Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

Δ.Π.Μ.Σ. Εφαρμοσμένες Μαθηματικές Επιστήμες

Μεταπτυχιακή Εργασία

Διάταξη και Θεωρία Γενικής Ισορροπίας

Μαρία Παπαδάκη
Επιβλέπων καθηγητής: Ιωάννης Πολυράκης

Τριμελής Επιτροπή:

Ι. Πολυράκης, Σ. Καρανάσιος, Π. Ψαρράκος

Αθήνα 2015

Η ολοκλήρωση της διπλωματικής εργασίας συγχρηματοδοτήθηκε μέσω του Έργου «Υποτροφίες ΙΚΥ» από πόρους του ΕΠ «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση», του Ευρωπαϊκού Κοινωνικού Ταμείου (ΕΚΤ) του ΕΣΠΑ, 2007-2013

Αφιερώνεται στους γονείς μου, στον αδελφό μου και στην Μαντώ

Περιεχόμενα

Πρόλογος

Η παρούσα μεταπτυχιακή εργασία μελετά πρόσφατα αποτελέσματα της Ανάλυσης σε σχέση με ένα από τα διασημότερα προβλήματα της μαθηματικής οικονομίας, το πρόβλημα της ισορροπίας.

Το 1951, ο *John Nash* απέδειξε την ύπαρξη ισορροπίας σε παίγνια μεικτής στρατηγικής και το 1954, οι $Arrow - Debreu$ απέδειξαν την ύπαρξη ισορροπίας σε οικονομίες ανταλλαγής. Οι δύο αυτές αποδείξεις στις οποίες χρησιμοποιήθηκαν το Θεώρημα Σταθερού Σημείου του *Brower* (1912) και το Θεώρημα Σταθερού Σημείου του *Kakutani* (1941) για πλειότιμες απεικονίσεις, έδωσαν ιδιαίτερη αίγλη αλλά είχαν και ιδιαίτερη ανάδραση τόσο στην Ανάλυση όσο και στην Οικονομία. Έτσι στην Ανάλυση, τα χρόνια που ακολούθησαν αναπτύχθηκε σημαντικά ο κλάδος των πλειότιμων απεικονίσεων αλλά και τα οικονομικά θεμελειώθηκαν και μελετήθηκαν με τεχνικές ανάλυσης και αναπτύχθηκαν νέοι κλάδοι όπως η Θεωρία Γενικής Ισορροπίας.

Το 1986, ο $Mas - Colell$ απέδειξε την ύπαρξη ισορροπίας σε απειροδιάστατες οικονομίες όπου ο χώρος αγαθών είναι *Banach lattice*. Το άρθρο αυτό υπήρξε σημαντικός σταθμός της Θεωρίας Γενικής Ισορροπίας, επειδή επέκτεινε τη θεωρία της ισορροπίας σε απειροδιάστατες οικονομίες και επίσης καθιέρωσε τη θεωρία της διάταξης σαν ένα βασικό εργαλείο για τη μελέτη των οικονομικών.

Η παρούσα διπλωματική αποτελεί συλλογή και μελέτη σχετικά πρόσφατων μαθηματικών αποτελεσμάτων που μπορούν να χρησιμοποιηθούν στη μελέτη της ισορροπίας σε απειροδιάστατες οικονομίες.

Πιο συγκεκριμένα, στο Κεφάλαιο 1, γίνεται μία εισαγωγή στους διατεταγμένους γραμμικούς χώρους, όπου δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στη θεωρία της διάταξης, αλλά και στις βάσεις κώνων, που στη θεωρία της ισορροπίας είναι τα σύνολα προϋπολογισμού που αντιστοιχούν στα διάφορα διανύσματα τιμών. Η θεωρία των βάσεων των κώνων είναι σημαντικό στοιχείο της γεωμετρίας των κώνων και έχει πολλές εφαρμογές στη χρηματοοικονομική θεωρία.

Το Κεφάλαιο 2 είναι αφιερωμένο στη θεωρία των ανακλαστικών κώνων. Οι ανακλαστικοί κώνοι είναι μία νέα και πολύ πλούσια σε ιδιότητες οικογένεια κώνων που μελετούνται στην [23] από τους *E. Casini*, *E. Miglierina*, *I.A.*

Polyrakis και *F. Xanthos*. Ειδικότερα, ένας κώνος P χώρου *Banach* X είναι ανακλαστικός αν το σύνολο $U_X^+ = U_X \cap P$ είναι ασθενώς συμπαγές. Ο ορισμός και η μελέτη αυτών των κώνων ξεκίνησε στο άρθρο [56] του Ι. Πολυράκη όπου αποδεικνύονται ιδιότητες αυτής της κατηγορίας κώνων και μελετάται η συνάρτηση ζήτησης. Στο κεφάλαιο αυτό, μελετώνται οι βάσεις ανακλαστικών κώνων και το θεώρημα διχοτομίας του Ι. Πολυράκη. Στη συνέχεια, αποδεικνύονται χαρακτηρισμοί των ανακλαστικών κώνων. Αποδεικνύεται ότι ένας κώνος P είναι ανακλαστικός αν και μόνο αν ο P συμπίπτει με τον δεύτερο δυϊκό του και ότι ο P είναι ανακλαστικός αν και μόνο αν ο P δεν περιέχει τον θετικό κώνο l_1^+ του l_1. Για το σκοπό αυτό στο κεφάλαιο 2 παραθέτουμε χαρακτηρισμούς του θετικού κώνου l_1^+ του l_1. Το κεφάλαιο κλείνει με τον ορισμό και την μελέτη μίας υποκλάσης των ανακλαστικών κώνων, τους οποίους ονομάζουμε ισχυρά ανακλαστικούς κώνους.

Το Κεφάλαιο 3 ξεκινά με μία εισαγωγή στις πεπερασμένες οικονομίες και συνεχίζει με την μελέτη των απειροδιάστατων οικονομιών, όπου εφαρμόζεται η θεωρία που αναπτύχθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο.

Πιο συγκεκριμένα, στις οικονομίες πεπερασμένης διάστασης, όπως αυτή στο μοντέλο των $Arrow - Debreu$, τα σύνολα προϋπολογισμού είναι συμπαγή, επομένως οι σχέσεις προτίμησης των καταναλωτών, που είναι συνεχείς, μεγιστοποιούνται στα σύνολα προϋπολογισμού. Έτσι ορίζεται η συνάρτηση ζήτησης, ή γενικότερα η αντιστοιχία ζήτησης, των καταναλωτών και αυτή είναι μια σημαντική ιδιότητα της οικονομίας. Η απόδειξη της ισορροπίας βασίζεται σε αυτή την ιδιότητα, δηλαδή στην ύπαρξη της συνάρτησης ζήτησης.

Αντίθετα, στις απειροδιάστατες οικονομίες τα σύνολα προϋπολογισμού δεν είναι πλέον συμπαγή, οπότε δεν εξασφαλίζεται η μεγιστοποίηση των σχέσεων προτίμησης, επομένως δεν ορίζεται συνάρτηση (αντιστοιχία) ζήτησης και αυτό είναι ένα χαρακτηριστικό μειονέκτημα των απειροδιάστατων οικονομιών. Στην περίπτωση που ο κώνος P είναι ανακλαστικός με φραγμένη βάση, η απάντηση στο πρόβλημα αυτό είναι θετική και δόθηκε στην [56] από τον Ι. Πολυράκη. Κλείνουμε το κεφάλαιο 3 με την παρουσίαση και μελέτη της απόδειξης αυτής.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω από καρδιάς τον Καθηγητή της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών, κ. Ιωάννη Πολυράκη, που ήταν ο επιβλέπων της παρούσας μεταπτυχιακής εργασίας, τόσο για την βοήθειά του σε επιστημονικό επίπεδο, όσο και για το θετικό κλίμα συνεργασίας που υπήρξε καθ' όλη τη διάρκεια διεκπεραίωσης της εργασίας.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τα μέλη της τριμελούς εξεταστικής επιτροπής, Καθηγητές κ. Σωτήρη Καρανάσιο και κ. Παναγιώτη Ψαρράκο, και γενικότερα τους καθηγητές του Τομέα Μαθηματικών του Ε.Μ.Π. για τις γνώσεις που μου προσέφεραν κατά τη διάρκεια των προπτυχιακών, αλλά και των μεταπτυχιακών μου σπουδών, αλλά και για το πνεύμα συνεργασίας που υπήρξε όλα αυτά τα χρόνια.

Επιπλέον, θα ήθελα να ευχαριστήσω το Ίδρυμα Κρατικών Υποτροφιών (Ι.Κ.Υ.) που με υποτροφία στήριξε οικονομικά τις μεταπτυχιακές μου σπουδές στο πρόγραμμα Εφαρμοσμένες Μαθηματικές Επιστήμες του Τομέα Μαθηματικών του Ε.Μ.Π..

Κλείνοντας, θα ήθελα να εκφράσω την αμέριστη ευγνωμοσύνη μου στην οικογένειά μου, για την συνεχή στήριξη, τόσο οικονομική όσο και ψυχολογική, και για την ενθάρρυνσή που μου προσφέρει σε κάθε μου βήμα.

Μαρία Παπαδάκη
Δ.Π.Μ.Σ. Εφαρμοσμένες Μαθηματικές Επιστήμες
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Αθήνα 2015

Κεφάλαιο 1

Διατεταγμένοι γραμμικοί χώροι

1.1 Βασικές έννοιες και διάταξη

Ορισμός 1.1.1. *Πραγματικός διανυσματικός (ή γραμμικός) χώρος ονομάζεται μία τριάδα* $(X, +, *)$, *όπου* X *είναι ένα μη κενό σύνολο,* $+ : X \times X \to X$ *μία εσωτερική πράξη (πρόσθεση) και* $* : \mathbb{R} \times X \to X$ *μία εξωτερική πράξη (βαθμωτό γινόμενο) που ικανοποιούν τις ακόλουθες ιδιότητες:*

(i) $(x + y) + z = x + (y + z)$, *για κάθε* $x, y, z \in X$.

(ii) $x + y = y + x$, *για κάθε* $x, y \in X$.

(iii) Υπάρχει ένα στοιχείο 0 του X, *που ονομάζεται μηδενικό στοιχείο, ώστε* $x + 0 = 0 + x = x$, *για κάθε* $x \in X$.

(iv) Για κάθε $x \in X$ *υπάρχει ένα στοιχείο* $-x$ *του* X, *που ονομάζεται αντίθετο του* x, *ώστε* $x + (-x) = (-x) + x = 0$.

(v) $\lambda (x + y) = \lambda x + \lambda y$, *για κάθε* $x, y \in X$ *και* $\lambda \in \mathbb{R}$.

(vi) $(\lambda + \mu) x = \lambda x + \mu x$, *για κάθε* $x \in X$ *και* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *(όπου στο πρώτο μέλος το σύμβολο + εκφράζει τη συνήθη πρόσθεση των πραγματικών αριθμών, ενώ στο δεύτερο μέλος το σύμβολο + εκφράζει την πρόσθεση στο διανυσματικό χώρο* X*).*

(vii) $\lambda(\mu x) = (\lambda \mu) x$, *για κάθε* $x \in X$ *και* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *(όπου στο δεύτερο μέλος το* $\lambda\mu$ *είναι το σύνηθες γινόμενο των πραγματικών αριθμών* λ *και* μ*).*

(viii) $1 x = x$, *για κάθε* $x \in X$.

Τα στοιχεία ενός διανυσματικού χώρου ονομάζονται και διανύσματα.

Παρακάτω, χάριν συντομίας, αντί να λέμε "ο διανυσματικός χώρος $(X, +, *)$", θα λέμε "ο διανυσματικός χώρος X".

Αν στον παραπάνω ορισμό αντικαταστήσουμε το σώμα $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών με το σώμα $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών έχουμε την έννοια του μιγαδικού διανυσματικού χώρου.

Ορισμός 1.1.2. *Έστω X γραμμικός χώρος. Μία διμελής σχέση $\leq$ στον X ονομάζεται μερική διάταξη στον X, αν για κάθε $x, y, z \in X$ ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:*

(1) $x \leq x$
(αυτοπαθής ιδιότητα)
(2) Αν $x \leq y$ και $y \leq x$, τότε συνεπάγεται ότι $x = y$
(αντισυμμετρική ιδιότητα)
(3) Αν $x \leq y$ και $y \leq z$, τότε ισχύει ότι $x \leq z$
(μεταβατική ιδιότητα)
(4) Αν $x \leq y$, τότε συνεπάγεται ότι $x + z \leq y + z$ και $\lambda x \leq \lambda y$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}_+$.
(συμβατότητα με τη γραμμική δομή του χώρου)

Τότε, ο X, ή ακριβέστερα το ζευγάρι $(X, \leq)$ ονομάζεται (μερικά) διατεταγμένος γραμμικός χώρος (*partially ordered linear space*).

Είναι γνωστή η έννοια της μερικής διάταξης σε ένα μη κενό σύνολο X, ως η διμελής σχέση $\leq$ στον X, η οποία ικανοποιεί τις ιδιότητες (1)-(3), δηλαδή την αυτοπαθή, την αντισυμμετρική, και την μεταβατική ιδιότητα. Επειδή, στην προκειμένη περίπτωση, δεν έχουμε απλώς ένα μη κενό σύνολο X, αλλά έχουμε έναν γραμμικό χώρο, η μερική διάταξη οφείλει να είναι συμβατή με την γραμμική δομή του χώρου, δηλαδή να ικανοποιεί επιπροσθέτως και την ιδιότητα (4), και ονομάζεται μερική γραμμική διάταξη.

Αν X είναι διατεταγμένος γραμμικός χώρος, το σύνολο των στοιχείων του που είναι μεγαλύτερα ή ίσα του μηδενός ονομάζεται θετικός κώνος του X και συμβολίζεται με X_+. Δηλαδή,

$$X_+ = \{x \in X, x \geq 0\}$$

Ο θετικός κώνος του X ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες:

(1) $X_+ + X_+ \subseteq X_+$
(δηλαδή, αθροίσματα στοιχείων του X_+ ανήκουν στον X_+)
(2) $\lambda x \in X_+$, για κάθε $x \in X_+$, και για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}_+$
(δηλαδή, τα θετικά πολλαπλάσια στοιχείων του X_+ ανήκουν στον X_+)

(3) $X_+ \cap \{-X_+\} = \{0\}$

(Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι $\exists\, x \in X_+$ τέτοιο ώστε $x \in X_+ \cap \{-X_+\}$ τότε, επειδή $x \in X_+ \Rightarrow x \geq 0\,(*)$ και επειδή $x \in -X_+ \Rightarrow x \leq 0\,(**)$. Επομένως, από (*),(**) και λαμβάνοντας υπόψιν ότι ισχύει η αντισυμμετρική ιδιότητα, έπεται ότι $x = 0$.)

Από τις ιδιότητες (1) και (2), διαπιστώνουμε ότι ο θετικός κώνος X_+ είναι κυρτό σύνολο. Γενικότερα, κάθε μη κενό υποσύνολο του X που ικανοποιεί τις ιδιότητες (1) και (2) ονομάζεται κώνος (*wedge*) και όπως παρατηρούμε, κάθε κώνος είναι κυρτό σύνολο. Επίσης, αν W είναι ένας κώνος του X, τότε το σύνολο $W \cap \{-W\}$ είναι ένας διανυσματικός υπόχωρος του X. Όταν ο διανυσματικός αυτός υπόχωρος είναι ο τετριμμένος (δηλαδή, ισχύει η ιδιότητα (3)), τότε ο κώνος ονομάζεται οξύς κώνος (*cone*).

Ο οξύς κώνος είναι ένα πολύ σημαντικό υποσύνολο ενός διανυσματικού χώρου, επειδή μπορεί να ορίσει σχέση μερικής γραμμικής διάταξης στο χώρο. Πράγματι, αν $P \subseteq X$ είναι ένας οξύς κώνος του X (όπου X γραμμικός χώρος), τότε ορίζεται μία σχέση μερικής γραμμικής διάταξης $\leq$ στον X, που ορίζεται ως εξής:

$$x \leq y \iff y - x \in P$$

Πράγματι, μπορούμε εύκολα να δούμε ότι η σχέση $\leq$ ικανοποιεί τις ιδιότητες (1),(2),(3) και (4) του ορισμού της μερικής γραμμικής διάταξης. Επίσης, στην περίπτωση που ο X εφοδιασθεί με αυτήν την σχέση γραμμικής διάταξης, τότε ο θετικός του κώνος είναι ο P, δηλαδή $P \equiv X_+ = \{x \in X\,,\, x \geq 0\}$ και ο X λέμε ότι είναι γραμμικός χώρος διατεταγμένος από τον κώνο P, και αυτό που εννοούμε είναι ότι η διάταξη είναι εκείνη που επάγεται από τον κώνο P, δηλαδή ορίζεται με τον παραπάνω τρόπο που περιγράψαμε.

Θεώρημα 1.1.1. *Αν P κώνος του X, τότε το σύνολο $P - P$ είναι ο γραμμικός χώρος που παράγεται από τον P.*

Απόδειξη. Πράγματι, έστω x διάνυσμα που ανήκει στον διανυσματικό υπόχωρο που παράγεται από τον P. Επομένως, το x θα γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του P, δηλαδή θα υπάρχουν διανύσματα $x_1\,,\, x_2\,,\, \ldots\,,\, x_n \in P$ και πραγματικοί αριθμοί $a_1\,,\, a_2\,,\, \ldots\,,\, a_n \in \mathbb{R}$, τέτοιοι ώστε $x = \sum_{i=1}^{n} a_i\, x_i$. Οι αριθμοί $\{a_i\}_{i=1}^{n}$ είναι πραγματικοί, και μπορεί να είναι είτε θετικοί ή αρνητικοί. Αν τώρα 'διαχωρίσουμε' τους δείκτες $\{i \mid i = 1, 2, \ldots, n\}$ σε δύο σύνολα: $I_1 = \{i : a_i \geq 0\}$ (οι δείκτες εκείνοι για τους οποίους το αντίστοιχο a_i είναι μη-αρνητικό), και $I_2 = \{ i : a_i < 0 \}$(οι δείκτες εκείνοι για τους οποίους το αντίστοιχο a_i είναι αρνητικό), τότε έχουμε ότι:

$$x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = \sum_{i \in I_1} a_i x_i - \sum_{i \in I_2} (-a_i) x_i \in P - P.$$

Επομένως, δείξαμε ότι ο διανυσματικός υπόχωρος που παράγεται απο τον P είναι ο $P - P$. □

Πολύ σημαντική είναι η έννοια του παράγων κώνου.

Ένας κώνος P ενός διανυσματικού χώρου X ονομάζεται παράγων (*generating*) αν $X = P - P$, δηλαδή ο διανυσματικός υπόχωρος που παράγεται από τον P συμπίπτει με τον X.

Ένας κώνος P ενός διανυσματικού χώρου X είναι παράγων (*generating*), αν κυριαρχεί (*majorizes*) στο χώρο X, δηλαδή, για κάθε $x \in X$, υπάρχει κάποιο $y \in P$, που να ικανοποιεί το ότι $y \geq_P x$, όπου με $\geq_P$ εννοούμε την διάταξη που επάγεται από τον κώνο P.

Υπάρχουν κάποιες πολύ θεμελιώδεις έννοιες, και μερικά χρήσιμα σύνολα που συνδέονται με έναν διατεταγμένο διανυσματικό χώρο, και αναπτύσσονται αμέσως παρακάτω.

Έστω x και y δύο διανύσματα ενός διατεταγμένου διανυσματικού χώρου X, που ικανοποιούν τη σχέση $x \leq y$. Τότε, το διατεταγμένο διάστημα , που συμβολίζεται με $[x, y]$, είναι το σύνολο που ορίζεται ως εξής:

$$[x, y] = \{ z \in X : x \leq z \leq y \}$$

Αν δεν ισχύει ότι $x \leq y$, τότε ορίζουμε $[x, y] = \emptyset$, έτσι ώστε το διατεταγμένο διάστημα να ορίζεται για όλα τα διανύσματα x και y του χώρου X. Επίσης, παρατηρούμε ότι κάθε διατεταγμένο διάστημα είναι κυρτό σύνολο.

Ένα υποσύνολο A ενός διατεταγμένου διανυσματικού χώρου X ονομάζεται διατακτικά κυρτό ($full$ ή $order - convex\ set$) αν για κάθε $x, y \in A$ έχουμε ότι $[x, y] \subseteq A$. (Δηλαδή, για κάθε δύο στοιχεία του A, το διατεταγμένο διάστημά τους βρίσκεται μέσα στο A).

Το γεγονός ότι η τομή μίας οικογένειας διατακτικά κυρτών συνόλων είναι διατακτικά κυρτό σύνολο, μας οδηγεί στον παρακάτω ορισμό της διατακτικά κυρτής θήκης ($full\ hull$) ενός υποσυνόλου του διατεταγμένου γραμμικού χώρου X.

Έστω X διατεταγμένος γραμμικός χώρος, και έστω B υποσύνολο του X. Η τομή όλων των διατακτικά κυρτών υποσυνόλων του X που περιέχουν το B είναι διατακτικά κυρτό και ονομάζεται κυρτό περίβλημα ή αλλιώς κυρτή θήκη του B, και συμβολίζεται με $[B]$. Η διατακτικά κυρτή θήκη του B δίνεται από την εξής σχέση:

$$[B] = (B + L_+) \cap (B - L_+) = \cup_{x,y \in B} [x, y]$$

Πράγματι, από τον ορισμό της διατακτικά κυρτής θήκης του B, είναι προφανές ότι ισούται με την ένωση όλων των διατεταγμένων διαστημάτων $[x, y]$ με $x, y \in B$. Θα το αποδείξουμε. Πράγματι, έστω $D = \cup_{\substack{x,y \in B \\ x \leq y}} [x, y]$. Θα δείξουμε ότι $D = [B]$. Το D είναι διατακτικά κυρτό σύνολο. Πράγματι, αν $x, y \in D$, τότε θα δείξουμε ότι $[x, y] \subseteq D$. Επειδή το $x \in D$ έπεται ότι $\exists\, x_1, y_1 \in B$ με $x_1 \leq y_1$, τέτοια ώστε $x_1 \leq x \leq y_1$. Επίσης, επειδή $y \in D$ έπεται ότι $\exists\, x_2, y_2 \in B$ με $x_2 \leq y_2$, τέτοια ώστε $x_2 \leq y \leq y_2$. Άρα, αν $z \in [x, y]$, τότε $x_1 \leq x \leq z \leq y \leq y_2$ και προφανώς $x_1, y_2 \in B$, άρα $z \in [x_1, y_2]$. Επομένως, βρήκαμε ένα διατεταγμένο διάστημα με άκρα που να ανήκουν στο B, το οποίο να περιέχει το z. Άρα, $z \in D$. Επομένως, δείξαμε ότι $\forall z \in [x, y] \Rightarrow z \in D$, άρα $[x, y] \subseteq D$, δηλαδή το D είναι διατακτικά κυρτό. Επίσης, το D περιέχει το B.

Άρα, το D (επειδή είναι διατακτικά κυρτό και περιέχει το B) θα περιέχει τη διατακτικά κυρτή θήκη του B, δηλαδή $[B] \subseteq D$ (*).

Έστω τώρα ένα $z \in D$. Τότε, επειδή $D = \cup_{\substack{x,y \in B \\ x \leq y}} [x, y]$, θα υπάρχουν $x, y \in B : x \leq z \leq y$. Άρα, $z \in [x, y] \subseteq [B]$. Επομένως, δείξαμε ότι για κάθε $z \in D$, έπεται ότι $z \in [B]$. Επομένως, $D \subseteq [B]$ (**).

Από (*) και (**), έπεται ότι $[B] = \cup_{x,y \in B} [x, y]$.

Η διατακτικά κυρτή θήκη ενός κυρτού συνόλου είναι κυρτό σύνολο. Επίσης, η διατακτικά κυρτή θήκη ενός ισορροπημένου συνόλου είναι ισορροπημένο σύνολο. (Να υπενθυμίσουμε ότι ένα υποσύνολο S ενός διανυσματικού χώρου ονομάζεται ισορροπημένο (*circled* ή *balanced*) όταν για κάθε $x \in S$ και για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ με $|\lambda| \leq 1$ ισχύει ότι $\lambda x \in S$)

Υποθέτουμε τώρα ότι X είναι χώρος Banach. Με X^* συμβολίζουμε τον norm δυϊκό του X, και με B_X την κλειστή μοναδιαία μπάλα του X, δηλαδή $B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ Για κάθε $A \subseteq X$, συμβολίζουμε με $\overline{A}$ το κλειστό περίβλημα του A, με $int(A)$ το εσωτερικό του A, με $co(A)$ την κυρτή θήκη του A και με $\overline{co}(A)$ την κλειστή κυρτή θήκη του A. Επίσης, συμβολίζουμε με $cone(A)$ (και αντίστοιχα $\overline{cone(A)}$) τον μικρότερο κώνο (αντιστοίχως τον μικρότερο κλειστό κώνο) που περιέχει το A.

Αν το σύνολο A είναι κυρτό, έχουμε ότι:

$$cone(A) = \{\lambda\alpha : \alpha \in A, \lambda \geq 0\}$$

Αν το σύνολο A είναι κλειστό και φραγμένο, τότε το $cone(A)$ είναι κλειστό.

Υποθέτουμε ότι P είναι κώνος του X. Ο κώνος P δίδει ανοικτή διάσπαση του X, αν υπάρχει $\rho > 0$ τέτοιο ώστε $\rho B_X \subseteq B_X^+ - B_X^+$, όπου $B_X^+ = B_X \cap P$.

Σε χώρους Banach, κάθε κλειστός και παράγων κώνος δίδει ανοικτή διάσπαση.

Ο κώνος P είναι normal, αν υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε για κάθε $x, y \in X$, $0 \leq x \leq y$ να έπεται ότι $\|x\| \leq c\|y\|$.

Υπενθυμίζουμε ότι ένα γραμμικό συναρτησιακό f του X είναι θετικό (στον P), αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in P$ και αυστηρά θετικό (στον P), αν $f(x) > 0$ για κάθε $x \in P, x \neq 0$. Το σύνολο που αποτελείται από τα συνεχή θετικά συναρτησιακά στον κώνο P είναι κώνος και ονομάζεται δυϊκός (dual ή polar) κώνος του P, και συμβολίζεται

$$P^o = \{x^* \in X^* : x^*(x) \geq 0\,, \text{για κάθε}\, x \in P\}$$

Αν υπάρχει κάποιο αυστηρά θετικό γραμμικό συναρτησιακό, τότε ο κώνος P είναι οξύς.

Πράγματι, υποθέτουμε ότι $f : X \to \mathbb{R}$ είναι αυστηρά θετικό γραμμικό συναρτησιακό του X. Θα δείξουμε ότι ο κώνος P του χώρου X είναι οξύς, δηλαδή εξ' ορισμού ότι $P \cap (-P) = \{0\}$. Έστω ότι υπάρχει $x \in P \cap (-P)$ με $x \neq 0$. Επειδή $x \in P$ και $x \neq 0$ έπεται ότι $f(x) > 0$ (1) . Ταυτόχρονα όμως, επειδή $-x \in P$ και $-x \neq 0$, έπεται ότι $f(-x) > 0$, δηλαδή ότι $f(x) < 0$, άτοπο από την σχέση (1).

Έστω Y και Z χώροι με νόρμα. Ο κώνος $P \subseteq U$ είναι ισομορφικός με τον κώνο $K \subseteq Z$ αν υπάρχει μία προσθετική, θετικά ομογενής και 1-1 απεικόνιση T από τον P επί του K, τέτοια ώστε η T και η T^{-1} να είναι συνεχείς ως προς τις επαγόμενες τοπολογίες. Τότε, η απεικόνιση T ονομάζεται ισομορφισμός του P επί του K και λέμε ότι ο P είναι εμφυτεύσιμος στον χώρο Z.

Έστω X γραμμικός χώρος. Το στοιχείο $e \in X_+$ ονομάζεται διατακτική μονάδα (*order unit*) του X, αν για κάθε $x \in X$, υπάρχει πραγματικός αριθμός $a > 0$, ώστε $x \in [-ae\,, ae]$.

Πρόταση 1.1.2. *Αν ο X έχει διατακτική μονάδα, τότε ο θετικός κώνος X_+ του X παράγει τον X.*

Απόδειξη. Έστω ότι ο X έχει διατακτική μονάδα και έστω $x \in X$. Τότε, $\exists\, e \in X_+$, ώστε για το $x \in X$, υπάρχει πραγματικός αριθμός $a > 0$, ώστε

$x \in [-ae, ae]$. Δηλαδή, $-ae \leq x \leq ae$. Άρα, $ae - x \geq 0$. Αποδείξαμε ότι $x = ae - (ae - x)$ και $ae \geq 0$, $ae - x \geq 0$, δηλαδή το τυχόν $x \in X$ γράφεται ως διαφορά δύο στοιχείων του X_+. Επομένως, ο X_+ παράγει τον X. □

Εν συνεχεία, θα αποδείξουμε ότι η διατακτική μονάδα ενός διατεταγμένου χώρου *Banach* ταυτίζεται με εσωτερικό σημείο του θετικού του κώνου.

Πρόταση 1.1.3. *Αν X είναι χώρος Banach διατεταγμένος από τον κλειστό κώνο P και $x_0 \in P$, οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:*

(i) το x_0 είναι διατακτική μονάδα του X,

(ii) το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του P.

Απόδειξη. $(i) \Rightarrow (ii)$

Υποθέτουμε ότι το x_0 είναι διατακτική μονάδα του X, δηλαδή $\forall x \in X$, $\exists a > 0 : x \in [-ax_0, ax_0]$. Τότε, $X = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} [-nx_0, nx_0]$. Επειδή ο κώνος P είναι κλειστός, έπεται ότι τα διατεταγμένα διαστήματα $[-nx_0, nx_0]$ είναι κλειστά. Επομένως, ο X γράφεται ως αριθμήσιμη ένωση κλειστών υποσυνόλων του, και επειδή ο X είναι χώρος *Banach*, και άρα πλήρης, ισχύει το θεώρημα *Baire*. Από το θεώρημα *Baire*, θα υπάρχει τουλάχιστον ένα σύνολο από την οικογένεια κλειστών υποσυνόλων $\{[-nx_0, nx_0]\}_{n \in \mathbb{N}}$ που να έχει μη κενό εσωτερικό. Δηλαδή, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, ώστε το σύνολο $[-n_0x_0, n_0x_0]$ να έχει εσωτερικά σημεία. Από αυτό έπεται ότι και το σύνολο $[-x_0, x_0]$ έχει εσωτερικά σημεία. Έστω $z \in int([-x_0, x_0])$.Τότε, υπάρχει $\rho>0$, ώστε $z + B(0, \rho) \subseteq [-x_0, x_0]$. Θα αποδείξουμε ότι $x_0 + B\left(0, \frac{\rho}{2}\right) \subseteq P$, και επομένως το x_0 θα είναι εσωτερικό σημείο του P, αφού θα έχω βρει μια μπάλα με κέντρο το x_0 που να ανήκει στον P. Επειδή, $z + B(0, \rho) \subseteq [-x_0, x_0]$, έχουμε ότι για κάθε $x \in B(0, \rho)$ ισχύει ότι $-x_0 \leq z + x \leq x_0$, άρα $-x_0 - z \leq x \leq x_0 - z$. Όμως $-x_0 \leq x \leq x_0$, αφού $x_0 \in int([-x_0, x_0]) \subseteq [-x_0, x_0]$, και άρα $-2x_0 \leq x \leq 2x_0$. Από τη σχέση αυτή έχουμε ότι $B\left(0, \frac{\rho}{2}\right) \subseteq [-x_0, x_0]$, επομένως $x_0 + B\left(0, \frac{\rho}{2}\right) \subseteq [0, 2x_0] \subseteq P$ (επειδή $x_0 \in P$, $0 \in P$ και P κώνος) . Άρα, για το x_0 υπάρχει μία μπάλα του χώρου, η $B\left(x_0, \frac{\rho}{2}\right)$ η οποία περιέχεται στον κώνο P. Επομένως, , το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του P.

$(ii) \Rightarrow (i)$

Υποθέτουμε ότι το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του P. Επομένως, $x_0 + B(0, \rho) \subseteq P$, για κάποιο ρ. Δηλαδή υπάρχει μία μπάλα γύρω από το x_0 που να περιέχεται στον κώνο P. Θα δείξουμε καταρχάς ότι $B(0, \rho) \subseteq [-x_0, x_0]$. Πράγματι, αν $z \in B(0, \rho)$, τότε $x_0 + z \in P$ (επειδή $x_0 + B(0, \rho) \subseteq P$), άρα $z \geq -x_0$. Επίσης, $x_0 - z \in P$, άρα $z \leq x_0$. Επομένως, $z \in [-x_0, x_0]$ και το z είναι τυχαίο στοιχείο της μπάλας $B(0, \rho)$, άρα $B(0, \rho) \subseteq$

$[-x_0\,, x_0]$, και αποδείχτηκε το ζητούμενο. Έστω τώρα $x \in X$. Αρκεί να δειξουμε ότι $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, ώστε $x \in [-n_0 x_0\,, n_0 x_0]$. Έστω $n \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $n > \| x \|$ (ο φυσικός n υπάρχει γιατί αν υποθέσουμε το αντίθετο, τότε προκύπτει ότι $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \leq \| x \|$, δηλαδή ο πραγματικός αριθμός $\| x \|$είναι άνω φράγμα του συνόλου των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$, άτοπο, επειδή το $\mathbb{N}$ δεν είναι άνω φραγμένο). Τότε, η ποσότητα $\frac{x}{n}$ έχει νόρμα $\| \frac{x}{n} \| = \frac{\|x\|}{\|n\|} = \frac{\|x\|}{n} < 1$, άρα $\rho\frac{x}{n} \in B\,(0\,, \rho)$ (πράγματι, $\| \rho\frac{x}{n} - 0 \| = \| \rho\frac{x}{n} \| < \rho$), επομένως $-x_0 \leq \rho\frac{x}{n} \leq x_0$, άρα $x \in [-n_0 x_0\,, n_0 x_0]$, όπου $n_0 > \frac{n}{\rho}$. Επομένως, το x_0 είναι διατακτική μονάδα του X. $\square$

Παράδειγμα 1.1.1. *Μπορούμε να αποδείξουμε εύκολα ότι:*

- *Η σταθερή ακολουθία* $\mathbf{1} = (1\,, 1\,, 1\,, ...\,, 1\,, ...)$ *είναι διατακτική μονάδα του* l_∞.
- *Η σταθερή συνάρτηση* $\mathbf{1}(t) = 1, \forall t \in [0,1]$, *είναι διατακτική μονάδα του* $C[0,1]$.
- *Ο χώρος* c_0 *δεν έχει διατακτική μονάδα ή ισοδύναμα δεν έχει εσωτερικά σημεία. Πραγματικά, για τον τελευταίο ισχυρισμό, θα δείξουμε ότι το τυχόν στοιχείο* $x \in c_0^+$ *δεν είναι εσωτερικό σημείο του* c_0^+.

  Έστω $x \in c_0^+$. *Παρατηρούμε ότι η μπάλα με κέντρο το* x *και ακτίνα κάποιο ρ>0 είναι η εξής:*

  $$B\,(x\,, \rho) = \{\, y \in c_0 \mid \| x - y \| < \rho \Leftrightarrow |\, x\,(i) - y\,(i)\,| < \rho, \forall i$$

  $$\Leftrightarrow x\,(i) - \rho \leq y\,(i) \leq x\,(i) + \rho, \forall i\}$$

  Επειδή η ακολουθία x *είναι ακολουθία που τείνει στο μηδέν, έπεται ότι* $0 \leq x\,(i) \leq \frac{\rho}{4}, \forall i \geq n_0$ *(όπου υπενθυμίζουμε ότι ο δείκτης* n_0 *είναι ο δείκτης εκείνος από τον οποίον και μετά οι όροι της ακολουθίας βρίσκονται σε μία περιοχή του μηδενός). Ορίζω την εξής ακολουθία του χώρου* c_0:

  $$y\,(i) = \begin{cases} x\,(i) & \mid i < n_0 \\ -x\,(i) & \mid i \geq n_0 \end{cases}$$

  Τότε, παρατηρούμε ότι $y \in c_0$, *αφού οι όροι της από τον δείκτη* n_0 *και μετά ισούνται με* $-x\,(i)$ *και η* x *τείνει στο μηδέν. Επίσης,* $y \notin c_0^+$ *αφού* *οι όροι της από τον δείκτη* n_0 *και μετά ισούνται με* $-x(i) < 0$. *Τέλος, παρατηρούμε ότι*

$$(x-y)(i) = \begin{cases} 0 & \mid i < n_0 \\ 2x(i) & \mid i \geq n_0 \end{cases}$$

και επομένως, $\| x - y \| \leq \frac{\rho}{2} < \rho$. *Άρα,* $\forall x \in c_0^+$ *και* $\forall \rho > 0$ *υπάρχει* $y \in B(x, \rho)$, *τέτοιο ώστε* $y \notin c_0^+$. *Επομένως,* $B(0, \rho) \nsubseteq c_0^+$, *δηλαδή το τυχαίο* $x \in c_0^+$ *δεν είναι εσωτερικό σημείο του* c_0^+, *από το οποίο μπορούμε να συμπεράνουμε ότι ο χώρος* c_0^+ *δεν έχει εσωτερικά σημεία.*

1.2 Κώνοι και βάσεις κώνων

Σε αυτήν την ενότητα, θα μελετήσουμε κάποια κυρτά υποσύνολα ενός οξύ κώνου, που είναι ειδικής μορφής και ονομάζονται βάσεις του κώνου. Η θεωρία των βάσεων των κώνων είναι σημαντικό στοιχείο της γεωμετρίας των κώνων και έχει πολλές εφαρμογές στην χρηματοοικονομική θεωρία. Ειδικότερα, σε μία οικονομία, κάθε βάση του κώνου κατανάλωσης ορίζει ένα σύνολο προϋπολογισμού, και αντιστρόφως κάθε σύνολο προϋπολογισμού ορίζει μία βάση του κώνου κατανάλωσης. Καταρχάς, θα υπενθυμήσουμε την έννοια και τις ιδιότητες της κυρτής θήκης συνόλου.

1.2.1 Κυρτή θήκη

Υπενθυμίζουμε ότι ένα μη κενό υποσύνολο C *ενός διανυσματικού χώρου* X *ονομάζεται κυρτό (convex), αν για* $x, y \in C$ *και* $\lambda \in (0, 1)$, *έπεται ότι* $\lambda x + (1-\lambda) y \in C$.

Προκειμένου να ορίσουμε την κυρτή θήκη συνόλου L ($L \subseteq X, X$ *διανυσματικός χώρος) αρχίζουμε με τις παρακάτω παρατηρήσεις.*

Υπάρχει ένα τουλάχιστον κυρτό σύνολο που περιέχει το L, *και αυτό είναι ο ίδιος ο χώρος* X. *Επίσης, η τομή όλων των κυρτών υποσυνόλων του* X *που περιεχουν το* L, *δηλαδή το σύνολο* $D = \cap\{K : L \subset K, K \text{κυρτό}\}$, *είναι κυρτό σύνολο.*

Πράγματι, αν $x, y \in D$ *και* $\lambda \in (0,1)$, *τότε, επειδή* $x, y \in D$, *έχουμε ότι* $x, y \in K, \forall K$ *κυρτό με* $L \subseteq K$ *και, λόγω κυρτότητας, έπεται ότι* $\lambda x + (1-\lambda)y \in K$ *για κάθε* K *κυρτό με* $L \subseteq K$, *άρα* $\lambda x + (1-\lambda)y \in D$, *και επομένως δείξαμε ότι το σύνολο* D *είναι κυρτό σύνολο.*

Επίσης, το D είναι το μικρότερο κυρτό υποσύνολο του X που περιέχει το L. Το σύνολο αυτό το ονομάζουμε κυρτή θήκη του L.

Ορισμός 1.2.1. *Έστω L ένα μη κενό υποσύνολο ενός διανυσματικού χώρου X. Η κυρτή θήκη του συνόλου L, που συμβολίζεται με $co\,(L)$, είναι το μικρότερο κυρτό σύνολο που περιέχει το L.*

Αν $L \subseteq X$, έχουμε

$$co\,(L) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \,:\, x_i \in L\,,\, \lambda_i \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}\,, i = 1\,,\,2\,,\,...\,,\,n\,,\, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\,, n \in \mathbb{N} \right\}$$

Απόδειξη. Έστω

$$B = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \,:\, x_i \in L\,,\, \lambda_i \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}\,, i = 1\,,\,2\,,\,...\,,\,n\,,\, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\,, n \in \mathbb{N} \right\}$$

Θα δείξουμε ότι $B = co(L)$. Προκειμένου να καταλήξουμε στο ζητούμενο, αρκεί να δείξουμε τα παρακάτω:

1. το B είναι κυρτό που περιέχει το L.

2. Αν $L \subseteq K, K$ κυρτό $\Rightarrow B \subseteq K$, οπότε το B είναι το μικρότερο κυρτό υποσύνολο που περιέχει το L.

1. Αν $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i, y = \sum_{j=1}^{m} \mu_j y_j \in B$ και $\lambda \in (0,1)$, έχουμε ότι $\lambda \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i + (1-\lambda) \sum_{j=1}^{m} \mu_j y_j =$

$= \sum_{i=1}^{n} \lambda\lambda_i x_i + \sum_{j=1}^{m} (1-\lambda)\mu_j y_j$.

Οι συντελεστές $\lambda\lambda_i$, $(1-\lambda)\mu_j \geq 0$, και έχουν άθροισμα μονάδα, γιατί $\sum_{i=1}^{n} \lambda\lambda_i + \sum_{j=1}^{m} (1-\lambda)\mu_j =$

$= \lambda \sum_{i=1}^{n} \lambda_i + (1-\lambda) \sum_{j=1}^{m} \mu_j =$

$= \lambda + (1-\lambda) = 1$. Άρα, το σύνολο B είναι κυρτό.

Επίσης, το B περιέχει το L, γιατί για κάθε $x \in L$, έχουμε $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x$, με $\lambda_i > 0$ και $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$.

2. Έστω K κυρτό υποσύνολο που περιέχει το L. Θα δείξουμε ότι $B \subseteq K$.

Έστω $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in B$. Αρκεί να δείξουμε ότι $x \in K$.

Επειδή, $x_i \in L, \forall i$ και $L \subseteq K$, έχουμε ότι $x_i \in K, \forall i$.

Επίσης, $\lambda_i \geq 0, \forall i$, με $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. Επειδή το K είναι κυρτό, έπεται ότι $x \in K$, και αποδείχτηκε το ζητούμενο, ότι δηλαδή το σύνολο $L \subseteq K$.

□

Το κλειστό περίβλημα της κυρτή θήκης του συνόλου L, συμβολίζεται $\overline{co}(L)$ και είναι το μικρότερο κλειστό και κυρτό σύνολο που περιέχει το L.

Η αναλυτική περιγραφή του $\overline{co}(L)$ είναι η εξής:

$$\overline{co}(L) = \{x \in X | x = lim y_n : y_n = \sum_{i=1}^{k_n} \lambda_i x_i, x_i \in L, \lambda_i \in \mathbb{R}^{+} \cup \{0\}, i = 1, 2, ..., n,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \}$$

Μία σημαντική ιδιότητα του κλειστού κυρτού περιβλήματος υποσυνόλου του γραμμικού χώρου είναι η εξής:

Το κλειστό κυρτό περίβλημα συμπαγούς συνόλου είναι συμπαγές σύνολο.

Πριν αποδείξουμε το παραπάνω αποτέλεσμα, θα δώσουμε έναν πολύ σημαντικό ορισμό.

Ορισμός 1.2.2. *Ένα υποσύνολο A ενός μετρικού χώρου X είναι totally bounded αν, για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει πεπερασμένο υποσύνολο $\{x_1, ..., x_n\} \subseteq X$ που εξαρτάται από το ε ώστε το $\{x_1, ..., x_n\}$ να είναι ε-πυκνό στο A, δηλαδή $\cup_{i=1}^{n} B_{\varepsilon}(x_i) = A$.*

Έχουμε τις παρακάτω ιδιότητες:

1. *Αν ένα σύνολο είναι totally bounded, τότε το κλειστό περίβλημά του, καθώς και κάθε υποσύνολό του είναι επίσης totally bounded.*
2. *Κάθε μετρική για την οποία ο χώρος είναι totally bounded ονομάζεται totally bounded metric.*
3. *Κάθε συμπαγής μετρικός χώρος είναι totally bounded. Το αντίστροφο δεν ισχύει (ένα totally bounded σύνολο δεν είναι πάντα συμπαγές)*
4. *Κάθε totally bounded μετρικός χώρος είναι διαχωρίσιμος.*

Το παρακάτω θεώρημα συνδέει τις έννοιες της συμπάγειας και της ολικής φραξιμότητας (total bounbebness) για έναν μετρικό χώρο.

Θεώρημα 1.2.1. *([2], Th. 3.28) Για έναν μετρικό χώρο, τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

1. *Ο χώρος είναι συμπαγής.*
2. *Ο χώρος είναι πλήρης και totally bounded.*
3. *Ο χώρος είναι ακολουθιακά συμπαγής (sequentially compact). Δηλαδή, κάθε ακολουθία έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.*

Έστω τώρα ένας ολικά μετρικοποιήσιμος τοπικά κυρτός χώρος. Έχουμε το εξής θεώρημα:

Θεώρημα 1.2.2. *([2], Th. 5.34) Σε έναν ολικά μετρικοποιήσιμο τοπικά κυρτό χώρο η κλειστή κυρτή θήκη ενός συμπαγούς συνόλου είναι συμπαγές σύνολο.*

Απόδειξη. Έστω K συμπαγές υποσύνολο του ολικά μετρικοποιήσιμου τοπικά κυρτού χώρου X. Σύμφωνα με το θεώρημα 5.10, [2], η τοπολογία παράγεται από κάποια συμβατή πλήρη μετρική d. Από το θεώρημα 1.2.1, αρκεί να αποδείξουμε ότι το $\overline{co}(K)$ είναι d-*totally bounded*.

Έστω λοιπόν $\varepsilon > 0$. Λόγω της τοπικής κυρτότητας, υπάρχει κυρτή περιοχή V του μηδενός που ικανοποιεί το ότι $V + V \subset B_\varepsilon$, όπου B_ε είναι η d-ανοικτή μπάλα με κέντρο το μηδέν και ακτίνα ε.

Επειδή το K είναι συμπαγές, υπάρχει πεπερασμένο σύνολο Φ με $K \subset \Phi + V$. Πράγματι, έχουμε ότι $\cup_{x\in K}(x + V) = K$ και επειδή το K είναι συμπαγές, υπάρχει πεπερασμένο υποκάλυμμα, δηλαδή υπάρχει πεπερασμένο υποσύνολο $\Phi = \{x_1, x_2, ..., x_n\} \subseteq K$, ώστε $K \subseteq (x_1 + V) \cup (x_2 + V) \cup ... \cup (x_n + V) = \{x_1 + a_1 | a_1 \in V\} \cup \{x_2 + a_2 | a_2 \in V\} \cup ... \cup \{x_n + a_n | a_n \in V\} =$

$= \{x_1, x_2, ..., x_n\} + V = \Phi + V$.

Προφανώς, ισχύει ότι $co(K) \subset co(\Phi) + V$. Πραγματικά, επειδή $K \subseteq \Phi + V$, έχουμε ότι $co(K) \subseteq co(\Phi + V) = co(\Phi) + co(V) = co(\Phi) + V$.

Από το πόρισμα 5.30, [2], το $co(\Phi)$ είναι συμπαγές, άρα υπάρχει πεπερασμένο σύνολο F με $co(\Phi) \subset F + V$.

Επομένως,

$$co(K) \subset co(\Phi) + V \subset F + V + V \subset F + B_\varepsilon.$$

Επομένως, το $co(K)$ είναι *d-totally bounded*, και κατά συνέπεια το $\overline{co}(K)$ είναι *d-totally bounded* αφού όπως είπαμε και παραπάνω όταν ένα σύνολο είναι *d-totally bounded*, τότε και το κλειστό περίβλημά του είναι *d-totally bounded*.

□

1.2.2 Ορισμός και ιδιότητες των βάσεων κώνων

Ορισμός 1.2.3. *Έστω E γραμμικός χώρος, και P κώνος του E, $P \neq \{0\}$. Ένα υποσύνολο $B \subseteq P$ ονομάζεται βάση του κώνου P, αν το B είναι κυρτό, και για κάθε $x \in P$, $x \neq 0$, υπάρχει μοναδικός πραγματικός αριθμός $\lambda_x > 0$, ώστε $\lambda_x x \in B$.*

Δηλαδή, αν B είναι βάση του κώνου P, τότε κάθε μη μηδενικό στοιχείο $x \in P$ έχει μοναδική αναπαράσταση της μορφής $x = ab$, όπου $b \in B$ και $a > 0$.

Το γεγονός ότι κάθε βάση ενός κώνου είναι κυρτό σύνολο υποδεικνύει ότι το μηδενικό στοιχείο δεν ανήκει στη βάση, δηλαδή $0 \notin B$. Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι $0 \in B$, τότε για κάθε στοιχείο της βάσης $b \in B$ και για κάθε $\lambda \in (0, 1)$, έχουμε ότι $\lambda b \in B$ (επειδή $0, b \in B$, και επειδή B κυρτό, έπεται ότι για κάθε $\lambda \in (0, 1)$ το στοιχείο $\lambda b = (\lambda b + (1 - \lambda) 0) \in B$), και άρα το στοιχείο b έχει άπειρα πολλαπλάσια μέσα στη βάση B , άτοπο).

Θεώρημα 1.2.3. *Έστω L και M διατεταγμένοι γραμμικοί χώροι, με τον M να είναι Αρχιμήδειος. Τότε, κάθε προσθετική απεικόνιση $f : L_+ \longrightarrow M_+$ επεκτείνεται σε έναν θετικό τελεστή από τον L στον M.*

Απόδειξη. Έστω $f : L_+ \longrightarrow M_+$ προσθετική απεικόνιση. Θα δείξουμε ότι η f επεκτείνεται σε έναν θετικό τελεστή από τον L στον M. Θεωρώ το χώρο $X = L_+ - L_+$, που παράγεται από τον L_+ και ορίζω τον τελεστή $S : X \longrightarrow M$ ως εξής: Για κάθε $x \in X$, επιλέγω $x_1, x_2 \in L_+$, με $x = x_1 - x_2$, και θέτω $S(x) = f(x_1) - f(x_2)$. Παρατηρούμε ότι ο S αποτελεί επέκταση της f στο χώρο $X = L_+ - L_+$ (πράγματι, για $x \in L_+$ $\Rightarrow S(x) = f(x) \geq 0$). Θα δείξουμε ότι η f είναι καλά ορισμένη. Πράγματι, έστω $x = x_1 - x_2 = y_1 - y_2$, με $x_1, x_2, y_1, y_2 \in L_+$. Έχουμε ότι $S(x) = f(x_1) - f(x_2)$ και $S(x) = f(y_1) - f(y_2)$. Για να δείξουμε ότι η S είναι καλά ορισμένη αρκεί να δείξουμε ότι $f(x_1) - f(x_2) = f(y_1) - f(y_2)$. Πράγματι, επειδή $x = x_1 - x_2 = y_1 - y_2 \Rightarrow x_1 + y_2 = x_2 + y_1$. Άρα, λαμβάνοντας υπόψιν ότι η f είναι προσθετική, έχουμε ότι $f(x_1) + f(y_2) = f(x_1 + y_2) = f(x_2 + y_1) = f(x_2) + f(y_1) \Rightarrow f(x_1) - f(x_2) = f(y_1) - f(y_2)$. Άρα, S καλά ορισμένη. Θα δείξουμε ότι η S είναι γραμμική. Έστω $x = x_1 - x_2$ και $y = y_1 - y_2$, με $x_1, x_2, y_1, y_2 \in L_+$. $S(x + y) = S((x_1 + y_1) - (x_2 + y_2)) = f(x_1 + y_1) - f(x_2 + y_2)$ $= f(x_1) + f(y_1) - f(x_2) - f(y_2) = f(x_1) - f(x_2) + f(y_1) - f(y_2) = S(x) + S(y)$. Άρα, S προσθετική. Θα δείξουμε ότι η S είναι ομογενής. Καταρχάς, θα δείξουμε ότι η S είναι μονότονη, δηλαδή ότι : Για $x \geq y$ στον $X \Rightarrow S(x) \geq S(y)$ στον M. Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι $x \geq y$ στον X, τότε $x - y \geq 0$, δηλαδή $x - y \in L_+$ και από το ότι η S είναι προσθετική, έπεται ότι: $S(x) = S((x - y) + y) = S(x - y) + S(y) = f(x - y) + S(y) \geq S(y)$. Επομένως, δείξαμε ότι η S είναι μονότονη. Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι η S είναι ομογενής, δηλαδή ότι $S(\lambda x) = \lambda S(x)$, $\forall x \in X$ και $\forall \lambda \in \mathbb{R}$. Έστω $x \in L_+$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Επιλέγω δύο ακολουθίες ρητών αριθμών $\{r_n\}$ και $\{t_n\}$, με $r_n \uparrow \lambda$ και $t_n \uparrow \lambda$ (οι ακολουθίες υπάρχουν λόγω πυκνότητας των ρητών). Ισχύει η ανισότητα: $r_n x \leq \lambda x \leq t_n x \Rightarrow S(r_n x) \leq S(\lambda x) \leq S(t_n x) \Rightarrow r_n S(x) \leq S(\lambda x) \leq t_n S(x)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Έχουμε ότι $S(\lambda x) \in M_+ - M_+$ (από τον ορισμό της S). Επειδή $x \in L_+$, έχουμε ότι $S(x) = f(x) \in M_+$(αφού $f : L_+ \longrightarrow M_+$) και M Αρχιμήδειος. Επομένως, από γνωστό θεώρημα των Αρχιμήδειων χώρων, έπεται ότι $\lambda S(x) \leq S(\lambda x) \leq \lambda S(x)$ $\Rightarrow S(\lambda x) = \lambda S(x)$, $\forall x \in L_+$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$. Έστω $x \in X$και $\lambda \in \mathbb{R}$. Έχουμε ότι $x = x_1 - x_2$, με $x_1, x_2 \in L_+$. Τότε, $S(\lambda x) = S(\lambda x_1 + (-\lambda) x_2)$ $= S(\lambda x_1) + S(-\lambda x_2) = \lambda\, S(x_1) - \lambda\, S(x_2) = \lambda\, (S(x_1) - S(x_2)) = \lambda\, (f(x_1) - f(x_2)) = \lambda S(x)$.

Επομένως,δείξαμε ότι $S(\lambda x) = \lambda S(x)$, $\forall x \in X$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$. Αποδείξαμε ότι η S είναι προσθετική και ομογενής, δηλαδή είναι γραμμική. Επομένως, η $S : X \longrightarrow M$ (όπου $X = L_+ - L_+$) είναι η μοναδική επέκταση της προσθετική απεικόνισης $f : L_+ \longrightarrow M_+$ σε θετικό τελεστή. □

Η ύπαρξη μίας βάσης συνδέεται με την ύπαρξη αυστηρά θετικών γραμμικών συναρτησιακών.

Θεώρημα 1.2.4. *Ένας οξύς κώνος K ενός γραμμικού χώρου X έχει βάση, αν και μόνο αν, ο X έχει τουλάχιστον ένα K- αυστηρά θετικό γραμμικό συναρτησιακό. Αν $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι ένα οποιοδήποτε K- αυστηρά θετικό γραμμικό συναρτησιακό, τότε για κάθε $a > 0$, το κυρτό σύνολο*

$$B = \{x \in K : f(x) = a\}$$

είναι βάση για τον κώνο K.

Το παρακάτω θεώρημα αποτελεί μία ειδική περίπτωση του παραπάνω θεωρήματος.

Θεώρημα 1.2.5. *Έστω X γραμμικός χώρος, K κώνος του X, και έστω $B \subseteq K$. Το B είναι βάση του K, αν και μόνο αν, υπάρχει αυστηρά θετικό γραμμικό συναρτησιακό f του X, ώστε*

$$B = \{ x \in K \mid f(x) = 1 \}$$

Τότε, λέμε ότι η βάση B ορίζεται από το γραμμικό συναρτησιακό f.

Απόδειξη. " $\Rightarrow$ "

Έστω B βάση του κώνου K. Επομένως, από τον ορισμό της βάσης κώνου, για κάθε $x \in K$, $x \neq 0$, υπάρχει ένας μοναδικός θετικός πραγματικός αριθμός λ_x, ώστε $\lambda_x x \in B$. Ορίζουμε την απεικόνιση $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ ως εξής: Για κάθε $x \in K$, $x \neq 0$, θέτουμε $f(x) = \frac{1}{\lambda_x}$ (όπου το λ_x το ορίσαμε προηγουμένως). Τότε, παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in K$, $x \neq 0$, το $f(x)$ είναι ο μοναδικός θετικός πραγματικός αριθμός ώστε $\frac{x}{f(x)} \in B$ (πράγματι, παρατηρούμε ότι $f\left(\frac{x}{f(x)}\right) = \frac{1}{f(x)} f(x) = 1$, άρα πράγματι $\frac{x}{f(x)} \in B$). Επομένως, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}_+$, $\lambda > 0$, έχουμε ότι $\frac{\lambda x}{\lambda f(x)} \in B \Rightarrow f\left(\frac{\lambda x}{\lambda f(x)}\right) = 1 \Rightarrow \frac{1}{\lambda f(x)} f(\lambda x) = 1 \Rightarrow f(\lambda x) = \lambda f(x)$. Επομένως, δείξαμε ότι η f είναι θετικά ομογενής. Θα δείξουμε ότι η f είναι προσθετική. Για κάθε $x, y \in K$ με $x, y \neq 0$, έχουμε $\frac{x}{f(x)}, \frac{y}{f(y)} \in B$. Επειδή το B είναι κυρτό (από τον ορισμό της βάσης κώνου) και επειδή $\frac{f(x)}{f(x)+f(y)} + \frac{f(y)}{f(x)+f(y)} = 1$, έχουμε ότι το στοιχείο $\frac{f(x)}{f(x)+f(y)} \frac{x}{f(x)} + \frac{f(y)}{f(x)+f(y)} \frac{y}{f(y)} = \frac{x+y}{f(x)+f(y)} \in B \Rightarrow f\left(\frac{x+y}{f(x)+f(y)}\right) = 1 \Rightarrow \frac{1}{f(x)+f(y)} f(x+y) = 1 \Rightarrow f(x+y) = f(x) + f(y)$. Επομένως, δειξαμε ότι η f είναι προσθετική. Επειδή λοιπόν δείξαμε ότι η f είναι θετικά ομογενής και προσθετική, έπεται ότι η f είναι γραμμική. Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα που αποδείξαμε παραπάνω , έπεται ότι η f επεκτείνεται σε γραμμικό συναρτησιακό του X.

" $\Leftarrow$ "

Υποθέτουμε ότι f είναι αυστηρά θετικό γραμμικό συναρτησιακό και ότι $B = \{x \in K \mid f(x) = 1\}$. Θα δείξουμε ότι το B είναι βάση του κώνου K. Το B είναι κυρτό. Πράγματι, έστω $x, y \in B$ και $\lambda > 0$. Τότε, $f(\lambda x + (1-\lambda) y) = f(\lambda x) + f((1-\lambda) y) = \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) = \lambda + (1-\lambda) = 1$, άρα $\lambda x + (1-\lambda) y \in B$, και άρα το B ειναι κυρτό. Για κάθε $x \in K$, έχουμε ότι $\frac{x}{f(x)} \in B$ (πράγματι, $f\left(\frac{x}{f(x)}\right) = \frac{1}{f(x)} f(x) = 1$) και ο αριθμός $\frac{1}{f(x)}$ είναι ο μοναδικός θετικός πραγματικός αριθμός λ_x, για τον οποίον ισχύει ότι $\lambda_x x \in B$. Ο λ_x είναι μοναδικός, επειδή αν υποθέσουμε ότι υπάρχει ένα $\lambda>0$ τέτοιο ώστε $\lambda x \in B$, τότε έπεται ότι $f(\lambda x) = 1 \Rightarrow \lambda f(x) = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{f(x)}$. Επομένως, το B είναι βάση του κώνου K. □

Έστω X μερικά διατεταγμένος γραμμικός χώρος, με κώνο P. Υποθέτουμε ότι υπάρχει κυρτό υποσύνολο B του P, ώστε το B να αποτελεί βάση του P. Θα αποδείξουμε δύο χρήσιμες προτάσεις που αφορούν το χώρο X.

Πρόταση 1.2.6. *Αν $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i = 0$, με $\lambda_i \in \mathbb{R}$ και $b_i \in B$, για κάθε $i = 1, 2, ..., n$, τότε $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$.*

Απόδειξη. Αφού το σύνολο B είναι βάση του P, από την προηγούμενη πρόταση, υπάρχει αυστηρά θετικό γραμμικό συναρτησιακό f ώστε $f(b) = 1, \forall b \in B$. Επειδή $f(0) = 0$, έχουμε ότι, επειδή από την υπόθεση $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i = 0$, έπεται ότι $f(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i) = 0$. Επειδή το f είναι γραμμικό, έχουμε ότι $0 = f(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i) = \sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i b_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(b_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ (επειδή το f είναι εκείνο το αυστηρά θετικό γραμμικό συναρτησιακό για το οποίο ισχύει ότι $f(b) = 1, \forall b \in B$, και άρα $f(b_i) = 0$ $\forall i = 1, 2, ..., n$, αφού $b_i \in B$, $\forall i = 1, 2, ..., n$.) Επομένως, δείξαμε ότι $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$, όπου $\lambda_i \in \mathbb{R}$, για κάθε $i = 1, 2, ..., n$. □

Πρόταση 1.2.7. *Αν $b_1, b_2 \in B$ και $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, ώστε $\lambda_1 b_1 \leq \lambda_2 b_2$, τότε $\lambda_1 \leq \lambda_2$.*

Απόδειξη. Επειδή η B είναι βάση του P, έπεται ότι υπάρχει αυστηρά θετικό γραμμικό συναρτησιακό f ώστε $f(b) = 1, \forall b \in B$. Εφόσον $\lambda_1 b_1 \leq \lambda_2 b_2$, έχουμε ισοδύναμα ότι $\lambda_2 b_2 - \lambda_1 b_1 \geq 0$, και άρα $f(\lambda_2 b_2 - \lambda_1 b_1) \geq 0$ (επειδή το f είναι αυστηρά θετικό). Από τη γραμμικότητα του f έχουμε ότι $0 \leq f(\lambda_2 b_2 - \lambda_1 b_1) = \lambda_2 f(b_2) - \lambda_1 f(b_1) = \lambda_2 - \lambda_1$(επειδή το f είναι εκείνο το αυστηρά θετικό γραμμικό συναρτησιακό για το οποίο ισχύει ότι $f(b) = 1, \forall b \in B$, και $b_1, b_2 \in B$). Δηλαδή $\lambda_2 - \lambda_1 \geq 0$ και επομένως $\lambda_1 \leq \lambda_2$. □

Ορισμός 1.2.4. *Έστω P κώνος του E, όπου E γραμμικός χώρος. Το γραμμικό συναρτησιακό f του E είναι ομοιόμορφα μονότονο ($uniformly\ monotonic$) στον P αν υπάρχει πραγματικός αριθμός $a > 0$, ώστε*

$$f(x) \geq a \| x \|, \text{για κάθε } x \in P$$

Πρόταση 1.2.8. *Έστω E γραμμικός χώρος, P κώνος του E, και f γραμμικό συναρτησιακό του E, αυστηρά θετικό στον P. Αν $B = \{x \in P \mid f(x) = 1\}$, έχουμε ότι:*

Η βάση B του P είναι norm-φραγμένη, αν και μόνο αν, το συναρτησιακό f είναι ομοιόμορφα μονότονο στον P.

Απόδειξη. " $\Rightarrow$ "

Υποθέτουμε ότι η βάση B του P είναι $norm$-φραγμένη. Έστω λοιπόν M ένα $norm$-φράγμα της B (δηλαδή $\forall\, x \in B, \| x \| \leq M$). Επειδή η B είναι βάση του κώνου P, έχουμε ότι $\forall\, x \in P, x \neq 0$, ισχύει ότι $\frac{x}{f(x)} \in B$ (πράγματι, $f\left(\frac{x}{f(x)}\right) = \frac{1}{f(x)} f(x) = 1$). Επειδή το $\frac{x}{f(x)}$ είναι ένα στοιχείο που ανήκει στην B, έχουμε ότι η νόρμα του θα φράσσεται από $norm$-φράγμα M της B, δηλαδή $\| \frac{x}{f(x)} \| \leq M \Rightarrow \frac{\|x\|}{\|f(x)\|} \leq M \Rightarrow \| f(x) \| \geq \frac{\|x\|}{M} \underset{(f \text{ αυστηρά θετικό στον } P)}{\Rightarrow}$ $f(x) \geq \frac{1}{M} \| x \|$, άρα η f είναι ομοιόμορφα μονότονη στον P (πράγματι, βρήκαμε ένα $a > 0$, το $a = \frac{1}{M}$, ώστε για κάθε $x \in P$ με $x \neq 0$, να ισχύει ότι $f(x) \geq a \| x \|$).

" $\Leftarrow$ "

Υποθέτουμε ότι το συναρτησιακό f είναι ομοιόμορφα μονότονο στον P, δηλαδή ότι $f(x) \geq a \| x \|, gia$ κάθε $x \in P$. Τότε, παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in P$, με $x \neq 0$, έχουμε ότι $f(x) \geq a \| x \| > 0$, δηλαδή το f είναι αυστηρά θετικό στον P. Επομένως, επειδή το f είναι αυστηρά θετικό γραμμικό συναρτησιακό του E, το υποσύνολο $B = \{ x \in P \mid f(x) = 1 \}$ του P είναι βάση του P. Κάθε στοιχείο της βάσης έχει εικόνα μέσω της f την τιμή 1, δηλαδή $\forall\, x \in B \Rightarrow f(x) = 1$, άρα $\left.\begin{array}{c} f(x) \geq a \| x \| \\ f(x) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow a \| x \| \leq 1 \Rightarrow$ $\| x \| \leq \frac{1}{a}, \forall\, x \in B$. Επομένως, δείξαμε ότι η νόρμα ενός τυχαίου στοιχείου της βάσης φράσσεται από το $\frac{1}{a}$, άρα το $\frac{1}{a}$ αποτελεί ένα $norm$-φράγμα της B. Επομένως, δείξαμε ότι η B είναι $norm$-φραγμένη. □

Πρόταση 1.2.9. *Έστω E γραμμικός χώρος. Αν P είναι πεπερασμένης διάστασης κλειστός κώνος του E, τότε κάθε βάση του P είναι φραγμένη.*

Απόδειξη. Έστω $X = P - P$, ο γραμμικός υπόχωρος του E, που παράγεται από τον κώνο P. Τότε, ο X είναι πεπερασμένης διάστασης (επειδή παράγεται από τον πεπερασμένης διάστασης κώνο P), είναι κλειστός υπόχωρος του E (επειδή παράγεται από τον P, που είναι κλειστός κώνος του E). Έστω f ένα αυστηρά θετικό γραμμικό συναρτησιακό του X. Τότε, το $B = \{ x \in P \mid f(x) = 1 \}$ είναι βάση του P, που ορίζεται από το f. Θα δείξουμε ότι η B είναι φραγμένη. Προς απαγωγή σε άτοπο, υποθέτουμε ότι η B δεν είναι φραγμένη. Τότε, θα υπάρχει μία ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, με $x_n \in B$, $\forall n \in \mathbb{N}$, ώστε $\| x_n \| \longrightarrow \infty$ (δηλαδή θα υπάρχει μία ακολουθία του χώρου B που να τείνει στο άπειρο, που να μην είναι δηλαδή φραγμένη στο B). Θεωρούμε την ακολουθία $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, με $y_n = \frac{x_n}{\|x_n\|}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (δηλαδή, η ακολουθία $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ανήκει στην μοναδιαία μπάλα του χώρου X). Επειδή ο X είναι χώρος πεπερασμένης διάστασης, έπεται ότι η μοναδιαία μπάλα του X είναι συμπαγής. Επομένως, για την ακολουθία $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ υπάρχει συγκλίνουσα υπακολουθία, έστω $(y_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$. Έστω x_0 το όριο της $(y_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$, δηλαδή $y_{k_n} \longrightarrow x_0$. Επειδή ο P είναι κλειστός, έπεται ότι $x_0 \in P$ και επίσης $\| x_0 \| = 1$ (επειδή το x_0 ανήκει στην μοναδιαία μπάλα του X). Τότε, έχουμε ότι $f(x_0) = lim f(y_{k_n}) = 0$ (πράγματι, $f(x_0) = f(lim y_{k_n}) = lim f(y_{k_n})$. Όμως, $f(y_{k_n}) = f\left(\frac{x_{k_n}}{\|x_{k_n}\|}\right) = \frac{1}{\|x_{k_n}\|} f(x_{k_n}) = \frac{1}{\|x_{k_n}\|}$, επειδή $f(x_{k_n}) = 1$, αφού $x_{k_n} \in B$. Όμως, $\| x_n \| \longrightarrow \infty$, άρα έπεται έπισης ότι $\| x_{k_n} \| \longrightarrow \infty$, άρα $f(y_{k_n}) = \frac{1}{\|x_{k_n}\|} \longrightarrow \infty$, και επομένως, $f(x_0) = lim f(y_{k_n}) = 0$). Αυτό όμως είναι άτοπο, επειδή η f είναι αυστηρά θετική στον P (και εμείς βρήκαμε ένα στοιχείο, το $x_0 \in P$ για το οποίο $f(x_0) = 0$). Άρα, δείξαμε ότι κάθε βάση στον P είναι φραγμένη. $\square$

Πρόταση 1.2.10. *Έστω E χώρος με νόρμα, P κώνος του E, και $f \in P^0$ (όπου $P^0 = \{ f \in E^* \mid f(x) \geq 0 \,, \forall x \in P \} =$*
$=\{ f : E \to \mathbb{R} \mid f$ γραμμική και συνεχής, με $f(x) \geq 0 \,, \forall x \in P \}$, είναι ο δυϊκός κώνος του P στον E^*).
τότε, οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:
(i) το f είναι εσωτερικό σημείο του P^0,
(ii) το f ορίζει φραγμένη βάση στον P.

Απόδειξη. $(i) \Rightarrow (ii)$

Υποθέτουμε ότι το f είναι εσωτερικό σημείο του P^0, άρα υπάρχει ένα $\varrho>0$, ώστε $B(f, \varrho) \subseteq P^0$, όπου $B(f, \varrho)$είναι ανοικτή μπάλα του χώρου E^*, με κέντρο το f και ακτίνα ϱ, δηλαδή μία ανοικτή περιοχή του f. Θα δείξουμε ότι το f ορίζει φραγμένη βάση στον P. Καταρχάς, για να δειξουμε ότι το f ορίζει βάση στον P, αρκεί να δείξουμε ότι το f είναι αυστηρά θετικό στον P. Θα το αποδείξουμε με άτοπο. Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει $x \in P$, με $x \neq 0$, ώστε $f(x) = 0$, τότε για κάθε $g \in E^*$, με $g \neq 0$, έχουμε ότι $f + \frac{\varrho}{2\|g\|} g \in P^0$. Επομένως, για το x που υποθέσαμε παραπάνω ότι υπάρχει, προκύπτει ότι $f(x) + \frac{\varrho}{2\|g\|} g(x) = \frac{\varrho}{2\|g\|} g(x) \geq 0 \Rightarrow g(x) \geq 0$. Ανάλογα, αν αντί του g θεωρήσουμε το $-g$, έχουμε ότι $-g(x) \geq 0$. Άρα από τις σχέσεις $\left.\begin{matrix} g(x) \geq 0 \\ -g(x) \geq 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow g(x) = 0, \forall g \in E^*$. Επομένως, $x = 0$, άτοπο επειδή υποθέσαμε ότι $x \neq 0$. Άρα, το f είναι αυστηρά θετικό στον P, και άρα ορίζει βάση στον P, την $B = \{ x \in P \mid f(x) = 1 \}$. Θα δείξουμε ότι η B είναι φραγμένη. Αρκεί να δείξουμε ότι $B \subseteq B\left(0 \,, \frac{2}{\varrho}\right)$ (πράγματι, αν η B

περιέχεται μέσα στην μπάλα $B\left(0\,,\,\frac{2}{\rho}\right)$, τότε κάθε στοιχείο της θα έχει νόρμα μικρότερη ή ίση από το $\frac{2}{\rho}$, άρα το $\frac{2}{\rho}$ αποτελεί άνω φράγμα της B). Έστω $x \in B$. Θα δείξουμε ότι $x \in B\left(0\,,\,\frac{2}{\rho}\right)$, δηλαδή ότι $\| x \| \leq \frac{2}{\rho}$. Για κάθε $g \in B(0\,,1)$ έχουμε ότι $f + \frac{\rho}{2}g \in P^0$, άρα $f(x) + \frac{\rho}{2}g(x) \underset{\text{επειδή } x \in B \Rightarrow f(x)=1}{=} 1 + \frac{\rho}{2}g(x) \geq 0 \Rightarrow -g(x) \leq \frac{2}{\rho}$. Επειδή, $g \in B(0\,,1)$, έπεται λόγω συμμετρίας ότι $-g \in B(0\,,1)$, και ανάλογα, αν αντί του g θεωρήσουμε το $-g$, έχουμε ότι $g(x) \leq \frac{2}{\rho}$. Άρα από τις σχέσεις $\left.\begin{array}{c} -g(x) \leq \frac{2}{\rho} \\ g(x) \leq \frac{2}{\rho} \end{array}\right\} \Rightarrow |\, g(x)\,| \leq \frac{2}{\rho}$, για κάθε $g \in B(0\,,1)$. Επειδή, $|\, g(x)\,| \leq \frac{2}{\rho}$, για κάθε $g \in B(0\,,1)$, έπεται ότι και το *supremum*: $sup\{\,|\, g(x)\,|\mid g \in B(0\,,1)\} \leq \frac{2}{\rho}$, όμως έξ' ορισμού το παραπάνω *supremum* είναι η νόρμα του x, δηλαδή $\| x \| = sup\{\,|\, g(x)\,|\mid g \in B(0\,,1)\} \leq \frac{2}{\rho}$. Δείξαμε επομένως ότι $\| x \| \leq \frac{2}{\rho}$, δηλαδή ότι $x \in B\left(0, \frac{2}{\rho}\right)$. Επομένως, δείξαμε ότι η βάση B είναι φραγμένη.

$(ii) \Rightarrow (i)$

Υποθέτουμε ότι η βάση $B = \{x \in P \mid f(x) = 1\}$, που ορίζεται από το αυστηρά θετικό γραμμικό συναρτησιακό f είναι φραγμένη. Τότε, υπάρχει $\rho>0$, ώστε $B \subseteq B(0\,,\rho)$, θα υπάρχει δηλαδή μία μπάλα γύρω από το μηδέν, που μέσα σε αυτήν να περιέχεται η βάση B. Θα δείξουμε ότι το f είναι εσωτερικό σημείο του P^0. Αρκεί να δείξουμε ότι $B\left(f\,,\,\frac{1}{\rho}\right) = f + B\left(0\,,\,\frac{1}{\rho}\right) \subseteq P^0$. Έστω $g \in B\left(0\,,\,\frac{1}{\rho}\right)$. Τότε, για κάθε στοιχείο της βάσης $x \in B \subseteq B(0\,,\rho)$, έχουμε ότι $|\, g(x)\,| \leq \| g \| \| x \| \underset{\text{επειδή } g \in B\left(0\,,\,\frac{1}{\rho}\right) \text{και } x \in B(0\,,\rho)}{\leq} \frac{1}{\rho}\rho = 1$. Επομένως, έχουμε ότι $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = 1 + g(x) \geq 1 + (-1) = 0$, για κάθε $x \in B$. Από το ότι $(f + g)(x) \geq 0$, για κάθε $x \in B$, έπεται ότι $(f + g)(x) \geq 0$, για κάθε $x \in P$ (από τον ορισμό της βάσης κώνου), άρα $f + g \in P^0$, με $g \in B\left(0\,,\,\frac{1}{\rho}\right)$ τυχαίο. Άρα, $f + B\left(0\,,\,\frac{1}{\rho}\right) \subseteq P^0$. Όμως, $f + B\left(0\,,\,\frac{1}{\rho}\right) = B\left(f\,,\,\frac{1}{\rho}\right)$, άρα $B\left(f\,,\,\frac{1}{\rho}\right) \subseteq P^0$, δηλαδή υπάρχει μία μπάλα γύρω από την f που να βρίσκεται μέσα στο P^0, άρα δείξαμε ότι η f είναι εσωτερικό σημείο του P^0. □

Το παραπάνω αποτέλεσμα μπορεί να επεκταθεί σε τοπικά κυρτούς χώρους. Καταρχάς, υπενθυμίζουμε την έννοια του τοπικά κυρτού τοπολογικού χώρου.

Ορισμός 1.2.5. *Ο τοπολογικός χώρος (X,T) ονομάζεται τοπικά κυρτός, αν έχει μία βάση περιοχών του 0_X που αποτελείται από κυρτά. Δηλαδή, υπάρχει*

$\mathrm{B} \subseteq N_{0_X} = \{V \in T : 0_X \in V\}$ *από κυρτά, ώστε για κάθε* $V \in N_{0_X}$, *υπάρχει* $B \in \mathrm{B}$, $B \subseteq V$.

Θεώρημα 1.2.11. *Έστω* X *τοπικά κυρτός χώρος, και έστω* $P \subseteq X$ *κώνος του* X. *Τότε, ο* P *έχει φραγμένη βάση* B, *με* $0 \notin \overline{B}$, *αν και μόνο αν, ο* P^o *έχει εσωτερικό σημείο (ως προς την norm τοπολογία του* X^**)*

Εν συνεχεία, θα αποδείξουμε ένα πολύ σημαντικό αποτέλεσμα, που δείχνει πότε ένας κώνος P *έχει βάση που ορίζεται από συνεχές γραμμικό συναρτησιακό* f *(δηλαδή,* $f \in X^*$*) και δίνει επίσης ένα κριτήριο για τον αν η συγκεκριμένη βάση για τον* P *είναι φραγμένη ή όχι.*

Θεώρημα 1.2.12. *Ο κώνος* P *έχει μία βάση που ορίζεται από συνεχές γραμμικό συναρτησιακό* $f \in X^*$, *αν και μόνο αν, ο* P *έχει μία βάση* B *με* $0 \notin \overline{B}$. *Αν επιπλέον η βάση* B *είναι φραγμένη, τότε η βάση για τον* P *που ορίζεται από το* f *είναι φραγμένη.*

Απόδειξη. " $\Rightarrow$ "
Υποθέτουμε ότι ο κώνος P έχει μία βάση που ορίζεται από συνεχές γραμμικό συναρτησιακό $f \in X^*$, δηλαδή το $B_f = \{x \in P : f(x) = 1\}$ είναι βάση του P. Θα δείξουμε ότι $0 \notin \overline{B}$. Προς απαγωγή σε άτοπο, υποθέτουμε ότι $0 \in \overline{B}$. Τότε, θα υπάρχει ακολουθία $x_n \in B$ με $x_n \to 0$. Επειδή $x_n \in B$ έχουμε ότι $x_n \in P$ και $f(x_n) = 1$, $\forall n$. Τότε έχουμε ότι, επειδή f συνεχές, $1 = f(x_n) \to f(0) = 0$, άτοπο. Άρα, $0 \notin \overline{B}$.

" $\Leftarrow$ "
Υποθέτουμε ότι B είναι βάση του P με $0 \notin \overline{B}$. Τότε, το $\overline{B}$ είναι κλειστό και κυρτό σύνολο και το 0 είναι συμπαγές, άρα από Διαχωριστικό Θεώρημα, υπάρχει $f \in X^*$ που διαχωρίζει γνήσια το $\overline{B}$ και το 0, δηλαδή $f(x) \geq \delta > f(0) = 0$, $\forall x \in \overline{B}$. Παρατηρούμε ότι $f(x) > 0$, $\forall x \in \overline{B}$. Προκειμένου να δείξουμε το f ορίζει βάση για τον P, αρκεί να δείξουμε ότι το f είναι αυστηρά θετικό. Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι $x \in P, x \neq 0$, τότε θα υπάρχει $\lambda_x > 0$, τέτοιο ώστε $\lambda_x x \in B$ και τότε θα έχουμε ότι $f(\lambda_x x) = \lambda_x f(x) > 0$, δηλαδή $f(x) > 0$. Επομένως, δείξαμε ότι $f(x) > 0, \forall x \in P, x \neq 0$, δηλαδή το f είναι αυστηρά θετικό. Επομένως, το $B_f = \{x \in P : f(x) = 1\}$ είναι βάση για τον P που ορίζεται από το συνεχές γραμμικό συναρτησιακό f.

Τέλος, θα δείξουμε ότι αν η βάση B είναι φραγμένη, τότε η βάση για τον P που ορίζεται από το f είναι φραγμένη. Υποθέτουμε λοιπόν ότι η βάση B είναι φραγμένη. Έστω $\|x\| \leq M, \forall x \in B$. Θα δείξουμε ότι η B_f είναι φραγμένη. Προς απαγωγή σε άτοπο, υποθέτουμε ότι υπάρχει ακολουθία $x_n \in B$, με $\|x_n\| \geq n, \forall n$. Για κάθε x_n υπάρχει $\lambda_n > 0$ ώστε $y_n = \lambda_n x_n \in B$ (επειδή B βάση του P). Τότε, έχουμε ότι $M \geq \|y_n\| = \|\lambda_n x_n\| = \lambda_n \|x_n\| \geq \lambda_n n$, άρα

$\lambda_n \leq \frac{M}{n}$. Άρα, έχουμε ότι $f(y_n) = \lambda_n f(x_n) = \lambda_n \leq \frac{M}{n} \to 0$, δηλαδή δείξαμε ότι $f(y_n) \to 0$, άτοπο, επειδή το f διαχωρίζει γνήσια το $\overline{B}$ και το 0.

Κλείνοντας την ενότητα, θα δούμε μερικά παραδείγματα βάσεων κώνων.

Παράδειγμα-(1) Έστω ο χώρος ακολουθιών l_2, όπου

$$l_2 = \left\{ x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \| x \|_2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} | x_n |^2 \right)^{1/2} < \infty \right\}.$$

Έστω ο οξύς κώνος $K = \left\{ x = (x_1, x_2, x_3, ...) \in l_2 \mid x_1 \geq \sqrt{\sum_{n=2}^{\infty} x_n^2} \right\}$ $= \{ x = \lambda(1, x_2, x_3, ...) \in l_2 \mid \lambda \geq 0$ και $\sum_{n=2}^{\infty} x_n^2 \leq 1 \}$. Τότε, το σύνολο $B = \{ (x_1, x_2, x_3, ...) \in K \mid x_1 = 1 \}$ είναι βάση του K. (Πράγματι, το B είναι κυρτό υποσύνολο του K, και για κάθε $x \in K$, με $x \neq 0$, υπάρχει μοναδικό $\lambda_x > 0$, ώστε $\lambda_x x \in B$, και προκύπτει άμεσα από τον τρόπο που ορίσαμε τον οξύ κώνο K).

Κεφάλαιο 2

Ανακλαστικοί κώνοι

2.1 Ορισμοί

Οι ανακλαστικοί κώνοι είναι μία νέα και πολύ πλούσια σε ιδιότητες οικογένεια κώνων που ορίζονται με φυσιολογικό τρόπο. Ο ορισμός αυτών των κώνων ξεκίνησε από το άρθρο [56] και τις ανάγκες εφαρμογών στην οικονομία και είναι ο εξής:

Ορισμός 2.1.1. *Ένας κώνος P ενός χώρου Banach X ονομάζεται ανακλαστικός (reflexive) αν το σύνολο $U_X^+ = U_X \cap P$ είναι ασθενώς συμπαγές.*

Οι επόμενες ιδιότητες, που χαρακτηρίζουν έναν ανακλαστικό κώνο, προκύπτουν άμεσα από τον ορισμό:

1. Ένας ανακλαστικός κώνος είναι πάντοτε κλειστός.

   Πράγματι, έστω ακολουθία $\{x_n\} \subseteq P$, με $x_n \to x$. Θα δείξουμε ότι $x \in P$. Επειδή η $\{x_n\}$ είναι συγκλίνουσα, έπεται ότι είναι φραγμένη και σε συνδυασμό με το γεγονός ότι $x_n \in P, \forall n$, έχουμε ότι υπάρχει $\rho \in \mathbb{R}_+$, τέτοιο ώστε $x_n \in \rho U_X^+, \forall n$. Επειδή ο P είναι ανακλαστικός, το σύνολο ρU_X^+ είναι ασθενώς συμπαγές, άρα η $\{x_n\}$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία σε στοιχείο του ρU_X^+. Επειδή όμως η ακολουθία $\{x_n\}$ είναι συγκλίνουσα, έχουμε ότι το όριό της θα ανήκει στο σύνολο ρU_X^+, δηλαδή $x \in \rho U_X^+ \subseteq P$, άρα $x \in P$. Επομένως δείξαμε ότι ο P είναι κλειστός.

2. Σε έναν ανακλαστικό χώρο *Banach*, κάθε κλειστός κώνος είναι ανακλαστικός.

   Έστω X ανακλαστικός χώρος *Banach*, και P κλειστός κώνος του X. Επειδή ο X είναι ανακλαστικός, έχουμε ισοδύναμα, ότι η κλειστή μοναδιαία μπάλα U_X είναι ασθενώς συμπαγής. Τότε, το θετικό τμήμα της μοναδιαίας μπάλας $U_X^+ = U_X \cap P$ είναι κλειστό υποσύνολο (ως τομή κλειστών)του ασθενώς συμπαγούς συνόλου U_X, άρα είναι ασθενώς συμπαγές. Επομένως, δείξαμε ότι κάθε κλειστός κώνος ενός ανακλαστικού χώρου *Banach* είναι ανακλαστικός.

2.2 Βάσεις ανακλαστικών κώνων

Γενικά, ένας κώνος μπορεί να έχει μία φραγμένη και μία μη φραγμένη βάση, δηλαδή κάθε βάση δεν είναι του ίδιου είδους ως προς το φραγμένο. Το γεγονός αυτό οδηγεί στον παρακάτω ορισμό:

Ορισμός 2.2.1. *Ένας κώνος P χώρου Banach X ονομάζεται mixed based κώνος αν ο P έχει μία φραγμένη και μία μη φραγμένη βάση που ορίζονται από συνεχή γραμμικά συναρτησιακά.*

Στο παρακάτω παράδειγμα, παρατηρούμε ότι ο θετικός κώνος του l_1 έχει μία φραγμένη και μία μη φραγμένη βάση, δηλαδή είναι ένα παράδειγμα *mixed based* κώνου.

Όπως θα δείξουμε αμέσως μετά το παράδειγμα, στους ανακλαστικούς κώνους, οι βάσεις θα είναι φραγμένες ή όλες θα είναι μη φραγμένες.

Παράδειγμα 2.2.1. *Έστω $X = l_1 = \{x = (x_i) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} | \|x\|_1 < \infty\}$. Τότε ο δυϊκός του είναι ο $X^* = l_\infty$. Θεωρούμε λοιπόν το δυϊκό σύστημα $< l_1, l_\infty >$ και έστω l_1^+ ο θετικός κώνος του χώρου l_1.*
Αν $f = (f_i) \in l_\infty^+$, με $f_i > 0, \forall i$, τότε η βάση του l_1^+ που ορίζεται από το f είναι:

$$B_f = \left\{ x = (x_i) \in l_1^+ | f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i x_i = 1 \right\}$$

(α') Αν $f = \mathbf{1} = (1, 1, ..., 1, ...)$, τότε

$$B_{\mathbf{1}} = \left\{ x = (x_i) \in l_1^+ | f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i = \|x\|_1 = 1 \right\}$$

και η βάση $B_{\mathbf{1}}$ για τον κώνο l_1^+ είναι φραγμένη. Επίσης, παρατηρώ ότι $e_n \in B_{\mathbf{1}}, \forall n$.
Γενικότερα, αν $f_i \geq \alpha > 0, \forall i$, τότε το f ορίζει φραγμένη βάση.
Πράγματι, για κάθε $x \in B_f$, έχουμε:

$$1 = f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i x_i \geq \alpha \sum_{i=1}^{\infty} x_i = \alpha \|x\|_1 \Rightarrow \|x\|_1 \leq \frac{1}{\alpha}$$

(β′) Αν $f = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...\right)$, *τότε η βάση*

$$B_f = \left\{ x = (x_i) \in l_1^+ | f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} x_i = 1 \right\}$$

είναι μη φραγμένη. Πράγματι, παρατηρούμε ότι

$$e_1 \in B_f, 2e_2 \in B_f, ..., ne_n \in B_f, ... \text{και} \|ne_n\|_1 = n \to +\infty$$

Γενικότερα, αν η ακολουθία $f = (f_i)$ *έχει υπακολουθία* (f_{i_ν}) *που να τείνει στο μηδέν, τότε η* B_f *είναι μη φραγμένη.*

Για την κλάση των ανακλαστικών κώνων, θα δούμε παρακάτω ότι ισχύει ένα πολύ σημαντικό αποτέλεσμα όσον αφορά τις βάσεις τους. Για έναν ανακλαστικό κώνο ενός χώρου με νόρμα, έχουμε ότι είτε κάθε βάση του κώνου θα είναι φραγμένη, είτε κάθε βάση του θα είναι μη φραγμένη. Δηλαδή, ένας ανακλαστικός κώνος δεν μπορεί να περιέχει ταυτόχρονα μία φραγμένη και μία μη φραγμένη βάση.

Το αποτέλεσμα αυτό είναι γνωστό ως αποτέλεσμα διχοτομίας για ανακλαστικούς κώνους, ακριβώς επειδή χωρίζει τους ανακλαστικούς κώνους σε δύο κατηγορίες, εκείνους που έχουν φραγμένες βάσεις και σε εκείνους που έχουν μη φραγμένες βάσεις. Το αποτέλεσμα αυτό θα μελετηθεί αναλυτικά στην συνέχεια, όπου θα δοθεί και ο μαθηματικά αυστηρός ορισμός των εννοιών που υπεισέρχονται σε αυτόν. Η σημασία του αποτελέσματος αυτού έγκειται στο γεγονός ότι στην πρώτη κατηγορία κώνων (που έχουν φραγμένες βάσεις) αποδεικνύεται ότι η αντιστοιχία ζήτησης κάθε ασθενώς άνω ημισυνεχούς σχέσης προτίμησης υπάρχει και μπορεί επίσης να αποδειχθεί η συνέχειά της.

Στο επόμενο αποτέλεσμα, μελετάμε ανακλαστικούς κώνους σε διατεταγμένα δυϊκά συστήματα.

Θεώρημα 2.2.1. *Υποθέτουμε ότι* $< X, Y >$ *είναι ένα δυϊκό σύστημα. Αν* X *είναι χώρος με νόρμα,* P *είναι* $\sigma(X,Y)$*-κλειστός κώνος του* X*, ώστε το θετικό τμήμα* $U_X^+ = U_X \cap P$ *της κλειστής μοναδιαίας μπάλας* U_X *του* X *είναι* $\sigma(X,Y)$*-συμπαγής, έχουμε ότι είτε κάθε βάση για τον* P *που ορίζεται από ένα* $y \in Y$ *είναι φραγμένη, ή κάθε τέτοια βάση για τον* P *είναι μη φραγμένη.*

Απόδειξη. Έστω το δυϊκό ζεύγος $< X, Y >$, όπου X χώρος με νόρμα και υποθέτουμε ότι P είναι ένας σ(X,Y)-κλειστός κώνος του X.

Θα δείξουμε ότι είτε κάθε βάση για τον P που ορίζεται από ένα $y \in Y$ είναι φραγμένη, ή κάθε τέτοια βάση για τον P είναι μη φραγμένη.

Προς απαγωγή σε άτοπο, υποθέτουμε ότι το στοιχείο $y_1 \in Y$ ορίζει την φραγμένη βάση B_{y_1} για τον P και ότι το στοιχείο $y_2 \in Y$ ορίζει την μη φραγμένη βάση B_{y_2} για τον P.

Επειδή το y_1 ορίζει φραγμένη βάση για τον κώνο P, έπεται ότι το y_1 είναι ομοιόμορφα μονότονο, δηλαδή υπάρχει $a > 0$ ώστε $y_1(x) \geqslant a \parallel x \parallel$, $\forall x \in P$.

Η βάση B_{y_1} είναι σ(X,Y)-συμπαγής. Θα το αποδείξουμε.

Πρώτα, θα δείξουμε ότι η B_{y_1} είναι σ(X,Y)-κλειστή.

Έστω δίκτυο $\{x_a\} \subseteq B_{y_1} : x_a \to x$ στην ασθενή τοπολογία σ(X,Y), και θα δείξουμε ότι $x \in B_{y_1}$, δηλαδή ότι $x \in P$ και $y_1(x) = 1$.

Επειδή $x_a \to x$, έχουμε ότι $y_1(x_a) \to y_1(x)$, και επειδή $x_a \in B_{y_1}, \forall a$, έχουμε ότι $y_1(x_a) = 1, \forall a$. Επομένως, $1 = y_1(x_a) \to y_1(x)$, άρα $y_1(x) = 1$.

Επίσης, $x \in P$, επειδή ο P είναι σ(X,Y)-κλειστός, άρα δείξαμε ότι $x \in B_{y_1}$ και άρα η βάση B_{y_1} είναι σ(X,Y)-κλειστή.

Ακόμη (από την υπόθεση) η B_{y_1} είναι φραγμένη. Επομένως, $\parallel x \parallel \leq M, \forall x \in B_{y_1}$, δηλαδή $B_{y_1} \subseteq MU_X$ και σε συνδυασμό με το ότι $B \subseteq P$, έχουμε ότι $B_{y_1} \subseteq MU_X^+$, άρα η B_{y_1} είναι σ(X,Y)-συμπαγής, ως σ(X,Y)-κλειστό υποσύνολο του σ(X,Y)-συμπαγούς MU_X^+.

Επειδή η βάση B_{y_1} είναι σ(X,Y)-συμπαγής, το y_2 λαμβάνει ελάχιστη τιμή $m = y_2(x_0)$ στη B_{y_1} σε ένα σημείο x_0 της B_{y_1}. Επειδή το y_1 είναι αυστηρά θετικό στον P, έχουμε ότι $m > 0$ (πράγματι, επειδή $x_0 \in B_{y_1}$, έπεται ότι $y_1(x_0) = 1$ και άρα $x_0 \neq 0$). Επομένως, για κάθε $x \in P, x \neq 0$, έχουμε $y_2\left(\frac{x}{y_1(x)}\right) \geq m$, δηλαδή $y_2(x) \geq my_1(x) \geq ma \parallel x \parallel$,δηλαδή το y_2 είναι ομοιόμορφα μονότονο, αντίφαση, επειδή υποθέσαμε ότι το y_2 ορίζει μη-φραγμένη βάση για τον P.

□

Παρατήρηση 2.2.2. *Το αποτέλεσμα διχοτομίας για κώνους ισχύει για ανακλαστικούς χώρους Banach, αλλά και για τους δυϊκούς χώρων με νόρμα, όπως θα δούμε στα παρακάτω δύο πορίσματα.*

Πόρισμα 2.2.3. *Για κάθε κλειστό κώνο P ανακλαστικού χώρου Banach X, έχουμε: Είτε κάθε βάση για τον P που ορίζεται από ένα στοιχείο $x^* \in X^*$ είναι φραγμένη, ή κάθε τέτοια βάση για τον P είναι μη-φραγμένη.*

Απόδειξη. Θεωρούμε το δυϊκό σύστημα $< X, X^* >$, όπου X ανακλαστικός χώρος Banach, με κλειστό κώνο P. Αρκεί να δείξουμε ότι το θετικό τμήμα U_X^+ της μοναδιαίας μπάλας του X είναι σ(X,X^*)-συμπαγές. Επειδή ο κώνος P είναι κυρτό υποσύνολο του χώρου X, από το Θεώρημα του Mazur, έπεται ότι ο κώνος P είναι και σ(X,X^*)-κλειστός. Γνωρίζουμε ότι σε ανακλαστικούς χώρους, η μοναδιαία μπάλα U_X είναι σ(X,X^*)-συμπαγής. Παρατηρούμε ότι το θετικό τμήμα της μοναδιαίας μπάλας U_X^+, είναι σ(X,X^*)-κλειστό, ως τομή του σ(X,X^*)-κλειστού κώνου P και της κλειστής μοναδιαίας μπάλας U_X. Επομένως, το θετικό τμήμα U_X^+ είναι σ(X,X^*)-συμπαγές, ως σ(X,X^*)-κλειστό υποσύνολο του σ(X,X^*)-συμπαγούς U_X.

□

Πόρισμα 2.2.4. *Για κάθε σ(X^*,X)-κλειστό κώνο P του δυϊκού X^* ενός χώρου με νόρμα X έχουμε: Είτε κάθε βάση για τον P που ορίζεται από ένα στοιχείο $x \in X$ είναι φραγμένη, ή κάθε τέτοια βάση για τον P είναι μη-φραγμένη.*

Απόδειξη. Θεωρούμε το δυϊκό σύστημα $< X^*, X >$. Τότε παρατηρούμε ότι πληρούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος 2.2.1. Πράγματι, στον δυϊκό χώρο X^*, η κλειστή μοναδιαία μπάλα U_{X^*} είναι σ(X^*,X)-συμπαγής σύμφωνα με το Θεώρημα του *Alaoglou* ([50], *Th.* 2.6.18), άρα το θετικό της τμήμα $U_{X^*}^+$ είναι σ(X^*,X)-συμπαγές, ως σ(X^*,X)-κλειστό υποσύνολο του σ(X^*,X)-συμπαγούς U_{X^*}.

□

Όπως λοιπόν αναφέραμε προηγουμένως, σύμφωνα με το Θεώρημα διχοτομίας για ανακλαστικούς κώνους, έχουμε το εξής πολύ σημαντικό θεώρημα:

Θεώρημα 2.2.5. *Κάθε ανακλαστικός κώνος χώρου Banach X δεν είναι mixed based κώνος.*

Έστω X χώρος Banach, διατεταγμένος από τον κλειστό κώνο P. Ορίζουμε το σύνολο P^{0s} των αυστηρά θετικών και συνεχών γραμμικών συναρτησιακών του X, δηλαδή:

$P^{0s} = \{x^* \in X^* : x^*(x) > 0, \forall x \in P, x \neq 0\}$

Εν συνεχεία, θα παρουσιάσουμε μία πρόταση που δίνει μία συνθήκη ώστε ο κλειστός κώνος ενός χώρου Banach X να είναι ανακλαστικός, χρησιμοποιώντας την παραπάνω έννοια του συνόλου P^{0s}.

Πρόταση 2.2.6. *Έστω X χώρος Banach, διατεταγμένος από τον κλειστό κώνο P. Αν το σύνολο P^{0s} των αυστηρά θετικών και συνεχών γραμμικών συναρτησιακών του X είναι μη κενό, και για κάθε $x^* \in P^{0s}$, η βάση B_{x^*} για τον P που ορίζεται από το x^* είναι φραγμένη, τότε ο κώνος P είναι ανακλαστικός.*

Απόδειξη. Έχουμε ότι κάθε βάση για τον κώνο P, που ορίζεται από αυστηρά θετικό στοιχείο $x^* \in X^*$ είναι φραγμένη. Επειδή λοιπόν τα στοιχεία $x^* \in P^{0s}$ ορίζουν φραγμένη βάση για τον P έπεται ότι ταυτίζονται με τα εσωτερικά σημεία του P^o, δηλαδή $P^{0s} = int(P^o)$.
Επομένως, έχουμε ότι η βάση B_{x^*} για τον P είναι ασθενώς συμπαγής για κάθε $x^* \in X^*$. (Πράγματι, σύμφωνα με το [24], Λήμμα[3.4], έχουμε ότι: Έστω X χώρος Banach, και έστω $K \subset X$ κλειστός και κυρτός κώνος, με $K^{0s} \neq \emptyset$. Αν $K^{0s} = int(K^{0s})$, τότε η B_{x^*} είναι ασθενώς συμπαγής για κάθε $x^* \in K^{0s}$.)
Έστω $x^* \in P^{0s}$. Επειδή η βάση B_{x^*} δεν περιέχει το μηδέν (εξ' ορισμού της βάσης κώνου),τότε θα υπάρχει ένας θετικός πραγματικός αριθμός $\rho > 0$, τέτοιος ώστε $\rho U_X \cap B_{x^*} = \emptyset$.
Εύκολα μπορούμε να ελέγξουμε ότι το σύνολο $\bigcup_{0\leq\alpha\leq 1} \alpha B_{x^*}$ είναι ασθενώς συμπαγές σύνολο, που περιέχει το κλειστό σύνολο $\rho U_X \cap P$.
Άρα, το σύνολο $\rho U_X \cap P$ είναι ασθενώς συμπαγές, ως ασθενώς κλειστό υποσύνολο ασθενώς συμπαγούς συνόλου. Επομένως, ο κώνος P είναι ανακλαστικός. □

2.3 Χαρακτηρισμοί του l_1 και του l_1^+

Στην παρούσα ενότητα, η μελέτη μας θα επικεντρωθεί στις αναγκαίες και ικανές συνθήκες ώστε ένας χώρος Banach να είναι ισομορφικός με τον χώρο l_1, και ένας κώνος να είναι ισομορφικός με τον κώνο l_1^+.
Η θεωρία αυτή είναι πολύ σημαντική και διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στη θεωρία των ανακλαστικών κώνων. Πιο συγκεκριμένα, μας παρέχει ένα θεώρημα με βάση το οποίο μπορούμε να αποφανθούμε για το αν ένας κλειστός κώνος P ενός χώρου Banach X είναι ανακλαστικός ή όχι (Θεώρημα 2.4.1).

Καταρχάς, θα διατυπώσουμε και θα αποδείξουμε ένα θεώρημα που δίνει την ισοδύναμη πρόταση που πρέπει να ισχύει για να είναι ένας χώρος Banach X ισομορφικός με τον l_1.

Θεώρημα 2.3.1. *Αν X χώρος Banach, οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:*

(α΄) $X \cong l_1$ (οι χώροι X και l_1 είναι ισόμορφοι)

(β΄) Ο X έχει φραγμένη βάση Schauder $\{b_n\}$ τύπου l_+ (δηλαδή $\exists c \in \mathbb{R}_+$: $\forall a = (a_n)$ ακολουθία πραγματικών αριθμών, ισχύει $\| \sum_{i=1}^n a_i b_i \| \geq c \sum_{i=1}^n \mid a_i \mid$)

Απόδειξη. (2) $\Rightarrow$ (1)
Έστω $\{b_n\}$ βάση *Schauder* του X τύπου l_+ με $\| b_n \| \leq M, \forall n$.
Θα δείξουμε ότι η απεικόνιση:

$\mathrm{T}(\sum_{i=1}^{\infty} x(i) b_i) = (x(i))_{i \in \mathbb{N}}, \forall x = \sum_{i=1}^{\infty} x(i) b_i \in X$

είναι ισομορφισμός του X επί του l_1.
Έστω $x = \sum_{i=1}^{\infty} x(i) b_i \in X$. Θα δείξουμε ότι $(x(i))_{i \in \mathbb{N}} \in l_1$, δηλαδή θα δείξουμε ότι $\sum_{i=1}^{\infty} \mid x(i) \mid < \infty$.
Έχουμε

$$\| \sum_{i=1}^{n} x(i) b_i \| \geq c \sum_{i=1}^{n} \mid x(i) \mid, \forall n \in \mathbb{N}$$

Επίσης, $\| \sum_{i=1}^n x(i) b_i \| \to \| x \|$.
Άρα, λόγω σύγκλισης, έχουμε ότι για $\varepsilon = \| x \| > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, ώστε

$$\| \sum_{i=1}^{n} x(i) b_i \| < 2 \| x \|, \forall n \geq n_0$$

Άρα,

$0 \leq \sum_{i=1}^{n} \mid x(i) \mid \leq \frac{2}{c} \| x \|, \forall n \geq n_0$

Η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων $S_n = \sum_{i=1}^{n} \mid x(i) \mid$ είναι αύξουσα και φραγμένη, άρα συγκλίνει. Επομένως,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mid x(i) \mid \leq \frac{2}{c} \parallel x \parallel (1)$$

Άρα, δείξαμε ότι $(x(i)) \in l_1$.
Για κάθε $x = \sum_{i=1}^{\infty} x(i)b_i \in X$, θέτουμε $T(x) = (x(i))$.
Τότε, $T : X \to l_1$ γραμμική, και συνεχής (πράγματι,

$$\parallel T(x) \parallel_{l_1} = \parallel (x(i)) \parallel_{l_1} = \sum_{i=1}^{\infty} \mid x(i) \mid \leq \frac{2}{c} \parallel x \parallel$$

από την σχέση (1).
Θα δείξουμε ότι η T είναι αμφιμονοσήμαντη (1-1). Πράγματι, αν $T(x) = 0 \Rightarrow x(i) = 0, \forall i \Rightarrow x = 0$.
Θα δείξουμε ότι η T είναι επί.
Έστω $\alpha = (\alpha_i) \in l_1$. Θα δείξουμε ότι $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i b_i \in X$, δηλαδή θα δείξουμε ότι η σειρά συγκλίνει.
Αρκεί να δείξουμε ότι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων είναι $Cauchy$, δηλαδή ότι:

$\forall \varepsilon > 0, \exists n = n(\varepsilon) : \parallel \sum_{i=n}^{n+m} a_i b_i \parallel < \varepsilon, \forall m \in \mathbb{N}$

Επειδή $\alpha = (\alpha_i) \in l_1$, έχουμε ότι $\sum_{i=1}^{\infty} \mid a_i \mid \in \mathbb{R}$.
Άρα, αν $\varepsilon > 0$, $\exists n_\varepsilon : \forall n > n_\varepsilon$
ώστε να έχουμε:

$$\sum_{i=n}^{n+m} \mid a_i \mid < \frac{\varepsilon}{M}$$

Έχουμε $\forall n \geq n_\varepsilon$, ότι

$$\parallel \sum_{i=n}^{n+m} a_i b_i \parallel \leq \sum_{i=n}^{n+m} \mid a_i \mid \parallel b_i \parallel \leq M \sum_{i=n}^{n+m} \mid a_i \mid \leq M \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

Άρα, $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i b_i \in X$ και

$$T\left(\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i b_i\right)=\alpha$$

Άρα, η T είναι επί.

Επομένως, έχουμε δείξει ότι η T είναι γραμμική, 1-1, επί, συνεχής, άρα η T είναι ισομορφισμός.

$(1) \Rightarrow (2)$

Έστω ότι οι χώροι l_1 και X είναι ισόμορφοι. Τότε, υπάρχει ισομορφισμός $T : l_1 \to X$ του l_1 επί του X.

Έστω $\{e_n\}$ η συνήθης βάση του l_1.

Θέτουμε $b_n = T(e_n)$.

Τότε, η $\{b_n\}$ είναι βάση *Schauder* του X. Πραγματικά, αν υποθέσουμε ότι $x \in X$, θα δείξουμε ότι το x μπορεί να γραφεί κατά μοναδικό τρόπο σαν ανάπτυγμα των στοιχείων της $\{b_n\}$.

Για το x, θα υπάρχει $\alpha \in l_1 : T(\alpha) = x$, και το α είναι μοναδικό επειδή ο T είναι 1-1.

Οπότε, έχουμε:

T$(\sum_{i=1}^{n} a_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i T(e_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$

Επίσης, $\sum_{i=1}^{n} a_i e_i \to \alpha$

Άρα,

$\lim_n T\left(\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\right) = T\left(\lim_n \sum_{i=1}^{n} a_i e_i\right) = T(a) = x$

$\Rightarrow \lim_n \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right) = x$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i = x$

Άρα, η $\{b_n\}$ είναι βάση *Schauder* του X.

Θα δείξουμε ότι η $\{b_n\}$ είναι τύπου l_+ και φραγμένη. Πράγματι,

$$\| b_n \| = \| T(e_n) \| \leq \| T \| \| e_n \| = \| T \|, \forall n$$

άρα, η βάση $\{b_n\}$ είναι φραγμένη.

Θα δείξουμε ότι η βάση $\{b_n\}$ είναι τύπου l_+.

Θα δείξουμε ότι $\exists c > 0 : \forall \alpha = (\alpha_i)$ πραγματική ακολουθία, ισχύει

$$\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i \| \geq c \sum_{i=1}^{n} | \alpha_i |$$

Επειδή ο T είναι αμφισυνεχής, έχουμε ότι
$\frac{1}{\|T^{-1}\|} \| \xi \| \leq \| T(\xi) \| \leq \| T \| \| \xi \|, \forall \xi \in l_1$

Έχουμε ότι
$T\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i$
άρα,
$\frac{1}{\|T^{-1}\|} \| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \|_{l_1} \leq \| T\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right) =$
$\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i \| = \frac{1}{\|T^{-1}\|} \sum_{i=1}^{n} | \alpha_i |$

δηλαδή, δείξαμε ότι $\exists c > 0$, όπου είναι το $c = \frac{1}{\|T^{-1}\|}$, ώστε

$$\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i \| \geq c \sum_{i=1}^{n} | \alpha_i |$$

$\square$

Συνεχίζουμε με τον ορισμό του διατακτικού ισομορφισμού.

Ορισμός 2.3.1. *Έστω X, Y χώροι με νόρμα (ή και Banach).
Αν $T : X \to Y$ ισομορφισμός επί, τότε ο T είναι διατακτικός ισομορφισμός αν ισχύει:*

$x \in X_+ \Leftrightarrow T(x) \in Y_+$
($\Leftrightarrow$ ο T και ο T^{-1} είναι θετικοί τελεστές)
Τότε, λέμε επίσης ότι οι X, Y είναι διατακτικά ισόμορφοι.

Αν X χώρος Banach και $\{b_n\}$ βάση Schauder του X, τότε ορίζουμε την εξής διάταξη στον X:

Για $x = \sum_{i=1}^{\infty} x(i)b_i$, $y = \sum_{i=1}^{\infty} y(i)b_i \in X$,
$x \geq y \Leftrightarrow x(i) \geq y(i), \forall i$

Τότε, $X_+ = \{x = \sum_{i=1}^{\infty} x(i)b_i \in X | x(i) \geq 0, \forall i\}$ είναι ο θετικός κώνος του X που ορίζεται από τη βάση $\{b_n\}$ (ή από την σημειακή διάταξη της βάσης)

Παρατήρηση
Αν ο X είναι χώρος Banach, και $T : l_1 \to X$ ισομορφισμός επί, τότε $\{T(e_n) = b_n\}$ είναι βάση Schauder του X και αν διατάξουμε τον X με τον θετικό κώνο X_+ της βάσης $\{b_n\}$, τότε οι χώροι l_1 και X είναι διατακτικά ισόμορφοι.

Θεώρημα 2.3.2. *Αν X είναι χώρος Banach, $\{b_n\}$ βάση Schauder του X, τότε (1) $\Leftrightarrow$ (2).*

(α΄) Ο θετικός κώνος X_+ του X ως προς τη βάση $\{b_n\}$ έχει φραγμένη βάση.

(β΄) η $\{b_n\}$ είναι τύπου l_+.

Απόδειξη. (2) $\Rightarrow$ (1)
Υποθέτουμε ότι η βάση $\{b_n\}$ είναι τύπου l_+. Από προηγούμενο Θεώρημα, έχουμε ότι $X \cong l_1$ και μάλιστα έχουμε ότι η $T\left(\sum_{i=1}^{\infty} x(i)b_i\right) = (x(i))_{i\in\mathbb{N}}$ είναι ισομορφισμός του X επί του l_1.
Έστω X_+ ο θετικός κώνος της βάσης $\{b_n\}$.
Τότε, έχουμε ότι οι l_1 και X είναι διατακτικά ισόμορφοι, δηλαδή ότι $x \in X_+ \Leftrightarrow T(x) \in l_1^+$.
Έχουμε $T(b_i) = e_i$.
Άρα, $T^{-1}(e_i) = b_i$.
Δηλαδή έχουμε ότι $T^{-1} : l_1 \to X$, ώστε
$T^{-1}(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i b_i, \forall \xi \in l_1$.
Έστω $B = \left\{\xi \in l_1^+ | \parallel \xi \parallel = 1\right\}$ φραγμένη βάση του l_1^+ που ορίζεται από την ακολουθία $(1, 1, ..., 1, ...) \in l_\infty^+$.
Έστω $L = T^{-1}$.
Τότε, $L : l_1 \to X$ ισομορφισμός επί.
Έχουμε ότι $L(l_1^+) = X_+$.
Θα δείξουμε ότι το $D = L(B)$ είναι φραγμένη βάση του X_+.

Καταρχάς, θα δείξουμε ότι το D είναι φραγμένο. Πραγματικά, $\forall x \in D, \exists \xi \in B : x = L(\xi)$
$\Rightarrow \| x \| = \| L(\xi) \| \leq \| L \| \| \xi \| = \| L \|$
άρα το D είναι φραγμένο.
Θα δείξουμε ότι το D είναι βάση του X_+.
Για να δείξουμε ότι το D είναι βάση του X_+, αρκεί να δείξουμε ότι : το D είναι κυρτό και ότι $\forall x \in X_+, x \neq 0$, υπάρχει μοναδικό $\lambda_x > 0$, ώστε $\lambda_x x \in D$.
Αποδείκνύουμε ότι το D είναι κυρτό:
Έστω $x, y \in D = L(B)$. Έπεται ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in B : x = L(\xi_1), y = L(\xi_2)$.
Έστω $\lambda \in (0,1)$. Θα δείξουμε ότι $\lambda x + (1-\lambda)y \in D$, δηλαδή ότι $\lambda L(\xi_1) + (1-\lambda)L(\xi_2) \in D$
Έχουμε ότι $\lambda L(\xi_1) + (1-\lambda)L(\xi_2) = L(\lambda\xi_1 + (1-\lambda)\xi_2) \in D$, άρα το D είναι κυρτό.
Αποδεικνύουμε τώρα, ότι $\forall x \in X_+, x \neq 0$, υπάρχει μοναδικό $\lambda_x > 0$, ώστε $\lambda_x x \in D$
Έστω $x \in X_+, x \neq 0$.
Αφού $L(l_1^+) = X_+$, για το x, υπάρχει $\xi \in l_1^+$, ώστε $x = L(\xi)$, και το ξ είναι μοναδικό (αφού L 1-1).
Για το $\xi \in l_1^+$, υπάρχει μοναδικό $\lambda_\xi > 0$, ώστε $\lambda_\xi \xi \in B$.
Τότε, $L(\lambda_\xi \xi) = \lambda_\xi L(\xi) = \lambda_\xi x \in D$
Άρα, το ζητούμενο $\lambda_x > 0$ είναι το λ_ξ.
Άρα, δείξαμε ότι το $D = L(B)$ είναι φραγμένη βάση του X_+. $\square$

Εν συνεχεία, θα ορίσουμε την έννοια του ισομορφισμού κώνων σε χώρους με norm.

Ορισμός 2.3.2. *Έστω $P \subseteq X$, $Q \subseteq Y$ κώνοι και X, Y χώροι με norm. Οι κώνοι P και Q ονομάζονται ισόμορφοι, αν υπάρχει $T : P \to Q$, 1-1, επί, θετικά ομογενής και προσθετική,*
$(T(\lambda x + \mu y) = \lambda T(x) + \mu T(y), \forall x, y \in P, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}_+)$
και επιπλέον οι T, T^{-1} είναι συνεχείς στις επαγόμενες τοπολογίες των P, Q, (δηλαδή αν $x_n, x \in P$, έχουμε $x_n \to x \Leftrightarrow T(x_n) \to T(x)$)

Στη συνέχεια, θα διατυπώσουμε ένα θεώρημα που μας δίνει τις προϋποθέσεις κάτω από τις οποίες ένας κώνος P χώρου Banach X είναι τοπικά ισομορφικός με τον l_1^+, αφού πρώτα δώσουμε τους απαραίτητους ορισμούς.

Ορισμός 2.3.3. *Έστω X χώρος Banach διατεταγμένος από τον κώνο P. Το $x \in P$ είναι ακραίο σημείο (extremal point) του P, αν και μόνο αν, για κάθε $y \in X$, $0 < y < x$, έπεται ότι $y = \lambda x$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}_+$.*
Συμβολίζουμε με $EP(P)$ το σύνολο των ακραίων σημείων του P.

Θα ορίσουμε παρακάτω την έννοια της συνεχούς προβολής σε διατεταγμένους χώρους.

Ορισμός 2.3.4. *Ένα ακραίο σημείο x_0 του κώνου P δέχεται συνεχή προβολή (continuous projection), αν υπάρχει μία γραμμική συνεχής προβολή P_{x_0} του X επί του $[x_0]$, ώστε $P_{x_0}(x) \leq x, \forall x \in P$.*

Ορισμός 2.3.5. *Ο χώρος Banach X έχει την CPP, (Continuous Projection Property), αν ισχύει η εξής συνεπαγωγή:*

$$x_0 \in EP(P) \Rightarrow \text{το } x_0 \text{ έχει συνεχή προβολή}$$

Γενικότερα, αν X είναι χώρος Banach, τότε για κάθε κυρτό υποσύνολο K του X, συμβολίζουμε με $ep(K)$ το σύνολο των ακραίων σημείων του K.

Ορισμός 2.3.6. *Έστω G κλειστό και κυρτό υποσύνολο χώρου Banach X. Το σύνολο G έχει την KMP ($Krein - Milman$ $Property$), αν*

$$K = \overline{co}ep(K), \forall K \subseteq G, \text{ με } K \text{ κλειστό, κυρτό και φραγμένο}$$

Θεώρημα 2.3.3. *([57], Th. 4.1) Έστω X χώρος Banach διατεταγμένος από τον απειροδιάστατο, κλειστό κώνο P. Αν ο P έχει την CPP, τότε:*

(α΄) Ο P είναι τοπικά ισομορφικός με τον $l_1^+(\Gamma)$, αν και μόνο αν, ο P έχει κλειστή φραγμένη βάση με την KMP.

(β΄) Ο P είναι τοπικά ισομορφικός με τον l_1^+, αν και μόνο αν, ο P έχει διαχωρίσιμη, κλειστή, φραγμένη βάση με την KMP.

Πολύ σημαντικό είναι και το παρακάτω θεώρημα, με βάση το οποίο μπορούμε να εξετάσουμε αν ένας χώρος Banach είναι ανακλαστικός ή όχι.

Θεώρημα 2.3.4. *([56], Th. 9) Ένας χώρος Banach X είναι μη ανακλαστικός, αν και μόνο αν, ο θετικός κώνος του l_1 εμφυτεύεται στον X.*

2.4 Χαρακτηρισμοί ανακλαστικών κώνων

Στη συνέχεια θα διατυπώσουμε ένα πολύ σημαντικό θεώρημα που μας δείχνει πότε ένας κώνος P είναι ανακλαστικός. Υπενθυμίζουμε το παρακάτω γνωστό αποτέλεσμα, που θα χρειαστούμε στην απόδειξη του θεωρήματος:

> *Έστω $\{x_n\}$ ακολουθία ενός χώρου Banach X η οποία δεν είναι norm-συγκλίνουσα στο 0. Αν η $\{x_n\}$ είναι ασθενώς Cauchy και όχι ασθενώς συγκλίνουσα, τότε η $\{x_n\}$ έχει μία βασική υπακολουθία, [36], Th. 1.1.10.*

Θεώρημα 2.4.1. *Ένας κλειστός κώνος P ενός χώρου Banach X είναι ανακλαστικός, αν και μόνο αν, ο P δεν περιέχει κλειστό κώνο ισομορφικό με τον θετικό κώνο του l_1.*

Απόδειξη. $\Rightarrow$

Υποθέτουμε ότι ο P είναι ανακλαστικός κώνος.

Προς απαγωγή σε άτοπο, υποθέτουμε ότι υπάρχει $Q \subseteq P$ κλειστός κώνος, ισομορφικός με τον l_1^+.

Τότε, ο Q, σαν υποκώνος του P, είναι επίσης ανακλαστικός.

Πράγματι, το σύνολο $Q \cap B_X$ είναι κλειστό (ως τομή κλειστών), και άρα (από Θεώρημα $Mazur$) είναι ασθενώς κλειστό υποσύνολο του ασθενώς συμπαγούς $P \cap B_X$, άρα είναι ασθενώς συμπαγές.

Επειδή ο κλειστός και κυρτός κώνος Q του χώρου $Banach$ X είναι κωνικά ισομορφικός με τον κώνο l_1^+, έπεται (από [24], $Th.$ 4.5) ότι ο Q είναι $mixed$ $based$ κώνος, κάτι που αντικρούει το θεώρημα 2.2.5.

$\Leftarrow$

Αντίστροφα τώρα, υποθέτουμε ότι ο P δεν περιέχει κλειστό κώνο ισομορφικό με τον l_1^+.

Προς απαγωγή σε άτοπο, υποθέτουμε ότι ο P δεν είναι ανακλαστικός.

Τότε, το σύνολο $B_X^+ = B_X \cap P$ δεν είναι ασθενώς συμπαγές σύνολο.

Επομένως, υπάρχει ακολουθία $\{x_n\} \subseteq B_X^+$, που δεν έχει ασθενώς συγκλίνουσα υπακολουθία.

Επειδή ο P δεν περιέχει κλειστό κώνο ισομορφικό με τον l_1^+, σύμφωνα με το Θεώρημα l_1-$Rosenthal$, [27], εξασφαλίζεται η ύπαρξη ασθενώς $Cauchy$ υπακολουθίας της $\{x_n\}$, που την συμβολίζουμε πάλι με $\{x_n\}$.

Η ακολουθία $\{x_n\}$ δεν έχει ασθενώς συγκλίνουσα υπακολουθία, επομένως η $\{x_n\}$ δεν συγκλίνει ασθενώς στο 0. Επομένως, υπάρχει $x^* \in X^*$ και μία υπακολουθία $\{x_{n_k}\}$ της $\{x_n\}$ τέτοια ώστε $x^*(x_{n_k}) \geq 1$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Επομένως, η $\{x_{n_k}\}$ είναι βασική ακολουθία, τύπου l_+ και ο κώνος:

$$K = \left\{ p \in X : p = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_{n_k}, a_k \geq 0, \forall k \in \mathbb{N} \right\}$$

που παράγεται από την $\{x_{n_k}\}$ είναι υποκώνος του P και είναι ισομορφικός με τον l_1^+ (βλ. [70], $Th.$ 10.2).

Επομένως, κατασκευάσαμε έναν υποκώνο του P (τον K) που είναι ισομορφικός με τον l_1^+, άτοπο, επειδή είχαμε υποθέσει ότι ο P δεν περιέχει κώνο ισομορφικό με τον l_1^+.

Επομένως, ο P είναι ανακλαστικός, και αποδείξαμε το ζητούμενο.

$\square$

Το επόμενο αποτέλεσμα δείχνει ότι ένας ανακλαστικός κώνος P παρουσιάζει την ίδια συμπεριφορά με έναν ανακλαστικό χώρο όσον αφορά τον δεύτερο δυϊκό του P^{oo}.

Θεώρημα 2.4.2. *Έστω X χώρος Banach. Ένας κλειστός κώνος P του X είναι ανακλαστικός, αν και μόνο αν, $\widehat{P} = P^{oo}$.*

Απόδειξη. $\Rightarrow$ Υποθέτουμε ότι ο κώνος $P \subseteq X$ είναι ανακλαστικός, δηλαδή, εξ' ορισμού, ότι το θετικό τμήμα της μοναδιαίας μπάλας U_X^+ είναι ασθενώς συμπαγές. Τότε, το σύνολο $\widehat{U_X^+}$ είναι ασθενώς -άστρο συμπαγές σύνολο.

Για κάθε $\alpha > 0$, έχουμε ότι το σύνολο

$$\widehat{P} \cap \alpha U_{X^{**}} = \alpha \widehat{U_X^+}$$

είναι ασθενώς άστρο κλειστό.

Επειδή το σύνολο $\widehat{P} \cap \alpha U_{X^{**}}$ είναι ασθενώς άστρο κλειστό, έπεται από το Θεώρημα Krein-Smulian για ασθενώς -άστρο κλειστά σύνολα, ότι το $\widehat{P}$ είναι ασθενώς -άστρο κλειστό σύνολο.

Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα Krein-Smulian, το $\widehat{P}$ είναι ασθενώς -άστρο κλειστός κώνος, δηλαδή $\widehat{P} = \overline{\widehat{P}}^{w^*}$.

Όμως, $\overline{\widehat{P}}^{w^*} = P^{oo}$, άρα $\widehat{P} = P^{oo}$.

$\Leftarrow$ Υποθέτουμε ότι $\widehat{P} = P^{oo}$. Θα δείξουμε ότι ο κώνος P είναι ανακλαστικός. Έχουμε ότι $\widehat{B_X^+} = \widehat{P \cap B_X} = \widehat{P} \cap B_{X^{**}} = P^{oo} \cap B_{X^{**}}$. Άρα, σύμφωνα με το θεώρημα των Banach-Alaoglou ([50], $Th.$ 2.6.18), το σύνολο $\widehat{B_X^+}$ είναι ασθενώς - άστρο συμπαγές. Επειδή η J_X είναι ασθενώς -ασθενώς άστρο συνεχής ομομορφισμός από τον X επί του $\widehat{X}$, [50], *Prop.* 2.6.24, έχουμε ότι το σύνολο B_X^+ είναι ασθενώς - συμπαγές υποσύνολο του X, και επομένως ο X είναι ανακλαστικός. □

Στην ενότητα αυτή, θα αποδείξουμε ένα θεώρημα το οποίο μας δίνει ένα κριτήριο για το πότε ένας χώρος Banach X είναι ανακλαστικός.
Το κριτήριο αυτό αφορά τους κλειστούς κώνους του χώρου Banach. Πιο συγκεκριμένα, δίνουμε τον παρακάτω ορισμό:

Ορισμός 2.4.1. *Ένας χώρος με νόρμα X έχει την ιδιότητα (*), αν για κάθε κλειστό κώνο P του X έχουμε ότι: είτε ο P δεν έχει φραγμένη βάση που ορίζεται από στοιχείο του X^*, ή κάθε αυστηρά θετικό (στον P) γραμμικό συναρτησιακό του X, του οποίου ο περιορισμός στον P είναι συνεχής στην επαγόμενη τοπολογία του P, λαμβάνει maximum σε κάθε βάση για τον P που ορίζεται από στοιχείο του X^*.*

Θεώρημα 2.4.3. *([56], Th. 11) Ένας χώρος Banach X είναι ανακλαστικός, αν και μόνο αν, ο X έχει την ιδιότητα (*).*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι ο X είναι ανακλαστικός, και έστω P ένας κλειστός κώνος του X. Αν υποθέσουμε ότι ο P έχει φραγμένη βάση που ορίζεται από στοιχείο του X^*, τότε, από το Θεώρημα Διχοτομίας για κλειστούς κώνους, έχουμε ότι κάθε βάση για τον P που ορίζεται από στοιχείο του X^* είναι φραγμένη, και επομένως είναι ασθενώς συμπαγής. Επομένως, κάθε αυστηρά θετικό γραμμικό συναρτησιακό του X, του οποίου ο περιορισμός στον P είναι συνεχής λαμβάνει *maximum* σε κάθε βάση για τον P που ορίζεται από στοιχείο του X^*. Επομένως, δείξαμε ότι ο X έχει την ιδιότητα (*).
Αντίστροφα τώρα, υποθέτουμε ότι ο X έχει την ιδιότητα (*). Προς απαγωγή σε άτοπο, υποθέτουμε ότι ο X δεν είναι ανακλαστικός. Τότε, υπάρχει ένας ισομορφισμός $T : l_1^+ \to P$ του l_1^+ επί ενός κλειστού κώνου P του X.
Θεωρούμε την επέκταση του T στον l_1, τον οποίο συμβολίζουμε πάλι με T, ως εξής: $T : l_1 \to P - P$, με $Tx = Tx^+ - Tx^-$, για κάθε $x \in l_1$, όπου $x^+ = sup\{x, 0\}$ και $x^- = sup\{-x, 0\}$, είναι το θετικό και το αρνητικό μέρος του x αντίστοιχα.
Τότε, ο T είναι συνεχής, επειδή για κάθε $x \in l_1$, έχουμε ότι:

$$\|T(x)\| = \|T(x^+) - T(x^-)\| \leq \|T(x^+)\| + \|T(x^-)\| \leq A\left(\|x^+\| + \|x^-\|\right) = A\|x\|$$

Πράγματι, ο $T : l_1^+ \to P$ είναι συνεχής. Επειδή $T(0) = 0$, λόγω συνέχειας στο 0, έχουμε ότι για την περιοχή U_+ της εικόνας $T(0)$, υπάρχει μία περιοχή $\rho U_{l_1}^+$ του 0, τέτοια ώστε:

$$T(\rho U_{l_1}^+) \subseteq U_+ \Rightarrow \forall x \in \rho U_{l_1}^+, \| x \| \leq \rho \Rightarrow \| T(x) \| \leq 1 \Rightarrow \forall x \in l_1^+, \| T(\rho \frac{x}{\| x \|}) \| \leq 1$$

$\Rightarrow \| T(x) \| \leq \frac{1}{\rho} \| x \| = A \| x \| \Rightarrow \forall x \in l_1^+, \| T(x) \| \leq A \| x \|$
Εν γένει, ισχύει ότι

$$\| x \| \leq \| x^+ \| + \| x^- \|$$

Για $x \in l_1$, έχουμε ότι:

$$\| x \| = \| x^+ \| + \| x^- \|$$

Πράγματι, για $x = (x(i)) \in l_1$, έπεται ότι:

$$x^+ = \sum_1^\infty (x(i) \vee 0)\, e_i, x^- = \sum_1^\infty (-x(i) \vee 0)\, e_i, \| x \| = \sum_1^\infty | x(i) |$$

άρα,

$$\| x \| = \| x^+ \| + \| x^- \|$$

Γνωρίζουμε ότι ο θετικός κώνος του l_1 έχει μια κλειστή, φραγμένη βάση C. Επομένως, $T(C)$ είναι μία κλειστή, φραγμένη βάση για τον κώνο P.
Πράγματι, για $T(x) \in T(C) \Leftrightarrow x \in C$, έπεται ότι

$$\| T(x) \| \leq A \| x \| \leq AM$$

όπου M είναι $\| \cdot \|$-φράγμα της C, άρα δείξαμε ότι $T(C)$ φραγμένη βάση του P.
Επίσης, αν υποθέσουμε ότι $y_n = T(x_n) \to y$, τότε $y \in P$, επειδή ο κώνος P είναι κλειστός, και έστω $y = T(x)$, επειδή ο T είναι επί. Αρκεί να δείξουμε ότι $x \in C$.
Έχουμε ότι:

$$T(x_n) \to y = T(x) \Rightarrow x_n \to x \Rightarrow x \in C$$

επειδή C κλειστή βάση του l_1^+. $\Rightarrow y \in T(C)$, άρα $T(C)$ κλειστή βάση του P.
Έχουμε ότι, $0 \notin T(C)$, επομένως υπάρχει (από Διαχωριστικό Θεώρημα) ένα $g \in X^*$ που να διαχωρίζει γνήσια το $T(C)$ και το 0. Τότε, εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι το g είναι αυστηρά θετικό και ότι η βάση B_g που ορίζεται από το g είναι φραγμένη.
Πραγματικά,

$$0 = g(0) < inf\,(g(x))\,, \forall x \in T(C)$$

$\Leftrightarrow 0 = g(0) < \alpha \leq g(x), \forall x \in T(C)$Τότε, το g είναι αυστηρά θετικό, επειδή $\forall x \in P, x \neq 0$, υπάρχει μοναδικό λ_x, τέτοιο ώστε $\lambda_x x \in T(C) \Rightarrow \lambda_x g(x) \geq \alpha > 0, \Rightarrow g(x) > 0, \forall x \in P, x \neq 0$.
Ακόμη, η βάση $B_g = \{x \in P | g(x) = 1\}$ του P, που ορίζεται από το g, είναι φραγμένη. Θα το αποδείξουμε.

Ορίζουμε $\alpha B_g = \{\alpha x | x \in B_g\}$, όπου το α είναι εκείνο που υπάρχει από το Διαχωριστικό θεώρημα.
Παρατηρούμε ότι η αB_g είναι η βάση που ορίζεται από το συναρτησιακό $fracg\alpha$, αφού

$$\forall y \in \alpha B_g \Rightarrow y = \alpha x, x \in B_g \Rightarrow g(y) = \alpha \Rightarrow \alpha B_g = B_{\frac{g}{\alpha}}$$

Αρκεί να δείξουμε ότι η αB_g είναι φραγμένη βάση του P. Έστω $x \in \alpha B_g$. Τότε, $g(x) = \alpha$.
Υποθέτουμε ότι η βάση $T(C)$ του κώνου P ορίζεται από το γραμμικό συναρτησιακό f. Τότε, έχουμε ότι

$$\frac{x}{f(x)} \in T(C) \Rightarrow \| \frac{x}{f(x)} \| \leq M \Rightarrow \| x \| \leq M f(x)$$

Έχουμε ότι

$$0 < g(x) = \alpha \leq g(y), \forall x \in \alpha B_g, \forall y \in T(C)$$

Επίσης,

$$\forall x \in \alpha B_g, \exists \lambda_x : \lambda_x x \in T(C) \Rightarrow g(\lambda_x x) \geq \alpha$$

από τον διαχωρισμό.

$$\lambda_x g(x) \lambda_x \alpha \geq \alpha \Rightarrow \lambda_x \geq 1$$

Επομένως, $\forall x \in \alpha B_g$, έχουμε ότι

$$\| \lambda_x x \| \leq M \Rightarrow \| x \| \leq \frac{M}{\lambda_x} \leq \frac{M}{1}$$

επειδή $\lambda_x \geq 1, \forall x \in \alpha B_g$
Επομένως, δείξαμε ότι $\| x \| \leq M, \forall x \in \alpha B_g$, άρα η βάση αB_g είναι φραγμένη, άρα και η βάση $B_g = \frac{1}{\alpha}(\alpha B_g)$ είναι φραγμένη.
Υποθέτουμε ότι $T^* : X^* \to l_1^* = l_\infty$ είναι ο συζυγής του T, δηλαδή $T^*(x^*)(\xi) = x^*(T(\xi))$, $\forall x^* \in X^*$ και $\forall \xi \in l_1$.
Τότε, ο T^* είναι συνεχής. Πράγματι,

$$\| T^*(x^*) \| = sup_{\xi \in U_{l_1}} |T^*(x^*)(\xi)| = sup_{\xi \in U_{l_1}} |x^*(T(\xi))| \leq sup_{\xi \in U_{l_1}} (\| x^* \| \| T(\xi) \|) \leq$$

$$\leq sup_{\xi \in U_{l_1}} (\| x^* \| \| T \| \| \xi \|) \leq \| T \| \| x^* \|$$

Επομένως, δείξαμε ότι:

$$\| T^*(x^*) \leq \| T \| \| x^* \|$$

άρα ο T^* είναι συνεχής.

Υποθέτουμε ότι $T^*(g) = \xi = (\xi_i)$, η εικόνα του g (που υπάρχει από το Διαχωριστικό θεώρημα) μέσω της T^*.
Τότε, το ξ είναι αυστηρά θετικό στον l_1^+. Πράγματι,

$$\forall \eta \in l_1^+, \eta \neq 0, \xi(\eta)(T^*g)(\eta) = g(T(\eta) > 0$$

, αφού αφενός $T(\eta) \in P = T(l_1^+), T(\eta) \neq 0$ και αφετέρου το g είναι αυστηρά θετικό. Άρα, δείξαμε ότι το ξ είναι αυστηρά θετικό.
Υποθέσουμε ότι B_ξ είναι η βάση για τον l_1^+ που ορίζεται από το ξ. Τότε μπορούμε να δείξουμε ότι $T(B_\xi) = B_g$, και επομένως θα έχουμε ότι η βάση B_ξ είναι φραγμένη.
Πράγματι, έστω $x \in B_\xi \Leftrightarrow x \in l_1^+, \xi(x) = 1$. Τότε, έχουμε ότι:

$$\xi(x) = 1 \Leftrightarrow T^*(g)(x) = 1 \Leftrightarrow g(T(x)) = 1 \Rightarrow T(x) \in B_g$$

και άρα δείξαμε ότι $T(B_\xi) \subseteq B_g$. Έστω, τώρα, $y = T(x) \in B_g, x \in l_1^+$. Θα δείξουμε ότι $x \in B_\xi$, ότι δηλαδή $\xi(x) = 1$. Έχουμε ότι:

$$1 = g(T(x)) = (T^*g)(x) = \xi(x) \Rightarrow x \in B_\xi \Rightarrow T : B_\xi \to B_g$$

επί. Άρα, δείξαμε ότι $T(B_\xi) = B_g$.
Η βάση B_ξ είναι φραγμένη. Πράγματι,

$$\forall x \in B_\xi \Rightarrow x = T^{-1}(y), y \in B_g \Rightarrow \| x \| \leq B \| y \| \leq BM_{B_g}$$

Έχουμε ότι $\xi_i \geq \beta > 0, \forall i$, επειδή, αν η ακολουθία (ξ_i) έχει μία συγκλίνουσα στο μηδέν υπακολουθία, τότε το ξ ορίζει μη φραγμένη βάση για τον l_1^+.
Υποθέτουμε ότι $r \in l_\infty^+$, με $r_i = \frac{i}{i+1}\xi, \forall i$, δηλαδή $r = \left(\frac{\xi_1}{2}, \frac{2\xi 2}{3}, \frac{3\xi_3}{4}, ...\right)$.
Τότε, παρατηρούμε ότι το r δεν λαμβάνει $maximum$ στο B_ξ.
Πράγματι,

$$r(\eta) = \sum_1^\infty r_i \eta_i = \sum_1^\infty \frac{i}{i+1}\xi \eta_i < \sum_1^\infty \xi_i \eta_i = \xi(\eta) = 1, \forall \eta \in B_\xi$$

και επομένως έχουμε ότι $\frac{e_i}{\xi_i} \in B_\xi, \forall i$, αφού $\xi\left(\frac{e_i}{\xi_i}\right) = \xi\left(0, ..., 0, \frac{1}{\xi}, 0, ...\right)$, με $r\left(\frac{e_i}{\xi_i}\right) = \frac{i}{i+1} \to 1$, όπου e_i είναι το διάνυσμα του l_∞ με 1 στην i-οστή συντεταγμένη και μηδέν στις υπόλοιπες συντεταγμένες.
Έστω ϕ το γραμμικό συναρτησιακό στον $P - P$, που ορίζεται από τον τύπο:

$$\phi\left(T(\eta)\right) = r(\eta), \forall \eta \in l_1$$

δηλαδή το ϕ είναι εκείνο το συναρτησιακό του $P-P$, που υπάρχει επειδή η T^* είναι επί, και $T^*(\phi)=r$.

Τότε, η ϕ έχει γραμμική επέκταση σε όλον τον X, η ϕ είναι αυστηρά θετική στον P, και επίσης ο περιορισμός της ϕ στον P είναι συνεχής με την επαγόμενη τοπολογία στον P, επειδή ο T είναι ισομορφισμός του l_1^+ επί του P.

Θα δείξουμε ότι η ϕ δεν λαμβάνει *maximum* στο B_g.

Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι η ϕ λαμβάνει *maximum* στην B_g σε ένα στοιχείο $T(t)$, τότε έχουμε ότι $t \in B_\xi$, και επίσης ότι το r λαμβάνει *maximum* στην βάση B_ξ στο σημείο t, το οποίο είναι άτοπο, επειδή έχουμε αποδείξει ότι το r δεν λαμβάνει *maximum* στη βάση B_ξ του l_1^+.

Επομένως, η ϕ δεν λαμβάνει *maximum* στο B_g. Αυτό έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεσή μας ότι ο χώρος X έχει την ιδιότητα (*). Επομένως, ο X είναι ανακλαστικός. □

2.5 Ισχυρά ανακλαστικοί κώνοι

Στην ενότητα αυτή επικεντρώνουμε την μελέτη μας σε μία υποκλάση του συνόλου των ανακλαστικών κώνων, τους οποίους ονομάζουμε ισχυρά ανακλαστικούς κώνους.

Ορισμός 2.5.1. *Ένας κώνος P ενός χώρου Banach X ονομάζεται ισχυρά ανακλαστικός (strongly reflexive), αν το σύνολο $U_X^+ = U_X \cap P$ είναι norm συμπαγές.*

- *Η επιπλέον ιδιότητα δηλαδή, σε σχέση με τους ανακλαστικούς κώνους, είναι το γεγονός, ότι στους ισχυρά ανακλαστικούς κώνους, η συμπάγεια του θετικού τμήματος της μοναδιαιας μπάλας του χώρου, λαμβάνεται ως προς την norm τοπολογία.*

Έστω X απειροδιάστατος χώρος Banach, και P ισχυρά ανακλαστικός κώνος του X. Τότε, έχουμε τις παρακάτω ιδιότητες:

(α΄) Ο P δεν είναι παράγων (generating), δηλαδή $X \neq P-P$.

Πραγματικά, αν υποθέσουμε ότι ο P είναι παράγων, τότε έχουμε ότι ο P δίδει ανοικτή διάσπαση του X, δηλαδή $\exists \rho > 0$, ώστε $\rho U_X \subseteq U_X^+ - U_X^+$. Τότε, παρατηρούμε ότι το σύνολο $U_X^+ - U_X^+$ είναι συμπαγές. Πραγματικά, έστω ακολουθία $U_X^+ - U_X^+ \ni z_n = x_n - y_n$. Τότε (λόγω της συμπάγειας του U_X^+), για την ακολουθία x_n υπάρχει υπακολουθία $\{x_{n_k}\}$ ώστε $x_{n_k} \to x \in U_X^+$. Θεωρώ την υπακολουθία $\{y_{n_k}\}$ της ακολουθίας $\{y_n\}$. Τότε, *(λόγω της συμπάγειας του U_X^+) υπάρχει υπακολουθία $\left\{y_{n_{k_l}}\right\}$ της $\{y_{n_k}\}$ ώστε $y_{n_{k_l}} \to y \in U_X^+$. Τότε, $x_{n_{k_l}} \to x$ και επομένως έχουμε ότι η υπακολουθία $\left\{z_{n_{k_l}}\right\}$, με $z_{n_{k_l}} = x_{n_{k_l}} - y_{n_{k_l}}$, της $\{z_n\}$ είναι συγκλίνουσα σε στοιχείο του $U_X^+ - U_X^+$, αφού $z_{n_{k_l}} = x_{n_{k_l}} - y_{n_{k_l}} \to x - y \in U_X^+ - U_X^+$. Άρα, το σύνολο ρU_X είναι κλειστό υποσύνολο του συμπαγούς $U_X^+ - U_X^+$, και επομένως, η μοναδιαία μπάλα U_X^+ του χώρου είναι συμπαγής, και άρα ο X είναι πεπερασμένης διάστασης, άτοπο.*

(β') *Ο P δεν έχει εσωτερικά σημεία.*

Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι ο P έχει εσωτερικό σημείο, τότε έχουμε ισοδύναμα ότι ο P είναι παράγων, άτοπο.

Υπενθυμίζουμε ένα πολύ σημαντικό θεώρημα, το οποίο αποδείχτηκε από τον Klee ([42]), και είναι το επόμενο:

Θεώρημα 2.5.1. *Ένας οξύς κώνος P σε έναν τοπικά κυρτό χώρο $Hausdorff$, έχει συμπαγή περιοχή του μηδενός, αν και μόνο αν, ο P έχει συμπαγή βάση.*

Το προαναφερθέν θεώρημα μπορεί να εφαρμοστεί στην δική μας περίπτωση, ως εξής:

- *Ένας οξύς κώνος σε έναν χώρο Banach είναι ισχυρά ανακλαστικός, αν και μόνο αν, ο P έχει norm συμπαγή βάση.*

Εν συνεχεία, αναφέρουμε δύο βασικές ιδιότητες των ισχυρά ανακλαστικών κώνων, οι οποίες βασίζονται στο προαναφερθέν θεώρημα του Klee.

Πρόταση 2.5.2. *Αν ο P είναι ισχυρά ανακλαστικός και οξύς κώνος ενός χώρου Banach X, τότε:*

i. Ο P έχει βάση που ορίζεται από στοιχείο του X^*, και κάθε τέτοια βάση για τον P είναι συμπαγής.

ii. Ο P είναι normal (δηλαδή, $\exists c \in \mathbb{R} : \forall x, y \in X, 0 \leq x \leq y \Rightarrow \| x \| \leq c \| y \|$)

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι ο P είναι $strongly\ reflexive$ και οξύς κώνος του X.

i. Από το προαναφερθέν θεώρημα, έχουμε ότι ο P έχει συμπαγή βάση B. Επομένως, από το Διαχωριστικό Θεώρημα, έπεται ότι υπάρχει $x^* \in X^*$, που διαχωρίζει γνήσια το 0 και την B, με $x^*(x) > 0, \forall x \in B$. Η βάση B_{x^*} που ορίζεται από το x^* είναι κλειστή και φραγμένη.

Επομένως, αφού η βάση B_{x^*} είναι φραγμένη, περιέχεται σε κάποιο πολλαπλάσιο του συμπαγούς U_X^+, και άρα είναι συμπαγής, ως κλειστό υποσύνολο συμπαγούς. Επομένως, δείξαμε ότι ο κώνος P έχει βάση B_{x^*} που ορίζεται από το στοιχείο x^* του X^*. Αρκεί αν δείξουμε ότι κάθε τέτοια βάση για τον P είναι φραγμένη. Πραγματικά, επειδή ο P δεν μπορεί να είναι *mixed based* κώνος, και η B_{x^*} είναι φραγμένη, έπεται ότι κάθε βάση για τον P που ορίζεται από στοιχείο του X^* είναι φραγμένη.

ii. Ο P είναι *normal*, επειδή ο P έχει φραγμένη βάση.

□

Ανακλαστικοί και ισχυρά ανακλαστικοί κώνοι υπάρχουν αρκετοί, όπως φαίνεται στα παρακάτω παραδείγματα.

Παράδειγμα 2.5.1. *Έστω X χώρος Banach και $\{x_n\}$ unconditional βάση του X.*

Τότε, ο θετικός κώνος της βάσης $\{x_n\}$ είναι το σύνολο

$$K_{\{x_n\}} = \left\{ x = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i | \lambda_i \geq 0, \forall i \right\}$$

και αποδεικνύεται ότι υπάρχει $P \subseteq K_{\{x_n\}}$ ισχυρά ανακλαστικός, με $\overline{P-P} = X$.

Παραδείγματος χάριν, αν $X = L_1[0,1]$, τότε υπάρχει $P \subseteq L_1^+[0,1]$ ισχυρά ανακλαστικός με $\overline{P-P} = L_1[0,1]$.

Στο επόμενο παράδειγμα, περιγράφεται μία μέθοδος κατασκευής ενός ανακλαστικού κώνου μέσω μίας ασθενώς συγκλίνουσας ακολουθίας.

Με αυτόν τον τρόπο, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι κάθε απειροδιάστατος χώρος Banach X, περιέχει έναν απειροδιάστατο ανακλαστικό κώνο με φραγμένη βάση που ορίζεται από στοιχείο του X^*.

Παράδειγμα 2.5.2. *([23], Th. 5.5) Έστω X χώρος Banach και έστω $\{x_n\}$ ακολουθία του χώρου X που συγκλίνει ασθενώς στο μηδέν.*

Έστω $x_0 \notin \overline{c_0}\{x_n\}$ και έστω $D = \overline{c_0}\{x_n\} - x_0$.

Αν $P = cone(D)$, ο μικρότερος κώνος του χώρου X που παράγεται από το σύνολο D, τότε ο P είναι ανακλαστικός κώνος με φραγμένη βάση που ορίζεται από στοιχείο του X^*.

Επιπλέον ισχύουν οι εξής προτάσεις:

i. *Αν* $\|x_n\| \geq \delta > 0$, $\forall n$, *τότε ο* P *δεν είναι ισχυρά ανακλαστικός.*

ii. *Αν* $\lim_n \|x_n\| = 0$, *τότε ο* P *είναι ισχυρά ανακλαστικός.*

Κεφάλαιο 3

Αντιστοιχίες ζήτησης και ανακλαστικότητα

3.1 Εισαγωγή στις πεπερασμένες οικονομίες

3.1.1 Η αντιστοιχία ζήτησης

Υποθέτουμε ότι στην οικονομία έχουμε πεπερασμένο πλήθος αγαθών (n αγαθά) όπου $n \in \mathbb{N}$, σταθερός φυσικός αριθμός, που μπορεί να είναι οσοδήποτε μεγάλος, καθώς δεν υπάρχει άνω φράγμα για το πλήθος των αγαθών. Απαριθμούμε τα αγαθά με τους αριθμούς 1,2,...,n.

Το μοντέλο αυτό της οικονομίας μπορεί να περιγράφει τα αγαθά ενός σούπερ μάρκετ, τις μετοχές μίας χρηματιστηριακής αγοράς, το σύνολο των στρατηγικών ενός παίκτη, το σύνολο των αγαθών μίας χώρας, αλλά και τα αγαθά της παγκόσμιας οικονομίας.

Το ζητούμενο είναι να μελετήσουμε την συμπεριφορά του τυχαίου καταναλωτή (επενδυτή) της οικονομίας.

Στο μοντέλο αυτό της οικονομίας κάνουμε τις εξής υποθέσεις:

- *Ο χώρος των αγαθών είναι ο χώρος $\mathbb{R}^n$, όπου κάθε διατεταγμένη n-άδα συμβολίζει μία δέσμη αγαθών ή αλλιώς μία οικονομική πράξη. Πιο αναλυτικά, απαριθμούμε τα n το πλήθος αγαθά της οικονομίας και κάθε διάνυσμα $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ εκφράζει τις ποσότητες που έχει στη διάθεσή του ο καταναλωτής από το κάθε αγαθό.*
- *Οι δέσμες αγαθών είναι μη αρνητικά διανύσματα του συνόλου αγαθών, δηλαδή υποθέτουμε ότι ο καταναλωτής δεν δύναται να έχει αρνητική*

ποσότητα κάποιου αγαθού. Συνεπώς, υποθέτουμε ότι το σύνολο κατανάλωσης είναι ο θετικός κώνος του χώρου αγαθών, δηλαδή ο χώρος $\mathbb{R}_+^n$.

- *Οι τιμές υποθέτουμε ότι είναι διανύσματα $p = (p_1, p_2, ..., p_n)$ του δυϊκού χώρου $\mathbb{R}^n$, όπου κάθε συνιστώσα p_i εκφράζει την τιμή του i-αγαθού. Η αξία της δέσμης αγαθών $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ υπό την τιμή p δίνεται μέσω του εσωτερικού γινομένου $p(x) = p \cdot x = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$*

Ο τρόπος που ο τυχαίος καταναλωτής της οικονομίας συγκρίνει τα διάφορα αγαθά και λαμβάνει τις αποφάσεις του είναι μία διμελής σχέση, που στα οικονομικά ονομάζεται σχέση προτίμησης.

Πιο συγκεκριμένα, η σχέση προτίμησης $\succeq$ είναι μία διμελής σχέση στο σύνολο κατανάλωσης $\mathbb{R}_+^n$ (δηλαδή, ένα υποσύνολο του καρτεσιανού γινομένου $\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^n$) που είναι:

i. *ανακλαστική ($x \succeq x, \forall x \in \mathbb{R}_+^n$)*

ii. *πλήρης (για κάθε $x, y \in \mathbb{R}_+^n$, ισχύει $x \succeq y$ ή $y \succeq x$)*

iii. *μεταβατική (για κάθε $x, y, z \in \mathbb{R}_+^n$ έχουμε $x \succeq y$ και $y \succeq z$ συνεπάγεται $x \succeq z$)*

Η σχέση προτίμησης $\succeq$ ονομάζεται:

- *Άνω ημισυνεχής όταν για κάθε $x \in \mathbb{R}_+^n$, το σύνολο $P_{\succeq}(x) = \{y \in \mathbb{R}_+^n | y \succeq x\}$, των προτιμότερων ή ίδιων του x, είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}_+^n$.*
- *Κάτω ημισυνεχής όταν για κάθε $x \in \mathbb{R}_+^n$, το σύνολο $P_{\preceq}(x) = \{y \in \mathbb{R}_+^n | x \succeq y\}$, των χειρότερων ή ίδιων του x, είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}_+^n$.*
- *Συνεχής όταν είναι άνω και κάτω ημισυνεχής.*

Υποθέτουμε ότι κάθε καταναλωτής είναι εφοδιασμένος με μία σχέση προτίμησης $\succeq$, με βάση την οποία συγκρίνει τα αγαθά της οικονομίας, και ένα αρχικό αγαθό $\omega \in \mathbb{R}_+^n$, με αξία $w = p(\omega)$ υπό το διάνυσμα τιμών p.

Αν $p \in \mathbb{R}^n$ είναι διάνυσμα τιμών, τότε ο καταναλωτής μπορεί να επιλέξει ένα οποιοδήποτε διάνυσμα αγαθών $x \in \mathbb{R}_+^n$ που η αξία του να μην υπερβαίνει τον αρχικό πλούτο, δηλαδή να ισχύει $p(x) \leq w$. Το σύνολο

$$B_w(p) = \{x \in \mathbb{R}_+^n | p(x) \leq w\}$$

ονομάζεται σύνολο προϋπολογισμού του καταναλωτή υπό την τιμή p και αρχικό πλούτο w, και το σύνολο

$$L_w(p) = \left\{x \in \mathbb{R}^n_+ | p(x) = w\right\}$$

ονομάζεται εισοδηματικός περιορισμός του καταναλωτή υπό την τιμή p και με αρχικό πλούτο w.

Κάνοντας την παραδοχή ότι στην οικονομία που μελετάμε δεν υπάρχουν ανεπιθύμητα αγαθά ($p_i \geq 0, \forall i$), ούτε ελεύθερα αγαθά ($p_i \neq 0, \forall i$), προκύπτει ότι τα διανύσματα τιμών είναι αυστηρά θετικά διανύσματα του $\mathbb{R}^n$, δηλαδή ότι $p \in \mathbb{R}^n_{++}$ και θα τα συμβολίζουμε $p >> 0$.

Ένα από τα πιο σημαντικά χαρακτηριστικά των οικονομιών πεπερασμένης διάστασης είναι το παρακάτω αποτέλεσμα:

Θεώρημα 3.1.1. *Σε πεπερασμένες οικονομίες, αν το διάνυσμα τιμών p είναι αυστηρά θετικό, τότε το σύνολο προϋπολογισμού $B_w(p)$ είναι συμπαγές.*

Απόδειξη. Έστω περερασμένη οικονομία διάστασης n και διάνυσμα τιμών p αυστηρά θετικό. θα δείξουμε ότι το σύνολο προϋπολογισμού $B_w(p)$ είναι συμπαγές. Αρκεί να δείξουμε ότι είναι κλειστό και φραγμένο.

Το $B_w(p)$ είναι κλειστό. Πράγματι,

$$B_w(p) = \left\{x \in \mathbb{R}^n_+ | p(x) \leq w\right\} =$$

$$= \{x \in \mathbb{R}^n | p(x) \leq w\} \cap \mathbb{R}^n_+ =$$

$$= p^{-1}\left((-\infty, w]\right) \cap \mathbb{R}^n_+$$

είναι κλειστό ως τομή κλειστών.

Επίσης, το $B_w(p)$ είναι φραγμένο. Θα το αποδείξουμε.

Επειδή το διάνυσμα τιμών p είναι αυστηρά θετικό, δηλαδή $p_i > 0, \forall i = 1, 2, ..., n$, έπεται ότι $min\{p_i\} > 0$.

Επομένως, για κάθε $x \in B_w(p)$, έχουμε ότι η αξία του x υπό την τιμή p είναι

$$w \geq p(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \geq \mu \sum_{i=1}^{n} x_i = \mu \parallel x \parallel_1$$

$$\Rightarrow \parallel x \parallel_1 \leq \frac{w}{\mu}$$

και άρα το σύνολο προϋπολογισμού $B_w(p)$ είναι φραγμένο.
Το $B_w(p)$ ως κλειστό και φραγμένο υποσύνολο χώρου πεπερασμένης διάστασης, είναι συμπαγές. □

- *Στην περίπτωση που το σύνολο προϋπολογισμού είναι συμπαγές, έχουμε ότι κάθε άνω ημισυνεχής σχέση προτίμησης μεγιστοποιείται στο σύνολο προϋπολογισμού τουλάχιστον σε ένα σημείο, και κάτω από συγκεκριμένες προϋποθέσεις μπορεί να εξασφαλιστεί και η μοναδικότητα του σημείου στο οποίο η σχέση προτίμησης μεγιστοποιείται.*

Το προαναφερθέν αποτέλεσμα είναι άμεση συνέπεια του παρακάτω θεωρήματος, όπου τον ρόλο του συμπαγούς μετρικού χώρου έχει το σύνολο προϋπολογισμού $B_w(p)$.

Θεώρημα 3.1.2. *Έστω X συμπαγής μετρικός χώρος και $\succeq$ λογική σχέση προτίμησης στον X. Αν η σχέση προτίμησης $\succeq$ είναι άνω ημισυνεχής, τότε η $\succeq$ παίρνει μέγιστη τιμή στον X.*

Απόδειξη. Επειδή η σχέση προτίμησης $\succeq$ είναι άνω ημισυνεχής, έπεται ότι το σύνολο $P_{\succeq}(x)$ των προτιμότερων ή ίδιων του x είναι κλειστό υποσύνολο του X.
Για κάθε $x \in X$, το σύνολο $F_x = \{y \in X | y \succeq x\}$ είναι συμπαγές, ως τομή του συμπαγούς X και του κλειστού συνόλου $P_{\succeq}(x)$ των προτιμότερων ή ίδιων του x.
Ονομάζουμε

$$F = \bigcap_{x \in X} F_x$$

Αν δείξουμε ότι $F \neq \emptyset$, τότε κάθε στοιχείο x_0 που θα ανήκει στο F, μεγιστοποιεί την σχέση προτίμησης, επειδή αν $x_0 \in F$, τότε $x_0 \in F_x, \forall x \in X$, και άρα $x_0 \succeq x, \forall x \in X$.
Για να δείξουμε ότι η τομή F είναι μη κενή, αρκεί να δείξουμε ότι η οικογένεια των συνόλων $F_x, x \in X$ έχει την Ιδιότητα της πεπερασμένης τομής.
Υποθέτουμε ότι $x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n \in X$.
Θα δείξουμε ότι $\bigcap_{i=1}^n F_{x_i} \neq \emptyset$.
Επειδή η σχέση προτίμησης είναι λογική, μπορούμε να υποθέσουμε ότι:

$$x_n \succeq x_{n-1} \succeq ... \succeq x_2 \succeq x_1$$

Τότε, $\bigcap_{i=1}^n F_{x_i} = F_{x_n} \neq \emptyset$.
Επομένως, $F \neq \emptyset$, και άρα η σχέση προτίμησης παίρνει μέγιστη τιμή σε κάποιο στοιχείο x_0 του X. □

Αυτό το αποτέλεσμα αποτελεί το σημαντικότερο χαρακτηριστικό των πεπερασμένης διάστασης οικονομιών, και μας επιτρέπει να ορίσουμε την έννοια της συνάρτησης (ή γενικότερα της αντιστοιχίας) ζήτησης.

Για κάθε αυστηρά θετικό διάνυσμα τιμών p, *και για κάθε* $w > 0$, *συμβολίζουμε με* $x(w,p)$ *το σύνολο ζήτησης, δηλαδή το σύνολο των σημείων του συνόλου προϋπολογισμού* $B_w(p)$ *στα οποία μεγιστοποιείται η σχέση προτίμησης* $\succeq$ *του καταναλωτή (εφόσον τέτοια σημεία υπάρχουν), δηλαδή:*

$$x\,(w,p) = \{x \in B_w(p) | x \succeq y, \forall y \in B_w(p)\}$$

Η διαδικασία αυτή ορίζει μία αντιστοιχία μεταξύ των διανυσμάτων τιμών και των σημείων του $B_w(p)$ *στα οποία μεγιστοποιούνται οι προτιμήσεις του καταναλωτή:*

$$\mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n_{++} \ni (w,p) \longrightarrow x\,(w,p) \subseteq B_w(p)$$

η οποία ονομάζεται αντιστοιχία ζήτησης, ή συνάρτηση ζήτησης αν η αντιστοιχία είναι μονότιμη.

Αν $x(w,p) \neq \emptyset$ *για κάθε* (w,p), *τότε λέμε ότι υπάρχει η αντιστοιχία ζήτησης.*

- *Το σημαντικότερο χαρακτηριστικό των πεπερασμένης διάστασης οικονομιών είναι το γεγονός ότι εξασφαλίζεται πάντα η ύπαρξη και η συνέχεια της αντιστοιχίας ζήτησης για κάθε λογική και άνω ημισυνεχή σχέση προτίμησης, κάτι που οφείλεται όπως είδαμε στην συμπάγεια των συνόλων προϋπολογισμού που ορίζονται από αυστηρά θετικά διανύσματα τιμών.*

3.1.2 Ισορροπία σε οικονομίες ανταλλαγής

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε την ύπαρξη ισορροπίας σε οικονομίες ανταλλαγής, στην περίπτωση που ο χώρος αγαθών E *είναι πεπερασμένης διάστασης, άρα μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο* E *είναι ο χώρος* $\mathbb{R}^m$, *όπου* $m \in \mathbb{N}$, *συμβολίζει το συνολικό πλήθος των αγαθών της οικονομίας.*

Πιο συγκεκριμένα, υποθέτουμε ότι έχουμε την οικονομία ανταλλαγής:

$$E = (\langle \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m \rangle, \{(\omega_i, \succeq_i) | i = 1,2,...,l\}),$$

με l καταναλωτές, όπου οι σχέσεις προτίμησης $\succeq_i$, $i = 1, 2, ..., l$ των καταναλωτών είναι λογικές, συνεχείς, μονότονες και αυστηρά κυρτές. Επίσης υποθέτουμε ότι το αρχικό αγαθό ω της οικονομίας είναι αυστηρά θετικό διάνυσμα του $\mathbb{R}^m$.

Το 1954, οι Arrow – Debreu απέδειξαν την ύπαρξη ισορροπίας σε οικονομίες ανταλλαγής. Η απόδειξη αυτή στην οποία χρησιμοποιήθηκαν το Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Brower και το Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Kakutani (1941) για πλειότιμες απεικονίσεις, έδωσαν ιδιαίτερη αίγλη αλλά είχαν και ιδιαίτερη ανάδραση τόσο στην Ανάλυση όσο και στην Οικονομία.

Έτσι στην Ανάλυση, τα χρόνια που ακολούθησαν, αναπτύχθηκε σημαντικά ο κλάδος των πλειότιμων απεικονίσεων αλλά και τα οικονομικά θεμελειώθηκαν και μελετήθηκαν με τεχνικές ανάλυσης και αναπτύχθηκαν νέοι κλάδοι όπως η Θεωρία Γενικής Ισορροπίας.

Πριν ορίσουμε την συνάρτηση υπερβάλλουσας ζήτησης και την έννοια της τιμής ισορροπίας, θα διατυπώσουμε ένα πολύ σημαντικό θεώρημα.

Θεώρημα 3.1.3. *([1], Th. 11.1) Έστω η συνάρτηση $f : int(\mathbb{R}^m_+) \to \mathbb{R}^m_+$. Αν η συνάρτηση f έχει τις ιδιότητες*

i. είναι συνεχής,

ii. $\varphi(\lambda p) = f(p), \forall \lambda > 0$, (ομογενής βαθμού μηδέν)

iii. $p \cdot f(p) = 0$, για κάθε p,

iv. υπάρχει $b \in \mathbb{R}^m$ ώστε $f(p) \geq b$ για κάθε P (η f είναι κάτω φραγμένη),

v. για κάθε ακολουθία $\{p_n\}$ του $\mathbb{R}^m_+$, όπου $p_n >> 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $p_n \to q$, έχουμε:

- αν $q_i > 0$, όπου q_i η i-συντεταγμένη του q, η ακολουθία $\{f^i(p_n)\}$ της i-συντεταγμένης της $\{f(p_n)\}$ είναι φραγμένη,
- αν το q δεν είναι αυστηρά θετικό, η ακολουθία $\{f(p_n)\}$ δεν έχει φραγμένη υπακολουθία,

τότε υπάρχει $p \in int(\mathbb{R}^m_+)$ ώστε $f(p) = 0$.

Υποθέτουμε τώρα ότι έχουμε την οικονομία ανταλλαγής

$$E = (\langle \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m \rangle, \{(\omega_i, \succeq_i) \, | i = 1, 2, ..., l\}),$$

που ικανοποιεί τις υποθέσεις που θέσαμε στην αρχή της ενότητας.

Τότε, για κάθε i (δηλαδή για κάθε καταναλωτή) και για κάθε διάνυσμα τιμών $p >> 0$, η σχέση προτίμησης $\succeq_i$ λαμβάνει μέγιστη τιμή στο σύνολο προϋπολογισμού $B_{\omega_i}(p)$, ακριβώς σε ένα σημείο του $B_{\omega_i}(p)$, το οποίο συμβολίζουμε με $x_i(p)$, και το $x_i(p)$ ανήκει στον εισοδηματικό περιορισμό. Υπενθυμίζουμε ότι το $x_i(p)$ είναι το αγαθό που επιθυμεί να αποκτήσει ο i-καταναλωτής κατά τη χρονική στιγμή 1, οπότε το άθροισμα $\sum_{i=1}^{l} x_i(p)$ είναι το συνολικό ζητούμενο αγαθό. Η διαφορά $\zeta(p) = \sum_{i=1}^{l} x_i(p) - \omega$ εκφράζει κατά πόσο η προσφορά ικανοποιεί τη ζήτηση, και η συνάρτηση:

$$\zeta : int(\mathbb{R}_+^m) \to \mathbb{R}_+^m,$$

με $\zeta(p) = \sum_{i=1}^{l} x_i(p) - \omega, p \in int(\mathbb{R}_+^m)$ είναι η συνάρτηση υπερβάλλουσας ζήτησης.

Ορισμός 3.1.1. *Κάθε αυστηρά θετικό διάνυσμα τιμών p του $\mathbb{R}_+^m$ για το οποίο ισχύει*

$$\zeta(p) = 0,$$

ονομάζεται τιμή ισορροπίας της οικονομίας ανταλλαγής E, και στην περίπτωση αυτή λέμε ότι υπάρχει τιμή ισορροπίας της οικονομίας.

Παρατήρηση 3.1.4. *Αποδεικνύεται ([1], Th. 8.1) ότι, σε οικονομίες ανταλλαγής, η συνάρτηση υπερβάλλουσας ζήτησης ζ ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος 3.1.3 και επομένως υπάρχει τιμή ισορροπίας.*

Θεώρημα 3.1.5. *([1], Cor. 11.2) Αν σε οικονομία ανταλλαγής E οι σχέσεις προτίμησης είναι λογικές, συνεχείς, μονότονες και αυστηρά κυρτές και το συνολικό αγαθό ω είναι εσωτερικό σημείο του $\mathbb{R}_+^m$, υπάρχει τιμή ισορροπίας.*

3.2 Απειροδιάστατες οικονομίες

Στην Οικονομική θεωρία, η μεγιστοποίηση της σχέσης προτίμησης του καταναλωτή σε κάθε σύνολο προϋπολογισμού ορίζει την αντιστοιχία ζήτησης, η οποία σε κάθε διάνυσμα τιμών αντιστοιχίζει το προτιμόμενο από τον καταναλωτή διάνυσμα αγαθών. Όπως είδαμε, το πρόβλημα της *μεγιστοποίησης και η ύπαρξη αντιστοιχιών ζήτησης εξασφαλίζεται σε πεπερασμένης διάστασης οικονομίες, κάτι που δεν μπορούμε να το εξασφαλίσουμε όταν ο χώρος των αγαθών είναι απειροδιάστατος. Σε άπειρης διάστασης οικονομίες υπεισέρχονται νέες μαθηματικές έννοιες και εργαλεία, αναγκαία για την μελέτη τους, και προσδιορίζονται οι υποθέσεις κάτω από τις οποίες το πρόβλημά μας έχει θετική απάντηση.*

Στην άπειρη διάσταση, το οικονομικό μοντέλο μοντελοποιείται στα Μαθηματικά ως εξής:

- *Υποθέτουμε ότι έχουμε άπειρα το πλήθος αγαθά και ότι ο χώρος των αγαθών είναι ένας απειροδιάστατος χώρος με νόρμα, ή ένας χώρος Banach X (παραδείγματος χάριν $X = L_p, L_\infty, l_\infty, ...$).*
- *Το σύνολο κατανάλωσης είναι ένας κλειστός κώνος P του χώρου αγαθών X.*
- *Οι τιμές θέλουμε να είναι γραμμικές και συνεχείς απεικονίσεις $f : X \to \mathbb{R}$, άρα ο δυϊκός χώρος X^* είναι ο χώρος των τιμών.*

Θεωρούμε στον X την διάταξη που ορίζεται από τον κώνο P. Στην θεωρία της διάταξης, έχουν μελετηθεί κώνοι και βάσεις κώνων, και η γεωμετρία τους είναι σημαντική για την μελέτη και τις ιδιότητες του χώρου X.

Υποθέτουμε και πάλι ότι στο μοντέλο μας δεν υπάρχουν ανεπιθύμητα αγαθά, αλλά ούτε και ελεύθερα αγαθά, που έχει ως συνέπεια τα διανύσματα τιμών να είναι στοιχεία του δυϊκού κώνου του P στον X^*, αυστηρά θετικά, δηλαδή:

p διάνυσμα τιμών, αν $p \in P^0 = \{f \in X^* | f(x) \geq 0, \forall x \in P\}$, αυστηρά θετικό.

Μελετάμε την συμπεριφορά του τυχαίου καταναλωτή, ο οποίος χαρακτηρίζεται από μία σχέση προτίμησης $\succeq$ με βάση την οποία συγκρίνει τα διάφορα αγαθά της οικονομίας και έναν αρχικό πλούτο $w \in \mathbb{R}, w > 0$.

Αν $f \in P^0$ αυστηρά θετικό, διάνυσμα τιμών, τότε με ανάλογο τρόπο, ορίζουμε το σύνολο προϋπολογισμού:

$$B_w(p) = \{x \in P | f(x) \leq w\}$$

και τον εισοδηματικό περιορισμό:

$$L_w(p) = \{x \in P | f(x) = w\}$$

του καταναλωτή υπό την τιμή f και με αρχικό πλούτο w.

Επίσης, με ανάλογο τρόπο, η σχέση προτίμησης $\succeq$ ονομάζεται:

- *Άνω ημισυνεχής όταν για κάθε $x \in P$, το σύνολο $P_{\succeq}(x) = \{y \in P | y \succeq x\}$, των προτιμότερων ή ίδιων του x, είναι κλειστό υποσύνολο του P.*
- *Κάτω ημισυνεχής όταν για κάθε $x \in P$, το σύνολο $P_{\preceq}(x) = \{y \in P | x \succeq y\}$, των χειρότερων ή ίδιων του x, είναι κλειστό υποσύνολο του P.*
- *Συνεχής όταν είναι άνω και κάτω ημισυνεχής.*

Όπως είχαμε ορίσει σε προηγούμενο κεφάλαιο, η βάση ενός κώνου P είναι ένα πολύ σημαντικό κυρτό υποσύνολο B του κώνου P που έχει την ιδιότητα ότι $\forall x \in P, x \neq 0$, υπάρχει ένας μοναδικός πραγματικός αριθμός $\lambda_x > 0$ ώστε $\lambda_x x \in B$. Ισοδύναμα, έχουμε ότι η B είναι κλειστή βάση του κώνου P αν υπάρχει $f \in P^0$, αυστηρά θετικό, ώστε $B = \{x \in P | f(x) = 1\}$.

- *Υπάρχει ένα- προς -ένα αντιστοιχία μεταξύ των βάσεων κώνων και των εισοδηματικών περιορισμών.*

Πράγματι, έχοντας υποθέσει ότι δεν υπάρχουν ελεύθερα αγαθά, κάθε διάνυσμα τιμών f είναι συνεχές γραμμικό συναρτησιακό του X, αυστηρά θετικό στον P, οπότε:
Ο εισοδηματικός περιορισμός

$$L_w(p) = \{x \in P | f(x) = w\} = \left\{x \in P | \frac{f}{w}(x) = 1\right\}$$

είναι βάση του κώνου P που ορίζεται από το συνεχές γραμμικό συναρτησιακό $\frac{f}{w}$.

- *Το βασικό μειονέκτημα στους χώρους άπειρης διάστασης είναι το γεγονός ότι δεν εξασφαλίζεται η συμπάγεια του συνόλου προϋπολογισμού. Παραδείγματος χάριν, στο χώρο l_1, η βάση $B_\mathbf{1}$ του θετικού του κώνου, που ορίζεται από το αυστηρά θετικό διάνυσμα τιμών $\mathbf{1}$ δεν είναι $\sigma\,(l_1, l_\infty)$-συμπαγής.*

Άμεση συνέπεια του παραπάνω γεγονότος, είναι η μη εξασφάλιση της ύπαρξης της αντιστοιχίας ζήτησης σε απειροδιάστατες οικονομίες. Υπάρχουν γνωστά παραδείγματα σχέσεων προτίμησης που ορίζονται σε ένα κλειστό κώνο P ενός χώρου με νόρμα X, οι οποίες λαμβάνουν, ή δεν λαμβάνουν, μέγιστη τιμή σε συγκεκριμένα σύνολα προϋπολογισμού του κώνου P, αλλά δεν γνωρίζουμε κάποιο παράδειγμα ενός άπειρης διάστασης κλειστού κώνου P με μία σχέση προτίμησης, ώστε η αντιστοιχία ζήτησης να υπάρχει (δηλαδή η σχέση προτίμησης να μεγιστοποιείται σε κάθε σύνολο προϋπολογισμού του P).
Το παρακάτω θεώρημα, αποτελεί άμεση εφαρμογή του αποτελέσματος διχοτομίας σε ανταγωνιστικές οικονομίες.

Θεώρημα 3.2.1. *Υποθέτουμε ότι σε μία ανταγωνιστική οικονομία ανταλλαγής, η δυϊκότητα του χώρου αγαθών-τιμών είναι το δυϊκό σύστημα $< X, Y >$, όπου X είναι χώρος με νόρμα, και υποθέτουμε επίσης ότι το σύνολο κατανάλωσης είναι ένας $\sigma(X,Y)$-κλειστός κώνος P του X. Αν το θετικό τμήμα $U_X^+ = U_X \cap P$ της μοναδιαίας μπάλας U_X του X είναι $\sigma(X,Y)$-συμπαγής και ο P έχει ένα norm-φραγμένο σύνολο προϋπολογισμού, τότε για κάθε $\sigma(X,Y)$ άνω ημισυνεχή σχέση προτίμησης $\succeq$ του P, η αντιστοιχία ζήτησης της $\succeq$ υπάρχει.*

Απόδειξη. Ο κώνος P έχει ένα φραγμένο σύνολο προϋπολογισμού, επομένως έχει μία φραγμένη βάση που ορίζεται από ένα στοιχείο $y \in Y$ (και είναι ο εισοδηματικός περιορισμός).

Από το αποτέλεσμα διχοτομίας, έπεται ότι κάθε βάση για τον P που ορίζεται από στοιχείο του χώρου Y είναι φραγμένη, επομένως κάθε σύνολο προϋπολογισμού για τον P είναι φραγμένο, δηλαδή περιέχεται σε κάποιο θετικό πολλαπλάσιο της μοναδιαίας μπάλας MU_X^+.

Επίσης, έχουμε ότι κάθε σύνολο προϋπολογισμού είναι σ(X,Y)-κλειστό, επομένως κάθε σύνολο προϋπολογισμού είναι σ(X,Y)-συμπαγές (ως σ(X,Y)-κλειστό υποσύνολο του σ(X,Y)-συμπαγούς MU_X^+).

Επομένως, κάθε σ(X,Y) άνω ημισυνεχής σχέση προτίμησης $\succeq$ του P λαμβάνει *maximum* σε κάθε σύνολο προϋπολογισμού του P, άρα η αντιστοιχία ζήτησης της σχέσης προτίμησης $\succeq$ υπάρχει. □

Πόρισμα 3.2.2. *([56], Cor. 14) Υποθέτουμε ότι σε μία ανταγωνιστική οικονομία ανταλλαγής, η δυϊκότητα του χώρου αγαθών-τιμών είναι το δυϊκό σύστημα $< X^*, X >$, όπου X είναι χώρος με νόρμα και X^* ο δυϊκός του. Αν το σύνολο κατανάλωσης είναι ένας $\sigma(X^*,X)$ κλειστός κώνος P του X^* και ο P έχει ένα φραγμένο σύνολο προϋπολογισμού, τότε η αντιστοιχία ζήτησης κάθε $\sigma(X^*,X)$ άνω ημισυνεχούς σχέσης προτίμησης του P υπάρχει.*

Πόρισμα 3.2.3. *([56], Cor. 15) Υποθέτουμε ότι σε μία ανταγωνιστική οικονομία ανταλλαγής, η δυϊκότητα του χώρου αγαθών-τιμών είναι το δυϊκό σύστημα $< X, X^* >$, όπου X είναι ανακλαστικός χώρος Banach και το σύνολο κατανάλωσης είναι ένας κλειστός κώνος P του X. Αν ο P έχει ένα φραγμένο σύνολο προϋπολογισμού, τότε για κάθε $\sigma(X,X^*)$ άνω ημισυνεχή σχέση προτίμησης $\succeq$ του P, η αντιστοιχία ζήτησης της $\succeq$ υπάρχει.*

3.2.1 Θεώρημα διχοτομίας (για βάσεις κώνων) και εφαρμογές

Στην ενότητα αυτή, μελετάται η ύπαρξη αντιστοιχίας ζήτησης σε απειροδιάστατες οικονομίες. Υποθέτουμε ότι, σε μία ανταγωνιστική οικονομία ανταλλαγής, η δυϊκότητα του χώρου αγαθών και του χώρου τιμών εκφράζεται από το δυϊκό σύστημα $< X, Y >$*, όπου* X *είναι χώρος με νόρμα.*

Αποδεικνύεται ότι σε ανακλαστικούς χώρους, αλλά και σε κάποιες άλλες κατηγορίες χώρων Banach, υπάρχουν μόνο δύο κλάσεις κώνων.

Πιο συγκεκριμένα, σε μία ανταγωνιστική οικονομία ανταλλαγής, υποθέτουμε ότι η δυϊκότητα χώρου αγαθών-τιμών είναι το δυϊκό ζεύγος $< X, Y >$*, όπου* X *είναι χώρος με νόρμα με* $\sigma(X,Y)$*-συμπαγή μοναδιαία μπάλα* U_X*. Τότε, ο* X *έχει δύο κλάσεις* $\sigma(X,Y)$*-κλειστών κώνων, δηλαδή κώνων των οποίων κάθε βάση είναι norm-φραγμένη, και κώνων των οποίων κάθε βάση είναι norm-μη φραγμένη. Στην πρώτη κατηγορία αυτών των κώνων, η αντιστοιχία ζήτησης κάθε* $\sigma(X,Y)$ *άνω ημισυνεχούς σχέσης προτίμησης υπάρχει, και επίσης αποδεικνύεται ότι η αντιστοιχία ζήτησης είναι norm-*$\sigma(X,Y)$ *άνω ημισυνεχής.*

- *Το αποτέλεσμα διχοτομίας για κώνους μας δείχνει ότι σε ένα δυϊκό ζεύγος* $< X, Y >$*, όπου* X *είναι χώρος με νόρμα, δεν είναι απαραίτητο η μοναδιαία μπάλα* U_X *να είναι* $\sigma(X,Y)$*-συμπαγής, αλλά αρκεί να είναι* $\sigma(X,Y)$*-συμπαγές το θετικό της τμήμα* $U_X^+ = U_X \cap P$*, προκειμένου το πρόβλημα ύπαρξης και συνέχειας της αντιστοιχίας ζήτησης να έχει θετική απάντηση.*

3.2.2 Συνέχεια των αντιστοιχιών ζήτησης

Εστω ϕ *αντιστοιχία (πλειότιμη απεικόνιση) από έναν τοπολογικό χώρο* F *στα υποσύνολα ενός τοπολογικού χώρου* G $(\phi : F \twoheadrightarrow G)$

Η ϕ *είναι upper hemicontinuous σε ένα σημείο* $x \in F$*, αν για κάθε ανοικτή περιοχή* V *του* $\phi(x)$*, η άνω αντίστροφη εικόνα* $\phi^u(V) = \{x \in F : \phi(x) \subseteq V\}$ *του* V *είναι περιοχή του* x*. Επίσης, λέμε ότι η* ϕ *είναι upper hemicontinuous, αν είναι upper hemicontinuous σε κάθε σημείο του* F*.*

Πολύ σημαντική είναι επίσης η έννοια της radially upper semicontinuous και της radially lower semicontinuous σχέσης προτίμησης $\succeq$ *που ορίζεται στον κώνο* P*.*

Ορισμός 3.2.1. *Υποθέτουμε ότι $\succeq$ είναι μία σχέση προτίμησης που ορίζεται σε έναν κώνο P ενός γραμμικού τοπολογικού χώρου E.*

- *Αν για κάθε $x, y \in P$ το σύνολο $\{\lambda x | \lambda \in \mathbb{R}^+ \text{τέτοια ώστε} \, y \succeq \lambda x\}$ είναι κλειστό, τότε η σχέση προτίμησης είναι radially lower semicontinuous.*
- *Αν για κάθε $x, y \in P$ το σύνολο $\{\lambda x | \lambda \in \mathbb{R}^+ \text{τέτοια ώστε} \, \lambda x \succeq y\}$ είναι κλειστό, τότε η σχέση προτίμησης είναι radially upper semicontinuous.*
- *Αν η $\succeq$ είναι radially upper και radially lower semicontinuous τότε είναι radially semicontinuous.*

Από το Θεώρημα Κλειστού Γραφήματος για πλειότιμες απεικονίσεις, έχουμε το εξής αποτέλεσμα:

- *Αν το σύνολο τιμών G της ϕ είναι συμπαγές και $Hausdorff$ και η ϕ έχει κλειστό γράφημα, τότε η ϕ είναι upper hemicontinuous.*

Θεώρημα 3.2.4. *Υποθέτουμε ότι σε μία ανταγωνιστική οικονομία ανταλλαγής, η δυϊκότητα του χώρου αγαθών-τιμών είναι το δυϊκό σύστημα $< X, Y >$, όπου X είναι ένας χώρος με νόρμα, και Y υπόχωρος του X^*, και υποθέτουμε επίσης ότι το σύνολο κατανάλωσης είναι ένας $\sigma(X, Y)$-κλειστός κώνος P του X. Αν το $U_X^+ = U_X \cap P$ είναι $\sigma(X, Y)$-συμπαγές και ο κώνος P έχει ένα norm-φραγμένο σύνολο προϋπολογισμού, τότε για κάθε $\sigma(X, Y)$-upper hemicontinuous και $\sigma(X, Y)$-radially lower semicontinuous σχέση προτίμησης $\succeq$ του P, η αντιστοιχία ζήτησης της $\succeq$ είναι norm-$\sigma(X, Y)$ upper hemicontinuous.*

Απόδειξη. Από το Θεώρημα Διχοτομίας, επειδή ο κώνος P έχει μία *norm* φραγμένη βάση, έπεται ότι κάθε βάση για τον P είναι φραγμένη και άρα η αντιστοιχία ζήτησης υπάρχει.

Ο χώρος Y είναι διατεταγμένος από τον δυϊκό κώνο P^0 του P στον Y $(P^0 = \{q \in Y | q(x) \geq 0\})$

Ονομάζουμε $D = \{q \in Y | q(x) > 0, \forall x \in P, x \neq 0\}$ το σύνολο των αυστηρά θετικών (στον P) στοιχείων του Y.

Η αντιστοιχία ζήτησης είναι η απεικόνιση $\mathbf{x} : D \times (0, +\infty) \twoheadrightarrow P$.

Έστω $p_0 \in D$ και $w_0 \in (0, +\infty)$. Θα δείξουμε ότι η $\mathbf{x}$ είναι συνεχής στο (p_0, w_0).

Θα ακολουθήσουμε την παρακάτω διαδικασία:

i. Θα δείξουμε ότι το (p_0, w_0) είναι εσωτερικό σημείο του συνόλου

$$U = \left[\frac{1}{2}p_0, \frac{3}{2}p_0\right] \times \left(\frac{w_0}{2}, 2w_0\right) \subseteq D \times (0, +\infty)$$

ii. Θα δείξουμε ότι ο περιοριμός x_U της $\mathbf{x}$ στο U παίρνει τιμές στο $\sigma(X,Y)$-συμπαγές υποσύνολο MU_X^+ του X, δηλαδή

$$\mathbf{x}(U) \subseteq MU_X^+$$

Τότε, επειδή το MU_X^+ είναι $\sigma(X,Y)$-συμπαγής και Hausdorff και η $\mathbf{x}$ έχει κλειστό γράφημα, έπεται ότι ο περιορισμός x_U της $\mathbf{x}$ στο U είναι συνεχής (προκύπτει από το Θεώρημα Κλειστού γραφήματος για πλειότιμες απεικονίσεις).

Θα αποδείξουμε το 1. λίγο πιο γενικά, δηλαδή θα δείξουμε ότι:
$\forall q \in D$ και $\forall \lambda \in (0,1)$, το q είναι εσωτερικό σημείο του διαστήματος $[(1-\lambda)\,q, (1+\lambda)\,q]$.
Από το Θεώρημα Διχοτομίας, το αυστηρά θετικό διάνυσμα q ορίζει μία φραγμένη βάση K για τον κώνο P.
Υποθέτουμε ότι $K \subseteq \delta U_X$.
Παρατηρούμε ότι:

$$\forall h \in Y, \text{με } \|h\| \leq \frac{1}{\delta} \Rightarrow |h(x)| \leq 1, \forall x \in K$$

($|h(x)| \leq \|h\| \cdot \|x\| \leq \frac{1}{\delta} \cdot \delta = 1$)
Θα δείξουμε ότι $q + h \geq 0$, $\forall h \in Y, \text{με } \|h\| \leq \frac{1}{\delta}$.
$q + h \geq 0 \Leftrightarrow q(x) + h(x) \geq 0, \forall x \in P$.
Έστω $x \in P$. Τότε, $\frac{x}{q(x)} \in K \Rightarrow |h\left(\frac{x}{q(x)}\right)| \leq 1$ και $q\left(\frac{x}{q(x)}\right) = 1 \Rightarrow (q+h)\left(\frac{x}{q(x)}\right) \geq 0 \Rightarrow (q+h)\,(x) \geq 0, \forall x \in P \Rightarrow h \geq -q$
Για το $-h$, έχουμε $\| -h \| \leq \frac{1}{\delta}$, άρα $q - h \geq 0 \Rightarrow h \leq q \Rightarrow -q \leq h \leq q$ (για το τυχαίο $h \in \frac{1}{\delta}U_y$ $\frac{1}{\delta}U_y \subseteq [-q, q]$
Επομένως, $\forall \varepsilon > 0$, έχουμε:

$$q + \varepsilon U_y = q + \varepsilon\delta\frac{1}{\delta}U_y \subseteq q + \varepsilon\delta\,[-q, q] = [(1-\varepsilon\delta)\,q, (1+\varepsilon\delta)\,q]$$

Τότε, παρατηρούμε ότι: $\forall 0 < \lambda = \varepsilon\delta < 1$ (ισοδύναμα, $\forall 0 < \varepsilon < \frac{1}{\delta}$) έχουμε ότι το χ είναι εσωτερικό σημείο του $[(1-\lambda)\,q, (1+\lambda)\,q]$ και μάλιστα το $[(1-\lambda)\,q, (1+\lambda)\,q]$ περιέχεται στο $D \subseteq P^0$.

Πράγματι, κάθε $p \in Y$, με $p \geq (1-\lambda)\,q$, $0 < \lambda < 1 \Rightarrow (1-\lambda) > 0$και$\forall x \in P, x \neq 0, p(x) \geq (1-\lambda)\,q(x) > 0$

Άρα, δείξαμε ότι το q είναι εσωτερικό σημείο του $[(1-\lambda)\,q, (1+\lambda)\,q] \subseteq D$, $\forall \lambda \in (0,1)$

Επομένως, το $p_0 \in D$ που είχαμε υποθέσει, είναι εσωτερικό σημείο του $[(1-\lambda)\,p_0, (1+\lambda)\,p_0]$, $\forall \lambda \in (0,1)$, άρα για $\lambda = \frac{1}{2}$ το p_0 είναι εσωτερικό σημείο του $\left[\frac{1}{2}p_0, \frac{3}{2}p_0\right]$.

Παρατηρούμε ότι $x(p,w) \in B_w(p)$. Για να δείξουμε ότι ο περιοριμός x_U της $\mathbf{x}$ στο U παίρνει τιμές στο $\sigma(X,Y)$-συμπαγές υποσύνολο MU_X^+ του X, αρκεί να δείξουμε ότι η οικογένεια των συνόλων προϋπολογισμού $\{B_w(p)\}_{(p,w)\in U}$ είναι φραγμένη.

Υποθέτουμε ότι $w > 0$ και $\lambda \in (0,1)$ σταθεροί πραγματικοί αριθμοί. Έστω $q \in D$.

Θα δείξουμε ότι η οικογένεια των συνόλων προϋπολογισμού $B_w(z) = \{x \in P | z(x) \leq w\}$, όπου $0 < w < \omega$ και $z \in [(1-\lambda)\,q, (1+\lambda)\,q]$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη, δηλαδή υπάρχει $M > 0$, τέτοιο ώστε $\| x \| \leq M, \forall x \in B_w(z)$.

Πράγματι, $\forall x \in B_w(z)$, έχουμε: $(1-\lambda)\,q(x) \leq z(x) \leq w \leq \omega$.

Επειδή το q ορίζει φραγμένη βάση για τον P, έπεται ότι το q είναι ομοιόμορφα μονότονο, δηλαδή ότι υπάρχει $\theta > 0$, τέτοιο ώστε $q(y) \geq \theta \| y \|, \forall y \in P$.

Άρα,

$$(1-\lambda)\,\theta\|x\| \leq (1-\lambda)\,q(x) \leq z(x) \leq w \leq \omega, \forall x \in B_w(z) \Rightarrow \| x \| \leq \frac{\omega}{(1-\lambda)\,\theta}, \forall x \in B_w(z)$$

Άρα, υπάρχει $M > 0$ (το $M = \frac{\omega}{(1-\lambda)\theta}$), ώστε

$$\| x \| \leq, \forall x \in B_w(z), \forall 0 < w < \omega, \text{και} \forall z \in [(1-\lambda)\,q, (1+\lambda)\,q]$$

Από το θεώρημα πλειότιμων απεικονίσεων, προκύπτει ότι η x_U είναι συνεχής στο τυχόν σημείο (p_0, w_0) του $D \times (0, +\infty)$, και επειδή το (p_0, w_0) είναι εσωτερικό σημείο του $D \times (0, +\infty)$, έπεται ότι και η x είναι συνεχής στο (p_0, w_0). Άρα, δείξαμε ότι η (p_0, w_0) είναι συνεχής συνάρτηση.

Πόρισμα 3.2.5. *Υποθέτουμε ότι σε μία ανταγωνιστική οικονομία ανταλλαγής, η δυϊκότητα του χώρου αγαθών και του χώρου τιμών είναι το δυϊκό σύστημα* $< X^*, X >$, *όπου* X *είναι χώρος με νόρμα και* X^* *ο δυϊκός του, το σύνολο κατανάλωσης είναι ένας* $\sigma(X^*, X)$ *κλειστός κώνος* P *του* X^* *και υποθέτουμε επίσης ότι ο* P *έχει φραγμένο σύνολο προϋπολογισμού. Αν* $\succeq$ *είναι* $\sigma(X^*, X)$ *upper semicontinuous και* $\sigma(X^*, X)$ *radially lower semicontinuous σχέση προτίμησης στον* P, *τότε η αντιστοιχία ζήτησης της* $\succeq$ *είναι norm-*$\sigma(X^*, X)$ *upper hemicontinuous.*

Πόρισμα 3.2.6. *Υποθέτουμε ότι σε μία ανταγωνιστική οικονομία ανταλλαγής, η δυϊκότητα του χώρου αγαθών και του χώρου τιμών είναι το δυϊκό σύστημα $< X, X^* >$, όπου X είναι ανακλαστικός χώρος Banach και το σύνολο κατανάλωσης είναι ένας κλειστός κώνος P του X.Αν ο P έχει φραγμένο σύνολο προϋπολογισμού, τότε για κάθε $\sigma(X, X^*)$ upper semicontinuous και radially lower semicontinuous σχέση προτίμησης $\succeq$ του P, η αντιστοιχία ζήτησης της $\succeq$ είναι norm-$\sigma(X, X^*)$ upper hemicontinuous.*

Βιβλιογραφία

[1] Πολυράκης, Ι. Α., Θέματα Ανάλυσης και Θεωρία Γενικής Ισορροπίας στην Οικονομία, Αθήνα 2010

[2] Aliprantis, C. D., Border, K. C., *Infinite Dimensional Analysis*, Springer Verlag, 3rd Edition, 2007

[3] Aliprantis, C. D., Brown, D.J., Burkinshaw, O. (1990) *Existence and Optimality of Competitive Equilibria* Springer-Verlag

[4] Aliprantis, C.D., Tourky, R. (2007) *Cones and Duality*, Springer

[5] Aliprantis, C.D., Burkinshaw, O.: *Positive operators.* Springer, Berlin (1985)

[6] Aliprantis, C.D., Brown, D.J.: *Equilibria in markets with a Riesz space of commodities.* J. Math. Econ 11(2), 189-207 (1983)

[7] Aliprantis, C.D., Brown, D.J., Burkinshaw, O.: *An economy with infinite dimensional commodity space and empty core.* Econ. Lett 23, 1-4 (1987)

[8] Aliprantis, C.D., Tourky, R.: *Equilibria in incomplete assets economies with infinite dimensional spot markets.* Econ. Theory 38(2), 221-262 (2009)

[9] Aliprantis, C. D., Monteiro, P.K., Tourky, R. *Non-marketed options, non-existence of equilibria, and non-linear prices* Journal of economic theory, 114 (2004) 345– 357

[10] Aliprantis, C.D., Tourky, R., Yannelis, N.C. *Cone conditions in general equilibrium theory*, J. Econ. Theory 92 (2000) 96-121

[11] Aliprantis, C.D., Tourky, R., Yannelis, N.C.,*The Riesz Kantorovich formula and general equilibrium theory*, J. Math. Econ, 92(2000), 55– 76

[12] Aliprantis, C.D., Florenzano, M., Tourky, R., *General equilibrium analysis in ordered topological vector spaces.* J. Math. Econom. 40 (2004), no. 3–4, 247–269

[13] Aliprantis, C.D., Tourky, R., Yannelis, N.C. , *A theory of value with non-linear prices: equilibrium analysis beyond vector lattices*, J. Econ. Theory 100 (2001) 22-72

[14] Allouch, N., Florenzano, M. *Edgeworth and Walras equilibria of an arbitrage-free exchange economy.* Econom. Theory 23 (2004), 353–370

[15] Angeloni, L. , Martins-da-Rocha, V.F., *Contract enforcement and incentive compatibility in large economies with differential information: the role of exact feasibility*, Ensaios Economicos, EPGE-FGV, 2007

[16] Angelopoulos, A., Koutsougeras, L.C.: *Value allocation under ambiguity.* Econ. Theory (2014) doi:10.1007/s00199-014- 0812-4

[17] Araujo, A.P., Monteiro P.K., *Equilibrium without uniform conditions*, J. Econ. Theory 48 (1989) 416-427

[18] Araujo, A.: *Lack of Pareto optimal allocations in economies with infinitelly many commodities: the need for impatience.* Econometrica 53, 455-461 (1985)

[19] Arrow, J., Debreu, G., *Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy*, Econometrica 22(1954), 265- 290

[20] Aumann, R.J., *Intergals of set-valued functions*, J.Math.Anal. Appl., 12,1965,1- 12

[21] Bergstrom, T.C., *How to discard "free disposal" at no cost, J. Math. Econ.* 3 (1976) 131-13

[22] Bewley, T.F.: *Existence of equilibria in economies with infinitely many commodities.* J. Econ. Theory 4(3), 514-540 (1972)

[23] Casini, E., Miglierina, E., Polyrakis, I., Xanthos, F, *Reflexive cones*, Positivity (2013) Vol.17, Nr. 3, 911-133

[24] Casini, E., Miglierina, E., *Cones with bounded and unbounded bases and reflexivity*, Nonlinear Analysis, 72 (2010), 2356-2366

[25] Daher, W., Martins-da-Rocha, V.F., Vailakis, Y., *Asset market equilibrium with short-selling and differential information*, Econ. Theory (2007), doi:10.1007/s00199-006-0131-5

[26] Debreu, G. , *Theory of Value*, Wiley, New York, 1959

[27] Diestel, J., *Sequences and series in Banach spaces*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 92. Springer-Verlag, New York, 1984

[28] Florenzano, M., *General Equilibrium Analysis*, Kluwer Academic Publishers, Boston, 2003

[29] Florenzano, M.G., *The Gale- Nikaido- Debreu Lemma and the existence of transitive equilibrium with or without the free-disposal assumpion*, J. Math. Econ. 9 (1982) 113- 134

[30] Florenzano, M.G., and Le Van C., *A note on the Gale- Nikaido-Debreu Lemma and the existence of general equilibrium*, Economics Letters 22 (1986) 107- 110

[31] Florenzano, M., *On the existence of equilibria in economies with an infinite dimensional commodity space*, J. Math. Econ. 12 (1983) 207-219

[32] Florenzano, M., *Equilibrium Analysis*, Kluwer Academic Publishers, Boston, 2003.

[33] Gale D. , Mas-Colell A., *An equilibrium existence theorem for a general model without ordered preferences*, J. Math. Econ. 2 (1975) 9-15

[34] Goodearl, K.R.: *Partially ordered abelian groups with interpolation*, Mathematical Surveys and Monographs, 20. American MathematicalSociety, Providence, RI, pp. xxii+336 (1986). ISBN:0-8218-1520-2

[35] Glycopantis, D., Muir, A., Yannelis, N.C., *On extensive form implementation of contracts in differential information economies*, Econ. Theory 21 (2003) 495-526

[36] Guerre-Delabrière S., *Classical sequences in Banach spaces*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, vol. 166, Marcel Dekker, Inc., New York, 1992

[37] Hahn G., Yannelis N.C. , *Efficiency and incentive compatibility in differential information economies*, Econ. Theory 10 (1997) 383-411

[38] He, W., Yannelis, N.C.: *Equilibrium Theory Under Ambiguity.* Mimeo (2014)

[39] Jameson, G.J.O. *Ordered linear spaces*, Springer-Verlag, Berlin, 1970

[40] Jones, L.E.: *Special Problems Arising in the Study of Economies with Infinitely Many Com- modities*, MEDS Discussion Paper No. 596, Northwestern Univesity (1984)

[41] Kitover, A.K., Wickstead, A.W.: *Invariant sublattices for positive operators.* Indag. Math. (N.S.) 18(1), 39-60 (2007)

[42] Klee, V. L., *Separation properties of convex cones*, Proc. Am. Math. Soc., 6 (1955), 313-318

[43] Koutsougeras, L., Yannelis, N.C., *Incentive compatibility and information superiority of the core of an economy with differential information*, Econ. Theory 3 (1993) 195-216

[44] Krasa, S., Villamil, A.P., *Optimal multilateral contracts*, Econ. Theory 4 (1994) 167-189.

[45] Krasa, S., Yannelis, N.C., *The value allocation of an economy with differential information*, Econometrica 62 (1994) 881-900

[46] Mas-Colell, A., *The price equilibrium existence problem in topological vector lattices*, Econometrica 54, 1039-1053 (1986)

[47] Mas-Colell, *Price equilibrium existence poroblem in topological vector lattices.* Econometrica, 54, No 5 (1986) 1039–1053

[48] Mas-Colell, A., Richard, S. F., *A new approach to the existence of equilibria in vector lattices.* J. Econ. Theory 53 (1991), 1–11

[49] Mas Colell, A., Winshton, M.D., Green, J.R., *Microeconomic Theory*, Oxford University Press, Cambridge, 1995

[50] Megginson, R.E.: *An introduction to Banach space theory.* Springer, New York (1998)

[51] Meyer-Nieberg, P., *Banach Lattices*, Springer, New York, 1991

[52] Nash, J. , *Equilibrium points in N-person Games*, Proceeding of the National Academy os sciences 36(1950), 48-49

[53] Nash, J. , *Non cooperative games*, Annals of Mathematics 54(1951), 286-295

[54] Podczeck, K.: *Equilibria in vector lattices without ordered preferences or uniform properness.* J. Math. Econ. 25, 465-484 (1996)

[55] Podczeck, K., Yannelis, N.C., *Equilibrium theory with asymmetric information and with infinitely many commodities,* J. Econom. Theory 141 (2008), nr. 1, 152–183

[56] Polyrakis, I.A., *Demand functions and reflexivity*, J. Math. Anal. Apll. 338(2008)695– 704

[57] Polyrakis, I.A. , *Cones locally isomorphic to the positive cone of l1(G)*, Linear Algerbra and Its Applications, 44(1986) 423-314.

[58] Polyrakis, I. A. (with Aliprantis, C.D., Tourky, R.) *The chepest hedge*, Journal of Mathematical Economics, 37(2002),269-296

[59] Polyrakis I.A. (with Kountzakis, C.), *Geometry of cones and an application in the theory of Pareto efficient points*, J. Math. Anal. Appl. 320 (2006) 340-351

[60] Polyrakis, I.A., *Lattice-subspaces of C[0,1] and positive bases*, J. Math. Anal. Apll. 184, 1-18(1994)

[61] Polyrakis, I.A., *Minimal lattice-Subspaces*, Transactions of the AMS, Vol. 351, Num 10, pp. 4183-4203(1999)

[62] Polyrakis, I.A., *Lattice-Subspaces and Positive Bases in Function Spaces*, Positivity 7:267-284, 2003

[63] Polyrakis, I.A. (with Aliprantis, C.D., Brown, D.J., Werner. J.), *Portfolio dominance and optimality in infinite security markets*, Journal of Mathematical Economics 30(1998), 347-366

[64] Polyrakis, I.A. (with Kountzakis, C.) *Geometry of cones and an application in the theory of Pareto efficient points*, J. Math. Anal. Apll. 320(2006) 340-351

[65] Polyrakis, I.A. (with Katsikis, V.), *Computation of vector sublattices and minimal lattice-subspaces of Rk: Applications in finance*, Applied Mathematics and Computation 218 (2012) 6860-6873

[66] Polyrakis, I.A. (with Kountzakis, C.) *Coherent risk measures in general economic models and price bubbles*, Journal of Mathematical Economics

[67] Polyrakis, I.A. (with Xanthos, F.), *Cone characterization of Grothendieck spaces and Banach spaces containing* c_0, Positivity (2010).

[68] Polyrakis, I.A. (with Xanthos F.), Maximal submarkets that replicate any option, Ann. Finance(2010).

[69] Radner, R., *Competitive equilibrium under uncertainty*, Econometrica 36 (1968) 31-58

[70] Singer, I. , *Bases in Banach spaces I*, Springer, Heidelberg, 1970

[71] Xanthos, F., *Non-existence of weakly Pareto optimal allocations*, Economic Theory Bulletin, October 2014, Volume 2, Issue 2, pp 137-146

[72] Xanthos, F., *A note on the equilibrium theory of economies with asymmetric information*, Journal of Mathematical Economics, Volume 55, December 2014, Pages 1-3.

[73] Yannelis, N. C.: *The Core of an Economy without Ordered Preferences, in Equilibrium Theory in Infinite Dimensional Spaces.* In: Khan, M. A., Yannelis, N.C. (eds.) Springer, Berlin (1991)

[74] Yannelis, N.C., Zame, W.R. *Equilibria in Banach lattices without ordered preferences*, J. Math. Econ. 15 (1986) 85-110

[75] Yannelis, N.C., *The core of an economy with differential information*, Econ. Theory 1 (1991) 183-198

[76] Yannelis, N.C., Prabhakar, N.D., *Existence of maximal elements and equilibria in linear topological spaces*, J. Math. Econ. 12 (1983) 233-245

[77] Yannelis, N.C.: *On a market equilibrium theorem with an infinite number of commodities.*, J. Math. Anal. Apll. 108, 595-599 (1985)