Εθνικο Μετσοβιο Πολυτεχνειο

Σχολη Εφαρμοσμενων Μαθηματικων και Φυσικων Επιστημων

Ημιεσωτερικό Γινόμενο και Βέλτιστες Προσεγγίσεις σε Χώρους με Νόρμα

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Συγγραφέας:
Ιωάννης Καβαδακης

Επιβλέπων Καθηγητής:
Παναγιώτης Ψαρρακος

Τομέας Μαθηματικών

Αθήνα
Οκτώβριος 2015

Εθνικο Μετσοβιο Πολυτεχνειο

Σχολη Εφαρμοσμενων Μαθηματικων και Φυσικων Επιστημων

Ημιεσωτερικό Γινόμενο και Βέλτιστες Προσεγγίσεις σε Χώρους με Νόρμα

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Συγγραφέας:
Ιωάννης Καβαδακης

Επιβλέπων Καθηγητής:
Παναγιώτης Ψαρρακος

Τριμελής Εξεταστική Επιτροπή:

- Νικόλαος Γιαννακάκης, Επίκουρος Καθηγητής,
- Βασίλειος Κανελλόπουλος, Αναπληρωτής Καθηγητής,
- Παναγιώτης Ψαρράκος, Καθηγητής.

Τομέας Μαθηματικών

Αθήνα
Οκτώβριος 2015

Πρόλογος

Σκοπός της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η μελέτη του ημιεσωτερικού γινομένου και η εφαρμογή του στη θεωρία των Βέλτιστων Προσεγγίσεων. Η έννοια του ημιεσωτερικού γινομένου αποτελεί, ουσιαστικά, μία γενίκευση της έννοιας του εσωτερικού γινομένου σε χώρους με νόρμα. Αυτό μας δίνει τη δυνατότητα να διερευνίσουμε βασικά θέματα της θεωρίας των Βέλτιστων Προσεγγίσεων μέσω αυτής.

Στο πρώτο κεφάλαιο ορίζουμε το ημιεσωτερικό γινόμενο και παρουσιάζουμε τις βασικές του ιδιότητες. Επίσης, διατυπώνουμε τις συνθήκες ύπαρξης και μοναδικότητάς του σε χώρους με νόρμα.

Στο δεύτερο κεφάλαιο κάνουμε αρχικά μία σύντομη εισαγωγή στις βέλτιστες προσεγγίσεις σε χώρους με νόρμα. Έπειτα διατυπώνουμε χαρακτηρισμούς ως προς το ημιεσωτερικό γινόμενο για προσεγγίσεις από κυρτά σύνολα και ειδικότερα από κυρτούς κώνους και υπόχωρους χρησιμοποιώντας την έννοια του δυϊκού κώνου και του ορθογώνιου συμπληρώματος ενός συνόλου.

Στο τρίτο κεφάλαιο ασχολούμαστε με εφαρμογές των αποτελεσμάτων του δεύτερου κεφαλαίου στο πρόβλημα εύρεσης του σφάλματος προσέγγισης, στην απόδειξη ορισμένων ιδιοτήτων των βέλτιστων προσεγγίσεων και στη μεταφορά της διαδικασίας ορθοκανονικοποίησης Gram-Schmidt από χώρους εσωτερικού γινομένου σε χώρους με νόρμα.

Στο τέταρτο κεφάλαιο επαναδιατυπώνουμε τους χαρακτηρισμούς του δεύτερου κεφαλαίου, αυτή τη φορά ως προς την δυνατότητα ανάλυσης του χώρου, προκειμένου να εξετάσουμε την ισχύ του θεωρήματος Αναπαράστασης του Riesz σε χώρους με νόρμα.

Τέλος, στο πέμπτο κεφάλαιο εισάγουμε την έννοια της Birkhoff-James ορθογωνιότητας, προσδιορίζουμε την σχέση της με την ορθογωνιότητα ως προς το ημιεσωτερικό γινόμενο, επαναδιατυπώνουμε ορισμένα αποτελέσματα χαρακτηρισμού του δεύτερου κεφαλαίου και παρουσιάζουμε συνοπτικά τις ϵ-βέλτιστες προσεγγίσεις και τις απεικονισεις που διατηρούν τις προσεγγίσεις.

Abstract

The aim of the present thesis is the study of the semi-inner product and its applications in Best Approximation Theory. In the setting of a normed space, the notion of a semi-inner product is, actually, a generalization of the notion of an inner product. Our endeavour is to characterise best approximations in a normed space not through the norm of the space, but through a semi-inner product that generates the norm.

Chapter 1 is devoted to introducing the concept of a semi-inner product on a normed space. We also formulate several facts about the existence and uniqueness of semi-inner products on normed spaces.

Chapter 2 begins with a brief account on best approximation in normed spaces. Afterwards, we define characterisations of best approximation in normed spaces from convex sets and, in particular, from convex cones and subspaces, all of which are derived through the properties of semi-inner product.

In the third chapter we demonstrate a few direct applications of the results of Chapter 2, including characterising best approximations in terms of errors of approximation, presenting some properties of best approximations, and conveying the Gram-Schmidt orthonormalisation process to the setting of a normed space.

Chapter 4 focuses on the characterisation of proximinality, semi-Chebyshevity and Chebyshevity of convex sets in terms of the decomposability of a normed space. Subsequently we attempt to study the analogue of Riesz Representation theorem in the setting of a normed space.

In the last chapter we introduce the concept of Birkhoff-James orthogonality. We specify the correlation between Birkhoff-James and semi-inner product orthogonalities and reformulate several characterisation results in terms of Birkhoff-James orthogonality. Concluding, we are presenting the notions of ϵ-Best Approximations and Maps Preserving Best Approximations.

Ευχαριστίες

Με την ολοκλήρωση της διπλωματικής μου εργασίας θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον καθηγητή του ΕΜΠ κ. Παναγιώτη Ψαρράκο για την άριστη συνεργασία που είχαμε και για την βοήθεια που μου προσέφερε σε κάθε ζήτημα που προέκυψε κατά την εκπόνηση της εργασίας. Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου αλλά και όλους τους φίλους μου για την συνεχή συμπαράσταση και υποστήριξή τους σε όλη τη διάρκεια των σπουδών μου.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Ημιεσωτερικό Γινόμενο σε Χώρους με Νόρμα

1.1 Εισαγωγή

Ένας χώρος Hilbert μπορεί να μελετηθεί είτε ως ένας πλήρης χώρος με εσωτερικό γινόμενο, είτε ως ένας χώρος Banach, η νόρμα του οποίου ικανοποιεί τον κανόνα του παραλληλογράμμου. Στη θεωρία τελεστών σε χώρους Hilbert, ένας χώρος Hilbert, δεν ¨λειτουργεί' ως ένας χώρος Banach, αλλά περισσότερο ως ένας χώρος εσωτερικού γινομένου. Έτσι λοιπόν σύμφωνα με τη δομή του εσωτερικού γινομένου αναπτύσσονται οι περισσότερες μέθοδοι και ορολογίες. Από την άλλη, αυτού του τύπου η μελέτη για χώρους Hilbert δε μπορεί να παραλληλιστεί με κάτι αντίστοιχο στα πλαίσια ενός χώρου Banach.

Ο G. Lumer, ενώ προσπαθούσε να μεταφέρει ένα πρόβλημα χώρου Hilbert σε μια γενική περίπτωση χώρου Banach, οδηγήθηκε στο να χρησιμοποιήσει μια κατάλληλη απεικόνιση από ένα χώρο Banach στον δυϊκό του χώρο προκειμένου να αντιμετωπίσει την έλλειψη εσωτερικού γινομένου. Η διαδικασία αυτή υπέδειξε την ύπαρξη μιας γενικευμένης θεωρίας η οποία αναδείχθηκε ιδιαίτερα χρήσιμη στην μελέτη αλγεβρών με νόρμα, παρέχοντας καλύτερη κατανόηση σε ήδη γνωστά αντικείμενα, μια πιο επαρκή γλώσσα για ταξινόμηση ειδικών τύπων τελεστών, καθώς και νέες τεχνικές. Αυτές ήταν οι βασικές σκέψεις οι οποίες εξελίχθηκαν μετέπειτα στην θεωρία του ημιεσωτερικού γινομένου.

Σκοπός του συγκεκριμένου κεφαλαίου είναι η εισαγωγή στην θεωρία ημιεσωτερικού γινομένου, όπως ορίστηκε από τον G. Lumer και τροποποιήθηκε από τον J.R. Giles. Ιδιαίτερη σημασία θα δοθεί στην ύπαρξη και την μοναδικότητα του ημιεσωτερικού γινομένου σε χώρους με νόρμα. Όπως θα δούμε κατά τη διερεύνηση των ιδιοτήτων του ημιεσωτερικού γινομένου, **ένας γραμμικός χώρος με ημιεσωτερικό γινόμενο είναι ένας χώρος με νόρμα**, με τη νόρμα να επάγεται απο το ημιεσωτερικό γινόμενο. Κάνοντας χρήση ορισμένων ιδιοτήτων της κανονικοποιημένης δυϊκής απεικόνισης, θα αποδείξουμε ότι για κάθε χώρο με νόρμα μπορεί να κατασκευαστεί τουλάχιστον ένα (και σε γενικές περιπτώσεις άπειρα) ημιεσωτερικό γινόμενο, το οποίο είναι συνεχές ως προς τη νόρμα. Όσον αφορά τη μοναδικότητα του ημιεσωτερικού γινομένου σε χώρους με νόρμα, θα δείξουμε ότι η λειότητα του χώρου είναι μια συνθήκη η οποία είναι ικανή και αναγκαία για την ύπαρξη μοναδικού ημιεσωτερικού γινομένου σε ένα χώρο με νόρμα, το οποίο επάγει την νόρμα του χώρου. Όλα τα παραπάνω αναπτύσσονται στο κεφάλαιο που ακολουθεί.

Όλοι οι γραμμικοί χώροι, οι χώροι με νόρμα, και οι χώροι εσωτερικού γινομένου που εμφανίζονται σε αυτο το κεφάλαιο εφαρμόζονται στο σώμα των πραγματικών ή μιγαδικών αριθμών, το οποίο το συμβολίζουμε με $\mathbb{K}$, εκτός και αν υποδεικνύεται κάτι άλλο.

1.2 Εισαγωγή στο Ημιεσωτερικό Γινόμενο

Ο G. Lumer κατασκεύασε σε ένα γραμμικό χώρο μια απεικόνιση, την οποία ονόμασε *ημιεσωτερικό γινόμενο(semi-inner product)*, με ένα πιο γενικευμένο σύστημα αξιωμάτων από αυτό του εσωτερικού γινομένου. Σύμφωνα με τον G.Lumer, ένα ημιεσωτερικό γινόμενο ορίζεται ως εξής:

Ορισμός 1.2.1. *Έστω X ένας γραμμικός χώρος. Η απεικόνιση $[\cdot|\cdot] \to \mathbb{K}$ καλείται L-ημιεσωτερικό γινόμενο στον X αν ικανοποιούνται τα παρακάτω:*

$$[x+y|z] = [x|z] + [y|z] \quad \forall x,y,z \in X, \tag{L1}$$

$$[\lambda x|y] = \lambda[x|y] \quad \forall x,y \in X \quad \textit{και} \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \tag{L2}$$

$$[x|x] \geq 0, \quad \forall x \in X \quad \textit{και} \quad [x|x] = 0 \Rightarrow x = 0, \tag{L3}$$

$$|[x|y]|^2 \leq [x|x][y|y] \quad \forall x,y \in X. \tag{L4}$$

Η σημασία αυτής της ιδέας θεμελιώθηκε επίσης από τον Lumer δείχνοντας ότι ένα L-ημιεσωτερικό γινόμενο σε γραμμικό χώρο πάντα επάγει μία νόρμα η οποία ορίζεται ως $||x|| = [x|x]^{1/2}$, και για κάθε χώρο με νόρμα $(X, ||\cdot||)$ μπορεί να κατασκευαστεί τουλάχιστον ένα L-ημιεσωτερικό γινόμενο τέτοιο ώστε $[x|x] = ||x||^2$.

Παρόλο που, αρχικά, η ιδέα ενός L-ημιεσωτερικού γινομένου ενός γραμμικού χώρου παρουσιάστηκε και μελετήθηκε από τον Lumer το 1961, η πρώτη καταγραφή ημιεσωτερικού γινομένου μπορεί να εντοπιστεί γύρω στο 1933 από τον S.Mazur. Μετά τον Lumer, πολλοί μαθηματικοί, συμπεριλαμβανομένων και των P.M Milicic, I. Rosca, B. Nath, R. Tapia, S.S. Dragomir και Chmielinski, συνέχισαν την έρευνα πάνω στη συγκεκριμένη ιδέα. Ανάμεσα σε αυτούς ήταν και ο J.R. Giles, ο οποίος πρότεινε κάποιες δομικές τροποποιήσεις σε ό,τι αφορά την ιδέα του ημιεσωτερικού γινομένου. Στην προσπάθεια του να καθορίσει ποιες περαιτέρω εξελίξεις μπορούν να γίνουν, ο J.R. Giles έδειξε ότι η ομογενής ιδιότητα $[x|\lambda y] = \bar{\lambda}[x|y] \quad \forall x \in \mathbb{K}$, όπου $\bar{\lambda}$ ο μιγαδικός συζυγής του λ, μπορεί να προστεθεί στις ιδιότητες ενός L-ημιεσωτερικού γινομένου. Η προσθήκη αυτής της ιδιότητας προσφέρει μεγαλύτερη ευελιξία χωρίς παράλληλα να επιφέρει κάποιον σημαντικό περιορισμό. Επομένως, σύμφωνα με τον J.R. Giles, ένα ημιεσωτερικό γινόμενο σε ένα γραμμικό χώρο μπορεί να οριστεί ως εξής:

Ορισμός 1.2.2. *Έστω X ένας γραμμικός χώρος. Η απεικόνιση $[\cdot|\cdot] \to \mathbb{K}$ καλείται ημιεσωτερικό γινόμενο(ή ημιεσωτερικό γινόμενο κατά την έννοια του Lumer και Giles) στον X αν ικανοποιούνται τα παρακάτω:*

$$[\,x\,+\,y\,|\,z\,] = [\,x\,|\,z\,] + [\,y\,|\,z\,] \quad \forall x, y, z \in X, \tag{LG1}$$

$$[\,\lambda\, x\,|\,y\,] = \lambda[\,x\,|y], \quad \textit{και} \quad [\,x\,|\,\lambda y\,] = \bar{\lambda}[\,x\,|\,y\,] \quad \forall x, y \in X, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \tag{LG2}$$

$$[\,x\,|\,x\,] \geq 0, \quad \forall x \in X, \quad \textit{και} \quad [x|x] = 0 \Rightarrow x = 0, \tag{LG3}$$

$$|\,[\,x\,|\,y\,]\,|^2 \leq [\,x\,|\,x\,]\,[\,y\,|\,y\,] \quad \forall x, y \in X. \tag{LG4}$$

Προκύπτει άμεσα ότι κάθε εσωτερικό γινόμενο είναι και ημιεσωτερικό γινόμενο. Παρόλ' αυτά, το αντίστροφο δεν ισχύει απαραίτητα, αφού ένα ημιεσωτερικό γινόμενο δεν παρουσιάζει συμμετρία ως προς τους συζυγείς, μια ιδιότητα την οποία έχει ένα εσωτερικό γινόμενο. Τα παραδείγματα που δίνονται στην ενότητα 1.4 αφορούν ημιεσωτερικά γινόμενα τα οποία δεν είναι εσωτερικά γινόμενα.

Στόχος μας τώρα είναι η ανάδειξη της σημασίας της παραπάνω έννοιας του ημιεσωτερικού γινομένου. Σαν πρώτο βήμα έχουμε το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 1.2.1. *Έστω X ένας γραμμικός χώρος, και $[\cdot\,|\,\cdot]$ ένα ημιεσωτερικό γινόμενο στον X. Τότε ισχύουν τα παρακάτω:*

(α) Η απεικόνιση $||\cdot|| \to \mathbb{R}$ που δίνεται από την σχέση $||x|| = [\,x\,|\,x\,]^{1/2}$ επάγει νόρμα στον X,

(β) Για κάθε $y \in X$, το συναρτησοειδές $f_y : X \to \mathbb{K}$ που δίνεται από την σχέση $f_y(x) = [\,x\,|\,y\,]$ είναι φραγμένο στον X, ο οποίος είναι εφοδιασμένος με τη νόρμα που επάγεται από το ημιεσωτερικό γινόμενο.
Επιπλέον $||f_y|| = ||y||$.

Απόδειξη. (α) Έστω $x \in X$. Τότε από την (LG3) έχουμε ότι $||x|| = [x|x]^{1/2} \geq 0$, και αν $||x|| = 0$ τότε $[x|x] = 0$, και άρα $x = 0$. Αν $x \in X$ και $\lambda \in \mathbb{K}$, τότε από την (LG2) έχουμε

$$||\lambda x|| = [\,\lambda x\,|\,\lambda x\,]^{1/2} = |\lambda|\,||x||.$$

Τέλος, για κάθε $x, y \in X$, από την (LG1) και (LG4) έπεται ότι

$$\begin{aligned} ||x+y||^2 = [\, x+y \,|\, x+y \,] &= [\, x \,|\, x+y \,] + [\, y \,|\, x+y \,] \\ &\leq ||x||\,||x+y|| + ||y||\,||x+y||. \end{aligned}$$

Άρα, $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$.
(β) Έστω $y \in X$. Αν $y = 0$, τότε προκύπτει εύκολα το ζητούμενο αφού σε αυτήν την περίπτωση f_y είναι το μηδενικό συναρτησοειδές στον X, σύμφωνα με την (LG2). Υποθέτουμε ότι $y \neq 0$. Τότε για όλα τα $x, z \in X$ και για όλα τα $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, από τις ιδιότητες (LG1) και (LG2) έχουμε ότι

$$\begin{aligned} f_y(\lambda x + \mu z) &= [\, \lambda x + \mu z \,|\, y \,] \\ &= \lambda[\, x \,|\, y \,] + \mu[\, z \,|\, y \,] \\ &= \lambda f_y(x) + \mu f_y(z), \end{aligned}$$

και άρα το f_y είναι γραμμικό στον X. Από την ιδιότητα (LG4), για κάθε $x \in X$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} |f_y(x)| &= |\,[\, x \,|\, y \,]\,| \\ &\leq ||x||\,||y||, \end{aligned}$$

το οποίο σημαίνει ότι το f_y είναι φραγμένο και $||f_y|| \leq ||y||$.

Από την άλλη,

$$\begin{aligned} ||f_y|| &\geq \frac{|f_y(y)|}{||y||} \\ &= \frac{[\, y \,|\, y \,]}{||y||} \\ &= ||y||, \end{aligned}$$

και επομένως $||f_y|| = ||y||$. Έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη. $\square$

Το παραπάνω θεώρημα δείχνει συγκεκριμένα ότι ένας γραμμικός χώρος εφοδιασμένος με ένα ημιεσωτερικό γινόμενο είναι ένας χώρος με νόρμα, με τη νόρμα να επάγεται από το ημιεσωτερικό γινόμενο. Αργότερα στην Ενότητα 1.4 θα αποδείξουμε ότι για κάθε χώρο με νόρμα μπορεί να κατασκευαστεί τουλάχιστον ένα (και σε γενικές περιπτώσεις άπειρα) ημιεσωτερικό γινόμενο. Για το λόγο αυτό, χρειαζόμαστε ορισμένες ιδιότητες της κανονικοποιημένης δυϊκής απεικόνισης (normalized duality mapping).

1.3 Κανονικοποιημένες Δυϊκές Απεικονίσεις

Το X^* δηλώνει το δυϊκό χώρο ενός χώρου με νόρμα X, και το $P(X^*)$ το δυναμοσύνολο του X^*.

Ορισμός 1.3.1. *Έστω $(X, ||\cdot||)$ ένας χώρος με νόρμα. Η απεικόνιση $\mathcal{J} : X \to P(X^*)$ με*

$$\mathcal{J}(x) := \{f \in X^* : f(x) = ||x||^2 \quad \textit{και} \quad ||f|| = ||x||\}, \tag{1.1}$$

καλείται κανονικοποιημένη δυϊκή απεικόνιση του X.

Το επόμενο αποτέλεσμα περιέχει ορισμένες σημαντικές ιδιότητες της απεικόνισης $\mathcal{J}$. Η απόδειξη συμπεριλαμβάνεται εδώ, αφού αποτελεί μια πολύ ενδιαφέρουσα εφαρμογή του Θεωρήματος Επέκτασης Hahn-Banach.

Πρώτα, θα δώσουμε δύο απαραίτητα λήμματα που θα χρησιμοποιηθούν παρακάτω:

Λήμμα 1.3.1. *Αξίωμα της επιλογής (Axiom of Choice): Έστω $\mathcal{Y}$ μία οικογένεια μη κενών και ξένων ανά δύο συνόλων. Τότε υπάρχει ένα σύνολο $E \subseteq \mathcal{Y}$ τέτοιο ώστε για κάθε $X \in \mathcal{Y}$, το $E \cap X$ είναι μονοσύνολο.*
Δηλαδή το E επιλέγει ένα σημείο από κάθε σύνολο στην $\mathcal{Y}$.

Θεώρημα 1.3.1. *(Θεώρημα επέκτασης Hahn-Banach): Έστω X γραμμικός χώρος, Y υπόχωρος του X και $p : X \to \mathbb{R}$ υπογραμμικό συναρτησοειδές, δηλαδή $\forall x, y \in X, \quad \forall \alpha \geq 0$ ισχύει ότι $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ και $p(\alpha x) = \alpha p(x)$. Έστω $f : Y \to \mathbb{R}$ γραμμική με $f(x) \leq p(x) \quad \forall x \in Y$.*
Τότε υπάρχει γραμμική $\hat{f} : X \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε
$\hat{f}|_Y = f$ και $\hat{f}(x) \leq p(x) \quad \forall x \in X$.

Απόδειξη. Για την απόδειξη του θεωρήματος παραπέμπουμε στο Θεώρημα 5.2, σελίδα 55, [13]. □

Το παρακάτω λήμμα αποτελεί άμεση εφαρμογή του θεωρήματος, την οποία θα χρησιμοποιούμε από εδώ και πέρα όταν αναφερόμαστε στο Θεώρημα επέκτασης Hahn-Banach.

Λήμμα 1.3.2. *Έστω X χώρος με νόρμα και Y υπόχωρος του X. Αν $f : Y \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές και $M \geq 0$ ώστε $f(y) \leq M\|y\| \quad \forall y \in Y$, τότε υπάρχει $\hat{f} : X \to \mathbb{R}$ γραμμική επέκταση του f, ώστε $\hat{f}(x) \leq M\|x\| \quad \forall x \in X$.*
Ειδικότερα, αν $M = \|f\|$, τότε $\|\hat{f}\| = \|f\|$.

Θεώρημα 1.3.2. *Έστω X χώρος με νόρμα. Τότε ισχύουν τα παρακάτω:*

(α) Για κάθε $x \in X$, το σύνολο $\mathcal{J}(x)$ είναι ένα μη κενό κυρτό υποσύνολο του X^*.

(β) Για κάθε $x \in X$ και κάθε $\lambda \in \mathbb{K}$, $\mathcal{J}(\lambda x) = \bar{\lambda}\mathcal{J}(x)$.

Απόδειξη. (α). Έστω $x \in X$. Από τον Ορισμό 1.3.1, το $\mathcal{J}(x)$ είναι ένα υποσύνολο του X^*. Αν $x = 0$, τότε προφανώς $\mathcal{J}(0) = \{0\}$. Αν $x \neq 0$, θεωρούμε τον υπόχωρο $S_x :=< x >$, όπου $< x >$ η γραμμική θήκη του στοιχείου x, και ορίζουμε το συναρτησοειδές $g : S_x \to \mathbb{K}$ ως $g(u) = \lambda||x||^2$, όπου $u = \lambda x \in S_x, \quad (\lambda \in \mathbb{K})$. Τότε για όλα τα $u = \lambda x$, $v = \mu x \in S_x$ $(\lambda, \mu \in \mathbb{K})$, και για όλα τα $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ έχουμε

$$\begin{aligned} g(\alpha u + \beta v) &= g\big((\alpha\lambda + \beta\mu)x\big) \\ &= (\alpha\lambda + \beta\mu)||x||^2 \\ &= \alpha g(u) + \beta g(v), \end{aligned}$$

άρα το g είναι γραμμικό στον S_x. Επίσης $\forall u = \lambda x \in S_x$ ισχύει ότι $|g(u)| = |\lambda||x||^2| = ||\lambda x||\,||x|| = ||x||\,||u||$. Άρα το g είναι φράγμενο στον υπόχωρο S_x, και $||g|| = ||x||$. Επομένως, λόγω του Θεωρήματος επέκτασης Hahn-Banach, υπάρχει συναρτησοειδές $f \in X^*$ το οποίο επεκτείνει το g σε όλο το X έτσι ώστε $||f|| = ||g|| = ||x||$. Επίσης εφόσον $x \in S_x$, έχουμε ότι

$$f(x) = g(x) = ||x||^2.$$

Έπεται ότι $f \in \mathcal{J}(x)$ και άρα το $\mathcal{J}(x)$ είναι μη κενό.
Θα δείξουμε, τώρα, ότι το $\mathcal{J}(x)$ είναι κυρτό. Υποθέτουμε ότι $x \neq 0$, και έστω $f_1, f_2 \in \mathcal{J}(x)$. Τότε για κάθε $\lambda \in [0,1]$, έχουμε

$$\lambda f_1 + (1-\lambda) f_2 \in X^*,$$

και

$$\begin{aligned}
\big(\lambda f_1 + (1-\lambda) f_2\big)(x) &= \lambda f_1(x) + (1-\lambda) f_2(x) \\
&= \lambda ||x||^2 + (1-\lambda)||x||^2 \\
&= ||x||^2.
\end{aligned}$$

Επομένως για κάθε $\lambda \in [0,1]$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
0 < ||x|| &= \left| \big(\lambda f_1 + (1-\lambda) f_2\big) \left(\frac{x}{||x||} \right) \right| \\
&\leq \sup_{0 \neq y \in X} \left| \big(\lambda f_1 + (1-\lambda) f_2\big) \left(\frac{y}{||y||} \right) \right| \\
&= ||\lambda f_1 + (1-\lambda) f_2||,
\end{aligned}$$

το οποίο δείχνει ότι $||x|| \leq ||\lambda f_1 + (1-\lambda) f_2||$. Όμως, αφού $f_1, f_2 \in \mathcal{J}(x)$ έχουμε ότι $||f_1|| = ||f_2|| = ||x||$ και άρα

$$||\lambda f_1 + (1-\lambda) f_2|| \leq \lambda ||f_1|| + (1-\lambda)||f_2|| = ||x||$$

για κάθε $\lambda \in [0,1]$. Επομένως για κάθε $\lambda \in [0,1]$, $||\lambda f_1 + (1-\lambda) f_2|| = ||x||$, και με αυτό ολοκληρώνεται η απόδειξη του (α).

(β). Έστω $x \in X$ και $\lambda \in \mathbb{K}$. Αν $\lambda = 0$, τότε το ζητούμενο προκύπτει εύκολα. Υποθέτουμε ότι $\lambda \neq 0$, και έστω $f \in \mathcal{J}(\lambda x)$. Τότε $f \in X^*$, $f(\lambda x) = ||\lambda x||^2$

και επομένως $f(x) = \bar{\lambda}||x||^2$ και $||f|| = ||\lambda x||$. Έτσι,

$$\frac{1}{\bar{\lambda}} f \in X^*,$$
$$\left(\frac{1}{\bar{\lambda}} f\right)(x) = \frac{1}{\bar{\lambda}} f(x) = ||x||^2,$$
$$\left\|\frac{1}{\bar{\lambda}} f\right\| = \frac{1}{|\bar{\lambda}|}\|f\| = \frac{1}{|\bar{\lambda}|}\|\lambda x\| = \|x\|.$$

Από αυτό έχουμε ότι

$$\frac{1}{\bar{\lambda}} f \in \mathcal{J}(x) \Rightarrow f \in \bar{\lambda}\mathcal{J}(x).$$

Συνεπώς, έχουμε ότι $\mathcal{J}(\lambda x) \subseteq \bar{\lambda}\mathcal{J}(x)$. Παρόμοια αποδεικνύεται και η αντίστροφη περίπτωση. Άρα ισχύει και το (β). $\square$

Παρατήρηση 1.3.1. *Η απόδειξη του Θεωρήματος 1.3.2 (α) δείχνει ότι για $x \in X$ το σύνολο $\mathcal{J}(x)$ περιέχει άπειρα διαφορετικά μεταξύ τους στοιχεία του X^*, αφού η μοναδικότητα των επεκτάσεων του Θεωρήματος Hahn-Banach δεν θα πρέπει να λαμβάνεται ως δεδομένη στην περίπτωση χώρων με νόρμα (μπορεί να υπάρχουν άπειρες τέτοιες επεκτάσεις). Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε τον χώρο με νόρμα $X = (\mathbb{K}^2, ||\cdot||_1)$, όπου $||x||_1 = \sum_{k=1}^{2} |x_k|$ για $x = (x_1, x_2) \in X$ και τον υπόχωρο του X*

$$Y = \{x = (x_1, x_2) \in X : x_2 = 0\}.$$

Έστω $g : Y \to \mathbb{K}$ με $g(x) = x_1$, $x \in Y$. Τότε είναι προφανές ότι $g \in Y^*$ και $||g|| = 1 = g(a)$ όπου $a = (1, 0)$. Αφού $Y =< a >$, βλέπουμε ότι μία συνάρτηση f που ορίζεται στον X είναι μια επέκταση Hahn-Banach της g στον X αν και μονο αν η f είναι γραμμική στον X και $||f|| = 1 = f(a)$. Τώρα, αν η f είναι γραμμική στον X έχουμε ότι:

$$f(x) = k_1 x_1 + k_2 x_2, \quad x \in X,$$

για k_1 και k_2 στον $\mathbb{K}$. Επομένως, $||f|| = max\{|k_1|, |k_2|\}$ και $f(a) = 1$ αν και *μόνο αν* $k_1 = 1$. *Άρα για κάθε* $k_2 \in \mathbb{K}$ *με* $|k_2| \leq 1$, *η συνάρτηση* $f : X \to \mathbb{K}$ *με* $f(x) = x_1 + k_2 x_2, \quad x \in X$ *είναι μια επέκταση Hahn-Banach της* g *στον* X. *Για κάθε τέτοια συνάρτηση* f *έχουμε*

$$f \in X^*, \quad f(a) = 1 = ||a||^2,$$

και

$$||f|| = 1 = ||a||,$$

και έτσι έχουμε τελικά ότι $f \in \mathcal{J}(a)$. *Επομένως, το* $\mathcal{J}(a)$ *περιέχει άπειρα διαφορετικά μεταξύ τους στοιχεία του* X^*.

Ένας τομέας (section) μιας κανονικοποιημενής δυϊκής απεικόνισης ορίζεται ως εξής:

Ορισμός 1.3.2. *Έστω* $\mathcal{J}$ *η κανονικοποιημένη δυϊκή απεικόνιση ενός χώρου με νόρμα* $(X, || \cdot ||)$. *Μια απεικόνιση* $\tilde{\mathcal{J}} : X \to X^*$ *καλείται τομέας της* $\mathcal{J}$, *αν* $\tilde{\mathcal{J}}(x) \in \mathcal{J}(x)$ *για κάθε* $x \in X$.

Παρατήρηση 1.3.2. *Οι τομείς του* $\mathcal{J}$ *υπάρχουν, αφού το σύνολο* $\mathcal{J}(x)$ *είναι μη κενό για κάθε* $x \in X$ *(Από το Θεώρημα 1.3.2 (a)). Πράγματι, εφόσον το* $\mathcal{J}(x)$ *είναι μη κενό για κάθε* $x \in X$, *το* $\{\mathcal{J}(x)\}_{x \in X}$ *είναι μια μη κενή οικογένεια μη κενών συνόλων . Επομένως, από το αξίωμα της επιλογής μπορεί να κατασκευαστεί ένα σύνολο, το οποίο και θα περιέχει ένα ακριβώς στοιχείο, έστω το* f_x, *το οποίο και θα προέρχεται από κάθε σύνολο* $\mathcal{J}(x)$. *Αυτό καθορίζει έναν τομέα* $\tilde{\mathcal{J}} : X \to X^*$ *του* $\mathcal{J}$ *ορισμένο ως* $\tilde{\mathcal{J}}(x) = f_x$ *για όλα τα* $x \in X$. *Η κανονικοποιημένη δυϊκή απεικόνιση* $\mathcal{J}$ *ενός χώρου με νόρμα* X *μπορεί να έχει άπειρους διαφορετικούς τομείς, αφού για* $x \in X$, *το* $\mathcal{J}(x)$ *περιέχει άπειρα, διαφορετικα μεταξυ τους στοιχεία του* X^*. *Για παράδειγμα, θεωρούμε την κανονικοποιημένη δυϊκή απεικόνιση* $\mathcal{J}$ *του χώρου με νόρμα,*
$X = (\mathbb{K}^2, || \cdot ||_1)$, *όπου* $||x|| = \sum_{k=1}^{2} |x_k|$ *για* $x = (x_1, x_2) \in X$. *Έχουμε ήδη διαπιστώσει (Παρατήρηση 1.3.1) ότι για* $a = (1, 0) \in X$, *το σύνολο* $\mathcal{J}(a)$ *περιέχει άπειρα, διαφορετικά μεταξύ τους στοιχεία του* X^*, *που δίνονται από τον*

τύπο

$$f(x) = x_1 + k_2 x_2, \quad x \in X,$$

για κάθε $k_2 \in \mathbb{K}$ *με* $|k_2| \leq 1$. *Δεδομένου ότι το* $\mathcal{J}(x)$ *είναι μη κενό για κάθε* $x \neq a$ *στον* X, *κάθε ένα από τα άπειρα διαφορετικά στοιχεία του* $\mathcal{J}(a)$ *δημιουργεί (σύμφωνα με το αξίωμα της επιλογής) έναν τομέα* $\tilde{\mathcal{J}}$ *του* $\mathcal{J}$. *Επομένως, η κανονικοποιημένη δυϊκή απεικόνιση ενός χώρου με νόρμα έχει άπειρους διαφορετικούς τομείς. Η κανονικοποιημένη δυϊκή απεικόνιση* $\mathcal{J}$ *ενός χώρου με νόρμα* X *έχει ένα μοναδικό τομέα αν και μόνο αν το σύνολο* $\mathcal{J}(x)$ *είναι ένα μονοσύνολο για κάθε* $x \in X$.

1.4 Ύπαρξη Ημιεσωτερικού Γινομένου

Σε αυτήν την ενότητα θα ασχοληθούμε με την ύπαρξη ημιεσωτερικού γινομένου σε χώρους με νόρμα. Το ακόλουθο θεώρημα, σύμφωνα με τον I.Rosca αποτελεί ορόσημο, αφού αναδεικνύει μία φυσική σύνδεση ανάμεσα στην κανονικοποιημένη δυϊκή απεικόνιση ενός χώρου με νόρμα και στο ημιεσωτερικό γινόμενο του χώρου αυτού.

Θεώρημα 1.4.1. *Έστω* $(X, ||\cdot||)$ *χώρος με νόρμα. Τότε κάθε ημιεσωτερικό γινόμενο στον* X *που επάγει την νόρμα* $||\cdot||$ *έχει την μορφή*

$$[x|y] = (\tilde{\mathcal{J}}(y))(x) \quad \forall x, y \in X,$$

όπου $\tilde{\mathcal{J}}$ *είναι ένας τομέας της κανονικοποιημένης δυϊκής απεικόνισης του* X.

Απόδειξη. Έστω $\tilde{\mathcal{J}}$ ένας τομέας της κανονικοποιημένης δυϊκής απεικόνισης $\mathcal{J}$ του X. Ορίζουμε το συναρτησοειδές $[\cdot|\cdot] : X \times X \to \mathbb{K}$ με $[x|y] = (\tilde{\mathcal{J}}(y))(x)$.

Τότε για κάθε $x, y, z \in X$ και $\lambda \in \mathbb{K}$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
[\,x+y\,|\,z\,] &= \big(\tilde{\mathcal{J}}(z)\big)(x+y) \\
&= [\,x\,|\,z\,] + [\,y\,|\,z\,], \\
[\,\lambda x\,|\,y\,] &= \big(\tilde{\mathcal{J}}(y)\big)(\lambda x) \\
&= \lambda[\,x\,|\,y\,], \\
[\,x\,|\,\lambda y\,] &= \big(\tilde{\mathcal{J}}(\lambda y)\big)(x) \\
&= \big(\bar{\lambda}\tilde{\mathcal{J}}(y)\big)(x), \quad \text{από Θεώρημα 1.3.2, (β)} \\
&= \bar{\lambda}[\,x\,|\,y\,],
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
|\,[\,x\,|\,y\,]\,|^2 &= |\tilde{\mathcal{J}}(y)(x)|^2 \\
&\leq ||\tilde{\mathcal{J}}(y)||^2||x||^2 \\
&= ||y||^2||x||^2, \quad \text{από τον ορισμό της } \tilde{\mathcal{J}}(y) \\
&= (\tilde{\mathcal{J}}(y))(y)\cdot(\tilde{\mathcal{J}}(x))(x) \\
&= [\,x\,|\,x\,]\,[\,y\,|\,y\,].
\end{aligned}$$

Επίσης έχουμε ότι $[x|x] = (\tilde{\mathcal{J}}(x))(x) = ||x||^2 \geq 0$, $\forall x \in X$, και $[x|x] = 0$, δηλαδή, $||x|| = 0 \Rightarrow x = 0$. Επομένως η απεικόνιση $[\,\cdot\,|\,\cdot\,]$ είναι ένα ημιεσωτερικό γινόμενο στον X το οποίο επάγει τη νόρμα $||\cdot||$ του X.

Αντίστροφα, έστω $[\cdot|\cdot]$ ένα ημιεσωτερικό γινόμενο στον X που επάγει τη νόρμα$\|\cdot\|$ του X. Ορίζουμε την απεικόνιση $\tilde{\mathcal{J}} : X \to X^*$ έτσι ώστε για κάθε $y \in X$, το συναρτησοειδές $\tilde{\mathcal{J}}(y) : X \to \mathbb{K}$ δίνεται από τη σχέση

$$(\tilde{\mathcal{J}}(y))(x) = [x|y] \quad \forall x \in X.$$

Τότε για κάθε $y \in X$, $(\tilde{\mathcal{J}}(y))(y) = [y|y] = \|y\|^2$. Επίσης, από το Θεώρημα 1.2.1(β) έχουμε ότι $\tilde{J}(y) \in X^*$ και $\left\|\tilde{\mathcal{J}}(y)\right\| = \|y\|$ για κάθε $y \in X$. Άρα, για κάθε $y \in X$, $\tilde{\mathcal{J}}(y) \in \mathcal{J}(y)$, και άρα η $\tilde{\mathcal{J}}$ είναι ένας τομέας της κανονικοποιημένης δυϊκής απεικόνισης $\mathcal{J}$ του Χ. $\square$

Παρατήρηση 1.4.1. *Επειδή οι τομείς της κανονικοποιημένης δυϊκής απεικόνισης $\mathcal{J}$ του χώρου με νόρμα X υπάρχουν (Παρατήρηση 1.3.2), το παραπάνω θεώρημα επιβεβαιώνει ότι σε κάθε χώρο με νόρμα μπορεί να κατασκευαστεί ένα ημιεσωτερικό γινόμενο το οποίο επάγει τη νόρμα. Αφού η απεικόνιση $\mathcal{J}$ μπορεί να έχει άπειρους διαφορετικούς μεταξύ τους τομείς, τότε μπορούν να υπάρχουν και άπειρα διαφορετικά ημιεσωτερικά γινόμενα σε ένα συγκεκριμένο χώρο με νόρμα. Για παράδειγμα, θεωρούμε το χώρο με νόρμα $X = (\mathbb{K}^2, || \cdot ||_1)$. Όπως έχουμε ήδη διαπιστώσει (Παρατήρηση 1.3.2), η κανονικοποιημένη δυϊκή απεικόνιση έχει άπειρους διαφορετικούς τομείς. Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, κάθε τέτοιος τομέας, έστω $\tilde{\mathcal{J}}$, ορίζει ένα ημιεσωτερικό γινόμενο στον X σύμφωνα με τον τύπο*

$$[\, x \,|\, y \,] = \big(\tilde{\mathcal{J}}(y)\big)(x), \quad x, y \in X.$$

Αυτό αποδεικνύει την ύπαρξη άπειρων διαφορετικών ημιεσωτερικών γινομένων στον χώρο. Μεγαλύτερης έκτασης αναφορά για την μοναδικότητα του ημιεσωτερικού γινομένου θα γίνει στην επόμενη ενότητα.

Μπορεί να παρατηρηθεί ότι το Θεώρημα 1.4.1 έχει τριπλή σημασία. Στα πλαίσια ενός χώρου με νόρμα, το θεώρημα μας πληροφορεί ως προς την ύπαρξη, τη μοναδικότητα και τον χαρακτηρισμό των ημιεσωτερικών γινομένων που επάγουν με τη νόρμα. Σε αυτό το σημείο, επικεντρωνόμαστε στην ύπαρξη ημιεσωτερικών γινομένων σε χώρο με νόρμα.

Έστω $(X, || \cdot ||)$ χώρος με νόρμα. Η νόρμα $|| \cdot ||$ στον X δεν επάγεται απαραίτητα από ένα ημιεσωτερικό γινόμενο. Παρόλα αυτά, οι παραπάνω θέσεις υποδεικνύουν ότι πάντα υπάρχει ένα ημιεσωτερικό γινόμενο $[\cdot \,|\, \cdot]$ στον X, το οποίο και επάγει τη νόρμα $|| \cdot ||$. Επομένως, στα πλαίσια ενός χώρου με νόρμα, ένα ημιεσωτερικό γινόμενο μπορεί να οριστεί ως εξής

Ορισμός 1.4.1. *Έστω X ένας χώρος με νόρμα. Η απεικόνιση $[\cdot \,|\, \cdot] : X \times X \to \mathbb{K}$ καλείται ημιεσωτερικό γινόμενο στον X αν ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες για όλα τα $x, y, z \in X$ και όλα τα $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$:*

$$[\,\lambda x\,+\,\mu y\,|\,z\,] = \lambda[\,x\,|\,z\,] + \mu[\,y\,|\,z\,], \tag{S1}$$
$$[\,x\,|\,\lambda y\,] = \bar{\lambda}[\,x\,|y\,], \tag{S2}$$
$$[\,x\,|\,x\,] = ||x||^2, \tag{S3}$$
$$|\,[\,x\,|\,y\,]\,| \;\leq\; ||x||\,||y||. \tag{S4}$$

Ακολουθούν ορισμένα παραδείγματα ημιεσωτερικών γινομένων, τα οποία δεν είναι εσωτερικά γινόμενα.

Παράδειγμα 1.4.1. *Έστω ο χώρος* $(\mathbb{R}^3, ||\cdot||_1)$, *όπου* $||x||_1 = \sum_{k=1}^{3} |x_k|$ *για* $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. *Το συναρτησοειδές που δίνεται από τον τύπο*

$$[\,x\,|\,y\,] = ||y||_1 \sum_{\substack{k=1\\ y_k\neq 0}}^{3} \frac{x_k y_k}{|y_k|}, \quad x, y \in \mathbb{R}^3,$$

είναι ένα ημιεσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^3$ *το οποίο επάγει την νόρμα* $||\cdot||_1$.

Παράδειγμα 1.4.2. *Έστω ο μιγαδικός χώρος* $(\ell_p, ||\cdot||_p)$ *με την νόρμα* $||x||_p = \big(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\big)^{1/p}$ *των p-αθροίσιμων ακολουθιών, όπου* $x = (x_1, x_2, ...) \in \ell_p$, $1 \leq p < \infty$, $p \neq 2$. *Τότε το συναρτησοειδές που δίνεται από τον τύπο*

$$[\,x\,|\,y\,] = ||y||_p^{2-p} \sum_{k=1}^{\infty} x_k \bar{y}_k |y_k|^{p-2}, \quad x, y \in \ell_p,$$

είναι ένα ημιεσωτερικό γινόμενο στον ℓ_p *το οποίο επάγει την νόρμα* $||\cdot||_p$.

Παράδειγμα 1.4.3. *Αν* $1 < p < \infty$ *έστω ο πραγματικός χώρος* $L_p = L_p(X, \mathcal{A}, \mu)$, $1 \leq p < \infty$, *όλων των p-ολοκληρώσιμων συναρτήσεων στον μετρικό χώρο* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *με τη νόρμα*

$$||x||_p = \Big(\int_X |x|^p d\mu\Big)^{1/p}, \quad x \in L_p.$$

Τότε το συναρτησοειδές που δίνεται από τον τύπο

$$[\, x \,|\, y \,] = ||y||_p^{2-p} \int_X x|y|^{p-2} y d\mu, \quad x, y \in L_p,$$

είναι ένα ημιεσωτερικό γινόμενο στον L_p *το οποίο επάγει την νόρμα* $|| \cdot ||_p$.

Παράδειγμα 1.4.4. *Έστω ο μιγαδικός χώρος με νόρμα* $C[0,1]$, *όλων των μιγαδικών συνεχών συναρτήσεων , με τη νόρμα*

$$||f||_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|, \quad f \in C[0,1].$$

Αν $t \in [0,1]$, *τότε από το Λήμμα του Uryshon, υπάρχει* $f_t \in C[0,1]$ *τέτοιο ώστε* $f_t(t) = 1$ *και* $||f_t||_\infty = 1$. *Για τέτοιο* f_t *όριζουμε* $[g|f_t] = g(t)$ *για όλα τα* $g \in C[0,1]$.

$$[f_t|f_t] = f_t(t) = 1 = \|f_t\|_\infty^2.$$

Αν $f \in C[0,1] \setminus f_t$, *παίρνουμε* $t \in [0,1]$ *τέτοιο ώστε* $f(t) = \|f\|_\infty$ *και ορίζουμε*

$$[g|f] = \overline{f(t)} g(t) \quad \forall g \in C[0,1].$$

Τότε το συναρτησοειδές που δίνεται από τον τύπο

$$[\, g \,|\, f \,] = \begin{cases} g(t) & \text{αν} \quad f = f_t, \\ f(\bar{t}) g(t) & \text{αν} \quad f \in C[0,1] \setminus \{f_t\} \end{cases}$$

$\forall g \in C[0,1]$, *είναι ένα ημιεσωτερικό γινόμενο συμβατό με τη νόρμα* $|| \cdot ||_\infty$.

1.5 Μοναδικότητα Ημιεσωτερικού Γινομένου

Έχοντας μελετήσει την ύπαρξη ημιεσωτερικού γινομένου σε χώρο με νόρμα που επάγει τη νόρμα (η οποία εξασφαλίζεται από το Θεώρημα 1.4.1 και 1.3.2 (α)), ας ασχοληθούμε τώρα με το ερώτημα της μοναδικότητας.

Έστω $(X, ||\cdot||)$ χώρος με νόρμα. Από το Θεώρημα 1.4.1 προκύπτει ότι το συναρτησοειδές $[\cdot|\cdot] : X \to \mathbb{K}$ το οποίο δίνεται από τη σχέση $[\cdot|\cdot] = (\tilde{\mathcal{J}}(y))(x)$ ορίζει ένα ημιεσωτερικό γινόμενο στον X, το οποίο παράγει την νόρμα $||\cdot||$ του X αν και μόνο αν το $\tilde{\mathcal{J}}$ είναι τομέας της κανονικοποιημένης δυϊκής απεικόνισης $\mathcal{J}$ του X. Το Θεώρημα 1.3.2 (α) δείχνει ότι για κάθε $x \in X$ το $\mathcal{J}(x)$ είναι ένα μη κενό υποσύνολο του X^*. Σαν συνέπεια των παραπάνω παρατηρούμε ότι υπάρχει μία 1-1 αντιστοιχία ανάμεσα στο σύνολο των ημιεσωτερικών γινομένων στο X που επάγουν τη νόρμα $||\cdot||$ του X και στο σύνολο των τομέων της κανονικοποιημένης δυϊκής απεικόνισης $\mathcal{J}$ του X. Συνεπώς, οι συνθήκες για την ύπαρξη ενός μοναδικού ημιεσωτερικού γινομένου σε χώρο με νόρμα X είναι ίδιες με εκείνες που απαιτούνται για να γίνει κάθε $\mathcal{J}(x)$ για $x \in X$ ένα μονοσύνολο. Μια τέτοια συνθήκη προκύπτει ότι είναι η λειότητα του χώρου. Άρα η λειότητα ενός χώρου με νόρμα είναι μια συνθήκη που είναι αναγκαία και ικανή για την ύπαρξη ενός μοναδικού ημιεσωτερικού γινομένου στο χώρο που επάγει τη νόρμα του χώρου. Παρακάτω, το $B(x)$ και το $S(x)$ δηλώνουν την κλειστή μοναδιαία μπάλα $\{x \in X : ||x|| \leq 1\}$ και τη μοναδιαία σφαίρα $\{x \in X : ||x|| = 1\}$ αντίστοιχα.

Ορισμός 1.5.1. *Έστω $(X, ||\cdot||)$ χώρος με νόρμα. Ένα στοιχείο $x_0 \in S(X)$ καλείται σημείο λειότητας του $B(X)$, αν υπάρχει ακριβώς ένα στοιχείο $f_0 \in S(X^*)$ τέτοιο ώστε $f_0(x_0) = 1$. Ο χώρος X λέγεται λείος, αν κάθε σημείο του $S(X)$ είναι σημείο λειότητας του $B(X)$, δηλαδή αν για κάθε $x \in S(X)$, υπάρχει ένα μοναδικό $f \in S(X^*)$ τέτοιο ώστε $f(x) = 1$.*

Το επόμενο αποτέλεσμα παρέχει ένα χαρακτηρισμό σημείων λειότητας ως προς την κανονικοποιημένη δυϊκή απεικόνιση.

Θεώρημα 1.5.1. *Έστω $(X, ||\cdot||)$ ένας χώρος με νόρμα και $x_0 \in S(X)$. Τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(α) το x_0 είναι σημείο λειότητας του $B(X)$,

(β) το $\mathcal{J}(x_0)$ είναι μονοσύνολο του X^*.

Απόδειξη. (α)$\Rightarrow$(β): Για κάθε $x_0 \in S(X)$, το $\mathcal{J}(x_0)$ είναι ένα μη κενό υποσύνολο του X^*, σύμφωνα με το Θεώρημα 1.3.2 (α). Έστω ότι υπάρχουν διαφορετικά στοιχεία f, g στο $\mathcal{J}(x_0)$. Αφού $x_0 \in S(X)$, τότε

$$f(x_0) = ||x_0||^2 = 1 \text{ και } ||f|| = ||x_0|| = 1,$$

και

$$g(x_0) = ||x_0||^2 = 1 \text{ και } ||g|| = ||x_0|| = 1.$$

Άρα $f(x_0) = 1 = g(x_0)$ και $f, g \in S(X^*)$, το οποίο αντιβαίνει το (α).
(β)$\Rightarrow$(α): Αντιστρόφως, υποθέτουμε ότι το x_0 δεν είναι σημείο λειότητας του $B(X)$. Τότε υπάρχουν διαφορετικά $f, g \in S(X^*)$ τέτοια ώστε $f(x_0) = 1$ και $g(x_0) = 1$. Αφού $x_0 \in S(X)$, τότε $f(x_0) = ||x_0|| = g(x_0)$. Θέτουμε $f_1 = ||x_0||f$ και $g_1 = ||x_0||g$. Τότε

$$\begin{aligned}
&f_1, g_1 \in X^*,\\
&f_1 \neq g_1,\\
&f_1(x_0) = ||x_0||f(x_0) = ||x_0||^2,\\
&||f_1|| = ||x_0||,\\
&g_1(x_0) = ||x_0||g(x_0) = ||x_0||^2,\\
&||g_1|| = ||x_0||.
\end{aligned}$$

Άρα $f_1, g_1 \in \mathcal{J}(x_0)$ με $f_1 \neq g_1$, το οποίο αντιβαίνει το (β). Συνεπώς, τα (α) και (β) είναι ισοδύναμα. □

Σαν άμεση συνέπεια του παραπάνω θεωρήματος προκύπτει το παρακάτω πόρισμα.

Πόρισμα 1.5.1. *Έστω $(X, ||\cdot||)$ ένας χώρος με νόρμα. Τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(α) ο X είναι λείος,

(β) Για κάθε $x \in S(X)$, το $\mathcal{J}(x)$ είναι μονοσύνολο του X^*.

Απόδειξη. Η απόδειξη προκύπτει από το Θεώρημα 1.5.1 και τον Ορισμό 1.5.1 της λειότητας σε ένα χώρο με νόρμα. □

Το επόμενο αποτέλεσμα παρέχει μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη μοναδικού ημιεσωτερικού γινομένου σε χώρο με νόρμα που επάγει τη νόρμα.

Θεώρημα 1.5.2. *Έστω $(X, ||\cdot||)$ ένας χώρος με νόρμα. Τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(α) ο X είναι λείος,

(β) Υπάρχει μοναδικό ημιεσωτερικό γινόμενο στον X που επάγει την νόρμα $||\cdot||$ του X.

Απόδειξη. (α)⇒(β): Υποθέτουμε ότι ο X είναι λείος. Τότε απο το Πόρισμα 1.5.1 το $\mathcal{J}(x)$ είναι ένα μονοσύνολο στο X^* για κάθε $x \in S(X)$, άρα και για κάθε $x \in X$. Αυτό συνεπάγεται την ύπαρξη μοναδικού τομέα του $\mathcal{J}$ και επομένως από το Θεώρημα 1.4.1 υπάρχει μοναδικό ημιεσωτερικό γινόμενο στον X που επάγει τη νόρμα $||\cdot||$.
(β)⇒(α): Αντιστρόφως, υποθέτουμε ότι υπάρχει μοναδικό ημιεσωτερικό γινόμενο στον X που επάγει τη νορμα $||\cdot||$. Τότε από το Θεώρημα 1.4.1 το $\mathcal{J}$ έχει μοναδικό τομέα. Αυτό δείχνει ότι το $\mathcal{J}(x)$ είναι ένα μονοσύνολο στον X^* για κάθε $x \in X$ και ειδικότερα για κάθε $x \in S(X)$. Άρα, από το Πόρισμα 1.5.1 ο χώρος X είναι λείος. □

Τώρα, για λόγους πληρότητας, ας αναφέρουμε εν συντομία κάποιες συνθήκες οι οποίες είναι ικανές και αναγκαίες για την ύπαρξη ενός μοναδικού ημιεσωτερικού γινομένου σε χώρο με νόρμα που επάγει τη νόρμα.

Ακριβώς όπως υπάρχει σύνδεση μεταξύ της λειότητας της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης μιας μεταβλητης και της διαφορισιμότητας της συνάρτησης, έτσι υπάρχει σύνδεση και μεταξύ της λειότητας ενός χώρου με νόρμα και τη Gateaux διαφορισιμότητας της νόρμας.

Ορισμός 1.5.2. *Έστω $(X, ||\cdot||)$ χώρος με νόρμα. Η νόρμα $||\cdot||$ του X λέγεται Gateaux διαφορίσιμη εάν το*

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t\in\mathbb{R}}} \frac{||x+ty|| - ||x||}{t}$$

υπάρχει για κάθε $x \in S(X)$ *και κάθε* $y \in X$.

Το επόμενο αποτέλεσμα ορίζει την ακριβή σύνδεση ανάμεσα στη λειότητα ενός χώρου με νόρμα και την Gateaux διαφορισιμότητα της νόρμας.

Θεώρημα 1.5.3. *Έστω* $(X, ||\cdot||)$ *ένας χώρος με νόρμα και* $x_0 \in S(X)$. *Τότε ο* X *είναι λείος αν και μόνο αν η νόρμα του είναι Gateaux διαφορίσιμη.*

Απόδειξη. Για την απόδειξη του θεωρήματος παραπέμπουμε στο THEOREM 1, σελίδα 4, [4]. □

Ο J. R Giles έχει προτείνει την έννοια του συνεχούς ημιεσωτερικού γινομένου σε γραμμικό χώρο επιβάλλοντας μια ιδιότητα συνέχειας στο δεξί μέλος του ημιεσωτερικού γινομένου, με την οποία μπορεί να χαρακτηριστεί η Gateaux διαφορισιμότητα. Το $Re[x|y]$ δηλώνει το πραγματικό μέρος του $[x|y]$.

Ορισμός 1.5.3. *Έστω* $(X, ||\cdot||)$ *χώρος με νόρμα και* $[\cdot|\cdot]$ *ένα ημιεσωτερικό γινόμενο στον* X. *Το ημιεσωτερικό γινόμενο λέγεται συνεχές αν*

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ t \in \mathbb{R}}} Re[x|y + tx] = Re[x|y] \quad \forall x, y \in S(X).$$

Στα πλαίσια ενός χώρου με νόρμα, ο S. S. Dragomir έχει δώσει ένα χαρακτηρισμό ενός συνεχούς ημιεσωτερικού γινομένου ως προς την Gateaux διαφορισιμότητα ως εξής:

Θεώρημα 1.5.4. *Έστω* $(X, ||\cdot||)$ *ένας χώρος με νόρμα και* $[\cdot|\cdot]$ *ένα ημιεσωτερικό γινόμενο στον* X. *Τότε το* $[\cdot|\cdot]$ *είναι συνεχές αν και μόνο αν η νόρμα* $||\cdot||$ *είναι Gateaux διαφορίσιμη.*

Απόδειξη. Για την απόδειξη του θεωρήματος παραπέμπουμε στο THEOREM 11, σελίδα 22, [4]. □

Στη συνέχεια συνδυάζοντας τα Θεωρήματα 1.5.2, 1.5.3 και 1.5.4, έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα χαρακτηρισμού για τη μοναδικότητα του ημιεσωτερικού γινομένου σε χώρο με νόρμα που επάγει τη νόρμα.

Θεώρημα 1.5.5. *Έστω* $(X, ||\cdot||)$ *ένας χώρος με νόρμα και* $[\cdot|\cdot]$ *ένα ημιεσωτερικό γινόμενο στον* X *που επάγει τη νορμα* $||\cdot||$. *Τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(α) Το ημιεσωτερικό γινόμενο $[\cdot|\cdot]$ είναι μοναδικό,

(β) Το ημιεσωτερικό γινόμενο $[\cdot|\cdot]$ είναι συνεχές,

(γ) Η νόρμα $||\cdot||$ είναι Gateaux διαφορίσιμη,

(δ) Ο χώρος X είναι λείος.

Ο G. Lumer έχει δείξει ότι υπάρχει μοναδικό ημιεσωτερικό γινόμενο σε ένα χώρο Hilbert και ότι αυτό είναι εσωτερικό γινόμενο αν και μόνο αν η νόρμα που επάγει ικανοποιεί τον κανόνα του παραλληλογράμμου.

Όπως ειπώθηκε στην αρχή του κεφαλαίου, η έννοια του ημιεσωτερικού γινομένου έχει κάνει σημαντική πρόοδο αφότου εισήχθη απο τον G. Lumer. Στα πλαίσια ενός χώρου με νόρμα, το ημιεσωτερικό γινόμενο παρέχει μια επαρκή δομή και νέες τεχνικές για λήψη αρκετών αποτελεσμάτων. Κατέχει σημαντικό ρόλο στη θεωρία τελεστών, των διαφορικών εξισώσεων, σε γραμμικές και μη γραμμικές ημιομάδες σε χώρους Banach. Εμεις θα χρησιμοποιήσουμε την έννοια στο επόμενο κεφάλαιο απο τη σκοπιά της θεωρίας των Βέλτιστων Προσεγγίσεων.

Κεφάλαιο 2

Χαρακτηρισμός των Βέλτιστων Προσεγγίσεων

2.1 Εισαγωγή

Αυτό το κεφάλαιο ασχολείται με το χαρακτηρισμό της βέλτιστης προσέγγισης σε χώρους με νόρμα. Σε ένα χώρο με νόρμα, γενικά, η βέλτιστη προσέγγιση χαρακτηρίζεται μέσω της νόρμας. Εδώ όμως, θα αντιμετωπίσουμε το ζήτημα διαφορετικά. Αντί για τη νόρμα, θα χρησιμοποιήσουμε το ημιεσωτερικό γινόμενο που επάγει τη νόρμα. Αυτή η μέθοδος μας επιτρέπει να καταλήξουμε σε χαρακτηρισμούς που θα δούμε στη συνέχεια.

Ξεκινώντας το κεφάλαιο, θα ασχοληθούμε με την βέλτιστη προσέγγιση σε χώρους με νόρμα. Στην προσπάθεια μας να χαρακτηρίσουμε την βέλτιστη προσέγγιση, πρώτα απ'ολα αντλούμε στοιχεία από τα κυρτά σύνολα. Ο δυϊκός κώνος καθώς και το ορθογώνιο συμπλήρωμα ενός συνόλου παρουσιάζονται επίσης στο συγκεκριμένο κεφάλαιο, όπως και ορισμένες απο τις βασικές τους ιδότητες.

2.2 Βέλτιστη Προσέγγιση σε Χώρους με Νόρμα

Είναι ευρέως γνωστό ότι το πρόβλημα της βέλτιστης προσέγγισης μιας συνάρτησης έγκειται από την εύρεση μιας συνάρτησης η οποία ανήκει σε μια σταθερή οικογένεια έτσι ώστε η απόκλιση από την δοθείσα συνάρτηση να είναι η ελάχιστη. Το πρόβλημα αυτό αρχικά διατυπώθηκε το 1853 από τον P.L Chebyshev, ο οποίος διερεύνησε την προσέγγιση συνεχών συναρτήσεων από αλγεβρικά πολυώνυμα γνωστού βαθμού. Ώς μέτρο απόκλισης μεταξύ δύο συναρτήσεων χρησιμοποίησε το μέγιστο της απόλυτης τιμής της διαφοράς τους. Αργότερα αρκετοί μαθηματικοί ξεκίνησαν να μελετούν άλλα προβλήματα προσέγγισης. Με την εξέλιξη της θεωρίας των χώρων με νόρμα έγινε ξεκάθαρο ότι ένας μεγάλος αριθμός προβλημάτων βέλτιστης προσέγγισης μπορούν να ενταχθούν σε μια γενικευμένη διατύπωση ως προς τους χώρους με νόρμα, αν η νόρμα θεωρηθεί μέτρο απόκλισης.

Οι βάσεις της θεωρίας της βέλτιστης προσέγγισης σε χώρους με νόρμα τέθηκαν το 1920 από έναν από τους ιδρυτές της συναρτησιακής ανάλυσης, τον H. Banach. Μεταξύ του 1930 και 1950, οι ιδέες του Banach αναπτύχθηκαν και συστηματικοποιήθηκαν από μαθηματικούς όπως ο S.M Nicolesco, M.G. Krein, M.I Achiezer, A.I Markoshevich, S.L Walsh και A.N Kolmogorov.

Το πρόβλημα της βέλτιστης προσέγγισης σε ένα χώρο με νόρμα μπορεί να διατυπωθεί ως εξής: *Έστω $(X, ||\cdot||)$ ένας χώρος με νόρμα πάνω στο σύνολο των πραγματικών ή μιγαδικών αριθμών $\mathbb{K}$, G ένα μη κενό υποσύνολο του X και $x \in X$. Τότε η απόσταση του x από το G, $d(x, G)$ δίνεται από τον τύπο*

$$d(x, G) := \inf\{||x - g|| : g \in G\}.$$

Το πρόβλημα της βέλτιστης προσέγγισης έγκειται στην εύρεση ενός $g_0 \in G$ έτσι ώστε

$$||x - g_0|| = d(x, G).$$

Κάθε στοιχείο $g_0 \in G$ με τη συγκεκριμένη ιδότητα καλείται βέλτιστη προσέγγιση του x από το G. Το G καλείται προσεγγίζον σύνολο ενώ το x προσεγγιζόμενο σημείο.

Ορισμός 2.2.1. *Έστω $(X, ||\cdot||)$ ένας χώρος με νόρμα, G ένα μη κενό υποσύνολό του και $x \in X$. Ένα στοιχείο $g_0 \in G$ καλείται βέλτιστη προσέγγιση (best approximation) του x από το G, αν $||x - g_0|| = d(x, G)$. Σε αυτήν την περίπτωση, ο αριθμός $d(x, G)$ καλείται σφάλμα προσέγγισης (error of approximation).*

Ένα στοιχείο $g_0 \in G$ είναι η βέλτιστη προσέγγιση του x από το G αν και μόνο αν $||x - g_0|| \leq ||x - g||$ για κάθε $g \in G$. Το σύνολο όλων των βέλτιστων προσεγγίσεων του x από το G συμβολίζεται με $P_G(x)$. Επομένως:

$$P_G(x) := \{g_0 \in G : ||x - g_0|| = d(x, G)\}.$$

Αυτό καθορίζει την απεικόνιση $P_G : X \to \mathcal{P}(G)$, όπου $\mathcal{P}(G)$ είναι το δυναμοσύνολο του G. Το P_G ονομάζεται *μετρική προβολή* (metric projection) (ή απεικόνιση πλησιέστερου σημείου) στο G.

Αν κάθε $x \in X$ έχει τουλάχιστον (αντίστοιχα το πολύ) μια βέλτιστη προσέγγιση από το G, τότε το G καλείται proximinal(συνδιασμός των αγγλικων λέξεων "proximity", "minimal" που σημαίνουν ¨εγγύτητα' και ¨ελάχιστο¨) (αντίστοιχα semi-Chebysev). Αν κάθε $x \in X$ έχει ακριβώς μια βέλτιστη προσέγγιση από το G, τότε το G καλείται Chebysev σύνολο. Επομένως, το G είναι proximinal (αντίστοιχα semi-Chebysev, Chebysev) σύνολο αν το $\mathcal{P}_G$ είναι μη κενό (αντίστοιχα κενό ή μονοσύνολο, μονοσύνολο).

Η γενική θεωρία της βέλτιστης προσέγγισης μπορεί να περιγραφεί ως η μαθηματική μελέτη που στόχο έχει την εύρεση απαντήσεων στα ακόλουθα βασικά ερωτήματα:

1. (Ύπαρξη βέλτιστης προσέγγισης). Ποιά σύνολα είναι proximinal;
2. (Μοναδικότητα της βέλτιστης προσέγγισης). Ποια σύνολα είναι Chebysev;

3. (Χαρακτηρισμός της βέλτιστης προσέγγισης). Πώς μπορεί κάποιος να αναγνωρίσει πότε ένα δοθέν στοιχείο $g \in G$ είναι η βέλτιστη προσέγγιση του x από το σύνολο G;

4. (Σφάλμα προσέγγισης). Πώς μπορεί να υπολογιστεί το σφάλμα προσέγγισης $d(x, G)$, ή έστω να προσδιοριστεί το άνω και κάτω φράγμα της τιμής αυτής;

5. (Υπολογισμός των βέλτιστων προσεγγίσεων). Μπορεί να δημιουργηθεί αλγόριθμος υπολογισμού για την εύρεση βέλτιστων προσεγγίσεων;

6. (Συνέχεια των βέλτιστών προσεγγίσεων). Πώς μεταβάλλεται η P_G ως συνάρτηση του x (ή του G);

Από τα παραπάνω ερωτήματα αυτό που μας ενδιαφέρει περισσότερο είναι το τρίτο. Γενικά οι χαρακτηρισμοί των βέλτιστων προσεγγίσεων σε ένα χώρο με νόρμα προέρχονται μέσω της νόρμας του χώρου και οι χαρακτηρισμοί σε ένα χώρο ημιεσωτερικού γινομένου μέσω του ημιεσωτερικού γινομένου του χώρου. Εδώ θα αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα διαφορετικά. Η προσπάθειά μας επικεντρώνεται στον χαρακτηρισμό των βέλτιστων προσεγγίσεων σε ένα χώρο με νόρμα, όχι μέσω της νόρμας του χώρου αλλά μέσω του ημιεσωτερικού γινομένου που επάγει τη νόρμα του χώρου. Στόχος μας είναι να συγκεντρώσουμε ορισμένα αποτελέσματα από τον χαρακτηρισμό των βέλτιστων προσεγγίσεων, στα πλαίσια ενός χώρου με νόρμα χρησιμοποιώντας ορισμένες ιδιότητες που διέπουν το ημιεσωτερικό γινόμενο.

Από το Κεφάλαιο 1, υπάρχει πάντα ένα ημιεσωτερικό γινόμενο σε ένα χώρο με νόρμα $(X, ||\cdot||)$ πάνω στο σώμα των πραγματικών ή μιγαδικών αριθμών(Ορισμός 1.4.1). Αυτή η ιδέα αναπτύσσεται σε αυτό το κεφάλαιο μέσα από το χαρακτηρισμό των βέλτιστων προσεγγίσεων σε χώρους με νόρμα από κυρτά σύνολα, καθώς και από κυρτούς κώνους και υπόχωρους.

Πρόταση 2.2.1. *Για κάθε μη κενό υποσύνολο G του χώρου με νόρμα X έχουμε ότι*

$$P_G(x) = \begin{cases} x, & \alpha\nu \quad x \in G, \\ \emptyset, & \alpha\nu \quad x \in \bar{G} \setminus G. \end{cases}$$

Απόδειξη. Έστω $x \in G$. Τότε $d(x,x) = 0$, και άρα $d(x,G) = 0$. Συνεπώς,

$$P_G(x) = \{y \in G : \|x-y\| = d(x,G)\} = \{y \in G : \|x-y\| = 0\} = \{x\}.$$

Έστω $x \in \overline{G} \setminus G$. Τότε υπάρχει ακολουθία $\{x_n\} \subseteq G$ τέτοια ώστε $\lim \|x_n - x\| = 0$. Άρα $d(x,G) = 0$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} P_G(x) &= \{y \in G : \|x-y\| = d(x,G)\} \\ &= \{y \in G : \|x-y\| = 0\} \\ &= \{y \in G : x = y\} = \emptyset, \quad \text{αφού } x \notin G. \end{aligned}$$

□

Λόγω της παραπάνω πρότασης, αρκεί να προβούμε στο χαρακτηρισμό των βέλτιστων προσεγγίσεων μόνο των στοιχείων $x \in X \setminus \bar{G}$. Προκειμένου να εξαλείψουμε την τετριμμένη περίπτωση όπου τέτοια στοιχεία x δεν υπάρχουν κατα την διερεύνηση του ζητήματος, τα προσεγγίζοντα σύνολα G, είτε είναι κυρτά σύνολα, είτε κυρτοί κώνοι ή υπόχωροι, ανάλογα με την περίπτωση. Θα θεωρούνται πάντα ιδανικά και μη πυκνά στο χώρο.

Στην περίπτωση που ο υπόχωρος είναι κλειστός, τότε η εύρεση βέλτιστης προσέγγισης περιορίζεται στο σύνορο του υπόχωρου, όπως φαίνεται στο παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 2.2.1. *Έστω X χώρος με νόρμα και G ένας υπόχωρός του. Αν ο G είναι κλειστός και $y_0 \in P_G(x_0)$ για $x_0 \in X \setminus G$, τότε $y_0 \in \partial G$.*

Απόδειξη. Έστω ότι $y \notin \partial G$. Άρα $y \in IntG$ Άρα $\exists r > 0 : B(y_0, r) \subseteq G$. Αφού το $y_0 \in P_G(x)$, τότε $d(x_0, G) = \|x_0 - y_0\| = s > 0$.

Αν θέσουμε $y_1 = \frac{s}{s+r}y_0 + \frac{r}{s+r}x_0$, προκύτει ότι

$$\begin{aligned} &\|y_1 - y_0\| = \frac{rs}{s+r} < r \Rightarrow \\ &y_1 \in B(y_0, r). \end{aligned}$$

Επίσης $\|y_1 - x_0\| = \frac{s^2}{s+r} < s = \|x_0 - y_0\| \Rightarrow y_0 \notin P_G(x_0)$.
Άτοπο. Άρα $y_0 \in \partial G$.

$\square$

Πόρισμα 2.2.1. *Έστω X ένας χώρος με νόρμα και G ένας κλειστός υπόχωρός του. Αν το $x_0 \in X \setminus G$ έχει μία βέλτιστη προσέγγιση από το G, τότε $d(x_0, G) = d(x_0, \partial G)$.*

Απόδειξη. Αφού ο G είναι κλειστός, τότε $\partial G \subseteq G$ και άρα

$$\begin{aligned} &d(x_0, \partial G) = \inf\{\|x_0 - z\| : z \in \partial G\} \geq \inf\{\|x_0 - z\| : z \in G\} = d(x_0, G) \Rightarrow \\ &d(x_0, \partial G) \geq d(x_0, G). \quad (1) \end{aligned}$$

Έστω, τώρα, $y_0 \in P_G(x_0)$.
$d(x_0, G) = \|x_0 - y_0\|$, και άρα από το Θεώρημα 2.2.1, $y_0 \in \partial G$. Άρα

$$\begin{aligned} &d(x_0, \partial G) = \inf\{\|x_0 - z\| : z \in \partial G\} \leq \|x_0 - y_0\| = d(x_0, G) \Rightarrow \\ &d(x_0, \partial G) \leq d(x_0, G). \quad (2) \end{aligned}$$

Άπό (1),(2), συμπεραίνουμε ότι $d(x_0, G) = d(x_0, \partial G)$.

$\square$

Αν, επιπλέον, ο χώρος X είναι πεπερασμένης διάστασης, τότε το παρακάτω θεώρημα μάς εξασφαλίζει την ύπαρξη βέλτιστων προσεγγίσεων από κλειστά υποσύνολα. Για την απόδειξη θα χρειαστούμε τα παρακάτω δύο γνωστά λήμματα.

Λήμμα 2.2.1. *Έστω X πεπερασμένης διάστασης χώρος με νόρμα και G υποσύνολό του. Αν το G είναι κλειστό και φραγμένο, τότε το G είναι συμπαγές.*

Απόδειξη. Για την απόδειξη του θεωρήματος παραπέμπουμε στο Πόρισμα 3.2.8, σελίδα 38, [13]. □

Λήμμα 2.2.2. *Έστω G συμπαγές υποσύνολο ενός χώρου με νόρμα. Αν η $\{F_n\}$ είναι μία φθίνουσα ακολουθία μη κενών κλειστών υποσυνόλων του G, τότε $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$.*

Απόδειξη. Για την απόδειξη του θεωρήματος παραπέμπουμε στο Theorem 6.9, σελίδα 76, [8]. □

Θεώρημα 2.2.2. *Έστω X πεπερασμένης διάστασης χώρος με νόρμα. Τότε κάθε μη κενό κλειστό υποσύνολό του, είναι proximinal.*

Απόδειξη. Έστω G μη κενό κλειστό. Για οποιοδήποτε $x_0 \in X \setminus G$ θέτουμε $r_0 = d(x_0, G)$.
Αρχικά θα δείξουμε ότι $d(x_0, G) \neq 0 \quad \forall x_0 \notin G$.
Έστω ότι $\exists x_0 \notin G : d(x_0, G) = 0$.
Αφού $d(x_0, G) = \inf\{d(x_0, g) : g \in G\}$, τότε

$$\exists \{g_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq G \text{ τέτοια ώστε } 0 = d(x_0, G) = \lim d(x_0, g_n).$$

Όμως το G είναι κλειστό, άρα

$$\exists g \in G : \lim g_n = g \Rightarrow d(x_0, g) = 0 \Rightarrow x_0 = g \in G$$

. Άτοπο.
Άρα $r_0 = d(x_0, G) \neq 0$.
Αν $r > r_0$, τότε $\exists y \in G : \|x_0 - y\| < r$.
Άρα $y \in B(x_0, r) \bigcap G \Rightarrow B(x_0, r) \bigcap G \neq \emptyset$.
Αφού τα $\overline{B}(x_0, r_0 + \frac{1}{n})$ και G είναι κλειστά και το $\overline{B}(x_0, r_0 + \frac{1}{n})$ είναι φραγμένα, τότε και το $B_n = \overline{B}(x_0, r_0 + \frac{1}{n}) \bigcap G$ είναι κλειστό και φραγμένο.
Από το Λήμμα 2.2.1 προκύπτει ότι το B_n είναι συμπαγές. Επίσης $B_{n+1} \subseteq B_n \quad \forall n \geq 1$, αφού αν $y \in B_{n+1} \Rightarrow \|y - x_0\| \leq r + \frac{1}{n+1} \leq r + \frac{1}{n}$.
Άρα, από το Λήμμα 2.2.2 $\exists y_0 \in X : y_0 \in \bigcap_{\infty} B_n$.
Άρα $\|y_0 - x_0\| \leq r_0 + \frac{1}{n} \quad \forall n \geq 1$.

Αφού $r_0 = d(x_0, G)$ και $y_0 \in G$, τότε $\|y_0 - x_0\| \geq r_0$. Καθώς $n \to \infty$, προκύπτει ότι $\|y_0 - x_0\| = r_0 = d(x_0, G)$.
Άρα το y_0 είναι μία βέλτιστη προσέγγιση στο x_0 και άρα το G είναι proximinal.

□

Όπως φαίνεται στις παρακάτω δύο προτάσεις, όταν προσεγγίζουμε από υπόχωρο, τότε το σύνολο των βέλτιστων προσεγγίσεων είναι κυρτό και φραγμένο:

Πρόταση 2.2.2. *Έστω X χώρος με νόρμα, G υπόχωρός του, και $x \in X$. Τότε το $P_G(x)$ είναι κυρτό.*

Απόδειξη. Έστω $g_1, g_2 \in P_G(x)$. Άρα

$$\begin{aligned} \|x - g_1\| &\leq \|x - g\| \quad \forall g \in G \quad \text{και} \\ \|x - g_2\| &\leq \|x - g\| \quad \forall g \in G \end{aligned}$$

Για $0 \leq \lambda \leq 1$ και τυχαίο $g \in G$ έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \|x - (\lambda g_1 + (1-\lambda)g_2)\| &= \|x - \lambda g_1 + \lambda g_2 - \lambda g_2\| \\ &= \|x - \lambda g_1 - g_2 + \lambda g_2 - \lambda x + \lambda x\| \\ &= \|\lambda(x - g_1) + (1-\lambda)(x - g_2)\| \\ &\leq \lambda\|x - g_1\| + (1-\lambda)\|x - g_2\| \\ &\leq \lambda\|x - g\| + (1-\lambda)\|x - g\|. \\ &= \|x - g\| \end{aligned}$$

Άρα $\|x - (\lambda g_1 + (1-\lambda)g_2)\| \leq \|x - g\|$.
Άρα $\lambda g_1 + (1-\lambda)g_2 \in P_G(x)$, και άρα το $P_G(x)$ είναι κυρτό.

□

Πρόταση 2.2.3. *Έστω X χώρος με νόρμα, G υπόχωρός του, και $x \in X$. Τότε το $P_G(x)$ είναι φραγμένο.*

Απόδειξη. Έστω $g_1, g_2 \in P_G(x)$. Άρα

$$\begin{aligned} \|x - g_1\| &\leq \|x - g\| \quad \forall g \in G, \quad \text{και} \\ \|x - g_2\| &\leq \|x - g\| \quad \forall g \in G. \end{aligned}$$

Έστω $g_0 \in G$. Τότε,

$$\begin{aligned} \|g_1 - g_2\| &= \|g_1 - x + x - g_2\| \\ &\leq \|g_1 - x\| + \|x - g_2\| \\ &\leq 2\|x - g_0\| \\ &= c \quad \text{για κάποιο } c > 0. \end{aligned}$$

Άρα το $P_G(x)$ είναι φραγμένο. □

Το παρακάτω θεώρημα μάς δίνει μία αναγκαία και ικανή συνθήκη για να ανήκει ένα στοιχείο στο $P_G(x)$. Για την απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε το παρακάτω λήμμα.

Λήμμα 2.2.3. *(Συνέπεια θεωρήματος επέκτασης Hahn-Banach): Έστω X χώρος με νόρμα, και G υπόχωρός του. Αν $x_0 \in X \setminus \overline{G}$, τότε υπάρχει $f \in X^*$ με $f(x) = 0 \quad \forall x \in G$, $f(x_0) = 1$, και $\|f\| = \frac{1}{d(x_0,G)}$.*

Απόδειξη. Για την απόδειξη του θεωρήματος παραπέμπουμε στο Theorem 1.2.9., σελίδα 10, [1]. □

Θεώρημα 2.2.3. *Έστω X χώρος με νόρμα, G υπόχωρός του, και $x \in X \setminus \overline{G}$. Τότε $g_0 \in P_G(x)$ αν και μόνο αν υπάρχει $f \in X^*$ τέτοια ώστε:*

(α) $\|f\| = 1$,

(β) $f(g) = 0 \quad \forall g \in G$,

(γ) $f(x - g_0) = \|x - g_0\|$.

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Έστω $g_0 \in P_G(x)$. Αφού $x \in X \setminus \overline{G}$, έχουμε ότι $d(x, G) = \|x - g_0\| > 0$ και άρα από Συνέπεια του θεωρήματος Hahn-Banach

$$\exists f_0 \in X^* : f_0(x) = 1, \quad \|f_0\| = \frac{1}{\|x - g_0\|}, \quad f_0(g) = 0 \quad \forall g \in G.$$

Έστω το συναρτησοειδές $f = \|x - g_0\| f_0$.
Τότε

$f \in X^*$,
$\|f\| = \|x - g_0\|\|f_0\| = 1$,
$f(g) = \|x - g_0\| f_0(g) = 0 \quad \forall g \in G$, και
$f(x - g_0) = \|x - g_0\| f_0(x - g_0) = \|x - g_0\|$, αφού $f_0(x - g_0) = f_0(x) - f_0(g_0) = 1 - 0 = 1$.

Άρα, η f ικανοποιεί τα (α),(β),(γ).
($\Leftarrow$) Έστω ότι $\exists f \in X^*$ που ικανοποιεί τα (α),(β),(γ). Τότε $\forall g \in G$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \|x - g_0\| &= |f(x - g_0)| = |f(x) - f(g_0)| = |f(x) - f(g)| \\ &= |f(x - g)| \leq \|f\|\|x - g\| = \|x - g\|, \quad \text{αφού } \|f\| = 1, \\ &\Rightarrow \|x - g_0\| \leq \|x - g\|, \quad \forall g \in G. \end{aligned}$$

Άρα $g_0 \in P_G(x)$.

□

Τέλος, θα παρουσιάσουμε το παρακάτω θεώρημα για το σύνολο των βέλτιστων προσεγγίσεων σε αυστηρά κυρτούς χώρους με νόρμα.

Ορισμός 2.2.2. *Έστω X ένας χώρος με νόρμα. Η μοναδιαία σφαίρα του X καλείται αυστηρά κυρτή (strictly convex) αν ισχύει ότι*

$$x, y \in X, \quad x \neq y, \quad \|x\| = \|y\| = 1 \Rightarrow \left\| \frac{x + y}{2} \right\| < 1.$$

Τότε ο X καλείται αυστηρά κυρτός.

Λήμμα 2.2.4. *Έστω X αυστηρά κυρτός χώρος με νόρμα. Αν $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$, τότε τα x, y είναι γραμμικώς εξαρτημένα.*

Απόδειξη. Έστω x, y γραμμικώς εξαρτημένα τέτοια ώστε $\|x+y\| = \|x\|+\|y\|$.

Υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $\|x\| \leq \|y\|$. Θέτουμε

$$x' = \frac{x}{\|x\|}, \quad y' = \frac{y}{\|y\|}.$$

Τότε $\|x'\| = \|y'\| = 1$ και αφού είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, τότε $x' \neq y'$.
Αρκεί να δείξουμε ότι $\left\|\frac{x'+y'}{2}\right\| \geq 1$ ή ισοδύναμα $\|x' + y'\| \geq 2$.

$$\begin{aligned}
\|x' + y'\| &= \left\| \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} \right\| \\
&= \left\| \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|x\|} - \left(\frac{y}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right) \right\| \\
&\geq \frac{1}{\|x\|}\|x + y\| - \left| \frac{1}{\|x\|} - \frac{1}{\|y\|} \right| \|y\| \\
&= \frac{1}{\|x\|}(\|x\| + \|y\|) - \left(\frac{1}{\|x\|} - \frac{1}{\|y\|} \right) \|y\| \\
&= 2.
\end{aligned}$$

□

Θεώρημα 2.2.4. *Έστω X ένας αυστηρά κυρτός χώρος με νόρμα και G ένας υπόχωρός του.*
Τότε $\forall x \in X$ υπάρχει το πολύ μία βέλτιστη προσέγγιση του x από το G.

Απόδειξη. Αν $x \in G$, τότε η μοναδική βέλτιστη προσέγγιση του x από το G είναι προφανώς το ίδιο το x.
Έστω λοιπόν ότι $x \notin G$ και $g_1, g_2 \in P_G(x)$. Δηλαδή
$\|x - g_1\| = \|x - g_2\| = d(x, G)$. Τότε,

$$\left\| x - \frac{g_1 + g_2}{2} \right\| = \left\| \frac{x - g_1}{2} + \frac{x - g_2}{2} \right\| \leq \frac{1}{2}(\|x - g_1\| + \|x - g_2\|) = d(x, G) \Rightarrow$$
$$\|(x - g_1) + (x - g_2)\| = 2d(x, G) = \|x - g_1\| + \|x - g_2\|.$$

Επειδή ο X είναι αυστηρά κυρτός, έπεται από το Λήμμα 2.2.4 ότι $\exists \lambda \in \mathbb{R}$: $x - g_1 = \lambda(x - g_2) \Rightarrow (1 - \lambda)x = g_1 - \lambda g_2$.
Όμως $g_1 - \lambda g_2 \in G$, ενώ $x \notin G$. Άρα αναγκαστικά $\lambda = 1 \Rightarrow g_1 = g_2$. □

2.3 Χαρακτηρισμός από Κυρτά Σύνολα

Ο στόχος αυτής της ενότητας είναι η διατύπωση θεωρήματος χαρακτηρισμού των βέλτιστων προσεγγίσεων από κυρτά σύνολα, και η προσαρμογή του θεωρήματος αυτού στα πλαίσια των δυϊκών κώνων των συνόλων. Αυτό το αποτέλεσμα θα φανεί ιδιαίτερα χρήσιμο, μιας και θα αποτελέσει τη βάση για κάθε θεώρημα χαρακτηρισμού που θα παρουσιαστεί στη συνέχεια.

Ξεκινάμε με μια ικανή συνθήκη για τις βέλτιστες προσεγγίσεις.

Θεώρημα 2.3.1. *Έστω X χώρος με νόρμα, G υποσύνολο του X, $x \in X$ και $y_0 \in G$. Αν*

$$[\, y - y_0 | x - y_0 \,] \leq 0, \quad \text{για όλα τα} \quad y \in G, \tag{2.1}$$

τότε $y_0 \in P_G(x)$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι η ανισότητα (2.1) ισχύει. Τότε για όλα τα $y \in G$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} ||x - y_0||^2 &= [x - y_0 | x - y_0], \quad \text{από (S3)}, \\ &= [x - y | x - y_0] + [y - y_0 | x - y_0], \text{από (S1)}, \\ &\leq [x - y | x - y_0], \text{από (2.1)}, \\ &\leq ||x - y||\, ||x - y_0||, \text{από (S4)} \end{aligned}$$

Επομένως $||x - y_0|| \leq ||x - y||$ για όλα τα $y \in G$, και άρα $y_0 \in P_G(x)$. □

Όταν το προσεγγίζον σύνολο είναι συγκεκριμένα ένα κυρτό σύνολο, τότε έχουμε το ακόλουθο θεώρημα για τις βέλτιστες προσεγγίσεις.

Θεώρημα 2.3.2. *Έστω X χώρος με νόρμα, K ένα κυρτό υποσύνολο του X, $x \in X$ και $y_0 \in K$. Αν $y_0 \in P_K(x)$, τότε*

$$[\, y - y_0 | x - y_0 - \lambda(y - y_0) \,] \leq 0, \tag{2.2}$$

για όλα τα $y \in K$ και όλα τα $\lambda \in [0, 1]$.

Απόδειξη. Αν η σχέση (2.2) δεν ισχύει, τότε για κάποιο $y \in K$ και κάποιο $\lambda \in [0,1]$, έχουμε

$$[\, y - y_0 | x - y_0 - \lambda(y - y_0)\,] > 0, \tag{2.3}$$

(Στην περίπτωση μας $y \neq y_0$, αφού αν $y = y_0$, τότε $[y - y_0 | x - y_0 - \lambda(y - y_0)] = 0$).
Για αυτά τα στοιχεία $y \in K$ και $\lambda \in [0,1]$, το στοιχείο $y_\lambda := \lambda y + (1-\lambda) y_0 \in K$, λόγω κυρτότητας του K. Έχουμε τότε

$$\begin{aligned}
||x - y_\lambda|| &= ||x - \lambda y - (1-\lambda)y_0|| \\
&= \frac{[x - y_0 - \lambda(y - y_0) | x - y_0 - \lambda(y - y_0)]}{||x - y_0 - \lambda(y - y_0)||}, \quad \text{από (S3)} \\
&= \frac{[x - y_0 | x - y_0 - \lambda(y - y_0)] - \lambda[y - y_0 | x - y_0 - \lambda(y - y_0)]}{||x - y_0 - \lambda(y - y_0)||}, \quad \text{από (S1)} \\
&< \frac{[x - y_0 | x - y_0 - \lambda(y - y_0)]}{||x - y_0 - \lambda(y - y_0)||}, \quad \text{από (2.3)} \\
&\leq ||x - y_0||, \quad \text{από (S4)}.
\end{aligned}$$

Αυτό μας δείχνει ότι υπάρχει ένα $y_\lambda \in K$ τέτοιο ώστε $||x - y_\lambda|| < ||x - y_0||$, και έτσι $y_0 \notin P_K(x)$. Άτοπο. □

Συνδυάζοντας τα Θεωρήματα 2.3.1 και 2.3.2 έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα το οποίο χαρακτηρίζει τις βέλτιστες προσεγγίσεις από κυρτά σύνολα.

Θεώρημα 2.3.3. *Έστω X χώρος με νόρμα, K ένα κυρτό υποσύνολο του X, $x \in X$ και $y_0 \in K$. Τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(α) $y_0 \in P_K(x)$,

(β) $[\,(y - y_0) | x - y_0 - \lambda(y - y_0)\,] \leq 0$, *για όλα τα* $y \in K$ *και όλα τα* $\lambda \in [0,1]$,

(γ) $[\,(y - y_0) | x - y_0\,] \leq 0$, *για όλα τα* $y \in K$.

Απόδειξη. (α)⇒(β) προκύπτει από το Θεώρημα 2.3.2.
(β)⇒(γ) προκύπτει θέτοντας $\lambda = 0$ στην σχέση (β) και (γ)⇒(α) προκύπτει από το Θεώρημα 2.3.1. □

Υπάρχει παρ'ολα αυτά και ένας άλλος τρόπος διατύπωσης του παραπάνω αποτελέσματος χαρακτηρισμού, ο οποίος περιέχει την έννοια του δυϊκού κώνου.

Ορισμός 2.3.1. *Έστω X ένας χώρος με νόρμα και G ένα μη κενό υποσύνολο του X. Τότε το σύνολο $\{x \in X : [y|x] \leq 0, \ \forall y \in G\}$ καλείται* δυϊκός κώνος *(dual cone) (ή δυϊκός κώνος ως προς το ημιεσωτερικό γινόμενο $[\cdot|\cdot]$, ή ¨αρνητικό πολικό' ως προς το ημιεσωτερικό γινόμενο $[\cdot|\cdot]$ του G) και συμβολίζεται με G^o*

Εξ' ορισμού, για κάθε G μη κενό υποσύνολο του X, $0 \in G^o$ και η τομή $G \cap G^o$ είναι ή κενή ή ίση με $\{0\}$.
Το Θεώρημα 2.3.3 μπορεί να επαναδιατυπωθεί χρησιμοποιώντας την έννοια του δυϊκού κώνου, όπως φαίνεται παρακάτω.

Θεώρημα 2.3.4. *Έστω X χώρος με νόρμα, K ένα κυρτό υποσύνολο του X, $x \in X$ και $y_0 \in K$. Τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(α) $y_0 \in P_K(x)$,

(β) $x - y_0 - \lambda(y - y_0) \in (K - y_0)^o$, *για όλα τα* $y \in K$ *και όλα τα* $\lambda \in [0,1]$,

(γ) $x - y_0 \in (K - y_0)^o$.

Απόδειξη. Από την ισοδυναμία των (α) και (β) του Θεωρήματος 2.3.3 και από τον ορισμό του δυϊκού κώνου ενός συνόλου 2.3.1 , έχουμε

$$\begin{aligned} y_0 \in P_K(x) &\Leftrightarrow [y - y_0 | x - y_0 - \lambda(y - y_0)] \leq 0 \quad \forall y \in K, \quad \lambda \in [0,1] \\ &\Leftrightarrow x - y_0 - \lambda(y - y_0) \in \{y - y_0 : y \in K\}^o \quad \forall y \in K, \quad \lambda \in [0,1] \\ &\Leftrightarrow x - y_0 - \lambda(y - y_0) \in (K - y_0)^o \quad \forall y \in K, \quad \lambda \in [0,1]. \end{aligned}$$

Επομένως (α)$\Leftrightarrow$(β). Ομοίως, από την ισοδυναμία των (α) και (γ) του Θεωρήματος 2.3.3, και από τον ορισμό του δυϊκού κώνου ενός συνόλου έχουμε

$$\begin{aligned} y_0 \in P_K(x) &\Leftrightarrow [y - y_0 | x - y_0] \leq 0 \quad \forall y \in K \\ &\Leftrightarrow x - y_0 \in \{y - y_0 : y \in K\}^o \\ &\Leftrightarrow x - y_0 \in (K - y_0)^o. \end{aligned}$$

Επομένως (α)$\Leftrightarrow$ (γ) και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη.

$\square$

Το παραπάνω θεώρημα μάς δείχνει ότι ο χαρακτηρισμός των βέλτιστων προσεγγίσεων απαιτεί στην ουσία τον καθορισμό των δυϊκών κώνων. Για συγκεκριμένα κυρτά σύνολα (π.χ κυρτοί κώνοι και υπόχωροι) μπορούν να υπάρξουν βελτιώσεις στο Θεώρημα 2.3.4.

Ορισμός 2.3.2. *Έστω X χώρος με νόρμα. Ένα υποσύνολο G του X καλείται κυρτός κώνος (convex cone) αν $\alpha x + \beta y \in G$ όταν $x, y \in G$ και $\alpha, \beta \geq 0$.*

Προχωράμε στις επόμενες παρατηρήσεις

1. Αν C ένας κυρτός κώνος τότε $0 \in C$ και $C \cap C^o = \{0\}$.

2. Κάθε υπόχωρος είναι κυρτός κώνος, όμως το αντίστροφο δεν ισχύει. Ομοίως, κάθε κυρτός κώνος είναι και κυρτό σύνολο, αλλά πάλι το αντίστροφο δεν ισχύει. Για πράδειγμα, στον πραγματικό χώρο με νόρμα, $X = (\mathbb{R}^2, || \cdot ||_2)$, όπου $||x||_2 = \left(\sum\limits_{k=1}^{2} |x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ για $x = (x_1, x_2) \in X$, το σύνολο $\{x = (x_1, x_2) \in X : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$ είναι ένας κυρτός κώνος ο οποίος δεν είναι υπόχωρος, και η κλειστή μοναδιαία μπάλα $\{x \in X : ||x||_2 \leq 1\}$ είναι ένα κυρτό σύνολο το οποίο δεν είναι κυρτός κώνος.

3. Ο δυϊκός κώνος ενός μη κενού συνόλου δεν είναι απαραίτητα κυρτός κώνος. Για παράδειγμα, ας σκεφτούμε το πραγματικό χώρο με νόρμα $X = (\mathbb{R}^2, || \cdot ||_1)$, όπου $||x||_1 = \sum\limits_{k=1}^{2} |x_k|$ για $x = (x_1, x_2) \in X$ εφοδιασμένο με το ημιεσωτερικό γινόμενο $[x|y] = ||y||_1 \sum\limits_{\substack{k=1 \\ y_k \neq 0}}^{2} \frac{x_k y_k}{|y_k|}$ που επάγει τη νόρμα $|| \cdot ||_1$. Το σύνολο $C = \{x = (\lambda, \lambda) \in X : \lambda \geq 0\}$ είναι ένας κυρτός κώνος στον X του οποίου ο δυϊκός κώνος δίνεται από το

$$C^o = \left\{ x = (x_1, x_2) \in X : \lambda ||x||_1 \sum_{k=1}^{2} \frac{x_k}{|y_k|} \leq 0, \lambda \geq 0 \right\}.$$

Τότε τα στοιχεία $x = (5, -4)$ και $\tau = (-3, 5)$ βρίσκονται στο C^o αλλά το $x + \tau = (2, 1)$ όχι. Αυτό δείχνει ότι το C^o δεν είναι κυρτός κώνος.

2.4 Ορθογωνιότητα ως προς το Ημιεσωτερικό Γινόμενο

Σε αυτό το κομμάτι εισάγουμε την έννοια της ορθογωνιότητας σε χώρο με νόρμα ως προς το ημιεσωτερικό γινόμενο που επάγει την νόρμα του χώρου. Αυτό θα μας επιτρέψει να εξάγουμε μερικές βασικές ιδιότητες των δυϊκών κώνων που χρειάζονται για τη βελτίωση του Θεωρήματος 2.3.4.

Η έννοια της ορθογωνιότητας σε ένα χώρο με νόρμα, την οποία συζητάμε εδώ, είναι μια γενίκευση της έννοιας της ορθογωνιότητας σε ένα χώρο εσωτερικού γινομένου. Ας θυμηθούμε ότι δύο στοιχεία x, y σε ένα χώρο εσωτερικού γινομένου $(X, (\cdot,\cdot))$ λέγονται *ορθογώνια* αν $(x, y) = 0$. Εφόσον το ημιεσωτερικό γινόμενο δεν έχει την ιδιότητα της συζυγούς συμμετρίας, η έννοια της ορθογωνιότητας που χρησιμοποιούμε δεν είναι γενικά συμμετρική.

Ορισμός 2.4.1. *Έστω X χώρος με νόρμα και $x, y \in X$. Τότε το x είναι κάθετο (orthogonal) (ή κάθετο με την έννοια των Lumer-Giles ως προς το ημιεσωτερικό γινόμενο $[\cdot|\cdot]$) στο y, το οποίο συμβολίζεται ως $x \perp y$, αν $[y|x] = 0$*

Παρατηρούμε ότι, αν $x, y \in X$ και $\alpha \in \mathbb{K}$ τότε:

1. $0 \perp x$ και $x \perp 0$,
2. $x \perp x$ αν και μόνο αν $x = 0$,
3. $x \perp y$ και $x \perp z$ συνεπάγεται και $x \perp (y + z)$,
4. $x \perp y$ συνεπάγεται ότι $(\alpha x) \perp y$ και $x \perp (\alpha y)$.

Ωστόσο, η βασική διαφορά της έννοιας της ορθογωνιότητας σε χώρους με νόρμα σε σύγκριση με την ορθογωνιότητα σε χώρους με εσωτερικό γινόμενο βρίσκεται στη συμμετρικότητα: Αν $x, y \in X$, τότε αν $x \perp y$ δεν σημαίνει απαραίτητα ότι $y \perp x$.

Για παράδειγμα, θεωρήστε τον πραγματικό χώρο με νόρμα $X = (\mathbb{R}^3, ||\cdot||_1)$, όπου $||x||_1 = \sum\limits_{k=1}^{3} |x_k|$ για $x = (x_1, x_2, x_3)$, εφοδιασμένο με το ημιεσωτερικό γινόμενο $[x|y] = ||y||_1 \sum\limits_{\substack{k=1 \\ y_k \neq 0}}^{3} \frac{x_k y_k}{|y_k|}, \quad x, y \in X$, το οποίο επάγει τη νόρμα $||\cdot||_1$.

Θεωρούμε το στοιχείο $x = (-2, 1, 0)$ και $y = (1, 1, 0)$ στο X. Τότε $[y|x] = 0$ και άρα το x είναι κάθετο στο y, ενώ $[x|y] = -2$ και άρα το y δεν είναι κάθετο στο x.

Ορισμός 2.4.2. *Έστω X χώρος με νόρμα και $x, y \in X$, G ένα μη κενό υποσύνολο του X και $x \in X$. Τότε το x λέγεται κάθετο (ή κάθετο με την έννοια των Lumer-Giles στο ημιεσωτερικό γινόμενο $[\cdot|\cdot]$) στο G ($x \perp G$) αν $x \perp y$ για κάθε $y \in G$.*

Για κάθε μη κενό υποσύνολο G του X, εξόρισμού, $0 \perp G$.

Ορισμός 2.4.3. *Έστω X χώρος με νόρμα και $x, y \in X$, G ένα μη κενό υποσύνολο του X και $x \in X$. Τότε το $\{x \in X : x \perp G\}$ λέγεται ορθογώνιο συμπλήρωμα (ή ορθογώνιο συμπλήρωμα με την έννοια των Lumer-Giles ως προς το ημιεσωτερικό γινόμενο $[\cdot|\cdot]$) στο G ($x \perp G$) και συμβολίζεται $G^\perp$*

Αν $y \in X$, τότε το ορθογώνιο συμπλήρωμα του y είναι το σύνολο $y^\perp = \{x \in X : x \perp y\}$ Επιπρόσθετα, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
G^\perp &= \{x \in X : x \perp G\} \\
&= \{x \in X : x \perp y \quad \forall y \in G\} \\
&= \bigcap_{y \in G} \{x \in X : x \perp y\} \\
&= \bigcap_{y \in G} y^\perp.
\end{aligned}$$

Τα επόμενα είναι κάποιες άμεσες συνέπειες των ορισμών.

1. $0^\perp = X$ και $X^\perp = \{0\}$.

2. Αν το G είναι ένα μη κενό υποσύνολο του X, και το a είναι οποιοδήποτε βαθμωτό, τότε,

(α) $0 \in G^{\perp}$,

(β) $x \in G^{\perp}$ συνεπάγεται ότι $ax \in G^{\perp}$,

(γ) $G^{\perp} \subseteq G^{o}$, και

(δ) Το $G \cap G^{\perp}$ είναι είτε κενό ή το $\{0\}$.

3. Αν C είναι κυρτός κώνος στον X, έχουμε $C \cap C^{\perp} = \{0\}$. Συγκεκριμένα $M \cap M^{\perp} = \{0\}$ για κάθε υπόχωρο M του X.

4. Ακόμα και αν το M είναι υπόχωρος του X, το $M^{\perp}$ δεν είναι απαραίτητα υπόχωρος του X. Το $M^{\perp}$ δεν είναι καν κυρτός κώνος στον X. Για παράδειγμα, θεωρείστε τον πραγματικό χώρο με νόρμα $X = (\mathbb{R}^2, ||\cdot||_1)$ όπου $||x||_1 = \sum_{k=1}^{2} |x_k|$ για $x = (x_1, x_2) \in X$, μαζί με το ημιεσωτερικό γινόμενο

$$[x|y] = ||y||_1 \sum_{\substack{k=1 \\ y_k \neq 0}}^{2} \frac{x_k y_k}{|y_k|}, \quad x, y \in X$$

το οποίο επάγει τη νόρμα $||\cdot||_1$. Έστω $M = <(1,1)>$. Το ορθογώνιο συμπλήρωμα αυτού του υπόχωρου μας δίνεται από

$$M^{\perp} = \left\{ x = (x_1, x_2) \in X : \lambda ||x||_1 \sum_{\substack{k=1 \\ y_k \neq 0}}^{2} \frac{x_k}{|x_k|} = 0, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Άρα το στοιχείο $x = (-3, 5)$ και $\tau = (4, -3)$ είναι στο $M^{\perp}$. Όμως $x + \tau = (1, 2)$ δεν ανήκει στο $M^{\perp}$. Αυτό μας δείχνει ότι το $M^{\perp}$ δεν είναι κυρτός κώνος.

Από τις παρατηρήσεις, αυτή η οποία αναφέρεται τελευταία είναι η κρίσιμη διαφορά με τα συνήθη ορθογώνια συμπληρώματα στους χώρους με εσωτερικά γινόμενα. Η ακριβής σχέση ανάμεσα στον δυϊκό κώνο και στο ορθογώνιο συμπλήρωμα ενός δεδομένου συνόλου προσδιορίζεται από το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 2.4.1. *Έστω X ένας χώρος με νόρμα, και G ένα μη κενό υποσύνολο του X. Τότε $G^{\perp} = G^o \cap (-G)^o = G^o \cap (-G^o)$.*

Απόδειξη. Έχουμε

$$\begin{aligned} G^{\perp} &= \{x \in X : x \perp G\} = \\ &= \{x \in X : [y|x] = 0, \quad \forall y \in G\} = \\ &= G^o \cap \{x \in X : [y|x] \geq 0, \quad \forall y \in G\} = \\ &= G^o \cap \{x \in X : [-y|x] \geq 0, \quad \forall -y \in G\} = \\ &= G^o \cap \{x \in X : -[y|x] \geq 0, \quad \forall y \in (-G)\} = \\ &= G^o \cap \{x \in X : [y|x] \leq 0, \quad \forall y \in (-G)\} = \\ &= G^o \cap (-G)^o. \end{aligned}$$

Επιπλέον

$$\begin{aligned} (-G)^o &= \{x \in X : [y|x] \leq 0, \quad \forall y \in (-G)\} = \\ &= \{x \in X : [y|x] \leq 0, \quad \forall -y \in G\} = \\ &= \{x \in X : [-y|x] \leq 0, \quad \forall y \in G\} = \\ &= \{x \in X : [y|-x] \geq 0, \quad \forall y \in G\} = \\ &= \{x \in X : [y|-x] \leq 0, \quad \forall y \in G\} = \\ &= -G^o. \end{aligned}$$

Άρα $G^{\perp} = G^o \cap (-G)^o = G^o \cap (-G^o)$. □

Θεώρημα 2.4.2. *Έστω X ένας χώρος με νόρμα.*

(α) Αν C ένας κυρτός κώνος στο X, τότε $(C-y)^o = C^o \cap y^{\perp}$ για όλα τα $y \in C$.

(β) Αν M ένας υπόχωρος του X, τότε $M^o = M^{\perp}$.

Απόδειξη. (α) Έστω $y \in C$ αυθαίρετο. Αν $x \in (C-y)^o$, τότε $[c-y|x] \leq 0$ για όλα τα $c \in C$. Άρα, θέτωντας $c = c+y$, έχουμε $[c|x] = [c+y-y|x] \leq 0$ για όλα τα $c \in C$, και άρα $x \in C^o$.

Επίσης, βάζοντας $c = 2y$ και $c = 0$ συνεπάγεται ότι $[y|x] \leq 0$ και $[y|x] \geq 0$ αντίστοιχα.
Επομένως $[y|x] = 0$ και άρα $x \in y^{\perp}$. Συνδυάζοντας τα παραπάνω δύο συμπεράσματα βλέπουμε ότι αν $x \in (C-y)^o$ σημαίνει ότι $x \in C^o$ και $x \in y^{\perp}$ και άρα $x \in C^o \cap y^{\perp}$.
Αν, τώρα, $x \in C^o \cap y^{\perp}$, τότε $[c|x] \leq 0 \quad \forall c \in C$ και $[y|x] = 0$. Συνεπώς, $[c-y|x] = [c|x] - [y|x] \leq 0 \quad \forall c \in C$, και άρα $x \in (C-y)^o$. Άρα $(C-y)^o = C^o \cap y^{\perp} \quad \forall y \in C$.

(β) Αν ο M είναι υπόχωρος του X, τότε $-M = M$. και άρα από το Θεώρημα 2.4.1, έχουμε ότι

$$M^{\perp} = M^o \cap (-M)^o = M^o.$$

□

Ένα άλλο αποτέλεσμα το οποίο θα χρησιμοποιηθεί στη συνέχεια είναι το επόμενο.

Θεώρημα 2.4.3. *Έστω X ένας χώρος με νόρμα, και G ένα μη κενό υποσύνολο του X. Τότε*

(α) $G^o = (\bar{G})^o$,

(β) $G^{\perp} = (\bar{G})^{\perp}$.

Απόδειξη. (α). Έστω $x \in (\bar{G})^o$. Τότε για κάθε $y \in \bar{G}$, έχουμε ότι $[y|x] \leq 0$. Αυτό δείχνει ότι, αφού $G \subseteq \bar{G}$, τότε $[y|x] \leq 0$ για κάθε $y \in G$, και άρα $x \in G^o$. Άρα $(\overline{G})^o \subseteq G^o$. Τώρα, έστω $x \in G^o$. Αν $y \in \bar{G}$, επιλέγουμε ακολουθία (y_n) στο G τέτοια ώστε $y_n \to y$. Τότε,

$$|[y_n|x] - [y|x]| = |[y_n - y|x]| \leq ||y_n - y||\,||x|| \to 0 \quad \text{όταν} \quad n \to \infty$$

και άρα $[y|x] = \lim_{n\to\infty}[y_n|x] \leq 0$. Άρα $[y|x] \leq 0$ για κάθε $y \in \bar{G}$, και άρα $x \in (\bar{G})^o$. Άρα $G^o \subseteq (\bar{G})^o$. Άρα $G^o = (\bar{G})^o$.
(β) Με παρόμοιο επιχείρημα αποδεικνύεται ότι $G^{\perp} = (\bar{G})^{\perp}$. □

2.5 Χαρακτηρισμός από Κυρτούς Κώνους και Υπόχωρους

Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα της παραπάνω ενότητας, επιδιώκουμε να βελτιώσουμε το Θεώρημα 2.3.4 που χαρακτηρίζει τις βέλτιστες προσεγγίσεις από κυρτά σύνολα. Στην ιδιαίτερη περίπτωση, όπου το κυρτό σύνολο είναι ένας κυρτός κώνος, το αποτέλεσμα αυτό μπορεί να ισχυροποιηθεί χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 2.4.2 (α).

Θεώρημα 2.5.1. *Έστω X ένας χώρος με νόρμα, C ένας κυρτός κώνος στο X, $x \in X$ και $y_o \in C$. Τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(α) $y_0 \in P_C(x)$,

(β) $[y'|x - y_0 - \lambda(y - y_0)] \leq 0$ *και* $[y_0|x - y_0 - \lambda(y - y_0)] = 0$ *για όλα τα* $y', y \in C$ *και* $\lambda \in [0, 1]$,

(γ) $[y|x - y_0] \leq 0$ *και* $[y_0|x - y_0] = 0$ *για όλα τα* $y \in C$.

Απόδειξη. Από την ισοδυναμία των (α) και (β) του Θεωρήματος 2.3.4 έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
y_0 \in P_C(x) &\Leftrightarrow x - y_0 - \lambda(y - y_0) \in (C - y_0)^o, \quad \forall y \in C, \quad \forall \lambda \in [0, 1],\\
&\Leftrightarrow x - y_0 - \lambda(y - y_0) \in C^o \cap y_o^{\perp} \quad \forall y \in C, \quad \forall \lambda \in [0, 1], (2.4.2(\alpha))\\
&\Leftrightarrow x - y_0 - \lambda(y - y_0) \in C^o \quad \text{και}\\
&\qquad x - y_0 - \lambda(y - y_0) \in y_o^{\perp} \quad \forall y \in C, \quad \forall \lambda \in [0, 1],\\
&\Leftrightarrow [y'|x - y_0 - \lambda(y - y_0)] \leq 0 \quad \text{και}\\
&\qquad [y_0|x - y_0 - \lambda(y - y_0)] = 0 \quad \forall y', y \in C, \quad \forall \lambda \in [0, 1].
\end{aligned}$$

Άρα (α)⇔ (β).
Παρόμοια από την ισοδυναμία των (α) και (γ) του Θεωρήματος 2.3.4 προκύπτει ότι (α)⇔ (γ) και έτσι αποδεικνύεται το θεώρημα. □

Παρατήρηση 2.5.1. *Το παραπάνω θεώρημα μπορεί να εκφραστεί με έναν αμιγώς συνολοθεωρητικό τρόπο. Με την υπόθεση του Θεωρήματος 2.5.1 τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(α) $y_0 \in P_C(x)$,

(β) $x - y_0 - \lambda(y - y_0) \in C^o \cap y_0^\perp$ *για όλα τα* $y \in C$ *και* $\lambda \in [0,1]$,

(γ) $x - y_0 \in C^o \cap y_0^\perp$.

Υπάρχει ένας ακόμα πιο απλός χαρακτηρισμός των βέλτιστων προσεγγίσεων όταν το κυρτό σύνολο είναι υπόχωρος. Προκύπτει πάλι από το Θεώρημα 2.3.4 με τη βοήθεια του Θεωρήματος 2.4.2(β).

Θεώρημα 2.5.2. *Έστω* X *ένας χώρος με νόρμα, και* M *υπόχωρος του* X, $x \in X$ *και* $y_o \in M$. *Τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα*

(α) $y_0 \in P_M(x)$,

(β) $[y'|x - y_0 - \lambda(y - y_0)] = 0$ *για όλα τα* $y, y' \in M$ *και* $\lambda \in [0,1]$,

(γ) $[y|x - y_0] = 0$ *για όλα τα* $y \in M$.

Απόδειξη. Από την ισοδυναμία των (α) και (β) του Θεωρήματος 2.3.4 έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
y_0 \in P_M(x) &\Leftrightarrow x - y_0 - \lambda(y - y_0) \in (M - y_0)^o, \quad \forall y \in M, \quad \forall \lambda \in [0,1], \\
&\Leftrightarrow x - y_0 - \lambda(y - y_0) \in M^o \quad \forall y \in M, \quad \forall \lambda \in [0,1] \text{ αφού } y_o \in M \\
&\Leftrightarrow x - y_0 - \lambda(y - y_0) \in M^\perp \ \forall y \in M, \ \forall \lambda \in [0,1], \quad (2.4.2(\beta)) \\
&\Leftrightarrow [y'|x - y_0 - \lambda(y - y_0)] = 0 \quad \forall y', y \in M, \quad \forall \lambda \in [0,1].
\end{aligned}$$

Άρα (α)$\Leftrightarrow$ (β). Παρόμοια από την ισοδυναμία των (α) και (γ) του Θεωρήματος 2.3.4 συνεπάγεται ότι (α)$\Leftrightarrow$ (γ) και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Παρατήρηση 2.5.2. *Το επόμενο είναι επαναδιατύπωση του παραπάνω Θεωρήματος με όρους ορθογωνίου συμπληρώματος. Με την υπόθεση του Θεωρήματος 2.5.2 τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(α) $y_0 \in P_M(x)$,

(β) $x - y_0 - \lambda(y - y_0) \in M^\perp$ *για όλα τα* $y \in M$ *και* $\lambda \in [0,1]$,

(γ) $x - y_0 \in M^\perp$.

Το επόμενο αποτέλεσμα είναι για μετατοπίσεις κυρτών κώνων.

Θεώρημα 2.5.3. *Έστω X ένας χώρος με νόρμα, και C κυρτός κώνος στο X, $z \in X$ και $K = z + C$.Έστω ,επίσης, $x \in X$ και $y_0 \in K$. Τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(α) $y_0 \in P_K(x)$,

(β) $[y'|x - y_0 - \lambda(z + y - y_0)] \leq 0$ *και* $[y_0 - z|x - y_0 - \lambda(z + y - y_0)] = 0$ *για όλα τα* $y, y' \in C$ *και* $\lambda \in [0, 1]$,

(γ) $[y|x - y_0] \leq 0$ *και* $[y_0 - z|x - y_0] = 0$ *για όλα τα* $y \in C$.

Απόδειξη. Ώντας μεταφορά του κυρτού κώνου C στο X το $K = z + C$ είναι ένα κυρτό σύνολο στο X. Πράγματι, αν $k_1 = z + c_1$ και $k_2 = z + c_2$ ανήκουν στο $K = z + C$, όπου $c_1, c_2 \in C$, τότε για κάθε $t \in [0, 1]$ έχουμε ότι

$$tk_1 + (1 - t)k_2 = tz + (1 - t)z + tc_1 + (1 - t)c_2 \in z + C = K.$$

Άρα, από την ισοδυναμία των (α) και (β) του θεωρήματος 2.3.4, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
y_0 \in P_K(x) &\Leftrightarrow x - y_0 - \lambda(y' - y_0) \in (K - y_0)^o, \quad \forall y' \in K, \quad \forall \lambda \in [0, 1], \\
&\Leftrightarrow x - y_0 - \lambda(z + y - y_0) \in (z + C - y_o)^o \quad \forall y \in C, \quad \forall \lambda \in [0, 1] \\
&\Leftrightarrow x - y_0 - \lambda(z + y - y_0) \in (C - (y_0 - z))^o \ \forall y \in C, \ \forall \lambda \in [0, 1] \\
&\Leftrightarrow x - y_0 - \lambda(z + y - y_0) \in C^o \cap (y_0 - z)^\perp \ \forall y \in C, \ \forall \lambda \in [0, 1], \\
&\qquad\qquad \text{απο το Θεώρημα 2.4.2(α), αφού} \quad y_0 - z \in C \\
&\Leftrightarrow x - y_0 - \lambda(z + y - y_0) \in C^o \quad \text{και} \\
&\qquad x - y_0 - \lambda(z + y - y_0) \in (y_0 - z)^\perp \ \forall y \in C, \ \forall \lambda \in [0, 1], \\
&\Leftrightarrow [y'|x - y_0 - \lambda(z + y - y_0)] \leq 0 \quad \text{και} \\
&\qquad [y_0 - z|x - y_0 - \lambda(z + y - y_0)] = 0 \ \forall y, y' \in C, \ \forall \lambda \in [0, 1].
\end{aligned}$$

Άρα (α)⇔(β). Όμοια μέσω της ισοδυναμίας των (α) και (γ) του Θεωρήματος 2.3.4, προκύπτει ότι (α) ⇔(γ). Άρα (α)⇔(β)⇔(γ). □

Παρατήρηση 2.5.3. *Αμιγώς συνολοθεωρητικά, το παραπάνω θεώρημα μπορεί να διατυπωθεί ως εξής: Με την υπόθεση του Θεωρήματος 2.5.3 τα επόμενα* *είναι ισοδύναμα:*

(α) $y_0 \in P_K(x)$,

(β) $x - y_0 - \lambda(z + y - y_0) \in C^o \cap (y_0 - z)^\perp$ *για όλα τα* $y \in C$ *και* $\lambda \in [0, 1]$,

(γ) $x - y_0 \in C^o \cap (y_0 - z)^\perp$.

Το επόμενο αποτέλεσμα χαρακτηρίζει τις βέλτιστες προσεγγίσεις από μετατοπίσεις υπόχωρων.

Θεώρημα 2.5.4. *Έστω* X *ένας χώρος με νόρμα,* M *ένας υπόχωρος του* X, $z \in X$ *και* $K = z + M$. *Έστω, επίσης,* $x \in X$ *και* $y_0 \in K$. *Τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(α) $y_0 \in P_K(x)$,

(β) $[y'|x - y_0 - \lambda(z + y - y_0)] = 0$ *για όλα τα* $y, y' \in M$ *και* $\lambda \in [0, 1]$,

(γ) $[y|x - y_0] = 0$ *για όλα τα* $y \in M$.

Απόδειξη. Το $K = z + M$, ώντας μεταφορά ενός υπόχωρου M του X, είναι ένα κυρτό σύνολο μέσα στο X. Όντως, αν $k_1 = z + m_1$ και $k_2 = z + m_2$ είναι στο $K = z + M$, όπου $m_1, m_2 \in M$, τότε για κάθε $t \in [0, 1]$, έχουμε ότι

$$tk_1 + (1 - t)k_2 = tz + (1 - t)z + tm_1 + (1 - t)m_2 \in z + M = K.$$

Άρα από την ισοδυναμία των (α),(β) του θεωρήματος 2.3.4, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
y_0 \in P_K(x) &\Leftrightarrow x - y_0 - \lambda(y' - y_0) \in (K - y_0)^o, \quad \forall y' \in K, \quad \forall \lambda \in [0, 1], \\
&\Leftrightarrow x - y_0 - \lambda(z + y - y_0) \in (z + M - y_o)^o \quad \forall y \in M, \quad \forall \lambda \in [0, 1] \\
&\Leftrightarrow x - y_0 - \lambda(z + y - y_0) \in (M - (y_0 - z))^o \ \forall y \in M, \ \forall \lambda \in [0, 1], \\
&\Leftrightarrow x - y_0 - \lambda(z + y - y_0) \in M^o \ \forall y \in M, \ \forall \lambda \in [0, 1], \\
&\Leftrightarrow x - y_0 - \lambda(z + y - y_0) \in M^\perp \quad \forall y \in M, \ \forall \lambda \in [0, 1], \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{απο το Θεώρημα 2.4.2(β)} \\
&\Leftrightarrow [y'|x - y_0 - \lambda(z + y - y_0)] = 0 \ \forall y, y' \in M, \ \forall \lambda \in [0, 1].
\end{aligned}$$

Άρα (α)⇔(β). Ομοίως, από την ισοδυναμία των (α) και (γ) του Θεωρήματος 2.3.4, προκύπτει ότι (α)⇔(γ).Άρα (α)⇔(β)⇔(γ).

□

Παράδειγμα 2.5.1. *Έστω ο πραγματικός χώρος με νόρμα* $X = (\mathbb{R}^3, ||\cdot||_1)$, *εφοδιασμένος με το ημιεσωτερικό γινόμενο* $[x|y] = ||y||_1 \sum_{\substack{k=1 \\ y_k \neq 0}}^{3} \frac{x_k y_k}{|y_k|}$, $x, y \in K$ *που επάγει τη νόρμα* $||\cdot||_1$.
Έστω, επίσης, $M = \{x = (x_1, 0, x_2) \in X : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$ *υπόχωρος του* X, *και* $x = (1, 2, 3) \in X$. *Τότε*

$$\begin{aligned} d(x, M) &= inf\{||x - m||_1 : m \in M\} \\ &= inf\{|1 - m_1| + |2 - 0| + |3 - m_2| : m_1, m_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= 2 \quad \sigma\tau o \quad (1, 0, 3) \in M. \end{aligned}$$

Έστω $y_0 = (1, 0, 3)$. *Τότε*

$$||x - y_0||_1 = |1 - 1| + |2 - 0| + |3 - 3| = 2.$$

Επομένως $||x-y_0||_1 = d(x, M)$, *και άρα* $y_0 = (1, 0, 3) \in P_M(x)$. *Τότε για κάθε* $m = (m_1, 0, m_2) \in M$, *έχουμε*

$$[m|x - y_0] = [(m_1, 0, m_2)|(0, 2, 0)] = ||(0, 2, 0)||_1 \cdot 0 = 0,$$

και άρα $x - y_0 \in M^{\perp}$. *Τώρα έστω* $y_0 = (y_1, 0, y_2) \in M$. *Υποθέτουμε ότι* $x - y_0 \in M^{\perp}$. *Τότε*

$$\begin{aligned} 0 &= [m|x - y_0], \quad \forall m \in M, \\ &= [(m_1, 0, m_2)|(1 - y_1, 2, 3 - y_2)], \quad \forall m_1, m_2 \in \mathbb{R}, \\ &= ||(1 - y_1, 2, 3 - y_2)||_1 \Big(\frac{m_1(1 - y_1)}{|1 - y_1|} + \frac{m_2(3 - y_2)}{|3 - y_2|} \Big), \quad \forall m_1, m_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Προκύπτει ότι $y_1 = 1$ *και* $y_2 = 3$, *και άρα* $y_0 = (1, 0, 3)$. *Άρα* $y_0 \in P_M(x)$.

Κεφάλαιο 3

Εφαρμογές των Αποτελεσμάτων Χαρακτηρισμού

3.1 Εισαγωγή

Έχοντας ήδη μελετήσει ορισμένα αποτελέσματα χαρακτηρισμού βέλτιστων προσεγγίσεων από κυρτά συνολα, κυρτούς κώνους και υπόχωρους, θα ασχοληθούμε, τώρα, με εφαρμογές αυτών των αποτελεσμάτων. Πιο συγκεκριμένα, θα διατυπώσουμε χαρακτηρισμούς ως προς το σφάλμα προσέγγισης, θα αποδείξουμε ότι οι χαρακτηρισμοί proximinality,semi-Chebyshevity και Chebyshevity παραμένουν αμετάβλητες υπό μετατοπίσεις και βαθμωτούς πολλαπλασιασμούς. Τέλος, θα εισάγουμε την έννοια των διατεταγμένων ορθογώνιων συνόλων σε χώρους με νόρμα.

3.2 Χαρακτηρισμός ως προς το Σφάλμα Προσέγγισης

Υπενθυμίζουμε ότι αν ο X είναι ένας χώρος με νόρμα, G ένα μη κενό υποσύνολό του, $x \in X$, και $g_0 \in P_G(x)$, τότε το **σφάλμα προσέγγισης** ορίζεται ως εξης:

$$d(x, G) = \|x - g_0\| = \inf\{\|x - g\| : g \in G\}.$$

Αρχικά, έχουμε την παρακάτω συνθήκη για βέλτιστη προσέγγιση από κυρτούς κώνους, η οποία είναι συνέπεια του θεωρήματος 2.5.1.

Θεώρημα 3.2.1. *Έστω X χώρος με νόρμα, C κυρτός κώνος στο X, $x \in X$ και $y_0 \in C$. Τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(α) $y_0 \in P_C(x)$,

(β) $[y_0|x - y_0] = 0$ *και* $[x|x - y_0] = d^2(x, C)$.

Απόδειξη. $(\alpha) \Rightarrow (\beta)$ Αν $y_0 \in P_C(x)$, τότε από (α)⇒(γ) του θεωρήματος 2.5.1 παίρνουμε ότι $[y_0|x - y_0] = 0$. Άρα,

$$\begin{aligned} [x|x - y_0] &= [x|x - y_0] - [y_0|x - y_0] \\ &= [x - y_0|x - y_0] \\ &= \|x - y_0\|^2 = d^2(x, C). \end{aligned}$$

$(\beta) \Rightarrow (\alpha)$ Αντίστροφα, αν $[y_0|x - y_0] = 0$ και $[x|x - y_0] = d^2(x, C)$, τότε

$$\begin{aligned} d^2(x, C) &= [x|x - y_0] \\ &= [x|x - y_0] - [y_0|x - y_0] \\ &= [x - y_0|x - y_0] \\ &= \|x - y_0\|^2. \end{aligned}$$

Άρα, αφού $y \in C$, τότε $y_0 \in P_C(x)$. □

Στην περίπτωση που ο κυρτός κώνος είναι υπόχωρος, όπως φαίνεται στο παρακάτω θεώρημα, καταλήγουμε στην ίδια συνθήκη για χαρακτηρισμό βέλτιστης προσέγγισης.

Θεώρημα 3.2.2. *Έστω X χώρος με νόρμα, M υπόχωρός του, $x \in X$ και $y_0 \in M$. Τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(α) $y_0 \in P_M(x)$,

(β) $[y_0|x-y_0] = 0$ *και* $[x|x-y_0] = d^2(x, M)$.

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι παρόμοια με εκείνη του θεωρήματος 3.2.1 με τη μόνη διαφορά ότι χρησιμοποιούμε την συνεπαγωγή (α)⇒ (γ) του Θεωρήματος 2.5.2. □

Το επόμενο θεώρημα, το οποίο προκύπτει σαν συνέπεια του θεωρήματος 2.5.3, αφορά μετατοπίσεις κυρτών κώνων.

Θεώρημα 3.2.3. *Έστω X χώρος με νόρμα, C κυρτός κώνος στο X, $z \in X$ και $K = z + C$. Έστω, επίσης, $x \in X$ και $y_0 \in K$. Τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(α) $y_0 \in P_K(x)$,

(β) $[y_0 - z|x-y_0] = 0$ *και* $[x - z|x-y_0] = d^2(x, K)$.

Απόδειξη. (α)⇒(β) Αν $y_0 \in P_K(x)$, τότε από (α)⇒ (γ) του θεωρήματος 2.5.3 παίρνουμε ότι $[y_0 - z|x-y_0] = 0$. Άρα,

$$\begin{aligned}
[x-z|x-y_0] &= [x-z|x-y_0] - [y_0-z|x-y_0] \\
&= [x-z-y_0+z|x-y_0] \\
&= [x-y_0|x-y_0] \\
&= \|x-y_0\|^2 = d^2(x,K).
\end{aligned}$$

(β)⇒(α) Αντίστροφα, αν $[y_0 - z|x-y_0] = 0$ και $[x - z|x-y_0] = d^2(x, K)$, τότε

$$\begin{aligned}
d^2(x,K) &= [x-z|x-y_0] \\
&= [x-z|x-y_0] - [y_0-z|x-y_0] \\
&= [x-z-y_0+z|x-y_0] \\
&= [x-y_0|x-y_0] \\
&= \|x-y_0\|^2.
\end{aligned}$$

Άρα, αφού $y_0 \in K$, τότε $y_0 \in P_K(x)$. □

Όπως πριν, έτσι και στη μετατόπιση υπόχωρων η συνθήκη είναι η ίδια με εκείνη για μετατοπίσεις κυρτών κώνων.

Θεώρημα 3.2.4. *Έστω X χώρος με νόρμα, M υπόχωρός του, $z \in X$ και $K = z + M$. Έστω, επίσης, $x \in X$ και $y_0 \in K$. Τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(α) $y_0 \in P_K(x)$,

(β) $[y_0 - z|x - y_0] = 0$ *και* $[x - z|x - y_0] = d^2(x, K)$.

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι παρόμοια με εκείνη του θεωρήματος 3.2.3 με τη μόνη διαφορά ότι χρησιμοποιούμε την συνεπαγωγή (α)⇒(γ) του Θεωρήματος 2.5.4. □

Τα παραπάνω αποτλέσματα μας παρέχουν τη δυνατότητα υπολογισμού του σφάλματος μιας προσέγγισης. Για παράδειγμα, αν το y_0 είναι μια βέλτιστη προσέγγιση του x από το K, μίας μετατόπισης κυρτού κώνου C κατά z, τότε το σφάλμα προσέγγισης μπορεί να υπολογιστεί απο τον τύπο

$$d(x, K) = [x - z|x - y_0]^{\frac{1}{2}}.$$

3.3 Ιδιότητες των Βέλτιστων Προσεγγίσεων

Θεώρημα 3.3.1. *Έστω X χώρος με νόρμα, K κυρτό σύνολο, $x \in X$ και $y_0 \in K$.*
Τότε, $y_0 \in P_K(x)$ αν και μόνο αν $y_0 \in P_K(\lambda x + (1 - \lambda)y_0) \quad \forall \lambda \geq 0$.

Απόδειξη. Αφού $\lambda x + (1 - \lambda)y_0 \in X \quad \forall \lambda \geq 0$, από (α)⇔(γ) του θεωρήματος

2.3.4, έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
y_0 \in P_K(\lambda x + (1-\lambda)y_0) &\Leftrightarrow \lambda x + (1-\lambda)y_0 - y_0 \in (K - y_0)^o \\
&\Leftrightarrow \lambda(x - y_0) \in (K - y_0)^o \\
&\Leftrightarrow [y - y_0|\lambda(x - y_0)] \leq 0 \quad \forall y \in K \\
&\Leftrightarrow \lambda[y - y_0|x - y_0] \leq 0 \quad \forall y \in K \\
&\Leftrightarrow [y - y_0|x - y_0] \leq 0 \quad \forall y \in K \quad \text{αφού } \lambda \geq 0 \\
&\Leftrightarrow x - y_0 \in (K - y_0)^o \\
&\Leftrightarrow y_0 \in P_K(x).
\end{aligned}
$$

□

Αφού οι κυρτοί κώνοι και οι μετατοπίσεις τους είναι κυρτά σύνολα, έχουμε τα επόμενα δύο πορίσματα του παραπάνω θεωρήματος.

Πόρισμα 3.3.1. *Έστω X χώρος με νόρμα, C κυρτός κώνος, $x \in X$ και $y_0 \in C$. Τότε, $y_0 \in P_C(x)$ αν και μόνο αν $y_0 \in P_C(\lambda x + (1-\lambda)y_0) \quad \forall \lambda \geq 0$.*

Πόρισμα 3.3.2. *Έστω X χώρος με νόρμα, C κυρτός κώνος, $z \in X$ και $C' = z + C$. Έστω, επίσης, $x \in X$ και $y_0 \in C'$.
Τότε, $y_0 \in P_{C'}(x)$ αν και μόνο αν $y_0 \in P_{C'}(\lambda x + (1-\lambda)y_0) \quad \forall \lambda \geq 0$.*

Παρόμοια αποτελέσματα προκύπτουν για υπόχωρους και τις μετατοπίσεις τους, αφού είναι και αυτά κυρτά σύνολα. Ωστόσο, παρατηρούμε ότι τα αποτελέσματα δεν ισχύουν μόνο για $\lambda \geq 0$, αλλά και για $\lambda < 0$.

Θεώρημα 3.3.2. *Έστω X χώρος με νόρμα, M υπόχωρός του, $z \in X$ και $M' = z + M$. Έστω, επίσης, $x \in X$ και $y_0 \in M'$.
Τότε, $y_0 \in P_{M'}(x)$ αν και μόνο αν $y_0 \in P_{M'}(\lambda x + (1-\lambda)y_0) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$.*

Απόδειξη. Αφού $\lambda x + (1-\lambda)y_0 \in X \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$, από (α)⇔(γ) του θεωρήματος

2.5.4, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
y_0 \in P_{M'}(\lambda x + (1-\lambda)y_0) &\Leftrightarrow \lambda x + (1-\lambda)y_0 - y_0 \in M^{\perp} \\
&\Leftrightarrow \lambda(x - y_0) \in M^{\perp} \\
&\Leftrightarrow [m|\lambda(x-y_0)] = 0 \quad \forall m \in M \\
&\Leftrightarrow \lambda[m|x-y_0] = 0 \quad \forall m \in M \\
&\Leftrightarrow [m|x-y_0] = 0 \quad \forall m \in M \\
&\Leftrightarrow x - y_0 \in M^{\perp} \\
&\Leftrightarrow y_0 \in P_{M'}(x).
\end{aligned}$$

□

Πόρισμα 3.3.3. *Έστω X χώρος με νόρμα, M υπόχωρός του, $x \in X$ και $y_0 \in M$. Τότε, $y_0 \in P_M(x)$ αν και μόνο αν $y_0 \in P_M(\lambda x + (1-\lambda)y_0) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$.*

Τα παρακάτω αποτελέσματα δείχνουν ότι η εύρεση της βέλτιστης προσέγγισης απο ένα κυρτό σύνολο(ή συγκεκριμένα κυρτό κώνο ή υπόχωρο) μπορεί να γίνει μέσω της εύρεσης της βέλτιστης προσέγγισης από τις μετατοπίσεις τους, ή, ισοδύναμα, από τους βαθμωτούς πολλαπλασιασμούς τους.

Θεώρημα 3.3.3. *Έστω X χώρος με νόρμα, K ένα κυρτό σύνολο στο X, $z \in X$ και $K' = z + K$. Τότε $P_{K'}(z + x) = z + P_K(x) \quad \forall x \in X$.*

Απόδειξη. Το $K' = z + K$ είναι κυρτό σύνολο. Πράγματι, αν $k_1' = z + k_1$ και $k_2' = z + k_2$ είναι στοιχεία του K', τότε $\forall t \in [0, 1]$ έχουμε ότι

$$tk_1' + (1-t)k_2' = tz + (1-t)z + tk_1 + (1-t)k_2 \in z + K = K'.$$

Έστω $y_0 \in K'$ έτσι ώστε $y_0 - z \in K$. Τότε $\forall x \in X$ από $(\alpha) \Leftrightarrow (\gamma)$ του θεωρήματος 2.3.4 έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
y_0 \in P_{K'}(z+x) &\Leftrightarrow z+x-y_0 \in (K'-y_0)^o \\
&\Leftrightarrow x-(y_0-z) \in (z+K-y_0)^o, \quad \text{αφού } K'=z+K \\
&\Leftrightarrow x-(y_0-z) \in (K-(y_0-z))^o \\
&\Leftrightarrow y_0 - z \in P_K(x) \\
&\Leftrightarrow y_0 \in z + P_K(x). \\
&\Leftrightarrow P_{K'}(z+x) = z + P_K(x) \quad \forall x \in X.
\end{aligned}$$

□

Από το παραπάνω θεώρημα προκύπτουν άμεσα τα επόμενα δύο πορίσματα που αναφέρονται στις ειδικές περιπτώσεις που το κυρτό σύνολο είναι κυρτός κώνος ή υπόχωρος.

Πόρισμα 3.3.4. *Έστω X χώρος με νόρμα, C ένας κυρτός κώνος στο X, $z \in X$ και $C' = z + C$. Τότε $P_{C'}(z+x) = z + P_C(x) \quad \forall x \in X$.*

Πόρισμα 3.3.5. *Έστω X χώρος με νόρμα, M ένας υπόχωρός του, $z \in X$ και $M' = z + M$. Τότε $P_{M'}(z+x) = z + P_M(x) \quad \forall x \in X$.*
Ειδικότερα, αν $z \in M$, τότε $P_M(z+x) = z + P_M(x) \quad \forall x \in X$.

Θεώρημα 3.3.4. *Έστω X χώρος με νόρμα, K ένα κυρτό σύνολο στο X, $\alpha \in \mathbb{R}$, και $K' = \alpha K$. Τότε $P_{K'}(\alpha x) = \alpha P_K(x) \quad \forall x \in X$.*

Απόδειξη. Το $K' = \alpha K$ είναι κυρτό. Όντως, αν $k_1' = \alpha k_1, k_2' = \alpha k_2 \in K' = \alpha K$, με $k_1, k_2 \in K$, τότε $\forall t \in [0,1]$, έχουμε ότι

$$tk_1' + (1-t)k_2' = \alpha(tk_1 + (1-t)k_2) \in \alpha K = K'.$$

Αν $\alpha = 0$, τότε το αποτέλεσμα προκύπτει τετριμένα. Όντως, αν $K' = \{0\}$, τότε $P_{K'}(0 \cdot x) = P_{\{0\}}(0) = \{0\} = 0 \cdot P_K(x) \quad \forall x \in X$. Υποθέτουμε, λοιπόν, ότι $\alpha \neq 0$.
Έστω $y_0 \in K'$ έτσι ώστε $\frac{y_0}{\alpha} \in K$. Τότε για κάθε $x \in X$, από $(\alpha) \Leftrightarrow (\gamma)$ του

θεωρήματος 2.3.4, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} y_0 \in P_{K'}(\alpha x) &\Leftrightarrow \alpha x - y_0 \in (K' - y_0)^o \\ &\Leftrightarrow [k' - y_0|\alpha x - y_0] \leq 0 \quad \forall k' \in K' \\ &\Leftrightarrow \alpha^2 \left[k - \frac{y_0}{\alpha}\middle| x - \frac{y_0}{\alpha}\right] \leq 0 \quad \forall k \in K \\ &\Leftrightarrow \left[k - \frac{y_0}{\alpha}\middle| x - \frac{y_0}{\alpha}\right] \leq 0 \quad \forall k \in K \\ &\Leftrightarrow x - \frac{y_0}{\alpha} \in \left(K - \frac{y_0}{\alpha}\right)^o \\ &\Leftrightarrow \frac{y_0}{\alpha} \in P_K(x) \\ &\Leftrightarrow y_0 \in \alpha P_K(x) \\ &\Leftrightarrow P_{K'}(\alpha x) = \alpha P_K(x) \quad \forall x \in X. \end{aligned}$$

□

Πόρισμα 3.3.6. *Έστω X χώρος με νόρμα, C ένας κυρτός κώνος στο X, $\alpha \in \mathbb{R}$, και $C' = \alpha C$. Τότε $P_{C'}(\alpha x) = \alpha P_C(x) \quad \forall x \in X$.*
Ειδικότερα, αν $\alpha \geq 0$, τότε $C' = \alpha C = C$ και άρα
$P_C(\alpha x) = \alpha P_C(x) \quad \forall x \in X$.

Πόρισμα 3.3.7. *Έστω X χώρος με νόρμα, M υπόχωρός του, και $\alpha \in \mathbb{R}$. Τότε $P_M(\alpha X) = \alpha P_M(x) \quad \forall x \in X$.*

Σαν άμεση συνέπεια των παραπάνω, μπορούμε να χαρακτηρίσουμε ένα σύνολο ως προς το proximinality του μέσω μετατοπίσεων του ή βαθμωτών πολλαπλασιασμών. Τα παρακάτω δύο θεωρήματα ισχύουν εξίσου για κυρτούς κώνους και υπόχωρους.

Θεώρημα 3.3.5. *Έστω X χώρος με νόρμα και K κυρτό σύνολο στο X. Τότε το K είναι proximinal(αντίστοιχα semi-Chebyshev ή Chebyshev) αν και μόνο αν το $z + K$ ειναι proximinal(αντίστοιχα semi-Chebyshev ή Chebyshev) για κάθε $z \in X$.*

Απόδειξη. Έστω $z \in X$ και $y_0 \in K$. Τότε $z + y_0 \in z + K$. Τότε $\forall x \in X, y_0 \in P_K(x)$ αν και μόνο αν $z + y_0 \in z + P_K(x) = P_{z+K}(z + x)$, από το Θεώρημα 3.3.3 Άρα $\forall x \in X$, το $P_K(x)$ περιέχει τουλάχιστον (αντίστοιχα το πολύ ή ακριβώς) ένα στοιχείο του K αν και μόνο αν το $P_{z+K}(z+x)$ περιέχει τουλάχιστον (αντίστοιχα το πολύ ή ακριβώς) ένα στοιχείο του $z+K$.

□

Θεώρημα 3.3.6. *Έστω X χώρος με νόρμα και K κυρτό σύνολο στο X. Τότε το K είναι proximinal(αντίστοιχα semi-Chebyshev ή Chebyshev) αν και μόνο αν το αK ειναι proximinal(αντίστοιχα semi-Chebyshev ή Chebyshev) για κάθε $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.*

Απόδειξη. Έστω $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $y_0 \in K$ και άρα $\alpha y_0 \in \alpha K$. Τότε $\forall x \in X, y_0 \in P_K(x)$ αν και μόνο αν $\alpha y_0 \in \alpha P_K(x) = P_{\alpha K}(\alpha x)$, από το Θεώρημα 3.3.4. Άρα $\forall x \in X$, το $P_K(x)$ περιέχει τουλάχιστον (αντίστοιχα το πολύ ή ακριβώς) ένα στοιχείο του K αν και μόνο αν το $P_{\alpha K}(\alpha x)$ περιέχει τουλάχιστον (αντίστοιχα το πολύ ή ακριβώς) ένα στοιχείο του αK. □

3.4 Διατεταγμένα Ορθογώνια Σύνολα

Ο κύριος σκοπός της ενότητας αυτής είναι να εισάγουμε την έννοια του διατεταγμένου ορθογώνιου συνόλου σε χώρους με νόρμα, η οποία θα αποτελεί μία γενίκευση της έννοιας του ορθογώνιου συνόλου σε χώρους εσωτερικού γινομένου. Η έννοια της διάταξης είναι αναγκαία λόγω της έλλειψης συμμετρίας της ορθογωνιότητας ως προς το ημιεσωτερικό γινόμενο.

Ορισμός 3.4.1. *Έστω X χώρος με νόρμα, και G ένα μη κενό μη μονοσύνολο πεπερασμένο υποσύνολο του X. Το G καλείται **διατεταγμένο ορθογώνιο**(ordered orthogonal) αν τα στοιχεία του μπορούν να διαταχθούν ως μία ακολουθία για την οποία κάθε στοιχείο, εκτός του πρώτου, είναι κάθετο σε κάθε προηγούμενο στοιχείο, δηλαδή αν τα στοιχεία του G μπορούν να διαταχθούν ως $\{x_1, x_2, ..., x_n\}, \quad n > 1$, με $x_j \perp x_i \forall i, j$ με $1 \leq i < j \leq n$.*

Ορισμός 3.4.2. *Έστω X χώρος με νόρμα. Τότε ένα αυθαίρετο μη κενό υποσύνολο G του X καλείται **διατεταγμένο ορθογώνιο** αν κάθε μη κενό μη μονοσύνολο πεπερασμένο υποσύνολο του G είναι διατεταγμένο ορθογώνιο.*

Ορισμός 3.4.3. *Έστω X χώρος με νόρμα και G ένα μη κενό υποσύνολό του. Το G καλείται* ***διατεταγμένο ορθοκανονικό****(orderd orthonormal) αν το G είναι διατεταγμένο ορθογώνιο και $\forall x \in G$ ισχύει ότι $\|x\| = [x|x]^{\frac{1}{2}} = 1$.*

Παρατήρηση 3.4.1. *Σε χώρους εσωτερικού γινομένου, λόγω συμμετρικότητας της ορθογωνιότητας ως προς εσωτερικό γινόμενο, κάθε ορθογώνιο σύνολο είναι διατεταγμένο ορθογώνιο, και κάθε ορθοκανονικό σύνολο είναι διατεταγμένο ορθοκανονικό.*

Θεώρημα 3.4.1. *Έστω X χώρος με νόρμα και G ένα διατεταγμένο ορθογώνιο υποσύνολο του X με $0 \notin G$.*
Τότε το G είναι γραμμικώς ανεξάρτητο.

Απόδειξη. Έστω $G_n = \{x_1, x_2, ..., x_n\} \subseteq G$. Αφού το G είναι διατεταγμένο ορθογώνιο, τότε το G_n είναι επίσης. Άρα το G_n μπορεί να εκφραστεί ως $G_n = \{y_1, y_2, ..., y_n\}$ έτσι ώστε για $1 \leq i, j \leq n$ κάθε y_i να είναι ένα μοναδικό x_j και $[y_i|y_j] = 0$. Έστω, τώρα, $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i y_i = 0$, όπου $\alpha_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n$. Άρα έχουμε ότι

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i [y_i|y_j] = \left[\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i \middle| y_j \right] = 0 \quad \forall j = 1, 2, ..., n.$$

Βάζοντας διαδοχικά $j = n, n-1, ..., 1$, αφού $[y_i|y_j] = 0$ για $1 \leq i < j \leq n$ και $y_i \neq 0 \quad \forall 1 \leq i \leq n$, προκύπτει ότι $\alpha_n = 0, \alpha_{n-1} = 0, ..., \alpha_1 = 0$. Άρα το $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο και άρα το $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ είναι επίσης.
Άρα το G είναι γραμμικώς ανεξάρτητο. □

3.5 Διατεταγμένη Ορθοκανονικοποίηση

Το Θεώρημα 3.4.1 εξασφαλίζει ότι κάθε διατεταγμένο ορθοκανονικό σύνολο είναι γραμμικώς ανεξάρτητο. Σε αυτή την ενότητα θα επιδιώξουμε το αντίστροφο. Δεδομένου ενός αριθμήσιμου γραμμικώς ανεξάρτητου συνόλου, θα δείξουμε ότι μπορεί να κατασκευαστεί ένα διατεταγμένο ορθοκανονικό σύνολο.

Λήμμα 3.5.1. *Έστω X χώρος με νόρμα και U πεπερασμένης διάστασης υπόχωρος του X. Τότε ο Y είναι κλειστός υπόχωρος.*

Απόδειξη. Για την απόδειξη του θεωρήματος παραπέμπουμε στο Πόρισμα 2.10, σελίδα 23, [13]. □

Λήμμα 3.5.2. *Έστω X χώρος με νόρμα και M ένας πεπερασμένης διάστασης υπόχωρός του. Τότε ο M είναι proximinal*

Απόδειξη. Αφού ο M είναι πεπερασμένης διάστασης υπόχωρος του X, είναι και κλειστό υποσύνολό του. Άρα, από το Θεώρημα 2.2.2 προκύπτει ότι ο M είναι proximinal. □

Θεώρημα 3.5.1. *Έστω X χώρος με νόρμα και $\{x_1, x_2, ...\}$ ένα αριθμήσιμο γραμμικώς ανεξάρτητο υποσύνολο του X. Θέτουμε $M_0 = \{0\}$,*
$M_n =< x_1, x_2, ..., x_n >$ και $y_n \in P_{M_{n-1}}(x_n) \quad \forall n \geq 1$. Ορίζουμε $z_n = x_n - y_n$ και $u_n = \frac{z_n}{\|z_n\|} \quad \forall n \geq 1$. Τότε

(α) Το $\{z_1, z_2, ...\}$ είναι ένα διατεταγμένο ορθογώνιο σύνολο,

(β) το $\{u_1, u_2, ...\}$ είναι ένα διατεταγμένο ορθοκανονικό σύνολο, και

(γ) $< z_1, z_2, ..., z_n >=< u_1, u_2, ..., u_n >= M_n \quad \forall n \geq 1$.

Απόδειξη. Αφού $\forall n \geq 0$ ο M_n είναι υπόχωρος πεπερασμένης διάστασης, τότε, λόγω του Λήμματος 3.5.2, είναι proximinal. Άρα $\forall y_n \in P_{Mn-1}(x_n)$, το $z_n = x_n - y_n$ είναι καλά ορισμένο για $n = 1, 2, ...$. Αφού το $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο, τότε $x_n \notin M_{n-1}$. Άρα $z_n \neq 0$ και άρα το $u_n = \frac{z_n}{\|z_n\|}$ είναι επίσης καλά ορισμένο για $n = 1, 2, ...$. Αφού $y_j = P_{M_{j-1}}(x_j)$, από $(\alpha) \Leftrightarrow (\gamma)$ του Θεωρήματος 2.5.2, παίρνουμε ότι $z_j = x_j - y_j \in M_{j-1}^{\perp} \quad \forall 1 < j \leq n$. Επίσης για i τέτοιο ώστε $1 \leq i < j$ παίρνουμε ότι

$$z_i = x_i - y_i \in M_i - M_{i-1} \subseteq M_i \subseteq M_{j-1}.$$

Άρα $\forall i, j : 1 \leq i < j \leq n \Rightarrow [z_i|z_j] = 0 \Rightarrow z_j \perp z_i$. Άρα το $\{z_1, z_2, ..., z_n\}$ είναι διατεταγμένο ορθογώνιο για κάθε $n \geq 1$.
Άρα το $\{z_1, z_2, ...\}$ είναι επίσης διατεταγμένο ορθογώνιο.

Άρα ισχύει το (α).

Αφού $u_n = \frac{z_n}{\|z_n\|} \quad \forall n \geq 1$, και $[z_i|z_j] = 0 \quad \forall i, j : 1 \leq i < j \leq n$, προκύπτει ότι

$$[u_i|u_j] = \left[\frac{z_i}{\|z_i\|}\middle|\frac{z_j}{\|z_j\|}\right] = \left(\frac{1}{\|z_i\|\|z_j\|}\right)[z_i|z_j] = 0$$

για $1 \leq i < j \leq n$. Άρα $\forall n \geq 1$, το $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ είναι διατεταγμένο ορθογώνιο. Ακόμα, $\|u_n\| = 1$. Άρα το $\{u_1, u_2, ...\}$ είναι διατεταγμένο ορθοκανονικό. Άρα ισχύει το (β).

Αφού $u_n = \frac{z_n}{\|z_n\|} \quad \forall n \geq 1 \Rightarrow < z_1, z_2, ..., z_n > = < u_1.u_2, ..., u_n > \quad \forall n \geq 1$. Επιπρόσθετα, αφού $\{u_1, u_2, ..., u_n\} \subseteq M_n$, $\dim M_n = n$, και όλα τα διατεταγμένα ορθοκανονικά σύνολα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα απο Θεώρημα 3.4.1, συνεπάγεται ότι $< u_1, u_2, ..., u_n > = M_n \quad \forall n \geq 1$.

□

Παρατηρούμε ότι το Θεώρημα 3.5.1 μπορεί να θεωρηθεί ως μία γενίκευση της διαδικασίας ορθοκανονικοποίησης $Gram - Schmidt$ σε χώρους με νόρμα.

Παρατήρηση 3.5.1. *Το $\{z_1, z_2, ...\}$ και άρα και το $\{u_1, u_2, ...\}$ δεν είναι απαραίτητα μοναδικά. Πράγματι, αφού το M_{n-1} είναι proximinal, τότε για κάθε x_n το $P_{M_{n-1}}(x_n)$ μπορεί να περιέχει παραπάνω από ένα στοιχεία y_n για $n = 1, 2, ...$ Άρα το $z_n = x_n - y_n$ δεν είναι μοναδικό.*

Θεώρημα 3.5.2. *Έστω X αυστηρά κυρτός χώρος με νόρμα και $\{x_1, x_2, ...\}$ ένα αριθμήσιμο γραμμικώς ανεξάρτητο υποσύνολο του X. Θέτουμε $M_0 = \{0\}$, και $M_n = < x_1, x_2, ..., x_n > \quad \forall n \geq 1$. Ορίζουμε $z_n = x_n - P_{M_{n-1}}(x_n)$ και $u_n = \frac{z_n}{\|z_n\|} \quad \forall n \geq 1$. Τότε*

(α) Το $\{z_1, z_2, ...\}$ είναι ένα μοναδικό διατεταγμένο ορθογώνιο σύνολο,

(β) το $\{u_1, u_2, ...\}$ είναι ένα μοναδικό διατεταγμένο ορθοκανονικό σύνολο, και

(γ) $< z_1, z_2, ..., z_n > = < u_1, u_2, ..., u_n > = M_n \quad \forall n \geq 1$.

Απόδειξη. Λόγω Θεωρήματος 2.2.4 αφού ο X είναι αυστηρά κυρτός τότε για κάθε x_n, το $P_{M_{n-1}}(x_n)$ περιέχει ακριβώς ένα στοιχείο για $n = 1, 2, ...$. Άρα το στοιχείο $z_n = x_n - P_{M_{n-1}}(x_n)$ και το $u_n = \frac{z_n}{\|z_n\|}$ ορίζονται μονοσήμαντα. Άρα, τα σύνολα που προκύπτουν από το Θεώρημα 3.5.1 είναι μοναδικά. $\square$

Κεφάλαιο 4

Χαρακτηρισμός *Proximinality* και *Chebyshevity* και Εφαρμογές

4.1 Εισαγωγή

Ο κύριος σκοπός αυτού του κεφαλαίου είναι ο χαρακτηρισμός *proximinality*, *semiChebyshevity* και *Chebyshevity* κυρτών συνόλων σε χώρους με νόρμα ως προς το δυνατότητας του χώρου να γραφτεί σαν (ευθύ) άθροισμα δύο συνόλων, βασιζόμενοι κυρίως στα αποτελέσματα του δευτέρου κεφαλαίου.

4.2 Χαρακτηρισμός *Proximinality* και *Chebyshevity*

Θεώρημα 4.2.1. *Έστω X χώρος με νόρμα, K κυρτό σύνολο στο X. Τότε το K είναι proximinal(αντίστοιχα semiChebyshev, ή semiChebyshev) αν και μόνο αν $\forall x \in X$ υπάρχει τουλάχιστον (αντίστοιχα το πολύ, ή ακριβώς) μια αναπαράσταση της μορφής $x = y + y'$ με $y \in K$ και $y' \in (K - y)^o$.*

Απόδειξη. Από την ισοδυναμία των (α),(γ) του θεωρήματος 2.3.4, προκύπτει ότι το K είναι proximinal(αντίστοιχα semiChebyshev, ή Chebyshev) αν και μόνο αν $\forall x \in X \quad \exists$ τουλαχιστον(αντίστοιχα το πολύ, ή ακριβώς) ένα $y \in K$ τέτοιο ώστε $x - y \in (K - y)^o \quad \Leftrightarrow$
$\forall x \in X$ υπάρχει τουλάχιστον(αντίστοιχα το πολύ, ή ακριβώς) ένα ζεύγος $y \in K$ και $y' = x - y \in (K - y)^o$ έτσι ώστε $x = y + y'$.

□

Θεώρημα 4.2.2. *Έστω X χώρος με νόρμα, C κυρτός κώνος στο X, $z \in X$ και $C' = z + C$. Τότε το C' είναι proximinal(αντίστοιχα semiChebyshev, ή Chebyshev) αν και μόνο αν $\forall x \in X$ υπάρχει τουλάχιστον (αντίστοιχα το πολύ, ή ακριβώς) μία αναπαράσταση της μορφής $x = y + y'$ με $y \in C'$ και $y' \in C^o \cap (y - z)^\perp$.*

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι ανάλογη με εκείνη του θεωρήματος 4.2.1 με τη μόνη διαφορά οτι εδώ χρησιμοποιούμε την ισοδυναμία (α),(γ) του θεωρήματος 2.5.3. □

Θεώρημα 4.2.3. *Έστω X χώρος με νόρμα, M υπόχωρος του X, $z \in X$ και $M' = z + M$. Τότε το M' είναι proximinal(αντίστοιχα semiChebyshev, ή Chebyshev) αν και μόνο αν $\forall x \in X$ υπάρχει τουλάχιστον (αντίστοιχα το πολύ, ή ακριβώς) μία αναπαράσταση της μορφής $x = y + y'$ με $y \in M'$ και $y' \in M^\perp$.*

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι ανάλογη με εκείνη του θεωρήματος 4.2.1 με τη μόνη διαφορά οτι εδώ χρησιμοποιούμε την ισοδυναμία (α),(γ) του θεωρήματος 2.5.4. □

Παρατήρηση 4.2.1. *Βάζοντας $z = 0$ στα θεωρήματα 4.2.2 και 4.2.3 προκύπτει ο χαρακτηρισμός βέλτιστων προσεγγίσεων για τους ίδιους κυρτούς κώνους και υπόχωρους αντίστοιχα.*

4.3 Θεωρήματα Ανάλυσης του Χώρου

Ορισμός 4.3.1. *Έστω X χώρος με νόρμα, και A,B δύο μη κενά υποσύνολα του X. Τότε το X λέμε ότι είναι το άθροισμα(sum) των A και B, και συμβολίζεται $X = A + B$ αν $\forall x \in X$ υπάρχει τουλάχιστον μία αναπαράσταση του x της μορφής $x = \alpha + \beta$, όπου $\alpha \in A, \quad \beta \in B$.*
Λέμε ότι ο X είναι το ευθύ άθροισμα(direct sum) των A και B, και συμβολίζεται $X = A \oplus B$ αν $\forall x \in X$ υπάρχει μοναδική αναπαράσταση του x της μορφής $x = \alpha + \beta$, όπου $\alpha \in A, \quad \beta \in B$.
Αν τα A,B είναι υπόχωροι του X, τότε $X = A \oplus B \Leftrightarrow X = A + B$ και $A \cap B = \{0\}$.

Θεώρημα 4.3.1. *Έστω X χώρος με νόρμα, M υπόχωρος του X, $z \in X$, και $M' = z + M$. Τότε το M' είναι proximinal(αντίστοιχα Chebyshev) αν και μόνο αν $X = M' + M^{\perp}$ (αντίστοιχα $X = M' \oplus M^{\perp}$).*

Απόδειξη. Η απόδειξη προκύπτει άμεσα από το Θεώρημα 4.2.3 και τον ορισμό 4.3.1. □

Τα επόμενα δύο λήμματα θα χρησιμοποιηθούν στα επόμενα δύο θεωρήματα, με τα οποία θα διατυπώσουμε αναγκαίες και ικανές συνθήκες για να είναι ένας υπόχωρος κλειστός σε ανακλαστικούς χώρους.

Λήμμα 4.3.1. *Έστω X ανακλαστικός χώρος με νόρμα, και M κλειστός υπόχωρος του X. Τότε το M είναι proximinal. Αν, επιπρόσθετα, ο X είναι αυστηρά κυρτός, τότε το M είναι Chebyshev.*

Απόδειξη. Για την απόδειξη του θεωρήματος παραπέμπουμε στο Theorem 2.14, σελίδα 19, [11]. □

Λήμμα 4.3.2. *Έστω X χώρος με νόρμα, και G ένα proximinal σύνολο στο X. Τότε το G είναι κλειστό.*

Απόδειξη. Έστω η ακολουθία $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq G$ έτσι ώστε $x_n \to x$. Αφού το G είναι proximinal, τότε $P_G(x) \neq \emptyset$.
Άρα υπάρχει $g_0 \in P_G(x)$ έτσι ώστε $\|x - g_0\| \leq \|x - x_n\| \forall n \in \mathbb{N}$.
Όμως $\lim x_n = x \Rightarrow \lim \|x_n - x\| = 0 \Rightarrow x = g_0 \in G$, λόγω ορισμού ορίου.
Άρα το G είναι κλειστό. □

Θεώρημα 4.3.2. *Έστω X ένας ανακλαστικός χώρος με νόρμα, και M ένας υπόχωρος του X.*
Τότε ο M είναι κλειστός αν και μόνο αν $X = M + M^{\perp}$.

Απόδειξη. Αφού ο X είναι ανακλαστικός, προκύπτει απο το Λήμμα 4.3.1 και το Λήμμα 4.3.2 ότι ο M είναι κλειστός αν και μόνο αν ο M είναι proximinal. Από το Θεώρημα 4.3.1 με $z = 0$, το M είναι proximinal αν και μόνο αν $X = M + M^{\perp}$. □

Το παραπάνω θεώρημα μπορεί να τροποποιηθεί για να γράφεται ο χώρος X σαν ευθύ άθροισμα δύο υπόχωρων με την πρόσθετη συνθήκη της αυστηρής κυρτότητας ως εξής:

Θεώρημα 4.3.3. *Έστω X ένας αυστηρά κυρτός ανακλαστικός χώρος με νόρμα, και M ένας υπόχωρος του X.*
Τότε ο M είναι κλειστός αν και μόνο αν $X = M \oplus M^{\perp}$.

Απόδειξη. Αφού ο X είναι αυστηρά κυρτός και ανακλαστικός, απο τα Λήμματα 4.3.1 και 4.3.2 προκύπτει ότι ο M είναι κλειστός αν και μόνο αν είναι Chebyshev.Από το Θεώρημα 4.3.1 με $z = 0$, ο M είναι Chebyshev αν και μόνο αν $M = M \oplus M^{\perp}$. $\square$

Όπως προκύπτει από το παρακάτω παράδειγμα, τα θεωρήματα 4.3.2 και 4.3.3 δεν ισχύουν σε μη ανακλαστικούς χώρους με νόρμα.

Παράδειγμα 4.3.1. *Έστω X ο πραγματικός χώρος με νόρμα $(c_{00}, \|\cdot\|_1)$ όλων των πραγματικών ακολουθιών με πεπερασμένο πλήθος μη μηδενικών στοιχείων, με $\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|$ για $x = (x_1, x_2, ...) \in X$, και ημιεσωτερικό γινόμενο*

$$[x|y] = \|y\|_1 \sum_{\substack{k=1 \\ y_k \neq 0}}^{\infty} \frac{x_k y_k}{|y_k|} \quad x, y \in X.$$

Ορίζουμε $f : X \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k}, \quad x \in X.$$

Τότε η f είναι γραμμική. Από την ανισότητα Holder, $\forall x \in X$, έχουμε ότι

$$|f(x)|^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 \right) = \frac{\pi^2}{6} \|x\|^2,$$

και άρα η f είναι φραγμένη με $\|f\| \leq \frac{\pi}{\sqrt{6}}$. Άρα $f \in X^*$. Έστω $M = Kerf = \{x \in X : f(x) = 0\}$. Αφού $f \neq 0$, ο M είναι γνήσιος κλειστός υπόχωρος του X. Έστω $z \in M^{\perp}$.
Υποθέτουμε ότι $z \neq 0$. Τότε, αφού $z \in c_{00}$ ισχύει ότι $z = (z_1, ..., z_m, 0, 0, ...)$

για κάποιο $m \in \mathbb{N}$. Έστω $x \in X$ με

$$x_k = \begin{cases} 1 & , k = 1, \\ -(m+1) & , k = m+1, \\ 0 & , \text{αλλιώς}. \end{cases}$$

Τότε,

$$f(x) = \frac{1}{1} + \frac{-(m+1)}{m+1} = 0,$$

και άρα $x \in M$. Αφού $z \in M^\perp$, έχουμε ότι

$$0 = [x|z] = \|z\|_1 \sum_{\substack{k=1 \\ z_k \neq 0}}^{\infty} \frac{x_k z_k}{|z_k|} = \pm \|z\|_1,$$

και άρα $\|z\|_1 = 0$, άτοπο. Άρα $M^\perp = \{0\}$. Και άρα, αφού $M \neq X$, τότε $X \neq M + M^\perp$.

4.4 Συνέπειες των Αποτελεσμάτων Ανάλυσης του Χώρου

Θεώρημα 4.4.1. *Έστω X χώρος με νόρμα, και M ένας proximinal υπόχωρος του X.*
Τότε ο M είναι πυκνός στο X αν και μόνο αν $M^\perp = \{0\}$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $\overline{M} = X$, και έστω $x \in M^\perp$.
Τότε $[y|x] = 0 \quad \forall y \in M$. Αφού ο M είναι proximinal, τότε είναι και κλειστός (Λήμμα 4.3.2),και άρα $M = \overline{M} = X$.
Συνεπώς $[y|x] = 0 \quad \forall y \in X$. Άρα, $\|x\|^2 = [x|x] = 0 \Rightarrow x = 0$.
Άρα $M^\perp = \{0\}$.
Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι $M^\perp = \{0\}$. Τότε, αφού ο M είναι proximinal και

άρα και κλειστός, τότε

$$\overline{M} = M = M + \{0\} = M + M^{\perp} = X, \quad \text{από Θεώρημα 4.3.1 με } z = 0.$$

□

Θεώρημα 4.4.2. *Έστω X ανακλαστικός χώρος με νόρμα, και M υπόχωρος του X.*
Τότε ο M είναι πυκνός στο X αν και μόνο αν $M^{\perp} = \{0\}$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $\overline{M} = X$, και έστω $x \in M^{\perp}$. Από το Θεώρημα 2.4.3(β) έχουμε ότι $(\overline{M})^{\perp} = M^{\perp}$.
Άρα $x \in (\overline{M})^{\perp}$ και άρα $[y|x] = 0 \quad \forall y \in \overline{M} = X$.
Συνεπώς, $\|x\|^2 = [x|x] = 0 \Rightarrow x = 0$. Άρα $M^{\perp} = \{0\}$.
Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι $M^{\perp} = \{0\}$. Τότε, αφού $(\overline{M})^{\perp} = M^{\perp}$ από το Θεώρημα 2.4.3(β), έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \overline{M} = \overline{M} + \{0\} = \overline{M} + (\overline{M})^{\perp} = X, \quad & \text{από Θεώρημα 4.3.2} \\ & \text{αφού ο } \overline{M} \text{ είναι κλειστός υπόχωρος του X.} \end{aligned}$$

□

Θεώρημα 4.4.3. *Έστω X χώρος με νόρμα, και M ένας γνήσιος proximinal υπόχωρος του X.*
Τότε το $M^{\perp}$ περιέχει τουλάχιστον ένα μη μηδενικό στοιχείο.

Απόδειξη. Έστω ότι $M^{\perp} = \{0\}$, και έστω $x \in X \setminus M$. Αφού ο M είναι proximinal, από το Θεώρημα 4.3.1, έχουμε ότι $x = y + 0$ με $y \in M$ και $0 \in M^{\perp}$. Άτοπο. □

Θεώρημα 4.4.4. *Έστω X ανακλαστικός χώρος με νόρμα, και M ένας γνήσιος κλειστός υπόχωρος του X.*
Τότε το $M^{\perp}$ περιέχει τουλάχιστον ένα μη μηδενικό στοιχείο.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $M^{\perp} = \{0\}$, και έστω $x \in X \setminus M$. Αφού ο M είναι κλειστός, τότε από το Θεώρημα 4.3.2, έχουμε ότι $x = y + 0$ με $y \in M$ και $0 \in M^{\perp}$. Άτοπο. □

4.5 Φραγμένα Γραμμικά Συναρτησοειδή σε Χώρους με Νόρμα

Έχοντας αποδείξει το Θεώρημα 1.2.1, θα εξετάσουμε, τώρα, την ισχύ του θεωρήματος Αναπαράστασης του Riesz σε χώρους με νόρμα, αξιοποιώντας τα θεωρήματα 4.3.2 και 4.4.2.

Θεώρημα 4.5.1. *(Riesz) Έστω $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ χώρος Hilbert. Τότε για κάθε $f \in H^*$ υπάρχει μοναδικό $y \in H$ τέτοιο ώστε $f(x) = \langle x, y\rangle \quad \forall x \in H$.*
Επιπλέον, $\|f\| = \|y\|$.

Λήμμα 4.5.1. *Έστω X χώρος με νόρμα και $f \in X^*$ με $f \neq 0$.*
Τότε ο $Kerf$ είναι κλειστό.

Απόδειξη. Για την απόδειξη του θεωρήματος παραπέμπουμε στην Πρόταση 3.16, σελίδα 34, [13]. □

Λήμμα 4.5.2. *Έστω X γραμμικός χώρος και $f : X \to \mathbb{R}$ γραμμική με $f \neq 0$.*
Τότε ο $Kerf$ είναι συνδιάστασης 1.

Απόδειξη. Για την απόδειξη του θεωρήματος παραπέμπουμε στην Πρόταση 3.15, σελίδα 34, [13]. □

Λήμμα 4.5.3. *Έστω X ένας χώρος με νόρμα. Τότε ο X είναι αυστηρά κυρτός αν και μόνο αν $\forall x, y \neq 0$ ισχύει ότι*
$[x|y] = \|x\|\|y\| \quad \Rightarrow \quad y = \lambda x$, για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη. Για την απόδειξη του λήμματος παραπέμπουμε στο LEMMA 5, σελίδα 441, [6] □

Θεώρημα 4.5.2. *Έστω X ανακλαστικός χώρος με νόρμα, και $f \in X^*$. Τότε υπάρχει $y_f \in X$ τέτοιο ώστε*

$$f(x) = [x|y_f] \quad \forall x \in X,$$

και $\|f\| = \|y_f\|$. Μάλιστα, αν ο X είναι αυστηρά κυρτός, τότε το y_f είναι μοναδικό.

Απόδειξη. Αν $f = 0$, τότε θέτουμε $y_f = 0$, και έχουμε

$$f(x) = 0 = [x|0] = [x|y_f] \quad \forall x \in X,$$
$$\text{και} \quad \|f\| = 0 = \|y_f\|.$$

Έστω $f \neq 0$. Τότε το $Kerf = \{x \in X : f(x) = 0\}$ είναι γνήσιος κλειστός υπόχωρος του X, από Λήμμα 4.5.1.
Άρα, από το Θεώρημα 4.3.2, $X = Kerf + Kerf^{\perp}$, όπου $Kerf^{\perp} \neq \{0\}$, από το Θεώρημα 4.4.2. Έστω $z \in Kerf^{\perp}$ με $z \neq 0$ και $x \in X$. Αφού το f είναι γραμμικό και $f \neq 0$, το $Kerf$ είναι συνδιάστασης 1 υπόχωρος του X, από Λήμμα 4.5.2 Άρα

$$x = w + \alpha z, \quad \text{για κάποιο } w \in Kerf \text{ και } \alpha \in \mathbb{R}. \text{ Τότε}$$

$$\begin{aligned} [x|z] &= [w + \alpha z|z] \\ &= [w|z] + \alpha[z|z] \\ &= \alpha[z|z], \end{aligned}$$

και άρα

$$\alpha = \frac{[x|z]}{[z|z]}.$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(w + \alpha z) \\ &= f(w) + \alpha f(z) \\ &= \alpha f(z) \\ &= \frac{[x|z]}{[z|z]} f(z) \\ &= \left[x \middle| \frac{f(z)z}{[z|z]} \right]. \end{aligned}$$

Θέτοντας $y_f = \frac{f(z)z}{[z|z]}$, προκύπτει ότι

$$f(x) = [x|y_f] \quad \forall x \in X.$$

Αφού $f \neq 0$ και $0 \neq z \in Kerf^{\perp}$, τότε $y_f \neq 0$. Τώρα, $\forall x \in X$, έχουμε

$$|f(x)| = |[x|y_f]| \leq \|x\|\|y_f\|,$$

και άρα $\|f\| \leq \|y_f\|$. Όμως,

$$\|f\| \geq \frac{|f(y_f)|}{\|y_f\|} = \frac{[y_f|y_f]}{\|y_f\|} = \|y_f\|.$$

Άρα, $\|f\| = \|y_f\|$.

Έστω ότι ο X είναι αυστηρά κυρτός και ότι υπάρχουν $y_f, y'_f \in X, \quad y_f \neq y'_f$

τέτοια ώστε

$$f(x) = [x|y_f] = [x|y'_f] \quad \forall x \in X.$$

Τότε προκύπτει ότι $\|y_f\| = \|y'_f\|$ και $[y_f|y'_f] = \|y_f\|\|y'_f\|$.
Άρα από το Λήμμα 4.5.3 προκύπτει ότι $y_f = y'_f$. □

Το παραπάνω θεώρημα μπορεί να θεωρηθεί μία γενίκευση του Θεωρήματος Αναπαράστασης του Riesz σε χώρους με νόρμα.

Παρατήρηση 4.5.1. *Έχοντας υπόψιν την παραπάνω απόδειξη και το Θεώρημα 4.3.1, προκύπτει άμεσα ότι το Θεώρημα 4.5.2 μπορεί να εφαρμοστεί σε χώρους με νόρμα όταν το γραμμικό συναρτησοειδές f είναι τέτοιο ώστε το $Kerf$ να είναι proximinal.*

Το επόμενο παράδειγμα δείχνει ότι το Θεώρημα 4.5.2 δεν ισχύει γενικά σε μη ανακλαστικούς χώρους με νόρμα.

Παράδειγμα 4.5.1. *Θεωρούμε τον πραγματικό χώρο με νόρμα*
$X = (c_{00}, \|\cdot\|_1)$ *όλων των πραγματικών ακολουθιών που έχουν πεπερασμένο*

πλήθος μη μηδενικών στοιχείων, με $\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|$, *και το ημιεσωτερικό γινόμενο*

$$[x|y] = \|y\|_1 \sum_{\substack{k=1 \\ y_k \neq 0}}^{\infty} \frac{x_k y_k}{|y_k|} \quad x, y \in X.$$

Ορίζουμε $f : X \to \mathbb{R}$ *με*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k}, \quad x \in X.$$

Τότε η f *είναι γραμμική. Από την ανισότητα Holder,* $\forall x \in X$, *έχουμε ότι*

$$|f(x)|^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 \right) = \frac{\pi^2}{6} \|x\|^2,$$

και άρα η f *είναι φραγμένη με* $\|f\| \leq \frac{\pi}{\sqrt{6}}$. *Άρα* $f \in X^*$. *Έστω* $y \in X$. *Υποθέτουμε ότι* $f(x) = [x|y] \quad \forall x \in X$. *Θέτουμε*

$$e_n = (0, ..., 0, 1, 0, ...), \quad \textit{όπου το 1 βρίσκεται μόνο στην } n\textit{-οστή θέση.}$$

Τότε $e_n \in X$, *και για κάθε* $n = 1, 2, ...$ *έχουμε ότι*

$$\|y\|_1 \frac{y_n}{|y_n|} = [e_n|y] = f(e_n) = \frac{1}{n}.$$

Άρα $\|y\|_1 = \pm \frac{1}{n} \quad \forall n = 1, 2, ...$, *άτοπο. Άρα το Θεώρημα 4.5.2 δεν ισχύει για τον* X.

Κεφάλαιο 5

$Birkhoff - James$ Ορθογωνιότητα και Χαρακτηρισμός Βέλτιστων Προσεγγίσεων

5.1 Εισαγωγή στην $Birkhoff - James$ Ορθογωνιότητα

Έκτός από τις ορθογωνιότητες ως προς εσωτερικό ή ημιεσωτερικό γινόμενο υπάρχουν και άλλοι ορισμοί ορθογωνιότητας. Ενδεικτικά, παραθέτουμε ορισμένες απο αυτές:

- **Roberts**(1934): $\|x - \lambda y\| = \|x + \lambda y\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$,
- **Isosceles** (1945): $\|x - y\| = \|x + y\|$,
- **Singer**(1957): $\|x\|\|y\| = 0$ ή $\left\|\frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|}\right\| = \left\|\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|}\right\|$,
- **Carlsson**(1961): $\sum_{k=1}^{m} a_k \|b_k x + c_k y\|^2 = 0$, όπου $m \geq 2$, και $a_k, b_k, c_k \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\sum_{k=1}^{m} a_k b_k c_k \neq 0$, και $\sum_{k=1}^{m} a_k b_k^2 = \sum_{k=1}^{m} a_k c_k^2 = 0$.

Σε αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε μόνο με την *Birkhoff-James* ορθογωνιότητα καθώς έχει αναδειχθεί ως η πιο χρήσιμη ορθογωνιότητα σε χώρους με νόρμα. Ο R.C. James, το 1947, ήταν ο πρώτος που ασχολήθηκε διεξοδικά και συνέβαλε αποφασιστικά στην ανάπτυξή της και γι΄ αυτό στη βιβλιογραφία έχει καθεριωθεί να καλείται *Birkhoff-James* ορθογωνιότητα.

Σύμφωνα με τον G. Birkhoff, η έννοια της ορθογωνιότητας σε ένα αυθαίρετο χώρο με νόρμα μπορεί να οριστεί ως εξής:

Ορισμός 5.1.1. *Έστω $(X, ||\cdot||)$ χώρος με νόρμα, x, y δύο στοιχεία στο X. Τότε το x λέγεται Birkhoff-James κάθετο στο y, $(x \perp_B y)$, αν $||x|| \leq \|x + \alpha y\|$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.*

Αποδεικνύεται εύκολα ότι αν ο $(X, (\cdot, \cdot))$ είναι ένας πραγματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο, τότε η συνήθης ορθογωνιότητα, $x \perp y$ αν $(x, y) = 0$ είναι ισοδύναμη με την *Birkhoff-James* ορθογωνιότητα. Όντως, αν $(x, y) \neq 0$, τότε για $\alpha = -\frac{(x,y)}{(y,y)}$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\|x + \alpha y\|^2 &= \left(x - \frac{(x,y)}{(y,y)} y, x - \frac{(x,y)}{(y,y)} y \right) \\
&= (x, x) - 2\frac{(x,y)^2}{(y,y)} + \frac{(x,y)^2}{(y,y)^2}(y, y) \\
&= (x, x) - \frac{(x,y)^2}{(y,y)} \\
&< (x, x) = \|x\|^2,
\end{aligned}$$

και άρα το x δεν είναι *Birkhoff-James* κάθετο στο y. Αν, τώρα, $(x, y) = 0$, τότε $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\|x + \alpha y\|^2 &= (x + \alpha y, x + \alpha y) \\
&= \|x\|^2 + |\alpha|^2 \|y\|^2 \\
&\geq \|x\|^2.
\end{aligned}$$

Άρα, $x \perp_B y$.

Πρόταση 5.1.1. *Έστω $(X, ||\cdot||)$ χώρος με νόρμα, $x, y, z \in X$ και $t \in \mathbb{R}$. Τα επόμενα είναι άμεσες συνέπειες του παραπάνω ορισμού:*

(i) $0 \perp_B x$ *και* $x \perp_B 0$,

(ii) $x \perp_B x$ *αν και μόνο αν* $x = 0$,

(iii) $x \perp_B y \Rightarrow x \perp_B (ty)$.

Ωστόσο,

(i) $x \perp_B y \nRightarrow y \perp_B x$,

(ii) $x \perp_B y$ *και* $x \perp_B z$, $\nRightarrow x \perp_B (y + z)$.

Θεώρημα 5.1.1. *Αν x και y είναι στοιχεία ενος χώρου με νόρμα X, και $x \perp_B (Ax + y)$ και $x \perp_B (Mx + y)$, τότε $x \perp_B (ax + y)$ για κάθε $A \leq a \leq M$.*

Απόδειξη. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $A \leq M$.
Αν $x \perp_B (Ax + y)$, και $x \perp_B (Mx + y)$, τότε
$\|x + \lambda(Ax + y)\| \geq \|x\|$ και $\|x + \lambda(Mx + y)\| \geq \|x\|$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Έστω a τέτοιο ώστε $A \leq a \leq M$.

Αν $\lambda \geq 0$, τότε
$\|x + \lambda(ax + y)\| = \|[1 + \lambda(a - A)]x + \lambda(Ax + y)\| \geq \|[1 + \lambda(a - A)x\| \geq \|x\|$.
Άρα $x \perp_B (ax + y)$.

Αν $\lambda \leq 0$, τότε
$\|x + \lambda(ax + y)\| = \|[1 + \lambda(a - M)]x + \lambda(Mx + y)\| \geq \|[1 + \lambda(a - M)]x\| \geq \|x\|$.
Άρα $x \perp_B (ax + y)$.

Άρα για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι$\|x + \lambda(ax + y)\| \geq \|x\|$. Άρα $x \perp_B (ax + y)$, όπου $A \leq a \leq M$. □

Θεώρημα 5.1.2. *Έστω x και y μη μηδενικά στοιχεία ενός χώρου με νόρμα. Αν $x \perp_B (ax + y)$ και $y \perp_B (by + x)$, τότε $|ab| \leq 1$.*
Αν, επιπλέον, η ορθογωνιότητα είναι συμμετρική, τότε $0 \leq ab \leq 1$.

Απόδειξη. Έστω $x\perp_B(ax+y)$.
Τότε $\|x+\lambda_1(ax+y)\| \geq \|x\|$ για κάθε $\lambda_1 \in \mathbb{R}$.
Θέτουμε $\lambda_1 = \frac{-1}{a}$ και $a \neq 0$. Τότε
$\|x+\frac{-1}{a}(ax+y)\| \geq \|x\| \Rightarrow |a| \leq \frac{\|y\|}{\|x\|}(1)$.
Έστω $y\perp_B(by+x)$.
Τότε $\|y+\lambda_2(by+x)\| \geq \|y\|$ για κάθε $\lambda_2 \in \mathbb{R}$.
Θέτουμε $\lambda_2 = \frac{-1}{b}$ με $b \neq 0$. Τότε
$\|y+\frac{-1}{b}(by+x)\| \geq \|y\| \Rightarrow |b| \leq \frac{\|x\|}{\|y\|}(2)$.

Από (1) και (2) προκύπτει ότι $|ab| \leq 1$.

Τώρα, αν η ορθογωνιότητα είναι συμμετρική και $x\perp_B(ax+y)$, τότε $(ax+y)\perp_B x \Rightarrow \|(ax+y)+k_1x\| \geq \|ax+y\|$ για κάθε $k_1 \in \mathbb{R}$.
Αν $y\perp_B(by+x)$, τότε $\|y+k_2(by+x)\| \geq \|y\|$.
Θέτοντας $k_1 = -a \Rightarrow \|y\| \geq \|ax+y\|$, και $k_2 = \frac{a}{(1-ab)} \Rightarrow \|ax+y\| \geq |1-ab|\|y\|$. Άρα $\|y\| \geq |1-ab|\|y\|$ και άρα $ab \geq 0$. Όμως $|ab| \geq 1$, άρα $0 \leq ab \leq 1$.

□

Μια ακόμα συνέπεια του παραπάνω ορισμού δίνεται στο επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 5.1.3. *Έστω $(X, ||\cdot||)$ χώρος με νόρμα, x, y δύο στοιχεία στο X. Τότε $x \perp y \in X$ αν και μόνο αν $||x|| = d(x, <y>)$.*

Απόδειξη. Αν $x\perp_B y$ τότε για όλα τα $a \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
||x|| &= \inf\{||x+ay|| : a \in \mathbb{R}\} \\
&= \inf\{||x-z|| : z \in <y>\} \\
&= d(x, <y>).
\end{aligned}$$

Αντίστροφα, αν $||x|| = d(x, <y>)$, τότε για κάθε $z \in <y>$ έχουμε ότι $||x|| \leq ||x-z||$ και άρα $||x|| \leq ||x+ay||$ για όλα τα $a \in \mathbb{R}$. Άρα $x\perp_B y$. □

Ορισμός 5.1.2. *Έστω $(X, ||\cdot||)$ χώρος με νόρμα, G ένα μη κενό υποσύνολο του X, και $x \in X$. Λέμε ότι το x είναι Birkhoff-James κάθετο στο G, $(x\perp_B G)$, αν $x\perp_B y$ για όλα τα $y \in G$.*

Θεώρημα 5.1.4. *Έστω X χώρος με νόρμα και G υπόχωρος του X. Τότε $g_0 \in P_G(x)$ αν και μόνο αν $x - g_0 \perp_B G$.*

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Έστω $g_0 \in P_G(x)$.
Θέτουμε $g_1 = g_0 - ag$ για τυχαίο $g \in G$ και $a \in \mathbb{R}$.
Αφού $g_0 \in P_G(x)$ και $g_1 \in G$, τοτε
$\|x - g_0\| \leq \|x - g_1\| \Rightarrow$
$\|x - g_0\| \leq \|x - (g_0 - ag)\| \Rightarrow$
$\|x - g_0\| \leq \|(x - g_0) + ag\|$.
Συνεπώς $x - g_0 \perp_B G$.

($\Leftarrow$) Έστω $(x - g_0) \perp_B G$.
Τότε για κάθε $a \in \mathbb{R}$ και $g_1 \in G$ έχουμε ότι
$\|x - g_0\| \leq \|x - g_0 + ag_1\|$.
Για $g_1 = g_0 - g$ με $g \in G$ αυθαίρετο και $a = 1$ παίρνουμε ότι
$\|x - g_0\| \leq \|x - g\|$.
Άρα $g_0 \in P_G(x)$.

□

Ορισμός 5.1.3. *Για οποιοδήποτε $G \subset X$ θέτουμε $G^{\perp_B} = \{x \in X : x \perp_B G\}$. Το $G^{\perp_B}$ καλείται Birkhoff-James ορθογώνιο συμπλήρωμα.*

Πόρισμα 5.1.1. *Έστω X χώρος με νόρμα, G υπόχωρος του X. Τότε για κάθε $x \in X$ ισχύει ότι $g_0 \in P_G(x)$ αν και μόνο αν $x - g_0 \in G^{\perp_B}$.*

5.2 Συσχέτιση της $Birkhoff-James$ και της κατα Ημιεσωτερικό Γινόμενο Ορθογωνιότητας

Έστω $(X, ||\cdot||)$ ένας χώρος με νόρμα, $[\cdot|\cdot]$ ένα ημιεσωτερικό γινόμενο στο X που επάγει τη νόρμα $||\cdot||$, $x, y \in X$, και G ένα μη κενό υποσύνολο του X. Όταν το x είναι κάθετο στο y ή στο G, χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $x \perp_{[\cdot|\cdot]} y$ ή $x \perp_{[\cdot|\cdot]} G$ αντίστοιχα. Άρα $x \perp_{[\cdot|\cdot]} y$ αν $[y|x] = 0$ και $x \perp_{[\cdot|\cdot]} G$ αν $[y|x] = 0$ για όλα τα $y \in G$. Τα ορθογώνια συμπληρώματα του G και του y

συμβολίζονται $G^{\perp_{[\cdot|\cdot]}}$ και $y^{\perp_{[\cdot|\cdot]}}$ αντίστοιχα. Το επόμενο αποτέλεσμα δείχνει ότι η κατα ημιεσωτερικό γινόμενο ορθογωνιότητα συνεπάγεται τη *Birkhoff-James* ορθογωνιότητα.

Θεώρημα 5.2.1. *Έστω $(X, ||\cdot||)$ ένας χώρος με νόρμα X, ένα ημιεσωτερικό γινόμενο στον X που επάγει τη νόρμα $||\cdot||$, και $x, y \in X$. Αν $x \perp_{[\cdot|\cdot]} y$, τότε $x \perp_B y$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $x \perp_{[\cdot|\cdot]} y$. Αν $x = 0$, το αποτέλεσμα είναι τετριμμένο. Αν $x \neq 0$, τότε για όλα τα $a \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} ||x||^2 &= [x|x] \\ &= [x + ay|x], \quad \text{αφού} \quad [y, x] = 0 \\ &\leq ||x||||x + ay||, \end{aligned}$$

και άρα $||x|| \leq ||x + ay||$. Άρα, $x \perp_B y$. □

Το αντίστροφο του παραπάνω αποτελέσματος δεν ισχύει γενικά και παρακάτω δίνεται ένα αντιπαράδειγμα:

Παράδειγμα 5.2.1. *Θεωρούμε τον πραγματικό χώρο με νόρμα $(\mathbb{R}^3, ||\cdot||_1)$ όπου $||x||_1 = \sum_{k=1}^{3} |x_k|$ για $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Τότε $[x|y] = ||y||_1 \sum_{\substack{k=1 \\ y_k \neq 0}}^{3} \frac{x_k y_k}{|y_k|}$, $x, y \in \mathbb{R}^3$ είναι ένα ημιεσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^3$ που επάγει την νόρμα $||\cdot||_1$. Θεωρούμε τα στοιχεία $x = (1, 1, 0)$ και $y = (1, 0, 0)$. Έχουμε ότι $||y||_1 = 1$ και $y + ax = (1 + a, a, 0)$ και άρα $||y + ax||_1 = |1 + a| + |a|$, άρα $||y||_1 = 1 \leq |1 + a| + |a| = ||y + ax||_1$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$ και άρα $y \perp_B x$. Όμως, $[x|y] = 1 \neq 0$.*

Θεώρημα 5.2.2. *Έστω $(X, ||\cdot||)$ ένας χώρος με νόρμα X, και $x, y \in X$. Αν $x \perp_B y$, τότε υπάρχει ένα ημιεσωτερικό γινόμενο στον X που επάγει τη νόρμα $||\cdot||$ τέτοιο ώστε $x \perp_{[\cdot|\cdot]} y$.*

Απόδειξη. Έστω $x \perp_B y$. Αν $x = 0$, τότε ισχύει τετριμμένα. Αν $x \neq 0$ θέτουμε $M :=< y > \oplus < x >$.Ορίζουμε το συναρτησοειδές $g : M \to \mathbb{R}$ με $g(m) = \lambda ||x||^2$, όπου $m = z + \lambda x$, με $z \in< y >$ και $\lambda \in \mathbb{R}$.

Έστω $m = z + \lambda x$ και $m' = z' + \lambda' x$, όπου $z, z' \in < y >$ και $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$. Αν $m = m'$, τότε έχουμε ότι $z - z' = (\lambda' - \lambda)x$ για κάθε μη μηδενικό $x \in X$. Όμως $z - z' \in < y >$ και $(\lambda' - \lambda)x \in < x >$. Άρα, $\lambda' - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda\|x\|^2 = \lambda'\|x\|^2$. Άρα η g είναι καλά ορισμένη στο M. Επιπλέον, για κάθε $\mu, \mu' \in \mathbb{R}$, έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} g(\mu m + \mu' m') &= g((\mu z + \mu' z') + (\mu\lambda + \mu'\lambda')x) \\ &= (\mu\lambda + \mu'\lambda')\|x\|^2, \quad \text{αφού} \quad \mu z + \mu' z' \in < y > \\ &= \mu\lambda\|x\|^2 + \mu'\lambda'\|x\|^2 \\ &= \mu g(m) + \mu' g(m'). \end{aligned}$$

Άρα το g είναι γραμμικό στο M. Επιπλέον, $g(x) = g(0 + 1 \cdot x) = \|x\|^2$ και $g(y) = g(y + 0 \cdot x) = 0$. Τώρα, για κάθε $m = z + \lambda x \in M$ έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \frac{|g(m)|}{\|m\|} &= \frac{|\lambda|\|x\|^2}{\|z + \lambda x\|} \\ &= \frac{\|x\|^2}{\|x + \frac{1}{\lambda}x\|} \\ &= \frac{\|x\|^2}{\|x + \frac{\mu}{\lambda}y\|}, \quad \text{για κάποιο } \mu \in \mathbb{R} \\ &\leq \frac{\|x\|^2}{\|x\|}, \quad \text{αφού } , x \perp_B y \\ &= \|x\|, \end{aligned}$$

και άρα $|g(m)| \leq \|x\|\|m\|$. Άρα, το g είναι φραγμένο στο M και $\|g\| \leq \|x\|$.Επίσης,

$$\|g\| \geq \frac{|g(x)|}{\|x\|} = \frac{\|x\|^2}{\|x\|} = \|x\|,$$

και άρα $\|g\| = \|x\|$. Άρα, σύμφωνα με το Θεώρημα Επέκτασης Hahn-Banach, υπάρχει ένα συναρτησοειδές $f \in X^*$ που επεκτείνει το g σε όλο το X έτσι ώστε $\|f\| = \|g\| = \|x\|$. Άρα, αφού $x, y \in M \Rightarrow f(x) = g(x) = \|x\|^2$ και $f(y) = g(y) = 0$. Άρα $f \in \mathcal{J}(x)$, όπου $\mathcal{J}$ η κανονικοποιημένη δυϊκή απεικόνιση στο X. Αυτό συνεπάγεται ότι, αφού $\mathcal{J}(0) = \{0\}$, τότε το $\mathcal{J}(x)$ είναι ένα μη κενό υποσύνολο του X^* για κάθε $x \in X$, και άρα το $\{\mathcal{J}(x)\}_{x\in X}$ είναι μία μη κενή οικογένεια μη κενών συνόλων. Άρα, από το αξίωμα της επιλογής, μπορεί να προκύψει σύνολο που να περιέχει ακριβώς ένα στοιχείο, f_x, από κάθε σύνολο $\mathcal{J}(x)$. Αυτή η διαδικασία καθορίζει έναν τομέα $\tilde{\mathcal{J}} : X \to X^*$ του $\mathcal{J}$ με $\tilde{\mathcal{J}}(x) = f_x$ για κάθε $x \in X$. Αφού το f_x είναι μία Hahn-Banach επέκταση του $g \in M^*$ στο X, και αφού $x, y \in M$, έχουμε ότι $f_x(x) = g(x) = \|x\|^2$ και $f_x(y) = g(y) = 0$. Τότε, από το Θεώρημα 1.4.1, το

$$[u|v] := (\tilde{\mathcal{J}}(v))(u), \quad u, v \in X$$

είναι ένα ημιεσωτερικό γινόμενο στον X που επάγει την νόρμα $\|\cdot\|$. Άρα

$$[y|x] = (\tilde{\mathcal{J}}(x))(y) = f_x(y) = 0,$$

και άρα $x \perp_{[\cdot|\cdot]} y$.

□

Συνδιάζοντας τα δύο παραπάνω Θεωρήματα προκύπτει η ακριβής σύνδεση ανάμεσα στην *Birkhoff-James* και στην κατά ημιεσωτερικό γινόμενο ορθογωνιότητα, η οποία διατυπώνεται ως εξής:

Θεώρημα 5.2.3. *Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα, και $x, y \in X$. Τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(α) $x \perp_B y$,

(β) *Υπάρχει ένα ημιεσωτερικό $[\cdot|\cdot]$ στο X που επάγει τη νόρμα $\|\cdot\|$ έτσι ώστε* $x \perp_{[\cdot|\cdot]} y$.

Παρατήρηση 5.2.1. *Το παραπάνω θεώρημα δείχνει ότι σε κάθε χώρο με νόρμα $(X, \|\cdot\|)$ υπάρχει πάντα τουλάχιστον ένα ημιεσωτερικό γινόμενο που επάγει τη νόρμα $\|\cdot\|$ τέτοιο ώστε η Birkhoff-James ορθογωνιότητα είναι ισοδύναμη με αυτή του ημιεσωτερικού γινομένου. Παρόλ' αυτά, το ημιεσωτερικό γινόμενο αυτό δεν είναι απαραίτητα μοναδικό, αφού οι επεκτάσεις Hahn-Banach δεν είναι απαραίτητα μοναδικές στους χώρους με νόρμα. Αυτή η ιδιότητα διασφαλίζεται* *μόνο στους λείους χώρους με νόρμα, στους οποίους η Birkhoff-James ορθογωνιότητα είναι ισοδύναμη με την κατά ημιεσωτερικό γινόμενο ορθογωνιότητα.*

Πόρισμα 5.2.1. *Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα, και $[\cdot|\cdot]$ ένα ημιεσωτερικό γινόμενο στο X που επάγει τη νόρμα $\|\cdot\|$. Τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(α) Αν $y \in X$, τότε $y^{\perp_B} = \bigcup_{[\cdot|\cdot] \in \mathcal{J}(X)} y^{\perp_{[\cdot|\cdot]}}$,

(β) Αν το G είναι ένα μη κενό υποσύνολο του X, τότε $G^{\perp_B} = \bigcup_{[\cdot|\cdot] \in \mathcal{J}(X)} G^{\perp_{[\cdot|\cdot]}}$.

Απόδειξη. (α) Από το παραπάνω θεώρημα προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned}
x \in y^{\perp_B} &\Leftrightarrow x \perp_B y \\
&\Leftrightarrow x \perp_{[\cdot|\cdot]} y \quad \text{για κάποιο } [\cdot|\cdot] \in \mathcal{J}(X) \\
&\Leftrightarrow x \in y^{\perp_{[\cdot|\cdot]}} \quad \text{για κάποιο } [\cdot|\cdot] \in \mathcal{J}(X) \\
&\Leftrightarrow x \in \bigcup_{[\cdot|\cdot] \in \mathcal{J}(X)} y^{\perp_{[\cdot|\cdot]}}
\end{aligned}$$

Άρα ισχύει η (α).

(β) Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
G^{\perp_B} &= \bigcap_{y \in G} y^{\perp_B} \\
&= \bigcap_{y \in G} \bigcup_{[\cdot|\cdot] \in \mathcal{J}(X)} y^{\perp_{[\cdot|\cdot]}} \quad \text{από (α)} \\
&= \bigcup_{[\cdot|\cdot] \in \mathcal{J}(X)} \bigcap_{y \in G} y^{\perp_{[\cdot|\cdot]}} \\
&= \bigcup_{[\cdot|\cdot] \in \mathcal{J}(X)} G^{\perp_{[\cdot|\cdot]}}.
\end{aligned}$$

Άρα ισχύει η (β). □

5.3 Χαρακτηρισμοί ως προς την $Birkhoff-James$ Ορθογωνιότητα

Λόγω του Θεωρήματος 5.2.3, προκύπτει άμεσα ότι όλοι οι χαρακτηρισμοί σε σχεση με την ορθογωνιότητα ως προς ημιεσωτερικό γινόμενο που έχουν προαναφερθεί, ισχύουν και για την *Birkhoff-James* ορθογωνιότητα. Παραθέτουμε, παρόλ' αυτά, δύο αποδείξεις χαρακτηρισμού στις οποίες δεν χρησιμοποιούμε την έννοια του ημιεσωτερικού γινομένου. Επίσης, θα διατυπωθούν χαρακτηρισμοί που χρησιμοποιουν την έννοια του quasi-orthogonal συνόλου.

Θεώρημα 5.3.1. *Έστω X χώρος με νόρμα, και G υπόχωρος του X. Τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(α) Το G είναι Prixminal,

(β) $X = G + G^{\perp_B}$.

Απόδειξη. (α)⇒(β) Αν το G είναι Proximinal, τότε έστω $x \in X$ και $g_0 \in P_G(x)$. Τότε, από το πόρισμα 5.1.1, $(x - g_0) \in G^{\perp_B}$ και $g_0 \in G$.
Άρα,

$$x = g_0 + (x - g_0) \in (G + G^{\perp_B}) \Rightarrow X = G + G^{\perp_B}.$$

(β)⇒(α) Έστω $X = G + G^{\perp_B}$ και $x \in X$ τυχαίο. Τότε, $x = g_0 + y$ για κάποιο $g_0 \in G$ και $y \in G^{\perp_B}$. Τότε, από τον ορισμό του $G^{\perp_B}$, $y \in P_G^{-1}(0) \Rightarrow 0 \in P_G(y)$. Όμως

$$\begin{aligned}
&y = x - g_0 && \Rightarrow\\
&P_G(y) = P_G(x - g_0) && \Rightarrow\\
&0 \in P_G(x - g_0) && \Rightarrow\\
&\|x - g_0 - 0\| \leq \|x - g_0 - g\| \quad \forall g \in G && \Rightarrow\\
&\|x - g_0\| \leq \|x - (g - g_0)\| && \Rightarrow\\
&g_0 \in P_G(x).
\end{aligned}$$

Άρα το G είναι Proximinal.

$\square$

Θεώρημα 5.3.2. *Έστω X χώρος με νόρμα, και G υπόχωρος του X. Τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(α) Ο G είναι Chebyshev,

(β) $X = G \oplus G^{\perp_B}$.

Απόδειξη. (α)⇒(β) Υποθέτουμε ότι ο G είναι Chebyshev. Έστω τυχαίο $x \in X$. Τότε, από Θεώρημα 5.3.1, $x = g + \hat{g}$ για κάποια $g \in G$ και $\hat{g} \in G^{\perp_B}$.
Έστω, τώρα, ότι $x = g_1 + \hat{g_1} = g_2 + \hat{g_2}$ με $g_1, g_2 \in G$ και $\hat{g_1}, \hat{g_2} \in G^{\perp_B}$.
Έχουμε ότι $x - g_1 = \hat{g_1} \in G^{\perp_B}$ και $x - g_2 = \hat{g_2} \in G^{\perp_B}$.
Άρα $g_1, g_2 \in P_G(x)$. Όμως, ο G είναι Chebyshev, άρα $g_1 = g_2$ και άρα $\hat{g_1} = \hat{g_2}$.
Άρα, $X = G \oplus G$.
(β)⇐(α) Έστω ότι $X = G \oplus G$, και $x \in X$. Υποθέτουμε ότι $g_1, g_2 \in P_G(x)$.
Άρα, $x - g_1, x - g_2 \in G^{\perp_B}$. Όμως $x = g_1 + (x - g_1) = g_2 + (x - g_2)$, και αφού $X = G \oplus G$, προκύπτει ότι $g_1 = g_2$. Άρα, ο G είναι Chebyshev.

$\square$

Λήμμα 5.3.1. *Έστω X χώρος με νόρμα, και G υπόχωρος του X.*
Τότε $G \cap G^{\perp_B} = \{0\}$.

Απόδειξη. Έστω $g \in G^{\perp_B} \cap G$. Άρα $g \perp_B G$.
Συνεπώς, $\|g + \alpha h\| \geq \|g\| \quad \forall h \in G$ και α βαθμωτό.
Για $\alpha = \frac{-1}{2}$ και $g = h$, παίρνουμε ότι $\|\frac{1}{2}g\| \geq \|g\| \Rightarrow g = 0$.
Άρα $G^{\perp_B} \cap G \subseteq \{0\}$. Όμως $\{0\} \subseteq G^{\perp_B} \cap G$, και άρα $G^{\perp_B} \cap G = \{0\}$.

$\square$

Θεώρημα 5.3.3. *Έστω X χώρος με νόρμα, και G ένας proximinal υπόχωρος του X.*
Αν το $G^{\perp_B}$ είναι κυρτό, τότε ο G είναι Chebyshev.

Απόδειξη. Έστω $g_1, g_2 \in P_G(x)$. Τότε $\hat{g_1} = x - g_1, \hat{g_2} = x - g_2 \in G^{\perp_B}$.
Άρα $\frac{1}{2}(\hat{g_1} - \hat{g_2}) \in G^{\perp_B}$, αφού το $G^{\perp_B}$ είναι κυρτό. Όμως,

$$\frac{1}{2}(\hat{g_1} - \hat{g_2}) = \frac{1}{2}(g_2 - g_1) \in G.$$

Άρα, $\frac{1}{2}(g_2 - g_1) \in G \cap G^{\perp_B} = \{0\}$, από Λήμμα 5.3.1.
Συνεπώς, $g_1 = g_2$ και άρα ο G είναι Chebyshev.

$\square$

Ορισμός 5.3.1. *Έστω X χώρος με νόρμα, και G ένα μη κενό υποσύνολο του X. Τότε, το G καλείται* ***quasi-orthogonal*** *αν $G \perp_B G^{\perp_B}$.*

Παρατήρηση 5.3.1. *Σε χώρους Hilbert, κάθε κλειστός υπόχωρος είναι quasi-orthogonal λόγω συμμετρικότητας της ορθογωνιότητας ως προς το εσωτερικό γινόμενο.*

Θεώρημα 5.3.4. *Έστω X χώρος με νόρμα, και G ένας proximinal quasi-orthogonal υπόχωρος του X.Αν το $G^{\perp_B}$ είναι κυρτό, τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(a) Το $G^{\perp_B}$ είναι Chebyshev,

(β) $G = \{g \in X : d(g, G^{\perp_B}) = \|g\|\}$.

Απόδειξη. $(\alpha) \Rightarrow (\beta)$. Έστω ότι το $G^{\perp_B}$ είναι Chebyshev και $g \in G$. Τότε $g \perp_B G^{\perp_B}$ αφού ο G είναι quasi-orthogonal. Άρα $\forall \hat{g} \in G^{\perp_B}$ και $\alpha \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι

$$\|g + \alpha\hat{g}\| \geq \|g\|.$$

Θέτοντας $\alpha = -1$ παίρνουμε ότι $\|g - \hat{g}\| \geq \|g\|$.
Άρα $\|g\| \leq \inf\{\|g - \hat{g}\| : \hat{g} \in G^{\perp_B}\} \leq d(g, G^{\perp_B}) \leq \|g - 0\| = \|g\|$, όπου $0 \in G^{\perp_B}$ (αφού $0 \perp_B G^{\perp_B}$).
Άρα $\|g\| = d(g, G^{\perp_B})$ και άρα

$$G \subseteq \{g \in X : d(g, G^{\perp_B}) = \|g\|\}. \qquad (1)$$

Έστω, τώρα, ότι $x \in \{g \in X : d(g, G^{\perp_B}) = \|g\|\}$. Άρα $d(x, G^{\perp_B}) = \|x\|$.
Αφού το G είναι proximinal, τότε $X = G + G^{\perp_B}$ και άρα $x = g + G^{\perp_B}$ για $g \in G$ και $\hat{g} \in G^{\perp_B}$. Άρα $\hat{g} = x - g \in G^{\perp_B}$.

Όμως,

$$\begin{aligned}
\|g\| &= d(g, G^{\perp_B}) \\
&= d(g + \hat{g}, G^{\perp_B}) \\
&= d(x, G^{\perp_B}) \\
&= \|x\| \\
&= \|g + \hat{g}\|.
\end{aligned}$$

Άρα $\|g\| = \|g + \hat{g}\| = d(g, G^{\perp_B}) \Rightarrow -\hat{g}, 0 \in P_{G^{\perp_B}}(x)$,
και αφού το $G^{\perp_B}$ είναι proximinal, προκύπτει ότι $\hat{g} = 0$.
Άρα $x - g = 0 \Rightarrow x = g \in G$. Άρα

$$\{g \in X : d(g, G^{\perp_B}) = \|g\|\} \subseteq G. \tag{2}$$

Από $(1), (2)$ προκύπτει ότι

$$G = \{g \in X : d(g, G^{\perp_B}) = \|g\|\}.$$

$(\beta) \Rightarrow (\alpha)$. Υποθέτουμε ότι $\{G = \{g \in X : d(g, G^{\perp_B}) = \|g\|\}$.
Πρώτα θα δείξουμε ότι το $G^{\perp_B}$ είναι proximinal.
Αφού το G είναι proximinal, τότε $X = G + G^{\perp_B}$ και άρα $\forall x \in X \quad \exists g \in G :$ $\hat{g} = x - g \in G^{\perp_B}$.
Άρα,

$$\begin{aligned}
d(x, G^{\perp_B}) &= d(x - \hat{g}, G^{\perp_B}) \\
&= d(g, G^{\perp_B}) \\
&= \|g\| \\
&= \|x - \hat{g}\|,
\end{aligned}$$

και άρα $\hat{g} \in P_{G^{\perp_B}}(x)$.
Άρα το $G^{\perp_B}$ είναι proximinal.
Τώρα θα δείξουμε ότι το $G^{\perp_B}$ είναι Chebyshev.
Έστω ότι $\exists \hat{g}_1, \hat{g}_2 \in P_{G^{\perp_B}}(x)$. Θα δείξουμε ότι $\hat{g}_1 = \hat{g}_2$.

Για $i = 1, 2$ έχουμε ότι

$$\|x - \hat{g}_i\| = d(x, G^{\perp_B}) = d(x - \hat{g}_i, G^{\perp_B}).$$

Άρα, από υπόθεση προκύπτει ότι $g_1 = x - \hat{g}_1 \in G$ και $g_2 = x - \hat{g}_2 \in G$. Αφαιρώντας κατα μέλη έχουμε ότι

$$g_1 - g_2 = \hat{g}_2 - \hat{g}_1 \in G \quad (\text{αφού ο } G \text{ είναι υπόχωρος}).$$

Όμως, αφού το $G^{\perp_B}$ είναι κυρτο, το $\hat{g}_2 - \hat{g}_1$ ανήκει και στο $G^{\perp_B}$.
Από το Λήμμα 5.3.1, αφού $G \cap G^{\perp_B} = \{0\}$, προκύπτει ότι $\hat{g}_1 = \hat{g}_2$.
Άρα το $G^{\perp_B}$ είναι Chebyshev. □

5.4 ε-Βέλτιστες Προσεγγίσεις

Σε αυτή την ενότητα θα παρουσιάσουμε συνοπτικά την έννοια της βέλτιστης προσέγγισης, οι ιδιότητες της οποίας είναι παρόμοιες με εκείνες της βέλτιστης προσέγγισης.

Ορισμός 5.4.1. *Έστω X χώρος με νόρμα, G υποσύνολο του X και $e > 0$. Ένα σημείο $g_0 \in G$ καλείται **ϵ-βέλτιστη προσέγγιση** στο $x \in X$ αν και μόνο αν $\|x - g_0\| \leq \|x - g_0\| + \epsilon \qquad \forall g \in G$.*

Ορισμός 5.4.2. *Το σύνολο όλων των ϵ-βέλτιστων προσεγγίσεων στο $x \in X$ από το G συμβολίζεται $P_G(x, \epsilon)$ με*
$P_G(x, \epsilon) = \{g_0 \in G : \|x - g_0\| \leq \|x - g\| + \epsilon \qquad \forall g \in G\}$.

Θεώρημα 5.4.1. *Έστω G υπόχωρος ενός χώρου με νόρμα X.*
Το $P_G(x, \epsilon)$ είναι φραγμένο.

Απόδειξη. Έστω $g_1, g_2 \in P_G(x, \epsilon)$. Τότε:

$$\begin{aligned} \|x - g_1\| &\leq \|x - g\| + \epsilon, & \forall g \in G, \\ \|x - g_2\| &\leq \|x - g\| + \epsilon, & \forall g \in G. \end{aligned}$$

Άρα,

$$\begin{aligned}\|g_1 - g_2\| &= \|g_1 - x + x - g_2\| \\ &\leq \|x - g_1\| + \|x - g_2\| \\ &\leq \|x - g\| + \epsilon + \|x - g\| + \epsilon \\ &= 2\|x - g\| + 2\epsilon = k \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

□

Θεώρημα 5.4.2. *Έστω G ενός χώρου με νόρμα X.*
Το $P_G(x, \epsilon)$ είναι κυρτό.

Απόδειξη. Έστω $g_1, g_2 \in P_G(x, \epsilon)$ και $0 \leq \lambda \leq 1$. Τότε:

$$\begin{aligned}\|x - g_1\| &\leq \|x - g\| + \epsilon, && \forall g \in G. \\ \|x - g_2\| &\leq \|x - g\| + \epsilon, && \forall g \in G.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|x - (\lambda g_1 + (1 - \lambda) g_2)\| &= \|x - \lambda g_1 - g_2 + \lambda g_2\| \\ &= \|x - \lambda g_1 + g_2 + \lambda g_2 + \lambda x - \lambda x\| \\ &= \|\lambda(x - g_1) + (1 - \lambda)(x - g_2)\| \\ &\leq \lambda\|x - g_1\| + (1 - \lambda)\|x - g_2\| \\ &\leq \lambda(\|x - g\| + \epsilon) + (1 - \lambda)(\|x - g\| + \epsilon) \\ &= \|x - g\| + \epsilon.\end{aligned}$$

Τότε $\lambda g_1 + (1 - \lambda) g_2 \in P_G(x, \epsilon)$. Άρα, το $P_G(x, \epsilon)$ είναι κυρτό.

□

Ορισμός 5.4.3. *Έστω X χώρος με νόρμα, $\epsilon > 0$ και $x, y \in X$. Το x καλείται **ϵ-κάθετο** στο y ($x \perp_\epsilon y$) αν και μόνο αν*

$$\|x + \alpha y\| + \epsilon \geq \|x\| \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{με } |\alpha| \leq 1.$$

Για υποσύνολα $G_1, G_2 \subset X$,

$$G_1 \perp_\epsilon G_2 \quad \textit{αν και μόνο αν} \quad g_1 \perp_\epsilon g_2 \quad \forall g_1 \in G_1 \textit{ και } g_2 \in G_2.$$

Θεώρημα 5.4.3. *Έστω X χώρος με νόρμα, G υπόχωρος του X και $\epsilon > 0$. Τότε $\forall x \in X$:*

$$g_0 \in P_G(x, \epsilon) \quad \textit{αν και μόνο αν} \quad (x - g_0) \perp_\epsilon G.$$

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Έστω $g_0 \in P_G)(x, \epsilon$. Θέτουμε $g_1 = g_0 - \alpha g$ με $g \in G$ και $|\alpha| \leq 1$.
Αφού $g_0 \in P_G(x, \epsilon)$ και $g_1 \in G$, τότε $\|x - g_0\| \leq \|x - g_1\| + \epsilon$. Άρα,

$$\begin{aligned} \|x - g_0\| &\leq \|x - (g_0 - \alpha g)\| + \epsilon \quad \Rightarrow \\ \|x - g_0\| &\leq \|(x - g_0) + \alpha g\| + \epsilon \quad \Rightarrow \\ \text{Άρα, } x - g_0 \perp_\epsilon G. \end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Έστω $(x - g_0) \perp_\epsilon G$. Τότε $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ με $|\alpha| \leq 1$ και $g_1 \in G$ έχουμε ότι:

$$\|x - g_0\| \leq \|x - g_0 - \alpha g_1\| + \epsilon.$$

Για τυχαίο $g \in G$, θέτοντας $g_1 = g_0 - g$ και $\alpha = 1$, προκύπτει ότι

$$\|x - g_0\| \leq \|x - g\| + \epsilon.$$

Άρα $g_0 \in P_G(x, \epsilon)$.

□

Ορισμός 5.4.4. *Έστω X χώρος με νόρμα, G υπόχωρος του X και $\epsilon > 0$. Καλούμε* ***ϵ-ορθογώνιο συμπλήρωμα*** *του G το*

$$G^{\perp_\epsilon} = P_G^{-1}(0, \epsilon) = \{x \in X : \|x\| \leq \|x - g\| + \epsilon \quad \forall g \in G\} = \{x \in X : x \perp_\epsilon G\}.$$

Λήμμα 5.4.1. *Έστω G υπόχωρος ενός χώρου με νόρμα X. Τότε $\forall x \in X$*

και $\epsilon > 0$ έχουμε ότι

$$g_0 \in P_G(x, \epsilon) \Leftrightarrow (x - g_0) \in G^{\perp_\epsilon}.$$

Απόδειξη. Προκύπτει άμεσα από τον ορισμό του $G^{\perp_\epsilon}$. $\square$

Πόρισμα 5.4.1. *Έστω G υπόχωρος ενός χώρου με νόρμα X και $\epsilon > 0$. Τότε*

$$P_G(x, \epsilon) = G \cap (x - G^{\perp_\epsilon}).$$

Απόδειξη.

$$\begin{aligned}
&g_0 \in G \cap (x - G^{\perp_\epsilon}) \Leftrightarrow \\
&g_0 \in G \text{ και } g_0 \in (x - G^{\perp_\epsilon}) \Leftrightarrow \\
&g_0 \in G \text{ και } g_0 = x - \hat{g} \text{ όπου } \hat{g} \in G^{\perp_\epsilon} \Leftrightarrow \\
&g_0 \in G \text{ και } \hat{g} = (x - g_0) \in G^{\perp_\epsilon} \Leftrightarrow \\
&g_0 \in P_G(x, \epsilon).
\end{aligned}$$

Άρα $P_G(x, \epsilon) = G \cap (x - G^{\perp_\epsilon})$. $\square$

Θεώρημα 5.4.4. *Έστω G υπόχωρος ενός χώρου με νόρμα X, $\epsilon > 0$ και $\epsilon \geq \alpha$. Τότε,*

$$G^{\perp_B} \subseteq G^{\perp_\alpha} \subseteq G^{\perp_\epsilon} \quad \text{και άρα} \quad \bigcap_{\epsilon > 0} G^{\perp_\epsilon} = G^{\perp_B}.$$

Απόδειξη. Έστω $x \in G^{\perp_B}$. Άρα

$$\begin{aligned}
&\|x\| \leq \|x - g\| \leq \|x - g\| + \alpha \quad \forall g \in G, \text{αφού } \alpha > 0 \Rightarrow \\
&x \in G^{\perp_\alpha} \Rightarrow G^{\perp_B} \subseteq G^{\perp_\epsilon}.
\end{aligned}$$

. Έστω $x \in G^{\perp_\alpha}$. Άρα

$$\|x\| \leq \|x-g\| + \alpha \leq \|x-g\| + \epsilon \quad \forall g \in G, \text{αφού } \epsilon > \alpha \Rightarrow$$
$$x \in G^{\perp_\epsilon} \Rightarrow G^{\perp_\alpha} \subseteq G^{\perp_\epsilon}.$$

Άρα $G^{\perp_B} \subseteq G^{\perp_\alpha} \subseteq G^{\perp_\epsilon}$.
Τώρα, θα δείξουμε ότι $\bigcap\limits_{\epsilon>0} G^{\perp_\epsilon} = G^{\perp_B}$. Από πάνω, έχουμε ότι $G^{\perp_B} \subseteq \bigcap\limits_{\epsilon>0} G^{\perp_\epsilon}$.
Έστω $x \in G^{\perp_B} \subseteq \bigcap\limits_{\epsilon>0} G^{\perp_\epsilon}$.
Τότε $\forall \epsilon > 0$ ισχύει ότι $0 \leq \|x\| \leq \|x-g\| + \epsilon \quad \forall g \in G$.
Άρα, $0 \leq \|x\| \leq \|x-g\| + \frac{1}{n} \quad \forall g \in G, n \in \mathbb{N}$.
Καθώς $n \to \infty$,

$$\|x\| \leq \|x-g\| \forall g \in G \Rightarrow$$
$$x \in G^{\perp_B} \Rightarrow$$
$$\bigcap_{\epsilon>0} G^{\perp_\epsilon} \subseteq G^{\perp_B}.$$

Άρα $\bigcap\limits_{\epsilon>0} G^{\perp_\epsilon} = G^{\perp_B}$. □

Λήμμα 5.4.2. *Έστω G υπόχωρος ενός χώρου με νόρμα X. Τότε:*

(α) Αν $\epsilon > 0, x, g \in X, x\perp_\epsilon g$, τότε $\quad x\perp_\delta g \quad \forall \delta \geq \epsilon$.

(β) Αν $x, g \in X$ και $x\perp_B g$, τότε $x\perp_\epsilon g \quad \forall \epsilon > 0$.

(γ) Αν $x \in X, \epsilon > 0$, τότε $0\perp_\epsilon x, \quad x\perp_\epsilon 0$.

(δ) Αν $x\perp_\epsilon g, |\beta| < 1$, τότε $\beta x\perp_\epsilon \beta g$.

Απόδειξη. (α) Έστω $\epsilon > 0, \quad x, g \in X$ και $x\perp_\epsilon g$. Τότε,

$$\|x\| \leq \|x+\alpha g\| + \epsilon, \quad \text{όπου } |\alpha| \leq 1 \text{ και } \epsilon > 0 \Rightarrow$$
$$\|x\| \leq \|x+\alpha g\| + \epsilon \leq \|x+\alpha g\| + \delta \Rightarrow$$
$$x\perp_\delta g.$$

(β) Έστω $x, g \in X$ και $x \perp_B g$. Τότε,

$$\begin{aligned}
&\|x\| \leq \|x + \alpha g\| \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \\
&\|x\| \leq \|x + \alpha g\| + \epsilon \quad \forall |\alpha| \leq 1 \Rightarrow \\
&x \perp_\epsilon g \forall \epsilon > 0.
\end{aligned}$$

(γ) Έστω $x \in X$ και $\epsilon > 0$. Τότε,

$$\|0\| \leq \|0 + \alpha x\| + \epsilon \Rightarrow 0 \perp_\epsilon x.$$

Επίσης,

$$\|x\| \leq \|x\| + \epsilon \Rightarrow \|x\| \leq \|x + \alpha 0\| + \epsilon \Rightarrow x \perp_\epsilon 0.$$

(δ) Έστω $x \perp_\epsilon g$ και $|\beta| < 1$. Τότε,

$$\begin{aligned}
&\|x\| \leq \|x + \alpha g\| + \epsilon \Rightarrow \\
&|\beta| \|x\| \leq \|\beta x + \beta \alpha g\| + |\beta| \epsilon \leq \| \ \beta x + \alpha_1 g\| + \epsilon \Rightarrow \\
&\|\beta x\| \leq \|\beta x + \alpha_1 g\| + \epsilon \Rightarrow \\
&\beta x \perp_\epsilon \beta g.
\end{aligned}$$

$\square$

Θεώρημα 5.4.5. *Έστω G υπόχωρος ενός χώρου με νόρμα X. Αν $x \in X$, $\epsilon > 0$ και $\delta \geq \epsilon$, τότε*

$$P_G(x, \epsilon) \subseteq P_G(x, \delta).$$

Απόδειξη. Έστω $g_0 \in P_G(x, \epsilon)$. Τότε, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
&\|x - g_0\| \leq \|x - g_0\| + \epsilon \leq \|x - g\| + \delta \Rightarrow \\
&g_0 \in P_G(x, \delta) \Rightarrow \\
&P_G(x, \epsilon) \subseteq P_G(x, \delta).
\end{aligned}$$

$\square$

5.5 Απεικονίσεις που Διατηρούν τις Βέλτιστες Προσεγγίσεις

Τέλος, σε αυτή την ενότητα θα ορίσουμε τις απεικονίσεις που διατηρούν τις βέλτιστες προσεγγίσεις, θα δούμε ορισμένες ιδιότητές τους, και θα ορίσουμε την έννοια των quasi-Chebyshev συνόλων.

Ορισμός 5.5.1. *Έστω X, Y χώροι με νόρμα. Η $T : X \to Y$ καλείται απεικόνιση που διατηρεί την βέλτιστη προσέγγιση(preserving best approximation) αν $\forall G$ υπόχωρο του X και $x \in X$ έχουμε ότι*

$$T(P_G(x)) = P_{T(G)}(T(x)).$$

Ορισμός 5.5.2. *Έστω $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ χώροι με νόρμα. Οι X, Y λέγονται ισομετρικοί αν υπάρχει $T : X \to Y$ γραμμικός $1-1$ και επί τελεστής ώστε $\|T(x)\|_Y = \|x\|_X$ για κάθε $x \in X$. Ο τελεστής T λέγεται σε αυτή την περίπτωση ισομετρία.*

Θεώρημα 5.5.1. *Έστω X χώρος με νόρμα και $T : X \to X$ μία ισομετρία. Τότε,*

$$T(P_G(x)) = P_{T(G)}(T(x)) \quad \forall G \text{ υπόχωρο του } X \text{ και } x \in X.$$

Απόδειξη.

$$\begin{aligned} T(P_G(x)) &= \{Tg : g \in G \text{ και } g \in P_G(x)\} \\ &= \{Tg : g \in G \text{ και } \|x - g\| \leq \|x - y\| \quad \forall y \in G\}, \text{ και} \end{aligned}$$

$$P_{T(G)}(T(x)) = \{T(g) : g \in G \text{ και } \|T(x) - T(g)\| \leq \|T(x) - T(y)\| \quad \forall y \in G\}.$$

$$
\begin{aligned}
T(g) \in T(P_G(x)) &\Leftrightarrow g \in G \text{ και } \|x-g\| \leq \|x-y\| \quad \forall y \in G \\
&\Leftrightarrow g \in G \text{ και } \|T(x-g)\| \leq \|T(x-y)\| \quad \forall y \in G \\
&\Leftrightarrow g \in G \text{ και } \|Tx-Tg\| \leq \|Tx-Ty\| \quad \forall y \in G \\
&\Leftrightarrow T(g) \in P_{T(G)}(T(x)).
\end{aligned}
$$

Άρα $T(P_G(x)) = P_{T(G)}(T(x))$. □

Θεώρημα 5.5.2. *Έστω X, Y χώροι με νόρμα, $T : X \to Y$ γραμμική απεικόνιση που διατηρεί τις προσεγγίσεις, και G υπόχωρος του X.*
Αν ο G είναι proximinal, τότε και ο $T(G)$ είναι proximinal.

Απόδειξη.

$$
\begin{aligned}
G \text{ proximinal } &\Rightarrow P_G(x) \neq \emptyset \\
&\Rightarrow T(g_0) \in T(P_G(x)) = P_{T(G)}(T(x)) \\
&\Rightarrow P_{T(G)}(T(x)) \neq \emptyset \\
&\Rightarrow T(G) \text{ proximinal.}
\end{aligned}
$$

□

Θεώρημα 5.5.3. *Έστω X, Y χώροι με νόρμα, $T : X \to Y$ γραμμική απεικόνιση που διατηρεί τις προσεγγίσεις, και G υπόχωρος του X.*
Αν ο G είναι Chebyshev, τότε και ο $T(G)$ είναι Chebyshev.

Απόδειξη. Έστω $g_1, g_2 \in P_{T(G)}(T(x))$. Αφού $T(P_G(x)) = P_{T(G)}(T(x))$, τότε $g_1 = Tx_1$ και $g_2 = Tx_2$ για κάποια $x_1, x_2 \in P_G(x)$. Όμως, ο G είναι Chebyshev, και άρα $x_1 = x_2 \Rightarrow Tx_1 = Tx_2 \Rightarrow g_1 = g_2$.
Άρα, ο $T(G)$ είναι Chebyshev. □

Θεώρημα 5.5.4. *Έστω X, Y χώροι με νόρμα, $T : X \to Y$ γραμμική απεικόνιση που διατηρεί τις προσεγγίσεις, και G υπόχωρος του X.*
Τότε, $T(G^{\perp_B}) = T(G)^{\perp_B}$.

Απόδειξη.

$$\begin{aligned} T(G^{\perp_B}) &= \{Tx : x \in G^{\perp_B}\} \\ &= \{Tx : \|x\| \leq \|x-g\| \quad \forall g \in G\} \\ &= \{Tx : \|Tx\| \leq \|Tx - Tg\| \quad \forall g \in G\} \\ &= T(G)^{\perp_B}. \end{aligned}$$

□

Ορισμός 5.5.3. *Ένας τοπολογικός χώρος X λέγεται ακολουθιακά συμπαγής αν κάθε ακολουθία στοιχείων του έχει συγκλίνουσα υπακολουθία στο X.*

Ορισμός 5.5.4. *Έστω X χώρος με νόρμα και G ένας proximinal υπόχωρός του. Τότε ο G καλείται **quasi-Chebyshev** αν και μόνο αν το $P_G(x)$ είναι ακολουθιακά συμπαγές $\forall x \in X$.*

Θεώρημα 5.5.5. *Έστω X, Y χώροι με νόρμα, $T : X \to Y$ μία γραμμική απεικόνηση, και G ένας quasi-Chebyshev υπόχωρος του X. Αν η T είναι συνεχής, επί και διατηρεί τις προσεγγίσεις, τότε ο $T(G)$ είναι quasi-Chebyshev.*

Απόδειξη. Έστω $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq P_{T(G)}(T(x))$. Θα δείξουμε ότι η $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Αφού η T διατηρεί τις προσεγγίσεις, τότε .

$$\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq P_{T(G)}(T(x)) = T(P_G(x)).$$

Όμως, η T είναι επί. Άρα υπάρχει ακολουθία $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq P_G(x) : \quad u_n = T(v_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Αφού ο G είναι quasi-Chebyshev, τότε το $P_G(x)$ είναι συμπαγές και άρα υπάρχει υπακολουθία $\{v_{n_k}\}_{k\geq 1}$ που συγκλίνει, για την οποία δηλαδή ισχύει ότι υπάρχει $v_0 \in X$ τέτοιο ώστε $v_{n_k} \to v_0$. Αφού η T είναι συνεχής, τότε $T(v_{n_k}) \to T(v_0)$. Όμως, $T(v_{n_k}) = v_{n_k}$ και $T(v_0) = v_0$. Άρα $u_{n_k} \to u_0$. Άρα η $\{u_{n_k}\}_{k\geq 1}$ είναι συγκλίνουσα υπακολουθία της $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Άρα το $P_{T(G)}(T(x))$ είναι ακολουθιακά συμπαγές. Άρα ο $T(G)$ είναι quasi-Chebyshev.

□

Θεώρημα 5.5.6. *Έστω X, Y χώροι με νόρμα και $T : X \to Y$ γραμμική απεικόνιση που διατηρεί τις προσεγγίσεις. Τότε $\forall x, y \in X$ ισχύει ότι*
$x \perp_B y \Rightarrow T(x) \perp_B T(y)$,

Απόδειξη. Έστω $x, y \in X$ τέτοια ώστε $x \perp_B y$. Τότε,
$\|x + \alpha y\| \geq \|x\|, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$.
Άρα,

$$\begin{aligned}
&\|x - 0\| \leq \|x - (-\alpha y)\|, \quad \alpha y \in < y > \Rightarrow \\
&0 \in P_{<y>}(x) \Rightarrow 0 = T(0) \in T(P_{<y>}(x)) = P_{T(<y>)}(Tx).
\end{aligned}$$

Όμως, $T(< y >) = \{T(\alpha y)\} = \{\alpha T(y)\} =< Ty > \Rightarrow 0 \in P_{<Ty>}(Tx)$. Άρα,

$$\begin{aligned}
&|Tx - 0\| \leq \|Tx - \alpha Ty\| \Rightarrow \\
&\|Tx\| \leq \|Tx - \alpha Ty\| \Rightarrow \\
&T(x) \perp_B T(y).
\end{aligned}$$

□

Ορισμός 5.5.5. *Έστω X, Y χώροι με νόρμα και $\epsilon > 0$. Η $T : X \to Y$ καλείται απεικόνιση που διατηρεί την $\epsilon-$βέλτιστη προσέγγιση($\epsilon-$preserving approximation) αν $\forall G$ υπόχωρο του X και $x \in X$ έχουμε ότι*

$$T(P_G(x, \epsilon)) = P_{T(G)}(Tx, \epsilon).$$

Θεώρημα 5.5.7. *Έστω X χώρος με νόρμα, $\epsilon > 0$ και $T : X \to X$ μία ισομετρία. Τότε,*

$$T(P_G(x, \epsilon)) = P_{T(G)}(Tx, \epsilon) \quad \forall G \text{ υπόχωρο του } X \text{ και } x \in X.$$

Απόδειξη.

$$\begin{aligned}
T(P_G(x, \epsilon)) &= \{Tg : g \in G \text{ και } g \in P_G(x, \epsilon)\} \\
&= \{Tg : g \in G \text{ και } \|x - g\| \leq \|x - y\| + \epsilon \quad \forall y \in G\}, \text{ και}
\end{aligned}$$

$$P_{T(G)}(Tx, \epsilon) = \{T(g) : g \in G \text{ και } \|T(x) - T(g) \leq \|T(x) - T(y)\| + \epsilon \quad \forall y \in G\}.$$

$$
\begin{aligned}
T(g) \in T(P_G(x,\epsilon)) &\Leftrightarrow g \in G \text{ και } \|x-g\| \le \|x-y\| + \epsilon \quad \forall y \in G \\
&\Leftrightarrow g \in G \text{ και } \|T(x-g)\| \le \|T(x-y)\| + \epsilon \quad \forall y \in G \\
&\Leftrightarrow g \in G \text{ και } \|Tx-Tg\| \le \|Tx-Ty\| + \epsilon \quad \forall y \in G \\
&\Leftrightarrow T(g) \in P_{T(G)}(Tx,\epsilon).
\end{aligned}
$$

Άρα $T(P_G(x,\epsilon)) = P_{T(G)}(Tx,\epsilon)$. □

Θεώρημα 5.5.8. *Έστω X, Y χώροι με νόρμα, $\epsilon > 0$, και $T : X \to Y$ μία επί απεικόνιση που διατηρεί την $\epsilon-$βέλτιστη προσέγγιση. Τότε:*

(α) Αν η T είναι γραμμική, τότε $\forall x, y \in X, \quad x \perp_\epsilon y \Rightarrow T(x) \perp_\epsilon T(y)$.

(β) $T(G^{\perp_\epsilon}) = T(G)^{\perp_\epsilon}$ για κάθε υπόχωρο G του X.

Απόδειξη. (α) Έστω $x, y \in X$ τέτοια ώστε $x \perp_\epsilon y$. Τότε,
$\|x + \alpha y\| + \epsilon \ge \|x\|, \quad |\alpha| \le 1$.
Άρα,

$$
\begin{aligned}
&\|x - 0\| \le \|x - (-\alpha y)\| + \epsilon, \quad \alpha y \in < y > \Rightarrow \\
&0 \in P_{<y>}(x,\epsilon) \Rightarrow 0 = T(0) \in T(P_{<y>}(x,\epsilon)) = P_{T(<y>)}(Tx,\epsilon).
\end{aligned}
$$

Όμως, $T(< y >) = \{T(\alpha y)\} = \{\alpha T(y)\} = < Ty > \Rightarrow 0 \in P_{<Ty>}(Tx,\epsilon)$. Άρα,

$$
\begin{aligned}
&|Tx - 0\| \le \|Tx - \alpha Ty\| + \epsilon \Rightarrow \\
&\|Tx\| \le \|Tx - \alpha Ty\| + \epsilon \Rightarrow \\
&T(x) \perp_\epsilon T(y).
\end{aligned}
$$

(β)

$$
\begin{aligned}
T(G^{\perp_\epsilon}) &= \{Tx : x \in G^{\perp_\epsilon}\} \\
&= \{Tx : \|x\| \le \|x-y\| + \epsilon \quad \forall y \in G\} \\
&= \{Tx : \|Tx\| \le \|Tx - Ty\| + \epsilon \quad \forall y \in G\} \\
&= T(G)^{\perp_\epsilon}.
\end{aligned}
$$

□

Βιβλιογραφία

[1] Akram Mahmoud Abu Ghazal, Best Approximation and Best Co-approximation in Normed Spaces, Department of Mathematics, the Islamic University of Gaza, 2010.

[2] J. Alonso, H. Martini and Senlin Wu, On Birkhoff orthogonality and isosceles orthogonality in normed linear spaces, Springer Basel AG, 2011.

[3] G. Birkhoff, Orthogonality in linear metric spaces, Duke Math. J., 1935.

[4] S. S. Dragomir, Semi-Inner products and Applications, Nova Science Publishers, Inc., Hauppauge, New York, 2004.

[5] N. Gangadharan, A Study on Characterization of Best Approximations in Normed Spaces in Terms of Semi-Inner Products, Department of Mathematics, University of Calicut, Kerala, 2009.

[6]] J. R.Giles, Classes of semi-inner-product spaces, Trans. Amer. Math. Soc., 1967.

[7] R.C. James, Orthogonality and linear functionals in normed linear spaces, Trans. Amer. Math. Soc., 1947.

[8] W.A.Light, An Introduction to Abstract Analysis, Math. Department Lancaster University, 1990.

[9] G. Lumer, Semi-inner-product spaces, Trans. Amer. Math. Soc., 1961.

[10] I. Singer, Best Approximation in Normed Linear Spaces by Elements of Linear Subspaces, Springer-Verlag, Berlin, 1970.

[11] I. Singer, The Theory of Best Approximation and Functional Analysis, SIAM, Philadelphia, 1974.

[12] Γ. Δ. Ακρίβης, Θεωρία Προσεγγίσεων, Μαθηματικό Τμήμα, Πανεπιστήμιο Κρήτης, Ηράκλειο, 1987.

[13] Σπ. Αργυρός, Σημειώσεις Παραδόσεων Συναρτησιακής Ανάλυσησ(Δεύτερη έκδοση), Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα, 2004.