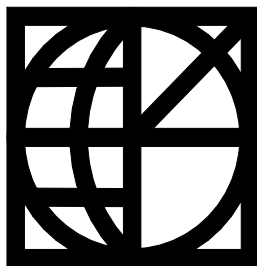


**ΚΕΝΤΡΟ ΔΟΡΥΦΟΡΩΝ ΔΙΟΝΥΣΟΥ  
ΕΜΠ - ΣΧΟΛΗ ΑΓΡΟΝΟΜΩΝ ΚΑΙ  
ΤΟΠΟΓΡΑΦΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ**

**DIONYSOS SATELLITE OBSERVATORY  
NTUA - SCHOOL RURAL AND SURVEYING  
ENGINEERING**

**ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ ΤΟΠΙΚΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΓΕΩΕΙΔΟΥΣ  
ΣΤΗΝ ΠΕΡΙΟΧΗ ΤΗΣ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ**

**ΙΩΑΝΝΗΣ ΔΙΑΜΑΝΤΗΣ**



**ΑΘΗΝΑ, ΟΚΤΩΒΡΙΟΣ 2015**

# ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Αντικείμενο αυτής της εργασίας είναι η μελέτη προσδιορισμού ορθομετρικών υψόμετρων με τη βοήθεια μετρήσεων *GPS*, γεωμετρικής χωροστάθμησης και τη χρήση τοπικών μοντέλων του γεωειδούς. Τα τοπικά μοντέλα του γεωειδούς υπολογίζονται με τη βοήθεια συγχρόνων τεχνικών προσδιορισμού ,μέσα από διαδικασία αφαίρεσης και επαναφοράς (*remove-restore techniques*) των συνιστωσών του πεδίου βαρύτητας. Οι σύγχρονες τεχνικές, που εφαρμόζονται και συγκρίνονται, θεωρούνται οι αντιπροσωπευτικότερες για τον ακριβή και ταχύ προσδιορισμό τοπικών μοντέλων επιφανειών γεωειδούς. Χρησιμοποιείται η πλέον ακριβής διαδικασία των μετασχηματισμών *Fourier*, ο μονοδιάστατος (1D) σφαιρικός ταχύς μετασχηματισμός. Ο προσδιορισμός των υψόμετρων διαχωρίζεται ουσιαστικά σε δυο τμήματα: στο τμήμα που αφορά στις μετρήσεις *GPS* και γεωμετρικής χωροστάθμησης, και στο τμήμα που αναφέρεται στο προσδιορισμό μοντέλων της επιφάνειας του γεωειδούς. Ο τελικός στόχος της μελέτης είναι η βελτίωση στη ακρίβεια προσδιορισμού ορθομετρικών υψόμετρων με τη χρήση σύγχρονων τεχνολογιών και μια πρώτη προσπάθεια εφαρμογής των παρουσιαζομένων μεθοδολογιών στον ελλαδικό χώρο.

Ο προσδιορισμός του γεωειδούς είναι ένα θέμα που απασχολεί πολύ τα τελευταία χρόνια τη παγκόσμια επιστημονική κοινότητα. Με την ανάπτυξη του παγκόσμιου συστήματος εντοπισμού (*GPS*) με το οποίο μπορούμε να πάρουμε με ικανοποιητική ακρίβεια γεωμετρικά υψόμετρα είναι αναγκαίος ο προσδιορισμός ενός ακριβούς γεωειδούς για τη μετατροπή τους απευθείας σε ορθομετρικά υψόμετρα. Επιπλέον υπάρχουν εφαρμογές σε άλλα επιστημονικά πεδία όπως γεωφυσική και σεισμολογία τα οποία διευκολύνονται με την ύπαρξη ακριβούς γεωειδούς.

Ιδιαίτερα σημαντικό στάδιο πριν από οποιοδήποτε υπολογισμό είναι η προετοιμασία των μετρήσεων και η απαλλαγή τους από συστηματικά σφάλματα. Επιπλέον είναι ιδιαίτερα σημαντικό, η ορθή επιλογή της μεθόδου και των αναγωγών που θα χρησιμοποιήσουμε, ώστε αυτές να αναφέρονται σε μία συγκεκριμένη επιφάνεια αναφοράς. Μάλιστα ανάλογα με τον τρόπο που αναγάγουμε τις μετρήσεις και την επιφάνεια αναφοράς που χρησιμοποιούμε, παραμένει μία ποσότητα έμμεσης επίδρασης στο γεωειδές την οποία επίσης πρέπει να την αφαιρέσουμε από τους τελικούς υπολογισμούς. Ως καλύτερη μέθοδος αναγωγής των τοπογραφικών μαζών πλησίον του σταθμού κρίθηκε η Δημιουργία τοπικού μοντέλου γεωειδούς στη περιοχή της Θεσσαλίας

αναγωγή υπολειπόμενου τοπογραφικού μοντέλου (*RTM*). Για τον υπολογισμό του γεωειδούς έχουν αναπτυχθεί διαφορετικοί τρόποι προσδιορισμού οι οποίοι παρέχουν διαφορετικά αποτελέσματα για κάθε σύνολο δεδομένων. Η τεχνική *remove-restore* χρησιμοποιείται σε κάθε μία από αυτές τις μεθόδους. Επίσης χρησιμοποιείται με διάφορες παραλλαγές (μετασχηματισμός *Fourier* 1D ή 2D, επίπεδη ή σφαιρική προσέγγιση, αριθμητική ολοκλήρωση) το ολοκλήρωμα του *Stokes*, αλλά και η σημειακή προσαρμογή σε σύνολο σταθερών σημείων η οποία μπορεί να γίνει σε ένα σύνολο αρχικών μετρήσεων ή και σε ένα μεταγενέστερο στάδιο κατά τη προσαρμογή του βαρυτομετρικού γεωειδούς σε μετρήσεις αποχής του γεωειδούς με *GPS*.

Σε μία σύντομη επισκόπηση στις μεθόδους προσδιορισμού του γεωειδούς που είναι αναρτημένες στο διαδίκτυο καταδεικνύεται η διαφορετικότητα των μεθόδων που χρησιμοποιούνται σε κάθε περιοχή και σε κάθε διαφορετικό σετ δεδομένων. Επίσης γίνεται σαφές ότι δεν υπάρχει μια βέλτιστη μέθοδος προσδιορισμού του γεωειδούς που μπορεί να εφαρμοστεί σε κάθε περιοχή και με οποιοδήποτε σετ δεδομένων.

Για το προσδιορισμό του γεωειδούς στο τμήμα της Ελλάδας που επιλέχθηκε χρησιμοποιήθηκαν επίγειες μετρήσεις βαρύτητας, με ταυτόχρονες μετρήσεις *GPS* σε σημεία γνωστού υψομέτρου, οι οποίες παραχωρήθηκαν από τη ΓΥΣ. Ως παγκόσμιο γεωδυναμικό μοντέλο χρησιμοποιήθηκε το *EGM2008* πλήρες σε βαθμό και τάξη. Όλη η διαδικασία των υπολογισμών έγινε με εργαλεία του λογισμικού πακέτου *Matlab*. Τα αποτελέσματα του υπολογισμού είναι ικανοποιητικά ιδιαίτερα μετά την επιλογή της διγραμμικής παρεμβολής, που δίνει μια αρκετά καλή απεικόνιση.

# ABSTRACT

The main goal of this thesis is the local/regional precise orthometric height determination by combining *GPS* and gravity measurements and taking advantage of local geoid models. The local geoid models are computed by using the efficient *Fast Fourier Transform (FFT)* techniques, based on the remove-restore methodology which is widely used in applications of physical geodesy. Different ways for the improvement of orthometric height determination in a limited test area, using all the available heterogeneous data sources and the most reliable current approaches, are also discussed. Numerical tests are carried out and important conclusions are drawn with respect to the results and the accuracies achieved.

The determination of geoid is a subject that occupies a lot the last years the world scientific community. With the growth of Global Positioning System (*GPS*), with which we can take with satisfactory precision geometric heights is necessary the determination of precise geoid for their transformation directly in orthometric heights. Moreover exist applications in other scientific fields as geophysics and seismology which are facilitated with the existence of precise geoid.

Particularly important stage before any one calculation is the preparation of measurements and their exemption from systematic faults. Moreover is particularly important, the equitable choice of method and reductions that we will use, in order that they are reported in a concrete surface of report. Thus, depending on the way that we reduce the measurements and the surface of report that we use, remains a quantity of indirect effect in the geoid which also it should him we remove from the final calculations. As better method of reduction of topographic masses near the station was judged the reduction of remaining topographic model (*RTM*). For the calculation of geoid have been developed different ways of determination which provide different results for each data set. The procedure remove-restore is used in every of these methods. Also it is used with various variants (transformation *Fourier* 1D or 2D, level or overall approach, numerical completion) the integral of *Stokes*, but also the specific adaptation in total of constant points which can become in a total of initial measurements or even in a later stage at the adaptation of gravimetric geoid in measurements of abstention of geoid with *GPS*.

In a short review in the methods of determination of geoid that are published in the internet is shown the diversity of methods that is used in each region and in each different

data set. Also it becomes explicit that does not exist a most optimal method of determination of geoid that can be applied in each region and with every data set.

For the determination of geoid in the department of Greece that was selected were used land measurements of gravity, with simultaneous measurements *GPS* in points of known altitude, what were granted by the HMGS. As world geodynamic model was used *EGM 2008* complete in degree and order. The initial measurements of absolute gravity were changed in anomalies of free air using them more recent types of corrections. As topographic reduction were used reductions *RTM*. The final almost geoid resulted from the integral of *Stokes* with planar Fourier transformation and was changed in geoid with the utilization of *Bouguer* anomalies of region. In next stage became the specific adaptation of geoid in the measured points with *GPS*, using a four parameter transformation. All the process of calculations became with tools of Matlab. The results of calculation are satisfactorily particular afterwards the adaptation with least square collocation of surface that was determined in *GPS* points.

# ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή μου, κ. Δημήτριο Παραδείση, για την ανάθεση της εργασίας, την καθοδήγηση, τις αλάνθαστες υποδείξεις και την ευκαιρία μίας εποικοδομητικής συνεργασίας πάνω σε ένα γνωστικό αντικείμενο το οποίο με ενθουσίασε ιδιαίτερος την περίοδο που το διδάχθηκα. Οι επιστημονικές γνώσεις του στον τομέα αυτό, η εμπειρία, ο επαγγελματισμός, η αφοσίωση και η διάθεση του για εποικοδομητική συνεργασία συνέβαλαν καθοριστικά στη θετική μου στάση και ενδιαφέρον ως προς την αποτελεσματική και δημιουργική προετοιμασία του συγκεκριμένου θέματος.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον υποψήφιο διδάκτορα Ζαχαρή Ευάγγελο, για την καθοδήγηση και πολύτιμη βοήθεια που μου προσέφερε καθ' όλη τη διάρκεια εκπόνησης και προετοιμασίας της συγκεκριμένης εργασίας, όπως επίσης και για τις πολύ εύστοχες παρατηρήσεις και υποδείξεις που συνέβαλαν στην άρτια παρουσίαση της.

Επιπλέον, ευχαριστώ τη Γεωγραφική Υπηρεσία Στρατού (ΓΥΣ), που ενέκριναν τη πρόσβαση μου δεδομένα μετρήσεων της ΓΥΣ, χωρίς την ύπαρξη των οποίων δεν θα ήταν δυνατή η εκπόνηση της εργασίας. Ιδιαίτερες ευχαριστίες θέλω να εκφράσω και προς την Υποδιεύθυνση Γεωδαισίας-Τοπογραφίας της ΓΥΣ, για την πολύ καλή και οργανωμένη προεπεξεργασία των εν λόγω δεδομένων.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου για την ανεκτίμητη βοήθεια και συμπαράσταση που μου παρείχαν με κάθε δυνατό τρόπο, ηθικά και ψυχολογικά, καθ' όλη τη διάρκεια των σπουδών μου. Για την αγάπη, την αφοσίωση, την κατανόηση, την υπομονή, την υποστήριξη και γενικώς για όλα όσα μου προσέφεραν τους οφείλω την αμέριστη ευγνωμοσύνη μου και όλη μου την αγάπη.



# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Σελίδα

|                               |       |
|-------------------------------|-------|
| ΠΕΡΙΛΗΨΗ.....                 | - 1 - |
| ABSTRACT.....                 | - 3 - |
| ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ.....              | - 5 - |
| ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΥΝΤΟΜΟΓΡΑΦΙΩΝ..... | - 9 - |

## ΚΕΦΑΛΑΙΑ

|  |        |
|--|--------|
| ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1.....  | - 10 - |
| Πρόλογος.....  | - 10 - |
| 1.1. Εισαγωγή.....   | - 10 - |
| 1.2. Στόχοι Εργασίας.....  | - 10 - |
| 1.3. Διάρθρωση περιεχομένων.....   | - 11 - |
| ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2.....  | - 13 - |
| Θεωρητικά Στοιχεία.....  | - 13 - |
| 2.1. Γενικά περί βαρύτητας.....  | - 13 - |
| 2.2. Γήινη Έλξη-Γήινο πεδίο βαρύτητας.....                                     | - 15 - |
| 2.3. Συνοριακά Προβλήματα.....   | - 17 - |
| 2.4. Γεωειδές.....   | - 20 - |
| 2.5. Υψόμετρα.....   | - 21 - |
| 2.5.1. Ορθομετρικά Υψόμετρα.....   | - 21 - |
| 2.5.2. Κανονικά Υψόμετρα.....  | - 22 - |
| 2.5.3. Δυναμικά Υψόμετρα.....  | - 24 - |
| 2.6. Γεωειδές-Σχεδόν Γεωειδές-Αντισταθμισμένο Γεωειδές.....                    | - 24 - |
| 2.7. Βαρυτομετρικές Μετρήσεις.....   | - 25 - |
| 2.7.1. Γενικά περί Βαρυτομετρικών Δεδομένων.....                               | - 25 - |
| 2.7.2. Μέθοδοι Μέτρησης της Βαρύτητας.....                                     | - 26 - |
| 2.7.3. Είδη Βαρυτόμετρων.....  | - 27 - |
| 2.7.4. Υλοποίηση μετρήσεων.....  | - 28 - |
| 2.7.5. Επεξεργασία μετρήσεων.....  | - 30 - |
| 2.8. Αναγωγές, Επεκτάσεις και Ανωμαλίες Βαρύτητας.....                         | - 32 - |
| ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3.....  | - 51 - |
| Μέθοδοι Χωρικής Παρεμβολής.....  | - 51 - |
| 3.1. Εισαγωγή.....   | - 51 - |
| 3.2. Είδη Παρεμβολής.....  | - 52 - |
| 3.3. Μέθοδος Kriging.....  | - 68 - |
| 3.4. Συμπεράσματα.....   | - 70 - |
| ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4.....  | - 72 - |
| Υπολογισμός Γεωειδούς στη περιοχή των Θεσσαλίας από μετρήσεις <i>GPS</i> ..... | - 72 - |
| 4.1. Γενικά.....   | - 72 - |
| 4.2. Μοντέλα Γεωειδούς στον Ελλαδικό Χώρο.....                                 | - 73 - |
| 4.3. Πρακτικό Μέρος.....   | - 78 - |
| Δημιουργία τοπικού μοντέλου γεωειδούς στη περιοχή της Θεσσαλίας.....           | - 7 -  |



|                        |         |
|------------------------|---------|
| 4.5. Υπολογισμοί.....  | - 82 -  |
| ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5.....        | - 93 -  |
| Επίλογος.....          | - 93 -  |
| 5.1. Συμπεράσματα..... | - 93 -  |
| 5.2. Προτάσεις.....    | - 95 -  |
| ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....      | - 96 -  |
| ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ.....         | - 102 - |

# ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΥΝΤΟΜΟΓΡΑΦΙΩΝ

|       |  |
|-------|--|
| DTM   | Digital Terrain Model  |
| FFT   | Fast Fourier Transform   |
| EGM   | Earth Gravitational Model                                      |
| EIGEN | European Improved Gravity model of the Earth by New techniques |
| GOCE  | Gravity field and steady-state Ocean Circulation Explorer      |
| GPS   | Global Positioning System                                      |
| GRACE | Gravity Recovery and Climate Experiment                        |
| GRS   | Geodetic Reference System                                      |
| ICGEM | International Centre of Global Earth Models                    |
| IUGG  | International Union of Geodesy and Geophysics                  |
| NGS   | National Geodetic Survey                                       |
| RCR   | Remove-Compute-Restore   |
| RMSE  | Root Mean Square Error   |
| WGS   | World Geodetic System  |
| ΓΥΣ   | Γεωγραφική Υπηρεσία Στρατού                                    |
| ΕΓΣΑ  | Ελληνικό Γεωδαιτικό Σύστημα Αναφοράς                           |
| ΕΕΠ   | Ελλειψοειδές Εκ Περιστροφής                                    |
| ΕΣΥ   | Εθνικό Σύστημα Υψομετρίας                                      |
| MET   | Μέθοδος Ελαχίστων Τετραγώνων                                   |
| ΜΣΘ   | Μέση Στάθμη της Θάλασσας                                       |
| ΦΓΕ   | Φυσική Γήινη Επιφάνεια   |

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

## Πρόλογος

### *1.1. Εισαγωγή*

Η μελέτη της βαρυτικής δύναμης ξεκίνησε πριν από πολλά χρόνια όταν αρχικά ο Νεύτωνας και στη συνέχεια ο Γαλιλαίος την παρατήρησαν και προσπάθησαν να τη μοντελοποιήσουν. Έκτοτε βρήκε εφαρμογή σε πολλούς επιστημονικούς κλάδους, όπως γεωδαισία, γεωφυσική, σεισμολογία, μετεωρολογία κ.α.. Στην παρούσα εργασία θα επικεντρωθούμε αποκλειστικά στις εφαρμογές της βαρύτητας στη Γεωδαισία. Μία από τις εφαρμογές αυτές είναι και ο προσδιορισμός του γεωειδούς ο οποίος βασίζεται σε επίγειες μετρήσεις βαρύτητας. Ο τρόπος συλλογής των επίγειων μετρήσεων έχει εξελιχθεί με τη χρήση νέων ευαίσθητων οργάνων και πλέον τα δεδομένα είναι πιο ακριβή. Παράλληλα για την εκμετάλλευσή τους έχουν αναπτυχθεί πολλές μέθοδοι, οι οποίες τα τελευταία χρόνια έχουν εξελιχθεί με την ευρεία χρήση των Η/Υ. Μάλιστα έχουν προταθεί διάφορες τεχνικές εκμετάλλευσης των δεδομένων αυτών οι οποίες διαφοροποιούνται ανάλογα με τα χαρακτηριστικά των δεδομένων και της περιοχής μελέτης. Πέρα από τα παραπάνω έχουν εξελιχθεί τα τελευταία χρόνια τόσο τα παγκόσμια γεωδυναμικά μοντέλα που χρησιμοποιούνται όσο και τα ψηφιακά μοντέλα εδάφους. Με τη συγκεκριμένη εργασία θα προσπαθήσουμε να εκμεταλλευτούμε τα πιο σύγχρονα από τα νέα αυτά δεδομένα και εργαλεία ώστε να προσεγγίσουμε με το βέλτιστο τρόπο τον προσδιορισμό ενός τοπικού γεωειδούς από επίγειες μετρήσεις GPS.

### *1.2. Στόχοι Εργασίας*

Τελικός στόχος της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι ο βέλτιστος υπολογισμός της επιφάνειας του γεωειδούς στη περιοχή των Θεσσαλίας, με τη χρησιμοποίηση συγκεκριμένων δεδομένων. Για να γίνει όμως αυτό θα πρέπει να επιτευχθούν οι ενδιάμεσοι στόχοι της εργασίας οι οποίοι είναι:

- Η περιγραφή του θεωρητικού υποβάθρου που απαιτείται για τη κατανόηση των μεθόδων προσδιορισμού του γεωειδούς.

- Η γενική περιγραφή των μεθόδων υπολογισμού του γεωειδούς και των ενδιάμεσων σταδίων που απαιτούνται.

- Μία σύντομη επισκόπηση σε αντίστοιχες εργασίες που βρέθηκαν στη διεθνή βιβλιογραφία με τα αποτελέσματά τους, αλλά και διδακτικά σχόλια που απορρέουν από αυτές.

Ο αναλυτικός προσδιορισμός του γεωειδούς σε μία περιοχή της Ελλάδος με πλήρη περιγραφή των ενδιάμεσων σταδίων αλλά και αξιολόγηση των αποτελεσμάτων.

### **1.3. Διάρθρωση περιεχομένων**

Η εργασία αυτή διαρθρώνεται σε πέντε κεφάλαια ως εξής:

Στο πρώτο κεφάλαιο συνοψίζονται οι στόχοι και περιγράφονται τα περιεχόμενα των επόμενων ενοτήτων.

Στο δεύτερο κεφάλαιο εκτίθεται το θεωρητικό υπόβαθρο της συγκεκριμένης μελέτης και μεταξύ άλλων περιλαμβάνει εισαγωγικές έννοιες για τη βαρύτητα, περιγραφή του τρόπου συλλογής των βαρυτομετρικών στοιχείων, γενικά περί αναγωγών και διορθώσεων που πρέπει να επιβληθούν στις τελικές τιμές απόλυτης βαρύτητας καθώς και οι επιφάνειες αναφοράς που θα χρησιμοποιηθούν και τέλος θεωρητικά στοιχεία για τις μεθόδους υπολογισμού της βαρύτητας τα εργαλεία και τεχνικές που χρησιμοποιούνται και τρόποι εφαρμογής τους. Δίνεται έμφαση στις μεθόδους τοπογραφικής αναγωγής καθώς και στην έμμεση επίδρασή τους στο τελικό υπολογισμό του γεωειδούς.

Σε τρίτο κεφάλαιο εξετάζονται μεθοδολογίες (αλγόριθμοι) βέλτιστου συνδυασμού και χωρικής παρεμβολής γεωμετρικών υψομέτρων ( $h$ ), ορθομετρικών υψομέτρων ( $H$ ) και υψομέτρων του γεωειδούς ( $N$ ) και η χρήση κατάλληλων εργαλείων για τον υπολογισμό τους. Οι νέες τεχνολογικές δυνατότητες για τις μετρήσεις βαρύτητας έχουν οδηγήσει σε ανάλογες δυνατότητες υπολογισμού υψηλής ακρίβειας μοντέλων του γεωειδούς από το συνδυασμό επίγειων και εναέριων μετρήσεων βαρύτητας στις ηπειρωτικές περιοχές, δορυφορικής αλτιμετρίας στους ωκεανούς, και μετρήσεων βαρύτητας από ειδικές δορυφορικές αποστολές (π.χ. *GOCE*). Παρά τα σημαντικά οφέλη από αυτές τις βελτιώσεις, το πρόβλημα συνδυασμού ετερογενών δεδομένων, για τον υπολογισμό ορθομετρικών υψομέτρων ή/και βελτίωσης των μοντέλων του γεωειδούς σε τοπικές κλίμακες, αποκτά ιδιαίτερη πρακτική σημασία.

Στο τέταρτο κεφάλαιο γίνεται ένας αναλυτικός υπολογισμός του γεωειδούς στη περιοχή των Θεσσαλίας. Μεταξύ άλλων περιγράφεται η περιοχή μελέτης και τα αρχικά δεδομένα καθώς και η επεξεργασία που απαιτείται ώστε να γίνουν εκμεταλλεύσιμα. Στη συνέχεια ακολουθεί η διεξοδική παρουσίαση των ενδιάμεσων σταδίων του υπολογισμού, με παράλληλη γραφική απεικόνιση των αποτελεσμάτων. Παρουσιάζονται οι διαφορές από τις αποχές γεωειδούς του παγκόσμιου γεωδυναμικού μοντέλου *EGM2008* και γίνεται η τελική γραφική απεικόνιση όλων των αποτελεσμάτων σε χάρτη. Τα τελικά αποτελέσματα αξιολογούνται και αναζητούνται οι πιθανές πηγές σφαλμάτων.

Στο πέμπτο κεφάλαιο συνοψίζονται τα συμπεράσματα από την διπλωματική εργασία και γίνονται κάποιες προτάσεις για μελλοντική επέκταση των υπολογισμών σε άλλες περιοχές και τελικά σε ολόκληρο τον ελλαδικό χώρο.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

## Θεωρητικά Στοιχεία

### 2.1. Γενικά περί βαρύτητας

Μία από τις δυνάμεις που παρατηρούνται στη φύση αποτελεί η έλξη μεταξύ των μαζών. Αυτή η έλξη ονομάζεται δύναμη της βαρύτητας και το μέτρο της μοντελοποιείται από το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα:

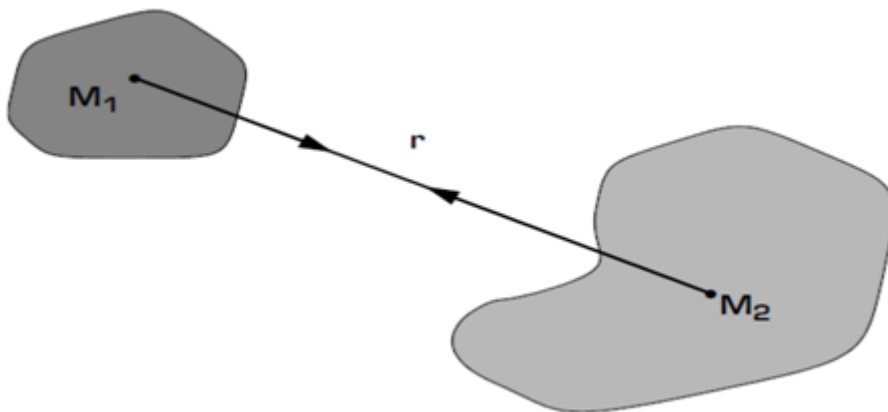
$$F = G \frac{M_1 * M_2}{r^2} \quad (2.1)$$

όπου :  $G=6.6742(\pm 0.0001) \times 10^{-11} \text{m}^3 \text{Kg}^{-1} \text{s}^{-2}$

$M_1, M_2$ : οι μάζες των 2 αλληλεπιδρώντων σωμάτων σε Kg.

$r$ : η απόσταση μεταξύ των 2 σωμάτων σε m.

Η δύναμη αυτή έχει διεύθυνση επί του ευθύγραμμου τμήματος που συνδέει τα κέντρα των 2 μαζών (όπως φαίνεται και στην εικόνα 2.1)



*Εικόνα 2.1: Αναπαράσταση Βαρυτικών Δυνάμεων*

Η επιτάχυνση  $\vec{a}$  που αποκτά, για παράδειγμα, η  $M_1$  εξαιτίας αυτής της δύναμης υπολογίζεται από το 2<sup>ο</sup> Νόμο του Νεύτωνα ως εξής:

$$\frac{F}{M_1} = a = G \frac{M_2}{r^2} \quad (2.2)$$

Επιπλέον κάθε μάζα προκύπτει από το γινόμενο του όγκου της επί τη πυκνότητά της, δηλαδή:

$$M = \rho * dV \quad (2.3)$$

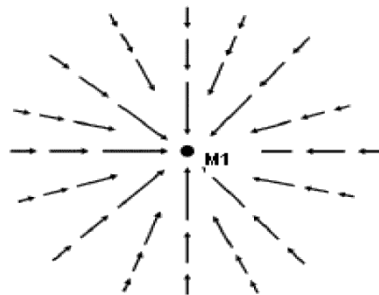
όπου  $\rho$ : η πυκνότητα σε  $\text{Kg/m}^3$ .

Μάλιστα αν η πυκνότητα αυτή δεν είναι σταθερή σε όλο τον όγκο της μάζας τότε ο υπολογισμός της επιτάχυνσης για ένα σώμα γίνεται μέσω του ολοκληρώματος του όγκου της μάζας:

$$\vec{a} = G \int \frac{d\vec{r}}{r^3} dv \quad (2.4)$$

Για το λόγο αυτό η επιτάχυνση που αποκτά κάθε σώμα λόγω της βαρυτικής δύναμης διαφέρει σε κάθε σημείο του. Αν θεωρήσουμε λοιπόν ως μάζα  $M_1$  τη γη τότε ακόμα και αν το σχήμα της ήταν πλήρως σφαιρικό θα είχαμε διαφορετική επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνειά της εξαιτίας της διαφοράς στη κατανομή των μαζών της. Κάθε δύναμη δημιουργεί ένα πεδίο γύρω της, έτσι και οι βαρυτικές δυνάμεις δημιουργούν ένα βαρυτικό πεδίο. Το βαρυτικό πεδίο της μάζας  $M_1$  είναι:

$$\vec{F} = -\frac{GM_1}{L^3} \vec{L} \quad (2.5)$$



**Εικόνα 2.2: Ακτινωτό Βαρυτικό Πεδίο**

Όπως παρατηρούμε από την εικόνα 2.2 το πεδίο δυνάμεων δεν μπορεί να προσδιορίσει επακριβώς μια δύναμη καθώς σε κάθε σημείο του έχουμε διαφορετική δύναμη, έτσι εισήχθη ο όρος δυναμικό δύναμης, το οποίο διεθνώς συμβολίζεται με  $V$  και ισχύει:

$$F = \nabla V = \text{grad } V \quad (2.6)$$

με αντικαταστάσεις στο τύπο 2.6 και πράξεις οδηγούμαστε στο τύπο του δυναμικού:

$$V = G \frac{M_2}{r} \quad (2.7)$$

## 2.2. Γήινη Έλξη-Γήινο πεδίο βαρύτητας

Οι παραπάνω τύποι βρίσκουν εφαρμογή για τον υπολογισμό της δύναμης και επιτάχυνσης της βαρύτητας στην επιφάνεια της γης αν θεωρήσουμε ως μία από τις μάζες, τη μάζα της Γής και ως απόσταση μεταξύ των σωμάτων την ακτίνα της (θεωρώντας σε πρώτη προσέγγιση τη γη σφαιρική). Δηλαδή οι τύποι 2.1 και 2.2 γίνονται:

$$B = G \frac{M_E m}{R_E^2} = mg \quad (2.8)$$

$$\frac{B}{m} = G \frac{M_E}{R_E^2} = g \quad (2.9)$$

$$\vec{B} = G \frac{M_E}{R_E^3} \vec{R}_E \quad (2.10)$$

$$V_E = G \frac{m}{R_E} \quad (2.11)$$

όπου B: η δύναμη της βαρύτητας (m το βάρος του δοκιμίου) και

g: η επιτάχυνση της βαρύτητας.

Οι τύποι αυτοί είναι ιδιαίτερα απλοποιημένοι καθώς δεν έχει συνυπολογιστεί ένα πλήθος παραγόντων που τους επηρεάζουν και θα τους αναλύσουμε παρακάτω.

Η μάζα της γης  $M_E$  δημιουργεί γύρω της ένα ακτινωτό (όπως είδαμε) βαρυτικό πεδίο B, αν θεωρήσουμε τη πυκνότητά της σταθερή και ίση με  $2.67 \text{ gr/cm}^3$  και επιπλέον σφαιρική από τον τύπο 2.10 προκύπτει ότι η επιτάχυνση της βαρύτητας πάνω στην επιφάνειά της σε πρώτη προσέγγιση έχει μέτρο  $g=9.8422477 \text{ m/sec}^2$  και κατεύθυνση προς το κέντρο μάζας της.

Εντούτοις η γη δεν είναι πλήρως σφαιρική καθώς παρουσιάζει στους πόλους επιπλάτυνση ( $\sim 0.335\%$ ) ενώ τα υπόλοιπα μεγέθη που την αφορούν παίρνουν τιμές:

$$M_E=5.98 \times 10^{24} \quad (\text{Κατά προσέγγιση η μάζα της})$$

$$R_E=6368 \text{ Km} \quad (\text{Μέση ακτίνα κατά προσέγγιση})$$

Επομένως συμπεραίνουμε ότι η επιτάχυνση της βαρύτητας που αποκτά ένα σώμα στην επιφάνεια της γης μεταβάλλεται μεταξύ των τιμών  $9.78$  (στον Ισημερινό) και  $9.83 \text{ m/s}^2$  (στους πόλους) και είναι ανεξάρτητη του βάρους του.

Η μονάδα μέτρησης της επιτάχυνσης της βαρύτητας αντί του συνηθισμένου  $\text{m/s}^2$  που χρησιμοποιείται για όλες τις άλλες επιταχύνσεις στη φύση, έχει καθιερωθεί να είναι το



gal (προς τιμήν του Γαλιλαίου που ασχολήθηκε εκτενώς με τη βαρύτητα). Δηλαδή οι μονάδες που χρησιμοποιούμε είναι:

$$1 \text{ gal} = 10^{-2} \text{ m/s}^2 \quad 1 \text{ mgal} = 10^{-3} \text{ gal} \quad 1 \mu\text{gal} = 10^{-6} \text{ gal}$$

Ειδικότερα για το δυναμικό έλξης της γης μπορούμε να πούμε επιπλέον ότι θα πρέπει να συμφωνεί με τον τύπο του *Poisson* για το εσωτερικό της σφαίρας και με το τύπο του *Laplace* για το εξωτερικό της:

$$\Delta V = \nabla^2 V = -4\pi G\rho \text{ (Poisson)} \quad (2.12)$$

$$\nabla F = \Delta V = 0 \text{ (Laplace)} \quad (2.13)$$

Η φυσική ερμηνεία του τύπου του *Poisson* είναι ότι το άθροισμα των στοιχειωδών μαζών στο εσωτερικό της σφαίρας (με τις πυκνότητές τους) δημιουργεί το γήινο δυναμικό, ενώ η ένταση της κάθε μάζας είναι ανάλογη της πυκνότητάς της. Αντίστοιχα ο τύπος του *Laplace* υποδηλώνει ότι δεν προστίθεται επιπλέον δυναμικό στο γήινο, έξω από τη σφαίρα καθώς δεν υπάρχουν μάζες ( $\rho=0$ ). Οι δύο αυτές εξισώσεις είναι οι βασικές διαφορικές εξισώσεις της φυσικής γεωδαισίας. Η επίλυση μάλιστα της εξίσωσης *Laplace* είναι μία αρμονική συνάρτηση του δυναμικού της γήινης βαρύτητας. Επιπλέον η επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνεια της γης επηρεάζεται και από τη περιστροφή της γης καθώς και από πλήθος άλλους παράγοντες που θα εξετάσουμε παρακάτω.

### 2.3. Συνοριακά Προβλήματα

Γενικά τα συνοριακά προβλήματα απαντώνται κυρίως στις επιλύσεις διαφορικών εξισώσεων και εξετάζουν τη συμπεριφορά συναρτήσεων επί του συνόρου του πεδίου ορισμού τους. Για την επίλυσή τους είναι απαραίτητη η γνώση της συμπεριφοράς της συνάρτησης στα σημεία αυτά.

Τα συνοριακά προβλήματα που αναφέρονται στη γη καλούνται γεωδαιτικά συνοριακά προβλήματα. Πιο χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η επίλυση της διαφορικής εξίσωσης του γήινου δυναμικού, με τη χρησιμοποίηση τιμών βαρύτητας στην επιφάνεια της γης.

Υπάρχουν γενικά 3 είδη γεωδαιτικών συνοριακών προβλημάτων.

Το 1<sup>ο</sup> είδος αφορά το πρόβλημα του *Dirichlet*, με το οποίο αναζητούμε συνάρτηση  $V$  που να ικανοποιεί την εξίσωση *Laplace* στο όριο της γήινης επιφάνειας. Πιο συγκεκριμένα αναζητούμε την επίλυση της εξίσωσης  $\nabla^2 V=0$ , γνωρίζοντας τις τιμές του βαρυτικού δυναμικού στην επιφάνεια της Γης.

Το 2<sup>ο</sup> είδος γεωδαιτικών συνοριακών προβλημάτων αναζητεί και πάλι την επίλυση της εξίσωσης *Laplace* στην επιφάνεια της γης, με δεδομένη τη κλίση του γήινου δυναμικού κατά μήκους της καθέτου σε κάθε σημείο της επιφάνειας αυτής. Δηλαδή αν με η συμβολίσουμε το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια της σφαίρας τότε τα δεδομένα μας για την επίλυση αυτού του είδους των προβλημάτων θα ήταν:

$$\left. \frac{\partial V(\vec{r})}{\partial \vec{n}} \right|_{\vec{r} \in S} \quad (2.14)$$

Η λύση  $V$  που θα προκύψει θα είναι αρμονική συνάρτηση όπως έχει ήδη αναφερθεί και ως εκ τούτου η ροή της κλίσης σε όλη την γήινη επιφάνεια θα πρέπει να είναι 0, δηλαδή

$$\oiint \frac{\partial V(\vec{r})}{\partial \vec{n}} dS = 0 \quad (2.15)$$

Το 2<sup>ο</sup> είδος γεωδαιτικών συνοριακών προβλημάτων ονομάζεται επίσης και γεωδαιτικό πρόβλημα συνοριακών συνθηκών του *Neumann*.

Το 3<sup>ο</sup> είδος γεωδαιτικών συνοριακών προβλημάτων είναι ένας συνδυασμός του 1<sup>ου</sup> και 2<sup>ου</sup> είδους καθώς ως δεδομένο μας δίδεται η συνοριακή συνάρτηση του *Robin*  $f(\vec{r})$ .

Η συνάρτηση αυτή παίρνει τη μορφή :

$$f(\vec{r}) = aV(\vec{r}) + b \frac{\partial V(\vec{r})}{\partial \vec{n}} \quad (2.16)$$

όπου  $\vec{r} \in S$ ,  $a$ :σημείο της σφαίρας ( $a(x,y,z)$ ) και  $b \in \mathbb{R}$ .

Το 3<sup>ο</sup> είδος γεωδαιτικών συνοριακών προβλημάτων παίρνει και την ονομασία μεικτά συνοριακά προβλήματα καθώς αποτελεί γραμμικό συνδυασμό των υπόλοιπων 2.

Επιπλέον με δεδομένο ότι ισχύει

$$\oiint \frac{\partial V(\vec{r})}{\partial \vec{n}} dS = 0 \quad (2.17)$$

στην επιφάνεια της σφαίρας, άρα θα ισχύει και  $b \oiint \frac{\partial V(\vec{r})}{\partial \vec{n}} dS = 0$ , συνεπώς θα ισχύει και :

$$\oiint f(\vec{r}) dS = a \oiint V(\vec{r}) dS = 0 \quad (2.18)$$

Η επίλυση των συνοριακών προβλημάτων γίνεται είτε με τις συναρτήσεις του *Green* είτε με συναρτήσεις *Fourier*. Τα γεωδαιτικά συνοριακά προβλήματα επιλύονται συνήθως με συναρτήσεις *Fourier* καθώς η επίλυση απλοποιείται σημαντικά.

Πιο συγκεκριμένα αναζητούμε συνάρτηση  $V(r, \varphi, \lambda)$  του βαρυτικού δυναμικού της γης τέτοια ώστε:

$$V(r, \varphi, \lambda) = f_1(r) f_2(\varphi) f_3(\lambda) \quad (2.19)$$

όπου  $r, \theta, \lambda$  οι σφαιρικές συντεταγμένες του σημείου της επιφάνειας.

Οι λύσεις της παραπάνω εξίσωσης ονομάζονται σφαιρικές αρμονικές συναρτήσεις και είναι ιδιαίτερα σημαντικές για τη φυσική γεωδαισία.

Η επίλυση με τις συναρτήσεις *Fourier* σε σφαιρικές συντεταγμένες περιλαμβάνει :

1. Τη μετατροπή της εξίσωσης *Laplace* από καρτεσιανές σε σφαιρικές συντεταγμένες:

$$\Delta V = \nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2} = 0 \quad (2.20)$$

2. Το διαχωρισμό της εξίσωσης *Laplace* σε γινόμενο 3 συναρτήσεων όπου κάθε μία θα έχει μία ανεξάρτητη μεταβλητή  $r, \theta$  και  $\lambda$ .

3. Την επίλυση των 3 διαφορικών εξισώσεων

4. Το γραμμικό συνδυασμό όλων των επιμέρους λύσεων σε μία μόνο λύση.

5. Εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών προσδιορισμός των ανεξάρτητων σταθερών της τελικής λύσης.

Μετά από την επίλυση η εξίσωση του βαρυτικού δυναμικού της γης παίρνει τη μορφή:

- στο εσωτερικό της γης

$$\begin{aligned}
 V_I(r, \theta, \lambda) &= \sum_{n=0}^{\infty} r^n \cdot \sum_{m=0}^n [(A_{nm} \cdot \cos m \cdot \lambda + B_{nm} \cdot \sin m \cdot \lambda) \cdot P_{nm}(\cos \theta)] \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} r^n \cdot \sum_{m=0}^n [A_{nm} \cdot Y_{nm}^c(\theta, \lambda) + B_{nm} \cdot Y_{nm}^s(\theta, \lambda)]
 \end{aligned}
 \tag{2.21}$$

- στο εξωτερικό της γης

$$\begin{aligned}
 V_E(r, \theta, \lambda) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \cdot \sum_{m=0}^n [(A_{nm} \cdot \cos m \cdot \lambda + B_{nm} \cdot \sin m \cdot \lambda) \cdot P_{nm}(\cos \theta)] \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \cdot \sum_{m=0}^n [A_{nm} \cdot Y_{nm}^c(\theta, \lambda) + B_{nm} \cdot Y_{nm}^s(\theta, \lambda)]
 \end{aligned}$$

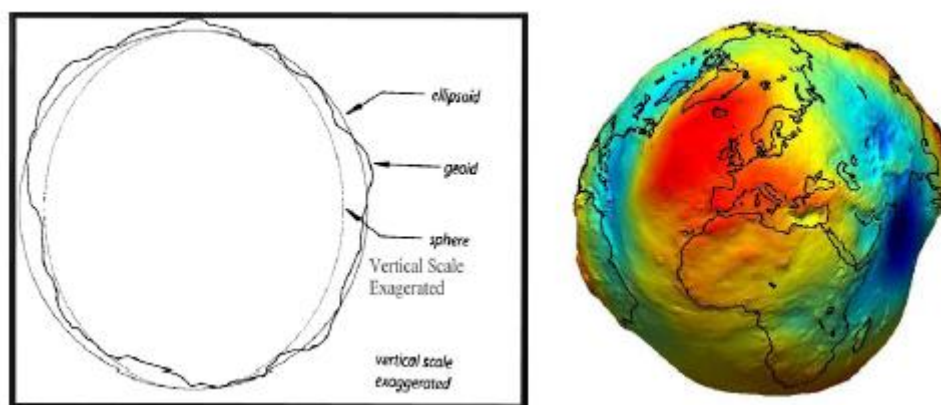
από την οποία, χρησιμοποιώντας τα κανονικοποιημένα πολυώνυμα *Legendre* καταλήγουμε τελικά στο τύπο:

$$V(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{r} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} [(C_{nm} \cdot \cos m \lambda + S_{nm} \cdot \sin m \lambda) \cdot P_{nm}(\cos \theta)]
 \tag{2.22}$$

από τον οποίο χρησιμοποιώντας κάθε μορφής διαθέσιμο δεδομένο μπορούμε να υπολογίσουμε τους αντίστοιχους συντελεστές. Είναι γεγονός ότι πρέπει να χρησιμοποιηθεί μεγάλο πλήθος τέτοιων γεωφυσικών δεδομένων και μέχρι σήμερα έχει επιτευχθεί ο προσδιορισμός του αναπτύγματος της συνάρτησης μέχρι βαθμού 2190 και τάξης 2160 (*EGM2008*), όπως θα δούμε παρακάτω. Η μελέτη της διαφοροποίησης της επιτάχυνσης της βαρύτητας στο φλοιό της γης βρίσκει εφαρμογές σε διάφορα επιστημονικά πεδία (γεωλογία, γεωδαισία, εξορύξεις, σεισμολογία κλπ.). Το θέμα της παρούσας διπλωματικής εργασίας αφορά τη γεωδαισία και η κύρια εφαρμογή της γνώσης του βαρυτικού πεδίου της γης αποτελεί ο προσδιορισμός του γεωειδούς.

## 2.4. Γεωειδές

Γεωειδές καλείται η επιφάνεια που αναπαριστά τη μέση στάθμη της θάλασσας γύρω από τη γη και αποτελεί μία ισοδυναμική επιφάνεια του γήινου βαρυτικού πεδίου όπου σε κάθε σημείο της η βαρυτική δύναμη έχει κατεύθυνση προς το κέντρο της γης. Μάλιστα έχει τεκμηριωθεί ότι το γεωειδές δεν είναι σφαιροειδής επιφάνεια καθώς περιλαμβάνει «εξάρσεις» γύρω από του μεγάλους ορεινούς όγκους και «βυθίσεις» γύρω από τους ωκεανούς. Βεβαίως παρουσιάζει και πολλές τοπικές ανωμαλίες και ως εκ τούτου είναι δύσκολο να περιγραφεί από μία μαθηματική επιφάνεια. Ο τυπικός ορισμός του γεωειδούς παρατίθεται παρακάτω:



**Εικόνα 2.3: Σχηματική και γραφική απεικόνιση Γεωειδούς**

Η ισοδυναμική επιφάνεια έλξης και περιστροφής της Γης, που πλησιάζει περισσότερο την Μ.Σ.Θ. με ακρίβεια  $\pm 1\text{m}$  ονομάζεται Γεωειδές. Η Μ.Σ.Θ. θεωρείται ότι έχει διορθωθεί από τις επιδράσεις των μεταβολών της πυκνότητας του θαλάσσιου ύδατος, των κυμάτων, των παλιρροιών, των ρευμάτων και των ατμοσφαιρικών συνθηκών. Έτσι η επιφάνεια αυτή ως ισοδυναμική είναι εξ ορισμού παντού κάθετη στην διεύθυνση της κατακόρυφου (διεύθυνση του διανύσματος της βαρύτητας).

Το Γεωειδές είναι μια κλειστή και συνεχής επιφάνεια που εκτείνεται μέσα στο στερεό σώμα της Γης. Πρέπει να σημειωθεί ότι το Γεωειδές είναι μια ισοδυναμική επιφάνεια που έχει πάντα τα κοίλα προς τα μέσα. Η καμπυλότητά του παρουσιάζει ασυνέχειες σε σημεία με απότομες μεταβολές της πυκνότητας, συνεπώς δεν είναι μια αναλυτική επιφάνεια, δηλαδή δεν περιγράφεται με απλές μαθηματικές σχέσεις. Γι' αυτό δεν είναι κατάλληλη επιφάνεια αναφοράς για προσδιορισμό οριζοντιογραφικών θέσεων σημείων της Φ.Γ.Ε.. Αντίθετα, είναι πολύ βολική επιφάνεια αναφοράς για υψομετρικό προσδιορισμό θέσης, διότι δεν απαιτούνται πολύπλοκες μαθηματικές σχέσεις.

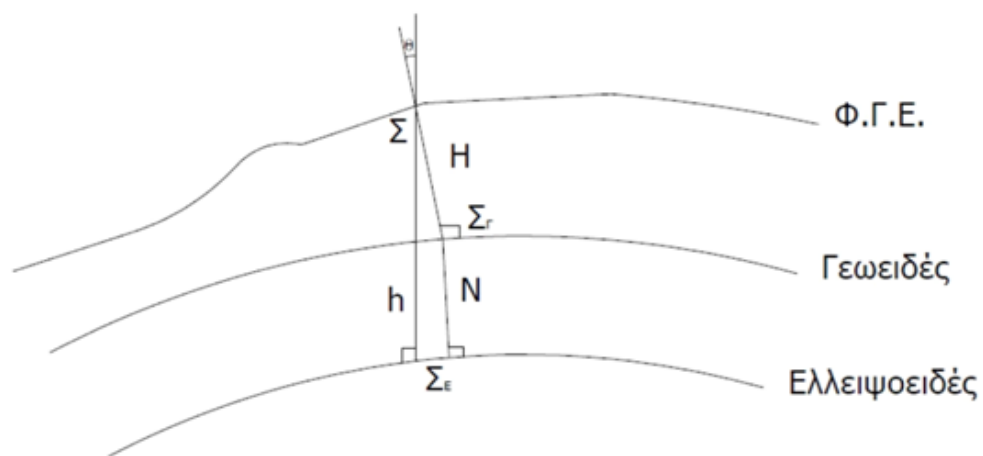
Ο υπολογισμός του γεωειδούς αποτελεί μία σύνθετη εργασία η οποία απασχολεί τα τελευταία χρόνια την επιστημονική κοινότητα. Η χρησιμότητά ενός ακριβούς γεωειδούς έγκειται στο γεγονός ότι αυτό αποτελεί μία αξιόπιστη υλοποιήσιμη επιφάνεια αναφοράς των υψομέτρων. Όμως σε κάθε χώρα έχει υιοθετηθεί ένα διαφορετικό υψομετρικό σύστημα το οποίο είναι άμεσα συσχετισμένο με τοπικούς παλιρροιογράφους. Ως εκ τούτου έχει ιδιαίτερη σημασία ο υπολογισμός τοπικού γεωειδούς για κάθε ξεχωριστό υψομετρικό σύστημα. (Για παράδειγμα ο παλιρροιογράφος του Πειραιά που προσδιορίζει τη μέση στάθμη της θάλασσας στη χώρα μας βρίσκεται περίπου 37m πάνω από το ελλειψοειδές αναφοράς ενώ ο αντίστοιχος της Βαλένθια περίπου 25m. ) .

## 2.5. Υψόμετρα

Όπως αναφέρθηκε κάθε χώρα υλοποιεί δικό της υψομετρικό σύστημα το οποίο αναφέρεται σε κάποιον (ή κάποιους) παλιρροιογράφους. Τα υλοποιούμενα υψόμετρα σε κάθε τέτοιο σύστημα μπορεί να είναι διαφορετικών ειδών.

### 2.5.1. Ορθομετρικά Υψόμετρα

Είναι τα υψόμετρα τα οποία χρησιμοποιούνται και στη χώρα μας και παίρνουν τη τιμή 0 στο παλιρροιογράφο του Πειραιά και κατά προσέγγιση στη μέση στάθμη της θάλασσας στον Ελλαδικό χώρο. Η γραμμική απόσταση που μετρείται κατά μήκος της κατακορύφου από ένα σημείο  $\Sigma$  της Φυσικής Γήινης Επιφάνειας (Φ.Γ.Ε) έως το Γεωειδές σημείο  $\Sigma_E$ , ονομάζεται ορθομετρικό υψόμετρο  $H$  του σημείου  $\Sigma_E$ .



Εικόνα 2.4: Απεικόνιση των ορθομετρικών υψομέτρων

Κάθε σημείο  $\Sigma$  της Φ.Γ.Ε. αντιστοιχεί σε ένα μόνο σημείο στο ελλειψοειδές που υλοποιείται με το ίχνος  $\Sigma_E$  της καθέτου από το σημείο πάνω σ' αυτό. Συνεπώς, τα δύο σημεία  $\Sigma$  και  $\Sigma_E$  έχουν τις ίδιες γεωδαιτικές συντεταγμένες ( $\varphi, \lambda$ ) ενώ το μήκος της καθέτου  $\Sigma\Sigma_E$  ορίζεται ως το γεωμετρικό υψόμετρο. Όπως είναι φυσικό η κάθετη στο ελλειψοειδές από το σημείο  $\Sigma$  δεν ταυτίζεται με την κατακόρυφη αλλά διαφέρουν κατά μια γωνία  $\theta$  η οποία καλείται απόκλιση κατακορύφου.

Η διακύμανση του γεωειδούς  $N$  είναι στην ουσία η ποσότητα που υπολογίζουμε όταν προσδιορίζουμε το γεωειδές. Η ποσότητα αυτή στην ουσία αποτελεί τη κάθετη απόσταση από το ελλειψοειδές αναφοράς προς το γεωειδές. Είναι προφανές ότι η σχέση που συνδέει τα γεωμετρικά με τα ορθομετρικά υψόμετρα είναι:

$$H=h-N \quad (2.23)$$

Το ορθομετρικό υψόμετρο προσδιορίζεται με διάφορες μεθόδους σχετικών μετρήσεων από σημείο γνωστού ορθομετρικού υψομέτρου (ή παλιρροιογράφο). Αντίθετα το γεωμετρικό υψόμετρο προσδιορίζεται απευθείας με δορυφορικές μεθόδους (*GPS*). Οι περισσότερες χώρες του κόσμου χρησιμοποιούν ορθομετρικά υψόμετρα στα εθνικά συστήματα υψών τους.

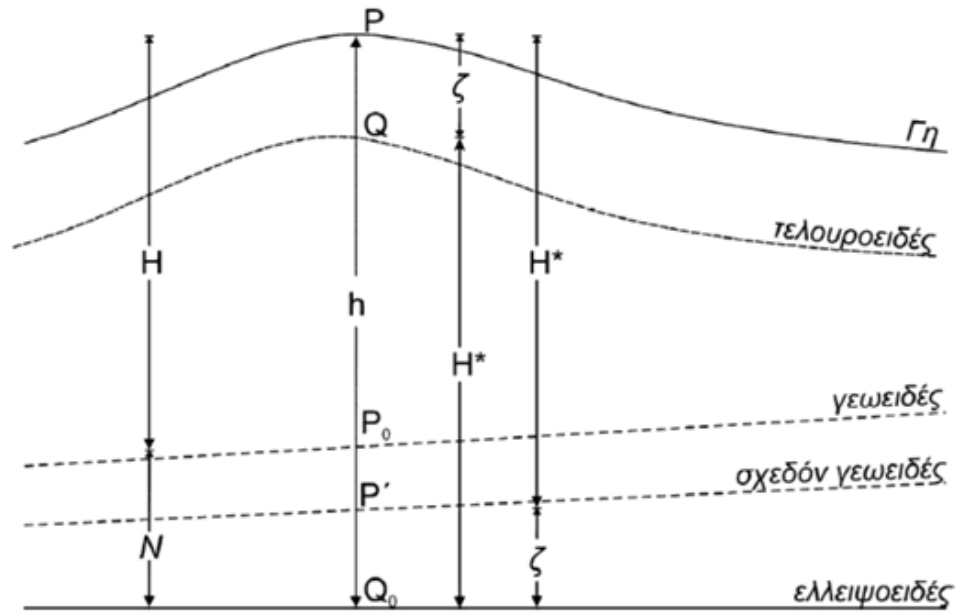
### 2.5.2. Κανονικά Υψόμετρα

Τα κανονικά υψόμετρα χρησιμοποιούν ως επιφάνεια αναφοράς μια επιφάνεια η οποία ονομάζεται σχεδόν γεωειδές (η οποία προέρχεται από μία άλλη επιφάνεια, το τελλουροειδές) και η οποία αποτελεί το γεωμετρικό τόπο των σημείων στα οποία ισχύει η σχέση:

$$U_Q=W_P \quad (2.24)$$

όπου η ποσότητα  $U_Q$  αποτελεί τη τιμή του κανονικού δυναμικού της βαρύτητας (που έχει προκύψει από το χρησιμοποιούμενο ελλειψοειδές αναφοράς) επί της ελλειψοειδούς καθέτου από τη προβολή του σημείου  $P$  στο ελλειψοειδές. Η ποσότητα  $W_P$  αντιπροσωπεύει τη μετρούμενη τιμή του δυναμικού της βαρύτητας στο σημείο  $P$  το οποίο βρίσκεται στη ΦΓΕ. Η απόσταση  $PQ = \zeta$  του τελλουροειδούς από τη ΦΓΕ κατά μήκος της καθέτου στο ελλειψοειδές ονομάζεται ανωμαλία ύψους (*height anomaly*). Σε αυτή την απόσταση  $\zeta$  πάνω από το ελλειψοειδές αναφοράς βρίσκεται το σχεδόν γεωειδές. Επομένως ως κανονικό υψόμετρο ορίζεται η απόσταση της ΦΓΕ από το σχεδόν γεωειδές ή αντίστοιχα η απόσταση του τελλουροειδούς από το ελλειψοειδές αναφοράς.

$$QQ_0=PP'=H^* \quad (2.25)$$



Εικόνα 2.5: Απεικόνιση των κανονικών υψομέτρων

Η μέτρηση των κανονικών υψομέτρων γίνεται μέσω του προσδιορισμού των γεωδυναμικών αριθμών  $C$ . Ο γεωδυναμικός αριθμός σε ένα σημείο προσδιορίζεται με γεωμετρική χωροστάθμηση συνδυασμένη με μετρήσεις βαρύτητας και εκφράζει τη διαφορά δυναμικού της βαρύτητας από τη μέση στάθμη της θάλασσας προς το σημείο που θέλουμε να τον υπολογίσουμε. Στη πράξη αποτελεί το άθροισμα των υψομετρικών διαφορών των ενδιάμεσων σημείων επί τη τιμή της βαρύτητας στο μέσον της απόστασης των ενδιάμεσων σημείων. Τα παραπάνω εκφράζονται μαθηματικά με τη σχέση:

$$C_p = W_{0 \rightarrow P} = \int_0^P \bar{g} dn \approx \sum_i^n \bar{g}_i \Delta n_i \quad (2.26)$$

Από το γεωδυναμικό αριθμό οδηγούμαστε στα κανονικά υψόμετρα μέσω της σχέσης

$$H_p^* = \frac{C_p}{\gamma_{pp'}} = \frac{C_p}{\gamma_{0_{q_0}}} \left[ 1 + (1 + f + m - 2f \sin^2 \varphi) \frac{C_p}{\alpha \gamma_{0_{q_0}}} + \left( \frac{C_p}{\alpha \gamma_{0_{q_0}}} \right)^2 \right] \quad (2.27)$$

όπου  $\alpha, f, m$  οι παράμετροι του χρησιμοποιούμενου ελλειψοειδούς αναφοράς. Ο προσδιορισμός των κανονικών υψομέτρων παρέχει το πλεονέκτημα ότι μπορεί να γίνει χωρίς να χρειάζονται αναγωγές και διορθώσεις και γι αυτό το λόγο έχει καθιερωθεί σε



αρκετές χώρες κυρίως της Βόρειας Ευρώπης (Γερμανία, κάτω χώρες κλπ). Από τους παραπάνω ορισμούς είναι σαφές ότι η σχέση που συνδέει τα κανονικά με τα γεωμετρικά υψόμετρα είναι:

$$h = \zeta + H^* \quad (2.28)$$

και επομένως με τη βοήθεια της σχέσης 2.22 προκύπτει :

$$\zeta - N = H^* - H \quad (2.29)$$

επιπλέον στην επιφάνεια της θάλασσας όπου  $C=0$  το σχεδόν γεωειδές συμπίπτει με το γεωειδές δηλαδή  $H=H^*=0$ . Τέλος έχει αποδειχθεί ότι για τα ορθομετρικά υψόμετρα κατά αντιστοιχία με τα κανονικά ισχύει :

$$H = \frac{C}{g} \quad (2.30)$$

Το μειονέκτημα των κανονικών υψομέτρων είναι ότι αναφέρονται σε μία μη υλοποιήσιμη επιφάνεια (σχεδόν γεωειδές).

### 2.5.3. Δυναμικά Υψόμετρα

Είναι η τελευταία κατηγορία υψομέτρων τα οποία είναι και τα λιγότερο χρησιμοποιούμενα. Δε χρησιμοποιούν κάποια συγκεκριμένη επιφάνεια αναφοράς αλλά ορίζονται ως το πηλίκο του γεωδυναμικού αριθμού στο σημείο προς μία σταθερή τιμή κανονικής βαρύτητας (συνήθως  $\gamma_{45}^0$ ). Δηλαδή ισχύει :

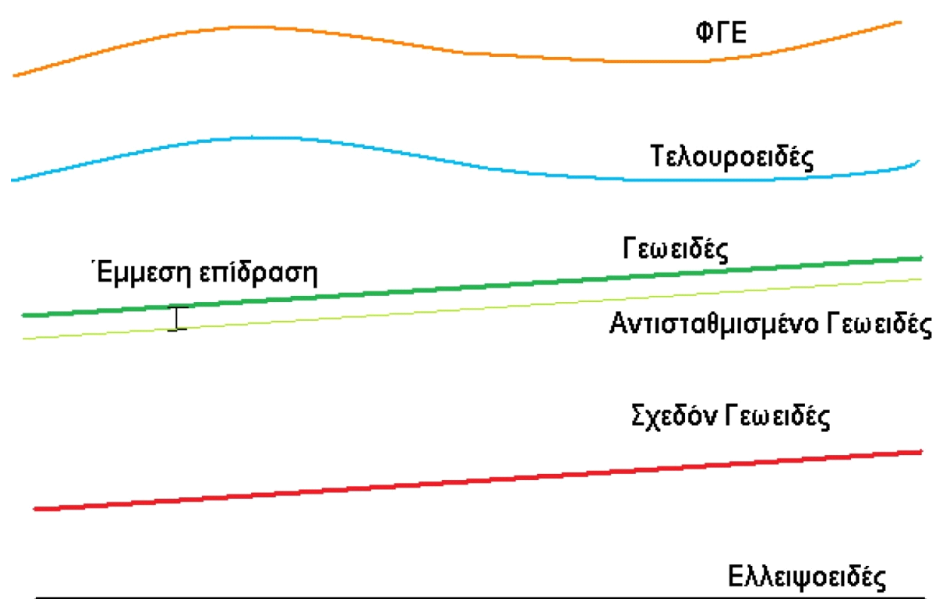
$$H^D = \frac{C}{\gamma_{45}^0} \quad (2.31)$$

Τα σημεία με το ίδιο δυναμικό υψόμετρο ανήκουν και πάλι στην ίδια ισοδυναμική επιφάνεια και βρίσκουν εφαρμογή κυρίως στην ωκεανογραφία όπου δεν ενδιαφέρει συνήθως η μεγάλη ακρίβεια.

## 2.6. Γεωειδές-Σχεδόν Γεωειδές-Αντισταθμισμένο Γεωειδές

Πριν προχωρήσουμε παρακάτω κρίνεται σκόπιμο να κάνουμε μία αναφορά στις επιφάνειες που ψάχνουμε να υπολογίσουμε ή μας προκύπτουν κατά τους υπολογισμούς. Αναφέραμε ήδη τη κατεξοχήν επιφάνεια που μας ενδιαφέρει, το γεωειδές (*geoid*). Επιπλέον αναφέρθηκε η επιφάνεια που ονομάζεται τελουροειδές (*telluroid*), η οποία αποτελεί την επιφάνεια αναφοράς των κανονικών υψομέτρων. Από το τελουροειδές επίσης προκύπτει και το σχεδόν γεωειδές (*quasi geoid*). Μια άλλη επιφάνεια η οποία συναντάμε κατά τους υπολογισμούς του γεωειδούς είναι το αντισταθμισμένο γεωειδές (*compensated*

*geoid* ή απλά *co-geoid*). Η επιφάνεια αυτή προκύπτει κατά τους υπολογισμούς που κάνουμε λόγω των αναγωγών των μετρήσεων από την φυσική γήινη επιφάνεια στο γεωειδές. (Τις αναγωγές αυτές θα τις δούμε αναλυτικά σε επόμενο κεφάλαιο). Με τις αναγωγές αυτές αλλοιώνουμε το βαρυντικό πεδίο στη περιοχή (λόγω της μεταφοράς των μαζών) με αποτέλεσμα οι υπολογισμοί να αφορούν το αντισταθμισμένο γεωειδές και όχι το πραγματικό. Βεβαίως η διαφορά μεταξύ τους είναι πολύ μικρή αλλά πρέπει να υπολογιστεί. Η διαφορά αυτή ονομάζεται έμμεση επίδραση (*indirect effect*) και για έναν υπολογισμό ακριβείας θα πρέπει να τη λάβουμε υπόψη. Επιδιώκουμε γενικά οι τοπογραφικές αναγωγές που θα επιλέξουμε να προκαλούν όσο γίνεται μικρότερη έμμεση επίδραση.



Εικόνα 2.6: Επιφάνειες κατά τον υπολογισμό του Γεωειδούς

## 2.7. Βαρυτομετρικές Μετρήσεις

### 2.7.1. Γενικά περί Βαρυτομετρικών Δεδομένων

Από τα μέχρι τώρα καταγεγραμμένα καθίσταται σαφής η σημαντικότητα της ύπαρξης βαρυτομετρικών δεδομένων. Εντούτοις η συλλογή τους είναι μια ιδιαίτερα δύσκολη διαδικασία καθώς επηρεάζεται από πολλούς παράγοντες και επιπλέον ως μεγέθη είναι ιδιαίτερα μικρά. Αυτό έχει ως συνέπεια να χρησιμοποιούνται ιδιαίτερα ευαίσθητα όργανα και ως εκ τούτου με ιδιαίτερα υψηλό κόστος. Η συλλογή των βαρυτομετρικών δεδομένων μπορεί να γίνει με διάφορους τρόπους είτε στη ξηρά (μεγαλύτερη ακρίβεια),

είτε στη θάλασσα (μικρότερη ακρίβεια), είτε από αέρος (ακόμα πιο μικρή ακρίβεια), είτε, τα τελευταία χρόνια και με διάφορες διαστημικές τεχνικές και με δορυφόρους που αποστέλλονται ειδικά για αυτό το σκοπό( π.χ. *GOCE* και *CHAMP*). Στη παρούσα διπλωματική εργασία θα αναφερθούμε μόνο σε επίγειες μετρήσεις βαρύτητας καθώς μόνο τέτοια δεδομένα θα χρησιμοποιήσουμε.

### 2.7.2. Μέθοδοι Μέτρησης της Βαρύτητας

Η βαρύτητα γενικά μπορεί να μετρηθεί με διάφορους τρόπους:

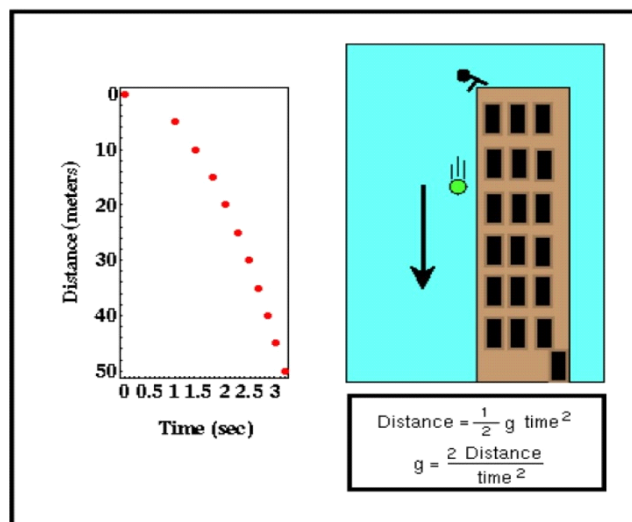
- πτώση σώματος στο κενό και απευθείας μέτρηση της επιτάχυνσής του (η οποία οφείλεται αποκλειστικά στη βαρύτητα). (εικ 2.7)

- Από τη περίοδο κίνησης ιδανικού εκκρεμούς (εικ 2.8) σύμφωνα με τον τύπο :

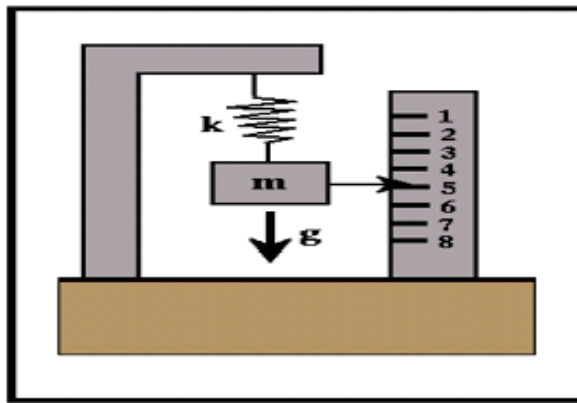
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.32)$$

- Από τη κίνηση ελατηρίου στο οποίο προσαρμόζεται μία μάζα και όλο το σύστημα βρίσκεται σε κενό αέρα με συγκεκριμένη θερμοκρασία (εικ 2.9). Ο υπολογισμός γίνεται με τη βοήθεια του τύπου:

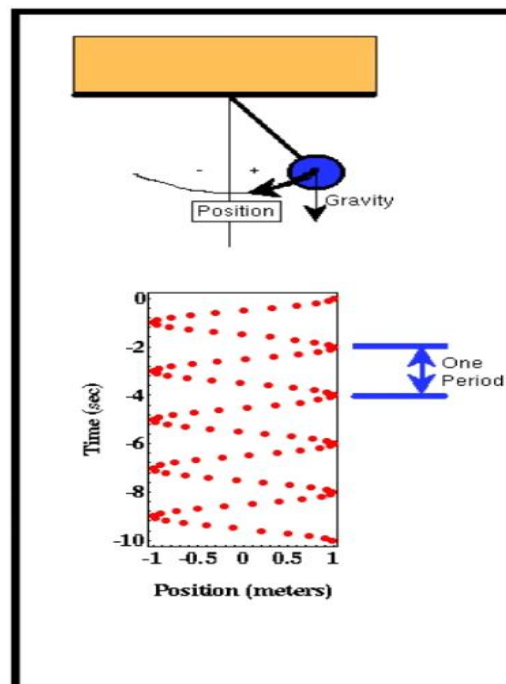
$$x = \frac{mg}{k} \quad (2.33)$$



Εικόνα 2.7: Μέτρηση βαρύτητας με ελεύθερη πτώση



*Εικόνα 2.8: Μέτρηση Βαρύτητας με Ελατήριο*



*Εικόνα 2.9: Μέτρηση Βαρύτητας με Εκκρεμές*

Η ελεύθερη πτώση βρίσκει εφαρμογή στα απόλυτα βαρυτόμετρα ενώ το ελατήριο στα σχετικά βαρυτόμετρα. Προφανώς για να μπορέσουμε να παρατηρήσουμε τις διαφορές βαρύτητας οι οποίες είναι πολύ μικρές σε κάθε τόπο, θα πρέπει τα όργανα που θα χρησιμοποιηθούν να παρέχουν σταθερές συνθήκες θερμοκρασίας ελατηρίου, κενό αέρος και ιδιαίτερα ευαίσθητους αισθητήρες. Στο εμπόριο δεν υπάρχουν πολλές εταιρείες που κατασκευάζουν τέτοια όργανα.

### **2.7.3. Είδη Βαρυτόμετρων**

Τα βαρυτόμετρα χωρίζονται γενικά σε 2 κατηγορίες τα απόλυτα και τα σχετικά. Τα απόλυτα μπορούν να μετρήσουν απευθείας την απόλυτη τιμή της βαρύτητας σε έναν σταθμό, ενώ τα σχετικά μετρούν μόνο βαρυτικές μεταβολές μεταξύ 2 σταθμών. Στην Ελλάδα δεν υπάρχει κανένα απόλυτο βαρυτόμετρο αν και κατά καιρούς έχουν γίνει

μετρήσεις σε επιλεγμένους σταθμούς από Αμερικανούς και Ιταλούς. Τα όργανα που χρησιμοποιούνται στη χώρα μας είναι τα *LaCoste & Romberg* τύπου *G* και *D* και λίαν προσφάτως το *Scintrex CG5* τα στοιχεία των οποίων φαίνονται στο πίνακα 2.1. Η αρχή λειτουργίας τους βασίζεται σε ένα ιδιαίτερα ευαίσθητο ελατήριο το οποίο βρίσκεται σε κενό αέρος με σταθερή θερμοκρασία και υπολογίζει τις διαφορές τις βαρύτητας μεταξύ 2 ή περισσότερων σταθμών.

| <b>Model</b>         | <b>Resolution<br/>mGal</b> | <b>Range<br/>[without reset] mGal</b> | <b>Accuracy<br/>mGal</b> |
|----------------------|----------------------------|---------------------------------------|--------------------------|
| <b>L&amp;R - G</b>   | 0.01                       | 7,000                                 | 0.015                    |
| <b>L&amp;R - D</b>   | 0.001                      | 200                                   | 0.005                    |
| <b>Scintrex CG-3</b> | 0.005                      | 7,000                                 | 0,010                    |
| <b>Scintrex CG-5</b> | 0.001                      | 7.000                                 | 0,005                    |

*Πίνακας 2. 1: Τεχνικά στοιχεία Βαρτομέτρων*



*Εικόνα 2.10: Βαρτόμετρο LaCoste και Romberg τύπου G*



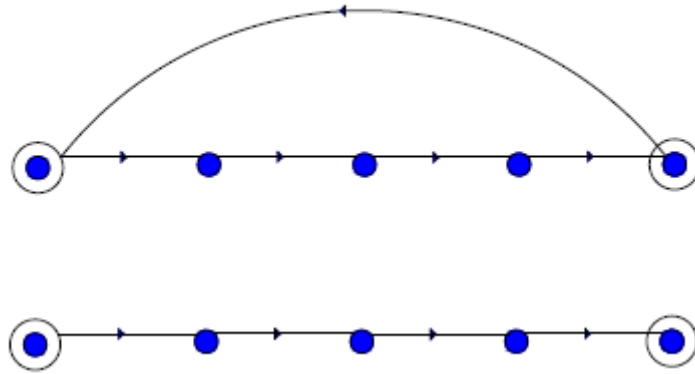
*Εικόνα 2.11: Βαρτόμετρο Scintrex CG5*

#### **2.7.4. Υλοποίηση μετρήσεων**

Υπάρχουν διάφοροι τρόποι υλοποίησης των μετρήσεων οι οποίοι είναι δυνατόν να εφαρμοστούν (κλειστό loop μετάβαση -επιστροφή, ανοιχτό loop κλπ) οι οποίοι αναλύονται εκτενώς στη βιβλιογραφία και δε θα ήταν σκόπιμο να επαναληφθούν εδώ. Αντίθετα

κρίνεται σκόπιμο να περιγραφεί επακριβώς η μέθοδος μέτρησης των σημείων που χρησιμοποιήθηκαν παρακάτω σε αυτή τη διπλωματική εργασία.

Ειδικότερα η ΓΥΣ για τη συλλογή των δεδομένων χρησιμοποίησε δύο μεθόδους , το ανοιχτό loop εξαρτώμενο από 2 γνωστά σημεία και το κλειστό loop εξαρτώμενο από δύο γνωστά σημεία, οι οποίες παρουσιάζονται στο παρακάτω γράφημα:



*Εικόνα 2.12: Οι μέθοδοι μετρήσεων από τη ΓΥΣ για τα δεδομένα βαρύτητας*

Με τον τρόπο αυτό η ΓΥΣ έκανε μετρήσεις από το 2005-2008 οι οποίες εξαρτήθηκαν από το εθνικό βαρυτομετρικό δίκτυο. Μάλιστα οι περισσότερες από αυτές τις μετρήσεις έγιναν ταυτόχρονα με μετρήσεις GPS επί των σταθμών . Οι σταθμοί που επιλέχθηκαν βρίσκονταν κατανεμημένοι σε όλο το εύρος κάθε φύλλου χάρτη(ΦΧ) 1:50.000 της ΓΥΣ και με πυκνότητα περίπου 7-8 σταθμοί /ΦΧ.

Αναλυτικά η διαδικασία των μετρήσεων έχει ως εξής:

- Αρχικά μετράται ένας βασικός σταθμός (σταθμός του Εθνικού Βαρυτομετρικού Δικτύου)

- Στη συνέχεια μετρώνται τα ενδιάμεσα σημεία (κυρίως τριγωνομετρικά της ΓΥΣ), με 2 μετρήσεις ανά σταθμό σε διάστημα το πολύ 3 λεπτών μεταξύ τους και μέγιστη επιτρεπόμενη διαφορά μεταξύ των δύο μετρήσεων το πολύ 10 mgal.

- Μέτρηση ενός διαφορετικού βασικού σταθμού και η επιστροφή στον αρχικό σταθμό (η και όχι).

- Στο τέλος της κάθε ημέρας ο κάθε παρατηρητής καθαρογράφει τις μετρήσεις οι οποίες περιλαμβάνουν το όνομα του σταθμού την ακριβή ώρα (σε UTC) και την ένδειξη του οργάνου.

Η καταγραφή των στοιχείων και η επανάληψη της μέτρησης δεν θα ήταν απαραίτητη αν χρησιμοποιούνταν το CG5 της SCINTREX, καθώς με αυτό γίνεται αυτόματα η καταγραφή των στοιχείων και επιπλέον δεν υπάρχει λάθος παρατηρητή.

### 2.7.5. Επεξεργασία μετρήσεων

Στη συνέχεια το κάθε Loop ξεχωριστά επιλύεται στο γραφείο και προκύπτουν οι τιμές απόλυτης βαρύτητας για το κάθε σταθμό. Η επεξεργασία των μετρήσεων περιλαμβάνει τα κάτωθι:

- Αναγωγή των ενδείξεων του οργάνου με το συντελεστή του εκάστοτε παρατηρητή (ο οποίος προσδιορίστηκε από την ελεγκτική βάση της Πάρνηθας). Ο συντελεστής αυτός είναι συνήθως από 0.99997 έως 1.00003 .(Δεν απαιτείται στο CG5 της SCINTREX).

- Αναγωγή των ενδείξεων που προκύπτουν με το συντελεστή ανάγνωσης του οργάνου. Ο συντελεστής ανάγνωσης για το κάθε όργανο δίδεται από τη κατασκευαστική εταιρεία και είναι διαφορετικός για κάθε όργανο. (Γίνεται αυτόματα στο CG5 της SCINTREX).

- Αναγωγή επίδρασης της παλίρροιας για το κάθε σταθμό ξεχωριστά η οποία υπολογίζεται από το τύπο του LONGMAN (1959) και εξαρτάται από τη θέση του σταθμού και την ώρα μέτρησης.(Υπάρχει η δυνατότητα να υπολογιστεί αυτόματα στο CG5 της SCINTREX). Υπάρχουν και άλλα πιο σύγχρονα μοντέλα υπολογισμού των παλιρροιών τα οποία όμως δεν μεταβάλλουν δραματικά τα δεδομένα.

- Στη συνέχεια υπολογίζεται το εναπομένον *drift* των μετρήσεων το οποίο υπολογίζεται θεωρώντας τους 2 γνωστούς σταθμούς σταθερούς (με σταθερή τιμή βαρύτητας) και για έλεγχο υπολογίζεται και η μέτρηση στον αρχικό σταθμό (αν πρόκειται για κλειστό loop). Για παράδειγμα αν  $g_1$  και  $g_2$  είναι οι τιμές απόλυτης βαρύτητας των δύο σταθερών σταθμών τότε  $\Delta g = g_2 - g_1$ . Αφού έχουμε υποβάλλει τις αρχικές μας ενδείξεις σε όλες τις παραπάνω μεταβολές τότε η διαφορά των 2 διορθωμένων ενδείξεων στους δύο βασικούς σταθμούς έστω  $\Delta a = a_2 - a_1$  συγκρίνεται με τη διαφορά των απολύτων τιμών  $\Delta g$ . Αν η διαφορά τους είναι μεγαλύτερη από μία προκαθορισμένη τιμή, τότε θα πρέπει να επαναλάβουμε τις μετρήσεις σε διαφορετική περίπτωση «μοιράζουμε» το *drift* γραμμικά σε όλους τους σταθμούς που μετρήθηκαν. Για να γίνει αυτό υπολογίζουμε το χρόνο (σε λεπτά) που μεσολάβησε μεταξύ των μετρήσεων στους βασικούς σταθμούς, έστω  $\Delta t = t_1 - t_2$ . Στη συνέχεια θεωρούμε ότι το *drift* μεταβάλλεται γραμμικά οπότε υπολογίζουμε τη κλίση του με τη διαίρεση  $\Delta a / \Delta t$ . Έτσι έχουμε υπολογίσει τη μεταβολή του *drift* ανά λεπτό μετρήσεων οπότε πολλαπλασιάζοντας τα λεπτά τα οποία παρήλθαν από την αρχή των μετρήσεων μέχρι τη μέτρηση του κάθε σταθμού υπολογίζουμε το *drift* που είναι αναγκαίο να προσθέσουμε (ή αφαιρέσουμε ) από τις μετρήσεις του κάθε σταθμού.

- Τέλος από τις τελικές σχετικές διαφορές υπολογίζουμε την τιμή της απόλυτης βαρύτητας για το κάθε σταθμό.

Πέρα από τη παραπάνω διαδικασία θα μπορούσαμε να διορθώσουμε τις αρχικές μας μετρήσεις και λόγω ατμοσφαιρικής πίεσης. Η διόρθωση αυτή έχει υπολογιστεί από τον *Merriam* (1992) προσεγγιστικά και είναι:

$$\Delta g_p = -0.36 \mu\text{Gal}/\text{millibar} \quad (2.34)$$

Δηλαδή θα πρέπει να έχει μετρηθεί η ατμοσφαιρική πίεση σε κάθε σταθμό. (Για παράδειγμα αν έχουμε σχετική διαφορά σε δύο σταθμούς ατμοσφαιρικής πίεσης 10 KPa τότε θα πρέπει να αφαιρέσουμε 36 $\mu$ Gal, από τη σχετική διαφορά βαρύτητας που έχουν μεταξύ τους). Οι δεδομένες μετρήσεις δεν είχαν στοιχεία ατμοσφαιρικής πίεσης και έτσι δε χρησιμοποιήθηκε η συγκεκριμένη διόρθωση. Η εξαγωγή ατμοσφαιρικών πιέσεων λόγω υψομέτρου εκ των υστέρων δεν συνίσταται καθώς μπορεί να έχει αποκλίσεις έως και 200% από τη μετρημένη ατμοσφαιρική πίεση (λόγω καιρικών συνθηκών κλπ) και έτσι να αλλοιώνει τα αποτελέσματα.

Ομοίως δεν χρησιμοποιούμε διόρθωση για την ανύψωση του υδροφόρου ορίζοντα, η οποία επιβάλλεται σε ειδικές μελέτες χρησιμοποιώντας υδρολογικά στοιχεία της περιοχής και πληροφορίες για τη σύσταση του εδάφους (πορώδες - στεγανό). Η διόρθωση που επιβάλλεται και προέρχεται είναι:

$$\Delta g_R = 0.04192 \text{ mGal}/\text{m} \quad (2.35)$$

Δηλαδή για 10 cm βροχής στην περιοχή θα πρέπει να αυξήσουμε την παρατηρούμενη τιμή κατά 4 $\mu$ Gal. Στη παρούσα μελέτη δεν υπήρχαν τέτοια στοιχεία και η διόρθωση δεν χρησιμοποιήθηκε.

Τέλος υπάρχει η διόρθωση λόγω αλλαγής της στάθμης της θάλασσας η οποία εφαρμόζεται όταν μετράμε σε παραθαλάσσια περιοχή με μεγάλο βάθος (δηλαδή σε χείλος γκρεμού, η σε πολύ βαθιά παραλία, ή λιμάνι με πολύ βαθιά θάλασσα κλπ). Η διόρθωση είναι ανάλογη της παλιρροιακής διόρθωσης που ήδη χρησιμοποιήσαμε και έχει μέτρο:

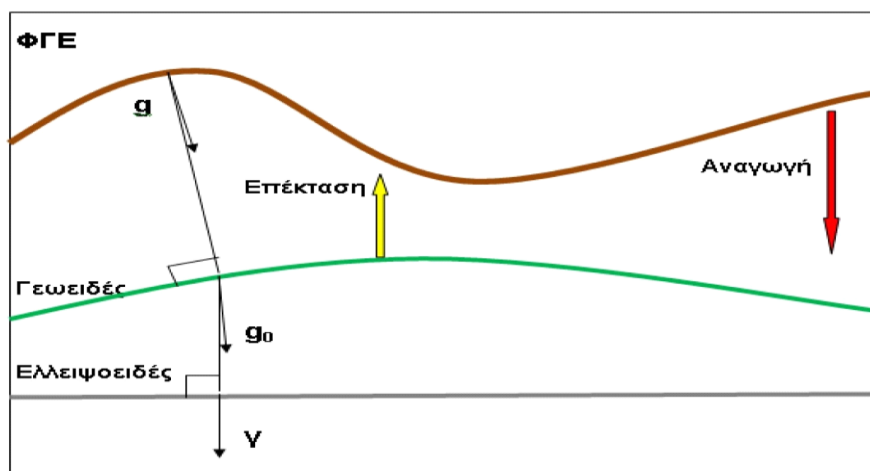
$$\Delta g_T = 0.02 \text{ mGal}/\text{m} \quad (2.36)$$

Δηλαδή αν έχουμε παλιρροιακή ανύψωση 5 cm τη στιγμή της μέτρησης θα πρέπει να προσθέσουμε 1 $\mu$ Gal στις μετρήσεις μας. Χρησιμοποιώντας όλες ή κάποιες από τις παραπάνω διορθώσεις, με τη διαδικασία που περιγράφηκε καταλήγουμε στις τελικές τιμές απόλυτης βαρύτητας για τη κάθε μέτρηση. Τις τιμές αυτές όμως δεν μπορούμε να τις χρησιμοποιήσουμε χωρίς επιπλέον μετατροπή για γεωδαιτικούς σκοπούς καθώς είναι συσχετισμένες με το υψόμετρο του σημείου τις τοπογραφικές μάζες που το περιβάλλουν τη θέση του σταθμού κλπ, έτσι θα πρέπει να τις επεξεργαστούμε περαιτέρω για να οδηγηθούμε σε χρησιμοποιήσιμα δεδομένα για γεωδαιτικούς σκοπούς.



## 2.8. Αναγωγές, Επεκτάσεις και Ανωμαλίες Βαρύτητας

Για την εκμετάλλευση των δεδομένων βαρύτητας πρέπει προηγουμένως να τις μετασχηματίσουμε ώστε να αναφέρονται όλες στην ίδια(η και σε διαφορετική) επιφάνεια αναφοράς (γεωειδές), απαλλαγμένες από ένα πλήθος άλλους παράγοντες που τις επηρεάζουν. Με τον όρο αναγωγή εννοούμε τη διόρθωση που θα επιφέρουμε στην τελική τιμή βαρύτητας ώστε να πάρουμε τιμή βαρύτητας στο γεωειδές. Αντίθετα με τον όρο επέκταση εννοούμε την διόρθωση που θα επιφέρουμε στη τιμή βαρύτητας του γεωειδούς ώστε να αναχθούμε στη ΦΓΕ κατά την έννοια της δυναμικής γραμμής. Ανωμαλία βαρύτητας ονομάζουμε τη διαφορά της τελικής τιμής βαρύτητας (ανηγμένης στο γεωειδές) από τη κανονική τιμή βαρύτητας στο ίχνος του σημείου στο ελλειψοειδές. Η ανωμαλία βαρύτητας μπορεί να συμπεριλαμβάνει και κάποιους άλλους όρους όπως θα δούμε παρακάτω. Τέλος ορίζεται και η διαταραχή της βαρύτητας η οποία είναι η διαφορά της τελικής τιμής βαρύτητας στο γεωειδές από την κανονική τιμή βαρύτητας αν η τελευταία επεκταθεί επίσης στο γεωειδές. Δηλαδή οι διαταραχές βαρύτητας αναφέρονται στο ίδιο σημείο ενώ οι ανωμαλίες βαρύτητας όχι.

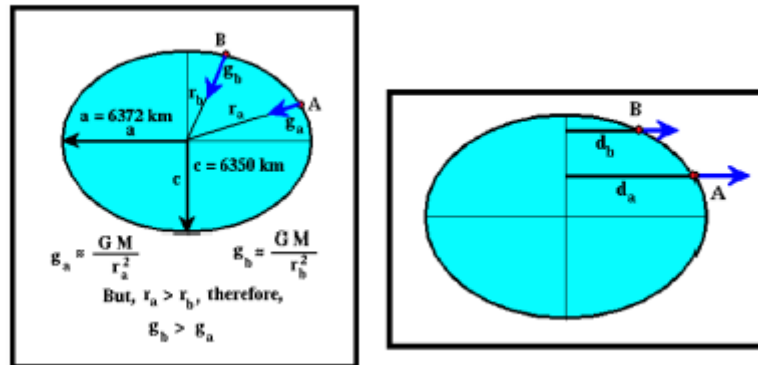


Εικόνα 2.13: Αναγωγές και επεκτάσεις Βαρύτητας

## 2.9. Αναγωγές λόγω γεωγραφικού πλάτους

Το γεωγραφικό πλάτος  $\varphi$  του κάθε σταθμού επηρεάζει άμεσα τις μετρήσεις βαρύτητας. Η αναγωγή λόγω γεωγραφικού πλάτους η οποία πρέπει να επιβληθεί οφείλεται κυρίως στο γεγονός ότι το σχήμα της γης δεν είναι πλήρως σφαιρικό, ενώ η μαθηματική επιφάνεια που το προσεγγίζει είναι το ελλειψοειδές εκ περιστροφής. Έτσι παρατηρείται μία αύξηση της παρατηρούμενης τιμής της βαρύτητας όσο αυξάνεται το πλάτος. Αντίθετα, λόγω της περιστροφής της γης παρατηρείται σε κάθε σημείο της επιφάνειάς της μία

φυγόκεντρη δύναμη η οποία επηρεάζει (ελαττώνει) την ένδειξη της βαρύτητας, μάλιστα η δύναμη αυτή είναι μεγαλύτερη στον Ισημερινό και ελαττώνεται όσο πλησιάζουμε στους Πόλους. Τα παραπάνω απεικονίζονται γραφικά στην εικόνα 2.14:



**Εικόνα 2. 14: Η επιρροή του σχήματος της γης αλλά και της φυγόκεντρης δύναμης στην επιφάνειά της, στη τιμή της επιτάχυνσης της βαρύτητας.**

Για να απαλείψουμε την επίδραση του γεωγραφικού πλάτους θα πρέπει να υπολογίσουμε τη τιμή της κανονικής βαρύτητας για κάθε σταθμό και να την αφαιρέσουμε από την τιμή απόλυτης βαρύτητας που υπολογίσαμε παραπάνω. Η κανονική τιμή της βαρύτητας για κάθε τόπο εξαρτάται από το ελλειψοειδές αναφοράς που χρησιμοποιούμε (και τις παραμέτρους του). Αυτή τη στιγμή το πλέον πρόσφατο *datum* που μπορεί να χρησιμοποιηθεί είναι το *GRS80*.

Έχουν προταθεί διάφορα μαθηματικά μοντέλα που εξαρτώνται μόνο από το γεωγραφικό πλάτος. Το πλέον ακριβές είναι ο κλειστός τύπος του *Somigliana*:

$$g_{\varphi} = g_c \frac{(1 + k \sin^2 \varphi)}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \quad (2.37)$$

του οποίου οι παράμετροι για το *GRS80* και το *GRS67* απουσιάζονται στο πίνακα 2.2:

|                                   | GRS67                | GRS80                |
|-----------------------------------|----------------------|----------------------|
| $\gamma_a$ (m sec <sup>-2</sup> ) | 9.780 318 455 8      | 9.780 326 771 5      |
| $k$                               | 0.001 931 663 383    | 0.001 931 851 353    |
| $e^2$                             | 0.006 694 605 328 56 | 0.006 694 380 022 90 |

**Πίνακας 2.2: Παράμετροι ελλειψοειδών αναφοράς**

επιπλέον ο τύπος 2.37 μπορεί να προσεγγιστεί γραμμικά και να προκύψει:

$$\gamma = \gamma_a (1 + \alpha \sin^2 \varphi + \alpha_1 \sin^4 \varphi + \alpha_2 \sin^6 \varphi + \alpha_3 \sin^8 \varphi) \quad (2.38)$$

με αντίστοιχους συντελεστές για το *GRS67* και *GRS80* που φαίνονται στο πίνακα 2.3:

|                                   | GRS67           | GRS80           |
|-----------------------------------|-----------------|-----------------|
| $\gamma_a$ (m sec <sup>-2</sup> ) | 9.780 318 459   | 9.780 326 772   |
| $\alpha$                          | 0.005 278 966 0 | 0.005 279 041 4 |
| $\alpha_1$                        | 0.000 023 272 5 | 0.000 023 271 8 |
| $\alpha_2$                        | 0.000 000 126 2 | 0.000 000 126 2 |
| $\alpha_3$                        | 0.000 000 000 7 | 0.000 000 000 7 |

**Πίνακας 2.3: Γραμμικοί συντελεστές των ελλειμοειδών αναφοράς.**

και επομένως ο τύπος 2.38 γίνεται:

$$\gamma_{1980}=9,7803267715(1+0,0052790414\sin^2\varphi+0,0000232718\sin^4\varphi+0,0000001262\sin^6\varphi+0,0000000007\sin^8\varphi) \quad \text{σε m/sec}^2 \quad (2.39)$$

ενώ έχει γίνει αποδεκτή και η προσέγγιση του *Moritz*(1984) :

$$g=978.0327 (1+0.0053024 \sin^2\theta -0.0000058 \sin^22\theta) \quad \text{σε gals} \quad (2.40)$$

Από τους παραπάνω τύπους μπορούμε να συμπεράνουμε ότι σε ένα μέσο πλάτος  $\varphi$  45° η τιμή της κανονικής βαρύτητας αυξάνεται κατά 0.81mgal/km και επομένως για να επιτύχουμε ακρίβεια της τάξης των 0.01 mgal θα πρέπει να γνωρίζουμε το γεωγραφικό πλάτος  $\varphi$  με ακρίβεια 12 m.

## 2.10. Ατμοσφαιρική διόρθωση

Είναι γνωστό ότι οι παράμετροι που καθορίζουν το *GRS67* και *GRS80* έχουν προκύψει κυρίως από γεωδαιτικά στοιχεία που έχουν συλλεχθεί με διαστημικές μεθόδους (δορυφόρους). Ως εκ τούτου τα στοιχεία αυτά περιλαμβάνουν και την επίδραση της μάζας της ατμόσφαιρας που περικλείει τη γη. Αντίθετα οι επίγειες μετρήσεις βαρύτητας οι οποίες γίνονται στην επιφάνεια της γης δεν συμπεριλαμβάνουν αυτή την επίδραση. Έτσι είναι αναγκαίο να επιβληθεί η ατμοσφαιρική διόρθωση στις μετρήσεις βαρύτητας η οποία προσεγγίζεται με τον τύπο:

$$\delta g_A=8.71-1.03*10^{-3}H \quad (\mu\text{m/sec}^2) \quad (2.41)$$

ο οποίος έχει εφαρμογή κυρίως στις Ηνωμένες Πολιτείες Αμερικής. Η ποσότητα  $\delta g_A$  προστίθεται πάντα στις παρατηρήσεις της βαρύτητας. Για το λόγο αυτό έχει προταθεί ένας πιο ακριβής τύπος από τον *Hildebrand*(2002):

$$g_{\text{atm}}=0.874-9.9*10^{-5}h+3.56*10^{-9}h^2 \quad (2.42)$$

ο οποίος χρησιμοποιεί το γεωμετρικό υψόμετρο του σημείου μέτρησης.

## 2.11. Αναγωγή Υψομέτρου

Η αναγωγή υψομέτρου ή αναγωγή ελευθέρου αέρα όπως συνήθως λέγεται, λαμβάνει υπόψη της μόνο το υψόμετρο του σημείου και όχι τις παρεμβαλλόμενες μάζες μεταξύ του σημείου και του γεωειδούς. Στις γεωφυσικές εργασίες συνήθως είναι αρκετή η γραμμική προσέγγιση της σφαιρικής γης η οποία δίνεται από το τύπο:

$$\delta g_F = \frac{\bar{g}}{R} H \quad (2.43)$$

όπου η ποσότητα  $\bar{g}$  εκφράζει τη μέση βαρύτητα της επιφάνειας μίας σφαιρικής γης. Με αυτή τη προσέγγιση σύμφωνα με τους *Telford, Geldart, Sheriff* (1990), η παραπάνω ποσότητα γίνεται:

$$\delta g_F = 0.3086H \text{ σε mgal και μέτρα.} \quad (2.44)$$

Στη γεωδαισία όμως η προσέγγιση αυτή δεν είναι ικανοποιητική. Έστω ότι είναι γνωστή η τιμή της βαρύτητας σε ένα σημείο P της ΦΓΕ. Για να αναχθούμε από αυτή στο γεωειδές κατά τη διεύθυνση της κατακορύφου χρησιμοποιούμε τον τύπο των *Heiskanen and Moritz* (1967) :

$$g_0 = g - \frac{\partial g}{\partial H} H - \frac{\partial^2 g}{\partial H^2} \frac{H^2}{2!} - \frac{\partial^3 g}{\partial H^3} \frac{H^3}{3!} - \dots \quad (2.45)$$

όπως βλέπουμε παραπάνω είναι το αναπτύγμα Taylor του κανονικού πεδίου βαρύτητας της γης. Από το παραπάνω τύπο προήλθε ο τύπος από τον *Featherstone*(1995):

$$\delta g_F = \frac{2\gamma}{\alpha} (1 + f + m - 2f \sin^2 \theta) H - \frac{3\gamma}{\alpha^2} H^2 \quad (2.46)$$

ο οποίος αποτελεί το πρώτο και δεύτερο όρο του αναπτύγματος κατά Taylor του κανονικού πεδίου βαρύτητας και οι παράμετροι του για το GRS67 και GRS 80 δίνονται στο πίνακα 2.1. Τέλος προτάθηκε ένας ακόμα πιο ακριβής τύπος από τον *Hildebrand*(2002):

$$g_h = -(0.3087691 - 0.0004398 \sin^2 \theta) h + 7.2125 * 10^{-8} h^2 \quad (2.47)$$

όπου και πάλι το h αναφέρεται στο γεωμετρικό υψόμετρο του σταθμού. Η αναγωγή ελευθέρου αέρα έχει πάντα θετική επίδραση στη τιμή της βαρύτητας στην ΦΓΕ.

## 2.12. Αναγωγή Bouguer

Με την αναγωγή ελευθέρου αέρα έχουμε «αφαιρέσει» τις ενδιάμεσες μάζες από το σημείο που έγινε η μέτρηση προς το γεωειδές. Στην ουσία έχει γίνει μία συμπίκνωση όλων των ενδιάμεσων μαζών στην επιφάνεια του γεωειδούς. Με την απλή αναγωγή *Bouguer* επαναφέρουμε την επίδραση από τις μάζες που έχουν αφαιρεθεί. Δηλαδή στη πράξη εφαρμόζουμε το «πιάτο» *Bouguer* που δίνεται από το τύπο:

$$\delta g_B = 2\pi G\rho H \quad (2.48)$$

όπου με  $\rho$  συμβολίζουμε τη πυκνότητα των πετρωμάτων που θεωρούμε ότι παρεμβάλλουμε με το «πιάτο». Με μία μέση πυκνότητα πετρωμάτων  $\rho = 2.67 \text{ g/cm}^3$  ο τύπος 2.47 γίνεται :

$$\delta g_B = 2\pi G\rho H = 0.1119H \quad (2.49)$$

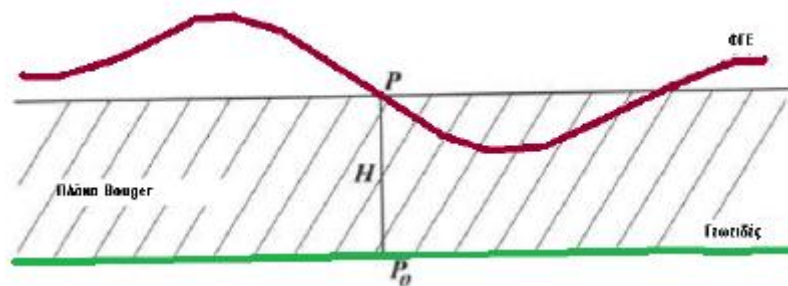
Αν δεν θέλουμε να δεχτούμε σταθερή πυκνότητα αλλά μεταβαλλόμενη ο τύπος 2.49 γίνεται:  $\delta g_{Bc} = 2\pi G\sigma h = 4.193 \cdot 10^{-5} \sigma h$

$$(2.50)$$

Η παραπάνω διόρθωση υποθέτει επίπεδη γη. Μια νεότερη προσέγγιση η οποία πλέον λαμβάνει υπόψη της τη καμπυλότητα της γης δίνεται από το τύπο του *Hildebrand*(2002):

$$g_{sc} = 2\pi G\rho(\mu h - \lambda R) \quad (2.51)$$

όπου  $\mu$  και  $\lambda$  σταθεροί συντελεστές *LaFehr*(1991) και  $h$  το γεωμετρικό υψόμετρο του σταθμού. Εντούτοις η νέα αυτή προσέγγιση χρησιμοποιείτε κυρίως για ειδικούς γεωφυσικούς σκοπούς και δεν θα μας απασχολήσουν περαιτέρω σε αυτή την εργασία.

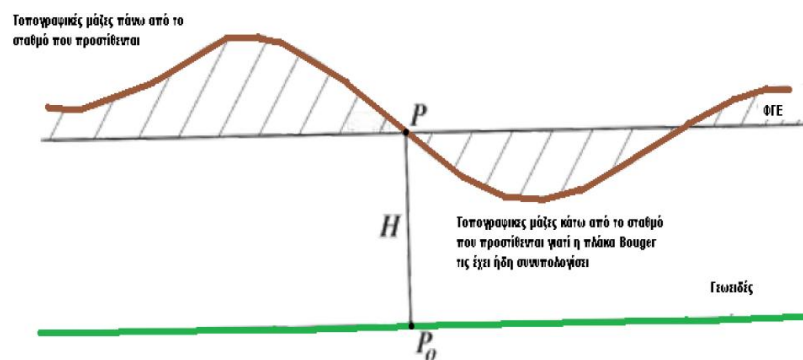


Εικόνα 2.15: Αναγωγή Bouguer

Η αναγωγή *Bouguer* σε αντίθεση με την αναγωγή ελευθέρου αέρα έχει αρνητική επίδραση στην τιμή της βαρύτητας στη ΦΓΕ.

### 2.13. Τοπογραφική διόρθωση (αναγωγή λόγω αναγλύφου)

Αν η μέτρηση γινόταν σε μία πλήρως επίπεδη περιοχή τότε η αναγωγή *Bouguer* θα διόρθωνε πλήρως την επίδραση της τοπογραφίας στη μέτρησή μας. Στη πράξη βεβαίως δεν υπάρχουν τέτοιες περιοχές και έτσι πρέπει να επιβληθεί η τοπογραφική διόρθωση στις μετρήσεις. Η τοπογραφική διόρθωση υπολογίζει τις μάζες που βρίσκονται ψηλότερα ή χαμηλότερα από το επίπεδο της μέτρησης και προσθέτει την επιρροή τους στις μετρήσεις. Με δεδομένο ότι θα έχει γίνει ήδη η απλή αναγωγή *Bouguer* όλες οι μάζες είτε πάνω είτε κάτω από το επίπεδο της μέτρησης προστίθενται στις μετρήσεις, καθώς οι μάζες που υπέρκεινται της μέτρησης δημιουργούν ασθενές βαρυτικό πεδίο γύρω τους αντίθετης διεύθυνσης από το γήινο και ως εκ τούτου μειώνουν τη μέτρηση της βαρύτητας. Οι δε μάζες που υπόκεινται του επιπέδου μέτρησης προστίθενται διότι η θετική τους επίδραση στη μέτρηση έχει ήδη υπολογιστεί από τη πλάκα *Bouguer*. Τα παραπάνω γίνονται ευκολότερα κατανοητά με την εικόνα 2.16:

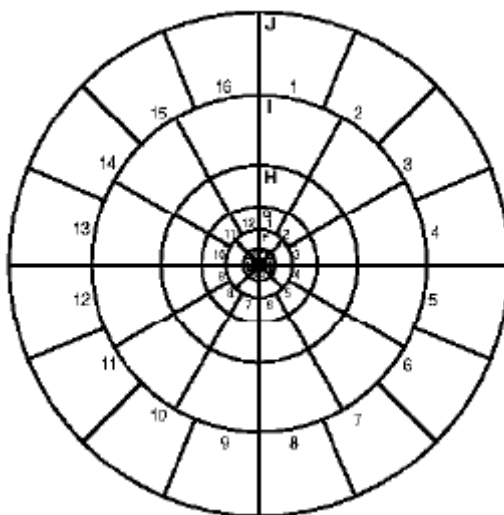


Εικόνα 2.16: Αναγωγή λόγω αναγλύφου

Για τον υπολογισμό των τοπογραφικών διορθώσεων χρησιμοποιούνται για χρόνια η μέθοδος του *Hammer*. Σύμφωνα με αυτή δημιουργούνται κυκλικοί τομείς επί τοπογραφικών χαρτών που για τον κάθε έναν υπολογιζόταν ξεχωριστά το μέσο υψόμετρο του καθώς και η μέση πυκνότητα των πετρωμάτων του (αν υπήρχε διαθέσιμος γεωλογικός χάρτης). Οι κυκλικοί αυτοί τομείς εκτείνονταν μέχρι μία μέγιστη ακτίνα  $167^\circ$ , ενώ για κάθε κυκλικό τομέα (πρίσμα) υπολογιζόταν η συνεισφορά του στη μέτρηση μέσω του τύπου:

$$\delta g_T(\rho r) = \theta G \rho [(R_2 - R_1) + \sqrt{R_1^2 + H_m} - \sqrt{R_2^2 + H_m}] \quad (2.52)$$

όπου  $\rho$  η πυκνότητα,  $H_m$  το μέσο ύψος,  $\theta$  η γωνία με αρχή το Βορρά και  $R_1, R_2$  οι ακτίνες του κυκλικού τομέα. Το άθροισμα της επίδρασης όλων των κυκλικών τομέων έδινε τη τελική τοπογραφική διόρθωση στο σταθμό.



Εικόνα 2. 17: Κοκκικοί Τομείς του Hammer

Τα τελευταία χρόνια με την ύπαρξη πλέον ψηφιακών μοντέλων εδάφους υψηλής ακρίβειας έχει μοντελοποιηθεί ο υπολογισμός της τοπογραφικής διόρθωσης και γίνεται πλέον υπολογιστικά μέσω του τύπου:

$$c_p = G_p \int_{-x}^{+x} \int_{H_p}^{H(x,y)} \frac{z - H_p}{[(x_Q - x_p)^2 + (y_Q - y_p)^2 + (z_Q - z_p)^2]^{3/2}} dx_Q dy_Q dz_Q \quad (2.53)$$

ο οποίος προϋποθέτει ότι δεχόμαστε σταθερή πυκνότητα και ότι αγνοούμε τη καμπυλότητα της γης (μέχρι τα 167 Km δεν εισάγουμε μεγάλο σφάλμα ενώ απλοποιούμε πολύ τη σχέση υπολογισμού). Στη παραπάνω σχέση  $\rho$  είναι η σταθερή πυκνότητα που επιλέγουμε για όλη τη περιοχή, P το σημείο μέτρησης, Q το σημείο από το οποίο θέλουμε να υπολογίσουμε την επίδραση  $x, y, z$  καρτεσιανές συντεταγμένες των σημείων και  $H_p$  το υψόμετρο του σταθμού. Επιπλέον για πιο γρήγορα αποτελέσματα χρησιμοποιείται και ο μετασχηματισμός *Fourier* για τον υπολογισμό των τοπογραφικών διορθώσεων. Πιο συγκεκριμένα αν έχουμε ένα καννάβο τριών διαστάσεων με διαστάσεις M, N και K στις διευθύνσεις x, y και z αντίστοιχα και  $\Delta v_{ijk}$  είναι η τιμή του κάθε στοιχείου αντίστοιχα ενώ  $\Delta x, \Delta y$  και  $\Delta z$  είναι το βήμα του καννάβου σε κάθε διάσταση σε μορφή συνέλιξης η τοπογραφική διόρθωση γίνεται:

$$T_Z(x_k, y_l, z_m) = G_p(x_k, y_l, z_m) * I_3(x_k, y_l, z_m) \quad (2.54)$$

και μετασχηματίζεται σε τριών διαστάσεων *FFT* :

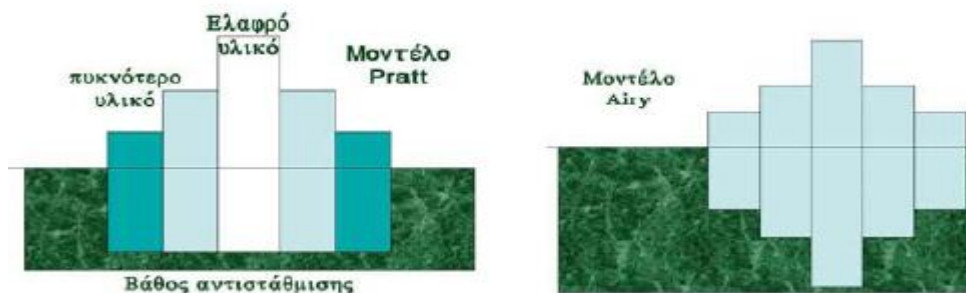
$$\begin{aligned} T_Z(x_k, y_l, z_m) &= GF^{-1}\{F(x_k, y_l, z_m)F\{I_3(x_k, y_l, z_m)\}\} \\ &= GF^{-1}\{P(u_k, v_l, w_m)L_3(x_k, y_l, z_m)\} \end{aligned} \quad (2.55)$$

Υπάρχουν και οι αντίστοιχοι τύποι για μίας και δύο διαστάσεων *FFT*, που δεν κρίνεται σκόπιμο να παρουσιαστούν εδώ.

## 2.14. Άλλες Αναγωγές

Μπορούμε να αναφέρουμε για λόγους πληρότητας και άλλες αναγωγές που μπορούν να επιβληθούν στις αρχικές μας μετρήσεις αλλά δεν θα μας απασχολήσουν περαιτέρω στη παρούσα διπλωματική εργασία. Τέτοιες αναγωγές αποτελούν οι κάτωθι:

- Ισοστατική αναγωγή η οποία επιβάλλεται στις μετρήσεις όταν δεν θέλουμε να θεωρήσουμε ότι ο φλοιός της γης έχει μία συγκεκριμένη ενιαία πυκνότητα. Υπάρχουν δυο διεθνώς αποδεκτά ισοστατικά μοντέλα το μοντέλο του *Pratt* και του *Airy*, καθώς και ο συνδυασμός τους. Η μέθοδος υπολογισμού της ισοστατικής αναγωγής είναι παρόμοια με τη μέθοδο υπολογισμού των τοπογραφικών διορθώσεων με τη διαφορά ότι κάθε πρίσμα έχει ξεχωριστή τιμή βαρύτητας ανάλογα με τα πετρώματα που συμπεριλαμβάνει. Επομένως για τον υπολογισμό τους θα πρέπει να ληφθούν υπόψη διάφορα γεωλογικά στοιχεία για τη περιοχή, τα οποία συνήθως δεν είναι άμεσα διαθέσιμα. Οι τιμές της ισοστατικής αναγωγής είναι γενικά πολύ μικρές ενώ οι διαφορές τους τοπικά είναι ελάχιστες. Σε αυτή τη μελέτη δεν χρησιμοποιούνται.



Εικόνα 2.18: Ισοστατική αναγωγή Pratt και Airy

- **Eotvos:** Η αναγωγή αυτή χρησιμοποιείται όταν η συλλογή βαρυτομετρικών δεδομένων γίνεται με πλωτά ή εναέρια μέσα και εφαρμόζεται για να απαλείψει τις τυχόν ταχύτητές τους σε σχέση με τη ταχύτητα περιστροφής της γης. Στα πλαίσια αυτής της μελέτης δεν κρίνεται σκόπιμο να επεκταθούμε περαιτέρω από τη στιγμή που δεν θα χρησιμοποιηθούν καθόλου τέτοια δεδομένα.

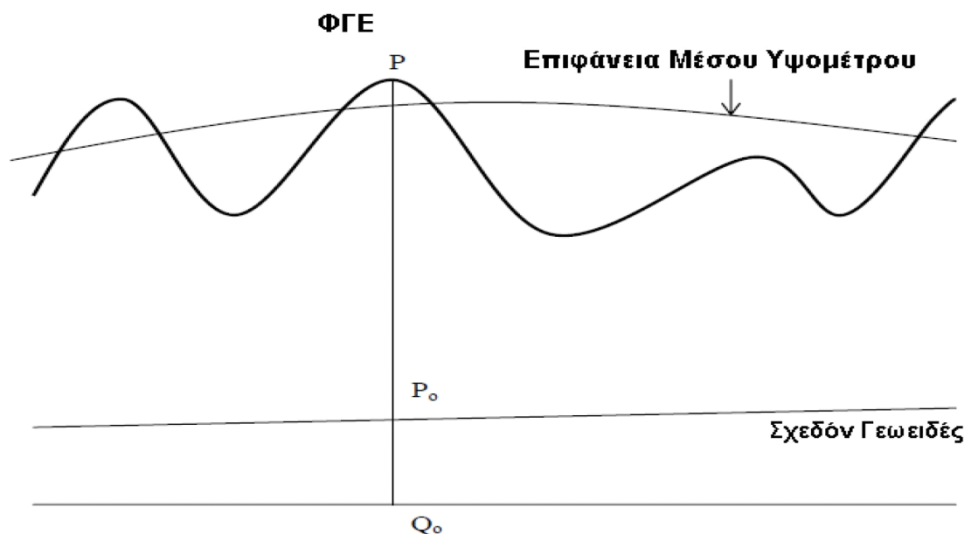


## 2.15. Τοπογραφικές Αναγωγές

Με τον όρο τοπογραφικές αναγωγές εννοούμε τις αναγωγές οι οποίες «μετακινούν» τοπογραφικές μάζες, ώστε να προβλέψουν σωστά τη τιμή της βαρύτητας σε σημείο που δεν μπορεί να μετρηθεί. Από τις αναγωγές που αναφέρθηκαν παραπάνω μόνο η αναγωγή *Bouguer* μπορεί να θεωρηθεί τοπογραφική. ( Η αναγωγή ελευθέρου αέρα είναι κομμάτι τοπογραφικής αναγωγής ).

### 2.15.1 Υπολειπόμενη τοπογραφική Διόρθωση *RTM (Residual Terrain Model)*

Η αναγωγή αυτή είναι μία από τις πλέον χρησιμοποιούμενες αναγωγές για τον προσδιορισμό του γεωειδούς. Πρώτη φορά αναφέρθηκε από τον *Fosberg* (1984). Για την αναγωγή αυτή χρησιμοποιούμε μία επιφάνεια αναφοράς η οποία αποτελεί το μέσο όρο των υψομέτρων στην περιοχή του σταθμού. Οι τοπογραφικές μάζες που βρίσκονται πάνω από αυτή την επιφάνεια αφαιρούνται ενώ αυτές που βρίσκονται κάτω από την επιφάνεια αυτή προστίθενται. Με τη χρησιμοποίηση των *RTM* μπορούμε να προσδιορίσουμε το σχεδόν γεωειδές.



Εικόνα 2. 19: Υπολειπόμενη τοπογραφική διόρθωση

Ο υπολογισμός της *RTM* γίνεται με το τύπο του *Fosberg*(1984):

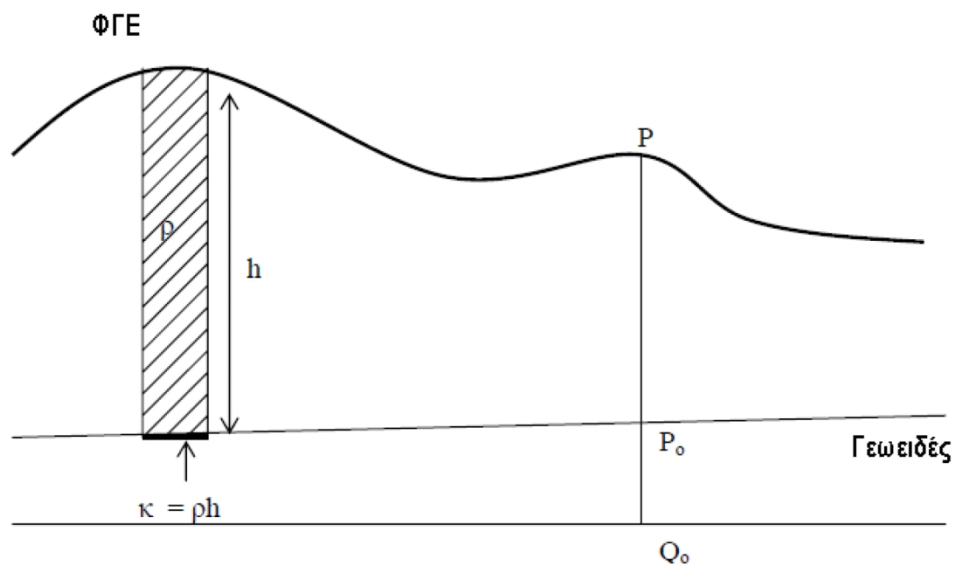
$$\delta A_{RTM} = G_P \int_E \int_{h_{ref}}^h \frac{h_p - z}{s^3(x_p - x, y_p - y, z_p - z)} dx dy dz \quad (2.56)$$

Μάλιστα όταν η υψομετρική επιφάνεια αναφοράς είναι ομαλή , χωρίς απότομες μεταβολές ο παραπάνω τύπος απλοποιείται και λαμβάνει τη μορφή της αναγωγής *Bouguer* αλλά ως προς την υψομετρική επιφάνεια αναφοράς και όχι ως προς το γεωειδές:



### 2.15.3 Συμπίεση των μαζών κατά *Helmert*

Η συμπίεση των μαζών γίνεται με δύο μεθόδους κατά *Helmert*. Η πιο ενδιαφέρουσα είναι η δεύτερη μέθοδος η οποία είναι και η πιο χρησιμοποιούμενη για τον προσδιορισμό του γεωειδούς. Σε αυτή την αναγωγή οι τοπογραφικές μάζες που βρίσκονται πάνω από το γεωειδές συμπιέζονται πάνω στο γεωειδές σε μία πολύ μικρού πάχους επιφάνεια (κέλυφος). Στην πρώτη μέθοδο του *Helmert* οι τοπογραφικές μάζες συμπιέζονται σε μία μικρή επιφάνεια 21 Km κάτω από την επιφάνεια του γεωειδούς.

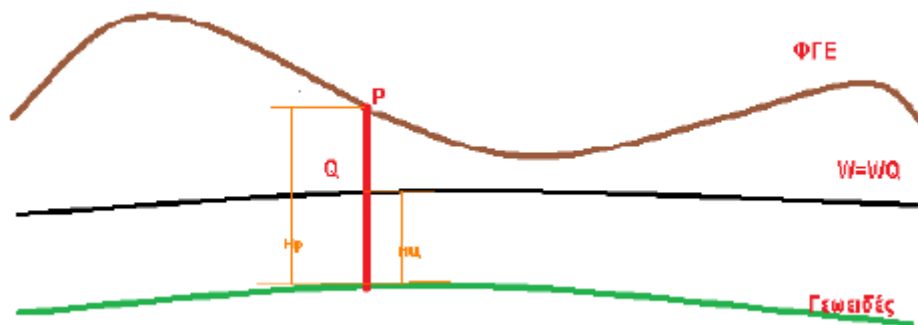


*Εικόνα 2. 21: Συμπίεση των μαζών κατά Helmert*

Ο υπολογισμός αυτής της αναγωγής συμπίπτει με τον υπολογισμό της τοπογραφικής διόρθωσης που αναφέρθηκε παραπάνω.

### 2.15.4 Αναγωγή *Poincare-Pray*

Με την αναγωγή αυτή επιδιώκουμε τον υπολογισμό της τιμής της βαρύτητας στο εσωτερικό της γης με τη βοήθεια μετρήσεων επί της ΦΓΕ.



*Εικόνα 2.22: Αναγωγή Poincare-Pray*

Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε τη τιμή της βαρύτητας στο εσωτερικό της γης στο σημείο Q, βασιζόμενοι σε μία μέτρηση επί της κατακορύφου του σημείου Q στην επιφάνεια της γης στο σημείο P (όπως φαίνεται στην εικόνα 24). Αρχικά υπολογίζουμε την επίδραση των μαζών πάνω από την ισοδυναμική επιφάνεια που περνάει από το σημείο Q και την αφαιρούμε από τη μέτρηση στο σημείο P. Έπειτα εφαρμόζουμε αναγωγή ελευθέρου αέρα από το σημείο P στο σημείο Q. Τέλος επαναυπολογίζουμε την συνεισφορά των μαζών που αφαιρέθηκαν κατά το πρώτο βήμα και τη προσθέτουμε αλγεβρικά στη τιμή βαρύτητας του Q. Ο παραπάνω υπολογισμός απλοποιείται από τη προσεγγιστική σχέση των *Heiskanen-Moritz* (1967), η οποία ισχύει για την παραδοχή σταθερής πυκνότητας ίσης με  $2.67 \text{ g/cm}^3$ :

$$g_Q = g_P + 0.0848(H_P - H_Q) \quad (2.59)$$

Η αναγωγή αυτή είναι πολύ προσεγγιστική και ως εκ τούτου ξεπερασμένη με αποτέλεσμα να μην χρησιμοποιείται πλέον και αναφέρεται εδώ για λόγους πληρότητας.

## 2.16. Ανωμαλίες Βαρύτητας

Ανάλογα με τις αναγωγές που χρησιμοποιούνται προκύπτουν και οι αντίστοιχες ανωμαλίες βαρύτητας. Η αρχική ανωμαλία βαρύτητας την οποία αναφέραμε και παραπάνω δίνεται κατευθείαν μέσω του τύπου:

$$\Delta g = g - \gamma \quad (2.60)$$

Όπου  $\gamma$  είναι η κανονική βαρύτητα που υπολογίζεται από τον τύπο(+), και  $g$  η τιμή της βαρύτητας στο γεωειδές. Αν για να φτάσουμε από την ΦΓΕ στο γεωειδές θεωρήσουμε ότι υπάρχει μόνο ελεύθερος αέρας τότε χρησιμοποιούμε την αναγωγή ελευθέρου αέρα και η αντίστοιχη ανωμαλία ελευθέρου αέρα δίνεται από τον τύπο:

$$\Delta g_{FA} = g - \gamma + \Delta g_{FA} \quad (2.61)$$

Οι ανωμαλίες ελευθέρου αέρα είναι ιδιαίτερα χρήσιμες καθώς έχουν μεγάλη συσχέτιση με το υψόμετρο οπότε μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον υπολογισμό του γεωειδούς. Αν θεωρήσουμε ότι για να κατεβούμε από τη ΦΓΕ στο γεωειδές θα πρέπει να εφαρμόσουμε και ένα πιάτο *Bouguer* τότε οδηγούμαστε στην απλή ανωμαλία *Bouguer* η οποία δίνεται από το τύπο:

$$\Delta g_B = g - \gamma + \Delta g_{FA} - \Delta g_B \quad (2.62)$$

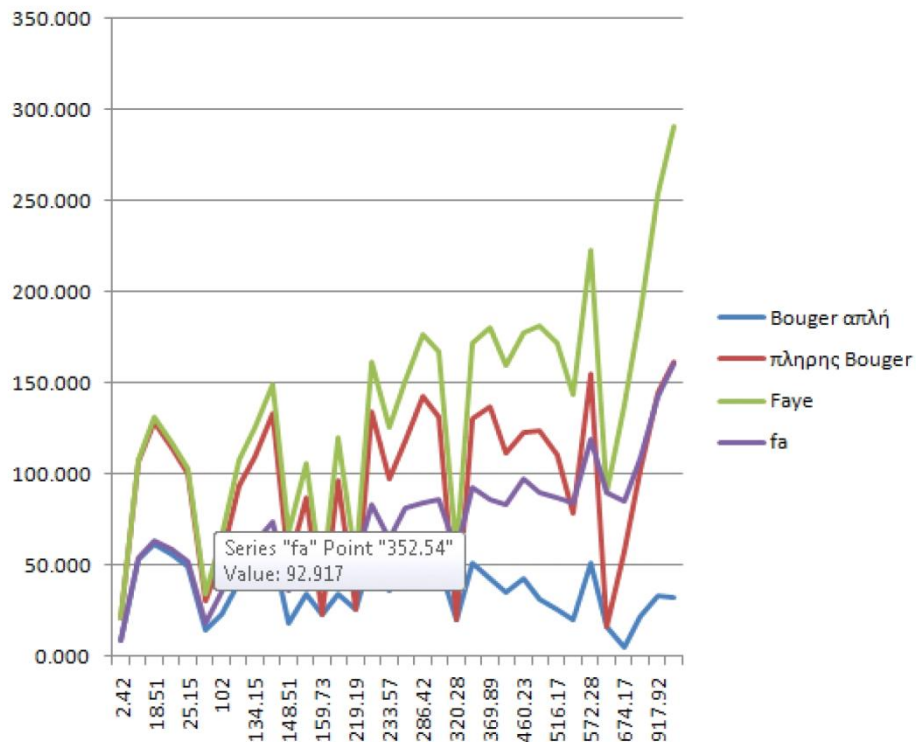
Οι απλές ανωμαλίες *Bouguer* δεν είναι τόσο εύχρηστες για τον υπολογισμό του γεωειδούς καθώς οι τιμές τους είναι ιδιαίτερα μεγάλες και δεν είναι εύκολο να παρθούν

αντιπροσωπευτικοί μέσοι όροι. Η επόμενη ανωμαλία ονομάζεται πλήρης ανωμαλία *Bouguer* και προκύπτει αν στην απλή ανωμαλία προσθέσουμε και τη τοπογραφική διόρθωση.

$$\Delta g_{BF} = g - \gamma + \Delta g_{FA} - \Delta g_B + TC \quad (2.63)$$

Το χαρακτηριστικό αυτής της ανωμαλίας είναι ότι παρουσιάζεται σχεδόν ασυσχέτιστη με τα υψόμετρα. Η συσχέτιση της κάθε ανωμαλίας που περιγράφεται παραπάνω με τα υψόμετρα παρουσιάζεται γραφικά στην εικόνα 2.23.

**Συσχέτιση Ανωμαλιών Βαρύτητας με τα Υψόμετρα**



**Εικόνα 2.23: Συσχέτιση Ανωμαλιών Βαρύτητας με τα υψόμετρα**

Επιπλέον κάποιες φορές είναι χρήσιμες για τον υπολογισμό των συνοριακών προβλημάτων και οι λεγόμενες ανωμαλίες *Faye* οι οποίες είναι οι ανωμαλίες ελευθέρου αέρα συν την τοπογραφική διόρθωση:

$$\Delta g_{Faye} = \Delta g_{FA} + TC \quad (2.64)$$

## 2.17 Συμπεράσματα για τις αναγωγές και ανωμαλίες βαρύτητας

Γενικά οι τιμές βαρύτητας μετρούνται στην επιφάνεια της γης, για να είναι όμως αξιοποιήσιμες θα πρέπει να αναχθούν στο γεωειδές και επιπλέον να μην υπάρχουν τοπογραφικές μάζες πέρα από αυτό. Οι μέθοδοι αναγωγής που χρησιμοποιούνται για το

λόγο αυτό θα πρέπει να οδηγούν σε ομαλοποιημένες τιμές ώστε να μπορούν να εξαχθούν εύκολα οι μέσες τιμές αλλά και να γίνει πρόγνωση γειτονικών τιμών και επιπλέον να μην επιφορτίζουν τους υπολογισμούς με μεγάλη έμμεση επίδραση στις αποχές γεωειδούς. Τις παραπάνω προϋποθέσεις πληρούν η μέθοδος της ισοστασίας(χωρίς πολύ καλά αποτελέσματα ), η συμπύκνωση των μαζών του *Helmert* και η υπολειπόμενη τοπογραφική διόρθωση *RTM*. Από αυτές η πρώτη και η δεύτερη οδηγούν στον υπολογισμό του γεωειδούς ενώ η τρίτη, στον υπολογισμό του σχεδόν γεωειδούς.

## 2.18 Υπολογισμός γεωειδούς

Στη διεθνή βιβλιογραφία αναπτύσσονται διάφορες τεχνικές για τον υπολογισμό του γεωειδούς, οι οποίες εξαρτώνται από τη περιοχή και τη διαθεσιμότητα των δεδομένων. Μιλώντας περί υπολογισμού του γεωειδούς στη πραγματικότητα μιλάμε για υπολογισμό των διαταραχών (αποχών) του γεωειδούς. Πιο συγκεκριμένα υπολογίζουμε τη διαταραχή της επιφάνειας του γεωειδούς ως προς μία άλλη μαθηματική επιφάνεια την οποία επιλέγουμε. Η μαθηματική επιφάνεια που επιλέγεται διεθνώς είναι το ελλειψοειδές εκ περιστροφής *GRS80*. Γενικά μπορούμε να πούμε ότι ο υπολογισμός του γεωειδούς στην πραγματικότητα αποτελεί την επίλυση των γεωδαιτικών συνοριακών προβλημάτων που αναφέραμε παραπάνω, καθώς αποτελεί τη συνοριακή επιφάνεια.

### 2.18.1 Γεωδυναμικό Μοντέλο

Τα τελευταία χρόνια με την ανάπτυξη της τεχνολογίας και ειδικότερα μετά τις διαστημικές αποστολές των *GRACE* και *GOCE* έχει συλλεχθεί επαρκής αριθμός βαρυτομετρικών δεδομένων ώστε να μπορεί να παραχθεί ένα ακριβές παγκόσμιο γεωδυναμικό μοντέλο. Αυτό έγινε τα τελευταία χρόνια με το μοντέλο *EGM2008* το οποίο είναι σε πλήρη βαθμό και τάξη 2190 . Ο υπολογισμός των συντελεστών του έγινε κατά κύριο λόγο από τον Έλληνα Νίκο Παυλή και θεωρητικά έχει μια διακριτική ικανότητα 30m. Το μοντέλο αυτό συμπεριλαμβάνει τόσο τις υψηλές (όπως και παλαιότερα μοντέλα) όσο και τις μεσαίες συχνότητες των αρμονικών συναρτήσεων που περιγράφουν το γήινο πεδίο βαρύτητας. Οι χαμηλές συχνότητες οι οποίες μπορούν να προσδιοριστούν σε τοπική κλίμακα υπολογίζονται από τοπικές - επίγειες μετρήσεις βαρύτητας. Μάλιστα έχει αποδειχθεί ότι ο μέγιστος βαθμός και τάξη που μπορεί να φτάσει ένα γεωδυναμικό μοντέλο είναι 2700, που όμως και πάλι θα παρουσίαζε αποκλίσεις σε τοπική κλίμακα. Μετά τον

προσδιορισμού του γήινου δυναμικού μπορούν να υπολογιστούν όλα τα στοιχεία που μπορεί να ενδιαφέρουν (π.χ. αποχές γεωειδούς, ανωμαλίες υψών, ανωμαλίες ελευθέρου αέρα κλπ). Συμπερασματικά μπορούμε να πούμε ότι ο υπολογισμός ενός γεωδυναμικού μοντέλου αποτελεί έναν υπολογισμό του γεωειδούς σε παγκόσμια κλίμακα.

### 2.18.2 Τύπος Stokes

Τα υψόμετρα του γεωειδούς μπορούν να υπολογιστούν χρησιμοποιώντας επίγειες μετρήσεις βαρύτητας με τη βοήθεια του κλασικού τύπου του Stokes (Heiskanen and Moritz 1967):

$$N = \frac{r}{4\pi\gamma_{\sigma}} \int S(\psi) \Delta g d\sigma \quad (2.65)$$

όπου  $r$  είναι η μέση ακτίνα της γης,  $\gamma$  είναι η κανονική βαρύτητα στο ελλειψοειδές αναφοράς,  $\Delta g$  είναι η ανωμαλία βαρύτητας,  $d\sigma$  είναι η στοιχειώδης επιφάνεια επί της σφαίρας,  $S(\psi)$  είναι η συνάρτηση του Stokes που δίνεται από τον τύπο:

$$S(\psi) = \csc\left(\frac{\Psi}{2}\right) - 6\sin\left(\frac{\Psi}{2}\right) + 1 - 5\cos(\psi) - 3\cos(\psi) * \ln\left[\sin\left(\frac{\Psi}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\Psi}{2}\right)\right] \quad (2.66)$$

στον οποίο με  $\psi$  συμβολίζουμε την επιφανειακή σφαιρική απόσταση μεταξύ 2 σημείων της σφαίρας και το συνημίτονο του παίρνει τη τιμή:

$$\cos\psi = \sin\phi\sin\phi' + \cos\phi\cos\phi' \cos(\lambda - \lambda') \quad (2.67)$$

Στη συνέχεια με αντικατάσταση στο τύπο του Stokes και πράξεις καταλήγουμε τελικά στο τύπο:

$$N = c \left[ -\frac{3}{2} \sin^2(\psi) * \ln\left[\sin\left(\frac{\Psi}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\Psi}{2}\right)\right] + 4\sin\left(\frac{\Psi}{2}\right) + 3\sin^2\left(\frac{\Psi}{2}\right) - 6\sin^3\left(\frac{\Psi}{2}\right) - 3\sin^4\left(\frac{\Psi}{2}\right) - \cos(\psi) + \frac{5}{4} \cos(2\psi) \right] \quad (2.68)$$

όπου  $0 \leq \psi \leq \psi_0$  και  $c = (r\Delta g)/(2\gamma)$ .

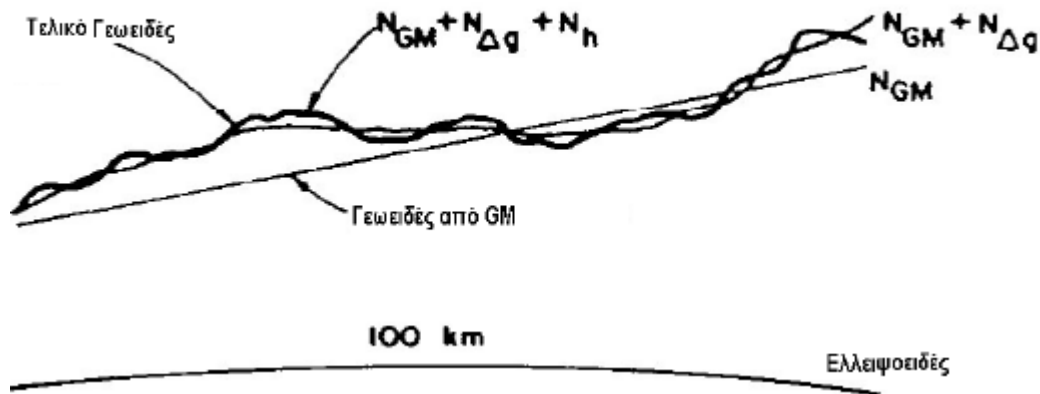
Για να εφαρμόσουμε το παραπάνω τύπο θα πρέπει να έχουμε παντού ανωμαλίες βαρύτητας υπολογισμένες για κάθε σημείο της επιφάνειας που θέλουμε να υπολογίσουμε υψόμετρα γεωειδούς. Κάτι τέτοιο όμως είναι πρακτικά ανέφικτο για το λόγο αυτό χρησιμοποιούμε συνδυασμό άλλων τεχνικών.

### 2.18.3 Διαδικασία *Remove-Restore* (ή *Remove- Compute -Restore*)

Το γεγονός ότι τα παραπάνω θεωρήματα είναι κυρίως προσεγγίσεις οι οποίες γίνονται διότι δεν έχουμε επαρκή στοιχεία ώστε να επεκτείνουμε τους υπολογισμούς μας σε όλη την επιφάνεια της γης εισάγει σφάλματα στους υπολογισμούς μας. Για να ελαχιστοποιήσουμε αυτά τα λεγόμενα σφάλματα αποκοπής χρησιμοποιούμε την εν λόγω διαδικασία. Γενικά με αυτό τον αλγόριθμο επιδιώκουμε να αφαιρέσουμε από τον υπολογισμό του γεωειδούς την επίδραση της υπόλοιπης επιφάνειας της γης αφαιρώντας από τις ανωμαλίες βαρύτητας ελευθέρου αέρα που έχουν προσδιορίσει τοπικά με επίγειες μετρήσεις τις ανωμαλίες βαρύτητας που υπολογίζει κάποιο γεωδυναμικό μοντέλο για τη περιοχή των μετρήσεων. Από αυτές αφαιρούμε και την επίδραση στις μετρήσεις που έχει η τοπογραφία της περιοχής ώστε να δημιουργήσουμε τελικά υπολειπόμενες ανωμαλίες βαρύτητας ασυσχέτιστες με το υψόμετρο της περιοχής, οι οποίες έχουν λάβει υπόψη τους την επίδραση από όλη τη γήινη επιφάνεια. Ένα επιπλέον όφελος που έχουμε χρησιμοποιώντας τις υπολειπόμενες ανωμαλίες βαρύτητας είναι ότι αυτές έχουν μικρότερες διαφοροποιήσεις μεταξύ τους χωρίς μεγάλες διαφορές από σημείο σε σημείο. Το γεγονός αυτό είναι ιδιαίτερα σημαντικό γιατί για τους υπολογισμούς χρησιμοποιούμε μέσες τιμές και έτσι οι μεταβολές του καννάβου που παράγεται είναι πιο ομαλές (smooth grid).

Σε κάποιες αντίστοιχες τέτοιες μελέτες που έχουν γίνει παγκοσμίως (όπως στη Κορέα για παράδειγμα) αν και υπήρχε διαθέσιμο το μοντέλο *EGM2008* σε πλήρη ανάπτυξη βαθμού και τάξης επιλέχθηκε να χρησιμοποιηθούν οι τιμές που προέκυπταν από το ανάπτυγμα του μοντέλου μόνο κατά βαθμό και τάξη 360. Αυτό έγινε για να αφαιρεθούν μόνο οι υψηλές συχνότητες από τις μετρημένες ανωμαλίες βαρύτητας. Επιπλέον η ίδια συνεισφορά του μοντέλου που απομακρύνεται στη διαδικασία *remove* επανακτάται άμεσα από τη διαδικασία *restore*. Έτσι δεν κρίνεται σκόπιμος ο περιορισμός του μοντέλου. Επιπλέον γίνεται ο υπολογισμός της συνεισφοράς στην ανωμαλία ύψους ή της αποχής του γεωειδούς από τις υπολειπόμενες ανωμαλίες βαρύτητας. Στη συνέχεια σε αυτή τη συνεισφορά που προέκυψε προσθέτουμε την ανωμαλία υψών ή την αποχή του γεωειδούς που προκύπτει από το γεωδυναμικό μοντέλο (ή οποία για τη περιοχή μελέτης έχει τιμές της τάξης των 37-38 μέτρων) καθώς και την έμμεση επίδραση από τη τοπογραφία (indirect effect). Η έμμεση επίδραση από τη τοπογραφία για τη περιοχή μελέτης έχει μικρή συνεισφορά καθώς οι διορθώσεις που υπολογίστηκαν είναι μικρότερες από κάποια χιλιοστά. Με το τελικό αυτό άθροισμα υπολογίζεται το γεωειδές ή το σχεδόν γεωειδές.





Εικόνα 2.24: Διαδικασία Restore

Η διαδικασία αυτή υπολογισμού του γεωειδούς χρησιμοποιείται στις περισσότερες ολοκληρωματικές και φασματικές μεθόδους υπολογισμού του γεωειδούς που αναφέρονται διεθνώς και κυρίως τα τελευταία τριάντα χρόνια (που υπολογίστηκαν πιο αξιόπιστα παγκόσμια γεωδυναμικά μοντέλα).

#### 2.18.4 Γεωδαιτικοί μετασχηματισμοί *Fourier (FFT)*

Για να μειωθεί το υπολογιστικό κόστος και επιπλέον για να παραχθούν ομοιογενή δεδομένα σε ένα κάρναβο έχουν χρησιμοποιηθεί οι μετασχηματισμοί *Fourier* για την επίλυση των ολοκληρωμάτων της γεωδαισίας. Παρακάτω θα παραλείψουμε τα θεωρητικά για τους μετασχηματισμούς και θα παραθέσουμε μόνο την εφαρμογή τους στα θέματα που αφορούν τη γεωδαισία.

- Ο υπολογισμός της αποχής του γεωειδούς σε πολική προσέγγιση  $N_{\Delta g}$  σε μια περιοχή  $E$  μπορεί να υπολογιστεί από το παρακάτω διπλό ολοκλήρωμα :

$$N(x_p, y_p) = \frac{1}{2\pi\gamma} \iint_E \frac{\Delta g(x, y)}{\sqrt{(x_p - x)^2 + (y_p - y)^2}} dx dy = \frac{1}{\gamma} \Delta g(x_p, y_p) * I_N(x_p, y_p) \quad (2.69)$$

όπου  $I_N$  είναι η πολική μορφή της συνάρτησης του *Stokes*:

$$I_N(x, y) = \frac{1}{2\pi} * \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (2.70)$$

Η σχέση (+) δημιουργείται από 2 ευθείς και 1 αντίστροφο μετασχηματισμό *Fourier*:

$$N(x, y) = \frac{1}{\gamma} F^{-1}(F(\Delta g(x, y))F(I_N(x, y))) = \frac{1}{\gamma} F^{-1}(\Delta G(u, v) * L_N(u, v)) \quad (2.71)$$

Χρησιμοποιώντας έναν κάνναβο  $M \times N$  με ανωμαλίες βαρύτητας με βήμα καννάβου  $\Delta x$  και  $\Delta y$ , η αποχή του γεωειδούς σε ένα σημείο  $(x_k, y_l)$  υπολογίζεται:

$$N(x_k, y_l) = \frac{1}{2\pi\gamma} \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} (\Delta g(x_i, y_j) I_N(x_k - x_i, y_l - y_j)) \Delta x \Delta y \quad (2.72)$$

η οποία σχέση γίνεται:

$$N(x_k, y_l) = \frac{1}{2\pi\gamma} F^{-1}(\Delta G(u_m, v_n) * L_N(u_m, v_n)) \quad (2.73)$$

στη παραπάνω σχέση η ποσότητα  $\Delta G$  υπολογίζεται:

$$\Delta G(u_m, v_n) = F(\Delta g(x_k, y_l)) = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} [(\Delta g(x_k, y_l) e^{-2\pi j(\frac{mk}{M} + \frac{nl}{N})}) \Delta x \Delta y] \quad (2.74)$$

ενώ η ποσότητα  $L_N$  έπειτα από πράξεις ισούται με :

$$L_N(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} I_N(x, y) e^{-2\pi j(ux+vy)} dudv = \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}} = \frac{1}{q} \quad (2.75)$$

Με τη σφαιρική προσέγγιση του ολοκληρώματος του *Stokes* και τη χρησιμοποίηση καννάβου με ανωμαλίες ελευθέρου αέρα ο τύπος που προκύπτει είναι:

$$N(\lambda_k, \phi_1) = \frac{R}{4\pi\gamma} F^{-1}(F(\Delta g(\lambda_k, \phi_1) \cos \phi) F(S(\lambda_k, \phi_1, \phi))) \quad (2.76)$$

### 2.18.5 Βέλτιστη προσαρμογή αποτελεσμάτων

Θεωρώντας ότι τα υψόμετρα του γεωειδούς που προέρχονται από το μετρήσεις GPS σε σημεία γνωστού υψομέτρου, έχουν μεγαλύτερη ακρίβεια σε σχέση με εκείνα που προέρχονται από οποιοδήποτε υπολογισμό, θα εφαρμοστεί μια διαδικασία προσδιορισμού των βέλτιστων υψομέτρων του γεωειδούς. Πιο συγκεκριμένα, τα υψόμετρα του βαρυτομετρικού γεωειδούς ( $N_{grv}$ ) προσαρμόζονται στις αποχές γεωειδούς που

προέρχονται από μετρήσεις GPS ( $N_{gps}$ ). Με τον τρόπο αυτό ελαχιστοποιούνται οι μεταξύ τους διαφορές και προκύπτουν τα υψόμετρα του βέλτιστου γεωειδούς ( $N_{detr}$ ). Για το σκοπό αυτό, χρησιμοποιείται το παρακάτω μοντέλο μετασχηματισμού των τεσσάρων παραμέτρων των *Heiskanen and Moritz*(1967):

$$N_{detr} = N_{grv} + b_0 \cos\varphi \cos\lambda + b_1 \cos\varphi \sin\lambda + b_2 \sin\varphi \cos\lambda + b_3 \sin\varphi \sin\lambda \quad (2.77)$$

όπου  $b_0$ ,  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $b_3$ , είναι οι παράμετροι του μετασχηματισμού και  $\varphi, \lambda$  οι γεωγραφικές συντεταγμένες του κάθε σταθμού. Με τη βέλτιστη προσαρμογή επιτυγχάνεται η εξάλειψη τυχόν συστηματικών σφαλμάτων κατά τη διάρκεια των υπολογισμών και η τελική συμφωνία του μοντέλου με τα σημεία ελέγχου.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

## Μέθοδοι Χωρικής Παρεμβολής

### 3.1. Εισαγωγή

Στις μέρες μας έχουμε σημαντικές δυνατότητες υπολογισμού με υψηλή ακρίβεια των γεωμετρικών υψομέτρων ( $h$ ) σημείων ενδιαφέροντος από τα δορυφορικά συστήματα εντοπισμού GNSS. Παράλληλα, νέες τεχνολογικές δυνατότητες για τις μετρήσεις βαρύτητας έχουν οδηγήσει σε ανάλογες δυνατότητες υπολογισμού υψηλής ακρίβειας μοντέλων του γεωειδούς από το συνδυασμό επίγειων και εναέριων μετρήσεων βαρύτητας στις ηπειρωτικές περιοχές, δορυφορικής αλτιμετρίας στους ωκεανούς, και μετρήσεων βαρύτητας από ειδικές δορυφορικές αποστολές (π.χ. *GOCE*). Παρά τα σημαντικά οφέλη από αυτές τις βελτιώσεις, το πρόβλημα συνδυασμού ετερογενών δεδομένων, για τον υπολογισμό ορθομετρικών υψομέτρων ή/και βελτίωσης των μοντέλων του γεωειδούς σε τοπικές κλίμακες, αποκτά ιδιαίτερη πρακτική σημασία.

Σε αυτό το κεφάλαιο θα εξετάσουμε μεθοδολογίες (αλγόριθμοι) βέλτιστου συνδυασμού και χωρικής παρεμβολής γεωμετρικών υψομέτρων ( $h$ ), ορθομετρικών υψομέτρων ( $H$ ) και υψομέτρων του γεωειδούς ( $N$ ) και η χρήση κατάλληλων εργαλείων για τον υπολογισμό τους.

Η χωρική παρεμβολή έχει πολλές εφαρμογές στις φυσικές επιστήμες. Είναι το πρώτο από τα δύο βασικά βήματα επαναδειγματοληψίας και μετασχηματίζει ένα διακριτό πίνακα σε μία συνεχή συνάρτηση. Ακόλουθη δειγματοληψία αυτού του ενδιάμεσου αποτελέσματος παράγει την αναδειγματοληπτημένη διακριτή συνάρτηση. Επομένως, οι μέθοδοι παρεμβολής έχουν καταλάβει μία σημαντική θέση στην επεξεργασία εικόνων. Είναι αναγκαίες στην παραγωγή υψομέτρων, όπως και στην μεταεπεξεργασία μοντέλων γεωειδούς. Οι μέθοδοι παρεμβολής σε εικόνα είναι τόσο παλιές όσο τα γραφικά ηλεκτρονικού υπολογιστή και η επεξεργασία εικόνας. Στα πρώιμα χρόνια απλοί αλγόριθμοι, όπως ο αλγόριθμος κοντινότερου γείτονα ή η γραμμική παρεμβολή, χρησιμοποιήθηκαν για επαναδειγματοληψία. Ως αποτέλεσμα της θεωρίας της πληροφορίας,

που εισήγαγε ο Shannon στο τέλος του 1940, η συνάρτηση *sinc* έγινε δεκτή ως η επίλεκτη συνάρτηση παρεμβολής. Ωστόσο, αυτός ο ιδανικός παρεμβολέας έχει άπειρη κρουστική απόκριση (*Infinite Impulse Response, IIR*) και δεν είναι κατάλληλος για τοπική παρεμβολή με πεπερασμένη κρουστική απόκριση (*Finite Impulse Response, FIR*). Από μαθηματική άποψη τα πολώνυμα *Taylor* ή *Lagrange* έχουν προταθεί για την προσέγγιση της συνάρτησης *sinc*. Επιπρόσθετα, με κάποιο κόστος στο χρόνο υπολογισμού, η ποιότητα επαναδειγματοληπτημένων εικόνων μπορεί να βελτιωθεί με τη χρήση της κυβικής παρεμβολής σε σύγκριση με τη χρήση της παρεμβολής κοντινότερου γείτονα και της γραμμικής παρεμβολής ή των προσεγγίσεων *B-spline*. Επίσης, η παρεμβολή *B-spline* έχει αποδειχθεί ανώτερη της κυβικής παρεμβολής. Η χρήση τετραγωνικών πολωνύμων σε μικρές περιοχές μειώνει το υπολογιστικό κόστος και αποφέρει παρόμοια ποιότητα σε σύγκριση με τη χρήση σύνθετων οικογενειών δομών παρεμβολής μεγάλων διαστάσεων. Οι μέθοδοι παραθυρική *sinc*, *Lagrange* αλλά και εκτεταμένες δομές για κυβική παρεμβολή με  $6 \times 6$  ή  $8 \times 8$  σημεία στήριξης συμπεριφέρονται ανώτερα στην πλειοψηφία των εφαρμογών. Στη βιβλιογραφία έχει παρουσιαστεί επίσης η γεωστατιστική τεχνική παρεμβολής *Kriging*. Πρόκειται για μία τεχνική η οποία διαφοροποιείται σημαντικά από τις συμβατικές τεχνικές παρεμβολής. Έχει ως στόχο την ελαχιστοποίηση της διακύμανσης σφάλματος και το μηδενισμό της μέση τιμής των σφαλμάτων εκτίμησης.

Η χρήση συναρτήσεων παρεμβολής αποτελεί την παραδοσιακή μέθοδο για αύξηση ανάλυσης του μοντέλου. Γενικά, οι τεχνικές παρεμβολής δημιουργούν ένα μοντέλο βελτιωμένης ανάλυσης από μία εικόνα χαμηλής ανάλυσης. Ωστόσο, η ποιότητα του μοντέλου που δημιουργείται από τους αλγόριθμους παρεμβολής, οι οποίοι δέχονται ως είσοδο μόνο μία τιμή, περιορίζεται από την ποσότητα των δεδομένων που υπάρχουν στην τιμή εισόδου. Η διαδικασία της παρεμβολής δεν μπορεί να παράξει τα κομμάτια υψηλών συχνοτήτων που χάθηκαν κατά τη δειγματοληψία. Πιο σημαντική βελτίωση στην ανάλυση δεδομένων μπορεί να επιτευχθεί μέσω εξέτασης δεδομένων πολλαπλής εισόδου, όπως συμβαίνει στην ανακατασκευή εικόνας *super-resolution*.

### 3.2. Είδη Παρεμβολής

Για την επαναδειγματοληψία μοντέλου το βήμα της παρεμβολής πρέπει να ανακατασκευάζει μία διδιάστατη συνεχής συνάρτηση  $s(x,y)$  από τα διακριτά δείγματά του  $s(k,l)$ , όπου  $s,x,y \in \mathbb{R}$  και  $k,l \in \mathbb{N}^0$ . Επομένως, η τιμή πλάτους στη θέση  $(x,y)$  πρέπει να εκτιμηθεί μέσω των διακριτών γειτόνων της. Αυτή η εκτίμηση μπορεί να περιγραφεί ως η συνέλιξη των δειγμάτων της διακριτής εικόνας με τη συνεχή διδιάστατη “απόκριση”  $h_{2D}(x,y)$  ενός διδιάστατου φίλτρου ανακατασκευής. Δηλαδή:

---

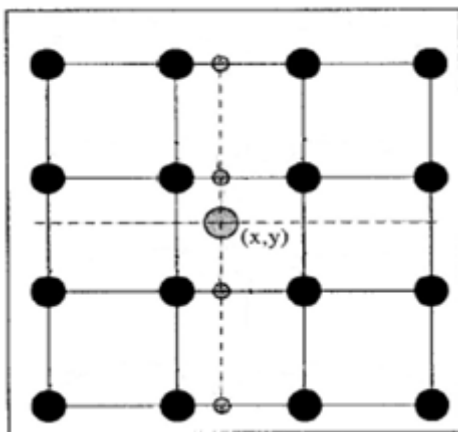
Δημιουργία τοπικού μοντέλου γεωειδούς στη περιοχή της Θεσσαλίας

$$s(x, y) = \sum_k \sum_l s(k, l) h_{2D}(x - k, y - l) \quad (3.1)$$

Συνήθως, χρησιμοποιούνται συμμετρικές και διαχωρίσιμες δομές παρεμβολής με σκοπό τη μείωση της υπολογιστικής πολυπλοκότητας. Ισχύει δηλαδή

$$h_{2D}(x, y) = h(x)h(y) \quad (3.2)$$

Το σχήμα 3.1 απεικονίζει την παρεμβολή του σημείου  $(x, y)$  σε μία γειτονιά  $4 \times 4$ . Η παρεμβολή πραγματοποιείται στη διεύθυνση  $x$  πρώτα, όπου τα μικρά γκρι ενδιάμεσα σημεία παράγονται με τέσσερις μονοδιάστατες παρεμβολές. Αυτά τα σημεία χρησιμοποιούνται για την τελική μονοδιάστατη παρεμβολή στη διεύθυνση  $y$ .



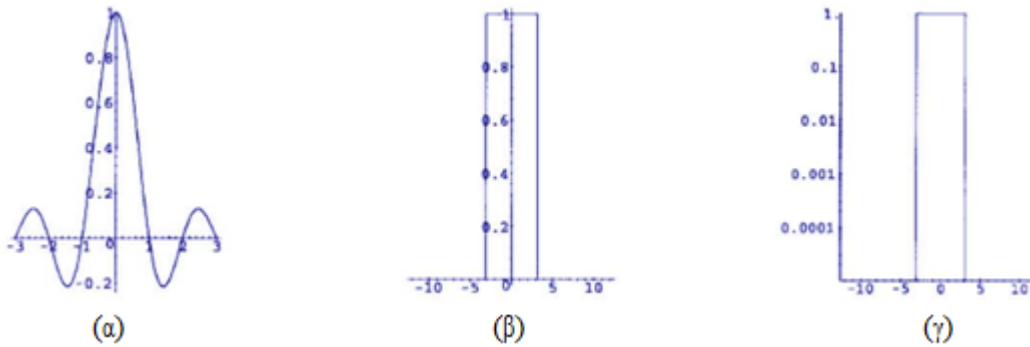
Σχήμα 3.1: Μονοδιάστατη αποσύνθεση της διδιάστατης παρεμβολής  $N \times N$  του σημείου  $(x, y)$

### 3.2.1 Ιδανική Παρεμβολή

Σύμφωνα με τη θεωρία δειγματοληψίας η σάρωση μίας συνεχούς εικόνας  $s(x, y)$  δίνει άπειρες επαναλήψεις του συνεχούς φάσματός της  $S(u, v)$  στο χώρο *Fourier*, οι οποίες δεν αλληλοεπικαλύπτονται. Εάν ισχύει το προαναφερθέν, και μόνο τότε, η αρχική εικόνα  $s(x, y)$  μπορεί να ανακατασκευαστεί τέλεια από τα δείγματά της  $s(k, l)$  μέσω πολλαπλασιασμού με ένα κατάλληλο ορθογώνιο πρίσμα στο χώρο *Fourier*. Η μονοδιάστατη ιδανική παρεμβολή ισοδυναμεί με πολλαπλασιασμό με μία ορθογώνια συνάρτηση στο χώρο *Fourier*, ενώ στο χώρο μπορεί να πραγματοποιηθεί με μία συνέλιξη με τη συνάρτηση *sinc*

$$h_{ideal}(x) = \frac{\sin(x)}{x} = \text{sinc}(x) \quad (3.3)$$

Στο Σχήμα 3.2(α) απεικονίζεται ο ιδανικός παρεμβολέας άπειρης απόκρισης. Η συνάρτηση μεταφοράς του ιδανικού παρεμβολέα είναι σταθερή και ίση με μονάδα στη ζώνη διέλευσης. Επιπρόσθετα, στο Σχήμα 3.2(γ) παρουσιάζεται ένα λογαριθμικό γράφημα της απόκρισης *Fourier* του φίλτρου, προκειμένου να δοθεί έμφαση στις κυματώσεις μέσα στη ζώνη αποκοπής  $|\omega| > \pi$ . Όπως φαίνεται η συνάρτηση μεταφοράς της ιδανικής δομής έχει τιμή μηδέν μέσα στη ζώνη αποκοπής.



**Σχήμα 3.2:Ιδανική παρεμβολή. (α) Γραφική αναπαράσταση της δομής για  $x < 3$ . (β)Μέτρο του μετασχηματισμού *Fourier*. (γ) Λογαριθμική γραφική αναπαράσταση του μέτρου (τα σχήματα δημιουργήθηκαν μέσω *Matlab*)**

Ορισμένες θεμελιώδεις ιδιότητες κάθε παρεμβολέα μπορούν να εξαχθούν από αυτή την ιδανική συνάρτηση παρεμβολής. Η  $h_{ideal}(x)$  είναι θετική από 0 έως 1, αρνητική από 1 έως 2, θετική από 2 έως 3, κ.τ.λ. Για  $h(0) \equiv 1$  οι συγκεκριμένοι μηδενισμοί εγγυώνται πως η εικόνα δεν τροποποιείται εάν επαναδειγματοληπτηθεί στο ίδιο πλέγμα. Επομένως, δομές για τις οποίες ισχύει:

$$h(x) = \begin{cases} 1, & x=0 \\ 0, & x=\pm 1, \pm 2, \dots \end{cases} \quad (3.4)$$

αποφεύγουν την εξομάλυνση και διατηρούν τις υψηλές συχνότητες. Οι συγκεκριμένες δομές ονομάζονται παρεμβολείς. Οι δομές συναρτήσεων με καλή απόδοση στην παρεμβολή τείνουν να έχουν αυτή τη γενική μορφή. Σε αντίθεση με τους παρεμβολείς, οι δομές που δεν ικανοποιούν τη Σχέση (3.4) ονομάζονται προσεγγιστές .

Η πραγματοποίηση δειγματοληψίας στη συνεχή εικόνα που έχει υποστεί παρεμβολή ισοδυναμεί με την πραγματοποίηση παρεμβολής στη διακριτή εικόνα με μία δειγματοληπτημένη συνάρτηση παρεμβολής. Η δειγματοληψία της συνάρτησης παρεμβολής μεταφέρει τις υψηλές συχνότητες της συνάρτησης αυτής στις χαμηλότερες

συχνότητες. Μόνο στην περίπτωση της ιδανικής παρεμβολής δεν υπάρχουν υψηλότερες συχνότητες. Γι' αυτό το λόγο μέσα στο διάστημα η δειγματοληπτημένη συνάρτηση παρεμβολής έχει το ίδιο φάσμα *Fourier* με τη μη δειγματοληπτημένη συνάρτηση παρεμβολής. Ωστόσο, είναι αναγκαία η εξέταση όχι μόνο της συνεχούς συνάρτησης παρεμβολής  $h(x)$ , αλλά και των τυπικά δειγματοληπτημένων συναρτήσεων παρεμβολής  $h(k)$ . Ειδικότερα, το άθροισμα όλων των δειγμάτων πρέπει να είναι μονάδα για κάθε αντικατάσταση  $0 \leq d < 1$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(d+k) \equiv 1 \quad (3.5)$$

Δομές συναρτήσεων που ικανοποιούν ή όχι τη Συνθήκη (3.5) ονομάζονται δομές *DC-constant* ή *DC-inconstant*, αντίστοιχα. Οι δομές *DC-constant* αποδεικνύονται ανώτερες από τις δομές *DC-inconstant*. Η Σχέση (3.5) ονομάζεται Διαίρεση της Συνθήκης Μονάδας και μπορεί εύκολα να υπολογιστεί στο χώρο *Fourier*. Σύμφωνα με τη θεωρία πληροφορίας το άθροισμα, στη Σχέση (3.5), διακριτών δειγμάτων της δομής  $h(x)$  ισοδυναμεί με την περιοχή κάτω από τη συνεχή συνάρτηση που λαμβάνεται μέσω πολλαπλασιασμού ή δειγματοληψία της  $h(x)$  με μία ακολουθία συναρτήσεων δέλτα  $\delta(x)$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(d+k) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) * i(x+d) dx$$

(3.6)

όπου

$$i(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(x+k)$$

(3.7)

Εξ ορισμού το βάρος μίας μονής ώσης δέλτα αντιστοιχεί στο πλάτος της δομής  $h$  στη θέση του  $d$ . Η ακολουθία των συναρτήσεων δέλτα ονομάζεται συνάρτηση *scha*  $i(x)$ . Εάν η έκφραση υπό ολοκλήρωση στη σχέση (3.6) επεκταθεί κατά  $e^{i2\pi fx}$ , που ισοδυναμεί με 1 για  $f=0$ , ανακαλύπτεται ο ορισμός του μετασχηματισμού *Fourier* στη συγκεκριμένη σχέση. Τότε, η συνάρτηση προς μετασχηματισμό κατά *Fourier* είναι η  $h(x) i(x+d)$ . και από σχέσεις (3.5), (3.6) προκύπτει

$$H(f) * \underline{i}(f) e^{i2\pi fd} \Big|_{f=0} \equiv 1 \quad (3.8)$$

όπου  $H(f)$  είναι ο μετασχηματισμός *Fourier* της  $h(x)$ . Οι συνθήκες στη Σχέση (3.8), επειδή είναι αναγκαίες αλλά όχι και ικανές στην παρεμβολή, χρησιμοποιούνται για το διαχωρισμό δομών *DC-constant* από δομές *DC-inconstant* στο χώρο *Fourier*.



### 3.2.2 Παρεμβολή *sinc*

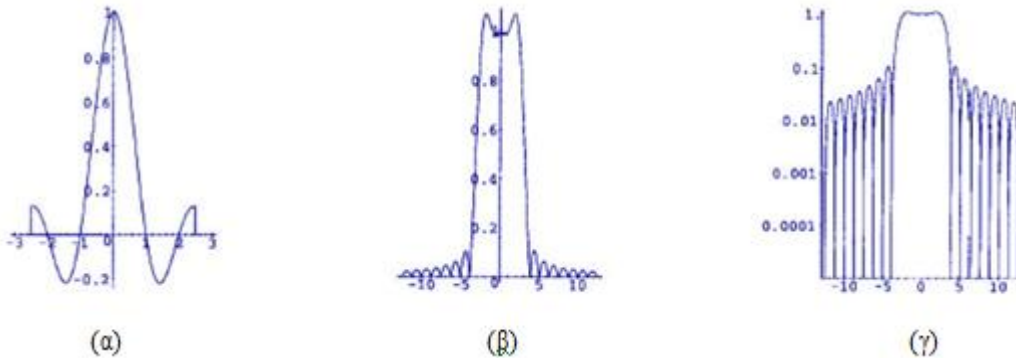
Η συνάρτηση *sinc* πραγματοποιεί ακριβή ανακατασκευή του  $s(x, y)$  αλλά, είναι χωρικά απεριόριστη. Υπάρχουν οι ακόλουθοι συνηθισμένοι τρόποι αντιμετώπισης αυτής της δυσκολίας, αποκοπή και χρήση συνάρτησης παραθύρου  $w(x)=\text{const}(x)=1$  και  $w(x) \neq \text{const}(x)$  αντίστοιχα. Δηλαδή,

$$h_{N \text{ sinc}}(x) = \begin{cases} h(x)_{\text{ideal}} w(x), & 0 \leq |x| < N/2 \\ 0, & \text{οπουδήποτε αλλού} \end{cases} \quad (3.9)$$

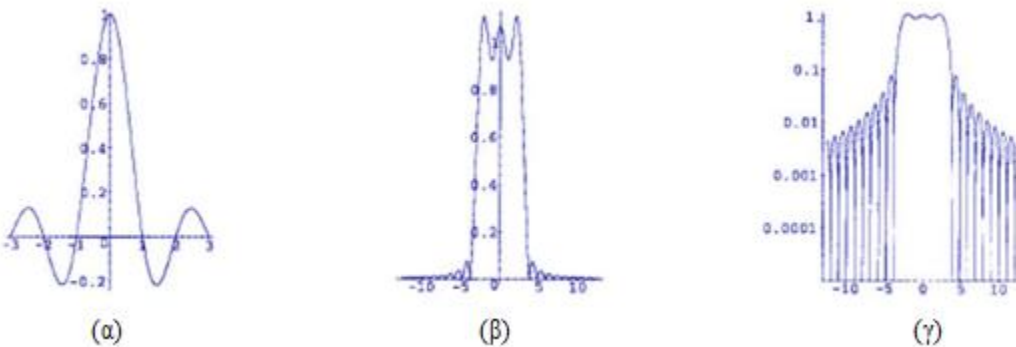
όπου  $N$  είναι ο αριθμός των σημείων στήριξης της πεπερασμένης δομής. Η αποκοπή ισοδυναμεί με τον πολλαπλασιασμό του  $h_{\text{ideal}}(x)$  με μία ορθογώνια συνάρτηση στο πεδίο του χώρου, που ισοδυναμεί με την συνέλιξη με μία συνάρτηση *sinc* στο πεδίο των συχνοτήτων. Στα Σχήματα 3.3 και 3.4 απεικονίζεται το συγκεκριμένο φαινόμενο, που αποκαλείται φαινόμενο *Gibbs*, το οποίο παράγεται από μία αποκομμένη συνάρτηση *sinc* με  $N=5$  και  $N=6$  σημεία στήριξης, αντίστοιχα. Επιπρόσθετα, η σχέση (3.8) παραβιάζεται με κάθε επιλογή  $N < \infty$  (πεπερασμένο). Δηλαδή, όλες οι αποκομμένες δομές *sinc* είναι δομές *DC-inconstant*. Η περιοχή της συνάρτησης διαφέρει από τη μονάδα περισσότερο για τις άρτιου μεγέθους δομές από ό,τι για τις περιττού μεγέθους δομές. Επομένως, όταν τα σημεία στήριξης της δομής αυξάνονται από το  $N=5$  στο  $N=6$  μεγεθύνονται σημαντικά οι υπερακοντισμοί μέσα στη ζώνη διέλευσης. Σχετικά με τις ιδιότητες ζώνης διέλευσης μίας αποκομμένης δομής, το πλήθος των σημείων στήριξης προτιμάται να είναι περιττό. Για την αποκοπή του ιδανικού παρεμβολέα μπορούν να χρησιμοποιηθούν και άλλα παράθυρα πέρα από την ορθογώνια συνάρτηση, όπως η συνάρτηση συνημιτόνου  $w = \cos\left(\frac{\pi x}{N}\right)$  και το παράθυρο *Hamming*. Μία συστηματική προσέγγιση για αρμονική ανάλυση με τον διακριτό μετασχηματισμό *Fourier* αναφορικά με τη χρήση παραθύρων παρουσιάζεται στην σχέση (3.10), σύμφωνα με την οποία τα παράθυρα *Kaiser-Bessel* και *Blackman-Harris* είναι τα καλύτερα. Η χρήση του παραθύρου

$$w(x) = w_0 + w_1 \cos(2\pi \frac{2x}{N}) + w_2 \cos(2\pi \frac{4x}{N}) \quad (3.10)$$

όπου  $N=6$ ,  $w_0=0.42323$ ,  $w_1=0.49755$  και  $w_2=0.07922$  οδηγεί σε έναν παρεμβολέα *DC-constant*.



**Σχήμα 3.3:** Αποκομμένη παρεμβολή *sinc*,  $N=5$ . (α) Η δομή. (β) Το μέτρο του μετασχηματισμού *Fourier*. (γ) Λογαριθμική γραφική απεικόνιση του μέτρου (τα σχήματα δημιουργήθηκαν μέσω *Matlab*)



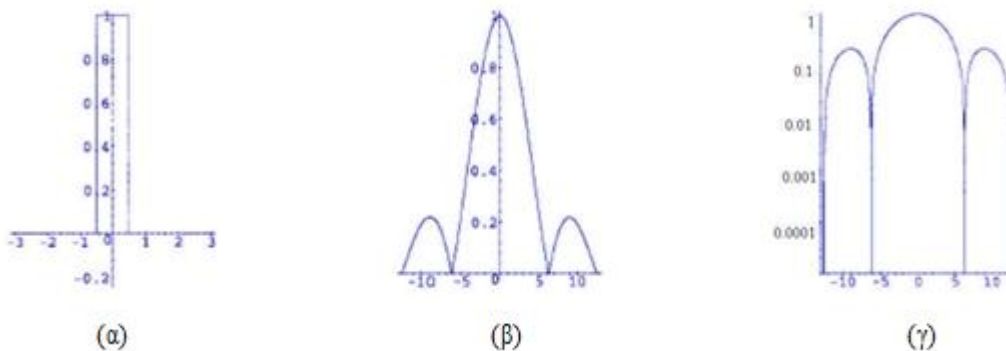
**Σχήμα 3.4:** Αποκομμένη παρεμβολή *sinc*,  $N=6$ . (α) Η δομή. (β) Το μέτρο του μετασχηματισμού *Fourier*. (γ) Λογαριθμική γραφική απεικόνιση του μέτρου (τα σχήματα δημιουργήθηκαν μέσω *Matlab*)

### 3.2.3 Παρεμβολή κοντινότερου γείτονα

Η μέθοδος κοντινότερου γείτονα αποτελεί τον ευκολότερο τρόπο προσέγγισης της συνάρτησης *sinc* με μία χωρικά πεπερασμένη δομή. Η τιμή  $s(x)$  στη θέση  $x$  επιλέγεται ως η επόμενη γνωστή τιμή  $s(k)$ . Επομένως, για τη συγκεκριμένη παρεμβολή απαιτείται μόνο 1 σημείο στήριξης  $N=1$ . Ισοδυναμεί με συνέλιξη με μία ορθογώνια συνάρτηση (Σχήμα 3.5)

$$h_1(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq |x| < 0.5 \\ 0, & \text{οπουδήποτε αλλού} \end{cases} \quad (3.11)$$

Η δομή  $h_1(x)$  είναι ένας παρεμβολέας DC-constant. Το Σχήμα 3.5(β) δείχνει ότι το φάσμα *Fourier* της δομής κοντινότερου γείτονα ισοδυναμεί με τη συνάρτηση *sinc* εκφρασμένη στο πεδίο των συχνοτήτων. Στη λογαριθμική γραφική απεικόνιση, Σχήμα 3.5(γ), φαίνονται προεξέχοντες πλευρικοί λοβοί σε εκείνες τις περιοχές του συχνοτικού χώρου όπου οι επαναλήψεις του  $S$  θα έπρεπε να είναι συμπιεσμένες. Το κέρδος στη ζώνη διέλευσης ελαττώνεται γρήγορα στο  $2/\pi \approx 64\%$  στο σημείο αποκοπής. Το πλάτος του πλευρικού λοβού είναι μεγαλύτερο από 20%. Επομένως, η συγκεκριμένη παρεμβολή σε εικόνες σχετίζεται με ισχυρά φαινόμενα αναδίπλωσης συχνοτήτων και θόλωσης.



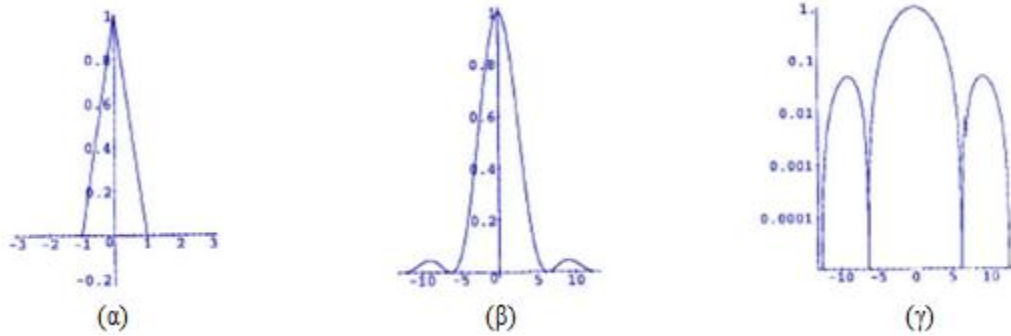
**Σχήμα 3.5: Παρεμβολή κοντινότερου γείτονα. (α) Η δομή. (β) Το μέτρο του μετασχηματισμού *Fourier*. (γ) Λογαριθμική γραφική απεικόνιση του μέτρου (τα σχήματα δημιουργήθηκαν μέσω *Matlab*).**

### 3.2.4 Γραμμική Παρεμβολή

Για τη διγραμμική παρεμβολή, οι τιμές των δύο άμεσων γειτόνων σταθμίζονται με την απόστασή τους στο αντίθετο σημείο της παρεμβολής. Επομένως, η γραμμική προσέγγιση της συνάρτησης *sinc* ακολουθεί την τριγωνική συνάρτηση

$$h_2(x) = \begin{cases} 1-|x|, & 0 \leq |x| < 1 \\ 0, & \text{οπουδήποτε αλλού} \end{cases} \quad (3.12)$$

Η τριγωνική συνάρτηση  $h_2(x)$  ανταποκρίνεται σε ένα μέτριο βαθυπερατό φίλτρο  $H_2(f)$  στον τομέα των συχνοτήτων, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.6. Συνεπώς, η γραμμική δομή είναι ένας παρεμβολέας DC-constant. Οι πλευρικοί λοβοί στη ζώνη αποκοπής είναι κάτω του 10%, που παραμένει βέβαια υπολογίσιμο ποσοστό. Επομένως, τα κύρια μειονεκτήματα της γραμμικής παρεμβολής είναι η εξασθένηση των κομματιών υψηλής συχνότητας και το φαινόμενο αναδίπλωσης συχνοτήτων πέρα από το σημείο αποκοπής μέσα στις χαμηλές συχνότητες.



**Σχήμα 3.6. Γραμμική παρεμβολή. (α) Η δομή. (β) Το μέτρο του μετασχηματισμού Fourier. (γ) Λογαριθμική γραφική απεικόνιση του μέτρου (τα σχήματα δημιουργήθηκαν μέσω Matlab)**

### 3.2.5 Τετραγωνική Προσέγγιση

Μία από τις πιο συχνά εφαρμοσμένες ιδέες για τη δημιουργία δομών που μοιάζουν με τις δομές παρεμβολής *sinc* είναι η χρήση αλγεβρικών πολυωνύμων. Πλεονεκτήματα αυτών των πολυωνύμων είναι ο εύκολος προσδιορισμός και η ομοιόμορφη προσέγγιση συνεχών συναρτήσεων σε πεπερασμένα διαστήματα. Στις προηγούμενες παραγράφους έγινε λόγος για σταθερά και γραμμικά πολυώνυμα. Αναφορικά με τις τετραγωνικές συναρτήσεις, ενδέχεται να εισάγουν παραμορφώσεις στη φάση. Για παράδειγμα, εάν τα πολυώνυμα εκτείνονται από το  $-1$  έως το  $2$  παράγονται ασύμμετρες δομές με μη γραμμικές φάσεις. Επομένως εξάγεται μία οικογένεια τετραγωνικών συναρτήσεων που συμπεριφέρονται καλύτερα. Σε αντίθεση με άλλες πολυωνυμικές μεθόδους παρεμβολής, αυτή η τετραγωνική οικογένεια βασίζεται σε μία συμμετρική  $3 \times 3$  γειτονιά από  $-3/2$  έως  $3/2$  και τα σημεία επαφής είναι κλάσματα. Όσον αφορά διαχωρισμένες δομές, τα τρία κοντινότερα σημεία χρησιμοποιούνται για παρεμβολή. Οι δύο άμεσοι γείτονες και ένα τρίτο σημείο τοποθετούνται κάποιες φορές στην αριστερή πλευρά και κάποιες άλλες φορές στη δεξιά πλευρά. Μία συμμετρική τετραγωνική δομή έχει την ακόλουθη μορφή:

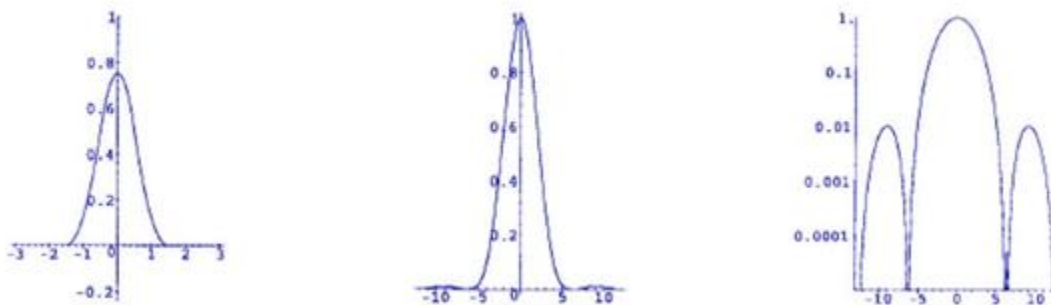
$$h_{3,Quad}(x) = \begin{cases} A_1|x|^2 + B_1|x| + C_1, & 0 \leq |x| < \frac{1}{2} \\ A_2|x|^2 + B_2|x| + C_2, & \frac{1}{2} \leq |x| < \frac{3}{2} \\ 0, & \text{οπουδήποτε αλλού} \end{cases} \quad (3.13)$$

όπου  $A_i, B_i, C_i \in \mathbb{R}$  και  $B_1=0$  λόγω της  $C1$ -συνέχειας. Μία συνάρτηση ονομάζεται  $Cx$ -συνεχής εάν η  $x$ -οστή παράγωγός της είναι ολομορφική. Προκειμένου να δημιουργηθεί μία δομή χρήσιμη για την παρεμβολή, είναι απαραίτητο να τεθούν πρόσθετοι περιορισμοί. Τα πολυώνυμα πρέπει να ταιριάζουν με ακρίβεια στα αρχικά και στα τελευταία σημεία της

δομής, όπως και στα σημεία επαφής τους. Επιπλέον, πρέπει να ικανοποιείται η σχέση (3.5) προκειμένου να προκύψει μία δομή *DC-constant*. Αξιοποιώντας κατάλληλα τις παραπάνω παρατηρήσεις, η γενικής μορφής τετραγωνική δομή αποκτά την ακόλουθη μορφή του ενός βαθμού ελευθερίας  $\alpha \in \mathbb{R}$

$$h_{3_{\text{quad}}}(x) = \begin{cases} -2\alpha|x|^2 + \frac{1}{2}(\alpha+1), & 0 \leq |x| < \frac{1}{2} \\ \alpha|x|^2 - (2\alpha + \frac{1}{2})|x| + \frac{3}{4}(\alpha+1), & \frac{1}{2} \leq |x| < \frac{3}{2} \\ 0, & \text{οπουδήποτε αλλού} \end{cases} \quad (3.14)$$

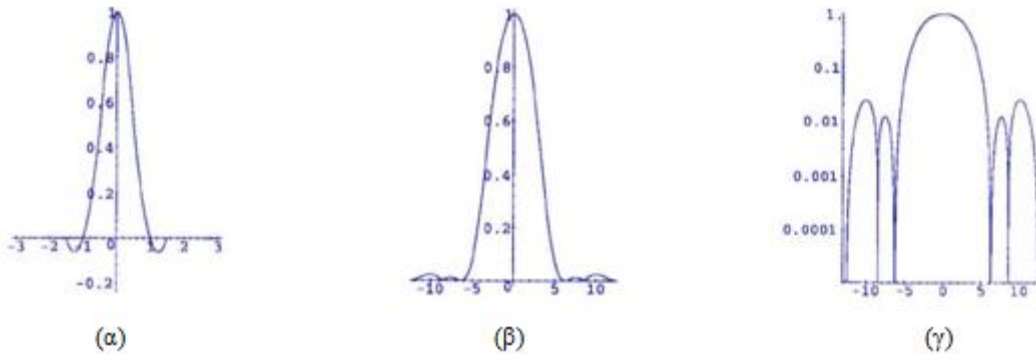
Όλα τα μέλη αυτής της μονοπαραμετρικής οικογένειας τετραγωνικών πολυωνύμων είναι πραγματικά και άρτια στο πεδίο του χώρου, επομένως παρουσιάζουν γραμμική φάση στο πεδίο των συχνοτήτων. Για την αφαίρεση του τελευταίου βαθμού ελευθερίας οι πρώτες παράγωγοι των πολυωνύμων μπορούν να αναγκαστούν να ταιριάζουν στα σημεία επαφής τους  $|x|=1/2$ . Τότε  $\alpha = -1/2$ , προκύπτει. Γι' αυτό το λόγο η τετραγωνική δομή με  $\alpha = 1/2$  ονομάζεται τετραγωνικός προσεγγιστής. Εξ ορισμού ο τετραγωνικός προσεγγιστής είναι *DC-constant*. Παρουσιάζει έναν προεξέχοντα πλευρικό λοβό στο χώρο *Fourier* με πλάτος περίπου 1%. Ο κύριος λοβός αποκλίνει σημαντικά από την ιδανική ορθογώνια μορφή. Υψηλότερες συχνότητες μέσα στη ζώνη διέλευσης υφίστανται εξασθένηση. Συνεπώς, η παρεμβολή με τον τετραγωνικό προσεγγιστή θα επιφέρει ισχυρές επιδράσεις θόλωσης.



**Σχήμα 3.7. Τετραγωνική προσέγγιση  $\alpha=-1/2$ , (α) Η δομή. (β) Το μέτρο του μετασχηματισμού *Fourier*. (γ) Λογαριθμική γραφική απεικόνιση του μέτρου (τα σχήματα δημιουργήθηκαν μέσω *Matlab*)**

### 3.2.6 Τετραγωνική Παρεμβολή

Ο μοναδικός βαθμός ελευθερίας της Σχέσης (3.14) μπορεί να χρησιμοποιηθεί προκειμένου η τετραγωνική δομή να αναγκαστεί να ικανοποιήσει τη Συνθήκη (3.4). Τότε προκύπτει  $\alpha=1$  και η πεπερασμένη δομή είναι ένας παρεμβολέας DC-constant. Ωστόσο, η συγκεκριμένη γωνία είναι καλυμμένη στο σχήμα 3.8(α) λόγω της κλίμακας της γραφικής απεικόνισης. Πρέπει να σημειωθεί ότι η συνθήκη (3.4) δεν είναι δυνατόν να ισχύσει ταυτόχρονα με την C1-συνέχεια. Αυτή η C1-ασυνέχεια ανυψώνει την εξασθένηση ζώνης αποκοπής της δομής για υψηλές συχνότητες πάνω από το 2% (σχήμα 3.8(γ)). Ωστόσο, ο τετραγωνικός παρεμβολέας εμφανίζει αποδεκτές ιδιότητες ζώνης διέλευσης (Σχήμα 3.8(β)).



**Σχήμα 3.8: Τετραγωνική παρεμβολή,  $\alpha=1$ . (α) Η δομή. (β) Το μέτρο του μετασχηματισμού Fourier. (γ) Λογαριθμική γραφική απεικόνιση του μέτρου (τα σχήματα δημιουργήθηκαν μέσω Matlab)**

### 3.2.7 Προσέγγιση B-Splines

Οι *Basis splines* (*B-splines*) αποτελούν μία από τις οικογένειες συναρτήσεων *spline* που χρησιμοποιούνται πιο συχνά. Μπορούν να εξαχθούν με μερικές αυτοσυνελίξεις μίας συνάρτησης που ονομάζεται συνάρτηση βάσης. Η δομή γραμμικής παρεμβολής  $h_2(x)$  μπορεί να θεωρηθεί ως το αποτέλεσμα της συνέλιξης της ορθογώνιας δομής κοντινότερου γείτονα  $h_1(x)$  με τον εαυτό της. Δηλαδή

$$h_2(x) = h_1(x) * h_1(x) \quad (3.15)$$

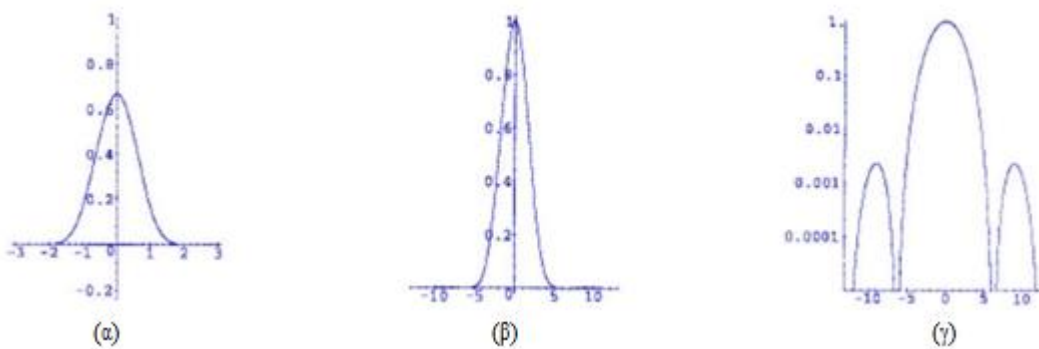
Επομένως, η ορθογώνια συνάρτηση  $h_1(x)$  μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη δημιουργία ομοιόμορφων *B-splines*  $h_N(x)$   $x$ -τάξης  $N$

$$h_N(x) = \underbrace{h_1(x) * h_1(x) * \dots * h_1(x)}_{N-1 \text{ φορές}} \quad (3.16)$$

Για  $N \rightarrow \infty$  η συγκεκριμένη διαδικασία συγκλίνει σε μία συνάρτηση *Gaussian*  $h_\infty(x)$ . Για  $N=3$  λαμβάνεται η τετραγωνική *B-spline*  $h_3(x)$  η οποία ταυτίζεται με τον προσεγγιστή

$$h_4(x) = \begin{cases} (1/2)|x|^3 - |x|^2 + 2/3, & 0 \leq |x| < 1 \\ -(1/6)|x|^3 + |x|^2 - 2|x| + 4/3, & 1 \leq |x| \leq 2 \\ 0, & \text{οπουδήποτε αλλού} \end{cases} \quad (3.17)$$

Η δομή *B-spline*  $h_4(x)$  αποτυγχάνει να καλύψει τις μηδενικές θέσεις της συνάρτησης *sinc*. Επομένως, η δομή *B-spline* είναι μάλλον μία δομή προσέγγισης και όχι μία δομή παρεμβολής. Συνεπώς, η προσέγγιση *B-spline* επιφέρει ισχυρές επιδράσεις θόλωσης αλλά, επιτρέπει επίσης την εξασθένηση ανεπιθύμητου θορύβου υψηλής συχνότητας στην εικόνα εξόδου. Ωστόσο, ο προσεγγιστής *B-spline* έχει την πολύτιμη ικανότητα της διατήρησης των ιδιοτήτων της DC-ενίσχυσης (Σχήμα 3.9(γ)). Επιπλέον, το Σχήμα 3.9 δείχνει ότι η κυβική συνάρτηση *B-spline* παρουσιάζει μία ευνοϊκή απόκριση στη ζώνη αποκοπής. Το πλάτος των πλευρικών λοβών είναι χαμηλότερο του 1%. Όμως, ο μετασχηματισμός *Fourier* της κυβικής δομής *B-spline* είναι ισοδύναμος με μία συνάρτηση  $(\text{sinc})^4$  που καταλήγει σε υπερεξομάλυνση στη ζώνη διέλευσης. Το κέρδος στη συχνότητα αποκοπής είναι μόνο γύρω στο 16.4%. Η αύξηση της τάξης του *spline* βελτιώνει την ποιότητα της παρεμβολής αλλά, προκαλείται και αύξηση των επιδράσεων εξομάλυνσης.



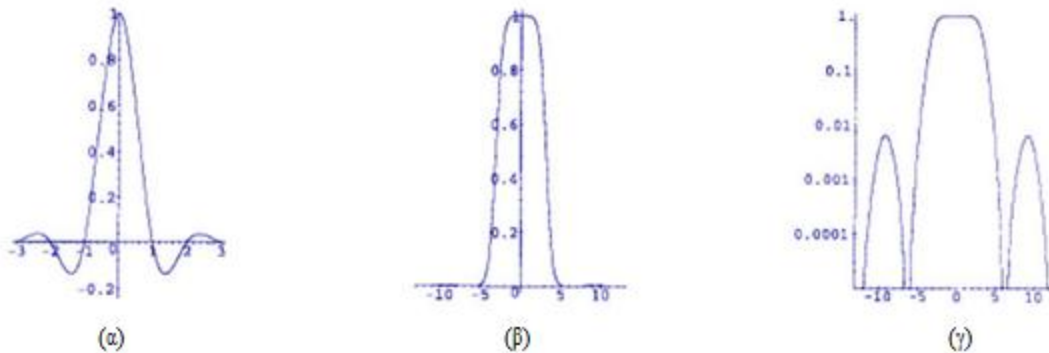
**Σχήμα 3.9: Κυβική προσέγγιση *B-spline*. (α) Η δομή. (β) Το μέτρο του μετασχηματισμού *Fourier*. (γ) Λογαριθμική γραφική απεικόνιση του μέτρου (τα σχήματα δημιουργήθηκαν μέσω *Matlab*)**

### 3.2.8 Παρεμβολή *B-Splines*

Για τη δημιουργία μίας δομής *B-spline* που πραγματοποιεί παρεμβολή ο προσεγγιστής *B-spline* εφαρμόζεται σε μία διαφορετική ομάδα δειγμάτων  $t(k)$ . Το  $t(k)$  πρέπει να εξαχθεί από τα σημεία δειγμάτων της εικόνας  $s(k)$ . με τέτοιο τρόπο ώστε η προκύπτουσα καμπύλη να πραγματοποιεί παρεμβολή στη διακριτή εικόνα. Η προκύπτουσα δομή  $h_{\text{spline}}(x)$  έχει την ακόλουθη μορφή

$$h_{\text{spline}}(x) = h_4(x) * \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sqrt{3}(\sqrt{3}-2)^{|m|} \delta(x+m) \quad (3.18)$$

Το σχήμα 3.10(α) σχεδιάζει την  $h_{\text{spline}}(x)$  στο διάστημα  $|x| < 3$ . Αν και η δομή είναι μη πεπερασμένη, τα πλάτη των μισών κυμάτων ελαττώνονται σημαντικά σε σύγκριση με αυτά του ιδανικού παρεμβολέα άπειρης κρουστικής απόκρισης. Η κυβική παρεμβολή *B-spline* παρουσιάζει εξαιρετικά χαρακτηριστικά ζώνης διέλευσης (σχήμα 3.10(β)) και το πλάτος των πλευρικών λοβών στη ζώνη αποκοπής βρίσκεται κάτω του 1% (σχήμα 3.10(γ)). Η  $h_{\text{spline}}(x)$  ικανοποιεί τις συνθήκες (3.4) και (3.5). Επομένως, είναι ένας παρεμβολέας *DC-constant*.



**Σχήμα 3.10: Κυβική παρεμβολή *B-spline*. (α) Γραφική απεικόνιση της δομής για  $|x| < 3$ . (β) Το μέτρο του μετασχηματισμού *Fourier*. (γ) Λογαριθμική γραφική απεικόνιση του μέτρου (τα σχήματα δημιουργήθηκαν μέσω *Matlab*)**

### 3.2.9 Κυβική Παρεμβολή

Τα κυβικά πολυώνυμα χρησιμοποιούνται συχνά καθώς παρουσιάζουν την ιδιότητα της *C2*-συνέχειας. Ο προσεγγιστής *B-spline*  $h_4$ , σχέση (3.17), αλλά και ο παρεμβολέας *Lagrange*  $h_{4\text{Lagra}}$ , Σχέση (3.25), δομούνται από κυβικά πολυώνυμα. Φυσικά, τα κυβικά πολυώνυμα μπορούν επίσης να χρησιμοποιηθούν για την προσέγγιση της συνάρτησης *sinc*

(α) Παρεμβολή 2 σημείων :



Στην περίπτωση αυτή μία συμμετρική δομή μπορεί να οριστεί με  $A, B, C, D \in \mathbb{R}$

$$h_{2\text{Cubic}}(x) = \begin{cases} A|x|^3 + B|x|^2 + C|x| + D, & 0 \leq |x| < 1 \\ 0, & \text{οπουδήποτε αλλού} \end{cases} \quad (3.19)$$

Οι παράμετροι A έως D μπορούν να καθοριστούν με την εφαρμογή των ακόλουθων συνθηκών :

- $h(k^-) = h(k^+)$ , C0-συνέχεια
- $h'(k^-) = h'(k^+)$ , C1-συνέχεια
- $h(k) = 1$  για  $k = 0$ , Συνθήκη (3.4)
- $h(k) = 0$  για  $k \neq 0$ , Συνθήκη (3.4)

Η σχέση (1.19) λοιπόν λαμβάνει την ακόλουθη μορφή

$$h_{2\text{Cubic}}(x) = \begin{cases} 2|x|^3 - 3|x|^2 + 1, & 0 \leq |x| < 1 \\ 0, & \text{οπουδήποτε αλλού} \end{cases} \quad (3.20)$$

Εξορισμού ο  $h_{2\text{Cubic}}(x)$  είναι ένας παρεμβολέας D-constant. Οι προκύπτουσες καμπύλες είναι παρόμοιες με αυτές που λαμβάνονται με γραμμική παρεμβολή αλλά, διατηρείται η ιδιότητα της C1-συνέχειας στον χωρικό τομέα. Δύο πλευρικοί λοβοί εμφανίζονται στο χώρο *Fourier*. Ο πρώτος λοβός ανυψώνεται στο 2% και είναι τοποθετημένος μέσα στο διάστημα  $1 \leq f < 1.5$ , ενώ το πλάτος του δεύτερου λοβού είναι περίπου 1% μέσα στο διάστημα  $1.5 \leq |f| < 2$ .

(β) Παρεμβολή 4 σημείων :

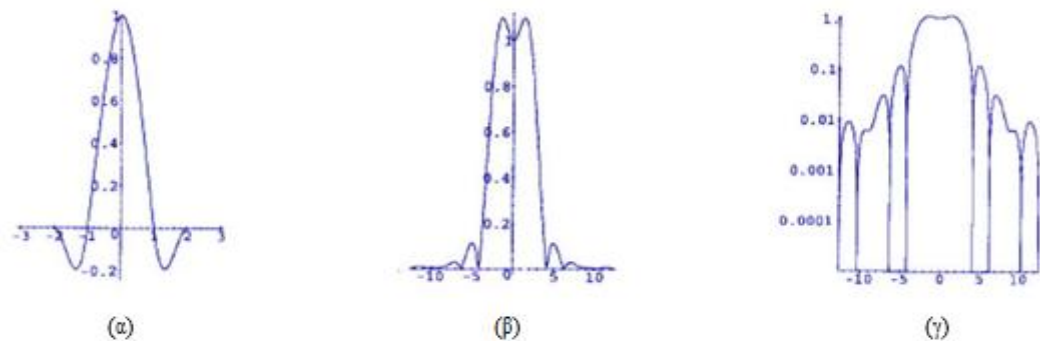
Στην κυβική παρεμβολή με 4 σημεία, οι 7 από τους 8 συντελεστές προσδιορίζονται από τις παραπάνω συνθήκες. Παραμένει λοιπόν μία ελεύθερη παράμετρος  $a$ , όπως φαίνεται στην ακόλουθη σχέση:

$$h_{4\text{Cubic}}(x) = \begin{cases} (a+2)|x|^3 - (a+3)|x|^2 + 1, & 0 \leq |x| < 1 \\ a|x|^3 - 5a|x|^2 + 8a|x| - 4a, & 1 \leq |x| < 2 \\ 0, & \text{οπουδήποτε αλλού} \end{cases} \quad (3.21)$$

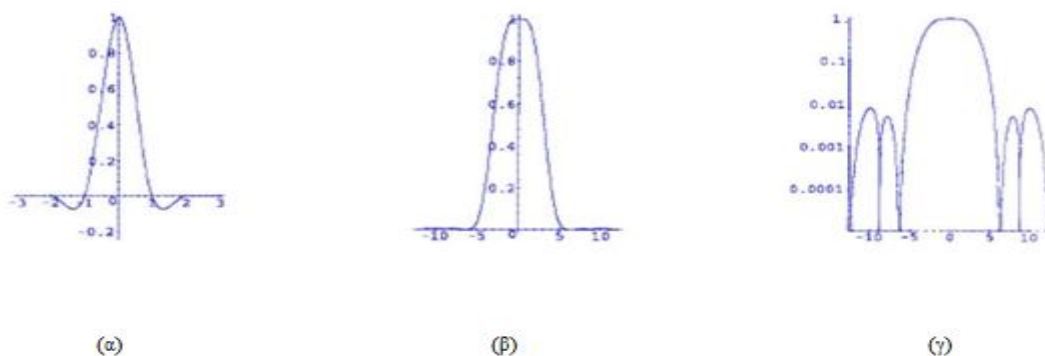
Με τη σταθερά αρνητική η δομή είναι θετική στο διάστημα από 0 έως 1 και αρνητική από το 1 έως το 2. Επομένως, λαμβάνεται ένας παρεμβολέας. Συχνότες ακριβώς κάτω από το σημείο αποκοπής ενισχύονται ελαφρώς και η μετάβαση μεταξύ της ζώνης διέλευσης και της ζώνης αποκοπής είναι αρκετά απότομη. Το πλάτος του πρώτου πλευρικού λοβού είναι πάνω από το 10% αλλά, οι κυματώσεις ελαττώνονται κάτω από το 1% για  $f > 1.3$ . Εάν το  $a$  προσδιοριστεί προκειμένου να ταιριάζει με την κλίση της συνάρτησης  $\text{sinc}$  στο  $x=1$ , τότε προκύπτει  $a = -1$ . Η ισχυροποίηση των συχνοτήτων ακριβώς κάτω από το σημείο αποκοπής ελαττώνεται σε σύγκριση με την περίπτωση του  $a = -1/3$  αλλά, η μετάβαση μεταξύ των δύο ζωνών παύει να είναι τόσο απότομη. Αυτή η τάση συνεχίζει εάν το  $a$  αυξηθεί περαιτέρω.

Για εικόνες που κυριαρχούνται από ακμές η τιμή  $a=-2/3$  ελαχιστοποιεί το σφάλμα δειγματοληψίας και ανακατασκευής. Η κυβική παρεμβολή με  $a=-1/2$  μπορεί να ανακατασκευάσει οποιοδήποτε πολυώνυμο δευτέρου βαθμού. Επιπλέον, το σφάλμα προσέγγισης είναι ανάλογο της τρίτης δύναμης της αύξησης της δειγματοληψίας. Μόνο στην περίπτωση  $a=1/2$  κυβική δομή με  $N=4$  σημεία στήριξης δεν παρουσιάζει υπερακοντισμούς μέσα στη ζώνη διέλευσης. Το Σχήμα 3.12 απεικονίζει το επίπεδο φάσμα στις χαμηλές συχνότητες το οποίο ελαττώνεται στη συχνότητα αποκοπής. Μόνο δύο πλευρικοί λοβοί εμφανίζονται στο χώρο *Fourier*. Το πλάτος και των δύο πλευρικών λοβών είναι κάτω του 1%.

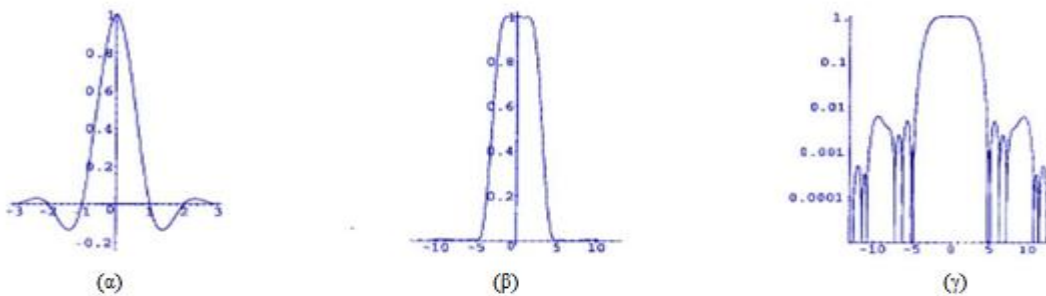
Η αύξηση του μεγέθους  $N$  της δομής παρεμβολής βελτιώνει την ποιότητα της επαναδειγματοληψίας. Το Σχήμα 3.13 δείχνει την κυβική δομή παρεμβολής για  $N=6$ . Σε σύγκριση με τα άλλα παραδείγματα κυβικών δομών, το πεδίο της ζώνης διέλευσης μεγεθύνεται και αποκτά οξείες ακμές, ενώ τα πλάτη των πλευρικών λοβών ελαττώνονται περαιτέρω. Υψηλότερες συχνότητες μέσα στη ζώνη διέλευσης ενισχύονται κάπως. Μοναχά παρεμβολείς *DC-constant* έχουν εξαχθεί σε αυτήν την υποπαράγραφο. Η συνθήκη (3.4) ικανοποιείται με τον ορισμό των οριακών συνθηκών και η συνθήκη (3.8) ικανοποιείται για τα μεγέθη και τις παραμέτρους όλων των δομών.



**Σχήμα 3.11: Κυβική παρεμβολή με  $N=4$ ,  $a=-1.3$ . (α) Η δομή. (β) Το μέτρο του μετασχηματισμού *Fourier*. (γ) Λογαριθμική γραφική απεικόνιση του μέτρου (τα σχήματα δημιουργήθηκαν μέσω *Matlab*)**



Σχήμα 3.12: Κυβική παρεμβολή με  $N=4, \alpha=-1/2$  (α) Η δομή. (β) Το μέτρο του μετασχηματισμού Fourier. (γ) Λογαριθμική γραφική απεικόνιση του μέτρου (τα σχήματα δημιουργήθηκαν μέσω Matlab)



Σχήμα 3.13:Κυβική παρεμβολή με  $N=6$ . (α) Η δομή. (β) Το μέτρο του μετασχηματισμού Fourier. (γ) Λογαριθμική γραφική απεικόνιση του μέτρου (τα σχήματα δημιουργήθηκαν μέσω Matlab)

### 3.2.10 Παρεμβολή Lagrange

Τα πολυώνυμα *Taylor* χρησιμοποιούνται συχνά στην αριθμητική ανάλυση. Μεγάλο εμπόδιο για την επαναδειγματοληψία εικόνας αποτελεί το γεγονός ότι τα πολυώνυμα *Taylor* επεκτείνονται από ένα μοναδικό σημείο, που ενδέχεται να προκαλέσει προβλήματα όταν εφαρμόζονται στην παρεμβολή σε εικόνες. Με τη χρήση πολυωνύμων *Lagrange* στη θέση τους, μπορούν να προσδιοριστούν αρκετά σημεία μέσω των οποίων πρέπει να περάσει το πολυώνυμο. Συγκεκριμένα, το πολυώνυμο *Lagrange* βαθμού  $N-1$  περνά μέσα από  $N$  σημεία. Για άπειρο πλήθος σημείων αυτά τα πολυώνυμα προσεγγίζουν τη συνάρτηση *sinc*.

$$\text{sinc}(x) = \prod_{i=-\infty, i \neq 0}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{i}\right) = \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{i^2}\right) \quad (3.23)$$

Η δομή *Lagrange* βαθμού  $N-1$  για μια περιοχή  $N \times N$  με  $n \in \{-\frac{N}{2} + 1, -\frac{N}{2} + 2, \dots, \frac{N}{2}\}$  ορίζεται ως:

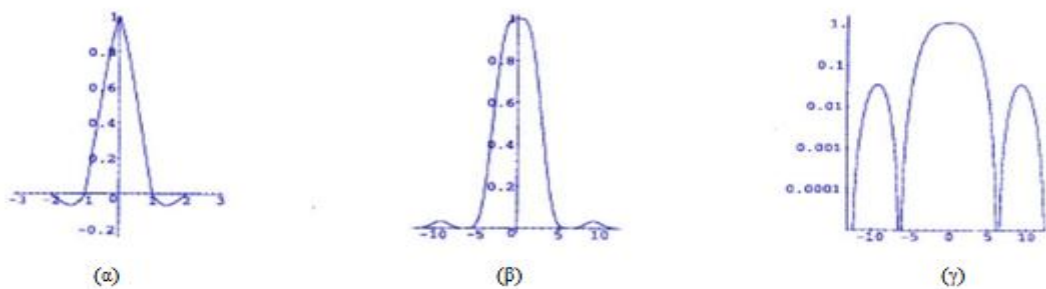
$$h_{N \text{ Lagrange}}(x) = \begin{cases} \prod_{j=0, j \neq \frac{N}{2} + 1 - n}^{N-1} \frac{n-i-x}{n-i}, & n-1 \leq x < n \\ 0, & \text{οπουδήποτε αλλού} \end{cases} \quad (3.24)$$

με  $i = j - \frac{N}{2} + 1$ . Η δομή *Lagrange* για  $N=4$  σημεία στήριξης καταλήγει στα κυβικά πολυώνυμα της σχέσης (3.25). Για  $N=5$  δίνει πολυώνυμα τετάρτης τάξης, σχέση (3.26)

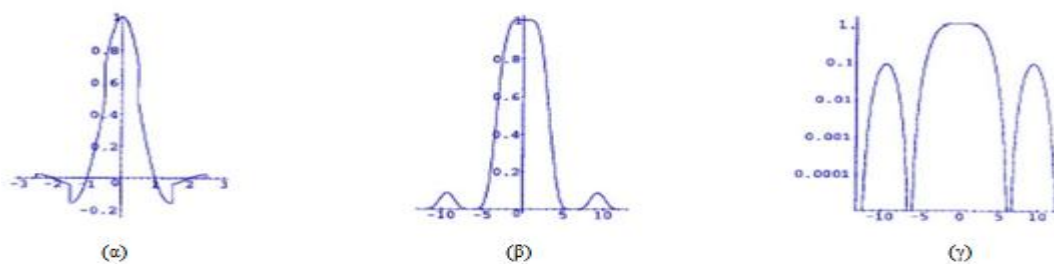
$$h_{4Lagra}(x) = \begin{cases} (1/2)|x|^3 - |x|^2 - (1/2)|x| + 1, & 0 \leq |x| < 1 \\ -(1/6)|x|^3 + |x|^2 - (11/6)|x| + 1, & 1 \leq |x| < 2 \\ 0, & \text{οπουδήποτε αλλού} \end{cases} \quad (3.25)$$

$$h_{5Lagra}(x) = \begin{cases} (1/4)|x|^4 - (5/4)|x|^2 + 1, & 0 \leq |x| < 1/2 \\ -(1/6)|x|^4 + (5/6)|x|^3 - (5/6)|x|^2 - (5/6)|x| + 1, & 1/2 \leq |x| < 3/2 \\ (1/24)|x|^4 - (5/12)|x|^3 + (35/24)|x|^2 - (25/12)|x| + 1, & 3/2 \leq |x| < 5/2 \\ 0, & \text{οπουδήποτε αλλού} \end{cases} \quad (3.26)$$

Με χρήση άλγεβρας προκύπτει ότι όλες οι δομές *Lagrange* είναι παρεμβολείς DC-constant. Όμως, οι άρτιοι παρεμβολείς *Lagrange* δεν διατηρούν την ιδιότητα της C1-συνέχειας στα σημεία σύνδεσης  $x = n$ , με αποτέλεσμα την εμφάνιση σημαντικών πλευρικών λοβών μέσα στους μετασχηματισμούς *Fourier* τους. Τα Σχήματα 3.16 και 3.17 απεικονίζουν τις δομές *Lagrange* για  $N=4$  και  $N=5$  σημεία στήριξης, αντίστοιχα. Ο  $h_{5Lagra}(x)$  εμφανίζει μία οξεία ακμή στο κέντρο της μάσκας στον τομέα του χώρου. Το πλάτος του πλευρικού λοβού στο χώρο *Fourier* είναι περίπου 4%. Η περιττή δομή *Lagrange*  $h_{5Lagra}(x)$  δεν είναι C0-συνεχής και το πλάτος του πλευρικού λοβού αυξάνεται στο 10%. Ωστόσο, το πεδίο στη ζώνη διέλευσης είναι πιο ευρύ με αποτέλεσμα ο κεντρικός λοβός να προσεγγίζει καλύτερα την ιδανική ορθογώνια μορφή. Άρα, το χαρακτηριστικό ζώνης διέλευσης βελτιώνεται με την αύξηση της τάξης της δομής *Lagrange*. Επιπρόσθετα, περιττές δομές θα πρέπει να χρησιμοποιηθούν για σκηνές όπου κυριαρχούν υψηλές αντιθέσεις.



**Σχήμα 3.16: Παρεμβολή Lagrange τρίτης τάξης,  $N=4$ . (α) Η δομή. (β) Το μέτρο του μετασχηματισμού Fourier. (γ) Λογαριθμική γραφική απεικόνιση του μέτρου (τα σχήματα δημιουργήθηκαν μέσω Matlab)**



Σχήμα 3.17: Παρεμβολή Lagrange τέταρτης τάξης,  $N=5$ . (α) Η δομή. (β) Το μέτρο μετασχηματισμού Fourier. (γ) Λογαριθμική γραφική απεικόνιση του μέτρου (τα σχήματα δημιουργήθηκαν μέσω Matlab)

### 3.3. Μέθοδος Kriging

Η τεχνική *Kriging* είναι μία γεωστατιστική τεχνική παρεμβολής, η οποία λαμβάνει υπόψη της τόσο την απόσταση όσο και το βαθμό διαφοροποίησης ανάμεσα σε γνωστά σημεία (δεδομένα) κατά την εκτίμηση τιμών σε άγνωστες περιοχές. Ορισμένα χαρακτηριστικά της τεχνικής *Kriging* τη διαχωρίζουν από άλλες τεχνικές παρεμβολής. Η μέθοδος *Kriging* μπορεί να εκτιμήσει μία τιμή η οποία είναι είτε μεγαλύτερη είτε μικρότερη από οποιαδήποτε από τις τιμές των γνωστών δειγμάτων. Οι παραδοσιακές τεχνικές περιορίζονται στο εύρος των γνωστών τιμών. Επίσης, οι συμβατικές μέθοδοι παρεμβολής χρησιμοποιούν την Ευκλείδεια απόσταση για να σταθμίσουν τα διαθέσιμα δείγματα, ενώ η μέθοδος *Kriging* εκμεταλλεύεται τόσο την απόσταση όσο και τη γεωμετρία που αυτά παρουσιάζουν. Επιπρόσθετα, η τεχνική *Kriging* προσπαθεί να ελαχιστοποιήσει τη διακύμανση του λάθους εκτίμησης. Τέλος, η παρεμβολή *Kriging* μπορεί να χειριστεί δεδομένα ανομοιόμορφα δειγματοληπτημένα.

Μία εκτίμηση *Kriging* αποτελεί ένα σταθμισμένο γραμμικό συνδυασμό των τιμών των γνωστών δειγμάτων που υπάρχουν γύρω από το σημείο η τιμή του οποίου επιχειρείται να εκτιμηθεί. Η άγνωστη τιμή του σήματος  $f(x_0, y_0)$  στη θέση  $(x_0, y_0)$  εκφράζεται ως:

$$f(x_0, y_0) = \sum_{s=1}^S w_s f(x_s, y_s) \quad (3.27)$$

όπου  $S$  είναι το πλήθος των γνωστών δειγμάτων του σήματος. Αν γίνει σωστή εφαρμογή της τεχνικής *Kriging*, ο χρήστης εξάγει βάρη τα οποία οδηγούν σε βέλτιστες αμερόληπτες (unbiased) εκτιμήσεις. Η συγκεκριμένη τεχνική προσπαθεί να ελαχιστοποιήσει τη διακύμανση σφάλματος και να θέσει τη μέση τιμή των σφαλμάτων εκτίμησης ίση με το μηδέν. Προτού ξεκινήσει η παρεμβολή, η μέθοδος *Kriging* πρέπει να υπολογίσει τη συνάρτηση στάθμισης κάθε δυνατής απόστασης. Προκειμένου να πραγματοποιηθεί ο προαναφερθείς υπολογισμός, δημιουργείται το πειραματικό διάγραμμα ημιδιακύμανσης

των δεδομένων και επιλέγεται ένα μαθηματικό μοντέλο το οποίο προσεγγίζει με τον καλύτερο δυνατό τρόπο τη μορφή του συγκεκριμένου διαγράμματος. Το μοντέλο παρέχει μία ομαλή συνεχή συνάρτηση για τον προσδιορισμό κατάλληλων βαρών όσον αφορά όλες τις δυνατές αποστάσεις. Το διάγραμμα ημιδιακύμανσης είναι ένα διάγραμμα στον άξονα y του οποίου τοποθετείται η ημιδιακύμανση μεταξύ σημείων και στον άξονα x τοποθετείται η απόσταση στην οποία υπολογίστηκε η συγκεκριμένη ημιδιακύμανση. Η ημιδιακύμανση ισούται με το μισό της μέσης τετραγωνικής διαφοράς των τιμών των σημείων τα οποία απέχουν κατά μία συγκεκριμένη σταθερή απόσταση. Καθώς σημεία συγκρίνονται με διαρκώς απομακρυνόμενα σημεία, η τιμή της ημιδιακύμανσης αυξάνεται. Σε κάποια απόσταση η ημιδιακύμανση θα γίνει περίπου ίση με τη διακύμανση ολόκληρης της επιφάνειας των σημείων. Αυτή είναι και η μεγαλύτερη απόσταση στην οποία μπορούν να βρίσκονται δύο σημεία της επιφάνειας και οι τιμές τους να σχετίζονται. Το συγκεκριμένο κριτήριο διακύμανσης επιφάνειας οδηγεί στην επιλογή των κατάλληλων γνωστών σημείων κατά την εκτίμηση της τιμής ενός άγνωστου σημείου.

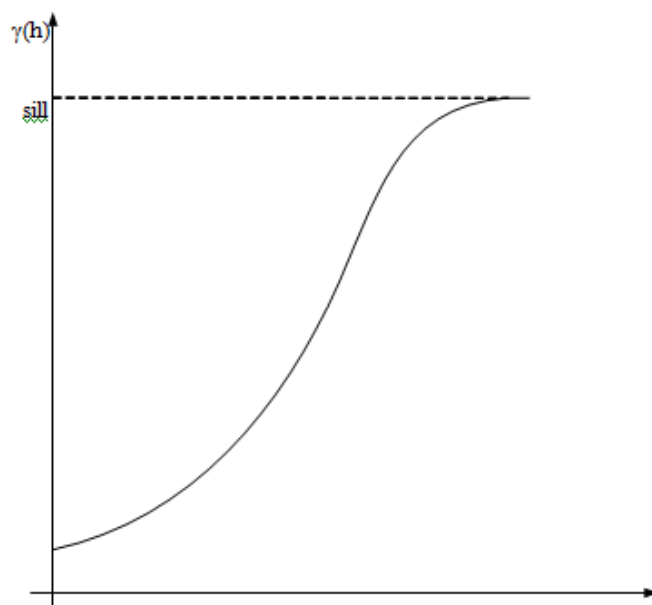
Αν η ημιδιακύμανση που υπολογίζεται σε απόσταση  $h$  υποδηλωθεί ως  $\gamma(h)$ , η σχέση μεταξύ του διαγράμματος ημιδιακύμανσης και της αντίστοιχής του συνδιακύμανσης δίνεται ως

$$C = \begin{bmatrix} \tilde{C}_{11} & \dots & \tilde{C}_{1s} & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & 1 \\ \tilde{C}_{s1} & \dots & \tilde{C}_{ss} & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

Τα βάρη τα οποία χρησιμοποιούνται για το σχηματισμό της εκτίμησης *kriging* υπολογίζονται σύμφωνα με τη σχέση

$$W = C^{-1} D \quad (3.29)$$

Στο σχήμα 3,18 απεικονίζεται ένα διάγραμμα ημιδιακύμανσης, η μορφή του οποίου προσεγγίζεται μέσω ενός μοντέλου Gaussian. Η τεχνική παρεμβολής *Kriging* χρησιμοποιείται στο βήμα δημιουργίας του ομοιόμορφου πλέγματος υψηλής ανάλυσης, έπειτα από το registration των εικόνων χαμηλής ανάλυσης.



**Σχήμα 3.18:** Ένα διάγραμμα ημιδιακύμανσης που μοντελοποιείται μέσω καμπύλης Gaussian

### 3.4. Συμπεράσματα

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζονται μέθοδοι για την πραγματοποίηση παρεμβολής. Η χρήση συναρτήσεων παρεμβολής αποτελεί την παραδοσιακή μέθοδο για τη δημιουργία μίας εικόνας βελτιωμένης ανάλυσης από μία εικόνα χαμηλής ανάλυσης. Καθορίστηκαν τα γενικά χαρακτηριστικά του προσεγγιστή σε σχέση με αυτά του παρεμβολέα, αλλά και της DC-constancy σε σχέση με αυτά της DC-inconstancy. Όλες οι μέθοδοι παρεμβολής εξομαλύνουν την εικόνα λιγότερο ή περισσότερο. Εικόνες που παρουσιάζουν λεπτομέρειες οξείων ακμών και υψηλή τοπική αντίθεση επηρεάζονται πιο πολύ από την παρεμβολή από ό,τι άλλες εικόνες.

Στο χώρο των συχνοτήτων η ιδανική μέθοδος παρεμβολής αντιπροσωπεύεται από τη δομή *sinc* άπειρης κρουστικής απόκρισης. Απλές αποκοπές της άπειρης συνάρτησης *sinc* καταλήγουν σε παρεμβολείς DC-inconstant αλλά, η χρήση κατάλληλου παραθύρου καθιστά δυνατό το σχεδιασμό δομών υψηλής ποιότητας. Η παραθυρική *sinc* Blackman-Harris εμφανίζει την καλύτερη απόκριση στη ζώνη αποκοπής στο πεδίο συχνοτήτων. Η μέθοδος κοντινότερου γείτονα είναι η ταχύτερη μέθοδος αλλά, επιφέρει το μεγαλύτερο σφάλμα παρεμβολής. Στη βιβλιογραφία προτείνονται αρκετές προσεγγίσεις για το σχεδιασμό κυβικών δομών τεσσάρων σημείων στήριξης. Η διπαραμετρική προσέγγιση

συμπεριλαμβάνει παρεμβολείς αλλά και προσεγγιστές. Το φίλτρο *Notch* είναι η καλύτερη δομή αναφορικά με τα χαρακτηριστικά συχνότητας αποκοπής αλλά είναι αδύναμη στην πράξη. Εξ ορισμού οι C2-συνεχείς κυβικές παρεμβολές, αλλά και οι παρεμβολές *Gaussian*, *Lagrange* δείχνουν να είναι κατάλληλες για προβλήματα παρεμβολής όπου οι διαστάσεις της δομής πρέπει να είναι τοπικά προσαρμοστικές, για παράδειγμα στο μετασχηματισμό από καρτεσιανές σε πολικές συντεταγμένες σε ένα στερεό πλέγμα. Ο κυβικός παρεμβολέας *B-spline* τρίτης τάξης είναι επαρκής για αρκετές πρακτικές εφαρμογές. Περεταίρω αύξηση της τάξης της δομής θα βελτιώσει την ποιότητα της παρεμβολής αλλά, θα αυξήσει την αριθμητική πολυπλοκότητα της δομής και του προφίλτρου. Επιπρόσθετα, θα ενταθούν οι επιδράσεις ακμών οι οποίες ήδη είναι σημαντικές σε σύγκριση με μεθόδους πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης. Τέλος, η μέθοδος *Gaussian* έχει σχεδιαστεί ώστε να παρουσιάζει εξαιρετικές ιδιότητες στο πεδίο των συχνοτήτων. Ωστόσο, μπορεί να βελτιωθεί σημαντικά εάν οι δομές *Gaussian* τροποποιηθούν ώστε να ικανοποιούν τις συνθήκες (3.4) και (3.5), δηλαδή να είναι παρεμβολείς *DC-constant*.

Τέλος, παρουσιάζεται η τεχνική παρεμβολής *Kriging*. Πρόκειται για μία γεωστατιστική τεχνική παρεμβολής η οποία εμφανίζει χαρακτηριστικά διαφοροποίησης από τις συμβατικές τεχνικές παρεμβολής. Η συγκεκριμένη τεχνική θεωρεί τόσο την απόσταση όσο και το βαθμό διαφοροποίησης ανάμεσα σε γνωστά σημεία κατά την εκτίμηση τιμών σε άγνωστες περιοχές. Προσπαθεί να ελαχιστοποιήσει τη διακύμανση σφάλματος και να θέσει τη μέση τιμή των σφαλμάτων ίση με το μηδέν. Αποδεικνύεται ιδιαίτερα χρήσιμη σε περιπτώσεις χειρισμού δεδομένων ανομοιόμορφα δειγματοληπτημένων.

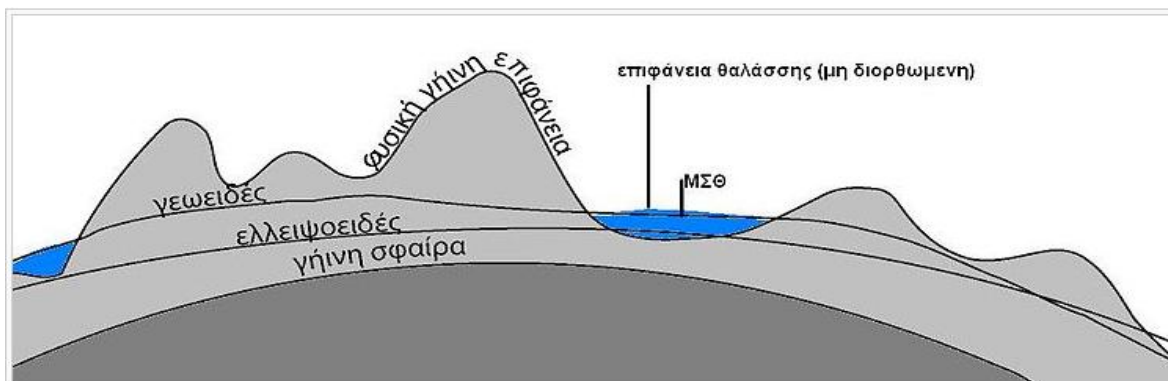


# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

## Υπολογισμός Γεωειδούς στη περιοχή των Θεσσαλίας από μετρήσεις GPS

### 4.1. Γενικά

Στο κεφάλαιο αυτό θα γίνει μια γενική επισκόπηση των όσων έχουν δημοσιευτεί στο παρελθόν κι αφορούν μοντέλα γεωειδούς στον Ελλαδικό χώρο, ενώ θα καταλήξουμε στη δημιουργία τοπικού μοντέλου γεωειδούς με χρήση μετρήσεων GPS και ορθομετρικών υψομέτρων, από μια σειρά μετρήσεων στην ευρύτερη περιοχή της Θεσσαλίας, καθώς και η σύγκριση του παραχθέντος μοντέλου με το παγκόσμιο βαρυτικό μοντέλο EGM 2008 στη συγκεκριμένη περιοχή. Ξεκινώντας από έναν γενικό ορισμό του γεωειδούς, θα μπορούσαμε να πούμε ότι είναι η ισοδυναμική επιφάνεια της γης, που προσεγγίζεται σε αρκετά ικανοποιητικό βαθμό από την μ.σ.θ, εάν αυτή διορθωθεί από τις επιδράσεις των παλιρροιών, των ρευμάτων, της μεταβολής της πυκνότητας και του κυματισμού. Με όρους βαρύτητας, το γεωειδές είναι μια ισοδυναμική επιφάνεια, σε κάθε σημείο της οποίας η τιμή του γήινου δυναμικού  $W$  έχει την τιμή  $W_0$ , δηλ. για κάθε σημείο της επιφάνειας του γεωειδούς, ισχύει:  $W = W_0$



Εικόνα 4.1: Επιφάνειες αναφοράς που χρησιμοποιούνται στη Γεωδαισία

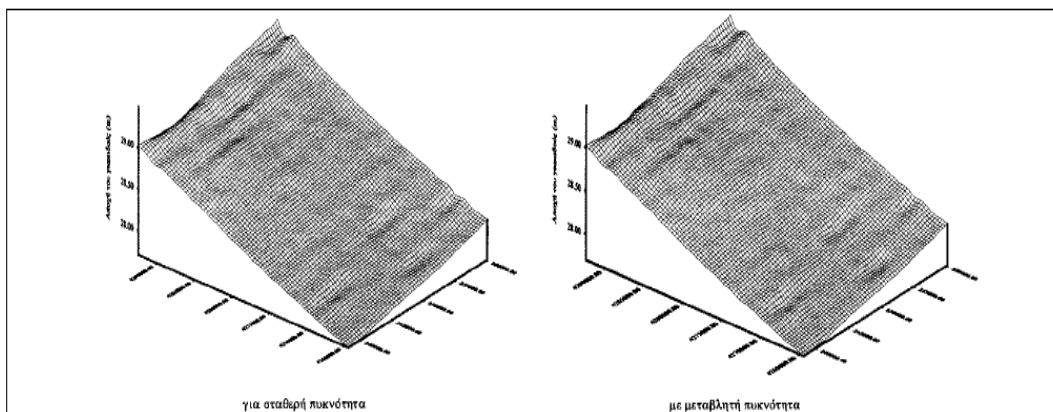
Ο προσδιορισμός του γεωειδούς είναι ένα πρόβλημα που απασχολεί σε σημαντικό βαθμό την παγκόσμια γεωδαιτική κοινότητα. Έως το 1945, που αναπτύχθηκαν μέθοδοι άμεσου προσδιορισμού της φ.γ.ε, αποτελούσε τον κύριο στόχο της Γεωδαισίας. Ωστόσο, έως και σήμερα ο προσδιορισμός του γεωειδούς παραμένει ένα από τα πιο ουσιώδη προβλήματα της γεωδαισίας, εξαιτίας αρκετών παραγόντων, όπως η ίδρυση παγκόσμιων τρισδιάστατων δικτύων, οι ανάγκες της Υδρογραφίας, κλπ.

## 4.2. Μοντέλα Γεωειδούς στον Ελλαδικό Χώρο

Στην παράγραφο αυτή, παρατίθενται ορισμένες δημοσιεύσεις και εργασίες που βρέθηκαν στο διαδίκτυο κι αφορούν στον προσδιορισμό μοντέλων γεωειδούς σε διάφορες περιοχές του Ελλαδικού χώρου ή γενικότερα για το γεωειδές στην Ελλάδα:

❖ *Ανδριτσάνος Β.Δ., Κατσάμπαλος Κ.Ε., Κεχαΐδου Κ.Ε., Τζιαβός Η.Ν., «Βελτιστοποίηση Τοπικού Γεωειδούς με δεδομένα Βαρύτητας, Τοπογραφίας, Πυκνότητας και GPS», 1999:*

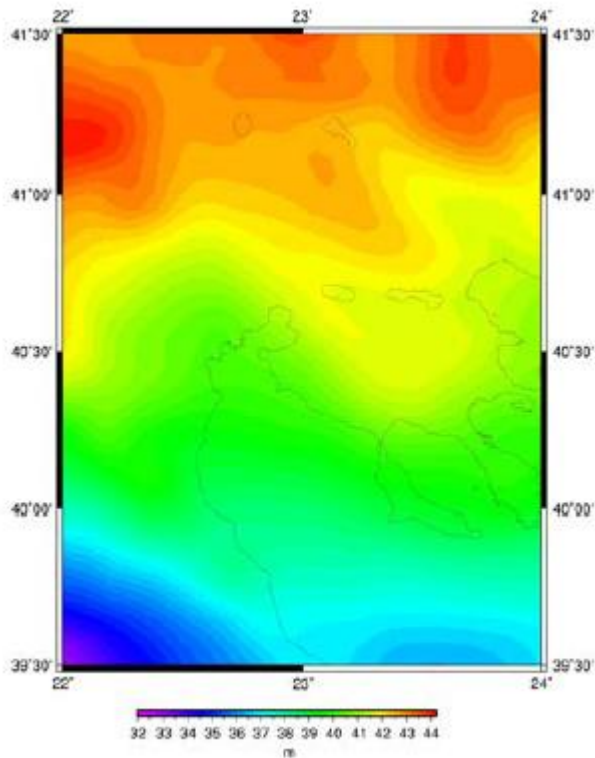
Στην παρούσα μελέτη, είχαμε βαρυτημετρικά, υψομετρικά και γεωλογικά δεδομένα, τα οποία συνδυάστηκαν με μετρήσεις GPS κι ένα γεωδυναμικό μοντέλο (OSU 91A), για τον προσδιορισμό τοπικού μοντέλου γεωειδούς, στην περιοχή του Αστακού Αιτωλοακαρνανίας. Εξετάστηκε η επίδραση πραγματικών δεδομένων πυκνότητας των γεωλογικών σχηματισμών της περιοχής, στις αναγωγές του αναγλύφου και στα προσδιοριζόμενα υψόμετρα του γεωειδούς. Επίσης, παρουσιάστηκε η δυνατότητα εφαρμογής GIS στη μελέτη του γεωειδούς μιας περιοχής.



**Εικόνα 4.2:** Τρισδιάστατη απεικόνιση του γεωειδούς στην περιοχή μελέτης



βαρύτητας για την εξαγωγή υψομέτρων γεωειδούς στην περιοχή, προσαρμόζοντάς τα με 140 σημεία (γνωστού ορθομετρικού υψομέτρου) μετρημένα με GPS.

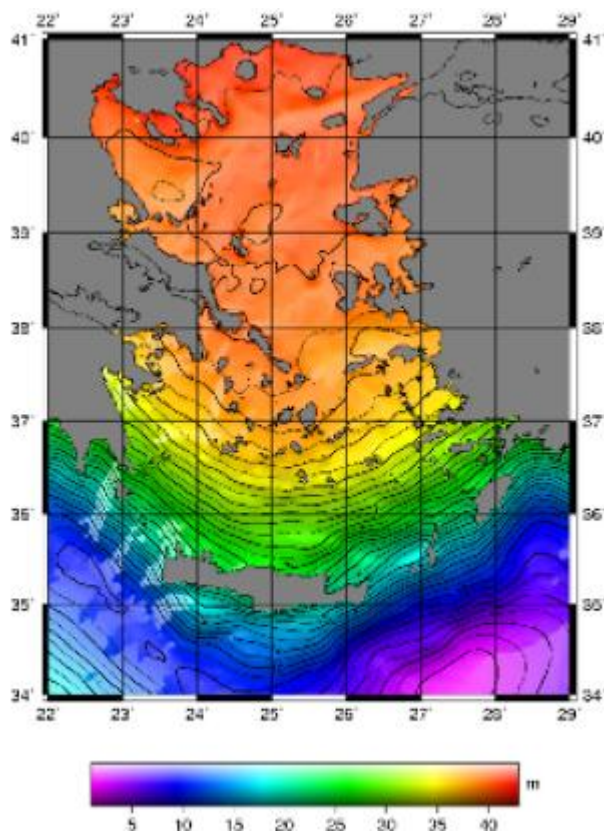


**Εικόνα 4.4:** Μοντέλο σχεδόν-γεωειδούς στην περιοχή μελέτης

❖ Μιντουράκης Ι., «Η Δορυφορική Αλτιμετρία ως γεωδαιτικό εργαλείο για την προσέγγιση του Θαλάσσιου Γεωειδούς. Εφαρμογή στον Ελλαδικό Θαλάσσιο Χώρο», 2010:

Στη μελέτη αυτή, χρησιμοποιήθηκαν:

- δεδομένα αλτιμετρικών αποστολών (π.χ. JASON-1, ENVISAT),
  - ωκεανογραφικά δεδομένα (π.χ. μέσες μηνιαίες τιμές 10 παλιρροιογράφων),
  - βαθυμετρικά και υψομετρικά δεδομένα (ψηφιακά μοντέλα εδάφους και βαθυμετρίας),
  - δεδομένα ελέγχου (π.χ. marine GPS, δεδομένα EGM 08),
- από τη σύνθεση των οποίων προέκυψε το παρακάτω αποτέλεσμα:

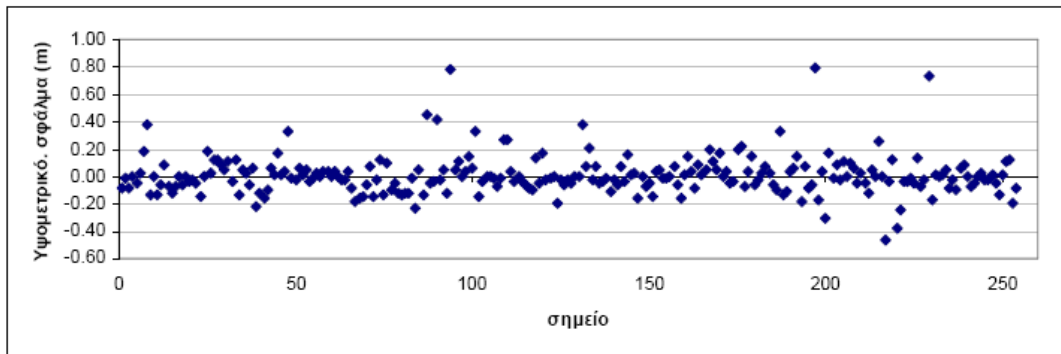


*Εικόνα 4.5: Αποτέλεσμα εργασίας: Τοπικό γεωειδές στον Ελλαδικό Θαλάσσιο Χώρο. Το παραχθέν γεωειδές έχει μια μέση απόκλιση της τάξης των 19 cm από το EGM 08.*

❖ *ΚΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ Α.Ε., «Εξελίξεις στην Εθνική Γεωδαιτική Υποδομή – Ο ρόλος του HEPOS», 2012:*

Η ΚΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ Α.Ε. ανέπτυξε ένα μοντέλο γεωειδούς για όλη τη χώρα, για χρήση με το HEPOS. Το μοντέλο αυτό έχει ενσωματωθεί στο λογισμικό HEPOS TRANSFORMATION TOOL που ανέπτυξε η ίδια εταιρία και το οποίο υλοποιεί το επίσημο μοντέλο μετασχηματισμού HTRS 07 - ΕΓΣΑ 87. Για την αξιολόγηση της ακρίβειας του μοντέλου που βρίσκεται εν εξελίξει από την ΚΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ Α.Ε., έχουν χρησιμοποιηθεί 254 τριγωνομετρικά του κρατικού δικτύου. Τα αποτελέσματα έως τώρα, φαίνονται παρακάτω:

## Υψομετρικό σφάλμα



| Στατιστικά υψομετρικού σφάλματος (m) |       |             |       |       |       |
|--------------------------------------|-------|-------------|-------|-------|-------|
| Min                                  | Max   | Percentiles |       |       |       |
|                                      |       | 50th        | 90th  | 95th  | 99th  |
| 0.001                                | 0.793 | 0.056       | 0.187 | 0.269 | 0.460 |

*Εικόνα 4.6: Διάγραμμα και πίνακας στατιστικών του υψομετρικού σφάλματος του μοντέλου της ΚΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ Α.Ε., για τα 254 σημεία του κρατικού δικτύου που χρησιμοποιήθηκαν για την αξιολόγηση της ακρίβειάς του.*

❖ Επίσης και σε επίπεδο διπλωματικών, έχουν γίνει ορισμένες εργασίες. Ενδεικτικά, αναφέρουμε τις παρακάτω:

- Παρασκευάς Μ., (Παραδείσης Δ., Μήλας Π., Παπαζήση Κ.), «Προσδιορισμός γεωειδούς από επίγειες τιμές βαρύτητας για την περιοχή της Αταλάντης», 2011, όπου χρησιμοποιήθηκαν επίγειες μετρήσεις βαρύτητας, με ταυτόχρονες μετρήσεις GPS σε σημεία γνωστού υψομέτρου, οι οποίες παραχωρήθηκαν από τη ΓΥΣ. Ως παγκόσμιο γεωδυναμικό μοντέλο χρησιμοποιήθηκε το EGM 2008 πλήρες σε βαθμό και τάξη κι επίσης παρασκευάστηκαν 2 ψηφιακά μοντέλα εδάφους για την περιοχή.

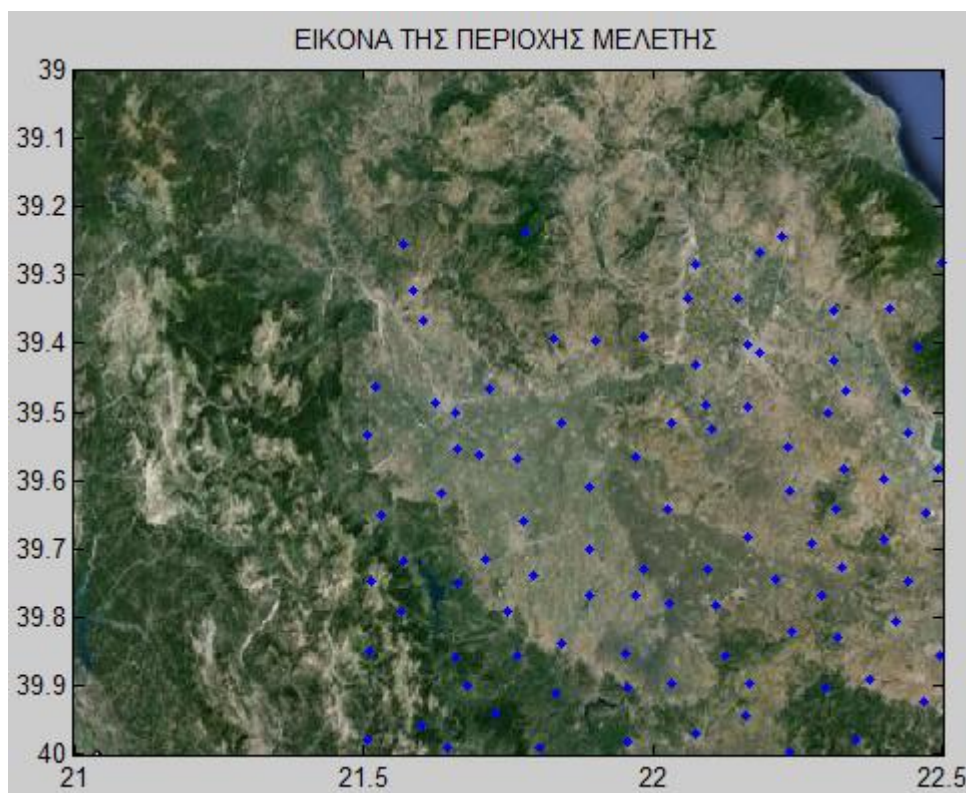
- Αλεβιζάκου Ε.-Γ. Β., (Πανταζής Γ.), «Προσδιορισμός της αποχής του γεωειδούς N σε αστική περιοχή», 2010, όπου πραγματοποιήθηκαν μετρήσεις GPS σε ένα χωροσταθμικό δίκτυο στο κέντρο της Αθήνας, για τον προσδιορισμό της αποχής του γεωειδούς N στη περιοχή κι έγινε σύγκριση των τιμών αυτών, με τα EGM 2008 και EGM 96.

- Ανδρουλάκη Α., (Γκίκας Β., Σταθάς Δ., Λάμπρου Ε.), «Υπολογισμός αποχής του γεωειδούς από ορθομετρικά υψόμετρα ακριβείας και γεωμετρικά υψόμετρα με χρήση διασυνδεδεμένων αισθητήρων GNSS / INS / DMI. Εφαρμογή στον σιδηροδρομικό άξονα Κινέττα - Κιάτο», 2009, όπου πραγματοποιήθηκε υπολογισμός της απόκλισης του γεωειδούς στο τμήμα της σιδηροδρομικής γραμμής Κινέττα – Κιάτο της Προαστιακός ΑΕ, με τη βοήθεια γνωστών ορθομετρικών και μετρημένων γεωμετρικών υψομέτρων και σύγκριση των τιμών αυτών, με τα EGM 2008 και EGM 96.

### 4.3. Πρακτικό Μέρος

#### 4.3.1. Οριοθέτηση Περιοχής Μελέτης

Όσον αφορά τώρα το πρακτικό τμήμα της εργασίας, ξεκινώντας από μια γενική περιγραφή του δικτύου μας, αυτό αποτελείται από 125 σημεία στο σύνολο, τα οποία κατανέμονται κυρίως στην περιοχή της Θεσσαλίας, καθώς επίσης μικρός αριθμός σημείων βρίσκονται στη περιοχή των Γρεβενών, όπως παρατηρούμε στην εικόνα που ακολουθεί:



*Εικόνα 4.7: Περιοχή όπου χωροθετείται το δίκτυό μας.  
Τα σημεία των μετρήσεων είναι μαρκαρισμένα με μπλε κουκκίδες.*

Σε αυτά τα 125 σημεία του δικτύου έγιναν μετρήσεις GPS, τα 110 εξ' αυτών των σημείων, είναι τριγωνομετρικά της ΓΥΣ κι είναι αυτά που χρησιμοποιήσαμε για την δημιουργία του μοντέλου γεωειδούς, καθ' όσον για τα υπόλοιπα 15, (τα οποία αποτελούν κατά κύριο λόγο σημεία δικτύων που παρακολουθούνται για τη μελέτη της τεκτονικής συμπεριφοράς της ευρύτερης περιοχής), δεν είχαμε πληροφορία ορθομετρικού υψομέτρου. Για τη δημιουργία λοιπόν, του τοπικού μοντέλου γεωειδούς, χρησιμοποιήσαμε τις μετρήσεις από το αρχείο geoid.xls (το οποίο περιέχει τρισσορθογώνιες γεωκεντρικές καρτεσιανές συντ/νες για τα 150 σημεία), από το οποίο όμως πήραμε μόνο τα σημεία για τα οποία έχουμε πληροφορία ορθομετρικού υψομέτρου, (δηλ. τα σημεία για τα οποία στο αρχείο geoid.FLH υπάρχει το ορθομετρικό τους υψόμετρο και τα οποία είναι 110 στον αριθμό, όπως ειπώθηκε και παραπάνω). Δηλαδή, με άλλα λόγια από το αρχείο geoid.xls δημιουργήσαμε το αρχείο geoid.txt, που περιέχει τις καρτεσιανές συντ/νες των 110 αυτών σημείων (τριγωνομετρικών) και δημιουργήσαμε το αρχείο geoid.FLH με τα 110 σημεία που έχουν ορθομετρικά υψόμετρα. Η επεξεργασία όλων των δεδομένων, καθώς και η δημιουργία των τρισδιάστατων απεικονίσεων έγινε σε γλώσσα Matlab.

#### 4.3.2 Γεωγραφικά Στοιχεία

Η περιοχή που επιλέχθηκε αποτελεί μία από τις πιο «δύσκολες» περιοχές στην Ελλάδα καθώς μεταξύ άλλων περιλαμβάνει:

- **Αστικό χώρο** (Τρίκαλα, Λάρισα, Γρεβενά, Καλαμπάκα, Ελασσόνα, Δεσκάτη), ο οποίος ως γνωστόν προκαλεί συμπίεση του γήινου φλοιού και ως εκ τούτου μεταβολή του βαρυτικού πεδίου.

- **Μεγάλους ορεινούς όγκους** (Χάσια Όρη, Αντιχάσια Όρη, Βόρεια Πίνδος, Καμβούνια Όρη, Βάλια Κάλντα κ.α.), στους οποίους έχουμε λιγότερη διαθέσιμη τοπογραφική πληροφορία και επιπλέον αναπαρίστανται δυσκολότερα από ένα ψηφιακό μοντέλο εδάφους.

- **Οδικές αρτηρίες** (Εγνατία Οδός) με υψηλούς κυκλοφοριακούς φόρτους, οι οποίοι ως γνωστόν επηρεάζουν τις βαρυμετρικές μετρήσεις πλησίον τους.

- **Πεδινή περιοχή** (Πεδιάδα της Θεσσαλίας), με έντονη γεωργική δραστηριότητα και μεταβολές στον υδροφόρο ορίζοντα της περιοχής (άρα και στο βαρυτικό της πεδίο).

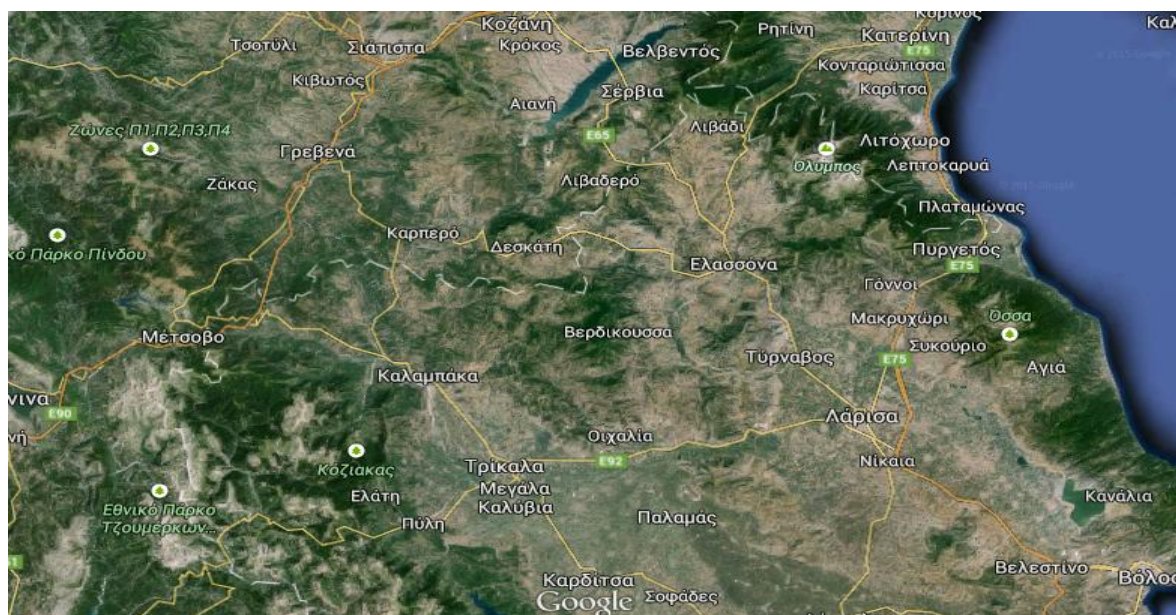
- **Σεισμικότητα δραστηριότητα** λόγω των σεισμών του Μαΐου 1995 (επίκεντρο: Καρπερό Γρεβενών) και Νοεμβρίου 2013 (επίκεντρο: Λιβαδερό Κοζάνης) οι οποίοι ενδεχομένως να έχουν προκαλέσει απότομη αλλαγή στο βαρυτικό πεδίο της περιοχής.



Η περιοχή μελέτης εσωκλείεται από τις γεωγραφικές συντεταγμένες Νότος-Βορράς: 39.30- 40.30, Δύση- Ανατολή: 21.30- 22.60 ενώ για τον υπολογισμό των τοπογραφικών διορθώσεων είναι απαραίτητη μία μεγαλύτερη περιοχή η οποία εσωκλείεται από τις συντεταγμένες . Νότος-Βορράς: 39.30- 40.30, Δύση- Ανατολή: 21.00- 23.00.



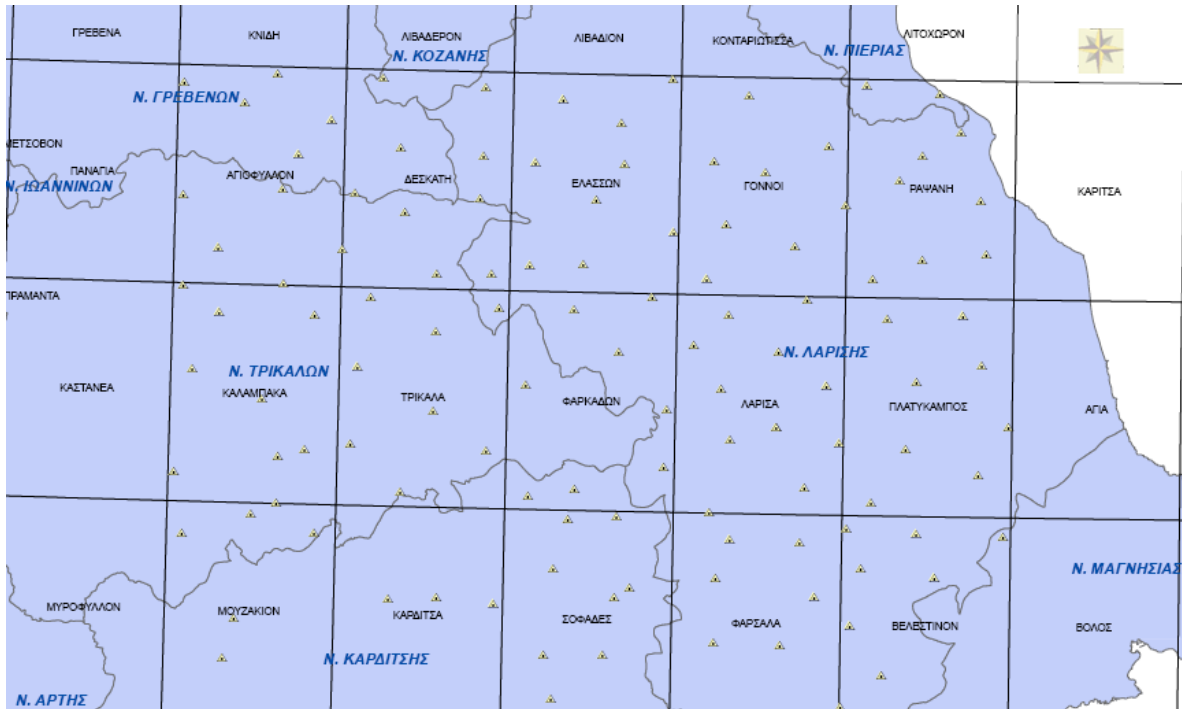
*Εικόνα 4.8: Περιοχή Ενδιαφέροντος*



*Εικόνα 4.9: Ευρύτερη περιοχή*

### 4.3.3 Απόλυτες τιμές Βαρύτητας για σταθμούς της περιοχής μελέτης

Παραχωρήθηκαν από τη ΓΥΣ 125 τιμές απόλυτης βαρύτητας επί τριγωνομετρικών σημείων με ταυτόχρονες μετρήσεις *GPS*. Η κατανομή των σημείων αυτών φαίνεται στην εικόνα 4.10:



Εικόνα 4.10: Οι ταυτόχρονες μετρήσεις βαρύτητας και *GPS*

### 4.3.4 Παγκόσμιο Γεωδυναμικό Μοντέλο

Ως παγκόσμιο γεωδυναμικό μοντέλο χρησιμοποιήθηκε αυτό που παρέχει τη μεγαλύτερη διακριτική ικανότητα αυτή τη στιγμή, δηλαδή το *EGM2008*. Οι υπολογισμοί των στοιχείων που μας χρειάστηκαν έγιναν μέσω της ιστοσελίδας <http://icgem.gfz-potsdam.de/ICGEM>, (εικόνα 4.11) μέσω της οποίας μπορούμε να υπολογίσουμε όποιο γεωδαιτικό στοιχείο θέλουμε, από οποιοδήποτε γνωστό γεωδυναμικό μοντέλο.



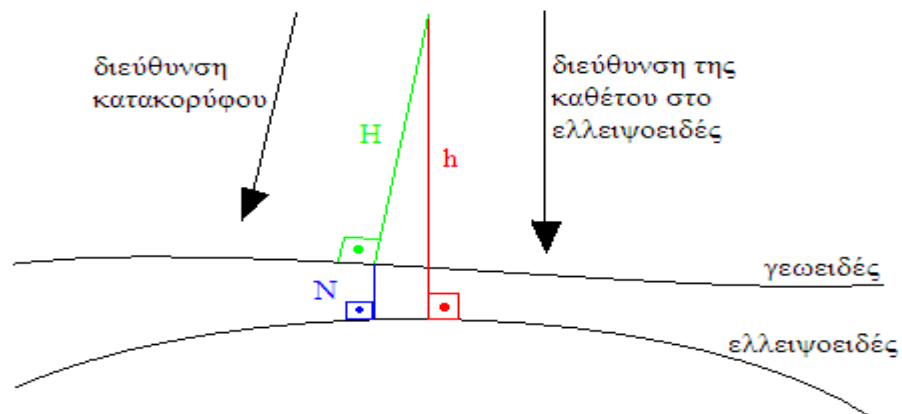
Εικόνα 4.11: Το γραφικό περιβάλλον της ιστοσελίδας <http://icgem.gfz-potsdam.de/ICGEM/>

## 4.5. Υπολογισμοί

### 4.5.1. Υπολογισμός Αποχής Γεωειδούς

Αφού λοιπόν, τα γεωμετρικά μας υψόμετρα ανήχθησαν στη φ.γ.ε, δεν έχουμε παρά να υπολογίσουμε την αποχή του γεωειδούς  $N$  σε κάθε σημείο μέτρησης, από τη θεμελιώδη σχέση:

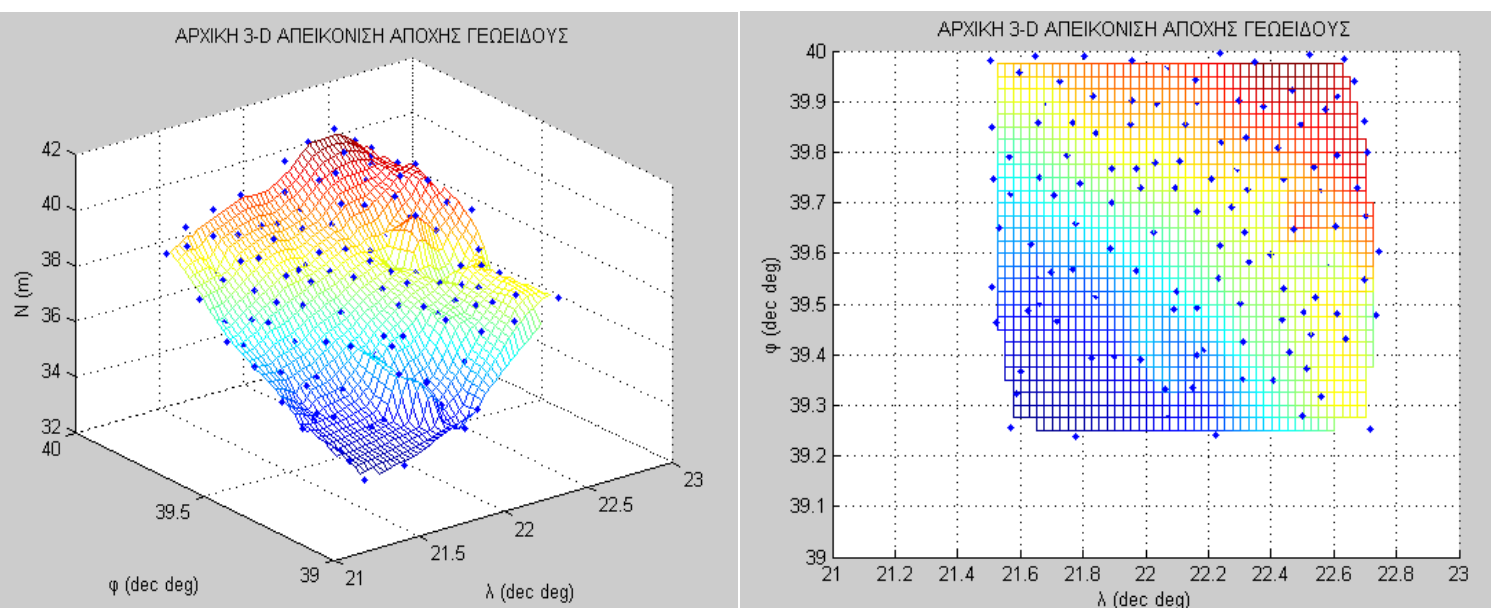
$$h = H + N \quad (4.1)$$



Εικόνα 4.12: Σχέση ορθομετρικού και γεωμετρικού υψόμετρου με την αποχή του γεωειδούς

### 4.5.2. Αρχική Τρισδιάστατη Απεικόνιση

Κατόπιν, παράγουμε την αρχική τρισδιάστατη απεικόνιση του τοπικού μοντέλου γεωειδούς της περιοχής μελέτης, (αρχείο NonCorrected\_GeoidModel.fig):



**Εικόνα 4.13:** Αριστερά: αρχική τρισδιάστατη απεικόνιση αποχής γεωειδούς, υπό γωνία (συνάρτηση mesh). Δεξιά: κάτοψη αρχικής τρισδιάστατης απεικόνισης αποχής γεωειδούς. Φαίνεται και η διασπορά των σημείων μέτρησης με μπλε κουκκίδες.

### 4.5.3. Απαλοιφή «Επιζήμιων» Σημείων

Στο σημείο αυτό, το ζητούμενο έγκειται στην απαλοιφή των σημείων που «κλωτσάνε» και δημιουργούν μεγάλες ανωμαλίες στο τρισδιάστατο μοντέλο, γεγονός που σημαίνει ότι κατά πάσα πιθανότητα στα σημεία αυτά δεν έχουμε καλές μετρήσεις, (όπως το ύψωμα που σχηματίζεται κοντά στο σημείο με  $\lambda = 22^\circ$  και  $\varphi = 39^\circ 30'$ ). Για το σκοπό αυτό, δημιουργήσαμε έναν αλγόριθμο αυτόματης απαλοιφής σημείων που «κλωτσάνε», με κριτήριο το πηλίκο  $\Delta N/S$  (διαφορά της αποχής του γεωειδούς μεταξύ 2 σημείων προς την απόστασή τους). Μεγάλες τιμές του πηλίκου αυτού σε σχέση με το μέσο όρο της περιοχής, δείχνουν απότομες εξάρσεις κι ανωμαλίες, ενώ μικρές τιμές δείχνουν ομαλό ανάγλυφο.

Έτσι, για κάθε σημείο υπολογίστηκε το άθροισμα των πηλίκων  $\Delta N/S$  ως προς όλα τα σημεία, δηλ.:

$$\Sigma_1 = \frac{\Delta N_{1-2}}{S_{1-2}} + \frac{\Delta N_{1-3}}{S_{1-3}} + \dots + \frac{\Delta N_{1-111}}{S_{1-111}} \quad (\text{για το σημείο 1})$$

$$\Sigma_2 = \frac{\Delta N_{2-1}}{S_{2-1}} + \frac{\Delta N_{2-3}}{S_{2-3}} + \dots + \frac{\Delta N_{2-111}}{S_{2-111}} \quad (\text{για το σημείο 2})$$

.....

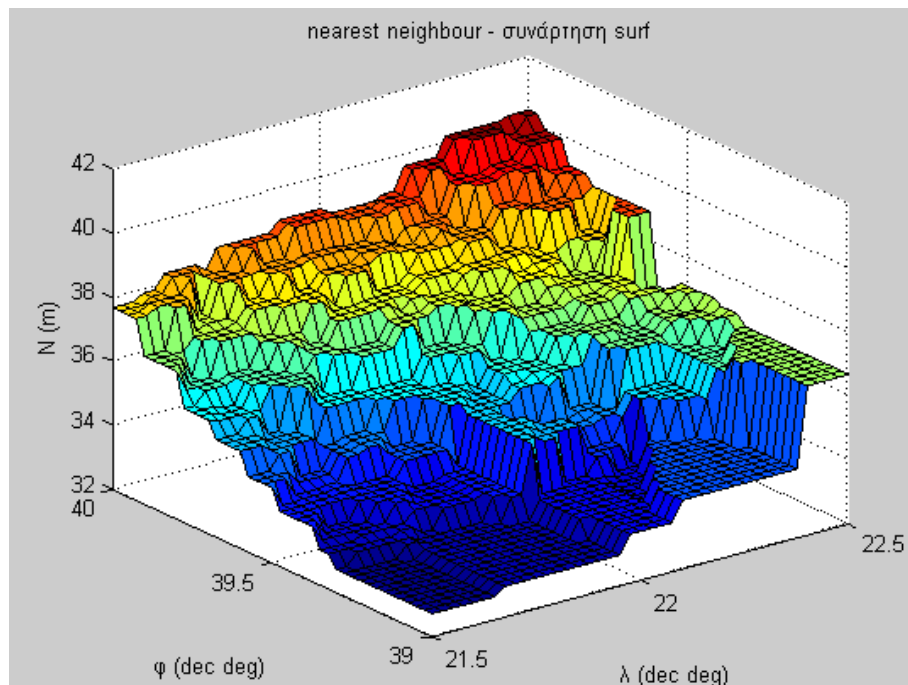
$$\Sigma_{111} = \frac{\Delta N_{111-1}}{S_{111-1}} + \frac{\Delta N_{111-2}}{S_{111-2}} + \dots + \frac{\Delta N_{111-110}}{S_{111-110}} \quad (\text{για το σημείο 111})$$

(σύνολο: 111 αθροίσματα με 110 όρους το καθένα).

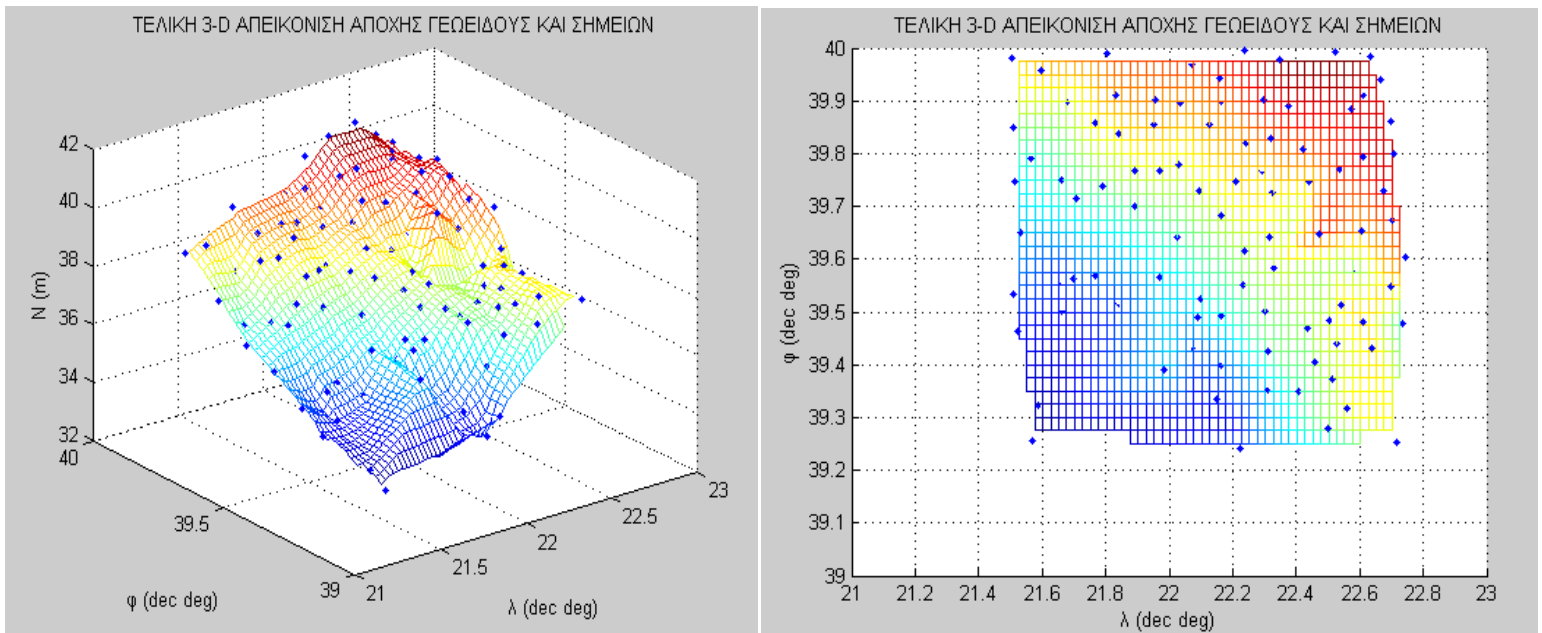
Στη συνέχεια, κατόπιν μερικών δοκιμών επιλέχθηκε ένα όριο για την απαλοιφή των σημείων που «κλωτσάνε». Τα σημεία με άθροισμα  $\Sigma_i$  μεγαλύτερο από το όριο αυτό, απαλείφθηκαν από τον αλγόριθμο, ενώ τα υπόλοιπα παρέμειναν για τη δημιουργία του τελικού διορθωμένου τρισδιάστατου μοντέλου. Εν τέλει (για το συγκεκριμένο όριο που τέθηκε κι είναι ίσο με 700), απαλείφθηκαν 12 σημεία κι έτσι παρέμειναν τελικά 99 σημεία.

#### 4.5.4. Τελική Τρισδιάστατη Απεικόνιση

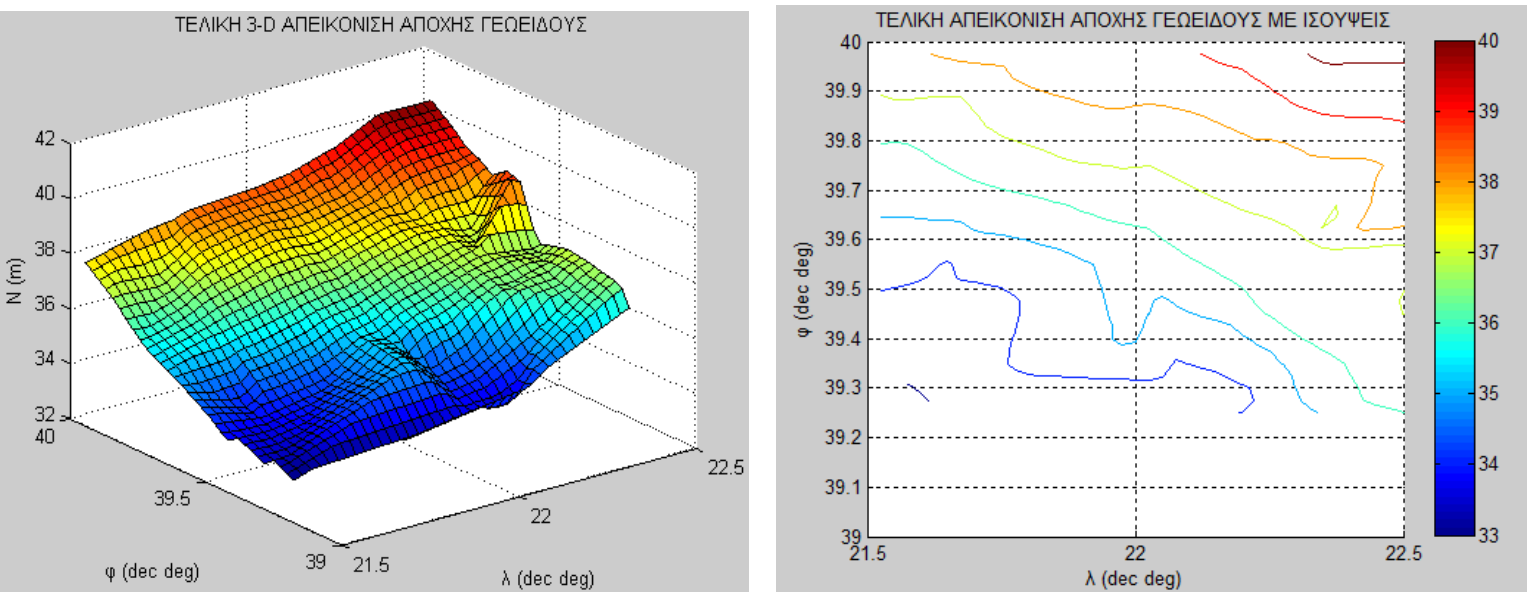
Επόμενο βήμα της διαδικασίας, αφού απαλείψαμε σημεία με μεγάλες ανωμαλίες, είναι η παραγωγή της τελικής τρισδιάστατης απεικόνισης του τοπικού μοντέλου γεωειδούς της περιοχής μελέτης (αρχεία geoid\_points.fig, geoid\_surface.fig, geoid\_contours.fig). Αξίζει να σημειωθεί ότι ως μέθοδος παρεμβολής χρησιμοποιήθηκε η (δι-)γραμμική παρεμβολή, καθώς με αυτή τη μέθοδο το παραγόμενο αποτέλεσμα ήταν αποδεκτό κι έχει φυσική σημασία (όπως συνέβη και με την κυβική παρεμβολή), σε αντίθεση με τη μέθοδο του εγγύτερου γείτονα, όπου έδινε αποτέλεσμα μη αποδεκτό, όπως φαίνεται στην εικόνα 4.14:



**Εικόνα 4.14:** Απεικόνιση τρισδιάστατου μοντέλου με τη μέθοδο του εγγύτερου γείτονα. Παρατηρούνται οι έντονες ασυνέχειες στην επιφάνεια.



**Εικόνα 4.15:** Αριστερά: τελική τρισδιάστατη απεικόνιση αποχής γεωειδούς, υπό γωνία (συνάρτηση mesh). Δεξιά: κάτοψη τελικής τρισδιάστατης απεικόνισης αποχής γεωειδούς. Φαίνεται και η διασπορά των σημείων μέτρησης με μπλε κουκίδες. (αρχείο geoid\_points.fig)

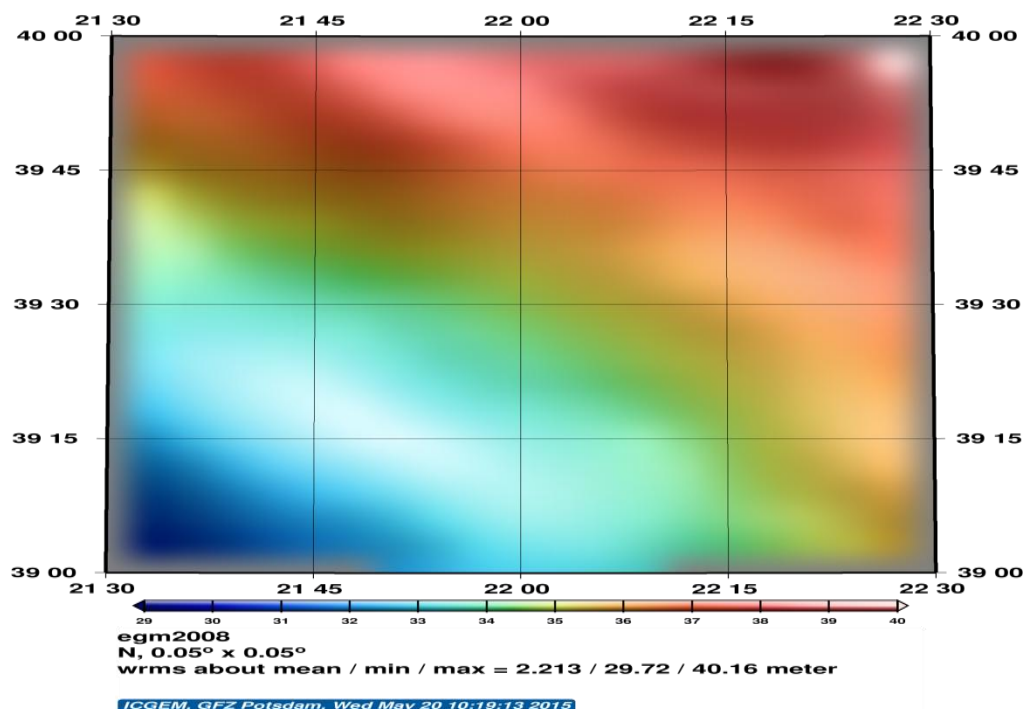


**Εικόνα 4.16:** Αριστερά: τελική τρισδιάστατη απεικόνιση αποχής γεωειδούς, υπό γωνία (συνάρτηση surf), (αρχείο geoid\_surface.fig). Δεξιά: κάτοψη τελικής τρισδιάστατης απεικόνισης αποχής γεωειδούς, με ισούψεις καμπύλες (συνάρτηση contour3), (αρχείο geoid\_contours.fig).

#### 4.5.5. Τρισδιάστατη Απεικόνιση με Δεδομένα του EGM 08 για την Περιοχή Μελέτης

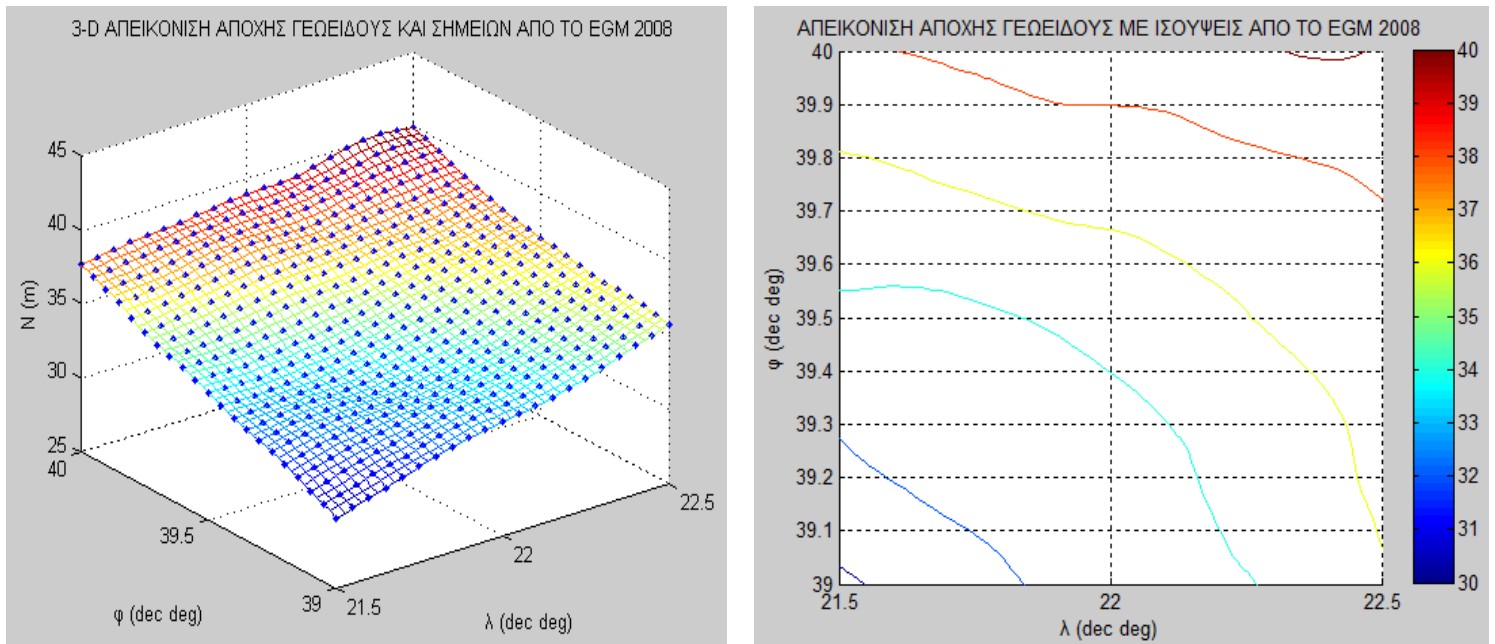
Αφού παρήχθη το τοπικό μοντέλο του γεωειδούς για την περιοχή μας, βάσει των μετρήσεων που είχαμε στη διάθεσή μας, σειρά έχει η δημιουργία του τοπικού μοντέλου από δεδομένα του EGM 2008. Το EGM 2008, αποτελεί την τελική έκδοση μιας Δημιουργία τοπικού μοντέλου γεωειδούς στη περιοχή της Θεσσαλίας

σειράς προκαταρκτικών νέων μοντέλων, καθένα εκ των οποίων ήταν βελτιωμένο σε σχέση με τα προηγούμενα. Είναι πλήρες σε βαθμό και τάξη μέχρι 2159 και περιέχει επιπλέον συντελεστές μέχρι βαθμού 2190 (δηλ. για το ανάπτυγμα του απαιτούνται  $2190 \times 2159 = 4.728.210$  παράμετροι). Σε παγκόσμια κλίμακα υπολογίζει υψόμετρα του γεωειδούς με μέση ακρίβεια  $\pm 15$  cm και η ανάλυση του φτάνει τα 5' της μοίρας, δηλ. περίπου 9 km στον ισημερινό, (6 φορές καλύτερη ανάλυση από το EGM 96). Έτσι λοιπόν, η δημιουργία του τοπικού μοντέλου από δεδομένα του EGM 2008 επετεύχθη με τη βοήθεια του κέντρου ICGEM (International Centre of Global Earth Models, <http://icgem.gfz-potsdam.de/ICGEM/>), στην ιστοσελίδα του οποίου, παρέχονται όλα τα απαραίτητα υπολογιστικά εργαλεία για την παραγωγή τοπικών μοντέλων γεωειδούς, από οποιοδήποτε γνωστό παγκόσμιο μοντέλο του γήινου δυναμικού. Έτσι, στο σύνδεσμο *Calculation Service* της ιστοσελίδας, ορίσαμε τις ζητούμενες παραμέτρους (ελλειψοειδές: GRS 80, μοντέλο γήινου δυναμικού: EGM 08, ζητούμενη παράμετρος: αποχή γεωειδούς, σύστημα παλλιροιών: tide free), καθώς και την περιοχή ενδιαφέροντος ( $\lambda$ :  $21.5 - 22.5^\circ$  και  $\varphi$ :  $39 - 40^\circ$  με βήμα καννάβου  $0.05^\circ$ ) και πήραμε τα ζητούμενα αποτελέσματα (αρχείο *egm2008.pdf* και *egm2008.txt*, απ' το οποίο δημιουργήσαμε για εισαγωγή στο Matlab το αρχείο *egm2008\_m.txt* που περιέχει μόνο τα αποτελέσματα  $\varphi$ ,  $\lambda$ ,  $N$  σε 3 στήλες).

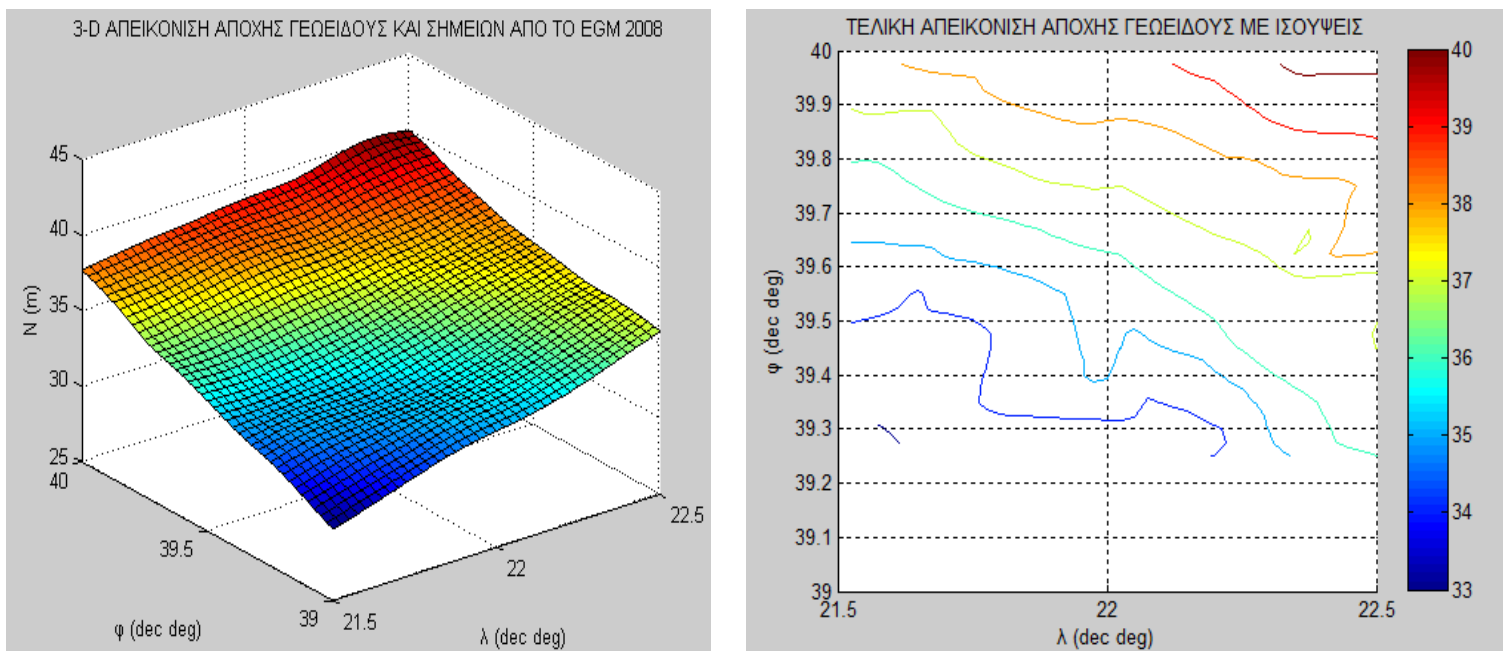


**Εικόνα 4.17:** Απεικόνιση του γεωειδούς από δεδομένα του EGM 08 για την περιοχή μελέτης, (αρχείο *egm2008.pdf*).

Στη συνέχεια, από το Matlab πήραμε την αντίστοιχη τρισδιάστατη απεικόνιση, για το EGM 2008:



**Εικόνα 4.18:** Αριστερά: τελική τρισδιάστατη απεικόνιση του EGM 08, υπό γωνία (συνάρτηση mesh). Δεξιά: κάτοψη τελικής τρισδιάστατης απεικόνισης του EGM 08. Φαίνεται και η διασπορά των σημείων μέτρησης με μπλε κουκίδες, (αρχείο egm08\_points.fig).

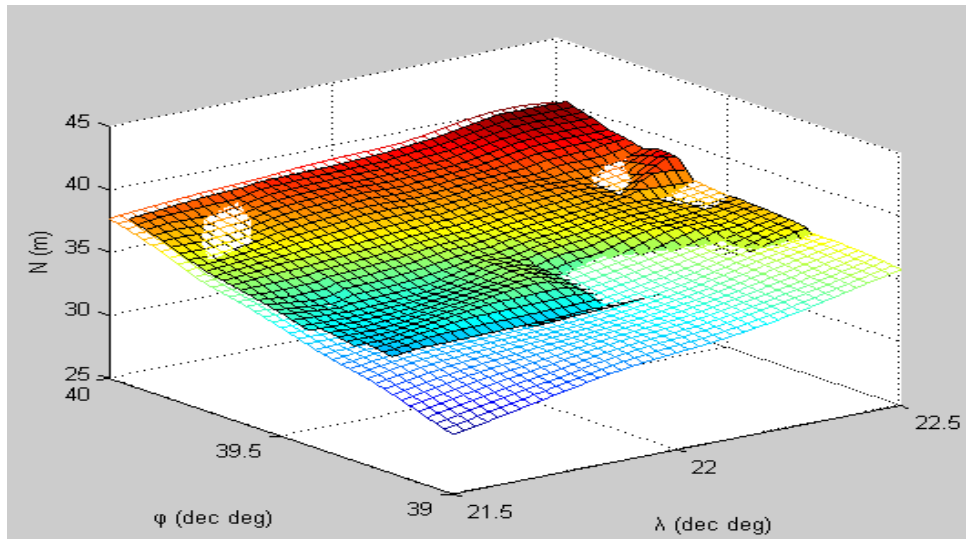


**Εικόνα 4.19:** Αριστερά: τελική τρισδιάστατη απεικόνιση του EGM 08, υπό γωνία (συνάρτηση surf), (αρχείο egm08\_surface.fig). Δεξιά: κάτοψη τελικής τρισδιάστατης απεικόνισης του EGM 08, με ισοΰμεις καμπύλες (συνάρτηση contour3), (αρχείο egm08\_contours.fig).



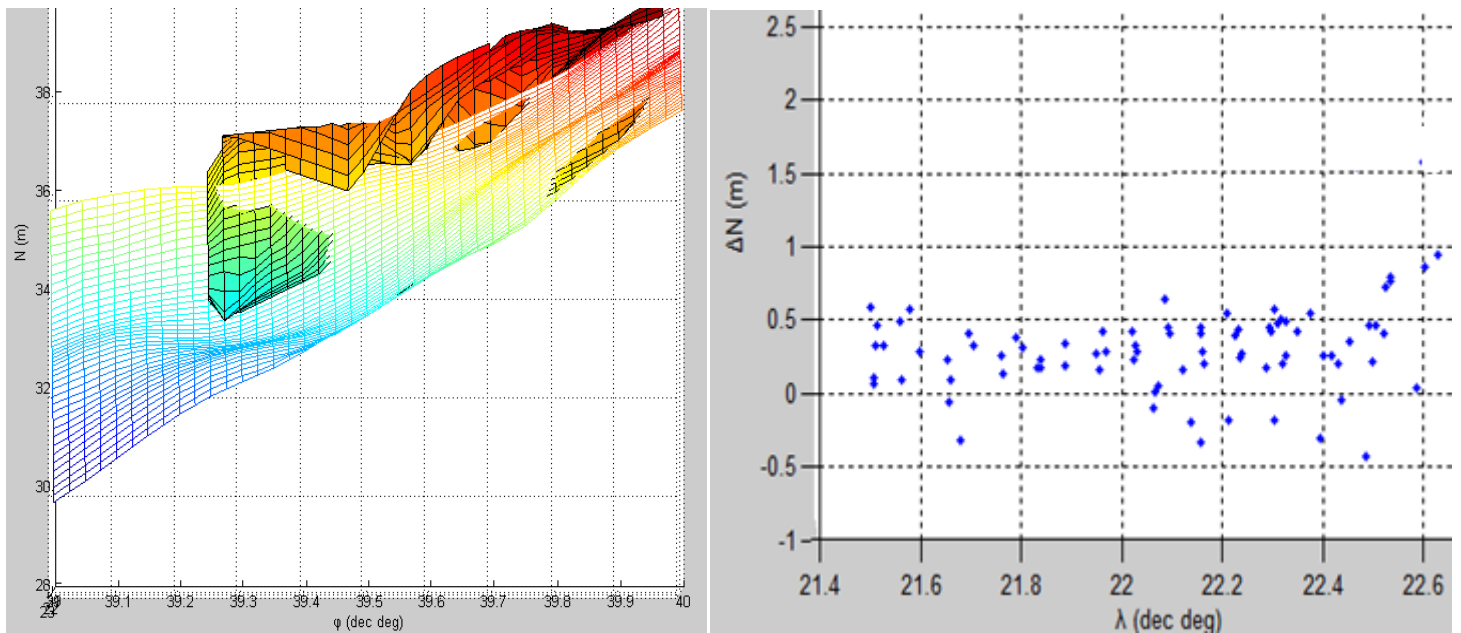
#### 4.5.6. Σύγκριση του EGM 08 με το Μοντέλο που παράχθηκε για την Περιοχή Μελέτης

Τελικό ζητούμενο της εργασίας, είναι η σύγκριση του τοπικού μοντέλου που παρήχθη από τις μετρήσεις που είχαμε στη διάθεσή μας, με το αντίστοιχο μοντέλο γεοειδούς που παίρνουμε για την περιοχή μελέτης στην Θεσσαλία, από τα δεδομένα του EGM 2008. Για την οπτική, κατ' αρχήν, σύγκριση των 2 μοντέλων είναι απαραίτητη η ταυτόχρονη τρισδιάστατη απεικόνιση τους, που φαίνεται παρακάτω:



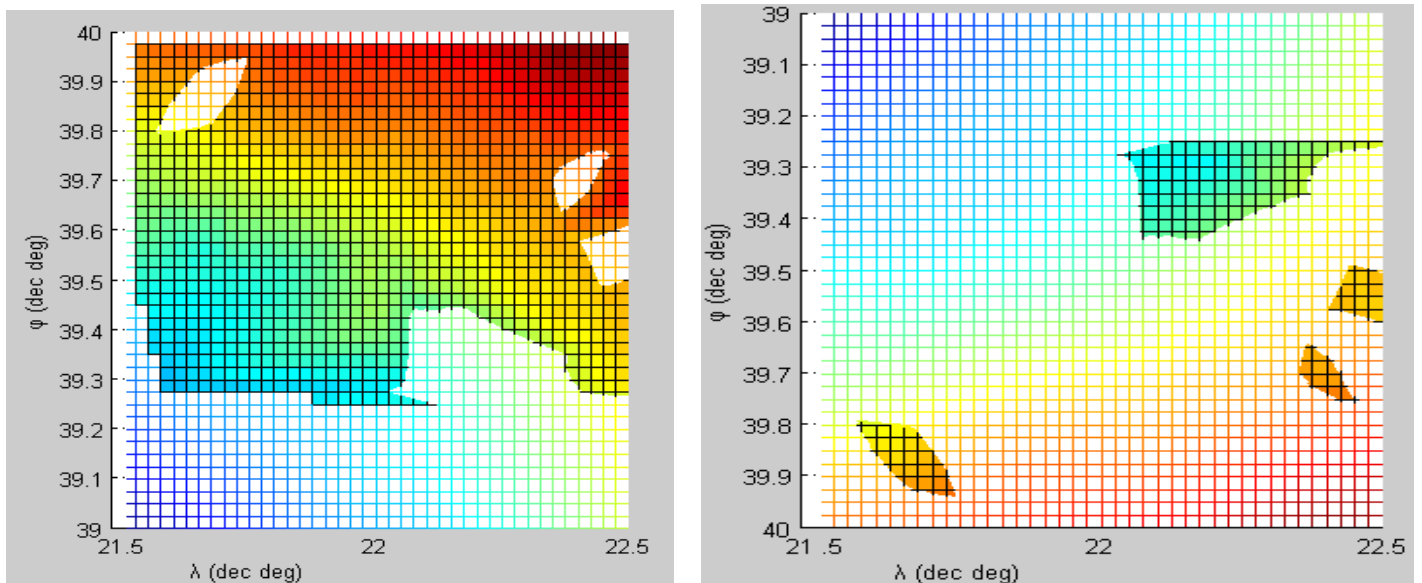
**Εικόνα 4.20:** Ταυτόχρονη τρισδιάστατη απεικόνιση του EGM 08 και του μοντέλου μας (αρχείο *geoid\_vs\_egm08.fig*). Με τα αγνά χρώματα είναι το EGM 08 και με τα πιο σκούρα είναι το μοντέλο που δημιουργήσαμε.

Μια πρώτη παρατήρηση, είναι ότι σε γενικές γραμμές υπάρχει μια αρκετά καλή προσαρμογή των 2 μοντέλων, καθώς σε ένα πολύ μεγάλο τμήμα φαίνεται το μοντέλο μας να «κουμπώνει» πάνω στο EGM 08. Εξαιρεση αποτελεί η περιοχή κοντά στο σημείο  $\varphi = 39.5^\circ$ ,  $\lambda = 22.6^\circ$ , όπου τα 2 μοντέλα φαίνεται να αποκλίνουν αρκετά, γεγονός που πιθανόν να οφείλεται στην ύπαρξη πολύ λίγων διαθέσιμων μετρήσεων για το μοντέλο μας, στην περιοχή αυτή.




**Εικόνα 4.21:** Απόκλιση των 2 μοντέλων στην περιοχή κοντά στο σημείο  $\varphi = 39.5^\circ$ ,  $\lambda = 22.6^\circ$ . Η απόκλιση επισημαίνεται με κόκκινα βελάκια. Παρατηρούμε ότι φτάνει έως και τα 1m περίπου.

Αυτό επίσης που είναι εμφανές, είναι ότι το μεγαλύτερο τμήμα της επιφάνειας του μοντέλου μας βρίσκεται υπεράνω της επιφάνειας του EGM 08, όπως φαίνεται και παρακάτω:

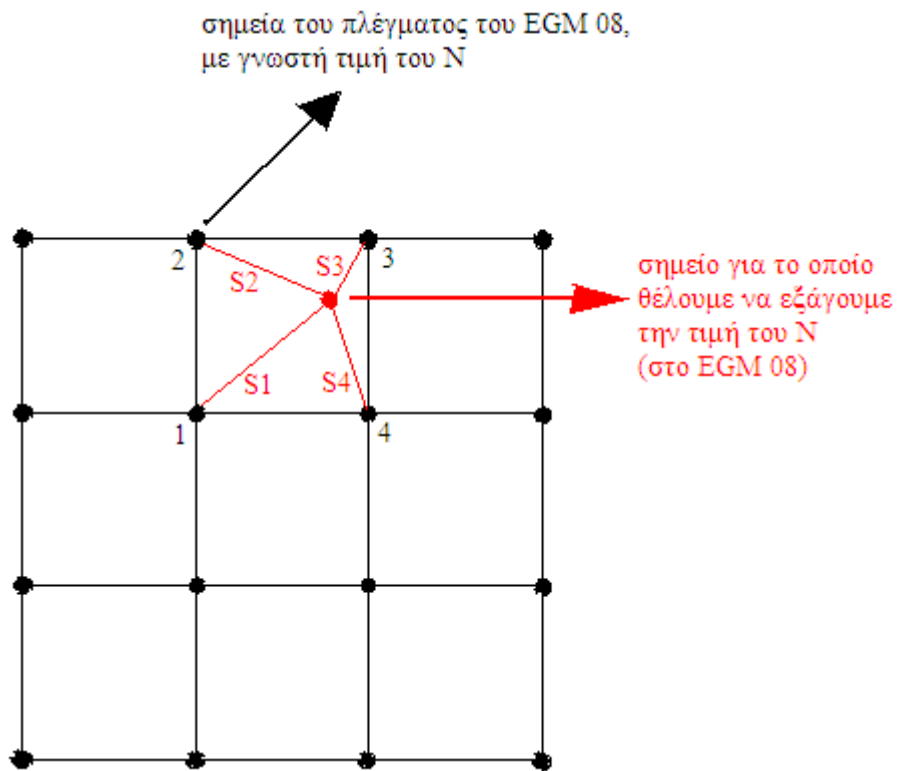


**Εικόνα 4.22:** Αριστερά βλέπουμε το τμήμα της επιφάνειας του μοντέλου μας (σκούρα χρώματα), που είναι υπεράνω του EGM 08, ενώ δεξιά το τμήμα που είναι κάτω από το EGM 08.

(\* Πολύ καλύτερα οπτικά αποτελέσματα από τις εικόνες που περιλαμβάνονται στην τεχνική έκθεση, μπορεί κανείς να δει, ανοίγοντας τα ίδια τα αρχεία των τρισδιάστατων γραφημάτων, καθ' όσον, συν τοις άλλοις, υπάρχει και δυνατότητα περιστροφής των τρισδιάστατων ψηφιακών μοντέλων με τη βοήθεια του κομβίου  που υπάρχει στην

εργαλειοθήκη, με αποτέλεσμα να γίνεται αρκετά ευκρινής η οπτικοποίηση των αποτελεσμάτων).

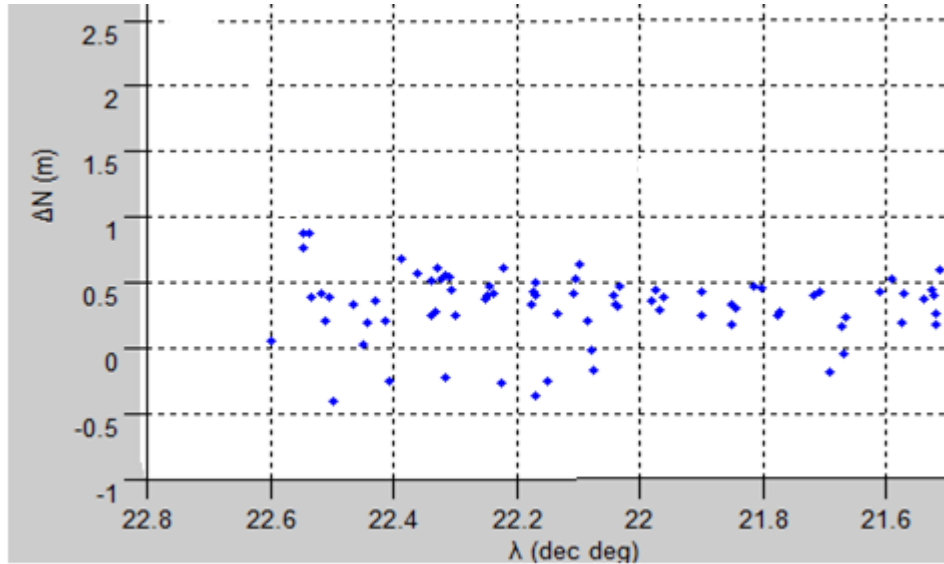
Όσον αφορά τώρα, την αριθμητική σύγκριση των 2 μοντέλων, θα ελέγξουμε την απόκλιση που υπάρχει μεταξύ τους, στα 99 σημεία που χρησιμοποιήσαμε για τη δημιουργία του μοντέλου μας, δηλ. θα ελέγξουμε την διαφορά στην τιμή του N μεταξύ των 2 μοντέλων, σε αυτά τα 99 σημεία. Επομένως, πρέπει πρώτα να βρούμε την τιμή του N που παίρνουμε από το EGM 08, γι' αυτά τα σημεία. Αυτό επετεύχθη με τη δημιουργία ενός αλγορίθμου παρεμβολής, με τον οποίο κάθε σημείο εξ' αυτών, παίρνει την τιμή του από τα 4 σημεία του πλέγματος του EGM 08 που το περιβάλλουν, με συνεισφορά αντιστρόφως ανάλογη της οριζόντιας απόστασης, όπως φαίνεται στο παρακάτω παράδειγμα:



Έτσι, βάσει του αλγορίθμου που δημιουργήσαμε, η τιμή του N (για το EGM 08), για το σημείο που είναι σημασμένο με κόκκινο στο παραπάνω σχήμα κι απέχει αποστάσεις S1, S2, S3 και S4, από τα αντίστοιχα σημεία 1, 2, 3 και 4 του πλέγματος, θα έχει ως εξής:

$$N = \frac{\frac{N_1}{S_1} + \frac{N_2}{S_2} + \frac{N_3}{S_3} + \frac{N_4}{S_4}}{\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_3} + \frac{1}{S_4}}$$

Από την διαδικασία που περιγράφεται παραπάνω, παίρνουμε τον πίνακα του Παραρτήματος Α, που δείχνει για κάθε σημείο (εκ των 99), την απόκλιση στην τιμή του Ν μεταξύ των 2 μοντέλων. Τα αποτελέσματα του πίνακα οπτικοποιούνται στην εικόνα που ακολουθεί:



**Εικόνα 4.23:** Απόκλιση ( $\Delta N$ ) των 2 μοντέλων για τα 99 σημεία των μετρήσεων που χρησιμοποιήσαμε (αρχείο *geoid\_vs\_egm08\_points.fig*)

Όπως παρατηρούμε στην παραπάνω εικόνα, η πλειονότητα των σημείων (περίπου το 70%) έχει απόκλιση  $\Delta N = N_{GeoidModel} - N_{EGM08}$  από 0–50 cm, άρα επιβεβαιώνεται και το αποτέλεσμα του οπτικού ελέγχου ότι τα 2 μοντέλα «κουμπώνουν» καλά και ότι το μοντέλο μας στο μεγαλύτερο τμήμα του, βρίσκεται πάνω από το EGM 08, (ενδεικτικό είναι ότι από τα 100 σημεία σύγκρισης των 2 μοντέλων, μόνο στα 9 εξ' αυτών το EGM 08 έχει μεγαλύτερη τιμή για το Ν από το μοντέλο που δημιουργήσαμε). Τα σημεία που παρουσιάζουν τις μεγαλύτερες και μικρότερες αποκλίσεις φαίνονται στο παρακάτω πίνακα:

| Αριθμός<br>Σημείου | $\varphi(^{\circ})$ | $\lambda(^{\circ})$ | $\Delta N(\text{cm})$ |
|--------------------|---------------------|---------------------|-----------------------|
| 4                  | 39.637175           | 22.530377           | +79.57                |
| 14                 | 39.349196           | 22.502182           | -41.83                |
| 49                 | 39.768401           | 22.056958           | +0.10                 |
| 84                 | 39.401860           | 21.654807           | -0.05                 |

**Πίνακας 4. 1:** Σημεία με τις μεγαλύτερες και μικρότερες αποκλίσεις

Τέλος, ο μέσος όρος της απόκλισης  $\Delta N$  των 2 μοντέλων στα 99 αυτά σημεία είναι +27.7 cm, με μια τυπική απόκλιση των 75cm.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

## Επίλογος

### 5.1. Συμπεράσματα

Συνοψίζοντας λοιπόν, από τα στοιχεία που παρατέθηκαν στην παρούσα εργασία, μπορούμε να εξάγουμε τα παρακάτω συμπεράσματα, που αφορούν τα επιμέρους τμήματα της εργασίας. Αρχικά βλέπουμε ότι ο τρόπος προσδιορισμού μοντέλων γεωειδούς δεν είναι μονοσήμαντος, αλλά υπάρχουν διάφοροι τρόποι με διαφορετικές ακρίβειες ο καθένας, έχοντας οι περισσότεροι ως κοινό παρονομαστή τη χρήση ορθομετρικών υψομέτρων του κρατικού δικτύου, γεωμετρικών υψομέτρων με μετρήσεις GPS, βαρυτημετρικών δεδομένων και δεδομένων κάποιου γεωδυναμικού μοντέλου, (π.χ. EGM 2008, που είναι το επικρατέστερο σήμερα), ο συνδυασμός των οποίων δίνει το καλύτερο δυνατό αποτέλεσμα, σε κάθε περίπτωση.

Επίσης, διαφαίνεται η ανάγκη της αξιοποίησης όλων των προηγούμενων προσπαθειών για τη δημιουργία τοπικών μοντέλων γεωειδούς, σε συνδυασμό με νέα επικαιροποιημένα δεδομένα και τεχνικές και με το παγκόσμιο βαρυτικό μοντέλο EGM 2008, προς την κατεύθυνση της δημιουργίας ενός αξιόπιστου μοντέλου γεωειδούς για ολόκληρο τον Ελλαδικό χώρο, από το οποίο θα μπορούν να εξάγονται ορθομετρικά υψόμετρα ικανοποιητικής ακρίβειας για χρήση σε συνήθεις τοπογραφικές εργασίες.

Όσον αφορά τώρα το πρακτικό μέρος της εργασίας, δημιουργήσαμε ένα τοπικό μοντέλο γεωειδούς σε μια ευρεία περιοχή της Θεσσαλίας, με χρήση ορθομετρικών υψομέτρων του κρατικού δικτύου και γεωμετρικών υψομέτρων από μετρήσεις GPS, δημιουργώντας παράλληλα έναν αλγόριθμο με τη βοήθεια του οποίου έγινε αυτόματη αφαίρεση των σημείων με «κακές» μετρήσεις, που χαλούσαν την εικόνα και την αξιοπιστία του μοντέλου μας, (ξεκινήσαμε με 125 σημεία και μετά την εφαρμογή του αλγορίθμου καταλήξαμε με 110 σημεία). Κατόπιν, έγινε σύγκριση του μοντέλου μας με το αντίστοιχο μοντέλο που δίνει το EGM 2008 για την εν λόγω περιοχή.

Αν και δεν χρησιμοποιήθηκαν αρχικά δεδομένα βαρύτητας για τη δημιουργία του μοντέλου μας, ωστόσο παρατηρούμε ότι, στο μεγαλύτερο τμήμα του, προσεγγίζει σε ικανοποιητικό βαθμό το EGM 2008, (που αποτελεί το πλέον εξελιγμένο παγκόσμιο μοντέλο του γήινου δυναμικού), όπως φάνηκε κι από τη σύγκριση των 2 μοντέλων, (ο μέσος όρος της απόκλισης  $\Delta N$  των 2 μοντέλων στα 100 σημεία είναι 27.7 cm). Εξαίρεση αποτελούν κάποιες περιοχές, όπως στη δυτική και τη νοτιοανατολική περιοχή του μοντέλου μας, όπου η απουσία ικανοποιητικού αριθμού μετρήσεων είχε ως αποτέλεσμα, τα 2 μοντέλα να έχουν σημαντικές αποκλίσεις, (έως και 1 m περίπου).

Από το παραπάνω, συμπεραίνουμε ότι πολύ σημαντική για την ακρίβεια και την αξιοπιστία του μοντέλου, είναι η «καλή» διασπορά των μετρήσεων, σε συνδυασμό με έναν ικανό αριθμό μετρήσεων αναλόγως και της περιοχής μελέτης. Δεδομένης και της απουσίας βαρυτικών δεδομένων και διορθωτικών παραγόντων, η χωρικά ισοκατανεμημένη διασπορά των μετρήσεων σε όλη την περιοχή μελέτης, αποτελεί παράμετρο μείζονος σημασίας, που πρέπει να λαμβάνεται σημαντικά υπ' όψιν κατά τη συγκεκριμένη μέθοδο προσδιορισμού μοντέλου γεωειδούς. Όσον αφορά το μοντέλο μας δηλαδή, βλέπουμε ότι κατά το συντριπτικά μεγαλύτερο μέρος του, δίνει αρκετά αξιόπιστα αποτελέσματα, πλην της νοτιοανατολικής περιοχής και ενός μικρού τμήματος στα δυτικά, (περιοχές χωρίς μετρήσεις). Συμπερασματικά καταλήγουμε ότι η ακρίβεια προσδιορισμού του μοντέλου μας εξαρτάται από την ακρίβεια προσδιορισμού των ορθομετρικών υψομέτρων των τριγωνομετρικών που χρησιμοποιήσαμε, καθώς και από την ακρίβεια των γεωμετρικών υψομέτρων που πήραμε από τις μετρήσεις με GPS.

Σχετικά τέλος, με την επεξεργασία των δεδομένων, η οποία έγινε με χρήση της Matlab, αξίζει να σημειωθεί ότι η συγκεκριμένη γλώσσα αποτελεί ένα καλό κι ευέλικτο εργαλείο με αρκετές δυνατότητες για τέτοιου είδους επεξεργασίες. Όσον αφορά την τρισδιάστατη απεικόνιση των μοντέλων, η μέθοδος του εγγύτερου γείτονα δεν είναι αξιόπιστη, καθώς παράγει ένα μη φυσικό μοντέλο με έντονες ασυνέχειες στην επιφάνεια, γι' αυτό και ενδείκνυται η χρησιμοποίηση της διγραμμικής παρεμβολής, που δίνει μια αρκετά καλή απεικόνιση.

## 5.2. Προτάσεις

Οι πρόσφατες (2005-2010) ταυτόχρονες μετρήσεις *GPS* και βαρύτητας από τη ΓΥΣ έχουν πολύ καλή ακρίβεια. Εντούτοις ο επανέλεγχος ή ακόμα και η επανασυνόρθωση των ορθομετρικών υψομέτρων και ιδίως αυτών που προέρχονται από τριγωνομετρική υψομετρία είναι κάτι το οποίο θα βοηθούσε πολύ στην πραγματική ακρίβεια του υπολογισμένου γεωειδούς. Η χρησιμοποίηση επιπλέον βαρυτικών τιμών για τη περιοχή θα ήταν πολύ χρήσιμη καθώς ο δημιουργούμενος κάρναβος μέσω των τιμών θα ήταν πιο ακριβής. Προτείνεται η συνέχιση σε διπλανές επικαλυπτόμενες περιοχές ο προσδιορισμός του γεωειδούς με παρόμοιο τρόπο και ο συγκριτικός έλεγχος στις κοινές περιοχές, και αν τα αποτελέσματα είναι εξίσου καλά η επέκταση των υπολογισμών σε όλο τον Ελλαδικό χώρο. Εναλλακτικά με τη χρησιμοποίηση ενδιάμεσων τιμών βαρύτητας προτείνεται η χρήση της *LSQ* σημειακής προσαρμογής για μεγαλύτερη περιοχή.

Επίσης προτείνεται η επέκταση των ταυτόχρονων μετρήσεων *GPS* και βαρύτητας σε άλλες περιοχές πέρα από τις ήδη μετρημένες από τη ΓΥΣ, που καλύπτουν τον Ελλαδικό χώρο από τη Μακεδονία έως την Β. Πελοπόννησο, αλλά και η μέτρηση με απόλυτο βαρυτόμετρο του Εθνικού σταθμού Βαρύτητας της ΓΥΣ, ο οποίος είναι η αφετηρία για όλες τις μετρήσεις βαρύτητας στον Ελλαδικό χώρο και στη συνέχεια η επανασυνόρθωση όλου του δικτύου βαρύτητας.

Τέλος επειδή οι παραπάνω προτάσεις είναι χρονοβόρες αλλά και με υψηλό κόστος προτείνεται η παρεμβολή όλων των διαθέσιμων τιμών βαρύτητας που υπάρχουν για τον Ελλαδικό χώρο, με το παγκόσμιο μοντέλο *EGM2008* για μία αρχικά καλύτερη προσέγγιση του πεδίου βαρύτητας. Το μοντέλο αυτό ήδη παρέχει μία βελτίωση της ακρίβειας για ολόκληρο τον Ελλαδικό χώρο, στην αποχή του γεωειδούς. Μάλιστα μεγάλο ποσοστό της απόκλισης αυτής από τις μετρήσεις είναι συστηματικό καθώς στο μεγαλύτερο τμήμα τους υποεκτιμούν τις αποχές γεωειδούς που μετρώνται με *GPS*. Αν γίνει η παρεμβολή των μετρήσεων βαρύτητας που υπάρχουν στον Ελλαδικό χώρο και από αυτές επαναυπολογιστούν οι αποχές του γεωειδούς που προκύπτουν από το μοντέλο τότε η παραπάνω απόκλιση αναμένεται να μειωθεί κατά ένα πολύ μεγάλο ποσοστό.



# ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] *Different ways to handle topography in practical geoids determination* Dahl, O. C., R. Forsberg: Phys. Chem. Earth (a), Vol.24, No. 1, pp. 41-46, 1999.
- [2] *Evaluation and Improvement of the EGG97 quasi-geoid model for Europe by GPS and Leveling Data*, Denker, H. submitted to Proceedings 2nd Continental Workshop on the Geoid in Europe, March 10-14, Budapest 1998.
- [3] *An introduction to the Global Positioning System and some geological applications*, Dixon, T.H. *Reviews of Geophysics*, Vol. 29, No. 2, pp. 249-276, 1991.
- [4] *Determination of the Quasi-Geoid in a Mountainous Area: Example of the Eastern Pyrenees (France)*, Doerflinger, E ., Z. Jiang, H . D uquenne, R . B ayer International Association of Geodesy Symposia, Vol. 117, pp. 643-650, 1997.
- [5] *The use of height data in gravity field approximation by collocation*, Forsberg, R., C. Tsch erning, *Journal of Geophysical Research* Vol. 86, No. B 9, pp. 7843- 7854, 1981.
- [6] *Geodetic Reference System 1980*, Moritz, H. *Bulletin Geodesique*, Vol. 58, No. 3, 1984.
- [7] *Computation and accuracy of global undulation models*, Rapp, R. *Proceedings of the Sixth International Geodetic Symposium on Satellite Positioning*, U.S.A., p.865- 871, 1992.
- [8] *Comparison of geoid models to GPS on benchmarks*, Veronneau, M.: Internal Report, Geodetic Survey Division, Canada Centre for Surveying, Dept. of Energy, Mines and Resources Canada, Ottawa. Presented at the A.G.U. Spring Meeting, Montreal, 1992.

- [9] A study of terrain reductions, density anomalies and geophysical inversion methods in gravity field modelling, Rene Forsberg, Reports of department of geodetic science and surveying, Report No.355. Ohio 1984.
- [10] Topographic Effects in Gravity Field Modelling for BVP, Rene Forsberg-CC Tscherning, lecture notes in Earth Sciences, no 65.
- [11] *Advanced geoid modeling for the National Height Modernization Program*, Dr. Dan Roman, Gregory A. Helmer, PLS.
- [12] *Local geoid determination using variable surface densities*, Szabolcs ROZSAI 2002.
- [13] A method to validate gravimetric-geoid computation software based on Stokes's integral formula, W. E. Featherstone, J. G. Olliver 1997.
- [14] *Geophysical Methods in Geology*, Prof. G. R. Foulger & Prof. C. Peirce.
- [15] *A guide to high precision land Gravimeter Surveys*, HO. Seigel, 1995.
- [16] *New standards for reducing gravity data: The North American gravity database*, William J. Hinze, Carlos Aiken, John Brozena, Bernard Coakley, David Dater, Guy Flanagan, Rene Forsberg, Thomas Hildenbrand, G. Randy Keller, James Kellogg, Robert Kucks, Xiong Li, Andre Mainville, Robert Morin, Mark Pilkington, Donald Plouff, Dhananjay Ravat, Daniel Roman, Jamie Urrutia-Fucugauchi, Marc Veronneau, Michael Webring, and Daniel Winchester.
- [17] *Encyclopedic Dictionary of Exploration Geophysics*, R. E. Sheriff.
- [18] *Precise Local Geoid Determination to Make GPS Technique More Effective in Practical Applications of Geodesy* Bihter EROL and Rahmi Nurhan QELiK, Turkey.
- [19] *Geoid Determination for Engineering Purposes in Hungary*, Sz. Rozsa, Technical University of Budapest, Department of Geodesy (published in the Proceedings of the International Students' Conference - Environment, Development, Engineering, pp 125-132, Zakopane, 1999).

[20] *High precision combined geoid determination in Switzerland* Urs Marti, Federal Office of Topography, Seftigenstrasse 264, CH-3084 Wabern, Switzerland, E-mail: [urs.marti@swisstopo.ch](mailto:urs.marti@swisstopo.ch)

[21] Precision geoid determination by spherical FFT in and around the Korean peninsula, Hong-Sic Yun Department of Civil Engineering, Sungkyunkwan University, Korea (Received April 3, 1998; Revised September 17, 1998; Accepted October 12, 1998.

[22] *Regional Quasi-Geoid Determination in the Area of Poland*, Jan Krynski and Adam Lyszkowicz, Poland.

[23] *On the Comparison between Point Mass and Collocation Methods for Geoid Determination*, C. Antunes and J. Catalao, Faculdade de Ciencias da Universidade de Lisboa, Portugal, E-mails : [mcarlos@fc.ul.pt](mailto:mcarlos@fc.ul.pt), [mjoao@fc.ul.p](mailto:mjoao@fc.ul.p)

[24] *The high-resolution gravimetric geoid of Italy: ITG2009*, V. Corchete \*, Higher Polytechnic School, University of Almeria, 04120 Almeria, Spain.

[25] *Local Geoid Determination using Variable Surface Densities*, Szabolcs ROZSAI, Department of Geodesy and Surveying, Budapest University of Technology and Economics H-1521, Budapest, M<sup>u</sup>egyetem rkp. 1-3, Hungary, Tel.: +36-1-463-1222, e-mail: [szrozsai@geo.fat.bme.hu](mailto:szrozsai@geo.fat.bme.hu), Received: Jan. 25, 2002.

[26] *The Local Geoid Model of Cameroon: CGM05*, J. Kamguial, C. T. Tabod<sup>2</sup>, R. Nouayou<sup>2</sup>, J. M. Tadjou<sup>1</sup>, E. Manguelle-Dicoum<sup>2</sup> and H. L. Kandel, <sup>1</sup> National Institute of Cartography (NIC) - Cameroon, P.O. Box 157, Yaounde, Cameroon, <sup>2</sup> Department of Physics, Faculty of Science, University of Yaounde I, P.O. Box 812 Yaounde, Cameroon, Corresponding author: Tabod Charles Tabod, [charlestabod@yahoo.co.uk](mailto:charlestabod@yahoo.co.uk)

[27] *A Gravimetric Geoid Model for the United States: The Development and Evaluation of USGG2009*, Daniel R. Roman, Yan Ming Wang, Jarir Saleh, and Xiaopeng Li NOAA/National Geodetic Survey Final National Models for the United States:

*Development of GEOID09, Daniel R. Roman, Yan Ming Wang, Jarir Saleh, and Xiaopeng Li, NOAA/National Geodetic Survey.*

[28] An overview manual for the Gravsoft Geodetic Gravity Field Modelling programs, Rene Forsberg-CC Tscherning,2008.

[29] Geoid determination by 3D least-squares collocation, C.C.Tscherning,2008.

[30] Geoid Determination by FFT Techniques,Dr. Michael G. Sideris sideris@ucalgary.ca,Addendum:Dr. Georgia Fotopoulos,gfotopou@ucalgary.ca,2008.

[31] An Earth Gravitational Model to Degree 2160:EGM2008 , Nikolaos K. Pavlis, Simon A. Holmes,Steve C. Kenyon, and John K. Factor,2008.

[32] Marine Geographic Information Systems Hellenic Center for Marine Research (HCMR), Internet Address :<http://arch.her.hcmr.gr/downl.htm>

[33] Digital Bathymetric Data Base, from the U.S. Naval Oceanographic Office, Internet Address: <http://neonet.nlr.nl/ceos-idn/datasets/NAVOCEANO DBDBV.html>

[34] T. M. Lehmann, C. Gonner and K. Spitzer, “Survey: Interpolation methods in geosciences processing”, IEEE Transactions,1984.

[35] S. Chandra, M. Petrou and R. Pirrodi, “Texture interpolation using ordinary Kriging” [Book Chapter], Pattern Recognition and Image Analysis, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005.

[36] R.E.Rossi,J.L.Dungan and L.R.Beck,“Kriging in the Shadows:Geostatistical Interpolation for Remote Sensing”, Remote Sensing of Environment,1994.

[37] S. C. Park, M. K. Park and M. G. Kang, “Super-resolution image reconstruction: A technical overview”, IEEE Signal Processing Magazine,2003.

- [38] F. J. Harris, “On the use of windows for harmonic analysis with the discrete Fourier trans-form”, IEEE Proceedings, 1978.
- [39] N. A. Dodgson, “Quadratic interpolation for image resampling”, IEEE Transactions on Image Processing , 1997.
- [40] Ψηφιακό μοντέλο εδάφους ASTER, διακριτικής ικανότητας (~30m), Internet Address:[http://asterweb.ipl.nasa.gov/content/03\\_data/01\\_Data\\_Products/release\\_DEM\\_relative.htm](http://asterweb.ipl.nasa.gov/content/03_data/01_Data_Products/release_DEM_relative.htm)
- [41] Υπολογισμοί και θεωρία βαρύτητας icgem, Internet Address: <http://icgem.gfz-potsdam.de/ICGEM/>
- [42] Δ. Παραδείσης, «Σημειώσεις Δορυφορικής Γεωδαισίας», Αθήνα 2009, ΕΜΠ.
- [43] Γ. Βέης, Χ. Μπιλλήρης, Κ. Παπαζήση «Κεφάλαια Ανώτερης Γεωδαισίας», Αθήνα 2009, ΕΜΠ.
- [44] Δ. Δεληκαράογλου «Φυσική Γεωδαισία-Θεωρητικές και Τεχνολογικές Βάσεις», Αθήνα 2010.
- [45] Π. Μήλας, Χ. Μπιλλήρης, «Μετατροπές Συστημάτων Αναφοράς και Προβολικών Συστημάτων – Υψομετρικά Συστήματα Αναφοράς», Αθήνα 2006, ΕΜΠ.
- [46] Γ. Βέης, Χ. Μπιλλήρης, Κ. Παπαζήση, «Κεφάλαια Ανώτερης Γεωδαισίας», Αθήνα 2009, ΕΜΠ.
- [47] Ε. Λάμπρου, Γ. Πανταζής, «Εφαρμοσμένη Γεωδαισία», Μάρτιος 2010, Εκδόσεις Ζήτη.
- [48] Α. Φωτίου, Χ. Πικριδάς, «GPS και Γεωδαιτικές Εφαρμογές», Θεσσαλονίκη 2006, Εκδόσεις Ζήτη.

- [49] Ανδρουλάκη Α., (Γκίκας Β., Σταθάς Δ., Λάμπρου Ε.), «Υπολογισμός αποχής του γεωειδούς από ορθομετρικά υψόμετρα ακριβείας και γεωμετρικά υψόμετρα με χρήση διασυνδεδεμένων αισθητήρων GNSS / INS / DMI. Εφαρμογή στον σιδηροδρομικό άξονα Κινέττα - Κιάτο», 2009.
- [50] Α. Μ. Αγατζά – Μπαλοδήμου, «Θεωρία Σφαλμάτων και Συνορθώσεις Ι», Αθήνα 2006, ΕΜΠ.
- [51] W. Torge, «Γεωδαισία», Αθήνα 2000, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις ΕΜΠ.
- [52] Ανδριτσάνος Β.Δ., Κατσάμπαλος Κ.Ε., Κεχαΐδου Κ.Ε., Τζιαβός Η.Ν., «Βελτιστοποίηση Τοπικού Γεωειδούς με δεδομένα Βαρύτητας, Τοπογραφίας, Πυκνότητας και GPS», 1999.
- [53] Ανδριτσάνος Β.Δ., Καγιαδάκης Β., Κωστάκης Γ., Μυλωνά-Κοτρογιάννη Ε., Πικριδάς Χ., Ρωσσικόπουλος Δ., Τζιαβός Η.Ν., Φωτίου Α., «Προσδιορισμός Τοπικού Μοντέλου Γεωειδούς συνδυάζοντας μετρήσεις GPS, Βαρύτητας και Υψομετρίας. Εφαρμογή στην ευρύτερη περιοχή της Θεσ/νίκης», 1999.
- [54] Ανδριτσάνος Β.Δ., Φωτίου Α., Πικριδάς Χ., Ρωσσικόπουλος Δ., Τζιαβός Η.Ν., «New local Geoid model for Northern Greece», 2006.
- [55] Μιντουράκης Ι., «Η Δορυφορική Αλτιμετρία ως γεωδαιτικό εργαλείο για την προσέγγιση του Θαλάσσιου Γεωειδούς. Εφαρμογή στον Ελλαδικό Θαλάσσιο Χώρο», 2010.
- [56] ΚΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ Α.Ε., «Εξελιζεις στην Εθνική Γεωδαιτική Υποδομή – Ο ρόλος του HEPOS», 2012.
- [57] Παρασκευάς Μ., (Παραδείσης Δ., Μήλας Π., Παπαζήση Κ.), «Προσδιορισμός γεωειδούς από επίγειες τιμές βαρύτητας για την περιοχή της Αταλάντης», 2011.
- [58] Αλεβιζάκου Ε.-Γ. Β., (Πανταζής Γ.), «Προσδιορισμός της αποχής του γεωειδούς N σε αστική περιοχή», 2010.

# ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Στο παράρτημα της παρούσας εργασίας επισυνάπτονται τα αρχεία Matlab (functions και scripts) που συντάχθηκαν για την επεξεργασία και την εξαγωγή των αποτελεσμάτων:

```
clear all
clc
format long g
format compact
fprintf('\nΙΩΑΝΝΗΣ ΔΙΑΜΑΝΤΗΣ rs12211\n')
fprintf('\n\nΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ ΤΟΠΙΚΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΓΕΩΕΙΔΟΥΣ ΣΤΗ ΠΕΡΙΟΧΗ ΤΗΣ
ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ\n\n')
%Για το GRS 80, οι κάτωθι μεταβλητές έχουν τις εξής τιμές:
%a=6378137.000;
%b=6356752.314;
%f_inv=298.257222101;
%e2=0.006694380;
%fprintf('\n\n1)Μετατροπή των καρτεσιανών συντι/νων X,Y,Z σε γεωδαιτικές
φ,λ,h (WGS 84)\n\n')
XYZ=load('geoid.txt');
X=XYZ(:,1);
Y=XYZ(:,2);
Z=XYZ(:,3);
PointsNumber=length(X) %αρχικός αριθμός χρησιμοποιούμενων σημείων
%Υπολογισμός αρχικής τιμής γεωδαιτικού πλάτους
%fo=atan(Z./((1-e2)*sqrt(X.^2+Y.^2)));

%Κριτήριο σύγκλισης φ(v+1)-φ(v)< 0",00001 (1 εκατοντάκις χιλιοστό του
sec, περίπου 0.3mm)
%sf= 5*10^-11; %σε rad

%df=1; %αρχικοποίηση των διορθώσεων του φ σε κάθε επανάληψη

%Υπολογισμός γεωδαιτικών συντι/νων
%while abs(df)>sf
    %N=a./(sqrt(1-e2*sin(fo).^2));
    %f=atan((Z+e2*N.*sin(fo))./sqrt(X.^2+Y.^2));
    %df=fo-f;
    %fo=f;
%end

%fprintf('\n\n')
%f_moires=180/pi*f; %σε δεκαδικές μοίρες
%l_moires=180/pi*atan(Y./X); %σε δεκαδικές μοίρες
%h=(round((sqrt(X.^2+Y.^2)./cos(f)-N)*1000))/1000; %για ακρίβεια mm
%metatropi_syntetagmenwn=[f_moires l_moires h]
```

```

%fprintf('\n\n2)Αφαίρεση, για κάθε σημείο, του ύψους βάθρου από το
γεωμετρικό υψόμετρο h που υπολογίσαμε στην παραπάνω μετατροπή\n\n')

%fid=fopen('TrigPts.FLH');
%trig=textscan(fid,'%s %s %s %s %s %s %f %f %f %f %f');
%fclose(fid);

%H=trig{9}; %ορθομετρικά υψόμετρα
%bathra=trig{10}; %ύψη βάθρων

%h_final=h-bathra; %τελικά γεωμετρικά υψόμετρα των σημείων
%telikes_syntetagmenes_f_l_h=[f_maires l_maires h_final]

%fprintf('\n\n3)Υπολογισμός αποχής γεωειδούς από τη θεμελιώδη σχέση N=h-
H\n\n')

%N_geoid=(round((h_final-H)*1000))/1000; %για ακρίβεια mm
%pinakas_f_l_N=[f_maires l_maires N_geoid]

fprintf('\n\n4)ΑΡΧΙΚΗ 3-D ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ ΑΠΟΧΗΣ ΓΕΩΕΙΔΟΥΣ\n\n')

axe_x=21:0.025:23.0;
axe_y=39.0:0.025:40.0;

[XI,YI]=meshgrid(axe_x,axe_y);
ZI=griddata(XYZ(:,1),XYZ(:,2),XYZ(:,3),XI,YI,'linear'); %(δι-)γραμμική
παρεμβολή

figure(1)
mesh(XI,YI,ZI),hold
plot3(XYZ(:,1),XYZ(:,2),XYZ(:,3),'.'), hold off
xlabel('λ (dec deg)')
ylabel('φ (dec deg)')
zlabel('N (m)')
title ('ΑΡΧΙΚΗ 3-D ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ ΑΠΟΧΗΣ ΓΕΩΕΙΔΟΥΣ')

fprintf('\n\n5)ΑΠΑΛΟΙΦΗ ΣΗΜΕΙΩΝ ΠΟΥ "ΚΛΩΤΣΑΝΕ"')

%κριτήριο απαλοίφης ενός σημείου, εάν το άθροισμα των ηηλίκων ΔN/Dist του
%σημείου αυτού ως προς όλα τα σημεία είναι μεγαλύτερο από κάποιο όριο
for i=1:PointsNumber
    for j=1:PointsNumber
        dist(i,j)=sqrt((X(i)-X(j))^2+(Y(i)-Y(j))^2);
        DN(i,j)=abs(Z(i)-Z(j));
        if i~=j
            krit(i,j)=DN(i,j)./dist(i,j);
        else krit(i,j)=0;
        end
    end
end
s=sum(krit);

k=1;
for i=1:PointsNumber
    if s(i)<700 %επιλεχθέν όριο έπειτα από δοκιμές
        par(k)=i;
        k=k+1;
    end
end
end
fprintf('\n\n')
PointsNumberFinal=length(par) %τελικός αριθμός χρησιμοποιούμενων σημείων

```



```

fprintf('\n\n')

l_final=X(par);
f_final=Y(par);
N_final=Z(par);
f_l_N_telikwn_simeiw=[l_final f_final N_final]

fprintf('\n\n6)ΤΕΛΙΚΗ 3-D ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ ΑΠΟΧΗΣ ΓΕΩΕΙΔΟΥΣ\n\n')

ZI=griddata(l_final,f_final,N_final,XI,YI,'linear'); %(δι-)γραμμική
παρεμβολή

figure(2)
mesh(XI,YI,ZI),hold
plot3(l_final,f_final,N_final,'. '), hold off
xlabel('λ (dec deg)')
ylabel('φ (dec deg)')
zlabel('N (m)')
title ('ΤΕΛΙΚΗ 3-D ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ ΑΠΟΧΗΣ ΓΕΩΕΙΔΟΥΣ ΚΑΙ ΣΗΜΕΙΩΝ')
figure(3)
surf(XI,YI,ZI),hold
xlabel('λ (dec deg)')
ylabel('φ (dec deg)')
zlabel('N (m)')
title ('ΤΕΛΙΚΗ 3-D ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ ΑΠΟΧΗΣ ΓΕΩΕΙΔΟΥΣ')

figure(4)
contour3(XI,YI,ZI),hold
xlabel('λ (dec deg)')
ylabel('φ (dec deg)')
zlabel('N (m)')
title ('ΤΕΛΙΚΗ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ ΑΠΟΧΗΣ ΓΕΩΕΙΔΟΥΣ ΜΕ ΙΣΟΥΨΕΙΣ')

fprintf('\n\n7)ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ ΤΟΥ EGM 2008 ΓΙΑ ΤΗΝ ΠΕΡΙΟΧΗ ΜΕΛΕΤΗΣ\n\n')

p=load('egm08_grs80_m.txt');
PointNumber_egm08=length(p(:,1))

ZI=griddata(p(:,1),p(:,2),p(:,3),XI,YI,'linear'); %(δι-)γραμμική
παρεμβολή

figure(5)
mesh(XI,YI,ZI),hold
plot3(p(:,1),p(:,2),p(:,3),'.'), hold off
xlabel('λ (dec deg)')
ylabel('φ (dec deg)')
zlabel('N (m)')
title ('3-D ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ ΑΠΟΧΗΣ ΓΕΩΕΙΔΟΥΣ ΚΑΙ ΣΗΜΕΙΩΝ ΑΠΟ ΤΟ EGM 2008')

figure(6)
surf(XI,YI,ZI),hold
xlabel('λ (dec deg)')
ylabel('φ (dec deg)')
zlabel('N (m)')
title ('3-D ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ ΑΠΟΧΗΣ ΓΕΩΕΙΔΟΥΣ ΚΑΙ ΣΗΜΕΙΩΝ ΑΠΟ ΤΟ EGM 2008')

figure(7)
contour3(XI,YI,ZI),hold
xlabel('λ (dec deg)')
ylabel('φ (dec deg)')
zlabel('N (m)')

```

```

title ('ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ ΑΠΟΧΗΣ ΓΕΩΕΙΔΟΥΣ ΜΕ ΙΣΟΥΨΕΙΣ ΑΠΟ ΤΟ EGM 2008')

fprintf('\n\n8)ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΤΟΥ EGM 2008 ΜΕ ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΠΟΥ ΠΑΡΑΧΘΗΚΕ ΓΙΑ ΤΗΝ
ΠΕΡΙΟΧΗ ΜΕΛΕΤΗΣ\n\n')
%εύρεση της αποχής N του EGM 08 στα 99 σημεία που χρησιμοποιήθηκαν για τη
%δημιουργία του μοντέλου μας, δημιουργώντας έναν αλγόριθμο παρεμβολής από
%τα 4 σημεία του πλέγματος του EGM 08, που περιβάλλουν το κάθε σημείο
for i=1:PointsNumberFinal
    k=1;
    for j=1:PointNumber_egm08
        if abs(p(j,1)-l_final(i))<0.05 && abs(p(j,2)-f_final(i))<0.05
            s_par(k)=j;
            k=k+1;
        end
    end
    sum1=0;
    sum_a=0;
    for l=1:length(s_par)
        m=s_par(l);
        distance(i,l)=sqrt((f_final(i)-p(m,2))^2+(l_final(i)-p(m,1))^2);
        sum2=p(m,3)/distance(i,l);
        sum_b=1/distance(i,l);
        sum1=sum1+sum2;
        sum_a=sum_a+sum_b;
    end
    N_sygkr(i)=sum1/sum_a; %παρεμβολή αντιστρόφως ανάλογα της απόστασης
end
N_sygkr=(round((N_sygkr)*1000))/1000;

final_pinax=[f_final l_final N_final N_sygkr' (round((N_final-
N_sygkr')*1000))/1000]
mean=(round((mean(final_pinax(:,5)))*1000))/1000
st_dev=(round((std(final_pinax(:,5)))*1000))/1000

ZI1=griddata(l_final,f_final,N_final,XI,YI,'linear');
ZI2=griddata(p(:,1),p(:,2),p(:,3),XI,YI,'linear');

figure(8)
surf(XI,YI,ZI1),hold
mesh(XI,YI,ZI2),hold off
xlabel('\lambda (dec deg)')
ylabel('\phi (dec deg)')
zlabel('N (m)')
title ('ΤΑΥΤΟΧΡΟΝΗ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ ΤΟΥ EGM 2008 ΚΑΙ ΤΟΥ ΔΙΚΟΥ ΜΑΣ ΤΟΠΙΚΟΥ
ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΓΕΩΕΙΔΟΥΣ')

figure(9)
plot3(l_final,f_final,final_pinax(:,5),'.'), hold off
grid on
xlabel('\lambda (dec deg)')
ylabel('\phi (dec deg)')
zlabel('\Delta N (m)')
title ('ΑΠΟΚΛΙΣΗ ΤΟΥ EGM 2008 ΚΑΙ ΤΟΥ ΔΙΚΟΥ ΜΑΣ ΤΟΠΙΚΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ
ΓΕΩΕΙΔΟΥΣ ΣΤΑ 99 ΣΗΜΕΙΑ ΜΕΤΡΗΣΕΩΝ ΠΟΥ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΗΣΑΜΕ')

figure(10)
I=imread('georef_1.jpg');
x=[21 23];
y=[39 40.0];
image(x,y,I)
title ('ΓΕΩΑΝΑΦΕΡΜΕΝΗ ΕΙΚΟΝΑ ΤΗΣ ΠΕΡΙΟΧΗΣ ΜΕΛΕΤΗΣ')

```

```

figure(11)
I=imread('georef_1.jpg');
x=[21 23];
y=[39 40];
image(x,y,I),hold
plot(X,Y,'. '),hold off
title ('ΕΙΚΟΝΑ ΤΗΣ ΠΕΡΙΟΧΗΣ ΜΕΛΕΤΗΣ')

figure(12)
I=imread('georef_1.jpg');
x=[21 23];
y=[39 40];
image(x,y,I),hold
contour(XI,YI,ZI),hold off
xlabel('λ (dec deg)')
ylabel('φ (dec deg)')
title ('ΤΕΛΙΚΗ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ ΑΠΟΧΗΣ ΓΕΩΕΙΔΟΥΣ ΜΕ ΙΣΟΥΨΕΙΣ (ΣΕ m)')

clear all
clc
format long g
format compact

fprintf('\nΙΩΑΝΝΗΣ ΔΙΑΜΑΝΤΗΣ rs12211\n')
fprintf('\nΕΠΙΛΟΓΗ ΣΗΜΕΙΩΝ ΕΛΕΓΧΟΥ\n')

flN=load('geoid_selected_points.txt');

fprintf('\n\n1) Διαχωρισμός των σημείων σε σημεία που θα χρησιμοποιηθούν
για τη δημιουργία της πολυωνυμικής επιφάνειας (pts generators) και σε
σημεία ελέγχου (test pts)\n\n')
%θα χωρίσουμε τη συνολική περιοχή σε τομείς, ώστε η επιλογή των test
points να είναι ομοιόμορφα κατανεμημένα

meanflN=mean(flN)
k1=1;k2=1;k3=1;k4=1;
for i=1:length(flN)
    s(i)=(flN(i,1)-meanflN(1))^2+(flN(i,2)-meanflN(2))^2;
    if(s(i)<0.25)
        group1(k1)=i;
        k1=k1+1;
    else if (s(i)<0.5)
        group2(k2)=i;
        k2=k2+1;
    else if (s(i)<0.75)
        group3(k3)=i;
        k3=k3+1;
    else group4(k4)=i;
        k4=k4+1;
    end
    end
end
end
group1=flN(group1,:);
group2=flN(group2,:);
%group3=flN(group3,:);

k1=1;k2=1;k3=1;k4=1;
for i=1:length(group1)
    if group1(i,1)>meanflN(1) && group1(i,2)>meanflN(2)
        group11(k1)=i;

```

```

        k1=k1+1;
    else if group1(i,1)<meanflN(1) && group1(i,2)>meanflN(2)
        group12(k2)=i;
        k2=k2+1;
    else if group1(i,1)<meanflN(1) && group1(i,2)<meanflN(2)
        group13(k3)=i;
        k3=k3+1;
    else if group1(i,1)>meanflN(1) && group1(i,2)<meanflN(2)
        group14(k4)=i;
        k4=k4+1;
    end
    end
end

k1=1;k2=1;
for i=1:length(group2)
    if group2(i,2)>meanflN(2)
        group21(k1)=i;
        k1=k1+1;
    else group22(k2)=i;
        k2=k2+1;
    end
end

%k1=1;k2=1;
%for i=1:length(group3)
%    if group3(i,2)>meanflN(2)
%        group31(k1)=i;
%        k1=k1+1;
%    else group32(k2)=i;
%        k2=k2+1;
%    end
%end

group11=group1(group11,:);
group12=group1(group12,:);
group13=group1(group13,:);
group14=group1(group14,:);
group21=group2(group21,:);
group22=group2(group22,:);
%group31=group3(group31,:);
%group32=group3(group32,:);
%group4=f1N(group4,:);

figure(1)
plot3(group11(:,2),group11(:,1),group11(:,3),'.',group12(:,2),group12(:,1),
),group12(:,3),'o',group13(:,2),group13(:,1),group13(:,3),'+',group14(:,2),
),group14(:,1),group14(:,3),'x',group21(:,2),group21(:,1),group21(:,3),'*
',group22(:,2),group22(:,1),group22(:,3),'.'), hold off
xlabel('\lambda (dec deg)')
ylabel('\phi (dec deg)')
zlabel('N (m)')
title ('3-d απεικόνιση σημείων χωρισμένων σε τομείς για την επιλογή
σημείων ελέγχου')

test_pts=[22.291269 39.768215 37.699777
22.421563 39.807312 38.584852
22.318836 39.830144 38.702489
22.496491 39.854725 39.139795
22.375811 39.890778 39.448919
22.298983 39.902395 39.285773

```

```

22.469321 39.922419 39.880274
22.349515 39.978326 40.199501
21.971325 39.768283 37.220799
21.88975 39.766996 37.147657
21.840068 39.837135 37.536527
21.765294 39.857127 37.481489
21.951901 39.853808 37.951783
21.955452 39.902573 38.231183
21.831857 39.910995 38.109119
21.956373 39.981423 38.985781
21.803708 39.990145 38.659004
22.028008 39.779708 37.236928
22.107354 39.781889 37.540771
22.240908 39.820545 38.144244
22.124609 39.8559 38.038476]; %επιλέχθηκαν οπτικά από το γράφημα ως
σημεία ελέγχου το 1/6 των σημείων κάθε υποπεριοχής

```

```

k1=1;k2=1;
for i=1:length(flN)
    k3=0;
    for j=1:length(test_pts)
        if (flN(i,2)-test_pts(j,2)<0.000001) &&
(flN(i,3)==test_pts(j,3))
            test(k1)=i;
            k1=k1+1;
            break;
        else k3=k3+1;
        end
    end
    if k3==length(test_pts)
        gens(k2)=i;
        k2=k2+1;
    end
end
generator_pts=flN(gens,:);
test_pts=flN(test,:);

figure(2)
plot3(generator_pts(:,2),generator_pts(:,1),generator_pts(:,3),'b.',test_
pts(:,2),test_pts(:,1),test_pts(:,3),'r*'), hold off
xlabel('\lambda (dec deg)')
ylabel('\phi (dec deg)')
zlabel('N (m)')
title ('3-d απεικόνιση generator pts(blue) και test pts(red)')

clear all
clc
format long g
format compact

fprintf('\nΙΩΑΝΝΗΣ ΔΙΑΜΑΝΤΗΣ rs12211\n')
fprintf('\nΔημιουργία Πολυωνυμικής Επιφάνειας\n')

gen=load('generator_pts.txt');
fg=gen(:,1);
lg=gen(:,2);
Ng=gen(:,3);

test=load('test_pts.txt');
ft=test(:,1);
lt=test(:,2);

```

```

Nt=test(:,3);

ff=[fg;ft];
lf=[lg;lt];

fprintf('\n%1.0f σημεία θα χρησιμοποιηθούν για τη δημιουργία της
πολυωνυμικής επιφάνειας (generator pts)\n',length(gen))
fprintf('\n%1.0f σημεία θα χρησιμοποιηθούν για τον έλεγχο της
πολυωνυμικής επιφάνειας (test pts)\n\n',length(test))

fo=mean(ff)
lo=mean(lf)

ug=fg-fo;
vg=lg-lo;
ut=ft-fo;
vt=lt-lo;
uf=[ug;ut];
vf=[vg;vt];
Nf=[Ng;Nt];

nXx=7; %πρέπει nXx=n_arx
Xx=zeros((nXx+4)*(nXx-1)/2 + 3,nXx);
ui=-1:0.05:0.5;
vi=-1:0.05:1;
[u,v]=meshgrid(ui,vi);

for n_arx=1:7

fprintf('\n\n\n*****
*****\n')
fprintf('\nπολυωνυμική επιφάνεια %1.0fου βαθμού (σύνολο %1.0f
όροι)\n',n_arx,(n_arx+4)*(n_arx-1)/2 + 3)
if n_arx==1
    fprintf('\n a1 u + a2 v + a3\n\n\n')
end
if n_arx==2
    fprintf('\n a1 u^2 + a2 u v + a3 v^2 + a4 u + a5 v + a6\n\n\n')
end
if n_arx==3
    fprintf('\n a1 u^3 + a2 u^2 v + a3 u v^2 + a4 v^3 + a5 u^2 + a6 u v +
a7 v^2 + a8 u + a9 v + a10\n\n\n')
end
if n_arx==4
    fprintf('\n a1 u^%1.0f + a2 u^%1.0f v + a3 u^%1.0f v^2 + a4 u v^3 +
a%1.0f v^%1.0f +\n',n_arx,n_arx-1,n_arx-2,n_arx+1,n_arx)
    fprintf('\n+a%1.0f u^%1.0f + a%1.0f u^%1.0f v + a%1.0f u v^2 + a%1.0f
v^%1.0f +\n',n_arx+2,n_arx-1,n_arx+3,n_arx-2,n_arx+4,2*n_arx+1,n_arx-1)
    fprintf('\n+ a%1.0f u^2 + a%1.0f u v + a%1.0f u^2
+\n',(n_arx+4)*(n_arx-1)/2 - 2,(n_arx+4)*(n_arx-1)/2 -
1,(n_arx+4)*(n_arx-1)/2)
    fprintf('\n+ a%1.0f u + a%1.0f v + a%1.0f\n\n\n\n',(n_arx+4)*(n_arx-
1)/2 + 1,(n_arx+4)*(n_arx-1)/2 + 2,(n_arx+4)*(n_arx-1)/2 + 3)
end
if n_arx>4
    fprintf('\n a1 u^%1.0f + a2 u^%1.0f v + a3 u^%1.0f v^2 +...+ a%1.0f
v^%1.0f +\n',n_arx,n_arx-1,n_arx-2,n_arx+1,n_arx)
    fprintf('\n+a%1.0f u^%1.0f + a%1.0f u^%1.0f v + a%1.0f u^%1.0f v^2
+...+ a%1.0f v^%1.0f +\n',n_arx+2,n_arx-1,n_arx+3,n_arx-2,n_arx+4,n_arx-
3,2*n_arx+1,n_arx-1)
    fprintf('\n.....\n')

```

```

    fprintf('\n+ a%1.0f u^2 + a%1.0f u v + a%1.0f u^2
+ \n', (n_arx+4)*(n_arx-1)/2 - 2, (n_arx+4)*(n_arx-1)/2 -
1, (n_arx+4)*(n_arx-1)/2)
    fprintf('\n+ a%1.0f u + a%1.0f v + a%1.0f\n\n\n\n', (n_arx+4)*(n_arx-
1)/2 + 1, (n_arx+4)*(n_arx-1)/2 + 2, (n_arx+4)*(n_arx-1)/2 + 3)
end

A=zeros(length(gen),(n_arx+4)*(n_arx-1)/2 + 3);
for i=1:length(gen)
    n=n_arx;
    k=0;
    for j=1:(n+4)*(n-1)/2 + 3
        A(i,j)=ug(i)^(n-k) * vg(i)^k;
        k=k+1;
        if (n-k) < 0
            n=n-1;
            k=0;
        end
        if n < 0
            break;
        end
    end
end
end
X=inv(A'*A)*A'*Ng
N_poly_gen(:,n_arx)=(round((A*X)*1000))/1000; % οι τιμές του N για τα
generator pts που προβλέπει το μοντέλο της πολυων. επιφ.

fprintf('\nΣτατιστικοί έλεγχοι της πολυωνυμικής επιφάνειας\n')
fprintf('\n
    1η στήλη:Generator pts
    2η στήλη:Test
pts\n\n')

dN_gen_pts(:,n_arx)=(round((N_poly_gen(:,n_arx)-Ng)*1000))/1000; % οι
αποκλίσεις των τιμών του μοντέλου από τις παρατηρήσεις(Nmodel - Ni) στα
generator pts

A_test=zeros(length(test),(n_arx+4)*(n_arx-1)/2 + 3);
for i=1:length(test)
    n=n_arx;
    k=0;
    for j=1:(n+4)*(n-1)/2 + 3
        A_test(i,j)=ut(i)^(n-k) * vt(i)^k;
        k=k+1;
        if (n-k) < 0
            n=n-1;
            k=0;
        end
        if n < 0
            break;
        end
    end
end
end
N_poly_test(:,n_arx)=(round((A_test*X)*1000))/1000; % οι τιμές του N για
τα test pts που προβλέπει το μοντέλο της πολυων. επιφ.

dN_test_pts(:,n_arx)=(round((N_poly_test(:,n_arx)-Nt)*1000))/1000; % οι
αποκλίσεις των τιμών του μοντέλου από τις παρατηρήσεις(Nmodel - Ni) στα
test pts

sum=0;
d1=dN_gen_pts(:,n_arx).^2;
for i=1:length(d1)
    sum=sum+d1(i);

```

```

end
RMS_gen=sqrt(sum/length(d1)); % RMS των αποκλίσεων του μοντέλου από τις
παρ/σεις για τα generator pts

sum=0;
d2=dN_test_pts(:,n_arx).^2;
for i=1:length(d2)
    sum=sum+d2(i);
end
RMS_test=sqrt(sum/length(d2)); % RMS των αποκλίσεων του μοντέλου από τις
παρ/σεις για τα test pts
RMS_matrix(:,n_arx)=[RMS_gen;RMS_test];

sum1=0;sum2=0;
s1=(Ng-mean(Ng)).^2;
for i=1:length(s1)
    sum1=sum1+d1(i);
    sum2=sum2+s1(i);
end
R2_gen=1-sum1/sum2; % CD(Coefficient of Determination) των αποκλίσεων του
μοντέλου από τις παρ/σεις για τα generator pts

sum1=0;sum2=0;
s2=(Nt-mean(Nt)).^2;
for i=1:length(s2)
    sum1=sum1+d2(i);
    sum2=sum2+s2(i);
end
R2_test=1-sum1/sum2; % CD(Coefficient of Determination) των αποκλίσεων
του μοντέλου από τις παρ/σεις για τα test pts
R2_matrix(:,n_arx)=[R2_gen;R2_test];

dN_matrix(:,n_arx)=[max(dN_gen_pts(:,n_arx));min(dN_gen_pts(:,n_arx));(ro
und((mean(dN_gen_pts(:,n_arx))*1000))/1000);

max(dN_test_pts(:,n_arx));min(dN_test_pts(:,n_arx));(round((mean(dN_test_
pts(:,n_arx))*1000))/1000)];

stdev_matrix(:,n_arx)=[std(dN_gen_pts(:,n_arx));std(dN_test_pts(:,n_arx))
]; %τυπική απόκλιση των δN (Nmodel - Ni)

max_positive_dN=[max(dN_gen_pts(:,n_arx)) max(dN_test_pts(:,n_arx))]
max_negative_dN=[min(dN_gen_pts(:,n_arx)) min(dN_test_pts(:,n_arx))]
mean_dN=[(round((mean(dN_gen_pts(:,n_arx))*1000))/1000
(round((mean(dN_test_pts(:,n_arx))*1000))/1000)]
st_dev=[(round((stdev_matrix(1,n_arx))*1000))/1000
(round((stdev_matrix(2,n_arx))*1000))/1000]
RMSE=[(round(RMS_gen*1000))/1000 (round(RMS_test*1000))/1000]
R_2=[(round(R2_gen*1000))/1000 (round(R2_test*1000))/1000]

kXx=1;
for i=(nXx+4)*(nXx-1)/2 + 3 - length(X) + 1 : (nXx+4)*(nXx-1)/2 + 3
    while kXx<=length(X)
        Xx(i,n_arx)=X(kXx);
        kXx=kXx+1;
        break;
    end
end
figure(n_arx)
mesh(v+l0,u+fo, Xx(1,n_arx)*u.^7 + Xx(2,n_arx)*u.^6.*v +
Xx(3,n_arx)*u.^5.*v.^2 + Xx(4,n_arx)*u.^4.*v.^3 + Xx(5,n_arx)*u.^3.*v.^4

```



```

+ Xx(6,n_arx)*u.^2.*v.^5 + Xx(7,n_arx)*u.*v.^6 + Xx(8,n_arx)*v.^7 +
Xx(9,n_arx)*u.^6 + Xx(10,n_arx)*u.^5.*v + Xx(11,n_arx)*u.^4.*v.^2 +
Xx(12,n_arx)*u.^3.*v.^3 + Xx(13,n_arx)*u.^2.*v.^4 + Xx(14,n_arx)*u.*v.^5
+ Xx(15,n_arx)*v.^6 + Xx(16,n_arx)*u.^5 + Xx(17,n_arx)*u.^4.*v +
Xx(18,n_arx)*u.^3.*v.^2 + Xx(19,n_arx)*u.^2.*v.^3 + Xx(20,n_arx)*u.*v.^4
+ Xx(21,n_arx)*v.^5 + Xx(22,n_arx)*u.^4 + Xx(23,n_arx)*u.^3.*v +
Xx(24,n_arx)*u.^2.*v.^2 + Xx(25,n_arx)*u.*v.^3 + Xx(26,n_arx)*v.^4 +
Xx(27,n_arx)*u.^3 + Xx(28,n_arx)*u.^2.*v + Xx(29,n_arx)*u.*v.^2 +
Xx(30,n_arx)*v.^3 + Xx(31,n_arx)*u.^2 + Xx(32,n_arx)*u.*v +
Xx(33,n_arx)*v.^2 + Xx(34,n_arx)*u + Xx(35,n_arx)*v + Xx(36,n_arx)),hold
plot3(lf,ff,Nf, '.'), hold off
xlabel('\lambda (dec deg)')
ylabel('\phi (dec deg)')
zlabel('N (m)')
title ('πολυωνυμική επιφάνεια (ο βαθμός είναι αντίστοιχος του αριθμού του
διαγράμματος (figure))')

```

end

```

fprintf('\n\n\nΣυνολικά στατιστικά όλων των επιφανειών (κάθε στήλη
περιέχει τα στοιχεία της αντίστοιχης πολυων. επιφ, π.χ. η 1η στήλη για
την επιφ. 1ου βαθμού, η 2η στήλη για την επιφ. 2ου βαθμού, κλπ)\n')
N_poly_gen;
N_poly_test;
dN_gen_pts;
dN_test_pts;
fprintf('\n\n\nΠίνακας RMS, Πίνακας R2 και Πίνακας St. Dev.: \n\n1η γραμμή -
> generator pts\n2η γραμμή -> test pts\n\n')
RMS_matrix=(round(RMS_matrix*1000))/1000
R2_matrix=(round(R2_matrix*1000))/1000
stdev_matrix=(round(stdev_matrix*1000))/1000
fprintf('\n\n\nΠίνακας αποκλίσεων ΔN: \n\n1η,2η,3η γραμμή -> (max(+),max(-
),μέση) απόκλιση Nmodel - Ni για τα generator pts\n4η,5η,6η γραμμή ->
(max(+),max(-),μέση) απόκλιση Nmodel - Ni για τα test pts\n\n')
dN_matrix

dN=[dN_gen_pts(:,3);dN_test_pts(:,3)]; %επιλέχθηκε η επιφάνεια 3ου βαθμού
ως καταλληλότερη
cat1=find(dN>=0 & dN<=0.10);
cat2=find(dN>0.10 & dN<=0.20);
cat3=find(dN>0.20 & dN<=0.30);
cat4=find(dN>0.30);
cat5=find(dN<0 & dN>=-0.10);
cat6=find(dN<-0.10 & dN>=-0.20);
cat7=find(dN<-0.20 & dN>=-0.30);
cat8=find(dN<-0.30);

figure(n_arx+1)
plot3(lf(cat4),ff(cat4),dN(cat4),'r.',lf(cat3),ff(cat3),dN(cat3),'y.',lf(
cat2),ff(cat2),dN(cat2),'g.',lf(cat1),ff(cat1),dN(cat1),'c.',lf(cat5),ff(
cat5),dN(cat5),'c*',lf(cat6),ff(cat6),dN(cat6),'g*',lf(cat7),ff(cat7),dN(
cat7),'y*',lf(cat8),ff(cat8),dN(cat8),'r*'), hold off
xlabel('\lambda(dec deg)')
ylabel('\phi(dec deg)')
zlabel('\Delta N=Nmodel(i)-N(i) (m)')
leg=legend('30 cm < ΔN','20 cm < ΔN < 30 cm','10 cm < ΔN < 20 cm','0 cm <
ΔN < 10 cm','0 cm > ΔN > -10 cm','-10 cm > ΔN > -20 cm','-20 cm > ΔN > -
30 cm','-30 cm > ΔN');
set(leg,'Location','EastOutside')
title ('απεικόνιση των αποκλίσεων ΔN μεταξύ μοντέλου (πολυων. επιφ. 3ου
βαθμού) και παρατηρήσεων')

```

```

cont_lines=[32:1:40];
figure(n_arx+2)
contour3(v+lo,u+fo, Xx(1,3)*u.^7 + Xx(2,3)*u.^6.*v + Xx(3,3)*u.^5.*v.^2 +
Xx(4,3)*u.^4.*v.^3 + Xx(5,3)*u.^3.*v.^4 + Xx(6,3)*u.^2.*v.^5 +
Xx(7,3)*u.*v.^6 + Xx(8,3)*v.^7 + Xx(9,3)*u.^6 + Xx(10,3)*u.^5.*v +
Xx(11,3)*u.^4.*v.^2 + Xx(12,3)*u.^3.*v.^3 + Xx(13,3)*u.^2.*v.^4 +
Xx(14,3)*u.*v.^5 + Xx(15,3)*v.^6 + Xx(16,3)*u.^5 + Xx(17,3)*u.^4.*v +
Xx(18,3)*u.^3.*v.^2 + Xx(19,3)*u.^2.*v.^3 + Xx(20,3)*u.*v.^4 +
Xx(21,3)*v.^5 + Xx(22,3)*u.^4 + Xx(23,3)*u.^3.*v + Xx(24,3)*u.^2.*v.^2 +
Xx(25,3)*u.*v.^3 + Xx(26,3)*v.^4 + Xx(27,3)*u.^3 + Xx(28,3)*u.^2.*v +
Xx(29,3)*u.*v.^2 + Xx(30,3)*v.^3 + Xx(31,3)*u.^2 + Xx(32,3)*u.*v +
Xx(33,3)*v.^2 + Xx(34,3)*u + Xx(35,3)*v + Xx(36,3),cont_lines),hold
xlabel('\lambda (dec deg)')
ylabel('\phi (dec deg)')
zlabel('N (m)')
title ('πολυωνυμική επιφάνεια 3ου βαθμού - ισοϋψείς')

```