



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

**ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ
ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

**ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΓΙΑ
ΤΥΧΑΙΟΥΣ ΠΙΝΑΚΕΣ**

Αγγελικόπουλος Σπυρίδων

Τριμελής επιτροπή: Καρόνη Χρυσή
Λουλάκης Μιχαήλ (Επιβλέπων Καθηγητής)
Ψαρράκος Παναγιώτης

ΑΘΗΝΑ
ΟΚΤΩΒΡΙΟΣ 2015

Ευχαριστίες

Με τη διπλωματική αυτή τελειώνει η πενταετής μου φοίτηση ως προπτυχιακός φοιτητής της σχολής ΕΜΦΕ του ΕΜΠ. Θέλω λοιπόν να ευχαριστήσω καταρχάς λοιπόν όλους όσους με βοήθησαν στην εκπόνηση της. Ξεχωριστά θα ήθελα να ευχαριστήσω όμως τον κ. Λουλάκη για όλη τη βοήθεια και τη καθοδήγηση που μου προσέφερε αλλά και τον αδερφό μου Π. Αγγελικόπουλο που με την πολύτιμη εμπειρία του με βοήθησε κυρίως σε υπολογιστικά θέματα που αφορούσαν την εργασία αυτή.

Περίληψη

Το αντικείμενο που μελετάται στην παρούσα εργασία είναι οι τυχαίοι πίνακες, πίνακες δηλαδή που έχουν για στοιχεία τους τυχαίες μεταβλητές. Πιο συγκεκριμένα η μελέτη βασίζεται σε ασυμπτωτικά θεωρήματα τα οποία αφορούν τη συμπεριφορά των ιδιοτιμών τους καθώς οι διαστάσεις τείνουν στο άπειρο. Καταρχάς στο πρώτο κεφάλαιο της εργασίας βλέπουμε το λόγο για τον οποίο εμφανίστηκε η θεωρία των τυχαίων πινάκων καθώς και διάφορα πεδία στα οποία βρίσκουν εφαρμογές. Στη συνέχεια υπενθυμίζονται μερικά βασικά στοιχεία της θεωρίας πιθανοτήτων, της θεωρίας γραφημάτων και της ανάλυσης που θα χρειαστεί ο αναγνώστης για την κατανόηση των θεωρημάτων και των αποδείξεων που ακολουθούν. Ακολουθεί ο κορμός της εργασίας που αφορά τα δύο βασικότερα ασυμπτωτικά θεωρήματα αυτά του νόμου του ημικυκλίου του Wigner για τετραγωνικούς πίνακες αλλά και ο νόμος των Marchenko Pastur για μη τετραγωνικούς πίνακες. Πέρα από τις διατυπώσεις και τις αποδείξεις των θεωρημάτων αυτών γίνονται και κάποιες προσομοιώσεις που επαληθεύουν τους νόμους αυτούς με τη χρήση του υπολογιστικού πακέτου της R. Τέλος στο τελευταίο κεφάλαιο γίνεται αναφορά σε κάποια συγκεκριμένα μοντέλα τυχαίων πινάκων τα Gaussian Ensembles (γκαουσιανές συλλογές) και επιπλέον βλέπουμε τον τρόπο υπολογισμού της από κοινού συνάρτησης πυκνότητας των ιδιοτιμών για μία περίπτωση από αυτές (Gaussian Orthogonal Ensemble)

Abstract

In this thesis we study the mathematical field of random matrices, matrices that have random variables as their elements. To be more specific we will focus on asymptotic theorems that concern the behaviour of the eigenvalues when the dimensions of the matrices tend to infinity. In the first chapter of this thesis we can see the reason why random matrices were firstly introduced as well as some basic applications of them in many scientific fields. Furthermore, some basic elements from probability theory, graph theory and analysis are provided in order to be easier for the reader to understand the theorems and proofs to follow. Moreover, we have the main two asymptotic theorems of this thesis which are “Wigner's semicircle law” for square matrices and “Marchenko Pastur law” for non-square matrices. Those theorems are not only stated and proved but also we simulate these laws using the mathematical package of R. In the last chapter we study some specific random matrices models the Gaussian Ensembles and we also calculate the joint probability density function for the Gaussian Orthogonal Ensemble case (GOE).

Περιεχόμενα

Περίληψη	3
Abstract	4
Κεφάλαιο 1 Εφαρμογές των Τυχαίων Πινάκων	6
1.1 Τυχαίοι Πίνακες και Πυρηνική Φυσική	7
1.2 Άλλες εφαρμογές των Τυχαίων Πινάκων	8
Κεφάλαιο 2 Μερικές βασικές γνώσεις	10
2.1 Στοιχεία Θεωρίας Πιθανοτήτων	10
2.2 Στοιχεία Θεωρίας Γραφημάτων	13
2.3 Στοιχεία Ανάλυσης	14
Κεφάλαιο 3 Ο νόμος του ημικυκλίου (semi-circle law)	16
3.1 Πίνακες Wigner και νόμος του ημικυκλίου	16
3.2 Απόδειξη του νόμου του ημικυκλίου	18
3.3 Προσομοίωση του νόμου του ημικυκλίου με τη βοήθεια της R	29
3.3.1 Κανονική Κατανομή	29
3.3.2 Ομοιόμορφη Κατανομή	31
3.3.3 Δίτιμη Κατανομή (από Bernoulli)	33
Κεφάλαιο 4 Ο νόμος Marchenko-Pastur	35
4.1 Διατύπωση του νόμου Marchenko Pastur και βασικές παρατηρήσεις	35
4.2 Απόδειξη του νόμου Marchenko Pastur	36
4.3 Προσομοίωση του νόμου Marchenko Pastur με τη βοήθεια της R	43
4.3.1 Κανονική κατανομή	43
4.3.2 Ομοιόμορφη κατανομή	45
4.3.3 Poisson κατανομή	46
Κεφάλαιο 5 Gaussian Ensembles και από κοινού κατανομή ιδιοτιμών	49
5.1 Ειδικά μοντέλα τυχαίων πινάκων (Gaussian Ensembles)	49
5.2 Υπολογισμός από κοινού κατανομής ιδιοτιμών για την GOE	52
Βιβλιογραφικές αναφορές	56

1 Εφαρμογές των Τυχαίων Πινάκων

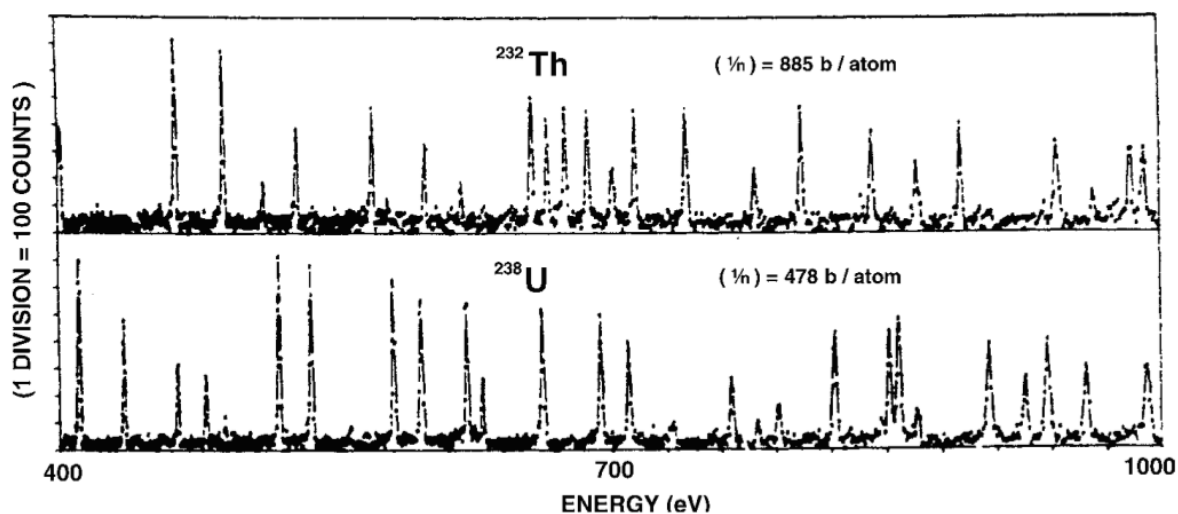
Περίληψη: Το κεφάλαιο αυτό μας εισάγει στην έννοια αλλά και στο πρόβλημα των τυχαίων πινάκων. Παρουσιάζονται μερικές εφαρμογές τους στην Πυρηνική Φυσική που αποτελεί άλλωστε και το λόγο που πρωτομελετήθηκαν.

Οι τυχαίοι πίνακες (random matrices) πρωτοεμφανίστηκαν στη μαθηματική στατιστική το 1930 χωρίς όμως να αποτελέσουν αντικείμενο μεγάλου ενδιαφέροντος. Πρόκειται ουσιαστικά για πίνακες οι οποίοι έχουν για στοιχεία τους τυχαίες μεταβλητές. Αυστηρά θα τους ορίσουμε και θα μελετήσουμε κάποια θεωρήματα πάνω σε αυτούς στα επόμενα κεφάλαια.

Η βασική τους θεωρία που έχει αναπτυχθεί μελετούσε το εξής πρόβλημα: Αν θεωρήσουμε έναν πολυ μεγάλης διάστασης πίνακα που τα στοιχεία του είναι τυχαίες μεταβλητές των οποίων γνωρίζουμε στοιχεία για τις κατανομές τους, ποιά θα είναι αντίστοιχα η κατανομή των ιδιοτιμών τους; Το πρόβλημα αυτό ουσιαστικά προέκυψε από την ανάγκη κατανόησης της στατιστικής συμπεριφοράς του αργού συντονισμού νετρονίων (slow neutron resonance) στην Πυρηνική Φυσική το οποίο μελετούσαν οι φυσικοί τη δεκαετία του 50'. Στη συνέχεια όμως το πρόβλημα εύρεσης της κατανομής των ιδιοτιμών απέκτησε μεγάλη σημασία και σε άλλους τομείς της Φυσικής αλλά και των Μαθηματικών όπως είναι ο χαρακτηρισμός των χαοτικών συστημάτων, οι ελαστοδυναμικές ιδιότητες των δομικών υλικών και η κατανομή των τιμών της συνάρτησης Ζήτα του Riemann πάνω στην κρίσιμη γραμμή. Σκοπός μας λοιπόν σε αυτό το εισαγωγικό κεφάλαιο είναι να αναδείξουμε τη σημασία του προβλήματος εύρεσης της κατανομής των ιδιοτιμών τυχαίων πινάκων ξεκινώντας με τις εφαρμογές στην Πυρηνική Φυσική.

1.1 Τυχαίοι Πίνακες και Πυρηνική Φυσική

1.1 Τυχαίοι Πίνακες και Πυρηνική Φυσική



Το παραπάνω γράφημα αποτελεί λοιπόν ένα τυπικό γράφημα ενός φαινομένου αργού συντονισμού νετρονίων (μια πυρηνική αντίδραση) για τα στοιχεία θόριο και ουράνιο. Από το γράφημα αυτό μπορεί κανείς να δει πολλές κορυφές με διαφορετικά πλάτη και ύψη κατανεμειμένες σε διάφορες ενεργειακές περιοχές. Οι περιοχές που συναντάμε τις κορυφές αυτές ονομάζονται επίπεδα πυρηνικής ενέργειας. Καθώς οι πυρήνες διεγείρονται πολλά νουκλεόνια εκτοξεύονται από το κύριο σώμα του πυρήνα, κάνοντας την προσπάθεια επεξήγησης της κατάστασης που επικρατεί αδύνατη. Επομένως είναι λογικό να προσπαθήσει κανείς αντί να εξηγήσει την κάθε ξεχωριστή κατάσταση να προσπαθήσει να μελετήσει τις μέσες ιδιότητες αυτών. Η στατιστική συμπεριφορά δηλαδή των διαφόρων επιπέδων ενέργειας είναι υψίστης σημασίας για τη μελέτη των πυρηνικών αντιδράσεων.

Σύμφωνα λοιπόν με τη Κβαντομηχανική τα ενεργειακά επίπεδα ενός συστήματος περιγράφονται από τις ιδιοτιμές ενός ερμιτιανού τελεστή H , ο οποίος ονομάζεται χαμιλτονιανή (Hamiltonian). Τα ενεργειακά λοιπόν επίπεδα ενός συστήματος είναι πολλά και διακριτά μεταξύ τους. Άρα οι ιδιοτιμές της χαμιλτονιανής του συστήματος θα έπρεπε να παρουσιάζουν αντίστοιχη δομή, η οποία θα εφαρμοζόταν πάνω σε έναν απειροδιάστατο χώρο Hilbert. Για να αποφύγουμε όμως να δουλέψουμε με έναν τέτοιο απειροδιάστατο χώρο, μπορούμε δεδομένου ότι ενδιαφερόμαστε μόνο για τα διακριτά ενεργειακά επίπεδα διαφόρων κβαντικών συστημάτων να τον προσεγγίσουμε με έναν πεπερασμένο χώρο Hilbert μεγάλης διάστασης. Επομένως οι χαμιλτονιανές των συστημάτων που θα μελετούμε θα είναι πίνακες πεπερασμένης διάστασης. Δηλαδή αν μπορούμε να λύσουμε την εξίσωση των ιδιοτιμών:

$$H \Psi_i = E_i \Psi_i,$$

θα υπολογίζαμε τις ιδιοτιμές του χαμιλτονιανού πίνακα παίρνοντας τις πληροφορίες που θα θέλαμε για τα ενεργειακά επίπεδα. Όμως υπάρχουν δύο βασικά προβλήματα. Πρώτον δε γνωρίζουμε το χαμιλτονιανό πίνακα και δεύτερον ακόμα και να το γνωρίζαμε η επίλυση της εξίσωσης αυτής θα ήταν πολύ δύσκολη.

Επομένως θα πρέπει εξ'αρχής να κάνουμε στατιστικές υποθέσεις για τον H βασισμένοι σε γενικές ιδιότητες συμμετρίας. Επομένως οι χαμιλτονιανοί τελεστές H θα παρουσιάζονται ως

1.1 Τυχαίοι Πίνακες και Πυρηνική Φυσική

πίνακες των οποίων τα στοιχεία είναι τυχαίες μεταβλητές των οποίων οι κατανομές θα υπόκεινται μόνο σε περιορισμούς ιδιοτήτων συμμετρίας που μπορεί να επιβάλλουμε στην ομάδα των τελεστών. Το πρόβλημα λοιπόν θα είναι να πάρουμε πληροφορίες για τη συμπεριφορά των ιδιοτιμών. Κάτι τέτοιο δε θα προβλέψει προφανώς με λεπτομέρειες τα επίπεδα του κάθε πυρήνα, αλλά θα επεξηγήσει τη συνολική εικόνα και το βαθμό εμφάνισης ανωμαλιών των πυρήνων που είναι πολύ δύσκολο να κατανοηθούν με λεπτομέρειες.

Ο πρώτος που έκανε την υπόθεση και συσχέτισε τη συμπεριφορά των ιδιοτιμών ενός τυχαίου πίνακα με την τοπική στατιστική συμπεριφορά των επιπέδων ενέργειας μιας απλής ακολουθίας ήταν ο Wigner. Μια απλή ακολουθία είναι μία που τα επίπεδα της όλα έχουν το ίδιο spin και άλλες αυστηρά διατηρημένες ποσότητες που προκύπτουν από τη συμμετρία του συστήματος. Οι απαιτήσεις αυτές της συμμετρίας εφαρμόζονται στον τυχαίο πίνακα. Επομένως εφόσον δεν υπάρχουν άλλοι περιορισμοί μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα στοιχεία του ακολουθούν Gaussian (κανονική) κατανομή.

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Monte Carlo με την είσοδο των υπολογιστών το 1960 διαγωνοποιήθηκαν διάφοροι τυχαίοι πίνακες και η ανάλυση αυτή υπέδειξε την ορθότητα της υπόθεσης αυτής του Wigner. Για την ακρίβεια παρατηρήθηκε ότι η πυκνότητα και η κατανομή των ιδιοτιμών πραγματικών συμμετρικών πινάκων είναι ανεξάρτητη από πολλές λεπτομέρειες της κατανομής των στοιχείων τους. Αυτό οδήγησε σε μία ανάλυση θεωρίας ομάδων, σύμφωνα με την οποία μία γνήσια συλλογή (ensemble) πινάκων η οποία μένει αμετάβλητη από μία ομάδα συμμετρίας G , υποχρεωτικά θα ανήκει σε μία εκ των τριών κλάσεων που θα μελετηθούν αργότερα οι οποίες είναι:

- Orthogonal Ensemble
- Unitary Ensemble
- Symplectic Ensemble

1.2 Άλλες εφαρμογές των Τυχαίων Πινάκων

Πέρα όμως από τις πυρηνικές αντιδράσεις οι τυχαίοι πίνακες έχουν εφαρμογές σε διάφορους άλλους γνωστικούς τομείς. Θα αναφερθούμε λοιπόν σε μερικούς βασικούς από αυτούς:

- **Οι φυσικές ιδιότητες των μετάλλων** εξαρτώνται από το επίπεδο διέγερσης τους. Στα συμπαγή μέταλλα, σε υψηλές θερμοκρασίες, οι στάθμες ηλεκτρονικής ενέργειας βρίσκονται πολύ κοντά μεταξύ τους και είναι αρκετά πλατιές ώστε να δημιουργήσουν ένα συνεχές φάσμα. Όσο το δείγμα γίνεται πιο μικρό το φάσμα αυτό γίνεται διακριτό και όσο η θερμοκρασία μειώνεται, ελατώνεται και το πλάτος της κάθε ξεχωριστής στάθμης. Αν τα μεταλλικά σωματίδια είναι αρκετά λεπτά και σε χαμηλές θερμοκρασίες, τότε οι αποστάσεις των σταθμών ηλεκτρονικής ενέργειας μπορούν τελικά να γίνουν μεγαλύτερες από άλλες ενέργειες όπως για παράδειγμα η θερμική ενέργεια. Κάτω από αυτές τις συνθήκες οι θερμικές και οι ηλεκτρομαγνητικές ιδιότητες των μεταλλικών σωματιδίων μπορεί να αποκλίνουν πολύ από αυτές του συμπαγούς μετάλλου. Επειδή λοιπόν είναι δύσκολο κανείς να επεξεργαστεί τα σχήματα αυτών των τόσο μικρών σωματιδίων καθώς αυτά παράγονται πειραματικά, οι στάθμες ηλεκτρονική ενέργειας θεωρούνται τυχαίες και οι ιδιοτιμές των τυχαίων πινάκων φαίνονται αρκετά χρήσιμες για τη μελέτη τους.

1.2 Άλλες εφαρμογές των Τυχαίων Πινάκων

- Στα Μαθηματικά η **συνάρτηση Ζήτα του Riemann** είναι σχετικά σημαντική. Εικάζεται ότι όλα τα μη πραγματικά μηδενικά της συνάρτησης αυτής βρίσκονται πάνω σε μία ευθεία παράλληλη στον φανταστικό άξονα. Επιπλέον εικάζεται ότι οι τοπικές ιδιότητες διακύμανσης των μηδενικών αυτών που βρίσκονται σε αυτή την ευθεία είναι ίδιες με αυτές των ιδιοτιμών ενός τυχαίου πίνακα που ανήκει στην Unitary Ensemble.
- Οι τυχαίοι πίνακες συναντώνται και σε άλλους τομείς της Φυσικής. Για παράδειγμα το **γυαλί** μπορεί να θεωρηθεί ως μία συλλογή από τυχαίους ιστούς, που είναι μια συλλογή από τυχαία σωματίδια με τυχαίες μάζες που ασκούν τυχαίες από κοινού μεταξύ τους δυνάμεις. Μας ενδιαφέρει λοιπόν να μελετήσουμε την κατανομή των συχνοτήτων τέτοιων ιστών. Το πιο συχνά μελετημένο μοντέλο γυαλιού είναι γνωστό και ως τυχαίο μοντέλο του Ising. Σύμφωνα με αυτό σε κάθε πλευρά ενός δισδιάστατου ή τρισδιάστατου δικτυωτού πλέγματος τοποθετούμε μια μεταβλητή spin σ_i που παίρνει τιμές +1 και -1 με πιθανότητα 1/2 για την καθεμία. Η αλληλεπίδραση μεταξύ γειτονικών spin σ_i και σ_j είναι ίση με $J_{ij} \sigma_i \sigma_j$ ενώ μεταξύ οποιοδήποτε άλλου ζευγαριού από spin είναι μηδέν. Αν ο J είναι ένας σταθερός πίνακας τότε έχουμε το μοντέλο Ising που η λειτουργία του έχει μελετηθεί από τον Onsager. Αν όμως τα J_{ij} είναι τυχαίες μεταβλητές και ο J τυχαίος πίνακας τότε ο υπολογισμός της λειτουργίας των διάφορων τμημάτων του γυαλιού θα πρέπει να γίνει μέσω χρήσης των τυχαίων πινάκων.
- Ένα πρόβλημα που μελετήθηκε πολύ τη δεκαετία του 80' ήταν αυτό του **χαρακτηρισμού ενός χαοτικού συστήματος**. Ένα σύστημα λέγεται χαοτικό αν μικρές διαφορές στις αρχικές συνθήκες έχουν σαν αποτέλεσμα μεγάλες αλλαγές στο τελικό αποτέλεσμα. Σύμφωνα με την αυξανόμενη χαοτικότητα τους τα συστήματα χωρίζονται σε εργοδικά, μεικτά, συστήματα K κλπ. Αν κάποιος λοιπόν μελετήσει τις ενέργειες των σωματιδίων ενός τέτοιου συστήματος αυτές θα είναι στην πραγματικότητα οι ιδιοτιμές ενός τελεστή Laplace σε κάποιο συγκεκριμένο πεπερασμένο χώρο. Με τον τρόπο αυτό μπορεί κανείς να κατατάξει το σύστημα στην ανάλογη χαοτικότητα. Μεγάλες ποσότητες από αριθμητικά αποτελέσματα δείχνουν μάλιστα ότι αυτές οι ενέργειες συμπεριφέρονται σαν να ήταν ιδιοτιμές ενός τυχαίου πίνακα ο οποίος έχει παρθεί από την Gaussian Orthogonal Ensemble (GOE).
- Οι **συχνότητες συντονισμού υπερήχων** των δομικών υλικών ανακαλύφθηκε ότι συμπεριφέρονται και αυτές σαν τις ιδιοτιμές ενός τυχαίου πίνακα από την Gaussian Orthogonal Ensemble (GOE). Επομένως η θεωρία των τυχαίων πινάκων είναι χρήσιμη για την μη-καταστροφική εκτίμηση των υλικών, την αρχιτεκτονική ακουστική αλλά και την διάσπαση των υπερήχων σε ετερογενή υλικά.
- Αφού μελετήθηκε η **κατανομή των δέντρων στα Σκανδιναβικά δάση** βρέθηκε ότι η θέση τους μοιάζει πολύ με αυτή των ιδιοτιμών ενός τυχαίου μιγαδικού πίνακα.

2 Μερικές βασικές γνώσεις

Περίληψη: Το κεφάλαιο αυτό μας παρουσιάζει μερικά βασικά στοιχεία προαπαιτούμενα για την κατανόηση των μετέπειτα κεφαλαίων. Γίνεται μια υπενθύμιση πάνω στη θεωρία πιθανοτήτων, τη θεωρία γραφημάτων αλλά και στην ανάλυση.

2.1 Στοιχεία Θεωρίας Πιθανοτήτων

Ξεκινάμε δίνοντας την έννοια της σ -άλγεβρας αλλά και του μέτρου πιθανότητας αφού με αυτά θα ασχοληθούμε καθόλη τη συνέχεια της μελέτης μας.

Ορισμός 2.1: (σ -άλγεβρα)

Μια κλάση υποσυνόλων F ενός δειγματικού χώρου Ω θα ονομάζεται **σ -άλγεβρα** αν και μόνο αν:

- 1) $\Omega \in F$
- 2) $\text{An } A \in F \Rightarrow A^c \in F$
- 3) $\text{An } A_n \in F, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in F$ για αριθμησίμως πολλά A_n

Ορισμός 2.2: (Μέτρο Πιθανότητας)

Έστω ο μετρήσιμος χώρος (Ω, F) και P μια συνολοσυνάρτηση με πεδίο ορισμού το F και πεδίο τιμών το \mathbb{R} . Η συνολοσυνάρτηση P ονομάζεται **μέτρο πιθανότητας** (μ.π.) όταν ικανοποιούνται τα παρακάτω τρία αξιώματα:

- 1) $P(A) \geq 0, \forall A \in F$
- 2) $\text{An } A_i \in F \ i=(1,2,\dots)$ και $A_i \cap A_j = \emptyset \quad i \neq j$, τότε $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$
- 3) $P(\Omega) = 1$

Πέρα λοιπόν από αυτούς τους δύο βασικούς ορισμούς καλό θα ήταν επίσης να θυμηθούμε τις διαφόρων ειδών συγκλίσεις που υπάρχουν από τη θεωρία πιθανοτήτων. Στα θεωρήματα που θα απόδειξουμε θα χρησιμοποιήσουμε την κατά νόμο και τη σχεδόν βέβαιη αλλά για λόγους πληρότητας θα αναφέρουμε και τη κατά πιθανότητα σύγκλιση.

2.1 Στοιχεία Θεωρίας Πιθανοτήτων

Ορισμός 2.3: (Σχεδόν βεβαίως σύγκλιση (σ.β.))

Έστω (Ω, F, p) χώρος πιθανότητας και X_n, X με $n \in \mathbb{N}$ τυχαίες μεταβλητές. Θα λέμε ότι η $X_n \xrightarrow{\sigma.β.} X$ (συγκλίνει σχεδόν βεβαίως) αν και μόνο αν ισχύει $X_n(\omega) \rightarrow X(\omega)$, $\forall \omega \in \Omega \setminus N$ με $N \in F$ και $p(N) = 0$.

Ορισμός 2.4: (Σύγκλιση κατά πιθανότητα)

Έστω (Ω, F, p) χώρος πιθανότητας και X_n, X με $n \in \mathbb{N}$ τυχαίες μεταβλητές. Θα λέμε ότι η $X_n \xrightarrow{P} X$ (συγκλίνει κατά πιθανότητα) αν και μόνο αν $\forall \varepsilon > 0$ ισχύει:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$$

Για να ορίσουμε την κατά νόμο σύγκλιση θα πρέπει πρώτα να ορίσουμε την ασθενή σύγκλιση για μια συνάρτηση κατανομής. Άρα έχουμε τους εξής ορισμούς:

Ορισμός 2.5: (Ασθενής σύγκλιση συνάρτησης κατανομής)

Έστω ακολουθία συναρτήσεων κατανομών $F_n, n \in \mathbb{N}$ και συνάρτηση κατανομής F . Θα λέμε ότι $F_n \Rightarrow F$ ή $F_n \xrightarrow{a} F$ (ασθενής σύγκλιση) αν και μόνο αν ισχύει: $F_n(x) \rightarrow F(x)$, $\forall x$ στο οποίο η F είναι συνεχής.

Ορισμός 2.6: (Κατά νόμο σύγκλιση)

Έστω ακολουθία τ.μ. $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ και X τ.μ.. Θα λέμε ότι $X_n \Rightarrow X$ ή αλλιώς $X_n \xrightarrow{D} X$ (κατά νόμο σύγκλιση) αν και μόνο αν ισχύει: $F_{X_n} \xrightarrow{a} F_X$.

Σημαντικό είναι όμως όπως θα δούμε να εξηγήσουμε και τι σημαίνει ασθενής σύγκλιση ενός μέτρου πιθανότητας καθώς αυτό θα το χρησιμοποιήσουμε σε πολύ μεγάλο βαθμό στα θεωρήματα για τυχαίους πίνακες που θα αποδείξουμε:

Ορισμός 2.7: (Ασθενής σύγκλιση μέτρου πιθανότητας)

Μια ακολουθία από ν_n ντετερμινιστικά μέτρα πιθανότητας σε ένα χώρο Ω , με μία αντίστοιχη σ-άλγεβρα F θα λέμε ότι συγκλίνει ασθενώς σε ένα μέτρο πιθανότητας ν αν για κάθε φραγμένη και συνεχή συνάρτηση f ισχύει:

$$\int_{\Omega} f d\nu_n \rightarrow \int_{\Omega} f d\nu$$

καθώς το $n \rightarrow \infty$. Αν το μέτρο ν_n δεν είναι ντετερμινιστικό τότε μιλάμε αντίστοιχα για σχεδόν βεβαίως ή κατά πιθανότητα σύγκλιση.

Επιπλέον στη μελέτη μας πολύ χρήσιμες θα μας φανούν μερικές βασικές ανισότητες της θεωρίας πιθανοτήτων οι οποίες είναι οι ακόλουθες:

2.1 Στοιχεία Θεωρίας Πιθανοτήτων

Ανισότητα 2.8: (Ανισότητα Chebyshev)

Έστω (Ω, F, p) χώρος πιθανότητας και τυχαία μεταβλητή $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Έστω ακόμη συνάρτηση $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με τις εξής ιδιότητες:

1. $\varphi(-x) = \varphi(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$
2. $\varphi(x) > 0 \quad \forall x \in [0, +\infty)$
3. Η φ είναι αύξουσα στο $[0, +\infty)$

Τότε $P(|X| > \varepsilon) \leq \frac{E(\varphi(X))}{\varphi(\varepsilon)}$ για κάθε $\varepsilon > 0$.

Επίσης αξίζει κανείς να σημειώσει ότι εφαρμόζοντας την παραπάνω ανισότητα για $\varphi(x) = |x|$ μπορεί κανείς να πάρει την εξής έκφραση της ανισότητας Chebyshev:

Αν $X \geq 0$ τότε $P(X > \varepsilon) \leq \frac{E(X)}{\varepsilon}$ για κάθε $\varepsilon > 0$ (γνωστή και ως Ανισότητα Markov)

Ανισότητα 2.9: (Ανισότητα Cauchy-Schwarz)

Έστω (Ω, F, p) χώρος πιθανότητας και τυχαίες μεταβλητές X, Y . Τότε για τις μέσες τιμές θα ισχύει: $E[(XY)^2] \leq E(X^2)E(Y^2)$.

Πρόκειται για μια ειδίκευση της γενικής ανισότητας Cauchy-Schwarz για χώρους πιθανότητας.

Πολύ σημαντικό για τη μελέτη μας θα αποδειχθεί όπως θα δούμε το 1ο λήμμα Borel-Cantelli το οποίο θα διατυπώσουμε στη συνέχεια:

Λήμμα 2.10: (1ο λήμμα Borel-Cantelli)

Έστω (Ω, F, p) χώρος πιθανότητας και $A_n \in F$ οικογένεια ενδεχομένων. Ορίζουμε ακόμα την έκφραση $\limsup A_n = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n$. Αν τώρα ισχύει $\sum_{n=1}^{\infty} p(A_n) = l < \infty$ τότε θα έχουμε ότι $p(\limsup A_n) = 0$.

Τέλος μπορούμε να θυμήσουμε δύο θεμελιώδεις ταυτότητες που χρησιμοποιούμε σε θέματα πιθανοτήτων.

Η πρώτη έχει να κάνει με το άθροισμα διασπορών και είναι η γνωστή:

Ταυτότητα 2.11: (Άθροισμα διασπορών)

$$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i,j=1}^n \text{Cov}(X_i, X_j) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) + \sum_{i \neq j} \text{Cov}(X_i, X_j)$$

Η δεύτερη θα χρησιμοποιηθεί στο κομμάτι της συνδυαστικής που έχει η μελέτη μας και δεν είναι άλλη παρά ο τύπος των συνδυασμών. Δηλαδή όταν θέλουμε να πάρουμε συνδυασμούς k αντικειμένων από n αντικείμενα έχουμε:

2.1 Στοιχεία Θεωρίας Πιθανοτήτων

Ταυτότητα 2.12: (Συνδυασμοί n ανα k)

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

2.2 Στοιχεία Θεωρίας Γραφημάτων

Πέρα τώρα από τα βασικά στοιχεία που υπενθυμίσαμε σχετικά με τη θεωρία πιθανοτήτων και στα δύο μεγάλα ασυμπτωτικά θεωρήματα σχετικά με τυχαίους πίνακες που θα αποδείξουμε γίνεται μεγάλη χρήση της θεωρίας γραφημάτων. Γι'αυτό κρίνεται σκόπιμο να εξηγήσουμε κάποια βασικά πράγματα σε αυτήν την ενότητα.

Ορισμός 2.12: (Γράφημα)

Ένα γράφημα G είναι ένα διατεταγμένο ζεύγος δύο ξένων μεταξύ τους συνόλων $V \neq \emptyset$ και E όπου το E ένα υποσύνολο του συνόλου των μη διατεταγμένων ζευγών του V . Τα στοιχεία του συνόλου V ονομάζονται **κορυφές** του γραφήματος G και ο αριθμός $|V|=|V(G)|$ **τάξη** του γραφήματος, ενώ τα στοιχεία του συνόλου E ονομάζονται **πλευρές** του γραφήματος και ο αριθμός $|E|=|E(G)|$ **μέγεθος** του γραφήματος G . Επιπλέον ως **βαθμό** μιας κορυφής v ενός γραφήματος G εννοούμε τον αριθμό των πλευρών που διέρχονται από την κορυφή αυτή.

Επιπλέον ένα γράφημα του οποίου το σύνολο των πλευρών του E αποτελείται από ζεύγη στα οποία έχει σημασία η διάταξη καλείται διατεταγμένο γράφημα.

Ορισμός 2.13: (Δρόμος-Μονοπάτι-Κλειστός Δρόμος-Κύκλος)

Σ' ένα γράφημα G θεωρούμε μια πεπερασμένη ακολουθία στην οποία εναλλάσσονται κορυφές του G και πλευρές του G , η οποία αρχίζει και τελειώνει σε κορυφή και όπου κάθε πλευρά που περιέχεται στην ακολουθία προσπίπτει στην κορυφή που προηγείται και στην κορυφή που έπεται. Μια τέτοια ακολουθία λέγεται **δρόμος**. Ένα δρόμος στον οποίο κάθε κορυφή και κάθε πλευρά του δρόμου εμφανίζονται ακριβώς μία φορά ονομάζεται **μονοπάτι**. Ένας δρόμος που έχει σαν άκρα την ίδια κορυφή ονομάζεται **κλειστός δρόμος**. Τέλος ένα κλειστό μονοπάτι λέγεται **κύκλος**.

Ορισμός 2.14: (Συνεκτικό Γράφημα)

Ένα γράφημα λέγεται συνεκτικό αν για κάθε ζεύγος $\{x, y\}$ διακεκριμένων κορυφών του υπάρχει μονοπάτι από το x στο y .

Ορισμός 2.15: (Υπογράφημα-Παράγων Υπογράφημα)

Το γράφημα $G'=(V', E')$ λέμε ότι είναι ένα **υπογράφημα** του $G=(V, E)$ αν $V' \subseteq V$ και $E' \subseteq E$. Στην ειδική περίπτωση που το $V'=V$ δηλαδή τα δύο γραφήματα έχουν το ίδιο

2.2 Στοιχεία Θεωρίας Γραφημάτων

σύνολο κορυφών το G' λέγεται **παράγων υπογράφημα** του G .

Ας δούμε τώρα δύο ειδικές κατηγορίες γραφημάτων που θα συναντήσουμε αργότερα στη μελέτη μας:

Ορισμός 2.16: (Δέντρο)

Ως **δέντρο** καλούμε ένα γράφημα στο οποίο οποιοσδήποτε δύο κορυφές του ενώνονται από ακριβώς ένα μονοπάτι. Εναλλακτικά δέντρο καλείται ένα συνεκτικό γράφημα χωρίς κύκλους. Επιπλέον οποιαδήποτε κορυφή δέντρου βαθμού 1 καλείται **φύλλο** του δέντρου. Ακόμη ένα υπογράφημα το οποίο περιέχει όλες τις κορυφές ενός γραφήματος και είναι δέντρο καλείται **παράγων δέντρο**.

Ορισμός 2.17: (Διμερές Δέντρο)

Ως **διμερές δέντρο** καλούμε ένα γράφημα του οποίου οι κορυφές μπορούν να χωριστούν σε δύο ξένα μεταξύ τους σύνολα U και V με τέτοιο τρόπο ώστε κάθε πλευρά να συνδέει μια κορυφή από το σύνολο U με μία του V . Ισοδύναμος ορισμός είναι ότι διμερές γράφημα είναι ένα γράφημα που δεν περιέχει περιττού μήκους κύκλους.

2.3 Στοιχεία Ανάλυσης

Όσον αφορά το κομμάτι της ανάλυσης είναι λογικό να υπάρχουν μέσα στις αποδείξεις των θεωρημάτων κομμάτια από θεωρήματα πραγματικής και συναρτησιακής ανάλυσης. Θα διατυπώσουμε σε αυτό το σημείο τα δύο θεωρήματα που θα χρειαστούμε στη μετέπειτα μελέτη μας δίνοντας σε υποσημείωση από που μπορεί κανείς να διαβάσει τις αποδείξεις αλλά και περαιτέρω πληροφορίες σχετικά με αυτά.

Το πρώτο που θα χρειαστούμε στην παρακάτω μελέτη μας είναι η έννοια της σφιχτότητας ενός μέτρου πιθανότητας καθώς και το θεωρημα Prokhorov. Έχουμε λοιπόν τα εξής:

Ορισμός 2.18: (Σφιχτότητα μέτρου πιθανότητας)

Έστω (Ω, F) μετρήσιμος χώρος. Ένα μέτρο p θα καλείται σφιχτό αν $\forall \varepsilon > 0$ υπάρχει συμπαγές σύνολο K τέτοιο ώστε $p(K) > 1 - \varepsilon$.

Κάτι αρκετά χρήσιμο που θα πρέπει να έχουμε υπόψη μας είναι ότι αν μια ακολουθία μέτρων είναι φραγμένη τότε θα είναι και σφιχτή.

Ορισμός 2.19: (Σχετική Συμπάγεια)

Έστω (Ω, F) μετρήσιμος χώρος και Π μια οικογένεια από μέτρα πιθανότητας. Η οικογένεια Π θα καλείται σχετικά συμπαγής αν κάθε ακολουθία από στοιχεία της Π περιέχει μία ασθενώς συγκλίνουσα υπακολουθία.

2.3 Στοιχεία Ανάλυσης

Θεώρημα 2.20: (Prokhorov)

Αν η οικογένεια Π που περιγράψαμε παραπάνω είναι σφιχτή τότε θα είναι και σχετικά συμπαγής.

Το θεώρημα αυτό μας εφοπλίζει με δύο πολύ χρήσιμα πορίσματα τα οποία είναι τα ακόλουθα:

Πόρισμα 2.21¹: (Πορίσματα Prokhorov)

Αν η $\{\mu_n\}$ είναι μια σφιχτή ακολουθία μέτρων πιθανότητας τότε:

- υπάρχει υπακολουθία $\{\mu_{n_k}\}$ και μέτρο μ τέτοιο ώστε η $\{\mu_{n_k}\}$ να συγκλίνει ασθενώς στο μέτρο πιθανότητας μ
- αν κάθε ασθενώς συγκλίνουσα υπακολουθία $\{\mu_{n_k}\}$ συγκλίνει στο μ τότε και η ακολουθία $\{\mu_n\}$ τείνει στο μ

Το δεύτερο που θα χρειαστούμε μάλλον στη συνέχεια της μελέτης μας είναι η έννοια της ομοιόμορφης ολοκληρωσιμότητας για τυχαίες μεταβλητές την οποία και θα παραθέσουμε.

Ορισμός 2.22: (Ομοιόμορφη ολοκληρωσιμότητα)

Μια οικογένεια τυχαίων μεταβλητών X_n θα λέγονται ομοιόμορφα ολοκληρώσιμες αν ισχύει:

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \sup_n \int_{|X_n| \geq a} |X_n| dP = 0 \quad \text{Αυτό υποδεικνύει ότι: } \sup_n E[|X_n|] < \infty$$

¹ Για περισσότερες λεπτομέριες αλλά και την απόδειξη για το θεώρημα Prokhorov μπορεί κανείς να κοιτάξει το βιβλίο Convergence of Probability Measures του P.Billingsley σελ. 57

3 Ο Νόμος του ημικυκλίου (Semi-Circle Law)

Περίληψη: Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε ένα από τα πιο σημαντικά θεωρήματα της θεωρίας των τυχαίων πινάκων που είναι ο νόμος του ημικυκλίου (semi-circle law) τον οποίο διατύπωσε ο Wigner. Πρόκειται για θεώρημα το οποίο μας επιτρέπει να κατανοήσουμε τη συμπεριφορά των ιδιοτιμών ενός τυχαίου πίνακα όταν οι διαστάσεις αυτού τείνουν στο άπειρο. Θα δούμε τόσο την απόδειξη αυτού όσο και κάποιες προσομοιώσεις του με τη βοήθεια του μαθηματικού πακέτου της R.

3.1 Πίνακες Wigner και νόμος του ημικυκλίου

Σκοπός μας σε αυτό το κεφάλαιο είναι να μελετήσουμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά του φάσματος ορισμένων τυχαίων πινάκων. Θα ορίσουμε λοιπόν καταρχάς τους **πίνακες Wigner**.

Ορισμός 3.1: (Πραγματικοί πίνακες Wigner)

Για $1 \leq i < j < \infty$ έστω X_{ij} να είναι ανεξάρτητες και ισόνομες (πραγματικές) τυχαίες μεταβλητές (i.i.d.) με μέση τιμή 0 και διασπορά 1 και θέτουμε ακόμα ότι $X_{ji} = X_{ij}$. Ακόμη έστω ότι οι X_{ii} είναι i.i.d. (πραγματικές) τυχαίες μεταβλητές (με πιθανή διαφορετική κατανομή από τις προηγούμενες) με μέση τιμή 0 και διασπορά 1. Τότε ο $M_n = [X_{ij}]_{i,j=1}^n$ θα είναι ένας τυχαίος $n \times n$ συμμετρικός πίνακας Wigner.

Ορισμός 3.2: (Μιγαδικοί πίνακες Wigner)

Για $1 \leq i < j < \infty$ έστω X_{ij} να είναι ανεξάρτητες και ισόνομες (μιγαδικές) τυχαίες μεταβλητές (i.i.d.) με μέση τιμή 0, $E[|X_{ij}^2|] = 1$ και θέτουμε ακόμα ότι $X_{ji} = \bar{X}_{ij}$. Ακόμη έστω ότι οι X_{ii} είναι i.i.d. (πραγματικές) τυχαίες μεταβλητές με μέση τιμή 0 και διασπορά 1. Τότε ο $M_n = [X_{ij}]_{i,j=1}^n$ θα είναι ένας τυχαίος $n \times n$ ερμιτιανός πίνακας Wigner.

Σε κάθε περίπτωση θα έχουμε n τυχαίες ιδιοτιμές τις οποίες θα συμβολίσουμε ως εξής:

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$$

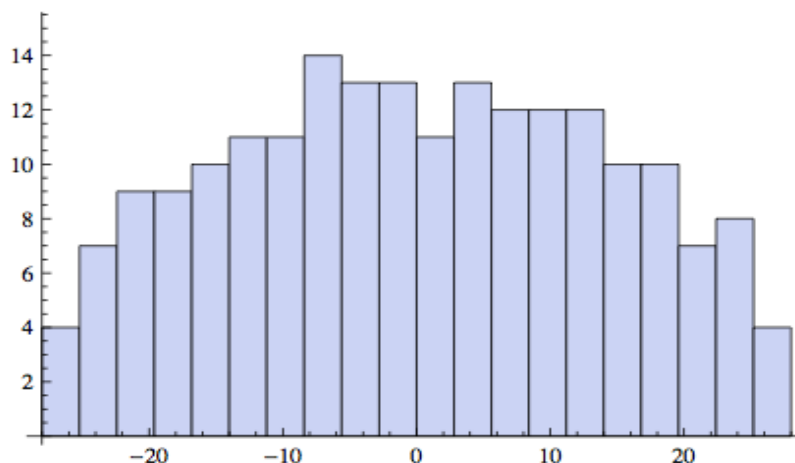
Οι ιδιοτιμές αυτές είναι συνεχείς συναρτήσεις του M_n και επομένως είναι και αυτές τυχαίες μεταβλητές με τη σειρά τους.

3.1 Πίνακες Wigner και νόμος του ημικυκλίου

Θέλουμε λοιπόν να μελετήσουμε το όριο του μέτρου που προέρχεται από την εμπειρική κατανομή:

$$v_n^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{\lambda_i}$$

Αυτό είναι ένα τυχαίο διακριτό μέτρο πιθανότητας το οποίο τοποθετεί μία n^{-1} μάζα σε κάθε (τυχαία) ιδιοτιμή. Για παράδειγμα η παρακάτω εικόνα μας δείχνει ένα ιστόγραμμα των ιδιοτιμών ενός συγκεκριμένου 200×200 πίνακα Wigner.



Η εικόνα αυτή μας υποδεικνύει ότι υπάρχει μια ντετερμινιστική οριακή συμπεριφορά. Για να καταφέρουμε τώρα να βρούμε την κατάλληλη κλίμακα θα υπολογίσουμε την τάξη μεγέθους του εμπειρικού μέσου και της δεύτερης ροπής των ιδιοτιμών. Έχουμε δηλαδή:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda_i = \frac{1}{n} \text{Tr} M_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{ii} \quad (3.1)$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = \frac{1}{n} \text{Tr} M_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^n X_{ij}^2 \quad (3.2)$$

Η πρώτη ροπή συγκλίνει στο μηδέν σύμφωνα με τον ισχυρό νόμο των μεγάλων αριθμών. Όμως η δεύτερη ροπή είναι βαθμού $O(n)$ αφού έχουμε περίπου $n^2/2$ ανεξάρτητους όρους στο άθροισμα με όρο κανονικοποίησης $\frac{1}{n}$ αντί για $\frac{1}{n^2}$. Αυτή η παρατήρηση μας οδηγεί στην απόφαση ότι για να πάρουμε κάποιο όριο με νόημα θα πρέπει να διαιρέσουμε τις ιδιοτιμές (ή τον πίνακα) με \sqrt{n} .

Το παρακάτω θεώρημα λοιπόν υποστηρίζει ότι κατά περίπτωση έχουμε όντως ένα ντετερμινιστικό όριο.

3.1 Πίνακες Wigner και νόμος του ημικυκλίου

Θεώρημα 3.3: (Νόμος του ημικυκλίου-Wigner's semicircle law)

Έστω $\nu_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{\frac{\lambda_i}{\sqrt{n}}}$ το κανονικοποιημένο μέτρο της εμπειρικής κατανομής. Τότε καθώς

$n \rightarrow \infty$ θα ισχύει $\nu_n \Rightarrow \nu$ (συγκλίνει ασθενώς σ.β.) όπου το ν έχει πυκνότητα:

$$\frac{d\nu}{dx} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{4-x^2} \mathbf{1}_{\{|x| \leq 2\}}$$

(Θα υπάρχουν κάποιοι ισχυρισμοί για την κατανομή των τυχαίων στοιχείων του M_n)

3.2 Απόδειξη του Νόμου του ημικυκλίου

Σκοπός μας λοιπόν τώρα θα είναι να προχωρήσουμε στην απόδειξη του νόμου του ημικυκλίου (semicircle law) του Wigner. Υπενθυμίζουμε λοιπόν αρχικά τις υποθέσεις που έχουμε κάνει σχετικά με τους τυχαίους πίνακες Wigner.

Έστω λοιπόν $M_n = [X_{ij}]_{i,j=1}^n$ να είναι ένας συμμετρικός $n \times n$ πίνακας με στοιχεία τυχαίες μεταβλητές τέτοιος ώστε:

- $X_{ij} = X_{ji}$
- Τα X_{ij} είναι i.i.d για όλα τα $i < j$ και τα X_{jj} είναι i.i.d για όλα τα j με $E[X_{ij}^2] = 1$ και $E[X_{ij}] = 0$ (Το πρώτο προκύπτει εύκολα αφού $E[X_{ij}^2] = V[X_{ij}] + E[X_{ij}]^2$)
- Υπάρχουν οι ροπές όλων των τάξεων για κάθε στοιχείο X_{ij} του πίνακα

Επίσης θεωρήσαμε τις ιδιοτιμές του τυχαίου πίνακα: $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ οι οποίες είναι τυχαίες μεταβλητές που εξαρτώνται συνεχώς από τον M_n .

Ας υπενθυμίσουμε λοιπόν τι θέλουμε να αποδείξουμε στο θεώρημα ημικυκλίου του Wigner.

Ουσιαστικά έχουμε πάρει το κανονικοποιημένο εμπειρικό μέτρο $\nu_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{\frac{\lambda_i}{\sqrt{n}}}$ το οποίο θέλουμε να δείξουμε πως για $n \rightarrow \infty$ συγκλίνει ασθενώς σχεδόν βεβαίως σε ένα μέτρο ν για το οποίο ισχύει:

$$\frac{d\nu}{dx} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{4-x^2} \mathbf{1}_{\{|x| \leq 2\}}$$

Πριν προχωρήσουμε στην απόδειξη να υπενθυμίσουμε κάτι που είχαμε αναφέρει και στο 2ο κεφάλαιο που αφορά το τι σημαίνει ασθενής σύγκλιση για ένα μέτρο πιθανότητας. Θέλουμε δηλαδή να δείξουμε ότι:

3.2 Απόδειξη του Νόμου του ημικυκλίου

$$\int_{\Omega} f dv_n \rightarrow \int_{\Omega} f dv$$

για κάθε συνάρτηση f η οποία είναι φραγμένη και συνεχής.

Για την απόδειξη του νόμου του ημικυκλίου θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της σύγκλισης των ροπών, σύμφωνα με την οποία χαρακτηρίζοντας ένα μέτρο από τις ροπές του μπορούμε να συμπεράνουμε από τη σύγκλιση των ροπών την ασθενή σύγκλιση των μέτρων. Για να είναι λοιπόν πιο εύκολη στην κατανόηση η απόδειξη αλλά επειδή η δομή της θα επαναχρησιμοποιηθεί θα τη χωρίσουμε σε τρία βήματα.

ΒΗΜΑ 1

Θέλουμε πρώτα από όλα να δείξουμε ότι το μέτρο ν στο οποίο θέλουμε να αποδείξουμε ότι συγκλίνει η ακολουθία των μέτρων ν_n χαρακτηρίζεται πλήρως από τις ροπές του. Αυτό σημαίνει ότι δε μπορεί να υπάρχει άλλο μέτρο με τις ίδιες ροπές. Για να το επιτύχουμε αυτό θα χρησιμοποιήσουμε σαν εργαλείο τη συνθήκη του Carleman η οποία είναι η ακόλουθη:

Θεώρημα 3.4: (συνθήκη του Carleman)

Έστω ότι:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k^{1/2k}} = \infty$$

Τότε υπάρχει το πολύ ένα μέτρο F τέτοιο ώστε $\int x^k dF(x) = \mu_k$ για κάθε θετικό ακέραιο k . Η συνθήκη αυτή μπορεί να γίνει πιο ισχυρή και το παραπάνω συμπέρασμα ισχύει εάν:

$$\limsup \frac{\mu_{2k}^{1/2k}}{2k} = r < \infty$$

Η λογική πίσω από την απόδειξη του θεωρήματος αυτού ακολουθεί το γεγονός ότι η χαρακτηριστική εξίσωση $E[\exp(iXt)]$ χαρακτηρίζει την κατανομή της τυχαίας μεταβλητής X .

Μπορούμε να θεωρήσουμε το πολυώνυμο Taylor της $\exp(iXt)$. Αν

$$E[\exp(iXt)] = \sum \frac{(it)^k E[x^k]}{k!} \quad \text{τότε πράγματι η ροπή καθορίζει τη χαρακτηριστική εξίσωση.}^2$$

Ας ελέγξουμε λοιπόν αν η συνθήκη του Carleman ισχύει για την περίπτωση μας. Θεωρούμε λοιπόν:

$$c_k = \int_{-2}^2 \frac{1}{2\pi} x^k \sqrt{4-x^2} dx$$

Αν ο k είναι περιττός, τότε αυτόματα $c_k = 0$. Επομένως θεωρούμε ότι $k = 2n$. Τότε έχουμε:

² Για την πλήρη απόδειξη της συνθήκης του Carleman μπορεί κανείς να δει το βιβλίο Spectral analysis of large dimensional random matrices των Zhidong Bai και Jack W. Silverstein (σελ. 509)

3.2 Απόδειξη του Νόμου του ημικυκλίου

$$\begin{aligned}
 c_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^2 x^{2n} \sqrt{4-x^2} dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin^{2n}(t) \cos^2(t) 2^{2n+2} dt \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} 2^{2n+2} (\sin^{2n}(t) - \sin^{2n+2}(t)) dt \\
 &= \frac{1}{\pi} 2^{2n+2} \frac{2n!}{n! 2^{2n}} \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{(2n+2)(2n+1)}{4(n+1)^2} \right) \quad (*) \\
 &= \binom{2n}{n} \frac{1}{n+1} < 4^n \quad (3.3)
 \end{aligned}$$

(*) Χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $\int_0^{\pi/2} \sin^{2l}(t) dt = \frac{2l!}{(l!)^2 2^{2l}} \frac{\pi}{2}$

Επομένως έχουμε: $\frac{\mu_{2k}^{1/2k}}{2k} < \frac{(4^{k/2})^{1/2k}}{2k} = \frac{\sqrt[4]{4}}{2k}$ κάτι το οποίο μας υποδεικνύει ότι η συνθήκη ισχύει και άρα το ν είναι το μοναδικό μέτρο με αυτές τις ροπές επομένως χαρακτηρίζεται πλήρως από αυτές.

Εδώ χρήσιμο είναι να παρατηρήσουμε ότι παράλληλα με τον έλεγχο της συνθήκης του Carleman υπολογίσαμε και ότι (3.4):

$$\int x^k d\nu = \begin{cases} C_{k/2}, & k \text{ άρτιος} \\ 0, & k \text{ περιττός} \end{cases} \quad \text{όπου } C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} \text{ που είναι ο } n\text{-οστός αριθμός Catalan} \quad (3.5)$$

ΒΗΜΑ 2

Δείξαμε ότι το μέτρο ν ικανοποιεί τη συνθήκη του Carleman και άρα χαρακτηρίζεται πλήρως από τις ροπές του. Θέλουμε λοιπόν τώρα να ανάγουμε τη σύγκλιση των μέτρων στη σύγκλιση των ροπών όλων των τάξεων των μέτρων. Για να το επιτύχουμε αυτό λοιπόν θα χρειαστούμε το θεώρημα σύγκλισης ροπών.

Θεώρημα 3.5: (Σύγκλιση Ροπών)

Έστω ότι η κατανομή της τ.μ. X χαρακτηρίζεται πλήρως από τις ροπές της, ότι υπάρχουν οι ροπές όλων των τάξεων για την ακολουθία των τ.μ. X_n και ότι ισχύει:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[X_n^r] = E[X^r] \quad . \quad \text{Τότε θα έχουμε ότι: } X_n \Rightarrow X$$

3.2 Απόδειξη του Νόμου του ημικυκλίου

Η απόδειξη του θεωρήματος αυτού που αποτελεί το βήμα 2 χρησιμοποιεί στοιχεία από δύο θεωρήματα (λήμματα για εμάς) τα οποία έχουν να κάνουν με σύγκλιση μέτρου πιθανότητας τα οποία θα χρησιμοποιήσουμε χωρίς περαιτέρω απόδειξη καθώς αυτές αφορούν πιο πολύ θεωρία μέτρου και πραγματική ανάλυση. Σε υποσημείωση δίνεται λοιπόν που κανείς μπορεί να βρει αναλυτική την απόδειξη τους.

Λήμμα 3.6³: (Πόρισμα ομοιόμορφης ολοκληρωσιμότητας)

Έστω r ένα θετικός ακέραιος. Αν για τις τυχαίες μεταβλητές X_n, X ισχύει ότι $X_n \Rightarrow X$ (κατά νόμο) και επιπλέον $E[|X_n|^{r+\varepsilon}] < \infty$, με $\varepsilon > 0$ τότε $E[|X_n|^r] < \infty$ και επιπλέον $E[X_n^r] \rightarrow E[X^r]$

Το λήμμα αυτό προέρχεται από το γεγονός ότι αν έχουμε κατά νόμον σύγκλιση δύο τυχαίων μεταβλητών και η ακολουθία των X_n είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη (uniformly integrable) τότε θα έχουμε και σύγκλιση των ροπών τους.

Λήμμα 3.7⁴: (Πόρισμα Θεωρήματος Prokhorov)

Αν $\{\mu_n\}$ είναι μία σφιχτή ακολουθία από μέτρα πιθανότητας, και αν κάθε υπακολουθία η οποία συγκλίνει ασθενώς γενικά συγκλίνει στο μέτρο πιθανότητας μ , τότε θα έχουμε ότι $\mu_n \Rightarrow \mu$.

Πρόκειται για ιδιότητα που παίρνουμε από τη σφιχτότητα μια ακολουθίας.

Λαμβάνοντας λοιπόν αυτά τα δύο λήμματα υπόψην μπορούμε να προχωρήσουμε στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.5:

Απόδειξη:

Έστω λοιπόν μ_n και μ οι κατανομές των τυχαίων μεταβλητών X_n και X . Αφού η $E[X_n^2]$ συγκλίνει από υπόθεση τότε θα είναι και φραγμένη από μία σταθερά έστω K . Σύμφωνα λοιπόν με την ανισότητα Markov θα ισχύει: $P[|X_n| \geq x] \leq \frac{K}{x^2}$ κάτι το οποίο μας υποδεικνύει ότι η ακολουθία των κατανομών $\{\mu_n\}$ είναι σφιχτή.

3 Για την πλήρη απόδειξη μπορεί κανείς να συμβουλευτεί το Probability and Measure 3rd edition του P.Billingsley σελ. 338

4 Για την πλήρη απόδειξη μπορεί κανείς να συμβουλευτεί το Probability and Measure 3rd edition του P.Billingsley σελ. 337

3.2 Απόδειξη του Νόμου του ημικυκλίου

Θεωρούμε τώρα ότι η υπακολουθία $\mu_{n_k} \Rightarrow \nu$ και έστω ακόμη ότι Y είναι τυχαία μεταβλητή με κατανομή ν . Αν τώρα ο αριθμός u είναι ένας άρτιος ακέραιος μεγαλύτερος του r , η σύγκλιση και επομένως το γεγονός ότι το $E[X_n^u]$ θα είναι φραγμένο υποδεικνύει ότι $E[X_{n_k}^r] \rightarrow E[Y^r]$ σύμφωνα με το λήμμα 3.6.

Από την υπόθεση λοιπόν έχουμε ότι αφού $E[Y^r] = E[X^r]$, αυτό σημαίνει ότι οι κατανομές ν και μ έχουν τις ίδιες ροπές. Επομένως αφού σύμφωνα με την υπόθεση η μ χαρακτηρίζεται πλήρως από τις ροπές της θα πρέπει να ισχύει $\nu = \mu$ και άρα $\mu_{n_k} \Rightarrow \mu$. Το συμπέρασμα τώρα έρχεται χρησιμοποιώντας το πόρισμα από το Θεώρημα Prokhorov όπως αναφέρθηκε στο λήμμα 3.7. ■

Έχουμε δηλαδή πλέον ανάγκη την απόδειξη στον να δείξουμε ότι οι ροπές των μέτρων ν_n συγκλίνουν σε αυτές του ν δηλαδή: $\int x^k d\nu_n \rightarrow \int x^k d\nu$

ΒΗΜΑ 3

Για να καταφέρουμε τώρα στο τελευταίο βήμα να αποδείξουμε ότι $\int x^k d\nu_n \rightarrow \int x^k d\nu$ θα χρειαστούμε δύο ισχυρισμούς που αποδεικνύονται με επιχειρήματα συνδυαστικής όπως θα δούμε μετά. Αυτοί είναι οι ακόλουθοι δύο:

Συμβολίζοντας λοιπόν με $m_{nk} = \int x^k d\nu_n$ έχουμε ότι:

$$\mathbf{A.} \quad E[m_{nk}] \rightarrow c_k = \int x^k d\nu \quad (3.6)$$

$$\mathbf{B.} \quad \text{Var}(m_{nk}) \leq \frac{c_k}{n^2} \quad (3.7)$$

Πώς όμως θα βοηθήσουν οι δύο παραπάνω ισχυρισμοί; Ας θεωρήσουμε ότι τα (A) και (B) λοιπόν ισχύουν. Τότε μπορούμε χρησιμοποιώντας την ανισότητα Chebyshev και μετά το 1ο λήμμα Borrel Cantelli μαζί με τη βοήθεια του ισχυρισμού **B** να δείξουμε ότι:

$$\begin{aligned} P\left(|m_{nk} - E[m_{nk}]| > \frac{1}{4\sqrt{n}}\right) &\leq E[(m_{nk} - E[m_{nk}])^2] \sqrt{n} \\ &= \text{Var}(m_{nk}) \sqrt{n} \\ &= O(1/n^{3/2}) \end{aligned}$$

3.2 Απόδειξη του Νόμου του ημικυκλίου

Δηλαδή το $\sum_{n=1}^{\infty} P(|m_{nk} - E[m_{nk}]| > \frac{1}{\sqrt{n}}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{3}{2}} < \infty$.

Επομένως με εφαρμογή του πρώτου λήμματος Borrel Cantelli θα έχουμε ότι το:

$P(\limsup |m_{nk} - E[m_{nk}]| > \frac{1}{\sqrt{n}}) = 0$ και επομένως $|m_{nk} - E[m_{nk}]| < \frac{1}{\sqrt{n}}$ για μεγάλα n σχεδόν βεβαίως.

Το τελευταίο καθώς $n \rightarrow \infty$ μας δίνει ότι $m_{nk} \rightarrow E[m_{nk}]$ το οποίο όμως λόγω του ισχυρισμού **A** μας δίνει το τελικό συμπέρασμα που είναι η σύγκλιση ροπών, δηλαδή: $\int x^k dv_n \rightarrow \int x^k dv$

Συνεπώς μας μένει μόνο να αποδείξουμε τους δύο ισχυρισμούς **A** και **B** για να είναι η απόδειξη του θεωρήματος πλήρης.

Απόδειξη Ισχυρισμού **A**:

Σκοπός μας είναι να αποδείξουμε ότι αν $m_{nk} = \int x^k dv_n$, τότε $E[m_{nk}] \rightarrow c_k = \int x^k dv$. Επομένως θα δουλέψουμε ως εξής:

$$\begin{aligned} E[\int x^k dv_n] &= E\left[\frac{1}{n} \sum \left(\frac{\lambda_i}{\sqrt{n}}\right)^k\right] \\ &= n^{-1-\frac{k}{2}} E(\text{Tr}M_n^k) \\ &= n^{-1-\frac{k}{2}} \sum E(X_{i_1 i_2} \cdot X_{i_2 i_3} \cdot X_{i_3 i_4} \dots X_{i_k i_1}) \quad (3.8) \end{aligned}$$

Για να μπορέσουμε να οργανώσουμε και να γράψουμε καλύτερα το παραπάνω οποτεδήποτε έχουμε μία k -άδα $(i_1, i_2, \dots, i_k) = I$ θα θεωρούμε ότι το $E[I] = E(X_{i_1 i_2} \cdot X_{i_2 i_3} \cdot X_{i_3 i_4} \dots X_{i_k i_1})$. Το πρώτο πράγμα που μπορεί κανείς να παρατηρήσει είναι ότι το $E[I]$ είναι φραγμένο από μία σταθερά B_k . Αυτό μπορεί εύκολα να δειχθεί αν κάποιος εφαρμόσει επαγωγικά την ανισότητα Cauchy-Schwarz για πιθανότητες.

Θα χρειαστούμε τώρα τη βοήθεια της θεωρίας γραφημάτων. Ας παρουσιάσουμε λοιπόν κάθε I ως μία κατευθυνόμενη κλειστή διαδρομή ενός γραφήματος με κορυφές $\{1, 2, 3, \dots, n\} = V(I)$ που είναι τα διακριτά στοιχεία της k -άδας I και πλευρές $\zeta(I) = \{(i_a, i_{a+1} : a=1, \dots, k, i_{k+1} = i_1)\}$. Για παράδειγμα, αν $I = (2, 3, 1, 2, 2, 1)$ τότε θα έχουμε τον εξής αντίστοιχο κατευθυνόμενο πίνακα διαδρομής:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Κάθε στοιχείο a_{ij} του πίνακα αναπαριστά τον αριθμό των πλευρών που πηγαίνουν από την κορυφή i στην κορυφή j .

3.2 Απόδειξη του Νόμου του ημικυκλίου

Τώρα ο σκελετός ενός τέτοιου κατευθυνόμενου γραφήματος επάγεται αν αντικαταστήσουμε όλες τις πλευρές που είναι διπλές ή μεγαλύτερου βαθμού με πλευρές απλές. Δηλαδή ο σκελετός του γραφήματος που δώσαμε για παράδειγμα θα δίνεται από τον εξής πίνακα διαδρομής:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Κάθε στοιχείο b_{ij} του πίνακα αναπαριστά τον αριθμό των ακμών μεταξύ της κορυφής i και της κορυφής j .

Στο σημείο αυτό είναι πολύ σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι το $E[I]=0$ εκτός αν κάθε πλευρά που υπάρχει στο σκελετό του γραφήματος χρησιμοποιείται τουλάχιστον δύο φορές. Αν για παράδειγμα η ακμή (i,j) υπάρχει μόνο μία φορά, τότε θα έχουμε:

$$E[I] = E[X_{ij}] E \left[\prod_{e \in \xi(I) \setminus \{(i,j)\}} X_e \right] = 0$$

Η παραπάνω παρατήρησή μας υποδεικνύει ότι:

$$\text{Αν } E[I] \neq 0 \text{ τότε θα είναι } \xi(I) \leq \frac{k}{2}$$

Το φράγμα αυτό μας επιτρέπει να τοποθετήσουμε ένα φράγμα στο $V(I)$.

Λήμμα 3.8:

Δοσμένου οποιουδήποτε γραφήματος G , θεωρούμε το σύνολο των κορυφών $V(G)$ και το σύνολο των πλευρών του $E(G)$. Τότε θα ισχύει $|V(G)| \leq |E(G)| + 1$

Απόδειξη:

Για να αποδείξουμε το παραπάνω θα θεωρήσουμε ότι το G είναι δέντρο. Παρατηρούμε ότι αν αφαιρέσουμε ένα φύλλο (κορυφή βαθμού 1) από το γράφημα στην πραγματικότητα αφαιρούμε μία κορυφή και μία πλευρά. Μπορούμε να συνεχίσουμε να αφαιρούμε φύλλα από το δέντρο μέχρι να απομείνει το K_2 δηλαδή το ολοκληρωμένο γράφημα που αποτελείται από δύο κορυφές.

Αφαιρώντας ένα φύλλο και από το K_2 θα μας αφήσει το K_1 που ουσιαστικά είναι μια σκέτη κορυφή. Επομένως το $V(G) = E(G) + 1$ σε αυτήν την περίπτωση. Για μία γενική περίπτωση γραφήματος αφαιρούμε πλευρές από το γράφημα μέχρι να απομείνει το παράγων δέντρο του γραφήματος, το G' . Αν αφαιρέσαμε m πλευρές για να το επιτύχουμε αυτό τότε θα έχουμε:

$$V(G) = E(G') + 1 + m \text{ και επομένως το συμπέρασμα ισχύει.} \quad \blacksquare$$

Επομένως μέχρι στιγμής έχουμε ότι:

$$\text{Αν } E[I] \neq 0 \text{ τότε } V(I) \leq \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil + 1$$

Πλέον είμαστε λοιπόν σε θέση να φράξουμε την αναμενόμενη τιμή της μεταβλητής m_{nk}

3.2 Απόδειξη του Νόμου του ημικυκλίου

Λήμμα 3.9:

Για τη μέση τιμή της m_{nk} έχουμε ότι: $E\left[\int x^k dv_n\right] \leq \frac{c_k}{\sqrt{n}}$

Απόδειξη:

Έχουμε διαδοχικά ότι:

$$\begin{aligned} E\left[\int x^k dv_n\right] &= \frac{1}{n^{k/2+1}} \sum_I E(I) \\ &= \frac{1}{n^{k/2+1}} \sum_{V(I) \leq \lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1} E(I) \\ &\leq \frac{B_k}{n^{1+k/2}} \left| \{I; V(I) \leq \lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1\} \right| \end{aligned}$$

■

Ας θεωρήσουμε λοιπόν προσωρινά ότι το $V(I)=l$ για ένα συγκεκριμένο l . Με πόσους τρόπους όμως μπορούμε να επιλέξουμε το I ; Το πιο εύκολο φράγμα που μπορεί να σκεφτεί κανείς για τον αριθμό αυτό είναι πράγματι το $n^l \cdot l^k$ (επιλογή κορυφών \times επιλογή στην κάθε θέση). Το “αθώο” φράγμα αυτό όμως είναι πράγματι αρκετό. Από την παραπάνω ανισότητα μπορεί κανείς να δει ότι αν ισχύει $l < \frac{k}{2} + 1$ τότε θα έχουμε $\lim_{n \rightarrow \infty} E\left[\int x^k dv_n\right] \leq \lim_{n \rightarrow \infty} B_k \cdot l^k \cdot n^{l-k/2-1} = 0$ και άρα οι όροι με $V(I)=l$ θα εξαφανιστούν όταν πάρουμε το όριο. Επομένως μπορούμε να αγνοήσουμε την περίπτωση του περιττού k στο όριο. (αφού θα ισχύει πάντα η αυστηρή ανισότητα). Όταν τώρα ο k είναι άρτιος έχουμε ότι $V(I) \leq \frac{k}{2} + 1$. Αν η ανισότητα είναι αυστηρή τότε ξανά :

$E\left[\int x^k dv_n\right] \rightarrow 0$ στο όριο για $n \rightarrow \infty$. Επομένως μπορούμε ασυμπτωτικά να περιορίσουμε τις περιπτώσεις μας στην περίπτωση που το $V(I) = \frac{k}{2} + 1$ και το $\xi(I) \leq \frac{k}{2}$. Όμως από το

Λήμμα 3.8 γνωρίζουμε ότι το $V(I) \leq \xi(I) + 1$ και επομένως το $\xi(I) = \frac{k}{2}$ υποχρεωτικά. Άρα παίρνουμε υπόψην κατευθυνόμενα γραφήματα των οποίων οι σκελετοί είναι δέντρα και έχουν ακριβώς δύο πλευρές ανάμεσα από σε δύο διαδοχικές κορυφές τους. Ένα τέτοιου είδους κατευθυνόμενο γράφημα ονομάζεται διπλό δέντρο. Παρακάτω δίνεται για παράδειγμα ένας πίνακας κατευθυνόμενης διαδρομής ενός διπλού δέντρου:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Επομένως αν το I είναι ένα διπλό δέντρο τότε έχουμε προφανώς:

$$E[I] = E\left[\prod_{e \in \xi(I)} X_e^2\right] = \prod_{e \in \xi(I)} E[X_e^2] = 1$$

Καταλήγουμε λοιπόν στην ακόλουθη πρόταση:

3.2 Απόδειξη του Νόμου του ημικυκλίου

Πρόταση 3.10:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E\left[\int x^k dv_n\right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{1+\frac{k}{2}}} \times D \quad \text{όπου } D \text{ είναι ο αριθμός των συνολικών διπλών δέντρων με } n$$

κορυφές.

Επομένως η απόδειξη του ισχυρισμού **A** έχει απλοποιηθεί στο να μπορέσουμε να μετρήσουμε το συνολικό αριθμό των δυνατών διπλών δέντρων που έχουν n κορυφές. Για να καταφέρουμε να υπολογίσουμε τον αριθμό αυτό, πρέπει πρώτα να απαντήσουμε το παρακάτω ερώτημα: “Αν κατασκευάσουμε το σχήμα ενός δέντρου τότε πόσα διπλά δέντρα υπάρχουν από αυτό το σχήμα;” Για να το καταφέρουμε αυτό κατασκευάζουμε ουσιαστικά μια 1-1 και επί αντιστοιχία ανάμεσα στο σχήμα ενός διπλού δέντρου και ενός τυχαίου περιπάτου στο \mathbb{N} που ξεκινάει από το 0 και επιστρέφει ακριβώς στο k -βήμα. Για παράδειγμα αν θεωρήσουμε ότι ένα διπλό δέντρο δίνεται από τον πίνακα Γ τότε αν θεωρήσουμε το 1 ως αρχή του περιπάτου, το σχήμα του διπλού δέντρου αυτού αντιστοιχεί στον τυχαίο περίπατο $(0, 1, 2, 1, 2, 1, 0)$. (το k -στοιχείο είναι η απόσταση του περιπατητή από την κορυφή 1 στο k -βήμα). Θα δείξουμε αμέσως μετά (Πρόταση 3.11) ότι τα συνολικά σχήματα διπλών δέντρων τα οποία έχουν $\frac{k}{2}$ πλευρές δίνονται από τον τύπο:

$$\binom{k}{k/2} \frac{1}{k/2+1} \quad (3.9)$$

Επομένως δοσμένου ενός σχήματος, ο συνολικός αριθμός των διπλών δέντρων αυτού του σχήματος θα είναι:

$$\underbrace{\binom{n}{k/2+1}}_{\text{επιλογές των κορυφών}} \underbrace{\left(\frac{k}{2}+1\right)!}_{\text{μεταθέσεις}} = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot \left(n - \frac{k}{2}\right)$$

Συνεπώς μπορούμε τελικά να πάρουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} E\left[\int x^k dv_n\right] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{k/2+1}} \binom{k}{k/2} \frac{1}{k/2+1} n(n-1)\dots\left(n - \frac{k}{2}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{O(n^{k/2+1})}{n^{k/2+1}} \binom{k}{k/2} \frac{1}{k/2+1} \\ &= \binom{k}{k/2} \frac{1}{k/2+1} \\ &= \binom{2n}{n} \frac{1}{n+1} = C_n = C_{k/2} = \int x^k dv \end{aligned}$$

όπως δείξαμε και στη σχέση (3.4) και επομένως ο ισχυρισμός **A** έχει αποδειχθεί ■

Παραλείψαμε προηγουμένως να δείξουμε πως μετράμε τα συνολικά σχήματα διπλών δέντρων με $\frac{k}{2}$ πλευρές. Έχουμε λοιπόν την εξής πρόταση:

3.2 Απόδειξη του Νόμου του ημικυκλίου

Πρόταση 3.11: (Υπολογισμός συνολικών σχημάτων διπλών δέντρων)

Έστω λοιπόν k ένας άρτιος αριθμός (αφού αυτή την περίπτωση εξετάζουμε). Έστω κιόλας ότι $k = 2l$. Όπως είπαμε και προηγουμένως το πρόβλημα αντιστοιχίζεται με τον υπολογισμό των συνολικών τυχαίων περιπάτων με $k = 2l$ βήματα που ξεκινούν και επιστρέφουν στο 0 διασχίζοντας μόνο θετικούς αριθμούς. Οι συνολικοί αυτοί περίπατοι είναι προφανώς $\binom{2l}{l}$ όμως από αυτούς θα πρέπει να αφαιρέσουμε αυτούς οι οποίοι βρίσκονται στα αριστερά του άξονα. Οκ καθώς δεν επιτρέπουμε τις αρνητικές τιμές. Ας θεωρήσουμε λοιπόν ότι έχουμε έναν περίπατο από το $(0,0)$ στο $(2l,0)$ όπου η πρώτη ένδειξη του διανύσματος μας είναι ο αριθμός των βημάτων που έχουμε κάνει και η δεύτερη η θέση στην οποία βρισκόμαστε και ας θεωρήσουμε ότι κινούμαστε πάνω στο επίπεδο χωρίς να επιτρέπεται να πάμε κάτω από τον άξονα x .

Για κάθε λοιπόν περίπατο από το $(0,0)$ στο $(2l,0)$ οποίος έρχεται σε επαφή με τη $y = -1$

μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ο $(a,-1)$ θα είναι το τελευταίο σημείο τομής και παίρνοντας το συμμετρικό περίπατο από το σημείο αυτό και μετά ως προς $y = -1$ παίρνουμε ένα περίπατο από το $(0,0)$ στο $(2l,-2)$. Από την άλλη μεριά αν μας δοθεί τυχαίος περίπατος από το $(0,0)$ στο $(2l,-2)$ μπορούμε να πάρουμε πάλι το συμμετρικό του με τον ίδιο ακριβώς τρόπο και να πάρουμε έναν περίπατο από το $(0,0)$ στο $(2l,0)$. Επομένως αφού αφού ένας περίπατος από το $(0,0)$ στο $(2l,-2)$ έχει

$l-1$ βήματα προς τα πάνω και $l+1$ βήματα προς τα κάτω τότε θα έχουμε $\binom{2l}{l-1}$

συνολικούς περιπάτους. Δηλαδή θα έχουμε $\binom{2l}{l-1}$ περιπάτους από το $(0,0)$ στο $(2l,0)$ οι οποίοι τέμνονται από το $y = -1$. Άρα τελικά παίρνουμε:

$$\binom{2l}{l} - \binom{2l}{l-1} = \frac{(2l)!}{l!(l+1)!} = \binom{2l}{l} \frac{1}{l+1} = \binom{k}{k/2} \frac{1}{k/2+1} = C_{k/2}$$

■

Για να ολοκληρώσουμε λοιπόν πλήρως την απόδειξη του νόμου του ημικυκλίου θα πρέπει τώρα να αποδείξουμε και τον ισχυρισμό **B** που υποθέσαμε στην αρχή. Θυμίζουμε ότι αυτός ήταν:

$$\text{Var}(m_{nk}) \leq \frac{C_k}{n^2} \quad \text{με} \quad m_{nk} = \int x^k dv_n$$

Θα δουλέψουμε με τρόπο ανάλογο με αυτόν της απόδειξης του προηγούμενου ισχυρισμού.

Αν πάρουμε πάλι μία k -άδα $I = (i_1, i_2, \dots, i_k) \in [n]^k$ και θεωρήσουμε X_I το γινόμενο των $X_{i_1} X_{i_2} \dots X_{i_k}$ τότε από τη σχέση (3.8) θα έχουμε ότι:

$$\int x^k dv_n = n^{-1-\frac{k}{2}} \sum_{I \in [n]^k} X_I$$

Επομένως χρησιμοποιώντας τη βασική ταυτότητα αθροίσματος διασπορών:

$$\text{Var}\left(\int x^k dv_n\right) = n^{-2-k} \sum_{I, J \in [n]^k} \text{cov}(X_I, X_J) \quad (3.10)$$

Όπως και προηγουμένως πάλι θα αναπαράστήσουμε τα I και J σαν κλειστές

3.2 Απόδειξη του Νόμου του ημικυκλίου

κατευθυνόμενες διαδρομές γραφημάτων για τα οποία ισχύουν τα εξής:

1. Αν δεν υπάρχουν κοινές πλευρές ανάμεσα στα I και J τότε τα X_I και τα X_J είναι ανεξάρτητα και επομένως $\text{cov}(X_I, X_J) = 0$.

2. Αν υπάρχει κάποια πλευρά η οποία εμφανίζεται μία φορά στο I ή στο J , ας πούμε για παράδειγμα η πλευρά $i_1 i_2$, τότε η $X_{i_1 i_2}$ είναι ανεξάρτητη από τους υπόλοιπους όρους του X_I και του $X_I X_J$. Αφού λοιπόν $E[X_{i_1 i_2}] = 0$ τότε θα είναι και $E[X_I] = E[X_I X_J] = 0$ και επομένως $\text{cov}(X_I, X_J) = E[X_I X_J] - E[X_I]E[X_J] = 0$.

Έστω τώρα $m = |V(I \cup J)|$ να είναι το μέγεθος του συνόλου το οποίο αντιστοιχεί στην ένωση των I και J . Για ένα δοσμένο m έχουμε το πολύ $C n^m$ τρόπους να επιλέξουμε κ-άδες I και J όπου το C είναι μια σταθερά ανεξάρτητη του n .

- Αν τώρα το $m \leq k$ μπορούμε να δούμε ότι η συνεισφορά των όρων αυτών στο άθροισμα της σχέσεως (3.10) είναι της τάξης του $\frac{1}{n^2}$.
- Ας θεωρήσουμε τώρα τους όρους για τους οποίους $m \geq k+1$. Από τα δύο γεγονότα που αναφέραμε προηγουμένως κατανοούμε ότι τα I και J μας δίνουν ένα γράφημα στο οποίο κάθε πλευρά χρησιμοποιείται δύο φορές και επομένως στο σκελετό του γραφήματος $I \cup J$ έχουμε το πολύ k πλευρές. Όμως επειδή θεωρήσαμε $m \geq k+1$ τότε σε αυτή την περίπτωση γνωρίζουμε ότι θα ισχύει υποχρεωτικά $m = k+1$ και ότι το $I \cup J$ θα είναι και αυτό ένα γράφημα της μορφής διπλού δέντρου. Διαγράφοντας όμως κορυφές οι οποίες δεν ανήκουν στο I θα δούμε ότι και το I είναι διπλό δέντρο όπως και το J . Επομένως κοιτώντας για “κοινές πλευρές” στα I και J βλέπουμε ότι αυτές θα υπάρχουν δύο φορές στο καθένα και επομένως τέσσερις φορές στην τομή τους. Καταλήγουμε λοιπόν σε άτοπο αφού κάτι τέτοιο έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεση που κάναμε προηγουμένως ότι το $I \cup J$ είναι διπλό δέντρο.

Συμπερασματικά λοιπόν όλοι οι όροι που θα αθροιστούν στη σχέση (3.10) ικανοποιούν ότι

$m \leq k$ και αφού είναι όλοι $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ τότε καταλήγουμε στο συμπέρασμα που είναι ότι:

$$\text{Var}\left(\int x^k dv_n\right) \leq \frac{c_k}{n^2}$$

■

Επομένως η απόδειξη του νόμου του ημικυκλίου είναι πλήρης.

3.3 Προσομοίωση του νόμου του ημικυκλίου με τη βοήθεια της R

3.3 Προσομοίωση του νόμου του ημικυκλίου με τη βοήθεια της R

Σκοπός μας τώρα είναι αφού μελετήσαμε το νόμο του ημικυκλίου του Wigner αλλά και την απόδειξη του να τον προσομοιώσουμε με τη βοήθεια κάποιου μαθηματικού πακέτου. Στα πλαίσια αυτής της εργασίας θα χρησιμοποιήσουμε το στατιστικό πακέτο της R που είναι μάλλον το πιο εύκολο σε χρήση για κάποιο νέο χρήστη. Θα προσομοιώσουμε λοιπόν το νόμο του ημικυκλίου δοκιμάζοντας τρεις διαφορετικές κατανομές όπου θα ακολουθούν τα στοιχεία του πίνακα Wigner που θα κατασκευάσουμε και χρησιμοποιώντας τέσσερα διαφορετικά n ώστε να δούμε αν πράγματι καθώς $n \rightarrow \infty$ η κατανομή των ιδιοτιμών θα προσομοιώνει καλύτερα ημικύκλιο.

3.3.1 Κανονική κατανομή

Η πιο κλασική περίπτωση είναι μάλλον αυτή που τα στοιχεία του τυχαίου μας πίνακα ακολουθούν τυποποιημένη κανονική κατανομή $N(0,1)$. Όμως επειδή μία από τις απαιτήσεις των πινάκων Wigner που εξετάζουμε είναι να είναι και συμμετρικοί θα κατασκευάσουμε τον πίνακα όπως περίπου περιγράφεται η Gaussian Orthogonal Ensemble στο κεφάλαιο 5.1. Επομένως ο κώδικας μας είναι ο ακόλουθος:

```
# Συνάρτηση προσομοίωσης του νόμου του ημικυκλίου
# με στοιχεία προερχόμενα από την κανονική κατανομή N(0,1)
semicircle1=function(n)
{
  # Κατασκευή πίνακα nxn
  M=matrix(rnorm(n*n),n,n)

  # Δημιουργία συμμετρίας και διαίρεση με ρίζα 2 για λόγους διασποράς
  W=(0.5*sqrt(2)*(M+t(M)))
  E=eigen(W)$values

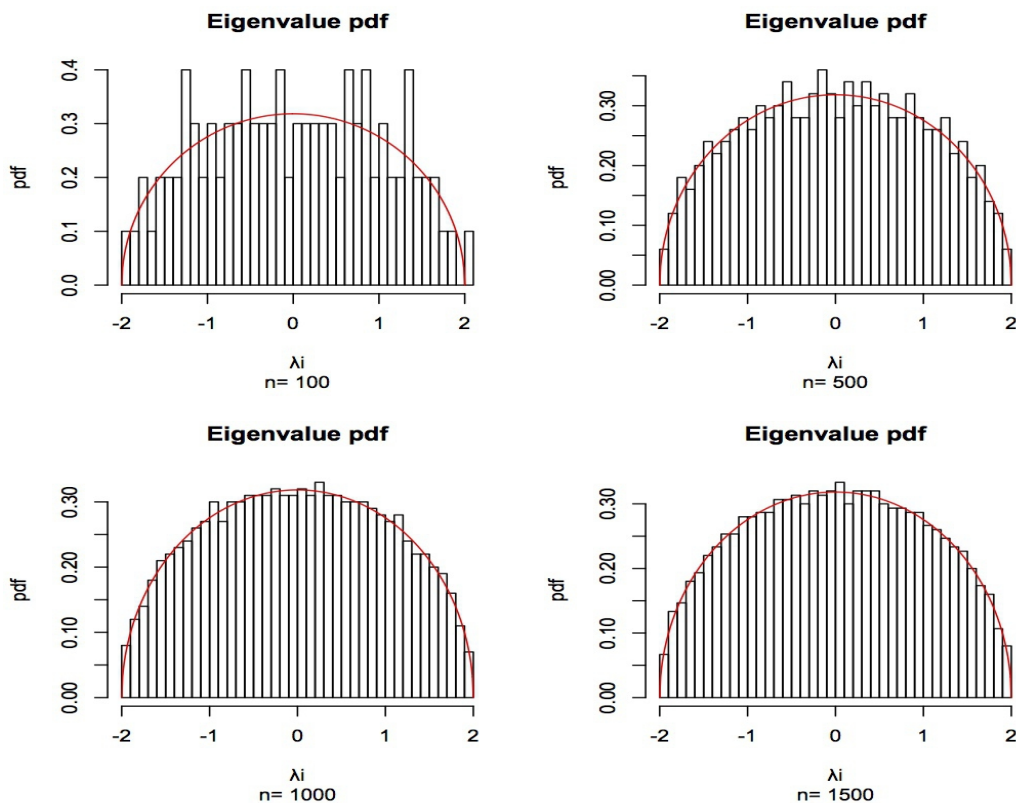
  # Κατασκευή του ιστογράμματος των ιδιοτιμών
  hist(E/sqrt(n),50,probability=T,main="Eigenvalue pdf",
  sub=paste("n=",n),xlab="λi", ylab="pdf")

  # Σχεδιασμός της θεωρητικής κατανομής (ημικύκλιο)
  u=seq(-2,2,by=0.01)
  v=sqrt(4-u^2)/(2*pi)
  lines(u,v,col=2)
}
```

3.3 Προσομοίωση του νόμου του ημικυκλίου με τη βοήθεια της R

Επομένως ζητώντας από την R να μας κατασκευάσει τέσσερα γραφήματα για διαφορετικές τιμές του: $n=100,500,1000,1500$ θα πάρουμε:

```
par(mfrow=c(2,2))
semicircle1(100)
semicircle1(500)
semicircle1(1000)
semicircle1(1500)
```



Όπως βλέπουμε όσο αυξάνουμε το n τόσο καλύτερα το ιστόγραμμα της κατανομής των ιδιοτιμών προσεγγίζει το ημικύκλιο $\frac{1}{2\pi} \sqrt{4-x^2} \mathbf{1}_{\{|x|\leq 2\}}$. Άρα έχουμε μία αρκετά ικανοποιητική προσομοίωση του νόμου του ημικυκλίου. Να σημειώσουμε βέβαια ότι στις 100 τιμές που είναι η πρώτη γραφική παράσταση έχουμε χωρίσει τις τιμές σε 50 κλάσεις που είναι υπερβολικό αλλά έτσι φαίνεται καλύτερα η σύγκλιση της εμπειρικής κατανομής στην τελική κατανομή όσο το n αυξάνεται.

3.3 Προσομοίωση του νόμου του ημικυκλίου με τη βοήθεια της R

3.3.2 Ομοιόμορφη κατανομή

Στη συνέχεια θα δοκιμάσουμε να προσομοιώσουμε τον νόμο του ημικυκλίου ξεκινώντας από έναν πίνακα που οι τιμές του θα ακολουθούν Ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[-1,1]$. Επειδή όμως η ομοιόμορφη κατανομή δεν έχει διασπορά 0 αλλά $\frac{(b-a)^2}{12} = \frac{1}{3}$ θα χρειαστεί να τυποποιήσουμε την κατανομή πριν της προσθέσουμε τη συμμετρική της. Θα έχουμε λοιπόν τον παρόμοιο κώδικα με πριν στην R ο οποίος θα είναι:

```
# Συνάρτηση προσομοίωσης του νόμου του ημικυκλίου
# με στοιχεία προερχόμενα από την ομοιόμορφη κατανομή U(-1,1)
semicircle2=function(n)
{
  # Κατασκευή πίνακα nxn
  M=matrix(runif(n*n,-1,1),n,n)
  # Τυποποίηση διαιρώντας με διασπορά
  M=M/sd(M)

  # Δημιουργία συμμετρίας και διαίρεση με ρίζα 2 για λόγους διασποράς
  W=(0.5*sqrt(2)*(M+t(M)))
  E=eigen(W)$values

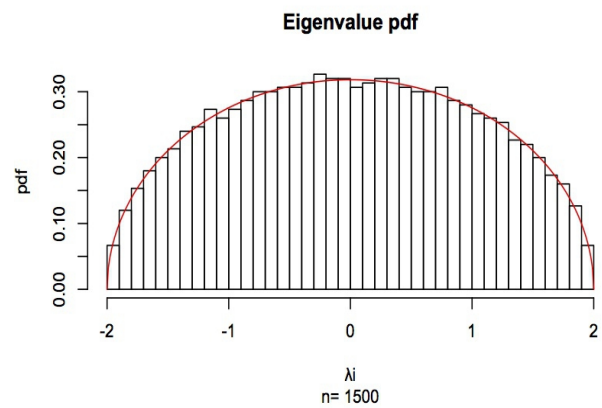
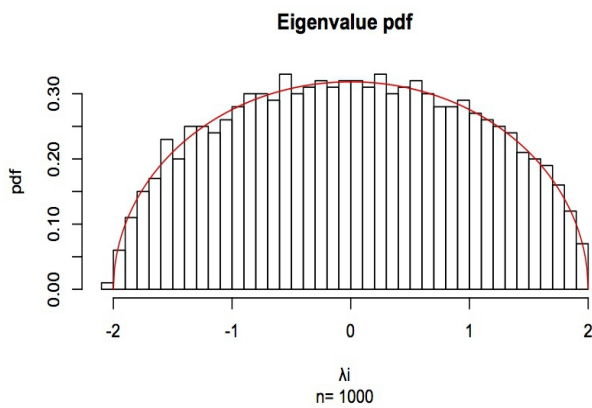
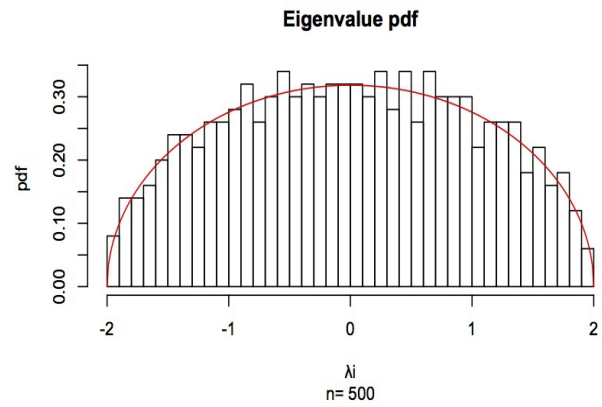
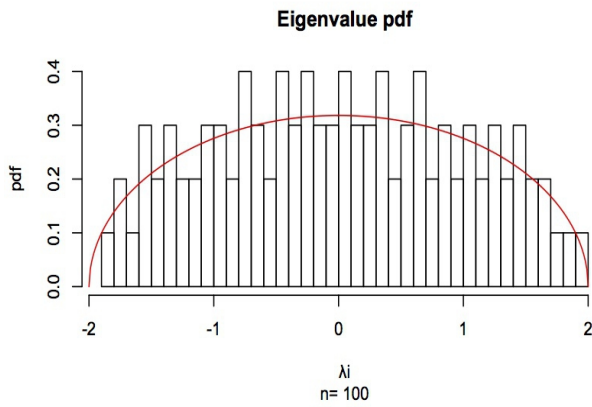
  # Κατασκευή του ιστογράμματος των ιδιοτιμών
  hist(E/sqrt(n),50,probability=T,main="Eigenvalue pdf",
  sub=paste("n=",n),xlab="λi", ylab="pdf")

  # Σχεδιασμός της θεωρητικής κατανομής (ημικύκλιο)
  u=seq(-2,2,by=0.01)
  v=sqrt(4-u^2)/(2*pi)
  lines(u,v,col=2)
}
```

Επομένως ζητώντας από την R να μας κατασκευάσει τέσσερα γραφήματα για διαφορετικές τιμές του: $n=100,500,1000,1500$ όπως και προηγουμένως θα έχουμε τα εξής αποτελέσματα:

```
par(mfrow=c(2,2))
semicircle2(100)
semicircle2(500)
semicircle2(1000)
semicircle2(1500)
```

3.3 Προσομοίωση του νόμου του ημικυκλίου με τη βοήθεια της R



Όπως και προηγουμένως λοιπόν ο πίνακας που αποτελείται από συμμετρικά στοιχεία αθροίσματος δύο ομοιόμορφων κατανομών για μεγάλα n φαίνεται ότι συγκλίνει στο ημικύκλιο του θεωρήματος. Μέχρι στιγμής όμως έχουμε προσομοιώσει το νόμο για τυχαίους πίνακες με στοιχεία από συνεχείς τ.μ. Σειρά λοιπόν έχει πίνακες με στοιχεία από μία διακριτή τυχαία κατανομή.

3.3 Προσομοίωση του νόμου του ημικυκλίου με τη βοήθεια της R

3.3.3 Δίτιμη κατανομή(από Bernoulli)

Σειρά τώρα έχουν πίνακες με στοιχεία από μια διακριτή κατανομή. Αντί να χρησιμοποιήσουμε στοιχεία της τυχαίας κατανομής Bernoulli και να τα τυποποιήσουμε κατάλληλα, θα κατασκευάσουμε λοιπόν ένα τυχαίο συμμετρικό πίνακα που τα στοιχεία του θα παίρνουν τις τιμές ± 1 με πιθανότητα $\frac{1}{2}$ ώστε η μέση τιμή των στοιχείων του να είναι 0 και η διασπορά 1. Για να κατασκευάσουμε τον πίνακα αυτό θα ξεκινήσουμε όμως από έναν άλλο που θα έχει στοιχεία της κατανομής Bernoulli. Θα προσομοιώσουμε λοιπόν πίνακα ο οποίος έχει για στοιχεία τ.μ που περιγράφουν τον απλό τυχαίο περίπατο σε μία διάσταση. Θα έχουμε λοιπόν τον ακόλουθο κώδικα:

```
# Συνάρτηση προσομοίωσης του νόμου του ημικυκλίου
# με στοιχεία προερχόμενα από την δίτιμη κατανομή
semicircle3=function(n)
{
  # Κατασκευή πίνακα nxn από Bernoulli
  B=matrix(rbinom(n*n,1,1/2),n,n)

  # Κατασκευή συμμετρικού πίνακα με τιμές +-1 με πρόσθεση του άνω τριγωνικού
  # τμήματος και του ανάστροφου του από τον πίνακα C
  C=2*B-1
  D=C
  D[lower.tri(C)]=0
  E=C
  E[lower.tri(C,TRUE)]=0
  W=D+t(E)

  # Υπολογισμός ιδιοτιμών
  E=eigen(W)$values

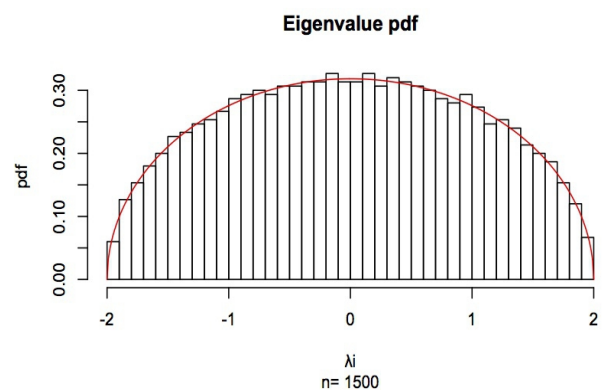
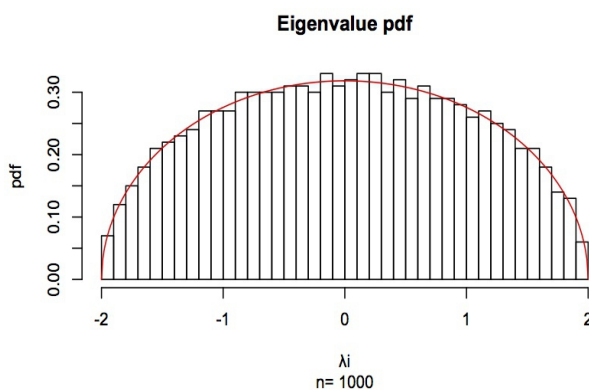
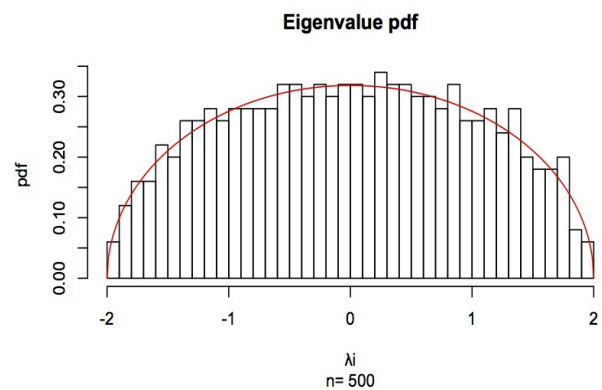
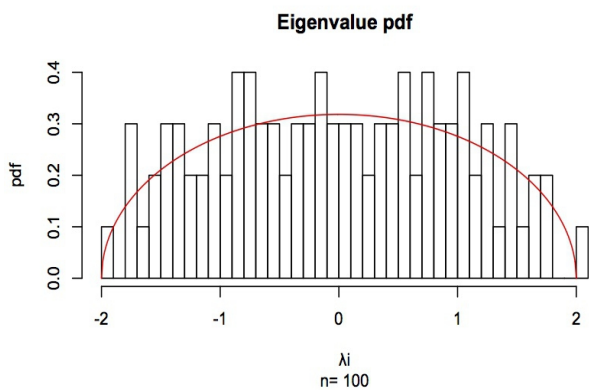
  # Κατασκευή του ιστογράμματος των ιδιοτιμών
  hist(E/sqrt(n),50,probability=T,main="Eigenvalue pdf",
  sub=paste("n=",n),xlab="λi", ylab="pdf")

  # Σχεδιασμός της θεωρητικής κατανομής (ημικόκλιο)
  u=seq(-2,2,by=0.01)
  v=sqrt(4-u^2)/(2*pi)
  lines(u,v,col=2)
}
```

3.3 Προσομοίωση του νόμου του ημικυκλίου με τη βοήθεια της R

Ζητώντας από την R τα γνωστά μας γραφήματα για $n=100,500,1000,1500$ όπως και προηγουμένως θα έχουμε τα εξής αποτελέσματα:

```
par(mfrow=c(2,2))  
semicircle3(100)  
semicircle3(500)  
semicircle3(1000)  
semicircle3(1500)
```



Βλέπουμε λοιπόν πως ο νόμος του ημικυκλίου επαληθεύεται και για πίνακες με στοιχεία τ.μ διακριτών κατανομών. Πάλι με την αύξηση του n έχουμε καλύτερη προσέγγιση της ημικυκλιακής κατανομής.

4 Ο Νόμος Marchenko-Pastur (Marchenko-Pastur Law)

Περίληψη: Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε ένα άλλο πολύ σημαντικό θεώρημα της θεωρίας των τυχαίων πινάκων. Ο νόμος Marchenko-Pastur αφορά μη τετραγωνικούς πίνακες $p \times n$ εκ των οποίων μελετάμε τη συμπεριφορά των ιδιοτιμών του γινομένου τους με τον ανάστροφο τους. Πάλι όπως για το νόμο του ημικυκλίου θα υπάρξουν οι ανάλογες προσομοιώσεις με χρήση της R .

4.1 Διατύπωση του νόμου Marchenko-Pastur και βασικές παρατηρήσεις

Μέχρι στιγμής ασχοληθήκαμε με το νόμο του ημικυκλίου που αφορά συμμετρικούς τετραγωνικούς τυχαίους πίνακες. Τώρα θα στρέψουμε το ενδιαφέρον μας σε μη τετραγωνικούς πίνακες και στη συμπεριφορά των ιδιοτιμών του γινομένου τους με τον ανάστροφο τους. Έστω λοιπόν τυχαίος πίνακας: $X = (\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_n) \in \mathbb{R}^{p \times n}$ για τον οποίο έχουμε ότι:

- Οι τ.μ X_{ij} με $1 \leq i \leq p$ και $1 \leq j \leq n$ είναι i.i.d.
- $E[X_{ij}] = 0$ και $E[X_{ij}^2] = 1$
- $p = p(n)$

Ορίζουμε τότε τον πίνακα $S_n = \frac{1}{n} X X^T$ και θεωρούμε ακόμα τις ιδιοτιμές του: $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_p$.

Ακόμη ορίζουμε το μέτρο πιθανότητας της εμπειρικής κατανομής το οποίο θα είναι:

$$\mu_n = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \delta_{\lambda_i}$$

Επομένως είμαστε σε θέση να διατυπώσουμε το νόμο Marchenko-Pastur.

4.1 Διατύπωση του νόμου Marchenko-Pastur και βασικές παρατηρήσεις

Θεώρημα 4.1: (Νόμος Marchenko-Pastur)

Έστω ο πίνακας S_n και το μέτρο πιθανότητας μ_n όπως τα περιγράψαμε προηγουμένως. Έστω ότι ο λόγος $\frac{p}{n} \rightarrow y \in (0,1]$. Τότε θα έχουμε ότι το $\mu_n(\cdot, \omega) \Rightarrow \mu$ (σ.β.) όπου το μέτρο μ είναι ντετερμινιστικό και η πυκνότητα του δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{1}{2\pi xy} \sqrt{(b-x)(x-a)} \mathbf{1}_{a \leq x \leq b} \quad (4.1)$$

όπου τα a και b είναι συναρτήσεις του y και δίνονται από τις σχέσεις:

$$a(y) = (1 - \sqrt{y})^2, \quad b(y) = (1 + \sqrt{y})^2$$

Παρατήρηση 4.2:

Αν το $y > 1$ τότε αφού ο βαθμός του πίνακα S είναι $\text{rank}(S) = \min\{p, n\}$ τότε θα έχουμε περίπου $n(y-1)$ μηδενικές ιδιοτιμές από γνωστό αλγεβρικό θεώρημα. Αφού λοιπόν το

$$\mu_n = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \delta_{\lambda_i} \quad \text{βλέπουμε ότι θα υπάρχει μία μάζα } (1 - y^{-1}) \text{ στο } 0 \text{ όταν πάρουμε το όριο του}$$

μέτρου. Επειδή οι μη μηδενικές ιδιοτιμές των XX^T και $X^T X$ είναι οι ίδιες μπορούμε να πούμε ότι σε αυτήν την περίπτωση η οριακή κατανομή θα είναι η:

$$(1 - y^{-1})\delta_0 + \mu$$

όπου το μέτρο μ ικανοποιεί τη συνάρτηση (4.1).

Παρατήρηση 4.3:

Μπορεί κανείς να παρατηρήσει ότι για $y=1$ έχουμε: $a=0$ και $b=4$ με αποτέλεσμα το μέτρο μ να γίνεται:

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{1}{2\pi x} \sqrt{(4-x)x} \mathbf{1}_{0 \leq x \leq 4}$$

Σε αυτήν την περίπτωση το μ παίρνει την εικόνα ημικυκλίου κάτω από μετασχηματισμό $x \rightarrow x^2$.

4.2 Απόδειξη του Νόμου Marchenko-Pastur

Θα προχωρήσουμε λοιπόν τώρα στην απόδειξη του νόμου Marchenko-Pastur. Καταρχάς θα επιβεβαιώσουμε τη συνθήκη του Carleman, κάτι που σημαίνει ότι το μέτρο μ χαρακτηρίζεται πλήρως από τις ροπές του. Επομένως όπως ακριβώς και στην απόδειξη του νόμου του ημικυκλίου είναι αρκετό να δείξουμε ότι:

$$\int x^k d\mu_n \rightarrow \int x^k d\mu$$

4.2 Απόδειξη του Νόμου Marchenko-Pastur

Πάλι ακολουθώντας την απόδειξη του προηγούμενου κεφαλαίου το λήμμα Borel Cantelli μας λέει ότι είναι αρκετό να δείξουμε τους ακόλουθους δύο ισχυρισμούς, που είναι ίδιοι με την απόδειξη του νόμου του ημικυκλίου.

$$\text{A. } E\left[\int x^k d\mu_n\right] \rightarrow \int x^k d\mu \quad (4.2)$$

$$\text{B. } \text{Var}\left[\int x^k d\mu_n\right] \leq \frac{C_k}{n^2} \quad (4.3)$$

Ξεκινάμε λοιπόν να υπολογίσουμε τις ροπές του μέτρου μ για να επιβεβαιώσουμε κιόλας τη συνθήκη του Carleman.

$$\begin{aligned} \int x^k d\mu &= \frac{1}{2\pi y} \int_a^b x^{k-1} \sqrt{(b-x)(x-a)} dx \\ &= \frac{1}{2\pi y} \int_{-2\sqrt{y}}^{2\sqrt{y}} (1+y+z)^{k-1} \sqrt{4y-z^2} dz \quad (x=1+y+z) \\ &= \frac{1}{2\pi y} \sum_{l=0}^{k-1} \binom{k-1}{l} (1+y)^{k-1-l} \int_{-2\sqrt{y}}^{2\sqrt{y}} z^l \sqrt{4y-z^2} dz \\ &= \frac{1}{2\pi y} \sum_{l=0}^{\lfloor (k-1)/2 \rfloor} \binom{k-1}{2l} (1+y)^{k-1-2l} (4y)^{l+1} \int_{-1}^1 u^{2l} \sqrt{1-u^2} du \quad (z=2\sqrt{yu}) \\ &= \frac{1}{2\pi y} \sum_{l=0}^{\lfloor (k-1)/2 \rfloor} \binom{k-1}{2l} (1+y)^{k-1-2l} (4y)^{l+1} \int_0^1 w^{l-1/2} \sqrt{1-w} dw \quad (u=\sqrt{w}) \\ &= \sum_{l=0}^{\lfloor (k-1)/2 \rfloor} \frac{(k-1)!}{l!(l+1)!(k-1-2l)!} y^l (1+y)^{k-1-2l} \\ &= \sum_{l=0}^{\lfloor (k-1)/2 \rfloor} \sum_{s=0}^{k-1-2l} \frac{(k-1)!}{l!(l+1)!s!(k-1-2l-s)!} y^{l+s} \\ &= \sum_{l=0}^{\lfloor (k-1)/2 \rfloor} \sum_{r=l}^{k-1-l} \frac{(k-1)!}{l!(l+1)!(r-l)!(k-1-r-l)!} y^r \\ &= \frac{1}{k} \sum_{r=0}^{k-1} \binom{k}{r} y^r \sum_{l=0}^{\min(r, k-1-r)} \binom{s}{l} \binom{k-r}{k-r-l-1} \\ &= \frac{1}{k} \sum_{r=0}^{k-1} \binom{k}{r} \binom{k}{r+1} y^r \\ &= \sum_{r=0}^{k-1} \frac{1}{r+1} \binom{k}{r} \binom{k-1}{r} y^r = \beta_k \end{aligned}$$

4.2 Απόδειξη του Νόμου Marchenko-Pastur

Είναι εύκολο να δούμε ότι ισχύει: $\beta_{2k} \leq b^{2k} = (1 + \sqrt{y})^{4k}$ κάτι το οποίο μας οδηγεί στο συμπέρασμα στέλνοντας το k στο άπειρο ότι επαληθεύει τη συνθήκη του Carleman. Επομένως το μέτρο μ χαρακτηρίζεται πράγματι από τις ροπές του όπως αναφέραμε και προηγουμένως.

Ο υπολογισμός του ολοκληρώματος μας έδωσε ότι:

$$\int x^k d\mu = \sum_{r=0}^{k-1} \frac{y^r}{r+1} \binom{k}{r} \binom{k-1}{r} \quad (4.4)$$

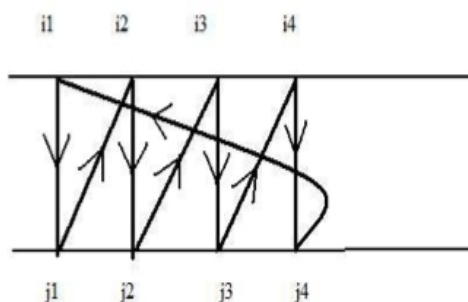
Θα συνεχίσουμε λοιπόν πάλι με την απόδειξη του ισχυρισμού **A**.

Επομένως μπορεί κανείς εύκολα να παρατηρήσει ότι:

$$\begin{aligned} E \left[\int x^k d\mu_n \right] &= \frac{1}{p} E \left[\sum_{i=1}^p \lambda_i^k \right] = \frac{1}{p} E \left[\text{Tr} \left(\frac{X X^T}{n} \right)^k \right] \\ &= \frac{1}{pn^k} E \left[\sum_{I, J} X_{i_1 j_1} X_{i_2 j_1} X_{i_2 j_2} X_{i_3 j_2} \dots X_{i_k j_k} X_{i_k j_k} \right] \\ &= \frac{1}{pn^k} \sum_{I, J} E(I, J) \end{aligned}$$

όπου το $I \in [p]^k$ και το $J \in [n]^k$.

Όλο αυτό αντικατοπτρίζει ένα κλειστό βρόγχο ενός διμερούς γραφήματος. Για παράδειγμα αν πάρουμε για $k=4$ τότε για τα σύνολα $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$ και $\{j_1, j_2, j_3, j_4\}$ θα έχουμε την ακόλουθη εικόνα:



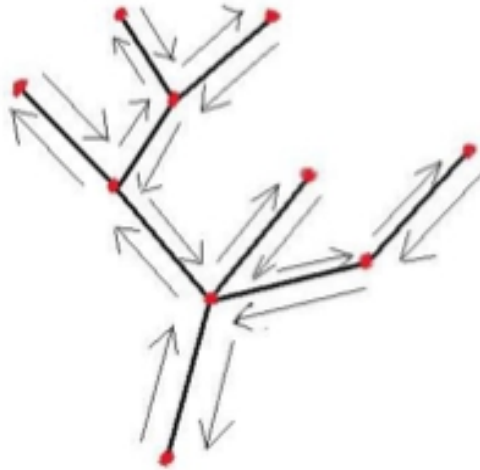
Όπως ακριβώς και στην περίπτωση του ημικυκλίου κάθε πλευρά πρέπει να εμφανίζεται τουλάχιστον δύο φορές αλλιώς θα έχουμε ότι $E[I, J] = 0$. Αφού λοιπόν έχουμε $2k$ βήματα μέσα στον κατευθυνόμενο βρόγχο συνεπάγεται ότι θα έχουμε το πολύ k πλευρές και άρα το πολύ $k+1$ κορυφές στο σκελετό του γραφήματος.

Στη συνέχεια θεωρούμε ότι ο αριθμός των κορυφών είναι $m \leq k$. Έστω ότι $m = a + b$ όπου το a είναι ο αριθμός των I κορυφών και b ο αριθμός των J κορυφών. Τότε ο συνολικός αριθμός των τρόπων με τους οποίους μπορεί κανείς να διαλέξει κανείς a I κορυφές και b J κορυφές θα είναι σίγουρα $\leq C p^a n^b$ όπου C θα είναι μια σταθερή ανεξάρτητη του n . Δηλαδή η συνεισφορά των όρων αυτών στη μέση τιμή θα είναι μηδενική αφού θα είναι $\leq C \frac{p^a n^b}{p n^k} \rightarrow 0$ καθώς $n \rightarrow \infty$. Συνεπώς θα πρέπει να κοιτάξουμε βρόγχους με ακριβώς $k+1$ κορυφές και

4.2 Απόδειξη του Νόμου Marchenko-Pastur

k πλευρές. Αυτοί είναι ακριβώς τα διπλά δέντρα.

Έχουμε δηλαδή το παρακάτω γράφημα διπλού δέντρου:



Ξεκινώντας με μία I κορυφή ισχύει ότι: κορυφές στις οποίες φτάνουμε σε άρτιο αριθμό βημάτων είναι I κορυφές ενώ οι υπόλοιπες είναι J κορυφές.

Στη συνέχεια τίθεται το γνωστό από το νόμο του ημικυκλίου ερώτημα: Πόσα διαφορετικά διπλά δέντρα υπάρχουν από ένα δοσμένο σχήμα; Ως σχήμα ενός διπλού δέντρου εννοούμε οι κορυφές να είναι αριθμημένες κατά σειρά εμφάνισης. Δηλαδή αν πάρουμε τα εξής δύο γραφήματα για παράδειγμα:

(2 3 4 5 4 6 7 6 8 6 4 3 9 3 10 11 10 3 2) και (12 13 14 15 16 17 16 18 16 14 13 19 13 6 7 6 13 12)

αυτά θα έχουν το ίδιο σχήμα αφού αν αλλάξουμε τα νούμερα των κορυφών τους παίρνουμε το εξής διπλό δέντρο:

(1 2 3 4 3 5 6 5 7 5 3 2 8 2 9 10 9 2 1)

το οποίο έχει στην πραγματικότητα το σχήμα που έχουμε παραπάνω αν κανείς ξεκινήσει με την κάτω κορυφή και διασχίσει από αριστερά προς τα δεξιά το βρόγχο κατά την κατεύθυνση των βελών.

Δηλαδή θα πρέπει να επιλέξουμε $r+1$ I κορυφές από το $[p]$ καθώς και $k-r$ J κορυφές από το $[n]$. Κάτι τέτοιο μπορεί να γίνει με $P(p, r+1)P(n, k-r)$ τρόπους όπου

$P(n, k) = n(n-1) \dots (n-k+1)$ είναι οι μεταθέσεις k αντικειμένων από n διακριτά αντικείμενα.

Μπορεί κανείς μάλιστα να παρατηρήσει κάνοντας τις πράξεις ότι:

$$P(p, r+1)P(n, k-r) = pn^k y_n^r (1 + O(n^{-1}))$$

όπου το $y_n = p/n$

Αντικαθιστώντας λοιπόν στην αναμενόμενη τιμή θα πάρουμε:

$$E \left[\int x^k d\mu_n \right] = \frac{1}{pn^k} \sum_{I, J} E(I, J) = \sum_{r=0}^{k-1} y_n^r (1 + O(n^{-1})) \times G$$

4.2 Απόδειξη του Νόμου Marchenko-Pastur

όπου G είναι ο αριθμός των διαφορετικών σχημάτων διπλών δέντρων με $r+1$ I κορυφές και $k-r$ J κορυφές.

Αφού λοιπόν $y_n \rightarrow y$, καθώς $n \rightarrow \infty$ είναι πλέον καθαρό ότι το y είναι το μόνο που χρειάζεται να

δείξουμε για να ολοκληρωθεί ο ισχυρισμός **A** είναι ότι $G = \frac{1}{r+1} \binom{k}{r} \binom{k-1}{r}$.

Προχωρώντας λοιπόν στην απόδειξη αυτού θα προσπαθήσουμε να αντιστοιχίσουμε κάθε σχήμα διπλού δέντρου με μία ακολουθία/διαδρομή s_i που αποτελείται από $2k$ βήματα και έχει τις εξής ιδιότητες:

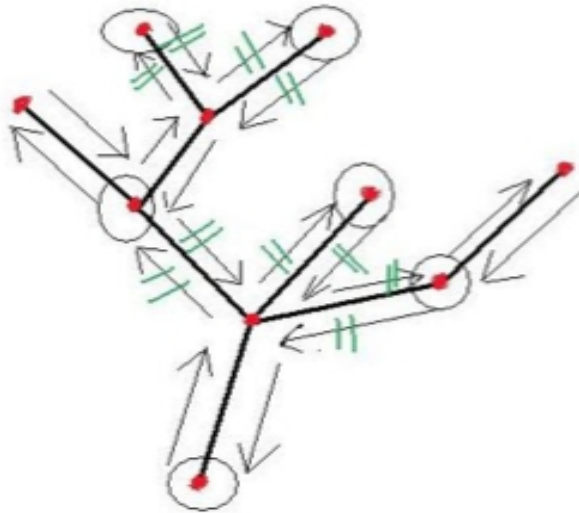
1. Αν ο i είναι περιττός τότε $s_i \in \{-1, 0\}$
2. Αν ο i είναι άρτιος τότε $s_i \in \{0, 1\}$, $s_{2k} = 0$
3. Για οποιοδήποτε $l = 1, 2, \dots, 2k$ έχουμε ότι $\sum_{i=1}^l s_i \geq 0$. Η διαδρομή δηλαδή δε πέφτει ποτέ κάτω από το 0.
4. Ισχύει ότι $\#\{i : s_i = 1\} = \#\{i : s_i = -1\} = r$. Δηλαδή υπάρχουν ακριβώς r βήματα προς τα πάνω και r βήματα προς τα κάτω.
5. Το άθροισμα $\sum_{i=1}^{2k} s_i = 0$. Αυτό σημαίνει ότι θα γυρίσουμε τελικά στην αρχή που είναι το 0.

Επομένως δοσμένης μια τέτοιας ακολουθίας $\{s_i\}_{i=1}^{2k}$ μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα διπλό δέντρο με τον εξής τρόπο:

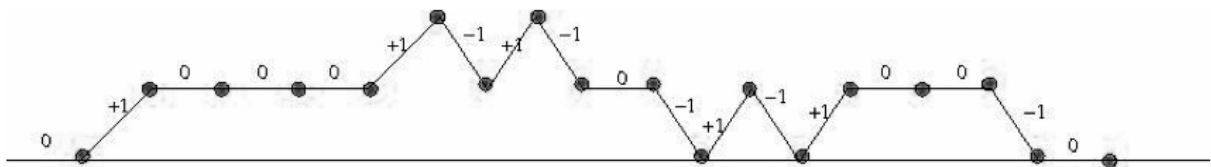
- Έστω ότι το i είναι περιττός. Τότε αν $s_i = -1$ τότε επιστρέφουμε στην προηγούμενη κορυφή του διπλού δέντρου, ενώ αν $s_i = 0$ τότε πηγαίνουμε στην επόμενη από μια I κορυφή αλλά στη συνέχεια θα επιστρέψουμε.
- Έστω ότι το i είναι άρτιος. Τότε αν $s_i = 1$ τότε πηγαίνουμε στην επόμενη κορυφή του διπλού δέντρου, ενώ αν $s_i = 0$ τότε επιστρέφουμε πάλι στην προηγούμενη.

Αντίστοιχα αν κάποιος μας δώσει ένα σχήμα διπλού δέντρου μπορούμε να κατασκευάσουμε μια τέτοια ακολουθία $\{s_i\}_{i=1}^{2k}$. Θα χρησιμοποιήσουμε το παράδειγμα του παραπάνω σχήματος. Καταρχάς για κάθε I κορυφή σημειώνουμε την πρώτη πλευρά που οδηγεί σε αυτήν καθώς και την τελευταία πλευρά που την αφήνει. Κυκλώνοντας λοιπόν και τις I κορυφές θα έχουμε το εξής σχήμα:

4.2 Απόδειξη του Νόμου Marchenko-Pastur



Τώρα βάζουμε την τιμή $s_i=1$ αν η i -οστή πλευρά είναι σημειωμένη και πηγαίνει προς τα πάνω, $s_i=-1$ αν η i -οστή πλευρά είναι σημειωμένη και πηγαίνει προς τα κάτω και $s_i=0$ αλλιώς. Το διπλό δέντρο του παραδείγματός μας λοιπόν θα μας δώσει την παρακάτω διαδρομή:



Πρέπει ακόμα να βεβαιωθούμε ότι η κατανομή των $-1,0,1$ στην ακολουθία είναι τέτοια ώστε η $\{s_i\}_{i=1}^{2k}$ να ικανοποιεί την ιδιότητα 3. Ας θεωρήσουμε λοιπόν ότι υπάρχει κάποια πρώτη τιμή l τέτοια ώστε να έχουμε:

$$\sum_{i=1}^{2l-1} s_i = -1, \text{ επομένως } \sum_{i=1}^{2l} s_i = 0 \text{ και άρα } s_{2l-1} = -1$$

Τότε σύμφωνα όμως με αυτό που είπαμε αρχικά μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα διπλό δέντρο με κορυφές $\{1,2,\dots,2l\}$ και αφού $s_{2l-1} = -1$, τότε σύμφωνα με το δεύτερο σημείο (bullet) το οποίο επεξηγεί την κατασκευή του διπλού δέντρου θα πρέπει να μετακινηθούμε πίσω σε μια παλιά κορυφή στο $\{1,2,\dots,2l\}$. Κάτι τέτοιο όμως θα κατέστρεφε τη δομή του διπλού δέντρου και άρα καταλήγουμε σε άτοπο. Επομένως κατανέμοντας τις τιμές $-1,0,1$ σύμφωνα με τον παραπάνω κανόνα μας εξασφαλίζει την ιδιότητα 3.

Επομένως το σύνολο των σχημάτων των διπλών δέντρων βρίσκεται σε 1-1 και επί αντιστοιχία με το σύνολο των ακολουθιών $\{s_i\}_{i=1}^{2k}$. Αρκεί δηλαδή να μπορέσουμε να μετρήσουμε τον αριθμό αυτών των ακολουθιών. Καθώς λοιπόν $s_{2k} \neq 1$ αγνοώντας προς το παρόν την ιδιότητα 3 μπορούμε να δούμε ότι από τις $k-1$ θέσεις που απομένουν για το 1 και k θέσεις για το -1 πρέπει να διαλέξουμε r για το καθένα.

4.2 Απόδειξη του Νόμου Marchenko-Pastur

Άρα ο συνολικός αριθμός αριθμών τέτοιων ακολουθιών θα είναι: $\binom{k-1}{r} \binom{k}{r}$

Τώρα θέλουμε να υπολογίσουμε τον αριθμό των ακολουθιών για τις οποίες δεν ισχύει η ιδιότητα 3. Αφού αυτές οι διαδρομές χτυπούν κάποια στιγμή την τιμή -1 (στο άθροισμα) τότε θα υπάρχει ένα

πρώτο l τέτοιο ώστε $\sum_{i=1}^{2l-1} s_i = -1$ (Ο τρόπος κατασκευής της ακολουθίας s_k αφήνει μόνο περιττούς της όρους να πάρουν την τιμή -1). Κατασκευάζουμε λοιπόν τώρα μια νέα ακολουθία $\{s'_i\}_{i=1}^{2k}$ κατά συμμετρία. Δηλαδή θεωρούμε τα εξής:

- Για $i=1, \dots, 2l-1$ θα είναι: $s'_i = s_i$ και $s'_{2k} = s_{2k}$
- Για $l \leq i \leq k-1$ θα είναι: $(s'_{2i}, s'_{2i+1}) = \begin{cases} (1, -1) & \text{αν } (s_{2i}, s_{2i+1}) = (1, -1) \\ (0, 0) & \text{αν } (s_{2i}, s_{2i+1}) = (0, 0) \\ (1, 0) & \text{αν } (s_{2i}, s_{2i+1}) = (0, -1) \\ (0, -1) & \text{αν } (s_{2i}, s_{2i+1}) = (1, 0) \end{cases}$

Παίρνουμε δηλαδή ίδιους όρους μέχρι $2l-1$ και μετά τα ανάστροφα ζευγάρια με αντίθετα πρόσημα όπως φαίνεται και από τον παραπάνω κανόνα.

Προφανώς το σύνολο των ακολουθιών $\{s_i\}_{i=1}^{2k}$ το οποίο δεν ικανοποιεί την ιδιότητα 3 είναι 1-1 και επί αντίστοιχο με το σύνολο των ακολουθιών $\{s'_i\}_{i=1}^{2k}$. Για να κατορθώσουμε λοιπόν να μετρήσουμε τις ακολουθίες αυτές θα πρέπει να μετρήσουμε τους τρόπους με τους οποίους μπορούμε να επιλέξουμε $r-1$ '+1' από $k-1$ στοιχεία και $r+1$ '-1' από k στοιχεία. Αυτό προφανώς μπορεί να γίνει με $\binom{k-1}{r-1} \binom{k}{r+1}$ τρόπους. Άρα οι συνολικές ακολουθίες που θα ικανοποιούν και όλες τις ιδιότητες θα είναι:

$$\binom{k-1}{r} \binom{k}{r} - \binom{k-1}{r-1} \binom{k}{r+1} = \frac{1}{r+1} \binom{k-1}{r} \binom{k}{r}$$

Δηλαδή πράγματι $G = \frac{1}{r+1} \binom{k}{r} \binom{k-1}{r}$. Επομένως μόλις αποδείξαμε τον ισχυρισμό **A**.

Με τρόπο εντελώς παρόμοιο και με αντίστοιχα επιχειρήματα με το νόμο του ημικυκλίου αποδεικνύεται και ο ισχυρισμός **B** που αφορά τις διασπορές και άρα η απόδειξη είναι πλήρης. ■

4.3 Προσομοίωση του νόμου Marchenko-Pastur με τη βοήθεια της R

4.3 Προσομοίωση του νόμου Marchenko-Pastur με τη βοήθεια της R

Όπως ακριβώς και στο προηγούμενο κεφάλαιο που αφορούσε το νόμο του ημικυκλίου του Wigner έτσι και εδώ θα κάνουμε κάποιες προσομοιώσεις με τη βοήθεια της R για να δούμε το νόμο Marchenko-Pastur. Θα χρησιμοποιήσουμε μη τετραγωνικούς $p \times n$ πίνακες με στοιχεία από την κανονική, την ομοιόμορφη αλλά και την Bernoulli κατανομή. Στη συνέχεια με τη βοήθεια κατάλληλων γραφημάτων θα προσπαθήσουμε να επιβεβαιώσουμε ότι για $n \rightarrow \infty$ η κατανομή των ιδιοτιμών του $S_n = \frac{1}{n} X X^T$ θα τείνει στην Marchenko-Pastur.

4.3.1 Κανονική κατανομή

Ο κώδικας που χρησιμοποιήθηκε για την προσομοίωση του νόμου Marchenko-Pastur με στοιχεία της κανονικής κατανομής είναι ο ακόλουθος:

```
# Συνάρτηση προσομοίωσης του νόμου Marchenko-Pastur από
# πίνακα διαστάσεων p x n με στοιχεία προερχόμενα από την κανονική
# κατανομή N(0,1)
mp1=function(p,n)
{
  # Κατασκευή πίνακα p x n
  X=matrix(rnorm(p*n),p,n)
  y=p/n
  # Δημιουργία του S_n πίνακα
  S=(X %*% t(X))*(1/n)
  E=eigen(S)$values

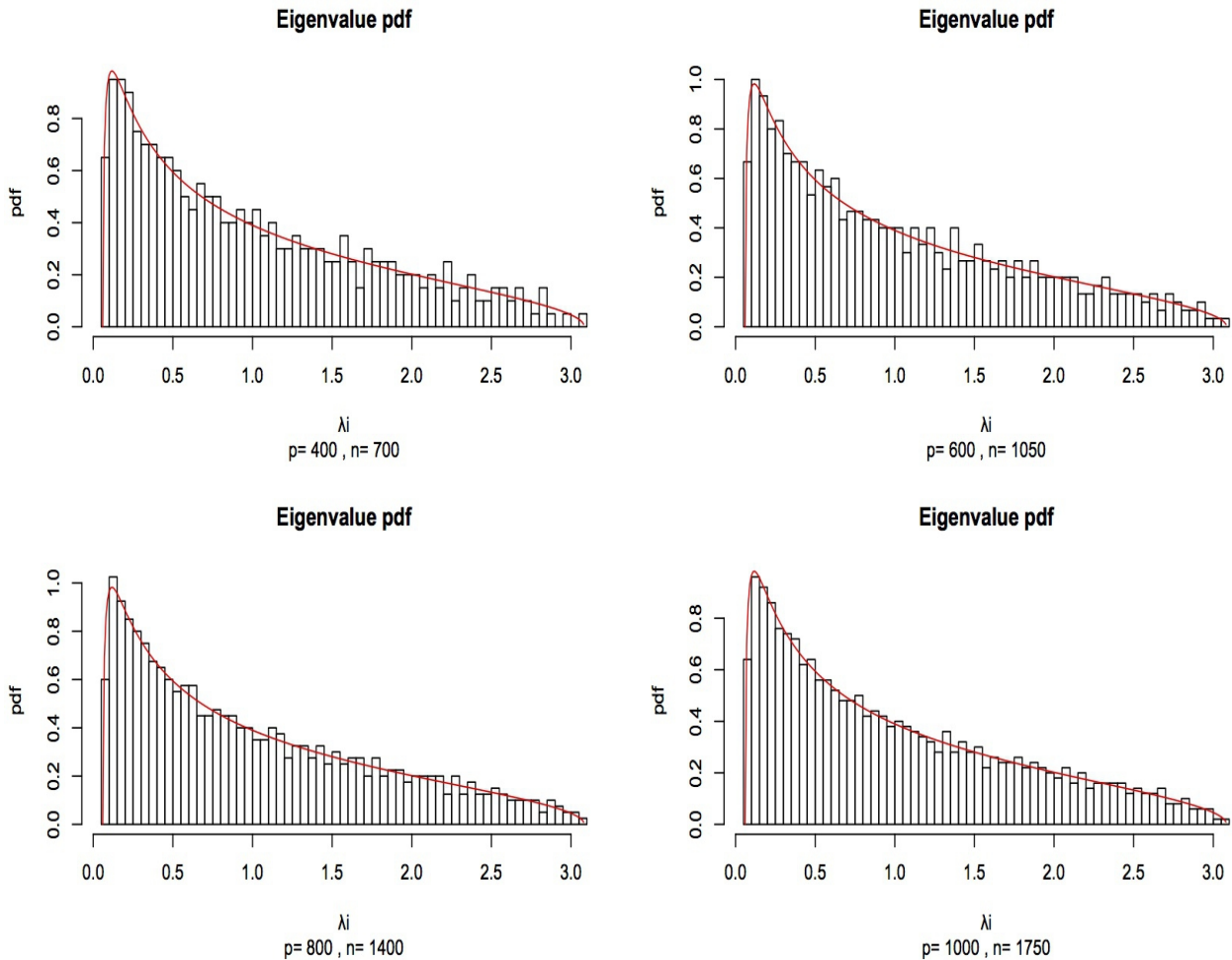
  # Κατασκευή του ιστογράμματος των ιδιοτιμών
  hist(E,50,probability=T,main="Eigenvalue pdf",
       sub=paste("p=",p,", n=",n),xlab="λi", ylab="pdf")

  # Σχεδιασμός της θεωρητικής κατανομής Marchenko-Pastur
  a=(1-sqrt(y))^2
  b=(1+sqrt(y))^2
  u=seq(a,b,by=0.01)
  v=sqrt((b-u)*(u-a))/(2*pi*u*y)
  lines(u,v,col=2)
}
```

Επομένως ζητώντας από την R να μας κατασκευάσει τέσσερα γραφήματα για τέσσερα διαφορετικά ζευγάρια τιμών (p, n) κρατώντας όμως σταθερό το λόγο τους σε $y=4/7$, θα έχουμε τα εξής ζεύγη: $(p, n)=(400,700), (600,1050), (800,1400), (1000,1750)$. Επομένως παίρνουμε:

4.3 Προσομοίωση του νόμου **Marchenko-Pastur** με τη βοήθεια της **R**

```
par(mfrow=c(2,2))  
mp1(400,700)  
mp1(600,1050)  
mp1(800,1400)  
mp1(1000,1750)
```



Είναι λοιπόν εμφανές ότι όσο μεγαλώνουν τα $(p(n), n)$ έτσι ώστε να έχουμε $n \rightarrow \infty$ τόσο καλύτερη είναι η προσρμογή του ιστογράμματος των ιδιοτιμών στην κατανομή Marchenko-Pastur.

4.3 Προσομοίωση του νόμου **Marchenko-Pastur** με τη βοήθεια της **R**

4.3.2 Ομοιόμορφη κατανομή

Ο κώδικας που θα χρειαστούμε για την προσομοίωση τώρα του νόμου από τυχαίους πίνακες της ομοιόμορφης κατανομής είναι ακριβώς ο ίδιος με τον προηγούμενο. Οι μοναδικές διαφορές θα είναι στον τίτλο της συνάρτησης σε **mp2** και το ότι στην κατασκευή του πίνακα θα πάρουμε στοιχεία της ομοιόμορφης κατανομής με την εντολή **runif** τα οποία όμως θα τυποποιήσουμε διαιρώντας με την τυπική απόκλιση $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Έχουμε λοιπόν:

```
# Συνάρτηση προσομοίωσης του νόμου Marchenko-Pastur από
# πίνακα διαστάσεων p x n με στοιχεία προερχόμενα από την ομοιόμορφη
# κατανομή U(-1,1)
mp2=function(p,n)
{
# Κατασκευή πίνακα p x n και κατάλληλη τυποποίηση
X=matrix(sqrt(3)*runif(p*n,-1,1),p,n)
y=p/n

# Δημιουργία του Sn πίνακα
S=(X %*% t(X))*(1/n)
E=eigen(S)$values

# Κατασκευή του ιστογράμματος των ιδιοτιμών
hist(E,50,probability=T,main="Eigenvalue pdf",
sub=paste("p=",p,", n=",n),xlab="λi", ylab="pdf")

# Σχεδιασμός της θεωρητικής κατανομής Marchenko-Pastur
a=(1-sqrt(y))^2
b=(1+sqrt(y))^2
u=seq(a,b,by=0.01)
v=sqrt((b-u)*(u-a))/(2*pi*u*y)
lines(u,v,col=2)

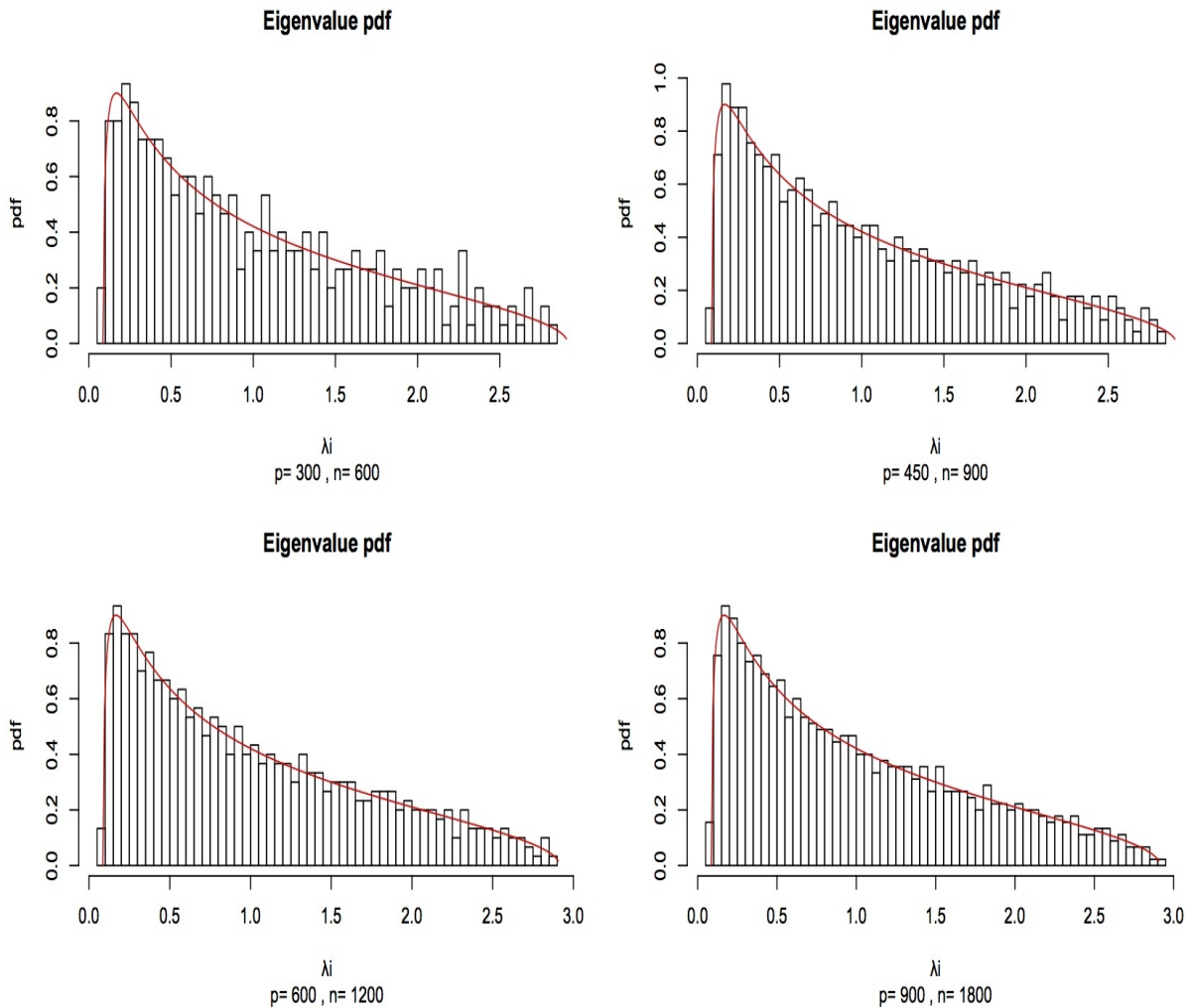
}
```

Ζητώντας λοιπόν αυτή τη φορά διαγράμματα για πίνακες με λόγο διαστάσεων $y=1/2$ θα χρησιμοποιήσουμε τα εξής ζεύγη: $(p, n)=(300,600), (450,900), (600,1200), (900,1800)$

Επομένως θα πάρουμε από την R:

```
par(mfrow=c(2,2))
mp2(300,600)
mp2(450,900)
mp2(600,1200)
mp2(900,1800)
```

4.3 Προσομοίωση του νόμου Marchenko-Pastur με τη βοήθεια της R



Τα παραπάνω γραφήματα και αυτά με τη σειρά τους προσομοιώνουν σε πολύ καλό βαθμό τον νόμο Marchenko-Pastur καθώς πάλι με αύξηση του n έχουμε βελτίωση της προσαρμογής του ιστογράμματος ιδιοτιμών στη θεωρητική ευθεία.

4.3.3 Poisson κατανομή

Μετά λοιπόν από δύο συνεχείς κατανομές τυχαίων μεταβλητών μπορούμε να προσομοιώσουμε το νόμο Marchenko Pastur από έναν τυχαίο πίνακα $p \times n$ που ακολουθεί την διακριτή τ.μ. Poisson με παράμετρο $\lambda=3$. Πάλι πρώτου προχωρήσουμε στην κατασκευή του πίνακα S θα πρέπει να τυποποιήσουμε κατάλληλα τα στοιχεία του αρχικού μας τυχαίου πίνακα έτσι ώστε να έχουμε μέση τιμή 0 και διασπορά 1. Άρα αφού για $X_{ij} \sim Po(3)$ ισχύει ότι $E[X_{ij}]=3$ και $V[X_{ij}]=3$ θα πρέπει να αφαιρέσουμε από το κάθε στοιχείο τη μέση τιμή και να διαιρέσουμε με την τυπική απόκλιση. Κατά τα άλλα ο υπόλοιπος κώδικας είναι όμοιος με αυτόν των δύο προηγούμενων περιπτώσεων και είναι ο ακόλουθος:

4.3 Προσομοίωση του νόμου **Marchenko-Pastur** με τη βοήθεια της **R**

```
# Συνάρτηση προσομοίωσης του νόμου Marchenko-Pastur από
# πίνακα διαστάσεων p x n με στοιχεία προερχόμενα από την Poisson
# κατανομή Po(3)
mp3=function(p,n)
{
# Κατασκευή πίνακα p x n και κατάλληλη τυποποίηση
X=matrix((rpois(p*n,3)-3)/sqrt(3),p,n)
y=p/n

# Δημιουργία του Sn πίνακα
S=(X %*% t(X))*(1/n)
E=eigen(S)$values

# Κατασκευή του ιστογράμματος των ιδιοτιμών
  hist(E,50,probability=T,main="Eigenvalue pdf",
  sub=paste("p=",p,", n=",n),xlab="λi", ylab="pdf")

# Σχεδιασμός της θεωρητικής κατανομής Marchenko-Pastur
  a=(1-sqrt(y))^2
  b=(1+sqrt(y))^2
  u=seq(a,b,by=0.01)
  v=sqrt((b-u)*(u-a))/(2*pi*u*y)
  lines(u,v,col=2)
}
```

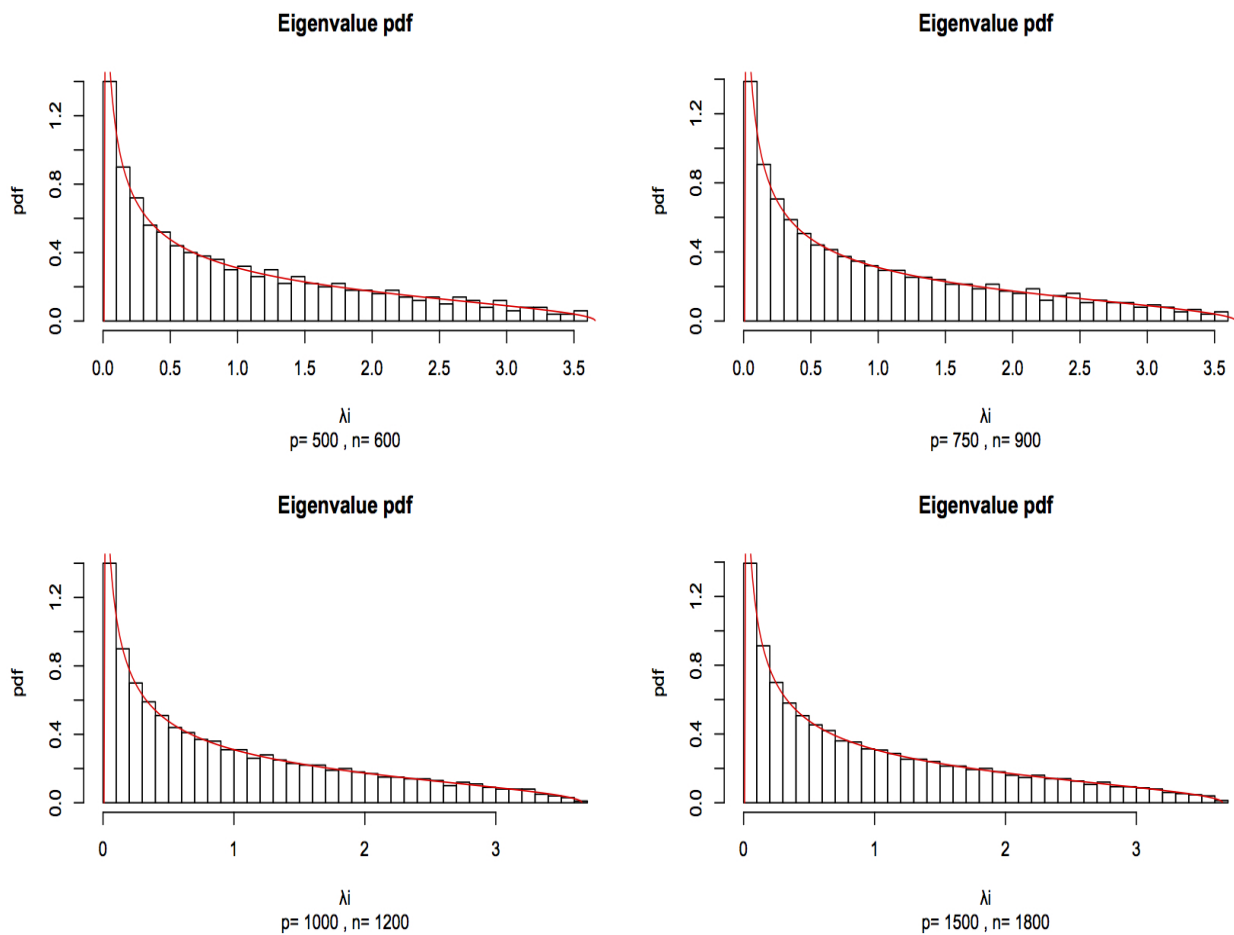
Αυτή τη φορά θα ζητήσουμε διαγράμματα για πίνακες με λόγο διαστάσεων $y=5/6$ και θα χρησιμοποιήσουμε τα ακόλουθα ζεύγη: $(p, n)=(500,600), (750,900), (1000,1200), (1500,1800)$

Επομένως δίνουμε στην R τις ακόλουθες εντολές:

```
par(mfrow=c(2,2))
mp3(500,600)
mp3(750,900)
mp3(1000,1200)
mp3(1500,1800)
```

Βλέπουμε λοιπόν τώρα που έχουμε και αναλογία διαστάσεων πιο κοντά στη μονάδα αλλά και μια διακριτή τ.μ. ότι τα γραφήματα επιβεβαιώνουν την ισχύ του νόμου Marchenko-Pastur αφού καλύπτονται όλες οι απαιτήσεις του.

4.3 Προσομοίωση του νόμου **Marchenko-Pastur** με τη βοήθεια της **R**



Με τη βοήθεια λοιπόν των προσομοιώσεων αυτών στην R επιβεβαιώσαμε αυτόν τον πολύ σημαντικό νόμο που αφορά μη τετραγωνικούς τυχαίους πίνακες. Στη συνέχεια λοιπόν θα προχωρήσουμε σε κάτι που είχαμε αναφέρει στην εισαγωγή μας για τους πίνακες Wigner και τα Gaussian Ensembles που είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της από κοινού κατανομής των ιδιοτιμών ενός τυχαίου πίνακα.

5 Gaussian Ensembles και από κοινού κατανομή ιδιοτιμών

Περίληψη: Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε κάποια συγκεκριμένα μοντέλα τυχαίων πινάκων τα Gaussian Ensembles (γκαουσιανές συλλογές) που αναφέραμε και στο πρώτο κεφάλαιο. Επιπλέον θα υπολογίσουμε αναλυτικά την από κοινού κατανομή των ιδιοτιμών για το μοντέλο της GOE (Gaussian Orthogonal Ensemble).

5.1 Ειδικά Μοντέλα Τυχαίων Πινάκων (Gaussian Ensembles)

Θα μελετήσουμε τώρα ορισμένα ξεχωριστά μοντέλα πινάκων Wigner που είχαμε αναφέρει και στο εισαγωγικό κεφάλαιο ως συλλογές τυχαίων πινάκων, τα Gaussian Ensembles.

Ορισμός 5.1: (Gaussian Orthogonal Ensemble)

Έστω ένα πραγματικός πίνακας Wigner όπου τα στοιχεία του $X_{ij} \sim N(0,1)$ και τα $X_{ii} \sim \sqrt{2}N(0,1)$. Το μοντέλο τυχαίου πίνακα που θα προκύψει ονομάζεται **Gaussian Orthogonal Ensemble (GOE)**.

Μία άλλη κατασκευή αυτού του μοντέλου προκύπτει ως εξής: Αν πάρουμε a_{ij} $i, j \in \mathbb{Z}$ να είναι i.i.d. Κανονικές τυχαίες μεταβλητές και θεωρήσουμε τον πίνακα $A_n = [a_{ij}]_{i,j=1}^n$ (ο οποίος δεν είναι συμμετρικός!) Τότε ο $M_n = \frac{A_n + A_n^T}{\sqrt{2}}$ ανήκει στην GOE.

Εύκολα παρατηρούμε το ακόλουθο: Αν ο $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ είναι ορθογώνιος ($CC^T = I$) τότε ο $C^T M_n C$ έχει την ίδια κατανομή με τον M_n . (Η GOE είναι αναλλοίωτη κάτω από ορθογώνιο μετασχηματισμό). Μάλιστα κάτι που θα δείξουμε αργότερα είναι ότι μπορεί κανείς στην πραγματικότητα να υπολογίσει την από κοινού κατανομή των ιδιοτιμών της GOE η οποία δίνεται από τη συνάρτηση:

$$f(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = Z_1 \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \lambda_i^2\right) \prod_{i < j} |\lambda_i - \lambda_j| \quad (5.1)$$

5.1 Ειδικά Μοντέλα Τυχαίων Πινάκων (Gaussian Ensembles)

όπου η Z_1 είναι μια καθαρά υπολογιστική σταθερά κανονικοποίησης που εξαρτάται από το n .

Ορισμός 5.2: (Gaussian Unitary Ensemble)

Έστω ένα μιγαδικός πίνακας Wigner όπου τα στοιχεία του X_{ij} ακολουθούν τυποποιημένη μιγαδική κανονική κατανομή δηλαδή $X_{ij} \sim N(0, \frac{1}{2}) + iN(0, \frac{1}{2})$ και τα $X_{ii} \sim N(0, 1)$ (πραγματικά). Ο τυχαίος ερμιτιανός πίνακας που θα προκύψει ονομάζεται **Gaussian Unitary Ensemble (GUE)**.

Μία άλλη κατασκευή αυτού του μοντέλου προκύπτει ως εξής: Αν πάρουμε a_{ij} $i, j \in \mathbb{Z}$ να είναι i.i.d. Κανονικές μιγαδικές τυχαίες μεταβλητές και θεωρήσουμε τον πίνακα $A_n = [a_{ij}]_{i,j=1}^n$ (ο οποίος δεν είναι συμμετρικός!) Τότε ο $M_n = \frac{A_n + A_n^*}{\sqrt{2}}$ ανήκει στην GUE.

Όπως άλλωστε φαίνεται και από το όνομα της η GUE είναι αναλλοίωτη κάτω από ορθομοναδιαίο (unitary) μετασχηματισμό. Αν ο $C \in \mathbb{C}^{n \times n}$ είναι unitary ($CC^* = I$) τότε ο $C^T M_n C$ έχει την ίδια κατανομή με τον M_n . Η από κοινού κατανομή των ιδιοτιμών της GUE δίνεται από τη συνάρτηση:

$$f(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = Z_2 \exp\left(-\sum_{i=1}^n \lambda_i^2\right) \prod_{i < j} |\lambda_i - \lambda_j|^2 \quad (5.2)$$

όπου η Z_2 είναι πάλι μια καθαρά υπολογιστική σταθερά κανονικοποίησης που εξαρτάται από το n .

Ορισμός 5.3: (Gaussian Symplectic Ensemble και χώρος quaternions)

Έστω Z ένας διαγώνιος πίνακας από μπλοκ $Z_{2n \times 2n} = \text{diag}(A, A, \dots, A)$ όπου $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

Ένας πίνακας $M \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$ θα λέγεται συμπλεκτικός αν: $Z = MZM^T$.

Στη συνέχεια θα ορίσουμε τον χώρο των quaternions. Ορίζουμε λοιπόν τους παρακάτω 2×2 πίνακες:

$$\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_4 = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

Σημειώστε ακόμα ότι:

$$\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_4, \quad \mathbf{e}_2^2 = \mathbf{e}_3^2 = \mathbf{e}_4^2 = -1$$

Οι κανόνες συζυγίας είναι οι ακόλουθοι:

$$\bar{\mathbf{1}} = \mathbf{1}, \quad \bar{\mathbf{e}}_2 = -\mathbf{e}_2, \quad \bar{\mathbf{e}}_3 = -\mathbf{e}_3, \quad \bar{\mathbf{e}}_4 = -\mathbf{e}_4$$

Ο διανυσματικός χώρος που παράγεται λοιπόν πάνω από τον \mathbb{C} από τα $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{1}\}$ καλείται χώρος των quaternions.

5.1 Ειδικά Μοντέλα Τυχαίων Πινάκων (Gaussian Ensembles)

Ένα quaternion $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ είναι πραγματικό αν τα $\{q^{(1)}, q^{(2)}, q^{(3)}, q^{(4)}\}$ είναι πραγματικά όπου

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = q^{(1)} \cdot 1 + q^{(2)} \cdot e_2 + q^{(3)} \cdot e_3 + q^{(4)} \cdot e_4 .$$

Ένα τυχαίο quaternion $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ καλείται τυποποιημένο πραγματικό quaternion, αν είναι πραγματικό, αν: $q^{(1)}, q^{(2)}, q^{(3)}, q^{(4)} \sim N(0, \frac{1}{4})$ και είναι i.i.d. Έστω λοιπόν τώρα

$$Q_{ij} = q_{ij}^{(1)} \cdot 1 + q_{ij}^{(2)} \cdot e_2 + q_{ij}^{(3)} \cdot e_3 + q_{ij}^{(4)} \cdot e_4$$

Η **Gaussian Symplectic Ensemble (GSE)** ορίζεται από τους πίνακες $M_n = [Q_{ij}]_{i,j=1}^n$ όπου για $i < j$, τα Q_{ij} είναι τυποποιημένα πραγματικά quaternions, $Q_{ij} = \bar{Q}_{ji}$, και στη διαγώνιο που $i = j$ έχουμε ότι $q_{ii} \sim N(0, \frac{1}{2})$.

Μία άλλη κατασκευή αυτού του μοντέλου τυχαίου πίνακα προκύπτει ως εξής: Θεωρούμε τον πίνακα $A_n = [a_{ij}]_{i,j=1}^n$ όπου τα a_{ij} είναι i.i.d κανονικά τυποποιημένα quaternions. Τότε ο πίνακας $M_n = \frac{A_n + A_n^*}{\sqrt{2}}$ θα ανήκει στην **GSE**.

Η απο κοινού κατανομή των ιδιοτιμών της **GSE** δίνεται από τη σχέση:

$$f(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = Z_4 \exp(-2 \sum_{i=1}^n \lambda_i^2) \prod_{i < j} |\lambda_i - \lambda_j|^4 \quad (5.3)$$

Μπορεί κανείς εύκολα να παρατηρήσει ότι υπάρχουν ομοιότητες μεταξύ των συναρτήσεων (5.1), (5.2) και (5.3). Περιέχονται και οι τρεις στην ακόλουθη μονοπαραμετρική οικογένεια συναρτήσεων πυκνότητας:

$$f(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = Z_\beta \exp(-\frac{\beta}{2} \sum_{i=1}^n \lambda_i^2) \prod_{i < j} |\lambda_i - \lambda_j|^\beta \quad (5.4)$$

Για ένα δοσμένο $\beta > 0$ η κατανομή που παίρνει κανείς ονομάζεται **Dyson's β -ensemble**. Όπως εύκολα βλέπει κανείς για $\beta = 1$ έχουμε την GOE και για $\beta = 2$ έχουμε την GUE και για $\beta = 4$ έχουμε την GSE.

Για άλλες τιμές του β δεν παίρνει κανείς τόσο "ωραίους" τυχαίους πίνακες με τέτοιες ιδιότητες συμμετρίας αν και κανείς μπορεί να κατασκευάσει τυχαίους πίνακες από τους οποίους να έχουμε τη γενική β -ensemble.

5.2 Υπολογισμός από κοινού κατανομής ιδιοτιμών για τη GOE

5.2 Υπολογισμός από κοινού κατανομής ιδιοτιμών για τη GOE

Σκοπός μας λοιπόν σε αυτή την ενότητα θα είναι να υπολογίσουμε την από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (j.p.d.f) ενός τυχαίου πίνακα που ανήκει στη γκαουσιανή ορθογώνια συλλογή **GOE**. Έστω λοιπόν H ένας $N \times N$ τυχαίος πίνακας που ανήκει στην GOE. Πριν ξεκινήσουμε λοιπόν τον υπολογισμό αυτό πολύ σημαντικό είναι να γνωρίζουμε το θεώρημα **Porter and Rosenzweig** το οποίο μας δίνει μια μορφή της συνάρτησης αυτής και είναι το ακόλουθο:

Θεώρημα 5.4⁵: (Porter and Rosenzweig)

Αν θεωρήσουμε H τυχαίο πίνακα ο οποίος να ανήκει σε μία εκ των τριών Gaussian Ensembles που αναφέραμε (GOE, GUE, GSE) τότε αν $P(H)$ η j.p.d.f του πίνακα τότε θα ισχύει υποχρεωτικά για τη μορφή της ότι: $P(H) = \exp(-a \operatorname{tr} H^2 + b \operatorname{tr} H + c)$ (5.5)

Για να μπορέσει λοιπόν κανείς να πάρει την j.p.d.f για τη GOE θα πρέπει να εκφράσει τα διάφορα στοιχεία του πίνακα H σύμφωνα με τις N ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ και άλλες από κοινού ανεξάρτητες μεταβλητές p_μ οι οποίες μαζί με τις ιδιοτιμές σχηματίζουν ένα πλήρες σύνολο. Επομένως αν μιλάμε για έναν $N \times N$ πραγματικό συμμετρικό πίνακα ο αριθμός των ανεξάρτητων πραγματικών παραμέτρων που καθορίζουν πλήρως όλα τα H_{ij} είναι $N(N+1)/2$ διότι ουσιαστικά παίρνουμε τα H_{ij} με $i \leq j$. Ο αριθμός των παραπάνω παραμέτρων p_μ που θα χρειαστούμε θα είναι λοιπόν:

$$l = \frac{1}{2} N(N+1) - N = \frac{1}{2} N(N-1) \quad (5.6)$$

Τώρα επειδή ισχύει:

$$\operatorname{tr} H^2 = \sum_{i=1}^N \lambda_i^2 \quad \text{και} \quad \operatorname{tr} H = \sum_{i=1}^N \lambda_i$$

η πυκνότητα πιθανότητας σύμφωνα με τις N ρίζες και τις $N(N-1)/2$ παραμέτρους που θα προκύψει σύμφωνα με τις ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ και τις παραμέτρους p_1, p_2, \dots, p_l θα είναι σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα:

$$f(\lambda_1, \dots, \lambda_N; p_1, \dots, p_l) = \exp\left(-a \sum_{i=1}^N \lambda_i^2 + b \sum_{i=1}^N \lambda_i + c\right) J(\lambda, p) \quad (5.7)$$

όπου J η ορίζουσα Jacobi που δίνεται ως εξής:

$$J(\lambda, p) = \left| \frac{\partial(H_{11}, H_{12}, \dots, H_{NN})}{\partial(\lambda_1, \dots, \lambda_N, p_1, \dots, p_l)} \right| \quad (5.8)$$

5 Για την απόδειξη του θεωρήματος αυτού μπορεί κανείς να κοιτάξει στο Random Matrices του M.L. Mehta σελ. 36

5.2 Υπολογισμός από κοινού κατανομής ιδιοτιμών για τη GOE

Συνεπώς για καταφέρουμε να πάρουμε την j.p.d.f των ιδιοτιμών λ_i θα πρέπει να ολοκληρώσουμε τη σχέση (5.7) ως προς τις παραμέτρους p_1, p_2, \dots, p_l . Είναι συνήθως εφικτό να διαλέξουμε τις παραμέτρους με τέτοιο τρόπο ώστε η ορίζουσα Jacobi να γίνεται ένα γινόμενο μιας συνάρτησης f των λ_i και μιας συνάρτησης g των p_μ . Σε αυτήν την περίπτωση η ολοκλήρωση μας δίνει τη ζητούμε j.p.d.f ως ένα γινόμενο του εκθετικού όρου της σχέσης (5.7), της συνάρτησης f των λ_i και μιας σταθεράς. Η σταθερά αυτή στη συνέχεια απορροφάται από τη c του εκθετικού όρου.

Για να καταφέρουμε λοιπόν να καθορίσουμε τις παραμέτρους p_μ θυμόμαστε αρχικά ότι οποιοσδήποτε πραγματικός συμμετρικός πίνακας H μπορεί να διαγωνιοποιηθεί από έναν πραγματικό ορθογώνιο πίνακα, δηλαδή:

$$H = UAU^{-1} = UAU^T \quad (5.9)$$

όπου A είναι ο διαγώνιος πίνακας με διαγώνια στοιχεία τα $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ στοιχισμένα σε κάποια σειρά όπως για παράδειγμα $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_N$ και U είναι ένας πραγματικός ορθογώνιος πίνακας για τον οποίο εξ'ορισμού ισχύει:

$$UU^T = U^T U = 1 \quad (5.10)$$

του οποίου οι στήλες είναι τα κανονικοποιημένα ιδιοδιανύσματα του H . Τα ιδιοδιανύσματα αυτά είναι ή μπορούν να επιλεγούν ώστε να είναι από κοινού ορθογώνια. Για να καταφέρουμε να ορίσουμε τον U πλήρως θα πρέπει να ομαλοποιήσουμε τις φάσεις των ιδιοδιανυσμάτων του, ζητώντας για παράδειγμα τον πρώτο όρο που δεν εξαφανίζεται να είναι θετικός. Επομένως το U εξαρτάται από $N(N-1)/2$

πραγματικές παραμέτρους και μπορεί να διαλεχτεί να είναι U_{ij} , $i < j$. Αν ο H έχει πολλαπλές ιδιοτιμές τότε θα χρειαστούν παραπάνω συνθήκες για να ομαλοποιήσουμε τον πίνακα U πλήρως κάτι όμως που δε θα μας απασχολήσει αφού δεν αφορά το πρόβλημα που μελετάμε εμείς. Σε οποιοδήποτε όμως βαθμό κατάλληλες συνθήκες επιβάλλονται στον U με τέτοιο τρόπο ώστε να είναι μοναδικά χαρακτηρισμένος από τις $N(N-1)/2$ παραμέτρους p_μ . Όταν γίνει αυτό τότε ο πίνακας H ο οποίος καθορίζει πλήρως τους A και U οι οποίοι υπόκεινται στις παραπάνω συνθήκες καθορίζει επιπλέον και τις ιδιοτιμές λ_j αλλά και τις παραμέτρους p_μ με τρόπο μοναδικό. Επομένως τα λ_j και τα p_μ καθορίζουν πλήρως τους πίνακες A και U και άρα από τη σχέση (5.9) και όλα τα στοιχεία του H .

Παραγωγίζοντας τώρα τη σχέση (5.10) παίρνουμε:

$$\frac{\partial U^T}{\partial p_\mu} U + U^T \frac{\partial U}{\partial p_\mu} = 0 \quad (5.11)$$

και επειδή οι δύο όροι της παραπάνω σχέσης είναι συζυγείς μεταξύ τους τότε παίρνουμε ότι ο:

$$S^{(\mu)} = U^T \frac{\partial U}{\partial p_\mu} = -\frac{\partial U^T}{\partial p_\mu} U \quad (5.12)$$

είναι ένας αντισυμμετρικός πίνακας.

Ακόμη από την (5.9) έχουμε:

$$\frac{\partial H}{\partial p_\mu} = \frac{\partial U}{\partial p_\mu} AU^T + UA \frac{\partial U^T}{\partial p_\mu} \quad (5.13)$$

5.2 Υπολογισμός από κοινού κατανομής ιδιοτιμών για τη GOE

Πολλαπλασιάζοντας τώρα τη σχέση (5.13) με U^T από αριστερά και με U από δεξιά έχουμε:

$$U^T \frac{\partial H}{\partial p_\mu} U = S^{(\mu)} A - A S^{(\mu)} \quad (5.14)$$

Αν γράψουμε λοιπόν τη (5.14) σύμφωνα με τα στοιχεία του πίνακα H αυτή θα είναι:

$$\sum_{i,j} \frac{\partial H_{ij}}{\partial p_\mu} U_{ia} U_{j\beta} = S_{\alpha\beta}^{(\mu)} (\lambda_\alpha - \lambda_\beta) \quad (5.15)$$

Με παρόμοιο τρόπο διαφορίζοντας την (5.9) ως προς λ_γ :

$$\sum_{i,j} \frac{\partial H_{ij}}{\partial \lambda_\gamma} U_{ia} U_{j\beta} = \frac{\partial A_{\alpha\beta}}{\partial \lambda_\gamma} = \delta_{\alpha\beta} \delta_{\alpha\gamma} \quad (5.16)$$

Ο πίνακας Jacobi που γράψαμε στη σχέση (5.8) μπορεί να γραφτεί σε τμηματική μορφή ως:

$$[J(\lambda, p)] = \begin{bmatrix} \frac{\partial H_{ii}}{\partial \lambda_\gamma} & \frac{\partial H_{ij}}{\partial \lambda_\gamma} \\ \frac{\partial H_{ii}}{\partial p_\mu} & \frac{\partial H_{ij}}{\partial p_\mu} \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

Οι δύο στήλες λοιπόν της σχέσης (5.17) αντιστοιχούν στις N και $N(N-1)/2$ πραγματικές στήλες όπου $1 \leq i < j \leq N$. Αντίστοιχα οι δύο γραμμές της (5.17) αντιστοιχούν πάλι στις N και

$N(N-1)/2$ πραγματικές γραμμές όπου $\gamma = 1, 2, \dots, N$ και $\mu = 1, 2, \dots, N(N-1)/2$. Αν πολλαπλασιάσουμε λοιπόν τον πίνακα $[J]$ λοιπόν από τα δεξιά με τον $N(N+1)/2 \times N(N+1)/2$ πίνακα $[V]$ γραμμένο σε τμηματική μορφή ως εξής:

$$[V] = \begin{bmatrix} (U_{ia} U_{i\beta}) \\ (2U_{ia} U_{j\beta}) \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

του οποίου οι δύο γραμμές αντιστοιχούν σε N και $N(N-1)/2$ πραγματικές γραμμές με $1 \leq i < j \leq N$, και η στήλη αντιστοιχεί σε $N(N+1)/2$ πραγματικές στήλες με $1 \leq \alpha \leq \beta \leq N$ χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (5.15) και (5.16) παίρνουμε ότι:

$$[J][V] = \begin{bmatrix} \delta_{\alpha\beta} \delta_{\alpha\gamma} \\ S_{\alpha\beta}^{(\mu)} (\lambda_\alpha - \lambda_\beta) \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

Οι δύο γραμμές της δεξιάς μεριάς της σχέσης αντιστοιχούν σε N και $N(N-1)/2$ πραγματικές γραμμές και η στήλη αντιστοιχεί σε $N(N+1)/2$ πραγματικές στήλες. Παίρνοντας λοιπόν την ορίζουσα και στις δύο πλευρές της σχέσης θα έχουμε:

$$J(\lambda, p) \det V = \prod_{\alpha < \beta} (\lambda_\alpha - \lambda_\beta) \det \begin{bmatrix} \delta_{\alpha\beta} \delta_{\alpha\gamma} \\ S_{\alpha\beta}^{(\mu)} \end{bmatrix} \quad \text{ή}$$

$$J(\lambda, p) = \prod_{\alpha < \beta} (\lambda_\alpha - \lambda_\beta) f(p) \quad (5.20)$$

όπου $f(p)$ είναι ανεξάρτητη ανεξάρτητη από τα λ_i και εξαρτάται μόνο από τις παραμέτρους p_μ .

Βάζοντας τώρα το αποτέλεσμα αυτό στη σχέση (5.7) και ολοκληρώνοντας ως προς τις μεταβλητές

5.2 Υπολογισμός από κοινού κατανομής ιδιοτιμών για τη GOE

p_μ παίρνουμε λοιπόν τη j.p.d.f των ιδιοτιμών τυχαίων πινάκων που ανήκουν στη γκαουσιανή ορθογώνια συλλογή (GOE) δηλαδή:

$$f(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = \exp\left(-a \sum_{i=1}^N \lambda_i^2 + b \sum_{i=1}^N \lambda_i + c\right) \prod_{i < j} |\lambda_j - \lambda_i| \quad (5.21)$$

όπου c είναι μια καινούρια σταθερά. Επιπλέον όμως αν μεταφέρουμε τις ιδιοτιμές κατά $b/2a$ και αλλάξουμε την κλίμακα ενέργειας παντού κατά έναν σταθερό παράγοντα $\sqrt{2a}$ μπορούμε να αντικαταστήσουμε τις λ_i με τις $(1/\sqrt{2a})x_i + b/2a$. Η αλλαγή αυτή μας δίνει την j.p.d.f σε απλούστερη μορφή καθώς και το συμπέρασμα που αναφέραμε στο προηγούμενο κεφάλαιο δηλαδή:

$$f(x_1, \dots, x_N) = Z_1 \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N x_i^2\right) \prod_{i < j} |x_j - x_i| \quad (5.22)$$

Με αντίστοιχο τρόπο μπορεί κανείς να υπολογίσει και την j.p.d.f για τις περιπτώσεις των GUE και GSE και να επαληθεύσει το γενικό τύπο της β -ensemble που περιγράψαμε στην προηγούμενη ενότητα.

Βιβλιογραφικές αναφορές

A) Διεθνής Βιβλιογραφία

[1] Anderson Greg W. , Guionet Alice and Zeitouni Ofer, *An Introduction to Random Matrices*. Cambridge: Cambridge University Press, 2009

[2] Bai Zhidong and Silverstein Jack W. , *Spectral Analysis of Large Dimensional Random Matrices*. Second Edition. New York: Springer, 2009

[3] Billingsley Patrick , *Convergence of Probability Measures*. Second edition. New York: Willey Interscience Publications, 1999

[4] Billingsley Patrick , *Probability and Measure*. Third edition. New York: Willey Interscience Publications, 1995

[5] Feier Adina Roxana, *Methods of Proof in Random Matrix Theory*. Cambridge ,2012

[6] Kemp Todd, Lecture Notes, *Introduction to Random Matrix Theory*. Math247A. University of California, 2011

[7] Mehta Madan Lal, *Random Matrices*. Third edition. Amsterdam: Elsevier Academic Press, 2004

[8] Valkó Benedek, Lecture Notes, *Random Matrices*. Math833. University of Wisconsin, 2009

B) Ελληνική Βιβλιογραφία

[1] Κοκολάκης Γ. και Σπηλιώτης Ι., *Εισαγωγή στις Πιθανότητες*. Αθήνα: Εκδόσεις Συμεών, 2002

[2] Παπαϊωάννου Αλέξανδρος Χ., *Θεωρία Γραφημάτων*. Αθήνα: Εκδόσεις ΕΜΠ, 2002

[3] Σπηλιώτης Ι. , Σημειώσεις Μαθήματος, *Εισαγωγή στη Θεωρία Πιθανοτήτων*, Αθήνα 2013

[4] Φουσκάκης Δ. , *Ανάλυση Δεδομένων με Χρήση της R* ,Αθήνα: Εκδόσεις Τσότρας 2013