



**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**

**ΤΜΗΜΑ ΝΑΥΠΗΓΩΝ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ**

**ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ**

**ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗ**

**ΝΑΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΘΑΛΑΣΣΙΑ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑ ΚΑΙ ΕΠΙΣΤΗΜΗ**

**ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ ΚΙΝΟΥΜΕΝΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ ΣΕ  
ΡΕΥΣΤΟ**

**ΚΥΠΡΙΑΝΟΣ ΓΕΩΡΓΑΚΟΠΟΥΛΟΣ**

**ΑΘΗΝΑ 2015**

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ ΚΙΝΟΥΜΕΝΩΝ  
ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ ΣΕ ΡΕΥΣΤΟ

## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα διπλωματική εργασία μελετά την υπολογιστική μελέτη κινούμενων κατασκευών σε ρευστό. Έχει διαπιστωθεί ότι η ροή γύρω από τον κύλινδρο αποτελεί ιδιαίτερο ενδιαφέρον, καθώς πλήθος κατασκευών που λειτουργούν μέσα σε ρεύματα έχουν κυκλική διατομή. Η ροή αυτή καθορίζεται μόνο από τον αριθμό του Reynolds, που εστιάζεται πάνω στην ταχύτητα της εξωτερικής ροής  $U$ , καθώς και τη διάμετρο  $D$  του κυλίνδρου:  $R=UD/\nu$ .

Η εργασία αποτελείται από τρεις ενότητες, οι οποίες εμπεριέχουν το θεωρητικό και το επιστημονικό - ερευνητικό πλαίσιο. Συγκεκριμένα, το πρώτο κεφάλαιο διερευνά τα φαινόμενα που διέπουν την κίνηση κατασκευών σε ρευστό. Το δεύτερο κεφάλαιο αναλύει τη θεμελίωση των μαθηματικών και φυσικών εξισώσεων για την αριθμητική επίλυση υδροδυναμικών ροών. Γίνεται εκτενής αναφορά στο θεώρημα της μεταφοράς του Reynolds και παρουσιάζονται οι εκτατικές και οι εντατικές ιδιότητες των ρευστών. Συνάμα, παρουσιάζει ενδιαφέρον η εξίσωση συνέχειας και Navier – Stokes για νευτώνεια και ασυμπίεστα ρευστά.. Ειδικότερα, αποτελούν ένα σύνολο από εξισώσεις που περιγράφουν την κίνηση των ρευστών και ανάμεσα στους ρυθμούς μεταβολής ή των ροών των διαφόρων μεγεθών και αποτελούν το μαθηματικό μοντέλο που χρησιμοποιείται από το εμπορικό πακέτο. Πραγματοποιείται αναλυτική περιγραφή των εξισώσεων Navier – Stokes και των μεθόδων υπολογιστικής υδροδυναμικής (CFD). Η τρίτη και τελευταία ενότητα εμπεριέχει το κύριο υπολογιστικό πλαίσιο με αναφορές στον σχεδιασμό, στο πλέγμα και στον κινούμενο κύλινδρο καθώς και στα αριθμητικά αποτελέσματα.

## ABSTRACT

This thesis studies the computational study moving structures in fluid. It has been found that the flow around the cylinder is of particular interest, since a plurality of structures that operate within streams of circular cross section. This flow is only determined by the Reynolds number, which is focused on the speed of the outer flow  $U$ , and the diameter  $D$  of the cylinder:  $R = UD / \nu$ .

The work consists of three modules, which include theoretical and scientific – research framework. Specifically, the first chapter explores the phenomena governing the movement structures in fluid. The second chapter analyzes the foundations of mathematics and physical equations that are used to numerically simulate hydrodynamic problems . Extensive reference to the theorem of transport of Reynolds and presents the extensive and intensive properties of fluids. At the same time, it is interesting the continuity equation and Navier - Stokes for Newtonian and incompressible fluids. In particular, they are a set of equations that describe the motion of fluids and between the growth rates or flows of different sizes. Carry out a detailed description of the equations Navier - Stokes and methods of computational hydrodynamics (CFD). The third and final section contains the main research framework with references to design, the grid and the moving cylinder.

## Περιεχόμενα

1. ΦΑΙΝΟΜΕΝΑ ΠΟΥ ΔΙΕΠΟΥΝ ΤΗΝ ΚΙΝΗΣΗ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ ΣΕ ΡΕΥΣΤΟ...7	
1.1 Μεταβολή της Πίεσης σε Συνάρτηση με το Βάθος.....7	
1.2 Η Άνωση και η αρχή του Αρχιμήδη .....9	
1.3 Δυνάμεις Τριβής σε Σώματα Κινούμενα μέσα σε Ρευστά ..... 10	
1.4 Δυναμική Άνωση ..... 13	
1.5 Ροή γύρω από τον Κύλινδρο ..... 15	
2. ΘΕΜΕΛΙΩΣΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΥΔΡΟΔΥΝΑΜΙΚΩΝ ΡΟΩΝ ..... 19	
2.1 Θεώρημα μεταφοράς του Reynolds ..... 19	
2.2 Εξίσωση Συνέχειας.....21	
2.3 Περιγραφή των Εξισώσεων Navier - Stokes.....25	
2.4 Κατάστρωση των Εξισώσεων σε Διακριτή Μορφή.....29	
2.5 Οριακές Συνθήκες .....33	
2.5.1 Σύνορα W και N (συνθήκες Dirichlet) .....34	
2.5.2 Σύνορο E (συνθήκες Neumann).....34	
2.5.3 Σύνορο S (στερεό σύνορο ή "τοίχος").....34	
2.6 Υποχαλάρωση (Underrelaxation).....37	
2.7 Μέθοδοι Υπολογιστικής Υδροδυναμικής (CFD).....38	
3. ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ .....41	
Εισαγωγή.....41	
3.1 Σχεδιασμός Domain .....41	
3.2 Πλέγμα – Grid .....43	
3.3 Τρέξιμο Προγράμματος .....45	
3.4 Resolution Test.....53	

3.5	Κινούμενος Κύλινδρος.....	57
3.6	Αποτελέσματα μελέτης.....	65
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ .....		76

# 1. ΦΑΙΝΟΜΕΝΑ ΠΟΥ ΔΙΕΠΟΥΝ ΤΗΝ ΚΙΝΗΣΗ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ ΣΕ ΡΕΥΣΤΟ

## 1.1 Μεταβολή της Πίεσης σε Συνάρτηση με το Βάθος

Γνωρίζουμε ότι η δύναμη που ασκεί ένα ρευστό που ηρεμεί σε ένα αντικείμενο είναι πάντοτε κάθετη στις επιφάνειες του αντικειμένου. Την πίεση σε οποιοδήποτε σημείο του ρευστού μπορούμε να την μετρήσουμε χρησιμοποιώντας μια συσκευή που αποτελείται από κύλινδρο που περιέχει ελατήριο σε κενό. Το ένα άκρο του ελατηρίου συνδέεται με την σταθερή βάση του κυλίνδρου ενώ το άλλο με έμβολο. Εάν το ελατήριο είναι βαθμονομημένο τότε εύκολα μετράμε την πίεση.

Έστω έμβολο εμβαδού επιφανείας  $A$  και  $F$  η κάθετη σε αυτό δύναμη. Ορίζουμε πίεση  $P$  του ρευστού στο επίπεδο που βρίσκεται βυθισμένο το έμβολο το λόγο της δύναμης προς το εμβαδόν επιφανείας του εμβόλου:

$$P = \frac{F}{A}$$

Η πίεση σε ένα σημείο του ρευστού δίνεται από τον τύπο:

$$P = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F(A + \epsilon) - F(A)}{\epsilon} = \frac{dF}{dA}$$

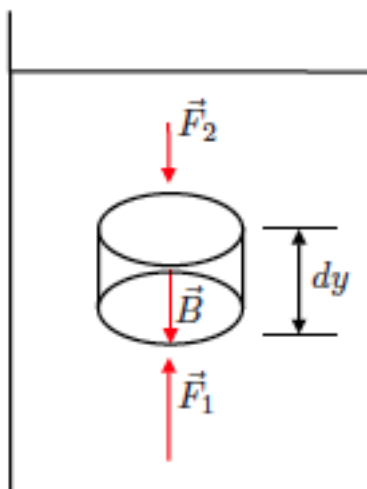
Η μονάδα πίεσης στο SI είναι το Pascal και ισούται:

$$1\text{Pa} = 1\text{N/m}^2$$

Θα προσδιορίσουμε τώρα τη σχέση μεταξύ της πίεσης σε σημείο ενός ρευστού το οποίο υπόκειται σε βαρυντική δύναμη με την πυκνότητα και το βάθος. Θεωρούμε ρευστό που ηρεμεί και ένα κύλινδρο υγρού βάσης  $A$  και ύψους  $dy$ .<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup> όλα τα σημεία που βρίσκονται στο ίδιο βάθος υφίστανται την ίδια πίεση.



**Εικόνα 1** Ιδεατός κύλινδρος υγρού σε δοχείο με ρευστό σε ηρεμία

Έστω  $F_1 = P A \mathbf{j}$  η δύναμη που δέχεται η κάτω βάση του κυλίνδρου από το ρευστό. Στην άνω βάση θα ασκείται δύναμη

$$F_2 = -(P + dP)A\mathbf{j}.$$

Οι δυνάμεις στην παράπλευρη επιφάνεια του κυλίνδρου εξουδετερώνονται λόγω συμμετρίας.

Εφαρμόζοντας το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα έχουμε:

$$F_1 - F_2 - B = 0 \Rightarrow PA - (P + dP)A - \rho g A dy = 0 \Rightarrow \frac{dP}{dy} = -\rho g$$

Η λύση της παραπάνω εξίσωσης είναι:

$$P_2 - P_1 = -\rho g(y_2 - y_1)$$

Στην περίπτωση που το δεύτερο σημείο βρίσκεται στην επιφάνεια του ρευστού, τότε η πίεση ισούται με την ατμοσφαιρική, άρα:

$$P = P_a + \rho gh$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η πίεση  $P$ , σε βάθος  $h$  κάτω από την επιφάνεια ρευστού ανοιχτού στην ατμόσφαιρα είναι μεγαλύτερη από την ατμοσφαιρική κατά  $\rho gh$ . Παρατηρήστε ότι η πίεση είναι ανεξάρτητη από το σχήμα του δοχείου που περιέχει το



ρευστό. Επίσης αφού η πίεση σε ένα ρευστό εξαρτάται μόνο από το βάθος, οποιαδήποτε μεταβολή της πίεσης στην επιφάνεια του ρευστού μεταδίδεται σε κάθε σημείο του ρευστού.

Τα παραπάνω μας οδηγούν στο νόμο του Pascal:

“Κάθε μεταβολή στην πίεση ενός αποθηκευμένου ρευστού μεταδίδεται χωρίς να μειωθεί σε κάθε σημείο του ρευστού και στα τοιχώματα του δοχείου αποθήκευσης”.

Σημαντική εφαρμογή του νόμου αποτελούν οι υδραυλικές πρέσες. Εάν  $F_1$  είναι η δύναμη που ασκείται στο έμβολο εμβαδού επιφανείας  $A_1$  η δύναμη  $F_2$  στο έμβολο  $A_2$  είναι:

$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \Rightarrow F_2 = \frac{A_2}{A_1} F_1 > F_1$$

## 1.2 Η Άνωση και η αρχή του Αρχιμήδη

Κάθε σώμα που είναι βυθισμένο σε ένα ρευστό δέχεται άνωση ίση με το βάρος του εκτοπιζόμενου ρευστού. Η άνωση είναι δύναμη με φορά προς την επιφάνεια του ρευστού και κατεύθυνση που ταυτίζεται με εκείνη του κέντρου βάρους του εκτοπιζόμενου υγρού. Για την απόδειξη της αρχής θα θεωρήσουμε ρευστό που ηρεμεί μέσα σε δοχείο και ιδεατό κύβο ρευστού. Επειδή ο κύβος ηρεμεί θα πρέπει το βάρος του να εξουδετερώνεται από μία ίση και αντίθετη δύναμη, που ονομάζουμε άνωση. Υποθέστε τώρα ότι αντικαθιστούμε τον ιδεατό κύβο με συμπαγή χαλύβδινο κύβο ίδιας ακμής  $a$ . Η δύναμη της άνωσης που ασκείται στον νέο κύβο είναι ακριβώς η ίδια με εκείνη που ασκείται στον κύβο του νερού.

Η διαφορά πίεσης μεταξύ των βάσεων του κύβου είναι σύμφωνα με τα προηγούμενα:

$$\Delta P = \rho_{\text{υγρού}} g a$$

Η διαφορά όμως της πίεσης ισούται με το λόγο της άνωσης ανά μονάδα επιφανείας του κύβου:

$$\Delta P = \frac{F}{A} \Rightarrow F = (\rho_{\text{υγρού}} g a) A = \rho_{\text{υγρού}} g V.$$

Αλλά η μάζα του ρευστού στον κύβο είναι  $M = \rho_{\text{υγρού}} V$  οπότε:

$$F = \rho_{\text{υγρού}} gV = Mg = B$$

όπου B το βάρος του εκτοπιζόμενου ρευστού.

Θα μελετήσουμε τώρα την κίνηση ενός αντικειμένου που είναι εντελώς βυθισμένο σε ένα ρευστό. Οι δυνάμεις που ασκούνται σε αυτό είναι το βάρος του και η άνωση:

$$B = M_{\text{σώματος}}g = \rho_{\text{σώματος}}V_{\text{σώματος}}g$$

$$F = M_{\text{υγρού}}g = \rho_{\text{υγρού}}V_{\text{υγρού}}g.$$

Αλλά  $V_{\text{σώματος}} = V_{\text{υγρού}} = V$  επειδή το σώμα είναι πλήρως βυθισμένο στο ρευστό και η συνισταμένη δύναμη θα είναι:

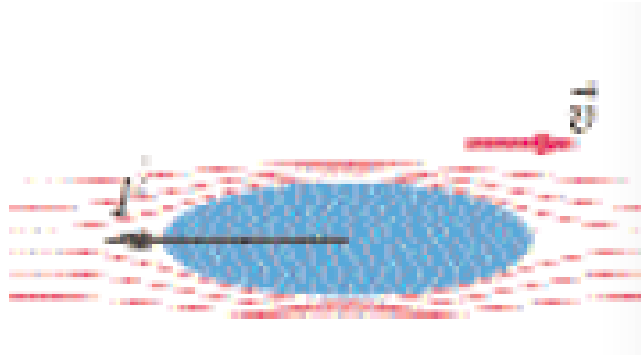
$$F - B = (\rho_{\text{υγρού}} - \rho_{\text{σώματος}})Vg$$

Εάν η πυκνότητα του ρευστού είναι μεγαλύτερη από την πυκνότητα του αντικειμένου το σώμα θα επιταχυνθεί προς την επιφάνεια ενώ σε αντίθετη περίπτωση θα επιταχυνθεί προς τα κάτω. Εάν το αντικείμενο επιπλέει λόγω στατικής ισορροπίας θα ισχύει:

$$F = B \Rightarrow \rho_{\text{υγρού}} V_{\text{υγρού}} = \rho_{\text{σώματος}} V_{\text{σώματος}}$$

### 1.3 Δυνάμεις Τριβής σε Σώματα Κινούμενα μέσα σε Ρευστά

Γνωρίζουμε από την καθημερινότητά μας ότι ένα σώμα που βρίσκεται σε ένα ρευστό και κινείται σχετικά με αυτό, δέχεται δύναμη από το ρευστό. Για παράδειγμα όταν κινείται το αυτοκίνητο και βγάλουμε το χέρι μας απέξω, δεχόμαστε δύναμη αντίθετη με τη φορά του αυτοκινήτου. Ομοίως, αν μετακινήσουμε το χέρι μας όταν είναι βυθισμένο μέσα σε νερό, νιώθουμε αντίσταση.



**Εικόνα 2** Σε ένα συμμετρικό σώμα η δύναμη από το ρευστό είναι αντίθετης φοράς με την ταχύτητά του.

Η δύναμη που δέχεται το σώμα στην παραπάνω εικόνα ονομάζεται δύναμη τριβής ή οπισθέλκουσα. Αυτή η δύναμη έχει την ίδια διεύθυνση με την ταχύτητα, αλλά αντίθετη φορά. Για μικρές ταχύτητες το μέτρο της δίνεται από τον πρώτο τύπο, ενώ για μεγαλύτερες από τον δεύτερο:

$$F_{av} = C_1 v \quad \& \quad F_{av} = C_2 v^2$$

Οι σταθερές  $C_1$  και  $C_2$ , είναι ανεξάρτητες της ταχύτητας. Παρακάτω θα υπολογίσουμε αυτές τις σταθερές για την περίπτωση που το σώμα είναι μια σφαίρα. Σε αυτήν την περίπτωση οι  $C_1$  και  $C_2$ , εξαρτώνται από την πυκνότητα του υλικού, το ιξώδες και την ακτίνα της σφαίρας.

Έστω :

$$C_1 \propto \rho^k \eta^\lambda R^\mu$$

Ισχύει:

$$[C_1 v] = [F] \quad \text{ή} \quad [\rho]^k [\eta]^\lambda [R]^\mu [v] = [F]$$

ή

$$(ML^{-3})^k (ML^{-1}T^{-1})^\lambda (L)^\mu (LT^{-1}) = MLT^{-2}$$

ή

$$M^{k+\lambda} L^{-3k-\lambda+\mu+1} T^{-\lambda-1} = M^1 L^1 T^{-2}$$

$$\left. \begin{array}{l} k + \lambda = 1 \\ -3k - \lambda + \mu + 1 = 1 \\ -\lambda - 1 = -2 \end{array} \right\} \text{ ή } \begin{array}{l} k = 0 \\ \mu = 1 \\ \lambda = 1 \end{array}$$

Συνεπώς:

$$C_1 \propto \eta R$$

και

$$C_1 = 6\pi \eta R$$

Καταλήγουμε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι η εξίσωση  $F_{\alpha v} = C_1 v$  μετατρέπεται σε:

$$F_{\alpha v} = 6\pi \eta R v$$

Η παραπάνω εξίσωση αποτελεί τον νόμο του Stokes.<sup>2</sup>

Αντίστοιχα για την  $C_2$ :

$$C_2 \propto \rho^\alpha \eta^\beta R^\gamma$$

και

$$[C_2 v^2] = [F]$$

ή

$$[\rho]^\alpha [\eta]^\beta [R]^\gamma [v]^2 = [F]$$

Εκτελώντας την προηγούμενη διαδικασία βρίσκουμε τα:

$$\alpha = 1, \beta = 0, \gamma = 2$$

Και στη συνέχεια:

---

<sup>2</sup> Sir George Stokes, 1819 – 1903, Μαθηματικός και Φυσικός

$$C_2 \propto \rho R^2$$

$$C_2 = \frac{\pi}{4} \rho R^2$$

Στις περιπτώσεις διαφόρων γεωμετρικών σχημάτων ισχύει:

$$C_2 = C_{av} A^2 \frac{\rho}{2}$$

$C_{av}$ : Συντελεστής αντίστασης

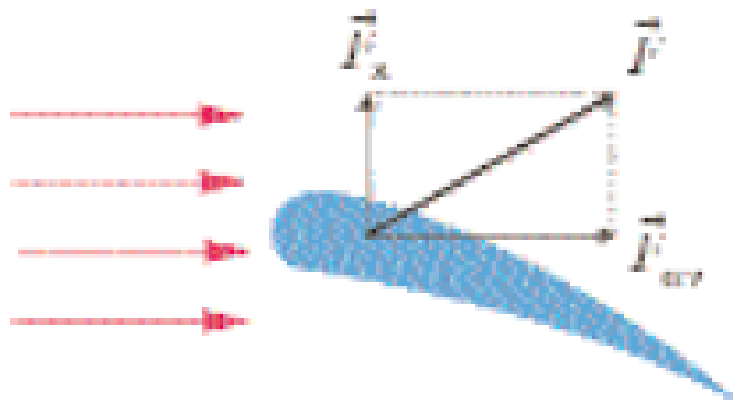
$A$ : μετωπική επιφάνεια σώματος

$\rho$ : πυκνότητα ρευστού

Είναι σημαντικό να αναφέρουμε πως όταν το κινείται το ρευστό και το σώμα είναι ακίνητο τότε η ταχύτητα  $\mathbf{v}$ , είναι η ταχύτητα του ρευστού, ενώ αν κινούνται και τα δύο τότε είναι η σχετική τους ταχύτητα. Επιπλέον στην περίπτωση του Νόμου του Stokes, η ροή γύρω από το σώμα πρέπει να είναι στρωτή.

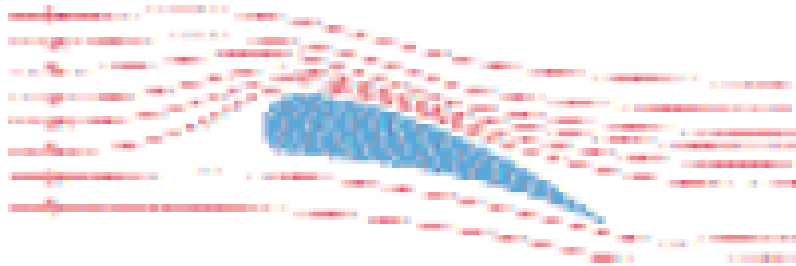
## 1.4 Δυναμική Άνοση

Η δύναμη που ασκείται σε ένα σώμα που δεν είναι συμμετρικό όταν αυτό κινείται μέσα σε ένα ρευστό, δεν είναι αντίθετη της ταχύτητάς του.



**Εικόνα 3** Η δύναμη του αέρα στο παραπάνω σχήμα ασκείται πλάγια και όχι οριζόντια.

Στην παραπάνω εικόνα βλέπουμε το περύγιο ενός αεροπλάνου και τις δυνάμεις που του ασκούνται. Αναλύοντας τη δύναμη  $\mathbf{F}$  παίρνουμε τις δύο συνιστώσες. Η οριζόντια συνιστώσα  $\mathbf{F}_{av}$  είναι η δύναμη τριβής. Η κάθετη συνιστώσα  $\mathbf{F}_x$  είναι η δυναμική άνοση.



**Εικόνα 4** Οι δυναμικές γραμμές γύρω από το φτερό του αεροπλάνου

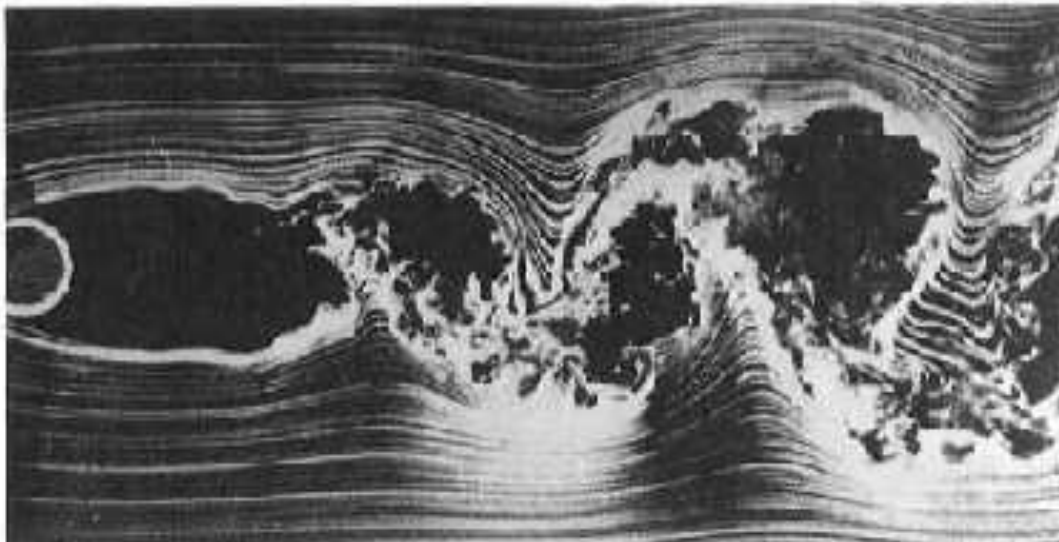
Στην παραπάνω εικόνα βλέπουμε πως όταν το αεροπλάνο είναι σε κίνηση, οι ρευματικές γραμμές πυκνώνουν στο πάνω μέρος του περυγίου και αραιώνουν στο κάτω. Από αυτό αντιλαμβανόμαστε ότι η ταχύτητα του αέρα είναι μεγαλύτερη στο επάνω μέρος του περυγίου από ότι στο κάτω. Σύμφωνα με το θεώρημα του Bernoulli, αυτό συνεπάγεται ότι η πίεση στο επάνω μέρος του περυγίου είναι μικρότερη από ότι στο κάτω. Αυτό με τη σειρά του μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η δύναμη του αέρα είναι μεγαλύτερη στο κάτω μέρος του περυγίου και συνεπώς η συνισταμένη αυτών έχει φορά προς τα πάνω και ονομάζεται δυναμική άνοση.

## 1.5 Ροή γύρω από τον Κύλινδρο

Η ροή γύρω από κύλινδρο παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον, αφού πολλές κατασκευές που λειτουργούν μέσα σε ρεύματα έχουν κυκλική διατομή (π.χ. καλώδια). Λόγω της απλότητας του σχήματος του κυλίνδρου, που χαρακτηρίζεται μόνο από μια διάσταση (τη διάμετρο), η ροή γύρω από τον κύλινδρο εξαρτάται μόνο από τον αριθμό του Reynolds βασισμένο πάνω στην ταχύτητα της εξωτερικής ροής  $U$ , και τη διάμετρο  $D$  του κυλίνδρου:  $R=UD/\nu$ .

Για πολύ μικρές τιμές του αριθμού Reynolds  $R$ , γύρω στη μονάδα, η ροή γύρω από τον κύλινδρο είναι συμμετρική, η πίεση στην πίσω πλευρά περίπου ίση με αυτήν μπροστά και κατα συνέπεια η αντίσταση του κυλίνδρου οφείλεται αποκλειστικά στην τριβή. Καθώς η τιμή του  $R$  αυξάνει, αποκόλληση της ροής αρχίζει να παρατηρείται. Πίσω από τον κύλινδρο εμφανίζονται δυο συμμετρικές δίνες που παραμένουν προσκολλημένες στον κύλινδρο. Μέρος της αντίστασης οφείλεται τώρα σε διάφορα πίεσης ανάμεσα στην ανάντη και κατάντη πλευρές (αντίσταση μορφής). Η ροή παραμένει μονιμη μέχρι αριθμό Reynolds περίπου 48, οπότε γίνεται ασταθής και μετατρέπεται σε μη μονιμη.

Δίνες σχηματίζονται τώρα εναλλάξ στην πάνω και στην κάτω πλευρά του κυλίνδρου οι οποίες εγκαταλείπουν τον κύλινδρο και μετακινούνται στον ομορρο με ταχύτητα λίγο μικροτερη από αυτή της εξωτερικής ροής. Παρατηρούνται έτσι πίσω από τον κύλινδρο δύο σειρές δινών που είναι γνωστές με το όνομα «σειρές του Von Karman». (Karman vortex street). Ο σχηματισμός δινών είναι περιοδικό φαινόμενο με καλά καθορισμένη συχνότητα. Αν  $f$  συμβολίζει τη συχνότητα σχηματισμού των δινών (σε Hertz) η αδιάστατη ποσότητα (αριθμός Strouhal) είναι συνάρτηση του αριθμού του Reynolds. Για μια μεγάλη περιοχή αριθμών Reynolds από 1000 έως 200000, ο αριθμός Strouhal παραμένει σταθερός, περίπου ίσος με 0.2. Ο συντελεστής αντίστασης (που οφείλεται κατά κύριο λόγο σε διαφορά πίεσης) επίσης παραμένει σταθερός σε αυτή την περιοχή. περίπου 1.15.



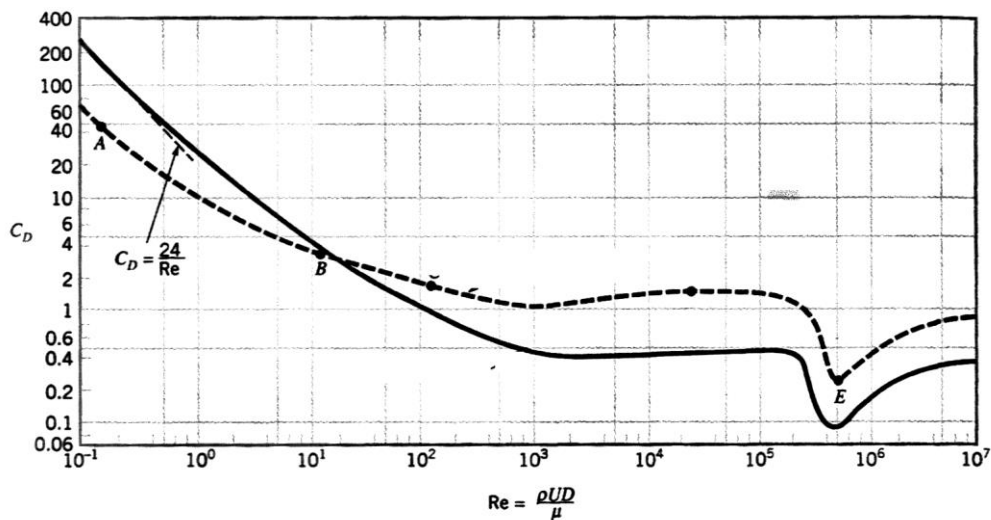
**Εικόνα 5** Φωτογραφία τυρβώδους όμορου κυλίνδρου σε αριθμο Reynolds 10000. Η παρουσία μεγάλων δινων στον όμορο φαίνεται απο τις συγκεντρώσεις καπνού. (Φωτογραφια απο Corke και Nagib).

Ο σχηματισμός δινων εναλλάξ στην πάνω και κάτω πλευρά του κυλίνδρου προκαλεί αρμονική δύναμη στον κύλινδρο σε κατεύθυνση κάθετη προς την ροή και με συχνότητα ίση προς την συχνότητα σχηματισμού δινων. Έτσι αν ο κύλινδρος είναι μέρος εύκαμπτης κατασκευής (π.χ. καλώδιο), υπάρχει δυνατότητα συντονισμού όταν η συχνότητα σχηματισμού δινων γίνει περίπου ίση με μια από τις ιδιοσυχνότητες της κατασκευής. Τότε η κατασκευή ταλαντώνεται με κίνδυνο αστοχίας λόγω κοπώσεως. Το φαινόμενο συντονισμού ανήκει στην κατηγορία των υδροελαστικών φαινομένων, και είναι υπεύθυνο για πολλές αστοχίες κατασκευών που λειτουργούν μέσα σε θαλάσσιο ρεύμα, αλλά και κατασκευών στην ξηρά που λειτουργούν σε περιοχές με συχνούς δυνατούς ανέμους.

Όταν ο αριθμος του Reynolds υπερβεί την τιμή των 200000 το οριακό στρώμα του κυλίνδρου γίνεται τυρβώδες. Τα σημεία αποκόλλησης της ροής μετακινούνται καταντη, και το πλάτος του ομορρου μειώνεται. Ο συντελεστής αντίστασης του κυλίνδρου επίσης μειώνεται, και φτάνει στην τιμή 0.3 όταν ο αριθμός του Reynolds φτάσει την τιμή 300000. Σε μεγαλύτερους αριθμούς Reynolds ο συντελεστής αντίστασης ανεβαίνει, παραμένει όμως χαμηλότερος από την τιμή που έχει όταν το οριακό στρώμα είναι στρωτό. Η μεταβολή του συντελεστή αντίστασης κυλίνδρου συναρτήσε του αριθμού Reynolds φαίνεται στην παρακάτω εικόνα.

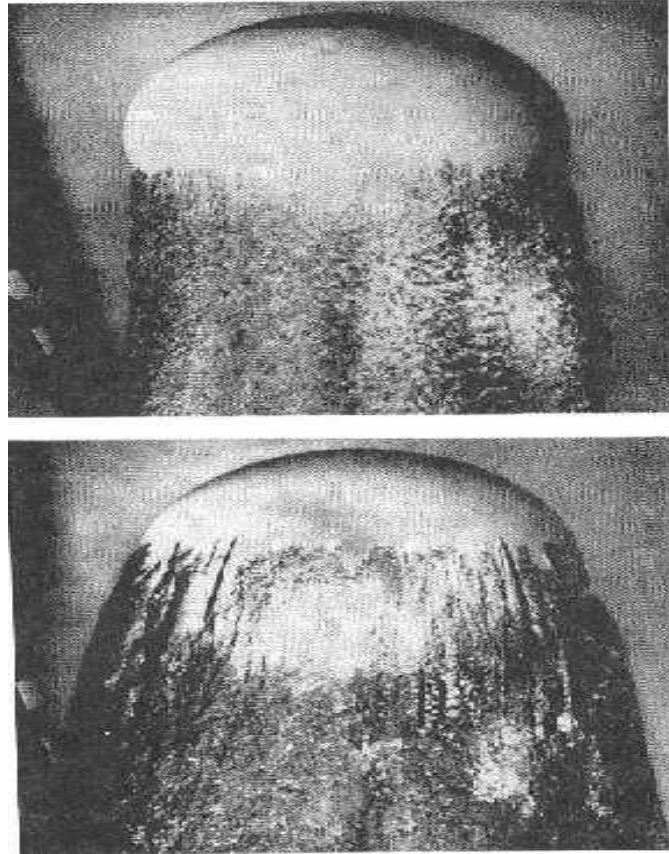


Η μείωση του συντελεστή αντίστασης όταν το οριακό στρώμα γίνει τυρβώδες χαρακτηρίζει όλα τα σώματα με καμπυλωμένο περίβλημα (όπως η σφαίρα, της οποίας ο συντελεστής αντίστασης επίσης φαίνεται στην εικόνα κατωτέρω). Η μείωση είναι λιγότερο αισθητή για υδροδυναμικά σώματα, επειδή σε αυτά τα σημεία αποκόλλησης είναι κοντά στο καταντη άκρω του σώματος, και δεν έχουν πολλά περιθώρια μετατόπισης καταντη. Η εξήγηση για την μετατόπιση των σημείων αποκόλλησης είναι η εξής: Όταν το οριακό στρώμα γίνει τυρβώδες, τα σωματίδια του ρευστού μέσα στο οριακό στρώμα έχουν αυξημένη ορμή (επειδή έχουν αυξημένη ταχύτητα). Κατα συνέπεια, χρειάζονται μεγαλύτερες δυνάμεις πίεσης για να προκαλέσουν αποκόλληση. Τέτοιες δυνάμεις πίεσης αναπτύσσονται σε σημεία καταντη από το σημείο αποκόλλησης του στρωτού οριακού στρώματος



**Εικόνα 6** Μεταβολή του συντελεστή αντίστασης κυλίνδρου με λεία επιφάνεια (διακεκομμένη γραμμή), και σφαίρας (συνεχής γραμμή) σαν συναρτηση του αριθμου Reynolds.

Η μετατόπιση των σημείων αποκόλλησης λόγω της μετατροπής του οριακού στρώματος σε τυρβώδες φαίνεται στην εικόνα για ροή γύρω από σφαίρα. Η μείωση του πάχους του ομορρου της σφαίρας είναι επίσης εμφανής.



**Εικόνα 7** Ροή γύρω από σφαίρα με (α) στρωτό οριακό στρώμα (κάτω εικόνα), και (β) Τυρβώδες οριακό στρώμα (ανω εικόνα).

## 2 ΘΕΜΕΛΙΩΣΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΓΙΑ ΤΗΝ ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ ΣΩΜΑΤΩΝ ΜΕΣΑ ΣΕ ΡΕΥΣΤΑ

### 2.1 Θεώρημα μεταφοράς του Reynolds

**Εκτατικές ιδιότητες (N(t))** ενός ρευστού, λέγονται οι ιδιότητες που εξαρτώνται από την έκταση ή την ποσότητα του συστήματος. Η τιμή κάθε εκτατικής ιδιότητας είναι το άθροισμα όλων των υποσυστημάτων που την αποτελούν. Παραδείγματα εκτατικών ιδιοτήτων είναι ο όγκος (που είναι το άθροισμα των επιμέρους όγκων) και η μάζα (που είναι το άθροισμα των επιμέρους μαζών).

**Εντατικές ιδιότητες (η)** ενός ρευστού, λέγονται οι ιδιότητες που είναι ανεξάρτητες από την έκταση ή την ποσότητα του συστήματος. Η τιμή κάθε εντατικής ιδιότητας δεν είναι προσθετική και δεν αλλάζει με την ποσότητα του υλικού στο σύστημα. Παραδείγματα εντατικών ιδιοτήτων είναι η πίεση, η θερμοκρασία, η πυκνότητα του ρευστού κ.τ.λ.

**Πίνακας 1** Παραδείγματα εκτατικών και αντίστοιχων εντατικών ιδιοτήτων συστήματος

Εκτατικές ιδιότητες	Εντατικές ιδιότητες
<b>N (t)</b>	<b>η</b>
M	1
<b>P</b> —	<b>v</b> —

Θεωρούμε ένα ρευστό με όγκο συστήματος  $V_m(t)$  και αντίστοιχη επιφάνεια  $A_m(t)$ , το θεώρημα μεταφοράς του Reynolds εκφράζεται από τη σχέση:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V_m(t)} \eta \rho dV = \iiint_{V_m(t)} \frac{\partial(\eta\rho)}{\partial t} dV + \iint_{A_m(t)} \eta \rho \underline{v} \cdot \underline{\hat{n}} dA$$

όπου η οι εντατικές ιδιότητες του ρευστού, ρ η πυκνότητα του ρευστού,

$\underline{v}$   
- το διάνυσμα της ταχύτητας

$\hat{n}$   
 $\underline{n}$   
- το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια ελέγχου  $A_m(t)$

$\frac{d}{dt} \iiint_{V_m(t)} \eta \rho dV$   
χρονική μεταβολή του ολοκληρώματος όγκου των εντατικών ιδιοτήτων.

$\iiint_{V_m(t)} \frac{\partial(\eta\rho)}{\partial t} dV$   
ολοκλήρωμα όγκου στον υλικό όγκο του συστήματος

$\iint_{A_m(t)} \eta \rho \underline{v} \cdot \hat{\underline{n}} dA$   
επιφανειακό ολοκλήρωμα στην υλική επιφάνεια του συστήματος.

Το μεγάλο πλεονέκτημα του θεωρήματος μεταφοράς του Reynolds είναι ότι επιτρέπει την έκφραση ενός πολύπλοκου όρου

$\left( \frac{d}{dt} \iiint_{V_m(t)} \eta \rho dV \right)$   
,σαν άθροισμα δύο απλούστερων όρων των οποίων ο υπολογισμός είναι ευκολότερος.

$$\left( \iiint_{V_m(t)} \frac{\partial(\eta\rho)}{\partial t} dV, \iint_{A_m(t)} \eta \rho \underline{v} \cdot \hat{\underline{n}} dA \right)$$

## 2.2 Εξίσωση Συνέχειας

Σε ένα σύστημα οι εκτατικές ιδιότητες ( $N(t)$ ) και οι εντατικές ιδιότητες ( $\eta$ ), συνδέονται με τη σχέση:

$$N(t) = \iiint_{V_m(t)} \eta \rho dV$$

όπου  $\rho$  η πυκνότητα του ρευστού και  $V_m(t)$  ο όγκος του συστήματος.

Τότε:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_{V_m(t)} \eta \rho dV$$

και από το θεώρημα μεταφοράς του Reynolds έχουμε:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_{V_m(t)} \eta \rho dV = \iiint_{V_m(t)} \frac{\partial(\eta \rho)}{\partial t} dV + \iint_{A_m(t)} \eta \rho \underline{\underline{\hat{v}}} \cdot \underline{\underline{\hat{n}}} dA$$

Αν θεωρήσουμε όγκο ελέγχου  $V$  και επιφάνεια ελέγχου  $A$ , επιλέγουμε τη χρονική στιγμή  $t$  για την οποία ισχύουν  $V_m(t) = V$  και  $A_m(t) = A$ , οπότε η παραπάνω εξίσωση γίνεται:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_{V_m(t)} \eta \rho dV = \iiint_V \frac{\partial(\eta \rho)}{\partial t} dV + \iint_A \eta \rho \underline{\underline{\hat{v}}} \cdot \underline{\underline{\hat{n}}} dA$$

Η παραπάνω εξίσωση λέγεται «γέφυρα», διότι μέσω του όρου

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V_m(t)} \eta \rho dV$$

συνδέει το σύστημα, με τον όγκο και την επιφάνεια ελέγχου μέσω του αθροίσματος

$$\iiint_V \frac{\partial(\eta \rho)}{\partial t} dV + \iint_A \eta \rho \underline{\underline{\hat{v}}} \cdot \underline{\underline{\hat{n}}} dA$$

$$\frac{dN(t)}{dt}$$

ρυθμός αύξησης των εκτατικών ιδιοτήτων του συστήματος

$$\iiint_V \frac{\partial(\eta\rho)}{\partial t} dV$$

ρυθμός αύξησης των εκτατικών ιδιοτήτων που περιέχονται στον όγκο ελέγχου τη χρονική στιγμή t.

$$\iint_A \eta\rho \underline{\underline{\hat{v} \cdot \underline{\underline{n}}}} dA$$

ρυθμός εκροής από την επιφάνεια ελέγχου τη χρονική στιγμή t.

Αν θέσουμε στην παραπάνω εξίσωση (γάφυρα) όπου  $N(t) = M$  και όπου  $\eta = 1$  έχουμε:

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_{V_m(t)} \rho dV = \iiint_V \frac{\partial\rho}{\partial t} dV + \iint_A \rho \underline{\underline{\hat{v} \cdot \underline{\underline{n}}}} dA$$

Από την αρχή διατήρησης της μάζας έχουμε:

$$\left[ \frac{dM}{dt} \right]_{\Sigma} = 0$$

οπότε η παραπάνω εξίσωση μας δίνει την ολοκληρωτική μορφή ισοζυγίου μάζας:

$$\iiint_V \frac{\partial\rho}{\partial t} dV + \iint_A \rho \underline{\underline{\hat{v} \cdot \underline{\underline{n}}}} dA = 0$$

$$\iiint_V \frac{\partial\rho}{\partial t} dV$$

ο ρυθμός αύξησης της μάζας μέσα στον όγκο ελέγχου

$$\iint_A \rho \underline{\underline{\hat{v} \cdot \underline{\underline{n}}}} dA$$

ρυθμός εκροής μάζας από την επιφάνεια ελέγχου

$\rho \underline{v} \cdot \underline{\hat{n}} dA$  το πρόσημο του όρου εξαρτάται από τη διεύθυνση ροής  $\underline{v}$ , σε σχέση με το  
 ορθομοναδιαίο διάνυσμα  $\underline{\hat{n}}$ , στην επιφάνεια. Ειδικότερα αν  $\rho \underline{v} \cdot \underline{\hat{n}} dA < 0$ , τότε  
 έχουμε ότι η ταχύτητα ροής έχει φορά προς τα έξω. Σύμφωνα με το θεώρημα απόκλισης του  
 Gauss θέτοντας:

$$\underline{A} = \rho \underline{v}$$

τότε έχουμε:

$$\iiint_V \nabla \cdot \rho \underline{v} dV = \iint_A \rho \underline{v} \cdot \underline{\hat{n}} dA$$

και συνεπώς η εξίσωση

$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \iint_A \rho \underline{v} \cdot \underline{\hat{n}} dA = 0$$

μετατρέπεται σε:

$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \iiint_V \nabla \cdot \rho \underline{v} dV = 0 \Leftrightarrow \iiint_V \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \underline{v} \right) dV = 0$$

Επειδή η παραπάνω εξίσωση ισχύει για οποιαδήποτε τιμή του όγκου V, βρίσκουμε την  
 εξίσωση συνέχειας:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \underline{v} = 0$$

$\rho$   
 $\underline{v}$  η μέση πυκνότητα ροής

Όπως ήδη αναφέραμε τα ασυμπίεστα ρευστά έχουν σταθερή πυκνότητα, οπότε  $\rho =$   
 σταθερό οπότε από την εξίσωση συνέχειας βρίσκουμε ότι:

$$\nabla \cdot \rho \underline{v} = 0 \Leftrightarrow \rho \nabla \cdot \underline{v} = 0 \Leftrightarrow \nabla \cdot \underline{v} = 0, \text{ αν } \rho \neq 0.$$

Αν  $\underline{v} = u \underline{i} + v \underline{j} + w \underline{k}$ , τότε από την παραπάνω εξίσωση προκύπτει:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Αυτή είναι η εξίσωση συνέχειας για ασυμπίεστο ρευστό στις καρτεσιανές συντεταγμένες.



## 2.3 ΟΙ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ NAVIER - STOKES

Η μαθηματική περιγραφή της ροής ενός ιξώδους ρευστού αποβλέπει στην δημιουργία ενός προτύπου, το οποίο θα προσεγγίζει το αντίστοιχο φυσικό πρόβλημα. Προς τον σκοπό αυτό διατυπώνονται οι διαφορικές εξισώσεις της συνέχειας και της κινήσεως και οι αρχικές και συνοριακές συνθήκες που την διέπουν. Ακολούθως επιζητείται η λύση των εξισώσεων της κίνησης, η οποία πρέπει να επαληθεύει τις υπάρχουσες συνθήκες και την εξίσωση της συνέχειας. Δύο είναι οι δρόμοι που ακολουθούνται:

- ο αναλυτικός
- ο αριθμητικός

Ο αριθμός των προβλημάτων ροής που επιδέχονται αναλυτικές λύσεις είναι περιορισμένος. Εκτός αυτού οι αναλυτικές λύσεις πολλές φορές εκφράζονται με την μορφή σειρών και ειδικών συναρτήσεων, οπότε δεν είναι απτές, ενώ παράλληλα το αριθμητικό αποτέλεσμα που θα προκύψει από αυτές συνιστά έργο το οποίο ολοκληρώνεται εμμέσως με την χρήση αριθμητικών μεθόδων και την βοήθεια ηλεκτρονικού υπολογιστή. Αυτό όμως δεν μειώνει την χρησιμότητά τους, ούτε υπονοεί ότι στερούνται πρακτικής σημασίας. Το γεγονός ότι επιζητούνται αναλυτικές λύσεις είναι απόρροια της επιθυμίας και της τάσεως του ανθρώπινου νου να συναρτά τις εκφράσεις υπό κλειστή μορφή, ανεξαρτήτως πολυπλοκότητας, με την έννοια της πληρότητας.

Αυτές οι ιδιότητες έχουν σαν συνέπεια τη διατύπωση νόμων και η διαρκής προσπάθεια κατασκευής προτύπων, τα οποία περιγράφουν φυσικά φαινόμενα. Επίσης χρησιμοποιούνται, όταν και όπου υπάρχουν, για τον έλεγχο της ακριβείας των αντιστοίχων αποτελεσμάτων των αριθμητικών μεθόδων, οι οποίες έχουν επεξεργαστεί το ίδιο πρόβλημα. Με τον τρόπο αυτό πιστοποιείται η επάρκεια των αριθμητικών μεθόδων. Επιπλέον μπορούν να αποτελέσουν την βάση για την ανάπτυξη κατάλληλης αριθμητικής τεχνικής, όταν το πρόβλημα προς μελέτη είναι πολύπλοκο. Στην περίπτωση αυτή, η υπάρχουσα αναλυτική λύση ενός απλούστερου συναφούς προβλήματος παρέχει πληροφορίες για την ανάπτυξη της αριθμητικής τεχνικής.

Ο μεγάλος αριθμός των αλγορίθμων, οι οποίοι έχουν αναπτυχθεί για την αριθμητική λύση των εξισώσεων Navier-Stokes στις δύο ή στις τρεις διαστάσεις επιβεβαιώνει την σπουδαιότητα τους στις θεωρητικές και τις εφαρμοσμένες επιστήμες. Αν και υπάρχει

αλματώδης εξέλιξη στο λογισμικό και στην μηχανικό τμήμα των υπολογιστών με την δημιουργία νέων αλγορίθμων και υπολογιστών υψηλών ταχυτήτων και ακρίβειας, η αριθμητική επίλυση των εξισώσεων των Navier-Stokes παραμένει ένα πρόβλημα, που συγκεντρώνει το ενδιαφέρον ειδικότερα όταν:

- η ροή είναι σύνθετη
- όταν υπάρχει μετάβαση από την στρωτή στην τυρβώδη ροή
- όταν η ροή είναι τυρβώδης.

Η συνεχής βελτίωση των αριθμητικών μεθόδων παίζει σημαντικό ρόλο στην μελέτη και κατανόηση των προβλημάτων ροής. Η ανάπτυξη των αριθμητικών μεθόδων οφείλεται στην αδυναμία των μεθόδων των κλασικών μαθηματικών να προσφέρουν λύσεις σε σύνθετα προβλήματα των εφαρμοσμένων επιστημών. Η περίπτωση των εξισώσεων Navier-Stokes αποτελεί ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους για τις οποίες δεν υπάρχει αναλυτική λύση και θεωρούνται από τις πιο δύσκολες, ως προς την επίλυσή τους, Αυτό είναι μια πραγματικότητα διότι οι εξισώσεις Navier-Stokes είναι μη γραμμικές με μεταβλητούς συντελεστές. Η εύρεση της λύσης ενός προβλήματος με τη χρήση αριθμητικής μεθόδου στηριζόταν παλαιότερα στην ομαδική, εντατική και μακρόχρονη προσπάθεια των ερευνητών για την εκτέλεση των πράξεων κατά την εφαρμογή της αριθμητικής μεθόδου στο πρόβλημα. Στην σημερινή εποχή στηρίζεται στη δυνατότητα των υπολογιστών για την παραγωγή τους και από πρακτικής άποψης εφαρμόζονται σε κάθε πρόβλημα ροής. Προς τούτο δε έχουν αναπτυχθεί κατάλληλα εμπορικά προγράμματα.

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να προσδιορίσουμε το πεδίο ροής στην περιοχή του σχήματος και γνωρίζουμε τις τιμές της ταχύτητας σε δεδομένο αριθμό σημείων της περιοχής. Μια δυνατή μέθοδος υπολογισμού είναι να χωρίσουμε την περιοχή σε πλέγμα κόμβων και να ζητήσουμε να υπολογίσουμε τις τιμές της ταχύτητας σε όλα τα σημεία του πλέγματος. Για αυτόν τον λόγο κατασκευάζουμε σύστημα εξισώσεων για τις τιμές της ταχύτητας στα σημεία του πλέγματος, το οποίο θα επιλύσουμε. Η αριθμητική λύση μιας διαφορικής εξίσωσης

$$f(x,y,y',y'',\dots,y^{(n)}) = 0$$

σημαίνει τον προσδιορισμό ενός συνόλου τιμών, δια των οποίων εκφράζεται η κατανομή της εξαρτημένης μεταβλητής  $y$ . Επομένως η αριθμητική μέθοδος συνιστά

πείραμα, αντίστοιχο προς το εργαστηριακό πείραμα, κατά το οποίο από μία σειρά μετρήσεων λαμβάνονται οι τιμές δια των οποίων προσδιορίζεται η κατανομή της μετρούμενης ποσότητας και στην συνέχεια κατασκευάζεται η μαθηματική έκφραση αυτής στην περιοχή των μετρήσεων. Και στις δύο περιπτώσεις, αριθμητική και πειραματική, ο ερευνητής έχει στην διάθεσή του έναν πεπερασμένο αριθμό τιμών της εξαρτημένης μεταβλητής, από τον οποίο θα εξαγάγει την μορφή της μετρούμενης ποσότητας.


**Εικόνα 8** Πλέγμα διακριτών σημείων

Έστω για παράδειγμα ότι από το σύνολο των γνωστών τιμών της  $y$  πρόκειται να κατασκευαστεί πολυώνυμο  $n$  βαθμού:

$$y = \sum_{i=0}^n a_i x^i$$

Σε αυτό οι συντελεστές  $a_i$  θα προσδιοριστούν. Η αριθμητική μέθοδος χρησιμοποιεί τις γνωστές τιμές της  $y$ , τις οποίες αντιστοιχεί σε ένα πλέγμα σημείων  $(x,y)$  και δημιουργεί σύστημα εξισώσεων, στο οποίο οι άγνωστοι είναι οι συντελεστές  $a_i$ . Ακολούθως παράγει τον αλγόριθμο, με τον οποίο επιλύεται το σύστημα.

Είναι προφανές από την σύγκριση της αριθμητικής λύσης μιας διαφορικής εξίσωσης με την αναλυτική λύση αυτής, αν υπάρχει, ότι η πληροφορία περί της συνεχείας των τιμών

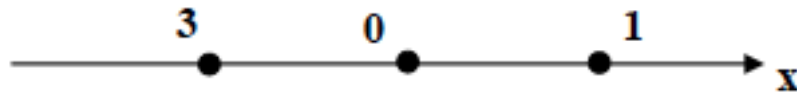
της εξαρτημένης μεταβλητής που περιέχεται στην αναλυτική μορφή της εξίσωσης, αντικαθίσταται από σύνολο διακριτών τιμών στην αριθμητική εκδοχή της λύσεως. Οι αλγεβρικές εξισώσεις, δια των οποίων σε κάθε σημείο του πλέγματος αντιστοιχεί μία άγνωστη τιμή της  $y$ , σχηματίζονται από την διαφορική εξίσωση:  $f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$

και καλούνται διακριτές εξισώσεις. Κατά τον σχηματισμό των διακριτών εξισώσεων γίνονται ορισμένες παραδοχές για τον τρόπο με τον οποίο μεταβάλλεται η  $y$  μεταξύ των σημείων του πλέγματος. Οι παραδοχές αυτές αφορούν στον τρόπο με τον οποίο παρίσταται η  $y$  και οι παράγωγοι αυτής επί των σημείων του πλέγματος. Αν και είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθεί ολόκληρο το πλέγμα για την έκφραση της  $y$  στην περιοχή μελέτης του προβλήματος, από πρακτικής άποψης προτιμάται η τμηματική παράσταση της  $y$  κατά τέτοιον τρόπο, ώστε να περιγράφεται η μεταβολή της  $y$  σε μικρή περιοχή συναρτήσει των τιμών που λαμβάνει η  $y$  στα σημεία της μικρής περιοχής και στα γειτονικά σημεία της εξεταζόμενης περιοχής. Συνεπώς η περιοχή υπολογισμού υποδιαιρείται σε μικρότερα στοιχεία και σε έκαστο στοιχείο αντιστοιχεί συγκεκριμένη τοπική παράσταση της μορφής της  $y$  (συγκεκριμένο προφίλ της  $y$ ). Με την διακριτοποίηση της  $y$  αναγόμεστε πλέον από τον χώρο των συνεχών τιμών στον χώρο των διακριτών τιμών. Η διακριτοποίηση της  $y$  σε σύνολο τιμών, ανά μία σε έκαστο σημείο του πλέγματος καθιστά δυνατή την αντικατάσταση της διαφορικής εξίσωσης με αλγεβρικές εξισώσεις, γραμμικές ή μη γραμμικές, οι οποίες επιλύονται με γνωστούς τρόπους.

## 2.4 Κατάστροψη των Εξισώσεων σε Διακριτή Μορφή

Κάθε διακριτή εξίσωση συνιστά αλγεβρική σχέση δια της οποίας υπολογίζονται οι τιμές της εξαρτημένης μεταβλητής  $y$  στα σημεία του πλέγματος. Η διακριτή εξίσωση παράγεται από την διαφορική εξίσωση, η οποία αναφέρεται στην  $y$ , επομένως περιέχει την πληροφορία του φυσικού φαινομένου, την οποία περιέχει και η αρχική διαφορική εξίσωση. Το γεγονός ότι σε δοθείσα διακριτή εξίσωση συμμετέχει μικρός αριθμός εκ των σημείων του πλέγματος είναι απόρροια της τμηματικής φύσης των επιλεγμένων τοπικών παραστάσεων της  $y$ . Κατά συνέπεια, η τιμή της  $y$  σε ένα σημείο επηρεάζει την κατανομή της  $y$  μόνο στην άμεση γειτονία του σημείου. Αν δε ο αριθμός των σημείων του πλέγματος καταστεί πολύ μεγάλος, η λύση του προβλήματος που θα προκύψει από το σύστημα των διακριτών εξισώσεων, θα τείνει να ταυτιστεί με την ακριβή λύση της διαφορικής εξίσωσης. Αυτό συμβαίνει γιατί καθώς ο αριθμός των σημείων του πλέγματος αυξάνει, η απόσταση μεταξύ των σημείων του πλέγματος ελαττώνεται, οπότε η μεταβολή της  $y$  από σημείο σε σημείο καθίσταται μικρή και οι διαφορές μεταξύ γειτονικών στοιχείων εκ της επιλογής της τοπικής παράστασης της  $y$  είναι αμελητέες. Οι διακριτές εξισώσεις, οι οποίες αναφέρονται σε δοθείσα διαφορική εξίσωση, δεν είναι μοναδικές. Εν τούτοις όταν ο αριθμός των λαμβανομένων σημείων του πλέγματος γίνεται πολύ μεγάλος, όλες οι μορφές των διακριτών εξισώσεων αναμένεται να δώσουν την λύση. Οι διάφορες μορφές των διακριτών εξισώσεων οφείλονται στις διαφορετικές μεθόδους παραγωγής αυτών και στις διαφορετικές παραδοχές, τις οποίες χρησιμοποιούν, για την τοπική παράσταση της  $y$ . Για δεκαετίες, οι μέθοδοι των Πεπερασμένων Διαφορών, των Πεπερασμένων Όγκων και των Πεπερασμένων Στοιχείων έχουν επικρατήσει ως τα αριθμητικά σχήματα τα οποία χρησιμοποιούνται περισσότερο για τους επιστημονικούς υπολογισμούς. Οι μέθοδοι αυτοί έχουν χρησιμοποιηθεί για την επίλυση μεγάλου αριθμού προβλημάτων, τα οποία καλύπτουν μια ευρεία περιοχή εφαρμογών. Συναφής με την χρήση των μεθόδων αυτών είναι η διακριτοποίηση και αρίθμηση των στοιχείων του υπολογιστικού χώρου, δηλαδή αυτό που ονομάζουμε δημιουργία πλέγματος. Οι μέθοδοι των Πεπερασμένων Διαφορών εφαρμόζονται σε δομημένα (ομογενή ή μη ομογενή) πλέγματα ενώ οι μέθοδοι των Πεπερασμένων Όγκων και των Πεπερασμένων Στοιχείων εφαρμόζονται σε μη δομημένα πλέγματα. Κατά συνέπεια, οι μέθοδοι των Πεπερασμένων Όγκων και των Πεπερασμένων Στοιχείων θεωρούνται πλέον κατάλληλες για προβλήματα σε χώρους με τυχαίες γεωμετρίες. Επιπλέον υπάρχουν και μέθοδοι (Meshless, απλεγματικές) οι οποίες δεν χρειάζονται καθόλου πλέγμα σημείων. Στην παρούσα μελέτη η διακριτοποίηση των διαφορικών

εξισώσεων τελείται με την μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών. Η συνήθης διαδικασία κατασκευής μιας εξισώσεως πεπερασμένων διαφορών γίνεται μέσω της σειράς κατά Taylor. Οι παράγωγοι της  $y$  αναπτύσσονται σε σειρά Taylor, από την οποία κρατείται ορισμένος αριθμός όρων.



**Εικόνα 9** Διακριτά σημεία στον άξονα των  $x$

Θεωρούμε επί παραδείγματι την διαφορική εξίσωση

$$y'' + xy' + y = 0, \quad a \leq x \leq \beta.$$

Εντός του διαστήματος  $(a, \beta)$  λαμβάνουμε  $n$  ισαπέχοντα σημεία, τους κόμβους, οι οποίοι καλύπτουν ολόκληρο το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $y$ . Στην Εικόνα 9 απεικονίζονται τρεις εκ των κόμβων και σημαίνονται με τους αριθμούς 0,1,3.

Το σημείο 0 βρίσκεται στο μέσον της απόστασης μεταξύ των σημείων 1 και 3 οπότε:

$$\Delta x = x_1 - x_0 = x_0 - x_3.$$

Στην συνέχεια αναπτύσσουμε την  $y$  σε όρους σειράς Taylor ως προς το σημείο 0, οπότε:

$$y_3 = y_0 - \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 \Delta x + \frac{1}{2!} \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 (\Delta x)^2 - \frac{1}{3!} \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_0 (\Delta x)^3 + O(\Delta x)^4$$

$$y_1 = y_0 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 \Delta x + \frac{1}{2!} \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 (\Delta x)^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_0 (\Delta x)^3 + O(\Delta x)^4$$

Στη συνέχεια αφαιρούμε κατά μέλη τις δύο παραπάνω εξισώσεις και λαμβάνουμε την έκφραση της πρώτης παραγώγου:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = \frac{y_1 - y_3}{2(\Delta x)} + O(\Delta x)^3.$$

Ακολούθως προσθέτουμε κατά μέλη τις δύο παραπάνω εξισώσεις και λαμβάνουμε την έκφραση της δεύτερης παραγώγου:

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 = \frac{y_1 - 2y_0 + y_3}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x)^4$$

Εν συνεχεία αντικαθιστούμε τις εκφράσεις των παραγώγων στην αρχική διαφορική εξίσωση και καταλήγουμε στην διακριτοποιημένη μορφή της διαφορικής εξίσωσης ως προς το σημείο 0 του πλέγματος, δηλαδή στην:

$$\frac{y_1 - 2y_0 + y_3}{(\Delta x)^2} + x_0 \frac{y_1 - y_3}{2(\Delta x)} + y_0 = 0$$

Από την παραπάνω εξίσωση και την εκτέλεση των πράξεων βρίσκουμε:

$$y_3(2 - x_0\Delta x) + y_1(2 + x_0\Delta x) + y_0(2\Delta x^2 - 4) = 0$$

και οι άγνωστοι είναι τα  $y_i$ . Με την επανάληψη της προηγούμενης διαδικασίας διακριτοποίησης για όλα τα σημεία  $a \leq x \leq \beta$  του άξονα  $x$  της Εικόνας 9, προκύπτουν διακριτές εξισώσεις της μορφής:

$$m_{i-1}y_{i-1} + m_i y_i + m_{i+2}y_{i+2} = b_i, i = 1, \dots, n$$

Θέτοντας διαδοχικά στην προηγούμενη εξίσωση:  $i = 1, 2, \dots, n$

λαμβάνουμε σύστημα  $n$  γραμμικών διακριτών εξισώσεων με  $n$  αγνώστους, της μορφής:

$$\left. \begin{aligned} a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + \dots + a_{1n} y_n &= b_1 \\ a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + \dots + a_{2n} y_n &= b_2 \\ \dots & \\ a_{n1} y_1 + a_{n2} y_2 + \dots + a_{nm} y_n &= b_n \end{aligned} \right\} .$$

Στο σύστημα αυτό τα  $y_i$  είναι οι άγνωστοι και τα  $a_{ij}$  οι συντελεστές των αγνώστων. Επίσης, από την μορφή της

$$m_{i-1}y_{i-1} + m_i y_i + m_{i+2}y_{i+2} = b_i, i = 1, \dots, n$$

συνάγεται ότι σε κάθε εξίσωση όλοι οι συντελεστές πλην τριών είναι μηδενικοί. Οι συντελεστές  $a_{ij}$  σχηματίζουν τετραγωνικό πίνακα τάξεως  $n$ ,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} .$$

ενώ τα δεξιά μέλη  $b_i$  των εξισώσεων σχηματίζουν πίνακα-στήλη. Συνοπτικά το σύστημα

$$\left. \begin{array}{l} a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + \dots + a_{1n} y_n = b_1 \\ a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + \dots + a_{2n} y_n = b_2 \\ \dots \\ a_{n1} y_1 + a_{n2} y_2 + \dots + a_{nn} y_n = b_n \end{array} \right\} .$$

γράφεται ως:  $\mathbf{A} \mathbf{y} = \mathbf{b}$

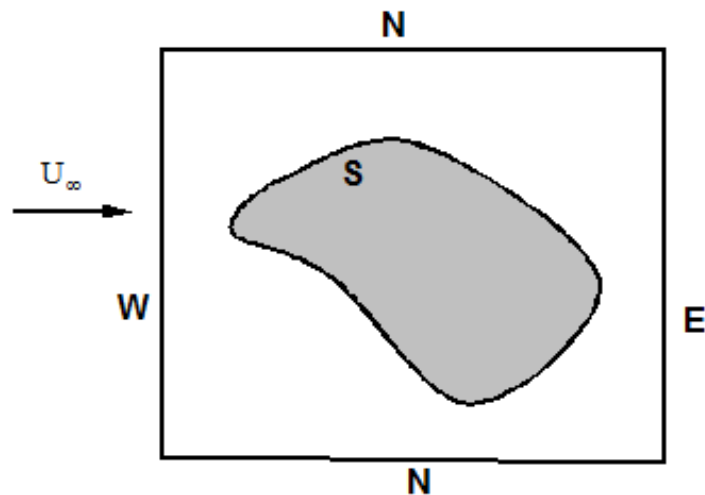
και έχει λύση την:  $\mathbf{y} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}$ , όπου  $\mathbf{A}^{-1}$  είναι ο αντίστροφος πίνακας του  $\mathbf{A}$ .

Κατά την μετάβαση από την διαφορική εξίσωση στην διακριτή εξίσωση το σφάλμα αποκοπής θεωρήθηκε αμελητέο. Δηλαδή έγινε σιωπηρή παραδοχή ότι η μορφή της  $y$  δεν αφίσταται κατά πολύ από την πολυωνυμική ως προς την ανεξάρτητη μεταβλητή  $x$  με συνέπεια οι όροι τρίτης και ανωτέρας τάξης να θεωρηθούν μη σημαντικοί. Τούτο όμως δεν ισχύει αν επί παραδείγματι η μεταβολή της  $y$  είναι σε κάποια περιοχή εκθετική. Η τεχνική με την οποία αντιμετωπίζεται το εν λόγω πρόβλημα είναι με την απαλοιφή των μη γραμμικών όρων στην εξίσωση της ροής με την εισαγωγή προσωρινών αγνώστων βοηθητικών συναρτήσεων, οι οποίες δεν εμφανίζονται στην τελική διακριτή μορφή. Επίσης με ανάλυση των μη γραμμικών όρων σε σειρές Taylor καταλήγουμε σε συστήματα γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων στα οποία ο πίνακας των συντελεστών για την κάθε άγνωστη συνάρτηση είναι διαγωνίως υπέρτερος, εξασφαλίζοντας έτσι την ευστάθεια και σύγκλιση της μεθόδου. (Loukopoulos V., 2006)



## 2.5 Οριακές Συνθήκες

Η γενική εξίσωση μεταφοράς, που ισχύει για όλες τις μεταβλητές του προβλήματος ( $u_1, u_2, u_3, p, k, \varepsilon, \dots$ ), είναι ελλειπτικού χαρακτήρα και απαιτεί ορισμό οριακών συνθηκών (boundary conditions) σε όλα τα σύνορα του πεδίου υπολογισμού.



Εικόνα 10 Συνοριακές συνθήκες

Για ένα πεδίο εξωτερικής ροής που ορίζεται στην ανάντη πλευρά του σώματος από την ταχύτητα  $U_\infty$  και περιβάλλει το στερεό σώμα με επιφάνεια  $S$  θεωρούμε ένα υπολογιστικό χώρο που έχει τα εξής σύνορα:

**Σύνορο W** ή σύνορο εισόδου το ρευστού

**Σύνορο N** ή εξωτερικό σύνορο του πεδίου

**Σύνορο E** ή σύνορο εξόδου του ρευστού

**Σύνορο S** ή επιφάνεια του (ή των) σώματος

Οι οριακές συνθήκες που εφαρμόζονται σε κάθε ένα από τα παραπάνω σύνορα είναι τύπου Neumann ή Dirichlet και αναλύονται στα επόμενα υποκεφάλαια.

### 2.5.1 Σύνορα W και N (συνθήκες Dirichlet)

Τα W και N πρέπει να επιλέγονται έτσι ώστε η ροή στην περιοχή που ορίζουν να είναι στρωτή και να μπορεί να προσεγγιστεί από απλά μοντέλα. Αν βρίσκονται αρκετά μακριά από το σώμα, μία απλή προσέγγιση θα ήταν να θεωρήσουμε ότι οι συνιστώσες της ταχύτητας είναι ίσες με τις συνιστώσες της U, δηλαδή η ροή είναι ανεπηρέαστη από την παρουσία του σώματος. Αυτό σημαίνει ότι, αριθμητικά, οι τιμές το πεδίου ροής κοντά στο σώμα είναι πρακτικά "αναίσθητες" από τις λεπτομέρειες της ροής μακριά. Λόγω όμως των μεγάλων πυκνοτήτων των αριθμητικών πλεγμάτων που απαιτούνται για την παραγωγή κατά το δυνατό ακριβέστερων αριθμητικών λύσεων, στη ναυτική υδροδυναμική (ή και σε άλλες περιπτώσεις εξωτερικών ροών) χρησιμοποιείται πολλές φορές και η προσέγγιση της δυναμικής ροής. Σύμφωνα με αυτήν, οι συνιστώσες της ταχύτητας στο εξωτερικό σύνορο υπολογίζονται από τη λύση της δυναμικής ροής γύρω από το σώμα (π.χ. με τη μέθοδο Hess and Smith), δηλαδή στις εξωτερικές συνθήκες λαμβάνεται υπ' όψη και η παρουσία του σώματος στην "εκτόπιση" της ροής. Με αυτόν τον τρόπο το εξωτερικό σύνορο N (και W) μεταφέρεται πιο κοντά στο σώμα και μπορούν να χρησιμοποιηθούν σημαντικά μικρότεροι αριθμοί υπολογιστικών κόμβων. Πρέπει όμως πάντοτε να γίνεται έλεγχος ούτως ώστε τα παραγόμενα αποτελέσματα να είναι πρακτικά ανεξάρτητα από τις συνθήκες στα W και N. Στα ίδια σύνορα υποτίθεται ότι η ροή είναι στρωτή και για τις μεταβλητές της τύρβης υποτίθεται ότι  $k = \varepsilon = 0$ .

### 2.5.2 Σύνορο E (συνθήκες Neumann)

Είναι αδύνατο να γνωρίζουμε τις τιμές των μεταβλητών στη θέση E και συνήθως υποθέτουμε ότι η πρώτη παράγωγος οποιασδήποτε μεταβλητής κάθετα στο E είναι μηδενική και επομένως η κατάντη τιμή της στο E είναι ίδια με την αμέσως προηγούμενη (συνθήκη Neumann). Για τον έλεγχο της υπόθεσης πρέπει να ελέγχεται και η θέση του E.

### 2.5.3 Σύνορο S (στερεό σύνορο ή "τοιχος")

Η επίλυση των εξισώσεων Navier-Stokes μέχρι την επιφάνεια του στερεού συνόρου, όπου ισχύουν οι συνθήκες Dirichlet  $u_1 = u_2 = u_3 = u = \varepsilon = 0$ , απαιτεί συχνά τόσο πυκνά αριθμητικά

πλέγματα ώστε και με τις δυνατότητες των σημερινών υπολογιστών να καθίσταται αδύνατη η αριθμητική επίλυση σύνθετων ροϊκών πεδίων. Για ροές υψηλών αριθμών Reynolds (όπως π.χ. αυτών που συναντάμε σε προβλήματα υδροδυναμικής) έχει επιχειρηθεί η εφαρμογή απλών μοντέλων κοντά στα στερεά σύνορα με σκοπό την αντιμετώπιση της παραπάνω αδυναμίας. Οι οριακές συνθήκες κοντά στην επιφάνεια αντικαθίστανται από την εφαρμογή των συναρτήσεων τοίχου (wall functions) των Patankar και Spalding σύμφωνα με τις οποίες το πεδίο διακρίνεται σε τρεις περιοχές:

- το στρωτό οριακό υπόστρωμα ( $y^+ < 3$ )
- το ενδιάμεσο στρώμα ( $3 < y^+ < 40$ ) όπου οι τάσεις της στρωτής ροής και οι τάσεις Reynolds είναι της ίδιας τάξεως
- την περιοχή ισχύος του λογαριθμικού νόμου όπου οι τάσεις Reynolds είναι πολύ μεγαλύτερες από τις τάσεις στρωτής ροής ( $200 > y^+ > 40$ ).

Με τη μέθοδο των κλασικών συναρτήσεων τοίχου ο πρώτος υπολογιστικός κόμβος θεωρείται ότι βρίσκεται στην περιοχή ( $\gamma$ ) όπου ισχύει προσεγγιστικά

$$u^+ = \frac{1}{K} \ln(E_y^+)$$

όπου

$$y^+ = \frac{y_R}{\nu} \left( \frac{\tau_w}{\rho} \right)^{1/2}$$

$$u^+ = \frac{u}{\left( \frac{\tau_w}{\rho} \right)^{1/2}}$$

και

$\tau_w$  = διατμητική τάση στο σύνορο,  $y_R$  απόσταση κάθετα προς το σύνορο,  $u$  παράλληλη ταχύτητα στο σύνορο,  $\kappa = 0.42$  (σταθ. von Karman),  $E = 9.79$ . Υποθέτοντας ότι η διατμητική

τάση είναι σταθερή κατά το ύψος, προκύπτει ότι για μονοδιάστατη ροή (Couette) η κινητική ενέργεια της τύρβης σχετίζεται με την  $\tau_w$  ως εξής (μόνο στην περιοχή ( $\gamma$ )):

$$k = C_\mu^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{\tau_w}{\rho} \right)$$

$$(C_\mu = 0.09)$$

ενώ η απορρόφηση της  $k$ :

$$\varepsilon = (\tau_w / \rho)^{1.5} / (0.42y_R)$$

Οι ως άνω σχέσεις χρησιμοποιούνται μαζί με τις εκφράσεις

$$\frac{\tau_w}{\rho} = \nu_t \frac{\partial u}{\partial y_R}, \quad \frac{\partial u}{\partial y_R} = \frac{(\tau_w / \rho)^{1/2}}{0.42y_R}$$

στον ορισμό των οριακών συνθηκών των διαφορών μεταβλητών κοντά στο στερεό σύνορο.

Οι οριακές συνθήκες των συναρτήσεων τοίχου έχουν ευρύτατη εφαρμογή. Σε πολλές περιπτώσεις όμως, όπως σε μη μόνιμα πεδία ροής ή σε πεδία με ισχυρή ανακυκλοφορία η υπόθεση παύει να ισχύει, οπότε απαιτούνται ανωτέρας τάξεως μοντέλα τύρβης (ή πιο εξελιγμένα  $k$ - $\varepsilon$  μοντέλα) για να περιγράψουν τη ροή κοντά στον τοίχο και να λυθούν οι εξισώσεις Reynolds κοντά σε αυτά (μέχρι και την περιοχή ( $\alpha$ )). (Τριανταφύλλου Γ., 2002)

## 2.6 Υποχαλάρωση (Underrelaxation)

Η μη γραμμικότητα των συστημάτων των εξισώσεων μεταφοράς οδηγεί πολλές φορές σε απόκλιση της επαναληπτικής διαδικασίας, όταν οι αρχικές υποθετικές τιμές των μεταβλητών απέχουν σημαντικά από την τελική λύση. Στα προβλήματα που εξετάζουμε η σύγκλιση εξασφαλίζεται με την εφαρμογή των συντελεστών υποχαλάρωσης. Αν υποθέσουμε ότι η λύση της

$$A_P \Phi_P = A_N \Phi_N + A_S \Phi_S + A_E \Phi_E + A_W \Phi_W + A_D \Phi_D + A_U \Phi_U + S_{i\Phi}$$

είναι η  $\Phi_n$  και η τιμή της  $\Phi$  στην αμέσως προηγούμενη επανάληψη ήταν η  $\Phi_0$ , τότε ως νέα λύση στην τρέχουσα επανάληψη λαμβάνεται η

$$\Phi'_n = r \cdot \Phi_n + (1-r) \cdot \Phi_0$$

όπου  $r$  ο συντελεστής υποχαλάρωσης. Η εξίσωση εφαρμόζεται πριν από τη λύση της αντικαθιστώντας ως εξής:

$$A'_p = \frac{A_p}{r} \quad \text{και} \\ S'_{\Phi} = S_{\Phi} + (1-r)A'_p \Phi_0$$

Η πρώτη εξίσωση εξασφαλίζει πολλές φορές και την επιλυσιμότητα του συστήματος των εξισώσεων καθώς ισχυροποιεί τη διαγώνιο, αφού  $0 < r < 1$ . Όσο μικρότερες είναι οι τιμές του  $r$  τόσο αργότερη είναι η σύγκλιση καθώς η  $\Phi_n$  εξαρτάται περισσότερο από τη  $\Phi_0$ . Μικρές τιμές του  $r$  εξασφαλίζουν σύγκλιση. Ο  $r$  μπορεί να είναι διαφορετικός για κάθε μεταβλητή. Υπάρχουν αναλύσεις στις οποίες η τιμή του  $r$  για την ίδια μεταβλητή μπορεί να μεταβάλλεται και χωρικά, αλλά δεν έχουν ακόμη ευρεία εφαρμογή (τα σχετικά προβλήματα αντιμετωπίζονται ως χρονικά μεταβαλλόμενα και οι βέλτιστες τοπικές τιμές του  $r$  προκύπτουν από τη μεταβολή των υπολοίπων των αριθμητικών εξισώσεων). Ειδικά για την επίλυση της διορθωτικής εξίσωσης της πίεσης οι νέες πιέσεις προκύπτουν από την άμεση εφαρμογή της :

$$p_n = p_0 + r p'$$

## 2.7 Μέθοδοι Υπολογιστικής Υδροδυναμικής (CFD)

Οι προαναφερόμενοι μέθοδοι υδροδυναμικής ανάλυσης, αναμφίβολα διακρίνονται για το σχετικά χαμηλό υπολογιστικό κόστος, ακόμη και όταν για την αντιμετώπιση του συνεκτικού χαρακτήρα των ροών απαιτείται αφενός η σύζευξη της δυναμικής ροής με μοντέλο πρόλεξης οριακού στρώματος στις βρεχόμενες επιφάνειες των σωμάτων και αφετέρου η επιλογή ενός κατάλληλου μοντέλου απορρεύματος, ενώ σχεδόν πάντα θα πρέπει να υιοθετηθούν δοκιμασμένες ημιεμπειρικές σχέσεις. Αντίθετα, αν αγνοηθούν η σημαντικότητα του χρόνου υπολογισμού και οι απαιτούμενοι υπολογιστικοί πόροι, η επίλυση του συστήματος των εξισώσεων Navier-Stokes (N-S), σε προκαθορισμένο όγκο του ρευστού που περιβάλλει το σώμα, αποτελεί την πλέον αξιόπιστη επιλογή. Η διακριτοποίηση των εξισώσεων και του όγκου εντός του οποίου γίνεται η επίλυση των εξισώσεων N-S που πρέπει να συνδυασθούν με ένα κατάλληλο μοντέλο τύρβης συγκροτούν μια ολοκληρωμένη μεθοδολογία ή τεχνική υπολογιστικής ρευστοδυναμικής (CFD, *Computational Fluid Dynamics*).

Η αεροδυναμική ανάλυση πτερυγίων και στροφείων με τεχνικές CFD, ιστορικά καταγράφεται στις αρχές της δεκαετίας του 1980 όπου επιχειρείται η επίλυση του μη συνεκτικού πεδίου ροής. (Caradonna F., 1984)

Στη συνέχεια, αναπτύχθηκαν αλγόριθμοι Euler που επιλύουν ένα μεταβαλλόμενο χρονικά πεδίο ροής. (Sankar N., 1986)

Η εξέλιξη των λογισμικών υπολογιστικής ρευστοδυναμικής ακολουθεί τον ραγδαίο ρυθμό αύξησης των χαρακτηριστικών και επιδόσεων των υπολογιστικών συστημάτων, με αποτέλεσμα τη δυνατότητα αριθμητικής επίλυσης των εξισώσεων RANS (*Reynolds Averaged Navier-Stokes*) σε μεγάλα ως προς την έκταση και ταυτόχρονα χρονικά μεταβαλλόμενα πεδία ροής. (Ahmad J., 1999)

Την τελευταία δεκαετία, καταγράφηκε σημαντική αύξηση των ερευνητικών εργασιών που αντιμετώπισαν την αεροδυναμική ανάλυση περιστρεφόμενων στροφείων ανεμοκινητήρων οριζοντίου άξονα με χρήση επιλυτών (*solvers*) CFD. (Sorensen N., 2002)

Τα πειραματικά ερευνητικά προγράμματα του Εργαστηρίου Ανανεώσιμων Πηγών Ενέργειας (NREL, *National Renewable Energy Laboratory*) του Υπουργείου Ενέργειας (Department of Energy) των ΗΠΑ. (Simms D., 2001)

Καθώς και τα ευρωπαϊκά προγράμματα VISCWIND (*Viscous Effects on Wind turbine Blades*).(Sørensen, 1999)

VISCEL (*Viscous and Aeroelastic effects on Wind Turbine Blades*) και KNOW-BLADE, συνέδραμαν στην ανάπτυξη και την ολοένα μεγαλύτερη χρήση των λογισμικών CFD στον τομέα των ανάλυσης και σχεδιασμού μικρών και μεγάλων ανεμοκινητήρων. (Chaviaropoulos P., 2001) (Politis E., 2005)

Οι CFD προσομοιώσεις παρέχουν αποτελέσματα που προσεγγίζουν με ικανοποιητική ακρίβεια τις πειραματικές μετρήσεις, κυρίως μέχρι τις ταχύτητες ανέμου 10m/s. Για μεγαλύτερες ταχύτητες, όπου η αποκόλληση της ροής από τα πτερύγια του στροφείου είναι έντονη, οι RANS προσομοιώσεις παρέχουν υποεκτίμηση της αποδιδόμενης ισχύος από το στροφείο του ανεμοκινητήρα. Η ανωτέρω αδυναμία των RANS προσομοιώσεων αιτιολογεί τη χρήση υβριδικών LES (*Large Eddie Simulation*) τεχνικών, όπως είναι τα DES (*Detached Eddie Simulation*) σχήματα, τα οποία χαρακτηρίζονται από το υψηλό υπολογιστικό κόστος. (Johansen J., 2002)

Από τα αποτελέσματα πραγματοποιηθέντων προσομοιώσεων βεβαιώνεται η καλή συμφωνία σε μικρές γωνίες προσβολής, ενώ σε μεγάλες γωνίες προσβολής, όπου δεσπόζει το φαινόμενο της αποκόλλησης της ροής, παρατηρούνται αποκλίσεις. Σε εργασία του Sorensen το 2009, καταδεικνύεται ότι η χρήση του μοντέλου τύρβης k- $\omega$  SST (*Shear Stress Transport*) [58] συζευγμένο με το μοντέλο μετάβασης στρωτής / τυρβώδους ροής του Menter et al. [59] διασφαλίζει επαρκώς την υπολογιστική αξιοπιστία στην αεροδυναμική ανάλυση των στροφείων ανεμοκινητήρων. (Menter F., 1993) (Menter F., 2004)

Γενικά, έχει επικρατήσει πλέον η αριθμητική επίλυση των εξισώσεων N-S στην αεροδυναμική ανάλυση και το σχεδιασμό στροφείων ανεμοκινητήρων. Ενδεικτικά αναφέρονται οι εργασίες των Madsen et al. (Madsen H., 2003), των Tongchitpakdec et al., (Tongchitpakdec C., 2005) και των Li Yuwei et al., (Li Y., 2012), όπου σ' αυτή χρησιμοποιείται ένα δυναμικά επικαλυπτόμενο πλέγμα (*overset grid*) για την επίλυση των εξισώσεων N-S. Οι Wang Q. κ.α σύζευξαν τη μέθοδο των επιφανειακών στοιχείων με έναν επιλύτη CFD με στόχο τη μείωση του υπολογιστικού κόστους που ενέχεται στην αεροδυναμική ανάλυση στροφείων ανεμοκινητήρων.(Wang Q., 2012) Επίσης, εύλογα αιτιολογείται η συνεχώς αυξανόμενη χρήση των εμπορικού λογισμικού CFD για την αεροδυναμική ανάλυση στροφείων ανεμοκινητήρων. Ενδεικτικά, αναφέρονται οι

εργασίες των Carcangiu, (Carcangiu C., 2007), Laursen (Laursen J., 2007) και Tachos (Tachos N., 2010), όπου παρουσιάζεται η αεροδυναμική ανάλυση στροφείου ανεμοκινητήρα με χρήση διαφορετικών μοντέλων τύρβης, προκειμένου να διερευνηθεί η κρισιμότητα στην επιλογή του καταλλήλου μοντέλου τύρβης για την αεροδυναμική ανάλυση στροφείων ανεμοκινητήρων οριζοντίου άξονα.



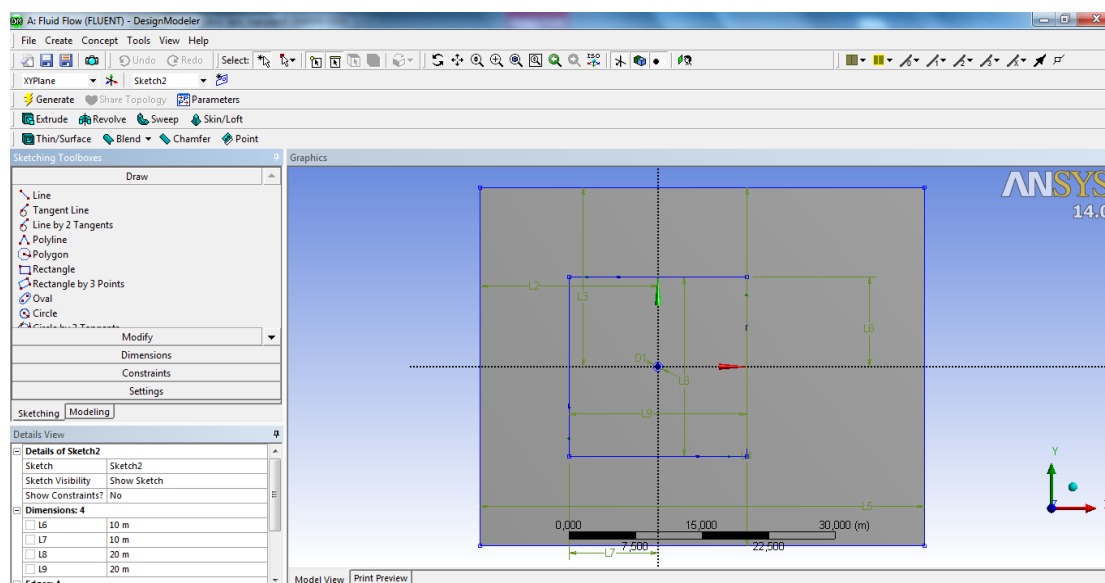
### 3 ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ

#### Εισαγωγή

Στην παρούσα ενότητα παρουσιάζονται τα αποτελέσματα του ερευνητικού μέρους της εργασίας. Για την επίλυση του προβλήματος χρησιμοποιήθηκε το πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων (CFD) Ansys fluent, το οποίο υπολογίζει τα διάφορα ρευστομηχανικά μεγέθη που εμπλέκονται στην ροή ενός ρευστού. Καθώς αναλύσαμε στα προηγούμενα κεφάλαια μερικές βασικές αρχές της υπολογιστικής ρευστομηχανικής στο παρόν κεφάλαιο δεν θα εμβαθύνουμε στον τρόπο με τον οποίο επιλύει το πρόγραμμα το πεδίο ροής.

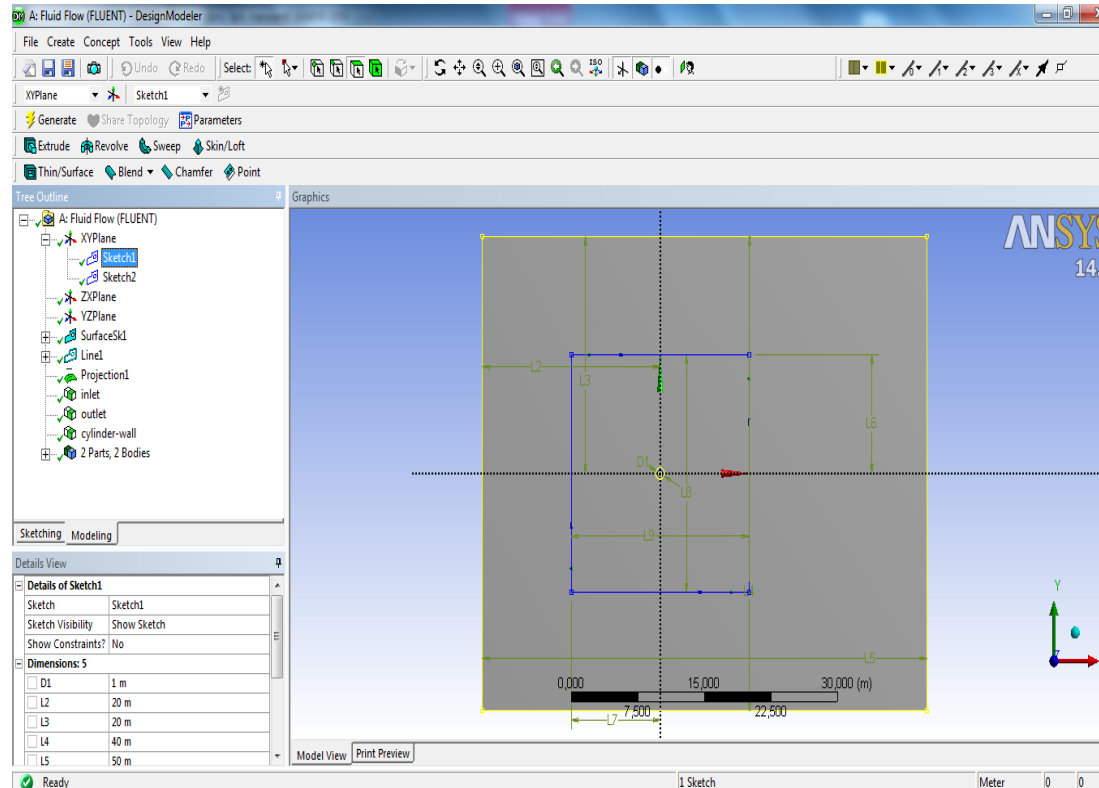
#### 3.1 Σχεδιασμός Domain

Το λογισμικό ANSYS Fluent περιέχει ευρείες δυνατότητες φυσικής μοντελοποίησης που απαιτούνται για τη μοντελοποίηση της ροής, της τύρβης, της μεταφοράς θερμότητας, και για αντιδράσεις βιομηχανικών εφαρμογών. Στην μελέτη το λογισμικό χρησιμοποιείται για την εξέταση της ροής γύρω από κύλινδρο.



Εικόνα 11 Στιγμιότυπο κατά τον σχεδιασμό του μοντέλου στο πρόγραμμα ANSYS Fluent

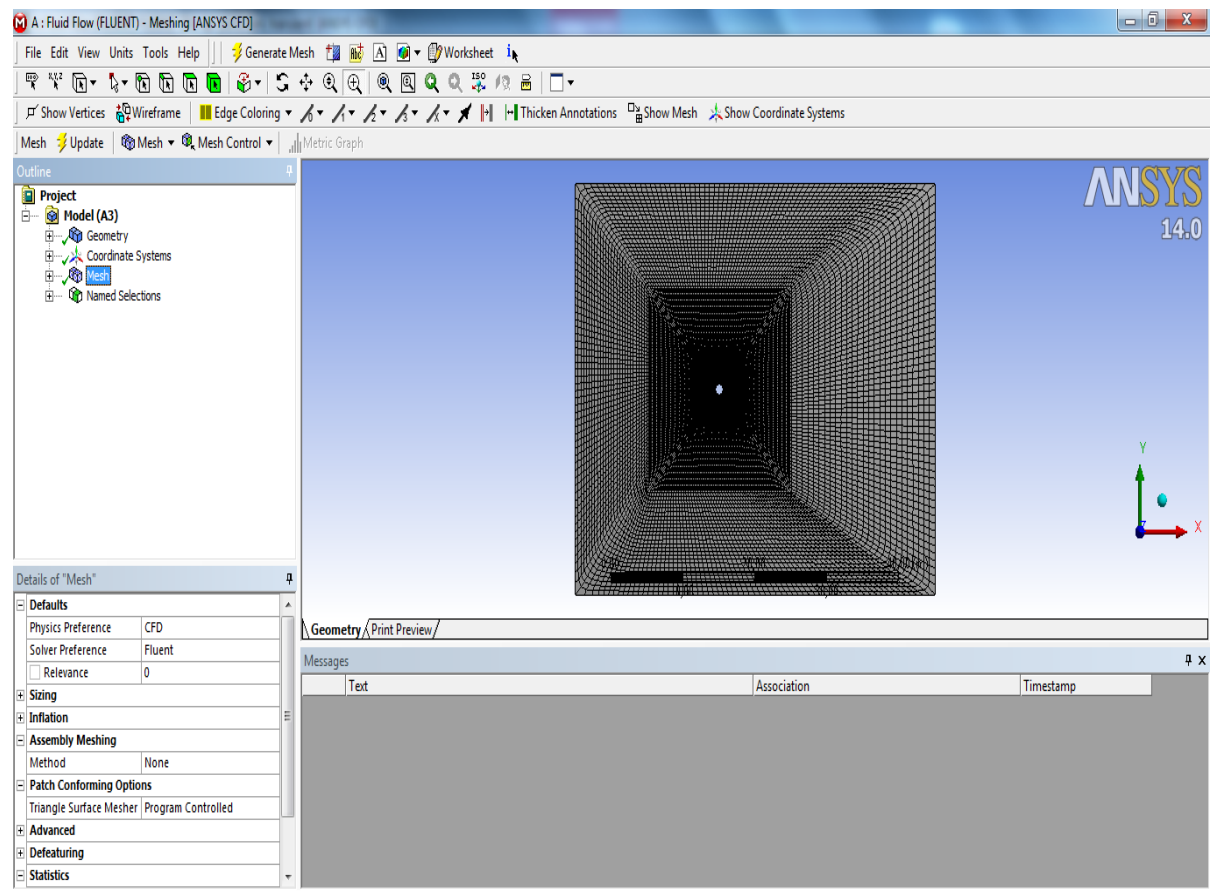
Λόγω της απλότητας του σχήματος του κυλίνδρου, που χαρακτηρίζεται μόνο από μια διάσταση (τη διάμετρο), η ροή γύρω από τον κύλινδρο εξαρτάται μόνο από τον αριθμό του Reynolds βασισμένο πάνω στην ταχύτητα της εξωτερικής ροής  $U$ , και τη διάμετρο  $D$  του κυλίνδρου:  $R=UD/\nu$ .



**Εικόνα 12** Χρησιμοποιούμε ένα ορθογώνιο για τα εξωτερικά σύνορα και ένα εσωτερικό, προκειμένου να πυκνωθεί εσωτερικά το πλέγμα που γίνονται οι μεταβολές. Δίνουμε μεγάλες αποστάσεις προκειμένου να είναι επαρκές το πλέγμα.

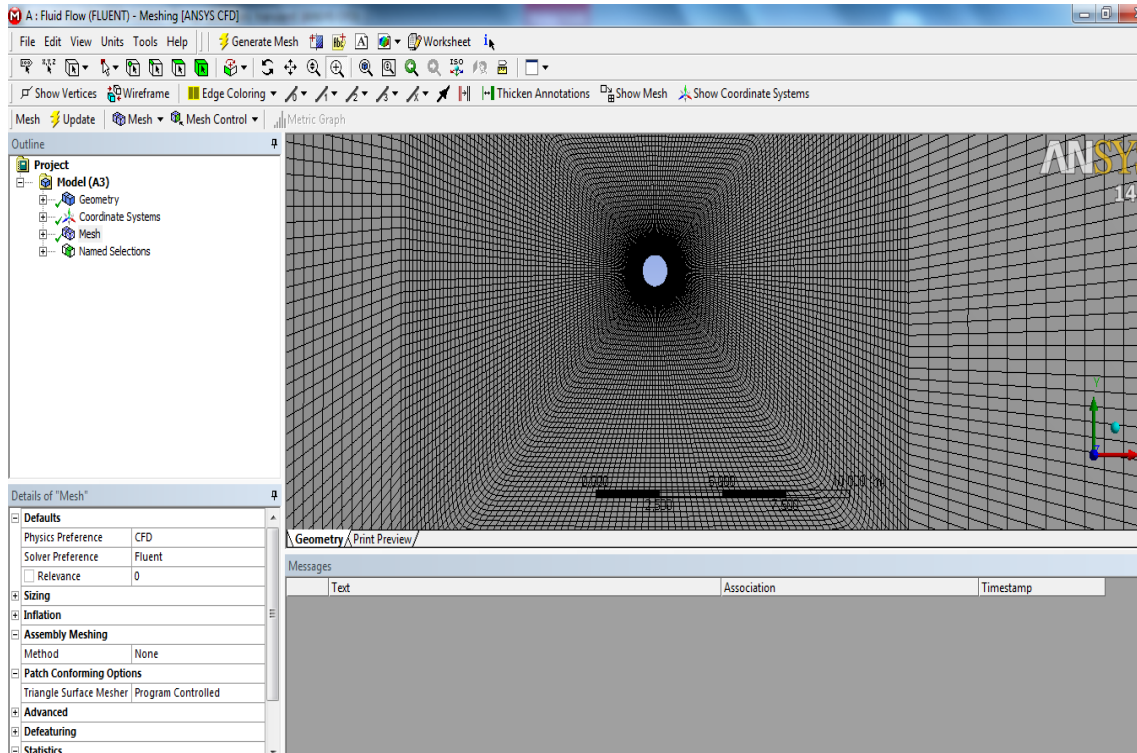
## 3.2 Πλέγμα – Grid

Αφού ορίσουμε τα όρια και παραμετροποιήσουμε το μοντέλο δημιουργούμε ένα τριγωνικό πλέγμα το οποίο θα ακολουθεί την επέκταση των διαμέτρων του κυλίνδρου. Στιγμιότυπο από τον σχεδιασμό του πλέγματος παρουσιάζεται στην επόμενη εικόνα.



**Εικόνα 13** Στιγμιότυπο από την εφαρμογή τριγωνικού πλέγματος, προκειμένου να ακολουθεί την επέκταση των διαμέτρων του κυλίνδρου

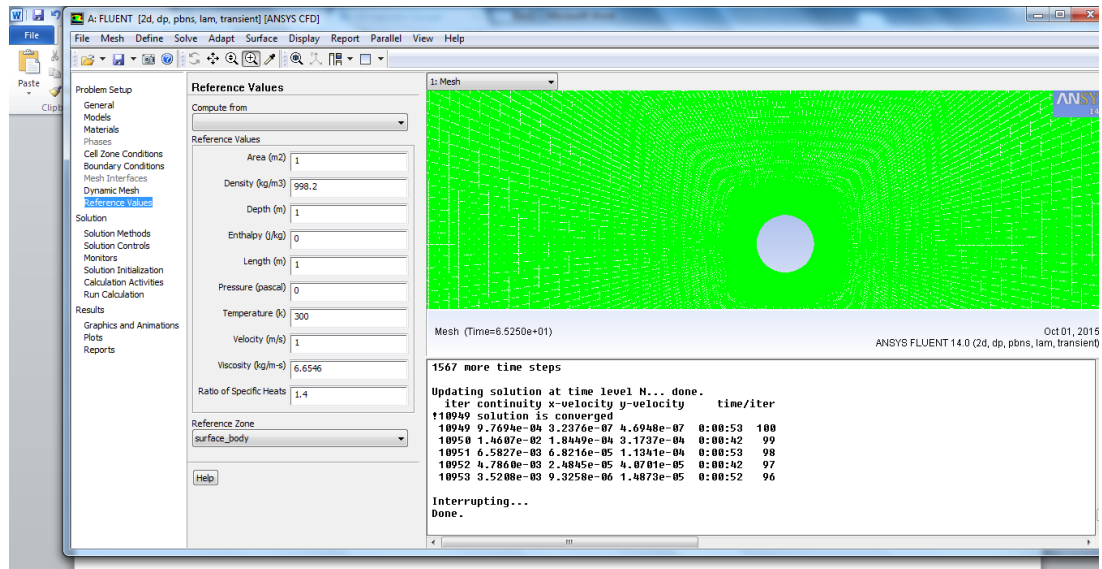
Επιλέγουμε μεγαλύτερη πυκνωση στην κλειστή περιοχή του κυλίνδρου ώστε να φανούν οι διακυμάνσεις τις ροής που θα προσκρούσει στην επιφάνεια του.



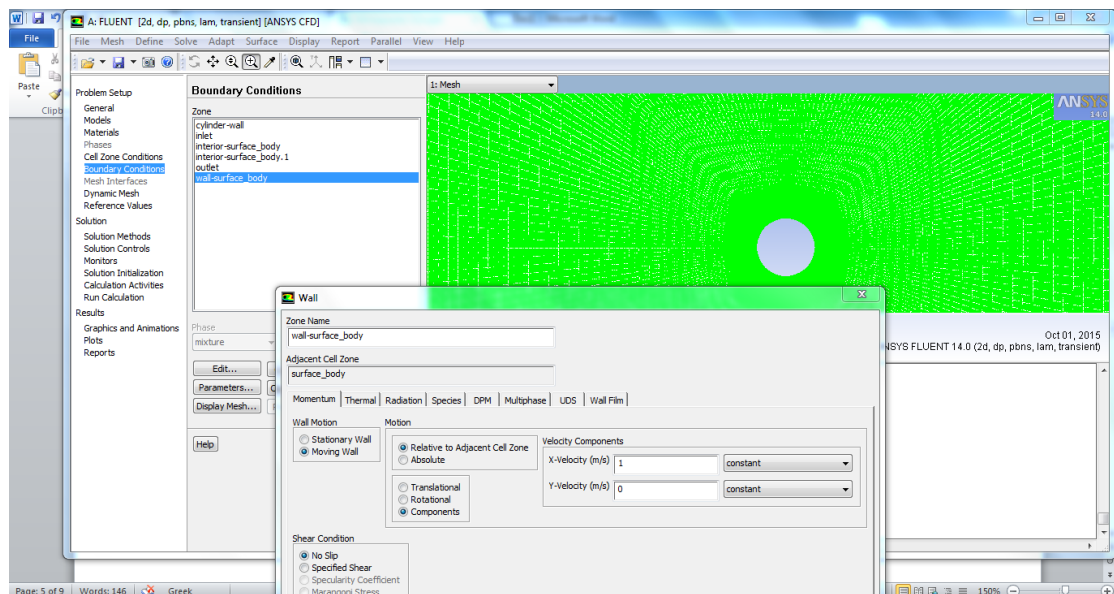
**Εικόνα 14** Στιγμιότυπο από την παραμετροποίηση του πλέγματος. Χρησιμοποιείται μεγαλύτερη πύκνωση στην πολύ κοντινή περιοχή του κυλίνδρου, ώστε να πιάσει τις μεγάλες διακυμάνσεις της ροής που προσκρούει στην επιφάνεια του

### 3.3 Τρέξιμο Προγράμματος- Ακίνητος Κύλινδρος

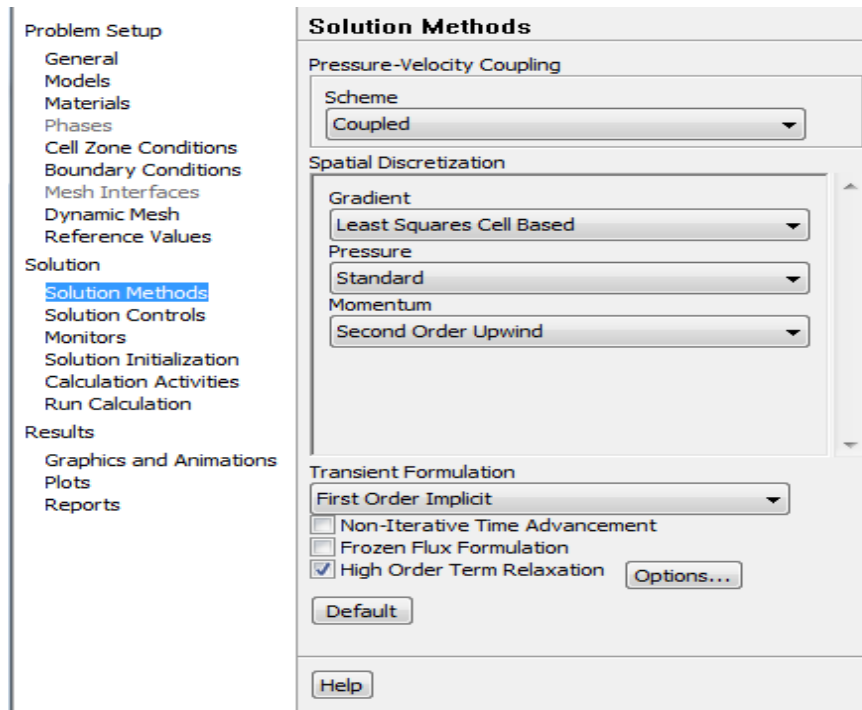
Αφού έχουμε ορίσει πλήρως όλες τις απαιτούμενες παραμέτρους ζητούμε από το πρόγραμμα να τρέξει τους υπολογισμούς. Κατά την εισαγωγή βασικών τιμών, ορίσαμε τα εξής : Βασικό δεδομένο  $RE=150$ .  $\Theta ET\Omega U=1M/S$ , υπάρχει  $D=1m$  από σχέδιο, ΑΡΑ ΑΠΟ ΕΞΙΣΩΣΗ  $REYNOLDS=U*D/v \rightarrow \mu=0,006667$ . Άρα  $\mu=v/\rho \rightarrow \mu=6,6546$



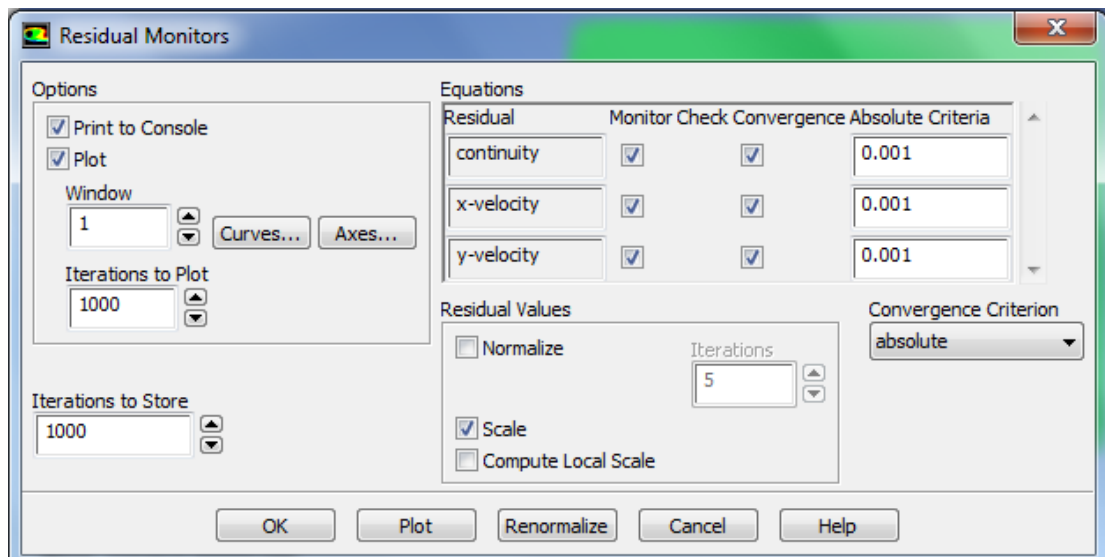
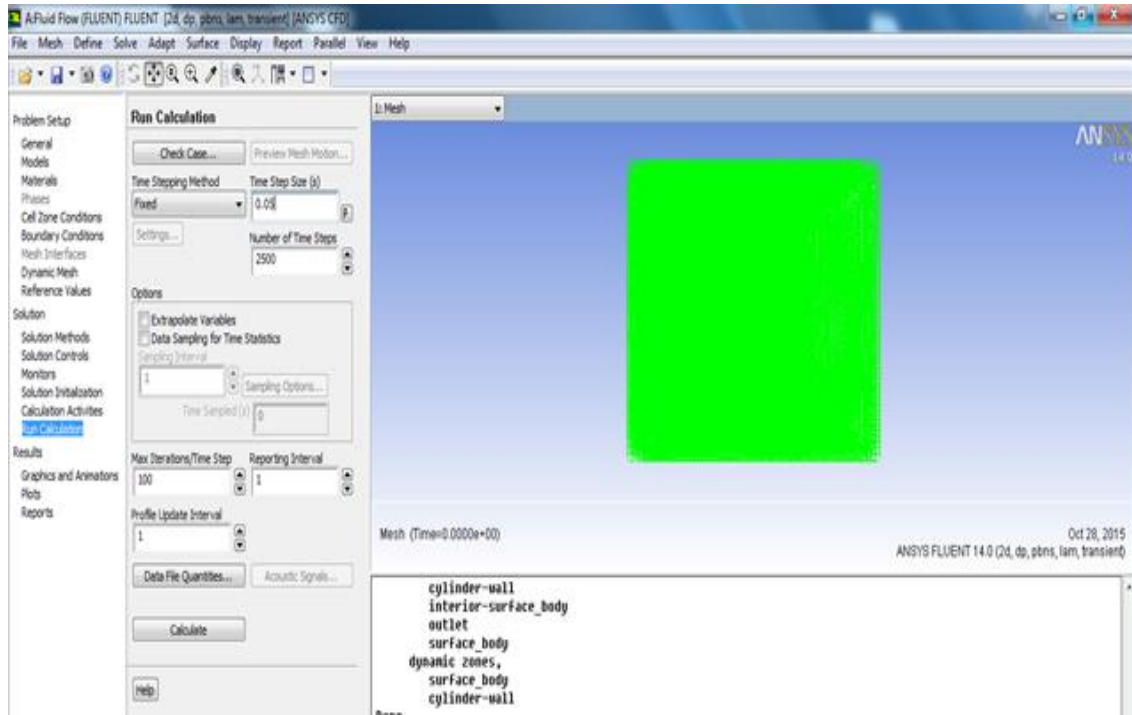
Εικόνα 15 Στιγμιότυπο από την εισαγωγή βασικών τιμών



Εικόνα 16 Τοποθέτηση συνοριακών συνθηκών Neumann και Dirichlet. Στην προκειμένη εικόνα τοποθετείται το άνω και κάτω τοίχωμα την αξονική ίση με της εισόδου  $=U=1m/s$  και την κάθετη μηδέν. Στην έξοδο τίθεται πρώτη παράγραφος αξονικής ταχύτητας ίση με το 0



Επιλέγουμε pressure-velocity coupling solver και συντελεστή υποχαλάρωσης για τους υψηλής τάξης όρους. Είναι πολύ βασικό καθώς μας εξασφαλίζει σίγουρα σύγκλιση που δυσκολεύεται από αυτούς τους μη γραμμικούς όρους των εξισώσεων Navier-Stokes όπως αναφέραμε και στη θεωρία. Η τιμή που συνιστά το πρόγραμμα είναι 0,8 αλλά τη μεταβάλλουμε σε 0,5 για μεγαλύτερη αποτελεσματικότητα.



Επίσης πολύ σημαντικοί παράγοντες που αξίζει να αναφέρουμε είναι η επιλογή του χρονικού βήματος, των επαναλήψεων ανα χρονικό βήμα καθώς και των κριτηρίων σύγκλισης.

Όσον αφορά τα residuals των ταχυτήτων και του όρου συνέχειας είναι ικανοποιητικό να θέσουμε ως κριτήριο σύγκλισης το  $10^{-3}$ , αφού έχουμε transient πρόβλημα και αν θέσουμε μικρότερο για βέλτιστα αποτελέσματα, θα ανεβάσει πολύ το υπολογιστικό κόστος.

Το δυσκολότερο κομμάτι είναι η επιλογή των χρονικών παραμέτρων και των επαναλήψεων. Επειδή δε γνωρίζουμε εκ των προτέρων, έστω και κατά προσέγγιση, την περίοδο του φαινομένου θα πρέπει να κάνουμε αρχικά τρεξίματα από μικρές τιμές ή εναλλακτικά να συμβουλευτούμε αντίστοιχες μελέτες στη βιβλιογραφία για να έχουμε μια εικόνα των τιμών που περιμένουμε.

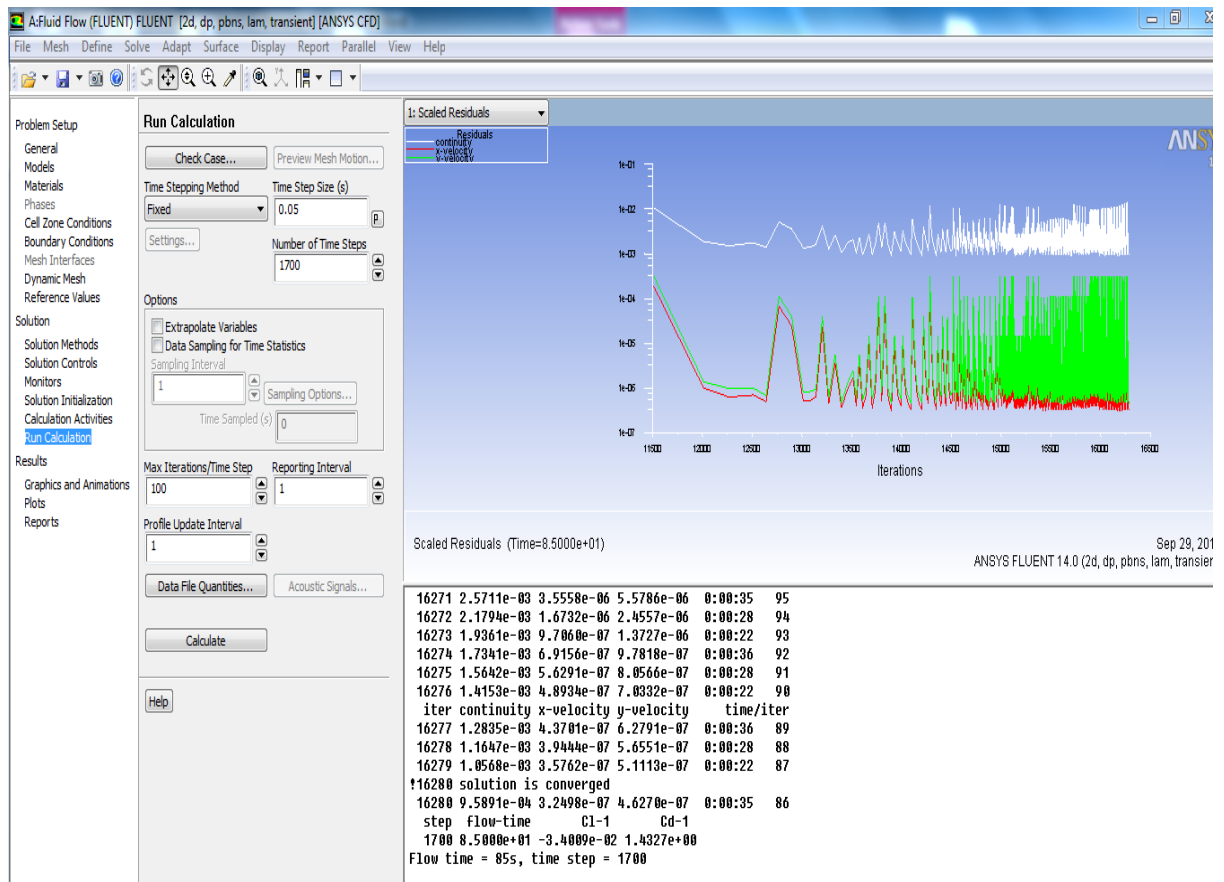
Βάσει ενός διαγράμματος που έχει τον αριθμό Strouhal συναρτήσει του αριθμού Reynolds (βλ. στα αποτελέσματα), υπολογίζουμε προσεγγιστικά τον αριθμό για την περίπτωση μας και κατ'επέκτασιν τη συχνότητα. Έτσι, προκύπτει η περίοδος περίπου στη περιοχή των 5-6 δευτερολέπτων. Άρα, μπορούμε τώρα να ξεκινήσουμε με μία τιμή στο  $1/80$  της περιόδου, δηλαδή στο 0,05 του δευτερολέπτου και αργότερα θα κάνουμε και ένα resolution test, όπως και για το πλέγμα ώστε να επαληθευτεί.

Τα συνολικά βήματα θέτονται κατ'αρχήν στα 2500 που είναι σίγουρα αρκετά παραπάνω από όσα απαιτούνται, αλλά μπορούμε να αποφανθούμε στη διάρκεια των υπολογισμών αφού όταν οι συντελεστές των δυνάμεων καταλήξουν σε μια αρμονική επαναλαμβανόμενη μεταβολή, θα διακόψουμε για να κερδίσουμε χρόνο.

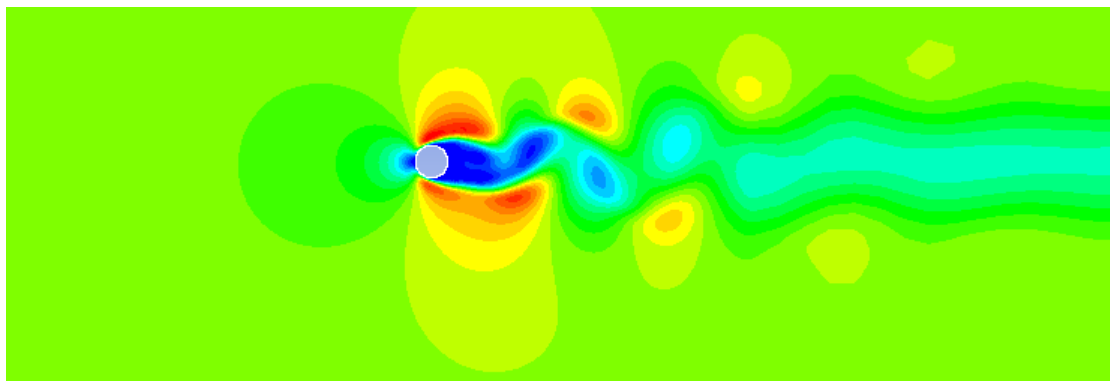
Το μέγιστο αριθμό των επαναλήψεων ανά χρονικό βήμα θα το θέσουμε ίσο με 100. Και πάλι πρέπει να παρακολουθήσουμε τους υπολογισμούς για να δούμε αν είναι επαρκείς. Εννοείται πως το πρόγραμμα αυτόματα σταματά τις επαναλήψεις εάν συγκλίνουν πρώτα οι όροι των ταχυτήτων και της συνέχειας.

Στη συνέχεια εκτελούμε τον υπολογισμό και λαμβάνουμε τα αποτελέσματα.

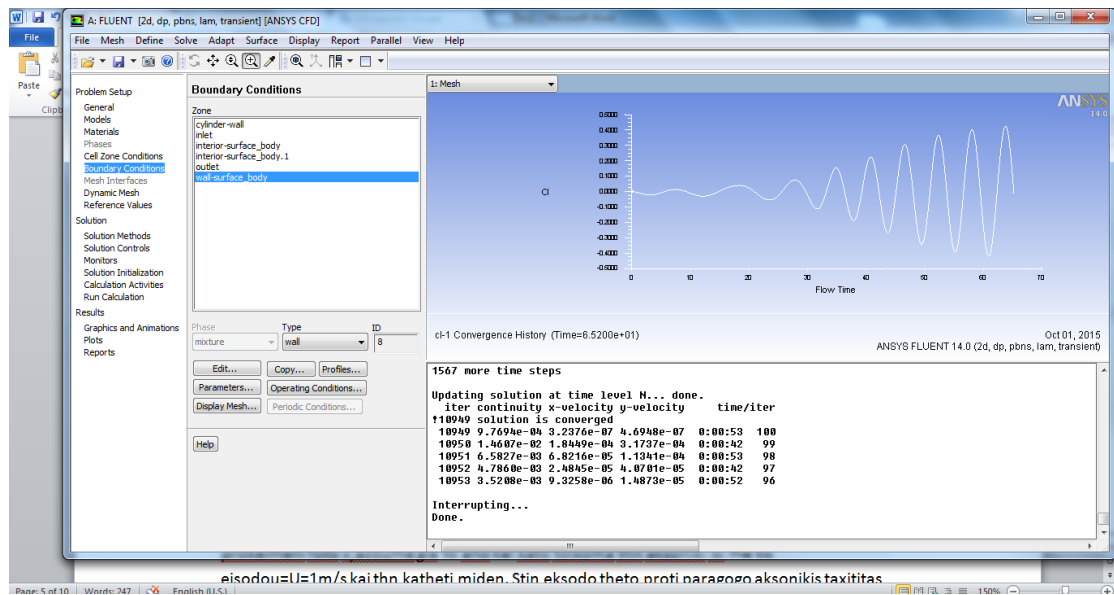




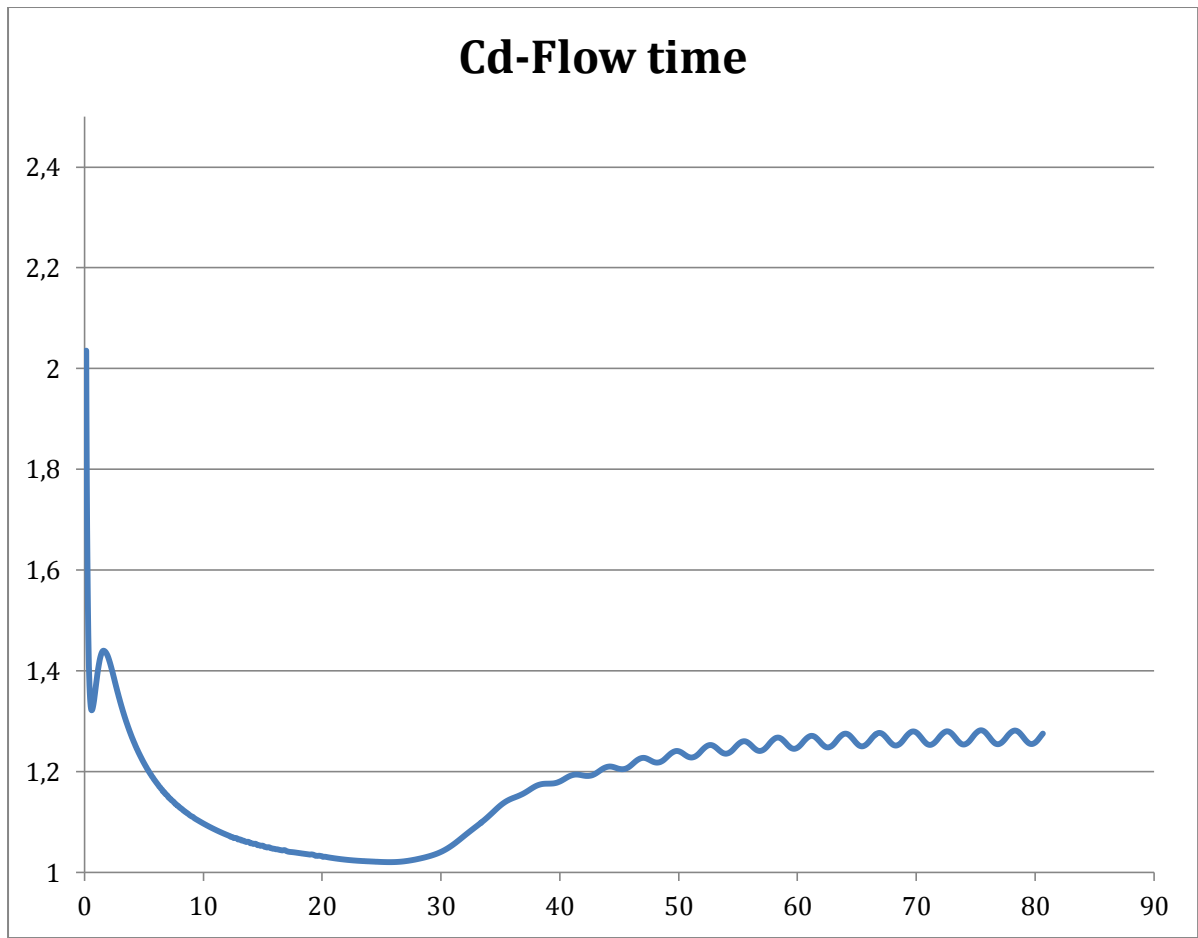
**Εικόνα 18** Δείκτες σύγκλισης και ειδικότερα τον δύο συνιστωσών των ταχυτήτων και του όρου της συνέχειας



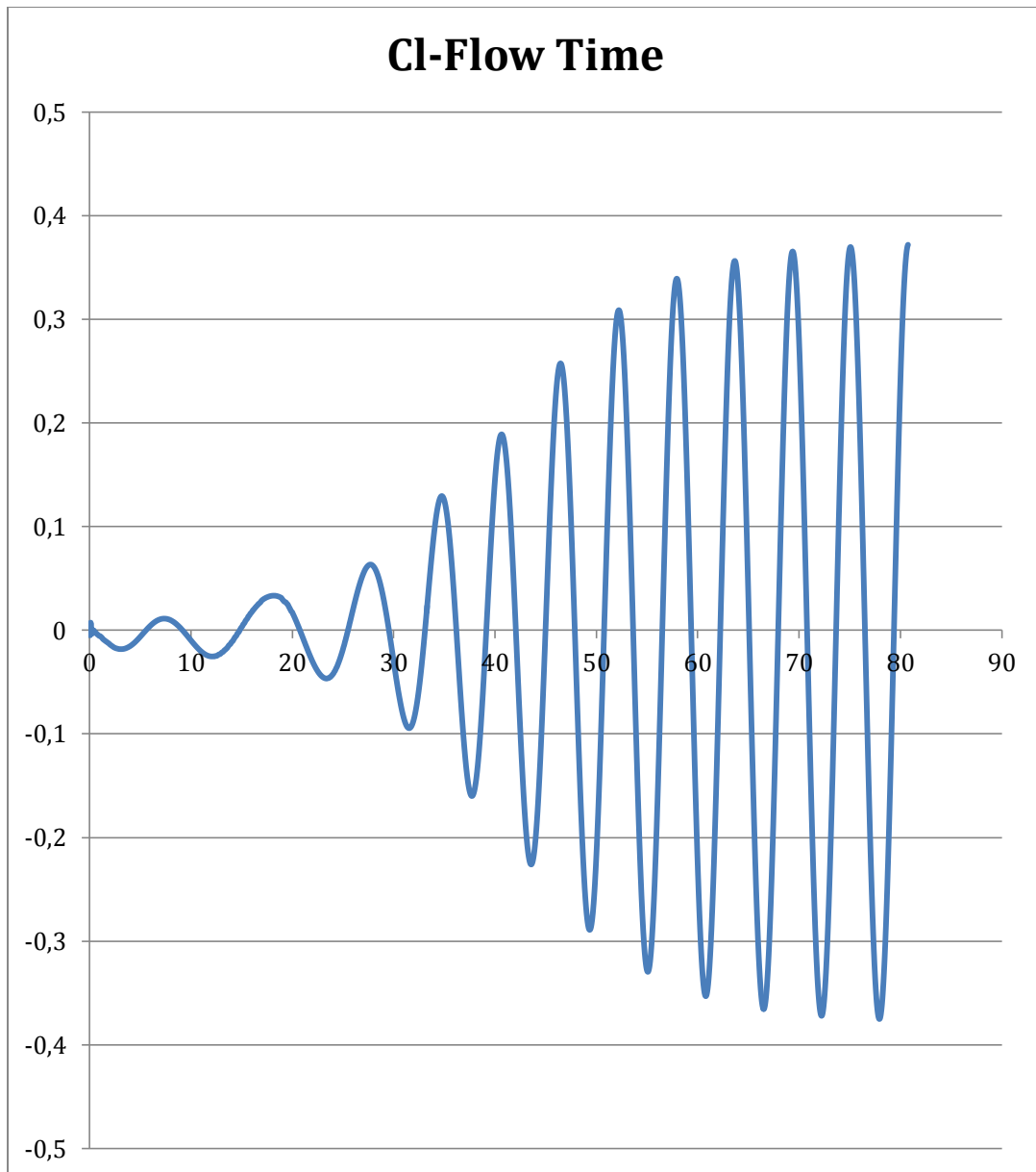
**Εικόνα 179** Πρώτο αποτέλεσμα για το πεδίο ταχυτήτων, σχηματίζονται οι δίνες Von Karman. Ο χρόνος σύγκλισης είναι πολύ καλός ~3.5 ώρες, εξαιτίας των συντελεστών υποχαλάρωσης που μειώθηκε περίπου στο 0,4-0,5 για να πιάσει τη μη γραμμικότητα των εξισώσεων μεταφοράς και να εξασφαλίσει σύγκλιση.



**Εικόνα 20** Διάγραμμα συντελεστή άνωσης που διαμορφώνει το πρόγραμμα ταυτόχρονα με την εξέλιξη της διαδικασίας επίλυσης.

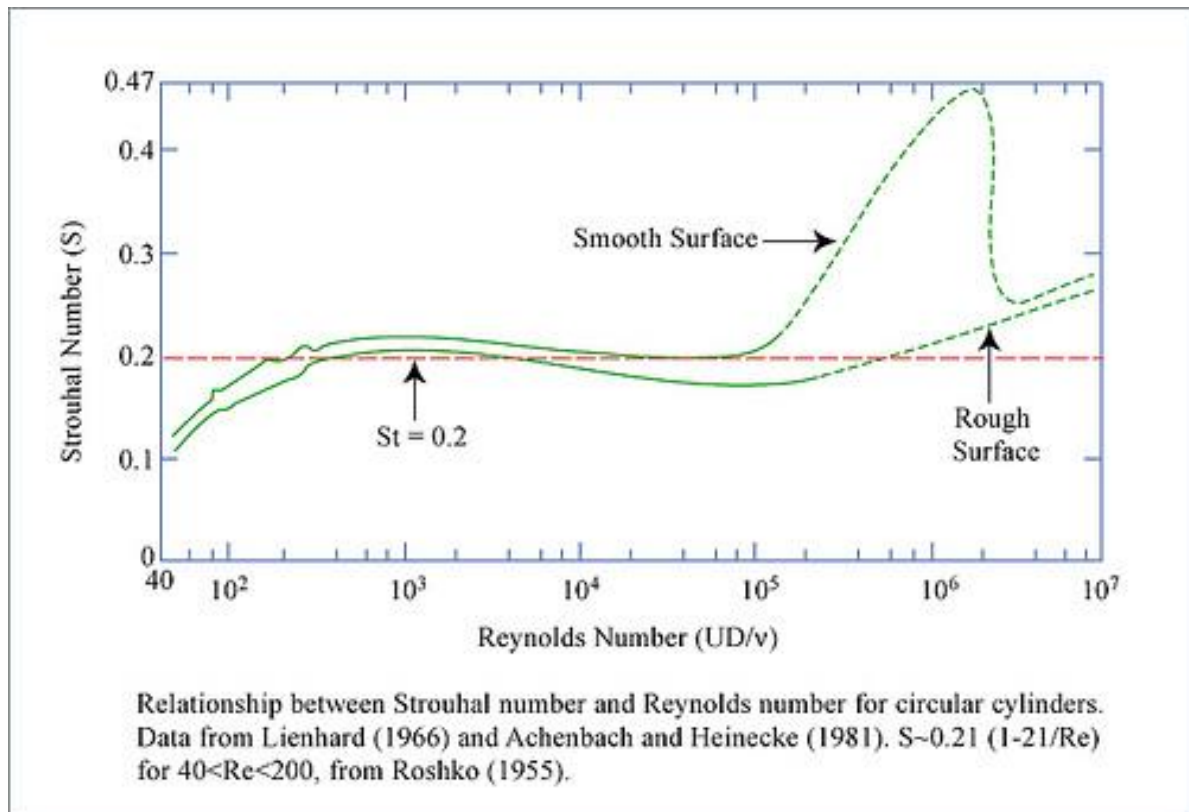


**Εικόνα 21** Διάγραμμα συντελεστή οπισθέλουσας σε συνάρτηση με το χρόνο. Το φαινόμενο καταλήγει σε αρμονική ταλάντωση με συχνότητα διπλάσια των δινών με πλάτος περίπου 1,288.



**Εικόνα 22** Διάγραμμα συντελεστή άνωσης. Επίσης αρμονική ταλάντωση με συχνότητα αυτή των δινών. Το πλάτος φθάνει την τιμή 0,379.

Όπως αναφέραμε και στη θεωρία, βασικό μέγεθος της ροής είναι ο αδιάστατος αριθμός Strouhal που ορίζεται ως  $S = fD/U$ . Αφού έχουμε τα αποτελέσματα και μπορούμε να υπολογίσουμε τα μεγέθη της ταλάντωσης θα πρέπει να διασφαλίσουμε ότι είναι σωστός, σύμφωνα με το παρακάτω διάγραμμα, για λείο κύλινδρο.



**Εικόνα 23** Διάγραμμα μεταβολής αριθμού Strouhal συναρτήσει του αριθμού Reynolds.

Η περίοδος της αρμονικής απόκρισης του συντελεστή άνωσης, ταυτίζεται όπως αναφέραμε με τη συχνότητα ταλάντωσης των δινών. Βάσει των αποτελεσμάτων η περίοδος είναι  $T=5,6$  s. Άρα η κυκλική συχνότητα θα είναι  $\omega=1,123$  rad/s κι επομένως η συχνότητα  $f=0.178$  Hz. Εκ της σχέσεως  $S = fD/U$ , ο αριθμός Strouhal ουσιαστικά ταυτίζεται με τη συχνότητα αφού από τα δεδομένα είναι  $D=1$ m και  $U=1$ m/s. Άρα,  $S=0.178$ .

Από το παραπάνω διάγραμμα, αλλά και από τα αποτελέσματα του εργαστηρίου, έχουμε μια τιμή περίπου στο 0,18 που είναι πολύ κοντά με μια απόκλιση της τάξεως του 1%.

### 3.4 Resolution Test

Βασικό παράγοντα στα υπολογιστικά προγράμματα αποτελεί η ανεξαρτησία του πλέγματος και του χρονικού βήματος. Εφόσον η κατάστρωση και η διακριτοποίηση των φυσικών εξισώσεων είναι σωστή καθώς επίσης και η διατύπωση των οριακών και συνοριακών συνθηκών, το μόνο που μένει να διασφαλίσουμε είναι πως ο αριθμός των κόμβων και η μορφολογία του πλέγματος είναι επαρκής για το συγκεκριμένο πρόβλημα. Η διαδικασία είναι η εξής:

Επιλέγουμε δύο βασικές μεταβλητές που μας δίνει το πρόγραμμα ως αποτελέσματα και παρακολουθούμε τη μεταβολή τους καθώς αυξάνουμε την πύκνωση του πλέγματος. Φυσικά όταν έχουμε μικρό αριθμό κόμβων και αυξάνουμε περιμένουμε μεγάλες μεταβολές και αυτό μας δείχνει πως ακόμα είναι αναξιόπιστο. Σε κάποια περιοχή όμως αναμένουμε να μη δούμε μεγάλη απόκλιση και τότε σημαίνει πως πλέον έχουμε ανεξαρτησία πλέγματος και είμαστε ασφαλείς να χρησιμοποιήσουμε οποιαδήποτε περίπτωση επιλέξουμε. Είναι βέβαια πολύ λογικό να χρησιμοποιήσουμε τον ελάχιστο αριθμό κόμβων ώστε να μειώσουμε το υπολογιστικό κόστος.

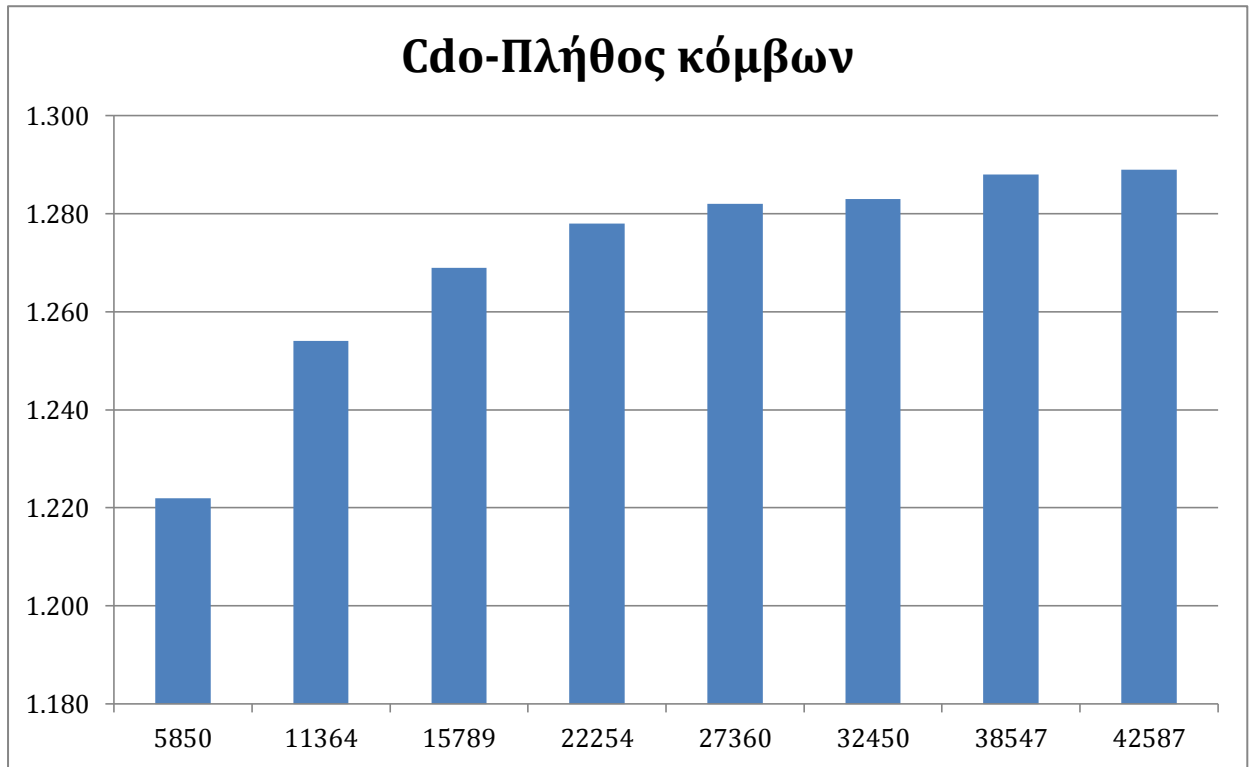
Στην περίπτωση μας θα επιλέξουμε τα πλάτη των συντελεστών οπισθέλκουσας και άνωσης αντίστοιχα, όπως φαίνεται και στον παρακάτω πίνακα, που είναι και οι βασικές παράμετροι που ασχολούμαστε σε αυτό το πρόβλημα.

Πλήθος κόμβων	Cd Amplitude	Cl Amplitude
5850	1.222	0.297
11364	1.254	0.315
15789	1.269	0.343
22254	1.278	0.366
27360	1.282	0.372
32450	1.283	0.374
38547	1.288	0.379
42587	1.289	0.380

**Πίνακας 1** Ανεξαρτησία πλέγματος – Resolution test



**Εικόνα 24** Μεταβολή τιμών του συντελεστή άνωσης συναρτήσει του αριθμού κόμβων του πλέγματος.



**Εικόνα 25** Μεταβολή τιμών του συντελεστή οπισθέλκουσας συναρτήσει του αριθμού κόμβων του πλέγματος.

Φαίνεται ξεκάθαρα πως από τους 38547 κόμβους και έπειτα έχουμε μια σύγκλιση των τιμών γύρω από μία περιοχή. Η μεταβολή δε ξεπερνάει το 2% που είναι μια ασφαλής περιοχή να κινηθούμε για τους υπολογισμούς μας. Ένα σετ από τρεξίματα πραγματοποιήθηκε ακόμα και στα πυκνότερα πλέγματα και αποδείχθηκε ότι το αρκετά μεγαλύτερο υπολογιστικό κόστος δε μας αποφέρει κάποια αξιοσημείωτη διόρθωση στα αποτελέσματα, συγκρίνοντας βέβαια και με τα αποτελέσματα του εργαστηρίου.

Αντίστοιχα, έγινε και μια προσπάθεια να υπολογίσουμε με 22254 κόμβους, όπου οι υπολογισμοί έγιναν ακόμα πιο γρήγοροι, ωστόσο αποδείχθηκε πως επηρεάστηκαν τα αποτελέσματα στην περίπτωση του κινούμενου κυλίνδρου και θα αναφερθεί με λεπτομέρεια στο αντίστοιχο κεφάλαιο.



Αφού κάναμε ανάλυση της ανεξαρτησίας του πλέγματος με σταθερό χρονικό βήμα  $t=0.05$  sec, όπως αναφέραμε παραπάνω θα πρέπει τώρα να εκτελέσουμε το αντίστροφο, δηλαδή να δούμε διάφορα τρεξίματα με το πλέγμα που καταλήξαμε, πως θα ανταποκριθεί σε διάφορα χρονικά βήματα. Λογικά το βήμα που επιλέξαμε είναι αρκετά μικρό και 'πιάνει' όλες τις μεταβολές στη διάρκεια της κάθε περιόδου αλλά θα πρέπει να το επαληθεύσουμε με τον ίδιο τρόπο. Επιλέγουμε να ξεκινήσουμε με το 1/30 της περιόδου δηλαδή 0.2 sec.

<b>Time step</b>	<b>Cd Amplitude</b>	<b>Cl Amplitude</b>
0.2	1.281	0.344
0.15	1.282	0.352
0.1	1.286	0.368
0.05	1.288	0.379
0.01	1.288	0.38

**Πίνακας 3** Resolution test-Ανεξαρτησία από την επιλογή χρονικού βήματος

Αποδεικνύεται πλέον ότι η επιλογή του χρονικού βήματος είναι εντάξει αφού οι τιμές των συντελεστών συγκλίνουν σταδιακά στις τιμές που υπολογίσαμε για  $t=0.05$ sec. Ενδιαφέρον στοιχείο είναι πως ο συντελεστής Cl εμφανίζει αρκετά μεγαλύτερη ευαισθησία στην αλλαγή του χρονικού βήματος απ'ότι ο συντελεστής οπισθέλκουσας.

### 3.5 Τρέξιμο Προγράμματος- Κινούμενος Κύλινδρος

Το πλέγμα και η σχεδίαση είναι ακριβώς τα ίδια. Συγκεκριμένα, δίνεται κατακόρυφη ταλάντωση στον κύλινδρο  $n=A*\sin\omega t$ , σταδιακά με πλάτη  $A/D=0.1-0.2-0.3-0.4-0.5$ . Το πρόγραμμα έχει τη δυνατότητα δυναμικού πλέγματος, αλλά αποφεύγεται κάτι τέτοιο εξαιτίας μεγάλων χρόνων σύγκλισης. Θα γίνει διαφορετική προσομοίωση του προβλήματος, κρατώντας και πάλι σταθερό τον κύλινδρο, αλλά δίνοντας κίνηση στα τοιχώματα άνω και κάτω ίση με μείων την ταχύτητα του κυλίνδρου. Δηλαδή,  $v=-\omega*A*\cos\omega t$ . Επίσης, απαιτείται όρος πηγής στο ρευστό ίση με μείων την επιτάχυνση του κυλίνδρου, δηλαδή  $=-\omega^2*A*\sin\omega t$ . Αυτά τίθενται με το παρακάτω sub-routine σε γλώσσα C το οποίο δέχεται το πρόγραμμα.

```
#include "udf.h"

DEFINE_SOURCE(xmom_source,cell,thread,dS,eqn)

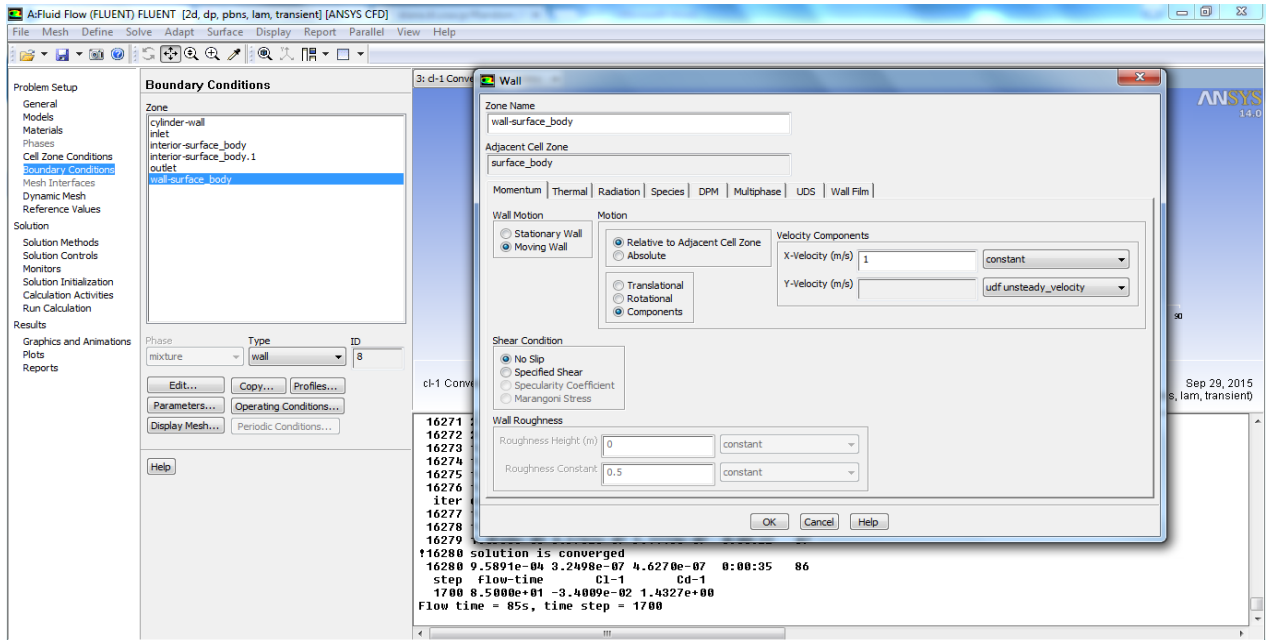
{real x[ND_ND]; real source; source = -0.235*sin(1.123*CURRENT_TIMESTEP);dS[eqn] =
0.252*cos(1.09292*CURRENT_TIMESTEP); return source;}

DEFINE_PROFILE(unsteady_velocity, thread, position)

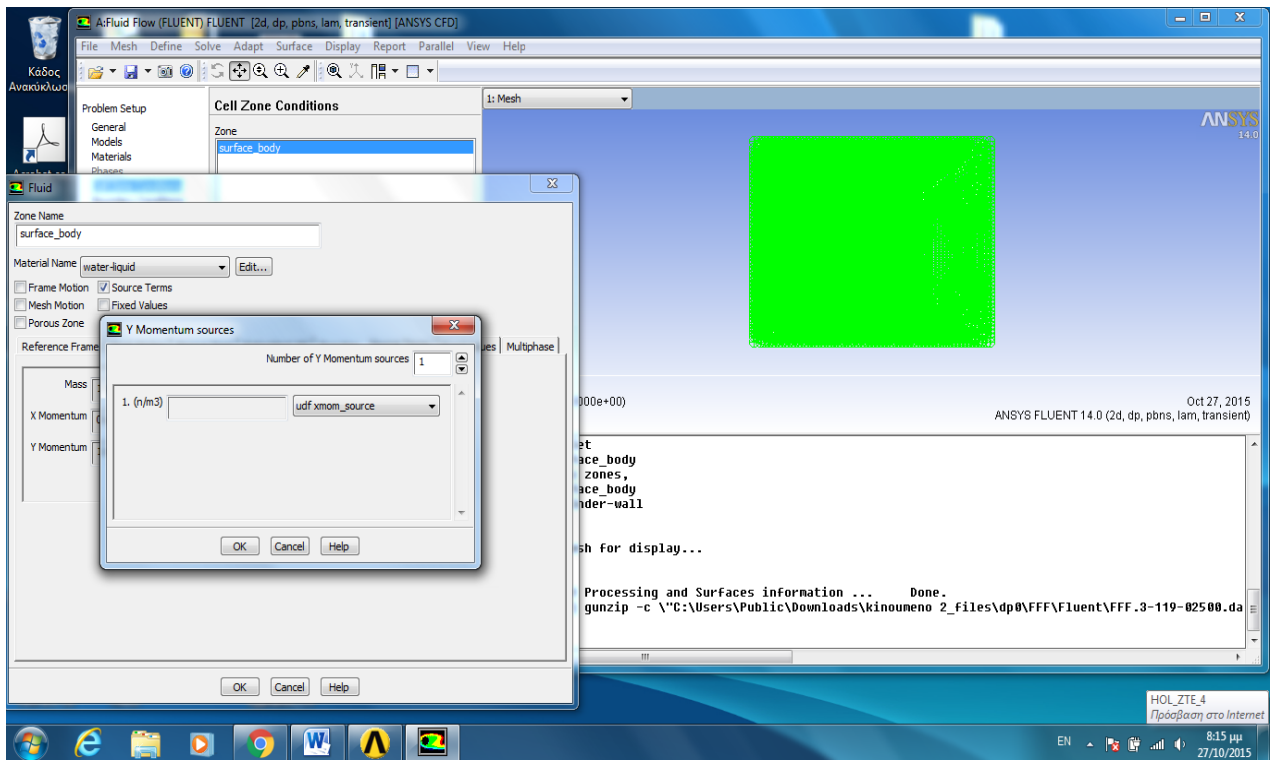
{face_t f; begin_f_loop(f, thread)

{F_PROFILE(f, thread, position) = -0.2189*cos(1.123*CURRENT_TIMESTEP);}

end_f_loop(f, thread)}
```



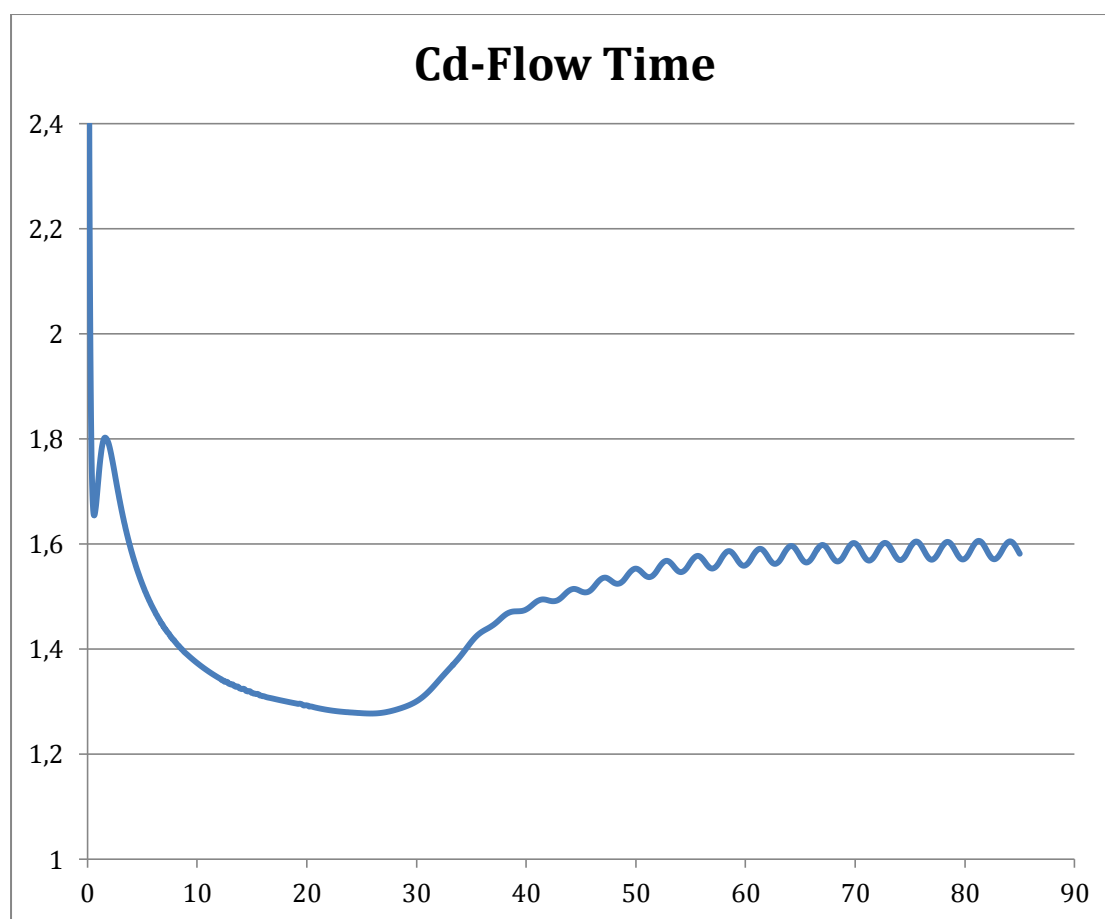
Εικόνα 26 Εισαγωγή νέων συνοριακών συνθηκών ‘κινούμενου τοίχου’



Εικόνα 27 Εισαγωγή όρου πηγής

Κατ'όπιν προχωράμε στην εκτέλεση των υπολογισμών με τα ίδια ακριβώς στοιχεία ροής. Το τρέξιμο απαιτεί περίπου τον ίδιο χρόνο, ο οποίος όπως αναφέραμε είναι ικανοποιητικός.

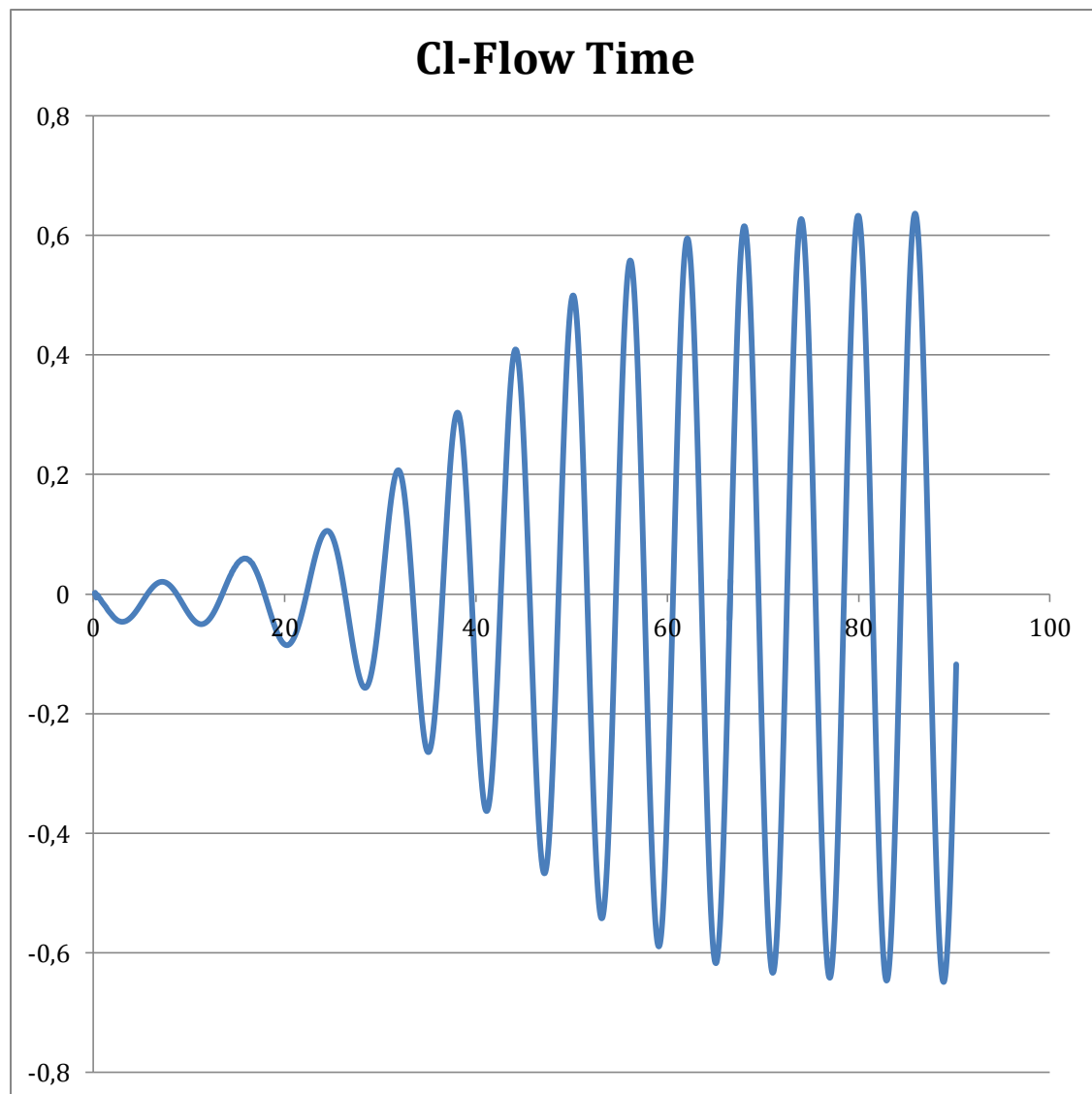
**A/D=0.1**



**Εικόνα 28** Μεταβολή  $C_d$  συναρτήσει του χρόνου ροής

Η χρονική μεταβολή του συντελεστή οπισθέλκουσας δε μεταβάλλεται καθόλου ως προς τη μορφή σε σχέση με τον ακίνητο κύλινδρο. Και σε αυτή την περίπτωση διακρίνουμε στα πρώτα 40s μια κοιλάδα με ελάχιστο το 1,14 ενώ το φαινόμενο αρχίζει να σταθεροποιείται μετά στη γνώριμη κατάσταση λόγω των δυνάμεων και της

επίδρασης τους στον κύλινδρο. Εδώ βλέπουμε μια πρώτη αύξηση σε περίπου 1,6 από 1,288 στην περίπτωση του ακίνητου κυλίνδρου.

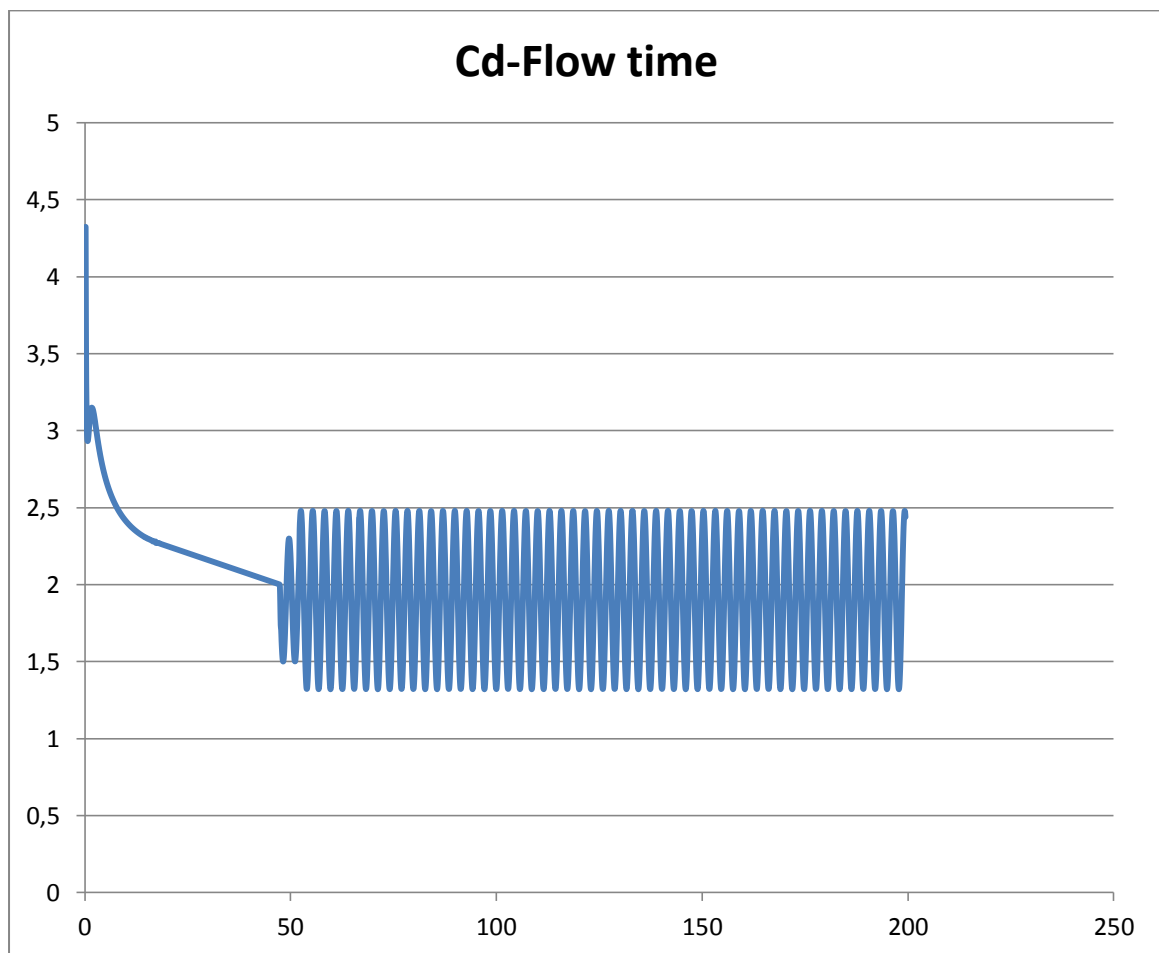


**Εικόνα 29** Συντελεστής άντωσης συναρτήσει του χρόνου ροής

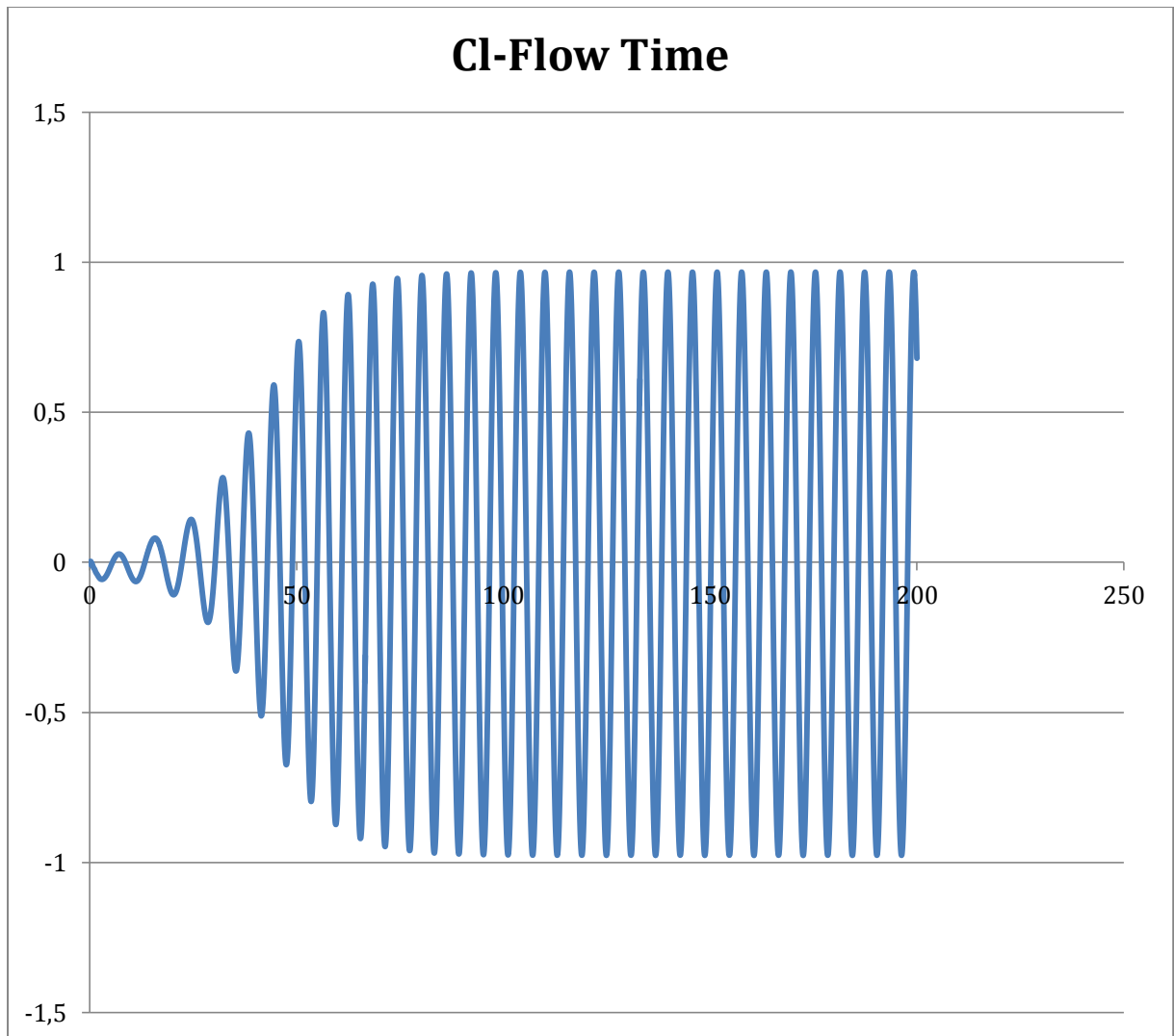
Τα ίδια ισχύουν και για την περίπτωση του Lift coefficient. Αξίζει να αναφερθεί πως προτιμήθηκε να σταματήσουμε τους υπολογισμούς όταν το πλάτος του συντελεστή άνωσης αρχίζει να συγκλίνει κοντά σε μια τιμή για 3-4 κύκλους του φαινομένου.

Έτσι γλιτώνουμε από υπολογιστικό κόστος. Άλλωστε από εκείνη τη στιγμή και έπειτα οι αποκλίσεις δεν αλλάζουν πρακτικά, παρά μόνο στο τρίτο δεκαδικό. Για το λόγο αυτό, θα δείξουμε ενδεικτικά τα διαγράμματα συντελεστή άντωσης και οπισθέλουσας στα οποία ο χρόνος ροής ήταν πολύ μεγάλος και φαίνεται ξεκάθαρα η ανεξαρτησία από το χρόνο.

$$A/D=0.5$$



**Εικόνα 37** Συντελεστής οπισθέλουσας συναρτήσει του χρόνου ροής για  $A/D=0.5$



**Εικόνα 38** Συντελεστής άντωσης συναρτήσει του χρόνου ροής για  $A/D=0.5$

Σε αυτά τα διάγραμματα όπου είναι προφανές ότι το φαινόμενο εξελίσσεται σε πολύ μεγαλύτερο χρονικό διάστημα, μπορούμε να δούμε καθαρά ότι ο υπολογισμός έχει φθάσει σε κατάσταση steady-state αφού οι τιμές των συντελεστών έχουν την ίδια μορφή και τιμή σε κάθε περίοδο. Αξίζει να αναφέρουμε πως αυτός ο έλεγχος έγινε σε όλους τους υπολογισμούς ώστε να είμαστε βέβαιοι.

Στην προκειμένη περίπτωση είναι η τελευταία ταλάντωση που υπολογίζουμε και φαίνεται η πολύ μεγάλη αύξηση σε σχέση με τον ακίνητο κύλινδρο. Επειδή όμως πρέπει να δούμε συγκεντρωτικά σε όλες τις περιπτώσεις τι συμβαίνει θα μελετήσουμε τα διαγράμματα στο επόμενο κεφάλαιο.

Ένα άλλο σημαντικό στοιχείο είναι, ακόμα και με μία πρώτη εξέταση της εξέλιξης τους στο χρόνο, πως η συχνότητα είναι μεγαλύτερη στην περίπτωση του συντελεστή οπισθέλκουσας σε σχέση με αυτή του συντελεστή άντωσης. Με επεξεργασία των τιμών προκύπτει πως είναι ακριβώς διπλάσια και θα το δούμε παρακάτω στα αποτελέσματα.



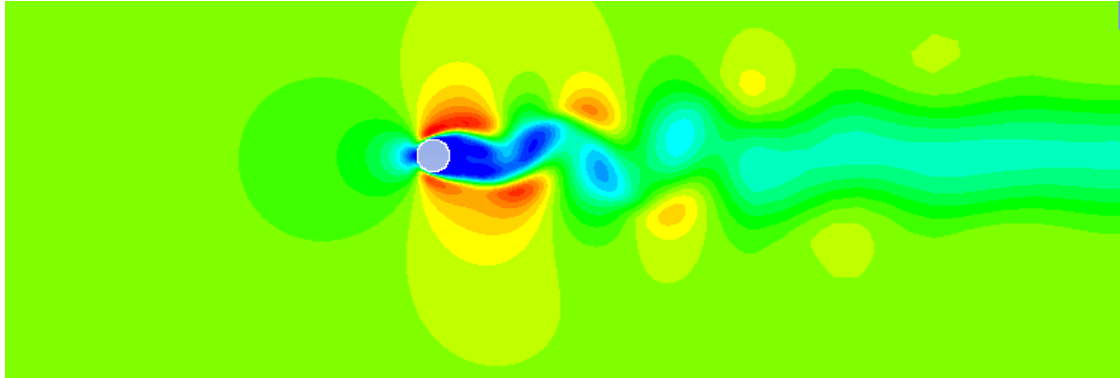
### 3.6 Αποτελέσματα Μελέτης

Τα παραπάνω διαγράμματα μας δείχνουν πως η ποιοτική συμπεριφορά του φαινομένου παραμένει παρόμοια, καθώς βλέπουμε πως οι συντελεστές των δυνάμεων εξελίσσονται αντίστοιχα στο πέρας του χρόνου για τα επιμέρους πλάτη που διαλέγουμε, με την ίδια συχνότητα και περίοδο. Η διαφοροποίηση έγκειται κυρίως στη σταδιακή αύξηση των πλατών των μεγεθών λόγω της κίνησης του κυλίνδρου αλλά και στην ακριβή μορφή των δινών που φαίνονται να απομακρύνονται από τον κύλινδρο χάρη στην ταλαντωτική κίνηση αυτού.

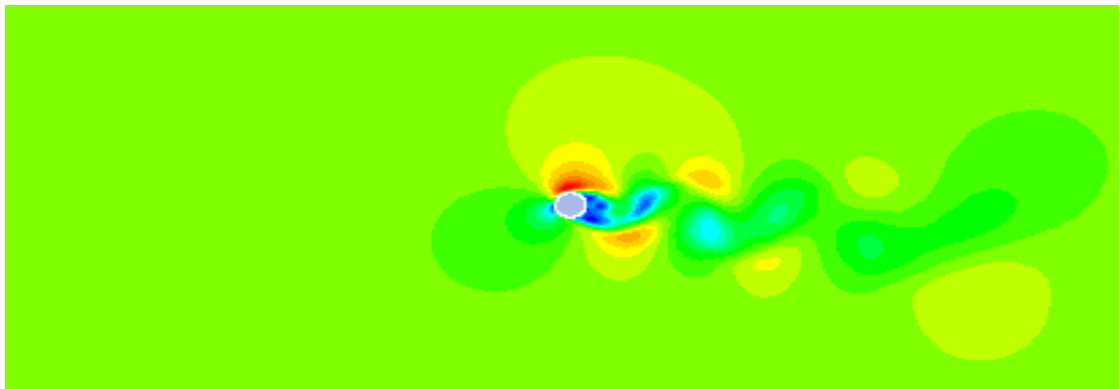
Το κινηματικό πεδίο της ροής φαίνεται στα παρακάτω vorticity contours που μας δίνει το πρόγραμμα, για τις περιπτώσεις του ακίνητου κυλίνδρου, για  $A/D=0.2$  και για  $A/D=0.5$ . Είναι χαρακτηριστική η διαφορά στη δημιουργία των δινών, όσον αφορά τη θέση τους αφού η ταλάντωση σταδιακά είναι σαν να τις 'διώχνει' από τον οριζόντιο άξονα συμμετρίας και να παρασέρνει μαζί του όλο τον ομμόρου του πεδίου ροής.

Διαλέγουμε να εμφανίσουμε τις τρεις αυτές περιπτώσεις για να είναι πιο εύκολα διακριτή η ποιοτική διαφορά του σχηματισμού των δινών κατά τον τρόπο που περιγράψαμε ανωτέρω.

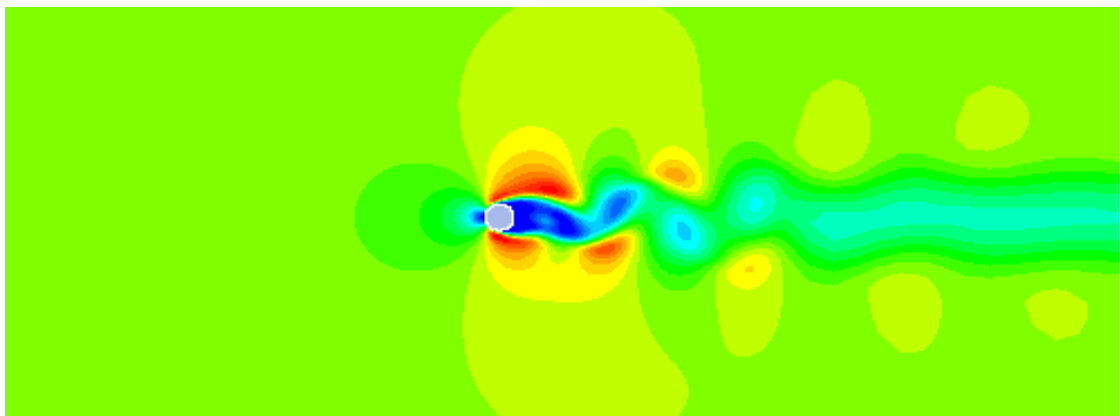
$A/D=0$



$A/D=0.2$



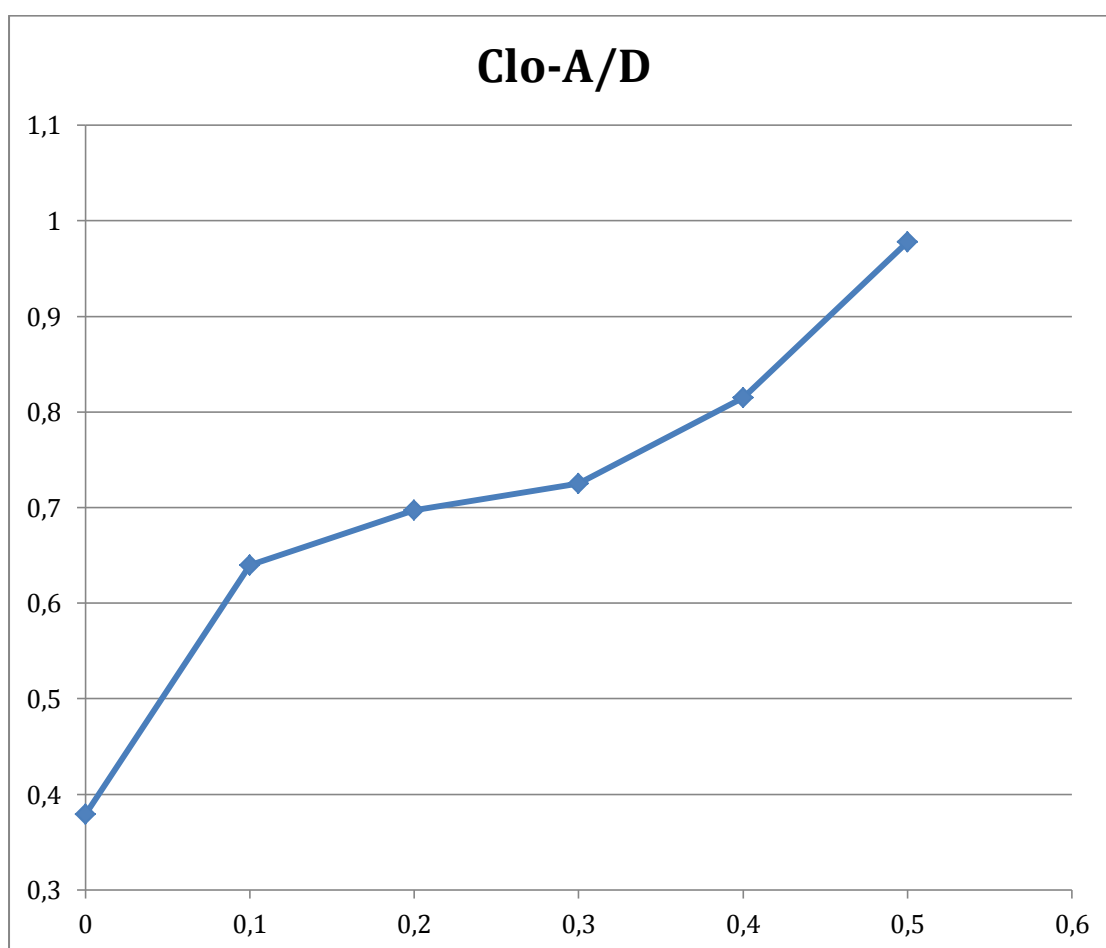
$A/D=0.5$



Εικόνα 38 Vorticity του πεδίου ρής

Για να εξάγουμε κάποια συμπεράσματα αναφορικά με την επίδραση της ταλαντωτικής κίνησης στους συντελεστές των δυνάμεων επί του κυλίνδρου θα πρέπει να συλλέξουμε διάφορα στοιχεία από τους επιμέρους υπολογισμούς και να σχεδιάσουμε κάποιες καμπύλες για να αποφανθούμε για την επίδραση της κάθε περίπτωσης. Αυτές θα είναι οι εξής:

### 1) Πλάτος συντελεστή άωσης συνάρτησει A/D

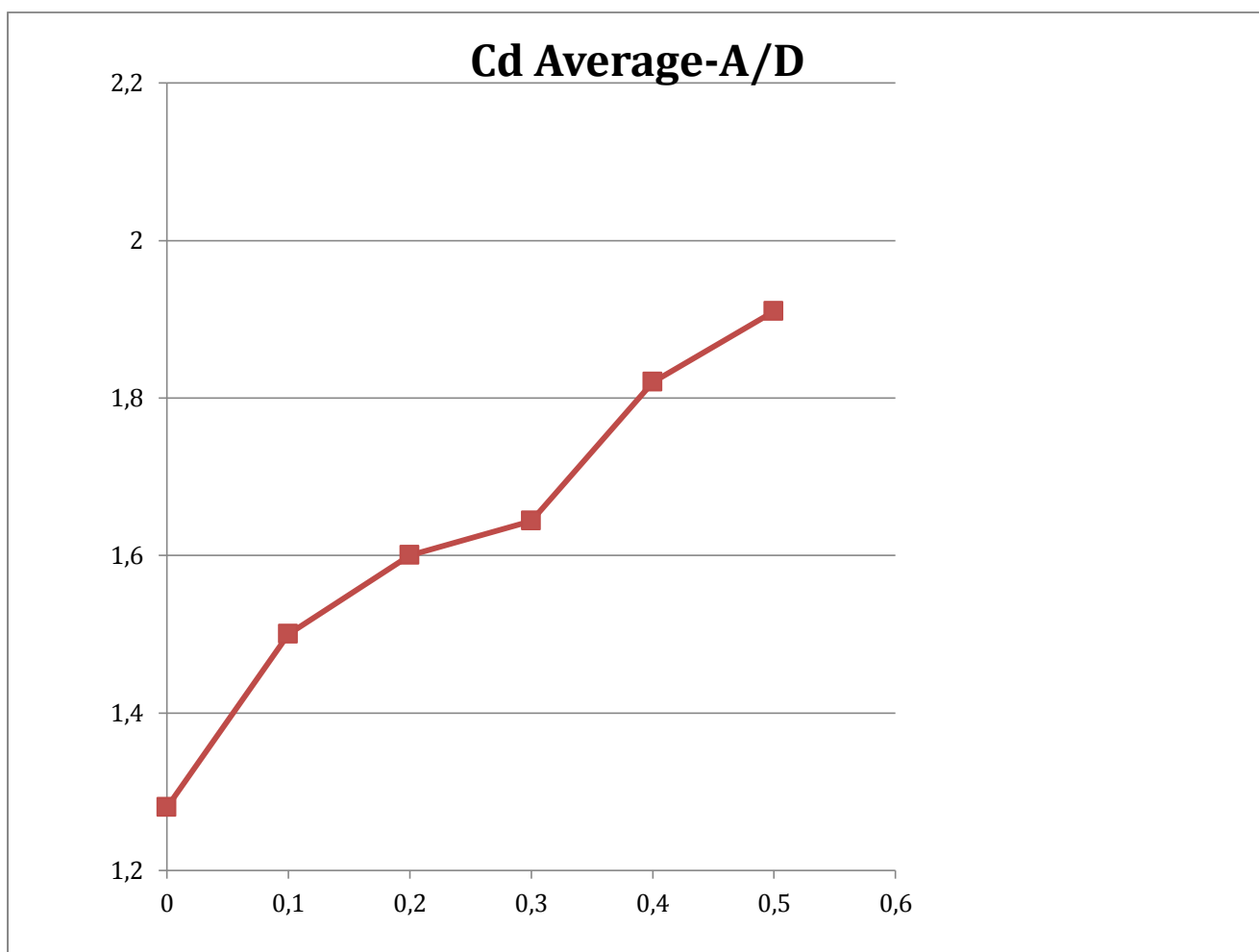


**Εικόνα 39** Πλάτος συντελεστή άωσης συνάρτησει A/D

Όπως βλέπουμε από τα αποτελέσματα η σταδιακή αύξηση του πλάτους ταλάντωσης έχει καθοριστική επιρροή στη μεταβολή του πλάτους του lift coefficient. Παρατηρείται μία αύξηση της τάξεως του τριπλασιασμού στις ακραίες περιπτώσεις,

ενώ επίσης διακρίνεται μία απότομη αύξηση στην έναρξη της πρώτης ταλάντωσης. Στα υπόλοιπα πλάτη η αύξηση είναι πιο ομαλή.

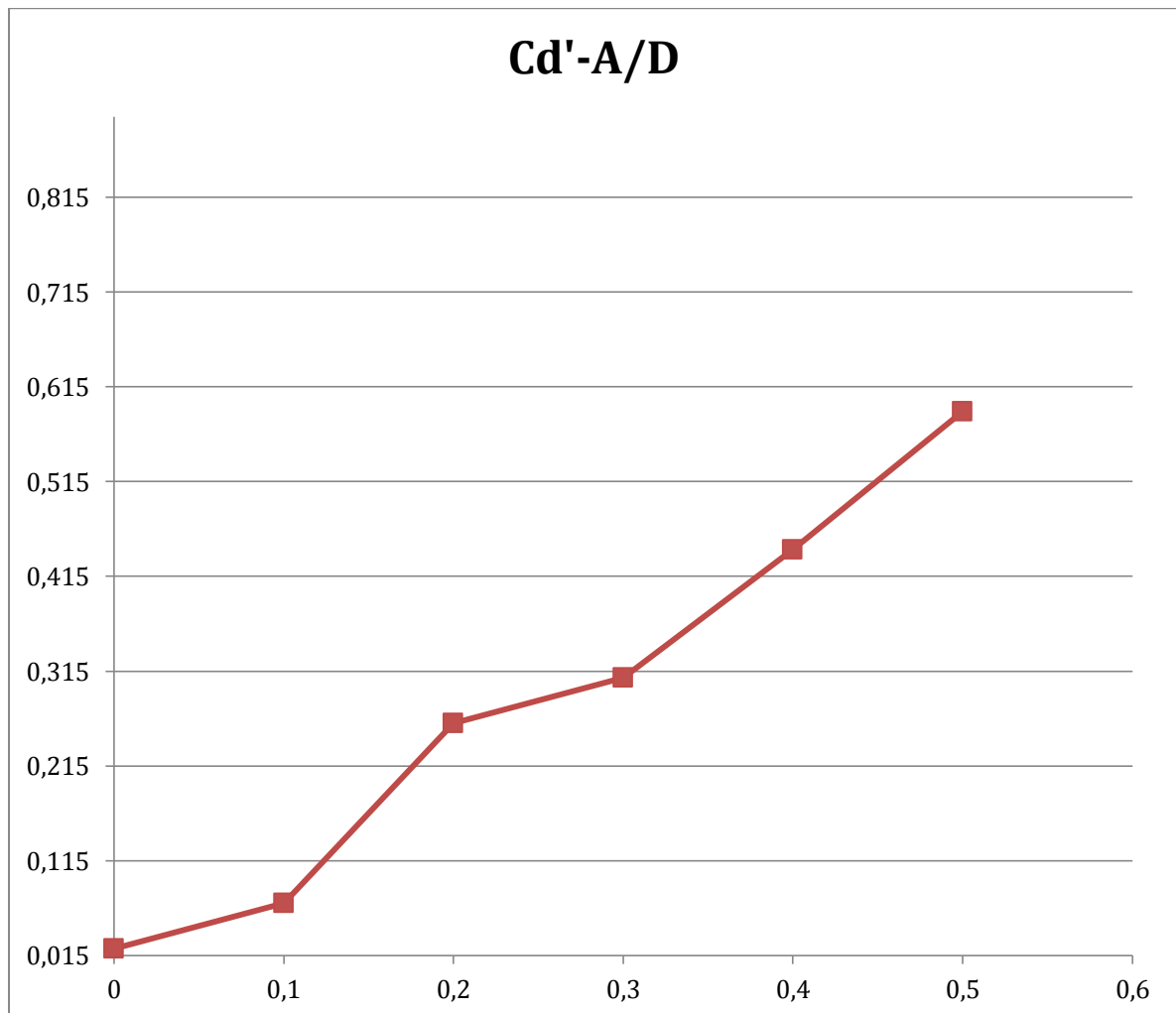
## 2) Πλάτος συντελεστή οπισθέλκουσας συναρτήσει A/D



**Εικόνα 40** Πλάτος συντελεστή οπισθέλκουσας συναρτήσει A/D

Εδώ η αύξηση ακολουθά παρόμοια πορεία με την προηγούμενη περίπτωση.

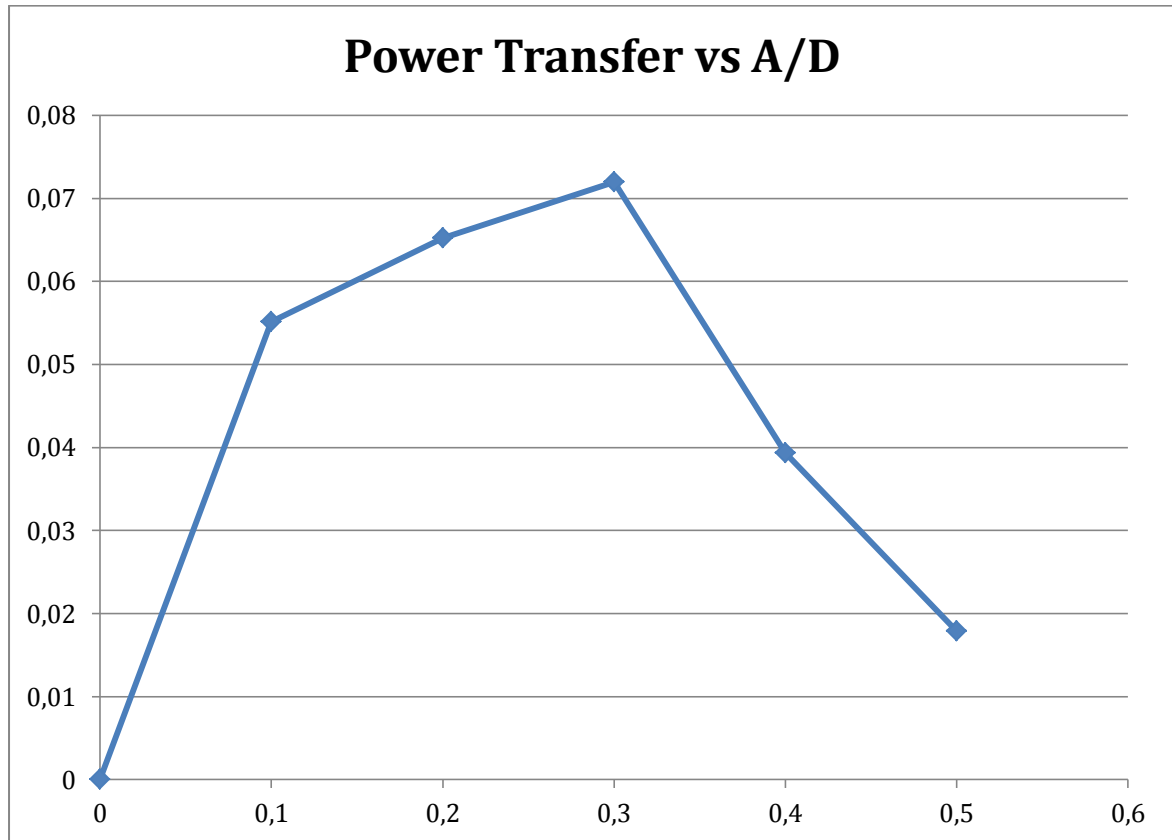
### 3) Fluctuating drag coefficient συναρτήσεαι A/D



**Εικόνα 41** Fluctuating drag coefficient συναρτήσεαι A/D

Η μεταβολή του Cd συναρτήσεαι του χρόνου σε όλες τις περιπτώσεις ακολουθάει την ίδια χρονική εξέλιξη ίση με  $Cd = C_{d0} + C_{d'} \cdot \sin(2\omega t + g)$ . Έτσι, εδώ απεικονίζεται ουσιαστικά πως εξελίσσεται αυτός ο παράγοντας της ημιτονοειδούς μεταβολής.

#### 4) Power transfer συναρτήσει A/D



Εικόνα 42 Power transfer συναρτήσει A/D

Το μέγεθος αυτό ορίζει τη μεταφορά της ισχύος λόγω της κίνησης του κυλίνδρου και μαθηματικά εκφράζεται ως

$$1/T \int_0^T F\psi * V dt$$

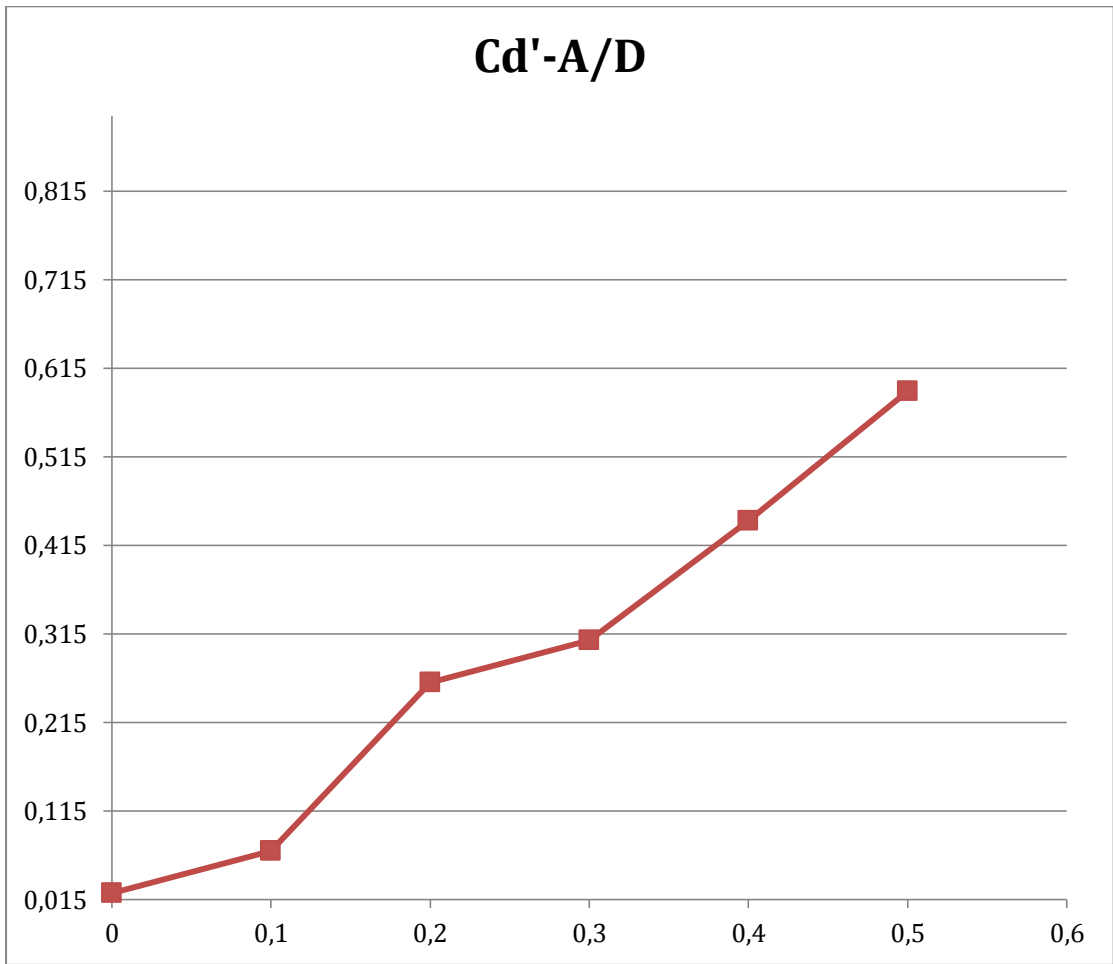
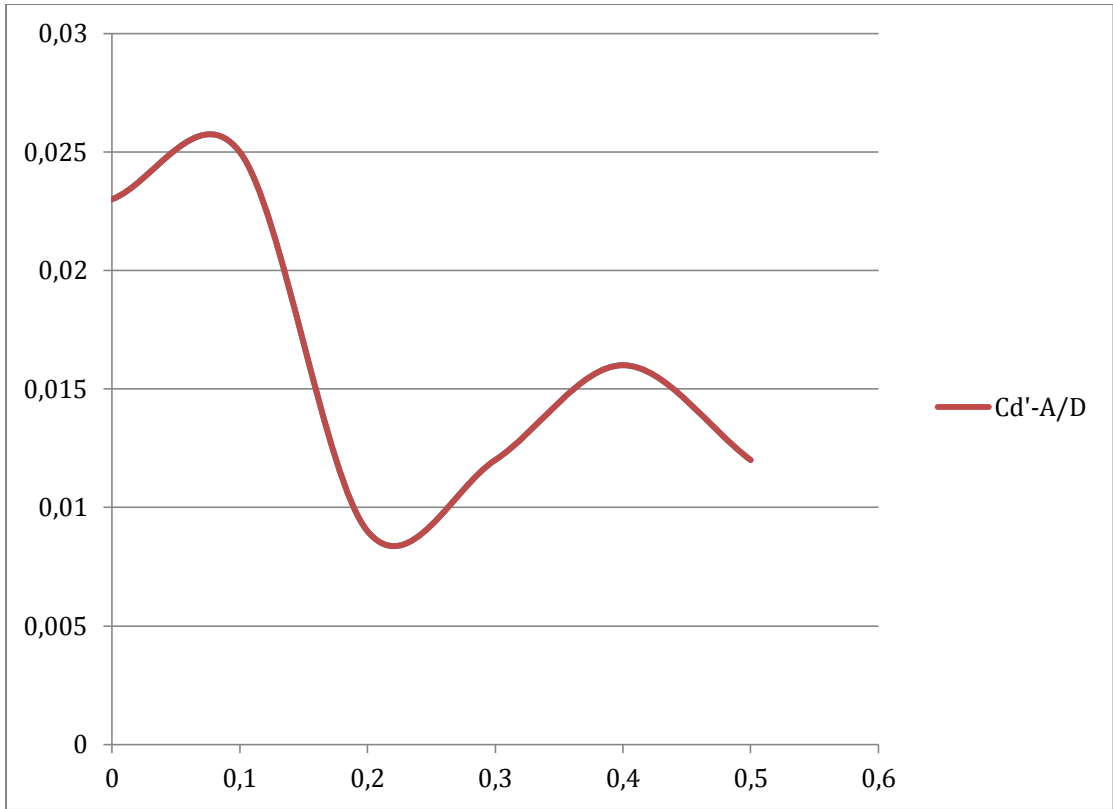
όπου  $F\psi$  είναι η άνωση, και  $V$  η ταχύτητα του κυλίνδρου. Όπως ξέρουμε, η ταχύτητα  $V = \omega * A * \cos(\omega * t)$ . Η άνωση είναι συναρτηση της χρονικής εξέλιξης του συντελεστή άνωσης και της ταχύτητας του ως προς το ρευστό. Οι τιμές υπολογίζονται σε κάθε πλάτος ταλάντωσης του κυλίνδρου αριθμητικά σε διάρκεια μιας περιόδου, μέσω της μεθόδου Simpson.

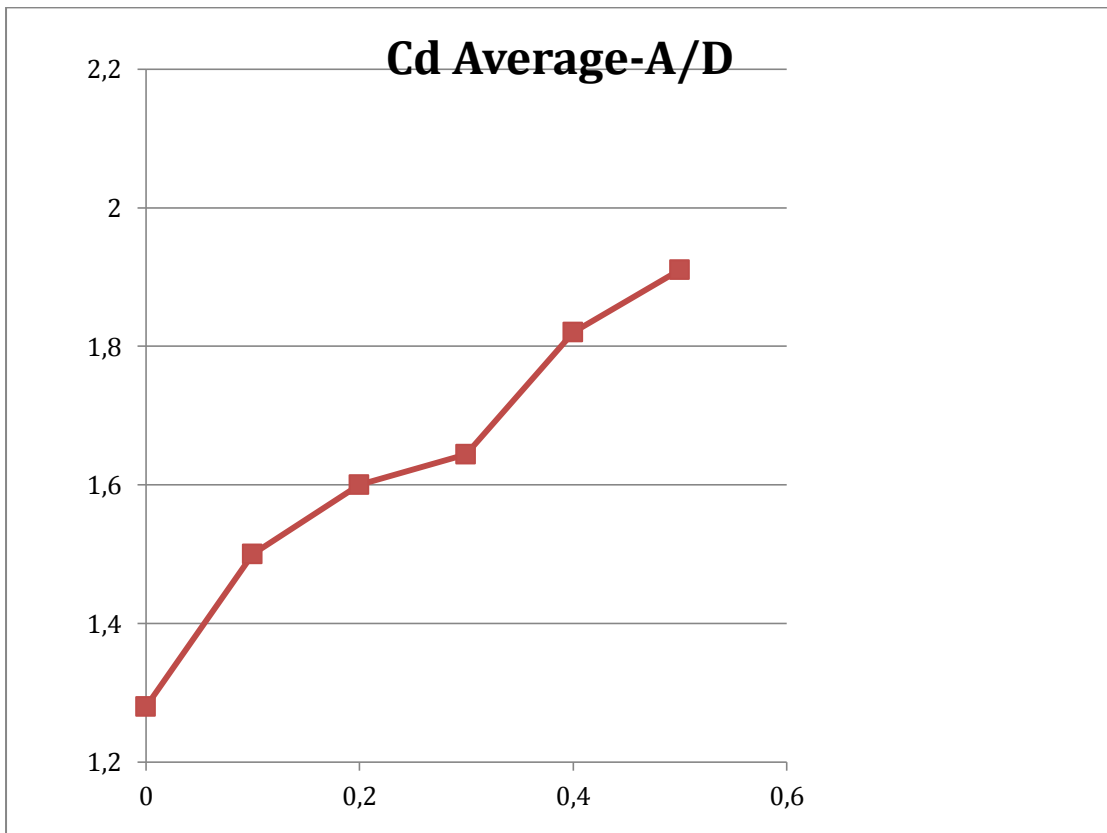
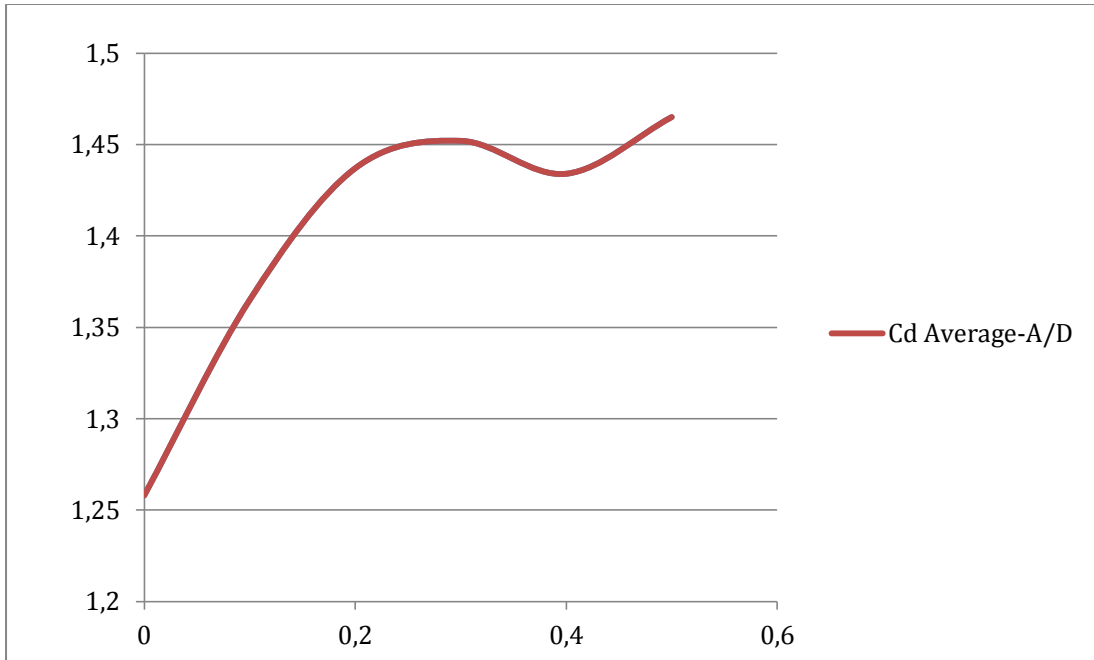
Βασικό συμπέρασμα που δε μπορούμε να παραλείψουμε είναι το θετικό πρόσημο των τιμών στα πλάτη που σημαίνει ότι το ταλαντώμενο σώμα δίδει ενέργεια στο σύστημα σώμα-ρευστό. Φυσικά για μηδενικό πλάτος η τιμή είναι 0 αφού η ταχύτητα του κυλίνδρου είναι μηδενική. Επίσης μπορούμε να δούμε πως η μέγιστη τιμή είναι για πλάτος ταλάντωσης 0,3 και μετά ξεκινάει η πτώση της μεταφοράς ισχύος.

Αφού είδαμε τα συγκεντρωτικά αποτελέσματα για τις περιπτώσεις του κινούμενου κυλίνδρου, θα πρέπει να αναφέρουμε ένα σημαντικό στοιχείο που σχολιάσαμε και νωρίτερα για την αξιοπιστία του πλέγματος. Σημειώθηκε ότι οι υπολογισμοί ξεκίνησαν με 22254 κόμβους αφού αρχικά θεωρήσαμε ότι η μεταβολή στους συντελεστές των δυνάμεων είναι εντός των ορίων(3-4%) και κάναμε τα τρεξίματα για όλες τις περιπτώσεις κινούμενου και ακίνητου κυλίνδρου. Ωστόσο, όταν καταλήξαμε να σχεδιάσουμε τα ανωτέρω διαγράμματα, παρουσιάστηκε ένα ενδιαφέρον στοιχείο. Τα διαγράμματα για το Cd average και για το Fluctuating Cd, είχαν μια καμπή όπως φαίνεται στα παρακάτω διαγράμματα, όπως και τιμές με μεγάλη απόλιση σε σχέση με την περίπτωση του πιο πυκνού πλέγματος.

Η συμπεριφορά αυτή είναι σίγουρα λανθασμένη, καθώς είναι δεδομένο πως αυτοί οι παράγοντες θα πρέπει να ακολουθούν αύξουσα πορεία λόγω της αύξησης του πλάτους της ταλάντωσης του κυλίνδρου.







Καθώς πρόκειται για υπολογιστική επίλυση του προβλήματος, η όποια λανθασμένη έκβαση στην εξέλιξη κάποιας μεταβλητής εξηγείται συνήθως είτε από λανθασμένη γεωμετρία πλέγματος είτε από λανθασμένη επιλογή κόμβων είτε από λανθασμένο time-step.

Στην περίπτωση μας, η μεγαλύτερη πιθανότητα είναι να έχουμε λανθασμένο αριθμό κόμβων αφού είναι η βασική παράμετρος που αλλάζαμε και εκτελούσαμε τα resolution test. Πράγματι, πυκνώνοντας το πλέγμα στους 38547 κόμβους και εκτελώντας ξανά τα τρεξίματα τα διαγράμματα παίρνουν την τελική τους μορφή, όπως φαίνονται και από τα αντίστοιχα διαγράμματα που παρατίθενται ξανά για να φανεί η μεγάλη απόκλιση.

Εν κατακλείδι, φαίνεται η ευαισθησία ενός αριθμητικού προβλήματος και η μεγάλη του εξάρτηση από τη μορφή και τον αριθμό των κόμβων του αντίστοιχου πλέγματος. Ενώ επιλέξαμε το αρχικό πλέγμα που δούλεψε σωστά στους υπολογισμούς, με μικρότερο υπολογιστικό κόστος αλλά βέβαια και μεγαλύτερη απόκλιση από τα αποτελέσματα του εργαστηρίου, εν τέλει αποκαλύφθηκε μια δυσλειτουργία σε δύο συγκεκριμένα runs με τα αντίστοιχα πλάτη ταλαντώσεων του κινούμενου κυλίνδρου, κι επομένως κρίθηκε αναξιόπιστο. Επομένως, η κατάλληλη εκλογή του πλέγματος είναι ίσως η σημαντικότερη και πιο δύσκολη παράμετρος ώστε να διασφαλιστεί η αξιοπιστία των αποτελεσμάτων.

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. **Τριανταφύλλου Γεώργιος** Ειδικά θέματα μηχανικής των Ρευστών, Αθήνα 2002
2. **Τζαμπίρας Γεώργιος** Αριθμητικές προσομοιώσεις υδροδυναμικών ροών, Αθήνα 1998
3. **Caradonna F. C** Finite difference modeling of rotor flows including wake effects [Επιθεώρηση] // Journal of the American Helicopter Society. - 1984.
4. **Carcangiu C. C** CFD- RANS analysis of the rotational effects on the boundary layer of wind turbine blades [Επιθεώρηση] // Journal of Physics: Conference Series. - 2007.
5. **Chaviaropoulos P. C** Viscous and aeroelastic effects on wind turbine blades: the Viscel Project [Συνέδριο] // European wind energy conference. - Copenhagen : [s.n.], 2001.
6. **Johansen J. J** Detached-eddy simulation of flow around the NREL Phase VI blade [Επιθεώρηση] // Wind Energy. - 2002. - σσ. 185-197.
7. **Laursen J. L** 3D CFD quantification of the performance of a multi-megawatt wind turbine [Επιθεώρηση] // Journal of Physics:Conference Series. - 2007.
8. **Li Y. L** Dynamic overset CFD simulations of wind turbine aerodynamics [Επιθεώρηση] // Renewable Energy. - 2012. - σσ. 285- 298.
9. **Loukopoulos V. L** A numerical technique for the solution of the Navier-Stokes equations of unsteady flow [Βιβλίο]. - [s.l.] : Computer Methods Appl. Mech. Engng, 2006.

10. **Madsen H. M** Yaw aerodynamics analyzed with three codes in comparison with experiments [Συνέδριο] // 41st AIAA Aerosp. Sci. Meet. Exhib. - Reno : AIAA, 2003.
  
11. **Menter F. M** A correlation-based transition model using local variables, part I— model formulation [Συνέδριο] // Power for Land, Sea, and Air, ASME. - [s.l.] : ASME Turbo Expo 2004, 2004.
  
12. **Menter F. M** Two zonal equation k–w turbulence models for aerodynamic flows [Εργασία]. - [s.l.] : AIAA, 1993.
  
13. **Politis E. P** KNOW-BLADE Task-4 report: Navier–Stokes aeroelasticity [Εργασία] / RISO. - 2005.
  
14. **Sankar N. S** Solution of the unsteady Euler equations for fixed and rotor wind configurations [Επιθεώρηση] // Journal of Aircraft . - 1986.
  
15. **Simms D. S** NREL Unsteady Aerodynamics Experiment in the NASA-Ames Wind Tunnel: A Comparison of Predictions to Measurements [Επιθεώρηση] // National Renewable Energy Laboratory. - 2001.
  
16. **Sørensen J. ,** VISCWIND Viscous effects on wind turbine blades [Επιθεώρηση] // Department of Energy Engineering. - 1999.
  
17. **Sorensen N. S** Navier-Stokes Predictions of the NREL Phase VI rotor in the NASA Ames 80ft x 120ft Wind Tunnel [Επιθεώρηση] // Wind Energy. - 2002. - σσ. 151-169.
  
18. **Tachos N. T** A comparative numerical study of four turbulence models for the prediction of horizontal axis wind turbine flow [Συνέδριο] // Institution of Mechanical Engineers Part C. - [s.l.] : Journal of Mechanical Engineering Science, 2010. - σσ. 1973-1979.
  
19. **Tongchitpakdec C. T** Recent improvements to a combined Navier-Stokes full potential methodology for modeling horizontal axis wind turbines

[Συνέδριο] // 43rd AIAA Aerosp. Sci. Meet. Exhib., AIAA. - Reno : AIAA, 2005.

20. **Wang Q. W** Study on a new aerodynamic model of HAWT based on panel method and Reduced Order Model using Proper Orthogonal Decomposition [Επιθεώρηση] // Renewable Energy. - 2012. - σσ. 436- 447.