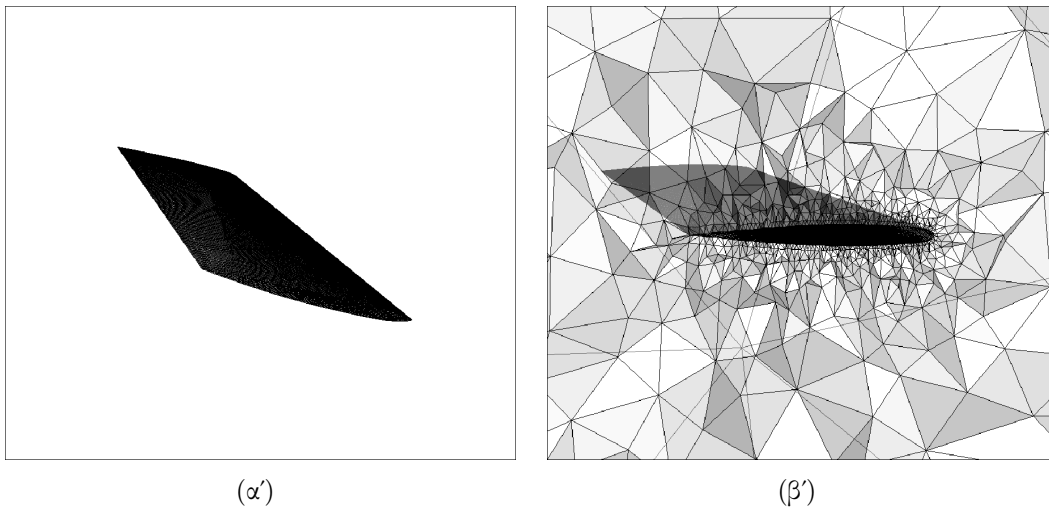
Σχήμα 5.9: Γραφική παράσταση: (α) της μέσης τιμής, (β) της τυπικής απόκλισης, και (γ) της ελάχιστης ποιότητας του πλέγματος συναρτήσει του μήκους κάμψης της πτέρυγας.



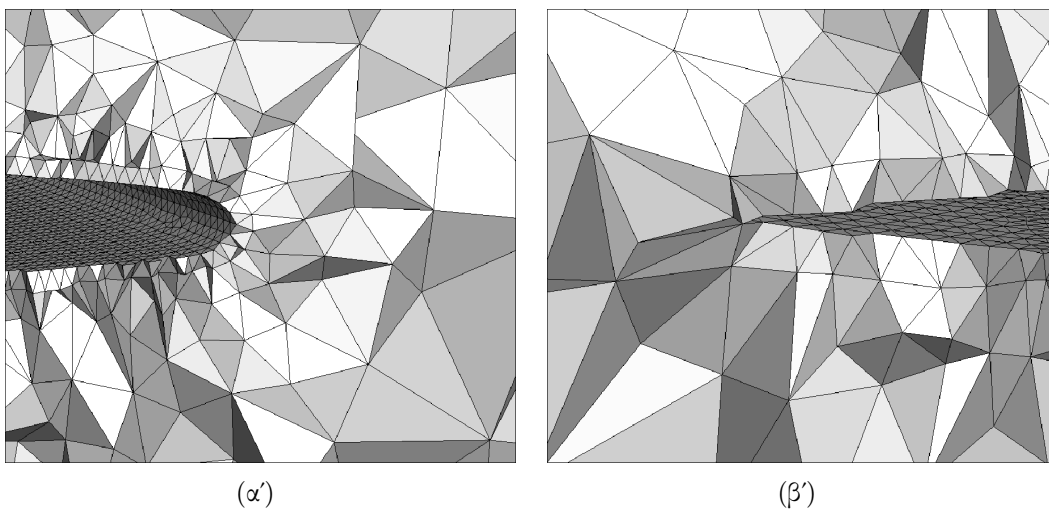
Σχήμα 5.10: (α) Πτέρυγα μετά την παραμόρφωση σε κάμψη κατά $s = 0.5$, (β) προσαρμοσμένο πλέγμα μετά την παραμόρφωση.



Σχήμα 5.11: Προσαρμογή του πλέγματος μετά την παραμόρφωση της πτέρυγας σε κάμψη με τιμή $s = 0.5$: (α) μέτωπο προσβολής της πλησιέστερης στην άτρακτο του αεροσκάφους αεροτομής της πτέρυγας, (β) ακμή εκφυγής της πλησιέστερης στην άτρακτο του αεροσκάφους αεροτομής της πτέρυγας.



Σχήμα 5.12: (α) Πτέρυγα μετά την παραμόρφωση σε κάμψη με τιμή $s = 1.5$, (β) προσαρμοσμένο πλέγμα μετά την παραμόρφωση.



Σχήμα 5.13: Προσαρμογή του πλέγματος μετά την παραμόρφωση της πτέρυγας σε κάμψη με τιμή $s = 1.5$: (α) μέτωπο προσβολής της πλησιέστερης στην άτρακτο του αεροσκάφους αεροτομής της πτέρυγας, (β) ακμή εκφυγής της πλησιέστερης στην άτρακτο του αεροσκάφους αεροτομής της πτέρυγας.

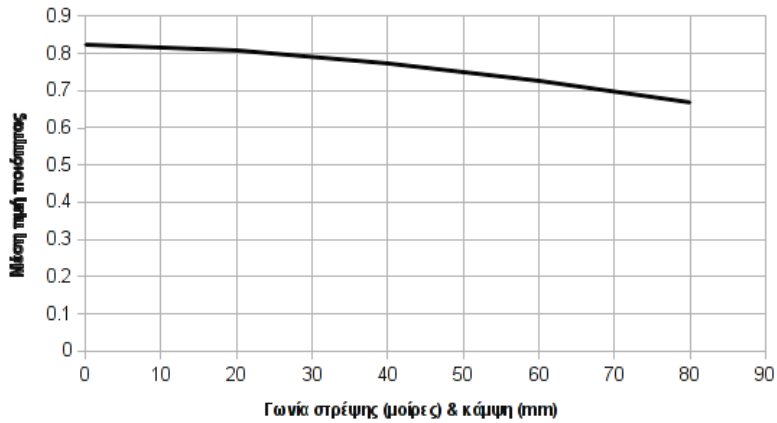
5.1.4 Σύνθετη παραμόρφωση της πτέρυγας

Μια τρίτη περίπτωση παραμόρφωσης της επιφάνειας της πτέρυγας αποτελεί ο συνδυασμός των περιπτώσεων των υποενοτήτων 4.3.1 και 4.3.2. Τα αποτελέσματα ως προς τη μέτρηση της ποιότητας των προσαρμοσμένων με τη μέθοδο των στρεπτικών ελατηρίων πλεγμάτων αναγράφονται στον πίνακα 5.3.

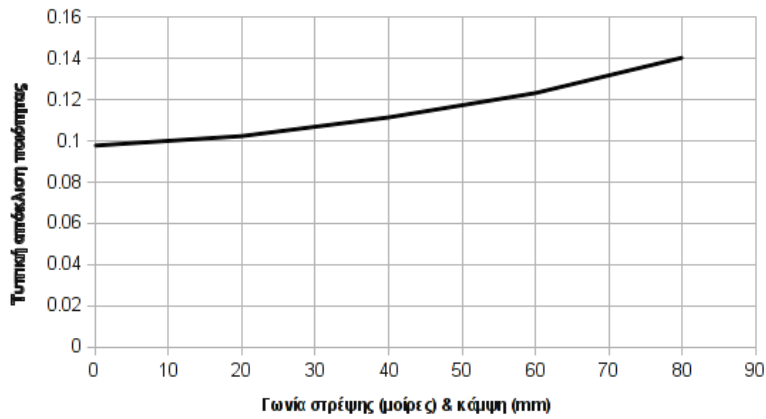
Πίνακας 5.3: Αποτελέσματα μέσης τιμής, τυπικής απόκλισης και ελάχιστης τιμής της μετρικής ποιότητας του πλέγματος συναρτήσει του μήκους κάμψης της πτέρυγας.

φ (μοίρες) & $s(10^{-3})$	0	20 & 400	40 & 800	60 & 1200	80 & 1600
\bar{q}_e	0.8235	0.8083	0.7733	0.7265	0.6685
σ_{q_e}	0.0978	0.1024	0.1115	0.1233	0.1405
$q_{e,min}$	0.3954	0.3641	0.1495	0.0229	0.0032

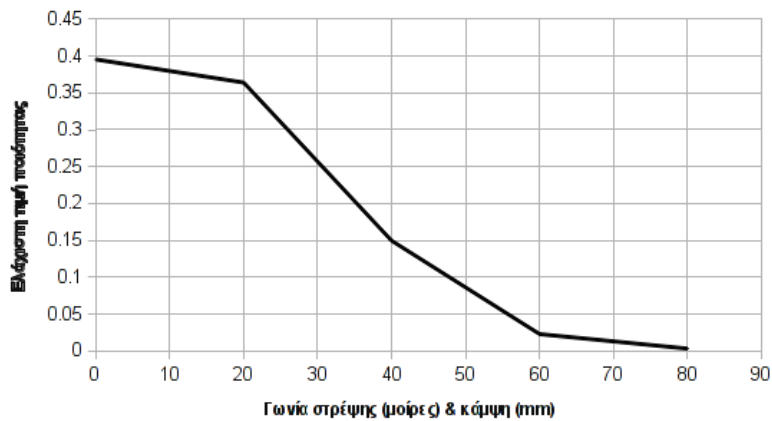
Στο σχήμα 5.15 αριστερά, φαίνεται η παραμορφωμένη επιφάνεια της πτέρυγας σε στρέψη υπό γωνία τιμής $\varphi = 10^\circ$ και σε κάμψη τιμής $s = 0.5$ και δεξιά το προσαρμοσμένο πλέγμα. Επίσης το σχήμα 5.16 παρουσιάζει την προσαρμογή των τετραέδρων κοντά στο μέτωπο προσβολής και στην ακμή εκφυγής της πλησιέστερης στην άτραχτο του αεροσκάφους αεροτομής της πτέρυγας. Σε αυτήν την περίπτωση παραμόρφωσης η ποιότητα του πλέγματος διατηρείται σχετικά υψηλή και το πλέγμα είναι κατάλληλο για χρήση. Για μεγαλύτερες τιμές παραμόρφωσης οι τιμές των μετρικών ποιότητας μειώνονται απότομα και τα πλέγματα δεν προτείνονται για χρήση.



(α')

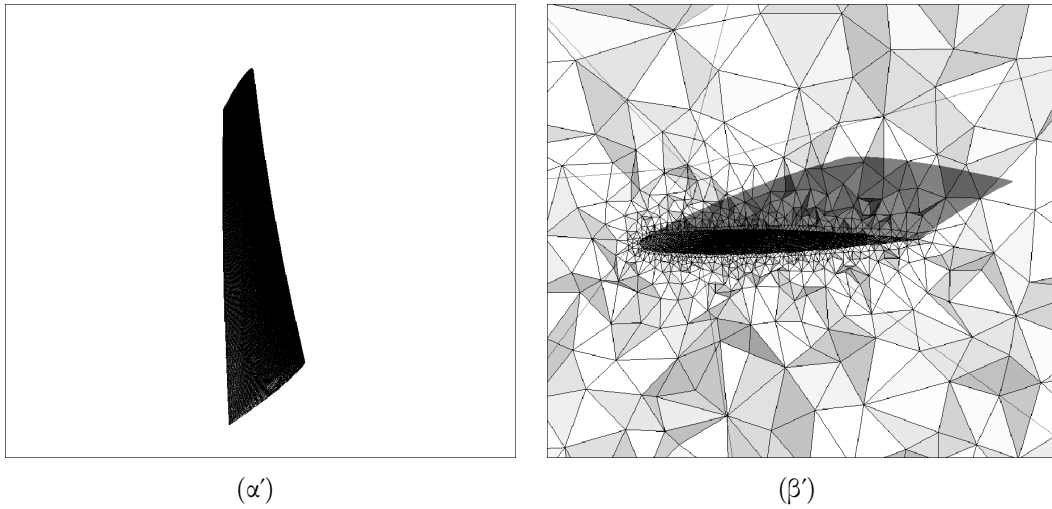


(β')

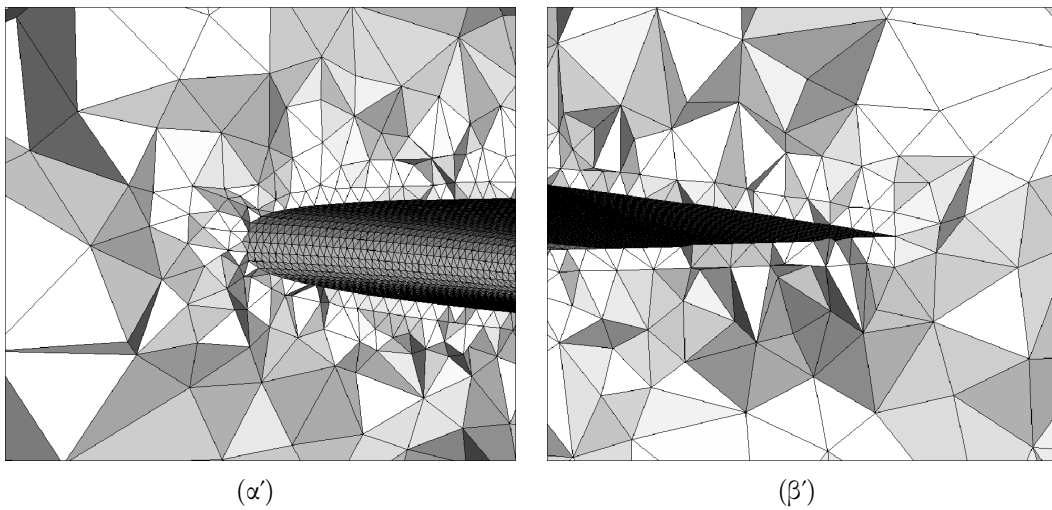


(γ')

Σχήμα 5.14: Γραφική παράσταση: (α) της μέσης τιμής, (β) της τυπικής απόκλισης, και (γ) της ελάχιστης ποιότητας του πλέγματος συναρτήσει του μήκους κάμψης της πτέρυγας. Στον οριζόντιο άξονα αναγράφονται μόνο οι τιμές της γωνίας στρέψης αλλά στην παραμόρφωση συμπεριλαμβάνονται και οι αντίστοιχες τιμές του μήκους κάμψης του πίνακα 5.3. Δηλαδή, η γωνία στρέψης $\varphi = 20^\circ$ συνδυάζεται με μήκος κάμψης $s = 0.4$, η $\varphi = 40^\circ$ με $s = 0.8$ κ.ο.κ.



Σχήμα 5.15: (α) Πτέρυγα μετά τη σύνθετη παραμόρφωση σε στρέψη κατά $\varphi = 10^\circ$ και σε κάμψη κατά $s = 0.5$, (β) προσαρμοσμένο πλέγμα μετά τη σύνθετη παραμόρφωση της πτέρυγας.



Σχήμα 5.16: Προσαρμοσμένο πλέγμα μετά τη σύνθετη παραμόρφωση της πτέρυγας: (α) μέτωπο προσβολής της πλησιέστερης στην άτρακτο του αεροσκάφους αεροτομής της πτέρυγας, (β) ακμή εκφυγής της πλησιέστερης στην άτρακτο του αεροσκάφους αεροτομής της πτέρυγας.

Κεφάλαιο 6

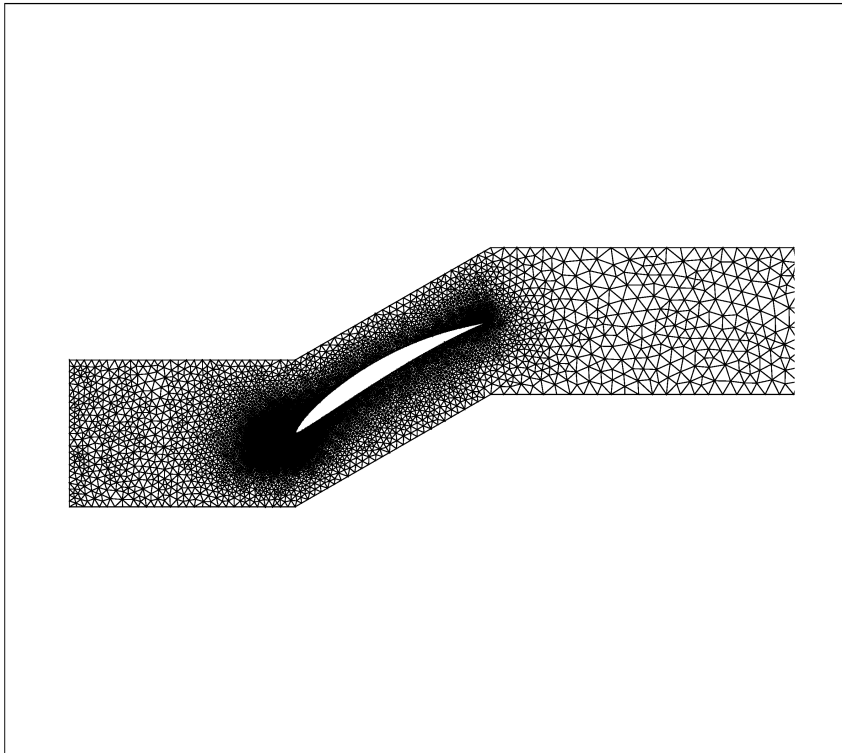
Εφαρμογές σε Πτερυγώσεις Στροβιλομηχανών

6.1 2Δ πτερύγωση συμπίεστή

6.1.1 Περιγραφή του προβλήματος

Στις προαναφερθείσες εφαρμογές της μεθόδου, το λογισμικό που αναπτύχθηκε χρησιμοποιήθηκε για την προσαρμογή του πλέγματος τριγωνικών και τετραπλευρικών στοιχείων που προέκυψε από τη μετακίνηση της μεμονωμένης αεροτομής NACA12. Στην ενότητα αυτή, παρουσιάζεται μια 2Δ πτερύγωση συμπίεστή ελεγχόμενης διάχυσης του οποίου το σχήμα τροποποιείται (κατά μια προσέγγιση των όσων συμβαίνουν σε μια διαδικασία βελτιστοποίησης) και το λογισμικό που αναπτύχθηκε, χρησιμοποιείται για την προσαρμογή του πλέγματος στη νέα θέση των στερεών ορίων του πτερυγίου. Στο σημείο αυτό πρέπει να αναφερθεί ότι κατά την παραμόρφωση του πτερυγίου λαμβάνεται υπόψη το στοιχείο της περιοδικότητας ώστε το υπολογιστικό πλέγμα να αναφέρεται σε πτερύγωση. Η γένεση πλέγματος μέσα στη 2Δ πτερύγωση έγινε με τριγωνικά στοιχεία με τη μέθοδο του προελαύνοντος μετώπου.

Στην παρούσα εφαρμογή, όπως επίσης και στις προαναφερθείσες, ενδιαφέρον προκαλεί η αξιολόγηση της ποιότητας του προσαρμοσμένου με τη μέθοδο των στρεπτικών ελατηρίων πλέγματος (σε ορισμένες περιπτώσεις παραμόρφωσης όπως λ.χ. στρέψη, κάμψη και στο συνδυασμό αυτών). Ένα δεύτερο στοιχείο είναι η διερεύνηση των ορίων λειτουργίας της μεθόδου ως προς την προσαρμογή πλέγματος. Ως όριο θεωρείται εκείνο το σημείο μόλις πέραν του οποίου παρατηρούνται οι πρώτες στρεβλώσεις (αναστροφές) των στοιχείων που το αποτελούν. Τα πλέγματα στα οποία παρατηρείται ύπαρξη ανεστραμμένων στοιχείων κρίνονται ακατάλληλα για χρήση. Στο σχήμα 6.1 φαίνεται το πλέγμα της πτερύγωσης με όρια τα στερεά τοιχώματα του κελύφους και του περιγράμματος του πτερυγίου. Επίσης, σημειώνεται ότι το κέλυφος και οι περιοχές εισόδου και εξόδου της ροής στο συμπίεστή παραμένουν αμετάβλητες.



Σχήμα 6.1: Το σχήμα παρουσιάζει ένα υπολογιστικό πλέγμα για ένα πτερυγίο συμπίεστη MAN, το οποίο αποτελείται συνολικά από 11544 κόμβους και 22536 τριγωνικά στοιχεία. Πραγματοποιείται παραμόρφωση των στερεών ορίων του και προκύπτει το προσαρμοσμένο με τη μέθοδο των στρεπτικών ελατηρίων πλέγμα στη θέση των νέων ορίων του πτερυγίου.

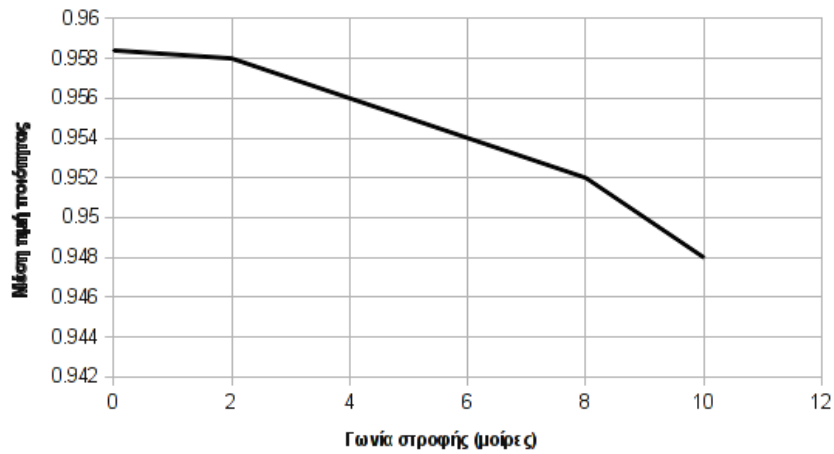
6.1.2 Στρεπτική παραμόρφωση

Στην υποενότητα αυτή παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για την ποιότητα του προσαρμοσμένου με τη μέθοδο των στρεπτικών ελατηρίων πλέγματος για διάφορες τιμές της γωνίας στροφής του πτερυγίου. Στον πίνακα 6.1 συγκεντρώνονται οι τιμές της μέσης τιμής, της τυπικής απόκλισης και της ελάχιστης ποιότητας του πλέγματος για διάφορες τιμές της γωνίας στροφής του πτερυγίου. Στο σχήμα 6.3 παρουσιάζεται αριστερά η

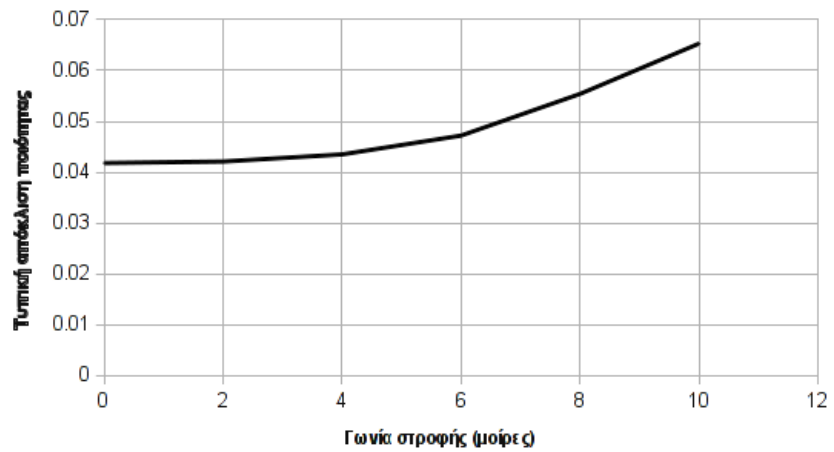
Πίνακας 6.1: Αποτελέσματα μέσης τιμής, τυπικής απόκλισης και ελάχιστης τιμής της μετρικής ποιότητας του πλέγματος συναρτήσει της γωνίας στροφής του πτερυγίου.

φ (μοίρες)	0	2	4	6	8	10
\bar{q}_e	0.9584	0.9580	0.9560	0.9540	0.9520	0.9480
σ_{q_e}	0.0418	0.0421	0.0435	0.0472	0.0554	0.0653
$q_{e,min}$	0.6269	0.6267	0.5940	0.4344	0.0635	0.0026

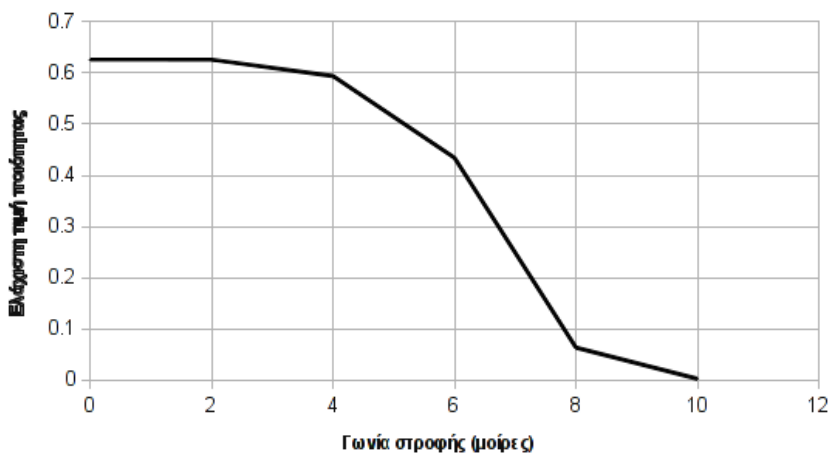
παραμόρφωση του πτερυγίου και δεξιά το προσαρμοσμένο πλέγμα που προκύπτει χρησιμοποιώντας το λογισμικό που αναπτύχθηκε στην ενότητα (2.3) αυτής της εργασίας. Η γωνία στροφής έχει επιλεγεί $\varphi = 6^\circ$. Σύμφωνα με τον πίνακα 6.1, η ποιότητα



(α')



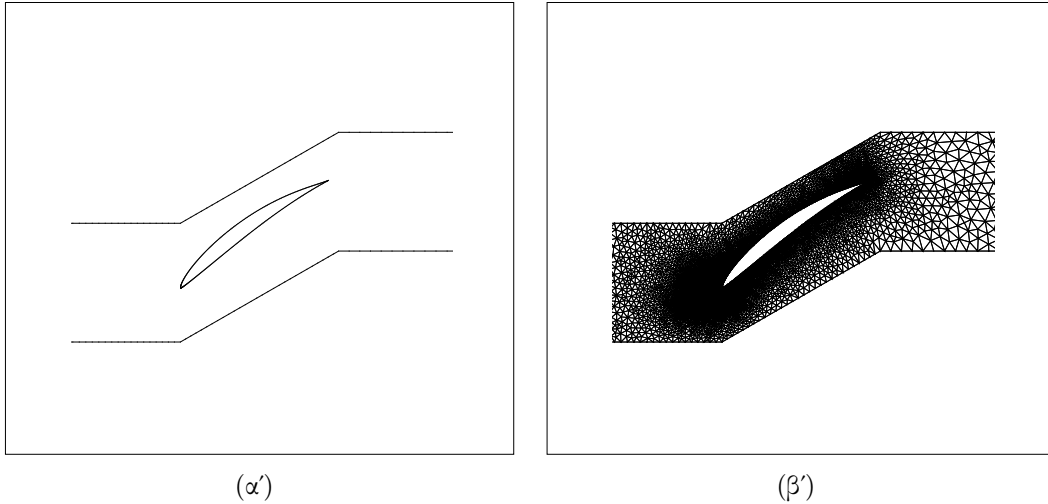
(β')



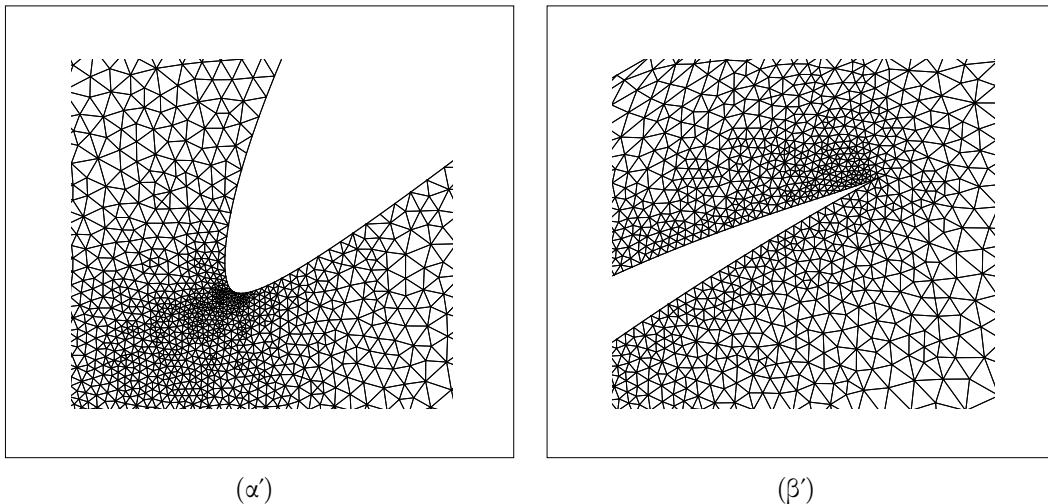
(γ')

Σχήμα 6.2: Γραφική παράσταση: (α) της μέσης τιμής, (β) της τυπικής απόκλισης, και (γ) της ελάχιστης ποιότητας του πλέγματος συναρτήσει της γωνίας στροφής του περυγίου.

του προσαρμοσμένου πλέγματος είναι υψηλή και μάλιστα οι τιμές των μετρικών της είναι πολύ κοντά σε αυτές του πλέγματος βάσης (αρχικό πλέγμα). Επίσης, δεν παρατηρείται κανένα ανεστραμμένο τριγωνικό στοιχείο. Συνεπώς, το πλέγμα αυτό κρίνεται κατάλληλο για χρήση. Οι τιμές της γωνίας στροφής του περυγίου σταματούν στο σημείο όπου το προσαρμοσμένο πλέγμα κρίθηκε ακατάλληλο για χρήση λόγω μείωσης της ποιότητας αλλά και εμφάνισης των πρώτων ανεστραμμένων τριγωνικών στοιχείων ($\varphi = 10^\circ$).



Σχήμα 6.3: (α) Παραμόρφωση περυγίου σε στρέψη υπό γωνία τιμής $\varphi = 6^\circ$, (β) προσαρμοσμένο με τη μέθοδο των στρεπτικών ελατηρίων πλέγμα.



Σχήμα 6.4: Προσαρμοσμένο πλέγμα μετά τη στρεπτική παραμόρφωση του περυγίου κατά γωνία $\varphi = 6^\circ$: (α) μέτωπο προσβολής, (β) ακμή εκφυγής.

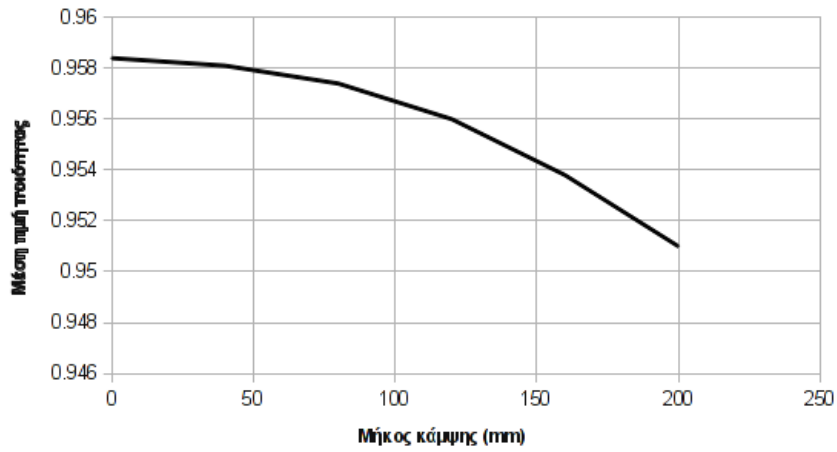
6.1.3 Καμπτική παραμόρφωση

Στην περίπτωση καμπτικής παραμόρφωσης (όπως αντιμετωπίστηκε και στην ενότητα 2.3) παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της ποιότητας των προσαρμοσμένων πλεγμάτων για διάφορες τιμές του μήκους κάμψης του πτερυγίου. Συγκεντρωτικά στον πίνακα 6.2 παρατίθενται οι μετρικές μέσης τιμής, τυπικής απόκλισης και ελάχιστης τιμής της ποιότητας του πλέγματος. Οι τιμές κάμψης διακόπτονται εκεί όπου το προσαρμοσμένο με τη μέθοδο των στρεπτικών ελατηρίων πλέγμα κρίνεται ακατάλληλο ($s = 0.2$).

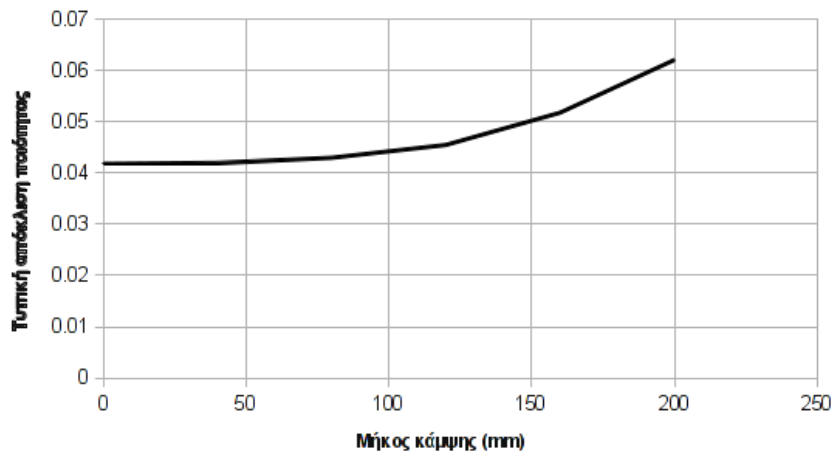
Στο σχήμα 6.6 παρουσιάζονται, αριστερά η παραμόρφωση του πτερυγίου σε κάμψη κατά $s = 0.1$, ενώ δεξιά, το προσαρμοσμένο πλέγμα που προκύπτει χρησιμοποιώντας το λογισμικό που αναπτύχθηκε στην ενότητα (2.3) αυτής της εργασίας. Οι τιμές των μετρικών ποιότητας για αυτή την περίπτωση κάμψης είναι αρκετά υψηλές και το προσαρμοσμένο πλέγμα προτείνεται για χρήση.

Πίνακας 6.2: Αποτελέσματα μέσης τιμής, τυπικής απόκλισης και ελάχιστης τιμής της μετρικής ποιότητας του πλέγματος συναρτήσει του μήκους κάμψης του πτερυγίου.

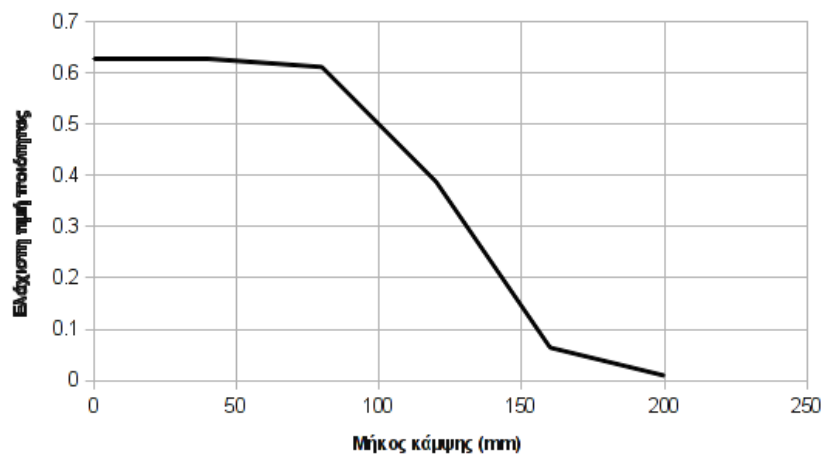
$s(10^{-3})$	0	40	80	120	160	200
\bar{q}_e	0.9584	0.9581	0.9574	0.9560	0.9538	0.9510
σ_{q_e}	0.0418	0.0420	0.0430	0.0455	0.0518	0.0621
$q_{e,min}$	0.6269	0.6270	0.6120	0.3880	0.0640	0.0094



(α')

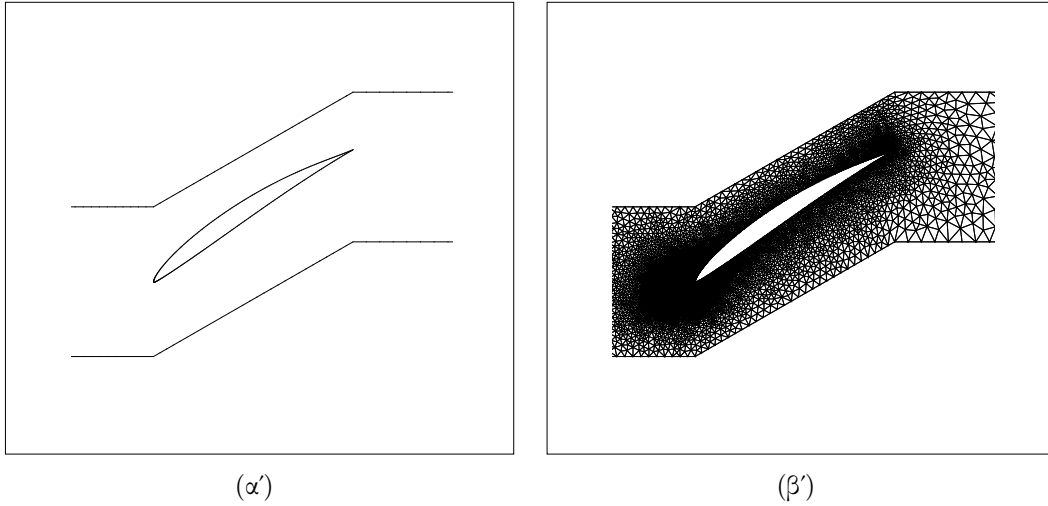


(β')

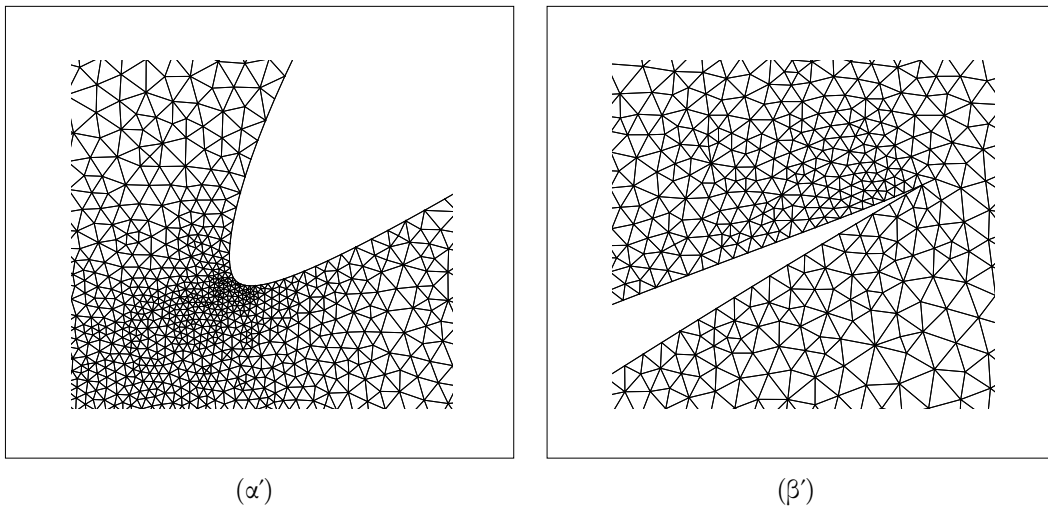


(γ')

Σχήμα 6.5: Γραφική παράσταση: (α) της μέσης τιμής, (β) της τυπικής απόκλισης, και (γ) της ελάχιστης ποιότητας του πλέγματος συναρτήσει του μήκους κάμψης του περυγίου.



Σχήμα 6.6: (α) Παραμόρφωση πτερυγίου σε κάμψη κατά μήκος τιμής $s = 0.1$, (β) προσαρμοσμένο με τη μέθοδο των στρεπτικών ελατηρίων πλέγμα.



Σχήμα 6.7: Προσαρμοσμένο πλέγμα μετά την παραμόρφωση της αεροτομής σε κάμψη κατά μήκος τιμής $s = 0.1$: (α) μέτωπο προσβολής, (β) ακμή εκφυγής.

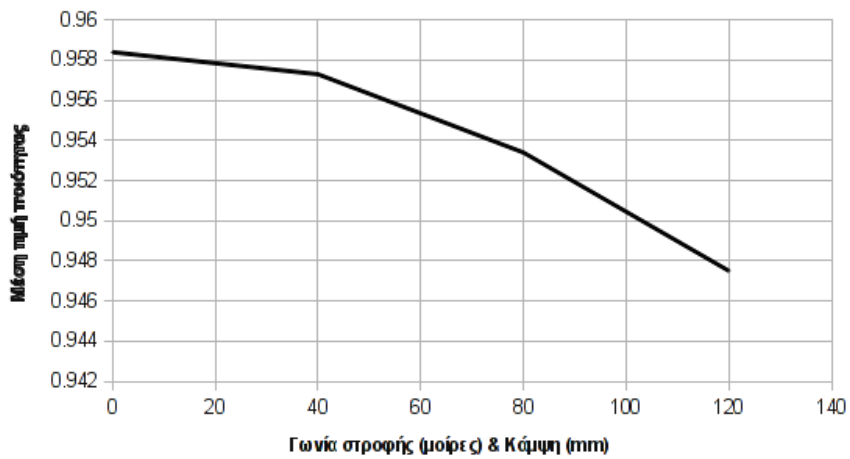
6.1.4 Σύνθετη παραμόρφωση

Στην υποενότητα αυτή παρουσιάζεται η περίπτωση σύνθετης παραμόρφωσης της αεροτομής (σε στρέψη και κάμψη μαζί) του πτερυγίου. Όμοια με τις περιπτώσεις προσαρμογής του πλέγματος και της μέτρησης της ποιότητάς του των ενοτήτων 2.1.2 και 2.1.3, προκύπτει ο πίνακας 6.3 που περιέχει τα αποτελέσματα των μετρικών ποιότητας για τιμές της σύνθετης παραμόρφωσης του πτερυγίου.

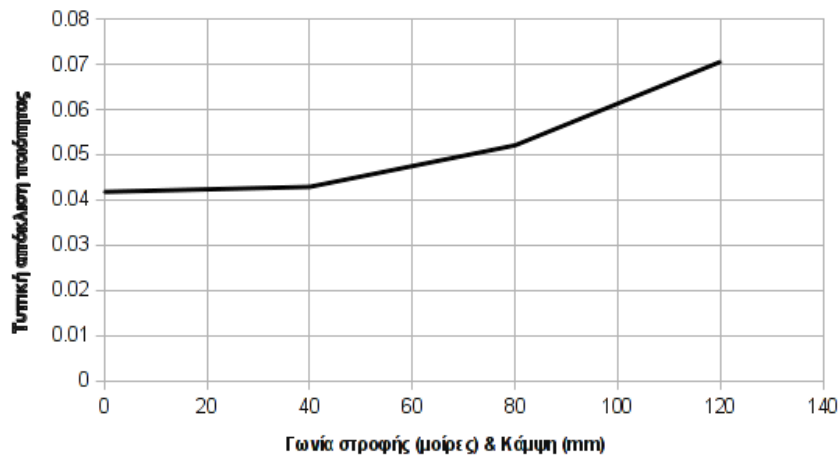
Στο σχήμα 6.9 παρουσιάζεται η περίπτωση σύνθετης παραμόρφωσης του πτερυγίου για γωνία στροφής $\varphi = 4^\circ$ και κάμψη κατά $s = 0.08$. Αριστερά του σχήματος φαίνεται η παραμόρφωση του πτερυγίου και δεξιά το προσαρμοσμένο πλέγμα που προκύπτει με χρήση του λογισμικού που αναπτύχθηκε στην ενότητα (2.3). Το πλέγμα χαρακτηρίζεται από υψηλές τιμές των μετρικών ποιότητας και λόγω μη-εμφάνισης ανεστραμένων τριγώνων κρίνεται κατάλληλο για χρήση. Η οριακή περίπτωση σύνθετης παραμόρφωσης, για γωνία στροφής και μήκους κάμψης με τιμές $\varphi = 6^\circ$ & $s = 0.12$ οδηγεί σε αισθητή μείωση της ποιότητας του πλέγματος αλλά και σε εμφάνιση ανεστραμένων τριγωνικών στοιχείων. Το πλέγμα σε αυτήν την περίπτωση κρίνεται ακατάλληλο.

Πίνακας 6.3: Αποτελέσματα μέσης τιμής, τυπικής απόκλισης και ελάχιστης τιμής της μετρικής ποιότητας του πλέγματος συναρτήσει της γωνίας στροφής και του μήκους κάμψης του πτερυγίου.

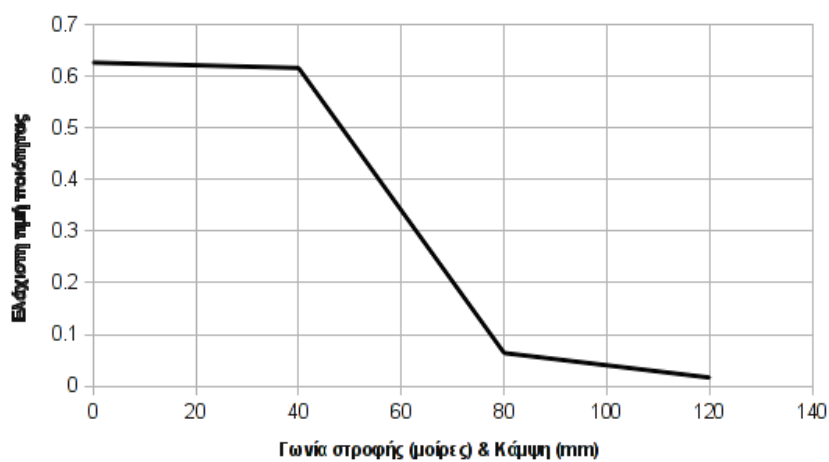
φ (μοίρες) & $s(10^{-3})$	0	2 & 40	4 & 80	6 & 120
\bar{q}_e	0.9584	0.9573	0.9534	0.9475
σ_{q_e}	0.0418	0.0429	0.0521	0.0706
$q_{e,min}$	0.6269	0.6166	0.0640	0.0163



(α')

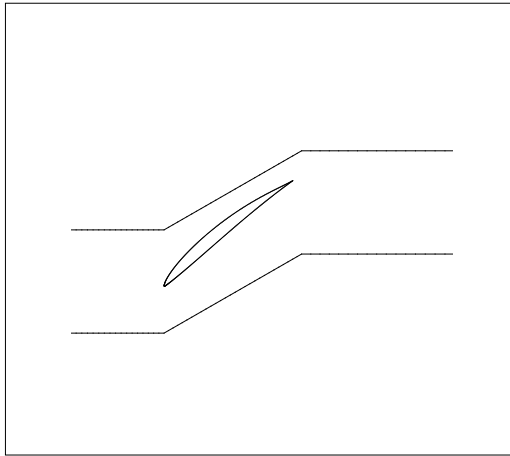


(β')

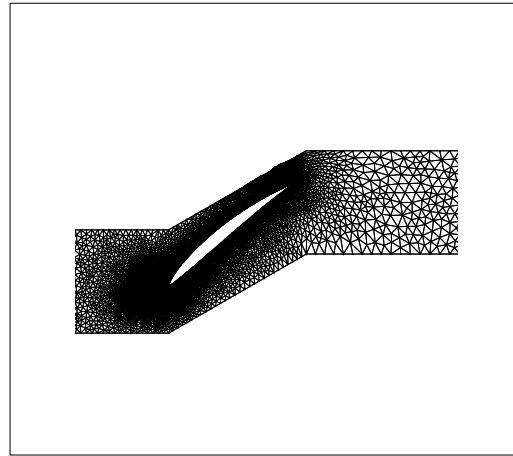


(γ')

Σχήμα 6.8: Γραφική παράσταση: (α) της μέσης τιμής, (β) της τυπικής απόκλισης, και (γ) της ελάχιστης ποιότητας του πλέγματος συναρτήσει της γωνίας στρέψης και του μήκους κάμψης του περυγίου.

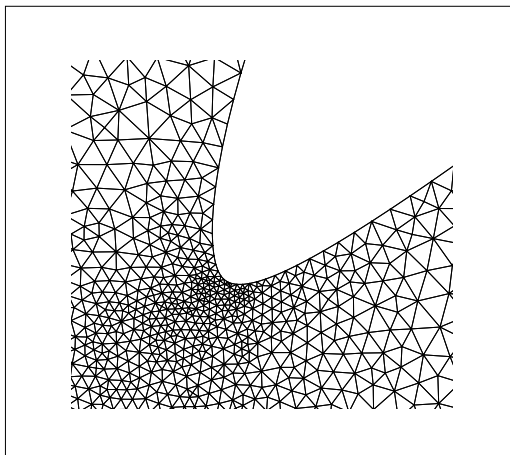


(α')

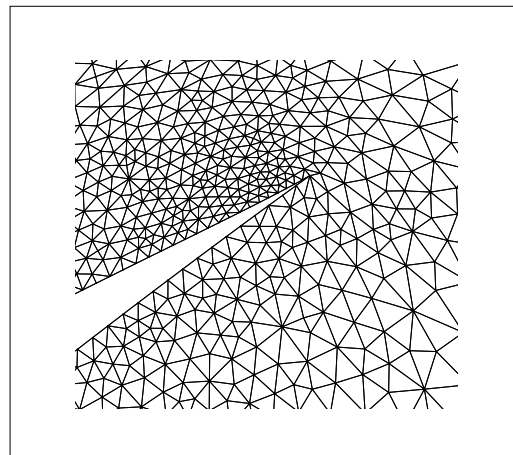


(β')

Σχήμα 6.9: (α) Σύνθετη παραμόρφωση του πτερυγίου σε στρέψη κατά $\varphi = 6^\circ$ και σε κάμψη κατά $s = 0.1$, (β) προσαρμοσμένο με τη μέθοδο των στρεπτικών ελατηρίων πλέγμα.



(α')



(β')

Σχήμα 6.10: Προσαρμοσμένο πλέγμα μετά τη σύνθετη παραμόρφωση της αεροτομής σε στρέψη κατά $\varphi = 6^\circ$ και σε κάμψη κατά $s = 0.1$: (α) μέτωπο προσβολής, (β) ακμή εκφυγής.

Κεφάλαιο 7

Παράδειγμα επίλυσης της ροής σε 3Δ πλέγμα τετραεδρικών στοιχείων.

7.1 Οι χρονικά μόνιμες εξισώσεις Euler

7.1.1 Διατύπωση των εξισώσεων ροής σε διαφορική μορφή

Στην ενότητα αυτή γίνεται η διατύπωση των εξισώσεων ροής Euler, σε συντηρητική διανυσματική γραφή, για χρονικά μόνιμη ροή συμπιεστού ρευστού, απουσία βαρυτικών δυνάμεων, στο καρτεσιανό σύστημα αναφοράς, οι οποίες εκφράζουν σε διαφορική μορφή τη διατήρηση της μάζας, της ορμής και της ενέργειας. Για την μαθηματική έκφραση των εξισώσεων Euler έχουν χρησιμοποιηθεί αρκετά στοιχεία από τις εργασίες [[12],[13],[14],[15],[16]].

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{F}_i^{inv}}{\partial i} = 0, \quad i = x, y, z \quad (7.1)$$

όπου \vec{U} είναι το διάνυσμα των συντηρητικών μεταβλητών, \vec{F}_i^{inv} το διάνυσμα της μη-συνεκτικής ροής με τον εκθέτη *inv* (inviscid) να χαρακτηρίζει ότι στους όρους αυτούς δεν εμπεριέχεται η συνεκτικότητα και άρα είναι μη-συνεκτικοί, και *t* ο χρόνος. Για 3Δ χρονικά μόνιμη ροή, η εξίσωση 7.1 μετατρέπεται ως:

$$\frac{\partial \vec{F}_x^{inv}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{F}_y^{inv}}{\partial y} + \frac{\partial \vec{F}_z^{inv}}{\partial z} = 0 \quad (7.2)$$

Τα διανύσματα των συντηρητικών μεταβλητών \vec{U} και της μη-συνεκτικής ροής \vec{F}_i^{inv} μπορούν να γραφούν με τη μορφή μητρώϊκών εξισώσεων ως:

$$\vec{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ E \end{bmatrix} \quad (7.3)$$

$$\vec{F}_i^{inv} = \left[\vec{F}_x^{inv} \quad \vec{F}_y^{inv} \quad \vec{F}_z^{inv} \right]^T = \begin{bmatrix} \rho u & \rho v & \rho w \\ \rho u^2 + p & \rho uv & \rho uw \\ \rho uv & \rho v^2 + p & \rho vw \\ \rho wu & \rho wv & \rho w^2 + p \\ (E + p)u & (E + p)v & (E + p)w \end{bmatrix} \quad (7.4)$$

όπου ρ είναι η πυκνότητα του ρευστού, u, v, w οι συνιστώσες της ταχύτητας κατά τις κατευθύνσεις των μοναδιαίων διανυσμάτων $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$, p η πίεση του ρευστού και E η ολική ενέργεια ανά μονάδα όγκου, η οποία δίνεται από τη σχέση:

$$E = \rho e + \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2 + w^2) \quad (7.5)$$

όπου e είναι η εσωτερική ενέργεια ανά μονάδα μάζας. Αν ο αέρας θεωρηθεί ως τέλει αέριο και οι θερμοχωρητικότητες C_p και C_v θεωρηθούν σταθερές, τότε ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις:

$$e = C_v T, \quad h = C_p T, \quad \gamma = \frac{C_p}{C_v} \quad (7.6)$$

όπου h η σχετική ενθαλπία, T η σχετική θερμοκρασία και γ ο εκθέτης ισεντροπικής μεταβολής. Επίσης η ενθαλπία συνδέεται με την εσωτερική ενέργεια μέσω της σχέσης:

$$h = e + \frac{p}{\rho} \quad (7.7)$$

Συνδυάζοντας τους τύπους των σχέσεων (7.6) και (7.7) προκύπτει η συσχέτιση της εσωτερικής ενέργειας e με την πίεση p :

$$e = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} \quad (7.8)$$

και συνεπώς, η σχέση (7.5) μετασχηματίζεται ως:

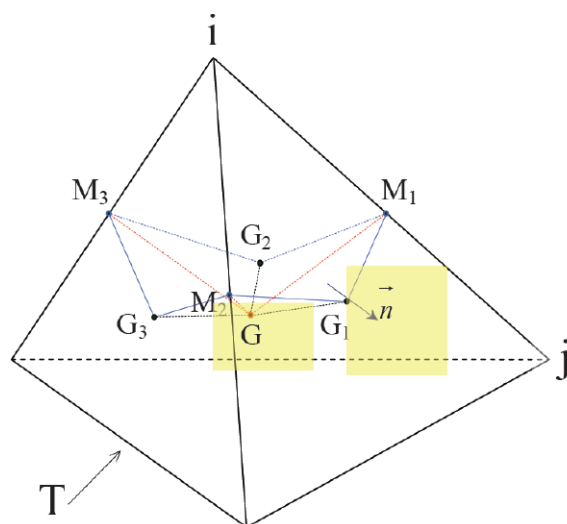
$$E = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2 + w^2) \quad (7.9)$$

Επίσης, η ολική ενθαλπία δίνεται από τη σχέση:

$$h_t = \frac{E + p}{\rho} = \frac{\gamma p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) \quad (7.10)$$

7.1.2 Διακριτοποίηση του χωρίου ροής

Για την επίλυση των τριδιάστατων εξισώσεων Euler είναι απαραίτητη η διακριτοποίηση του πεδίου ροής, η οποία υλοποιήθηκε με τη μέθοδο των πεπερασμένων όγκων. Το 3Δ μη-δομημένο πλέγμα τετραεδρικών στοιχείων διακριτοποιείται σε τετράεδρα, που καλύπτουν πλήρως το πεδίο ροής, χωρίς ωστόσο να αλληλοκαλύπτονται. Οι εξισώσεις ροής ολοκληρώνονται εφαρμόζοντας την κεντροκομβική προσέγγιση (node-centered), δηλαδή οι μεταβλητές επίλυσης αναφέρονται στους κόμβους του πλέγματος, γύρω από τους οποίους σχηματίζονται οι όγκοι ελέγχου. Στο σχήμα 7.1 που ακολουθεί παρουσιάζεται η συνεισφορά ενός τετραέδρου T στο σχηματισμό του όγκου αναφοράς γύρω από τον κόμβο i .



Σχήμα 7.1: Συνεισφορά του τετραέδρου T στο σχηματισμό του όγκου αναφοράς γύρω από τον κόμβο i . Το σημείο G είναι το βαρύκεντρο του T , ενώ τα σημεία G_1, G_2, G_3 είναι τα βαρύκεντρα των τριών εδρών του T . Επίσης τα σημεία M_1, M_2, M_3 είναι τα μέσα των αντίστοιχων ακμών. Με τη χρήση αυτών των σημείων σχηματίζονται οι επιφάνειες, οι οποίες με τη σειρά τους θα σχηματίσουν τον όγκο ελέγχου γύρω από το σημείο i . [13]

7.1.3 Διακριτοποίηση των εξισώσεων

Σύμφωνα με τη μέθοδο διακριτοποίησης των πεπερασμένων όγκων, το σύστημα των μερικών διαφορικών εξισώσεων (7.2) ολοκληρώνεται σε κάθε όγκο ελέγχου.

$$\iiint_{C_P} \left(\frac{\partial \vec{F}_x^{inv}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{F}_y^{inv}}{\partial y} + \frac{\partial \vec{F}_z^{inv}}{\partial z} \right) dx dy dz = 0 \quad (7.11)$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα Green-Gauss, το τριπλό ολοκλήρωμα μετατρέπεται σε επιφανειακό ολοκλήρωμα κατά μήκος του ορίου ∂C_P , οπότε η σχέση (7.11) μετατρέπεται ως εξής:

$$\iint_{\partial C_P} \vec{H}^{inv} ds = 0 \quad (7.12)$$

όπου με \vec{H}^{inv} συμβολίζεται το διάνυσμα της ροής ανά μονάδα επιφάνειας που διασχίζει κάθε τρίγωνο.

Το τμήμα του ορίου της κυψέλης ελέγχου ∂C_P που συνεισφέρει το τετράεδρο T παριστάται στο σχήμα 7.1 και ουσιαστικά σχηματίζεται από τα τρίγωνα που παρουσιάζονται και έχουν κορυφές τα σημεία $G, G_1, G_2, G_3, M_1, M_2, M_3$. Σε κάθε στοιχειώδες επίπεδο τμήμα εμβαδού ds , δηλαδή σε κάθε τρίγωνο, αντιστοιχεί ένα κάθετο στην επιφάνεια του τριγώνου διάνυσμα $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$, το οποίο έχει φορά προς το εξωτερικό της κυψέλης ελέγχου και μέτρο ίσο με το εμβαδόν ds .

Επιπρόσθετα, για το διάνυσμα ροής ανά μονάδα επιφάνειας που διασχίζει κάθε τρίγωνο, ισχύει:

$$\vec{\Phi}^{inv} = \hat{n}_x \vec{F}_x + \hat{n}_y \vec{F}_y + \hat{n}_z \vec{F}_z \quad (7.13)$$

όπου με n_x, n_y, n_z συμβολίζονται οι συνιστώσες στις τρεις διευθύνσεις του καρτεσιανού συστήματος του κάθετου μοναδιαίου διανύσματος στην αντίστοιχη επιφάνεια, και για τις οποίες ισχύει η ακόλουθη σχέση:

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} = (\hat{n}_x, \hat{n}_y, \hat{n}_z) \quad (7.14)$$

Αν με $K_N(P)$ συμβολίζεται το σύνολο των κόμβων που συνδέονται άμεσα με τον κόμβο P μέσω μιας ακμής, και με ∂C_P η τομή των ορίων των όγκων ελέγχου C_P και C_Q που

συνορεύουν, τότε η σχέση (7.12) επαναδιατυπώνεται ως:

$$\iint_{\partial C_{PQ}} \vec{\mathbf{H}}^{inv} ds + \iint_{\partial C_P \cap S} \vec{\mathbf{H}}^{inv} ds = 0 \quad (7.15)$$

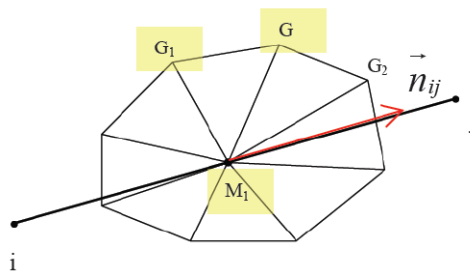
Τα ολοκληρώματα των χωρικών όρων προσεγγίζονται κατάλληλα, εισάγοντας τα αριθμητικά διανύσματα ροής $\vec{\Phi}$ αντί των αντίστοιχων φυσικών ποσοτήτων.

$$\vec{\Phi}_{PQ} = \iint_{\partial C_{PQ}} \vec{\mathbf{H}}^{inv} ds = \vec{f}(\vec{U}_{PQ}^L, \vec{U}_{PQ}^R, \vec{n}_{PQ}) \quad (7.16)$$

όπου με \vec{n}_{PQ} συμβολίζεται το κάθετο διάνυσμα με φορά προς τα έξω της κυψέλης C_P , που σχετίζεται με την ακμή PQ και έχει μήκος ίσο με το άθροισμα των τριγωνικών εμβαδών. Για το διάνυσμα αυτό ισχύει

$$\vec{n}_{PQ} = \int_{\partial C_{PQ}} \vec{n} ds \quad (7.17)$$

Στο σχήμα 7.2 φαίνεται το διάνυσμα \vec{n}_{ij} , που αντιστοιχεί στην ακμή ij .



Σχήμα 7.2: Κάθετο διάνυσμα \vec{n}_{ij} , που αντιστοιχεί στην ακμή ij . [13]

Στην εξίσωση (7.16) οι όροι \vec{U}_{PQ}^L και \vec{U}_{PQ}^R συμβολίζουν τις τιμές των μεταβλητών στον αριστερό και δεξί κόμβο της ακμής PQ , που λαμβάνονται υπόψη κατά τον υπολογισμό του διανύσματος ροής $\vec{\Phi}_{PQ}$.

Συνδυάζοντας τις παραπάνω σχέσεις, η εξίσωση (7.16) γίνεται

$$\sum_{Q \in K_N(P)} \vec{\Phi}_{PQ} + \vec{\Phi}_{P,out} = 0 \quad (7.18)$$

όπου ο όρος $\vec{\Phi}_{P,out}$ συμβολίζει το αριθμητικό διάνυσμα ροής που διασχίζει το όριο του χωρίου ροής σε τμήματα που ταυτίζονται με το όριο του όγκου ελέγχου C_P .

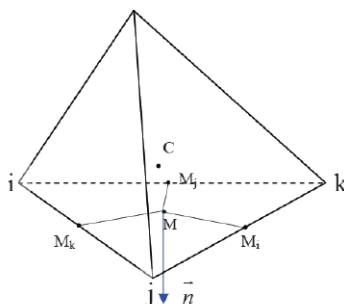
7.1.4 Επιβολή οριακών συνθηκών

Στη συνέχεια απαιτείται να επιβληθούν οι οριακές συνθήκες, ώστε να συνυπολογιστούν και από αυτές τα ανάλογα διανύσματα ροής στο ισολογισμό ροής του όγκου ελέγχου κάθε οριακού κόμβου του πλέγματος. Οι οριακές συνθήκες που εφαρμόστηκαν στην παρούσα εργασία είναι δύο ειδών, οι οριακές συνθήκες του στερεού τοιχώματος και οι οριακές συνθήκες των ορίων εισόδου-εξόδου της ροής.

Για τους κόμβους του πλέγματος, που ανήκουν σε επιφάνειες που θεωρούνται στερεά τοιχώματα, εφαρμόζεται η συνθήκη μη-εισχώρησης. Η επιβολή της συνθήκης γίνεται έμμεσα, θεωρώντας ότι από το τοίχωμα εισέρχεται ένα διάνυσμα ροής προς την κυψέλη ελέγχου του οριακού κόμβου, στο οποίο έχει μηδενιστεί η κατάλληλη συνιστώσα της ταχύτητας. Η συνιστώσα αυτή προκύπτει από το εσωτερικό γινόμενο του διανύσματος της ταχύτητας \vec{V} με το κάθετο διάνυσμα \vec{n} στο οριακό τρίγωνο, το οποίο τίθεται ίσο με μηδέν ($\vec{V}_n = \vec{V} \cdot \vec{n} = 0$). Το πλήρες διάνυσμα ροής και το αντίστοιχο στο οποίο λαμβάνεται υπόψη η συνθήκη μη-εισχώρησης είναι:

$$\vec{H} = \begin{bmatrix} \rho V_n \\ \rho u V_n + p n_x \\ \rho v V_n + p n_y \\ \rho w V_n + p n_z \\ (\rho E + p) V_n \end{bmatrix}, \vec{H}_{wall} = \begin{bmatrix} 0 \\ p n_x \\ p n_y \\ p n_z \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7.19)$$

Για την ατριβή ροή, που εξετάζεται, εφαρμόζεται η συνθήκη αδιαβατικού τοιχώματος, όσον αφορά την εξίσωση ενέργειας. Πρακτικά, σαρώνονται όλα τα οριακά τρίγωνα, που ανήκουν σε στερεά τοιχώματα, και σ' αυτά υπολογίζεται το κάθετο διάνυσμα με μέτρο ίσο με το εμβαδό των τριγώνων και με φορά προς το τοίχωμα (διάνυσμα \vec{n} σχήμα 7.3) Το τελευταίο μοιράζεται στις κορυφές του τριγώνου, σταθμισμένο με το αντίστοιχο εμβαδόν, που καταλαμβάνει για κάθε μια η αντίστοιχη κυψέλη ελέγχου. Στη συνέχεια υπολογίζεται για κάθε κορυφή το διάνυσμα \vec{H}_{wall} και προστίθεται στον ισολογισμό των ρών της αντίστοιχης κυψέλης ελέγχου.



Σχήμα 7.3: Οριακό τρίγωνο και το αντίστοιχο κάθετο διάνυσμα \vec{n} . [13]

Όσον αφορά στην οριακή συνθήκη εισόδου/εξόδου της ροής, και αυτή επιβάλλεται

έμμεσα στους αντίστοιχους οριακούς κόμβους του πλέγματος μέσω του τοπικού ισολογισμού ροών. Σε κάθε τρίγωνο, που ανήκει σε οριακή επιφάνεια εισόδου ή εξόδου της ροής, επιλύεται ένα μονοδιάστατο πρόβλημα Riemann μεταξύ των μεταβλητών του βαρύκεντρου του τριγώνου και των μεταβλητών που περιγράφουν τις συνθήκες στο εξωτερικό του χωρίου ροής. Οι τελευταίες ουσιαστικά περιγράφουν την κατάσταση σε άπειρη απόσταση από την υπό εξέταση γεωμετρία. Η κατάσταση αυτή θα συμβολίζεται από το δείκτη *out*, ενώ οι μεταβλητές της υπολογίζονται βάσει των οριακών συνθηκών, που καθορίζονται από το χρήστη. Για τον υπολογισμό του διανύσματος ροής κατά την επίλυση του προβλήματος Riemann χρησιμοποιήθηκε το ανάντι σχήμα των Steger-Warming [17]. Το σχήμα αποδίδει ακρίβεια πρώτης τάξης και για το βαρύκεντρο *K* του οριακού τριγώνου περιγράφεται από την εξίσωση:

$$\vec{H}_{K,out} = \mathbf{A}_K^+ \vec{W}_K + \mathbf{A}_K^- \vec{W}_{out} \quad (7.20)$$

όπου \mathbf{A} είναι το Ιακωβιανό μητρώο του διανύσματος ροής, το οποίο υπολογίζεται με θετικές ή αρνητικές ιδιοτιμές. Στη συνέχεια το διάνυσμα ροής που έχει υπολογιστεί για κάθε οριακό τρίγωνο μοιράζεται στους κόμβους του, σταθμισμένο με το αντίστοιχο εμβαδόν που καταλαμβάνει για καθέναν η αντίστοιχη κυψέλη ελέγχου του.

7.2 Παρουσίαση της επίλυσης της ροής.

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται η επίλυση της ροής πάνω σε προσαρμοσμένα 3D μη-δομημένα πλέγματα, δημιουργημένα με την μέθοδο των στρεπτικών ελατηρίων. Ο κώδικας επίλυσης των εξισώσεων της ροής έχει αναπτυχθεί στο Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών του Ε.Μ.Π. [[18], [19], [20], [21], [22], [23]].

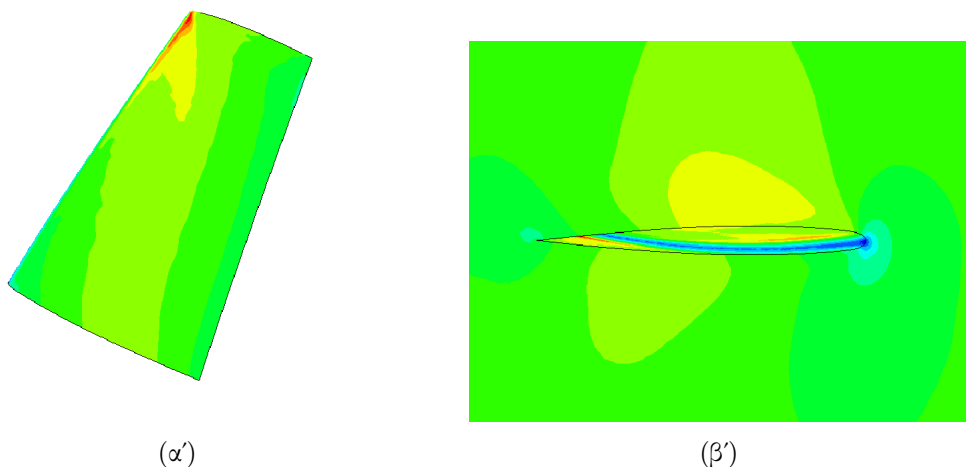
Τα πλέγματα, για τα οποία γίνεται η επίλυση της ροής, αφορούν δυό περιπτώσεις παραμόρφωσης της πτέρυγας αεροσκάφους. Πρώτον, για στρέψη υπό γωνία τιμής $\varphi = 10^\circ$ και δεύτερον, για κάμψη ως προς τον άξονα μήκους τιμής $\delta z = 0.5$ μονάδες. Τα αποτελέσματα επίλυσης της ροής πάνω στην παραμορφωμένη επιφάνεια της πτέρυγας, βεβαιώνουν τη λειτουργία της μεθόδου ως προς την προσαρμογή πλέγματος κατάλληλο για χρήση από λογισμικά επίλυσης ροών.

Ο πίνακας 7.1 αναφέρει μερικά αδιάστατα ρευστοδυναμικά μεγέθη που εκφράζουν τη ροή, καθώς και των ρευστοδυναμικών μεγεθών του ρευστού.

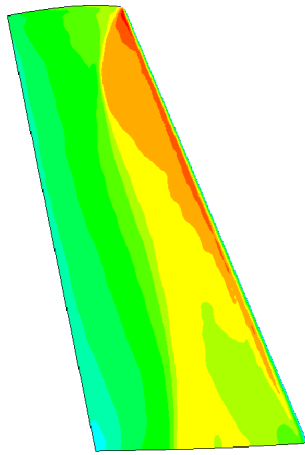
Τα σχήματα 7.4 και 7.5 παρουσιάζουν την κατανομή του αριθμού Mach που προέκυψε μετά από την επίλυση της ροής για τις περιπτώσεις στρέψης και κάμψης της πτέρυγας αντίστοιχα. Επίσης, στα σχήματα 7.6 και 7.7 παρουσιάζεται η κατανομή της πίεσης *P* για αντίστοιχες περιπτώσεις παραμόρφωσης της πτέρυγας του αεροσκάφους.

Πίνακας 7.1: Πίνακας αναφοράς των αδιαστατοποιημένων χαρακτηριστικών μεγεθών της ροής, καθώς και των ρευστοδυναμικών μεγεθών του ρευστού (τέλειο αέριο), σε κάποια απόσταση από την πτέρυγα όπου η ροή θεωρείται ομαλή.

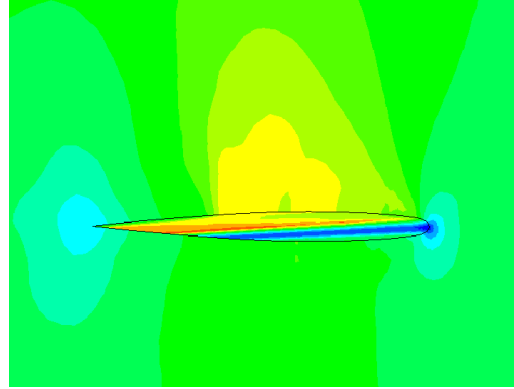
Μήκος κύριου άξονα ροής (L^*)	1
Αριθμός Reynolds (Re)	1000
Αριθμός Mach (M)	0.84
Συμπιεστότητα (β)	3.33
Ισεντροπικός εκθέτης (γ)	1.4
Σταθερά αερίου (ξηρός αέρας) (R_g)	287(J/molK)
Δυναμικό ιξώδες (μ)	$1.810^{-5}(kg/ms)$
Ταχύτητα μακριά από το πεδίο ροής (U_∞)	160(m/s)
Πυκνότητα μακριά από το πεδίο ροής (ρ)	1.2(kg/m ³)
Πίεση μακριά από το πεδίο ροής (P_0)	10.133(bar)



Σχήμα 7.4: (α) Κατανομή αριθμού Mach πάνω στην παραμορφωμένη επιφάνεια της πτέρυγας σε στρέψη υπό γωνία τιμής $\varphi = 10^\circ$, (β) κατανομή αριθμού Mach γύρω από την πτέρυγα στο προσαρμοσμένο πλέγμα.

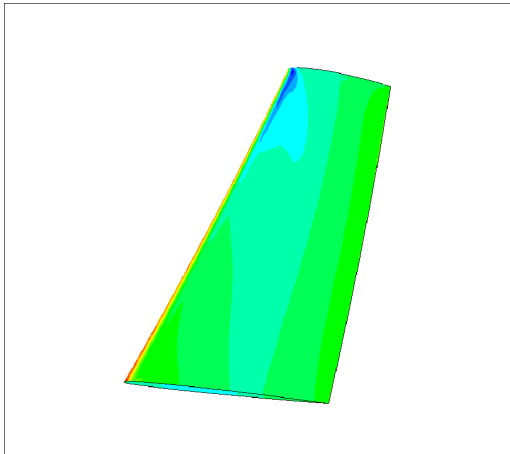


(α')

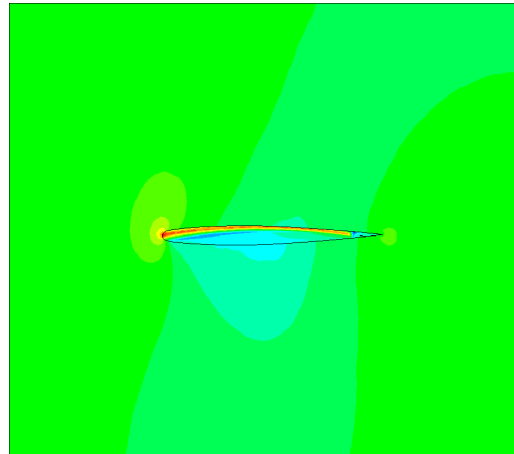


(β')

Σχήμα 7.5: (α) Κατανομή αριθμού Mach πάνω στην παραμορφωμένη επιφάνεια της πτέρυγας σε κάμψη τιμής $\delta z = 0.5$, (β) κατανομή αριθμού Mach γύρω από την πτέρυγα στο προσαρμοσμένο πλέγμα.

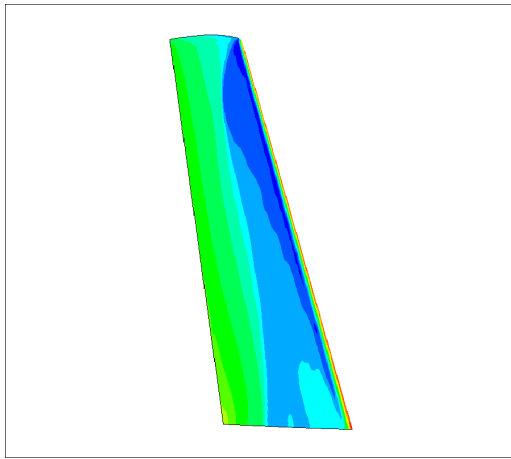


(α')

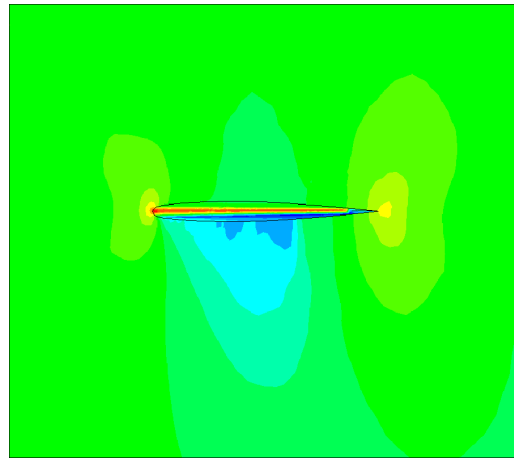


(β')

Σχήμα 7.6: (α) Κατανομή της πίεσης P πάνω στην παραμορφωμένη επιφάνεια της πτέρυγας σε στρέψη υπό γωνία τιμής $\varphi = 10^\circ$, (β) κατανομή αριθμού της πίεσης P γύρω από την πτέρυγα στο προσαρμοσμένο πλέγμα.



(α')



(β')

Σχήμα 7.7: (α) Κατανομή της πίεσης P πάνω στην παραμορφωμένη επιφάνεια της πτέρυγας σε κάμψη τιμής $\delta z = 0.5$, (β) κατανομή της πίεσης P γύρω από την πτέρυγα στο προσαρμοσμένο πλέγμα.

Κεφάλαιο 8

Ανακεφαλαίωση-Συμπεράσματα και Προτάσεις για περαιτέρω μελέτη

Η διπλωματική εργασία έχει ως αντικείμενο την ανάπτυξη, τον προγραμματισμό και τη χρήση λογισμικού που αναφέρεται σε μια μέθοδο μετακίνησης-προσαρμογής μη-δομημένων πλεγμάτων με την τεχνική των στρεπτικών ελατηρίων (torsional spring analogy). Αρχικά, για λόγους πληρότητας αναφέρονται συγγενικές μέθοδοι προσαρμογής, όπως λ.χ. αυτή των γραμμικών ελατηρίων (linear spring analogy), η οποία λειτουργεί ελλατωματικά ως προς την προσαρμογή μεγάλων 3D πλεγμάτων και η χρήση της περιορίζεται σε περιπτώσεις αρκετά μικρών μετακινήσεων του περιγράμματος. Το πρόβλημα αυτό αποτέλεσε τον βασικό λόγο για την ανάπτυξη της μεθόδου προσαρμογής με την τεχνική των στρεπτικών ελατηρίων, η οποία εξετάζεται στο τέταρτο κεφάλαιο αυτής της εργασίας. Μέσω της επίλυσης της ροής ρευστού για την πτέρυγα χρησιμοποιώντας τα προσαρμοσμένα με την μέθοδο των στρεπτικών ελατηρίων πλέγματα, απορρέει το συμπέρασμα της αποτελεσματικής λειτουργίας της μεθόδου σε μεγάλο εύρος τιμών της παραμόρφωσης του ορίου.

Το κύριο μέρος της εργασίας αποτελείται από την παρουσίαση της θεωρίας της μεθόδου των στρεπτικών ελατηρίων και από εφαρμογές της μεθόδου ως προς την προσαρμογή του πλέγματος.

Πρώτον, αναφέρεται η λειτουργία της μεθόδου για την προσαρμογή 2D μη-δομημένου πλέγματος τριγωνικών στοιχείων. Το πλέγμα σε αυτή την περίπτωση θεωρείται ως ένα σύστημα νοητών στρεπτικών ελατηρίων τοποθετημένων στις κορυφές των τριγωνικών στοιχείων του.

Δεύτερον, παρουσιάζεται η λειτουργία της μεθόδου για την προσαρμογή 2D πλέγματος τετραπλευρικών στοιχείων. Σε αυτήν την περίπτωση επισημαίνεται ένας τρόπος διαχείρισης των τριγωνικών στοιχείων του πλέγματος με τέτοιο τρόπο ώστε να δίνεται η δυνατότητα της μετακίνησης-προσαρμογής πλέγματος και τετραπλευρικών στοιχείων.

Τρίτον, πραγματοποιείται η επέκταση της μεθόδου για την προσαρμογή 3Δ πλέγματος τετραεδρικών στοιχείων. Ελέγχοντας τις επιφάνειες δώδεκα εσωτερικών τριγώνων για κάθε τετράεδρο, αποτρέπεται ο μηδενισμός των όγκων των τετραεδρικών στοιχείων του πλέγματος. Η διαμόρφωση δώδεκα συνολικά εσωτερικών τριγώνων για το τετράεδρο επιλέγεται για λόγους βελτίωσης της λειτουργίας της μεθόδου.

Τέταρτον, παρουσιάζονται εφαρμογές της μεθόδου για διάφορες περιπτώσεις προσαρμογής πλεγμάτων που αναφέρονται στο τέταρτο κεφάλαιο. Τα 2Δ πλέγματα τριγωνικών και τετραπλευρικών στοιχείων αφορούν τη μεμονωμένη αεροτομή NACA στην οποία δίνεται μια παραμόρφωση και η μέθοδος προσαρμόζει το πλέγμα προς αυτή. Η περίπτωση 3Δ πλέγματος αφορά μια πτέρυγα αεροσκάφους. Με δεδομένη την παραμόρφωση της επιφάνεια της πτέρυγας η μέθοδος υπολογίζει τις μετατοπίσεις των εσωτερικών κόμβων του πλέγματος μετακινώντας το προς την παραμορφωμένη επιφάνεια της πτέρυγας. Μια τρίτη εφαρμογή της μεθόδου αποτελεί η 2Δ πτερύγωση συμπίεστη. Εδώ, το νέο στοιχείο είναι η περιοδικότητα, δηλαδή, οι μετατοπίσεις που υπολογίζει η μέθοδος για το παραμορφωμένο πτερύγιο, πρέπει να αναφέρονται σε ολόκληρη την πτερύγωση του συμπίεστη.

Σε όλες τις εφαρμογές οι τιμές μετακίνησης του πλέγματος γίνονται σε πολύ μεγάλες για πραγματικά δεδομένα τιμές, αφενός, για την εξέταση της λειτουργίας της μεθόδου σε περιπτώσεις με μεγάλες και σύνθετες παραμορφώσεις του ορίου, και αφετέρου, για τον καθορισμό των ορίων λειτουργίας της μεθόδου ως προς τη δημιουργία ανεστραμμένων στοιχείων στο προκύπτον πλέγμα. Επίσης, αναπτύχθηκαν μικρά προγράμματα με σκοπό τη μέτρηση και την αξιολόγηση της ποιότητας των προσαρμοσμένων πλεγμάτων μέσω στατιστικών στοιχείων που αφορούν τη μέση ποιότητα, την τυπική απόκλιση και την ελάχιστη ποιότητα των στοιχείων του πλέγματος.

Τέλος, παρουσιάζεται η επίλυση της μη-συνεκτικής συμπίεστης, χρονικά μόνιμης ροής ρευστού για την περίπτωση της παραμορφωμένης πτέρυγας με τη μέθοδο των στρεπτικών ελατηρίων. Η επίλυση της ροής έγινε με χρήση κώδικα CFD που έχει αναπτυχθεί από το Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών του Ε.Μ.Π.

Για περιπτώσεις πλεγμάτων μικρής διάστασης τα κέρδη από τη χρήση της παρούσας μεθόδου δεν αναμένονται εντυπωσιακά. Αντίθετα, για περιπτώσεις 3Δ πλεγμάτων μεγάλων διαστάσεων, λ.χ. πλεγμάτων χρησιμοποιούμενων σε βιομηχανίες αεροδυναμικής βελτιστοποίησης, η χρήση της μεθόδου προσαρμογής με την τεχνική των στρεπτικών ελατηρίων αποκτά σημαντικό πλεονέκτημα έναντι της επαναπλεγματοποίησης εκ του μηδενός, από πλευράς υπολογιστικού χρόνου που απαιτείται για τη διαθεσιμότητα κατάλληλου υπολογιστικού πλέγματος.

Προτάσεις για περαιτέρω έρευνα θα μπορούσε να αποτελέσει η επέκταση της μεθόδου ώστε να είναι ικανή να διαχειρίζεται και να προσαρμόζει 3Δ πλέγματα διαφορετικού τύπου στοιχείων όπως λ.χ. εξάεδρα, πρίσματα, τετραγωνικές πυραμίδες κ.λ.π. Επίσης, ενδιαφέρον θα αποτελούσε η κατασκευή μηχανισμού ελέγχου των στοιχείων του πλέγματος με συνδυασμό γραμμικών και στρεπτικών ελατηρίων με σκοπό την εξαφάνιση κατά το μέγιστο δυνατό των πολύ μικρών στοιχείων.

Παράρτημα Α΄

Μέτρηση Ποιότητας Πλέγματος

Ένας σημαντικός παράγοντας που αναφέρεται σε κλάδους της Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής είναι η σύνδεση της ποιότητας ενός υπολογιστικού πλέγματος με την επίλυση της ροής πάνω σε αυτό. Ένα πλέγμα υψηλής ποιότητας, μπορεί όχι μόνο να οδηγήσει σε σωστά αποτελέσματα, αλλά και να επιταχύνει τη σύγκλιση του επιλύτη. Αντίθετα, ένα χαμηλής ποιότητας πλέγμα μπορεί να οδηγήσει σε λάθος αποτελέσματα εάν λ.χ. δεν υπάρχει η απαραίτητη πύκνωση στα οριακά στρώματα ή κοντά σε ένα κύμα κρούσης. Στην παρούσα διπλωματική εργασία μελετάται η μέθοδος μετακίνησης-προσαρμογής του πλέγματος με την τεχνική των στρεπτικών ελατηρίων, με σκοπό την αποφυγή της επαναπλεγματοποίησης εκ του μηδενός. Με αυτόν τον τρόπο εξοικονομείται χρόνος, αλλά είναι αναγκαίο να αξιολογηθεί η ποιότητα του προκύπτοντος πλέγματος, ως ένα κριτήριο καταλληλότητας ως προς τη χρήση, λ.χ από λογισμικό CFD.

Για τη μέτρηση της ποιότητας του πλέγματος ορίζονται μετρικές που ποσοτικοποιούν την ποιότητα μέσω σύγκρισης με τη θεωρητικά μέγιστη ποιότητα που μπορεί να έχει ένα πλέγμα (αν λ.χ το πλέγμα αποτελείται από τριγωνικά στοιχεία, βέλτιστο είναι αυτό που αποτελείται από ισόπλευρα τρίγωνα, αν αποτελείται από τετραπλευρικά στοιχεία τότε το βέλτιστο αποτελείται από τετράγωνα κ.ο.κ.). Οι μετρικές περιέχουν πληροφορίες σχετικά με τα βασικά γεωμετρικά χαρακτηριστικά των στοιχείων, όπως λ.χ το μέγεθος, το σχήμα, τον προσανατολισμό και άλλα. Στις ενότητες που ακολουθούν θα γίνει αναφορά στις μετρικές ποιότητας για τριγωνικά, τετραπλευρικά και τετραεδρικά στοιχεία. Πολλά από τα στοιχεία που αφορούν τις μετρικές ποιότητας για την περίπτωση πλέγματος τριγωνικών στοιχείων έχουν παρθεί από τη διπλωματική εργασία [24].

Α΄.1 2Δ Πλέγμα Τριγωνικών Στοιχείων

Αρχικά ορίζεται το ιδανικό στοιχείο, το οποίο σε αυτή την περίπτωση είναι το ισόπλευρο τρίγωνο. Στο παρελθόν έχουν παρουσιαστεί διάφορες εργασίες σχετικές με μετρικές ποιότητας στοιχείων πλέγματος, [25], [26] Στην παρούσα εργασία, επιλέχθηκε

η “μετρική μέσης αναλογίας” (mean-ratio), [27], [28], όπου ορίζεται μια αλγεβρική συνάρτηση η οποία υπολογίζει την ποιότητα του τριγωνικού στοιχείου. Επίσης, με χρήση στατιστικών σχέσεων υπολογίζεται η μέση τιμή της ποιότητας των στοιχείων του πλέγματος και η τυπική απόκλιση.

Για τον καθορισμό της ποιότητας (q_e) ενός τριγωνικού στοιχείου πρέπει πρώτα να καθοριστεί η φορά αρίθμησης των κόμβων του. Μετά από έλεγχο στα στοιχεία του πλέγματος, μέσω υπολογισμού της Ιακωβιανής ορίζουσας, επιλέχθηκε ως θετική η αντιστροφή φορά αρίθμησης των κόμβων. Αυτό σημαίνει ότι το τυχόν αρνητικό πρόσημο της Ιακωβιανής ορίζουσας εκφράζει τα μη-αποδεκτά (ανεστραμμένα) τρίγωνα. Στη συνέχεια, υπολογίζεται η Ιακωβιανή κάθε κόμβου του τριγωνικού στοιχείου T_{ijk} , η οποία για τον κόμβο i εκφράζεται ως

$$A_i = \begin{bmatrix} x_j - x_i & x_k - x_i \\ y_j - y_i & y_k - y_i \end{bmatrix} \quad (A'.1)$$

όπου (x_i, y_i) , (x_j, y_j) και (x_k, y_k) οι συντεταγμένες των τριών κρυφών i , j και k του T_{ijk} αντίστοιχα. Το γινόμενο της Ιακωβιανής αυτής με την αντίστροφη Ιακωβιανή του ιδανικού τριγωνικού στοιχείου, εδώ ισόπλευρου τριγώνου, ορίζουν τον πίνακα S_i

$$S_i = A_i W^{-1} = \begin{bmatrix} x_j - x_i & x_k - x_i \\ y_j - y_i & y_k - y_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}^{-1} \quad (A'.2)$$

ο οποίος απαιτείται για την εύρεση της μετρικής μέσης αναλογίας του κόμβου i . Αυτή ορίζεται ως

$$\mu_i = \mu(S_i) = \frac{\det(S_i)}{\|S_i\|_F^2} \quad (A'.3)$$

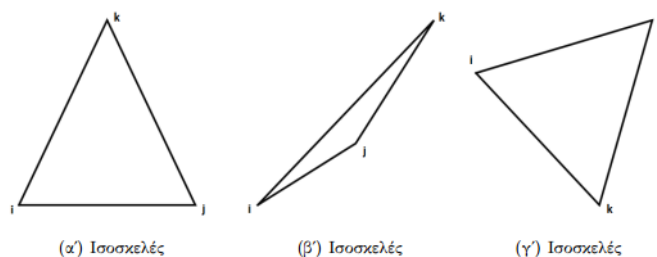
Εδώ $\det(S_i)$ είναι η ορίζουσα του πίνακα S_i , η οποία αν είναι αρνητική σημαίνει ότι το τρίγωνο είναι ανεστραμμένο και $\|\cdot\|_F^2$ είναι η νόρμα κατά Frobenius και ισούται με την τετραγωνική ρίζα του ίχνους γινομένου πινάκων ως

$$\|S_i\|_F = \sqrt{\text{tr}(S_i^T S_i)} \quad (A'.4)$$

όπου το ίχνος ενός πίνακα είναι το άθροισμα των στοιχείων της κύριας διαγωνίου του, λ.χ για τον τυχαίο πίνακα B είναι $\text{tr}(B) = \sum_{i=1}^N B_{ii}$, με N τον αριθμό των γραμμών του B . Ως ποιότητα του τριγωνικού στοιχείου (q_e) ορίζεται το διπλάσιο της μέσης τιμής των μετρικών μέσης αναλογίας κάθε κόμβου, [29], δηλαδή

$$q_e = 2\bar{\mu} \quad \mu \in \quad \bar{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^3 \mu_i}{3} \quad (A'.5)$$

Τέλος στο σχήμα Α'.1 παρουσιάζονται η μετρική ποιότητα, όπως εκφράζεται με τη μετρική μέσης αναλογίας, για τρεις περιπτώσεις τριγωνικών στοιχείων, ενώ στον πίνακα Α'.1 παρατίθενται οι συντεταγμένες των κόμβων κάθε τριγωνικού στοιχείου καθώς και η τιμή της μετρικής ποιότητας (η φορά αρίθμησης των κόμβων είναι από τον i κόμβο προς τον k).



Σχήμα Α'.1: Τρεις περιπτώσεις τριγώνων των οποίων οι μετρικές παρατίθενται στον πίνακα Α'.1. Το τρίγωνο (α), είναι ισόπλευρο με μετρική ποιότητα ίση με τη μονάδα (η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει ένα τρίγωνο με αυτές τις μετρικές), το τρίγωνο (β) είναι χαμηλής ποιότητας, ενώ το (γ) είναι ανεστραμμένο, το οποίο φαίνεται και από την αρίθμηση των κόμβων η οποία είναι ωρολογιακή.

Πίνακας Α'.1: Μετρικές ποιότητας μέσης αναλογίας για κάθε τρίγωνο του σχήματος Α'.1.

κορυφή	x_α	y_α	x_β	y_β	x_γ	y_γ
i	0	0	0	0	0	0
j	1	0	1	0.2	1	0.2
k	0.5	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1.8	0.6	0.7	-0.5
q_e	1.00		0.153		-	

Α'.2 2Δ Πλέγμα Τετραπλευρικών Στοιχείων

Σε πλέγματα αποτελούμενα από τετραπλευρικά στοιχεία το αντίστοιχο ιδανικό (αυτό που έχει μέση τιμή ποιότητας ίση με τη μονάδα) στοιχείο είναι το τετράγωνο. Στην περίπτωση αυτή υπολογίζεται η συνάρτηση F_{shape} , η οποία εκφράζει τη μετρική ποιότητα σχήματος (shape-metric) του τετραπλευρικού στοιχείου. Πολλά από τα στοιχεία αναφέρονται στο άρθρο [30].

Η Ιακωβιανή ορίζουσα για τον κόμβο i του τετραπλευρικού στοιχείου Q_{ijmk} , με θετική φορά αρίθμησης των κόμβων από τον κόμβο i προς τον κόμβο k , δίνεται από τη σχέση (Α'.1).

Στη συνέχεια για λόγους πληρότητας γίνεται αναφορά στο ιδανικό τετράπλευρο χωρίς αυτό να αποτελεί αναγκαίο στοιχείο για τον υπολογισμό της συνάρτησης F_{shape} . Η

Ιακωβιανή ορίζουσα για το ιδανικό τετράπλευρο είναι

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (A'.6)$$

όπου το τετράπλευρο Q_{ijmk} είναι το μοναδιαίο τετράγωνο με συντεταγμένες κορυφών $i(0,0)$, $j(1,0)$, $m(1,1)$ και $k(0,1)$. Προφανώς η Ιακωβιανή ορίζουσα του μοναδιαίου τετραγώνου ισούται με τη μονάδα, $w = \det(W) = 1$. Όμοια, ορίζονται και άλλα τετράπλευρα πέραν του κανονικού τετραγώνου που έχουν την ίδια τιμή Ιακωβιανής ορίζουσας. Συνεπώς, για λόγους πληρότητας, οι συντεταγμένες των κορυφών των τετραπλευρικών στοιχείων με $w = 1$ προκύπτουν κρατώντας τις τρεις από τις τέσσερις κορυφές σταθερές λ.χ τις $i(0,0)$, $j(1,0)$, $m(1,1)$ και την τέταρτη $k(x_k, y_k)$ να μπορεί να παίρνει τιμές στα σύνολα $-2 < x_k < 1$ και $-2 < y_k < 1$.

Επόμενο βήμα είναι ο υπολογισμός του συμμετρικού πίνακα $S_i = A_i^T A_i$ διάστασης $[2 \times 2]$, ο οποίος θεωρείται ως “μετρικός τανυστής” και γράφεται ως

$$S_i = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \quad (A'.7)$$

όπου τα στοιχεία της διαγωνίου S_{11} και S_{22} εκφράζουν το τετράγωνο των μηκών των ακμών που συνδέουν την κορυφή λ.χ. i με τις κορυφές j και k του τετραπλεύρου Q_{ijmk} αντίστοιχα. Τα μη-διαγώνια στοιχεία του πίνακα S_i εκφράζουν το γινόμενο του μήκους των πλευρών επί το συνημίτονο των αντίστοιχων γωνιών που σχηματίζουν.

Τελικά, ο τύπος που εκφράζει την μετρική ποιότητας σχήματος για το τετραπλευρικό στοιχείο δίνεται στην εξίσωση

$$F_{shape} = \frac{8}{\sum_{node=i}^k (S_{11}^{node} + S_{22}^{node}) / a_{node}} \quad (A'.8)$$

όπου a_{node} είναι η τιμή της Ιακωβιανής ορίζουσας $a_{node} = \det(A_{node})$ που αναφέρεται σε μία από τις τέσσερις κορυφές του τετραπλεύρου Q_{ijmk} . Φυσικά ο δείκτης “node” μεταφέρεται κυκλικά ανάλογα με τον κόμβο του πλέγματος που αποτελεί την αντίστοιχη κορυφή του τετραπλεύρου που αναφέρεται.

Η συνάρτηση (A'8) παίρνει τιμές στο διάστημα $[0,1]$ με μέγιστη την τιμή $F_{shape} = 1$, αν και μόνο αν, για το εν λόγω τετράπλευρο ισχύει $a = w = 1$. Αν η συνάρτηση αυτή τείνει στη μηδενική τιμή, τότε το εμβαδόν του τετραπλεύρου τείνει στο μηδέν. Το αρνητικό πρόσημο της συνάρτησης, σε περίπτωση μεγάλης παραμόρφωσης του πλέγματος, δηλώνει την ύπαρξη ανεστραμμένων τετραπλευρικών στοιχείων στο πλέγμα.

Α'.3 3Δ Πλέγμα Τετραεδρικών Στοιχείων

Για τη μέτρηση της ποιότητας 3Δ πλέγματος με τετραεδρικά στοιχεία χρησιμοποιούνται στοιχεία από το άρθρο [30] που αναφέρονται σε μετρικές ποιότητας σχήματος (shape-metrics). Η έννοια της μετρικής αυτής εστιάζεται στην ανίχνευση διαστρεβλώσεων των τετραέδρων, ανεξάρτητα από το μέγεθός τους. Ως στοιχείο αναφοράς επιλέγεται το ισόπλευρο τετράεδρο και η μετρική ποιότητας που προκύπτει λειτουργεί ως ένα μέτρο σύγκρισης του σχήματος των τετραέδρων του πλέγματος με το ισόπλευρο τετράεδρο και είναι ανεξάρτητη από την κλίμακα των στοιχείων του.

Ένα τετραεδρικό στοιχείο αποτελείται από τέσσερις κορυφές που αποτελούν κόμβους του πλέγματος. Για έναν κόμβο του πλέγματος, λ.χ τον i , ο οποίος έχει συντεταγμένες (x_i, y_i, z_i) και αποτελεί κορυφή του τετραεδρικού στοιχείου T_{ijkl} , ορίζεται ο πίνακας

$$A_i = (-1)^i \begin{bmatrix} x_j - x_i & x_l - x_i & x_k - x_i \\ y_j - y_i & y_l - y_i & y_k - y_i \\ z_j - z_i & z_l - z_i & z_k - z_i \end{bmatrix} \quad (A'.9)$$

Η ορίζουσα $a_i = \det A_i$ υπολογίζει έξι φορές τον όγκο V_{ijkl} του T_{ijkl} και είναι η ίδια για όλες τις κορυφές του τετραέδρου. Έτσι προκύπτουν τέσσερις Ιακωβιανές ορίζουσες, μία για κάθε κορυφή του T_{ijkl} . Επιπλέον, μέσω του γινομένου του ανάστροφου A_i^T και του πίνακα A_i για τον κόμβο i , προκύπτει ο συμμετρικός πίνακας $S_i = A_i^T A_i$ διάστασης $[3 \times 3]$ ο οποίος θεωρείται ως “μετρικός ταυστής”.

$$S_i = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \quad (A'.10)$$

όπου τα στοιχεία της διαγωνίου S_{diag} εκφράζουν το τετράγωνο των μηκών των ακμών που συνδέουν την κορυφή i με τις κορυφές j, l, k του T_{ijkl} αντίστοιχα. Τα μη-διαγώνια στοιχεία $S_{off-diag}$ του πίνακα S_i εκφράζουν το γινόμενο του μήκους των πλευρών επί το συνημίτονο των αντίστοιχων γωνιών που σχηματίζουν.

Η συνάρτηση που εκφράζει την μετρική ποιότητας σχήματος είναι

$$F_{shape} = \frac{3(a\sqrt{2})^{2/3}}{\frac{3}{2}(S_{11} + S_{22} + S_{33}) - (S_{12} + S_{23} + S_{13})} \quad (A'.11)$$

Η συνάρτηση αυτή παίρνει τιμές στο διάστημα $[0,1]$ με μέγιστη την τιμή $F_{shape} = 1$, αν και μόνο αν, το εν λόγω τετράεδρο είναι το ισόπλευρο τετράεδρο. Αν η συνάρτηση πάρει τη μηδενική τιμή, αυτό σημαίνει ότι το τετράεδρο έχει εκφυλιστεί. Τέλος, τα τετραεδρικά στοιχεία των οποίων ο όγκος έχει αρνητική τιμή θεωρούνται άκυρα και δεν συμπεριλαμβάνονται στη μετρική.

Βιβλιογραφία

- [1] A.Masud, M.Bhanabhagvanwala, A.Khurram: *An adaptive mesh rezoning scheme for moving boundary flows and fluid-structure interaction*. Computers and Fluids, 36(1):77-91, 31/01-2007.
- [2] I.Habashi, W.G. II.Hafez, M.M.: *Computational Fluid Dynamic Techniques*. Gordon and Breach Publishers, 1995.
- [3] C.Farhat, C.Degand, B.Coobus and M.Lesoinne: *Torsional springs for two-dimensional dynamic unstructured fluid meshes*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 163(1-4):231-245, 21/9/1998.
- [4] M. Biancolini, I. Viola, M. Riotte.: *Sails trim optimisation using cfd and rbf mesh morphing*. Computer and Fluids, 93:46-60, 10/04/2014.
- [5] Sieger, D., Menzel, S., and Botsch, M.: *Rbf morphing techniques for simulation-based design optimization*. Engineering with Computers, 30(2):161-174, 04/2014.
- [6] Lynch, D.: *Unified approach to simulation on deforming element with application to phase change problems*. Journal of Computational Physics, 47(3):387-411, 09/1982.
- [7] D. Lynch, K. O'Neil: *Elastic grid deformation for moving boundary problems in two space dimensions*. In 3rd International Conference, Missisipi University, Oxford, May 19-23 1980.
- [8] H. Braess, P. Wriggers: *Arbitrary lagrangian eulerian finite element analysis of free surface flow*. Computer Methods in Applied Mechanics % Engineering, 190(1-2):95-109, 13/10/2000.
- [9] Τρομπούκης, Ξ.: *Αριθμητική επίλυση προβλημάτων αεροδυναμικής-αεροελαστικότητας σε επεξεργαστές καρτών γραφικών*. Διδακτορική διατριβή, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2012.
- [10] Z., Dai Zhou, Yan Bao D. Xia-ping: *Mesh motion approach based on spring analogy method for unstructured meshes*. Journal of Shanghai Jiaotong University (Science), 15(2):138-146, 04/2010.

- [11] C.Degand and C.Farhat: *A three-dimensional torsional spring analogy method for unstructured dynamic meshes*. Computers and Structures, 80(3):305-316, 28/2/2002.
- [12] Γ.Ελευθερίου: *Προγραμματισμός Παράλληλου Επιλύτη Εξισώσεων Euler για 3D Ροές σε Δομημένα Πλέγμα σε Συστοιχίες Καρτών*. Διπλωματική Εργασία, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2012.
- [13] Γ.Λιγιδάκης: *Ανάπτυξη Μεθοδολογίας Αυτόματης Πύκνωσης Μη-Δομημένου Πλέγματος κατά την Αριθμητική Επίλυση των Εξισώσεων Euler στις Τρεις Διαστάσεις*. Διπλωματική Εργασία, Τμήμα Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης, Πολυτεχνείο Κρήτης, Χανιά, 2009.
- [14] Γ.Κανέλης: *Θεμελίωση και προγραμματισμός της μεθόδου της Ισορροπίας των Αρμονικών στην αριθμητική επίλυση περιοδικών πεδίων ροής*. Διπλωματική Εργασία, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2011.
- [15] Γ.Ντανάκας: *Επίλυση Διδιάστατης Ροής με Κεντροκυβελική Διατύπωση σε Μη-Δομημένα Πλέγματα. Προγραμματισμός σε Επεξεργαστές Καρτών Γραφικών*. Διπλωματική Εργασία, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2012.
- [16] Κ.Σαμούχος: *Δημιουργία Υποδομής για την Πρόλεξη Ροής σε Στροβιλομηχανές Κύλισης χρησιμοποιούμενες σε Υπερκρίσιμους Οργανικούς Κύκλους Ρανκινε. Προγραμματισμός Λογισμικού Ανάλυσης-Βελτιστοποίησης των παραπάνω Κύκλων*. Διπλωματική Εργασία, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2013.
- [17] J.Steger, R.Warming: *Flux vector splitting of the inviscid gasdynamic equations with application to the finite-difference methods*. Journal of Computational Physics, 40(2):263-293, 04/1981.
- [18] V.Asouti, X.Trompoukis, I.Kampolis K.Giannakoglou: *Unsteady cfd computations using vertex-centered finite volumes for unstructured grids on graphics processing units*. International journal for numerical methods in fluids, 2010.
- [19] Kampolis I., Trompoukis X., Asouti V. Giannakoglou K.: *Cfd-based analysis and two-level aerodynamic optimization on graphics processing units*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2010.
- [20] X.Trompoukis, V. Asouti, I.Kampolis K.Giannakoglou: *Cuda implementation of vertex-centered, finite volume cfd methods on unstructured grids with flow control applications*. GPU Computing Gems, 2012.
- [21] Roe, P.L: *Approximate riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes*. Journal of Computational Physics, 43(2):357-372, 10/1981.

- [22] L. Fezoui, B.Stoufflet: *A class of implicit upwind schemes for euler simulations with unstructured meshes*. Journal of Computational Physics, 84(1):174-206, 09/1989.
- [23] Γ.Καβαδίας: *Προγραμματισμός επιλύτη 3D εξισώσεων ροής ατρίβους ρευστού σε δομημένα πλέγματα σε κάρτες γραφικών*. Διπλωματική Εργασία, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2011.
- [24] Λιατσικούρας, Α: *Προγραμματισμός μεθόδου παραμόρφωσης πλέγματος με συναρτησείς ακτινικής βάσης και προσταθεροποιητή για χρήση στην αεροδυναμική βελτιστοποίηση*. Διπλωματική Εργασία, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2015.
- [25] Knupp, P. M.: *Algebraic mesh quality metrics*. SIAM J. Sci. Comput., 23(1):193-218, 01/2001.
- [26] Dompierre, J., Labbe P. Guibault .F and Camerero, R.: *Proposal of benchmarks for 3d unstructured tetrahedral mesh optimization*. Proceedings of the 7th International Meshing Roundtable, Dearborn, Michigan, USA 26-28, Sandia National Lab,pp.459-478, /10/1998.
- [27] A. Liu, B. Joe: *Relationship between tetrahedron shape measures*. BIT Numerical Mathematics, 34(2):268-287, 1994.
- [28] Munson., T.: *Mesh shape-quality optimization using the inverse-mean ration metric*. Mathematical Programming, 110(3):561-590, 09/2007.
- [29] Λιακόπουλος, Π.: *Γένεση μη-δομημένων πλεγμάτων και διαχείρισή τους σε μεθόδους ανάλυσης και βελτιστοποίησης συνιστωσών στροβιλομηχανών και εφαρμογές, αξιοποιώντας τεχνολογίες πλέγματος*. Διδακτορική διατριβή, Εργαστήριο θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2008.
- [30] Knupp, P. M.: *Algebraic mesh quality metrics for unstructured initial meshes*. Finite Elements in Analysis and Design, 39(3):217-241, 01/2013.