Εθνικο Μετσοβιο Πολυτεχνειο

Σχολη Μηχανολογων Μηχανικων

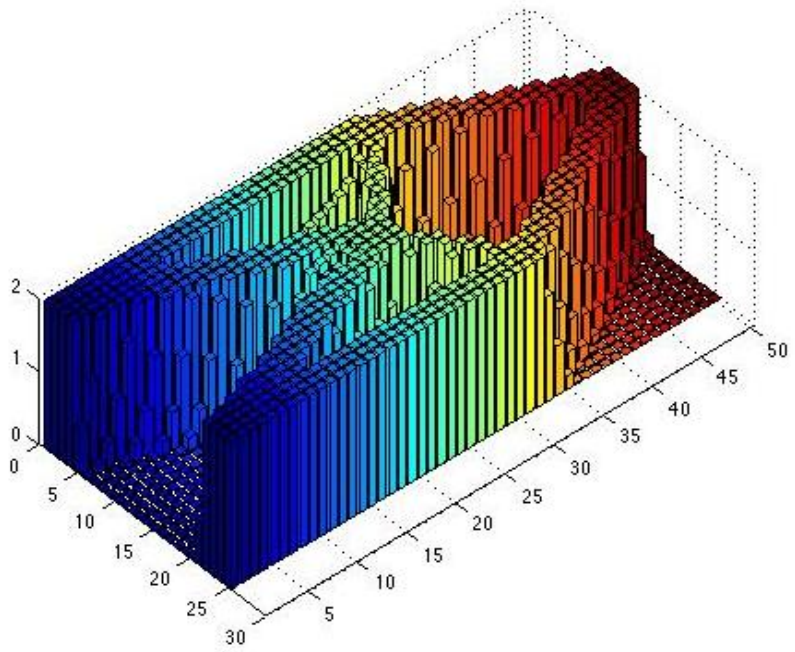
Τομεας Μηχανολογικων Κατασκευων & Αυτοματου Ελεγχου

Τοπολογική Βελτιστοποίηση Κατασκευών

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

του

ΜΙΧΑΗΛ ΤΣΟΥΜΑΚΗ



Επιβλέπων : Χριστόφορος Προβατίδης
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Ιούλιος 2015

Ευχαριστίες

Με την εκπόνηση της παρούσας Διπλωματικής Εργασίας ολοκληρώνονται οι σπουδές μου ως προπτυχιακού φοιτητή της Σχολής Μηχανολόγων Μηχανικών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Ιδιαίτερες ευχαριστίες απευθύνονται στον επιβλέποντα της εργασίας, Καθηγητή της Σχολής Μηχανολόγων Μηχανικών, Δρ. Χριστόφορο Προβατίδη για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε με την ανάθεση της παρούσας διπλωματικής, για την άριστη συνεργασία καθώς επίσης και για τις γνώσεις και την εμπειρία που μου μετέδωσε.

Επίσης, ευχαριστώ την Δρ. Κλειώ Βόσσου για τις συμβουλές και την καθοδήγησή της.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου, Φρειδερίκο και Ζωή, που στάθηκαν αρωγοί σ' όλη την διάρκεια των σπουδών μου.

Περίληψη

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία ασχολείται με την τοπολογική βελτιστοποίηση διδιάστατων κατασκευών, και συγκεκριμένα με την ελαχιστοποίηση του βάρους τους υπό περιορισμό τάσης ή μετατόπισης.

Αρχικά, παρουσιάζονται τα είδη της βελτιστοποίησης κατασκευών και οι βασικές μέθοδοι τοπολογικής βελτιστοποίησης.

Στη συνέχεια, αναδεικνύοντας ως κυρίαρχη τη μέθοδο SIMP, γίνεται εκτενής ανάλυσή της, αφενός σε θεωρητικό επίπεδο, αποσαφηνίζοντας τον τρόπο λειτουργίας της και αφετέρου σε αριθμητικό, με εφαρμογή της μεθόδου σε κλασσικές διδιάστατες κατασκευές συνεχούς μέσου, έτσι ώστε να σκιαγραφηθούν τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματά της.

Παρατηρώντας ότι η μέθοδος SIMP δεν οδηγεί σε κατασκευές πλήρους έντασης εφαρμόζεται αλγόριθμος βελτιστοποίησης βάρους υπό περιορισμό τάσης, σύμφωνα με τη μέθοδο σχεδιασμού πλήρους έντασης (FSD). Η μέθοδος FSD εφαρμόστηκε σε τυπικά παραδείγματα συνεχούς μέσου αναλύοντας τόσο τη συμπεριφορά της αντικειμενικής συνάρτησης και του περιορισμού κατά τη διάρκεια της βελτιστοποίησης, όσο και τις τοπολογίες οι οποίες προκύπτουν. Εν συνεχεία, έγινε εφαρμογή της μεθόδου FSD σε δικτυωτές κατασκευές που προσομοιάζουν τα παραδείγματα του συνεχούς μέσου. Τα αποτελέσματα της βελτιστοποίησης του συνεχούς και διακριτού μέσου συγκρίνονται οδηγώντας στην εξαγωγή συμπερασμάτων σχετικά με τον λόγο αναλογίας της διακριτοποίησης των κατασκευών ώστε να προκύπτει βέλτιστη λύση.

Ακολουθεί η εφαρμογή μεθόδου ελαχιστοποίησης βάρους υπό περιορισμό μετατόπισης σε δικτυωτές κατασκευές. Η μέθοδος, χρησιμοποιώντας το θεώρημα μοναδιαίου φορτίου, εισάγει έναν πρωτότυπο ενεργειακό συντελεστή μέσω του

οποίου επιτυγχάνεται η αναγνώριση των ενεργειακά παθητικών και ενεργητικών ράβδων της κατασκευής και η κατάλληλη διαστασιολόγησή τους. Η απόδοση της μεθόδου ελέγχτηκε μέσω της εφαρμογής της στις γεωμετρίες που εφαρμόστηκε βελτιστοποίηση υπό περιορισμό τάσης, συγκρίνοντας τα αποτελέσματά τους

Τέλος αναπτύχθηκε μια νέα μέθοδος τοπολογικής βελτιστοποίησης συνεχούς μέσου υπό περιορισμό μετατόπισης. Συγκεκριμένα, η βέλτιστη κατανομή υλικού, και συνεπώς βάρους, βασίζεται στην ανάπτυξη ενός βέλτιστου κριτηρίου το οποίο χρησιμοποιεί την ενεργειακή μεταβλητή που εισήχθηκε στην προηγούμενη μέθοδο του διακριτού προβλήματος, αναδιαμορφωμένο βέβαια ώστε να πληροί τις καταστατικές εξισώσεις του συνεχούς μέσου. Η μέθοδος εφαρμόστηκε στα χαρακτηριστικά παραδείγματα της βιβλιογραφίας και συγκρίθηκε εκτενώς με την μέθοδο SIMP παρουσιάζοντας ιδιαιτέρως ενθαρρυντικά αποτελέσματα. Ειδικότερα, έγινε εμφανής η δυϊκότητα των δύο μεθόδων καθώς επίσης και η παρόμοια απόδοσή τους. Τέλος, ο αλγόριθμος τροποποιήθηκε ώστε να απαντάει και στο πρόβλημα με ταυτόχρονους περιορισμούς τάσης και μετατόπισης.

Λέξεις Κλειδιά: Τοπολογική βελτιστοποίηση, περιορισμός τάσης, περιορισμός μετατόπισης, συνεχές μέσο, δικτυώματα, SIMP, FSD

Abstract

The present Diploma Thesis deals with the optimization of two-dimensional structures. Specifically, it investigates the performance of different methods in the weight minimization of structures under known loads, utilizing stress or displacement constraints.

Initially, the classes of structural optimization are described, emphasizing to the topology optimization where the most representative methods have been outlined. Then, highlighted as predominant, the SIMP method, is analyzed both theoretically, by clarifying the optimization procedure, and numerically, by the implementation of the method in standard two-dimensional continuum benchmarks in order to trace its advantages and disadvantages.

Observing that SIMP method doesn't lead to fully stressed structures a weight minimization algorithm under stress constraint was applied coupled to the Fully Stressed Design method (FSD). The FSD method was applied to the benchmark examples of continuum structures monitoring both the behavior of the objective function during optimization, and the optimized topologies.

Furthermore the FSD method was applied in truss-like structures equivalent to the examples of the continuous ones. The results of the optimization of both continuous and discrete structures were compared, leading to useful conclusions on the aspect ratio for the basic discrete unit in order to have an optimal solution.

After that, it follows the application of a weight minimization method under displacement constraint. This method, using the unit load theorem, introduces a breakthrough energy variable. This variable leads to the identification of passive and active bars of the structure and their proper dimensioning. The performance of the

method was tested through its implementation in the same benchmarks showing the differences in optimized structures when the constraint is changed.

Finally, a new topology optimization method for continuum structures under displacement constraint was developed. Specifically, the optimum material distribution is based on the development of an optimality criterion which uses the energy variable, introduced previously, and modified in order to satisfy the equations of continuous medium. The method was applied in several benchmarks and extensively compared to the SIMP method exhibiting encouraging results. In particular, the duality of the two methods became clear as well as their similar performance. Concluding, the algorithm was modified to answer to the problem with concurrent stress and displacement constraints.

Keywords: Topology optimization, stress constraint, displacement constraint, continuous medium, trusses, SIMP, FSD

Πίνακας περιεχομένων

Τοπολογική βελτιστοποίηση κατασκευών **1**

1 Βελτιστοποίηση κατασκευών **1**

1.1 Εισαγωγή 1

1.2 Ιστορική Αναδρομή 2

1.3 Το μαθηματικό μοντέλο 4

1.4 Κατηγορίες βελτιστοποίησης κατασκευών 5

1.4.1 Βελτιστοποίηση Τοπολογίας *5*

1.4.2 Βελτιστοποίηση Σχήματος *6*

1.4.3 Βελτιστοποίηση Μεγέθους *6*

1.5 Βασικές μεθοδολογίες Τοπολογικής Βελτιστοποίησης 7

1.5.1 Άμεσες αιτιοκρατικές μέθοδοι βελτιστοποίησης *7*

1.5.2 Άμεσες στοχαστικές μέθοδοι βελτιστοποίησης *7*

1.5.3 Έμμεσες μέθοδοι βελτιστοποίησης *12*

1.6 Σύγκριση των μεθόδων SIMP και ESO 19

2 Η μέθοδος SIMP **20**

2.1 Σχεδιασμός ελάχιστης ενδοτικότητας (minimum compliance design) 21

2.2 Μεταβλητή σχεδιασμού 22

2.3 Συνθήκη βελτιστότητας 24

2.4 Εφαρμογή της Μεθόδου Βέλτιστων Κριτηρίων 26

2.5 Φιλτράρισμα της ευαισθησίας 30

2.6 Επίδραση των συντελεστών σχεδίασης στη βέλτιστη λύση 34

2.6.1 Επίδραση της πυκνότητας του πλέγματος *34*

2.6.2 Επίδραση της τιμή του συντελεστή ποινής *35*

2.6.3 Επίδραση της ακτίνας φίλτρου *36*

2.7 Αξιολόγηση αλγορίθμου σε κατασκευές αναφοράς 37

2.7.1 Πρόβολος (1) *38*

2.7.2 Πρόβολος (2) *45*

2.7.3 Αμφιέριστη πλάκα *51*

2.7.4 Κοντός Πρόβολος *57*

3 Βελτιστοποίηση κατασκευών συνεχούς μέσου υπό περιορισμό τάσης 63

3.1 Ο αλγόριθμος 64

3.2 Εφαρμογή της FSD σε κατασκευές αναφοράς 66

3.2.1 Πρόβολος (1) *67*

3.2.2 Πρόβολος (2) *72*

3.2.3 Αμφιέριστη πλάκα *77*

3.2.4 Κοντός Πρόβολος *83*

4 Βελτιστοποίηση δικτυωτών κατασκευών υπό περιορισμό τάσης 89

4.1 Ανάλυση σκελετικής κατασκευής 90

4.2 Ο αλγόριθμος 92

4.3 Εφαρμογή της FSD σε δικτυωτές κατασκευές αναφοράς 93

4.3.1 Δικτυωτός Πρόβολος (1) *94*

4.3.2 Δικτυωτός Πρόβολος (2) *102*

4.3.3 Αμφιέριστο Δικτύωμα *110*

4.3.4 Δικτυωτός Κοντός Πρόβολος *120*

5 Βελτιστοποίηση δικτυωτών κατασκευών υπό περιορισμό μετατόπισης 127

5.1 Η μέθοδος Fully Utilized Design (FUD) 127

5.2 Θεώρημα μοναδιαίου φορτίου 128

5.3 Ανάπτυξη αναγωγικού τύπου βελτιστοποίησης 132

5.4 Ο Αλγόριθμος 134

5.5 Αξιολόγηση της μεθόδου σε δικτυωτές κατασκευές αναφοράς 134

5.5.1 Δικτυωτός Πρόβολος (1) *135*

5.5.2 Δικτυωτός Πρόβολος (2) *141*

5.5.3 Αμφιέριστο υπερστατικό δικτύωμα *146*

5.5.4 Κοντός Πρόβολος *151*

6 Νέα μέθοδος βελτιστοποίησης συνεχούς μέσου υπό περιορισμό μετατόπισης **156**

6.1 Θεώρημα μοναδιαίας δύναμης στο συνεχές μέσο 156

6.2 Συνθήκες βελτιστότητας 161

6.3 Ο αναδρομικός τύπος βελτιστοποίησης 163

6.4 Αλγόριθμος βελτιστοποίησης 165

6.5 Φίλτρο 169

6.5.1 Το γεωμετρικό φίλτρο *169*

6.5.2 Αξιολόγηση αλγορίθμου σε κατασκευές αναφοράς *172*

6.5.3 Πρόβολος (1) *172*

6.5.4 Πρόβολος (2) *191*

6.5.5 Αμφιέριστη πλάκα *204*

6.5.6 Πρόβολος (3) *217*

6.5.7 Πρόβολος L-shaped *225*

6.6 Επέκταση αλγορίθμου για βελτιστοποίηση υπό περιορισμό μετατόπισης και τάσης 235

7 Επίλογος **238**

Βιβλιογραφία **241**

Κατάλογος Σχημάτων

Σχήμα 1.1: Παράδειγμα βελτιστοποίησης a) μεγέθους, β) σχήματος, γ) τοπολογίας. ..5
Σχήμα 1.2: Σύγκριση μεθόδων ποινικοποίησης ενδιάμεσων πυκνοτήτων a) SIMP, β) RAMP, γ) SINH. 13
Σχήμα 1.3: Παράδειγμα τεσσάρων πρώτων σταδίων κατά την διαδικασία κυτταρικής διαίρεσης 16
Σχήμα 1.4: Δημιουργία τοπολογίας για μία πτέρυγα με την βοήθεια των χαρτών L .. 17
Σχήμα 1.5: Παραστάσεις απεικόνισης τοπολογιών με συναρτήσεις Lever Set 18
Σχήμα 2.1: Διάγραμμα ροής για την τοπολογική βελτιστοποίηση με τη μέθοδο κατανομής υλικού. 27
Σχήμα 2.2: Μοτίβο σκακιέρας σε κατασκευή 32
Σχήμα 2.3: Μοτίβο σκακιέρας, επιτρεπτό για τη FEM αλλά απαράδεκτο στην πράξη 32
Σχήμα 2.4: Γραφική παράσταση της συνάρτησης φιλτραρίσματος (2.29) 33
Σχήμα 2.5: διάγραμμα πυκνότητας χωρίς και με φίλτρο 33
Σχήμα 2.6 : Τοπολογική βελτιστοποίηση απλού προβόλου για διαφορετικές πυκνότητες πλέγματος α) και β) 34
Σχήμα 2.7:Βέλτιστες λύσεις με διαφορετικό αριθμό ράβδων 35
Σχήμα 2.8: Τοπολογική βελτιστοποίηση για a) p=1, β) p=3, γ) p=5 36
Σχήμα 2.9: Τοπολογική βελτιστοποίηση για α) $r_{\min} = 1$, β) $r_{\min} = 1.5$, γ) $r_{\min} = 3.5$ 37
Σχήμα 2.10: Σχηματική απεικόνιση προβόλου (1) 38
Σχήμα 2.11: Κατανομή τάσης και ψευδοτάσης σε βελτιστοποιημένο σχήμα με όριο όγκου 0,5 41
Σχήμα 2.12: Διάγραμμα μέγιστης μετατόπισης-ορίου όγκου για πρόβολο παραδείγματος 1 42

Σχήμα 2.13: Διάγραμμα μέγιστων τάσεων von Mises-ορίου όγκου για τον πρόβολο 1 43
Σχήμα 2.14: Διάγραμμα μέσης τάσης von Mises-ορίου όγκου για πρόβολο παραδείγματος 1. Εμφανίζονται επίσης η τυπική απόκλιση σε μορφή error bar 44
Σχήμα 2.15: Συγκέντρωση τάσης σε βελτιστοποιημένη κατασκευή με όριο όγκου 0,5 44
Σχήμα 2.16: 3D απεικόνιση της βελτιστοποιημένης κατασκευής με όριο όγκου 0,5 . 45
Σχήμα 2.17: Σχηματική απεικόνιση προβόλου (2) 45
Σχήμα 2.18: Κατανομή τάσης και ψευδοτάσης σε βελτιστοποιημένο σχήμα με όριο όγκου 0,3 48
Σχήμα 2.19: Διάγραμμα μέγιστης μετατόπισης-ορίου όγκου για πρόβολο παραδείγματος 2 48
Σχήμα 2.20: Διάγραμμα μέγιστης τάσης von Mises-ορίου όγκου για πρόβολο παραδείγματος 2 49
Σχήμα 2.21: Διάγραμμα μέσης τάσης von Mises-ορίου όγκου για πρόβολο παραδείγματος 2. Εμφανίζεται επίσης η τυπική απόκλιση σε μορφή error bar 49
Σχήμα 2.22: Συγκέντρωση τάσης σε βελτιστοποιημένη κατασκευή προβόλου (2) με όριο όγκου 0,2 50
Σχήμα 2.23: 3D απεικόνιση βελτιστοποιημένου προβόλου (2) με όριο όγκου 0,4 50
Σχήμα 2.24: Σχηματική απεικόνιση αμφιέριστης πλάκας 51
Σχήμα 2.25: Κατανομή τάσης και ψευδοτάσεων σε βελτιστοποιημένο σχήμα με όριο όγκου 0,3 54
Σχήμα 2.26: Διάγραμμα μέγιστης μετατόπισης-ορίου όγκου για αμφιέριστη πλάκα . 55
Σχήμα 2.27: Διάγραμμα μέγιστης τάσης von Mises-ορίου όγκου για αμφιέριστη πλάκα 55
Σχήμα 2.28: Διάγραμμα μέσης τάσης-ορίου όγκου για αμφιέριστη πλάκα. Εμφανίζεται επίσης η τυπική απόκλιση σε μορφή error bar 56
Σχήμα 2.29: Συγκέντρωση τάσης σε βελτιστοποιημένη κατασκευή αμφιέριστης πλάκας με όριο όγκου 0,1 56
Σχήμα 2.30: 3D απεικόνιση βελτιστοποιημένης αμφιέριστης πλάκας με όριο όγκου 0,4 57
Σχήμα 2.31: Σχηματική απεικόνιση κοντού προβόλου 57

Σχήμα 2.32: Κατανομή τάσης και ψευδοτάσης σε βελτιστοποιημένο σχήμα με όριο όγκου 0,3 60
Σχήμα 2.33: Διάγραμμα μέγιστης μετατόπισης-ορίου όγκου για κοντό πρόβολο 60
Σχήμα 2.34: Διάγραμμα μέγιστης τάσης von Mises-ορίου όγκου για κοντό πρόβολο 61
Σχήμα 2.35: Διάγραμμα μέσης τάσης-ορίου όγκου για αμφιέριστη πλάκα. Εμφανίζεται επίσης η τυπική απόκλιση σε μορφή error bar 61
Σχήμα 2.36: Συγκέντρωση τάσης σε βελτιστοποιημένη κατασκευή αμφιέριστης πλάκας με όριο όγκου 0,3 62
Σχήμα 2.37: 3D απεικόνιση βελτιστοποιημένης αμφιέριστης πλάκας με όριο όγκου 0,3..... 62
Σχήμα 3.1 Σχηματική απεικόνιση προβόλου(1) 67
Σχήμα 3.2: Κατανομή τάσης στην αρχική συνεχή πλάκα 67
Σχήμα 3.3: 3D απεικόνιση της βελτιστοποιημένης κατασκευής που παράγεται με την μέθοδο FSD..... 68
Σχήμα 3.4: Διάγραμμα πορείας σύγκλισης της αντικειμενικής συνάρτησης 69
Σχήμα 3.5: Διάγραμμα πορείας μέγιστης τάσης von Mises 70
Σχήμα 3.6: Ιστόγραμμα κατανομής πάχους στοιχείων με 1000 κλάσεις..... 71
Σχήμα 3.7: Ιστόγραμμα κατανομής πάχους στοιχείων με 7 κλάσεις..... 72
Σχήμα 3.8: Σχηματική απεικόνιση προβόλου(2) 72
Σχήμα 3.9: Κατανομή τάσης συνεχούς προβόλου(2) 73
Σχήμα 3.10: 3D απεικόνιση της βελτιστοποιημένης κατασκευής 73
Σχήμα 3.11: Διάγραμμα πορείας σύγκλισης της αντικειμενικής συνάρτησης 74
Σχήμα 3.12: Διάγραμμα πορείας μέγιστης τάσης von Mises 75
Σχήμα 3.13: Ιστόγραμμα κατανομής πάχους στοιχείων με 1000 κλάσεις..... 76
Σχήμα 3.14: Ιστόγραμμα κατανομής πάχους στοιχείων με 7 κλάσεις..... 76
Σχήμα 3.15: Σχηματική απεικόνιση αμφιέριστης πλάκας 77
Σχήμα 3.16: Κατανομή τάσης συνεχούς αμφιέριστης πλάκας 78
Σχήμα 3.17: 3D απεικόνιση βελτιστοποιημένης κατασκευής μισής αμφιέριστης πλάκας..... 78
Σχήμα 3.18: 3D απεικόνιση βελτιστοποιημένης κατασκευής ολόκληρης αμφιέριστης πλάκας..... 79
Σχήμα 3.19: Διάγραμμα πορείας σύγκλισης της αντικειμενικής συνάρτησης 80

Σχήμα 3.20: Διάγραμμα πορείας μέγιστης τάσης von Mises 81
Σχήμα 3.21: Ιστόγραμμα κατανομής πάχους στοιχείων με 1000 κλάσεις..... 82
Σχήμα 3.22: Ιστόγραμμα κατανομής πάχους στοιχείων με 7 κλάσεις..... 82
Σχήμα 3.23:Σχηματική απεικόνιση κοντού προβόλου 83
Σχήμα 3.24: Κατανομή τάσης συνεχούς κοντού προβόλου 83
Σχήμα 3.25: 3D απεικόνιση βελτιστοποιημένης κατασκευής 84
Σχήμα 3.26: Διάγραμμα πορείας σύγκλισης της αντικειμενικής συνάρτησης 85
Σχήμα 3.27: Διάγραμμα πορείας μέγιστης τάσης von Mises 86
Σχήμα 3.28: Ιστόγραμμα κατανομής πάχους στοιχείων με 1000 κλάσεις..... 87
Σχήμα 3.29: Ιστόγραμμα κατανομής παχών στοιχείων με 7 κλάσεις..... 87
Σχήμα 4.1: Παράσταση βασικών μονάδων διακριτού και συνεχούς προβλήματος 90
Σχήμα 4.2: Σχηματική απεικόνιση του δικτυωτού προβλήματος προβόλου (1) 94
Σχήμα 4.3: Βέλτιστες κατασκευές με λόγο αναλογίας λ=2 με πλέγμα α) 2X2 β)4X4 γ)6X6..... 97
Σχήμα 4.4: Διάγραμμα όγκου-λόγου αναλογίας λ συνεχής και δικτυωτής κατασκευής 98
Σχήμα 4.5: Σημείο επικάλυψης δοκών 99
Σχήμα 4.6: Διάγραμμα πορείας σύγκλισης της αντικειμενικής συνάρτησης 99
Σχήμα 4.7: Διάγραμμα πορείας μέγιστων τάσεων von Mises 100
Σχήμα 4.8: Ιστόγραμμα κατανομής πάχους στοιχείων με 1000 κλάσεις..... 101
Σχήμα 4.9: Ιστόγραμμα κατανομής πάχους στοιχείων με 30 κλάσεις..... 102
Σχήμα 4.10: Σχηματική απεικόνιση δικτυωτού προβόλου (2) 102
Σχήμα 4.11: Διάγραμμα όγκου-λόγου αναλογίας λ συνεχής και δικτυωτής κατασκευής 106
Σχήμα 4.12: Σημείο επικάλυψης δοκών 106
Σχήμα 4.13: Διάγραμμα πορείας σύγκλισης της αντικειμενικής συνάρτησης 107
Σχήμα 4.14: Διάγραμμα πορείας μέγιστων τάσεων von Mises 108
Σχήμα 4.15: Ιστόγραμμα κατανομής πάχους στοιχείων με 1000 κλάσεις..... 109
Σχήμα 4.16: Ιστόγραμμα κατανομής πάχους στοιχείων με 30 κλάσεις..... 109
Σχήμα 4.17: Σχηματική απεικόνιση αμφιέριστου δικτυώματος 110
Σχήμα 4.18: Σχηματική απεικόνιση ολόκληρου και μισού αμφιέριστου δικτυώματος 110

Σχήμα 4.19: Βέλτιστες κατασκευές με λόγο αναλογίας λ=2/3 με πλέγμα α) 6Χ2 β)18Χ6γ)36Χ12 114
Σχήμα 4.20: Βέλτιστες κατασκευές με λόγο αναλογίας λ=4/3 με πλέγμα α) 12Χ2 β)24Χ4γ)60Χ10 115
Σχήμα 4.21: Διάγραμμα όγκου-λόγου αναλογίας λ συνεχής και δικτυωτής κατασκευής 116
Σχήμα 4.22: Διάγραμμα πορείας σύγκλισης της αντικειμενικής συνάρτησης 117
Σχήμα 4.23: Διάγραμμα πορείας μέγιστης τάσης von Mises 118
Σχήμα 4.24: Ιστόγραμμα κατανομής πάχους στοιχείων με 1000 κλάσεις..... 119
Σχήμα 4.25: Ιστόγραμμα κατανομής πάχους στοιχείων με 30 κλάσεις..... 119
Σχήμα 4.26: Σχηματική απεικόνιση δικτυωτού κοντού προβόλου 120
Σχήμα 4.27: Διάγραμμα όγκου-λόγου αναλογίας λ συνεχής και δικτυωτής κατασκευής 123
Σχήμα 4.28 Διάγραμμα πορείας σύγκλισης της αντικειμενικής συνάρτησης 124
Σχήμα 4.29:Διάγραμμα πορείας μέγιστης τάσηςvon Mises 125
Σχήμα 4.30: Ιστόγραμμα κατανομής παχών στοιχείων με 30 κλάσεις..... 126
Σχήμα 5.1: Δικτύωμα μιας ράβδου που ασκείται «πραγματικό» φορτίο 129
Σχήμα 5.2: Γραφική αναπαράσταση του εξωτερικού έργου και της εσωτερικής ενέργειας του πραγματικού φορτίου 129
Σχήμα 5.3 Δικτύωμα μίας ράβδου που ασκείται «εικονικό» φορτίο και η αντίστοιχη εσωτερική και εξωτερική ενέργεια 130
Σχήμα 5.4: Δικτύωμα μίας ράβδου που ασκείται και το «εικονικό» και «πραγματικό» φορτίο..... 130
Σχήμα 5.5: Γραφική αναπαράσταση του εξωτερικού έργου και της εσωτερικής ενέργειας, όταν ασκούνται στη ράβδο το εικονικού και το πραγματικό φορτίου 131
Σχήμα 5.6: Σχηματική απεικόνιση δικτυώματος προβόλου (1)..... 135
Σχήμα 5.7: Βελτιστοποιημένη κατασκευή προτεινόμενου κώδικα 135
Σχήμα 5.8: Βελτιστοποιημένη Κατασκευή FUD 136
Σχήμα 5.9: Ιστόγραμμα χρησιμοποιούμενων διατομών βελτιστοποίησης α) FUD β)προτεινόμενης μεθόδου..... 137
Σχήμα 5.10: Βελτιστοποιημένα σχήματα για α) 4Χ4 β)10Χ10 γ)20Χ20. 138
Σχήμα 5.11: Διάγραμμα τελικού όγκου-μέγιστων μετατοπίσεων 139

Σχήμα 5.12:Διάγραμμα πορείας μέγιστης μετατόπισης 140
Σχήμα 5.13: Διάγραμμα πορείας αύξησης της αντικειμενικής συνάρτησης 140
Σχήμα 5.14: Σχηματική απεικόνιση δικτυωτού προβόλου(2) 141
Σχήμα 5.15: Βελτιστοποιημένη Κατασκευή α) προτεινόμενου κώδικα β) FUD 142
Σχήμα 5.16: Ιστόγραμμα χρησιμοποιούμενων διατομών βελτιστοποίησης α) FUD β)προτεινόμενης μεθόδου 143
Σχήμα 5.17: Βελτιστοποιημένα σχήματα για α) 8X4 β)5X10 γ)10X20 144
Σχήμα 5.18: Διάγραμμα όγκου βελτιστοποιημένων κατασκευών-μέγιστων μετατοπίσεων 145
Σχήμα 5.19: Διάγραμμα πορείας μέγιστης μετατόπισης 145
Σχήμα 5.20: Διάγραμμα πορείας αύξησης της αντικειμενικής συνάρτησης 146
Σχήμα 5.21: Σχηματική απεικόνιση δικτυωτής αμφιέριστης πλάκας 146
Σχήμα 5.22: Βελτιστοποιημένη Κατασκευή α)προτεινόμενου κώδικα β)FUD 147
Σχήμα 5.23: Ιστόγραμμα χρησιμοποιούμενων διατομών βελτιστοποίησης α) FUD β) προτεινόμενης μεθόδου..... 148
Σχήμα 5.24: Βελτιστοποιημένα σχήματα για α) 4X12 β) 8X24. 149
Σχήμα 5.25: Διάγραμμα τελικού όγκου βελτιστοποιημένων κατασκευών-μέγιστων μετατοπίσεων 149
Σχήμα 5.26: Διάγραμμα πορείας μέγιστης μετατόπισης 150
Σχήμα 5.27:Διάγραμμα πορείας αύξησης της αντικειμενικής συνάρτησης 151
Σχήμα 5.28: Σχηματική απεικόνιση δικτυωτού κοντού προβόλου 151
Σχήμα 5.29: Βελτιστοποιημένη Κατασκευή α) προτεινόμενου κώδικα β) FUD 152
Σχήμα 5.30:Ιστόγραμμα χρησιμοποιούμενων διατομών βελτιστοποίησης α) FUD β) προτεινόμενης μεθόδου..... 153
Σχήμα 5.31:Διάγραμμα όγκου βελτιστοποιημένων κατασκευών-μέγιστων μετατοπίσεων 154
Σχήμα 5.32: Διάγραμμα πορείας μέγιστης μετατόπισης 154
Σχήμα 5.33: Διάγραμμα πορείας αύξησης της αντικειμενικής συνάρτησης 155
Σχήμα 6.1: Εφαρμογή «πραγματικών» φορτίων σε ράβδο συνεχούς μέσου..... 157
Σχήμα 6.2: Εφαρμογή «εικονικού» φορτίων σε ράβδο συνεχούς μέσου 157
Σχήμα 6.3: Εφαρμογή «εικονικού» και «πραγματικών» φορτίων σε ράβδο συνεχούς μέσου..... 158

Σχήμα 6.4: Διάγραμμα εικονικής δύναμης-μετατόπισης..... 159
Σχήμα 6.5: Διάγραμμα πραγματικής δύναμης-μετατόπισης..... 159
Σχήμα 6.6: Διάγραμμα εικονικής τάσης-συνολικής παραμόρφωσης..... 160
Σχήμα 6.7: Διάγραμμα πραγματικής τάσης-συνολικής παραμόρφωσης..... 160
Σχήμα 6.8: Διάγραμμα ροής προτεινόμενου αλγόριθμου..... 168
Σχήμα 6.9: Αποτέλεσμα αλγορίθμου βελτιστοποίησης με την απουσία φίλτρου 169
Σχήμα 6.10: Απεικόνιση της φυσικής σημασίας της ακτίνας του φιλτρού 171
Σχήμα 6.11: Γραφική παράσταση πάχους στοιχείου ανάλογα με την απόσταση απο άλλο στοιχείο 171
Σχήμα 6.12: Αποτέλεσμα με την χρήση του προτεινόμενου φίλτρου 172
Σχήμα 6.13: Σχηματική απεικόνιση προβόλου (1) 172
Σχήμα 6.14: Διάγραμμα σύγκρισης μέγιστων μετατοπίσεων βελτιστοποιημένων κατασκευών SIMP και μοναδιαίου φορτίου 177
Σχήμα 6.15: Πορεία μέγιστης μετατόπισης κατά την διάρκεια της βελτιστοποίησης με τον προτεινόμενο αλγόριθμο και με την μέθοδο SIMP 183
Σχήμα 6.16: Πορεία συνολικής εικονικής ενέργειας κατα την διάρκεια της βελτιστοποίησης 184
Σχήμα 6.17: Πορεία μέγιστης ενδοτικότητας κατά την διάρκεια της βελτιστοποίησης του προτεινόμενου αλγορίθμου και της μεθόδου SIMP..... 185
Σχήμα 6.18: Πορεία ποινικοποιημένης ενδοτικότητας κατά την διάρκεια των επαναλήψεων 186
Σχήμα 6.19: Πορεία όγκου κατά την διάρκεια των επαναλήψεων 187
Σχήμα 6.20: Πορεία μεταβολής μέγιστης τιμής συντελεστή n κατά την διάρκεια των επαναλήψεων 188
Σχήμα 6.21: Σύγκριση αριθμού επαναλήψεων μεθόδου SIMP και προτεινόμενης μεθόδου..... 189
Σχήμα 6.22: Σύγκριση χρόνου επεξεργασίας μεθόδου SIMP και προτεινόμενης μεθόδου..... 190
Σχήμα 6.23: Βελτιστοποιημένες τοπολογίες α) μακρύ προβόλου με μέγιστη μετατόπιση 3,576 μm β) κοντού προβόλου με μετατόπιση 0,12 μm..... 191
Σχήμα 6.24: Σχηματική απεικόνιση Προβόλου(2) 191

Σχήμα 6.25: Διάγραμμα σύγκρισης μέγιστων μετατοπίσεων βελτιστοποιημένων κατασκευών SIMP και μοναδιαίου φορτίου 194
Σχήμα 6.26: Πορεία μέγιστης μετατόπισης κατά την διάρκεια της βελτιστοποίησης 200
Σχήμα 6.27: Πορεία όγκου κατά την διάρκεια των επαναλήψεων 201
Σχήμα 6.28: Πορεία μεταβολής μέγιστης τιμής συντελεστή n κατά την διάρκεια των επαναλήψεων 202
Σχήμα 6.29: Σύγκριση αριθμού επαναλήψεων μεθόδου SIMP και προτεινόμενης μεθόδου 203
Σχήμα 6.30: Σύγκριση χρόνου επεξεργασίας μεθόδου SIMP και προτεινόμενης μεθόδου 203
Σχήμα 6.31: Σχηματική απεικόνιση αμφιέριστης πλάκας 204
Σχήμα 6.32: Συγκέντρωση ψευδοτάσεων για όριο όγκου 0,1 207
Σχήμα 6.33: Διάγραμμα σύγκρισης μέγιστων μετατοπίσεων βελτιστοποιημένων κατασκευών SIMP και μοναδιαίου φορτίου 208
Σχήμα 6.34: Πορεία μέγιστης μετατόπισης κατά την διάρκεια της βελτιστοποίησης 213
Σχήμα 6.35: Πορεία όγκου κατά την διάρκεια των επαναλήψεων 214
Σχήμα 6.36: Πορεία μεταβολής μέγιστης τιμής συντελεστή n κατά την διάρκεια των επαναλήψεων 215
Σχήμα 6.37: Σύγκριση αριθμού επαναλήψεων μεθόδου SIMP και προτεινόμενης μεθόδου 216
Σχήμα 6.38: Σύγκριση χρόνου επεξεργασίας μεθόδου SIMP και προτεινόμενης μεθόδου 216
Σχήμα 6.39: Σχηματική απεικόνιση προβόλου(3) 217
Σχήμα 6.40: Διάγραμμα σύγκρισης μέγιστων μετατοπίσεων βελτιστοποιημένων κατασκευών SIMP και μοναδιαίου φορτίου 220
Σχήμα 6.41: Πορεία μέγιστης μετατόπισης κατά την διάρκεια της βελτιστοποίησης 221
Σχήμα 6.42: Πορεία όγκου κατά την διάρκεια των επαναλήψεων 222
Σχήμα 6.43: Πορεία μεταβολής μέγιστης τιμής συντελεστή n κατά την διάρκεια των επαναλήψεων 223

Σχήμα 6.44: Σύγκριση αριθμού επαναλήψεων μεθόδου SIMP και προτεινόμενης μεθόδου 224
Σχήμα 6.45: Σύγκριση χρόνου επεξεργασίας μεθόδου SIMP και προτεινόμενης μεθόδου 224
Σχήμα 6.46: Σχηματική απεικόνιση προβόλου L-Shaped 225
Σχήμα 6.47: Διάγραμμα σύγκρισης μέγιστων μετατοπίσεων βελτιστοποιημένων κατασκευών SIMP και μοναδιαίου φορτίου 228
Σχήμα 6.48: Πορεία μέγιστης μετατόπισης κατά την διάρκεια της βελτιστοποίησης 231
Σχήμα 6.49: Πορεία όγκου κατά την διάρκεια των επαναλήψεων 232
Σχήμα 6.50: πορεία μεταβολής μέγιστης τιμής συντελεστή n κατά την διάρκεια των επαναλήψεων 233
Σχήμα 6.51: Σύγκριση αριθμού επαναλήψεων μεθόδου SIMP και προτεινόμενης μεθόδου 234
Σχήμα 6.52: Σύγκριση χρόνου επεξεργασίας μεθόδου SIMP και προτεινόμενης μεθόδου 234

Κατάλογος Πινάκων

Πίνακας 2.1: Βελτιστοποιημένες κατασκευές μεθόδου SIMP και κατανομή τάσης σε αυτές για διάφορα όρια όγκων 39
Πίνακας 2.2: Βελτιστοποιημένες κατασκευές μεθόδου SIMP και κατανομή τάσης σ αυτές για διάφορα όρια όγκων 46
Πίνακας 2.3: Βελτιστοποιημένες κατασκευές μεθόδου SIMP και κατανομή τάσης σ αυτές για διάφορα όρια όγκων 52
Πίνακας 2.4: Βελτιστοποιημένες κατασκευές μεθόδου SIMP και κατανομή τάσης σ αυτές για διάφορα όρια όγκων 58
Πίνακας 4.1: Βελτιστοποιημένα σχήματα για διάφορους λόγους αναλογίας 95
Πίνακας 4.2: Βελτιστοποιημένα σχήματα για διάφορους λόγους αναλογίας 103
Πίνακας 4.3: Βελτιστοποιημένα σχήματα για διάφορους λόγους αναλογίας 111
Πίνακας 4.4: Βελτιστοποιημένα σχήματα για διάφορους λόγους αναλογίας 121
Πίνακας 6.1: Πίνακας βελτιστοποιημένων σχημάτων του προτεινόμενου αλγορίθμου και της μεθόδου SIMP για διάφορες μέγιστες μετατοπίσεις 173
Πίνακας 6.2: Πίνακας ενδιάμεσων σχημάτων του προτεινόμενου αλγορίθμου και της μεθόδου SIMP 178
Πίνακας 6.3: Πίνακας σχημάτων κατανομής συντελεστή n κατά την διάρκεια της βελτιστοποίησης 180
Πίνακας 6.4: Πίνακας βελτιστοποιημένων σχημάτων του προτεινόμενου αλγορίθμου και της μεθόδου SIMP για διάφορες μετατοπίσεις 192
Πίνακας 6.5: Πίνακας ενδιάμεσων σχημάτων του προτεινόμενου αλγορίθμου και της μεθόδου SIMP 195

Πίνακας 6.6: Πίνακας σχημάτων κατανομής συντελεστή n κατά την διάρκεια της βελτιστοποίησης 198
Πίνακας 6.7: Πίνακας βελτιστοποιημένων σχημάτων του προτεινόμενου αλγορίθμου και της μεθόδου SIMP για διάφορους τελικούς όγκους 205
Πίνακας 6.8: Πίνακας ενδιάμεσων σχημάτων του προτεινόμενου αλγορίθμου και της μεθόδου SIMP 209
Πίνακας 6.9: Πίνακας σχημάτων κατανομής συντελεστή n κατά την διάρκεια της βελτιστοποίησης 211
Πίνακας 6.10: Πίνακας βελτιστοποιημένων σχημάτων του προτεινόμενου αλγορίθμου και της μεθόδου SIMP για διάφορους τελικούς όγκους 218
Πίνακας 6.11: Πίνακας βελτιστοποιημένων σχημάτων του προτεινόμενου αλγορίθμου και της μεθόδου SIMP για διάφορους τελικούς όγκους 226
Πίνακας 6.12: Πίνακας ενδιάμεσων σχημάτων του προτεινόμενου αλγορίθμου και της μεθόδου SIMP 229

1

Βελτιστοποίηση κατασκευών

1.1 Εισαγωγή

Η βελτιστοποίηση ορίζεται ως η διαδικασία με την οποία επιτυγχάνεται μια κατάσταση η οποία πληροί κάποιους περιορισμούς, με τους ελάχιστους δυνατούς πόρους. Είναι φανερό από τον ορισμό ότι η αξία της είναι καθολική, αποκτώντας έννοια σ' όλο το επιστημονικό φάσμα. Η εφαρμογή της βελτιστοποίησης στις κατασκευές μεταφράζεται κυρίως ως η ελαχιστοποίηση μιας παραμέτρου της κατασκευής, όπως το βάρος ή το κόστος, με ταυτόχρονη ικανοποίηση δεδομένων περιορισμών όπως η μέγιστη τάση ή/και η μέγιστη μετατόπιση. Είναι προφανές ότι η αξία επίτευξης μιας βέλτιστης κατασκευής είναι πολύ μεγάλη γι' αυτό το ενδιαφέρον της επιστημονικής κοινότητας την τελευταία εικοσαετία πάνω στο αντικείμενο είναι τεράστιο και αποτελεί την αιχμή του δόρατος στις εξελίξεις της μηχανικής των κατασκευών (structural engineering). Εκτός από το ακαδημαϊκό υπάρχει και βιομηχανικό ενδιαφέρον με πρώτο πεδίο εφαρμογής την αεροναυπηγική καθώς η ελαχιστοποίηση του βάρους είναι ζωτικής σημασίας. Τα τελευταία χρόνια η βελτιστοποίηση κατασκευών έχει αποκτήσει εφαρμογές σ' όλες τις εκφάνσεις της μηχανολογίας καθώς επίσης και στην αρχιτεκτονική.

1.2 Ιστορική Αναδρομή

Πολλοί ερευνητές έχουν καταπιαστεί με το πρόβλημα του βέλτιστου σχεδιασμού των κατασκευών. Μια σύντομη ιστορική αναδρομή μπορεί να ξεκινήσει από τον Galileo (1638), ο οποίος αν και η παραδοχή του για τη κατανομή της τάσης δεν ήταν ορθή, κατέληξε ότι το βέλτιστο σχήμα μιας δοκού υπό την επίδραση ενός καμπτικού φορτίου επιτυγχάνεται όταν η διατομή της μεταβάλλεται κατά μήκος του άξονά της. Κατά τον $17^{ο}$ και $18^{ο}$ αιώνα, ο Newton και ο Lagrange παρήγαγαν βέλτιστους σχεδιασμούς με αριθμητικές μεθόδους για την ελαχιστοποίηση του βάρους υποστυλωμάτων αξονοσυμμετρικής μορφής. Η ανάπτυξη τόσο της ανάλυσης όσο και της βελτιστοποίησης μιας κατασκευής συνεχίστηκε με τον Levy το 1873 αποδεικνύοντας ότι ένα δικτύωμα υπό την επίδραση ενός σταθερού φορτίου πρέπει να είναι στατικά ορισμένο προκειμένου να είναι βέλτιστο. Το 1869 ο Maxwell δημοσίευσε την εργασία-σταθμό στην βελτιστοποίηση κατασκευών οπού αναπτύχθηκαν οι πρώτες αναλυτικές λύσεις. Στην συνέχεια, ο Michel (1904) στηριζόμενος στην εργασία του Maxwell διατύπωσε μια θεωρία σχετικά με τη σχεδίαση που δίνει το ελάχιστο βάρος στην περίπτωση των δικτυωμάτων υπό την επιβολή περιορισμών τάσης. Έτσι, λοιπόν, δημιουργήθηκε η πρώτη ολοκληρωμένη θεώρηση βελτιστοποιήσεων κατασκευών όπου βέβαια οι λύσεις ήταν πολύ χαμηλής πρακτικής αξίας αλλά μέγιστης θεωρητικής. Μεγάλη ώθηση στην ανάπτυξη μεθοδολογιών για την ελαχιστοποίηση του βάρους δόθηκε μέσω του ανταγωνισμού στην αεροπορική βιομηχανία κατά την διάρκεια του Β' Παγκόσμιου Πολέμου όπου πρώτοι οι Smith και Cox διατύπωσαν τις αρχές που διέπουν οι σχεδιάσεις ελαχίστου βάρους θλιβόμενων κατασκευών.

Μεγάλη πνοή γενικότερα στη βελτιστοποίηση δόθηκε με την εμφάνιση των ηλεκτρονικών υπολογιστών (Η/Υ) οπότε κι' αναπτύχθηκαν μαθηματικές μέθοδοι που βασίζονταν στην αριθμητική ανάλυση και στον απειροστικό λογισμό. Σημεία σταθμοί στην εμφάνιση μοντέρνων μεθόδων βελτιστοποίησης είναι η εργασία του Courant (1943) με τις συναρτήσεις ποινής (penalty functions) του Dantzig (1951) με την μέθοδο Simplex και οι εργασίες του Kuhn και Tucker (1951) σχετικά με τη διατύπωση των συνθηκών που πρέπει να ισχύουν προκειμένου μια λύση σ' ένα πρόβλημα με περιορισμούς να είναι βέλτιστη. Στη δεκαετία του '60 διατυπώθηκαν πολλές αριθμητικές μεθοδολογίες όπως του Rosen (gradient projection method), η

μέθοδος του Zoutendijk (feasible directions), η μέθοδος των Hooke και Jeeves, η μέθοδος του Powell, αλλά και η πολύ δημοφιλής μέθοδος του Box. Από τις σύγχρονες μεθόδους βελτιστοποίησης ιδιαίτερη μνεία πρέπει να γίνει στους Γενετικούς Αλγορίθμους (Genetic Algorithms), στην Προσομοιωμένη Ανόπτηση (Simulated Annealing) και στην μέθοδο Tabu.

Από την παραπάνω ιστορική αναδρομή οι μέθοδοι που αναφέρθηκαν από τη δεκαετία του 1950 μέχρι και του 1990 είναι μαθηματικής φύσεως, δηλαδή απαντούν στο γενικευμένο πρόβλημα βελτιστοποίησης το οποίο μπορεί να εφαρμοστεί σε οποιαδήποτε συνάρτηση. Ειδικότερα, είναι μέθοδοι που ελαχιστοποιούν ή μεγιστοποιούν μια συνάρτηση, την αντικειμενική συνάρτηση, υπό κάποιους περιορισμούς χωρίς να λαμβάνουν υπ' όψιν τη φύση του προβλήματος. Έτσι λοιπόν, υπήρχε η πεποίθηση μέχρι τη δεκαετία του 1970 ότι αυτές οι γενικές και αιτιοκρατικές μέθοδοι βελτιστοποίησης θα έλυναν το πρόβλημα της βελτιστοποίησης κατασκευών. Ωστόσο, η πρακτική εφαρμογή τους στις κατασκευές έδειξε ότι παρουσιάζονται δυο βασικά μειονεκτήματα: πρώτον, ήταν ευαίσθητες στο εγκλωβισμό τους σε τοπικά ελάχιστα και δεύτερον είχαν μεγάλο υπολογιστικό κόστος, έως απαγορευτικό, καθώς μέσω της διακριτοποίησης της κατασκευής με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων δημιουργούνται πολλές μεταβλητές σχεδίασης (π.χ. το βάρος κάθε στοιχείου).

Γι' αυτό τον λόγο κατά τη δεκαετία του 1970 αναπτύχθηκε ένα νέο είδος βελτιστοποίησης το οποίο έχει μηχανολογικό προσανατολισμό. Η πιο σημαντική είναι η μέθοδος των Βέλτιστων Κριτηρίων (Optimality Criteria), η διατύπωση των οποίων στηρίζεται σε συνδυασμό θεωρημάτων της Μηχανικής, της μεθόδου των πολλαπλασιαστών Lagrange και της μηχανολογικής διαίσθησης. Σύμφωνα μ' αυτήν δημιουργούνται από τον μηχανικό προτάσεις συνήθως ενεργειακής φύσεως που περιγράφουν άμεσα ή έμμεσα την κατάσταση που θα υπάρχει στη βέλτιστη κατασκευή και στη συνέχεια δημιουργούνται αναγωγικοί τύποι ανασχεδιασμού της κατασκευής, ώστε σταδιακά να οδηγείται στη βέλτιστη λύση. Με βάση την μέθοδο των Βέλτιστων Κριτηρίων έχουν δημιουργηθεί διάφοροι αναγωγικοί τύποι που ο καθένας λύνει το πρόβλημα του βέλτιστου σχεδιασμού με διαφορετική προσέγγιση.

Όπως είναι εμφανές τα τελευταία χρόνια έχουν δημιουργηθεί πάρα πολλές μέθοδοι βελτιστοποίησης τόσο αιτιοκρατικών όσο και ημιεμπειρικών μεθόδων. Αυτή η

ποικιλία έχει δημιουργηθεί λόγω της αδυναμίας όλων των μεθόδων να αποδείξουν ότι η λύση που δημιουργούν ταυτίζεται με το καθολικό βέλτιστο.

1.3 Το μαθηματικό μοντέλο

Το μαθηματικό μοντέλο που περιγράφει την ελαχιστοποίηση βάρους των κατασκευών υπό κάποιους περιορισμούς μπορεί να οριστεί ως:

$$\min f(X) \tag{1.1}$$

$$\mu\varepsilon\ \boldsymbol{X}=[x_i],\ i=1,2,\ldots n\ \kappa\alpha\iota\ x_{i,lower}\leq x_i\leq x_{i,upper}$$

έτσι ώστε:

$$h_j(\mathbf{X})=0\ ,\ j=1,2,\ldots,m \tag{1.2}$$

$$g_i(\mathbf{X})\leq 0,\ i=m+1,m+2,\ldots p \tag{1.3}$$

Η συνάρτηση f ονομάζεται αντικειμενική συνάρτηση και στην παρούσα Διπλωματική Εργασία θα είναι το βάρος της εκάστοτε κατασκευής. Γενικά, η αντικειμενική συνάρτηση αντικατοπτρίζει την προς βελτιστοποίηση (ελαχιστοποίηση στην προκειμένη περίπτωση) συνάρτηση. Το διάνυσμα Χ περιλαμβάνει όλες τις ανεξάρτητες μεταβλητές σχεδίασης x_i . Κάθε μία από τις μεταβλητές σχεδίασης έχει το δικό της πεδίο ορισμού που στη μηχανολογική βελτιστοποίηση έχει φυσική σημασία και είναι πλήρως συνυφασμένο με το πρόβλημα. Το πλήθος n των μεταβλητών σχεδίασης είναι ανεξάρτητο του πλήθους m των ισοτικών και του πλήθους p των ανισοτικών περιορισμών. Στην περίπτωση κατά την οποία m=p=0 τότε το πρόβλημα χαρακτηρίζεται ως «πρόβλημα βελτιστοποίησης άνευ περιορισμών» ενώ σε κάθε άλλη περίπτωση ορίζεται ως «πρόβλημα βελτιστοποίησης μετά περιορισμών».

Για μια οποιαδήποτε συνάρτηση f μπορεί να εμφανίζονται ένα κανένα ή πολλά τοπικά ελάχιστα. Στην περίπτωση που η συνάρτηση δεν έχει κανένα τοπικό ελάχιστο τότε είναι σταθερή και δεν εξαρτάται από το διάνυσμα σχεδίασης. Έτσι λοιπόν, δεν υπάρχει δυνατότητα εύρεσης ελάχιστου καθώς:

$$f(\mathbf{X})=\sigma\tau\alpha\theta\ \forall\mathbf{X} \tag{1.5}$$

Αν ωστόσο υπάρχει ένα ελάχιστο τότε υπάρχει ένα διάνυσμα σχεδίασης X_{opt} για το οποίο ισχύει ότι:

$$f(X_{opt})< f(\mathbf{X})\ \forall\mathbf{X} \tag{1.6}$$

Όταν όμως η αντικειμενική συνάρτηση παρουσιάζει πολλά τοπικά ελάχιστα τότε υπάρχουν πολλά διανύσματα σχεδίασης για τα οποία ισχύει:

$$f(\mathbf{X}_{\text{local opt},k}) < f(\mathbf{X}_{\text{local opt},k} \pm \varepsilon) \quad (1.7)$$

Όπου ε μια μικρή θετική ποσότητα. Ανάμεσα στα διανύσματα σχεδίασης υπάρχει $X_{\text{local opt},k}$ υπάρχει ένα διάνυσμα $X_{\text{local opt},f}$ για το οποίο ισχύει ότι:

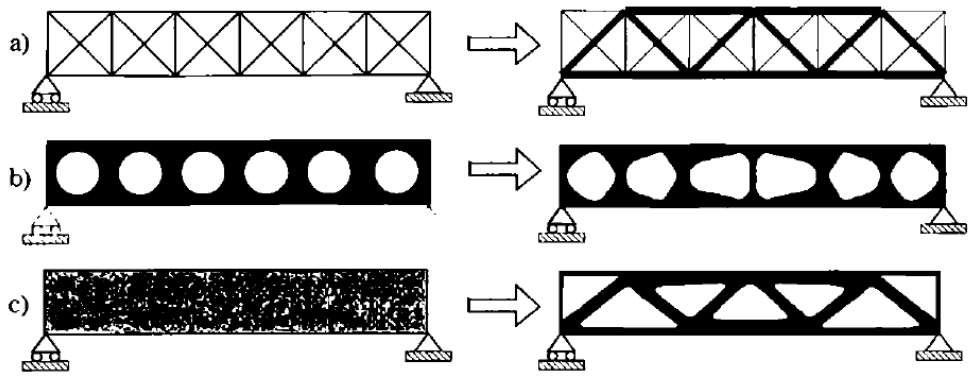
$$f(\mathbf{X}_{\text{local opt},f}) < \min(f(\mathbf{X}_{\text{local opt},k}) \; k=1,2,\ldots,f,\ldots k \quad (1.8)$$

Σε αυτή την περίπτωση το διάνυσμα $\mathbf{X}_{\text{local opt},f}$ αποτελεί το καθολικό ελάχιστο της αντικειμενικής συνάρτησης και είναι η βέλτιστη λύση.

1.4 Κατηγορίες βελτιστοποίησης κατασκευών

Η βελτιστοποίηση κατασκευών μπορεί να χωριστεί σε τρεις βασικές κατηγορίες, οι οποίες παρουσιάζονται στο Σχήμα 1.1.

a) Βελτιστοποίηση Τοπολογίας (Topology optimization)
b) Βελτιστοποίηση Σχήματος (Shape optimization)
c) Βελτιστοποίηση Μεγέθους (Sizing optimization)



Σχήμα 1.1: Παράδειγμα βελτιστοποίησης α) μεγέθους, β) σχήματος, γ) τοπολογίας.

1.4.1 Βελτιστοποίηση Τοπολογίας

Σκοπός της Βελτιστοποίησης Τοπολογίας είναι η εύρεση της βέλτιστης δομής μιας κατασκευής μέσα σε μία καθορισμένη περιοχή. Οι μόνες γνωστές ποσότητες στο πρόβλημα είναι τα εφαρμοζόμενα φορτία, οι συνθήκες στήριξης και οι διαστάσεις της αρχικής περιοχής. Με βάση τα παραπάνω οι αλγόριθμοι τοπολογικής βελτιστοποίησης προσδιορίζουν τη βέλτιστη κατανομή του υλικού μέσα στη

συγκεκριμένη περιοχή ώστε να πληρούνται οι περιορισμοί που έχουν τεθεί (M.P Bendsøe and O. Sigmund, 2003).

1.4.2 Βελτιστοποίηση Σχήματος

Η Βελτιστοποίηση Σχήματος αποτελεί σχετικά καινούργιο πεδίο εφαρμογής στον χώρο των βέλτιστων κατασκευών. Συγκεκριμένα, αποτελεί συνέχεια της τοπολογικής βελτιστοποίησης αφού έχει ως προαπαιτούμενο την τοπολογία της προς βελτιστοποίηση κατασκευής. Οι μεθοδολογίες Βελτιστοποίησης Σχήματος είναι αλγόριθμοι οι οποίοι μεταβάλλουν τα εξωτερικά και εσωτερικά σύνορα της κατασκευής ώστε να πληρούνται οι περιορισμοί κατά βέλτιστο τρόπο. Αναλυτικότερα, αφού εισαχθεί μια τοπολογία σε έναν αλγόριθμο Βελτιστοποίησης Σχήματος, η τοπολογία αυτή θα παραμείνει (π.χ. δεν θα δημιουργηθούν νέες οπές) αλλά θα μεταβληθούν οι συνοριακοί κόμβοι της τοπολογίας ώστε να βελτιστοποιηθεί η κατασκευή ως προς τα κριτήρια που έχει ορίσει ο χρήστης (Allaire G.,2002).

1.4.3 Βελτιστοποίηση Μεγέθους

Το πρόβλημα της βελτιστοποίησης μεγέθους είναι το πρώτο πρόβλημα βελτιστοποίησης κατασκευών που απασχόλησε την επιστημονική κοινότητα. Σε αυτή την περίπτωση, το πρόβλημα έχει συγκεκριμένη τοπολογία και συγκεκριμένο σχήμα και ως παράμετροι σχεδιασμού ορίζονται είτε οι διαστάσεις των διατομών δικτυωτών κατασκευών είτε το πάχος των στοιχείων αν εφαρμόζεται σε πλάκες. Η αντικειμενική συνάρτηση είναι σχεδόν πάντα το βάρος. Σκοπός, λοιπόν, των αλγορίθμων βελτιστοποίησης μεγέθους είναι η κατάλληλη διαστασιολόγηση των ράβδων αν η κατασκευή είναι δικτυωτή ή ο προσδιορισμός του πάχους των στοιχείων, στα οποία έχει διακριτοποιηθεί μια κατασκευή συνεχούς μέσου, ώστε να ελαχιστοποιηθεί το βάρος υπό κατάλληλους περιορισμούς.

Αιχμή του δόρατος στη βελτιστοποίηση κατασκευών είναι και θα παραμείνει η Βελτιστοποίηση Τοπολογίας, ή Τοπολογική Βελτιστοποίηση όπως έχει επικρατήσει, καθώς, με ελάχιστα δεδομένα, οδηγεί στον προσδιορισμό του σχήματος μιας κατασκευής, με αποτέλεσμα να είναι ιδιαιτέρως χρήσιμη στον σχεδιαστή μηχανικό κατά την διάρκεια της σύλληψης μιας μηχανολογικής κατασκευής (conceptual design).

1.5 Βασικές μεθοδολογίες Τοπολογικής Βελτιστοποίησης

Μια βασική κατηγοριοποίηση των υπαρχόντων μεθόδων Τοπολογικής Βελτιστοποίησης βασίζεται στον τρόπο αναζήτησης του βέλτιστου. Συγκεκριμένα, υπάρχουν οι άμεσες μέθοδοι όπου η αντικειμενική συνάρτηση είναι το βάρος της κατασκευής και έμμεσες όπου η βελτιστοποίηση του βάρους επιτυγχάνεται μέσω της ικανοποίησης ενός ενεργειακού κριτηρίου. Οι άμεσες μέθοδοι μπορούν να κατηγοριοποιηθούν στις αιτιοκρατικές και τις στοχαστικές μεθόδους.

1.5.1 Άμεσες αιτιοκρατικές μέθοδοι βελτιστοποίησης

Στην υποκατηγορία των άμεσων και αιτιοκρατικών μεθόδων ανήκουν η μέθοδος των Hooke & Jeeves, η μέθοδος Simplex, η μέθοδος Complex (Box), η μέθοδος του Powell, η μέθοδος της Μεγίστης Κλίσεως, η μέθοδος των Συζυγών Κλίσεων, η μέθοδος των Συζυγών Διευθύνσεων, ο διαδοχικός Γραμμικός Προγραμματισμός (SLP) και ο διαδοχικός Τετραγωνικός Προγραμματισμός (SQP). Όλες αυτές οι μέθοδοι έχουν ισχυρό μαθηματικό μοντέλο και στηρίζονται σε μαθηματικές αρχές που δεν αλληλεπιδρούν με την μηχανολογία. Ωστόσο έχουν μεγάλο υπολογιστικό κόστος και η πιθανότητα εγκλωβισμού τους σε τοπικά ελάχιστα είναι μεγάλη.

1.5.2 Άμεσες στοχαστικές μέθοδοι βελτιστοποίησης

Στην υποκατηγορία των άμεσων στοχαστικών μεθόδων, οι πλέον χαρακτηριστικοί αντιπρόσωποι είναι οι Στρατηγικές Εξέλιξης, οι Γενετικοί Αλγόριθμοι, η Προσομοιούμενη Ανόπτηση, η μέθοδος Tabu, η τεχνική Σμήνους Σωματιδίων και η μέθοδος της Αρμονίας.

1.5.2.1 Στρατηγικές Εξέλιξης (Evolution Strategies –ES)

Οι Στρατηγικές Εξέλιξης αποτελούν μία τεχνική βελτιστοποίησης, η οποία στηρίζεται στην ιδέα της προσαρμοστικότητας και της εξέλιξης. διατυπώθηκε στις αρχές της δεκαετίας του ‘60 και αναπτύχτηκε περαιτέρω στη δεκαετία του ‘70. Θεμελιωτές αυτής της προσέγγισης ήταν οι Rechenberg και Schwefel. Οι Στρατηγικές Εξέλιξης ανήκουν στην ευρύτερη τάξη της τεχνητής εξέλιξης, χρησιμοποιούν αντιστοιχίες από τον φυσικό κόσμο και διαθέτουν ως κύριους τελεστές τη μετάλλαξη και την επιλογή, τους οποίους χρησιμοποιούν επαναληπτικά μέχρι να ικανοποιηθεί κάποιο κριτήριο

τερματισμού. Στην περίπτωση διανυσμάτων σχεδίασης με πραγματικούς αριθμούς, η μετάλλαξη συνήθως πραγματοποιείται προσθέτοντας έναν αριθμό από κανονική κατανομή σε κάθε μεταβλητή σχεδίασης. Η επιλογή στις Στρατηγικές Εξέλιξης είναι αιτιοκρατική και στηρίζεται στην κατάταξη των διανυσμάτων σχεδίασης βάσει της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης. Η πλέον απλή εκδοχή των Στρατηγικών Εξέλιξης περιλαμβάνει ένα πληθυσμό με δύο άτομα, έναν γονέα και ένα τέκνο όπου είναι το αποτέλεσμα της επιβολής σε αυτόν του τελεστή μετάλλαξης. Εάν το μεταλλαγμένο άτομο είναι τουλάχιστον εξίσου κατάλληλο με τον γονέα, τότε τον αντικαθιστά στην επομένη επανάληψη (γενεά). Αυτός ο τύπος Στρατηγικής Εξέλιξης καλείται (1+1)-ES. Γενικεύοντας, λ μεταλλαγμένα άτομα είναι δυνατόν να δημιουργηθούν από ένα γονέα και να συγκριθούν μαζί του, διαμορφώνοντας τον αποκαλούμενο τύπο (1+λ)-ES. Σε αυτόν τον τύπο, το καλύτερο εκ των μεταλλαγμένων ατόμων ανάγεται σε γονέα στην επομένη επανάληψη, ενώ ο τρέχων γονέας εξαιρείται σε όλες τις επόμενες επαναλήψεις (Beyer, 2001).

1.5.2.2 Οι γενετικοί Αλγόριθμοι (Genetic Algorithms-GA)

Οι Γενετικοί Αλγόριθμοι κατατάσσονται ως ευριστικές μέθοδοι καθολικής αναζήτησης. Αποτελούν μία ειδική κλάση των Στρατηγικών Εξέλιξης και χρησιμοποιούν στοιχειά της δαρβίνειας θεωρίας, όπως η κληρονομικότητα, η μετάλλαξη, η επιλογή και η διασταύρωση. Σε έναν τυπικό Γενετικό Αλγόριθμο, αρχικά δημιουργείται τυχαία ένας πληθυσμός από διανύσματα σχεδίασης (χρωμοσώματα), ο οποίος σταδιακά τροποποιείται, μέσω διαδικασιών εξέλιξης, κατευθυνόμενες προς διανύσματα σχεδίασης με καλύτερη τιμή αντικειμενικής συνάρτησης (καλύτερη συμπεριφορά). Για την κωδικοποίηση των διανυσμάτων σχεδίασης συνήθως χρησιμοποιείται είτε το δυαδικό σύστημα είτε ο κώδικας Gray, χωρίς, ωστόσο, να αποκλείεται κάποια άλλη κωδικοποίηση. Η διαδικασία της εξέλιξης εκκινεί από τον αρχικό πληθυσμό και λαμβάνει χωρά επαναληπτικά. Σε κάθε επανάληψη (γενεά), εκτιμάται η επίδοση κάθε μέλους του πληθυσμού, μέσω της τιμής της αντικειμενικής του συνάρτησης, ξεχωρίζονται τα μέλη με την καλύτερη επίδοση, τα οποία στη συνέχεια διασταυρώνονται και μεταλλάσσονται, δημιουργώντας έναν νέο πληθυσμό. Αυτός, με τη σειρά του, χρησιμοποιείται στην επομένη επανάληψη και η όλη διαδικασία συνεχίζεται έως ότου ικανοποιηθεί κάποιο κριτήριο τερματισμού. Συνήθως, ως τέτοιο χρησιμοποιείται είτε ένα μέγιστο πλήθος

επαναλήψεων είτε μία τιμή επίδοσης (τιμή αντικειμενικής συνάρτησης) για όλο τον πληθυσμό. Ωστόσο, εάν ο τερματισμός της επαναληπτικής διαδικασίας επέλθει λόγω εκτέλεσης του μεγίστου πλήθους επαναλήψεων, τότε δεν είναι βέβαιο ότι ο πληθυσμός θα χαρακτηρίζεται από ικανοποιητικές επιδόσεις. Ένα ιδιαίτερο χαρακτηριστικό των Γενετικών Αλγορίθμων είναι το γεγονός ότι η κωδικοποίηση κάθε διανύσματος σχεδίασης ως μονοδιάστατο πινάκα διευκολύνει τη διαδικασία της διασταύρωσης (Goldberg, 1989; Goldberg, 2002;).

1.5.2.3 Η Προσομοιούμενη Ανόπτηση (Simulated Annealing-SA)

Η Προσομοιούμενη Ανόπτηση (Simulated Annealing - SA) αποτελεί μία στοχαστική μεθοδολογία βελτιστοποίησης καθολικού χαρακτήρα, υπό την έννοια ότι σε κάθε επανάληψη δεν συμμετέχει μόνο κάποιο υποσύνολο του πεδίου σχεδίασης, το όποιο προοδευτικά συρρικνώνεται έως ότου τελικά καταλήξει σε ένα σημείο (βέλτιστο διάνυσμα σχεδίασης), αλλά είναι δυνατόν να χρησιμοποιείται ολόκληρο το πεδίο σχεδίασης. Το ιδιαίτερο χαρακτηριστικό αυτής της μεθοδολογίας είναι η αποδοχή όχι μόνον εκείνου του διανύσματος σχεδίασης, το όποιο είναι καλύτερο από το τρέχον βέλτιστο, αλλά και η στατιστική αποδοχή διανύσματος σχεδίασης με επίδοση χειρότερη από αυτήν του τρέχοντος βέλτιστου διανύσματος. Για την στατιστική αποδοχή χρησιμοποιείται το κριτήριο του Metropolis. Η Προσομοιούμενη Ανόπτηση είναι δυνατόν να συνδυαστεί με έναν τυπικό Γενετικό Αλγόριθμο, στον όποιο, κατά τη διαδικασία της βελτιστοποίησης, το αρχικά υψηλό ποσοστό μετάλλαξης προοδευτικά μειώνεται συμφώνα με κάποιο σχήμα απόψυξης (Kirkpatrick et al, 1983; Metropolis et al, 1953).

1.5.2.4 Η μέθοδος Tabu (Tabu Search-TS)

Η μέθοδος Tabu (Tabu Search - TS) είναι παρόμοια με την Προσομοιούμενη Ανόπτηση υπό την έννοια ότι και οι δύο διατρέχουν το πεδίο σχεδίασης και δοκιμάζουν αλλαγές επί μεμονωμένων λύσεων. Ωστόσο, ενώ η Προσομοιούμενη Ανόπτηση σε κάθε επανάληψη παράγει ένα νέο διάνυσμα σχεδίασης, η μέθοδος Tabu δημιουργεί πολλά νέα διανύσματα και αναζητεί, μεταξύ αυτών, εκείνο το διάνυσμα με τη χαμηλότερη ενέργεια. Προς ενίσχυση της διερεύνησης μεγαλύτερου μέρους του πεδίου σχεδίασης και προς αποφυγή επανεξέτασης ήδη εξετασθέντων και απορριφθέντων διανυσμάτων σχεδίασης, δημιουργείται μία λίστα με τα εν λόγω

διανύσματα, η οποία ανανεώνεται διαρκώς σε κάθε επανάληψη. Απαγορεύεται, δε, να χρησιμοποιηθούν τα διανύσματα της λίστας αυτής. Η μέθοδος Tabu χαρακτηρίζεται ως ένας μετα-ευριστικός αλγόριθμος, κατάλληλος για την επίλυση προβλημάτων βελτιστοποίησης συνδυαστικού τύπου (Glover and Laguna, 1997).

1.5.2.5 Η μέθοδος της Αρμονίας (Harmony Search-HS)

Η μέθοδος της Αρμονίας (Harmony Search - HS) αποτελεί μία μετα-ευριστική διαδικασία βελτιστοποίησης, η οποία μιμείται τη διαδικασία με την οποία αυτοσχεδιάζουν οι μουσικοί. Πιο συγκεκριμένα, δημιουργείται ένας πίνακας (Harmony Memory - HM) διάστασης $N \times M$, όπου N είναι το πλήθος των διανυσμάτων σχεδίασης (ανεξάρτητη μεταβλητή) και M το πλήθος των μεταβλητών σχεδίασης. Αρχικά, αποδίδονται τυχαίες τιμές σε όλες τις μεταβλητές σχεδίασης του εν λόγω πινάκα, υπολογίζεται η αντικειμενική συνάρτηση για κάθε διάνυσμα σχεδίασης και εντοπίζεται το διάνυσμα σχεδίασης με τη χειρότερη επίδοση (έστω $\mathbf{X}_{\text{worst}}$). Στη συνέχεια δημιουργείται ένα νέο διάνυσμα σχεδίασης. Για την απόδοση μιας νέας τιμής σε κάθε μεταβλητή σχεδίασης, λαμβάνονται υπόψη, με τρόπο πιθανολογικό, όχι μόνον όλες οι τιμές του προαναφερθέντος πίνακα για κάθε μεταβλητή σχεδίασης αλλά και το πεδίο ορισμού της κάθε μεταβλητής σχεδίασης. Κατόπιν, το νέο διάνυσμα σχεδίασης υποβάλλεται σε μία διαδικασία διαμόρφωσης, στην οποία οι μεταβλητές σχεδίασης προσαυξάνονται κατά μια τυχαία ποσότητα. Τέλος, αξιολογείται η επίδοση του νέου διανύσματος σχεδίασης και εάν αυτή είναι καλύτερη από εκείνη του $\mathbf{X}_{\text{worst}}$, τότε το αντικαθιστά στον πίνακα (HM), ενώ το $\mathbf{X}_{\text{worst}}$ εξαιρείται από όλες τις επόμενες αναζητήσεις. Η μέθοδος (HS) είναι κατάλληλη, κυρίως, για τον εντοπισμό περιοχών του πεδίου σχεδίασης υψηλών επιδόσεων (Saka, 2003).

1.5.2.6 Η μέθοδος βελτιστοποίησης με Σμήνη Σωματιδίων (Particle Swarm Optimization-PSO)

Η μέθοδος βελτιστοποίησης με Σμήνη Σωματιδίων (Particle Swarm Optimization - PSO) αποτελεί μία μέθοδο άμεσης αναζήτησης, διαχειρίζεται έναν πληθυσμό από διανύσματα σχεδίασης και είναι στοχαστικού χαρακτήρα. Η κεντρική ιδέα της μεθόδου στηρίζεται σε αρχές της κοινωνιολογίας και της ψυχολογίας, σχετικά με τον τρόπο συμπεριφοράς των μελών μιας ομάδας υπό την επίδραση διαφόρων και

διαφορετικών ερεθισμάτων. Είναι γεγονός ότι ένας τρόπος, τον οποίο χρησιμοποιεί ο άνθρωπος για την επίλυση των προβλημάτων του, είναι η επικοινωνία με άλλους ανθρώπους και επί του συγκεκριμένου προβλήματος. Μέσω αυτής της επικοινωνίας, ο άνθρωπος αλληλεπιδρά και μεταβάλλεται. Μέσα από αυτήν την αλληλεπίδραση, επιτυγχάνεται μία προσέγγιση των ατόμων μεταξύ τους, η οποία οδηγεί στην τελική επικράτηση απόψεων και θέσεων, τις όποιες υιοθετούν τα αλληλεπιδρώντα άτομα, σχετικά με τη βέλτιστη αντιμετώπιση ενός προβλήματος. Η μέθοδος (PSO) προσομοιάζει αυτήν την κοινωνική συμπεριφορά.

Αρχικά, πρέπει να διατυπωθεί με πληρότητα το πρόβλημα βελτιστοποίησης και να οριστεί με σαφήνεια η αντικειμενική συνάρτηση για την εκτίμηση της επίδοσης μίας προτεινόμενης λύσης. Επίσης, πρέπει να δημιουργηθεί ένα πρωτόκολλο επικοινωνίας, έτσι ώστε να είναι δυνατή η επικοινωνία κάθε μέλους της ομάδος με τους γείτονές του. Στη συνέχεια, δημιουργείται, με εντελώς τυχαίο τρόπο, ένας πληθυσμός από διανύσματα σχεδίασης, επονομαζόμενο και ως σμήνος σωματιδίων ή σμήνος μεμονωμένων ατόμων, ο οποίος βελτιώνεται συνεχώς μέσα από μια επαναληπτική διαδικασία. Σε αυτήν τη διαδικασία, εκτιμάται η επίδοση κάθε ατόμου και επιτρέπεται η ανταλλαγή πληροφορίας μεταξύ ατόμων και γειτόνων, σε επίπεδο τιμών μεταβλητών σχεδίασης και βάσει του προαναφερθέντος πρωτοκόλλου επικοινωνίας, έτσι ώστε το σμήνος προοδευτικά να κατευθύνεται προς καλύτερες επιδόσεις (Eberhart R. C. and Kennedy J., 1995).

1.5.2.7 Η μέθοδος βελτιστοποίησης της Αποικίας Μυρμηγκιών (Ant Colony Optimization)

Η μέθοδος βελτιστοποίησης της Αποικίας Μυρμηγκιών (Ant Colony Optimization) είναι μία μετα-ευριστική τεχνική βελτιστοποίησης, στοχαστικής φύσεως, κατάλληλη για την επίλυση προβλημάτων, τα οποία ανάγονται στην εύρεση του καλύτερου δρόμου μέσω γράφων. Η κεντρική ιδέα της μεθόδου προέρχεται από τον τρόπο συμπεριφοράς των μυρμηγκιών, όταν αυτά αναζητούν την τροφή τους. Ειδικότερα, τα μυρμηγκιά περιφέρονται με τυχαίο τρόπο προς αναζήτηση τροφής και όταν εντοπίσουν κάτι τότε αποκόπτουν ένα τμήμα της τροφής και το μεταφέρουν πίσω στην αποικία τους. Κατά την επιστροφή τους, αφήνουν πίσω τους ίχνη από τη χημική ουσία φερομόνη, προκειμένου να μεταβιβάσουν στα υπόλοιπα μέλη της αποικίας το γεγονός ότι έχει εντοπιστεί τροφή. Όταν άλλα περιπλανώμενα μυρμηγκιά εντοπίσουν

αυτά τα ίχνη, τότε κατευθύνονται προς την τροφή, αποκόπτουν και αυτά ένα τμήμα της και το μεταφέρουν πίσω στην αποικία τους. Κατά την επιστροφή τους, δε, αποθέτουν και αυτά με τη σειρά τους ίχνη φερομόνης, με αποτέλεσμα σχετικά σύντομα να σχηματιστεί ένα μονοπάτι με ισχυρά ίχνη φερομόνης. Ωστόσο, η φερομόνη έχει την τάση να εξατμίζεται, οπότε ίχνη σε μονοπάτια μεγαλύτερου μήκους εξαφανίζονται γρηγορότερα από τα αντίστοιχα ίχνη ενός μονοπατιού με μικρότερο μήκος. Με αυτόν τον τρόπο, προοδευτικά, ενισχύεται με ίχνη φερομόνης, και τελικά απομένει, η συντομότερη διαδρομή προς την τροφή (Dorigo, 1993; Stützle and Hoos, 2000).

1.5.3 Έμμεσες μέθοδοι βελτιστοποίησης

Στην κατηγορία των εμμέσων μεθοδολογιών βελτιστοποίησης ανήκουν τα λεγόμενα Βέλτιστα Κριτήρια.

1.5.3.1 Η μέθοδος της ομογενοποίησης

Σύμφωνα με αυτήν τη μέθοδο, ο χώρος σχεδίασης, αρχικά, πλεγματοποιείται και σε αυτόν αποδίδονται ιδιότητες ομογενούς και ισοτροπικού υλικού. Στη συνέχεια, και χρησιμοποιώντας πάντοτε το ίδιο πλέγμα, επιλύεται το πρόβλημα της αναζήτησης της βέλτιστης χωρικής περιοδικής κατανομής ενός πλήθους οπών μικροσκοπικών διαστάσεων, εξ αιτίας του όποιου το αρχικώς ισοτροπικό υλικό αποκτά ανισοτροπικές ιδιότητες. Προφανώς, στο ανωτέρω πρόβλημα βελτιστοποίησης επιβάλλεται η βασική προϋπόθεση ότι η τελική κατανομή δύναται να παραλάβει με ασφάλεια τα ονομαστικά φορτία και ικανοποίει οποιονδήποτε άλλο σχεδιαστικό περιορισμό (Bendsøe and Kikuchi, 1988).

1.5.3.2 Η μέθοδος SIMP

Αυτή η μέθοδος λειτουργεί σε ένα σταθερό πλέγμα πεπερασμένων στοιχείων με βασικό στόχο την ελαχιστοποίησης μίας αντικειμενικής συνάρτησης μέσω της αναγνώρισης των στοιχείων που πρέπει να αποτελούνται από συμπαγές υλικό ή να είναι κενά. Στην τοπολογική βελτιστοποίηση κατασκευών με χρήση αυτής της μεθόδου, η αντικειμενική συνάρτηση συνήθως είναι η ενδοτικότητα, και οι περιορισμοί τίθενται στην ποσότητα του υλικού που μπορεί να τοποθετηθεί σε κάθε στοιχείο. Αρχικά, αυτή η θεώρηση του προβλήματος ορίζει ένα άκρως προκλητικό

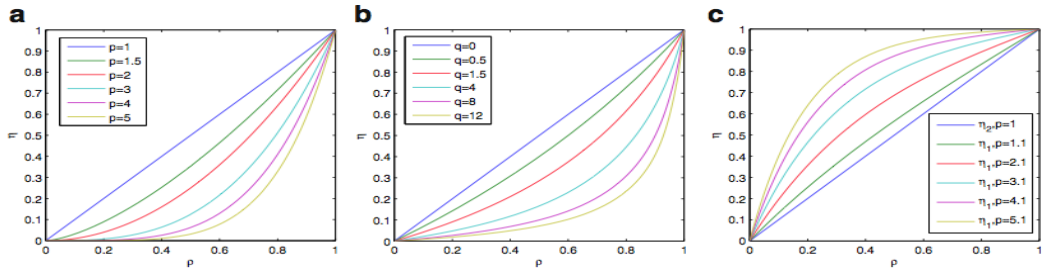
πρόβλημα ακέραιου προγραμματισμού μεγάλης κλίμακας. Ως αποτέλεσμα, είναι επιθυμητό να αντικατασταθούν οι διακριτές μεταβλητές με συνεχείς μεταβλητές και να προσδιοριστεί ένα μέσο που να κατευθύνει τη λύση επαναληπτικά σε μία διακριτή λύση στερεού/κενού. Αυτό επιτυγχάνεται με της χρήση μίας συνάρτησης παρεμβολής, όπου οι συνεχείς μεταβλητές σχεδιασμού (π.χ. το πάχος) μεταφράζονται ως πυκνότητα του κάθε στοιχείου. Για ενδιάμεσες τιμές πυκνότητας είναι δυνατή η χρήση μιας συνάρτησης ποινής η οποία έχει την μορφή απλού εκθετικού νόμου με $η(ρ)= ρ^p$ και κατευθύνει τη λύση σε τοπολογίες τύπου «0/1», μαύρου/άσπρου ή αλλιώς στερεού/κενού (Bendsøe, 1989; Bendsøe, 2003).

1.5.3.3 Η μέθοδος RAMP

Αποτελεί παραλλαγή της SIMP που αναπτύχθηκε από τους Stolpe και Svanberg. Σ' αυτήν τη μέθοδο η βασική διαφορά έγκειται στην συνάρτηση ποινής της πυκνότητας. Ειδικότερα, εφαρμόζεται μια νέα συνάρτηση ποινής έτσι ώστε τα στοιχεία που έχουν μηδενική πυκνότητα να μπορούν να παίρνουν μη μηδενικές τιμές κατά τη διάρκεια της ανάλυσης ευαισθησίας (Stolpe and Svanberg, 2001).

1.5.3.4 Η μέθοδος SINH

Θεμελιώθηκε από τον Bruns και αποτελεί παραλλαγή κι' αυτή της μεθόδου SIMP. Σ' αυτήν την μέθοδο δεν ποινικοποιείται η πυκνότητα αλλά ο όγκος. Συγκεκριμένα, ενδιάμεσοι όγκοι χρησιμοποιούν περισσότερο όγκο σε σχέση με την ικανότητα τους να φέρουν φορτία από τα συμπαγή ή κενά στοιχεία (Bruns, 2005). Στο Σχήμα 1.2 παρουσιάζεται μία σύγκριση του τρόπου ποινικοποίησης των μεθόδων SIMP, RAMP και SINH.



Σχήμα 1.2: Σύγκριση μεθόδων ποινικοποίησης ενδιάμεσων πυκνοτήτων α) SIMP, β) RAMP, γ) SINH.

1.5.3.5 Η μέθοδος SRV

Η μέθοδος SRV είναι κι αυτή μια μέθοδος που άρει την διακριτότητα του προβλήματος μέσω της εισαγωγής μιας συνάρτησης πυκνότητας η οποία είναι συνεχής στο χώρο σχεδίασης. Ωστόσο, δεν την ποινικοποιεί απλά εισάγει μια γραμμική εξάρτηση του μέτρου ελαστικότητας Ε από την πυκνότητα. Επιπλέον, εισάγεται ένας περιορισμός, ο οποίος απαιτεί το άθροισμα των μεταβλητών σχεδίασης να είναι μικρότερο από την τιμή που θα είχαν σε ένα διακριτό σχεδιασμό (Fuchs et al, 2005).

Να σημειωθεί ότι οι τέσσερις τελευταίες μέθοδοι, δηλαδή οι SIMP, RAMP, SINH, SRV είναι όλες μέθοδοι που άρουν την διακριτότητα του προβλήματος κατανομής μέσω μιας πυκνότητας, η οποία είναι συνεχής μεταβλητή. Γι' αυτόν τον λόγο ονομάζονται και Μέθοδοι Βελτιστοποίησης Μέσω πυκνότητας (Density-based methods). Αυτές οι μέθοδοι μπορούν να λυθούν τόσο με βέλτιστα κριτήρια όσο και με συμβατικές μεθόδους γενικής βελτιστοποίησης όπως η CONLIN, και η Μέθοδος των Κινουμένων Ασύμπτωτων (Method of Moving Asymptotes – MMA). Ειδικότερα η MMA, αναπτύχτηκε από τον Svanberg και αφορά σε μία επαναληπτική διαδικασία, σε κάθε βήμα της όποιας δημιουργείται και επιλύεται ένα αυστηρώς κυρτό πρόβλημα προσέγγισης. Η δημιουργία αυτών των προσεγγίσεων ελέγχεται από τις αποκαλούμενες «κινούμενες ασύμπτωτες», οι όποιες δύνανται να σταθεροποιήσουν και να επιταχύνουν την όλη διαδικασία. Αυτή η μέθοδος είναι ικανή να διαχειρίζεται όλα τα ειδή των περιορισμών, με μοναδική προϋπόθεση τον υπολογισμό, είτε αριθμητικό είτε αναλυτικό, των παράγωγων των συναρτήσεων περιορισμού (Svanberg K.,1987)

1.5.3.6 Η μέθοδος των φυσαλίδων (Bubble Method)

Η μέθοδος των φυσαλίδων (Bubble Method) αναπτύχτηκε από τον Eschenauer και στηρίζεται στην εισαγωγή οπών (φυσαλίδες) σε μία σχεδίαση. Η εισαγωγή μιας φυσαλίδας έχει ως αποτέλεσμα την μεταβολή της τοπολογίας της εξεταζόμενης κατασκευής. Η επαναληπτική εισαγωγή φυσαλίδων επιτυγχάνεται μέσω διαφόρων μεθόδων, μία εκ των όποιων είναι και η επίλυση ενός προβλήματος μεταβολών. Για τις προκύπτουσες διαφορετικές τοπολογίες, εφαρμόζεται μία, ιεραρχικού τύπου,

διαδικασία βελτιστοποίησης σχήματος, προκειμένου να εντοπιστεί το βέλτιστο σχήμα των φυσαλίδων (Eschenauer, et al, 1994).

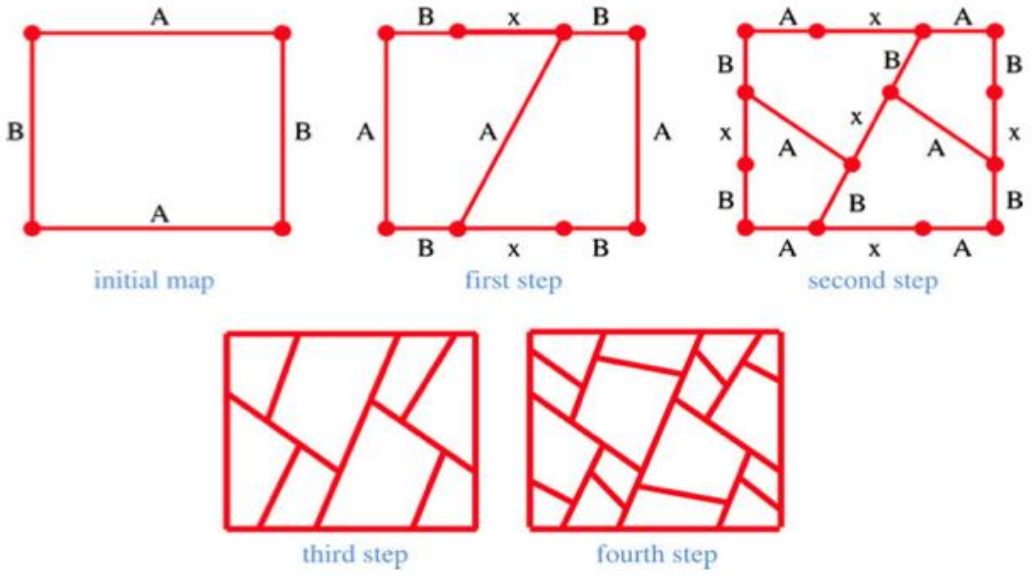
1.5.3.7 Η μέθοδος ESO

Η μέθοδος ESO, που προτάθηκε από τους Xie και Steven, αφορά σε μία εξαιρετικά απλή τεχνική βελτιστοποίησης, εν αντιθέσει με τις περισσότερες υπάρχουσες. Η κεντρική ιδέα είναι η εύρεση μιας βέλτιστης σχεδίασης ομοιόμορφου πάχους (Optimum Uniform Design – OUD), για την οποία να ικανοποιείται ο εκάστοτε επιβαλλόμενος περιορισμός. Στη συνέχεια, από αυτήν τη σχεδίαση, απομακρύνεται πλεονάζον υλικό, το οποίο χαρακτηρίζεται από τη χαμηλότερη ενεργειακή συμμετοχή. Οι δύο βασικές παραλλαγές της μεθόδου είναι η Προσθετική ESO (Additive ESO - AESO) και η Αμφίδρομη ESO (Bidirectional ESO - BESO). Συμφώνα με την πρώτη παραλλαγή, η διαδικασία εκκινεί από μία υποδιαστασιολογημένη σχεδίαση, στην οποία διαρκώς προστίθεται υλικό στις περιοχές με τη μεγαλύτερη ενεργειακή συμμετοχή, ενώ, συμφώνα με τη δεύτερη παραλλαγή, επιτρέπεται τόσο η προσθήκη όσο και η αφαίρεση υλικού, ανάλογα, πάντοτε με ένα κριτήριο ενεργειακής συμμετοχής (Xie, Y.M., Steven, G.P.,1994; Xie, Y.M., Steven, G.P.,1997).

1.5.3.8 Η μέθοδος της κυτταρικής διαίρεσης (cellular division-based method)

Πρόσφατα, αναπτύχθηκε από τον Kobayashi (2010) μια καινοτόμα βιολογικά εμπνευσμένη μέθοδο βελτιστοποίησης τοπολογίας που μπορεί να παράγει διακριτές δομές που ομοιάζουν με δομές συνεχούς μέσου (continuum–like). Η μέθοδος δημιουργεί μια τοπολογική διάταξη μέσω ενός μοντέλου ανάπτυξης που προσομοιώνει τις κυτταρικές διαιρέσεις των ζωντανών οργανισμών. Με αυτόν τον τρόπο η τοπολογία αναπτύσσεται σε στάδια και εάν συνδυαστεί με έναν γενετικό αλγόριθμο μπορεί να δώσει βέλτιστες λύσεις ελέγχοντας μόνο τους παράγοντες που επηρεάζουν τον αλγόριθμο ανάπτυξης των κυτταρικών διαιρέσεων. Με τον έλεγχο αυτών των αναπτυξιακών κανόνων, ένα εντυπωσιακά διαφορετικό σύνολο τοπολογικών σχεδιασμών μπορεί να παραχθεί με σχετικά λίγες μεταβλητές σχεδιασμού. Ένα πλεονέκτημα αυτής της μεθόδου είναι η απλή σύζευξή του με υπάρχοντα λογισμικά πεπερασμένων στοιχείων ή και άλλα εργαλεία ανάλυσης. Η

μέθοδος είναι, επίσης, σε θέση να παράγει τοπολογίες που δυνητικά είναι άμεσα έτοιμες για μετέπειτα ή ακόμη και ταυτόχρονη βελτιστοποίηση μεγέθους και σχήματος. Ένα πιθανό μειονέκτημα είναι ότι η μέθοδος οδηγείται μόνο μέσω γενετικού αλγορίθμου, ο οποίος είναι συχνά υπολογιστικά δαπανηρός σε σχέση με τις τεχνικές που βασίζεται σε παράγωγο πρώτης τάξης.



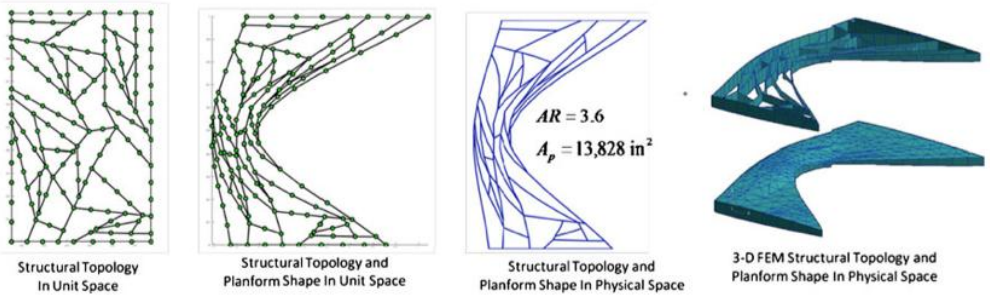
Σχήμα 1.3: Παράδειγμα τεσσάρων πρώτων σταδίων κατά την διαδικασία κυτταρικής διαίρεσης

Στο παραπάνω σχήμα (Σχήμα 1.3) παρουσιάζεται ένα παράδειγμα εφαρμογής της διαδικασίας κυτταρικής διαίρεσης.

Οι μεταβλητές σχεδίασης που ελέγχει ο γενετικός αλγόριθμος προέρχονται από έναν αλγόριθμο ανάπτυξης που ονομάζεται Lindenmayer ή χάρτης-L. Ένας χάρτης ορίζεται ως ένα πεπερασμένο σύνολο περιοχών με κάθε περιοχή να οριοθετείται από μια ακολουθία από ακμές που τέμνονται στις κορυφές. Οι χάρτες είναι ανάλογοι με κυτταρικά στρώματα, όπου οι περιοχές αντιπροσωπεύουν τα κύτταρα και τα άκρα τις μεμβράνες. Με τη χρήση μιας σειράς κανόνων παραγωγής, δημιουργούνται σύνθετες τοπολογίες. Παρόλα αυτά είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι η τοπολογική διάταξη που δημιουργείται από το χάρτη-L από μόνη της δεν έχει καμία κατασκευαστική ή φυσική έννοια. Έτσι, η γεωμετρία πρέπει να ερμηνεύεται σε δομικά στοιχεία, τα οποία συχνά μπορεί να γίνει σε ένα στάδιο προ-επεξεργασίας. Οι γενετικοί αλγόριθμοι ελέγχουν έναν αριθμό παραμέτρων που επηρεάζουν την προκύπτουσα τοπολογία όπως αυτοί που ελέγχουν την ανάπτυξη και τη δυναμική της ανάπτυξης των «κυττάρων». Αυτό επιτρέπει στον γενετικό αλγόριθμο την τροποποίηση όχι μόνο του αρχικού χάρτη, αλλά και την προσαρμογή των κανόνων που δημιουργούν την

τοπολογία σύμφωνα με μια κατάλληλη συνάρτηση – αυτή η κατάλληλη συνάρτηση είναι η αντικειμενική συνάρτηση και συνήθως να ταυτίζεται με τη μάζα της κατασκευής, χωρίς αυτό να είναι απαραίτητο.

Σημειώνεται ότι αυτή η έμμεση αντιπροσώπευση της τοπολογίας διαφέρει από τη ρητή αναπαράσταση (όπου μια μεταβλητή σχεδιασμού για κάθε πεπερασμένο στοιχείο αντιστοιχεί στο γονιδίωμα) που χρησιμοποιείται σε άλλες μεθόδους γενετικών αλγορίθμων. Στην πραγματικότητα, είναι αυτή η αναπαράσταση που επιτρέπει όχι μόνο λιγότερες μεταβλητές σχεδιασμού και περισσότερη ελευθερία σχεδιασμού, αλλά αποφεύγει και άλλα θέματα όπως η διατήρηση της συνδεσιμότητας σε όλη την εξέλιξη της βελτιστοποίησης. Στο Σχήμα 1.4 που ακολουθεί, παρουσιάζεται η δημιουργία τοπολογίας πτέρυγας με χρήση χαρτών – L.



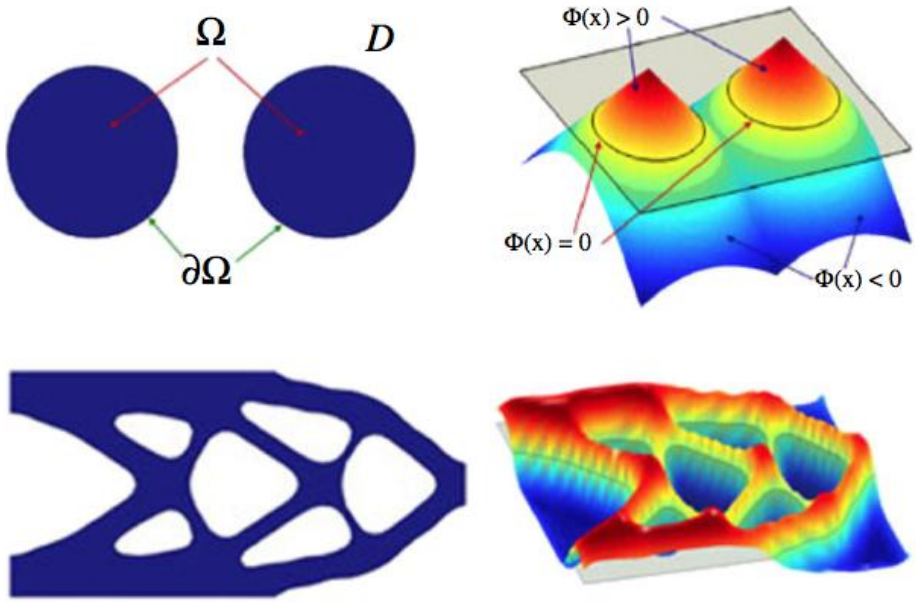
Σχήμα 1.4: Δημιουργία τοπολογίας για μία πτέρυγα με την βοήθεια των χαρτών L

1.5.3.9 Μέθοδος Lever set

Η μέθοδος αυτή, που στην πραγματικότητα είναι οικογένεια μεθόδων, αποτελεί την πιο πρόσφατη εξέλιξη στον τομέα της βελτιστοποίησης τοπολογίας με τις ρίζες της να βρίσκονται σε τεχνικές βελτιστοποίησης σχήματος. Οι μέθοδοι Lever Set για προβλήματα μετακίνησης και διασύνδεσης στη Φυσική αναπτύχθηκε για πρώτη φορά από Osher και Sethian (1988) με θεμελιώδη στόχο την παρακολούθηση της κίνησης των καμπυλών και επιφανειών και έκτοτε έχουν εφαρμοστεί σε ένα ευρύ φάσμα ερευνητικών πεδίων.

Η μέθοδος Lever Set εφαρμόστηκε για πρώτη φορά στη βελτιστοποίηση τοπολογίας στις αρχές της δεκαετίας του 2000 από τους Sethian και Wiegmann (2000). Σε αντίθεση με τις βασισμένες στην πυκνότητα μεθόδους, οι οποίες βασίζονται σε μια συνάρτηση που καθορίζει τα κατασκευαστικά όρια, αυτές οι μέθοδοι δημιουργούν μια ρητή παραμετροποίηση του πεδίου σχεδιασμού. Ειδικότερα, στη μέθοδο Lever Set, τα όρια της κατασκευής αναπαρίστανται ως μηδενικό επίπεδο μιας μονόμετρης

συνάρτησης Φ. Αυτή η συνάρτηση Φ δίνει τη δυνατότητα στα όρια της κατασκευής να μεταβάλλονται με το χρόνο ανάλογα με την αντικειμενική συνάρτηση. Ως αντικειμενική συνάρτηση, συνήθως, χρησιμοποιείται η τιμή της ενδοτικότητας και ζητείται η ελαχιστοποίησή της, χωρίς ωστόσο αυτό να είναι απαραίτητο. Έτσι, λοιπόν, αφού τα όρια μεταβάλλονται με το χρόνο μπορεί να εισαχθεί και η έννοια της ταχύτητας των ορίων. Έχοντας τη δυνατότητα τα όρια να μεταβάλλονται δημιουργούνται οπές, όπως στην μέθοδο των φυσαλίδων, οι οποίες παραμετροποιούνται βάσει της Φ μεταβάλλοντας σε κάθε επανάληψη τα όριά τους. Έτσι, κατά τη διάρκεια της βελτιστοποίησης οι οπές μπορούν να συγχωνευτούν, να μεταβληθούν αλλά και να εξαφανιστούν. Εν ολίγοις, η συνάρτηση Φ δημιουργεί, μέσω της αντικειμενικής συνάρτησης, ένα «ψευδοπεδίο» το οποίο εντοπίζει το βέλτιστο σχήμα των οπών που εισάγονται στην κατασκευή. Στο Σχήμα 1.5 που ακολουθεί παρουσιάζονται παραστάσεις απεικόνισης τοπολογιών που δημιουργήθηκαν με μεθόδους Lever Set



Σχήμα 1.5: Παραστάσεις απεικόνισης τοπολογιών με συναρτήσεις Lever Set

Όπως αναφέρθηκε, η μέθοδος μεταφέρθηκε από την βελτιστοποίηση σχήματος στην τοπολογική βελτιστοποίηση. Έτσι, λοιπόν, το πλεονέκτημα της μεθόδου σε σχέση με τις άλλες είναι ότι δημιουργεί λείες επιφάνειας κοντά στις οπές και απουσιάζουν γκρίζες και «τραχιές» περιοχές.

1.6 Σύγκριση των μεθόδων SIMP και ESO

Όπως είναι φανερό, υπάρχει πλειάδα μεθόδων που απαντούν στο πρόβλημα της τοπολογικής βελτιστοποίησης. Οι μέθοδοι που έχουν επικρατήσει και έχουν φτάσει στο στάδιο της ανάπτυξης εμπορικού λογισμικού είναι η μέθοδος SIMP και η μέθοδος ESO. Ο Rozvany (2009) και οι. Deaton και Grandhi (2013) έκαναν εκτεταμένη έρευνα πάνω στις δύο μεθόδους ώστε να διερευνηθεί ποια μέθοδος έχει τα περισσότερα πλεονεκτήματα καταλήγοντας στο παρακάτω αποτέλεσμα:

Η μέθοδος SIMP είναι μια αρκετά σταθερή μέθοδος τοπολογικής βελτιστοποίησης, η οποία δίνει, συνήθως, μια λύση κοντά στο καθολικό βέλτιστο εάν το πρόβλημα είναι αρχικά κυρτό (π.χ. προβλήματα ενδοτικότητας) και ο συντελεστής ποινής είναι μεγαλύτερος από τη μονάδα. Ωστόσο, η SIMP χρησιμοποιείται στην πράξη για εξαιρετικά πολύπλοκα και μη-κυρτά προβλήματα, όχι με την ίδια επιτυχία καθώς δεν μπορεί να εγγυηθεί ότι η λύση της βρίσκεται κοντά στο καθολικό βέλτιστο. Η SIMP απαιτεί σχετικά λίγες επαναλήψεις και είναι κατάλληλη για διάφορους περιορισμούς, πολλές συνθήκες φορτίου και για εξαιρετικά μεγάλα συστήματα (συχνά τριδιάστατα). Για τους παραπάνω λόγους αποτελεί μια ευρέως χρησιμοποιούμενη μέθοδο και σε επίπεδο βιομηχανικού λογισμικού.

Η ESO είναι προς το παρόν πλήρως ευριστική και ενίοτε σε κάποια παραδείγματα αναξιόπιστη, με χαοτικές καμπύλες σύγκλισης της αντικειμενικής συνάρτησης. Ειδικότερα, παρατηρούνται διακυμάνσεις και αυξομειώσεις κατά τη διάρκεια σύγκλισης της αντικειμενικής. Στην παρούσα μορφή, η ESO επιλύει προβλήματα με ένα μόνο περιορισμό (όπως η ενδοτικότητα ή η τάση). Η ESO συγκλίνει σε τοπικό ελάχιστο εάν η ανάλυση ευαισθησίας αλλάζει με ταχείς ρυθμούς σε κάποια πεπερασμένα στοιχεία. Εξ' αυτού έπεται ότι υπάρχει περιθώριο για επιπλέον βελτίωση της μεθόδου. Η ESO ως εκ τούτου έχει αρχίσει να αντικαθίσταται από τη SIMP σε βιομηχανικές εφαρμογές.

Τελικά, σύμφωνα με τους Deaton και Grandhi φαίνεται ότι η SIMP αποτελεί μέχρι σήμερα την καλύτερη και την πιο διαδεδομένη μέθοδο τοπολογικής βελτιστοποίησης.

2

Η μέθοδος SIMP

Όπως αναφέρθηκε, στην τοπολογική βελτιστοποίηση ζητείται η βέλτιστη διαμόρφωση μιας κατασκευής σε μια καθορισμένη περιοχή. Τα γνωστά μεγέθη του προβλήματος είναι:

- τα ασκούμενα φορτία,
- οι συνθήκες στήριξης,
- ο όγκος,
- διάφοροι σχεδιαστικοί περιορισμοί,
- η θέση και το μέγεθος προδιαγεγραμμένων οπών ή συμπαγών περιοχών.

Το μέγεθος, το σχήμα και η συνδεσιμότητα της δομής είναι άγνωστοι, κάτι που αποτελεί πλεονέκτημα διότι παρέχει αυξημένη ευελιξία. Για την επίλυση του προβλήματος, οι άγνωστοι αυτοί δεν αναπαρίστανται με παραμετρικές συναρτήσεις αλλά με συναρτήσεις κατανομής σε μια σταθερή περιοχή σχεδιασμού. Επιπλέον, οι συναρτήσεις αυτές βασίζονται στην παραμετροποίηση του τανυστή ακαμψίας του συνεχούς μέσου. Σε αυτή την παραμετροποίηση βασίζεται η μέθοδος επίλυσης που παρουσιάζεται παρακάτω.

2.1 Σχεδιασμός ελάχιστης ενδοτικότητας (minimum compliance design)

Το πρόβλημα της τοπολογικής βελτιστοποίησης περιλαμβάνει πληθώρα καταστατικών και σχεδιαστικών μεταβλητών και γενικώς είναι περίπλοκο. Η πιο εύκολη μορφή του προβλήματος εντοπίζεται αν επιλεγεί σαν μεταβλητή σχεδιασμού η ελάχιστη ενδοτικότητα (minimum compliance) της κατασκευής, ήτοι η μέγιστη ολική ακαμψία της, υποκείμενη σε απλά φορτία. Αυτό οδηγεί στην υιοθέτηση του τανυστή ακαμψίας ως σχεδιαστική μεταβλητή.

Έστω ένα σώμα που καταλαμβάνει μια περιοχή Ω^{mat}, η οποία είναι τμήμα ενός μεγαλύτερου χωρίου Ω, στο R^2 ή R^3. Στο Ω μπορούν να οριστούν τα ασκούμενα φορτία και οι συνοριακές συνθήκες ενώ άγνωστος είναι ο τανυστής ακαμψίας $E_{ijkl}(x)$ ο οποίος διαφέρει στα διακριτά σημεία του πεδίου σχεδίασης.

Γενικά, οι εξισώσεις του προβλήματος είναι:

διγραμμική μορφή ενέργειας : $$a(u,v)=\int_\Omega E_{ijkl}(x)\,\varepsilon_{ij}(u)\,\varepsilon_{kl}(v)\,d\Omega \qquad (2.1)$$

γραμμικοποιημένες παραμορφώσεις : $$\varepsilon_{ij}(u)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \qquad (2.2)$$

γραμμική μορφή φορτίων : $$l(u)=\int_\Omega f\,u\,d\Omega+\int_{\Gamma T} t\,u\,ds \qquad (2.3)$$

ελάχιστη ενδοτικότητα : $$\min_{u\in U,E} l(u) \quad a_E(u,v)=l(u),\ v\in U,\ E\in E_{ad} \qquad (2.4)$$

με καταστατική και σχεδιαστική μεταβλητή $u,\ E$ αντίστοιχα.

Η εξίσωση (2.4) αποτελεί την ασθενή (μεταβολική) μορφή της εξίσωσης ισορροπίας. Επίσης

U : ο χώρος των επιτρεπτών κινηματικών μετατοπίσεων

f : οι χωρικές δυνάμεις

t : τα εντατικά διανύσματα (ελκυστές) στο αντίστοιχο τμήμα του συνόρου, $\Gamma_T \subset \Gamma \equiv \partial\Omega$,

E_{ad} : το σύνολο των επιτρεπτών τανυστών ακαμψίας.

Ο συμβολισμός $a_E(u,v)$ δηλώνει ότι η διγραμμική μορφή εξαρτάται από τη μεταβλητή σχεδιασμού, Ε.

Όταν λύνονται προβλήματα διατυπωμένα στη μορφή της εξίσωσης (2.4), η συνήθης τεχνική είναι να διακριτοποιείται το πρόβλημα με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων. Υιοθετώντας αυτόν τον τρόπο, η εξίσωση (2.4) γίνεται:

$$\begin{aligned} &\min_{u\in U,\, E_e} \frac{1}{2} u^T K u \\ &K(E_e)u = f,\ E_e \in E_{ad} \end{aligned} \tag{2.5}$$

όπου K είναι το ολικό μητρώο ακαμψίας. Επισημαίνεται ότι στη μορφή της εξίσωσης (2.5) υπάρχουν δυο πεδία ενδιαφέροντος, το u και το E, διότι το μητρώο ακαμψίας εξαρτάται από το E που είναι άγνωστο.

2.2 Μεταβλητή σχεδιασμού

Κατά τον τοπολογικό σχεδιασμό μιας κατασκευής καθορίζεται η βέλτιστη θέση του δοθέντος ισότροπου υλικού σε μια συγκεκριμένη περιοχή, δηλαδή καθορίζεται ποια σημεία του χώρου έχουν υλικό και ποια όχι. Δεδομένου ότι το σώμα διακριτοποιείται με πεπερασμένα στοιχεία (Finite Elements - FE), η γεωμετρική αναπαράσταση της δομής αντιστοιχίζεται κάπως στην ψηφιακή αναπαράσταση με εικονοστοιχεία (pixels) μιας μαυρόασπρης εικόνας. Για το προκείμενο πρόβλημα, αυτή η αντιστοιχία υποδεικνύει ότι το σύνολο E_{ad} των επιτρεπτών τανυστών ακαμψίας αποτελείται από τανυστές για τους οποίους ισχύουν:

$$E_{ijkl} = l_{\Omega^{mat}} E^0_{ijkl},\quad l_{\Omega^{mat}} = \begin{cases} 1,\ x \in \Omega^{mat} \\ 0,\ x \in \Omega \setminus \Omega^{mat} \end{cases} \tag{2.6}$$

$$\int_{\Omega} l_{\Omega^{mat}}\, d\Omega = Vol(\Omega^{mat}) \le V \tag{2.7}$$

Στην Σχέση (2.7), η ανισότητα θέτει έναν περιορισμό στο συνολικό διαθέσιμο υλικό, έτσι ώστε η σχεδίαση να αφορά έναν συγκεκριμένο συνολικό όγκο. Με την Σχέση (2.6), η σχεδίαση έχει μετατραπεί, πλέον, σε ένα πρόβλημα ακέραιου προγραμματισμού.

Ο κοινότερος τρόπος για την επίλυση του προβλήματος είναι να αντικατασταθούν οι ακέραιες δυαδικές μεταβλητές με συνεχείς και να τεθούν συναρτήσεις «ποινών» οι

οποίες οδηγούν τις συνεχείς μεταβλητές σε τιμές 0 και 1. Ειδικότερα, ο τανυστής ακαμψίας τροποποιείται ώστε να εξαρτάται συνεχώς από μια συνάρτηση που ερμηνεύεται ως πυκνότητα του υλικού, η οποία αποτελεί πλέον τη μεταβλητή σχεδίασης. Οι ενδιάμεσες τιμές αυτής της συνάρτησης αντιμετωπίζονται όπως στα συνήθη προβλήματα ακέραιου δυαδικού προγραμματισμού.

Εν προκειμένω, η τεχνική που ακολουθείται είναι το λεγόμενο μοντέλο SIMP (Solid Isotropic Material with Penalization) στο οποίο τίθεται:

$$E_{ijkl} = \rho(x)^p E^0_{ijkl}, \quad p > 1 \tag{2.8}$$

$$\int_\Omega \rho(x)\, d\Omega \le V, \quad 0 \le \rho(x) \le 1, \quad x \in \Omega \tag{2.9}$$

Το $\rho(x)$ είναι η μεταβλητή σχεδιασμού, λόγω δε της Σχέσης (2.9) χαρακτηρίζεται ως «πυκνότητα». Το E^0_{ijkl} αναπαριστά τις ιδιότητες ενός ισότροπου υλικού. Στην Σχέση (2.8) το $\rho(x)$ είναι ουσιωδώς μια συνάρτηση παρεμβολής που παρεμβάλει μεταξύ των τιμών 0 και E^0_{ijkl},

$$E_{ijkl}(\rho = 0) = 0, \quad E_{ijkl}(\rho = 1) = E^0_{ijkl} \tag{2.10}$$

Στο πέρας των υπολογισμών, αν όλα τα σημεία έχουν πυκνότητα μόνο 0 ή 1, η τοπολογία του σώματος έχει τη σωστή φυσική έννοια. Στο μοντέλο SIMP επιλέγεται $p > 1$ ώστε οι ενδιάμεσες τιμές ακαμψίας να απομακρύνουν από τη βέλτιστη λύση και συνεπώς να έχουν την τάση να απορριφθούν. Αυτό είναι ουσιαστικά μια συνάρτηση ποινής που εφαρμόζεται απλά, δίχως άλλες περιπλοκές. Για προβλήματα όπου ο περιορισμός του όγκου είναι ενεργός, πρέπει $p \ge 3$. Επίσης, για προβλήματα ελάχιστης ενδοτικότητας τα οποία έχουν διακριτοποιηθεί με FE, δηλ. της μορφής της Σχέσης (2.5), και στα οποία ο περιορισμός του όγκου είναι συμβατός με την επιδιωκόμενη σχεδίαση, αποδεικνύεται ότι υπάρχει μια ολικά βέλτιστη λύση. Γενικά, ο περιορισμός 0-1 που τίθεται για την πυκνότητα είναι ισχυρός. Αυτό μειώνει την ευελιξία της διαδικασίας να οδηγηθεί στη βέλτιστη λύση, μερικές δε φορές δεν υπάρχει καθόλου σύγκλιση.

Σημαντικό μειονέκτημα του μοντέλου SIMP είναι ότι δεν υπάρχει θεωρητική εξασφάλιση ότι θα οδηγήσει πάντα σε λύση του (διακριτοποιημένου) προβλήματος. Ακόμη χειρότερα, η σύγκλιση εξαρτάται ισχυρά από την πυκνότητα του πλέγματος των πεπερασμένων στοιχείων.

Τέλος, το μοντέλο SIMP δεν είναι μόνον μια αφηρημένη μαθηματική τεχνική αλλά έχει και φυσική έννοια. Αρκεί να αναφερθεί ότι αν το p ικανοποιεί κάποιες σχέσεις, τότε υπάρχει πραγματικό υλικό που μιμείται τη συμπεριφορά της SIMP.

2.3 Συνθήκη βελτιστότητας

Ακολούθως, θα παρουσιαστεί η τεχνική επίλυσης του μελετώμενου προβλήματος, η οποία βασίζεται σε πολλαπλασιαστές Lagrange και ονομάζεται κριτήρια βελτιστότητας (optimality criteria method). Υπενθυμίζεται ότι το πρόβλημα που ζητείται να λυθεί, στη συνεχή του μορφή είναι:

$$\min_{u \in U, E} l(u) \tag{2.11.α}$$

$$a_E(u,v) = l(u),\ v \in U,\ E \in E_{ad} \tag{2.11.β}$$

$$E_{ijkl} = \rho(x)^p E^0_{ijkl},\quad p > 1 \tag{2.11.γ}$$

$$\int_\Omega \rho(x)\, d\Omega \le V,\quad 0 < \rho_{\min} \le \rho(x) \le 1,\quad x \in \Omega \tag{2.11.δ}$$

Όπως φαίνεται και στην Σχέση (2.11.δ), τίθεται ένα όριο για την ελάχιστη τιμή του $\rho(x)$, ο δε μηδενισμός του απαγορεύεται. Έτσι, αποφεύγεται η δημιουργία ενός πίνακα που είναι ανώμαλος (ill conditioned), κάτι που θα δυσκόλευε την επίλυση του συστήματος. Τυπική τιμή που καλύπτει επιτυχώς πολλά προβλήματα είναι $\rho_{\min} = 10^{-3}$ η οποία δεν είναι ούτε πολύ μικρή ώστε να προξενήσει δυσκολίες στην επίλυση του συστήματος, αλλά ούτε και μεγάλη ώστε αντιβαίνει στον σχεδιασμό 0-1 της μεθόδου.

Έστω $\Lambda,\ \lambda^-(x),\ \lambda^+(x)$ οι πολλαπλασιαστές Lagrange. Οι απαραίτητες συνθήκες βελτιστότητας για την μεταβλητή σχεδιασμού $\rho(x)$ είναι ένα υποσύνολο των στατικών συνθηκών της συνάρτηση Lagrange

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \ & l(u) - \left(a_E(u,\bar{u}) - l(\bar{u}) \right) + \Lambda\left(\int_\Omega \rho(x)\, d\Omega\right) \\ & + \int_\Omega \lambda^+(x)\left(\rho(x) - 1\right) d\Omega + \int_\Omega \lambda^-(x)\left(\rho_{\min} - \rho(x)\right) d\Omega \end{aligned} \tag{2.12}$$

Επισημαίνεται ότι το $\bar{u}$ ανήκει στο σύνολο των κινητικά επιτρεπτών μετατοπίσεων. Υπό τον περιορισμό $\rho \ge \rho_{\min} > 0$ (ώστε το πεδίο μετατοπίσεων να είναι μοναδικό), οι συνθήκες βελτιστότητας ως προς τις μεταβολές του πεδίου u δίνουν $u = \bar{u}$ ενώ η συνθήκη γίνεται:

$$\frac{\partial E_{ijkl}}{\partial \rho}\varepsilon_{ij}(u)\varepsilon_{kl}(u) = \Lambda + \lambda^{+} + \lambda^{-} \tag{2.13}$$

Όπου:

$$\lambda^{-} \geq 0,\ \ \lambda^{+} \geq 0,\ \ \lambda^{-}\left(\rho_{\min} - \rho(x)\right) = 0,\ \ \lambda^{+}\left(\rho(x) - 1\right) = 0 \tag{2.14}$$

Για ενδιάμεσες πυκνότητες, ήτοι $\rho_{\min} < \rho < 1$, οι συνθήκες της Σχέσης (2.13) μπορούν να γραφούν ως:

$$p\,\rho(x)^{p-1} E^{0}_{ijkl}\,\varepsilon_{ij}(u)\,\varepsilon_{kl}(u) = \Lambda \tag{2.15}$$

Ο αριστερός όρος της Σχέσης (2.15) εκφράζει μια μορφή ενέργειας παραμόρφωσης, η οποία για όλες τις ενδιάμεσες πυκνότητες είναι σταθερή και ίση με Λ. Οι περιοχές με υψηλή ενέργεια αναμένεται να έχουν και υψηλή ενδοτικότητα, άρα είναι αυτές που πρέπει καταρχήν να ενισχυθούν. Γι' αυτό, για την αναβάθμιση της πυκνότητας θεωρείται το ακόλουθο σχήμα:

$$\rho_{k+1} = \begin{cases} \max\left((1-\zeta)\rho_k,\ \rho_{\min}\right), & \alpha\nu \quad \rho_k B_k^{\eta} \leq \max\left((1-\zeta)\rho_k,\ \rho_{\min}\right), \\ \max\left((1-\zeta)\rho_k,\ 1\right), & \alpha\nu \quad \max\left((1-\zeta)\rho_k,\ 1\right) \leq \rho_k B_k^{\eta}, \\ \rho_k B_k^{\eta} & \delta\iota\alpha\varphi o\rho\varepsilon\tau\iota\kappa\acute{\alpha} \end{cases} \tag{2.16}$$

Στη Σχέση (2.16), το ρ_k είναι η τιμή της πυκνότητας ρ σε κάθε βήμα k και το B_k δίνεται από τη σχέση:

$$B_k = \Lambda_k^{-1}\, p\,\rho(x)^{p-1} E^{0}_{ijkl}\,\varepsilon_{ij}(u_k)\,\varepsilon_{kl}(u_k) \tag{2.17}$$

όπου u_k είναι οι μετατοπίσεις σε κάθε βήμα k, καθορισμένες από την εξίσωση ισορροπίας και εξαρτώμενες από την ρ_k.

Επισημαίνεται, ότι όπως φαίνεται από την Σχέση (2.15), για πυκνότητες $\rho_{\min} < \rho < 1$, προσεγγίζεται ένα τοπικό ελάχιστο όταν $B_k = 1$. Με το σχήμα αναβάθμισης της Σχέσης (2.16), προστίθεται υλικό σε περιοχές με ειδική ενέργεια παραμόρφωσης μεγαλύτερη από Λ (ήτοι $B_k > 1$) και αντίστοιχα αφαιρείται υλικό στις περιοχές όπου $B_k < 1$. Η αναβάθμιση γίνεται μόνον αν δεν παραβιάζονται τα κατώφλια $\rho_{\min}$ και 1 για το ρ. Από την ολοκλήρωση της Σχέσης (2.15) φαίνεται ότι το Λ είναι ανάλογο με τη μέση πυκνότητα ενέργειας παραμόρφωσης στο τμήμα της κατασκευής όπου δίνονται ενδιάμεσες τιμές πυκνότητας.

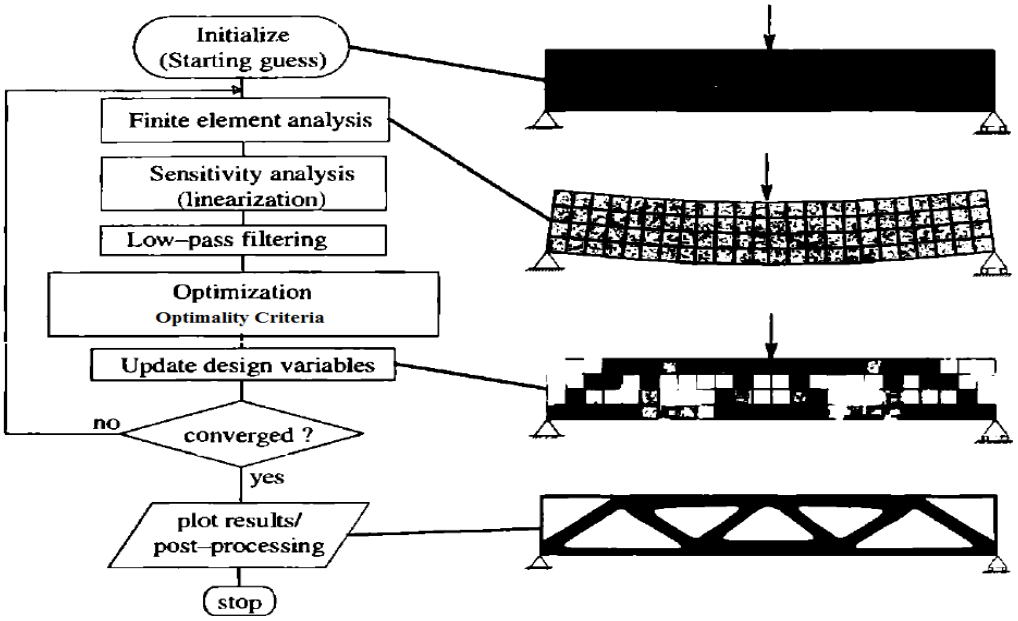
Η μεταβλητή η στη Σχέση (2.16) είναι μια ρυθμιστική παράμετρος και το ζ ένα κινούμενο όριο. Αμφότερα τα η και ζ ελέγχουν τις αλλαγές που μπορεί να συμβούν σε κάθε επαναληπτικό βήμα και με αυτά ρυθμίζεται η αποτελεσματικότητα (efficiency) της μεθόδου. Αξίζει να παρατηρηθεί ότι το (αναβαθμισμένο) ρ_{k+1} εξαρτάται από τον πολλαπλασιαστή Lagrange Λ, επομένως το Λ θα πρέπει να ρυθμιστεί σε έναν εσωτερικό βρόγχο ώστε να ικανοποιεί τον ενεργό περιορισμό του όγκου. Εύκολα φαίνεται ότι ο όγκος των αναβαθμισμένων τιμών των πυκνοτήτων είναι συνεχής, φθίνουσα συνάρτηση του Λ. Επίσης, ο όγκος αυστηρά μειώνεται στα διαστήματα ενδιαφέροντος όπου οι πυκνότητες δεν είναι ενεργές, σε όλα τα πεπερασμένα στοιχεία. Αυτό σημαίνει ότι η τιμή του Λ μπορεί να οριστεί μοναδικά χρησιμοποιώντας μια μέθοδο διχοτόμησης ή Newton. Οι τιμές των η και ζ επιλέγονται με δοκιμές ώστε να ληφθεί ένα επαναληπτικό σχήμα γρήγορο και ευσταθές· τυπικές τιμές των δυο μεταβλητών είναι η = 0.5 και ζ = 0.2 .

2.4 Εφαρμογή της Μεθόδου Βέλτιστων Κριτηρίων

Παραπάνω παρουσιάστηκαν τα βασικά συστατικά της Μεθόδου Βέλτιστων Κριτηρίων όπως εφαρμόζονται στην SIMP (Bendsøe M.P and O. Sigmund, 2003) Συνοψίζοντας, διενεργείται:

- παραμετροποίηση του σχεδιασμού μέσω σχέσεων ακαμψίας, βασισμένων σε κάποιο κατάλληλο σχήμα παρεμβολής,
- η εφαρμογή των σχέσεων αναβάθμισης βασισμένες σε συνθήκες βελτιστότητας.

Το σχήμα αναβάθμισης βασίζεται στη δυνατότητα να λύνονται οι εξισώσεις ισορροπίας, κάτι που εν προκειμένων επιτυγχάνεται με τη Μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων (Finite Element Method – FEM).



Σχήμα 2.1: Διάγραμμα ροής για την τοπολογική βελτιστοποίηση με τη μέθοδο κατανομής υλικού.

Στο παραπάνω σχήμα (Σχήμα 2.1) παρουσιάζεται το διάγραμμα ροής της διαδικασίας τοπολογικής βελτιστοποίησης με τη μέθοδο κατανομής υλικού.

Η μέθοδος SIMP στηρίζεται στον αριθμητικό υπολογισμό της βέλτιστης κατανομής της πυκνότητας ρ του υλικού, η οποία είναι μεταβλητή σχεδιασμού. Για ένα σχήμα παρεμβολής το οποίο ενέχει τον ρόλο συνάρτησης ποινής, ο προκύπτων σχεδιασμός 0 (λευκό) – 1 (μαύρο) είναι ο επιδιωκόμενος στόχος της διαδικασίας. Έτσι, τελικά η μέθοδος των βέλτιστων κριτηρίων για την εύρεση της βέλτιστης τοπολογίας μιας κατασκευής αποτελείται από τα ακόλουθα βήματα:

<u>Προ-επεξεργασία της γεωμετρίας και ορισμός φορτίων:</u>

- Επιλογή ενός βολικού χωρίου αναφοράς, το οποίο επιτρέπει τον καθορισμό επιφανειακών ελκυστών (tractions), παγιωμένων συνόρων κλπ.
- Επιλογή των τμημάτων του χωρίου αναφοράς τα οποία θα σχεδιαστούν, καθώς και των τμημάτων που θα παραμείνουν ως συμπαγείς περιοχές ή κενά (οπές).
- Κατασκευή πλέγματος πεπερασμένων στοιχείων για το χωρίο αναφοράς. Το πλέγμα αυτό θα πρέπει να είναι αρκούντως πυκνό ώστε να περιγράφει τη δομή με μια εύλογη ανάλυση όταν η δομή αναπαρίσταται σε μορφή ψηφίδων (bit-map). Επίσης, με το πλέγμα αυτό θα πρέπει να μπορούν να οριστούν με ακρίβεια οι εκ των προτέρων περιοχές της δομής, δίνοντας μεταβλητές σχεδιασμού σ' αυτές. Κατά την όλη διαδικασία της βελτιστοποίησης το πλέγμα παραμένει αναλλοίωτο.

Βελτιστοποίηση:

Υπολογισμός της βέλτιστης κατανομής της μεταβλητής σχεδιασμού ρ στο χωρίο αναφοράς. Η βελτιστοποίηση χρησιμοποιεί τις μετατοπίσεις του πεδίου που υπολογίζονται μέσω ανάλυσης πεπερασμένων στοιχείων. Στη συνέχεια, χρησιμοποιείται ο αναδρομικός τύπος ανασχεδιασμού που βασίζεται στα κριτήρια βελτιστότητας για την πυκνότητα. Η δομή του αλγορίθμου είναι η κάτωθι :

- Θεωρείται μια αρχική σχεδίαση για την κατασκευή, π.χ. ένα σώμα με ομοιόμορφη κατανομή υλικού.
- Για την τρέχουσα κατανομή της πυκνότητας, υπολογίζονται με ανάλυση πεπερασμένων στοιχείων οι προκύπτουσες μετατοπίσεις.
- Υπολογίζεται η ενδοτικότητα για τον τρέχοντα σχεδιασμό. Αν η βελτίωση στην ενδοτικότητα είναι αρκούντως μικρή, οι επαναλήψεις σταματούν. Διαφορετικά συνεχίζονται.
- Αναβαθμίζεται η πυκνότητα ρ σύμφωνα με τη Σχέση (2.16). Αυτό το βήμα περιλαμβάνει έναν εσωτερικό επαναληπτικό βρόγχο για την εύρεση της τιμής του πολλαπλασιαστή Lagrange Λ για τον περιορισμό του όγκου.
- Ο βρόγχος των επαναλήψεων συνεχίζεται.

Στην περίπτωση που υπάρχουν μέρη της κατασκευής που παραμένουν ίδια (ήτοι συμπαγή ή κενά), η αναβάθμιση των μεταβλητών σχεδιασμού για τα μέρη αυτά παραλείπεται.

Μετά-επεξεργασία των αποτελεσμάτων:

- Ερμηνεία της ευρεθείσας βέλτιστης κατανομής υλικού για να οριστεί το σχήμα του σώματος.

Για την εφαρμογή της παραπάνω μεθόδου, καταρχήν πρέπει να επιλεγεί ένα θεμελιώδες σχήμα παρεμβολής, π.χ. το SIMP που εξετάστηκε στην §2.2. Ειδικά για το SIMP, με κατάλληλα υψηλή τιμή για τον εκθέτη p, οι περιοχές όπου η πυκνότητα έχει ενδιάμεσες τιμές (δηλ. γκρίζο χρώμα) είναι ελάχιστες.

Τονίζεται ιδιαιτέρως ότι ο παραπάνω αλγόριθμος μπορεί να εφαρμοστεί για οποιοδήποτε πλέγμα πεπερασμένων στοιχείων και οποιοδήποτε χωρίο αναφοράς. Αυτό δίνει σημαντική ευελιξία στη μέθοδο σε ότι αφορά στον ορισμό των συνοριακών συνθηκών και άλλων παραγόντων που δεν εμπίπτουν άμεσα στον σχεδιασμό. Στην πράξη, χρησιμοποιούνται ορθογωνικά χωρία και πλέγματα με

τετραγωνικά ή κυβικά στοιχεία, διότι έτσι επιταχύνεται ο αλγόριθμος και απλοποιείται η υλοποίησή του.

Υπενθυμίζεται ότι το μελετώμενο πρόβλημα της βελτιστοποίησης είναι:

$$\begin{aligned} &\min_{u,\rho_e} f^T u \\ &s.t \quad \left(\sum_{e=1}^{N} \rho_e \mathrm{K}_e\right) u = f \\ &\qquad \sum_{e=1}^{N} v_e \rho_e \le V, \quad 0 < \rho_{\min} \le \rho_e \le 1, \quad e = 1,\ldots,N \end{aligned} \tag{2.18}$$

Όταν οι Σχέσεις (2.18) επιλύονται με αλγόριθμο μαθηματικού προγραμματισμού, πρώτα διατυπώνονται σε μορφή τέτοια ώστε οι μόνοι άγνωστοι να είναι οι μεταβλητές σχεδιασμού, δηλ. στη μορφή:

$$\begin{aligned} &\min_{\rho_e} c(\rho_e) \\ &s.t \quad \sum_{e=1}^{N} v_e \rho_e \le V, \quad 0 < \rho_{\min} \le \rho_e \le 1, \quad e = 1,\ldots,N \end{aligned} \tag{2.19}$$

Στις Σχέσεις (2.19) η εξίσωση ισορροπίας θεωρείται ως τμήμα συνάρτησης το οποίο υπεισέρχεται ως εξής:

$$c(\rho_e) = f^T u \tag{2.20}$$

όπου το u είναι λύση της εξίσωσης $\sum_{e=1}^{N} \rho_e^p \mathrm{K}_e u = f$.

Κατά την υλοποίηση του αλγορίθμου βελτιστοποίησης απαιτείται ο υπολογισμός των παραγώγων ευαισθησίας, εφαρμόζοντας κάποιες τυπικές διαδικασίες. Για τις αντικειμενικές συναρτήσεις και τους περιορισμούς που είναι συναρτήσεις μόνο του ρ ο υπολογισμός των παραγώγων είναι απλός. Για συναρτήσεις που εξαρτώνται και από τις μετατοπίσεις εφαρμόζεται και ο κανόνας της αλυσίδας. Τότε, αυτές οι εκφράσεις θα περιέχουν τις παραγώγους των μετατοπίσεων οι οποίες με τη σειρά τους μπορούν να ληφθούν από την εξίσωση ισορροπίας $\mathrm{K}u = f$. Στα προβλήματα τοπολογικής βελτιστοποίησης των κατασκευών, συνήθως, το πλήθος των περιορισμών είναι μικρό. Έτσι, η καταλληλότερη μέθοδος υπολογισμού των παραγώγων είναι η adjoint μέθοδος όπου οι παράγωγοι των μετατοπίσεων υπολογίζονται έμμεσα. Για προβλήματα ελαχιστοποίησης της ενδοτικότητας η συνάρτηση c(ρ) ξαναγράφεται προσθέτοντας έναν μηδενικό όρο,

$$c(\rho) = f^T u - u^T (Ku - f) \tag{2.21}$$

όπου το u είναι ένα τυχαίο πραγματικό διάνυσμα αλλά σταθερό. Ακολούθως, με παραγώγιση ως προς ρ και αναδιάταξη των όρων η Σχέση (2.21) καταλήγει στην

$$\frac{\partial c}{\partial \rho_e} = (f^T - u^T K)\frac{\partial u}{\partial \rho_e} - u^T \frac{\partial K}{\partial \rho_e} u \tag{2.22}$$

Επειδή το u ικανοποιεί την adjoint εξίσωση

$$f^T - u^T K \tag{2.23}$$

Η Σχέση (2.22) καταλήγει στη μορφή:

$$\frac{\partial c}{\partial \rho_e} = -u^T \frac{\partial K}{\partial \rho_e} u \tag{2.24}$$

Η Σχέση (2.24) είναι μια εξίσωση ισορροπίας. Για το πρόβλημα ελαχιστοποίησης της ενδοτικότητας εύκολα προκύπτει ότι $u = u$ (σε άλλες περιπτώσεις η μέθοδος adjoint χρειάζεται επιπλέον υπολογισμούς σε αυτό το σημείο). Επιπλέον, λόγω της συμμετρίας του μητρώου δυσκαμψίας στα προβλήματα των κατασκευών, η παράγωγος της ενδοτικότητας c(ρ) λαμβάνει την μορφή της Σχέσης (2.25):

$$\frac{\partial c}{\partial \rho_e} = -p\rho_e^{\,p-1} u^{\mathrm{T}} K_e u \tag{2.25}$$

Όπως φαίνεται, οι παράγωγοι για το πρόβλημα ελαχιστοποίησης της ενδοτικότητας μπορούν να υπολογιστούν αρκετά εύκολα. Επίσης, είναι αξιοσημείωτο ότι οι παράγωγοι είναι «τοπικές» με την έννοια ότι περιέχουν πληροφορίες μόνο του ίδιου του στοιχείου. Η μόνη πληροφορία εκτός του στοιχείου υπεισέρχεται εμμέσως στη μετατόπιση u. Αυτού του είδους η ανεξαρτησία των παραγώγων δεν είναι απαραίτητα καλή αν δεν γίνει κατάλληλη ομαλοποίηση ώστε να υπάρχει εξάρτηση των παραγώγων των γειτονικών στοιχείων. Τέλος, επισημαίνεται ότι όλες οι παράγωγοι είναι αρνητικές για όλα τα στοιχεία, επιβεβαιώνοντας τη φυσική ερμηνεία του προβλήματος, δηλαδή ότι επιπλέον υλικό σε κάθε στοιχείο μειώνει την ενδοτικότητα, κάνοντας την κατασκευή στιβαρότερη.

2.5 Φιλτράρισμα της ευαισθησίας

Στα προβλήματα τοπολογικής βελτιστοποίησης κατασκευών, ένας καλός τρόπος να μειωθεί η εξάρτηση της προκύπτουσας λύσης από την πυκνότητα του πλέγματος είναι το φιλτράρισμα των πληροφοριών. Αυτό συνίσταται στη διατύπωση του σχεδιασμού ευαισθησίας ενός στοιχείου βασισμένο σε έναν σταθμισμένο μέσο όρο των

ευαισθησιών των γειτονικών στοιχείων των μεταβλητών ευαισθησίας που ανήκουν σε μία σταθερή γειτονική περιοχή. Ένα τέτοιο φίλτρο έχει καθαρά στοχαστικό χαρακτήρα αλλά είναι αρκετά αποδοτικό· απαιτεί ελάχιστα περισσότερο υπολογιστικό χρόνο επεξεργασίας και είναι πολύ εύκολο στην εφαρμογή του καθώς δεν προσθέτει καθόλου πολυπλοκότητα στον αλγόριθμο βελτιστοποίησης (δεν προστίθενται επιπλέον περιορισμοί).

Για τις παραγώγους ευαισθησίας της ενδοτικότητας θεωρείται η σχέση:

$$\widehat{\frac{\partial f}{\partial \rho_k}} = \frac{1}{\rho_k \sum_{i=1}^{N} \hat{H}_i} \sum_{i=1}^{N} \hat{H}_i \, \rho_i \, \frac{\partial f}{\partial \rho_i} \quad (2.26)$$

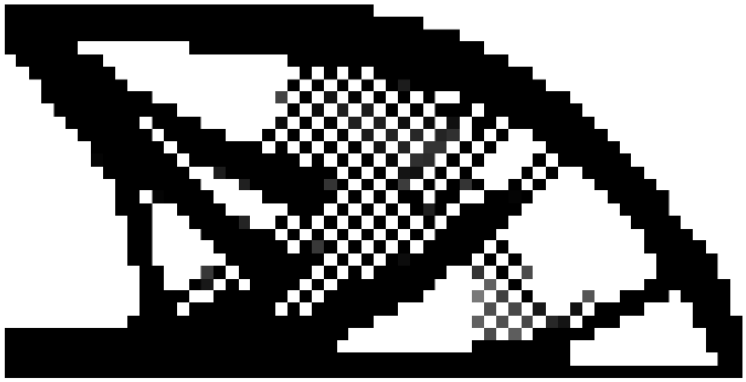
Όπου N : το συνολικό πλήθος των στοιχείων στην διακριτοποίηση

$\hat{H}_i$: οι μεταβλητές που αφορούν την ανεξαρτησία του πλέγματος και της λύσης.

Οι μεταβλητές αυτές δίνονται από τη σχέση:

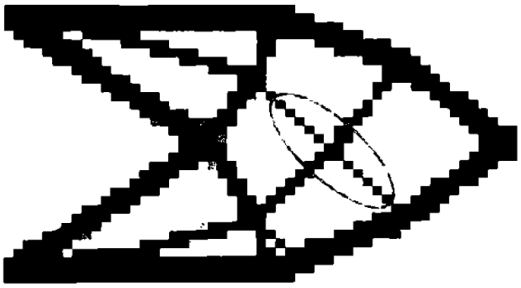
$$\hat{H}_i = r_{\min} - \mathrm{dist}(k,i), \quad \{i \in N \mid \mathrm{dist}(k,i) \le r_{\min}\}, \; k = 1, \ldots, N \quad (2.27)$$

Σε αυτή την έκφραση οι συναρτήσεις $dist(k,i)$ ορίζονται ως η απόσταση μεταξύ των κέντρων των στοιχείων k και i. Το H_i ισούται με μηδέν έξω από την περιοχή που ορίζεται από την απόσταση $r_{\min}$. Όπως φαίνεται από τη Σχέση (2.26), η ευαισθησία συγκλίνει στην αρχική της τιμή όταν το $r_{\min}$ πλησιάζει το μηδέν ενώ όλες οι ευαισθησίες γίνονται ίσες όταν το $r_{\min}$ πλησιάζει το άπειρο. Στην πράξη οι προτεινόμενες τιμές για το $r_{\min}$ είναι 1.2 - 1.7 επί το πάχος του στοιχείου. Έτσι, η πυκνότητα κάθε στοιχείου επηρεάζεται μόνο από τα στοιχεία με τα οποία αυτό έρχεται σε επαφή. Για τιμές μεγαλύτερες του 1.7 η μέθοδος καταλήγει σε λύση στην οποία το υλικό είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο, πράγμα αντίθετο στην φιλοσοφία σχεδιασμού 0-1 που επιδιώκεται για το μελετώμενο πρόβλημα. Για τιμές μικρότερες του 1.2 το στοιχείο επηρεάζεται σχεδόν μόνο από τον εαυτό του. Σε κάποια προβλήματα αυτό μπορεί να οδηγήσει σε εμφάνιση μοτίβου σκακιέρας όπως δείχνεται στο Σχήμα 2.2.



Σχήμα 2.2: Μοτίβο σκακιέρας σε κατασκευή

Η εμφάνιση μοτίβου σκακιέρας συναντάται συχνά σε προβλήματα τοπολογικής βελτιστοποίησης κατασκευών καθώς και σε προβλήματα πιέσεων ή ροών Stokes. Παρατηρείται ότι όταν εμφανίζεται μοτίβο σκακιέρας, η ύπαρξη του υλικού εναλλάσσεται από πλήρες σε κενό σε γειτονικά στοιχεία, όπως τα χρώματα στη σκακιέρα. Στη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων επιτρέπεται κάποιο στοιχείο να στηρίζεται σε 3 τουλάχιστον σημεία αλλά στην περίπτωση του μοτίβου σκακιέρας αυτό δεν έχει πρακτικό νόημα, οπότε η λύση είναι άχρηστη (Σχήμα 2.3). Στην παραπάνω διαδικασία φιλτραρίσματος, επιλέγοντας τις τιμές του $r_{\min}$ στο [1.2, 1.7] επί το πάχος του στοιχείου, το κάθε εξεταζόμενο στοιχείο επηρεάζεται από τα διαγώνια στοιχεία χωρίς επιβλαβείς συνέπειες. Έτσι, η λύση δεν παρουσιάζει μοτίβο σκακιέρας αλλά όμως υπάρχει μια πιο ομοιόμορφη εναλλαγή της πυκνότητας μεταξύ των γειτονικών στοιχείων.



Σχήμα 2.3: Μοτίβο σκακιέρας, επιτρεπτό για τη FEM αλλά απαράδεκτο στην πράξη

Η Σχέση (2.26) αντιμετωπίζει επιτυχώς το πρόβλημα της σκακιέρας μορφοποιώντας τις παραγώγους της ενδοτικότητας. Μιαν άλλη μέθοδος με την οποία μπορεί να αντιμετωπιστεί το πρόβλημα αυτό προέρχεται από τη Θεωρία Επεξεργασίας Εικόνας (Klarbring, 2008). Το αντίστοιχο πρόβλημα στην Επεξεργασία Εικόνας είναι η εξομάλυνση της αλλαγής του χρώματος από pixel σε pixel, ιδίως στις περιοχές όπου το χρώμα αλλάζει σημαντικά. Σε αυτή την περίπτωση είναι, επίσης, δυνατή η

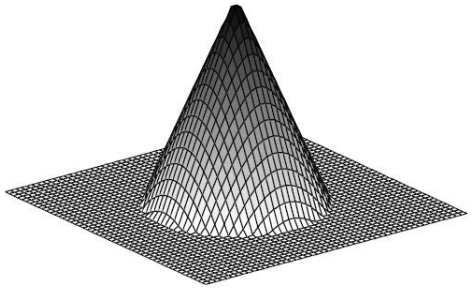
εμφάνιση του φαινομένου της σκακιέρας. Αντί λοιπόν, για την χρησιμοποίηση της $\rho(x)$ μπορεί να εφαρμοστεί ο τελεστής S_R πάνω στην πυκνότητα $\rho(x)$. Ο τελεστής S_R λειτουργεί όπως η συνέλιξη για ένα χωρίο Ω με $x \in \Omega$ και δίνεται από τη Σχέση (2.28) που ακολουθεί:

$$S_R\left(\ \rho(x)\ \right) = \int_{\Omega} \rho(y)\,\varphi(x,y)\,\mathrm{d}\Omega \tag{2.28}$$

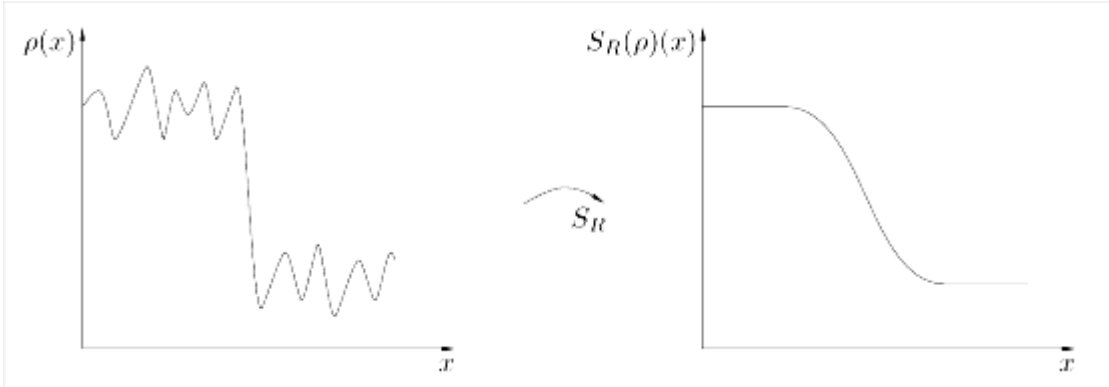
Όπου η ολοκλήρωση γίνεται ως προς τη μεταβλητή $y \in \Omega$ και η συνάρτηση φίλτρου $\varphi(x,y)$ μπορεί να είναι:

$$\varphi(x,y) = \frac{3}{\pi R^2}\max\left(0,\ 1 - \frac{|\,x-y\,|}{R}\right) \tag{2.29}$$

Στα παρακάτω σχήματα (Σχήμα 2.4 και Σχήμα 2.5) παρουσιάζονται, η γραφική παράσταση των Σχέσεων 2.29 και 2.26



Σχήμα 2.4: Γραφική παράσταση της συνάρτησης φιλτραρίσματος (2.29)



Σχήμα 2.5: Διάγραμμα πυκνότητας χωρίς και με φίλτρο

2.6 Επίδραση των συντελεστών σχεδίασης στη βέλτιστη λύση

Όπως φάνηκε ως εδώ, για την εύρεση της λύσης καθορίζονται οι εξής παράμετροι:

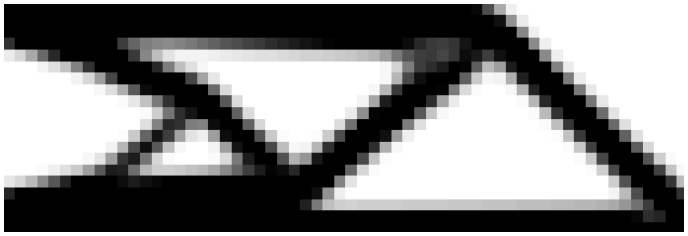
- πυκνότητα πλέγματος,
- τιμή συντελεστή ποινής,
- ακτίνα φίλτρου.

Οι παράμετροι αυτές επηρεάζουν σημαντικά τη βέλτιστη λύση που παρέχει ο αλγόριθμος. Ως εκ τούτου, για την εύρεση ικανοποιητικής λύσης, οι τιμές που θα τους δοθούν απαιτούν ιδιαίτερη προσοχή. Για τη μελέτη της επίδρασης αυτών των παραμέτρων θα χρησιμοποιηθεί το πρόβλημα του προβόλου με φορτίο στο άκρο.

2.6.1 Επίδραση της πυκνότητας του πλέγματος

Στο παρακάτω σχήμα (Σχήμα 2.6) παρατηρείται ότι η λύση του προβλήματος διαφέρει σημαντικά για τις δύο διαφορετικές πυκνώσεις του πλέγματος, 60x20 και 150x50. Στο πυκνότερο πλέγμα εμφανίζονται περισσότερες ράβδοι και η κατασκευή τείνει να μετατραπεί σε δικτύωμα. Η μικρότερη ράβδος που μπορεί να εμφανιστεί χωρίς το μοτίβο της σκακιέρας έχει πάχος ίσο με 3 πεπερασμένα στοιχεία. Γενικά, όσο αυξάνεται η πύκνωση του πλέγματος, τόσο λεπτότερες ράβδοι θα εμφανίζονται και η κατασκευή θα τείνει να μετατραπεί σε δικτυωτή.

α)



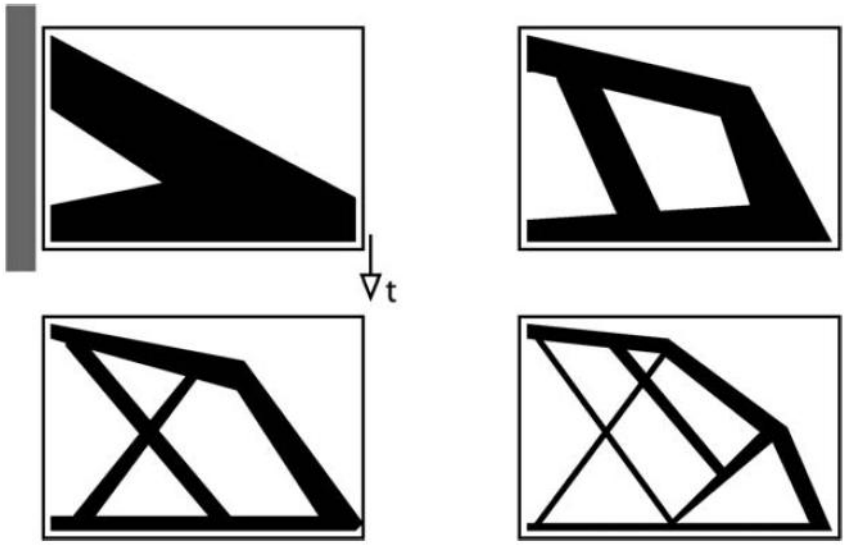
β)

Σχήμα 2.6 : Τοπολογική βελτιστοποίηση απλού προβόλου για διαφορετικές πυκνότητες πλέγματος α) και β) .

Το συμπέρασμα είναι ότι υπάρχει μεγάλη εξάρτηση της βέλτιστης λύσης από την πυκνότητα του πλέγματος (mesh-dependance). Αυτό συναντάται και στο λεγόμενο «πρόβλημα του αρχέτυπου» το οποίο διατυπώνεται ως.

$$\begin{aligned} &\min_{u,\rho_e} f^T u \\ &s.t \quad \left(\sum_{e=1}^{N} \rho_e \mathrm{K}_e\right) u = f \\ &\qquad \sum_{e=1}^{N} v_e \rho_e \le V, \quad \rho_e = \{0,1\}, \quad e = 1,\ldots,N \end{aligned} \tag{2.30}$$

Η μόνη διαφορά του συστήματος των Σχέσεων (2.30) με το μελετώμενο πρόβλημα, (Σχέσεις (2.4)), είναι ότι στο (2.30) η πυκνότητα μπορεί να έχει μόνον τις τιμές 0 ή 1, δηλαδή αυτές που είναι επιθυμητές όταν χρησιμοποιείται συντελεστής ποινής 3. Όμως, το πρόβλημα του αρχέτυπου δεν έχει μοναδική λύση. Όπως δείχνεται και στο παρακάτω σχήμα (Σχήμα 2.7) όσο περισσότερες λεπτές ράβδοι εισαχθούν στο σχήμα τόσο περισσότερο βελτιώνεται η αντικειμενική συνάρτηση χωρίς αυτή η διαδικασία να τερματίζεται..



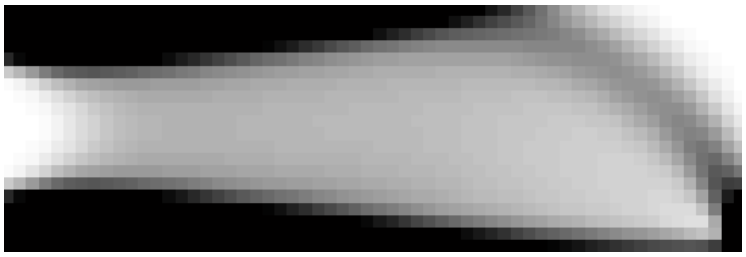
Σχήμα 2.7: βέλτιστες λύσεις με διαφορετικό αριθμό ράβδων

2.6.2 Επίδραση της τιμή του συντελεστή ποινής

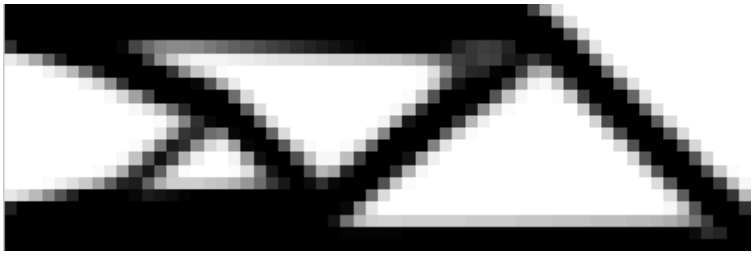
Ο συντελεστής ποινής που χρησιμοποιείται στη μέθοδο SIMP είναι $p \ge 3$. Συγκεκριμένα, για τα παραδείγματα που παρουσιάστηκαν παραπάνω είχε χρησιμοποιηθεί η τιμή $p = 3$. Ο ρόλος του p είναι να αποτρέπει τις τιμές των πυκνοτήτων που δεν είναι 0 ή 1 και αντιβαίνουν με τον επιδιωκόμενο σχεδιασμό.

Όταν ισχύει $p < 3$ δεν επιτυγχάνεται το επιθυμητό βέλτιστο αποτέλεσμα καθώς υπάρχουν πολλά πεπερασμένα στοιχεία με ενδιάμεσες τιμές της πυκνότητας. Επίσης, αξίζει να αναφερθεί ότι αν η τιμή του p αυξηθεί αρκούντως, η λύση περιορίζεται πολύ και μπορεί να ο αλγόριθμος να μην είναι ικανός να καταλήξει στη βέλτιστη λύση αλλά να παγιδευτεί σε κάποιο τοπικό ακρότατο. Επίσης, άλλη μια σοβαρή συνέπεια των μεγάλων τιμών του p είναι ότι το μητρώο του προβλήματος γίνεται σχεδόν ιδιόμορφο. Έτσι, αυξάνεται το σφάλμα και η μέθοδος αδυνατεί να πλησιάσει τη βέλτιστη λύση. Η επιρροή του p στην βέλτιστη λύση δείχνεται στα παρακάτω σχήματα.

α)



β)



γ)

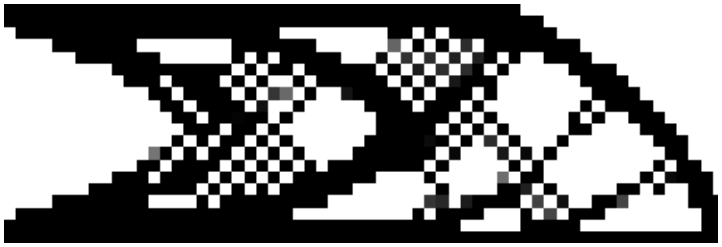
Σχήμα 2.8: Τοπολογική βελτιστοποίηση για α) p=1, β) p=3, γ) p=5

2.6.3 Επίδραση της ακτίνας φίλτρου

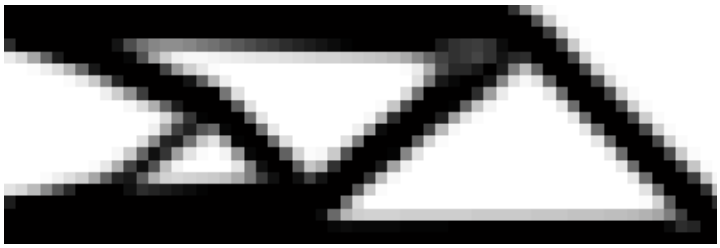
Για την ακτίνα φίλτρου έχει ήδη γίνει αναφορά σε προηγούμενη παράγραφο. Οι προτεινόμενες τιμές για το $r_{\min}$ είναι 1,2 έως 1,7 , για δε τα παραδείγματα που έχουν ήδη παρουσιαστεί είχε χρησιμοποιηθεί η τιμή 1,5. Αν το $r_{\min}$ είναι μικρότερο του 1,2 τότε η πυκνότητα ενός πεπερασμένου στοιχείου δεν επηρεάζεται καθόλου από τα γειτονικά του στοιχεία και είναι πολύ πιθανόν να εμφανιστεί μοτίβο σκακιέρας που

είναι ανεπιθύμητο. Αντιθέτως, όταν το $r_{\min}$ λαμβάνει μεγαλύτερες τιμές του 1,7 τότε κάθε πεπερασμένο στοιχείο επηρεάζεται από πολύ περισσότερα γειτονικά στοιχεία. Ως αποτέλεσμα, στη βέλτιστη λύση θα εμφανιστούν πολλά στοιχεία τα οποία έχουν μέσες τιμές πυκνότητας, κάτι που αντιτίθεται στον σχεδιασμό 0-1 που επιδιώκεται. Η επιρροή του $r_{\min}$ στην βέλτιστη λύση δείχνεται στα ακόλουθα σχήματα.

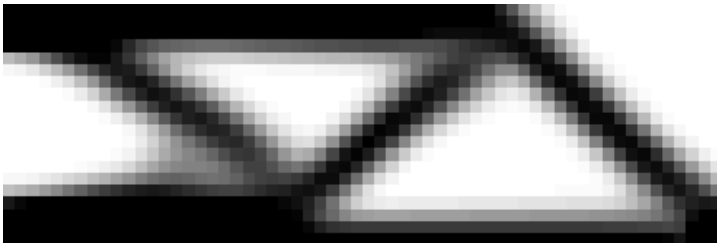
α)



β)



γ)



Σχήμα 2.9: Τοπολογική βελτισοποίηση για α) $r_{\min}=1$, *β)* $r_{\min}=1.5$, *γ)* $r_{\min}=3.5$

2.7 Αξιολόγηση αλγορίθμου σε κατασκευές αναφοράς

Όπως έχει αναφερθεί και προηγουμένως η τοπολογική βελτιστοποίηση μέσω της SIMP χρησιμοποιεί ως αντικειμενική συνάρτηση την ενδοτικότητα της κατασκευής έχοντας σαν περιορισμό τον διαθέσιμο όγκο του αρχικού υλικού που μπορεί να διανεμηθεί. Συγκεκριμένα:

$$\begin{aligned} &\min_{u,\rho_e} f^T u \\ &s.t \quad \left(\sum_{e=1}^{N} \rho_e \mathrm{K}_e\right) u = f \\ &\qquad \sum_{e=1}^{N} v_e \rho_e \le V, \quad \rho_e = \{0,1\}, \quad e = 1,\ldots,N \end{aligned} \tag{2.31}$$

Ωστόσο, στα προβλήματα του μηχανικού το ζητούμενο είναι η ελαχιστοποίηση του βάρους υπό περιορισμό τάσης ή μετατόπισης ή και των δύο.

Είναι λοιπόν, φανερό ότι είναι ζωτικής σημασίας για την πρακτική εφαρμογή του αλγόριθμου να διερευνηθεί η κατανομή της τάσης σε κάθε όριο όγκου που εισάγεται αλλά και οι μέγιστες τιμές των μετατοπίσεων που εμφανίζονται στην τελική κατανομή του υλικού.

Για να εξακριβωθεί λοιπόν, η αποτελεσματικότητα της μεθόδου σε πρακτικά προβλήματα του μηχανικού έγινε αριθμητική εφαρμογή της μεθόδου σε τέσσερις κατασκευές αναφοράς, στις οποίες, μετά την τελική δημιουργία της βέλτιστης κατανομής, υπολογίστηκαν οι μέγιστες τιμές της τάσης και των μετατοπίσεων. Ο κώδικας που χρησιμοποιήθηκε για την εφαρμογή της μεθόδου SIMP βασίστηκε στο πρόγραμμα του O. Sigmund (2001).

Τα τέσσερα αυτά παραδείγματα είναι:

- 2 πρόβολοι όπου το φορτίο ασκείται σε διαφορετικό σημείο
- 1 κοντός πρόβολος (sort cantilever)
- 1 αμφιέριστη δοκός (MBB)

Όλα τα παραδείγματα είναι διδιάστατα και το φορτίο που ασκείται είναι F= 10N. Το υλικό των κατασκευών είναι μέτρου ελαστικότητας E=210GPa και λόγου Poisson ν=0,3 . Η διακριτοποίηση του πεδίου αναφοράς γίνεται με τετρακομβικά πεπερασμένα στοιχεία.

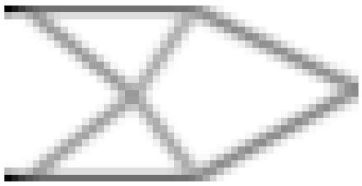
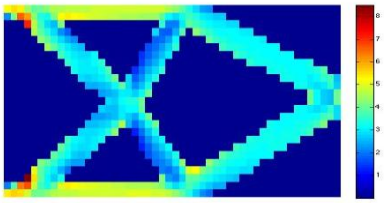
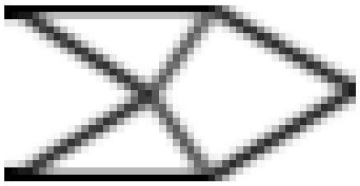
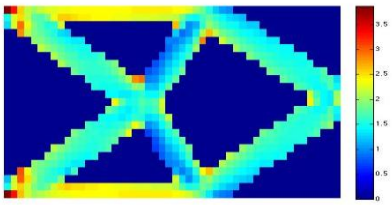
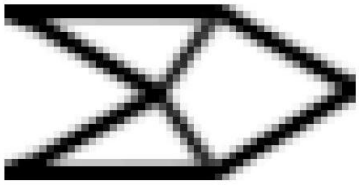
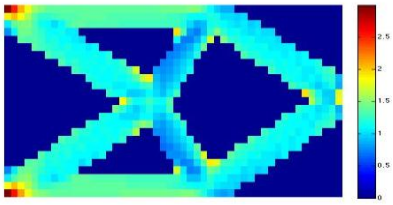
2.7.1 Πρόβολος (1)

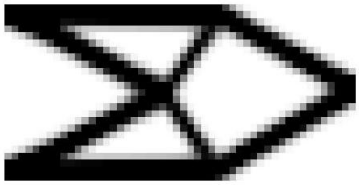
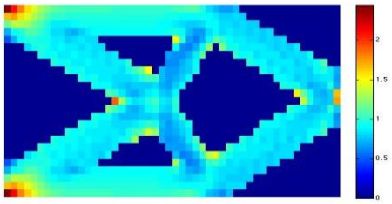
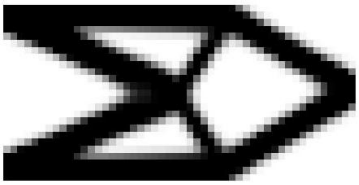
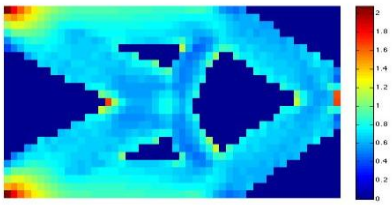
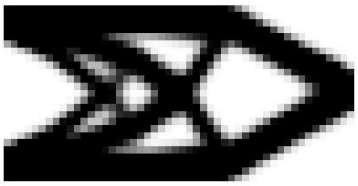
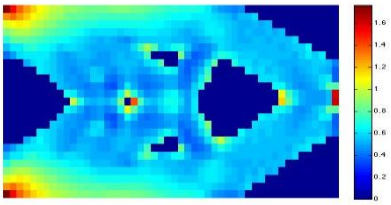
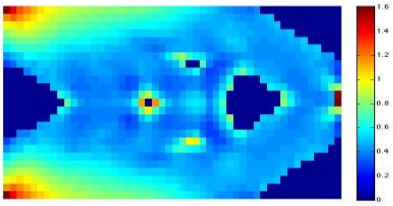
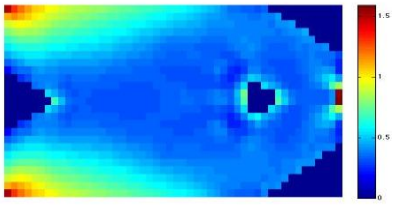
Σχήμα 2.10: Σχηματική απεικόνιση προβόλου (1)

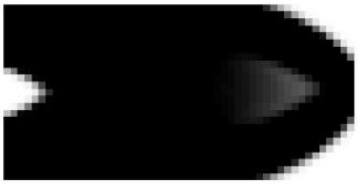
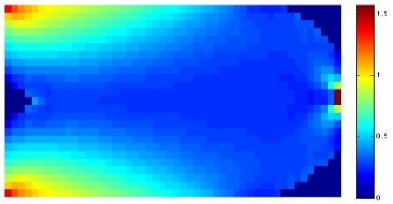
Σ αυτό το παράδειγμα έγινε εφαρμογή του κώδικα σε πακτωμένη ορθογωνική πλάκα, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.10. Ο κώδικας του Sigmund δεν απαιτεί τις διαστάσεις του αρχικού πλαισίου όπου θα εφαρμοστεί ο αλγόριθμός παρά μόνο τον αριθμό των στοιχείων που θα χρησιμοποιηθούν. Ωστόσο για τον υπολογισμό της τάσης και των πραγματικών μετατοπίσεων απαιτούνται οι διαστάσεις της πλάκας. Έτσι, οι διαστάσεις μήκους, πλάτους, πάχους που ορίστηκαν είναι Lx=100mm Ly=50mm t=2mm, αντίστοιχα. Η τάση που αναπτύσσεται σε κάθε πεπερασμένο στοιχείο υπολογίζεται στο κέντρο βάρους του.

Παρακάτω παρατίθεται πίνακας με την βελτιστοποιημένη κατανομή πάχους που δημιουργεί ο κώδικας και με τις αντίστοιχες τάσεις που παρατηρούνται στο βελτιστοποιημένο σχήμα.

Πίνακας 2.1: Βελτιστοποιημένες κατασκευές μεθόδου SIMP και κατανομή τάσης σε αυτές για διάφορα όρια όγκων

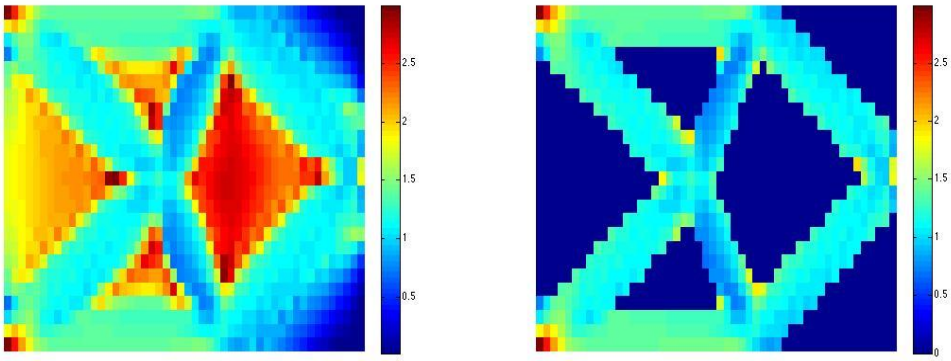
Τελικός Όγκος	**Βελτιστοποιημένο Σχήμα**	**Κατανομή τάσης**
0,1		
0,2		
0,3		

Τελικός Όγκος	Βελτιστοποιημένο Σχήμα	Κατανομή τάσης
0,4		
0,5		
0,6		
0,7		
0,8		

Τελικός Όγκος	Βελτιστοποιημένο Σχήμα	Κατανομή τάσης
0,9		

Παρατηρώντας τον παραπάνω πίνακα (Πίνακας 2.1) βλέπουμε ότι ο κώδικας σε χαμηλά volume fraction δημιουργεί δοκίδες κάνοντας την κατασκευή να ομοιάζει με δικτύωμα. Στη συνέχεια αυξάνοντας το ποσοστό του όγκου που πρέπει να διανεμηθεί δημιουργούνται συμπαγείς περιοχές (από volume fraction>0,7) και πλέον το υλικό έχει πάρει τη μορφή του συνεχούς μέσου.

Να σημειωθεί ότι δεν μπορούν να δημιουργηθούν πεπερασμένα στοιχεία μηδενικού πάχους καθώς έτσι δημιουργούνται απειρισμοί των μετατοπίσεων. Έτσι λοιπόν, τίθεται ένα ελάχιστο όριο πάχους (0,02mm) το οποίο θεωρείται ότι δε συμμετέχει στην κατασκευή και δε δημιουργούνται μ' αυτό τον τρόπο αριθμητικά προβλήματα. Παρόλα αυτά κατά την ανάλυση της κατανομής της τάσης παρατηρήθηκε ότι στα σημεία που έχουν οριακό πάχος η τάση αποκτά υψηλές τιμές. Σε αυτές τις περιοχές η τιμή της τάσης θεωρείται ψευδής, καθώς αυτά τα σημεία του υλικού αντιπροσωπεύουν οπές και αγνοούνται (τίθεται το πάχος τους ίσο με το μηδέν).



Σχήμα 2.11: κατανομή τάσης και ψευδοτάσης σε βελτιστοποιημένο σχήμα με όριο όγκου 0,5

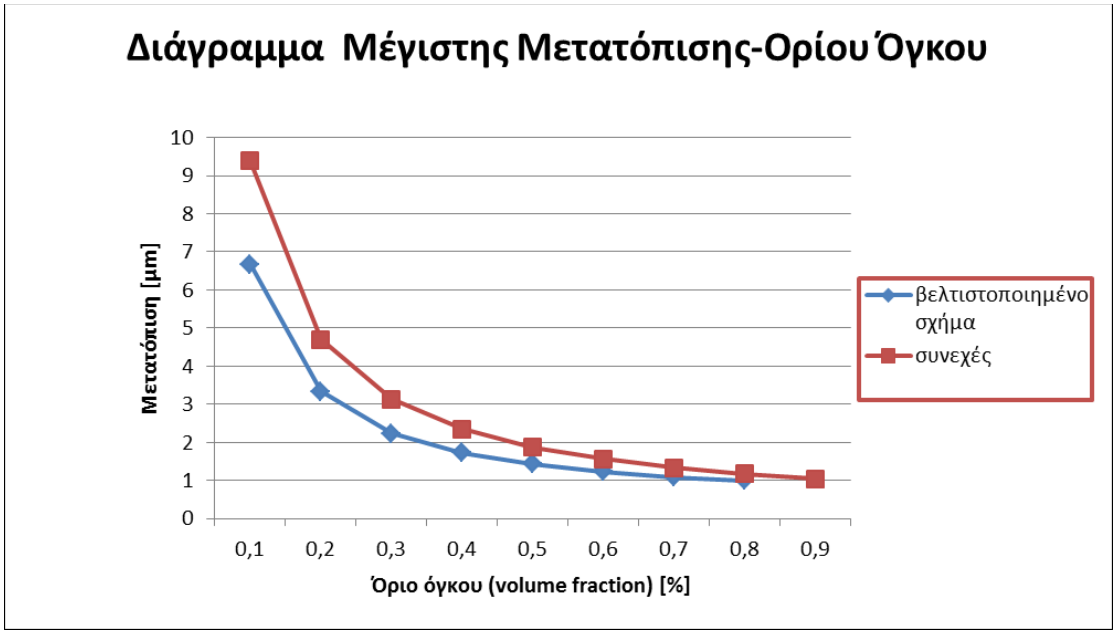
Όπως έχει αναφερθεί ο κώδικας κατανέμει το υλικό που έχει οριστεί μέσω του volume fraction έτσι ώστε η κατασκευή να αποκτήσει την ελάχιστη ενδοτικότητα

(compliance). Αυτό σημαίνει ότι το υλικό κατανέμεται κατάλληλα ώστε να υπάρχει η μέγιστη ακαμψία στη κατασκευή.

Αφού λοιπόν, η κατανομή είναι τέτοια ώστε να υπεισέρχεται μέγιστη ακαμψία θα ισχύει ότι η κατανομή του υλικού θα είναι τέτοια ώστε να υφίσταται η ελάχιστη μετατόπιση, καθώς:

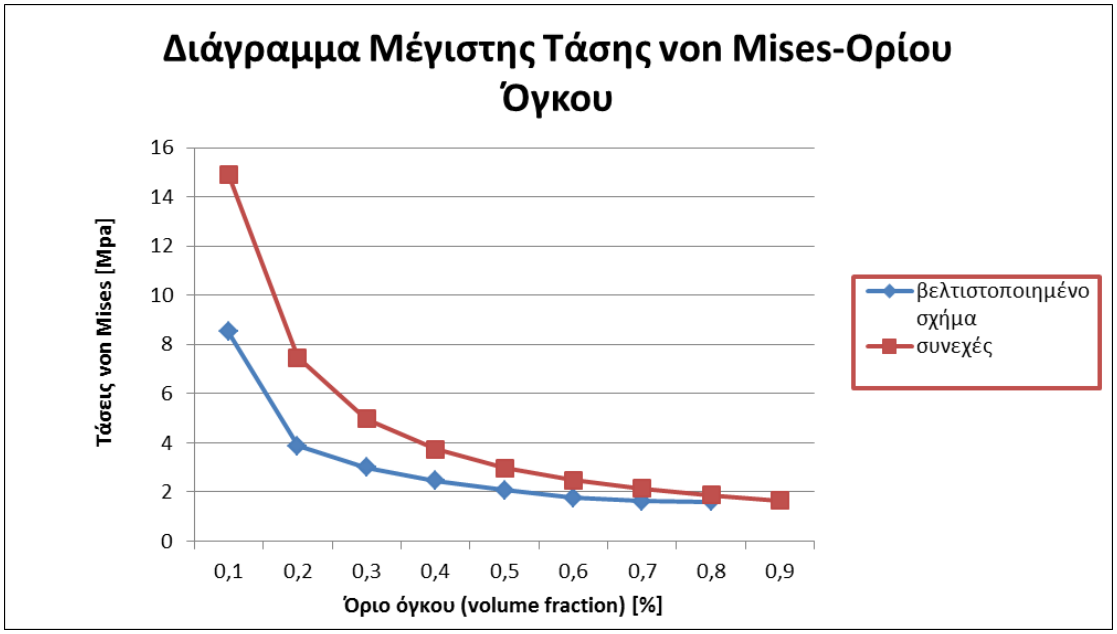
$$\mathbf{KU}=\mathbf{F} \qquad (2.32)$$

Με **K**, το μητρώο ακαμψίας και **U**, το διάνυσμα των μετατοπίσεων. Αφού λοιπόν, η δύναμη είναι σταθερή, η ακαμψία και η μετατόπιση είναι αντιστρόφως ανάλογες ποσότητες. Παρακάτω παρατίθεται το διάγραμμα της μέγιστης μετατόπισης τις βελτιστοποιημένης κατασκευής ανάλογα με το κάθε όριο όγκου που έχει εισαχθεί στον κώδικα.



Σχήμα 2.12: Διάγραμμα μέγιστης μετατόπισης-ορίου όγκου για πρόβολο παραδείγματος 1

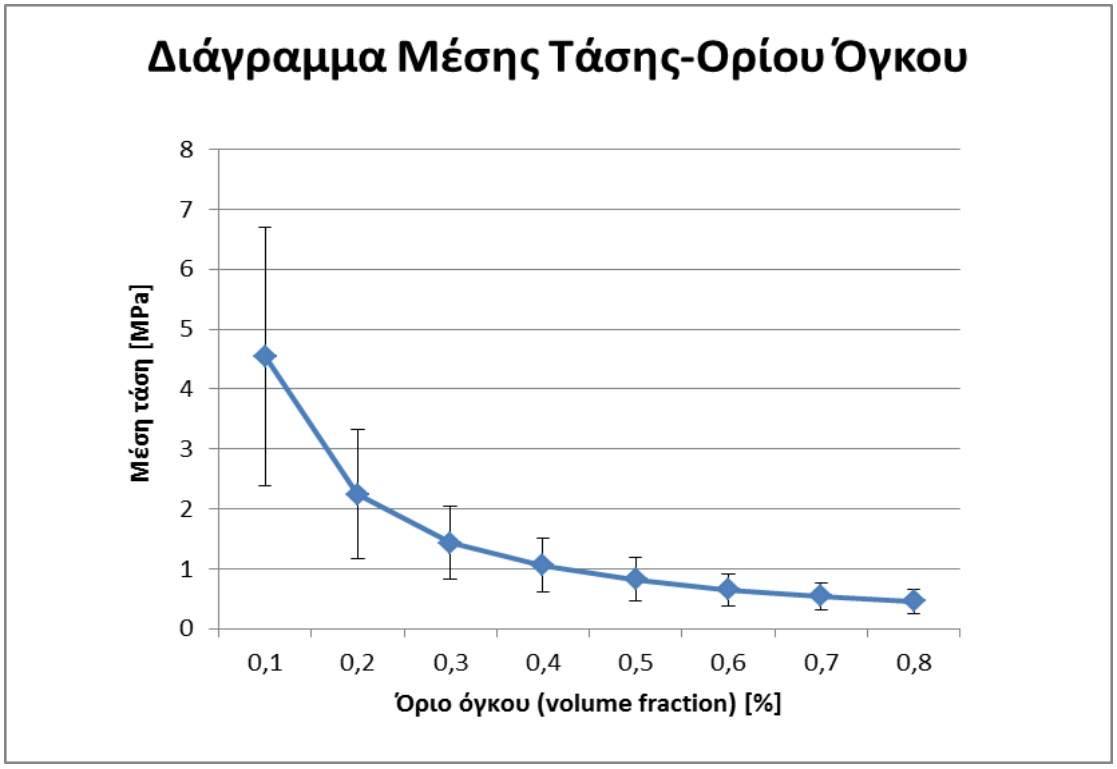
Από το παραπάνω διάγραμμα (Σχήμα 2.12) είναι φανερό ότι όσο αυξάνεται το όριο όγκου τόσο μειώνεται η μετατόπιση. Εκτός αυτού, το βελτιστοποιημένο σχήμα έχει πολύ μικρότερη μετατόπιση απ' ότι η αντίστοιχου όγκου συνεχής πλάκα, ειδικά σε μικρά όρια όγκου. Αυτή η παρατήρηση δείχνει το «κέρδος» που υπάρχει από τον βέλτιστο καταμερισμό του υλικού στην μείωση των μετατοπίσεων. Επίσης για κάθε όγκο υπολογίστηκε και η συσχέτισή με τη μέγιστη τάση και παρουσιάζεται στο Σχήμα 2.13 που ακολουθεί.



Σχήμα 2.13: Διάγραμμα μέγιστων τάσεων von Mises-ορίου όγκου για τον πρόβολο 1

Όπως είναι γνωστό η ενδοτικότητα είναι ταυτόσημη με την ενέργεια παραμόρφωσης. Έτσι λοιπόν, θα ήταν αναμενόμενο να υπάρχει όχι απλώς μια βελτιστοποίηση μετατοπίσεων αλλά και βελτιστοποίηση τάσης. Παρόλα αυτά παρατηρείται ότι οι μέγιστες τιμές τάσης του βελτιστοποιημένου σχήματος, αν και είναι πιο μικρές από της αντίστοιχου όγκου συνεχούς πλάκας, είναι αρκετά κοντά, ειδικά μετά από κάποια τιμή volume fraction. Έτσι λοιπόν, ο αλγόριθμός δεν μπορεί να βελτιστοποιήσει την τάση παρά μόνο τις μετατοπίσεις.

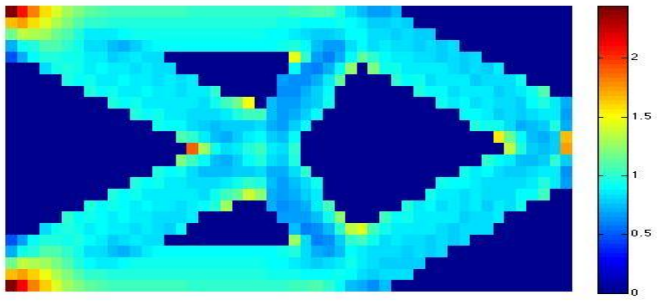
Ένας άλλος παράγοντας που επιβεβαιώνει ότι ο αλγόριθμος δεν βελτιστοποιεί την κατανομή της τάσης είναι ότι το τελικό σχήμα έχει μεγάλη διακύμανση ως προς αυτήν. Ειδικότερα μία κατασκευή η οποία είναι βελτιστοποιημένη ως προς την τάση παρουσιάζει ομοιογένεια τάσης σε όλη της την έκταση, καθώς αν κάποιο σημείο έχει μικρότερη τάση από την επιθυμητή σε αυτό το σημείο υπάρχει επιπλέον υλικό και αντίστροφα. Αυτή η αρχή βελτιστοποίησης τάσης ονομάζεται βελτιστοποίηση πλήρους έντασης (FSD).



Σχήμα 2.14: Διάγραμμα μέσης τάσης von Mises-ορίου όγκου για πρόβολο παραδείγματος 1. Εμφανίζονται επίσης η τυπική απόκλιση σε μορφή error bar

Στο Σχήμα 2.14 παρατηρείται ότι οι τυπικές αποκλίσεις είναι ιδιαιτέρως αυξημένες κάτι που συνηγορεί ότι το βέλτιστο σχήμα που παράγει ο αλγόριθμος SIMP απέχει αρκετά από το βελτιστοποιημένο σχήμα ως προς την κατανομή της τάσης.

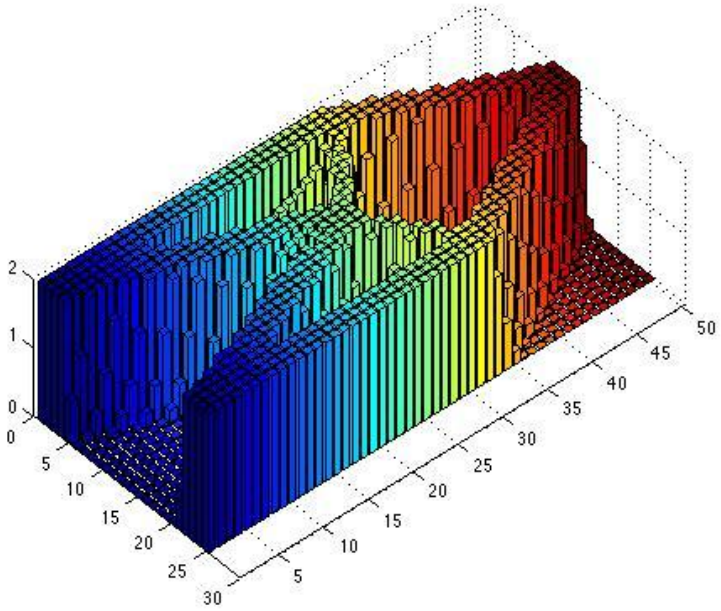
Εκτός αυτού, σε κάποιες περιπτώσεις παρατηρείται αύξηση της τάσης σε σημεία κοντά σε οπές καθώς επίσης και στις στηρίξεις, το οποίο είναι αναμενόμενο όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.15.



Σχήμα 2.15: Συγκέντρωση τάσης σε βελτιστοποιημένη κατασκευή με όριο όγκου 0,5

Ένα από τα βασικά πλεονεκτήματα του συγκεκριμένου αλγορίθμου είναι η ελαχιστοποίηση των ενδιάμεσων τιμών πάχους. Ειδικότερα λόγω της ύπαρξης δύναμης κατά την βελτιστοποίηση της πυκνότητας (βελτιστοποίηση με την μέθοδο

των ποινών) το πρόβλημα δημιουργεί κυρίως περιοχές με το μέγιστο ύψος και περιοχές με το ελάχιστο (οπές). Παρόλα αυτά υπάρχουν και κάποια σημεία της κατασκευής με ενδιάμεσες τιμές όπως διαφαίνεται και στο Σχήμα 2.16.



Σχήμα 2.16: 3D απεικόνιση της βελτιστοποιημένης κατασκευής με όριο όγκου 0,5

2.7.2 Πρόβολος (2)

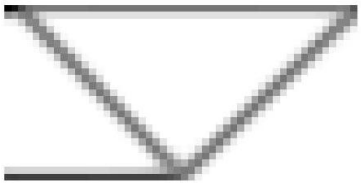
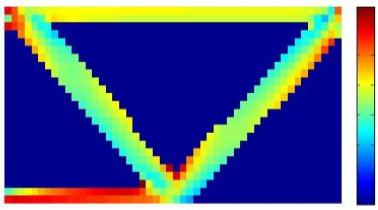
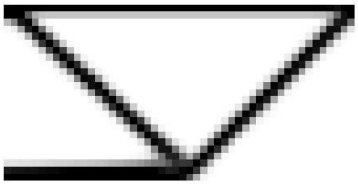
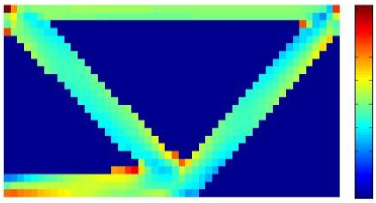
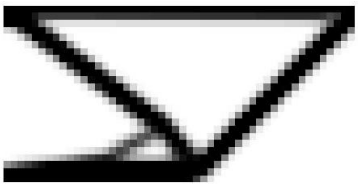
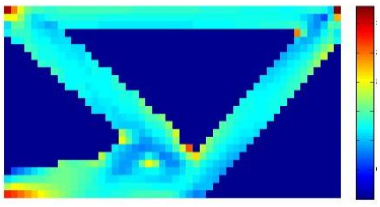
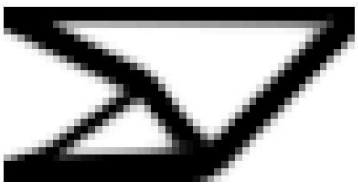
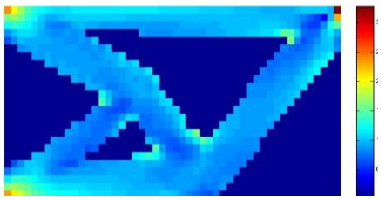
Σχήμα 2.17: Σχηματική απεικόνιση προβόλου (2)

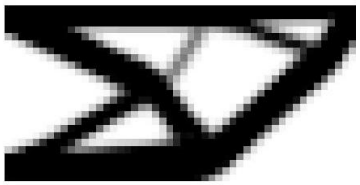
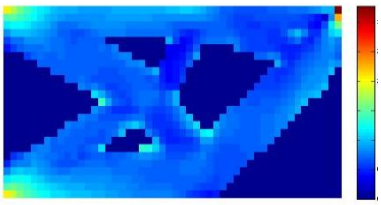
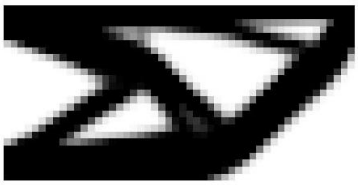
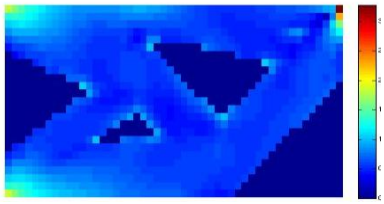
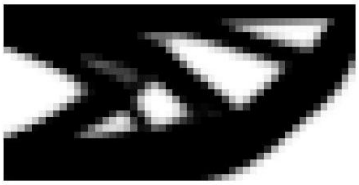
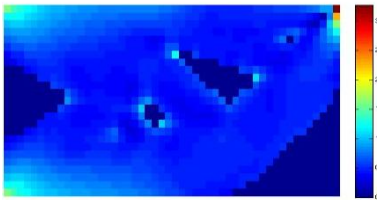
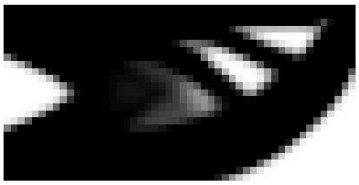
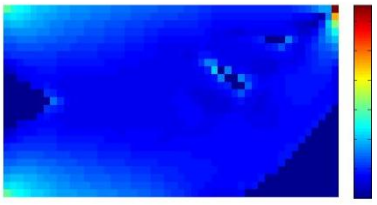
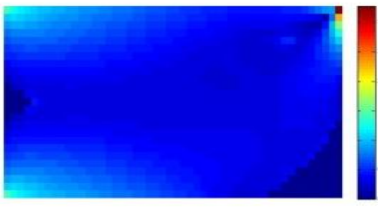
Σ αυτό το παράδειγμα έγινε εφαρμογή του κώδικα σε πακτωμένη ορθογωνική πλάκα όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.17. Στην πλάκα ασκείται φορτίο στην πάνω δεξιά γωνία της πλάκας. Για τη διακριτοποίηση της πλάκας χρησιμοποιήθηκαν τετρακομβικά

πεπερασμένα στοιχεία με πλέγμα 50X25, δηλαδή 50 πεπερασμένα κατά τον X άξονα και 25 κατά τον Y. Οι διαστάσεις μήκους, πλάτους, πάχους που ορίστηκαν είναι Lx=100mm Ly=50mm και t=2mm, αντίστοιχα. Η τάση κάθε πεπερασμένου στοιχείου υπολογίζεται στο κέντρο βάρους του.

Παρακάτω παρατίθεται πίνακας (Πίνακας 2.2) με τη βελτιστοποιημένη κατανομή πάχους που δημιουργεί ο κώδικας και με την αντίστοιχη κατανομή τάσης που παρατηρείται στο βελτιστοποιημένο σχήμα.

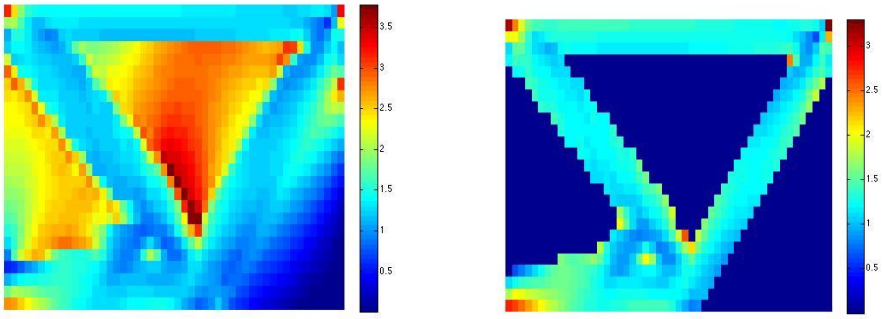
Πίνακας 2.2: Βελτιστοποιημένες κατασκευές μεθόδου SIMP και κατανομή τάσης σ αυτές για διάφορα όρια όγκων

Τελικός Όγκος	**Βελτιστοποιημένο σχήμα**	**Κατανομή τάσης**
0,1		
0,2		
0,3		
0,4		

Τελικός Όγκος	**Βελτιστοποιημένο σχήμα**	**Κατανομή τάσης**
0,5		
0,6		
0,7		
0,8		
0,9		

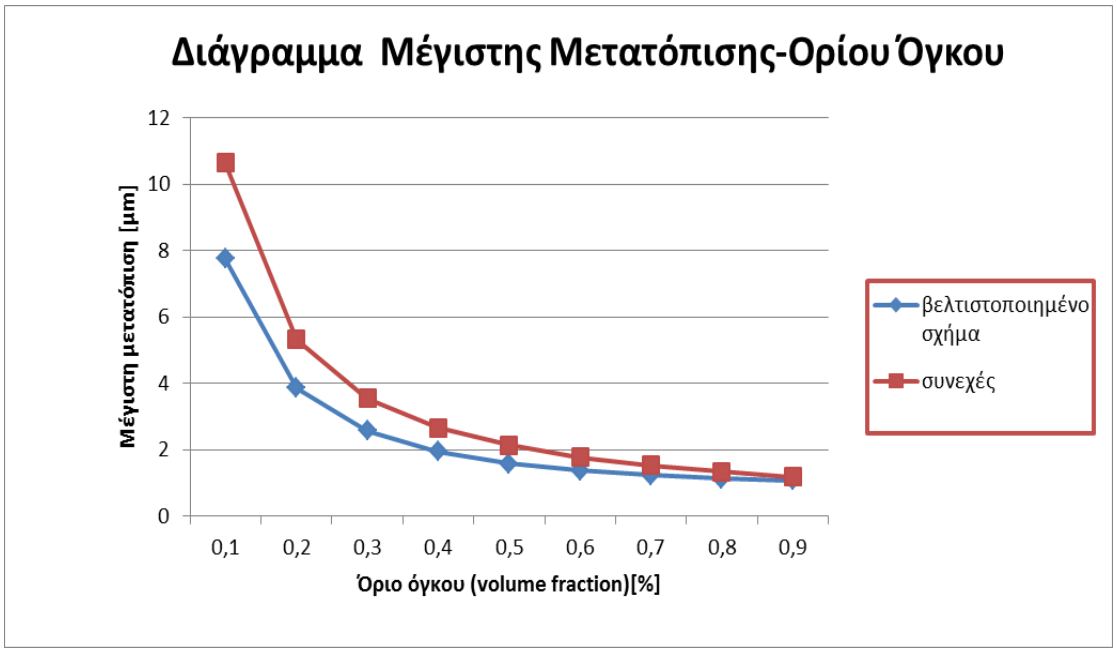
Παρατηρώντας στον παραπάνω πίνακα (Πίνακας 2.2) τις τελικές τοπολογίες του υλικού φαίνεται ότι ο κώδικας συγκρατεί τις δοκίδες που έχει δημιουργήσει σε χαμηλά volume fractions δημιουργώντας κατασκευές που ομοιάζουν με δικτυώματα.

Ομοίως και σε αυτό το παράδειγμα έγινε αποπομπή των περιοχών ανάπτυξης ψευδούς τάσης όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.18



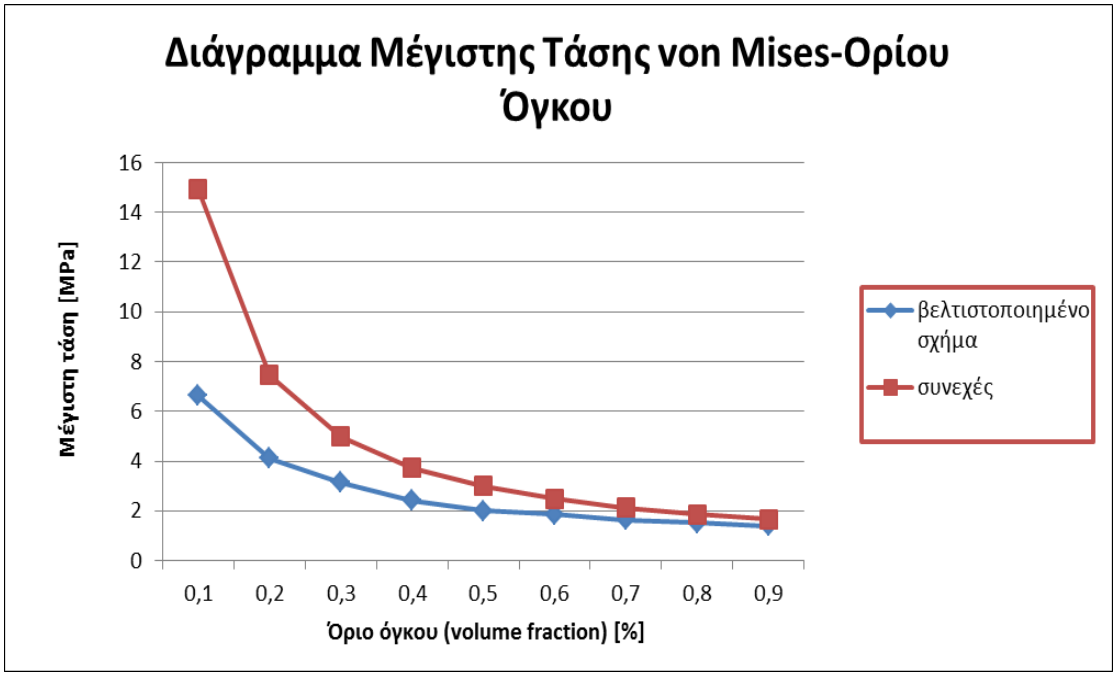
Σχήμα 2.18: Κατανομή τάσης και ψευδοτάσης σε βελτιστοποιημένο σχήμα με όριο όγκου 0,3

Αυτό το παράδειγμα διαφέρει από τη προηγούμενη μόνο ως προς το σημείο εφαρμογής της δύναμης. Παρόλα αυτά τόσο ως προς τις μετατοπίσεις όσο και ως προς την τάση η συμπεριφορά του κώδικα είναι πανομοιότυπη. Έτσι λοιπόν, είναι εμφανές ότι ο αλγόριθμός δεν επηρεάζεται από την μεταφορά της δύναμης, κάτι που δείχνει τη σταθερότητα της μεθόδου. Παρακάτω παρατίθενται τα διαγράμματα των μέγιστων μετατοπίσεων στο Σχήμα 2.19 και της μέγιστης τιμής τάσης σε συνάρτηση με το όριο όγκου στο Σχήμα 2.20.



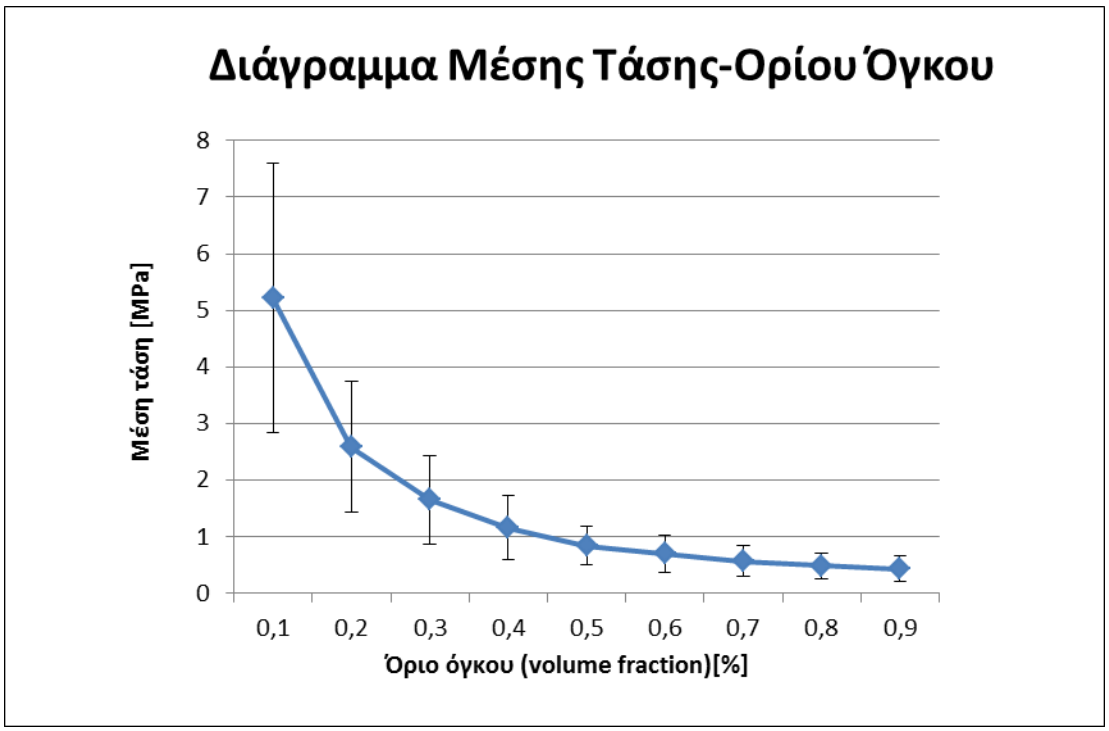
Σχήμα 2.19: Διάγραμμα μέγιστης μετατόπισης-ορίου όγκου για πρόβολο παραδείγματος 2

Είναι προφανές ότι η μεταβολή των μετατοπίσεων σε σχέση με τον όγκο είναι σύμμορφη με την μεταβολή του προηγούμενου παραδείγματος.



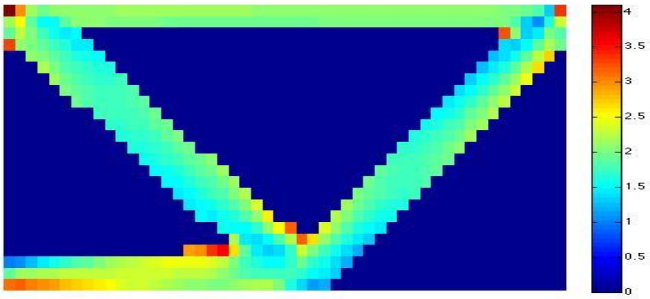
Σχήμα 2.20: Διάγραμμα μέγιστης τάσης von Mises-ορίου όγκου για πρόβολο παραδείγματος 2

Όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα παρατηρούνται διακυμάνσεις στην τιμή της τάσης ανάλογα με τη θέση του πεπερασμένου στοιχείου όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.21. Συνεπώς και σε αυτό το παράδειγμα ο κώδικας δεν πραγματοποιεί βελτιστοποίηση τάσης.



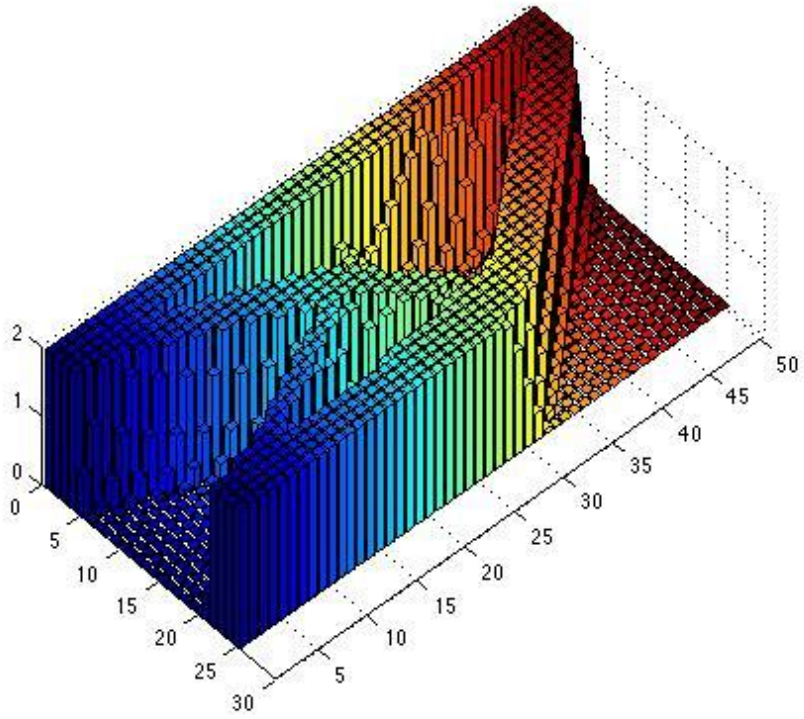
Σχήμα 2.21: Διάγραμμα μέσης τάσης von Mises-ορίου όγκου για πρόβολο παραδείγματος 2. Εμφανίζεται επίσης η τυπική απόκλιση σε μορφή error bar

Επίσης και σε αυτό το παράδειγμα εντοπίστηκε συγκέντρωση τάσης σε σημεία δίπλα στις οπές όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.22.



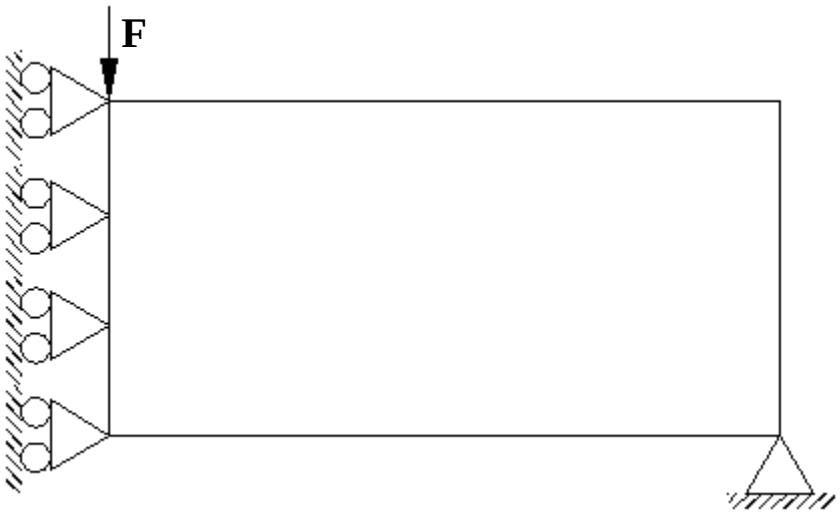
Σχήμα 2.22: Συγκέντρωση τάσης σε βελτιστοποιημένη κατασκευή προβόλου (2) με όριο όγκου 0,2

Τέλος, αξιοσημείωτη είναι και η αποφυγή δημιουργίας ενδιάμεσων τιμών πάχους όπως γίνεται εμφανές στο Σχήμα 2.23



Σχήμα 2.23: 3D απεικόνιση βελτιστοποιημένου προβόλου (2) με όριο όγκου 0,4

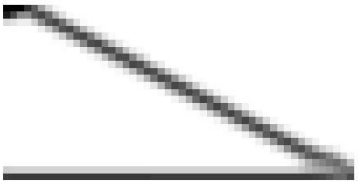
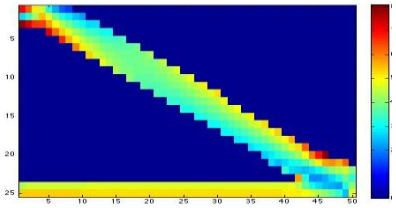
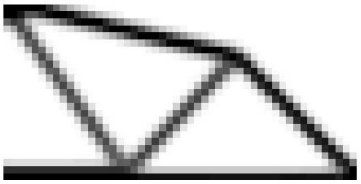
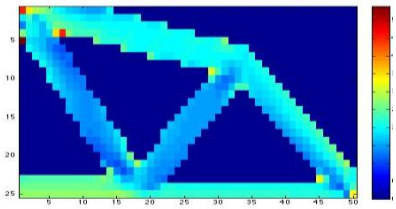
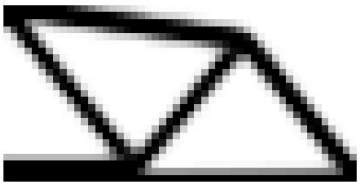
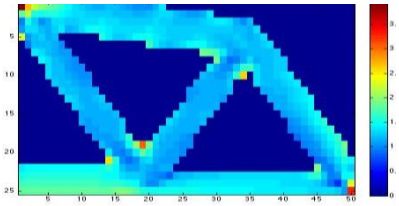
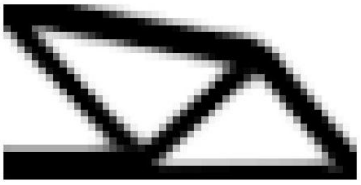
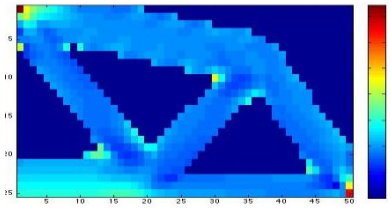
2.7.3 Αμφιέριστη πλάκα

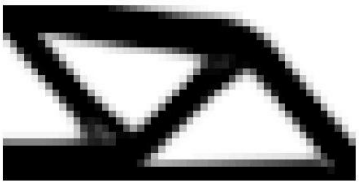
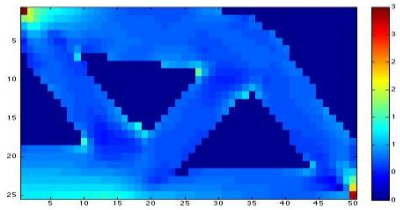
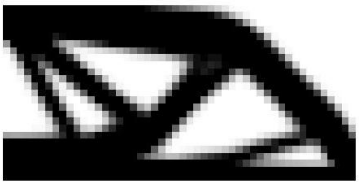
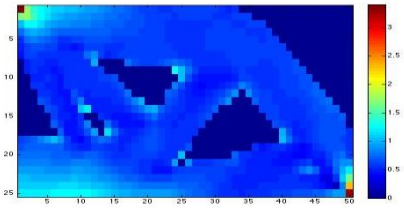
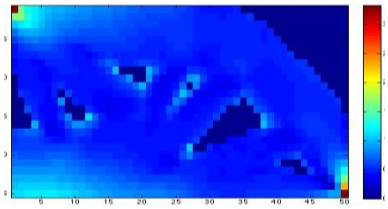
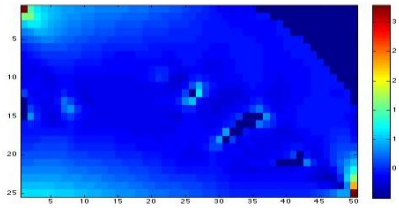
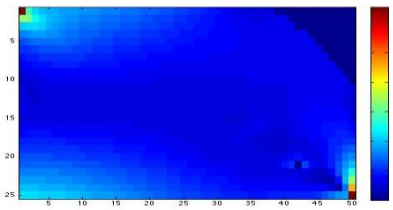


Σχήμα 2.24: Σχηματική απεικόνιση αμφιέριστης πλάκας

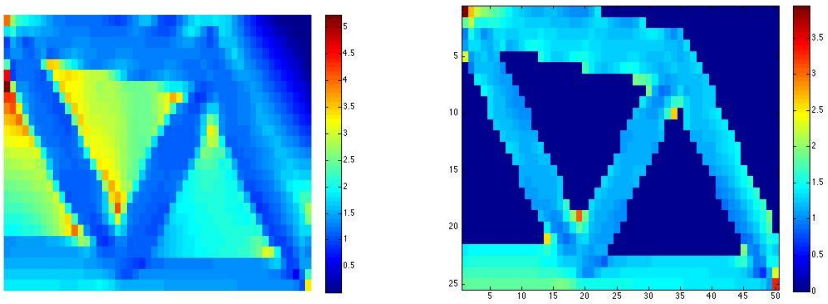
Σ αυτό το παράδειγμα έγινε εφαρμογή του κώδικα σε αμφιέριστη ορθογωνική πλάκα του παραπάνω σχήματος (Σχήμα 2.24). Το πρόβλημα της αμφιέριστης πλάκας είναι συμμετρικό ως προς τον y άξονα συνεπώς μπορούμε να λύσουμε το μισό πρόβλημα τοποθετώντας στην κατά πλάτος πλευρά της πλάκας κυλίσεις. Κάνοντας αυτόν τον μετασχηματισμό ελαττώνουμε το υπολογιστικό κόστος της ανάλυσης αφού εφαρμόζουμε την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων ουσιαστικά στο μισό πρόβλημα. Για την ανάλυση χρησιμοποιήθηκαν τετρακομβικά πεπερασμένα στοιχεία με πλέγμα 50X25,δηλαδή 50 πεπερασμένα κατά τον X άξονα και 25 κατά τον Y. Οι διαστάσεις μήκους, πλάτους, πάχους της μισής πλάκας που ορίστηκαν είναι Lx=100mm Ly=50mm t=2mm,αντίστοιχα. Παρακάτω παρατίθεται πίνακας (Πίνακας 2.3) με την βελτιστοποιημένη κατανομή πάχους που δημιουργεί ο κώδικας και την αντίστοιχη κατανομή τάσης που παρατηρείται σ’ αυτό.

Πίνακας 2.3: Βελτισποποιημένες κατασκευές μεθόδου SIMP και κατανομή τάσης σ αυτές για διάφορα όρια όγκων

Τελικός Όγκος	**Βελτιστοποιημένο σχήμα**	**Κατανομή τάσης**
0,1		
0,2		
0,3		
0,4		

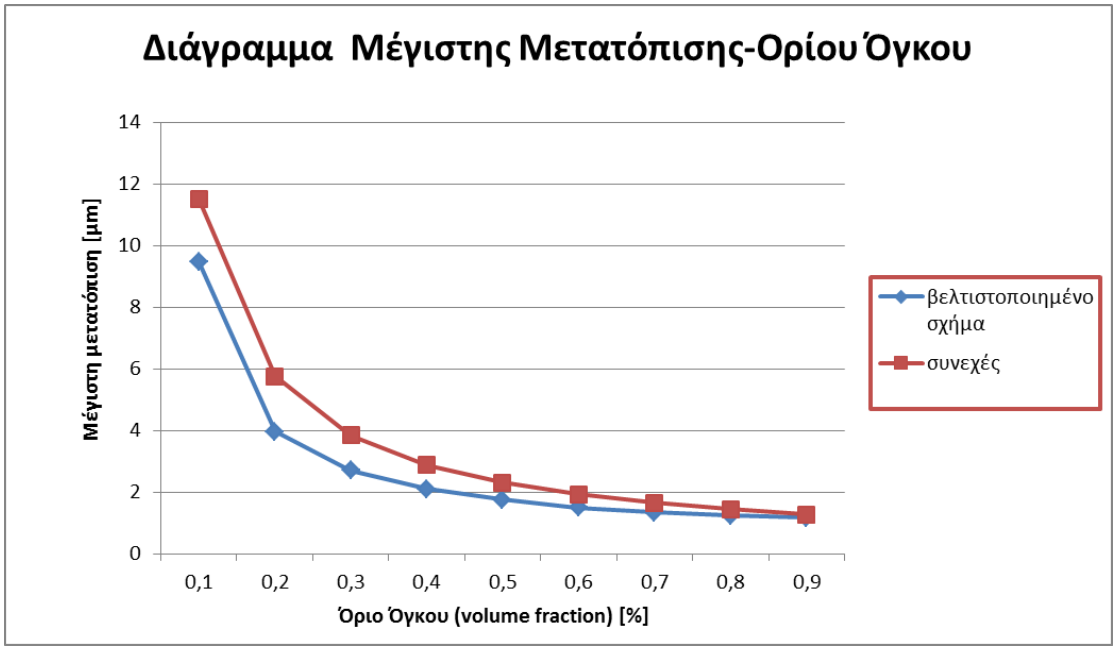
Τελικός Όγκος	Βελτιστοποιημένο σχήμα	Κατανομή τάσης
0,5		
0,6		
0,7		
0,8		
0,9		

Παρατηρώντας τον παραπάνω πίνακα (Πίνακας 2.3) καταλήγουμε ότι ο κώδικας συγκρατεί τις δοκίδες που έχει δημιουργήσει σε χαμηλά volume fraction δημιουργώντας κατασκευές που ομοιάζουν με δικτυώματα και στην συνέχεια δημιουργεί συμπαγής περιοχές για μεγάλα όρια όγκου όπως συνέβαινε και στα προηγούμενα παραδείγματα. Να σημειωθεί ότι και σ αυτό το παράδειγμα έγινε αποπομπή των ψευδών τάσεων όπως παρουσιάζεται στο Σχήμα 2.25.

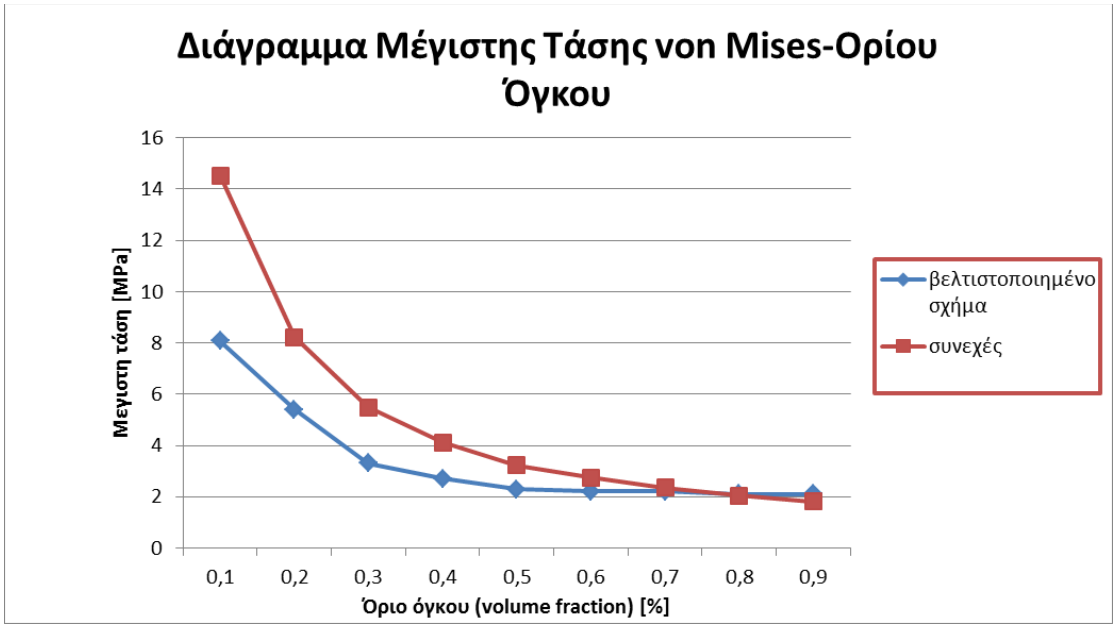


Σχήμα 2.25: κατανομή τάσης και ψευδοτάσεων σε βελτιστοποιημένο σχήμα με όριο όγκου 0,3

Αυτό το παράδειγμα διαφέρει από τα προηγούμενα παραδείγματα μόνο ως προς τον τρόπο στήριξης της πλάκας. Παρόλα αυτά τόσο ως προς τις μετατοπίσεις όσο και ως προς την τάση η συμπεριφορά του κώδικα είναι σχεδόν πανομοιότυπη. Έτσι λοιπόν είναι εμφανές ότι δεν επηρεάζεται ο αλγόριθμός από τις συνθήκες στήριξης, κάτι που επιβεβαιώνει την σταθερότητα της μεθόδου. Στα παρακάτω σχήματα (Σχήμα 2.26 και Σχήμα 2.27) παρατίθενται τα διαγράμματα της μέγιστης μετατόπισης και της μέγιστης τάσης σε συνάρτηση με το όριο όγκου, αντίστοιχα.

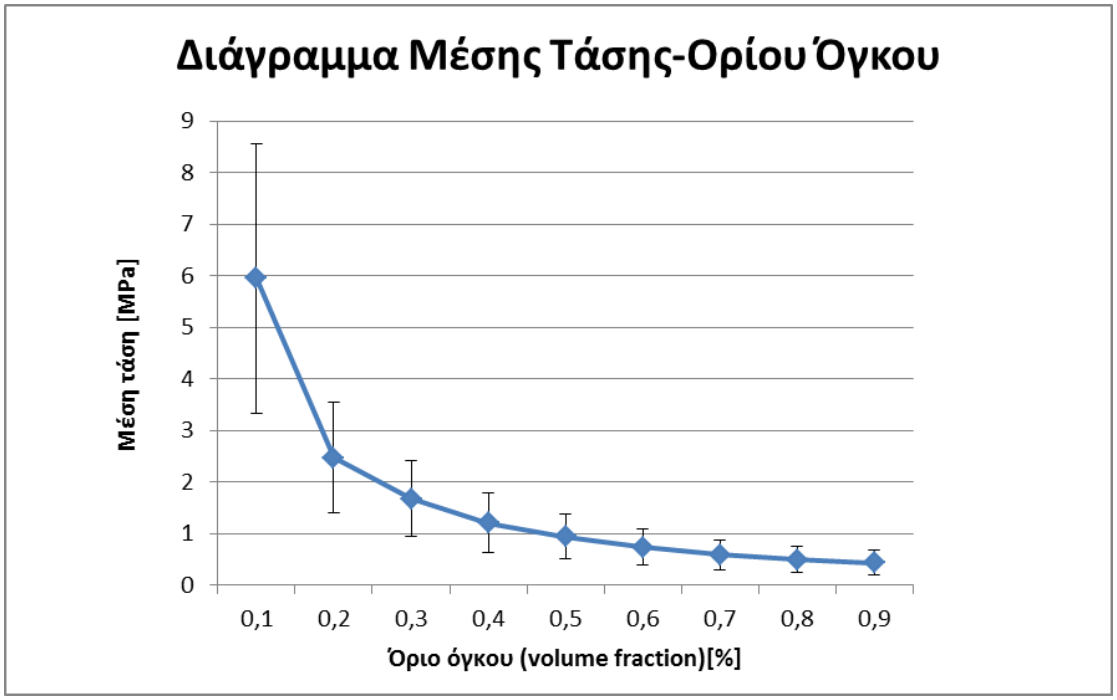


Σχήμα 2.26: Διάγραμμα μέγιστης μετατόπισης-ορίου όγκου για αμφιέριστη πλάκα



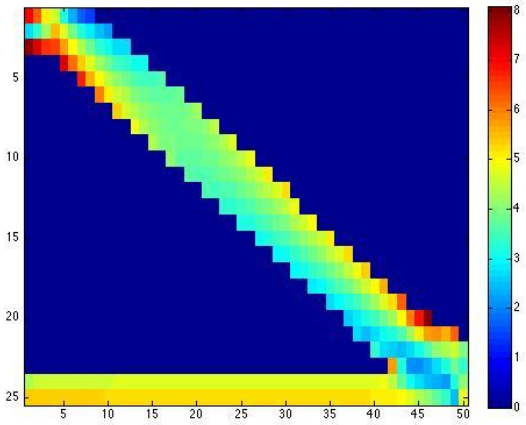
Σχήμα 2.27: Διάγραμμα μέγιστης τάσης von Mises-ορίου όγκου για αμφιέριστη πλάκα

Όπως και στα προηγούμενα παραδείγματα παρατηρούνται διακυμάνσεις στις τιμές της τάσης όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.28 ανάλογα με την θέση του πεπερασμένου στοιχείου. Συνεπώς και σ αυτό το παράδειγμα ο κώδικας δεν πραγματοποιεί βελτιστοποίηση τάσης.



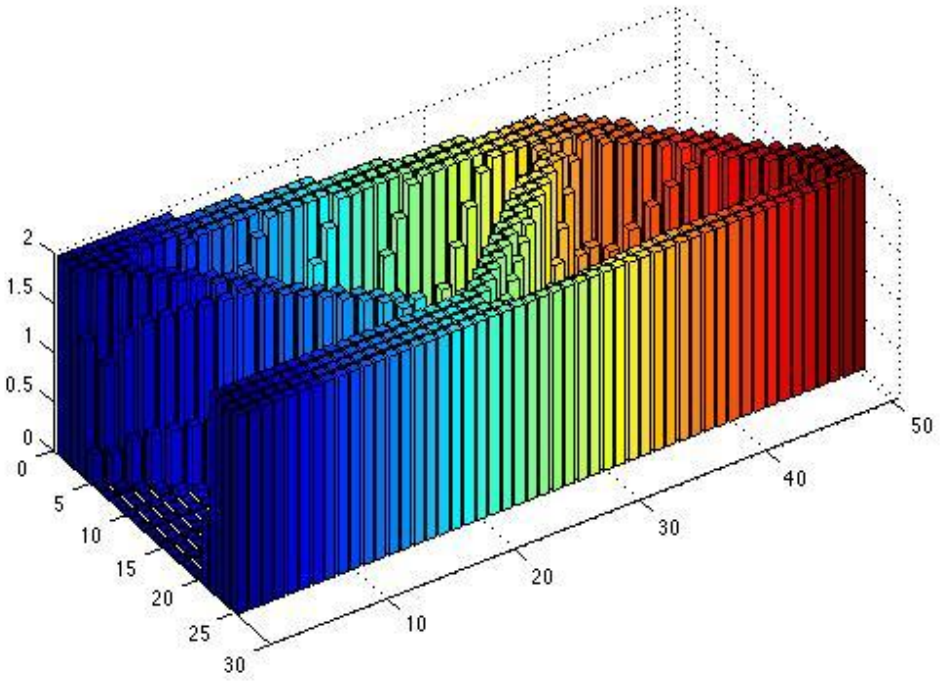
Σχήμα 2.28: Διάγραμμα μέσης τάσης-ορίου όγκου για αμφιέριστη πλάκα. Εμφανίζεται επίσης η τυπική απόκλιση σε μορφή error bar

Επίσης και σ' αυτό το παράδειγμα εντοπίστηκαν συγκέντρωση τάσεων όπως φαίνεται και στο Σχήμα 2.29.



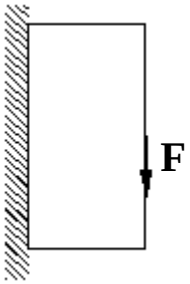
Σχήμα 2.29: Συγκέντρωση τάσης σε βελτιστοποιημένη κατασκευή αμφιέριστης πλάκας με όριο όγκου 0,1

Τέλος, αξιοσημείωτη είναι και η κατασκευασιμότητα της κατασκευής αποφεύγοντας την δημιουργία ενδιάμεσων τιμών πάχους όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.30.



Σχήμα 2.30: 3D απεικόνιση βελτιστοποιημένης αμφιέριστης πλάκας με όριο όγκου 0,4

2.7.4 Κοντός Πρόβολος

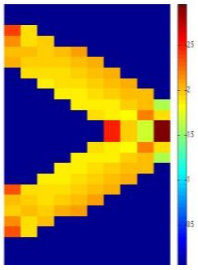
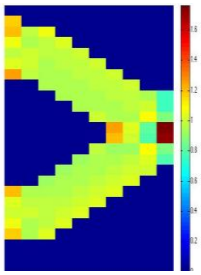
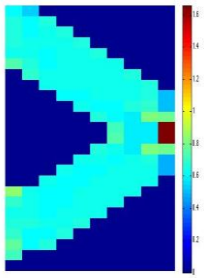
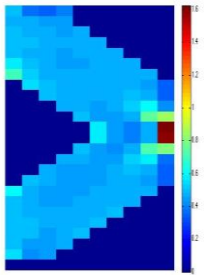


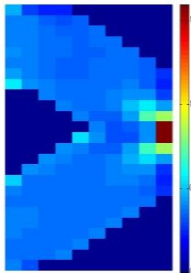
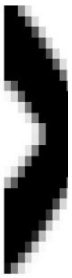
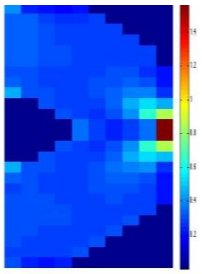
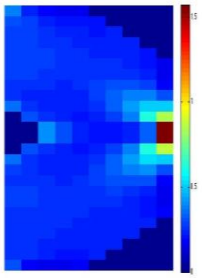
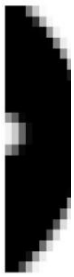
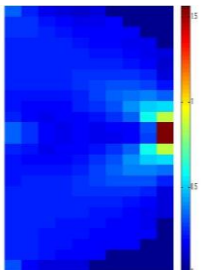
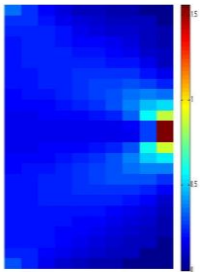
Σχήμα 2.31: Σχηματική απεικόνιση κοντού προβόλου

Σ αυτό το παράδειγμα έγινε εφαρμογή του κώδικα σε ορθογωνικό κοντό πρόβολο του παραπάνω σχήματος (Σχήμα 2.31). Το παράδειγμα αυτό πραγματοποιήθηκε ώστε να εξακριβώσουμε την σταθερότητα της μεθόδου σε άλλου είδους σχήματα. Για την ανάλυση χρησιμοποιήθηκαν τετρακομβικά πεπερασμένα στοιχεία με πλέγμα 10X25,δηλαδή 10 πεπερασμένα κατά τον X άξονα και 25 κατά τον Y. Οι διαστάσεις μήκους, πλάτους, πάχους της μισής πλάκας που ορίστηκαν είναι Lx=20mm Ly=50mm t=2mm,αντίστοιχα.

Παρακάτω παρατίθεται πίνακας (Πίνακας 2.4) με την βελτιστοποιημένη κατανομή πάχους που δημιουργεί ο κώδικας και με την αντίστοιχη κατανομή τάσης που παρατηρείται στο βελτιστοποιημένο σχήμα.

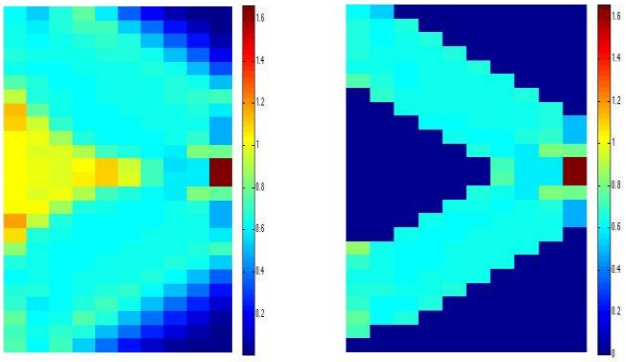
Πίνακας 2.4: Βελτισοποιημένες κατασκευές μεθόδου SIMP και κατανομή τάσης σ αυτές για διάφορα όρια όγκων

Τελικός Όγκος	**Βελτιστοποιημένο σχήμα**	**Κατανομή τάσης**
0,1		
0,2		
0,3		
0,4		

Τελικός Όγκος	Βελτιστοποιημένο σχήμα	Κατανομή τάσης
0,5		
0,6		
0,7		
0,8		
0,9		

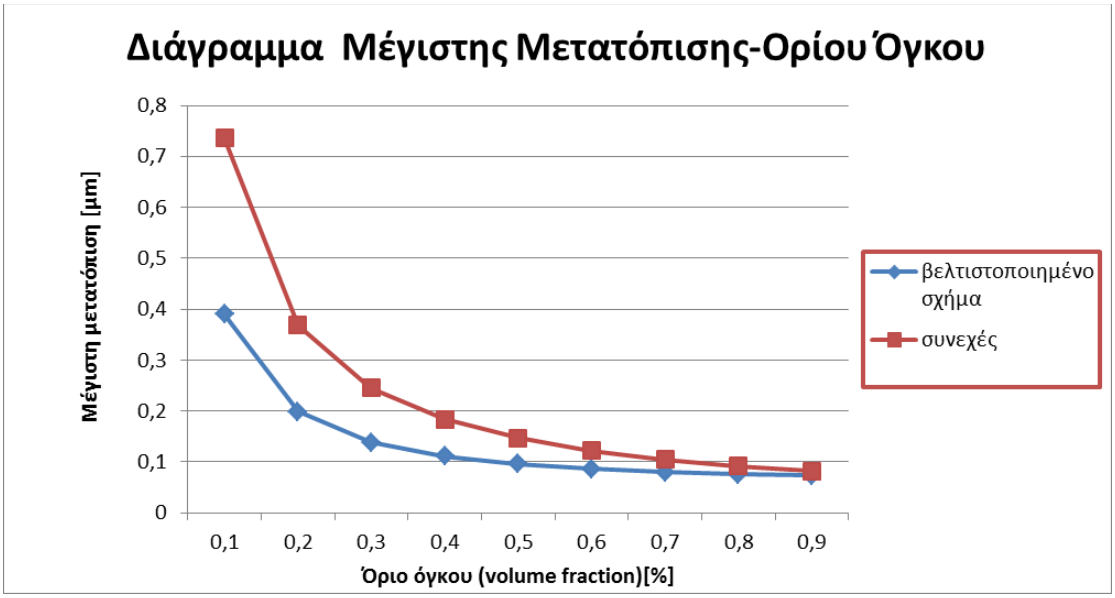
Από τον Πίνακα 2.4 παρατηρούμε ότι ο αλγόριθμος δημιουργεί δυο δοκίδες σε αντίθεση με τον πιο μακρύ πρόβολο του παραδείγματος 1 στον οποίο σχηματίζονταν εγκάρσιες δοκίδες. Η απουσία αυτών των δοκίδων είναι λογική καθώς στο κοντό πρόβολο δημιουργούνται μικρές ροπές, συνεπώς και μικρές μετατοπίσεις. Έτσι λοιπόν, μπορεί να υπάρχει ελαχιστοποίηση της ενδοτικότητας με λιγότερες δοκίδες.

Να σημειωθεί ότι και σ αυτό το παράδειγμα έγινε αποπομπή των ψευδών τάσεων θέτοντας τες μηδέν, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 2.32 .

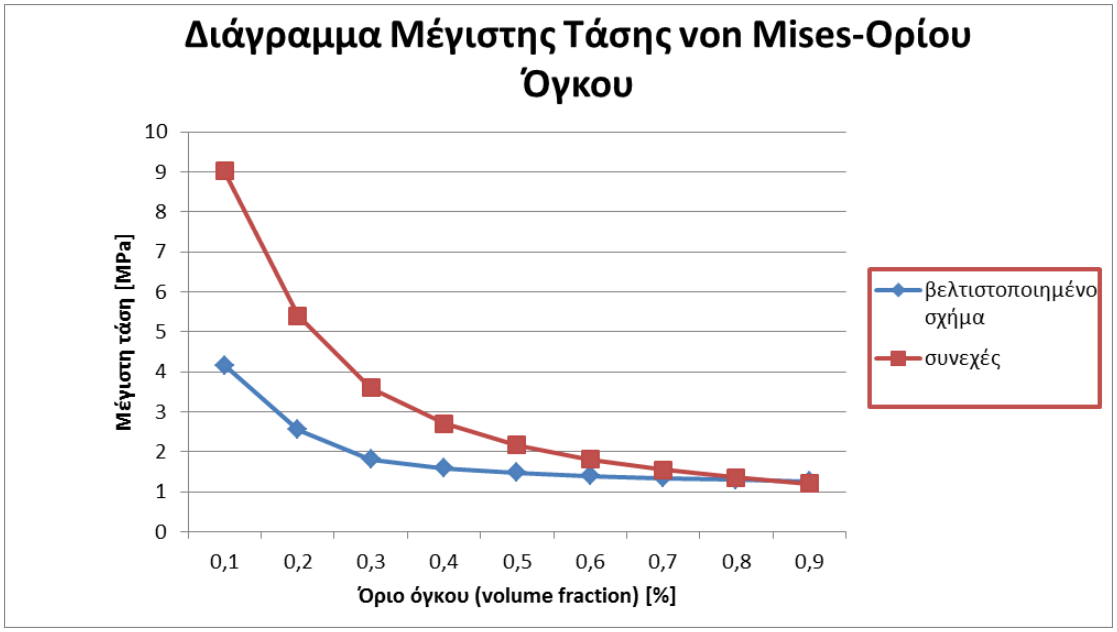


Σχήμα 2.32: κατανομή τάσης και ψευδοτάσης σε βελτιστοποιημένο σχήμα με όριο όγκου 0,3

Αυτή η κατασκευή αναφοράς διαφέρει ως προς την πρώτη μόνο ως προς τις διαστάσεις. Έτσι λοιπόν, αναμένουμε ότι ο αλγόριθμός θα έχει την ίδια συμπεριφορά όσον αφορά την μέγιστη μετατόπιση και τάση. Αυτό επιβεβαιώνεται από τα παρακάτω διαγράμματα (Σχήμα 2.33 και Σχήμα 2.34).

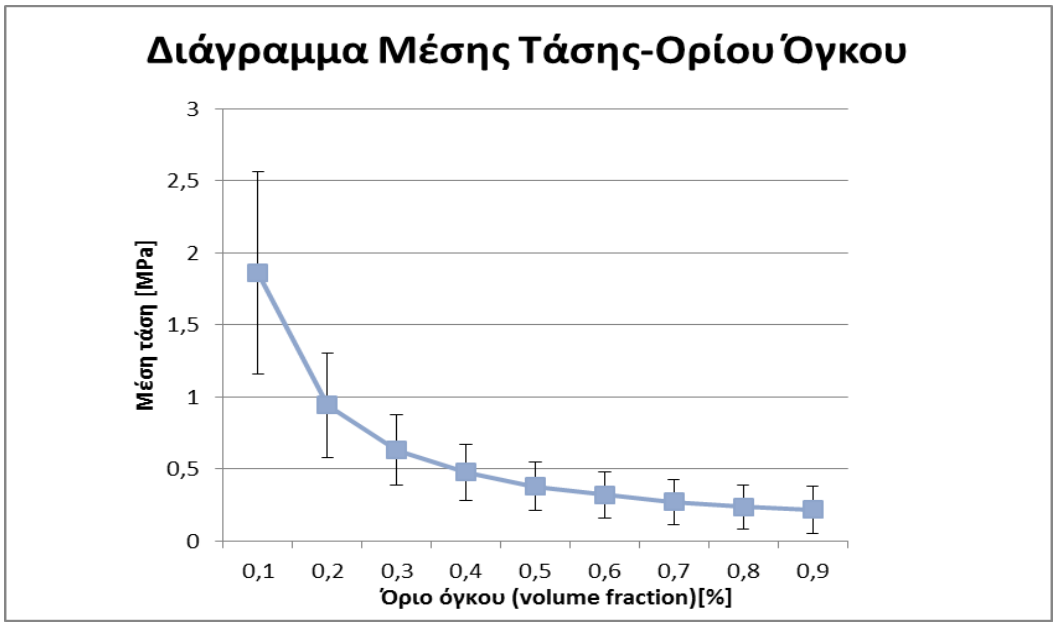


Σχήμα 2.33: Διάγραμμα μέγιστης μετατόπισης-ορίου όγκου για κοντό πρόβολο



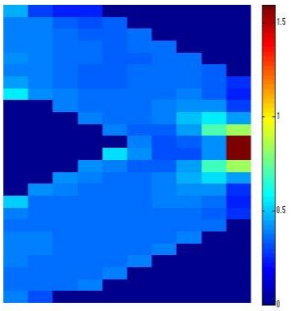
Σχήμα 2.34: Διάγραμμα μέγιστης τάσης von Mises-ορίου όγκου για κοντό πρόβολο

Όπως και στα προηγούμενα παραδείγματα παρατηρούνται διακυμάνσεις στην τιμή της τάσης ανάλογα με την θέση του πεπερασμένου στοιχείου όπως φαίνεται και στο Σχήμα 2.35. Συνεπώς και σ αυτό το παράδειγμα δεν ο κώδικας δεν πραγματοποιεί βελτιστοποίηση τάσεων.



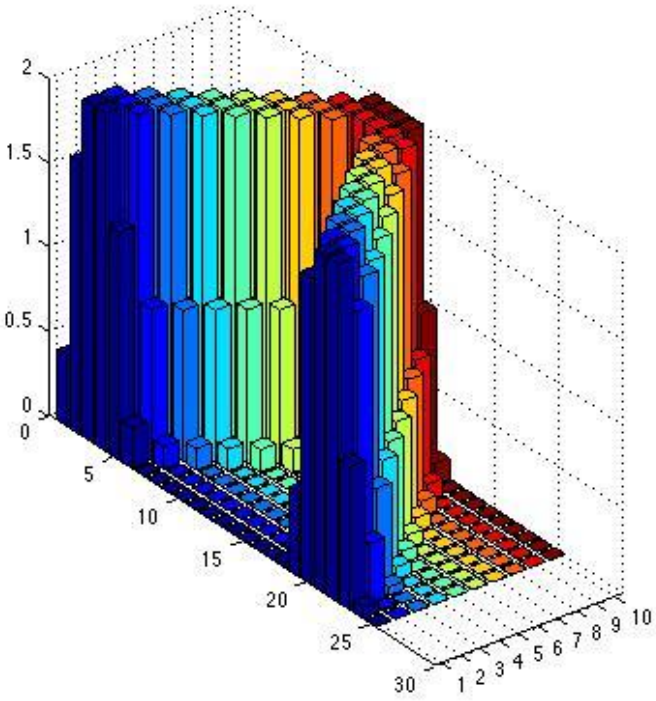
Σχήμα 2.35: Διάγραμμα μέσης τάσης-ορίου όγκου για αμφιέριστη πλάκα. Εμφανίζεται επίσης η τυπική απόκλιση σε μορφή error bar

Στον κοντό πρόβολο δεν παρατηρούνται τόσο μεγάλη αύξηση των τάσεων στις στηρίξεις του βελτιστοποιημένου σχήματος εν αντιθέσει με τα προηγούμενα παραδείγματα όπως είναι εμφανές στο Σχήμα 2.36.



Σχήμα 2.36: Συγκέντρωση τάσης σε βελτιστοποιημένη κατασκευή αμφιέριστης πλάκας με όριο όγκου 0,3

Τέλος, αξιοσημείωτη είναι και σ' αυτό το παράδειγμα η κατασκευασιμότητα της τελικής κατασκευής όπως παρουσιάζεται στο Σχήμα 2.37.



Σχήμα 2.37: 3D απεικόνιση βελτιστοποιημένης αμφιέριστης πλάκας με όριο όγκου 0,3

3

Βελτιστοποίηση κατασκευών συνεχούς μέσου υπό περιορισμό τάσης

Η τοπολογική βελτιστοποίηση με περιορισμό τάσης είναι από τα πιο σημαντικά προβλήματα της βελτιστοποίησης κατασκευών διότι οι τάσεις αποτελούν το βασικότερο κριτήριο για την ασφάλεια μιας κατασκευής. Όπως είναι φανερό από την προηγούμενη ενότητα η μέθοδος SIMP δεν βελτιστοποιεί τις τάσεις σε μια κατασκευή.

Η πιο ευρέως χρησιμοποιούμενη μέθοδος βελτιστοποίησης με περιορισμό τάσης, η οποία είναι και μαθηματικός αποδεδειγμένη είναι η μέθοδος πλήρους εντάσεως (Fully Stressed Design-FSD). Η μέθοδος FSD που αρχικά χρησιμοποιήθηκε για την βελτιστοποίηση δικτυωμάτων βασίζεται στην αρχή ότι το βέλτιστο σχήμα αποτελεί το σχήμα το οποίο έχει σ όλη του τον όγκο την ίδια τάση, καθώς εάν ένα σημείο της κατασκευής έχει τάση διαφορετική από την επιθυμητή το σημείο αυτό χαίρει περεταίρω μεταβολής του πάχους του ώστε να «συμμορφωθεί» η τάση του με τον περιορισμό τάσης που έχουμε εισαγάγει στο πρόβλημα. Ειδικότερα, το πρόβλημα βελτιστοποίησης με περιορισμούς τάσης ορίζετε ως:

$$\min W = \sum_{k=0}^{n} \rho t A \tag{3.1}$$

$$\text{με } g_i = \left(\frac{\sigma_i}{\sigma_{max}}\right) - 1 \leq 0 \tag{3.2}$$

σύμφωνα με την μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange το ελάχιστο βάρος επιτυγχάνεται μόνο όταν το ανάδελτα του αντίστοιχου πολλαπλασιαστή Lagrange L ισούται με μηδέν:

$$L(t,\lambda) = \sum_{i=1}^{nelx}\sum_{j=1}^{nely} \rho_{ij} t_{ij} A_{ij} + \sum_{i=1}^{nelx}\sum_{j=1}^{nely} \lambda_{ij} g_{ij}\,,\ \nabla_t W + \nabla_t \sum_{i=1}^{nelx}\sum_{j=1}^{nely} \lambda_{ij} g_{ij} = 0 \tag{3.3}$$

Για μια στατικά ορισμένη κατασκευή ισχύει ότι η κατανομή των εσωτερικών δυνάμεων δεν εξαρτάται από τις ιδιότητες της δυσκαμψίας της αλλά μόνο από τις εξωτερικές δυνάμεις . αποδεικνύεται ότι:

$$\nabla_t \sum_{i=1}^{nelx} \sum_{j=1}^{nely} \lambda_{ij} g_{ij} = 0 \tag{3.4}$$

το οποίο οδηγεί στον αναγωγικό τύπο:

$$t_{new} = t_{old} \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_{max}} \tag{3.5}$$

ωστόσο και για στατικά αόριστες κατασκευές είναι αποδεκτό ότι αν η διαδικασία ακολουθείτε επαναληπτικά σε κάθε βήμα η κατασκευή υποτίθεται ότι είναι στατικά ορισμένη και έτσι ισχύει ο ίδιος κανόνας βελτιστοποίησης (Venetsanos D., 2010).

Αυτό το κριτήριο αποτελεί το βέλτιστο κριτήριο για την αντιμετώπιση προβλημάτων βελτιστοποίησης με περιορισμούς τάσεων.

3.1 Ο αλγόριθμος

Για την εύρεση λοιπόν του βέλτιστου σχήματος υπό περιορισμό τάσης αναπτύχθηκε αλγόριθμος που πραγματοποιεί την FSD βάσει του αναδρομικού τύπου της Σχέσης (3.5). Ειδικότερα, ο αλγόριθμος ακολουθεί τα παρακάτω βήματα.

Βήμα 1: Γίνεται αρχικοποίηση του προβλήματος. Συγκεκριμένα ορίζεται οι καταστάσεις στήριξης της κατασκευής , τα φορτία και οι αρχικές διαστάσεις του προβλήματος (initial domain). Στην συνέχεια γίνεται διακριτοποίηση του αρχικής γεωμετρίας σε τετραγωνικά πεπερασμένα στοιχεία. Προφανώς μπορεί να γίνει διακριτοποίηση και με άλλου είδους πεπερασμένα στοιχεία.

Βήμα 2: Υπολογίζονται οι μετατοπίσεις σε κάθε κόμβο με την μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων του Galerkin-Ritz. Αφού υπολογιστούν οι μετατοπίσεις υπολογίζονται οι

τάσεις (σ_χ σ_y τ_{xy}) στο κέντρο βάρους του κάθε πεπερασμένου στοιχείου. Με αυτές τις τάσεις υπολογίζεται η ισοδύναμη τάση von Mises για κάθε πεπερασμένο στοιχείο σύμφωνα με την εξίσωση

$$\sigma_{i\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\left(\sigma_{xx}-\sigma_{yy}\right)^2+\left(\sigma_{yy}\right)^2+\left(\sigma_{xx}\right)^2+6\left(\tau_{y\chi}{}^2\right)\right\}^{1/2} \quad (3.6)$$

Βήμα 3: Μέτα τον υπολογισμό των τάσεων ακολουθεί η αλλαγή του πάχους του κάθε πεπερασμένου στοιχείου σύμφωνα με τον αναδρομικό τύπο των βέλτιστων κριτηρίων:

$$t_{new}=t_{old}\frac{\sigma_{ij}}{\sigma_{max}} \quad (3.7)$$

Σύμφωνα με τη παραπάνω σχέση όταν η ισοδύναμη τάση είναι μικρότερη από την επιτρεπόμενη τότε :

$$\frac{\sigma_{ij}}{\sigma_{max}}<1 \quad (3.8)$$

Όταν ο λόγος της Σχέσης (3.8) είναι μικρότερος από την μονάδα αφαιρείται υλικό, ελαττώνοντας το πάχος του συγκεκριμένου στοιχείου στοιχείο .

Αντίθετα, όταν η ισοδύναμη τάση είναι μεγαλύτερη από την επιτρεπόμενη τότε:

$$\frac{\sigma_{ij}}{\sigma_{max}}>1 \quad (3.9)$$

Αντίστοιχα, αν ο λόγος της Σχέσης (3.9) είναι μικρότερος από την μονάδα προστίθεται υλικό, αυξάνοντας το πάχος του στοιχείου.

Η όλη παραπάνω διαδικασία επαναλαμβάνεται για αρκετές επαναλήψεις και τελικά η μέθοδος συγκλίνει όταν όλα τα πεπερασμένα στοιχεία έχουν πάρει το τελικό τους πάχος και η ισοδύναμη τάση τελικά έχει πάρει παντού την τιμή της επιτρεπόμενης. Γίνεται τελικά μια επίτευξη ισοκατανομής της ισοδύναμης τάσης σε όλη την επιφάνεια του επίπεδου ελάσματος.

Για τον τερματισμό του αλγορίθμου πρέπει να οριστεί ένα κριτήριο σύγκλισης. Σύμφωνα με αυτό υπολογίζεται για κάθε στοιχείο σε κάθε επανάληψη η διαφορά μεταξύ της επιτρεπόμενης τάσης και της τάσης του στοιχείου μετά την αλλαγή του πάχους. Αν αυτή η διαφορά είναι μικρότερη από μια ανοχή (tolerance) πολύ μικρή που ορίζεται τότε ο αλγόριθμος θεωρείται ότι συγκλίνει και οι επαναλήψεις σταματούν.

Τα στοιχεία των πεπερασμένων στοιχείων παραμένουν σταθερά κατά την διάρκεια της φάσης εφαρμογής της μεθόδου βελτιστοποίησης τοπολογίας. Το μόνο που

μεταβάλλεται κατά την μέθοδο αυτή είναι το πάχος των πεπερασμένων στοιχείων. Για την επίτευξη ακριβών αποτελεσμάτων πρέπει το πλέγμα να είναι αρκετά πυκνό.

Στα σημεία όπου η ισοδύναμη τάση είναι πολύ μικρή, ο αλγόριθμος τείνει να μηδενίσει το πάχος του πεπερασμένου στοιχείου. Αυτό έχει ως συνέπεια όταν η τιμή του πάχους γίνει μηδέν η ορίζουσα του συστήματος να γίνεται μηδέν και να μη λύνεται το σύστημα των εξισώσεων.

Το πρόβλημα αυτό αντιμετωπίζεται με τη σταθεροποίηση της τιμής του πάχους του πεπερασμένου στοιχείου έτσι ώστε να μην μικραίνει περισσότερο από μια πολύ μικρή τιμή και η τιμή τάσης των συγκεκριμένων στοιχείων να παίρνει την τιμή μηδέν.

3.2 Εφαρμογή της FSD σε κατασκευές αναφοράς

Στην ενότητα αυτή παρατίθενται η εφαρμογή της μεθόδου στις κλασσικές κατασκευές αναφοράς που εφαρμόστηκε και η μέθοδος SIMP ώστε να διερευνηθεί η αποτελεσματικότητα της μεθόδου. Συγκεκριμένα, ο αλγόριθμος FSD εφαρμόστηκε σε τέσσερα παραδείγματα :

- 2 πρόβολοι όπου το φορτίο ασκείται σε διαφορετικό σημείο
- 1 κοντός πρόβολος (sort cantilever)
- 1 αμφιέριστη δοκός (MBB)

Οι κατασκευές που θα μελετηθούν είναι από υλικό με μέτρο ελαστικότητας E=210GPa και ο λόγος poisson ν=0,3. Σ’ όλα τα παραδείγματα ασκείτε φορτίο

F= 10N. Οι κατασκευές διακριτοποιήθηκαν με τετρακομβικά πεπερασμένα και οι τάσεις του κάθε στοιχείου υπολογίστηκαν στο κέντρο βάρους της κατασκευής.

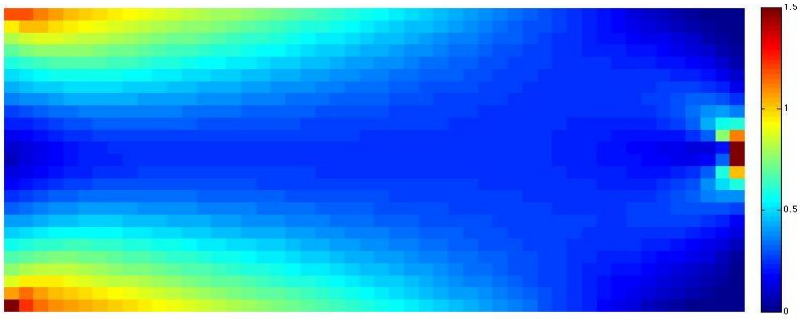
3.2.1 Πρόβολος (1)

Σχήμα 3.1 Σχηματική απεικόνιση προβόλου(1)

Σ αυτό το παράδειγμα έγινε εφαρμογή του κώδικα σε πακτωμένη ορθογωνική πλάκα του παραπάνω σχήματος (Σχήμα 3.1). Το πλέγμα είναι 50X25, δηλαδή 50 πεπερασμένα κατά τον X άξονα και 25 κατά τον Y. Οι διαστάσεις μήκους, πλάτους, πάχους που ορίστηκαν είναι Lx=100mm Ly=50mm , t=2mm,αντίστοιχα. Ο αρχικός όγκος υπολογίζεται στα V=10000mm^3.

Οι παραπάνω διαστάσεις αποτελούν τα δεδομένα της αρχικοποίησης του προβλήματος, δηλαδή τη δημιουργία του αρχικού πλαισίου εφαρμογής του κώδικα (initial domain). Η ανοχή για την σύγκλιση του κώδικα τέθηκε στα 0,2MPa.

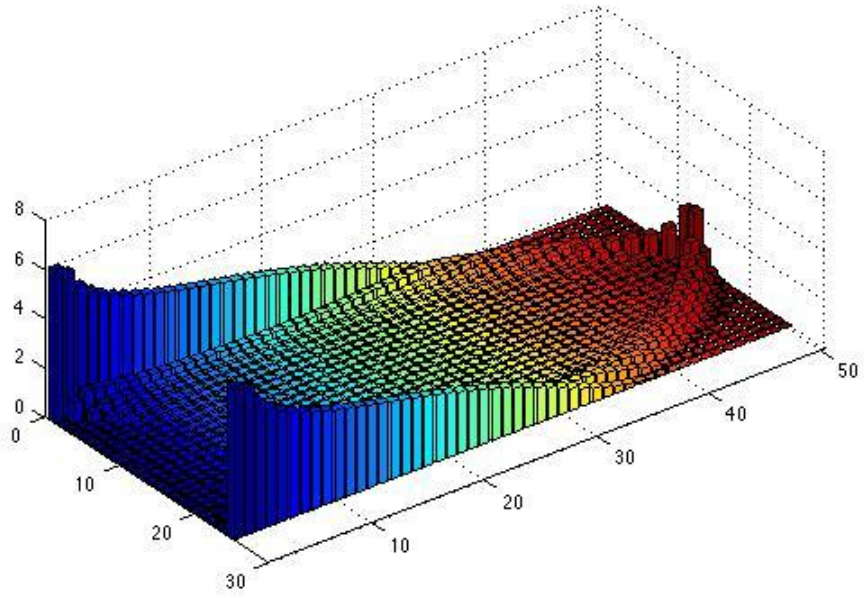
Αρχικά έγινε υπολογισμός με την μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων Galerkin-Ritz, που αναλύθηκε παραπάνω, των τάσεων του αρχικού domain. Οι τάσεις υπολογίζονται και σ αυτήν την περίπτωση στο κέντρο βάρους του κάθε στοιχείου.



Σχήμα 3.2: Κατανομή τάσης στην αρχική συνεχή πλάκα

Η μέγιστη τάση που εμφανίζεται στο Σχήμα 3.2 είναι 1.56MPa. Αύτη η τάση θεωρείται η μέγιστη επιτρεπόμενη τάση, και εισάγεται ως σ_{max} στον αλγόριθμου FSD.

Έχοντας λοιπόν, όλα τα παραπάνω δεδομένα έγινε εφαρμογή του αλγόριθμου βελτιστοποίησης δημιουργώντας το παρακάτω σχήμα (Σχήμα 3.3).



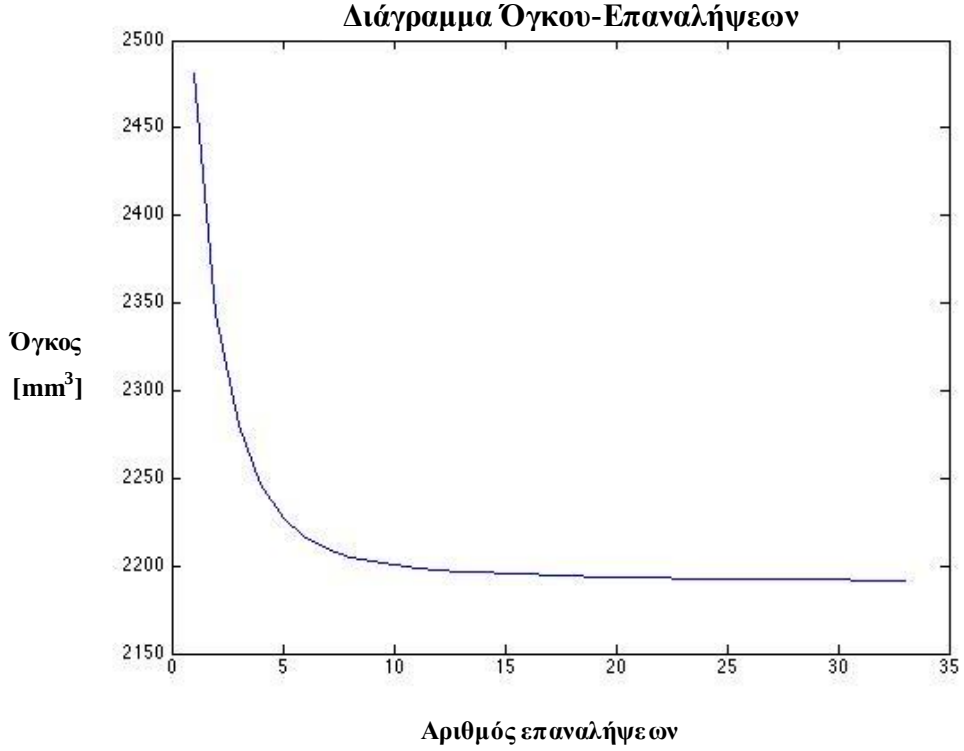
Σχήμα 3.3: 3D απεικόνιση της βελτιστοποιημένης κατασκευής που παράγεται με την μέθοδο FSD

Όπως είναι εμφανές ο αλγόριθμος δημιουργεί δυο δοκίδες που συγκλίνουν στο σημείο φόρτισης. Είναι εμφανές ότι τα στοιχεία που βρίσκονται κοντά στις στηρίξεις παρουσιάζουν μεγάλα πάχη όπως επίσης και τα στοιχεία πάνω στα οποία ασκείται η φόρτιση.

Να σημειωθεί ο κώδικας δημιουργεί περιοχές στα οποία το πάχος είναι μεγαλύτερο από το αρχικό πάχος (2mm).Αν ορίσουμε, όπως στο πρόβλημα της μεθόδου SIMP, μια μέγιστη επιτρεπόμενη τιμή πάχους, με αλλά λόγια δηλαδή αν απαιτήσουμε το τελικό σχήμα να μην υπερβαίνει τα όρια του αρχικού domain τότε ο αλγόριθμος δεν συγκλίνει. Όπως έχουμε αναφέρει ο αλγόριθμος μεταβάλει το πάχος των στοιχείων σύμφωνα με τον αναδρομικό τύπο της Σχέσης (3.5), αφαιρώντας υλικό από τα στοιχεία που έχουν μικρότερη τάση από την επιτρεπόμενη και αυξάνοντας το πάχος των στοιχείων που έχουν μεγαλύτερη τάση. Όταν ο αλγόριθμος αφαιρεί πάχος από τα εσωτερικά στοιχεία της πλάκας (για τα οποία προφανώς ισχύει προφανώς η Σχέση (3.8)) η ολική ακαμψία της κατασκευής μειώνεται με αποτέλεσμα την αύξηση των

τάσεων στα σημεία στήριξης της δοκού. Έτσι λοιπόν ο αλγόριθμος στην επόμενη επανάληψη οδηγεί σε αύξηση του πάχους των στοιχείων που βρίσκονται στις στηρίξεις λόγω της υψηλής τάσης που δημιουργείται. Αν λοιπόν έχουμε ένα μέγιστο όριο πάχους ο αλγόριθμος δεν μπορεί να συγκλίνει αφού οι τάσεις στις στηρίξεις δεν μπορούν να εξισορροπηθούν.
Παρόλα αυτά λόγω της απαλοιφής του περιορισμού του μέγιστου δυνατού πάχους το πρόβλημα βελτιστοποίησης μετατρέπεται από πρόβλημα τοπολογίας σε πρόβλημα βελτιστοποίησης μεγέθους.

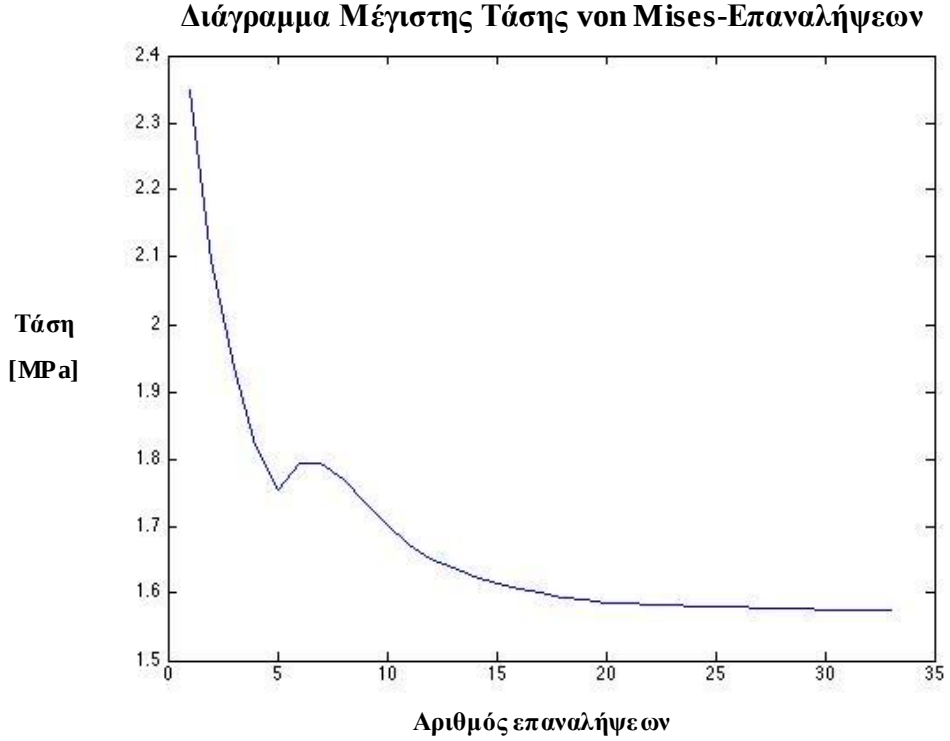
Αξιοσημείωτη είναι η αποτελεσματικότητα του κώδικα. Ειδικότερα, η αντικειμενική συνάρτηση (που στην παρούσα διπλωματική εργασία είναι το βάρος) συγκλίνει εκθετικά στον τελικό όγκο ο οποίος είναι V=2121 mm^3. Έτσι λοιπόν μέσω του αλγορίθμου έχουμε βελτιστοποίηση του σχήματος ώστε η κατασκευή να αντέχει το ίδιο με την συνεχή πλάκα χρησιμοποιώντας μόνο το 21.21% του όγκου.
Το παρακάτω διάγραμμα (Σχήμα 3.4) παρουσιάζει την σύγκλιση της μεθόδου. Αν και η τελική σύγκλιση επήλθε στις 33 επαναλήψεις η αντικειμενική συνάρτηση είχε σχεδόν συγκλίνει μόλις στις 5 επαναλήψεις.



Σχήμα 3.4: Διάγραμμα πορείας σύγκλισης της αντικειμενικής συνάρτησης

Έτσι λοιπόν, συμπεραίνουμε ότι λόγω αυτής της μεγάλης ομαλότητας στην σύγκλιση ο αλγόριθμος είναι ιδιαιτέρως σταθερός.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η μεταβολή της μέγιστης τάσης von Mises κατά την διάρκεια των επαναλήψεων (Σχήμα 3.5). Ιδανικά θα περίμενε κανείς ότι η τάσεις συνεχώς θα μειώνονταν μέχρι το σημείο σύγκλισης όπου η μέγιστη τάση θα λάμβανε την τιμή της μέγιστης επιτρεπόμενης τάσης.



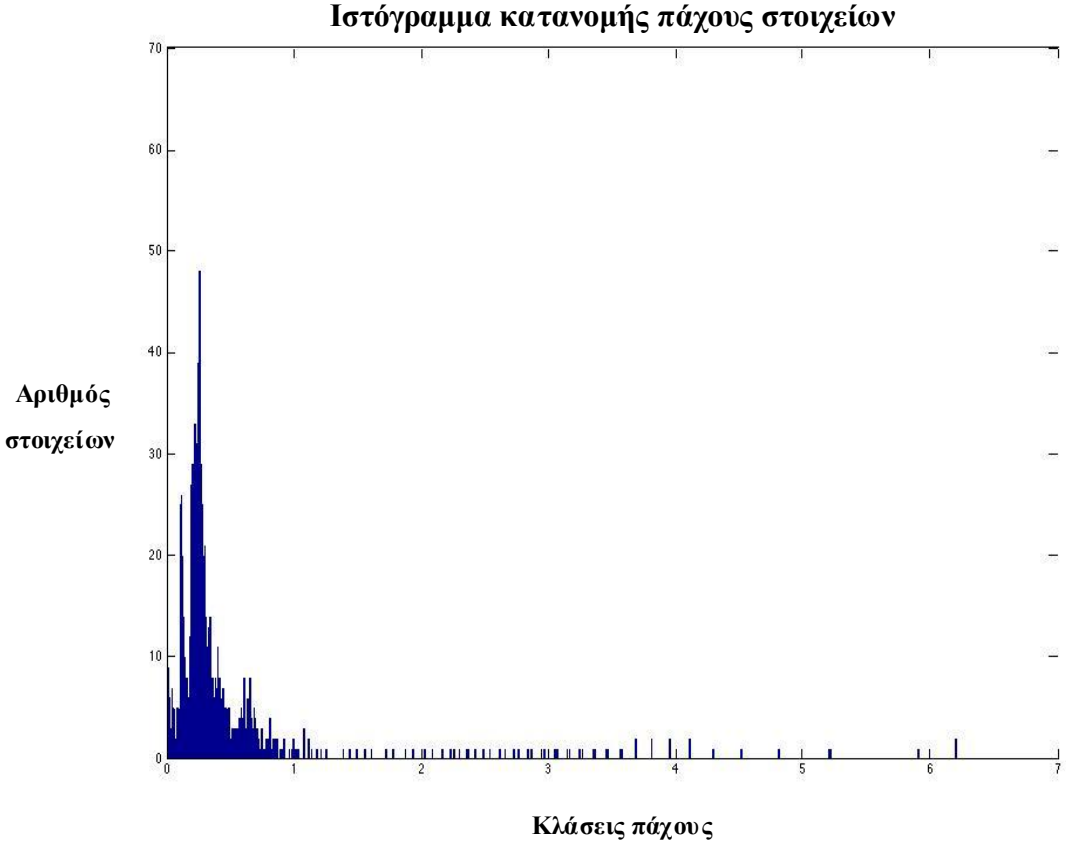
Σχήμα 3.5: Διάγραμμα πορείας μέγιστης τάσης von Mises

Ωστόσο παρατηρούμε ότι η τάση μετα την 5 επανάληψη αυξάνεται(!) και μετά από 2 επαναλήψεις ξαναμειώνεται μέχρι να συγκλίνει στην μέγιστη επιτρεπόμενη τάση. Αυτή η απρόσμενη αύξηση οφείλεται στο γεγονός ότι η αντικειμενική συνάρτηση έχει φτάσει κοντά στο ελάχιστο και το τελικό σχήμα έχει σχεδόν σχηματιστεί. Έτσι λοιπόν μια αλλαγή σ αυτό το στάδιο προξενεί αύξηση της τάσης και απομάκρυνση από την τελική σύγκλιση.

Παρ όλα αυτά ο αλγόριθμος καταλήγει σε ένα σχεδιασμό της κατασκευής τέτοιο ώστε όλα τα στοιχεία να έχουν την ίδια τάση. Ειδικότερα οι τάσεις στην κατασκευή έχουν μέση τιμή στα 1,549MPa και τυπική απόκλιση μόλις στα 0,032MPa. Έτσι λοιπόν είναι φανερό ότι καταλήγουμε σε μια κατασκευή πλήρους έντασης. Να σημειωθεί ότι αν είχαμε μικρότερη ανοχή (tolerance) στο κριτήριο σύγκλισης τότε θα

είχαμε μικρότερη τυπική απόκλιση και θα βρισκόμασταν σε μια κατασκευή πιο κοντά στο βέλτιστο σχήμα ωστόσο κάτι τέτοιο θα είχε μεγάλο υπολογιστικό κόστος λόγω της ραγδαίας αύξησης των απαιτούμενων επαναλήψεων.

Ένα άλλο χαρακτηριστικό του βελτιστοποιημένου σχήματος είναι η ανομοιογένεια του πάχους ανά πεπερασμένο στοιχείο. Ειδικότερα στο παρακάτω γράφημα (Σχήμα 3.6) παρατηρούμε απο το σύνολο των 1250 πεπερασμένων στοιχείων που χρησιμοποιήθηκαν για την ανάλυση της κατασκευής, ο μέγιστος αριθμός των στοιχείων που έχουν το ίδιο πάχος στο βελτιστοποιημένο σχήμα αγγίζει μόλις τα 50. Συγκεκριμένα, τα στοιχεία που έχουν πάχος 0.4 mm ειναι 50.



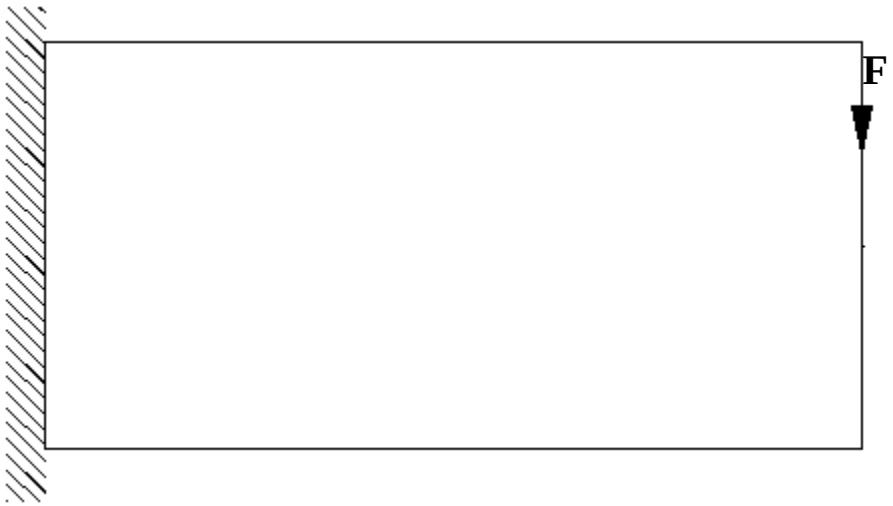
Σχήμα 3.6: Ιστόγραμμα κατανομής πάχους στοιχείων με 1000 κλάσεις

Παρόλα αυτά μπορούμε να πούμε ότι υπάρχει μια αυξημένη χρήση στοιχείων που έχουν πάχους (0,1] .

Σχήμα 3.7: Ιστόγραμμα κατανομής πάχους στοιχείων με 7 κλάσεις

Ειδικότερα, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.7 από τα 1250 στοιχεία που χρησιμοποιήθηκαν τα 1200 έχουν πάχος από (0,1], δηλαδή το 96% της κατασκευής αποτελείται από στοιχεία πάχους αυτής της κλάσης. Βέβαια, σε αυτή τη κλάση συμμετέχουν και τα στοιχεία με το ελάχιστο επιτρεπόμενο πάχος

3.2.2 Πρόβολος (2)

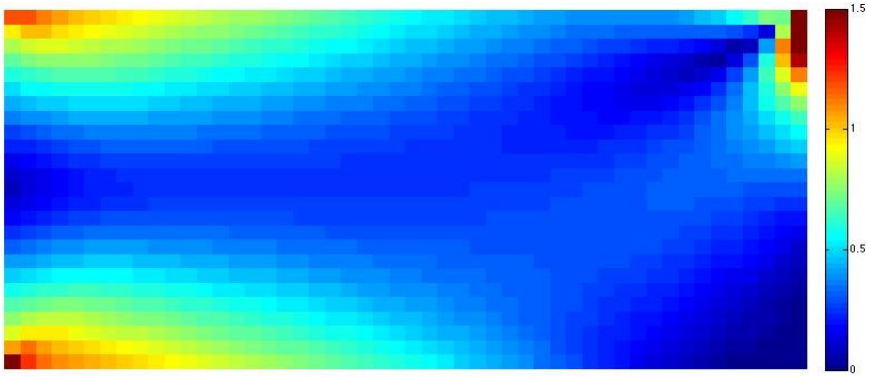


Σχήμα 3.8: Σχηματική απεικόνιση προβόλου(2)

Σε αυτό το παράδειγμα έγινε εφαρμογή του κώδικα σε πακτωμένη ορθογωνική πλάκα του σχήματος 3.8. Χρησιμοποιήθηκαν τετρακομβικά πεπερασμένα στοιχεία με

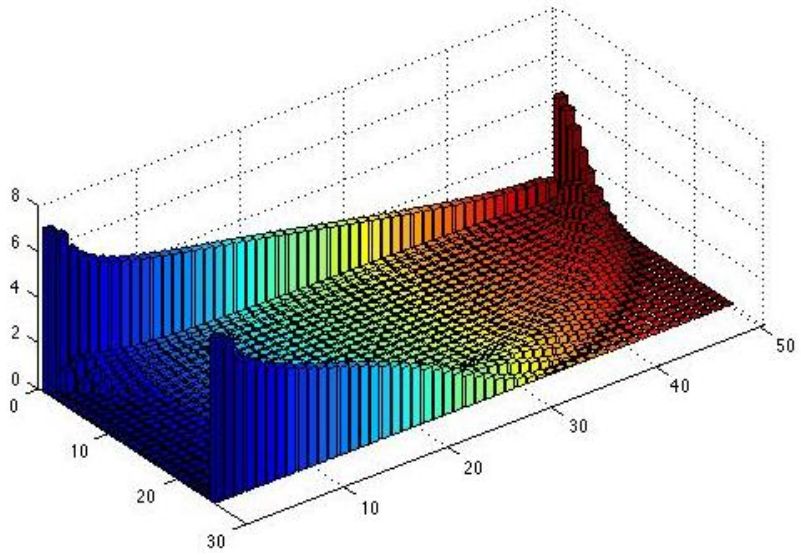
πλέγμα 50X25,δηλαδή 50 πεπερασμένα κατά τον X άξονα και 25 κατά τον Y. Οι διαστάσεις μήκους, πλάτους, πάχους που ορίστηκαν είναι Lx=100mm Ly=50mm t=2mm. Ο όγκος της πλάκας είναι λοιπόν στα $V=10000mm^3$. Η ανοχή για την σύγκλιση του κώδικα τέθηκε στα 0,2MPa.

Ομοίως με το προηγούμενο παράδειγμα αρχικά έγινε υπολογισμός με την μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων, των τάσεων της αρχικής πλάκας προς βελτιστοποίηση όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.9. Οι τάσεις υπολογίζονται και σ' αυτήν την περίπτωση στο κέντρο βάρους του κάθε στοιχείου.



Σχήμα 3.9: Κατανομή τάσης συνεχούς προβόλου(2)

Η μέγιστη τάση σε αυτό το παράδειγμα είναι 1.35MPa. Αύτη η τάση θεωρείται η μέγιστη επιτρεπόμενη τάση, και εισάγεται ως σ_{max} στον αλγόριθμο FSD. Έχοντας λοιπόν όλα τα παραπάνω δεδομένα έγινε εφαρμογή του κώδικα βελτιστοποίησης δημιουργώντας το παρακάτω σχήμα (Σχήμα 3.10).



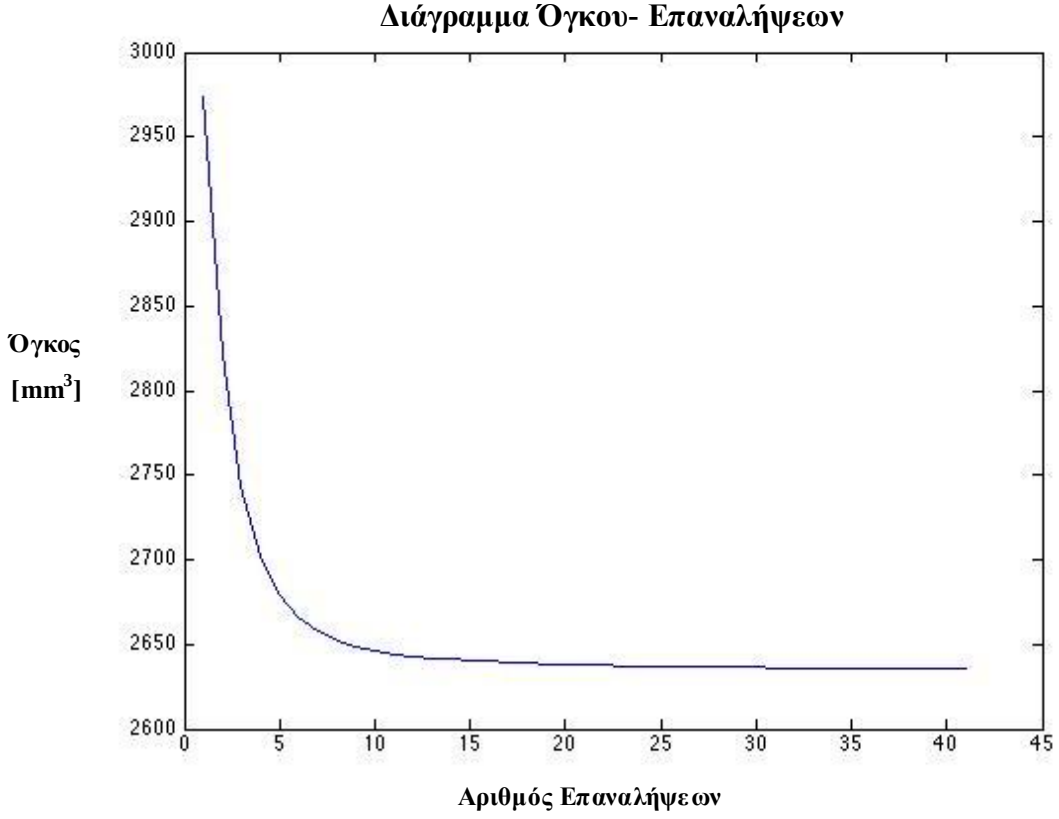
Σχήμα 3.10: 3D απεικόνιση της βελτιστοποιημένης κατασκευής

Όπως είναι εμφανές ότι ο αλγόριθμος δημιουργεί δυο δοκίδες που συγκλίνουν στο σημείο φόρτισης. Η δοκίδα που είναι μακριά από την φόρτιση είναι τοξοειδής. Είναι εμφανές ότι τα στοιχεία που βρίσκονται κοντά στις στηρίξεις και σ αυτήν την περίπτωση παρουσιάζουν μεγάλα πάχη όπως επίσης και τα στοιχεία πάνω στα οποία ασκείται η φόρτιση.

Να σημειωθεί ο κώδικας δημιουργεί περιοχές στα οποία το πάχος είναι μεγαλύτερο από το αρχικό πάχος (2mm) όπως ακριβώς συνέβαινε και στο προηγούμενο παράδειγμα.

Το παρακάτω διάγραμμα (Σχήμα 3.11) παρουσιάζει την σύγκλιση της μεθόδου. Συγκεκριμένα, ο αλγόριθμος συγκλίνει στα $V=2653mm^3$. Έτσι λοιπόν έχουμε βελτιστοποίηση του σχήματος ώστε η κατασκευή να αντέχει το ίδιο με την συνεχή πλάκα χρησιμοποιώντας μόνο το 26,53% του όγκου.

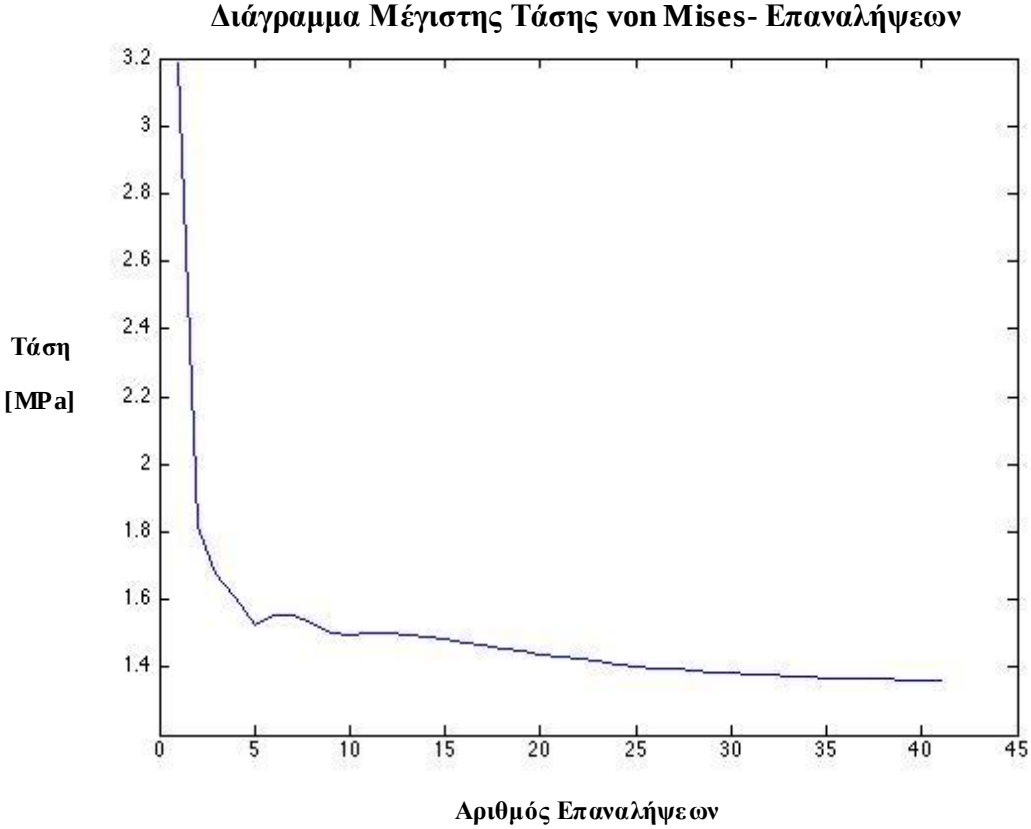
Αν και η τελική σύγκλιση επήλθε στις 41 επαναλήψεις η αντικειμενική συνάρτηση είχε σχεδόν συγκλίνει μόλις στις 5 επαναλήψεις.



Σχήμα 3.11: Διάγραμμα πορείας σύγκλισης της αντικειμενικής συνάρτησης

Έτσι λοιπόν, συμπεραίνουμε ότι λόγω αυτής της μεγάλης ομαλότητας στην σύγκλιση ο αλγόριθμος είναι ιδιαιτέρως σταθερός και σ αυτό το παράδειγμα. Και σ αυτή την

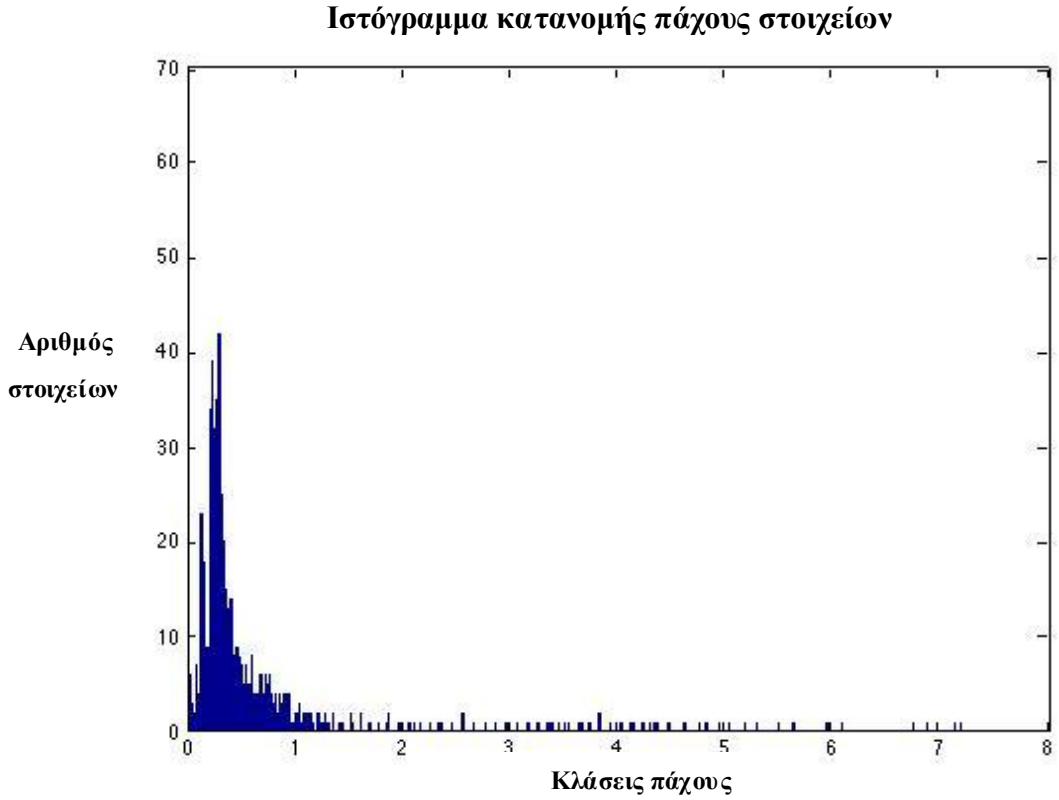
περίπτωση παρατηρείται το ίδιο φαινόμενο με την μεταβολή της μέγιστης τάσης von Mises κατά την διάρκεια των επαναλήψεων (Σχήμα 3.12).



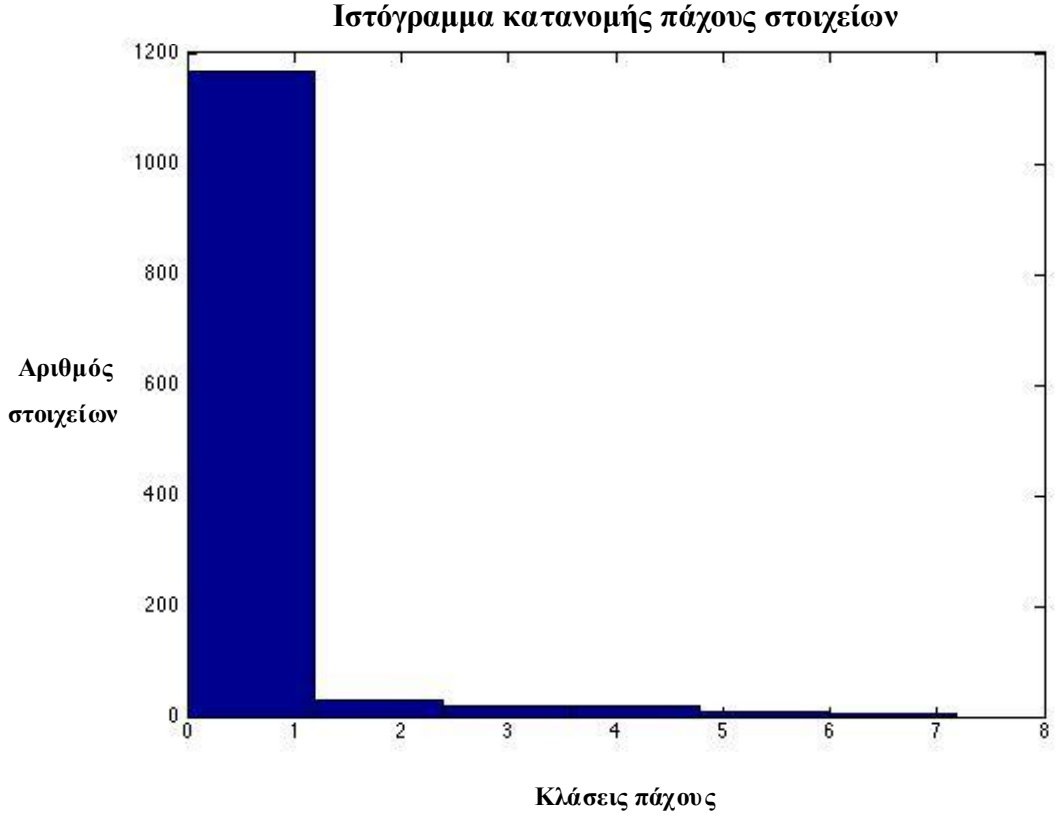
Σχήμα 3.12: Διάγραμμα πορείας μέγιστης τάσης von Mises

Ειδικότερα, παρατηρούμε ότι η τάση μετα την 5 επανάληψη αυξάνεται και μετά από 2 επαναλήψεις ξαναμειώνεται μέχρι να συγκλίνει στην μέγιστη επιτρεπόμενη τάση.
Ο αλγόριθμος καταλήγει σε ένα σχεδιασμό της κατασκευής τέτοιο ώστε όλα τα στοιχεία να έχουν την ίδια τάση. Ειδικότερα οι τάσεις στην κατασκευή έχουν μέση τιμή στα 1,341MPa και τυπική απόκλιση μόλις στα 0,030MPa. Έτσι λοιπόν είναι φανερό ότι καταλήγουμε σε μια κατασκευή πλήρους έντασης.

Εκτός αυτού και σ αυτό το παράδειγμα υπάρχει ανομοιογένεια του πάχους ανά πεπερασμένο στοιχείο. Ειδικότερα στο παρακάτω γράφημα (Σχήμα 3.13) παρατηρούμε απο το σύνολο των 1250 πεπερασμένων στοιχείων που χρησιμοποιήθηκαν για την ανάλυση της κατασκευής, ο μέγιστος αριθμός των στοιχείων που έχουν το ίδιο πάχος στο βελτιστοποιημένο σχήμα αγγίζει μόλις τα 42. Συγκεκριμένα, τα στοιχεία που έχουν πάχος 0.4 mm ειναι 42.



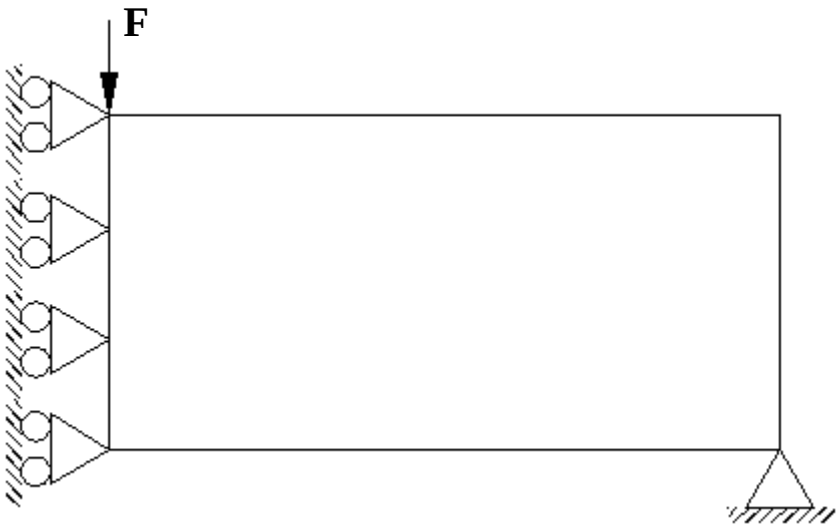
Σχήμα 3.13: Ιστόγραμμα κατανομής πάχους στοιχείων με 1000 κλάσεις



Σχήμα 3.14: Ιστόγραμμα κατανομής πάχους στοιχείων με 7 κλάσεις

Παρόλα αυτά παρατηρείται ότι υπάρχει μια αυξημένη χρήση στοιχείων που έχουν πάχους (0,1] (Σχήμα 3.14). Ειδικότερα, από τα 1250 στοιχεία που χρησιμοποιήθηκαν τα 1900 έχουν πάχος από (0,1], δηλαδή το 94,4% της κατασκευής αποτελείται από στοιχεία πάχους αυτής της κλάσης.

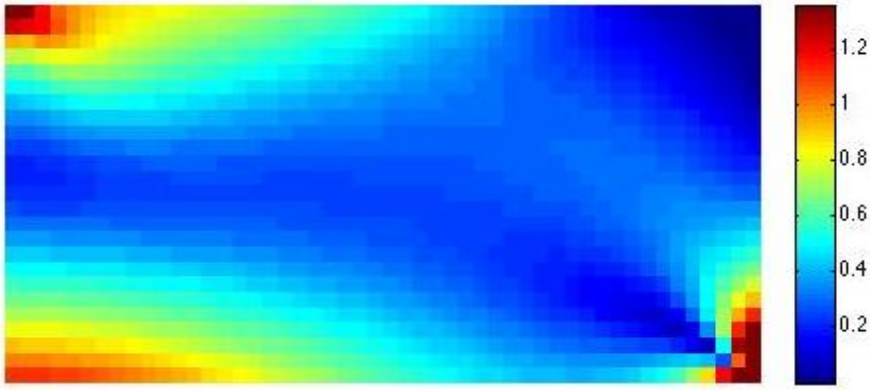
3.2.3 Αμφιέριστη πλάκα



Σχήμα 3.15: Σχηματική απεικόνιση αμφιέριστης πλάκας

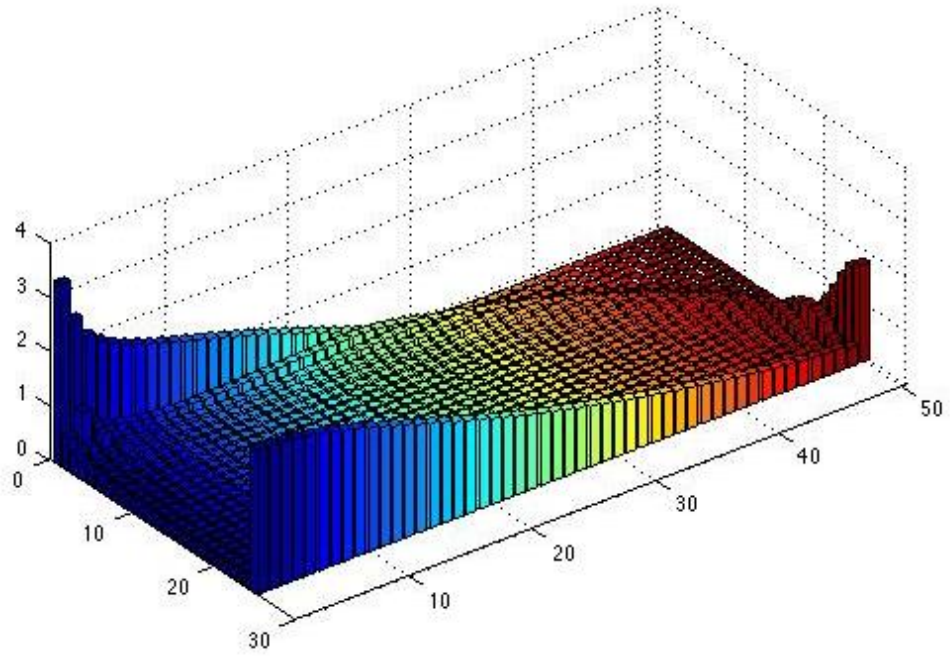
Σ αυτό το παράδειγμα έγινε εφαρμογή του κώδικα σε αμφιέριστη ορθογωνική πλάκα του παραπάνω σχήματος (Σχήμα 3.15). Το πρόβλημα της αμφιέριστης πλάκας είναι συμμετρικό ως προς τον y άξονα συνεπώς μπορούμε να λύσουμε το μισό πρόβλημα τοποθετώντας στην κατά πλάτος πλευρά της πλάκας κυλίσεις. Κάνοντας αυτόν τον μετασχηματισμό ελαττώνουμε το υπολογιστικό κόστος της ανάλυσης αφού εφαρμόζουμε την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων ουσιαστικά στο μισό πρόβλημα. Για την ανάλυση χρησιμοποιήθηκαν τετρακομβικά πεπερασμένα στοιχεία με πλέγμα 50X25,δηλαδή 50 πεπερασμένα κατά τον X άξονα και 25 κατά τον Y. Οι διαστάσεις μήκους, πλάτους, πάχους της μισής πλάκας που ορίστηκαν είναι Lx=100mm Ly=50mm t=2mm. Ο όγκος λοιπόν της πλάκας είναι V=10000 mm^3. Η ανοχή για την σύγκλιση του κώδικα τέθηκε στα 0,2MPa.

Ομοίως με τα προηγούμενα παραδείγματα έγινε υπολογισμός των τάσεων της αρχικής πλάκας (Σχήμα 3.16).



Σχήμα 3.16: Κατανομή τάσης συνεχούς αμφιέριστης πλάκας

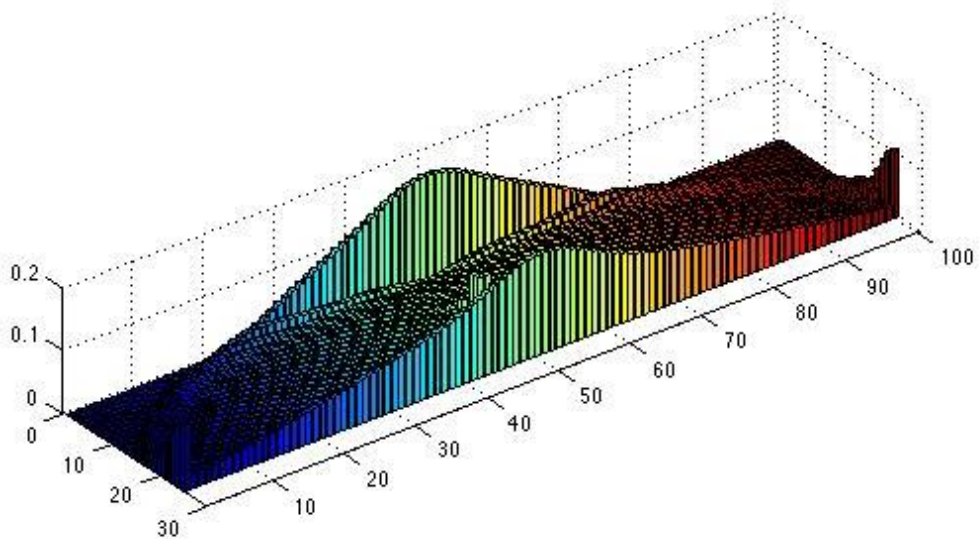
Η μέγιστη τάση σ' αυτό το παράδειγμα είναι 3,267MPa. Αύτη η τάση θεωρείται η μέγιστη επιτρεπόμενη τάση, και εισάγεται ως σ_{max} του αλγόριθμου που αναπτύχθηκε παραπάνω. Έχοντας λοιπόν όλα τα παραπάνω δεδομένα έγινε εφαρμογή του κώδικα βελτιστοποίησης δημιουργώντας το παρακάτω σχήμα (Σχήμα 3.17).



Σχήμα 3.17: 3D απεικόνιση βελτιστοποιημένης κατασκευής μισής αμφιέριστης πλάκας

Όπως είναι εμφανές ο αλγόριθμος δημιουργεί δυο δοκίδες που συγκλίνουν στο σημείο στήριξης. Και σ' αυτήν την περίπτωση δημιουργούνται μια ευθύγραμμη και μια τοξοειδής δοκίδα. Είναι εμφανές ότι τα στοιχεία που βρίσκονται κοντά στις στηρίξεις και σ' αυτήν την περίπτωση παρουσιάζουν μεγάλα πάχη όπως επίσης και τα στοιχεία πάνω στα οποία ασκείται η φόρτιση.

Η εφαρμογή του αλγόριθμου στην μισή δοκό έγινε για λόγους υπολογιστικού κόστους καθώς το πρόβλημα είναι σύμμορφο με την ολόκληρη δοκό. Είναι προφανές ότι υπάρχει σύγκλιση και στην ολόκληρη αμφιέριστη δοκό, δημιουργώντας της κατασκευή του παρακάτω σχήματος (Σχήμα 3.18).

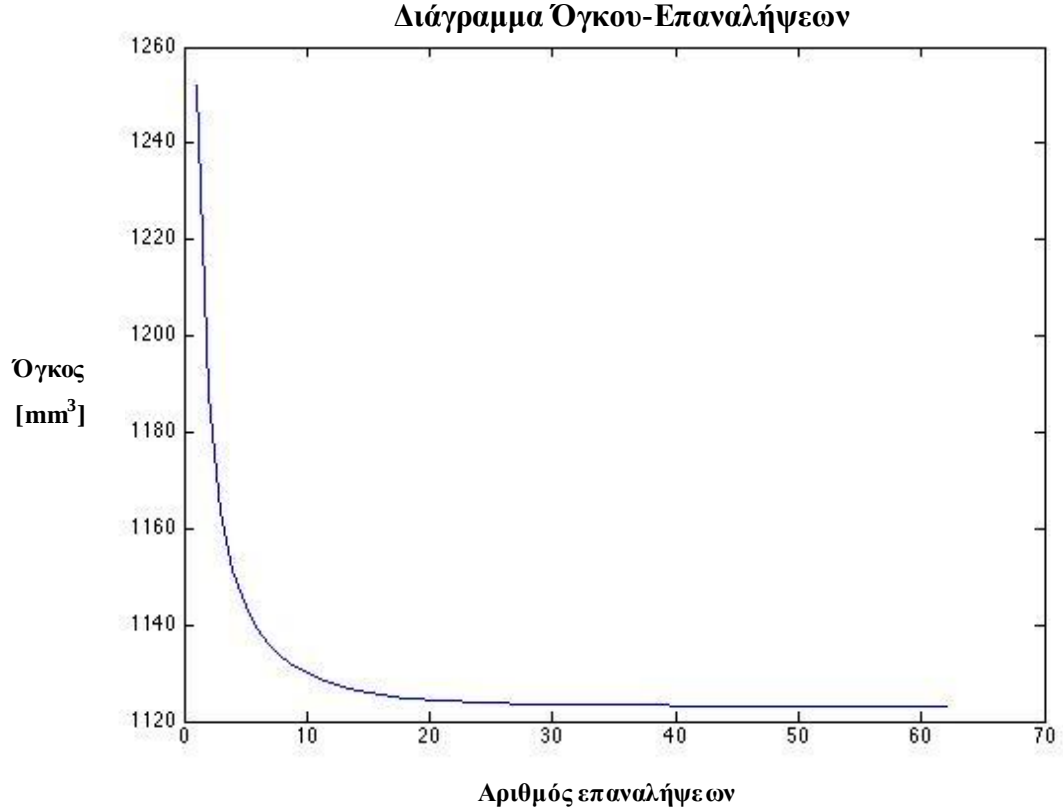


Σχήμα 3.18: 3D απεικόνιση βελτιστοποιημένης κατασκευής ολόκληρης αμφιέριστης πλάκας

Να σημειωθεί ο κώδικας δημιουργεί περιοχές στα οποία το πάχος είναι μεγαλύτερο από το αρχικό πάχος (2mm) όπως ακριβώς συνέβαινε και στα προηγούμενα παράδειγμα.

Το παρακάτω διάγραμμα (Σχήμα 3.19) παρουσιάζει την σύγκλιση της μεθόδου. Συγκεκριμένα, ο αλγόριθμος συγκλίνει στα V=1230 mm^3. Έτσι λοιπόν έχουμε βελτιστοποίηση του σχήματος ώστε η κατασκευή να αντέχει το ίδιο με την συνεχή πλάκα χρησιμοποιώντας μόνο το 12,3% του όγκου.

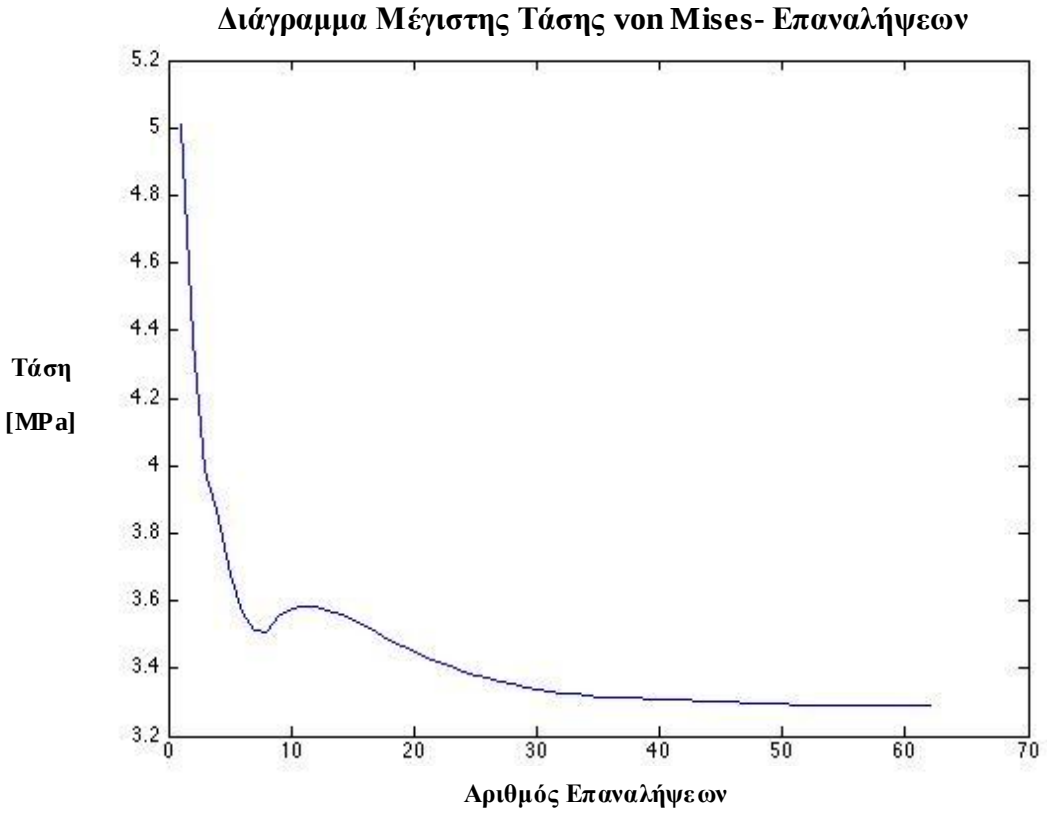
Αν και η τελική σύγκλιση επήλθε στις 61 επαναλήψεις η αντικειμενική συνάρτηση είχε σχεδόν συγκλίνει μόλις στις 10 επαναλήψεις.



Σχήμα 3.19: Διάγραμμα πορείας σύγκλισης της αντικειμενικής συνάρτησης

Έτσι λοιπόν, συμπεραίνουμε ότι λόγω αυτής της μεγάλης ομαλότητας στην σύγκλιση ο αλγόριθμος είναι ιδιαιτέρως σταθερός και σ' αυτό το παράδειγμα.

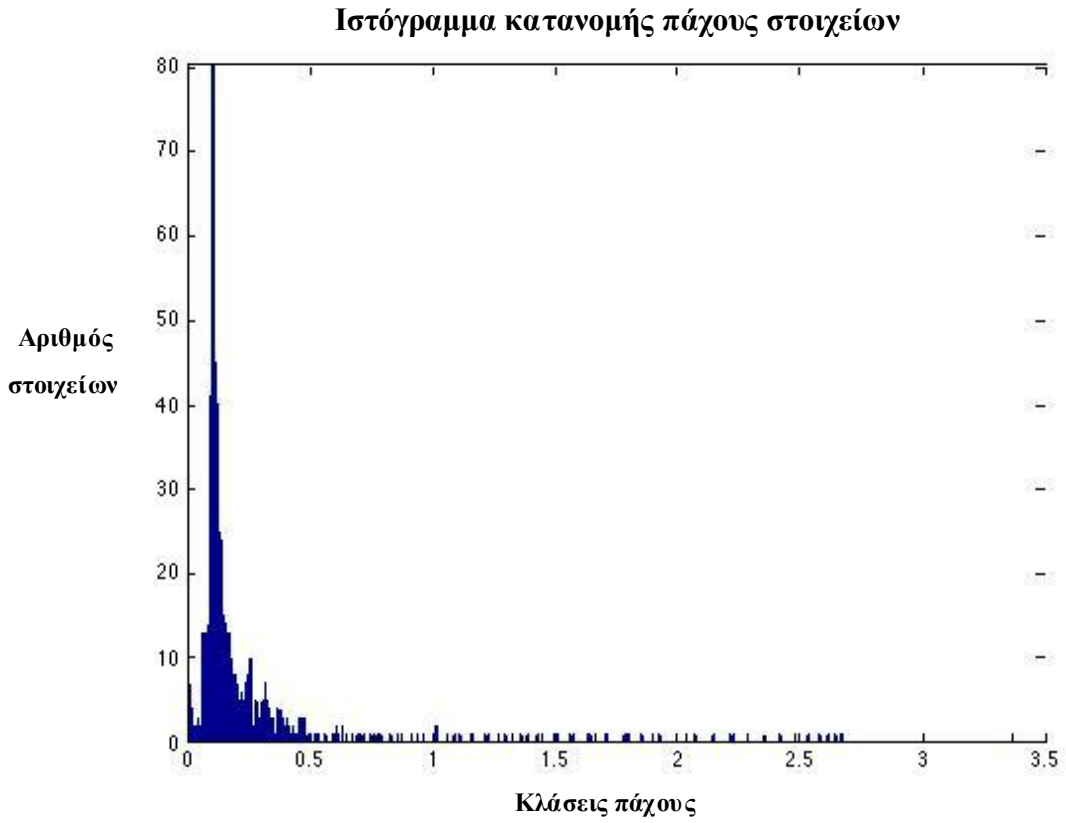
Και σ' αυτή την περίπτωση παρατηρείται το ίδιο φαινόμενο με την μεταβολή της μέγιστης τάσης von Mises κατά την διάρκεια των επαναλήψεων (Σχήμα 3.20).



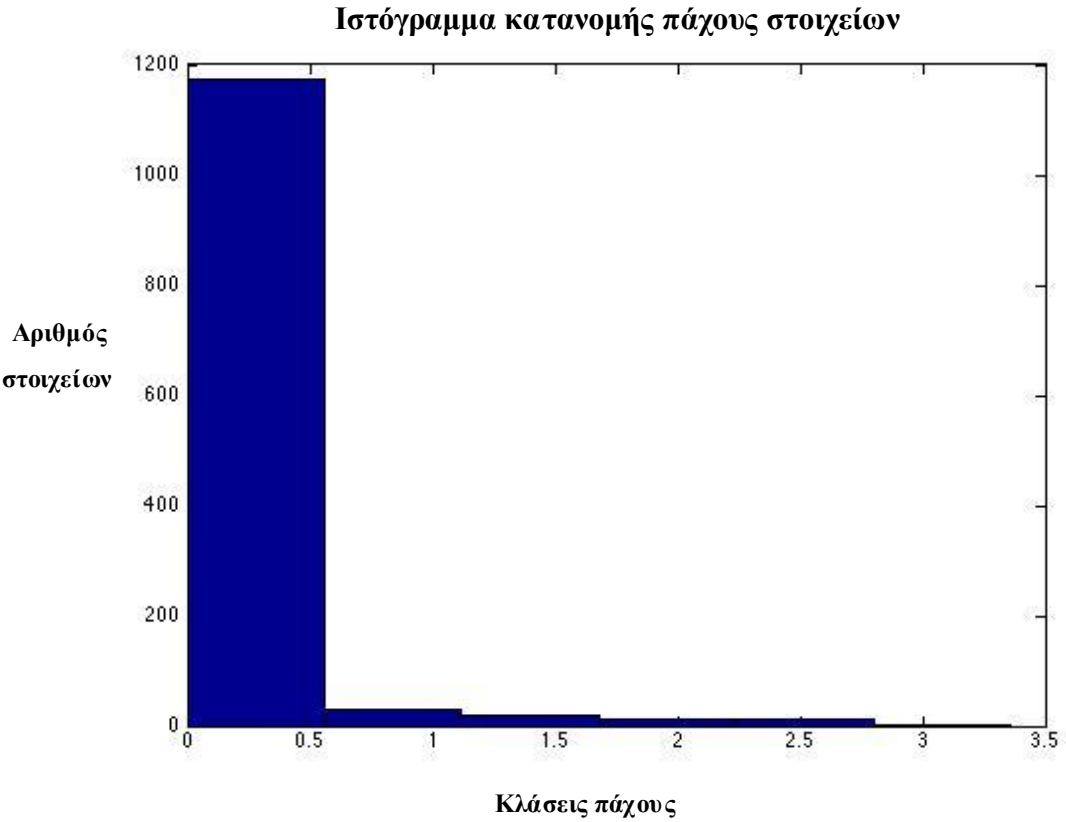
Σχήμα 3.20: Διάγραμμα πορείας μέγιστης τάσης von Mises

Ειδικότερα, παρατηρούμε ότι η τάση μετα την 10 επανάληψη αυξάνεται και μετά από 4 επαναλήψεις ξαναμειώνεται μέχρι να συγκλίνει στην μέγιστη επιτρεπόμενη τάση.
Ο αλγόριθμος καταλήγει σε ένα σχεδιασμό της κατασκευής τέτοιο ώστε όλα τα στοιχεία να έχουν την ίδια τάση. Ειδικότερα οι τάσεις στην κατασκευή έχουν μέση τιμή στα 3,267 MPa και τυπική απόκλιση μόλις στα 0,035MPa. Έτσι λοιπόν είναι φανερό ότι καταλήγουμε σε μια κατασκευή πλήρους έντασης.

Εκτός αυτού και σ' αυτό το παράδειγμα υπάρχει ανομοιογένεια του πάχους ανά πεπερασμένο στοιχείο. Ειδικότερα στο παρακάτω γράφημα (Σχήμα 3.21) παρατηρούμε απο το σύνολο των 1250 πεπερασμένων στοιχείων που χρησιμοποιήθηκαν για την ανάλυση της κατασκευής, ο μέγιστος αριθμός των στοιχείων που έχουν το ίδιο πάχος στο βελτιστοποιημένο σχήμα αγγίζει μόλις τα 80. Συγκεκριμένα, τα στοιχεία που έχουν πάχος 0.2 mm ειναι 80.



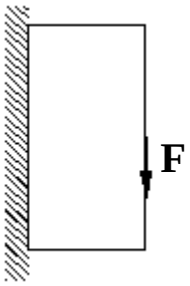
Σχήμα 3.21: Ιστόγραμμα κατανομής πάχους στοιχείων με 1000 κλάσεις



Σχήμα 3.22: Ιστόγραμμα κατανομής πάχους στοιχείων με 7 κλάσεις

Παρόλα αυτά μπορούμε να πούμε ότι υπάρχει μια αυξημένη χρήση στοιχείων που έχουν πάχους (0,1] (Σχήμα 3.22). Ειδικότερα, από τα 1250 στοιχεία που χρησιμοποιήθηκαν τα 1900 έχουν πάχος από (0,1], δηλαδή το 94,4% της κατασκευής αποτελείται από στοιχεία πάχους αυτής της κλάσης.

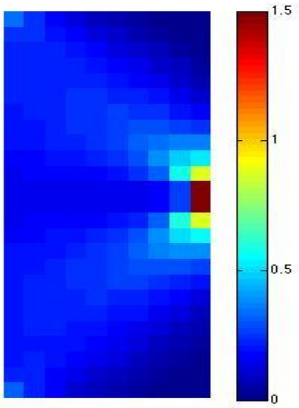
3.2.4 Κοντός Πρόβολος



Σχήμα 3.23:Σχηματική απεικόνιση κοντού προβόλου

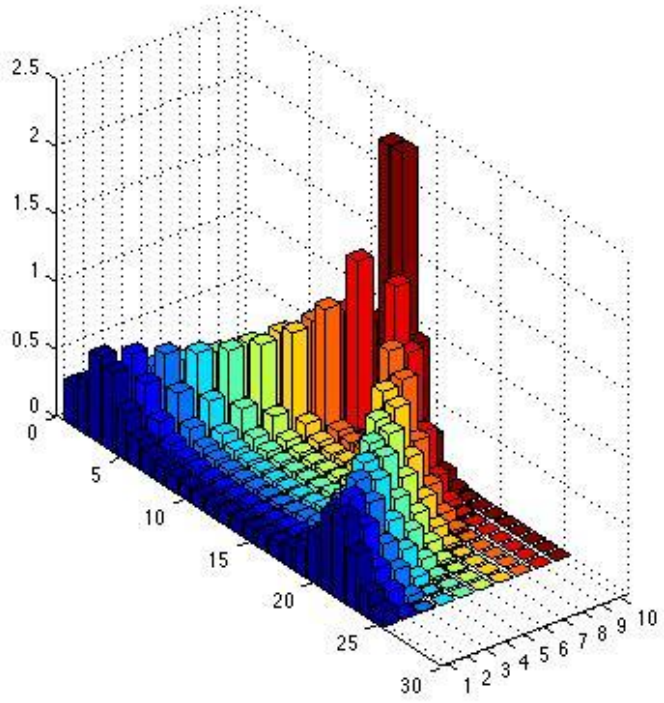
Σ αυτό το παράδειγμα έγινε εφαρμογή του κώδικα σε ορθογωνικό κοντό πρόβολο του παραπάνω σχήματος (Σχήμα 3.23). Το παράδειγμα αυτό πραγματοποιήθηκε ώστε να εξακριβώσουμε την σταθερότητα του κώδικα σε άλλου είδους σχήματα. Για την ανάλυση χρησιμοποιήθηκαν τετρακομβικά πεπερασμένα στοιχεία με πλέγμα 10X25,δηλαδή 10 πεπερασμένα κατά τον X άξονα και 25 κατά τον Y. Οι διαστάσεις μήκους, πλάτους, πάχους της μισής πλάκας που ορίστηκαν είναι Lx=20mm Ly=50mm t=2mm, αντίστοιχα. Ο αρχικός όγκος της πλάκας υπολογίζεται στα V=2000 mm^3 . Η ανοχή για την σύγκλιση του κώδικα τέθηκε στα 0,2MPa.

Αρχικά έγινε υπολογισμός των τάσεων της προς βελτιστοποίηση κατασκευής όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.24.



Σχήμα 3.24: Κατανομή τάσης συνεχούς κοντού προβόλου

Η μέγιστη τάση σ αυτό το παράδειγμα είναι 1,56MPa. Αύτη η τάση είναι πλαστή καθώς είναι η τάση του στοιχείου στο σημείο εφαρμογής του φορτίου. Ωστόσο αυτή τάση θεωρήθηκε η μέγιστη επιτρεπόμενη τάση, και εισάγεται ως σ_{max} του αλγόριθμου που αναπτύχθηκε παραπάνω. Έχοντας λοιπόν όλα τα παραπάνω δεδομένα έγινε εφαρμογή του κώδικα βελτιστοποίησης δημιουργώντας το παρακάτω σχήμα (Σχήμα 3.25).



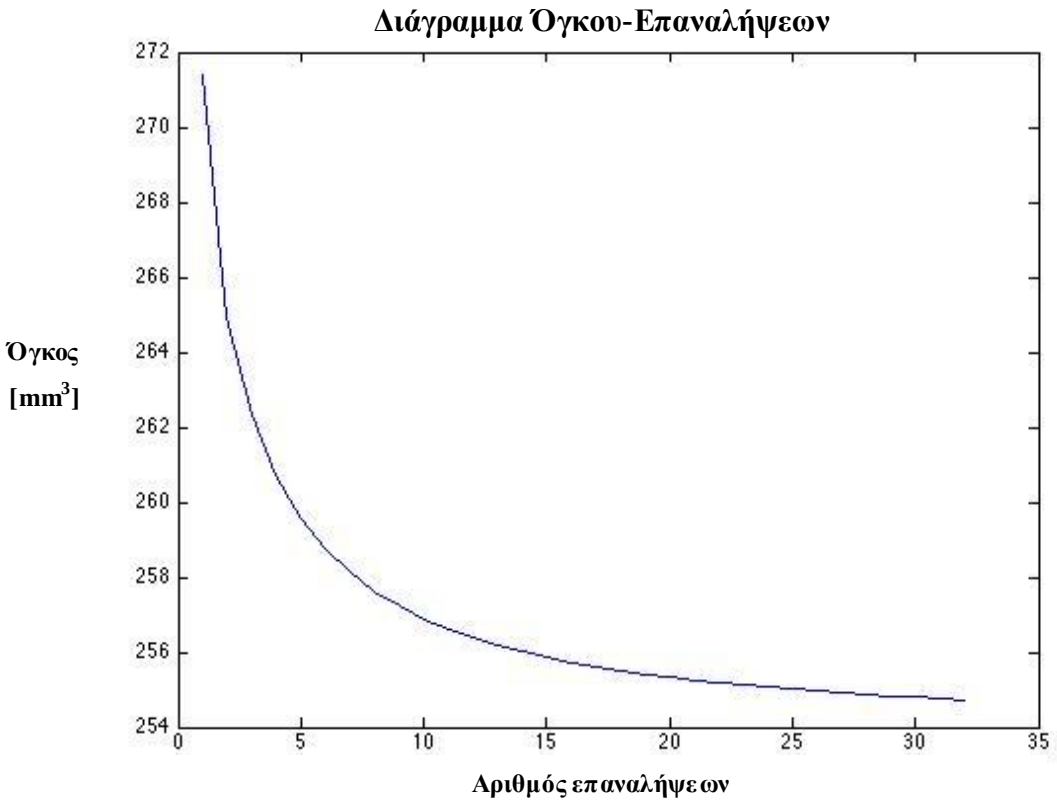
Σχήμα 3.25: 3D απεικόνιση βελτιστοποιημένης κατασκευής

Όπως είναι εμφανές ο αλγόριθμος δημιουργεί δυο δοκίδες που συγκλίνουν στο σημείο φόρτισης. Είναι εμφανές ότι τα στοιχεία που βρίσκονται κοντά στην φόρτιση παρουσιάζουν μεγάλα πάχη.

Να σημειωθεί ο κώδικας δημιουργεί περιοχές στα οποία το πάχος είναι μεγαλύτερο από το αρχικό πάχος (2mm) όπως ακριβώς συνέβαινε και στα προηγούμενα παραδείγματα.

Το παρακάτω διάγραμμα (Σχήμα 3.26) παρουσιάζει την σύγκλιση της μεθόδου. Συγκεκριμένα, ο αλγόριθμος συγκλίνει στα V=254 mm^3. Έτσι λοιπόν έχουμε βελτιστοποίηση του σχήματος ώστε η κατασκευή να αντέχει το ίδιο με την συνεχή πλάκα χρησιμοποιώντας μόνο το 12,7% του όγκου.

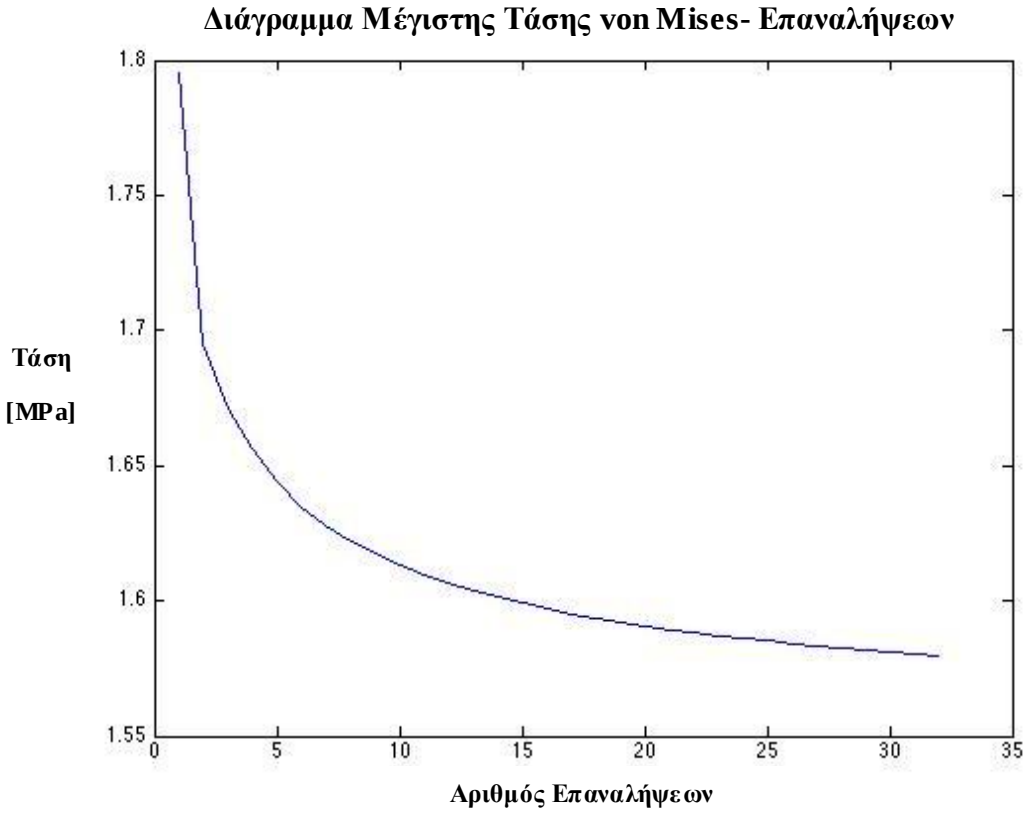
Η τελική σύγκλιση επήλθε στις 33 επαναλήψεις. Χαρακτηριστικό είναι ότι η αντικειμενική συνάρτηση σ αυτήν την περίπτωση μειώνεται με χαμηλότερους ρυθμούς σε σχέση με τα προηγούμενα παραδείγματα.



Σχήμα 3.26: Διάγραμμα πορείας σύγκλισης της αντικειμενικής συνάρτησης

Έτσι λοιπόν συμπεραίνουμε ότι λόγω αυτής της μεγάλης ομαλότητας στην σύγκλιση ο αλγόριθμος είναι ιδιαιτέρως σταθερός και σ' αυτό το παράδειγμα.

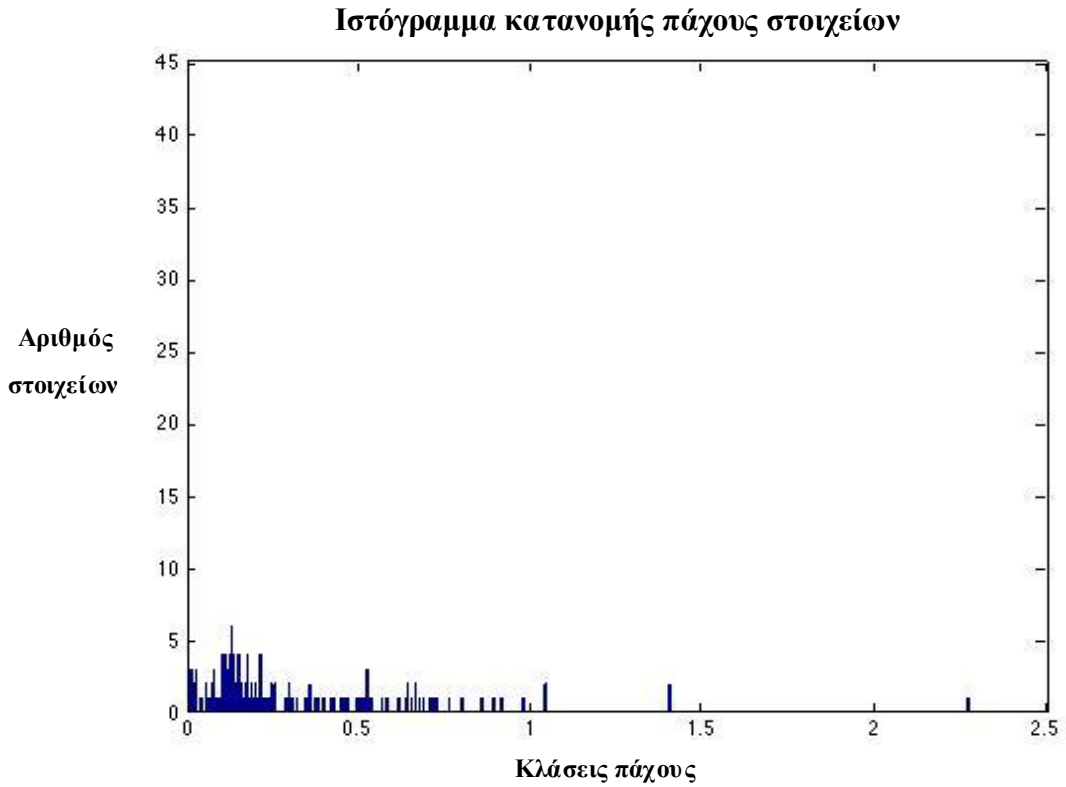
Παρακάτω παρουσιάζεται η πορεία της μέγιστης τάσης κατά την διάρκεια των επαναλήψεων (Σχήμα 3.27). Εν αντιθέσει με τα προηγούμενα παραδείγματα η μεταβολή της μέγιστης τάσης είναι ιδιαιτέρως ομαλή.



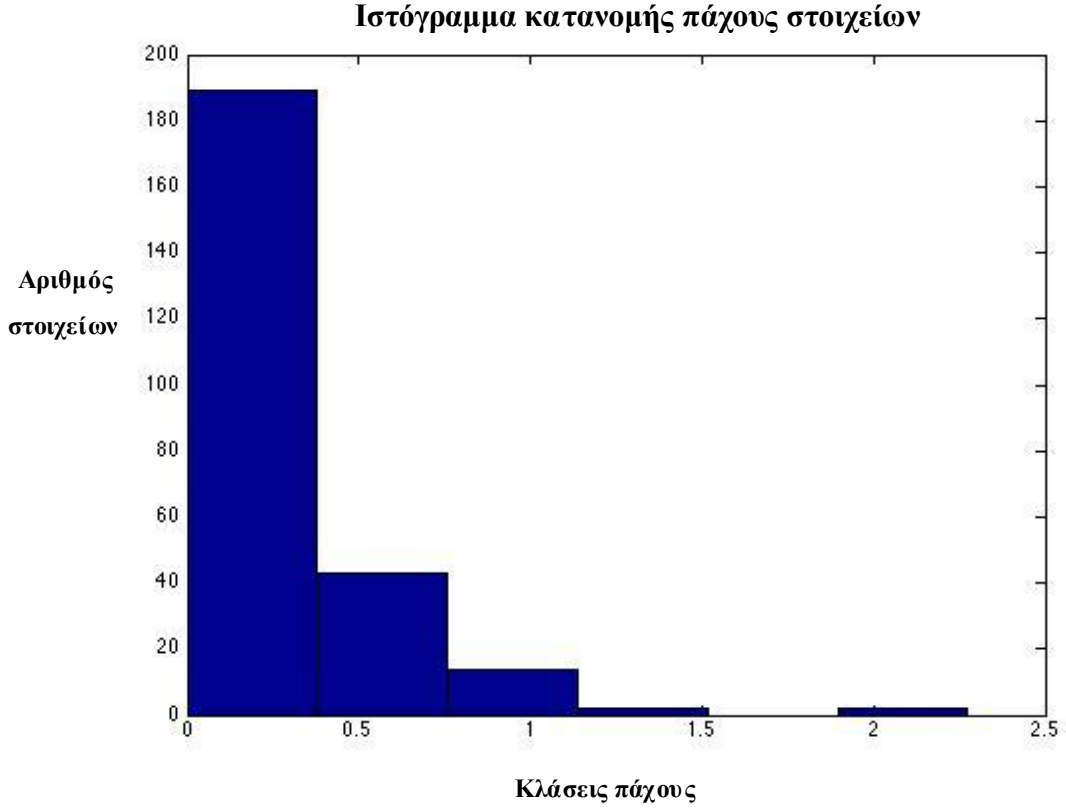
Σχήμα 3.27: Διάγραμμα πορείας μέγιστης τάσης von Mises

Ο αλγόριθμος καταλήγει σε ένα σχεδιασμό της κατασκευής τέτοιο ώστε όλα τα στοιχεία να έχουν την ίδια τάση. Ειδικότερα οι τάσεις στην κατασκευή έχουν μέση τιμή στα 1,525 MPa και τυπική απόκλιση μόλις στα 0,051MPa. Έτσι λοιπόν είναι φανερό ότι καταλήγουμε σε μια κατασκευή πλήρους έντασης.

Εκτός αυτού και σ' αυτό το παράδειγμα υπάρχει μεγάλη ανομοιογένεια του πάχους ανά πεπερασμένο στοιχείο. Ειδικότερα στο παρακάτω γράφημα (Σχήμα 3.28) παρατηρούμε απο το σύνολο των 250 πεπερασμένων στοιχείων που χρησιμοποιήθηκαν για την ανάλυση της κατασκευής, ο μέγιστος αριθμός των στοιχείων που έχουν το ίδιο πάχος στο βελτιστοποιημένο σχήμα αγγίζει μόλις τα 7. Συγκεκριμένα, τα στοιχεία που έχουν πάχος 0.2 mm ειναι 7.



Σχήμα 3.28: Ιστόγραμμα κατανομής πάχους στοιχείων με 1000 κλάσεις



Σχήμα 3.29: Ιστόγραμμα κατανομής παχών στοιχείων με 7 κλάσεις

Παρόλα αυτά μπορούμε να πούμε ότι υπάρχει μια αυξημένη χρήση στοιχείων που έχουν πάχους (0,0,5] (Σχήμα 3.29). Ειδικότερα, από τα 250 στοιχεία που χρησιμοποιήθηκαν τα 190 έχουν πάχος από (0,1], δηλαδή το 76% της κατασκευής αποτελείται από στοιχεία πάχους αυτής της κλάσης.

4

Βελτιστοποίηση δικτυωτών κατασκευών υπό περιορισμό τάσης

Η μέθοδος της πλήρους έντασης μπορεί να εφαρμοστεί και σε δικτυωτές κατασκευές. Μάλιστα, από ιστορικής άποψης η βελτιστοποίηση δικτυωμάτων είναι η πρώτη βελτιστοποίηση που διενεργήθηκε ποτέ. Στην παράγραφο αυτή θα γίνει εφαρμογή του αλγορίθμου σε σκελετικές κατασκευές, δηλαδή σε δικτυωτές κατασκευές που ποιοτικά ομοιάζουν με συνεχές κατασκευές.

Μια κατασκευή αποτελεί το συναρμολόγημα πολλών επί μέρους δομικών μονάδων. Στην απλούστερη περίπτωση, μια κατασκευή προέρχεται από την επανάληψη μιας βασικής μονάδας. Στην περίπτωση ενός διδιάστατου σώματος συνεχούς μέσου, ένα τετραπλευρικό στοιχείο είναι δυνατόν να θεωρηθεί ως μια τέτοια μονάδα, η οποία ονομάζεται Basic Continuum Unit (BCU). Εισάγοντας ανισοτροπία υλικού, η μονάδα BCU είναι δυνατόν να εμφανίζει διαφορετική συμπεριφορά κατά μήκος διαφορετικών διευθύνσεων. Ένας άλλος τρόπος εισαγωγής ανισοτροπίας είναι η μεταβολή του λόγου των πλευρών της μονάδος, η οποία επηρεάζει σαφώς το μητρώο δυσκαμψίας της. Στην περίπτωση των διακριτών (σκελετικών) σωμάτων, ισχύουν οι αντίστοιχες προσεγγίσεις. Ειδικότερα, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 4.1, η δομική μονάδα Basic Continuum Unit (Basic Discrete Unit – BCU) μπορεί να

αντικατασταθεί με ένα σχηματισμό 6 ράβδων. Και σε αυτήν την περίπτωση είναι δυνατή η εμφάνιση μιας ανισοτροπικής συμπεριφοράς μεταβάλλοντας τις διαστάσεις της μονάδος BDU. Σε αυτήν την περίπτωση μια μεταβολή στις εξωτερικές διαστάσεις της μονάδας προκαλεί μεταβολή του προσανατολισμού των διαγωνίων στοιχείων της, κάτι που επηρεάζει σημαντικά τη δυσκαμψία της μονάδας. Η αντικατάσταση της μονάδος BCU από μία μονάδα BDU είναι ποιοτική και όχι ποσοτική, διότι το μητρώο δυσκαμψίας των δυο μονάδων είναι διαφορετικό για ίδιες διαστάσεις.

Σχήμα 4.1: Παράσταση βασικών μονάδων διακριτού και συνεχούς προβλήματος

4.1 Ανάλυση σκελετικής κατασκευής

Είναι γνωστό ότι το μητρώο δυσκαμψίας του τετρακομβικού στοιχείου σταθερού πάχους είναι:

$$K_{2D}=\begin{bmatrix} 2s_1+2s_4 & & & & & & & & \\ s_3+s_6 & 2s_2+2s_5 & & & & & & & \\ -2s_1+s_4 & -s_3+s_6 & 2s_1+2s_4 & & & (sym.) & & & \\ s_3-s_6 & s_2-2s_5 & -s_3-s_6 & 2s_2+2s_5 & & & & & \\ -s_1-s_4 & -s_3-s_6 & s_1-2s_4 & -s_3+s_6 & 2s_1+2s_4 & & & & \\ -s_3-s_6 & -s_2-s_5 & s_3-s_6 & -2s_2+s_5 & s_3+s_6 & 2s_2+2s_5 & & & \\ s_1-2s_4 & s_3-s_6 & -s_1-s_4 & s_3+s_6 & -2s_1+s_4 & -s_3+s_6 & 2s_1+2s_4 & & \\ -s_3+s_6 & -2s_2+s_5 & s_3+s_6 & -s_2-s_5 & s_3-s_6 & s_2-2s_5 & -s_3-s_6 & 2s_2+2s_5 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Όπου

$$s_1=\frac{tb}{6a}D_{11},\ s_2=\frac{ta}{6b}D_{22},\ s_3=\frac{t}{4}D_{12},\ s_4=\frac{ta}{6b}D_{33},\ s_5=\frac{tb}{6a}D_{33},\ s_6=\frac{t}{4}D_{33} \quad (4.2)$$

Και

$$D=\frac{E}{1-v^2}\begin{bmatrix} 1 & v & 0 \\ v & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-v}{2} \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

Οι μεταβλητές α, b είναι το μήκος και το πάχος της βασικής μονάδας και t το πάχος της.

Παρατηρώντας τις εξισώσεις φαίνεται ότι ο πίνακας δυσκαμψίας μεταβάλλεται αν μεταβληθεί ο λόγος $\lambda = \frac{\alpha}{b}$. Ειδικότερα, αν μεταβληθεί ο λόγος λ, τότε μεταβάλλονται όλοι οι παράγοντες εκτός από τους s_3 και s_6. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα την άμεση συνάρτηση του λόγου αναλογίας των πλευρών της μονάδος με τον πίνακα δυσκαμψίας K (Venetsanos D.,2010). Ωστόσο, επειδή υπάρχουν και στοιχεία του πίνακα που δεν μεταβάλλονται καθόλου συμπεραίνεται ότι η επίδραση του λόγου αναλογίας των πλευρών της μονάδος στην ακαμψία του στοιχείου είναι σχετικά μικρή.

Απ' την άλλη πλευρά, το μητρώο ακαμψίας του γραμμικού στοιχείου δοκού έχει μητρώο ακαμψίας

$$K=\frac{EA}{L}\begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

Έχοντας λάβει υπ' όψιν το τοπικό μητρώο ακαμψίας, μπορεί να βρεθεί το ολικό μητρώο του συναρμολογήματος που θα αποτελέσει το μητρώο ακαμψίας της βασικής διακριτής μονάδος. Τελικά λοιπόν:

$$K_{TRUSS}=\begin{bmatrix} \frac{EA_1}{2a}+\frac{EA_5}{l}c^2 & & & & & & & \\ \frac{EA_5}{l}cs & \frac{EA_4}{2b}+\frac{EA_5}{l}s^2 & & & & & & \\ \frac{-EA_1}{2a} & 0 & \frac{EA_1}{2a}+\frac{EA_6}{l}c^2 & & & (sym.) & & \\ 0 & 0 & -\frac{EA_6}{l}cs & \frac{EA_2}{2b}+\frac{EA_6}{l}s^2 & & & & \\ -\frac{EA_5}{l}c^2 & -\frac{EA_5}{l}cs & 0 & 0 & \frac{EA_3}{2a}+\frac{EA_5}{l}c^2 & & & \\ -\frac{EA_5}{l}cs & -\frac{EA_5}{l}c^2 & 0 & \frac{-EA_2}{2b} & \frac{EA_5}{l}cs & \frac{EA_2}{2b}+\frac{EA_5}{l}c^2 & & \\ 0 & 0 & -\frac{EA_6}{l}c^2 & \frac{EA_6}{l}cs & -\frac{EA_3}{2a} & 0 & \frac{EA_3}{2a}+\frac{EA_6}{l}c^2 & \\ 0 & \frac{EA_4}{2b} & \frac{EA_6}{l}cs & -\frac{EA_6}{l}s^2 & 0 & 0 & -\frac{EA_6}{l}cs & \frac{EA_4}{2b}+\frac{EA_6}{l}s^2 \end{bmatrix} \tag{4.5}$$

Όπου c και s το συνημίτονο και το ημίτονο με

$$|s|=\frac{2b}{l}\ \ |c|=\frac{2a}{l}\ \ l=\sqrt{(2a)^2+(2b)^2} \tag{4.6}$$

Είναι φανερό λοιπόν, ότι κάποιοι όροι του μητρώου εξαρτώνται από μεμονωμένες τιμές των μεταβλητών α και b. Αυτό σημαίνει ότι εάν μεταβληθούν οι γεωμετρικές

διαστάσεις της BDU, τότε θα μεταβληθεί και το μητρώο δυσκαμψίας K_{TRUSS}, ακόμα και εάν ο λόγος των πλευρών διατηρηθεί ο ίδιος. Επίσης, το μητρώο K_{TRUSS} περιέχει μηδενικά στοιχεία, σε αντίθεση με το μητρώο K_{2D}. Εάν δε, θεωρηθεί μια σταθερή τοπολογία για τις βασικές μονάδες, τότε οι όροι του μητρώου K_{2D} συσχετίζονται με μια μόνο μεταβλητή (το πάχος της μονάδος BCU), ενώ οι μη-μηδενικοί όροι του μητρώου K_{TRUSS} συσχετίζονται με έξι μεταβλητές (τις διατομές των ράβδων της μονάδος BDU). Οι τρεις προαναφερθείσες διαφορές, με έμφαση στην τελευταία, δικαιολογούν τη διαφορετική συμπεριφορά των εν λόγω Βασικών Μονάδων.

4.2 Ο αλγόριθμος

Ο αλγόριθμός βελτιστοποίησης των σκελετικών κατασκευών είναι όμοιος με τον αλγόριθμο που εφαρμόστηκε στο συνεχές μέσο. Η μόνη διαφορά έγκειται στον τρόπο υπολογισμού της τάσης και των μετατοπίσεων καθώς η διακριτοποίηση του μέσου γίνεται με διαφορετικού είδους πεπερασμένα στοιχεία.

Ειδικότερα, ο αλγόριθμος ακολουθεί τα παρακάτω βήματα.

Βήμα 1: Γίνεται αρχικοποίηση του προβλήματος. Συγκεκριμένα, ορίζονται οι συνθήκες στήριξης της κατασκευής, τα φορτία και οι αρχικές διαστάσεις της προς βελτιστοποίηση κατασκευής.

Βήμα 2: Υπολογίζονται οι μετατοπίσεις σε κάθε κόμβο με την μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων. Αφού υπολογιστούν οι μετατοπίσεις υπολογίζεται η τιμής της ορθής τάσης (σ_{xx}). Προφανώς επειδή η κατασκευή είναι δικτυωτή στις ράβδους αναπτύσσεται μόνο ορθή τάση.

Βήμα 3: Μετά τον υπολογισμό της τάσης ακολουθεί ο ανασχεδιασμός των διατομών σύμφωνα με τον αναδρομικό τύπο των βέλτιστων κριτηρίων:

$$A_{new} = A_{old} \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_{max}} \tag{4.7}$$

Βήμα 4: Επαναυπολογισμός της τάσης σε κάθε ράβδο μετά την μεταβολή της διατομής

Η όλη παραπάνω διαδικασία επαναλαμβάνεται για αρκετές επαναλήψεις και τελικά η μέθοδος συγκλίνει όταν όλες οι ράβδοι έχουν πάρει την τελική τους διατομή ώστε η ορθή τάση που αναπτύσσεται σ' αυτές να είναι ίση με την επιτρεπόμενη.

Για τον τερματισμό του αλγορίθμου πρέπει να οριστεί ένα κριτήριο σύγκλισης. Σύμφωνα με αυτό υπολογίζεται για κάθε στοιχείο σε κάθε επανάληψη η διαφορά

μεταξύ της επιτρεπόμενης τάσης και της τάσης της κάθε ράβδου μετά από κάθε ανανέωση της επιφάνειας της διατομής. Αν αυτή η μέγιστη διαφορά είναι μικρότερη από μια ανοχή (tolerance) που ορίζεται, τότε ο αλγόριθμος θεωρείται ότι συγκλίνει και οι επαναλήψεις σταματούν.

Να σημειωθεί ότι, και στις δικτυωτές κατασκευές, ισχύει το πρόβλημα εμφάνισης singularities. Συγκεκριμένα, στα σημεία όπου η ισοδύναμη τάση είναι πολύ μικρή, ο αλγόριθμος τείνει να μηδενίσει τη διατομή του στοιχείου. Αυτό έχει ως συνέπεια όταν η επιφάνεια της διατομής γίνει μηδέν η ορίζουσα του συστήματος να γίνεται και αυτή μηδέν και να μη λύνεται το σύστημα των εξισώσεων. Το πρόβλημα αυτό αντιμετωπίζεται με τη εισαγωγή περιορισμού ελάχιστης διατομής στοιχείου έτσι ώστε να μην απειρίζεται ο πίνακας ακαμψίας της κατασκευής.

4.3 Εφαρμογή της FSD σε δικτυωτές κατασκευές αναφοράς

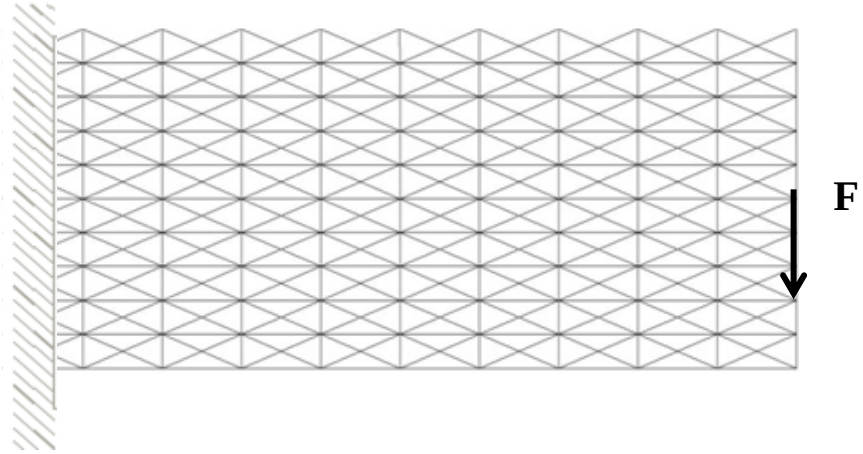
Στην ενότητα αυτή παρατίθεται η εφαρμογή της μεθόδου FSD σε υπερστατικά δικτυώματα τα οποία ποιοτικά είναι όμοια με τα παραδείγματα στα οποία διενεργήθηκε η διερεύνηση της συμπεριφοράς των μεθόδων του συνεχούς μέσου. Λόγω τις ομοιότητας των παραδειγμάτων θα πραγματοποιηθεί σύγκριση των αποτελεσμάτων βελτιστοποίησης τόσο του συνεχούς μέσου όσο και του διακριτού.

Ειδικότερα γίνεται εφαρμογή της μεθόδου FSD σε 4 παραδείγματα

- 2 πρόβολοι όπου το φορτίο ασκείται σε διαφορετικό σημείο σε καθένα απ αυτούς
- 1 κοντός πρόβολος (sort cantilever)
- 1 αμφιέριστη δοκός (MBB)

Σ’ όλα τα παραδείγματα το υλικό χαρακτηρίζεται από μέτρο ελαστικότητας E=210GPa και ο λόγος poisson ν=0.3 . Το φορτίο που ασκείται είναι F= 10N. Στο τέλος κάθε παραδείγματος γίνεται μια σύγκριση των αποτελεσμάτων με αυτά που προέκυψαν από την αντιμετώπιση της κατασκευής ως συνεχές μέσο.

4.3.1 Δικτυωτός Πρόβολος (1)



Σχήμα 4.2: Σχηματική απεικόνιση του δικτυωτού προβλήματος προβόλου (1)

Σε αυτό το παράδειγμα έγινε εφαρμογή του κώδικα σε υπερστατικό δικτύωμα όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.2. Οι κόμβοι της μίας πλευράς είναι πακτωμένοι ενώ το φορτίο ασκείται στη μέση της απέναντι πλευράς. Οι ολικές διαστάσεις μήκους, πλάτους που ορίστηκαν είναι Lx=100mm, Ly=50mm, αντίστοιχα. Οι αρχικές διατομές τέθηκαν ίσες με $1mm^2$. Η ανοχή για το κριτήριο σύγκλισης τέθηκε ίσο με 0,001MPa. Η μέγιστη επιτρεπόμενη τάση ορίστηκε ίση με 1.560MPa.

Όπως έγινε παραπάνω γνωστό υπάρχει πολύ μεγάλη επίδραση του λόγου λ των πλευρών της βασικής διακριτής μονάδας με:

$$\lambda = \frac{a}{b} \tag{4.8}$$

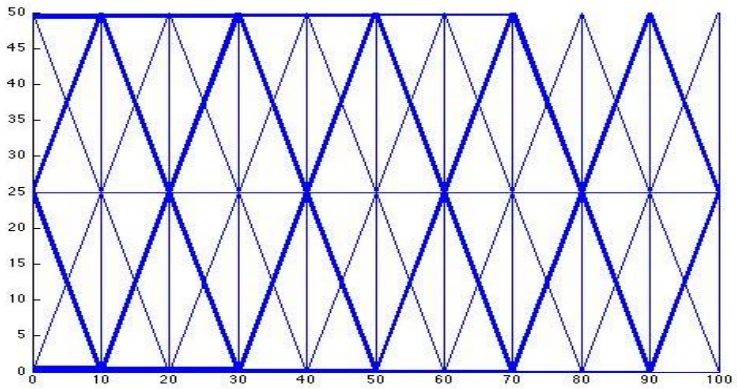
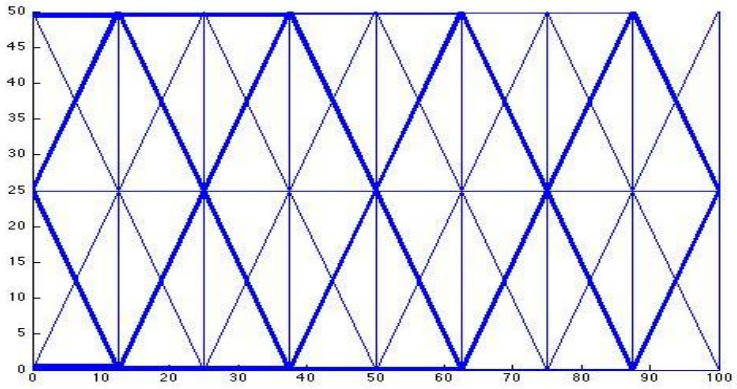
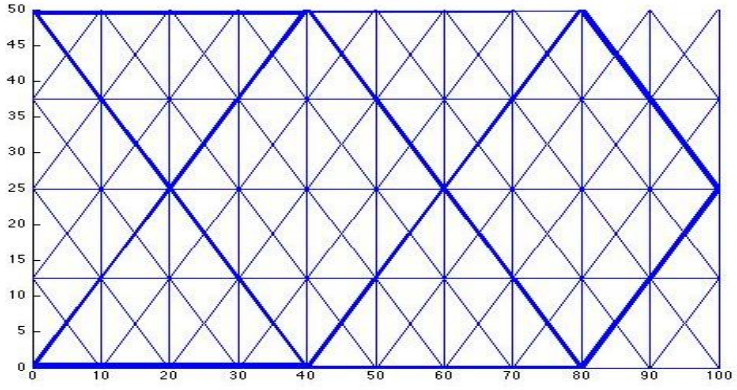
στην ακαμψία της κατασκευής, συνεπώς υπάρχει άμεση επίδραση του λόγου λ με το τελικό βελτιστοποιημένο σχήμα. Κρίνεται σκόπιμο να σημειωθεί ότι:

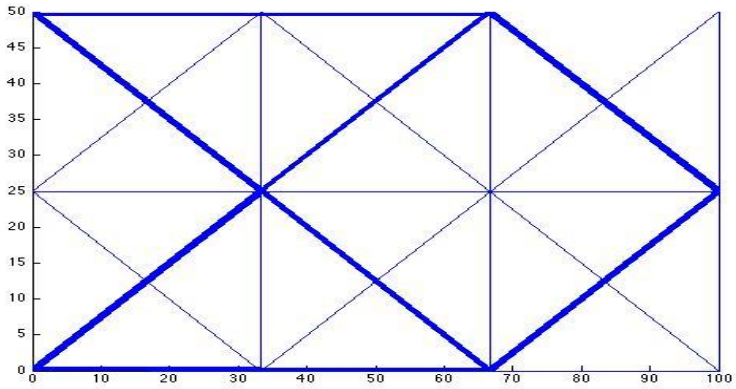
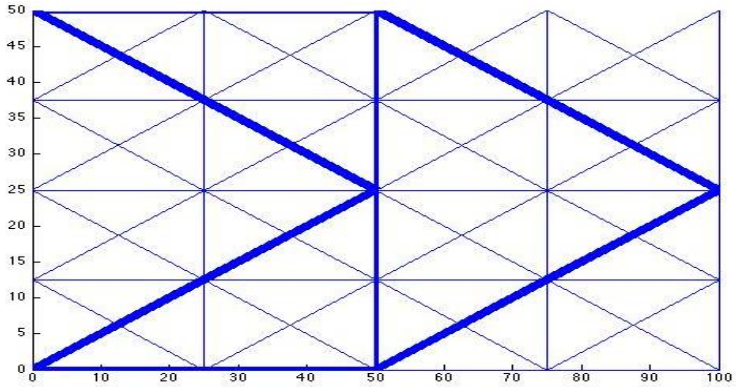
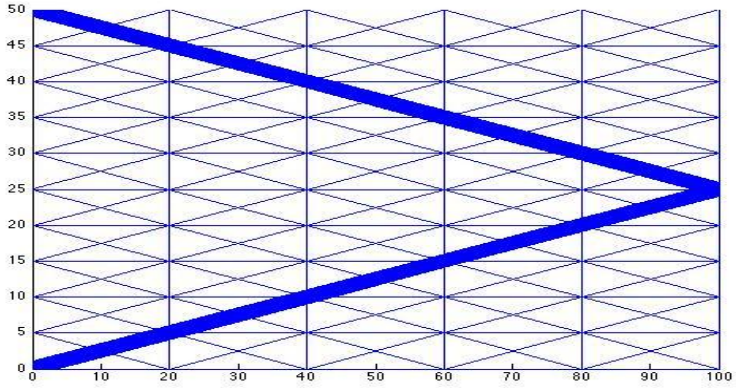
$$\lambda = \frac{a}{b} = \frac{\frac{lx}{nelx}}{\frac{ly}{nely}} = \frac{lx}{ly}\frac{nely}{nelx} \tag{4.9}$$

Όπου lx, ly τα αντίστοιχα μήκη της κάθε πλευράς του υπερστατικού δικτυώματος και nelx, nely ο αριθμός των βασικών διακριτών μονάδων στην αντίστοιχη πλευρά.

Στον πίνακα που ακολουθεί (Πίνακας 4.1) παρατίθενται τοπολογίες που παρήγαγε ο αλγόριθμος για διάφορους λόγους αναλογίας λ (aspect ratio).

Πίνακας 4.1: Βελτιστοποιημένα σχήματα για διάφορους λόγους αναλογίας

Λόγος Αναλογίας	**Βελτιστοποιημένη Κατασκευή**
λ=0,4	
λ=0,5	
λ=0,8	

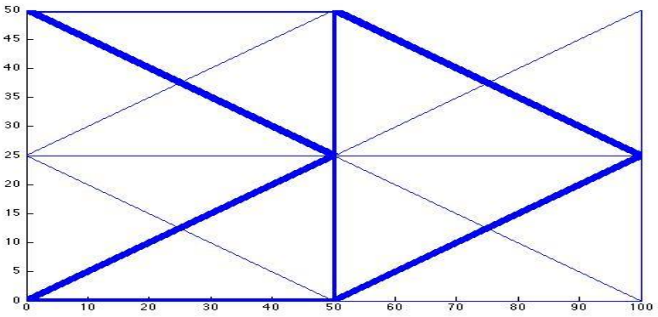
Λόγος Αναλογίας	**Βελτιστοποιημένη Κατασκευή**
λ=4/3	
λ=2	
λ=4	

Όπως παρατηρείται στον Πίνακα 4.1 η εξάρτηση του τελικού σχήματος απο το λόγο αναλογίας είναι πολύ έντονη. Ειδικότερα, ειναι εμφανές οτι για μικρούς λόγους λ, ο αλγόριθμος δημιουργεί συνεχόμενους ρόμβους. Αυξάνωντας το λόγο λ μειώνονται και οι σχηματιζόμενοι ρόμβοι και ετσι για μεγάλα λ δημιουργούνται μόνο δύο δοκοί

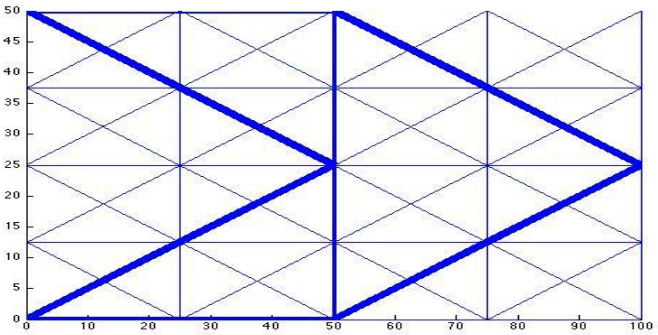
οι οποίες συνδέουν τις στηρίξεις με το σημείο εφαρμογής της φόρτισης. Αν αυξηθεί κι άλλο ο λόγος αναλογίας τότε δημιουργούνται μη υπαρκτα σχήματα. Ειναι δεδομένο, λοιπόν, αφού αλλάζει η τοπολογία ανάλογα με τον λόγο λ, θα αλλάζει και το βάρος της κατασκευής.

Μετα απο δοκιμές βρέθηκε οτι το βέλτιστο σχήμα δημιουργείται όταν ο λόγος λ=2. Να σημειωθεί οτι δεν παίζει ιδιαίτερο ρόλο για τον αλγόριθμο ο αριθμός των βασικών δομικών μονάδων στις οποίες θα διακριτοποιηθεί η αρχική πλάκα, δηλαδή η δομή και το βάρος της βελτιστοποιημένης κατασκευής δεν εξαρτάται απο τον αριθμό των στοιχείων κατι που έρχεται σε αντίθεση με την ισχύουσα κατάσταση στο συνεχές μέσο. Στο Σχήμα 4.3 παρουσιάζεται η ομοιότητα των αποτελεσμάτων για διάφορα πλέγματα με λόγο αναλογίας λ=2,

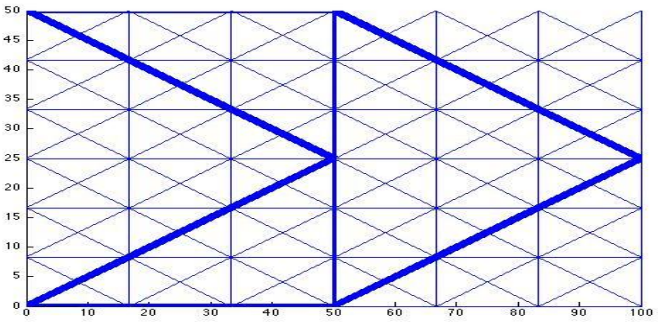
α)



β)

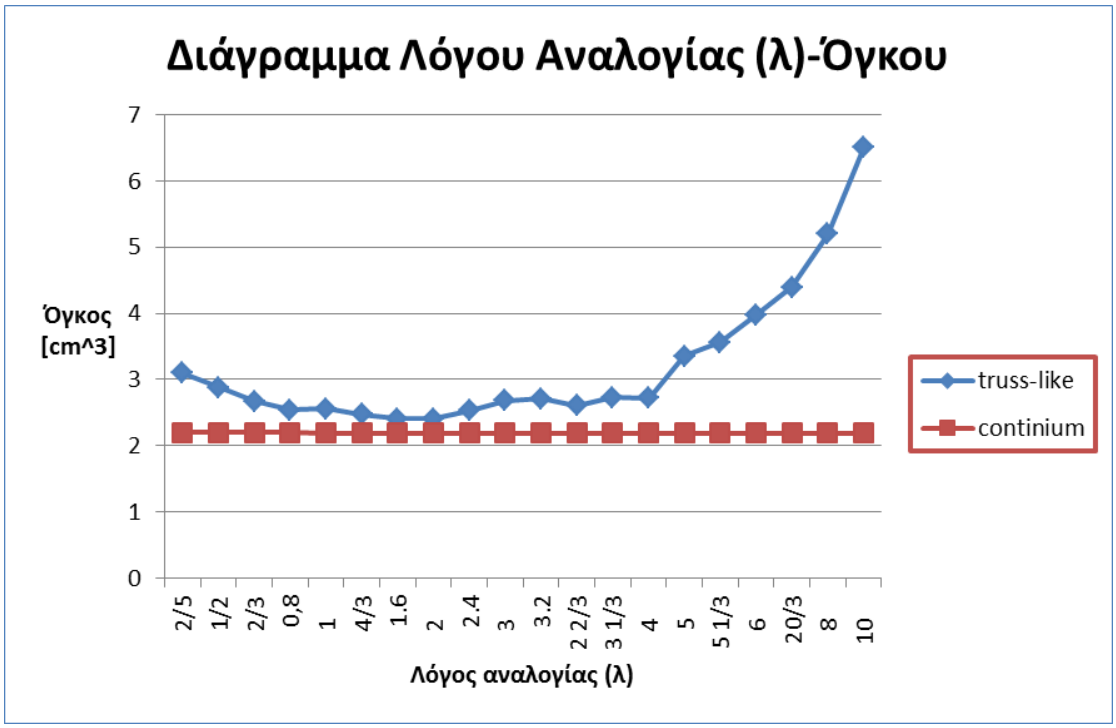


γ)



Σχήμα 4.3: Βέλτιστες κατασκευές με λόγο αναλογίας λ=2 με πλέγμα α) 2X2 β)4X4 γ)6X6

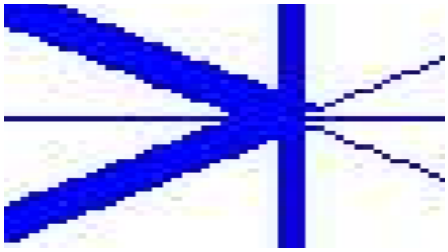
Παρακάτω παρατίθεται το διάγραμμα του τελικού όγκου της βελτιστοποιημένης κατασκευής σε σχέση με το λόγο αναλογίας των διαστάσεων της βασικής διακριτής μονάδος.



Σχήμα 4.4: Διάγραμμα όγκου-λόγου αναλογίας λ συνεχής και δικτυωτής κατασκευής

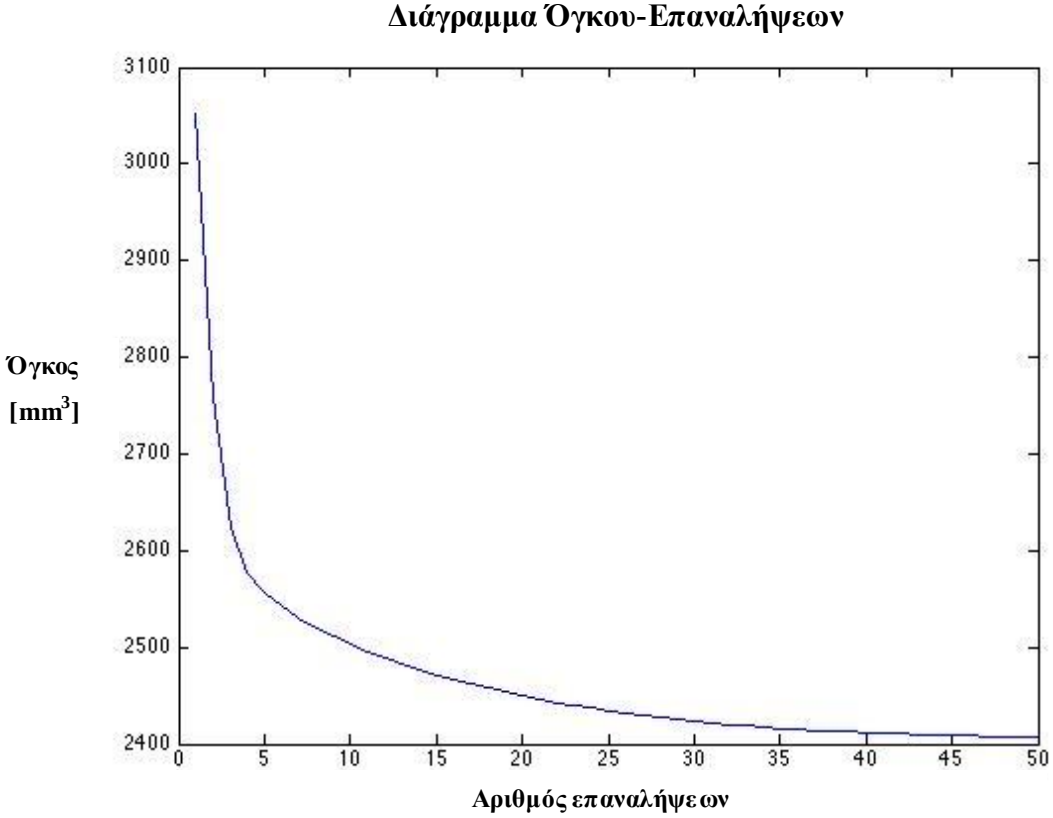
Είναι εμφανές ότι το ελάχιστο της αντικειμενικής συνάρτησης βρίσκεται για λ=2 με τελικό όγκο 2400 mm^3. Επίσης, στο διάγραμμα (Σχήμα 4.4) εμφανίζεται και ο όγκος του συνεχούς μέσου μετά από βελτιστοποίηση με τη μέθοδο FSD. Όπως απορρέει από το διάγραμμα το συνεχές μέσο είναι σχεδόν ανεξάρτητο από το λόγο αναλογίας της δομικής μονάδας λ. Έτσι λοιπόν, διαφαίνεται η πρακτική διαφορά της συμπεριφοράς των δύο δομικών μονάδων.

Εκτός αυτού το βέλτιστο σχήμα του συνεχούς μέσου έχει τελικό όγκο 2200 mm^3. Με μια πρώτη ματιά λοιπόν φαίνεται ότι η βελτιστοποίηση του συνεχούς μέσου είναι καλύτερη ακόμα και για το σωστό λόγο αναλογίας. Παρόλα αυτά η διαφορά αυτή είναι πλαστή καθώς δημιουργείται λόγω των επικαλύψεων των δοκών που στην πραγματικότητα δεν υπάρχουν (Σχήμα 4.5). Έτσι λοιπόν μπορούμε να πούμε ότι οι δύο βελτιστοποιήσεις είναι ισάξιες.



Σχήμα 4.5: Σημείο επικάλυψης δοκών

Με σκοπό την διερεύνηση του τρόπου σύγκλισης στο ελάχιστο της αντικειμενικής συνάρτησης, που στην περίπτωση μας είναι το βάρος, σχεδιάστηκαν τα παρακάτω διαγράμματα. Το πρώτο διάγραμμα (Σχήμα 4.6) δείχνει το βάρος των ενδιάμεσων κατασκευών που δημιουργούνται (και ανασχεδιάζονται) σε κάθε επανάληψη του κώδικα μέχρι την σύγκλιση. Το δεύτερο διάγραμμα (Σχήμα 4.7) δείχνει την τιμή της μέγιστης ορθής τάσης σε κάθε επανάληψη του κώδικα.

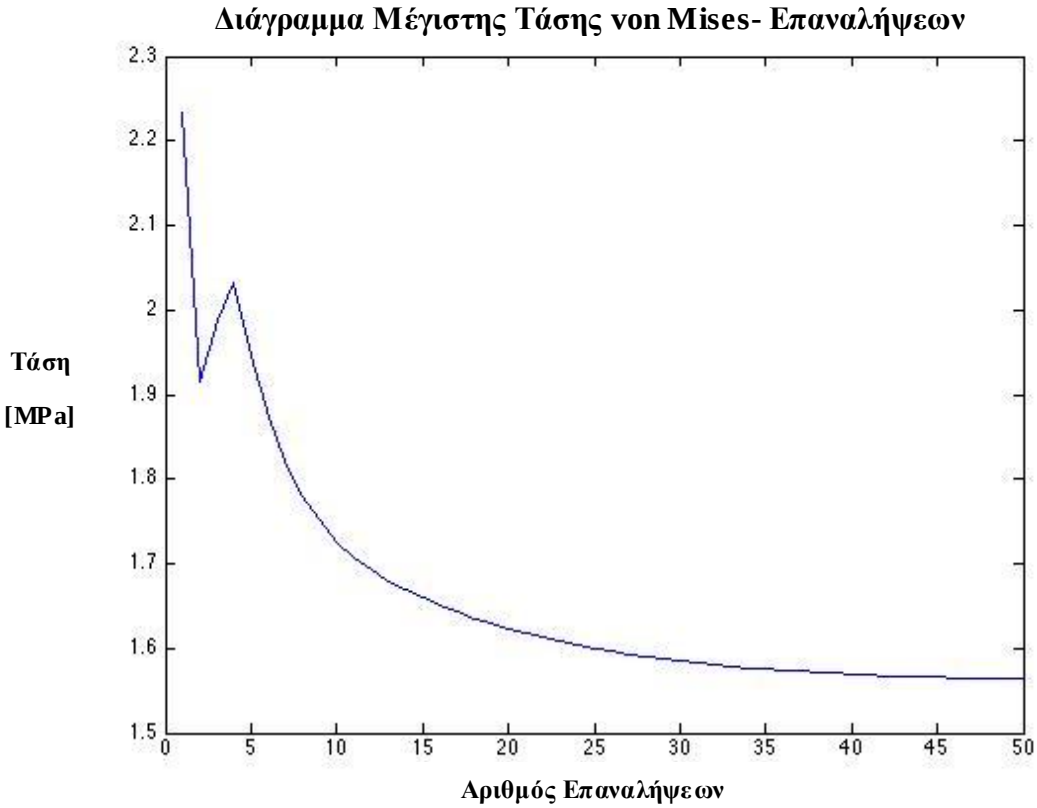


Σχήμα 4.6: Διάγραμμα πορείας σύγκλισης της αντικειμενικής συνάρτησης

Στο διάγραμμα αυτό (Σχήμα 4.6) παρατηρείται μια κατάσταση όμοια με αυτή του συνεχούς μέσου. Η αντικειμενική συνάρτηση συγκλίνει εκθετικά στο ελάχιστο. Αν και η τελική σύγκλιση επέρχεται στις 50 επαναλήψεις στις πρώτες 5 η αντικειμενική συνάρτηση έχει μειωθεί κατά 83%. Εκτός αυτού η συνάρτηση παρουσιάζει πολύ

μεγάλη ομαλότητα με συνεχή μείωση της συνάρτησης, κάτι που πιστοποιεί την σταθερότητα της μεθόδου.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η μεταβολή της μέγιστης ορθής τάσης κατά τη διάρκεια των επαναλήψεων όπως και στη βελτιστοποίηση συνεχούς μέσου.

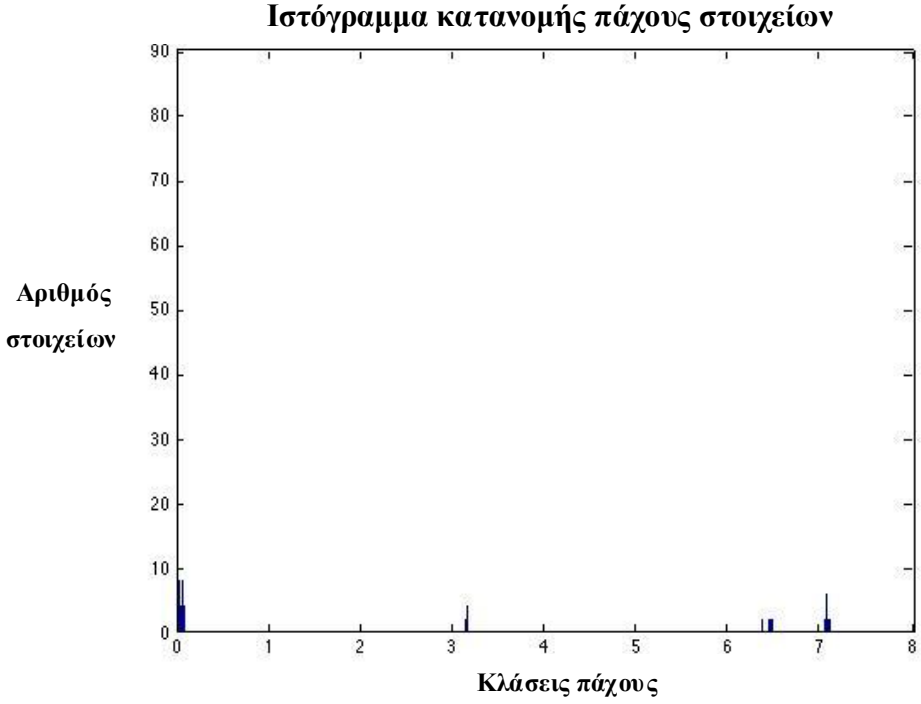


Σχήμα 4.7: Διάγραμμα πορείας μέγιστων τάσεων von Mises

Ειδικότερα, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.7 μετα την δεύτερη επανάληψη παρατηρείται μια απότομη αύξηση της μέγιστης ορθής τάσης που αναπτύσσεται στο δικτύωμα. Αυτό το φαινόμενο, όπως έχει αναφερθεί εντοπίζεται λόγω της μεγάλης μείωσης του όγκου κατά την προηγούμενη επανάληψη, που οδήγησε κάποιες διατομές που κατέχουν κρίσιμη τοπολογική θέση για την ακαμψία του δικτυώματος να μειώσουν την διατομή τους περισσότερο από όσο απαιτεί η τελική βέλτιστη κατασκευή. Παρ' όλα αυτά ο κώδικας «αυτοδιορθώνεται» και μετά από 2 επαναλήψεις η μέγιστη τάση μειώνεται εκθετικά μέχρι την επιτρεπόμενη τάση. Προφανώς, μόλις η τιμή της τάσης καταλήξει στην επιτρεπόμενη πραγματοποιείται σχεδιασμός πλήρους έντασης και συνεπώς βέλτιστη κατασκευή.

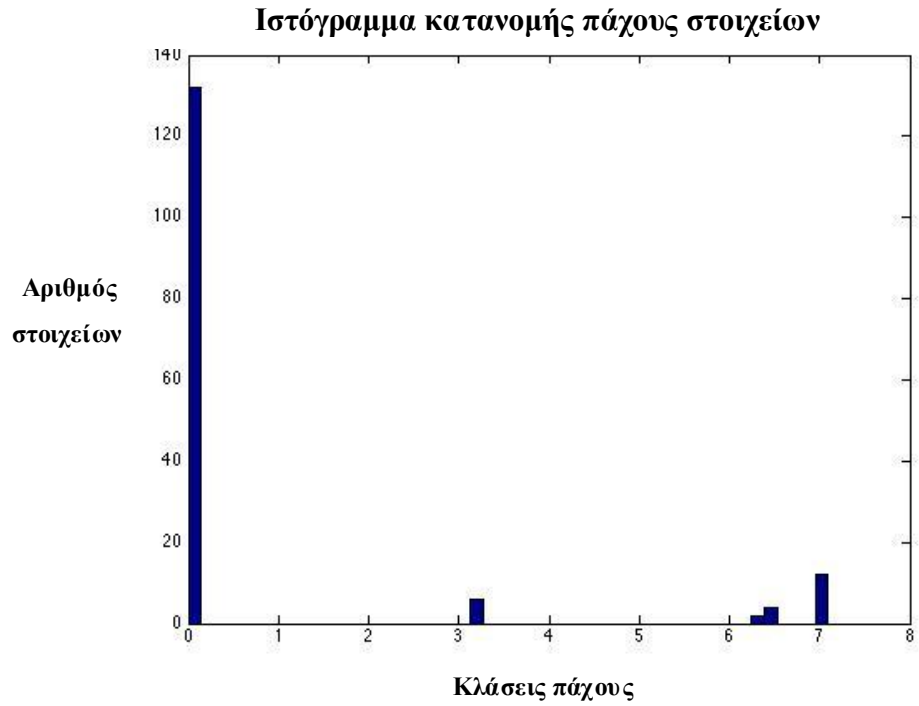
Μια σημαντική διαφορά της βελτιστοποιημένης δικτυωτής κατασκευής μ' αυτήν του συνεχούς μέσου, είναι ιδιαίτερη ομοιογένεια όσον αφορά στα στοιχεία που την

αποτελούν. Ειδικότερα, στο παρακάτω γράφημα (Σχήμα 4.8) είναι εμφανές ότι η βελτιστοποιημένη κατασκευή αποτελείται από ράβδους διατομής 3,0, 6,5 και 7,0 mm^2. Αυτό είναι ένα ιδιαίτερα χρήσιμο χαρακτηριστικό του τελικού σχήματος καθώς κάνει την τελική κατασκευή εύκολα κατασκευάσιμη και οικονομική λόγω τυποποιήσεων.



Σχήμα 4.8: Ιστόγραμμα κατανομής πάχους στοιχείων με 1000 κλάσεις

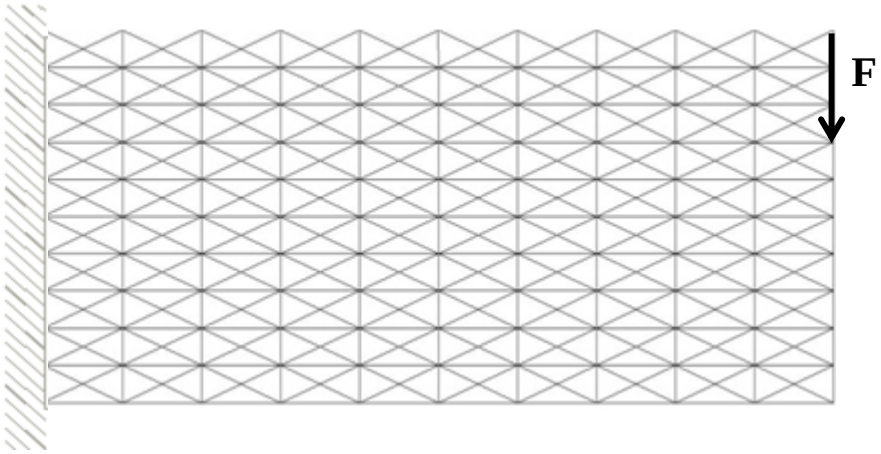
Αυτό το χαρακτηριστικό είναι εμφανέστερο αν χωριστούν οι ράβδοι της κατασκευής σε μεγαλύτερες κλάσεις, καταδεικνύοντας τη δυνατότητα ομαδοποίησης (Σχήμα 4.9).



Σχήμα 4.9: Ιστόγραμμα κατανομής πάχους στοιχείων με 30 κλάσεις

Να σημειωθεί, βέβαια, ότι οι διατομές που μπορεί να χρησιμοποιήσει ο αλγόριθμος είναι μη φραγμένες, δηλαδή δεν υπάρχει ανώτατο όριο επιτρεπόμενης διατομής. Έτσι λοιπόν, το πρόβλημα δεν είναι πλέον τοπολογικής βελτιστοποίησης αλλά βελτιστοποίησης μεγέθους.

4.3.2 Δικτυωτός Πρόβολος (2)



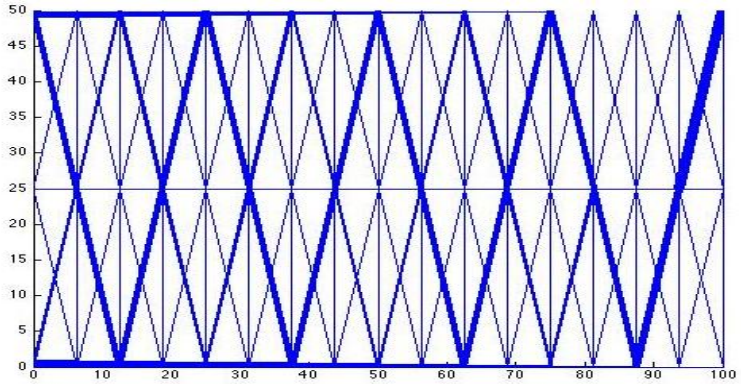
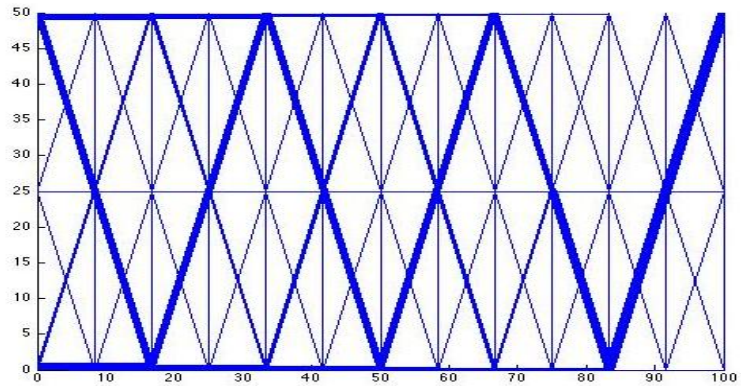
Σχήμα 4.10: Σχηματική απεικόνιση δικτυωτού προβόλου (2)

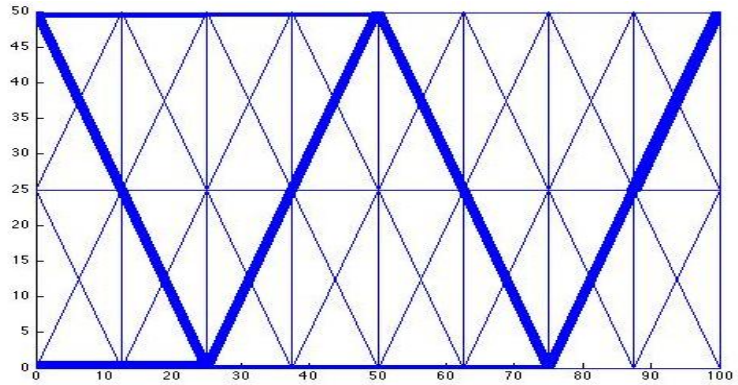
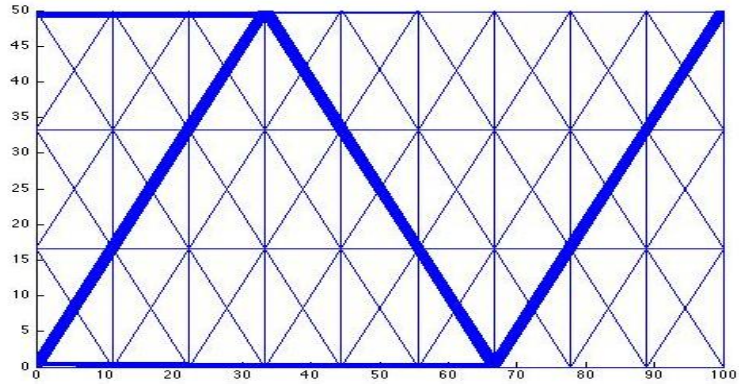
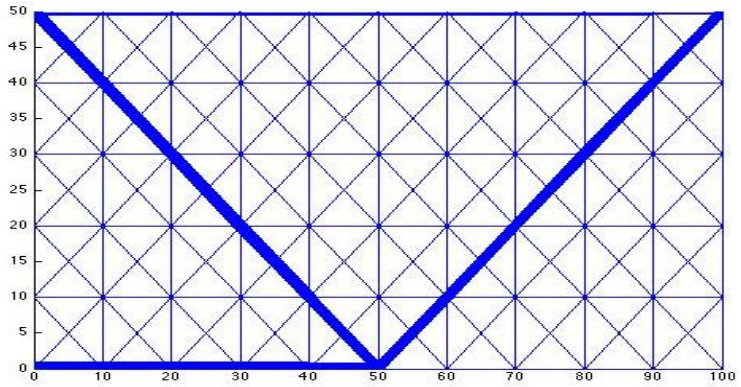
Σ αυτό το παράδειγμα έγινε εφαρμογή του κώδικα σε υπερστατικό δικτύωμα του παραπάνω σχήματος (Σχήμα 4.10). Οι κόμβοι της μίας πλευράς είναι πακτωμένοι ενώ το φορτίο ασκείται στην άνω ακμή της απέναντι πλευράς . Οι ολικές διαστάσεις μήκους, πλάτους που ορίστηκαν είναι Lx=100 mm Ly=50 mm αντίστοιχα. Οι αρχικές διατομές τέθηκαν $1mm^2$. Η ανοχή για το κριτήριο σύγκλισης τέθηκε 0,001MPa. Η μέγιστη επιτρεπόμενη τάση ορίστηκε στα 1.35MPa.

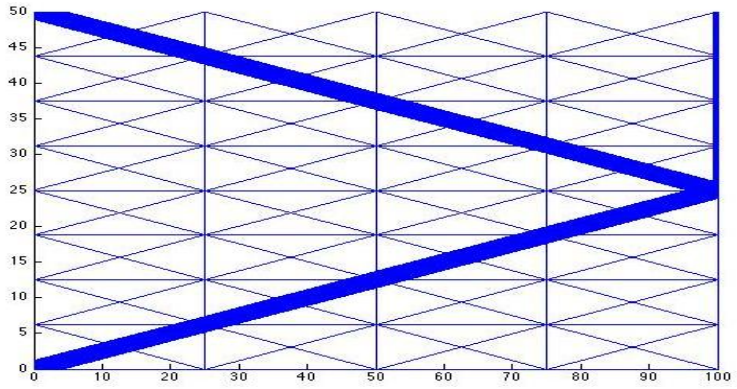
Το συγκεκριμένο παράδειγμα διενεργήθηκε ώστε να διαφανεί η ανεξαρτησία του αλγόριθμου σε σχέση με τη θέση φόρτισης.

Όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα έγιναν δοκιμές για διάφορους λόγους αναλογίας λ ώστε να αποφανθούμε για την βέλτιστη κατασκευή. Παρακάτω παρατίθενται τα βελτιστοποιημένα σχήματα που παρήγαγε ο αλγόριθμος για διάφορους λόγους αναλογίας λ (aspect ratio).

Πίνακας 4.2: Βελτιστοποιημένα σχήματα για διάφορους λόγους αναλογίας

Λόγος Αναλογίας	**Βελτιστοποιημένη Κατασκευή**
λ=1/4	
λ=1/3	

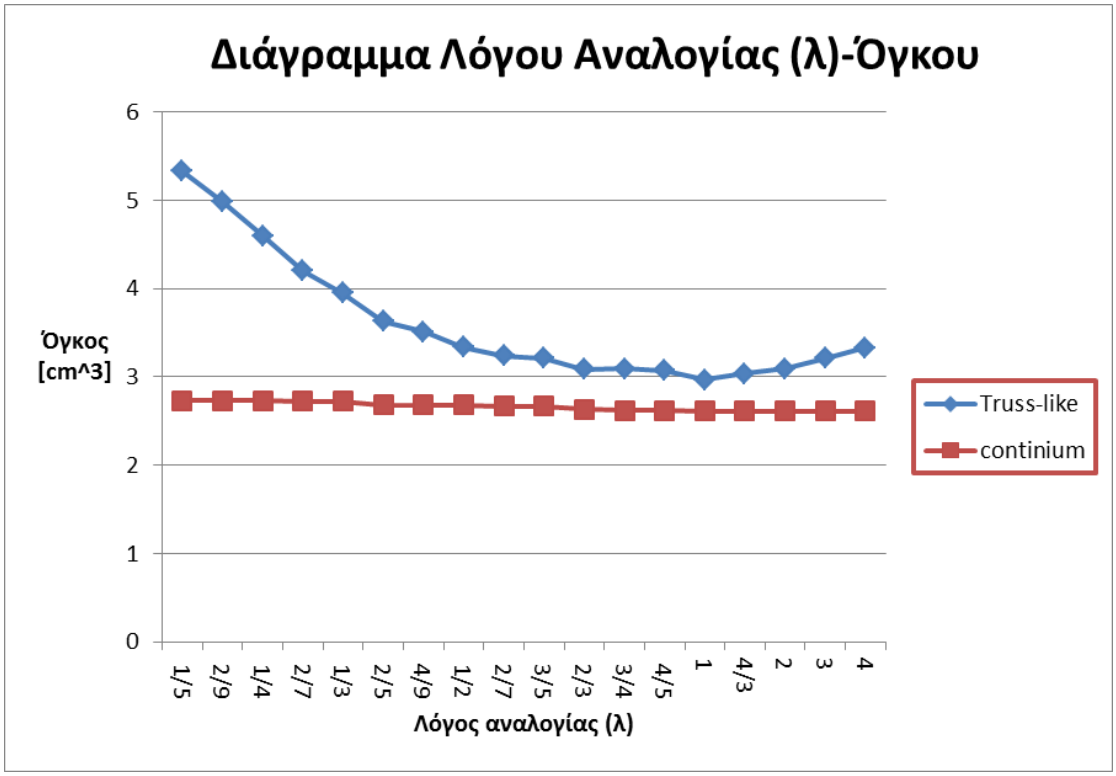
Λόγος Αναλογίας	**Βελτιστοποιημένη Κατασκευή**
λ=1/2	
λ=2/3	
λ=1	

Λόγος Αναλογίας	Βελτιστοποιημένη Κατασκευή
λ=2	

Όπως παρατειρούμε απο τον παραπάνω πίνακα (Πίνακας 2.1Πίνακας 4.2: Βελτιστοποιημένα σχήματα για διάφορους λόγους αναλογίας) η εξάρτηση του τελικού σχήματος απο το λόγο αναλογίας είναι τεράστιος. Ειδικότερα, ειναι εμφανές οτι για μικρούς λόγους λ, ο αλγόριθμος δημιουργεί συνεχόμενους δομές τύπου V . Αυξάνωντας το λόγο λ μειώνονται και οι σχηματιζόμενες δομές και ετσι για μεγαλύτερα λ δημιουργούνται μόνο δοκοί οι οποίοι συνδέουν τις στηρίξεις με το σημείο εφαρμογής της φόρτισης. Αν αυξηθεί κι αλλο ο λόγος αναλογίας τότε δημιουργούνται μη υπαρκτα σχήματα. Ειναι δεδομένο λοιπόν αφού αλλάζει η τοπολογία ανάλογα με το λόγο λ, θα αλλάζει και το βάρος της κατασκευής.

Μετα απο πειράματα βρέθηκε οτι το βέλτιστο σχήμα δημιουργείται όταν ο λόγος λ=1. Να σημειωθεί οτι και σ αυτήν την περίπτωση δεν παίζει ιδιαίτερο ρόλο για τον αλγόριθμο ο αριθμός των βασικών δομικών μονάδων που θα διακριτοποιηθεί η αρχική πλάκα, δηλαδή η δομή και το βάρος της βελτιστοποιημένης κατασκευής δεν εξαρτάται απο τον αριθμό των στοιχείων.

Παρακάτω παρατίθεται το διάγραμμα (Σχήμα 4.11) του τελικού όγκου των βελτιστοποιημένων κατασκευών σε σχέση με το λόγο αναλογίας λ, των διαστάσεων της βασικής διακριτής μονάδος.



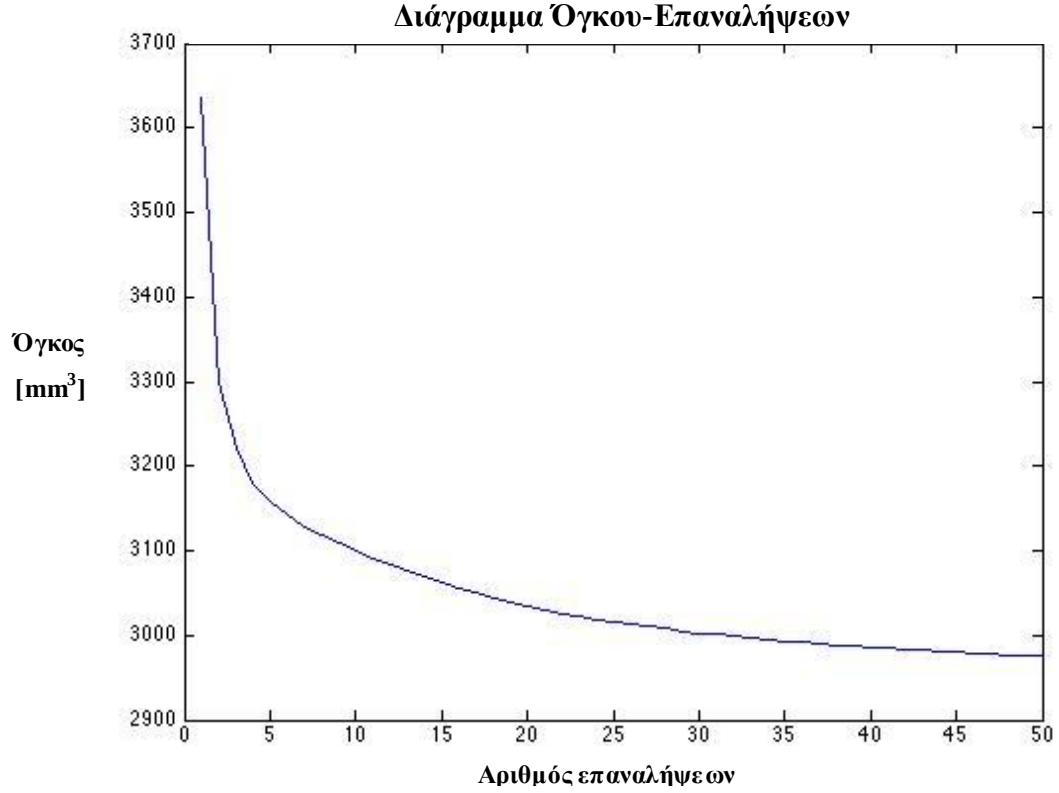
Σχήμα 4.11: Διάγραμμα όγκου-λόγου αναλογίας λ συνεχής και δικτυωτής κατασκευής

Είναι εμφανές από το Σχήμα 4.11 οτι το ελάχιστο της αντικειμενικής συνάρτησης βρίσκεται για λ=1 με τελικό όγκο 2965 mm^3. Επίσης στο διάγραμμα εμφανίζεται και ο όγκος του συνεχούς μέσου μετα από βελτιστοποίηση με τη μέθοδο του σχεδιασμού πλήρους έντασης . Όπως απορρέει από το διάγραμμα παρατηρούμε ότι το συνεχές μέσο είναι σχεδόν ανεξάρτητο από το λόγο αναλογίας της δομικής μονάδας λ.

Εκτός αυτού το βέλτιστο σχήμα του συνεχούς μέσου έχει τελικό όγκο 2600 mm^3, είναι δηλαδή όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα ελαφρύτερο ακόμα και για το σωστό λόγο αναλογίας. Παρόλα αυτά η διαφορά αυτή είναι πλαστή καθώς δημιουργείται λόγω των επικαλύψεων των δοκών που στην πραγματικότητα δεν υπάρχουν (Σχήμα 4.12). Έτσι λοιπόν μπορούμε να πούμε ότι οι δύο βελτιστοποιήσεις είναι ισάξιες.

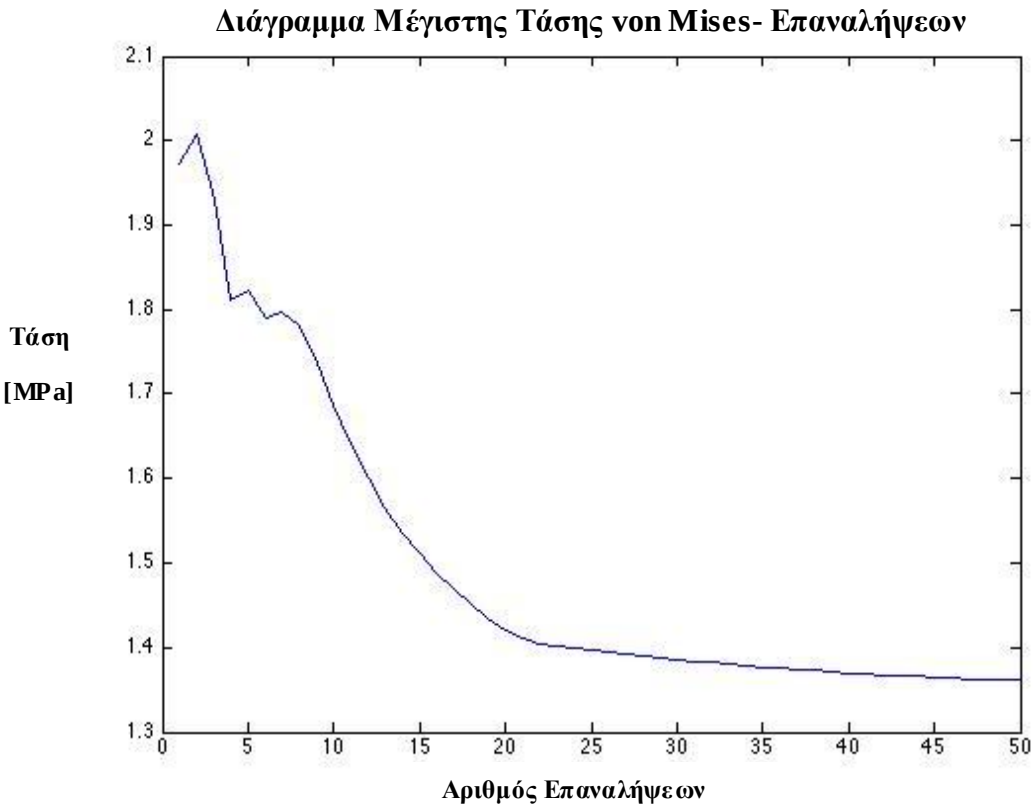
Σχήμα 4.12: Σημείο επικάλυψης δοκών

Με σκοπό την διερεύνηση του τρόπου σύγκλισης στο ελάχιστο της αντικειμενικής συνάρτησης, σχεδιάστηκαν τα διαγράμματα (Σχήμα 4.13 και Σχήμα 4.14) που δείχνουν τις τιμές του βάρους και τάσης σε κάθε επανάληψη μέχρι την σύγκλιση.



Σχήμα 4.13: Διάγραμμα πορείας σύγκλισης της αντικειμενικής συνάρτησης

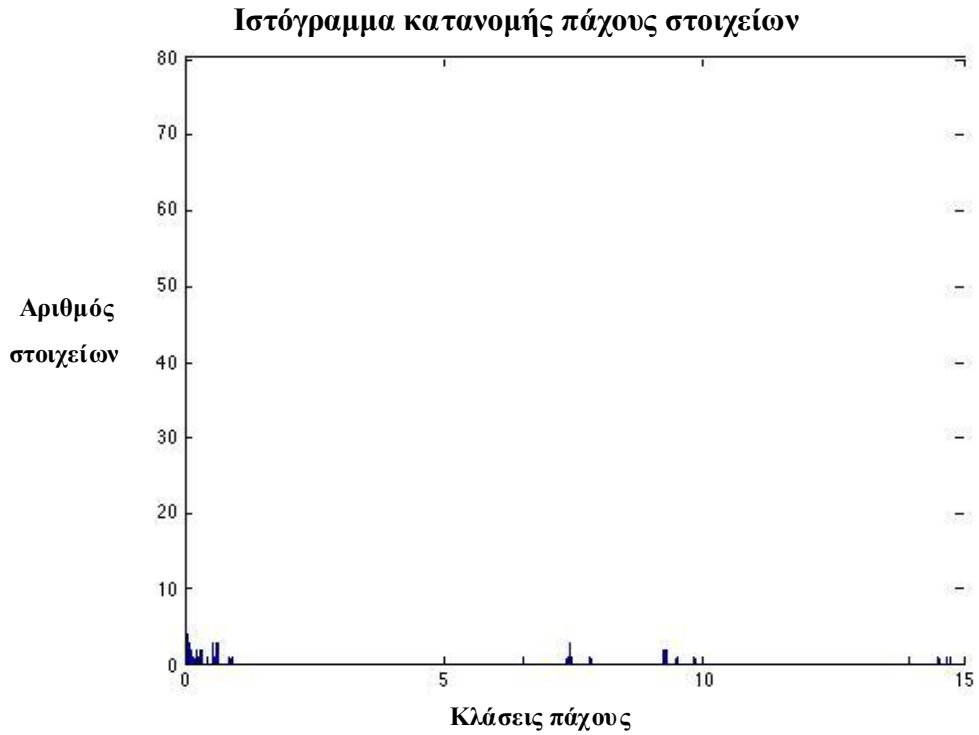
Στο Σχήμα 4.13 παρατηρούμε μια κατάσταση όμοια με αυτή του συνεχούς μέσου. Η αντικειμενική συνάρτηση συγκλίνει εκθετικά στο ελάχιστο. Αν και η τελική σύγκλιση επέρχεται στις 50 επαναλήψεις στις πρώτες 3 η αντικειμενική συνάρτηση έχει μειωθεί κατά 84%. Εκτός αυτού η συνάρτηση παρουσιάζει πολύ μεγάλη ομαλότητα με συνεχή μείωση της συνάρτησης, κάτι που πιστοποιεί την σταθερότητα της μεθόδου. Ενδιαφέρον παρουσιάζει η μεταβολή της μέγιστης ορθής τάσης κατά την διάρκεια των επαναλήψεων όπως και στην βελτιστοποίηση συνεχούς μέσου.



Σχήμα 4.14: Διάγραμμα πορείας μέγιστων τάσεων von Mises

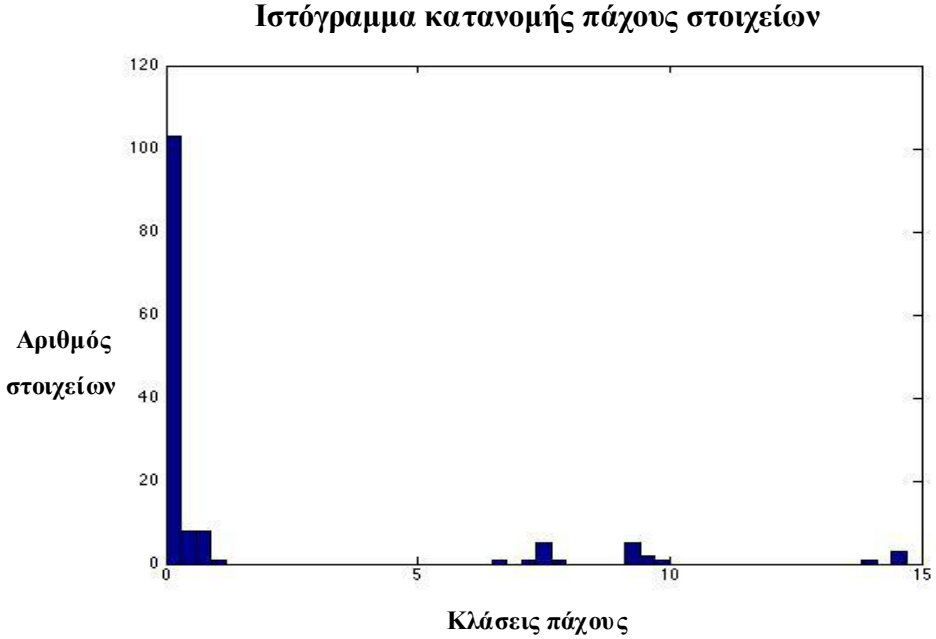
Από το Σχήμα 4.14 παρατηρούμε ότι μέχρι την $8^{η}$ επανάληψη η τάση έχει αρκετές διακυμάνσεις και δεν παρουσιάζει ιδιαίτερη ομαλότητα. Ωστόσο μετα την $9^{η}$ η τάση μειώνεται εκθετικά μέχρι την τελική σύγκλιση στα 1.35MPa. Παρόλη την κυμαινόμενη μορφή που παρουσιάζει η τάση είναι φανερό ότι αλγόριθμος διορθώνεται κάτι που κάνει σαφέστατο ότι ακόμη ο κώδικας έχει το πλεονέκτημα της αναπροσαρμογής. Προφανώς μόλις οι τάσεις έχουν καταλήξει στην επιτρεπόμενη έχουμε σχεδιασμό πλήρους έντασης και συνεπώς βέλτιστη κατασκευή.

Τέλος σ' αυτό το παράδειγμα το βέλτιστο σχήμα παρουσιάζει μια αυξημένη ανομοιογένεια ως προς τις δοκούς που χρησιμοποιεί για τον σχηματισμό του. Ειδικότερα στο παρακάτω διάγραμμα (Σχήμα 4.15) παρατηρούμε ότι χρησιμοποιούνται τόσο δοκοί με πολύ μικρή διατομή($<1\,mm^2$) που έχουν μεγαλύτερη διατομή όμως από την ελάχιστη επιτρεπόμενη. Αυτό είναι ένα ελάττωμα της τελικής βέλτιστης κατασκευής καθώς αυτές οι ράβδοι δεν συμμετέχουν ενεργά στην ακαμψία του τελικού σχηματισμού, ωστόσο δεν μπορούν να απομακρυνθούν αβίαστα. Εκτός αυτού είναι εμφανές και στις δοκούς που εμφανίζουν μεγάλη επιφάνεια διατομής υπάρχει αρκετά μεγάλη διακύμανση πράγμα που συνηγορεί ότι υπάρχουν περιθώρια για ομαδοποίηση των τελικών ράβδων.



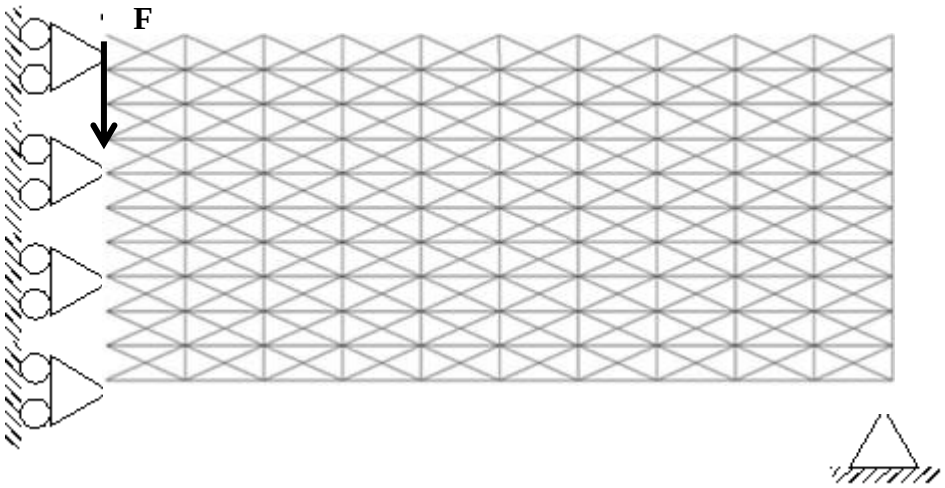
Σχήμα 4.15: Ιστόγραμμα κατανομής πάχους στοιχείων με 1000 κλάσεις

Αυτό το χαρακτηριστικό είναι εμφανέστερο αν χωρίσουμε την κατασκευή σε μεγαλύτερες κλάσεις, δείχνοντας μας την δυνατότητα ομαδοποίησης.



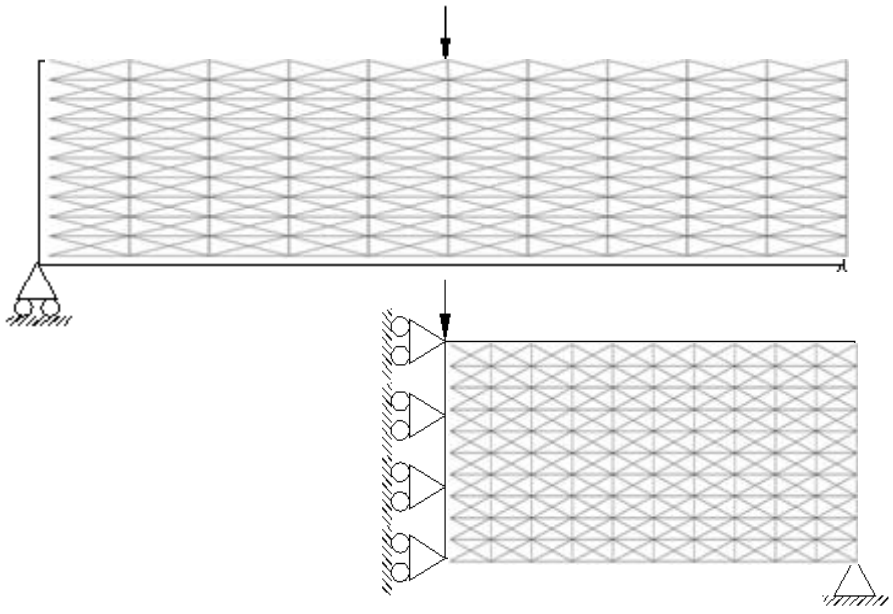
Σχήμα 4.16: Ιστόγραμμα κατανομής πάχους στοιχείων με 30 κλάσεις

4.3.3 Αμφιέριστο Δικτύωμα



Σχήμα 4.17: Σχηματική απεικόνιση αμφιέριστου δικτυώματος

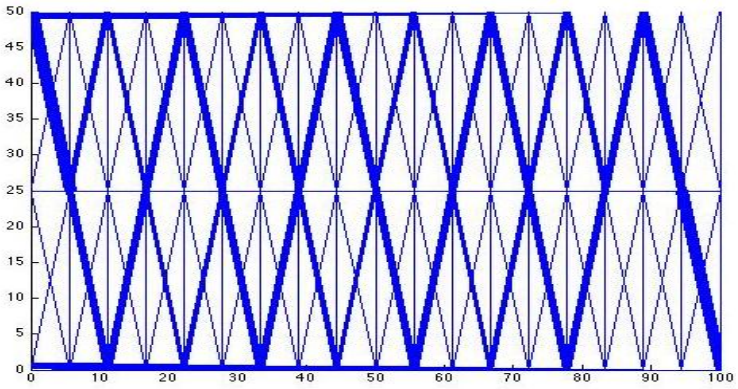
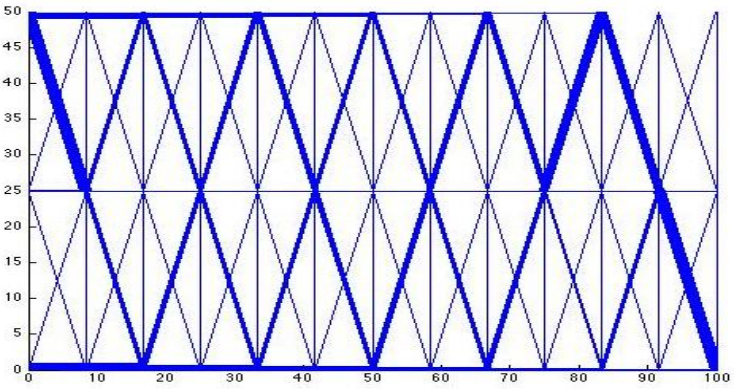
Σ αυτό το παράδειγμα έγινε εφαρμογή του κώδικα σε υπερστατικό δικτύωμα που ομοιάζει με αμφιέριστη ορθωγωνική πλάκα όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.17. Οι διαστάσεις μήκους, πλάτους, πάχους της μισής πλάκας που ορίστηκαν είναι Lx=100mm, Ly=50mm. Οι αρχικές διατομές τέθηκαν $1\,mm^2$. Η ανοχή για το κριτήριο σύγκλισης τέθηκε 0,001MPa. Η μέγιστη επιτρεπόμενη τάση ορίστηκε στα 1.35MPa.Όπως έχει αναφερθεί και στο αντίστοιχο παράδειγμα για την βελτιστοποίηση συνεχούς μέσου το πρόβλημα είναι συμμετρικό ως προς τον y άξονα συνεπώς μπορούμε να λύσουμε το μισό πρόβλημα τοποθετώντας στην κατά πλάτος πλευρά της πλάκας κυλίσεις (Σχήμα 4.18). Κάνοντας αυτόν τον μετασχηματισμό ελαττώνουμε το υπολογιστικό κόστος της ανάλυσης στο μισό.

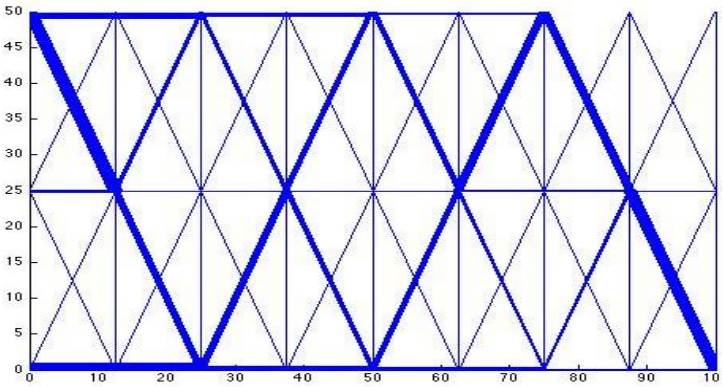
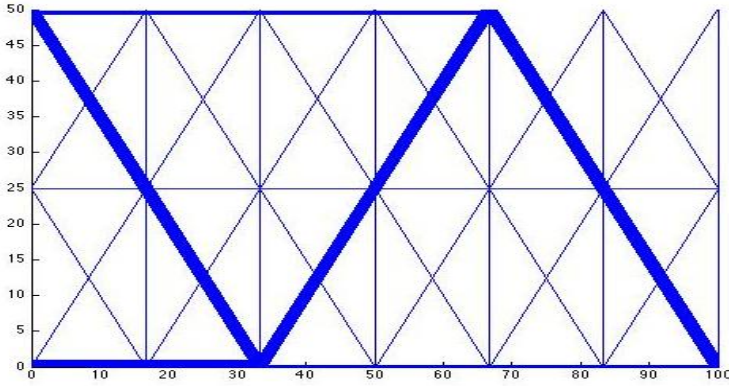
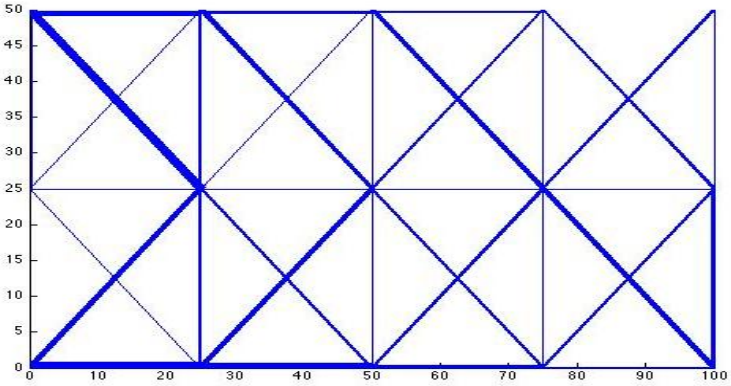


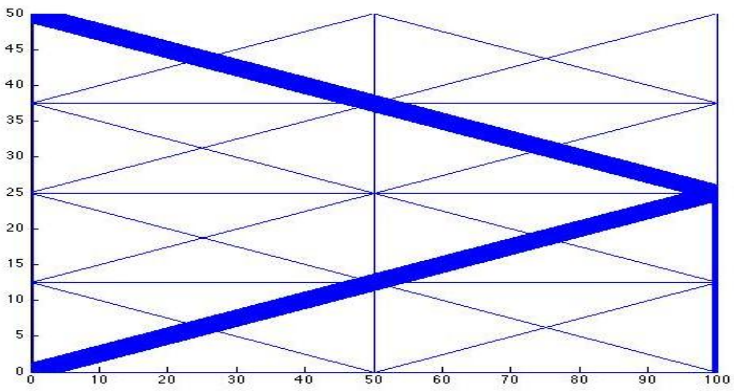
4.18: Σχηματική απεικόνιση ολόκληρου και μισού αμφιέριστου δικτυώματος

Το συγκεκριμένο παράδειγμα διενεργήθηκε ώστε να διαφανεί η ανεξαρτησία του αλγόριθμου σε σχέση με τη συνθήκες στήριξης. Όπως και στα προηγούμενα παραδείγματα αυτής της ενότητας σκοπός είναι να διερευνηθεί ο κατάλληλος λόγος αναλογίας λ ώστε να καταλήξουμε στην βέλτιστη δυνατή κατασκευή με βεβαιότητα. Έτσι λοιπόν έγιναν δοκιμές για διάφορους λόγους αναλογίας λ ώστε να αποφανθούμε για την βέλτιστη κατασκευή. Παρακάτω παρατίθενται πίνακας (Πίνακας 4.3) με τα βελτιστοποιημένα σχήματα που παρήγαγε ο αλγόριθμος για διάφορους λόγους αναλογίας λ (aspect ratio).

Πίνακας 4.3: Βελτιστοποιημένα σχήματα για διάφορους λόγους αναλογίας

Λόγος αναλογίας	**Βελτιστοποιημένη κατασκευή**
λ=2/9	
λ=1/3	

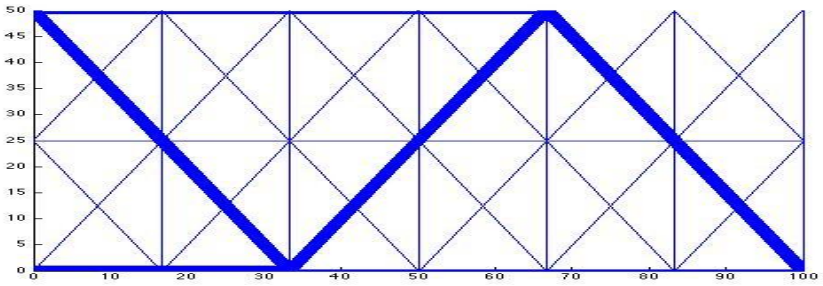
Λόγος αναλογίας	**Βελτιστοποιημένη κατασκευή**
λ=1/2	
λ=2/3	
λ=1	

Λόγος αναλογίας	**Βελτιστοποιημένη κατασκευή**
λ=4	

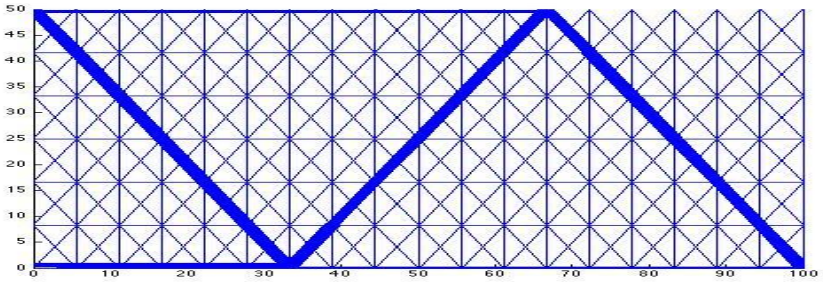
Όπως αναμενόταν και σε αυτό το παράδειγμα η εξάρτηση του τελικού σχήματος απο το λόγο αναλογίας είναι τεράστιος. Ειδικότερα, ειναι εμφανές από τον Πίνακας 4.3 οτι για μικρούς λόγους λ, ο αλγόριθμος δημιουργεί συνεχόμενους δομές τύπου V . Αυξάνωντας το λόγο λ μειώνονται και οι σχηματιζόμενες δομές και ετσι για μεγαλύτερα λ δημιουργούνται μόνο δοκοί οι οποίοι συνδέουν τις στηρίξεις με το σημείο εφαρμογής της φόρτισης. Αν αυξηθεί κι αλλο ο λόγος αναλογίας τότε δημιουργούνται μη υπαρκτα σχήματα. Είναι χαρακτηριστικό οτι αν αυξηθεί ο λόγος λ παραπάνω απο το βέλτιστο τα σχήματα που δημιουργούνται δεν είναι κατασκευάσιμα οπως διαφένεται χαρακτηριστικά στην περίπτωση του λ=1. Ειναι δεδομένο λοιπόν, αφού αλλάζει η τοπολογία ανάλογα με το λόγο λ, θα αλλάζει και το βάρος της κατασκευής.

Μετα απο πειράματα βρέθηκε οτι το βέλτιστο σχήμα δημιουργείται όταν ο λόγος λ=2/3. Να σημειωθεί οτι και σ αυτήν την περίπτωση δεν παίζει ιδιαίτερο ρόλο για τον αλγόριθμο ο αριθμός των βασικών δομικών μονάδων που θα διακριτοποιηθεί η αρχική πλάκα, δηλαδή η δομή και το βάρος της βελτιστοποιημένης κατασκευής δεν εξαρτάται απο τον αριθμό των στοιχείων όπως φαίνεται και στο Σχήμα 4.19.

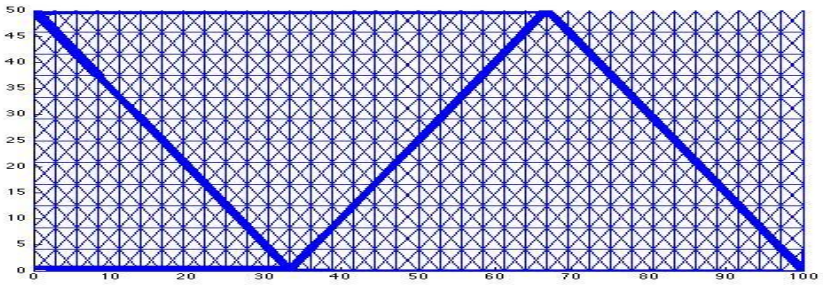
α)



β)



γ)



Σχήμα 4.19: Βέλτιστες κατασκευές με λόγο αναλογίας λ=2/3 με πλέγμα α) 6X2 β)18X6γ)36X12

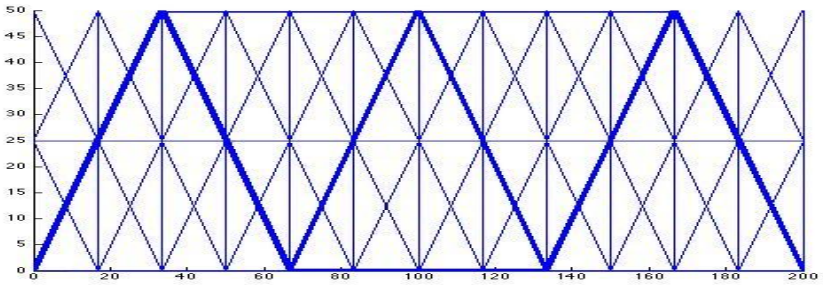
Οπως έχει αναφερθεί και προηγουμένως ο λόγος αναλογίας λ δίνεται απο την σχέση (4.9).Έτσι λοιπόν με αυτά τα δεδομένα ο λόγος αναλογίας για την ολόκληρη αμφιέριστη δοκό αναμένουμε να είναι:

$$\lambda_{MBB}=2\lambda_{half\text{-}MBB} \tag{4.10}$$

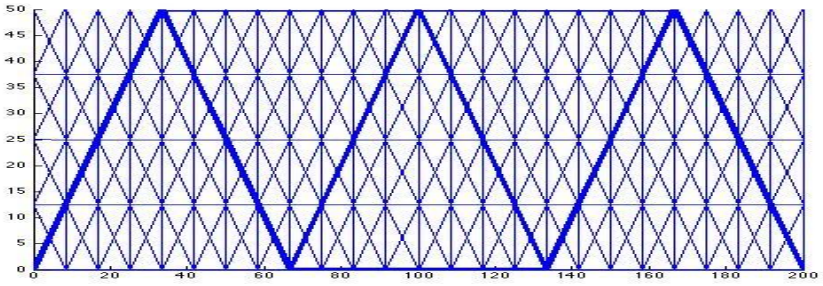
για ίδιο αριθμό χρησιμοποιούμενων δομικών διακριτών μονάδων (nelx,nely) άφου η ολόκληρη αμφιέριστη δοκός έχει διπλάσιο μήκος σε σχέση με την μισή.

Πράγματι το βέλτιστο στην αμφιέριστη βρίσκεται για λ=4/3 (Σχήμα 4.20).

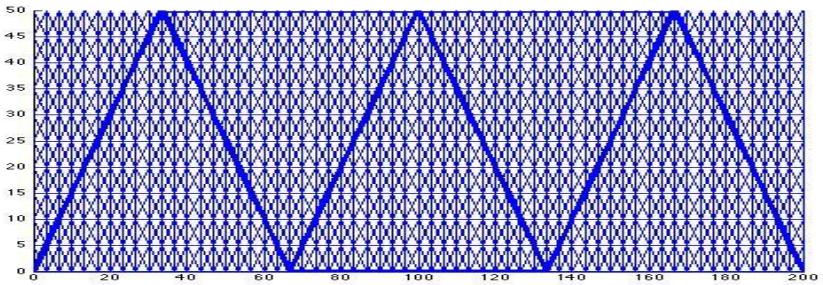
α)



β)



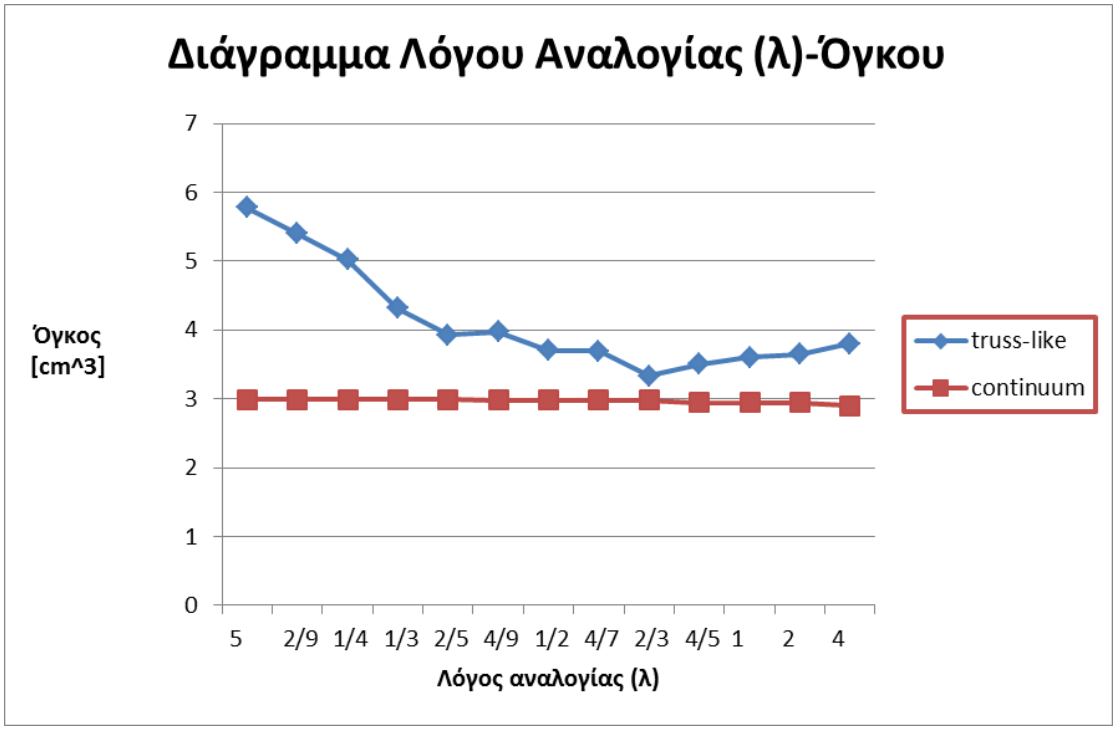
γ)



Σχήμα 4.20: Βέλτιστες κατασκευές με λόγο αναλογίας λ=4/3 με πλέγμα α) 12Χ2 β)24Χ4γ)60Χ10

Έτσι λοιπόν, επιβεβαιώνεται και η ισοδυναμία των προβλημάτων της ολόκληρης και της μισής αμφιέριστης δοκού.

Παρακάτω παρατίθεται το διάγραμμα (Σχήμα 4.21) του τελικού όγκου της βελτιστοποιημένης κατασκευής της μισής αμφιέριστης πλάκας σε σχέση με το λόγο αναλογίας των διαστάσεων της βασικής διακριτής μονάδος.

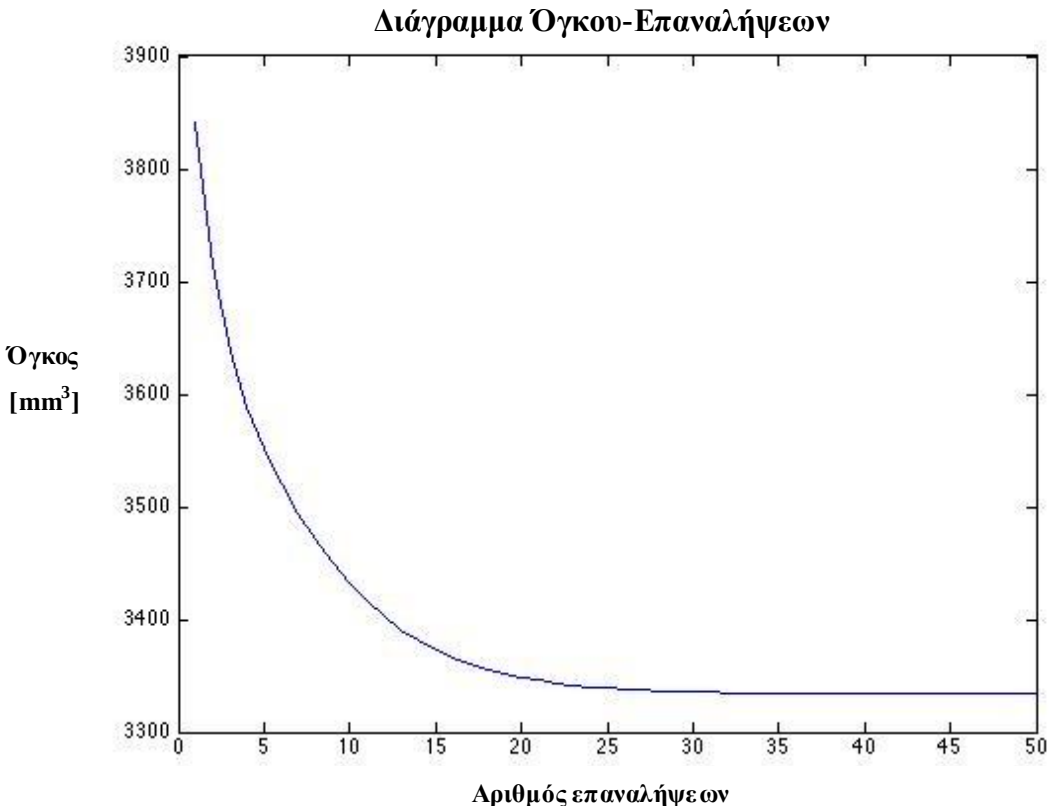


Σχήμα 4.21: Διάγραμμα όγκου-λόγου αναλογίας λ συνεχής και δικτυωτής κατασκευής

Είναι εμφανές ότι το ελάχιστο της αντικειμενικής συνάρτησης βρίσκεται για λ=2/3 με τελικό όγκο 3300mm^3. Επίσης στο Σχήμα 4.21 εμφανίζεται και ο όγκος του συνεχούς μέσου μετα από βελτιστοποίηση με τη μέθοδο του σχεδιασμού πλήρους έντασης . Όπως απορρέει από το διάγραμμα παρατηρούμε ότι το συνεχές μέσο είναι σχεδόν ανεξάρτητο από το λόγο αναλογίας της δομικής μονάδας λ.

Το βέλτιστο σχήμα του συνεχούς μέσου έχει τελικό όγκο 2940 mm^3. Άρα, η βελτιστοποίηση του συνεχούς μέσου είναι καλύτερη ακόμα και για το σωστό λόγο αναλογίας. Παρόλα αυτά η διαφορά αυτή είναι πλαστή καθώς δημιουργείται λόγω των επικαλύψεων των δοκών που στην πραγματικότητα δεν υπάρχουν.

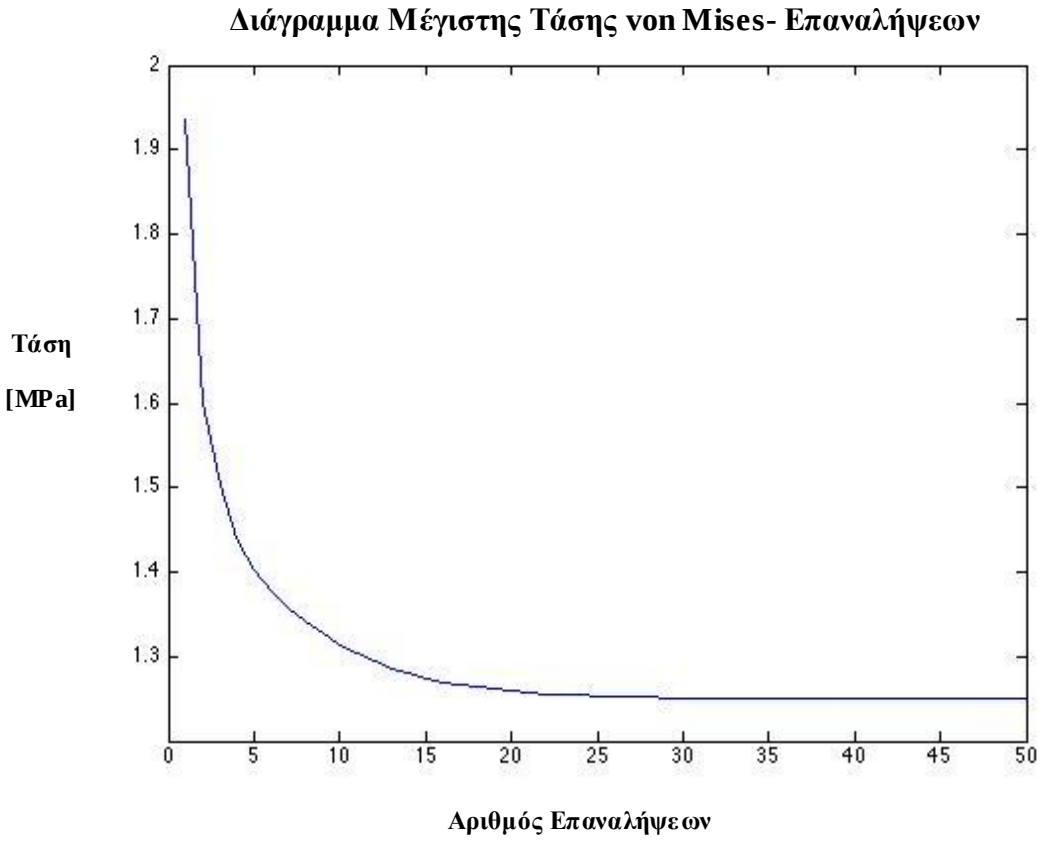
Όπως και στα προηγούμενα παραδείγματα διενεργήθηκε διερεύνηση του τρόπου σύγκλισης στο ελάχιστο τόσο της αντικειμενικής συνάρτησης (Σχήμα 4.22) όσο και του περιορισμού (Σχήμα 4.23).



Σχήμα 4.22: Διάγραμμα πορείας σύγκλισης της αντικειμενικής συνάρτησης

Στο Σχήμα 4.22 παρατηρούμε μια κατάσταση όμοια με αυτή του συνεχούς μέσου. Η αντικειμενική συνάρτηση συγκλίνει εκθετικά στο ελάχιστο. Εν αντιθέσει με τα προηγούμενα διαγράμματα η αντικειμενική συνάρτηση συγκλίνει πιο αργά. Παρόλα αυτά η συνάρτηση παρουσιάζει πολύ μεγάλη ομαλότητα με συνεχή μείωση της συνάρτησης, κάτι που πιστοποιεί την σταθερότητα της μεθόδου.

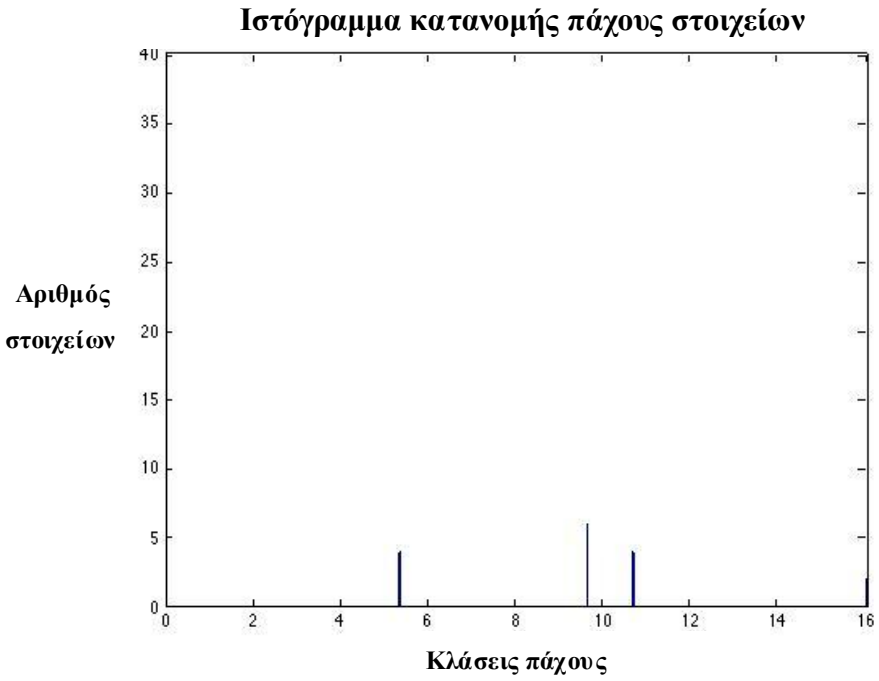
Ενδιαφέρον παρουσιάζει η μεταβολή της μέγιστης ορθής τάσης κατά την διάρκεια των επαναλήψεων όπως και στην βελτιστοποίηση συνεχούς μέσου.



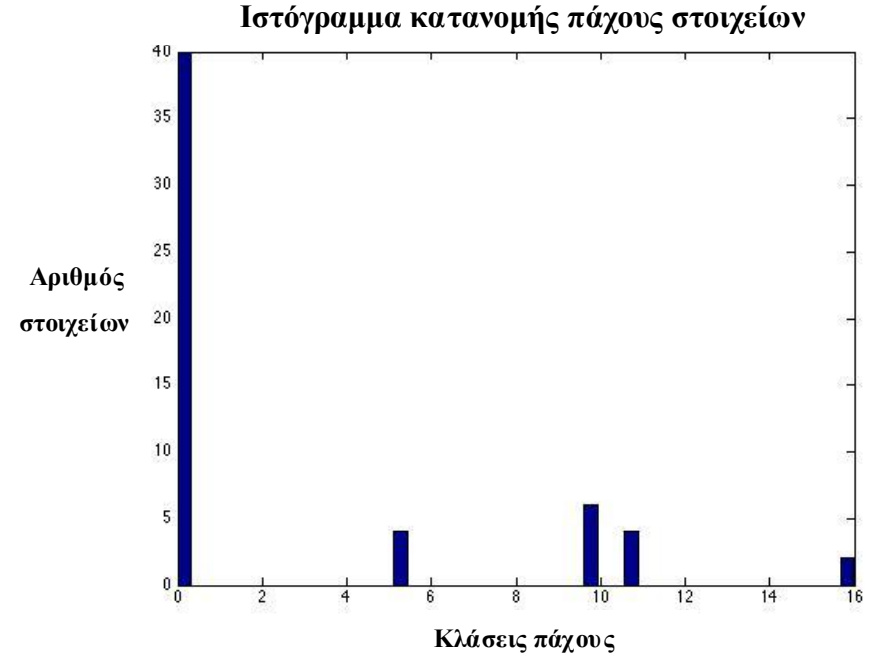
Σχήμα 4.23: Διάγραμμα πορείας μέγιστης τάσης von Mises

Από το Σχήμα 4.23 διαφαίνεται ότι η μείωση της μέγιστης τάσης είναι συνεχείς χωρίς διακυμάνσεις κάτι που δεν είχε παρατηρηθεί στα προηγούμενα παραδείγματα. Αυτή η ομαλότητα επήλθε λόγω της πιο αργής μείωσης της αντικειμενικής συνάρτησης. Η αργή μείωση του όγκου οδηγεί σε μικρές αλλαγές στις διατομές των ράβδων. Έτσι λοιπόν δεν δίνεται η δυνατότητα στην κατασκευή να αυξήσει την τάση σε κανένα σημείο της κατά την διάρκεια των επαναλήψεων. Προφανώς μόλις οι τάσεις έχουν καταλήξει στην επιτρεπόμενη έχουμε σχεδιασμό πλήρους έντασης και συνεπώς βέλτιστη κατασκευή.

Τέλος σ' αυτό το παράδειγμα το βέλτιστο σχήμα παρουσιάζει μια αυξημένη ομοιογένεια ως προς τις δοκούς που χρησιμοποιεί για τον σχηματισμό του. Ειδικότερα στα παρακάτω διαγράμματα (Σχήμα 4.24 και Σχήμα 4.25) παρατηρείται ότι χρησιμοποιούνται δοκοί με πολύ μικρή διατομή($<1\,mm^2$) που δεν είναι ενεργές στο βέλτιστο σχήμα και ενεργές δοκούς διατομών 5.5,9,5,10.8 και 16 mm^3.

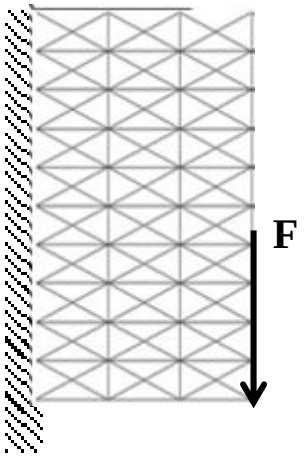


Σχήμα 4.24: Ιστόγραμμα κατανομής πάχους στοιχείων με 1000 κλάσεις



Σχήμα 4.25: Ιστόγραμμα κατανομής πάχους στοιχείων με 30 κλάσεις

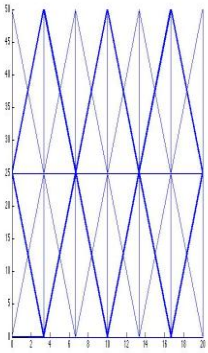
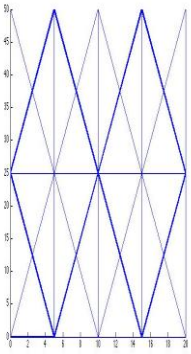
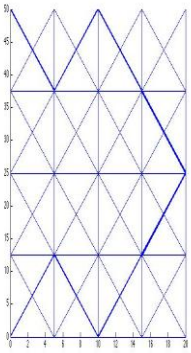
4.3.4 Δικτυωτός Κοντός Πρόβολος

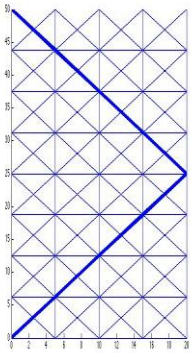
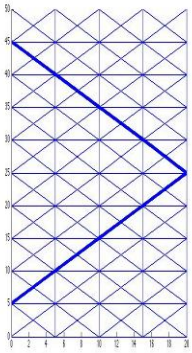
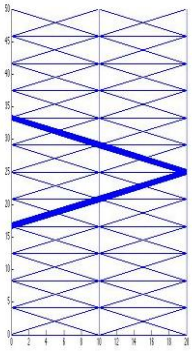


Σχήμα 4.26: Σχηματική απεικόνιση δικτυωτού κοντού προβόλου

Σ αυτό το παράδειγμα έγινε εφαρμογή του κώδικα σε δικτύωμα του παραπάνω σχήματος (Σχήμα 4.26) που προσομοιάζει ορθωγωνικό κοντό πρόβολο. Το παράδειγμα αυτό πραγματοποιήθηκε ώστε να εξακριβώσουμε την σταθερότητα του κώδικα σε άλλου είδους σχήματα. Οι ολικές διαστάσεις μήκους, πλάτους του δικτυώματος ορίστηκαν είναι Lx=20mm Ly=50 mm. Οι αρχικές διατομές των δοκών του δικτυώματος ορίστηκε στο $1mm^2$. Η ανοχή για το κριτήριο σύγκλισης τέθηκε 0,001MPa. Η μέγιστη επιτρεπόμενη τάση ορίστηκε στα 1.35MPa. Όπως και στα προηγούμενα παραδείγματα αυτής της ενότητας σκοπός είναι να ευρεθεί ο κατάλληλος λόγος αναλογίας λ ώστε να καταλήξουμε στην βέλτιστη δυνατή κατασκευή. Παρακάτω παρατίθενται πίνακας (Πίνακας 4.4) με τα βελτιστοποιημένα σχήματα για διάφορους λόγους αναλογίας λ (aspect ratio).

Πίνακας 4.4: Βελτιστοποιημένα σχήματα για διάφορους λόγους αναλογίας

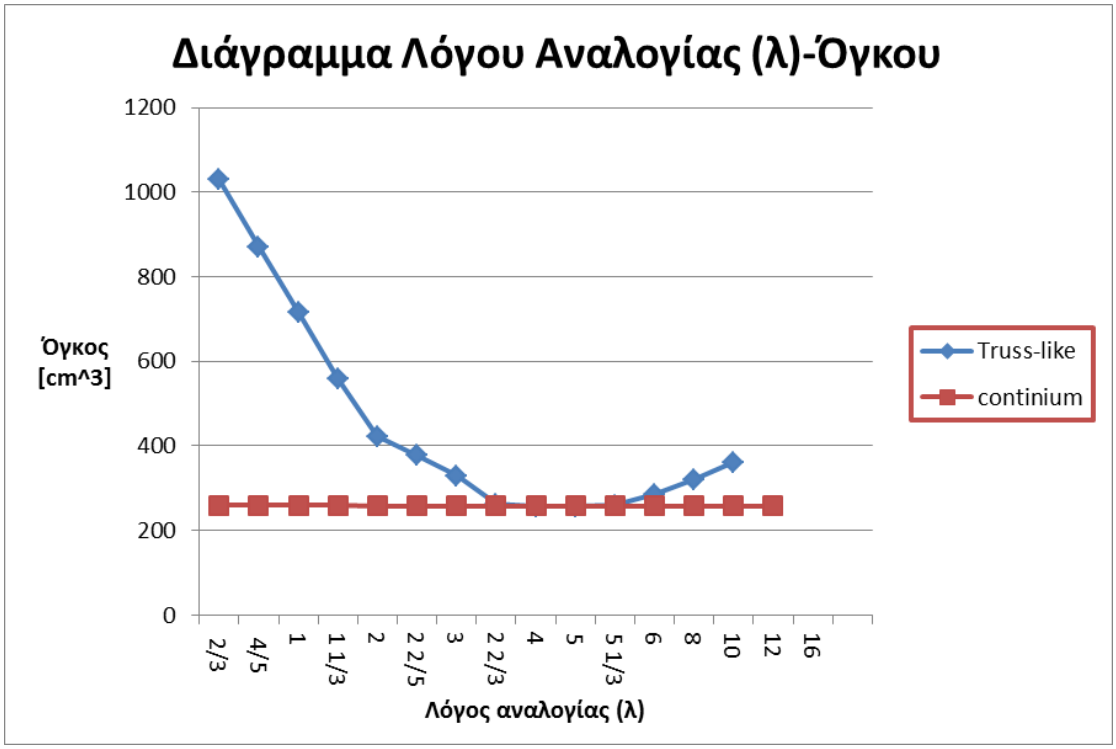
Λόγος Αναλογίας	**Βελτιστοποιημένη Κατασκευή**
λ=2/3	
λ=1	
λ=2	

Λόγος Αναλογίας	**Βελτιστοποιημένη Κατασκευή**
λ=4	
λ=5	
λ=8	

Όπως αναμενόταν και σ αυτό το παράδειγμα η εξάρτηση του τελικού σχήματος απο το λόγο αναλογίας είναι τεράστιος. Ειδικότερα, από τον παραπάνω πίνακα (Πίνακας 4.4) βλέπουμε οτι για μικρούς λόγους λ, ο αλγόριθμος δημιουργεί συνεχόμενους ρόμβους. Αυξάνωντας το λόγο λ μειώνονται και οι σχηματιζόμενες δομές και ετσι για

μεγαλύτερα λ δημιουργούνται μόνο δύο δοκοί οι οποίοι συνδέουν τις στηρίξεις με το σημείο εφαρμογής της φόρτισης. Αν αυξηθεί κι αλλο ο λόγος αναλογίας τότε οι δοκοί συνδέουν τις στηρίξεις που βρίσκονται κοντά στον άξονα συμμετρίας της κατασκευής. Ειναι δεδομένο λοιπόν αφού αλλάζει η τοπολογία ανάλογα με το λόγο λ, θα αλλάζει και το βάρος της κατασκευής.

Μετα απο πειράματα βρέθηκε οτι το βέλτιστο σχήμα δημιουργείται όταν ο λόγος λ=5. Να σημειωθεί οτι και σ' αυτήν την περίπτωση δεν παίζει ιδιαίτερο ρόλο για τον αλγόριθμο ο αριθμός των βασικών δομικών μονάδων που θα διακριτοποιηθεί η αρχική πλάκα, δηλαδή η δομή και το βάρος της βελτιστοποιημένης κατασκευής δεν εξαρτάται απο τον αριθμό των στοιχείων.
Παρακάτω παρατίθεται το διάγραμμα (Σχήμα 4.27) του τελικού όγκου της βελτιστοποιημένης κατασκευής σε σχέση με το λόγο αναλογίας των διαστάσεων της βασικής διακριτής μονάδος.



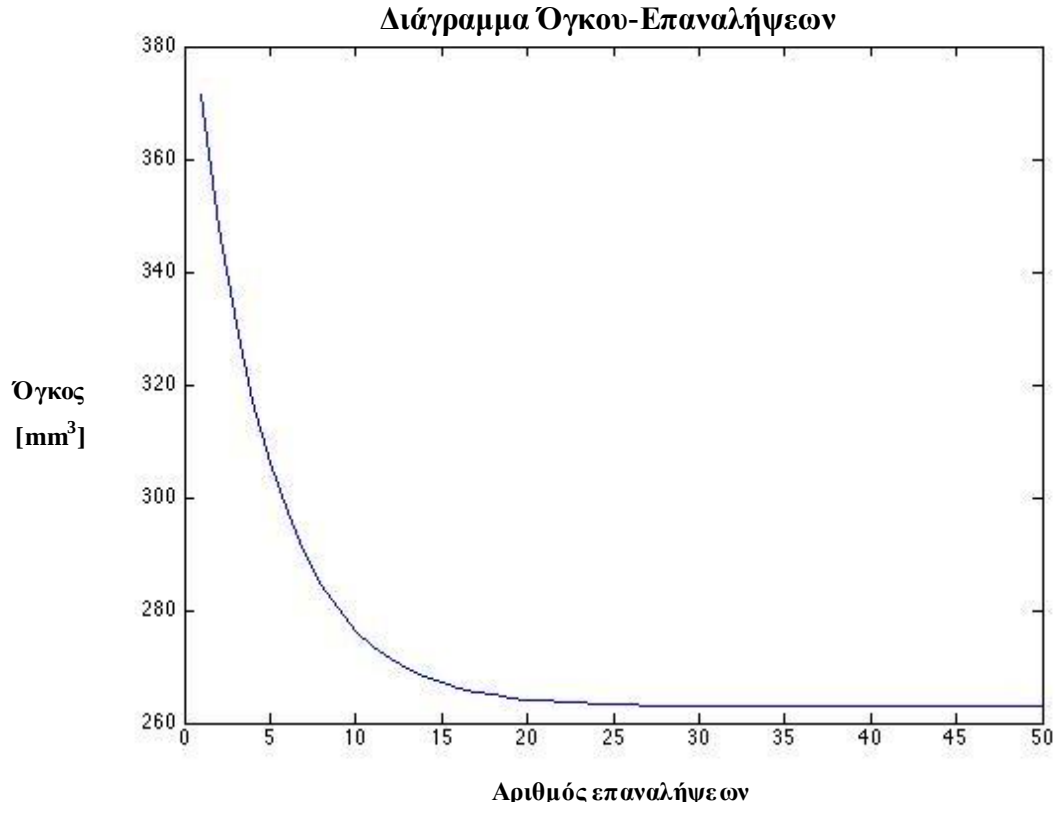
Σχήμα 4.27: Διάγραμμα όγκου-λόγου αναλογίας λ συνεχής και δικτυωτής κατασκευής

Το ελάχιστο της αντικειμενικής συνάρτησης βρίσκεται για λ=5 με τελικό όγκο 256mm^3. Επίσης στο διάγραμμα εμφανίζεται και ο όγκος του συνεχούς μέσου μετα από βελτιστοποίηση με τη μέθοδο του σχεδιασμού πλήρους έντασης . Όπως απορρέει από το διάγραμμα παρατηρούμε ότι το συνεχές μέσο είναι σχεδόν ανεξάρτητο από το

λόγο αναλογίας της δομικής μονάδας λ. Έτσι λοιπόν διαφαίνεται η πρακτική διαφορά της συμπεριφοράς των δύο δομικών μονάδων.

Εκτός αυτού το βέλτιστο σχήμα του συνεχούς μέσου έχει τελικό όγκο 258,67mm^3. Έτσι λοιπόν το βέλτιστο σχήμα που προκύπτει από την δικτυωτή κατασκευή είναι οριακά καλύτερη από αυτήν του συνεχούς μέσου. Κάτι τέτοιο δεν είναι περίεργο, παρόλο που δεν συνέβαινε στα προηγούμενα παραδείγματα καθώς το βέλτιστο σχήμα αποτελείται μόνο από δύο δοκούς συνεπώς οι επικαλύψεις είναι εξαιρετικά περιορισμένες καθώς εντοπίζονται μόνο σε ένα σημείο.

Με σκοπό την διερεύνηση του τρόπου σύγκλισης στο ελάχιστο της αντικειμενικής συνάρτησης, που στην περίπτωση μας είναι το βάρος, σχεδιάστηκαν τα παρακάτω διαγράμματα (Σχήμα 4.28 και Σχήμα 4.29) που δείχνουν τις τιμές του βάρους και τάσης σε κάθε επανάληψη μέχρι την σύγκλιση.

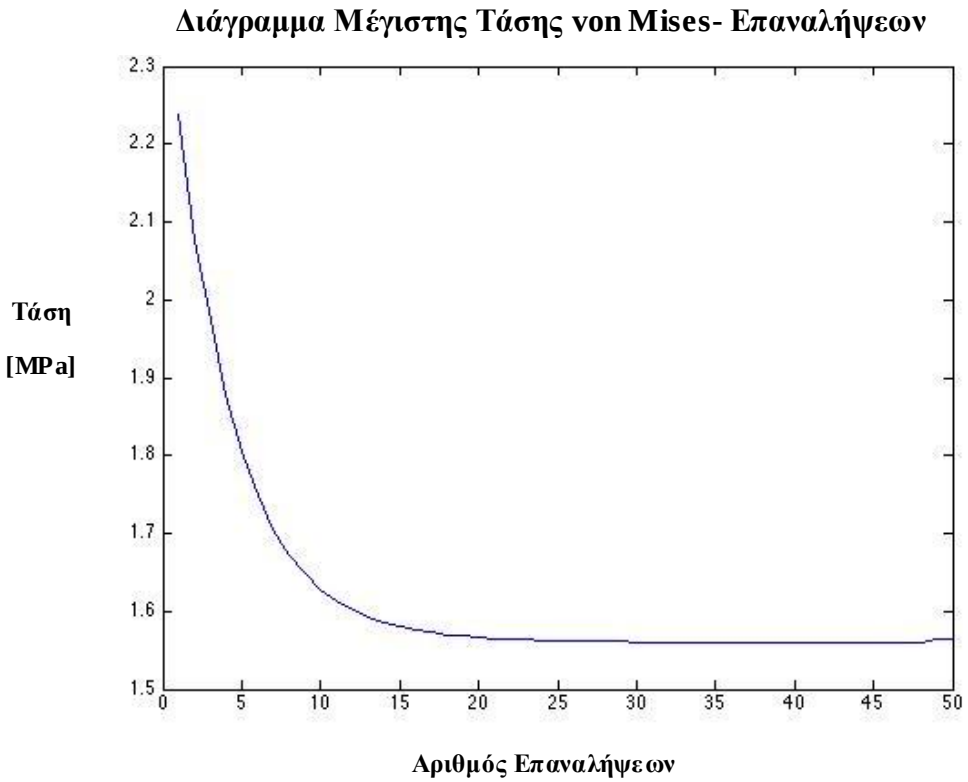


Σχήμα 4.28 Διάγραμμα πορείας σύγκλισης της αντικειμενικής συνάρτησης

Στο διάγραμμα αυτό παρατηρούμε μια κατάσταση όμοια με αυτή του συνεχούς μέσου. Η αντικειμενική συνάρτηση συγκλίνει εκθετικά στο ελάχιστο. Και σ αυτήν την περίπτωση η αντικειμενική συνάρτηση συγκλίνει πιο αργά. Επίσης η συνάρτηση

παρουσιάζει πολύ μεγάλη ομαλότητα με συνεχή μείωση της συνάρτησης, κάτι που πιστοποιεί την σταθερότητα της μεθόδου.

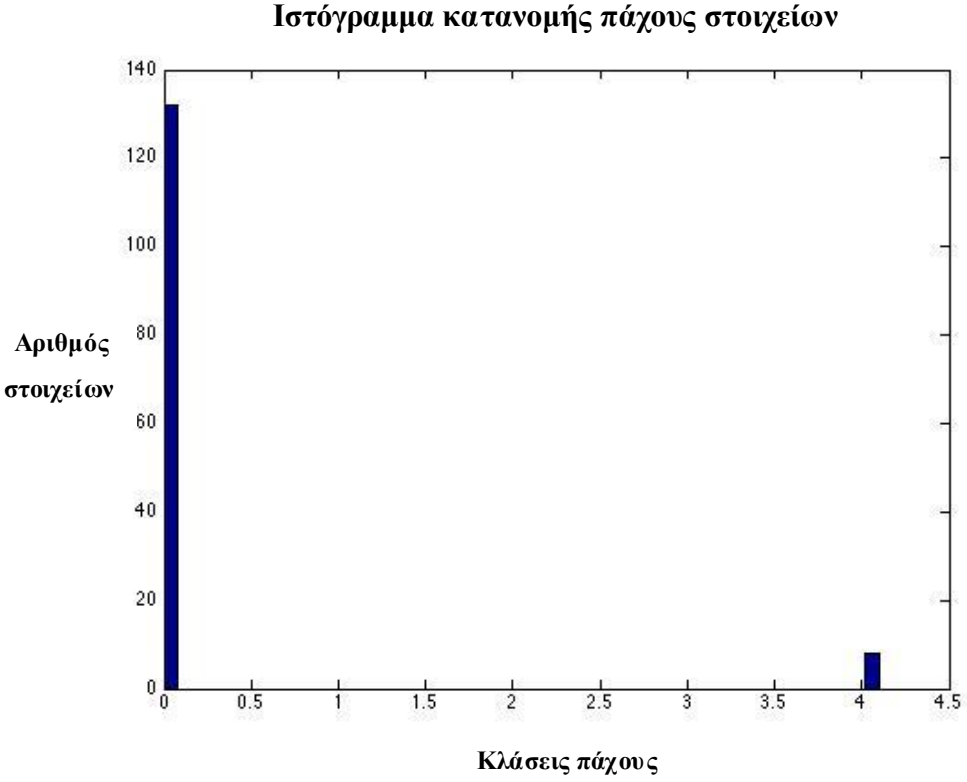
Ενδιαφέρον παρουσιάζει η μεταβολή της μέγιστης ορθής τάσης κατά την διάρκεια των επαναλήψεων όπως και στην βελτιστοποίηση συνεχούς μέσου.



Σχήμα 4.29:Διάγραμμα πορείας μέγιστης τάσηςvon Mises

Παρατηρείται από το Σχήμα 4.29 ότι η μείωση των τάσεων είναι συνεχείς χωρίς διακυμάνσεις κάτι που όπως αναλύθηκε στο προηγούμενο παράδειγμα οφείλεται στην αργή μείωσης της αντικειμενικής συνάρτησης. Η αργή μείωση του όγκου οδηγεί σε μικρές αλλαγές στις διατομές των ράβδων και έτσι δεν δίνεται η δυνατότητα στην κατασκευή να αυξήσει την τάση σε κανένα σημείο της κατά την διάρκεια των επαναλήψεων. Προφανώς μόλις οι τάσεις έχουν καταλήξει στην επιτρεπόμενη έχουμε σχεδιασμό πλήρους έντασης και συνεπώς βέλτιστη κατασκευή.

Τέλος σ' αυτό το παράδειγμα το βέλτιστο σχήμα αποτελείται μόνο από 2 ράβδους ίδιου πάχους έτσι λοιπόν η κατασκευή είναι φθηνή και εύκολα κατασκευάσιμη (Σχήμα 4.30).



Σχήμα 4.30: Ιστόγραμμα κατανομής παχών στοιχείων με 30 κλάσεις

5

Βελτιστοποίηση δικτυωτών κατασκευών υπό περιορισμό μετατόπισης

Στο προηγούμενο κεφάλαιο παρουσιάστηκε η μέθοδος FSD για βελτιστοποίηση δικτυωτών κατασκευών με περιορισμό τάσης. Σύμφωνα, με τη μέθοδο ο αναγωγικός τύπος που χρησιμοποιείται είναι:

$$A_{new} = A_{old}(1 + \frac{\sigma - \sigma_{allow}}{\sigma_{allow}}) \quad (5.1)$$

Όπου A_{new} το διάνυσμα των βελτιωμένων επιφανειών των διατομών της κατασκευής και A_{old} οι παλιές διατομές. Προφανώς η μέθοδος είναι ιδιαιτέρως απλή, ωστόσο, όπως αποδείχθηκε στην προηγούμενη ενότητα, απαντά επαρκώς στο πρόβλημα βελτιστοποίησης με περιορισμό τάσης και όχι στο πρόβλημα βελτιστοποίησης με περιορισμό μετατόπισης.

5.1 Η μέθοδος Fully Utilized Design (FUD)

Όταν υπάρχει ένα πρόβλημα με μία εφαρμοζόμενη δύναμη, αφού διενεργηθεί βελτιστοποίηση τάσης μέσω της μεθόδου FSD και η μέγιστη μετατόπιση της βελτιστοποιημένης κατασκευής u_{max}^{FSD} είναι μεγαλύτερη από μία επιτρεπτή τιμή u_o, ο

ευκολότερος τρόπος να εκπληρωθεί ο περιορισμός μετατόπισης είναι η χρήση ενός συντελεστή ομοιόμορφης κλιμάκωσης (uniform scaling factor) για όλα τα μέλη της κατασκευής έτσι ώστε:

$$A_i^{FUD} = A_i^{FSD}\left(1 + \frac{u_{max}^{FSD} - u_0}{u_0}\right) \quad (5.2)$$

Δηλαδή, κάθε ράβδος του δικτυώματος που προέκυψε από τη μέθοδο FSD πολλαπλασιάζεται με τον λόγο της μέγιστης μετατόπισης που εμφανίζεται στην FSD μέθοδο προς τη μέγιστη επιτρεπόμενη μετατόπιση που ορίζεται (Makris, Provatidis, 2003). Η μέθοδος αυτή ονομάζεται Fully Utilized Design (FUD).

Ο παραπάνω τύπος που αποτελεί τη μέθοδο FUD δεν απαιτεί επαναλήψεις, παρά μόνο έναν απλό πολλαπλασιασμό όλου του σχήματος που έχει προκύψει από την FSD.

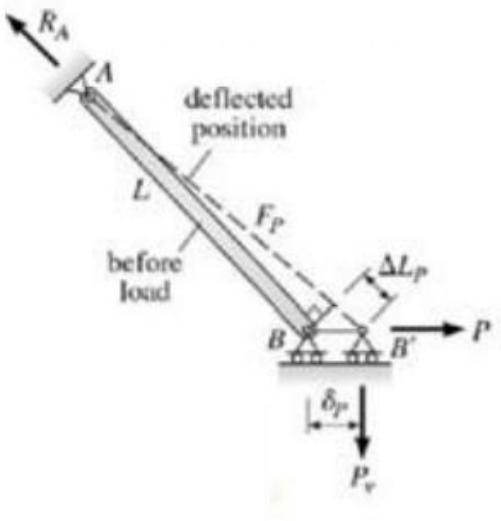
Παρόλα αυτά η μέθοδος δημιουργεί υπερδιαστασιολογήσεις και δε δημιουργεί το βέλτιστο σχήμα. Αυτό, εκτός της αυστηρής μαθηματικής απόδειξης που μπορεί να αναπτυχθεί, μπορεί να αιτιολογηθεί και φυσικά. Ειδικότερα, με την FUD αυξάνονται όλες οι διατομές της κατασκευής με αποτέλεσμα τόσο οι ενεργές όσο και οι παθητικές δοκοί, να αυξάνουν τις διατομές τους. Ως ενεργός δοκός θεωρείται η δοκός που η διατομή της είναι μεγάλη και φέρει μεγάλες αξονικές δυνάμεις και το αντίθετο αντίστοιχα για τις παθητικές δοκούς. Έτσι λοιπόν για να φτάσουμε στο βέλτιστο σχήμα πρέπει να είμαστε σε θέση να εντοπίσουμε τις ενεργές και παθητικές διατομές, και μάλιστα το «πόσο» ενεργή είναι η κάθε δοκός, ώστε να ενισχύονται οι διατομές της κάθε ράβδου ανισόποσα.

5.2 Θεώρημα μοναδιαίου φορτίου

Σύμφωνα με τη δημοσίευση του Μακρή και Προβατίδη (2003) ένας τρόπος για τον εντοπισμό των ενεργών διατομών είναι μέσω του θεωρήματος μοναδιαίου φορτίου (Unit Load Theorem). Το θεώρημα του μοναδιαίου φορτίου χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό των μετατοπίσεων και μια απλή απόδειξη εμφανίζεται παρακάτω (M. L. Gambhir, 2011)

Ας υποτεθεί ένα δικτύωμα που αποτελείται από μια ράβδο και ασκείται σ' αυτήν

το φορτίο P.



Σχήμα 5.1: Δικτύωμα μιας ράβδου που ασκείται «πραγματικό» φορτίο

Το εξωτερικό έργο της πραγματικής δύναμης P δίνεται από τον τύπο:

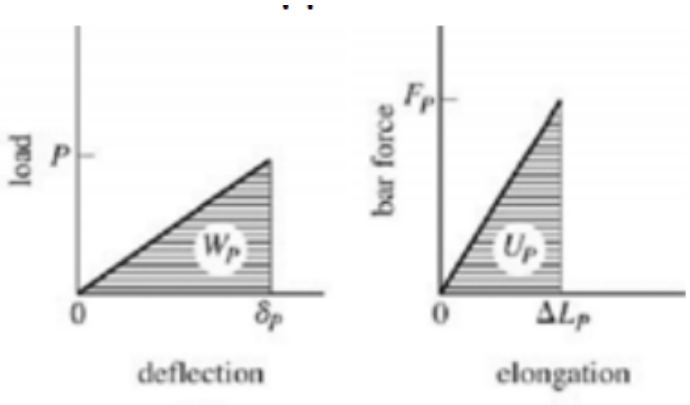
$$W_p = \frac{1}{2} P \delta p \tag{5.3}$$

Όπου δp, όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.2, η μετατόπιση κατά την διεύθυνση του φορτίου.

Η εσωτερική ενέργεια δίνονται από τον τύπο:

$$U_P = \frac{1}{2} F_P \Delta L_p \tag{5.4}$$

Όπου F_P η αξονική δύναμη της ράβδου και ΔL_p η επιμήκυνση της ράβδου.

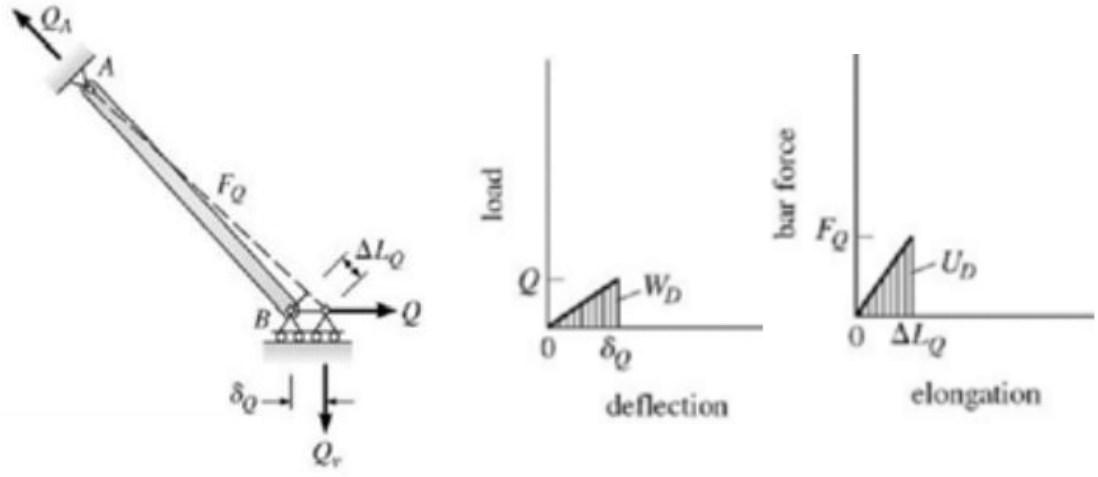


Σχήμα 5.2: Γραφική αναπαράσταση του εξωτερικού έργου και της εσωτερικής ενέργειας του πραγματικού φορτίου

Προφανώς, $W_P=U_P$ δηλαδή

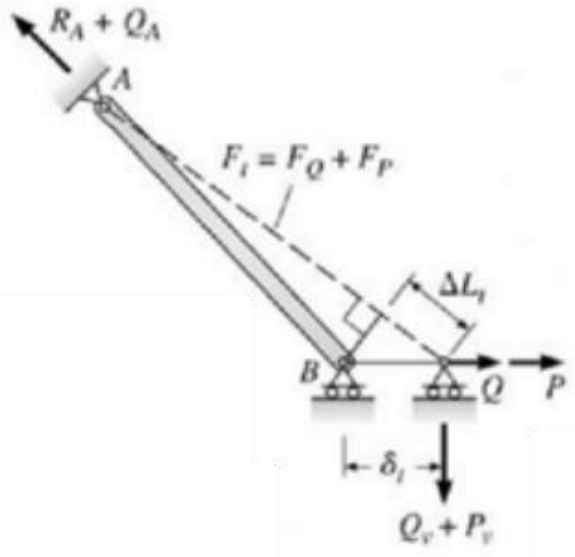
$$P \delta p = F_P \Delta L_p \tag{5.5}$$

Αν στο σημείο υπολογισμού της μετατόπισης εφαρμοστεί ένα εικονικό φορτίο Q που θα έχει την ίδια κατεύθυνση με το πραγματικό φορτίο τότε προκύπτουν οι αντίστοιχες εκφράσεις γι' αυτό το φορτίο, δηλαδή τα αντίστοιχα έργα και οι αντίστοιχες ενέργειες παραμόρφωσης.



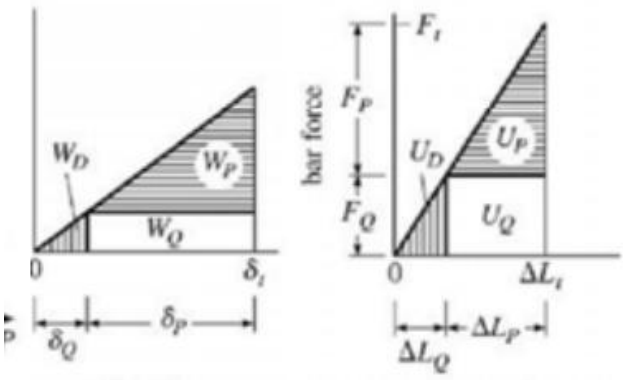
Σχήμα 5.3 Δικτύωμα μίας ράβδου που ασκείται «εικονικό» φορτίο και η αντίστοιχη εσωτερική και εξωτερική ενέργεια

Αν υποτεθεί ότι τα δύο φορτία εφαρμόζονται μαζί τότε ισχύει:



Σχήμα 5.4: Δικτύωμα μίας ράβδου που ασκείται και το «εικονικό» και «πραγματικό» φορτίο

Συνεπώς, θα δημιουργείται και η αντίστοιχή ολική ενέργεια όπως εμφανίζεται από τα γραφήματα του παρακάτω σχήματος (Σχήμα 5.5).



Σχήμα 5.5: Γραφική αναπαράσταση του εξωτερικού έργου και της εσωτερικής ενέργειας, όταν ασκούνται στη ράβδο το εικονικού και το πραγματικό φορτίου

Είναι προφανές ότι W_Q=U_Q. Όμως,

$$W_Q = Q\delta p \tag{5.6}$$

Και

$$U_Q = F_Q \Delta L_P \tag{5.7}$$

Άρα,για μια ράβδο ισχύει ότι

$$Q\delta p = F_Q \Delta L_P \tag{5.8}$$

Σε ένα δικτύωμα λοιπόν χωρίς βλάβη της γενικότητας θα ισχύει ότι:

$$\sum Q\delta p = \sum F_Q \Delta L_P \tag{5.9}$$

Η επιμήκυνση από τη Μηχανική, μπορεί να εκφραστεί βάσει του τύπου:

$$\Delta L_P = \frac{F_P L}{AE} \tag{5.10}$$

Άρα θέτοντας το αυθαίρετο φορτίο Q ίσο με 1 τότε προκύπτει η μορφή:

$$\sum \delta p = \sum \frac{F_Q F_P L}{AE} \tag{5.11}$$

Έτσι λοιπόν, αν θεωρηθεί ένα δικτύωμα, η μετατόπιση σ' ένα κόμβο του μπορεί να υπολογιστεί ως:

$$u = \sum_{i=1}^{N} u_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{F_i^Q F_i^P L}{E A_i} \tag{5.12}$$

Κάθε όρος της παραπάνω σχέσης δηλώνει απ' τη μια την αριθμητική τιμή της μετατόπισης της ι-οστης ράβδου και απ' την άλλη την εικονική ενέργεια που αποθηκεύεται σε αυτήν όταν ασκείται το μοναδιαίο φορτίο. Η εικονική ενέργεια προς τον όγκο της ι-οστής ράβδου ονομάζεται πυκνότητα εικονικής ενέργειας και ορίζεται ως:

$$U_i = \frac{u_i}{V_i} = \frac{F_i^Q F_i^P}{E A_i^2} \tag{5.13}$$

5.3 Ανάπτυξη αναγωγικού τύπου βελτιστοποίησης

Στην περίπτωση ισοστατικού δικτυώματος οι δυνάμεις F_i^Q και F_i^P παραμένουν ανεπηρέαστες, με άλλα λόγια δεν επηρεάζονται από την επιφάνεια των διατομών A_i. Έτσι λοιπόν, βάσει της Σχέσης (5.12) μπορεί να γραφτεί

$$u_i = \frac{c_i}{A_i} \tag{5.14}$$

με

$$c_i = \frac{F_i^Q F_i^P L}{E} \tag{5.15}$$

Με μερική παραγώγιση της ανωτέρω σχέσης προκύπτει:

$$\frac{\partial u_i}{\partial A_i} = -\frac{c_i}{A_i^2} \tag{5.16}$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις δυο παραπάνω εξισώσεις:

$$\frac{du_i}{u_i} = -\frac{dA_i}{A_i} \tag{5.17}$$

Η Σχέση (5.17) εξισώνει τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού της διατομής i με τον ρυθμό μεταβολής της συμβαλλόμενης μετατόπισης. Αυτή η μετατόπιση είναι ίση με την εικονική ενέργεια όπως αποδείχθηκε παραπάνω. Χρησιμοποιώντας μικρές πεπερασμένες διαφορές Δu_i και ΔA_i ώστε να παραταθεί η ισχύς της προσέγγισης ισχύει:

$$\frac{\Delta u_i}{u_i} = -\frac{\Delta A_i}{A_i} \tag{5.18}$$

Που σε μορφή αναδρομικού τύπου μεταφράζεται ως:

$$A_i^{new} = A_i^{old}(1 + \frac{\Delta u_i}{u_i}) \tag{5.19}$$

Εισάγοντας σε αυτόν τον αναδρομικό τύπο τη μέγιστη επιτρεπόμενη μετατόπιση προκύπτει:

$$A_i^{new} = A_i^{old}(1 + \frac{u-u_0}{u_0}) \tag{5.20}$$

Ωστόσο η συγκεκριμένη λύση δε θα οδηγήσει στο βέλτιστο, καθώς δεν μπορούν να εντοπιστούν οι ενεργές διατομές όπως στην μέθοδο FUD. Για την εύρεση των ενεργών διατομών θα πρέπει να εισαχθεί ένα βήμα X σε κάθε επανάληψη το οποίο να «αναγνωρίζει» τις ενεργές διατομές. Αυτή η αναγνώριση επέρχεται μέσω του συντελεστή n ο οποίος εντοπίζει την ενεργειακή συνεισφορά της κάθε ράβδου μέσω του θεωρήματος του μοναδιαίου φορτίου. Ειδικότερα, οι ράβδοι που παρουσιάζουν μεγάλη τιμή του U_i, θα πρέπει να παρουσιάζουν μεγαλύτερη κατανομή επιφάνειας σε κάθε επανάληψη εν αντιθέσει με τις ράβδους που παρουσιάζουν μικρή τιμή του U_i. Έτσι λοιπόν, ο συντελεστής n θα πρέπει να δείχνει τον συσχετισμό της ενέργειας της κάθε ράβδου σε σχέση με τη μέση ενεργειακή κατάσταση της κατασκευής. Έτσι λοιπόν, προκύπτει ότι :

$$n = \frac{U_i}{\bar{U}} = \frac{U_i}{(\frac{1}{N})\sum_{J=1}^{N}|U_j|} \tag{5.21}$$

Με τη βοήθεια αυτού του συντελεστή μπορούν να αναγνωριστούν οι ενεργές διατομές της κατασκευής. Ωστόσο, το βήμα X πρέπει να έχει τιμές αντίστοιχες με τον λόγο $\frac{u-u_0}{u_0}$. Έτσι λοιπόν, ο αναδρομικός τύπος παίρνει τη μορφή:

$$A_i^{new} = A_i^{old}(1 + \frac{u-u_0}{u_0} + \frac{u_{max}-u_0}{u_0}n) \tag{5.22}$$

Παρόλο που ο συγκεκριμένος τύπος έδωσε ικανοποιητικά αποτελέσματα, ο αλγόριθμος δεν ήταν ιδιαίτερα σταθερός, καθώς ο λόγος n στα πρώτα στάδια δεν παίρνει πολύ μεγάλες τιμές. Γι' αυτό το λόγο απαιτείται στα πρώτα στάδια το βήμα να είναι μικρό και στην συνέχεια πιο μεγάλο. Έτσι λοιπόν, ο τελικός αναδρομικός τύπος είναι:

$$A_i^{new} = A_i^{old}(1 + 0{,}01^{\frac{1}{\kappa}}.\frac{u-u_0}{u_0} + 0{,}01^{\frac{1}{\kappa}}\frac{u_{max}-u_0}{u_0}n) \tag{5.23}$$

Όπου κ, ο αύξων αριθμός της κάθε επανάληψης. Να σημειωθεί ότι μ' αυτούς τους συντελεστές $f=0.01^{1/k}$ επιτυγχάνεται η αργή αρχική εκκίνηση του αλγορίθμου και στη συνέχεια η εκθετική αύξησή του χωρίς ωστόσο να υπερβαίνει τη μονάδα.

5.4 Ο Αλγόριθμος

Έχοντας σχηματίσει, πλέον, την καρδία του αλγορίθμου βελτιστοποίησης ακολουθεί η περιγραφή του αλγορίθμου βελτιστοποίησης.

Βήμα 1: Εισαγωγή της προς βελτιστοποίηση κατασκευής. Ο αλγόριθμος συνέκλινε ανεξάρτητα από το αρχικό εμβαδό της κατασκευής. Στις αριθμητικές δοκιμές που παρουσιάζονται παρακάτω η εκκίνηση της μεθόδου έγινε από μια μικρή τιμή, συγκεκριμένα την ελάχιστη επιτρεπόμενη διατομή

Βήμα 2: Υπολογισμός των μετατοπίσεων του κάθε κόμβου καθώς επίσης και των αξονικών δυνάμεων F_i^P που δημιουργούνται λόγω της εφαρμογής του πραγματικού φορτίου P με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων.

Βήμα 3: Εντοπισμός του κόμβου που παρουσιάζει την μέγιστη μετατόπιση και εφαρμογή μοναδιαίας δύναμης Q στον κόμβο αυτό.

Βήμα 4: Υπολογισμός των αξονικών δυνάμεων F_i^Q που οφείλονται στο μοναδιαίο φορτίο

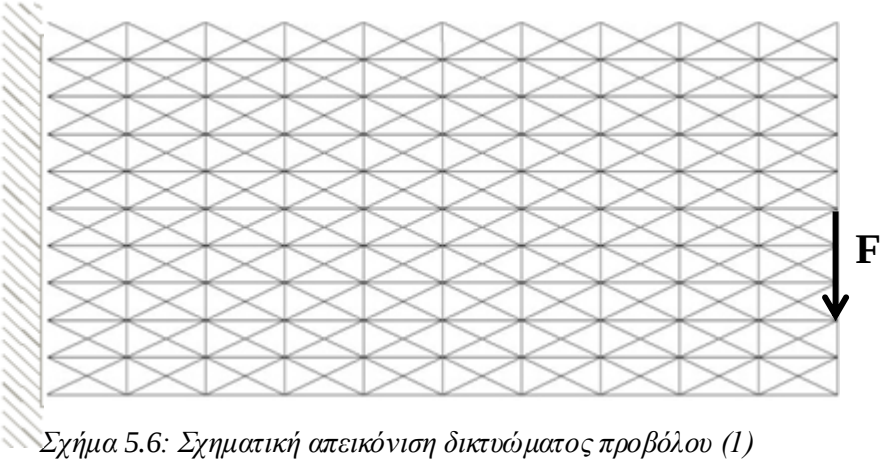
Βήμα 5: Υπολογισμός του συντελεστή n_i για κάθε ράβδο και εφαρμογή του αναδρομικού τύπου ανασχεδιασμού.

Τα βήματα 2-5 επαναλαμβάνονται μέχρι η μέγιστη κομβική μετατόπιση να είναι μικρότερη από τη μέγιστη επιτρεπόμενη.

5.5 Αξιολόγηση της μεθόδου σε δικτυωτές κατασκευές αναφοράς

Σε αυτή την ενότητα θα παρουσιαστεί η αριθμητική εφαρμογή της μεθόδου στα βασικά παραδείγματα αναφοράς που εφαρμόστηκαν και οι υπόλοιπες μέθοδοι. Οι κατασκευές που θα μελετηθούν είναι από υλικό με μέτρο ελαστικότητας E=210GPa και λόγο Poisson ν=0,3. Σ' όλα τα παραδείγματα ασκείται φορτίο F= 10N. Το ελάχιστο επιτρεπόμενο εμβαδόν τέθηκε στα $0{,}01\,\text{mm}^2$.

5.5.1 Δικτυωτός Πρόβολος (1)

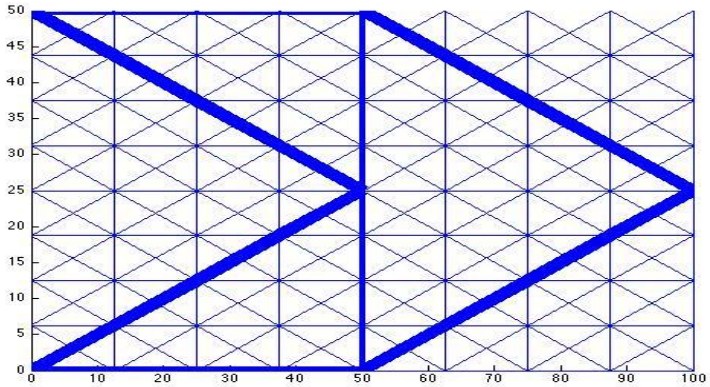


Σχήμα 5.6: Σχηματική απεικόνιση δικτυώματος προβόλου (1)

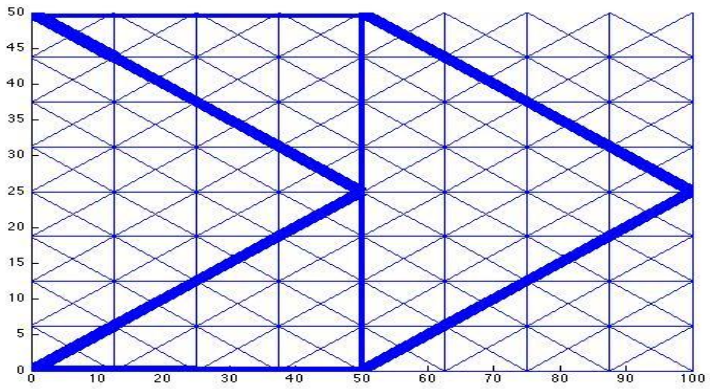
Σε αυτό το παράδειγμα έγινε εφαρμογή του κώδικα στο υπερστατικό δικτύωμα του παραπάνω σχήματος (Σχήμα 5.6). Οι κόμβοι της μίας πλευράς είναι πακτωμένοι ενώ το φορτίο ασκείται στη μέση της απέναντι πλευράς Οι ολικές διαστάσεις μήκους, πλάτους που ορίστηκαν είναι Lx=100mm, Ly=50mm, αντίστοιχα. Η μέγιστη επιτρεπόμενη κομβική μετατόπιση ορίστηκε στα 2 μm. Η διακριτοποίηση έγινε με λόγο αναλογίας λ=2.

Η επιλογή αυτή έγινε καθώς, όπως αποδείχθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο, κατά την εφαρμογή αλγορίθμου για τη λύση του προβλήματος με περιορισμό τάσης ο βέλτιστος λόγος αναλογίας λ για την ελαχιστοποίηση του βάρους είναι λ=2.

Το τελικό σχήμα στο οποίο καταλήγει ο αλγόριθμος φαίνεται στο Σχήμα 5.7.Στο Σχήμα 5.8 απεικονίζεται το αντίστοιχο σχήμα που δημιουργεί η μέθοδος FUD



Σχήμα 5.7: Βελτιστοποιημένη κατασκευή προτεινόμενου κώδικα

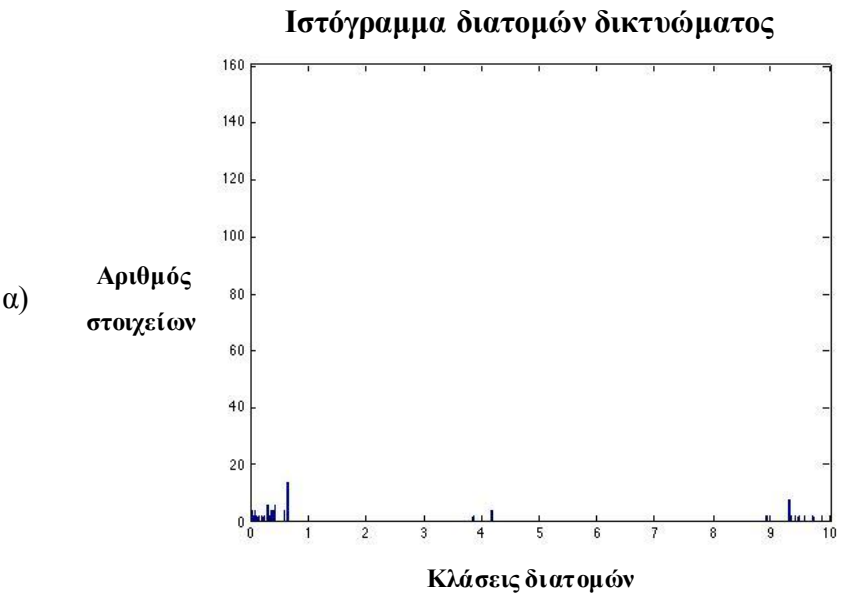


Σχήμα 5.8: Βελτιστοποιημένη Κατασκευή FUD

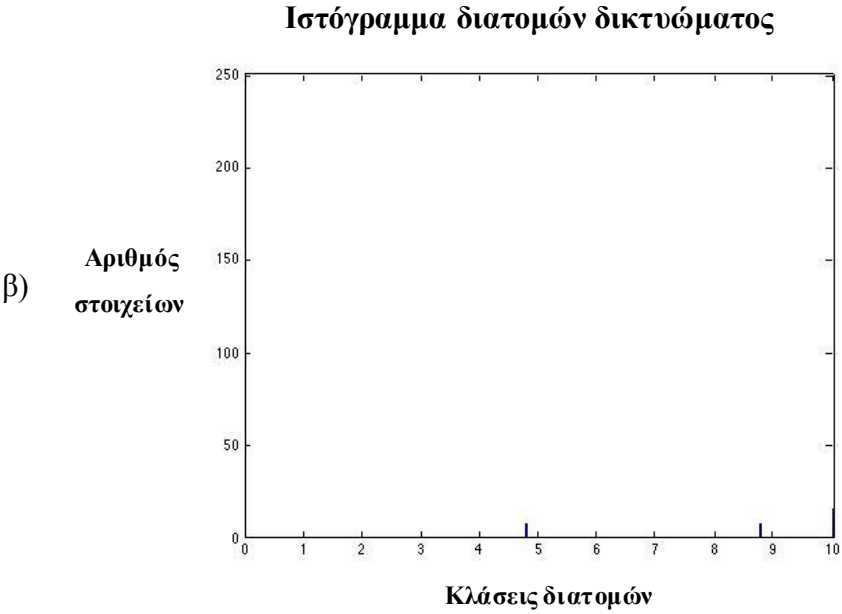
Όπως φαίνεται και οπτικά στα παραπάνω σχήματα οι τοπολογίες που προκύπτουν και με τις δυο μεθόδους είναι σχεδόν ίδιες. Παρόλα αυτά, τα σχήματα έχουν μια διαφορά όγκου της τάξης του 3%. Αυτή η διαφορά οφείλεται στο γεγονός οτι η μέθοδος που προτείνεται αυξάνει τις διατομές ανομοιόμορφα ανάλογα με την ενεργειακή κατάσταση της κάθε ράβδου. Ετσι λοιπόν οι ράβδοι που δεν θα συμμετέχουν στη βέλτιστη κατασκευή έχουν εμβαδόν ίσο με το ελάχιστο επιτρεπόμενο. Απο την άλλη η FUD ενισχύει όλες τις διατομές ισόποσα, δημιουργώντας τοπολογίες μακριά απο το βέλτιστο.

Η διαφορά στα αποτελέσματα μπορεί να φανεί καλύτερα στα ιστογράμματα στο Σχήμα 5.9 που ακολουθεί. Η προτεινόμενη μέθοδος δημιουργεί μόνο ράβδους με ελάχιστη διατομή, ράβδους με 10,8 mm^2 για το πλαίσιο και 5.5 mm^2 για το νεύρο. Αντίθετα, το σχήμα της FUD έχει μεγάλη διασπορά τόσο σε ράβδους με υψηλό εμβαδόν όσο και σε ράβδους με πολύ χαμηλό εμβαδόν, που ωστόσο, πρακτικά, το εμβαδόν τους στη βέλτιστη κατασκευή θα έπρεπε να είναι μηδέν. Αυτές οι διαφορές προκαλούν τη διαφορά βάρους των δύο βελτιστοποιημένων κατασκευών.

α)



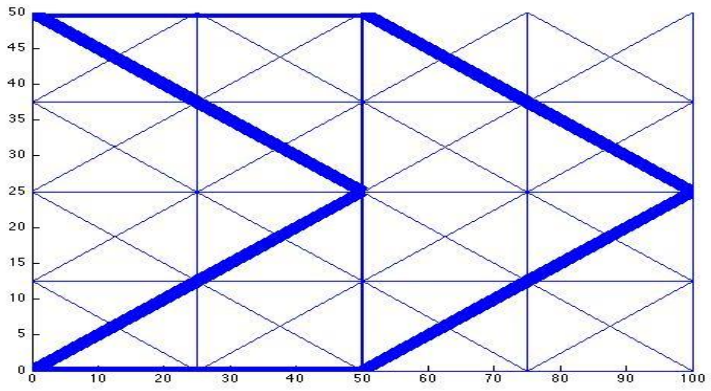
β)



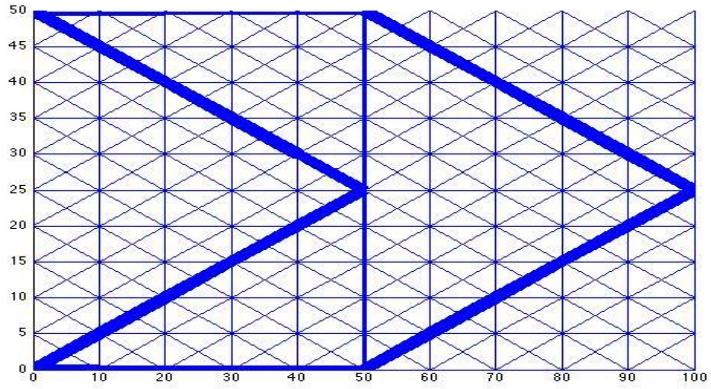
Σχήμα 5.9: Ιστόγραμμα χρησιμοποιούμενων διατομών βελτιστοποίησης α) FUD β)προτεινόμενης μεθόδου

Να σημειωθεί ότι το ίδιο αποτέλεσμα προκύπτει ανεξάρτητα της πυκνότητας του πλέγματος των διακριτών βασικών μονάδων, όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.10 που ακολουθεί.

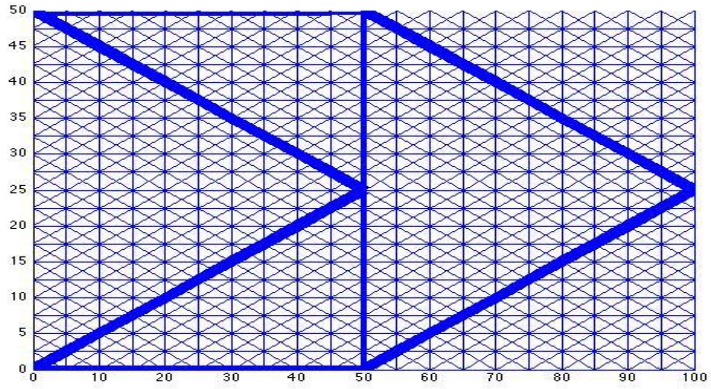
α)



β)

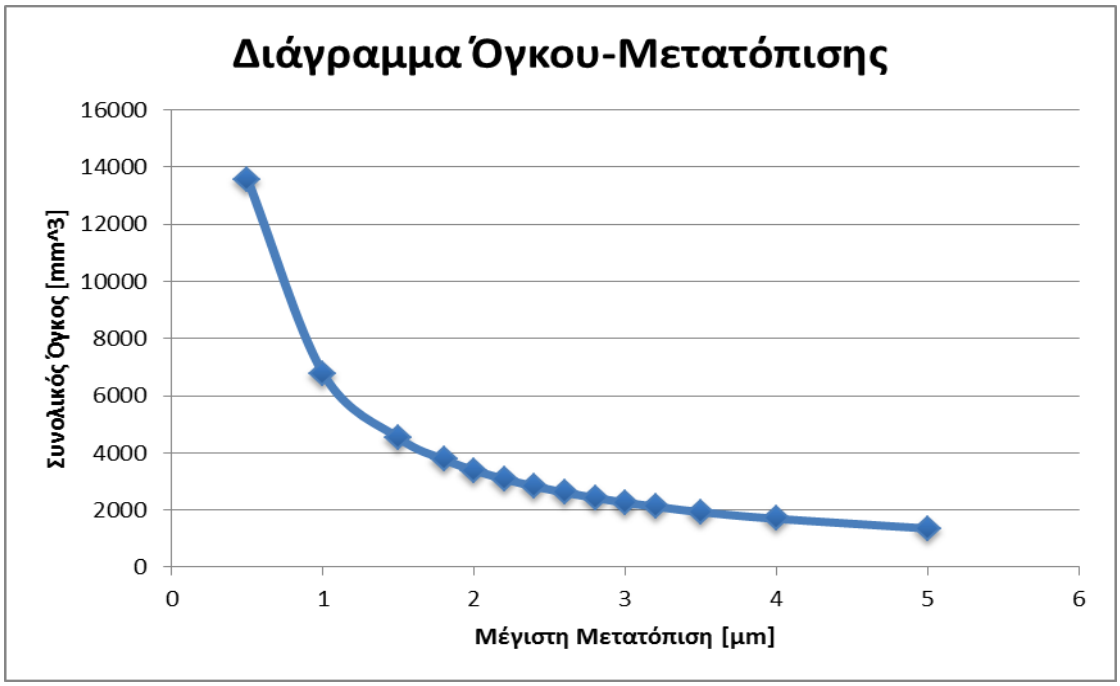


γ)



Σχήμα 5.10: Βελτιστοποιημένα σχήματα για α) 4Χ4 β)10Χ10 γ)20Χ20.

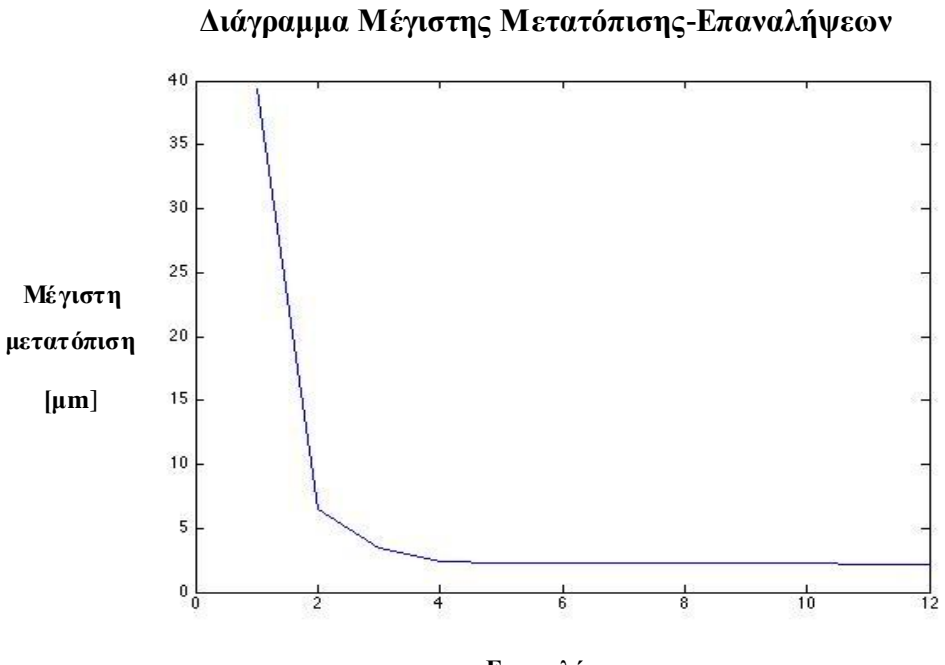
Να σημειωθεί επίσης, ότι η μέθοδος δοκιμάστηκε και για άλλες μέγιστες επιτρεπόμενες μετατοπίσεις, παρουσιάζοντας την κλασσική υπερβολική μορφή (Σχήμα 5.11). Αυτό συμβαίνει καθώς για κάθε μέγιστη επιτρεπόμενη μετατόπιση το σχήμα της κατασκευής είναι ίδιο απλώς μεταβάλλονται τα μεγέθη των ράβδων.



Σχήμα 5.11: Διάγραμμα τελικού όγκου-μέγιστων μετατοπίσεων

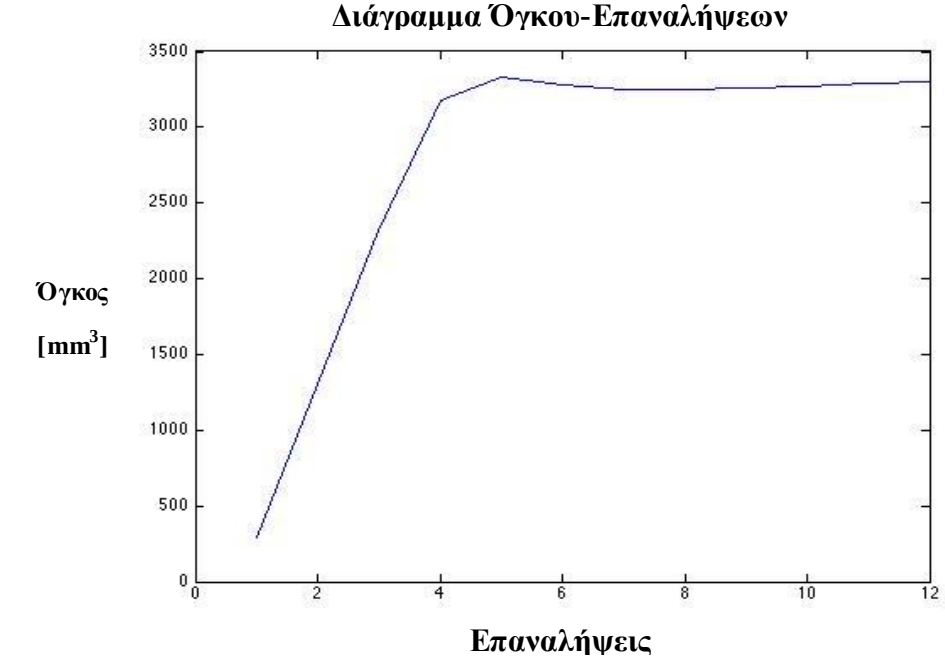
Όπως φαίνεται και από το παραπάνω διάγραμμα (Σχήμα 5.11) για τον περιορισμό των 2μm ο συνολικός όγκος της κατασκευής είναι 3393 mm^3.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η μεταβολή των μέγιστων μετατοπίσεων κατά τη διάρκεια της βελτιστοποίησης. Όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα (Σχήμα 5.12) οι μετατοπίσεις φτάνουν στον περιορισμό πολύ γρήγορα. Ειδικότερα μόλις στην επανάληψη 4 η μέγιστη μετατόπιση είναι μεγαλύτερη από την επιτρεπόμενη λιγότερο από 10%.



Σχήμα 5.12:Διάγραμμα πορείας μέγιστης μετατόπισης

Εκτός αυτού η αντικειμενική συνάρτηση, συγκλίνει και αυτής σχετικά ομαλά όπως παρουσιάζεται στο Σχήμα 5.13.

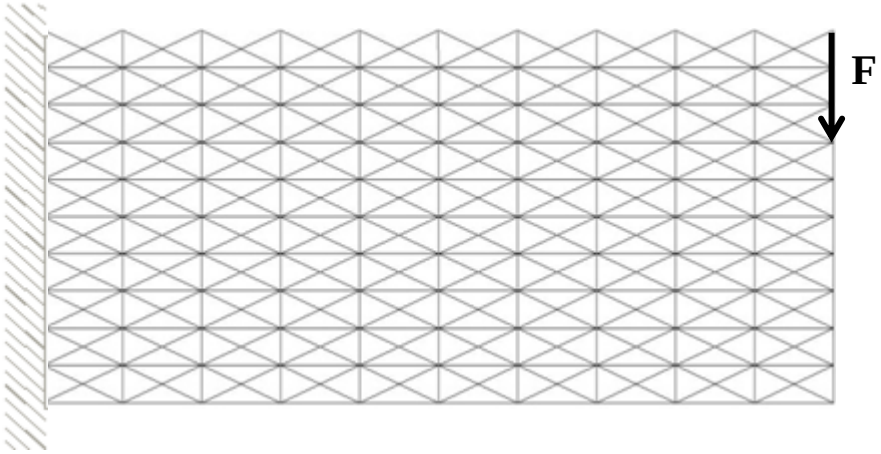


Σχήμα 5.13: Διάγραμμα πορείας αύξησης της αντικειμενικής συνάρτησης

Όπως είναι εμφανές η αντικειμενική συνάρτηση αυξάνεται σε κάθε επανάληψη, κάτι αρχικά παράξενο για πρόβλημα ελαχιστοποίησης. Ωστόσο, όπως αναφέρθηκε στην περιγραφή της διαδικασίας βελτιστοποίησης, ο αλγόριθμος ξεκινά από μια μικρή

αρχική τιμή του όγκου-βάρους. Στη συνέχεια, ο αλγόριθμος αυξάνει τον όγκο μέχρι να ικανοποιείται ο περιορισμός.

5.5.2 Δικτυωτός Πρόβολος (2)



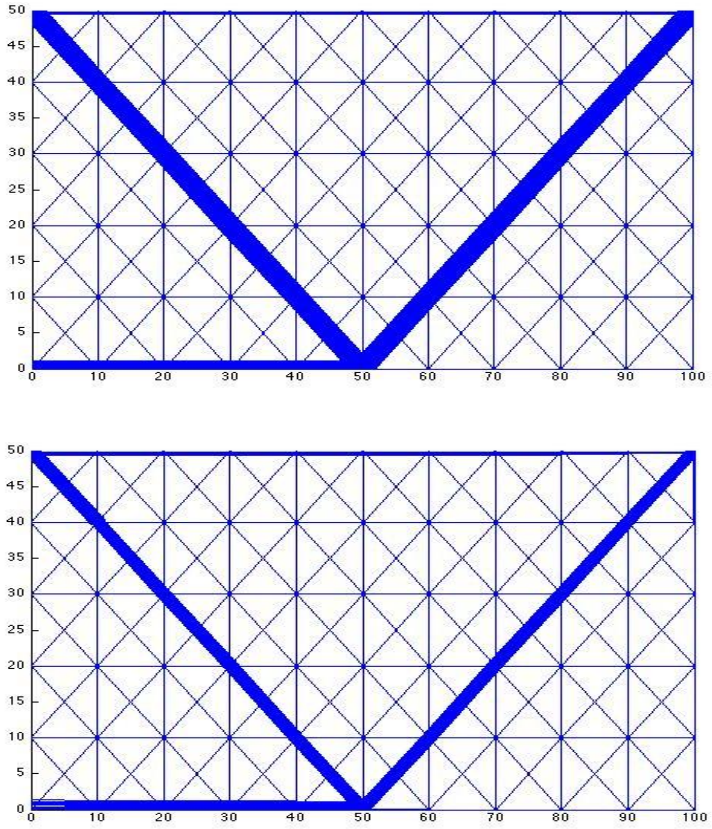
Σχήμα 5.14: Σχηματική απεικόνιση δικτυωτού προβόλου(2)

Σ αυτό το παράδειγμα έγινε εφαρμογή του αλγορίθμου σε υπερστατικό δικτύωμα του παραπάνω σχήματος (Σχήμα 5.14). Οι κόμβοι της μίας πλευράς είναι πακτωμένη ενώ το φορτίο ασκείται στην γωνία της απέναντι πλευράς. Οι ολικές διαστάσεις μήκους, πλάτους που ορίστηκαν είναι Lx=100mm , Ly=50mm αντίστοιχα. Η μέγιστη επιτρεπόμενη κομβική μετατόπιση ορίστηκε στα 2 μm. Η διακριτοποίηση έγινε με λόγο αναλογίας λ=1. Η επιλογή αυτή έγινε καθώς όπως αποδείχθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο κατά την εφαρμογή αλγορίθμου για την λύση του προβλήματος με περιορισμούς τάσεων ο βέλτιστος λόγος αναλογίας λ για την ελαχιστοποίηση του βάρους είναι λ=1.

Το τελικό σχήμα που καταλήγει ο προτεινόμενος αλγόριθμος καθώς επίσης και το σχήμα της FUD φαίνεται στο Σχήμα 5.15:

α)

β)

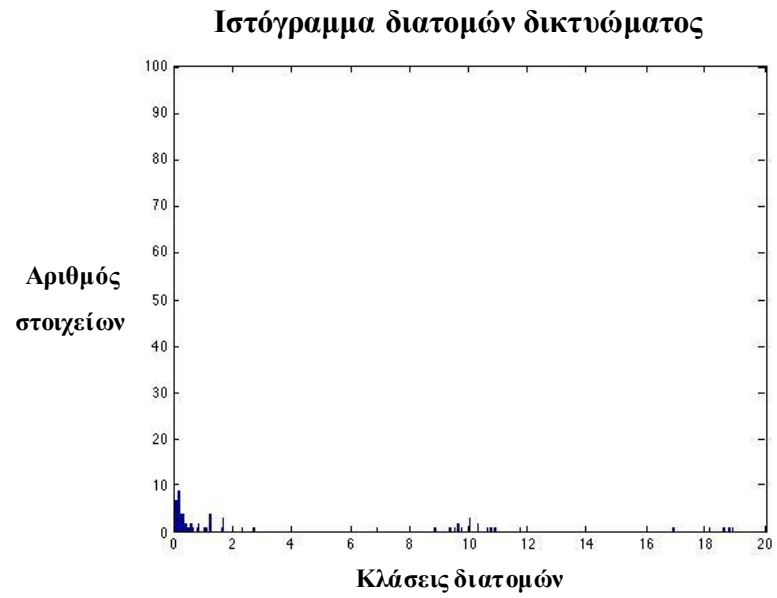


Σχήμα 5.15: Βελτιστοποιημένη Κατασκευή α) προτεινόμενου κώδικα β) FUD

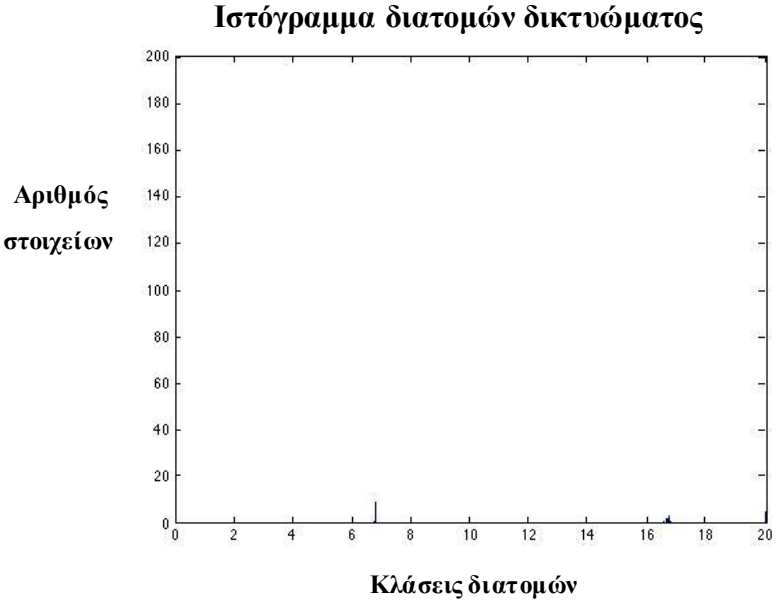
Όπως σχολιαστίκε και στο προηγούμενο παράδειγμα τα βελτιστοποίημένα σχήματα τόσο της προτεινόμενης μεθόδου όσο και του FUD φαίνονται ίδια ωστόσο έχουν μια διαφορά βάρους της τάξης του 2%.

Η διαφορά στα αποτελέσματα μπορεί να φανεί καλύτερα στα ιστογράμματα στο Σχήμα 5.16. Όπως παρουσιάζεται η προτεινόμενη μέθοδος διαστασιολογεί τις δοκούς που δεν συμμετέχουν στην κατασκευή με την ελάχιστη επιτρεπόμενη επιφάνεια, ενώ η FUD έχει μεγάλη διακύμανση όσον αφορά το εμβαδόν των δοκών, σε δοκούς που ουσιαστικά δεν συμμετέχουν στην κατασκευή.

α)



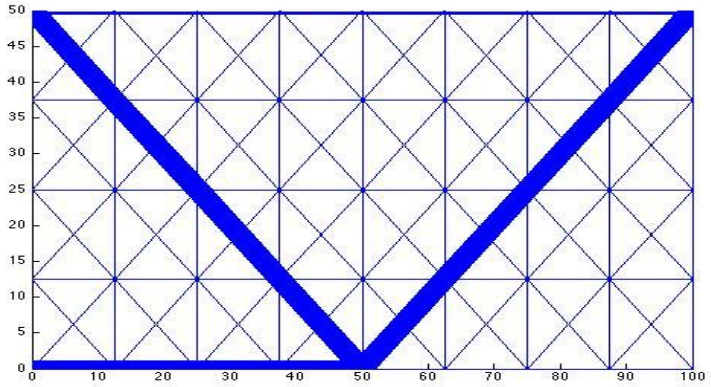
β)



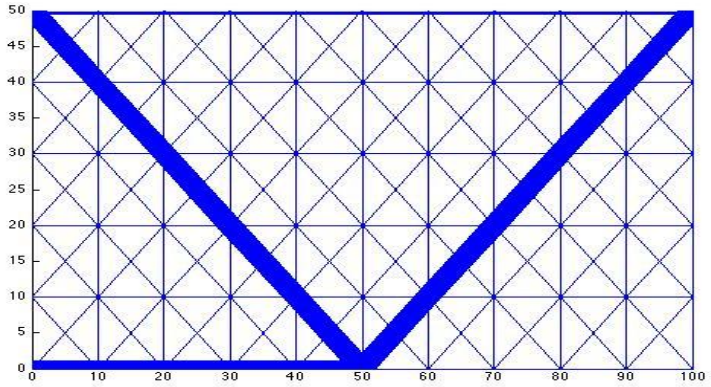
Σχήμα 5.16: Ιστόγραμμα χρησιμοποιούμενων διατομών βελτιστοποίησης α) FUD β)προτεινόμενης μεθόδου

Να σημειωθεί ότι το ίδιο αποτέλεσμα προκύπτει ανεξάρτητα της πυκνότητας του πλέγματος των διακριτών βασικών μονάδων (Σχήμα 5.17). Ειδικότερα παρατηρήθηκε το ίδιο σχήμα και το ίδιο βάρος για διάφορα πλέγματα.

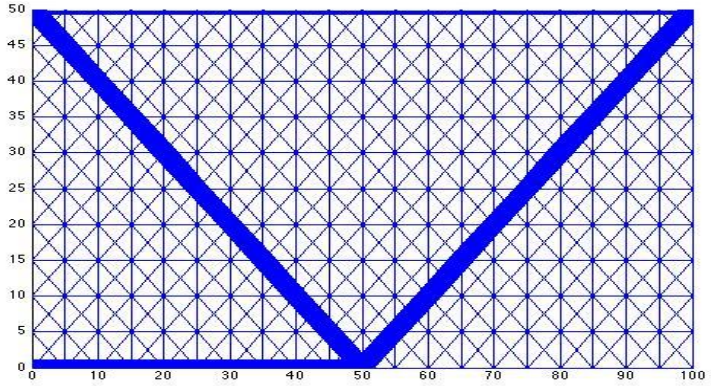
α)



β)

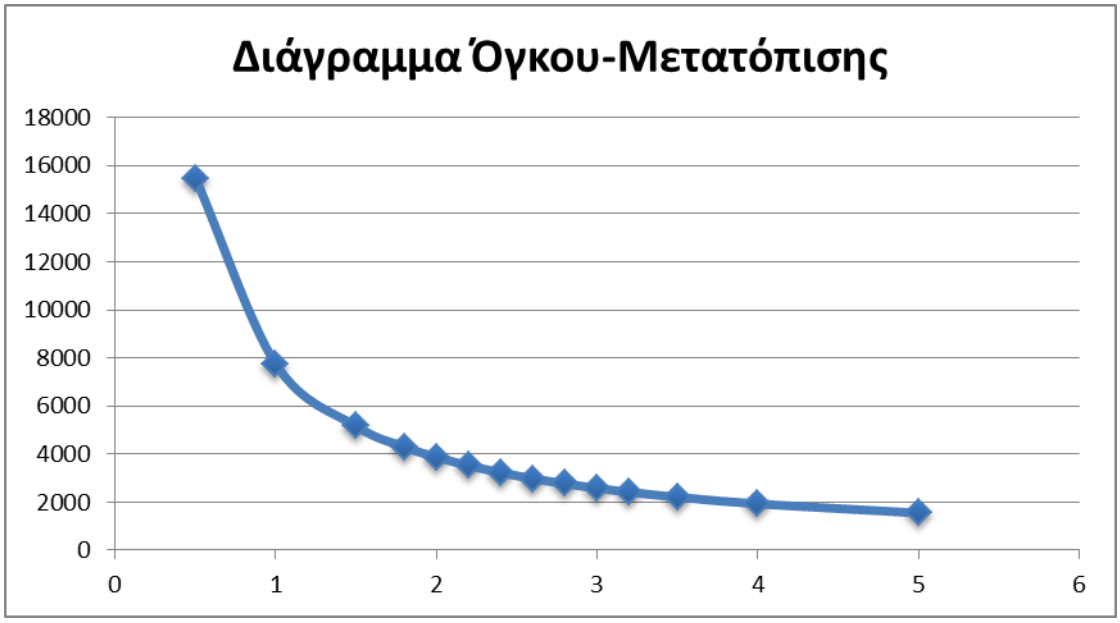


γ)



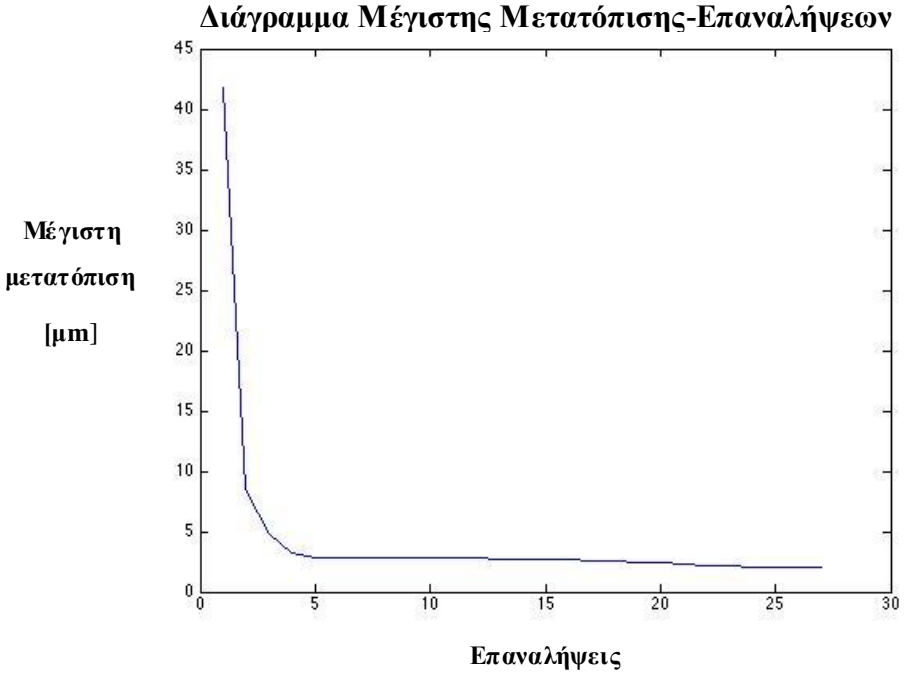
Σχήμα 5.17: Βελτιστοποιημένα σχήματα για α) 8X4 β)5X10 γ)10X20

Να σημειωθεί επίσης, ότι η μέθοδος δοκιμάστηκε και για άλλες μέγιστες επιτρεπόμενες μετατοπίσεις, παρουσιάζοντας την κλασσική υπερβολική μορφή όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.18. Αυτό συμβαίνει καθώς για κάθε μέγιστη επιτρεπόμενη μετατόπιση το σχήμα της κατασκευής είναι ίδιο απλώς μεταβάλλονται τα μεγέθη των ράβδων.



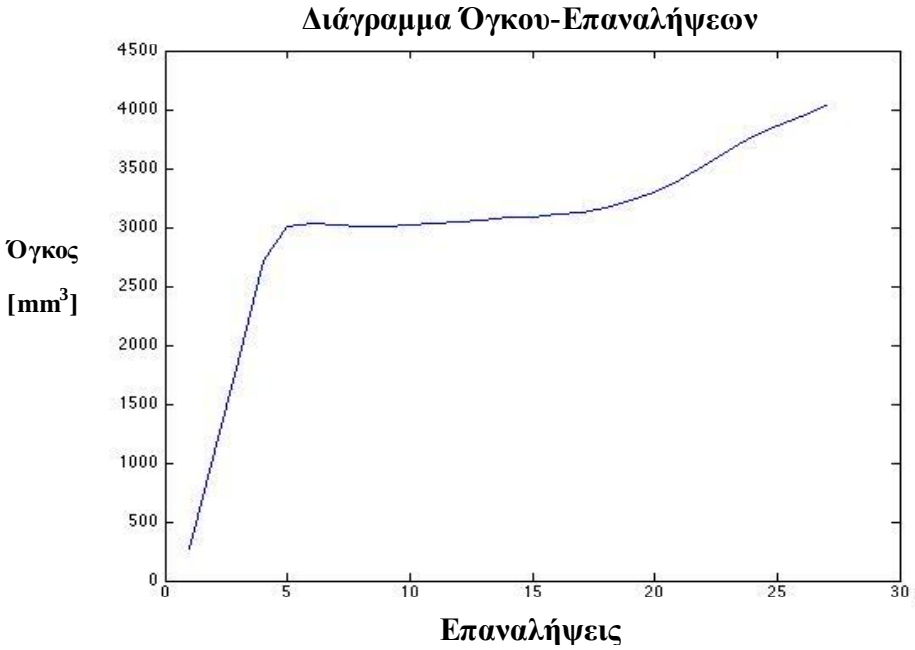
Σχήμα 5.18: Διάγραμμα όγκου βελτιστοποιημένων κατασκευών-μέγιστων μετατοπίσεων

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η μεταβολή των μέγιστων μετατοπίσεων κατά την διάρκεια της βελτιστοποίησης. Όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα (Σχήμα 5.19) οι μετατοπίσεις φτάνουν στον περιορισμό πολύ γρήγορα. Ειδικότερα μόλις στην πέμπτη επανάληψη η μέγιστη μετατόπιση είναι μεγαλύτερη από την επιτρεπόμενη λιγότερο από 10%.



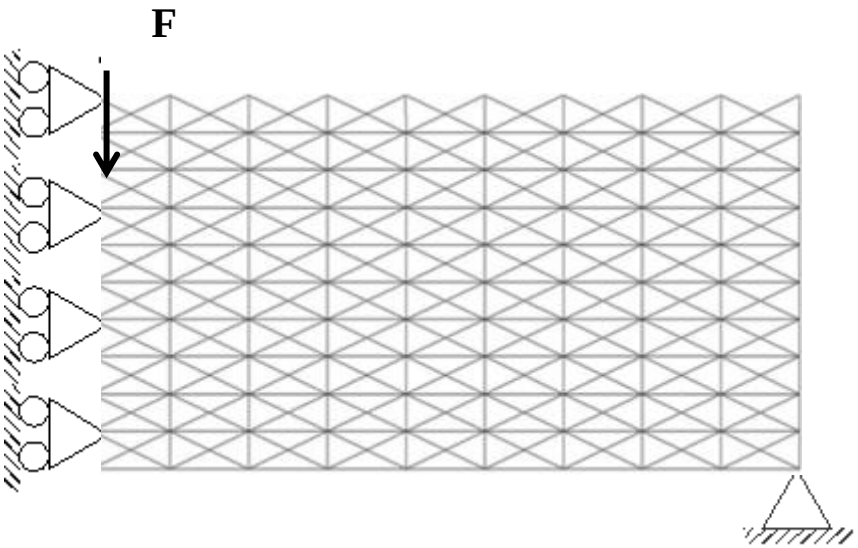
Σχήμα 5.19: Διάγραμμα πορείας μέγιστης μετατόπισης

Σε αντίθεση με το προηγούμενο παράδειγμα προβόλου στο συγκεκριμένο, ο όγκος εμφανίστηκε να έχει αρκετά μεγάλη διακύμανση όπως παρατηρούμε στο Σχήμα 5.20. Ειδικότερα, βλέπουμε ότι η αντικειμενική συνάρτηση σταθεροποιήθηκε για μερικές επαναλήψεις, ωστόσο στην συνέχεια είχε αυξητική τάση μέχρι να πληρείται ο περιορισμός.



Σχήμα 5.20: Διάγραμμα πορείας αύξησης της αντικειμενικής συνάρτησης

5.5.3 Αμφιέριστο υπερστατικό δικτύωμα



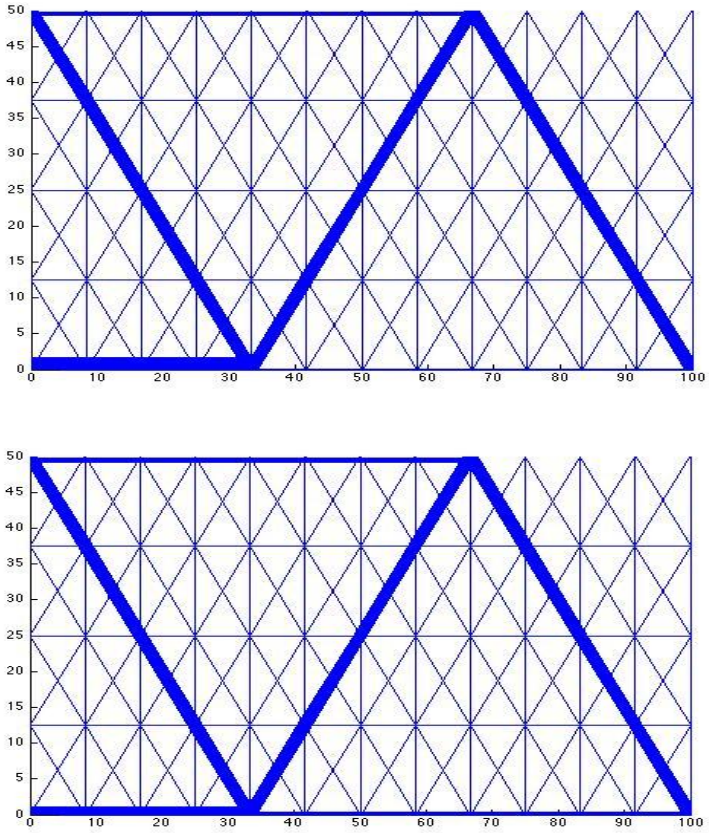
Σχήμα 5.21: Σχηματική απεικόνιση δικτυωτής αμφιέριστης πλάκας

Σ αυτό το παράδειγμα έγινε εφαρμογή του κώδικα στο υπερστατικό δικτύωμα του παραπάνω σχήματος (Σχήμα 5.21). Οι διαστάσεις μήκους, πλάτους, πάχους της μισής

πλάκας που ορίστηκαν είναι Lx=100mm Ly=50mm. Η μέγιστη επιτρεπόμενη κομβική μετατόπιση ορίστηκε στα 2.5μm. Η διακριτοποίηση έγινε με λόγο αναλογίας λ=3/4.

Η επιλογή αυτή έγινε καθώς όπως αποδείχθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο κατά την εφαρμογή αλγορίθμου για την λύση του προβλήματος με περιορισμούς τάσης ο βέλτιστος λόγος αναλογίας λ για την ελαχιστοποίηση του βάρους είναι λ=3/4.

Το τελικό σχήμα που καταλήγει ο αλγόριθμος φαίνεται στην παρακάτω εικόνα:

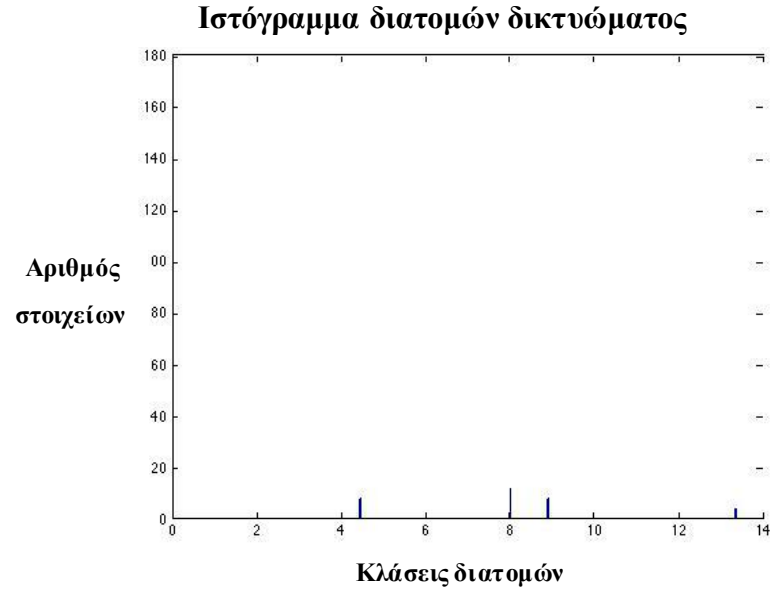


Σχήμα 5.22: Βελτιστοποιημένη Κατασκευή α)προτεινόμενου κώδικα β)FUD

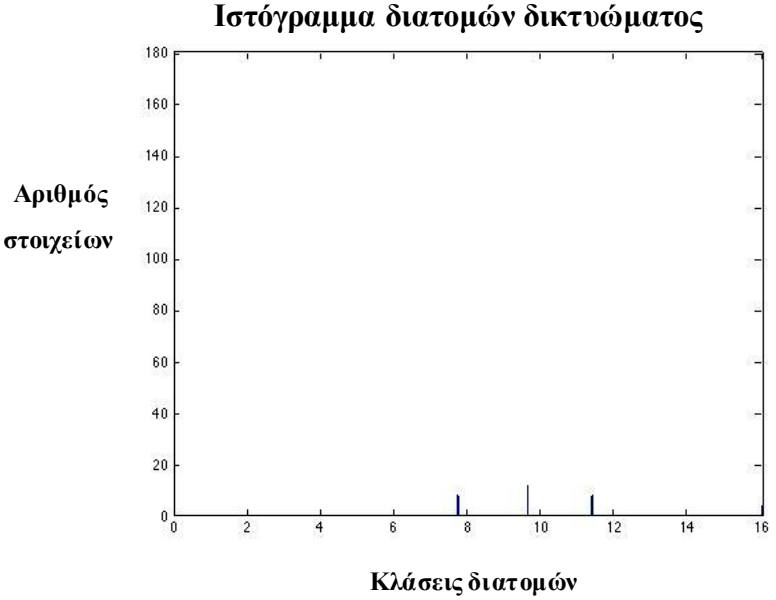
Όπως φαίνεται και από το Σχήμα 5.22 η προτεινόμενη μέθοδος φαίνεται να έχει μεγαλύτερης επιφάνειας δοκούς στις στηρίξεις και μικρότερες στα υπόλοιπα σημεία. Τα βελτιστοποίημένα σχήματα έχουν μια διαφορά βάρους της τάξης του 5% με ελαφρύτερη την κατασκευή της προτεινόμενης μεθόδου.

Η διαφορά στα αποτελέσματα μπορεί να φανεί καλύτερα στα παρακάτω ιστογράμματα του σχήματος (Σχήμα 5.23). Όπως παρουσιάζεται η προτεινόμενη μέθοδος πράγματι έχει μεγαλύτερη μέγιστη διατομή αλλά μικρότερες διατομές στις υπόλοιπες δοκούς.

α)



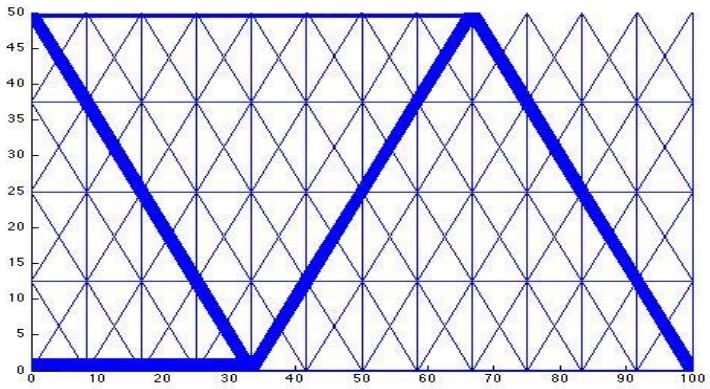
β)



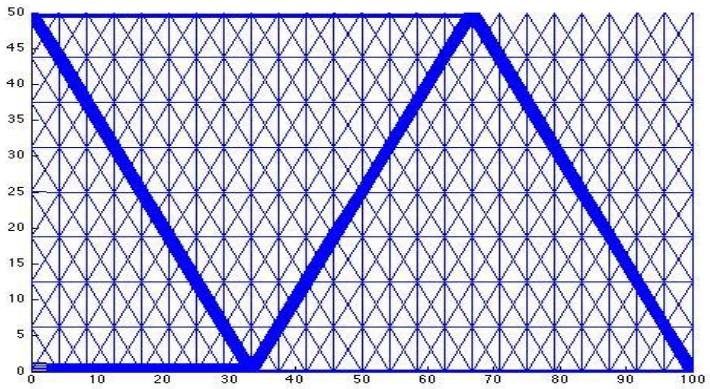
Σχήμα 5.23: Ιστόγραμμα χρησιμοποιούμενων διατομών βελτιστοποίησης α) FUD β) προτεινόμενης μεθόδου

Να σημειωθεί ότι το ίδιο αποτέλεσμα προκύπτει ανεξάρτητα της πυκνότητας του πλέγματος των διακριτών βασικών μονάδων. Ειδικότερα παρατηρήθηκε το ίδιο σχήμα και το ίδιο βάρος για διάφορα πλέγματα όπως φαίνεται και στο Σχήμα 5.24.

α)

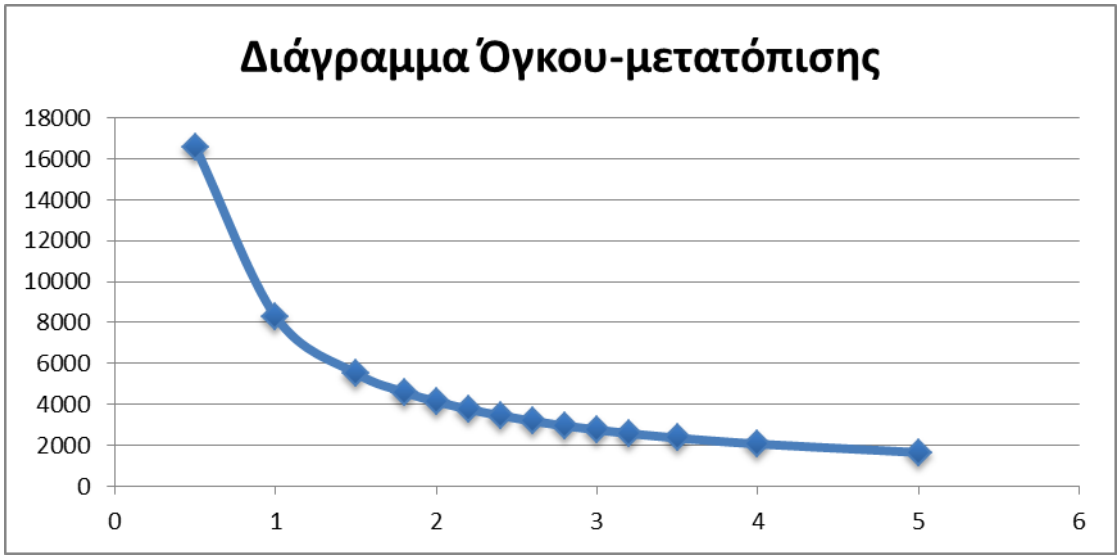


β)



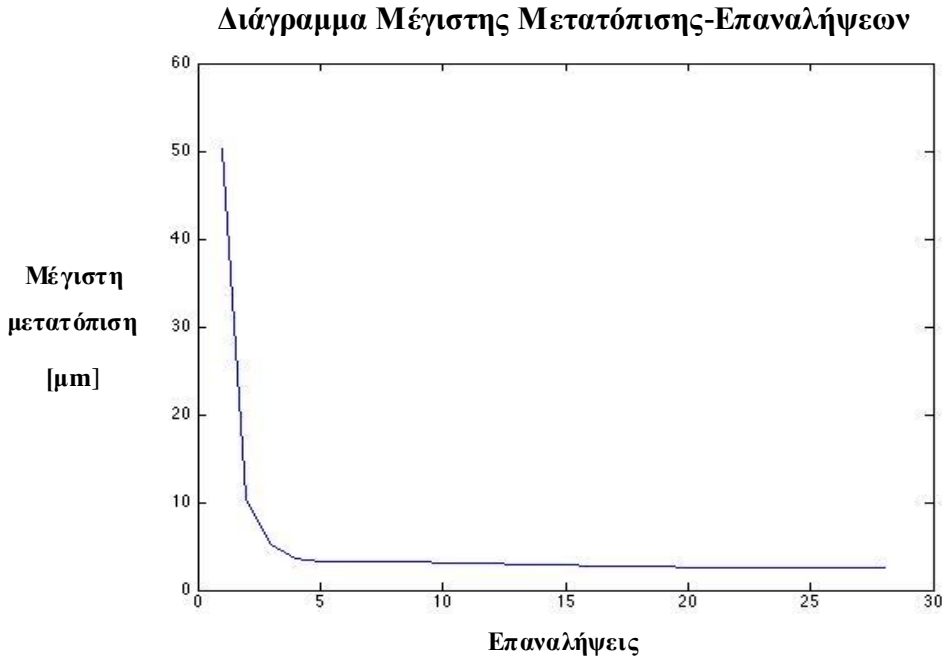
Σχήμα 5.24: Βελτιστοποιημένα σχήματα για α) 4X12 β) 8X24.

Να σημειωθεί επίσης, ότι η μέθοδος δοκιμάστηκε και για άλλες μέγιστες επιτρεπόμενες μετατοπίσεις, παρουσιάζοντας την κλασσική υπερβολική μορφή και δημιουργώντας ακριβώς ίδιες μορφολογίες αλλά με διαφορετική διαστασιολόγηση των ράβδων.



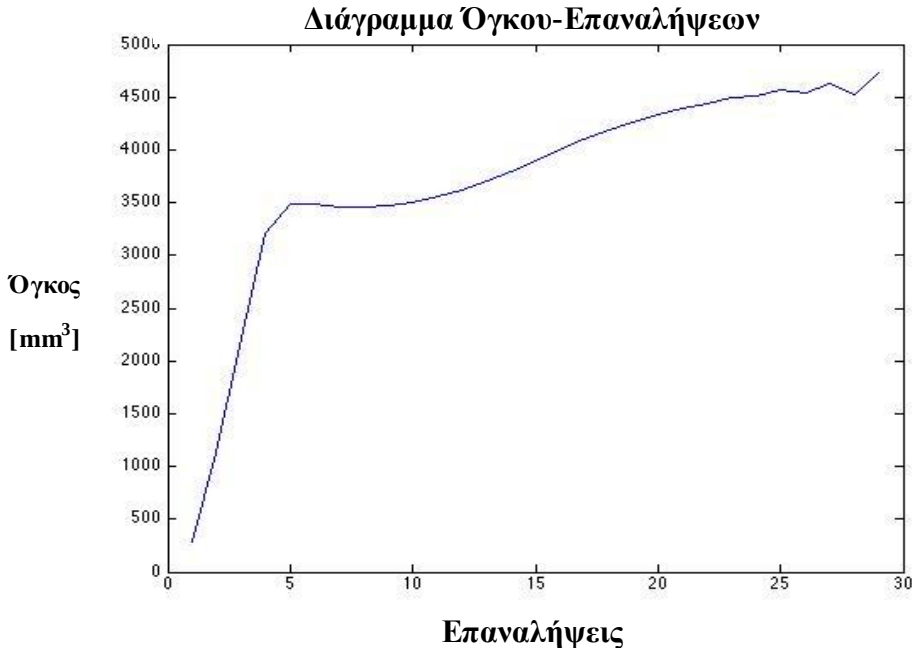
Σχήμα 5.25: Διάγραμμα τελικού όγκου βελτιστοποιημένων κατασκευών-μέγιστων μετατοπίσεων

Είναι σημαντικό να ελέγξουμε όπως στα προηγούμενα παραδείγματα την πορεία της αντικειμενικής συνάρτησης και του περιορισμού. Όπως φαίνεται και στο Σχήμα 5.26 οι μετατοπίσεις φτάνουν στον περιορισμό πολύ γρήγορα. Ειδικότερα μόλις στην πέμπτη επανάληψη η μέγιστη μετατόπιση είναι μεγαλύτερη από την επιτρεπόμενη λιγότερο από 10%.



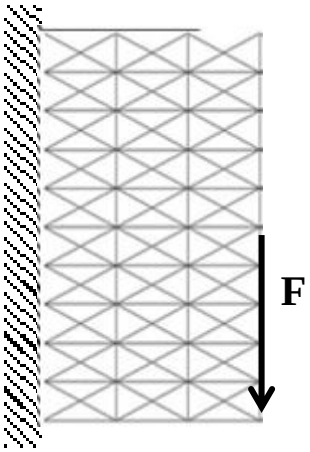
Σχήμα 5.26: Διάγραμμα πορείας μέγιστης μετατόπισης

Ωστόσο όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα ο όγκος εμφανίστηκε να έχει αρκετά μεγάλη διακύμανση (Σχήμα 5.27). Ειδικότερα, βλέπουμε ότι η αντικειμενική συνάρτηση βρίσκεται σταθεροποιήθηκε για μερικές επαναλήψεις, ωστόσο στην συνέχεια είχε αυξητική τάση μέχρι να πληρείται ο περιορισμός.



Σχήμα 5.27:Διάγραμμα πορείας αύξησης της αντικειμενικής συνάρτησης

5.5.4 Κοντός Πρόβολος

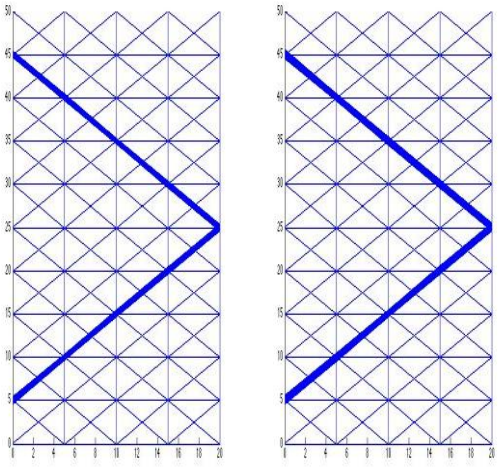


Σχήμα 5.28: Σχηματική απεικόνιση δικτυωτού κοντού προβόλου

Σ' αυτό το παράδειγμα έγινε εφαρμογή του κώδικα σε δικτύωμα που προσομοιάζει ορθωγωνικό κοντό πρόβολο όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.28.Το παράδειγμα αυτό πραγματοποιήθηκε ώστε να εξακριβώσουμε την σταθερότητα του κώδικα σε άλλου είδους σχήματα. Οι ολικές διαστάσεις μήκους, πλάτους του δικτυώματος ορίστηκαν είναι Lx=20mm Ly=50mm. Η μέγιστη επιτρεπόμενη κομβική μετατόπιση ορίστηκε στα 0,2μm. Η διακριτοποίηση έγινε με λόγο αναλογίας λ=5.

Η επιλογή αυτή έγινε καθώς όπως αποδείχθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο κατά την εφαρμογή αλγορίθμου για την λύση του προβλήματος με περιορισμούς τάσεων ο βέλτιστος λόγος αναλογίας λ για την ελαχιστοποίηση του βάρους είναι λ=5.

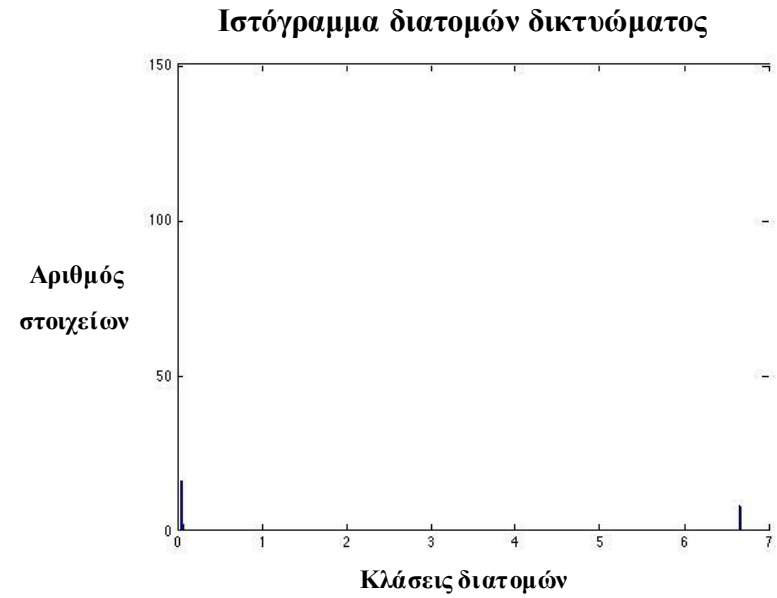
Το τελικό σχήμα που καταλήγει ο αλγόριθμος φαίνεται στο Σχήμα 5.29:



Σχήμα 5.29: Βελτιστοποιημένη Κατασκευή α) προτεινόμενου κώδικα β) FUD

Όπως σχολιαστίκε και στα προηγούμενα παραδείγματα τα βελτιστοποίημένα σχήματα τόσο της προτεινόμενης μεθόδου όσο και του FUD φαίνονται ίδια ωστόσο έχουν μια διαφορά βάρους της τάξης του 3%.

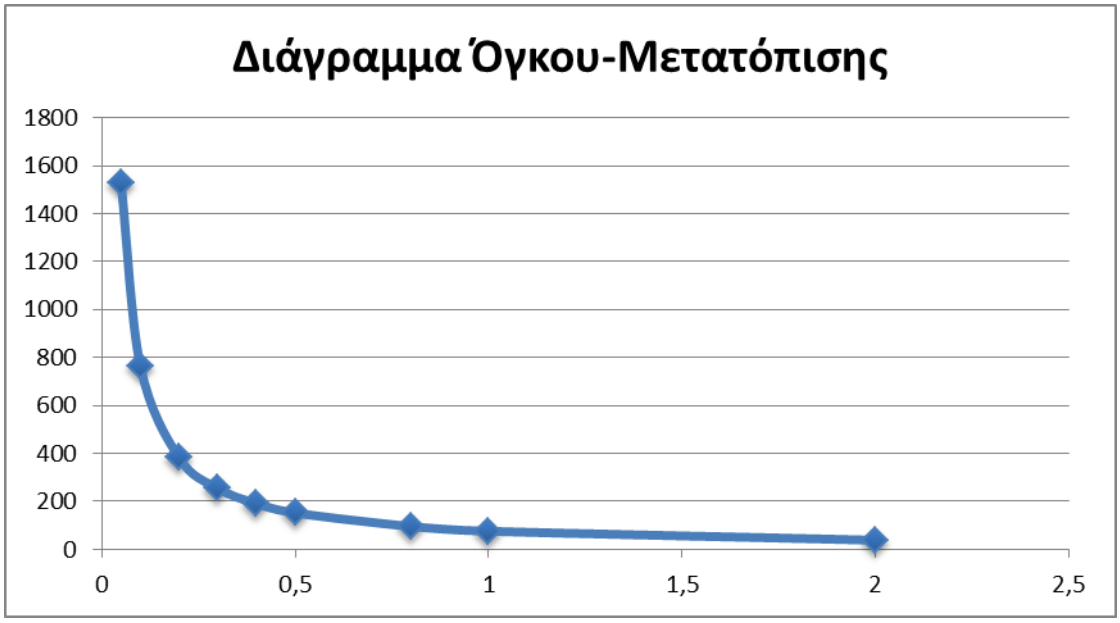
Η διαφορά στα αποτελέσματα μπορεί να φανεί καλύτερα στα παρακάτω ιστογράμματα (Σχήμα 5.30). Όπως παρουσιάζεται η προτεινόμενη μέθοδος διαστασιολογεί τις δοκούς που δεν συμμετέχουν στην κατασκευή με την ελάχιστη επιτρεπόμενη επιφάνεια, ενώ η FUD σε κάποιες παθητικές δοκούς δίνει κάποιο μικρό εμβαδόν.



Σχήμα 5.30:Ιστόγραμμα χρησιμοποιούμενων διατομών βελτιστοποίησης α) FUD β) προτεινόμενης μεθόδου

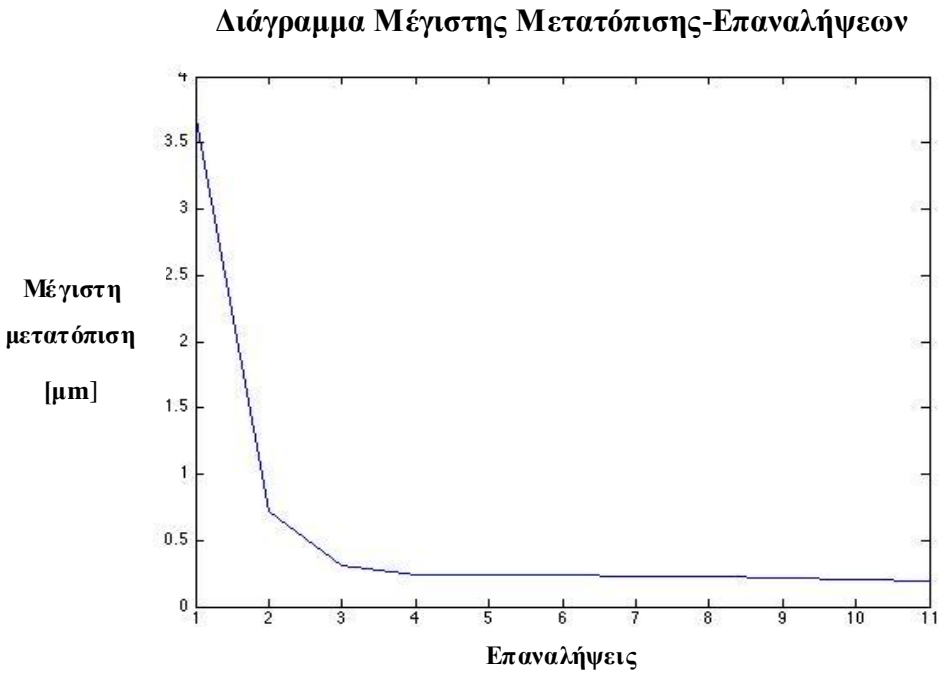
Να σημειωθεί ότι το ίδιο αποτέλεσμα προκύπτει ανεξάρτητα της πυκνότητας του πλέγματος των διακριτών βασικών μονάδων. Ειδικότερα παρατηρήθηκε το ίδιο σχήμα και το ίδιο βάρος για διάφορα πλέγματα.

Η μέθοδος δοκιμάστηκε και για άλλες μέγιστες επιτρεπόμενες μετατοπίσεις, παρουσιάζοντας την κλασσική υπερβολική μορφή (Σχήμα 5.31).



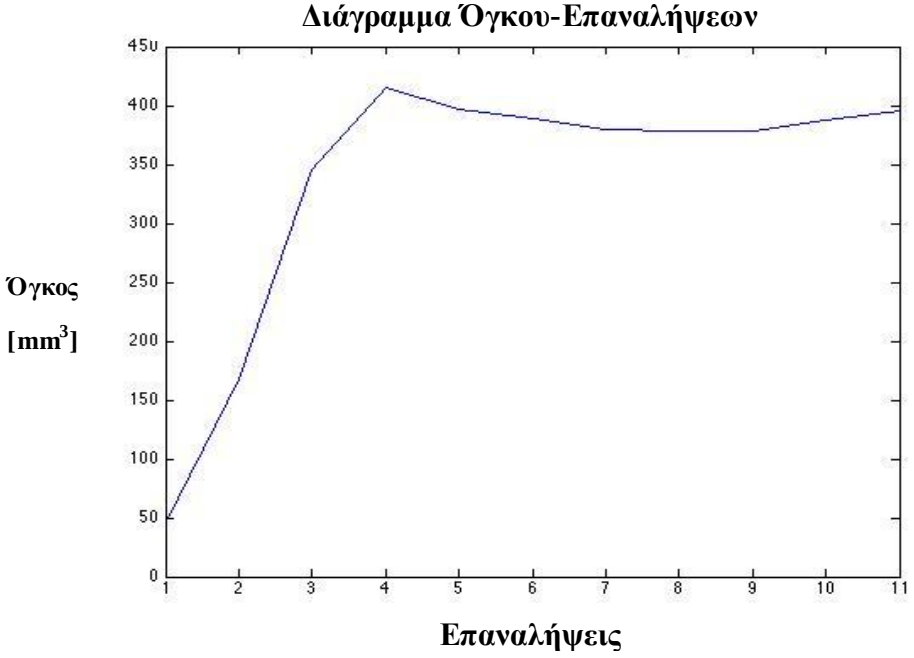
Σχήμα 5.31:Διάγραμμα όγκου βελτιστοποιημένων κατασκευών-μέγιστων μετατοπίσεων

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η μεταβολή των μέγιστων μετατοπίσεων κατά την διάρκεια της βελτιστοποίησης. Όπως φαίνεται και στο Σχήμα 5.32 οι μετατοπίσεις φτάνουν στον περιορισμό πολύ γρήγορα. Ειδικότερα, μόλις στην πέμπτη επανάληψη η μέγιστη μετατόπιση είναι μεγαλύτερη από την επιτρεπόμενη λιγότερο από 10%.



Σχήμα 5.32: Διάγραμμα πορείας μέγιστης μετατόπισης

Όσον αναφορά την πορεία της αντικειμενικής συνάρτησης παρατηρούμε ότι παρουσιάζει σχετική ομαλότητα. Βέβαια, σε σχέση μ' άλλα παραδείγματα παρουσιάζει περισσότερες διακυμάνσεις (Σχήμα 5.33).



Σχήμα 5.33: Διάγραμμα πορείας αύξησης της αντικειμενικής συνάρτησης

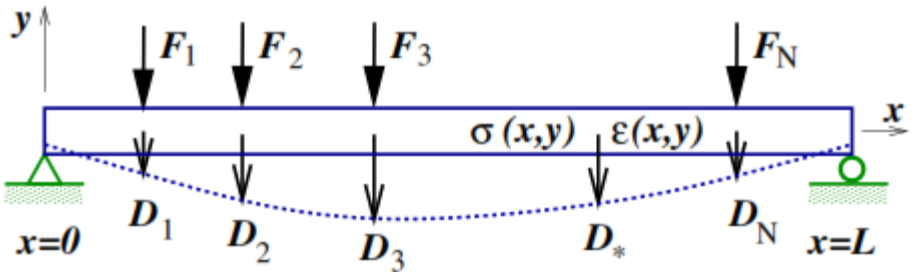
6

Νέα μέθοδος βελτιστοποίησης συνεχούς μέσου υπό περιορισμό μετατόπισης

Σε αυτή την ενότητα θα παρουσιαστεί μια νέα μέθοδος βελτιστοποίησης που αναπτύχθηκε στα πλαίσια της παρούσας Διπλωματικής Εργασίας για προβλήματα συνεχούς μέσου με περιορισμό μετατόπισης. Όπως αναφέρθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο είναι σύνηθες στα προβλήματα βελτιστοποίησης σκελετικών κατασκευών με περιορισμούς μετατοπίσεων να χρησιμοποιείται το θεώρημα μοναδιαίας δύναμης. Έτσι λοιπόν, αναπτύχθηκε μια καινούργια μέθοδος για την τοπολογική βελτιστοποίηση συνεχούς μέσου όπου γίνεται εφαρμογή του θεωρήματος μοναδιαίας δύναμης τροποποιημένο βέβαια ώστε να πληροί τις ιδιαιτερότητες του συνεχούς μέσου.

6.1 Θεώρημα μοναδιαίας δύναμης στο συνεχές μέσο

Αρχικά, θα διατυπωθεί το θεώρημα της μοναδιαίας δύναμης για συνεχές μέσο (Gutkawski Richard, 1990). Έστω μια γραμμικώς ελαστική δοκό με N (πραγματικές) δυνάμεις F_i, που εφαρμόζονται σε 1, 2, ..., N σημεία, όπως φαίνεται στο Σχήμα 6.1.



Σχήμα 6.1: Εφαρμογή «πραγματικών» φορτίων σε ράβδο συνεχούς μέσου

Όλες αυτές οι δυνάμεις μαζί δημιουργούν τις αντίστοιχες μετατοπίσεις D_i στα σημεία εφαρμογής της δύναμης. Ωστόσο δημιουργούνται μετατοπίσεις και σε σημεία που δεν εφαρμόζονται δυνάμεις όπως η μετατόπιση D^* στο σημείο *. Το άθροισμα αυτών των δυνάμεων δημιουργεί συνεχή κατανομή τάσης σ και παραμόρφωσης ε σε ολόκληρο τον όγκο της δοκού. Με βάση αυτά, το σύστημα φορτίσεων έχει εξωτερικό έργο:

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} F_i D_i = \frac{1}{2}\{F\}^T\{D\} \quad (6.1)$$

Και εσωτερικό έργο παραμόρφωσης:

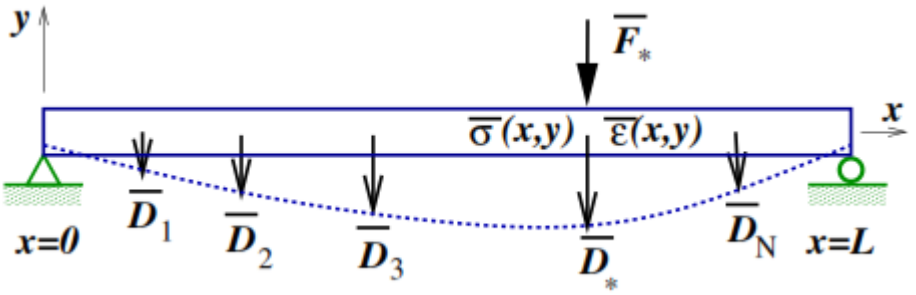
$$U = \frac{1}{2}\int_V \{\sigma\}^T\{\varepsilon\}dV \quad (6.2)$$

Όπου {σ} και {ε} είναι

$$\{\sigma\}^T = \{\ \sigma_{xx}\ \sigma_{yy}\ \sigma_{zz}\ \tau_{xy}\ \tau_{xz}\ \tau_{yz}\ \} \quad (6.3)$$

$$\{\varepsilon\}^T = \{\ \varepsilon_{xx}\ \varepsilon_{yy}\ \varepsilon_{zz}\ \gamma_{xy}\ \gamma_{xz}\ \gamma_{yz}\} \quad (6.4)$$

Στην συνέχεια, αν θεωρηθεί η ίδια ράβδος με μια μόνο δύναμη $\overline{F}^*$ που ασκείται στο σημείο *, όπως φαίνεται στο Σχήμα 6.2 που ακολουθεί.



Σχήμα 6.2: Εφαρμογή «εικονικού» φορτίων σε ράβδο συνεχούς μέσου

Η δύναμη $\overline{F}^*$ από μόνη της προκαλεί μια μετατόπιση $\overline{D}^*$ στο σημείο * και τις μετατοπίσεις $\overline{D_1}, \overline{D_2}, \overline{D_3}, \ldots \overline{D_N}$ στα άλλα σημεία της δοκού. Επίσης, η δύναμη $\overline{F}^*$

οδηγεί στην ανάπτυξη της τάσης και της παραμόρφωσης $\overline{\sigma}$ και $\overline{\varepsilon}$ αντίστοιχα σε όλο τον όγκο της δοκού.

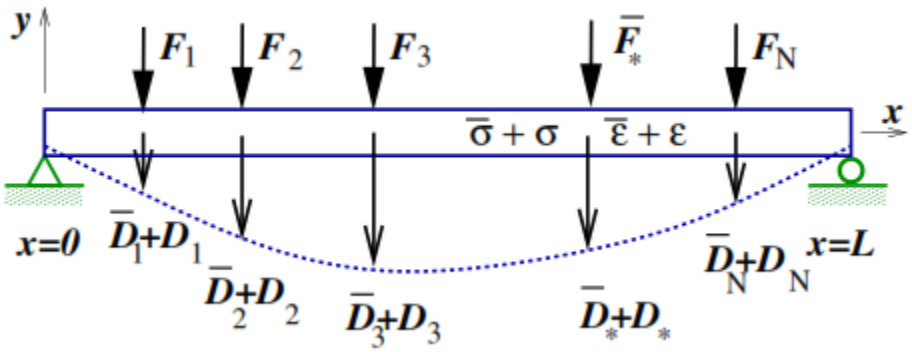
Έτσι λοιπόν, όμοια με προηγουμένως, έχουμε το εξωτερικό έργο:

$$W = \frac{1}{2}\overline{F}_*\overline{D}_* \tag{6.5}$$

Και εσωτερικό έργο παραμόρφωσης που οφείλεται σε αυτήν τη μοναδιαία δύναμη:

$$U = \frac{1}{2}\int_V \{\overline{\sigma}\}^T \{\overline{\varepsilon}\} dV \tag{6.6}$$

Τέλος ας υποτεθεί ότι ασκείται πρώτα η $\overline{F}*$ (Σχήμα 6.3) και εν συνεχεία όλες οι άλλες «πραγματικές» δυνάμεις F_i, που εφαρμόζονται στα σημεία 1,2,....,N, ενώ η $\overline{F}*$ παραμένει σταθερή.

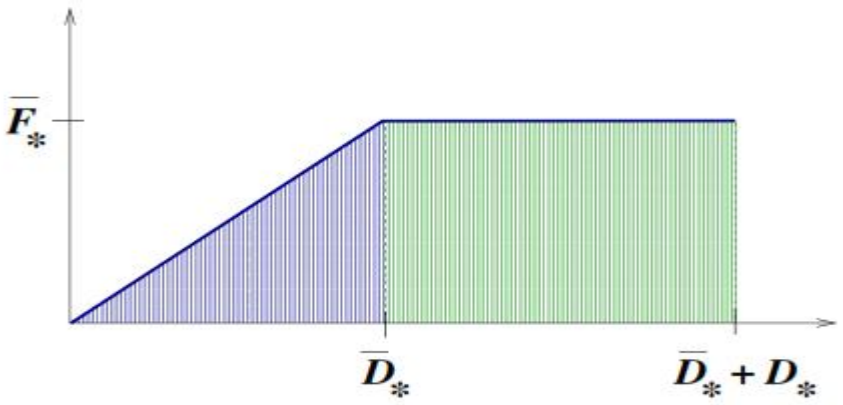


Σχήμα 6.3: Εφαρμογή «εικονικού» και «πραγματικών» φορτίων σε ράβδο συνεχούς μέσου

Για τη δύναμη $\overline{F}*$ μπορεί να υπολογιστεί το εξωτερικό έργο το οποίο είναι:

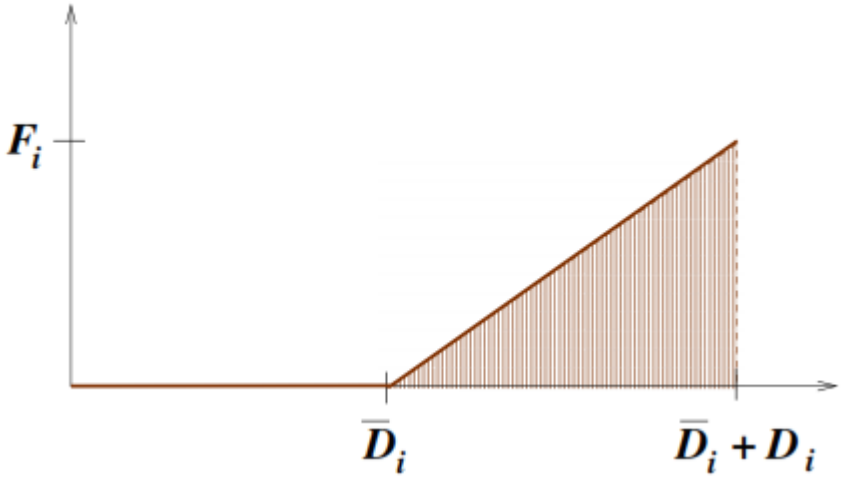
$$W = \frac{1}{2}\overline{F}_*\overline{D}_* + \overline{F}_*D_* \tag{6.7}$$

Να σημειωθεί ότι η $\overline{F}*$ παραμένει σταθερή ενώσω τα άλλα φορτία και οι αντίστοιχες μετατοπίσεις αυξάνονται.



Σχήμα 6.4: Διάγραμμα εικονικής δύναμης-μετατόπισης

Για τις δυνάμεις που ασκούνται στα σημεία i=1,…N ισχύει:



Σχήμα 6.5: Διάγραμμα πραγματικής δύναμης-μετατόπισης

με

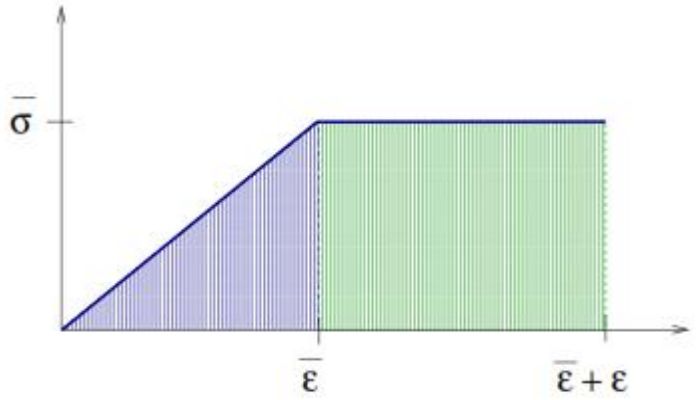
$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} F_i D_i \tag{6.8}$$

Έτσι λοιπόν, το συνολικό εξωτερικό έργο είναι :

$$W = \frac{1}{2}\overline{F}_*\overline{D}_* + \overline{F}_* D_* + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} F_i D_i \tag{6.9}$$

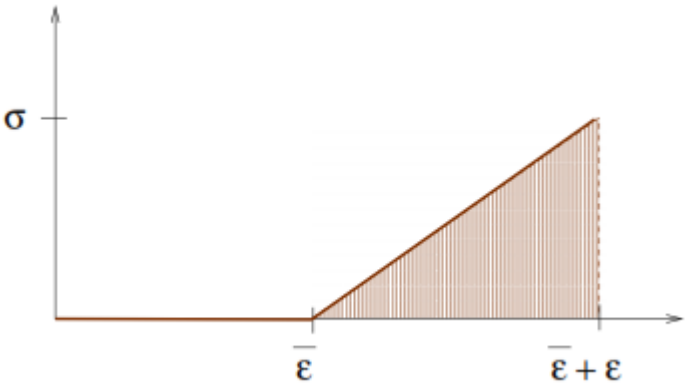
Έχοντας λοιπόν βρει το εξωτερικό έργο απομένει να υπολογιστεί το εσωτερικό έργο που προκύπτει από την επενέργεια όλων των δυνάμεων. Όπως αναφέρθηκε και στην αρχή η τάση και η παραμόρφωση που οφείλονται στη δύναμη $\overline{F}*$ είναι οι $\overline{\sigma}$ και $\overline{\varepsilon}$ και αυτές που οφείλονται στις δυνάμεις F_i οι σ και ε, αντίστοιχα.

Όσον αφορά, την τάση $\overline{\sigma}$ αυξάνεται γραμμικά μέχρι την παραμόρφωση $\overline{\varepsilon}$. Μετα την εφαρμογή των δυνάμεων F_i η τάση $\overline{\sigma}$ παραμένει σταθερή.



Σχήμα 6.6: Διάγραμμα εικονικής τάσης-συνολικής παραμόρφωσης

Από την άλλη η τάση σ λόγω των φορτίων F_i είναι μηδέν όσο εφαρμόζεται η δύναμη $\overline{F}*$ καθώς οι δυνάμεις F_i ακόμη δεν ασκούνται στην κατασκευή, όμως η παραμόρφωση αυξάνεται μέχρι την τιμή $\overline{\varepsilon}$. Όταν επέλθει αυτό το στάδιο ασκούνται οι δυνάμεις F_i και το διάγραμμα τάσης - παραμόρφωσης γίνεται και πάλι γραμμικό.



Σχήμα 6.7: Διάγραμμα πραγματικής τάσης-συνολικής παραμόρφωσης

Έχοντας σχηματίσει τα προηγούμενα διαγράμματα υπάρχει η δυνατότητα να υπολογιστεί το συνολικό εσωτερικό έργο βρίσκοντας το συνολικό εμβαδόν το παραπάνω γραφημάτων.

$$U = \frac{1}{2}\int_V \{\overline{\sigma}\}^T \{\overline{\varepsilon}\} dV + \int_V \{\overline{\sigma}\}^T \{\varepsilon\} dV + \frac{1}{2}\int_V \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} dV \qquad (6.10)$$

Εξισώνοντας το εξωτερικό ολικό έργο και το εσωτερικό προκύπτει:

$$\frac{1}{2}\overline{F}_*\overline{D}_* + \overline{F}_* D_* + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} F_i D_i = \frac{1}{2}\int_V \{\overline{\sigma}\}^T \{\overline{\varepsilon}\} dV + \int_V \{\overline{\sigma}\}^T \{\varepsilon\} dV + \frac{1}{2}\int_V \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} dV \qquad (6.11)$$

Ωστόσο από τα αρχικά προβλήματα που εφαρμόζονταν ξεχωριστά τα φορτία F_i και $\overline{F}*$ εξισώνοντας και σε αυτές τις περιπτώσεις το εξωτερικό με το εσωτερικό έργο, ισχύει:

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} F_i D_i = \frac{1}{2}\int_V \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} dV \tag{6.12}$$

$$\frac{1}{2}\overline{F}_* \overline{D}_* = \frac{1}{2}\int_V \{\overline{\sigma}\}^T \{\overline{\varepsilon}\} dV \tag{6.13}$$

Έτσι λοιπόν, η Σχέση (6.11) καταλήγει:

$$\overline{F}_* D_* = \int_V \{\overline{\sigma}\}^T \{\varepsilon\} dV \tag{6.14}$$

Η εξίσωση (6.14) αποτελεί την έκφραση του εικονικού έργου (virtual energy). Ονομάζεται εικονικό έργο καθώς η δύναμη $\overline{F}_*$ δεν είναι πραγματική αλλά χρησιμοποιείται για την εύρεση των μετατοπίσεων σε κάθε τυχαίο σημείο * της κατασκευής.

Έτσι λοιπόν, αφού η δύναμη $\overline{F}_*$ δεν είναι υπαρκτή μπορεί να τεθεί ίση με οποιαδήποτε τιμή. Θέτοντάς την ίση με την μονάδα προκύπτει το θεώρημα μοναδιαίας δύναμης (unit/dummy load method) όπου:

$$D_* = \int_V \{\overline{\sigma}\}^T \{\varepsilon\} dV \tag{6.15}$$

6.2 Συνθήκες βελτιστότητας

Έχοντας την έκφραση των μετατοπίσεων βάσει του θεωρήματος της μοναδιαίας δύναμης είναι δυνατός ο ορισμός των συνθηκών δηλαδή, τι θα ισχύει στην βέλτιστη κατάσταση.

Αρχικά, το πρόβλημα τοπολογικής βελτιστοποίησης με περιορισμούς τάσης μπορεί να οριστεί ως:

$$minW = \sum_{i=1}^{nelx} \sum_{j=1}^{nely} \rho_{ij} A_{ij} t_{ij} \tag{6.16}$$

$$u_{ij} < u_{allow} \tag{6.17}$$

$$t_{ij} < t_{max} \tag{6.18}$$

$$t_{ij} > t_{minimum} \tag{6.19}$$

Όπου:

nelx :τα στοιχεία στον x άξονα μετά τη διακριτοποίηση

nely : τα στοιχεία στον y άξονα μετά τη διακριτοποίηση

A: το εμβαδόν κάθε στοιχείου μετά τη διακριτοποίηση

t: το πάχος κάθε στοιχείου μετά τη διακριτοποίηση

u: η μετατόπιση του κάθε στοιχείου

u_{allow} : η μέγιστη επιτρεπόμενη μετατόπιση

t_{max}: το μέγιστο πάχος των στοιχείων της κατασκευής (το πάχος του αρχικού πεδίου βελτιστοποίησης)

$t_{minimum}$: το ελάχιστο πάχος που μπορεί να εμφανιστεί στην κατασκευή.

Έχοντας μαθηματικοποιήσει το πρόβλημα βρίσκεται η συνάρτηση Lagrange η οποία θα βοηθήσει να εντοπιστούν οι συνθήκες βελτιστότητας.

$$L = \sum_{i=1}^{nelx} \sum_{j=1}^{nely} \rho_{ij} A_{ij} t_{ij} + \lambda_1 (u_{ij} - u_{allow}) + \lambda_2 (t_{ij} - t_{max}) + \lambda_3 (t_{minimum} - t_{ij}) \tag{6.20}$$

Όπου λ_1,λ_2,λ_3 σταθεροί συντελεστές.

Όμως από το θεώρημα μοναδιαίας δύναμης η εξίσωση Lagrange γράφεται ως:

$$L = \sum_{i=1}^{nelx} \sum_{j=1}^{nely} \rho_{ij} A_{ij} t_{ij} + \lambda_1 \left(\int_V \{\overline{\sigma}\}^T \{\varepsilon\} dV - u_{allow} \right) + \lambda_2 (t_{ij} - t_{max}) + \lambda_3 (t_{minimum} - t_{ij}) \tag{6.21}$$

Σύμφωνα με τη θεωρία η βέλτιστη κατάσταση υφίσταται όταν:

$$\nabla_t L = 0 \tag{6.22}$$

Έτσι λοιπόν:

$$\nabla_t L = \rho A + \lambda_1 \{\overline{\sigma}_{ij}\}^T \{\varepsilon_{ij}\} A + \lambda_2 - \lambda_3 t_{ij} = 0 \tag{6.23}$$

Με την προϋπόθεση ότι λ_1, λ_2, λ_3 είναι σταθεροί όροι και η πυκνότητα και το εμβαδόν του κάθε στοιχείου παραμένει ίδιο.

Τροποποιώντας την παραπάνω εξίσωση προκύπτει ότι:

$$\{\overline{\sigma}_{ij}\}^T \{\varepsilon_{ij}\} = \frac{\lambda_3 - \lambda_2 - \rho A}{\lambda_1 A} = \kappa = \sigma\tau\alpha\theta \tag{6.24}$$

Έτσι λοιπόν, στην βέλτιστη κατάσταση ισχύει η σταθερότητα του όρου $\{\overline{\sigma}_{ij}\}^T\{\varepsilon_{ij}\}$ πράγμα που σημαίνει ότι:

$$\sum_{i=1}^{nelx}\sum_{j=1}^{nely}\{\overline{\sigma}_{ij}\}^T\{\varepsilon_{ij}\} = NEL\,k \tag{6.25}$$

Όπου NEL ο συνολικός αριθμός των στοιχείων της κατασκευής.

Άρα, το κριτήριο βελτιστότητας μπορεί να οριστεί σε μία πιο γενική μορφή ως:

$$\overline{w}^p = k \tag{6.26}$$

Όπου $\overline{w}$ ο μέσος όρος της εικονικής ενέργειας παραμόρφωσης και p ένας σταθερός συντελεστής.

Επιπλέον, φέρνοντας την συνθήκη βελτιστότητας στα δεδομένα του κάθε στοιχείου μπορεί να μετατραπεί ως:

$$n = \left(\frac{\{\overline{\sigma}_{ij}\}^T\{\varepsilon_{ij}\}}{\overline{w}}\right)^p \tag{6.27}$$

6.3 Ο αναδρομικός τύπος βελτιστοποίησης

Όπως έχει ειπωθεί και στα δικτυώματα όταν μια κατασκευή υπερβαίνει κάποιο περιορισμό μετατόπισης, είναι δυνατή η ικανοποίηση του περιορισμού με απλή κλιμάκωση των στοιχείων της κατασκευής σύμφωνα με τον τύπο:

$$t_{new} = t_{old}\left(1 - \frac{u - u_{allow}}{u_{allow}}\right) \tag{6.28}$$

Αυτός ο τύπος δεν είναι αναδρομικός και οδηγεί σε κατασκευή πολύ μακριά από το βέλτιστο (Makris & Provatidis, 2003).

Πολλαπλασιάζοντας τον λόγο των μετατοπίσεων με ένα συντελεστή f<1, ο τύπος γίνεται αναδρομικός, ωστόσο, όπως είναι προφανές, και πάλι θα καταλήξει στο ίδιο σχήμα.

$$t_{new} = t_{old}\left(1 - f\,\frac{u - u_{allow}}{u_{allow}}\right) \tag{6.29}$$

Παρόλα αυτά έχοντας έναν αναδρομικό τύπο που θα συγκλίνει βηματικά σε μια κατασκευή που δεν θα υπερβαίνει τους περιορισμούς μετατοπίσεων, αν σε κάθε βήμα του προστεθεί ένας επιπλέον όρος X, ο οποίος θα κατανέμεται στα στοιχεία της κατασκευής με βέλτιστο τρόπο, τότε προκύπτει μια βέλτιστη ή κοντά στο βέλτιστο κατασκευή.

Αυτό το βήμα X, το οποίο οδηγεί στη βελτιστοποίηση θα πρέπει αφενός να πληροί τις συνθήκες βελτιστότητας αφετέρου να είναι ίδιας τάξης μεγέθους με τον όρο:

$$f\frac{u-u_{allow}}{u_{allow}} \tag{6.30}$$

Με βάσει τα παραπάνω ο αναδρομικός τύπος έχει την μορφή:

$$t_{new} = t_{old}(1 - f\frac{u-u_{allow}}{u_{allow}} + f\frac{(\max(u)-u_{allow})}{u_{allow}}n^P) \tag{6.31}$$

Σύμφωνα με τη Σχέση (6.31) το:

$$\text{X}= f\frac{(\max(u)-u_{allow})}{u_{allow}}n^P \tag{6.32}$$

Παρατηρείται ότι αυτή η έκφραση του X, εμπεριέχει τη βέλτιστη συνθήκη (n^P) και είναι της ίδιας τάξης μεγέθους με τον όρο $f\frac{u-u_{allow}}{u_{allow}}$ καθώς έχουν τον ίδιο συντελεστή f.

Ωστόσο υπάρχει και ο λόγος $\frac{(\max(u)-u_{allow})}{u_{allow}}$ ο οποίος δίνει ενίσχυση στο βήμα όταν η κατασκευή βρίσκεται μακριά από το βέλτιστο ($\max(u) \gg u_{allow}$) και λιγότερη ισχύ όταν βρίσκεται κοντά στο βέλτιστο σχήμα ($\max(u) \cong u_{allow}$). Η χρησιμότητα αυτού του θα αναλυθεί στην συνέχεια.

Ο συντελεστής f, πρέπει να είναι μικρότερος από τη μονάδα και μπορεί να χρησιμεύει και ως συντελεστής σταθερότητας καθώς στις πρώτες επαναλήψεις όπου παρατηρούνται πιθανόν μεγάλες μετατοπίσεις πρέπει να έχει μικρή τιμή και καθώς η λύση προσεγγίζει το βέλτιστο πρέπει να ισούται με την μονάδα. Μετά από πολλά αριθμητικά παραδείγματα βρέθηκε ότι η βέλτιστη σχέση για την τιμή του είναι:

$$f = 0.01^{\frac{1}{\kappa}} \tag{6.33}$$

Όπου κ ο τρέχων αριθμός της επανάληψης.

Τέλος, για τον συντελεστή p μετά από αριθμητικές δοκιμές βρέθηκε ως κατάλληλη τιμή το p=3. Όπως θα αναφερθεί και στη συνέχεια έχοντας το λόγο n υψωμένο σε δύναμη και δει στην τρίτη ενισχύονται τα ενεργειακώς σημαντικά τμήματα της κατασκευής και παραγκωνίζονται σχεδόν τα ενεργειακώς μη σημαντικά, δηλαδή τα στοιχεία με n<1 τα οποία έχουν εικονική ενέργεια παραμόρφωσης μικρότερη από τη μέση ενεργειακή τιμή της κατασκευής.

Έτσι λοιπόν, ο αναδρομικός τύπος παίρνει την τελική μορφή:

$$t_{new} = t_{old}(1 - 0.01^{\frac{1}{\kappa}} \frac{u - u_{allow}}{u_{allow}} + 0.01^{\frac{1}{\kappa}} \frac{(\max(u) - u_{allow})}{u_{allow}} n^3) \qquad (6.34)$$

6.4 *Αλγόριθμος βελτιστοποίησης*

Με βάση των παραπάνω αφού προσδιορίσαμε τον αναδρομικό τύπο βελτιστοποίησης είμαστε σε θέση να περιγράψουμε τον βασικό αλγόριθμο.

Βήμα 1: ορισμός του αρχικού πεδίου βελτιστοποίησης (initial domain),του περιορισμού μετατόπισης και των σταθερών του υλικού, καθώς επίσης και την θέση και το μέτρο της δύναμης.

Σ αυτό το βήμα αρχικοποιείται το πρόβλημα. Ειδικότερα, ορίζονται οι διαστάσεις της πλάκας και το μέγιστο πάχος που μπορεί να λάβουν τα στοιχεία της. Επίσης ορίζεται το πλέγμα, δηλαδή ο αριθμός των πεπερασμένων στοιχείων κατά το x,y άξονα. Εκτός αυτού ορίζονται οι σταθερές του υλικού, δηλαδή το μέτρο ελαστικότητας και ο λόγος poisson, καθώς επίσης και η μέγιστη επιτρεπόμενη μετατόπιση. Τέλος γίνεται ορισμός ενός πολύ μικρού αρχικού πάχους (1% του μέγιστου πάχους) που ισοκατανέμεται σ όλη την κατασκευή και αποτελεί την αρχική κατάσταση στην οποία θα δράσει ο αλγόριθμος βελτιστοποίησης

Βήμα 2: Ανάλυση της κατασκευής με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων και προσδιορισμός των μετατοπίσεων.

Στο βήμα αυτό γίνεται υπολογισμός των μετατοπίσεων και των παραμορφώσεων που δημιουργούνται σε κάθε στοιχείο λόγω της δύναμης που ορίστηκε στο βήμα 1.

Βήμα 3: Εύρεση του κόμβου μέγιστης μετατόπισης και τοποθέτησης σ αυτόν μοναδιαίας δύναμης. Ανάλυση της κατασκευής και υπολογισμός των εικονικών τάσεων σε κάθε στοιχείο της κατασκευής

Σ αυτό το βήμα αφού έχει γίνει ανάλυση των μετατοπίσεων λόγω του φορτίου που ασκείται στην κατασκευή (Βήμα 2), βρίσκουμε τον κόμβο που παρουσιάζει την μέγιστη μετατόπιση και τοποθετούμε σ αυτόν μοναδιαία δύναμη. Έτσι λοιπόν βρίσκουμε σ αυτήν την εικονική κατάσταση για κάθε πεπερασμένο στοιχείο τις εικονικές τάσεις σ^* που προκύπτουν.

Βήμα 4: Υπολογισμός της εικονικής ενέργειας σε κάθε σημείο της κατασκευής και προσδιορισμός του συντελεστή n

Σ αυτό το σημείο υπολογίζεται ο βασικός συντελεστής που οδηγεί στη βέλτιστη κατασκευή. Ειδικότερα, αφού έχουν προσδιοριστεί οι πραγματικές παραμορφώσεις ε

(Βήμα 2) και οι εικονικές τάσεις σ^* (Βήμα 3) είμαστε σε θέσει να υπολογίσουμε την εικονική ενέργεια παραμόρφωσης κάθε στοιχείου σύμφωνα με τον προαναφερθέντα τύπο:

$$U_{ij} = \overline{\sigma}_{ij}\varepsilon_{ij}V_{ij} \tag{6.35}$$

Αφού υπολογιστούν όλες οι ενέργειας υπολογίζεται ο μέσος όρος της ενέργειας $\overline{w}$ και στην συνέχεια ο συντελεστής n

$$n = \left(\frac{\{\overline{\sigma}_{ij}\}^T\{\varepsilon_{ij}\}}{\overline{w}}\right) \tag{6.36}$$

Βήμα 5: Αναβάθμιση του αρχικού σχήματος βάσει του αναδρομικού τύπου που αναφέρθηκε παραπάνω

Βήμα 6: Έλεγχος του νέου πάχους των στοιχείων για το αν ξεπερνούν το πεδίο βελτιστοποίησης και κανονικοποίησης τους στους περιορισμούς πάχους

Μετα την αναβάθμιση των στοιχείων βάσει του αναδρομικού τύπου, είναι πιθανόν κάποια στοιχεία να έχουν πάχος μεγαλύτερο από μέγιστο επιτρεπτό όριο που ορίστηκε στο βήμα 1 είτε να έχουν αποκτήσει πάρα πολύ μικρό πάχος ακόμη και αρνητικό. Έτσι λοιπόν για τα στοιχεία που βρίσκονται σε μία από τις παραπάνω καταστάσεις γίνεται κανονικοποίηση τους, δηλαδή αφενός για τα στοιχεία που έχουν μεγαλύτερη τιμή από την μέγιστη επιτρεπόμενη λαμβάνουν την μέγιστο πάχος αφετέρου για τα στοιχεία που υπολείπονται του ελάχιστου δυνατού πάχους λαμβάνουν την ελάχιστη τιμή ώστε να αποφευχθούν απειρισμοί τάσεων και μετατοπίσεων (singularities)

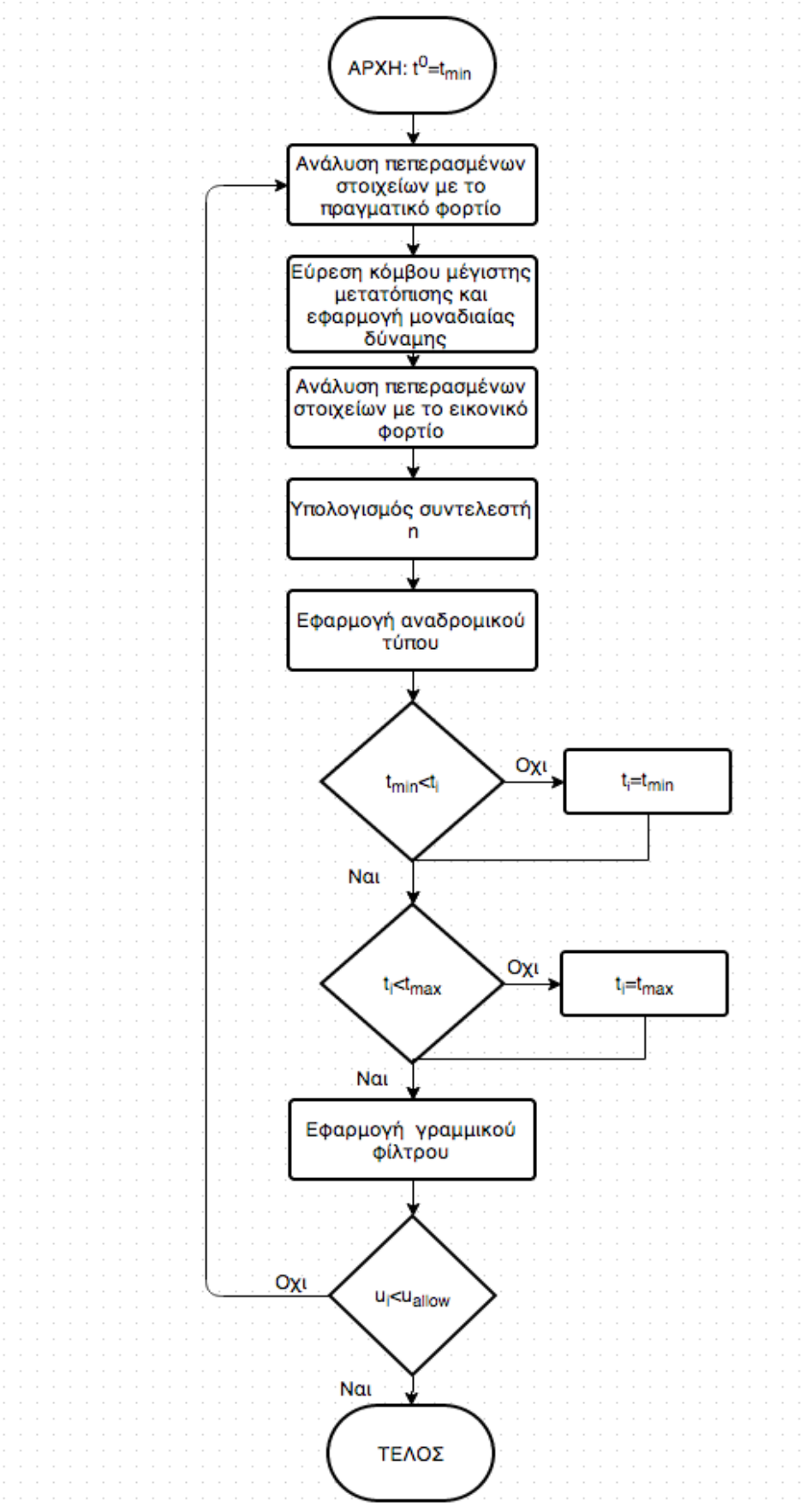
Βήμα 7: Ομογενοποίησε της κατασκευής χρησιμοποιώντας κατάλληλο φίλτρο

Αυτό το βήμα θα αναλυθεί εκτενέστερα παρακάτω. Εν ολίγοις το φίλτρο βοηθάει στην σύγκλιση της μεθόδου και αποτρέπει την δημιουργία του φαινομένου της σκακιέρας.

Βήμα 8: επανάληψη των βημάτων 2-6 μέχρι η κατασκευή να πληροί το κριτήριο σύγκλισης

Στο βήμα αυτό κλείνει η επαναληπτική διαδικασία. Ειδικότερα τα βήματα 2-6 επαναλαμβάνονται συνεχώς αναβαθμίζοντας συνεχώς το προς βελτιστοποίηση σχήμα μέχρις ότου πληρούνται ο περιορισμός μετατόπισης, δηλαδή όταν ($u<u_{allow}$)

Βήμα 9: Γραφική αναπαράσταση του τελικού βέλτιστου σχήματος και υπολογισμός του ποσοστού όγκου που χρησιμοποιεί η τελική κατασκευή σε σχέση με το αρχικό πεδίο (initial domain).



Σχήμα 6.8: Διάγραμμα ροής προτεινόμενου αλγόριθμου

6.5 Φίλτρο

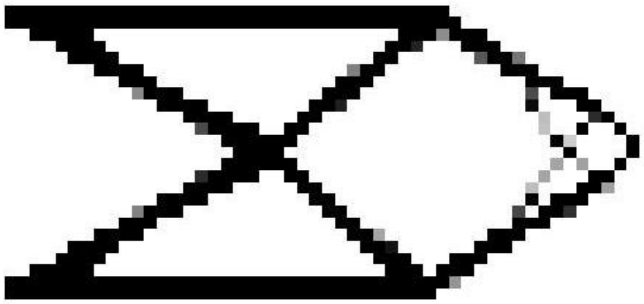
Γενικότερα στα προβλήματα τοπολογικής βελτιστοποίησης είναι ευρέως διαδεδομένη η χρήση φίλτρων της μεταβλητής που βελτιστοποιείται. Ειδικότερα, οι αλγόριθμοι βελτιστοποίησης που δεν χρησιμοποιούν φίλτρο έχουν έντονα προβλήματα σύγκλισης ,εξάρτησης από το αρχικό πλέγμα, αλλά παρουσιάζουν και το φαινόμενο της σκακιέρας.

Το φαινόμενο της σκακιέρας είναι το φαινόμενο στο οποίο η βέλτιστη κατασκευή παρουσιάζει μεμονωμένα στοιχεία που περικλείονται από στοιχεία που είναι κενά δημιουργώντας έτσι ένα σχήμα που ομοιάζει με σκακιέρα. Αυτή η κατασκευή είναι απευκταία καθώς δεν είναι δυνατή η κατασκευασιμότητά της.

Επιπλέον η ύπαρξη φίλτρου βοηθάει αρκετά στην σύγκλιση της μεθόδου (Svanberg K.,2013) καθώς όπως θα αναλυθεί και στην συνέχεια το φίλτρο ενισχύει περιοχές που είναι δίπλα σε ενεργειακώς σημαντικά σημεία.

6.5.1 Το γεωμετρικό φίλτρο

Πριν την ανάπτυξη ειδικού φίλτρου κατά την διάρκεια ανάπτυξης του παραπάνω αλγορίθμου παρατηρήθηκε ότι ο αλγόριθμος δεν συγκλίνει ωστόσο βρίσκει τις σημαντικές περιοχές της κατασκευής, δηλαδή δημιουργούσε τις δοκίδες που παρατηρούμε στα βέλτιστα σχήματα τις βιβλιογραφίας.



Σχήμα 6.9: Αποτέλεσμα αλγορίθμου βελτιστοποίησης με την απουσία φίλτρου

Όπως φαίνεται και στο παραπάνω σχήμα (Σχήμα 6.9) ναι μεν έχουν δημιουργηθεί οι απαραίτητες δοκίδες τις κατασκευής, ωστόσο είναι ισχνές (έχουν μικρό πάχος, μόλις μερικών πεπερασμένων στοιχείων). Εκτός αυτού δημιουργείται και το φαινόμενο της σκακιέρας όπως φαίνεται στην «μύτη» της διαμορφωμένης κατασκευής. Είναι προφανές ότι καθώς τα πάχη των δοκίδων που αποτελούν την κατασκευή είναι

αρκετά μικρά ο αλγόριθμός δεν μπορεί να συγκλίνει καθώς οι μετατοπίσεις παραμένουν μεγάλες, παρόλο που το βασικό «σχήμα» της κατασκευής έχει δημιουργηθεί.

Έτσι λοιπόν είναι απαραίτητη η δημιουργία μίας υπορουτίνας που θα ενισχύει τμήματα της κατασκευής που βρίσκονται πλησίον στοιχείων που έχουν μεγάλο πάχος και άρα μεγάλη ενεργειακή συμμετοχή. Αυτή η απαίτηση μπορεί να απαντηθεί με την χρήση ενός γεωμετρικού φίλτρου.

Σύμφωνα μ αυτό το πάχος που λαμβάνει κάθε στοιχείο μετα τον αναδρομικό τύπο βελτιστοποίησης πολλαπλασιάζεται με κάποιους συντελεστές βαρύτητας w_{ij}. Έτσι λοιπόν, ισχύει ότι:

$$t_i = \sum_j w_{ij}\, t_j \tag{6.37}$$

Όπου t_i , t_j είναι τα πάχη των στοιχείων i,j αντίστοιχα και

w_{ij} συντελεστής βαρύτητας που βασίζεται στην απόσταση των στοιχείων i,j.

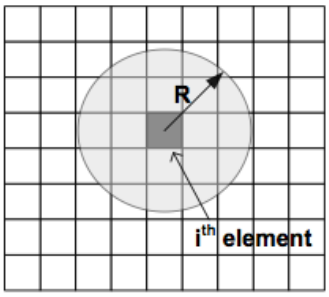
Μια λογική απαίτηση για τους συντελεστές w_{ij} είναι ότι εάν όλες οι μεταβλητές σχεδιασμού είναι ίσες σε μία συγκεκριμένη τιμή, τότε οι «φιλτραρισμένες» μεταβλητές πρέπει να έχουν την ίδια τιμή. Με λίγα λόγια πρέπει:

$$\sum_j w_{ij} = 1 \tag{6.38}$$

Οι συντελεστές βαρύτητας παίρνουν θετικές τιμές για μια περιοχή N_i κοντά στο στοιχείο i, και ίσες με μηδέν σε μια περιοχή μακριά από την περιοχή N_i. Αυτή η περιοχή είναι κυκλική και έχει ακτίνα R, που ονομάζεται ακτίνα του φίλτρου. Είναι προφανές λοιπόν ότι μ αυτόν τον τρόπο μπορεί να οριστεί το «κοντά» ενός στοιχείου ως:

$$N_i=\{j:d(I,j)\leq R\} \tag{6.39}$$

Όπου d(i,j) η απόσταση μεταξύ των κέντρων των στοιχείων.

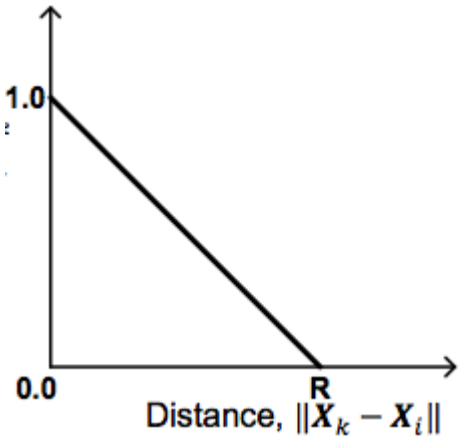


Σχήμα 6.10: Απεικόνιση της φυσικής σημασίας της ακτίνας του φιλτρού

Η φόρμουλα η οποία χρησιμοποιήθηκε και προσδιορίζει τους συντελεστές βαρύτητας είναι:

$$w_{ij} = \frac{R - d(i,j)}{\sum_k \left(R - d(i,k)\right)} \tag{6.40}$$

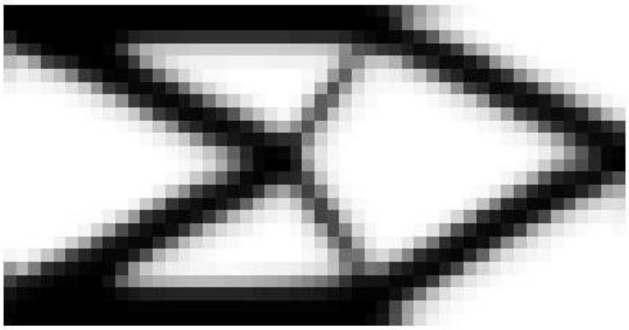
Εάν d(i,j)≥R τότε w_{ij}=0



Σχήμα 6.11: Γραφική παράσταση πάχους στοιχείου ανάλογα με την απόσταση απο άλλο στοιχείο

Μ αυτόν τον τρόπο ενισχύονται τα στοιχεία τα οποία βρίσκονται κοντά στις δοκίδες που σχηματίζει ο αλγόριθμος καθώς θα έχουν μεγάλο συντελεστή w_{ij} με στοιχεία που έχουν μεγάλα πάχη.

Τέλος να σημειωθεί ότι πειραματικά παρατηρήθηκε ότι μια ικανοποιητική τιμή για την ακτίνα R είναι η απόσταση δύο διαγώνιων πεπερασμένων στοιχείων.



Σχήμα 6.12: Αποτέλεσμα με την χρήση του προτεινόμενου φίλτρου

6.5.2 Αξιολόγηση αλγορίθμου σε κατασκευές αναφοράς

Σ αυτήν την ενότητα θα παρουσιαστούν αριθμητικά παραδείγματα στα οποία εφαρμόστηκε ο αλγόριθμος βελτιστοποίησης που περιγράφθηκε προηγουμένως.

Έγινε εφαρμογή του κώδικα σε πέντε παραδείγματα, συγκεκριμένα:

- 3 πρόβολοι όπου το φορτίο ασκείται σε διαφορετικό σημείο σε καθένα απ αυτούς
- 1 πρόβολος τύπου L (L-shape cantilever)
- 1 αμφιέριστη δοκός (MBB)

Το υλικό των κατασκευών έχει μέτρο ελαστικότητας E=210GPa και ο λόγο poisson ν=0.3. Το φορτίο είναι F= 10N. Για την διακριτοποίηση των πεδίων χρησιμοποιήθηκαν τετρακομβικά πεπερασμένα.

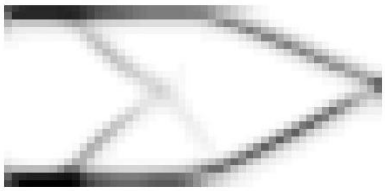
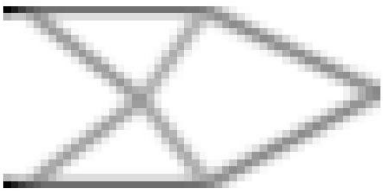
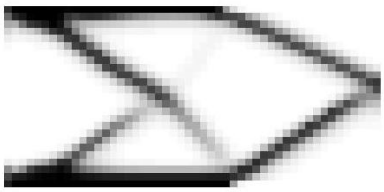
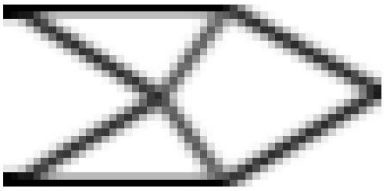
6.5.3 Πρόβολος (1)

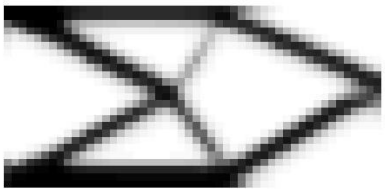
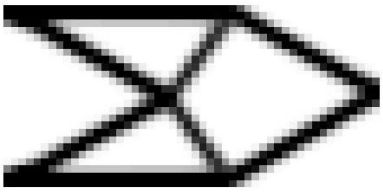
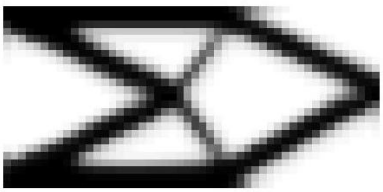
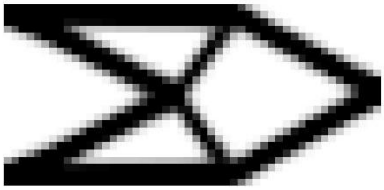
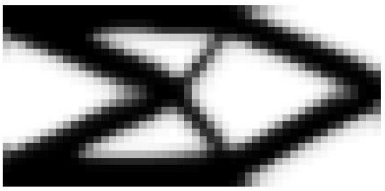
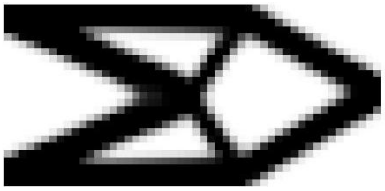
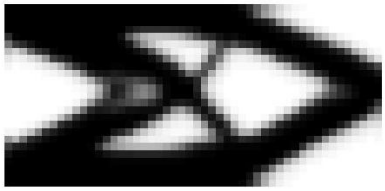
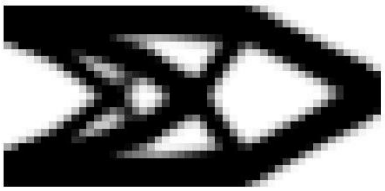
Σχήμα 6.13: Σχηματική απεικόνιση προβόλου (1)

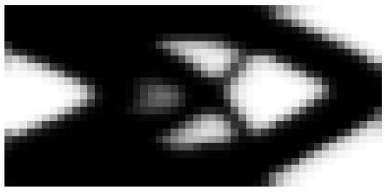
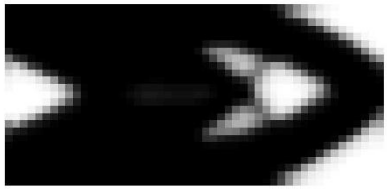
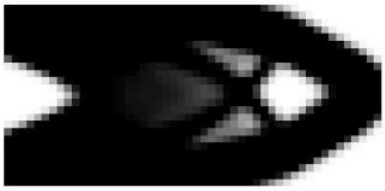
Σ αυτό το παράδειγμα έγινε εφαρμογή του κώδικα σε πακτωμένη ορθωγωνική πλάκα του παραπάνω σχήματος (Σχήμα 6.13). Στην πλάκα ασκείτε φορτίο στην μέση της ελεύθερης πλάκας. Χρησιμοποιήθηκαν τετρακομβικά πεπερασμένα στοιχεία με πλέγμα 50X25,δηλαδή 50 πεπερασμένα κατά τον X άξονα και 25 κατά τον Y. Οι διαστάσεις μήκους, πλάτους, πάχους που ορίστηκαν είναι Lx=100mm Ly=50mm t=2mm, αντίστοιχα.

Παρακάτω παρατίθεται πίνακας (Πίνακας 6.1) με την βελτιστοποιημένη κατανομή πάχους που δημιουργεί ο αλγόριθμος που αναπτύχθηκε στην παρούσα διπλωματική εργασία και στην διπλανή στήλη η κατανομή που δημιουργεί ο αλγόριθμος SIMP. Οι βελτιστοποιημένες κατασκευές που παρουσιάζονται έχουν την ίδια μέγιστη μετατόπιση.

Πίνακας 6.1: Πίνακας βελτιστοποιημένων σχημάτων του προτεινόμενου αλγορίθμου και της μεθόδου SIMP για διάφορες μέγιστες μετατοπίσεις

Μέγιστη Μετατόπιση (μm)	**Βελτιστοποιημένο σχήμα με την προτεινόμενη μέθοδο**	**Βελτιστοποιημένο σχήμα με την μέθοδο SIMP**
6,41		
3,30		

Μέγιστη Μετατόπιση (μm)	**Βελτιστοποιημένο σχήμα με την προτεινόμενη μέθοδο**	**Βελτιστοποιημένο σχήμα με την μέθοδο SIMP**
2,23		
1,72		
1,43		
1,23		

Μέγιστη Μετατόπιση (μm)	**Βελτιστοποιημένο σχήμα με την προτεινόμενη μέθοδο**	**Βελτιστοποιημένο σχήμα με την μέθοδο SIMP**
1,10		
1,01		

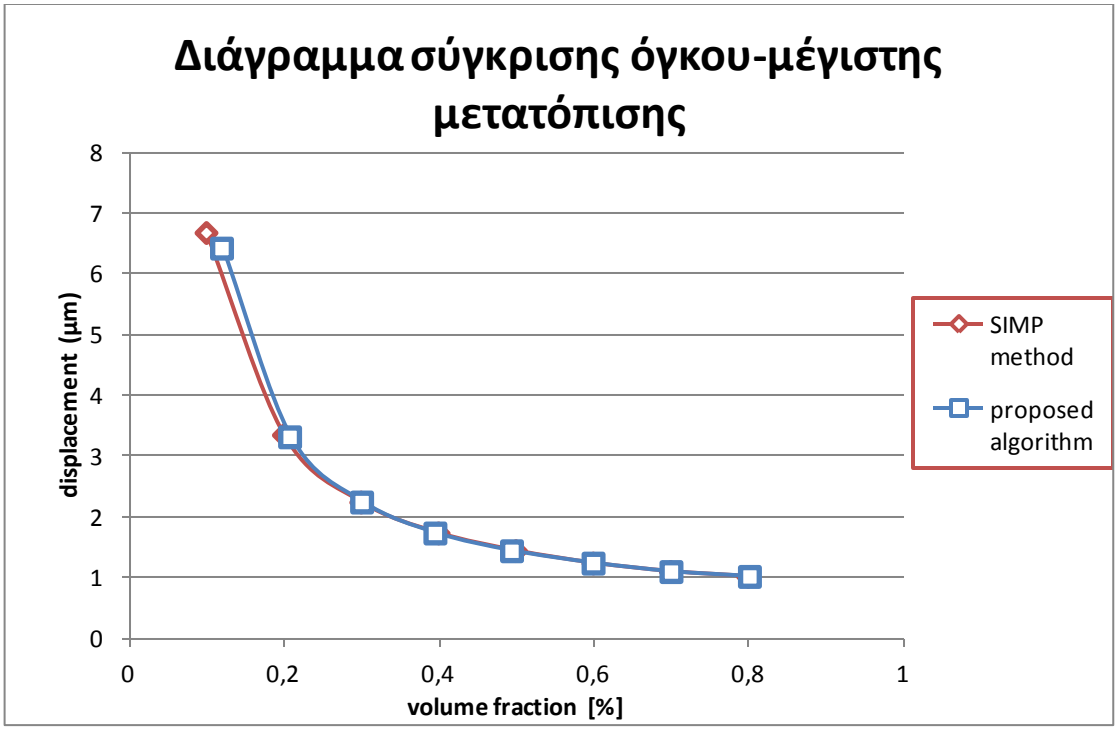
Να σημειωθεί ότι η σύγκριση των δύο αλγορίθμων είναι ιδιόρρυθμη. Ειδικότερα, όπως έχει αναλυθεί και σε προηγούμενη ενότητα ο αλγόριθμος SIMP, απαιτεί την εισαγωγή του ορίου όγκου ώστε να δημιουργήσει το βέλτιστο σχήμα με την ελάχιστη ενδοτικότητα, κατανέμοντας το εναπομείναν υλικό. Η ελάχιστη ενδοτικότητα όμως, είναι η μέγιστη δυσκαμψία. Έτσι λοιπόν έμμεσα η τοπολογική βελτιστοποίηση της SIMP, είναι η δημιουργία κατασκευής συγκεκριμένου όγκου που θα έχει την μέγιστη δυσκαμψία, συνεπώς τις ελάχιστες μετατοπίσεις. Απ' την άλλη ο αλγόριθμος που προτείνεται στην παρούσα εργασία είναι βελτιστοποίηση όγκου με περιορισμό μετατόπισης. Άρα, η δημιουργία κατασκευής με ελάχιστο όγκο ώστε να έχει τις μετατοπίσεις που θέλουμε. Συνεπώς, αν και οι δύο αλγόριθμοι προσεγγίζουν το πρόβλημα με διαφορετικό τρόπο, επιλύουν το ίδιο πρόβλημα.

Ωστόσο για να γίνει η σύγκριση έπρεπε να γίνει κάποια μετατροπή καθώς η βελτιστοποίηση με την μέθοδο SIMP, έχει περιορισμό όγκου, ενώ ο αλγόριθμος βελτιστοποίησης με την μέθοδο του μοναδιαίου φορτίου έχει περιορισμό μετατόπισης. Έτσι λοιπόν για να είναι πλήρως συγκρίσιμοι οι αλγόριθμοι ακολουθήθηκε η εξής διαδικασία:

1. Έγινε εφαρμογή της μεθόδου SIMP για κάποια όρια-περιορισμούς όγκου (volume fraction) και συγκεκριμένα για 10%-80% όπως παρουσιάζεται και στις εικόνες σύγκρισης της τοπολογίας.
2. Ορίστηκε πάχος και έγινε ανάλυση πεπερασμένων στοιχείων στη βελτιστοποιημένη κατά SIMP κατασκευή.
3. Υπολογισμός της μέγιστης μετατόπισης της βελτιστοποιημένης κατασκευής
4. Εισαγωγή της μέγιστης μετατόπισης που υπολογίστηκε στο βήμα 3 ως μέγιστη επιτρεπόμενη μετατόπιση στον αλγόριθμο μοναδιαίου φορτίου
5. Υπολογισμός του όγκου της βελτιστοποιημένης κατασκευής με τον αλγόριθμο του μοναδιαίου φορτίου
6. Σύγκριση όγκων και τοπολογίας των τελικών κατασκευών που παράγουν οι δύο αλγόριθμοι.

Από την σύγκριση των τοπολογιών του Πίνακας 6.1 φαίνεται ότι οι αλγόριθμοι καταλήγουν σε πολύ κοντινές τοπολογίες. Όπως είναι εμφανές οι τοπολογίες για κάποιους περιορισμούς είναι σχεδόν πανομοιότυπες. Μεγαλύτερες διαφορές παρατηρούνται σε βελτιστοποιημένα σχήματα με μεγάλες μέγιστες επιτρεπόμενες μετατοπίσεις. Συγκεκριμένα σ' αυτές τις περιπτώσεις ο προτεινόμενος αλγόριθμος δημιουργεί μόνο δυο «νεύρα» στο εσωτερικό του σχήματος, που είναι ημιτελή, δηλαδή δεν φτάνουν μέχρι την απέναντι πλευρική ακμή όπως συμβαίνει στα επόμενα βελτιστοποιημένα σχήματα του Πίνακας 6.1 και ενισχύει αρκετά τις πλευρικές ακριανές πλευρές της κατασκευής. Εν αντιθέσει, η μέθοδος SIMP δημιουργεί δύο απ' άκρη σ' άκρη ενισχυτικές δοκίδες αλλά παρουσιάζει ισχνές πλευρικές ακμές. Έτσι λοιπόν καταλήγουμε ότι τα βελτιστοποιημένα σχήματα είναι αρκετά κοντά ως τοπολογίες αλλά παρουσιάζουν κάποιες διαφορές, οι οποίες αυξάνονται για βελτιστοποιημένες κατασκευές μικρού όγκου.

Παρακάτω παρατίθεται το διάγραμμα (Σχήμα 6.14) μετατοπίσεων-ορίου όγκου για τις βελτιστοποιημένες κατασκευές τόσο της SIMP όσο και του ανεπτυγμένου αλγορίθμου στην παρούσα εργασία.

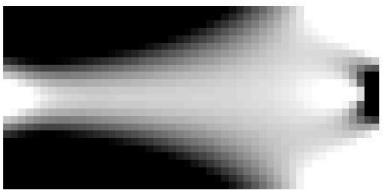
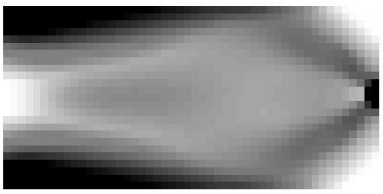
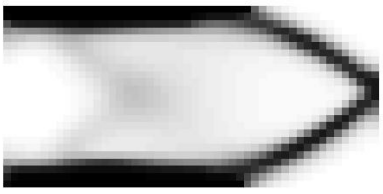
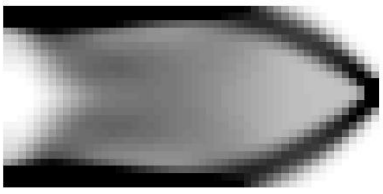
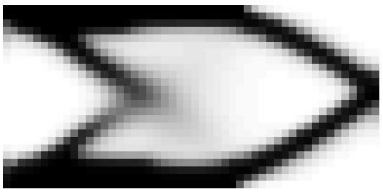
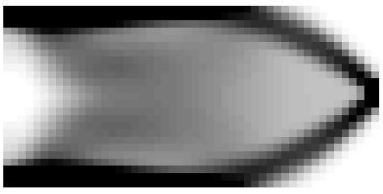


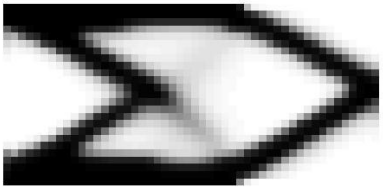
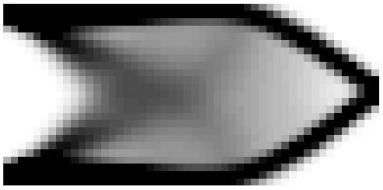
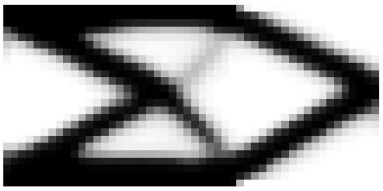
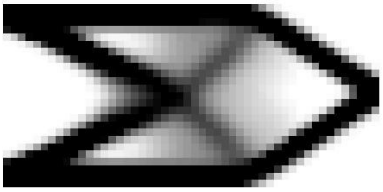
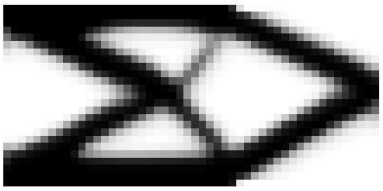
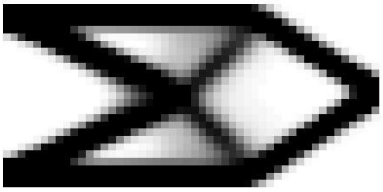
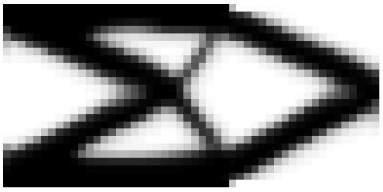
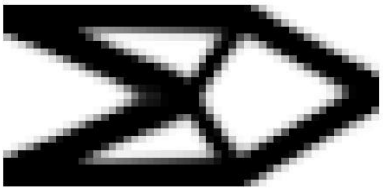
Σχήμα 6.14: Διάγραμμα σύγκρισης μέγιστων μετατοπίσεων βελτιστοποιημένων κατασκευών SIMP και μοναδιαίου φορτίου

Όπως είναι εμφανές από το Σχήμα 6.14 οι βελτιστοποιημένες κατασκευές με τελικό όγκο 0,3-0,8 του αρχικού έχουν τις ίδιες ακριβώς μετατοπίσεις, συνεπώς γι' αυτούς τους όγκους έχουμε την ίδια απόδοση και για τους δύο κώδικες. Ωστόσο για όρια όγκου μικρότερα από 20% παρατηρείται καλύτερη απόδοση της μεθόδου SIMP σε σύγκριση με τον προτεινόμενο αλγόριθμο, δηλαδή για ίδιο όγκο η SIMP έχει μικρότερες μετατοπίσεις και μεγαλύτερη ακαμψία. Εν κατακλείδι λοιπόν, οι τοπολογικές διαφορές που παρατηρήθηκαν σε μικρούς όγκους ευνοούν την μέθοδο SIMP και προφανώς η διαφορετική απόδοση των δύο αλγορίθμων είναι απόρροια αυτών.

Όπως αποδείχθηκε από τα παραπάνω οι δύο αλγόριθμοι έχουν ίδιο αποτέλεσμα τόσο ποιοτικό όσο και ποσοτικό για ενδιάμεσους όγκους(~50%). Παρόλα αυτά ο τρόπος που καταλήγουν στο βέλτιστο σχήμα είναι αρκετά διαφορετικός. Παρακάτω παρουσιάζονται τα ενδιάμεσα στάδια που περνάει οι αλγόριθμοι ώστε να καταλήξουν στο βέλτιστο σχήμα (Πίνακας 6.2).

Πίνακας 6.2: Πίνακας ενδιάμεσων σχημάτων του προτεινόμενου αλγορίθμου και της μεθόδου SIMP

Ενδιάμεσα στάδια του προτεινόμενου αλγορίθμου	**Ενδιάμεσα στάδια του αλγορίθμου του SIMP**
	
	
	
	

Ενδιάμεσα στάδια του προτεινόμενου αλγορίθμου	**Ενδιάμεσα στάδια του αλγορίθμου του SIMP**
	
	
	
	

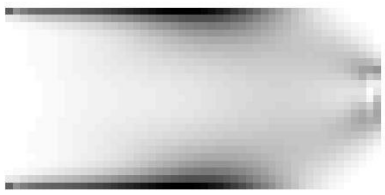
Όπως φαίνεται λοιπόν από τις ενδιάμεσες καταστάσεις που παρατηρούνται κατά την διάρκεια της βελτιστοποίησης οι αλγόριθμοι ξεκινάν με τελείως διαφορετικό τρόπο,

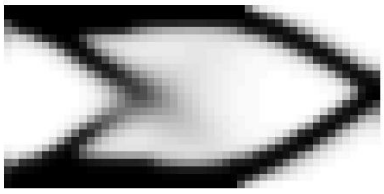
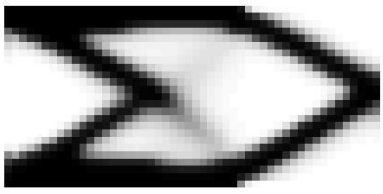
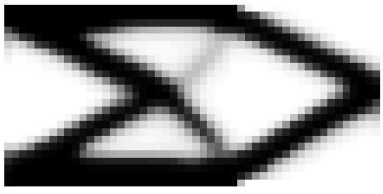
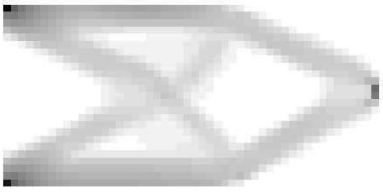
αλλά καταλήγουν στο ίδιο αποτέλεσμα. Ειδικότερα ο αλγόριθμος που αναπτύχθηκε στην παρούσα διπλωματική στα πρώτα σταδία της βελτιστοποίησης ενισχύει μόνο τα σημεία στις στηρίξεις και στην θέση που εφαρμόζεται το φορτίο. Εν συνεχεία, ενισχύει τα εξωτερικά πλευρικά όρια της κατασκευής δημιουργώντας έτσι μια συνεχή κατασκευή και στις επόμενες επαναλήψεις δημιουργεί τμηματικά τις ενισχυτικές δοκίδες που είναι σε σχήμα χιαστή στο εσωτερικό της βελτιστοποιημένης κατασκευής. Από την άλλη πλευρά ο αλγόριθμος της SIMP αρχικά δημιουργεί μια ενισχυμένη περιοχή στις πλευρικές περιοχές αρκετά μεγάλη. Στην συνέχεια μειώνει αυτές τις περιοχές αυξάνοντας το πάχος στο εσωτερικό της βέλτιστης κατασκευής. Τέλος δημιουργεί τις ενισχυτικές δοκίδες με γκρίζες περιοχές πλησίον τους και στις επόμενες επαναλήψεις μειώνει αυτές τις γκρίζες περιοχές και αυξάνει τις «διατομές» των ενισχυτικών δοκίδων.

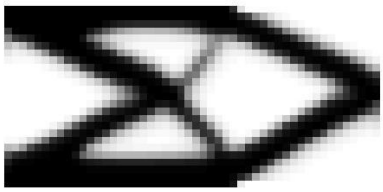
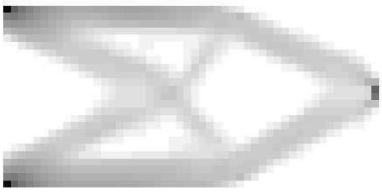
Όπως έχουμε αναφέρει κατά την περιγραφεί της μεθόδου βελτιστοποίησης ο αναδρομικός τύπος που βάσει αυτού ανασχεδιάζεται η κατασκευή σε κάθε βήμα δίνεται από την εξίσωση (6.34).

Σ αυτόν τον τύπο η «καρδία» της βελτιστοποίησης όπως αποδείχθηκε και από την ανάλυση με πολλαπλασιαστές Lagrange είναι ο λόγος n, ο οποίος αποτελεί το βέλτιστο κριτήριο και δίνεται από την εξίσωση (6.36). Έχει ενδιαφέρον να δούμε την κατανομή αυτού του συντελεστή σε χαρακτηριστικές ενδιάμεσες καταστάσεις ώστε να κατανοήσουμε τον τρόπο με τον οποίο επηρεάζει τον αλγόριθμο ώστε να καταλήξει στο βέλτιστο σχήμα (Πίνακας 6.3).

Πίνακας 6.3: Πίνακας σχημάτων κατανομής συντελεστή n κατά την διάρκεια της βελτιστοποίησης

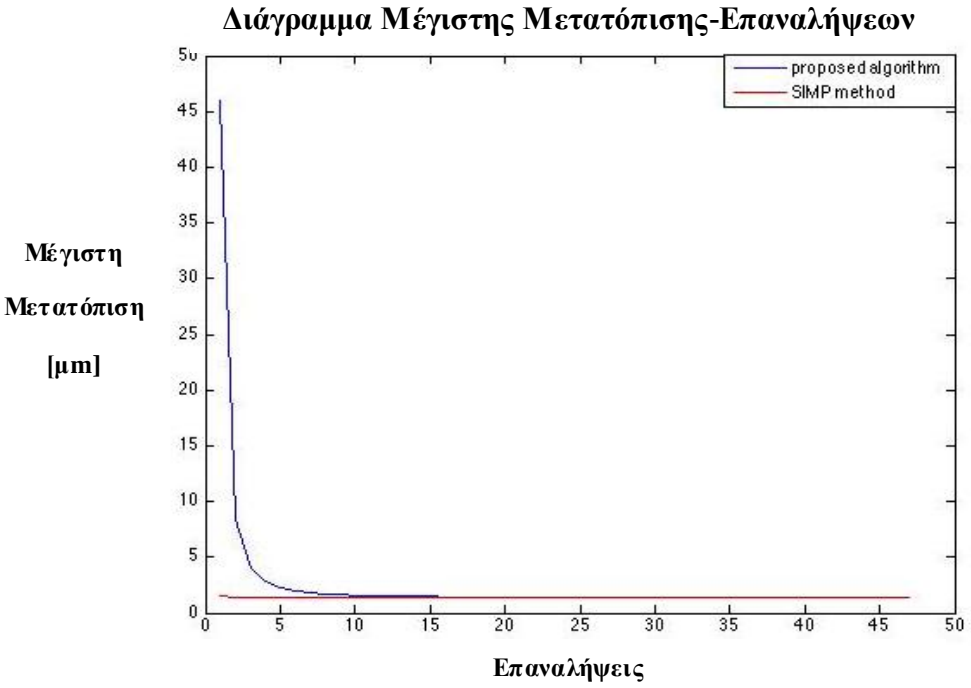
Κατανομή πάχους	**Κατανομή συντελεστή n**
	

Κατανομή πάχους	**Κατανομή συντελεστή n**
	
	
	

Κατανομή πάχους	**Κατανομή συντελεστή n**
	

Είναι εύκολα αντιληπτός ο ευεργετικός χαρακτήρας του συντελεστή n. Ειδικότερα, μπορούμε να πούμε ότι έχει ρόλο «καθοδηγητή», δηλαδή σε κάθε επανάληψη δείχνει μια κατανομή που ομοιάζει με την κατανομή πάχους της επόμενης επανάληψης. Έτσι λοιπόν είναι εμφανές ότι σε κάθε επανάληψη κατανέμει μια ποσότητα υλικού στις κρίσιμες περιοχές. Η ποσότητα αυτή αυξάνεται στις επόμενες επαναλήψεις και εν μέρει διορθώνεται από τον άλλο λόγο του αναδρομικού τύπου. Έτσι λοιπόν μετα από λίγες επαναλήψεις ο αλγόριθμος έχει συγκλίνει στην βέλτιστη λύση. Εκτός αυτού έχει σημασία να τονιστεί ότι η κατανομή είναι σταθερή αρκετές επαναλήψεις πριν την τελική σύγκλιση, λειτουργεί δηλαδή σαν οιωνός για το που περίπου θα συγκλίνει η τελική κατασκευή.

Ένα άλλο κρίσιμο σημείο για την διαλεύκανση της συμπεριφοράς του αναπτυγμένου αλγορίθμου είναι η μεταβολή της μέγιστης μετατόπισης αλλά και της αντικειμενικής συνάρτησης , δηλαδή του βάρους, σε κάθε επανάληψη.

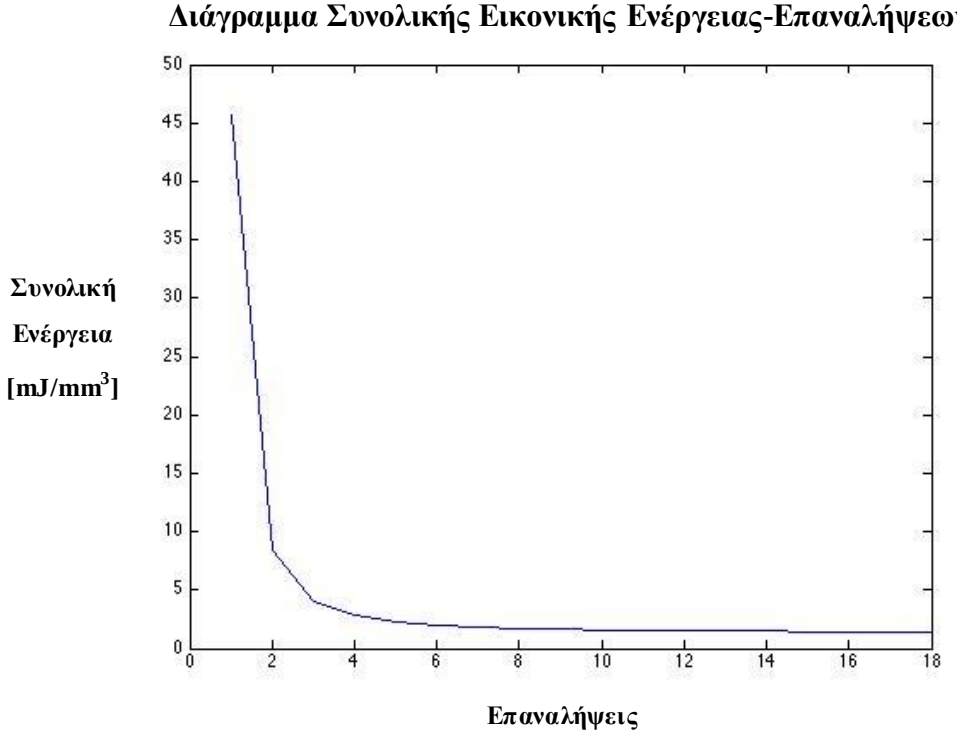


Σχήμα 6.15: Πορεία μέγιστης μετατόπισης κατά την διάρκεια της βελτιστοποίησης με τον προτεινόμενο αλγόριθμο και με την μέθοδο SIMP

Στο διάγραμμα του παραπάνω σχήματος (Σχήμα 6.15) φαίνεται η πορεία της μέγιστης μετατόπισης κατά την διάρκεια των επαναλήψεων τόσο της προτεινόμενης μεθόδου όσο και της SIMP . Όπως έχουμε αναφέρει ο προτεινόμενος αλγόριθμος ξεκινά από ένα πολύ μικρό ομοιόμορφο πάχος (1% του ολικού πεδίου βελτιστοποίησης). Όπως βλέπουμε σ αυτό το στάδιο η μέγιστη μετατόπιση είναι πολύ μεγάλη στα 46μm. Ωστόσο, η μείωση της μετατόπισης είναι άκρως απότομη και μόλις στις 6 επαναλήψεις η μέγιστη μετατόπιση είναι ελάχιστα μεγαλύτερη από την επιτρεπόμενη. Είναι εμφανής η εκθετική και ιδιαιτέρως απότομη συμμόρφωση της κατασκευής στον περιορισμό μετατόπισης. Έτσι λοιπόν γίνεται πιο ξεκάθαρή η σημασία του λόγου n στην κατασκευή, καθώς αυτός οφείλεται στην γρήγορη σύγκλιση στην επιθυμητή μετατόπιση. Με λίγα λόγια η εύστοχη κατανομή του υλικού, ακόμη και στα πρώτα στάδια της βελτιστοποίησης οδηγεί σε εκθετική μείωση των μετατοπίσεων. Αφού λοιπόν οι μετατοπίσεις φτάσουν σε ένα σημείο αρκετά κοντά στον περιορισμό η μεταβολή της μέγιστης μετατόπισης μέχρι τη τελική σύγκλιση είναι αρκετά μικρή και έτσι απαιτούνται 17 επαναλήψεις εν συνόλω για την τελική εναρμόνιση των μετατοπίσεων. Απ' την άλλη παρατηρούμε ότι οι μέγιστες μετατοπίσεις του αλγόριθμου SIMP παραμένουν σχεδόν σταθερές καθ' όλη την διάρκεια της βελτιστοποίησης. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η SIMP σε κάθε επανάληψη έχει

σταθερό όγκο, έτσι είναι λογικό οι μετατοπίσεις να μην μεταβάλλονται τόσο πολύ σε κάθε επανάληψη.

Άμα δημιουργήσουμε το διάγραμμα του αθροίσματος της εικονικής ενέργειας σε σχέση με τις επαναλήψεις παρατηρούμε ότι είναι πανομοιότυπο με το διάγραμμα των μέγιστων μετατοπίσεων όπως είναι εμφανές από το διάγραμμα του παρακάτω σχήματος (Σχήμα 6.16).



Σχήμα 6.16: Πορεία συνολικής εικονικής ενέργειας κατά την διάρκεια της βελτιστοποίησης

Αυτό η ομοιότητα είναι αναμενόμενη σύμφωνα με το θεώρημα της μοναδιαίας δύναμης το οποίο και επιβεβαιώνεται με τα παραπάνω διαγράμματα.

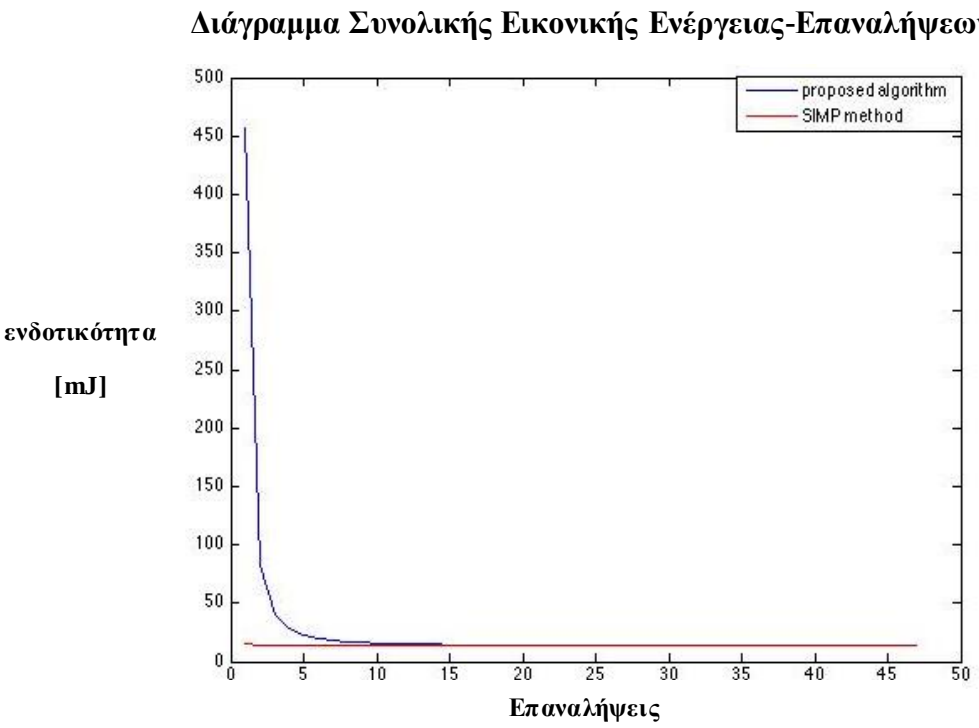
Άρα λοιπόν το άθροισμα των διακριτών γινομένων της εικονικής ενέργειας θα δίνει την μέγιστη μετατόπιση, αφού η μοναδιαία δύναμη ασκείται στο κόμβο με την μέγιστη μετατόπιση. Συνεπώς το άθροισμα των γινομένων δεν είναι κάτι άλλο από την μέγιστη μετατόπιση

Όπως έχει ειπωθεί η μέθοδος SIMP βελτιστοποιεί την κατασκευή ώστε να έχει την ελάχιστη compliance, δηλαδή την ελάχιστη ενδοτικότητα της κατασκευής. Όπως ξέρουμε η ενδοτικότητα δίνεται από τον τύπο:

$$C = \int_V \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} dV \tag{6.41}$$

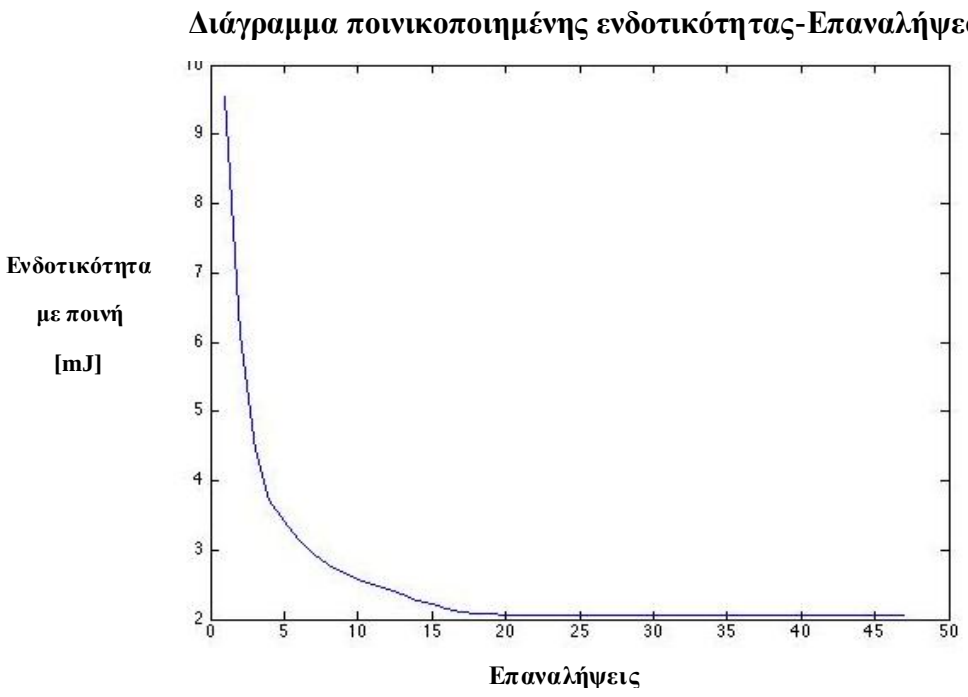
Δηλαδή, αριθμητικά είναι το άθροισμα του γινομένου των πραγματικών τάσεων με τις πραγματικές παραμορφώσεις του συνόλου των πεπερασμένων στοιχείων.

Δημιουργώντας λοιπόν το διάγραμμα της ενδοτικότητας με τις επαναλήψεις (Σχήμα 6.17) παρατηρούμε ότι η μορφή της είναι όμοια ποιοτικά (όχι αριθμητικά) με την μεταβολή των μετατοπίσεων.



Σχήμα 6.17: Πορεία μέγιστης ενδοτικότητας κατά την διάρκεια της βελτιστοποίησης του προτεινόμενου αλγορίθμου και της μεθόδου SIMP

Στο διάγραμμα του σχήματος (Σχήμα 6.17) εμφανίζεται επίσης και η πορεία της ενδοτικότητας στον αλγόριθμο SIMP. Με μια πρώτη ματιά είναι παράδοξο ότι η ενδοτικότητα είναι σχεδόν σταθερή. Ειδικότερα, θα περιμέναμε να είχε υπερβολική μορφή, αφού το πρόβλημα της SIMP είναι πρόβλημα ελαχιστοποίησης της ενδοτικότητας. Ωστόσο την κλασσική μορφή των προβλημάτων ελαχιστοποίησης παρουσιάζεται στην «ποινικοποιημένη» ενδοτικότητα (Σχήμα 6.18) καθώς αυτή είναι η αντικειμενική συνάρτηση της μεθόδου, σύμφωνα με την ανάλυση του Κεφαλαίου 2.

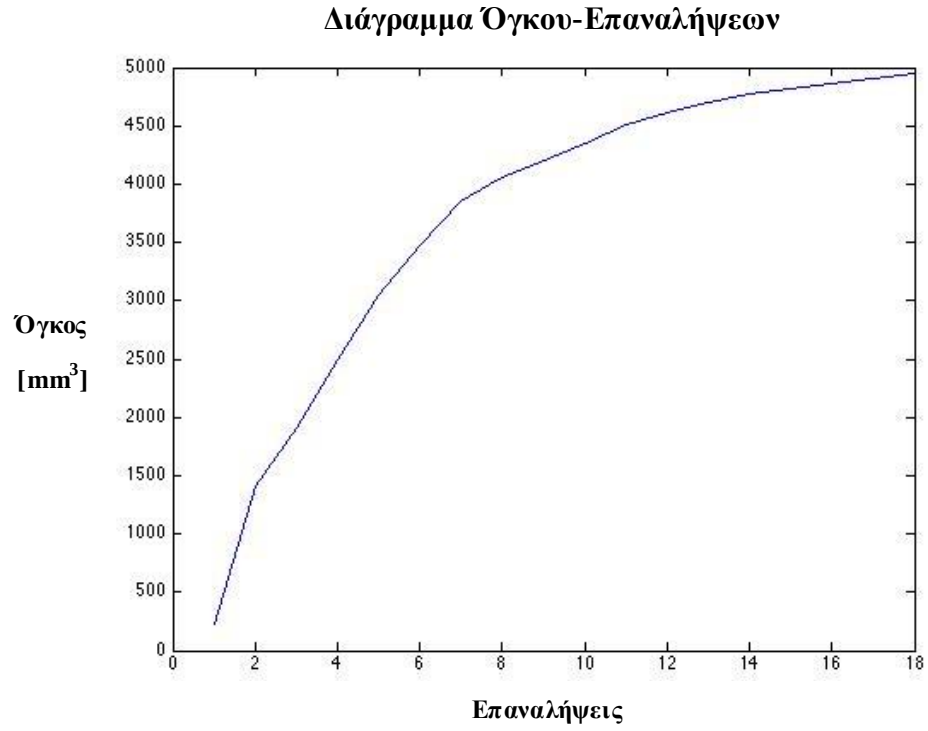


Σχήμα 6.18: Πορεία ποινικοποιημένης ενδοτικότητας κατά την διάρκεια των επαναλήψεων

Είναι προφανές πλέον ότι δημιουργώντας ένα βέλτιστο σχήμα με περιορισμούς μετατόπισης δημιουργούμε ένα βέλτιστο σχήμα με ελάχιστη ενδοτικότητα. Εν κατακλείδι λοιπόν τα προβλήματα ελαχιστοποίησης της ενδοτικότητας με τα προβλήματα με περιορισμό μετατόπισης είναι απολύτως σύμμορφα.

Η διαφορά με την μέθοδο της μοναδιαίας δύναμης είναι ότι δημιουργούμε μια «κανονικοποιημένη μορφή» της ενδοτικότητας έτσι ώστε να αντιπροσωπεύει τις μετατοπίσεις και έτσι να μπορούμε να την χρησιμοποιήσουμε στον αναδρομικό τύπο χωρίς την ύπαρξη παραγώγου. Βέβαια, η ενδοτικότητα έχει μορφή ίδια με τις μετατοπίσεις διότι η μέγιστη μετατόπιση βρίσκεται στο κόμβο που ασκείται η δύναμη. Σε αριθμητικά παραδείγματα που θα παρουσιαστούν παρακάτω υπάρχουν και παραδείγματα όπου η μέγιστη μετατόπιση δεν συνάδει με το κόμβο άσκησης του φορτίου.

Όσον αφορά την μεταβολή της αντικειμενικής συνάρτησης, δηλαδή του όγκου κατά την διάρκεια των επαναλήψεων παρατηρούμε ότι συγκλίνει ομαλά (Σχήμα 6.19).



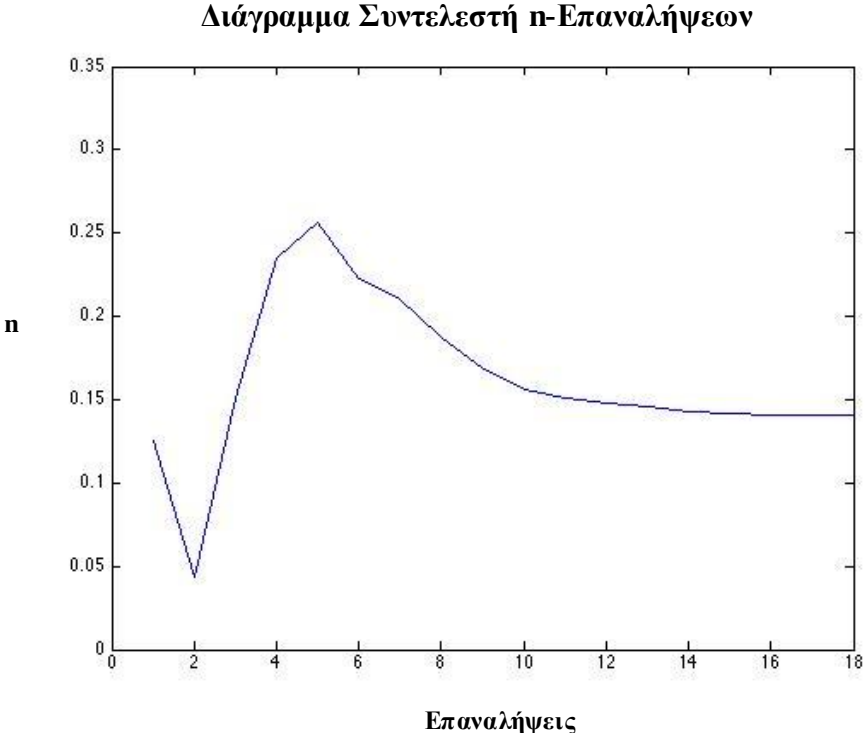
Σχήμα 6.19: Πορεία όγκου κατά την διάρκεια των επαναλήψεων

Είναι περίεργο με μια πρώτη ματιά ότι ενώ έχουμε πρόβλημα ελαχιστοποίησης του βάρους ο όγκος αυξάνεται συνεχώς μέχρι να συγκλίνει σε μία συγκεκριμένη τιμή. Αυτή η αρχικά παράδοξη συμπεριφορά είναι ιδιαιτέρως λογική καθώς ο αλγόριθμος ξεκινά από μια πάρα πολύ μικρή τιμή. Έτσι λοιπόν όσο οι μετατοπίσεις μεγαλύτερες από την επιτρεπόμενη προστίθεται υλικό στην κατασκευή και έτσι ο όγκος αυξάνεται. Βέβαια είναι εμφανές ότι ο όγκος συγκλίνει και έχει ελάχιστη μεταβολή όσο οι μετατοπίσεις είναι πολύ κοντά στην επιτρεπόμενη.

Εκτός αυτού έχει αξία να περιγράψουμε την τιμή της μέγιστης τιμής του συντελεστή n σε κάθε επανάληψη. Όπως αναφέραμε σύμφωνα με την ανάλυση με συντελεστές Lagrange η συνθήκη βελτιστότητας συνοψίζεται στο

$$n=\sigma\tau\alpha\theta \tag{6.41}$$

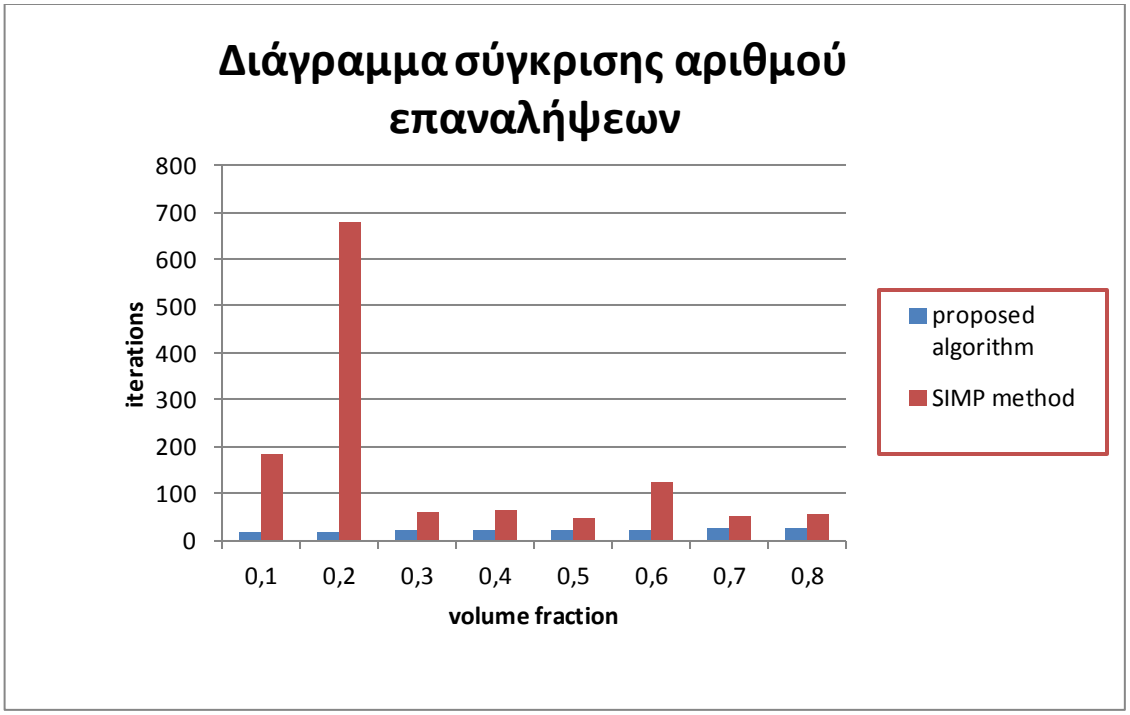
Έτσι λοιπόν αναμένουμε στην βέλτιστη κατάσταση ο συντελεστής n να είναι σταθερός, άρα και η μέγιστη τιμή του.



Σχήμα 6.20: πορεία μεταβολής μέγιστης τιμής συντελεστή n κατά την διάρκεια των επαναλήψεων

Πράγματι, όπως φαίνεται στο παραπάνω διάγραμμα (Σχήμα 6.20) στις τελευταίες επαναλήψεις πριν την σύγκλιση, η μέγιστη τιμή του συντελεστή n παραμένει σταθερή. Έτσι λοιπόν βρισκόμαστε σε μια βέλτιστη ή κοντά στο βέλτιστο κατάσταση. Βέβαια παρατηρείται μια αυξημένη διακύμανση στις τιμές του n κατά την διάρκεια των επαναλήψεων μέχρι την 6 επανάληψη. Σ' αυτό το σημείο ο αλγόριθμος έχει σχεδόν συγκλίνει στο σχήμα (οι μετατοπίσεις είναι πολύ κοντά στην μέγιστη επιτρεπόμενη μετατόπιση). Από την 6 επανάληψη και μετά ο συντελεστής n μειώνεται συνεχώς μέχρι να σταθεροποιηθεί και να συγκλίνει.

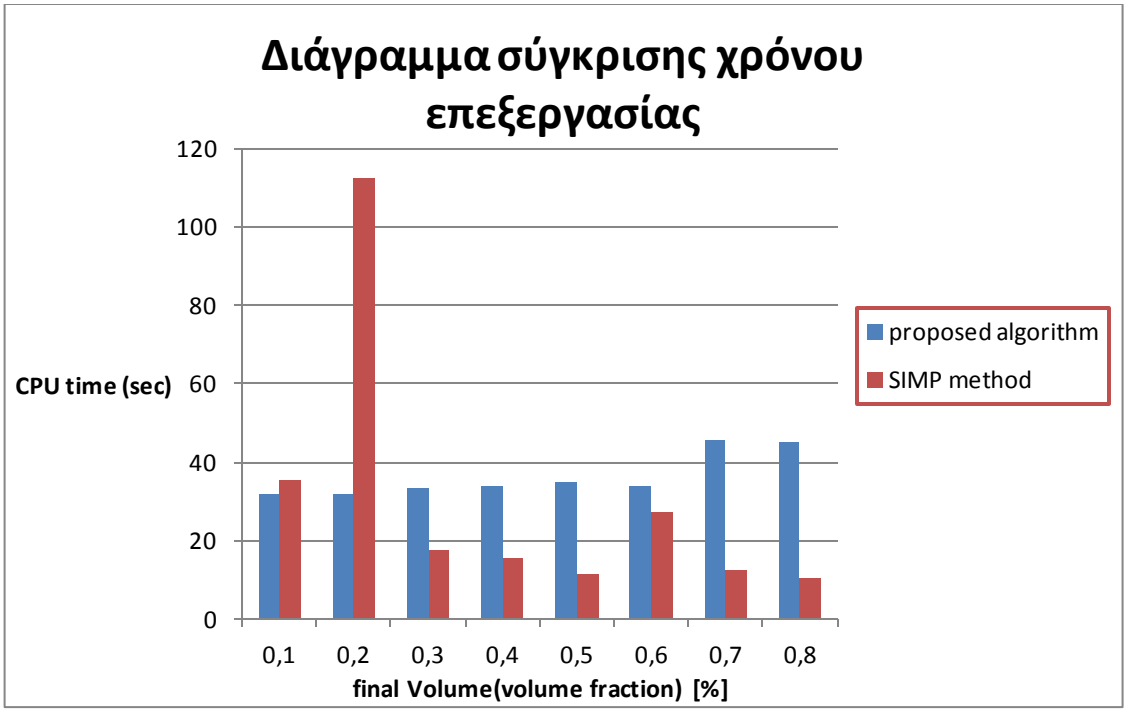
Τέλος ιδιαίτερη μνεία πρέπει να γίνει στις διαφορά των απαιτούμενων επαναλήψεων που απαιτούνται από τους δύο αλγορίθμους για να καταλήξουν στο βέλτιστο σχήμα. Για κάθε όγκο που δοκιμάστηκε ο αλγόριθμος που χρησιμοποιεί την μέθοδο του μοναδιαίου φορτίου συγκλίνει σε 15-25 επαναλήψεις. Από την άλλη αλγόριθμος SIMP έχει μεγάλη διακύμανση στον αριθμό των επαναλήψεων που απαιτούνται ώστε ανάλογα με το όριο όγκου που εισάγουμε. Παρακάτω φαίνεται στο Σχήμα 6.21 η διακύμανση των επαναλήψεων που απαιτούνται και ο αντίστοιχος αριθμός επαναλήψεων που απαιτείται από το αλγόριθμο που αναπτύχθηκε στην παρούσα εργασία.



Σχήμα 6.21: Σύγκριση αριθμού επαναλήψεων μεθόδου SIMP και προτεινόμενης μεθόδου

Όπως είναι εμφανές ο παρών αλγόριθμος παρουσιάζει μεγάλη διαφορά στον αριθμό των απαιτούμενων επαναλήψεων. Αυτή η διαφορά οφείλεται στο γεγονός ότι ο αλγόριθμος χρησιμοποιεί μεταβλητό βήμα λόγω του n και λόγω των συντελεστών που πολλαπλασιάζονται μ' αυτόν. Ειδικότερα όσο αυξάνονται οι επαναλήψεις αυξάνεται το βήμα λόγου του συντελεστή $0{,}01^{1/\kappa}$. Απ την άλλη στις πρώτες επαναλήψεις έχουμε αντιστοίχως μεγάλο βήμα επειδή οι μετατοπίσεις των κόμβων είναι πολύ μεγαλύτερες από την μέγιστη επιτρεπόμενη τάση.

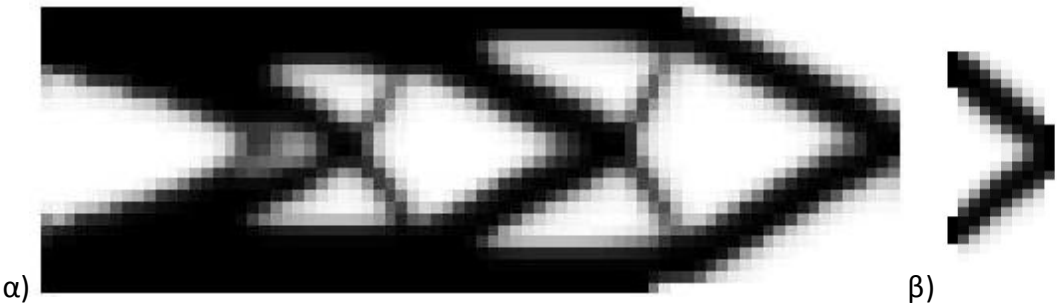
Ωστόσο μετρώντας το χρόνο επεξεργασίας που απαιτεί οι αλγόριθμοι για να συγκλίνουν έχουμε διαφορετικά δεδομένα. Παρακάτω φαίνονται στο Σχήμα 6.22 το διάγραμμα που παρουσιάζονται οι απαιτούμενοι χρόνοι επεξεργασίας(CPU time) του κάθε αλγορίθμου.



Σχήμα 6.22: Σύγκριση χρόνου επεξεργασίας μεθόδου SIMP και προτεινόμενης μεθόδου

Όπως παρατηρείται από το Σχήμα 6.22 σε χαμηλά όρια όγκου ο προτεινόμενος αλγόριθμος είναι πιο γρήγορος σε σχέση με τα μεγαλύτερα όρια όγκου. Συνεπώς ο χρόνος που απαιτείται για την επενέργεια μιας επανάληψης, είναι πολύ μεγαλύτερος στην προτεινόμενη μέθοδο σε σχέση με τον αλγόριθμο SIMP. Αυτή η τόσο μεγάλη διαφορά οφείλεται στο γεγονός ότι στον προτεινόμενο κώδικα χρησιμοποιείται δύο φορές ανάλυση πεπερασμένων στοιχείων. Συγκεκριμένα, απαιτείται μία ανάλυση για τα πραγματικά φορτία και ακόμη μια για το εικονικό μοναδιαίο φορτίο.

Παρόλα αυτά ο προτεινόμενος αλγόριθμος βελτιστοποίησης απαιτεί στην πραγματικότητα πολύ λιγότερο χρόνο επεξεργασίας από την SIMP , καθώς αυτή δεν βελτιστοποιεί άμεσα τις μετατοπίσεις. Έτσι λοιπόν, η SIMP για να βελτιστοποιήσει ως προς τις μετατοπίσεις θα απαιτούσε ακόμα ένα βρόγχο while ώστε να υπολογίζει το κατάλληλο όριο όγκου που πρέπει να εισαχθεί κάθε φορά στον αλγόριθμο για να μην παραβιάζεται η μέγιστη επιτρεπόμενη μετατόπιση.
Τέλος , να σημειωθεί ότι ο αλγόριθμος έχει την ίδια συμπεριφορά όχι μόνο στον πρόβολο που παρουσιάστηκε άλλα και σε μακρύ και κοντό πρόβολο. Οι τοπολογίες παρουσιάζονται στο Σχήμα 6.23. Έτσι λοιπόν η μέθοδος έχει τα ίδια ενθαρρυντικά αποτελέσματα σε προβόλους οποιονδήποτε διαστάσεων.



Σχήμα 6.23: βελτιστοποιημένες τοπολογίες α) μακρύ προβόλου με μέγιστη μετατόπιση 3,576 μm β) κοντού προβόλου με μετατόπιση 0,12 μm

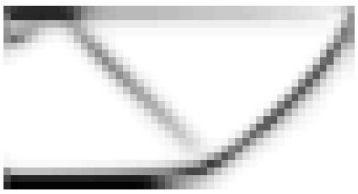
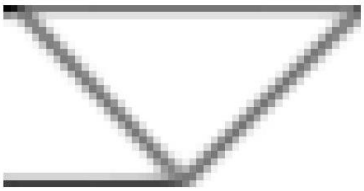
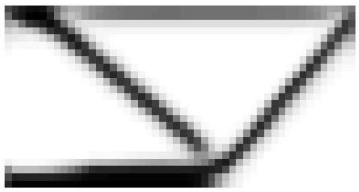
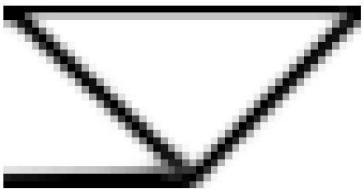
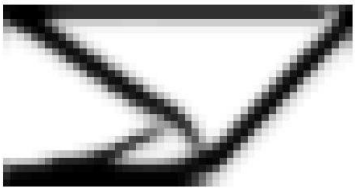
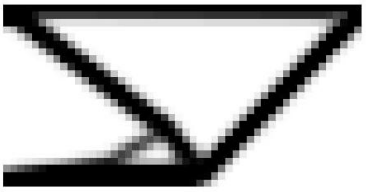
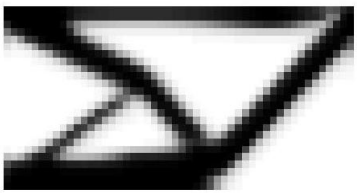
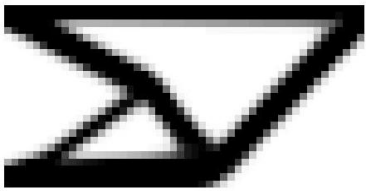
6.5.4 Πρόβολος (2)

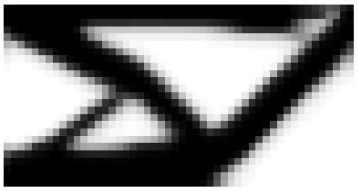
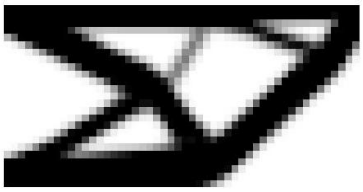
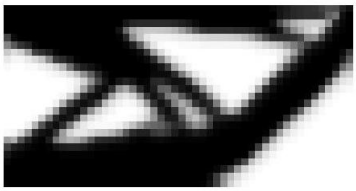
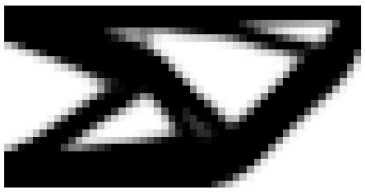
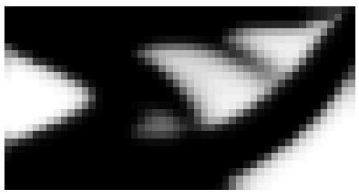
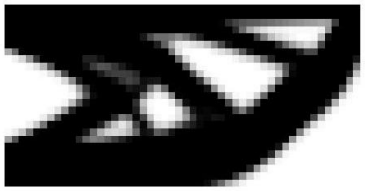
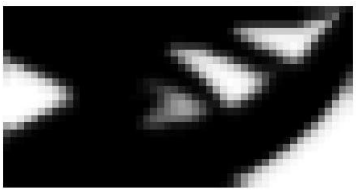
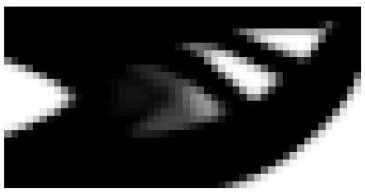
Σχήμα 6.24: Σχηματική απεικόνιση Προβόλου(2)

Σ αυτό το παράδειγμα έγινε εφαρμογή του αλγορίθμου σε πακτωμένη ορθωγωνική πλάκα του παραπάνω σχήματος (Σχήμα 6.24). Στην πλάκα ασκείτε φορτίο στην πάνω ακμή της πλάκας. Η αριθμητική εφαρμογή αυτού του παραδείγματος έγινε με σκοπό να διαλευκάνουμε την εξάρτηση του αλγορίθμου από την θέση εφαρμογής της δύναμης. Χρησιμοποιήθηκαν τετρακομβικά πεπερασμένα στοιχεία με πλέγμα 50X25,δηλαδή 50 πεπερασμένα κατά τον X άξονα και 25 κατά τον Y. Οι διαστάσεις μήκους, πλάτους, πάχους που ορίστηκαν είναι Lx=100mm Ly=50mm t=2mm,αντίστοιχα.

Παρακάτω παρατίθεται πίνακας (Πίνακας 6.4) με την βελτιστοποιημένη κατανομή πάχους που δημιουργεί ο αλγόριθμος που αναπτύχθηκε στην παρούσα διπλωματική εργασία και στην διπλανή στήλη η κατανομή που δημιουργεί ο αλγόριθμος SIMP.

Πίνακας 6.4: Πίνακας βελτιστοποιημένων σχημάτων του προτεινόμενου αλγορίθμου και της μεθόδου SIMP για διάφορες μετατοπίσεις

Μέγιστη Μετατόπιση (μm)	**Βελτιστοποιημένο σχήμα με την προτεινόμενη μέθοδο**	**Βελτιστοποιημένο σχήμα με την μέθοδο SIMP**
6,90		
3,80		
2,56		
1,94		

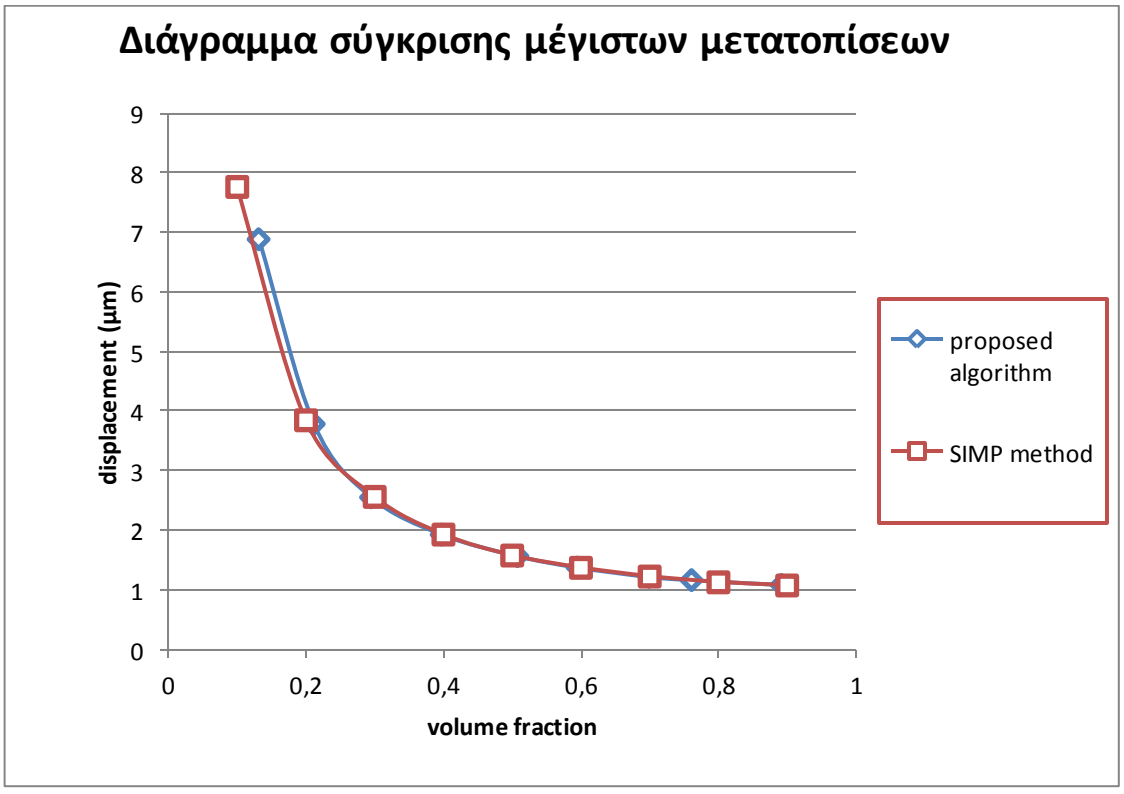
Μέγιστη Μετατόπιση (μm)	**Βελτιστοποιημένο σχήμα με την προτεινόμενη μέθοδο**	**Βελτιστοποιημένο σχήμα με την μέθοδο SIMP**
1,58		
1,38		
1,23		
1,17		

Όπως αναφέρθηκε και στο προηγούμενο παράδειγμα η σύγκριση των δύο αλγορίθμων έγινε εισάγοντας διάφορα όρια όγκου αλγόριθμο SIMP, με μέτρηση των μέγιστων μετατοπίσεων στο βελτιστοποιημένο σχήμα και εισαγωγή αυτής της

μέγιστης μετατόπισης ως περιορισμό στον αλγόριθμο που αναπτύχθηκε στην παρούσα διπλωματική εργασία.

Από την σύγκριση των τοπολογιών που εμφανίζονται στον πίνακα 6.4 φαίνεται ότι οι αλγόριθμοι καταλήγουν σε πολύ κοντινές τοπολογίες. Όπως είναι εμφανές οι τοπολογίες είναι σχεδόν πανομοιότυπες ως προς το σχήμα, εκτός μερικών παραδειγμάτων που υπάρχουν κάποιες διαφορές. Συγκεκριμένα στην τοπολογία που χρησιμοποιεί το 50% του αρχικού όγκου παρατηρούμε ότι η SIMP δημιουργεί μια επιπλέον ενισχυτική δοκό εσωτερικά της βέλτιστης κατασκευής, όπως επίσης για την τοπολογία που χρησιμοποιεί 60% του όγκου όπου ο νέος αλγόριθμος διαχωρίζει την κεντρική ενισχυτική δοκίδα σε δύο υποδοκίδες. Εν πολλοίς ωστόσο οι τοπολογίες είναι σχεδόν πανομοιότυπες.

Παρακάτω παρατίθεται το διάγραμμα μετατοπίσεων-ορίου όγκου (Σχήμα 6.25) για τις βελτιστοποιημένες κατασκευές τόσο της SIMP όσο και του ανεπτυγμένου αλγορίθμου στην παρούσα εργασία.



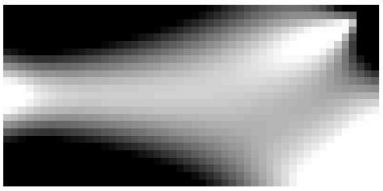
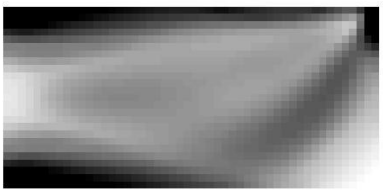
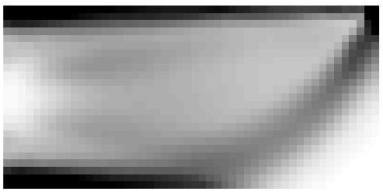
Σχήμα 6.25: Διάγραμμα σύγκρισης μέγιστων μετατοπίσεων βελτιστοποιημένων κατασκευών SIMP και μοναδιαίου φορτίου

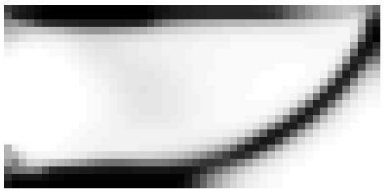
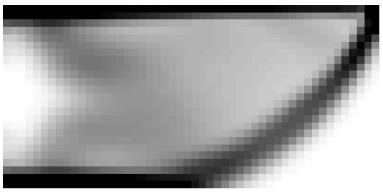
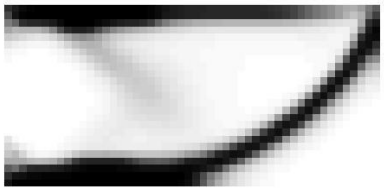
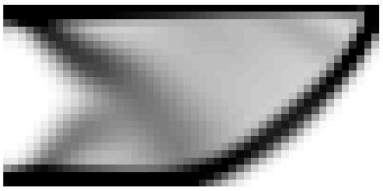
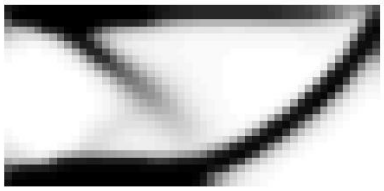
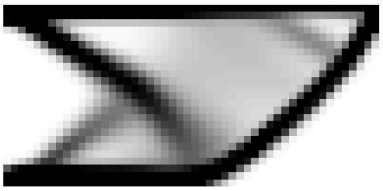
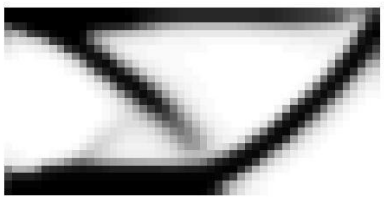
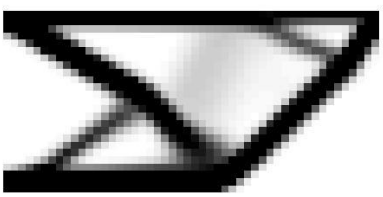
Όπως είναι εμφανές από το Σχήμα 6.25 οι μέγιστες μετατοπίσεις των βελτιστοποιημένων κατασκευών και για τους δύο κώδικες είναι πανομοιότυπες. Έτσι

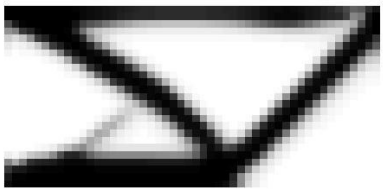
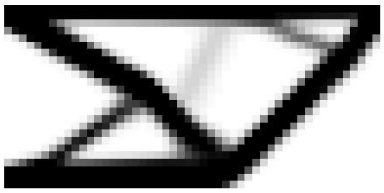
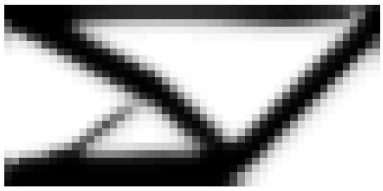
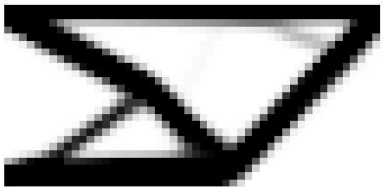
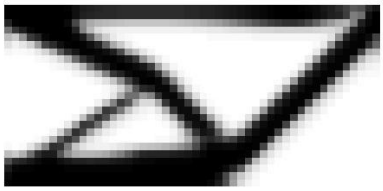
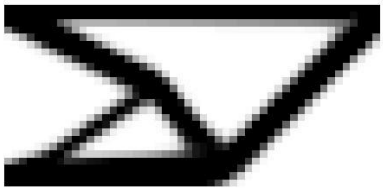
λοιπόν η απόδοση των δύο αλγορίθμων είναι ίδια. Η ίδια απόδοση των αλγορίθμων είναι λογική αφού οι τελικές βέλτιστες κατασκευές ήταν πανομοιότυπες.

Όπως αποδείχθηκε από τα παραπάνω οι δύο αλγόριθμοι έχουν ίδιο αποτέλεσμα τόσο ποιοτικό όσο και ποσοτικό για ενδιάμεσους όγκους(~40%). Παρόλα αυτά ο τρόπος που καταλήγουν στο βέλτιστο σχήμα είναι αρκετά διαφορετικός. Παρακάτω παρουσιάζονται τα ενδιάμεσα στάδια που περνάει οι αλγόριθμοι ώστε να καταλήξουν στο βέλτιστο σχήμα (Πίνακας 6.5).

Πίνακας 6.5: Πίνακας ενδιάμεσων σχημάτων του προτεινόμενου αλγορίθμου και της μεθόδου SIMP

Ενδιάμεσα στάδια του προτεινόμενου αλγορίθμου	**Ενδιάμεσα στάδια του αλγόριθμου SIMP**
	
	
	

Ενδιάμεσα στάδια του προτεινόμενου αλγορίθμου	**Ενδιάμεσα στάδια του αλγόριθμου SIMP**
	
	
	
	

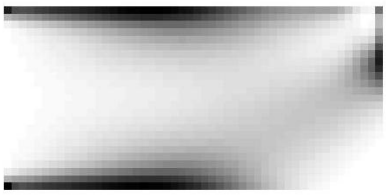
Ενδιάμεσα στάδια του προτεινόμενου αλγορίθμου	**Ενδιάμεσα στάδια του αλγόριθμου SIMP**
	
	
	

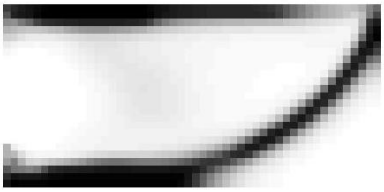
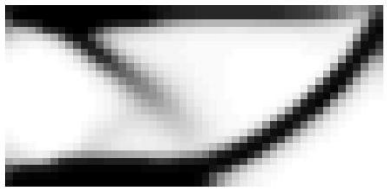
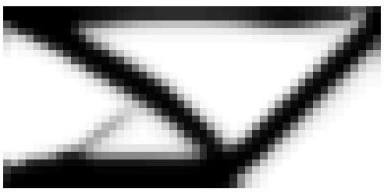
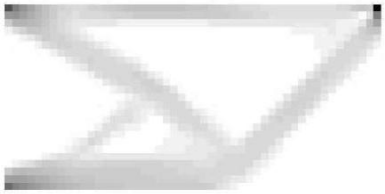
Όπως φαίνεται λοιπόν από τις ενδιάμεσες καταστάσεις που παρατηρούνται κατά την διάρκεια της βελτιστοποίησης οι αλγόριθμοι ξεκινάν με τελείως διαφορετικό τρόπο, αλλά καταλήγουν στο ίδιο αποτέλεσμα. Ειδικότερα, ο αλγόριθμος που αναπτύχθηκε στην παρούσα διπλωματική στα πρώτα στάδια της βελτιστοποίησης ενισχύει μόνο τα σημεία στις στηρίξεις και στην θέση που εφαρμόζεται το φορτίο. Εν συνεχεία, ενισχύει τα εξωτερικά πλευρικά όρια της κατασκευής δημιουργώντας έτσι μια συνεχή κατασκευή και στις επόμενες επαναλήψεις δημιουργεί τμηματικά τις ενισχυτικές δοκίδες που είναι στο εσωτερικό της βελτιστοποιημένης κατασκευής. Από την άλλη πλευρά ο αλγόριθμος SIMP αρχικά δημιουργεί μια ενισχυμένη περιοχή στις

πλευρικές περιοχές αρκετά μεγάλη. Στην συνέχεια μειώνει αυτές τις περιοχές αυξάνοντας το πάχος στο εσωτερικό της βέλτιστης κατασκευής δημιουργώντας πολλές γκρίζες περιοχές. Μετά από κάποιες επαναλήψεις δημιουργεί τις βασικές ενισχυτικές δοκίδες τις τελικής κατασκευής. Ωστόσο δημιουργεί και δύο ενισχυτικά νεύρα σε ενδιάμεσα στάδια που δεν συμμετέχουν στην κατασκευή και έτσι απαιτεί κάποιες επιπλέον επαναλήψεις μέχρι να εξαλείψει τα επιπλέον νεύρα και να ενισχύσει τα υπόλοιπα με τον αφαιρούμενο όγκο από αυτές. Έτσι λοιπόν, παρατηρείται σ' αυτό το παράδειγμα ότι ο αλγόριθμός μας είναι πιο «στοχευμένος» καθώς δεν αφαιρεί δοκίδες αλλά εντοπίζει από τις πρώτες επαναλήψεις τις δοκίδες που απαιτούνται για να σχηματιστεί το βέλτιστο σχήμα.

Αυτή η ευστοχία του κώδικα όπως έχει αναφερθεί οφείλεται στον συντελεστή n. Παρακάτω παρατίθεται Πίνακας 6.6 όπου εμφανίζονται η κατανομή αυτού του συντελεστή σε χαρακτηριστικές ενδιάμεσες καταστάσεις ώστε να κατανοήσουμε τον τρόπο με τον οποίο επηρεάζει τον αλγόριθμο ώστε να καταλήξει στο βέλτιστο σχήμα.

Πίνακας 6.6: Πίνακας σχημάτων κατανομής συντελεστή n κατά την διάρκεια της βελτιστοποίησης

Κατανομή πάχους	**Κατανομή συντελεστή n**
	

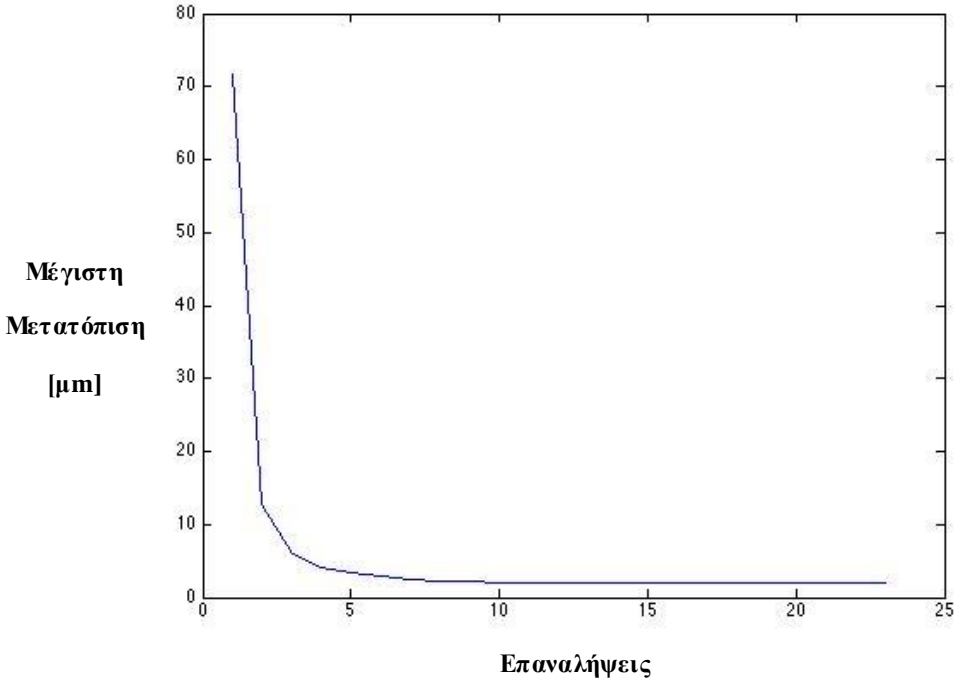
Κατανομή πάχους	**Κατανομή συντελεστή n**
	
	
	

Είναι εύκολα αντιληπτός ο ευεργετικός χαρακτήρας του συντελεστή n. Ειδικότερα, όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα μπορούμε να πούμε ότι έχει ρόλο «καθοδηγητή», δηλαδή σε κάθε επανάληψη δείχνει μια κατανομή που ομοιάζει με την κατανομή πάχους της επόμενης επανάληψης. Έτσι λοιπόν είναι εμφανές ότι σε κάθε επανάληψη κατανέμει μια ποσότητα υλικού στις κρίσιμες περιοχές. Η ποσότητα αυτή αυξάνεται στις επόμενες επαναλήψεις και εν μέρει διορθώνεται από τον άλλο

λόγο του αναδρομικού τύπου. Έτσι λοιπόν μετα από λίγες επαναλήψεις ο αλγόριθμος έχει συγκλίνει στην βέλτιστη λύση. Εκτός αυτού έχει σημασία να τονιστεί ότι η κατανομή είναι σταθερή αρκετές επαναλήψεις πριν την τελική σύγκλιση, λειτουργεί δηλαδή σαν οιωνός για το που περίπου θα συγκλίνει η τελική κατασκευή.

Ένα άλλο κρίσιμο σημείο για την διαλεύκανση της συμπεριφοράς του αναπτυγμένου αλγορίθμου είναι η μεταβολή της μέγιστης μετατόπισης αλλά και της αντικειμενικής συνάρτησης, δηλαδή του βάρους, σε κάθε επανάληψη.

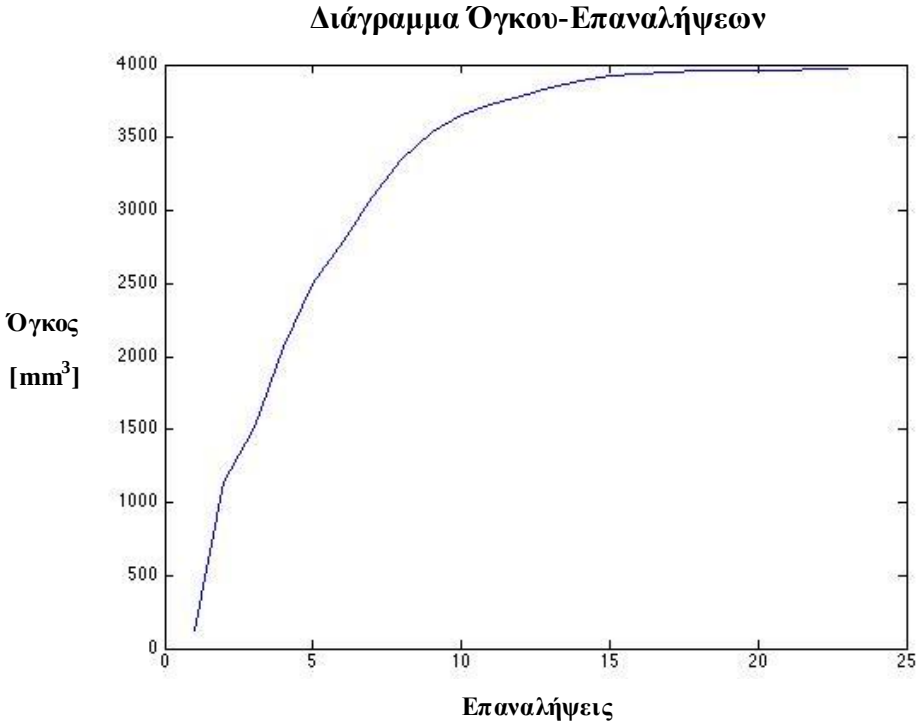
Διάγραμμα Μέγιστης Μετατόπισης-Επαναλήψεων



Σχήμα 6.26: Πορεία μέγιστης μετατόπισης κατά την διάρκεια της βελτιστοποίησης

Στο Σχήμα 6.26 φαίνεται η μεταβολή της μέγιστης μετατόπισης σε κάθε επανάληψη. Όπως βλέπουμε η μέγιστη μετατόπιση μειώνεται εκθετικά μέχρι την 5 επανάληψη όπου η μέγιστη μετατόπιση είναι ελάχιστα μεγαλύτερη από την επιτρεπόμενη. Είναι εμφανής η εκθετική και ιδιαιτέρως απότομη συμμόρφωση της κατασκευής στον περιορισμό μετατόπισης. Αφού λοιπόν οι μετατοπίσεις φτάσουν σε ένα σημείο αρκετά κοντά στον περιορισμό η μεταβολή της μέγιστης μετατόπισης μέχρι τη τελική σύγκλιση είναι αρκετά μικρή και έτσι απαιτούνται 23 επαναλήψεις εν συνόλω για την τελική εναρμόνιση των μετατοπίσεων στους περιορισμούς. Όπως αποδείχθηκε στο προηγούμενο παράδειγμα το άθροισμα της εικονικής ενέργειας παραμόρφωσης θα οδηγήσει στο ίδιο διάγραμμα λόγω του θεωρήματος της μοναδιαίας φόρτισης.

Όσον αφορά την μεταβολή της αντικειμενικής συνάρτησης, δηλαδή του όγκου κατά την διάρκεια των επαναλήψεων παρατηρούμε ότι συγκλίνει ομαλά (Σχήμα 6.27).



Σχήμα 6.27: Πορεία όγκου κατά την διάρκεια των επαναλήψεων

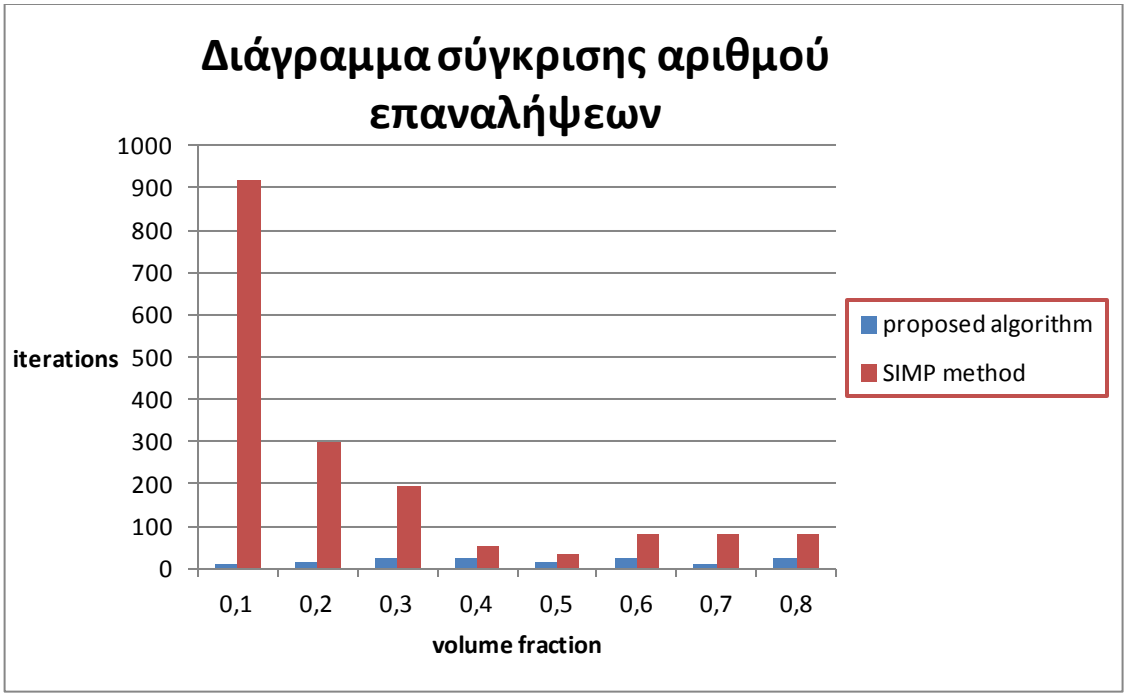
Και σ αυτό το παράδειγμα παρατηρούμε ότι ο όγκος ξεκινάει από μία πολύ μικρή αρχική τιμή και συγκλίνει εκθετικά στον τελικό όγκο μέχρι η μέγιστη μετατόπιση να είναι μικρότερη από την μέγιστη επιτρεπόμενη.

Εκτός αυτού είναι σημαντικό να δούμε την τιμή της μέγιστης τιμής του συντελεστή n κατά την διάρκεια των επαναλήψεων. Όπως αναφέραμε σύμφωνα με την ανάλυση με συντελεστές Lagrange η συνθήκη βελτιστότητας συνοψίζεται στο $n=\sigma\tau\alpha\theta$.
Έτσι λοιπόν αναμένουμε στην βέλτιστη κατάσταση ο συντελεστής n να είναι σταθερός, άρα και η μέγιστη τιμή του.

Σχήμα 6.28: Πορεία μεταβολής μέγιστης τιμής συντελεστή n κατά την διάρκεια των επαναλήψεων

Πράγματι, όπως φαίνεται στο Σχήμα 6.28 στις τελευταίες επαναλήψεις πριν την σύγκλιση, η μέγιστη τιμή του συντελεστή *n* παραμένει σταθερή. Έτσι λοιπόν βρισκόμαστε σε μια βέλτιστη ή κοντά στη βέλτιστη κατάσταση. Βέβαια παρατηρείται μια αυξημένη διακύμανση στις τιμές του n κατά την διάρκεια των επαναλήψεων μέχρι την 10 επανάληψη. Σ αυτό το σημείο ο αλγόριθμος έχει σχεδόν συγκλίνει (οι μετατοπίσεις είναι πολύ κοντά στην μέγιστη επιτρεπόμενη μετατόπιση). Από την $10^{η}$ μετατόπιση και μετά ο συντελεστής n μεταβάλλεται ελάχιστα και σταθεροποιείται τελείως λίγο πριν συγκλίνει.

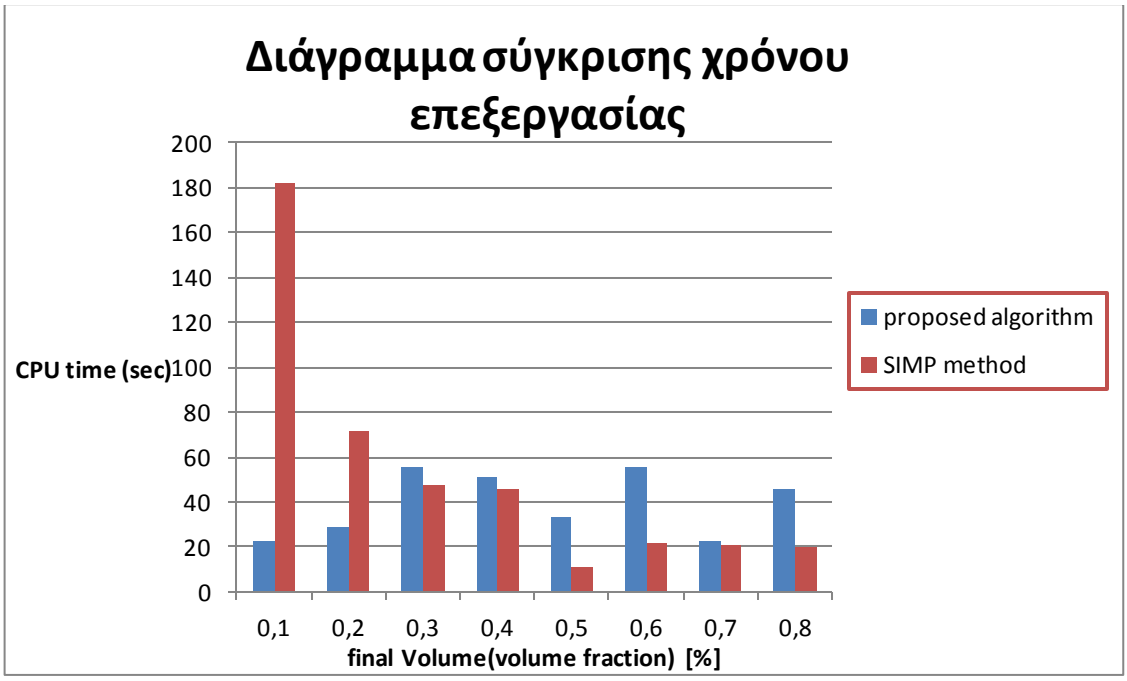
Τέλος μελετήθηκε και σ αυτό το αριθμητικό παράδειγμα η διαφορά των απαιτούμενων επαναλήψεων που απαιτούνται από τους δύο αλγορίθμους για να καταλήξουν στο βέλτιστο σχήμα. Για κάθε όγκο που δοκιμάστηκε ο αλγόριθμος που χρησιμοποιεί την μέθοδο του μοναδιαίου φορτίου συγκλίνει σε 15-25 επαναλήψεις. Από την άλλη αλγόριθμος SIMP έχει μεγάλη διακύμανση στον αριθμό των επαναλήψεων που απαιτούνται ώστε ανάλογα με το όριο όγκου που εισάγουμε. Παρακάτω φαίνεται η διακύμανση των επαναλήψεων που απαιτούνται και ο αντίστοιχος αριθμός επαναλήψεων που πραγματοποιούνται από το αλγόριθμο που αναπτύχθηκε στην παρούσα εργασία (Σχήμα 6.29).



Σχήμα 6.29: Σύγκριση αριθμού επαναλήψεων μεθόδου SIMP και προτεινόμενης μεθόδου

Όπως φαίνεται από το Σχήμα 6.29 και σ αυτήν την περίπτωση ο παρών αλγόριθμος παρουσιάζει μεγάλη διαφορά στον αριθμό των απαιτούμενων επαναλήψεων.

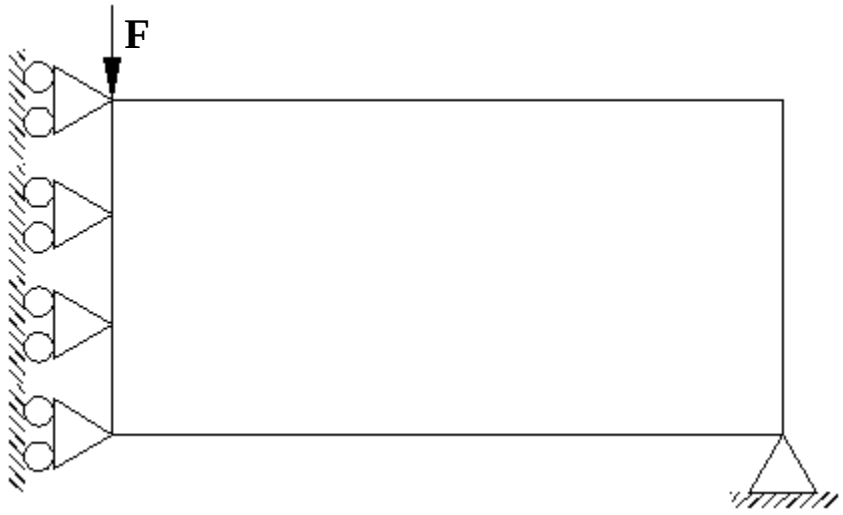
Ωστόσο μετρώντας το χρόνο επεξεργασίας που απαιτούν οι αλγόριθμοι έχουμε διαφορετικά δεδομένα. Στο παρακάτω διάγραμμα (Σχήμα 6.30) που παρουσιάζονται οι απαιτούμενοι χρόνοι επεξεργασίας (CPU time) του κάθε αλγορίθμου.



Σχήμα 6.30: Σύγκριση χρόνου επεξεργασίας μεθόδου SIMP και προτεινόμενης μεθόδου

Όπως παρατηρούμε σε χαμηλά όρια όγκου ο προτεινόμενος αλγόριθμος παρουσιάζει μικρότερο χρόνο σύγκλισης, ενώ σε μεγαλύτερα έχει υψηλότερο. Συνεπώς ο χρόνος που απαιτείται για την επενέργεια μιας επανάληψης, είναι πολύ μεγαλύτερος στο μέθοδο μοναδιαίου φορτίου σε σχέση με την SIMP. Αυτή η τόσο μεγάλη διαφορά οφείλεται στο γεγονός ότι στον προτεινόμενο κώδικα χρησιμοποιείται δύο φορές ανάλυση πεπερασμένων στοιχείων. Συγκεκριμένα απαιτείται μία ανάλυση για τα πραγματικά φορτία και ακόμη μια για το εικονικό μοναδιαίο φορτίο.

6.5.5 Αμφιέριστη πλάκα

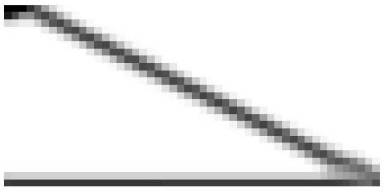
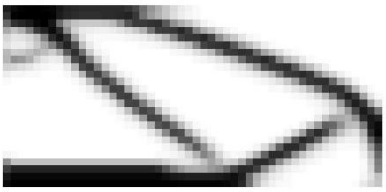
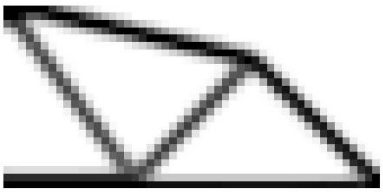
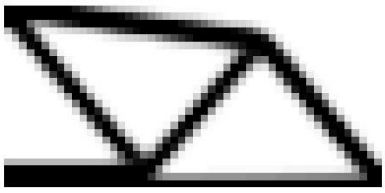
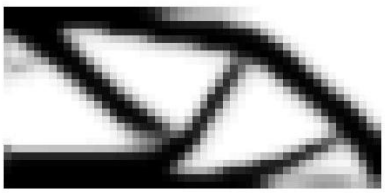
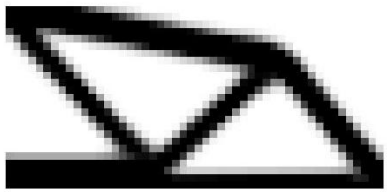


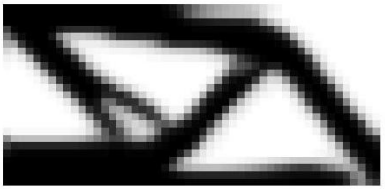
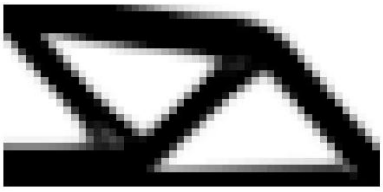
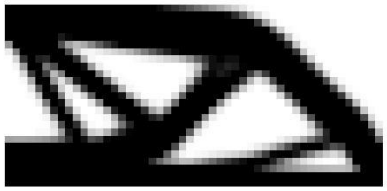
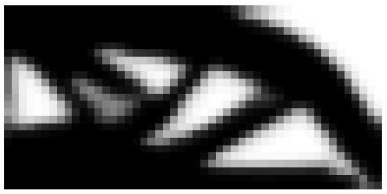
Σχήμα 6.31: Σχηματική απεικόνιση αμφιέριστης πλάκας

Σ αυτό το παράδειγμα έγινε εφαρμογή του κώδικα σε αμφιέριστη ορθογωνική πλάκα του ανωτέρω σχήματος (Σχήμα 6.31). Το πρόβλημα της αμφιέριστης πλάκας είναι συμμετρικό ως προς τον y άξονα συνεπώς μπορούμε να λύσουμε το μισό πρόβλημα τοποθετώντας στην κατά πλάτος πλευρά της πλάκας κυλίσεις. Κάνοντας αυτόν τον μετασχηματισμό ελαττώνουμε το υπολογιστικό κόστος της ανάλυσης αφού εφαρμόζουμε την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων ουσιαστικά στο μισό πρόβλημα. Για την ανάλυση χρησιμοποιήθηκαν τετρακομβικά πεπερασμένα στοιχεία με πλέγμα 50X25,δηλαδή 50 πεπερασμένα κατά τον X άξονα και 25 κατά τον Y. Οι διαστάσεις μήκους, πλάτους, πάχους της μισής πλάκας που ορίστηκαν είναι Lx=100mm Ly=50mm t=2mm,αντίστοιχα. Η αριθμητική εφαρμογή του κώδικα σ' αυτό το παράδειγμα έγινε ώστε να διαλευκάνουμε την εξάρτηση του κώδικα για διαφορετικές στηρίξεις.

Παρακάτω παρατίθεται ο Πίνακας 6.7 με την βελτιστοποιημένη κατανομή πάχους που δημιουργεί ο αλγόριθμος που αναπτύχθηκε στην παρούσα διπλωματική εργασία και στην διπλανή στήλη η κατανομή που δημιουργεί ο αλγόριθμος SIMP.

Πίνακας 6.7: Πίνακας βελτιστοποιημένων σχημάτων του προτεινόμενου αλγορίθμου και της μεθόδου SIMP για διάφορους τελικούς όγκους

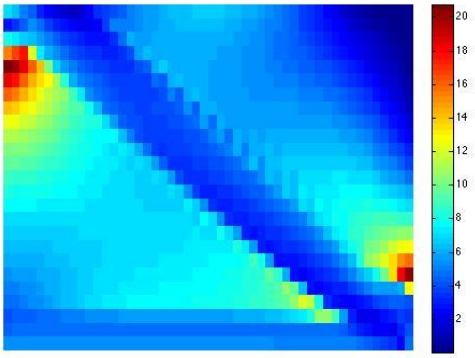
Μέγιστη Μετατόπιση (μm)	**Βελτιστοποιημένο σχήμα με την προτεινόμενη μέθοδο**	**Βελτιστοποιημένο σχήμα με την μέθοδο SIMP**
9,14		
3,94		
2,69		
2,08		

Μέγιστη Μετατόπιση (μm)	**Βελτιστοποιημένο σχήμα με την προτεινόμενη μέθοδο**	**Βελτιστοποιημένο σχήμα με την μέθοδο SIMP**
1,75		
1,50		
1.34		

Όπως αναφέρθηκε και στο προηγούμενο παράδειγμα η σύγκριση των δύο αλγορίθμων έγινε εισάγοντας διάφορα όρια όγκου στην SIMP, εν συνεχεία μέτρηση των μέγιστων μετατοπίσεων στο βελτιστοποιημένο σχήμα και εισαγωγή αυτής της μέγιστης μετατόπισης ως περιορισμό στον αλγόριθμο που αναπτύχθηκε στην παρούσα διπλωματική εργασία.

Σε αντίθεση με τα προηγούμενα παραδείγματα βλέπουμε ότι σ αυτήν την περίπτωση οι τελικές τοπολογίες των δύο αλγορίθμων είναι αρκετά διαφορετικές. Ειδικότερα, οι τοπολογίες με μεγάλο περιορισμό μετατοπίσεων που παράγονται από τον αλγόριθμο που αναπτύχθηκε είναι ιδιαιτέρως διαφορετικές μ' αυτές της SIMP, αφού δημιουργούνται περιοχές με υψηλό πάχος κοντά στο σημείο φόρτισης της δύναμης

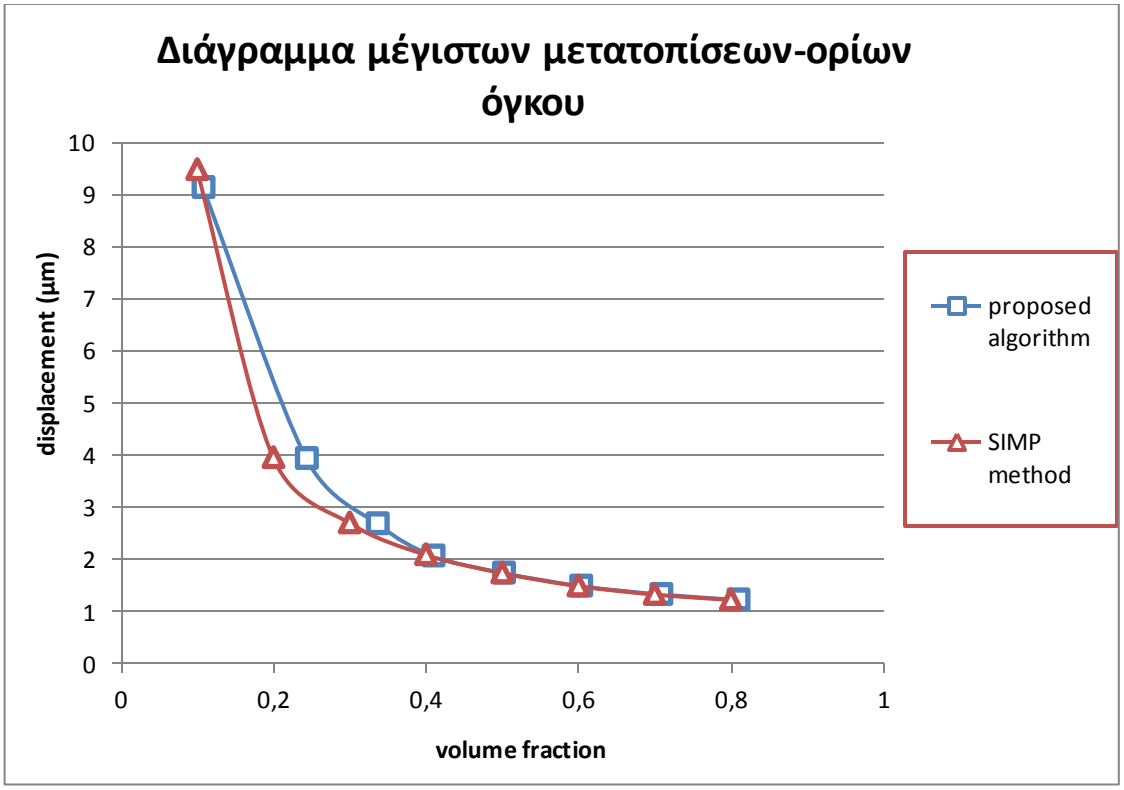
και το κάτω μέρος της κατασκευής δεν είναι συνεχές μέχρι το σημείο όπου υπάρχει η κύλιση. Αυτά τα χαρακτηριστικά που παρουσιάζονται στο βελτιστοποιημένο σχήμα όπως θα φανεί και στην συνέχεια είναι επιβαρυντικά για την απόδοση του κώδικα. Άμα αναλύσουμε τις μη κανονικοποιημένες τάσεις(δηλαδή αν κρατήσουμε και τις τάσεις που εφαρμόζονται και σε περιοχές με το ελάχιστο πάχος (Σχήμα 6.32)) στο βελτιστοποιημένο σχήμα που παράγεται από τον κώδικα SIMP θα παρατηρήσουμε τις αυξημένες τάσεις στα σημεία που τοποθετεί υλικό ο κώδικας της παρούσας διπλωματικής.



Σχήμα 6.32: Συγκέντρωση ψευδοτάσεων για όριο όγκου 0,1

Έτσι λοιπόν συμπεραίνουμε ότι ο αλγόριθμός «μπερδεύεται» και τοποθετεί υλικό σε σημεία με αυξημένες τάσεις καθώς στον αναδρομικό τύπο βελτιστοποίησης συμμετέχουν μέσω του λόγου n και οι τάσεις που παράγονται από την εφαρμογή της μοναδιαίας δύναμης.

Για πιο αυστηρούς περιορισμούς μετατοπίσεων τα αποτελέσματα των αλγορίθμων «συγκλίνουν» με την έννοια ότι δημιουργούν ενισχυτικές δοκούς στα ίδια σημεία. Η μόνη διαφορά είναι ότι ο αλγόριθμος με την μέθοδο του μοναδιαίου φορτίου δημιουργεί δοκίδες που στις απολήξεις τους χωρίζονται σε δύο υπο-δοκίδες. Εν κατακλείδι λοιπόν οι τοπολογίες παρουσιάζουν αρκετές διαφορές για όρια όγκων μέχρι 40% αλλά για μεγαλύτερα όρια όγκων τα αποτελέσματα είναι σχεδόν πανομοιότυπα. Παρακάτω παρατίθεται το διάγραμμα μετατοπίσεων-ορίου όγκου για τις βελτιστοποιημένες κατασκευές τόσο της SIMP όσο και του ανεπτυγμένου αλγορίθμου στην παρούσα εργασία.

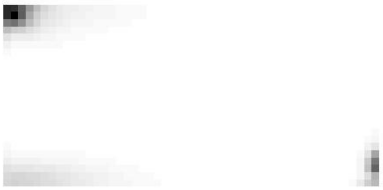
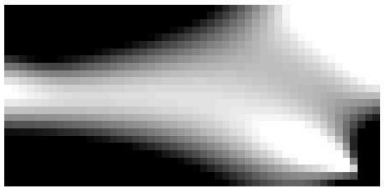
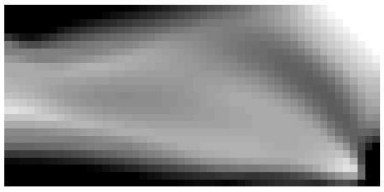
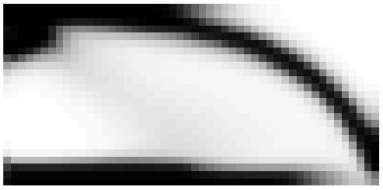
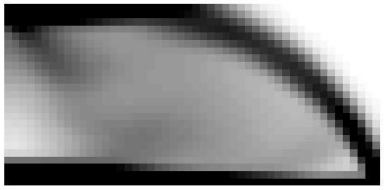
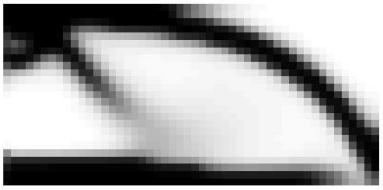
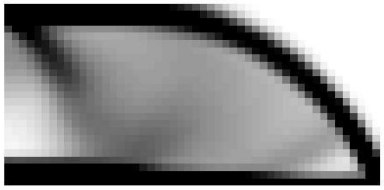


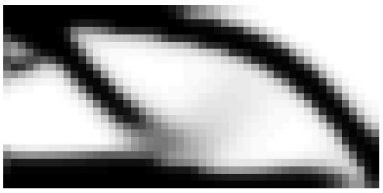
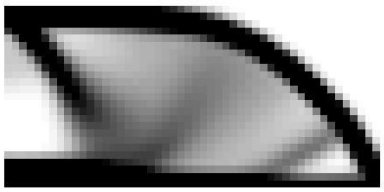
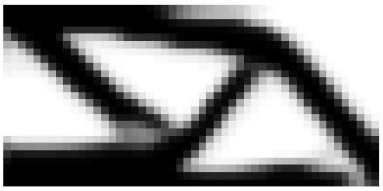
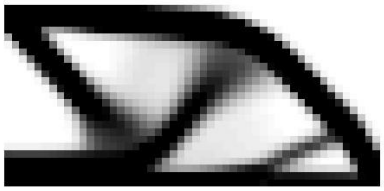
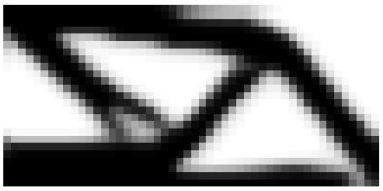
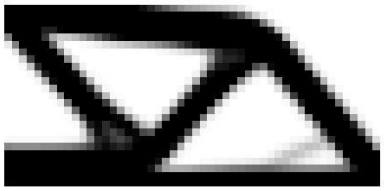
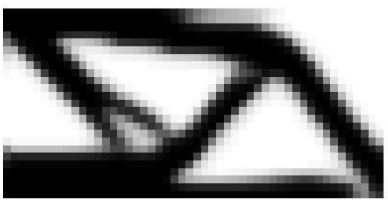
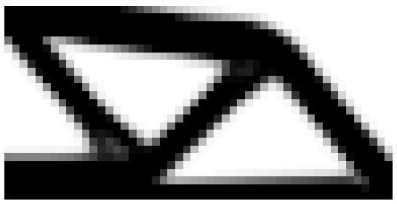
Σχήμα 6.33: Διάγραμμα σύγκρισης μέγιστων μετατοπίσεων βελτιστοποιημένων κατασκευών SIMP και μοναδιαίου φορτίου

Όπως είναι εμφανές από το παραπάνω διάγραμμα (Σχήμα 6.33) οι μέγιστες μετατοπίσεις των βελτιστοποιημένων και για τους δύο κώδικες είναι πανομοιότυπες για όγκου μεγαλύτερους από 0.4. Ωστόσο για όγκου μεγαλύτερους από 0,1-0,3 του τελικού όγκου ο αλγόριθμος SIMP έχει συγκριτικό πλεονέκτημα αφού για ίδιους τελικούς όγκους παρουσιάζει μικρότερες μετατοπίσεις, συνεπώς το βελτιστοποιημένο σχήμα είναι πιο στιβαρό.

Παρόλα αυτά από το παραπάνω διάγραμμα αποδεικνύεται ότι οι δύο αλγόριθμοι έχουν ίδιο αποτέλεσμα τόσο ποιοτικό όσο και ποσοτικό για ενδιάμεσους όγκο 50% του αρχικού. Ωστόσο ο τρόπος που καταλήγουν στο βέλτιστο σχήμα είναι αρκετά διαφορετικός. Παρακάτω παρουσιάζονται τα ενδιάμεσα στάδια που περνάνε οι αλγόριθμοι ώστε να καταλήξουν στο βέλτιστο σχήμα (Πίνακας 6.8).

Πίνακας 6.8: Πίνακας ενδιάμεσων σχημάτων του προτεινόμενου αλγορίθμου και της μεθόδου SIMP

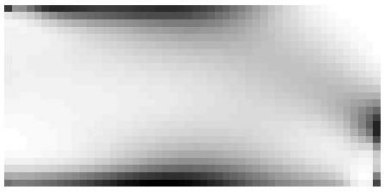
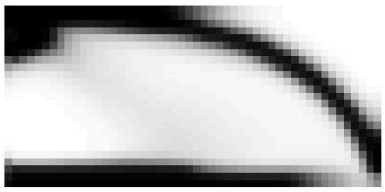
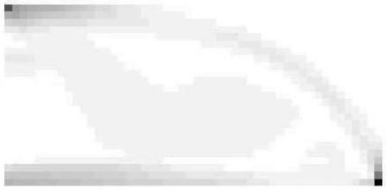
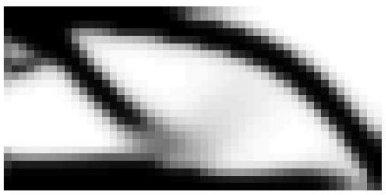
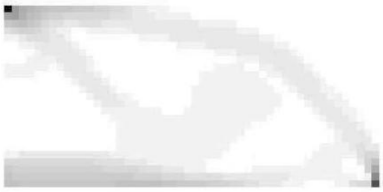
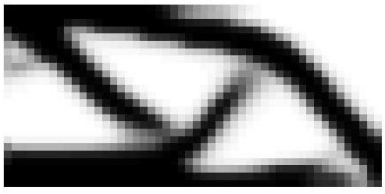
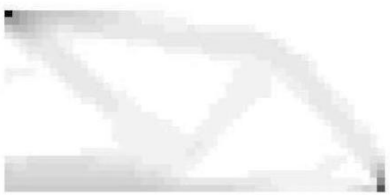
Ενδιάμεσα στάδια του προτεινόμενου αλγορίθμου	**Ενδιάμεσα στάδια του αλγόριθμου SIMP**
	
	
	
	

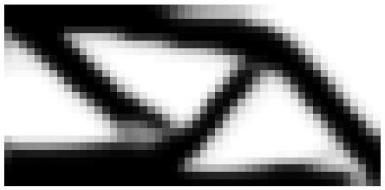
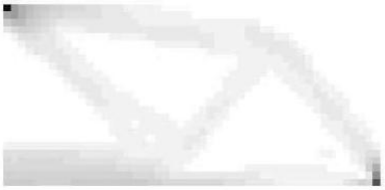
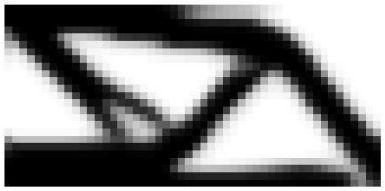
Ενδιάμεσα στάδια του προτεινόμενου αλγορίθμου	**Ενδιάμεσα στάδια του αλγόριθμου SIMP**
	
	
	
	

Όπως φαίνεται λοιπόν από τις ενδιάμεσες καταστάσεις που παρατηρούνται κατά την διάρκεια της βελτιστοποίησης οι αλγόριθμοι ξεκινάν με τελείως διαφορετικό τρόπο, αλλά καταλήγουν στο ίδιο σχεδόν αποτέλεσμα.

Παρακάτω εμφανίζεται η κατανομή του συντελεστή n σε ενδιάμεσες φάσεις ώστε να κατανοήσουμε τον τρόπο με τον οποίο οδηγεί τον αλγόριθμο στο βέλτιστο σχήμα.

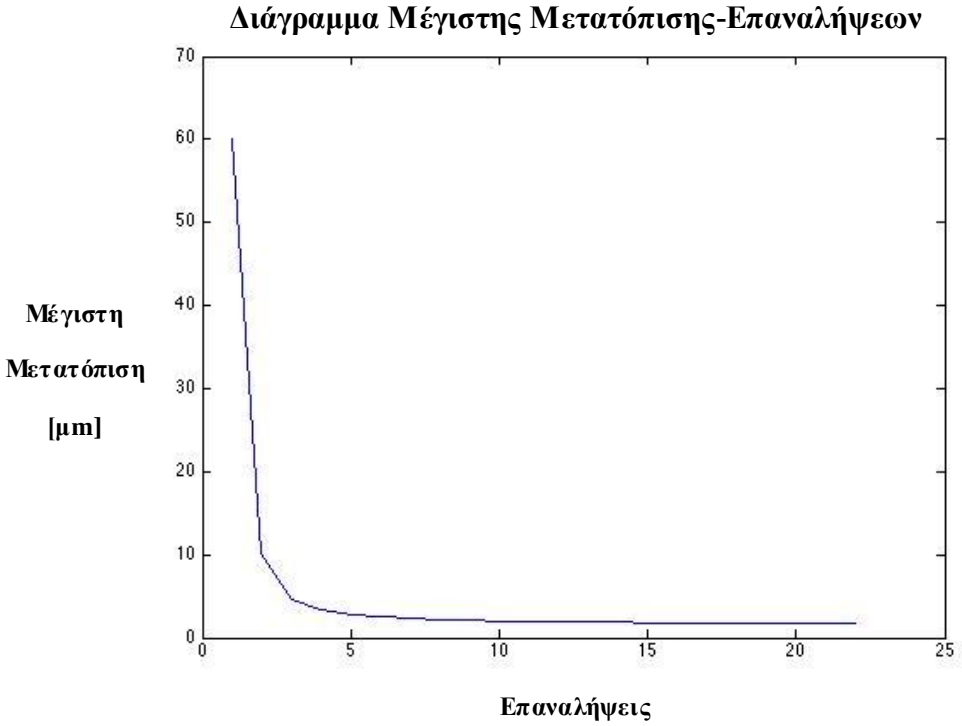
Πίνακας 6.9: Πίνακας σχημάτων κατανομής συντελεστή n κατά την διάρκεια της βελτιστοποίησης

Κατανομή πάχους	**Κατανομή συντελεστή n**
	
	
	
	

Κατανομή πάχους	**Κατανομή συντελεστή n**
	
	

Ο Πίνακας 6.9 κάνει εύκολα αντιληπτό τον ευεργετικό χαρακτήρα του συντελεστή n. Ειδικότερα, όπως και στα προηγούμενα παραδείγματα μπορούμε να πούμε ότι έχει ρόλο «καθοδηγητή», δηλαδή σε κάθε επανάληψη δείχνει μια κατανομή που ομοιάζει με την κατανομή πάχους της επόμενης επανάληψης. Έτσι λοιπόν είναι εμφανές ότι σε κάθε επανάληψη κατανέμει μια ποσότητα υλικού στις κρίσιμες περιοχές. Μάλιστα σ' αυτήν την περίπτωση μετά από κάποιες επαναλήψεις αφαιρεί και υλικό (από τις περιοχές που εν τέλει θεωρήθηκαν αρχικά ψευδώς ως βέλτιστες).

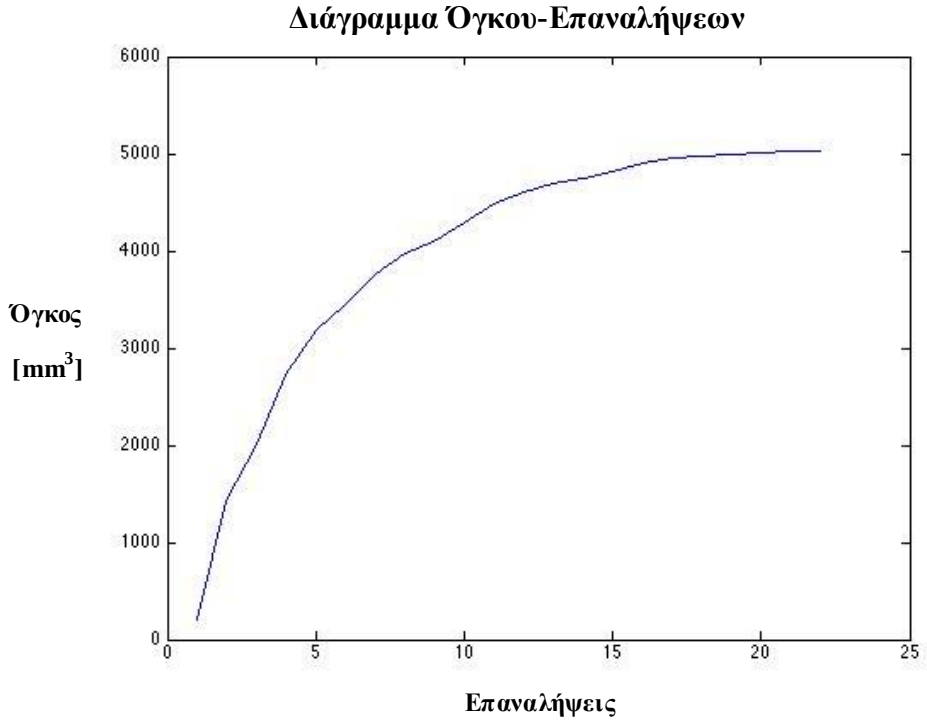
Ένα άλλο κρίσιμο σημείο για την διαλεύκανση της συμπεριφοράς του αναπτυγμένου αλγορίθμου είναι η μεταβολή της μέγιστης μετατόπισης αλλά και της αντικειμενικής συνάρτησης, δηλαδή του βάρους, σε κάθε επανάληψη.



Σχήμα 6.34: Πορεία μέγιστης μετατόπισης κατά την διάρκεια της βελτιστοποίησης

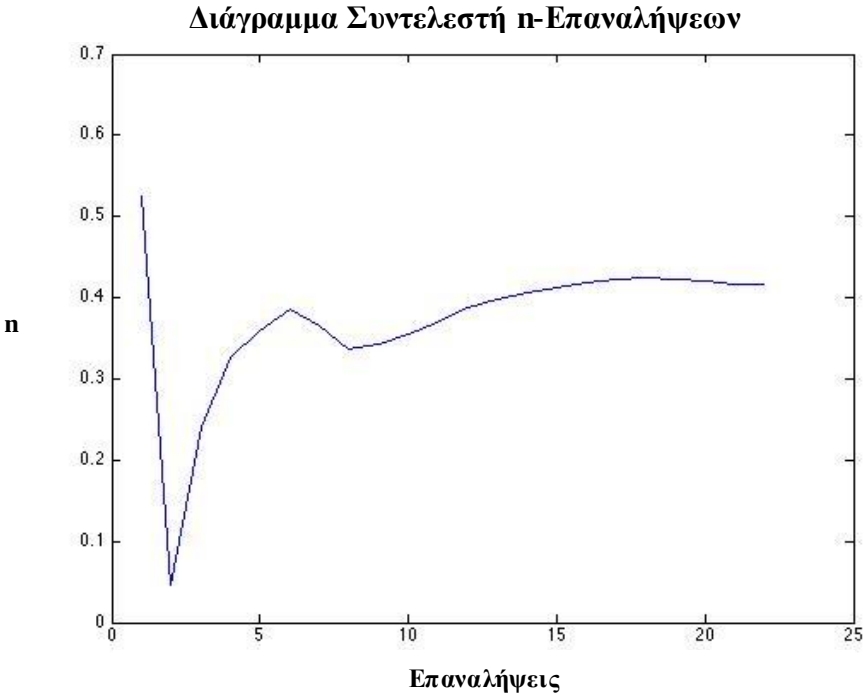
Στο παραπάνω διάγραμμα (Σχήμα 6.34) φαίνεται η μεταβολή της μέγιστης μετατόπισης σε κάθε επανάληψη. Όπως βλέπουμε η μέγιστη μετατόπιση μειώνεται εκθετικά μέχρι την 5 επανάληψη όπου η μέγιστη μετατόπιση είναι ελάχιστα μεγαλύτερη από την επιτρεπόμενη. Είναι εμφανής η εκθετική και ιδιαιτέρως απότομη συμμόρφωση της κατασκευής στον περιορισμό μετατόπισης. Αφού λοιπόν οι μετατοπίσεις φτάσουν σε ένα σημείο αρκετά κοντά στον περιορισμό η μεταβολή της μέγιστης μετατόπισης μέχρι τη τελική σύγκλιση είναι αρκετά μικρή και έτσι απαιτούνται 23 επαναλήψεις εν συνόλω για την τελική εναρμόνιση των μετατοπίσεων στους περιορισμούς. Όπως αποδείχθηκε σε προηγούμενο παράδειγμα το άθροισμα της εικονικής ενέργειας παραμόρφωσης θα οδηγήσει στο ίδιο διάγραμμα λόγω του θεωρήματος της μοναδιαίας φόρτισης.

Όσον αφορά την μεταβολή της αντικειμενικής συνάρτησης, δηλαδή του όγκου κατά την διάρκεια των επαναλήψεων παρατηρούμε ότι συγκλίνει ομαλά (Σχήμα 6.35).



Σχήμα 6.35: Πορεία όγκου κατά την διάρκεια των επαναλήψεων

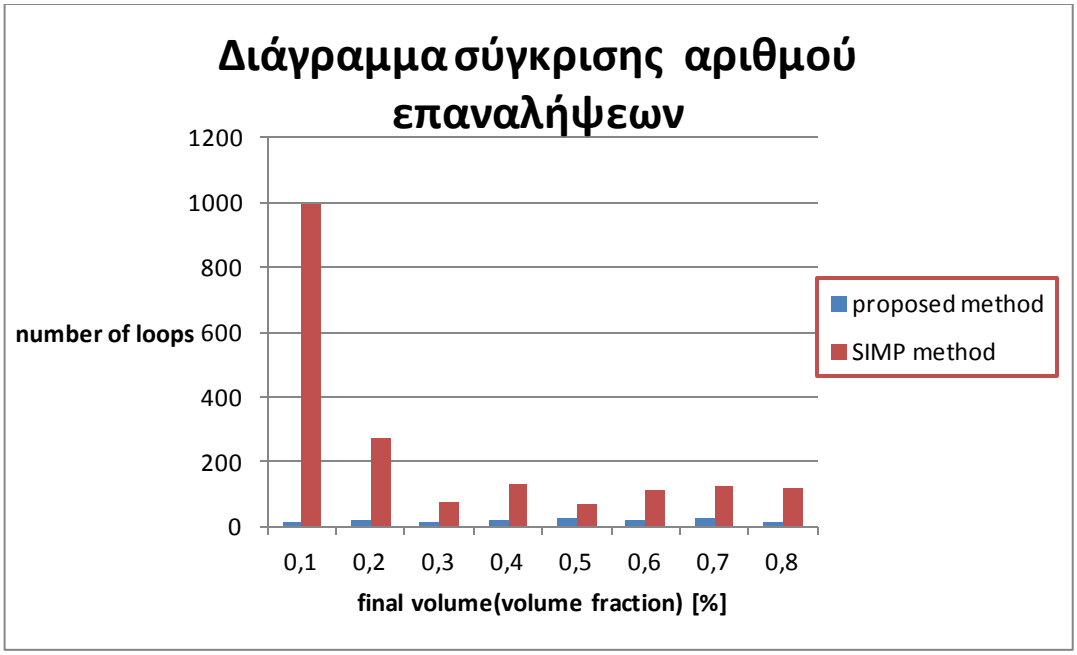
Και σ αυτό το παράδειγμα παρατηρούμε ότι ο όγκος ξεκινάει από μία πολύ μικρή αρχική τιμή και συγκλίνει εκθετικά στον τελικό όγκο μέχρι η μέγιστη μετατόπιση να είναι μικρότερη από την μέγιστη επιτρεπόμενη. Επίσης, και σ' αυτό το παράδειγμα αναμένουμε στην βέλτιστη κατάσταση ο συντελεστής n να είναι σταθερός .



Σχήμα 6.36: Πορεία μεταβολής μέγιστης τιμής συντελεστή n κατά την διάρκεια των επαναλήψεων

Πράγματι, και σ αυτήν την περίπτωση όπως φαίνεται στο Σχήμα 6.36 στις τελευταίες επαναλήψεις πριν την σύγκλιση, η μέγιστη τιμή του συντελεστή n παραμένει σταθερή. Έτσι λοιπόν βρισκόμαστε σε μια βέλτιστη ή κοντά στο βέλτιστο κατάσταση. Η κύμανση της συνάρτησης έχει την συνήθη μορφή με τα προηγούμενα παραδείγματα.

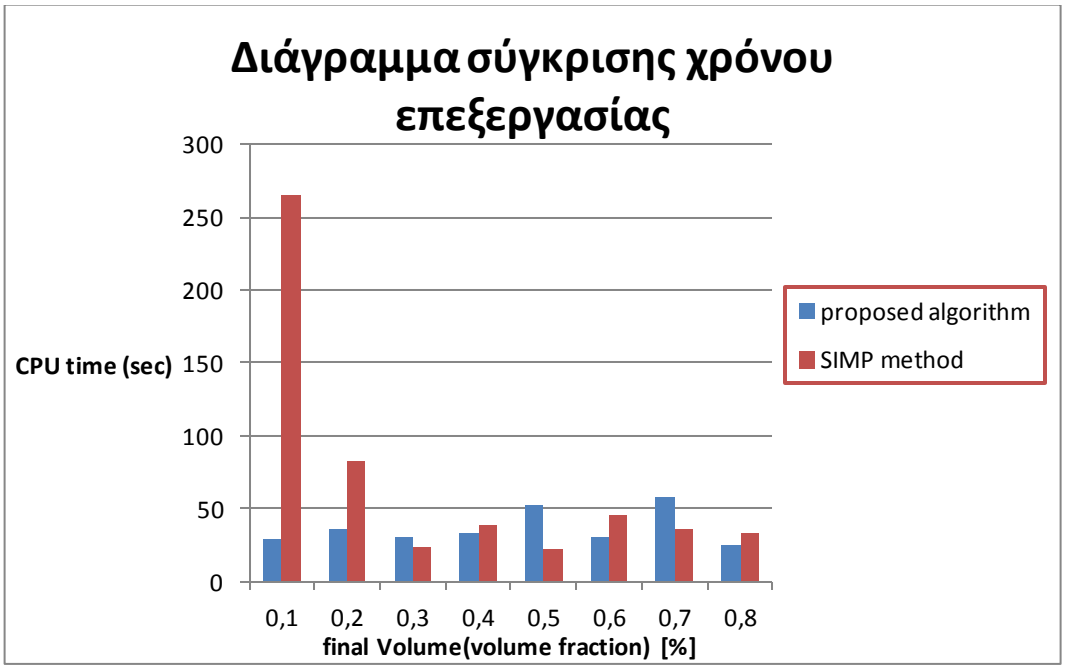
Τέλος μελετήθηκε και σ αυτό το αριθμητικό παράδειγμα η διαφορά των απαιτούμενων επαναλήψεων που απαιτούνται από τους δύο αλγορίθμους για να καταλήξουν στο βέλτιστο σχήμα. Για κάθε όγκο που δοκιμάστηκε ο αλγόριθμος που χρησιμοποιεί την μέθοδο του μοναδιαίου φορτίου συγκλίνει σε 15-25 επαναλήψεις. Από την άλλη αλγόριθμος SIMP έχει μεγάλη διακύμανση στον αριθμό των επαναλήψεων που απαιτούνται ώστε ανάλογα με το όριο όγκου που εισάγουμε. Παρακάτω φαίνεται η διακύμανση των επαναλήψεων που απαιτούνται και ο αντίστοιχος αριθμός επαναλήψεων που πραγματοποιούνται από το αλγόριθμο που αναπτύχθηκε στην παρούσα εργασία (Σχήμα 6.37).



Σχήμα 6.37: Σύγκριση αριθμού επαναλήψεων μεθόδου SIMP και προτεινόμενης μεθόδου

Όπως είναι εμφανές και σ αυτήν την περίπτωση ο παρών αλγόριθμος παρουσιάζει μεγάλη διαφορά στον αριθμό των απαιτούμενων επαναλήψεων.

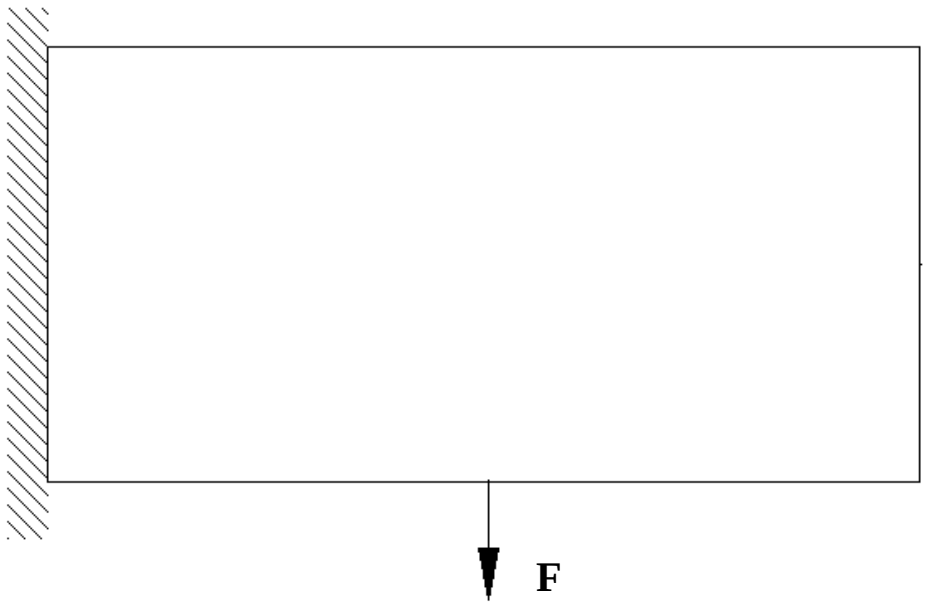
Ωστόσο μετρώντας το χρόνο επεξεργασίας που απαιτεί οι αλγόριθμοι για να συγκλίνουν έχουμε διαφορετικά δεδομένα. Παρακάτω φαίνονται το διάγραμμα που παρουσιάζονται οι απαιτούμενοι χρόνοι επεξεργασίας(CPU time) του κάθε αλγορίθμου (Σχήμα 6.38).



Σχήμα 6.38: Σύγκριση χρόνου επεξεργασίας μεθόδου SIMP και προτεινόμενης μεθόδου

Όμοια με τις προηγούμενα παραδείγματα οι χρόνοι σύγκλισης παρουσιάζουν την ίδια συμπεριφορά.

6.5.6 Πρόβολος (3)



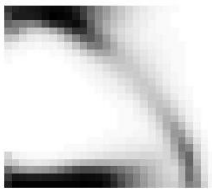
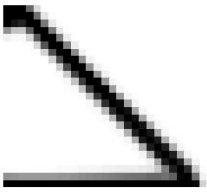
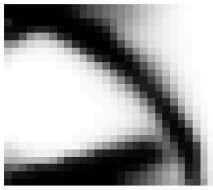
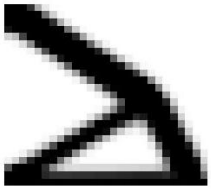
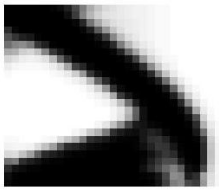
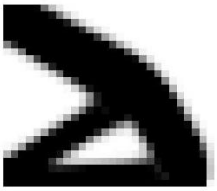
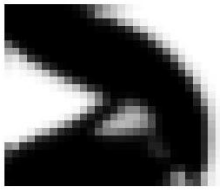
Σχήμα 6.39: Σχηματική απεικόνιση προβόλου(3)

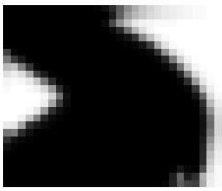
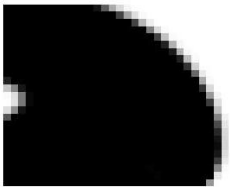
Σ αυτό το παράδειγμα έγινε εφαρμογή του κώδικα σε πακτωμένη ορθωγωνική πλάκα όπως φαίνεται στο Σχήμα 6.39. Το φορτίο ασκείται στον μέσο της κάτω πλευράς της πλάκας. Για την ανάλυση χρησιμοποιήθηκαν τετρακομβικά πεπερασμένα στοιχεία με πλέγμα 50X25,δηλαδή 50 πεπερασμένα κατά τον X άξονα και 25 κατά τον Y. Οι διαστάσεις μήκους, πλάτους, πάχους της μισής πλάκας που ορίστηκαν είναι Lx=100mm Ly=50 mm t=2mm,αντίστοιχα.

Αυτό το παράδειγμα εφαρμόζεται ώστε να δούμε την διαφορά των δύο αλγορίθμων σε παραδείγματα όπου η μέγιστη μετατόπιση δεν συμπίπτει με την θέση που εφαρμόζεται το φορτίο. Ειδικότερα, σ' αυτό το παράδειγμα η δύναμη εφαρμόζεται στο μέσο της κάτω πλευράς της πλάκας. Έτσι οι κόμβοι που βρίσκονται δεξιότερα του φορτίου θα έχουν μεγαλύτερη μετατόπιση απ’ ότι ο κόμβος άσκησης του. Η διαφορά αυτή είναι μείζονος σημασίας για την σύγκριση των αλγορίθμων καθώς η μοναδιαία δύναμη δεν θα ασκηθεί στο σημείο που εφαρμόζεται η πραγματική δύναμη, συνεπώς η εικονική ενέργεια αναμένεται να έχει διαφορετική συμπεριφορά από την ενδοτικότητα.

Παρακάτω παρατίθεται πίνακας (Πίνακας 6.10) με την βελτιστοποιημένη κατανομή πάχους που δημιουργεί ο αλγόριθμος που αναπτύχθηκε στην παρούσα Διπλωματική Εργασία και στην διπλανή στήλη η κατανομή που δημιουργεί ο αλγόριθμος SIMP.

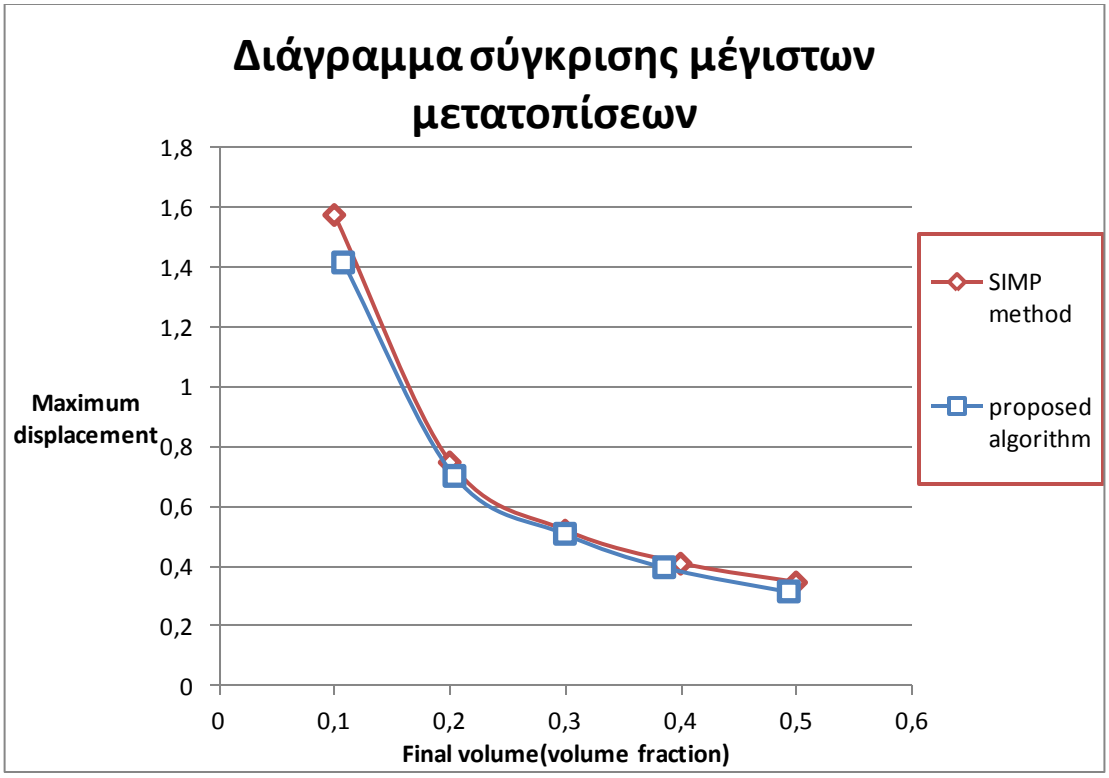
Πίνακας 6.10: Πίνακας βελτιστοποιημένων σχημάτων του προτεινόμενου αλγορίθμου και της μεθόδου SIMP για διάφορους τελικούς όγκους

Μέγιστη Μετατόπιση (μm)	**Βελτιστοποιημένο σχήμα με την προτεινόμενη μέθοδο**	**Βελτιστοποιημένο σχήμα με την μέθοδο SIMP**
1,42		
0,70		
0,50		
0,40		

Μέγιστη Μετατόπιση (μm)	**Βελτιστοποιημένο σχήμα με την προτεινόμενη μέθοδο**	**Βελτιστοποιημένο σχήμα με την μέθοδο SIMP**
0,32		

Όπως παρατηρούμε οι τοπολογίες των δύο αλγορίθμων παρουσιάζουν αρκετές διαφορές. Ειδικότερα σε σχήματα με μεγάλες μετατοπίσεις ο προτεινόμενος αλγόριθμος δημιουργεί κοίλή εξωτερική δοκό ενώ ο αλγοριθμος SIMP σχηματίζει ευθεία δοκό. Εκτος αυτού η SIMP δημιουργεί ενα επιπλέον νεύρο, με αυξημένη την εξωτερική «δοκό», ενω ο προτεινόμενος αλγόριθμος δημιουργεί συμπαγή περιοχή στο κάτω μέρος της πακτωμένης πλάκας. Τέλος στις τελευταίες τοπολογίες του παραπάνω πίνακα (Πίνακας 6.10) ο αλγόριθμος προσπαθεί να δημιουργήσει μια επιπλέον δοκίδα που θα συνδέει το συμπαγές σχήμα με την ακμή με την μέγιστη μετατόπιση. Ωστόσο και οι δύο αλγόριθμοι για μεγαλύτερα όρια όγκου αποκλίνουν αδύνατώντας να σχηματίσουν βέλτιστα σχήματα.

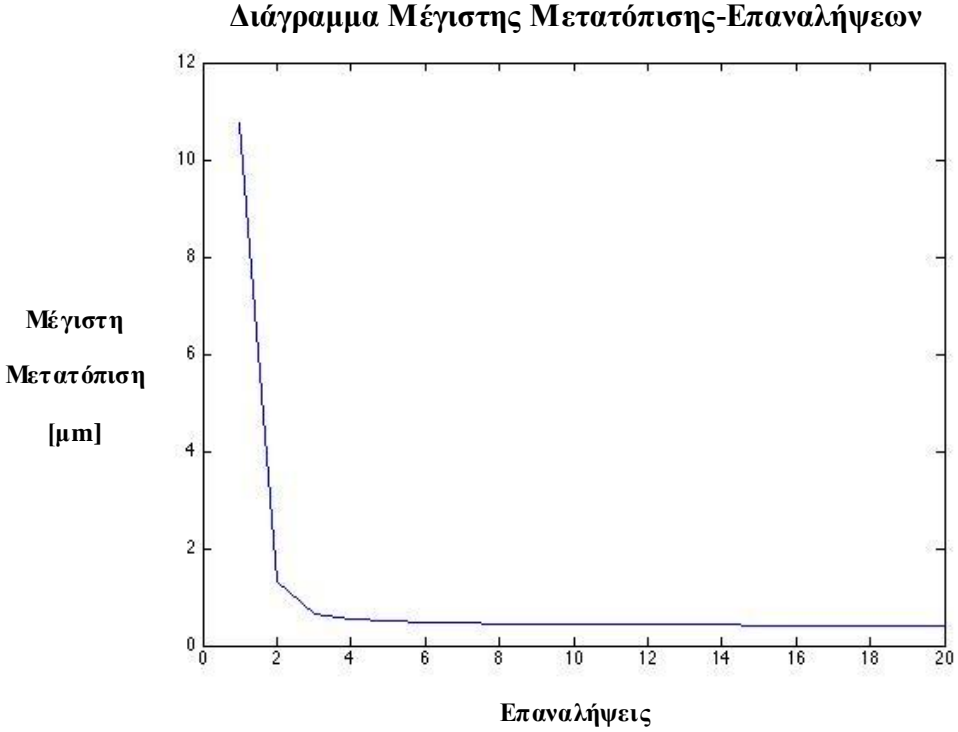
Οι διαφορές αυτές δημιουργούν έχουν ως αποτέλεσμα την ύπαρξη διαφορετικών μέγιστων μετατοπίσεων στις βέλτιστες κατασκευές των δυο αλγορίθμων.



Σχήμα 6.40: Διάγραμμα σύγκρισης μέγιστων μετατοπίσεων βελτιστοποιημένων κατασκευών SIMP και μοναδιαίου φορτίου

Όπως βλέπουμε στο Σχήμα 6.40 ο προτεινόμενος αλγόριθμος έχει κατάντι καλύτερα αποτελέσματα απ ότι ο αλγόριθμος SIMP, καθώς δημιουργεί σχηματισμούς που για ίδιο όγκο έχουν μικρότερη μετατόπιση.

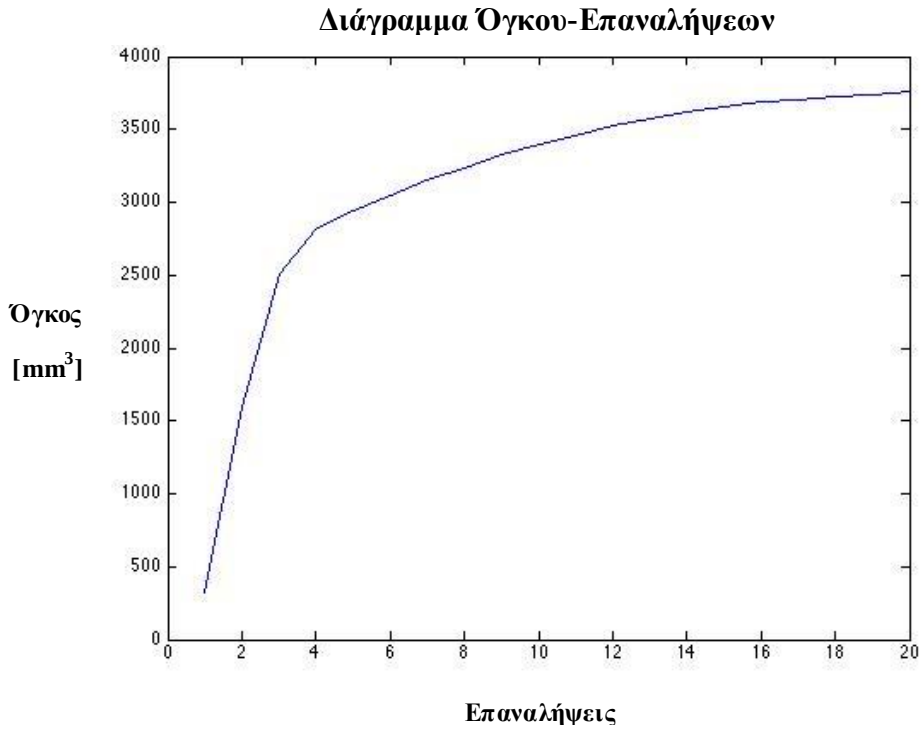
Για το βελτιστοποιημένο σχήμα που έχει τελικό όγκο το 40% του αρχικού δημιουργήθηκαν διαγράμματα σύγκλισης του όγκου και της μετατόπισης.



Σχήμα 6.41: Πορεία μέγιστης μετατόπισης κατά την διάρκεια της βελτιστοποίησης

Το παραπάνω διάγραμμα (Σχήμα 6.41) φαίνεται η μεταβολή της μέγιστης μετατόπισης σε κάθε επανάληψη. Όπως βλέπουμε η μέγιστη μετατόπιση μειώνεται εκθετικά μέχρι την 4 επανάληψη όπου η μέγιστη μετατόπιση είναι ελάχιστα μεγαλύτερη από την επιτρεπόμενη. Είναι εμφανής η εκθετική και ιδιαιτέρως απότομη συμμόρφωση της κατασκευής στον περιορισμό. Όπως αποδείχθηκε στα προηγούμενα παραδείγματα το άθροισμα της εικονικής ενέργειας παραμόρφωσης θα οδηγήσει στο ίδιο διάγραμμα λόγω του θεωρήματος της μοναδιαίας φόρτισης.

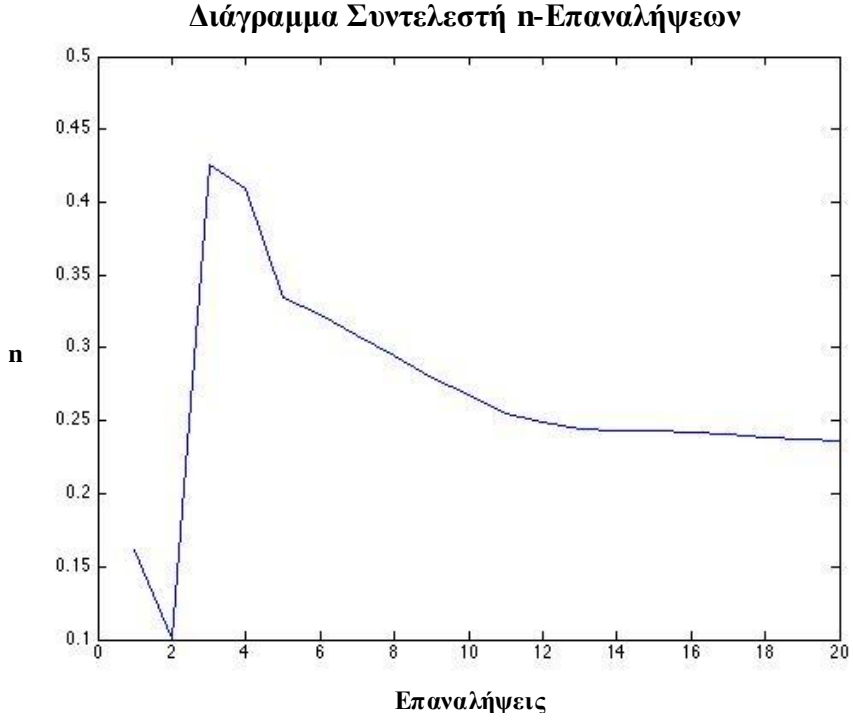
Όσον αφορά την μεταβολή της αντικειμενικής συνάρτησης, δηλαδή του όγκου κατά την διάρκεια των επαναλήψεων παρατηρούμε ότι συγκλίνει ομαλά (Σχήμα 6.42).



Σχήμα 6.42: Πορεία όγκου κατά την διάρκεια των επαναλήψεων

Και σε αυτό το παράδειγμα παρατηρούμε ότι ο όγκος ξεκινάει από μία πολύ μικρή αρχική τιμή και συγκλίνει εκθετικά στον τελικό όγκο μέχρι η μέγιστη μετατόπιση να είναι μικρότερη από την μέγιστη επιτρεπόμενη

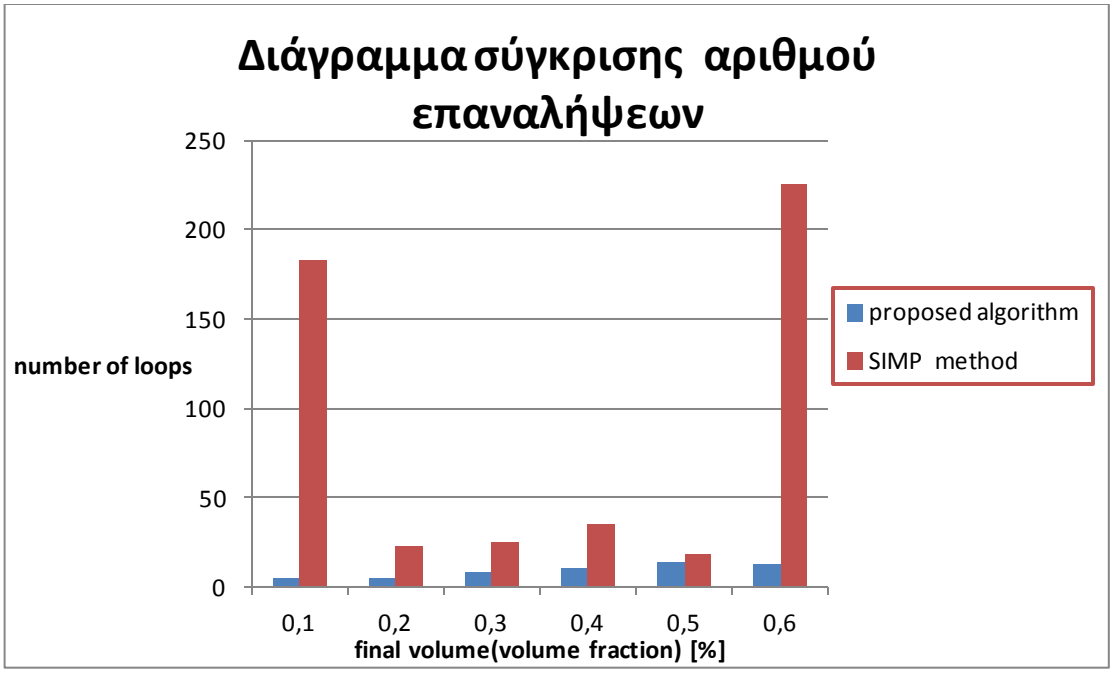
Εκτός αυτού είναι σημαντικό να διευκρινιστεί η πορεία της μέγιστης τιμής του συντελεστή n κατά την διάρκεια των επαναλήψεων όπου αναμένουμε η μέγιστη τιμή του να είναι σταθερή.



Σχήμα 6.43: Πορεία μεταβολής μέγιστης τιμής συντελεστή n κατά την διάρκεια των επαναλήψεων

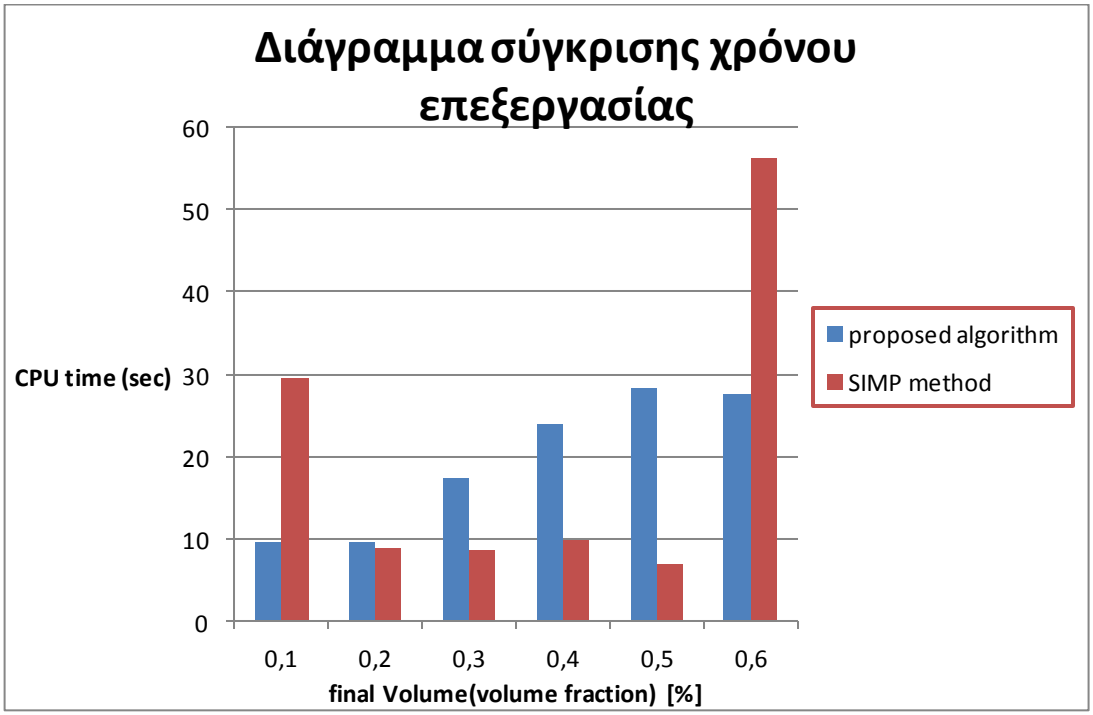
Πράγματι, και σ αυτήν την περίπτωση όπως φαίνεται στο Σχήμα 6.43 στις τελευταίες επαναλήψεις πριν την σύγκλιση, η μέγιστη τιμή του συντελεστή *n* παραμένει σταθερή. Έτσι λοιπόν βρισκόμαστε σε μια βέλτιστη ή κοντά στο βέλτιστο κατάσταση. Η κύμανση της συνάρτησης έχει την συνήθη μορφή με τα προηγούμενα παραδείγματα.

Τέλος μελετήθηκε και σ αυτό το αριθμητικό παράδειγμα η διαφορά των απαιτούμενων επαναλήψεων που απαιτούνται από τους δύο αλγορίθμους για να καταλήξουν στο βέλτιστο σχήμα (Σχήμα 6.44). Τα αποτελέσματα παραθέτονται στα παρακάτω διαγράμματα.



Σχήμα 6.44: Σύγκριση αριθμού επαναλήψεων μεθόδου SIMP και προτεινόμενης μεθόδου

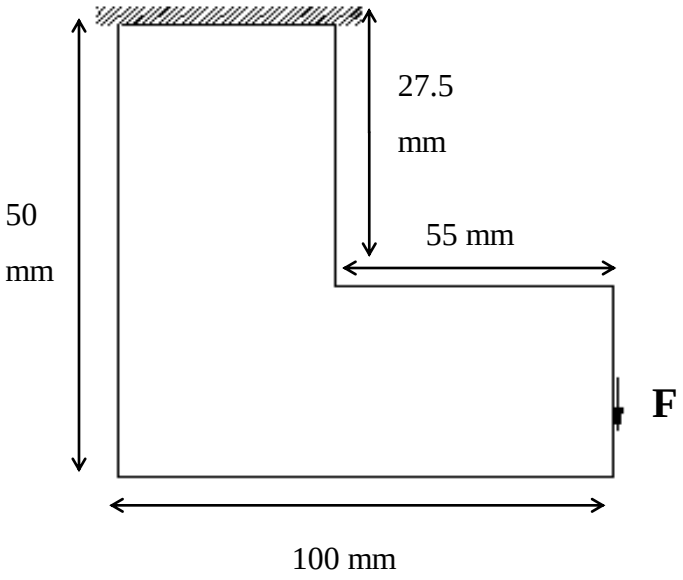
Όπως είναι εμφανές ο παρών αλγόριθμος παρουσιάζει μεγάλη διαφορά στον αριθμό των απαιτούμενων επαναλήψεων. Ωστόσο μετρώντας το χρόνο επεξεργασίας που απαιτεί οι αλγόριθμοι για να συγκλίνουν έχουμε διαφορετικά δεδομένα. Παρακάτω φαίνονται το διάγραμμα (Σχήμα 6.45) που παρουσιάζονται οι απαιτούμενοι χρόνοι επεξεργασίας(CPU time) του κάθε αλγορίθμου.



Σχήμα 6.45: Σύγκριση χρόνου επεξεργασίας μεθόδου SIMP και προτεινόμενης μεθόδου

Όμοια με τις προηγούμενα παραδείγματα οι χρόνοι σύγκλισης παρουσιάζουν την ίδια συμπεριφορά.

6.5.7 Πρόβολος L-shaped

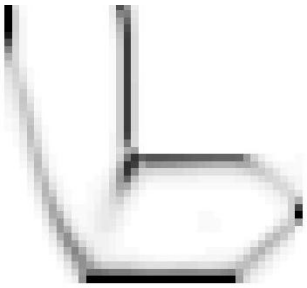
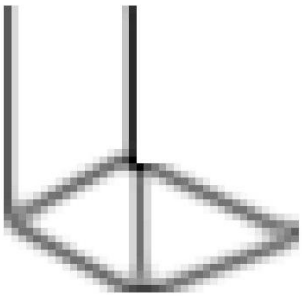
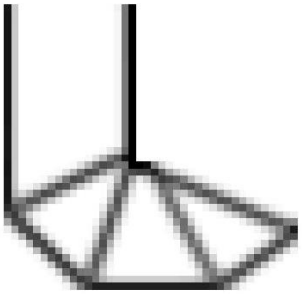
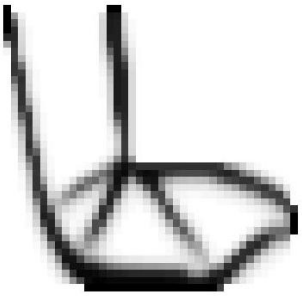


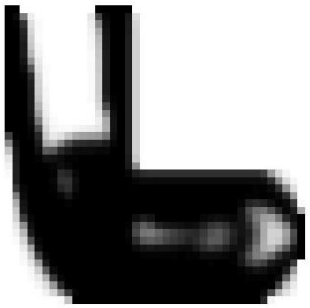
Σχήμα 6.46: Σχηματική απεικόνιση προβόλου L-Shaped

Σ αυτό το παράδειγμα έγινε εφαρμογή του κώδικα σε πακτωμένη πλάκα σε σχήμα L του παρακάτω σχήματος (Σχήμα 6.46). Η πλάκα είναι πακτωμένη στη άνω πλευρά της. Χρησιμοποιήθηκαν τετρακομβικά πεπερασμένα στοιχεία με πλέγμα 18X40 στο ορθογώνιο του σχήματος που έχει την μεγάλη πλευρά στον y άξονα, και 22X18 στο δεύτερο ορθογώνιο που αποτελεί την προεξοχή της L-shaped δοκού. Οι διαστάσεις που ορίστηκαν εμφανίζονται στο παραπάνω σχήμα και το πάχος είναι t=2mm.

Παρακάτω παρατίθεται πίνακας με την βελτιστοποιημένη κατανομή πάχους που δημιουργεί ο αλγόριθμος που αναπτύχθηκε στην παρούσα διπλωματική εργασία και στην διπλανή στήλη η κατανομή που δημιουργεί ο αλγόριθμος SIMP (Πίνακας 6.11).

Πίνακας 6.11: Πίνακας βελτιστοποιημένων σχημάτων του προτεινόμενου αλγορίθμου και της μεθόδου SIMP για διάφορους τελικούς όγκους

Μέγιστη Μετατόπιση (μm)	**Βελτιστοποιημένο σχήμα με την προτεινόμενη μέθοδο**	**Βελτιστοποιημένο σχήμα με την μέθοδο SIMP**
16,27		
9,46		
7,47		
5,86		

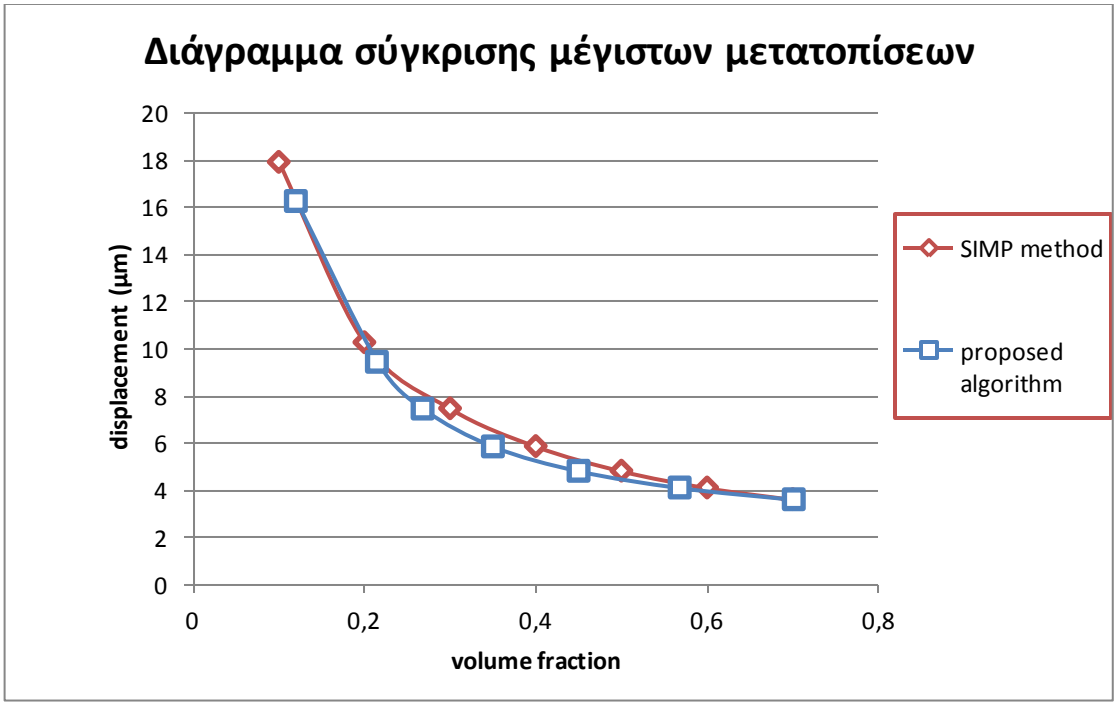
Μέγιστη Μετατόπιση (μm)	**Βελτιστοποιημένο σχήμα με την προτεινόμενη μέθοδο**	**Βελτιστοποιημένο σχήμα με την μέθοδο SIMP**
4,83		
4,12		
3,62		

Όπως αναφέρθηκε και στα προηγούμενα παραδείγματα η σύγκριση των δύο αλγορίθμων έγινε εισάγοντας διάφορα όρια όγκου στον αλγόριθμο της SIMP, μέτρηση των μέγιστων μετατοπίσεων στο βελτιστοποιημένο σχήμα και εισαγωγή αυτής της μέγιστης μετατόπισης ως περιορισμό στον αλγόριθμο που αναπτύχθηκε στην παρούσα διπλωματική εργασία.

Από την σύγκριση των τοπολογιών που εμφανίζονται στις παραπάνω πίνακα (Πίνακας 6.11) φαίνεται ότι οι αλγόριθμοι καταλήγουν αρκετά διαφορετικές τοπολογίες. Όπως είναι εμφανές οι τοπολογίες του νέου αλγορίθμου ενισχύουν αρκετά το τμήμα της προεξοχής (δηλαδή, το δεύτερο ορθογώνιο) και το σημείο όπου

σχηματίζεται η γωνία και δημιουργεί μικρότερες περιοχές πλήρους υλικού στις θέσεις των στηρίξεων. Απ' την άλλη ο αλγόριθμος SIMP ενισχύει αισθητά περισσότερο τις στηρίξεις και εναποθέτει λιγότερο υλικό στην προεξοχή.

Όπως είναι λογικό αυτές οι διαφορές στην τοπολογία οδηγούν σε διαφορετικές μετατοπίσεις κάτι που φαίνεται και στο παρακάτω διάγραμμα (Σχήμα 6.47).

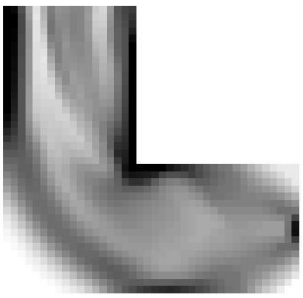
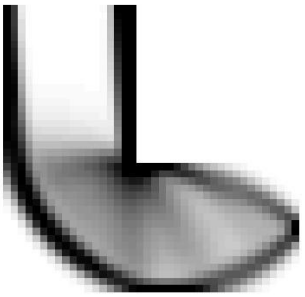
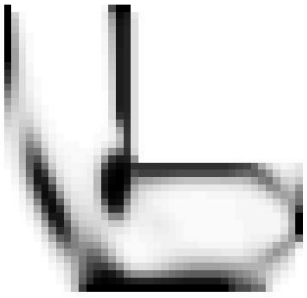
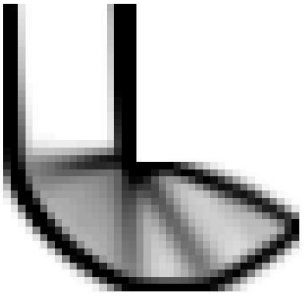
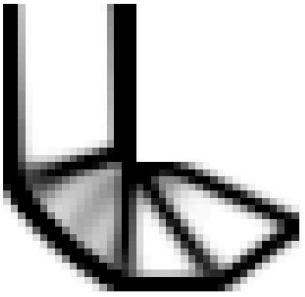


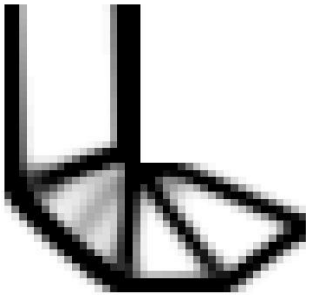
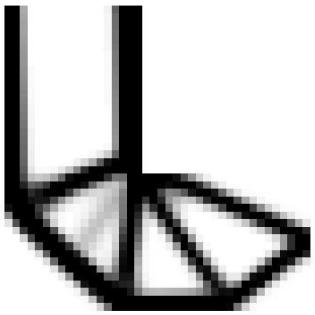
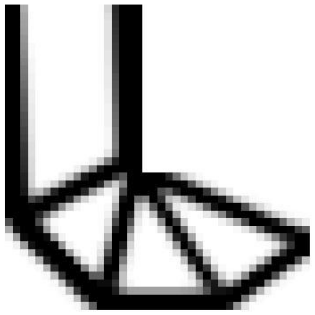
Σχήμα 6.47: Διάγραμμα σύγκρισης μέγιστων μετατοπίσεων βελτιστοποιημένων κατασκευών SIMP και μοναδιαίου φορτίου

Όπως είναι εμφανές οι μέγιστες μετατοπίσεις των βελτιστοποιημένων και για τους δύο κώδικες είναι πανομοιότυπες για βέλτιστες κατασκευές μικρού όγκου(μέχρι 20% του όγκου) όπως επίσης και για μεγάλους όγκους (άνω του 70%). Αυτό παρουσιάζει μεγάλο ενδιαφέρον καθώς αποδεικνύει ότι αν και διαφορετικά βέλτιστα σχήματα έχουν την ίδια ακριβώς απόδοση. Άρα λοιπόν συμπεραίνουμε ότι δεν υπάρχει μια μόνο βέλτιστη λύση γι αυτούς τους όγκους. Απ' την άλλη όμως παρατηρούμε ότι για τους ενδιάμεσους όγκους ο αλγόριθμος που χρησιμοποιεί το μοναδιαίο φορτίο έχει αρκετά μεγαλύτερη απόδοση από τον αλγόριθμο SIMP, δηλαδή για ίδιες μετατοπίσεις ο νέος αλγόριθμος δημιουργεί σχήματα με μικρότερο βάρος.

Έχει ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε τα ενδιάμεσα στάδια απ τα οποία περνάν οι αλγόριθμοι ώστε να καταλήξουν στο βέλτιστο σχήμα. Παρακάτω παρουσιάζονται οι ενδιάμεσες καταστάσεις βελτιστοποίησης όπου το τελικό σχήμα έχει όριο όγκου 40% (Πίνακας 6.12).

Πίνακας 6.12: Πίνακας ενδιάμεσων σχημάτων του προτεινόμενου αλγορίθμου και της μεθόδου SIMP

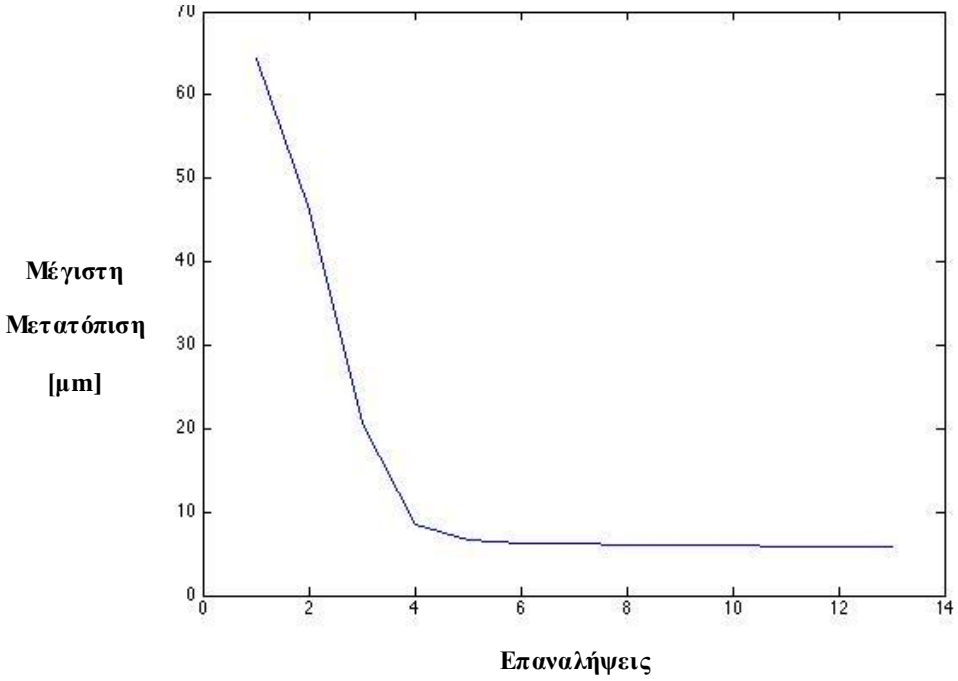
Ενδιάμεσα στάδια της προτεινόμενης μεθόδου	**Ενδιάμεσα στάδια του αλγόριθμου SIMP**
	
	
	
	

Ενδιάμεσα στάδια της προτεινόμενης μεθόδου	**Ενδιάμεσα στάδια του αλγόριθμου SIMP**
	
	
	

Όπως φαίνεται λοιπόν από τις ενδιάμεσες καταστάσεις που παρατηρούνται κατά την διάρκεια της βελτιστοποίησης οι αλγόριθμοι ξεκινάν με τελείως διαφορετικό τρόπο, αλλά καταλήγουν στο ίδιο αποτέλεσμα. Ειδικότερα ο αλγόριθμος που αναπτύχθηκε στην παρούσα διπλωματική ενισχύει ισχυρά την προεξοχή του προβόλου, κοντά στην περιοχή που ασκείται το φορτίο και στην συνέχεα δημιουργεί τα υπόλοιπά νεύρα της κατασκευής. Απ' την άλλη ο αλγόριθμος SIMP αναπτύσσει την κατασκευή ομοιόμορφα, και κατά την διάρκεια των επαναλήψεων περιορίζει τις γκρίζες περιοχές και δημιουργεί τα νεύρα.

Ένα άλλο κρίσιμο σημείο για την διαλεύκανση της συμπεριφοράς του αναπτυγμένου αλγορίθμου είναι η μεταβολή της μέγιστης μετατόπισης αλλά και της αντικειμενικής συνάρτησης, δηλαδή του βάρους, σε κάθε επανάληψη.

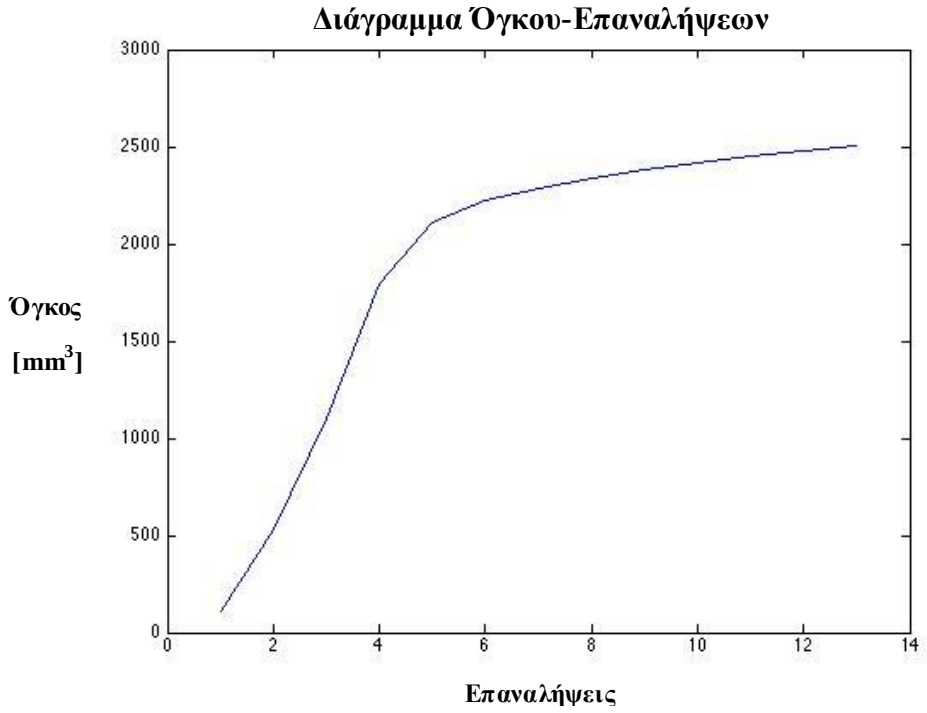
Διάγραμμα Μέγιστης Μετατόπισης-Επαναλήψεων



Σχήμα 6.48: Πορεία μέγιστης μετατόπισης κατά την διάρκεια της βελτιστοποίησης

Στο παραπάνω διάγραμμα (Σχήμα 6.48) φαίνεται η μεταβολή της μέγιστης μετατόπισης σε κάθε επανάληψη. Όπως βλέπουμε η μέγιστη μετατόπιση μειώνεται εκθετικά μέχρι την 4 επανάληψη όπου η μέγιστη μετατόπιση είναι ελάχιστα μεγαλύτερη από την επιτρεπόμενη. Είναι εμφανής η εκθετική συμμόρφωση της κατασκευής στον περιορισμό μετατόπισης. Αφού λοιπόν οι μετατοπίσεις φτάσουν σε ένα σημείο αρκετά κοντά στον περιορισμό η μεταβολή της μέγιστης μετατόπισης μέχρι τη τελική σύγκλιση είναι αρκετά μικρή και έτσι απαιτούνται 13 επαναλήψεις εν συνόλω για την τελική εναρμόνιση των μετατοπίσεων στους περιορισμούς. Όπως αποδείχθηκε στα προηγούμενα παραδείγματα το άθροισμα της εικονικής ενέργειας θα οδηγήσει στο ίδιο διάγραμμα λόγω του θεωρήματος της μοναδιαίας φόρτισης.

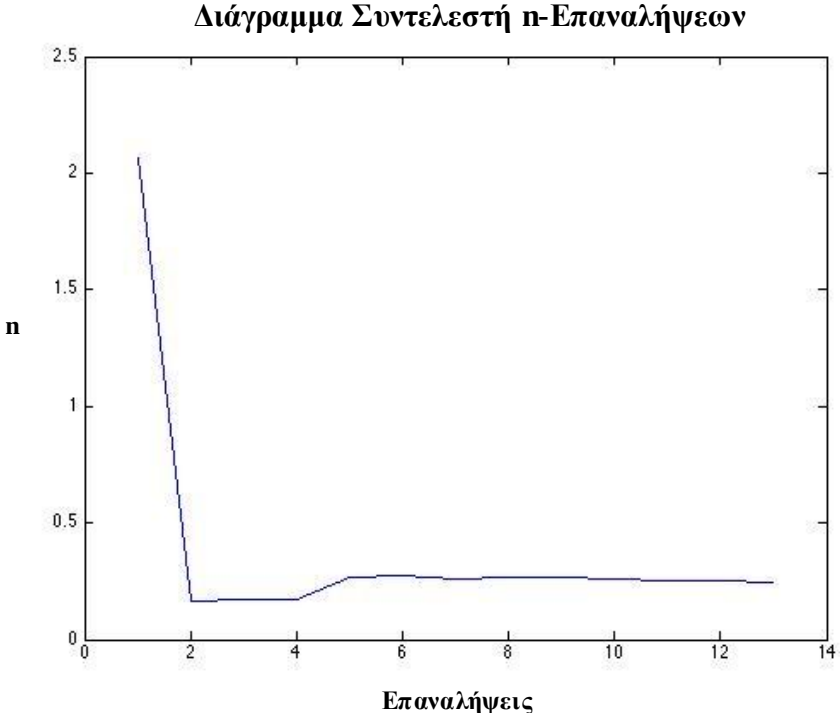
Όσον αφορά την μεταβολή της αντικειμενικής συνάρτησης, δηλαδή του όγκου κατά την διάρκεια των επαναλήψεων παρατηρούμε ότι συγκλίνει ομαλά (Σχήμα 6.49).



Σχήμα 6.49: Πορεία όγκου κατά την διάρκεια των επαναλήψεων

Και σ' αυτό το παράδειγμα παρατηρούμε ότι ο όγκος ξεκινάει από μία πολύ μικρή αρχική τιμή και συγκλίνει εκθετικά στον τελικό όγκο μέχρι η μέγιστη μετατόπιση να είναι μικρότερη από την μέγιστη επιτρεπόμενη.

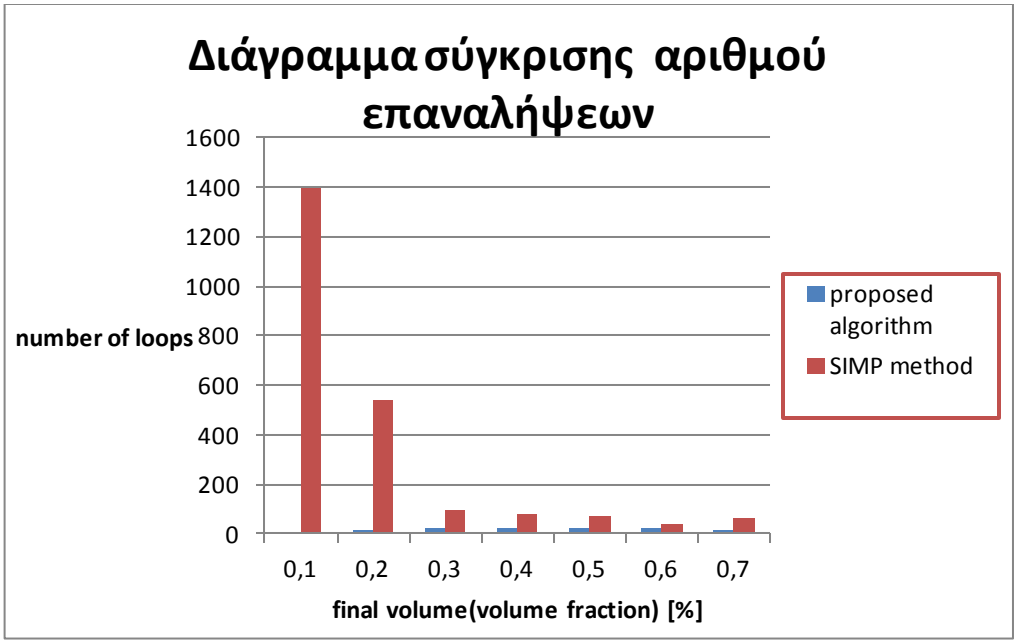
Εκτός αυτού είναι σημαντικό να δούμε την τιμή της μέγιστης τιμής του συντελεστή n κατά την διάρκεια των επαναλήψεων που αναμένουμε στην βέλτιστη κατάσταση ο συντελεστής n να είναι σταθερός, άρα και η μέγιστη τιμή του.



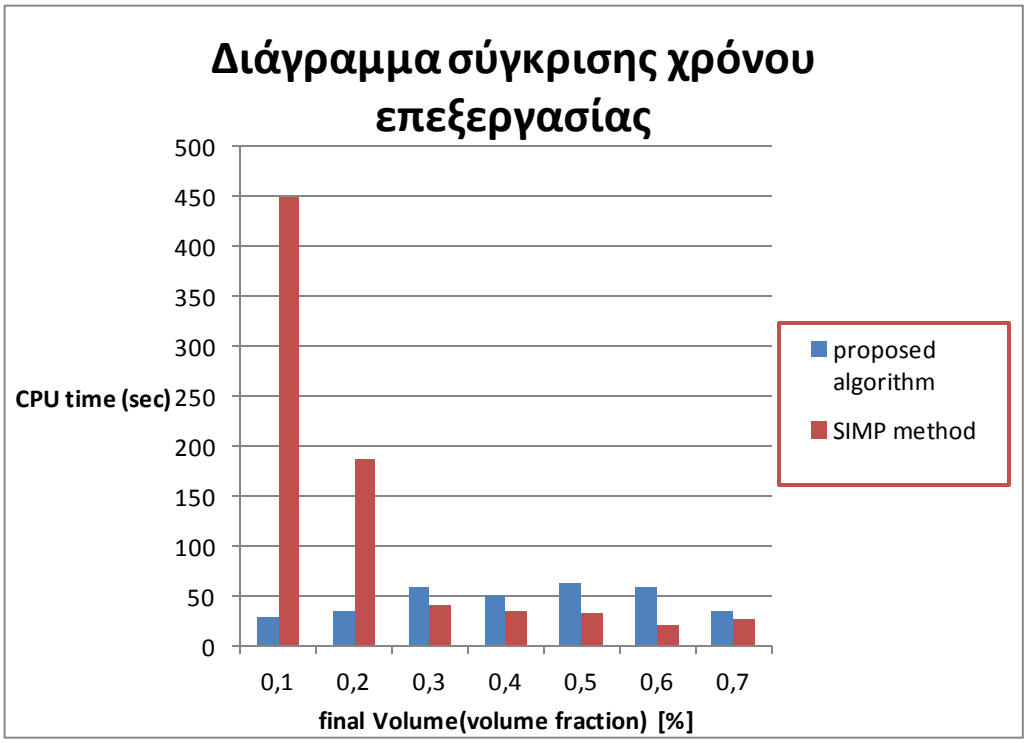
Σχήμα 6.50: πορεία μεταβολής μέγιστης τιμής συντελεστή n κατά την διάρκεια των επαναλήψεων

Πράγματι, όπως φαίνεται στο παραπάνω διάγραμμα (Σχήμα 6.50) στις τελευταίες επαναλήψεις πριν την σύγκλιση, η μέγιστη τιμή του συντελεστή *n* παραμένει σταθερή. Έτσι λοιπόν βρισκόμαστε σε μια βέλτιστη ή κοντά στο βέλτιστο κατάσταση. Ωστόσο σ' αυτό το παράδειγμα είναι αξιοσημείωτη η σταθερότητα του συντελεστή n.

Τέλος μελετήθηκε και σ' αυτό το αριθμητικό παράδειγμα η διαφορά των απαιτούμενων επαναλήψεων που απαιτούνται από τους δύο αλγορίθμους για να καταλήξουν στο βέλτιστο σχήμα. Τα αποτελέσματα τόσο για των αριθμό των επαναλήψεων όσο και για τον χρόνο επεξεργασίας είναι αναμενόμενα και σύμμορφα με τα προηγούμενα προβλήματα (Σχήμα 6.51 και Σχήμα 6.52).



Σχήμα 6.51: Σύγκριση αριθμού επαναλήψεων μεθόδου SIMP και προτεινόμενης μεθόδου



Σχήμα 6.52: Σύγκριση χρόνου επεξεργασίας μεθόδου SIMP και προτεινόμενης μεθόδου

6.6 *Επέκταση αλγορίθμου για βελτιστοποίηση υπό περιορισμό μετατόπισης και τάσης*

Όπως έχει αναφερθεί η μέθοδος SIMP αντιμετωπίζει δυσκολίες σε προβλήματα βελτιστοποίησης με περιορισμούς τάσης. Ειδικότερα, η SIMP δεν μπορεί να ελέγξει αυτούσια, δηλαδή έχοντας ως αντικειμενική την ενδοτικότητα, τις τάσεις λόγω του τοπικού τους χαρακτήρα. Με τον όρο «τοπικό» εννοούμε ότι ο περιορισμός πρέπει να εκτελεστεί και να ελεγχθεί σε κάθε πεπερασμένο στοιχείο. Απ την άλλη ο όγκος έχει καθολικό χαρακτήρα, δηλαδή είναι περιορισμός που αφορά συνολικά την κατασκευή και όχι το κάθε στοιχείο μεμονωμένα. Έτσι λοιπόν αν θέλαμε να βελτιστοποιήσουμε και τις μετατοπίσεις και τις τάσεις με την μέθοδο SIMP η φιλοσοφία της θα έπρεπε να αλλάξει άρδην καθώς θα έπρεπε να εισαχθεί ένας τοπικός περιορισμός και μια διαδικασία ελέγχου της μεταβλητής σχεδίασης σε κάθε στοιχείο του πεδίου σχεδίασης. Έχουν γίνει διάφορες προσπάθειες στην βιβλιογραφία ώστε να καλυφτούν τέτοιου είδους περιορισμοί ωστόσο δεν θεωρούνται ιδιαιτέρως επιτυχείς λόγω της πολυπλοκότητας και του υπολογιστικού κόστους που εισάγουν.

Απ την άλλη η μέθοδος που προτείνεται στην παρούσα διπλωματική ελέγχει τοπικά τις μεταβλητές σχεδίασης Έτσι λοιπόν είναι πολύ εύκολή η εισαγωγή ακόμη ενός τοπικού περιορισμού, όπως οι τάσεις, καθώς η διαδικασία ελέγχου διενεργείται έτσι κι αλλιώς για τις μετατοπίσεις. Γι αυτό λοιπόν το λόγο διενεργήθηκε μια επέκταση της προτεινόμενου αλγορίθμου ώστε να πληροί ταυτόχρονα περιορισμούς τάσεων και μετατοπίσεων.

Όπως γνωρίζουμε από την υπολογιστική μηχανική ο περιορισμός μετατοπίσεων είναι πιο αυστηρώς συνήθως από τον περιορισμό τάσεων. Λαμβάνοντας αυτό υπ’ όψιν είναι λογικό να προτιμηθεί πρώτα ο έλεγχος των μετατοπίσεων και στην συνέχεια των τάσεων.

Με βάσει τα παραπάνω ο αλγόριθμος μετά την εφαρμογή του αναδρομικού τύπου που ανασχεδιάζει την κατασκευή ώστε να πληρούνται οι περιορισμοί των μετατοπίσεων θα πρέπει μα εφαρμόζει μια δεύτερη φόρμουλα ανασχεδίασης που θα «συμμορφώνει» τις μέγιστες τάσεις των στοιχείων στον περιορισμό. Μια τέτοια αποτελεσματική φόρμουλα ανασχεδιασμού που βασίζεται στις μέγιστες τάσεις είναι ο αναδρομικός τύπος της μεθόδου FSD. Η φόρμουλα της FSD όπως αποδείχθηκε στο 3

κεφάλαιο είναι ιδιαιτέρως αποτελεσματική καθώς συγκλίνει ομαλά και πολύ γρήγορα στην βέλτιστη κατασκευή και προφανώς έχει τον τοπικό χαρακτήρα που είναι απαραίτητος ώστε να συνδυαστεί με τον προτεινόμενο αλγόριθμο βελτιστοποίησης. Βέβαια, είναι ζωτικής σημασίας να αναφέρουμε ότι η δεύτερη φόρμουλα που συμμορφώνει την κατασκευή στους περιορισμούς τάσεων πρέπει να εφαρμόζεται μόνο στα στοιχεία που υπερβαίνουν τον περιορισμό τάσης έτσι ώστε να μην «χαλάει» τον ανασχεδιασμό που έχει κάνει ο πρώτος αναδρομικός τύπος. Έτσι λοιπόν συνοψίζοντας ο αλγόριθμος βελτιστοποίησης υπό περιορισμό τάσης και μετατόπισης συνοψίζεται στα παρακάτω βήματα.

Βήμα 1: ορισμός του αρχικού πεδίου βελτιστοποίησης (initial domain),του περιορισμού μετατόπισης, του περιορισμού τάσης και των σταθερών του υλικού, καθώς επίσης και την θέση και το μέτρο της δύναμης.

Βήμα 2: Ανάλυση της κατασκευής με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων και προσδιορισμός των μετατοπίσεων και τάσεων.

Βήμα 3: Εύρεση του κόμβου μέγιστης μετατόπισης και τοποθέτησης σ αυτόν μοναδιαίας δύναμης. Ανάλυση της κατασκευής και υπολογισμός των εικονικών τάσεων σε κάθε στοιχείο της κατασκευής

Βήμα 4: Υπολογισμός της εικονικής ενέργειας σε κάθε σημείο της κατασκευής και προσδιορισμός του συντελεστή n

Βήμα 5: Αναβάθμιση του αρχικού σχήματος βάσει του αναδρομικού τύπου (6.34)

Βήμα 6: Έλεγχος του νέου πάχους των στοιχείων για το αν ξεπερνούν το πεδίο βελτιστοποίησης και κανονικοποίησης τους στους περιορισμούς πάχους

Βήμα 7: Ομογενοποίησε της κατασκευής χρησιμοποιώντας κατάλληλο φίλτρο

Βήμα 8: Ανάλυση της κατασκευής με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων και προσδιορισμός των μετατοπίσεων και τάσεων. Απομάκρυνση των ψευδοτάσεων, δηλαδή των τάσεων των πεπερασμένων στοιχείων που έχουν το ελάχιστο επιτρεπόμενο πάχος

Βήμα 9: Εφαρμογή του αναδρομικού τύπου της FSD μόνο για τα στοιχεία που η ισοδύναμη τάση von Mises υπερβαίνει τον περιορισμό μετατόπισης

Βήμα 10: Έλεγχος του νέου πάχους των στοιχείων για το αν ξεπερνούν το πεδίο βελτιστοποίησης και κανονικοποίησης τους στους περιορισμούς πάχους

Βήμα 11: Επανάληψη των βημάτων 2-10 μέχρι να πληρούνται όλοι οι περιορισμοί

Βήμα 12: Γραφική αναπαράσταση του τελικού βέλτιστου σχήματος και υπολογισμός του ποσοστού όγκου που χρησιμοποιεί η τελική κατασκευή σε σχέση με το αρχικό πεδίο (initial domain).

Με εφαρμογή του παραπάνω αλγόριθμου μπορούν να ελέγχουν επιτυχώς ταυτόχρονα περιορισμοί τάσης και μετατόπισης. Τα σχήματα που δημιουργούνται έχουν όμοια μορφολογία με αυτά στα οποία ελέγχεται μόνο η μετατόπιση γι' αυτό δεν παρατίθενται. Η διαφορά έγκειται ότι τα νέα σχήματα δεν έχουν απειρισμούς τάσης στα σημεία κοντά στις οπές.

7

Επίλογος

Στην παρούσα Διπλωματική Εργασία έγινε μια αρχική αναζήτηση των βασικών μεθόδων τοπολογικής βελτιστοποίησης που έχουν επικρατήσει σε ακαδημαϊκό αλλά και βιομηχανικό επίπεδο. Απ' αυτήν την αναζήτηση έγινε φανερό ότι πλέον διαδεδομένες μέθοδοι είναι οι ESO και η SIMP, ωστόσο η SIMP αποδεικνύεται ότι είναι πιο εύρωστη μέθοδος. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο SIMP σε παραδείγματα αναφοράς προέκυψε το συμπέρασμα ότι είναι όντως ιδιαίτερα αποτελεσματική μέθοδος καθώς βελτιστοποιεί κατασκευές επιτυχώς, ανεξαρτήτως των συνθηκών στήριξης και φόρτισης. Εκτός αυτού η μέθοδος δημιουργεί κατασκευές πολύ κοντά στην μορφή «0-1», έχοντας, δηλαδή, ελάχιστες περιοχές με ενδιάμεσα πάχη (γκρίζες περιοχές). Όσον αφορά την πορεία της αντικειμενικής συνάρτησης και του περιορισμού, ο όγκος της κατασκευής καθώς και η πραγματική ενδοτικότητα παραμένουν σχεδόν σταθερές σε κάθε επανάληψη, ωστόσο η «ποινικοποιημένη» ενδοτικότητα παρουσιάζει τη χαρακτηριστική υπερβολική μορφή των προβλημάτων ελαχιστοποίησης. Τα αρνητικά της μεθόδου μπορούν να συνοψιστούν στην αδυναμία της να βελτιστοποιήσει την κατανομή της τάσης με εύκολο τρόπο, και σε γενικότερο επίπεδο στη δυσκολία εισαγωγής τοπικών περιορισμών στη διαδικασία βελτιστοποίησης. Επίσης, η μέθοδος απαιτεί σχετικά μεγάλο αριθμό επαναλήψεων αλλά με μικρό υπολογιστικό κόστος.

Στην συνέχεια, μελετήθηκε η μέθοδος FSD, η οποία είναι ευρέως διαδεδομένη για τη βελτιστοποίηση κατασκευών υπό περιορισμό τάσης. Η μέθοδος, μέσω της εφαρμογής της στα κλασσικά διδιάστατα παραδείγματα της βιβλιογραφίας, αναδείχτηκε σε μια μέθοδος με αξιοσημείωτη απλότητα, η οποία παρουσιάζει ομαλή σύγκλιση της αντικειμενικής συνάρτησης και του περιορισμού σε σχετικά λίγες επαναλήψεις. Ωστόσο δεν συγκλίνει άμα υπάρχει περιορισμός μέγιστου πάχους πράγμα που καταδεικνύει ότι στην ουσία δεν κατανέμει το υλικό αλλά διαστασιολογεί καταλλήλως την κατασκευή. Η μέθοδος FSD εφαρμόστηκε και σε δικτυωτές κατασκευές παρουσιάζοντας την ίδια ακριβώς συμπεριφορά με την εφαρμογή της στο συνεχές μέσο. Ωστόσο λόγω των διαφορετικών πινάκων δυσκαμψίας των δομικών μονάδων του διακριτού και του συνεχούς προβλήματος, η διακριτοποίηση της δικτυωτής κατασκευής και συγκεκριμένα ο λόγος αναλογίας των πλευρών της διακριτής δομικής μονάδας παίζει σημαντικό ρόλο στο αποτέλεσμα. Έτσι, προσδιορίστηκαν οι κατάλληλη λόγοι αναλογίας σε κάθε παράδειγμα αναφοράς ώστε να προκύπτει βέλτιστη λύση. Από την ανάλυση έγινε εμφανές ότι η λύση των κλασσικών προβλημάτων με διακριτές μονάδες δημιουργεί κατάτι πιο βαριές κατασκευές λόγω των επικαλύψεων στα σημεία σύνδεσης των ράβδων.

Στη συνέχεια έγινε εφαρμογή ενός πρωτότυπου βέλτιστου κριτηρίου που είναι καίριας σημασίας για τη βελτιστοποίηση δικτυωτών κατασκευών υπό περιορισμό μετατόπισης. Συγκεκριμένα, μέσω της εφαρμογής του θεωρήματος μοναδιαίας δύναμης, προσδιορίζεται κατάλληλος λόγος ο οποίος, αποτελεί το βέλτιστο κριτήριο, και καταδεικνύει τις ενεργές και παθητικές ενεργειακά ράβδους. Βάσει του συγκεκριμένου βέλτιστου κριτηρίου αναπτύχθηκε μια αναδρομική σχέση ανασχεδιασμού. Ο αλγόριθμος δημιουργεί κατασκευές παρόμοιες με την μέθοδο FSD ωστόσο ελαφρότερες λόγω της πλήρους απομάκρυνσης των παθητικών στοιχείων.

Τέλος, αναπτύχθηκε μια νέα μέθοδος βελτιστοποίησης συνεχούς μέσου υπό περιορισμό μετατόπισης. Αφού αρχικά αναπροσαρμόστηκε το θεώρημα μοναδιαίας δύναμης ώστε να υπακούει στις καταστατικές εξισώσεις του συνεχούς μέσου, δημιουργήθηκε ένα βέλτιστο κριτήριο και ένας αναδρομικός τύπος παρόμοιο με το διακριτό πεδίο. Εισάγοντας το κατάλληλο φίλτρο ο αλγόριθμος συνέκλινε, δημιουργώντας έτσι μια νέα μέθοδο βελτιστοποίησης. Η αποτελεσματικότητα της μεθόδου δοκιμάστηκε στα παραδείγματα αναφοράς. Στη συνέχεια τα αποτελέσματα συγκρίθηκαν με τα αποτελέσματα της μεθόδου SIMP στα αντίστοιχα παραδείγματα

παρουσιάζοντας πολύ ενθαρρυντικά αποτελέσματα. Συγκεκριμένα, η μέθοδος επιτυγχάνει σχεδόν πανομοιότυπες τοπολογίες με την μέθοδο SIMP και μάλιστα οριακά καλύτερα αποτελέσματα από την σκοπιά του βάρους. Επίσης, η προτεινόμενη μέθοδος συγκλίνει σε αρκετά λιγότερες επαναλήψεις και η πορεία της αντικειμενικής συνάρτησης είναι ομαλή. Επιπροσθέτως με την εφαρμογή αυτής της μεθόδου έγινε κατανοητή η σχέση μετατοπίσεων και ενδοτικότητας καθώς επίσης και η δυϊκότητα των διατυπώσεων του προβλήματος από την SIMP και από τον προτεινόμενο αλγόριθμο. Στα πλεονεκτήματα της μεθόδου μπορεί να συνυπολογιστεί η διατύπωση του προβλήματος από πιο μηχανολογική σκοπιά, μεταφέροντας την τοπολογική βελτιστοποίηση από την προκαταρτική μελέτη μιας κατασκευής (στάδιο της σύλληψης) στο στάδιο της ανάλυσης. Εκτός αυτού η μέθοδος είναι εύκολα επεκτάσιμη και σε προβλήματα βελτιστοποίησης με ταυτόχρονο περιορισμό τάσης και μετατόπισης. Ως μειονεκτήματα της μεθόδου μπορούν να θεωρηθούν η ύπαρξη αρκετών γκρίζων περιοχών που δυσχεραίνουν την κατασκευασιμότητά της κατασκευής και η ανάγκη για διενέργεια ανάλυσης πεπερασμένων στοιχείων της κατασκευής δυο φορές μέσα σε μια επανάληψη. Η ύπαρξη γκρίζων περιοχών οφείλεται στην χρησιμοποίηση μη αποτελεσματικού φίλτρου. Γι' αυτόν το λόγο ως πλαίσιο περαιτέρω έρευνας της μεθόδου προτείνεται η ανάπτυξη αποτελεσματικού φίλτρου το οποίο να καλύπτει την ανάγκη της κατασκευασιμότητας. Ακόμα η μέθοδος θα μπορούσε να επεκταθεί και σε 3D κατασκευές ώστε να μπορεί να έχει και εμπορικές εφαρμογές.

Βιβλιογραφία

1. **Allaire, G.** (2002) ,Shape optimization by the homogenization method. Applied Mathematical Sciences 146, Springer Verlag
2. **Bendsøe** M.P and O. Sigmund, (2003),Topology Optimization: Theory, Methods and Applications, Springer-Verlag,Berlin
3. **Bendsøe**, M.P., (1989), Optimal shape design as a material distribution problem. Struct. Optimiz. **1**, pp.193–202
4. **Bendsøe**, M.P.; Kikuchi, N. (1988): Generating optimal topologies in structural design using a homogenization
5. **Beyer**, H.G., (2001), The Theory of Evolution Strategies: Springer-Verlag.
6. **Bruns** T.E (2005) A reevaluation of the SIMP method with filtering and an alternative formulation for solid-void topology optimization. Struct Multidiscip Optim 30(6):428–436
7. **Deaton J.** · Grandhi R. (2013) A survey of structural and multidisciplinary continuum topology optimization: post 2000 Struct Multidisc Optim 49:1–38
8. **Dorigo**, M., Maniezzo, V., Colorni, A., (1996), Ant System: Optimization by a colony of cooperating agents. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics – Part B, 26(1):29–41.
9. **Eberhart**, R. C. and Kennedy, J., (1995), A new optimizer using particle swarm theory. Proceedings of the sixth international symposium on micro machine and human science pp. 39-43. IEEE service center,Piscataway, NJ, Nagoya, Japan.
10. **Eschenauer**, H.A. (1994), 'Bubble method for topology and shape optimization of structures', Struct Optim. vol.8(1), pp.142-151.
11. **Fuchs** MB, Jiny S, Peleg N (2005) The SRV constraint for 0/1 topological design. Struct Multidiscip Optim 30(4):320–328
12. **Gambhir** M. L.**,** (2011), Fundamentals of Structural Mechanics and Analysis,PHI Learning,p.490-496
13. **Glover**, F. and M. Laguna. (1997). Tabu Search. Kluwer, Norwell, MA.
14. **Goldberg**, David E (1989), Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning, Kluwer Academic Publishers, Boston, MA.
15. **Goldberg**, David E (2002), The Design of Innovation: Lessons from and for Competent Genetic Algorithms,Addison-Wesley, Reading, MA.
16. **Gutkowski** R.M**, (1990),** Structures: Fundamental Theory and Behavior, Von Nostrand Reinhold, p. 242-256
17. **Kennedy**, J. and Eberhart, R. C. (1995), Particle swarm optimization. Proc. IEEE int'l conf. on neural networks Vol. IV,pp. 1942-1948. IEEE service center, Piscataway, NJ

18. **Kirkpatrick**, S.; Gelatt, C. D., Vecchi, M. P. (1983). "Optimization by Simulated Annealing". Science. New Series 220 (4598): 671-680.
19. **Klarbring** A., (2008), An introduction to structural optimization, Springer, 2008
20. **Kobayashi** MH (2010) On a biologically inspired topology optimization method. Commun Nonlinear Sci Numer Simul 15(3):787–802
21. **Makris** P, Provatidis C, (2002) Weight minimization of displacement-constrained truss structures using a strain energy criterion, Comput Methods Eng,191:2159-2177
22. **Metropolis**, N., Rosenbluth, A.W., Rosenbluth, M.N., Teller, A.H., and Teller, E., (1953) "Equations of State Calculations by Fast Computing Machines". Journal of Chemical Physics, 21(6):1087-1092.
23. **Osher** SJ, Sethian JA (1988) Fronts propagating with curvature dependent speed: algorithms based on the Hamilton-Jacobi formulation. J Comput Phys 79(1):12–49
24. **Provatidis** C., Venetsanos D.,(2005), the influence of normalizing the virtual strain energy density on the shape optimization of 2D continua, 1st international conference on Experiments/Process/System modeling/Simulation/Optimization,p. 1016-1023.
25. **Rozvany** GIN (2009) A critical review of established methods of structural topology optimization. Struct Multidiscip Optim 37(3):217–237
26. **Saka**, M.P., (2003), Optimum design of skeletal structures: A review. In: B.H.V. Topping, Editor, Progress in civil and structural engineering computing, Saxe-Coburg Publications, pp. 237–284.
27. **Sethian** JA, Wiegmann A (2000) Structural boundary design via level set and immersed interface methods. J Comput Phys 163(2):489–528
28. **Sigmund** O., (2001), A 99 line topology optimization code written in Matlab, Structural and Multidisciplinary Optimization, vol. 21.2 , p. 120-127.
29. **Stolpe** M, Svanberg K (2001) An alternative interpolation scheme for minimum compliance topology optimization. Struct Multidiscip Optim 22(2):116–124
30. **Stützle**, T., Hoos, H.H., (2000), MAX–MIN Ant System. Future Generation Computer Systems, 16(8):889–914.
31. **Svanberg** K. and Svard H., (2013), Density filters for topology optimization based on the geometric and harmonic means, 10th World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization,Orlando,Florida,USA
32. **Svanberg**, K. (1987), 'The method of moving asymptotes a new method for structural optimization',International Journal for Numerical Methods in Engineering, 24:359–373.
33. **Venetsanos** D, Provatidis C., (2010), On the layout optimization of 2D skeletal structures under single displacement constraint, Structure Multidisciplinary Optimization, 42:125-155, 2010
34. **Venetsanos** D., (2010), Development of methods for topology and shape optimization of mechanical structures, phd thesis
35. **Venetsanos** D., Mitrakos D., Provatidis C., Layout optimization of 2 D skeletal structures using fully stressed design,
36. **Venkayya** VB, (1971), Design of optimum structures, Compt Struct,1:265-309
37. **Xie**, Y. M., Steven, G.P., (1993), A simple evolutionary procedure for structural optimization, Comput. Struct.49 885-896.
38. **Xie**, Y.M., Steven, G.P., (1997), Evolutionary Structural Optimization, Springer, London

39. **Yang** Deqing, Sui Yunkang, Liu Zhengzing, Sun Huanchun, (2000), Topology Optimization of Continuum Structures under Stress and Displacement Constraints, Applied Mathematics and Mechanics, Vol 21,No.1
40. **Προβατίδης** Χριστόφορος, (2004), Ανάλυση Μηχανολογικών Κατασκευών-ΙΙ,p. 4.1-4.14