



**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**  
**ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ**  
**ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΜΗΧΑΝΩΝ**

*Κινηματική ανάλυση και σχεδιασμός  
επίπεδων οδοντωτών τροχών με χρήση της  
Ενοποιημένης Θεωρίας Οδοντώσεων*

*Διπλωματική Εργασία*

**Φίλιππος Μπεζμέρτης**

Επιβλέπων: Επίκουρος Καθ. Β.Σπιτάς

**ΑΘΗΝΑ 2015**



# ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα διπλωματική γίνεται μία ανάλυση και σχεδίαση επίπεδων τροχών κάθετων αξόνων με βάση την Ενοποιημένη Θεωρία Οδοντώσεων. Οι τροχοί αυτοί δεν συναντώνται συχνά και έχουν χρησιμοποιηθεί σε εξειδικευμένες και πολύ απαιτητικές εφαρμογές. Η θεωρία που χρησιμοποιείται, αποτελεί την μοναδική αναλυτική έκφραση παραγωγής της κατατομής του συνεργαζόμενου τροχού, έχοντας στην διάθεση μας την κατατομή του γεννήτορα. Αποτελεί μία έκφραση που υπολογίζει τον συνεργαζόμενο τροχό, με εύκολο τρόπο, σημείο προς σημείο. Αρχικά μελετήθηκε η βιβλιογραφία που έχει αναπτυχθεί γύρω από τους επίπεδους τροχούς, για να κατανοηθεί σε βάθος ο τρόπος λειτουργίας τους. Έπειτα, αναπτύσσονται στο λογισμικό του Kisssoft τα μοντέλα των συνεργασιών που αργότερα θα δημιουργηθούν, με σκοπό μία ακόμα μεγαλύτερη εμβάθυνση στην λειτουργία τους. Επιλέγεται ως τρόπος υπολογισμού και έκφρασης της Ενοποιημένης Θεωρίας Οδοντώσεων, το Excel και ως γεωμετρική απεικόνιση το σχεδιαστικό πρόγραμμα Solidworks. Στην συνέχεια, γίνονται κάποιες παραδοχές και αντιμετωπίζονται τα προβλήματα που προέκυψαν στην διαδικασία υπολογισμού και σχεδίασης των επίπεδων τροχών και τέλος, δημιουργούνται τα μοντέλα των βασικών συνεργασιών (ελικοειδής και ευθεία οδόντωση) αλλά και κάποιων άλλων, όπως η ασύμμετρη οδόντωση και τα ζεύγη μη τεμνόμενων αξόνων. Τελευταίο αλλά πολύ σημαντικό στην παρούσα διπλωματική, είναι η σύγκριση της συγκεκριμένης μεθόδου παραγωγής με άλλες που έχουν αναπτυχθεί παλαιότερα.



# ABSTRACT

Face gear drives with a spur involute as they are considered to be. That is the main subject of this diploma thesis. These gears are not as known to many people but they are used in a lot of demanding applications. In general, there are many ways to develop the geometry of these gears but we mostly choose the “Unified Theory of Gearing”. This theory can produce directly the profile of the mating gear from the profile of the generator with simple analytical equations. Mainly, searching for these gears is not that easy, because the bibliography for this subject is quite few. For that reason, it becomes necessary, that the creation of these different pairs of gears in the software Kisoft. That is really meaningful, because the geometries seemed to work and the different problems that they facing were seen. After that, an effort was made to develop these face gears by our own means. The equations of transformation in Excel were introduced , in which the points of mating surface were calculated. Furthermore, these points became the surface of the face gear in the 3D CAD software Solidworks. In the end, different pairs of gears were created (spur, helical, off-axis and asymmetric gears as generators) , which were compared with the pairs of gears generated from different theories.



# ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή κ. Βασίλειο Σπιτά για την υπόδειξη του θέματος, για τη δυνατότητα που μου έδωσε να πραγματοποιήσω την παρούσα εργασία καθώς και για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε κατά τη διάρκεια εκπόνησης της διπλωματικής.

Πολύτιμη ήταν η συμβολή του Εργαστηρίου Ταχείας Προτυποποίησης και ειδικότερα του κ. Σταμάτη Πολύδωρα και του κ. Ευστράτιου Τσολάκη για την βοήθεια τους στην κατασκευή του μοντέλου.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τους συμφοιτητές και συμφοιτήτριες μου, Γεωργία Πέτρου, Άννα Σιγαλού, Αλέξανδρο Γκόγκο, Βασίλη Τσαλαβούτη, Ιωάννη Κανελλόπουλο, Αντρέα Μαυρίδη, Γεώργιο Βασιλείου, Αριστοτέλη Νταρούι, Γιώργου Μαυρίκα, Σταύρο Πατηνιώτη, Ζαχαρούλα Σταματάκη και άλλους πολλούς για τα όμορφα φοιτητικά χρόνια που περάσαμε μαζί.

Τέλος, οφείλω να ευχαριστήσω την οικογένεια μου που με στήριξε και με στηρίζει όλα αυτά τα χρόνια και που χωρίς την πολύτιμη παρουσία της δε θα είχα καταφέρει τίποτα από όσα έχω μέχρι σήμερα επιτύχει.

# Περιεχόμενα

## Κεφάλαιο 1:ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 Οι επίπεδοι τροχοί	Σελ.9
1.2 Χρήση και εφαρμογές	Σελ.19
1.3 Λογισμικό σχεδιασμού επίπεδων τροχών	Σελ.23

## Κεφάλαιο 2:ΘΕΩΡΙΑ ΟΔΟΝΤΩΣΕΩΝ

2.1 Θεωρία Οδοντώσεων	Σελ.27
2.2 Η ΕΘΟ σε καρτεσιανές συντεταγμένες	Σελ.31
2.3 Εφαρμογές για crossed-axis και off-axis εφαρμογές	

## Κεφάλαιο 3:ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΗ

3.1 Kisssoft: Μοντέλα και εφαρμογές	
3.1.1 Ευθεία μετωπική οδόντωση	Σελ.40
3.1.2 Ελικοειδής οδόντωση	Σελ.44
3.1.3 Ευθεία ασυμβάτων αξόνων οδόντωση	Σελ.49
3.1.4 Ελικοειδής ασυμβάτων αξόνων οδόντωση	Σελ.51
3.2 Μοντελοποίηση : Διαδικασία και παραδοχές	
3.2.1 Εισαγωγή-Γενικά	Σελ.53
3.2.2 Πρώτο μέρος-Διαδικασία	Σελ.53
3.2.3 Πρώτο μέρος-Αντιμετώπιση προβλημάτων	Σελ.59
3.2.4 Δεύτερο μέρος-Διαδικασία	Σελ.59



3.2.5 Δεύτερο μέρος-Αντιμετώπιση προβλημάτων	Σελ.65
3.2.6 Τρισδιάστατα μοντέλα και συστήματα για την προσομοίωση της κίνησης	Σελ.66

## **Κεφάλαιο 4:ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ**

4.1 Αποτελέσματα παραγόμενων τροχών	Σελ.70
4.1.1 Ευθεία μετωπική οδόντωση	Σελ.70
4.1.2 Ελικοειδής οδόντωση	Σελ.75
4.1.3 Ευθεία ασύμμετρη οδόντωση	Σελ.80
4.1.4 Ευθεία ασυμβάτων αξόνων οδόντωση	Σελ.81
4.2 Πραγματικά μοντέλα παραγόμενα στο 3d-printer παραγόμενα με την διαδικασία Rapid Prototyping	Σελ.84

## **Κεφάλαιο 5:ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ**

## **REFERENCES**

## Κεφάλαιο 1:ΕΙΣΑΓΩΓΗ

### 1.1 Επίπεδοι τροχοί (face gears)

Οι επίπεδοι τροχοί είναι ειδική κατηγορία συνεργαζόμενων γραναζιών κάθετων κυρίως αξόνων, με ιδιαίτερο χαρακτηριστικό ότι συνεργάζονται με τυποποιημένους μετωπικούς τροχούς με ευθεία οδόντωση.

Ο λόγος που καθιστά δυνατή την συνεργασία των τροχών οφείλεται στην διαφορά της γωνίας εξελιγμένης κατά την ακτινική κατεύθυνση, η οποία από μέσα προς τα έξω αυξάνεται ,με συνήθη όρια από (15° μέχρι 35°) [4]. Μία χαρακτηριστική συνεργασία μετωπικού τροχού με ευθεία οδόντωση ,κατασκευασμένη από την ελβετική εταιρεία ASS.AG φαίνεται στην **εικόνα 1.1.1**.

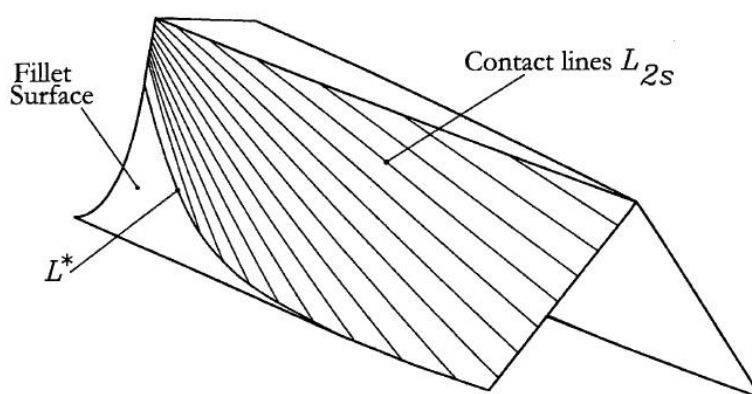


**Εικόνα 1.1.1:**Επίπεδοι τροχοί κατασκευασμένοι από την ASS.AG.

Στην πορεία των χρόνων και λόγω ανάγκης, μελετήθηκε η συνεργασία με ελικοειδείς τροχούς, με offset στους άξονες των τροχών και με γωνία αξόνων μικρότερη ή μεγαλύτερη των 90 μοιρών.

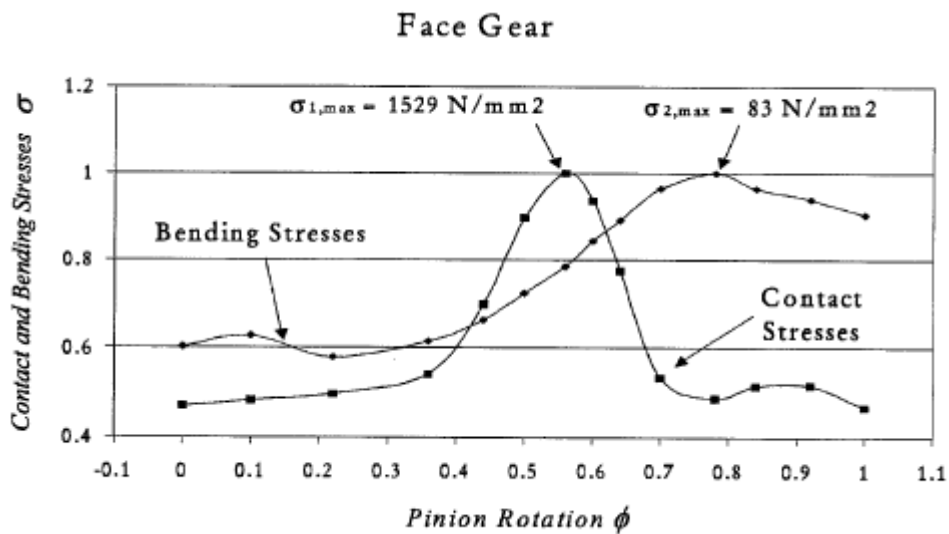
Τα πλεονεκτήματα των face gears έγιναν γρήγορα κατανοητά και χρησιμοποιήθηκαν για εφαρμογές στις οποίες υπερτερούσαν κατά πολύ από τις άλλες συνεργασίες οδοντωτών τροχών. Οι εφαρμογές αυτές απαιτούσαν: α) εύκολη συναρμολόγηση β) ελάχιστη ευαισθησία των τροχών σε προβλήματα που προκαλεί η έλλειψη ακρίβειας στην τοποθέτηση των αξόνων περιστροφής στον χώρο, με απαραίτητη την εφαρμογή αξονικής μετατόπισης (η οποία ρυθμίζεται για να επαναφέρει την ζώνη φόρτισης στην κατάλληλη θέση) γ) μειωμένο θόρυβο λόγω της ελαχιστοποίησης των σφαλμάτων μετάδοσης και δ) ομαλή μετάβαση φορτίου από το ένα ζεύγος οδόντων στο επόμενο (favorable condition of transfer load) [2],[4],[6],[7],[8]. Αυτοί είναι οι βασικοί λόγοι για τους οποίους επιλέγονται οι επίπεδοι τροχοί για την μετάδοση κίνησης έναντι άλλων τροχών τεμνόμενων αξόνων.

Αναλύοντας, από την άλλη πλευρά, την συνεργασία αυτών των τροχών με σκοπό να γίνει αντιληπτός ο τρόπος καταπόνησης τους και ξεκινώντας από την κατανόηση της επαφής μεταξύ του γεννήτορα και του επίπεδου τροχού, παρατηρείται ότι οι γραμμές επαφών είναι καμπύλες που σχηματίζονται από τα σημεία επαφής, επειδή σε αυτή την περίπτωση έχουμε σημειακή και όχι γραμμική [7]. Αυτό αναφέρεται για να μην υπάρξει σύγχυση. Οι γραμμές επαφής του επίπεδου τροχού και του γεννήτορα φαίνονται στην **εικόνα 1.1.2**. Από αυτή την θεώρηση και με βάση τις μελέτες που έχουν γίνει, βγαίνει το συμπέρασμα ότι δεν υπάρχει γραμμή επαφής όπως στις περισσότερες συνεργασίες οδόντων αλλά σημείο επαφής (υπόθεση που αμφισβητείται επειδή λόγω τοπικής παραμόρφωσης εκτείνεται σε επιφάνεια).

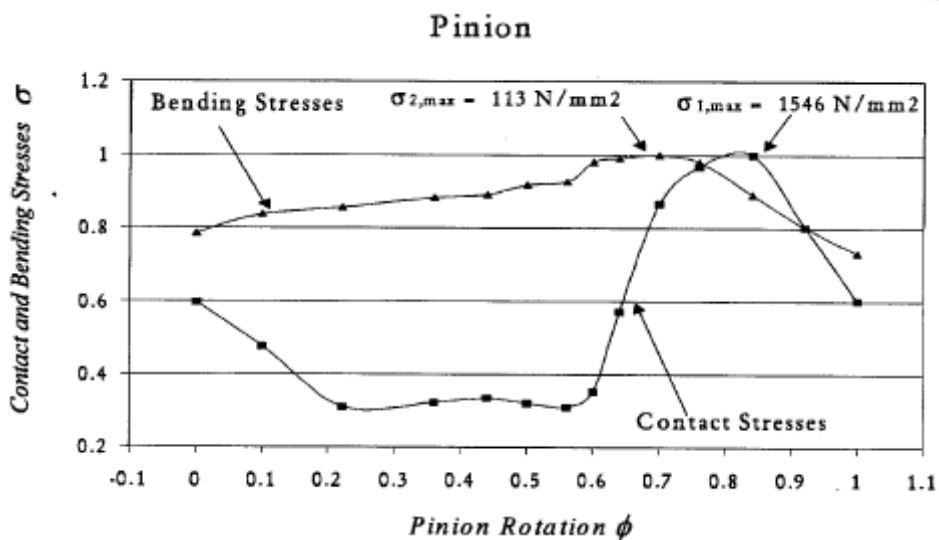


**Εικόνα 1.1.2:** Καμπύλες επαφής γεννήτορα με το παραγόμενο οδόντα

Το μειονέκτημα των επίπεδων τροχών είναι ότι καταπονούνται σημειακά, με αποτέλεσμα να αλλάζει το προφίλ των τάσεων δραματικά. Εκτός από τάσεις κάμψης (bending stresses) στον πόδα των οδόντων, εισάγονται και σημειακές τάσεις επαφής (contact stresses), οι οποίες εμφανίζονται για μικρή γωνία σε σχέση με την συνολική περιστροφή του τροχού αλλά έχουν μεγάλο πλάτος. Το προφίλ των τάσεων επαφής σε σχέση με τις τάσεις κάμψης για τους επίπεδους τροχούς φαίνεται στην **εικόνα 1.1.3** και του πινιόν στην **εικόνα 1.1.4**, σύμφωνα με μελέτες που έχουν γίνει [2],[4],[7],[9].

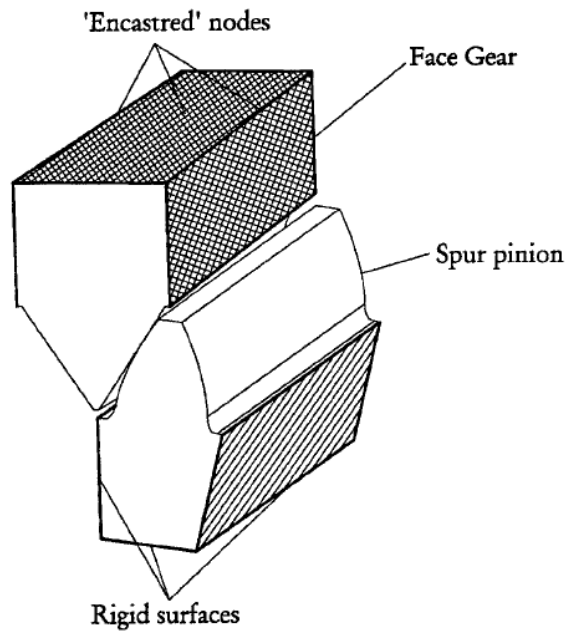


**Εικόνα 1.1.3:** Τάσεις επαφής σε σχέση με κάμψεως στον επίπεδο τροχό

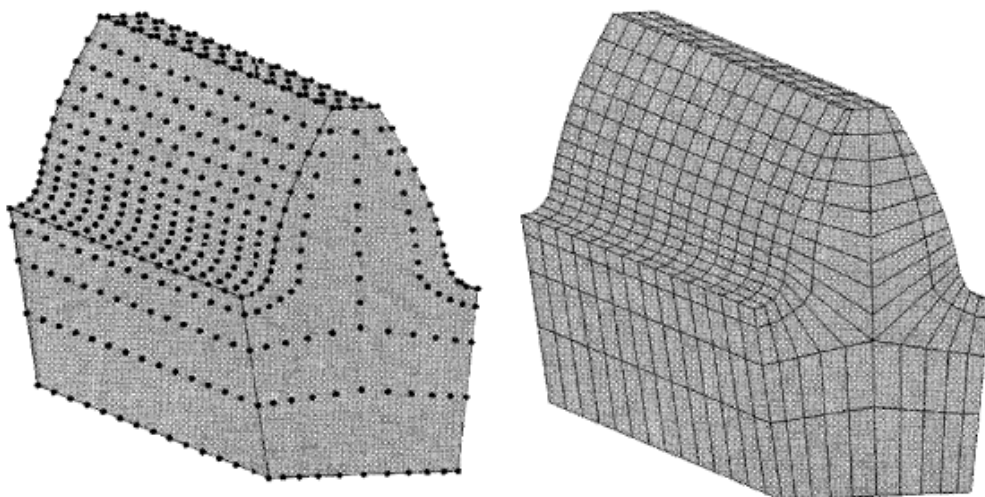


**Εικόνα 1.1.4:** Τάσεις επαφής σε σχέση με κάμψεως στον επίπεδο τροχό

Οι προσομοιώσεις αυτές ,είναι παρόμοιες στην λογική ανάπτυξης ,που θεωρούν ένα ζεύγος οδόντων σε επαφή , με αρχικές συνθήκες και περιορισμούς όπως φαίνονται στην **εικόνα 1.1.5** .Το meshing που υλοποιήθηκε για να επιτευχθεί η προσομοίωση φαίνεται στην **εικόνα 1.1.6**.

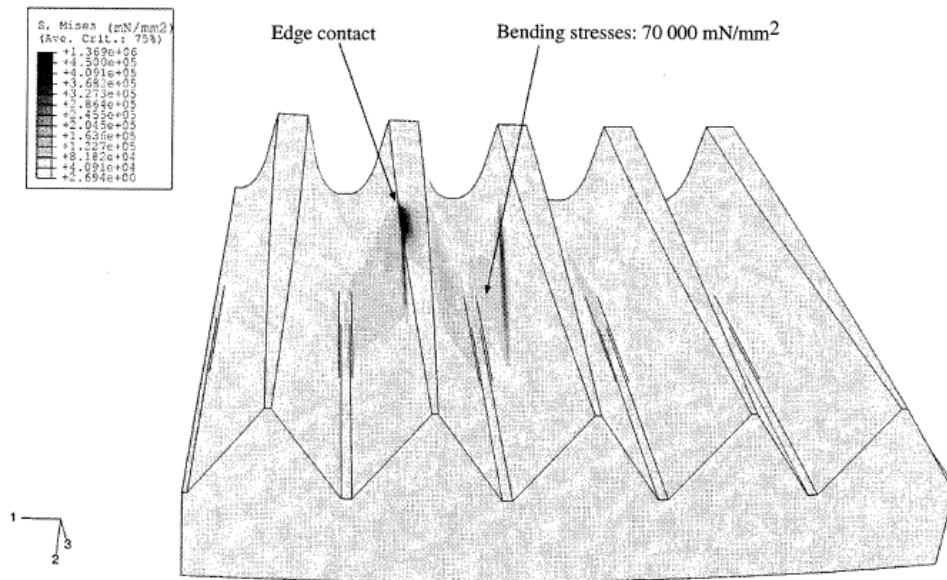


**Εικόνα 1.1.5:** Αρχικές συνθήκες και περιορισμοί στην προσομοίωση με Π.Σ.

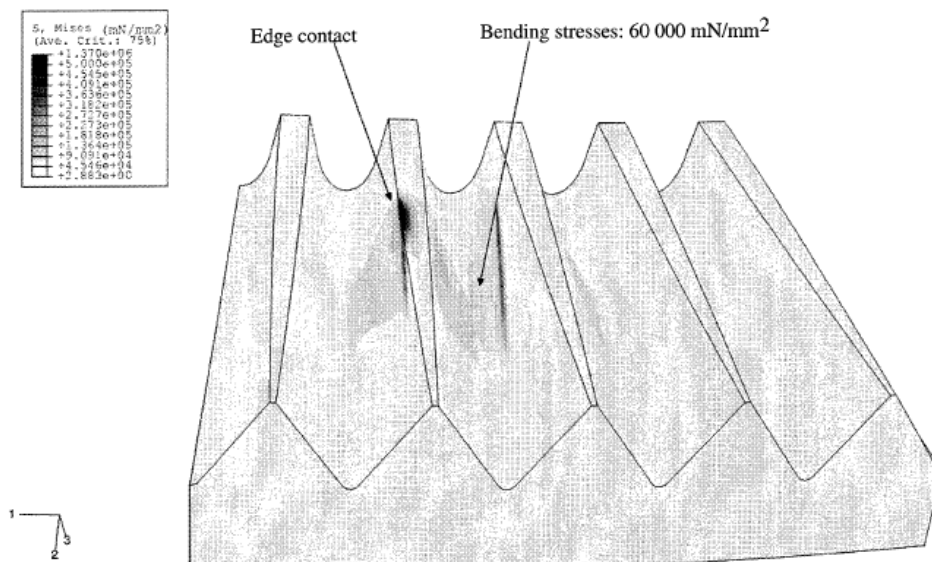


**Εικόνα 1.1.6:** Το meshing του μοντέλου προσομοίωσης

Τα αποτελέσματα που παρατίθενται στις εικόνες, πρώτον δείχνουν την κατανομή των τάσεων επαφής και των τάσεων κάμψης για τους επίπεδους τροχούς παραγόμενα από γεννήτορα με ακμές στην κεφαλή (**εικόνα 1.1.7**) και δεύτερον την ίδια κατανομή των τροχών ,οι οποίοι έχουν στρογγυλεμένες ακμές στην κεφαλή (**εικόνα 1.1.8**).



**Εικόνα 1.1.7:** Κατανομές τάσεων τροχού παραγόμενο από τον γεννήτορα τροχό που έχει κανονικές ακμές

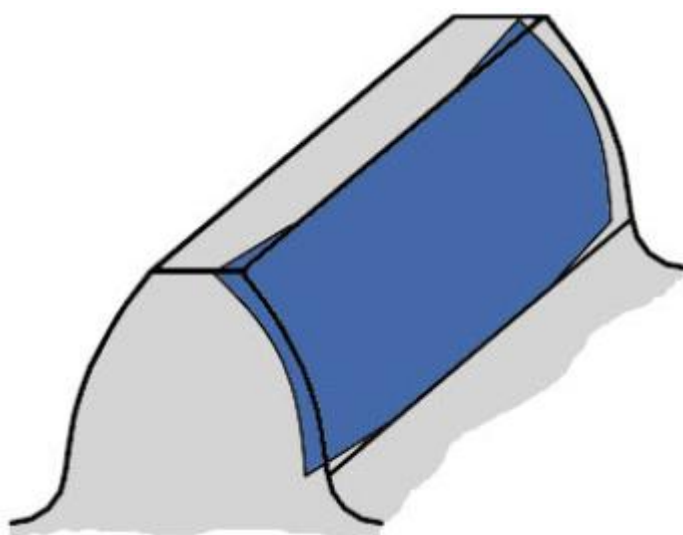


**Εικόνα 1.1.8:** Κατανομές τάσεων τροχού, παραγόμενο από τον γεννήτορα τροχό που έχει στρογγυλεμένες ακμές

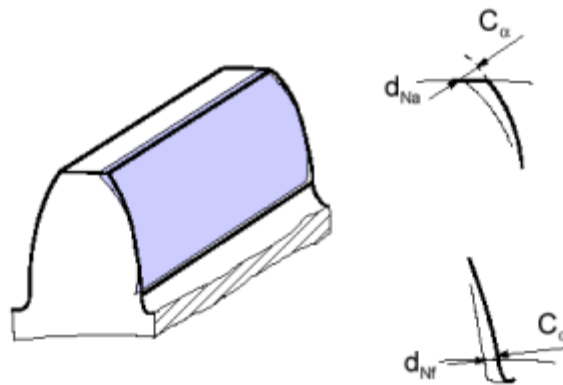
Παρατηρήθηκε ότι ,οι επίπεδοι τροχοί που έχουν παραχθεί με γεννήτορα με στρογγυλεμένες ακμές, παρουσιάζουν μειωμένες τάσεις κάμψης κατά 6-12% και ότι οι τάσεις επαφής (contact stresses) είναι αρκετά μεγαλύτερες από τις τάσεις κάμψης σε κάθε δοκιμή [2],[4],[7],[9].Επίσης, το προφίλ των τάσεων είναι βαθμιαία αυξανόμενο για τις τάσεις κάμψης και τύπου απότομης μεταβολής (impact) για τις τάσεις επαφής.

Αυτό το μειονέκτημα των επίπεδων τροχών, οδήγησε πολλούς ερευνητές στο να θεωρήσουν ότι οι επίπεδοι τροχοί δεν είναι κατάλληλοι για μεγάλα φορτία (κυρίως για μεταδόσεις κίνησης) δηλαδή ότι δεν αντέχουν όσο οι άλλες κατηγορίες τροχών. Αυτή η υπόθεση αναιρέθηκε ,όταν οι ανάγκες χρήσης των επίπεδων τροχών έγιναν πιο επιτακτικές, για μεγάλες ισχείς και για ικανές αντοχές υπό αυτές τις συνθήκες [7].

Για να επιτευχθεί αυτό ,αυξήθηκε η ακρίβεια της κατασκευής λόγω ανάγκης για καλύτερα αποτελέσματα με συνέπεια το κόστος να φτάσει σε υψηλά επίπεδα και να γίνει σιγά σιγά απαγορευτικό για απλές εφαρμογές. Έγινε απαραίτητη η εφαρμογή μεθόδων στην κατασκευή των γεννητόρων , οι οποίοι αφορούν την επίτευξη crowning των δοντιών σε δύο κατευθύνσεις ,κατά την έννοια της ακτίνας (longitudinal crowning) και την έννοια του ύψους (profile crowning ή αλλιώς barreling) [4],[10]. Αντίστοιχα γίνεται επεξήγηση της διαδικασίας του crowning πάνω σε οδόντα εξειλιγμένης στην **εικόνα 1.1.9** και **1.1.10**.



**εικόνα 1.1.9:** Longitudinal Crowning



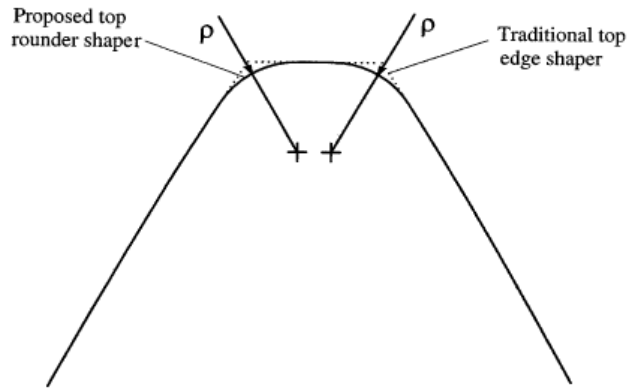
**Εικόνα 1.1.10: Profile Crowning**

Ο πρώτος τρόπος εφαρμογής crowning επιτυγχάνεται με γεννήτορα που έχει μεγαλύτερο αριθμό δοντιών από το πινιόν και ο δεύτερος τρόπος με μετατόπιση του κέντρου περιστροφής του γεννήτορα προς τον παραγόμενο τροχό. Αυτό είχε σαν αποτέλεσμα τον περιορισμό (localization) της ζώνης φόρτισης στο σημείο που λειτουργεί κανονικά το δόντι, όπως αναφέρθηκε και πιο πριν με μία αξονική μετατόπιση του μετωπικού τροχού. Με αυτόν τον τρόπο είναι δυνατή η απορρόφηση σφαλμάτων οποιασδήποτε ανακρίβειας των αξόνων στην συνεργασία. Ουσιαστικά εάν ελευθερωθεί (δηλαδή έχοντας μικρές ανοχές) το πινιόν, τότε αυτορυθμίζεται στην σωστή του θέση [7]. Ρυθμίζοντας την ζώνη φόρτισης μπορεί να αποφευχθεί η συνεργασία του μετωπικού τροχού με τον επίπεδο τροχό σε περιοχές όπου ο οδόντας του τελευταίου έχει πολύ μικρό πάχος, με αποτέλεσμα να μπορεί να μειωθεί η μέγιστη τάση επαφής μέχρι και 40% [2].

Επίσης, έγινε απαραίτητη η παραγωγή επίπεδων τροχών με γεννήτορα του οποίου οι ακμές είναι στρογγυλεμένες (rounded tip shaper). Αυτό με την σειρά του παίζει σημαντικό ρόλο στην μείωση των τάσεων στον πόδα του επίπεδου τροχού, λόγω της ομαλοποίησης του fillet. Για επεξήγηση παρατίθεται η **εικόνα 1.1.11**, η οποία δείχνει τις στρογγυλεμένες ακμές του γεννήτορα. Αυτή η μετατροπή της κατεργασίας όπως ειπώθηκε και πιο πριν βοηθάει στην μείωση των τάσεων κάμψης.

Στην κατασκευή των επίπεδων τροχών έχει παρατηρηθεί από πολλούς ερευνητές ότι υπάρχουν διαφορές στην μη εργαζόμενη πλευρά (coast side) από την εργαζόμενη πλευρά (driving side). Αυτό παρατηρείται και συνεχίζεται η βελτιστοποίηση του οδόντος μόνο από την μία πλευρά [4]. Οπότε υπάρχει διαφορά στις φορές περιστροφής (ποιά πλευρά συνεργάζεται) στις διάφορες εφαρμογές, ειδικά στην μετάδοση ισχύος που μας ενδιαφέρει η αντοχή των οδόντων.



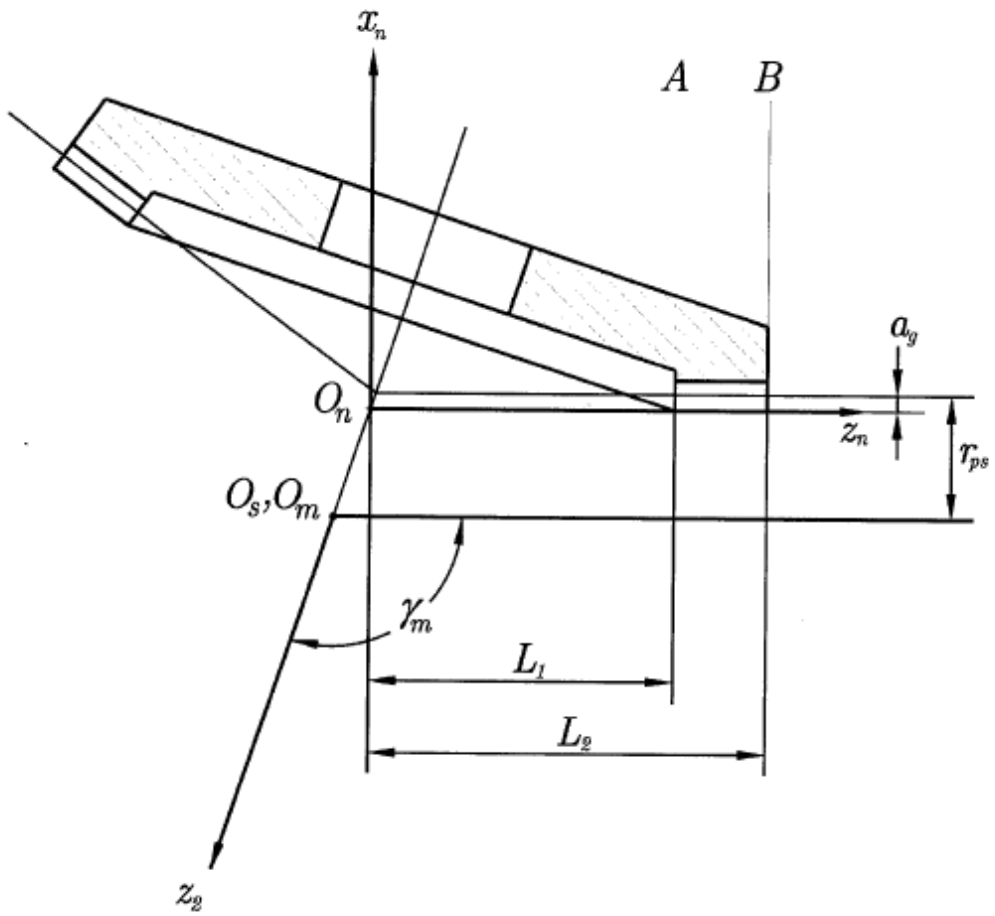


**Εικόνα 1.1.11:** Απεικόνιση γεννήτορα οδόντα με στρογγυλεμένες ακμές

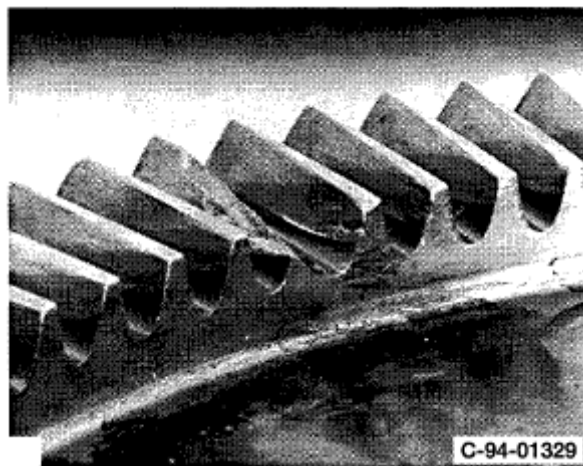
Πολλές φορές γίνεται σύγκριση δύο διαφορετικών ζευγών συνεργασίας με αποτέλεσμα να επιλέγεται κάθε φορά ,αυτό που είναι η καταλληλότερη λύση. Τα ζεύγη που μπορούν να υλοποιήσουν ότι ακριβώς και οι επίπεδοι τροχοί είναι τα κωνικά γρανάζια (bevel gears) ευθεία και ελικοειδή και τα spiral bevel gears όπως έχει δείξει και η βιβλιογραφία [7],[8]. Και τα δύο ζεύγη οδόντων που συγκρίνονται έχουν μία δύσκολη κατεργασία (περίπλοκη) για το πινιόν και για το συνεργαζόμενο τροχό. Σε αυτό το σημείο είναι που οι επίπεδοι τροχοί πλεονεκτούν.

Από την άλλη όμως, έχουν μία ιδιαιτερότητα που τους εμποδίζει να παραλάβουν ,λόγω γεωμετρίας, παραπάνω φορτίο. Το φαινόμενο των υποκοπών ,περιορίζει την εσωτερική ακτίνα (L1) του face gear ενώ το φαινόμενο του μηδενικού πάχους στην κεφαλή επίσης περιορίζει την εξωτερική ακτίνα (L2) όπως φαίνεται και στην **εικόνα 1.1.12**. Αυτό μειώνει το πλάτος του οδόντος με αποτέλεσμα να μειώνεται και η αντοχή του [7].Τα (L1) και (L2) υπολογίζονται με εμπειρικούς τύπους. Όσο αυξάνεται το module, τόσο αυξάνεται και το εύρος και μετακινείται προς μεγαλύτερες τιμές.

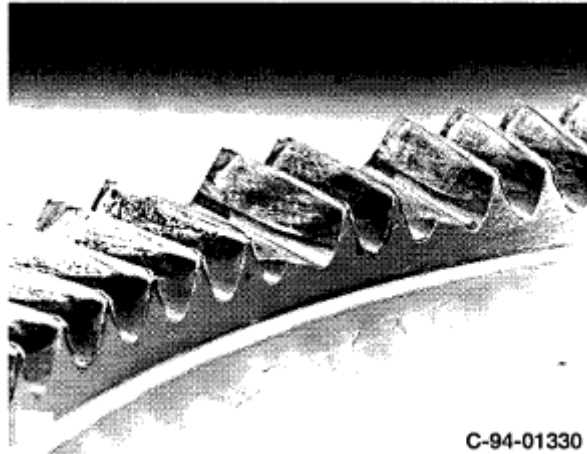
Συγκριτικά με άλλες έρευνες, αναφέρονται οι βλάβες ,που παρουσιάζονται στους επίπεδους τροχούς και που έχουν μελετηθεί κατά καιρούς από διάφορους ερευνητές [6],[8].Εμφανής βλάβη είναι το scoring ,το οποίο εμφανίζεται στην συνεργαζόμενη επιφάνεια του δοντιού. Αντιμετωπίζεται με μετακίνηση της ζώνης επαφής, η οποία επιτυγχάνεται όταν μετακινείται αξονικά ο μετωπικός τροχός. Ένα άλλο πρόβλημα είναι το pitting ,το οποίο δεν αντιμετωπίζεται τις περισσότερες φορές και απλά συνεχίζεται η συνεργασία των οδόντων. Οι αστοχίες στους οδόντες εντοπίζονται κυρίως λόγω pitting και κάμψης (μέχρι το σημείο όπου σπάει ο οδόντας). Ένα παράδειγμα αστοχίας από pitting (εκτεταμένης φθοράς) φαίνεται στην **εικόνα 1.1.13** και από τάσεις κάμψης (με παράλληλη πλαστική παραμόρφωση) στην **εικόνα 1.1.14**.



Εικόνα 1.1.12: Περιορισμός της εσωτερικής και εξωτερικής ακτίνας



Εικόνα 1.1.13: Αστοχία από pitting



C-94-01330

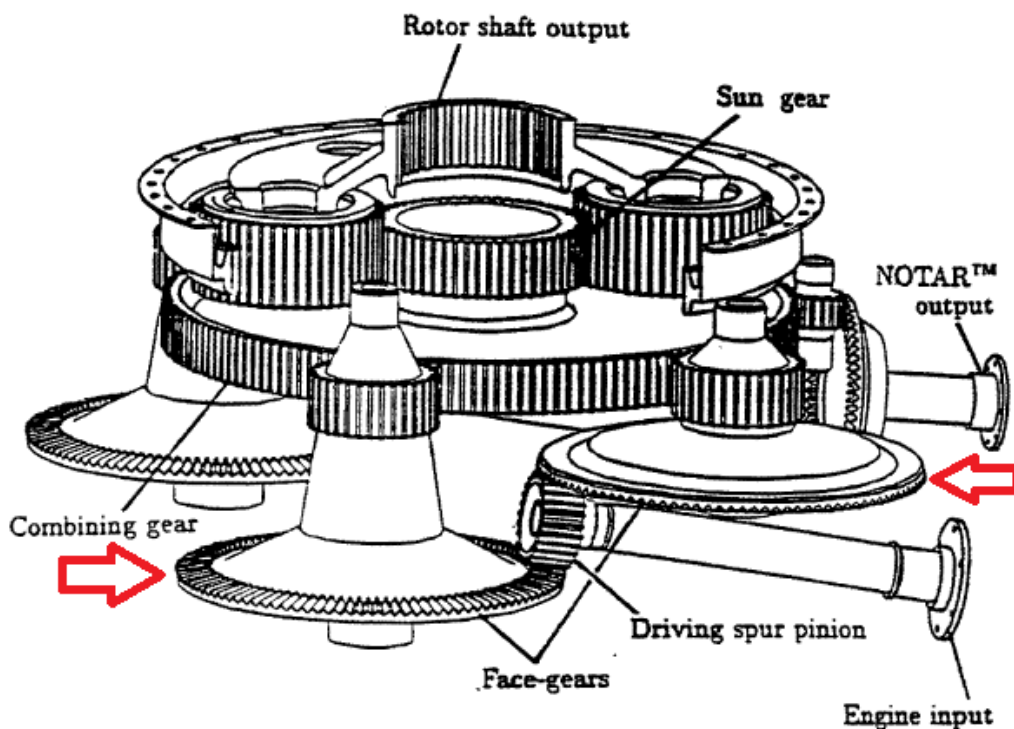
**Εικόνα 1.1.14:** Αστοχία από τάσεις κάμψης παράλληλα με πλαστική παραμόρφωση

Τέλος, σημειώνονται κάποιες παρατηρήσεις σχετικά με τους ασύμμετρους οδόντες, επειδή υπάρχει ενασχόληση πάνω στο θέμα αυτό από το εργαστήριο Στοιχείων Μηχανών. Γενικότερα, όσον αφορά την παραγωγή της γεωμετρίας τους, η γωνία εξειλιγμένης της πλευράς που συνεργάζεται (driving side), θα πρέπει να είναι μεγαλύτερη από την μη συνεργαζόμενη (coast side) [9]. Επίσης, πρέπει να ληφθεί υπόψη ότι οι υποκοπές εμφανίζονται στην μη εργαζόμενη πλευρά λόγω της μειωμένης γωνίας πίεσης. Οι προσομοιώσεις που έγιναν σε ασύμμετρους τροχούς, κατέληξαν ότι οι τάσεις μειώνονται γενικά κατά 10% .

## 1.2 Χρήση και εφαρμογές

Οι βασικότερες εφαρμογές που αναφέρονται στην βιβλιογραφία και που μπορεί να βρει ο καθένας στο internet είναι σε συστήματα μετάδοσης κίνησης (power transmissions) αυτοκινήτων και ελικοπτέρων.

Ειδικότερα έχουν γίνει έρευνες για αντικατάσταση των κωνικών και των σπειροειδών τροχών για την κύρια μετάδοση των κινητήρων του ελικοπτέρου στην κεντρική έλικα ,οι οποίες έχουν εφαρμοστεί χωρίς ιδιαίτερα πρόβλημα από την Fellows Corporation [6],[7]. Η **εικόνα 1.1.15** δείχνει το σύστημα μετάδοσης κίνησης του ελικοπτέρου και την ροή της ισχύος από τους κινητήρες προς την κύρια έλικα, στην οποία φαίνονται πολύ καθαρά τα σημεία που χρησιμοποιούνται οι επίπεδοι τροχοί.



**Εικόνα 1.1.15:** Μετάδοση ισχύος ελικοπτέρου

Οι επίπεδοι τροχοί που κατασκευάστηκαν για αυτό το σκοπό, έχουν δύο βασικά πλεονεκτήματα ,την ισοκατανομή της ροπής ανάμεσα στους δύο επίπεδους τροχούς του κάθε πινιόν και την μείωση του βάρους λόγω της έλλειψης πολυπλοκότητας (ένας τυποποιημένος μετωπικός τροχός που συνεργάζεται με δύο επίπεδους

τροχούς). Αυτά μαζί με την αθόρυβη λειτουργία ,λόγω της ομαλής μετάβασης από το ένα ζεύγος οδόντων στο άλλο και της εύκολης τοποθέτησης και συμπλοκής των διαφόρων τμημάτων (κάτι που σε συστήματα μετάδοσης κίνησης είναι πάρα πολύ σημαντικό λόγω της πολυπλοκότητας) έκαναν την επιλογή των επίπεδων τροχών την καταλληλότερη.

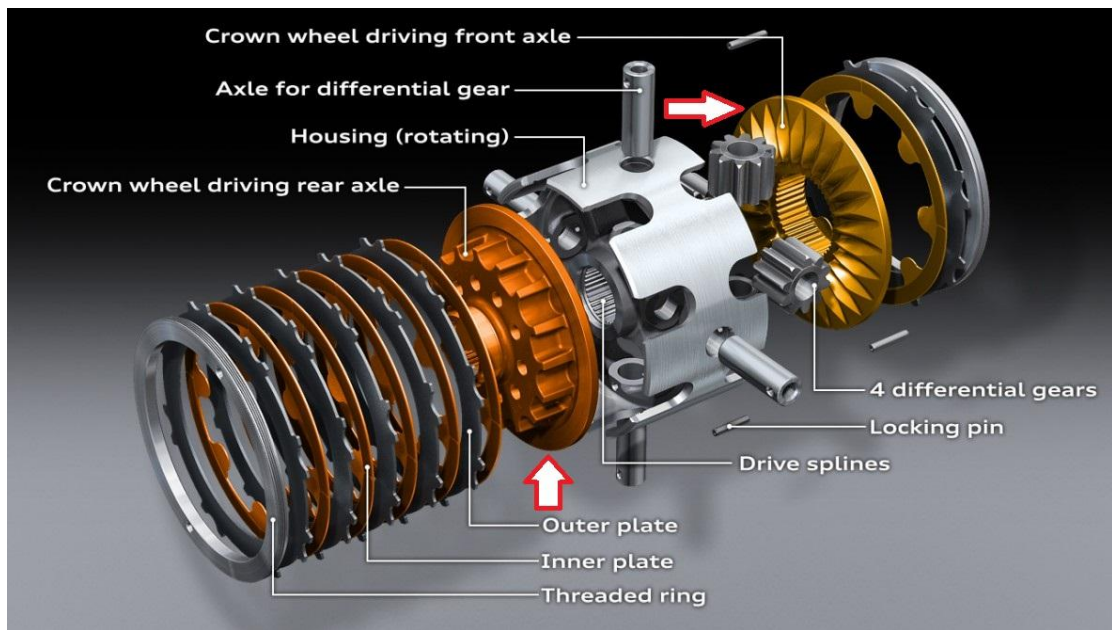
Για τον λόγο αυτό, έγιναν κάποιες μελέτες σχετικά με την κατασκευή και την αντοχή των επίπεδων τροχών για αυτή την εφαρμογή. Για να επιτευχθεί η μεταφορά 2500-3000 hp ανά πινιόν ,δηλαδή συνολικά 5000 hp (επειδή είναι δύο κινητήρες) ,χρειάστηκε προσεκτική κατασκευή (crowning και hardening της επιφάνειας) ,προκειμένου να φτιαχτούν οδόντες που μπορούν να αντέξουν αυτές τις φορτίσεις.

Παρατηρήθηκε ότι οι χάρες που δίνονται για την εξάλειψη της χάρης των κατατομών, πρέπει να είναι διαφορετικές από την μία πλευρά σε σχέση με την άλλη ,με σκοπό να μπορούν να διατηρηθούν τα ποσοστά της ισοκατανομής της ροπής των επίπεδων γραναζιών που συμπλέκεται ο μετωπικός τροχός στο 50%-50%. Επίσης βελτιστοποιήθηκαν οι άξονες και οι βάσεις των κεντρικών πινιόν για να αποφευχθεί η πιθανότητα συντονισμού ολόκληρου του συστήματος ,με αποτέλεσμα να μειωθεί ο θόρυβος στο ελάχιστο.

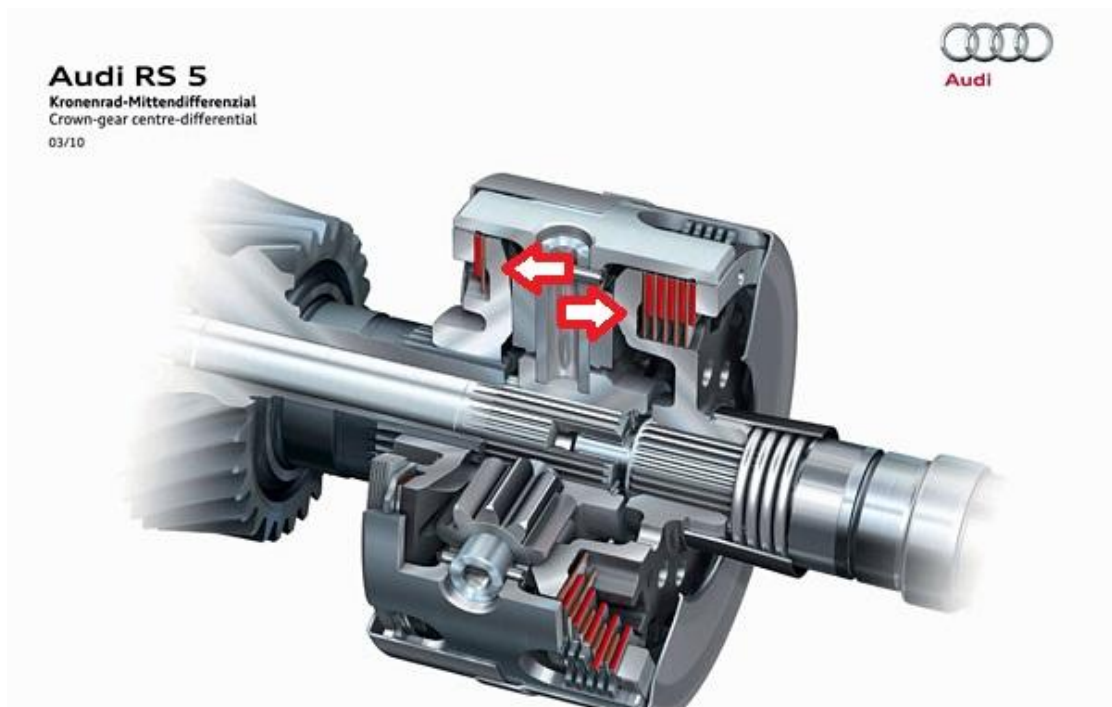
Μία ακόμα ευρεία εφαρμογή, που υπάρχει από παλιά, είναι η χρήση επίπεδων τροχών σε μεταδόσεις κίνησης (κιβώτια ταχυτήτων) φορτηγών. Από τις πρώτες εταιρείες που ασχολήθηκαν και εισήγαγαν επίπεδους τροχούς σε τέτοιες εφαρμογές είναι η Fuller Transmission Division ,η οποία αργότερα απορροφήθηκε από την Eaton.

Τέλος ,πρέπει να αναφερθεί η πρόσφατη χρήση (2010) επίπεδων τροχών στο κεντρικό διαφορικό sport και τετρακίνητου αυτοκινήτου (Quattro RS5) της Audi. Το κεντρικό διαφορικό φαίνεται σε exploded view στην **εικόνα 1.1.16** και σε ολοκληρωμένη μορφή στην **εικόνα 1.1.17**.Οι επίπεδοι τροχοί της εφαρμογής είναι κατασκευασμένοι από την ελβετική εταιρεία ASS.AG .Για πρώτη φορά ,αξιοποιείται η διαφορά των ταχυτήτων που προσφέρει η διαφορετική ακτίνα σύμπλεξης των δύο επίπεδων τροχών ,τα οποία συνεργάζονται με τέσσερις μετωπικούς τροχούς με ευθεία οδόντωση, για μεγαλύτερο καταμερισμό του φορτίου που παραλαμβάνουν. Η λειτουργία του σε ακραία κατάσταση φαίνεται στην **εικόνα 1.1.18**.

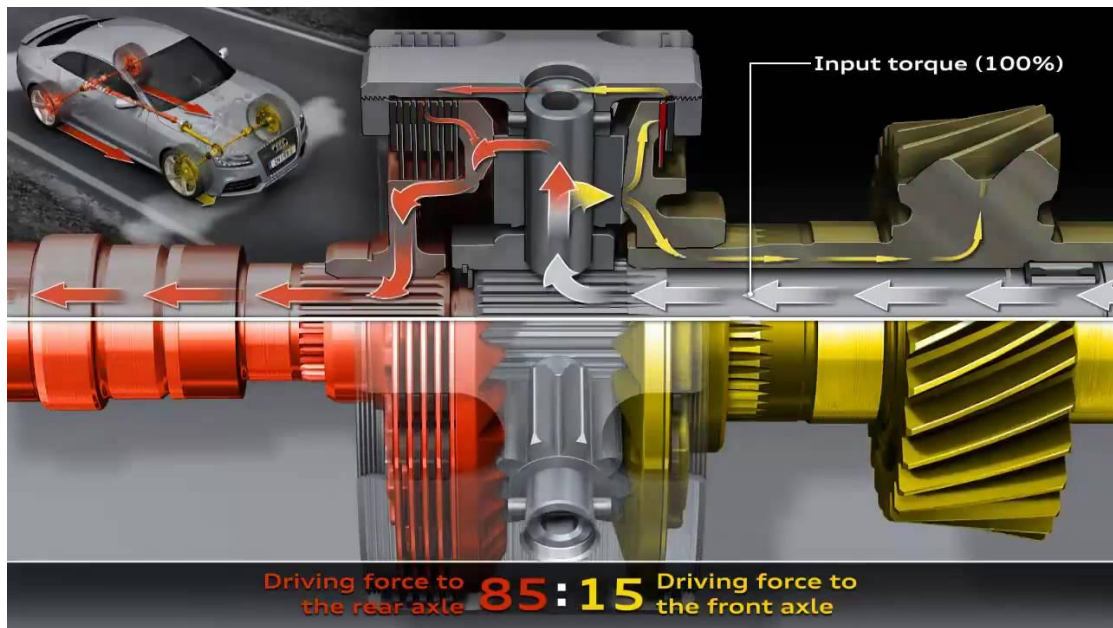
Ένα άλλο πλεονέκτημα που εκμεταλλεύτηκαν στην συγκεκριμένη εφαρμογή είναι η διαφορετική κατανομή της ροπής σε ομόκεντρους άξονες, το οποίο αποτελεί ένα ακόμα πλεονέκτημα των επίπεδων τροχών



**Εικόνα 1.1.16:** Exploded view του κεντρικού διαφορικού του Audi Quattro RS5



**Εικόνα 1.1.17:** Συναρμολογημένο σύνολο του κεντρικού διαφορικού του Audi Quattro RS5



Εικόνα 1.1.18: Το διαφορικό σε ακραία κατάσταση λειτουργίας

## 1.3 Λογισμικό σχεδιασμού επίπεδων τροχών

### **Kisssoft**

Κατά την γενική του έννοια το Kisssoft είναι ένα λογισμικό για τον γεωμετρικό υπολογισμό και την προσομοίωση φορτίσεων διαφόρων στοιχείων μηχανών ανάμεσα στα οποία είναι οι τροχοί, οι άξονες, τα έδρανα κυλίσεως και ολισθήσεως, γενικά τα στοιχεία συνδέσεως (βίδες, σφήνες, πολύσφηνα, πείροι, συγκολλήσεις, κολλήσεις), ελατήρια, ιμάντες, αλυσίδες, συμπλέκτες, συγχρονιστές και άλλα διάφορα στοιχεία. Έχει αναπτυχθεί και προωθηθεί στην αγορά από την Kisssoft AG, η οποία όταν άρχισε να δημιουργεί το λογισμικό γύρω στις αρχές του της δεκαετίας του 80' λεγόταν L. Kissling&Co.AG. Το χρησιμοποιούσε για δικές τις εφαρμογές και σιγά σιγά το προσέφερε και σε άλλες εταιρείες, όπου τελικά το 1998 βγάζει την πρώτη έκδοση του λογισμικού της στην αγορά και το 2000 μεταφέρει την έδρα της στην Ζυρίχη της Ελβετίας υπό το νέο της όνομα Kisssoft AG.

Ειδικότερα για την περίπτωση μας, για τους επίπεδους τροχούς, πρέπει να επιλεχθούν τα βασικά γεωμετρικά χαρακτηριστικά της συνεργασίας, να δοθεί η επιλογή της γωνίας αξόνων των τροχών, το offset που θα έχουν και ο τύπος του οδόντα του πινιόν που θα χρησιμοποιηθεί για την συνεργασία (μετωπικής ευθείας οδόντωσης, δεξιόστροφης ή αριστερόστροφης ελικοειδούς οδόντωσης).

Από εκεί και πέρα, στο Kisssoft δίνεται η δυνατότητα να ορισθούν πολλές και διαφορετικές γεωμετρικές παράμετροι, όπως οι συντελεστές και τα μήκη που ορίζουν την κεφαλή, τον πόδα και το fillet του επίπεδου τροχού και του κοπτικού τροχού (περιλαμβάνονται χαρακτηριστικά για την επίτευξη του crowning που εξηγήθηκε προηγουμένως). Επίσης, τα μέγιστα και ελάχιστα όρια που ορίζουν το backlash και διάφορες μετατροπές του οδόντα που έχουν να κάνουν με στρογγυλεμένες ή μη ακμές του γεννήτορα και τέλος το crowning τύπου chamfering, που προκαλεί γωνίες στην εσωτερική και εξωτερική διάμετρο του επίπεδου τροχού.

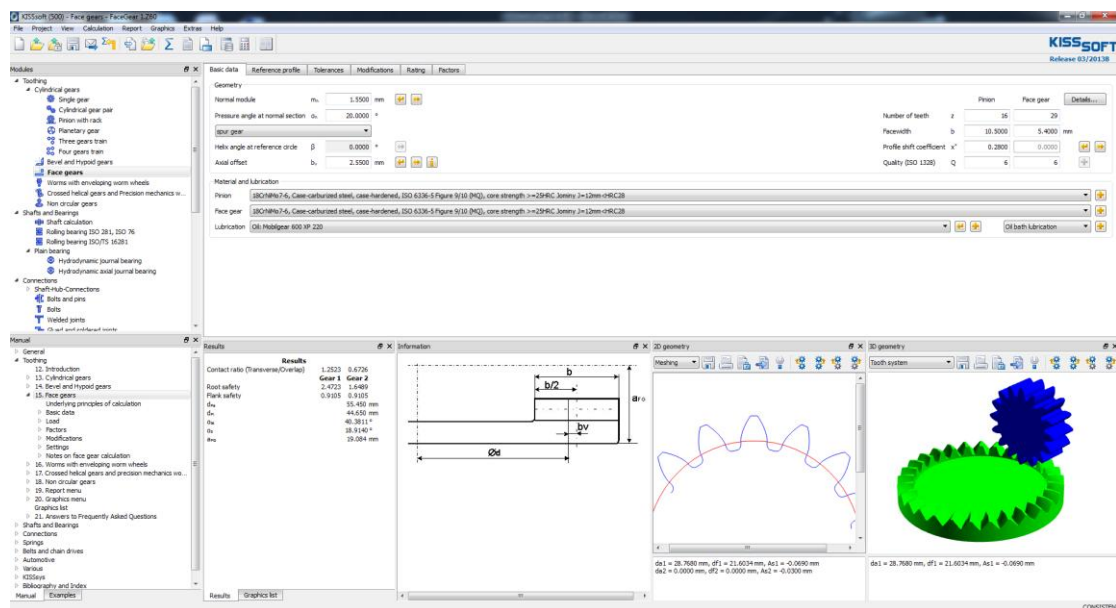
Τέλος, μπορούν να προστεθούν ταχύτητες, ροπές, απαιτούμενος χρόνος ζωής, διάφοροι συντελεστές ασφαλείας, προφίλ στατικών ή δυναμικών φορτίσεων και να ορισθεί μέθοδος υπολογισμού των φορτίσεων με βάση το ISO 6336 ή το DIN 3990.

Μία παρατήρηση που είναι πολύ βασική για το πρόγραμμα είναι, ότι κάθε φορά που χρειάζεται να λειτουργήσει το λογισμικό και υπάρχει κάποιο γεωμετρικό ή



άλλου τύπου σφάλμα, το Kisssoft κατευθύνει ,επισημαίνοντας μέσω μηνυμάτων , τα όρια των μεταβλητών, κάνοντας εύκολη την χρήση του και φτάνοντας τις περισσότερες φορές σε τελικό αποτέλεσμα.

Τα αποτελέσματα που εμφανίζει το Kisssoft για τους επίπεδους τροχούς είναι αρκετά και βοηθάνε πολύ στην κατανόηση της γεωμετρίας. Το βασικότερο είναι ότι εκτός από τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά των συνεργαζόμενων οδόντων που παραθέτονται, το λογισμικό μας δίνει 2D και 3D απεικονίσεις ,οι οποίες μπορούν να εξαχθούν σε άλλο πρόγραμμα (στην περίπτωση μας το Solidworks) και να γίνει η διαχείριση που είναι απαραίτητη. Οι γραμμές επαφής ,οι καμπύλες των τάσεων ,η συμπεριφορά του λιπαντικού στρώματος ,οι ταχύτητες ολίσθησης μεταξύ των οδόντων ,τα σημεία εισχώρησης του ενός οδόντος στο άλλο είναι κάποια από τα αποτελέσματα που μας δίνει το λογισμικό. Τέλος, η απεικόνιση της συνεργασίας με δικό μας έλεγχο είναι κάτι το οποίο βοήθησε σε μεγάλο βαθμό την κατανόηση αυτών των τροχών. Η **εικόνα 1.1.19** δείχνει το περιβάλλον του λογισμικού.



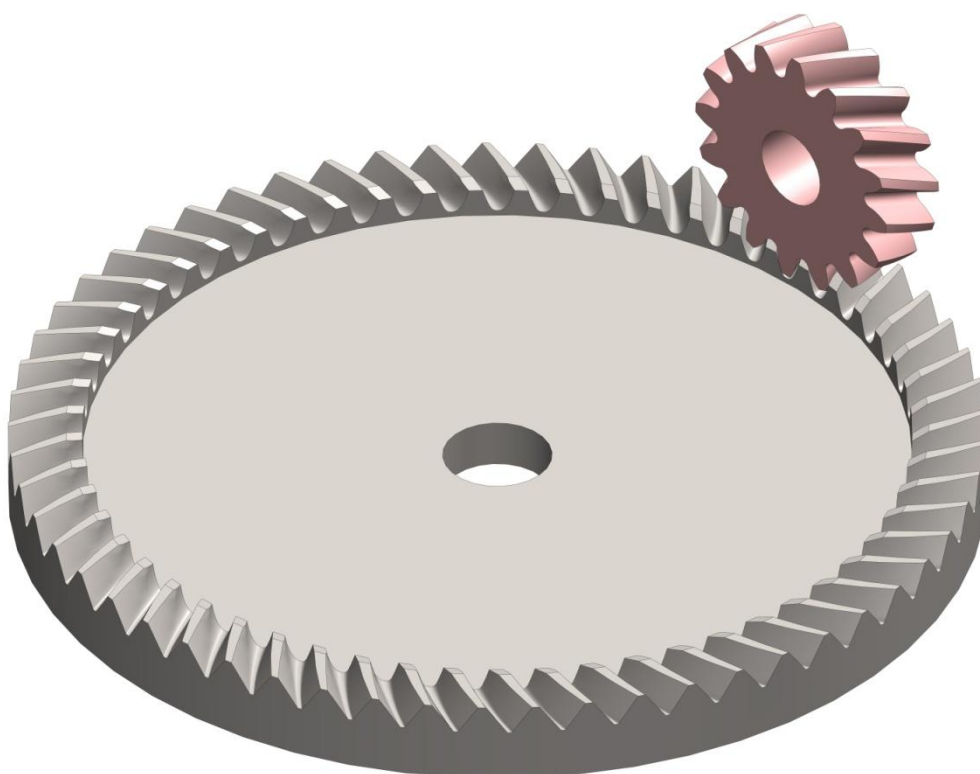
**Εικόνα 1.1.19:** Περιβάλλον λογισμικού Kisssoft

## Solidworks

Είναι ένα από τα πιο ευρέως γνωστά μηχανολογικά (τριών διαστάσεων) λογισμικά σχεδιασμού, το οποίο χρησιμοποιείται από εκατομμύρια μηχανικούς και σχεδιαστές σε όλο τον κόσμο. Αναπτυγμένο από την γαλλική Dassault Systèmes S.A η οποία ιδρύθηκε το 1993 και εγκατέστησε τα κεντρικά της στις ΗΠΑ.

Το Solidworks χρησιμοποιείται για πάρα πολλές εφαρμογές. Δεν είναι μόνο CAD (Computer Aided Design) αλλά και CAE (Computer Aided Engineering) και CAM (Computer Aided Manufacturing).

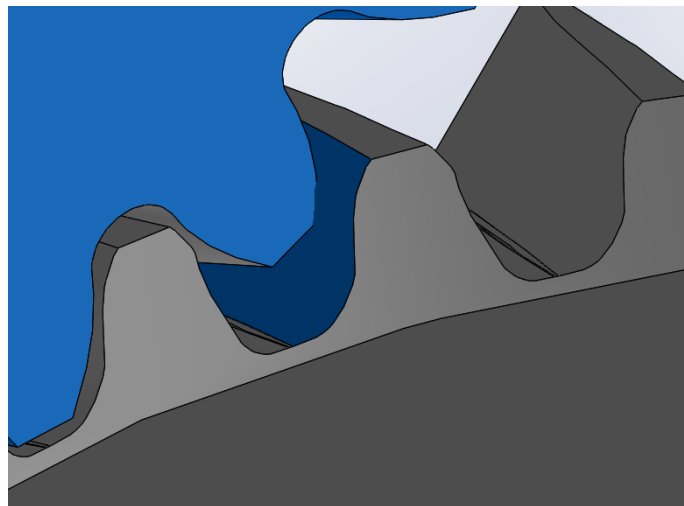
Στην παρούσα διπλωματική εργασία, θα χρησιμοποιηθεί για την απόδοση του σχεδιασμού (ότι 3D εξάγεται από το Kisssoft , εισάγεται στο Solidworks )και για την απεικόνιση και παρατήρηση του σύνθετου μοντέλου (Assembly) .Η **εικόνα 1.1.20** δείχνει το αποτέλεσμα μίας τέτοιας διαδικασίας.



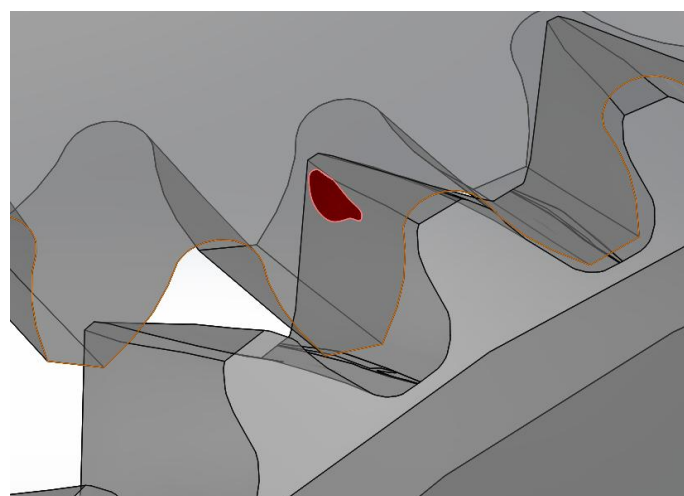
**Εικόνα 1.1.20:** Το αποτέλεσμα της εισαγωγής στο Solidworks δεδομένων από το Kisssoft

Θα χρησιμοποιηθεί επίσης, για την δημιουργία (μέσω εντολών που παρέχονται από το λογισμικό) και την απεικόνιση των επίπεδων τροχών ,με τα δεδομένα που παίρνει από το excel, στο οποίο έχει προηγηθεί η διαδικασία μετατροπής των σημείων της κατατομής του γεννήτορα στα σημεία της κατατομής του επίπεδου τροχού. Εκτός από την παρατήρηση των σύνθετων μοντέλων όπως και πριν (με το Kisssoft), θα γίνει και σύγκριση των αποτελεσμάτων μεταξύ των διαφορετικών γεωμετριών.

Θα γίνει επίσης χρήση και κάποιων εργαλείων όπως το Collision Detection (χρωματίζει τις περιοχές που υπάρχει επαφή στο μοντέλο κίνησης) το οποίο φαίνεται στην **εικόνα 1.1.21** και το Interference Detection που μας δείχνει εικονικά τον όγκο του οδόντα που εισχωρεί στον συνεργαζόμενο οδόντα και μας δίνει τον όγκο του (εικόνα **1.1.22**).



**Εικόνα 1.1.21:** Collision Detection



**Εικόνα 1.1.22:** Interference Detection

## Κεφάλαιο 2:ΘΕΩΡΙΑ ΟΔΟΝΤΩΣΕΩΝ

### 2.1 Θεωρία οδοντώσεων

#### Θεωρία Οδοντώσεων κατά F. Litvin

Το πρόβλημα της μη ύπαρξης ενός ενιαίου τρόπου περιγραφής της αρχής λειτουργίας των συνεργαζόμενων κατατομών ,το οποίο έχει σαν συνέπεια να μην υπάρχει μία ολοκληρωμένη μέθοδος υπολογισμού των κατατομών ,η οποία να μην εξαρτάται από το προφίλ του γεννήτορα και την σχετική θέση των αξόνων των συνεργαζόμενων τροχών ,ήταν εμφανές πολλά χρόνια πριν. Η μόνη θεωρία που προτάθηκε και έδινε λύση στο πρόβλημα είναι η “Θεωρία Οδοντώσεων” (Theory of Gearing) του F.Litvin [2].

Η Θεωρία Οδοντώσεων του Litvin παίρνει σαν δεδομένη και γνωστή την κατατομή του γεννήτορα τροχού ,την σχετική θέση των αξόνων των τροχών και την σχέση μετάδοσης του ζεύγους. Απαραίτητο είναι να είναι συνεχής η επιφάνεια (με συνέχεια πρώτων παραγώγων) , με σκοπό να ορίζονται εφαπτόμενα και κάθετα διανύσματα στα σημεία αυτής της επιφάνειας.

Η εξίσωση επιφάνειας του τροχού δίνεται από την σχέση:

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v) \cdot \hat{x} + y(u, v) \cdot \hat{y} + z(u, v) \cdot \hat{z}$$

και η συνέχεια των πρώτων παραγώγων έχει απαραίτητη συνθήκη:

$$\mathbf{r}(u, v) \in C^1: \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \neq 0$$

Οπότε μπορούμε να ορίσουμε κάθετο διάνυσμα:

$$\mathbf{N} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$$

Θεωρούνται δύο συστήματα αναφοράς (  $S_1$  ) του γεννήτορα τροχού και (  $S_2$  ) του συνεργαζόμενου και ένα σύστημα(  $S_f$  ) ,το οποίο είναι το γενικό σύστημα αναφοράς. Η συνεργαζόμενη πλευρά (  $\Sigma_1$  ) του τροχού 1 θα έχει την εξίσωση ως προς το σύστημα αναφοράς(  $S_1$  ):

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1(u_1, v_1) \text{ με } \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial u_1} \times \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial v_1} \neq 0$$

Οι συνεργαζόμενες επιφάνειες βρίσκονται συνεχώς σε επαφή μεταξύ τους και οι γωνίες σχετίζονται με βάση την σχέση μετάδοσης (γραμμική συνάρτηση) και είναι της μορφής:

$$\varphi_2 = \varphi_2(\varphi_1)$$

Η  $(\Sigma_1)$  δημιουργεί στο σύστημα  $(S_2)$  μία οικογένεια επιφανειών  $(\Sigma_\varphi)$ , οι οποίες χαρακτηρίζονται από την διανυσματική και μητρική εξίσωση:

$$[\mathbf{r}_2(u_1, v_1, \varphi_1)] = [\mathbf{M}_{21}] \cdot [\mathbf{r}_1(u_1, v_1)]$$

Η εργαζόμενη κατατομή του τροχού  $(S_2)$  είναι τελικά η περιβάλλουσα των επιφανειών  $(\Sigma_\varphi)$ , η οποία για να μπορεί να υφίσταται πρέπει να ισχύει:

$$\mathbf{N}^{(1)} \cdot \mathbf{v}^{(12)} = 0$$

με  $\mathbf{N}^{(1)}$  το κάθετο διάνυσμα επί της  $(\Sigma_1)$  και  $\mathbf{v}^{(12)}$  είναι η ταχύτητα ολισθήσεως στο σημείο επαφής των κατατομών, η οποία υπολογίζεται:

$$\mathbf{v}^{(12)} = (\boldsymbol{\omega}^{(1)} - \boldsymbol{\omega}^{(2)}) \times \mathbf{r}^{(1)} - \mathbf{R} \times \boldsymbol{\omega}^{(2)}$$

Όπου με  $\boldsymbol{\omega}$  αναφέρονται οι γωνιακές ταχύτητες των τροχών 1 και 2, με  $\mathbf{r}^{(1)}$  στο διάνυσμα θέσης του σημείου της επιφάνειας  $(\Sigma_1)$  και  $\mathbf{R}$  ένα διάνυσμα που ξεκινά από το κέντρο περιστροφής του συστήματος του τροχού 1 και τέλος ένα σημείο στον άξονα περιστροφής του τροχού 2.

Με βάση ότι το  $\mathbf{N}^{(1)} \cdot \mathbf{v}^{(12)} = 0$  δεν αλλάζει σε σχέση με το σύστημα αναφοράς που κάθε φορά έχουμε, επιλέγουμε λόγω ευκολίας το σύστημα  $(S_1)$  με αποτέλεσμα η τελευταία εξίσωση να γίνει:

$$\mathbf{N}^{(1)} \cdot \mathbf{v}^{(12)} = f(u_1, v_1, \varphi_1) = 0$$

η οποία ονομάζεται εξίσωση συνεργασίας, αφού συνδέει τις συντεταγμένες της επιφάνειας  $(\Sigma_1)$  με την γωνία στροφής  $\varphi_1$ .

Εκτός από την παραπάνω εξίσωση μας δίνεται και η επιφάνεια επαφών ως προς το σύστημα  $(S_f)$ :

$$[\mathbf{r}_f(u_1, v_1, \varphi_1)] = [\mathbf{M}_{f1}] \cdot [\mathbf{r}_1(u_1, v_1)]$$

ενώ η τελική παραγόμενη κατατομή του συνεργαζόμενου τροχού ( $\Sigma_2$ ) ως προς το σύστημα ( $S_2$ ), δίνεται από τον τύπο:

$$[r_2(u_1, v_1, \varphi_1)] = [M_{21}] \cdot [r_1(u_1, v_1)]$$

Από την εμπειρία, προκύπτει ότι η “Θεωρία Οδοντώσεων” του Litvin προσδιορίζει τις συνεργαζόμενες κατατομές στις τρεις διαστάσεις αλλά δεν μπορεί να παράγει τροχούς με βάση την επιφάνεια επαφής. Όπως επίσης, όταν είναι γνωστός ο κανόνας, πράγμα που επιτυγχάνεται με την Ενοποιημένη Θεωρία Οδοντώσεων.

Οι σχέσεις που περιγράφονται στην θεωρία δεν είναι αναλυτικές και χρησιμοποιούν μεθόδους σύγκλισης. Για αυτό το λόγο, η θεωρία αυτή δεν μπορεί να θεωρηθεί ότι δίνει πλήρως αξιόπιστα αποτελέσματα.

### **Ενοποιημένη Θεωρία Οδοντώσεων κατά Β.Σπιτά**

Το διδακτορικό του κ. Βασιλείου Σπιτά με τίτλο ‘Μοντελοποίηση και σχεδιασμός βέλτιστων οδοντώσεων με χρήση αναλυτικών, αριθμητικών και πειραματικών μεθόδων’ είναι μία αξιόλογη και πρωτότυπη προσπάθεια για μοντελοποίηση της γεωμετρίας, της κινηματικής και της αντοχής των οδοντώσεων [1].

Πιο συγκεκριμένα, ο βασικός στόχος της εργασίας είναι η σχεδίαση βέλτιστων οδοντωτών τροχών εξελιγμένης, που σκοπό έχουν την ελαχιστοποίηση των καταπονήσεων στον πόδα του οδόντα. Γι’ αυτό αναπτύχθηκαν νέες μέθοδοι και τεχνικές (συνδυάζουν ταχύτητα και ακρίβεια), οι οποίες συμβάλλουν στον υπολογισμό της γεωμετρίας, της γωνιακής χάρης κατατομών, της ανάλυσης των τάσεων με την βοήθεια πινάκων και της αριθμητικής μεθόδου των “Συνοριακών Στοιχείων”. Η έρευνα που έγινε στηρίχθηκε πάνω σε αναλυτικές σχέσεις και για αυτό το λόγο τα αποτελέσματα είναι ακριβή, με περιορισμένη πιθανότητα σφάλματος.

Στην συνέχεια, γίνεται μία αναφορά και αξιολόγηση στις υπάρχουσες μεθόδους υπολογισμού της γεωμετρίας των συνεργαζόμενων οδόντων στις τρεις διαστάσεις, ενώ αναλύεται η κυριαρχούσα “Θεωρία Οδοντώσεων” του F.Litvin. Παράλληλα με βάση την προηγούμενη θεωρία αναπτύσσεται η νέα “Ενοποιημένη Θεωρία Οδοντώσεων” σε μητρική και διανυσματική μορφή. Γίνεται δυνατό με αυτήν την θεωρία, να υπολογίσουμε τις κατατομές των οδόντων με βάση την κοινή επιφάνεια επαφών στο χώρο (αντίστροφο πρόβλημα).

Αμέσως μετά ,υπολογίζονται οι εκφράσεις σε καρτεσιανές συντεταγμένες της “Ενοποιημένης Θεωρίας Οδοντώσεων”.

Σαν άμεση επαλήθευση και ταύτιση ,διατυπώνονται οι εξισώσεις του χώρου στο επίπεδο και συγκρίνονται με τις αντίστοιχες της Γενικευμένης Θεωρίας των Οδοντώσεων. Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι συμβαδίζουν.

Μετά από αυτό, έρχεται μία ακόμα σύγκριση της “Ενοποιημένης Θεωρίας Οδοντώσεων” με τους τύπους που προκύπτουν από την διεθνή βιβλιογραφία, όσον αφορά τον υπολογισμό της ταχύτητας ολίσθησης μεταξύ των συνεργαζόμενων κατατομών σε κάθε σημείο της επιφάνειας επαφών. Τα αποτελέσματα είναι και πάλι ικανοποιητικά. Οι νέοι τύποι που παρουσιάζονται στο διδακτορικό μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε προβλήματα εύρεσης του βαθμού αποδόσεως μίας βαθμίδας τροχών. Επίσης ,προσδιορίζεται η ικανή και αναγκαία συνθήκη ύπαρξης καμπύλης κυλίσεως σε συνεργαζόμενους τροχούς.

Ως τελευταίο κομμάτι ενός πρώτου προσδιορισμού της νέας θεωρίας, γίνεται η μοντελοποίηση των κοπτικών εργαλείων που κατασκευάζουν ευθύγραμμους και ελικοειδείς μετωπικούς τροχούς και κωνικούς με ευθεία οδόντωση. Με βάση την “Ενοποιημένη Θεωρία Οδοντώσεων” υπολογίζονται και σχεδιάζονται οι συνεργαζόμενοι οδοντωτοί τροχοί ,που θα μπορούσαν να παραχθούν με τους τροχούς (κοπτικά εργαλεία) γεννήτορες που αναφέραμε πιο πάνω.

Εκμεταλλεύομενος την Ενοποιημένη Θεωρία Οδοντώσεων (ΕΘΟ) και πιο συγκεκριμένα τις εκφράσεις της, σε καρτεσιανές συντεταγμένες, που έχουν αναπτυχθεί από τον κ.Σπιτά και θα αναλυθούν πιο διεξοδικά αμέσως παρακάτω, επιτεύχθηκε η δημιουργία των επίπεδων τροχών της διπλωματικής εργασίας.

## 2.2 Η ΕΘΟ σε καρτεσιανές συντεταγμένες

### Ενοποιημένη Θεωρία Οδοντώσεων: Γενικά

Η Ενοποιημένη Θεωρία Οδοντώσεων ,με λίγα λόγια, βοηθά στον προσδιορισμό του συνεργαζόμενου τροχού ,εφόσον γνωρίζουμε την κατατομή του γεννήτορα ή του κανόνα ή την επιφάνεια επαφών. Επιπλέον ,πρέπει να είναι γνωστά τα βασικά κινηματικά χαρακτηριστικά της συνεργασίας.

Η παραπάνω θεωρία στηρίζεται στον υπολογισμό του αντίστοιχου συνεργαζόμενου στοιχείου, έχοντας δηλαδή τις συντεταγμένες (x,y,z) ενός σημείου μίας εκ των τριών επιφανειών που αναφέρεται πιο πάνω και το κάθετο διάνυσμα (N) στο σημείο επί της επιφάνειας. Αυτό είναι και το σημαντικότερο πλεονέκτημα της σε σχέση με την θεωρία του Litvin, το ότι δεν προϋποθέτει την γνώση των γραμμών επαφής επί της κατατομής και δεν εισάγει αλγόριθμους σύγκλισης στον υπολογισμό.

### Βασικός Νόμος Οδοντώσεων σε τρεις διαστάσεις

Είναι συνετό ,πριν αναφερθούν οι εξισώσεις που διέπουν την Ενοποιημένη Θεωρία Οδοντώσεων για την περίπτωση μας, να αναλυθεί ο Βασικός Νόμος Οδοντώσεων για τρεις διαστάσεις.

Ας θεωρηθεί ζεύγος οδοντωτών τροχών 1 και 2 όπως στην **εικόνα 2.2.1** . Το πινιόν στρέφεται γύρω από τον (A1) με γωνιακή ταχύτητα ( $\omega_1$ ) ενώ ο συνεργαζόμενος γύρω από τον (A2) με γωνιακή ταχύτητα ( $\omega_2$ ). Θεωρείται επιφάνεια επαφών  $E(x,y,z)=0$  και το σημείο  $P \in E(x,y,z)=0$  ένα σημείο της επαφής των κατατομών. Υπάρχουν δύο τυχαία σημεία  $O_1$  και  $O_2$  πάνω στους άξονες (A1) και (A2) αντίστοιχα. Τα διανύσματα θέσης του σημείου P θα είναι  $r_1 = \overrightarrow{O_1P}$  και  $r_2 = \overrightarrow{O_2P}$  ενώ  $a_{12} = \overrightarrow{O_1O_2}$  είναι η μεταξύ απόσταση των σημείων  $O_1$  και  $O_2$ .

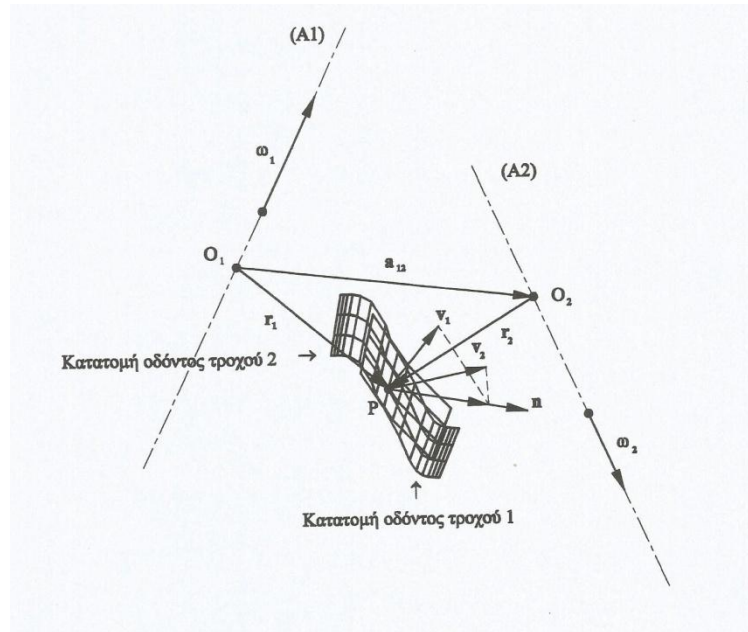
Αναλόγως με τα παραπάνω η γραμμική ταχύτητα του σημείου P ως προς τον τροχό θα είναι:

$$v_1 = \omega_1 \times r_1$$



και ως προς τον τροχό 2 το P θα είναι:

$$v_2 = \omega_2 \times r_2$$



**Εικόνα 2.2.1:** Σύστημα συντεταγμένων για το ζεύγος των οδοντωτών τροχών

Για να μην υπάρχει πρόβλημα στην λειτουργία των οδόντων και να επιτευχθεί ομαλή σύμπλεξη, θα πρέπει οι συνεργαζόμενες κατατομές στο P να μην εισχωρούν καταρχάς η μία στην άλλη, αλλά ούτε και να απομακρύνονται μεταξύ τους, δηλαδή οι ταχύτητες επί της καθέτου των κατατομών στο σημείο P, να είναι ίδιες. Αν ( $N$ ) είναι το κάθετο διάνυσμα στις συνεργαζόμενες κατατομές στο σημείο P, τότε ορίζεται το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα  $n = \frac{N}{\|N\|}$  και η συνθήκη που αναφέρθηκε πιο πάνω εκφράζεται με την εξίσωση:

$$pr_n v_1 = pr_n v_2$$

όπου  $pr_b a$  : είναι η προβολή του διανύσματος a στο διάνυσμα b

Έτσι προκύπτει:

$$n \cdot v_1 = n \cdot v_2 \Rightarrow n \cdot (v_1 - v_2) = 0 \Rightarrow n \cdot (\omega_1 \times r_1 - \omega_2 \times r_2) = 0$$

Παρατηρώντας το σχήμα στην **εικόνα 2.2.1** επίσης προκύπτει:

$$r_1 = a_{12} + r_2 \Rightarrow r_2 = r_1 - a_{12}$$

Οπότε συμπεραίνεται από τις δύο πιο πάνω εξισώσεις ότι:

$$\mathbf{n} \cdot [\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_1 - \boldsymbol{\omega}_2 \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{a}_{12})] = 0 \Rightarrow$$

$$\mathbf{n} \cdot [(\boldsymbol{\omega}_1 - \boldsymbol{\omega}_2) \times \mathbf{r}_1 + \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{a}_{12}] = 0$$

Η τελευταία εξίσωση εκφράζει με μαθηματικό τρόπο τον Βασικό Νόμο Οδόντωσης στις τρεις διαστάσεις σε συνεργασία μεταξύ ζεύγους οδοντωτών τροχών.

## Ενοποιημένη Θεωρία Οδοντώσεων σε καρτεσιανές συντεταγμένες

Εξειδικεύοντας σε μεγαλύτερο βαθμό την Ενοποιημένη Θεωρία Οδοντώσεων, παρουσιάζονται ένα ένα τα βήματα που ακολουθούνται για να επιτευχθεί η κατασκευή (σε 3D CAD λογισμικό) των επίπεδων τροχών.

Έχοντας συνεργασία γεννήτορα τροχού 1-παραγόμενου τροχού 2, θεωρείται ο άξονας περιστροφής (A1) του γεννήτορα και (A2) του παραγόμενου, οι οποίοι φαίνονται στην **εικόνα 2.2.2**. Η απόσταση των αξόνων ,όπως φαίνεται ,είναι ίση με  $a_{12}$ , η σχέση μετάδοσης είναι ίση με  $i_{12} = \frac{\|\omega_1\|}{\|\omega_2\|}$  και η προβολή του (A2) πάνω στο επίπεδο  $xy$  ( $\overrightarrow{pr_{xy} \widehat{a}_2}$ ) σχηματίζει με τον άξονα  $Ox \equiv (A1)$  γωνία ( $\delta$ ).

Η γωνία ( $\delta$ ) διαγράφεται όταν ο άξονας  $Ox$  ,θα συμπέσει με την προβολή του άξονα  $O'x'$  πάνω στο επίπεδο  $xy$ . Προκύπτει ότι η γωνία ( $\delta$ ) είναι είτε κυρτή ,είτε μη κυρτή.

Από εδώ και πέρα ,θεωρείται γνωστή η κατατομή του οδόντος του τροχού 1 (δηλαδή η εξίσωση που περιγράφει την επιφάνεια) και ζητείται να βρεθεί η συνεργαζόμενη κατατομή του τροχού 2. Για να υπολογιστεί η ζητούμενη κατατομή εφαρμόζεται η Ενοποιημένη Θεωρία Οδοντώσεων σε καρτεσιανές συντεταγμένες ως εξής:

Τα διανύσματα της γωνιακής ταχύτητας των τροχών 1 και 2 είναι:

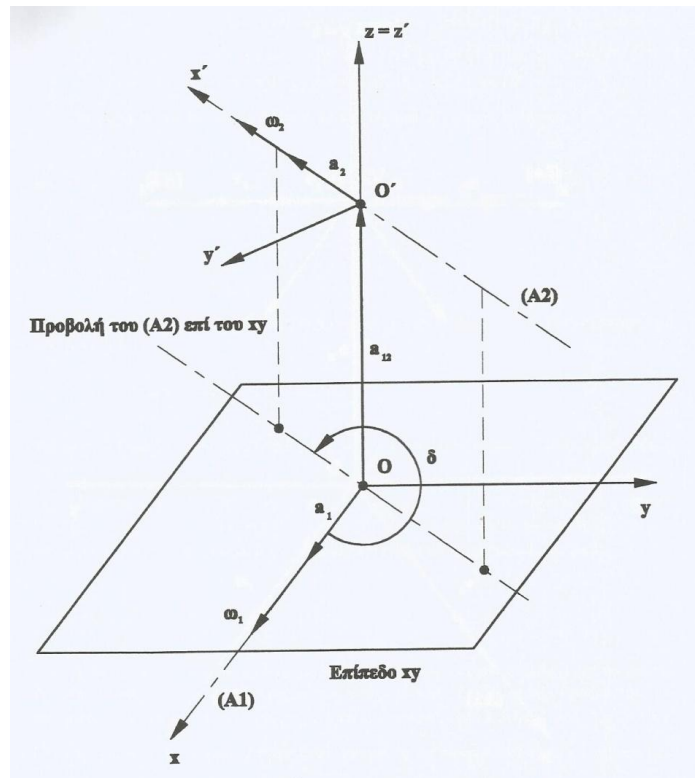
$$\omega_1 = \omega_1(1,0,0) \text{ και } \omega_2 = \omega_2 \cdot \widehat{a}_2 \text{ αντίστοιχα}$$

όπου  $\widehat{a}_2 = (\cos\delta, \sin\delta, 0)$  είναι το μοναδιαίο διάνυσμα του άξονα (A2) ,το οποίο καταλήγει σε:

$$\omega_2 = \frac{\omega_1}{i_{12}} \cdot (\cos\delta, \sin\delta, 0)$$

Επόμενη κίνηση είναι να θεωρηθεί ένα τυχαίο σημείο  $G_1$  επί της κατατομής του οδόντος του τροχού 1 ,του οποίου οι συντεταγμένες είναι  $(x_{G1}, y_{G1}, z_{G1})$  ,το οποίο φυσικά επαληθεύει την εξίσωση της κατατομής:

$$f(x_{G1}, y_{G1}, z_{G1}) = 0$$



**Εικόνα 2.2.2:** Σύστημα συντεταγμένων γεννήτορα και παραγόμενου τροχού

Επομένως θεωρείται το κάθετο στην επιφάνεια διάνυσμα  $N_{G1} = \nabla f$  στο σημείο  $G_1$ , το οποίο έχει συντεταγμένες:

$$N_{G1} = \left( \frac{\partial f}{\partial x} \text{ για } x = x_1, \frac{\partial f}{\partial y} \text{ για } y = y_1, \frac{\partial f}{\partial z} \text{ για } z = z_1 \right) = (N_{G1x}, N_{G1y}, N_{G1z})$$

Με το δεδομένο της περιστροφής του τροχού 1 γύρω από τον άξονα  $Ox$  ,το σημείο  $G_1$  θα συνεργαστεί, εφόσον ο τροχός 1 περιστραφεί γύρω από τον (A1) κατά γωνία( $\theta_1$ ), με το αντίστοιχο σημείο της κατατομής του τροχού 2 στο κοινό σημείο P της επιφάνειας επαφών, με μητρώο περιστροφής:

$${}^{(A1)}M(\theta_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ 0 & \sin\theta_1 & \sin\theta_1 \end{bmatrix}$$

Η διαφορά των γωνιακών ταχυτήτων είναι:

$$\boldsymbol{\omega}_1 - \boldsymbol{\omega}_2 = \frac{\omega_1}{i_{12}} \cdot \begin{bmatrix} i_{12} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{\omega_1}{i_{12}} \cdot \begin{bmatrix} \cos\delta \\ \sin\delta \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{\omega_1}{i_{12}} \cdot \begin{bmatrix} i_{12} - \cos\delta \\ -\sin\delta \\ 0 \end{bmatrix}$$

με  $r_{G1}$  διάνυσμα θέσεως του σημείου  $G_1$ , που σημαίνει  $r_{G1} = (x_{G1}, y_{G1}, z_{G1})$  οπότε:

$${}^{(A1)}\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta}_1) \cdot \mathbf{r}_{G1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ 0 & \sin\theta_1 & \sin\theta_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{G1} \\ y_{G1} \\ z_{G1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{G1} \\ y_{G1}\cos\theta_1 - z_{G1}\sin\theta_1 \\ y_{G1}\sin\theta_1 + z_{G1}\cos\theta_1 \end{bmatrix}$$

όπως επίσης:

$${}^{(A1)}\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta}_1) \cdot \mathbf{N}_{G1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ 0 & \sin\theta_1 & \sin\theta_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N_{G1x} \\ N_{G1y} \\ N_{G1z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{G1x} \\ N_{G1y}\cos\theta_1 - N_{G1z}\sin\theta_1 \\ N_{G1y}\sin\theta_1 + N_{G1z}\cos\theta_1 \end{bmatrix}$$

και

$$\boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{a}_{12} = \frac{\omega_1}{i_{12}} \cdot \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \cos\delta & \sin\delta & 0 \\ 0 & 0 & a_{12} \end{vmatrix} = \frac{\omega_1}{i_{12}} \cdot \begin{bmatrix} a_{12}\sin\delta \\ -a_{12}\cos\delta \\ 0 \end{bmatrix}$$

οπότε:

$$\begin{aligned} & (\boldsymbol{\omega}_1 - \boldsymbol{\omega}_2) \times ({}^{(A1)}\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta}_1) \cdot \mathbf{r}_{G1}) + \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{a}_{12} = \\ & = \frac{\omega_1}{i_{12}} \cdot \begin{bmatrix} i_{12} - \cos\delta \\ -\sin\delta \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_{G1} \\ y_{G1}\cos\theta_1 - z_{G1}\sin\theta_1 \\ y_{G1}\sin\theta_1 + z_{G1}\cos\theta_1 \end{bmatrix} + \frac{\omega_1}{i_{12}} \cdot \begin{bmatrix} a_{12}\sin\delta \\ -a_{12}\cos\delta \\ 0 \end{bmatrix} = \\ & = \frac{\omega_1}{i_{12}} \cdot \left\{ \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ i_{12} - \cos\delta & -\sin\delta & 0 \\ x_{G1} & y_{G1}\cos\theta_1 - z_{G1}\sin\theta_1 & y_{G1}\sin\theta_1 + z_{G1}\cos\theta_1 \end{vmatrix} + \begin{bmatrix} a_{12}\sin\delta \\ -a_{12}\cos\delta \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\ & = \frac{\omega_1}{i_{12}} \begin{bmatrix} -(y_{G1}\sin\theta_1 + z_{G1}\cos\theta_1) \cdot \sin\delta + a_{12}\sin\delta \\ -(y_{G1}\sin\theta_1 + z_{G1}\cos\theta_1) \cdot (i_{12} - \cos\delta) - a_{12}\cos\delta \\ (y_{G1}\cos\theta_1 - z_{G1}\sin\theta_1) \cdot (i_{12} - \cos\delta) + x_{G1}\sin\delta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Η εξίσωση της Ενοποιημένης Θεωρίας Οδοντώσεων διαμορφώνεται:

$$({}^{(A1)}\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta}_1) \cdot \mathbf{N}_{G1}) \cdot [(\boldsymbol{\omega}_1 - \boldsymbol{\omega}_2) \times ({}^{(A1)}\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta}_1) \cdot \mathbf{r}_{G1}) + \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{a}_{12}] = 0 \Rightarrow$$

$$N_{G1x} \cdot [-(y_{G1}\sin\theta_1 + z_{G1}\cos\theta_1) \cdot \sin\delta + a_{12}\sin\delta] +$$

$$(N_{G1y}\cos\theta_1 - N_{G1z}\sin\theta_1) \cdot [-(y_{G1}\sin\theta_1 + z_{G1}\cos\theta_1) \cdot (i_{12} - \cos\delta) - a_{12}\cos\delta] +$$

$$(N_{G1y}\sin\theta_1 + N_{G1z}\cos\theta_1) \cdot [(y_{G1}\cos\theta_1 - z_{G1}\sin\theta_1) \cdot (i_{12} - \cos\delta) + x_{G1}\sin\delta] = 0$$

και αναλύοντας τις παρενθέσεις παράγονται οι εξισώσεις που παραθέτονται παρακάτω:

$$\begin{aligned} & \sin\theta_1(-y_{G1}N_{G1x}\sin\delta + N_{G1z}a_{12}\cos\delta + x_{G1}N_{G1y}\sin\delta) + \\ & + \cos\theta_1(-z_{G1}N_{G1x}\sin\delta - N_{G1y}a_{12}\cos\delta + x_{G1}N_{G1z}\sin\delta) + \\ & + y_{G1}N_{G1z}(i_{12} - \cos\delta) - z_{G1}N_{G1y}(i_{12} - \cos\delta) + N_{G1x}a_{12}\sin\delta = 0 \end{aligned}$$

Από τα παραπάνω, βγαίνει το συμπέρασμα της χαρακτηριστικής εξίσωσης, με την οποία θα προσδιοριστεί το  $(\theta_1)$ :

$$A\sin\theta_1 + B\cos\theta_1 + C = 0$$

όπου:

$$A = -(y_{G1}N_{G1x} - x_{G1}N_{G1y}) \cdot \sin\delta + N_{G1z}a_{12}\cos\delta$$

$$B = -(z_{G1}N_{G1x} - x_{G1}N_{G1z}) \cdot \sin\delta - N_{G1y}a_{12}\cos\delta$$

$$C = (y_{G1}N_{G1z} - z_{G1}N_{G1y}) \cdot (i_{12} - \cos\delta) + N_{G1x}a_{12}\sin\delta$$

Γίνεται μετατροπή στο ημίτονο και συνημίτονο της γωνίας  $(\theta_1)$  συναρτήσει της εφαπτομένης του μισού της  $(\theta_1)$ , όπου εμφανίζονται οι γνωστές σχέσεις:

$$\sin\theta_1 = \frac{2\tan\left(\frac{\theta_1}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{\theta_1}{2}\right)} \quad \text{και} \quad \cos\theta_1 = \frac{1 - \tan^2\left(\frac{\theta_1}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{\theta_1}{2}\right)}$$

Οπότε σύμφωνα με την χαρακτηριστική εξίσωση:

$$2A \tan\left(\frac{\theta_1}{2}\right) + B \left[1 - \tan^2\left(\frac{\theta_1}{2}\right)\right] + C \left[1 + \tan^2\left(\frac{\theta_1}{2}\right)\right] = 0$$

Για ευκολία, αντικαθίσταται με  $\omega = \tan\left(\frac{\theta_1}{2}\right)$ , οπότε:

$$2A\omega + B - B\omega^2 + C + C\omega^2 = 0 \Rightarrow$$

$$(C - B) \cdot \omega^2 + 2A\omega + (C + B) = 0$$

επομένως,

$$\omega = \frac{-2A \pm 2\sqrt{A^2 - C^2 + B^2}}{2(C - B)} = \frac{-A \pm \sqrt{A^2 + B^2 - C^2}}{C - B}$$

άρα συμπεραίνεται ότι:

$$\theta_1 = 2 \tan^{-1} \left( \frac{-A \pm \sqrt{A^2 + B^2 - C^2}}{C - B} \right)$$

Από την οποία επιλέγεται η κατάλληλη κάθε φορά γωνία ( $\theta_1$ ), με βάση το εάν έχει φυσική σημασία η λύση ή όχι, στο συγκεκριμένο πρόβλημα. Στην συνέχεια, εκτελείται μία διαδικασία, η οποία έχει φυσιολογική σειρά. Αφού προσδιορίστηκε η γωνία  $\theta_1 = \theta_1(x_{G1}, y_{G1}, z_{G1})$  στρέφουμε το σημείο  $G_1 = G_1(x_{G1}, y_{G1}, z_{G1})$  κατά την γωνία ( $+\theta_1$ ) περί τον άξονα Ox και με αυτόν τον τρόπο προκύπτει το σημείο  $P(x_p, y_p, z_p)$  της τροχιάς επαφών ως προς το σύστημα του τροχού 1 ( $O, x, y, z$ ), που γράφεται σε μορφή πίνακα:

$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ 0 & \sin\theta_1 & \sin\theta_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{G1} \\ y_{G1} \\ z_{G1} \end{bmatrix}$$

Επομένως, το σημείο P της επιφάνειας επαφών συμπίπτει με το  $G_2$ , που ανήκει στον τροχό 2 στην θέση συνεργασίας του με τον τροχό 1. Για να εκφραστούν οι συντεταγμένες του P ως προς το σύστημα του τροχού 2 ( $O', x', y', z'$ ), όπου  $O' \equiv O_2$ , πρέπει να γίνει στροφή του συστήματος κατά ( $+\delta$ ) περί τον Oz και να μετατοπιστεί το σύστημα κατά  $+a_{12}$  στην διεύθυνση του Oz:

$$\begin{bmatrix} x'_p \\ y'_p \\ z'_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\delta & \sin\delta & 0 \\ -\sin\delta & \cos\delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -a_{12} \end{bmatrix}$$

Έπειτα, στρέφουμε το σημείο  $P' \equiv P$  κατά γωνία  $\theta_2 = \frac{\theta_1}{i_{12}}$  περί τον  $Ox'$ , οπότε προκύπτουν οι συντεταγμένες του σημείου  $G_2(x'_{G2}, y'_{G2}, z'_{G2})$  του συνεργαζόμενου τροχού ως προς το σύστημα ( $O_2, x', y', z'$ ) προκύπτουν από την ακόλουθη εξίσωση:

$$\begin{bmatrix} x'_{G2} \\ y'_{G2} \\ z'_{G2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ 0 & \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x'_p \\ y'_p \\ z'_p \end{bmatrix}$$

Τέλος, εκφράζεται το σημείο  $G_2(x'_{G2}, y'_{G2}, z'_{G2})$  του συνεργαζόμενου τροχού ως προς το αρχικό σύστημα:

$$\begin{bmatrix} x_{G2} \\ y_{G2} \\ z_{G2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\delta & -\sin\delta & 0 \\ \sin\delta & \cos\delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x'_{G2} \\ y'_{G2} \\ z'_{G2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a_{12} \end{bmatrix}$$

Η τελευταία μητρική εξίσωση μας δίνει τα τελικά σημεία της επιφάνειας του συνεργαζόμενου οδόντος.

## 2.3 Εφαρμογές για crossed-axis και off-axis

Φυσικά για τις διάφορες περιπτώσεις συνεργασίας οδοντωτών τροχών ,θα υπάρξουν συγκεκριμένες μορφές των συντελεστών A, B και C των εξισώσεων, οι οποίες παρουσιάζονται παρακάτω.

Οι τροχοί που παρουσιάζουν ενδιαφέρον, για τις αρχικές προσομοιώσεις του μοντέλου που αφορούν τους επίπεδους τροχούς με γωνία αξόνων 90° και μηδενικό offset, που είναι κάθετων (δηλαδή δ=270°) και τεμνόμενων αξόνων ,παίρνουν τιμές συντελεστών:

$$A = y_{G1}N_{G1x} - x_{G1}N_{G1y}$$

$$B = z_{G1}N_{G1x} - x_{G1}N_{G1z}$$

$$C = (y_{G1}N_{G1z} - z_{G1}N_{G1y}) \cdot i_{12}$$

Επίσης, οι τροχοί κάθετα ασύμβατων αξόνων (δηλαδή δ=90°) ,για την περίπτωση που παρατηρείται offset στους επίπεδους τροχούς παίρνουν τις εξής τιμές συντελεστών:

$$A = -(y_{G1}N_{G1x} - x_{G1}N_{G1y})$$

$$B = -(z_{G1}N_{G1x} - x_{G1}N_{G1z})$$

$$C = (y_{G1}N_{G1z} - z_{G1}N_{G1y}) \cdot i_{12} + N_{G1x}a_{12}$$

Για λόγους ενδιαφέροντος παρατίθενται παρακάτω οι τιμές των συντελεστών για τροχούς παραλλήλων αξόνων (για μετωπικούς και για ελικοειδείς), με γωνία (δ=180°) ,οι οποίοι είναι:

$$A = -a_{12}N_{G1z}$$

$$B = a_{12}N_{G1y}$$

$$C = (y_{G1}N_{G1z} - z_{G1}N_{G1y}) \cdot (i_{12} + 1)$$

Τέλος, οι τροχοί τεμνόμενων αξόνων όπου  $a_{12} = 0$ , παίρνουν τιμές συντελεστών που είναι:

$$A = -(y_{G1}N_{G1x} - x_{G1}N_{G1y})\sin\delta$$

$$B = -(z_{G1}N_{G1x} - x_{G1}N_{G1z})\sin\delta$$

$$C = (y_{G1}N_{G1z} - z_{G1}N_{G1y}) \cdot (i_{12} - \cos\delta)$$



## Κεφάλαιο 3: ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΗ

### 3.1 Kisssoft: Μοντέλα και εφαρμογές

#### 3.1.1 Ευθεία μετωπική οδόντωση

Αρχικά μελετήθηκαν διάφορα ζεύγη επίπεδων οδοντωτών τροχών, με σκοπό κυρίως την κατανόηση τους και την εξαγωγή κάποιων συμπερασμάτων σχετικά με αυτό το είδος τροχών. Η χρήση του Kisssoft για αυτόν τον σκοπό ήταν αρκετά σημαντική. Έτσι, αφού πέρασε μία περίοδος, κατά την οποία έγινε η εκμάθηση του προγράμματος (μέσω tutorials και examples που διαθέτονται στο λογισμικό) και εντοπίστηκαν κάποια προβλήματα, που είχαν σχέση με τις παραμέτρους, μέσα από τα οποία κατανοήθηκε σε μεγάλο βαθμό η σημασία τους. Σημαντική ήταν η διάγνωση των λαθών του project στο Kisssoft, η οποία αναφέρθηκε και προηγουμένως. Παρουσιάζονται παρακάτω κάποια από τα projects που εκτελέστηκαν για την κατανόηση των επίπεδων τροχών.

**Project 1:** πινιόν: μετωπικός τροχός με ευθεία οδόντωση

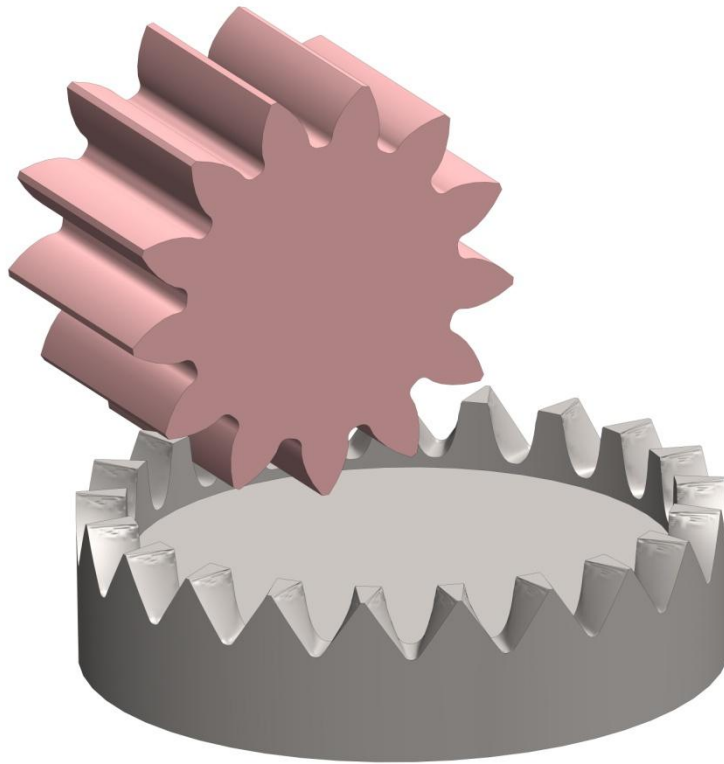
$m_n = 2\text{mm}$ ,  $a_n = 20^\circ$  (σε normal section),

$b_v = 1.3\text{ mm}$  (axial offset: είναι η απόσταση του κέντρου του πινιόν από την μέση διάμετρο του επίπεδου τροχού),

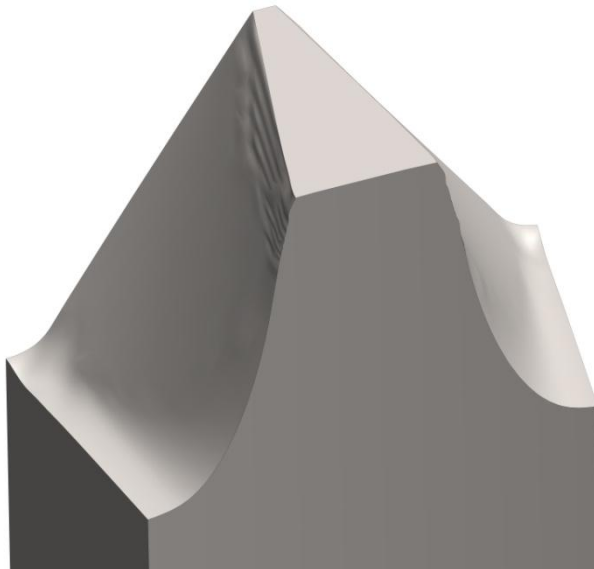
$Z_1 = 13$  και  $b = 20\text{ mm}$ ,  $Z_2 = 21$  και  $b = 3.7\text{mm}$ ,

profile shift coefficient (pinion) = 0.5 (αφορά την μετατόπιση του πινιόν)

Το reference profile και τα tolerances έμειναν σε κατάσταση default. Δηλαδή, όσον αφορά το reference profile, αυτό σημαίνει ότι (αναφέρονται τα πιο σημαντικά) ο συντελεστής πόδα και κεφαλής είναι 1.25 και 1 αντίστοιχα σύμφωνα με το ISO 53.2:1997. Ο γεννήτορας τροχός έχει 1.25 και 1.25 αντίστοιχα για τους συντελεστές. Επίσης, παίζει μεγάλο ρόλο (για την διαμόρφωση του fillet) ο συντελεστής στρογγύλευσης της ακμής της κεφαλής του γεννήτορα, η οποία είναι ίση με 0.1. Στα tolerances, αποδεικνύεται ότι και οι δύο τροχοί δέχονται περαιτέρω κατεργασία για να συμμορφώνονται με τα όρια που δίνει το DIN 3967 cd25 για τροχούς που ανήκουν στις κατηγορίες γραναζιών που χρησιμοποιούνται σε βαριά μηχανήματα και συστήματα κίνησης τρένων. Η **εικόνα 3.1.1.1** δείχνει την εν λόγω συνεργασία και η **3.1.1.2** το προφίλ ενός μόνο οδόντα του επίπεδου τροχού.



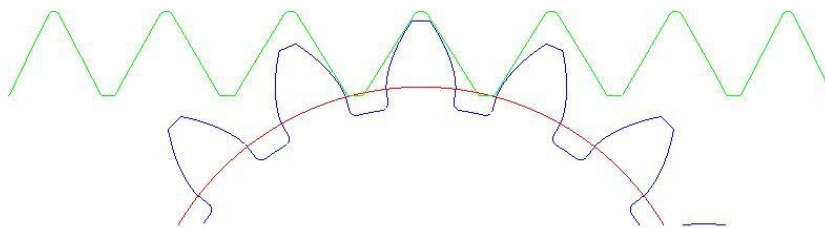
**Εικόνα 3.1.1.1:** Συνεργασία τροχών (Project 1)



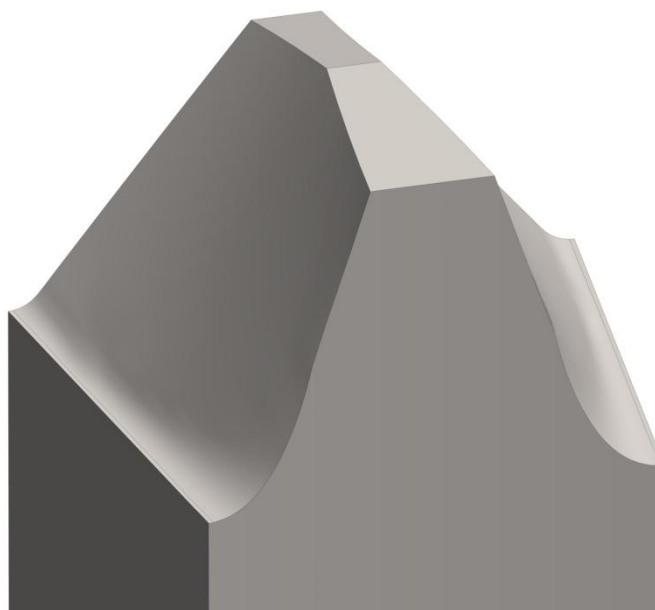
**Εικόνα 3.1.1.2:** Οδόντας επίπεδου τροχού

**Project 2:** πινιόν: μετωπικός τροχός με ευθεία οδόντωση  
 $m_n = 1.5\text{mm}$ ,  $a_n = 20^\circ$  (σε normal section),  $b_v = 2.55\text{ mm}$ ,  
 $Z_1 = 16$  και  $b = 12\text{ mm}$ ,  $Z_2 = 29$  και  $b = 5.4\text{ mm}$ ,  
profile shift coefficient (pinion) = 0.28  
Chamfering Crowning: ακτινικό κόψιμο μπροστά: 2.5 mm, κατακόρυφο  
κόψιμο: 0.6mm

Τα tolerances έμειναν σε κατάσταση default όπως ακριβώς στην προηγούμενη περίπτωση. Στο reference profile αλλάζει η default επιλογή από Reference profile gear σε constructed involute με αποτέλεσμα να μπορεί να γίνει αλλαγή σε όλους τους συντελεστές που αφορούν το προφίλ του οδόντα και να μην υπάρχει κάτι τυποποιημένο. Επίσης, προστέθηκε το τρίτο είδος crowning, το οποίο εισάγει ένα γωνιακό κόψιμο μπροστά και πίσω. Στην δική μας περίπτωση το συμπληρώθηκε πίσω, για να παρατηρηθεί η διαφορά στην γεωμετρία. Η **εικόνα 3.1.1.3** δείχνει την συνεργασία σε 2D και η **εικόνα 3.1.1.4** έναν οδόντα του επίπεδου τροχού.



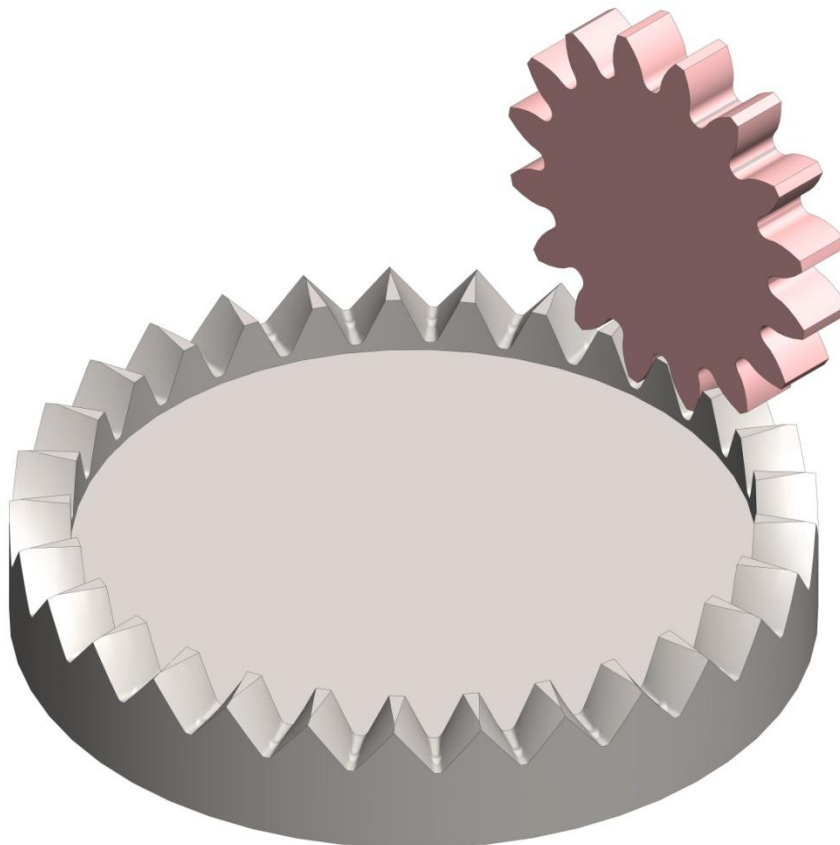
**Εικόνα 3.1.1.3:** Συνεργασία σε 2D



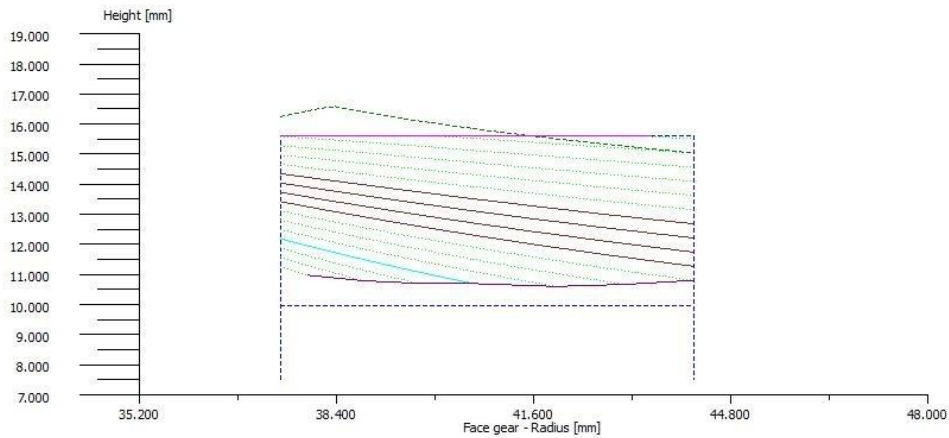
**Εικόνα 3.1.1.4:** Οδόντας επίπεδου τροχού

**Project 3:** πινιόν: μετωπικό τροχός με ευθεία οδόντωση  
 $m_n = 2.5\text{mm}$ ,  $a_n = 20^\circ$  (σε normal section),  $b_p = 4.6\text{mm}$ ,  
 $Z_1 = 16$  και  $b = 6.7\text{mm}$ ,  $Z_2 = 29$  και  $b = 6.7\text{mm}$ ,  
profile shift coefficient (pinion) = 0.2  
Chamfering Crowning: ακτινικό κόψιμο μπροστά: 1.5 mm, κατακόρυφο  
κόψιμο: 0.5mm

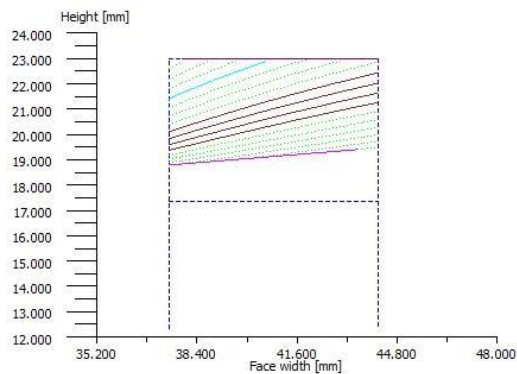
Τα tolerances διαμορφώθηκαν ώστε να μην υπάρχει backlash, χωρίς δηλαδή καμία χάρη στο πάχος. Αυτό έγινε για να παρατηρηθεί στο solidworks ότι από γεωμετρικής πλευράς δεν υπάρχει κανένα κενό και όντως αυτό διαπιστώθηκε. Στο reference profile και ειδικότερα στον γεννήτορα, προστέθηκε ένα παραπάνω δόντι από αυτά του πινιόν, για την δημιουργία του Longitudinal Crowning. Επίσης προστέθηκε, στο ίδιο σημείο θετική μετατόπιση του γεννήτορα κατά 0.5mm, με σκοπό να δημιουργηθεί το Profile Crowning. Και οι δύο προσθήκες παρατηρήθηκαν στην γεωμετρία. Τέλος, μπήκε το τρίτο είδος crowning, το οποίο εισάγει ένα γωνιακό κόψιμο πίσω. Η **εικόνα 3.1.1.5** δείχνει την συνεργασία, η **εικόνα 3.1.1.6** και **3.1.1.7** τις γραμμές επαφής του επίπεδου και του πινιόν τροχού.



**Εικόνα 3.1.1.5:** Συνεργασία τροχών (Project 3)



**Εικόνα 3.1.1.6:** Καμπύλες επαφής (περιγράφουν σημεία) επίπεδο με γεννήτορα τροχό



**Εικόνα 3.1.1.7:** Καμπύλες επαφής (περιγράφουν σημεία) πινιόν με επίπεδο τροχό

### 3.1.2 Ελικοειδής οδόντωση

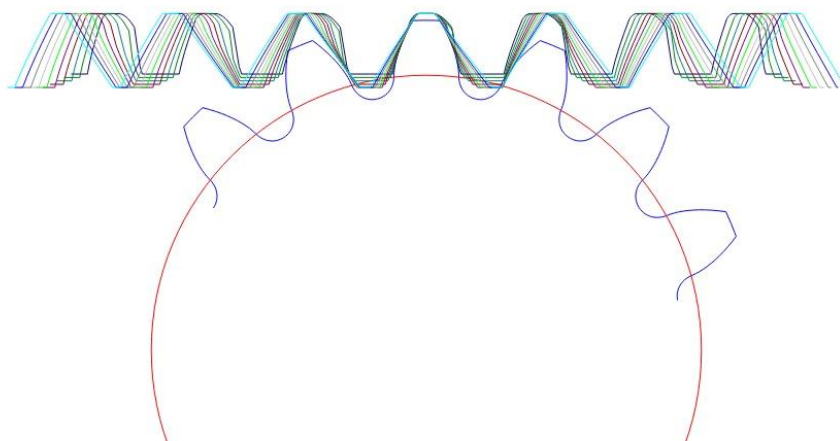
Στη συνέχεια, φτιάχνονται ζεύγη τροχών με ελικοειδή οδόντωση, στα οποία αρχικά χρειάζεται να παρατηρηθεί το προφίλ των οδόντων. Έτσι, όπως και πριν, προσδιορίζονται οι παράμετροι του κάθε μοντέλου.

**Project 4:** πινιόν: μετωπικός τροχός με ελικοειδή οδόντωση  
 $m_n = 2.5\text{mm}$ ,  $a_n = 20^\circ$  (σε normal section όπως και πριν),  
 $b_v = 1.9\text{mm}$  (axial offset),  $\beta = 25^\circ$  (δεξιόστροφη γωνία ελίκωσης)  
 $Z_1 = 16$  και  $b = 13\text{mm}$ ,  $Z_2 = 29$  και  $b = 6.9\text{mm}$ ,  
 profile shift coefficient = 0 και για τα δύο γρανάζια  
 Χωρίς Crowning

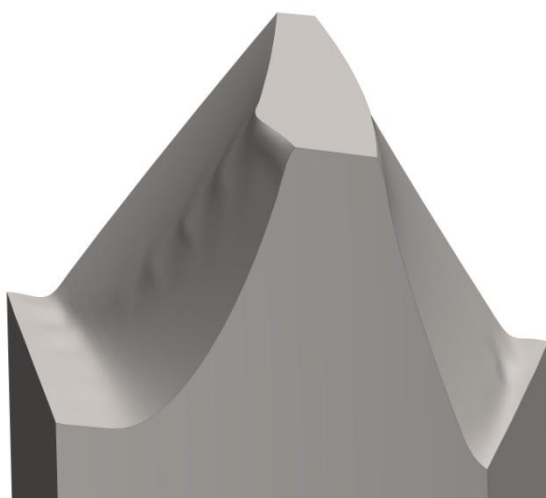
Στο πεδίο του reference profile εισάγονται οι συντελεστές, που θα χρησιμοποιηθούν στην κατασκευή των επίπεδων τροχών, οι οποίοι είναι ευρέως γνωστοί. Δηλαδή, για τον γεννήτορα του επίπεδου τροχού, συντελεστή πόδα και

κεφαλής ίσο με 1.2 και συντελεστή στρογγύλευσης της ακμής της κεφαλής ίσο με 0.1. Ενώ για το πινιόν ,χρησιμοποιούνται οι σταθερές τιμές ,συντελεστή κεφαλής 1 και πόδα 1.2 ,ενώ σημαντικό είναι ότι, υπολογίζεται ο συντελεστής για το ράδιο του fillet (από τις δοθείσες τιμές) στο πινιόν ίσο με 0.497. Από κει και πέρα, φτιάχνονται τα tolerances ,με σκοπό να μην έχουν καθόλου backlash.

Στην **εικόνα 3.1.2.1** φαίνεται η συνεργασία σε 2D με τα προφίλ του επίπεδου τροχού, κατά την έννοια του βάθους (χωρισμένα σε 10 σημεία, αρά απεικονίζονται 10 προφίλ). Παρατηρείται ότι ,τα δόντια όσο προχωρούν προς το εσωτερικό του τροχού ,παρουσιάζουν μία ασυμμετρία μεταξύ τους (η οποία θα παρατηρηθεί και στην εικόνα με τον έναν οδόντα). Αυτή η ασυμμετρία προκύπτει λόγω προβλήματος υποκοπής ,το οποίο προκαλεί η κεφαλή του πινιόν. Για να μην εισχωρεί λοιπόν ο ένας οδόντας στον άλλο, κόβεται όπως δείχνει η **εικόνα 3.1.2.2**.

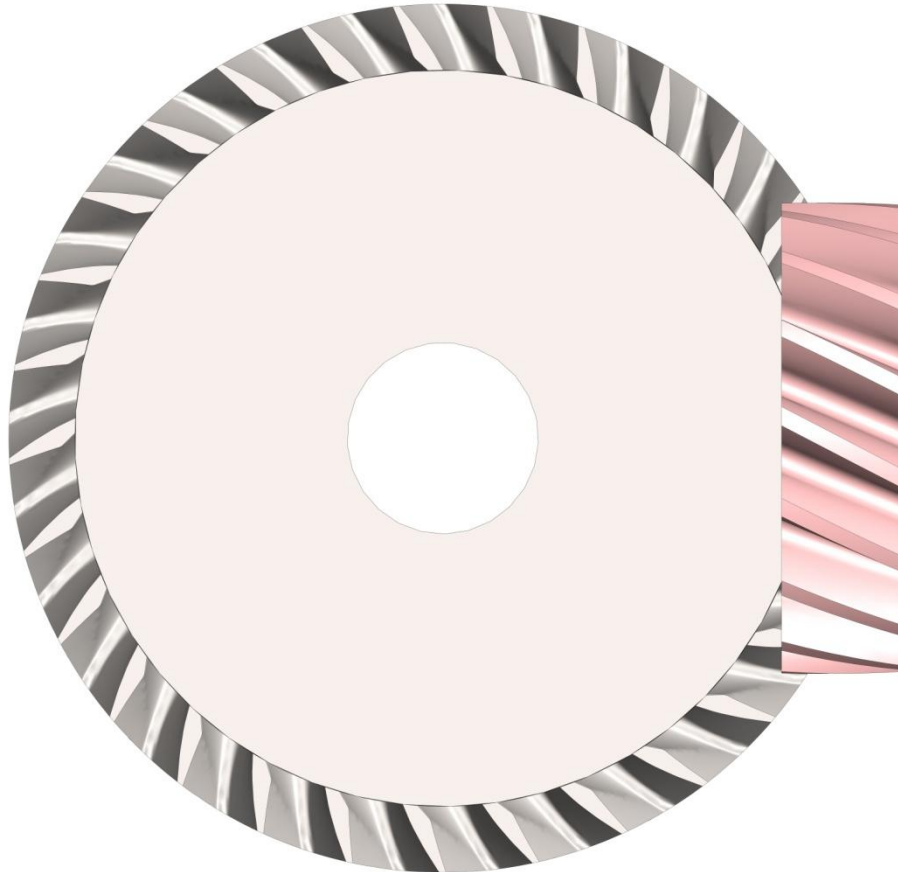


**Εικόνα 3.1.2.1:** Συνεργασία 2D

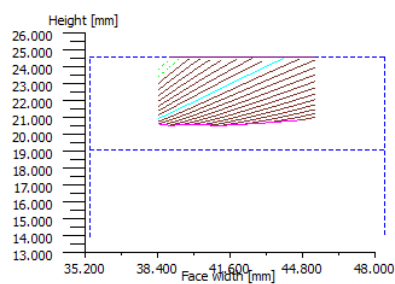


**Εικόνα 3.1.2.2:** Οδόντας επίπεδου τροχού

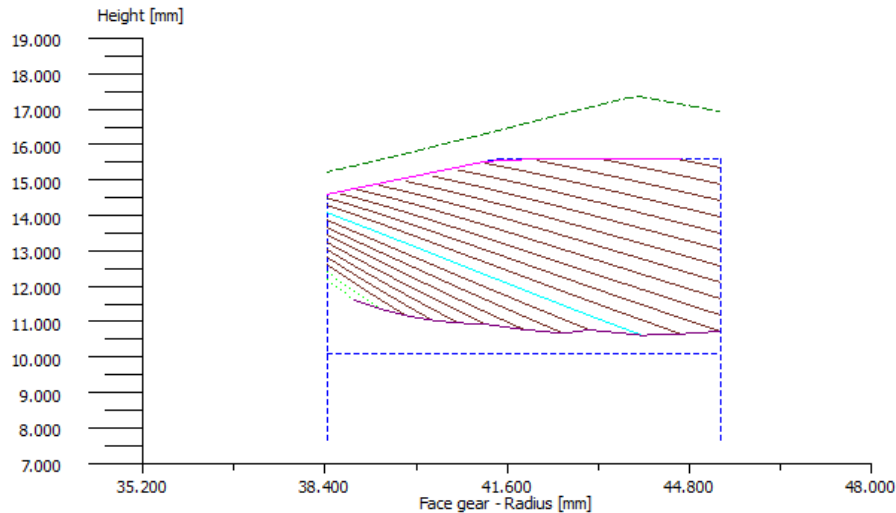
Η **εικόνα 3.1.2.3** δείχνει την συνεργασία σε 3D από την πάνω πλευρά. Αντίστοιχα με πριν ,γίνεται ακόμα πιο κατανοητή η συνεργασία, παρουσιάζοντας τις γραμμές επαφής του πινιόν στην **εικόνα 3.1.2.4** και του επίπεδου τροχού στην **εικόνα 3.1.2.5**.



**Εικόνα 3.1.2.3:** Συνεργασία τροχών (Project 4)



**Εικόνα 3.1.2.4:** : Καμπύλες επαφής πινιόν με επίπεδο τροχό



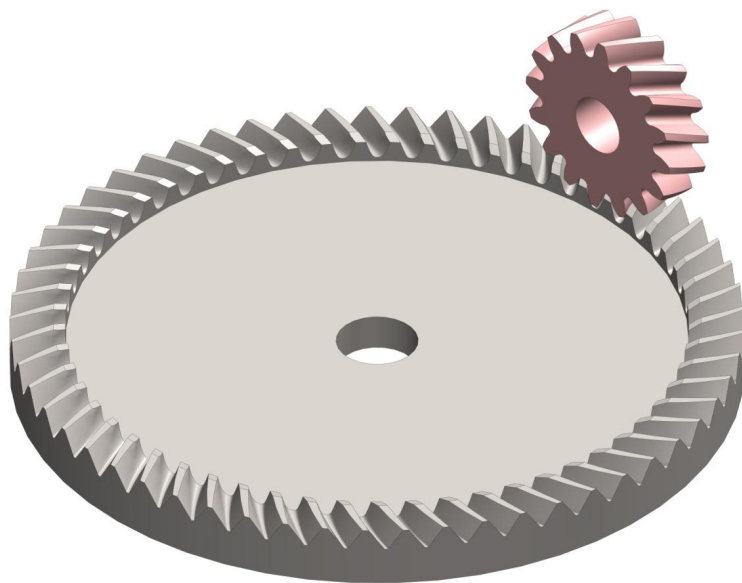
**Εικόνα 3.1.2.5:** Καμπύλες επαφής (περιγράφουν σημεία) επίπεδου με γεννήτορα τροχό

**Project 5:** πινιόν: μετωπικός τροχός με ελικοειδή οδόντωση  
 $m_n = 2.5\text{mm}$ ,  $a_n = 20^\circ$  (σε normal section),  
 $b_v = 3.7\text{mm}$  (axial offset),  $\beta = 25^\circ$  (δεξιόστροφη γωνία ελίκωσης)  
 $Z_1 = 16$  και  $b = 13.5\text{mm}$ ,  $Z_2 = 57$  και  $b = 13.5\text{mm}$ ,  
 profile shift coefficient = 0 και για τα δύο γρανάζια  
 Chamfering Crowning : ακτινικό κόψιμο μπροστά: 3mm ,  
 κατακόρυφο κόψιμο: 1mm

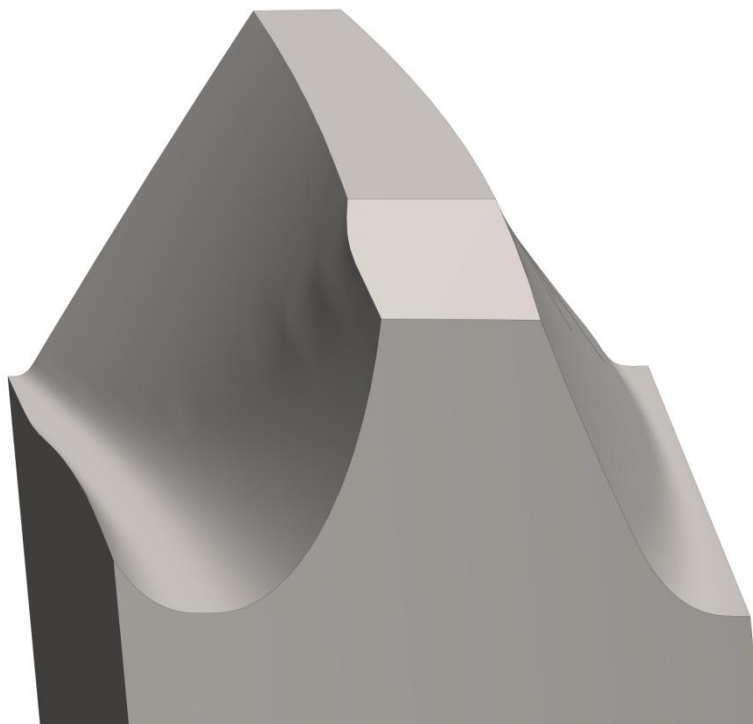
Όσον αφορά το reference profile εισάγονται οι συντελεστές ,που χρησιμοποιήθηκαν στον προηγούμενο υπολογισμό των επίπεδων τροχών. Έπειτα όπως και πριν, φτιάχνονται τα tolerances ,με σκοπό να μην υπάρχει καθόλου backlash. Σε αυτόν τον υπολογισμό προστέθηκαν οι άλλες δύο μορφές crowning ,όπως στους τροχούς με ευθεία οδόντωση στο project 3 ,με τα ίδια ακριβώς χαρακτηριστικά ,δηλαδή θετική μετατόπιση του γεννήτορα κατά 0.5mm και με αριθμό δοντιών μεγαλύτερο κατά ένα από του πινιόν. Τα χαρακτηριστικά αυτά (τρεις μορφές crowning) παρατηρήθηκαν στην γεωμετρία του ζεύγους ,καθώς και στον έναν οδόντα.

Στην **εικόνα 3.1.2.6** παρουσιάζεται ένα κομμάτι της συνεργασίας των τροχών, ενώ στην **εικόνα 3.1.2.7** φαίνεται ο ένας οδόντας. Παρατηρείται ότι και σε αυτήν την περίπτωση προκύπτει υποκοπή , για αυτό το λόγο υπάρχει κόψιμο μικρότερο αυτή την φορά. Συμπέρασμα είναι λοιπόν, ότι το φαινόμενο μειώνεται καθώς αυξάνεται ο αριθμός των δοντιών του επίπεδου τροχού.





**Εικόνα 3.1.2.6:** Συνεργασία οδόντων (Project 5)



**Εικόνα 3.1.2.7:** Οδόντας επίπεδου τροχού

### 3.1.3 Ευθεία ασυμβάτων αξόνων οδόντωση

Τα παραδείγματα που ακολουθούν ,γίνονται με σκοπό να παρατηρηθούν οι επίπεδοι τροχοί ευθείας και ελικοειδούς off-axis οδόντωσης. Ακολουθούν τα μοντέλα.

**Project 6:** πινιόν: μετωπικός τροχός με ευθεία οδόντωση

$m_n = 2\text{mm}$  ,  $a_n = 20^\circ$  (σε normal section όπως και πριν),

$b_v = 1.9\text{mm}$  (axial offset),

$Z_1 = 21$  και  $b = 6.1\text{mm}$ ,  $Z_2 = 35$  και  $b = 6.1\text{mm}$ ,

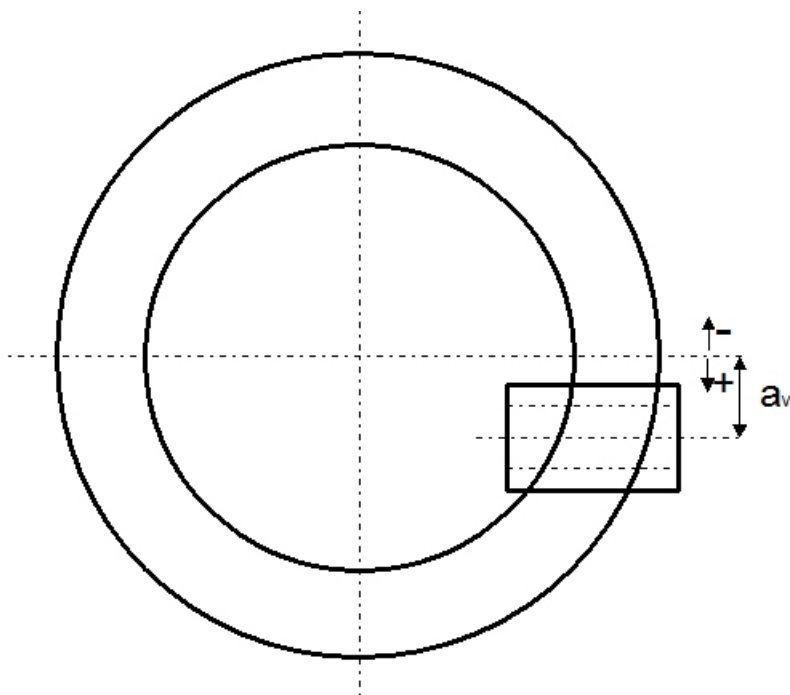
profile shift coefficient = 0 και για τα δύο γρανάζια

Crowning τρίτης μορφής :ακτινικό κόψιμο μπροστά και πίσω: 1.5mm ,

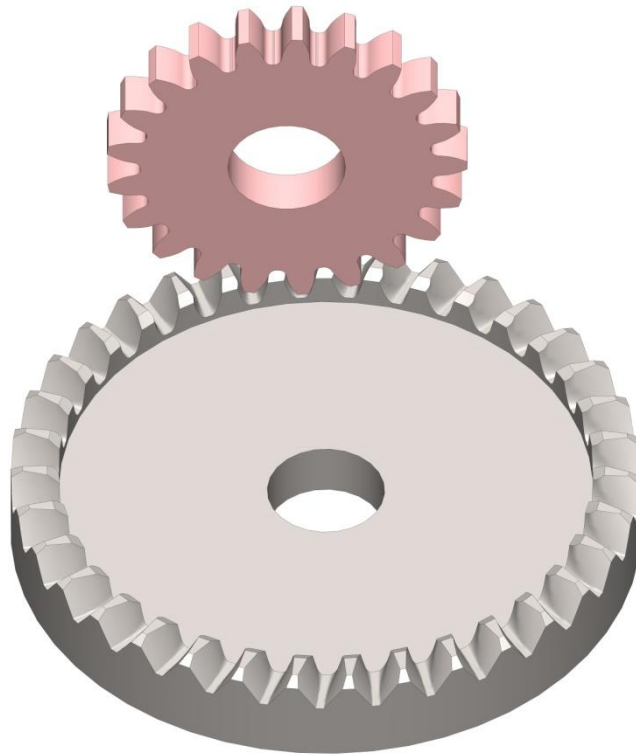
κατακόρυφο κόψιμο: 1 mm

Η βασική διαφορά με τα υπόλοιπα ζεύγη είναι ότι προστέθηκε ένα αρνητικό offset  $a_v = -5\text{mm}$  στους άξονες, όπως ακριβώς δείχνει η **εικόνα 3.1.3.1**. Σημειώνεται ότι, τα tolerances διαμορφώθηκαν ώστε να μην υπάρχει backlash. Ενώ στο reference profile κρατήθηκαν τα ίδια στοιχεία με του μοντέλου 4.

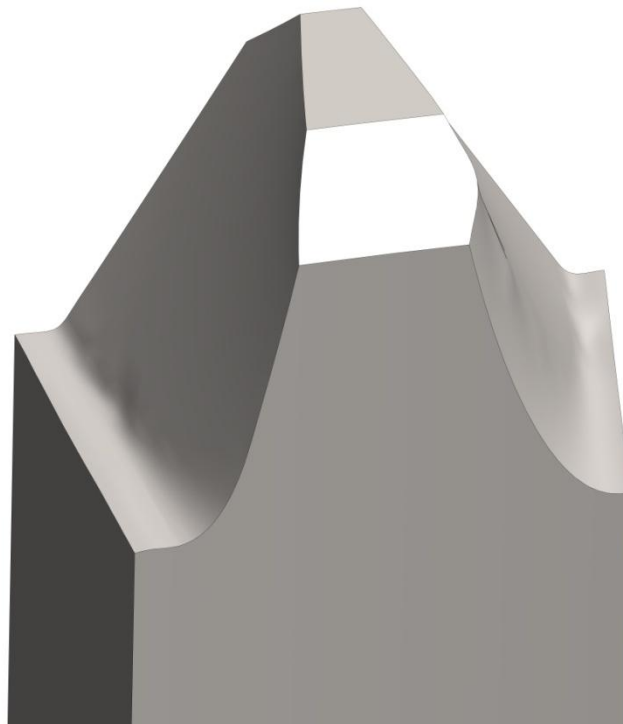
Στην **εικόνα 3.1.3.2** παρουσιάζεται μία άποψη της συνεργασίας ,στην οποία φαίνεται και το offset των αξόνων. Ενώ στην **εικόνα 3.1.3.3** ο ένας μόνο οδόντας. Παρατηρείται για ακόμα μία φορά ότι ο οδόντας κόβεται μπροστά για τον ίδιο λόγο (υποκοπές) όπως και προηγουμένως.



**Εικόνα 3.1.3.1:** Επεξήγηση των ασυμβάτων αξόνων



**εικόνα 3.1.3.2:** Συνεργασία τροχών (Project 6)



**Εικόνα 3.1.3.3** Οδόντας επίπεδου τροχού

### 3.1.4 Ελικοειδής ασυμβάτων αξόνων οδόντωση

Τα αποτελέσματα που προέκυψαν για το μοντέλο 5 δεν ήταν καθόλου ιδανικά. Οι επίπεδοι τροχοί βγήκαν σε ένα μεγάλο μέρος τους pointed ,δηλαδή με μηδενικό πάχος στην κεφαλή. Για να βελτιωθεί το αποτέλεσμα ,αλλάχθηκε το offset σε αρνητικό και ίσο με  $a_v = -2\text{mm}$ . Έτσι ,αυξήθηκε το πάχος στην κεφαλή των δοντιών (θα μπορούσε να γίνει και με άλλους τρόπους) , με αποτέλεσμα να μην υπάρχει σημείο μηδενικού πάχους στο οδόντα. Αυτό έγινε ,επειδή τα δόντια με μικρό πάχος κεφαλής αυξάνουν κατά πολύ τις τάσεις ,με συνέπεια να αντέχουν λιγότερο. Παρουσιάζονται τα χαρακτηριστικά:

**Project 7:** πινιόν: μετωπικός τροχός με ελικοειδή οδόντωση

$m_n = 2\text{mm}$  ,  $a_n = 20^\circ$  (σε normal section),

$b_v = 4.9\text{ mm}$  (axial offset),

$Z_1 = 21$  και  $b = 11.3\text{ mm}$ ,  $Z_2 = 35$  και  $b = 7.2\text{ mm}$ ,

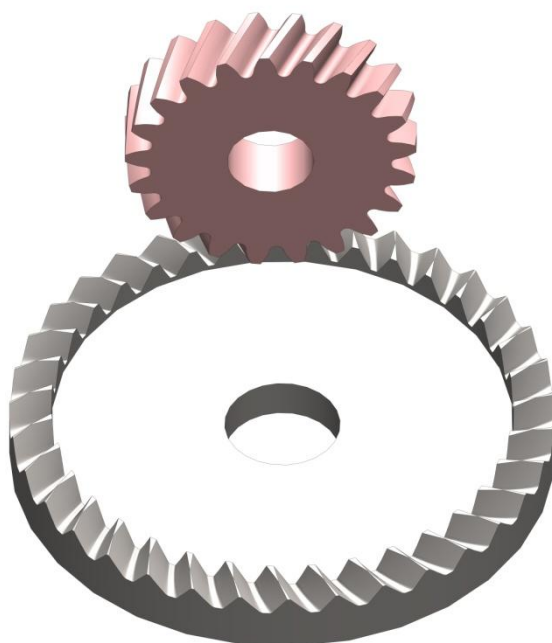
profile shift coefficient = 0 και για τα δύο γρανάζια

Chamfering Crowning: ακτινικό κόψιμο πίσω: 3.5mm ,

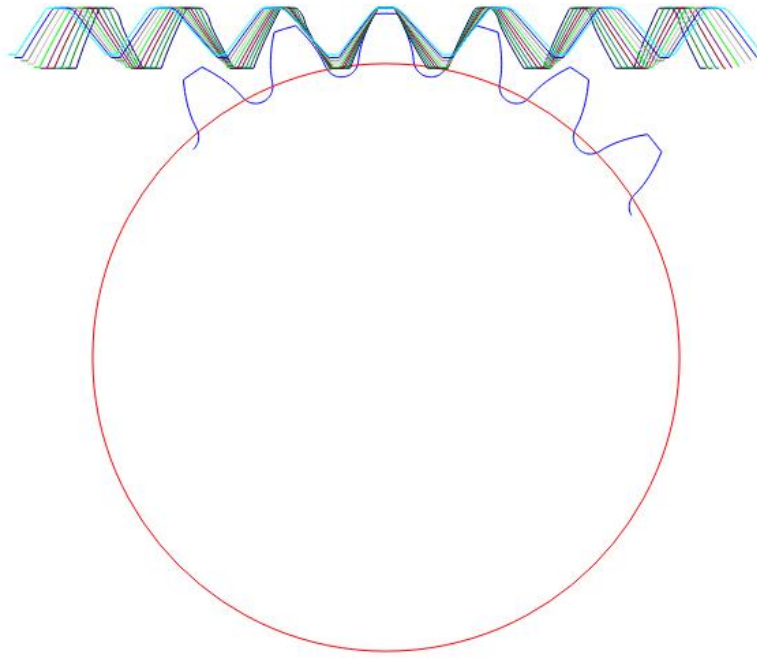
κατακόρυφο κόψιμο: 1 mm

Διευκρινίζεται ότι, τα tolerances διαμορφώθηκαν ώστε να μην υπάρχει backlash. Ενώ στο reference profile κρατήθηκαν τα ίδια στοιχεία όπως πριν.

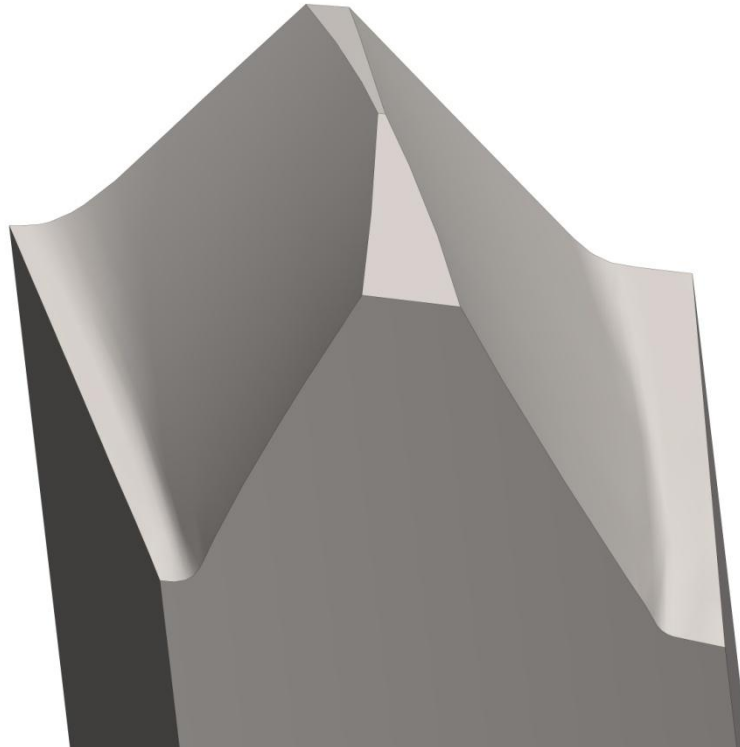
Στην **εικόνα 3.1.4.1** δείχνεται η συνεργασία σε 3D (όπου φαίνεται και το offset) ,ενώ στην **εικόνα 3.1.4.2** σε 2D. Επίσης ,στην **εικόνα 3.1.4.3** παρουσιάζεται ένας μόνο οδόντας.



**Εικόνα 3.1.4.1:** Συνεργασία τροχών (Project 7)



**Εικόνα 3.1.4.2:** Συνεργασία 2D



**Εικόνα 3.1.4.3:** Οδόντας επίπεδου τροχού

## 3.2 Μοντελοποίηση: Διαδικασία και παραδοχές

### 3.2.1 Εισαγωγή-Γενικά

Ξεκινώντας τον υπολογισμό των οδοντωτών τροχών ,άρχισαν κάποιες σκέψεις σχετικά με τον τρόπο ,που θα μπορούσε να εφαρμοστεί η Ενοποιημένη Θεωρία Οδοντώσεων , για να έλθουμε σε αποτελέσματα γρήγορα και με αρκετά καλή ακρίβεια. Έτσι, μετά από μία σειρά συζητήσεων ,οριστικοποιήθηκε η διαδικασία ,η οποία θα στηριζόταν στην γρήγορη κατασκευή των δύο επιφανειών του ενός οδόντα του επίπεδου τροχού μέσω σημείων ,με απλά και βασικά εργαλεία του λογισμικού solidworks. Η διαδικασία αυτή, χωρίζεται σε δύο κύρια μέρη.

Το πρώτο μέρος αφορά την παραλαβή σημείων του πινιόν από το χώρο (καρτεσιανό σύστημα) ,την μετατροπή τους μέσω ενός excel σε σημεία του χώρου που ανήκουν στον επίπεδο τροχό και την εισαγωγή τους μέσα στο 3D CAD λογισμικό (solidworks).

Το δεύτερο μέρος αφορά τον σχηματισμό του τροχού στο 3D CAD μέσα από τα σημεία που έχουν εισαχθεί σε αυτό. Γίνεται η δημιουργία των επιφανειών και με κατάλληλη διαδικασία, δημιουργείται ο ένας οδόντας. Στην συνέχεια ,με τον έναν οδόντα στα χέρια μας ,είναι δυνατό να φτιαχτεί όλος ο τροχός, με σκοπό να συνεργαστεί με το πινιόν, κάνοντας έλεγχο στην εμπλοκή του (εάν υπάρχουν interferences και εάν είναι ομαλή η μετάβαση από το ένα ζεύγος στο επόμενο).

### 3.2.2 Πρώτο μέρος-Διαδικασία

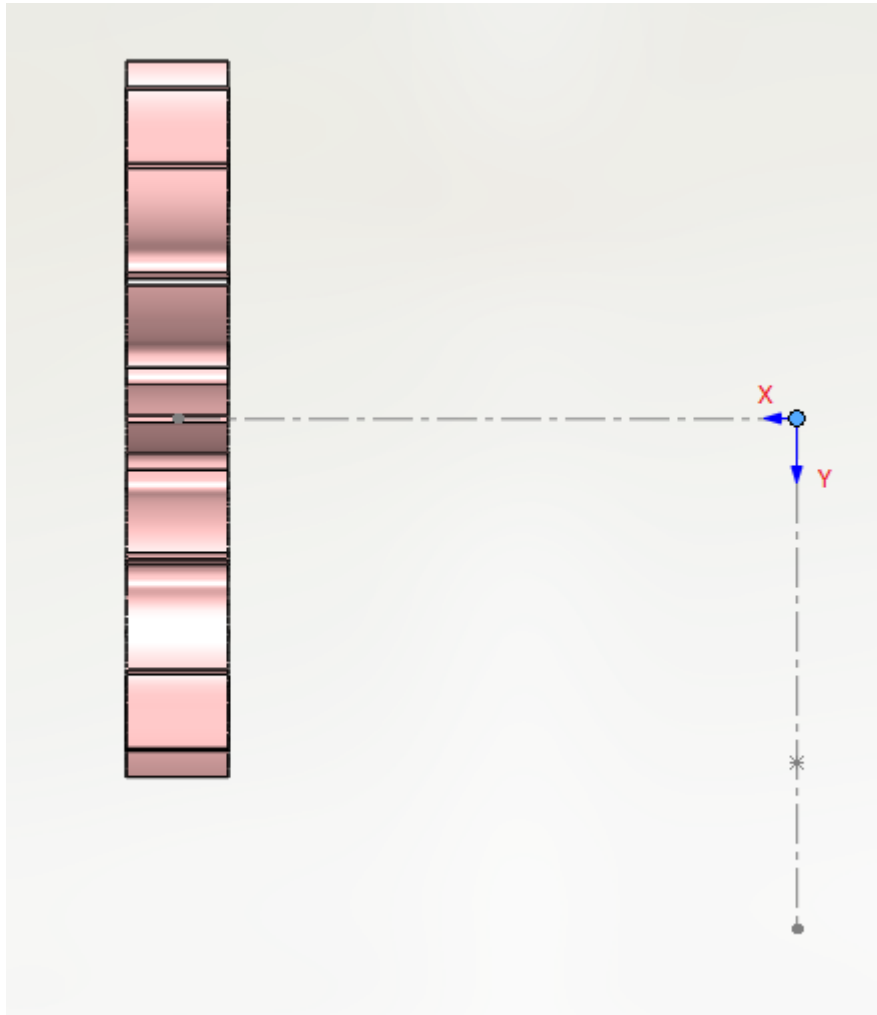
Αρχίζοντας την διαδικασία και εφόσον υπάρχει το 3D μοντέλο του πινιόν δημιουργείται σε αυτό, ένα καινούριο σύστημα συντεταγμένων με X ,τον άξονα περιστροφής του πινιόν και Y τον άξονα περιστροφής του επίπεδου τροχού που θα δημιουργηθεί ,σύμφωνα πάντα με την θεωρία.

Αυτό γίνεται πρακτικά ,δημιουργώντας στο μοντέλο του πινιόν, το καινούριο σύστημα συντεταγμένων με την εντολή coordinate system στην σωστή απόσταση, μετατρέποντας το αρχείο σε STEP και ορίζοντας σαν σύστημα συντεταγμένων ,αυτό που δημιουργήθηκε. Στην συνέχεια ,ανοίγουμε το αρχείο STEP και γίνεται επεξεργασία του μοντέλου, έχοντας το καινούριο σύστημα συντεταγμένων. Η **εικόνα 3.2.2.1** παρουσιάζει το μοντέλο που δημιουργείται.

Η απόσταση του συστήματος από το πινιόν στον άξονα X ,που αναφέρθηκαν πριν, ορίζεται με βάση την σχέση μετάδοσης  $i_{12}$  ,η οποία έχει προκαθοριστεί για την συνεργασία μας .

Σε αυτό το σημείο, κάνουμε άνοιγμα σε ένα 3D Sketch και επιλέγουμε την επιφάνεια του πινιόν εκείνη ,η οποία σύμφωνα με τους υπολογισμούς μας θα συνεργαστεί πιο σύντομα με τον επίπεδο τροχό. Πάνω σε αυτήν ορίζονται σημεία,

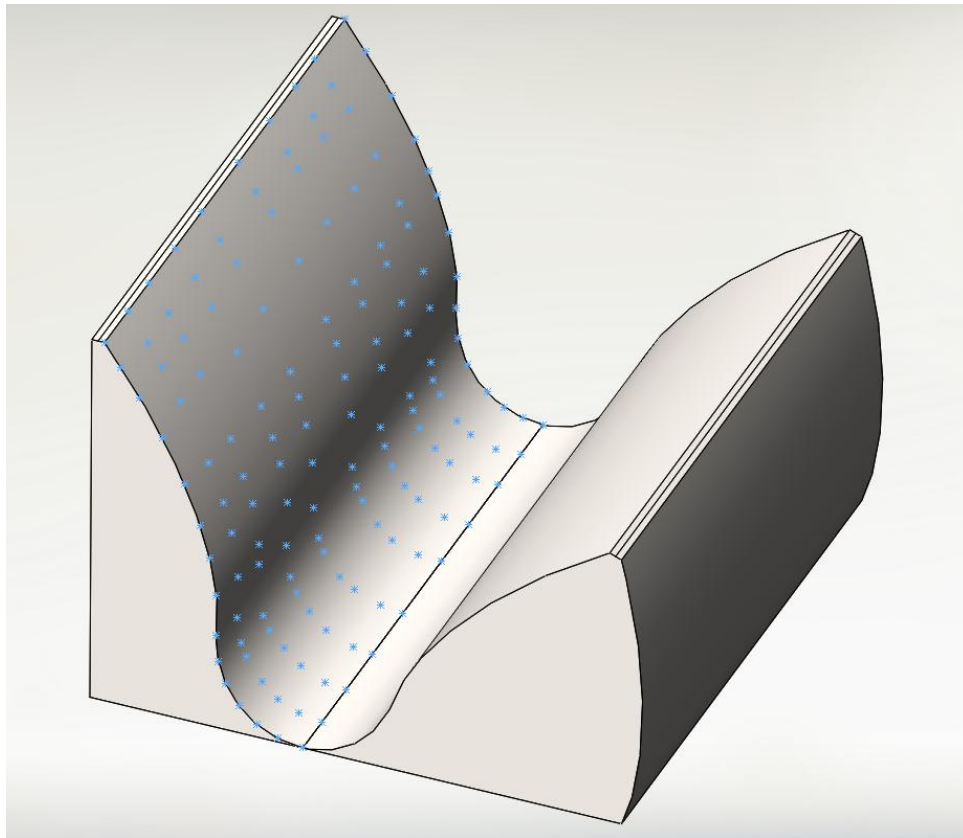
τα οποία μετά από υπολογισμούς θα μας δώσουν τα αντίστοιχα σημεία του συνεργαζόμενου τροχού.



**Εικόνα 3.2.2.1:** Νέο σύστημα συντεταγμένων

Η διαδικασία έληξε μετά από δοκιμές στον αριθμό των 150 σημείων ανά πλευρά, ο οποίος είναι ικανοποιητικός για να επιτευχθεί καλή ακρίβεια στην πλευρά και ευκολία στους υπολογισμούς (όσο αυξάνεται ο αριθμός, αυξάνεται και ο χρόνος της διαδικασίας).

Τα σημεία δεν ορίζονται τυχαία, αλλά η κατεύθυνση τους είναι κατά το ύψος του οδόντα (θα εξηγηθεί αργότερα γιατί). Μία τυπική απεικόνιση των σημείων που ορίζονται κάθε φορά μας δίνει η **εικόνα 3.2.2.2**. Επιπλέον εκτός από αυτά τα σημεία, ορίζονται και κάποια (70-80) στην κεφαλή, με τα οποία μέσω μίας διαδικασίας που θα αναλυθεί αργότερα, δημιουργείται το fillet της επιφάνειας του επίπεδου τροχού.



**Εικόνα 3.2.2.2:** Τα σημεία που παραλαμβάνονται από το πινιόν

Έπειτα, με την βοήθεια μίας macro εντολής (αρχείο τύπου .swp) εισάγονται σε ένα excel οι συντεταγμένες των σημείων ,διαδικασία η οποία μας γλιτώνει πολύ χρόνο, επειδή η περισυλλογή των σημείων είναι χρονοβόρα και κουραστική δουλειά. Η macro αναπτύχθηκε από την Solidtec Solutions ,η οποία είναι μία αυστραλέζικη εταιρία που φτιάχνει macros ειδικά για το solidworks. Με την βοήθεια της macro ,επιτυγχάνεται μετά από μία επεξεργασία (μετατροπή μονάδων ,διαχωρισμός κάποιων σημείων που είναι λανθασμένα) μέσα στο excel τις συντεταγμένες των σημείων που παρουσιάστηκαν στην **εικόνα 3.2.2.2**.

Τα σημεία αυτά , εισάγονται σε ένα άλλο excel που έχει φτιαχτεί, στο οποίο γίνεται η μετατροπή των σημείων του πινιόν σε σημεία του επίπεδου ,σύμφωνα με την Ενοποιημένη Θεωρία Οδοντώσεων. Η **εικόνα 3.2.2.3** δείχνει το excel που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό των σημείων των δύο πλευρών και των fillet τους του επίπεδου τροχού.

**Εικόνα 3.2.2.3:** Το excel που χρησιμοποιήθηκε



Στο excel ,πρώτα γίνεται ο υπολογισμός των ενδιάμεσων σημείων από τα αρχικά σημεία. Στα ενδιάμεσα σημεία ,βρίσκεται το κάθετο διάνυσμα (normal vector) στην επιφάνεια, σύμφωνα με το δεδομένο ότι η γραμμή που ορίζει τα δύο ακριανά σημεία είναι κάθετη στο normal vector. Αυτό εκτελείται ,επιλέγοντας συγκεκριμένη φορά (ανοδική συνεχώς).

Με αυτόν τον τρόπο, από τις εξισώσεις υπολογίζονται οι τρεις συνιστώσες (στην διεύθυνση του κάθε άξονα) του κάθετου διανύσματος και γίνεται ο πρώτος έλεγχος για να διαπιστωθεί, εάν οι διευθύνσεις ορίζουν εξωτερικό ως προς την επιφάνεια διάνυσμα, επειδή έχουμε εξωτερική οδόντωση. Σε αντίθετη περίπτωση , προσθέτουμε πλην στις συνιστώσες του διανύσματος.

Επανερχόμενοι σε αυτό που αναφέρθηκε πιο πριν, για την κατά ύψος του οδόντα, επιλογή των σημείων , επιτυγχάνεται η συνιστώσα του άξονα X ίση με το μηδέν και να ορίζεται το κάθετο διάνυσμα, ουσιαστικά σε δύο διαστάσεις. Αυτό έγινε, για να γίνει ακόμα πιο εύκολος ο υπολογισμός των κάθετων διανυσμάτων και στην πράξη ,γλιτώσαμε αρκετό χρόνο (έχει αναφερθεί ότι βασικός στόχος της διαδικασίας υπολογισμού του επίπεδου τροχού είναι να γίνεται πιο ακριβής και αρκετά γρήγορη).

Υπήρξε ένα σημαντικό πρόβλημα στον υπολογισμό του κάθετου διανύσματος, το οποίο αναφέρεται στα ακριανά σημεία δύο γραμμών επιλογής σημείων (δηλαδή το τελευταίο σημείο την πρώτης γραμμής με το πρώτο της δεύτερης γραμμής). Επιλέχθηκε να μην γίνει παραγωγή σημείο του επίπεδου τροχού, που να αναφέρεται σε ενδιάμεσο σημείο αυτών των ακριανών. Με την αφαίρεση αυτών των σημείων ,έχει επιτευχθεί μία πολύ καλή ακρίβεια στην παραγωγή των σημείων του επίπεδου τροχού.

Συνεχίζοντας, με βάση τις συντεταγμένες των σημείων και τα κάθετα σε αυτά διανύσματα, υπολογίζουμε σύμφωνα με την Ενοποιημένη Θεωρία Οδοντώσεως τους συντελεστές A,B και C (Κεφάλαιο 2.2) με δεδομένο ότι  $a_{12} = 0$  και  $\delta=270^\circ$ . Οι εξισώσεις διαμορφώθηκαν ,έτσι ακριβώς όπως ορίζει η θεωρία για τροχούς κάθετα τεμνόμενων αξόνων.

Είναι δυνατό, σε αυτό το σημείο να υπολογιστεί η  $(\theta_1)$  (στο excel υπολογισμένη πάντα σε rad), η οποία έχει δύο λύσεις , από τις οποίες γίνεται επιλογή της πιο φυσιολογικής τιμής για την περίπτωση μας . Γενικά κατάλληλες είναι οι μικρές τιμές γωνίας ,επειδή επιλέχθηκαν σημεία οδόντα πινιόν, τα οποία θα συνεργαστούν άμεσα με αυτά του επίπεδου τροχού. Αυτό προτιμήθηκε λόγω ακρίβειας, επειδή πάντα στην μετατροπή θα υπάρχει κάποιο σφάλμα. Όσο μικρότερες τιμές γωνίας έχουμε ,τόσο μικρότερο το σφάλμα. Επίσης προτιμάται και για λόγους εύκολης παρατήρησης ,δηλαδή φαίνεται πιο εύκολα η αντιστοιχία των σημείων.

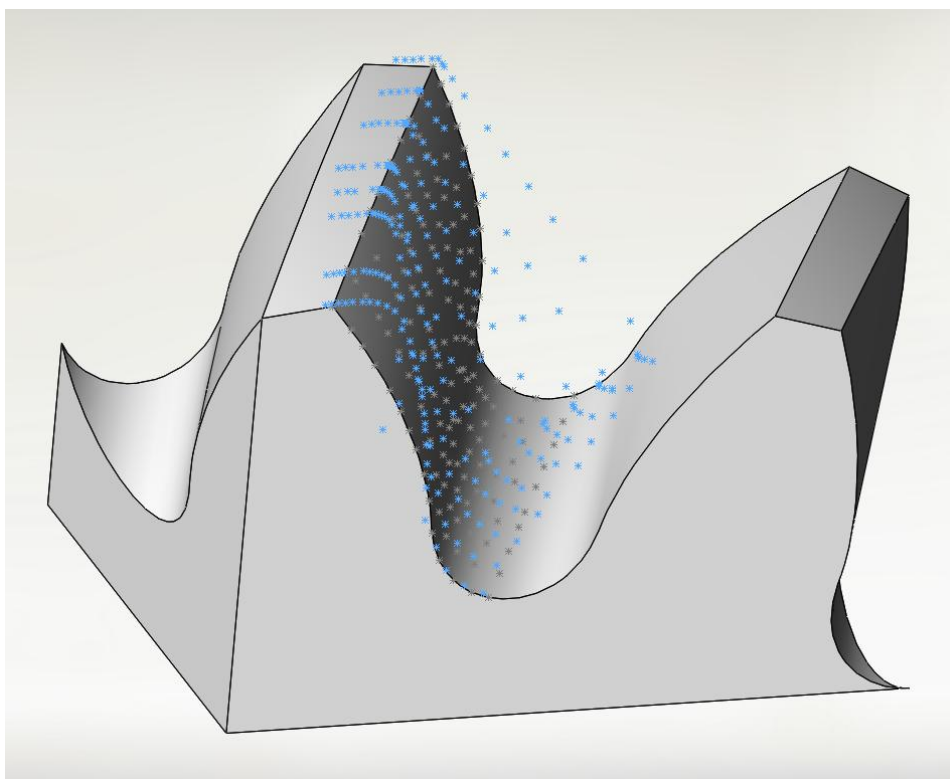
Συνεχίζοντας την διαδικασία (Κεφάλαιο 2.2), βρίσκονται οι συντεταγμένες του P ( $x_p, y_p, z_p$ ) στρέφοντας το σύστημα περί τον άξονα Ox κατά γωνία ( $+\theta_1$ ).

Εκφράζεται το P στο σύστημα του επίπεδου τροχού με συντεταγμένες  $P'(x'_p, y'_p, z'_p)$  ,στρέφοντας το σύστημα περί τον Oz κατά γωνία ( $+\delta$ ).

Έπειτα ,στρέφεται το νέο σύστημα περί τον  $Ox'$  κατά γωνία  $\theta_2 = \frac{\theta_1}{i_{12}}$  ,οπότε βρίσκουμε τις συντεταγμένες του σημείου  $G_2(x'_{G_2}, y'_{G_2}, z'_{G_2})$  του επίπεδου τροχού ,εκφρασμένες στο σύστημα του. Η γωνία(  $\theta_2$  ) παίρνει ,αναλόγως την φορά της περιστροφής ,διαφορετικό πρόσημο ,το οποίο πρέπει να επιλεγθεί.

Για να βρεθούν οι συντεταγμένες αυτού του σημείου ως προς το αρχικό (γενικό σύστημα που δουλεύουμε) ,γίνεται η αντίστροφη διαδικασία που εκτελέστηκε για την εύρεση του P' . Με αυτόν τον τρόπο ,υπολογίζονται τα σημεία του επίπεδου τροχού.

Τέλος, εισάγονται τα σημεία , με την βοήθεια της Solidtec ,αυτήν την φορά με αντίστροφη macro ,δηλαδή που παίρνει τα σημεία από το excel και τα τοποθετεί μέσα στο χώρο ,στο ανοιγμένο εκείνη την ώρα αρχείο στο solidworks. Στην **εικόνα 3.2.2.4** φαίνεται μία πλευρά (τα σημεία) μετά την εισαγωγή της ,καθώς και τα αρχικά της σημεία.



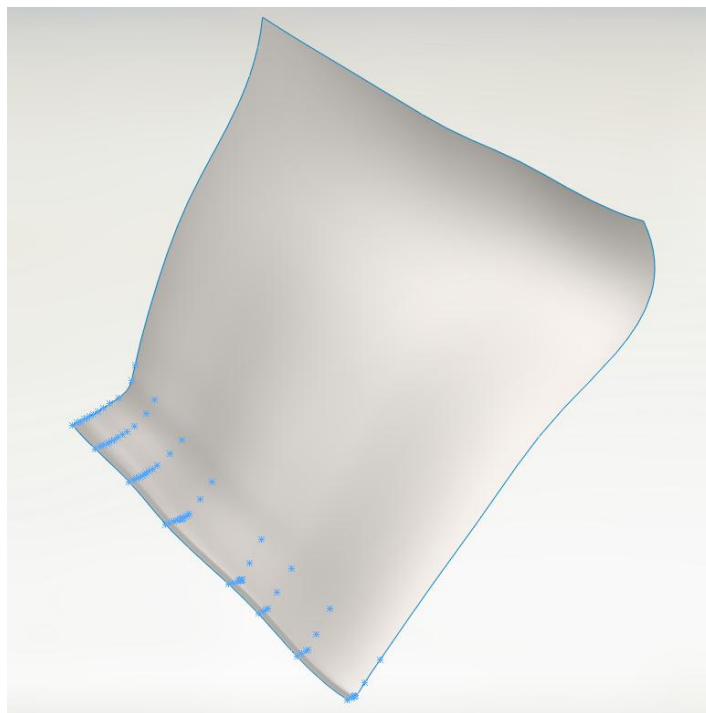
**Εικόνα 3.2.2.4:** Σημεία που προκύπτουν από την μετατροπή

Όσον αφορά την δημιουργία του fillet του επίπεδου τροχού ,συλλέγονται κανονικά τα σημεία κατά μήκος του δοντιού που βρίσκονται λίγο πριν την ακμή του οδόντα και λίγο μετά από αυτό το σημείο (στο Top land).

Στο excel υπάρχει μία μεγάλη διαφορά σε σχέση με την προηγούμενη διαδικασία. Στην άνω ακμή του οδόντα το normal vector αλλάζει απότομα, δηλαδή οι συνιστώσες του λίγο πριν την ακμή ,έχουν πολύ διαφορετική τιμή με αυτές που ακολουθούν.

Για να αντιμετωπιστεί αυτό το πρόβλημα συλλέγονται αυτές τις τιμές (λίγο πριν και μετά) για κάθε συνιστώσα  $x,y,z$  ,δημιουργούνται εννιά ενδιάμεσες τιμές για κάθε συνιστώσα (δηλαδή δέκα διαφορετικά κάθετα διανύσματα) τα οποία προστίθενται σαν σημεία ,με τις ίδιες συντεταγμένες αυτές της ακμής του οδόντα.

Με αυτόν τον τρόπο, ομαλοποιείται η μετάβαση του κάθετου διανύσματος από τα σημεία πριν έως και μετά την ακμή, με αποτέλεσμα να παράγεται το fillet του επίπεδου τροχού με ράδιο. Στην **εικόνα 3.2.2.5** φαίνονται τα σημεία που παράχθηκαν από μία τέτοια διαδικασία. Αυτός ο υπολογισμός ,επειδή είναι αρκετά χρονοβόρος λόγω της μη αυτοματοποίησης του, έγινε στα ζεύγη τροχών που δεν είχαν σφάλματα και ήταν επιθυμητό να φτάσουν σε τελικό στάδιο είτε για παρατήρηση ,είτε για κατασκευή.



**Εικόνα 3.2.2.5:** Η επιφάνεια που προκύπτει από τα παραγόμενα σημεία

### 3.2.3 Πρώτο μέρος-Αντιμετώπιση προβλημάτων

Στην διαδικασία που ακολουθήθηκε ,υπάρχουν αρκετά σημεία ,στα οποία έγιναν σφάλματα και αναθεωρήθηκε πολλές φορές ο τρόπος με τον οποίο εκτελούνται.

Στην αρχή της διαδικασίας, στο σημείο που μεταφέρονται τα σημεία από το solidworks στο excel ,παρουσιάστηκε ένα πρόβλημα που κόστισε σε χρόνο. Υπήρχαν σημεία στο excel ,τα οποία δεν ανήκουν στην πλευρά του οδόντα. Αυτά δυστυχώς ,επειδή δεν ακολουθούσαν συγκεκριμένη λογική εμφάνισης ,ήταν δύσκολο να βρεθούν γρήγορα. Αυτή είναι μία διαδικασία που έχει βελτιστοποιηθεί στον χρόνο ,αλλά δεν λύθηκε. Οφείλεται κυρίως στην macro εντολή ,η οποία δεν μπορούσε να μετατραπεί.

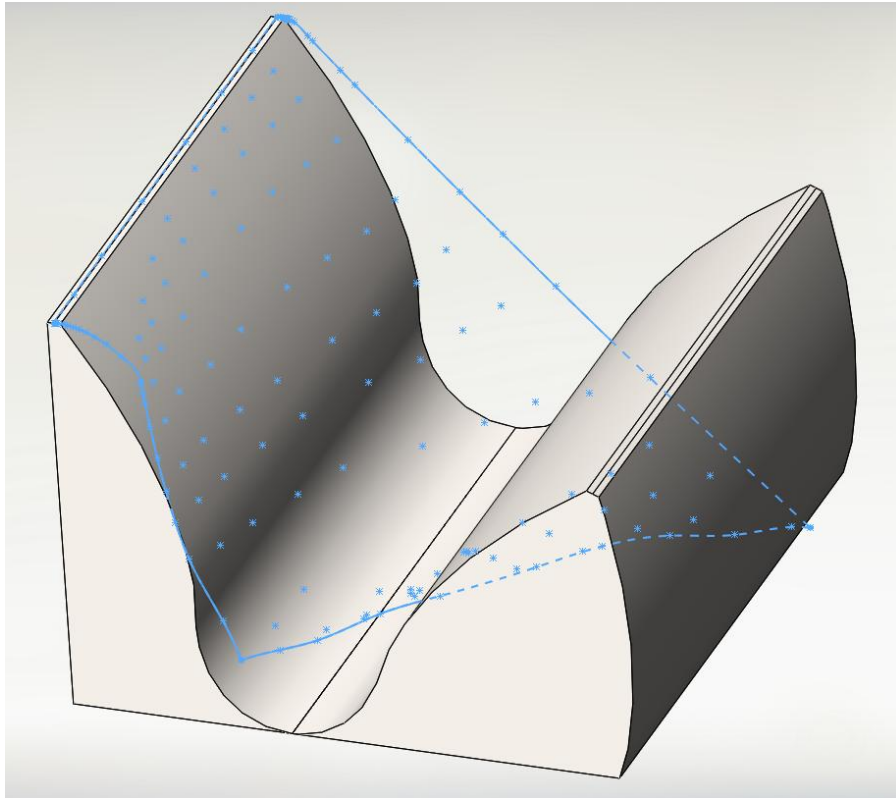
Σημαντική ήταν η επιλογή του τρόπου υπολογισμού του κάθετου διανύσματος και υπήρχε αρκετή σκέψη πάνω σε αυτό ,κυρίως για τον χρόνο που θα έπαιρνε η διαδικασία, με σκοπό να έλθουμε σε αποτέλεσμα.

Δοκιμές έγιναν αρχικά, για να βρεθεί το κάθετο διάνυσμα στο κέντρο του επιπέδου, που ορίζεται από τρία σημεία. Η διαδικασία αυτή ,εκτός ότι ήταν χρονοβόρα ,επειδή ο υπολογισμός του κάθετου διανύσματος σε τρεις διαστάσεις είναι πιο πολύπλοκος από τις δύο, δεν μπορούσε επίσης να βρεθεί και μία αυτοματοποιημένη διαδικασία πάνω στην συλλογή των σημείων ,λόγω της τυχαίας επιλογής τους στο χώρο. Πράγμα το οποίο προσθέτει και σφάλματα στους υπολογισμούς.

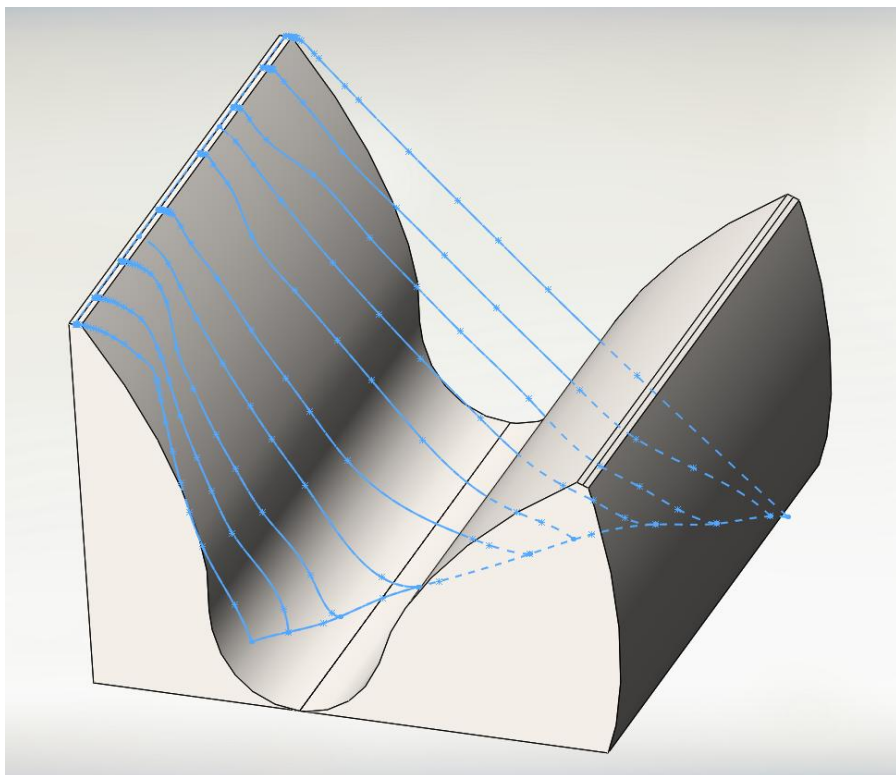
### 3.2.4 Δεύτερο μέρος: Διαδικασία

Στο δεύτερο μέρος, έχοντας στο 3D CAD ,τα σημεία που θα χρησιμοποιηθούν για να φτιαχτούν οι επιφάνειες των οδόντων των επίπεδων τροχών, αρχίζει η διαδικασία διαχωρισμού από κάποια από τα σημεία ,τα οποία παρατηρήθηκε ότι ξεφεύγουν από τα υπόλοιπα που δείχνουν να σχηματίζουν την επιφάνεια.

Έπειτα, φτιάχνονται τα όρια που θα ορίσουν την επιφάνεια μας (θα πρέπει να κλείνουν) και τις γραμμές που θα την οδηγήσουν ανάμεσα σε αυτά. Στην **εικόνα 3.2.4.1** φαίνονται τα όρια που δημιουργούνται από τα σημεία που υπάρχουν ενώ στην **εικόνα 3.2.4.2** οι γραμμές που βοηθάνε στην οδήγηση της επιφάνειας. Για λόγους καλύτερης ακρίβειας ,επιλέχθηκε ,αυτές οι γραμμές (όρια και οδηγοί) να γίνουν splines, επειδή περιγράφουν καλύτερα αυτές τις καμπύλες.

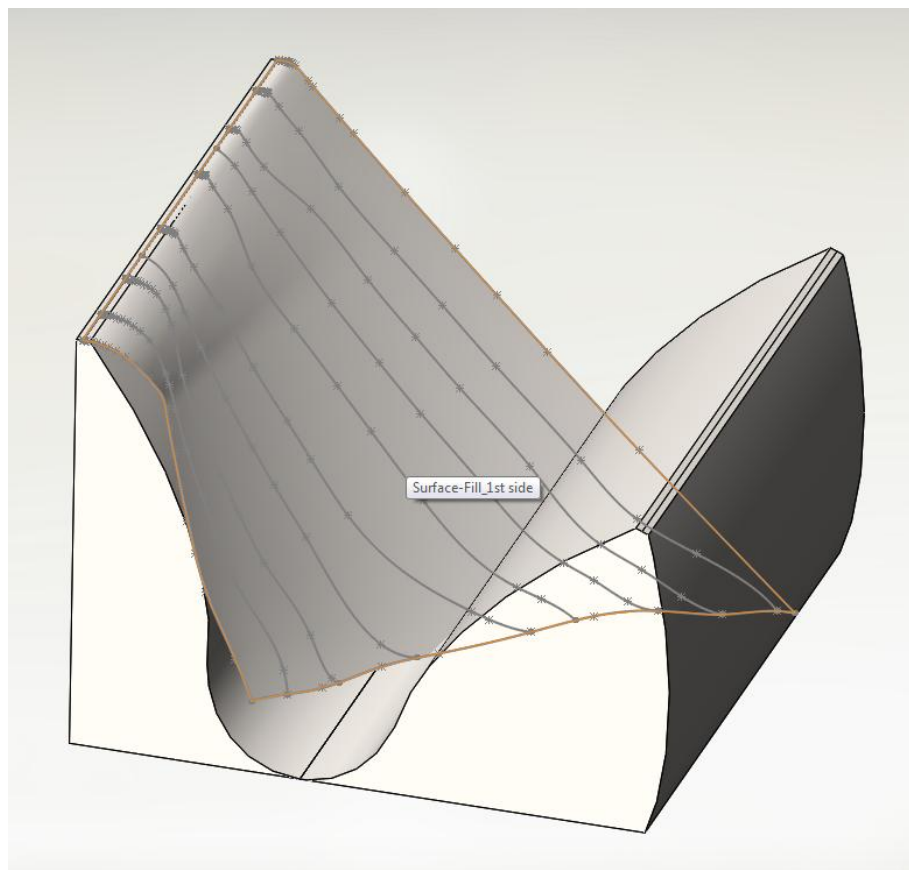


**Εικόνα 3.2.4.1:** Ορισμός ορίων για την επιφάνεια



**Εικόνα 3.2.4.2:** Δημιουργία οδηγών καμπύλων για την επιφάνεια

Με δεδομένα τα όρια και τις γραμμές οδήγησης, χρησιμοποιείται το εργαλείο του solidworks ,Filled Surface ,στο οποίο επιλέγονται τα ενωμένα όρια (ανεξαρτήτως τον αριθμό) και τις guide curves (οδηγοί). Με αυτόν τον τρόπο φτιάχνονται οι δύο επιφάνειες του οδόντος του επίπεδου τροχού. Στην **εικόνα 3.2.4.3** φαίνεται η διαμορφωμένη επιφάνεια.

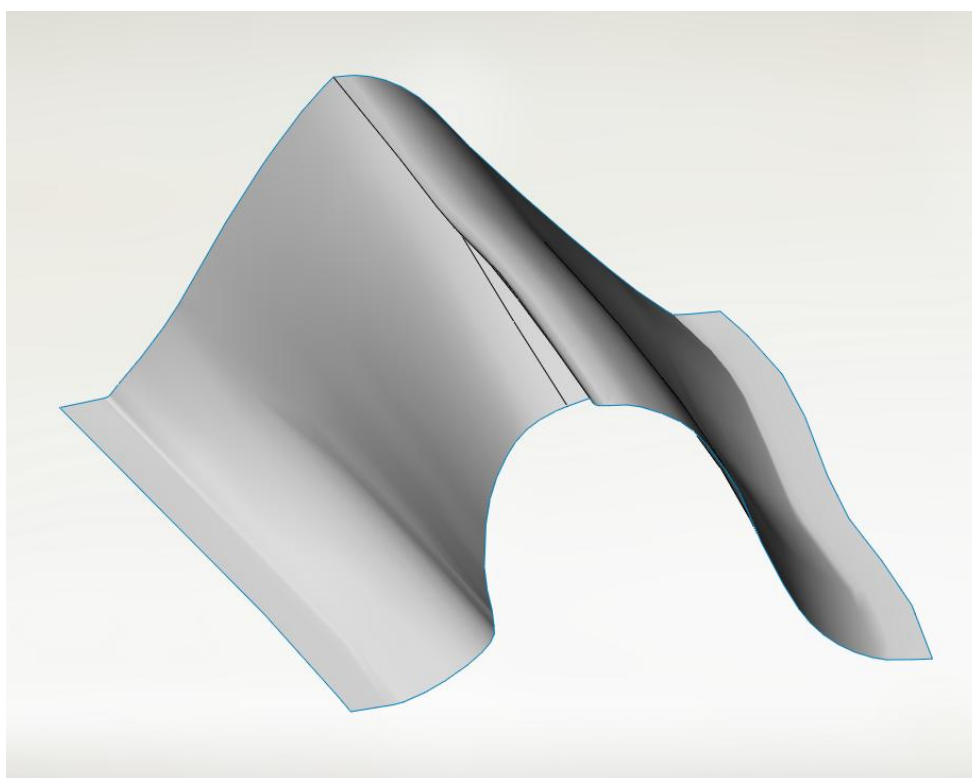


**Εικόνα 3.2.4.3:** Η επιφάνεια που δημιουργείται

Έχει προνοηθεί φυσικά, η δημιουργία των επιφανειών μεγαλύτερων από ότι πρέπει. Δηλαδή στον γεννήτορα, παρατηρούμε πιο μεγάλο πλάτος δοντιού και πιο μεγάλο συντελεστής ύψους κεφαλής  $\rho=1.2$  ,όπως έχουμε αναφέρει σε προηγούμενα κεφάλαια. Αυτό συμβαίνει για να υπερκαλυφθούν τα όρια που χρειαζόμαστε για να ορίσουμε το δόντι.

Από εκεί και πέρα , κόβονται οι επιφάνειες σύμφωνα με τα όρια που ορίζουν η εσωτερική και εξωτερική διάμετρος του επίπεδου τροχού και αφαιρούνται (με την εντολή Trim Surface) τα τμήματα των επιφανειών που είναι πάνω από τα σημεία όπου οι δύο επιφάνειες του οδόντα τέμνονται.

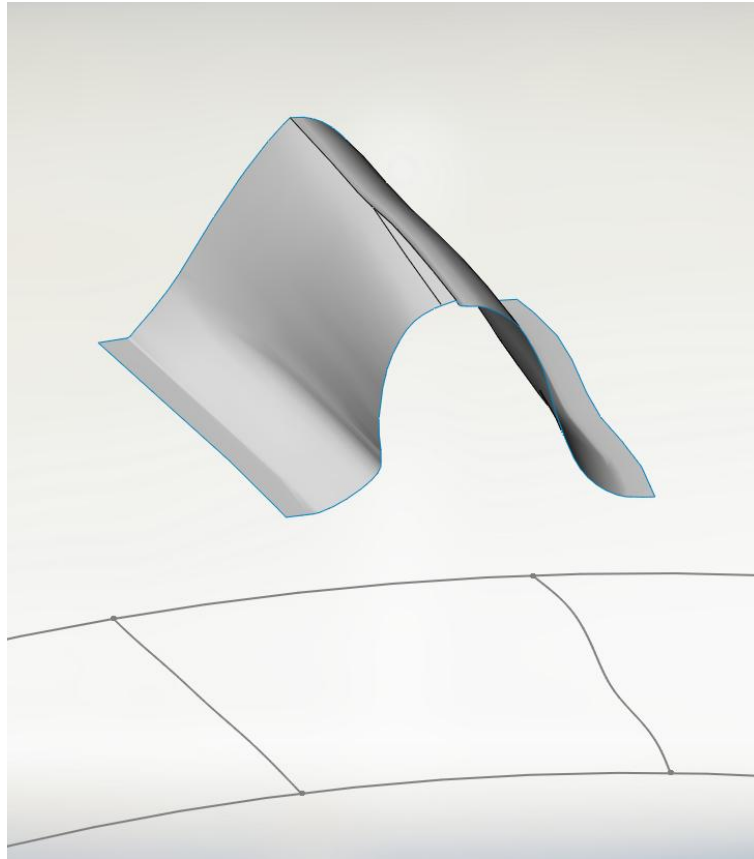
Τα όρια της εσωτερικής και εξωτερικής διαμέτρου διαμορφώνονται με βάση την έλλειψη υποκοπών και την δημιουργία μηδενικού πάχους κεφαλής αντίστοιχα, όπως έχουμε αναφέρει στο κεφάλαιο 1.1. Σε περίπτωση που δεν φτάνει το άνω όριο των επιφανειών στο σημείο τομής τους, επεκτείνεται η επιφάνεια με το εργαλείο Extend Surface, το οποίο επεκτείνει με ομοιόμορφο τρόπο την δεδομένη επιφάνεια, με σκοπό να έχουμε πάντα τομή των δύο επιφανειών του οδόντα. Το διαμορφωμένο δόντι φαίνεται στην **εικόνα 3.2.4.4**.



**Εικόνα 3.2.4.4:** Η διαμόρφωση των επιφανειών πριν την δημιουργία solid body

Για να δημιουργηθεί το στερεό κομμάτι (Solid Body) στο Solidworks, υπάρχουν διάφοροι τρόποι. Μετά από δοκιμές, επιλέχθηκε να δημιουργηθεί με το εργαλείο Extruded Boss/Base, επειδή παράγει καλύτερα το fillet του τροχού και δεν εμφανίζει σφάλματα στην διαδικασία.

Έτσι, δημιουργήθηκε ένα Plane στο κάτω μέρος του επίπεδου τροχού (καθορίζουμε σε αυτό το σημείο το ύψος του τροχού), πάνω στο οποίο ορίστηκε η εσωτερική και εξωτερική διάμετρος (ακτινικά όρια) και με την εντολή Convert Entities αποτυπώνονται στο επίπεδο οι γραμμές που ορίζουν τα fillet του τροχού. Στην **εικόνα 3.2.4.5** φαίνονται τα όρια αποτυπωμένα στο ορισμένο Plane.



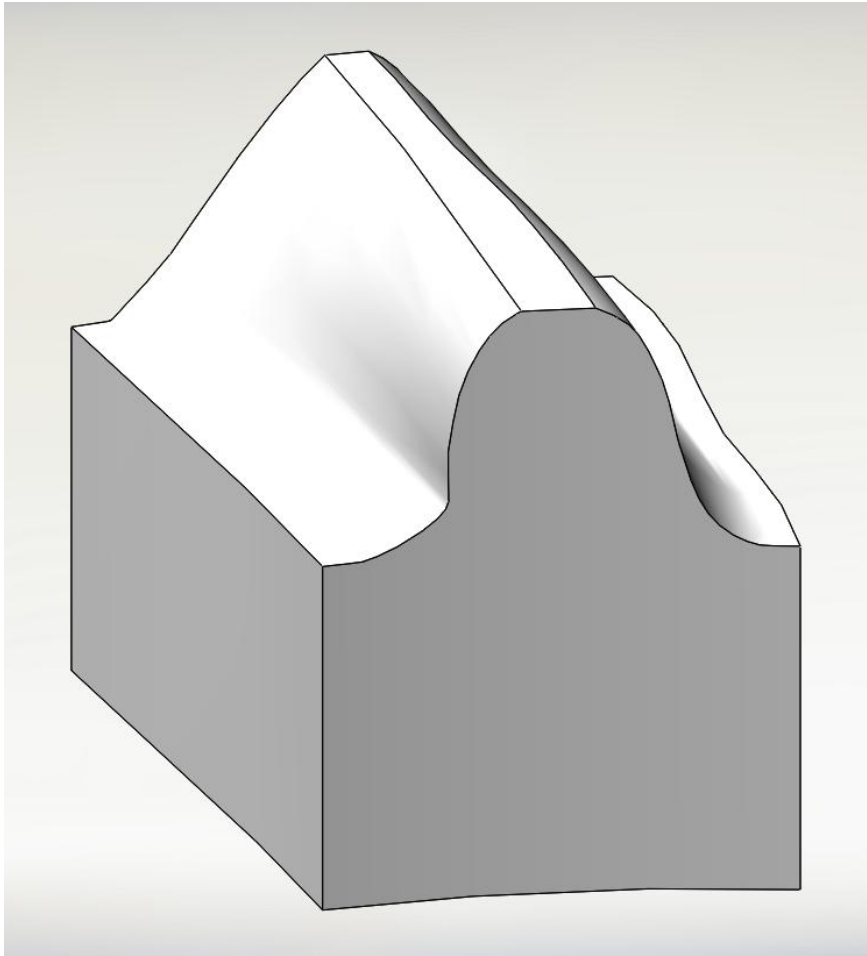
**Εικόνα 3.2.4.5:** Το προφίλ που χρησιμοποιείται για να δημιουργηθεί το solid body

Το επόμενο βήμα είναι να εφαρμοστεί Extruded Boss/Base στην κλειστή επιφάνεια που είδαμε στην **εικόνα 3.2.4.5** έως τις επιφάνειες που έχουν δημιουργηθεί, εφόσον πρώτα έχει γίνει Knit Surface στις δύο επιφάνειες (για να ενωθούν μεταξύ τους) που αντιπροσωπεύουν τις δύο πλευρές του οδόντα.

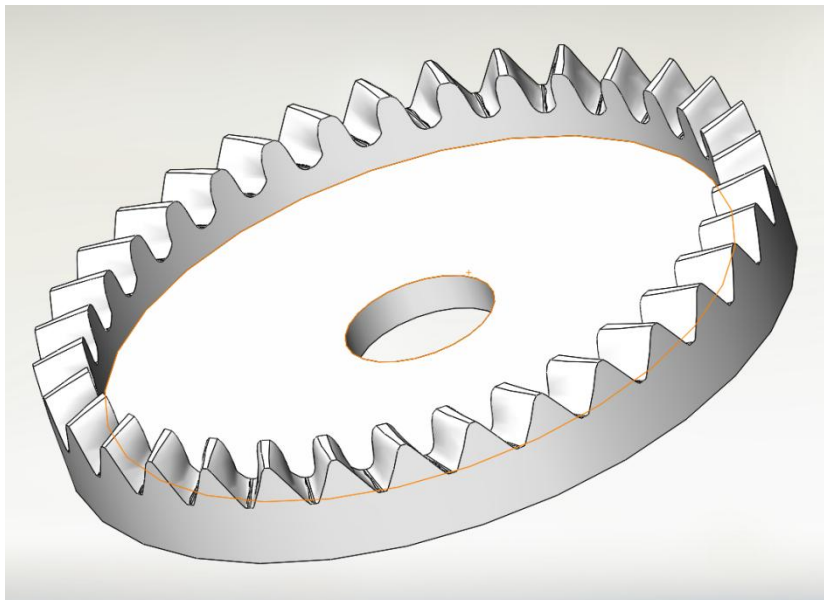
Για την τελική διαμόρφωση του οδόντα, πρέπει να κοπεί η κεφαλή, με σκοπό να επιτευχθεί συντελεστής ύψους κεφαλής ίσος με το  $\rho=1$ . Για αυτό το λόγο κόβεται η κεφαλή κατά  $0.2 \cdot \text{module}$  (επειδή ο γεννήτορας είχε συντελεστή ύψους κεφαλής  $\rho=1.2$ ). Στην **εικόνα 3.2.4.6** φαίνεται ο οδόντας που δημιουργείται.

Η διαμόρφωση του τροχού είναι εύκολη υπόθεση από αυτό το σημείο. Πιο συγκεκριμένα, αφού δημιουργηθούν όλα τα δόντια του επίπεδου τροχού με την εντολή Circular Pattern, παρατηρείται ότι τα μεμονωμένα δόντια εισχωρούν το ένα στο άλλο. Για να ενωθούν όλα τα δόντια μαζί σε ένα κομμάτι και να γίνει αποφυγή των interferences που δημιουργούνται, χρησιμοποιείται η εντολή Combine. Τέλος, διαμορφώνεται το υπόλοιπο κομμάτι του τροχού για να ολοκληρωθεί η διαδικασία. Στην **εικόνα 3.2.4.7** φαίνεται ο συνολικός τροχός.





**Εικόνα 3.2.4.6:** Το στερεό σώμα που δημιουργείται

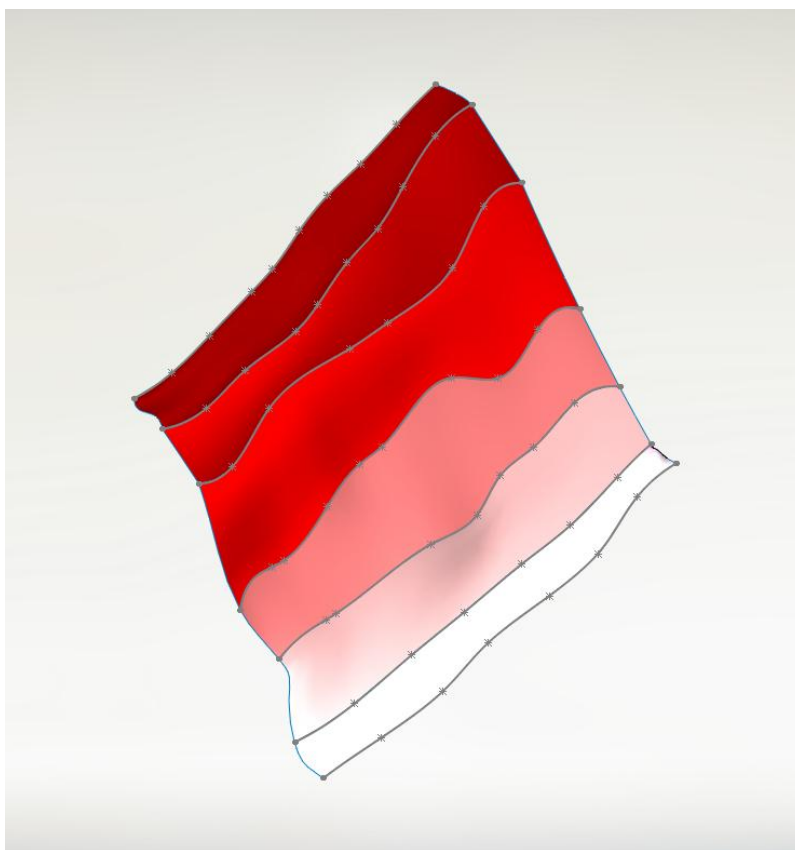


**Εικόνα 3.2.4.7:** Ο τροχός που δημιουργείται από τον έναν οδόντα

### 3.2.5 Δεύτερο μέρος-Αντιμετώπιση προβλημάτων

Τα προβλήματα εδώ δεν ήταν σημαντικά ,λύθηκαν γρήγορα γι'αυτό και δεν πήραν αρκετό χρόνο. Αναφέρονται τα πιο σημαντικά από αυτά. Τα guide curves πολλές φορές δεν λειτουργούν ,με αποτέλεσμα να μην οδηγείται η καμπύλη μέσω αυτών ,αλλά να ορίζεται από τα όρια της.

Αυτό ,όταν γίνεται καθυστερεί σε ένα βαθμό την διαδικασία ,επειδή αντί για μία επιφάνεια ,φτιάχνονται πολύ περισσότερες για την μία πλευρά του οδόντα ,όπου η κάθε μία ορίζεται από τις ενδιάμεσες γραμμές ,χωρίς να υπάρχουν guide curves. Στην **εικόνα 3.2.5.1** φαίνεται η οικογένεια των επιφανειών που ορίζουν την μία πλευρά του οδόντος. Αυτές οι επιφάνειες συνδυάζονται με το Knit Surface και η διαδικασία συνεχίζεται όπως ακριβώς στο Κεφάλαιο 3.2.4.



**Εικόνα 3.2.5.1:** Η δημιουργία επιφανειών στην περίπτωση που δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε τις καμπύλες οδηγούς

Ένα άλλο πρόβλημα ,ήταν η δημιουργία στερεού σώματος του ενός οδόντα, καθώς και του υπόλοιπου τροχού, με την εντολή Revolved Boss/Base ,την οποία εκτελούσαμε στην αρχή.

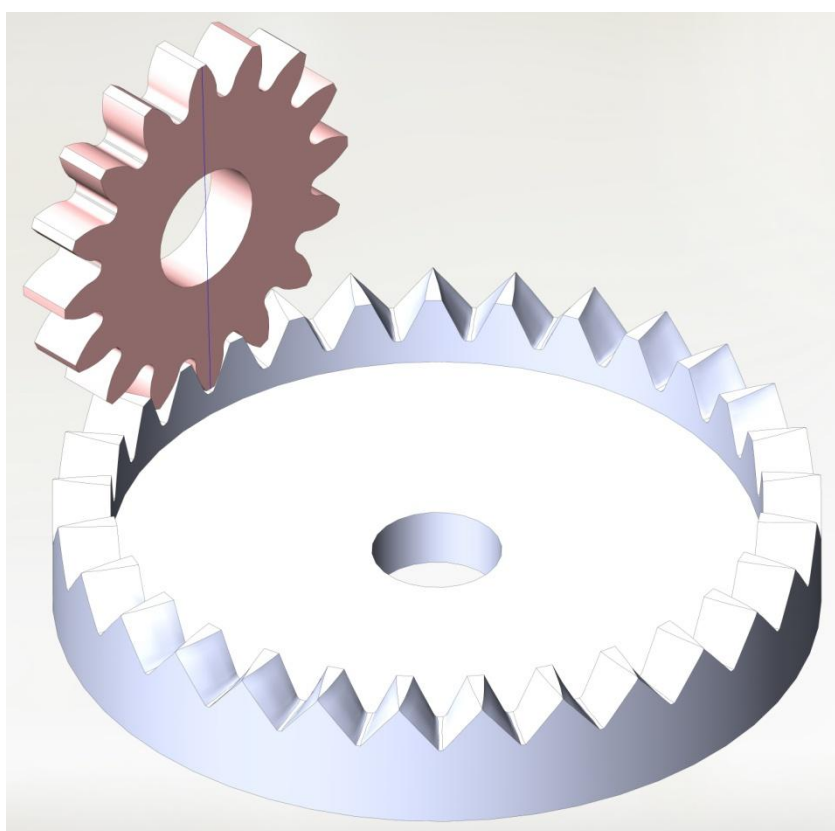
Παρατηρώντας τις γεωμετρίες που δημιουργήθηκαν, υπήρχε σφάλμα πάντα στην κατασκευή του fillet. Είτε μερικές φορές, έβγαζε το λογισμικό σφάλμα, είτε γινόταν

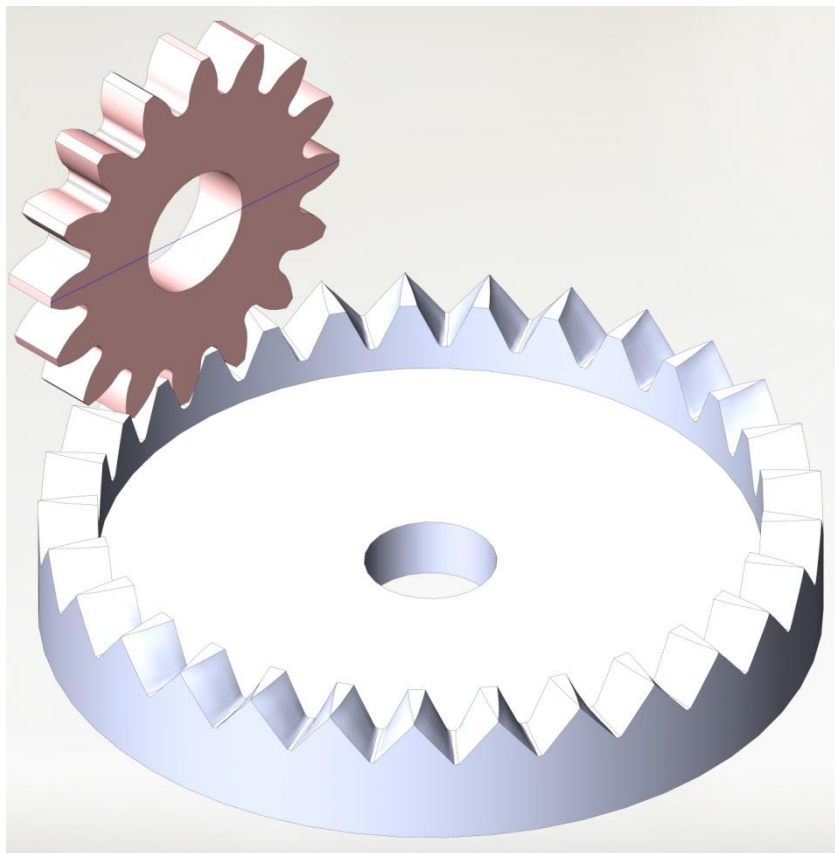
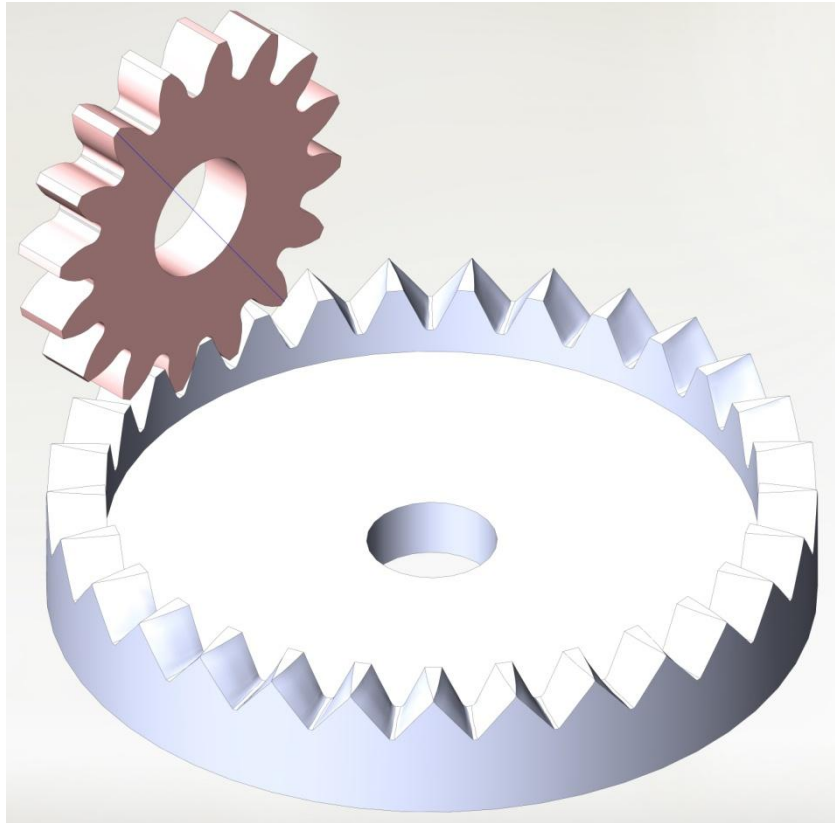
η παρατήρηση της παραγόμενης γεωμετρίας. Οπότε άρχισε η χρήση της εντολή Extruded Boss/Base ,η οποία είναι πιο γρήγορη και δεν εισάγει σφάλματα.

### 3.2.6 Τρισδιάστατα μοντέλα και συστήματα για την προσομοίωση της κίνησης

Έχοντας στα χέρια μας, τα μοντέλα των επίπεδων τροχών, καθώς και των πινιόν που θα συνεργάζονται ,είναι πολύ εύκολο να φτιαχτούν μέσω των Assemblies η συνεργασία και φυσικά να παρατηρηθεί σε 3D διαστάσεις η εμπλοκή των οδόντων.

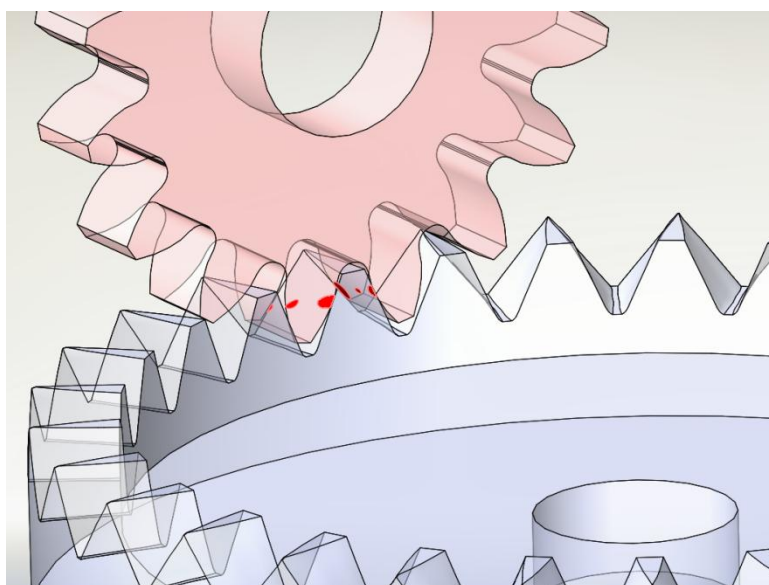
Γίνεται οριοθέτηση αρχικά των δύο τροχών ,με βάση το σύστημα των αξόνων , τις αποστάσεις που πρέπει να βρίσκονται και τους άξονες περιστροφής. Μετά χρησιμοποιείται η εντολή Gear Mate ,με αποτέλεσμα να εισάγεται μία αρχική θέση μεταξύ τους (σε σημείο που εφάπτονται) και να μπορούν να γυρίσουν με σχέση μετάδοσης ,η οποία έχει καθοριστεί στο Mate. Στις **εικόνες 3.2.6.1, 3.2.6.2, 3.2.6.3** παρατηρούνται τρεις διαφορετικές στιγμές της συνεργασίας των δύο τροχών. Η γραμμή βοηθάει για την παρατήρηση της κίνησης.



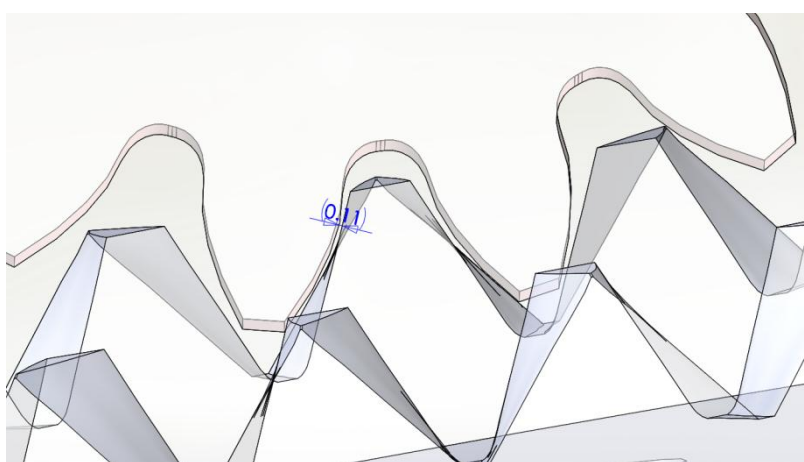


Εικόνες 3.2.6.1, 3.2.6.2, 3.2.6.3: Παρουσιάζεται η κίνηση της συνεργασίας

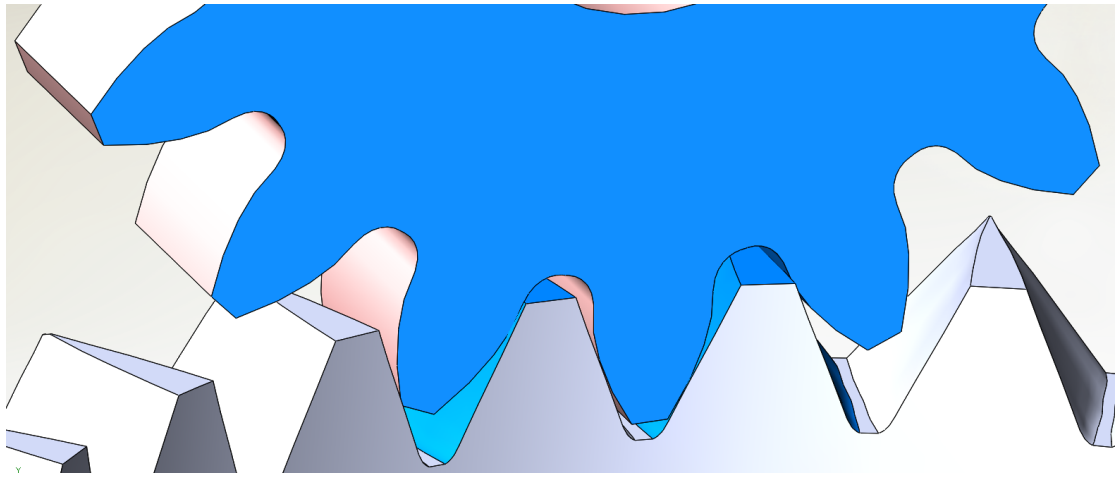
Εκτός από την κίνηση (Motion Analysis) που μπορεί να εφαρμοστεί στο μοντέλο ,αρκετά σημαντικά στην διαδικασία είναι τα εργαλεία Interference Detection (για την παρατήρηση των σημείων ,στα οποία έχει εισχωρήσει ο ένας τροχός στον άλλον) ,Clearance Verification (για την διαπίστωση σε κάθε σημείο της μικρότερης απόστασης μεταξύ των οδόντων που δημιουργείται σε κάθε γωνία περιστροφής του τροχού) και το Collision Detection (για την παρακολούθηση των σημείων κατά την περιστροφή των οδόντων, στα οποία τα συνεργαζόμενα γρανάζια ακουμπάνε. Στην **εικόνα 3.2.6.4** φαίνεται το Interference Detection ,στην **εικόνα 3.2.6.5** φαίνεται το Clearance Verification (σαν δεδομένο βάζουμε να βρει διάκενα μικρότερα από τα 0.15mm) και στην **3.2.6.6** το Collision Detection (οι μπλε περιοχές δείχνουν τις περιοχές που υπάρχει επαφή).



**Εικόνα 3.2.6.4:** Interference Detection συνεργαζόμενων τροχών



**Εικόνα 3.2.6.5:** Clearance Verification των συνεργαζόμενων τροχών



**Εικόνα 3.2.6.6:** Collision Detection των συνεργαζόμενων τροχών

## Κεφάλαιο 4:ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

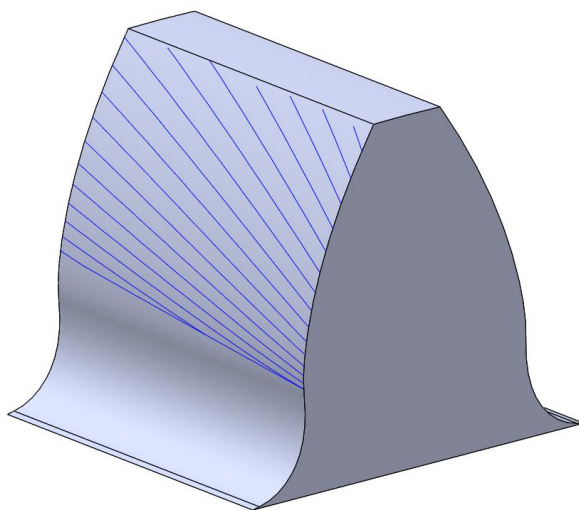
### 4.1 Αποτελέσματα παραγόμενων τροχών

#### 4.1.1 Ευθεία μετωπική οδόντωση

Όπως είναι εύκολα κατανοητό ,δεν έφτασε αμέσως η διαδικασία στο επιθυμητό αποτέλεσμα . Προηγήθηκε μία σειρά αποτυχημένων προσπαθειών ,για να διαμορφωθεί ένας συγκεκριμένος τρόπος κατασκευής των οδόντων του επίπεδου τροχού.

##### Παράδειγμα 1:

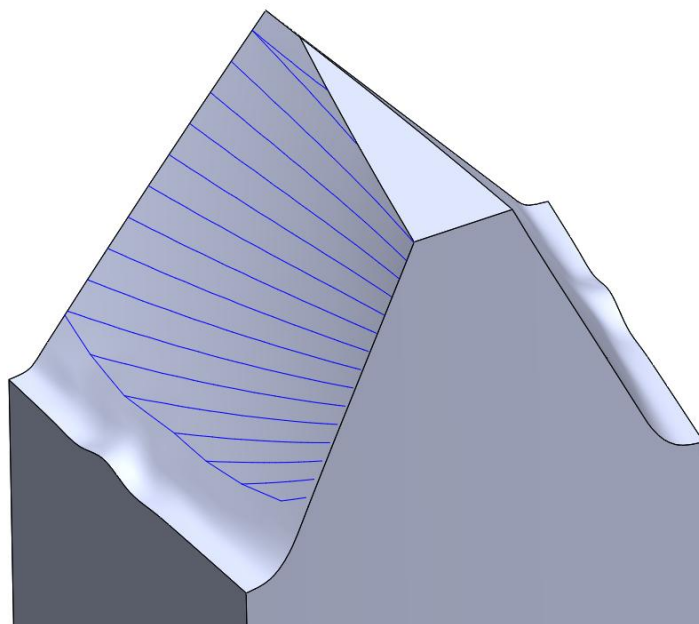
Ξεκινώντας από απλά μοντέλα ,των οποίων τα πινιόν είναι μετωπικοί τροχοί με ευθεία οδόντωση . Στο πρώτο μοντέλο, για το οποίο χρησιμοποιήσαμε δεδομένα από το Kisssoft (έχουμε φτιάξει ένα ζεύγος με τα ίδια ακριβώς χαρακτηριστικά) ,προσπαθήσαμε να προβάλλουμε στην επιφάνεια του οδόντα του πινιόν, τις γραμμές επαφής ,που έχουν εξαχθεί από το λογισμικό (αρχικά γίνεται εισαγωγή των γραμμών και η οριοθέτηση τους σε ένα plane στο κέντρο του οδόντα και μετά με την εντολή Project Curve γίνεται η προβολή τους). Στην **εικόνα 4.1.1.1** φαίνονται οι γραμμές επαφής του πινιόν ενώ στην **εικόνα 4.1.1.2** του επίπεδου τροχού.



**Εικόνα 4.1.1.1:** Φαίνονται οι καμπύλες επαφής πάνω στην επιφάνεια του πινιόν

Η κάθε γραμμή επαφής χωρίζεται σε περισσότερες γραμμές ,από τις οποίες παίρνουμε τα αρχικά και τελικά τους σημεία. Προσαρμόστηκαν στο excel που έχει φτιαχτεί και υπολογίστηκαν τα σημεία του επίπεδου τροχού. Εισάγοντας τα σημεία μέσα στο solidworks ,δεν παρουσιάστηκε απολύτως κανένα πρόβλημα, με αποτέλεσμα να δημιουργηθεί ένας οδόντας του επίπεδου τροχού ,χωρίς ιδιαίτερα

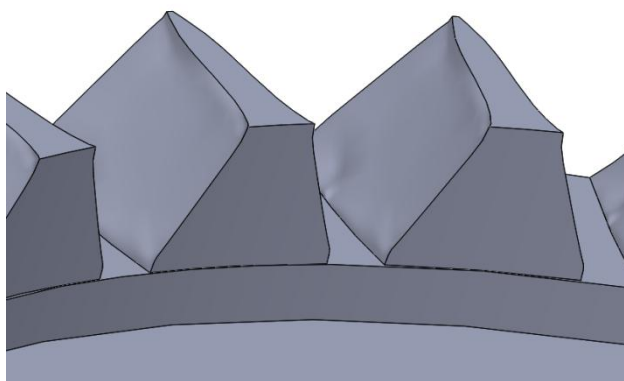
σφάλματα. Η συμμετρική επιφάνεια του οδόντα δεν δημιουργήθηκε ,αλλά προήλθε από την πρώτη με την εντολή Mirror.



**Εικόνα 4.1.1.2:** Φαίνονται οι καμπύλες επαφής πάνω στην επιφάνεια του επίπεδου τροχού

Τα σημεία που παρατηρήσαμε ότι έγιναν λάθη, είναι κυρίως στον τρόπο υπολογισμού του normal vector ,λόγω της μη καθετότητας της επιλογής των σημείων κατ'ύψος της επιφάνειας του οδόντα. Αυτό στην περίπτωση μας λειτούργησε περίπου σωστά, επειδή η συνιστώσα του κάθετου διανύσματος στον x άξονα ήταν πάντα πολύ κοντά στο μηδέν λόγω των πολύ μικρών διαφορών στις αποστάσεις ,αλλά για μεγαλύτερη ακρίβεια δεν συνιστάται.

Άλλο ένα σφάλμα που έγινε σε αυτό το μοντέλο, ήταν ο σχηματισμός του οδόντα με την εντολή Revolved Boss/Base. Είναι εμφανής η ατέλεια που υπάρχει στην ένωση του οδόντα με τον υπόλοιπο τροχό (την βάση του). Στην **εικόνα 4.1.1.3** φαίνεται η ατέλεια από το Revolved Boss/Base.

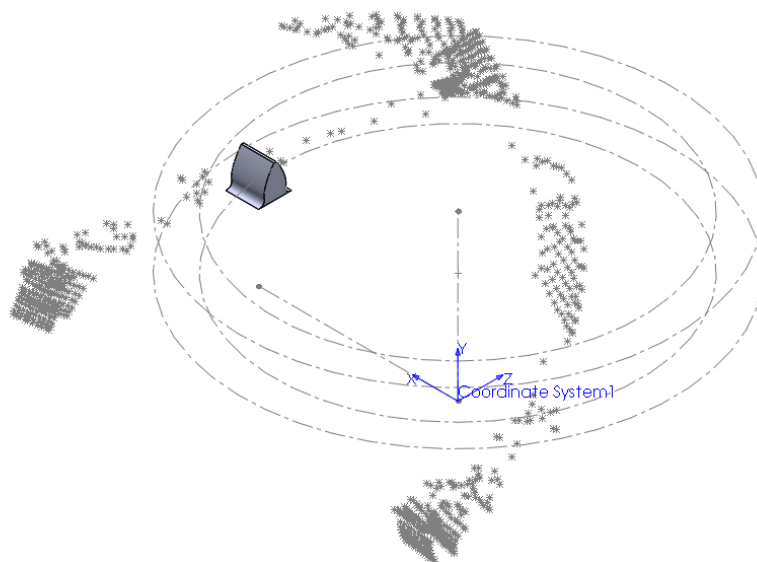


**Εικόνα 4.1.1.3:** Παρατηρούνται στην εικόνα οι ατέλειες από το Revolved Boss/Base



## Παράδειγμα 2:

Η δεύτερη προσπάθεια ,ήταν αρκετά σημαντική επειδή ολοκληρώθηκε και κατανοήθηκε πλήρως το excel σαν διαδικασία, αφού φυσικά έγιναν πολλά λάθη στους αρχικούς υπολογισμούς και βγήκαν λανθασμένα σημεία στο 3D-CAD. Οι αποτυχημένες προσπάθειες παρουσιάζονται στην **εικόνα 4.1.1.4**.



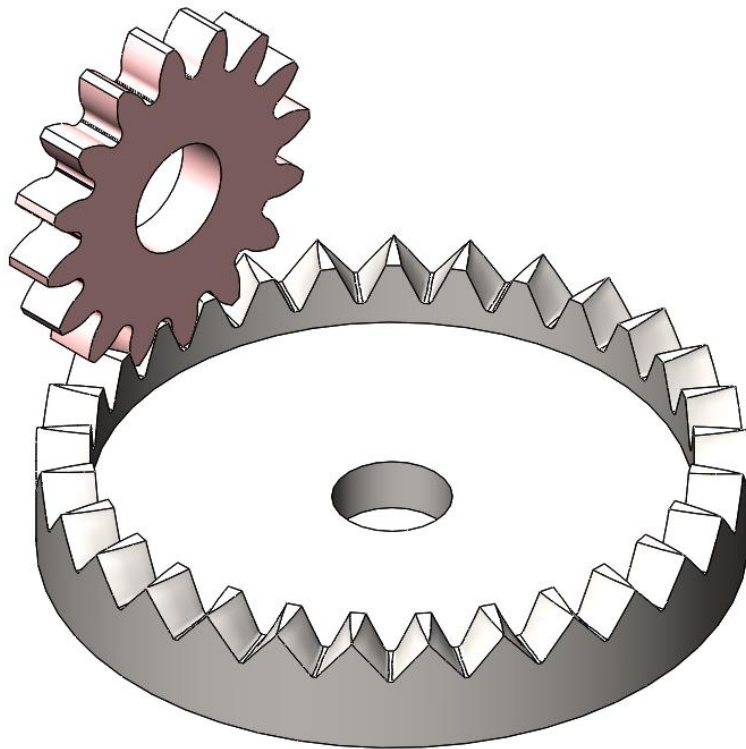
**Εικόνα 4.1.1.4:** Οι αποτυχημένες προσπάθειες μετατροπής των σημείων

Σε αυτό το παράδειγμα δεν επιτεύχθηκε η κατασκευή επίπεδου τροχού ,επειδή η διαδικασία αυτού του μοντέλου έγινε πολύπλοκη, λόγω των πολλών δεδομένων.

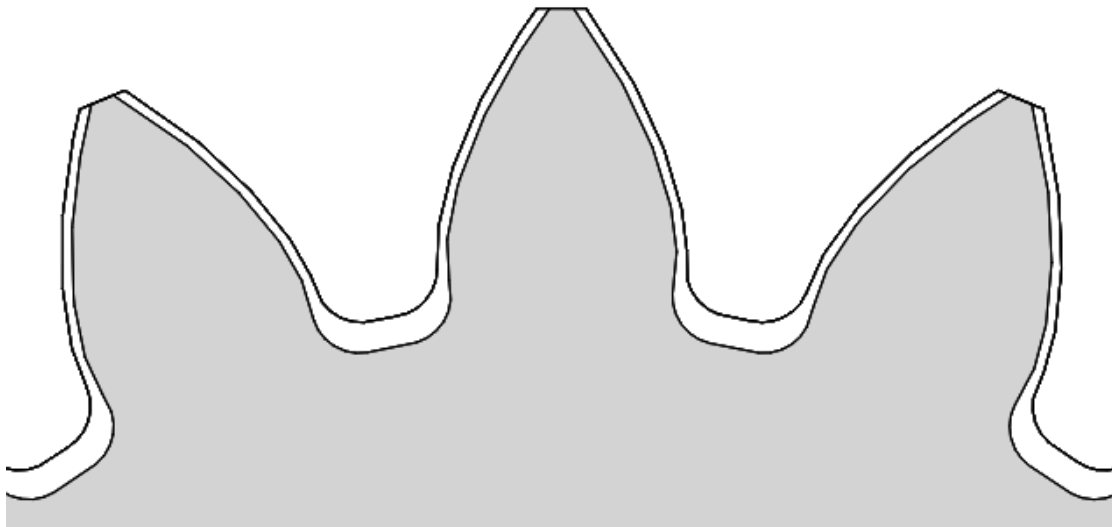
## Παράδειγμα 3:

Η τρίτη προσπάθεια ήταν πλήρως επιτυχημένη κυρίως επειδή υπήρχε αρκετή εμπειρία στους υπολογισμούς. Εκτός από τις δύο επιφάνειες που αναπτύχθηκαν διαφορετικά ,δημιουργήθηκε και το fillet της κάθε πλευράς. Στην **εικόνα 4.1.1.5** φαίνεται ο επίπεδος τροχός σε συνεργασία με το πινιόν.

Συγκρινόμενοι οι παραχθέντες τροχοί με αυτούς του Kisssoft δεν είχαν σημαντικές διαφορές κυρίως στο προφίλ του οδόντα που μας ενδιέφερε. Η διαφορά τους έγκειται στο φαινόμενο της χάρης στο πάχος του οδόντα, στην κατασκευή που έκανε το Kisssoft. Το πάχος του γεννήτορα στο Kisssoft είναι μεγαλύτερο από αυτό που χρησιμοποιήθηκε στα μοντέλα μας, για να μην έχει μηδενικό backlash. Στην **εικόνα 4.1.1.6** φαίνεται η διαφορά των δύο πινιόν. Η συμπεριφορά της συνεργασίας κρίθηκε και από το συναρμολογημένο μοντέλο που δημιουργήθηκε για να παρατηρηθεί η κίνηση.



**Εικόνα 4.1.1.5:** Συνεργασία τροχών (Παράδ. 2)



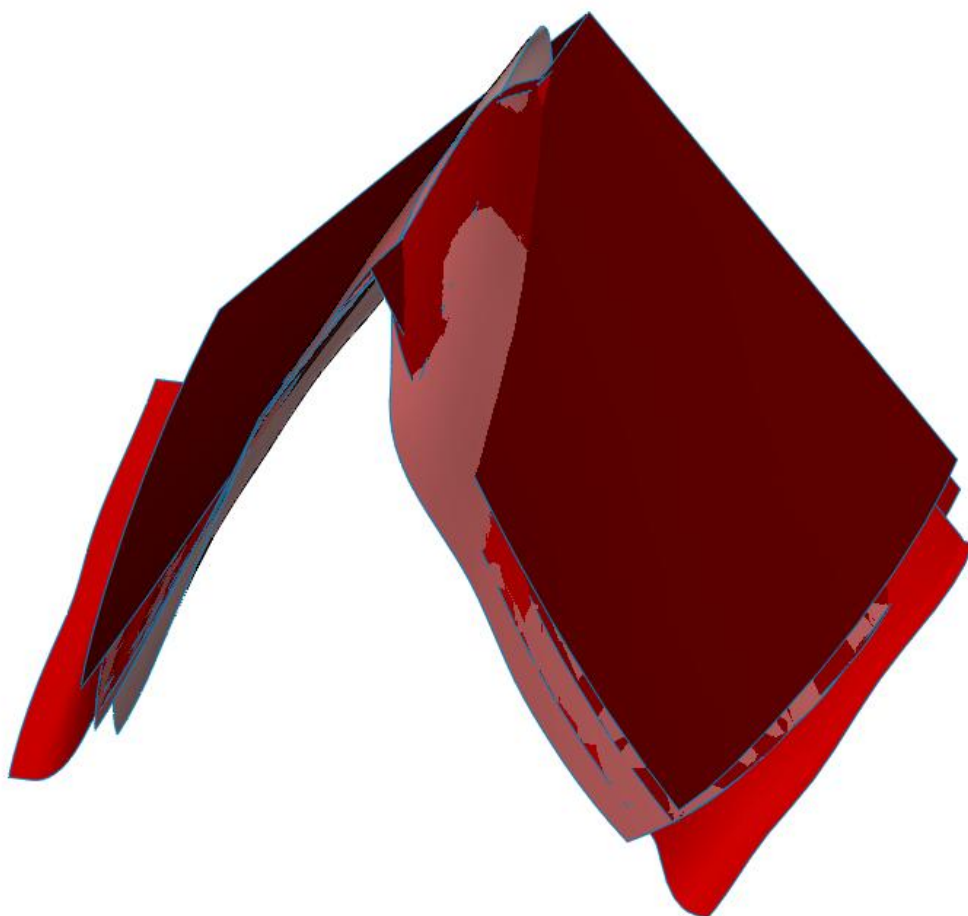
**Εικόνα 4.1.1.6:** Η διαφορά των γεννητόρων μεταξύ του Kisssoft και της θεωρίας που παρουσιάζεται

#### Παράδειγμα 4:

Αφού το τελευταίο μοντέλο ήταν σωστό από κάθε άποψη ,συνεχίζουμε την έρευνα γύρω από τα μετωπικά γρανάζια με ευθείς οδόντες ,πηγαίνοντας ένα βήμα παραπέρα στην χρήση αυτών των συνεργασιών.

Κάνοντας την σκέψη ότι ,εάν αλλάξουμε την θέση του πινιόν (πράγμα το οποίο μπορεί να γίνει , έχουμε δει για παράδειγμα να γίνεται μετατόπιση του πινιόν για να απορροφηθούν τα σφάλματα της μετάδοσης) θα αλλάξουμε και την διάμετρο που ορίζει το σημείο κύλισης και επομένως θα αλλάξει η σχέση μετάδοσης. Θεωρείται μία αρχή έρευνας πάνω στην λογική της συνεχόμενης αλλαγής της σχέσης μετάδοσης και αυτό είναι κάτι πολύ ενδιαφέρον.

Αναγκαστικά, προς το παρόν ,αυτό που μπορεί να γίνει, είναι να παραχθεί μία συνολική επιφάνεια ,η οποία να περιλαμβάνει τις επιφάνειες που παράγονται από τις μετατοπίσεις του πινιόν εμπρός ,εμπρός και πάνω ,πίσω και πίσω και κάτω. Στην **εικόνα 4.1.1.7** φαίνονται οι πέντε διαφορετικές επιφάνειες.



**Εικόνα 4.1.1.7:** Οι πέντε διαφορετικές επιφάνειες που αντιπροσωπεύουν τις διαφορετικές κινήσεις στον χώρο

Παρατηρήθηκε ότι ,οι επιφάνειες υπερκαλύπτουν η μία την άλλη ,γι'αυτό και έχει νόημα μόνο μικρή μετατόπιση, την οποία ελέγχουμε στην **εικόνα 4.1.1.7**.

Φυσικά ,η έρευνα για αυτή την λειτουργία των επίπεδων δεν σταματάει σε αυτό το σημείο. Θα λέγαμε ότι αυτή είναι η αρχή μίας καινούριας και καινοτομικής εφαρμογής.

#### **4.1.2 Ελικοειδής οδόντωση**

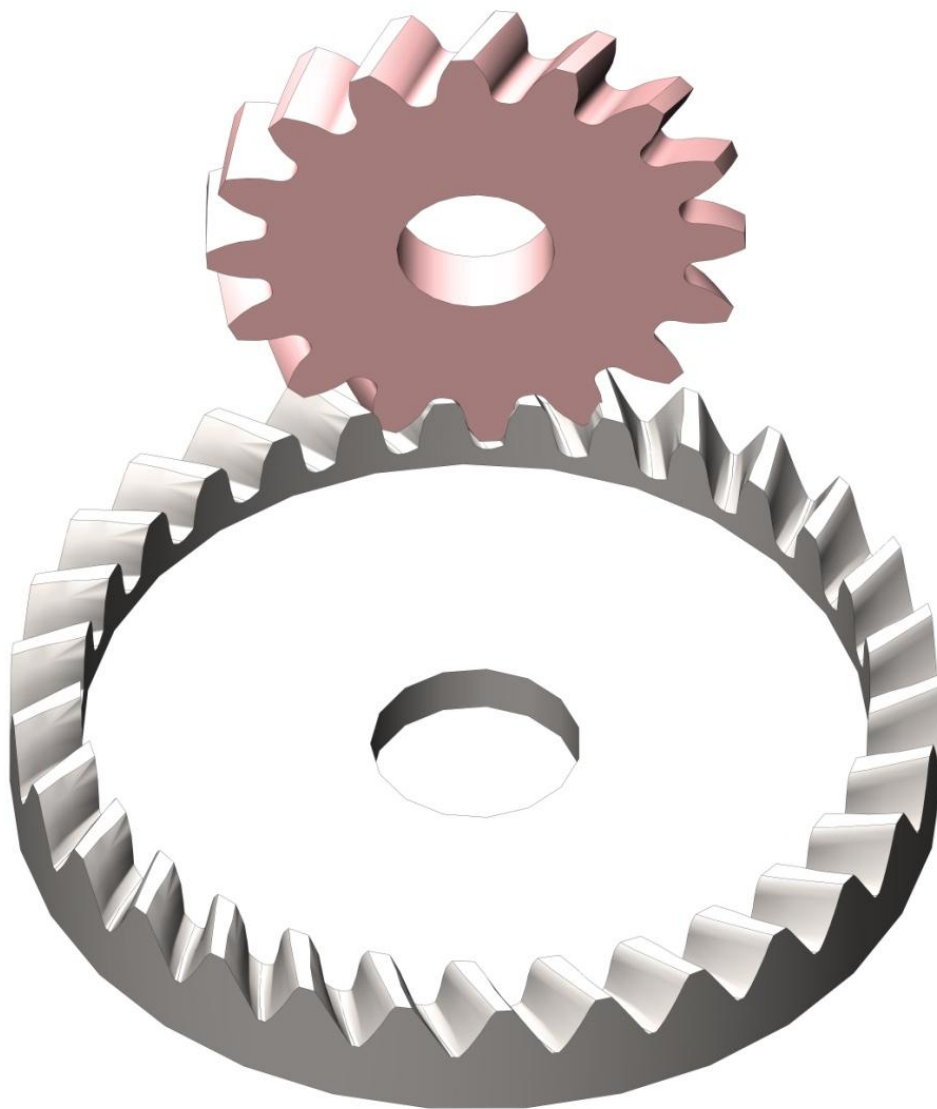
Εφόσον επιτεύχθηκε η δημιουργία των τροχών με ευθεία μετωπική οδόντωση και φτιάχτηκαν αρκετά μοντέλα, ελαχιστοποιώντας κατά πολύ τον χρόνο δημιουργίας και βελτιστοποιώντας με τον καιρό την γεωμετρία αποφασίσαμε να ασχοληθούμε με την ελικοειδή οδόντωση.

Στην περίπτωση των ελικοειδών οδοντώσεων περιμένει κανείς να συναντήσει αρκετά προβλήματα και που πρέπει να ξεπεράσει. Το βασικότερο θεωρείται η ασυμμετρία των πλευρών του οδόντα που προκαλείται λόγω της υποκοπής του που σχηματίζεται από τον γεννήτορα. Όπως είχαμε δει να σχηματίζεται στους παραγόμενους από το Kisssoft τροχούς στο κεφάλαιο 3.1.2.

##### **Παράδειγμα 5:**

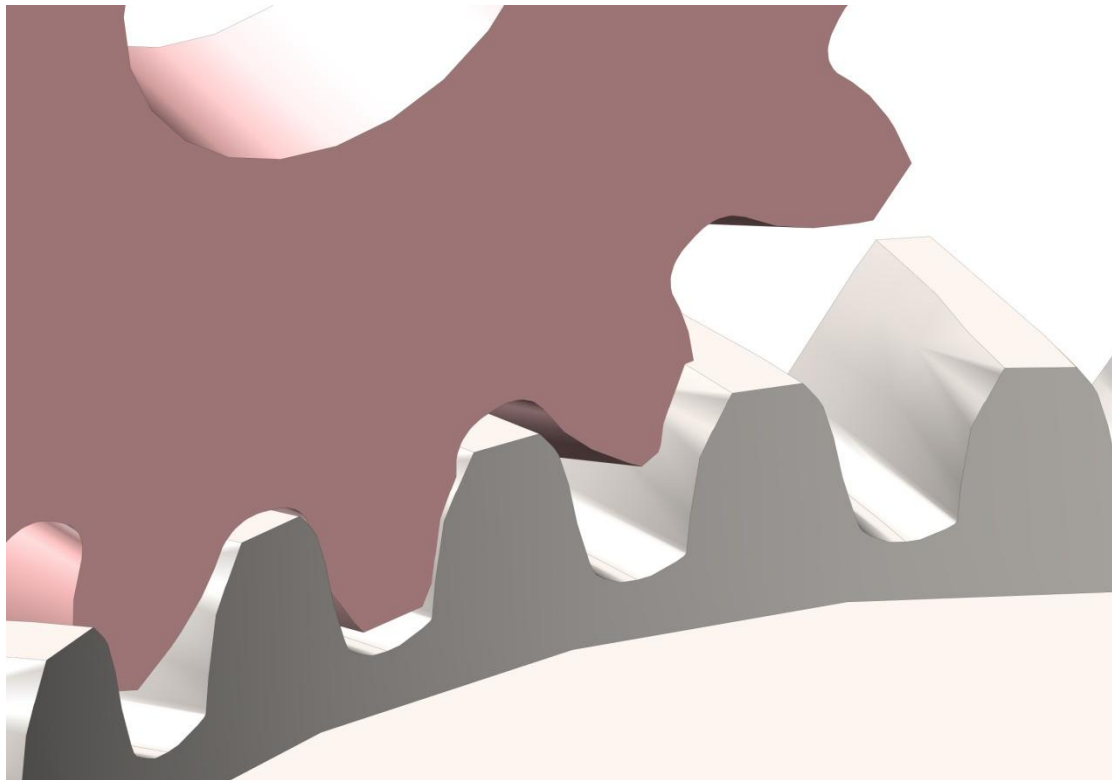
Στην πρώτη προσπάθεια που έγινε για την κατασκευή του συνεργαζόμενου τροχού ,παρουσιάστηκε το θέμα της συλλογής σημείων ,κυρίως για τον λόγο υπολογισμού του κάθετου διανύσματος. Για να μην υπάρξει πρόβλημα, διαλέχτηκαν σημεία, κρατώντας σταθερή την κατά την έννοια του πλάτους απόσταση συλλογής. Οπότε, εξασφαλίστηκε ότι δεν θα υπάρξει πρόβλημα στον υπολογισμό του κάθετου διανύσματος.

Δημιουργήθηκαν σε αυτήν την περίπτωση τα fillet των τροχών ,όπως έχει γίνει και προηγουμένως στις υπόλοιπες συνεργασίες με ευθείς οδόντες ,δίχως να αντιμετωπιστεί κανένα πρόβλημα. Επίσης τα χαρακτηριστικά του γεννήτορα είναι ακριβώς της ίδιας λογικής με τους ευθεία οδόντωση (συντελεστές ύψους, προφίλ κ.τ.λ.). Στην **εικόνα 4.1.2.1** φαίνεται η συνεργασία των τροχών.



**Εικόνα 4.1.2.1:**Συνεργασία ελικοειδούς οδόντωσης

Συγκρινόμενοι οι παραγόμενοι τροχοί με αυτούς του Kisssoft ,θα πρέπει να ειπωθεί ότι παρατηρείται η υποκοπή που δημιουργείται από τον γεννήτορα στην κεφαλή του οδόντα του συνεργαζόμενου τροχού. Έπειτα ,συγκρίνοντας το προφίλ της εσωτερικής ακτίνας του οδόντος του παραγόμενου επίπεδου τροχού ,παρατηρείται μεγαλύτερο πάχος από τον οδόντα του Kisssoft. Αυτό οφείλεται στην έλλειψη ακρίβειας της επιφάνειας που δημιουργήθηκε στο Solidworks. Στην **εικόνα 4.1.2.2** φαίνεται πολύ καθαρά εισχώρηση του πινιόν στον επίπεδο τροχό και η διαφορά του προφίλ του οδόντα .Το πρόβλημα της υποκοπής θα μελετηθεί αργότερα.



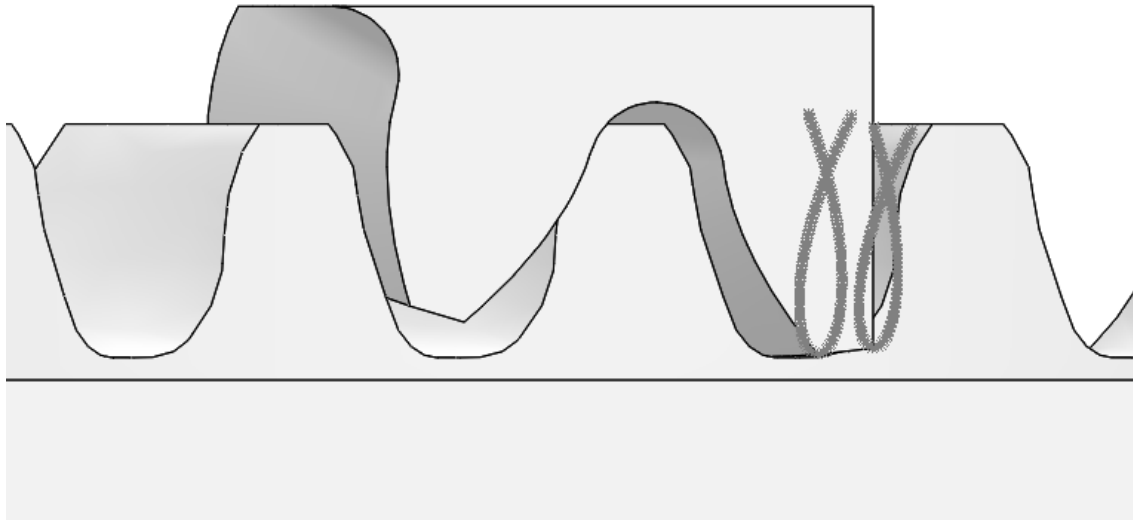
**Εικόνα 4.1.2.2:** Παρατήρηση των προβλημάτων της συνεργασίας

#### **Παράδειγμα 6:**

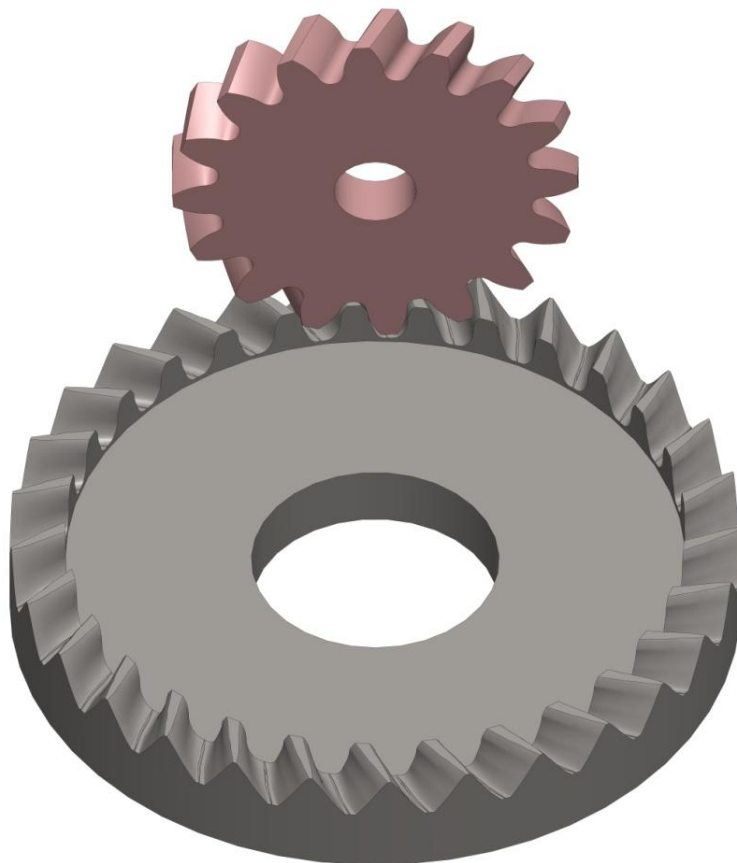
Σε επόμενη προσπάθεια που έγινε ,κατανοήθηκε η δημιουργία της υποκοπής και έγιναν σκέψεις για την αντιμετώπιση της. Αυτό που αποφασίστηκε ήταν να γίνει μία μελέτη του παραγόμενου τροχοειδούς από την ακμή του γεννήτορα. Αυτό θα έλυne την απορία μας σχετικά με την διαδρομή που ακολουθεί η ακμή και το πώς δημιουργεί την υποκοπή.

Συμβουλευόμενοι την θεωρία του Buckingham E.[3] φτιάχνονται τα τροχοειδή των ακμών και παρουσιάζονται στην **εικόνα 4.1.2.3** .Η μελέτη των υποκοπών λειτουργίας και η αφαίρεση των σχετιζόμενου όγκου από την γεωμετρία των επίπεδων τροχών δεν αποτελεί μέρος της παρούσας εργασίας.

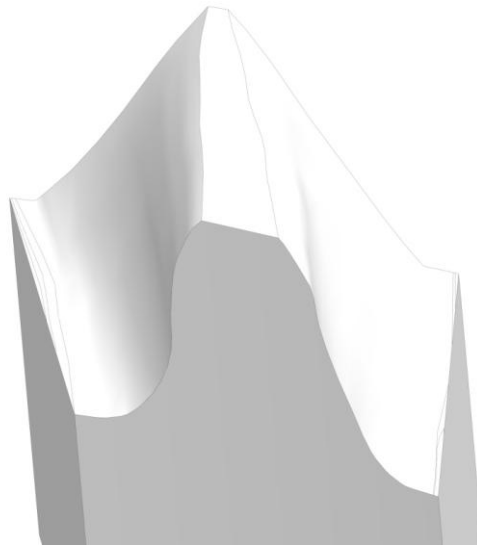
Επίσης αυξήθηκε η ακρίβεια και έγινε πιο προσεκτικά η δημιουργία των οδόντων με αποτέλεσμα να φτάσει πολύ κοντά η γεωμετρία ,την ακρίβεια που πρέπει να επιτευχθεί. Παρατηρήθηκε ότι η εισχώρηση του πινιόν (δηλαδή η υποκοπή) μειώθηκε αρκετά με την αύξηση της ακρίβειας. Τέλος και εδώ φυσικά ,έγινε απαραίτητη η εισαγωγή των fillet για την ολοκλήρωση της γεωμετρίας. Στην **εικόνα 4.1.2.4** φαίνεται η συνεργασία των οδόντων και στην **εικόνα 4.1.2.5** ο ένας μόνο οδόντας.



**εικόνα 4.1.2.3:** Δημιουργία τροχοειδών με την θεωρία του E.Buckingham



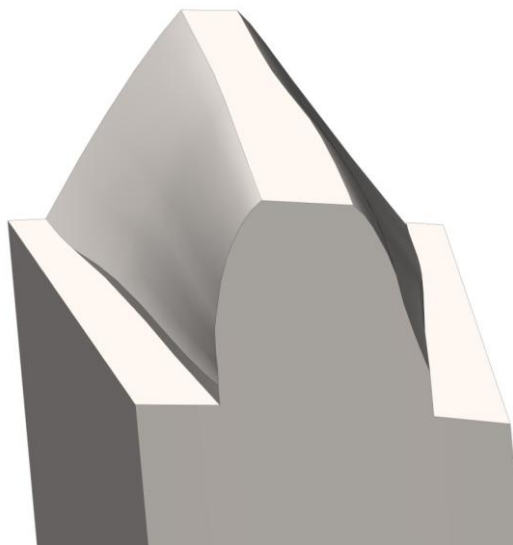
**εικόνα 4.1.2.4:** Συνεργασία ελικοειδούς οδόντωσης (παράδ. 6)



**εικόνα 4.1.2.5:** Οδόντας του επίπεδου τροχού

**Παράδειγμα 7:**

Σε αυτή την προσπάθεια έγινε μία τελική αλλαγή στην γεωμετρία ,με σκοπό την αποφυγή της υποκοπής. Ουσιαστικά ,δημιουργήθηκαν οδόντες επίπεδου τροχού από οδόντα γεννήτορα ακόμα πιο παχύ (δηλαδή χωρίς καθόλου backlash). Η εισχώρηση του πινιόν μειώθηκε ξανά όπως και στο παράδειγμα 6 αλλά δεν εξαλείφθηκε ,οπότε έγινε απαραίτητη η εφαρμογή κοψίματος των οδόντων ,όπως αναλύθηκε πιο πριν ,με την θεωρία του E. Buckingham. Στην **εικόνα 4.1.2.6** φαίνεται ο ένας οδόντας του επίπεδου τροχού. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα δεν κατασκευάστηκε το fillet του τροχού.



**εικόνα 4.1.2.6:** Οδόντας του επίπεδου τροχού



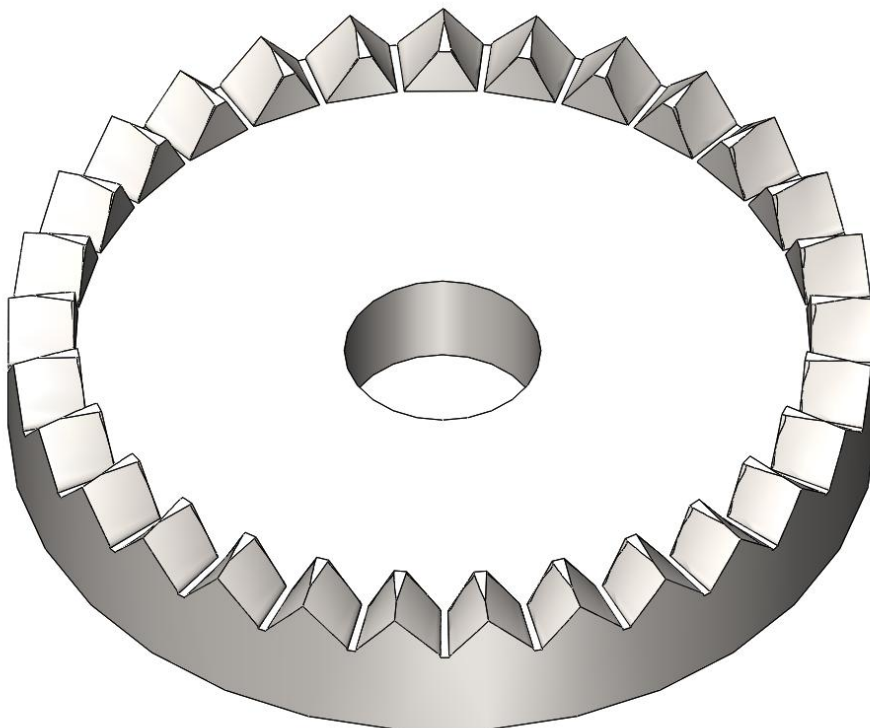
### 4.1.3 Ευθείας ασύμμετρης οδόντωσης

Εφόσον έγινε εύκολη η κατασκευή των επίπεδων τροχών με πινιόν ευθείας ή ελικοειδούς οδόντωσης, είναι απαραίτητο να ασχοληθούμε με τα ασύμμετρα γρανάζια.

Ειδικότερα στο εργαστήριο των Στοιχείων Μηχανών ,έχει γίνει μία μεγάλη έρευνα σχετικά με την ασυμμετρία των οδόντων (κινηματική γεωμετρική και δυναμική ανάλυση) ενός τροχού ,γι'αυτό επιλέξαμε να το αναφέρουμε ξεχωριστά από τα προηγούμενα κεφάλαια.

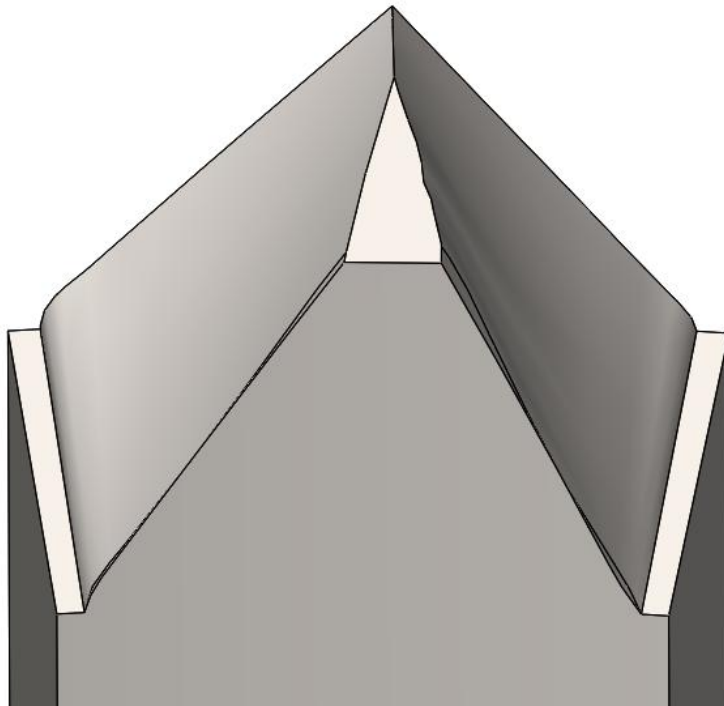
Πιο συγκεκριμένα, φτιάχνεται η μία πλευρά του οδόντα, η working side δηλαδή αυτή που συνεργάζεται με το άλλο γρανάζι, με γεννήτορα που έχει γωνία εξειλιγμένης 20 μοίρες και η άλλη πλευρά, η coast side δηλαδή αυτή που δεν έρχεται σε επαφή (θεωρητικά) με γεννήτορα 30 μοιρών.

Επίσης προσθέτονται τα fillet των πλευρών ,για να ολοκληρωθεί η γεωμετρία και να επιτευχθεί το αποτέλεσμα που παρατηρείται στην **εικόνα 4.1.3.1**, ενώ στην **εικόνα 4.1.3.2** φαίνεται ο ένας μόνο οδόντας.



**Εικόνα 4.1.3.1:** Απεικόνιση ασύμμετρου επίπεδου τροχού

Στα ασύμμετρα γρανάζια εισάγεται στην μη εργαζόμενη πλευρά (coast side) του οδόντα μεγαλύτερη γωνία εξειλιγμένης ,κυρίως για την ενίσχυση της αντοχής γενικά του οδόντος



**Εικόνα 4.1.3.2:** Οδόντας του επίπεδου τροχού

#### **4.1.4 Ευθεία ασυμβάτων αξόνων οδόντωση**

Στην συνέχεια και εφόσον έχουν γίνει όλες αυτές οι δοκιμές και έχουν δημιουργηθεί οι διάφοροι τροχοί, αποφασίστηκε να κατασκευαστούν μοντέλα off-axis οδόντωσης για να παρατηρηθεί η γεωμετρία του.

##### **Παράδειγμα 8:**

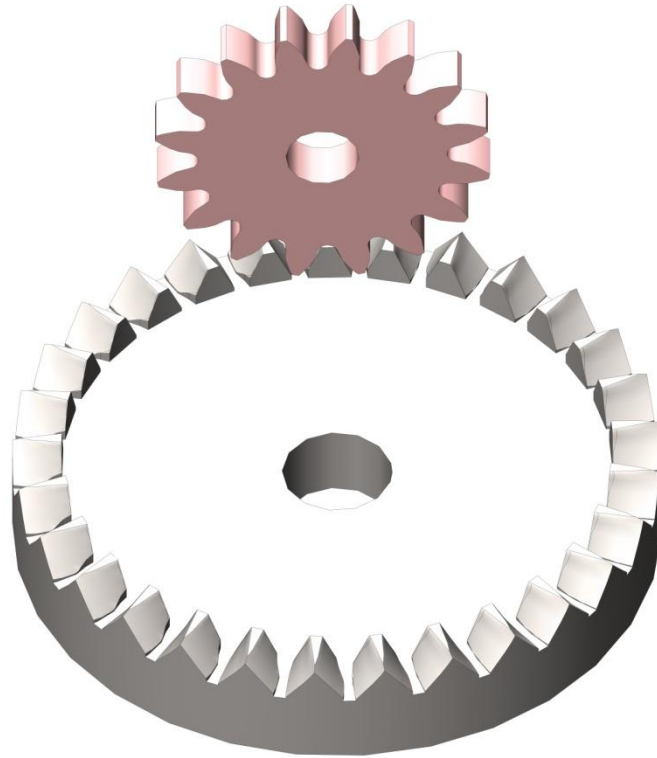
Αρχικά δημιουργήθηκε ένα μοντέλο με σκοπό την παρατήρηση της γεωμετρίας του. Είναι σημαντικό να εμφανιστούν τα σφάλματα μέσα από αυτό το μοντέλο για αυτό και δεν κατασκευάστηκαν τα fillet των τροχών. Στην **εικόνα 4.1.4.1** φαίνεται η συνεργασία των τροχών, ενώ στην **εικόνα 4.1.4.2** ο ένας μόνο οδόντας. Όπως διαπιστώνεται δεν δημιουργούνται υποκοπές όπως στους οδόντες του Kisssoft . Το offset στους συγκεκριμένους τροχούς είναι περίπου 2mm.

Για τον υπολογισμό των σημείων του παραγόμενου τροχού ,αλλάχτηκαν οι εξισώσεις όπως έχουν επισημανθεί στο κεφάλαιο 2.3

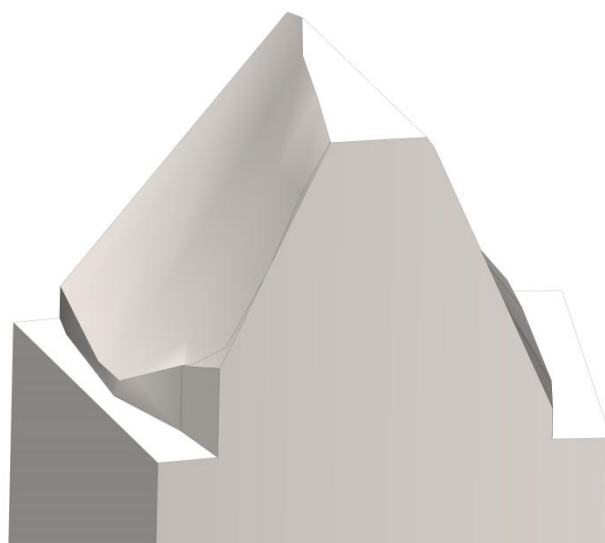
##### **Παράδειγμα 9:**

Σε επόμενη προσπάθεια δημιουργήθηκε ένα μοντέλο με μεγαλύτερη ακρίβεια. Επιλέχθηκε για λόγους ευκολίας να μην δημιουργηθεί το fillet ,επειδή το μοντέλο είναι μόνο για παρατήρηση. Στην **εικόνα 4.1.4.3** φαίνεται η συνεργασία των τροχών και στην **εικόνα 4.1.4.4** φαίνεται ο ένας μόνο οδόντας.

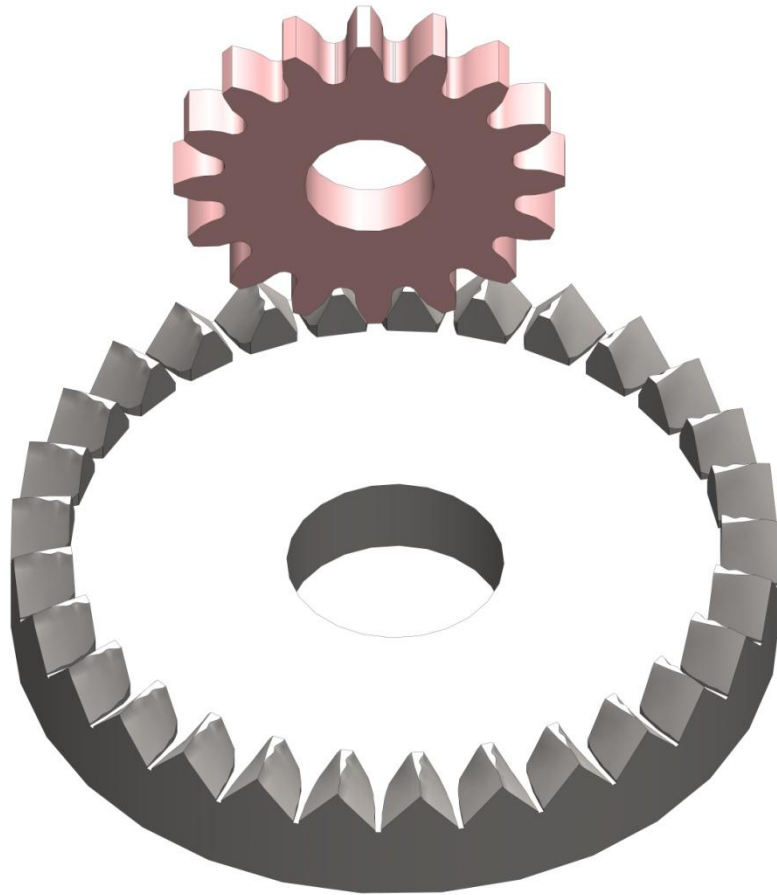
Αυτό που συμπεραίνεται είναι ότι δεν παρατηρούνται υποκοπές ,οι οποίες υπήρχαν στους παραγόμενους από το Kisssoft τροχούς ,τουλάχιστον για το offset των 3mm που επιλέξαμε για αρχή.



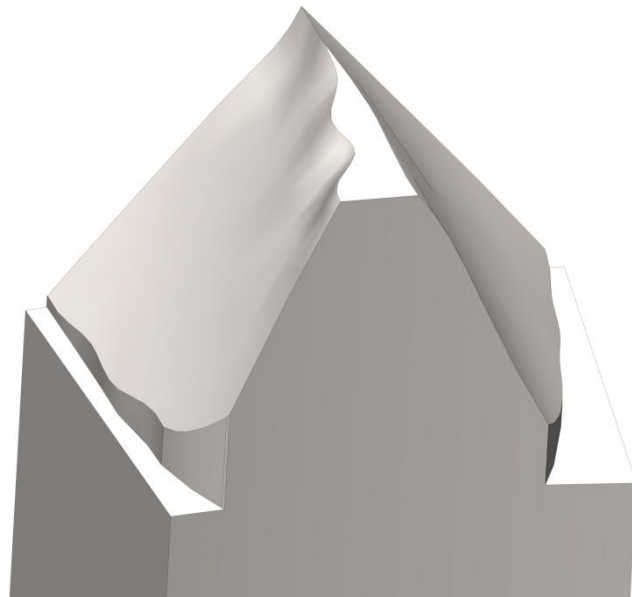
**εικόνα 4.1.4.1:** Συνεργασία ασυμβάτων αξόνων οδόντωσης (παράδ. 8)



**Εικόνα 4.1.4.2:** Οδόντας του επίπεδου τροχού



**εικόνα 4.1.4.3:** Συνεργασία ασυμβάτων αξόνων οδόντωσης (παράδ. 9)



**Εικόνα 4.1.4.4:** Οδόντας του επίπεδου τροχού

## 4.2 Πραγματικά μοντέλα παραγόμενα με την διαδικασία Rapid Prototyping

Το αρχικό πλάνο της διπλωματικής ήταν να κατασκευαστούν κάποια ζεύγη πινιόν-επίπεδου τροχού για την παρατήρηση της συνεργασίας και των σφαλμάτων που δημιουργούνται.

Λόγω των προβλημάτων που παρουσιάστηκαν στις γεωμετρίες των ελικοειδών και off-axis τροχών ,με αποτέλεσμα στο να μην καταλήγει η γεωμετρία σε κάποιο σταθερό σημείο, επιλέχθηκε να αποτυπωθεί η γεωμετρία των επίπεδων τροχών που παράχθηκαν από ευθεία μετωπική οδόντωση τυποποιημένου πινιόν, που μελετήθηκε περισσότερο από κάθε άλλη σε αυτή την εργασία, η οποία ταυτόχρονα σε σχέση με τις άλλες είναι και η πιο απλή.

Φτάνοντας στο σημείο της επιλογής του τρόπου κατασκευής ,απορρίψαμε τους περισσότερους τρόπους κατασκευής λόγω κόστους. Μία πρώτη ματιά στην γεωμετρία αυτών των οδόντων δείχνει ,παραδόξως ότι είναι εύκολη η κατασκευή από αλουμίνιο ή χάλυβα με φρέζες CNC τελευταίας τεχνολογίας, κάτι που παλιότερα δεν ίσχυε για τους επίπεδους τροχούς που έχουν κατασκευαστεί έως τώρα.

Η απλή αποτύπωση και όχι η κοπή ενός στοιχείου που θα αποτελέσει κομμάτι ,το οποίο θα παραλαμβάνει φορτίσεις (εξηγήθηκε πιο πριν) θα μπορούσε να γίνει σε CNC φρέζα αλλά το κόστος και ο χρόνος ενός τέτοιου εγχειρήματος μας απέτρεψε από την εφαρμογή του.

Επιλέχθηκε ο τρόπος κατασκευής με το νέο 3d-printer (Stratasys Fortus 360mc) που αγοράστηκε από το Εργαστήριο Ταχείας Κατασκευής και Προτυποποίησης. Η κατασκευή έγινε πολύ γρήγορα και με μικρό κόστος. Το κομμάτι μας αποτέλεσε δοκιμή (τέστ) για την σωστή παραγωγή τεμαχίων της μηχανής.

Η **εικόνα 4.2.1** δείχνει την μηχανή κατασκευής πρωτοτύπων, ενώ στις **εικόνες 4.2.2 , 4.2.3 , 4.2.4** δείχνονται τα κομμάτια που κατασκευάστηκαν.



**Εικόνα 4.2.1:** Η μηχανή ταχείας προτυποποίησης



**Εικόνα 4.2.2:** Το πινιόν της συνεργασίας



**Εικόνα 4.2.3:** Η συνεργασία των τροχών



**Εικόνα 4.2.4:** Οι συνεργαζόμενοι τροχοί ξεχωριστά

## Κεφάλαιο 5:ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Συμπεράσματα πάνω στην γεωμετρία των οδόντων έγιναν στην πορεία της διπλωματικής και σχολιάστηκαν στα επιμέρους κεφάλαια. Εδώ δεν θα αναφερθούμε σε αυτά αλλά θα γίνει μία γενική επισκόπηση της εργασίας πάνω στους επίπεδους τροχούς.

Είναι σημαντικό το ότι παρατηρήθηκαν πολύ μικρές διαφορές ανάμεσα στο KISSsoft και στα μοντέλα που αναπτύχθηκαν στην διπλωματική αυτή. Είναι δύο διαφορετικοί τρόποι παραγωγής επίπεδων τροχών, οι οποίοι έχουν ο καθένας τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματά τους.

Εάν ο τρόπος υπολογισμού που αναπτύχθηκε στην παρούσα διπλωματική βελτιστοποιηθεί, θα αποτελέσει την πρώτη αναλυτική έκφραση των σημείων επίπεδου τροχού που συνεργάζεται με τυποποιημένους τροχούς (ευθείας, ελικοειδούς και άλλων οδοντώσεων).

Είναι μία θεωρία, η οποία δημιουργεί σημείο προς σημείο (αναλυτικά) τον συνεργαζόμενο τροχό, εκφρασμένη με πολύ απλές σχέσεις (οι οποίες αποτυπώνονται και χρησιμοποιούνται μέσα από ένα excel) και δεν στηρίζεται σε εμπειρικούς τύπους και αλγόριθμους σύγκλισης αποτελεσμάτων, μέθοδοι, οι οποίοι χρησιμοποιούνται από άλλες θεωρίες (π.χ. του F.Litvin).

Ως προς τον τρόπο χρήσης της θεωρίας και δημιουργίας των επίπεδων τροχών, έγινε προσπάθεια στο να επιτευχθεί μεγάλη ταχύτητα στην κατασκευή από το μηδέν ενός τροχού. Ο χρόνος που διαπιστώθηκε ότι χρειάζεται για την κατασκευή ενός τροχού, έχοντας ως δεδομένο τον γεννήτορα, είναι κοντά στις δύο με τρεις ώρες.

Είναι πολύ σημαντικό να διασαφηνίσουμε το ότι η ακρίβεια που χρειάζεται στην παραγωγή των επίπεδων τροχών δεν είναι ανάλογη και του χρόνου κατασκευής. Μπορεί να αυξηθεί πολύ γρήγορα και εύκολα, απλά με υπολογιστικό κόστος.

Σαν συνέχεια της διπλωματικής, είναι επιθυμητό να ολοκληρωθούν τα χαρακτηριστικά της γεωμετρίας, να εισαχθεί η θεωρία τροχοειδούς του E. Buckingham, να μελετηθεί σε μεγάλο βαθμό η κίνηση του πινιόν ως προς οποιαδήποτε κατεύθυνση (παράδειγμα 4), με σκοπό να κριθεί το αν είναι εφικτή η αλλαγή μετάδοσης σχέσης μέσα από αυτούς τους τροχούς.



## REFERENCES

- [1] Βασίλειος Α.Σπιτάς (2001) ,Διδακτορική διατριβή: ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΚΑΙ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΒΕΛΤΙΣΤΩΝ ΟΔΟΝΤΩΣΕΩΝ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΑΝΑΛΥΤΙΚΩΝ, ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΩΝ ΜΕΘΟΔΩΝ
- [2] Faydor L. Litvin, Alfonso Fuentes (2004) ,Gear Geometry and Applied Theory,Cambridge University Press
- [3] E.Buckingham (1988) ,Analytical Mechanics of Gears, Dover publications, INC , New York
- [4] U.Kissling, S. Beerman ,Th.Hirn (), Kronenräder: Geometrie und Festigkeit
- [5] F.L. Litvin , A. Egelja , J. Tan, D.Y-D. Chen and G. Heath , Handbook on Face Gear Drives With a Spur Involute Pinion , National Aeronautics and Space Administration , Glenn Research Center
- [6] F.L. Litvin, J.-C. Wang , R.B. Bossier, Jr. , Y-J.D. Chen, G. Heath and D.G. Lewicki (1992), Face-Gear Drives: Design, Analysis, and Testing for Helicopter Transmission Applications , Prepared for the American Gear Manufacturers Association
- [7] F.L. Litvin , Alfonso Fuentes, Claudio Zanzi, and Matteo Pontiggia (2002) ,Face Gear Drive With Spur Involute Pinion: Geometry ,Generation by a Worm, Stress Analysis , National Aeronautics and Space Administration , Glenn Research Center
- [8] Robert F. Handschuh and David G. Lewicki, Gregory F. Heath, Robert B. Bossier, Jr. (1996) , Experimental Evaluation of Face Gears for Aerospace Drive System Applications, Prepared for the Seventh International Power Transmission and Gearing Conference
- [9] Faydor L. Litvin and Alfonso Fuentes, J. Matthew Hawkins, Robert F. Handschuh (2001) , Design, Generation and Tooth Contact Analysis (TCA) of Asymmetric Face Gear Drive With Modified Geometry, , National Aeronautics and Space Administration , Glenn Research Center
- [10] KISSsoft manual and examples