Ασθενής Σύγκλιση Μέτρων Πιθανότητας σε Μετρικούς Χώρους

Πέτρος Μπουφούνος

Επιβλέπων : Μιχάλης Λουλάκης Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

Τομέας Μαθηματικών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Ασθενής Σύγκλιση Μέτρων Πιθανότητας σε Μετρικούς Χώρους

Πέτρος Μπουφούνος

Πρόλογος

Η θεωρία ασθενούς σύγκλισης αναπτύχθηκε κυρίως τον 20ό αιώνα από μαθηματικούς όπως οι Kolmogorov, Wiener, Prohorov, Skorohod, Lévy, Donsker προκειμένου να μελετηθεί το πότε μια ακολουθία μέτρων πιθανότητας, P_n, (ή και γενικότερα μέτρων) ορισμένων σε έναν μετρικό χώρο S, συγκλίνουν ασθενώς σε ένα μέτρο πιθανότητας P. Η θεωρία αυτή έχει κάποια πολύ σημαντικά αποτελέσματα όπως το θεώρημα του Prohorov και το θεώρημα του Donsker τα οποία πέρα από το μαθηματικό ενδιαφέρον που παρουσιάζουν βρίσκουν και εφαρμογές σε άλλους κλάδους όπως ο Στοχαστικός Λογισμός, η Στατιστική, τα Χρηματοοικονομικά κτλ.

Στην παρούσα εργασία έχω προσπαθήσει να συλλέξω τα στοιχεία που θα βοηθήσουν τον αναγνώστη να κατανοήσει βασικές έννοιες όπως η σχετική συμπάγεια, η tightness και η ασθενής σύγκλιση μιας οικογένειας μέτρων και εν συνεχεία να μπορέσει να εφαρμόσει τα παραπάνω σε συγκεκριμένους μετρικούς χώρους όπως είναι ο κλασικός χώρος του Wiener (που περιέχει τις συνεχείς συναρτήσεις) και ο χώρος του Skorohod (που περιέχει τις cadlag συναρτήσεις). Τα θεωρήματα που περιέχονται παρουσιάζουν σε πολλά σημεία σημαντικές τεχνικές λεπτομέρειες και δυσκολίες. Έχουν αποδειχθεί με πλήρη αυστηρότητα ενώ ο αναγνώστης θα πρέπει να έχει αρκετή εξοικείωση με την κλασική θεωρία πιθανοτήτων, την θεωρία μέτρου, την πραγματική ανάλυση καθώς και να έχει μια σχετική άνεση με βασικές έννοιες της τοπολογίας. Παρόλα αυτά, στα περισσότερα θεωρήματα αναφέρεται σαφώς το ποιό αποτέλεσμα έχει χρησιμοποιηθεί κάθε φορά, έτσι ώστε το κείμενο να είναι αυτόνομο και να μπορεί να διαβαστεί χωρίς μόνιμες παραπομπές σε διάφορα άλλα συγγράμματα.

Κλείνοντας θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου, Μιχάλη Λουλάκη, όπως και τους καθηγητές Βασίλη Παπανικολάου, Βασίλη Κανελλόπουλο, Δημήτρη Χελιώτη, Ιωάννη Σπηλιώτη, Αντώνη Οικονόμου για την βοήθεια που μου προσέφεραν σε αρκετά σημεία, τον Γιάννη, τον Μίλτο και τον Αντώνη για την πολύτιμη βοήθειά τους στην εγκατάσταση του Latex καθώς επίσης και τους γονείς μου και τον αδερφό μου για την ηθική συμπαράστασή τους. Για οποιαδήποτε λάθη, τυπογραφικά ή λογικά, θα παρακαλούσα όποιον τα εντοπίσει να επικοινωνήσει μαζί μου με email έτσι ώστε να προβώ στη διόρθωσή τους.

Ελλάδα, Αθήνα — Πέτρος Μπουφούνος

Ιούνιος 2015 — summoning75@gmail.com

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η παρούσα εργασία έχει σαν αντικείμενο την παρουσίαση της θεωρίας ασθενούς σύγκλισης μέτρων πιθανότητας ορισμένων σε μετρικούς χώρους, την εφαρμογή της σε συγκεκριμένους μετρικούς χώρους όπως είναι ο $C[0,1]$,ο $D[0,1]$ και ο D_∞ ενώ ένας από τους βασικούς μας στόχους είναι η κατασκευή του μέτρου Wiener και η διατύπωση και απόδειξη του θεωρήματος του Donsker γνωστό και ως Donsker's Invariance Principle.

Στη θεωρία πιθανοτήτων γνωρίζουμε οτι αν

$$F_n(x) = \mathsf{P}\left\{\omega : \frac{S_n(\omega) - np}{\sqrt{npq}} \leq x\right\}$$

είναι η συνάρτηση κατανομής της κανονικοποιημένης τυχαίας μεταβλητής που εκφράζει το πλήθος των επιτυχιών σε n δοκιμές Bernoulli και εαν

$$F(x) = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_\infty^x e^{-\frac{u^2}{2}} \mathrm{d}u$$

τότε έχουμε ότι $F_n(x) \to F(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

Έστω ότι έχουμε συναρτήσεις κατανομής F_n και F ορισμένες στο $\mathbb{R}$.Θα λέμε ότι η ακολουθία F_n *συγκλίνει ασθενώς* στην F (σύμβολο:$F_n \Rightarrow F$) αν ισχύει ότι

$$F_n(x) \to F(x), \forall x \text{ που είναι σημείο συνέχειας της } F.$$

Στην περίπτωση που $F_n(x) = I_{[\frac{1}{n},\infty)}(x)$ και $F(x) = I_{[0,\infty)}(x)$ τότε $F_n \Rightarrow F$ διότι το 0 είναι σημείο ασυνέχειας της F και $F_n(x) \to F(x), \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Ας θεωρήσουμε τώρα τα μέτρα Borel που επάγουν οι συναρτήσεις κατανομής F_n, F,δηλαδή

$$F_n(x) = P_n(-\infty, x], F(x) = P(-\infty, x], x \in \mathbb{R}.$$

Επειδή η F είναι συνεχής στο x αν και μόνο αν $P(\{x\}) = 0$ τότε $F_n \Rightarrow F$ συνεπάγεται

$$P_n(-\infty, x] \to P(-\infty, x], \text{ όταν } P(\{x\}) = 0.$$

Τώρα,ας συμβολίσουμε με ∂A το σύνορο ενός συνόλου Borel του $\mathbb{R}$,δηλαδή $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.Επειδή το σύνορο του $(-\infty, x]$ ειναι το $\{x\}$ τότε αν θεωρήσουμε σαν A το $(-\infty, x]$,η προηγούμενη σχέση μας δίνει :

$$P_n(A) \to P(A) \ \text{ εαν } P(\partial A) = 0$$

Στο κεφάλαιο 1 θα δείξουμε ότι $F_n \Rightarrow F$ αν και μόνο αν η προηγούμενη συνεπαγωγή είναι αληθής για κάθε $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Η σημασία των συνόλων A για τα οποία $P(\partial A) = 0$ μπορεί να φανεί απο το εξής: αν περιοριστούμε στο προηγούμενο παράδειγμα με τις δοκιμές Bernoulli,και θεωρήσουμε σαν

$$A = \left\{\frac{k - np}{\sqrt{npq}} : n = 1, 2, \ldots, k = 0, 1 \ldots n\right\}$$

τότε $P(A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_A e^{-\frac{u^2}{2}} \mathrm{d}u = 0$ (διότι ολοκληρώνουμε πάνω σε ένα αριθμήσιμο σύνολο) $P(\partial A) = P(\mathbb{R}) = 1$ (διότι το A είναι πυκνό στο $\mathbb{R}$) και $P_n(A) = 1, \ \forall n$ και έτσι για αυτό το A δεν ισχύει $P_n(A) \rightarrow P(A)$.Επειδή όμως όπως είδαμε $P(\partial A) = 1 > 0$,η συνθήκη ασθενούς σύγκλισης δεν παραβιάζεται.

Στο κεφάλαιο 1 θα γενικεύσουμε την ιδέα της ασθενούς σύγκλισης σε μέτρα που ορίζονται σε αυθαίρετο μετρικό χώρο S. Θα αποδείξουμε το πολύ βασικό θεώρημα Portmanteau το οποίο δίνει ισοδύναμες συνθήκες για να έχουμε ασθενή σύγκλιση μέτρων P_n σε ένα μέτρο P,ενώ θα μελετήσουμε κάποιες βασικές κλάσεις συνόλων όπως είναι οι 'κλάσεις διαχωρισμού'(separating classes) και οι 'κλάσεις που καθορίζουν τη σύγκλιση'(convergence-determining classes).

Στο κεφάλαιο 2 θα ασχοληθούμε με την ασθενή σύγκλιση στον χώρο $C[0,1]$, όπου έχει οριστεί η τοπολογία της ομοιόμορφης σύγκλισης. Ο χώρος C είναι ο χώρος των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων ορισμένων στο διάστημα $[0,1]$ με την μετρική:

$$d_\infty(x,y) = \sup_{0 \le t \le 1} \{|x(t) - y(t)|\}$$

Προς το τέλος του κεφαλαίου θα δούμε το θεώρημα του Donsker που αποτελεί μια κατά κάποιον τρόπο γενίκευση του Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος. Ενδεικτικά,ας θεωρήσουμε μια ακολουθία ισόνομων και ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών ξ_1,$\xi_2, \ldots$ ορισμένων σε κάποιο χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ με μέση τιμή 0 και διασπορά σ^2. Θεωρούμε τώρα ως συνήθως τα n-οστά μερικά αθροίσματα $S_n = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$ και για σταθερό ω και n,κατασκευάζουμε μια συνάρτηση $X^n(\omega)$ του $C[0,1]$ ως εξής: στα σημεία $\dfrac{i}{n}$ της δίνουμε την τιμή $\dfrac{S_i(\omega)}{\sigma\sqrt{n}}$ ενώ σε κάθε υποδιάστημα $[\dfrac{i-1}{n}, \dfrac{i}{n}]$ την επεκτείνουμε γραμμικά. Με άλλα λόγια η τιμή $X_t^n(\omega)$ ισούται με :

$$X_t^n(\omega) = \frac{S_{i-1}(\omega)}{\sigma\sqrt{n}} + \frac{t - \frac{(i-1)}{n}}{\frac{1}{n}} \frac{\xi_i(\omega)}{\sigma\sqrt{n}}, \ t \in [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$$

Για κάθε $\omega \in \Omega$, το $X^n(\omega)$ είναι ένα στοιχείο του χώρου C και θα αποδείξουμε οτι η συνάρτηση :

$$X^n : \Omega \rightarrow C$$

είναι $\mathcal{F} \backslash \mathcal{B}(C)$ μετρήσιμη. Επομένως μπορεί να οριστεί η κατανομή P_n της X^n πάνω στα σύνολα Borel του C(φυσικά ως προς την τοπολογία της ομοιόμορφης σύγκλισης).Έτσι :

$$P_n(A) = \mathsf{P}[\omega : X^n(\omega) \in A]$$

Το θεώρημα του Donsker λέει ότι

$$P_n \Rightarrow W$$

όπου με W συμβολίζουμε το μέτρο Wiener στον $(C, \mathcal{B}(C))$.
Το μέτρο Wiener είναι το μέτρο που περιγράφει κατάλληλα την κατανομή πιθανότητας του μονοπατιού που διατρέχει ενα μόριο που εκτελεί κίνηση Brown.

Ας θεωρήσουμε το σύνολο $A = [x \in C : x(1) \leq \alpha]$.Τότε επειδή η τιμή της συνάρτησης $X^n(\omega)$ στο σημείο $t = 1$ δίνει $X_1^n(\omega) = \frac{S_n(\omega)}{\sigma\sqrt{n}}$,έπεται ότι

$$P_n(A) = \mathsf{P}[\omega : \tfrac{S_n(\omega)}{\sigma\sqrt{n}} \leq \alpha]$$

Θα αποδειχθεί ότι $W(\partial A) = 0$ και έτσι

$$P_n(A) \to W[x : x(1) \leq \alpha]$$

Επίσης

$$W[x : x(1) \leq \alpha] = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\alpha} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du$$

και έτσι το θεώρημα του Donsker περιέχει το κεντρικό οριακό θεώρημα.

Αν οι ξ_i παίρνουν τιμές 1 και -1 με πιθανότητα $\frac{1}{2}$ την καθεμία, τότε η S_n εκφράζει την θέση που έχουμε την χρονική στιγμή n σε έναν συμμετρικό,τυχαίο περίπατο. Το κεντρικό οριακό θεώρημα λέει ότι αυτή η θέση, κανονικοποιημένη (διαιρεμένη δηλαδή με το $\sqrt{n}$), έχει για μεγάλα n την ίδια κατανομή με την κατανομή που έχει η θέση (την στιγμή $t = 1$) ενός μορίου που εκτελεί κίνηση Brown. Το θεώρημα Donsker λέει οτι ολόκληρο το μονοπάτι ενός τυχαίου περιπάτου εως τη στιγμή n έχει ασυμπτωτικά την ίδια κατανομή με την κατανομή που έχει το μονοπάτι εως τη στιγμή $t = 1$ ενός μορίου που εκτελεί κίνηση Brown. Το γεγονός ότι το μέτρο W είναι το ασθενές όριο των κατανομών των συναρτήσεων X^n μπορεί να μας βοηθήσει να αποδείξουμε οριακά θεωρήματα για συναρτήσεις των μερικών αθροισμάτων $S_1, S_2, \ldots, S_n$ αλλά και θεωρήματα σχετικά με το ίδιο το W.

Στο κεφάλαιο 3 ασχολούμαστε με τον χώρο $D[0,1]$ και με τον D_∞, οι οποίοι είναι οι κατάλληλοι για την μελέτη της ανέλιξης Poisson, εφόσον περιέχουν τις συναρτήσεις που είναι δεξιά συνεχείς και έχουν αριστερό όριο σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού τους. Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε δύο ισοδύναμες μετρικές, την μετρική d και την μετρική d° (μετρική Skorohod) κάτω απο τις οποίες ο χώρος $D[0,1]$ ειναι διαχωρίσιμος αλλά είναι πλήρης μόνο κάτω απο την d°. Η θεωρία επεκτείνεται με φυσιολογικό τρόπο και στον χώρο D_∞

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Ασθενής σύγκλιση σε μετρικούς χώρους

Ενότητα 1:Μέτρα σε μετρικούς χώρους

Έστω ένας μετρικός χώρος S και έστω $\mathcal{S}$ η Borel σ-άλγεβρα που παράγεται από τα ανοιχτά σύνολά του, δηλαδή $\mathcal{S} = \mathcal{B}(S)$ και έστω μια ακολουθία μέτρων πιθανότητας P_n και P που είναι ορισμένα στον $(S, \mathcal{S})$. Θα λέμε οτι η P_n συγκλίνει ασθενώς στο P (σύμβολο: $P_n \Rightarrow P$) αν ισχύει ότι

$$\int_S f\,dP_n \to \int_S f\,dP \ , \forall f : S \to \mathbb{R} \text{ η οποία είναι συνεχής και φραγμένη.}$$

Χάριν ευκολίας θα συμβολίζουμε από εδώ και στο εξής το πρώτο ολοκλήρωμα σαν $P_n f$ και το δεύτερο σαν Pf.Πρώτα αποδεικνύουμε το εξής θεώρημα για μεμονωμένα μέτρα στον $(S, \mathcal{S})$:

Θεώρημα 1.1: *Κάθε μέτρο πιθανότητας P ορισμένο στον $(S, \mathcal{S})$ είναι κανονικό.*

Απόδειξη: Θα αποδείξουμε ότι $\forall \varepsilon > 0$ και $\forall A \in \mathcal{S}$, $\exists$ σύνολα F, G τέτοια ώστε F:κλειστό , G:ανοικτό , $F \subseteq A \subseteq G$ και $P(G \setminus F) < \varepsilon$. Θέτουμε

$$\mathcal{G} = \{A \in \mathcal{S} : \text{το } A \text{ έχει τις ζητούμενες ιδιότητες}\}$$

Θα δείξουμε ότι η $\mathcal{G}$ είναι μια σ-άλγεβρα που περιέχει τα κλειστά σύνολα και άρα θα περιέχει και την $\mathcal{S}$. Αν συμβολίσουμε με ρ την μετρική του S και $\rho(x, A) = \inf\{\rho(x, y) : y \in A\}$ τότε, όπως είναι γνωστό από την Πραγματική Ανάλυση, η συνάρτηση $\rho(x, A)$ είναι ομοιόμορφα συνεχής, επειδή $|\rho(x, A) - \rho(y, A)| \le \rho(x, y)$, $\forall x, y \in S$. Επίσης ισχύει $\rho(x, A) = 0 \Leftrightarrow A$: κλειστό. Αν το A είναι κλειστό, τότε παίρνουμε $F = A$ και $G = A^\delta = \{x : \rho(x, A) < \delta\}$ για κάποιο κατάλληλο δ . Έτσι,τα σύνολα A^δ είναι ανοιχτά(ως αντίστροφες εικόνες ανοιχτών μέσω της συνεχούς $\rho(x, A)$) και επειδή η ακολουθία $A^{\delta_n} \searrow A$, θα ισχύει ότι $P(A^{\delta_n}) \searrow P(A)$ και άρα μπορούμε να βρούμε ένα δ_{n_0} ώστε $P(A^{\delta_{n_0}}) - P(A) = P(A^{\delta_{n_0}} \setminus A) = P(G \setminus F) < \varepsilon$. Επομένως η $\mathcal{G}$ περιέχει τα κλειστά σύνολα.
Τώρα είναι προφανές ότι η $\mathcal{G}$ είναι κλειστή ως προς συμπληρώματα επειδή αν $F \subseteq A \subseteq G$ τότε $G^c \subseteq A^c \subseteq F^c$ και $P(G \setminus F) = P(F^c \setminus G^c)$.
Εαν $A_n \in \mathcal{G}$ επιλέγουμε κλειστά F_n και ανοιχτά G_n ώστε $P(G_n \setminus F_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$. Θέτουμε $G = \cup_n G_n$ και $K = \cup_n F_n$. Επειδή $B_n = \cup_{k \le n} F_k \nearrow K$ μπορούμε να βρούμε εναν n_0 ώστε $P(K \setminus B_{n_0}) < \frac{\varepsilon}{2}$. Έτσι τα σύνολα G και B_{n_0} είναι ανοικτά και κλειστά αντίστοιχα, $B_{n_0} \subseteq \cup_n A_n \subseteq G$. Όμως $P(G \setminus B_{n_0}) = P(G \setminus K) + P(K \setminus B_{n_0}) < \frac{\varepsilon}{2} + P(\cup_n G_n \setminus \cup_n F_n) \le \frac{\varepsilon}{2} + \sum_n \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \varepsilon$ και έτσι έπεται ότι η $\mathcal{G}$ είναι κλειστή ως προς αριθμήσιμες ενώσεις.

Το προηγούμενο θεώρημα δείχνει ότι το P καθορίζεται πλήρως από την τιμή του πάνω στα κλειστά σύνολα F,υπό την έννοια ότι αν υπάρχει ένα άλλο μέτρο Q με $P(F) = Q(F), \forall F$: κλειστό , τότε $P \equiv Q$. Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι το P καθορίζεται πλήρως και από τις τιμές $Pf = \int_S f\, dP$ πάνω στις συνεχείς και φραγμένες πραγματικές f:

Θεώρημα 1.2: *Εαν για δύο μέτρα πιθανότητας P, Q στην $\mathcal{S}$ ισχύει ότι $Pf = Qf, \forall f : S \to \mathbb{R}$ φραγμένη και ομοιόμορφα συνεχή, τότε $P \equiv Q$.*

Απόδειξη: Έστω σύνολο F: κλειστό και $\varepsilon > 0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \max\left\{0, 1 - \frac{\rho(x,F)}{\varepsilon}\right\}$. Είναι $0 \le f(x) \le 1, \forall x \in S$ και άρα η f είναι φραγμένη. Επίσης λόγω της ομοιόμορφης συνέχειας της $\rho(x, F)$ έπεται ότι $|f(x)-f(y)| \le \frac{\rho(x,y)}{\varepsilon}$ και έτσι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής. Αν $F^\varepsilon = \{x : \rho(x, F) < \varepsilon\}$ τότε προκύπτει

$$I_F(x) \le f(x) \le I_{F^\varepsilon}(x)$$

Άρα

$$\int_S I_F\, dP \le \int_S I_f\, dP \le \int_S I_{F^\varepsilon}\, dP$$

δηλαδή

$$P(F) \le Pf \le P(F^\varepsilon).$$

Ομοίως, ολοκληρώνοντας ως προς Q προκύπτει $Q(F) \le Qf \le Q(F^\varepsilon)$ και εξ' υποθέσεως, $Pf = Qf$, άρα $P(F) \le Q(F^\varepsilon)$. Αφήνοντας το $\varepsilon \searrow 0$ έχουμε ότι $P(F) \le Q(F), \forall F$: κλειστό και λόγω συμμετρίας ισχύει και $P(F) \ge Q(F)$, επομένως τα P, Q ταυτίζονται στα κλειστά σύνολα και λόγω του Θεωρήματος 1.1 ταυτίζονται σε όλη την $\mathcal{S}$.

Σε αυτό το σημείο θα δώσουμε τον ορισμό της tightness (ισοσυμπάγειας), η οποία είναι μια πολύ χρήσιμη έννοια στη θεωρία της ασθενούς σύγκλισης. Ένα μέτρο πιθανότητας P στον $(S, \mathcal{S})$ θα καλείται tight εαν $\forall \varepsilon > 0, \exists$ ένα συμπαγές υποσύνολο $K (= K_\varepsilon)$ ώστε $P(K) > 1 - \varepsilon$ (ή ισοδύναμα $P(K^c) < \varepsilon$). Επειδή $P(A) = P(A \cap K) + P(A \cap K^c)$ προκύπτει και με βάση το Θεώρημα 1.1 ότι το P είναι tight αν και μόνο αν $P(A) = \sup\{P(K) : K \text{ συμπαγές} \subseteq A\}$ για όλα τα ανοικτά σύνολα A.

Θεώρημα 1.3 : *Εαν ο S είναι διαχωρίσιμος και πλήρης τότε κάθε μέτρο πιθανότητας στον $(S, \mathcal{S})$ είναι tight.*

Απόδειξη : Για $\varepsilon_k = \frac{1}{k}$, λόγω διαχωρισιμότητας, υπάρχουν $x_1^k, x_2^k, \ldots$ έτσι ώστε $S = \bigcup_{i=1}^{\infty} B(x_i^{(k)}, \frac{1}{k}) = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_{k,i}$. Επειδή $P(S) = 1$ μπορούμε να επιλέξουμε έναν n_k ώστε $P(\bigcup_{i=1}^{n_k} A_{k,i}) > 1 - \frac{\varepsilon}{2^k}$. Ο στόχος μας είναι να χρησιμοποιήσουμε ενα γνωστό θεώρημα της Πραγματικής Ανάλυσης που λέει οτι ,σε έναν πλήρη μετρικό χώρο, ένα υποσύνολο είναι συμπαγές αν και μόνο αν είναι κλειστό και ολικά φραγμένο. Συνεπώς θέτουμε :

$$\Gamma = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{n_k} A_{k,i}$$

Θα αποδείξουμε οτι το $\overline{\Gamma}$ είναι ολικά φραγμένο οπότε ως κλειστό θα είναι και συμπαγές διότι ο S υποθέσαμε πως είναι πλήρης. Έστω $\varepsilon > 0$ και $k_0 \in \mathbb{N} : \frac{2}{K_0} < \varepsilon$. Είναι:

$$\Gamma = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{n_k} A_{k,i} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n_{k_0}} A_{k,i} = \bigcup_{i=1}^{n_{k_0}} B(x_i^{(k)}, \frac{1}{k_0}) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n_{k_0}} B(x_i^{(k)}, \varepsilon)$$

και αφού $\frac{2}{k_0} < \varepsilon$ έπεται ότι το $\overline{\Gamma}$ είναι ολικά φραγμένο.
Τώρα,

$$P(S \setminus \overline{\Gamma}) \leq P(\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{i=1}^{n_k} A_{k,i}^c) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P[\bigcup_{i=1}^{n_k} A_{k,i}^{\ \ c}] < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon$$

και άρα $P(\overline{\Gamma}) > 1 - \varepsilon$ όπως έπρεπε να δειχθεί.

Παραδείγματα: Πριν προχωρήσουμε ας δώσουμε έναν ορισμό. Μια υποκλάση $\mathcal{A}$ της $\mathcal{S}$ θα καλείται separating class εαν ισχύει η συνεπαγωγή :

$$P(A) = Q(A), \forall A \in \mathcal{A} \Rightarrow P \equiv Q$$

Δηλαδή η κλάση $\mathcal{A}$ αρκεί για να διαχωρίσει το P από άλλα μέτρα πιθανότητας στον S. Είναι γνωστό ότι μια κλάση Δ κλειστή στις πεπερασμένες τομές που παράγει την $\mathcal{S}$ (δηλαδή $\sigma(\Delta) = \mathcal{S}$) αποτελεί separating class.
Παράδειγμα 1.1 : Θεωρούμε τον k-διάστατο Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^k$ με την συνήθη μετρική και συμβολίζουμε με $\mathcal{R}^k = \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$. Για ένα μέτρο Borel στην $\mathcal{R}^k$ έχουμε την αντίστοιχη συνάρτηση κατανομής:

$$F(x_1, \ldots, x_n) = P(y \in \mathbb{R}^k : y_i \leq x_i, \forall i = 1, \ldots, k)$$

Είναι γνωστό ότι υπάρχει μια 1-1 και επί αντιστοιχία ανάμεσα στα Borel μέτρα πιθανότητας και στις συναρτήσεις κατανομής του $\mathbb{R}^k$. Αφού ο $\mathbb{R}^k$ είναι πλήρης και διαχωρίσιμος ως προς τη συνήθη μετρική, προκύπτει από το προηγούμενο θεώρημα ότι οποιοδήποτε μέτρο πιθανότητας στον $(\mathbb{R}^k, \mathcal{R}^k)$ είναι tight. Επίσης εφόσον η κλάση $\Delta = \{(-\infty, x_1] \times (-\infty, x_2] \times \ldots \times (-\infty, x_k] : x_i \in \mathbb{R}\}$ είναι π-σύστημα και παράγει την $\mathcal{R}^k$ έπεται ότι είναι και separating class.

Παράδειγμα 1.2 : Έστω $\mathbb{R}^\infty = \{x = (x_1, x_2, \ldots) : x_i \in \mathbb{R}, \forall i \in \mathbb{N}\}$ να είναι ο χώρος όλων των πραγματικών ακολουθιών. Στο $\mathbb{R}$ μπορούμε να ορίσουμε την μετρική $\rho(a,b) = \min\{1, |a-b|\}$ η οποία είναι ισοδύναμη με την συνήθη μετρική και κάτω από την οποία ο $\mathbb{R}$ παραμένει πλήρης και διαχωρίσιμος. Θεωρούμε την μετρική γινόμενο στον $\mathbb{R}^\infty$ που ορίζεται ως :

$$\rho_\infty(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\rho(x_i, y_i)}{2^i}$$

Είναι γνωστό ότι $\rho_\infty(x^{(n)}, x) \to 0 \iff \rho(x_i^{(n)}, x_i) \to 0, \forall i \in \mathbb{N}$.
Δηλαδή, $x^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{\rho_\infty} x \iff x_i^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{\rho} x_i, \forall i$.
Η προβολή $\pi_k : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}^k$ με $\pi_k(x) = (x_1, \ldots, x_k)$ είναι συνεχής συνάρτηση και άρα τα σύνολα

$$N_{k,\varepsilon}(x) = \{y : |y_i - x_i| < \varepsilon, i = 1, \ldots, k\} = \pi_k^{-1}\left\{\prod_{i=1}^{k}(x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon)\right\} \tag{1.1}$$

είναι ανοικτά. Αν $y \in N_{k,\varepsilon}(x)$ τότε:

$$\rho_\infty(x,y) < \varepsilon + \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \varepsilon + \frac{1}{2^k}$$

Η οικογένεια $\mathcal{G} = \{N_{k,\varepsilon}(x) : k \in \mathbb{N}, \varepsilon > 0, x \in \mathbb{R}^\infty\}$ αποτελεί βάση της τοπολογίας του $\mathbb{R}^\infty$ ενώ ο χώρος $\mathbb{R}^\infty$ είναι διαχωρίσιμος,ως καρτεσιανό γινόμενο διαχωρίσιμων μετρικών χώρων και επειδή το $\mathbb{N}$ έχει γνήσια μικρότερο πληθάριθμο από τον πληθάριθμο του συνεχούς. Μάλιστα εύκολα μπορεί να δειχθεί ότι ένα αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολό του είναι το εξής :

$$D = \{x = (x_1, x_2, \ldots) : x_i \in \mathbb{Q} \text{ , } \{i : x_i \neq 0\}\text{:πεπερασμένο }\}$$

Άρα, από το Θεώρημα 1.3 κάθε μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^\infty$ είναι tight.
Έστω $\mathcal{R}_f^\infty = \{\pi_k^{-1}(H) : k \in \mathbb{N}, H \in \mathcal{R}^k\}$ να είναι η κλάση των πεπερασμένης διάστασης συνόλων (finite-dimensional sets). Θα δείξουμε ότι η $\mathcal{R}_f^\infty$ είναι μια separating class. Καταρχήν αφού κάθε π_k είναι συνεχής συνάρτηση θα είναι και Borel μετρήσιμη ,δηλαδή $\mathcal{R}^\infty/\mathcal{R}^k$ μετρήσιμη, επομένως $\mathcal{R}_f^\infty \subseteq \mathcal{R}^\infty$.Για να δείξουμε οτι η $\mathcal{R}_f^\infty$ είναι π-σύστημα θεωρούμε $A = \pi_k^{-1}(H_1), B = \pi_j^{-1}(H_2)$ δύο σύνολά της. Επειδή $\pi_m^{-1}(H) = \pi_{m+1}^{-1}(H \times \mathbb{R})$ μπορούμε να επιλέξουμε $n = k + j$ και να εκφράσουμε τα A, B ως προς τον ίδιο δείκτη, δηλαδή $A = \pi_n^{-1}(H_1 \times \mathbb{R}^{n-k})$ και $B = \pi_n^{-1}(H_2 \times \mathbb{R}^{n-j})$ και τα $H_1 \times \mathbb{R}^{n-k}, H_2 \times \mathbb{R}^{n-j}$ είναι σύνολα Borel του $\mathbb{R}^n$. Άρα η $\mathcal{R}_f^\infty$ είναι π-σύστημα. Επιπλέον, επειδή ο χώρος $\mathbb{R}^\infty$ είναι διαχωρίσιμος μετρικός χώρος θα είναι και δεύτερος αριθμήσιμος, δηλαδή κάθε ανοικτό σύνολο γράφεται σαν αριθμήσιμη ένωση στοιχείων της $\mathcal{G}$. Όμως τα στοιχεία της $\mathcal{G}$ ανήκουν όλα στην $\mathcal{R}_f^\infty$ επομένως έπεται ότι $\sigma(\mathcal{R}_f^\infty) \supseteq \mathcal{R}^\infty$ και τελικά $\sigma(\mathcal{R}_f^\infty) = \mathcal{R}^\infty$.

Ειδικά, για τυχόν μέτρο πιθανότητας στον $(\mathbb{R}^\infty, \mathcal{R}^\infty)$ ορίζουμε τις πεπερασμένης διάστασεις κατανομές του (finite dimensional distributions) να είναι τα μέτρα $P \circ \pi_k^{-1}$ στον $(\mathbb{R}^k, \mathcal{R}^k)$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Επειδή η $\mathcal{R}_f^\infty$ είναι separating class αν ισχύει $P \circ \pi_k^{-1} = Q \circ \pi_k^{-1}$ για κάποιο μέτρο Q, τότε $P \equiv Q$.

Παράδειγμα 1.3 : Ας θεωρήσουμε τον χώρο $C = C[0,1]$ που περιέχει όλες τις συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις ορισμένες στο διάστημα $[0,1]$. Ορίζουμε εκεί την μετρική

$$d(x,y) = \sup_{0\le t\le 1}\{|x(t)-y(t)|\}.$$

Η μετρική d είναι αυτή της ομοιόμορφης σύγκλισης και συνεπώς αν μια ακολουθία συναρτήσεων x_n συγκλίνει στην x ως προς την d τότε θα συγκλίνει και κατά σημείο. Το αντίστροφο βέβαια δεν ισχύει και δίνουμε αμέσως ενα παράδειγμα που θα μας χρειαστεί στην συνέχεια :

$$z_n(t) = ntI_{[0,\frac{1}{n}]}(t) + (2-nt)I_{(\frac{1}{n},\frac{2}{n}]}(t) \tag{1.2}$$

Η ακολουθία των z_n συγκλίνει κατά σημείο στην μηδενική συνάρτηση αλλά $d(z_n,0) = 1$.
Θα δείξουμε ότι χώρος C είναι διαχωρίσιμος. Για κάθε k χωρίζουμε το $[0,1]$ σε k ίσα υποδιαστήματα μήκους $\frac{1}{k}$ το καθένα. Θεωρούμε τώρα D_k να περιέχει όλες τις πολυγωνικές συναρτήσεις που σε κάθε άκρο $\frac{i}{k}$ έχουν ρητή τιμή και στο υποδιάστημα $I_{k,i}$ επεκτείνονται γραμμικά. Προφανώς η $\bigcup_{k=1}^{\infty} D_k$ είναι αριθμήσιμο σύνολο και θα δείξουμε ότι είναι και πυκνό. Έστω $x \in C, \varepsilon > 0$. Οι συναρτήσεις του C είναι ομοιόμορφα συνεχείς επομένως

$$\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists\delta > 0 : |t_1 - t_2| < \delta \Rightarrow |x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon$$

Επιλέγουμε $k \in \mathbb{N} : \frac{1}{k} < \delta$ και τότε $\forall 1 \le i \le k$ και $\forall t \in I_{k,i} \Rightarrow |x(t) - X(\frac{i}{k})| < \varepsilon$.
Επιλέγουμε στοιχείο y του D_k τέτοιο ώστε $\forall 1 \le i \le k \Rightarrow |y(\frac{i}{k}) - x(\frac{i}{k})| < \varepsilon$.
Λόγω της τριγωνικής ανισότητας προκύπτει ότι αν $t \in I_{k,i}$ τότε

$$|y(\tfrac{i}{k}) - x(t)| \le |y(\tfrac{i}{k}) - x(\tfrac{i}{k})| + |x(\tfrac{i}{k}) - x(t)| < 2\varepsilon$$

και ομοίως το ίδιο για το άκρο $\frac{i-1}{k}$. Λόγω γραμμικότητας της y έπεται ότι όλα τα $y(t)$ είναι μέσα σε μια 2ε -περιοχή του εκάστοτε $x(t)$ δηλαδή $d(x,y) < 2\varepsilon$ όπως έπρεπε να δειχθεί.
Θα δείξουμε και ότι ο C είναι πλήρης. Έστω x_n μια d-βασική ακολουθία στον C. Αυτό σημαίνει ότι $\forall\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : d(x_n, x_m) < \varepsilon, \forall n > m \ge n_0$. Το οποίο με τη σειρά του σημαίνει ότι $\forall t \in [0,1]$ η ακολουθία $x_n(t)$ είναι βασική στο $\mathbb{R}$ και άρα θα έχει ένα όριο $x(t)$. Επειδή $|x_n(t) - x_m(t)| \le d(x_n, x_m), \forall t \in [0,1]$ μπορούμε να αφήσουμε το $m \to \infty$, οπότε βλέπουμε ότι η x_n συγκλίνει ομοιόμορφα στην x η οποία μάλιστα θα είναι και συνεχής ως ομοιόμορφο όριο συνεχών.
Από το θεώρημα 1.3 λοιπόν έπεται ότι κάθε μέτρο πιθανότητας στον $(C, \mathcal{C})$ είναι tight, όπου $\mathcal{C} = \mathcal{B}(C)$.
Για αριθμούς $0 \le t_1 < \ldots < t_k \le 1$ ορίζουμε την προβολή $\pi_{t_1 t_2 \ldots t_k} : C \to \mathbb{R}^k$ με $\pi_{t_1 t_2 \ldots t_k}(x) = (x(t_1), x(t_2), \ldots, x(t_k))$ και τα finite-dimensional sets του C ως :

$$\mathcal{C}_f = \left\{\pi^{-1}_{t_1\ldots t_k}(H) : k \in \mathbb{N}, 0 \le t_1 < \ldots < t_k \le 1, H \in \mathcal{R}^k\right\}$$

Η κλάση $\mathcal{C}_f$ είναι π-σύστημα. Πράγματι, μπορούμε και εδώ, όπως και πριν, να 'μεγαλώσουμε' το σύνολο των δεικτών μιας προβολής. Ενδεικτικά έστω ότι έχουμε

δύο δείκτες t_1, t_2 και θέλουμε να προσθέσουμε έναν τρίτο ενδιάμεσά τους t_1, t_3, t_2. Μπορούμε να ορίσουμε την συνάρτηση $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ με $\phi(x, y, z) = (x, z)$ οπότε $\pi_{t_1 t_2} = \phi \circ \pi_{t_1 t_3 t_2}$ και έτσι $\pi_{t_1 t_2}^{-1}(H) = \pi_{t_1 t_3 t_2}^{-1} \circ \phi^{-1}(H)$ και φυσικά $\phi^{-1}(H) \in \mathcal{R}^3$, αν $H \in \mathcal{R}^2$.
Τώρα, για να δείξουμε ότι είναι separating class καταρχήν βλέπουμε ότι λόγω συνέχειας των προβολών ισχύει $\mathcal{C}_f \subseteq \mathcal{C}$ και άρα $\sigma(\mathcal{C}_f) \subseteq \mathcal{C}$. Για το αντίστροφο, βλέπουμε ότι

$$\forall x \in C, \forall \varepsilon > 0, \overline{B}(x, \varepsilon) = \bigcap_{t \in [0,1]} \{y \in C : |y(t) - x(t)| \leq \varepsilon\}$$

Η παραπάνω τομή, λόγω συνέχειας των εμπλεκόμενων συναρτήσεων, μπορεί να περιοριστεί στους ρητούς :

$$\overline{B}(x, \varepsilon) = \bigcap_{r \in [0,1] \cap \mathbb{Q}} \{y \in C : |y(r) - x(r)| \leq \varepsilon\}.$$

Τα σύνολα μέσα στην τομή είναι οι $\pi_r^{-1} \{(x(r) - \varepsilon, x(r) + \varepsilon)\}$ δηλαδή ανήκουν στην κλάση $\mathcal{C}_f$ επομένως η $\sigma(\mathcal{C}_F)$ περιέχει όλες τις ανοιχτές σφαίρες. Επειδή δείξαμε ότι ο C είναι διαχωρίσιμος μετρικός χώρος, θα είναι και δεύτερος αριθμήσιμος και άρα κάθε ανοιχτό σύνολο γράφεται ως αριθμήσιμη ένωση ανοιχτών σφαιρών. Δηλαδή η $\sigma(\mathcal{C}_f)$ περιέχει τα ανοιχτά και συνεπώς $\sigma(\mathcal{C}_f) \supseteq \mathcal{C}$. Επειδή η $\mathcal{C}_f$ είναι και π-σύστημα, είναι separating class.

Στο επόμενο παράδειγμα θα κάνουμε μια νύξη για την σ-άλγεβρα που παράγεται από τις ανοικτές σφαίρες την οποία συμβολίζουμε με $\mathcal{S}_0$. Στην περίπτωση που ο S είναι διαχωρίσιμος μετρικός χώρος, θα είναι και δεύτερος αριθμήσιμος οπότε η $\mathcal{S}_0$ ισούται με την $\mathcal{S}$. Στο επόμενο παράδειγμα θα δούμε ότι στη μη διαχωρίσιμη περίπτωση ενδέχεται να είναι $\mathcal{S}_0 \subsetneq \mathcal{S}$.

Παράδειγμα 1.4 : Έστω S να είναι ένα υπεραριθμήσιμο σύνολο με τη διακριτή μετρική. Ο S είναι πλήρης αλλά δεν είναι διαχωρίσιμος (ειδάλλως θα έπρεπε το αριθμήσιμο πυκνό D να περιέχει όλον τον S). Μπορεί εύκολα να δειχθεί ότι :

$$\mathcal{S}_0 = \{A \subseteq S : A \text{ αριθμήσιμο ή } S \setminus A \text{ αριθμήσιμο }\}$$

Εδώ όμως κάθε σύνολο είναι ανοικτό (διότι οι σφαίρες κέντρου x και ακτίνας π.χ. $\frac{1}{2}$ είναι το μονοσύνολο x) και άρα $\mathcal{S} = 2^S$, οπότε $\mathcal{S}_0 \subsetneq \mathcal{S}$.

Τελειώνοντας την πρώτη ενότητα θέλουμε να αναφέρουμε ένα Λήμμα το οποίο θα μας χρησιμεύσει στη συνέχεια :

Λήμμα : Έστω ένα μέτρο πιθανότητας P ορισμένο σε μια σ-άλγεβρα $\mathcal{F}$. Τότε δεν μπορεί να υπάρχει μια υπεραριθμήσιμη συλλογή από ξένα ανά δύο σύνολα της $\mathcal{F}$ με γνήσια θετικό P-μέτρο.(Το Λήμμα ισχύει γενικότερα για σ-πεπερασμένα μέτρα).
Απόδειξη: Έστω $\Theta = \{\theta : B_\theta \in \mathcal{F}, P(B_\theta) > 0 \ , B_{\theta_i} \cap B_{\theta_j} = \emptyset, \forall \theta_i \neq \theta_j\}$ και έστω ένα $\varepsilon > 0$. Αν $\theta_1, \ldots, \theta_n$ είναι διακεκριμένοι δείκτες ώστε $P(B_{\theta_i}) > \varepsilon$ και $\theta_i \in \Theta, \forall i = 1, \ldots, n$, τότε $1 \geq P(\bigcup_{i=1}^n B_{\theta_i}) = \sum_{i=1}^n P(B_{\theta_i}) > n\varepsilon$ και συνεπώς

το σύνολο $A_\varepsilon = \{\theta \in \Theta : P(B_\theta) > \varepsilon\}$ είναι πεπερασμένο. Το Θ όμως γράφεται σαν

$$\Theta = \bigcup_{r \in \mathbb{Q} \cap [0,1]} A_\varepsilon$$

δηλαδή είναι αριθμήσιμο.

Ενότητα 2 : Χαρακτηρισμός της ασθενούς σύγκλισης

Στα προηγούμενα ορίσαμε την ασθενή σύγκλιση λέγοντας ότι $P_n \Rightarrow P$ αν ισχύει $P_n f \xrightarrow{n\to\infty} Pf$ για κάθε $f : S \to \mathbb{R}$ συνεχή και φραγμένη. Επειδή δείξαμε στο θεώρημα ότι τα ολοκληρώματα Pf καθορίζουν πλήρως το μέτρο P έπεται άμεσα η μοναδικότητα του ορίου της ασθενούς σύγκλισης.Ξεκινάμε με μερικά παραδείγματα για να αποσαφηνιστεί κάπως η ιδέα της ασθενούς σύγκλισης :

Παράδειγμα 2.1 : Σε τυχαίο μετρικό χώρο S ορίζουμε το μέτρο Dirac στο x με $\delta_x(A) = I_A(x), \forall A \in \mathcal{S} = \mathcal{B}(S)$. Εαν $x_n \xrightarrow{\rho} x_0$ τότε για f συνεχή, πραγματική έπεται $f(x_n) \xrightarrow{|\cdot|} f(x_0)$, δηλαδή $\delta_{x_n} f = f(x_n) \xrightarrow{|\cdot|} \delta_{x_0} f = f(x_0)$ και άρα $\delta_{x_n} \Rightarrow \delta_{x_0}$. Θα δείξουμε και το αντίστροφο τώρα , δηλαδή αν $\delta_{x_n} \Rightarrow \delta x_0$ τότε $x_n \xrightarrow{\rho} x_0$. Πράγματι ας υποθέσουμε ότι $x_n \nrightarrow x_0$. Τότε $\exists \varepsilon > 0$ ώστε $\rho(x_n, x_0) > \varepsilon$ για άπειρα n. Αν θεωρήσουμε $F = \{x_0\}$ και

$$f(x) = \max\left\{0, 1 - \frac{\rho(x,F)}{\varepsilon}\right\}$$

τότε η f είναι συνεχής και φραγμένη (επειδή το F είναι κλειστό, ως μονοσύνολο) και $f(x_0) = 1, f(x_n) = 1$ για άπειρα n. Άρα $f(x_n) \nrightarrow f(x_0)$ δηλαδή $\delta_{x_n} \not\Rightarrow \delta_{x_0}$, άτοπο. Τελικά $x_n \xrightarrow{\rho} x_0 \iff \delta_{x_n} \Rightarrow \delta_{x_0}$.

Παράδειγμα 2.2 : Θεωρούμε σαν χώρο S να είναι το διάστημα $[0,1]$ με τη συνήθη μετρική και μέσα σε αυτό , $\forall n \in \mathbb{N}$ παίρνουμε r_n το πλήθος σημεία $x_{n,k} : 0 \le k < r_n$ με τέτοιο τρόπο ώστε αυτά να είναι ασυμπτωτικώς ομοιόμορφα κατανεμημένα υπό την έννοια να ισχύει το εξής :

$$\frac{\#\{k : x_{n,k} \in J\}}{r_n} \xrightarrow{n\to\infty} |J|, \ \forall J : \text{υποδιάστημα του } [0,1] \tag{2.1}$$

Ορίζουμε μια ακολουθία μέτρων πιθανότητας στο $[0,1]$ με

$$P_n(x_{n,k}) = \tfrac{1}{r_n}, \ \forall k = 0, 1 \ldots, r_n.$$

Θα αποδείξουμε ότι $P_n \Rightarrow P$, όπου P είναι το μέτρο Lebesgue περιορισμένο στο $[0,1]$. Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής (και προφανώς φραγμένη). Η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη επομένως $\forall \varepsilon > 0$ υπάρχει μια διαμέριση $\widetilde{P}$ του $[0,1]$ σε υποδιαστήματα J_i ώστε :

$$U(f,\widetilde{P}) - \int_{[0,1]} f(x)\, d\lambda(x) = \sum_i v_i |J_i| - Pf < \varepsilon$$

$$\int_{[0,1]} f(x)\, d\lambda(x) - L(f,\widetilde{P}) = Pf - \sum_i u_i |J_i| < \varepsilon \ ,$$

όπου $v_i = \sup\{f(x) : x \in J_i\}, u_i = \inf\{f(x) : x \in J_i\}$. Όμως :

$$P_n f = \sum_{k=1}^{r_n} \frac{f(x_{n,k})}{r_n} \leq \sum_i \frac{v_i \#\{k : x_{n,k} \in J_i\}}{r_n} \xrightarrow{n} \sum_i v_i |J_i| = U(f, \widetilde{P}) \leq Pf + \varepsilon$$

και αντίστοιχα το κάτω φράγμα :

$$P_n f \geq Pf + \varepsilon.$$

Συνεπώς $P_n f \xrightarrow{n} Pf$ και άρα $P_n \Rightarrow P$.
Σαν μια ειδική περίπτωση μπορούμε να πάρουμε σαν $r_n = 10^n, x_{n,k} = \frac{k}{10^n}, 0 \leq k < r_n$. Τα σημεία είναι ασυμπτωτικώς ομοιόμορφα κατανεμημένα επειδή για $J = [a, b]$ τα k εκείνα για τα οποία τα σημεία $x_{n,k}$ ανήκουν στο J θα πρέπει να ικανοποιούν την $\lfloor a10^n \rfloor \leq k \leq \lfloor b10^n \rfloor$ και παίρνοντας όρια, το εν λόγω πλήθος των k διαιρεμένο με r_n συγκλίνει στο $b - a$.

Στο σημείο αυτό είμαστε έτοιμοι να αποδείξουμε το πολύ βασικό θεώρημα του Portmanteau το οποίο δίνει ισοδύναμες συνθήκες για το πότε μια ακολουθία μέτρων πιθανότητας P_n συγκλίνει ασθενώς σε ένα μέτρο P. Από εδώ και στο εξής θα καλούμε ένα σύνολο $A \in \mathcal{S}$ ως P-continuity set εαν ισχύει $P(\partial A) = 0$.

Θεώρημα 2.1 : *Τα εξής είναι ισοδύναμα:*

i) $P_n \Rightarrow P$

ii) $P_n f \to Pf$ *για κάθε φραγμένη, ομοιόμορφα συνεχή, πραγματική* f

iii) $\limsup_n P_n(F) \leq P(F), \forall F$: *κλειστό*

iv) $\liminf_n P_n(G) \geq P(G), \forall G$: *ανοικτό*

v) $P_n(A) \to P(A), \forall A$: *P-continuity set*

Για να δούμε τη σημασία αυτού του θεωρήματος, ας επιστρέψουμε στο παράδειγμα 2.1 και ας υποθέσουμε ότι $x_n \to x_0$ (οπότε $\delta_{x_n} \Rightarrow \delta_{x_0}$) και επιπλέον ότι $x_n \neq x_0, \forall n$. Για το κλειστό σύνολο $F = \{x_0\}$ και για το ανοικτό σύνολο $G = S \setminus \{x_0\}$ οι ανισότητες iii) , iv) είναι γνήσιες. Ακόμη, αν $A = \{x_0\}$ τότε προφανώς $\delta_{x_n}(A) = 0 \nrightarrow \delta_{x_0}(A) = 1$, πράγμα που δεν δημιουργεί αντίφαση με την συνθήκη v) μιας και το A δεν είναι δ_{x_0}-continuity set.

Επίσης, ας υποθέσουμε ότι στο παράδειγμα 2.2 θεωρούμε το σύνολο $A = \{x_{n,k} : n \in \mathbb{N},\ k = 0, 1 \ldots, r_n\}$. Τότε το σύνολο A είναι αριθμήσιμο και έτσι $P(A) = \lambda(A) = 0$ ενώ $P_n(A) = 1\ \forall n$, οπότε $P_n(A) \nrightarrow P(A)$. Πάλι δεν έχουμε πρόβλημα διότι $\partial A = S$ και $P(S) = 1$. Λόγω κανονικότητας του μέτρου Lebesgue υπάρχει ένα ανοικτό $G : S \supseteq G \supseteq A$ με $P(G) < \frac{1}{2}$ και για αυτό το G η ανισότητα της iv) είναι γνήσια.

Απόδειξη: *i)* $\implies$ *ii)* είναι άμεσο, διότι κάθε ομοιόμορφα συνεχής f είναι και συνεχής.
ii) $\implies$ *iii)* Θεωρούμε ένα F : κλειστό και την φραγμένη και ομοιόμορφα συνεχή συνάρτηση του θεωρήματος 1.2 δηλαδή :

$$f(x) = \max\left\{0, 1 - \frac{\rho(x,F)}{\varepsilon}\right\}. \tag{2.2}$$

Όπως και στο 1.2 έχουμε τις ανισότητες :

$$\limsup_n P_n(F) \le \limsup_n P_n f = Pf \le P(F^\varepsilon)$$

Αφού το F : κλειστό , αφήνοντας το $\varepsilon \searrow 0$ προκύπτει η συνθήκη iii).
$iii) \iff iv)$ προκύπτει άμεσα παίρνοντας συμπληρώματα.
$iii) + iv) \implies v)$ Αν $\overline{A}$, A° είναι η κλειστότητα και το εσωτερικό του A αντίστοιχα τότε λόγω iii) , iv) έπεται :

$$P(\overline{A}) \ge \limsup_n P_n(\overline{A}) \ge \liminf_n P_n(A) \ge \liminf_n P_n(A^\circ) \ge P(A^\circ). \tag{2.3}$$

Αν το σύνολο A έχει $P(\partial A) = 0$ τότε $P(\overline{A}) = P(A^\circ) = P(A)$ οπότε προκύπτει $P_n(A) \to P(A)$.
$v) \implies i)$ Έστω f συνεχής και φραγμένη. Τότε $|f(x)| \le M, \forall x \in S$ και συνεπώς για να αποδείξουμε ότι $\int_S f\,dP_n \to \int_S f\,dP$ αρκεί να δείξουμε ότι $\int_S \frac{f}{M}\,dP_n \to \int_S \frac{f}{M}\,dP$. Συνεπώς μπορούμε να υποθέσουμε εξαρχής ότι $0 \le f \le 1$. Από το θεώρημα του Fubini είναι :

$$Pf = \int_{[0,\infty]} P[f > t]\,d\lambda(t) = \int_{[0,1]} P[f > t]\,d\lambda(t)$$

και το ίδιο για την $P_n f$. Επειδή η f συνεχής έπεται ότι $\partial[f > t] \subseteq [f = t]$. Από το βασικό Λήμμα που αποδείξαμε στο τέλος του πρώτου κεφαλαίου , επειδή η συλλογή $\{[f = t] : t \in \mathbb{R}\}$ είναι υπεραριθμήσιμη και αποτελείται απο ξένα ανά δύο σύνολα , τότε $P([f = t]) > 0$ ισχύει για αριθμήσιμα το πολύ το πλήθος t. Έτσι ισχύει $P(\partial[f = t]) = 0$ εκτός ίσως απο αριθμήσιμα το πλήθος t. Θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα φραγμένης σύγκλισης για να δείξουμε ότι $P_n f \to Pf$. Πράγματι, οι συναρτήσεις $G_n(t) = P_n[f > t]$, $G(t) = P[f > t]$ είναι φθίνουσες ως προς t άρα είναι όλες Borel μετρήσιμες. Επίσης $G_n(t) \xrightarrow{n} G(t)$ λ-σχεδόν για όλα τα $t \in [0,1]$ λόγω της v) και του γεγονότος ότι τα $[f > t]$ είναι P-continuity sets λ-σχεδόν για όλα τα t. Προφανώς $0 \le G_n(t) \le 1, \forall t$ και από θεώρημα φραγμένης σύγκλισης προκύπτει :

$$\int_{[0,1]} G_n(t)\,d\lambda(t) \xrightarrow{n} \int_{[0,1]} G(t)\,d\lambda(t)$$

δηλαδή $P_n f \to Pf$.

Συνήθως για να αποδείξουμε την ασθενή σύγκλιση χρειάζεται να δείξουμε ότι $P_n(A) \to P(A)$ για όλα τα σύνολα A που ανήκουν σε κάποια 'καλή' υποκλάση της $\mathcal{S}$. Τα επόμενα θεωρήματα δίνουν δύο τέτοιες υποκλάσεις.
Θεώρημα 2.2 : *Υποθέτουμε ότι η κλάση $\mathcal{A}_P$ είναι i) π-σύστημα και ii) ότι κάθε ανοικτό σύνολο γράφεται ως αριθμήσιμη ένωση στοιχείων της $\mathcal{A}_P$. Αν $P_n(A) \to P(A)$, $\forall A \in \mathcal{A}_P$ τότε $P_n \Rightarrow P$.*
Απόδειξη : Για G ανοικτό υπάρχει ακολουθία $\{A_i\} \in \mathcal{A}_P$ με $G = \bigcup_{i=1}^\infty A_i$. Επειδή $\bigcup_{i=1}^r A_i \nearrow G$, $\forall \varepsilon > 0, \exists r : P(\bigcup_{i=1}^r A_i) > P(G) - \varepsilon$.

Τώρα ισχύει ότι :

$$P_n(\bigcup_{i=1}^{r} A_i) = \sum_i P_n(A_i) - \sum_{i\neq j} P_n(A_i \cap A_j) + \ldots + (-1)^{r-1} P_n(A_1 \cap \ldots \cap A_r)$$

και επειδή η $\mathcal{A}_P$ είναι π-σύστημα, κάθε ένα από τα αθροίσματα συγκλίνει στο αντίστοιχο με P όπου P_n , το οποίο ισούται με $P(\bigcup_{i=1}^{r} A_i)$. Άρα :

$$\liminf_n P_n(G) \geq \liminf_n P_n(\bigcup_{i=1}^{r} A_i) = P(\bigcup_{i=1}^{r} A_i) > P(G) - \varepsilon$$

Επειδή ε:τυχόν έπεται ότι $P_n \Rightarrow P$.

Θεώρημα 2.3 : *Έστω ότι ο S είναι διαχωρίσιμος και μια κλάση $\mathcal{A}_P$ για την οποία ισχύει ότι είναι i) π-σύστημα και ii) $\forall x \in S,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists A \in \mathcal{A}_P : x \in A^\circ \subseteq A \subseteq B(x,\varepsilon)$. Αν $P_n(A) \to P(A)\ \forall A \in \mathcal{A}_P$ τότε $P_n \Rightarrow P$.*
Απόδειξη : Έστω G : ανοικτό σύνολο. Αν $x \in G$ τότε $\exists \varepsilon > 0 : B(x,\varepsilon) \subseteq G$.

Επομένως από την υπόθεση $\exists A_x \in \mathcal{A}_P : x \in A_x^\circ \subseteq A_x \subseteq G$, δηλαδή το $\{A_x^\circ : x \in G\}$ είναι ανοικτό κάλυμμα του G. Το G είναι υποσύνολο του διαχωρίσιμου S άρα περιορίζοντας την μετρική στο G, το G γίνεται διαχωρίσιμος μετρικός χώρος και άρα χώρος Lindelof. Συνεπώς κάθε ανοικτό κάλυμμα του G έχει αριθμήσιμο υποκάλυμμα. Δηλαδή $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_{x_i}^\circ$ και επειδή $A_x^\circ \subseteq A_x \subseteq G$ έχουμε $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_x$. Έτσι ικανοποιείται η υπόθεση του θεωρήματος 2.2 .

Μια υποκλάση $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{S}$ θα λέγεται convergence-determining class αν για κάθε μέτρο P και για κάθε ακολουθία μέτρων P_n ισχύει η συνεπαγωγή :

$$P_n(A) \to P(A), \forall A \in \mathcal{A} \text{ με } P(\partial A) = 0 \implies P_n \Rightarrow P\ .$$

Για να δείξουμε ότι μια κλάση $\mathcal{A}$ είναι convergence-determining class αρκεί να δείξουμε ότι η κλάση $\mathcal{A}_P$ των P-continuity sets ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος 2.2 ή του 2.3, οποιοδήποτε κι αν είναι το P. Για δοθείσα $\mathcal{A}$ έστω :

$$\mathcal{A}_{x,\varepsilon} = \{A \in \mathcal{A} : x \in A^\circ \subseteq A \subseteq B(x,\varepsilon)\}\ ,\ \partial\mathcal{A}_{x,\varepsilon} = \{\partial A : A \in \mathcal{A}_{x,\varepsilon}\}.$$

Εαν η συλλογή $\partial\mathcal{A}_{x,\varepsilon}$ περιέχει υπεραριθμήσιμα το πλήθος ξένα ανά δύο σύνολα, τότε λόγω του λήμματος του πρώτου κεφαλαίου , τουλάχιστον ένα από αυτά θα πρέπει να έχει P-μέτρο 0 οπότε έχουμε το :

Θεώρημα 2.4 : *Ας υποθέσουμε ότι i) η κλάση $\mathcal{A}$ είναι π-σύστημα και ii) ο S είναι διαχωρίσιμος και ότι $\forall x \in S, \forall \varepsilon > 0$ η κλάση $\partial\mathcal{A}_{x,\varepsilon}$ είτε περιέχει το $\emptyset$ είτε περιέχει υπεραριθμήσιμα το πλήθος ξένα ανά δύο σύνολα. Τότε η κλάση $\mathcal{A}$ είναι convergence determining class .*
Απόδειξη : Πρέπει να αποδείξουμε ότι για ένα τυχόν P η κλάση

$$\mathcal{A}_P = \{A \in \mathcal{A} : P(\partial A) = 0\ \}$$

ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος 2.3. Έστω λοιπόν τυχόν P. Επειδή απο την Τοπολογία είναι γνωστό ότι

$$\partial(A \cap B) \subseteq (\partial A) \cup (\partial B) \tag{2.4}$$

προκύπτει άμεσα ότι η $\mathcal{A}_P$ είναι π-σύστημα. Τώρα έστω ότι ισχύει

$$P_n(A) \to P(A), \forall A \in \mathcal{A} \text{ με } P(\partial A) = 0.$$

Πρέπει να αποδείξουμε ότι $P_n \Rightarrow P$. Ουσιαστικά μένει να αποδειχθεί το ii) του θεωρήματος 2.3. Αν για κάποια x, ε η $\partial A_{x,\varepsilon}$ περιέχει το $\emptyset$ αυτό σημαίνει ότι $\exists A \in \mathcal{A}_{x,\varepsilon} : \partial A = \emptyset$. Δηλαδή $A \in \mathcal{A}_P$ και $x \in A^\circ \subseteq A \subseteq B(x, \varepsilon)$. Εαν δεν περιέχει το $\emptyset$ τότε θα περιέχει υπεραριθμήσιμα το πλήθος και ξένα ανά δύο σύνολα και σνεπώς σίγουρα θα υπάρχει κάποιο σύνολο $A \in \mathcal{A}_{x,\varepsilon} : P(\partial A) = 0$. Δηλαδή $A \in \mathcal{A}_P$ και $x \in A^\circ \subseteq A \subseteq B(x, \varepsilon)$. Σε κάθε περίπτωση ικανοποιείται το ii) του θεωρήματος 2.3 και έτσι $P_n \Rightarrow P$, δηλαδή η $\mathcal{A}$ είναι μια convergence determining class.

Παράδειγμα 2.3: Στον $\mathbb{R}^k$ η κλάση των ορθογωνίων

$$\mathcal{A} = \{(a_1, b_1] \times (a_2, b_2] \times \ldots \times (a_k, b_k] : a_i, b_i \in \mathbb{R}\}$$

είναι convergence determining class διότι ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος 2.4. Επίσης η κλάση :

$$Q = \{Q_x = (-\infty, x_1] \times \ldots \times (-\infty, x_k] : x = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k\}$$

είναι convergence determining class. Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι

$$P_n(Q_x) \to P(Q_x), \forall x : P(\partial Q_x) = 0.$$

Για $i = 1, \ldots, k$ θεωρούμε τα σύνολα $E_i = \{t \in \mathbb{R} : P[y : y_i = t] > 0\}$. Κάθε E_i είναι αριθμήσιμο σύνολο και άρα και η $\cup_i E_i$. Επομένως το σύνολο $D = (\cup_i E_i)^c$ είναι πυκνό στο $\mathbb{R}$, ως συμπλήρωμα αριθμήσιμου. Έστω τώρα $\mathcal{A}_P$ να είναι η κλάση των ορθογωνίων για τα οποία οι συντεταγμένες από κάθε κορυφή ανήκουν στο D. Η $\mathcal{A}_P$ είναι π-σύστημα. Αν $A \in \mathcal{A}_P$ και αν x: κορυφή του A τότε $\partial Q_x \subseteq \cup_i [y : y_i = x_i]$ και από τον τρόπο που ορίστηκαν τα E_i προκύπτει ότι το Q_x είναι P-continuity set. Με τη βοήθεια της αρχής εγκλεισμού-αποκλεισμού μπορούμε να σπάσουμε το $P_n(A)$ σε άθροισμα απο $P_n(Q_{x^{(i)}})$ όπου όλες οι κορυφές $x_{(i)}$ ανήκουν στο D. Έτσι λόγω της υπόθεσης ότι $P_n(Q_x) \to P(Q_x)$ αν x: τέτοιο ώστε $P(\partial Q_x) = 0$, προκύπτει ότι $P_n(A) \to P(A)$. Επειδή τώρα το D είναι πυκνό έπεται πως η κλάση $\mathcal{A}_P$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του 2.3 .

Παράδειγμα 2.4: Τώρα θα αποδείξουμε ότι η κλάση $\mathcal{R}_f^\infty$ των finite-dimensional sets είναι και convergence-determining class. Καταρχήν είναι π-σύστημα και ο $\mathbb{R}^\infty$ είναι διαχωρίσιμος επομένως θα δούμε αν ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος 2.4. Έστω $x \in \mathbb{R}^\infty$ και $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $k \in \mathbb{N}$ με $\frac{1}{2^k} < \frac{\varepsilon}{2}$ και $\eta : 0 < \eta < \frac{\varepsilon}{2}$. Τώρα έστω τα εξής finite-dimensional sets :

$$A_\eta = \pi_k^{-1}\{\prod_{i=1}^{k}(x_i - \eta, x_i + \eta)\} = \{y \in \mathbb{R}^\infty : |y_i - x_i| < \eta, \forall i \leq k\}$$

Τότε προφανώς $x \in A_\eta^\circ = A_\eta \subseteq B(x,\varepsilon)$ και επειδή το σύνορο ενός A_η, ∂A_η, αποτελείται απο εκείνα τα y με $|y_i - x_i| \leq \eta, \forall i \leq k$ και ισότητα για κάποια i , βλέπουμε ότι η συλλογή $\{\partial A_\eta : 0 < \eta < \frac{\varepsilon}{2}\}$ περιέχει υπεραριθμήσιμα το πλήθος ξένα ανά δύο σύνολα. Έτσι εφαρμόζεται το θεώρημα 2.4 και άρα

$$P_n \Rightarrow P \iff P_n(A) \to P(A), \forall A \in \mathcal{R}_f^\infty \text{ με } P(\partial A) = 0$$

Παράδειγμα 2.5: Η κλάση $\mathcal{C}_f$ των finite-dimensional sets του χώρου $C[0,1]$ *δεν* είναι convergence-determining class. Πράγματι, αν θεωρήσουμε την ακολουθία z_n όπως ορίστηκε στη σχέση (1.2) και θεωρήσουμε $P_n = \delta_{z_n}, P = \delta_0$, τότε επειδή $z_n \nrightarrow 0$ ομοιόμορφα, θα είναι $P_n \not\Rightarrow P$. Έστω $k \in \mathbb{N}$ και $H \in \mathcal{R}^k$ και $t_1, \ldots, t_k \in [0,1]$. Επιλέγουμε $n \in \mathbb{N} : \frac{2}{n} < \min\{t_i : t_i \neq 0\}$ και τότε :

$$\pi_{t_1 \ldots t_k}(z_n) = (0, 0, \ldots, 0) = \pi_{t_1, \ldots t_k}(0)$$

και συνεπώς σε κάθε περίπτωση $P_n(\pi^{-1}_{t_1 \ldots t_k}(H)) = P(\pi^{-1}_{t_1 \ldots t_k}(H)), \forall H \in \mathcal{R}^k$.Άρα $P_n(A) \to P(A), \forall A \in \mathcal{C}_f$ (ακόμα και όταν $P(\partial A) > 0$), αλλά $P_n = \delta_{z_n} \not\Rightarrow P = \delta_0$.

Τώρα θα αναφέρουμε ένα θεώρημα που είναι πολύ εύκολο στην απόδειξη ωστόσο θα μας βοηθήσει σε επόμενες ενότητες να αποδείξουμε ασθενή σύγκλιση :

Θεώρημα 2.5: *Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να ισχύει $P_n \Rightarrow P$ είναι κάθε υπακολουθία $\{P_{n_i}\}$ να περιέχει μια περαιτέρω υπακολουθία $\{P_{n_{i_m}}\}$ η οποία να συγκλίνει ασθενώς στο P, δηλαδή $P_{n_{i_m}} \Rightarrow P$.*

Απόδειξη: Το αναγκαίο είναι άμεσο. Για το ικανό, ας υποθέσουμε ότι $P_n \not\Rightarrow P$. Τότε θα υπάρχει κάποια συνεχής και φραγμένη πραγματική f ώστε $P_n f \nrightarrow Pf$, δηλαδή $\exists\ \varepsilon > 0$ και υπακολουθία $\{P_{n_i} f\} : |P_{n_i} f - Pf| > \varepsilon, \forall i$ και έτσι για την υπακολουθία $\{P_{n_i}\}$ καμία υπο-υπακολουθία δεν θα συγκλίνει ασθενώς, άτοπο.

Το Θεώρημα Απεικόνισης

Στη συνέχεια θα αναφέρουμε ενα πολύ σημαντικό θεώρημα, το επονομαζόμενο Θεώρημα Απεικόνισης (Mapping Theorem, όπως θα το σημειώνουμε από εδώ και στο εξής). Υποθέτουμε πως έχουμε μια $h : S \to S'$ όπου ο χώρος S' έχει την μετρική ρ' και την $\mathcal{B}(S') = \mathcal{S}'$. Αν ισχύει ότι $h^{-1}(\mathcal{S}') \subseteq \mathcal{S}$ θα λέμε ότι η h είναι $\mathcal{S} \backslash \mathcal{S}'$ μετρήσιμη και γνωρίζουμε ότι για δεδομένο μέτρο Borel P στον S επάγεται ένα μέτρο Borel στον S' με $P \circ h^{-1}(A) = P(h^{-1}(A))$. Παρατηρούμε ότι αν η h είναι συνεχής τότε ισχύει :

$$P_n \Rightarrow P \implies P_n \circ h^{-1} \Rightarrow P \circ h^{-1}.$$

Πράγματι, αν η f είναι πραγματική, συνεχής (στον S') και φραγμένη τότε η $f \circ h$ είναι συνεχής, πραγματική και φραγμένη στον S επομένως :

$$P_n \Rightarrow P \implies \int_S f(h(x))\, dP_n(x) = \int_{S'} f(y)\, d(P_n \circ h^{-1})(y) \to$$
$$\int_S f(h(x))\, dP(x) = \int_{S'} f(y)\, d(P \circ h^{-1})(y).$$

Παράδειγμα 2.6 : Εαν $P_n \Rightarrow P$ στον $\mathbb{R}^\infty$ τότε $P_n \circ \pi_k^{-1} \Rightarrow P \circ \pi_k^{-1}$ στον $\mathbb{R}^k$ για κάθε k, επειδή οι προβολές είναι συνεχείς συναρτήσεις. Θα προσπαθήσουμε τώρα να δείξουμε και την αντίστροφη συνεπαγωγή. Επειδή η π_k είναι συνεχής μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι $\partial\pi_k^{-1}(H) \subseteq \pi_k^{-1}(\partial H)$ (χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι για f : συνεχή ισχύει $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{B})$ και $f^{-1}(B^\circ) \subseteq (f^{-1}(B))^\circ$). Τώρα για τον αντίστροφο εγκλεισμό, αν $x \in \pi_k^{-1}(\partial H)$, τότε υπάρχουν δύο ακολουθίες διανυσμάτων στον $\mathbb{R}^k$, $a^{(n)}, b^{(n)}$, με $a^{(n)} \in H,\ b^{(n)} \in H^c$ και

$$a^{(n)} \xrightarrow{n} \pi_k(x),\ b^{(n)} \xrightarrow{n} \pi_k(x).$$

Τα στοιχεία $y^{(n)} = (a_1^{(n)}, \ldots, a_k^{(n)}, x_{k+1}, \ldots)$ του $\mathbb{R}^\infty$ ανήκουν στο $\pi_k^{-1}(H)$ και $\rho_\infty(y^{(n)}, x) \xrightarrow{n} 0$, διότι $a_i^{(n)} \xrightarrow{n} x_i, \forall i = 1, \ldots, k$. Επίσης τα στοιχεία $z^{(n)} = (b_1^{(n)}, \ldots, b_k^{(n)}, x_{k+1}, \ldots)$ του $\mathbb{R}^\infty$ ανήκουν στο $(\pi_k^{-1}(H))^c$ και $\rho_\infty(z^{(n)}, x) \xrightarrow{n} 0$ διότι $b_i^{(n)} \xrightarrow{n} x_i, \forall i = 1, \ldots, k$. Άρα προκύπτει ότι $x \in \partial\pi_k^{-1}(H)$ δηλαδή $\partial\pi_k^{-1}(H) = \pi_k^{-1}(\partial H)$.
Τώρα αν $A = \pi_k^{-1}(H)$ είναι ένα P-continuity set έχουμε :

$$0 = P(\partial A) = P(\partial\pi_k^{-1}(H)) = P(\pi_k^{-1}(\partial H)) = P \circ \pi_k^{-1}(\partial H)$$

δηλαδή το H είναι ένα $P \circ \pi_k^{-1}$-continuity set. Αφού όμως υποθέσαμε ότι $P_n \circ \pi_k^{-1} \Rightarrow P \circ \pi_k^{-1}$ τότε και $P_n(A) \to P(A)$ για όλα τα A που είναι P-continuity sets στην $\mathcal{R}_f^\infty$, η οποία επειδή είναι convergence-determining class μας δίνει ότι $P_n \Rightarrow P$. Επομένως :

$$P_n \Rightarrow P(\text{στον } \mathbb{R}^\infty) \iff P_n \circ \pi_k^{-1} \Rightarrow P \circ \pi_k^{-1}, \forall k \ (\text{στον } \mathbb{R}^k)\ .$$

Παράδειγμα 2.7 : Οι προβολές $\pi_{t_1 \ldots t_k} : C \to \mathbb{R}^k$ είναι συνεχείς και επομένως:

$$\{P_n \Rightarrow P\} \implies \{P_n \circ \pi_{t_1 \ldots t_k}^{-1} \Rightarrow P \circ \pi_{t_1 \ldots t_k}^{-1}\ , \forall k \in \mathbb{N} \text{ και } \forall t_1, \ldots, t_k \in [0,1]\}\ .$$

Όπως είδαμε στο Παράδειγμα 2.5 το αντίστροφο δεν ισχύει.

Πριν αποδείξουμε το Mapping Theorem, το οποίο ουσιαστικά κάνει λιγότερο ισχυρή την απαίτηση η h να είναι συνεχής, θα αποδείξουμε το εξής βοηθητικό Λήμμα :

Λήμμα : *Έστω $h : (S, \rho) \to (S', \rho')$ μια συνάρτηση και D_h το σύνολο των σημείων ασυνέχειας της h. Τότε $D_h \in \mathcal{S} = \mathcal{B}(S)$.*

Απόδειξη : Καταρχήν θα χρησιμοποιήσουμε έναν ισοδύναμο ορισμό της συνέχειας μιας συνάρτησης σε ένα σημείο x_0. Εν προκειμένω, η h είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 αν και μόνο αν $\forall \varepsilon > 0, \exists\ \delta > 0$:

$$\text{αν } x, y \in S \text{ και } \rho(x, x_0) < \delta, \rho(y, x_0) < \delta \implies \rho'(h(x), h(y)) < \varepsilon.$$

Συνεπώς ορίζουμε $A_{\varepsilon,\delta}$ να είναι το σύνολο όλων των $x \in S$ για τα οποία υπάρχουν $y, z \in S$ με $\rho(x, y) < \delta, \rho(x, z) < \delta$ αλλά $\rho'(h(y), h(z)) \geq \varepsilon$. Το σύνολο $A_{\varepsilon,\delta}$

είναι ανοικτό. Πράγματι το $A_{\varepsilon,\delta}$ μπορεί να γραφτεί σαν :

$$\bigcup_{\{y,z\in S:\ y\notin h^{-1}\{B_{\rho'}(h(z),\varepsilon)\}\}} \{B_\rho(y,\delta)\cap B_\rho(z,\delta)\}$$

το οποίο είναι ανοικτό σύνολο. Επίσης εύκολα μπορούμε να δούμε ότι ισχύει :

$$D_h = \bigcup_{\{\varepsilon\in\mathbb{Q}\cap(0,\infty)\}} \bigcap_{\{\delta\in\mathbb{Q}\cap(0,\infty)\}} A_{\varepsilon,\delta}$$

το οποίο είναι σύνολο Borel.

Θεώρημα 2.6 (Mapping Theorem) : *Εαν* $P_n \Rightarrow P$ *και* $P(D_h) = 0$ *τότε* $P_n \circ h^{-1} \Rightarrow P \circ h^{-1}$.

Απόδειξη : Έστω F ένα κλειστό υποσύνολο του S' και $x \in \overline{h^{-1}(F)}$. Τότε υπάρχει $\{y_n\}$ με $y_n \to x$ και $h(y_n) \in F$. Αν υποθέσουμε ότι $x \in D_h^c$ τότε $h(y_n) \to h(x)$ δηλαδή $x \in h^{-1}(\overline{F})$. Τελικά $D_h^c \cap \overline{h^{-1}(F)} \subseteq h^{-1}(\overline{F})$ (μια σχέση που ισχύει ακόμα κι αν το F δεν είναι κλειστό). Συνεπώς έχουμε :

$$\limsup_n P_n(h^{-1}(F) \le \limsup_n P_n\overline{h^{-1}(F)} \le P(\overline{h^{-1}(F)}) = P(D_h^c \cap \overline{h^{-1}(F)}) \le P(h^{-1}\overline{F}) = P(h^{-1}(F))\ ,$$

όπου η δεύτερη ανισότητα προκύπτει επειδή $P_n \Rightarrow P$, η πρώτη ισότητα επειδή $P(D_h^c) = 1$ και η δεύτερη ισότητα επειδή το F είναι κλειστό.

Παράδειγμα 2.8 : Έστω F μια συνάρτηση κατανομής στο $\mathbb{R}$ και έστω ϕ η "αντίστροφή " της δηλαδή αν $0 < u < 1, \phi(u) = \inf[x : u \le F(x)]$ και $\phi(0) = \phi(1) = 0$. Είναι γνωστό ότι $\phi(u) \le x \iff u \le F(x)$ επομένως αν $P = \lambda_{|[0,1]}$ είναι ο περιορισμός του μέτρου Lebesque στο $[0,1]$ τότε $P \circ \phi^{-1}(-\infty, x] = P[u : \phi(u) \le x] = P[u : u \le F(x)] = F(x)$. Επειδή η ϕ είναι αύξουσα έχει αριθμήσιμες ασυνέχειες το πολύ δηλαδή $P(D_\phi) = 0$. Συνεπώς αν ισχύει ότι $P_n \Rightarrow P$ τότε θα έχουμε ότι και $P_n \circ \phi^{-1} \Rightarrow P \circ \phi^{-1}$.

Παράδειγμα 2.9 : Έστω $S_0 \in \mathcal{S}$ και θεωρούμε τον S_0 με την σχετική τοπολογία και συνεπώς με την δική του σ-άλγεβρα Borel δηλαδή $\mathcal{S}_0 = \sigma(\mathcal{T}_{S_0})$. Επειδή $\sigma(\mathcal{F} \cap S_0) = \sigma(\mathcal{F}) \cap S_0$ μπορεί εύκολα να δειχτεί ότι $\mathcal{S}_0 = \mathcal{S} \cap S_0$ δηλαδή η Borel σ-άλγεβρα του S_0 αποτελείται από τα $\mathcal{S}$-σύνολα που περιέχονται στο S_0. Υποθέτουμε τώρα ότι έχουμε μέτρα πιθανότητας P_n, P ορισμένα στην $\mathcal{S}$ με $P_n(S_0) = P(S_0) = 1$ και έστω $Q_n = P_n|\mathcal{S}_0, Q = P|\mathcal{S}_0$ να είναι οι περιορισμοί τους στην $\mathcal{S}_0$. Τότε αν $h : S_0 \to S$ είναι η ταυτοτική, βλέπουμε ότι $P_n = Q_n \circ h^{-1}, P = Q \circ h^{-1}$ και επειδή η h είναι συνεχής ,το Mapping Theorem μας δίνει : $Q_n \Rightarrow Q \implies P_n \Rightarrow P$.
Το αντίστροφο ισχύει επίσης. Τα ανοικτά σύνολα στη σχετική τοπολογία του S_0 είναι της μορφής $G \cap S_0$ όπου G: ανοικτό στον S. Όμως $Q_n(G \cap S_0) =$

$P_n(G \cap S_0) = P_n(G)$, διότι $P_n(S_0) = 1$ και ομοίως $Q(G \cap S_0) = Q(G)$. Άρα, αν $P_n \Rightarrow P$ τότε $\liminf_n Q_n(G \cap S_0) = \liminf_n P_n(G) \geq P(G) = Q(G \cap S_0)$ και έτσι $Q_n \Rightarrow Q$, στον $(S_0, \mathcal{S}_0)$.

Χώροι γινόμενο

Είναι γνωστό από την Τοπολογία ότι αν S', S'' είναι δύο μετρικοί χώροι τότε ο χώρος γινόμενο $T = S' \times S''$ είναι διαχωρίσιμος $\iff$ κάθε ένας από τους S', S'' είναι διαχωρίσιμος. Επίσης σε αυτή την περίπτωση για τις σ-άλγεβρες Borel ισχύουν ότι $\mathcal{T} = \mathcal{S}' \times \mathcal{S}''$. Ορίζουμε τις περιθώριες κατανομές ενός μέτρου P στην $\mathcal{T}$ να είναι τα μέτρα P', P'' στην $\mathcal{S}', \mathcal{S}''$ με $P'(A') = P(A' \times S''), P''(A'') = P(S' \times A'')$. Επειδή οι προβολές $\pi' : T \to S', \pi'' : T \to S''$ είναι συνεχείς και επειδή $P' = P \circ (\pi')^{-1}, P'' = P \circ (\pi'')^{-1}$ προκύπτει ότι αν $P_n \Rightarrow P$ (στον T) τότε $P'_n \Rightarrow P'$ (στον S') και $P''_n \Rightarrow P''$ (στον S'').

Το αντίστροφο δεν ισχύει γενικά. Όμως ας θεωρήσουμε το π-σύστημα $\mathcal{A} = \{A' \times A'' : A' \in S', A'' \in S''\}$ και την μετρική $t : T \times T \to \mathbb{R}$ με $t((x', x''), (y', y'')) = \max\{\rho'(x', y'), \rho''(x'', y'')\}$. Τότε οι ανοικτές σφαίρες του χώρου γινόμενο T έχουν τη μορφή:

$$B_t((x', x''), r) = B_{\rho'}(x', r) \times B_{\rho''}(x'', r) \tag{2.5}$$

και έτσι ανήκουν στην κλάση $\mathcal{A}_{(x', x''), r}$. Επειδή τα σύνορα $\partial B_t((x', x''), r)$ είναι ξένα ανά δύο (για τις διάφορες τιμές του $r \in \mathbb{R}^+$) και υπεραριθμήσιμα το πλήθος, βλέπουμε ότι η κλάση $\mathcal{A}$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος 2.4 και επειδή ο T είναι διαχωρίσιμος, έπεται ότι η $\mathcal{A}$ είναι μια convergence-determining class. Αν τώρα θεωρήσουμε $\mathcal{A}_P = \{A \in \mathcal{A} : P'(\partial A') = 0 = P''(\partial A'')\}$, τότε εφαρμόζοντας την σχέση (6) μπορούμε εύκολα να δούμε πως η $\mathcal{A}_P$ είναι π-σύστημα. Ακόμη επειδή :

$$\partial(A' \times A'') \subseteq ((\partial A') \times S'') \bigcup (S' \times (\partial A'')) \tag{2.6}$$

βλέπουμε ότι κάθε στοιχείο της $\mathcal{A}_P$ είναι P-continuity set. Τώρα, οι συλλογές :

$$\{\partial B_{\rho'}(x', r_1) : r_1 > 0\}, \{\partial B_{\rho''}(x'', r_2) : r_2 > 0\}$$

αποτελούνται απο υπεραριθμήσιμα το πλήθος ξένα ανά δύο σύνολα, από το Λήμμα του πρώτου κεφαλαίου τα σύνολα :

$$\{r > 0 : P'(\partial B_{\rho'}(x', r)) > 0\}, \{r > 0 : P''(\partial B_{\rho''}(x'', r)) > 0\}$$

είναι το πολύ αριθμήσιμα και συνεπώς και η ένωσή τους είναι το πολύ αριθμήσιμη, δηλαδή υπάρχει $\tilde{r} > 0$ που δεν ανήκει στην ένωση, δηλαδή για αυτό το $\tilde{r}$ η σφαίρα της μορφής (7) ανήκει στην $\mathcal{A}_P$. Έτσι εφαρμόζεται το θεώρημα 2.3 δηλαδή:
$P_n \Rightarrow P \iff P_n(A) \to P(A), \forall A \in \mathcal{A}_P$. Με βάση όλα αυτά αποδεικνύεται το εξής θεώρημα :

Θεώρημα 2.7 : *i) Εαν ο T είναι διαχωρίσιμος τότε $P_n \Rightarrow P \iff P_n(A' \times A'') \to P(A' \times A'')$ για κάθε P'-continuity set A' και για κάθε P''-continuity set A''.*
ii)Εαν ο T είναι διαχωρίσιμος τότε $P'_n \times P''_n \Rightarrow P' \times P'' \iff P'_n \Rightarrow P', P''_n \Rightarrow P''$.

Ενότητα 3: Σύγκλιση κατά κατανομή

Τυχαία Στοιχεία

Έστω ένας χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ και μετρικός χώρος $(S, \mathcal{S})$. Μια απεικόνιση $X : \Omega \to S$ θα καλείται *τυχαίο στοιχείο του* S εάν είναι $\mathcal{F}\backslash\mathcal{S}$ μετρήσιμη. Στις ειδικές περιπτώσεις που $S = \mathbb{R}$ ή $S = \mathbb{R}^k$ ή $S = \mathbb{R}^\infty$ ή $S = C[0,1]$ η Χ θα καλείται *τυχαία μεταβλητή, τυχαίο διάνυσμα, τυχαία ακολουθία* και *τυχαία συνάρτηση* αντιστοίχως.

Η *κατανομή* της Χ είναι το μέτρο P στον $(S, \mathcal{S})$ με $P = \mathsf{P} \circ X^{-1}$, δηλαδή

$$P(A) = \mathsf{P}\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\} = \mathsf{P}[X \in A]. \tag{3.1}$$

Μερικές φορές η κατανομή της Χ συμβολίζεται και με $\mathcal{L}(X)$ από τον αγγλικό όρο law=νόμος, ενώ αν $S = \mathbb{R}^k$ τότε η *συνάρτηση κατανομής* της $X = (X_1, \ldots, X_k)$ ορίζεται ως :

$$F(x_1, \ldots, x_k) = P((-\infty, x_1] \times \ldots \times (-\infty, x_k]) = \mathsf{P}[X_i \leq x_i, \forall i \leq k] \tag{3.2}$$

Προσοχή χρειάζεται το γεγονός ότι τα μέτρα P και P είναι διαφορετικά. Έτσι αν $f : S \to \mathbb{R}$ είναι $\mathcal{S}\backslash\mathcal{R}$ μετρήσιμη τότε :

$$E[f(X)] = \int_\Omega (f \circ X)(\omega) d\mathsf{P}(\omega) = \int_S f(y) dP(y) = Pf \tag{3.3}$$

Τώρα για δοθέν μέτρο Borel P σε κάποιον μετρικό χώρο S μπορούμε να βρούμε ένα τυχαίο στοιχείο που να έχει σαν κατανομή του το P. Αυτό είναι άμεσο παίρνοντας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}) = (S, \mathcal{S}, P)$ και $X : \Omega \to S$ να είναι η ταυτοτική απεικόνιση δηλαδή $X(\omega) = \omega, \forall \omega \in S = \Omega$.

Σύγκλιση κατά κατανομή

Θα λέμε ότι μια ακολουθία τυχαίων στοιχείων $\{X_n\}$ *συγκλίνει κατά κατανομή* στο τυχαίο στοιχείο X αν οι αντίστοιχες κατανομές των X_n συγκλίνουν ασθενώς στην κατανομή του X , δηλαδή αν $P_n \Rightarrow P$ όπου P_n, P είναι οι κατανομές των X_n και X αντιστοίχως. Επομένως $X_n \Rightarrow X \iff \mathcal{L}(X_n) \Rightarrow \mathcal{L}(X)$. Σημειώνουμε ότι δεν μας ενδιαφέρει το πεδίο ορισμού των X_n, X αλλά μόνο η κατανομή τους και το πεδίο τιμών τους (ο χώρος S πρέπει να είναι κοινός). Δηλαδή ενδεχομένως οι X_n, X να ορίζονται σε διαφορετικούς χώρους πιθανότητας $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, \mathsf{P}_n), (\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ αρκεί το πεδίο τιμών S να είναι κοινό. Η θεωρία του προηγούμενου κεφαλαίου μεταφέρεται και εδώ με μια μικρή αλλαγή στο συμβολισμό και το θεώρημα 2.1 παίρνει τη μορφή :

i)$X_n \Rightarrow X$
ii) $E[f(X_n)] \to E[f(X)]$ για κάθε $f : S \to \mathbb{R}$ φραγμένη και ομοιόμορφα συνεχή
iii) $\limsup_n \mathsf{P}[X_n \in F] \leq \mathsf{P}[X \in F]$ για κάθε κλειστό $F \in S$
iv) $\liminf_n \mathsf{P}[X_n \in G] \geq \mathsf{P}[X \in G]$ για κάθε ανοικτό $G \in S$
v) $\mathsf{P}[X_n \in A] \to \mathsf{P}[X \in A]$ για όλα τα A που είναι X-continuity sets , δηλαδή $P(\partial A) = \mathsf{P}[X \in \partial A] = 0$

Το θεώρημα απεικόνισης παίρνει την εξής μορφή : έστω $h : S \to S'$ μια $\mathcal{S}\backslash\mathcal{S}'$ μετρήσιμη συνάρτηση με D_h να είναι το σύνολο των σημείων ασυνέχειάς της. Αν $X_n \Rightarrow X$ και $P(D_h) = \mathsf{P}[X \in D_h] = 0$ τότε $h(X_n) \Rightarrow h(X)$ (στον S'). Αυτό προκύπτει άμεσα αν παρατηρήσουμε ότι η κατανομή της $h(X)$ (στον S') ισούται με $\mathsf{P} \circ (h(X))^{-1}$ δηλαδή με $\mathsf{P} \circ X^{-1} \circ h^{-1}$ δηλαδή με $P \circ h^{-1}$.

Συνήθως, όταν $X_n \Rightarrow X$, θα χρησιμοποιούμε για ευκολία τους εξής ισοδύναμους συμβολισμούς :

$$\begin{cases} P_n \Rightarrow P \\ X_n \Rightarrow X \\ X_n \Rightarrow P \\ P_n \Rightarrow X \end{cases} \tag{3.5}$$

Επίσης αν κάπου συμβολίσουμε ότι $X_n \Rightarrow N$ αυτό σημαίνει ότι οι X_n συγκλίνουν ασθενώς σε κάποια τυχαία μεταβλητή η οποία έχει (στο $\mathbb{R}$) την τυπική κανονική κατανομή.

Παράδειγμα 3.1 : Όπως και στο Παράδειγμα 2.9 ας υποθέσουμε ότι $S_0 \in \mathcal{S}$, οπότε $\mathcal{S}_0 = \mathcal{B}(S_0) = [A \cap S_0 : A \in \mathcal{S}]$, $\mathcal{S}_0 \subseteq \mathcal{S}$. Τότε εύκολα βλέπουμε ότι η $X : \Omega \to S_0$ είναι τυχαίο στοιχείο του S_0 αν και μόνο αν είναι τυχαίο στοιχείο του S. Επίσης επειδή ένα σύνολο είναι ανοικτό στον S_0 αν και μόνο αν γράφεται στη μορφή $G \cap S_0$, όπου G: ανοικτό στον S τότε $X_n \Rightarrow X$ (στον S_0) αν και μόνο αν $X_n \Rightarrow X$ (στον S).

Σύγκλιση κατά Πιθανότητα

Έστω $a \in S$. Θα λέμε ότι η ακολουθία $\{X_n\}$ *συγκλίνει κατά πιθανότητα στο* a αν ισχύει :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \mathsf{P}[\omega : \rho(X_n(\omega), a) \geq \varepsilon] \xrightarrow{n} 0 \tag{3.6}$$

Θεωρώντας το a σαν σταθερό τυχαίο στοιχείο του S τότε για τυχόν ανοικτό $G \in S$ έχουμε :
- αν $a \in G$ τότε $\exists\ \varepsilon > 0 : B_\rho(a, \varepsilon) \subseteq G$.Έτσι αν $\omega \in [\omega : \rho(X_n(\omega), a) < \varepsilon] \implies X_n(\omega) \in B_\rho(a, \varepsilon) \subseteq G$. Δηλαδή $[\rho(X_n, a) < \varepsilon] \subseteq [X_n \in G]$ και άρα $\liminf_n \mathsf{P}[X_n \in G] \geq \liminf_n \mathsf{P}[\rho(X_n, a) < \varepsilon] = 1 = \mathsf{P}[a \in G]$
- αν $a \notin G$ τότε $\mathsf{P}[a \in G] = 0$ και η προηγούμενη ανισότητα είναι τετριμμένη.

Έτσι η (3.6) συνεπάγεται ασθενή σύγκλιση $X_n \Rightarrow a$. Αντιστρόφως, επειδή το σύνολο $G = B_\rho(a, \varepsilon)$ είναι ανοικτό θα έχουμε:
$\liminf_n \mathsf{P}[X_n \in G] = \liminf_n \mathsf{P}[\omega : \rho(X_n(\omega), a) < \varepsilon] \geq \mathsf{P}[a \in G] = 1$ δηλαδή την (3.6). Έτσι για σταθερό $a \in S$ η ασθενής σύγκλιση είναι ισοδύναμη με την σύγκλιση κατά πιθανότητα και για αυτό χρησιμοποιούμε κοινό συμβολισμό : $X_n \Rightarrow a$.

Η κατανομή του σταθερού τυχαίου στοιχείου a ισούται με το μέτρο Dirac διότι $(\mathsf{P} \circ a^{-1})(B) = \mathsf{P}[\omega : a \in B] = \delta_a(B)$ και έτσι στην προηγούμενη περίπτωση θα μπορούσαμε να γράψουμε $X_n \Rightarrow \delta_a$, οπότε για $h : S \to S'$ θα ισχύει $h(X_n) \Rightarrow h(a)$ εαν $\delta_a(D_h) = 0$ δηλαδή αν η h συνεχής στο a.

Ας υποθέσουμε ότι η $\{(X_n, Y_n)\}$ είναι μια ακολουθία τυχαίων στοιχείων του $S \times S$ (επομένως λόγω συνέχειας των προβολών $(x, y) \mapsto x$, $(x, y) \mapsto y$, οι X_n, Y_n είναι τυχαία στοιχεία στον S). Επειδή η μετρική :

$$\rho : S \times S \to \mathbb{R}$$

είναι συνεχής, θα είναι και Borel μετρήσιμη. Συνεπώς ορίζονται τυχαίες μεταβλητές:

$$\begin{aligned} \rho \circ (X_n, Y_n) : \Omega &\to \mathbb{R} \\ \omega &\mapsto \rho(X_n(\omega), Y_n(\omega)) \end{aligned}$$

Έχουμε τα εξής θεωρήματα :

Θεώρημα 3.1 : *Έστω (X_n, Y_n) ακολουθία τυχαίων στοιχείων του $S \times S$. Εαν $X_n \Rightarrow X$ (στον S) και αν $\rho(X_n, Y_n) \Rightarrow 0$ (στο $\mathbb{R}$) , τότε $Y_n \Rightarrow X$ (στον S).*

Απόδειξη : Έστω F ένα κλειστό υποσύνολο του S. Ορίζουμε $F_\varepsilon = \{x \in S : \rho(x, F) \leq \varepsilon\}$. Το F_ε είναι κλειστό σύνολο και $F_\varepsilon \searrow F$ καθώς $\varepsilon \searrow 0$. Τώρα ισχύει ο εξής εγκλεισμός :

$$[Y_n \in F] \setminus [X_n \in F_\varepsilon] \subseteq [\rho(X_n, Y_n) \geq \varepsilon]$$

Επομένως παίρνοντας πιθανότητες και στα δύο μέλη είναι :

$$\mathsf{P}[Y_n \in F] \leq \mathsf{P}[\rho(X_n, Y_n) \geq \varepsilon] + \mathsf{P}[X_n \in F_\varepsilon]$$

Επειδή το F_ε είναι κλειστό μπορούμε να εφαρμόσουμε την υπόθεση παίρνοντας και στα δύο μέλη το $\limsup_n$:

$$\limsup_n \mathsf{P}[Y_n \in F] \leq 0 + \limsup_n \mathsf{P}[X_n \in F_\varepsilon] \leq \mathsf{P}[X \in F_\varepsilon]$$

διότι $X_n \Rightarrow X$ και $\rho(X_n, Y_n) \Rightarrow 0$, άρα και κατά πιθανότητα. Αφήνοντας $\varepsilon \searrow 0$ έχουμε : $\limsup_n \mathsf{P}[Y_n \in F] \leq \mathsf{P}[X \in F]$, δηλαδή $Y_n \Rightarrow X$.

Πόρισμα : *Αν (X, Y_n) είναι τυχαία στοιχεία του $S \times S$ και $\rho(X, Y_n) \Rightarrow 0$, τότε $Y_n \Rightarrow X$.*

Θεώρημα 3.2 : *Υποθέτουμε (X_{un}, X_n) τυχαία στοιχεία του $S \times S$. Αν $X_{un} \Rightarrow_n Z_u$ και $Z_u \Rightarrow_u X$ και αν*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \lim_u \limsup_n \mathsf{P}[\rho(X_{un}, X_n) \geq \varepsilon] = 0 \tag{3.8}$$

τότε $X_n \Rightarrow_n X$.

Απόδειξη : Με το ίδιο σκεπτικό όπως και πριν ισχύει :

$$\mathsf{P}[X_n \in F] \leq \mathsf{P}[X_{un} \in F_\varepsilon] + \mathsf{P}[\rho(X_{un}, X_n) \geq \varepsilon]$$

Επειδή $X_{un} \Rightarrow_n Z_u$, παίρνοντας $\limsup_n$ έπεται :

$$\limsup_n \mathsf{P}[X_n \in F] \le \mathsf{P}[Z_u \in F_\varepsilon] + \limsup_n \mathsf{P}[\rho(X_{un}, X_n) \ge \varepsilon]$$

Ομοίως επειδή $Z_u \Rightarrow_u X$, η (3.8) δίνει :

$$\limsup_n \mathsf{P}[X_n \in F] \le \mathsf{P}[X \in F_\varepsilon]$$

Αφήνοντας το $\varepsilon \searrow 0$ έχουμε ότι $X_n \Rightarrow X$.

Παράδειγμα 3.2 : Υποθέτουμε ότι έχουμε (X_n, Y_n) ακολουθία τυχαίων στοιχείων του $S \times S$ και ότι για κάθε n τα X_n, Y_n είναι ανεξάρτητα δηλαδή για κάθε n τα ενδεχόμενα $[X_n \in A], [Y_n \in B]$ είναι ανεξάρτητα για όλα τα $A, B \in \mathcal{S}$. Επίσης έστω ότι οι X, Y είναι ανεξάρτητες και ότι ο S είναι διαχωρίσιμος. Επειδή η κατανομή του (X_n, Y_n) ισούται με το μέτρο γινόμενο των επιμέρους κατανομών (λόγω ανεξαρτησίας) βλέπουμε , εφαρμόζοντας το θεώρημα 2.7, ότι :

$$X_n \Rightarrow X,\ Y_n \Rightarrow Y \implies (X_n, Y_n) \Rightarrow (X, Y)$$

Ειδικά αν $S = \mathbb{R}$ μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα απεικόνισης για την $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $h(x, y) = xy$ και να πάρουμε ότι $X_n Y_n \Rightarrow XY$. Αν $X_n \equiv a_n, X \equiv a$ τότε $X_n \Rightarrow X \iff a_n \to a$ και συνεπώς (προφανώς οι υποθέσεις ανεξαρτησίας ισχύουν κατά τετριμμένο τρόπο) αν $Y_n \Rightarrow Y, a_n \to a$, τότε και $a_n Y_n \Rightarrow aY$.

Ολοκλήρωση στο Όριο

Σε αυτό το σημείο του κεφαλαίου θα αναζητήσουμε προϋποθέσεις κάτω από τις οποίες ισχύει (για τυχαίες μεταβλητές) η συνεπαγωγή :

$$X_n \Rightarrow X \implies E(X_n) \to E(X)$$

.

Θεώρημα 3.3 : *Αν* $X_n \Rightarrow X$ *, τότε* $E(|X|) \le \liminf_n E(|X_n|)$.

Απόδειξη : Λόγω του θεωρήματος απεικόνισης θα ισχύει και $|X_n| \Rightarrow |X|$ δηλαδή $\mathsf{P}[|X_n| > t] \to \mathsf{P}[|X| > t]$ λ-σχεδόν για όλα τα $t > 0$. Για θετικές τυχαίες μεταβλητές, λόγω του θεωρήματος Fubini , ισχύει :

$$E(|X|) = \int_{[0,\infty)} \mathsf{P}[|X| > t] d\lambda(t)$$

Έτσι από το θεώρημα Fatou (επειδή οι συναρτήσεις $G_n(t) = \mathsf{P}[|X_n| > t]$ είναι μετρήσιμες, ως φθίνουσες ως προς t , και θετικές) παίρνουμε :

$$E(|X|) = \int_{[0,\infty)} \mathsf{P}[|X| > t] d\lambda(t) \le \liminf_n \int_{[0,\infty)} \mathsf{P}[|X_n| > t] d\lambda(t) = \liminf_n E(|X_n|).$$

Ορισμός : Οι X_n θα καλούνται ομοιόμορφα ολοκληρώσιμες αν ισχύει :

$$\lim_{a\to\infty} \sup_n \int_{[|X_n| \ge a]} |X_n| d\mathsf{P} = 0 \tag{3.9}$$

Αν οι X_n είναι ομοιόμορφα φραγμένες τότε θα είναι και ομοιόμορφα ολοκληρώσιμες ενώ αν πάρουμε $\varepsilon = 1$ υπάρχει $M > 0$ ώστε αν $a \geq M$ τότε $\sup_n E(|X_n|) \leq 1 + a$, δηλαδή αν είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμες θα είναι και ολοκληρώσιμες.

Θεώρημα 3.4 : *Εαν οι X_n είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμες και $X_n \Rightarrow X$, τότε η X είναι ολοκληρώσιμη και $E(X_n) \to E(X)$.*

Απόδειξη : Από την παρατήρηση που μόλις κάναμε και το θεώρημα 3.3 προκύπτει ότι $E(|X|) < \infty$. Επίσης από το mapping theorem προκύπτει ότι :

$$\max\{X_n, 0\} = X_n^+ \Rightarrow \max\{X, 0\} = X^+ \text{ και}$$
$$\max\{-X_n, 0\} = X_n^- \Rightarrow \max\{-X, 0\} = X^-$$

και για αυτόν τον λόγο υποθέτουμε ότι οι X_n, X είναι θετικές. Κάνοντας χρήση του θεωρήματος Fubini μπορούμε να δείξουμε τις σχέσεις :

$$E(X_n) = \int_{[0,a)} \mathsf{P}[t < X_n \leq a] d\lambda(t) + \int_{[X_n \geq a]} X_n d\mathsf{P} \tag{3.10}$$

$$E(X) = \int_{[0,a)} \mathsf{P}[t < X \leq a] d\lambda(t) + \int_{[X \geq a]} X d\mathsf{P} \tag{3.11}$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Λόγω ομοιόμορφης ολοκληρωσιμότητας υπάρχει ένας $a > 0$ ώστε τα τελευταία ολοκληρώματα κάθε ισότητας να είναι κάτω από ε. Άρα για να δείξουμε ότι $|E(X_n) - E(X)| < \varepsilon$ μένει να δείξουμε ότι τα πρώτα ολοκληρώματα της (3.10) συγκλίνουν στο πρώτο της (3.11). Το a που επιλέξαμε πριν μπορούμε να το μεγαλώσουμε έτσι ώστε $\mathsf{P}[X = a] = 0$. Η ποσότητα που βρίσκεται στο πρώτο ολοκλήρωμα της (3.10) είναι ίση με $F_n(a) - F_n(t)$ και αντιστοίχως στην (3.11) ίση με $F(a) - F(t)$ οπότε επειδή $F_n(a) - F_n(t) \to F(a) - F(t)$, λ-σχεδόν για όλα τα $t \in [0, a)$ και $|F_n(a) - F_n(t)| \leq 1$, το αποτέλεσμα είναι άμεσο από το θεώρημα φραγμένης σύγκλισης στο $[0, a)$.(εδώ οι F_n, F είναι οι συναρτήσεις κατανομής των X_n, X)

Μια ικανή συνθήκη για να έχουμε ομοιόμορφη ολοκληρωσιμότητα είναι να ισχύει :

$$\sup_n E(|X_n|^{1+\varepsilon}) < \infty \text{ για κάποιο } \varepsilon > 0 \tag{3.12}$$

διότι τότε :

$$\int_{[|X_n| \geq a]} |X_n| a^\varepsilon d\mathsf{P} = \int_\Omega a^\varepsilon |X_n| I_{[|X_n| \geq a]} d\mathsf{P} \leq \int_\Omega |X_n|^{1+\varepsilon} I_{[|X_n| \geq a]} d\mathsf{P} \leq \sup_n E(|X_n|^{1+\varepsilon})$$

οπότε :

$$\lim_{a\to\infty} \sup_n \int_{[|X_n| \geq a]} |X_n| d\mathsf{P} \leq \lim_{a\to\infty} \frac{\sup_n E(|X_n|^{1+\varepsilon})}{a^\varepsilon} = 0.$$

Αναφέρουμε τώρα μια ικανή συνθήκη ομοιόμορφης ολοκληρωσιμότητας :

Θεώρημα 3.5 : *Εαν οι $X, X_n \geq 0$ είναι ολοκληρώσιμες , $X_n \Rightarrow X$ και $E(X_n) \to E(X)$ τότε οι X_n είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμες.*

Απόδειξη : Έστω $\varepsilon > 0$. Λόγω των σχέσεων (3.10) και (3.11) και του γεγονότος ότι $E(X_n) \to E(X)$ προκύπτει ότι

$$\int_{[X_n \geq a]} X_n d\mathsf{P} \to \int_{[X \geq a]} X d\mathsf{P}$$

, αν το a είναι τέτοιο ώστε $\mathsf{P}[X = a] = 0$. Επειδή η X είναι ολοκληρώσιμη μπορούμε να πάρουμε αρκετά μεγάλο $\tilde{a}$ ώστε $\int_{[X \geq \tilde{a}]} X d\mathsf{P} < \varepsilon$ και τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε αν $n \geq n_0$ τότε $\int_{[X_n \geq \tilde{a}]} X_n d\mathsf{P} < \varepsilon$ και συνάμα $\mathsf{P}[X = \tilde{a}] = 0$. Τώρα πάλι επειδή οι $X_1, \ldots, X_{n_0}$ είναι ολοκληρώσιμες μπορούμε να μεγαλώσουμε ακόμα περισσότερο το $\tilde{a}$ και τότε θα έχουμε :

$$\int_{[X_n \geq \overline{a}]} X_n d\mathsf{P} < \varepsilon, \forall n$$

όπως έπρεπε να δειχθεί.

Λίγο πριν κλείσουμε το κεφάλαιο αναφέρουμε δύο θεωρήματα που ναι μεν δεν θα τα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια ωστόσο δείχνουν το πως συμπεριφέρονται τυχαία στοιχεία του χώρου $S \times S$ ως προς την ασθενή σύγκλιση.

Θεώρημα 3.6 : *Έστω μια ακολουθία (X_n, X) τυχαίων στοιχείων του $S \times S$ με $\rho(X_n, X) \Rightarrow 0$. Αν A είναι ένα X-continuity set τότε* $\mathsf{P}([X_n \in A] \triangle [X \in A]) \to 0$.

Απόδειξη : Ακριβώς όπως και στα θεωρήματα 3.1 και 3.2 μπορούμε να δούμε ότι ισχύει $\forall \varepsilon > 0$ και η σχέση :

$$\mathsf{P}([X_n \in A] \cap [X \notin A]) \leq \mathsf{P}([\rho(X_n, X) \geq \varepsilon]) + \mathsf{P}([\rho(X, A) < \varepsilon] \cap [X \notin A])$$

Επίσης, βάζοντας στη θέση του A το A^c βρίσκουμε την συμμετρική σχέση :

$$\mathsf{P}([X_n \in A^c] \cap [X \notin A^c]) \leq \mathsf{P}([\rho(X_n, X) \geq \varepsilon]) + \mathsf{P}([\rho(X, A^c) < \varepsilon] \cap [X \notin A^c])$$

Προσθέτοντας και τις δυο σχέσεις, παίρνοντας $\limsup_n$ και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η ασθενής σύγκλιση $\rho(X_n, X) \Rightarrow 0$ συνεπάγεται την κατά πιθανότητα, μπορούμε να δούμε ότι :

$$\limsup_n \mathsf{P}([X_n \in A] \triangle [X \in A]) \leq \mathsf{P}([\rho(X, A) < \varepsilon] \cap [X \notin A]) +$$
$$+ \mathsf{P}([\rho(X, A^c) < \varepsilon] \cap [X \in A]).$$

Τώρα επειδή γενικά ισχύει η σχέση $f^{-1}(B) \cap f^{-1}(D) \subseteq f^{-1}(B \cap D)$, μπορούμε στην προηγούμενη ανισότητα να αφήσουμε το $\varepsilon \searrow 0$ οπότε το δεξιό μέλος συγκλίνει στο $\mathsf{P}([X \notin A] \cap [X \in \overline{A}]) + \mathsf{P}([X \in A] \cap [X \in \overline{A^c}])$ και λόγω του εγκλεισμού που αναφέραμε βλέπουμε ότι ο κάθε όρος είναι μικρότερος από το $\mathsf{P}[X \in \partial A]$ το οποίο εξ υποθέσεως είναι μηδέν. Άρα $\mathsf{P}([X_n \in A] \triangle [X \in A]) \to 0$.

Έστω ότι ο χώρος $T = S' \times S''$ είναι διαχωρίσιμος και $(X_n', X_n''), (X', X'')$ τυχαία στοιχεία του T. Με βάση το θεώρημα 2.7 i) ισχύει

$$(X'_n, X''_n) \Rightarrow (X', X'') \tag{3.13}$$

αν και μόνο αν

$$\mathsf{P}([X'_n \in A'] \cap [X''_n \in A'']) \to \mathsf{P}([X' \in A'] \cap [X'' \in A'']) \tag{3.14}$$

για όλα τα X'-continuity sets A' και όλα τα X''-continuity sets A''.

Θεώρημα 3.7 : *Έστω ότι ο T είναι διαχωρίσιμος. Εαν $X'_n \Rightarrow X'$ και $X''_n \Rightarrow a''$ τότε $(X'_n, X''_n) \Rightarrow (X', a'')$.*

Απόδειξη : Θα δείξουμε ότι ισχύει η (3.14) οπότε έστω A' ένα X'-continuity set και A'' ένα a''-continuity set, δηλαδή $a'' \notin \partial A''$. Διακρίνουμε περιπτώσεις :

-αν $a \in A''$ τότε $\mathsf{P}[X''_n \notin A''] = 1 - \mathsf{P}[X''_n \in A''] \to 1 - \mathsf{P}[a'' \in A''] = 0$, διότι $\delta_{a''}(\partial A'') = 0$ και $X''_n \Rightarrow a''$ και η (3.14) έπεται από το ότι :
$\mathsf{P}[X'_n \in A'] - \mathsf{P}[X''_n \notin A''] \leq \mathsf{P}([X'_n \in A'] \cap [X''_n \in A'']) \leq \mathsf{P}[X'_n \in A']$

-αν $a'' \notin A''$ τότε η (3.14) έπεται από το ότι :
$\mathsf{P}([X'_n \in A'] \cap [X''_n \in A'']) \leq \mathsf{P}[X''_n \in A''] \to 0.$

Ενότητα 4 : Το Θεώρημα του Prohorov

Σχετική Συμπάγεια

Έστω μια οικογένεια Π μέτρων πιθανότητας στον $(S, \mathcal{S})$. Θα λέμε ότι η Π είναι *σχετικά συμπαγής* αν για κάθε ακολουθία $\{P_n\}$ στην Π υπάρχει μια υπακολουθία $\{P_{n_i}\}$ στην Π και ένα μέτρο πιθανότητας Q (το οποίο προφανώς εξαρτάται από την $\{P_n\}$ και ενδεχομένως δεν βρίσκεται στην Π) ώστε να ισχύει $P_{n_i} \Rightarrow Q$. Ειδικά μια ακολουθία $\{P_n\}_n$ θα καλείται σχετικά συμπαγής εαν κάθε υπακολουθία $\{P_{n_i}\}_i$ περιέχει μια περαιτέρω υπακολουθία $\{P_{n_{i_m}}\}_m$ ώστε $P_{n_{i_m}} \Rightarrow Q$ για κάποιο μέτρο πιθανότητας Q.

Παράδειγμα 4.1 : Θα αναφέρουμε τώρα ένα πολύ χρήσιμο και ενδιαφέρον παράδειγμα στον χώρο $(C, \mathcal{C})$. Υποθέτουμε ότι για μια ακολουθία μέτρων πιθανότητας $\{P_n\}$ και κάποιο μέτρο πιθανότητας P στον $(C, \mathcal{C})$ ισχύει : $P_n \circ \pi^{-1}_{t_1 \dots t_k} \Rightarrow P \circ \pi^{-1}_{t_1 \dots t_k}, \forall k \in \mathbb{N}$ και $\forall\ t_1, \dots t_k \in [0,1]$. Όπως είδαμε σε παράδειγμα προηγούμενου κεφαλαίου αυτή η συνθήκη δεν είναι ικανή για να συνάγουμε ότι $P_n \Rightarrow P$. Ωστόσο ας υποθέσουμε ότι η $\{P_n\}$ είναι σχετικά συμπαγής. Αυτό σημαίνει ότι κάθε $\{P_{n_i}\}_i$ θα περιέχει υπακολουθία $\{P_{n_{i_m}}\}_m$ που θα συγκλίνει ασθενώς σε κάποιο Q. Με τη βοήθεια του mapping theorem προκύπτει ότι $P_{n_{i_m}} \circ \pi^{-1}_{t_1 \dots t_k} \Rightarrow_m Q \circ \pi^{-1}_{t_1 \dots t_k}$ $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall t_1, \dots t_k \in [0,1]$. Όμως από την υπόθεση ισχύει και ότι $P_{n_{i_m}} \circ \pi^{-1}_{t_1 \dots t_k} \Rightarrow P \circ \pi^{-1}_{t_1 \dots t_k}, \forall k \in \mathbb{N}$ και $\forall\ t_1, \dots t_k \in [0,1]$. Συνεπώς τα μέτρα P, Q ταυτίζονται στην κλάση $\mathcal{C}_f$ των finite-dimensional sets, η οποία επειδή είναι separating class μας δίνει $P \equiv Q$. Όμως λόγω του θεωρήματος 2.5 αυτό μας δίνει ότι $P_n \Rightarrow P$. Επομένως :
Εαν η $\{P_n\}$ είναι σχετικά συμπαγής και εαν οι finite-dimensional distributions της P_n συγκλίνουν ασθενώς σε εκείνες του P , τότε $P_n \Rightarrow P$.
Η προηγούμενη ιδέα μας δίνει ένα ισχυρό εργαλείο για να αποδεικνύουμε ασθενή σύγκλιση σε χώρους συναρτήσεων όπως ο $C[0,1]$.

Παράδειγμα 4.2 : Ας υποθέσουμε τώρα το εξής: έστω πάλι $\{P_n\}$ ακολουθία μέτρων πιθανότητας στον $(C, \mathcal{C})$ η οποία όμως τώρα είναι και σχετικά συμπαγής. Υποθέτουμε ότι $\forall k \in \mathbb{N}$ και $\forall t_1, \dots, t_k \in [0,1]$ υπάρχει μέτρο $\mu_{t_1 \dots t_k}$ στον $(\mathbb{R}^k, \mathcal{R}^k)$ (το οποίο προφανώς εξαρτάται απο το k και τα $t_1, \dots, t_k$ κάθε φορά) ώστε να ισχύει : $P_n \circ \pi^{-1}_{t_1 \dots t_k} \Rightarrow \mu_{t_1 \dots t_k}$. (εδώ, σε αντίθεση με πριν, δεν υποθέτουμε εξ αρχής ότι τα $\mu_{t_1 \dots t_k}$ είναι οι finite-dimensional distributions κάποιου μέτρου P.) Η σχετική συμπάγεια μας δίνει ότι σίγουρα θα υπάρχει κάποια υπακολουθία $\{P_{n_i}\}$ και κάποιο μέτρο P ώστε να ισχύει $P_{n_i} \Rightarrow P$. Πάλι από το mapping theorem παίρνουμε ότι $P_{n_i} \circ \pi^{-1}_{t_1 \dots t_k} \Rightarrow_i P \circ \pi^{-1}_{t_1 \dots t_k}$ για όλους τους δείκτες $t_1, \dots t_k$ και για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Δηλαδή $\mu_{t_1 \dots t_k} \equiv P \circ \pi^{-1}_{t_1 \dots t_k}$ πράγμα που σημαίνει ότι βρήκαμε ένα μέτρο P στον $(C, \mathcal{C})$ που έχει σαν finite-dimensional distributions τα μέτρα $\mu_{t_1 \dots t_k}$. Έτσι :
Εαν η $\{P_n\}$ είναι σχετικά συμπαγής και εαν $P_n \circ \pi^{-1}_{t_1 \dots t_k} \Rightarrow \mu_{t_1 \dots t_k}$ $\forall k \in \mathbb{N}$

και $\forall t_1, \dots, t_k \in [0,1]$, *τότε υπάρχει κάποιο μέτρο* P *στον* $(C, \mathcal{C})$ *με* $\mu_{t_1 \dots t_k} \equiv P \circ \pi^{-1}_{t_1 \dots t_k}$.
Το παραπάνω μας δίνει τη βοήθεια να αποδείξουμε την ύπαρξη μέτρων στον $(C, \mathcal{C})$ με προκαθορισμένες ιδιότητες (βλέπε και την περίπτωση του μέτρου Wiener).

Tightness

Παράδειγμα 4.3 : Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ακολουθία $\{P_n\}$ στον $(\mathbb{R}, \mathcal{R})$ και θέλουμε να δείξουμε ότι είναι σχετικά συμπαγής. Ένας τρόπος είναι να θεωρήσουμε τις συναρτήσεις κατανομής των P_n, F_n , και χρησιμοποιώντας το διαγώνιο επιχείρημα και το θεώρημα του Helly να δείξουμε ότι για κάθε υπακολουθία $\{F_{n_i}\}_i$ υπάρχει μια περαιτέρω υπακολουθία $\{F_{n_{i_m}}\}_m$ και μια δεξία συνεχής και αύξουσα F ώστε : $F_{n_{i_m}}(x) \xrightarrow{m} F(x)$ για όλα τα x: σημεία συνέχειας της F. Εαν η F έχει όρια στο $-\infty$ και στο $+\infty$ το 0 και 1 αντιστοίχως τότε είναι συνάρτηση κατανομής κάποιου μέτρου P και συνεπώς $P_{n_{i_m}}(A) \to_m P(A)$ για όλα τα A που ανήκουν στην κλάση $D = \{(-\infty, x] : x \in \mathbb{R}\}$. Επειδή η τελευταία είναι convergence-determining class έπεται $P_{n_{i_m}} \Rightarrow P$ δηλαδή η σχετική συμπάγεια της $\{P_n\}$.
Ωστόσο στην περίπτωση των μέτρων Dirac δεν έχουμε σχετική συμπάγεια. Πράγματι , εαν $P_n = \delta_n$ τότε η μόνη περίπτωση για την F είναι η $F \equiv 0$ και δεν μπορούμε να βρούμε μέτρο πιθανότητας Q που να αποτελεί ασθενές όριο διότι εαν $\delta_{n_{i_m}} \Rightarrow_m Q$ τότε $Q(-k,k) \le \liminf_m \delta_{n_{i_m}}(-k,k) = 0, \forall k$, δηλαδή το Q δεν θα ήταν μέτρο πιθανότητας, άτοπο.
Για ένα άλλο παράδειγμα που δεν επιτυγχάνεται σχετική συμπάγεια ας δούμε το εξής : έστω μ_n να είναι τα μέτρα που αντιστοιχούν στην ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[-n,n]$ δηλαδή $\mu_n(-\infty, x] = \frac{x+n}{2n}$, αν $x \in [-n,n]$ και 0 όταν $x < -n$ και 1 όταν $x > n$. Θεωρούμε τώρα την $\{P_n\}$ που ορίζεται ως : $P_n = \delta_0$, όταν n: άρτιος και $P_n = \frac{1}{3}\delta_0 + \frac{2}{3}\mu_n$, όταν n: περιττός. Αν η τυχούσα υπακολουθία $\{P_{n_i}\}$ περιέχει μόνο περιττούς δείκτες , τότε η υποψήφια συνάρτηση κατανομής θα πρέπει να έχει $F(x) = \frac{1}{3}$, αν $x < 0$ και $F(x) = \frac{2}{3}$, αν $x \ge 0$. Οπότε αν $P_{n_{i_m}} \Rightarrow_m Q$ θα είχαμε άτοπο όπως και πριν επειδή $Q(-k,k) \le \liminf_m F_{n_{i_m}}(-k,k) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$, $\forall k$.

Στα προηγούμενα παραδείγματα όπως είδαμε δημιουργείται πρόβλημα στη σχετική συμπάγεια επειδή η ακολουθία 'αφήνει την μάζα να ξεφεύγει στο άπειρο'. Όπως θα δούμε μια συνθήκη που εμποδίζει ένα τέτοιο φαινόμενο είναι αυτή της tightness :
Ορισμός : Η οικογένεια Π θα καλείται tight εαν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένα συμπαγές σύνολο K ώστε να ισχύει $P(K) > 1 - \varepsilon$ για κάθε $P \in \Pi$.

Θεώρημα 4.1 (Prohorov) : *Εαν η* Π *είναι tight τότε είναι σχετικά συμπαγής.*

Προς το παρόν αναβάλλουμε για λίγο την απόδειξη για να αναφέρουμε ένα πόρισμα και το αντίστροφο του θεωρήματος 4.1 (για πλήρη και διαχωρίσιμο S).

Πόρισμα : *Εαν η $\{P_n\}$ είναι tight και εαν κάθε υπακολουθία $\{P_{n_k}\}_k$ που συγκλίνει ασθενώς , συγκλίνει στο P , τότε ολόκληρη η $\{P_n\}$ θα συγκλίνει ασθενώς στο P.$(P_n \Rightarrow P)$*

Απόδειξη: Από το θέωρημα 4.1 κάθε υπακολουθία P_{n_k} περιέχει μια περαιτέρω υπακολουθία που συγκλίνει ασθενώς σε κάποιο μέτρο πιθανότητας το οποίο εξ υποθέσεως πρέπει να είναι το P. Εφαρμόζοντας το θεώρημα 2.5 έπεται ότι $P_n \Rightarrow P$.

Θεώρημα 4.2 (Μερικό αντίστροφο του θεωρήματος του Prohorov) : *Εαν ο S είναι διαχωρίσιμος και πλήρης και εαν η Π είναι σχετικά συμπαγής, τότε είναι tight.*

Απόδειξη(4.2) : Ο S είναι διαχωρίσιμος μετρικός χώρος άρα χώρος Lindelof. Επειδή λοιπόν προφανώς $S = \bigcup_{x\in S} B_\rho(x,1)$ μπορούμε να βρούμε ένα αριθμήσιμο υποσύνολο $\{x_1,\ldots,x_n,\ldots\} \subseteq S$ ώστε $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_\rho(x_n,1)$. Τώρα θεωρώντας $G_n = \bigcup_{k=1}^{n} B_\rho(x_k,1)$, βλέπουμε ότι υπάρχει ανοικτό κάλυμμα $\{G_n\}_n$ του S για το οποίο $G_n \nearrow S$.

Ισχυρισμός : αν έχουμε ένα τέτοιο ανοικτό κάλυμμα, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει n ώστε $P(G_n) > 1-\varepsilon, \forall P \in \Pi$.

Πράγματι, αν δεν ισχύει αυτό υπάρχει ένα $\varepsilon > 0$ ώστε για κάθε n , υπάρχει $P_n \in \Pi$ με $P_n(G_n) \le 1-\varepsilon$. Έτσι, επειδή η Π είναι σχετικά συμπαγής θα έχουμε $P_{n_i} \Rightarrow Q$ για κάποια υπακολουθία της P_n , P_{n_i}, και για κάποιο μέτρο Q. Τότε όμως για σταθερό n έχουμε : $Q(G_n) \le \liminf_i P_{n_i}(G_n) \le \liminf_i P_{n_i}(G_{n_i}) \le 1-\varepsilon$ (όπου η δεύτερη ανισότητα προκύπτει διότι G_n: αύξουσα) , πράγμα άτοπο επειδή $G_n \nearrow S$ και άρα θα πρέπει $Q(G_n) \nearrow 1$. Άρα ο ισχυρισμός είναι αληθής.

Πάλι επειδή ο S είναι χώρος Lindelof μπορούμε να γράψουμε $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} B(x_k^{(n)}, \frac{1}{k})$ οπότε λόγω του ισχυρισμού , για $G_n = \bigcup_{m=1}^{n} B(x_k^{(m)}, \frac{1}{k})$ υπάρχει ένας n_k ώστε :

$$P(\bigcup_{m=1}^{n_k} B(x_k^{(m)}, \frac{1}{k})) > 1 - \frac{\varepsilon}{2^k},\ \forall P \in \Pi.$$

Τώρα όπως και στην απόδειξη του θεωρήματος 1.3 θεωρούμε το σύνολο :

$$\Gamma = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{n_k} B(x_k^{(m)}, \frac{1}{k})$$

το οποίο είναι ολικά φραγμένο και παίρνουμε $K = \overline{\Gamma}$. Τότε το K είναι κλειστό και ολικά φραγμένο υποσύνολο του πλήρους S, άρα το K είναι συμπαγές. Επίσης λόγω της προηγούμενης ανισότητας έπεται ότι $P(K) > 1-\varepsilon,\ \forall P \in \Pi$ δηλαδή η Π είναι tight.

Παράδειγμα 4.4 : Εαν είμαστε στον χώρο $C[0,1]$ και πάρουμε $P_n = \delta_{z_n}$ όπου οι z_n είναι όπως στην (1.2) τότε καμία υπακολουθία δεν μπορεί να συγκλίνει ασθενώς. Πραγματικά, αν αυτό ίσχυε για κάποιαν $\{P_{n_k}\}$ τότε αυτή θα ήταν σχετικά συμπαγής και επειδή ο C είναι πλήρης και διαχωρίσιμος , από το θεώρημα 4.2 , η P_{n_k} θα ήταν tight. Δηλαδή για κάθε $\varepsilon > 0$ θα υπήρχε ένα συμπαγές $K \subset C$ με $P_{n_k}(K) > 1-\varepsilon,\ \forall k$. Δηλαδή το K θα περιείχε όλες τις z_{n_k} και επειδή είναι συμπαγές θα έπρεπε να υπάρχει μια υπακολουθία $\{z_{n_{k_i}}\}$ και μια $z_0 \in K$ ώστε

$z_{n_{k_i}} \xrightarrow{\rho_\infty} z_0$. Άρα $z_{n_{k_i}}(t) \to z_0(t),\ \forall t \in [0,1]$ δηλαδή $z_0 \equiv 0$. Άρα $z_{n_{k_i}} \xrightarrow{\rho_\infty} 0$ πράγμα άτοπο διότι $\rho_\infty(z_{n_{k_i}}, 0) = 1 \nrightarrow 0$. Έτσι καμία υπακολουθία της δ_{z_n} δεν συγκλίνει ασθενώς.

Αυτό που απομένει λοιπόν τώρα είναι να αποδείξουμε το θεώρημα 4.1. Υποθέτουμε λοιπόν ότι η $\{P_n\}$ είναι μια ακολουθία στην tight οικογένεια Π και πρέπει να βρούμε μια υπακολουθία $\{P_{n_i}\}$ και ένα μέτρο πιθανότητας P ώστε $P_{n_i} \Rightarrow P$.
Κατασκευή : Επειδή η Π είναι tight θα είναι και η $\{P_n\}$ tight επομένως για κάθε $u \in \mathbb{N}$ υπάρχει συμπαγές C_u ώστε : $P_n(C_u) > 1 - \frac{1}{u},\ \forall n$. Είναι γνωστό και άμεσο από τον ορισμό της συμπάγειας ότι η πεπερασμένη ένωση συμπαγών συνόλων είναι συμπαγές σύνολο. Επομένως επιλέγοντας $K_u = \bigcup_{j=1}^{u} C_j$ βλέπουμε ότι τα K_u είναι συμπαγή και $K_1 \subseteq K_2 \subseteq \ldots$ και ισχύει ότι $P_n(K_u) > 1 - \frac{1}{u},\ \forall u, n \in \mathbb{N}$. Τώρα το σύνολο $\cup_{u\in\mathbb{N}} K_u$ είναι μια αριθμήσιμη ένωση συμπαγών, επομένως και πάλι με τον ορισμό της συμπάγειας προκύπτει ότι έχει την ιδιότητα Lindelof (δηλαδή κάθε ανοικτό κάλυμμά του έχει αριθμήσιμο υποκάλυμμα) και επομένως, αν το δούμε σαν μετρικό χώρο μόνο του, είναι διαχωρίσιμο. Από την Τοπολογία είναι γνωστό ότι σε μια τέτοια περίπτωση θα υπάρχει μια αριθμήσιμη κλάση $\mathcal{A}$ από ανοικτά σύνολα ώστε αν το G είναι ανοικτό και $x \in G \cap (\cup_{u\in\mathbb{N}} K_u)$ τότε θα υπάρχει $A \in \mathcal{A}$ με $x \in A \subseteq \overline{A} \subseteq G$. Θεωρούμε την κλάση :

$$\mathcal{H} = \{\emptyset\} \cup \{\bigcup_{i=1}^{n} (\overline{A_i} \cap K_{u_i}) : n, u_i \in \mathbb{N}, A_i \in \mathcal{A}\}$$

Η κλάση $\mathcal{H}$ είναι αριθμήσιμη και επομένως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το διαγώνιο επιχείρημα για τις ακολουθίες $\{P_n(H_1)\}_n, \{P_n(H_2)\}_n, \{P_n(H_3)\}_n, \ldots$ και να βρούμε μια υπακολουθία $\{P_{n_i}\}$ ώστε το όριο :

$$a(H) = \lim_i P_{n_i}(H) \tag{4.1}$$

να υπάρχει για όλα τα $H \in \mathcal{H}$. Ο στόχος μας είναι να ορίσουμε στον $(S, \mathcal{S})$ ένα μέτρο P ώστε να ισχύει :

$$P(G) = \sup\{a(H) : H \in \mathcal{H}, H \subseteq G\} \tag{4.2}$$

για κάθε ανοικτό σύνολο G. Τότε θα έχει εξασφαλιστεί ότι $P_{n_i} \Rightarrow P$ διότι αν G: ανοικτό και $H \in \mathcal{H}, H \subseteq G$ τότε $a(H) = \lim_i P_{n_i}(H) = \liminf_i P_{n_i}(H) \leq \liminf_i P_{n_i}(G)$ και άρα $P(G) \leq \liminf_i P_{n_i}(G)$ για το τυχόν ανοικτό G οπότε $P_{n_i} \Rightarrow P$. Άρα επικεντρωνόμαστε στην κατασκευή της (4.2).
Πρώτα απ'όλα παρατηρούμε ότι η κλάση $\mathcal{H}$ είναι προφανώς κλειστή σε πεπερασμένες ενώσεις και ότι η ποσότητα $a(H)$ της (4.1) ικανοποιεί τα εξής :

$$a(H_1) \leq a(H_2) \text{ αν } H_1 \subseteq H_2 \tag{4.3}$$

$$a(H_1 \cup H_2) = a(H_1) + a(H_2) \text{ αν } H_1 \cap H_2 = \emptyset. \tag{4.4}$$

$$a(H_1 \cup H_2) \leq a(H_1) + a(H_2) \tag{4.5}$$

και φυσικά $a(\emptyset) = 0$. Για ανοικτά σύνολα G ορίζουμε :

$$\beta(G) = \sup\{a(H) : H \in \mathcal{H}, H \subseteq G\} \tag{4.6}$$

και βλέπουμε ότι η β είναι μονότονη συνολοσυνάρτηση και $a(\emptyset) = 0 = \beta(\emptyset)$. Τελικά για όλα τα υποσύνολα $M \in \mathscr{P}(S)$ ορίζουμε :

$$\gamma(M) = \inf\{\beta(G) : M \subseteq G \text{ και } G\text{: ανοικτό }\} \tag{4.7}$$

και βλέπουμε ότι $\gamma(G) = \beta(G)$ αν G: ανοικτό.
Ισχυριζόμαστε ότι η κατασκευή της (4.2) θα έχει ολοκληρωθεί αν αποδείξουμε ότι η γ είναι εξωτερικό μέτρο. Πραγματικά, σε αυτή την περίπτωση η κλάση $\mathcal{M}$ των γ-μετρήσιμων συνόλων είναι μια σ-άλγεβρα και ο περιορισμός $\gamma_{|\mathcal{M}}$ είναι μέτρο, όπως προκύπτει από το θεώρημα του Καραθεοδωρή. Εαν ακόμα η $\mathcal{M}$ περιέχει τα κλειστά τότε θα περιέχει και την $\mathcal{S}$ και αν $P = \gamma_{|\mathcal{M}}$ τότε $P(G) = \gamma(G) = \beta(G)$ για τα ανοικτά G δηλαδή η (4.2). Επίσης το P είναι μέτρο πιθανότητας επειδή :

$$1 \geq \beta(S) = P(S) \geq \sup_{u \in \mathbb{N}} a(K_u) \geq \sup_{u \in \mathbb{N}} (1 - \frac{1}{u}) = 1 \tag{4.8}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι τα K_u ανήκουν στην $\mathcal{H}$, διότι αν $x \in K_u \cap S$ (S: ανοικτό) τότε υπάρχει $A \in \mathcal{A}$ με $x \in A \subseteq \overline{A}$, δηλαδή $K_u \subseteq \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ και ως συμπαγές θα έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα (όλα τα στοιχεία της $\mathcal{A}$ είναι ανοικτά) , $K_u \subseteq \bigcup_{i=1}^n A_i \subseteq \bigcup_{i=1}^n \overline{A_i}$, δηλαδή $K_u = \bigcup_{i=1}^n (K_u \cap \overline{A_i}) \in \mathcal{H}$.
Οπότε μένει να δειχθεί ότι η γ είναι εξωτερικό μέτρο.

1) *Εαν F: κλειστό και G: ανοικτό με $F \subseteq G$ και αν $F \subseteq H$ για κάποιο $H \in \mathcal{H}$ τότε υπάρχει $H_0 \in \mathcal{H}$ με $F \subseteq H_0 \subseteq G$.*
Πραγματικά ισχύει ότι υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ και $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{N}$ ώστε $F \subseteq \bigcup_{i=1}^n (K_{u_i} \cap \overline{A_i})$, διότι $F \subseteq H$. Άρα $F \subseteq G \cap (\bigcup_{i=1}^n K_{u_i}) \subseteq G \cap (\bigcup_u K_u)$ και συνεπώς , από τον τρόπο ορισμού της κλάσης $\mathcal{A}$ μπορούμε για κάθε $x \in F$ να επιλέξουμε $A_x \in \mathcal{A}$ ώστε $x \in A_x \subseteq \overline{A_x} \subseteq G$. Αυτά τα A_x καλύπτουν το F. Επειδή $F \subseteq \bigcup_{i=1}^n K_{u_i}$ και το δεύτερο σύνολο είναι πεπερασμένη ένωση συμπαγών, άρα συμπαγές, προκύπτει ότι και το F είναι συμπαγές , ως κλειστό υποσύνολο συμπαγούς. Άρα υπάρχουν $A_{x_1}, \ldots A_{x_k}$ που καλύπτουν το F (διότι είπαμε ότι η $\{A_x : x \in F\}$ καλύπτει το F και η $\mathcal{A}$ περιέχει μόνο ανοικτά σύνολα) . Τώρα επειδή η ακολουθία $\{K_u\}$ έχει επιλεγεί ως αύξουσα , θα υπάρχει κάποιος $u \in \{u_1, \ldots u_n\}$ με $F \subseteq K_u$. Παίρνοντας $H_0 = \bigcup_{i=1}^k (K_u \cap \overline{A_{x_i}})$ βλέπουμε ότι $F \subseteq H_0 \subseteq G$, δηλαδή αληθεύει ο ισχυρισμός.

2) *Η β είναι πεπερασμένα υποπροσθετική (πάνω στα ανοικτά).*
Πράγματι, έστω G_1, G_2 ανοικτά και $H \subseteq G_1 \cup G_2$ με $H \in \mathcal{H}$. Θέτουμε :

$$F_1 = \{x \in H : \rho(x, G_1^c) \geq \rho(x, G_2^c)\}, F_2 = \{x \in H : \rho(x, G_2^c) \geq \rho(x, G_1^c)\}.$$

Βλέπουμε εύκολα ότι τα F_1, F_2 καλύπτουν το H. Αν $x \in F_1$ και $x \notin G_1$ τότε $x \in H \setminus G_1$ δηλαδή πρέπει $x \in G_2$ διότι $H \subseteq G_1 \cup G_2$. Επειδή το G_1^c είναι κλειστό αυτό σημαίνει από τον ορισμό του F_1 ότι θα πρέπει $0 = \rho(x, G_1^c) \geq \rho(x, G_2^c)$ δηλαδή $x \in G_2 \cap G_2^c$, άτοπο. Έτσι αν $x \in F_1$ τότε αναγκαστικά $x \in G_1$ δηλαδή $F_1 \subseteq G_1$. Ομοίως $F_2 \subseteq G_2$. Τα F_1, F_2 είναι κλειστά (επειδή οι συναρτήσεις $\rho(x, G_1^c), \rho(x, G_2^c)$ είναι συνεχείς) και επομένως εφαρμόζοντας τον προηγούμενο ισχυρισμό μπορούμε να βρούμε σύνολα $H_1, H_2 \in \mathcal{H}$ ώστε $F_1 \subseteq H_1 \subseteq G_1, F_2 \subseteq H_2 \subseteq G_2$. Είδαμε όμως ότι τα F_1, F_2 καλύπτουν το H άρα $H \subseteq F_1 \cup F_2 \subseteq H_1 \cup H_2$ και άρα $a(H) \leq a(H_1 \cup H_2) \leq a(H_1) + a(H_2) \leq \beta(G_1) + \beta(G_2)$, λόγω των (4.3),(4.5),(4.6). Αφού το H ήταν τυχόν υποσύνολο του $G_1 \cup G_2$ προκύπτει ότι $\beta(G_1 \cup G_2) \leq \beta(G_1) + \beta(G_2)$.

3)*Η β είναι αριθμήσιμα υποπροσθετική (πάνω στα ανοικτά).*
Έστω $H \subseteq \bigcup_n G_n$ όπου τα G_n είναι ανοικτά και $H \in \mathcal{H}$. Αξίζει να σημειώσουμε ότι όλα τα στοιχεία της $\mathcal{H}$ είναι συμπαγή σύνολα διότι γράφονται στη μορφή $\bigcup_{i=1}^{n}(K_{u_i} \cap \overline{A_i})$ και τα $K_{u_i} \cap \overline{A_i}$ είναι όλα κλειστά υποσύνολα των συμπαγών K_{u_i} , επομένως έχουμε μια πεπερασμένη ένωση απο συμπαγή σύνολα, άρα ένα συμπαγές. Έτσι το H είναι συμπαγές και καλύπτεται από τα ανοικτά G_n επομένως $H \subseteq \bigcup_{n=1}^{n_0} G_n$ για κάποιον n_0. Άρα λόγω του ισχυρισμού 2) για πεπερασμένη υποπροσθετικότητα έχουμε :

$$a(H) \leq \beta(\bigcup_{n=1}^{n_0} G_n) \leq \sum_{n=1}^{n_0} \beta(G_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \beta(G_n).$$

Επειδή το H ήταν τυχόν, έπεται ότι $\beta(\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \beta(G_n)$.

4)*Το γ είναι ένα εξωτερικό μέτρο.*
Για το γ ισχύει προφανώς ότι $\gamma(\emptyset) = 0$ και επίσης ότι είναι μονότονο. Για την αριθμήσιμη υποπροσθετικότητα , έστω $\varepsilon > 0$ και $\{M_n\} \in S$. Από τον τρόπο ορισμού του γ βρίσκουμε ακολουθία ανοικτών συνόλων $\{G_n\}$ με $M_n \subseteq G_n$ και $\beta(G_n) < \gamma(M_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$. Από την αριθμήσιμη υποπροσθετικότητα του β έπεται:

$$\gamma(\bigcup_n M_n) \leq \beta(\bigcup_n G_n) \leq \sum_n \beta(G_n) < \sum_n \gamma(M_n) + \varepsilon$$

και αφού ε: τυχόν, έπεται ότι το γ είναι αριθμήσιμα υποπροσθετικό.

5)*Αν F: κλειστό και G: ανοικτό τότε $\beta(G) \geq \gamma(F \cap G) + \gamma(F^c \cap G)$.*
Από τον ορισμό της β , για το ανοικτό σύνολο $F^c \cap G$ διαλέγουμε ένα $H_1 \in \mathcal{H}$ με $H_1 \subseteq F^c \cap G$ και $a(H_1) > \beta(F^c \cap G) - \varepsilon$. Το H_1 είναι συμπαγές (ως στοιχείο της $\mathcal{H}$) και άρα κλειστό, οπότε ξανά για το ανοικτό $H_1^c \cap G$ βρίσκουμε $H_0 \in \mathcal{H}$ με $H_0 \subseteq H_1^c \cap G$ και $a(H_0) > \beta(H_1^c \cap G) - \varepsilon$. Τα H_0, H_1 είναι ξένα υποσύνολα του G και $H_0 \cup H_1 \in \mathcal{H}$ οπότε από τις (4.4),(4.6),(4.7) προκύπτει :

$$\beta(G) \geq a(H_0 \cup H_1) = a(H_0) + a(H_1) > \beta(H_1^c \cap G) + \beta(F^c \cap G) - 2\varepsilon \geq$$

$$\geq \gamma(H_1^c \cap G) + \gamma(F^c \cap G) - 2\varepsilon \text{ , επειδή } H_1^c \cap G \supseteq F \cap G.$$

Αφού το ε: τυχόν έπεται η (5).

6)*Εαν F: κλειστό τότε το F είναι γ-μετρήσιμο.*
Πρεπει να δείξουμε ότι ισχύει $\gamma(L) \geq \gamma(F \cap L) + \gamma(F^c \cap L), \forall L \subseteq S$. Αν G: ανοικτό και $G \supseteq L$ τότε λόγω του 5) , $\beta(G) \geq \gamma(F \cap G) + \gamma(F^c \cap G) \geq \gamma(F \cap L) + \gamma(F^c \cap L)$

, οπότε από τον ορισμό του γ έπεται ότι $\gamma(L) \geq \gamma(F \cap L) + \gamma(F^c \cap L)$.
Η απόδειξη είναι τώρα πλήρης.

Ας δούμε τώρα μια εφαρμογή που σχετίζεται με τον μετασχηματισμό Laplace ενός μέτρου P :

Παράδειγμα 4.5 : Έστω $S = [0, \infty)$, $\mathcal{S} = \mathcal{B}(S)$ και P ένα μέτρο πιθανότητας ορισμένο στην $\mathcal{S}$. Ο μετασχηματισμός Laplace του P είναι η συνάρτηση που ορίζεται ως :

$$L(t) = \int_{[0,\infty)} e^{-tx} dP(x), \ t > 0$$

Είναι γνωστό ότι ο μετασχηματισμός Laplace καθορίζει απολύτως το P και αντίστροφα. Εαν τώρα έχουμε μια ακολουθία απο μέτρα $\{P_n\}$ με $P_n \Rightarrow P$ τότε για τις συνεχείς $f_t(x) = e^{-tx}$ προκύπτει από τον χαρακτηρισμό της ασθενούς σύγκλισης ότι $P_n f_t \to P f_t, \ \forall t > 0$, δηλαδή $L_n(t) \to L(t), \forall t > 0$.
Για το αντίστροφο θα χρειαστούμε την εξής εύκολα ελέγξιμη για την ισχύ της ανισότητα (με βάση το θεώρημα του Fubini) :

$$(4.9) \qquad \frac{1}{u}\int_{[0,u)}(1 - L_n(t))d\lambda(t) = \frac{1}{u}\int_{[0,u)}\int_{[0,\infty)}(1 - e^{-tx})dP_n(x)d\lambda(t) =$$
$$\frac{1}{u}\int_{[0,\infty)}\int_{[0,u)}(1 - e^{-tx})d\lambda(t)dP_n(x) \geq \frac{1}{u}\int_{(\frac{1}{u},\infty)}\int_{[0,u)}(1 - e^{-\frac{t}{u}})d\lambda(t)dP_n(x) =$$
$$\frac{1}{e}P_n(\frac{1}{u}, \infty).$$

Επειδή ο μετασχηματισμός Laplace είναι συνεχής συνάρτηση του t και $L(0) = 1$, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $u > 0$ ώστε $\frac{1}{u}\int_{[0,u)}(1 - L(t))d\lambda(t) < \frac{\varepsilon}{e}$. Έτσι επειδή $L_n(t) \to L(t), \ \forall t > 0$, χρησιμοποιώντας το θεώρημα φραγμένης σύγκλισης μπορούμε να βρούμε έναν n_0 ώστε αν $n \geq n_0$ να ισχύει $\frac{1}{u}\int_{[0,u)}(1 - L_n(t))d\lambda(t) < \frac{\varepsilon}{e}$.
Παίρνοντας συμπληρώματα και με τη χρήση της (4.9) βλέπουμε ότι $P_n([0, \frac{1}{u}]) > 1 - \varepsilon, \forall n \geq n_0$ οπότε μεγαλώνοντας κι άλλο το $\frac{1}{u}$ αν χρειαστεί μπορούμε να βρούμε ένα νέο $\tilde{u} > 0$ ώστε $P_n([0, \frac{1}{\tilde{u}}]) > 1 - \varepsilon, \forall n$, δηλαδή η $\{P_n\}$ είναι tight. Από το πόρισμα μετά το θεώρημα 4.1 αρκεί να δείξουμε ότι αν μια υπακολουθία $\{P_{n_i}\}$ συγκλίνει ασθενώς , τότε συγκλίνει ασθενώς αναγκαστικά στο P. Όμως αν $P_{n_i} \Rightarrow Q$ τότε $L_{n_i}(t) \to L^{(Q)}(t), \forall t > 0$ επομένως αφού $L_n(t) \to L(t) \equiv L^{(P)}(t)$ θα πρέπει $L^{(Q)} \equiv L = L^{(P)}$ δηλαδή $P \equiv Q$.

Ενότητα 5: Η σ-άλγεβρα των ανοικτών σφαιρών και η μετρική του Prohorov.

Σε αυτήν την ενότητα θα ασχοληθούμε με δύο ζητήματα τα οποία δεν θα χρησιμοποιήσουμε στα επόμενα κεφάλαια αλλά παρουσιάζουν από μόνα τους μαθηματικό ενδιαφέρον. Αυτά είναι η σ-άλγεβρα που παράγεται από την οικογένεια των ανοικτών σφαιρών ενός μετρικού χώρου S και η μετρική του Prohorov. Την σ-άλγεβρα των ανοικτών σφαιρών την συμβολίζουμε με $\mathcal{S}_0$ και θα την γράφουμε για συντομία "Ball σ-άλγεβρα ".

Η "Ball σ-άλγεβρα "

Η συγκεκριμένη σ-άλγεβρα ορίστηκε προκειμένου να μελετήσουμε ασθενή σύγκλιση σε μετρικούς χώρους που δεν είναι διαχωρίσιμοι. Εαν ο S δεν είναι διαχωρίσιμος , ενδέχεται μια συνάρτηση $f : S \to \mathbb{R}$ που είναι $\mathcal{S}\backslash\mathcal{R}$ μετρήσιμη να μην είναι $\mathcal{S}_0\backslash\mathcal{R}$ μετρήσιμη όπως συμβαίνει στην περίπτωση που ο S είναι υπεραριθμήσιμος με την διακριτή μετρική και $f = I_A$ για A με την ιδιότητα A, A^c: υπεραριθμήσιμα. Έχουμε το σχετικό Λήμμα :

Λήμμα : *i) Αν το M είναι διαχωρίσιμο σύνολο τότε η απεικόνιση $\rho(\cdot\,, M)$ είναι ομοιόμορφα συνεχής και $\mathcal{S}_0$-μετρήσιμη.*
ii) Αν το M είναι διαχωρίσιμο τότε το σύνολο $M^\delta = \{x \in S : \rho(x, M) < \delta\}$ ανήκει στην $\mathcal{S}_0$.
iii) Αν το M είναι κλειστό και διαχωρίσιμο, ειδικά αν είναι συμπαγές, τότε $M \in \mathcal{S}_0$.

Απόδειξη : Έστω σταθερό $y \in S$. Το σύνολο $[x \in S : \rho(x, y) < u] = B_\rho(y, u)$ ανήκει στην $\mathcal{S}_0$ για κάθε $u > 0$ επομένως η συνάρτηση $\rho(\cdot\,, y)$ είναι $\mathcal{S}_0$-μετρήσιμη. Αν το D είναι αριθμήσιμο τότε η $\rho(\cdot\,, D)$ είναι $\mathcal{S}_0$-μετρήσιμη επειδή ισχύει :
$[x \in S : \rho(x, D) \geq u] = \bigcap_{y_n \in D} [x \in S : \rho(x, y_n) \geq u] \in \mathcal{S}_0$.
Εαν το D είναι και πυκνό στο M τότε $D \subseteq M \subseteq \overline{D}$ και $\rho(\cdot\,, D) = \rho(\cdot\,, \overline{D}) = \rho(\cdot\,, M)$ επομένως η $\rho(\cdot\,, M)$ είναι $\mathcal{S}_0$-μετρήσιμη και προφανώς ομοιόμορφα συνεχής. Έτσι αποδείχθηκαν τα i) , ii). Αν το M είναι κλειστό τότε $M = \bigcap_k M^{\frac{1}{k}}$ και άρα λόγω της ii) ανήκει στην $\mathcal{S}_0$.

Κατ'αναλογία με το θεώρημα 1.1 μπορούμε να δείξουμε ότι κάθε μέτρο πιθανότητας στον $(S, \mathcal{S}_0)$ είναι κανονικό :
Θεώρημα 5.1 : *Αν P είναι μέτρο πιθανότητας στον $(S, \mathcal{S}_0)$ τότε $\forall \varepsilon > 0$ και $\forall A \in \mathcal{S}_0$, $\exists$ κλειστό $F \in \mathcal{S}_0$ και ανοικτό $G \in \mathcal{S}_0$ με $F \subseteq A \subseteq G$ και $P(G\backslash F) < \varepsilon$.*

Απόδειξη : Η απόδειξη είναι εντελώς ανάλογη με αυτήν του θεωρήματος 1.1. Πάλι θεωρούμε $\mathcal{G}$ να είναι η κλάση των $\mathcal{S}_0$-συνόλων με τη ζητούμενη ιδιότητα. Αν $A = \overline{B}(y, r)$ τότε $G_\delta = \{x \in S : \rho(x, y) < r + \delta\} \searrow A$ καθώς $\delta \searrow 0$ οπότε για κατάλληλο δ και για $F = A$ ισχύει $F = A \subseteq A \subseteq G_\delta$ και $P(G_\delta \setminus A) < \varepsilon$. Άρα η κλάση $\mathcal{G}$ περιέχει τις κλειστές σφαίρες οπότε με ακριβώς τον ίδιο τρόπο όπως στο θεώρημα 1.1 αποδεικνύουμε ότι είναι σ-άλγεβρα και έτσι $\mathcal{G} = \mathcal{S}_0$.

Θα καλούμε ένα μέτρο πιθανότητας στην $\mathcal{S}_0$ *διαχωρίσιμο* εαν υπάρχει $M \in \mathcal{S}_0$ διαχωρίσιμο τέτοιο ώστε $P(M) = 1$. Παίρνοντας $\tilde{M} = \overline{M}$ είναι $P(\tilde{M}) = 1$ και το $\overline{M}$ είναι επίσης διαχωρίσιμο άρα μπορούμε να υποθέτουμε στο εξής ότι το M είναι και κλειστό.

Θεώρημα 5.2 : *Υποθέτουμε ότι τα μέτρα P, Q είναι ορισμένα στην $\mathcal{S}_0$ και είναι διαχωρίσιμα. Αν $Pf = Qf$ για κάθε φραγμένη, ομοιόμορφα συνεχή και $\mathcal{S}_0$-μετρήσιμη f , τότε $P \equiv Q$.*

Απόδειξη : Αν M_1, M_2 είναι οι διαχωρίσιμοι φορείς των P και Q αντίστοιχα μπορούμε να επιλέξουμε σαν $M = M_1 \cup M_2$ να είναι ο κοινός κλειστός διαχωρίσιμος φορέας των P, Q. Θεωρούμε τώρα, για F: κλειστό , την συνάρτηση :

$$f(x) = 1 - \max\{0, (1 - \tfrac{\rho(x, M\cap(F^\varepsilon)^c)}{\varepsilon})\} \tag{5.1}$$

Η f είναι , λόγω του i) του Λήμματος, ομοιόμορφα συνεχής και $\mathcal{S}_0$-μετρήσιμη (και προφανώς φραγμένη από το 0 και το 1) και λόγω του iii) το σύνολο $A_\varepsilon = M \cap (F^\varepsilon)^c$ ανήκει στην $\mathcal{S}_0$ ως κλειστό και διαχωρίσιμο. Θα αποδείξουμε ότι $I_F \leq f \leq I_{A_\varepsilon^c}$. Αν $x \in F$ τότε $\rho(x, F) < \varepsilon$ για κάθε $\varepsilon > 0$. Δηλαδή $x \in F^\varepsilon$ $\forall \varepsilon > 0$. Επομένως $x \notin A_\varepsilon$ $\forall \varepsilon > 0$ επομένως $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_\varepsilon > 0$ ώστε $\rho(x, A_\varepsilon) \geq \delta_\varepsilon$. Ελαττώνοντας το δ_ε αν χρειαστεί , μπορούμε κάθε φορά να πετυχαίνουμε $\rho(x, A_a) \geq a$ για όλα τα $a > 0$ επομένως σε αυτή την περίπτωση $f(x) = 1$. Τώρα αν $x \notin A_\varepsilon^c$ τότε $x \in A_\varepsilon$ οπότε $f(x) = 1 - 1 = 0$ και αποδείχθηκε ότι $I_F \leq f \leq I_{A_\varepsilon^c}$. Για $F \in \mathcal{S}_0$, παίρνοντας ολοκληρώματα στην προηγούμενη ανισότητα έχουμε : $P(F) \leq Pf = Qf \leq Q(A_\varepsilon^c) = Q(F^\varepsilon)$ άρα για F : κλειστό , αφήνοντας $\varepsilon \searrow 0$ έπεται ότι $P(F) \leq Q(F)$. Λόγω συμμετρίας προκύπτει και ότι $Q(F) \leq P(F)$ οπότε τα μέτρα ταυτίζονται στα κλειστά σύνολα και λόγω του θεωρήματος 5.1 προκύπτει ότι ταυτίζονται εξ ολοκλήρου στην $\mathcal{S}_0$.

Για μέτρα πιθανότητας P_n, P στην $\mathcal{S}_0$ θα λέμε ότι η P_n *συγκλίνει ασθενώς°* στο P αν ισχύει $P_n f \to Pf$ για κάθε $f : S \to \mathbb{R}$ συνεχή, φραγμένη και $\mathcal{S}_0$-μετρήσιμη συνάρτηση. Αυτό θα το συμβολίζουμε με $P_n \Rightarrow^\circ P$. Το θεώρημα 5.2 μας εξασφαλίζει ότι δεν μπορεί να υπάρχουν δυο διαφορετικά διαχωρίσιμα μέτρα πιθανότητας που να είναι ασθενή° όρια της ίδιας ακολουθίας P_n , δηλαδή αν P, Q διαχωρίσιμα και $P_n \Rightarrow^\circ P$, $P_n \Rightarrow^\circ Q$, αναγκαστικά $P \equiv Q$.

Θεώρημα 5.3 : *Εαν το P είναι διαχωρίσιμο τότε τα εξής είναι ισοδύναμα :*
i)$P_n \Rightarrow^\circ P$
ii) $P_n f \to Pf$ για κάθε φραγμένη, ομοιόμορφα συνεχή και $\mathcal{S}_0$-μετρήσιμη f.
iii) $\limsup_n P_n(F) \leq P(F)$ για κάθε F: κλειστό στην $\mathcal{S}_0$
iv) $\liminf_n P_n(G) \geq P(G)$ για κάθε ανοικτό G στην $\mathcal{S}_0$
v) $P_n(A) \to P(A)$ για κάθε A στην $\mathcal{S}_0$ για το οποίο υπάρχουν $F, G \in \mathcal{S}_0$ με F : κλειστό, G : ανοικτό, $G \subseteq A \subseteq F$ και $P(F \setminus G) = 0$.

Απόδειξη : Η συνεπαγωγή i) $\implies$ ii) είναι τετριμμένη. Για την συνεπαγωγή ii) $\implies$ iii) μπορούμε να θεωρήσουμε τη συνάρτηση (5.1) και το σύνολο A_ε όπως και πριν. Λόγω της $I_F \leq f \leq I_{A_\varepsilon^c}$ ισχύει ότι $\limsup_n P_n(F) \leq \limsup_n P_n f = Pf \leq P(A_\varepsilon^c) = P(F^\varepsilon)$, διότι το M είναι φορέας του P , οπότε ξανά μπορούμε να αφήσουμε το $\varepsilon \searrow 0$. Η ισοδυναμία των iii) , iv) είναι άμεση παίρνοντας συμπληρώματα. Για το ότι iii)+iv) $\implies$ v) , βάζουμε στην σχέση (2.3) $F = \overline{A}, G = A^\circ$. Τώρα για το v) $\implies$ i) θεωρούμε μια τυχούσα f που είναι φραγμένη, συνεχής και $\mathcal{S}_0$-μετρήσιμη και με το ίδιο επιχείρημα όπως και στο θεώρημα 2.3 μπορούμε να υποθέσουμε ότι $0 \leq f \leq 1$. Θέτοντας $G_t = A_t = [f > t]$ και $F_t = [f \geq t]$ βλέπουμε ότι τα G_t είναι ανοικτά και τα F_t κλειστά και $G_t \subseteq A_t \subseteq F_t$ και ανήκουν στην $\mathcal{S}_0$ ενώ αφού $F_t \backslash G_t \subseteq [f = t]$ ισχύει και $P(F_t \backslash G_t) = 0$, λ-σχεδόν για όλα τα t. Με ακριβώς τα ίδια επιχειρήματα οι συναρτήσεις $W_n(t) = P_n[f > t]$ είναι $\mathcal{S}_0$-μετρήσιμες και $W_n(t) \to P([f > t])$ λ-σχεδόν για όλα τα t , λόγω της v) , οπότε εφαρμόζοντας το θεώρημα φραγμένης σύγκλισης έπεται ότι $P_n f = \mathbb{E}_n(f) \to Pf = \mathbb{E}(f)$ δηλαδή $P_n \Rightarrow^\circ P$.

Αξίζει να αναφέρουμε σε αυτό το σημείο ένα θεώρημα απεικόνισης αντίστοιχο με αυτό του δεύτερου κεφαλαίου. Έστω S' ένας άλλος μετρικός χώρος με ball σ-άλγεβρα $\mathcal{S}'_0$ και $h : S \to S'$. Ισχύει το :

Θεώρημα 5.4 : *Υποθέτουμε ότι το P είναι ένα διαχωρίσιμο μέτρο στην $\mathcal{S}_0$ με διαχωρίσιμο φορέα $M \in \mathcal{S}_0$ και ότι η h είναι $\mathcal{S}_0 \backslash \mathcal{S}'_0$-μετρήσιμη και συνεχής σε όλα τα σημεία του M. Εαν $P_n \Rightarrow^\circ P$ (στον $(S, \mathcal{S}_0)$) τότε $P_n \circ h^{-1} \Rightarrow^\circ P \circ h^{-1}$ (στον $(S', \mathcal{S}'_0)$).*

Απόδειξη : Έστω ένα ανοικτό G' με $G' \in \mathcal{S}'_0$. Θέτουμε $A = h^{-1}(G')$ και θα αποδείξουμε ότι $A \cap M \subseteq A^\circ$. Έστω λοιπόν $x \in A \cap M$. Τότε $h(x) \in G'$ και επειδή $x \in M$ και η h είναι συνεχής στο M θα υπάρχει ανοικτό $V \in S$ με $x \in V$ και $h(V) \subseteq G'$. Δηλαδή $x \in V \subseteq h^{-1}(G') = A$ άρα $x \in A^\circ$. Τώρα, το σύνολο $A \cap M$ είναι διαχωρίσιμο επομένως υπάρχει ένα αριθμήσιμο D με $A \cap M \subseteq \overline{D}$. Η οικογένεια των ανοικτών σφαιρών $\Delta = \{B(d, r) : d \in D, r \in \mathbb{Q}\}$ είναι αριθμήσιμη και καλύπτει το $A \cap M$ επομένως αν πάρουμε $G = \bigcup_{B \in \Delta} B$, τότε το G είναι ανοικτό (ως αριθμήσιμη ένωση ανοικτών) και άρα $A \cap M \subseteq G \subseteq A^\circ \subseteq A$. Από την υπόθεση για την μετρησιμότητα της h προκύπτει ότι $A \cap M \in \mathcal{S}_0$ και προφανώς $G \in \mathcal{S}_0$ και έτσι :

$$\liminf_n P_n \circ h^{-1}(G') = \liminf_n P_n(A) \geq \liminf_n P_n(G) \geq P(G) \geq$$

$$\geq P(A \cap M) = P(A) = P \circ h^{-1}(G')$$

άρα $P_n \circ h^{-1} \Rightarrow^\circ P \circ h^{-1}$.

Για μια ακολουθία μέτρων πιθανότητας P_n στην $\mathcal{S}_0$ θα λέμε ότι είναι tight$^\circ$ εαν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει συμπαγές σύνολο K τέτοιο ώστε για κάθε $\delta > 0$ να ισχύει :

$$\liminf_n P_n(K^\delta) > 1 - \varepsilon, \tag{5.2}$$

όπου $K^\delta = \{x \in S : \rho(x, K) < \delta\}$.
Αφού το K είναι συμπαγές, θα είναι και διαχωρίσιμο, οπότε το Λήμμα μας εξασφαλίζει ότι $K, K^\delta \in \mathcal{S}_0$, όπως και επίσης ότι το $K_\delta = \{x \in S : \rho(x, K) \leq \delta\} \in \mathcal{S}_0$. Εαν τώρα η ακολουθία $\{P_n\}$ είναι tight° και εαν $P_n \Rightarrow^\circ P$ τότε , εφόσον το K_δ είναι κλειστό ανήκει στην $\mathcal{S}_0$ και περιέχει το K^δ , έπεται λόγω της (5.2) και του θεωρήματος 5.3 ότι $P(K_\delta) \geq 1 - \varepsilon$ δηλαδή το P είναι tight με την παλιά, γνωστή μας έννοια.

Σχετικά, έχουμε το εξής ανάλογο του θεωρήματος του Prohorov :

Θεώρημα 5.5 : *Εαν η $\{P_n\}$ είναι tight° τότε για κάθε υπακολουθία $\{P_{n_i}\}_i$ υπάρχει μια περαιτέρω υπακολουθία $\{P_{n_{i_m}}\}_m$ και ένα διαχωρίσιμο μέτρο πιθανότητας P στην $\mathcal{S}_0$ ώστε $P_{n_{i_m}} \Rightarrow^\circ_m P$.*

Απόδειξη : Επειδή γενικά για μια ακολουθία πραγματικών αριθμών $\{a_n\}$ ισχύει $\liminf_i a_{n_i} \geq \liminf_n a_n$, βλέπουμε ότι η υπακολουθία $\{P_{n_i}\}$ της tight° $\{P_n\}$ είναι επίσης tight°. Άρα αρκεί να βρούμε μια ασθενώς° συγκλίνουσα υπακολουθία της ίδιας της $\{P_n\}$. Ακριβώς όπως και στην απόδειξη του θεωρήματος του Prohorov κατασκευάζουμε μια αύξουσα ακολουθία συμπαγών υποσυνόλων $K_1 \subseteq K_2 \subseteq \ldots$ ώστε να ισχύει :

$$\liminf_n P_n(K_u^\delta) > 1 - \frac{1}{u} \tag{5.3}$$

για κάθε $u \in \mathbb{N}$ και για κάθε $\delta > 0$.
Ορίζουμε τώρα τις κλάσεις $\mathcal{A}, \mathcal{H}$ ακριβώς όπως και στο θεώρημα 4.1 και μέσω του διαγώνιου επιχειρήματος εκλέγουμε μια υπακολουθία $\{P_{n_i}\}$ για την οποία υπάρχει το όριο $a_0(H^\delta) = \lim_i P_{n_i}(H^\delta)$ για κάθε H που ανήκει στην αριθμήσιμη κλάση $\mathcal{H}$ και για κάθε ρητό δ. Τώρα ορίζουμε :

$$a(H) = \lim_{\delta \searrow 0} a_0(H^\delta)$$

, όπου το δ κινείται στους θετικούς ρητούς. Το a ικανοποιεί τις σχέσεις (4.3), (4.4), (4.5). Πράγματι οι (4.3) , (4.5) προκύπτουν άμεσα από το γεγονός ότι αν $H_1 \subseteq H_2$ τότε $H_1^\delta \subseteq H_2^\delta$ και από την ισότητα $(H_1 \cup H_2)^\delta = H_1^\delta \cup H_2^\delta$. Η σχέση (4.4) έπεται από το γεγονός ότι τα σύνολα H της $\mathcal{H}$ είναι συμπαγή και συνεπώς αν $H_1 \cap H_2 = \emptyset$ τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $H_1^\delta \cap H_2^\delta = \emptyset$. Τα υπόλοιπα βήματα είναι ακριβώς όπως στο 4.1, δηλαδή για ανοικτά G ορίζουμε το $\beta(G)$ μέσω της (4.6) και για τυχόν $M \in \mathfrak{P}(S)$ ορίζουμε το $\gamma(M)$ όπως στην (4.7). Έπειτα περιορίζουμε το γ στην $\mathcal{S}_0$ δηλαδή έστω $P = \gamma_{|\mathcal{S}_0}$. Λόγω της (5.3) προκύπτει ότι $a_0(K_u^\delta) \geq 1 - \frac{1}{u}$ (διότι $K_u \in \mathcal{H}$) κι έτσι $a(K_u) \geq 1 - \frac{1}{u}$. Έτσι η σχέση (4.8) μας δίνει ότι το P είναι μέτρο πιθανότητας. Μένει να αποδείξουμε ότι $P_{n_i} \Rightarrow^\circ_i P$. Έστω λοιπόν ένα ανοικτό G με $G \in \mathcal{S}_0$. Ισχύει $P(G) = \beta(G) = \sup\{a(H) : H \in \mathcal{H}, H \subseteq G\}$ οπότε θεωρούμε τυχόν $H \in \mathcal{H}, H \subseteq G$. Το H είναι συμπαγές σύνολο και $H \cap G^c = \emptyset$ συνεπώς πάλι λόγω συμπάγειας μπορούμε να εκλέξουμε αρκετά μικρό $\delta > 0$ ώστε $H^\delta \subseteq G$. Πράγματι, εαν όχι, τότε $\forall \delta > 0$

ισχύει $G^c \cap H^\delta \neq \emptyset$. Δηλαδή $\exists \{x_n\} \in G^c : \rho(x_n, H) < \frac{1}{n}$. Αυτό με τη σειρά του σημαίνει ότι $\exists \ \{y_n\} \in H : \rho(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$. Το H όμως είναι συμπαγές οπότε $\exists \ \{y_{k_n}\}, y_0 \in H : \rho(y_{k_n}, y_0) \to 0$. Επειδή $\rho(x_{k_n}, y_{k_n}) \to 0$ συνάγουμε ότι $\rho(x_{k_n}, y_0) \to 0$. Όμως το G^c είναι κλειστό και περιέχει την $\{x_n\}$ επομένως $y_0 \in G^c$ και ταυτόχρονα $y_0 \in H$, άτοπο επειδή $H \cap G^c = \emptyset$.
Τώρα επειδή η ακολουθία $\{a_0(H^\delta)\}_\delta$ είναι φθίνουσα ως προς δ προκύπτει ότι $a(H) \leq a_0(H^\delta)$ και επειδή $H^\delta \subseteq G$ έχουμε :

$$a(H) \leq a_0(H^\delta) \leq \liminf_i P_{n_i}(G)$$

δηλαδή $P(G) = \beta(G) \leq \liminf_i P_{n_i}(G)$, όπως έπρεπε να δειχθεί.

Το μέτρο P, ως ασθενές° όριο της tight° ακολουθίας $\{P_n\}$ είναι tight με την παλιά έννοια και συνεπώς ειναι διαχωρίσιμο. Πράγματι, $\forall n$, $\exists K_n$: συμπαγή σύνολα με $P(K_n) > 1 - \frac{1}{n}$. Επιλέγουμε $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ οπότε το A είναι διαχωρίσιμο (ως αριθμήσιμη ένωση διαχωρίσιμων) και $P(A^c) < \frac{1}{n}, \forall n$ δηλαδή $P(A^c) = 0$ που σημαίνει ότι το A είναι διαχωρίσιμος φορέας του P.

Η μετρική του Prohorov

Έστω S ένας μετρικός χώρος και $\mathcal{S}$ η Borel σ-άλγεβρά του. Θεωρούμε το σύνολο $\mathcal{P} = \{Q : \mathcal{S} \to [0,1]\}$ να είναι ο χώρος όλων των μέτρων πιθανότητας με πεδίο ορισμού την $\mathcal{S}$. Μπορούμε να θεωρήσουμε μια τοπολογία στον $\mathcal{P}$ παίρνοντας σαν βασικές περιοχές ενός $P \in \mathcal{P}$ να είναι τα σύνολα της μορφής :

$$U^{(\varepsilon)}_{f_1,\ldots,f_k}(P) = \{Q \in \mathcal{P} : |Qf_i - Pf_i| < \varepsilon, \forall i = 1, \ldots, k\}$$

για κάποιον $k \in \mathbb{N}$ και για κάποιες $f_i : S \to \mathbb{R}$ συνεχείς και φραγμένες. Μπορεί να αποδειχθεί ότι η ασθενής σύγκλιση ακολουθίας μέτρων πιθανότητας (ή ακόμα γενικότερα, δικτύων) είναι σύγκλιση σε αυτή την τοπολογία.

Η μετρική του Prohorov $\pi : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \to \mathbb{R}^+$ ορίζεται ως :

$$\pi(P,Q) = \inf\{\varepsilon > 0 : P(A) \leq Q(A^\varepsilon) + \varepsilon, Q(A) \leq P(A^\varepsilon) + \varepsilon, \forall A \in \mathcal{S}\} \tag{5.10}$$

Θα αποδείξουμε μερικά πράγματα για την π.

i)*Η συνάρτηση π είναι πράγματι μια μετρική* : Λόγω συμμετρίας είναι άμεσο ότι $\pi(P,Q) = \pi(Q,P)$ και προφανώς $\pi(P,P) = 0$. Τώρα, αν $\pi(P,Q) = 0$ έχουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει $P(A) \leq Q(A^\varepsilon) + \varepsilon$ για κάθε $A \in \mathcal{S}$ δηλαδή και για όλα τα κλειστά F. Φυσικά λόγω ορισμού της π ισχύει και η άλλη ανισότητα, οπότε αφήνοντας $\varepsilon \searrow 0$ έπεται $P(F) = Q(F)$ για κάθε κλειστό F, δηλαδή $P \equiv Q$. Για την τριγωνική ανισότητα τώρα, έστω $\pi(P,Q) < \varepsilon_1$, $\pi(Q,R) < \varepsilon_2$. Επειδή ισχύει η σχέση $(A^{\varepsilon_1})^{\varepsilon_2} \subseteq A^{\varepsilon_1+\varepsilon_2}$, έχουμε : $P(A) \leq Q(A^{\varepsilon_1}) + \varepsilon_1 \leq R((A^{\varepsilon_1})^{\varepsilon_2}) + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \leq R(A^{\varepsilon_1+\varepsilon_2}) + \varepsilon_1 + \varepsilon_2$. Αυτό σημαίνει ότι το $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ ανήκει στο σύνολο του οποίου παίρνουμε το inf στον ορισμό της π.Επομένως $\pi(P,R) \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2$. Επειδή τα ε_1 , ε_2 ήταν τυχόντα που ξεπερνούσαν τα $\pi(P,Q)$ και $\pi(Q,R)$ αντίστοιχα , αφήνοντας

$\varepsilon_1^{(n)} \searrow \pi(P,Q)$ και $\varepsilon_2^{(n)} \searrow \pi(Q,R)$ έπεται ότι $\pi(P,R) \leq \pi(P,Q) + \pi(Q,R)$.

ii) *Εαν ισχύει $P(A) \leq Q(A^\varepsilon) + \varepsilon, \forall A \in \mathcal{S}$, τότε αναγκαστικά θα ισχύει και $Q(A) \leq P(A^\varepsilon) + \varepsilon, \forall A \in \mathcal{S}$* : Εδώ αρκεί να παρατηρήσουμε ότι ισχύει η εξής ισοδυναμία : $A \subseteq S \setminus B^\varepsilon \iff B \subseteq S \setminus A^\varepsilon \iff \rho(x,y) \geq \varepsilon, \forall x \in A,\ \forall y \in B$. Για τυχόν λοιπόν $A \in \mathcal{S}$, θεωρούμε $B = S \setminus A^\varepsilon$, οπότε αν η δοθείσα ανισότητα ισχύει για το B έχουμε : $P(A^\varepsilon) = 1 - P(B) \geq 1 - Q(B^\varepsilon) - \varepsilon = Q(S \setminus B^\varepsilon) - \varepsilon \geq Q(A) - \varepsilon$.

iii) *Εαν $\pi(P_n, P) \to 0$ τότε $P_n \Rightarrow P$* : Πράγματι,θεωρούμε μια $\varepsilon_n \to 0$ ώστε $\pi(P_n, P) < \varepsilon_n \to 0$ (πάρε πχ $\varepsilon_n = \pi(P_n, P) + \frac{1}{n}$). Τότε για τυχόν F : κλειστό είναι : $\limsup_n P_n(F) \leq \limsup_n (P(F^{\varepsilon_n}) + \varepsilon_n) = P(F)$, άρα $P_n \Rightarrow P$.

iv) *Εαν ο S είναι διαχωρίσιμος και $P_n \Rightarrow P$, τότε $\pi(P_n, P) \to 0$* : Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή ο S είναι διαχωρίσιμος μπορούμε να βρούμε ένα αριθμήσιμο σύνολο A τέτοιο ώστε $S = \bigcup_{x \in A} B(x, \frac{\varepsilon}{2})$. Έστω $B_i = B(x_i, \frac{\varepsilon}{2})$ και $A_1 = B_1, A_2 = B_2 \setminus B_1,\ \ldots, A_n = B_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} B_i, \ldots$ Τότε η ακολουθία $\{A_n\}_n$ είναι μια διαμέριση του S (δηλαδή είναι ξένα ανά δύο) και κάθε ένα από τα A_i έχει διάμετρο μικρότερη από ε. Μπορούμε να διαλέξουμε $k \in \mathbb{N}$ ώστε $P(\bigcup_{i=k+1}^{\infty} A_i) < \varepsilon$ και έπειτα να πάρουμε :

$$\mathcal{G} = \{(A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \ldots \cup A_{i_m})^\varepsilon : 1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_m \leq k\}$$

Η $\mathcal{G}$ είναι μια πεπερασμένη κλάση απο ανοικτά σύνολα και επειδή $P_n \Rightarrow P$ μπορούμε να βρούμε έναν n_0 ώστε $n \geq n_0 \implies P_n(G) > P(G) - \varepsilon, \forall G \in \mathcal{G}$ (αυτό μπορεί να γίνει επειδή $\liminf_n P_n(G) \geq P(G) > P(G) - \varepsilon, \forall G \in \mathcal{G}$ και η $\mathcal{G}$ είναι πεπερασμένη). Έστω $A \in \mathcal{S}$ και θεωρούμε A_0 να είναι η ένωση των συνόλων ανάμεσα στα $A_1, \ldots, A_k$ που τέμνουν το A. Τότε $A_0^\varepsilon \in \mathcal{G}$ και $n \geq n_0 \implies P(A) \leq P(A_0) + P(\bigcup_{i=k+1}^{\infty} A_i) \leq P(A_0) + \varepsilon \leq P(A_0^\varepsilon) + \varepsilon < P_n(A_0^\varepsilon) + 2\varepsilon \leq P_n(A^{2\varepsilon}) + 2\varepsilon$, όπου η τελευταία ανισότητα προκύπτει από το γεγονός ότι η διάμετρος των A_i είναι μικρότερη του ε. Έτσι , χρησιμοποιώντας και το ii) προκύπτει ότι $\pi(P_n, P) < 2\varepsilon$ για το τυχόν ε.

v) *Εαν ο S είναι διαχωρίσιμος , τότε μια οικογένεια μέτρων A του $\mathcal{P}$ είναι σχετικά συμπαγής αν και μόνο αν η κλειστότητα $\overline{A}^\pi$ είναι π-συμπαγής* : Στην διαχωρίσιμη περίπτωση από τα iii) , v) προκύπτει η ισοδυναμία της ασθενούς σύγκλισης και της π-σύγκλισης.

vi) *Εαν ο S είναι διαχωρίσιμος , τότε και ο $\mathcal{P}$ είναι διαχωρίσιμος* : Η απόδειξη θα γίνει κατασκευαστικά . Έστω $\varepsilon > 0$ και μια αριθμήσιμη διαμέριση $\{A_i\}_i$ του S όπως στο iv). Σε κάθε μη κενό A_i επιλέγουμε ένα σημείο $x_i \in A_i$ και θεωρούμε την αριθμήσιμη οικογένεια μέτρων :

$$\Pi_\varepsilon = \{\sum_{i=1}^{k} r_i \delta_{x_i} : k \in \mathbb{N}, r_i \in \mathbb{Q}\}$$

Για τυχόν $P \in \mathcal{P}$ διαλέγουμε έναν k : $P(\bigcup_{i=k+1}^{\infty} A_i) < \varepsilon$ και μετά επιλέγουμε ρητούς $r_1, \ldots, r_k$ ώστε $\sum_{i=1}^{k} r_i = 1$ και $\sum_{i=1}^{k} |r_i - P(A_i)| < \varepsilon$ και θεωρούμε

το μέτρο $Q = \sum_{i=1}^{k} r_i \delta_{x_i}$. Πάλι θεωρούμε το σύνολο $A_0 = \bigcup_{i \in I} A_i$ όπου το I είναι το σύνολο δεικτών ανάμεσα στους $\{1, 2, \ldots, k\}$ για τους οποίους $A_i \cap A \neq \emptyset$ οπότε έχουμε :
$P(A) \leq P(A_0) + \varepsilon = \sum_{i \in I} P(A_i) + \varepsilon \leq \sum_{i \in I} r_i + 2\varepsilon = Q(A_0) + 2\varepsilon \leq Q(A^{\varepsilon}) + 2\varepsilon$, όπου η τελευταία ανισότητα προκύπτει λόγω του γεγονότος ότι η διάμετρος των συνόλων A_i είναι $< \varepsilon$ και έτσι $A_0 \subseteq A^{\varepsilon}$. Συνεπώς και με βάση τη ii) έπεται ότι $\pi(P, Q) < 2\varepsilon$, δηλαδή η Π_{ε} είναι ένα αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολο του $\mathcal{P}$.

vii) *Εαν ο S είναι διαχωρίσιμος και πλήρης τότε και ο $\mathcal{P}$ είναι πλήρης* : Έστω μια π-βασική ακολουθία $\{P_n\}$ στον $\mathcal{P}$. Για να δείξουμε ότι συγκλίνει αρκεί να βρούμε μια π-συγκλίνουσα υπακολουθία δηλαδή , λόγω της v), αρκεί να βρούμε μια ασθενώς συγκλίνουσα υπακολουθία, οπότε αρκεί να δείξουμε ότι η $\{P_n\}$: tight. Χρησιμοποιώντας κάποια από τα επιχειρήματα της απόδειξης 4.2 αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $\varepsilon, \delta > 0$ υπάρχουν πεπερασμένες το πλήθος ανοικτές σφαίρες $C_1, \ldots, C_m$ ακτίνας δ για τις οποίες ισχύει $P_n(C_1 \cup \ldots \cup C_m) > 1 - \varepsilon, \forall n$. (προφανώς το m εξαρτάται από τα δ, ε).
Αρχικά έστω $\eta : 0 < 2\eta < \min\{\delta, \varepsilon\}$. Επειδή η $\{P_n\}$ είναι βασική, διαλέγουμε n_0 ώστε $n \geq n_0 \implies \pi(P_{n_0}, P_n) < \eta$. Επειδή ο S είναι διαχωρίσιμος μπορεί να γραφτεί σαν $S = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B(x_i, \eta) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ για κάποια x_i που ανήκουν σε ένα αριθμήσιμο σύνολο και όπως και πριν, μπορούμε να διαλέξουμε έναν m ώστε $n \leq n_0 \implies P_n(A_1 \cup \ldots \cup A_m) > 1 - \eta$. Θέτουμε τώρα $B_i = B(x_i, 2\eta)$. Αν $n \geq n_0$, τότε $P_n(B_1 \cup \ldots \cup B_m) \geq P_n((A_1 \cup \ldots \cup A_m)^{\eta}) \geq P_{n_0}(A_1 \cup \ldots \cup A_m) - \eta \geq 1 - 2\eta$, όπου η πρώτη ανισότητα προκύπτει από τον ορισμό των B_i και η δεύτερη από το ότι $\pi(P_n, P_{n_0}) < \eta$. Αν $n < n_0$ τότε $P_n(B_1 \cup \ldots \cup B_m) \geq P_n(A_1 \cup \ldots \cup A_m) \geq 1 - \eta$ και έτσι για $C_i = B(x_i, \delta) \supseteq B_i, i = 1, \ldots, m$ προκύπτει ότι $P_n(C_1 \cup \ldots \cup C_m) \geq 1 - 2\eta > 1 - \varepsilon, \forall n$.
Με βάση αυτά προκύπτει το εξής θεώρημα :

Θεώρημα 5.6 : *Έστω ότι ο S είναι διαχωρίσιμος και πλήρης. Τότε η ασθενής σύγκλιση είναι ισοδύναμη με την π-σύγκλιση, ο $\mathcal{P}$ είναι διαχωρίσιμος και πλήρης και ένα σύνολο $A \in \mathcal{P}$ είναι σχετικά συμπαγές αν και μόνο το $\overline{A}^{\pi}$ είναι π-συμπαγές.*

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Ο χώρος $C[0,1]$

Ενότητα 6 : Ασθενής σύγκλιση και tightness στον $C[0,1]$

Θεωρούμε τον χώρο $C[0,1]$ όλων των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το διάστημα $[0,1]$ και με την τοπολογία που επάγει η μετρική της ομοιόμορφης σύγκλισης, δηλαδή για $x, y \in C$ ορίζουμε :

$$\rho(x,y) = \sup_{t\in[0,1]} \{|x(t) - y(t)|\}$$

Έχουμε δει μέσα από παραδείγματα ότι αν οι finite-dimensional distributions μιας ακολουθίας P_n στον C συγκλίνουν ασθενώς στις finite-dimensional distributions του P, αυτό δε σημαίνει αναγκαστικά ότι $P_n \Rightarrow P$ (παράδειγμα 2.5). Ωστόσο εαν η ακολουθία P_n είναι σχετικά συμπαγής τότε η προηγούμενη συνεπαγωγή είναι αληθής (παράδειγμα 4.1). Έτσι έχουμε το εξής πολύ βασικό θεώρημα :

Θεώρημα 6.1 : *Έστω $\{P_n\}_n$, P μέτρα πιθανότητας ορισμένα στον $(C, \mathcal{C})$. Εαν η $\{P_n\}$ είναι tight και εαν οι finite-dimensional distributions της P_n συγκλίνουν ασθενώς σε αυτές του P τότε θα ισχύει ότι $P_n \Rightarrow P$.*

Tightness και συμπάγεια στον C

Είναι γνωστό ότι μια συνεχής συνάρτηση ορισμένη σε κλειστό υποδιάστημα του $\mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής. Μια σημαντική ποσότητα που θα μας βοηθήσει να μελετήσουμε την συμπάγεια στον χώρο C είναι το *μέτρο συνέχειας* μιας τυχούσας συνάρτησης $x(\cdot)$ με πεδίο ορισμού το $[0,1]$:

$$w_x(\delta) = w(x,\delta) = \sup_{|s-t|\le\delta} \{|x(s) - x(t)|\}, \ 0 < \delta \le 1 \tag{6.1}$$

Μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι μια συνάρτηση στο $[0,1]$ ομοιόμορφα συνεχής είναι να ισχύει

$$\lim_{\delta \to 0} w_x(\delta) = 0 \tag{6.2}$$

Πράγματι, έστω ότι η x είναι ομοιόμορφα συνεχής και έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $k > 0 : |s-t| \le k \implies |x(s) - x(t)| < \varepsilon$. Τότε αν $0 < \delta < k$ ισχύει προφανώς $|s-t| \le \delta \implies |x(s) - x(t)| < \varepsilon$, δηλαδή $w_x(\delta) < \varepsilon$. Αντίστροφα , έστω ότι ισχύει η (6.2) και έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $k > 0$ ώστε : $0 < \delta < k \implies w_x(\delta) < \varepsilon$, δηλαδή : $\sup\{|x(s) - x(t)| : |s-t| \le \delta\} < \varepsilon$. Έτσι βρήκαμε $\delta > 0$ ώστε να ισχύει η συνεπαγωγή : $|s-t| < \delta \implies |x(s) - x(t)| < \varepsilon$, δηλαδή η x είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι μια $x \in C$ ικανοποιεί την (6.2) και ότι για σταθερό δ ισχύει : $|w_x(\delta) - w_y(\delta)| \le 2\rho(x,y)$. Αυτό προκύπτει πολύ εύκολα αν γράψουμε $|x(s) - x(t)| = |x(s) - y(s) + y(s) - y(t) + y(t) - x(t)| \le |x(s) - y(s)| + |y(t) - x(t)| + |y(s) - y(t)| \le 2\rho(x,y) + |y(s) - y(t)|$. Αυτό μας λέει ότι , για σταθερό δ, η συνάρτηση $w(\cdot, \delta)$ είναι συνεχής ως προς x.

Μια μικρή υπενθύμιση: ένα σύνολο A καλείται *σχετικά συμπαγές* αν το $\overline{A}$ είναι συμπαγές. Αυτό είναι ισοδύναμο με το ότι κάθε ακολουθία $\{x_n\}$ στο A έχει συγκλίνουσα υπακολουθία (με το όριο να ανήκει στο $\overline{A}$). Πράγματι, η μια κατεύθυνση είναι προφανής ενώ για την αντίστροφη θεωρούμε $(x_n)_n$ στο $\overline{A}$, οπότε μπορούμε να βρούμε $(a_n)_n$ στο A ώστε $\rho(a_n, x_n) < \frac{1}{n}$. Εξ υποθέσεως θα υπάρχει μια υπακολουθία $(a_{k_n})_n$ και ένα $x \in \overline{A}$ με $a_{k_n} \to x$. Αφού $\rho(x_{k_n}, a_{k_n}) \to 0$, έπεται άμεσα ότι $x_{k_n} \to 0$ δηλαδή το $\overline{A}$ είναι συμπαγές.

Αναφορικά με την σχετική συμπάγεια στον C έχουμε το θεώρημα των Ascoli-Arzela :

Θεώρημα 6.2 : *Ένα σύνολο $A \subseteq C[0,1]$ είναι σχετικά συμπαγές αν και μόνο αν ισχύουν :*

$$\sup_{x \in A}\{|x(0)|\} < \infty \tag{6.3}$$

και

$$\lim_{\delta \to 0} \sup_{x \in A}\{w_x(\delta)\} = 0 \tag{6.4}$$

Σε αυτό το σημείο πρέπει να θυμίσουμε τον ορισμό της *ισοσυνέχειας* ενός υποσυνόλου του $C[0,1]$. Ένα $A \subseteq C[0,1]$ καλείται *ισοσυνεχές στο* t_0 αν ισχύει ότι $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 : |t - t_0| < \delta \implies \sup_{x \in A}\{|x(t) - x(t_0)|\} < \varepsilon$. Πιο απλά εαν $\lim_{t \to t_0} \sup_{x \in A}\{|x(t) - x(t_0)|\} = 0$.

Το A θα καλείται *ομοιόμορφα ισοσυνεχές* εαν $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 : |t - s| < \delta \implies \sup_{x \in A}\{|x(t) - x(s)|\} < \varepsilon$. Η σχέση (6.4) περιγράφει ακριβώς αυτό, την ομοιόμορφη ισοσυνέχεια του συνόλου A.

Αν το A περιέχει τις συναρτήσεις που ορίσαμε στην (1.2) τότε όπως έχουμε δείξει, καμία υπακολουθία της z_n δεν μπορεί να συγκλίνει ως προς την $\rho \equiv \rho_\infty$ και έτσι το A δεν είναι σχετικά συμπαγές. Εφόσον η (6.3) ισχύει, τότε η (6.4) δεν πρέπει να είναι αληθής και αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι , για οποιοδήποτε $\delta > 0$, αν πάρουμε n τέτοιο ώστε $\delta \geq \frac{1}{n}$ τότε $w_{z_n}(\delta) = 1$, δηλαδή αποκλείεται να ισχύει $\lim_{\delta \to 0} \sup_{x \in A}\{w_x(\delta)\} = 0$.

Απόδειξη (6.2) : Έστω ότι το $\overline{A}$ είναι συμπαγές. Αφού ο $(C[0,1], \rho)$ είναι πλήρης προκύπτει ότι το $\overline{A}$ είναι ολικά φραγμένο δηλαδή φραγμένο. Έτσι :
$\exists M > 0 : \sup_{x \in A}\{\|x\|\} \leq M$, και επειδή $|x(0)| \leq \|x\|, \forall x \in A$ έπεται η σχέση (6.3). Για την σχέση (6.4) θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα Dini από την Πραγματική Ανάλυση. Έστω $\delta_n \searrow 0$ και έστω $G_n(x) = w_x(\delta_n)$. Λόγω της σχέσης (6.2) παρατηρούμε ότι $\lim_{n\to\infty} G_n(x) = 0, \forall x \in A$. Επίσης ισχύει $G_n(x) \geq G_{n+1}(x) \geq \ldots, \forall n \in \mathbb{N}$ και $\forall x \in A$. Άρα μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα Dini και να πούμε ότι η σύγκλιση της G_n στο 0 είναι ομοιόμορφη πάνω σε όλα τα συμπαγή υποσύνολα του C. Επομένως $\lim_{n\to\infty} \sup_{x \in A}\{w_x(\delta_n)\} = 0$, όπως έπρεπε να δειχθεί.
Για το αντίστροφο τώρα, υποθέτουμε ότι ισχύουν οι (6.3) και (6.4). Παίρνοντας παραδείγματος χάριν $\varepsilon = 1$ στην (6.4) μπορούμε να βρούμε έναν $k \in \mathbb{N}$: $\sup_{x \in A} w_x(\frac{1}{k}) < 1 < \infty$. Για τυχόν $t \in [0,1]$, ισχύει προφανώς

$$|x(t)| \leq |x(0)| + \sum_{i=1}^{k}(|x(\frac{it}{k}) - x(\frac{(i-1)t}{k})|)$$

οπότε και λόγω της (6.3) έπεται :

$$\sup_{t\in[0,1]}\{\sup_{x\in A}\{|x(t)|\}\} < \infty \tag{6.5}$$

Στόχος μας είναι να δείξουμε ότι το A είναι ολικά φραγμένο χρησιμοποιώντας τις (6.4) , (6.5) οπότε επειδή ο C είναι πλήρης απο αυτό θα ακολουθήσει ότι το $\overline{A}$ είναι ολικά φραγμένο και κλειστό δηλαδή συμπαγές.
Έστω a να είναι το supremum της (6.5) και έστω $\varepsilon > 0$. Το $[-a, a]$ είναι ολικά φραγμένο και συνεπώς μπορούμε να το καλύψουμε με πεπερασμένες το πλήθος ανοικτές σφαίρες ακτίνας ε : $[-a, a] \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} B(x_j, \varepsilon)$ και να πάρουμε $H = \{x_1, \ldots, x_m\}$. Λόγω της (6.4) πάλι μπορούμε να επιλέξουμε έναν k αρκετά μεγάλο ώστε $w_x(\frac{1}{k}) < \varepsilon, \forall x \in A$ και έπειτα να χωρίσουμε το διάστημα $[0,1]$ σε υποδιαστήματα $I_{ki} = [\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}]$. Θεωρούμε τώρα το πεπερασμένο υποσύνολο του C, B, που αποτελείται από τις πολυγωνικές συναρτήσεις που είναι γραμμικές σε κάθε διάστημα I_{ki} και στα άκρα έχουν μια τιμή που ανήκει στο σύνολο H. Θα δείξουμε ότι $A \subseteq \bigcup_{y\in B} B_\rho(y, 2\varepsilon)$. Πράγματι, έστω $x \in A$. Τότε λόγω της (6.5) ισχύει $x(\frac{i}{k}) \leq a, \forall i = 0, 1, \ldots, k$ δηλαδή σίγουρα το $x(\frac{i}{k})$ ανήκει κάθε φορά σε κάποια από τις σφαίρες $B(x_1, \varepsilon), \ldots, B(x_m, \varepsilon)$ που καλύπτουν το $[-a, a]$. Αυτό σημαίνει ότι θα υπάρχει μια κατάλληλη πολυγωνική συνάρτηση y του πεπερασμένου συνόλου B για την οποία ισχύει $|x(\frac{i}{k}) - y(\frac{i}{k})| < \varepsilon, \forall i = 0, \ldots, k$. Εαν $t \in I_{ki}$ τότε $|y(\frac{i}{k}) - x(t)| \leq |y(\frac{i}{k}) - x(\frac{i}{k})| + |x(\frac{i}{k}) - x(t)| < \varepsilon + w_x(\frac{1}{k}) < 2\varepsilon$ και το ίδιο ισχύει και για το άκρο $y(\frac{i-1}{k})$. Λόγω της γραμμικότητας της y, κάθε $y(t)$ είναι ένας κυρτός συνδυασμός των $y(\frac{i-1}{k})$ και $y(\frac{i}{k})$ και άρα θα βρίσκεται μέσα σε μια 2ε-περιοχή του $x(t)$.Έτσι $\rho(x, y) < 2\varepsilon$, δηλαδή το A είναι ολικά φραγμένο , όπως

έπρεπε να δειχθεί.

Έστω $\{P_n\}_n$ ακολουθία μέτρων πιθανότητας στον $(C, \mathcal{C})$.

Θεώρημα 6.3 : *Η ακολουθία $\{P_n\}_n$ είναι tight αν και μόνο αν ισχύουν ταυτοχρόνως οι εξής δύο συνθήκες :*

i)Για κάθε $\eta > 0$, υπάρχουν $a > 0$ και $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιοι ώστε

$$P_n[x \in C : |x(0)| \geq a] \leq \eta, \forall n \leq n_0 \tag{6.6}$$

ii) Για κάθε $\varepsilon, \eta > 0$ υπάρχει ένα δ με $0 < \delta < 1$ και ένας $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$P_n[x \in C : w_x(\delta) \geq \varepsilon] \leq \eta, \forall n \geq n_0 \tag{6.7}$$

Παρατηρούμε ότι η ποσότητα στη σχέση (6.7) είναι καλά ορισμένη επειδή η συνάρτηση $w(\cdot, \delta)$ είναι συνεχής (για σταθερό δ) και συνεπώς $\mathcal{C} \backslash \mathcal{R}$-μετρήσιμη. Επίσης η συνθήκη ii) είναι ισοδύναμη με το ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει

$$\lim_{\delta \to 0} \limsup_{n} P_n[x : w_x(\delta) \geq \varepsilon] = 0 \tag{6.8}$$

Πραγματικά αυτό μπορεί να φανεί εύκολα εαν εφαρμόσουμε τον ορισμό του ορίου και εαν χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι όταν $0 < k < \delta$ τότε

$$P_n[x : w_x(k) \geq \varepsilon] \leq P_n[x : w_x(\delta) \geq \varepsilon].$$

Απόδειξη: Έστω ότι η $\{P_n\}_n$ είναι tight και έστω $\eta > 0$. Διαλέγουμε ένα συμπαγές σύνολο K τέτοιο ώστε $P_n(K) > 1 - \eta$, $\forall n$. Από το θέωρημα του Ascoli (6.2) ισχύει $K \subseteq [x : |x(0)| < a]$, για κάποιο κατάλληλα μεγάλο a. Επίσης , λόγω της (6.4), για δοθέν $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένα μικρό δ ώστε να ισχύει $K \subseteq [x : w_x(\delta) < \varepsilon]$ και έτσι, παίρνοντας συμπληρώματα, δείχνουμε ότι ισχύουν οι (6.6), (6.7) για $n_0 = 1$.

Τώρα για το αντίστροφο, επειδή ο χώρος C είναι πλήρης και διαχωρίσιμος, οποιαδήποτε πεπερασμένη οικογένεια μέτρων είναι tight και άρα οι σχέσεις (6.6), (6.7) θα ισχύουν και για τους δείκτες $n < n_0$. Επομένως μεγαλώνοντας κατάλληλα το a και μικραίνοντας το δ, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $n_0 = 1$. Θα δείξουμε ότι η $\{P_n\}_n$ είναι tight. Έστω $\eta > 0$. Λόγω της (6.6) διαλέγουμε ένα $a > 0$ ώστε αν $B = [x : |x(0) < a]$ να ισχύει ότι $P_n(B) > 1 - \eta$, $\forall n$. Λόγω της (6.7), για $\varepsilon = \frac{1}{k}$, $\tilde{\eta} = \frac{\eta}{2^k}$ υπάρχουν δ_k ώστε αν $B_k = [x : w_x(\delta_k) < \frac{1}{k}]$ τότε $P_n(B_k) \geq 1 - \frac{\eta}{2^k}$ για κάθε n. Θέτουμε $K = \overline{A}$, όπου $A = B \cap \bigcap_k B_k$. Είναι $K \supseteq A$, άρα $K^c \subseteq A^c$, οπότε $P_n(K^c) \leq P_n(B^c) + \sum_k P_n(B_k^c) \leq 2\eta$, για κάθε n. Επίσης επειδή $A \subseteq B$ και $A \subseteq B_k, \forall k$, έπεται ότι το A ικανοποιεί τις σχέσεις (6.3), (6.4) , δηλαδή είναι σχετικά συμπαγές και άρα το K είναι συμπαγές με $P_n(K) \geq 1 - 2\eta$, $\forall n$. Άρα η $\{P_n\}_n$ είναι tight.

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε δύο ανισότητες που θα μας φανούν ιδιαίτερα χρήσιμες όταν θα θελήσουμε να αποδείξουμε την tightness συγκεκριμένων ακολουθιών. Συγκεκριμένα ισχύει το εξής :

Θεώρημα 6.4 : *Έστω μια διαμέριση του διαστήματος* $[0,1]$, $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_v = 1$ *και*

$$\min_{1<i<v}(t_i - t_{i-1}) \geq \delta \tag{6.9}$$

για κάποιο $\delta > 0$. *Τότε για τυχόν* $x \in C$ *έχουμε :*

$$w_x(\delta) \leq 3 \max_{1\leq i\leq v}\{ \sup_{t_{i-1}\leq s\leq t_i}\{|x(s) - x(t_{i-1})|\}\} \tag{6.10}$$

και για τυχόν P *είναι :*

$$P[x : w_x(\delta) \geq 3\varepsilon] \leq \sum_{i=1}^{v} P[x : \sup_{t_{i-1}\leq s\leq t_i}\{|x(s) - x(t_{i-1})|\} \geq \varepsilon] \tag{6.11}$$

Απόδειξη : Για ευκολία έστω m να είναι το maximum της (6.10). Αν τα s, t ανήκουν στο ίδιο διάστημα $I_i = [t_{i-1}, t_i]$ τότε $|x(s) - x(t)| \leq |x(s) - x(t_{i-1})| + |x(t_{i-1}) - x(t)| \leq 2\sup_{t_{i-1}\leq s\leq t_i}\{|x(s) - x(t_{i-1})|\} \leq 2m$. Αν ανήκουν σε διαδοχικά I_i και I_{i+1} τότε $|x(s) - x(t)| \leq |x(s) - x(t_{i-1})| + |x(t_{i-1})_x(t_i)| + |x(t_i) - x(t)| \leq 3m$. Επομένως όταν $|s - t| \leq \delta$, λόγω της (6.9), αναγκαστικά τα s, t θα ανήκουν είτε στο ίδιο είτε σε διαδοχικά υποδιαστήματα και έτσι σε κάθε περίπτωση θα έχουμε $w_x(\delta) \leq 3m$. Τώρα επειδή ισχύει

$$[x : w_x(\delta) \geq 3\varepsilon] \subseteq [x : \max_{1\leq i\leq v}\{ \sup_{t_{i-1}\leq s\leq t_i}\{|x(s) - x(t_{i-1})|\}\} \geq \varepsilon]$$

έπεται και η (6.11) λόγω υποπροσθετικότητας.

Πόρισμα : *Η συνθήκη (6.7) του θεωρήματος 6.3 ισχύει όταν για κάθε* $\eta, \varepsilon > 0$ *υπάρχει ένα* $0 < \delta < 1$ *και ένας* $n_0 \in \mathbb{N}$ *ώστε για κάθε* t *και για κάθε* $n \geq n_0$ *να ισχύει :*

$$\frac{1}{\delta} P_n[x : \sup_{t\leq s\leq t+\delta}\{|x(s) - x(t)|\} \geq \varepsilon] \leq \eta \tag{6.12}$$

(εαν $t > 1 - \delta$, προφανώς περιορίζουμε το supremum της (6.12) στο $t \leq s \leq 1$)

Απόδειξη : Έστω $\eta, \varepsilon > 0$. Για $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon/3$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει η (6.12). Παίρνουμε $v = [\frac{1}{\delta}]$ να είναι το ακέραιο μέρος του $\frac{1}{\delta}$ και έστω $t_i = i\delta$ όταν $i < v$. Η (6.12) ισχύει για $t = t_i$ οπότε λόγω της (6.11) παίρνουμε:

$$P_n[x : w_x(\delta) \geq \varepsilon] \leq \sum_{i=1}^{v} P_n[x : \sup_{t_{i-1}\leq s\leq t_i}\{|x(s) - x(t_{i-1})|\} \geq \frac{\varepsilon}{3}] \leq \sum_{i=1}^{v} \delta\eta =$$

$$= v\delta\eta \leq \tfrac{1}{\delta}\delta\eta = \eta$$

Τυχαίες συναρτήσεις

Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ ένας χώρος πιθανότητας και έστω μια απεικόνιση $X : \Omega \to C$. Για κάθε σταθερό ω η $X(\omega)$ είναι μια συνεχής συνάρτηση στο $[0,1]$ με τιμή $X_t(\omega) = X(t,\omega)$. Για σταθερό t έστω $X_t : \Omega \to \mathbb{R}$ να είναι η σύνθεση της π_t με την X, δηλαδή $X_t = \pi_t \circ X$. Έστω επίσης $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_k}) : \Omega \to \mathbb{R}^k$ να είναι η σύνθεση της $\pi_{t_1\ldots t_k}$ με την X δηλαδή $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_k}) = \pi_{t_1\ldots t_k} \circ X$.

Εαν η X είναι τυχαία συνάρτηση, δηλαδή $\mathcal{F}\backslash\mathcal{C}$-μετρήσιμη, τότε και η σύνθεση $\pi_{t_1\ldots t_k} \circ X$ είναι $\mathcal{F}\backslash\mathcal{R}^k$-μετρήσιμη για όλα τα $t_1, \ldots, t_k \in [0,1]$. Ισχύει όμως και το αντίστροφο. Πράγματι εαν οι συνθέσεις $\pi_{t_1\ldots t_k} \circ X$ είναι $\mathcal{F}\backslash\mathcal{R}^k$-μετρήσιμες για όλα τα $t_1, \ldots, t_k \in [0,1]$, τότε για το τυχόν finite-dimensional set $A = \pi^{-1}_{t_1\ldots t_k}(H) \in \mathcal{C}_f$ θα έχουμε : $X^{-1}(A) = (\pi_{t_1\ldots t_k} \circ X)^{-1}(H) \in \mathcal{F}$ επειδή $H \in \mathcal{R}^k$. Έτσι $X^{-1}(\mathcal{C}_f) \subseteq \mathcal{F}$ και επειδή $\sigma(\mathcal{C}_f) = \mathcal{C}$ έπεται η μετρησιμότητα της X. Επομένως η X είναι τυχαία συνάρτηση $\iff$ για κάθε k και για κάθε $t_1, \ldots, t_k \in [0,1]$ η $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_k})$ είναι τυχαίο διάνυσμα $\iff$ για κάθε $t \in [0,1]$ η X_t είναι τυχαία μεταβλητή. Εαν $P = \mathsf{P} \circ X^{-1}$ είναι η κατανομή της X (στον C) τότε προφανώς οι finite-dimensional distributions του P δεν είναι τίποτα άλλο από τις κατανομές των τυχαίων διανυσμάτων $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_k})$ διότι

$$\mathsf{P}[(X_{t_1}, \ldots, X_{t_k}) \in H] = (P \circ \pi^{-1}_{t_1\ldots t_k})(H).$$

Έστω τώρα $X, X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots$ μια ακολουθία από τυχαίες συναρτήσεις.

Θεώρημα 6.5 : *Εαν*

$$(X^{(n)}_{t_1}, \ldots, X^{(n)}_{t_k}) \Rightarrow_n (X_{t_1}, \ldots, X_{t_k}) \tag{6.13}$$

για κάθε $t_1, \ldots, t_k \in [0,1]$ *και εαν*

$$\lim_{\delta\to 0} \limsup_n \mathsf{P}[\omega : w(X^{(n)}(\omega), \delta) \geq \varepsilon] = 0 \tag{6.14}$$

για κάθε $\varepsilon > 0$, *τότε* $X^{(n)} \Rightarrow_n X$.

Θα δώσουμε δύο αποδείξεις:

<u>Πρώτη απόδειξη</u> : Έστω P και P_n να είναι οι κατανομές (στον C) των X και X_n αντιστοίχως. Η συνθήκη (6.13) είναι ισοδύναμη με το ότι $P_n \circ \pi^{-1}_{t_1\ldots t_k} \Rightarrow_n P \circ \pi^{-1}_{t_1\ldots t_k}$ για κάθε πεπερασμένο σύνολο δεικτών $0 \leq t_1 < \ldots < t_k \leq 1$ επομένως με βάση το θεώρημα 6.1, για να δείξουμε ότι $P_n \Rightarrow P$ αρκεί να αποδείξουμε ότι η $\{P_n\}_n$ είναι tight. Εφόσον $X^{(n)}_0 \Rightarrow X_0$ έπεται ότι $P_n \circ \pi_0^{-1} \Rightarrow P \circ \pi_0^{-1}$, δηλαδή η $\{P_n \circ \pi_0^{-1}\}_n$ είναι σχετικά συμπαγής (ως ασθενώς συγκλίνουσα). Επειδή ο $\mathbb{R}$ είναι διαχωρίσιμος και πλήρης , το θεώρημα 4.2 μας εξασφαλίζει ότι η ίδια ακολουθία θα είναι και tight. Επομένως για κάθε $\eta > 0$ θα υπάρχει ένα συμπαγές υποσύνολο $K = [-a, a]$ του $\mathbb{R}$ ώστε $P_n \circ \pi_0^{-1}[-a, a] \geq 1 - \eta$ για όλα τα n και έτσι $P_n[x : |x(0) > a] \leq \eta$ για όλα τα n, δηλαδή ικανοποιείται η πρώτη συνθήκη του θεωρήματος (6.3). Τώρα παρατηρούμε ότι η σχέση (6.14) δεν είναι τίποτα άλλο από τη συνθήκη (6.8) του θεωρήματος 6.3. Πραγματικά $\omega \in [\omega : w(X^{(n)}(\omega), \delta) \geq \varepsilon] \iff X^{(n)}(\omega) \in [x : w_x(\delta) \geq \varepsilon]$. Έτσι από το θεώρημα 6.3 προκύπτει ότι η $\{P_n\}$ είναι tight.

<u>Δεύτερη απόδειξη</u> : Η δεύτερη απόδειξη δεν κάνει χρήση του θεωρήματος του

Prohorov ούτε των εννοιών της σχετικής συμπάγειας και της tightness. Για κάθε $u = 1, 2, \ldots$ ορίζουμε $M_u : C \to C$ τέτοια ώστε αν $x \in C$ η $M_u(x)$ να συμφωνεί με την x στα άκρα $\frac{i}{u}, \forall 0 \leq i \leq u$ και να επεκτείνεται γραμμικά ανάμεσα σε αυτά τα άκρα. Δηλαδή η $M_u(x)$ έχει τύπο :

$$M_u x(t) = (i - ut)x(\tfrac{i-1}{u}) + (ut - i + 1)x(\tfrac{i}{u}), \ \tfrac{i-1}{u} \leq t \leq \tfrac{i}{u}.$$

Είναι απλό να δείξουμε ότι $\rho(M_u x, x) \leq w_x(1/u)$. Πράγματι αν $t \in [0, 1]$ τότε το t ανήκει σε κάποιο υποδιάστημα $[\frac{i-1}{u}, \frac{i}{u}]$ και έτσι $|M_u x(t) - x(t)| = |(i - ut)x(\frac{i-1}{u}) + (ut - i + 1)x(\frac{i}{u}) - (i - ut)x(t) - (ut - i + 1)x(t)| \leq (i - ut)|x(t) - x(\frac{i-1}{u})| + (ut - i + 1)|x(t) - x(\frac{i}{u})| \leq w_x(1/u)(i - ut + ut - i + 1) = w_x(1/u)$.
Τώρα ορίζουμε μια άλλη απεικόνιση $L_u : \mathbb{R}^{u+1} \to C$ ως εξής: αν $a = (a_0, \ldots, a_u)$ τότε η $L_u a(t)$ συμφωνεί με το a_i όταν $t = i/u$ για όλα τα $0 \leq i \leq u$ και επεκτείνεται γραμμικά στο διάστημα $[\frac{i-1}{u}, \frac{i}{u}]$. Λόγω της μορφής της L_u είναι άμεσο ότι $\rho(L_u a, L_u b) = \max_{0 \leq i \leq u} |a_i - b_i|$ και άρα η L_u είναι συνεχής. Επίσης για $t_i = i/u$ ισχύει $M_u(x) = L_u \circ \pi_{t_0 \ldots t_u}(x)$. Τώρα η σχέση (6.13) μας δίνει ότι $\pi_{t_0 \ldots t_u} \circ X^{(n)} \Rightarrow_n \pi_{t_0 \ldots t_u} \circ X$ και επειδή η L_u είναι συνεχής, το θεώρημα απεικόνισης μας δίνει $L_u \circ \pi_{t_0 \ldots t_u} \circ X^{(n)} \Rightarrow_n L_u \circ \pi_{t_0 \ldots t_u} \circ X$, δηλαδή $M_u \circ X^{(n)} \Rightarrow_n M_u \circ X$. Ο στόχος μας είναι να εφαρμόσουμε το θεώρημα 3.2. Επειδή πριν δείξαμε ότι $\rho(M_u x, x) \leq w_x(1/u)$ για κάθε $x \in C$, προκύπτει ότι $\rho(M_u X(\omega), X(\omega)) \leq w(X(\omega), 1/u)$ για όλα τα ω, επομένως αφήνοντας $u \to \infty$ έπεται ότι $\rho(M_u X(\omega), X(\omega)) \to 0$ για όλα τα ω. Επομένως θα συγκλίνει και κατά πιθανότητα στο 0, δηλαδή $\rho(M_u X, X) \xrightarrow{P} 0$, όταν $u \to \infty$. Από το Πόρισμα του θεωρήματος 3.1 προκύπτει ότι $M_u X \Rightarrow_u X$. Η σχέση (6.14) μαζί με την ανισότητα $\rho(M_u X^{(n)}, X^{(n)}) \leq w(X^{(n)}, 1/u)$ μας δίνει και ότι

$$\lim_u \limsup_n \mathsf{P}[\omega : \rho(M_u X^{(n)}(\omega), X^{(n)}(\omega) \geq \varepsilon] = 0$$

και αφού $M_u X^{(n)} \Rightarrow_n M_u X \Rightarrow_u X$ μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα 3.2 και να πάρουμε ότι $X^{(n)} \Rightarrow X$.

Coordinate Variables

Έστω ο χώρος $(C, \mathcal{C})$ και η προβολή $\pi_t : C \to \mathbb{R}$ με $\pi_t(x) = x(t)$. Όπως έχουμε ξαναδείξει, το σύνολο $\pi_t^{-1}(-\infty, a)$ είναι ανοικτό στον C (διότι για κάθε $f \in \pi_t^{-1}(-\infty, a)$ υπάρχει $\varepsilon > 0$ με $B_{\rho_\infty}(f, \varepsilon) \subseteq \pi_t^{-1}(-\infty, a)$) και έτσι οι π_t είναι τυχαίες μεταβλητές για όλα τα $t \in [0, 1]$. Συνήθως συμβολίζουμε την π_t με x_t και εαν το P είναι ένα μέτρο πιθανότητας στον $(C, \mathcal{C})$, τότε η $[x_t : 0 \leq t \leq 1]$ γίνεται μια στοχαστική ανέλιξη με τις x_t να ονομάζονται coordinate variables. Η κατανομή της x_t (στον $\mathbb{R}$) είναι το μέτρο $P \circ \pi_t^{-1} = P \circ x_t^{-1}$ με $(P \circ x_t^{-1})(H) = P[x : \pi_t(x) \in H] = P[x : x(t) \in H]$.

Ενότητα 7 : Το μέτρο Wiener και το Θεώρημα του Donsker

Μέτρο Wiener

Το μέτρο Wiener είναι ένα μέτρο στον $(C, \mathcal{C})$ που συμβολίζεται με W και έχει τις εξής ιδιότητες. Πρώτον, κάθε $x_t(=\pi_t)$ έχει κανονική κατανομή κάτω από το W με μέση τιμή 0 και διασπορά t , δηλαδή :

$$W[x_t \leq a] = W[x \in C : x(t) \leq a] = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{(-\infty,a]} e^{\frac{-u^2}{2t}} d\lambda u \tag{7.1}$$

Για $t = 0$ αυτό σημαίνει ότι W-σχεδόν όλα τα $x \in C$ ξεκινούν από το σημείο 0, δηλαδή $W[x \in C : x(0) = 0] = 1$. Δεύτερον, η στοχαστική ανέλιξη $[x_t : 0 \leq t \leq 1]$ έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις κάτω από το W, δηλαδή αν

$$0 \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_k \leq 1 \tag{7.2}$$

τότε οι τυχαίες μεταβλητές

$$x_{t_1} - x_{t_0} \ , x_{t_2} - x_{t_1} \ , \ldots \ , x_{t_k} - x_{t_{k-1}} \tag{7.3}$$

είναι ανεξάρτητες κάτω από το W. Φυσικά στην πορεία θα αποδείξουμε την ύπαρξη ενός τέτοιου μέτρου.

Εαν υπάρχει πράγματι τέτοιο W τότε για $s \leq t$ η x_t είναι το άθροισμα των ανεξάρτητων x_s και $x_t - x_s$. Επομένως εαν δηλώσουμε με $\phi_X(t)$ την χαρακτηριστική συνάρτηση κάποιας τυχαίας μεταβλητής X, τότε θα έχουμε $\phi_{x_t}(u) = \phi_{x_s}(u)\phi_{x_t - x_s}(u)$ και επειδή $x_t \sim N(0,t)$, $x_s \sim N(0,s)$ μπορούμε κάνοντας απλές πράξεις να δούμε ότι $\phi_{x_t - x_s}(u) = e^{-(t-s)\frac{u^2}{2}}$, δηλαδή $x_t - x_s \sim N(0, t-s)$. Συνεπώς αν ισχύουν οι (7.2) και (7.3) τότε

(7.4) $W[x : x_{t_i} - x_{t_{i-1}} \leq a_i, \ \forall i = 1, \ldots, k] =$

$$= \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_i - t_{i-1})}} \int_{(-\infty,a_i]} e^{-\frac{u^2}{2(t_i - t_{i-1})}} \ d\lambda u$$

και μπορούμε να δούμε ότι οι προσαυξήσεις, πέρα από ανεξάρτητες, είναι και στατικές , δηλαδή η κατανομή του διανύσματος $(x_{t_1} - x_{t_0} \ , x_{t_2} - x_{t_1} \ , \ldots \ , x_{t_k} - x_{t_{k-1}})$ είναι ίση με αυτήν του $(x_{s_1} - x_{s_0} \ , x_{s_2} - x_{s_1} \ , \ldots \ , x_{s_k} - x_{s_{k-1}})$ αρκεί να ισχύει $t_1 - t_0 = s_1 - s_0, \ldots, t_k - t_{k-1} = s_k - s_{k-1}$.

Επειδή ισχύει ότι $x_s x_t = x_s^2 + x_s(x_t - x_s)$, λόγω ανεξαρτησίας των προσαυξήσεων μπορούμε να δούμε ότι $\mathsf{Cov}(x_t, x_s) = \mathbb{E}[(x_t - 0)\cdot(x_s - 0)] = \min\{t, s\}$. Συνεπώς κάνοντας έναν γραμμικό μετασχηματισμό μπορούμε από την κατανομή του διανύσματος $(x_{t_0}, x_{t_1} - x_{t_0} \ , x_{t_2} - x_{t_1} \ , \ldots \ , x_{t_k} - x_{t_{k-1}})$ να βρούμε αυτήν του διανύσματος $(x_{t_0}, x_{t_1}, \ldots, x_{t_k})$. Ενδεικτικά, αν συμβολίσουμε για ευκολία $X_i = x_{t_i}$ τότε με τον μετασχηματισμό $\Phi : \mathbb{R}^{k+1} \to \mathbb{R}^{k+1}$, $\Phi(u_1, \ldots, u_{k+1}) = (u_1, u_1 + u_2, \ldots, u_1 + \ldots +$

u_{k+1}) βλέπουμε ότι $(X_0, \ldots, X_k) = \Phi(X_0, X_1 - X_0, \ldots X_k - X_{k-1})$. Οπότε αν ψάχνουμε την $W[(X_0, \ldots, X_k) \in A]$ για κάποιο $A \subseteq \mathcal{R}^{k+1}$ έχουμε :

$W[(X_0, \ldots, X_k) \in A] = W[(X_0, X_1 - X_0, \ldots X_k - X_{k-1}) \in \Phi^{-1}(A)] =$
$\displaystyle\int_{\Phi^{-1}(A)} f_{(X_0, X_1 - X_0, \ldots X_k - X_{k-1})}(u_1, \ldots, u_{k+1}) d\lambda(\vec{u})$
Κάνοντας τον μετασχηματισμό $\vec{v} = \Phi(\vec{u})$, προκύπτει ότι
$(u_1, \ldots, u_{k+1}) = \Phi^{-1}(v_1, \ldots, v_{k+1}) = (v_1, v_2 - v_1, v_3 - v_2, \ldots, v_{k+1} - v_k)$, οπότε το προηγούμενο ολοκλήρωμα ισούται με :
$\displaystyle\int_A f_{(X_0, X_1 - X_0, \ldots X_k - X_{k-1})}(v_1, v_2 - v_1, v_3 - v_2, \ldots, v_{k+1} - v_k) \cdot |J| d\lambda(\vec{v})$,
όπου με $|J|$ είναι η Ιακωβιανή ορίζουσα του μετασχηματισμού Φ, που εν προκειμένω ισούται με 1. Λόγω ανεξαρτησίας , η από κοινού πυκνότητα σπάει σε γινόμενο των επιμέρους και τελικά έχουμε τον τύπο :
$W[(X_0, \ldots, X_k) \in A] = \displaystyle\int_A f_{X_0}(v_1) f_{X_1 - X_0}(v_2 - v_1) \ldots f_{X_k - X_{k-1}}(v_{k+1} - v_k) d\lambda(\vec{v})$.
Γνωρίζοντας ότι η πυκνότητα της $X_i - X_{i-1}$ είναι αυτή της $N(0, t_1 - t_{i-1})$, το παραπάνω ισούται με :

$$\int_A \prod_{i=0}^{k} \{ \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_i - t_{i-1})}} \cdot e^{-\frac{(v_{i+1} - v_i)^2}{2(t_i - t_{i-1})}} \} d\lambda(\vec{v}), \text{ όπου } v_0 = 0 = t_{-1}$$

Επομένως η σχέση (7.4) είναι κατάλληλη για να μας περιγράψει τις finite-dimensional distributions της ανέλιξης $[x_t : 0 \leq t \leq 1]$. Το πρόβλημα της ύπαρξης του μέτρου Wiener στον C είναι ισοδύναμο με το να βρούμε ένα μέτρο με προκαθορισμένες finite-dimensional distributions. Εαν ένα τέτοιο μέτρο υπάρχει τότε θα είναι και μοναδικό, μιας και έχουμε αποδείξει ότι η κλάση $\mathcal{C}_f$ είναι separating class.

Κατασκευή του μέτρου Wiener

Έστω μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών $\xi_1, \xi_2, \ldots$ (ορισμένων σε κάποιον κοινό χώρο πιθανότητας) με μέση τιμή 0 και διασπορά σ^2. Έστω επίσης $S_n(\omega) = \xi_1(\omega) + \ldots + \xi_n(\omega)$ $(S_0 = 0)$ και $X^n(\omega)$ να είναι το στοιχείο του C με τιμή σε κάθε t ίση με :

$$X_t^n(\omega) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \cdot S_{[nt]}(\omega) + (nt - [nt]) \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \cdot \xi_{[nt]+1}(\omega) \tag{7.5}$$

Αυτό που κάνουμε στην ουσία είναι , για σταθερό n, χωρίζουμε το $[0,1]$ στα υποδιαστήματα $[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$ και όταν $t = i/n$ η $X_t^n(\omega)$ ισούται με $X_{i/n}^n(\omega) = \frac{S_i(\omega)}{\sigma\sqrt{n}}$ και ανάμεσα στα άκρα την επεκτείνουμε γραμμικά. Παρατηρούμε ότι για κάθε σταθερό t η (7.5) ορίζει μια τυχαία μεταβλητή, επομένως από τα σχόλια πριν από το θεώρημα 6.5 βλέπουμε ότι όλες οι X^n είναι τυχαίες συναρτήσεις στον C, δηλαδή είναι $\mathcal{F} \backslash \mathcal{C}$ μετρήσιμες. Εαν όλες οι ξ_i παίρνουν την τιμή 1 και -1 με πιθανότητα $1/2$ τότε η X^n απεικονίζει το μονοπάτι του συμμετρικού τυχαίου περιπάτου.

Ας συμβολίσουμε με $\psi_{n,t}(\omega) = (nt - [nt]) \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \cdot \xi_{[nt]+1}(\omega)$. Θα δείξουμε αρχικά ότι $\psi_{n,t} \xrightarrow{p} 0$ οπότε θα είναι και $\psi_{n,t} \Rightarrow_n 0$. Έστω λοιπόν $\varepsilon > 0$. Είναι

$P[\omega : |(nt-[nt]) \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \cdot \xi_{[nt]+1}(\omega)| \geq \varepsilon] \leq P[\omega : |\xi_{[nt]+1}(\omega)| \geq \sigma\sqrt{n}\varepsilon] \leq$
$\leq P[\max_{1\leq i\leq n} |\xi_i| \geq \sigma\sqrt{n}\varepsilon] \leq \sum_{i=1}^{n} P[|\xi_i| \geq \sigma\sqrt{n}\varepsilon] = n \cdot P[|\xi_1| \geq \sigma\sqrt{n}\varepsilon]$
όπου η τελευταία ισότητα προέκυψε λόγω ισονομίας των ξ_i. Τώρα την τελευταία ποσότητα μπορούμε να την φράξουμε από :

$$n \cdot P[|\xi_1| \geq \sigma\sqrt{n}\varepsilon] = n \cdot \int_{[|\xi_1|\geq\sigma\sqrt{n}\varepsilon]} 1 dP \leq n \int_{[|\xi_1|\geq\sigma\sqrt{n}\varepsilon]} \frac{\xi_i^2}{n\varepsilon^2\sigma^2} dP =$$

$$= \int_{[|\xi_1|\geq\sigma\sqrt{n}\varepsilon]} \frac{\xi_i^2}{\varepsilon^2\sigma^2} dP$$

Επειδή οι ξ_i^2 είναι ολοκληρώσιμες (έχουμε διασπορά $\sigma^2 < \infty$), το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης μας δίνει ότι το τελευταίο ολοκλήρωμα συγκλίνει στο 0 για $n \to \infty$. Έτσι παίρνουμε ότι $P[|\psi_{n,t}| \geq \varepsilon] \xrightarrow{n} 0$ και άρα $\psi_{n,t} \Rightarrow_n 0$.
Από το κεντρικό οριακό θεώρημα προκύπτει ότι $\frac{S_{[nt]}}{\sigma\sqrt{n}} \Rightarrow_n \sqrt{t} \cdot N$, όπου $N \sim N(0,1)$. Πραγματικά, $\frac{S_{[nt]}}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{S_{[nt]}}{\sigma\sqrt{[nt]}} \cdot \frac{\sqrt{[nt]}}{\sqrt{n}} \Rightarrow_n \sqrt{t} \cdot N$, διότι $\frac{[nt]}{n} \to t$. Επομένως, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι , σε κάθε βήμα n, οι τυχαίες μεταβλητές $S_{[nt]}$ και $\xi_{[nt]+1}$ είναι ανεξάρτητες , το παράδειγμα 3.2 μας εξασφαλίζει ότι $X_t^n \Rightarrow \sqrt{t} \cdot N$.
Ομοίως όταν $s \leq t$ τότε :

$$(7.6) \quad (X_s^n, X_t^n - X_s^n) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \cdot (S_{[ns]}, S_{[nt]} - S_{[ns]}) + (\psi_{n,s}, \psi_{n,t} - \psi_{n,s}) \Rightarrow_n$$

$$\Rightarrow_n (N_1, N_2)$$

, όπου οι N_1, N_2 είναι ανεξάρτητες κανονικές με μέση τιμή 0 και διασπορά s και $t-s$ αντίστοιχα. Πράγματι, θα χρησιμοποιήσουμε ένα Λήμμα από τη θεωρία Πιθανοτήτων που λέει ότι αν $A_n \Rightarrow A$ και $B_n \xrightarrow{p} B$ τότε $A_n + B_n \Rightarrow A + B$. Πρώτα θα δείξουμε ότι $\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \cdot (S_{[ns]}, S_{[nt]} - S_{[ns]}) \Rightarrow (N_1, N_2)$ και ύστερα ότι $(\psi_{n,s}, \psi_{n,t} - \psi_{n,s}) \xrightarrow{p} 0$, όπου η δεύτερη σύγκλιση πρέπει να εννοηθεί σαν σύγκλιση κατά πιθανότητα στον $\mathbb{R}^2$ με την Ευκλείδεια μετρική ρ_2.
Οι τυχαίες μεταβλητές $S_{[ns]}$ και $S_{[nt]} - S_{[ns]}$ είναι ανεξάρτητες (διότι και οι ξ_i είναι ανεξάρτητες) οπότε αρκεί να δείξουμε ότι η πρώτη συγκλίνει στην N_1 και η δεύτερη στην N_2. Το πρώτο το δείξαμε πριν. Για το δεύτερο γράφουμε :
$\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}(S_{[nt]} - S_{[ns]}) = \frac{S_{[nt]}-S_{[ns]}}{\sigma\sqrt{[nt]-[ns]}} \cdot \frac{\sqrt{[nt]-[ns]}}{\sqrt{n}}$, οπότε πάλι από το κεντρικό οριακό θεώρημα έπεται ότι συγκλίνει ασθενώς στην $\sqrt{t-s} \cdot N \sim N(0, t-s)$.
Για την κατά πιθανότητα σύγκλιση του διανύσματος $(\psi_{n,s}, \psi_{n,t} - \psi_{n,s})$ στο (0,0) αρκεί να παρατηρήσουμε ότι :
$P[\rho_2((\psi_{n,s}(\omega), \psi_{n,t}(\omega) - \psi_{n,s}(\omega)), (0,0)) \geq \varepsilon] \leq P[\psi_{n,s}^2 \geq \frac{\varepsilon^2}{2}] + P[(\psi_{n,t} - \psi_{n,s})^2 \geq \frac{\varepsilon^2}{2}]$ και κάνοντας το ίδιο τέχνασμα με πριν, έπεται ότι το δεξιό μέλος συγκλίνει στο 0 όταν $n \to \infty$. Έτσι αποδεικνύεται ο ισχυρισμός της (7.6). Από το θεώρημα απεικόνισης βλέπουμε ότι $(X_s^n, X_t^n) \Rightarrow_n (N_1, N_1 + N_2)$. Συνεχίζοντας με τον ίδιο

τρόπο βλέπουμε ότι η οριακή κατανομή του τυχαίου διανύσματος $(X^n_{t_1}, \ldots, X^n_{t_k})$ είναι ακριβώς η finite-dimensional distribution $W \circ \pi^{-1}_{t_1 \ldots t_k}$ του W που προσπαθούμε να κατασκευάσουμε. Με άλλα λόγια, αν P_n είναι η κατανομή της X^n (στον C) τότε , για κάθε $t_1, \ldots, t_k$, η $P_n \circ \pi^{-1}_{t_1 \ldots t_k}$ συγκλίνει ασθενώς σε αυτό που θέλουμε να αποτελεί το $W \circ \pi^{-1}_{t_1 \ldots t_k}$.

Εαν καταφέρουμε να αποδείξουμε ότι η P_n είναι tight τότε η ύπαρξη του W έχει εξασφαλιστεί. Πράγματι, τότε από το θεώρημα του Prohorov θα υπάρχει κάποια υπακολουθία $\{P_{n_i}\}_i$ και κάποιο μέτρο P ώστε $P_{n_i} \Rightarrow_i P$ και άρα $P_{n_i} \circ \pi^{-1}_{t_1 \ldots t_k} \Rightarrow_i P \circ \pi^{-1}_{t_1 \ldots t_k}$. Από πριν όμως , αυτό σημαίνει ότι το μέτρο P είναι ακριβώς το μέτρο που έχει τις finite-dimensional distributions που ζητάμε. Έτσι συμβολίζουμε αυτό το μέτρο με W, δηλαδή $W \equiv P$.

Η απόδειξη της tightness θα γίνει στην πιο γενική περίπτωση όπου η $\{\xi_n\}_n$ είναι στατική ακολουθία , δηλαδή για οποιοδήποτε δεδομένο j η κατανομή του διανύσματος $(\xi_k, \ldots, \xi_{k+j})$ είναι ίδια για κάθε k. Προφανώς αν η $\{\xi_n\}_n$ είναι ανεξάρτητη και ισόνομη τότε είναι και στατική.

Λήμμα : *Ας υποθέσουμε ότι η X^n ορίζεται όπως στην σχέση* (7.5) , *ότι η $\{\xi_n\}_n$ είναι στατική και ότι ισχύει επίσης*

$$\lim_{\lambda \to \infty} \limsup_n \lambda^2 \mathsf{P}[\max_{k \leq n} |S_k| \geq \lambda \sigma \sqrt{n}] = 0 \tag{7.7}$$

Τότε η $\{X^n\}_n$ είναι tight.

Απόδειξη : Θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα 6.3. Η συνθήκη i) ικανοποιείται διότι $X^n_0(\omega) = 0$,$\forall \omega$ και συνεπώς $P_n[x : |x(0)| \geq a] = \mathsf{P}[\omega : |X^n_0(\omega)| \geq a] = \mathsf{P}(\emptyset) = 0$, για οποιοδήποτε $a > 0$ κι αν πάρουμε. Την συνθήκη ii) θα την αποδείξουμε με βάση τη σχέση (6.8) η οποία ισοδυναμεί με το ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ είναι

$$\lim_{\delta \to 0} \limsup_n \mathsf{P}[\omega : w(X^n(\omega), \delta) \geq \varepsilon] = 0 \tag{7.8}$$

Θα επικαλεστούμε τις ανισότητες του θεωρήματος (6.4). Εαν ισχύει η (6.9) τότε ισχύουν οι (6.10) και (6.11) αν στη θέση του P βάζουμε κάθε φορά τα P_n. Δηλαδή αν για κάποιο $1 > \delta > 0$ ισχύει $\min\{t_i - t_{i-1} : 1 < i < v\} \geq \delta$ τότε

$$\mathsf{P}[w(X^n, \delta) \geq 3\varepsilon] \leq \sum_{i=1}^{v} \mathsf{P}[\sup_{t_{i-1} \leq s \leq t_i} |X^n_s - X^n_{t_{i-1}}| \geq \varepsilon] \tag{7.9}$$

Μπορούμε αρχικά να επιλέξουμε τους t_i ώστε $t_i = m_i/n$ για ακέραιους m_i που ικανοποιούν την $0 = m_0 < m_1 < \ldots < m_v = 1$. Η βασική παρατήρηση είναι ότι επειδή η $X^n(\omega)$ είναι μια "πολυγωνική" συνάρτηση του C τότε το supremum της (7.9) γίνεται maximum σε διαφορές $|S_k - S_{m_{i-1}}|/(\sigma\sqrt{n})$:

$$\mathsf{P}[w(X^n, \delta) \geq 3\varepsilon] \leq \sum_{i=1}^{v} \mathsf{P}[\max_{m_{i-1} \leq k \leq m_i} \frac{|S_k - S_{m_{i-1}}|}{\sigma\sqrt{n}} \geq \varepsilon] = \tag{7.10}$$

$$= \sum_{i=1}^{v} \mathsf{P}[\max_{k \le m_i - m_{i-1}} |S_k| \ge \varepsilon\sigma\sqrt{n}]$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει λόγω της στατικότητας που υποθέσαμε. (ενδεικτικά, αν ας πούμε $m_{i-1} = 3, m_i = 6$ για κάποιον δείκτη i και αν $3 \le k \le 6$, τότε $(0, \xi_1, \xi_2, \xi_3) \sim (0, \xi_4, \xi_5, \xi_6)$, άρα $(0, |\xi_1|, |\xi_1+\xi_2|, |\xi_1+\xi_2+\xi_3|) \sim (0, |\xi_4|, |\xi_4+\xi_5|, |\xi_4+\xi_5+\xi_6|)$, άρα $\max\{0, |S_1|, |S_2|, |S_3|\} \sim \max\{0, |S_4-S_3|, |S_5-S_3|, |S_6-S_3|\}$, οπότε έτσι εξηγείται η τελευταία ισότητα). Η σχέση (7.10) όπως είπαμε ισχύει όταν

$$m_i - m_{i-1} \ge n\delta \ , 1 < i < v \tag{7.11}$$

Εξειδικεύοντας ακόμη περισσότερο, μπορούμε να επιλέξουμε τους ακεραίους m_i ως $m_i = im \ , 0 \le i < v$ (και $m_v = n$) όπου το m είναι ένας ακέραιος συναρτήσει των n και δ επιλεγμένος με τα ακόλουθα κριτήρια : αφού θέλουμε $m_i - m_{i-1} \ge n\delta$ παίρνουμε $m = [n\delta] + 1$ και αφού θέλουμε και $(v-1)m < n \le vm$ παίρνουμε $v = [\frac{n}{m}] + 1$. Τότε ισχύουν τα εξής τρία πράγματα :

$$m_v - m_{v-1} \le m \ , \ \frac{n}{m} \to \frac{1}{\delta} > \frac{1}{2\delta} \ , \ v = [\frac{n}{m}] + 1 \to a \text{ με } a < \tfrac{2}{\delta}.$$

και επομένως από την (7.10), για μεγάλο n έχουμε $v < \frac{2}{\delta}$ και $\sqrt{n} > \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2\delta}}$ άρα :

$$\mathsf{P}[w(X^n, \delta) \ge 3\varepsilon] \le v \cdot \mathsf{P}[\max_{k \le m} |S_k| \ge \varepsilon\sigma\sqrt{n}] \le \frac{2}{\delta} \cdot \mathsf{P}[\max_{k \le m} |S_k| \ge \frac{\varepsilon\sigma\sqrt{m}}{\sqrt{2\delta}}]. \tag{7.12}$$

Τώρα για τυχόν $\varepsilon > 0$ και $\eta > 0$, λόγω της (7.7), υπάρχει ένας αρκετά μεγάλος $\lambda > 0$ ώστε

$$\frac{4\lambda^2}{\varepsilon^2} \limsup_m \mathsf{P}[\max_{k \le m} |S_k| \ge \lambda\sigma\sqrt{m}] < \eta$$

οπότε αν θέσουμε $\lambda = \varepsilon/(\sqrt{2\delta})$ (και αφήνοντας τα m και n να πάνε μαζί στο άπειρο) ισοδύναμα υπάρχει ένας μικρός $0 < \delta < 1$ ώστε

$$\limsup_n \mathsf{P}[w(X^n, \delta) \ge 3\varepsilon] \le \frac{4\lambda^2}{\varepsilon^2} \limsup_m \mathsf{P}[\max_{k \le m} |S_k| \ge \lambda\sigma\sqrt{m}] < \eta$$

δηλαδή αποδείχθηκε η (7.8) όπως έπρεπε, δηλαδή η tightness της $\{X^n\}$.

Η ύπαρξη του μέτρου Wiener θα ολοκληρωθεί όταν αποδείξουμε ότι υπάρχει μια ακολουθία απο ανεξάρτητες και ισόνομες $\{\xi_n\}_n$ που να ικανοποιεί την σχέση (7.7). Πραγματικά, αφού οι $\{\xi_n\}_n$ θέλουμε να είναι ανεξάρτητες μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα του Etemadi :

$$\mathsf{P}[\max_{u \le m} |S_u| \ge a] \le 3 \max_{u \le m} \mathsf{P}[|S_u| \ge a/3] \tag{7.13}$$

Άρα για να αποδείξουμε την (7.7) αρκεί να αποδείξουμε την

$$\lim_{\lambda \to \infty} \limsup_n \lambda^2 \cdot \max_{k \le n} \mathsf{P}[|S_k| \ge \lambda\sigma\sqrt{n}] = 0 \tag{7.14}$$

Υποθέτουμε ότι $\xi_i \sim N(0,1)$ οπότε χρησιμοποιώντας την χαρακτηριστική συνάρτηση είναι εύκολο να δείξουμε ότι σε αυτή την περίπτωση $\frac{S_k}{\sqrt{k}} \sim N(0,1)$. Επειδή

$$\mathsf{P}[|N| \geq \lambda] \leq \mathbb{E}(N^4) \cdot \tfrac{1}{\lambda^4} = 3 \cdot \tfrac{1}{\lambda^4} \tag{7.15}$$

έχουμε ότι $\mathsf{P}[|S_k| \geq \lambda\sigma\sqrt{n}] = \mathsf{P}[\sqrt{k}|N| \geq \lambda\sigma\sqrt{n}] \leq \frac{3k^2}{\lambda^4\sigma^4 n^2} \leq \frac{3}{\lambda^4\sigma^4}$ για κάθε $k \leq n$, δηλαδή την (7.14). Άρα το μέτρο Wiener υπάρχει :

Θεώρημα 7.1 : *Υπάρχει στον $(C,\mathcal{C})$ ένα μέτρο πιθανότητας W του οποίου οι finite-dimensional distributions ικανοποιούν την* (7.4).

Από εδώ και στο εξής θα συμβολίζουμε συνήθως με W όχι μόνο το μέτρο Wiener αλλά και την ίδια την τυχαία συνάρτηση $(X : \Omega \to C)$ που έχει σαν κατανομή της το W. Υπάρχει κι άλλος τρόπος να κατασκευαστεί το μέτρο Wiener. Θα μπορούσαμε να κατασκευάσουμε πρώτα την τυχαία συνάρτηση και εκ των υστέρων το μέτρο. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα επέκτασης του Kolmogorov μπορούμε να βρούμε μια στοχαστικη ανέλιξη (σε κάποιον χώρο $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$), $[W_t : 0 \leq t \leq 1]$, της οποίας οι finite-dimensional distributions καθορίζονται από την (7.4). Στη συνέχεια με κάποια κατάλληλα τεχνικά επιχειρήματα μπορούμε να βρούμε μια έκδοση της W, $\widetilde{W}$, που για κάθε σταθερό ω να είναι συνεχής ως προς t, δηλαδή η $\widetilde{W}(\cdot,\omega)$ είναι συνεχής για κάθε ω. Έπειτα μπορούμε να δείξουμε ότι η $\widetilde{W} : \Omega \to C$ είναι $\mathcal{F}\backslash\mathcal{C}$-μετρήσιμη και να ορίσουμε το μέτρο Wiener σαν $P_W = \mathsf{P} \circ \widetilde{W}^{-1}$.

Το Θεώρημα του Donsker

Θεώρημα 7.2 (**Donsker Invariance Principle**) : *Εαν οι $\xi_1, \xi_2, \ldots$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες με μέση τιμή 0 και διασπορά σ^2 και εαν οι X^n είναι οι τυχαίες συναρτήσεις της* (7.5) *τότε $X^n \Rightarrow_n W$.*

Απόδειξη : Θα εφαρμόσουμε το θεώρημα 6.5. Μιας και η ύπαρξη του μέτρου Wiener έχει εξασφαλιστεί μπορούμε να γράψουμε τη σχέση (7.6) σαν $(X_s^n, X_t^n - X_s^n) \Rightarrow_n (W_s, W_t - W_s)$ δηλαδή $(X_s^n, X_t^n) \Rightarrow_n (W_s, W_t)$. Έτσι με μια απλή γενίκευση μπορούμε να πάρουμε την (6.13) με την W να παίζει τον ρόλο της X. Τώρα η ισχύς της (7.7) (και άρα η ισχύς της (6.14)) έχει αποδειχθεί στην περίπτωση που οι $\xi_i \sim N(0,1)$. Για την γενική περίπτωση θα χρησιμοποιήσουμε το κεντρικό οριακό θεώρημα. Αυτό που μένει να δείξουμε είναι η σχέση (7.14). Το τέχνασμα που θα κάνουμε είναι να διακρίνουμε τις περιπτώσεις για τα "μικρά" και "μεγάλα" k στο maximum της σχέσης (7.14). Δηλαδή, είναι γνωστό ότι $\mathsf{P}[\frac{|S_k|}{\sigma\sqrt{k}} \geq \lambda] \xrightarrow{k} \mathsf{P}[|N| \geq \lambda] < \frac{3}{\lambda^4}$, επομένως θα υπάρχει ένας μεγάλος k_λ ώστε όταν $k \geq k_\lambda$ να ισχύει $\mathsf{P}[\frac{|S_k|}{\sigma\sqrt{k}} \geq \lambda] < \frac{3}{\lambda^4}$. Θεωρούμε τώρα έναν $n \in \mathbb{N}$ με $n >> k_\lambda$. Σε αυτή την περίπτωση το maximum της (7.14) σπάει σε τιμές k με $n \geq k \geq k_\lambda$ και σε τιμές $k < k_\lambda$. Όταν $n \geq k \geq k_\lambda$ τότε $\mathsf{P}[|S_k| \geq \lambda\sigma\sqrt{n}] \leq \mathsf{P}[|S_k| \geq \lambda\sigma\sqrt{k}] < \frac{3}{\lambda^4}$. Εαν $k \leq k_\lambda$, εφαρμόζοντας την ανισότητα Chebyshev προκύπτει $\mathsf{P}[|S_k| \geq \lambda\sigma\sqrt{n}] \leq \frac{1}{n\sigma^2\lambda^2}\mathbb{E}(S_k^2) = \frac{k\sigma^2}{n\sigma^2\lambda^2} \leq \frac{k_\lambda}{n\lambda^2}$.

Έτσι βλέπουμε ότι

$$\limsup_n \lambda^2 \max_{k\le n} \mathsf{P}[|S_k| \ge \lambda\sigma\sqrt{n}] \le \frac{3}{\lambda^2},$$

οπότε παίρνοντας $\lambda \to \infty$ έχουμε την σχέση (7.14), άρα και την (6.14), δηλαδή $X^n \Rightarrow_n W$.

Εφαρμογή

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα του Donsker για να αποδείξουμε οριακά αποτελέσματα σχετικά με συναρτήσεις των μερικών αθροισμάτων S_n. Εδώ θα προσπαθήσουμε να βρούμε την οριακή κατανομή της ακολουθίας τυχαίων μεταβλητών

$$\frac{M_n(\omega)}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\max\{S_i(\omega) : 0 \le i \le n\}}{\sigma\sqrt{n}} \tag{7.16}$$

Κατ αρχήν η συνάρτηση $h : C \to \mathbb{R}$ με $h(x) = \sup_t x(t)$ είναι συνεχής. Πράγματι αν $A = \{x \in C : h(x) < a\}$ και $x_0 \in A$ παίρνοντας $\varepsilon = \frac{a-\sup_t x_0(t)}{3}$ βλέπουμε ότι $B_{\rho_\infty}(x_0, \varepsilon) \subseteq A$, δηλαδή το A είναι ανοικτό στον C. Άρα το Θεώρημα Απεικόνισης μας δίνει ότι $h(X^n) \Rightarrow_n h(W)$, δηλαδή $\sup_t X_t^n \Rightarrow \sup_t W_t$. Φυσικά, λόγω του πολυγωνικού χαρακτήρα του γραφήματος της X^n ισχύει $\sup_t X_t^n = \frac{M_n}{\sigma\sqrt{n}}$ επομένως

$$\frac{M_n}{\sigma\sqrt{n}} \Rightarrow_n \sup_t W_t \tag{7.17}$$

Θα είχαμε την οριακή κατανομή του $\frac{M_n}{\sigma\sqrt{n}}$ εαν ξέραμε την κατανομή του $\sup_t W_t$, οπότε η ιδέα είναι να βρούμε την τελευταία σε κάποια ειδική "εύκολη" περίπτωση. Αυτή η εύκολη περίπτωση είναι αυτή στην οποία οι ξ_i παίρνουν την τιμή 1 και -1 με πιθανότητα $1/2$ αντίστοιχα, οπότε τα μερικά αθροίσματα είναι οι θέσεις σε έναν συμμετρικό τυχαίο περίπατο που ξεκινάει από το μηδέν.

Πρώτα αποδεικνύουμε ότι για κάθε $a \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ισχύει :

$$\mathsf{P}[M_n \ge a] = 2\mathsf{P}[S_n > a] + \mathsf{P}[S_n = a] \tag{7.18}$$

Αν $a = 0$ είναι άμεσο επειδή $\mathsf{P}[M_n \ge 0] = 1$, διότι $M_n \ge S_0 = 0$ και
$2 \cdot \mathsf{P}[S_n > 0] = \mathsf{P}[S_n > 0] + \mathsf{P}[S_n < 0]$, μιας και οι S_n και $-S_n$ είναι ισόνομες. Άρα υποθέτουμε ότι $a > 0$.Επειδή :
$\mathsf{P}[M_n \ge a] - \mathsf{P}[S_n = a] = \mathsf{P}[(M_n \ge a) \bigcap (S_n < a)] + \mathsf{P}[(M_n \ge a) \bigcap (S_n > a)]$
και επειδή η πιθανότητα στο τέλος δεξιά είναι ακριβώς ίση με $\mathsf{P}[S_n > a]$, αρκεί να δειχθεί ότι :

$$\mathsf{P}[(M_n \ge a) \bigcap (S_n < a)] = \mathsf{P}[S_n > a] = \mathsf{P}[(M_n \ge a) \bigcap (S_n > a)] \tag{7.19}$$

Όλα τα 2^n μονοπάτια $(S_1, S_2, \ldots, S_n)$ έχουν την ίδια πιθανότητα, επομένως η (7.19) θα έχει αποδειχθεί εαν το πλήθος των μονοπατιών που συνεισφέρουν στο αριστερό ενδεχόμενο ισούται με το πλήθος των μονοπατιών που συνεισφέρουν στο δεξί. Το τέχνασμα που θα κάνουμε είναι σε κάθε μονοπάτι του αριστερού ενδεχομένου να αντιστοιχίσουμε ένα μονοπάτι το οποίο είναι το ίδιο με το πρώτο μέχρι την πρώτη στιγμή k που $S_k = a$, ενώ τις στιγμές $k+1, \dots, n$ είναι συμμετρικό με το πρώτο ως προς την ευθεία $y = a$. Κάνοντας και ένα απλό σχήμα μπορούμε να δούμε ότι αυτό το δεύτερο μονοπάτι συνεισφέρει στο δεξιό ενδεχόμενο. Αυτή η $1-1$ αντιστοιχία εκφράζεται με την επονομαζόμενη *αρχή της ανάκλασης* και αποδεικνύει την (7.19).

Έστω τώρα $a \in \mathbb{R}^+$ και $a_n = [a\sqrt{n}]$. Επειδή $M_n(\omega) \in \mathbb{Z}$ για όλα τα ω, μπορούμε να δούμε εύκολα ότι $\mathsf{P}[\frac{M_n}{\sqrt{n}} \geq a] = \mathsf{P}[M_n \geq a_n]$, και επειδή $a_n \in \mathbb{Z}$ μπορούμε να εφαρμόσουμε τη σχέση (7.18) και να πάρουμε $\mathsf{P}[M_n \geq a_n] = 2\mathsf{P}[S_n > a_n] + \mathsf{P}[S_n = a_n]$. Στον τυχαίο περίπατο, μπορεί να αποδειχθεί με κάποια επιχειρήματα ότι για κάθε ακέραιο k είναι $\mathsf{P}[S_{2n} = k] \leq \mathsf{P}[S_{2n} = 0]$ και $\mathsf{P}[S_{2n+1} = k] \leq \mathsf{P}[S_{2n+1} = 1]$. Επίσης, χρησιμοποιώντας τον τύπο του Stirling μπορεί να δειχθεί ότι $\mathsf{P}[S_{2n} = 0] \to 0$ και $\mathsf{P}[S_{2n+1} = 1] \to 0$ και συνεπώς, εφόσον $\mathsf{P}[S_n = a_n] \leq$ $\leq \max\{\mathsf{P}[S_n = 0], \mathsf{P}[S_n = 1]\}$, έπεται ότι $\mathsf{P}[S_n = a_n] \to 0$.

Τώρα θα δείξουμε ότι ο όρος $\mathsf{P}[S_n > a_n]$ συγκλίνει στο $\mathsf{P}[N > a]$. Παρατηρούμε πρώτα ότι η $b_n = \frac{a_n}{\sqrt{n}} \nearrow a$ επομένως για κάθε $\varepsilon > 0$ τελικά όλοι οι b_n ανήκουν στο διάστημα $(a-\varepsilon, a)$. Κάνουμε το εξής: για σταθερό $\varepsilon > 0$ θεωρούμε τις συναρτήσεις f_ε και g_ε με την f_ε να ισούται με 0 στο $(-\infty, a-2\varepsilon)$, με 1 στο $(a-\varepsilon, \infty)$ και να επεκτείνεται γραμμικά στο $[a-2\varepsilon, a-\varepsilon]$, ενώ η g_ε ισούται με 0 στο $(-\infty, a)$, με 1 στο $(a+\varepsilon, \infty)$ και επεκτείνεται γραμμικά στο $[a, a+\varepsilon]$. Οι $f_\varepsilon, g_\varepsilon$ είναι συνεχείς και φραγμένες από το 1, οπότε αν συμβολίσουμε για ευκολία $\mu_n(b_n, \infty) = \mathsf{P} \circ (\frac{S_n}{\sqrt{n}})^{-1}$ και $\mu_N(a, \infty) = \mathsf{P} \circ N^{-1}$ έχουμε:

$$\mu_n(b_n, \infty) = \int_{(b_n, \infty)} 1 d\mu_n \leq \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon d\mu_n \to \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon d\mu_N = \mu_N(a, \infty) + \\ + \int_{(a-2\varepsilon, a-\varepsilon)} f_\varepsilon d\mu_N$$

Επίσης, για το κάτω φράγμα:

$$\mu_n(b_n, \infty) \geq \int_{\mathbb{R}} g_\varepsilon d\mu_n \to \int_{\mathbb{R}} g_\varepsilon d\mu_N = \mu_N(a+\varepsilon, \infty) + \int_{(a, a+\varepsilon)} g_\varepsilon d\mu_N$$

Επιλέγοντας $\varepsilon_n = 1/n$, μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα κυριαρχημένης (ή φραγμένης) σύγκλισης στις παραπάνω ανισότητες και να πάρουμε ότι $\mu_n(b_n, \infty) \to \mu_N(a, \infty)$.

Επιστρέφοντας πίσω, βλέπουμε πως αποδείξαμε ότι $\mathsf{P}[\frac{M_n}{\sqrt{n}} > a] \to 2\mathsf{P}[N > a]$, $\forall a \geq 0$. Συνεπώς επειδή $\mathsf{P}[\frac{M_n}{\sqrt{n}} > a] \to \mathsf{P}[\sup_t W_t > a]$, έπεται ότι

$$\mathsf{P}[\sup_t W_t \leq a] = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{(0,a)} e^{-\frac{u^2}{2}} d\lambda u \tag{7.20}$$

για όλα τα $a \geq 0$ ενώ αν $a < 0$ προφανώς η αριστερή πιθανότητα είναι 0 διότι $\mathsf{P}[\sup_t W_t \leq a] \leq \mathsf{P}[W_0 \leq a] = 0$ (όταν $a < 0$). Έτσι, καταλήξαμε σε ένα συμπέρασμα για την κίνηση Brown συνδυάζοντας το θεώρημα του Donsker και έναν υπολογισμό που περιέχει τον τυχαίο περίπατο, ο οποίος είναι αρκετά απλός αφενός διότι καταλήγει σε συνδυαστικά τεχνάσματα και αφετέρου διότι στον τυχαίο περίπατο για να πάμε από έναν ακέραιο k σε έναν άλλον k' θα πρέπει πρώτα να περάσουμε από όλους τους ενδιάμεσους.

Στην επόμενη ενότητα θα ασχοληθούμε με περισσότερες εφαρμογές πάνω σε αυτό το θέμα. Γενικά, θα δούμε ότι αν η h έχει πεδίο ορισμού το C και αν είναι συνεχής W-σχεδόν για όλα τα $x \in C$, τότε $X^n \Rightarrow W \implies h(X^n) \Rightarrow h(W)$. Πάλι μπορούμε να βρούμε την κατανομή της $h(W)$ βρίσκοντας την οριακή κατανομή της ακολουθίας $h(X^n)$ σε κάποια ειδική απλή περίπτωση. Συνεπώς η οριακή κατανομή δεν εξαρτάται από άλλες ιδιότητες των ξ_i παρά μόνο από την ανεξαρτησία και την ισονομία τους με μέση τιμή 0 και διασπορά σ^2. Για αυτόν τον λόγο το θεώρημα του Donsker λέγεται και *αρχή του αναλλοίωτου.*

Brownian Bridge

Ένα τυχαίο στοιχείο του $(C, \mathcal{C})$ θα καλείται Γκαουσιανό (Gaussian) εαν όλες οι πεπερασμένης διάστασης κατανομές του είναι κανονικές (πολυδιάστατες κανονικές). Η κατανομή στον C ενός τέτοιου στοιχείου καθορίζεται πλήρως από τις μέσες τιμές $\mathbb{E}(X_t)$ και από τις μέσες τιμές των γινομένων $\mathbb{E}(X_s \cdot X_t)$, επειδή αυτές καθορίζουν τις finite-dimensional distributions(δες και τις παρατηρήσεις μετά τη σχέση (7.4)). Η W είναι Γκαουσιανό στοιχείο με $\mathbb{E}(W_t) = 0$ και $\mathbb{E}(W_s \cdot W_t) = min\{s, t\}$.

Ένα δεύτερο σημαντικό τυχαίο στοιχείο του C είναι η *Brownian γέφυρα*, το Γκαουσιανό τυχαίο στοιχείο W° του C με $\mathbb{E}(W_t^\circ) = 0$ και $\mathbb{E}(W_s^\circ \cdot W_t^\circ) = s(1-t)$, για $s \leq t$. Ένας τρόπος για να κατασκευάσουμε την W° είναι να πάρουμε $W_t^\circ = W_t - t \cdot W_1, 0 \leq t \leq 1$. Με αυτόν τον ορισμό βλέπουμε ότι είναι Gaussian και κάνοντας έναν απλό πολλαπλασιασμό προκύπτει ότι έχει τις ζητούμενες ροπές.

Θα χρησιμοποιούμε το ίδιο σύμβολο W° για να δηλώνουμε και την κατανομή στον C της τυχαίας συνάρτησης W°. Εαν η $h : C \to C$ παίρνει το x και το απεικονίζει στην συνάρτηση $h(x)$ με τιμή $h(x)(t) = x(t) - t \cdot x(1)$ στο $t \in [0, 1]$, τότε μπορούμε να δούμε ότι τα μέτρα W και W° συνδέονται με τη σχέση $W^\circ = W \circ h^{-1}$. Πράγματι, συμβολίζοντας με W και W° τα τυχαία στοιχεία του C που έχουν σαν κατανομή το W και το W° αντιστοίχως, βλέπουμε ότι αρκεί να δειχθεί $\mathsf{P} \circ (W^\circ)^{-1}(A) = \mathsf{P} \circ (h \circ W)^{-1}(A)$, για όλα τα $A \in \mathcal{C}_f$ (εφόσον έχουμε πει ότι $\mathcal{C} = \sigma(\mathcal{C}_f)$). Θεωρούμε τυχόν $A = \pi^{-1}_{t_1 \ldots t_k}(H)$, με $H \in \mathcal{R}^k$. Είναι $\mathsf{P} \circ (W^\circ)^{-1}(A) = \mathsf{P}[\omega : \pi_{t_1 \ldots t_k}(W^\circ(\omega)) \in H] = \mathsf{P}[\omega : (W_{t_1}(\omega) - t_1 \cdot W_1(\omega), \ldots, W_{t_k}(\omega) - t_k \cdot W_1(\omega) \in H] = \mathsf{P}[\omega : \pi_{t_1 \ldots t_k}(h(W(\omega))) \in H] = \mathsf{P} \circ (h \circ W)^{-1}(A)$.

Ενότητα 8: Συναρτήσεις των μονοπατιών της κίνησης Brown

Όπως και στην προηγούμενη ενότητα, έτσι και εδώ, θα προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε την οριακή κατανομή διάφορων συναρτήσεων των μονοπατιών της κίνησης Brown και των μερικών αθροισμάτων S_n. Ενδέχεται σε αυτή την ενότητα να μιλάμε για τα αθροίσματα S_n στην περίπτωση των Lindeberg-Levy και θα εννοούμε ότι οι τυχαίες μεταβλητές ξ_i είναι ανεξάρτητες και ισόνομες με μέση τιμή 0 και διασπορά σ^2. Στην περίπτωση που μιλάμε για 'τυχαίο περίπατο', οι ξ_i θα παίρνουν την τιμή 1 ή -1 με πιθανότητα $\frac{1}{2}$ ($\sigma^2 = 1$) ενώ η X^n θα δηλώνει το τυχαίο στοιχείο του C έτσι όπως το ορίσαμε στην (7.5).

Κατανομή του Μεγίστου και του Ελαχίστου

Έστω $m(\omega) = \inf_t W_t(\omega)$ και $M(\omega) = \sup_t W_t(\omega)$ και έστω

$$m_n(\omega) = \min_{0\leq i\leq n} S_i(\omega), \quad M_n(\omega) = \max_{0\leq i\leq n} S_i(\omega) \tag{8.1}$$

Είναι απλό να δείξουμε ότι το σύνολο $[x \in C : \sup_{0\leq t\leq 1} x(t) < a]$ περιέχει πάντα μια μπάλα $B_{\rho_\infty}(x,\varepsilon)$ (όπου η ρ_∞ είναι η μετρική της ομοιόμορφης σύγκλισης), και επομένως η συνάρτηση $x \mapsto \sup_{0\leq t\leq 1} x(t)$ είναι συνεχής διότι αντιστρέφει ανοικτά σε ανοικτά. Με το ίδιο επιχείρημα έπεται τελικώς ότι η απεικόνιση $h : C[0,1] \to \mathbb{R}^3$ με $h(x) = (\inf_t x(t), \sup_t x(t), x(1))$ είναι παντού συνεχής. Στην περίπτωση των Lindeberg-Levy (όπου τα S_n είναι μερικά αθροίσματα ανεξάρτητων και ισόνομων), το θεώρημα Donsker μαζί με το θεώρημα Απεικόνισης μας δίνουν τη συνεπαγωγή

$$X^n \Rightarrow W \implies h(X^n) \Rightarrow h(W)$$

Όμως, λόγω της πολυγωνικής μορφής των συναρτήσεων $X^n(\omega)$ προκύπτει ότι $\inf\limits_t X^n_t = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{n}} \cdot \min\limits_{0\leq i\leq n} S_i$ και ομοίως $\sup\limits_t X^n_t = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{n}} \cdot \max\limits_{0\leq i\leq n} S_i$. Έτσι ισχύει ότι

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}(m_n, M_n, S_n) \Rightarrow (m, M, W_1) \tag{8.2}$$

Στην περίπτωση του απλού τυχαίου περιπάτου θα βρούμε έναν τύπο για τις πιθανότητες

$$p_n(a,b,v) = \mathsf{P}[a < m_n \leq M_n < b \bigcap S_n = v] \tag{8.3}$$

(όπου προφανώς ισχύει $m_n \leq M_n$). Θα δείξουμε ότι αν

$$p_n(j) = \mathsf{P}[S_n = j] \tag{8.4}$$

τότε

$$p_n(a,b,v) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_n(v+2k(b-a)) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_n(2b-v+2k(b-a)) \tag{8.5}$$

για $a, b, v \in \mathbb{Z}$ που ικανοποιούν την

$$a \leq 0 \leq b, \quad a < b, \quad a \leq v \leq b \tag{8.6}$$

Παρατηρούμε ότι, για δεδομένο n και επειδή $S_n \in [-n, n]$, τα αθροίσματα στο δεξιό μέλος είναι πεπερασμένα (κάθε φορά βέβαια αλλάζει το πλήθος των όρων). Επίσης εαν τα n, v έχουν διαφορετική διαιρετότητα (δηλαδή αν είναι ο ένας άρτιος και ο άλλος περιττός) τότε μηδενίζονται οι δύο πλευρές ενώ αν $v = a$ ή $v = b$ η αριστερή πιθανότητα δίνει μηδέν (επειδή $m_n \leq S_n \leq M_n$) και αναπτύσσοντας τα δεξιά αθροίσματα προκύπτει μηδέν και δεξιά.

Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στο n. Για δεδομένα n, a, b, v ας συμβολίσουμε με $[n, a, b, v]$ την (8.5) οπότε θα δείξουμε ότι αν (8.6) $\Longrightarrow$ $[n, a, b, v]$. Για $n = 1$ είναι αρκετά άμεσο. Υποθέτουμε ότι ισχύει η $[n-1, a, b, v]$ για ακεραίους που ικανοποιούν την (8.6). Για $a = 0$, η $p_n(0, b, v)$ μηδενίζεται διότι $m_n \leq S_0 = 0$ και με πράξεις έπεται ότι μηδενίζονται και τα αθροίσματα στο δεξιό μέλος (επειδή $p_n(j) = p_n(-j)$. Με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε ότι ισχύει η $[n, a, b, v]$ αν $b = 0$. Έστω λοιπόν ακέραιοι $a < 0 < b$ και $a \leq v \leq b$. Όμως, σε αυτή την περίπτωση θα έχουμε $a + 1 \leq 0$ και $b - 1 \geq 0$ οπότε οι $[n-1, a-1, b-1, v-1]$ και $[n-1, a+1, b+1, v+1]$ ισχύουν λόγω επαγωγικής υπόθεσης. Η $[n, a, b, v]$ προκύπτει χρησιμοποιώντας τις σχέσεις

$$p_n(j) = \tfrac{1}{2} p_{n-1}(j-1) + \tfrac{1}{2} p_{n-1}(j+1)$$

και

$$p_n(a,b,v) = \tfrac{1}{2} p_{n-1}(a-1, b-1, v-1) + \tfrac{1}{2} p_{n-1}(a+1, b+1, v+1)$$

Η τελευταία ισότητα προκύπτει αν δεσμεύσουμε ως προς το πρώτο βήμα και αν αντικαταστήσουμε τον τυχαίο περίπατο S_k με τον $\tilde{S}_k = S_{k+1} - 1$ για το πρώτο ενδεχόμενο και με τον τυχαίο περίπατο $\tilde{S}_k = S_{k+1} + 1$ για το δεύτερο ενδεχόμενο. Πράγματι, είναι :

$$\begin{aligned} p_n(a,b,v) = {} & \tfrac{1}{2} \mathsf{P}[(a < m_n \leq M_n < b) \ \cap (S_n = v) | S_1 = 1] + \\ & + \tfrac{1}{2} \mathsf{P}[(a < m_n \leq M_n < b) \ \cap (S_n = v) | S_1 = -1]. \end{aligned}$$

Για το πρώτο ενδεχόμενο, αν κάνουμε $\tilde{S}_k = S_{k+1} - 1$ βλέπουμε ότι ο $\tilde{S}_k$ ξεκινάει από το μηδέν και ισχύει $\tilde{m}_{n-1} = m_n - 1$ και $\widetilde{M}_{n-1} = M_n - 1$. Για το δεύτερο ενδεχόμενο κάνουμε $\tilde{S}_k = S_{k+1} + 1$ και προκύπτει πάλι περίπατος που ξεκινάει από το μηδέν με $\tilde{m}_{n-1} = m_n + 1$ και $\widetilde{M}_{n-1} = M_n + 1$. Έτσι η προηγούμενη ισότητα γίνεται

$$\begin{aligned} p_n(a,b,v) = {} & \tfrac{1}{2} \mathsf{P}[(a - 1 < \tilde{m}_{n-1} \leq \widetilde{m}_{n-1} < b - 1) \ \cap (\tilde{S}_{n-1} = v - 1)] + \\ & + \tfrac{1}{2} \mathsf{P}[(a + 1 < \tilde{m}_{n-1} \leq \widetilde{m}_{n-1} < b + 1) \ \cap (\tilde{S}_{n-1} = v + 1)] \end{aligned}$$

δηλαδή (επειδή ο $\tilde{S}_k$ είναι απλός τυχαίος περίπατος)

$$p_n(a,b,v) = \tfrac{1}{2}p_{n-1}(a-1,b-1,v-1) + \tfrac{1}{2}p_{n-1}(a+1,b+1,v+1).$$

Τα παραπάνω αποδεικνύουν την (8.5). Αθροίζοντας τώρα πάνω στα v έχουμε ότι για

$$a \le 0 \le b, \quad a \le u < v \le b \tag{8.7}$$

ισχύει

$$\begin{aligned}\mathsf{P}[(a < m_n \le M_n < b)\ \cap (u < S_n < v)] = \\ = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathsf{P}[u + 2k(b-a) < S_n < v + 2k(b-a)] - \\ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathsf{P}[2b - v + 2k(b-a) < S_n < 2b - u + 2k(b-a)].\end{aligned} \tag{8.8}$$

Παίρνοντας $a = -n-1$ και επειδή προφανώς $m_n \ge -n > -n-1$ και επειδή για $k \neq 0$ οι πιθανότητες μέσα στα αθροίσματα μηδενίζονται (διότι $S_n \in [-n,n]$) έχουμε

$$\mathsf{P}[(M_n < b)\ \cap (u < S_n < v)] = \mathsf{P}[u < S_n < v] - \mathsf{P}[2b - v < S_n < 2b - u] \tag{8.9}$$

που ισχύει για $-n-1 \le u < v \le b,\ b \ge 0$.

Τα παραπάνω ίσχυαν για ακέραιους αριθμούς. Αν τώρα οι a,b,u,v είναι *πραγματικοί* αριθμοί που ικανοποιούν την (8.7), τότε βάζουμε στην (8.8) τους $[a\sqrt{n}]$, $[b\sqrt{n}]$ $+1$, $[u\sqrt{n}]$, $[v\sqrt{n}]+1$, αντιστοίχως. Θα προσπαθήσουμε να βρούμε πόσο κάνει το όριο

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left[\frac{[a\sqrt{n}]}{\sqrt{n}} < \frac{m_n}{\sqrt{n}} \le \frac{M_n}{\sqrt{n}} < \frac{[b\sqrt{n}]+1}{\sqrt{n}}\ ,\ \frac{[u\sqrt{n}]}{\sqrt{n}} < \frac{S_n}{\sqrt{n}} < \frac{[v\sqrt{n}]+1}{\sqrt{n}}\right]$$

Παρατηρούμε ότι $\dfrac{m_n}{\sqrt{n}} = \inf\limits_{t\in[0,1]} X_t^n$ και $\dfrac{M_n}{\sqrt{n}} = \sup\limits_{t\in[0,1]} X_t^n$, όπου η X^n είναι η ακολουθία τυχαίων στοιχείων που ορίστηκε στην (7.5). Επίσης $\dfrac{S_n}{\sqrt{n}} = X_1^n$. Ουσιαστικά ψάχνουμε λοιπόν το

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left[h(X^n) \in (\frac{[a\sqrt{n}]}{\sqrt{n}}, \infty) \times (-\infty, \frac{[b\sqrt{n}]+1}{\sqrt{n}}) \times (\frac{[u\sqrt{n}]}{\sqrt{n}}, \frac{[v\sqrt{n}]+1}{\sqrt{n}})\right]$$

Επειδή $h(X^n) \Rightarrow (m, M, W_1)$ και επειδή $\frac{[c\sqrt{n}]}{\sqrt{n}} \to c$, τα επιχειρήματα της προηγούμενης ενότητας δείχνουν ότι το παραπάνω όριο είναι ακριβώς η πιθανότητα

$$\mathsf{P}[a < m \le M < b\ ,\ u < W_1 < v].$$

Τώρα θα προσπαθήσουμε να περάσουμε το όριο μέσα στα αθροίσματα. Αυτό μας το επιτρέπει το Λήμμα του Scheffé. Πραγματικά αν συμβολίσουμε με

$x_{n,k} =$
$\mathsf{P}\left[(\frac{[u\sqrt{n}] + 2k([b\sqrt{n}] + 1 - [a\sqrt{n}])}{\sqrt{n}} < \frac{S_n}{\sqrt{n}} < \frac{[v\sqrt{n}] + 1 + 2k([b\sqrt{n}] + 1 - [a\sqrt{n}])}{\sqrt{n}})\right]$
και

$$x_k = \mathsf{P}\left[(u + 2k(b-a) < N < v + 2k(b-a))\right]$$

τότε ισχύει $x_{n,k} \xrightarrow{n} x_k$ για κάθε k και ότι $\sum_k x_k = \sum_k x_{n,k} < \infty$ για κάθε n. Επομένως το Λήμμα του Scheffé μας δίνει ότι $\lim_{n\to\infty} \sum_k x_{n,k} = \sum_k x_k$. Τελικά παίρνουμε την εξής σχέση :

(8.10) $\mathsf{P}[(a < m \leq M < b)\ ,\ (u < W_1 < v)] =$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathsf{P}[u + 2k(b-a) < N < v + 2k(b-a)] -$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathsf{P}[2b - v + 2k(b-a) < N < 2b - u + 2k(b-a)].$$

Για την από κοινού κατανομή των M και W_1 παίρνουμε το όριο στην (8.9) (και φυσικά έχοντας βάλει όπου b το $[b\sqrt{n}+1]$ όπου u το $[u\sqrt{n}]$ κτλ.) οπότε έπεται

(8.11) $\mathsf{P}[(M < b)\ ,\ (u < W_1 < v)] = \mathsf{P}[u < N < v] - \mathsf{P}[2b - v < N < 2b - u]$

για $u < v \leq b,\ b \geq 0$. Για $v = b$, για $u \to -\infty$ και επειδή προφανώς $W_1 \leq M$ και $M \geq 0$ παίρνουμε την

(8.12) $$\mathsf{P}[0 \leq M < b] = 2\mathsf{P}[0 \leq N < b]$$

Αν στην (8.10) θέσουμε $u = a$ και $v = b$ και κάνουμε πράξεις θα πάρουμε

(8.13) $\mathsf{P}[a < m \leq M < b] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \mathsf{P}[a + k(b-a) < N < b + k(b-a)],$

που ισχύει για $a \leq 0 \leq b$. Τέλος για $a = -b$ προκύπτει

(8.14) $$\mathsf{P}[\sup_t |W_t| < b] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \mathsf{P}[(2k-1)b < N < (2k+1)b].$$

Η Brownian Bridge

Σε αυτή την υποενότητα θα μελετήσουμε οριακές κατανομές που σχετίζονται με την W° έτσι όπως την ορίσαμε στην ενότητα 7. Υπενθυμίζουμε ότι η Brownian Bridge είναι το τυχαίο στοιχείο του C, $W^\circ : \Omega \to C$ με $W_t^\circ(\omega) = W_t(\omega) - t \cdot W_1(\omega)$.

Έστω P_ε να είναι το μέτρο πιθανότητας στον $(C, \mathcal{C})$ που ορίζεται ως

$$P_\varepsilon(A) = \mathsf{P}[W \in A \mid 0 \le W_1 \le \varepsilon], \quad A \in \mathcal{C}$$

Επειδή $W_1 \sim N(0,1)$ η πιθανότητα $\mathsf{P}[0 \le W_1 \le \varepsilon]$ είναι γνήσια θετική. Θα αποδείξουμε ότι

$$P_\varepsilon \Rightarrow_\varepsilon W^\circ \tag{8.15}$$

καθώς $\varepsilon \searrow 0$. Με βάση το θεώρημα Portmanteau αρκεί να δειχθεί ότι για κάθε κλειστό $F \in \mathcal{C}$ ισχύει

$$\limsup_{\varepsilon \searrow 0} \mathsf{P}[W \in F \mid 0 \le W_1 \le \varepsilon] \le \mathsf{P}[W^\circ \in F] \tag{8.16}$$

Γνωρίζουμε ότι δύο Γκαουσιανά τυχαία στοιχεία είναι ανεξάρτητα αν και μόνο αν είναι ασυσχέτιστα επομένως η W_1 είναι ανεξάρτητη απο κάθε τυχαίο διάνυσμα $(W_{t_1}^\circ, \ldots, W_{t_k}^\circ)$ ακριβώς επειδή είναι ασυσχέτιστη με κάθε $W_{t_i}^\circ$. Ενδεικτικά, εύκολα βλέπουμε ότι π.χ. $\mathsf{Cov}(W_1, W_{t_1}^\circ) = \mathsf{Cov}(W_1, W_{t_1} - t_1 \cdot W_1) = \mathbb{E}[W_1 \cdot (W_{t_1} - t_1 W_1)] = \mathbb{E}[(W_1 - W_{t_1}) \cdot W_{t_1}] + t_1 - t_1 = 0$, λόγω ανεξαρτησίας των προσαυξήσεων. Επομένως προκύπτει ότι

$$\mathsf{P}[W^\circ \in A \ \cap \ W_1 \in B] = \mathsf{P}[W^\circ \in A] \cdot \mathsf{P}[W_1 \in B] \tag{8.17}$$

για όλα τα $B \in \mathcal{R}$ και $A \in \{\pi_{t_1 \ldots t_k}^{-1}(H) : k \in \mathbb{N},\ H \in \mathcal{R}^k\}$. Εύκολα μπορεί να δειχθεί ότι για δεδομένο B, τα σύνολα A της $\mathcal{C}$ που ικανοποιούν την (8.17) αποτελούν μια μονότονη κλάση και άρα συμπίπτουν με όλη την κλάση $\mathcal{C}$. Έτσι

$$\mathsf{P}[W^\circ \in A \mid 0 \le W_1 \le \varepsilon] = \mathsf{P}[W^\circ \in A], \ \forall A \in \mathcal{C}.$$

Τώρα, είναι $\rho(W(\omega), W^\circ(\omega)) = \sup_t |W_t(\omega) - W_t^\circ(\omega))| = |W_1(\omega)|$. Έτσι αν $|W_1(\omega)| \le \delta$ και αν $W(\omega) \in F$, τότε $W^\circ(\omega) \in F_\delta = [x \in C : \rho(x, F) \le \delta]$. Επομένως, εαν $\varepsilon < \delta$ τότε

$$\mathsf{P}[W \in F \mid 0 \le W_1 \le \varepsilon] \le \mathsf{P}[W^\circ \in F_\delta \mid 0 \le W_1 \le \varepsilon] = \mathsf{P}[W^\circ \in F_\delta]$$

Άρα, παίρνοντας $\limsup_\varepsilon$ στην προηγούμενη σχέση, και μετά αφήνοντας το $\delta \searrow 0$, έπεται η σχέση (8.16) για κλειστό F.

Έστω τώρα $h : C \to \mathbb{R}^k$ μια μετρήσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύει ότι το σύνολο ασυνεχειών της, D_h, ικανοποιεί την $\mathsf{P}[W^\circ \in D_h] = 0$. Η σχέση (8.15) μαζί με το θεώρημα απεικόνισης μας δίνουν ότι

$$\mathsf{P}[h(W^\circ) \le a] = \lim_{\varepsilon \to 0} \mathsf{P}[h(W) \le a \mid 0 \le W_1 \le \varepsilon], \tag{8.18}$$

για όλα τα $a \in \mathbb{R}^k$ στα οποία η αριστερή πλευρά (ως συνάρτηση του $a \in \mathbb{R}^k$) είναι συνεχής.

Ορίζουμε τώρα

$$m^\circ(\omega) = \inf_{t\in[0,1]} W_t^\circ(\omega), \quad M^\circ(\omega) = \sup_{t\in[0,1]} W_t^\circ(\omega).$$

Αν $a < 0 < b$ και $0 < \varepsilon < b$, η σχέση (8.10) δίνει (για $c = b - a$ και λόγω συνέχειας της κανονικής κατανομης)

$$\mathsf{P}[(a < m \le M < b) \cap (0 \le W_1 \le \varepsilon)] = \tag{8.19}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathsf{P}[2kc < N < 2kc + \varepsilon] -$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathsf{P}[2kc + 2b - \varepsilon < N < 2kc + 2b]$$

Θέλουμε να πάρουμε $\lim_{\varepsilon\to 0}$ και στα δύο μέλη. Αν ορίσουμε $h : C \to \mathbb{R}^2$ με $h(x) = (\inf_t x(t), \sup_t x(t))$, τότε, όπως και στην προηγούμενη ενότητα, το αριστερό μέλος της (8.19) θα γίνει $\lim_{\varepsilon\to 0} \mathsf{P}[(h(W) \in (a,\infty) \times (-\infty, b)) \cap (0 \le W_1 \le \varepsilon)]$. Αν διαιρέσουμε και με την $\mathsf{P}[0 \le W_1 \le \varepsilon]$ θα πάρουμε στο αριστερό μέλος, λόγω της (8.18) :

$$\mathsf{P}[a < m^\circ \le M^\circ \le b] = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\mathsf{P}[a < m \le M < b,\ 0 \le W_1 \le \varepsilon]}{\mathsf{P}[0 \le W_1 \le \varepsilon]} = \tag{8.20}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\mathsf{P}[2kc < N < 2kc + \varepsilon]}{\mathsf{P}[0 \le W_1 \le \varepsilon]} - \lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\mathsf{P}[2kc + 2b - \varepsilon < N < 2kc + 2b]}{\mathsf{P}[0 \le W_1 \le \varepsilon]}.$$

Ο στόχος μας είναι να εναλλάξουμε το άθροισμα με το όριο. Αυτό μπορεί να γίνει επειδή οι σειρές συγκλίνουν ομοιόμορφα ως προς ε. Πράγματι, για την πρώτη σειρά, αν συμβολίσουμε με $f_k(n) = \mathsf{P}[2kc < N < 2kc + \frac{1}{n}]$ και αν λάβουμε υπόψιν την πυκνότητα της Κανονικής κατανομής και το γεγονός ότι $e^x > x,\ \forall x \ge 0$ (αλλά και βέβαια για κάθε $x \in \mathbb{R}$), έπεται ότι

$$|f_k(n)| \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-2k^2c^2} \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{2k^2c^2},\ \forall k \in \mathbb{Z},\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Το θεώρημα του Weierstrass μαζί με το γεγονός ότι $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{k^2} < \infty$ μας δίνουν την ομοιόμορφη σύγκλιση του πρώτου αθροίσματος. Όμοια ισχύει και για το δεύτερο. Επομένως μπορούμε να εναλλάξουμε το όριο με το άθροισμα. Έτσι παίρνουμε

$$\mathsf{P}[a < m^\circ \le M^\circ \le b] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\frac{\mathsf{P}[2kc<N<2kc+\varepsilon]}{\varepsilon}}{\frac{\mathsf{P}[0\le W_1\le\varepsilon]}{\varepsilon}} - \tag{8.21}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\frac{\mathsf{P}[2kc+2b-\varepsilon<N<2kc+2b]}{\varepsilon}}{\frac{\mathsf{P}[0\le W_1\le\varepsilon]}{\varepsilon}}.$$

Τώρα, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι

$$(8.22)\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\mathsf{P}[x<N<x+\varepsilon]=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{F_N(x+\varepsilon)-F_N(x)}{\varepsilon}=F_N'(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

προκύπτει τελικά η σχέση

$$(8.23)\qquad \mathsf{P}[a<m^\circ\leq M^\circ\leq b]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{-2k^2c^2}-\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{-2(b+kc)^2},$$

που μας δίνει την από κοινού κατανομή του (m°, M°). Αν πάρουμε $b=-a$ και κάνουμε πράξεις, επειδή $c=b-a$ προκύπτει τελικά ότι

$$(8.24)\qquad \mathsf{P}[\sup_t|W_t^\circ|\leq b]=1+2\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k e^{-2k^2b^2},\quad b>0.$$

Τέλος, με μια παρόμοια ανάλυση, μπορούμε να αφήσουμε $b\to\infty$ στην (8.23), οπότε πάλι λόγω του θεωρήματος του Weierstrass μπορούμε να εναλλάξουμε το άθροισμα με το όριο και θα πάρουμε τελικά (έπειτα από πράξεις) ότι

$$(8.25)\qquad \mathsf{P}[m^\circ<a]=1-e^{-2a^2},\quad a<0.$$

Ενότητα 9: Ανισότητες Μεγίστου

Στην ενότητα 7, για να αποδείξουμε την tightness χρειαστήκαμε την ανισότητα του Etemadi η οποία όμως για να λειτουργήσει θα πρέπει να προϋποτεθεί η ανεξαρτησία των τυχαίων μεταβλητών που συνεισφέρουν στο μερικό άθροισμα. Πολλές φορές όμως χρειαζόμαστε οριακά θεωρήματα για ακολουθίες εξαρτημένων τυχαίων μεταβλητών και συνεπώς θέλουμε κάποια παραλλαγή της (7.13). Οι ανισότητες που περιέχουν άνω φράγματα για πιθανότητες της μορφής

$$\mathsf{P}[\omega : \max_{k\leq n}\{|S_k(\omega)|\} \geq \lambda]$$

ονομάζονται *ανισότητες μεγίστου.*

Έστω $\xi_1, \xi_2, \ldots$ να είναι μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών (χωρίς να είναι κατ' ανάγκην ανεξάρτητες) και $S_k = \xi_1 + \ldots + \xi_k$ (με $S_0 = 0$) και έστω επίσης

$$M_n = \max_{k\leq n} |S_k| \tag{9.1}$$

(Παρατηρήστε ότι λόγω των απόλυτων τιμών ο συμβολισμός δεν είναι ίδιος με αυτόν της (7.16).) Θα αναζητήσουμε άνω φράγματα για την πιθανότητα $\mathsf{P}[M_n \geq \lambda]$. Έστω

$$m_{ijk} = |S_j - S_i| \wedge |S_k - S_j| = \min\{|S_j - S_i|, |S_k - S_j|\} \tag{9.2}$$

και

$$L_n = \max_{0\leq i\leq j\leq k\leq n} m_{ijk} \tag{9.3}$$

Επειδή $|S_k| \leq |S_n - S_k| + |S_n|$ και $|S_k| \leq |S_k| + |S_n|$ προκύπτει ότι $|S_k| \leq m_{0kn} + |S_n|$, που μας δίνει

$$M_n \leq L_n + |S_n| \tag{9.4}$$

Θα αποδείξουμε ότι ισχύει και η ανισότητα

$$|S_n| \leq 2L_n + \max_{k\leq n} |\xi_k| \tag{9.5}$$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις. Αν $|S_n| = 0$ τότε ισχύει τετριμμένα. Έστω λοιπόν $|S_n| > 0$. Παρατηρούμε ότι τότε η $|S_k| \geq |S_n - S_k|$ ισχύει για $k = n$ αλλά όχι για $k = 0$. Ισχυριζόμαστε ότι θα υπάρχει ένας k με $1 \leq k \leq n$ τέτοιος ώστε $|S_k| \geq |S_n - S_k|$ και $|S_{k-1}| < |S_n - S_{k-1}|$. Πραγματικά, ας υποθέσουμε ότι δεν ισχύει αυτό. Τότε για κάθε $k = 1, \ldots, n$ θα είναι είτε $|S_k| < |S_n - S_k|$ είτε $|S_{k-1}| \geq |S_n - S_{k-1}|$. Για $k = n$ θα πρέπει να ισχύει η δεύτερη, δηλαδή $|S_{n-1}| \geq |S_n - S_{n-1}|$ άρα για $k = n-1$ πάλι θα ισχύει η δεύτερη (επειδή δεν μπορεί $|S_{n-1}| < |S_n - S_{n-1}|$) και όμοια καταλήγουμε ότι για $k = 1$ θα πρέπει $0 = |S_0| \geq |S_n - S_0|$, πράγμα άτοπο διότι είπαμε ότι $|S_n| > 0$. Έπεται ότι ο ισχυρισμός είναι αληθής. Για αυτόν τον k λοιπόν θα έχουμε $|S_n - S_k| = m_{0kn} \leq L_n$ και $|S_{k-1}| = m_{0,k-1,n} \leq L_n$ και άρα $|S_n| = |S_n - S_k + (S_{k-1} + \xi_k)| \leq |S_n - S_k| + |S_{k-1}| + |\xi_k| \leq 2L_n + |\xi_k|$, δηλαδή η (9.5) ισχύει πάλι. Από τις (9.4) και (9.5) έπεται

$$M_n \leq 3L_n + \max_{k\leq n}|\xi_k| \tag{9.6}$$

Εαν μπορέσουμε να βρούμε ένα φράγμα για την "δεξιά ουρά" της κατανομής της L_n, δηλαδή φράγμα για τις πιθανότητες της μορφής $\mathsf{P}[L_n \geq \lambda/2]$, όπως και επίσης φράγμα για την κατανομή του $|S_n|$ ή του $max_k|\xi_k|$, τότε θα έχουμε και φράγμα για την $\mathsf{P}[M_n \geq \lambda]$ και λόγω της σχέσης (7.7) να συμπεράνουμε την tightness. Το επόμενο θεώρημα δίνει φράγματα για το L_n υποθέτοντας φράγματα για τα m_{ijk}.

Θεώρημα 9.1 : *Έστω $a > 1/2$ και $b \geq 0$ και ότι οι $u_1, \ldots, u_n$ είναι μη αρνητικοί αριθμοί με την ιδιότητα να ισχύει*

$$\mathsf{P}[m_{ijk} \geq \lambda] \leq \frac{1}{\lambda^{4b}} \cdot \Big(\sum_{i<l\leq k} u_l\Big)^{2a}, \quad \forall\ 0 \leq i \leq j \leq k \leq n \tag{9.7}$$

για κάθε $\lambda > 0$. Τότε

$$\mathsf{P}[L_n \geq \lambda] \leq \frac{K}{\lambda^{4b}} \cdot \Big(\sum_{0<l\leq n} u_l\Big)^{2a} \tag{9.8}$$

για κάθε $\lambda > 0$, όπου το $K = K_{a,b}$ εξαρτάται μόνο από τα a, b.

Πριν κάνουμε την απόδειξη ας δούμε ένα παράδειγμα όπου οι ξ_i είναι ανεξάρτητες και ισόνομες.

Παράδειγμα 9.1 : Έστω $a = b = 1$ και ας υποθέσουμε ότι οι ξ_k είναι ανεξάρτητες και ισόνομες με μέση τιμή 0 και διασπορά 1. Θα προσπαθήσουμε να βρούμε μη αρνητικούς u_l που να ικανοποιούν την (9.7). Πράγματι, εαν $i \leq j \leq k$ τότε λόγω της ανισότητας Chebyshev λόγω της $xy \leq (x+y)^2$ και λόγω ανεξαρτησίας των ξ_i έχουμε :

$$\mathsf{P}[m_{ijk} \geq \lambda] = \mathsf{P}[|S_j - S_i| \geq \lambda \bigcap |S_k - S_j| \geq \lambda] = \mathsf{P}[|S_j - S_i| \geq \lambda]\cdot$$

$$\cdot\mathsf{P}[|S_k - S_j| \geq \lambda] \leq \frac{j-i}{\lambda^2} \cdot \frac{k-j}{\lambda^2} \leq \frac{(k-i)^2}{\lambda^4}$$

όπου η δεύτερη ισότητα προκύπτει λόγω ανεξαρτησίας. Έτσι ισχύει η (9.7) για $u_l \equiv 1$ οπότε η (9.8) δίνει $\mathsf{P}[L_n \geq \lambda] \leq \frac{K\cdot n^2}{\lambda^4}$ και $\mathsf{P}[\frac{L_n}{\sqrt{n}} \geq \lambda] \leq \frac{K}{\lambda^4}$. επειδή οι ξ_i είναι ανεξάρτητες και ισόνομες θα είναι και στατικές, επομένως έχουμε :

$$\mathsf{P}\Big[\max_{k\leq n}\frac{|\xi_k|}{\sqrt{n}} \geq \lambda\Big] \leq n\mathsf{P}\Big[\frac{|\xi_1|}{\sqrt{n}} \geq \lambda\Big] \leq \frac{1}{\lambda^2}\int_{[|\xi_1|\geq\lambda\sqrt{n}]} \xi_1^2 d\mathsf{P}$$

$$\leq \frac{1}{\lambda^2}\int_{[|\xi_1|\geq\lambda]} \xi_1^2 d\mathsf{P}\ ,$$

όπου η πρώτη ανισότητα έπεται λόγω ισονομίας και η δεύτερη λόγω ανισότητας Chebyshev. Για ευκολία έστω $\psi(\lambda)$ το τελευταίο ολοκλήρωμα. Η (9.6) μας δίνει

$$\mathsf{P}\Big[\frac{M_n}{\sqrt{n}} \geq \lambda\Big] \leq \mathsf{P}\Big[\frac{3L_n}{\sqrt{n}} \geq \frac{\lambda}{2} \bigcup \max_{k\leq n} \frac{|\xi_k|}{\sqrt{n}} \geq \frac{\lambda}{2}\Big] \leq \mathsf{P}\Big[\frac{3L_n}{\sqrt{n}} \geq \frac{\lambda}{2}\Big] +$$

$$+\mathsf{P}\Big[\max_{k\leq n} \frac{|\xi_k|}{\sqrt{n}} \geq \frac{\lambda}{2}\Big] \leq \frac{K}{(\lambda/6)^4} + \frac{\psi(\frac{1}{2}\lambda)}{(\lambda/2)^2}$$

Λόγω του ότι $\mathbb{E}(\xi_1^2) = 1$ προκύπτει ότι $\psi(\lambda) \to 0$ όταν $\lambda \to \infty$ και έτσι ισχύει η σχέση (7.7), οπότε η $\{X^n\}_n$ είναι tight και έτσι μέσω του θεωρήματος (9.1) αποδεικνύεται με άλλον έναν τρόπο το θεώρημα του Donsker.

Πριν αποδείξουμε το θεώρημα (9.1) παραθέτουμε μια παραλλαγή του, όπου αντί για υποθέσεις πάνω στα m_{ijk} έχουμε υποθέσεις πάνω στα $|S_j - S_i|$:

Θεώρημα 9.2 : *Έστω ότι υπάρχουν* $a > 1/2$, $b \geq 0$ *και* $u_1, \ldots, u_n$ *μη αρνητικοί αριθμοί που ικανοποιούν την*

$$\mathsf{P}[|S_j - S_i| \geq \lambda] \leq \frac{1}{\lambda^{4b}}\Big(\sum_{i<l\leq j} u_l\Big)^{2a}, \forall 0 \leq i \leq j \leq n \tag{9.9}$$

για κάθε $\lambda > 0$. *Τότε*

$$\mathsf{P}[M_n \geq \lambda] \leq \frac{K'}{\lambda^{4b}}\Big(\sum_{0<l\leq n} u_l\Big)^{2a} \tag{9.10}$$

για κάθε $\lambda > 0$, *όπου το* $K' = K'_{a,b}$ *εξαρτάται μόνο από τα* a, b.

<u>**Απόδειξη**</u> : Λόγω της ανισότητας Cauchy-Schwartz είναι $\int_\Omega I_{A\cap B} d\mathsf{P} = \int_\Omega I_A \cdot I_B d\mathsf{P} \leq \sqrt{\mathsf{P}(A)} \cdot \sqrt{\mathsf{P}(B)}$ και έτσι μαζί με την (9.9) και την $xy \leq (x+y)^2$ έπεται

$$\mathsf{P}\Big[m_{ijk} \geq \lambda\Big] \leq \frac{1}{\lambda^{2b}}\Big(\sum_{i<l\leq j} u_l\Big)^a \cdot \frac{1}{\lambda^{2b}}\Big(\sum_{j<l\leq k} u_l\Big)^a \leq \frac{1}{\lambda^{4b}}\Big(\sum_{i<l\leq k} u_l\Big)^{2a}$$

Άρα μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα (9.1), και για $s = \sum_{l\leq n} u_l$ θα έχουμε $\mathsf{P}[L_n \geq \lambda/2] \leq \frac{Ks^{2a}\cdot 2^{4b}}{\lambda^{4b}}$. Επίσης από την (9.9), για $j = n$ και $i = 0$, είναι $\mathsf{P}[|S_n| \geq \lambda/2] \leq \frac{s^{2a}\cdot 2^{4b}}{\lambda^{4b}}$ και συνεπώς η (9.4) μας δίνει ότι $\mathsf{P}[M_n \geq \lambda] \leq \frac{(K+1)2^{4b}s^{2a}}{\lambda^{4b}}$.

Να σημειώσουμε ότι, από την ανισότητα του Markov, η σχέση (9.9) έπεται εαν ισχύει και η :

$$\mathbb{E}(|S_j - S_i|^{4b}) \leq \Big(\sum_{i<l\leq j} u_l\Big)^{2a} \tag{9.11}$$

Επίσης η (9.7) έπεται και από την :

$$\mathbb{E}(|S_j - S_i|^{2b}|S_k - S_j|^{2b}) \leq \Big(\sum_{i<l\leq k} u_l\Big)^{2a} \tag{9.12}$$

Πράγματι, για το τελευταίο, η (9.7) θα προκύψει επειδή $\mathsf{P}[m_{ijk} \geq \lambda] =$
$\mathsf{P}[|S_j - S_i|^{2b} \geq \lambda^{2b} \bigcap |S_k - S_j|^{2b} \geq \lambda^{2b}] \leq \mathsf{P}[|S_j - S_i|^{2b}|S_k - S_j|^{2b} \geq \lambda^{4b}] \leq$
$\leq \frac{1}{\lambda^{4b}}\mathbb{E}(|S_j - S_i|^{2b}|S_k - S_j|^{2b})$.

Μια πιο γενική ανισότητα

Θα γενικεύσουμε το θεώρημα (9.1) και θα αποδείξουμε την γενική περίπτωση. Έστω T να είναι ένα Borel υποσύνολο του $[0,1]$ και $\gamma = [\gamma_t : t \in T]$ να είναι μια στοχαστική ανέλιξη με τον χρόνο να τρέχει στο T. Υποθέτουμε ότι η γ έχει δεξιά συνεχή μονοπάτια, υπό την έννοια ότι για όλα τα ω εαν $s_n, t \in T$ και $s_n \searrow t$ τότε $\gamma_{s_n}(\omega) \to \gamma_t(\omega)$. Έστω

$$m_{rst}(\omega) = |\gamma_s(\omega) - \gamma_r(\omega)| \wedge |\gamma_t(\omega) - \gamma_s(\omega)| \tag{9.13}$$

και

$$L(\gamma) =: L(\gamma)(\omega) = \sup\{m_{rst}(\omega) : r \leq s \leq t \ \ r,s,t \in T\} \tag{9.14}$$

Θεώρημα 9.3 : *Υποθέτουμε ότι υπάρχουν* $a > 1/2$, $b \geq 0$ *και ένα μέτρο* μ *με* $\mu(T) < \infty$ *τέτοια ώστε*

$$\mathsf{P}[m_{rst} \geq \lambda] \leq \frac{1}{\lambda^{4b}}\mu^{2a}(T \cap (r,t]) \tag{9.15}$$

για κάθε $\lambda > 0$ *και για όλα τα* $r,s,t \in T$ *με* $r \leq s \leq t$. *Τότε ισχύει*

$$\mathsf{P}[L(\gamma) \geq \lambda] \leq \frac{K}{\lambda^{4b}}\mu^{2a}(T) \tag{9.16}$$

για κάθε $\lambda > 0$, *όπου το* K *εξαρτάται μόνο από τα* a, b.

Βλέπουμε ότι το θεώρημα (9.1) προκύπτει από το (9.3) εαν απλά πάρουμε σαν T το σύνολο $T = \{i/n : 0 \leq i \leq n\}$, σαν γ την $\gamma(i/n) = S_i$ και σαν μ το μέτρο που δίνει $\mu(i/n) = u_i$.

Απόδειξη : Πρώτα γράφουμε $m(r,s,t)$ στη θέση του $m_{r,s,t}$ και διακρίνουμε περιπτώσεις :
Περίπτωση πρώτη : Υποθέτουμε ότι $T = [0,1]$ και ότι το μ είναι το μέτρο Lebesgue. Έστω $D_k = \{\frac{i}{2^k} : 0 \leq i \leq 2^k\}$ και $B_k = \max\{m(t_1,t_2,t_3) : t_1,t_2,t_3 \in D_k, t_1 \leq t_2 \leq t_3\}$. Έστω επίσης $A_k = \max\{m(t_1,t_2,t_3) : t_1,t_2,t_3 \in D_k, t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = \frac{1}{2^k}\}$. Για $t \in D_k$ ορίζουμε ένα σημείο $t' \in D_{k-1}$ ως εξής :

$$t' = \begin{cases} t & \text{εαν} \quad t \in D_{k-1} \\ t - \frac{1}{2^k} & \text{εαν} \quad t \notin D_{k-1} \quad \text{και} \quad |\gamma(t) - \gamma(t - \frac{1}{2^k})| \leq |\gamma(t) - \gamma(t + \frac{1}{2^k})| \\ t + \frac{1}{2^k} & \text{εαν} \quad t \notin D_{k-1} \quad \text{και} \quad |\gamma(t) - \gamma(t - \frac{1}{2^k})| > |\gamma(t) - \gamma(t + \frac{1}{2^k})| \end{cases}$$

Τότε $|\gamma(t) - \gamma(t')| \leq A_k$ όταν $t \in D_k$ και συνεπώς για $t_1, t_2, t_3 \in D_k$ έχουμε

$$|\gamma(t_2) - \gamma(t_1)| \leq |\gamma(t_2) - \gamma(t_2')| + |\gamma(t_2') - \gamma(t_1')| + |\gamma(t_1') - \gamma(t_1)| \leq$$

$$\leq |\gamma(t_2') + \gamma(t_1')| + 2A_k$$

και

$$|\gamma(t_2) - \gamma(t_3)| \leq |\gamma(t_2) - \gamma(t_2')| + |\gamma(t_2') - \gamma(t_3')| + |\gamma(t_3') - \gamma(t_3)| \leq$$

$$\leq |\gamma(t_2') + \gamma(t_3')| + 2A_k$$

Παρατηρούμε εύκολα ότι όταν $t_1 < t_2 < t_3$, τότε $t_1' \leq t_2' \leq t_3'$ και επειδή $t_1', t_2', t_3' \in D_{k-1}$ έπεται πως $m(t_1, t_2, t_3) \leq B_{k-1} + 2A_k$ άρα $B_k \leq B_{k-1} + 2A_k$. Επαγωγικά και εφόσον $A_0 = B_0 = 0$, συνεπάγεται ότι $B_k = 2(A_1 + \ldots + A_k)$. Λόγω δεξιάς συνέχειας των μονοπατιών της γ μπορεί εύκολα να αποδειχθεί ότι $L(\gamma) = \lim\limits_{k\to\infty} \max\{m(t_1, t_2, t_3) : t_1, t_2, t_3 \in D_k,\ t_1 \leq t_2 \leq t_3\} = \lim\limits_{k\to\infty} B_k$ και έτσι $L(\gamma) \leq 2\sum_{k=1}^{\infty} A_k$.
Τώρα παρατηρούμε ότι για οποιονδήποτε $\theta \in (0,1)$ μπορούμε να βρούμε έναν C ώστε $C \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \theta^k = \frac{C}{1-\theta} = \frac{1}{2}$. Τότε :

$$\mathsf{P}[L(\gamma) > \lambda] \leq \mathsf{P}[2\sum_{k=1}^{\infty} A_k > \lambda] = \mathsf{P}[\sum_{k=1}^{\infty} A_k > C\lambda \sum_{k=1}^{\infty} \theta^k] \leq$$

$$\leq \mathsf{P}\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} [A_k > C\lambda\theta^k]\Big) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}[A_k > C\lambda\theta^k] \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\sum_{i=1}^{2^k-1} \mathsf{P}\Big[m(\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k}, \frac{i+1}{2^k}) \geq C\lambda\theta^k\Big]\Big).$$

Επειδή το μ έχει υποτεθεί ότι είναι το μέτρο Lebesgue, η (10.15) μετατρέπει το τελευταίο άθροισμα σε :

$$\mathsf{P}[L(\gamma) > \lambda] \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{(C\lambda\theta^k)^{4b}} \cdot \Big(\frac{2}{2^k}\Big)^{2a} = \frac{2^{2a}}{C^{4b}\lambda^{4b}} \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{\theta^{4b}2^{2a-1}}\Big)^k.$$

Εφόσον $4b \geq 0$ και $2a - 1 > 0$ μπορούμε να βρούμε έναν κατάλληλο $\theta \in (0,1)$ ώστε η τελευταία σειρά να συγκλίνει και συνεπώς να καθορίσουμε επακριβώς τον K που ζητούσαμε.
Περίπτωση δεύτερη : Υποθέτουμε πάλι ότι $T = [0,1]$ και ότι το μ είναι μη ατομικό μέτρο, οπότε η συνάρτηση $F(t) = \mu[0,t]$ είναι συνεχής. Αν η F είναι γνησίως αύξουσα και $F(1) = c$, τότε παίρνουμε $a = c^{-\frac{a}{2b}}$ (οπότε $a^{4b}c^{2a} = 1$) και ορίζουμε την ανέλιξη ζ με

$$\zeta(t) = a \cdot \gamma(F^{-1}(ct)).$$

Τότε η ζ εμπίπτει στην περίπτωση 1 και το συμπέρασμα έπεται διότι $L(\gamma) = aL(\zeta)$. Εαν η F είναι συνεχής αλλά όχι γνησίως αύξουσα τότε ορίζουμε πρώτα το μέτρο που έχει σαν συνάρτηση κατανομής την $F(t) + \varepsilon t$ και αφήνουμε το $\varepsilon \searrow 0$.

Περίπτωση τρίτη : Υποθέτουμε ότι το T είναι ένα πεπερασμένο σύνολο. Εαν $0 \notin T$, έστω $\gamma(0) = \gamma(t_1)$, όπου το t_1 είναι το πρώτο σημείο του T, και έστω $\mu\{0\} = 0$. Εαν $1 \notin T$, έστω $\gamma(1) = \gamma(t_{v-1})$, όπου το t_{v-1} είναι το τελευταίο σημείο του T, και έστω $\mu\{1\} = 0$. Τότε η ανέλιξη γ και το νέο μέτρο μ ικανοποιούν τις υποθέσεις οπότε μπορούμε να υποθέσουμε ότι το T περιέχει τα σημεία

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_v = 1.$$

Ορίζουμε μια ανέλιξη γ' (απλή ανέλιξη) ως εξής :

$$\gamma'(t)(\omega) = \begin{cases} \gamma(t_i)(\omega) & \text{εαν } \ t_i \leq t < t_{i+1}, \quad 0 \leq i < v \\ \gamma(1)(\omega) & \text{εαν } \ t = 1 \end{cases}$$

Εαν το $m'(r,s,t)$ είναι το αντίστοιχο minimum της (9.13) για την γ' τότε προφανώς $m'(r,s,t) = 0$ εκτός κι αν τα r, s, t βρίσκονται όλα σε διαφορετικά διαστήματα $[t_i, t_{i+1})$. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι

$$r \in [t_i, t_{i+1}), \quad s \in [t_j, t_{j+1}), \quad t \in [t_k, t_{k+1}), \ i < j < k \tag{9.17}$$

Τότε λόγω κατασκευής της γ' θα είναι $m'(r,s,t) = m(t_i, t_j, t_k)$ και λόγω της (9.15) θα ισχύει

$$\mathsf{P}[m'_{rst} \geq \lambda] \leq \tfrac{1}{\lambda^{4b}} \mu^{2a}((t_i, t_k] \cap T) \tag{9.18}$$

Τώρα έστω ν να είναι το μέτρο που αντιστοιχεί σε ομοιόμορφη κατανομή με μάζα $\mu\{t_{l-1}\} + \mu\{t_l\}$ επί του διαστήματος $[t_{l-1}, t_l]$ για $1 \leq l \leq v$. Τότε

$$\mu((t_i, t_k] \cap T) \leq \nu[t_{i+1}, t_k] \leq \nu(r, t]$$

και λόγω της (9.18) συνεπάγεται η

$$\mathsf{P}[m'_{rst} \geq \lambda] \leq \tfrac{1}{\lambda^{4b}} \nu^{2a}(r, t] \tag{9.19}$$

Με κάποια κατάλληλη τροποποίηση του επιχειρήματος μπορούμε να συμπεριλάβουμε στην (9.19) και το $t = 1$. Έτσι η (9.19) ισχύει για όλα τα $0 \leq r \leq s \leq t \leq 1$ και η ανέλιξη γ' εμπίπτει στην περίπτωση 2 :

$$\mathsf{P}[L(\gamma') \geq \lambda] \leq \tfrac{K}{\lambda^{4b}} \mu^{2a}(0,1] \leq \tfrac{K}{\lambda^{4b}} (2\mu(T))^{2a}$$

Εφόσον $L(\gamma) = L(\gamma')$ μπορούμε να αντικαταστήσουμε το K των περιπτώσεων 1 και 2 με $2^{2a}K$, το οποίο θα ικανοποιεί και την περίπτωση 3.
Περίπτωση τέταρτη : Για το γενικό T και μ θεωρούμε πεπερασμένα σύνολα

$$T_n : 0 \leq t_{n0} < t_{n1} < \ldots < t_{nv_n} \leq 1$$

τέτοια ώστε $T_n \subseteq T_{n+1}$ και η ένωση $\bigcup_n T_n$ να είναι πυκνή στο T (όπως πριν που οι δυαδικοί ρητοί ήταν πυκνοί στο $T = [0,1]$). Θεωρούμε ακολουθία μέτρων μ_n να δίνουν μάζα $\mu_n\{t_{ni}\} = \mu((t_{n,i-1}, t_{n,i}] \cap T)$. Θεωρούμε, όπως στην περίπτωση 3, την ακολουθία απλών ανελίξεων $\gamma^{(n)}$ των οποίων ο χρόνος καθορίζεται από το εκάστοτε T_n δηλαδή :

$$\gamma^{(n)}(t) = \begin{cases} \gamma(t) & \text{εαν } \ t_{n,i} \leq t < t_{n,i+1}, \quad 0 \leq i < v_n - 1 \\ \gamma(1) & \text{εαν } \ t = 1 \end{cases}$$

Λόγω δεξιάς συνέχειας των μονοπατιών ισχύει $L(\gamma^{(n)}(\omega)) \nearrow L(\gamma(\omega))$ ενώ κάθε $\gamma^{(n)}$ εμπίπτει στην περίπτωση 3. Τώρα μπορεί με απαγωγή σε άτοπο να δειχθεί εύκολα ότι

$$[L(\gamma) \geq \lambda] \subseteq \liminf_n [\omega : L(\gamma^{(n)}(\omega)) \geq \lambda - \varepsilon]$$

και λόγω και της τρίτης περίπτωσης έπεται :

$$\mathsf{P}[L(\gamma) \geq \lambda] \leq \mathsf{P}[\liminf_n [\omega : L(\gamma^{(n)}(\omega)) \geq \lambda - \varepsilon] \leq \frac{K}{(\lambda - \varepsilon)^{4b}} \cdot \mu^{2a}(T) \ .$$

Αφήνοντας το $\varepsilon \searrow 0$ ολοκληρώνεται η απόδειξη.

Μια τελευταία ανισότητα

Το τελευταίο θεώρημα θα μας χρησιμεύσει σε μερικά σημεία του κεφαλαίου 3. Έστω ότι η ανέλιξη $\gamma = [\gamma_t : t \in T]$ έχει δεξιά συνεχή μονοπάτια και ότι $L(\gamma, \delta) = \sup\{m(r,s,t) : r,s,t \in T,\ r \leq s \leq t,\ t - r \leq \delta\}$.

Θεώρημα 9.4 :*Έστω $a > \frac{1}{2}$, $b \geq 0$ και ότι το μ είναι ένα μέτρο με $\mu(T) < \infty$ τέτοιο ώστε :*

$$\mathsf{P}[m_{rst} \geq \lambda] \leq \tfrac{1}{\lambda^{4b}} \cdot \mu^{2a}(T \cap (r,t]), \quad r \leq s \leq t, \quad t - r < 2\delta \tag{9.20}$$

για όλα τα $\lambda > 0$ και $r,s,t \in T$. Τότε :

$$\mathsf{P}[L(\gamma, \delta) \geq \lambda] \leq \frac{2K\mu(T)}{\lambda^{4b}} \cdot \sup_{0 \leq t \leq 1-2\delta} \{\mu^{2a-1}(T \cap [t, t+2\delta])\} \tag{9.21}$$

για κάθε $\lambda > 0$, όπου το K εξαρτάται μόνο από τα a, b.
(Σημείωση: Τα Κ της (9.16) και (9.21) μπορούν να επιλεγούν να είναι τα ίδια).

Απόδειξη : Για δοσμένο δ χωρίζουμε το διάστημα $[0,1]$ σε $v+1$ το πλήθος διαστήματα, όπου $v = [1/\delta]$, μέσω των σημείων $t_i = i\delta$ για $0 \leq i < v$ και $t_v = 1$. Εαν για κάποια r,t ισχύει $|r - t| \leq \delta$, τότε σίγουρα τα r και t θα ανήκουν ή στο ίδιο διάστημα $[t_{i-1}, t_i]$ είτε σε διαδοχικά, επομένως στο ίδιο $[t_{i-1}, t_{i+1}]$ για κάποιον κατάλληλο i με $1 \leq i \leq v-1$. Εαν συμβολίσουμε με $l_i = \sup\{m_{rst} : r,s,t \in T \cap [t_{i-1}, t_{i+1}]\ ,\ r \leq s \leq t\}$ τότε μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα 9.3 με το $\widetilde{T} = T \cap [t_{i-1}, t_{i+1}]$ στη θέση του T και να πάρουμε ότι $\mathsf{P}[l_i \geq \lambda] \leq \frac{K}{\lambda^{4b}} \cdot \mu^{2a}(T \cap [t_{i-1}, t_{i+1}])$ (πράγματι, λόγω της (9.20), εαν $r,s,t \in T \cap [t_{i-1}, t_{i+1}]$, η τομή $T \cap [t_{i-1}, t_{i+1}] \cap (r,t]$ ισούται με την $T \cap (r,t]$ και έτσι η σχέση (9.15) ικανοποιείται). Έτσι εαν $p_i = \mu(T \cap [t_{i-1}, t_{i+1}])$ έχουμε :

$$\sum_i p_i^{2a} \leq \max_i\{p_i^{2a-1}\} \cdot \sum_i p_i \leq 2\mu(T) \cdot \max_i\{p_i^{2a-1}\},$$

όπου η τελευταία ανισότητα συνεπάγεται από το γεγονός ότι τα διαστήματα $[t_{i-1}, t_{i+1}]$ δεν είναι ξένα ανά δύο και $\sum_i \mu([t_{i_1}, t_{i+1}]) \leq 2\mu([0,1])$. Τώρα η (9.21) έπεται από το γεγονός ότι

$$[L(\gamma,\delta) > \lambda] \subseteq \bigcup_{i=1}^{v-1} [l_i > \lambda]$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Ο χώρος D

Ενότητα 10: Η γεωμετρία του χώρου D

Ο χώρος C είναι κατάλληλος για την περιγραφή ανελίξεων που τα μονοπάτια τους είναι συνεχή, όπως αυτά της ανέλιξης Brown. Ωστόσο δεν είναι κατάλληλος χώρος για να περιγραφούν ανελίξεις που τα μονοπάτια τους περιέχουν άλματα, όπως αυτά της ανέλιξης Poisson. Σε αυτή την ενότητα θα εισάγουμε τη θεωρία σύγκλισης στον χώρο D, ο οποίος επιτρέπει να δουλεύουμε και με ασυνεχείς συναρτήσεις.

Ο ορισμός

Ο χώρος $D = D[0,1]$ είναι ο χώρος που περιέχει όλες τις πραγματικές συναρτήσεις $x : [0,1] \to \mathbb{R}$ οι οποίες είναι δεξιά συνεχείς και έχουν όριο από αριστερά, δηλαδή :
i) Για κάθε $0 \le t < 1$, υπάρχει το όριο $\lim_{s \searrow t} x(s) =: x(t+)$ και ισχύει $x(t) =$
$= x(t+)$.
ii) Για κάθε $0 < t \le 1$, υπάρχει το πλευρικό αριστερό όριο $\lim_{s \nearrow t} x(s) =: x(t-)$.

Συναρτήσεις που έχουν αυτές τις δύο ιδιότητες συχνά θα τις αποκαλούμε *cadlag* συναρτήσεις. Θα λέμε ότι μια συνάρτηση περιέχει *ασυνέχεια πρώτου είδους* στο σημείο t εαν υπάρχουν τα πλευρικά όρια $x(t-)$ και $x(t+)$ και η τιμή $x(t)$ βρίσκεται ανάμεσά τους. Οι cadlag συναρτήσεις περιέχουν πρώτου είδους ασυνέχειες και φυσικά είναι προφανές ότι ο χώρος C είναι υποσύνολο του χώρου D. Επίσης αντί για τον χώρο $\mathbb{R}$ θα μπορούσαμε να έχουμε οποιονδήποτε πλήρη και διαχωρίσιμο μετρικό χώρο (V, v) καθώς αντί για σύγκλιση ως προς την $|\cdot|$ θα είχαμε σύγκλιση ως προς τη μετρική v.
Για μια συνάρτηση $x \in D$ και ένα $T \subseteq [0,1]$ ορίζουμε:

$$w_x(T) = w(x,T) = \sup_{s,t \in T} \{|x(s) - x(t)|\} \tag{10.1}$$

Ο ορισμός (6.1) για το μέτρο συνέχειας μιας x μπορεί να γραφτεί εκ νέου σαν :

$$w_x(\delta) = \sup_{0 \le t \le 1-\delta} w_x[t, t+\delta] \tag{10.2}$$

Οι συναρτήσεις του χώρου $C[0,1]$ ήταν ομοιόμορφα συνεχείς, ως συνεχείς σε κλειστό διάστημα. Στον χώρο $D[0,1]$ δεν έχουμε κάτι τέτοιο, ωστόσο το επόμενο Λήμμα μας δίνει σημαντικές πληροφορίες για την συμπεριφορά μιας cadlag συνάρτησης :

Λήμμα 1 : *Για κάθε $x \in D$ και για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχουν σημεία $t_0^{(\varepsilon)}, t_1^{(\varepsilon)}, \ldots, t_{v(\varepsilon)}^{(\varepsilon)}$ με*

$$0 = t_0^{(\varepsilon)} < t_1^{(\varepsilon)} < \ldots < t_{v(\varepsilon)}^{(\varepsilon)} = 1 \tag{10.3}$$

ώστε να ισχύει

$$w_x[t_{i-1}^{(\varepsilon)}, t_i^{(\varepsilon)}) < \varepsilon \ , \forall i = 1, \ldots, v(\varepsilon). \tag{10.4}$$

(Σημειώνουμε ότι το πλήθος των σημείων, όπως και τα ίδια τα σημεία, εξαρτώνται από το ε που επιλέγουμε κάθε φορά και γι αυτό τοποθετήσαμε το ε μέσα στις παρενθέσεις των δεικτών.)

Απόδειξη : Έστω t° να είναι το supremum όλων των $t \in [0, 1]$ για τα οποία το $[0, t)$ αναλύεται σε πεπερασμένα υποδιαστήματα $[t_{i-1}, t_i)$ που ικανοποιούν την (10.4). Στόχος μας είναι να αποδείξουμε ότι $t^\circ = 1$ διότι τότε θα έχει αποδειχθεί το θεώρημα. Πραγματικά, σε αυτή την περίπτωση λόγω ύπαρξης του αριστερού ορίου της x στο σημείο 1, για το δοσμένο $\varepsilon > 0$ της εκφώνησης, θα υπάρχει ένα $\delta' > 0$ ώστε : $s, r \in (1 - \delta', 1) \implies |x(s) - x(r)| \leq |x(s) - x(1-)| + |x(1-) - x(r)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. Έτσι, εφόσον $t^\circ = 1$, μπορούμε να βρούμε ένα $\tilde{t} \in (1 - \delta', 1]$ ώστε το $[0, \tilde{t})$ να αναλύεται σε υποδιαστήματα που ικανοποιούν την (10.4). Επίσης $w_x[\tilde{t}, 1) < \varepsilon$ και έτσι η ζητούμενη διαμέριση του $[0, 1]$ περιλαμβάνει τα υποδιαστήματα $[t_{i-1}, t_i)$ (τα οποία αναλύουν το $[0, \tilde{t})$) συν το διάστημα $[\tilde{t}, 1)$. Επομένως μένει να δειχθεί ότι $t^\circ = 1$.
Επειδή $x(0) = x(0+)$, εφαρμόζοντας τον ορισμό του ορίου, υπάρχει μια περιοχή δεξιά του μηδενός, $[0, \delta_1)$ ώστε αν $s, r \in [0, \delta_1)$ τότε $|x(s) - x(r)| < \varepsilon$, δηλαδή $t^\circ \geq \delta_1 > 0$. Επίσης, όπως κάναμε και πριν για το σημείο 1, με την ίδια λογική και το $[0, t^\circ)$ μπορεί να αναλυθεί λόγω της ύπαρξης του πλευρικού ορίου $x(t^\circ-)$. Επομένως το supremum είναι και maximum. Τώρα αποκλείεται $t^\circ < 1$, διότι σε αυτή την περίπτωση λόγω της $x(t^\circ) = x(t^\circ+)$, θα μπορούσαμε να πάμε λίγο "πιο δεξιά" από το t° και να παίρναμε $w_x[t^\circ, \delta_2) < \varepsilon$ και θα είχαμε ότι και το $[0, t^\circ + \delta_2)$ θα αναλυόταν, πράγμα άτοπο. Έτσι $t^\circ = 1$ και επομένως ολόκληρο το διάστημα $[0, 1]$ μπορεί να αναλυθεί σε πεπερασμένα υποδιαστήματα που ικανοποιούν τις (10.3) και (10.4).

Με τη βοήθεια αυτού του Λήμματος θα αποδείξουμε δύο πολύ χρήσιμους ισχυρισμούς οι οποίοι δεν είναι καθόλου τετριμμένοι :
Ισχυρισμός 1 : Για δοσμένο $M > 0$ υπάρχουν το πολύ πεπερασμένοι το πλήθος t για τους οποίους να ισχύει $|x(t) - x(t-)| > M$. Πράγματι, έστω $0 < \varepsilon << M$ και έστω η διαμέριση του Λήμματος 1. Τα σημεία t για τα οποία το άλμα ξεπερνάει τον M αποκλείεται να ανήκουν εντός κάποιου υποδιαστήματος $[t_{i-1}, t_i)$, διότι εφαρμόζοντας τον ορισμό του αριστερού πλευρικού ορίου θα βρίσκαμε ένα s αρκετά κοντά στο t και μέσα στο ίδιο υποδιάστημα και θα είχαμε $|x(t) - x(t-)| \leq |x(t) - x(s)| + |x(s) - x(t-)| \leq w_x[t_{i-1}, t_i) + \varepsilon/2 << M$, άτοπο. Επομένως τα πιθανά t είναι αναγκαστικά κάποια από τα άκρα $t_1, t_2, \ldots, t_v$ που είναι πεπερασμένα το πλήθος.

Ισχυρισμός 2 : Μια cadlag συνάρτηση έχει το πολύ αριθμήσιμες το πλήθος ασυνέχειες. Πράγματι, αν συμβολίσουμε με D_x το σύνολο των σημείων ασυνέχειας της x, τότε ισχύει $D_x = \bigcup_{q_n \in Q} \{t \in (0,1] : |x(t) - x(t-)| > q_n\}$ και με τη βοήθεια και του πρώτου ισχυρισμού έχουμε μια αριθμήσιμη ένωση πεπερασμένων συνόλων, δηλαδή ένα αριθμήσιμο σύνολο.

Επίσης το Λήμμα 1 μας εξασφαλίζει ότι η x είναι και φραγμένη συνάρτηση διότι π.χ. μπορούμε να εφαρμόσουμε το Λήμμα για $\varepsilon = 1$ οπότε το τυχόν t θα ανήκει σε κάποιο από τα $[t_{i-1}^{(1)}, t_i^{(1)})$ και άρα $|x(t)| \le |x(t) - x(t_{i-1}^{(1)})| + |x(t_{i-1}^{(1)})| \le 1 + \max_i\{|x(t_i^{(1)})\}$. Συνεπώς

$$\|x\| = \sup_t\{|x(t)|\} < \infty \tag{10.5}$$

Επιπλέον, παίρνοντας την ακολουθία απλών συναρτήσεων

$$y^{(n)}(t) = x\Big(\frac{t_{i-1}^{(1/n)} + t_i^{(1/n)}}{2}\Big), \text{ όταν } t \in [t_{i-1}^{(1/n)}, t_i^{(1/n)})$$

μπορούμε εύκολα να δούμε ότι η $y^{(n)}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην x, και συνεπώς έπεται ότι η x είναι Borel μετρήσιμη.

Σε αυτό το σημείο θα χρειαστεί να ορίσουμε μια ποσότητα στον D που θα έχει τον ίδιο ρόλο με αυτόν που είχε το μέτρο συνέχειας (modulus of continuity) για συναρτήσεις του C. Έστω ένα σύνολο $\{t_i\}_i$ που ικανοποιεί τη σχέση (10.3). Το $\{t_i\}$ θα καλείται δ-sparse εαν ικανοποιεί $\min_{1\le i\le v}(t_i - t_{i-1}) > \delta$. Φυσικά ο δείκτης κινείται στο πλήθος των t_i το οποίο ενδεχομένως να αλλάζει κάθε φορά που αλλάζει και το εκάστοτε δ-sparse, αλλά εφόσον αυτό είναι τώρα πια σαφές, εμείς θα συνεχίζουμε να το συμβολίζουμε με το γράμμα v παρόλο που αυτό μπορεί να αλλάζει κάθε φορά. Έτσι ορίζουμε, για $0 < \delta < 1$

$$w'_x(\delta) = w'(x,\delta) = \inf_{\{t_i\}}\left\{\max_{1\le i\le v} w_x[t_{i-1}, t_i)\right\}, \tag{10.6}$$

όπου το infimum εκτείνεται σε όλα τα δ-sparse σύνολα $\{t_i\}$ και, όπως πριν, ο δείκτης στο maximum κινείται στο πλήθος των σημείων που περιέχει το εκάστοτε δ-sparse σύνολο (και ενδέχεται να αλλάζει). Χρησιμοποιώντας την παρατήρηση ότι αν $0 < \delta_1 < \delta_2$ τότε $w'_x(\delta_1) \le w'_x(\delta_2)$ είναι εύκολο να δειχθεί ότι το Λήμμα 1 είναι ισοδύναμο με το ότι για κάθε $x \in D$ ισχύει $\lim_{\delta\to 0} w'_x(\delta) = 0$.

Θα προσπαθήσουμε να συγκρίνουμε τα $w'_x(\delta)$ και $w_x(\delta)$. Εαν $\delta < \frac{1}{2}$ τότε μπορούμε να χωρίσουμε το $[0,1)$ σε υποδιαστήματα $[t_{i-1}, t_i)$ που ικανοποιούν την $\delta < t_i - t_{i-1} \le 2\delta$ και επομένως με βάση τους ορισμούς έπεται

$$w'_x(\delta) \le w_x(2\delta), \quad \text{εαν } \delta < 1/2 \tag{10.7}$$

Δεν μπορεί να υπάρξει κάποια ανισότητα προς την αντίθετη κατεύθυνση και αυτό επειδή δεν ισχύει ότι $\lim_{\delta\to 0} w_x(\delta) = 0$ εαν η x έχει ασυνέχειες. Όμως ας θεωρήσουμε το μέγιστο απόλυτο άλμα της x :

$$j(x) = \sup_{0<t\le 1}\{|x(t) - x(t-)|\} \tag{10.8}$$

Επειδή όπως είδαμε πριν, το πολύ για πεπερασμένα το πλήθος t η ποσότητα $|x(t) - x(t-)|$ ξεπερνάει έναν δεδομένο $M > 0$, το supremum στην (10.8) είναι και maximum. Θα αποδείξουμε ότι ισχύει η σχέση

$$w_x(\delta) \leq 2w'_x(\delta) + j(x) \tag{10.9}$$

Πράγματι, έστω $\varepsilon > 0$ και έστω ένα δ-sparse $\{t_i\}$ ώστε $w_x[t_{i-1}, t_i) < w'_x(\delta) + \varepsilon$ για όλα τα i. Εαν πάρουμε s, t με $|s - t| \leq \delta$ τότε σίγουρα τα s και t θα ανήκουν είτε στο ίδιο $[t_{i-1}, t_i)$ είτε σε διαδοχικά. Εαν ανήκουν στο ίδιο, τότε $|x(s) - x(t)| \leq w_x[t_{i-1}, t_i) < w'_x(\delta) + \varepsilon$. Εαν ανήκουν σε διαδοχικά διαστήματα, τότε εφαρμόζοντας τον ορισμό του αριστερού πλευρικού ορίου στο κοινό τους άκρο, $\tilde{r}$, μπορούμε να βρούμε ένα w "κοντά" στο $\tilde{r}$ που να ανήκει στο ίδιο διάστημα με το s και να ισχύει $|x(w) - x(\tilde{r}-)| < \varepsilon$. Συνεπώς
$|x(s) - x(t)| \leq |x(s) - x(w)| + |x(w) - x(\tilde{r}-)| + |x(\tilde{r}-) - x(\tilde{r})| + |x(\tilde{r}) - x(t)| \leq 2w'_x(\delta) + 3\varepsilon + j(x)$. Αφήνοντας το $\varepsilon \to 0$ προκύπτει η (10.9).
Αφού $j(x) = 0$ όταν $x \in C$, έχουμε επίσης

$$w_x(\delta) \leq 2w'_x(\delta), \text{ αν } x \in C \tag{10.10}$$

και συμπεραίνουμε ότι για τις συναρτήσεις του χώρου C οι ποσότητες $w_x(\delta)$ και $w'_x(\delta)$ είναι επί της ουσίας οι ίδιες.

Η τοπολογία Skorohod

Όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, δύο συναρτήσεις x, y στον χώρο C θεωρούνται "κοντά" η μια στην άλλη, ως προς την μετρική της ομοιόμορφης σύγκλισης, εαν το γράφημα της x μπορεί να πέσει επάνω στο γράφημα της y κάτω από μια ομοιόμορφα μικρή μεταβολή των συντεταγμένων, κρατώντας σταθερή την τετμημένη. Στον χώρο D επιτρέπουμε επίσης μια ομοιόμορφα μικρή μεταβολή της κλίμακας του χρόνου, μια ιδέα που πρωτοεπινόησε ο Skorohod.

Θεωρούμε Λ να είναι το σύνολο όλων των συνεχών και γνησίως αυξουσών συναρτήσεων από το $[0, 1]$ επί του $[0, 1]$. Προφανώς εαν $\lambda \in \Lambda$, θα πρέπει $\lambda(0) = 0$ και $\lambda(1) = 1$ (λόγω μονοτονίας). Για $x, y \in D$ ορίζουμε την απόσταση $d(x, y)$ σαν το infimum όλων των $\varepsilon > 0$ για τα οποία υπάρχει $\lambda \in \Lambda$ τέτοιο ώστε :

$$\sup_t\{|\lambda(t) - t|\} = \sup_t\{|t - \lambda^{-1}(t)|\} < \varepsilon \tag{10.11}$$

και

$$\sup_t\{|x(t) - y(\lambda(t))|\} = \sup_t\{|x(\lambda^{-1}(t)) - y(t)|\} < \varepsilon \tag{10.12}$$

Με άλλα λόγια, αν I είναι η ταυτοτική απεικόνιση και $\|x\| = \sup_{0 \leq t \leq 1} |x(t)|$, ο ορισμός γίνεται

$$d(x, y) = \inf_{\lambda \in \Lambda} \{\|\lambda - I\| \vee \|x - y \circ \lambda\|\} \tag{10.13}$$

Θα αποδείξουμε ότι η d είναι μετρική. Πράγματι, αρχικά η d είναι πεπερασμένη και μάλιστα, παίρνοντας $\lambda \equiv I$, έπεται ότι $d(x,y) \leq \|x-y\|$. Εαν $\lambda \in \Lambda$ τότε και $\lambda^{-1} \in \Lambda$ και άρα $d(x,y)=d(y,x)$. Εαν $d(x,y)=0$, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ακολουθία $\{\lambda_n\}_n \in \Lambda$ ώστε $\|\lambda_n - I\| \to 0$ και $\|x - y\circ\lambda_n\| \to 0$. Συνεπώς $\lambda_n(t) \to t$ για κάθε $t \in [0,1]$ και επειδή η y είναι ασυνεχής εκτός ίσως από αριθμήσιμα το πολύ σημεία (δες και Ισχυρισμό 2), θα ισχύει $y(\lambda_n(t)) \to y(t)$ για εκείνα τα t που είναι σημεία συνεχείας της y. Επειδή όμως $\|x - y\circ\lambda_n\| \to 0$, θα ισχύει και $y(\lambda_n(t)) \to x(t)$ για όλα τα t και έτσι $x(t)=y(t)$ λ-σχεδόν για όλα τα t. Εκμεταλλευόμενοι την δεξιά συνέχεια των x και y μπορούμε άνετα να δείξουμε ότι $x(t)=y(t)$ *για όλα τα* t. Τέλος, η τριγωνική ανισότητα είναι άμεση από το ότι $\|\lambda_1\circ\lambda_2 - I\| \leq \|\lambda_1 - I\| + \|\lambda_2 - I\|$ και ότι $\|x - z\circ\lambda_1\circ\lambda_2\| \leq \|x - y\circ\lambda_2\| + \|y - z\circ\lambda_1\|$. Η παραπάνω μετρική ορίζει την τοπολογία Skorohod. Ο ρόλος που έχουν οι συναρτήσεις λ είναι να αναπαριστούν την μικρή *παραμόρφωση* της κλίμακας του χρόνου. Ας προσπαθήσουμε να δούμε τι σχέση έχει η τοπολογία Skorohod με την τοπολογία της ομοιόμορφης σύγκλισης. Μια ακολουθία συναρτήσεων x_n στον χώρο D συγκλίνει, ως προς την τοπολογία Skorohod, σε μια συνάρτηση x αν και μόνο αν υπάρχουν συναρτήσεις $\lambda_n \in \Lambda$ τέτοιες ώστε $x_n(\lambda_n(t)) \to x(t)$ ομοιόμορφα ως προς t και $\lambda_n(t) \to t$ ομοιόμορφα ως προς t. Επιλέγοντας $\lambda_n(t) \equiv t$ προκύπτει ότι η ομοιόμορφη σύγκλιση της x_n στην x συνεπάγεται και την σύγκλιση ως προς την τοπολογία Skorohod. Από την άλλη μεριά, οι συναρτήσεις $x_n = I_{[0,a+1/n)}$ συγκλίνουν στην $x = I_{[0,a)}$ ως προς την τοπολογία Skorohod αλλά δεν συγκλίνουν ομοιόμορφα σε αυτήν, επειδή $x_n(a) \nrightarrow x(a)$. Πράγματι, για την Skorohod σύγκλιση, μπορούμε να πάρουμε λ_n να είναι η ακολουθία συναρτήσεων του χώρου Λ που στο $[0,a]$ ξεκινούν γραμμικά έτσι ώστε $\lambda_n(a) = a + 1/n$ και στο $[a,1]$ τις ενώνουμε γραμμικά μέχρι το σημείο $\lambda_n(1)=1$. Είναι άμεσο τώρα ότι $I_{[0,a+1/n)}(\lambda_n(t)) \to I_{[0,a)}(t)$ ομοιόμορφα ως προς t και φυσικά $\|\lambda_n - I\| \to 0$. Η παραπάνω σύγκλιση ισχύει για οποιοδήποτε $0 < a < 1$. Παρόλο που η σύγκλιση ως προς την τοπολογία Skorohod δεν συνεπάγεται κατ ανάγκην την ομοιόμορφη σύγκλιση, ισχύει ότι :

$$|x_n(t) - x(t)| \leq |x_n(t) - x(\lambda_n(t))| + |x(\lambda_n(t)) - x(t)| \tag{10.14}$$

βλέπουμε πως συνεπάγεται ότι $x_n(t) \to x(t)$ για όλα τα σημεία συνεχείας της x, δηλαδή για όλα τα t εκτός ίσως από αριθμήσιμα το πλήθος. Επιπλέον, εαν $x \in C[0,1]$ έχουμε λόγω της (10.14): $\|x_n - x\| \leq \|x_n - x\circ\lambda_n\| + w_x(\|\lambda_n - I\|)$. Εφόσον για τις συναρτήσεις του χώρου C έχουμε αποδείξει ότι $\lim_{\delta\to 0} w_x(\delta) = 0$, παρατηρούμε ότι στον χώρο C, η τοπολογία Skorohod και η τοπολογία της ομοιόμορφης σύγκλισης ταυτίζονται.

Παράδειγμα 10.1: Θεωρούμε όπως πριν $j(x)$ να είναι το μέγιστο άλμα της x. Θα δείξουμε ότι η j είναι συνεχής ώς προς την τοπολογία της ομοιόμορφης σύγκλισης. Έστω $\varepsilon > 0$ και επιλέγουμε $\delta = \varepsilon/2$. Εαν $\|x-y\| < \varepsilon/2$, θα δείξουμε ότι $|j(x) - j(y)| < \varepsilon$. Αυτό που πρέπει να σκεφτούμε είναι ότι εαν η x (αντίστοιχα η y) δώσει σε κάποιο σημείο μέγιστο άλμα μήκους $a > \varepsilon$ τότε δεξιά και αριστερά του σημείου αυτού την ακολουθεί και η y (αντίστοιχα η x) κάνοντας άλμα μήκους τουλάχιστον $a - \varepsilon$ και το πολύ $a + \varepsilon$. Διακρίνουμε λοιπόν περιπτώσεις :

i) *Καμία από τις x, y δεν κάνει άλμα πάνω από ε* : Τότε $0 \leq j(x) < \varepsilon$, $0 \leq j(y) < \varepsilon$

και άρα $|j(x) - j(y)| < \varepsilon$.

ii)*Και οι δυο κάνουν κάποιο άλμα πάνω από* ε (οπότε και οι δυο θα δίνουν μέγιστο άλμα πάνω από ε) : Τότε, λόγω των προηγούμενων, μπορούμε να εφαρμόσουμε τις ανισότητες και για την x και για την y οπότε θα προκύψει αφενός $j(y) > j(x) - \varepsilon$ και $j(x) > j(y) - \varepsilon$, δηλαδή $|j(x) - j(y)| < \varepsilon$.

iii)*Η* x *δίνει* $j(x) < \varepsilon$ *αλλά η* y *δίνει* $j(y) > \varepsilon$: Πάλι θα ισχύει $j(x) \geq j(y) - \varepsilon$ και αφού είναι και $j(x) < j(y)$, έπεται $|j(x) - j(y)| < \varepsilon$.
Αυτό αποδεικνύει την ομοιόμορφη συνέχεια της j. Ισχύει και κάτι ακόμη : η j είναι συνεχής και ως προς την Skorohod τοπολογία. Πραγματικά, λόγω του γεγονότος ότι οι συναρτήσεις λ είναι αύξουσες, έπεται $j(y) = j(y \circ \lambda)$ για κάθε $\lambda \in \Lambda$. Συνεπώς, αν $d(x, y) < \varepsilon/2$, υπάρχει κάποια $\lambda_1 \in \Lambda$ με $\|x - y \circ \lambda_1\| < \varepsilon/2$ και λόγω της προηγούμενης απόδειξης για την ομοιόμορφη συνέχεια της j έπεται $|j(x) - j(y)| = |j(x) - j(y \circ \lambda_1)| < \varepsilon$.

Το επόμενο παράδειγμα δείχνει ότι ο χώρος D **δεν** είναι πλήρης κάτω από την μετρική d :
Παράδειγμα 10.2 : Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων $x_n = I_{[0,1/2^n)}$. Υποθέτουμε ότι $\lambda_n(1/2^n) = 1/2^{n+1}$ και ότι οι λ_n είναι γραμμικές στο $[0, 1/2^n]$ και στο $[1/2^n, 1]$. Τότε $\|x_{n+1} \circ \lambda_n - x_n\| = 0$ και $\|\lambda_n - I\| = 1/2^{n+1}$. Με έναν εύκολο υπολογισμό μπορούμε να δούμε ότι οποτεδήποτε η λ_n *δεν* απεικονίζει το $1/2^n$ στο $1/2^{n+1}$, θα ισχύει $\|x_{n+1} \circ \lambda_n - x_n\| = 1$ και συνεπώς $d(x_n, x_{n+1}) = 1/2^{n+1}$. Έτσι η ακολουθία x_n είναι d-βασική. Λόγω του γεγονότος ότι η Skorohod σύγκλιση σε μια x συνεπάγεται την κατα σημείο σύγκλιση στα σημεία συνέχειας της x και επειδή $x_n(t) \to 0$ για όλα τα $0 < t \leq 1$, η μόνη πιθανή d-οριακή συνάρτηση είναι η $x(t) = I_{\{0\}}(t)$ ή η $x(t) \equiv 0$. Και στις δύο περιπτώσεις όμως ισχύει $d(x_n, x) = 1$, δηλαδή αποκλείεται να συγκλίνει η x_n στην x ως προς την d. Έτσι ο χώρος (D, d) δεν είναι πλήρης.

Μπορούμε να ορίσουμε στον D μια άλλη μετρική, την d°, η οποία θα είναι ισοδύναμη με την αρχική d (δηλαδή θα επάγει την ίδια τοπολογία) αλλά κάτω από την οποία ο D είναι πλήρης. Η ιδέα είναι να απαιτήσουμε επιπλέον η χρονική παραμόρφωση που εκφράζεται μέσω των συναρτήσεων λ να βρίσκεται κοντά στην ταυτοτική συνάρτηση, δηλαδή οι κλίσεις $\frac{\lambda(t)-\lambda(s)}{t-s}$ να είναι κοντά στο 1, ή ισοδύναμα, ο λογάριθμός τους να είναι κοντά στο 0.

Για μια αύξουσα συνάρτηση λ ορισμένη στο $[0, 1]$ με $\lambda(0) = 0$ και $\lambda(1) = 1$, ορίζουμε

$$\|\lambda\|^\circ = \sup_{s<t} \left| \ln \frac{\lambda(t) - \lambda(s)}{t - s} \right| \tag{10.15}$$

Εαν υπάρχει κάποιος $M > 0$ με $\|\lambda\|^\circ \leq M$, τότε είναι πολύ απλό να δείξουμε ότι $0 < e^{-M} \leq \frac{\lambda(t)-\lambda(s)}{t-s} \leq e^M$ για όλα τα s, t με $s < t$ και συνεπώς η λ είναι συνεχής και *γνησίως* αύξουσα και άρα ανήκει στο Λ. Ωστόσο ένα στοιχείο του Λ μπορεί να έχει $\|\lambda\|^\circ = \infty$, αλλά στον επόμενο ορισμό δεν θα επιτρέψουμε να συμβεί κάτι τέτοιο.

Έστω $x, y \in D$ και $d^\circ(x,y)$ να είναι η ποσότητα :

$$d^\circ(x,y) = \inf_{\lambda\in\Lambda}\{\|\lambda\|^\circ \vee \|x - y\circ\lambda\|\} \tag{10.16}$$

Για $\lambda = \mathbb{I}$ προκύπτει ότι $d^\circ(x,y) \le \|x-y\|$ και άρα η ποσότητα είναι πεπερασμένη. Επειδή $|u-1| \le e^{|\ln u|} - 1$ για $u > 0$, ισχύει :

$$\sup_{0\le t\le 1}|\lambda(t) - t| = \sup_{0<t\le 1} t\cdot\left|\frac{\lambda(t)-\lambda(0)}{t-0} - 1\right| \le e^{\|\lambda\|^\circ} - 1 \tag{10.17}$$

Ακόμη, εφόσον $v \le e^v - 1$ για όλα τα $v \in \mathbb{R}$, προκύπτει ότι

$$d(x,y) \le e^{d^\circ(x,y)} - 1 \tag{10.18}$$

Πράγματι, λόγω της (10.17) έπεται ότι $\|\lambda - \mathbb{I}\| \le e^{\|\lambda\|^\circ} - 1$ και λόγω της παραπάνω ανισότητας για τα v έπεται και το $\|x - y\circ\lambda\| \le e^{\|x-y\circ\lambda\|} - 1$. Επίσης μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι $\|\lambda\|^\circ = \|\lambda^{-1}\|^\circ$, διότι $\left|\ln\frac{\lambda(t)-\lambda(s)}{t-s}\right| = \left|\ln\left(\frac{\lambda(t)-\lambda(s)}{t-s}\right)^{-1}\right| = \left|\ln\frac{t-s}{\lambda(t)-\lambda(s)}\right| = \left|\ln\frac{\lambda^{-1}(\lambda(t))-\lambda^{-1}(\lambda(s))}{\lambda(t)-\lambda(s)}\right|$ καθώς και ότι $\|\lambda_1\circ\lambda_2\|^\circ \le \|\lambda_1\|^\circ + \|\lambda_2\|^\circ$, επειδή $\left|\ln\left(\frac{\lambda_1(\lambda_2(t))-\lambda_1(\lambda_2(s))}{\lambda_2(t)-\lambda_2(s)}\cdot\frac{\lambda_2(t)-\lambda_2(s)}{t-s}\right)\right| \le \left|\ln\frac{\lambda_1(\lambda_2(t))-\lambda_1(\lambda_2(s))}{\lambda_2(t)-\lambda_2(s)}\right| +$

$$+\left|\ln\frac{\lambda_2(t)-\lambda_2(s)}{t-s}\right|.$$

Τα παραπάνω αποδεικνύουν την συμμετρική και την τριγωνική ιδιότητα. Η συνεπαγωγή $d^\circ(x,y) = 0 \implies x = y$ έπεται από τη σχέση (10.18). Άρα η d° είναι μετρική. Εξαιτίας της (10.18) ισχύει και η συνεπαγωγή : $d^\circ(x_n,x) \to 0 \implies d(x_n,x) \to 0$. Το αντίστροφο είναι μια συνέπεια του ακόλουθου Λήμματος.

Λήμμα 2 : *Εαν $d(x,y) < \delta^2$ και $\delta \le 1/4$, τότε $d^\circ(x,y) \le 4\delta + w'_x(\delta)$.*

Πριν προχωρήσουμε στην απόδειξη, αν επιδιώξουμε να κάνουμε μια σύνδεση με το Παράδειγμα 10.2, εαν η ακολουθία λ_n είναι τέτοια ώστε $\lambda_n(1/2^n) = 1/2^{n+1}$, τότε η χορδή με άκρα τα $(0,0)$ και $(1/2^n, 1/2^{n+1})$ έχει κλίση $1/2$. Μπορούμε να δούμε ότι αυτές οι λ_n μας δίνουν το infimum της $d^\circ(x_n,x_{n+1})$, δηλαδή ότι ισχύει $d^\circ(x_n,x_{n+1}) = \|\lambda_n\|^\circ = \ln 2$. Έτσι η $\{x_n\}_n$ *δεν* είναι d°-βασική, όπως άλλωστε πρέπει αφού θέλουμε ο D να είναι d°-πλήρης (εαν ήταν d°-βασική θα έπρεπε να ήταν και d°-συγκλίνουσα και άρα d-συγκλίνουσα, λόγω της συνεπαγωγής που δείξαμε πριν το Λήμμα 2, πράγμα άτοπο όπως είδαμε στο Παράδειγμα 10.2). Επιλέγοντας δ ανάμεσα στο $\sqrt{1/2^n}$ και στο $1/4$, τότε $d(x_n,x_{n+1}) = 1/2^{n+1} < \delta^2$ και έτσι το Λήμμα 2 μπορεί να εφαρμοστεί και σε συνδυασμό με το ότι $w'_{x_n}(\delta) = 1$ να μας δώσει $\ln 2 \le 4\cdot 2^{-\frac{n}{2}} + 1$.

Απόδειξη : Θα προσπαθήσουμε να βρούμε μια συνάρτηση $\lambda \in \Lambda$ για την οποία να ισχύει $\|x - y\circ\lambda\| \le 4\delta + w'_x(\delta)$ και $\|\lambda\|^\circ \le 4\delta$. Έστω $\varepsilon < \delta$ και έστω $\{t_i\}$ ένα δ-sparse σύνολο με την ιδιότητα $w_x[t_{i-1}, t_i) < w'_x(\delta) + \varepsilon$ για κάθε i (δες ορισμό (10.6)). Αφού $d(x,y) < \delta^2$ διαλέγουμε από το Λ ένα στοιχείο μ τέτοιο ώστε

$$\sup_t |x(t) - y(\mu(t))| = \sup_t |x(\mu^{-1}(t)) - y(t)| < \delta^2 \tag{10.20}$$

και

$$\sup_t |\mu(t) - t| < \delta^2 \tag{10.21}$$

Θα προσπαθήσουμε να ορίσουμε ένα στοιχείο $\lambda \in \Lambda$ που να είναι "κοντά" στο μ αλλά θα έχει κλίσεις κοντά στο 1. Επιλέγουμε λοιπόν λ με $\lambda(t_i) = \mu(t_i)$ σε όλα τα i και να είναι γραμμική στα υποδιαστήματα $[t_{i-1}, t_i]$. Η σύνθεση $\mu^{-1} \circ \lambda$ ικανοποιεί την $\mu^{-1} \circ \lambda(t_i) = t_i$ για όλα τα i και επειδή είναι γνησίως αύξουσα έπεται ότι τα σημεία t και $\mu^{-1} \circ \lambda(t)$ θα βρίσκονται πάντα στο ίδιο διάστημα $[t_{i-1}, t_i)$. Επομένως η (10.20) και η επιλογή του $\{t_i\}$ μας δίνει :

$$|x(t) - y(\lambda(t))| \leq |x(t) - x(\mu^{-1} \circ \lambda(t))| + |x(\mu^{-1} \circ \lambda(t)) - y(\lambda(t))| \leq$$
$$\leq w_x[t_{i-1}, t_i) + \delta^2 < w'_x(\delta) + \varepsilon + \delta^2 < 4\delta + w'_x(\delta)$$

Μένει να δειχθεί ότι $\|\lambda\|^\circ \leq 4\delta$. Εφόσον η λ συμφωνεί με την μ στα σημεία t_i, η συνθήκη (10.21) μαζί με την ανισότητα $t_i - t_{i-1} > \delta$ μας δίνουν ότι

$$|(\lambda(t_i) - \lambda(t_{i-1})) - (t_i - t_{i-1})| < 2\delta^2 < 2\delta(t_i - t_{i-1}).$$

Από αυτό, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι ισχύει $|(\lambda(t) - \lambda(s)) - (t - s)| \leq 2\delta|t - s|$ για όλα τα s και t. Πράγματι, λόγω της γραμμικότητας της λ, αυτό ισχύει για s, t που ανήκουν στο ίδιο υποδιάστημα $[t_{i-1}, t_i]$ διότι $\frac{\lambda(t)-\lambda(s)}{t-s} = \frac{\lambda(t_i)-\lambda(t_{i-1})}{t_i-t_{i-1}}$. Η γενική περίπτωση προκύπτει πολύ εύκολα παρατηρώντας ότι για κάθε τριάδα σημείων u_1, u_2, u_3 ισχύει

$$|(\lambda(u_3) - \lambda(u_1)) - (u_3 - u_1)| \leq |(\lambda(u_2) - \lambda(u_1)) - (u_2 - u_1)| +$$
$$+ |(\lambda(u_3) - \lambda(u_2)) - (u_3 - u_2)|$$

Έτσι

$$1 - 2\delta \leq \frac{\lambda(t) - \lambda(s)}{t - s} \leq 1 + 2\delta$$

Από την ανισότητα $|\ln(1 \pm u)| \leq 2|u|$ για $|u| \leq 1/2$, έπεται ότι $\|\lambda\|^\circ \leq 4\delta$.

Το Λήμμα 2 μαζί με το γεγονός ότι $\lim_{\delta_n \to 0} w'_x(\delta_n) = 0$ μας δίνει ότι $d(x_n, x) \to 0 \implies d^\circ(x_n, x) \to 0$. Πράγματι, για $\delta_n = 1/n$ θα ισχύει $d(x_n, x) < \delta_n$ και το Λήμμα 2 δίνει : $d^\circ(x_n, x) \leq 4\delta_n + w'_x(\delta_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Συνεπώς ισχύει το εξής θεώρημα :

Θεώρημα 10.1 : *Οι μετρικές d και d° είναι ισοδύναμες.*

Διαχωρισιμότητα και πληρότητα στον D

Αποδεικνύουμε πρώτα ένα χρήσιμο Λήμμα. Έστω ένα σύνολο σημείων $\sigma = \{s_u\}$

με $0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_k = 1$ και έστω μια απεικόνιση $A_\sigma : D \to D$ που ορίζεται ως εξής : για δοθέν $x \in D$, η $A_\sigma x$ έχει τιμή $x(s_{u-1})$ πάνω στο διάστημα $[s_{u-1}, s_u)$ για όλα τα $1 \le u \le k$ και συμφωνεί με την x στο $t = 1$.

Λήμμα 3 : *Εαν* $\max(s_u - s_{u-1}) \le \delta$, *τότε* $d(A_\sigma x, x) \le \delta \vee w'_x(\delta)$.

Απόδειξη : Αρχικά, ας γράψουμε $\hat{x} = A_\sigma x$ για απλούστευση και ας θεωρήσουμε $\zeta(t) = s_{u-1}$ όταν $t \in [s_{u-1}, s_u)$ και $\zeta(1) = s_k = 1$. Τότε $\hat{x}(t) = x(\zeta(t))$. Από τον ορισμό (10.6), για δοθέν $\varepsilon > 0$ βρίσκουμε ένα δ-sparse σύνολο $\{t_i\}$ ώστε $w_x[t_{i-1}, t_i) < w'_x(\delta) + \varepsilon$ για κάθε i. Έστω τώρα $\lambda(t_i) = s_v$ όταν $t_i \in (s_{v-1}, s_v]$ και $\lambda(t_0) = s_0 = 0$. Επειδή ισχύει $t_i - t_{i-1} > \delta \ge s_v - s_{v-1}$, δύο οποιαδήποτε διαφορετικά $t_i \ne t_j$ αποκλείεται να ανήκουν στο ίδιο υποδιάστημα $(s_{v-1}, s_v]$ και έτσι τα $\lambda(t_i)$ αυξάνουν γνήσια ως προς i. Επεκτείνουμε την λ σε ένα στοιχείο του Λ ενώνοντας με γραμμικό τρόπο τα σημεία $\lambda(t_i)$ μεταξύ τους. Βλέπουμε ότι $\sup_t |\lambda(t) - t| = \max_i |\lambda(t_i) - t_i| \le \max(s_u - s_{u-1}) \le \delta$.
Είναι αρκετό να δείξουμε λοιπόν ότι $|\hat{x}(t) - x(\lambda^{-1}(t))| = |x(\zeta(t)) - x(\lambda^{-1}(t))| \le w'_x(\delta) + \varepsilon$ και μετά να αφήσουμε το $\varepsilon \to 0$. Το παραπάνω ισχύει τετριμμένα για $t = 0$ ή για $t = 1$ και αρκεί να δείξουμε ότι για $0 < t < 1$ τα σημεία $\zeta(t)$ και $\lambda^{-1}(t)$ βρίσκονται μέσα στο ίδιο διάστημα $[t_{i-1}, t_i)$, διότι τότε θα είναι $|x(\zeta(t)) - x(\lambda^{-1}(t))| \le w_x[t_{i-1}, t_i) < w'_x(\delta) + \varepsilon$. Για την απόδειξη του παραπάνω είναι αρκετό να δείξουμε ότι για όλα τα j είναι $t_j \le \zeta(t) \iff t_j \le \lambda^{-1}(t)$ (οπότε $\zeta(t) < t_j \iff \lambda^{-1}(t) < t_j$). Εαν $t_j = 0$ ισχύει τετριμμένα οπότε ας υποθέσουμε ότι $t_j \in (s_{v-1}, s_v]$. Τότε, εφόσον το $\zeta(t)$ είναι κάποιο από τα s_i, $t_j \le \zeta(t) \iff s_v \le \zeta(t)$, το οποίο εξ ορισμού του ζ είναι ισοδύναμο με το $s_v \le t$. Επίσης, αφού $t_j \in (s_{v-1}, s_v]$, έπεται ότι $\lambda(t_j) = s_v$ και έτσι $s_v \le t \iff \lambda(t_j) \le t \iff t_j \le \lambda^{-1}(t)$.

Θεώρημα 10.2 : *Ο χώρος D είναι διαχωρίσιμος κάτω από τις d και d° και είναι πλήρης κάτω από την d°.*

Απόδειξη : *Διαχωρισιμότητα* : Επειδή η διαχωρισιμότητα είναι τοπολογική έννοια, διατηρείται από ισοδύναμες μετρικές και έτσι μπορούμε να δουλέψουμε με την d. Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ορίζουμε B_k να είναι το σύνολο των συναρτήσεων που έχουν σταθερή, ρητή τιμή πάνω σε κάθε υποδιάστημα $[(u-1)/k, u/k)$ και ρητή τιμή στο $t = 1$. Τότε το $B = \bigcup_k B_k$ είναι αριθμήσιμο υποσύνολο του D και θα δείξουμε ότι είναι και πυκνό. Έστω $x \in D$ και $\varepsilon > 0$. Επειδή $\lim_{\delta \to 0} w'_x(\delta) = 0$ μπορούμε να βρούμε έναν $k \in \mathbb{N}$ με $1/k < \varepsilon$ και $w'_x(1/k) < \varepsilon$. Εφαρμόζοντας το Λήμμα 3 με $\sigma = \{u/k : u = 0, 1, \ldots, k\}$ είναι $d(x, A_\sigma x) \le 1/k \vee w'_x(1/k) < \varepsilon$. Επίσης, παίρνοντας $\lambda(t) \equiv t$ μπορούμε να βρούμε μια $y \in B_k$ ώστε $d(A_\sigma x, y) \le \|A_\sigma x - y\| < \varepsilon$. Έτσι $y \in B$ και $d(x, y) \le d(x, A_\sigma x) + d(A_\sigma x, y) < 2\varepsilon$.
Πληρότητα : Αρκεί να αποδειχθεί ότι κάθε d°-βασική ακολουθία περιέχει μια d°-συγκλίνουσα υπακολουθία. Έστω λοιπόν $\{x_k\}$ μια d°-βασική ακολουθία. Από τον ορισμό έπεται ότι υπάρχει μια υπακολουθία $\{y_n\} = \{x_{k_n}\}$ ώστε $d^\circ(y_n, y_{n+1}) < \frac{1}{2^n}$. Από τον ορισμό του $d^\circ(y_n, y_{n+1})$, υπάρχουν $\mu_n \in \Lambda$ ώστε

$$\|\mu_n\|^\circ < 1/2^n \tag{10.22}$$

και

$$\sup_t |y_n(t) - y_{n+1}(\mu_n(t))| = \sup_t |y_n(\mu_n^{-1}(t)) - y_{n+1}(t)| < 1/2^n \tag{10.23}$$

Μένει να βρούμε συναρτήσεις $\lambda_n \in \Lambda$ και μια $y \in D$ ώστε $\|\lambda_n\|^\circ \to 0$ και $y_n(\lambda_n^{-1}(t)) \to y(t)$ ομοιόμορφα ως προς t.

Επειδή $e^u - 1 \leq 2u$ για $0 \leq u \leq 1/2$, προκύπτει από τις (10.17) και (10.22) ότι

$$\sup_t |\mu_{n+m+1}(\mu_{n+m}(\ldots(\mu_{n+1}(\mu_n(t))))) - \mu_{n+m}(\ldots(\mu_{n+1}(\mu_n(t))))| =$$

$$= \sup_s |\mu_{n+m+1}(s) - s| \leq 2\|\mu_{n+m+1}\|^\circ < \frac{1}{2^{n+m}}$$

Αυτό σημαίνει ότι για σταθερό n, η ακολουθία συναρτήσεων $\{G_m^{(n)}(t)\}_m = \{\mu_{n+m}(\ldots(\mu_{n+1}(\mu_n(t))))\}_m$ είναι ομοιόμορφα βασική (δηλαδή d_∞-βασική) και επειδή είναι συνεχείς συναρτήσεις και ο χώρος $(C[0,1], d_\infty)$ είναι πλήρης, η ακολουθία αυτή θα συγκλίνει ομοιόμορφα σε ένα όριο

$$\lambda_n(t) = \lim_m G_m^{(n)}(t) = \lim_m \mu_{n+m}(\ldots(\mu_{n+1}(\mu_n(t)))) \tag{10.24}$$

Η συνάρτηση λ_n είναι αύξουσα, συνεχής ως ομοιόμορφο όριο συνεχών και $\lambda_n(0) = 0$, $\lambda_n(1) = 1$. Πρέπει να δειχθεί ότι είναι και γνησίως αύξουσα έτσι ώστε να ανήκει στο σύνολο Λ, και άρα αρκεί να δείξουμε ότι $\|\lambda_n\|^\circ < \infty$. Οι σχέσεις (10.19) και (10.22) δίνουν ότι για κάθε $s < t$ είναι :

$$\left|\ln \frac{\mu_{n+m}(\ldots(\mu_{n+1}(\mu_n(t)))) - \mu_{n+m}(\ldots(\mu_{n+1}(\mu_n(s))))}{t-s}\right| \leq$$
$$\|\mu_{n+m} \circ \ldots \circ \mu_{n+1}\mu_n\|^\circ \leq \|\mu_{n+m}\|^\circ + \ldots + \|\mu_n\|^\circ \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

Αφήνοντας $m \to \infty$, το πρώτο μέρος συγκλίνει στο $\left|\ln \frac{\lambda_n(t)-\lambda_n(s)}{t-s}\right|$, επομένως προκύπτει $\|\lambda_n\|^\circ \leq \frac{1}{2^{n-1}}$, δηλαδή η ακολουθία $\{\lambda_n\}_n \in \Lambda$ και $\|\lambda_n\|^\circ \to 0$.

Τώρα, η σχέση (10.24) μας δίνει άμεσα ότι $\lambda_n = \lambda_{n+1} \circ \mu_n$ ή, ισοδύναμα, ότι $\lambda_{n+1}^{-1} = \mu_n \circ \lambda_n^{-1}$. Αυτό, σε συνδυασμό με την (10.23) δίνει :

$$\sup_t |y_n(\lambda_n^{-1}(t)) - y_{n+1}(\lambda_{n+1}^{-1}(t))| = \sup_s |y_n(s) - y_{n+1}(\mu_n(s))| < \frac{1}{2^n}$$

Η ακολουθία συναρτήσεων $W_n(t) = y_n(\lambda_n^{-1}(t))$ είναι λοιπόν ομοιόμορφα βασική και άρα συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνάρτηση $y(t)$. Επειδή η $\{W_n\}$ ανήκει στον D μπορεί εύκολα να δειχθεί ότι και η y ανήκει στον D. Ενδεικτικά, για να δείξουμε π.χ. την ιδιότητα i) του ορισμού, έστω $s_n \searrow t$, με $0 \leq t < 1$. Θα δείξουμε ότι $y(s_n) \to y(t)$. Ισχύει ότι για κάθε σταθερό m, $W_m(s_n) \to W_m(t)$ διότι η $\{W_m\} \in D$, και επίσης $W_n \xrightarrow{d_\infty} y$. Επιλέγουμε n_0 ώστε $d_\infty(W_n, y) < \varepsilon/3, \forall n \geq n_0$ και ύστερα έναν k_0 ώστε $|W_{n_0}(s_k) - W_{n_0}(t)| < \varepsilon/3, \forall k \geq k_0$. Τότε για κάθε $n \geq \max\{k_0, n_0\}$ παίρνουμε:

$|y(s_n) - y(t)| \leq |y(s_n) - W_{n_0}(s_n)| + |W_{n_0}(s_n) - W_{n_0}(t)| + |W_{n_0}(t) - y(t)| < 3 \cdot \varepsilon/3 = \varepsilon$,

δηλαδή η y είναι δεξιά συνεχής. Ομοίως αποδεικνύεται και η ιδιότητα ii).
Επομένως δείξαμε ότι η $\{y_n\}_n$ είναι d°-συγκλίνουσα στην y και άρα ο D είναι πλήρης κάτω από την d°.

Συμπάγεια στον D

Θα προσπαθήσουμε να χαρακτηρίσουμε τα συμπαγή υποσύνολα του χώρου D. Χρησιμοποιώντας την ποσότητα $w'_x(\delta)$ μπορούμε να αποδείξουμε ένα ανάλογο με το 6.2 θεώρημα. Πιο συγκεκριμένα έχουμε ότι :

Θεώρημα 10.3 : *Μια ικανή και αναγκαία συνθήκη έτσι ώστε ένα σύνολο A να είναι σχετικά συμπαγές στην τοπολογία Skorohod είναι να ισχύουν*

$$\sup_{x\in A} \|x\| < \infty \tag{10.25}$$

και

$$\lim_{\delta\to 0} \sup_{x\in A} w'_x(\delta) = 0 \tag{10.26}$$

Η βασική διαφορά με το θεώρημα 6.2 είναι ότι εδώ, η συνθήκη (10.26) μαζί με το ότι $\sup_t |x(t)| < \infty$ για κάποιο t, **δεν** συνεπάγονται κατ ανάγκην την (10.25). Αυτό μπορεί να το δει κανείς αν πάρει σαν $A = \{x_n(t) = n \cdot I_{[a,1]}(t) : n \in \mathbb{N}, 0 < a < 1\}$. Πράγματι, για το συγκεκριμένο A προφανώς ισχύει ότι $\sup_n |x_n(0)| = 0 < \infty$. Επίσης επειδή μπορούμε πάντα να επιλέγουμε δ-sparse σύνολα $\{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_v = 1\}$ που να περιέχουν σαν σημείο το a, για αυτά τα δ-sparse σύνολα θα ισχύει ότι $w_{x_n}[t_{i-1}, t_i) = 0$ και έτσι $w'_{x_n}(\delta) = 0$ για κάθε n και για κάθε δ, δηλαδή ισχύει και η (10.26). Όμως $\sup_n \|x_n\| = \sup_n\{n\} = \infty$, δηλαδή δεν ισχύει η (10.25).
Πάμε να αποδείξουμε πρώτα ότι οι (10.25) και οι (10.26) είναι ικανές συνθήκες.

Απόδειξη : Γνωρίζουμε ότι ο χώρος (D, d°) είναι πλήρης, οπότε θα χρειαστεί να δείξουμε ότι το A είναι d°-ολικά φραγμένο. Έστω a να είναι το supremum της (10.25) και έστω $\varepsilon > 0$. Το σύνολο $[-a, a]$ είναι ολικά φραγμένο και άρα μπορούμε να διαλέξουμε ένα πεπερασμένο σύνολο $H = \{x_1, \ldots, x_n\}$ ώστε $[-a, a] \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon)$. Χρησιμοποιώντας την (10.26) παίρνουμε ένα δ μικρό ώστε $\delta < \varepsilon$ και $w'_x(\delta) < \varepsilon$ για όλα τα $x \in A$. Εφαρμόζουμε το Λήμμα 3 για οποιοδήποτε σύνολο $\sigma = \{s_u\}$ που ικανοποιεί την $\max(s_u - s_{u-1}) < \delta$. Έτσι ισχύει: $x \in A \implies d(x, A_\sigma x) \leq \delta \vee w'_x(\delta) < \varepsilon$. Παίρνουμε σαν B να είναι το πεπερασμένο σύνολο όλων των συναρτήσεων y που σε κάθε υποδιάστημα $[s_{u-1}, s_u)$ έχουν σταθερή τιμή κάποια μέσα από το H και $y(1) \in H$. Επιλέγοντας $\lambda \equiv \mathbb{I}$ και λαμβάνοντας υπόψιν ότι $x(s_{u-1}) \in [-a, a]$, μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι αν $x \in A$, σίγουρα θα υπάρχει κάποιο $y \in B$ με την ιδιότητα $d(A_\sigma x, y) \leq \|A_\sigma x - y\| < \varepsilon$. Έτσι $A \subseteq \bigcup_{y\in H} B_d(y, 2\varepsilon)$, που σημαίνει ότι το A είναι d-ολικά φραγμένο.

Θα δείξουμε ότι το A είναι και d°-ολικά φραγμένο. Έστω ένα νέο $\varepsilon > 0$. Διαλέγουμε ένα (νέο) $\delta > 0$ με $0 < \delta \leq 1/4$ για το οποίο ισχύει $4\delta + w'_x(\delta) < \varepsilon$ για όλα τα $x \in A$. Αφού το A είναι d-ολικά φραγμένο, υπάρχει ένα πεπερασμένο σύνολο B' ώστε $A \subseteq \bigcup_{y \in B'} B_d(y, \delta^2)$. Από το Λήμμα 2 έπεται τώρα ότι $A \subseteq \bigcup_{y \in B'} B_{d^\circ}(y, \varepsilon)$ και η απόδειξη της μιας κατεύθυνσης είναι πλήρης.
Για την απόδειξη του αναγκαίου αποδεικνύουμε πρώτα ένα Λήμμα :

Λήμμα 4 : *Για σταθερό δ, η συνάρτηση $w'(x,\delta)$ είναι άνω ημισυνεχής ως προς x.*
Απόδειξη : Έστω ένα σταθερό δ. Θα αποδείξουμε ότι είναι άνω ημισυνεχής στο τυχόν $x \in D$. Μια συνάρτηση f από έναν τυχαίο μετρικό χώρο (X, ρ) στο $\mathbb{R}$ λέγεται άνω ημισυνεχής σε ένα x_0 αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε να ισχύει η συνεπαγωγή : $\rho(x,y) < \delta \implies f(y) < f(x) + \varepsilon$. Θεωρούμε λοιπόν σταθερό $x \in D$ και έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε αρχικά ένα δ-sparse σύνολο, $\{t_i\}$, με $w_x[t_{i-1}, t_i) < w'_x(\delta) + \varepsilon$, για όλα τα i. Ύστερα βρίσκουμε ένα αρκετά μικρό η ώστε $\eta < \varepsilon$ και $\delta + 2\eta < \min_i(t_i - t_{i-1})$. Εαν $y \in D$ με $d(y,x) < \eta$, τότε σίγουρα υπάρχει κάποιο $\lambda \in \Lambda$ με $\sup_t |y(t) - x(\lambda(t))| < \eta$ και $\sup_t |\lambda^{-1}(t) - t| < \eta$. Εαν $s_i = \lambda^{-1}(t_i)$, τότε, λόγω του ότι $\sup_t |\lambda^{-1}(t) - t| < \eta$, θα ισχύει $s_i - s_{i-1} = \lambda^{-1}(t_i) - \lambda^{-1}(t_{i-1}) > t_i - t_{i-1} - 2\eta > \delta$, για όλα τα i. Επίσης, εαν τα s, t ανήκουν και τα δύο στο ίδιο διάστημα $[s_{i-1}, s_i)$ τότε τα $\lambda(s), \lambda(t)$ ανήκουν και τα δύο στο ίδιο $[t_{i-1}, t_i)$ και έτσι $|y(s) - y(t)| \leq |y(s) - x(\lambda(s))| + |x(\lambda(s)) - x(\lambda(t))| + |x(\lambda(t)) - y(t)| \leq 2\eta + |x(\lambda(s)) - x(\lambda(t))| \leq w'_x(\delta) + 2\eta + \varepsilon$. Επειδή το σύνολο $\{s_i\}$ είναι ένα δ-sparse σύνολο έπεται ότι $w'_y(\delta) \leq \max_i \{w_y[s_{i-1}, s_i)\} < w'_x(\delta) + 3\varepsilon$, όπως έπρεπε να δειχθεί.

Για την απόδειξη του αναγκαίου στο θεώρημα 10.3, υποθέτουμε ότι το $\overline{A}$ είναι d°-συμπαγές (άρα και d-συμπαγές διότι $d \sim d^\circ$). Αυτό σημαίνει ότι είναι και d-φραγμένο, δηλαδή μπορούμε να βρούμε ένα αρκετά μεγάλο $M > 0$ ώστε $A \subseteq \overline{A} \subseteq B_d(0, M)$. Μπορούμε να δείξουμε εύκολα ότι $d(x, 0) = \|x\|$ για κάθε $x \in A$ κι έτσι $\sup_{x \in A} \|x\| \leq M$, δηλαδή η (10.25). Πράγματι, για $\lambda(t) = t$ έπεται ότι $d(x,0) \leq \|x\|$ ενώ για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\lambda_\varepsilon \in \Lambda$ με $\|x\| \leq \|x\| \vee \|\lambda_\varepsilon - \mathbb{I}\| < d(x,0) + \varepsilon$ κι έτσι $\|x\| \leq d(x,0)$.

Για την (10.26), για κάθε $x \in D$ ισχύει ότι $w'_x(\delta_n) \searrow 0$ και επειδή αποδείξαμε στο Λήμμα 4 ότι οι συναρτήσεις $w'_x(\delta_n)$ είναι άνω ημισυνεχείς σε όλα τα x, το θεώρημα του Dini μας εξασφαλίζει ότι η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη σε όλα τα συμπαγή, δηλαδή $\lim_{\delta \to 0} \sup_{x \in A} w'_x(\delta) = 0$.

Ένας άλλος χαρακτηρισμός της συμπάγειας

Είδαμε ότι η ποσότητα $w'_x(\delta)$ είναι αρκετή για να περιγράψουμε πλήρως τη συμπάγεια στον χώρο D, ωστόσο τώρα θα αναφέρουμε μια άλλη ποσότητα που είναι επίσης χρήσιμη. Έχουμε τον ορισμό :

$$w''_x(\delta) = w''(x,\delta) =: \sup_{\substack{t_1 \le t \le t_2 \\ t_2 - t_1 \le \delta}} \{|x(t) - x(t_1)| \wedge |x(t_2) - x(t)|\} \tag{10.27}$$

Ας υποθέσουμε ότι $w'_x(\delta) < w$ και έστω $\{\tau_i\}$ ένα δ-sparse σύνολο τέτοιο ώστε $w_x[\tau_{i-1}, \tau_i) < w$, για όλα τα i. Εαν $t_2 - t_1 \le \delta$ τότε αποκλείεται τα t_1 και t_2 να είναι σε διαφορετικές πλευρές του υποδιαστήματος $[\tau_{i-1}, \tau_i)$, δηλαδή για όλα τα i θα βρίσκονται ή *και τα δύο* δεξιά του τ_{i-1} ή *και τα δύο* αριστερά του τ_{i-1}. Έτσι, αν πάρουμε κάποιο t με $t_1 \le t \le t_2$ τότε είτε τα t, t_1 θα είναι μέσα στο ίδιο υποδιάστημα, είτε τα t, t_2 θα είναι μέσα στο ίδιο υποδιάστημα. Συνεπώς $|x(t) - x(t_1)| \wedge |x(t_2) - x(t)| < w$ και αφήνοντας το $w \searrow w'_x(\delta)$ βλέπουμε ότι

$$w''_x(\delta) \le w'_x(\delta) \tag{10.28}$$

Δεν μπορούμε να βρούμε κάποια ανισότητα προς την αντίθετη κατεύθυνση και αυτό φαίνεται από το εξής απλό παράδειγμα : παίρνοντας σαν

$$x_n = I_{[0,1/n)}, \quad y_n = I_{[1-1/n,1]} \tag{10.29}$$

Είναι απλό να δούμε ότι και στις δύο περιπτώσεις ισχύει $w''_{x_n}(\delta) = 0 = w''_{y_n}(\delta)$ ενώ $w'_{x_n}(\delta) = 1 = w'_{y_n}(\delta)$ όταν $n \ge \frac{1}{\delta}$. Σε καμία περίπτωση το σύνολο που περιέχει τις παραπάνω ακολουθίες δεν είναι σχετικά συμπαγές, παρόλο που ισχύει η (10.25) και η (10.26), αν στην τελευταία βάλουμε όπου w'_{x_n} το w''_{x_n}. Ωστόσο μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα ανάλογο θεώρημα με το (10.3) που θα περιέχει το w''_x στη θέση του w'_x και επιπλέον θα περιέχει την συμπεριφορά της x κοντά στο 0 και 1.

Θεώρημα 10.4 : *Μια ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε ένα σύνολο A να είναι σχετικά συμπαγές στην τοπολογία Skorohod είναι να ικανοποιεί την* (10.25) *και τις εξής 3 συνθήκες*:

$$\begin{cases} \lim_{\delta \to 0} \sup_{x \in A} w''_x(\delta) = 0 \\ \lim_{\delta \to 0} \sup_{x \in A} |x(\delta) - x(0)| = 0 \\ \lim_{\delta \to 0} \sup_{x \in A} |x(1-) - x(1-\delta)| = 0 \end{cases} \tag{10.30}$$

Απόδειξη : Η σχέση (10.28) μας βοηθάει να αποδείξουμε ότι (10.26) $\Longrightarrow$ (10.30). Πράγματι, θα δείξουμε ότι

$$w''_x(\delta) \vee |x(\delta) - x(0)| \vee |x(1-) - x(1-\delta)| \le w'_x(2\delta) \tag{10.31}$$

Το πρώτο ισχύει λόγω της (10.28) και επειδή $w'_x(\delta) \le w'_x(2\delta)$. Για το δεύτερο, έστω $\{t_i\}$ ένα 2δ-sparse σύνολο σημείων. Παρατηρούμε ότι $0 = t_0 < \delta < t_1$ και συνεπώς $|x(\delta) - x(0)| \le w_x[0, t_1) \le \max_i\{w_x[t_{i-1}, t_i)\}$, πράγμα που σημαίνει ότι $|x(\delta) - x(0)| \le w'_x(2\delta)$.
Για το τρίτο, θεωρούμε τυχόν $\varepsilon > 0$ και βρίσκουμε σημείο $\tilde{k} \in (1-\delta, 1)$ με $|x(1-) - x(\tilde{k})| < \varepsilon/2$. Έστω $\{t_i\}$ ένα 2δ-sparse σύνολο σημείων. Παρατηρούμε ότι $t_{v-1} < 1 - \delta < \tilde{k} < t_v = 1$ και έτσι $|x(\tilde{k}) - x(1-\delta)| \le w_x[t_{v-1}, 1) \le \max_i\{w_x[t_{i-1}, t_i)\}$. Άρα $|x(1-) - x(1-\delta)| \le |x(1-) - x(\tilde{k})| + |x(\tilde{K}) - x(1-\delta)| \le \varepsilon/2 + w'_x(2\delta)$. Αφήνοντας $\varepsilon \searrow 0$, έπεται ότι $|x(1-) - x(1-\delta)| \le w'_x(2\delta)$
Για να δείξουμε ότι (10.30) $\Longrightarrow$ (10.26) θα δείξουμε ότι

$$w'_x(\delta) \le 24\{w''_x(\delta) \vee |x(\delta) - x(0)| \vee |x(1-) - x(1-\delta)|\} \tag{10.32}$$

Δείχνουμε πρώτα ότι

$$|x(s) - x(t_1)| \wedge |x(t_2) - x(t)| \le 2w''_x(\delta), \text{ εαν } t_1 \le s \le t \le t_2,\ t_2 - t_1 \le \delta \tag{10.33}$$

Πραγματικά, είτε $|x(s) - x(t_1)| \le w''_x(\delta)$ είτε $|x(s) - x(t_1)| > w''_x(\delta)$. Στην πρώτη περίπτωση παίρνουμε αυτό που θέλουμε, διότι $|x(s) - x(t_1)| \wedge |x(t_2) - x(t)| \le |x(s) - x(t_1)|$. Στη δεύτερη περίπτωση, εαν $|x(s) - x(t_1)| > w''_x(\delta)$, τότε από τον ορισμό του $w''_x(\delta)$ έπεται πως για την τριάδα t_1, s, t θα ισχύει αναγκαστικά $|x(t) - x(s)| \le w''_x(\delta)$ ενώ για την τριάδα t_1, s, t_2 θα ισχύει $|x(t_2) - x(s)| \le w''_x(\delta)$. Με τριγωνική ανισότητα έπεται ότι $|x(t_2) - x(t)| \le 2w''_x(\delta)$.

Ύστερα δείχνουμε ότι

$$w_x[t_1, t_2) \le 2(w''_x(\delta) + |x(t_2) - x(t_1)|), \text{ εαν } t_2 - t_1 \le \delta \tag{10.34}$$

Έστω $t_1 \le s, t < t_2$. Μπορούμε να γράψουμε $|x(s) - x(t)| \le |x(s) - x(t_1)| + |x(t_1) - x(t)|$. Εαν **και** οι δυο ποσότητες στα αριστερά είναι $\le$ του $w''_x(\delta)$ τότε η (10.34) έχει αποδειχθεί. Εαν υποθέσουμε ότι κάποια είναι $> w''_x(\delta)$, έστω $|x(t) - x(t_1)| > w''_x(\delta)$, τότε με το ίδιο επιχείρημα με πριν, προκύπτει αναγκαστικά $|x(t_2) - x(t)| \le w''_x(\delta)$ και έτσι $|x(t) - x(t_1)| \le |x(t) - x(t_2)| + |x(t_2) - x(t_1)| \le w''_x(\delta) + |x(t_2) - x(t_1)|$, δηλαδή η (10.34).

Από την (10.34) έπεται ότι $w_x[0, \delta) \le 2(w''_x(\delta) + |x(\delta) - x(0)|)$. Επίσης για $t_1 = 1 - \delta$ και για t_2 *κοντά* στο 1, προκύπτει $w_x[1-\delta, t_2) \le 2(w''_x(\delta) + |x(t_2) - x(1-\delta)|$. Αφήνοντας $t_2 \nearrow 1$ έπεται ότι $w_x[1-\delta, 1) \le 2(w''_x(\delta) + |x(1-) - x(1-\delta)|$. Εξαιτίας των δύο αυτών ανισοτήτων αλλά και του γεγονότος ότι $\max\{a, b\} = \frac{a+b+|a-b|}{2}$, η (10.32) θα έχει αποδειχθεί εαν δείξουμε ότι :

$$w'_x(\tfrac{\delta}{2}) \le 6\{w''_x(\delta) \vee w_x[0, \delta) \vee w_x[1-\delta, 1)\} \tag{10.35}$$

Έστω a να είναι ένας αριθμός που ξεπερνάει το maximum στα δεξιά της (10.35). Αρκεί να δείξουμε ότι $w'_x(\frac{\delta}{2}) \le 6a$, και μετά να αφήσουμε $a \searrow \max$. Λοιπόν, ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν δύο σημεία u_1 και u_2 με $u_2 - u_1 < \delta$ και στα οποία η x κάνει άλμα $> 2a$. Αφού $u_2 - u_1 < \delta$, μπορούμε να βρούμε δύο ξένα διαστήματα (t_1, s) και (t, t_2) ώστε $u_1 \in (t_1, s)$ και $u_2 \in (t, t_2)$ και $t_2 - t_1 < \delta$. Τότε μπορούμε να αφήσουμε $s \searrow u_1$, $t \nearrow u_2$, $t_1 \nearrow u_1$ και να βρούμε $\tilde{s}, \tilde{t}, \tilde{t_1}$ με την ιδιότητα $|x(\tilde{s}) - x(\tilde{t_1})| > 2a$ και $|x(u_2) - x(\tilde{t})| > 2a$. Αυτό είναι όμως άτοπο, λόγω της (10.33) για τα σημεία $\tilde{t_1} < \tilde{s} < \tilde{t} < u_2$ και επειδή $a \ge w''_x(\delta)$. Συνεπώς το $[0, 1]$ δεν μπορεί να περιέχει δύο σημεία που να απέχουν λιγότερο απο δ και στα οποία η x να δίνει άλμα $> 2a$. Επίσης, επειδή $a \ge w_x[0, \delta)$ και $a \ge w_x[1-\delta, 1)$, ούτε το διάστημα $[0, \delta)$ ούτε το $[1-\delta, 1)$ μπορεί να περιέχουν κάποιο σημείο στο οποίο η x να δίνει άλμα $> 2a$.

Έχουμε αποδείξει ότι τα σημεία στα οποία μια συνάρτηση $x \in D$ δίνει άλμα μεγαλύτερο από έναν δεδομένο αριθμό είναι το πολύ πεπερασμένα. Συνεπώς, υπάρχουν σημεία s_i με $0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_r = 1$ με $s_i - s_{i-1} \ge \delta$ και για τα οποία ισχύει ότι **μόνο** κάποια από τα s_i είναι σημεία που η x δίνει άλμα $> 2a$. Εαν για δυο διαχοχικά σημεία ισχύει ότι $s_j - s_{j-1} > \delta$, τότε προσθέτουμε στο σύνολο $\{s_i\}$ το μέσο του διαστήματος (s_{j-1}, s_j). Συνεχίζοντας, κατασκευάζουμε ένα νέο σύνολο σημείων $0 = s_0 < \widetilde{s_1} < \ldots < \widetilde{s_{\tilde{r}}} = 1$ ($r \ne \tilde{r}$ ενδεχομένως) για το οποίο ισχύει

$$\tfrac{\delta}{2} < \widetilde{s_i} - \widetilde{s}_{i-1} \leq \delta,\ \forall i = 1, 2, \ldots, \tilde{r}$$

Για ευκολία ξεχνάμε τις περισπωμένες. Η (10.35) θα έχει αποδειχθεί εαν δείξουμε ότι

$$w_x[s_{i-1}, s_i) \leq 6a \tag{10.36}$$

για όλα τα i. Πραγματικά, αυτό θα αποδείξει την (10.35) καθώς το $\{s_i\}$ είναι ένα $\delta/2$-sparse σύνολο και άρα $w'_x(\delta/2) \leq \max_i\{w_x[s_{i-1}, s_i)\} \leq 6a$. Έστω λοιπόν $s_{i-1} \leq t_1 < t_2 < s_i$, οπότε $t_2 - t_1 < \delta$. Θέτουμε

$$\sigma_1 = \sup\{\sigma \in [t_1, t_2] : \sup_{t_1 \leq u \leq \sigma} |x(u) - x(t_1)| \leq 2a\}$$

και

$$\sigma_2 = \inf\{\sigma \in [t_1, t_2] : \sup_{\sigma \leq u \leq t_2} |x(u) - x(t_2)| \leq 2a\}$$

Εαν $\sigma_1 < \sigma_2$, τότε μπορούμε να δούμε ότι υπάρχουν σημεία s ακριβώς ακριβώς δεξιά απο το σ_1 με $|x(s) - x(t_1)| > 2a$ και σημεία t ακριβώς αριστερά από το σ_2 με $|x(t) - x(t_2)| > 2a$. Μπορούμε να πετύχουμε $s < t$ και έτσι έχουμε άτοπο λόγω της (10.33) ($a \geq w''_x(\delta)$). Έτσι ισχύει $\sigma_2 \leq \sigma_1$. Τώρα μπορούμε να δούμε ότι αν σ ανήκει στο σύνολο του οποίου παίρνουμε το sup για να ορίσουμε το σ_1, τότε στο σύνολο αυτό θα ανήκει και κάθε $\tilde{\sigma} < \sigma$. Το αντίστοιχο ισχύει και το δεύτερο σύνολο που ορίζει το σ_2, δηλαδή αν κάποιο σ ανήκει εκεί, τότε θα ανήκει εκεί και κάθε $\tilde{\sigma} > \sigma$. Έτσι, παίρνοντας $t_n \nearrow \sigma_1$ και λαμβάνοντας υπόψιν την ύπαρξη των αριστερών πλευρικών ορίων για την x, μπορούμε να δούμε ότι ισχύει $|x(t_n) - x(t_1)| \leq 2a$ για όλα τα n και άρα $|x(\sigma_1-) - x(t_1)| \leq 2a$. Ομοίως για $s_n \searrow \sigma_1$ θα ισχύει $|x(s_n) - x(t_2)| \leq 2a$, και λόγω δεξιάς συνέχειας της x έπεται $|x(\sigma_1) - x(t_2)| \leq 2a$. Η x είναι δεξιά συνεχής στο σημείο t_1 και έτσι $t_1 < \sigma_1$ γνήσια. Επίσης $\sigma_1 \leq t_2$ δηλαδή το σ_1 είναι εσωτερικό σημείο του (s_{i-1}, s_i) και άρα το άλμα της x στο σ_1 είναι το πολύ $2a$. Έτσι $|x(t_2)-x(t_1)| \leq |x(t_2)-x(\sigma_1)|+|x(\sigma_1)-x(\sigma_1-)|+|x(\sigma_1-)-x(t_1)| \leq 3\cdot 2a = 6a$. Έτσι αποδείχθηκε η (10.36) και συνεπώς το θεώρημα.

Πεπερασμένης διάστασης υποσύνολα

Ένα πεπερασμένης διάστασης υποσύνολο του D (στο εξής finite-dimensional set) έχει παρόμοιο ρόλο με αυτόν που είχε όταν μελετούσαμε τον χώρο C. Για $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_k \leq 1$ ορίζουμε την προβολή

$$\pi_{t_1 \ldots t_k} : D \to \mathbb{R}^k$$

$$\pi_{t_1 \ldots t_k}(x) = (x(t_1), x(t_2), \ldots, x(t_k)) \tag{10.37}$$

Επειδή για κάθε $\lambda \in \Lambda$ ισχύει $\lambda(0) = 0, \lambda(1) = 1$ μπορούμε να δούμε ότι οι π_0 και π_1 είναι συνεχείς. Πράγματι, εαν $x \in D$ και $x_n \xrightarrow{d} x$, τότε υπάρχει $\lambda_n \in \Lambda$ με $\|x_n - x \circ \lambda_n\| < 1/n$, δηλαδή $|x_n(0) - x(\lambda_n(0))| = |x_n(0) - x(0)| < 1/n$

και $|x_n(1) - x(\lambda_n(1))| = |x_n(1) - x(1)| < 1/n$ δηλαδή $\pi_0(x_n) \xrightarrow{|\cdot|} \pi_0(x)$ και $\pi_1(x_n) \xrightarrow{|\cdot|} \pi_1(x)$ αντιστοίχως.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι $0 < t < 1$ και ότι $x_n \xrightarrow{d} x$ ως προς την τοπολογία Skorohod. Έχουμε αποδείξει στην σχέση (10.14) ότι αυτό σημαίνει $x_n(t) \to x(t)$ όταν η x είναι συνεχής στο t. Αντιστρόφως, έστω ότι η x είναι ασυνεχής στο t. Αφού $x \in D$, αυτό σημαίνει ότι $x(t-) \neq x(t)$ δηλαδή $\lim_n x(t-\frac{1}{n}) = x(t-) \neq x(t)$. Εαν πάρουμε σαν λ_n να είναι η ακολουθία συναρτήσεων του Λ με $\lambda_n(t) = t-\frac{1}{n}$ και είναι γραμμικές στο $[0,t]$ και στο $[t,1]$, τότε η ακολουθία $x_n \equiv x \circ \lambda_n$ συγκλίνει ως προς την τοπολογία Skorohod στην x (παίρνουμε σαν $\tilde{\lambda}_n = \lambda_n$, οπότε $d(x_n, x) \leq \|\tilde{\lambda}_n - \mathbb{I}\| \vee \|x_n - x \circ \tilde{\lambda}_n\| = \frac{1}{n} \to 0$), αλλά $x_n(t) = x(t-\frac{1}{n}) \to x(t-) \neq x(t)$. Οπότε αποδείξαμε τον εξής ισχυρισμό : *Εαν $0 < t < 1$, τότε η π_t είναι συνεχής στο σημείο x εαν και μόνο αν η x είναι συνεχής στο t.*

Θα αποδείξουμε τώρα ότι η $\pi_{t_1 \dots t_k}$ είναι $\mathcal{D}\backslash\mathcal{R}^k$-μετρήσιμη. Αρκεί να δείξουμε ότι για ένα σημείο $t \in [0,1]$ η π_t είναι $\mathcal{R}$-μετρήσιμη. Αν $t = 0$ ή $t = 1$ είναι συνεχής, άρα προφανώς μετρήσιμη. Έστω $0 < t < 1$ και $h_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}\int_t^{t+\varepsilon} x(s)ds$. Εδώ παρατηρούμε ότι επειδή η x είναι συνεχής λ-σχεδόν παντού θα είναι και Riemann ολοκληρώσιμη και συνεπώς η h_ε είναι καλά ορισμένη. Θα αποδείξουμε ότι η $h_\varepsilon(\cdot)$ είναι συνεχής. Έστω λοιπόν $x_n \xrightarrow{d} x$, οπότε $x_n(s) \to x(s)$ λ-σχεδόν για όλα τα s. Η ακολουθία $\{x_n\}$, ως d-συγκλίνουσα, είναι φραγμένη, δηλαδή υπάρχει $M > 0$ με $|x_n(s)| \leq M$ για κάθε $s \in [0,1]$ και επειδή $\int_t^{t+\varepsilon} M ds = M \cdot \varepsilon < \infty$, το θεώρημα φραγμένης σύγκλισης μας δίνει ότι $\lim_n h_\varepsilon(x_n) = h_\varepsilon(x)$. Τώρα λόγω δεξιάς συνέχειας της x, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε $s \in [t, t + 1/m) \implies |x(s) - x(t)| < \varepsilon$. Και λόγω Riemann ολοκληρωσιμότητας της x μπορούμε να πάρουμε ολοκληρώματα και στα δύο μέλη της ανισότητας και να πάρουμε ότι $\frac{1}{m}\int_t^{t+1/m} |x(s) - x(t)| ds < \frac{\varepsilon \cdot \frac{1}{m}}{\frac{1}{m}} = \frac{1}{m}$. Συνεπώς $|h_{\frac{1}{m}}(x) - x(t)| \leq m\int_t^{t+1/m} |x(s) - x(t)| ds \leq \frac{1}{m}$, δηλαδή $\lim_m h_{1/m}(x) = x(t) = \pi_t(x)$ για καθε x. Έτσι η π_t είναι μετρήσιμη ως όριο μετρήσιμων.

Μπορούμε τώρα να ορίσουμε την κλάση $\mathcal{D}_f$ των finite-dimensional υποσυνόλων του D σαν $\mathcal{D}_f = \{\pi^{-1}_{t_1 \dots t_k}(H) : k \in \mathbb{N}, H \in \mathcal{R}^k, t_i \in [0,1]\}$. Ομοίως για τυχόν $T \subseteq [0,1]$ ορίζουμε $p[\pi_t : t \in T] = \{\pi^{-1}_{t_1 \dots t_k}(H) : k \in \mathbb{N}, H \in \mathcal{R}^k, t_i \in T\}$ να είναι η κλάση που περιέχει τα finite-dimensional υποσύνολα που περιορίζονται στα χρονικά σημεία του T. Μπορεί εύκολα να δειχθεί ότι η κλάση $p[\pi_t : t \in T]$ είναι π-σύστημα και ότι ισχύει $\sigma[\pi_t : t \in T] = \sigma(p[\pi_t : t \in T])$ Σχετικά, έχουμε το εξής θεώρημα :

Θεώρημα 10.5 : i) *Οι προβολές π_0, π_1 είναι συνεχείς και για $0 < t < 1$ η π_t είναι συνεχής στο x αν και μόνο αν η x είναι συνεχής στο t.*
ii) *Κάθε π_t είναι $\mathcal{D}\backslash\mathcal{R}$-μετρήσιμη και κάθε $\pi_{t_1 \dots t_k}$ είναι $\mathcal{D}\backslash\mathcal{R}^k$-μετρήσιμη.*
iii) *Εαν $1 \in T$ και εαν το T είναι πυκνό στο $[0,1]$ τότε $\mathcal{D} = \sigma[\pi_t : t \in T]$ και η κλάση $p[\pi_t : t \in T]$ είναι separating class.*

Απόδειξη : Μένει να αποδειχθεί το τρίτο. Αφού το T είναι πυκνό στο $[0,1]$, υπάρχει ακολουθία $t_n \in T$ με $t_n \searrow 0$. Λόγω δεξιάς συνέχειας, ισχύει $x(t_n) \to x(0)$

για κάθε $x \in D$, δηλαδή $\pi_{t_n}(x) \to \pi_0(x)$. Έτσι η π_0 είναι κατά σημείο όριο $\sigma[\pi_t : t \in T]$-μετρήσιμων, δηλαδή $\sigma[\pi_t : t \in T]$-μετρήσιμη. Χωρίς βλάβη της γενικότητας λοιπόν, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $0 \in T$. Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ επιλέγουμε σημεία $0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_k = 1$ στο T ώστε $\max_u(s_u - s_{u-1}) < \frac{1}{m}$ και παίρνουμε το σύνολο $\sigma_m = \{s_u\}$ (προφανώς το πλήθος k των σημείων αλλά και τα ίδια τα σημεία εξαρτώνται κάθε φορά από το m). Για τυχόν $a = (a_0, \ldots, a_k) \in \mathbb{R}^{k+1}$ έστω $V_m a$ να είναι το στοιχείο του D που έχει σταθερή τιμή a_{u-1} στο διάστημα $[s_{u-1}, s_u)$ για $1 \leq u \leq k$ και στο $t = 1$ έχει την τιμή a_k. Αν πάρουμε μια ακολουθία διανυσμάτων $a^{(n)} \in \mathbb{R}^{k+1}$ με $a^{(n)} \to a$ ως προς την Ευκλείδεια μετρική, τότε είναι φανερό ότι $V_m(a^{(n)}) \to V_m(a)$ ομοιόμορφα και άρα και ως προς την Skorohod μετρική, δηλαδή η απεικόνιση $V_m : \mathbb{R}^{k+1} \to D$ είναι συνεχής και έτσι $\mathcal{R}^{k+1}\backslash\mathcal{D}$-μετρήσιμη. Τώρα επειδή η $\pi_{s_0 \ldots s_k}$ είναι $\sigma[\pi_t : t \in T]\backslash\mathcal{R}^{k+1}$-μετρήσιμη, έπεται ότι η σύνθεση $V_m \circ \pi_{s_0 \ldots s_k}$ είναι $\sigma[\pi_t : t \in T]\backslash\mathcal{D}$-μετρήσιμη. Όμως η συγκεκριμένη σύνθεση δεν είναι τίποτα άλλο από την απεικόνιση A_{σ_m} του Λήμματος 3, η οποία άρα είναι $\sigma[\pi_t : t \in T]\backslash\mathcal{D}$-μετρήσιμη. Από το ίδιο Λήμμα, εφόσον επιλέξαμε $\max_u(s_u - s_{u-1}) < \frac{1}{m}$, έπεται ότι $d(x, A_{\sigma_m}(x)) \leq \frac{1}{m} \vee w'_x(1/m)$ και αφήνοντας $m \to \infty$ παίρνουμε ότι $x = \lim_m A_{\sigma_m}(x)$. Αφού $x = \mathbb{I}(x)$, έπεται ότι η ταυτοτική είναι $\sigma[\pi_t : t \in T]\backslash\mathcal{D}$-μετρήσιμη, ως κατά σημείο όριο $\sigma[\pi_t : t \in T]\backslash\mathcal{D}$-μετρήσιμων. Αυτό σημαίνει ότι $\mathcal{D} \subseteq \sigma[\pi_t : t \in T]$, και αφού προφανώς ισχύει και $\mathcal{D} \supseteq \sigma[\pi_t : t \in T]$ παίρνουμε ισότητα. Τέλος αφού $\sigma[\pi_t : t \in T] = \sigma(p[\pi_t : t \in T]) = \mathcal{D}$, προκύπτει ότι η κλάση $p[\pi_t : t \in T]$ είναι μια separating class.

Το Λήμμα 4 μας είχε δείξει ότι η συνάρτηση $w'(\cdot, \delta) : D \to \mathbb{R}$ είναι άνω ημισυνεχής και άρα $\mathcal{D}\backslash\mathcal{R}$-μετρήσιμη. Πράγματι, το σύνολο $w'(x, \delta)^{-1}(-\infty, b)$ είναι ανοικτό στον D για όλα τα b, λόγω άνω ημισυνέχειας, δηλαδή ανήκει στην $\mathcal{D}$. Επίσης το supremum της σχέσης (10.27) μπορεί να περιοριστεί σε εκείνα τα t_1, t, t_2 που ανήκουν στους ρητούς, λόγω δεξιάς συνέχειας των συναρτήσεων του χώρου D. Αφού κάθε π_t είναι $\mathcal{D}\backslash\mathcal{R}$-μετρήσιμη, έπεται ότι και η $w''(\cdot, \delta)$ είναι $\mathcal{D}\backslash\mathcal{R}$-μετρήσιμη.

Τυχαίες συναρτήσεις στον D

Για δεδομένο μέτρο πιθανότητας P στον $(D, \mathcal{D})$ ορίζουμε τις *πεπερασμένης διάστασης κατανομές του* (finite-dimensional distributions) να είναι τα μέτρα $P \circ \pi^{-1}_{t_1 \ldots t_k}$ (στον $(\mathbb{R}^k, \mathcal{R}^k)$). Επειδή οι προβολές **δεν** είναι παντού συνεχείς, σε αντίθεση με τον χώρο C, η επόμενη συνεπαγωγή δεν ισχύει κατ ανάγκην: $P_n \Rightarrow P \;\not\Rightarrow\; P_n \circ \pi^{-1}_{t_1 \ldots t_k} \Rightarrow P \circ \pi^{-1}_{t_1 \ldots t_k}$. Επίσης, το παράδειγμα του πρώτου κεφαλαίου με $P_n = \delta_{z_n}$ μπορεί να μας επιβεβαιώσει ότι ακόμα κι αν έχουμε σύγκλιση $P_n \circ \pi^{-1}_{t_1 \ldots t_k} \Rightarrow P \circ \pi^{-1}_{t_1 \ldots t_k}$, από αυτό επίσης **δεν** συνεπάγεται αναγκαία ότι $P_n \Rightarrow P$.

Αν έχουμε μια απεικόνιση X από έναν χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ στον D, τότε η X θα καλείται *τυχαίο στοιχείο του* D αν είναι $\mathcal{F}\backslash\mathcal{D}$-μετρήσιμη, πράγμα που ισχύει αν και μόνο αν η απεικόνιση $\pi_t \circ X = X_t : \Omega \to \mathbb{R}$ είναι τυχαία μεταβλητή για όλα τα $t \in [0, 1]$. Όπως με τον χώρο C, οι προβολές $\pi_t : D \to \mathbb{R}$ με

$\pi_t(x) = x(t) =: x_t$ μπορούν να ιδωθούν σαν τυχαίες μεταβλητές επί του χώρου $(D, \mathcal{D})$.

Η ανέλιξη Poisson

Ένα μέτρο πιθανότητας P_a ορισμένο στον D περιγράφει την ανέλιξη Poisson με βαθμό a, όταν για κάθε σύνολο δεικτών $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_k \leq 1$ οι τυχαίες μεταβλητές $\pi_{t_1}, \pi_{t_2} - \pi_{t_1}, \ldots, \pi_{t_k} - \pi_{t_{k-1}}$ είναι ανεξάρτητες κάτω από το μέτρο P_a και έχουν την κατανομή Poisson, δηλαδή

$$P_a[x \in D : \pi_t(x) - \pi_s(x) = i] = e^{-a(t-s)} \cdot \frac{(a(t-s))^i}{i!} \tag{10.38}$$

Η ύπαρξη ενός τέτοιου μέτρου εξασφαλίζεται μέσω της κατασκευής της αντίστοιχης τυχαίας συνάρτησης. Αρχικά θα καλούμε *count path* μια συνάρτηση του χώρου D η οποία είναι αύξουσα, παίρνει ακέραιες τιμές και στα σημεία ασυνέχειάς της δίνει άλμα ακριβώς 1. Έστω D_c να είναι το σύνολο όλων των *count path*-συναρτήσεων. Το σύνολο αυτό είναι το σύνολο στο οποίο παίρνει τιμές η ανέλιξη Poisson, δηλαδή αν θεωρήσουμε σαν $[X_t : 0 \leq t \leq 1]$ να είναι μια ανέλιξη Poisson, τότε με κατάλληλα επιχειρήματα μπορούμε να καταφέρουμε η συνάρτηση $X(\cdot, \omega)$ να ανήκει στο D_c για κάθε ω. Συνεπώς έχουμε ένα τυχαίο στοιχείο του D, $X : \Omega \to D_c \subseteq D$ και η κατανομή του X είναι το μέτρο P_a, δηλαδή $P_a = \mathsf{P} \circ X^{-1}$.

Σχετικά με την ασθενή σύγκλιση στο μέτρο P_a έχουμε το επόμενο θεώρημα. Έστω P_n, P μέτρα πιθανότητας στον D :

Θεώρημα 10.6 : *Έστω $E \in \mathcal{D}$ και έστω ένα αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολο $T_0 \subseteq [0,1]$. Υποθέτουμε ότι ισχύει η συνεπαγωγή : $\big(x, x_n \in E$ και $x_n(t) \to x(t)\ \forall t \in T_0\big) \implies \big(x_n \xrightarrow{d} x\big)$. Εαν $P_n(E) = P(E) = 1$ και $P_n \circ \pi^{-1}_{t_1 \ldots t_k} \Rightarrow P \circ \pi^{-1}_{t_1 \ldots t_k}$ για όλες τις k-άδες του T_0, τότε $P_n \Rightarrow P$.*

Απόδειξη : Έστω $T_0 = \{t_1, t_2, \ldots\}$ και $\pi : D \to \mathbb{R}^\infty$ με $\pi(x) = (x(t_1), x(t_2, \ldots)$. Εαν $\pi_k : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}^k$ με $\pi_k(z_1, z_2, \ldots) = (z_1, z_2, \ldots, z_k)$, τότε είναι φανερό πως $\pi_k \circ \pi = \pi_{t_1 \ldots t_k}$. Αν $H \in \mathcal{R}^k$, τότε $\pi^{-1}(\pi_k^{-1}(H)) = \pi^{-1}_{t_1 \ldots t_k}(H) \in \mathcal{D}$, και επειδή όπως έχουμε δει στο πρώτο κεφάλαιο $\sigma(\mathcal{R}^\infty_f) = \mathcal{R}^\infty$, έπεται η $\mathcal{D} \backslash \mathcal{R}^\infty$-μετρησιμότητα της π.

Για τυχόν $A \subseteq D$ ορίζουμε $A^* = \pi^{-1}(\overline{\pi(A)})$. Λόγω μετρησιμότητας της π έπεται ότι $A^* \in \mathcal{D}$ και λόγω του ότι προφανώς $\pi(A) \subseteq \overline{\pi(A)}$ έπεται και $A \subseteq A^*$. Εαν τώρα πάρουμε κάποιο $x \in (A \cap E)^*$ τότε $\pi(x) \in \overline{\pi(A \cap E)}$ δηλαδή υπάρχει $\{x_n\} \in A \cap E$ ώστε $\pi(x_n) \to \pi(x)$ ως προς την μετρική του χώρου $\mathbb{R}^\infty$ (δες και παράδειγμα 1.2). Αυτό σημαίνει ότι έχουμε σύγκλιση κατά συντεταγμένη, δηλαδή $x_n(t) \to x(t)$ για κάθε $t \in T_0$. Αν επιπλέον $x \in E$, τότε λόγω της υπόθεσης του θεωρήματος έπεται $x_n \xrightarrow{d} x$, και αυτό σημαίνει ότι $(A \cap E)^* \cap E \subseteq \overline{A}$.

Τώρα εξ υποθέσεως είναι $P_n \circ \pi^{-1}_{t_1 \ldots t_k} \Rightarrow P \circ \pi^{-1}_{t_1 \ldots t_k}$ για κάθε k-άδα μέσα στο T_0 και επειδή δείξαμε ότι $\pi_k \circ \pi = \pi_{t_1 \ldots t_k}$ παίρνουμε ότι $(P_n \circ \pi^{-1}) \circ \pi_k^{-1} \Rightarrow (P \circ \pi^{-1}) \circ \pi_k^{-1}$ για όλα τα k. Έχουμε δει επανειλημμένως στο πρώτο κεφάλαιο ότι στον $\mathbb{R}^\infty$ η ασθενής σύγκλιση είναι ισοδύναμη με την σύγκλιση των finite-dimensional distributions και συνεπώς παίρνουμε ότι $P_n \circ \pi^{-1} \Rightarrow P \circ \pi^{-1}$ στον $\mathbb{R}^\infty$.

Έστω τώρα $A \in \mathcal{D}$. Είναι

$$\limsup_n P_n(A) \leq \limsup_n P_n(A^*) = \limsup_n P_n \circ \pi^{-1}(\overline{\pi(A)}) \leq \\ P \circ \pi^{-1}(\overline{\pi(A)}) = P(A^*)$$

Λόγω αυτής της ανισότητας και επειδή $P_n(E) = P(E) = 1$ και επειδή δείξαμε ότι $(A \cap E)^* \cap E \subseteq \overline{A}$ παίρνουμε

$$\limsup_n P_n(A) = \limsup_n P_n(A \cap E) \leq P((A \cap E)^*) = P((A \cap E)^* \cap E) \leq P(\overline{A})$$

Αν το A είναι κλειστό σύνολο, τότε $P(A) = P(\overline{A})$ και συνεπώς βλέπουμε ότι $P_n \Rightarrow P$. Η απόδειξη είναι πλήρης.

Πριν κλείσουμε αυτή την ενότητα θα αποδείξουμε ότι το σύνολο D_c είναι κλειστό στην τοπολογία Skorohod και ότι ικανοποιεί την αρχική συνεπαγωγή της υπόθεσης του θεωρήματος. Για το ότι είναι κλειστό, έστω $x \in \overline{D_c}^d$. Αφού $D_c \subseteq D$ είναι άμεσο ότι η x είναι δεξιά συνεχής και ότι υπάρχει το αριστερό πλευρικό όριο σε κάθε σημείο του $[0,1]$. Υπάρχει $x_n \in D_c$ με $x_n \xrightarrow{d} x$. Άρα $x_n(t) \to x(t)$ για όλα τα σημεία συνεχείας της x, δηλαδή για όλα εκτός ίσως από αριθμήσιμα το πλήθος. Επειδή $x_n \in D_c$, αυτό σημαίνει ότι για κάθε σημείο συνεχείας t της x, υπάρχει $n_0 = n_0(t)$ τέτοιος ώστε $x_n(t) \equiv x(t)$, για κάθε $n \geq n_0(t)$. Δηλαδή για κάθε σημείο συνέχειας της x, $x(t) \in \mathbb{Z}$. Τώρα αν t_0 είναι σημείο ασυνέχειας, μπορούμε να το προσεγγίσουμε με μια ακολουθία $\{t_n\}$ από δεξιά, δηλαδή $t_n \searrow t_0$ τέτοια ώστε **κάθε** σημείο t_n να είναι σημείο συνέχειας της x (αυτό γίνεται, διότι σε οποιοδήποτε διάστημα $(t_0, t_0 + \varepsilon)$ υπάρχουν το πολύ αριθμήσιμα σημεία ασυνέχειας της x). Λόγω δεξιάς συνέχειας της x στο t_0 είναι $x(t_n) \to x(t_0)$ και επειδή $x(t_n) \in \mathbb{Z}$ για όλα τα n, έπεται ότι $x(t_0) \in \mathbb{Z}$. Έτσι $x(t) \in \mathbb{Z}$ *για όλα* τα t. Μένει να δειχθεί ότι αν η x παρουσιάζει άλμα σε κάποιο t τότε το άλμα έχει μήκος 1. Κατ αρχήν για οποιοδήποτε t ισχύει ότι $\lim_{s \nearrow t} x(s) = x(t-) \in \mathbb{Z}$ πάλι εφαρμόζοντας το επιχείρημα που χρησιμοποιήσαμε και πριν. Έστω λοιπόν ότι $x(t) - x(t-) \geq 2$ για κάποιον t. Μπορούμε να βρούμε σημεία $t_1 < t < t_2$ οσοδήποτε κοντά στο t που να είναι σημεία συνεχείας της x και για τα οποία θα ισχύει $x(t_2) - x(t_1) > 3/2$. Επειδή τα t_1, t_2 είναι σημεία συνεχείας, θα έχουμε $x_n(t_1) \to x(t_1)$ και $x_n(t_2) \to x(t_2)$, δηλαδή υπάρχει κάποιος n_0 με $x_{n_0}(t_2) - x_{n_0}(t_1) > 3/2$. Αφήνοντας $t_2 \searrow t$ και $t_1 \nearrow t$ ισχύει $x_{n_0}(t) - x_{n_0}(t-) > 3/2$, πράγμα άτοπο διότι οι x_n ανήκουν στον D_c. Έτσι τα άλματα της x είναι μήκους 1.

Τέλος, για την μονοτονία της x, έστω $t_1 < t_2$ να είναι δύο σημεία συνεχείας της x. Υπάρχουν $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ τέτοιοι ώστε $x_n(t_1) \equiv x(t_1)$ $\forall n \geq n_1$ και $x_m(t_2) \equiv x(t_2)$ $\forall m \geq n_2$. Επιλέγοντας $N = \max\{n_1, n_2\}$ βλέπουμε ότι $x_N(t_1) \equiv x(t_1)$ και $x_N(t_2) \equiv x(t_2)$. Όμως $x_N(t_1) \leq x_N(t_2)$, διότι $x_N \in D_c$ και έτσι $x(t_1) \leq x(t_2)$ Εαν τώρα κάποιο από τα t_1, t_2 είναι σημείο ασυνέχειας της x, έστω το t_1, τότε πάλι μπορούμε να πάρουμε ακολουθία $s_n \searrow t_1$ με $t_1 < s_n < t_2$ για κάθε n και όλα τα s_n είναι σημεία συνεχείας της x. Τότε $x(s_n) \leq x(t_2)$ για κάθε n (από αυτό που δείξαμε για την περίπτωση των σημείων συνεχείας) και περνώντας σε όρια έπεται $x(t_1) \leq x(t_2)$. Έτσι αποδείχθηκε ότι $x \in D_c$ δηλαδή ότι το D_c είναι κλειστό.

Έστω τώρα ένα αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολο $T_0 \subseteq [0,1]$ και υποθέτουμε ότι έχουμε $x, x_n \in D_c$ με $x_n(t) \to x(t)$ για όλα τα t στο T_0. Θέλουμε να δείξουμε ότι $x_n \xrightarrow{d} x$. Επειδή για μια συνάρτηση του D υπάρχουν το πολύ πεπερασμένα το πλήθος σημεία που το άλμα τους έχει μήκος που ξεπερνά έναν δοσμένο θετικό αριθμό και επειδή τα άλματα της x είναι μήκους 1, αυτό σημαίνει ότι η x έχει το πολύ πεπερασμένες ασυνέχειες. Έστω $0 < t_1 < \ldots < t_k \leq 1$ να είναι αυτά τα σημεία ασυνέχειας της x. Επειδή το T_0 είναι πυκνό, για δοθέν $\varepsilon > 0$ διαλέγουμε σημεία $u_i, v_i \in T_0$ ώστε $u_i < t_1 \leq v_i$ και $v_i - u_i < \varepsilon$ για όλα τα $i = 1, \ldots, k$ και με την επιπλέον απαίτηση τα διαστήματα $[v_{i-1}, u_i]$ να είναι ξένα μεταξύ τους για κάθε i. Μπορούμε να κάνουμε τώρα μια κάπως πολύπλοκη αλλά σημαντική παρατήρηση : υπάρχει ένας n_0 τέτοιος ώστε για κάθε $n \geq n_0$ η ακολουθία x_n να συμφωνεί με την x σε *κάθε* $[v_{i-1}, u_i]$ και επιπλέον να περιέχει ακριβώς ένα άλμα σε κάθε $[u_i, v_i]$. Αυτό είναι άμεση απόρροια του γεγονότος ότι σε κάθε διάστημα $[v_{i-1}, u_i]$ η x διατηρεί σταθερή τιμή (αφού το διάστημα δεν περιέχει σημείο άλματος και $x \in D_c$), του γεγονότος ότι $x_n(v_i) \to x(v_i), x_n(u_i) \to x(u_i)$ για κάθε i και του γεγονότος ότι κάθε x_n είναι αύξουσα ως προς t. Θεωρούμε τώρα $\{\lambda_n\}$ να είναι η ακολουθία του Λ που για δεδομένο n μεταφέρει το σημείο t_i στο σημείο του διαστήματος $[u_i, v_i]$ όπου κάνει άλμα η αντίστοιχη x_n (και επεκτείνεται γραμμικώς ενδιάμεσα). Είναι άμεσο ότι για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $\sup_t |\lambda_n(t) - t| \leq \max_i \{v_i - u_i\} < \varepsilon$. Επίσης για κάθε $n \geq n_0$ είναι $x_n(\lambda_n(t)) \equiv x(t)$. Για τον τελευταίο ισχυρισμό πρέπει να διακρίνουμε περιπτώσεις: εαν το t ανήκει σε κάποιο διάστημα (t_{i-1}, t_i) τότε, επειδή η λ_n είναι αύξουσα, έπεται ότι $\lambda_n(t) \in (s_{i-1}, s_i)$, όπου με s_i συμβολίζουμε τα σημεία άλματος της αντίστοιχης x_n. Έτσι η $x_n(\lambda_n(t))$ έχει την τιμή $x_n(s_{i-1})$ η οποία ισούται με $x_n(v_{i-1})$, όπου το v_{i-1} είναι το σημείο του T_0 που εκλέξαμε ώστε $u_{i-1} < t_{i-1} \leq v_{i-1}$. Επίσης και η x, στο σημείο t θα έχει την τιμή που είχε στο $x(v_{i-1})$, μιας και το t είναι στο διάστημα (t_{i-1}, t_i) και άρα δεν είναι σημείο άλματος, και συνεπώς $x_n(v_{i-1}) = x(v_{i-1})$ για κάθε $n \geq n_0$ λόγω της προηγούμενης σημαντικής παρατήρησης. Εαν τώρα τύχει $t = t_i$ για κάποιον δείκτη i, τότε $x_n(\lambda_n(t)) = x_n(\lambda_n(t_i)) = x_n(s_i) = x_n(u_i) + 1$ και επειδή η x κάνει άλμα στο $t = t_i$ θα ισχύει και $x(t_i) = x(u_1) + 1$ και πάλι ισχύει ισότητα λόγω της παρατήρησης, για κάθε $n \geq n_0$. Συνεπώς έπεται ότι $d(x_n, x) < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$, δηλαδή το σύνολο D_c ικανοποιεί την πρώτη συνεπαγωγή του θεωρήματος 10.6.

Ενότητα 11: Ασθενής Σύγκλιση και Tightness στον D

Για να αποδεικνύουμε ότι μια οικογένεια μέτρων πιθανότητας στον $(D, \mathcal{D})$ συγκλίνει ασθενώς θα θέλαμε να χρησιμοποιήσουμε την τεχνική που εφαρμόζαμε και στον C, δηλαδή να αποδεικνύουμε πρώτα ασθενή σύγκλιση των πεπερασμένης−διάστασης κατανομών και ύστερα να αποδεικνύουμε ότι η οικογένεια είναι tight. Ο D είναι διαχωρίσιμος και πλήρης κάτω από την d° και συνεπώς, από το θεώρημα 4.2 και 4.1 έπεται ότι μια οικογένεια είναι tight αν και μόνο αν είναι σχετικά συμπαγής. Το πρόβλημα που δημιουργεί τεχνικές δυσκολίες είναι το ότι οι προβολές δεν είναι συνεχείς συναρτήσεις, όπως θα θέλαμε.

Finite-Dimensional Distributions

Εαν έχουμε ένα μέτρο πιθανότητας P στον $(D, \mathcal{D})$, ορίζουμε $T_P = \{t \in [0,1] :$ η π_t:συνεχής P-σχεδόν για κάθε $x \in D\}$. Τα σημεία 0 και 1 ανήκουν πάντα στο T_P. Έχουμε δείξει ότι για $0 < t < 1$, η π_t είναι συνεχής στο x αν και μόνο αν η x είναι συνεχής στο t, δηλαδή όταν $0 < t < 1$ ισχύει $t \in T_p \iff P(J_t) = 0$, όπου

$$J_t = [x : x(t) \neq x(t-)] \tag{11.1}$$

Θα αποδείξουμε ότι το σύνολο $B = \{t : P(J_t) > 0\}$ είναι το πολύ αριθμήσιμο. Πράγματι $B = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{t : P(J_t) > 1/q\} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} A_q$, οπότε αρκεί να δειχθεί ότι κάθε A_q είναι αριθμήσιμο. Θέτουμε $J_t(1/n) = [x \in D : |x(t) - x(t-)| > 1/n]$ και παρατηρούμε ότι για δεδομένα $\delta > 0, \varepsilon > 0$ το σύνολο $\{t : P(J_t(\varepsilon)) > \delta\}$ είναι το πολύ πεπερασμένο. Πράγματι, αν αυτό ίσχυε για απείρως πολλά t_n τότε $\delta \leq \limsup_n P(J_{t_n}(\varepsilon)) \leq P(\limsup_n J_{t_n}(\varepsilon))$, δηλαδή θα υπήρχε $x \in D$ με $|x(t_n) - x(t_n-)| \geq \varepsilon$ για άπειρα n, πράγμα άτοπο διότι έχουμε δει ότι ένα στοιχείο του D έχει άλματα μήκους $> \varepsilon$ σε πεπερασμένα το πολύ σημεία. Επίσης ισχύει ότι $A_q = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{t : P(J_t(1/n)) > 1/q\}$ διότι $P(J_t(1/n)) \nearrow P(J_t)$, δηλαδή το A_q είναι αριθμήσιμη ένωση πεπερασμένων, και άρα πεπερασμένο.

Παίρνουμε λοιπόν το εξής: *το σύνολο T_P περιέχει το 0 και το 1 και το συμπλήρωμά του στο $[0,1]$ είναι το πολύ αριθμήσιμο.*

Αν $t_1, \ldots, t_k \in T_P$ τότε η $\pi_{t_1 \ldots t_k}$ είναι συνεχής P-σχεδόν για κάθε x και το θεώρημα απεικόνισης του πρώτου κεφαλαίου μας δίνει

$$P_n \Rightarrow P \tag{11.2}$$

συνεπάγεται

$$P_n \circ \pi_{t_1 \ldots t_k}^{-1} \Rightarrow P \circ \pi_{t_1 \ldots t_k}^{-1} \tag{11.3}$$

Ωστόσο εαν κάποιο t δεν ανήκει στο T_P τότε η παραπάνω συνεπαγωγή ενδέχεται να μην ισχύει: αν πάρουμε $P_n = \delta_{I_n}$, $P = \delta_I$, όπου $I_n = I_{[0,t+1/n)}$ και $I = I_{[0,t)}$, τότε επειδή $I_n \xrightarrow{d} I$(πάρε π.χ. λ_n ώστε $\lambda_n(t) = t + 1/n$ και γραμμική αλλού) , το παράδειγμα 2.1 μας εξασφαλίζει ότι $P_n \Rightarrow P$. Όμως $P_n \circ \pi_t^{-1} \not\Rightarrow P \circ \pi_t^{-1}$, επειδή υπάρχουν κλειστά σύνολα $B \subseteq \mathbb{R}$ με $1 \in B$ και $0 \notin B$, και έτσι $\limsup_n P_n \circ \pi_t^{-1}(B) \nleq P \circ \pi_t^{-1}(B)$.

Το ανάλογο του θεωρήματος 6.1 παίρνει τη μορφή:

Θεώρημα 11.1 : *Εαν η $\{P_n\}$ είναι tight και εαν $P_n \circ \pi_{t_1 \ldots t_k}^{-1} \Rightarrow P \circ \pi_{t_1 \ldots t_k}^{-1}$ ισχύει για όλα τα $t_1, \ldots, t_k \in T_P$, τότε $P_n \Rightarrow P$.*

Απόδειξη : Από το πόρισμα μετά το θεώρημα 4.1, είναι αρκετό να δειχθεί ότι εαν μια υπακολουθία $\{P_{n_i}\}_i$ συγκλίνει ασθενώς σε κάποιο Q, τότε αναγκαστικά $P \equiv Q$. Έστω $P_{n_i} \Rightarrow Q$. Αν $t_1, \ldots, t_k \in T_P$, εξ υποθέσεως έπεται ότι $P_{n_i} \circ \pi_{t_1 \ldots t_k}^{-1} \Rightarrow P \circ \pi_{t_1 \ldots t_k}^{-1}$ και αν $t_1, \ldots, t_k \in T_Q$, τότε η (11.3) δίνει : $P_{n_i} \circ \pi_{t_1 \ldots t_k}^{-1} \Rightarrow Q \circ \pi_{t_1 \ldots t_k}^{-1}$. Έτσι για $t_1, \ldots, t_k \in T_P \cap T_Q$ είναι $P \circ \pi_{t_1 \ldots t_k}^{-1} = Q \circ \pi_{t_1 \ldots t_k}^{-1}$. Όμως το σύνολο $T_P \cap T_Q$ περιέχει το 0 και το 1 και το συμπλήρωμά του είναι αριθμήσιμο, λόγω της προηγούμενης παρατήρησης. Επομένως το θεώρημα 10.5 μας εξασφαλίζει ότι η κλάση $p[\pi_t : t \in T_P \cap T_Q]$ είναι separating class, δηλαδή $P \equiv Q$ όπως έπρεπε να δειχθεί.

Tightness

Το θεώρημα 10.3, το οποίο χαρακτήρισε πλήρως τη συμπάγεια στον χώρο D, μας δίνει το επόμενο αποτέλεσμα σχετικά με το πότε μια ακολουθία $\{P_n\}$ μέτρων πιθανότητας στον $(D, \mathcal{D})$ είναι tight :

Θεώρημα 11.2 : *Η ακολουθία $\{P_n\}$ είναι tight αν και μόνο αν ισχύουν οι εξής δύο συνθήκες :*

i) *Η πρώτη είναι*

$$\lim_{a \to \infty} \limsup_n P_n[x : \|x\| \geq a] = 0 \tag{11.4}$$

ii) *Και η δεύτερη ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ να ισχύει :*

$$\lim_{\delta \to 0} \limsup_n P_n[x : w'_x(\delta) \geq \varepsilon] = 0 \tag{11.5}$$

Απόδειξη : Είναι ακριβώς ίδια με την απόδειξη του θεωρήματος 6.3 για τον χώρο C απλά στη θέση του $|x(0)|$ βάλαμε την $\|x\|$ και το w' στη θέση του w. Επίσης ο D είναι διαχωρίσιμος και πλήρης κάτω από την d° και έτσι κάθε μεμονωμένο μέτρο πιθανότητας P είναι tight.

Το επόμενο πόρισμα δείχνει ότι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε κάποιες εναλλακτικές συνθήκες για την σχέση (11.4).

Πόρισμα : *Κάθε μια από τις επόμενες συνθήκες είναι ισοδύναμη με την συνθήκη* i) *του θεωρήματος* 11.2 :

i$'$) *Για κάθε t που ανήκει σε ένα πυκνό υποσύνολο T του $[0,1]$ με $1 \in T$ να ισχύει*

$$\lim_{a\to\infty} \limsup_n P_n[x : |x(t)| \geq a] = 0 \tag{11.6}$$

i$''$) *Να ισχύει η* (11.6) *για $t = 0$ και επίσης*

$$\lim_{a\to\infty} \limsup_n P_n[x : j(x) \geq a] = 0 \tag{11.7}$$

Απόδειξη : Θα δείξουμε ότι παρουσία της ii), οι συνθήκες i), i$'$) και i$''$) είναι ισοδύναμες. Είναι κάπως προφανές ότι η i) συνεπάγεται τις άλλες δυο.

Υποθέτουμε πρώτα ότι ισχύουν οι ii)+i$'$). Διαλέγουμε ένα δ-sparse σύνολο $\{t_0, t_1, \ldots, t_v\}$ ώστε $w_x[t_{i-1}, t_i) < w'_x(\delta) + 1$ για $1 \leq i \leq v$ και σημεία $s_j \in T$ με $0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_k = 1$ ώστε $s_j - s_{j-1} < \delta$ (τα σημεία t_i εξαρτώνται από την εκάστοτε x αλλά τα s_j όχι). Παρατηρούμε τότε ότι κάθε διάστημα $[t_{i-1}, t_i)$ περιέχει σίγουρα κάποιο s_j και εαν καλέσουμε $m(x) = \max\{|x(s_j)| : 0 \leq j \leq k\}$ θα ισχύει $\|x\| \leq m(x) + w'_x(\delta) + 1$, διότι για οποιοδήποτε t είναι $|x(t)| \leq |x(t) - x(s_j)| + |x(s_j)| \leq w_x[t_{i-1}, t_i) + m(x)$. Εαν ισχύουν οι (11.5) και (11.6) τότε για κάθε $\eta > 0$ υπάρχουν $\delta, a > 0$ με το δ αρκετά μικρό και το a αρκετά μεγάλο ώστε $P_n[x : w'_x(\delta) \geq 1] < \eta$ και $P_n[x : m(x) \geq a] < \eta$ για μεγάλα n. Έτσι, επειδή $[x : \|x\| \geq a + 2] \subseteq [x : m(x) \geq a] \cup [x : w'_x(\delta) \geq 1]$, παίρνουμε ότι $P_n[x : \|x\| \geq a + 2] < 2\eta$, δηλαδή την (11.4).

Υποθέτουμε τώρα ότι ισχύουν οι ii)+i$''$). Πάλι διαλέγουμε ένα δ-sparse σύνολο $\{t_0, t_1, \ldots, t_v\}$ όπως και προηγουμένως. Επιλέγοντας $s_n \nearrow t_i$ μπορούμε να βρίσκουμε κάθε φορά σημεία εντός του διαστήματος $[t_{i-1}, t_i)$ για τα οποία $|x(s_n) - x(t_{i-1}| \to |x(t_i-) - x(t_{i-1})|$ και προφανώς $|x(s_n) - x(t_{i-1})| \leq w_x[t_{i-1}, t_i)$. Έτσι ισχύει $|x(t_i) - x(t_{i-1})| \leq |x(t_{i-1}) - x(t_i-)| + |x(t_i-) - x(t_i)| \leq w_x[t_{i-1}, t_i) + j(x) \leq w'_x(\delta) + 1 + j(x)$. Συνεπώς $\max\{|x(t_i)| : 0 \leq i \leq v\} \leq |x(0)| + v(w'_x(\delta) + 1 + j(x))$. Οποιοδήποτε τυχόν t ανήκει σίγουρα σε κάποιο διάστημα $[t_{i-1}, t_i)$ και έτσι : $|x(t)| \leq |x(t_i)| + |x(t) - x(t_i)| \leq \max_{i\leq v} |x(t_i)| + \max_i w_x[t_{i-1}, t_i) \leq |x(0)| + \delta^{-1}(w'_x(\delta) + 1 + j(x)) + \max_i w_x[t_{i-1}, t_i)$, διότι $\delta \cdot v \leq 1$. Παίρνοντας πρώτα supremum ως προς t και ύστερα infimum ως προς όλα τα δ-sparse σύνολα έπεται : $\|x\| \leq |x(0)| + \delta^{-1}(w'_x(\delta) + 1 + j(x)) + w'_x(\delta)$.

Το θεώρημα 10.4 και πιο συγκεκριμένα οι συνθήκες (10.31) και (10.32) δείχνουν ότι μπορούμε να αντικαταστήσουμε την (11.5) με την συνθήκη ότι για κάθε $\varepsilon, \eta > 0$, υπάρχουν $0 < \delta < 1$ και $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε :

$$\begin{cases} P_n[x : w''_x(\delta) \geq \varepsilon] \leq \eta \\ P_n[x : |x(\delta) - x(0)| \geq \varepsilon] \leq \eta \\ P_n[x : |x(1-) - x(1-\delta)| \geq \varepsilon] \leq \eta \end{cases} \tag{11.8}$$

για κάθε $n \geq n_0$. Έχουμε λοιπόν το επόμενο θεώρημα :

Θεώρημα 11.3 : *Έστω ότι* $P_n \circ \pi^{-1}_{t_1 \ldots t_k} \Rightarrow P \circ \pi^{-1}_{t_1 \ldots t_k}$ *οποτεδήποτε όλα τα* t_i *ανήκουν στο* T_P. *Έστω επίσης ότι για κάθε* $\varepsilon > 0$ *ισχύει*

$$\lim_{\delta \to 0} P[x : |x(1) - x(1-\delta)| \geq \varepsilon] = 0 \tag{11.9}$$

και ότι για κάθε $\varepsilon, \eta > 0$, *υπάρχει* $0 < \delta < 1$ *και* $n_0 \in \mathbb{N}$ *με*

$$P_n[x : w''_x(\delta) \geq \varepsilon] \leq \eta, \quad \forall n \geq n_0. \tag{11.10}$$

Τότε $P_n \Rightarrow P$.

Απόδειξη : Λόγω του θεωρήματος 11.1 αρκεί να αποδειχθεί ότι η $\{P_n\}$ είναι tight, δηλαδή αρκεί να δειχθεί η σχέση (11.6) και (11.8) με το T_P στη θέση του T (εφόσον δείξαμε ότι το T_P είναι πυκνό και περιέχει το 1). Για κάθε $t \in T_P$, η ακολουθία $\{P_n \circ \pi_t^{-1}\}_n$ είναι tight στο $\mathbb{R}$, ως ασθενώς συγκλίνουσα (ο $\mathbb{R}$ είναι διαχωρίσιμος και πλήρης). Επομένως η σχέση (11.6) ικανοποιείται.

Για την (11.8) χρειάζεται να δείξουμε μόνο την δεύτερη και την τρίτη συνθήκη καθώς η (11.10) προφανώς καλύπτει την πρώτη. Θα δείξουμε τον εξής ισχυρισμό : για κάθε $\varepsilon, \eta > 0$, υπάρχει ένα αρκετά μικρό δ ώστε $P[x : |x(\delta) - x(0)| \geq \varepsilon] < \eta$. Πράγματι, η x είναι δεξιά ασυνεχής στο 0 αν και μόνο αν υπάρχει ένα $\varepsilon > 0$ και $\delta_n \searrow 0$ με $|x(\delta_n) - x(0)| \geq \varepsilon$. Έτσι αν $A_n = \{x \in D : |x(\delta_n) - x(0)| \geq \varepsilon\}$, τότε λόγω δεξιάς συνέχειας έχουμε ότι $A_n \to \emptyset$ για κάθε $\varepsilon > 0$. Άρα $P(\limsup_n A_n) = 0$, δηλαδή για κάθε $\varepsilon, \eta > 0$,υπάρχει δ κοντά στο 0 ώστε $P[x : |x(\delta) - x(0)| \geq \varepsilon] < \eta$. Επειδή το σύνολο $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y - x| \geq \varepsilon\}$ είναι κλειστό στο $\mathbb{R}^2$ και επειδή η υπόθεση λέει ότι $P_n \circ \pi^{-1}_{0,\delta} \Rightarrow P \circ \pi^{-1}_{0,\delta}$ για $\delta \in T_P$, έπεται η δεύτερη συνθήκη της (11.8). Με κάποια παραλλαγή μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το ίδιο επιχείρημα για να αποδείξουμε την τρίτη συνθήκη. Οι cadlag συναρτήσεις έχουν αριστερό όριο στο 1, επομένως για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει $P[x : |x(1-) - x(1-\delta)| \geq \varepsilon] \to 0$, όταν $\delta \searrow 0$. Η (11.9) και το γεγονός ότι $[x : |x(1) - x(1-)| \geq \varepsilon] \subseteq [x : |x(1) - x(1-\delta)| \geq \varepsilon/2] \cup [x : |x(1-\delta) - x(1-)| \geq \varepsilon/2]$ μας δίνουν ότι $P[x : |x(1) - x(1-)| \geq \varepsilon] = 0$ για κάθε $\varepsilon > 0$, δηλαδή $P(J_1) = 0$. Επομένως P-σχεδόν όλες οι συναρτήσεις x είναι αριστερά συνεχείς στο 1 και το προηγούμενο επιχείρημα χρησιμοποιείται και εδώ ελαφρώς παραλλαγμένο.

Έστω τώρα $X_n,\ X$ να είναι τυχαία στοιχεία του D.

Θεώρημα 11.4 : *Έστω ότι* $X_n \Rightarrow X$. *Τότε* $\mathsf{P}[X \in C] = 1 \iff j(x_n) \Rightarrow 0$.

Απόδειξη : Στο παράδειγμα 10.1 αποδείχθηκε αναλυτικά η ομοιόμορφη συνέχεια της j και έτσι το θεώρημα απεικόνισης δίνει ότι $j(X_n) \Rightarrow j(X)$. Προφανώς τώρα $j(X) = 0 \iff X \in C$.

Το επόμενο πόρισμα δείχνει τι θα συμβεί εαν χρησιμοποιήσουμε τις συνθήκες ασθενούς σύγκλισης του χώρου C :

Πόρισμα : *Έστω P_n, P μέτρα πιθανότητας στον $(D, \mathcal{D})$ και έστω ότι για αυτά ισχύουν οι συνθήκες (6.6) και (6.7). Έστω επίσης ότι $P_n \circ \pi^{-1}_{t_1 \ldots t_k} \Rightarrow P \circ \pi^{-1}_{t_1 \ldots t_k}$ για όλα τα $t_1, \ldots, t_k$. Τότε $P_n \Rightarrow P$ και $P(C) = 1$.*

Απόδειξη : Από την απόδειξη του θεωρήματος 6.3 έπεται ότι ικανοποιείται η συνθήκη i) του θεωρήματος 11.2 και η σχέση (10.7) μας δίνει ότι ισχύει επίσης και η συνθήκη ii) του θεωρήματος 11.2. Έτσι $P_n \Rightarrow P$ ή αντίστοιχα $X_n \Rightarrow X$. Επίσης μπορεί εύκολα να δειχθεί ότι $j(x) \leq w(x, \delta)$ για όλα τα δ (αν t είναι το σημείο μέγιστου άλματος της x, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta_1 > 0$ με $|x(s) - x(t-)| < \varepsilon$, για κάθε $s \in (t - \min\{\delta, \delta_1\}, t)$, οπότε $j(x) \leq |x(t) - x(s)| + |x(s) - x(t-)| \leq w_x(\min\{\delta, \delta_1\}) + \varepsilon \leq w_x(\delta) + \varepsilon$ και μετά αφήνουμε $\varepsilon \searrow 0$), επομένως $j(X_n) \leq w(X_n, \delta)$ για όλα τα δ. Η σχέση (6.7) μας δίνει ότι $j(X_n) \xrightarrow{p} 0$, διότι $[\omega : j(X_n(\omega)) \geq \varepsilon] \subseteq [\omega : w(X_n(\omega), \delta) \geq \varepsilon]$, και συνεπώς θα είναι και $j(X_n) \Rightarrow 0$. Το προηγούμενο πόρισμα μας δίνει και ότι $P(C) = \mathsf{P}[X \in C] = 1$.

Ένα κριτήριο σύγκλισης

Συμβολίζουμε με T_X το T_P, όπου η X είναι ένα τυχαίο στοιχείο του χώρου D και P είναι η κατανομή του.

Θεώρημα 11.5 : *Υποθέτουμε ότι*

$$(X^n_{t_1}, \ldots, X^n_{t_k}) \Rightarrow_n (X_{t_1}, \ldots, X_{t_k}) \tag{11.11}$$

για όλα τα σημεία $t_i \in T_X$, επίσης ότι ισχύει

$$X_1 - X_{1-\delta} \Rightarrow_{\delta \to 0} 0 \tag{11.12}$$

και ότι για όλα τα $r \leq s \leq t, n \in \mathbb{N}, \lambda > 0$ είναι

$$\mathsf{P}[|X^n_s - X^n_r| \wedge |X^n_t - X^n_s| \geq \lambda] \leq \frac{1}{\lambda^{4b}} \cdot [F(t) - F(r)]^{2a} \tag{11.13}$$

για κάποιο $b \geq 0, a > 1/2$ και για κάποια F που είναι συνεχής και αύξουσα στο $[0,1]$. Τότε $X^n \Rightarrow X$.

Συνήθως αντί της σχέσης (11.13) χρησιμοποιούμε την εξής ισχυρότερη συνθήκη που εμπεριέχει ροπές :

$$E[|X^n_s - X^n_r|^{2b} \cdot |X^n_t - X^n_s|^{2b}] \leq [F(t) - F(r)]^{2a} \tag{11.14}$$

Πραγματικά, η (11.14) είναι ισχυρότερη της (11.13) λόγω της ανισότητας Chebyshev και του γεγονότος ότι $(\min\{a, b\})^2 \leq a \cdot b$, οπότε έτσι παίρνουμε

$$\mathsf{P}[(|X^n_s - X^n_r| \wedge |X^n_t - X^n_s|)^2 \geq \lambda^2] \leq \mathsf{P}[|X^n_s - X^n_r| \cdot |X^n_t - X^n_s| \geq \lambda^2] \leq$$
$$\leq \tfrac{1}{\lambda^{4b}} E[|X^n_s - X^n_r|^{2b} \cdot |X^n_t - X^n_s|^{2b}]$$

Προχωρούμε στην απόδειξη του θεωρήματος.

Απόδειξη : Θα εφαρμόσουμε το θεώρημα 11.3. Παρατηρούμε ότι η σχέση (11.11) δεν είναι τίποτα άλλο από το ότι $P_n \circ \pi^{-1}_{t_1 \dots t_k} \Rightarrow_n P \circ \pi^{-1}_{t_1 \dots t_k}$, όπου P_n είναι η κατανομή της X^n στον $(D, \mathcal{D})$. Επίσης η σχέση (11.12) είναι ισοδύναμη με το γεγονός ότι η $X_1 - X_{1-\delta}$ συγκλίνει κατά πιθανότητα στο 0. Επομένως

$$\mathsf{P}[\omega : |X_1(\omega) - X_{1-\delta}(\omega)| \geq \varepsilon] = P[x : |x(1) - x(1-\delta)| \geq \varepsilon]$$

και έτσι έχουμε και την (11.9). Αρκεί να δειχθεί λοιπόν ότι ισχύει η (11.10), δηλαδή ότι για κάθε $\eta, \varepsilon > 0$, υπάρχει ένα $\delta > 0$ ώστε $\mathsf{P}[\omega : w''(X^n(\omega, \delta)) \geq \varepsilon] \leq \eta$ για κάθε n. Μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα 9.4 ξεχωριστά για κάθε X^n στη θέση του γ, μιας και η X^n έχει δεξιά συνεχή μονοπάτια και μιας και $w''(X^n, \delta) = L(X^n, \delta)$. Έστω $T = [0,1]$ και $\mu(s,t] = F(t) - F(s)$. Η (9.21) για ε στη θέση του λ δίνει :

$$\mathsf{P}[w''(X^n, \delta) \geq \varepsilon] \leq \frac{2K \cdot \mu[0,1]}{\varepsilon^{4b}} \cdot \sup_{0 \leq t \leq 1-2\delta} \mu^{2a-1}[t, t+2\delta] =$$

$$= \frac{2K \cdot \mu[0,1]}{\varepsilon^{4b}} \cdot (w_F(2\delta))^{2a-1},$$

όπου η τελευταία ισότητα προέκυψε από το γεγονός ότι η F είναι αύξουσα και άρα $w_F(2\delta) = \sup_{0 \leq t \leq 1-2\delta}\{|F(t+2\delta) - F(t)|\}$. Τώρα επειδή η F είναι ομοιόμορφα συνεχής (ως συνεχής στο κλειστό $[0,1]$) ισχύει $\lim_{\delta \to 0} w_F(2\delta) = 0$ και άρα επειδή $a > 1/2$, μπορούμε να επιλέξουμε δ ώστε το δεξιό μέλος να είναι $< \eta$.

Ενότητα 12: Εφαρμογές

Σε αυτό το σημείο είμαστε έτοιμοι να δώσουμε μερικές σύντομες εφαρμογές των πραγμάτων που συζητήσαμε μέχρι τώρα. Η ταυτοτική απεικόνιση $i : C \to D$ είναι συνεχής, διότι η ομοιόμορφη σύγκλιση συνεπάγεται την σύγκλιση στην τοπολογία Skorohod, και έτσι είναι $\mathcal{C}\backslash\mathcal{D}$-μετρήσιμη. Αν W είναι το μέτρο Wiener στον $(C, \mathcal{C})$, τότε το $W \circ i^{-1}$ είναι ένα μέτρο στον $(D, \mathcal{D})$ και μπορούμε να δούμε ότι τα δύο αυτά μέτρα έχουν τις ίδιες πεπερασμένης διάστασης κατανομές. Σε αυτή την ενότητα θα συμβολίζουμε με W το μέτρο $W \circ i^{-1}$ για ευκολία στο συμβολισμό, όπως επίσης θα συμβολίζουμε και με W το τυχαίο στοιχείο του D που έχει σαν κατανομή του $W \circ i^{-1}$.

Το θεώρημα του Donsker στον χώρο D

Έστω $\xi_1, \xi_2, \ldots$ να είναι τυχαίες μεταβλητές σε κάποιον χώρο $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ με μερικά αθροίσματα $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$ και έστω $X^n(\omega)$ να είναι η συνάρτηση του D με τιμή στο t

$$X_t^n(\omega) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_{[nt]}(\omega) \tag{12.1}$$

Επειδή για κάθε t, η X_t^n είναι $\mathcal{F}\backslash\mathcal{R}$-μετρήσιμη, βλέπουμε ότι η X^n είναι μια ακολουθία τυχαίων στοιχείων του D. Η σχέση (12.1) είναι παρόμοια με τη σχέση (7.5).

Θεώρημα 12.1 : *Ας υποθέσουμε ότι η ακολουθία $\{\xi_n\}_n$ είναι ανεξάρτητη και ισόνομη με μέση τιμή 0 και διασπορά σ^2. Τότε για τις τυχαίες συναρτήσεις της σχέσης* (12.1) *ισχύει ότι $X^n \Rightarrow W$.*

Απόδειξη : Θα προσπαθήσουμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα 11.5. Η απόδειξη που κάναμε στην 7η ενότητα για το ότι $(X_{t_1}^n, \ldots, X_{t_k}^n) \Rightarrow_n (W_{t_1}, \ldots, W_{t_k})$ μπορεί να γίνει και εδώ ακολουθώντας ακριβώς τα ίδια βήματα. Επίσης $W_1 - W_{1-\delta} \Rightarrow_{\delta\to 0} 0$. Ο τελευταίος ισχυρισμός έπεται από το γεγονός ότι η $W_1 - W_{1-\delta} \sim N(0, \delta)$ και από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης μαζί με τη δεύτερη συνθήκη του θεωρήματος του Portmanteau. Άρα μένει να αποδείξουμε τη σχέση (11.13) ή καλύτερα τη σχέση (11.14). Λόγω ανεξαρτησίας, με απλές πράξεις μπορούμε να δούμε ότι :

$$E[|X_t^n - X_{t_1}^n|^2 |X_{t_2}^n - X_t^n|^2] = \frac{1}{n^2}([nt]-[nt_1])([nt_2]-[nt])$$
$$\leq \left(\frac{[nt_2]-[nt_1]}{n}\right)^2$$

για κάθε $t_1 \leq t \leq t_2$. Εαν $t_2 - t_1 \geq 1/n$, τότε η ποσότητα που βρίσκεται δεξιά της ανισότητας γίνεται το πολύ $4(t_2-t_1)^2$. Εαν $t_2 - t_1 < 1/n$, τότε προφανώς είτε τα t και t_1 είτε τα t και t_2 θα βρίσκονται στο ίδιο υποδιάστημα $[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n})$, οπότε σε κάθε περίπτωση η ποσότητα $\frac{1}{n^2}([nt]-[nt_1])([nt_2]-[nt])$ μηδενίζεται. Έτσι η σχέση (11.14) ισχύει για $a = b = 1$ και $F(t) = 2t$, όπως έπρεπε να δειχθεί.

Κυριαρχημένα Μέτρα

Στο θεώρημα 12.1 η ακολουθία $\{\xi_n\}_n$ ορίστηκε σε έναν χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$, αλλά θα μπορούσαμε να αντικαταστήσουμε το P με οποιοδήποτε άλλο μέτρο P_0 που είναι απολύτως συνεχές ώς προς το P, δηλαδή $\mathsf{P}_0 \ll \mathsf{P}$. Πριν αποδείξουμε το επόμενο θεώρημα, θα διατυπώσουμε και θα αποδείξουμε ένα Λήμμα που θα μας βοηθήσει :

Λήμμα (συνδυασμός ενδεχομένων κατά Renyi) : *Θα λέμε ότι τα ενδεχόμενα $A_1, A_2, \ldots \in (\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ συνδυάζονται κατά Renyi εαν ισχύει:*

(*) $$\mathsf{P}(A_n \cap E) \to a \cdot \mathsf{P}(E)$$

για όλα τα $E \in \mathcal{F}$. Τότε, για $E = \Omega$ προκύπτει $\mathsf{P}(A_n) \to a$. Έστω τώρα ότι $\mathcal{F}_0$ είναι μια σ-άλγεβρα με $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$ και έστω $\mathcal{F}_1 = \sigma(\mathcal{F}_0)$. Έστω επίσης ότι ισχύει η (*) για κάθε $E \in \mathcal{F}_0$ και ότι $A_n \in \mathcal{F}_1$ $\forall n$. Τότε

(**) $$\int_{A_n} g d\mathsf{P} \to a \cdot \int_{\Omega} g d\mathsf{P}$$

για κάθε g που είναι $\mathcal{F}$-μετρήσιμη και P-ολοκληρώσιμη. Ειδικά η (*) ισχύει για όλα τα $E \in \mathcal{F}$ και αν $\mathsf{P}_0 \ll \mathsf{P}$ τότε ισχύει και

(***) $$\mathsf{P}_0(A_n) \to a.$$

Απόδειξη : Μπορεί εύκολα να αποδειχθεί ότι η κλάση των $\mathcal{F}$-συνόλων E που ικανοποιούν την (*) είναι ένα λ-σύστημα και αφού, από την υπόθεση, περιέχει την $\mathcal{F}_0$ θα περιέχει και την $\mathcal{F}_1$. Έτσι η σχέση (**) ισχύει εαν η g είναι η δείκτρια ενός συνόλου της $\mathcal{F}_1$ και, λόγω γραμμικότητας, εαν η g είναι απλή, $\mathcal{F}_1$-μετρήσιμη συνάρτηση. Εαν η g είναι τυχούσα $\mathcal{F}_1$-μετρήσιμη και P-ολοκληρώσιμη, μπορούμε να διαλέξουμε μια ακολουθία $\{g_k\}$ από απλές και $\mathcal{F}_1$-μετρήσιμες με $|g_k| \leq g$ και $g_k \to g$. Προσθαφαιρώντας το g_k παίρνουμε :

$$\left|\int_{A_n} g d\mathsf{P} - a \cdot \int_{\Omega} g d\mathsf{P}\right| \leq \left|\int_{A_n} g_k d\mathsf{P} - a \cdot \int_{\Omega} g_k d\mathsf{P}\right| + (1+|a|) \cdot E[|g-g_k|]$$

Αφήνουμε πρώτα $n \to \infty$ και έπειτα $k \to \infty$ οπότε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης μας δίνει την (**) για οποιαδήποτε g που είναι $\mathcal{F}_1$-μετρήσιμη και P-ολοκληρώσιμη.

Αν υποθέσουμε τώρα ότι η g είναι $\mathcal{F}$-μετρήσιμη και P-ολοκληρώσιμη, μπορούμε απλά να χρησιμοποιήσουμε την δεσμευμένη μέση τιμή, $E[g\|\mathcal{F}_1]$, η οποία ικανοποιεί την (**) διότι είναι $\mathcal{F}_1$-μετρήσιμη και P-ολοκληρώσιμη. Έτσι επειδή τα $A_n \in \mathcal{F}_1$ έπεται :

$$\int_{A_n} g \; d\mathsf{P} = \int_{A_n} E[g\|\mathcal{F}_1] \; d\mathsf{P} \to a \cdot \int_{\Omega} E[g\|\mathcal{F}_1] \; d\mathsf{P} = a \cdot \int_{\Omega} g \; d\mathsf{P}$$

και έτσι η (**) πάλι ισχύει. Εαν $\mathsf{P}_0 \ll \mathsf{P}$, μπορούμε απο το θεώρημα Radon-Nikodym να επιλέξουμε $g = \frac{d\mathsf{P}_0}{d\mathsf{P}}$ και να αποδείξουμε άμεσα και την (***).

Προχωρούμε τώρα στο βασικό μας θεώρημα :

Θεώρημα 12.2 :*Το θεώρημα 12.1 παραμένει αληθές ακόμα κι αν το* P *αντικατασταθεί με ένα μέτρο* P_0 *απολύτως συνεχές ως προς το* P.

Απόδειξη : Ορίζουμε $\overline{X}^n$ ως :

$$\overline{X}_t^n(\omega) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{p_n \le i \le nt} \xi_i(\omega) \tag{12.2}$$

όπου p_n είναι μια ακολουθία ακεραίων που συγκλίνει στο άπειρο και ταυτόχρονα $\frac{p_n}{\sqrt{n}} \to 0$ ($\overline{X}_t^n(\omega) = 0$, εαν $t < \frac{p_n}{n}$). Αν $\sup_t \|X_t^n(\omega) - \overline{X}_t^n(\omega)\| = \|X^n(\omega) - \overline{X}^n(\omega)\|$, τότε παρατηρούμε ότι $\|X^n(\omega) - \overline{X}^n(\omega)\| \le \sum_{i=1}^{p_n} \frac{|\xi_i(\omega)|}{\sigma\sqrt{n}}$. Η ανισότητα του Chebyshev μαζί με την ανισότητα του Minkowski μας δίνουν ότι $\|X^n - \overline{X}^n\| \xrightarrow{p} 0$, δηλαδή ότι $\|X^n - \overline{X}^n\| \Rightarrow 0$ όπου οι συγκλίσεις νοούνται υπό την έννοια του μέτρου P. Έτσι

$$d(X^n, \overline{X}^n) \le \|X^n - \overline{X}^n\| \Rightarrow 0. \tag{12.3}$$

Λόγω του θεωρήματος 12.1 ισχύει

$$X^n \Rightarrow W \tag{12.4}$$

(πάλι φυσικά υπό την έννοια του P) και το θεώρημα 3.1 μας δίνει ότι

$$\overline{X}^n \Rightarrow W \tag{12.5}$$

Έστω τώρα A να είναι ένα σύνολο του D με $W(\partial A) = 0$ προσωρινά σταθεροποιημένο. Η σχέση (12.5) μας δίνει ότι $\mathsf{P}[\overline{X}^n \in A] \to W(A)$. Θεωρούμε τώρα την άλγεβρα $\mathcal{F}_0 = \{(\xi_1, \ldots, \xi_k)^{-1}(H) : k \in \mathbb{N}, H \in \mathbb{R}^k\}$. Λόγω ανεξαρτησίας των ξ_i και λόγω του γεγονότος ότι $p_n \to \infty$ έπεται ότι για μεγάλα n ισχύει $\mathsf{P}([\overline{X}^n \in A] \cap E) = \mathsf{P}[\overline{X}^n \in A] \cdot \mathsf{P}(E)$ και άρα

$$\mathsf{P}([\overline{X}^n \in A] \cap E) \to W(A) \cdot \mathsf{P}(E) \tag{12.6}$$

Αφού τα σύνολα $[\overline{X}^n \in A]$ ανήκουν στην $\sigma(\mathcal{F}_0)$, το προηγούμενο Λήμμα για $a = W(A)$ μας δίνει ότι $\mathsf{P}_0[\overline{X}^n \in A] \to W(A)$. Το A ήταν τυχόν W-continuity set και έτσι η (12.5) ισχύει και υπό την έννοια του P_0. Επειδή δείξαμε ότι $\mathsf{P}\{\omega : \|X^n(\omega) - \overline{X}^n(\omega)\| \geq \varepsilon\} \to 0$ για κάθε ε, και επειδή $\mathsf{P}_0 \ll \mathsf{P}$, λόγω του $\varepsilon - \delta$ ορισμού της απόλυτης συνέχειας για πεπερασμένα μέτρα παίρνουμε και ότι $\mathsf{P}_0\{\omega : \|X^n(\omega) - \overline{X}^n(\omega)\| \geq \varepsilon\} \to 0$ για κάθε $\varepsilon > 0$. Έτσι $d(X^n, \overline{X}^n) \Rightarrow 0$ υπό την έννοια του P_0, οπότε ξαναεφαρμόζουμε το θεώρημα 3.1 και παίρνουμε ότι $X^n \Rightarrow W$, αυτή τη φορά υπό την έννοια του P_0.

Εμπειρική Συνάρτηση Κατανομής

Εαν έχουμε n παρατηρήσεις στο $[0,1]$, $\xi_1(\omega), \ldots, \xi_n(\omega)$, τότε η εμπειρική συνάρτηση κατανομής τους ορίζεται σαν $F_n(t,\omega) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n I_{[0,t]}(\xi_i(\omega))$. Υποθέτουμε ότι οι ξ_n είναι ανεξάρτητες και ισόνομες με κοινή συνάρτηση κατανομής την F και θεωρούμε $Y^n(\omega)$ να είναι το τυχαίο στοιχείο του D με τιμή :

$$Y_t^n(\omega) = \sqrt{n}(F_n(t,\omega) - F(t)) \tag{12.7}$$

Επειδή κάθε Y_t^n είναι τυχαία μεταβλητή (ως προς ω), έπεται ότι πράγματι η Y^n είναι μια ακολουθία τυχαίων στοιχείων του D. Η στοχαστική ανέλιξη $[Y_t^n : 0 \leq t \leq 1]$ καλείται μερικές φορές εμπειρική ανέλιξη.

Θεώρημα 12.3 : *Έστω ότι οι $\xi_1, \xi_2, \ldots$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με συνάρτηση κατανομής F πάνω στο $[0,1]$. Τότε η ακολουθία Y^n όπως ορίστηκε προηγουμένως ικανοποιεί την $Y^n \Rightarrow Y$, όπου Y είναι το Γκαουσιανό τυχαίο στοιχείο του D που καθορίζεται από τις ροπές $E(Y_t) = 0$ και $E(Y_s \cdot Y_t) = F(s)(1 - F(t))$ για $s \leq t$.*

Απόδειξη : Το ότι υπάρχει μια τέτοια οριακή τυχαία συνάρτηση θα αποτελέσει μέρος της απόδειξης. Πρώτα αποδεικνύουμε το θεώρημα με την επιπλέον υπόθεση ότι $F(t) \equiv t$, οπότε η Y είναι η Brownian bridge, W°, με την φυσιολογική επέκταση από τον C στον D. Έστω $U_t^n(\omega)$ να είναι το πλήθος ανάμεσα στις $\xi_1(\omega), \ldots, \xi_n(\omega)$ που βρίσκεται μέσα στο $[0,t]$. Για $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = 1$, οι $U_{t_i}^n - U_{t_{i-1}}^n$ ακολουθούν πολυωνυμική κατανομή με παράμετρο $t_i - t_{i-1}$ και μπορεί να δειχθεί βάσει του κεντρικού οριακού θεωρήματος ότι οι πεπερασμένες διάστασης κατανομές της Y^n συγκλίνουν ασθενώς σε αυτές της W°. Από το θεώρημα 11.5 αρκεί να δείξουμε ότι

$$E[|Y_t^n - Y_{t_1}^n|^2 |Y_{t_2}^n - Y_t^n|^2] \leq 6(t - t_1)(t_2 - t) \leq 6(t_2 - t_1)^2 \tag{12.8}$$

για κάθε $t_1 \leq t \leq t_2$.

Έστω $p_1 = t - t_1$, $p_2 = t_2 - t$ και $p_3 = 1 - p_1 - p_2$. Για $1 \leq i \leq n$ ορίζουμε $a_i(\omega) = (1 - p_1) \cdot I_{(t_1,t]}(\xi_i(\omega)) - p_1 \cdot I_{(t_1,t]^c}(\xi_i(\omega))$ και αντιστοίχως $b_i(\omega) = (1 - p_2) \cdot I_{(t,t_2]}(\xi_i(\omega)) - p_2 \cdot I_{(t,t_2]^c}(\xi_i(\omega))$. Κάνοντας κάποιες πράξεις, η πρώτη ανισότητα της (12.8) είναι ισοδύναμη με το ότι

$$E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^2\right] \leq 6n^2 p_1 p_2 \tag{12.9}$$

Τώρα επειδή $E(a_i) = (1-p_1)\cdot(F(t)-F(t_1)) - p_1\cdot(1-F(t)+F(t_1)) = 0$, διότι $p_1 = t - t_1$ και επειδή για τον ίδιο λόγο $E(b_i) = 0$, έχουμε ότι η αριστερή μεριά της (12.9) ισούται με

$$n\cdot E[a_1^2 b_1^2] + n(n-1)\cdot E[a_1^2]E[b_2^2] + 2n(n-1)E[a_1 b_1]E[a_2 b_2]$$

Τώρα η (12.9) έπεται από το γεγονός ότι

$$\begin{cases} E(a_1^2 b_1^2) = p_1(1-p_1)^2 p_2^2 + p_2 p_1^2 (1-p_2)^2 + p_3 p_1^2 p_2^2 \leq 3p_1 p_2 \\ E[a_1^2]E[b_2^2] = p_1(1-p_1)p_2(1-p_2) \leq p_1 p_2 \\ E[a_1 b_1]E[a_2 b_2] = p_1^2 p_2^2 \leq p_1 p_2 \end{cases}$$

Έτσι αποδείχθηκε η περίπτωση της ομοιόμορφης κατανομής. Η "αντίστροφη" συνάρτηση $\phi(s) = \inf[t : s \leq F(t)]$ γνωρίζουμε απο τις Πιθανότητες ότι ικανοποιεί την $\phi(s) \leq t \iff s \leq F(t)$. Επίσης, εαν η ακολουθία $\{\eta_n\}_n$ είναι ισόνομη με ομοιόμορφη κατανομή στο $[0,1]$, τότε η $\{\phi(\eta_n)\}_n$ έχει συνάρτηση κατανομής την F και έτσι μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $\xi_n = \phi(\eta_n)$, όπου οι η_n είναι ανεξάρτητες και ομοιόμορφα κατανεμημένες.

Εαν $G_n(\cdot,\omega)$ είναι η εμπειρική κατανομή των $\eta_1(\omega),\ldots,\eta_n(\omega)$ και $Z_t^n(\omega) = \sqrt{n}[G_n(t,\omega) - t]$, τότε $Z^n \Rightarrow W^\circ$ από την περίπτωση που αποδείξαμε πριν λίγο. Αλλά εκ κατασκευής ισχύει και $F_n(t,\omega) = G_n(F(t),\omega)$ και έτσι για την Y^n της (12.7) ισχύει και $Y_t^n(\omega) = Z_{F(t)}^n(\omega)$. Ορίζουμε τώρα $\psi : D \to D$ με $(\psi x)(t) = x(F(t))$. Εαν $x_n \xrightarrow{d} x$ και $x \in C$ (όπου d είναι η μετρική Skorohod), τότε λόγω της σχέσης (10.14) θα ισχύει και ότι η x_n συγκλίνει ομοιόμορφα στην x, οπότε και η $\psi(x_n)$ θα συγκλίνει ομοιόμορφα στην $\psi(x)$ και άρα και ως προς την τοπολογία Skorohod. Επομένως αν $x \in C$, τότε η ψ είναι συνεχής στο x. Το γεγονός ότι $W^\circ(\omega) \in C$ για όλα τα ω μας δίνει ότι $\mathsf{P}\{\omega : W^\circ(\omega) \in D_\psi\} = 0$ και επομένως, κάνοντας χρήση του mapping theorem και του γεγονότος ότι $Z^n \Rightarrow W^\circ$, παίρνουμε ότι $Y^n = \psi(Z^n) \Rightarrow \psi(W^\circ)$. Επειδή τώρα το στοιχείο $\psi(W^\circ)$ είναι Γκαουσιανό και έχει τις ροπές και τις συνδιακυμάνσεις που απαιτεί το θεώρημα, η απόδειξη είναι πλήρης.

Ενότητα 13 : Ο χώρος $D[0,\infty)$

Σε αυτή την ενότητα κάνουμε την φυσιολογική επέκταση της θεωρίας του Skorohod στον χώρο $D_\infty = D[0,\infty)$ των cadlag συναρτήσεων με πεδίο ορισμού αυτή τη φορά το $[0,\infty)$. Ας θεωρήσουμε, για κάθε $t>0$, τον χώρο $D_t = D[0,t]$ των cadlag συναρτήσεων στο $[0,t]$. Για τους ορισμούς ισχύουν τα προφανή ανάλογα : $\|x\|_t = \sup_{s\le t}|x(s)|$, Λ_t, d_t, d_t°, $\|\lambda\|_t^\circ = \sup_{s<k\le t}|\ln\frac{\lambda(k)-\lambda(s)}{k-s}|$. Όλα τα θεωρήματα που αποδείξαμε για τον D_1 ισχύουν κατά προφανή τρόπο και στον D_t, ενώ ένα στοιχείο x του D_∞, ή ένα στοιχείο του D_u, μπορεί να θεωρηθεί κάλλιστα σαν στοιχείο του D_t, όπου $t<u$, απλώς περιορίζοντας το πεδίο ορισμού του. Εαν είναι ξεκάθαρο το πεδίο ορισμού που χρησιμοποιούμε κάθε φορά, θα συμβολίζουμε την εκ νέου cadlag συνάρτηση με το ίδιο γράμμα.

Κάποιος θα μπορούσε να ορίσει την σύγκλιση $x_n \to x$ στον D_∞ απαιτώντας $d_t^\circ(x_n,x)\to 0$ για κάθε $0<t<\infty$ (όπου προφανώς θα περιορίζουμε κάθε φορά τις x_n, x στο $[0,t]$). Σε μια φυσιολογική θεωρία θα θέλαμε η ακολουθία $x_n = I_{[0,1-1/n)}$ να συγκλίνει στην $x = I_{[0,1)}$, ενώ βλέπουμε εύκολα ότι $d_1^\circ(x_n,x)=1$. Το πρόβλημα δημιουργείται λόγω της ασυνέχειας της x στο 1, και συνεπώς ο ορισμός μας θα πρέπει να περιλαμβάνει και ασυνέχειες.

Λήμμα 1 : *Έστω $x_n, x \in D_u$. Εαν $d_u^\circ(x_n,x)\xrightarrow{n} 0$, εαν $m<u$ και αν η x είναι συνεχής στο m τότε $d_m^\circ(x_n,x)\xrightarrow{n} 0$.*

Απόδειξη : Λόγω ισοδυναμίας των μετρικών μπορούμε να δουλέψουμε με τις μετρικές d_u και d_m. Συνεπώς, υπάρχουν $\lambda_n\in\Lambda_u$ με $\|\lambda_n - I\|_u \xrightarrow{n} 0$ και $\|x_n - x\circ\lambda_n\|_u \xrightarrow{n} 0$. Λόγω συνέχειας της x στο σημείο m, για δοσμένο $\varepsilon>0$ μπορούμε να διαλέξουμε $\delta>0$ τέτοιο ώστε $|t-m|\le 2\delta \implies |x(t)-x(m)|<\varepsilon/2$. Τώρα διαλέγουμε $n_0\in\mathbb{N}$ ώστε αν $n\ge n_0$ και αν $t\le u$ να ισχύει $|\lambda_n(t)-t|<\delta$ και $|x_n(t)-x(\lambda_n(t))|<\varepsilon/2$. Έτσι, για $n\ge n_0$ και $|t-m|\le\delta$ παίρνουμε ότι $|\lambda_n(t)-m|\le|\lambda_n(t)-t|+|t-m|<2\delta$ και επομένως, $|x_n(t)-x(m)|\le |x_n(t)-x(\lambda_n(t))|+|x(\lambda_n(t))-x(m)|<\varepsilon$. Έτσι έχουμε τη σχέση :

$$\sup_{|t-m|\le\delta}\{|x(t)-x(m)|\}<\varepsilon,\ \sup_{|t-m|\le\delta}\{|x_n(t)-x(m)|\}<\varepsilon,\ \text{για } n\ge n_0. \tag{13.1}$$

Διακρίνουμε 3 περιπτώσεις : i) αν $\lambda_n(m)<m$ έστω $p_n = m-\frac{1}{n}$; ii) αν $\lambda_n(m)>m$ έστω $p_n=\lambda_n^{-1}(m-\frac{1}{n})$; iii) αν $\lambda_n(m)=m$ έστω $p_n=m$. Στην πρώτη περίπτωση είναι $|p_n-m|=\frac{1}{n}$, στη δεύτερη είναι $|p_n-m|\le|\lambda_n^{-1}(m-\frac{1}{n})-(m-\frac{1}{n})|+\frac{1}{n}$ και στην τρίτη περίπτωση $p_n=m$. Επειδή $|\lambda_n^{-1}(m-\frac{1}{n})-(m-\frac{1}{n})|\le\|\lambda_n^{-1}-I\|_u\to 0$, έπεται και στις 3 περιπτώσεις ότι $p_n\to m$. Επειδή

$|\lambda_n(p_n) - m| \leq |\lambda_n(p_n) - p_n| + |p_n - m| \leq \|\lambda_n - I\|_u + |p_n - m| \to 0$ προκύπτει ότι $\lambda_n(p_n) \xrightarrow{n} m$. Θα προσπαθήσουμε να κατασκευάσουμε μια ακολουθία $\{\mu_n\}_n \in \Lambda_m$ ώστε $\|\mu_n - I\|_m \xrightarrow{n} 0$ και $\|x_n - x \circ \mu_n\| \xrightarrow{n} 0$. Ορίζουμε την μ_n να συμφωνεί με την λ_n στο διάστημα $[0, p_n]$, δηλαδή $\mu_n(t) = \lambda_n(t)$ αν $t \in [0, p_n]$. Έπειτα ορίζουμε $\mu_n(m) = m$ και επεκτείνουμε γραμμικά στο $[p_n, m]$. Εφόσον $\mu_n(m) = m$ και η μ_n είναι γραμμική στο $[p_n, m]$ έπεται ότι $|\mu_n(t) - t| \leq |\mu_n(p_n) - p_n| = |\lambda_n(p_n) - p_n| \leq \|\lambda_n - I\|_u \to 0$ όταν $t \in [p_n, m]$, και από την ομοιόμορφη σύγκλιση της λ_n στο υπόλοιπο διάστημα $[0, p_n]$ έπεται τελικά ότι $\mu_n(t) \to t$ ομοιόμορφα στο $[0, m]$. Αφού $p_n \to m$ και $\lambda_n(p_n) \to m$ αυξάνουμε τον n_0 της (13.1) σε έναν n_1 ώστε αν $n \geq n_1$ να έπεται ότι $p_n > m - \delta$ και $\lambda_n(p_n) > m - \delta$. Εαν $t \leq p_n$ τότε $|x_n(t) - x(\mu_n(t))| = |x_n(t) - x(\lambda_n(t))| \leq \|x_n - x \circ \lambda_n\|_u$. Αν $p_n \leq t \leq m$ και αν $n \geq n_1$ τότε $m \geq t \geq p_n > m - \delta$ και λόγω μονοτονίας της $\{\mu_n\}$ είναι και $m \geq \mu_n(t) \geq \mu_n(p_n) = \lambda_n(p_n) > m - \delta$, δηλαδή $|m - \mu_n(t)| \leq \delta$ και $|t - m| \leq \delta$ οπότε η (13.1) δίνει : $|x_n(t) - x(\mu_n(t))| \leq |x_n(t) - x(m)| + |x(m) - x(\mu_n(t))| < 2\varepsilon$. Άρα $|x_n(t) - x(\mu_n(t))| \to 0$, ομοιόμορφα στο $[0, m]$ όπως έπρεπε να δειχθεί.

Η μετρική του χώρου D_∞ θα οριστεί με βάση τις μετρικές $d_m^\circ(x, y)$ για **ακέραιο** m (παρόλο που το Λήμμα δεν απαιτούσε ακεραίους), αλλά πριν περιορίσουμε τις x, y στο $[0, m]$ θα κάνουμε έναν μετασχηματισμό ώστε να τις κάνουμε συνεχείς στο σημείο m. Ορίζουμε

$$g_m(t) = \begin{cases} 1, & \text{αν } t \leq m - 1 \\ m - t, & \text{αν } m - 1 \leq t \leq m \\ 0, & \text{αν } t \geq m \end{cases} \tag{13.2}$$

Για τυχόν $x \in D_\infty$, έστω x^m να είναι το στοιχείο του D_∞ που ορίζεται μέσω της

$$x^m(t) = g_m(t)x(t), \quad t \geq 0. \tag{13.3}$$

Είνα άμεσο ότι $x^m(m+) = x^m(m-) = 0$ και $x^m(t) = x(t)$ για $t \leq m - 1$. Τώρα ορίζουμε

$$d_\infty^\circ(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} \cdot (1 \wedge d_m^\circ(x^m, y^m)) \tag{13.4}$$

(και προφανώς τα στοιχεία x^m, y^m είναι περιορισμένα στο $[0, m]$ αλλά βάζουμε το ίδιο σύμβολο). Αν $d_\infty^\circ = 0$ τότε $d_m^\circ(x^m, y^m) = 0$, $\forall m$ και άρα $x = y$. Οι άλλες ιδιότητες της μετρικής είναι απλές να δειχθούν και συνεπώς η d_∞° είναι μια μετρική στον D_∞ που ορίζει την τοπολογία Skorohod εκεί. Αν αντί για d_m° βάζαμε την d_m θα προέκυπτε η μετρική d_∞ που θα ήταν ισοδύναμη της d_∞°.

Ιδιότητες της μετρικής

Έστω Λ_∞ να είναι το σύνολο όλων των συνεχών και αυξουσών συναρτήσεων από το $[0, \infty)$ επί του $[0, \infty)$ (επειδή είναι επί και αύξουσες, θα πρέπει $\lambda(0) = 0$).

Θεώρημα 13.1 : *Έχουμε σύγκλιση $d^\circ_\infty(x_n,x) \to 0$ στον D_∞ αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία $\lambda_n \in \Lambda_\infty$ ώστε*

$$\sup_{t<\infty} |\lambda_n(t) - t| \to 0 \tag{13.5}$$

και για κάθε $m > 0$ να ισχύει

$$\sup_{t\le m} |x_n(\lambda_n(t)) - x(t)| \to 0. \tag{13.6}$$

Απόδειξη : Ας υποθέσουμε ότι $d^\circ_\infty(x_n,x) \to 0$ ή, ισοδύναμα, ότι $d_\infty(x_n,x) \to 0$. Τότε για κάθε $m \in \mathbb{Z}^+$ υπάρχουν ακολουθίες $\{\lambda_n^m\}_n \in \Lambda_m$ ώστε

$$\varepsilon_n^m = \|I - \lambda_n^m\|_m \vee \|x_n^m \circ \lambda_n^m - x^m\|_m \xrightarrow{n} 0.$$

Επομένως για κάθε m, υπάρχει $l_m \in \mathbb{N}$ ώστε $n \ge l_m \implies \varepsilon_n^m < 1/m$. Επιλέγουμε τους αριθμούς κατάλληλα ώστε $l_m < l_{m+1}$ και για $l_m \le n < l_{m+1}$ ορίζουμε $m_n = m$. Εφόσον $l_{m_n} \le n < l_{m_n+1}$, έχουμε $m_n \xrightarrow{n} \infty$ και $\varepsilon_n^{m_n} < \frac{1}{m_n}$. Ορίζουμε

$$\lambda_n(t) = \begin{cases} \lambda_n^{m_n}(t) & \text{αν } t \le m_n \\ t + \lambda_n^{m_n}(m_n) - m_n & \text{αν } t \ge m_n \end{cases}$$

Τότε για $t \ge m_n$ παίρνουμε ότι $|\lambda_n(t) - t| = |\lambda_n^{m_n}(m_n) - m_n| \le \|I - \lambda_n^{m_n}\|_{m_n} \le \varepsilon_n^{m_n} < \frac{1}{m_n}$ και για $t \le m_n$, ομοίως, ότι $|\lambda_n(t) - t| = |\lambda_n^{m_n}(t) - t| \le \|I - \lambda_n^{m_n}\|_{m_n} < \frac{1}{m_n}$. Άρα $\sup_t |\lambda_n(t) - t| \le \frac{1}{m_n} \to 0$, δηλαδή την (13.5).

Έστω τώρα c σταθερό. Επειδή $m_n \to \infty$, για n αρκετά μεγάλο θα έχουμε $c < m_n - 1$ επομένως αν $t \le c$ τότε $t < m_n - 1$. Λόγω της σχέσης (13.3) και των σχολίων που κάναμε ακριβώς από κάτω της, ισχύει $\|x_n \circ \lambda_n - x\|_c = \|x_n \circ \lambda_n^{m_n} - x\|_c = \|x_n^{m_n} \circ \lambda_n^{m_n} - x^{m_n}\|_c \le \varepsilon_n^{m_n} < \frac{1}{m_n} \to 0$, δηλαδή την σχέση (13.6).

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι ισχύουν οι (13.5) και (13.6) και έστω ένας $m \in \mathbb{N}$ σταθερός. Θα δείξουμε αρχικά ότι

$$x_n^m(\lambda_n(t)) = g_m(\lambda_n(t)) \cdot x_n(\lambda_n(t)) \xrightarrow{n} g_m(t) \cdot x(t) = x^m(t) \tag{13.7}$$

ομοιόμορφα στο $[0,m]$. Πράγματι, λαμβάνοντας υπόψιν ότι η g_m είναι συνεχής και $|g_m(s)| \le 1, \forall s$, είναι $|g_m(\lambda_n(t)) \cdot x_n(\lambda_n(t)) - g_m(t) \cdot x(t)| \le |g_m(\lambda_n(t)) \cdot x_n(\lambda_n(t)) - g_m(\lambda_n(t)) \cdot x(t)| + |g_m(\lambda_n(t)) \cdot x(t) - g_m(t) \cdot x(t)| \le \|x_n \circ \lambda_n - x\|_m + |x(t)| \cdot w_{g_m}(\|\lambda_n - I\|) \to 0$, λόγω της υπόθεσης και του ότι η g_m είναι συνεχής και άρα $\lim_{\delta\to 0} w_{g_m}(\delta) = 0$. Τώρα, ορίζουμε τα p_n και μ_n όπως στην απόδειξη του Λήμματος 1 και όπως πριν έπεται $\mu_n(t) \to t$ ομοιόμορφα στο $[0,m]$. Για $t \le p_n$, $|x^m(t) - x_n^m(\mu_n(t))| = |x^m(t) - x_n^m(\lambda_n(t))| \to 0$ ομοιόμορφα λόγω της (13.7). Για $p_n \le t \le m$, πρώτα βλέπουμε ότι $|x^m(u)| \le g_m(u) \cdot \|x\|_m, \forall u \ge 0$ και άρα

$$|x^m(t) - x_n^m(\mu_n(t))| \le g_m(t)\|x\|_m + g_m(\mu_n(t))\|x_n\|_m. \tag{13.8}$$

Τώρα η σχέση (13.5) μας δίνει ότι $|\lambda_n(2m) - 2m| \le \sup_t |\lambda_n(t) - t| \to 0$, επομένως $\lambda_n(2m) \xrightarrow{n} 2m$, δηλαδή για μεγάλα n θα είναι $\lambda_n(2m) > m$ και έτσι λαμβάνοντας υπόψιν και τη μονοτονία των λ_n έπεται $\|x_n\|_m \leq \|x_n \circ \lambda_n\|_{2m}$. Από την (13.6) έπεται και $|\ \|x_n \circ \lambda_n\|_{2m} - \|x\|_{2m}| \leq \|x_n \circ \lambda_n - x\|_{2m} \xrightarrow{n} 0$, πράγμα που σημαίνει ότι η ακολουθία $\{\|x_n\|_m\}_n$ είναι φραγμένη (το m είναι σταθερό). Επειδή $p_n \leq m$, $p_n \to m$ και $\mu_n \to I$ ομοιόμορφα στο $[0,m]$, παίρνουμε ότι $\mu_n(p_n) \to m$. Έτσι για δοθέν $\varepsilon > 0$ μπορούμε να διαλέξουμε έναν n_0 ώστε $n \geq n_0 \implies p_n, \mu_n(p_n) \in (m-\varepsilon, m]$, ένα διάστημα στο οποίο η g_m φράσσεται από το ε (δες και (13.2)). Αν $n \geq n_0$ και $p_n \leq t \leq m$, τότε λόγω μονοτονίας της μ_n ($\mu_n \in \Lambda_m$) έχουμε ότι τα t και $\mu_n(t)$ ανήκουν και τα δύο στο $(m-\varepsilon, m]$ και η (13.8) δίνει ότι $|x^m(t) - x_n^m(\mu_n(t))| \leq \varepsilon(\|x\|_m + \|x_n\|_m)$. Αφού η $\{\|x_n\|_m\}_n$ είναι φραγμένη, αυτό σημαίνει ότι $|x^m(t) - x_n^m(\mu_n(t))| \to 0$, ομοιόμορφα στο $[p_n, m]$ όπως και στο $[0, p_n]$ από πριν. Συνεπώς $d_m(x_n^m, x^m) \xrightarrow{n} 0$ για το τυχόν m, και τελικά $d_\infty(x_n, x) \to 0$, όπως έπρεπε να δειχθεί.

Δίνουμε έναν δεύτερο χαρακτηρισμό της σύγκλισης στον D_∞ :

Θεώρημα 13.2 : *Έχουμε σύγκλιση $d_\infty^\circ(x_n, x) \to 0$ στον D_∞ αν και μόνο αν $d_t^\circ(x_n, x) \to 0$ για κάθε σημείο συνεχείας t της x.*

Απόδειξη : Έστω $d_\infty^\circ(x_n, x) \to 0$. Τότε $d_m^\circ(x_n^m, x^m) \xrightarrow{n} 0$, για κάθε m. Αν t: σημείο συνέχειας της x, έστω σταθερός $m \in \mathbb{N}$ με $t < m-1$. Επειδή οι συναρτήσεις x_n, x_n^m και x, x^m ταυτίζονται στο $[0,t]$, το Λήμμα 1 (με τα t, m στη θέση των m, u) μας δίνει ότι $d_t^\circ(x_n, x) = d_t^\circ(x_n^m, x^m) \xrightarrow{n} 0$.

Για το αντίστροφο, εφόσον η x έχει αριθμήσιμες το πολύ ασυνέχειες,διαλέγουμε σημεία συνεχείας t_m ώστε $t_m \nearrow \infty$. Εξ υποθέσεως, $d_{t_m}(x_n, x) \to 0$ για κάθε m, άρα για κάθε m διαλέγουμε $\{\lambda_n^m\}_n \in \Lambda_{t_m}$ ώστε

$$\varepsilon_n^m = \|\lambda_n^m - I\|_{t_m} \vee \|x_n \circ \lambda_n^m - x\|_{t_m} \xrightarrow{n} 0.$$

Όπως και στο προηγούμενο θεώρημα, ορίζουμε φυσικούς αριθμούς m_n ώστε $m_n \to \infty$ και $\varepsilon_n^{m_n} < \frac{1}{m_n}$ και έπειτα ορίζουμε $\lambda_n \in \Lambda_\infty$ ως :

$$\lambda_n(t) = \begin{cases} \lambda_n^{m_n}(t) & \text{αν } t \leq t_{m_n} \\ t & \text{αν } t \geq t_{m_n} \end{cases}$$

Είναι άμεσο τώρα ότι $|\lambda_n(t) - t| \leq \frac{1}{m_n}$ για όλα τα t, ενώ αν $c < t_{m_n}$ τότε $\|x_n \circ \lambda_n - x\|_c = \|x_n \circ \lambda_n^{m_n} - x\|_c \leq \varepsilon_n^{m_n} \leq \frac{1}{m_n} \to 0$. Έτσι ισχύουν οι (13.5) και (13.6) δηλαδή $d_\infty^\circ(x_n, x) \to 0$.

Διαχωρισιμότητα και Πληρότητα

Για $x \in D_\infty$ ορίζουμε $\psi_m(x) = x^m$ περιορισμένη στο $[0,m]$. Λόγω του γεγονότος ότι $d_m^\circ(\psi_m(x_n), \psi_m(x)) = d_m^\circ(x_n^m, x^m)$, έπεται η συνέχεια της ψ_m : $D_\infty \to D_m$. Στον χώρο γινόμενο $\Pi = D_1 \times D_2 \times \ldots$, ορίζουμε την μετρική $\rho(a,b) = \sum_{m=1}^\infty \frac{1}{2^m} \cdot (1 \wedge d_m^\circ(a_m, b_m))$, η οποία ορίζει την τοπολογία γινόμενο, αυτήν της σύγκλισης κατά συντεταγμένη (δηλαδή $a^m \xrightarrow{\rho} a \iff a_n^m \xrightarrow[m]{d_n^\circ} a_n\ \forall n$

). Τώρα ορίζουμε την απεικόνιση $\psi : D_\infty \to \Pi$ με $\psi(x) = (\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots)$ και βλέπουμε ότι $d^\circ_\infty(x,y) = \rho(\psi(x), \psi(y))$, δηλαδή η ψ είναι ισομετρία από τον D_∞ στον Π.

Λήμμα 2 : *Η εικόνα $\psi(D_\infty)$ είναι κλειστή στον Π* .

Απόδειξη : Έστω ακολουθία $\{x_n\}_n \in D_\infty$ και $a \in \Pi$ ώστε $\rho(\psi(x_n), a) \to 0$. Αυτό σημαίνει ότι $d^\circ_m(\psi_m(x_n), a_m) = d^\circ_m(x_n^m, a_m) \xrightarrow{n} 0,\ \forall m = 1, 2, \ldots$. Θα πρέπει να βρούμε ένα $x \in D_\infty$ με $a = \psi(x)$.

Κάθε a_m έχει το πολύ αριθμήσιμες ασυνέχειες στο $[0,m]$ (ως cadlag) και συνεπώς μπορούμε να θεωρήσουμε σαν T να είναι το σύνολο όλων των t για τα οποία κάθε a_m είναι συνεχής στο $T \cap [0,m]$. Αφού $d^\circ_m(x_n^m, a_m) \xrightarrow{n} 0$, το Λήμμα 1, το γεγονός ότι η Skorohod σύγκλιση συνεπάγεται την κατά σημείο σύγκλιση εκεί όπου η οριακή είναι συνεχής και το γεγονός ότι η a_m είναι συνεχής στο T, μας δίνουν την συνεπαγωγή $t \in T \cap [0,m] \implies x_n^m(t) = g_m(t)x_n(t) \xrightarrow{n} a_m(t)$. Άρα για κάθε $t \in T$, το όριο $x(t) = \lim_n x_n(t)$ υπάρχει (θεώρησε έναν m μεγάλο ώστε $m > t+1$, οπότε $g_m(t) = 1$). Τώρα, είναι $g_m(t)x(t) = a_m(t)$ στο $T \cap [0,m]$ και επομένως στο $T \cap [0, m-1]$ θα είναι $x(t) = a_m(t)$ (επειδή εκεί η $g_m(t) = 1$). Δηλαδή η x ισούται με μια cadlag συνάρτηση σε κάθε διάστημα $[0, m-1]$ και συνεπώς μπορεί να επεκταθεί σε μια cadlag σε όλο το $[0,\infty)$. Λόγω δεξιάς συνέχειας και πυκνότητας του T έπεται ότι $g_m(t)x(t) = a_m(t)$ σε όλο το $[0,m]$ και άρα $\psi_m(x) = x^m = a_m\ \ \forall m$, δηλαδή $a = \psi(x)$.

Θεώρημα 13.3 : *Ο χώρος D_∞ είναι διαχωρίσιμος και πλήρης.*

Απόδειξη : Κάθε D_i είναι διαχωρίσιμος και πλήρης, όπως είδαμε στην προηγούμενη ενότητα, και συνεπώς ο ίδιος ο Π είναι διαχωρίσιμος και πλήρης, ως καρτεσιανό γινόμενο διαχωρίσιμων και πλήρων. Το ίδιο ισχύει λοιπόν και με τον κλειστό υπόχωρο $\psi(D_\infty)$ και άρα και με την ισομετρική εικόνα $D_\infty = \psi^{-1}(\psi(D_\infty))$.

Συμπάγεια

Θεώρημα 13.4 : *Ένα σύνολο A είναι σχετικά συμπαγές στον D_∞ αν και μόνο αν, για κάθε m, το σύνολο $\psi_m(A)$ είναι σχετικά συμπαγές στον D_m.*

Απόδειξη : Εαν το A είναι σχετικά συμπαγές τότε το $\overline{A}$ είναι συμπαγές και επειδή η $\psi_m : D_\infty \to D_m$ είναι συνεχής το $\psi_m(\overline{A})$ είναι συμπαγές (και άρα και κλειστό). Όμως $\overline{\psi_m(A)} \subseteq \overline{\psi_m(\overline{A})}$ και επειδή το τελευταίο σύνολο είναι κλειστό, θα ισχύει και $\overline{\psi_m(A)} \subseteq \psi_m(\overline{A})$ άρα το $\overline{\psi_m(A)}$ είναι συμπαγές, ως κλειστό υποσύνολο συμπαγούς, δηλαδή το $\psi_m(A)$ είναι σχετικά συμπαγές.

Αντιστρόφως, εαν κάθε $\overline{\psi_m(A)}$ είναι συμπαγές, τότε και το σύνολο $B = \overline{\psi_1(A)} \times \overline{\psi_2(A)} \times \ldots$ είναι συμπαγές, οπότε, λόγω του Λήμματος 2, το $E = B \cap \psi(D_\infty)$ είναι συμπαγές στον Π, ως κλειστό υποσύνολο συμπαγούς. Επομένως, λόγω πληρότητας του Π το σύνολο E είναι και ολικά φραγμένο. Αν $x \in A$, τότε $\psi_m(x) \in \overline{\psi_m(A)}$ $\forall m$ και συνεπώς $\psi(x) \in B$ άρα $\psi(A) \subseteq E$. Αφού είπαμε πως το E είναι ολικά φραγμένο, το $\psi(A)$ θα είναι κι αυτό ολικά φραγμένο υποσύνολο του Π δηλαδή, λόγω ισομετρίας, και το A. Άρα το $\overline{A}$ είναι κι αυτό ολικά φραγμένο και πλήρες (ως κλειστό υποσύνολο του πλήρους D_∞), δηλαδή συμπαγές.

Θα προσπαθήσουμε τώρα να προσαρμόσουμε στον χώρο D_∞ την ποσότητα (10.6). Για μια $x \in D_m$ (ή για μια $x \in D_\infty$ περιορισμένη στο $[0,m]$) ορίζουμε

(13.9) $$w'_m(x,\delta) = \inf \max_{1\leq i\leq v}\{w(x,[t_{i-1},t_i)\}$$

όπου το infimum εκτείνεται πάνω σε όλες τις διαμερίσεις $[t_{i-1},t_i)$ του $[0,m]$, $1 \leq i \leq v$ με $t_i - t_{i-1} > \delta$ για όλα τα $1 \leq i < v$. Αυτή τη φορά δεν απαιτούμε να ισχύει η ανισότητα και για $i = v$, μιας και οι ακέραιοι m δεν θέλουμε να παίζουν σημαντικό ρόλο στη θεωρία του D_∞.

Ας θεωρήσουμε, επιπροσθέτως, και το ακριβές ανάλογο της (10.6), δηλαδή τη σχέση (13.9) με την επιπλέον υπόθεση ότι το infimum εκτείνεται σε όλες τις διαμερίσεις που ικανοποιούν και την $t_v - t_{v-1} > \delta$ και ας το συμβολίσουμε με $\overline{w}_m(x,\delta)$. Επεκτείνοντας φυσιολογικά το θεώρημα (10.3), ένα σύνολο $B \in D_m$ είναι σχετικά συμπαγές αν και μόνο αν $\sup_{x\in B}\|x\|_m < \infty$ και $\lim_\delta \sup_{x\in B}\overline{w}_m(x,\delta) = 0$. Για $A \subseteq D_\infty$ και για $\psi_m(A)$ στη θέση του B, το θεώρημα (13.4) μας δίνει ότι το A είναι σχετικά συμπαγές αν και μόνο αν για κάθε m ισχύουν (επειδή $x^m = \psi_m(x)$) :

(13.10) $$\sup_{x\in A}\|x^m\|_m < \infty$$

και

(13.11) $$\lim_{\delta\to 0}\sup_{x\in A}\overline{w}_m(x^m,\delta) = 0.$$

Θα δείξουμε ότι οι σχέσεις (13.10)+(13.11) είναι μαζί ισοδύναμες με το ότι για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ισχύει:

(13.12) $$\sup_{x\in A}\|x\|_m < \infty$$

και

(13.13) $$\lim_{\delta\to 0}\sup_{x\in A} w'_m(x^m,\delta) = 0.$$

Η ισοδυναμία των (13.10) και (13.12) είναι άμεση λόγω των ανισοτήτων $\|x^m\|_m \leq \|x\|_m \leq \|x^{m+1}\|_{m+1}$. Επίσης η συνεπαγωγή (13.11) $\Longrightarrow$ (13.13) είναι άμεση επειδή $w'_m(x^m,\delta) \leq \overline{w}_m(x^m,\delta)$. Έστω τώρα ότι ισχύουν μαζί οι (13.12) και (13.13) και έστω K_m να είναι το supremum της (13.12). Για μια $x \in A$ και για $\delta < 1$, λόγω του ορισμού της x^m έπεται ότι $|x^m(t)| \leq K_m \cdot \delta$, όταν $m - \delta \leq t < m$. Για τυχόν $\varepsilon > 0$ διαλέγουμε ένα δ αρκετά μικρό ώστε $K_m\delta < \varepsilon/4$ και $\sup_{x\in A} w'_m(x^m,\delta) < \varepsilon/2$. Εαν $x \in A$, υπάρχει μια διαμέριση $[t^{(x)}_{i-1}, t^{(x)}_i)$, με $i = 1,\ldots,v$ του $[0,m)$ (που εξαρτάται προφανώς από το εκάστοτε x) για την οποία $t_i^{(x)} - t_{i-1}^{(x)} > \delta$ για όλα τα $i = 1, \ldots, v-1$ και $w(x^m, [t_{i-1}^{(x)}, t_i^{(x)})) < \varepsilon/2$ για όλα τα $i = 1, \ldots, v$. Εαν $m - \delta \in [t_{v-1}^{(x)}, m)$, τότε κρατώντας την ίδια διαμέριση έπεται ότι $\overline{w}_m(x^m, \delta) < \varepsilon/2$. Εαν $m - \delta \in [t_{v-2}^{(x)}, t_{v-1}^{(x)})$ τότε αντικαθιστούμε τα δυο τελευταία υποδιαστήματα με το $[t_{v-2}^{(x)}, m)$, και για την εκ νέου διαμέριση ισχύει ότι $\tilde{t}_k - \tilde{t}_{k-1} > \delta$ για όλα τα k. Επίσης εαν $t \in [t_{v-2}^{(x)}, m-\delta)$ και $s \in [m-\delta, m)$ τότε $|x^m(t) - x^m(s)| \leq |x^m(t) - x^m(m-\delta)| + |x^m(m-\delta) - x^m(s)| \leq w(x^m, [t_{v-2}^{(x)}, t_{v-1}^{(x)})) + 2K_m\delta < 2\varepsilon/2 = \varepsilon$. Σε όλες τις περιπτώσεις λοιπόν ισχύει ότι $\overline{w}_m(x^m, \delta) < \varepsilon$, όπως έπρεπε να δειχθεί. Έτσι έχουμε το επόμενο θεώρημα :

Θεώρημα 13.5 : *Ενα σύνολο $A \in D_\infty$ είναι σχετικά συμπαγές αν και μόνο αν ισχύουν οι (13.12) και (13.13) για όλα τα $m \in \mathbb{N}$.*

Finite-Dimensional Sets

Έστω $\mathcal{D}_m$ και $\mathcal{D}_\infty$ να είναι οι Borel σ-άλγεβρες των D_m και D_∞ κάτω από τις μετρικές d_m° και d_∞° αντιστοίχως και έστω επίσης οι προβολές $\pi_{t_1 \ldots t_k} : D_\infty \to \mathbb{R}^k$ ($t_i \geq 0$) και $\pi_{t_1 \ldots t_k}^m : D_m \to \mathbb{R}^k$ ($0 \leq t_i \leq m$). Από το θεώρημα 10.5 έπεται ότι κάθε π_t^m είναι $\mathcal{D}_m \backslash \mathcal{R}$-μετρήσιμη και, λόγω συνέχειας, η ψ_m είναι $\mathcal{D}_\infty \backslash \mathcal{D}_m$-μετρήσιμη. Όμως $\pi_t = \pi_t^m \circ \psi_m$ όταν $t \leq m-1$ και έτσι κάθε π_t είναι $\mathcal{D}_\infty \backslash \mathcal{R}$-μετρήσιμη και κάθε $\pi_{t_1 \ldots t_k}$ είναι $\mathcal{D}_\infty \backslash \mathcal{R}^k$-μετρήσιμη. Με τα ίδια επιχειρήματα όπως και στη σχέση (10.37), μπορούμε να δούμε ότι η π_0 είναι παντού συνεχής και ότι, αν $t > 0$, η π_t είναι συνεχής στο x αν και μόνο αν η x είναι συνεχής στο t.

Για $T \subseteq [0,\infty)$ ορίζουμε την $\sigma[\pi_t : t \in T]$ με τον γνωστό τρόπο και έστω $p[\pi_t : t \in T] = \{\pi_{t_1 \ldots t_k}^{-1}(H) : k \in \mathbb{N},\ t_i \in T,\ H \in \mathcal{R}^k\}$ να είναι το π-σύστημα που περιέχει όλα τα finite-dimensional sets που βασίζονται σε δείκτες του T.

Θεώρημα 13.6 : i) *Η προβολή π_0 είναι συνεχής και , αν $t > 0$, η π_t είναι συνεχής στο x αν και μόνο αν η x είναι συνεχής στο t.*
ii) *Κάθε π_t είναι $\mathcal{D}_\infty \backslash \mathcal{R}$-μετρήσιμη και κάθε $\pi_{t_1 \ldots t_k}$ είναι $\mathcal{D}_\infty \backslash \mathcal{R}^k$-μετρήσιμη.*
iii) *Αν το T είναι πυκνό στο $[0,\infty)$, τότε $\mathcal{D}_\infty = \sigma[\pi_t : t \in T]$ και το $p[\pi_t : t \in T]$ είναι μια διαχωριστική κλάση.*

Απόδειξη : Θα αποδείξουμε μόνο το iii), δηλαδή αρκεί να δειχθεί ότι

$$\mathcal{D}_\infty \subseteq \sigma[\pi_t : t \in T] \tag{13.14}$$

οπότε αφού η $\mathcal{D}_\infty$ θα παράγεται και από το $p[\pi_t : t \in T]$, θα έπεται και το ότι το τελευταίο είναι μια διαχωριστική κλάση. Εφαρμόζοντας το θεώρημα (10.5) στην πεπερασμένη περίπτωση για το σύνολο $T_m = (T \cap [0,m]) \cup m$ έπεται η

$$\mathcal{D}_m = \sigma[\pi_t^m : t \in T_m] \tag{13.15}$$

Αν $t \leq m$ (και $t \in T$)τότε

$$\psi_m^{-1}((\pi_t^m)^{-1}(H)) = [x \in D_\infty : \pi_t^m(x^m) \in H] = [x : g_m(t)\pi_t(x) \in H] \tag{13.16}$$

Αν $t = m$, επειδή $g_m(m) = 0$, το τελευταίο σύνολο είναι είτε το $\emptyset$ είτε το D_∞ ανάλογα με το αν $0 \in H$ ή $0 \notin H$ και σε κάθε περίπτωση ανήκει στην $\sigma[\pi_t : t \in T]$. Εαν $t < m$, τότε η (13.16) ισούται με $[x : \pi_t(x) \in \frac{1}{g_m(t)} \cdot H]$ και αυτό ανήκει επίσης στην $\sigma[\pi_t : t \in T]$ (διότι αν $H \in \mathcal{R}$ τότε $c \cdot H \in \mathcal{R}$ για κάθε $c \in \mathbb{R}$). Συνεπώς, όταν $A = (\pi_t^m)^{-1}(H)$ και $t \in T_m$, τότε $\psi_m^{-1}(A) \in \sigma[\pi_t : t \in T]$. Λόγω της (13.15), τα σύνολα A που έχουν αυτή τη μορφή παράγουν την $\mathcal{D}_m$ και έτσι η ψ_m είναι $\sigma[\pi_t : t \in T]\backslash\mathcal{D}_m$-μετρήσιμη.

Τώρα, βλέπουμε ότι για κάθε $a \in D_m$ η συνάρτηση $d_m^\circ(\cdot, a)$ είναι $\mathcal{D}_m\backslash\mathcal{R}$-μετρήσιμη, ως συνεχής (γενικά για μια μετρική ρ είναι γνωστό ότι αν $x_n \xrightarrow{\rho} y$ τότε $\rho(x_n, a) \to \rho(y, a)$). Έτσι, η σύνθεση $d_m^\circ(\psi_m(\cdot), a)$ είναι $\sigma[\pi_t : t \in T]\backslash\mathcal{R}$-μετρήσιμη, ενώ για τον ίδιο λόγο με πριν, για κάθε $y \in D_\infty$, η $d_\infty^\circ(\cdot, y) = \sum_m \frac{1}{2^m}(1 \wedge d_m^\circ(\psi_m(\cdot), \psi_m(y)))$ είναι $\sigma[\pi_t : t \in T]\backslash\mathcal{R}$-μετρήσιμη. Αυτό σημαίνει ότι η $\sigma[\pi_t : t \in T]$ περιέχει τις ανοικτές μπάλες $B_{d_\infty^\circ}(y, \varepsilon)$ και, λόγω διαχωρισιμότητας, θα περιέχει και κάθε ανοικτό σύνολο του D_∞ (διότι αν ένας μετρικός χώρος είναι διαχωρίσιμος, κάθε ανοικτό σύνολο γράφεται ως αριθμήσιμη ένωση ανοικτών σφαιρών). Συνεπώς $\mathcal{D}_\infty \subseteq \sigma[\pi_t : t \in T]$, όπως έπρεπε να δειχθεί.

Ασθενής Σύγκλιση

Έστω $\{P_n\}_n$ και P να είναι μέτρα πιθανότητας στον $(D_\infty, \mathcal{D}_\infty)$.

Λήμμα 3 : *Μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για να έχουμε ασθενή σύγκλιση $P_n \Rightarrow P$ στον D_∞ είναι να ισχύει $P_n \circ \psi_m^{-1} \Rightarrow P \circ \psi_m^{-1}$ (στον D_m) για όλα τα m.*

Απόδειξη : Το αναγκαίο έπεται από το θεώρημα απεικόνισης του πρώτου κεφαλαίου, μιας και η ψ_m είναι συνεχής συνάρτηση.

Για το ικανό, θα χρειαστούμε την ισομετρία $\psi : D_\infty \to \Pi$ η οποία γίνεται και *επί* του $\psi(D_\infty)$ και έτσι ορίζεται και η αντίστροφη $\xi : \psi(D_\infty) \to D_\infty$. Στον χώρο γινόμενο Π (με την μετρική γινόμενο) θεωρούμε την σ-άλγεβρα γινόμενο $\mathcal{P}$ και έστω η συνεχής προβολή $\zeta_k : \Pi \to D_1 \times \ldots \times D_k$ με $\zeta_k(a) = (a_1, \ldots, a_k)$. Η κλάση $\mathcal{P}_f = \{\zeta_k^{-1}(H) : k \in \mathbb{N}, H \in \mathcal{D}_1 \times \ldots \times \mathcal{D}_k\}$ είναι convergence-determining class, πράγμα που αποδεικνύεται χρησιμοποιώντας ακριβώς τα ίδια επιχειρήματα με εκείνα των παραδειγμάτων 2.4 και 2.6 : για δοσμένη μπάλα $B_\rho(a, \varepsilon)$ στον Π, επιλέγουμε k ώστε $\frac{1}{2^k} < \varepsilon/2$ και επιχειρηματολογούμε όπως στο παράδειγμα 2.4 για τα σύνολα $A_\eta = \{b \in \Pi : d_i^\circ(a_i, b_i) < \eta,\ i \leq k\}$ για $0 < \eta < \varepsilon/2$. Έπειτα, όπως στο παράδειγμα 2.6 δείχνουμε λόγω συνέχειας ότι $\partial(\zeta_k^{-1}(H)) = \zeta_k^{-1}(\partial(H))$ για όλα τα $H \in \mathcal{D}_1 \times \ldots \times \mathcal{D}_k$ και συνεπώς για μέτρα πιθανότητας $Q_n, Q \in \Pi$ ισχύει η συνεπαγωγή : $Q_n \circ \zeta_k^{-1} \Rightarrow Q \circ \zeta_k^{-1},\ \forall k \implies Q_n \Rightarrow Q$.

Θα χρησιμοποιήσουμε άλλη μια απεικόνιση. Για $\gamma \in D_k$ ορίζουμε $\rho_k(\gamma) = (a_1, \ldots, a_k)$ να είναι το στοιχείο του $D_1 \times \ldots \times D_k$ για το οποίο ισχύει $a_i(t) = g_i(t) \cdot \gamma(t)$ στο $[0, i]$ για όλα τα $i = 1, \ldots, k-1$ και $a_k(t) \equiv \gamma(t)$ στο $[0, k]$, και η g_i είναι όπως στον ορισμό 13.2.

$$\Pi \xrightarrow{\zeta_k} D_1 \times \ldots \times D_k, \quad D_k \xrightarrow{\rho_k} D_1 \times \ldots \times D_k$$

Η απεικόνιση ρ_k είναι συνεχής : εαν $\gamma_n \xrightarrow{d_k} \gamma$ (στον D_k), τότε επειδή $|g_i(t)| \leq 1$, ισχύει και $g_i \cdot \gamma_n \xrightarrow{d_k} g_i \cdot \gamma$ σε όλον τον D_k και το ίδιο ισχύει και αν περιοριστούμε στο διάστημα $[0,i]$ για κάθε $i \leq k-1$ (επειδή η $g_i \cdot \gamma$ είναι συνεχής στο i και το Λήμμα 1 μπορεί να εφαρμοστεί). Άρα έχουμε σύγκλιση κατά συντεταγμένη, δηλαδή σύγκλιση $\rho_k(\gamma_n) \to \rho_k(\gamma)$ στον χώρο γινόμενο.

Εξ υποθέσεως, $P_n \circ \psi_k^{-1} \Rightarrow_n P \circ \psi_k^{-1}$ για όλα τα k, οπότε το θεώρημα απεικόνισης μας δίνει ότι $P_n \circ \psi_k^{-1} \circ \rho_k^{-1} \Rightarrow_n P \circ \psi_k^{-1} \circ \rho_k^{-1}$ (στον $D_1 \times \ldots \times D_k$). Με πράξεις και λαμβάνοντας υπόψιν ότι $g_i(t) \cdot x^{(k)}(t) = x^{(i)}(t)$ στο $[0,i]$ για κάθε $i \leq k-1$ (δες και σχέση 13.3), έπεται ότι $\rho_k(\psi_k(x)) = \zeta_k(\psi(x))$, $\forall x \in D_\infty$, δηλαδή ότι $P_n \circ \psi^{-1} \circ \zeta_k^{-1} \Rightarrow P \circ \psi^{-1} \circ \zeta_k^{-1}$ για όλα τα k. Από τα όσα είπαμε πριν για την κλάση $\mathcal{P}_f$ η οποία είναι convergence determining class προκύπτει $P_n \circ \psi^{-1} \Rightarrow P \circ \psi^{-1}$ (στον Π).

Επεκτείνουμε την ισομετρία ξ σε μια απεικόνιση η που ορίζεται σε *όλον* τον Π δίνοντάς της σταθερή τιμή (μέσα στον D_∞) όταν το πρότυπο βρίσκεται εκτός του κλειστού $\psi(D_\infty)$. Τότε η η, όταν περιοριστεί στο $\psi(D_\infty)$ είναι συνεχής και επειδή $P \circ \psi^{-1}(\psi(D_\infty)^c) = 0 = P_n \circ \psi^{-1}(\psi(D_\infty)^c)$, το παράδειγμα 2.9 μας δίνει ότι $P_n = P_n \circ \psi^{-1} \circ \eta^{-1} \Rightarrow P \circ \psi^{-1}\eta^{-1} = P$ (διότι $\eta \circ \psi = \mathbb{I}$), όπως έπρεπε να δειχθεί.

Όπως και στην περίπτωση του $D[0,1]$, ορίζουμε $T_P = \{t \geq 0 :\ \pi_t$ συνεχής $P-$ σχεδόν για κάθε $x\}$. Το T_P περιέχει το 0 και αν $t > 0$ ισχύει ότι $t \in T_P \iff P(J_t) = 0$, όπου φυσικά $J_t = \{x \in D_\infty : x(t) \neq x(t-)\}$. Επίσης το συμπλήρωμα του T_P είναι το πολύ αριθμήσιμο και άρα το T_P είναι πυκνό στο $[0,\infty)$. Για $x \in D_\infty$ έστω $r_t(x)$ ο περιορισμός της x στο $[0,t]$. Θα δείξουμε ότι η r_t είναι $\mathcal{D}_\infty \backslash \mathcal{D}_t$-μετρήσιμη.

Χωρίζουμε το διάστημα $[0,t]$ σε διαστήματα ίσου μήκους $[\frac{(i-1)t}{k}, \frac{it}{k})$ και θεωρούμε σαν $r_t^k(x)$ να είναι το στοιχείο του D_t με σταθερή τιμή $x(\frac{(i-1)t}{k})$ στο $[\frac{(i-1)t}{k}, \frac{it}{k})$ και τιμή $x(t)$ στο t. Επειδή η προβολή $\pi_{0,\frac{t}{k},\ldots,\frac{k-1}{k},1}$ είναι $\mathcal{D}_\infty \backslash \mathcal{R}^{k+1}$-μετρήσιμη, η απόδειξη του θεωρήματος 10.5 iii) μας δίνει ότι η r_t^k είναι $\mathcal{D}_\infty \backslash \mathcal{D}_t$-μετρήσιμη (διότι με τον συμβολισμό του 10.5 είναι $r_t^k = V \circ \pi_{0,\frac{t}{k},\ldots,\frac{k-1}{k},1}$) . Το Λήμμα 3 της ενότητας 10 (με την προφανή επέκταση στον D_t) μας δίνει ότι $d_t(r_t^k(x), r_t(x)) \leq \frac{t}{k} \vee w_t'(x, \frac{t}{k}) \xrightarrow{k} 0$ για κάθε $x \in D_\infty$, δηλαδή η r_t είναι όριο $\mathcal{D}_\infty \backslash \mathcal{D}_t$-μετρήσιμων και άρα $\mathcal{D}_\infty \backslash \mathcal{D}_t$-μετρήσιμη.

Θεώρημα 13.7 : *Μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για να ισχύει* $P_n \Rightarrow P$ *είναι να έχουμε* $P_n \circ r_t^{-1} \Rightarrow P \circ r_t^{-1}$ *για κάθε* $t \in T_P$.

Απόδειξη : Έστω $t \in T_P$ και ότι $P_n \Rightarrow P$. Διαλέγουμε $m \in \mathbb{N}$ με $m > t+1$. Αν $d_\infty^\circ(x_n, x) \to 0$ τότε $d_m^\circ(x_n, x) \to 0$ και αν η x είναι συνεχής στο t, τότε από το Λήμμα 1 ισχύει $d_t^\circ(x_n, x) = d_t^\circ(r_t(x_n), r_t(x)) \to 0$. Έτσι αν $x \in J_t^c$ τότε η r_t είναι συνεχής στο x. Συμβολίζοντας με D_{r_t} να είναι το σύνολο σημείων ασυνέχειας της r_t έχουμε ότι $D_{r_t} \subseteq J_t$. Άρα αν $t \in T_P$, θα είναι $P(J_t) = 0$ άρα και $P(D_{r_t}) = 0$, οπότε το θεώρημα απεικόνισης μας δίνει ότι $P_n \circ r_t^{-1} \Rightarrow P \circ r_t^{-1}$.

Αντιστρόφως, αρκεί να δείξουμε (λόγω του Λήμματος 3) ότι $P_n \circ \psi_m^{-1} \Rightarrow P \circ \psi_m^{-1}$ για όλα τα m. Έστω λοιπόν $m \in \mathbb{N}$ και $t \in T_P$ με $t > m$. Ορίζουμε $\tau_m : D_m \to D_\infty$ με

$$(\tau_m x)(s) = \begin{cases} g_m(s) \cdot x(s) & \text{αν } s \leq t \\ 0 & \text{αν } s \geq t \end{cases}$$

Επειδή $|g_m(s)| \leq 1$, χρησιμοποιώντας ίδιο επιχείρημα με αυτό στην απόδειξη του Λήμματος 3 για την συνέχεια της ρ_k, δείχνουμε εύκολα ότι η τ_m είναι συνεχής. Αφού $\psi_m = \tau_m \circ r_t$, το θεώρημα απεικόνισης δίνει ότι $P_n \circ \psi_m^{-1} = P_n \circ r_t^{-1} \circ \tau_m^{-1} \Rightarrow P \circ r_t^{-1} \tau_m^{-1} = P \circ \psi_m^{-1}$.

Tightness

Εδώ αναφέρουμε το ανάλογο του θεωρήματος 11.2 χωρίς απόδειξη μιας και είναι τελείως πανομοιότυπη και βασίζεται στο θεώρημα 13.5 :

Θεώρημα 13.8 : *Η ακολουθία $\{P_n\}$ είναι tight αν και μόνο αν ισχύουν οι εξής συνθήκες :*

i) *Για κάθε m*

$$\lim_{a\to\infty} \limsup_n P_n[x : \|x\|_m \geq a] = 0 \tag{13.17}$$

ii) *Για κάθε m και για κάθε $\varepsilon > 0$*

$$\lim_{\delta\to 0} \limsup_n P_n[x : w'_m(x,\delta) \geq \varepsilon] = 0 \tag{13.18}$$

Έχουμε και ένα ανάλογο πόρισμα. Έστω πρώτα :

$$j_m(x) = \sup_{t\leq m} |x(t) - x(t-)| \tag{13.19}$$

Πόρισμα : *Οποιαδήποτε από τις επόμενες δύο συνθήκες μπορεί να αντικαταστήσει την* i) *του θεωρήματος* 13.8 :

i$'$) *Για κάθε t που ανήκει σε ένα σύνολο T το οποίο είναι πυκνό στο $[0,\infty)$ να ισχύει*

$$\lim_{a\to\infty} \limsup_n P_n[x : |x(t)| \geq a] = 0 \tag{13.20}$$

i$''$) *Η σχέση* (13.20) *να ισχύει για $t = 0$, και επίσης για κάθε $m \in \mathbb{N}$ να έχουμε*

$$\lim_{a\to\infty} \limsup_n P_n[x : j_m(x) \geq a] = 0 \tag{13.21}$$

Απόδειξη : Υποθέτουμε ότι ισχύουν οι ii)+i$'$) και έστω $m \in \mathbb{N}$. Λόγω της σχέσης 13.9, διαλέγουμε σημεία t_i ώστε $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_v = m$ με

$t_i - t_{i-1} > \delta$ για $1 \leq i \leq v-1$ (ίσως όχι ενδεχομένως για $i = v$) και $w_x[t_{i-1}, t_i) < w'_m(x,\delta)+1$ για όλα τα $1 \leq i \leq v$. Λόγω πυκνότητας, διαλέγουμε από το σύνολο T σημεία s_j με $0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_k = m$ και $s_j - s_{j-1} < \delta$ για $1 \leq j \leq k$. Έστω τώρα $m(x) = \max_{0 \leq j \leq k} |x(s_j)|$. Ακριβώς όπως κάναμε στο πόρισμα μετά το θεώρημα 11.2,, εαν $t_v - t_{v-1} > \delta$ τότε $\|x\|_m \leq m(x) + w'_m(x,\delta) + 1$, επειδή αν $t \in [0,m]$ τότε το t θα ανήκει σε κάποιο $[t_{i-1}, t_i)$, το οποίο με τη σειρά του περιέχει αναγκαστικά κάποιο από τα s_j και άρα $|x(t)| \leq |x(t) - x(s_{j_t})| + |x(s_{j_t})| \leq w_x[t_{i-1}, t_i) + m(x) \leq m(x) + w'_m(x,\delta) + 1$. Εαν $t_v - t_{v-1} < \delta$ και αν επιπλέον επιλέξουμε και το $\delta < 1$ (ώστε $t_{v-1} > m-1$), τότε $\|x\|_{m-1} \leq m(x) + w'_m(x,\delta) + 1$, οπότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το ίδιο επιχείρημα με εκείνο του πορίσματος μετά το θεώρημα 11.2 και να πάρουμε τη σχέση (13.17) απλά αντί για m θα έχουμε το $m-1$, πράγμα που φυσικά είναι το ίδιο.

Τώρα, αν υποθέσουμε τις ii)+i$''$) πάλι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το επιχείρημα του παλιού πορίσματος απλά αντί για $v \cdot \delta \leq 1$ έχουμε ότι $(v-1)\delta \leq m$ δηλαδή $v \leq \frac{m}{\delta} + 1$.

Τέλος, το ότι η i) συνεπάγεται τις i$'$) και i$''$) είναι άμεσο από το γεγονός ότι $[x : j_m(x) \geq a] \subseteq [x : 2\|x\|_m \geq a]$.

Το κριτήριο του Aldous

Έστω X^n μια ακολουθία τυχαίων στοιχείων του D_∞. Εδώ θα αναφέρουμε το πολύ σημαντικό κριτήριο για tightness του Aldous το οποίο δίνει δύο ισοδύναμες ικανές συνθήκες ώστε η X^n να είναι tight. Θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα 13.8. Η συνθήκη (13.17) μεταφράζεται στην :

$$\lim_{a\to\infty} \limsup_n \mathsf{P}[\omega : \|X^n(\omega)\|_m \geq a] = 0 \tag{13.22}$$

η οποία πρέπει να ισχύει για κάθε $m \in \mathbb{N}$. Θα αναφέρουμε συνθήκες που περιέχουν χρόνους διακοπής και συνεπάγονται τη σχέση (13.18).

Ένας *χρόνος διακοπής* για την X^n είναι μια τυχαία μεταβλητή $\tau : \Omega \to [0,\infty]$ τέτοια ώστε το ενδεχόμενο $[\tau \leq t]$ να ανήκει στην σ-άλγεβρα $\sigma[X^n_s : s \leq t]$ για όλα τα $t \geq 0$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Στις επόμενες αποδείξεις οι χρόνοι διακοπής είναι διακριτοί, δηλαδή το σύνολο τιμών τους είναι πεπερασμένο. Έχουμε λοιπόν τις επόμενες δύο συνθήκες :

A) $\forall \varepsilon, \eta > 0$ *και* $\forall m \in \mathbb{N}$, $\exists\ \delta_0 > 0, n_0 \in \mathbb{N}$ *ώστε αν* $\delta \leq \delta_0$ *και* τ *είναι ένας διακριτός χρόνος διακοπής με* $\tau \leq m$ *να ισχύει:*

$$\sup_{n\geq n_0} \mathsf{P}[\omega : |X^n_{\tau(\omega)+\delta}(\omega) - X^n_{\tau(\omega)}(\omega)| \geq \varepsilon] \leq \eta \tag{13.23}$$

και

B) $\forall \varepsilon, \eta > 0$ *και* $\forall m \in \mathbb{N}\ \exists\ \delta > 0, n_0 \in \mathbb{N}$ *ώστε αν* τ_1, τ_2 *είναι δύο διακριτοί χρόνοι διακοπής με* $\tau_1 \leq \tau_2 \leq m$ *τότε:*

$$\sup_{n\geq n_0} \mathsf{P}[\omega : |X^n_{\tau_2(\omega)}(\omega) - X^n_{\tau_1(\omega)}(\omega)| \geq \varepsilon \bigcap \tau_2(\omega) - \tau_1(\omega) \leq \delta] \leq \eta \tag{13.24}$$

Θεώρημα 13.9 : *Οι συνθήκες* A) *και* B) *είναι ισοδύναμες.*

Απόδειξη : Επειδή, για $\delta > 0$, ο $\tau+\delta$ είναι επίσης χρόνος διακοπής, βλέπουμε ότι η B) συνεπάγεται την A). Η απόδειξη της αντίστροφης συνεπαγωγής εμπεριέχεται στην απόδειξη του επόμενου:

Λήμμα : *Έστω* $X : \Omega \to D_\infty$ *και* τ_1, τ_2 *δύο φραγμένες τυχαίες μεταβλητές με* $\tau_1 \leq \tau_2$ *και ότι για κάθε* $\theta \in [0, 2\delta]$ *ισχύει* :

$$\mathsf{P}[\omega : |X_{\tau_i(\omega)}(\omega) - X_{\tau_i(\omega)+\theta}(\omega)| \geq \varepsilon] \leq \eta, \quad \forall i = 1, 2$$

Τότε

$$\mathsf{P}[\omega : |X_{\tau_1(\omega)}(\omega) - X_{\tau_2(\omega)}(\omega)| \geq 2\varepsilon \ \cap \ \tau_2(\omega) < \tau_1(\omega) + \delta] \leq 8\eta$$

Απόδειξη : Έστω $I = [0, 2\delta]$, f μια οποιαδήποτε συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $[0,\infty)$ και $0 \leq t_1 \leq t_2 < t_1+\delta$. Ισχυριζόμαστε ότι αν $|f(t_1)-f(t_2)| \geq 2\varepsilon$, τότε κάποιο από τα δύο σύνολα $\{\theta \in I : |f(t_i) - f(t_i + \theta)| \geq \varepsilon\}$ έχει μέτρο Lebesgue $\geq \delta/2$.

Πράγματι, αν και τα δύο έχουν μέτρο Lebesgue $< \delta/2$, τότε τα συμπληρωματικά τους σύνολα στο I, $\Delta_i = \{\theta \in I : |f(t_i)-f(t_i+\theta)| < \varepsilon\}$, θα έχουν μέτρο $> 3\delta/2$ το καθένα. Ωστόσο, επειδή τα σύνολα $t_1 + \Delta_1$ και $t_2 + \Delta_2$ περιέχονται στο σύνολο $[t_1, t_2 + 2\delta]$ (το οποίο έχει μέτρο $< 3\delta$) και επειδή $\lambda(t_i + \Delta_i) = \lambda(\Delta_i) > 3\delta/2$, αυτά πρέπει να τέμνονται. Έτσι υπάρχει ένα t' με $|f(t_1) - f(t')| < \varepsilon$ και $|f(t_2) - f(t')| < \varepsilon$, δηλαδή $|f(t_1) - f(t_2)| < 2\varepsilon$, άτοπο.

Εφαρμόζουμε τώρα τον ισχυρισμό για τη συνάρτηση $X(\omega)$ και τους χρόνους $\tau_1(\omega) \leq \tau_2(\omega)$ και έχουμε :

$\{\omega : |X_{\tau_1(\omega)}(\omega) - X_{\tau_2(\omega)}(\omega)| \geq 2\varepsilon \ \cap \ \tau_1(\omega) \leq \tau_2(\omega) < \tau_1(\omega) + \delta\} \subseteq \{\omega : \lambda(\theta \in I : |X_{\tau_1(\omega)}(\omega) - X_{\tau_1(\omega)+\theta}(\omega)| \geq \varepsilon) \geq \delta/2\} \cup \{\omega : \lambda(\theta \in I : |X_{\tau_2(\omega)}(\omega) - X_{\tau_2(\omega)+\theta}(\omega)| \geq \varepsilon) \geq \delta/2\}$

Αν συμβολίσουμε το πρώτο σύνολο με A_0 και τα δύο σύνολα της ένωσης με A_1 και A_2 τότε έχουμε

$$\mathsf{P}(A_0) \leq \mathsf{P}(A_1) + \mathsf{P}(A_2)$$

Θεωρούμε τον χώρο $\Omega \times I$ και σε αυτόν τα σύνολα $C_1 = \{(\omega,\theta) \in \Omega \times I : |X_{\tau_1(\omega)}(\omega) - X_{\tau_1(\omega)+\theta}(\omega)| \geq \varepsilon\}$ και $C_2 = \{(\omega,\theta) \in \Omega \times I : |X_{\tau_2(\omega)}(\omega) - X_{\tau_2(\omega)+\theta}(\omega)| \geq \varepsilon\}$. Τότε, $C_i^\omega = \{\theta \in I : (\omega,\theta) \in C_i\}$ και $C_i^\theta = \{\omega \in \Omega : (\omega,\theta) \in C_i\}$ για $i = 1, 2$. Από το θεώρημα του Fubini (δες και Βιβλιογραφία-20.-σελ.119-121), τα σύνολα C_i^ω και C_i^θ είναι λ-μετρήσιμα και P-μετρήσιμα αντίστοιχα. Επίσης η συνάρτηση $\lambda(C_i^\omega)$(ως προς ω) είναι P-μετρήσιμη (για την ακρίβεια $\mathcal{F}$-μετρήσιμη) και η $\mathsf{P}(C_i^\theta)$(ως προς θ) είναι λ-μετρήσιμη και το θεώρημα Fubini για χαρακτηριστικές δίνει

$$\int_\Omega \lambda(C_i^\omega) d\mathsf{P} = \int_I \mathsf{P}(C_i^\theta) d\lambda$$

Όλα αυτά, σε συνδυασμό με την ανισότητα του Chebyshev μας δίνουν ότι

$$\mathsf{P}(A_1) \leq \frac{2}{\delta} \cdot \int_0^{2\delta} \mathsf{P}\{\omega : |X_{\tau_1(\omega)}(\omega) - X_{\tau_1(\omega)+\theta}(\omega)| \geq \varepsilon\} \leq \frac{2}{\delta} \cdot 2\delta \cdot \eta = 4\eta$$

Ομοίως προκύπτει και ότι $\mathsf{P}(A_2) \leq 4\eta$ και τελικά $\mathsf{P}(A_0) \leq 8\eta$.

Η απόδειξη του Λήμματος ολοκλήρωσε την απόδειξη του θεωρήματος 13.9.

Θεώρημα 13.10 (Κριτήριο Aldous) : *Εαν ισχύει η σχέση* (13.22) *και η συνθήκη* A) *τότε η* X^n *είναι tight.*

<u>**Απόδειξη**</u> : Λόγω του θεωρήματος 13.8 είναι αρκετό να δείξουμε ότι για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει η

$$\lim_{\delta \to 0} \limsup_n \mathsf{P}[\omega : w'_m(X^n(\omega), \delta) \geq \varepsilon] = 0 \tag{13.25}$$

Έστω λοιπόν $m \in \mathbb{N}$ και $\varepsilon > 0$ και $\eta > 0$. Θεωρούμε Δ_k να είναι το σύνολο των δυαδικών ρητών τάξης k μέχρι τον m, δηλαδή $\Delta_k = \{\frac{j}{2^k} : j = 0, 1, \ldots, m \cdot 2^k\}$. Για δεδομένα κάθε φορά $n, k \in \mathbb{N}$, ορίζουμε την αύξουσα ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $\tau_0^{n,k}, \tau_1^{n,k}, \ldots$ με $\tau_0^{n,k}(\omega) \equiv 0$ και

$$\tau_i^{n,k}(\omega) = \min\{t \in \Delta_k : \tau_{i-1}^{n,k}(\omega) < t \leq m \ \text{ και } |X_t^n(\omega) - X^n_{\tau_{i-1}^{n,k}(\omega)}(\omega)| \geq \varepsilon\}$$

και $\tau_i^{n,k}(\omega) = m$, αν δεν υπάρχει τέτοιος t. Μπορούμε να δείξουμε απλά ότι οι $\tau_i^{n,k}$ είναι διακριτοί χρόνοι διακοπής και βλέπουμε ότι εξαρτώνται από τα ε, m, k, n, i.

Υποθέτουμε λοιπόν ότι ισχύει η συνθήκη A) ή, ισοδύναμα, ότι ισχύει η B). Για τα δοσμένα ε, η, m διαλέγουμε $\delta' > 0$ και $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει

$$\mathsf{P}[\omega : |X^n_{\tau_i^{n,k}(\omega)}(\omega) - X^n_{\tau_{i-1}^{n,k}(\omega)}(\omega)| \geq \varepsilon \ \cap \ \tau_i^{n,k}(\omega) - \tau_{i-1}^{n,k}(\omega) \leq \delta'] \leq \eta$$

για κάθε $n \geq n_0$ και για κάθε $i, k \in \mathbb{N}$. Από τον τρόπο ορισμού των $\tau_i^{n,k}$ βλέπουμε ότι ισχύει ο εγκλεισμός : $[\tau_i^{n,k} < m] \subseteq [|X^n_{\tau_i^{n,k}} - X^n_{\tau_{i-1}^{n,k}}| \geq \varepsilon]$. Έτσι, με βάση και την προηγούμενη σχέση, έπεται

$$\mathsf{P}[\tau_i^{n,k} < m \ \cap \ \tau_i^{n,k} - \tau_{i-1}^{n,k} \leq \delta'] \leq \eta, \ \forall i, k \in \mathbb{N}, n \geq n_0. \tag{13.26}$$

Διαλέγουμε τώρα έναν ακέραιο q ώστε $q \cdot \delta' >> 2m$. Ομοίως με πριν, θα υπάρχει ένας $\delta > 0$ και ένας $\widetilde{n_0}$ (για ευκολία τον ξανασυμβολίζουμε με n_0) ώστε

$$\mathsf{P}[\tau_i^{n,k} < m \ \cap \ \tau_i^{n,k} - \tau_{i-1}^{n,k} \leq \delta] \leq \eta/q, \ \forall i, k \in \mathbb{N}, n \geq n_0. \tag{13.27}$$

Αλλά τότε θα ισχύει :

$$\mathsf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{q} [\tau_i^{n,k} < m \ \cap \ \tau_i^{n,k} - \tau_{i-1}^{n,k} \leq \delta]\right) \leq \eta, \ \forall k \in \mathbb{N}, n \geq n_0. \tag{13.28}$$

Θεωρούμε τώρα το ενδεχόμενο $C = [\tau_q^{n,k} < m]$(για σταθερά n,k κάθε φορά) και έστω η $\sigma(C)$. Έστω επίσης I_G να είναι η δείκτρια στο σύνολο $G = [\tau_i^{n,k} - \tau_{i-1}^{n,k} \geq \delta']$. Παρατηρούμε απλά ότι $I_G(\omega) \leq \frac{1}{\delta'} \cdot (\tau_i^{n,k}(\omega) - \tau_{i-1}^{n,k}(\omega))$ για όλα τα ω. Από τις ιδιότητες της δεσμευμένης μέσης τιμής έπεται ότι

$$\mathbb{E}[(\tau_i^{n,k} - \tau_{i-1}^{n,k})|\sigma(C)] \geq \delta' \cdot \mathbb{E}[I_G|\sigma(C)] = \delta' \cdot \mathsf{P}[\tau_i^{n,k} - \tau_{i-1}^{n,k} \geq \delta'|\sigma(C)].$$

Η τελευταία ποσότητα, λόγω της (13.27) και λόγω του ότι η ακολουθία $\tau_i^{n,k}$ είναι αύξουσα ως προς i, είναι μεγαλύτερη από $\delta' \cdot (1 - \frac{\eta}{\mathsf{P}[\tau_q^{n,k} < m]})$. Πάλι από ιδιότητες της δεσμευμένης μέσης τιμής και επειδή $\tau_q^{n,k} \leq m$ παίρνουμε

$$m \geq \mathbb{E}[\tau_q^{n,k}|\sigma(C)] = \sum_{i=1}^{q} \mathbb{E}[\tau_i^{n,k} - \tau_{i-1}^{n,k}|\sigma(C)] \geq q\delta'(1 - \frac{\eta}{\mathsf{P}[\tau_q^{n,k} < m]}).$$

Αφού το q έχει επιλεγεί έτσι ώστε $q\delta' \geq 2m$, παίρνουμε τελικά ότι $\mathsf{P}[\tau_q^{n,k} < m] \leq 2\eta$. Οπότε λόγω και της (13.28) ισχύει :

$$\mathsf{P}\left([\tau_q^{n,k} < m] \cup \bigcup_{i=1}^{q} [\tau_i^{n,k} < m \ \cap \ \tau_i^{n,k} - \tau_{i-1}^{n,k} \leq \delta]\right) \leq 3\eta \qquad \forall k \in \mathbb{N}, n \geq n_0. \tag{13.29}$$

Έστω τώρα $A_{n,k}$ να είναι το συμπλήρωμα του συνόλου της (13.29), δηλαδή $A_{n,k} = [\tau_q^{n,k} = m] \cap \bigcap_{i=1}^{q} [\tau_i^{n,k} = m \ \cup \ \tau_i^{n,k} - \tau_{i-1}^{n,k} > \delta]$. Για $\omega \in A_{n,k}$ θεωρούμε $v_{n,k}(\omega)$ να είναι ο πρώτος δείκτης εκ των $1,2,\ldots,q$ για τον οποίον $\tau_j^{n,k}(\omega) = m$, δηλαδή $v_{n,k}(\omega) = \min\{j \in \{1,2,\ldots,q\} : \tau_j^{n,k}(\omega) = m\}$. Σταθεροποιούμε τώρα ένα $\tilde{n} \geq n_0$. Υπάρχουν σημεία $t_i^k(\omega)$ (τα $\tau_i^{\tilde{n},k}(\omega)$ που πλέον εξαρτώνται μόνο από το k) ώστε $0 = t_0^k(\omega) < \ldots < t_{v_{\tilde{n},k}(\omega)}^k(\omega) = m$ και $t_i^k(\omega) - t_{i-1}^k(\omega) > \delta$ για όλα τα $i = 1,2\ldots,v_{\tilde{n},k}(\omega) - 1$ (όχι κατ'ανάγκην βέβαια και για $i = v_{\tilde{n},k}(\omega)$). Τώρα αν $s,t \in \Delta_k$ και ταυτόχρονα ανήκουν και στο ίδιο διάστημα $[t_{i-1}^k(\omega), t_i^k(\omega))$, θα ισχύει, από τον ορισμό των $\tau_i^{n,k}$, ότι $|X_t^{\tilde{n}}(\omega) - X_s^{\tilde{n}}(\omega)| < 2\varepsilon$. Επίσης, για $A_{\tilde{n}} = \limsup_k A_{\tilde{n},k}$, λόγω της (13.29), παίρνουμε ότι $\mathsf{P}(A_{\tilde{n}}) \geq \limsup_k \mathsf{P}(A_{\tilde{n},k}) \geq 1 - 3\eta$.

Έστω $\omega \in A_{\tilde{n}}$. Αυτό σημαίνει ότι ω ανήκει σε άπειρα από τα σύνολα $A_{\tilde{n},k}$, δηλαδή υπάρχει άπειρο υποσύνολο των φυσικών, N_0, ώστε $\omega \in A_{\tilde{n},j}$ για $j \in N_0$. Επειδή πάντα $v_{\tilde{n},j}(\omega) \leq q$ (και για την ακρίβεια,για δεδομένα n,ω, η συνάρτηση $v_{n,k}(\omega)$ είναι αύξουσα ως προς k), μπορούμε να βρούμε ένα άπειρο υποσύνολο $N_1 \subseteq N_0$, ώστε αν $j \in N_1$ η συνάρτηση $v_{\tilde{n},j}(\omega)$ να είναι σταθερή ως προς j, δηλαδή αμετάβλητη πάνω στο σύνολο N_1 (τα $\omega, \tilde{n}$ είναι σταθερά σε όλη αυτή την διαδικασία). Επομένως, αν περιοριστούμε σε δείκτες $k \in N_1$, τότε οι αριθμοί $0 = t_0^k(\omega) < \ldots < t_{v_{\tilde{n},k}(\omega)}^k(\omega) = m$ είναι σταθεροί ως προς το πλήθος, διότι η $v_{\tilde{n},k}(\omega) = c =$σταθερή στο N_1. Έτσι έχουμε c το πλήθος ακολουθίες αριθμών $0 = t_0^k(\omega) < \ldots < t_c^k(\omega) = m$ με το k να τρέχει στο N_1. Από το διαγώνιο επιχείρημα του Cantor μπορούμε να επιλέξουμε μια υπακολουθία ή, ισοδύναμα, ένα άπειρο υποσύνολο $N_2 \subseteq N_1$ ώστε $t_i^k(\omega) \xrightarrow[k\in N_2]{k\to\infty} t_i(\omega)$, για όλα τα $i = 1, \ldots, c$. Έπεται ότι $t_i(\omega) - t_{i-1}(\omega) \geq \delta$ για κάθε $i = 1, \ldots c-1$ και $0 = t_0(\omega) < \ldots < t_c(\omega) = m$. Επίσης, λόγω δεξιάς συνέχειας, λόγω της πυκνότητας των δυαδικών ρητών στο $\mathbb{R}$ και λόγω του ότι είπαμε πως $|X_t^{\tilde{n}}(\omega) - X_s^{\tilde{n}}(\omega)| < 2\varepsilon$ για $s, t \in \Delta_k \cap [t_{i-1}^k(\omega), t_i^k(\omega))$, μπορούμε να συνάγουμε ότι $|X_t^{\tilde{n}}(\omega) - X_s^{\tilde{n}}(\omega)| < 3\varepsilon$, όταν οι s, t είναι οποιοιδήποτε πραγματικοί αριθμοί (και όχι κατ'ανάγκην δυαδικοί ρητοί όπως πριν) που ανήκουν στο ίδιο $[t_{i-1}(\omega), t_i(\omega))$.

Αποδείξαμε λοιπόν ότι $A_{\tilde{n}} \subseteq [\omega : w'_m(X^{\tilde{n}}(\omega), \delta) \leq 3\varepsilon]$ και άρα $1 - 3\eta \leq \mathsf{P}[\omega : w'_m(X^{\tilde{n}}(\omega), \delta) \leq 3\varepsilon]$, για κάθε $\tilde{n} \geq n_0$. Άρα $\limsup_n \mathsf{P}[w'_m(X^n, \delta) \geq 3\varepsilon] \leq 3\eta$ όπως έπρεπε να δειχθεί.

Βιβλιογραφία

1. David Aldous : *Stopping times and tightness*, *Ann.Probab.* 6 (1978)
2. V.I. Bogachev : *Measure Theory*, Volume II, Springer (2007)
3. Patrick Billingsley : *Convergence of Probability Measures*, first edition, New York, Wiley, 1968
4. Patrick Billingsley : *Weak Convergence of Measures: Applications in Probability*, Philadelphia, SIAM, 1971
5. Patrick Billingsley : *Probability and Measure*, third edition, New York, Wiley, 1995
6. Leo Breiman : *Probability*, Reading, Addison-Wesley, 1968
7. G. Choquet : *Sur les ensembles uniformément négligeables*, Sem. Choquet, Paris, 1969-70
8. James Davidson : *Stochastic Limit Theory*, New York, Oxford University Press, 1994
9. M.Donsker : *An invariance principle for certain probability limit theorems, Mem. Amer. Math. Soc.* 6 (1951)
10. J.L. Doob : *Stochastic Processes*, New York, Wiley, 1953
11. Richard Dudley : *Real Analysis and Probability*, Pacific Grove, Wadsworth and Brooks/Cole, 1989
12. Richard Durrett : *Stochastic Calculus*, Boca Raton, CRC Press, 1996
13. Stewart N. Ethier and Thomas G. Kurtz : *Markov Processes: Characterization and convergence*, New York, Wiley, 1986
14. William Feller : *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, third edition, New York,Wiley, 1968
15. P. Hall and C.C. Heyde : *Martingale Limit Theory and Its Application*, New York, Academic Press, 1980
16. Paul Halmos : *Measure Theory*, New York, Van Nostrand, 1950
17. Jean Jacob and Albert N. Shiryaev : *Limit Theorems for Stochastic Processes*, Berlin, Springer, 1987
18. Ioannis Karatzas and Steven Shreve : *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, New York, Springer, 1988
19. John Kelley : *General Topology*, Princeton, Van Nostrand, 1955
20. G. Koumoullis, S. Negrepontis : *Measure Theory*, Second edition, 2005
21. Torgny Lindvall : *Weak Convergence in the Function Space* $D[0,\infty)$ *J. Appl. Probab.* 10 (1973)
22. S. Negrepontis, T. Zachariadis, N. Kalamidas, V. Farmaki : *General Topology and Functional Analysis*, Athens, 1997
23. N. Papadatos : *Probability Theory-Lecture Notes*, Athens 2006
24. K.R. Parthasarathy : *Probability Measures on Metric Spaces*, New York Academic press, 1967
25. David Pollard : *Convergence of Stochastic Processes*, New York, Springer,

1984

26. Y. V. Prohorov : *Convergence of random processes and limit theorems in probability theory, Theory Probab. Appl.,* 1 (1956)
27. Philip Protter : *Stochastic Integration and Differential Equations*, New York, Springer, 1990
28. Galen R. Shorack and Jon A. Wellner : *Empirical Processes with Applications to Statistics*, New York, Wiley, 1986
29. A.V. Skorohod : *Limit Theorems for Stochastic Processes, Theory Probab Appl.,*1 (1956)
30. Daniel W. Strook and S.R. Srinivasa Varadhan : *Multidimensional Diffusion Processes*, New York, Springer, 1979
31. Aad W. van der Waart and Jon A. Wellner : *Weak Convergence and Empirical Processes*, New York, Springer, 1996
32. M.J. Vichura : *A note on the weak convergence of stochastic processes Ann. Math. Statist.* 42 (1971)