



**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**

Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών  
*«Παραγωγή και Διαχείριση Ενέργειας»*

---

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

*«Μοντελοποίηση των Θερμικών Απωλειών σε  
Μηχανές Vuilleumier»*

**Του Μεταπτυχιακού Φοιτητή**

Ιωάννη Ν. Κόλλια

**Επιβλέπων**

Εμμανουήλ Δ. Ρογδάκης  
Καθηγητής, Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών, ΕΜΠ

<b>ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ:</b>	<b>«Μοντελοποίηση των Θερμικών Απωλειών σε Μηχανές Vuilleumier»</b>
<b>ΦΟΙΤΗΤΗΣ:</b>	<b>Ιωάννης Ν. Κόλλιας</b>
<b>ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ:</b>	<b>Εμμανουήλ Δ. Ρογδάκης, Καθηγητής, Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών, ΕΜΠ</b>
<b>ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟ ΕΤΟΣ:</b>	<b>2015-16</b>

## Σύνοψη

Αντικείμενο της παρούσας μεταπτυχιακής εργασίας είναι η μελέτη των μοντέλων θερμικών απωλειών των μηχανών Vuilleumier. Αρχικά γίνεται αναφορά στις μηχανές Vuilleumier, τον τρόπο λειτουργίας τους, τον θερμοδυναμικό κύκλο που επιτελούν και τις ομοιότητες τους με τις μηχανές Stirling.

Αναφέρονται παλαιές και πιο νέες εφαρμογές των μηχανών VM. Γίνεται ανάλυση των μοντέλων απωλειών σε μηχανές Stirling των ερευνητών I.Urieli, D.Berchowitz, Y.Timoumi, W.Martini και J.Pfeiffer και επέκτασή τους σε μηχανές Vuilleumier.

Παρουσιάζονται συγκρίσεις των απωλειών της μηχανής Stirling GPU – 3 μεταξύ των τιμών που δίνουν οι ερευνητές και της παρούσας ανάλυσης. Την τεκμηρίωση των απωλειών για την GPU – 3 ακολουθεί η εφαρμογή των μοντέλων στην αντλία θερμότητας VM του Kuhl.

Στη συνέχεια παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των μοντέλων απωλειών με βάση το ισοθερμοκρασιακό μοντέλο ανάλυσης για τη μηχανή του Kuhl. Έπειτα εφαρμόζεται το ιδανικό αδιαβατικό μοντέλο ανάλυσης το οποίο αποτελεί βάση για ένα από τα μοντέλα απωλειών που προηγήθηκαν και γίνεται η σχετική σύγκριση με αυτό του ισοθερμοκρασιακού.

Τέλος, δίνονται τα προγράμματα του υπολογιστικού εργαλείου MATHCAD, τα οποία δομήθηκαν με τέτοιο τρόπο ώστε να εξυπηρετήσουν την ανάλυση που έγινε.

## Περίληψη

Η παρούσα μεταπτυχιακή εργασία εξετάζει τις διάφορες μορφές θερμικών απωλειών και τα μοντέλα τους σε μηχανές Vuilleumier. Σε μια εποχή που η αύξηση της θερμοκρασίας του πλανήτη αποτελεί μείζον περιβαλλοντικό ζήτημα και γίνονται προσπάθειες για μείωση των εκπομπών CO<sub>2</sub> η τεχνολογία των μηχανών Stirling και Vuilleumier θα μπορούσε να βοηθήσει σε σημαντικό βαθμό. Η λειτουργία των μηχανών αυτών με πηγή θερμότητας τον ήλιο και μόνο μπορεί να συμβάλει στην μετρίαση του προβλήματος αυτού.

Η εργασία χωρίζεται σε τέσσερα κεφάλαια. Στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται μία εισαγωγή στις μηχανές Vuilleumier, στα λειτουργικά χαρακτηριστικά τους και στον θερμοδυναμικό κύκλο που επιτελούν. Επίσης, παρουσιάζονται οι ομοιότητες και οι διαφορές με τις μηχανές Stirling, η μηχανή VM ελευθέρων εμβόλων καθώς και οι διάφορες κατηγορίες μοντέλων ανάλυσης.

Στο δεύτερο κεφάλαιο γίνεται αναφορά σε ορισμένες μηχανές VM παλαιές και νεότερες. Αφορούν εφαρμογές θέρμανσης και ψύξης σε οικίες καθώς και κρυογονικής ψύξης σε φορητά συστήματα νυχτερινής όρασης για στρατιωτικούς σκοπούς.

Στο τρίτο κεφάλαιο γίνεται η παρουσίαση των μοντέλων απωλειών σε μηχανές Stirling των ερευνητών I.Urieli, D.Berchowitz, Y.Timoumi, W.Martini και J.Pfeiffer και η επέκτασή τους σε μηχανές VM. Περιγράφονται οι διάφορες μορφές απωλειών, η ενεργειακή θεώρηση για κάθε ερευνητή και οι διάφορες εξισώσεις των μοντέλων τους. Στην αρχή του κεφαλαίου υπάρχει μία ενότητα που δίνει συνοπτικά τα μοντέλα για κάθε ερευνητή καθώς και ορισμένα γραφήματα.

Στο τέταρτο κεφάλαιο γίνεται αρχικά η τεκμηρίωση των μοντέλων στη μηχανή Stirling GPU – 3. Έπειτα παρουσιάζονται και συγκρίνονται μεταξύ τους τα διάφορα μοντέλα απωλειών με βάση το ισοθερμοκρασιακό μοντέλο, τα οποία εφαρμόστηκαν στην αντλία θερμότητας VM του Kuhl [19]. Στη συνέχεια δίνονται τα αποτελέσματα του ιδανικού αδιαβατικού μοντέλου ανάλυσης το οποίο αποτελεί βάση για ένα από τα μοντέλα απωλειών που προηγήθηκαν και γίνεται η σχετική σύγκριση με αυτό του ισοθερμοκρασιακού. Η ανάλυση έγινε με τη βοήθεια του υπολογιστικού εργαλείου MATHCAD.

Στο τέλος της εργασίας δίνεται παράρτημα των προγραμμάτων MATHCAD καθώς και ευρετήρια σχημάτων και πινάκων.

**POST-GRADUATE THESIS:**      «Modeling of Thermal Losses in Vuilleumier Machines»

**STUDENT:**                        Ioannis N. Kollias

**SUPERVISOR:**                 Emmanuil D. Rogdakis, Professor,  
School of Mechanical Engineering, NTUA

**ACADEMIC YEAR:**             2015-16

## **Abstract**

Subject of this thesis is the study of different models of thermal losses in Vuilleumier machines. Initially referring to Vuilleumier machines, how they work, the thermodynamic cycle they perform and their similarities with Stirling engines.

Some applications of VM machines, earlier and more recent are mentioned. Thermal losses models for Stirling engines of the researchers: I. Urieli, D. Berchowitz, Y. Timoumi, W. Martini and J. Pfeiffer are investigated and extended to Vuilleumier machines.

Comparisons of Stirling engine GPU – 3 losses between the researchers and the present analysis are conducted. Documentation of losses for GPU – 3 follows the implementation of models to Kuhl’s VM heat pump.

Results of models based on isothermal analysis for Kuhl’s machine are presented. Then, the ideal adiabatic analysis is applied for one of the models mentioned before and is compared with the isothermal analysis.

Finally, the computer programs that were developed using MATHCAD software are given. The programs were structured in accordance to the preceding analysis.

## **Summary**

This thesis examines the various forms of heat losses and models in Vuilleumier machines. At a time when the warming of the planet is a major environmental issue and efforts are made to reduce the CO<sub>2</sub> emissions, the technology of Stirling and Vuilleumier machines could help significantly. The operation of these machines with only heat source being the sun can help to alleviate this problem.

This study is divided in four chapters. The first chapter is an introduction to the Vuilleumier engines, operating characteristics and thermodynamic cycle performed. It also presents the similarities and differences with Stirling engines, the free piston VM machine and the various categories of analysis models.

The second chapter refers to certain VM machines (earlier and more recent). VM machines are used for heating and cooling applications in homes and cryogenic cooling in portable night vision equipment for military purposes.

The third chapter is a presentation of thermal losses models of the researchers: I. Urieli, D. Berchowitz, Y. Timoumi, W. Martini and J. Pfeiffer. These models were developed for Stirling engines, but in this work they were extended to Vuilleumier machines also. It follows a description of different types of losses, energy approach for each researcher and the various equations of each model. The third chapter begins with a section that describes briefly each model and gives some graphs.

The fourth chapter firstly refers to the documentation of models in Stirling engine GPU - 3. Then, comparisons between the various loss models based on the isothermal model are presented, using the VM heat pump of Dortmund university described by Kuhl [19] as a case study. Also, the ideal adiabatic analysis is applied for one of the models mentioned before and is compared with the isothermal. The analysis was performed using MATHCAD software.

At the end of this post graduate thesis an appendix of MATHCAD programs is attached as well as figures and table indexes.

*στη μητέρα μου, Έφη*

## Ευχαριστίες

Για την εκπόνηση της παρούσας μεταπτυχιακής εργασίας θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή κ. Ρογδάκη του οποίου οι οδηγίες, οι επισημάνσεις και γενικότερα η καθοδήγησή του έπαιξαν σημαντικό ρόλο. Επίσης, ευχαριστώ θερμά τον υποψήφιο διδάκτορα Δόγκα Γεώργιο του οποίου οι συμβουλές έπαιξαν καθοριστικό ρόλο στην ολοκλήρωση της εργασίας.

Τέλος, ένα μεγάλο ευχαριστώ στα κοντινά μου πρόσωπα τα οποία μου στάθηκαν σ' όλη τη διάρκεια των μεταπτυχιακών μου σπουδών.

## Περιεχόμενα

<b>1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΙΣ ΜΗΧΑΝΕΣ VUILLEUMIER.....</b>	<b>8</b>
1.1 Λίγα λόγια για τις μηχανές Vuilleumier, την χρήση και τον εφευρέτη τους .....	8
1.1.1 Ο θερμοδυναμικός κύκλος Vuilleumier .....	9
1.1.2 Ανάλυση διεργασιών αντλίας θερμότητας Vuilleumier .....	12
1.1.3 Εργαζόμενα αέρια μηχανής Vuilleumier.....	14
1.2 Ομοιότητες και διαφορές μηχανών Stirling με μηχανές Vuilleumier.....	15
1.3 Η μηχανή Vuilleumier ελευθέρων εμβόλων.....	16
1.4 Κατηγοριοποίηση μοντέλων ανάλυσης μηχανών Vuilleumier.....	17
<b>2. ΠΑΛΑΙΕΣ ΚΑΙ ΝΕΟΤΕΡΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΜΗΧΑΝΩΝ VUILLEUMIER .....</b>	<b>18</b>
2.1 Εφαρμογή αντλίας θερμότητας Vuilleumier ισχύος 20 kW για οικιακή χρήση.....	18
2.2 Εφαρμογή κρυογονικής μηχανής Vuilleumier ισχύος 1.6 W για χρήση σε στρατιωτικά φορητά συστήματα νυχτερινής όρασης (ανιχνευτές υπερύθρων) στις Η.Π.Α.....	21
2.3 Εφαρμογή μηχανής Vuilleumier ελευθέρων εμβόλων (FPVM) ισχύος 2.5 kW ως κλιματιστικό (air conditioner) από την εταιρεία SANYO στην Ιαπωνία .....	23
2.4 Η πειραματική αντλία θερμότητας Vuilleumier του Kuhl (1990).....	25
<b>3. ΜΟΝΤΕΛΑ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΘΕΡΜΙΚΩΝ ΑΠΩΛΕΙΩΝ ΣΕ ΜΗΧΑΝΕΣ VUILLEUMIER ...</b>	<b>28</b>
3.1 Εισαγωγή .....	28
3.2 Σύνοψη απωλειών μηχανών VM για κάθε ερευνητή .....	33
3.3 Το ισοθερμοκρασιακό μοντέλο.....	37
3.3.1 Η ισοθερμοκρασιακή ανάλυση.....	38
3.4 Μοντέλα ερευνητών .....	42
3.4.1 Μοντέλο εξισώσεων του I. Urieli.....	42
3.4.2 Μοντέλο εξισώσεων του D. Berchowitz.....	54
3.4.3 Μοντέλο εξισώσεων του Y. Timoumi.....	59
3.4.4 Μοντέλο εξισώσεων του W. Martini.....	61
3.4.5 Μοντέλο εξισώσεων του J. Pfeiffer.....	67

3.5 Το ιδανικό αδιαβατικό μοντέλο.....	71
<b>4. ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ ΜΟΝΤΕΛΩΝ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΣΤΗΝ ΑΝΤΛΙΑ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ VUILLEUMIER ΤΟΥ KUHL.....</b>	<b>77</b>
4.1 Εισαγωγή.....	77
4.2 Συγκρίσεις απωλειών για την μηχανή Stirling GPU-3.....	77
4.3 Αποτελέσματα ιδανικού ισοθερμοκρασιακού μοντέλου ανάλυσης.....	81
4.4 Αποτελέσματα μοντέλων απωλειών με βάση το ισοθερμικό μοντέλο .....	83
4.4.1 Αποτελέσματα μοντέλου του I. Urieli.....	83
4.4.2 Αποτελέσματα μοντέλου του D. Berchowitzz.....	85
4.4.3 Αποτελέσματα μοντέλου του Y. Timoumi .....	86
4.4.4 Αποτελέσματα μοντέλου του W. Martini .....	87
4.4.5 Αποτελέσματα μοντέλου του J. Pfeiffer.....	89
4.4.6 Αποτελέσματα συγκρίσεων των διαφόρων μοντέλων απωλειών.....	89
4.5 Αποτελέσματα ιδανικού αδιαβατικού μοντέλου ανάλυσης.....	93
4.5.1 Αποτελέσματα μοντέλου απωλειών του Berchowitzz με βάση το αδιαβατικό μοντέλο ανάλυσης.....	94
<b>Βιβλιογραφία.....</b>	<b>99</b>
<b>Παράρτημα.....</b>	<b>102</b>
<b>Ευρετήριο σχημάτων.....</b>	<b>190</b>
<b>Ευρετήριο πινάκων.....</b>	<b>193</b>

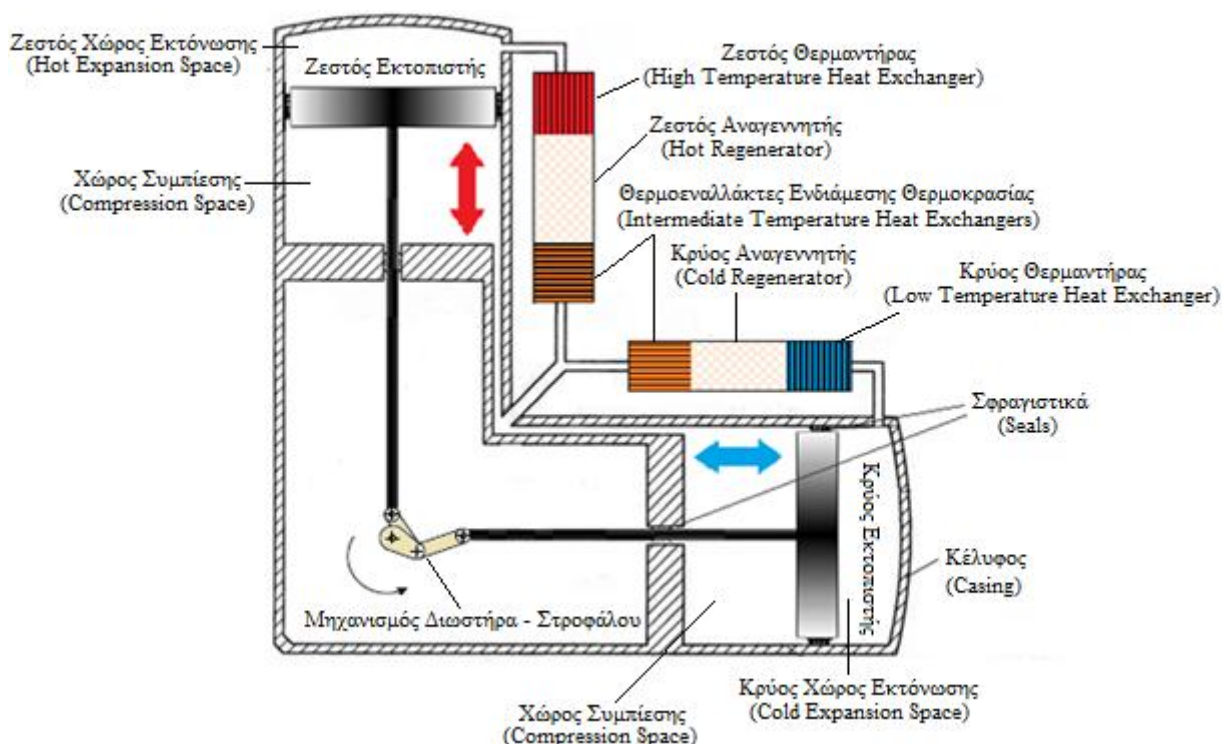
# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1<sup>ο</sup>

## ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΙΣ ΜΗΧΑΝΕΣ VUILLEUMIER

### 1.1 Λίγα λόγια για τις μηχανές Vuilleumier, την χρήση και τον εφευρέτη τους

Οι μηχανές Vuilleumier χρησιμοποιούνται ως αντλίες θερμότητας (heat pumps), ως ψύκτες (coolers) και ως κρυογονικές μηχανές (cryocoolers). Ο θερμοδυναμικός κύκλος που επιτελούν είναι ο κύκλος Vuilleumier. Οι μηχανές αυτές καθώς και ο αντίστοιχος κύκλος πήραν το όνομά τους από τον Rudolph Vuilleumier, ο οποίος παρουσίασε την εφευρέτησή του το 1918. Ο κύκλος VM<sup>1</sup> είναι συνδυασμός δύο κύκλων, ενός εργοπαραγωγού και ενός ψυκτικού. Ο πρώτος κύκλος δίνει το απαιτούμενο έργο για να λειτουργήσει ο δεύτερος.

Για τη λειτουργία των μηχανών Vuilleumier απαιτείται θερμότητα. Η θερμική ενέργεια μπορεί να προέλθει από πολλές μορφές ενέργειας όπως ενέργεια από καύση βιομάζας, ηλιακή ή ακόμα και πυρηνική. Ο τρόπος λειτουργίας τους μοιάζει αρκετά με τον αντίστοιχο των μηχανών Stirling. Αυτό σημαίνει ότι τα είδη των απωλειών τους είναι κοινά.



Σχήμα 1.1 : Η παραδοσιακή μηχανή Vuilleumier και τα χαρακτηριστικά της [2].

Στο σχήμα 1.1 φαίνεται η διάταξη της κλασικής μηχανής Vuilleumier. Οι μεταβαλλόμενοι χώροι της μηχανής είναι τρεις: ο ζεστός χώρος εκτόνωσης, ο κρύος χώρος εκτόνωσης και ο ενδιάμεσος χώρος συμπίεσης. Η μηχανή VM είναι δικύλινδρη με έναν διπλής δράσεως εκτοπιστή (double – acting displacer) σε κάθε κύλινδρο. Η κίνηση των εκτοπιστών είναι παλινδρομική και η διαφορά

<sup>1</sup> VM είναι η συντομογραφία της λέξης Vuilleumier.



φάσεως μεταξύ τους είναι  $90^\circ$ . Η διαφορά αυτή φάσεως θεωρείται η βέλτιστη και επιτυγχάνεται με την τοποθέτηση των κυλίνδρων σε σχήμα V- $90^\circ$  και μέσω της "οδήγησης" των εκτοπιστών και των διωστήρων τους από κοινό άξονα. Ο εκτοπιστής που μετατοπίζει το αέριο από το ζεστό χώρο στον ενδιάμεσο χώρο και αντιστρόφως ονομάζεται ζεστός εκτοπιστής. Αντίστοιχα, ο εκτοπιστής που μετατοπίζει το αέριο από το ενδιάμεσο χώρο στον κρύο χώρο και αντιστρόφως λέγεται κρύος εκτοπιστής.

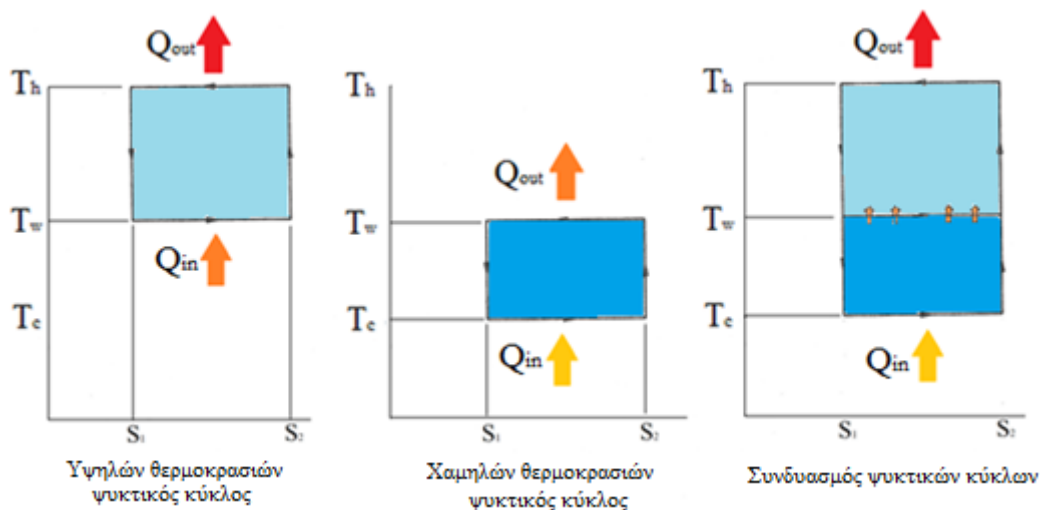
Ο κύλινδρος που περιβάλλει τον ζεστό εκτοπιστή ονομάζεται κύλινδρος κινητήρα (engine cylinder) ή ζεστός κύλινδρος ενώ ο κύλινδρος που περιβάλλει τον κρύο εκτοπιστή ονομάζεται κύλινδρος ψύξης (refrigerator cylinder) ή κρύος κύλινδρος. Ο ζεστός κύλινδρος περιβάλλεται από τρεις θερμοεναλλάκτες: τον ζεστό θερμοαντήρα, τον ζεστό αναγεννητή και τον πρώτο θερμοεναλλάκτη ενδιάμεσης θερμοκρασίας. Αντίστοιχα, ο κρύος κύλινδρος περιβάλλεται από τον κρύο θερμοαντήρα, τον κρύο αναγεννητή και τον δεύτερο θερμοεναλλάκτη ενδιάμεσης θερμοκρασίας. Στον κύλινδρο κινητήρα το εργαζόμενο μέσο δέχεται θερμότητα σε υψηλή θερμοκρασία και απορρίπτει θερμότητα σε ενδιάμεση θερμοκρασία. Το εργαζόμενο ρευστό στον κύλινδρο ψύξης δέχεται θερμότητα σε χαμηλή θερμοκρασία (παράγωγη ψύξης) και απορρίπτει θερμότητα στην ενδιάμεση θερμοκρασία με τη βοήθεια της αύξησης της πίεσεως (συμπίεση) από τον κύλινδρο κινητήρα. Η ωφέλιμη θερμότητα παρέχεται από τους δύο θερμοεναλλάκτες ενδιάμεσης θερμοκρασίας [2].

Οι αναγεννητές (regenerators) δέχονται θερμότητα απ' το αέριο και στη συνέχεια την προσδίδουν πάλι σ' αυτό. Έτσι μειώνονται οι θερμικές απώλειες της μηχανής και αυξάνεται ο βαθμός απόδοσής της.

### 1.1.1 Ο θερμοδυναμικός κύκλος Vuilleumier

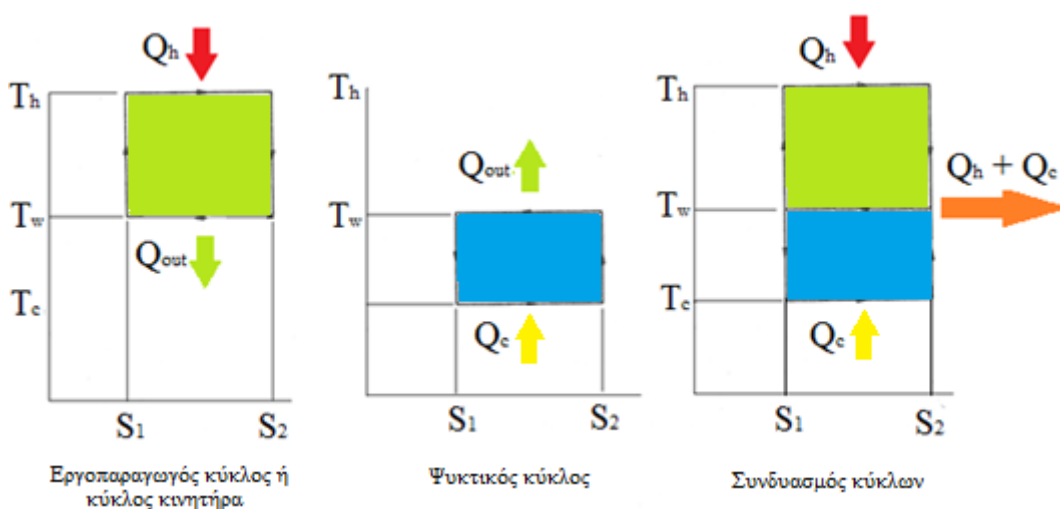
Αρχικά για να μπορέσουμε να αναλύσουμε τον θερμοδυναμικό κύκλο Vuilleumier θα πρέπει πρώτα να εξετάσουμε τη κατηγορία των στοιχειωδών διατάξεων κύκλων στην οποία ανήκει. Η κατηγορία αυτή αποτελείται από τον συνδυασμό δύο θερμοδυναμικών κύκλων (combined cycles) και έχει δύο εκδοχές.

Στην πρώτη εκδοχή έχουμε τον συνδυασμό δύο ψυκτικών κύκλων (refrigeration combined cycles) οι οποίοι αναπαριστώνται αριστερόστροφα σε διάγραμμα θερμοκρασίας – εντροπίας (T-S). Αυτός ο συνδυασμός κύκλων λειτουργεί σε στάδια (staged refrigerators) και στόχο έχει να αυξήσει τη θερμοκρασία της θερμότητας που απορρίπτεται στο προηγούμενο στάδιο. Για να λειτουργήσει κάθε κύκλος χρειάζεται εξωτερικό έργο. Η αύξηση του επιπέδου της θερμοκρασίας της θερμότητας που υπό κανονικές συνθήκες θα μεταφερόταν στο περιβάλλον από ένα κλιματιστικό, τώρα χρησιμοποιείται για άλλο σκοπό π.χ. για την παραγωγή ZNX (ζεστού νερού χρήσης). Το σχήμα 1.2 δείχνει σε διάγραμμα T-S τη λειτουργία του κύκλου αντλίας θερμότητας συνδυάζοντας δύο ψυκτικούς κύκλους [2].



Σχήμα 1.2 : Διαγράμματα T-S συνδυάζοντας δύο ψυκτικούς κύκλους [2].

Στην δεύτερη εκδοχή έχουμε τον συνδυασμό ενός εργοπαραγωγού κύκλου (δεξιόστροφο) με έναν ψυκτικό κύκλο (αριστερόστροφο) (engine – refrigerator combination). Στην περίπτωση αυτή απαιτείται η είσοδος θερμότητας στον εργοπαραγωγό κύκλο ή κύκλο κινητήρα (engine cycle). Ο κύκλος που προκύπτει απ’ τον συνδυασμό ενός ιδανικού ψυκτικού κύκλου και ενός ιδανικού κύκλου κινητήρα (σχήμα 1.3) λειτουργεί σε τρεις χαρακτηριστικές θερμοκρασίες ( $T_h$ ,  $T_w$ ,  $T_c$ )<sup>2</sup> οι οποίες ορίζουν τον συντελεστή συμπεριφοράς του (COP) [2].



Σχήμα 1.3 : Συνδυασμός ενός εργοπαραγωγού με έναν ψυκτικό κύκλο [2].

Εξισώνοντας τις διαφορές εντροπίας έχουμε την εξής σχέση :

$$\frac{Q_h}{T_h} + \frac{Q_c}{T_c} = \frac{Q_h + Q_c}{T_w} \quad (1.1)$$

<sup>2</sup> Με  $T_h$  συμβολίζεται η υψηλή θερμοκρασία, με  $T_w$  συμβολίζεται η ενδιάμεση θερμοκρασία και με  $T_c$  συμβολίζεται η χαμηλή θερμοκρασία.

Η σχέση (1.1) γράφεται και ως εξής:

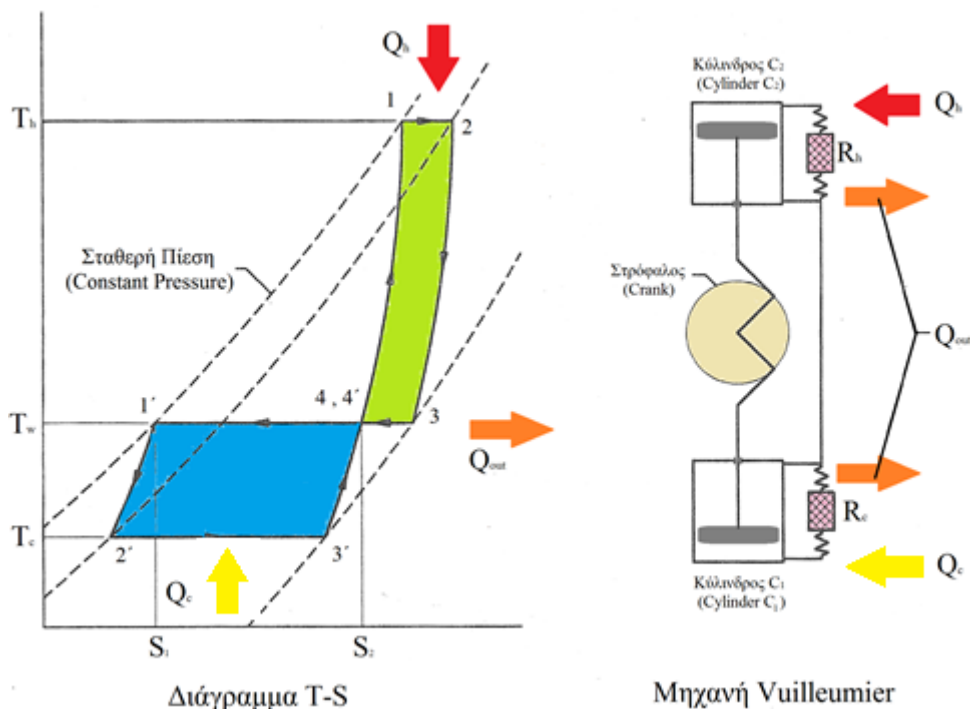
$$Q_c = \frac{Q_h \cdot (T_h - T_w) \cdot T_c}{T_h \cdot (T_w - T_c)} \quad (1.2)$$

Έτσι ο θερμικός και ο ψυκτικός συντελεστής απόδοσης  $COP_i^3$  του ιδανικού κύκλου είναι ίσοι με :

$$COP_{h,i} = \frac{Q_h + Q_c}{Q_h} = \frac{T_w \cdot (T_h - T_c)}{T_h \cdot (T_w - T_c)} \quad (1.3)$$

$$COP_{c,i} = COP_{h,i} - 1 = \frac{Q_c}{Q_h} = \frac{T_c \cdot (T_h - T_w)}{T_h \cdot (T_w - T_c)} \quad (1.4)$$

Μία πρακτική παραλλαγή ενός ολοκληρωμένου συνδυασμού κύκλου κινητήρα με ψυκτικό (εκδοχή β) αποτελεί ο κύκλος Vuilleumier. Ο κύκλος VM και η κλασική εφαρμογή του, που περιγράφεται στο σχήμα 1.4 , μοιάζει αρκετά με τις ιδέες του Vuilleumier σχετικά με την πατέντα του στις Η.Π.Α το 1918 [2].



Σχήμα 1.4 : Ο θερμοδυναμικός κύκλος Vuilleumier [2].

Η συνολική διαδικασία συνδυάζει τις επιδράσεις του εργοπαραγωγού κύκλου 1 – 2 – 3 – 4 (πράσινο χρώμα) , ο οποίος ενεργεί άμεσα στον ψυκτικό κύκλο 1' – 2' – 3' – 4' (μπλε χρώμα). Οι δύο κύκλοι λειτουργούν στις ίδιες πιέσεις όπως 1 – 1' , 2 – 2' , 3 – 3' , των οποίων οι

<sup>3</sup> Ο δείκτης i προέρχεται απ' την αγγλική λέξη ideal.

γραμμές στο διάγραμμα T-S απεικονίζονται διακεκομμένες. Οι θερμοδυναμικές μεταβολές που απαρτίζουν τους δύο κύκλους έχουν ως εξής :

*Ιδανικός κύκλος Vuilleumier (VM) – Τμήμα εργοπαραγωγό (Κύλινδρος C<sub>2</sub>)*

- 1 – 2 : Θερμότητα  $Q_h$  εισάγεται στο εργαζόμενο αέριο μέσω του ζεστού θερμαντήρα σε θερμοκρασία  $T_h$  με αποτέλεσμα την εκτόνωσή του (ισοθερμοκρασιακή εκτόνωση).
- 2 – 3 : Το αέριο απελευθερώνει ισοχωρικά την θερμότητά του στον ζεστό αναγεννητή (ισόχωρη ψύξη).
- 3 – 4 : Συμπιέζεται θερμικά και ωφέλιμη θερμότητα απελευθερώνεται μέσω του ενός θερμοεναλλάκτη σε ενδιάμεση θερμοκρασία  $T_w$  (ισοθερμοκρασιακή συμπίεση).
- 4 – 1 : Απορροφά ισοχωρικά τη θερμότητα που είχε αποθηκευτεί στον ζεστό αναγεννητή  $R_h$  (ισόχωρη θέρμανση).

*Ιδανικός κύκλος Vuilleumier (VM) – Τμήμα ψυκτικό (Κύλινδρος C<sub>1</sub>)*

- 1' – 2' : Το υψηλής πίεσης εργαζόμενο αέριο ρέει μέσα στον κρύο αναγεννητή  $R_c$  αποβάλλοντας ισοχωρικά τη θερμότητά του (ισόχωρη ψύξη).
- 2' – 3' : Θερμότητα  $Q_c$  σε χαμηλή θερμοκρασία  $T_c$  απορροφάται συνεχώς μέσω του κρύου θερμαντήρα ενώ η πίεση μειώνεται από  $P_2'$  σε  $P_3'$  (ισοθερμοκρασιακή εκτόνωση).
- 3' – 4' : Το χαμηλής θερμοκρασίας εργαζόμενο αέριο απορροφά ισοχωρικά θερμότητα απ' τον κρύο αναγεννητή  $R_c$  (ισόχωρη θέρμανση).
- 4' – 1' : Θερμότητα απορρίπτεται μέσω του δεύτερου θερμοεναλλάκτη σε ενδιάμεση θερμοκρασία  $T_w$  ενώ το αέριο συμπιέζεται από τη χαμηλή πίεση  $P_4'$  στην υψηλή πίεση  $P_1'$  (ισοθερμοκρασιακή συμπίεση).

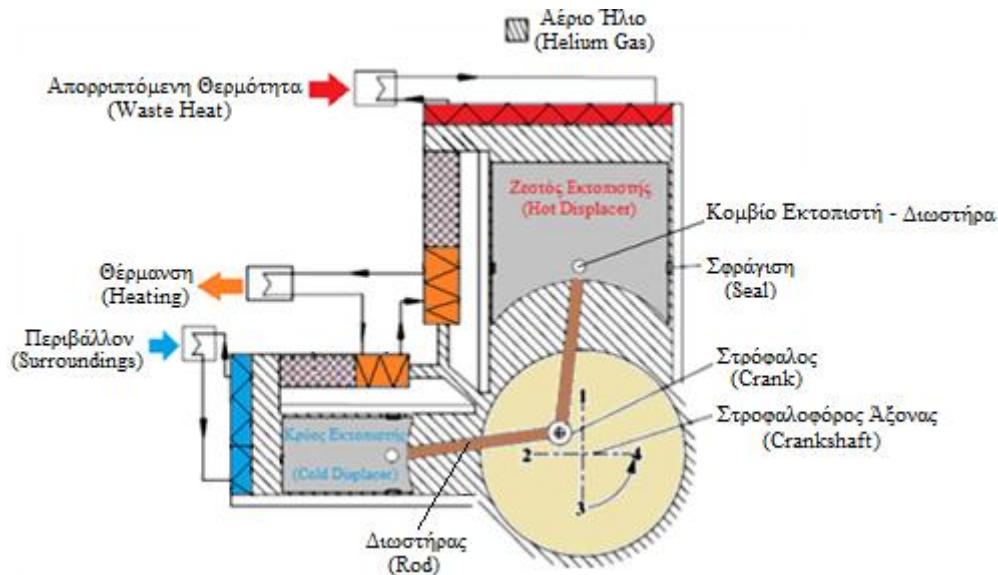
Στο ψυκτικό τμήμα του κύκλου η θερμότητα  $Q_c$ , η οποία παρέχεται σε θερμοκρασία  $T_c$ , θα μεταφερθεί σε υψηλότερη θερμοκρασία  $T_w$  και η ωφέλιμη θερμότητα  $Q_{out}$  θα απορριφθεί και από τα δύο τμήματα (ψυκτικό και εργοπαραγωγό). Τα εμβαδά των επιφανειών 1 – 2 – 3 – 4 και 1' – 2' – 3' – 4' είναι ίσα μεταξύ τους. Το έργο που δίνει το εργοπαραγωγό τμήμα (engine segment) είναι ίσο με το έργο που απορροφά το ψυκτικό τμήμα (refrigerator segment) [2].

### 1.1.2 Ανάλυση διεργασιών αντλίας θερμότητας Vuilleumier

Το σχήμα 1.5 απεικονίζει μια αντλία θερμότητας κύκλου VM με στρόφαλο - διωστήρα. Το εργαζόμενο μέσο είναι το αέριο ήλιο. Ο κύκλος ξεκινάει στο σημείο 1 και ολόκληρη η διαδικασία έχει ως εξής :

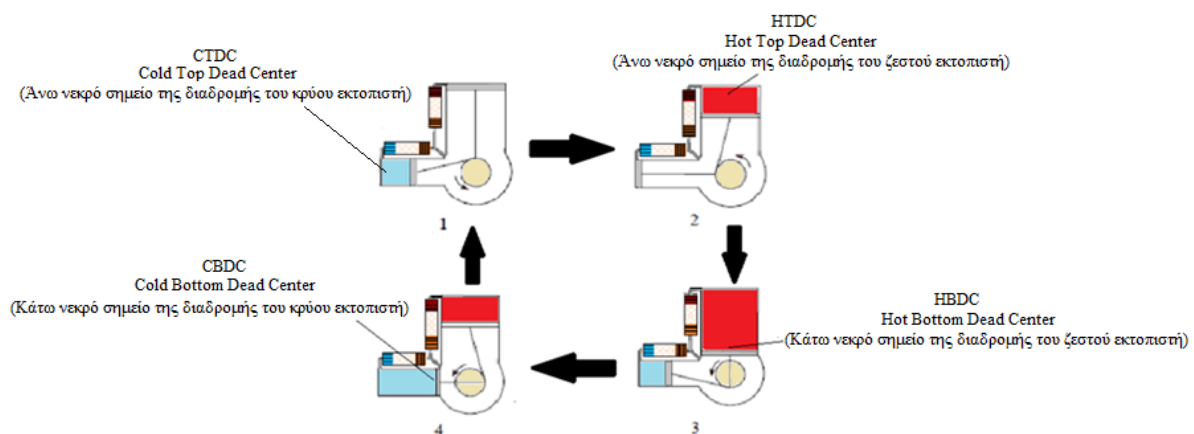
Διεργασία 1 → 2 : Ο στροφαλοφόρος άξονας στρέφεται αριστερόστροφα, με αποτέλεσμα ο ζεστός εκτοπιστής να ωθείται προς το κάτω νεκρό σημείο της διαδρομής του ενώ ο κρύος εκτοπιστής κινείται προς το άνω νεκρό του σημείο. Κατά την διάρκεια της διεργασίας αυτής, ο όγκος του ζεστού χώρου αυξάνεται σε αντίθεση με τον όγκο του κρύου χώρου που βαίνει μειούμενος. Καθώς ο ζεστός εκτοπιστής κινείται προς το κάτω νεκρό σημείο (σχήμα 1.6), το

εργαζόμενο αέριο, ευρισκόμενο στον χώρο ενδιάμεσης θερμοκρασίας, μετατοπίζεται μέσω του ζεστού αναγεννητή στον ζεστό χώρο απορροφώντας θερμότητα. Αντίστοιχα το αέριο στον κρύο κύλινδρο ωθείται από τον κρύο εκτοπιστή στον κρύο αναγεννητή και ύστερα στον χώρο ενδιάμεσης θερμοκρασίας με αποτέλεσμα τη θέρμανσή του. Τόσο η θερμοκρασία όσο και η πίεση του κύκλου VM αυξάνονται με γρήγορο ρυθμό. Η θερμική ισχύς εξόδου παρέχεται από τους θερμοεναλλάκτες ενδιάμεσης θερμοκρασίας [3].



Σχήμα 1.5 : Αντλία θερμότητας Vuilleumier με στρόφαλο - διωστήρα [3].

Διεργασία 2 → 3 : Ο στρόφαλος στρέφεται απ' τα αριστερά προς τα κάτω. Ο ζεστός εκτοπιστής συνεχίζει να κινείται προς το κάτω νεκρό σημείο. Εντωμεταξύ, ο κρύος εκτοπιστής κινείται από το άνω νεκρό σημείο στο κάτω νεκρό σημείο της διαδρομής του (σχήμα 1.6). Οι όγκοι και των δύο εργαζόμενων χώρων αυξάνονται. Το εργαζόμενο αέριο ευρισκόμενο στον χώρο ενδιάμεσης θερμοκρασίας ψύχεται καθώς περνά από τον κρύο αναγεννητή, τον κρύο θερμαντήρα και καταλήγει στον κρύο χώρο. Το αέριο στο ζεστό χώρο απορροφά θερμότητα που του παρέχεται από τον ζεστό θερμαντήρα ενώ το αέριο στον κρύο χώρο απορροφά θερμότητα απ' τα περίχωρα μέσω του κρύου θερμαντήρα.



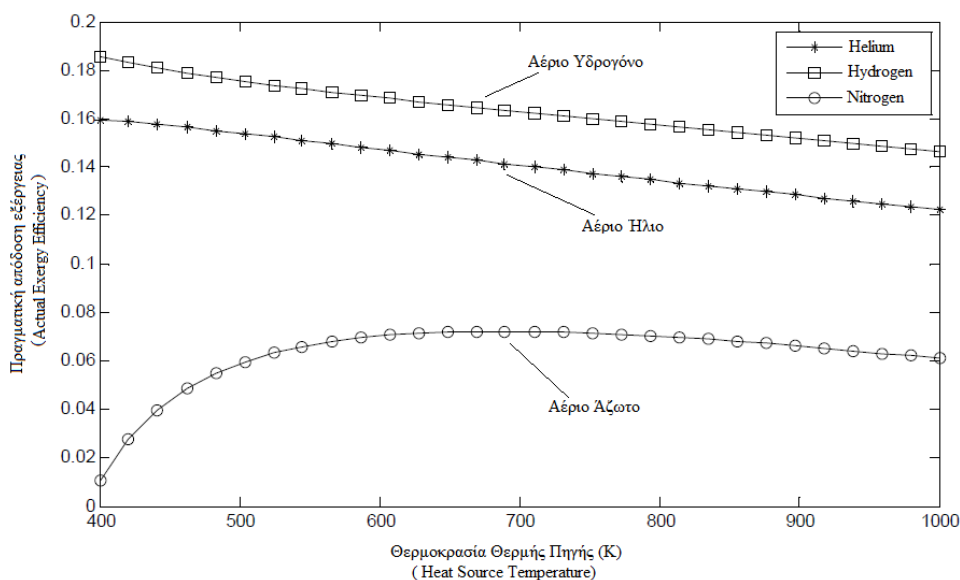
Σχήμα 1.6 : Παραστατική απεικόνιση κύκλου αντλίας θερμότητας VM [3].

Διεργασία 3 → 4 : Ο στρόφαλος στρέφεται από κάτω προς τα δεξιά. Ο ζεστός εκτοπιστής αφήνει το κάτω νεκρό σημείο και μετακινείται προς το άνω νεκρό σημείο της διαδρομής του ενώ ο κρύος εκτοπιστής συνεχίζει να κινείται προς το κάτω νεκρό του σημείο [3]. Έτσι ο όγκος του ζεστού χώρου μειώνεται ενώ ο όγκος του κρύου χώρου αυξάνεται. Κατά τη διεργασία αυτή το αέριο που βρίσκεται στο ζεστό χώρο αναγκάζεται να κινηθεί προς τον χώρο ενδιάμεσης θερμοκρασίας περνώντας από τον ζεστό αναγεννητή. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα τη ψύξη του στην ενδιάμεση θερμοκρασία. Η πτώση της θερμοκρασίας έχει σαν αποτέλεσμα και την πτώση πίεσης.

Διεργασία 4 → 1 : Η διεργασία αυτή ολοκληρώνει τον κύκλο VM. Ο ζεστός εκτοπιστής κινείται προς το άνω νεκρό σημείο του και ο κρύος εκτοπιστής αφήνει το κάτω νεκρό σημείο και μετακινείται προς το άνω νεκρό σημείο της διαδρομής του. Ο όγκος του ζεστού χώρου μειώνεται και γίνεται σχεδόν μηδενικός ενώ ο όγκος του κρύου χώρου μειώνεται συνεχώς. Το αέριο στο ζεστό χώρο ψύχεται καθώς περνάει από τον ζεστό αναγεννητή και καταλήγει στο χώρο ενδιάμεσης θερμοκρασίας. Ένα μέρος του αερίου στον κρύο χώρο θερμαίνεται καθώς περνάει από τον κρύο θερμαντήρα και τον κρύο αναγεννητή στον χώρο ενδιάμεσης θερμοκρασίας [3].

### 1.1.3 Εργαζόμενα αέρια μηχανής Vuilleumier

Τα εργαζόμενα αέρια, που έχουν εφαρμογή στον θερμοδυναμικό κύκλο Vuilleumier, είναι το ήλιο, το υδρογόνο και το άζωτο. Ο κύκλος VM είναι ένας κλειστός κύκλος και τα εργαζόμενα ρευστά είναι πάντα σε αέρια φάση χωρίς να υπόκεινται σε καμία αλλαγή φάσης. Οι τελικές τους επιδόσεις διαφέρουν μεταξύ τους.



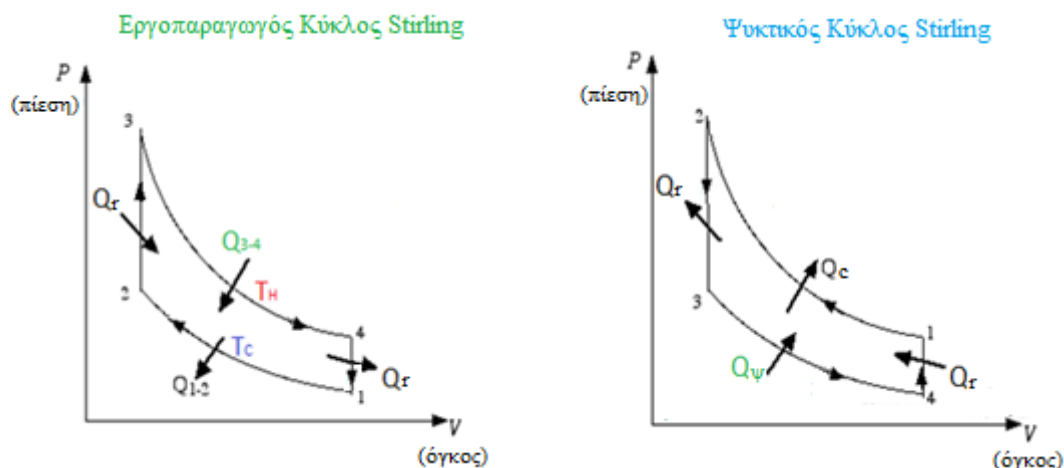
Σχήμα 1.7 : Γράφημα απόδοσης εξέργειας εργαζόμενων αερίων σε μηχανές VM [3].

Γενικά το υδρογόνο είναι το καλύτερο εργαζόμενο αέριο. Όμως υπάρχει το μειονέκτημα της πιθανής έκρηξης του εφόσον υπάρξει κάποια μορφή διαρροή (leakage). Το γράφημα του σχήματος 1.7 δείχνει ότι οι διαφορές στην θερμοδυναμική επίδοση ενός κύκλου Vuilleumier

χρησιμοποιώντας είτε ήλιο είτε υδρογόνο είναι μικρές ενώ γίνονται αρκετά μεγάλες με τη χρησιμοποίηση αερίου αζώτου σαν εργαζόμενο μέσο. Έτσι για λόγους ασφάλειας και επίδοσης επιλέγεται το αέριο ήλιο σαν το καταλληλότερο εργαζόμενο μέσο.

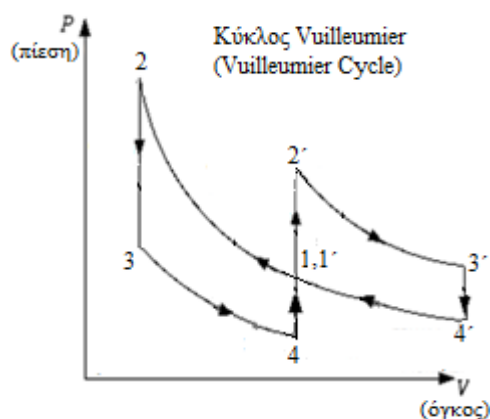
## 1.2 Ομοιότητες και διαφορές μηχανών Stirling με μηχανές Vuilleumier

Ο κύκλος Stirling είναι ένας θερμοδυναμικός κύκλος που πήρε το όνομά του απ' τον ιερωμένο Robert Stirling. Οι μηχανές Stirling είτε παράγουν έργο είτε ψύξη σε κρυογονικές θερμοκρασίες.



Σχήμα 1.8 : Διαγράμματα P-V εργοπαραγωγού και ψυκτικού κύκλου Stirling.

Ο ιδανικός κύκλος Stirling αποτελείται από τέσσερις αντιστρεπτές μεταβολές: 1) ισοθερμοκρασιακή εκτόνωση, 2) ισόχωρη ψύξη, 3) ισοθερμοκρασιακή συμπίεση και 4) ισόχωρη θέρμανση. Κατά τη δεξιόστροφη φορά του, όπως φαίνεται στα παρακάτω διαγράμματα  $P - V$  (πίεσης-όγκου), ο κύκλος γίνεται εργοπαραγωγός άρα αντιστοιχεί σε εργοπαραγωγό μηχανή ενώ κατά την αριστερόστροφη φορά ο κύκλος γίνεται ψυκτικός, οπότε αναφέρεται σε κρυογονική (cryocooler) μηχανή (σχήμα 1.8). Ο κύκλος Vuilleumier είναι συνδυασμός ενός εργοπαραγωγού με έναν ψυκτικό κύκλο Stirling.



Σχήμα 1.9 : Διάγραμμα P-V ενός κύκλου Vuilleumier.

Το σχήμα 1.9 απεικονίζει τον συνδυασμό των δύο κύκλων σε διάγραμμα  $P - V$ . Στις μηχανές VM η συμπίεση γίνεται θερμικά, μετατοπίζοντας αέριο σε θερμή περιοχή αυξάνοντας έτσι την πίεσή του. Απ' την άλλη πλευρά στις μηχανές Stirling η συμπίεση γίνεται μηχανικά μέσω ενός εμβόλου.

Για τους ίδιους λόγους θερμοκρασιών οι μηχανές θερμοσυμπίεσης έχουν μικρότερους λόγους πιέσεων από τις μηχανές μηχανικής συμπίεσης εργαζόμενες στις ίδιες θερμοκρασίες. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα οι μηχανές θερμοσυμπίεσης να είναι μεγαλύτερες από τις μηχανές μηχανικής συμπίεσης πράγμα το οποίο δίνει την άνεση στον κατασκευαστή μιας μηχανής Vuilleumier να επιλέξει τους καταλληλότερους θερμοεναλλάκτες [2].

### 1.3 Η μηχανή Vuilleumier ελευθέρων εμβόλων

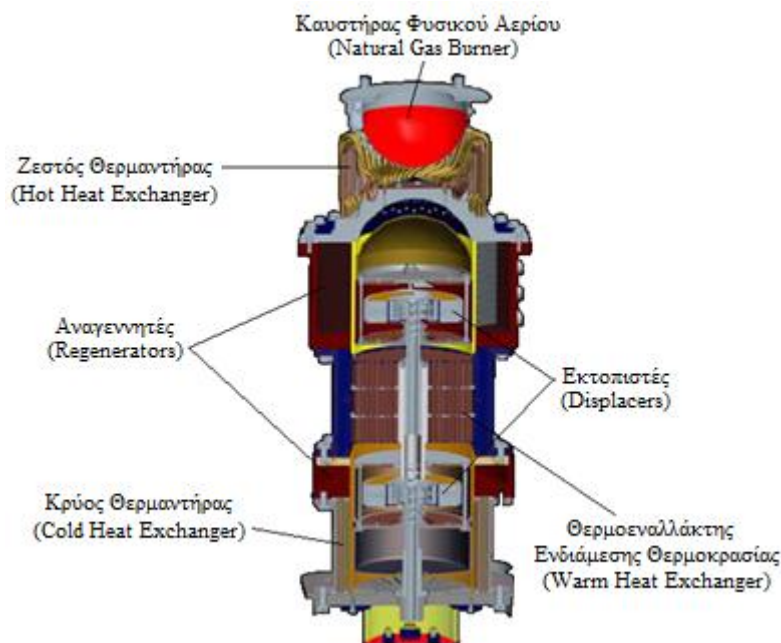
Στις αρχές της δεκαετίας του '80 άρχισαν να γίνονται μελέτες με σκοπό την χρησιμοποίηση των μηχανών Vuilleumier ως κλιματιστικά (air - conditioners). Σ' αυτό καταλυτική δράση είχαν τα παρακάτω χαρακτηριστικά τους [5] :

1. Μία μηχανή VM μπορεί να λειτουργήσει ως κλιματιστικό χρησιμοποιώντας θερμότητα προερχόμενη από καύση φυσικού αερίου.
2. Δεν γίνεται χρήση χλωροφθορανθράκων (CFCs).
3. Ψύξη και θέρμανση παράγονται ταυτόχρονα με αποτέλεσμα τον υψηλό βαθμό θερμικής απόδοσης.
4. Τα καυσαέρια περιέχουν ελάχιστες ποσότητες οξειδίων του αζώτου ( $\text{NO}_x$ ).

Λόγω αυτών των εξαιρετικών χαρακτηριστικών οι προσδοκίες, όσον αφορά τη χρήση των VM ως κλιματιστικά σε συνδυασμό με την εξοικονόμηση ηλεκτρικής ενέργειας, την προστασία του περιβάλλοντος και την μη χρησιμοποίηση χλωροφθορανθράκων (CFCs), αυξήθηκαν. Το μόνο μειονέκτημα των VM σε σχέση με τα κλιματιστικά, που χρησιμοποιούν CFCs, είναι ότι έχουν μικρότερη ισχύ εξόδου ανά βάρος και ανά μέγεθος. Αυτό αποτελεί το πιο δύσκολο πρόβλημα όσον αφορά την υλοποίηση των VM ως air - conditioners.

Τις τελευταίες δεκαετίες δημιουργήθηκε μια καινούρια διαμόρφωση των μηχανών VM. Κατασκευάστηκε η μηχανή Vuilleumier ελευθέρων εμβόλων (FPVM), η οποία μοιάζει στη λειτουργία της με τη μηχανή FPSE (Free Piston Stirling Engine). Η FPVM αποτελούσε μία μικρή μεγέθους μηχανή ψυκτικής ικανότητας αρκετών δεκάδων W με ένα σύστημα παλινδρόμησης δύο εκτοπιστών τα οποία ήταν συνδεδεμένα με ένα ελατήριο. Επίσης ο ζεστός εκτοπιστής ήταν συνδεδεμένος με το κέλυφος με ένα ακόμα ελατήριο. Οι εκτοπιστές των μηχανών FPVM όπως ήταν εύλογο δεν συνδέονταν μηχανικά (μέσω στροφάλου - διωστήρα) αλλά μέσω ελατηρίων μηχανικών ή θερμικών (ελατήρια αερίου). Οι μηχανές VM ελευθέρων εμβόλων έχουν μεγαλύτερη συγκέντρωση ισχύος από τις συμβατικές με διωστήρα - στρόφαλο. Το σχήμα 1.10 δείχνει τα μέρη μιας σύγχρονης αντλίας θερμότητας FPVM της εταιρείας Thermolift.





Σχήμα 1.10 : Η αντλία θερμότητας ελευθέρων εμβόλων VM ισχύος 25 kW της εταιρείας Thermolift [8].

#### 1.4 Κατηγοριοποίηση μοντέλων ανάλυσης μηχανών Vuilleumier

Υπάρχουν τρία μοντέλα ανάλυσης των μηχανών Stirling και κατ' επέκταση των μηχανών Vuilleumier. Χωρίζονται σε 1<sup>ης</sup> τάξης, 2<sup>ης</sup> τάξης και 3<sup>ης</sup> τάξης. Είναι συνήθης η κατηγοριοποίηση των σχημάτων ανάλυσης των μηχανών αυτών σε τρεις ομάδες. Σε πρακτικό επίπεδο η "τάξη" καθορίζεται με απλό τρόπο από την πολυπλοκότητα της ανάλυσης, η οποία είναι σε άμεση συνάρτηση με την αξιοπιστία αυτής ή ισοδύναμα στενά συνδεδεμένη με τον αριθμό των ιδεατών υποθέσεων που έχουν γίνει.

Η 1<sup>ης</sup> τάξης ανάλυση έχει να κάνει με ένα ιδανικό μοντέλο από το οποίο προκύπτει και η απόδοση της μηχανής. Η ανάλυση αυτή περιλαμβάνει πολλές παραδοχές ενώ η υπολογιζόμενη απόδοση δεν αντιστοιχεί με την πραγματική (πειραματική) καθώς είναι ιδανική δηλαδή χωρίς να περιλαμβάνονται οι θερμικές απώλειες.

Η 2<sup>ης</sup> τάξης ανάλυση αντιστοιχεί σε ένα μοντέλο το οποίο περιλαμβάνει κλειστού τύπου εξισώσεις θερμικών απωλειών της μηχανής. Οι τιμές των απωλειών που προκύπτουν αφαιρούνται από την ιδανική απόδοση της μηχανής με αποτέλεσμα να οδηγούμαστε σε μία ρεαλιστικότερη απόδοση η οποία είναι σίγουρα αρκετά συγκρίσιμη με την πειραματική.

Η 3<sup>ης</sup> τάξης ανάλυση αποτελεί τη ρεαλιστικότερη ανάλυση που μπορεί να γίνει καθώς οι παραδοχές ελαχιστοποιούνται. Οι εξισώσεις των απωλειών που χρησιμοποιούνται λύνονται αριθμητικά. Οπότε μας δίνεται η πληροφορία της συμπεριφοράς και απόδοσης της μηχανής κατά τη διάρκεια ενός κύκλου λειτουργίας. Έτσι τα αποτελέσματα της ανάλυσης αυτής θα λέγαμε ότι είναι πιο ρεαλιστικά [6].

## **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2<sup>ο</sup>**

### **ΠΑΛΑΙΕΣ ΚΑΙ ΝΕΟΤΕΡΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ**

### **ΜΗΧΑΝΩΝ VUILLEUMIER**

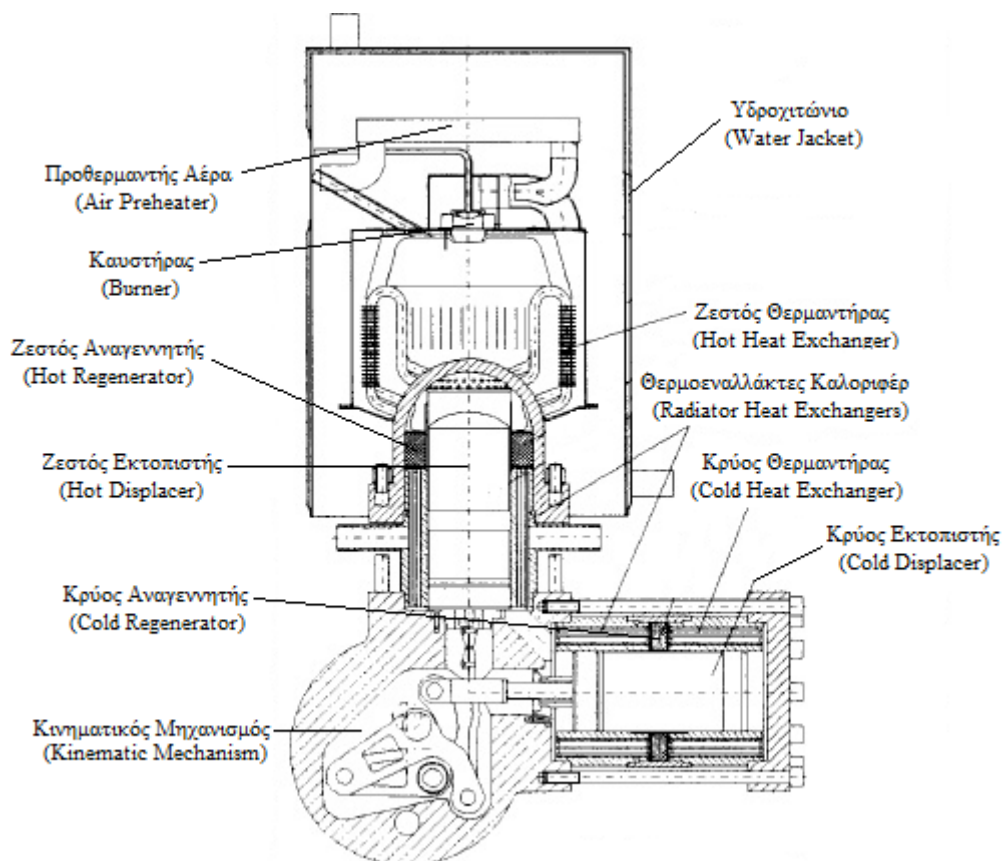
#### **2.1 Εφαρμογή αντλίας θερμότητας Vuilleumier ισχύος 20 kW για οικιακή χρήση**

Η ερευνητική δραστηριότητα γύρω απ' τις μηχανές κύκλου Vuilleumier έχει αρχίσει να κλιμακώνεται απ' τις αρχές της δεκαετίας του 90'. Σκοπός είναι η δημιουργία αντλιών θερμότητας VM με πηγή ενέργειας την καύση φυσικού αερίου (gas fired heat pump) για οικιακή θέρμανση. Περισσότερα από δέκα πρωτότυπα είδη μηχανών έχουν φτιαχτεί.

Σχεδιάστηκαν ως ημίκλειστες μονάδες με τον κινητήρα εκκίνησης ενσωματωμένο στον στροφαλοθάλαμο (crankcase). Το εργαζόμενο ρευστό ήταν το αέριο ήλιο. Η μέση πίεση του ήταν τα 12 MPa. Προκειμένου να αυξηθεί η ειδική ισχύς εξόδου, η οποία είναι χαμηλή σε αντλίες θερμότητας VM, οι θερμοεναλλάκτες και οι αναγεννητές ξανασχεδιάστηκαν ενώ η διάμετρος διωστήρα του κρύου εμβόλου της μηχανής αυξήθηκε. Το αποτέλεσμα ήταν να αυξηθούν κατά 15 % η θερμική ισχύς εξόδου και η απόδοση ψύξης. Η θερμική ισχύς εξόδου έφτασε τα 21 kW , η ψυκτική ικανότητα τα 8 kW για λειτουργία κύκλου με ενδιάμεση θερμοκρασία τους 42 °C και χαμηλή τους 12 °C. Κάτω απ' αυτές τις συνθήκες ο συντελεστής συμπεριφοράς της αντλίας θερμότητας COP<sub>h</sub> γίνεται ίσος με 1.6. Ο μέγιστος συντελεστής συμπεριφοράς στις ίδιες θερμοκρασίες (μέση και κρύα) είναι ίσος με 1.64 και μπορεί να επιτευχθεί με μείωση της θερμοκρασίας του θερμαντήρα. Περισσότεροι από 50 διαφορετικοί συνδυασμοί θερμοκρασιών (υψηλή, ενδιάμεση, χαμηλή) και μέσων πιέσεων έχουν δοκιμαστεί.

Η ενεργειακή κατανάλωση για οικιακή θέρμανση μπορεί να περιοριστεί αρκετά αντικαθιστώντας τα συμβατικά μπόιλερ με αντλίες θερμότητας φυσικού αερίου ή λαδιού. Η τεχνολογία των αντλιών θερμότητας VM αξιοποιήθηκε για αρκετά χρόνια από το Τεχνικό Πανεπιστήμιο της Δανίας. Στα σχήματα 2.1 και 2.3 απεικονίζεται η αντλία θερμότητας VP4 ισχύος 20 kW η οποία κατασκευάστηκε στο πανεπιστήμιο αυτό.

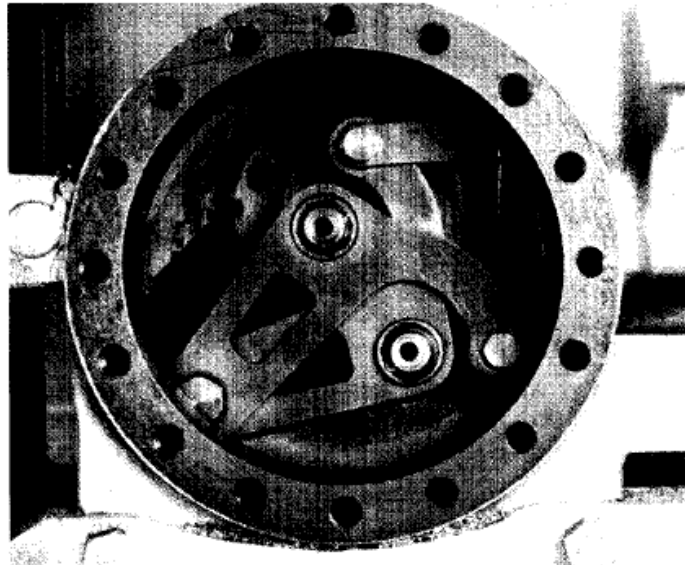
Η VP4 έχει σχεδιαστεί ως μία κλειστή αυτόνομη μονάδα ,στην οποία δεν απαιτείται εξωτερική ηλεκτρική ή μηχανική ισχύς, εκτός από τον ηλεκτρικό φυσητήρα και τις αντλίες κυκλοφορίας. Λειτουργεί από μόνη της και εκκινεί με τη βοήθεια ενός κινητήρα (starter motor). Το εργαζόμενο μέσο είναι το αέριο ήλιο και η μέση πίεση λειτουργίας είναι ίση με 12 MPa. Το ήλιο είναι ένα αδρανές αέριο το οποίο δεν είναι επιβλαβές για το περιβάλλον. Οι δύο κύλινδροι της μηχανής είναι σε σχηματισμό V με σκοπό τον περιορισμό των κραδασμών. Οι θερμοεναλλάκτες και οι αναγεννητές είναι σχεδιασμένοι σε κυλινδρική μορφή. Είναι σωληνοειδείς, κελυφοειδούς μορφής με εξαίρεση τον θερμαντήρα. Οι αναγεννητές είναι φτιαγμένοι από ανοξείδωτο ατσάλι. Το ζεστό άκρο της μηχανής είναι σχεδιασμένο ημισφαιρικό για την ελαχιστοποίηση θερμικών και μηχανικών καταπονήσεων [9].



Σχήμα 2.1 : Προσχέδιο της αντλίας θερμότητας VP4 τύπου Vuilleumier [9].

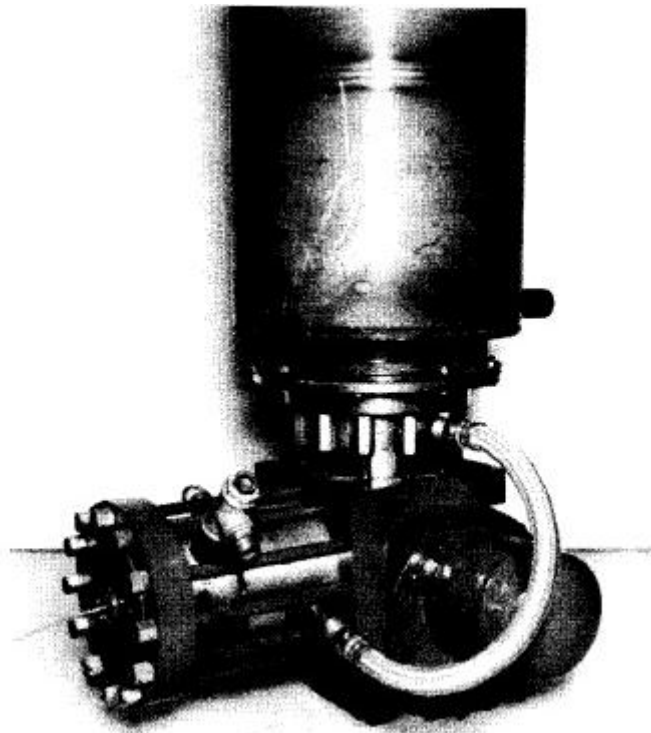
Οι σωλήνες του θερμαντήρα είναι λυγισμένοι κατά  $180^\circ$  και εξωτερικά η διάταξή τους έχει σχήμα περυγίου. Ο καυστήρας φυσικού αερίου περιλαμβάνει έναν κεραμικό θάλαμο καύσης και έναν προθερμαντήρα αέρα. Τα καυσαέρια απομακρύνονται από τον προθερμαντήρα αέρα σε θερμοκρασία  $150^\circ\text{C} - 170^\circ\text{C}$  και η υπολειπόμενη ενέργεια χρησιμοποιείται για θέρμανση σε έναν ψύκτη καυσαερίων, ο οποίος λειτουργεί στην ενδιάμεση θερμοκρασία (warm temperature) του συστήματος κυκλοφορίας. Έτσι η θερμοκρασία των καυσαερίων είναι περίπου  $10^\circ\text{C}$  παραπάνω από τη μέση θερμοκρασία στο σύστημα θέρμανσης όταν εξέρχονται από την αντλία θερμότητας.

Το σύστημα καύσεως περιβάλλεται από ένα υδροχιτώνιο, έτσι ώστε η θερμότητα που μεταφέρεται με αγωγή μέσω της μόνωσης του θαλάμου καύσεως να θερμαίνει το νερό που κυκλοφορεί. Με αυτόν τον τρόπο μόνο  $200 - 300\text{ W}$  χάνονται από τη γενική ενεργειακή αποτίμηση του συστήματος με αποτέλεσμα να μεγιστοποιείται ο θερμικός συντελεστής συμπεριφοράς  $\text{COP}_h$ . Ένας ιδιαίτερος μηχανισμός στροφάλου (σχήμα 2.2) κινεί τους δύο εκτοπιστές με μία διαφορά φάσης γύρω στις  $90^\circ$ . Ο σχεδιασμός του μηχανισμού στροφάλου έχει σαν αποτέλεσμα την κάθετη κίνηση του προς τη διαδρομή των εκτοπιστών και είναι κατά  $10\%$  μικρότερη απ' αυτή [9].



*Σχήμα 2.2 : Ο ξεχωριστός μηχανισμός στροφάλου της αντλίας θερμότητας VP4 [10].*

Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα οι δυνάμεις που οδηγούν τους εκτοπιστές σχεδόν να εξαλείφονται. Επίσης ο ζεστός και ο κρύος κύλινδρος μπορούν να τοποθετηθούν αρκετά κοντά έτσι ώστε το κανάλι που συνδέει τους χώρους των δύο κυλίνδρων να είναι αρκετά μικρός. Ένσφαιρα και βελονοειδή ρουλεμάν χρησιμοποιούνται και είναι σχεδιασμένα για διάρκεια ζωής μεγαλύτερη των 30000 ωρών. Ο κινητήρας εκκίνησης, ο οποίος ενεργοποιείται μόνο για λίγα δέκατα του δευτερολέπτου, είναι ενσωματωμένος στον στροφαλοθάλαμο. Η VP4 δοκιμάστηκε για περισσότερο από 5000 ώρες με ελάχιστες αλλαγές στην απόδοση να παρατηρούνται [9].

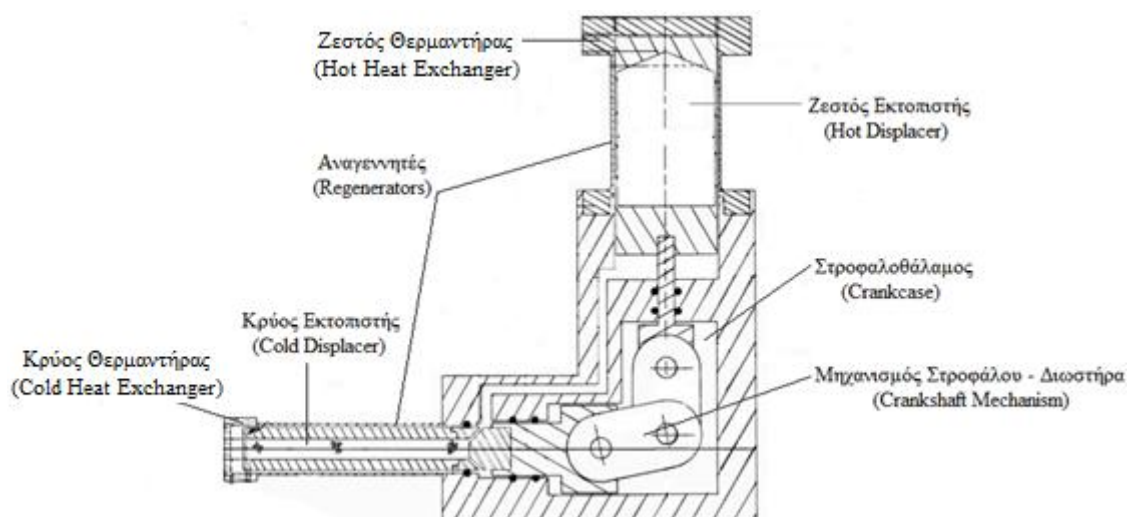


*Σχήμα 2.3 : Η αντλία θερμότητας VP4 τύπου Vuilleumier [9].*

## 2.2 Εφαρμογή κρυογονικής μηχανής Vuilleumier ισχύος 1.6 W για χρήση σε στρατιωτικά φορητά συστήματα νυχτερινής όρασης (ανιχνευτές υπερύθρων) στις Η.Π.Α

Για τις ανάγκες της εύρυθμης λειτουργίας στρατιωτικών φορητών συστημάτων νυχτερινής όρασης (portable infrared night vision systems) στις Η.Π.Α στις αρχές της δεκαετίας του 70' κατασκευάστηκε κρυογονική μηχανή VM, έχοντας σημαντικά πλεονεκτήματα όσον αφορά το μικρό βάρος της. Αυτή η εξοικονόμηση βάρους επιτεύχθηκε με την εκμετάλλευση της υψηλής πυκνότητας ορυκτών καυσίμων.

Η θερμοκαταλυτική καύση 40 gr/hr προπανίου παρέχει αποκλειστικά θερμική ενέργεια στην ψυκτική μηχανή VM η οποία παράγει α) ψυκτική ισχύ 1.6 W στους 77 K , β) μηχανική ισχύ 16 W για τη λειτουργία του εσωτερικού ψυκτικού μηχανισμού και γ) μηχανική ισχύ 2 W για τη λειτουργία του εξωτερικού ανεμιστήρα της ψήκτρας. Στο σχήμα 2.4 φαίνεται το προσχέδιο της κρυογονικής VM μηχανής [11].



Σχήμα 2.4 : Προσχέδιο της κρυογονικής VM μηχανής ισχύος 1.6 W [11].

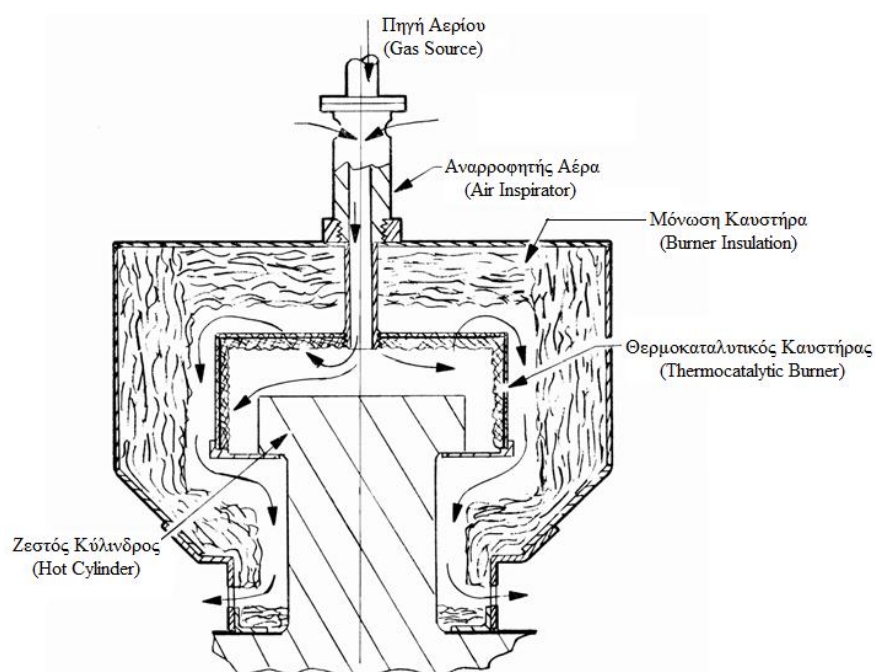
Η κρυογονική VM στη συνέχεια συνδέθηκε με μία συσκευή ανίχνευσης υπερύθρων από τριαδικό κράμα HgCdTe. Η ψύξη σ' αυτές τις διατάξεις είναι απαραίτητη για τη λειτουργία των ημιαγωγών υλικών που χρησιμοποιούνται. Επίσης υπάρχει η πιθανότητα τα συστήματα νυχτερινής όρασης να χρειαστεί να ψυχθούν αρκετές φορές μέχρι να λειτουργήσουν ξανά ομαλά [12].

Όλη η απορριπτόμενη θερμότητα αφαιρείται από τον στροφαλοθάλαμο μέσω ενός δακτυλιοειδούς θερμοεναλλάκτη πτερυγωτής μορφής από αλουμίνιο. Όλοι οι ένσφαιροι τριβείς βρίσκονται στον στροφαλοθάλαμο όπου και είναι σφραγισμένοι. Ο κρύος κύλινδρος είναι φτιαγμένος από Inconel<sup>1</sup> 718 και η κεφαλή του είναι από χαλκό. Ο ζεστός κύλινδρος όπως και ο ζεστός εκτοπιστής είναι φτιαγμένοι από Inconel 718. Ο ζεστός εκτοπιστής έχει κοίλη μορφή,

<sup>1</sup> Τα Inconel είναι κράματα υλικών ανθεκτικά στην διάβρωση και στην οξείδωση. Είναι διαμορφωμένα με τέτοιο τρόπο ώστε να αντέχουν σε υψηλές πιέσεις και θερμοκρασίες.

είναι γεμισμένος με αέρα και σφραγισμένος με O-rings<sup>2</sup>. Για τον ζεστό κύλινδρο απαιτείται θερμική ισχύς 200 W σε θερμοκρασία 900 K για επιφάνεια 55 cm<sup>2</sup> (3.6 W/cm<sup>2</sup>). Το να επιτευχθεί αυτή η ροή θερμότητας μέσω συναγωγής είναι ανέφικτο. Η λύση στο πρόβλημα αυτό είναι η μεταφορά θερμότητας μέσω ακτινοβολίας. Όμως η θερμική ενέργεια που ακτινοβολούν τα θερμά αέρια είναι αρκετά μικρή και αναποτελεσματική. Παρ' ολ' αυτά, αν χρησιμοποιηθεί θερμοκαταλυτική καύση, τα χαρακτηριστικά ακτινοβολίας μιας στερεάς επιφάνειας με ένα συντελεστή εκπομπής μεγαλύτερο του 0.9 αντικαθίστανται από το αέριο.

Ο θερμοκαταλυτικός καυστήρας που κατασκευάστηκε για τη μηχανή απεικονίζεται στο σχήμα 2.5. Εδώ η καύση γίνεται επί της επιφάνειας ενός επιχρίσματος από λευκόχρυσο με την εναπόθεση ιών αλουμίνιας. Η χημική ενέργεια απελευθερώνεται κατευθείαν προς τις ίνες οι οποίες στη συνέχεια ακτινοβολούν και στέλνουν τη θερμότητα στο ζεστό κύλινδρο της VM μηχανής. Στον αναρροφητή εισάγεται αέρας με λόγο αέρα καυσίμου γύρω στο 23.8/1 [11].



Σχήμα 2.5 : Ο θερμοκαταλυτικός καυστήρας της κρυογονική μηχανής VM [11].

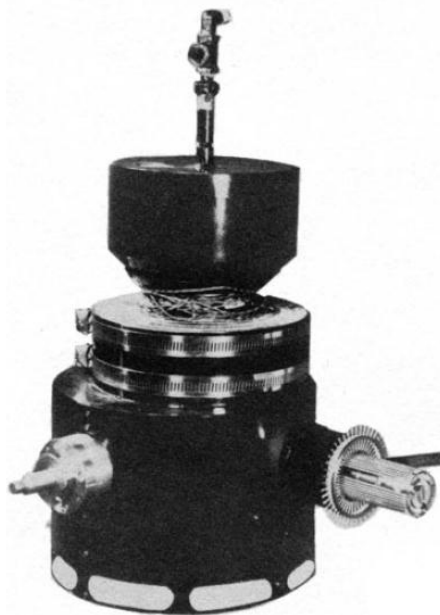
Ο αέρας και το καύσιμο (προπάνιο) εισέρχονται στην περιοχή μεταξύ του ζεστού κυλίνδρου και του καυστήρα. Γίνεται η καύση και τα καυσαέρια ρέουν κατά μήκος του ζεστού κυλίνδρου με ένα μικρό ποσοστό της θερμότητάς τους να μεταφέρεται μέσω συναγωγής στον κύλινδρο. Στη συνέχεια τα θερμά αέρια από την καύση εξέρχονται μέσω θυρίδων στην ατμόσφαιρα, αναμειγνύονται με τον αέρα και αυξάνουν τη θερμοκρασία του κατά 20 °C.

Η ψυκτική απόδοση της μηχανής στους 77 K μετρήθηκε χρησιμοποιώντας έναν διαφορετικό αναγεννητή κάθε φορά. Ο πρώτος αναγεννητής ήταν από ατσαλένιες σφαιροειδούς μορφής ίνες διαμέτρου 0.254 mm ενώ ο δεύτερος από ατσαλένιο πλέγμα 400 ινών ανά ίντσα. Η σύγκριση των αποτελεσμάτων προσομοίωσης με τα πειραματικά ήταν αρκετά καλή όσον αφορά τη

<sup>2</sup>Τα O-rings είναι ελαστομερείς δακτύλιοι και χρησιμοποιούνται ως σφραγιστικά σε μηχανές Stirling και Vuilleumier.



χρησιμοποίηση του πρώτου αναγεννητή. Η πίεση στα εργαζόμενα μέρη της μηχανής μετρήθηκε μέσω διαφράγματος ενός ημιαγωγού μεταλλάκτη. Στο σχήμα 2.6 απεικονίζεται η κρυογονική VM μηχανή [11].



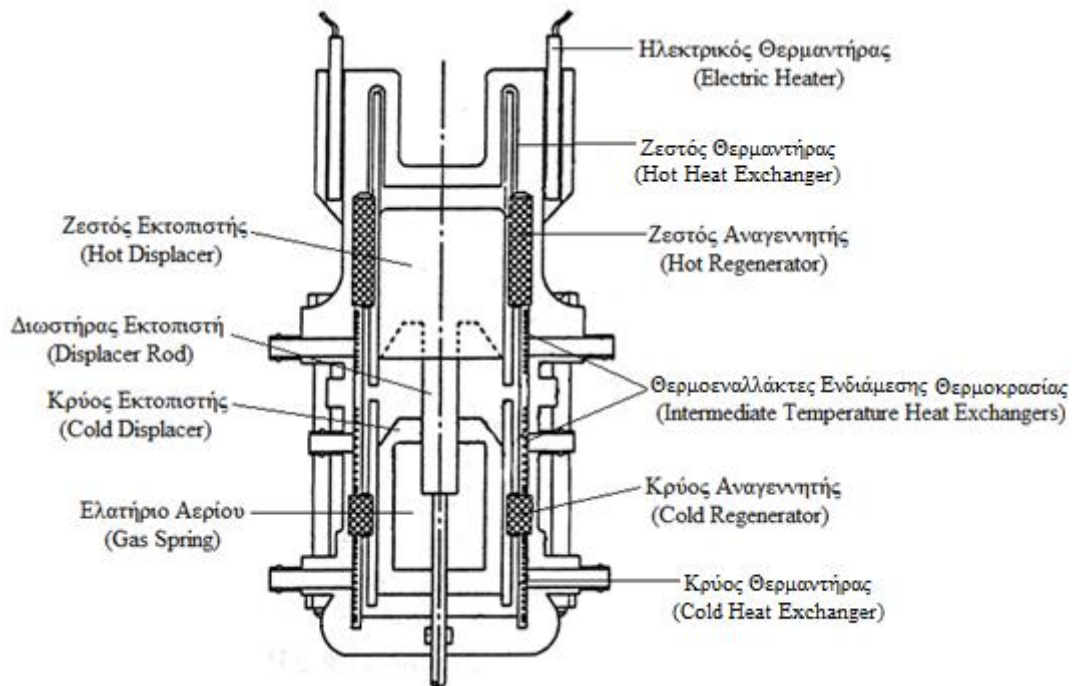
Σχήμα 2.6 : Η κρυογονική μηχανή VM ισχύος 1.6 W [11].

### **2.3 Εφαρμογή μηχανής Vuilleumier ελευθέρων εμβόλων (FPVM) ισχύος 2.5 kW ως κλιματιστικό (air conditioner) από την εταιρεία SANYO στην Ιαπωνία**

Στα μέσα της δεκαετίας του 90' δημιουργήθηκε από την εταιρεία SANYO Electric στην Ιαπωνία αντλία θερμότητας Vuilleumier ελευθέρων εμβόλων (FPVM) ισχύος 2.5 kW με σκοπό να λειτουργήσει ως κλιματιστικό. Μία μηχανή FPVM θα ωφελούσε αρκετά λόγω του ότι η συγκέντρωση ισχύος της είναι μεγαλύτερη από μία μηχανή VM με κινηματικό μηχανισμό στροφάλου – διωστήρα. Η μηχανή αυτή σχεδιάστηκε για να έχει ψυκτική ισχύ εξόδου 2.5 kW. Οι δύο εκτοπιστές (ζεστός και κρύος) βρίσκονται στον ίδιο κύλινδρο ενώ ένα ελατήριο αερίου είναι προσαρμοσμένο στον κρύο εκτοπιστή. Ένας από τους πιο σημαντικούς παράγοντες εύρυθμης λειτουργίας αυτών των μηχανών είναι η δυναμική συμπεριφορά τους. Ζητούμενο είναι η ευστάθεια λειτουργίας τους για σταθερή παραγωγή ισχύος. Το σχήμα 2.7 δείχνει το προσχέδιο της FPVM της SANYO.

Τόσο ο ζεστός όσο και ο κρύος εκτοπιστής βρίσκονται στον ίδιο κύλινδρο διαμέτρου 85 mm. Το ελατήριο αερίου ουσιαστικά συνδέει τους δύο εκτοπιστές, οι οποίοι δεν έχουν καμία μηχανική σύνδεση μεταξύ τους. Η ενεργοποίηση του ελατηρίου οφείλεται στη διαφορά πίεσης μεταξύ του εργαζόμενου χώρου και του θαλάμου του θερμικού ελατηρίου. Έτσι ο διωστήρας του ζεστού εκτοπιστή εισέρχεται και εξέρχεται απ' την κοιλότητα αερίου του ελατηρίου. Οι θερμοεναλλάκτες βρίσκονται εξωτερικά γύρω απ' τον κύλινδρο. Ο θερμοαντήρας αποτελείται από σωλήνες τετραγωνικής διατομής ενώ ο ψύκτης και οι θερμοεναλλάκτες ενδιάμεσης θερμοκρασίας έχουν τη μορφή επίπεδων πτερυγίων. Οι δύο αναγεννητές είναι φτιαγμένοι από

πυροσυσσωματωμένο συρματόπλεγμα. Η χρήση του ηλεκτρικού θερμαντήρα έχει σαν σκοπό να ρυθμίζει την ποσότητα της εισερχόμενης θερμικής ισχύος και ταυτοχρόνως να εξετάζεται η δυναμική συμπεριφορά των παλινδρομώντων μερών της μηχανής [13].



Σχήμα 2.7 : Σχηματική απεικόνιση της FPVM της SANYO Electric [13].

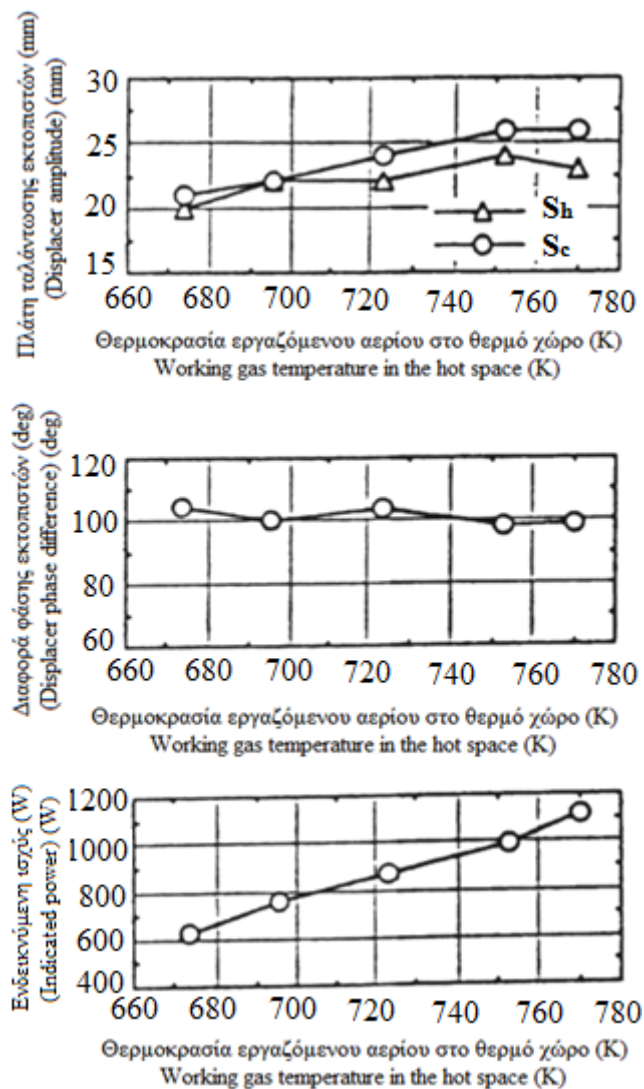
Το σχήμα 2.8 απεικονίζει τη διάταξη της FPVM της SANYO Electric.



Σχήμα 2.8 : Στιγμιότυπο της FPVM της SANYO Electric [13].

Το σχήμα 2.9 περιλαμβάνει τρία διαφορετικά διαγράμματα, που δείχνουν την επίδραση της θερμοκρασίας του εργαζόμενου αερίου στο θερμό χώρο, στην απόδοση της μηχανής Vuilleumier ελευθέρων εμβόλων (πειραματικά αποτελέσματα).





Σχήμα 2.9 : Επίδραση θερμοκρασίας αερίου (θερμός χώρος) στο ενδεικνύμενο έργο, στη διαφορά φάσης εκτοπιστών και στα πλάτη  $S_h, S_c$ <sup>3</sup> των εκτοπιστών (ζεστού και κρύου αντίστοιχα) [13].

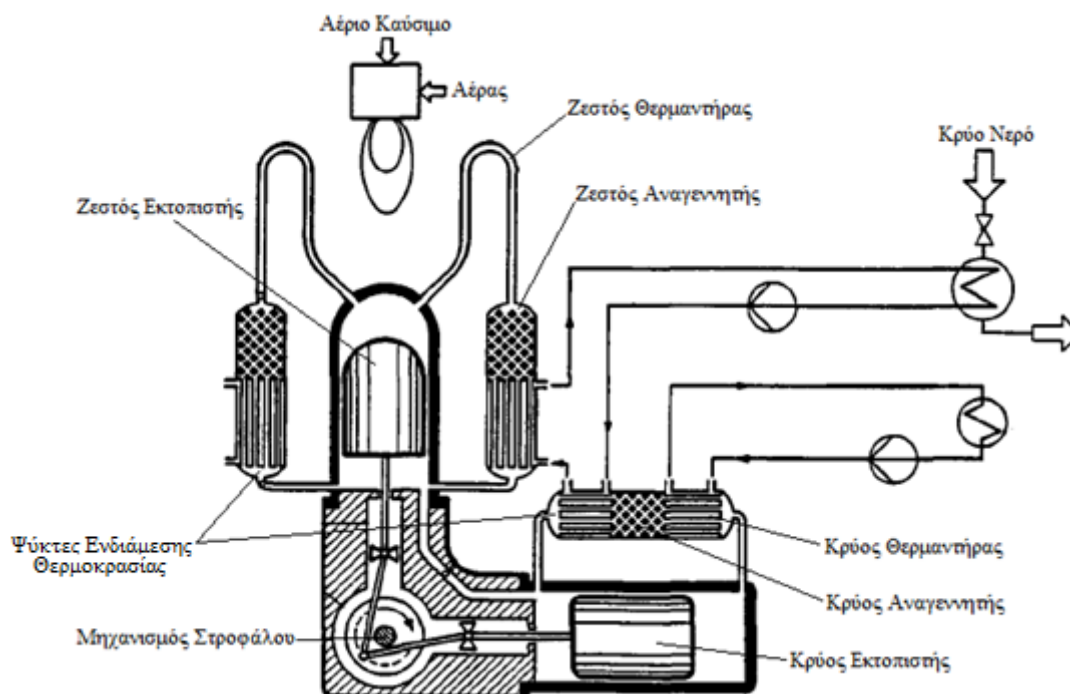
Όπως είναι φανερό, παρόλο που η μηχανή σχεδιάστηκε να έχει τελική ψυκτική ισχύ 2.5 kW, η πειραματική διαδικασία έδωσε αρκετά χαμηλότερη ισχύ. Αυτό οφειλόταν στα μικρά πλάτη ταλάντωσης των δύο εκτοπιστών, τα οποία θα ήταν αναγκαίο να αυξηθούν ώστε να επιτευχθεί η επιθυμητή τελική ισχύς.

## 2.4 Η πειραματική αντλία θερμότητας Vuilleumier του Kuhl (1990)

Μια πρωτότυπη μηχανή Vuilleumier δημιουργήθηκε στο 1990 απ' τον Γερμανό ερευνητή H.D.Kuhl. Η μηχανή αυτή λειτουργούσε ως αντλία θερμότητας. Η δημιουργία της πειραματικής μηχανής του Kuhl έγινε στα πλαίσια έρευνας με σκοπό την εφαρμογή αντλιών θερμότητας ή κλιματιστικών Vuilleumier σε οικιακούς χώρους. Η καύση ενός αερίου καυσίμου έδινε την απαιτούμενη θερμότητα που χρειαζόταν για να λειτουργήσει η μηχανή. Το εργαζόμενο ρευστό

<sup>3</sup> Το σύμβολο S προέρχεται απ' την αγγλική λέξη stroke.

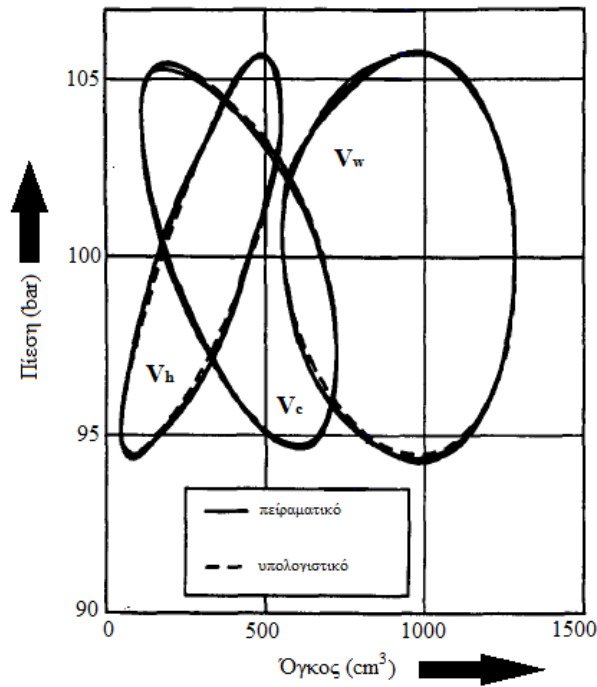
είναι αέριο ήλιο του οποίου η μέση πίεση στη μηχανή υπολογίστηκε στα 100 bar. Η θερμοκρασία στο ζεστό θερμαντήρα αντιστοιχεί στους 500 °C ενώ η θερμοκρασία λειτουργίας του κρύου θερμαντήρα είναι στους 0 °C. Η ωφέλιμη θερμότητα παρέχεται απ' τους ενδιάμεσους ψύκτες στη θερμοκρασία των 40 °C. Στο σχήμα 2.10 δίνεται ένα προσχέδιο της μηχανής VM του Kuhl.



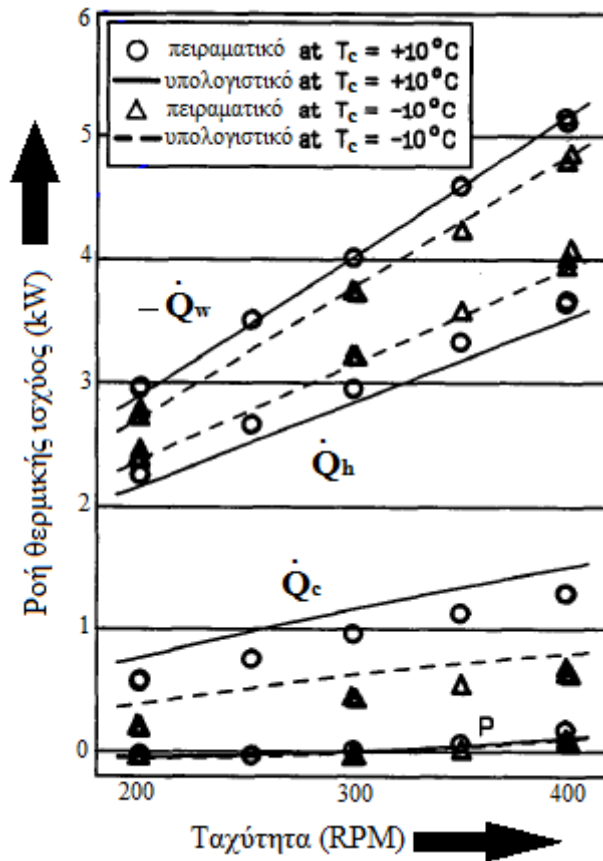
Σχήμα 2.10 : Προσχέδιο της αντλίας θερμότητας Vuilleumier του Kuhl [19].

Οι στροφές λειτουργίας της μηχανής είναι 400 RPM και η συνολική μάζα του εργαζόμενου αερίου είναι 51.8 g. Ο ζεστός θερμαντήρας είναι σωληνοειδής, κυκλικής διατομής και αποτελείται από 32 σωλήνες. Το υλικό του είναι ανοξείδωτος χάλυβας. Ο κρύος θερμαντήρας είναι και αυτός σωληνοειδής, κυκλικής διατομής και αποτελείται από 296 μπρούτζινους σωλήνες. Οι δύο αναγεννητές είναι τύπου wire screen δηλαδή διαμορφωμένοι από διαδοχικά πλέγματα μεταλλικών ινών διαμέτρου 0.28 mm η καθεμιά. Το ποσοστό πορώδους (κενού) για τον κάθε αναγεννητή αντιστοιχεί περίπου στο 50 % . Οι ψύκτες οι οποίοι ουσιαστικά παρέχουν την ωφέλιμη θερμική ισχύ είναι σωληνοειδείς, κυκλικής διατομής και μπρούτζινοι. Ο ψύκτης που βρίσκεται περιμετρικά του ζεστού κυλίνδρου αποτελείται από 248 σωλήνες ενώ ο ψύκτης που βρίσκεται περιμετρικά του κρύου κυλίνδρου αποτελείται από 296 σωλήνες. Επιπροσθέτως ο ζεστός κύλινδρος έχει διάμετρο 100 mm ενώ ο κρύος κύλινδρος έχει διάμετρο 110 mm [19].

Όσον αφορά τον κινηματικό μηχανισμό της μηχανής, αυτός αποτελείται από δύο εκτοπιστές , τον ζεστό εκτοπιστή και τον κρύο. Ο ζεστός εκτοπιστής ζυγίζει 5.44 kg ενώ ο κρύος ζυγίζει 6.7 kg. Το μήκος του διωστήρα και για τους δύο εκτοπιστές είναι 130.5 mm. Το μέγιστο πλάτος διαδρομής και για τους δύο εκτοπιστές είναι 64 mm ενώ η διαφορά φάσης που έχουν αντιστοιχεί στις 90°. Για τη μηχανή αυτή εφαρμόστηκε ένα μοντέλο ανάλυσης 3<sup>ης</sup> τάξεως. Στη συνέχεια ακολουθούν δύο διαγράμματα τα οποία προέκυψαν από πειραματικά δεδομένα και απ' τα αποτελέσματα του μοντέλου 3<sup>ης</sup> τάξεως [19].



Σχήμα 2.11 : Διαγράμματα πίεσης – όγκου κύκλου VM αντλίας θερμότητας του Kuhl [19].



Σχήμα 2.12 : Διαγράμματα ροής θερμικής ισχύος για διάφορες στροφές λειτουργίας [19].

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3<sup>ο</sup>

## ΜΟΝΤΕΛΑ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΘΕΡΜΙΚΩΝ ΑΠΩΛΕΙΩΝ ΣΕ ΜΗΧΑΝΕΣ VUILLEUMIER

### 3.1 Εισαγωγή

Το κεφάλαιο αυτό περιλαμβάνει μοντέλα ανάλυσης 1<sup>ης</sup> τάξης (ιδανικά μοντέλα) των μηχανών Vuilleumier όπως είναι το ιδανικό ισοθερμοκρασιακό μοντέλο και το ιδανικό αδιαβατικό μοντέλο ανάλυσης. Επίσης πραγματεύεται τα μοντέλα ανάλυσης 2<sup>ης</sup> τάξης των μηχανών VM (μοντέλα απωλειών) των ερευνητών I.Urieli, D.Berchowitz, Y.Timoumi, W.Martini και του J.Pfeiffer. Όλα αυτά τα μοντέλα δημιουργήθηκαν αρχικά για να καλύψουν τις ανάγκες των μηχανών Stirling. Στο κεφάλαιο αυτό γίνεται η επέκτασή τους για μηχανές Vuilleumier. Στη συνέχεια δίνονται τρεις πίνακες με μεγέθη και σύμβολα τα οποία απαρτίζουν τις εξισώσεις των μοντέλων αυτών.

*Πίνακας 3.1 : Ονοματολογία και σημασία συμβόλων για την ανάλυση μηχανών VM.*

<b>ΣΥΜΒΟΛΑ</b>	<b>ΣΗΜΑΣΙΑ</b>	<b>ΜΟΝΑΔΕΣ ΜΕΤΡΗΣΗΣ (SI)</b>
$T$	ΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΑ	$K$
$V$	ΟΓΚΟΣ	$m^3$
$p$	ΠΙΕΣΗ	$Pa$
$m$	ΜΑΖΑ	$kg$
$M$	ΣΥΝΟΛΙΚΗ ΜΑΖΑ ΑΕΡΙΟΥ	$kg$
$R$	ΣΤΑΘΕΡΑ ΕΡΓΑΖΟΜΕΝΟΥ ΑΕΡΙΟΥ	$J/(kg \cdot K)$
$W$	ΕΡΓΟ ΟΓΚΟΜΕΤΑΒΟΛΗΣ	$J$
$g_A$	ΠΑΡΟΧΗ ΜΑΖΑΣ	$kg/sec$
$t$	ΧΡΟΝΟΣ	$sec$
$c_p$	ΕΙΔΙΚΗ ΘΕΡΜΟΧΩΡΗΤΙΚΟΤΗΤΑ ΥΠΟ ΣΤΑΘΕΡΗ ΠΙΕΣΗ	$J/(kg \cdot K)$
$c_v$	ΕΙΔΙΚΗ ΘΕΡΜΟΧΩΡΗΤΙΚΟΤΗΤΑ ΥΠΟ ΣΤΑΘΕΡΟ ΟΓΚΟ	$J/(kg \cdot K)$
$COP_h$	ΘΕΡΜΙΚΟΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑΣ	—
$COP_c$	ΨΥΚΤΙΚΟΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑΣ	—

$\sigma$	ΔΙΑΤΜΗΤΙΚΗ ΤΑΣΗ	$N/m^2$
$\mu$	ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΣΥΝΕΚΤΙΚΟΤΗΤΑ	$Pa \cdot sec$
$U$	ΤΑΧΥΤΗΤΑ	$m/sec$
$A$	ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΡΟΗΣ	$m^2$
$d$	ΥΔΡΑΥΛΙΚΗ ΔΙΑΜΕΤΡΟΣ	$m$
$\rho$	ΠΥΚΝΟΤΗΤΑ	$kg/m^3$
$g$	ΠΑΡΟΧΗ ΜΑΖΑΣ ΑΝΑ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ	$kg/(m^2 \cdot sec)$
$f_f$	ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΤΡΙΒΗΣ	–
$\Delta p$	ΠΤΩΣΗ ΠΙΕΣΗΣ	$Pa$
$Re$	ΑΡΙΘΜΟΣ REYNOLDS	–
$f_r$	ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΤΡΙΒΗΣ REYNOLDS	–
$p_{mean}$	ΜΕΣΗ ΠΙΕΣΗ ΑΕΡΙΟΥ	$Pa$
$\Delta p$	ΠΛΑΤΟΣ ΠΙΕΣΗΣ	$Pa$
$\omega$	ΚΥΚΛΙΚΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑΣ	$rad/sec$
$\varphi$	ΔΙΑΦΟΡΑ ΦΑΣΗΣ	$deg$
$x$	ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ	$m$
$X$	ΠΛΑΤΟΣ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗΣ	$m$
$\gamma$	ΚΛΙΣΗ ΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΑΣ	$K/m$
$u$	ΤΑΧΥΤΗΤΑ	$m/sec$
$T_s$	ΤΟΠΙΚΗ ΜΕΣΗ ΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΑ	$K$
$h$	ΠΛΑΤΟΣ ΔΙΑΚΕΝΟΥ ΖΕΣΤΟΥ ΕΚΤΟΠΙΣΤΗ - ΚΥΛΙΝΔΡΟΥ	$m$
$h_d$	ΠΑΧΟΣ ΤΟΙΧΩΜΑΤΟΣ ΕΚΤΟΠΙΣΤΗ	$m$
$h_c$	ΠΑΧΟΣ ΤΟΙΧΩΜΑΤΟΣ ΚΥΛΙΝΔΡΟΥ	$m$
$j$	ΦΑΝΤΑΣΤΙΚΗ ΜΟΝΑΔΑ	–
$k$	ΕΙΔΙΚΗ ΘΕΡΜΙΚΗ ΑΓΩΓΙΜΟΤΗΤΑ	$W/(m \cdot K)$
$\alpha$	ΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΑΚΗ ΑΓΩΓΙΜΟΤΗΤΑ	$m^2/sec$
$\dot{q}$	ΜΕΤΑΦΟΡΑ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ ΑΝΑ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ	$W/m^2$
$c$	ΕΙΔΙΚΗ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑ	$J/(kg \cdot K)$
$H$	ΕΝΘΑΛΠΙΑ	$J$
$\dot{H}$	ΜΕΤΑΦΟΡΑ ΕΝΘΑΛΠΙΑΣ	$J/sec$

$lg$	ΜΗΚΟΣ ΔΙΑΚΕΝΟΥ ΖΕΣΤΟΥ ΕΚΤΟΠΙΣΤΗ - ΚΥΛΙΝΔΡΟΥ	$m$
$\dot{Q}$	ΑΠΩΛΕΙΑ ΘΕΡΜΙΚΗΣ ΙΣΧΥΟΣ	$W$
$D$	ΔΙΑΜΕΤΡΟΣ	$m$
$\gamma$	ΙΣΕΝΤΡΟΠΙΚΗ ΣΤΑΘΕΡΑ	—
$\Delta V$	ΠΛΑΤΟΣ ΟΓΚΟΥ ΧΩΡΟΥ	$m^3$
$V_B$	ΜΕΣΟΣ ΟΓΚΟΣ ΧΩΡΟΥ	$m^3$
$L$	ΜΗΚΟΣ	$m$
$FH$	ΚΛΑΣΜΑ ΠΟΣΟΤΗΤΑΣ ΑΕΡΙΟΥ ΣΤΟΝ ΘΕΡΜΟ ΧΩΡΟ	—
$FH'$	ΚΛΑΣΜΑ ΠΟΣΟΤΗΤΑΣ ΑΕΡΙΟΥ ΣΤΟΝ ΚΡΥΟ ΧΩΡΟ	—
$FC$	ΚΛΑΣΜΑ ΠΟΣΟΤΗΤΑΣ ΑΕΡΙΟΥ ΣΤΟΝ ΧΩΡΟ ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΑΣ ΖΕΣΤΟΥ ΚΥΛΙΝΔΡΟΥ	—
$FC'$	ΚΛΑΣΜΑ ΠΟΣΟΤΗΤΑΣ ΑΕΡΙΟΥ ΣΤΟΝ ΧΩΡΟ ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΑΣ ΚΡΥΟΥ ΚΥΛΙΝΔΡΟΥ	—
$FCT$	ΕΝΕΡΓΟ ΚΛΑΣΜΑ ΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ ΠΑΡΟΧΗΣ ΜΑΖΑΣ	—
$f$	ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑΣ	$Hz$
$lt1$	ΜΗΚΟΣ ΚΥΜΑΤΟΣ ΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΑΣ ΣΤΟ ΤΟΙΧΩΜΑ ΕΚΤΟΠΙΣΤΗ	$m$
$lt2$	ΜΗΚΟΣ ΚΥΜΑΤΟΣ ΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΑΣ ΣΤΟ ΤΟΙΧΩΜΑ ΚΥΛΙΝΔΡΟΥ	$m$
$Dc_e$	ΔΙΑΜΕΤΡΟΣ ΖΕΣΤΟΥ ΚΥΛΙΝΔΡΟΥ	$m$
$Dc_e'$	ΔΙΑΜΕΤΡΟΣ ΚΡΥΟΥ ΚΥΛΙΝΔΡΟΥ	$m$
$A_{eff}$	ΕΝΕΡΓΟΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ	$m^2$
$A_w$ ή $A_{wg}$	ΒΡΕΧΟΜΕΝΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ	$m^2$
$NTU$	ΑΡΙΘΜΟΣ ΜΕΤΑΦΕΡΟΜΕΝΩΝ ΜΟΝΑΔΩΝ	—
$deltmx$	ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΗ ΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΑΣ	$K$
$Re_\omega$	ΑΡΙΘΜΟΣ VALENSI	—
$Pe_\omega$	ΑΡΙΘΜΟΣ PECTET	—
$Pr$	ΑΡΙΘΜΟΣ PRANDTL	—
$i$	ΦΑΝΤΑΣΤΙΚΗ ΜΟΝΑΔΑ	—

$n(\omega)$	ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑΣ	Hz
$h'$	ΠΛΑΤΟΣ ΔΙΑΚΕΝΟΥ ΚΡΥΟΥ ΕΚΤΟΠΙΣΤΗ - ΚΥΛΙΝΔΡΟΥ	m
$lg'$	ΜΗΚΟΣ ΔΙΑΚΕΝΟΥ ΚΡΥΟΥ ΕΚΤΟΠΙΣΤΗ - ΚΥΛΙΝΔΡΟΥ	m
$V_C$	ΟΓΚΟΣ ΣΑΡΩΣΗΣ ΖΕΣΤΟΥ ΕΚΤΟΠΙΣΤΗ	$m^3$
$V_C'$	ΟΓΚΟΣ ΣΑΡΩΣΗΣ ΚΡΥΟΥ ΕΚΤΟΠΙΣΤΗ	$m^3$
$\varphi_p$	ΔΙΑΦΟΡΑ ΦΑΣΗΣ ΜΕΤΑΞΥ ΠΙΕΣΕΩΣ ΚΑΙ ΤΑΧΥΤΗΤΑΣ ΖΕΣΤΟΥ ΕΚΤΟΠΙΣΤΗ	deg
$\varphi_p'$	ΔΙΑΦΟΡΑ ΦΑΣΗΣ ΜΕΤΑΞΥ ΠΙΕΣΕΩΣ ΚΑΙ ΤΑΧΥΤΗΤΑΣ ΚΡΥΟΥ ΕΚΤΟΠΙΣΤΗ	deg
$v$	ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ ΣΥΝΕΚΤΙΚΟΤΗΤΑ	St

Πίνακας 3.2 : Δείκτες και η σημασία τους στην ανάλυση μηχανών VM .

<b>ΔΕΙΚΤΕΣ</b>	<b>ΣΗΜΑΣΙΑ</b>
$h$	ΖΕΣΤΟΣ ΘΕΡΜΑΝΤΗΡΑΣ
$h'$	ΚΡΥΟΣ ΘΕΡΜΑΝΤΗΡΑΣ
$k$	ΖΕΣΤΟΣ ΨΥΚΤΗΣ
$k'$	ΚΡΥΟΣ ΨΥΚΤΗΣ
$r$	ΖΕΣΤΟΣ ΑΝΑΓΕΝΝΗΤΗΣ
$r'$	ΚΡΥΟΣ ΑΝΑΓΕΝΝΗΤΗΣ
$e$	ΖΕΣΤΟΣ ΧΩΡΟΣ ΕΚΤΟΝΩΣΗΣ
$e'$	ΚΡΥΟΣ ΧΩΡΟΣ ΕΚΤΟΝΩΣΗΣ
$c$	ΖΕΣΤΟΣ ΧΩΡΟΣ ΣΥΜΠΙΕΣΗΣ
$c'$	ΚΡΥΟΣ ΧΩΡΟΣ ΣΥΜΠΙΕΣΗΣ
$i$	ΕΙΣΟΔΟΣ ΚΕΛΙΟΥ
$o$	ΕΞΟΔΟΣ ΚΕΛΙΟΥ
$mean$	ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ
$d$	ΖΕΣΤΟΣ ΕΚΤΟΠΙΣΤΗΣ
$d'$	ΚΡΥΟΣ ΕΚΤΟΠΙΣΤΗΣ
$g$	ΑΕΡΙΟ ΣΤΟΝ ΖΕΣΤΟ ΚΥΛΙΝΔΡΟ
$g'$	ΑΕΡΙΟ ΣΤΟΝ ΚΡΥΟ ΚΥΛΙΝΔΡΟ

<i>sh</i>	ΤΑΚΤΙΚΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑ ΑΠΟ ΤΟΝ ΖΕΣΤΟ ΕΚΤΟΠΙΣΤΗ
<i>sh'</i>	ΤΑΚΤΙΚΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑ ΑΠΟ ΤΟΝ ΚΡΥΟ ΕΚΤΟΠΙΣΤΗ
<i>pu</i>	ΑΝΤΛΗΣΗ ΣΤΟ ΔΙΑΚΕΝΟ ΖΕΣΤΟΥ ΕΚΤΟΠΙΣΤΗ - ΚΥΛΙΝΔΡΟΥ
<i>pu'</i>	ΑΝΤΛΗΣΗ ΣΤΟ ΔΙΑΚΕΝΟ ΚΡΥΟΥ ΕΚΤΟΠΙΣΤΗ - ΚΥΛΙΝΔΡΟΥ
<i>α</i>	ΑΕΡΙΟ ΣΤΟ ΔΙΑΚΕΝΟ
<i>s</i>	ΣΤΕΡΕΟ
<i>seal</i>	ΣΦΡΑΓΙΣΗ ΣΤΟΝ ΖΕΣΤΟ ΕΚΤΟΠΙΣΤΗ
<i>seal'</i>	ΣΦΡΑΓΙΣΗ ΣΤΟΝ ΚΡΥΟ ΕΚΤΟΠΙΣΤΗ
<i>max</i>	ΜΕΓΙΣΤΗ ΤΙΜΗ
<i>min</i>	ΕΛΑΣΙΣΤΗ ΤΙΜΗ
<i>cond</i>	ΑΓΩΓΗ ΣΤΟΝ ΖΕΣΤΟ ΚΥΛΙΝΔΡΟ
<i>cond'</i>	ΑΓΩΓΗ ΣΤΟΝ ΚΡΥΟ ΚΥΛΙΝΔΡΟ
<i>w</i>	ΤΟΙΧΩΜΑ ΖΕΣΤΟΥ ΚΥΛΙΝΔΡΟΥ
<i>m</i>	ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ
<i>ffl</i>	ΑΠΩΛΕΙΑ ΤΡΙΒΗΣ ΡΟΗΣ ΣΤΟΥΣ ΖΕΣΤΟΥΣ ΘΕΡΜΟΕΝΑΛΛΑΚΤΕΣ
<i>ffl'</i>	ΑΠΩΛΕΙΑ ΤΡΙΒΗΣ ΡΟΗΣ ΣΤΟΥΣ ΚΡΥΟΥΣ ΘΕΡΜΟΕΝΑΛΛΑΚΤΕΣ
<i>hys</i>	ΥΣΤΕΡΗΣΗ ΣΤΟΝ ΖΕΣΤΟ ΚΥΛΙΝΔΡΟ
<i>hys'</i>	ΥΣΤΕΡΗΣΗ ΣΤΟΝ ΚΡΥΟ ΚΥΛΙΝΔΡΟ
<i>m</i>	ΥΛΙΚΟ
<i>w'</i>	ΤΟΙΧΩΜΑ ΚΡΥΟΥ ΚΥΛΙΝΔΡΟΥ
<i>C</i>	ΣΥΝΟΛΙΚΟΣ ΧΩΡΟΣ ΣΥΜΠΙΕΣΗΣ
<i>e'h'</i>	ΔΙΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΚΡΥΟΥ ΧΩΡΟΥ ΕΚΤΟΝΩΣΗΣ – ΨΥΧΡΟΥ ΘΕΡΜΑΝΤΗΡΑ
<i>h'r'</i>	ΔΙΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΨΥΧΡΟΥ ΘΕΡΜΑΝΤΗΡΑ – ΚΡΥΟΥ ΑΝΑΓΕΝΝΗΤΗ
<i>r'k'</i>	ΔΙΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΚΡΥΟΥ ΑΝΑΓΕΝΝΗΤΗ – ΚΡΥΟΥ ΨΥΚΤΗ
<i>k'C</i>	ΔΙΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΚΡΥΟΥ ΨΥΚΤΗ – ΧΩΡΟΥ ΣΥΜΠΙΕΣΗΣ



$Ck$	ΔΙΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΧΩΡΟΥ ΣΥΜΠΙΕΣΗΣ – ΖΕΣΤΟΥ ΨΥΚΤΗ
$kr$	ΔΙΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΖΕΣΤΟΥ ΨΥΚΤΗ – ΖΕΣΤΟΥ ΑΝΑΓΕΝΝΗΤΗ
$rh$	ΔΙΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΖΕΣΤΟΥ ΑΝΑΓΕΝΝΗΤΗ – ΖΕΣΤΟΥ ΘΕΡΜΑΝΤΗΡΑ
$he$	ΔΙΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΖΕΣΤΟΥ ΘΕΡΜΑΝΤΗΡΑ – ΖΕΣΤΟΥ ΧΩΡΟΥ ΕΚΤΟΝΩΣΗΣ

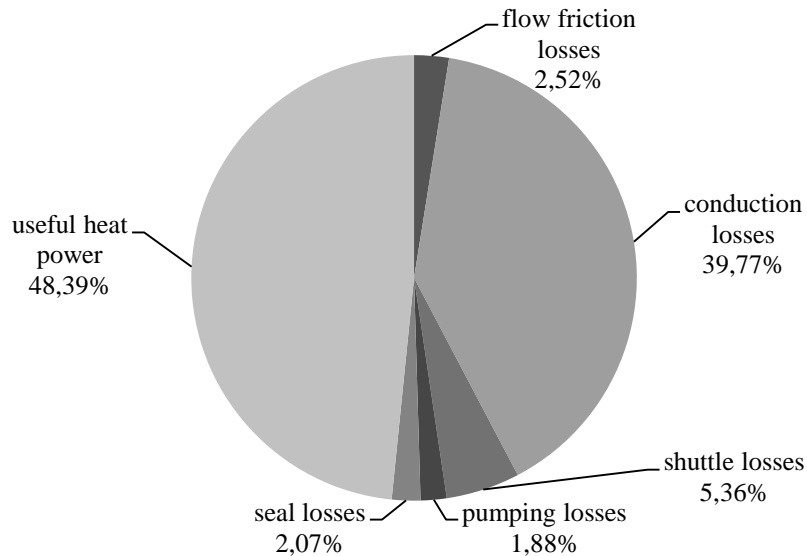
Πίνακας 3.3 : Άλλα σύμβολα και η σημασία τους

ΑΛΛΑ ΣΥΜΒΟΛΑ	ΣΗΜΑΣΙΑ
$Dx = dx/dt$	ΧΡΟΝΙΚΟΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΤΕΛΕΣΤΗΣ
$ x $	ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ
$\sum_I x_i$	ΑΘΡΟΙΣΜΑ
$\bar{x}$	ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ
$\hat{x}$	ΠΛΑΤΟΣ (AMPLITUDE)
$\bar{x}$	ΣΥΖΥΓΗΣ ΤΙΜΗ
$x^*$	ΜΕΓΕΘΟΣ ΣΕ ΤΟΠΙΚΟ ΑΞΟΝΑ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ Η ΑΔΙΑΣΤΑΤΟ ΜΕΓΕΘΟΣ

### 3.2 Σύνοψη απωλειών μηχανών VM για κάθε ερευνητή

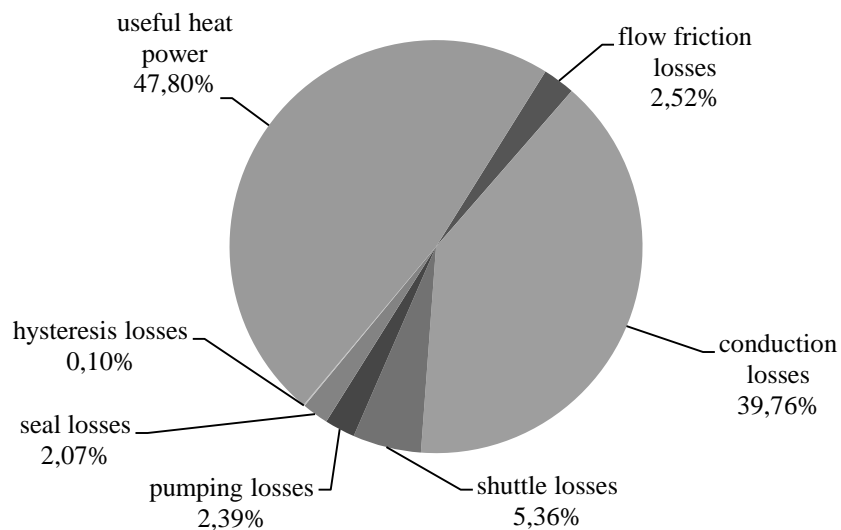
*Urieli*: Ο Urieli, στο βιβλίο που έχει συγγράψει μαζί με τον Berchowitz, αναφέρεται αρχικά στις απώλειες λόγω πτώσης πίεσης του αερίου στους θερμοεναλλάκτες (flow dissipation losses ή flow friction losses). Ο λόγος πτώσης πίεσης του αερίου κατά τη ροή του στους θερμοεναλλάκτες είναι οι εσωτερικές τριβές που αναπτύσσονται μεταξύ των μορίων του αερίου και των τοιχωμάτων του αντίστοιχου θερμοεναλλάκτη. Την υπολογίζει μέσω του νόμου του Newton για τη συνεκτικότητα. Στη συνέχεια αναφέρεται στην απώλεια λόγω τακτικής μεταφοράς θερμότητας (shuttle losses). Η τακτική μεταφορά θερμότητας είναι η αγωγή θερμότητας (conduction loss) στα τοιχώματα του εκτοπιστή αυξανόμενη απ' την παλινδρομική κίνηση των τοιχωμάτων. Μέσω της εξίσωσης Navier - Stokes για τα συμπιεστά ρευστά καταλήγει μέσω κάποιων υποθέσεων στη τελική εξίσωση που δίνει την απώλεια αυτή. Η επόμενη απώλεια αφορά τη μεταφορά ενθαλπίας του αερίου στο διάκενο μεταξύ εκτοπιστή και κυλίνδρου (pumping losses ή gas enthalpy transport losses). Μέσω κλασικών θερμοδυναμικών σχέσεων φτάνει στην τελική σχέση της απώλειας αυτής. Μια επιπλέον απώλεια που πραγματεύεται το μοντέλο του είναι απώλεια θερμοδυναμικού έργου στη σφράγιση του κάθε

εκτοπιστή (seal losses). Εφόσον καταστρώσει την εξίσωση που δίνει τη μεταβολή του όγκου του διακένου καταλήγει σχετικά εύκολα στην τελική εξίσωση. Η τελευταία απώλεια στην οποία αναφέρεται είναι η απώλεια λόγω αγωγής θερμότητας μέσω του αερίου και μέσω των διαφόρων τοιχωμάτων λόγω της ύπαρξης θερμοκρασιακών διαφορών (conduction losses). Μέσω της κλασικής σχέσης του Fourier υπολογίζει τις απώλειες αυτές.



Σχήμα 3.1 : Ενδεικτικά ποσοστά απωλειών επί της συνολικής θερμικής ισχύος μηχανής VM κατά το μοντέλο του Urieli .

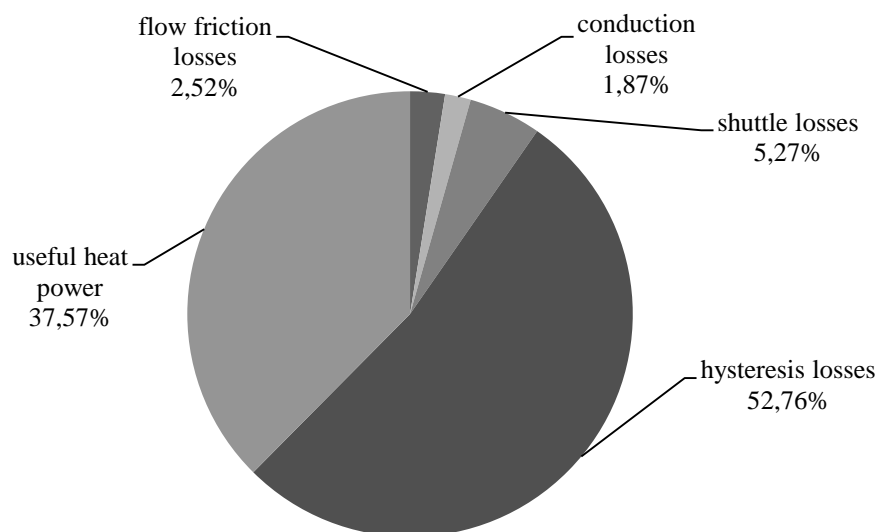
Berchowitz: Για τον Berchowitz οι απώλειες λόγω πτώσης πίεσης του αερίου στους θερμοεναλλάκτες (flow dissipation losses ή flow friction losses), η απώλεια λόγω τακτικής μεταφοράς θερμότητας (shuttle losses), ο υπολογισμός της απώλειας θερμοδυναμικού έργου στη σφράγιση του κάθε εκτοπιστή (seal losses) και ο υπολογισμός των conduction losses είναι ίδιος με του Urieli (βιβλίο Urieli και Berchowitz).



Σχήμα 3.2 : Ενδεικτικά ποσοστά απωλειών επί της συνολικής θερμικής ισχύος μηχανής VM κατά το μοντέλο του Berchowitz.

Στον υπολογισμό όμως των απωλειών λόγω μεταφοράς ενθαλπίας του αερίου στο διάκενο μεταξύ εκτοπιστή και κυλίνδρου (pumping losses ή gas enthalpy transport losses) έχει διαφορετική θεώρηση στην οποία ενσωματώνει υποθέσεις για αδιάστατα μεγέθη σύμφωνα με εμπειρικά δεδομένα. Επίσης, θεωρεί την ύπαρξη απωλειών λόγω υστέρησης αερίου στους εργαζόμενους χώρους (εκτόνωσης, συμπίεσης). Θεωρεί ότι οι εργαζόμενοι χώροι κάτω από ορισμένες συνθήκες μοιάζουν αρκετά με τους χώρους ελατηρίων αερίου που χρησιμοποιούνται σε free piston μηχανές (ελευθέρων εμβόλων) .

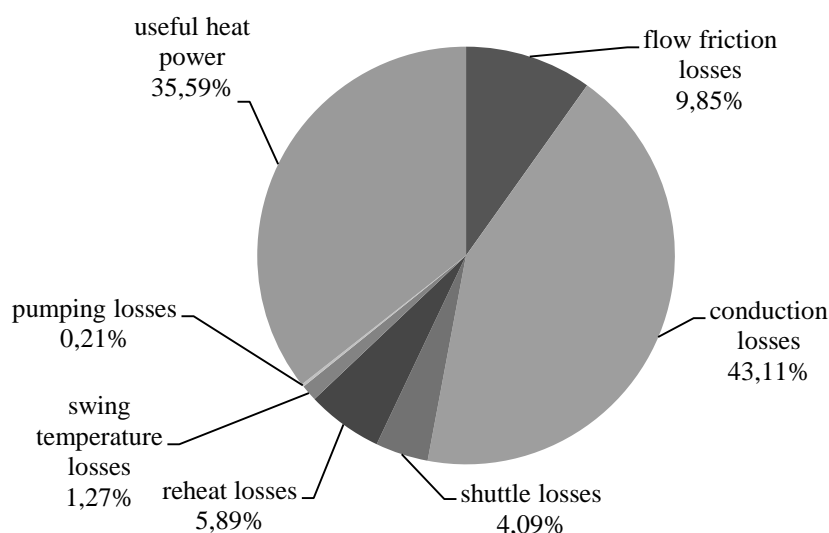
Timoumi: Ο Timoumi αναφέρεται αρχικά στις απώλειες λόγω πτώσης πίεσης του αερίου στους θερμοεναλλάκτες (flow dissipation losses ή flow friction losses) τις οποίες υπολογίζει με τον ίδιο τρόπο με τους Urieli και Berchowitz. Στη συνέχεια πραγματοποιείται την απώλεια λόγω τακτικής μεταφοράς θερμότητας (shuttle losses). Ο τύπος για την απώλεια αυτή εκτείνεται σ' όλο το μήκος του εκτοπιστή και όχι μόνο στο μήκος διακένου μεταξύ εκτοπιστή – κυλίνδρου. Για τις απώλειες λόγω αγωγής θερμότητας αναφέρεται μόνο σ' εκείνες κατά μήκος των θερμοεναλλακτών δίνοντας ως τρόπο υπολογισμού την σχέση του Fourier. Όσον αφορά τις απώλειες λόγω υστέρησης του αερίου ο Timoumi θεωρεί ότι η σχέση του Urieli που αντιστοιχεί στα ελατήρια αερίου ισχύει και για τους εργαζόμενους χώρους (working spaces). Η σχέση αυτή διαφέρει κατά πολύ απ' αυτήν που δίνει ο Berchowitz.



Σχήμα 3.3 : Ενδεικτικά ποσοστά απωλειών επί της συνολικής θερμικής ισχύος μηχανής VM κατά το μοντέλο του Timoumi.

Martini: Ο Martini πραγματοποιείται αρχικά τις απώλειες λόγω πτώσης πίεσης του αερίου στους θερμοεναλλάκτες (flow dissipation losses ή flow friction losses). Θεωρεί πως ο λόγος ύπαρξης της απώλειας αυτής είναι οι τριβές στο ρευστό, όπως υποστηρίζουν και οι υπόλοιποι ερευνητές. Την εξίσωση που δίνει την πτώση πίεσης την υπολογίζει με τον ίδιο τρόπο με τους Urieli και Berchowitz. Όμως, για την εύρεση των παροχών μάζας αερίου στους θερμοεναλλάκτες χρησιμοποιεί μια διαφορετική μέθοδο, η οποία έχει ως στόχο να προσδιορίσει το ενεργό κλάσμα της μάζας κάθε φορά. Στη συνέχεια αναφέρεται στην απώλεια λόγω τακτικής μεταφοράς θερμότητας (shuttle losses). Ο τύπος που χρησιμοποιεί μοιάζει αρκετά με αυτόν του Timoumi με

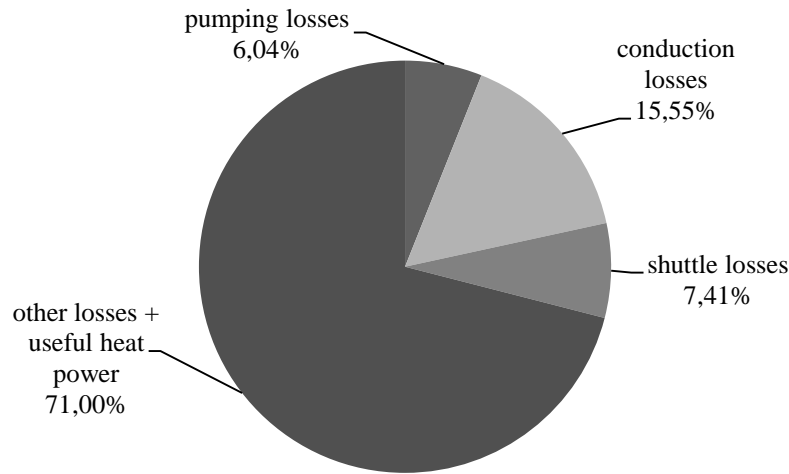
κάποιες μικροδιαφορές. Για τον υπολογισμό των απωλειών λόγω αγωγής θερμότητας δίνει την εξίσωση του Fourier. Όσον αφορά τις απώλειες λόγω μεταφοράς ενθαλπίας, σύμφωνα με τον Martini καθώς στη μηχανή πραγματοποιείται συμπίεση και αποσυμπίεση (εκτόνωση) το εργαζόμενο αέριο ρέει μέσα και έξω από το κενό μεταξύ του εκτοπιστή και του κυλίνδρου. Εφόσον η σφράγιση στην άκρη του κενού είναι ψυχρή, επιπλέον θερμότητα πρέπει να προστεθεί στο αέριο καθώς εξέρχεται απ' το κενό. Επίσης κάνει λόγο για απώλειες λόγω αναθέρμανσης στους αναγεννητές (reheat losses). Ένας λόγος για τον οποίον απαιτείται επιπλέον θερμότητα απ' την πηγή θερμότητας είναι η αναποτελεσματικότητα του αναγεννητή. Ο αναγεννητής αναθερμαίνει το αέριο το οποίο επιστρέφει στο θερμό χώρο της μηχανής. Η αναθέρμανση που δεν παρέχεται απ' τον αναγεννητή θα πρέπει να δοθεί απ' τον θερμαντήρα. Η τελευταία απώλεια με την οποία καταπιάνεται οφείλεται στην παλινδρόμηση θερμοκρασίας (swing temperature losses) στους αναγεννητές. Ουσιαστικά είναι η πρόσθετη θερμότητα λόγω της ταλάντωσης θερμοκρασίας της μήτρας του αναγεννητή, η οποία πρέπει να προστεθεί από το θερμαντήρα αερίου λόγω της πεπερασμένης θερμοχωρητικότητας του αναγεννητή.



Σχήμα 3.4 : Ενδεικτικά ποσοστά απωλειών επί της συνολικής θερμικής ισχύος μηχανής VM κατά το μοντέλο του Martini.

Pfeiffer: Το μοντέλο απωλειών του J.Pfeiffer αφορά τις απώλειες που σχετίζονται με το διάκενο μεταξύ εκτοπιστή και κυλίνδρου δηλαδή τις appendix gap losses και με τις απώλειες λόγω αγωγής θερμότητας στα τοιχώματα του εκτοπιστή και του κυλίνδρου. Οι appendix gap losses αποτελούνται από δύο απώλειες, την τακτική μεταφορά θερμότητας (shuttle loss) καθώς και από τη μεταφορά ενθαλπίας (pumping losses). Ο Pfeiffer στις pumping losses έχει ενσωματώσει επιπλέον την απώλεια θερμοδυναμικού έργου στη σφράγιση (seal losses). Όλες αυτές οι απώλειες που μελετά ο Pfeiffer έχουν ένα κοινό χαρακτηριστικό. Εξαρτώνται όλες απ' την κλίση θερμοκρασίας  $Y = \theta T / \theta x$  στο διάκενο. Ενώ όλοι οι προηγούμενοι ερευνητές θεωρούν ότι το  $Y$  είναι σταθερό δηλαδή ότι το προφίλ θερμοκρασίας στο διάκενο είναι γραμμικό, ο Pfeiffer με βάση πειραματικών δεδομένων θεωρεί ότι το προφίλ αυτό δεν είναι γραμμικό αλλά καμπυλωτό με αποτέλεσμα η νέα μορφή του να επηρεάζει τις τιμές των απωλειών αυτών. Στη μελέτη ο Pfeiffer χρησιμοποιεί αδιάστατα μεγέθη και ενσωματώνει και άλλα μεγέθη όπως μια πιθανή κωνικότητα στον κύλινδρο. Κατά τον ερευνητή οι pumping και οι shuttle losses μπορεί να

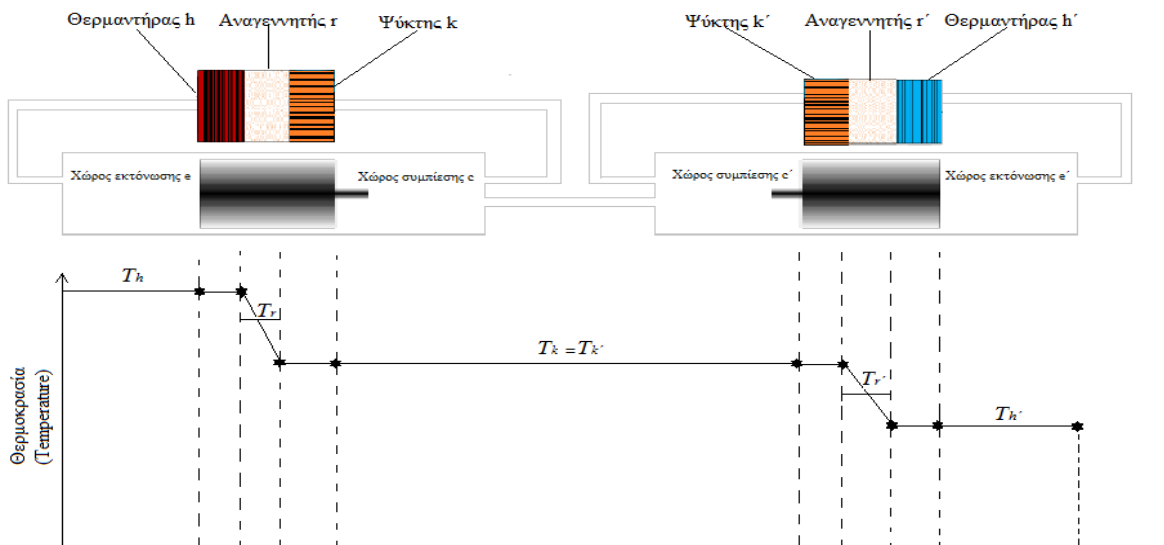
αποτελέσουν είτε θερμική απώλεια είτε θερμικό κέρδος (thermal gain). Όμως πάντοτε το άθροισμα τους θα αντιστοιχεί σε θερμική απώλεια.



Σχήμα 3.5 : Ενδεικτικά ποσοστά απωλειών επί της συνολικής θερμικής ισχύος μηχανής VM κατά το μοντέλο του Pfeiffer.

### 3.3 Το ισοθερμοκρασιακό μοντέλο

Η υπόθεση των ισοθερμικών εργαζόμενων χώρων και θερμοεναλλακτών συνεπάγεται ότι οι θερμοεναλλάκτες (συμπεριλαμβανομένων των αναγεννητών) είναι τέλει. Η χωρική κατανομή της θερμοκρασίας σε μία μηχανή Vuilleumier δίνεται στο σχήμα 3.6. Η μηχανή είναι διαμορφωμένη ως ένα μοντέλο δέκα στοιχείων σε σειρά συνδεδεμένα αποτελούμενο από τον ζεστό χώρο εκτόνωσης  $e$ , τον ζεστό θερμαντήρα  $h$ , τον ζεστό αναγεννητή  $r$ , τον ζεστό ψύκτη  $k$ , τον ζεστό χώρο συμπίεσης  $c$ , τον κρύο χώρο συμπίεσης  $c'$ , τον κρύο ψύκτη  $k'$ , τον κρύο αναγεννητή  $r'$ , τον κρύο θερμαντήρα  $h'$  και τον κρύο χώρο εκτόνωσης  $e'$ .



Σχήμα 3.6 : Ιδανικό ισοθερμοκρασιακό μοντέλο

Οι συνδετικοί χώροι (connecting ducts) μεταξύ των χώρων συμπίεσης και των ψυκτών, μεταξύ των χώρων εκτόνωσης και των θερμαντήρων και μεταξύ των χώρων συμπίεσης θα συμπεριλαμβάνονται στους νεκρούς (άεργους) όγκους των χώρων συμπίεσης και εκτόνωσης αντίστοιχα. Κάθε στοιχείο θεωρείται ως μία ομοιογενής οντότητα ή κελί, όπου το εργαζόμενο αέριο προσδιορίζεται από τη στιγμιαία μάζα του  $m$ , απόλυτη θερμοκρασία  $T$ , όγκο  $V$  και πίεση  $p$ . Καθεμιά από αυτές τις ιδιότητες η οποία αναφέρεται σε συγκεκριμένο κελί γράφεται με τον ανάλογο δείκτη του κελιού.

Επιπροσθέτως, ο δείκτης που αναφέρεται σε κελιά του κρύου κυλίνδρου παίρνει έναν τόνο. Για παράδειγμα, η μάζα του αερίου στον ζεστό αναγεννητή συμβολίζεται  $m_r$  ενώ στον κρύο αναγεννητή με  $m_{r'}$ . Στην ιδανική περίπτωση γίνεται η υπόθεση ότι δεν έχουμε πτώση πίεσης όποτε η πίεση του αερίου  $p$  δεν γράφεται με δείκτες και αναπαριστά τη στιγμιαία πίεση σ' όλη τη μηχανή VM. Στη συνέχεια γίνονται ακόμα κάποιες παραδοχές:

1. Η μάζα του εργαζόμενου αερίου είναι σταθερή δηλαδή δεν υπάρχουν διαρροές.
2. Το εργαζόμενο αέριο θεωρείται τέλειο (χρησιμοποίηση καταστατικής εξίσωσης τελείου αερίου).
3. Η ταχύτητα λειτουργίας της μηχανής είναι σταθερή.
4. Κυκλική σταθερή κατάσταση διέπει τη λειτουργία της μηχανής.
5. Οι κινητικές και δυναμικές ενέργειες του αερίου αμελούνται [7].

### 3.3.1 Η ισοθερμοκρασιακή ανάλυση

Στην ανάλυση αυτή στόχος είναι να καθοριστεί η θερμική ή η ψυκτική ενέργεια αντίστοιχα που αποδίδει μία μηχανή VM, ο συντελεστής συμπεριφοράς της μηχανής  $COP$  και η θερμότητα που μεταφέρεται στο εργαζόμενο αέριο. Όπως είναι γνωστό η συνολική μάζα του αερίου στη μηχανή είναι σταθερή, οπότε ισχύει :

$$M = m_e + m_h + m_r + m_k + m_c + m_{c'} + m_{k'} + m_{r'} + m_{h'} + m_{e'} \quad (3.1)$$

Χρησιμοποιώντας τον ιδανικό νόμο των αερίων που δίνεται από την εξής εξίσωση :

$$m = \frac{p \cdot V}{R \cdot T} \quad (3.2)$$

Η (3.1) γράφεται :

$$M = \frac{p \cdot \left( \frac{V_e}{T_h} + \frac{V_h}{T_h} + \frac{V_r}{T_r} + \frac{V_k}{T_k} + \frac{V_c}{T_k} + \frac{V_{c'}}{T_{k'}} + \frac{V_{k'}}{T_{k'}} + \frac{V_{r'}}{T_{r'}} + \frac{V_{h'}}{T_h} + \frac{V_{e'}}{T_{h'}} \right)}{R} \quad (3.3)$$

όπου  $T_r$  και  $T_{r'}$  είναι οι ενεργές θερμοκρασίες των αναγεννητών. Η ενεργός θερμοκρασία του αναγεννητή δίνεται απ' την παρακάτω σχέση :

$$T_r = \frac{T_h - T_k}{\ln\left(\frac{T_h}{T_k}\right)} \quad (3.4)$$

Λύνοντας την (3.3) μέσω της (3.4) ως προς την πίεση  $p$  έχουμε:

$$p = M \cdot R \cdot \left( \frac{V_e}{T_h} + \frac{V_h}{T_h} + \frac{V_r \cdot \ln\left(\frac{T_h}{T_k}\right)}{(T_h - T_k)} + \frac{V_k}{T_k} + \frac{V_c}{T_k} + \frac{V_{c'}}{T_{k'}} + \frac{V_{k'}}{T_{k'}} + \frac{V_{r'} \cdot \ln\left(\frac{T_{k'}}{T_{h'}}\right)}{(T_{k'} - T_{h'})} + \frac{V_{h'}}{T_{h'}} + \frac{V_{e'}}{T_{h'}} \right) \quad (3.5)$$

Η εξίσωση (3.5) δίνει την πίεση  $p$  του εργαζόμενου αερίου ως συνάρτηση των μεταβαλλόμενων όγκων των εργαζόμενων χώρων (χώροι εκτόνωσης και χώροι συμπίεσης). Τα συνολικά έργα (έργα ανά κύκλο) ογκομεταβολής στους εργαζόμενους χώρους προκύπτουν με ολοκλήρωση ως εξής:

*Ζεστός χώρος εκτόνωσης:*

$$W_e = \oint p \cdot \frac{dV_e(\theta)}{d\theta} \cdot d\theta \quad (3.6)$$

*Κρύος χώρος εκτόνωσης:*

$$W_{e'} = \oint p \cdot \frac{dV_{e'}(\theta)}{d\theta} \cdot d\theta \quad (3.7)$$

*Ζεστός χώρος συμπίεσης:*

$$W_c = \oint p \cdot \frac{dV_c(\theta)}{d\theta} \cdot d\theta \quad (3.8)$$

*Κρύος χώρος συμπίεσης:*

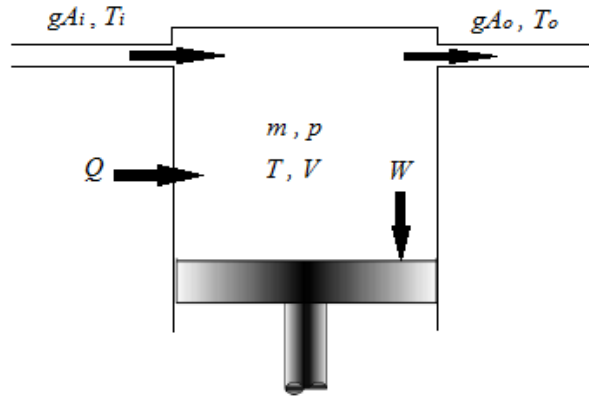
$$W_{c'} = \oint p \cdot \frac{dV_{c'}(\theta)}{d\theta} \cdot d\theta \quad (3.9)$$

όπου  $\theta$  είναι η γωνία περιστροφής του στροφάλου.

Η μεταφορά θερμότητας από και προς το εξωτερικό περιβάλλον λαμβάνει χώρα στη θερμή, στη κρύα και στην ενδιάμεση θερμοκρασία  $T_h$ ,  $T_{h'}$ ,  $T_k$ ,  $T_{k'}$ . Για να προσδιοριστεί η μεταφορά θερμότητας στους χώρους αυτούς (κελιά), είναι απαραίτητο να εξετάσουμε την ενεργειακή εξίσωση του εργαζόμενου αερίου.

Ένα γενικευμένο κελί όπως φαίνεται στο σχήμα 3.7 μπορεί να αφορά είτε ένα κελί εργαζόμενου χώρου είτε ένα κελί θερμοεναλλάκτη. Ενθαλπία μεταφέρεται μέσα στο κελί μέσω παροχής

μάζας  $gA_i$  και θερμοκρασίας  $T_i$  και έξω απ' το κελί μέσω παροχής μάζας  $gA_o$  και θερμοκρασίας  $T_o$ .



Σχήμα 3.7 : Γενικευμένο κελί

Η ενεργειακή εξίσωση για το εργαζόμενο αέριο σε ένα γενικευμένο κελί διατυπώνεται ως ακολούθως :

{ ρυθμός μεταφοράς θερμότητας στο κελί μέσω συναγωγής } + { μεταφορά καθαρής ενθαλπίας στο κελί } = { ρυθμός έργου στα περίχωρα } + { ρυθμός αύξησης εσωτερικής ενέργειας στο κελί }

Η διατύπωση αυτή δίνεται μέσω μαθηματικής εξισώσεως :

$$\frac{dQ}{dt} + (c_p \cdot T_i \cdot gA_i - c_p \cdot T_o \cdot gA_o) = \frac{dW}{dt} + c_v \cdot \frac{d(m \cdot T)}{dt} \quad (3.10)$$

όπου  $c_p$  και  $c_v$  είναι οι ειδικές θερμοχωρητικότητες του αερίου υπό σταθερή πίεση και όγκο αντίστοιχα. Στην εξίσωση (3.10) οι όροι κινητικής και δυναμικής ενέργειας έχουν αμεληθεί.

Σύμφωνα με το ισοθερμικό μοντέλο όσον αφορά τους εργαζόμενους χώρους καθώς και τους θερμοεναλλάκτες ισχύει ότι  $T_i = T_o = T$ . Οπότε έχουμε :

$$\frac{dQ}{dt} = c_p \cdot T (gA_o - gA_i) + \frac{dW}{dt} + c_v \cdot T \frac{dm}{dt} \quad (3.11)$$

Λόγω της διατήρησης της μάζας, η διαφορά μεταξύ των παροχών μάζας ( $gA_o - gA_i$ ) είναι ουσιαστικά, ο ρυθμός συσσώρευσης της μάζας στο κελί. Έτσι η εξίσωση (3.11) μετασχηματίζεται στην εξής :

$$\frac{dQ}{dt} = R \cdot T \frac{dm}{dt} + \frac{dW}{dt} \quad (3.12)$$

όπου για το ιδανικό αέριο ισχύει  $R = c_p - c_v$ .

Η καθαρή μεταφορά θερμότητας στο αέριο για ένα κύκλο λειτουργίας δίνεται μέσω ολοκλήρωσης της εξισώσεως (3.12) :

$$Q = \oint \frac{dQ}{dt} = R \cdot T \cdot \oint \frac{dm}{dt} + \oint \frac{dW}{dt} \quad (3.13)$$



Η υπόθεση της σταθερής κυκλικής κατάστασης λειτουργίας έχει σαν αποτέλεσμα η κυκλική μεταβολή της μάζας του εργαζόμενου αερίου σε κάθε κελί να είναι μηδενική. Οπότε η εξίσωση (3.13) που αφορά τους εργαζόμενους χώρους (working spaces) γίνεται :

$$Q_e = W_e \quad (3.14)$$

$$Q_{e'} = W_{e'} \quad (3.15)$$

$$Q_c = W_c \quad (3.16)$$

$$Q_{c'} = W_{c'} \quad (3.17)$$

Παρομοίως έχουμε για τους χώρους των θερμοεναλλακτών (heat exchanger spaces) στους οποίους δεν έχουμε έργο :

$$Q_h = 0 \quad (3.18)$$

$$Q_{h'} = 0 \quad (3.19)$$

$$Q_k = 0 \quad (3.20)$$

$$Q_{k'} = 0 \quad (3.21)$$

Το παράδοξο που προκύπτει με βάση τις τελευταίες σχέσεις είναι ότι οι θερμοεναλλάκτες είναι περιττοί καθώς όλη η συναλλαγή θερμότητας λαμβάνει χώρα μόνο μέσω των εργαζόμενων χώρων. Αυτό το παράδοξο καλείται να λύσει το ιδανικό αδιαβατικό μοντέλο ανάλυσης [7] . Οι βασικές σχέσεις που προκύπτουν με βάση τη θερμοδυναμική ανάλυση μιας μηχανής VM μέσω του ισοθερμοκρασιακού μοντέλου δίνονται συνοπτικά στον πίνακα 3.4.

Πίνακας 3.4 : Εξισώσεις με βάση το ισοθερμικό μοντέλο ανάλυσης για μηχανή VM.

$p = M \cdot R \cdot \left( \frac{V_e}{T_h} + \frac{V_h}{T_h} + \frac{V_r \cdot \ln\left(\frac{T_h}{T_k}\right)}{(T_h - T_k)} + \frac{V_k}{T_k} + \frac{V_c}{T_k} + \frac{V_{c'}}{T_{k'}} + \frac{V_{k'}}{T_{k'}} + \frac{V_r \cdot \ln\left(\frac{T_{k'}}{T_{h'}}\right)}{(T_{k'} - T_{h'})} + \frac{V_{h'}}{T_{h'}} + \frac{V_{e'}}{T_{h'}} \right)$	<b>Πίεση</b>
$Q_e = W_e = \oint p \cdot \frac{dV_e(\theta)}{d\theta} \cdot d\theta$	
$Q_{e'} = W_{e'} = \oint p \cdot \frac{dV_{e'}(\theta)}{d\theta} \cdot d\theta$	
$Q_c = W_c = \oint p \cdot \frac{dV_c(\theta)}{d\theta} \cdot d\theta$	<b>Μεταφερόμενη θερμότητα</b>
$Q_{c'} = W_{c'} = \oint p \cdot \frac{dV_{c'}(\theta)}{d\theta} \cdot d\theta$	

$Q =  Q_c + Q_{c'} $	Θερμική ενέργεια εξόδου
$Q = Q_{e'}$	Θερμότητα από το περιβάλλον
$COP_h = \frac{ Q_c + Q_{c'} }{Q_e}$	Θερμικός συντελεστής συμπεριφοράς
$COP_c = \frac{Q_{e'}}{Q_e}$	Ψυκτικός συντελεστής συμπεριφοράς

### 3.4 Μοντέλα ερευνητών

#### 3.4.1 Μοντέλο εξισώσεων του I. Urieli

Το μοντέλο εξισώσεων του I.Urieli όπως το περιγράφει στο βιβλίο του "Stirling Engine Cycle Analysis" αφορά τις θερμικές απώλειες των μηχανών Stirling. Στην ενότητα αυτή θα γίνει επέκταση του μοντέλου αυτού έτσι ώστε να καλύπτει τις θερμικές απώλειες μιας μηχανής Vuilleumier. Γενικά όλα τα μοντέλα που θα παρουσιαστούν από εδώ και πέρα θα αφορούν τον ζεστό κύλινδρο της μηχανής VM και στο τέλος θα συγχωνεύονται και οι εξισώσεις που αφορούν τον κρύο κύλινδρο με τονούμενα μεγέθη.

#### Απώλειες λόγω πτώσης πίεσης στους θερμοεναλλάκτες

Η δυναμική συνεκτικότητα  $\mu$  είναι ένας βασικός τρόπος μέτρησης των εσωτερικών τριβών μεταξύ των μορίων του αερίου και των τοιχωμάτων του κάθε θερμοεναλλάκτη. Σύμφωνα με τον νόμο του Newton για τη συνεκτικότητα, η διατμητική (εφαπτομενική) τάση  $\sigma$  μεταξύ των διαφόρων γειτονικών στρωμάτων του ρευστού είναι ανάλογη της κλίσης της ταχύτητας  $\sigma'$  αυτά τα στρώματα κατά την κατεύθυνση της ροής :

$$\sigma = -\mu \cdot \frac{dU}{dz} \quad (3.22)$$

όπου  $\sigma$  είναι η διατμητική τάση και  $dU/dz$  είναι η κλίση της ταχύτητας. Με την υπόθεση ότι η ροή δεν είναι αυστηρά μονοδιάστατη, η δύναμη τριβής αντίστασης  $F$  σχετίζεται με τη διατμητική τάση  $\sigma$  ως ακολούθως :

$$F = \sigma \cdot A_{wg} \quad (3.23)$$

όπου  $A_{wg}$  είναι βρεχόμενη επιφάνεια (wetted area ή wall to gas area) η οποία δίνεται απ' την εξής σχέση :

$$A_{wg} = \frac{4 \cdot V}{d} \quad (3.24)$$

όπου  $d$  είναι η υδραυλική διάμετρος και  $V$  είναι ο όγκος ροής στον θερμοεναλλάκτη. Μέσω της σχέσης (3.23) και (3.24) έχουμε :

$$F = \frac{4 \cdot \sigma \cdot V}{d} \quad (3.25)$$

Ο συμβατικός συντελεστής τριβής  $f_f$  (Fanning friction factor) ορίζεται μέσω της διατμητικής τάσεως ως εξής (Kays και London 1964) :

$$f_f \equiv \frac{2 \cdot \sigma \cdot \rho}{g^2} \quad (3.26)$$

όπου  $\rho$  είναι η πυκνότητα του αερίου και  $g$  είναι η παροχή μάζας του αερίου ανά επιφάνεια (working gas mass flux). Αντικαθιστώντας τη σχέση (3.26) στην (3.25) έχουμε ότι :

$$F = \frac{2 \cdot f_f \cdot g^2 \cdot V}{d \cdot \rho} \quad (3.27)$$

Η δύναμη τριβής αντίστασης είναι ίση και αντίθετη της δύναμης πτώσης πίεσης, οπότε :

$$F + \Delta p \cdot A = 0 \quad (3.28)$$

Αντικαθιστώντας την σχέση (3.27) στην (3.28) έχουμε :

$$\Delta p + \frac{2 \cdot f_f \cdot g^2 \cdot V}{d \cdot \rho \cdot A} = 0 \quad (3.29)$$

Η πτώση πίεσης  $\Delta p$  μπορεί να είναι αρνητική ή θετική ανάλογα με την κατεύθυνση της ροής. Ένα πιο βολικό ορισμό για τον συντελεστή τριβής πρότεινε ο Urieli (1977), σύμφωνα με τον οποίο, ο λεγόμενος συντελεστής τριβής Reynolds  $f_r$  ισούται με :

$$f_r \equiv f_f \cdot \text{Re} \quad (3.30)$$

Ο αδιάστατος αριθμός Reynolds (Re), ο οποίος χαρακτηρίζει τη ροή ενός ρευστού (στρωτή ή τυρβώδης) δίνεται απ' την εξής εξίσωση :

$$\text{Re} \equiv \left| \frac{g \cdot d}{\mu} \right| \quad (3.31)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (3.30), (3.31) στη σχέση (3.29) έχουμε την τελική σχέση πτώσης πίεσης στους θερμοεναλλάκτες :

$$\Delta p = - \frac{2 \cdot f_r \cdot \mu \cdot g A \cdot V}{A^2 \cdot d^2 \cdot \rho} \quad (3.32)$$

Τότε οι συνολικές απώλειες λόγω πτώσης πίεσης στους θερμοεναλλάκτες δίνονται απ' την εξής σχέση [7] :

$$\dot{Q}_{ffl} = \sum_i \left( -\frac{\Delta p_i \cdot gA_i \cdot V_i}{m_i} \right), i = h, r, k, k', r', h' \quad (3.33)$$

όπου  $gA_i$  η παροχή μάζας του αερίου στον θερμοεναλλάκτη. Η πτώση πίεσης, η παροχή μάζας καθώς και η μάζα του αερίου είναι συναρτήσεις της γωνίας  $\theta$  του στροφάλου. Η παροχή μάζας του αερίου προκύπτει μέσω της καταστατικής εξίσωσης των ιδανικών αερίων. Το αρνητικό πρόσημο υποδεικνύει ότι πρόκειται για απώλεια. Για τον υπολογισμό της απώλειας αυτής είναι απαραίτητο αρχικά να υπολογιστούν η δυναμική συνεκτικότητα  $\mu$  και ο συντελεστής  $f_r$  σε σχέση με τον αριθμό  $Re$ . Με τη θεώρηση ότι για συγκεκριμένο εύρος πιέσεων η δυναμική συνεκτικότητα είναι ανεξάρτητη της πίεσης δίνεται η παρακάτω σχέση :

$$\mu(T) = \mu_0 \cdot \left( \frac{T_0 + T_{su}}{T + T_{su}} \right) \cdot \left( \frac{T}{T_0} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (3.34)$$

όπου για το αέριο ήλιο έχουμε ότι  $\mu_0 = 18.85 \cdot 10^{-6} \text{ kg/m} \cdot \text{sec}$ ,  $T_0 = 273K$  και  $T_{su} = 80$  (σταθερά Sutherland). Όσον αφορά τον συντελεστή  $f_r$  στους θερμοαπαικτες και στους ψύκτες σε σχέση με τον αριθμό  $Re$  ισχύουν τα εξής (Rogers και Mayhew 1967) :

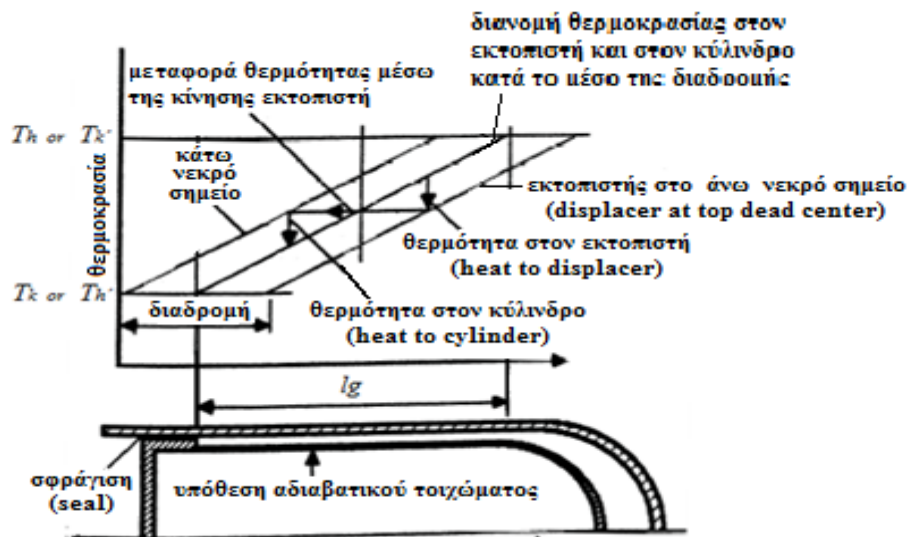
$$\begin{aligned} Re < 2000 &\rightarrow f_r = 16 \\ 2000 < Re < 4000 &\rightarrow f_r = 7.343 \cdot 10^{-4} \cdot Re^{1.3142} \\ Re > 4000 &\rightarrow f_r = 0.0791 \cdot Re^{0.75} \end{aligned} \quad (3.35)$$

Όσον αφορά τον συντελεστή  $f_r$  στους αναγεννητές σε σχέση με τον αριθμό  $Re$  έχουμε :

$$f_r = 54 + 1.43 \cdot Re^{0.48} \quad (3.36)$$

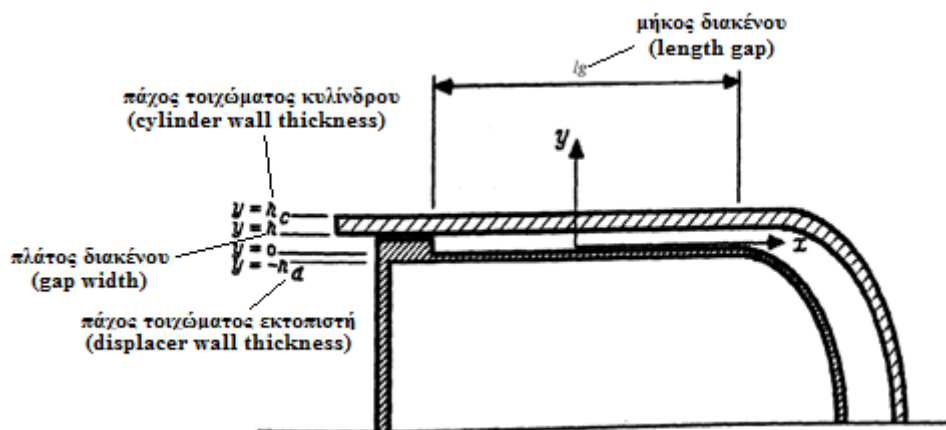
#### Απώλειες λόγω τακτικής μεταφοράς θερμότητας

Μια εξίσου σημαντική απώλεια είναι η απώλεια λόγω τακτικής μεταφοράς θερμότητας (shuttle loss). Η απώλεια αυτή αποτελεί μία απ' τις τρεις απώλειες που σχετίζονται με το διάκενο εκτοπιστή – κυλίνδρου (appendix gap). Η τακτική μεταφορά θερμότητας είναι αγωγή θερμότητας (conduction loss) στα τοιχώματα του εκτοπιστή αυξανόμενη απ' την παλινδρομική κίνηση των τοιχωμάτων. Σύμφωνα με το σχήμα 3.8 όταν ο εκτοπιστής είναι στο άνω νεκρό σημείο, τα τοιχώματά του έχουν χαμηλότερη τοπική θερμοκρασία από την αντίστοιχη θερμοκρασία των τοιχωμάτων του κυλίνδρου σε οποιοδήποτε σημείο του μήκους του, έτσι μεταφέρεται θερμότητα στον εκτοπιστή. Όταν ο εκτοπιστής είναι στο κάτω νεκρό σημείο, η θερμοκρασιακή σχέση μεταξύ του εκτοπιστή και του κυλίνδρου αντιστρέφεται, έτσι ώστε η θερμότητα μεταφέρεται από τον εκτοπιστή στο τοίχωμα του κυλίνδρου. Η κίνηση του εκτοπιστή εξυπηρετεί έτσι την τακτική μεταφορά θερμότητας από το θερμό άκρο (άνω νεκρό σημείο) στο ψυχρό άκρο (κάτω νεκρό σημείο) [7].



Σχήμα 3.8 : Μηχανισμός απώλειας λόγω τακτικής μεταφοράς θερμότητας [14].

Η γεωμετρία του διακένου (appendix gap) μεταξύ του εκτοπιστή και του κυλίνδρου δίνεται στο σχήμα 3.9.



Σχήμα 3.9 : Γεωμετρία διακένου μεταξύ εκτοπιστή και κυλίνδρου [14].

Για την ανάλυση αυτή γίνονται οι εξής υποθέσεις :

1. Η αγωγή θερμότητας κατά την αξονική κατεύθυνση είναι ανεξάρτητη των απωλειών διακένου (appendix gap losses).
2. Η διαρροή αερίου πέρα απ' τη τσιμούχα (σφράγιση) του εκτοπιστή είναι αμελητέα.
3. Η γεωμετρία του διακένου αναπαριστάται διδιάστατα. Αυτό είναι λογικό καθώς ο λόγος πλάτους  $h$  του διακένου προς τη διάμετρο είναι γενικά μικρός.
4. Οι επιδράσεις στα άκρα είναι αμελητέες.
5. Η διαδρομή (stroke) του εκτοπιστή συγκρίνεται στενά με το μήκος  $lg$  του διακένου. Αυτή η υπόθεση επιτρέπει στην διανομή θερμοκρασίας να προσεγγιστεί μέσω μιας γραμμικής εξίσωσης για το μήκος του διακένου.
6. Για τα προφίλ των θερμοκρασιών και των ταχυτήτων του αερίου κατά την ακτινική κατεύθυνση γίνεται η υπόθεση ότι είναι γραμμικά.
7. Η μεταβολή της πίεσης και η μετατόπιση του εκτοπιστή είναι ημιτονοειδείς.

8. Οι ιδιότητες μεταφοράς είναι σταθερές και ίσες με την μέση τιμή τους.
9. Πανομοιότυπες τοπικές κλίσεις θερμοκρασιών υπάρχουν στα τοιχώματα και στο αέριο.
10. Όλη η λειτουργία της διάταξης βρίσκεται σε σταθερή κυκλική κατάσταση.

Οι μεταβολές της πίεσης του αερίου και της μετατόπισης του εκτοπιστή αντίστοιχα δίνονται απ' τις εξής σχέσεις:

$$p = p_{mean} + \Delta p \cdot \sin(\omega t + \phi) \quad (3.37)$$

$$x_d \equiv X_d \cdot \sin(\omega t + \phi) \quad (3.38)$$

Με την υπόθεση ότι η ταχύτητα κατά τον άξονα των  $y$  είναι μηδενική και η θερμοκρασία κατά την αξονική κατεύθυνση είναι προσεγγιστικά γραμμική, η εξίσωση των Navier – Stokes για τα συμπιεστά ρευστά απλοποιείται στην εξής :

$$\bar{\rho} \cdot c_p \cdot \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u \cdot Y \right) = k_g \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial p}{\partial t} + \Phi \quad (3.39)$$

όπου  $Y = \theta T / \theta x = \text{σταθερή}$ . Ο όρος  $\Phi$  ο οποίος εκφράζει την αύξηση εντροπίας θεωρείται αμελητέος ενώ η πυκνότητα υποθέτεται ότι είναι σταθερή και ίση με τη μέση τιμή της καθώς μεταβάλλεται  $\pm 10\%$  απ' αυτήν. Οπότε η (3.39) γίνεται :

$$\bar{\rho} \cdot c_p \cdot \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u \cdot Y \right) = k_g \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial p}{\partial t} \quad (3.40)$$

Το προφίλ της ταχύτητας του αερίου στο διάκενο δίνεται ως εξής:

$$u = X_d \cdot \omega \cdot \left( 1 - \frac{y}{h} \right) \cdot e^{j\omega t} \quad (3.41)$$

Θέτοντας  $\theta = T - T_s$  όπου  $T_s$  είναι η τοπική μέση θερμοκρασία και αντικαθιστώντας για ταχύτητα και πίεση, η (3.40) γίνεται :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - X_d \cdot \omega \cdot Y \cdot \frac{y}{h} \cdot e^{j\omega t} = \alpha \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \left( \frac{\Delta p}{\bar{\rho} \cdot c_p} \cdot e^{j\phi} - X_d \cdot Y \right) \cdot \omega \cdot e^{j\omega t} \quad (3.42)$$

Η λύση της (3.42) είναι η εξής :

$$\theta = \left[ A \cdot \exp[(1+j) \cdot \beta \cdot y] + B \cdot \exp[-(1+j) \cdot \beta \cdot y] - j \cdot X_d \cdot Y \cdot \frac{y}{h} - j \cdot \left( \frac{\Delta p}{\bar{\rho} \cdot c_p} \cdot e^{j\phi} - X_d \cdot Y \right) \right] \cdot e^{j\omega t} \quad (3.43)$$

όπου  $\beta = \sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}}$  και  $A, B$  σταθερές της ολοκλήρωσης.

Η συνθήκη για μικρά κενά είναι  $h < \sqrt{\frac{2a}{\omega}}$  η οποία είναι γενικά αληθής για πρακτικές μηχανές. Σ' αυτή την περίπτωση η εξίσωση (3.43) μπορεί να απλοποιηθεί ως εξής :

$$\theta = \left[ A + B \cdot \beta \cdot y - j \cdot X_d \cdot Y \cdot \frac{y}{h} - j \cdot \left( \frac{\Delta p}{\bar{\rho} \cdot c_p} \cdot e^{j\phi} - X_d \cdot Y \right) \right] \cdot e^{j\omega t} \quad (3.44)$$

όπου  $A, B$  διαφορετικές αυτή τη φορά σταθερές. Αυτή είναι η τελική μορφή του πεδίου θερμοκρασίας του αερίου στο διάκενο εκτοπιστή – κυλίνδρου. Πριν ενσωματωθούν οι συνοριακές συνθήκες, απαιτούνται τα πεδία θερμοκρασίας στον εκτοπιστή και στον κύλινδρο. Η μορφή του πεδίου θερμοκρασίας στον εκτοπιστή είναι η εξής (Eckert και Drake 1972):

$$T_d^* = T_s^* + \{C \cdot \exp[(1+j) \cdot m \cdot y] + D \cdot \exp[-(1+j) \cdot m \cdot y]\} \cdot e^{j\omega t} \quad (3.45)$$

όπου  $m = \sqrt{\frac{\omega}{2\alpha_d}}$  και  $\alpha_d$  είναι η θερμοκρασιακή αγωγιμότητα του υλικού του εκτοπιστή. Αυτή η λύση αναφέρεται σ' έναν άξονα προσαρμοσμένο στον κύλινδρο (συμβολίζεται με αστερίσκο). Επίσης απαιτείται η λύση να είναι προσαρμοσμένη σ' έναν άξονα στον κύλινδρο. Γι' αυτό το λόγο είναι απαραίτητο να μετασχηματισθεί ο άξονας αντικαθιστώντας  $T_s^*$  με  $T_s - Y \cdot X_d \cdot \sin\omega t$ . Η εξίσωση (3.45) γίνεται:

$$\theta_d = \{C \cdot \exp[(1+j) \cdot m \cdot y] + D \cdot \exp[-(1+j) \cdot m \cdot y] + j \cdot Y \cdot X_d\} \cdot e^{j\omega t} \quad (3.46)$$

Το πεδίο της θερμοκρασίας του κυλίνδρου έχει την εξής μορφή:

$$\theta_c = \{E \cdot \exp[(1+j) \cdot q \cdot y] + F \cdot \exp[-(1+j) \cdot q \cdot y]\} \cdot e^{j\omega t} \quad (3.47)$$

όπου  $q = \sqrt{\frac{\omega}{2\alpha_c}}$  και  $\alpha_c$  είναι η θερμοκρασιακή αγωγιμότητα του υλικού του κυλίνδρου. Υπάρχουν έξι σταθερές στις εξισώσεις (3.44), (3.46) και (3.47), οπότε απαιτούνται έξι συνοριακές συνθήκες. Αυτές έχουν ως εξής:

1. Η μεταφορά θερμότητας στο εσωτερικό του τοιχώματος του εκτοπιστή είναι αρκετά μικρότερη της μεταφοράς θερμότητας στο appendix gap. Κατά τη συνθήκη αυτή το εσωτερικό τοίχωμα θεωρείται αδιαβατικό :  $y = -h_d \quad d\theta_d / dy = 0$
2. Το τοίχωμα του κυλίνδρου είναι παχύ αρκετά έτσι ώστε η εξωτερική του θερμοκρασία να είναι ίση με  $T_s$ . Εναλλακτικά ο αναγεννητής, ο οποίος είναι συχνά τοποθετημένος γειτονικά με το τοίχωμα του κυλίνδρου, μπορεί επίσης να διατηρήσει την εξωτερική θερμοκρασία ίση με  $T_s$ . Έτσι :  $y = h_c \quad \theta_c = 0$   
Οι τέσσερις επιπλέον συνοριακές συνθήκες σχετίζονται θερμοκρασίες στις διεπιφάνειες καθώς και σε συνθήκες αγωγής θερμότητας.
3.  $y=0 \quad \theta = \theta_d$
4.  $y=0 \quad k \cdot d\theta/dy = k_d \cdot d\theta_d/dy$
5.  $y=h \quad \theta = \theta_c$
6.  $y=h \quad k \cdot d\theta/dy = k_c \cdot d\theta_c/dy$

όπου  $k_d$  και  $k_c$  είναι οι θερμικές αγωγιμότητες του εκτοπιστή και του κυλίνδρου αντίστοιχα. Για να υπολογιστούν οι απώλειες ενθαλπίας και τακτικής μεταφοράς θερμότητας, είναι απαραίτητο να προσδιοριστεί επακριβώς το πεδίο θερμοκρασίας του αερίου. Έτσι, χρειαζόμαστε λύση μόνο για τις σταθερές  $A$  και  $B$ . Επιπλέον, θα πρέπει να υποθέσουμε ότι ο εκτοπιστής και ο κύλινδρος είναι φτιαγμένοι απ' το ίδιο υλικό. Αυτό γενικά αληθεύει για τις μηχανές αλλά όχι τόσο για τις

κρυογονικές μηχανές ή τις αντλίες θερμότητας. Στην αντλία θερμότητας Vuilleumier που θα εξετάσουμε στο επόμενο κεφάλαιο τα υλικά των κυλίνδρων και των εκτοπιστών είναι ίδια. Συνεχίζοντας την ανάλυσή μας, ορίζοντας μία θερμική αγωγιμότητα  $k_s$  και μία θερμοκρασιακή αγωγιμότητα  $\alpha_s$  για το στερεό, θα έχουμε:

$$k_d = k_c = k_s \quad (3.48)$$

$$m = q = w = \sqrt{\frac{\omega}{2 \cdot \alpha_s}} \quad (3.49)$$

Λύνοντας ως προς  $A$  έχουμε :

$$A = j \cdot \left( \frac{\Delta p}{\rho \cdot c_p} \cdot e^{j\phi} + \frac{X_d \cdot Y \cdot \coth(wh_d)}{\tanh[w \cdot (h_c - h)] - \left(\frac{k_s}{k}\right) \cdot w \cdot h - \coth(wh_d)} \right) \quad (3.50)$$

και

$$B = j \cdot \frac{X_d}{\beta} \cdot \frac{Y}{h} \cdot \left[ 1 - \left( 1 - \frac{k}{k_s} \cdot \frac{1}{w \cdot h} \cdot \{ \tanh[w \cdot (h_c - h)] - \coth(wh_d) \} \right)^{-1} \right] \quad (3.51)$$

όπου  $w = (1+j) \cdot \sqrt{\frac{\omega}{2\alpha_s}}$ . Συνήθως ισχύει ότι  $wh_d > 1.5$ . Επίσης ο όρος  $k_s/k$  είναι μεγαλύτερος κατά δύο τάξεις μεγέθους από τους όρους της  $\tanh$ . Οπότε οι σταθερές  $A, B$  μπορούν να απλοποιηθούν ως εξής :

$$A \cong -\frac{\Delta p}{\rho \cdot c_p} \cdot \sin \phi + j \cdot \left( \frac{\Delta p}{\rho \cdot c_p} \cdot \cos \phi - \frac{X_d \cdot Y \cdot k}{w \cdot h \cdot k_s} \right) \quad (3.52)$$

και

$$B \cong 0 \quad (3.53)$$

οι οποίες είναι οι τελικές μορφές των απαιτούμενων σταθερών.

Η μεταφορά θερμότητας στο τοίχωμα του εκτοπιστή μπορεί να υπολογιστεί τώρα μέσω της εξίσωσης (3.44) :

$$\dot{q}_d = k_g \cdot \frac{d\theta}{dy_{y=0}} = k_g \cdot \left( B \cdot \beta - j \cdot X_d \cdot \frac{Y}{h} \right) \cdot e^{j\omega t} \quad (3.54)$$

Αφού  $B=0$  και παίρνοντας το πραγματικό μέρος έχουμε:



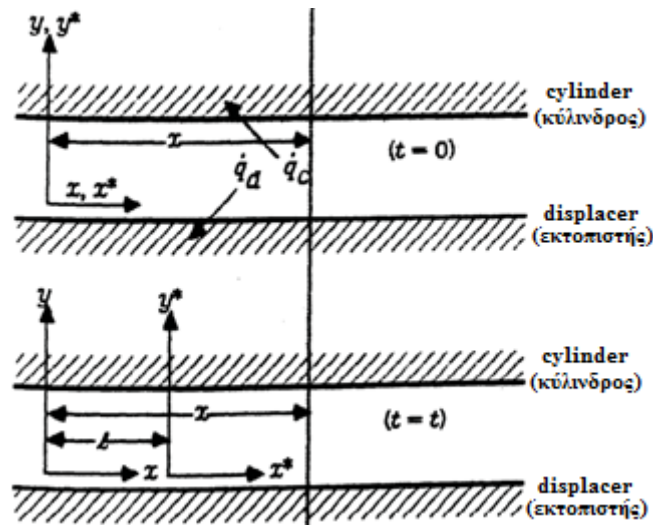
$$\dot{q}_d = k_g \cdot X_d \cdot \frac{Y}{h} \cdot \sin(\omega t) \quad (3.55)$$

η οποία είναι η μεταφορά θερμότητας ανά μονάδα επιφάνειας στον εκτοπιστή. Όπως εξηγήθηκε προηγουμένως ο μηχανισμός των shuttle losses αποτελείται από τη μεταφορά θερμότητας μέσω της κίνησης του εκτοπιστή. Το σχήμα 3.10 δείχνει τον εκτοπιστή σε δύο διαφορετικές χρονικές στιγμές. Οι άξονες  $x, y$  είναι προσαρμοσμένες στον κύλινδρο ενώ οι  $x^*, y^*$  είναι προσαρμοσμένες στον εκτοπιστή. Προσδιορίζοντας την εσωτερική ενέργεια ανά μονάδα μήκους του εκτοπιστή έχουμε:

$$\hat{H}_d = \hat{H}_d(x^*, t) = \int_{A_d} (\rho_d \cdot c_d \cdot T_d^*) dA_d \quad (3.56)$$

όπου  $\rho_d$ ,  $c_d$  και  $T_d^*$  είναι η πυκνότητα, ειδική θερμότητα και τοπική θερμοκρασία στον εκτοπιστή. Για χρόνο  $t$ , εφαρμόζεται ένα ισοζύγιο ενέργειας σε ένα διαφορικό μήκος του εκτοπιστή τοποθετημένο στο  $x^*$ :

$$\hat{H}_d(x^*, t) = \hat{H}_d(x^*, 0) + \pi \cdot D_d \cdot \int_0^t [\dot{q}_d(x^*, t)] dt \quad (3.57)$$



Σχήμα 3.10 : Συνεργαζόμενοι άξονες συντεταγμένων εκτοπιστή και κυλίνδρου [14].

Η μεταφορά ενέργεια για  $x, t$  έχει την εξής μορφή:

$$\Delta H_x = (\dot{H}_{x_{gas}}) dt + (\hat{H}_d(x-l, t)) \frac{dl}{dt} dt \quad (3.58)$$

όπου ο πρώτος όρος είναι η μεταφορά ενθαλπίας του αερίου και ο δεύτερος είναι η ενέργεια που μεταφέρεται απ' τον εκτοπιστή. Ο όρος  $dl/dt$  είναι η ταχύτητα του εκτοπιστή και το  $x^*$  έχει αντικατασταθεί απ' τον όρο  $x-l$ . Αντικαθιστώντας την εξίσωση (3.57) στην (3.58) έχουμε:

$$\Delta H_x = (\dot{H}_{x_{gas}}) dt + \left( (\hat{H}_d(x-l,0)) \frac{dl}{dt} + \pi \cdot D_d \cdot \int_0^l \dot{q}_d(x-l,t) dt \frac{dl}{dt} \right) dt \quad (3.59)$$

Ολοκληρώνοντας την εξίσωση (3.59) για ένα κύκλο θα ισχύει:

$$H_x = \oint (\dot{H}_{x_{gas}}) dt + \left( \oint (\hat{H}_d(x-l,0)) \frac{dl}{dt} dt + \pi \cdot \oint \left( D_d \cdot \int_0^l \dot{q}_d(x-l,t) dt \frac{dl}{dt} \right) dt \right) \quad (3.60)$$

Το δεύτερο ολοκλήρωμα είναι ίσο με μηδέν καθώς το  $l$  είναι περιοδικό και το  $H_d(x-l,0)$  είναι σταθερό. Τα υπόλοιπα δύο ολοκληρώματα είναι η μεταφορά ενθαλπίας και η τακτική μεταφορά θερμότητας αντίστοιχα. Σημειώνοντας ότι :

$$l = X_d \cdot \sin(\omega t) \quad (3.61)$$

και μέσω της εξίσωσης (3.55) έχουμε για την τακτική μεταφορά θερμότητας σε J [7]:

$$H_{sh} = -\frac{\pi^2}{\omega} \cdot D_d \cdot k_g \cdot X_d^2 \cdot \frac{T}{h} \quad (3.62)$$

όπου  $k=k_g(T_r)$  η ειδική θερμική αγωγιμότητα του αερίου. Η τελική μορφή των shuttle losses σε W για μηχανή Vuilleumier είναι η εξής:

$$\dot{Q}_{sh} = -\pi \cdot \frac{D_d}{2} \cdot k_g \cdot X_d^2 \cdot \frac{T_h - T_k}{lg \cdot h} - \pi \cdot \frac{D_d'}{2} \cdot k_g' \cdot X_d'^2 \cdot \frac{T_{k'} - T_{h'}}{lg' \cdot h'} \quad (3.63)$$

όπου τα μεγέθη με τόνο αφορούν τον κρύο κύλινδρο της μηχανής ενώ αυτά χωρίς τόνο αφορούν τον ζεστό κύλινδρο.

#### Απώλειες λόγω μεταφοράς ενθαλπίας αερίου ή απώλειες άντλησης

Η δεύτερη απώλεια που σχετίζεται με τις appendix gap losses είναι η απώλεια λόγω μεταφοράς ενθαλπίας αερίου (gas enthalpy transport loss ή pumping loss). Η στιγμιαία μεταφορά ενθαλπίας δίνεται απ' την εξής σχέση :

$$\dot{Q}_{pu} = \dot{m} \cdot c_p \cdot \bar{T} \quad (3.64)$$

όπου  $\bar{T}$  είναι η μέση θερμοκρασία του αερίου κατά μήκος του κενού και  $\dot{m}$  είναι η παροχή μάζας. Αμελώντας οποιαδήποτε διαρροή, η παροχή μάζας στο διάκενο είναι απλά ο ρυθμός μεταβολής της μάζας του αερίου σ' αυτό. Γίνεται η υπόθεση ότι η αξονική διανομή της μέσης θερμοκρασίας στο κενό είναι σχεδόν γραμμική. Οπότε η μάζα του αερίου δίνεται απ' την εξής σχέση :

$$m_a = \frac{p \cdot V}{R \cdot (T_h - T_k)} \cdot \ln\left(\frac{T_h}{T_k}\right) \quad (3.65)$$

όπου  $T_h$  η υψηλή θερμοκρασία (θερμαντήρας) και  $T_k$  η χαμηλή θερμοκρασία (ψύκτης). Η παροχή μάζας ισούται με :

$$\dot{m} = -\frac{dm_a}{dt} = -\frac{\ln\left(\frac{T_h}{T_k}\right)}{R \cdot (T_h - T_k)} \cdot \left( p \frac{dV}{dt} + V \frac{dp}{dt} \right) \quad (3.66)$$

Η μεταβολή του όγκου του κενού δίνεται ως ακολούθως :

$$V = \pi \cdot D_d \cdot h \cdot (1g + X_d \cdot \sin \omega t) \quad (3.67)$$

ενώ η μεταβολή της πίεσης απ' την σχέση (3.37). Η μέση θερμοκρασία του αερίου κατά μήκος του κενού (appendix gap) δίνεται μέσω της εξίσωσης (3.44) ως εξής :

$$\bar{T} = \frac{1}{h} \cdot \int_0^h T \cdot dy = T_s + \left[ A + B \cdot \frac{\beta \cdot h}{2} - j \cdot \left( \frac{\Delta p}{\bar{\rho} \cdot c_p} \cdot e^{j\phi} - \frac{X_d \cdot Y}{2} \right) \right] \cdot e^{j\omega t} \quad (3.68)$$

Οι σταθερές  $A, B$  μπορεί να παρθούν από τις εξισώσεις (3.52), (3.53). Το πραγματικό μέρος της θερμοκρασίας είναι τότε :

$$\bar{T} = T_s - X_d \cdot Y \cdot \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{wh} \cdot \frac{k}{k_s} \right) \cdot \sin \omega t \quad (3.69)$$

Εφόσον η μέγιστη θερμοκρασία έχει όρια τα  $T_h, T_s$  δίνεται ως εξής :

$$\bar{T}_s = T_h - X_d \cdot Y \cdot \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{wh} \cdot \frac{k}{k_s} \right) \quad (3.70)$$

Η θερμοκρασία μπορεί τώρα να γραφτεί :

$$\bar{T} = T_h - X_d \cdot Y \cdot \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{wh} \cdot \frac{k}{k_s} \right) \cdot (1 + \sin \omega t) \quad (3.71)$$

Αντικαθιστώντας τα  $\dot{m}$  και  $\bar{T}$  στην εξίσωση (3.64) και ολοκληρώνοντας για έναν κύκλο λειτουργίας, δίνεται η τελική σχέση των pumping loss σε W για όλη τη μηχανή Vuilleumier :

$$\dot{Q}_{pu} = -\frac{\gamma}{\gamma-1} \cdot \pi \cdot D_d \cdot \Delta p \cdot h \cdot X_d \cdot \omega \cdot \ln\left(\frac{T_h}{T_k}\right) \cdot \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{h \cdot \sqrt{\frac{\omega}{2 \cdot \alpha_d}}} \cdot \frac{k_g}{k_d} \right) \cdot \sin \phi_p \quad (3.72)$$

$$-\frac{\gamma}{\gamma-1} \cdot \pi \cdot D_{d'} \cdot \Delta p \cdot h' \cdot X_{d'} \cdot \omega \cdot \ln\left(\frac{T_{k'}}{T_{h'}}\right) \cdot \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{h' \cdot \sqrt{\frac{\omega}{2 \cdot \alpha_{d'}}}} \cdot \frac{k_{g'}}{k_{d'}} \right) \cdot \sin \phi_{p'}$$

Απώλεια θερμοδυναμικού έργου στη σφράγιση (seal)

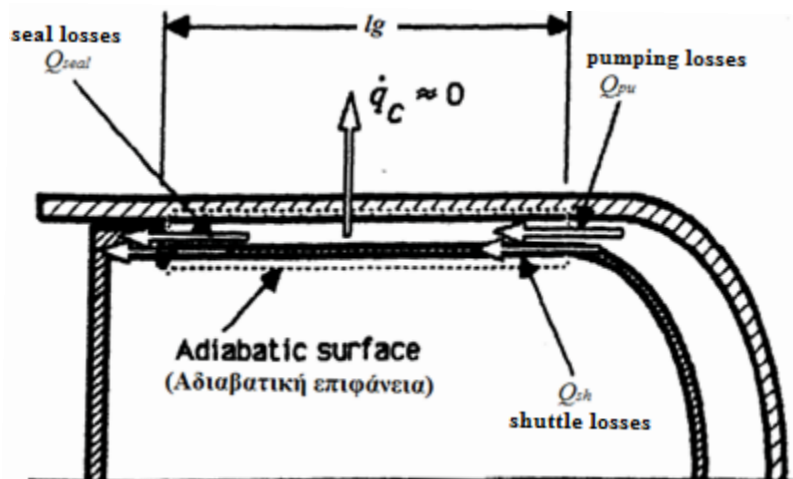
Η τρίτη απώλεια που συμπληρώνει τις appendix gap losses είναι η απώλεια θερμοδυναμικού έργου στη σφράγιση (seal loss). Το θερμοδυναμικό αυτό έργο μπορεί να υπολογιστεί ως εξής:

$$p \cdot dV = [p_{mean} + \Delta p \cdot \sin(\omega t + \phi)] \cdot \pi \cdot D_d \cdot h \cdot X_d \cdot \cos(\omega t) d\omega t \quad (3.73)$$

Οπότε η τελική μορφή της απώλειας αυτής για όλη τη μηχανή VM είναι η εξής:

$$\dot{Q}_{seal} = -\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot D_d \cdot \Delta p \cdot h \cdot X_d \cdot \omega \cdot \sin(\phi_p) - \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot D_{d'} \cdot \Delta p \cdot h' \cdot X_{d'} \cdot \omega \cdot \sin(\phi_{p'}) \quad (3.74)$$

όπου  $\Delta p = p_{max} - p_{mean}$  και  $\phi_p, \phi_{p'}$  είναι η διαφορά φάσης μεταξύ της πίεσης του αερίου και της ταχύτητας του ζεστού και κρύου εκτοπιστή αντίστοιχα. Στο σχήμα 3.11 δίνεται η αναπαράσταση των appendix gap losses.



Σχήμα 3.11 : Μηχανισμός των appendix gap losses [14].

Απώλεια λόγω αγωγής θερμότητας: Οι απώλειες θερμότητας λόγω αγωγής (conduction losses) είναι οι πιο κλασικές μορφές απωλειών. Χωρίζονται στις απώλειες λόγω αγωγιμότητας

τοιχωμάτων καθώς και λόγω αγωγιμότητας του αερίου. Σε μία μηχανή VM οι conduction losses είναι οι εξής:

1. Απώλεια λόγω αγωγιμότητας αερίου εσωτερικά των εκτοπιστών.
2. Απώλεια λόγω αγωγιμότητας τοιχωμάτων των εκτοπιστών.
3. Απώλεια λόγω αγωγιμότητας τοιχωμάτων των κυλίνδρων.
4. Απώλεια λόγω αγωγιμότητας τοιχωμάτων των αναγεννητών.

Οι απώλειες αυτές υπολογίζονται με την κλασική σχέση του Fourier :

$$\dot{Q}_{cond} = -A_{eff} \cdot k_w \cdot \frac{\Delta T}{\Delta x} - A \cdot k_g \cdot \frac{\Delta T}{\Delta x} \quad (3.75)$$

όπου ο πρώτος όρος αφορά τις απώλειες λόγω αγωγιμότητας των διαφόρων τοιχωμάτων ενώ ο δεύτερος αντιπροσωπεύει τις απώλειες λόγω αγωγιμότητας του αερίου. Τα  $k_w, k_g$  είναι οι ειδικές θερμικές αγωγιμότητες του τοιχώματος και του αερίου αντίστοιχα. Τα  $A_{eff}, A$  είναι η ενεργός επιφάνεια αγωγής τοιχώματος και η ενεργός ελεύθερη επιφάνεια ροής του αερίου (free flow area) αντίστοιχα.

Οι βασικές σχέσεις απωλειών συμφωνά με το μοντέλο του Urieli για μία μηχανή VM δίνονται συνοπτικά στον πίνακα 3.5 .

*Πίνακας 3.5 : Εξισώσεις απωλειών Urieli για μηχανή VM.*

$\dot{Q}_{ffl} = \sum_i \left( -\frac{\Delta p_i \cdot g A_i \cdot V_i}{m_i} \right), i = h, r, k, k', r', h'$	<p><b>Απώλειες λόγω πτώσης πίεσης στους θερμοεναλλάκτες</b> (<math>\dot{Q}_{ffl}</math>)</p>
$\dot{Q}_{sh} = -\pi \cdot \frac{D_d}{2} \cdot k_g \cdot X_d^2 \cdot \frac{T_h - T_k}{lg \cdot h} - \pi \cdot \frac{D_d'}{2} \cdot k_g' \cdot X_d'^2 \cdot \frac{T_{k'} - T_{h'}}{lg' \cdot h'}$	<p><b>Απώλειες λόγω τακτικής μεταφοράς θερμότητας</b> (<math>\dot{Q}_{sh}</math>)</p>

$$\dot{Q}_{pu} = -\frac{\gamma}{\gamma-1} \cdot \pi \cdot D_d \cdot \Delta p \cdot h \cdot X_d \cdot \omega \cdot \ln\left(\frac{T_h}{T_k}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{h \cdot \sqrt{\frac{\omega}{2 \cdot \alpha_d}}} \cdot \frac{k_g}{k_d}\right) \cdot \sin \phi_p$$

*Απώλειες λόγω μεταφοράς ενθαλπίας αερίου*  
( $\dot{Q}_{pu}$ )

$$-\frac{\gamma}{\gamma-1} \cdot \pi \cdot D_{d'} \cdot \Delta p \cdot h' \cdot X_{d'} \cdot \omega \cdot \ln\left(\frac{T_{k'}}{T_{h'}}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{h' \cdot \sqrt{\frac{\omega}{2 \cdot \alpha_{d'}}}} \cdot \frac{k_g}{k_{d'}}\right) \cdot \sin \phi_p$$

*Απώλειες θερμοδυναμικού έργου στη σφράγιση*  
( $\dot{Q}_{seal}$ )

$$\dot{Q}_{seal} = -\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot D_d \cdot \Delta p \cdot h \cdot X_d \cdot \omega \cdot \sin(\phi_p) - \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot D_{d'} \cdot \Delta p \cdot h' \cdot X_{d'} \cdot \omega \cdot \sin(\phi_p)$$

*Απώλειες λόγω αγωγής θερμότητας*  
( $\dot{Q}_{cond}$ )

$$\dot{Q}_{cond} = -A_{eff} \cdot k_w \cdot \frac{\Delta T}{\Delta x} - A \cdot k_g \cdot \frac{\Delta T}{\Delta x}$$

### 3.4.2 Μοντέλο εξισώσεων του D. Berchowitz

Οι εξισώσεις απωλειών του D. Berchowitz για μηχανές Stirling περιγράφονται εν μέρει στο βιβλίο "Stirling Engine Cycle Analysis" που έγραψε μαζί με τον I. Urieli καθώς και στη διδακτορική διατριβή του "Stirling Cycle Engine Design and Optimisation (Thesis)". Στην ενότητα αυτή θα γίνει επέκταση του μοντέλου του για μηχανές Vuilleumier.

#### Απώλειες λόγω πτώσης πίεσης στους θερμοεναλλάκτες

Η σχέση για τις απώλειες λόγω πτώσης πίεσης αερίου στους θερμοεναλλάκτες (flow friction losses) αντιστοιχεί στην σχέση (3.33) με την ίδια ακριβώς ενεργειακή θεώρηση:

$$\dot{Q}_{ffl} = \sum_i \left( -\frac{\Delta p_i \cdot g A_i \cdot V_i}{m_i} \right), i = h, r, k, k', r', h' \quad (3.76)$$

όπου  $g A_i$  η παροχή μάζας του αερίου στον θερμοεναλλάκτη. Η πτώση πίεσης, η παροχή μάζας καθώς και η μάζα του αερίου είναι συναρτήσεις της γωνίας  $\theta$  του στροφάλου. Η παροχή μάζας του αερίου προκύπτει μέσω της καταστατικής εξίσωσης των ιδανικών αερίων. Το αρνητικό πρόσημο υποδεικνύει ότι πρόκειται για απώλεια. Για τον υπολογισμό της δυναμικής συνεκτικότητας  $\mu$  και του συντελεστή  $f_f$  σε σχέση με τον αριθμό  $Re$  χρησιμοποιούνται πάλι οι σχέσεις (3.34), (3.35) και (3.36).

### Απώλειες λόγω τακτικής μεταφοράς θερμότητας

Η απώλεια λόγω τακτικής μεταφοράς θερμότητας (shuttle loss) αντιστοιχεί στην σχέση (3.63) με την ίδια ακριβώς ενεργειακή θεώρηση:

$$\dot{Q}_{sh} = -\pi \cdot \frac{D_d}{2} \cdot k_g \cdot X_d^2 \cdot \frac{T_h - T_k}{lg \cdot h} - \pi \cdot \frac{D_d'}{2} \cdot k_g' \cdot X_d'^2 \cdot \frac{T_k' - T_h'}{lg' \cdot h'} \quad (3.77)$$

### Απώλεια θερμοδυναμικού έργου στη σφράγιση (seal)

Η απώλεια θερμοδυναμικού έργου στη σφράγιση (seal loss) αντιστοιχεί στην σχέση (3.74) με την ίδια ακριβώς ενεργειακή θεώρηση:

$$\dot{Q}_{seal} = -\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot D_d \cdot \Delta p \cdot h \cdot X_d \cdot \omega \cdot \sin(\phi_p) - \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot D_d' \cdot \Delta p \cdot h' \cdot X_d' \cdot \omega \cdot \sin(\phi_p') \quad (3.78)$$

### Απώλεια λόγω αγωγής θερμότητας

Οι απώλειες θερμότητας λόγω αγωγής (conduction losses) αντιστοιχούν στην σχέση (3.75) με την ίδια ακριβώς ενεργειακή θεώρηση. Οι τεσσάρων ειδών conduction losses που αναφέρονται στην ενότητα για τον Urieli είναι ίδιες και εδώ.

$$\dot{Q}_{cond} = -A_{eff} \cdot k_w \cdot \frac{\Delta T}{\Delta x} - A \cdot k_g \cdot \frac{\Delta T}{\Delta x} \quad (3.79)$$

### Απώλειες λόγω μεταφοράς ενθαλπίας αερίου

Στις απώλειες αυτές ο Berchowitz έχει τον δικό του συλλογισμό, ο οποίος αναλύεται παρακάτω. Η στιγμιαία μεταφορά ενθαλπίας δίνεται απ' την εξής σχέση :

$$\dot{Q}_{pu} = \dot{m}_a \cdot c_p \cdot \bar{T} \quad (3.80)$$

όπου  $\bar{T}$  είναι η μέση θερμοκρασία του αερίου κατά μήκος του διακένου και  $\dot{m}$  είναι η παροχή μάζας. Αμελώντας οποιαδήποτε διαρροή, η παροχή μάζας στο διάκενο είναι απλά ο ρυθμός μεταβολής της μάζας του αερίου σ' αυτό. Η μάζα του αερίου στο διάκενο δίνεται απ' την εξής σχέση :

$$m_a = \frac{p \cdot V_a}{R \cdot \bar{T}_{lg}} \quad (3.81)$$

όπου  $\bar{T}_{lg}$  είναι μέση θερμοκρασία του αερίου κατά μήκος του διακένου, η οποία μεταβάλλεται με τον χρόνο. Δίνεται μέσω της εξίσωσης (3.44) ως εξής :

$$\bar{T} = \frac{1}{h} \cdot \int_0^h T \cdot dy \quad (3.82)$$

Οι σταθερές  $A, B$  μπορεί να παρθούν από τις εξισώσεις (3.52), (3.53). Το πραγματικό μέρος της θερμοκρασίας είναι τότε :

$$\bar{T} = T_s - X_d \cdot Y \cdot \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{wh} \cdot \frac{k}{k_s} \right) \cdot \sin \omega t \quad (3.83)$$

Εφόσον, η μέγιστη θερμοκρασία έχει όρια τα  $T_h, T_s$ , δίνεται ως εξής :

$$\bar{T}_s = T_h - X_d \cdot Y \cdot \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{wh} \cdot \frac{k}{k_s} \right) \quad (3.84)$$

Η θερμοκρασία μπορεί τώρα να γραφτεί :

$$\bar{T} = T_h - X_d \cdot Y \cdot \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{wh} \cdot \frac{k}{k_s} \right) \cdot (1 + \sin \omega t) \quad (3.85)$$

Για να βρούμε τη θερμοκρασία στο διάκενο έχουμε:

$$\bar{T}_{lg} = \frac{T_h - T_k}{\ln\left(\frac{T_h}{T_k}\right)} - X_d \cdot Y \cdot \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{wh} \cdot \frac{k}{k_s} \right) \cdot (\sin \omega t) \quad (3.86)$$

Η μεταβολή του όγκου του κενού (seal gap) δίνεται ως ακολούθως :

$$V_a = \pi \cdot D_d \cdot h \cdot (lg + X_d \cdot \sin \omega t) \quad (3.87)$$

ενώ η μεταβολή της πίεσης απ' την σχέση (3.37). Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (3.37), (3.87), (3.86) στην (3.81) έχουμε :

$$m_a = \frac{V_{amean} \cdot P_{mean}}{R \cdot \bar{T}_{lg}} \cdot [1 + r_p \cdot \sin(\omega t + \phi)] \cdot \frac{(1 - r_x \cdot \sin \omega t)}{(1 - r_T \sin \omega t)} \quad (3.88)$$

όπου  $r_p = \Delta p / p_{mean}$ ,  $r = X_d / lg$ ,  $r_T = X_d \cdot Y \cdot [0.5 - k / (k_s wh)] \cdot \ln(T_h / T_k) / (T_h - T_k)$

Η εξίσωση (3.88) για  $r_p < 1$ ,  $r_x < 1$  και  $r_T < 1$ , όπως ισχύει σε πρακτικές μηχανές, γίνεται [14] :

$$m_a = \frac{V_{amean} \cdot P_{mean}}{R \cdot \bar{T}_{lg}} \cdot [1 + (r_p \cdot \cos(\phi) + r_T - r_x) \cdot \sin \omega t + r_p \cdot \sin \phi \cdot \cos \omega t \dots] \quad (3.89)$$

όπου οι υψηλής τάξεως όροι είναι πάρα πολύ μικροί. Η παροχή μάζας είναι τότε :

$$\dot{m}_a = -\frac{dm_a}{dt} \approx -\omega \frac{V_{amean} \cdot P_{mean}}{R \cdot \bar{T}_{lg}} \cdot [(r_p \cdot \cos \phi + r_T - r_x) \cdot \cos \omega t - r_p \cdot \sin \phi \cdot \sin \omega t] \quad (3.90)$$

Αντικαθιστώντας την εξίσωση (3.90) στην (3.80) και ολοκληρώνοντας για ένα κύκλο έχουμε :



$$\dot{Q}_{pu} = -c_p \cdot \omega \cdot \frac{V_{amean} \cdot P_{mean}}{R \cdot T_{lg}} \cdot r \cdot X_d \cdot Y \cdot \left[ \frac{1}{2} - \frac{k}{k_s w h} \right] \cdot \left( \frac{1}{\pi} - \frac{\cos \phi_m}{4} \right) \quad (3.91)$$

όπου :

$$r = \left[ (r_p \cdot \cos \phi + r_T - r_x)^2 + (r_p \cdot \sin \phi)^2 \right]^{1/2} \quad (3.92)$$

$$\phi_m = \tan^{-1} \left[ \frac{(r_p \cdot \cos \phi + r_T - r_x)}{(r_p \cdot \sin \phi)} \right] \quad (3.93)$$

Με την υπόθεση ότι η διαφορά φάσης μεταξύ της πίεσης και του εκτοπιστή είναι συνήθως  $\varphi=80^\circ$  και ότι για τυπικές θερμοκρασίες λειτουργίας (973K , 310K) ισχύουν τα εξής [14] :

$$r_T \approx \frac{X_d}{(2lg)} \quad (3.94)$$

$$r_x \approx 0.1 \quad , \quad r_p \approx 0.1 \quad (3.95)$$

δίνεται η τελική εξίσωση της απώλειας λόγω μεταφοράς ενθαλπίας σε μηχανής VM:

$$\begin{aligned} \dot{Q}_{pu} = & -\frac{1}{2} \cdot \frac{\gamma}{\gamma-1} \cdot \omega \cdot D_d \cdot h \cdot p_{mean} \cdot \ln \left( \frac{T_h}{T_k} \right) \cdot \left[ \left[ \frac{X_d}{2lg} \right]^2 + \left( \frac{\Delta p}{p_{mean}} \right)^2 \right]^{1/2} \cdot X_d \\ & - \frac{1}{2} \cdot \frac{\gamma}{\gamma-1} \cdot \omega \cdot D_{d'} \cdot h' \cdot p_{mean} \cdot \ln \left( \frac{T_{k'}}{T_{h'}} \right) \cdot \left[ \left[ \frac{X_{d'}}{2lg'} \right]^2 + \left( \frac{\Delta p}{p_{mean}} \right)^2 \right]^{1/2} \cdot X_{d'} \end{aligned} \quad (3.96)$$

#### Απώλεια λόγω υστέρησης αερίου στους εργαζόμενους χώρους (working spaces)

Σύμφωνα με τον Urieli οι απώλειες λόγω υστέρησης του αερίου έχουν λόγο ύπαρξης μόνο στις μηχανές Stirling ελευθέρων εμβόλων λόγω ελατηρίων αερίου (σημαντική απώλεια) καθώς και στις συμβατικές μηχανές Stirling λόγω του λεγόμενου buffer space (χώρος αναπηδήσεων). Η σχέση που δίνει ο Urieli και ο Berchowitcz για αυτή την απώλεια είναι η εξής:

$$\dot{Q}_{hys} = -\sqrt{\frac{1}{32} \cdot \omega \cdot \gamma^3 \cdot (\gamma-1) \cdot T_w \cdot p_{mean} \cdot k_g} \cdot \left( \frac{\Delta V}{V_B} \right) \cdot A_w \quad (3.97)$$

όπου  $T_w$  είναι η θερμοκρασία του τοιχώματος,  $\Delta V$  είναι το πλάτος όγκου του χώρου και  $V_B$  είναι ο μέσος όγκος του χώρου του ελατηρίου αερίου ή χώρου αναπηδήσεων. Ο Berchowitcz θεωρεί και την ύπαρξη απωλειών λόγω υστέρησης αερίου και στους εργαζόμενους χώρους (εκτόνωσης, συμπίεσης). Σύμφωνα με τους συλλογισμούς του αν υποθέσουμε ότι οι κλίσεις των ταχυτήτων του αερίου είναι αρκετά μικρές έτσι ώστε να έχουν αμελητέα επίδραση στον συντελεστή μεταφοράς θερμότητας με συναγωγή στους εργαζόμενους χώρους τότε οι συνθήκες σ' αυτούς

μοιάζουν αρκετά με αυτές των ελατηρίων αερίου (gas springs) [14]. Έτσι η τελική μορφή κατά τον Berchowitz των απωλειών υστέρησης στους εργαζόμενους χώρους για μία μηχανή Stirling και κατ' επέκταση σε μία μηχανή VM είναι η εξής:

$$\dot{Q}_{hys} = -\sqrt{\frac{\omega}{32} \cdot \alpha_g} \cdot \frac{A_w \cdot \Delta p^2}{\gamma \cdot p_{mean}} - \sqrt{\frac{\omega}{32} \cdot \alpha_{g'}} \cdot \frac{A_w \cdot \Delta p^2}{\gamma \cdot p_{mean}} \quad (3.98)$$

όπου  $A_w$  είναι η μέση βρεχόμενη επιφάνεια του χώρου και  $\alpha_g$  η θερμοκρασιακή αγωγιμότητα του αερίου υπολογισμένη στη αντίστοιχη μέση θερμοκρασία του εργαζόμενου χώρου ζεστού κυλίνδρου. Τα τονούμενα μεγέθη αντιστοιχούν στον κρύο κύλινδρο της μηχανής VM. Λόγω του ότι η μηχανή VM που θα εξετάσουμε στο επόμενο κεφάλαιο δεν έχει ελατήρια αερίου, θεωρήθηκε σκόπιμο να μην συμπεριληφθεί αυτή η απώλεια στην ενότητα που αφορά τον Urieli.

Οι βασικές σχέσεις απωλειών συμφωνά με το μοντέλο του Berchowitz για μία μηχανή VM δίνονται συνοπτικά στον πίνακα 3.6 .

*Πίνακας 3.6 : Εξισώσεις απωλειών Berchowitz για μηχανή VM.*

$\dot{Q}_{ffl} = \sum_i \left( -\frac{\Delta p_i \cdot g A_i \cdot V_i}{m_i} \right), i = h, r, k, k', r', h'$	<p><b>Απώλειες λόγω πτώσης πίεσης στους θερμοεναλλάκτες</b> (<math>\dot{Q}_{ffl}</math>)</p>
$\dot{Q}_{sh} = -\pi \cdot \frac{D_d}{2} \cdot k_g \cdot X_d^2 \cdot \frac{T_h - T_k}{\lg \cdot h} - \pi \cdot \frac{D_d'}{2} \cdot k_g' \cdot X_d'^2 \cdot \frac{T_{k'} - T_{h'}}{\lg' \cdot h'}$	<p><b>Απώλειες λόγω τακτικής μεταφοράς θερμότητας</b> (<math>\dot{Q}_{sh}</math>)</p>
$\dot{Q}_{pu} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\gamma}{\gamma-1} \cdot \omega \cdot D_d \cdot h \cdot p_{mean} \cdot \ln \left( \frac{T_h}{T_k} \right) \cdot \left[ \left[ \frac{X_d}{2 \lg} \right]^2 + \left( \frac{\Delta p}{p_{mean}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \cdot X_d$ $-\frac{1}{2} \cdot \frac{\gamma}{\gamma-1} \cdot \omega \cdot D_d' \cdot h' \cdot p_{mean} \cdot \ln \left( \frac{T_{k'}}{T_{h'}} \right) \cdot \left[ \left[ \frac{X_d'}{2 \lg'} \right]^2 + \left( \frac{\Delta p}{p_{mean}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \cdot X_d'$	<p><b>Απώλειες λόγω μεταφοράς ενθαλπίας αερίου</b> (<math>\dot{Q}_{pu}</math>)</p>

$\dot{Q}_{seal} = -\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot D_d \cdot \Delta p \cdot h \cdot X_d \cdot \omega \cdot \sin(\phi_p) - \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot D_{d'} \cdot \Delta p \cdot h' \cdot X_{d'} \cdot \omega \cdot \sin(\phi_{p'})$	<p style="text-align: center;"><b>Απώλειες θερμοδυναμικού έργου στη σφράγιση (<math>\dot{Q}_{seal}</math>)</b></p>
$\dot{Q}_{cond} = -A_{eff} \cdot k_w \cdot \frac{\Delta T}{\Delta x} - A \cdot k_g \cdot \frac{\Delta T}{\Delta x}$	<p style="text-align: center;"><b>Απώλειες λόγω αγωγής θερμότητας (<math>\dot{Q}_{cond}</math>)</b></p>
$\dot{Q}_{hys} = -\sqrt{\frac{\omega}{32} \cdot \alpha_g} \cdot \frac{A_w \cdot \Delta p^2}{\gamma \cdot p_{mean}} - \sqrt{\frac{\omega}{32} \cdot \alpha_{g'}} \cdot \frac{A_{w'} \cdot \Delta p^2}{\gamma \cdot p_{mean}}$	<p style="text-align: center;"><b>Απώλειες λόγω υστέρησης αερίου (<math>\dot{Q}_{hys}</math>)</b></p>

### 3.4.3 Μοντέλο εξισώσεων του Y. Timoumi

Το μοντέλο απωλειών του Y. Timoumi για μηχανές Stirling και ειδικότερα για τη GPU-3 αναφέρεται στο "Design and performance optimization of GPU-3 Stirling engines". Στην ενότητα αυτή θα γίνει επέκταση του μοντέλου αυτού ώστε να καλύπτει τις ανάγκες μιας μηχανής Vuilleumier.

#### Απώλειες λόγω πτώσης πίεσης στους θερμοεναλλάκτες

Η σχέση για τις απώλειες λόγω πτώσης πίεσης αερίου στους θερμοεναλλάκτες (flow friction losses) αντιστοιχεί στην σχέση (3.33) με την ίδια ακριβώς ενεργειακή θεώρηση:

$$\dot{Q}_{ffl} = \sum_i \left( -\frac{\Delta p_i \cdot gA_i \cdot V_i}{m_i} \right), i = h, r, k, k', r', h' \quad (3.99)$$

όπου  $gA_i$  η παροχή μάζας του αερίου στον θερμοεναλλάκτη. Η πτώση πίεσης, η παροχή μάζας καθώς και η μάζα του αερίου είναι συναρτήσεις της γωνίας  $\theta$  του στροφάλου. Η παροχή μάζας του αερίου προκύπτει μέσω της καταστατικής εξίσωσης των ιδανικών αερίων. Το αρνητικό πρόσημο υποδεικνύει ότι πρόκειται για απώλεια. Για τον υπολογισμό της δυναμικής συνεκτικότητας  $\mu$  και του συντελεστή  $f_f$  σε σχέση με τον αριθμό  $Re$  χρησιμοποιούνται πάλι οι σχέσεις (3.34), (3.35) και (3.36).

#### Απώλειες λόγω τακτικής μεταφοράς θερμότητας

Η απώλεια λόγω τακτικής μεταφοράς θερμότητας (shuttle loss) αντιστοιχεί στην σχέση (3.63) με κάποιες μικρές αλλαγές. Ο Timoumi ενώ παίρνει την ίδια ενεργειακή θεώρηση με τον Urieli και τον Berchowitς παρ' ολ' αυτά επιλέγει να βάλει στον παρονομαστή το μήκος του εκτοπιστή και όχι το μήκος του διακένου θεωρώντας μάλλον ότι η κλίση θερμοκρασίας επεκτείνεται και πέρα απ' το αδιαβατικό μήκος που έχει υποθεθεί. Έτσι έχουμε :

$$\dot{Q}_{sh} = -\pi \cdot \frac{D_d}{2} \cdot k_g \cdot X_d^2 \cdot \frac{T_h - T_k}{L_d \cdot h} - \pi \cdot \frac{D_d'}{2} \cdot k_g' \cdot X_d'^2 \cdot \frac{T_{k'} - T_{h'}}{L_d' \cdot h'} \quad (3.100)$$

Επίσης εφόσον ισχύει ότι  $X_d = S_d / 2$ ,  $X_d' = S_d' / 2$  και  $\pi/8 \approx 0.4$  τότε έχουμε την τελική μορφή της εξίσωσης του Timoumi για τη shuttle loss:

$$\dot{Q}_{sh} = -0.4 \cdot D_d \cdot k_g \cdot S_d^2 \cdot \frac{T_h - T_k}{L_d \cdot h} - 0.4 \cdot D_d' \cdot k_g' \cdot S_d'^2 \cdot \frac{T_{k'} - T_{h'}}{L_d' \cdot h'} \quad (3.101)$$

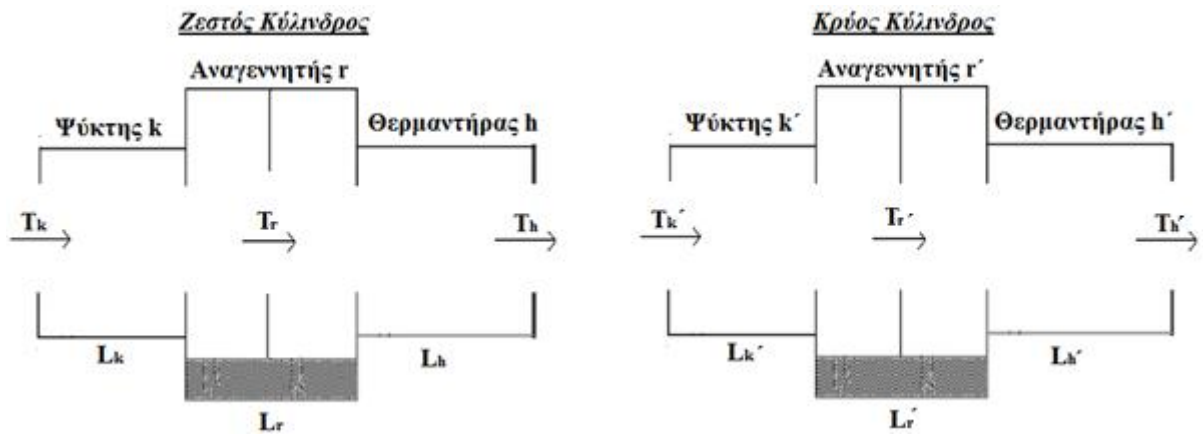
#### Απώλεια λόγω υστέρησης αερίου στους εργαζόμενους χώρους (working spaces)

Όσον αφορά τις απώλειες λόγω υστέρησης του αερίου ο Timoumi θεωρεί ότι η σχέση του Urieli που αντιστοιχεί στα ελατήρια αερίου ισχύει και για τους εργαζόμενους χώρους (working spaces) [15]. Οπότε, η σχέση του Timoumi για την απώλεια αυτή διευρυμένη για μία μηχανή VM έχει ως εξής:

$$\dot{Q}_{hys} = -\sqrt{\frac{1}{32} \cdot \omega \cdot \gamma^3 \cdot (\gamma - 1) \cdot T_w \cdot p_{mean} \cdot k_g} \cdot \left(\frac{\Delta V}{V_B}\right) \cdot A_w - \sqrt{\frac{1}{32} \cdot \omega \cdot \gamma^3 \cdot (\gamma - 1) \cdot T_w' \cdot p_{mean} \cdot k_g'} \cdot \left(\frac{\Delta V'}{V_{B'}}\right) \cdot A_w' \quad (3.102)$$

#### Απώλεια λόγω αγωγής θερμότητας

Για τις απώλειες λόγω αγωγής θερμότητας ο Timoumi δίνει την κλασική σχέση Fourier. Οι απώλειες αγωγής περιορίζονται σύμφωνα με τον ερευνητή μόνο στο κομμάτι των θερμοεναλλακτών. Ο μηχανισμός της απώλειας αυτής αναπαριστάται στο σχήμα 3.12 για όλους τους θερμοεναλλάκτες (heat exchangers) μιας μηχανής Vuilleumier.



Σχήμα 3.12 : Μηχανισμός απωλειών λόγω αγωγής θερμότητας σε μηχανή Vuilleumier [15].

Οι θερμοκρασίες  $T_r$  και  $T_r'$  είναι οι ενεργές θερμοκρασίες των δύο αναγεννητών. Οπότε η τελική μορφή της εξίσωσης για την απώλεια αυτή είναι η εξής:

$$\dot{Q}_{cond} = \sum_i \left( -A_{eff} \cdot k_m \cdot \frac{\Delta T}{L} \right), \quad i = k, k', r, r', h, h' \quad (3.103)$$

όπου  $A_{eff}$  η ενεργές επιφάνειες για αγωγή των σωληνώσεων των θερμοεναλλακτών (θερμαντήρες, ψύκτες) και του πλέγματος των αναγεννητών,  $k_m$  οι ειδικές θερμικές αγωγιμότητες των υλικών των θερμοεναλλακτών και  $L$  τα μήκη ροής σ' αυτούς.

Οι βασικές σχέσεις απωλειών συμφωνά με το μοντέλο του Timoumi για μία μηχανή VM δίνονται συνοπτικά στον πίνακα 3.7 .

Πίνακας 3.7 : Εξισώσεις απωλειών Timoumi για μηχανή VM.

$\dot{Q}_{ffl} = \sum_i \left( -\frac{\Delta p_i \cdot g A_i \cdot V_i}{m_i} \right), i = h, r, k, k', r', h'$	<p>Απώλειες λόγω πτώσης πίεσης στους θερμοεναλλάκτες (<math>\dot{Q}_{ffl}</math>)</p>
$\dot{Q}_{sh} = -0.4 \cdot D_d \cdot k_g \cdot S_d^2 \cdot \frac{T_h - T_k}{L_d \cdot h} - 0.4 \cdot D_d' \cdot k_g' \cdot S_d'^2 \cdot \frac{T_{k'} - T_{h'}}{L_d' \cdot h'}$	<p>Απώλειες λόγω τακτικής μεταφοράς θερμότητας (<math>\dot{Q}_{sh}</math>)</p>
$\dot{Q}_{cond} = \sum_i \left( -A_{eff} \cdot k_m \cdot \frac{\Delta T}{L} \right), i = k, k', r, r', h, h'$	<p>Απώλειες λόγω αγωγής θερμότητας (<math>\dot{Q}_{cond}</math>)</p>
$\dot{Q}_{hys} = -\sqrt{\frac{1}{32} \cdot \omega \cdot \gamma^3 \cdot (\gamma - 1) \cdot T_w \cdot p_{mean} \cdot k_g} \cdot \left( \frac{\Delta V}{V_B} \right) \cdot A_w - \sqrt{\frac{1}{32} \cdot \omega \cdot \gamma^3 \cdot (\gamma - 1) \cdot T_w \cdot p_{mean} \cdot k_g'} \cdot \left( \frac{\Delta V'}{V_{B'}} \right) \cdot A_w'$	<p>Απώλειες λόγω υστέρησης αερίου (<math>\dot{Q}_{hys}</math>)</p>

### 3.4.4 Μοντέλο εξισώσεων του W. Martini

Ο W.Martini στη μελέτη του όσον αφορά τις μηχανές Stirling " Stirling engine design manual" ,δίνει ένα μοντέλο απωλειών καθαρά 2<sup>ης</sup> τάξης το οποίο βασίζεται στο ιδανικό ισοθερμοκρασιακό μοντέλο ανάλυσης. Θα γίνει επέκταση του μοντέλου αυτού ώστε να καλύπτει τις ανάγκες μιας μηχανής VM.

#### Απώλειες λόγω πτώσης πίεσης στους θερμοεναλλάκτες

Η σχέση που δίνει ο Martini για την πτώση πίεσης στους θερμοεναλλάκτες αντιστοιχεί στην (3.29) ακολουθώντας την ίδια ενεργειακή θεώρηση (Kays και London) :

$$\Delta p = \frac{2 \cdot f_f \cdot g^2 \cdot L}{d \cdot \rho} \quad (3.104)$$

Για τον υπολογισμό των απωλειών αυτών είναι απαραίτητο να υπολογιστούν οι παροχές μάζας σε κάθε θερμοεναλλάκτη. Εδώ ο Martini σε αντίθεση με τους προηγούμενους χρησιμοποιεί ένα δικό του προσεγγιστικό μοντέλο με βάση το ισοθερμοκρασιακό έτσι ώστε να υπολογίσει τις ενεργές παροχές μάζας και το κλάσμα του χρόνου για κάθε μία παροχή έτσι ώστε το γινόμενο τους να εισαχθεί στη τελική σχέση των απωλειών αυτών. Ξεκινώντας απ' τον θερμό όγκο  $VH$  της μηχανής ο οποίος συμπεριλαμβάνει τον όγκο του ζεστού χώρου εκτόνωσης και τον όγκο ροής στον θερμοαντήρα έχουμε :

$$FH(\theta) = \frac{p(\theta) \cdot VH(\theta)}{M \cdot R \cdot T_h} \quad (3.105)$$

όπου  $FH(\theta)$  είναι ουσιαστικά το κλάσμα της ποσότητας του αερίου που βρίσκεται στο θερμό χώρο σε συνάρτηση με τη γωνία στροφάλου  $\theta$  και  $p(\theta)$  είναι η πίεση συναρτήσει της γωνίας  $\theta$  που προκύπτει απ' το ισοθερμικό μοντέλο. Η ίδια σχέση ισχύει και για τους άλλους τρεις χώρους της μηχανής δηλαδή για τον κρύο χώρο  $H'$  και για τους χώρους μέσης θερμοκρασίας  $C, C'$ . Από τη διάγραμμα της εξίσωσης (3.105) βρίσκονται η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή του  $FH$  δηλαδή τα  $FH_{max}$  και  $FH_{min}$ . Επίσης μέσω της επόμενης σχέσης υπολογίζεται η ενεργός τιμή  $FCTH$  η οποία αποτελεί το ενεργό κλάσμα του χρόνου παροχής μάζας στον θερμό χώρο :

$$FCT_h = \left[ \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{359} FH^2(\theta) \cdot d\theta \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.106)$$

Οπότε η ενεργή παροχή μάζας στους θερμοαντήρες, στους ψύκτες και στους αναγεννητές υπολογίζονται ως εξής [6]:

$$gA_{effh} = \frac{FH_{max} - FH_{min}}{FCT_h} \cdot f \cdot M \quad (3.107)$$

$$gA_{effh'} = \frac{FH'_{max} - FH'_{min}}{FCT_{h'}} \cdot f \cdot M \quad (3.108)$$

$$gA_{effk} = \frac{FC_{max} - FC_{min}}{FCT_c} \cdot f \cdot M \quad (3.109)$$

$$gA_{effk'} = \frac{FC'_{max} - FC'_{min}}{FCT_{c'}} \cdot f \cdot M \quad (3.110)$$

$$gA_{effr} = \frac{gA_{effh} + gA_{effk}}{2} \quad (3.111)$$

$$gA_{effr'} = \frac{gA_{effh'} + gA_{effk'}}{2} \quad (3.112)$$

Η τελική μορφή των flow friction losses δίνονται απ' την εξής σχέση:

$$\dot{Q}_{ffi} = \sum_i \left( -\frac{2 \cdot \Delta p_i \cdot gA_{effi} \cdot FCT_i}{\rho_i} \right), i = h, r, k, k', r', h' \quad (3.113)$$

όπου η πυκνότητα  $\rho$  είναι η μέση πυκνότητα του αερίου στον κάθε θερμοεναλλάκτη. Οι ταχύτητες του αερίου ανά μονάδα επιφάνειας  $g$  βρίσκονται απ' την εξής σχέση:

$$g_i = \frac{gA_{effi}}{A_i}, i = h, r, k, k', r', h' \quad (3.114)$$

Όπου  $A$  είναι η ενεργός ελεύθερη επιφάνεια ροής του αερίου στον κάθε θερμοεναλλάκτη. Επίσης η δυναμική συνεκτικότητα  $\mu$  (αέριο ήλιο) και ο συντελεστής τριβής  $f_f$  για θερμοαντάρτες, ψύκτες υπολογίζονται απ' τις εξής σχέσεις:

$$\mu(T) = \left[ 196.14 + 0.464 \cdot (T - 293) - 0.093 \cdot \frac{P_{mean}}{10^6} \right] \cdot 10^{-7} \quad (3.115)$$

$$\begin{aligned} \text{Re} < 2000 &\rightarrow f_f = 16 / \text{Re} \\ \text{Re} > 2000 &\rightarrow f_f = 10^{(1.34 - 0.20 \log \text{Re})} \end{aligned} \quad (3.116)$$

Ενώ ο  $f_f$  για τους αναγεννητές υπολογίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \text{Re} < 60 &\rightarrow f_f = 10^{(1.73 - 0.93 \log \text{Re})} \\ 60 < \text{Re} < 1000 &\rightarrow f_f = 10^{(0.714 - 0.365 \log \text{Re})} \\ \text{Re} > 1000 &\rightarrow f_f = 10^{(0.015 - 0.125 \log \text{Re})} \end{aligned} \quad (3.117)$$

#### Απώλειες λόγω τακτικής μεταφοράς θερμότητας

Η απώλεια λόγω τακτικής μεταφοράς θερμότητας (shuttle loss) αντιστοιχεί στην σχέση (3.63) :

$$\dot{Q}_{sh} = -\frac{1+lb}{1+lb^2} \cdot \frac{\pi}{8} \cdot Dc_e \cdot k_g \cdot S_d^2 \cdot \frac{T_h - T_k}{L_d \cdot h} \quad (3.118)$$

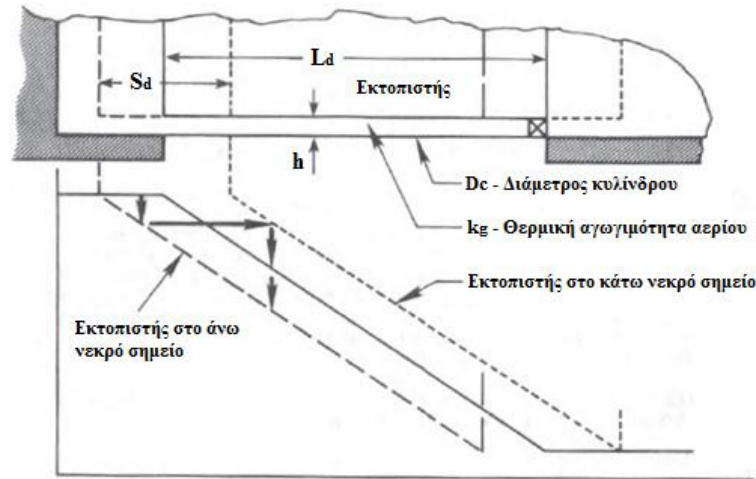
όπου η ποσότητα  $lb$  είναι ίση με :

$$lb = 1 + \frac{k_g}{2 \cdot \pi \cdot h} \cdot \left( \frac{lt1}{k_d} + \frac{lt2}{k_{we}} \right) \quad (3.119)$$

όπου  $lt1$  και  $lt2$  είναι το μήκος κύματος θερμοκρασίας μέσα στο τοίχωμα του εκτοπιστή και του κυλίνδρου αντίστοιχα [6]. Οπότε η τελική μορφή της απώλειας λόγω τακτικής μεταφοράς θερμότητας για μηχανή VM δίνεται απ' την εξής σχέση :

$$\dot{Q}_{sh} = -\frac{1+lb}{1+lb^2} \frac{\pi}{8} \cdot Dc_e \cdot k_g \cdot S_d^2 \cdot \frac{T_h - T_k}{L_d \cdot h} - \frac{1+lb'}{1+lb'^2} \frac{\pi}{8} \cdot Dc_{e'} \cdot k_{g'} \cdot S_{d'}^2 \cdot \frac{T_{k'} - T_{h'}}{L_{d'} \cdot h'} \quad (3.120)$$

Στο σχήμα 3.13 φαίνεται ο μηχανισμός της shuttle loss κατά Martini.



Σχήμα 3.13 : Μηχανισμός της shuttle loss κατά Martini [6].

#### Απώλειες λόγω μεταφοράς ενθαλπίας αερίου

Σύμφωνα με τον Martini καθώς στη μηχανή πραγματοποιείται συμπίεση και αποσυμπίεση (εκτόνωση) το εργαζόμενο αέριο ρέει μέσα και έξω από το κενό μεταξύ του εκτοπιστή και του κυλίνδρου. Εφόσον η σφράγιση στην άκρη του κενού είναι ψυχρή, επιπλέον θερμότητα πρέπει να προστεθεί στο αέριο καθώς εξέρχεται απ' το κενό. Η τελική σχέση που δίνει ο Martini σε μηχανή VM έχει ως εξής (Leo) [6] :

$$\dot{Q}_{pu} = -\left(\pi \cdot \frac{Dc_e}{k_g}\right)^{0.6} \cdot \frac{2 \cdot L_d \cdot (T_h - T_k)}{1.5 \cdot ZI} \cdot \left[\frac{2 \cdot (p_{\max} - p_{\min}) \cdot f \cdot c_p}{(T_h + T_k) \cdot R}\right]^{1.6} \cdot h^{2.6} - \left(\pi \cdot \frac{Dc_{e'}}{k_{g'}}\right)^{0.6} \cdot \frac{2 \cdot L_{d'} \cdot (T_{k'} - T_{h'})}{1.5 \cdot ZI'} \cdot \left[\frac{2 \cdot (p_{\max} - p_{\min}) \cdot f \cdot c_p}{(T_{k'} + T_{h'}) \cdot R}\right]^{1.6} \cdot h'^{2.6} \quad (3.121)$$

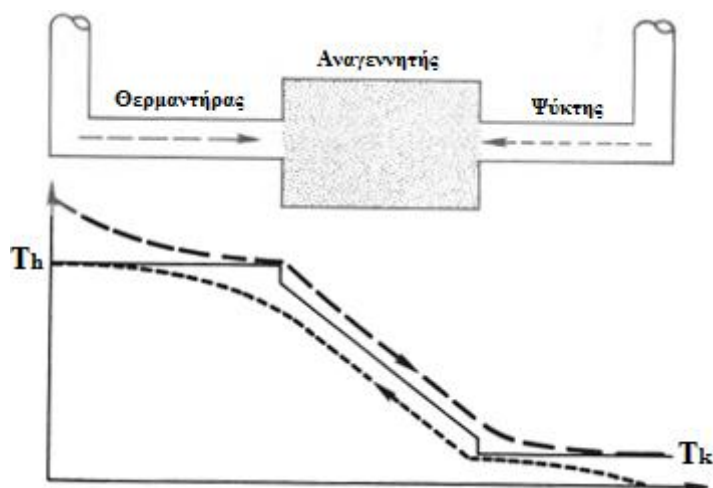
όπου  $ZI$  και  $ZI'$  είναι συντελεστές που είναι ίσοι με τη μονάδα εκτός αν η θερμοκρασία του αερίου είναι μικρότερη από 70 K.

#### Απώλειες λόγω αναθέρμανσης στους αναγεννητές

Ένας λόγος για τον οποίον απαιτείται επιπλέον θερμότητα απ' την πηγή θερμότητας είναι η αναποτελεσματικότητα του αναγεννητή. Ο αναγεννητής αναθερμαίνει το αέριο το οποίο επιστρέφει στο θερμό χώρο της μηχανής. Η αναθέρμανση που δεν παρέχεται απ' τον



αναγεννητή θα πρέπει να δοθεί απ' τον θερμαντήρα. Το σχήμα 3.14 δείχνει πως οι θερμοκρασίες του αερίου μεταβάλλονται στον θερμαντήρα, στον αναγεννητή και στον ψύκτη κατά την έξοδο του απ' τον θερμό χώρο όπως και κατά τη ροή του μέσα σ' αυτόν. Η θερμοκρασιακή διαφορά πολλαπλασιαζόμενη με τον συντελεστή αναποτελεσματικότητας του αναγεννητή, την ειδική θερμοχωρητικότητα υπό σταθερό όγκο, την ενεργό παροχή του αερίου σ' αυτόν καθώς και με το ενεργό κλάσμα του χρόνου κατά το οποίο το αέριο ρέει εσωτερικά του μας δίνει την εξίσωση των απωλειών αναθέρμανσης (reheat losses) [6].



Σχήμα 3.14 : Μηχανισμός των απωλειών αναθέρμανσης κατά Martini [6].

Η τελική μορφή της εξίσωσης για την απώλεια αναθέρμανσης σε μηχανή VM διατυπώνεται ως εξής:

$$\dot{Q}_{rh} = -FCT_r \cdot gA_{effr} \cdot c_v \cdot (T_h - T_k) \cdot \frac{2}{NTU_v + 2} - FCT_r \cdot gA_{effr} \cdot c_v \cdot (T_k - T_{h'}) \cdot \frac{2}{NTU_v + 2} \quad (3.122)$$

όπου  $NTU_v$ ,  $NTU_v'$  είναι οι αριθμοί μεταφερόμενων μονάδων για τους αναγεννητές χρησιμοποιώντας θερμοχωρητικότητα υπό σταθερό όγκο.

#### Απώλειες λόγω παλινδρόμησης θερμοκρασίας στους αναγεννητές

Η απώλεια λόγω παλινδρόμησης θερμοκρασίας (swing temperature losses) είναι η πρόσθετη θερμότητα λόγω της ταλάντωσης θερμοκρασίας της μήτρας του αναγεννητή, η οποία πρέπει να προστεθεί από το θερμαντήρα αερίου λόγω της πεπερασμένης θερμοχωρητικότητας του αναγεννητή [6]. Η τελική μορφή της εξίσωσης για την απώλεια λόγω παλινδρόμησης θερμοκρασίας σε μηχανή VM διατυπώνεται ως εξής:

$$\dot{Q}_{ts} = -\frac{FCT_r \cdot gA_{effr} \cdot c_v \cdot \text{deltmx}}{2} - \frac{FCT_r \cdot gA_{effr} \cdot c_v \cdot \text{deltmx}'}{2} \quad (3.123)$$

όπου  $\text{deltmx}$  και  $\text{deltmx}'$  είναι οι παλινδρομήσεις της θερμοκρασίας στους αναγεννητές.

### Απώλεια λόγω αγωγής θερμότητας

Οι απώλειες θερμότητας λόγω αγωγής (conduction losses) είναι οι πιο κλασικές μορφές απωλειών. Χωρίζονται στις απώλειες λόγω αγωγιμότητας τοιχωμάτων καθώς και λόγω αγωγιμότητας του αερίου. Σε μία μηχανή VM οι conduction losses κατά Martini είναι οι εξής:

1. Απώλεια λόγω αγωγιμότητας αερίου εσωτερικά των εκτοπιστών.
2. Απώλεια λόγω αγωγιμότητας τοιχωμάτων των εκτοπιστών.
3. Απώλεια λόγω αγωγιμότητας τοιχωμάτων των κυλίνδρων.
4. Απώλεια λόγω αγωγιμότητας τοιχωμάτων των αναγεννητών.
5. Απώλεια λόγω αγωγιμότητας μήτρας των αναγεννητών.
6. Απώλεια λόγω αγωγιμότητας αερίου στο διάκενο μεταξύ εκτοπιστών και κυλίνδρων.
7. Απώλεια λόγω ακτινοβολίας αερίου εσωτερικά των εκτοπιστών.

Οι απώλειες αυτές υπολογίζονται με την κλασική σχέση του Fourier :

$$\dot{Q}_{cond} = -A_{eff} \cdot k_w \cdot \frac{\Delta T}{\Delta x} - A \cdot k_g \cdot \frac{\Delta T}{\Delta x} \quad (3.124)$$

όπου ο πρώτος όρος αφορά τις απώλειες λόγω αγωγιμότητας των διαφόρων τοιχωμάτων ενώ ο δεύτερος αντιπροσωπεύει τις απώλειες λόγω αγωγιμότητας του αερίου. Τα  $k_m, k_g$  είναι οι ειδικές θερμικές αγωγιμότητες του τοιχώματος και του αερίου αντίστοιχα. Τα  $A_{eff}$  ,  $A$  είναι η ενεργός επιφάνεια αγωγής τοιχώματος και η ενεργός ελεύθερη επιφάνεια ροής αερίου (free flow area) αντίστοιχα.

Οι βασικές σχέσεις απωλειών συμφωνά με το μοντέλο του Martini για μία μηχανή VM δίνονται συνοπτικά στον πίνακα 3.8 .

*Πίνακας 3.8 : Εξισώσεις απωλειών Martini για μηχανή VM.*

$\dot{Q}_{ffl} = \sum_i \left( -\frac{2 \cdot \Delta p_i \cdot g A_{effi} \cdot FCT_i}{\rho_i} \right), i = h, r, k, k', r', h'$	<p><b>Απώλειες λόγω πτώσης πίεσης στους θερμοεναλλάκτες</b> (<math>\dot{Q}_{ffl}</math>)</p>
$\dot{Q}_{sh} = -\frac{1+lb}{1+lb^2} \frac{\pi}{8} \cdot Dc_e \cdot k_g \cdot S_d^2 \cdot \frac{T_h - T_k}{L_d \cdot h} - \frac{1+lb'}{1+lb'^2} \frac{\pi}{8} \cdot Dc_{e'} \cdot k_{g'} \cdot S_{d'}^2 \cdot \frac{T_{k'} - T_{h'}}{L_{d'} \cdot h'}$	<p><b>Απώλειες λόγω τακτικής μεταφοράς θερμότητας</b> (<math>\dot{Q}_{sh}</math>)</p>

$$\dot{Q}_{pu} = - \left( \pi \cdot \frac{Dc_e}{k_g} \right)^{0.6} \cdot \frac{2 \cdot L_d \cdot (T_h - T_k)}{1.5 \cdot Z1} \cdot \left[ \frac{2 \cdot (p_{\max} - p_{\min}) \cdot f \cdot c_p}{(T_h + T_k) \cdot R} \right]^{1.6} \cdot h^{2.6}$$

$$- \left( \pi \cdot \frac{Dc_{e'}}{k_{g'}} \right)^{0.6} \cdot \frac{2 \cdot L_{d'} \cdot (T_{k'} - T_{h'})}{1.5 \cdot Z1'} \cdot \left[ \frac{2 \cdot (p_{\max} - p_{\min}) \cdot f \cdot c_p}{(T_{k'} + T_{h'}) \cdot R} \right]^{1.6} \cdot h'^{2.6}$$

*Απώλειες λόγω μεταφοράς ενθαλπίας αερίου*  
( $\dot{Q}_{pu}$ )

$$\dot{Q}_{rh} = -FCT_r \cdot gA_{effr} \cdot c_v \cdot (T_h - T_k) \cdot \frac{2}{NTU_v + 2} - FCT_{r'} \cdot gA_{effr'} \cdot c_v \cdot (T_{k'} - T_{h'}) \cdot \frac{2}{NTU_{v'} + 2}$$

*Απώλειες λόγω αναθέρμανσης*  
( $\dot{Q}_{rh}$ )

$$\dot{Q}_{ts} = - \frac{FCT_r \cdot gA_{effr} \cdot c_v \cdot \text{deltmx}}{2} - \frac{FCT_{r'} \cdot gA_{effr'} \cdot c_v \cdot \text{deltmx}'}{2}$$

*Απώλειες λόγω παλινδρόμησης θερμοκρασίας*  
( $\dot{Q}_{ts}$ )

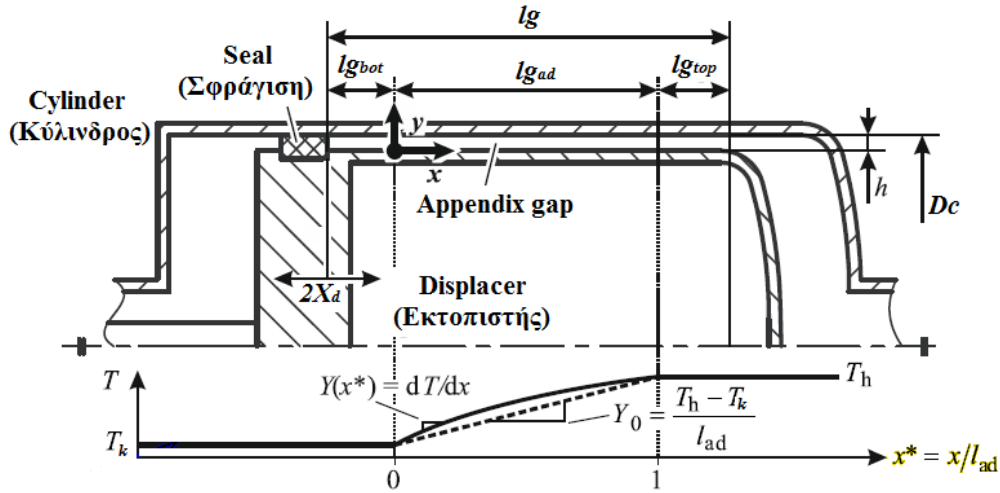
$$\dot{Q}_{cond} = -A_{eff} \cdot k_w \cdot \frac{\Delta T}{\Delta x} - A \cdot k_g \cdot \frac{\Delta T}{\Delta x}$$

*Απώλειες λόγω αγωγής θερμότητας*  
( $\dot{Q}_{cond}$ )

### 3.4.5 Μοντέλο εξισώσεων του J. Pfeiffer

Το μοντέλο απωλειών του J.Pfeiffer αφορά τις απώλειες που σχετίζονται με το διάκενο μεταξύ εκτοπιστή και κυλίνδρου δηλαδή τις appendix gap losses και με τις απώλειες λόγω αγωγής θερμότητας στα τοιχώματα του εκτοπιστή και του κυλίνδρου. Οι appendix gap losses αποτελούνται, ως γνωστόν απ' τις προηγούμενες ενότητες, από δύο απώλειες, την τακτική μεταφορά θερμότητας (shuttle loss) καθώς και από τη μεταφορά ενθαλπίας (pumping losses). Ο Pfeiffer στις pumping losses έχει ενσωματώσει επιπλέον την απώλεια θερμοδυναμικού έργου στη σφράγιση (seal losses). Όλες αυτές οι απώλειες που μελετά ο Pfeiffer έχουν ένα κοινό χαρακτηριστικό. Εξαρτώνται όλες απ' την κλίση θερμοκρασίας  $Y = \theta T / \theta x$  στο διάκενο. Ενώ όλοι οι προηγούμενοι ερευνητές θεωρούν ότι το  $Y$  είναι σταθερό δηλαδή ότι το προφίλ θερμοκρασίας στο διάκενο είναι γραμμικό, ο Pfeiffer με βάση πειραματικών δεδομένων θεωρεί ότι το προφίλ αυτό δεν είναι γραμμικό αλλά καμπυλωτό με αποτέλεσμα η νέα μορφή του να επηρεάζει τις τιμές των απωλειών αυτών. Στη μελέτη ο Pfeiffer χρησιμοποιεί αδιάστατα μεγέθη και ενσωματώνει και άλλα μεγέθη όπως μια πιθανή κωνικότητα στον κύλινδρο. Το αδιάστατο άθροισμα  $\Sigma^*$  των απωλειών αυτών για λόγους διατήρησης της ενέργειας θα πρέπει να είναι

σταθερό. Για κάθε μηχανή λοιπόν υπάρχει μία δεδομένη τιμή  $\Sigma^*$  σύμφωνα με την οποία θα δοθούν τα τελικά χωρικά προφίλ των απωλειών. Η διαδικασία για να βρεθεί η τιμή αυτή είναι αριθμητική. Για αρχική τιμή εισόδου στο πρόγραμμα αριθμητικής επίλυσης επιλέγεται η μέση τιμή του  $\Sigma^*$  με την υπόθεση γραμμικού προφίλ θερμοκρασίας [17]. Η μηχανή με την οποία καταπιάνεται ο Pfeiffer είναι η εργοπαραγωγός Stirling τύπου  $\beta$ , GPU-3. Στην ενότητα αυτή θα γίνει προσπάθεια να γίνει επέκταση της ανάλυσης αυτής για μία μηχανή VM. Το μήκος του διακένου στο οποία έχουμε κλίση της τοπικής θερμοκρασίας είναι το  $l_{g_{ad}}$  και είναι αδιαβατικό καθώς αντιστοιχεί στη πλευρά του κυλίνδρου που εφάπτεται με το τον αναγεννητή (σχήμα 3.15).



Σχήμα 3.15 : Προφίλ θερμοκρασίας στο διάκενο εκτοπιστή – κυλίνδρου [17] .

#### Αδιαστατοποίηση μεγεθών

Η εξίσωση που δίνει τη μεταβολή της πίεσης έχει ως εξής:

$$p(\theta) = p_{mean} \cdot [1 + r_p \cdot \cos(\theta - \theta_p)] \quad (3.125)$$

όπου  $r_p = \Delta p / p_{mean}$ .

Επίσης γίνεται η υπόθεση ότι εξίσωση της μέσης ταχύτητας είναι ημιτονοειδής:

$$u_m(\theta) = \hat{u}_m \cdot \cos(\theta - \theta_u) \quad (3.126)$$

Ο αδιάστατος λόγος του πλάτους μέσης ταχύτητας ροής με το πλάτος της ταχύτητας του εκτοπιστή ονομάζεται λόγος ταχύτητας  $\Gamma$ :

$$\Gamma = \frac{\hat{u}_m}{X_d \cdot \omega} \quad (3.127)$$

Ο αδιάστατος αριθμός Valensi  $Re_\omega$  είναι ένα μέτρο επιδράσεων της αδράνειας της μάζας και είναι ίσος με:

$$Re_\omega = \frac{4 \cdot h^2 \cdot \omega}{\nu} \quad (3.128)$$

Ο αδιάστατος αριθμός Peclet  $Pe_\omega$  είναι ένα μέτρο επιδράσεων της θερμικής αδράνειας και ισούται με:

$$Pe_\omega = \frac{4 \cdot h^2 \cdot \omega}{a} = Re_\omega \cdot Pr \quad (3.129)$$

Οι μιγαδικοί αριθμοί  $k$  και  $b$  είναι ίσοι με :

$$k = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{i \cdot Re_\omega} \quad (3.130)$$

$$b = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{i \cdot Pe_\omega} = k \cdot \sqrt{Pr} \quad (3.131)$$

Οι αδιαστατοποιημένες μορφές των shuttle και pumping losses ως προς τη συχνότητα λειτουργίας  $n(\omega)$ , τον όγκο σάρωσης του εκτοπιστή  $V_C$  και τη μέση πίεση  $p_{mean}$  είναι ίσες με:

$$\dot{Q}_{sh}^* = \frac{\dot{Q}_{sh}}{n(\omega) \cdot p_{mean} \cdot V_C} = 8\pi \cdot \frac{\sqrt{\frac{\alpha}{\omega}}}{D_c} \cdot \frac{1}{\sqrt{Pe_\omega}} \cdot \left[ \frac{X_d \cdot Y \cdot c_p \cdot 1}{T_{Cw} \cdot R \cdot 1 - Pr} \cdot \Re\{\Xi_1 - \Lambda[b \cdot \tanh(b) - Pr \cdot k \cdot \tanh(k)]\} \right. \\ \left. - r_p \cdot \Im\{e^{-i\theta_p} \cdot b \cdot \tanh(b)\} \right] \quad (3.132)$$

όπου :

$$\Xi_1 = \frac{b}{\tanh(2b)} - Pr \cdot \frac{k}{\tanh(2k)} \quad (3.133)$$

$$\Lambda = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma \cdot e^{-i\theta_a} - \frac{1}{2 \cdot k} \cdot \tanh(k)}{\frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot k} \cdot \tanh(k)} \quad (3.134)$$

$$\dot{Q}_{pu}^* = \frac{\dot{Q}_{pu}}{n(\omega) \cdot p_{mean} \cdot V_C} = \pi \cdot \frac{\sqrt{\frac{\alpha}{\omega}}}{D_c} \cdot \sqrt{Pe_\omega} \cdot \left[ \frac{X_d \cdot Y \cdot c_p \cdot 1}{T_{Cw} \cdot R \cdot 1 - Pr} \cdot \Im\{\Lambda(-\Xi_2 - 2\bar{\Lambda} \cdot \Xi_3 + \Xi_4 + \Gamma \cdot e^{i\theta_a}) + \bar{\Lambda} \cdot \Xi_3 - \Xi_4\} \right. \\ \left. - r_p \cdot [\Gamma \cdot \cos(\theta_p - \theta_a)] + \Re\{-\Xi_2 - 2 \cdot \bar{\Lambda} \cdot \Xi_3 + \Xi_4\} \cdot e^{-i\theta_p} \right] \quad (3.135)$$

όπου :

$$\Xi_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{b^2 - \bar{k}^2} \cdot \left[ \frac{\bar{k}}{\sinh(2\bar{k})} - \frac{b}{\sinh(2b)} \right] \quad (3.136)$$

$$\Xi_3 = \frac{\tanh(b)}{2b} - \frac{1}{4 \cdot \cosh(b) \cdot \cosh(\bar{k})} \cdot \left[ \frac{\sinh(b - \bar{k})}{b - \bar{k}} + \frac{\sinh(b + \bar{k})}{b + \bar{k}} \right] \quad (3.137)$$

$$\Xi_4 = \frac{1}{4 \cdot \sinh(2 \cdot b) \cdot \sinh(2 \cdot \bar{k})} \cdot \left[ \frac{\sinh(2 \cdot b - 2 \cdot \bar{k})}{b - \bar{k}} - \frac{\sinh(2 \cdot b + 2 \cdot \bar{k})}{b + \bar{k}} \right] \quad (3.138)$$

Η αδιαστατοποιημένη μορφή των conduction losses για εκτοπιστή και κύλινδρο είναι η εξής:

$$\dot{Q}_{cond}^* = \frac{\dot{Q}_{cond}}{n(\omega) \cdot p_{mean} \cdot V_C} = \frac{1}{n(\omega) \cdot p_{mean} \cdot V_C} \cdot \pi \cdot D c_e \cdot (h_c \cdot k_w + h_d \cdot k_d) \cdot Y \quad (3.139)$$

όπου  $h_c$ ,  $h_d$  είναι τα πάχη του κυλίνδρου και του εκτοπιστή αντίστοιχα.

Οι βασικές σχέσεις απωλειών συμφωνά με το μοντέλο του Pfeiffer για μία μηχανή VM δίνονται συνοπτικά στον πίνακα 3.9.

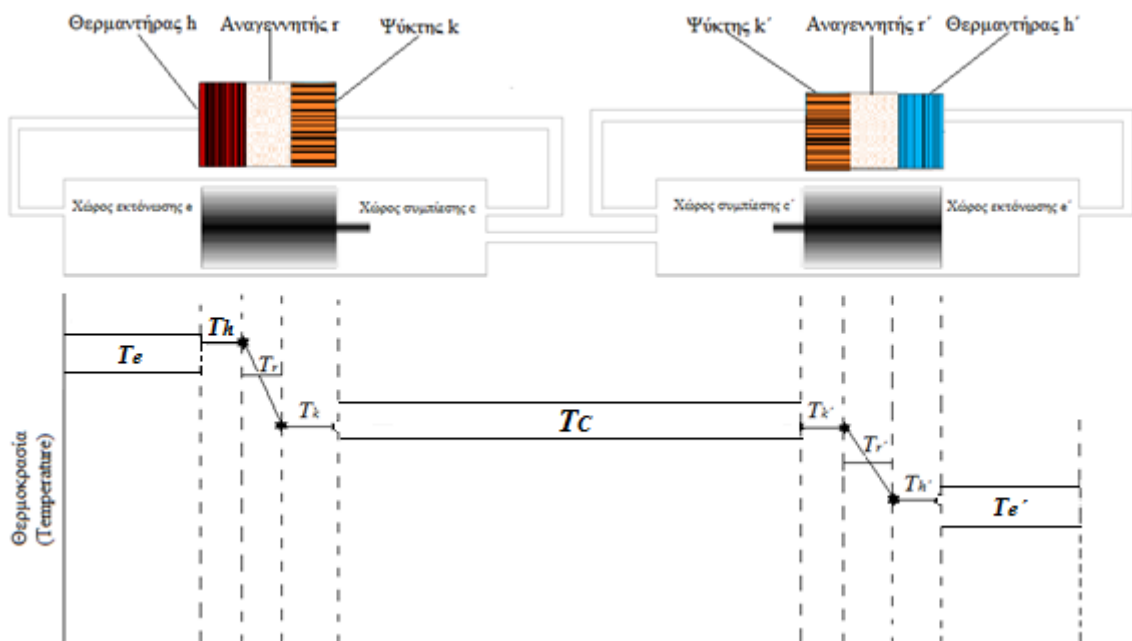
Πίνακας 3.9 : Εξισώσεις απωλειών Pfeiffer για μηχανή VM.

$\dot{Q}_{sh}^* = \frac{\dot{Q}_{sh}}{n(\omega) \cdot p_{mean} \cdot V_C} = 8\pi \cdot \frac{\sqrt{\frac{\alpha}{\omega}}}{D_c} \cdot \frac{1}{\sqrt{Pe_\omega}} \cdot \left[ \frac{X_d \cdot Y \cdot c_p}{T_{Cw} \cdot R} \cdot \frac{1}{1 - Pr} \cdot \Re\{\Xi_1 - \Lambda[b \cdot \tanh(b) - Pr \cdot k \cdot \tanh(k)]\} \right. \\ \left. + 8\pi \cdot \frac{\sqrt{\frac{\alpha'}{\omega}}}{D_c'} \cdot \frac{1}{\sqrt{Pe_\omega}} \cdot \left[ \frac{X_{d'} \cdot Y'}{T_{Cw'} \cdot R} \cdot \frac{1}{1 - Pr'} \cdot \Re\{\Xi_1' - \Lambda'[b' \cdot \tanh(b') - Pr' \cdot k' \cdot \tanh(k')] \right] \right]$	<p><b>Απώλειες λόγω τακτικής μεταφοράς θερμότητας (<math>\dot{Q}_{sh}</math>)</b></p>
$\dot{Q}_{pu}^* = \frac{\dot{Q}_{pu}}{n(\omega) \cdot p_{mean} \cdot V_C} = \pi \cdot \frac{\sqrt{\frac{\alpha}{\omega}}}{D_c} \cdot \sqrt{Pe_\omega} \cdot \left[ \frac{X_d \cdot Y \cdot c_p}{T_{Cw} \cdot R} \cdot \frac{1}{1 - Pr} \cdot \Im\{\Lambda(-\Xi_2 - 2\bar{\Lambda} \cdot \Xi_3 + \Xi_4 + \Gamma \cdot \varepsilon^{i\theta_s}) + \bar{\Lambda} \cdot \Xi_3 - \Xi_4\} \right. \\ \left. - r_p \cdot [\Gamma \cdot \cos(\theta_p - \theta_u)] + \Re\{-\Xi_2 - 2 \cdot \bar{\Lambda} \cdot \Xi_3 + \Xi_4\} \cdot e^{-i\theta_p} \right] \\ + \pi \cdot \frac{\sqrt{\frac{\alpha'}{\omega}}}{D_c'} \cdot \sqrt{Pe_\omega'} \cdot \left[ \frac{X_{d'} \cdot Y'}{T_{Cw'} \cdot R} \cdot \frac{1}{1 - Pr'} \cdot \Im\{\Lambda'(-\Xi_2' - 2\bar{\Lambda}' \cdot \Xi_3' + \Xi_4' + \Gamma' \cdot \varepsilon^{i\theta_s'}) + \bar{\Lambda}' \cdot \Xi_3' - \Xi_4'\} \right. \\ \left. - r_{p'} \cdot [\Gamma' \cdot \cos(\theta_p' - \theta_u')] + \Re\{-\Xi_2' - 2 \cdot \bar{\Lambda}' \cdot \Xi_3' + \Xi_4'\} \cdot e^{-i\theta_p'} \right]$	<p><b>Απώλειες λόγω μεταφοράς ενθαλπίας αερίου (<math>\dot{Q}_{pu}</math>)</b></p>
$\dot{Q}_{cond}^* = \frac{\dot{Q}_{cond}}{n(\omega) \cdot p_{mean} \cdot V_C} = \frac{1}{n(\omega) \cdot p_{mean} \cdot V_C} \cdot \pi \cdot D c_e \cdot (h_c \cdot k_w + h_d \cdot k_d) \cdot Y + \\ + \frac{1}{n(\omega) \cdot p_{mean} \cdot V_C} \cdot \pi \cdot D c_{e'} \cdot (h_{c'} \cdot k_{w'} + h_{d'} \cdot k_{d'}) \cdot Y'$	<p><b>Απώλειες λόγω αγωγής θερμότητας (<math>\dot{Q}_{cond}</math>)</b></p>

### 3.5 Το ιδανικό αδιαβατικό μοντέλο

Σύμφωνα με το μοντέλο αυτό η μηχανή Vuilleumier είναι διαμορφωμένη ως ένα μοντέλο δέκα στοιχείων σε σειρά συνδεδεμένα αποτελούμενο από τον ζεστό χώρο εκτόνωσης  $e$ , τον ζεστό θερμαντήρα  $h$ , τον ζεστό αναγεννητή  $r$ , τον ζεστό ψύκτη  $k$ , τον ζεστό χώρο συμπίεσης  $c$ , τον κρύο χώρο συμπίεσης  $c'$ , τον κρύο ψύκτη  $k'$ , τον κρύο αναγεννητή  $r'$ , τον κρύο θερμαντήρα  $h'$  και τον κρύο χώρο εκτόνωσης  $e'$ . Οι θερμοεναλλάκτες θεωρούνται τέλειο πράγμα το οποίο κάνει το ιδανικό αδιαβατικό μοντέλο να μοιάζει με το ιδανικό ισοθερμοκρασιακό. Έτσι το αέριο στους ψύκτες και στους θερμαντήρες διατηρείται σε σταθερές θερμοκρασίες  $T_k, T_{k'}, T_h$  και  $T_{h'}$ . Η διανομή θερμοκρασίας του αερίου στους αναγεννητές είναι γραμμική. Η ισοδύναμη θερμοκρασία θεωρείται ίση με την μέση λογαριθμική θερμοκρασία των δύο ακριανών θερμοκρασιών δηλαδή τις θερμοκρασίες του αντίστοιχου θερμαντήρα και ψύκτη. Παρ' ολ' αυτά οι εργαζόμενοι χώροι της μηχανής (χώροι συμπίεσης και εκτόνωσης) θεωρούνται αδιαβατικοί, δηλαδή η θερμοκρασία τους μεταβάλλεται (σχήμα 3.16) Για την απλοποίηση της διαδικασίας θεωρούμε τους δύο χώρους συμπίεσης σαν έναν χώρο συμπίεσης  $C(c + c')$ . Οπότε τα στοιχεία του μοντέλου μειώνονται σε εννέα.

Υπάρχουν οχτώ διεπιφάνειες μεταξύ των κελιών μέσω των οποίων μεταφέρεται ενθαλπία μέσω της παροχής μάζας  $gA$  και είναι οι εξής : διεπιφάνεια ζεστού χώρου εκτόνωσης/ζεστού θερμαντήρα  $h_e$ , ζεστού θερμαντήρα/ζεστού αναγεννητή  $rh$ , ζεστού αναγεννητή/ζεστού ψύκτη  $kr$ , ζεστού ψύκτη /χώρου συμπίεσης  $ck$ , χώρου συμπίεσης/κρύου ψύκτη  $k'C$ , κρύου ψύκτη/κρύου αναγεννητή  $r'k'$ , κρύου αναγεννητή/κρύου θερμαντήρα  $h'r'$  και κρύου θερμαντήρα/κρύου χώρου εκτόνωσης  $e'h'$ . Η παροχή του αερίου θεωρείται κατά σύμβαση θετική όταν έχει κατεύθυνση απ' τον κρύο χώρο εκτόνωσης στον ζεστό χώρο εκτόνωσης. Έτσι αν π.χ. η τιμή της παροχής  $gA_{kr}$  είναι αρνητική αυτό σημαίνει ότι έχει κατεύθυνση απ' τον ζεστό αναγεννητή στον ζεστό ψύκτη.



Σχήμα 3.16 : Ιδανικό αδιαβατικό μοντέλο

Οι ενθαλπίες καθώς ρέουν απ' τις διεπιφάνειες  $he$ ,  $Ck$ ,  $k'C$ ,  $e'h'$  χαρακτηρίζονται απ' τις αντίστοιχες θερμοκρασίες για τις οποίες ανάλογα της κατεύθυνσης της ροής ισχύει :

1. Αν  $gA_{Ck} > 0$  τότε  $T_{Ck} \leftarrow T_C$  αλλιώς  $T_{Ck} \leftarrow T_k$
2. Αν  $gA_{k'C} > 0$  τότε  $T_{k'C} \leftarrow T_{k'}$  αλλιώς  $T_{k'C} \leftarrow T_C$
3. Αν  $gA_{he} > 0$  τότε  $T_{he} \leftarrow T_h$  αλλιώς  $T_{he} \leftarrow T_e$
4. Αν  $gA_{e'h'} > 0$  τότε  $T_{e'h'} \leftarrow T_{e'}$  αλλιώς  $T_{e'h'} \leftarrow T_{h'}$

Σύμφωνα πάλι με τη θεώρηση ενός γενικευμένου κελιού (σχήμα 3.2) καταστρώνεται η ενεργειακή εξίσωση :

$$DQ + (c_p \cdot T_i \cdot gA_i - c_p \cdot T_o \cdot gA_o) = DW + c_v \cdot D(m \cdot T) \quad (3.140)$$

Όπου  $D = d/dt$ . Σύμφωνα με την καταστατική εξίσωση έχουμε :

$$p \cdot V = m \cdot R \cdot T \quad (3.141)$$

Η υπόθεση ότι το εργαζόμενο αέριο είναι τέλει είναι έγκυρη για τις μηχανές Vuilleumier καθώς οι διεργασίες του απέχουν απ' το κρίσιμο σημείο των αερίων. Με βάση αυτή την υπόθεση έχουμε ότι (Rogers και Mayhew 1967) :

$$c_p - c_v = R \quad (3.142)$$

όπου:

$$c_p = \frac{R \cdot \gamma}{\gamma - 1} \quad (3.143)$$

$$c_v = \frac{R}{\gamma - 1} \quad (3.144)$$

Η εξίσωση (3.142) αν λογαριθμήσουμε τα δύο μέλη της γίνεται :

$$\frac{Dp}{p} + \frac{DV}{V} = \frac{Dm}{m} + \frac{DT}{T} \quad (3.145)$$

Η συνολική μάζα του αερίου στη μηχανή είναι σταθερή :

$$M = m_e + m_h + m_r + m_k + m_C + m_{k'} + m_{r'} + m_{h'} + m_{e'} \quad (3.146)$$

Παραγωγίζοντας έχουμε :

$$Dm_e + Dm_h + Dm_r + Dm_k + Dm_C + Dm_{k'} + Dm_{r'} + Dm_{h'} + Dm_{e'} = 0 \quad (3.147)$$

Εφόσον οι όγκοι και οι θερμοκρασίες στους θερμοεναλλάκτες είναι σταθεροί θα έχουμε:

$$\frac{Dp}{p} = \frac{Dm}{m} \quad (3.148)$$



Τότε η (3.148) γίνεται:

$$Dm_e + Dm_C + Dm_{e'} + Dp \cdot \left( \frac{m_k}{p} + \frac{m_{k'}}{p} + \frac{m_r}{p} + \frac{m_{r'}}{p} + \frac{m_h}{p} + \frac{m_{h'}}{p} \right) = 0 \quad (3.149)$$

Οπότε μέσω της (3.142) έχουμε:

$$Dm_e + Dm_C + Dm_{e'} + \frac{Dp}{R} \cdot \left( \frac{V_k}{T_k} + \frac{V_{k'}}{T_{k'}} + \frac{V_r}{T_r} + \frac{V_{r'}}{T_{r'}} + \frac{V_h}{T_h} + \frac{V_{h'}}{T_{h'}} \right) = 0 \quad (3.150)$$

Για τον χώρο συμπίεσης C η (3.141) γίνεται :

$$DQ_C - c_p \cdot T_{Ck} \cdot gA_{Ck} = DW_C + c_v \cdot D(m_C \cdot T_C) \quad (3.151)$$

Εφόσον ο χώρος συμπίεσης C είναι αδιαβατικός έχουμε  $DQ_C = 0$  :

$$c_p \cdot T_{Ck} \cdot Dm_C = p \cdot DV_C + c_v \cdot D(m_C \cdot T_C) \quad (3.152)$$

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (3.141), (3.142), (3.143) και (3.144) στην (3.152) και απλοποιώντας έχουμε :

$$Dm_C = \frac{\left( p \cdot DV_C + \frac{V_C \cdot Dp}{\gamma} \right)}{R \cdot T_{Ck}} \quad (3.153)$$

Ομοίως για τους χώρους εκτόνωσης έχουμε :

$$Dm_e = \frac{\left( p \cdot DV_e + \frac{V_e \cdot Dp}{\gamma} \right)}{R \cdot T_{he}} \quad (3.154)$$

$$Dm_{e'} = \frac{\left( p \cdot DV_{e'} + \frac{V_{e'} \cdot Dp}{\gamma} \right)}{R \cdot T_{e'h'}} \quad (3.155)$$

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (3.154) και (3.155) στην εξίσωση (3.150) έχουμε :

$$Dp = \frac{-\gamma \cdot p \cdot \left( \frac{DV_C}{T_{Ck}} + \frac{DV_e}{T_{he}} + \frac{DV_{e'}}{T_{e'h'}} \right)}{\left[ \frac{V_C}{T_{Ck}} + \gamma \cdot \left( \frac{V_k}{T_k} + \frac{V_{k'}}{T_{k'}} + \frac{V_r}{T_r} + \frac{V_{r'}}{T_{r'}} + \frac{V_h}{T_h} + \frac{V_{h'}}{T_{h'}} \right) + \frac{V_e}{T_{he}} + \frac{V_{e'}}{T_{e'h'}} \right]} \quad (3.156)$$

Για να υπολογιστεί η παροχή μάζας  $gA$  καταστρώνουμε την εξίσωση διατήρησης συνέχειας:

$$Dm = gA_i - gA_o \quad (3.157)$$

Εφαρμόζοντας την εξίσωση (3.157) για κάθε κελί έχουμε:

$$gA_{e'h'} = -Dm_{e'} \quad (3.158)$$

$$gA_{h'r'} = gA_{e'h'} - Dm_{h'} \quad (3.159)$$

$$gA_{r'k'} = gA_{h'r'} - Dm_{r'} \quad (3.160)$$

$$gA_{k'C} = gA_{r'k'} - Dm_{k'} \quad (3.161)$$

$$gA_{Ck} = gA_{k'C} - Dm_C \quad (3.162)$$

$$gA_{kr} = gA_{Ck} - Dm_k \quad (3.163)$$

$$gA_{rh} = gA_{kr} - Dm_r \quad (3.164)$$

$$gA_{he} = gA_{rh} - Dm_h \quad (3.165)$$

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (3.141) και (3.142) στην (3.140) έχουμε :

$$DQ + (c_p \cdot T_i \cdot gA_i - c_p \cdot T_o \cdot gA_o) = \frac{(c_p \cdot p \cdot DV + c_v \cdot V \cdot Dp)}{R} \quad (3.166)$$

Κάνοντας χρήση της σχέσης (3.166) για κάθε έναν απ' τους θερμοεναλλάκτες έχουμε :

$$DQ_{h'} = \frac{V_{h'} \cdot Dp \cdot c_v}{R} - c_p \cdot (T_{e'h'} \cdot gA_{e'h'} - T_{h'r'} \cdot gA_{h'r'}) \quad (3.167)$$

$$DQ_{r'} = \frac{V_{r'} \cdot Dp \cdot c_v}{R} - c_p \cdot (T_{h'r'} \cdot gA_{h'r'} - T_{r'k'} \cdot gA_{r'k'}) \quad (3.168)$$

$$DQ_{k'} = \frac{V_{k'} \cdot Dp \cdot c_v}{R} - c_p \cdot (T_{r'k'} \cdot gA_{r'k'} - T_{k'C} \cdot gA_{k'C}) \quad (3.169)$$

$$DQ_k = \frac{V_k \cdot Dp \cdot c_v}{R} - c_p \cdot (T_{Ck} \cdot gA_{Ck} - T_{kr} \cdot gA_{kr}) \quad (3.170)$$

$$DQ_r = \frac{V_r \cdot Dp \cdot c_v}{R} - c_p \cdot (T_{kr} \cdot gA_{kr} - T_{rh} \cdot gA_{rh}) \quad (3.171)$$

$$DQ_h = \frac{V_h \cdot Dp \cdot c_v}{R} - c_p \cdot (T_{rh} \cdot gA_{rh} - T_{he} \cdot gA_{he}) \quad (3.172)$$

Εφόσον οι θερμοεναλλάκτες είναι ισόθερμοι και οι αναγεννητές ιδανικοί διευκρινίζονται τα εξής:

$$T_{h'r'} = T_{h'} \quad (3.173)$$

$$T_{r'k'} = T_{k'} \quad (3.174)$$

$$T_{kr} = T_k \quad (3.175)$$

$$T_{rh} = T_h \quad (3.176)$$

Οι βασικές σχέσεις που προκύπτουν με βάση τη θερμοδυναμική ανάλυση μιας μηχανής VM μέσω του αδιαβατικού μοντέλου δίνονται συνοπτικά στον πίνακα 3.10 .

Πίνακας 3.10 : Εξισώσεις με βάση το αδιαβατικό μοντέλο ανάλυσης για μηχανή VM.

$Dp = \frac{-\gamma \cdot p \cdot \left( \frac{DV_C}{T_{Ck}} + \frac{DV_e}{T_{he}} + \frac{DV_{e'}}{T_{e'h'}} \right)}{\left[ \frac{V_C}{T_{Ck}} + \gamma \cdot \left( \frac{V_k}{T_k} + \frac{V_{k'}}{T_{k'}} + \frac{V_r}{T_r} + \frac{V_{r'}}{T_{r'}} + \frac{V_h}{T_h} + \frac{V_{h'}}{T_{h'}} \right) + \frac{V_e}{T_{he}} + \frac{V_{e'}}{T_{e'h'}} \right]}$	<b>Πίεση</b>
$Dm_C = \frac{\left( p \cdot DV_C + \frac{V_C \cdot Dp}{\gamma} \right)}{R \cdot T_{Ck}} \quad Dm_e = \frac{\left( p \cdot DV_e + \frac{V_e \cdot Dp}{\gamma} \right)}{R \cdot T_{he}}$ $Dm_{e'} = \frac{\left( p \cdot DV_{e'} + \frac{V_{e'} \cdot Dp}{\gamma} \right)}{R \cdot T_{e'h'}}$ $m_{h'} = \frac{p \cdot V_{h'}}{R \cdot T_{h'}} \quad m_{r'} = \frac{p \cdot V_{r'}}{R \cdot T_{r'}} \quad m_{k'} = \frac{p \cdot V_{k'}}{R \cdot T_{k'}}$ $m_k = \frac{p \cdot V_k}{R \cdot T_k} \quad m_r = \frac{p \cdot V_r}{R \cdot T_r} \quad m_h = \frac{p \cdot V_h}{R \cdot T_h}$	<b>Μάζες</b>
$T_C = \frac{p \cdot V_C}{R \cdot m_C} \quad T_e = \frac{p \cdot V_e}{R \cdot m_e}$	<b>Θερμοκρασίες</b>

$gA_{e'h'} = -Dm_e$ $Dm_{h'} = \frac{m_{h'} \cdot Dp}{p}$ $gA_{h'r'} = gA_{e'h'} - Dm_{h'}$ $Dm_{r'} = \frac{m_{r'} \cdot Dp}{p}$ $gA_{r'k'} = gA_{h'r'} - Dm_{r'}$ $Dm_{k'} = \frac{m_{k'} \cdot Dp}{p}$ $gA_{k'C} = gA_{r'k'} - Dm_{k'}$ $Dm_k = \frac{m_k \cdot Dp}{p}$ $gA_{Ck} = gA_{k'C} - Dm_C$ $Dm_r = \frac{m_r \cdot Dp}{p}$ $gA_{kr} = gA_{Ck} - Dm_k$ $Dm_h = \frac{m_h \cdot Dp}{p}$ $gA_{rh} = gA_{kr} - Dm_r$ $gA_{he} = gA_{rh} - Dm_h$	<p><i>Μάζες και παροχές μάζας</i></p>
<p>Αν <math>gA_{Ck} &gt; 0</math> τότε <math>T_{Ck} \leftarrow T_C</math> αλλιώς <math>T_{Ck} \leftarrow T_k</math>  Αν <math>gA_{k'C} &gt; 0</math> τότε <math>T_{k'C} \leftarrow T_{k'}</math> αλλιώς <math>T_{k'C} \leftarrow T_C</math>  Αν <math>gA_{he} &gt; 0</math> τότε <math>T_{he} \leftarrow T_h</math> αλλιώς <math>T_{he} \leftarrow T_e</math>  Αν <math>gA_{e'h'} &gt; 0</math> τότε <math>T_{e'h'} \leftarrow T_{e'}</math> αλλιώς <math>T_{e'h'} \leftarrow T_{h'}</math></p>	<p><i>Θερμοκρασίες υπό προϋποθέσεις</i></p>
$DQ_{h'} = \frac{V_{h'} \cdot Dp \cdot c_v}{R} - c_p \cdot (T_{e'h'} \cdot gA_{e'h'} - T_{h'r'} \cdot gA_{h'r'})$ $DQ_{r'} = \frac{V_{r'} \cdot Dp \cdot c_v}{R} - c_p \cdot (T_{h'r'} \cdot gA_{h'r'} - T_{r'k'} \cdot gA_{r'k'})$ $DQ_{k'} = \frac{V_{k'} \cdot Dp \cdot c_v}{R} - c_p \cdot (T_{r'k'} \cdot gA_{r'k'} - T_{k'C} \cdot gA_{k'C})$ $DQ_k = \frac{V_k \cdot Dp \cdot c_v}{R} - c_p \cdot (T_{Ck} \cdot gA_{Ck} - T_{kr} \cdot gA_{kr})$ $DQ_r = \frac{V_r \cdot Dp \cdot c_v}{R} - c_p \cdot (T_{kr} \cdot gA_{kr} - T_{rh} \cdot gA_{rh})$ $DQ_h = \frac{V_h \cdot Dp \cdot c_v}{R} - c_p \cdot (T_{rh} \cdot gA_{rh} - T_{he} \cdot gA_{he})$	<p><i>Ενέργεια</i></p>

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4<sup>ο</sup>

## ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ ΜΟΝΤΕΛΩΝ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΣΤΗΝ ΑΝΤΛΙΑ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ VUILLEUMIER ΤΟΥ KUHL

### 4.1 Εισαγωγή

Το κεφάλαιο αυτό έχει σαν βασικό θέμα την παρουσίαση των αποτελεσμάτων των μοντέλων ανάλυσης μηχανών Vuilleumier, που διατυπώθηκαν στο κεφάλαιο 3<sup>ο</sup>, στην αντλία θερμότητας του Kuhl (1990), η οποία παρουσιάστηκε στο κεφάλαιο 2<sup>ο</sup>. Ο λόγος επιλογής της συγκεκριμένης μηχανής (σχήμα 4.1) για την ανάλυση μας ήταν η πληθώρα στοιχείων (γεωμετρικών, λειτουργικών) που υπήρχε στην επιστημονική βιβλιογραφία και αφορούσε αυτή τη μηχανή. Τα μοντέλα απωλειών εφαρμόστηκαν και τεκμηριώθηκαν για την εργοπαραγωγό μηχανή Stirling GPU – 3. Η τεκμηρίωση αυτή αποτυπώνεται στην αρχή του κεφαλαίου με συγκρίσεις των τιμών που δίνει ο κάθε ερευνητής με τις τιμές που βρέθηκαν κατά την εφαρμογή των μοντέλων τους. Στην συνέχεια παρατίθενται τα αποτελέσματα του ισοθερμοκρασιακού μοντέλου ανάλυσης. Με βάση το μοντέλο αυτό έγιναν οι αναλύσεις των μοντέλων απωλειών των ερευνητών I. Urieli, D. Berchowitz, Y. Timoumi, W. Martini και J. Pfeiffer. Στο τέλος του κεφαλαίου δίνονται τα αποτελέσματα του ιδανικού αδιαβατικού μοντέλου ανάλυσης το οποίο στη συνέχεια θα αποτελέσει βάση για ένα μοντέλο απωλειών απ' αυτά που ήδη εξετάστηκαν.

### 4.2 Συγκρίσεις απωλειών για την μηχανή Stirling GPU-3

Η μηχανή GPU – 3 είναι μία εργοπαραγωγός μηχανή Stirling η οποία βρέθηκε πειραματικά να έχει τελική ισχύ εξόδου 3958 W. Ο τρόπος λειτουργίας της είναι με ρομβικό μηχανισμό διωστήρα - στροφάλου. Οι διεργασίες λαμβάνουν χώρα σε έναν και μόνο κύλινδρο (διαμόρφωση β), στον οποίο ένα έμβολο και ένας εκτοπιστής παλινδρομούν με τη βοήθεια του μηχανισμού, επιτελώντας τον κύκλο Stirling. Διαπιστώθηκε ότι οι παράμετροι λειτουργίας της μηχανής (είδος αερίου, μέση πίεση, συχνότητα λειτουργίας, υψηλή, χαμηλή θερμοκρασία) διέφεραν για κάποιους ερευνητές. Οπότε υπήρξε και η ανάλογη προσαρμογή της παρούσας ανάλυσης. Επίσης υπήρξαν διαφορές σε γεωμετρικές παραμέτρους (π.χ. μήκος εκτοπιστή, κωνικότητα κυλίνδρου) και το γεγονός ότι κάποιοι ερευνητές δεν έδιναν τιμές απωλειών αλλά συνολικά τις απώλειές τους και ελάχιστα γραφήματα απ' τα οποία δεν έβγαινε πάντοτε συμπέρασμα. Όλα τα παραπάνω δυσκόλεψαν σε έναν βαθμό την περάτωση της τεκμηρίωσης αυτής. Στη συνέχεια δίνονται οι σχετικοί πίνακες απωλειών για κάθε ερευνητή.

*Πίνακας 4.1 : Παράμετροι λειτουργίας της GPU – 3 κατά Martini*

<i>Είδος εργαζόμενου αερίου</i>	<i>Ηλιο</i>
<i>Συχνότητα λειτουργίας (Hz)</i>	<i>50</i>
<i>Μέση πίεση (Bar)</i>	<i>41,36</i>
<i>Υψηλή θερμοκρασία (K)</i>	<i>978</i>

Χαμηλή θερμοκρασία (K)	295
------------------------	-----

Πίνακας 4.2 : Απώλειες της GPU – 3 κατά το μοντέλο του Martini

	<u>Martini</u>	<u>Παρούσα ανάλυση</u>	<u>Απόκλιση</u>
<i>flow friction losses (W)</i>	1240	1270	2,36 %
<i>shuttle losses (W)</i>	379	377	0,52 %
<i>pumping losses (W)</i>	79	70,1	11,26 %
<i>reheat losses (W)</i>	337	343.3	1,83 %
<i>conduction losses (W)</i>	1108	1134	2,34 %
<i>swing temperature loss (W)</i>	146	156.6	6,76 %

Πίνακας 4.3 : Παράμετροι λειτουργίας της GPU – 3 κατά Pfeiffer

<i>Είδος εργαζόμενου αερίου</i>	Ηλιο
<i>Συχνότητα λειτουργίας (Hz)</i>	41,72
<i>Μέση πίεση (Bar)</i>	41,3
<i>Υψηλή θερμοκρασίας (K)</i>	977
<i>Χαμηλή θερμοκρασία (K)</i>	288

Πίνακας 4.4 : Απώλειες της GPU – 3 κατά το μοντέλο του Pfeiffer

	<u>Pfeiffer</u>	<u>Παρούσα ανάλυση</u>	<u>Απόκλιση</u>
<i>shuttle losses (W)</i>	805,8	806	0,02 %
<i>pumping losses (W)</i>	-25,9	-26,1	0,76 %
<i>conduction losses (W)</i>	509,1	508,8	0,05 %

Πίνακας 4.5 : Παράμετροι λειτουργίας της GPU – 3 κατά Berchowitz

Είδος εργαζόμενου αερίου	Υδρογόνο
Συχνότητα λειτουργίας (Hz)	50
Μέση πίεση (Bar)	55
Υψηλή θερμοκρασίας (K)	976
Χαμηλή θερμοκρασία (K)	300

Πίνακας 4.6 : Απώλειες της GPU – 3 κατά το μοντέλο του Berchowitz

	<u>Berchowitz</u>	<u>Παρούσα ανάλυση</u>	<u>Απόκλιση</u>
<i>flow friction losses</i> (W)	1201	1048	12,73 %
<i>shuttle losses</i> (W)	676	462,1	31,64 %
<i>pumping losses</i> (W)	524	331	36,83 %
<i>hysteresis losses</i> (W)	114	100	12,28 %
<i>conduction losses</i> (W)	1767	1093,5	38,11 %
<i>seal losses</i> (W)	Δεν δίδεται	27,8	-

Πίνακας 4.7 : Παράμετροι λειτουργίας της GPU – 3 κατά Timoumi

Είδος εργαζόμενου αερίου	Ήλιο
Συχνότητα λειτουργίας (Hz)	41,72
Μέση πίεση (Bar)	41,3
Υψηλή θερμοκρασίας (K)	977
Χαμηλή θερμοκρασία (K)	288

Πίνακας 4.8 : Απώλειες της GPU – 3 κατά το μοντέλο του Timoumi

	<u>Timoumi</u>	<u>Παρούσα ανάλυση</u>	<u>Απόκλιση</u>
<i>flow friction losses</i> (W)	736,9	776,7	5,12 %
<i>shuttle losses</i> (W)	174,9	196,0	10,7 %
<i>hysteresis losses</i> (W)	1613	1453	9,91 %

<i>conduction losses (W)</i>	17,2	19,1	9,94 %
------------------------------	------	------	--------

Πίνακας 4.9 : Παράμετροι λειτουργίας της GPU – 3 κατά Urieli

<i>Είδος εργαζόμενου αερίου</i>	<i>Ηλιο</i>
<i>Συχνότητα λειτουργίας (Hz)</i>	41,72
<i>Μέση πίεση (Bar)</i>	41,3
<i>Υψηλή θερμοκρασίας (K)</i>	977
<i>Χαμηλή θερμοκρασία (K)</i>	288

Πίνακας 4.10 : Απώλειες της GPU – 3 κατά το μοντέλο του Urieli

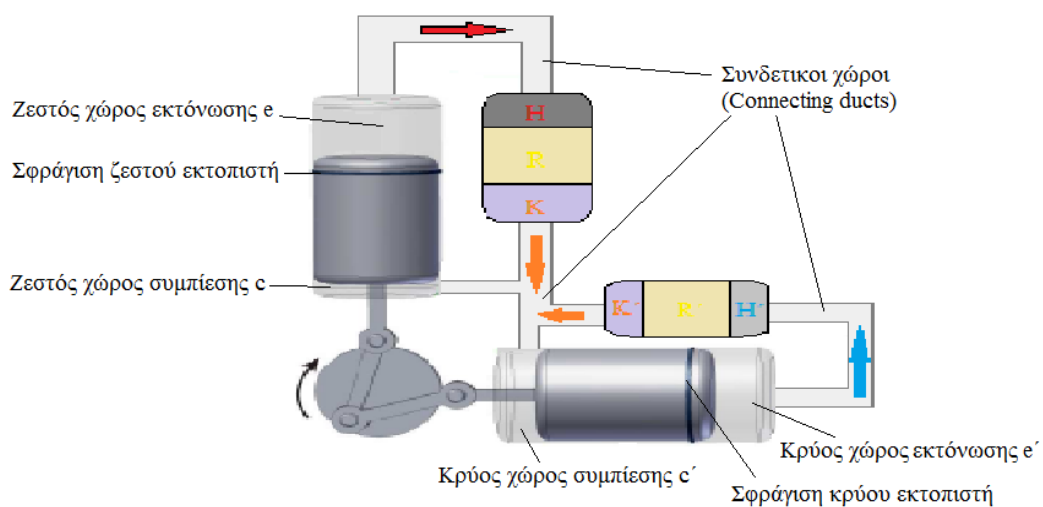
	<i>Urieli</i>	<i>Παρούσα ανάλυση</i>	<i>Απόκλιση</i>
<i>flow friction losses(W)</i>	700	776,7	9,87 %
<i>shuttle losses (W)</i>	<i>Δεν δίδεται</i>	196,0	-
<i>pumping losses (W)</i>	<i>Δεν δίδεται</i>	53,0	-
<i>conduction losses (W)</i>	<i>Δεν δίδεται</i>	1093,5	-
<i>Θερμικός βαθμός απόδοσης</i>	52,5 %	58,9 %	6,4 %

Παρατηρήσεις – συμπεράσματα:

1. Στην παρούσα ανάλυση για τον προσδιορισμό των τιμών των απωλειών της GPU – 3 χρησιμοποιήθηκε 2<sup>ης</sup> τάξης ανάλυση με βάση το ιδανικό ισοθερμοκρασιακό μοντέλο.
2. Όπως φαίνεται στον πίνακα 4.2 και 4.4 η τεκμηρίωση των απωλειών της GPU - 3 με το μοντέλο των Martini και Pfeiffer είναι πάρα πολύ καλή. Οι αποκλίσεις είναι της τάξης του 1 με 2 %. Η μόνη εξαίρεση είναι οι pumping losses κατά Martini όπου υπάρχει απόκλιση 11,26 % . Τόσο ο Martini όσο και ο Pfeiffer εφάρμοσαν μοντέλα 2<sup>ης</sup> τάξης με βάση το ισοθερμοκρασιακό μοντέλο.
3. Σύμφωνα με τον πίνακα 4.10 δεν ήταν δυνατό να γίνει καν σύγκριση των απωλειών του μοντέλου του Urieli εκτός απ' τις flow friction losses όπου προέκυψε αρκετά καλή σύγκλιση. Ο λόγος ήταν ότι δεν δίνονταν απ' τον ίδιο τον ερευνητή τιμές για καθεμιά απ' τις υπόλοιπες απώλειες. Το μόνο πρόσφορο για σύγκριση ήταν ο θερμικός βαθμός απόδοσης όπου υπήρξε καλή σύγκλιση (απόκλιση 6,4%). Ο Urieli εφάρμοσε αδιαβατικό μοντέλο 3<sup>ης</sup> τάξεως.
4. Οι συγκλίσεις ήταν αρκετά καλές και για τις απώλειες του μοντέλου του Timoumi (πίνακας 4.8). Ο Timoumi εφάρμοσε αδιαβατικό μοντέλο 3<sup>ης</sup> τάξεως.



5. Το μόνο μοντέλο στο οποίο υπήρξαν σχετικά μεγάλες αποκλίσεις ήταν του Berchowitz. Οι πιθανοί λόγοι για τις αποκλίσεις στις shuttle και pumping losses είναι το είδος του εργαζόμενου αερίου που διέφερε από τα υπόλοιπους (αέριο υδρογόνο) ενώ για τις conduction losses πιθανά σημαντικό ρόλο έπαιξε η κωνικότητα του κυλίνδρου της GPU-3. Επίσης, δεν αποσαφηνίζονται επαρκώς τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά που χρησιμοποίησε για να βγάλει τα αποτελέσματά του. Ακόμα, δεν διευκρινίζεται το αν χρησιμοποίησε μεταβλητό λόγο θερμοχωρητικότητας  $\gamma$  σε σχέση με την θερμοκρασία. Το μοντέλο του αντιστοιχεί σε αδιαβατικό 2<sup>ης</sup> τάξης.
6. Σε γενικές γραμμές θα λέγαμε ότι η τεκμηρίωση των μοντέλων απωλειών των πέντε ερευνητών στη GPU – 3 είναι αρκετά καλή. Οπότε μπορούμε να εφαρμόσουμε τα μοντέλα απωλειών και σε μία μηχανή Vuilleumier όπως είναι εκείνη του Kuhl (σχήμα 4.1).



Σχήμα 4.1 : Η αντλία θερμότητας Vuilleumier του Kuhl [20] .

### 4.3 Αποτελέσματα ιδανικού ισοθερμοκρασιακού μοντέλου ανάλυσης

Το ιδανικό ισοθερμοκρασιακό μοντέλο ανάλυσης, το οποίο ουσιαστικά αποτελεί ένα μοντέλο 1<sup>ης</sup> τάξεως εφαρμόστηκε για τη μηχανή του Kuhl με βάση τις παρακάτω υποθέσεις:

1. Η μάζα του εργαζόμενου αερίου είναι σταθερή δηλαδή δεν υπάρχουν διαρροές.
2. Το εργαζόμενο αέριο θεωρείται τέλειο (χρησιμοποίηση καταστατικής εξίσωσης τελείου αερίου).
3. Η ταχύτητα λειτουργίας της μηχανής είναι σταθερή.
4. Κυκλική σταθερή κατάσταση διέπει τη λειτουργία της μηχανής.
5. Οι κινητικές και δυναμικές ενέργειες του αερίου αμελούνται.

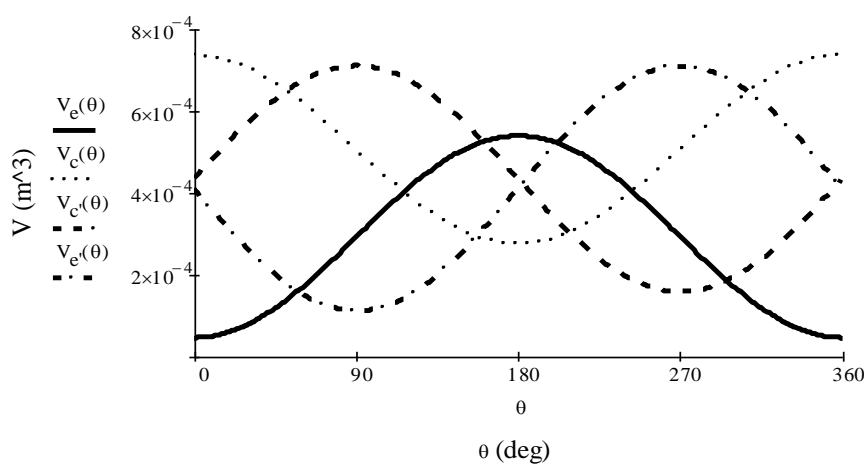
Τα αποτελέσματα του ισοθερμικού μοντέλου συνοψίζονται στον παρακάτω πίνακα:

Πίνακας 4.11 : Αποτελέσματα ιδανικού ισοθερμοκρασιακού μοντέλου

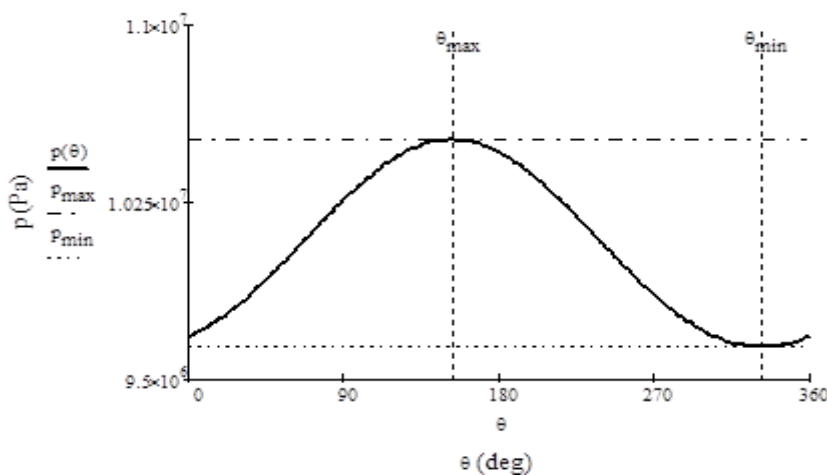
Μέση πίεση εργαζόμενου αερίου $p_{mean}$ σε bar	$p_{mean} = 100,7 \text{ bar}$
--	--------------------------------

Μέγιστη πίεση εργαζόμενου αερίου $p_{max}$ σε bar	$p_{max}= 105,2 \text{ bar}$
Ελάχιστη πίεση εργαζόμενου αερίου $p_{min}$ σε bar	$p_{min}= 96,34 \text{ bar}$
Προσφερόμενη θερμική ισχύς $\dot{Q}_e$ σε W	$\dot{Q}_e= 1028 \text{ W}$
Αποδιδόμενη (ενδεικνύμενη) θερμική ισχύς $\dot{Q}_{ind}^1$ σε W	$\dot{Q}_{ind}= 3234 \text{ W}$
Θερμικός συντελεστής συμπεριφοράς $COP_{th}^2$	$COP_{th}=3,146$

Στη συνέχεια δίνονται κάποια γραφήματα τα οποία προέκυψαν απ' την ισοθερμοκρασιακή ανάλυση της μηχανής του Kuhl.



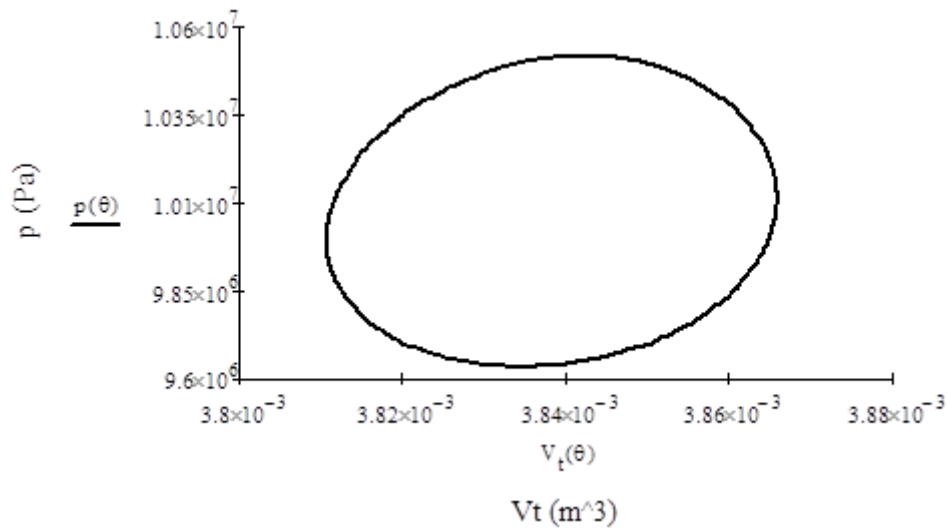
Σχήμα 4.2 : Γράφημα όγκων εργαζόμενων χώρων (εκτόνωσης, συμπίεσης)  $V$  σε  $m^3$  συναρτήσει της γωνίας στροφάλου  $\theta$  σε μοίρες.



Σχήμα 4.3 : Γράφημα πίεσης  $p$  του αερίου σε Pa συναρτήσει της γωνίας  $\theta$  του στροφάλου σε μοίρες.

<sup>1</sup> Ο δείκτης ind προέρχεται απ' την αγγλική λέξη indicated .

<sup>2</sup> Ο δείκτης th προέρχεται απ' την αγγλική λέξη theoretical .



Σχήμα 4.4 : Γράφημα  $p-V_t^3$  της μηχανής VM του Kuhl

#### 4.4 Αποτελέσματα μοντέλων απωλειών με βάση το ισοθερμικό μοντέλο

##### 4.4.1 Αποτελέσματα μοντέλου του I. Urieli

Οι απώλειες που πραγματεύεται το μοντέλο του Urieli είναι οι εξής:

1. Απώλειες λόγω πτώσης πίεσης αερίου στους θερμοεναλλάκτες - flow friction losses
2. Απώλειες λόγω τακτικής μεταφορά θερμότητας – shuttle losses
3. Απώλειες λόγω μεταφοράς ενθαλπίας του αερίου ή απώλειες άντλησης – pumping losses ή gas enthalpy transport losses
4. Απώλειες θερμοδυναμικού έργου στη σφράγιση – seal losses
5. Απώλειες λόγω αγωγής θερμότητας – conduction losses

Τα αποτελέσματα του μοντέλου απωλειών του Urieli συνοψίζονται στον παρακάτω πίνακα :

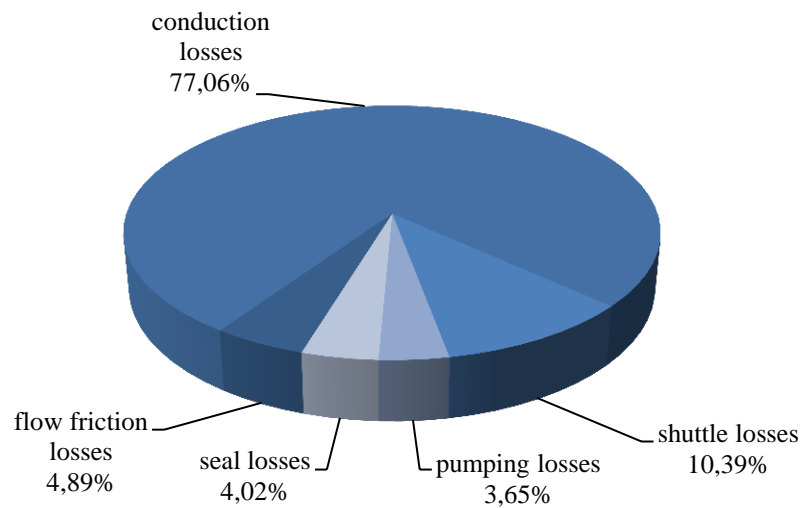
Πίνακας 4.12 : Αποτελέσματα μοντέλου απωλειών του Urieli

Flow friction losses $\dot{Q}_{ffl}$ (W)	$\dot{Q}_{ffl} = 81,591$ W
Shuttle losses $\dot{Q}_{sh}$ (W)	$\dot{Q}_{sh} = 173,31$ W
Pumping losses or gas enthalpy transport losses $\dot{Q}_{pu}$ (W)	$\dot{Q}_{pu} = 60,898$ W
Seal losses $\dot{Q}_{seal}$ (W)	$\dot{Q}_{seal} = 67,048$ W
Conduction losses $\dot{Q}_{cond}$ (W)	$\dot{Q}_{cond} = 1286$ W
Συνολικές απώλειες $\dot{Q}_{losses}$ (W)	$\dot{Q}_{losses} = 1669$ W

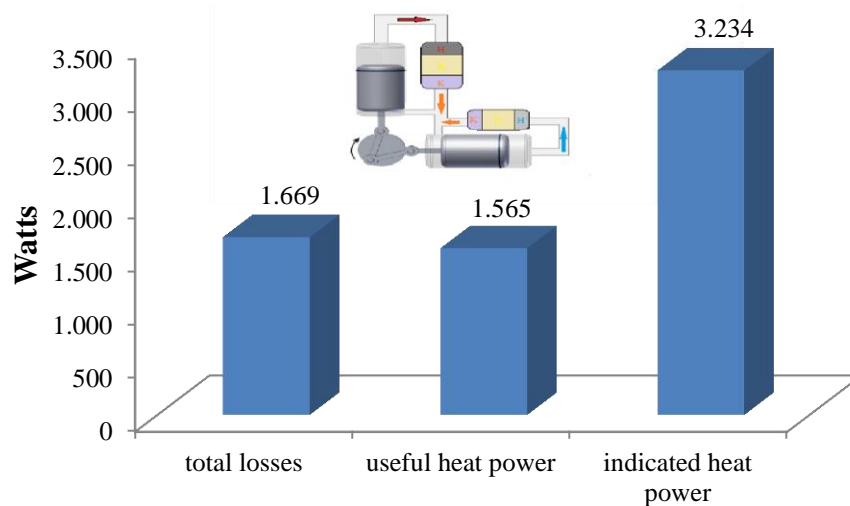
<sup>3</sup> Ο δείκτης t προέρχεται απ' την αγγλική λέξη total.

Ενδεικνύμενη θερμική ισχύς $\dot{Q}_{ind}$ ( W )	$\dot{Q}_{ind}= 3234 \text{ W}$
Ωφέλιμη θερμική ισχύς $\dot{Q}_u$ <sup>4</sup> σε W	$\dot{Q}_u= 1565 \text{ W}$
Θερμικός συντελεστής συμπεριφοράς $COP_h$	$COP_h=1,523$

Στη συνέχεια δίνονται κάποια γραφήματα με σκοπό τη σύγκριση των απωλειών της μηχανής του Kuhl σύμφωνα με το μοντέλο του Urieli.



Σχήμα 4.5 : Γράφημα (πίτα) ποσοστών απωλειών επί των συνολικής ισχύος απωλειών κατά το μοντέλο του Urieli .



Σχήμα 4.6 : Γράφημα (ραβδόγραμμα) θερμικής απόδοσης κατά το μοντέλο του Urieli.

<sup>4</sup> Ο δείκτης u προέρχεται απ' την αγγλική λέξη useful.

#### 4.4.2 Αποτελέσματα μοντέλου του D. Berchowitz

Οι απώλειες που πραγματεύεται το μοντέλο του Berchowitz είναι οι εξής:

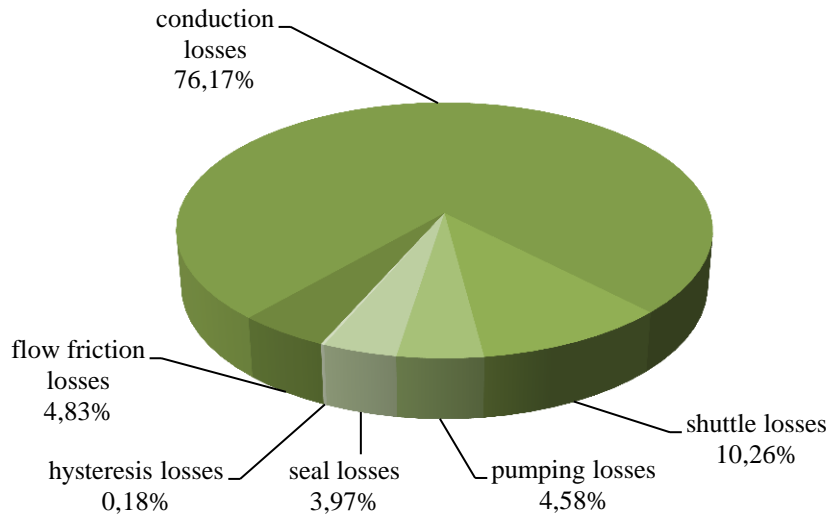
1. Απώλειες λόγω πτώσης πίεσης αερίου στους θερμοεναλλάκτες - flow friction losses
2. Απώλειες λόγω τακτικής μεταφορά θερμότητας – shuttle losses
3. Απώλειες λόγω μεταφοράς ενθαλπίας του αερίου ή απώλειες άντλησης – pumping losses ή gas enthalpy transport losses
4. Απώλειες θερμοδυναμικού έργου στη σφράγιση – seal losses
5. Απώλειες λόγω αγωγής θερμότητας – conduction losses
6. Απώλειες λόγω υστέρησης αερίου – hysteresis losses

Τα αποτελέσματα του μοντέλου απωλειών του Berchowitz συνοψίζονται στον παρακάτω πίνακα:

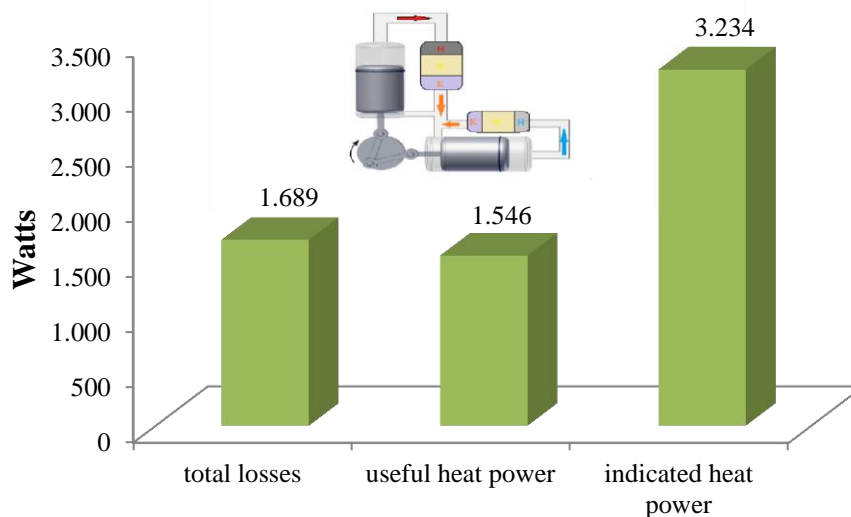
Πίνακας 4.13 : Αποτελέσματα μοντέλου απωλειών του Berchowitz

<i>Flow friction losses <math>\dot{Q}_{fpl}</math> (W)</i>	$\dot{Q}_{fpl} = 81,591 \text{ W}$
<i>Shuttle losses <math>\dot{Q}_{sh}</math> (W)</i>	$\dot{Q}_{sh} = 173,31 \text{ W}$
<i>Pumping losses or gas enthalpy transport losses <math>\dot{Q}_{pu}</math> (W)</i>	$\dot{Q}_{pu} = 77,36 \text{ W}$
<i>Seal losses <math>\dot{Q}_{seal}</math> (W)</i>	$\dot{Q}_{seal} = 67,048 \text{ W}$
<i>Conduction losses <math>\dot{Q}_{cond}</math> (W)</i>	$\dot{Q}_{cond} = 1286 \text{ W}$
<i>Hysteresis losses <math>\dot{Q}_{hys}</math> (W)</i>	$\dot{Q}_{hys} = 3,106 \text{ W}$
<i>Συνολικές απώλειες <math>\dot{Q}_{losses}</math> (W)</i>	$\dot{Q}_{losses} = 1689 \text{ W}$
<i>Ενδεικνύμενη θερμική ισχύς <math>\dot{Q}_{ind}</math> (W)</i>	$\dot{Q}_{ind} = 3234 \text{ W}$
<i>Ωφέλιμη θερμική ισχύς <math>\dot{Q}_u</math> σε W</i>	$\dot{Q}_u = 1546 \text{ W}$
<i>Θερμικός συντελεστής συμπεριφοράς <math>COP_h</math></i>	$COP_h = 1,504$

Στη συνέχεια δίνονται κάποια γραφήματα με σκοπό τη σύγκριση των απωλειών της μηχανής του Kuhl σύμφωνα με το μοντέλο του Berchowitz.



Σχήμα 4.7 : Γράφημα (πίτα) ποσοστών απωλειών επί της συνολικής ισχύος απωλειών κατά το μοντέλο του Berchowitz .



Σχήμα 4.8 : Γράφημα (ραβδόγραμμα) θερμικής απόδοσης κατά το μοντέλο του Berchowitz.

#### 4.4.3 Αποτελέσματα μοντέλου του Y. Timoumi

Οι απώλειες που πραγματεύεται το μοντέλο του Timoumi είναι οι εξής:

1. Απώλειες λόγω πτώσης πίεσης αερίου στους θερμοεναλλάκτες - flow friction losses
2. Απώλειες λόγω τακτικής μεταφορά θερμότητας – shuttle losses
3. Απώλειες λόγω υστέρησης αερίου – hysteresis losses
4. Απώλειες λόγω αγωγής θερμότητας – conduction losses

Τα αποτελέσματα του μοντέλου απωλειών του Timoumi συνοψίζονται στον παρακάτω πίνακα :

Πίνακας 4.14 : Αποτελέσματα μοντέλου απωλειών του Timoumi

Flow friction losses $\dot{Q}_{ffl}$ (W)	$\dot{Q}_{ffl} = 81,591$ W
Shuttle losses $\dot{Q}_{sh}$ (W)	$\dot{Q}_{sh} = 170,482$ W
Conduction losses $\dot{Q}_{cond}$ (W)	$\dot{Q}_{cond} = 60,513$ W
Hysteresis losses $\dot{Q}_{hys}$ (W)	$\dot{Q}_{hys} = 1706$ W
Συνολικές απώλειες $\dot{Q}_{losses}$ (W)	$\dot{Q}_{losses} = 2019$ W
Ενδεικνύμενη θερμική ισχύς $\dot{Q}_{ind}$ (W)	$\dot{Q}_{ind} = 3234$ W
Ωφέλιμη θερμική ισχύς $\dot{Q}_u$ σε W	$\dot{Q}_u = 1216$ W

Για το μοντέλο του Timoumi δεν ήταν δυνατό να παρουσιαστεί γράφημα (πίτα) που να συγκρίνει τις απώλειες μεταξύ τους για δύο λόγους:

- α) Οι απώλειες υστέρησης προκύπτουν ίσες με το 84,51 % της ενδεικνύμενης ισχύος, πράγμα το οποίο θεωρείται παράλογο λόγω του ότι οι απώλειες αυτές είναι γενικά πάρα πολύ μικρές.
- β) Οι conduction losses αφορούν μόνο τους θερμοεναλλάκτες και όχι ολόκληρη τη μηχανή. Γι' αυτό το λόγο η τιμή τους θα λέγαμε ότι είναι μηδαμινή σε σχέση με των άλλων ερευνητών.

Αυτοί οι δύο λόγοι κάνουν ανέφικτο τον υπολογισμό του θερμικού συντελεστή συμπεριφοράς  $COP_h$  της μηχανής. Τα μόνα συγκρίσιμα μεγέθη είναι οι shuttle και οι flow friction losses (σχήματα 4.11 και 4.12)

#### 4.4.4 Αποτελέσματα μοντέλου του W. Martini

Οι απώλειες που πραγματεύεται το μοντέλο του Berchowitz είναι οι εξής:

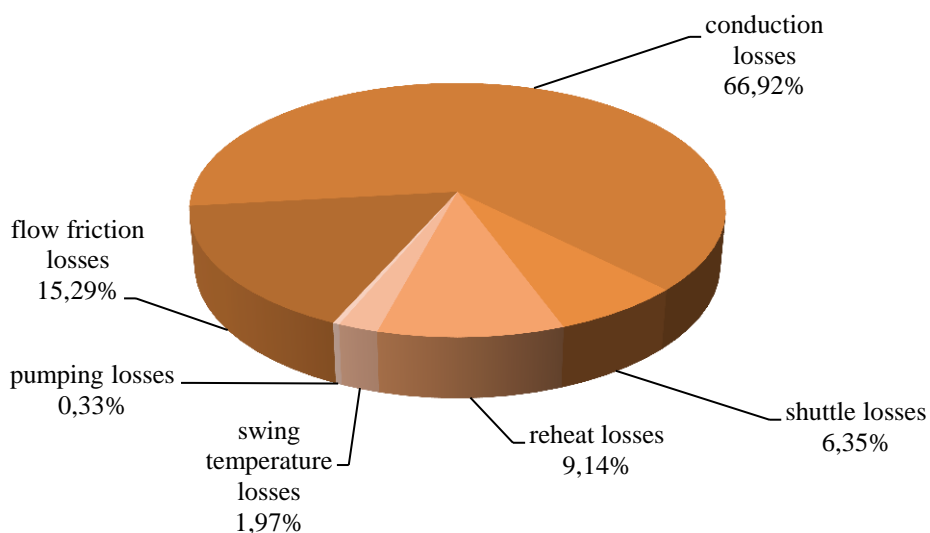
1. Απώλειες λόγω πτώσης πίεσης αερίου στους θερμοεναλλάκτες - flow friction losses
2. Απώλειες λόγω τακτικής μεταφορά θερμότητας – shuttle losses
3. Απώλειες λόγω μεταφοράς ενθαλπίας του αερίου ή απώλειες άντλησης – pumping losses ή gas enthalpy transport losses
4. Απώλειες λόγω αναθέρμανσης στους αναγεννητές – reheat losses
5. Απώλειες λόγω αγωγής θερμότητας – conduction losses
6. Απώλειες λόγω παλινδρόμησης θερμοκρασίας στους αναγεννητές - swing temperature losses

Τα αποτελέσματα του μοντέλου απωλειών του Martini συνοψίζονται στον παρακάτω πίνακα:

Πίνακας 4.15 : Αποτελέσματα μοντέλου απωλειών του Martini

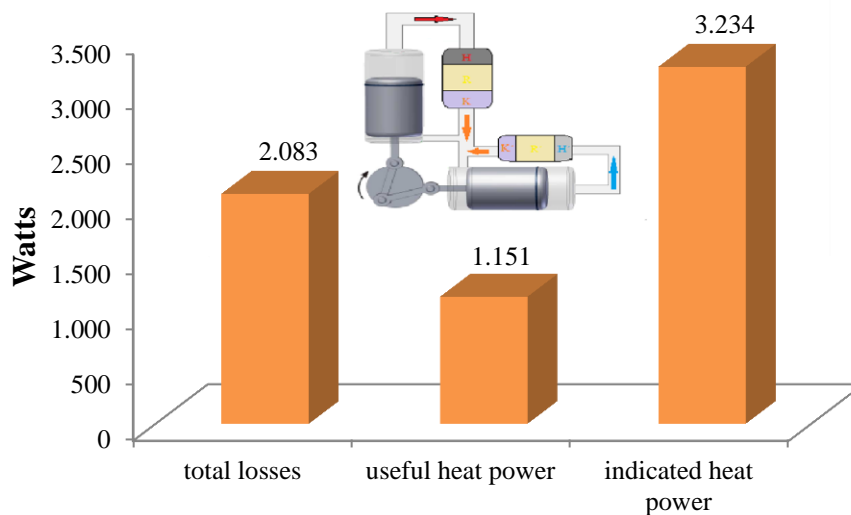
Flow friction losses $\dot{Q}_{f_{fl}}$ (W)	$\dot{Q}_{f_{fl}} = 318,397 \text{ W}$
Shuttle losses $\dot{Q}_{sh}$ (W)	$\dot{Q}_{sh} = 132,319 \text{ W}$
Pumping losses or gas enthalpy transport losses $\dot{Q}_{pu}$ (W)	$\dot{Q}_{pu} = 6,781 \text{ W}$
Reheat losses $\dot{Q}_{rh}$ (W)	$\dot{Q}_{rh} = 190,457 \text{ W}$
Conduction losses $\dot{Q}_{cond}$ (W)	$\dot{Q}_{cond} = 1394 \text{ W}$
Swing temperature losses $\dot{Q}_{ts}$ (W)	$\dot{Q}_{ts} = 40,986 \text{ W}$
Συνολικές απώλειες $\dot{Q}_{losses}$ (W)	$\dot{Q}_{losses} = 2083 \text{ W}$
Ενδεικνύμενη θερμική ισχύς $\dot{Q}_{ind}$ (W)	$\dot{Q}_{ind} = 3234 \text{ W}$
Ωφέλιμη θερμική ισχύς $\dot{Q}_u$ σε W	$\dot{Q}_u = 1151 \text{ W}$
Θερμικός συντελεστής συμπεριφοράς $COP_h$	$COP_h = 1,120$

Στη συνέχεια δίνονται κάποια γραφήματα με σκοπό τη σύγκριση των απωλειών της μηχανής του Kuhl σύμφωνα με το μοντέλο του Martini.



Σχήμα 4.9 : Γράφημα (πίτα) ποσοστών απωλειών επί της συνολικής ισχύος απωλειών κατά το μοντέλο του Martini .





Σχήμα 4.10 : Γράφημα (ραβδόγραμμα) θερμικής απόδοσης κατά το μοντέλο του Martini.

#### 4.4.5 Αποτελέσματα μοντέλου του J. Pfeiffer

Οι απώλειες που πραγματεύεται το μοντέλο του Berchowitz είναι οι εξής:

1. Απώλειες λόγω τακτικής μεταφορά θερμότητας – shuttle losses
2. Απώλειες λόγω μεταφοράς ενθαλπίας του αερίου ή απώλειες άντλησης – pumping losses ή gas enthalpy transport losses
3. Απώλειες λόγω αγωγής θερμότητας – conduction losses

Τα αποτελέσματα του μοντέλου απωλειών του Pfeiffer συνοψίζονται στον παρακάτω πίνακα:

Πίνακας 4.16 : Αποτελέσματα μοντέλου απωλειών του Pfeiffer

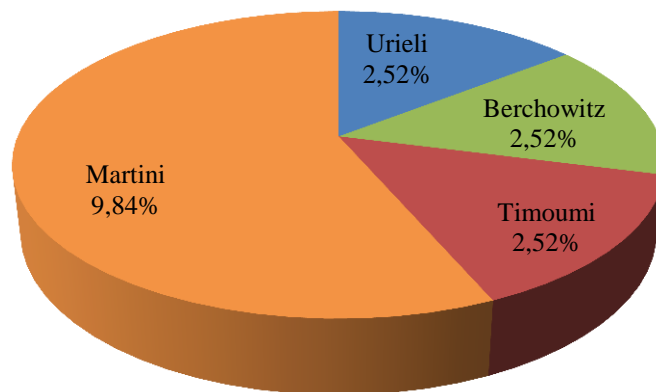
Shuttle losses $\dot{Q}_{sh}$ (W)	$\dot{Q}_{sh} = 239,51$ W
Pumping losses or gas enthalpy transport losses $\dot{Q}_{pu}$ (W)	$\dot{Q}_{pu} = 195,474$ W
Conduction losses $\dot{Q}_{cond}$ (W)	$\dot{Q}_{cond} = 502,806$ W

Στην περίπτωση του Pfeiffer δεν ήταν δυνατό να εξεταστεί η τελική απόδοση της μηχανής του Kuhl καθώς το μοντέλο του αντιστοιχεί σε ένα μόνο μέρος των απωλειών μια μηχανής Vuilleumier, τις λεγόμενες ως appendix gap losses. Παρ' ολ' αυτά οι τιμές αυτές θα ενσωματωθούν σε γραφήματα στην επόμενη ενότητα με σκοπό τη σύγκριση με αντίστοιχες τιμές των λοιπών μοντέλων απωλειών.

#### 4.4.6 Αποτελέσματα συγκρίσεων των διαφόρων μοντέλων απωλειών

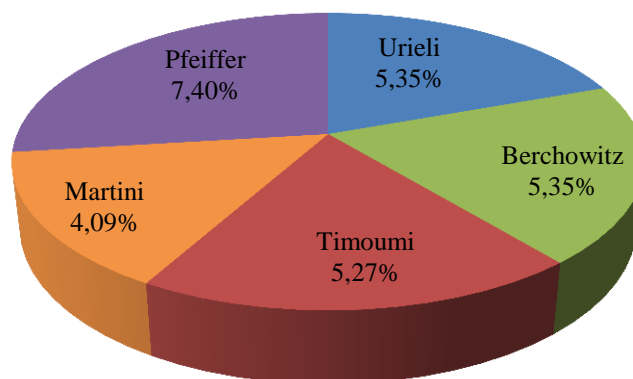
Στην ενότητα αυτή γίνεται σύγκριση των θερμικών απωλειών των μοντέλων των ερευνητών επί της ενδεικνυόμενης ισχύος βάσει ισοθερμοκρασιακού μοντέλου για την μηχανή του Kuhl :

Flow friction losses:



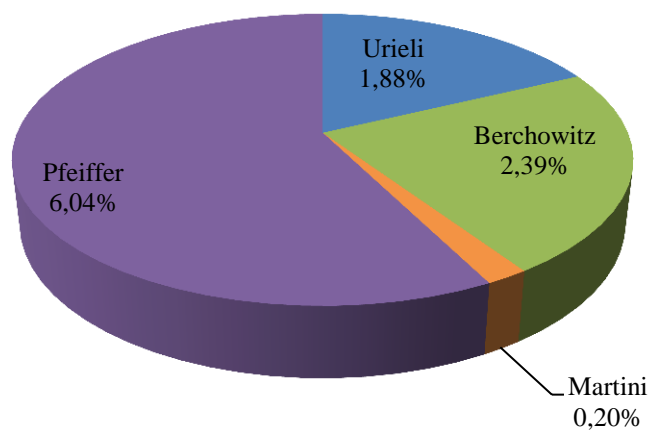
Σχήμα 4.11 : Γράφημα (πίτα) σύγκρισης ποσοστών απωλειών flow friction επί της ενδεικνυόμενης ισχύος βάσει ισοθερμοκρασιακού μοντέλου για την μηχανή του Kuhl.

Shuttle losses:



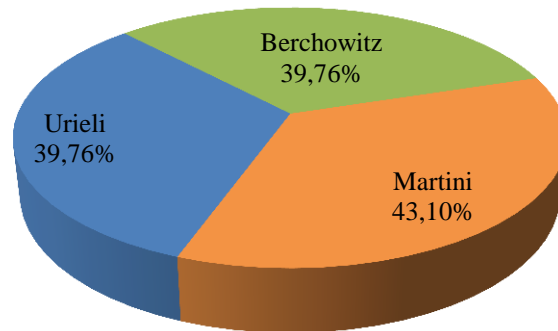
Σχήμα 4.12 : Γράφημα (πίτα) σύγκρισης ποσοστών απωλειών shuttle επί της ενδεικνυόμενης ισχύος βάσει ισοθερμοκρασιακού μοντέλου για την μηχανή του Kuhl.

Pumping losses:



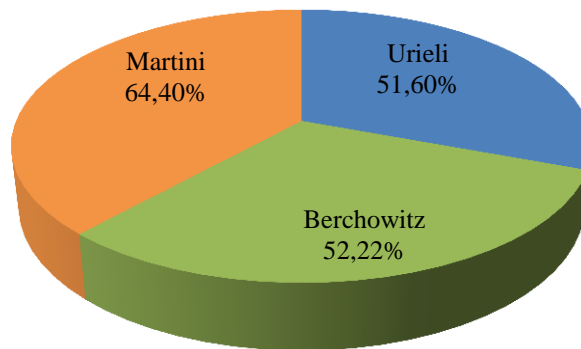
Σχήμα 4.13 : Γράφημα (πίτα) σύγκρισης ποσοστών απωλειών pumping επί της ενδεικνυόμενης ισχύος βάσει ισοθερμοκρασιακού μοντέλου για την μηχανή του Kuhl.

Conduction losses:

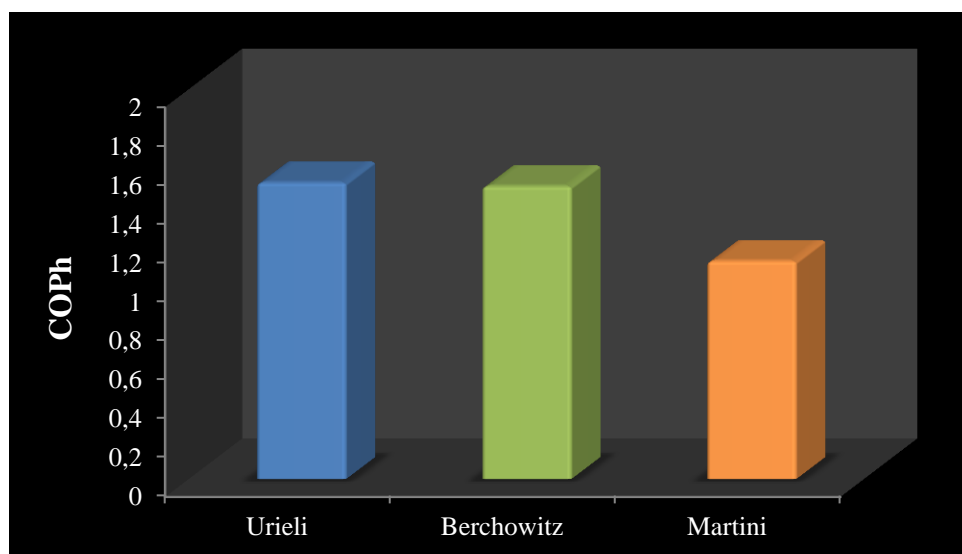


Σχήμα 4.14 : Γράφημα (πίτα) σύγκρισης ποσοστών απωλειών conduction επί της ενδεικνυόμενης ισχύος βάσει ισοθερμοκρασιακού μοντέλου για την μηχανή του Kuhl.

Total losses:



Σχήμα 4.15 : Γράφημα (πίτα) σύγκρισης συνολικών απωλειών επί της ενδεικνυόμενης ισχύος βάσει ισοθερμοκρασιακού μοντέλου για την μηχανή του Kuhl.



Σχήμα 4.16 : Γράφημα (ραβδόγραμμα) σύγκρισης COP για την μηχανή του Kuhl.

Παρατηρήσεις – συμπεράσματα:

1. Οι τιμές των Urieli, Berchowitx και Timoumi για τις flow friction losses είναι ίδιες καθώς οι σχέσεις που χρησιμοποιούν είναι ίδιες (σχήμα 4.11).
2. Οι τιμές των Urieli, Berchowitx για τις shuttle losses είναι ίδιες καθώς οι σχέσεις που χρησιμοποιούν είναι ίδιες. Η αντίστοιχη τιμή του Timoumi και του Martini είναι διαφορετική καθώς αντί για μόνο το μήκος εκτοπιστή πάνω από τη τσιμούχα χρησιμοποιούν όλο το μήκος του εκτοπιστή. Ακόμα ο Martini χρησιμοποιεί τη διάμετρο του κυλίνδρου ενώ ενσωματώνει στην τελική σχέση του έναν όρο ο οποίος σχετίζεται με τα μήκη κύματος των θερμοκρασιών στα τοιχώματα εκτοπιστή και κυλίνδρου (σχήμα 4.12).
3. Οι Urieli και Berchowitx αναφέρονται στο βιβλίο τους για τις conduction losses που αφορούν το αέριο μέσα στον εκτοπιστή, τα τοιχώματα εκτοπιστή, τα τοιχώματα κυλίνδρου και τα τοιχώματα αναγεννητή χωρίς να δίνουν συγκεκριμένες σχέσεις για κάθε μία. Αναφέρουν μόνο τη γενική εξίσωση του Fourier. Οι εξισώσεις για κάθε μία από αυτές δεν ήταν δύσκολο να σχηματιστεί. Οπότε μπήκαν στα μοντέλα τους και συμπίπτουν σχεδόν με τις αντίστοιχες που δίνει ο Martini (σχήμα 4.14). Στη σύγκριση αυτή δεν μπήκαν οι Timoumi και Pfeiffer διότι το μοντέλο του καθενός υπολογίζει μόνο ένα μέρος των conduction losses.
4. Ο Urieli δίνει σχέση για τις hysteresis losses που αφορούν μόνο το buffer space (χώρος αναπηδήσεων) σύμφωνα μ' αυτόν. Ο Timoumi όμως δίνει την ίδια σχέση και θεωρεί ότι ισχύει και για τα working spaces. Ο Berchowitx δίνει μια άλλη σχέση για τις hysteresis losses των working spaces που καταλήγει σε αμελητέες θα λέγαμε τιμές. Οι τιμές αυτές διαφέρουν κατά 99 % περίπου από του Timoumi.
5. Ο Timoumi όσον αφορά τις conduction losses δίνει μόνο σχέσεις που αφορούν τους θερμοεναλλάκτες. Λόγω όμως της σχεδόν σταθερής θερμοκρασίας στους θερμοαντήρες και στους ψύκτες οι απώλειες λόγω αγωγής θεωρούνται αμελητέες. Οι υπόλοιπες που αφορούν τους αναγεννητές προκύπτουν σχετικά μικρές. Τις reheat losses του Martini τις ονομάζει external conduction losses και δεν μπορούν να υπολογιστούν απ' ευθείας καθώς αφορούν κομμάτι 3<sup>ης</sup> τάξεως ανάλυσης. Ο Martini είναι ο μόνος που δίνει σχέση 2<sup>ης</sup> τάξης για αυτή την σημαντική απώλεια.
6. Το μοντέλο του Pfeiffer δίνει μόνο τρία είδη απωλειών, τις shuttle losses, τις pumping losses και τις conduction losses. Στις pumping losses έχει συμπεριλάβει τις seal losses των Urieli και Berchowitx.
7. Οι τιμές των shuttle losses για όλους τους ερευνητές εκτός του Pfeiffer, είναι πολύ κοντά μεταξύ τους (σχήμα 4.12).
8. Η τιμή των pumping losses του Martini είναι πάρα πολύ μικρή σε σχέση με των άλλων ερευνητών εκτός του Timoumi ο οποίος δεν τις αναφέρει στη μελέτη του (σχήμα 4.13).
9. Οι conduction losses του Pfeiffer αφορούν μόνο τα τοιχώματα των εκτοπιστών και των κυλίνδρων συμπίπτουν σχεδόν με των άλλων ερευνητών.
10. Πολύ μεγάλη διαφορά παρατηρείται στις flow friction του Martini σε σχέση με τους άλλους ερευνητές λόγω διαφορετικού τρόπου υπολογισμού των παροχών μάζας τους αερίου στους θερμοεναλλάκτες (σχήμα 4.11).
11. Οι συνολικές απώλειες του Urieli και του Berchowitx είναι λιγότερες (μεγαλύτερο COP) (σχήμα 4.16) από αυτές του Martini. Οι απώλειες του Martini είναι περισσότερες (σχήμα 4.15) απ' όλους τους άλλους ερευνητές εκτός απ' τον Pfeiffer και τον Timoumi οι οποίοι για λόγους προαναφερθέντες δεν μπήκαν στη σύγκριση.

12. Ο τρόπος υπολογισμού του  $COP_h$  για όλα τα μοντέλα είναι κοινός και προκύπτει απ' την εξής σχέση :

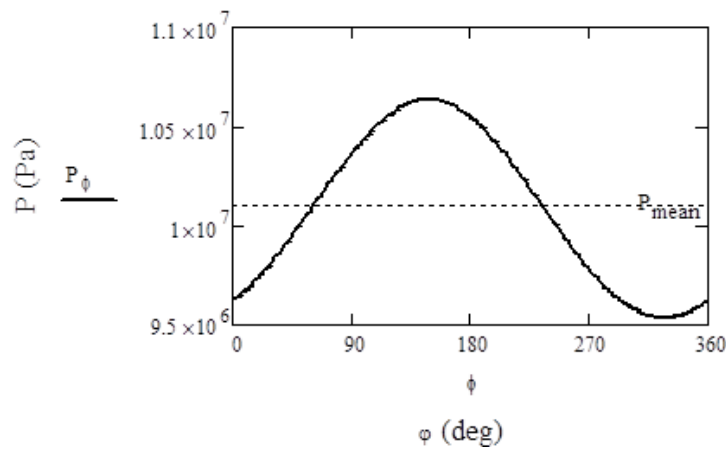
$$COP_h = \frac{Q_{ind} - Q_{losses}}{Q_e} \quad (4.1)$$

#### 4.5 Αποτελέσματα ιδανικού αδιαβατικού μοντέλου ανάλυσης

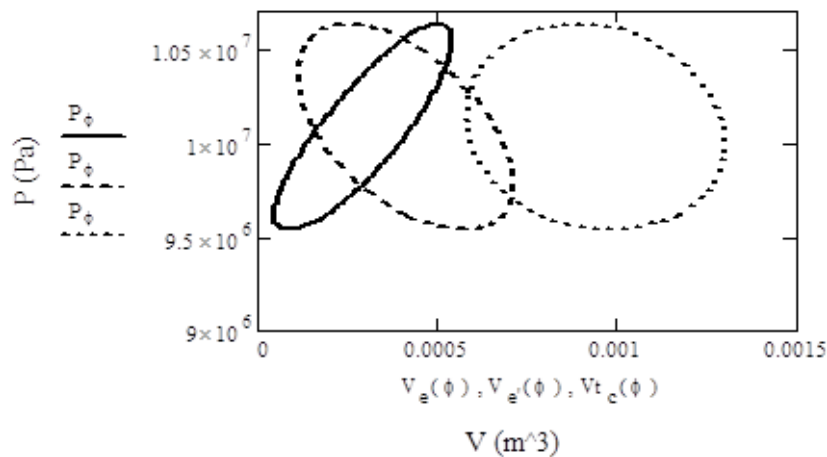
Το ιδανικό αδιαβατικό μοντέλο είναι ένα μοντέλο ανάλυσης 1<sup>ης</sup> τάξεως όπως και το ιδανικό ισοθερμοκρασιακό. Είναι πιο ρεαλιστικό καθώς οι εργαζόμενοι χώροι θεωρούνται αδιαβατικοί, κάτι που γενικά ισχύει στις πραγματικές μηχανές VM. Η θερμοκρασία του αερίου στους χώρους αυτούς έχει μία διακύμανση. Αυτό έρχεται σε αντιδιαστολή με το ισοθερμοκρασιακό μοντέλο, κατά το οποίο η θερμοκρασίες του αερίου θεωρούνται σταθερές. Επίσης η ενδεικνύμενη ισχύς είναι αρκετά μεγαλύτερη από εκείνη του ισοθερμοκρασιακού. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η πολυτροπικές μεταβολές του αερίου προκαλούν μεγαλύτερες μεταβολές της πίεσεως από εκείνες στο ισοθερμοκρασιακό (διαγράμματα p-V μεγαλύτερου εμβαδού). Οι θερμοεναλλάκτες θεωρούνται τέλειοι και στα δύο μοντέλα. Τα αποτελέσματα του ιδανικού αδιαβατικού μοντέλου για την μηχανή VM του Kuhl δίνονται παρακάτω:

Πίνακας 4.17 : Αποτελέσματα ιδανικού αδιαβατικού μοντέλου

Μέση πίεση εργαζόμενου αερίου $p_{mean}$ σε bar	$p_{mean} = 100,78 \text{ bar}$
Μέγιστη πίεση εργαζόμενου αερίου $p_{max}$ σε bar	$p_{max} = 106,4 \text{ bar}$
Ελάχιστη πίεση εργαζόμενου αερίου $p_{min}$ σε bar	$p_{min} = 95,38 \text{ bar}$
Προσφερόμενη θερμική ισχύς $\dot{Q}_e$ σε W	$\dot{Q}_e = 1505 \text{ W}$
Αποδιδόμενη (ενδεικνύμενη) θερμική ισχύς $\dot{Q}_{ind}$ σε W	$\dot{Q}_{ind} = 4099 \text{ W}$
Θερμικός συντελεστής συμπεριφοράς $COP_{th}$	$COP_{th} = 2,724$



Σχήμα 4.17 : Γράφημα πίεσης  $p$  του αερίου σε Pa συναρτήσει της γωνίας  $\phi$  του στροφάλου σε μοίρες.



Σχήμα 4.18 : Γράφημα πίεσης  $p$  του αερίου σε Pa συναρτήσει των όγκων  $V$  των εργαζόμενων χώρων συμπίεσης και εκτόνωσης σε  $m^3$ .

#### 4.5.1 Αποτελέσματα μοντέλου απωλειών του Berchowitz με βάση το αδιαβατικό μοντέλο

Το μοντέλο απωλειών που επιλέχθηκε για να εφαρμόσουμε το αδιαβατικό μοντέλο ανάλυσης είναι εκείνο του Berchowitz. Οι λόγοι είναι οι εξής:

α) Τα μοντέλα των Timoumi και του Pfeiffer ήταν ανεπαρκή για λόγους που προαναφέραμε.

β) Το μοντέλο απωλειών του Martini έχει ως βάση του το ισοθερμοκρασιακό μοντέλο και μόνο αυτό.

γ) Στο μοντέλο του Ugieli δεν υπήρξαν αρκετά στοιχεία ώστε να τεκμηριωθεί επαρκώς (βλ. πίνακα 4.10).

δ) Παρόλο που υπήρχαν αποκλίσεις στο μοντέλο του Berchowitz για την GPU – 3, εντούτοις οι σχέσεις του τεκμηριώθηκαν με άλλα μοντέλα καθώς στα περισσότερα απ' αυτά ήταν κοινές.

Οι απώλειες που πραγματεύεται το μοντέλο του Berchowitz είναι οι εξής:

1. Απώλειες λόγω πτώσης πίεσης αερίου στους θερμοεναλλάκτες - flow friction losses
2. Απώλειες λόγω τακτικής μεταφορά θερμότητας – shuttle losses
3. Απώλειες λόγω μεταφοράς ενθαλπίας του αερίου ή απώλειες άντλησης – pumping losses ή gas enthalpy transport losses

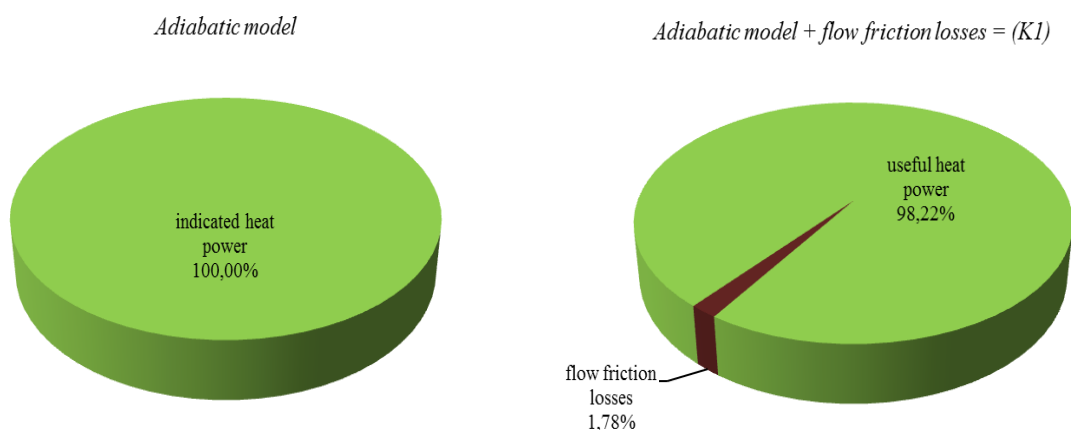
4. Απώλειες θερμοδυναμικού έργου στη σφράγιση – seal losses
5. Απώλειες λόγω αγωγής θερμότητας – conduction losses
6. Απώλειες λόγω υστέρησης αερίου – hysteresis losses

Τα αποτελέσματα του μοντέλου απωλειών του Berchowitz με βάση το αδιαβατικό μοντέλο συνοψίζονται στον παρακάτω πίνακα:

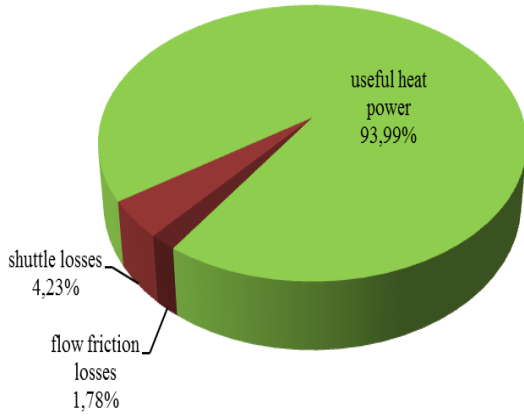
Πίνακας 4.18 : Αποτελέσματα μοντέλου απωλειών του Berchowitz με βάση το αδιαβατικό μοντέλο

Flow friction losses $\dot{Q}_{ffl}$ (W)	$\dot{Q}_{ffl} = 72,91$ W
Shuttle losses $\dot{Q}_{sh}$ (W)	$\dot{Q}_{sh} = 173,31$ W
Pumping losses or gas enthalpy transport losses $\dot{Q}_{pu}$ (W)	$\dot{Q}_{pu} = 82,626$ W
Seal losses $\dot{Q}_{seal}$ (W)	$\dot{Q}_{seal} = 83,151$ W
Conduction losses $\dot{Q}_{cond}$ (W)	$\dot{Q}_{cond} = 1286$ W
Hysteresis losses $\dot{Q}_{hys}$ (W)	$\dot{Q}_{hys} = 4,771$ W
Συνολικές απώλειες $\dot{Q}_{losses}$ (W)	$\dot{Q}_{losses} = 1703$ W
Ενδεικνύμενη θερμική ισχύς $\dot{Q}_{ind}$ (W)	$\dot{Q}_{ind} = 4099$ W
Ωφέλιμη θερμική ισχύς $\dot{Q}_u$ σε W	$\dot{Q}_u = 2396$ W
Θερμικός συντελεστής συμπεριφοράς $COP_h$	$COP_h = 1,592$

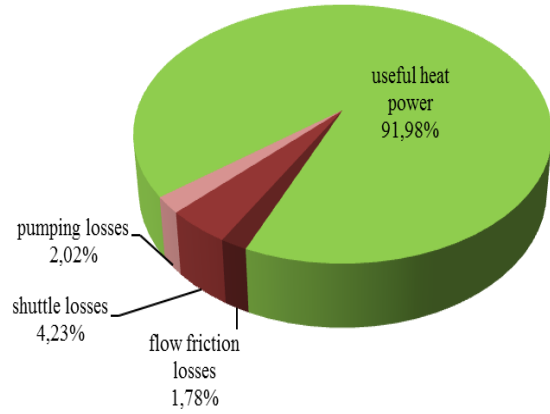
Πίνακας 4.19 : Γραφήματα (πίτες) με σταδιακή προσθήκη απωλειών του μοντέλου Berchowitz για την αντλία θερμότητας VM του Kuhl



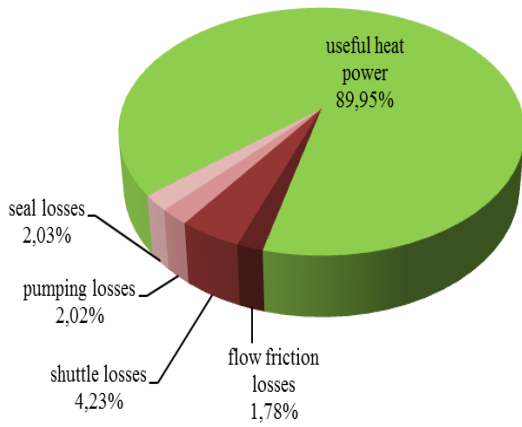
$(K1) + \text{shuttle losses} = (K2)$



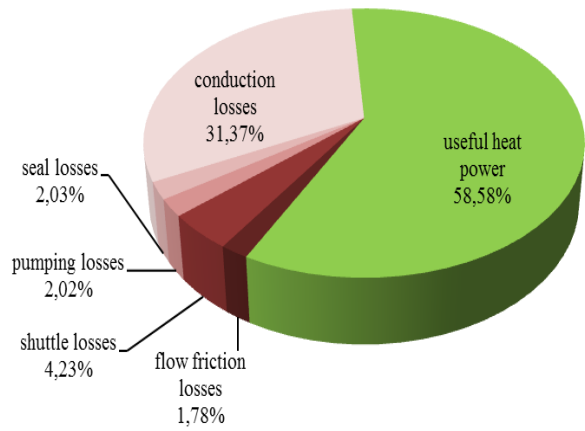
$(K2) + \text{pumping losses} = (K3)$



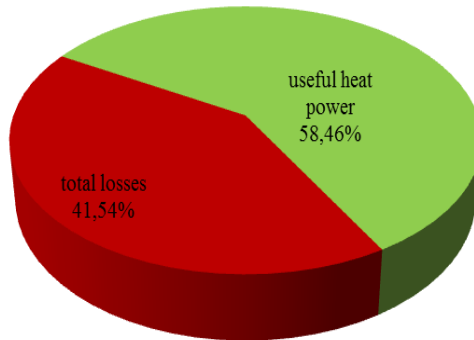
$(K3) + \text{seal losses} = (K4)$



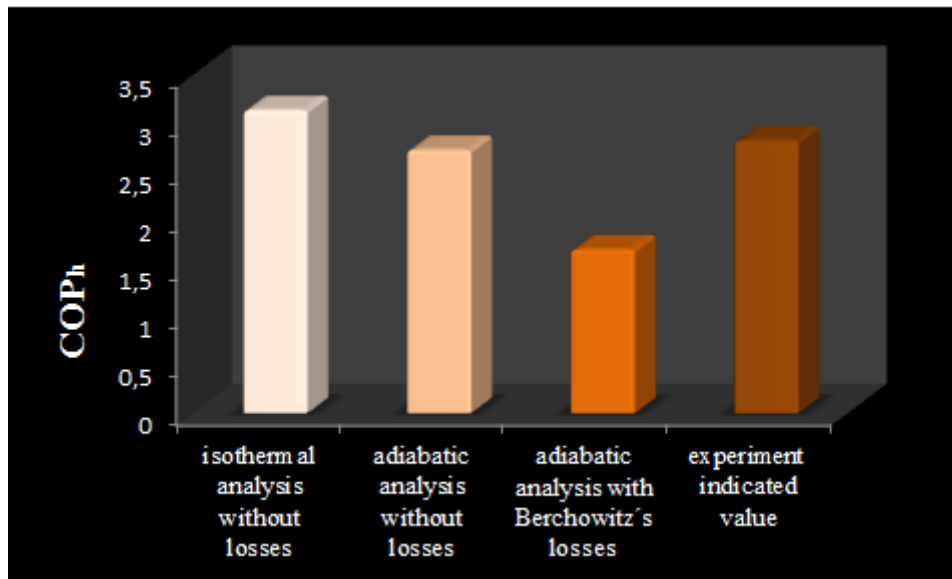
$(K4) + \text{conduction losses} = (K5)$



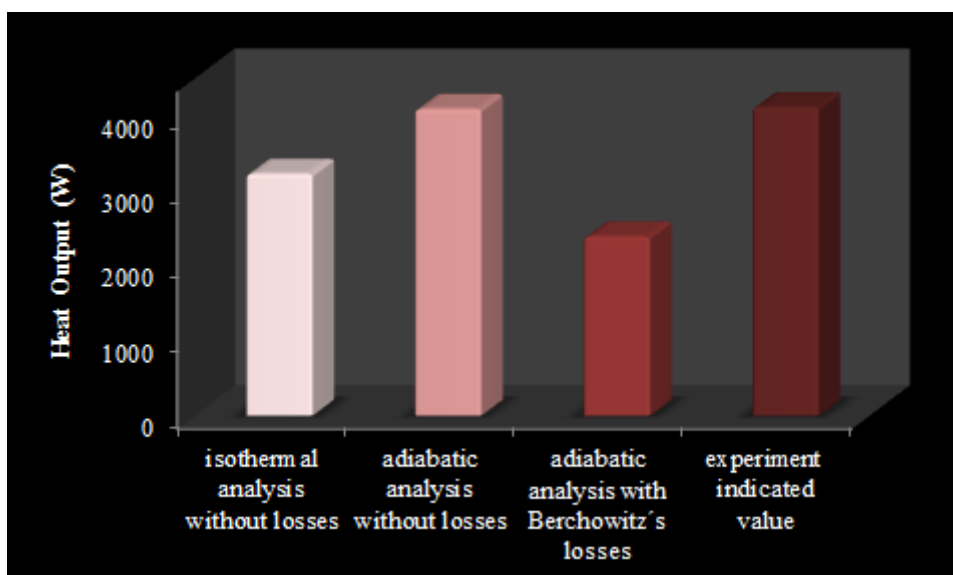
$(K5) + \text{hysteresis losses} = \text{model with total losses}$







Σχήμα 4.19 : Γράφημα (ραβδόγραμμα) σύγκρισης θερμικού συντελεστή συμπεριφοράς της μηχανής VM του Kuhl με το μοντέλο του Berchowitz.



Σχήμα 4.20 : Γράφημα (ραβδόγραμμα) σύγκρισης θερμικής ισχύος εξόδου της μηχανής VM του Kuhl με το μοντέλο του Berchowitz.

Παρατηρήσεις – συμπεράσματα:

1. Οι συνολικές απώλειες της μηχανής σύμφωνα με το μοντέλο του Berchowitz με βάση την αδιαβατική ανάλυση αυξάνονται σε σχέση με την ισοθερμική κατά 1% περίπου.
2. Οι flow friction losses μειώνονται κατά 10,64 % σε σχέση με εκείνες του ισοθερμικού μοντέλου.
3. Οι shuttle losses και οι conduction losses παραμένουν αμετάβλητες.
4. Οι pumping losses αυξάνονται κατά 6,37 % ενώ οι seal losses αυξάνονται κατά 19,36 % από τις αντίστοιχες στο ισοθερμοκρασιακό μοντέλο. Σ' αυτό οφείλεται η μεγαλύτερη διακύμανση της πίεσης, η οποία έχει σαν αποτέλεσμα την αύξηση της μέγιστης και την μείωση της ελάχιστης πίεσης.

5. Οι hysteresis losses αυξάνονται κατά 34,89 % για τον ίδιο λόγο.
6. Όπως είναι λογικό, η τιμή του  $COP_h$  βαίνει μειούμενη καθώς περνάμε απ' το ιδανικό ισοθερμοκρασιακό μοντέλο στο ιδανικό αδιαβατικό και τέλος στο αδιαβατικό με απώλειες (σχήμα 4.19).
7. Οι πειραματικές τιμές του  $COP_h$  και της ωφέλιμης ισχύος εξόδου (σχήματα 4.19 και 4.20) αποτελούν ενδεικνυόμενες τιμές.

## **ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ**

- [1] Δικτυακός τόπος [https://en.wikipedia.org/wiki/Vuilleumier\\_cycle](https://en.wikipedia.org/wiki/Vuilleumier_cycle)
- [2] Jaroslav Wurm, John A. Kinast, Thomas R. Roose, William R. Staats, “Stirling and Vuilleumier Heat Pumps – Design and Applications”, McGraw-Hill, Inc.
- [3] Yingbai Xie, Xuejie Sun, “Thermodynamic Analysis of a Waste Heat Driven Vuilleumier Cycle Heat Pump”, Department of Power Engineering, North China Electric Power University, Baoding 07100, China, March 2015.
- [4] G.Walker, J.R.Senft, “Free Piston Stirling Engines”, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, New York, Tokyo, 1985.
- [5] Kazuhiko KAWAJIRI, Tetsuya HONDA, Teruo SUGIMOTO, “Study of Free Piston Vuilleumier Heat Pump (Basic Performance Analysis)”, JSME International Journal, 1997.
- [6] Martini, W., “Stirling engine design manual”, NASA report, National Technical Information Services, US Department of Commerce, Spring Field, USA, 1978.
- [7] Urieli I. and Berchowicz D. , “Stirling Cycle Engine Analysis”, Adam Hilger Ltd., Bristol, 1984.
- [8] Δικτυακός τόπος <http://www.tm-lift.com/technology-innovation>
- [9] Henrik Carlsen, “RESULTS FROM 20 KW VUILLEUMIER HEAT PUMP TEST PROGRAM”, Laboratory for Energetics, The Technical University of Denmark, DK – 2800 Lyngby, Denmark, 1994.
- [10] Henrik Carlsen, “DEVELOPMENT OF A GAS FIRED VUILLEUMIER HEAT PUMP FOR RESIDENTIAL HEATING”, Laboratory for Energetics, The Technical University of Denmark, DK – 2800 Lyngby, 1989.
- [11] M.S. Crouthamel and B. Shelpuk, “A COMBUSTION – HEATED, THERMALLY ACTUATED VUILLEUMIER REFRIGERATOR”, RCA Corporation, Camden, New Jersey, 1972.
- [12] Δικτυακός τόπος [https://en.wikipedia.org/wiki/Thermographic\\_camera](https://en.wikipedia.org/wiki/Thermographic_camera)
- [13] H. Sekiya, K. Kobayashi, E. Fukuda, T. Susai and F.Terada, “RESEARCH AND DEVELOPMENT OF A 2.5 kW CLASS FREE – PISTON VUILLEUMIER CYCLE HEAT PUMP”, R/D Center, Air – Conditioning & Refrigeration Business Headquarters, SANYO Electric CO., LTD., Japan, 1995.
- [14] Berchowicz D., “Stirling Cycle Engine Design and Optimisation (Thesis)”, Athens, Ohio, August 1986.
- [15] Youssef Timoumi, Iskander Tlili, Sassi Ben Nasrallah, “Design and performance optimization of GPU-3 Stirling engines”, Laboratoire d’ Etudes des Systemes Thermiques et Energetiques, Ecole Nationale d’ Ingenieurs de Monastir, Rue Ibn El Jassar, 5019 Monastir, Tunisie, 2008.

- [16] Youssef Timoumi, Iskander Tlili, Sassi Ben Nasrallah, “Performance optimization of Stirling engines”, Laboratoire d’ Etudes des Systemes Thermiques et Energetiques, Ecole Nationale d’ Ingenieurs de Monastir, Rue Ibn El Jazzar, 5019 Monastir, Tunisie, 2008.
- [17] Jens Pfeiffer, Hans - Detlev Kuehl, “Optimization of the Appendix Gap Design in Stirling Engines”, TU Dortmund University, Lehrstuhl fur Thermodynamik, 13<sup>th</sup> International Energy Conversion Engineering Conference, July 27-31, 2015, Orlando, Florida.
- [18] Jens Pfeiffer, Hans - Detlev Kuehl, “Analytical Modeling of Appendix Gap Losses in Stirling Cycle Machines”, TU Dortmund University, Lehrstuhl fur Thermodynamik, Proceedings of 16<sup>th</sup> International Stirling Engine Conference – ISEC 2014, 24-26 September, Bilbao, Spain.
- [19] H. D. Kuhl, S. Schulz, “Measured Performance of an Experimental Vuilleumier Heat Pump in Comparison to 3<sup>rd</sup> Order Theory”, Department of Chemical Engineering, University of Dortmund, West Germany, Energy Conversion Engineering Conference, 1990, IECEC-90, Proceedings of the 25<sup>th</sup> Intersociety, Volume 5, Page(s) 436 – 441.
- [20] I. Geue, J. Pfeiffer, H. D. Kuhl, “Experimental Results of a Novel Laboratory – Scale Stirling – Vuilleumier Hybrid System”, Laboratory of Thermodynamics, Dortmund University of Technology, Dortmund, Germany, 44227, 9<sup>th</sup> Annual International Energy Conversion Engineering Conference, 31 July – 03 August 2011, San Diego, California.
- [21] Graham Walker, “Cryocoolers”, The University of Calgary, Calgary, Alberta, Canada, Springer Science + Business Media, LLC, 1983.
- [22] ΝΙΚΟΛΑΟΣ Α. ΜΠΟΡΜΠΙΛΙΑΣ, “ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΙΣ ΜΗΧΑΝΕΣ STIRLING”, ΑΘΗΝΑ, ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2005.
- [23] Ho-Myung Chang, Dae-Jong Park, Sangkwon Jeong, “Effect of gap flow on shuttle heat transfer”, Department of Mechanical Engineering, Hong Ik University, 72-1 Sangsu-Dong, Mapo-Ku, Seoul 121-791, South Korea, Korea Advanced Institute of Science and Technology, Taejon 305-701, South Korea, 2000.
- [24] F. N. Magee and R. D. Doering, “VUILLEUMIER CYCLE CRYOGENIC REFRIGERATOR DEVELOPMENT”, Hughes Aircraft Company, Research and Development Division, Culver City, California, TECHNICAL REPORT AFFDL-TR-68-67, AUGUST 1968.
- [25] F. X. Eder, “A thermally actuated heat pump”, 1981
- [26] Theodor Finkelstein and Allan J Organ, “Air Engines”, The American Society of Mechanical Engineers, New York, 2001.
- [27] Mounir B. Ibrahim, Roy C. Tew, Jr., “STIRLING CONVERTOR REGENERATORS”, 2012.
- [28] C. W. Browning, W. S. Miller, V. L. Potter, “75°K VUILLEUMIER CRYOGENIC REFRIGERATOR”, The Garrett Corporation, AiResearch Manufacturing Co., 2525 West 190<sup>th</sup> Street, Torrance, California, November 1972.

- [29] Jens Pfeiffer and Hans-Detlev Kuehl, “New Analytical Model for Appendix Gap Losses in Stirling Cycle Machines”, TU Dortmund University, Lehrstuhl für Thermodynamik, 12<sup>th</sup> International Energy Conversion Engineering Conference, July 28-30, 2014, Cleveland, Ohio.
- [30] Jens Pfeiffer and Hans-Detlev Kuehl, “Review of Models for Appendix Gap Losses in Stirling Cycle Machines”, Technische Universität Dortmund, 44227 Dortmund, Germany, Journal of Propulsion and Power, 2014.
- [31] R.G. Ross, Jr., “Aerospace Coolers: a 50-Year Quest for Long-life Cryogenic Cooling in Space”, Jet Propulsion Laboratory, California Institute of Technology, Pasadena, CA 91109, 2006.
- [32] ALLAN SHERMAN, “MATHEMATICAL ANALYSIS OF A VUILLEUMIER REFRIGERATOR”, GODDARD SPACE FLIGHT CENTER, GREENBELT, MARYLAND, MARCH 1971.
- [33] Ronald White, “VUILLEUMIER CYCLE CRYOGENIC REFRIGERATION”, Air Force Flight Dynamics Laboratory, Environmental Control Branch (FEE), Wright – Patterson Air Force Base, Ohio, 45433, APRIL 1976.

# ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

<p style="text-align: center;"><b>ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ VMK1</b> <b>ΜΗΧΑΝΗ ΤΟΥ KUHL (1990)</b> <b>VUILLEUMIER HEAT PUMP - ΙΣΟΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΑΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ</b></p>
--

Στο πρόγραμμα VMK1 θα εφαρμόσουμε το ιδανικό ισοθερμοκρασιακό μοντέλο ανάλυσης στην περίπτωση της Vuilleumier αντλίας θερμότητας του KUHL. Τα χαρακτηριστικά της μηχανής αυτής (λειτουργικά, γεωμετρικά και θερμοδυναμικά) ελήφθησαν από το "Measured Performance of an Experimental Vuilleumier Heat Pump in Comparison to 3rd Order Theory", Energy Conversion Engineering Conference, 1990, IECEC-90, Proceedings of the 25th Intersociety, volume 5.

Σύστημα μονάδων σε **S.I.**

## *Παράμετροι λειτουργίας (operating parameters)*

Εργαζόμενο αέριο (working gas) :	Ήλιο (He)
Σταθερά εργαζόμενου αερίου R σε J/kgK :	$\frac{R}{M} := 2080$
Ισεντροπική σταθερά αερίου $\gamma$ :	$\gamma := 1.67$
Μάζα εργαζόμενου αερίου M σε kg :	$M := 51.8 \cdot 10^{-3}$
Ειδική θερμοχωρητικότητα υπό σταθερή πίεση $c_p$ σε J/kgK :	$c_p := \frac{\gamma}{\gamma - 1} \cdot R$
Ειδική θερμοχωρητικότητα υπό σταθερό όγκο $c_v$ σε J/kgK :	$c_v := \frac{R}{\gamma - 1}$
Στροφές λειτουργίας μηχανής n σε rpm :	$n := 400$
Κυκλική συχνότητα λειτουργίας μηχανής $\omega$ σε rad/sec :	$\omega := \frac{\pi \cdot n}{30}$
Συχνότητα λειτουργίας μηχανής f σε Hz (cycles/sec) :	$f := \frac{\omega}{2 \cdot \pi}$
Γωνία περιστροφής στροφάλου $\theta$ σε μοίρες :	$\theta := 0..359$
Θερμοκρασία ζεστού θερμαντήρα $T_h$ σε K :	$T_h := 773$
Θερμοκρασία κρύου θερμαντήρα $T_{h'}$ σε K :	$T_{h'} := 273$
Θερμοκρασία ψύκτη ζεστού κυλίνδρου $T_k$ σε K :	$T_k := 313$

Θερμοκρασία ψύκτη κρύου κυλίνδρου  $T_k$  σε K :

$$T_k := 313$$

Ενεργός θερμοκρασία ζεστού αναγεννητή  $Tr$  σε K :

$$Tr := \frac{T_h - T_k}{\ln\left(\frac{T_h}{T_k}\right)} = 508.807$$

Ενεργός θερμοκρασία ζεστού αναγεννητή  $Tr'$  σε K :

$$Tr' := \frac{T_{k'} - T_{h'}}{\ln\left(\frac{T_{k'}}{T_{h'}}\right)} = 292.544$$

### **Στοιχεία μηχανισμού στροφάλου (crank mechanism)**

Διαδρομή κρύου εκτοπιστή  $S_e$  σε m :

$$S_e := 0.064$$

Διαδρομή ζεστού εκτοπιστή  $S_e$  σε m :

$$S_e := 0.064$$

Διαμετρος κρύου εκτοπιστή  $B_e$  ή  $D_d$  σε m :

$$B_e := 0.109$$

Διαμετρος ζεστού εκτοπιστή  $B_e$  ή  $D_d$  σε m :

$$B_e := 0.099$$

Διάφορα φάσης των δύο εκτοπιστών  $\phi$  σε μοίρες :

$$\phi := 90$$

Διάμετρος διωστήρα κρύου εκτοπιστή  $Drod_e$  σε m :

$$Drod_e := 0.030$$

Διάμετρος διωστήρα ζεστού εκτοπιστή  $Drod_e$  σε m :

$$Drod_e := 0.025$$

### **Στοιχεία θερμοεναλλακτών (heat exchangers)**

#### **Ζεστός Θερμαντήρας (σωληνοειδής κυκλικής διατομής)**

Αριθμός σωλήνων  $N_h$  :

$$N_h := 32$$

Μήκος σωλήνων  $L_h$  σε m:

$$L_h := 0.5$$

Εσωτερική διάμετρος σωλήνων  $Di_h$  σε m :

$$Di_h := 0.004$$

Ελεύθερη επιφάνεια ροής (free flow area)  $A_h$  σε  $m^2$ :

$$A_h := N_h \cdot \pi \cdot \frac{Di_h^2}{4} = 4.021 \times 10^{-4}$$

Όγκος ροής (void volume)  $V_h$  σε  $m^3$ :

$$V_h := A_h \cdot L_h = 2.011 \times 10^{-4}$$

**Κρύος Θερμαντήρας (σωληνοειδής κυκλικής διατομής)**

Αριθμός σωλήνων  $N_{h'}$  :

$$N_{h'} := 296$$

Μήκος σωλήνων  $L_{h'}$  σε m:

$$L_{h'} := 0.14$$

Εσωτερική διάμετρος σωλήνων  $Di_{h'}$  σε m :

$$Di_{h'} := 0.002$$

Ελεύθερη επιφάνεια ροής (free flow area)  $A_{h'}$  σε  $m^2$ :

$$A_{h'} := N_{h'} \cdot \pi \cdot \frac{Di_{h'}^2}{4} = 9.299 \times 10^{-4}$$

Όγκος ροής (void volume)  $V_{h'}$  σε  $m^3$ :

$$V_{h'} := A_{h'} \cdot L_{h'} = 1.302 \times 10^{-4}$$

**Ζεστός Αναγεννητής (τύπου wire screen)**

Αριθμός αναγεννητών ανά μονάδα ισχύος  $N_r$  :

$$N_r := 8$$

Μήκος μήτρας  $L_r$  σε m:

$$L_r := 0.1$$

Εσωτερική διάμετρος  $Di_r$  σε m:

$$Di_r := 0.05$$

Συντελεστής πορώδους  $\psi$  :

$$\psi := 0.493$$

Ελεύθερη επιφάνεια ροής (free flow area)  $A_r$  σε  $m^2$ :

$$A_r := N_r \cdot \psi \cdot \pi \cdot \frac{Di_r^2}{4} = 7.744 \times 10^{-3}$$

Όγκος ροής (void volume)  $V_r$  σε  $m^3$ :

$$V_r := A_r \cdot L_r = 7.744 \times 10^{-4}$$

**Κρύος Αναγεννητής (τύπου wire screen)**

Αριθμός μονάδων  $N_{r'}$  :

$$N_{r'} := 8$$

Μήκος μήτρας  $L_{r'}$  σε m:

$$L_{r'} := 0.042$$

Εσωτερική διάμετρος  $Di_{r'}$  σε m:

$$Di_{r'} := 0.068$$

Συντελεστής πορώδους  $\psi'$  :

$$\psi' := 0.493$$



Ελεύθερη επιφάνεια ροής (free flow area)  $A_{r'}$  σε  $m^2$ :  $A_{r'} := N_{r'} \cdot \psi' \cdot \pi \cdot \frac{Di_{r'}^2}{4} = 0.014$

Όγκος ροής (void volume)  $V_{r'}$  σε  $m^3$ :  $V_{r'} := A_{r'} \cdot L_{r'} = 6.016 \times 10^{-4}$

**Ψύκτης ζεστού κυλίνδρου (σωληνοειδής κυκλικής διατομής)**

Αριθμός σωλήνων  $N_k$  :  $N_k := 248$

Μήκος σωλήνων  $L_k$  σε  $m$ :  $L_k := 0.186$

Εσωτερική διάμετρος σωλήνων  $Di_k$  σε  $m$  :  $Di_k := 0.002$

Ελεύθερη επιφάνεια ροής (free flow area)  $A_k$  σε  $m^2$ :  $A_k := N_k \cdot \pi \cdot \frac{Di_k^2}{4} = 7.791 \times 10^{-4}$

Όγκος ροής (void volume)  $V_k$  σε  $m^3$ :  $V_k := A_k \cdot L_k = 1.449 \times 10^{-4}$

**Ψύκτης κρύου κυλίνδρου (σωληνοειδής κυκλικής διατομής)**

Αριθμός σωλήνων  $N_{k'}$  :  $N_{k'} := 296$

Μήκος σωλήνων  $L_{k'}$  σε  $m$ :  $L_{k'} := 0.14$

Εσωτερική διάμετρος σωλήνων  $Di_{k'}$  σε  $m$  :  $Di_{k'} := 0.002$

Ελεύθερη επιφάνεια ροής (free flow area)  $A_{k'}$  σε  $m^2$ :  $A_{k'} := N_{k'} \cdot \pi \cdot \frac{Di_{k'}^2}{4} = 9.299 \times 10^{-4}$

Όγκος ροής (void volume)  $V_{k'}$  σε  $m^3$ :  $V_{k'} := A_{k'} \cdot L_{k'} = 1.302 \times 10^{-4}$

**Στοιχεία κυλίνδρων μηχανής (hot, cold and warm cylinders)**

**Ζεστός κύλινδρος (κύλινδρος εκτόνωσης)**

Νεκρός όγκος κυλίνδρου  $Vd_e$  σε  $m^3$ :  $Vd_e := 14.7 \cdot 10^{-6}$

Πλάτος διακένου μεταξύ κυλίνδρου και εκτοπιστή  $gw_e$  σε  $m$  :  $gw_e := 0.5 \cdot 10^{-3}$

Μήκος διακένου μέχρι τη τσιμούχα (σφράγιση)  $lg_e$  σε  $m$  :  $lg_e := 0.2$

Όγκος διακένου μέχρι τη τσιμούχα  $Vgap_e$  σε  $m^3$  :

$$V_{gap_e} := l_{g_e} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \left[ (B_e + 2 \cdot gw_e)^2 - B_e^2 \right] = 3.126 \times 10^{-5}$$

**Κρύος κύλινδρος (κύλινδρος εκτόνωσης)**

Νεκρός όγκος κυλίνδρου  $V_{d_e}$  σε  $m^3$ :  $V_{d_e} := 110 \cdot 10^{-6}$

Πλάτος διακένου μεταξύ κυλίνδρου και εκτοπιστή  $gw_e$  σε  $m$  :  $gw_e := 0.5 \cdot 10^{-3}$

Μήκος διακένου μέχρι τη τσιμούχα (σφράγιση)  $lg_e$  σε  $m$  :  $lg_e := 0.01$

Όγκος διακένου μέχρι τη τσιμούχα  $V_{gap_e}$  σε  $m^3$  :

$$V_{gap_e} := l_{g_e} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \left[ (B_e + 2 \cdot gw_e)^2 - B_e^2 \right] = 1.72 \times 10^{-6}$$

**Ζεστός κύλινδρος (κύλινδρος συμπίεσης)**

Νεκρός όγκος κυλίνδρου  $V_{d_c}$  σε  $m^3$ :  $V_{d_c} := 257.1 \cdot 10^{-6}$

Πλάτος διακένου μεταξύ κυλίνδρου και εκτοπιστή  $gw_c$  σε  $m$  :  $gw_c := 0.5 \cdot 10^{-3}$

Μήκος διακένου μέχρι τη τσιμούχα (σφράγιση)  $lg_c$  σε  $m$  :  $lg_c := 0.007$

Όγκος διακένου μέχρι τη τσιμούχα  $V_{gap_c}$  σε  $m^3$  :

$$V_{gap_c} := l_{g_c} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \left[ (B_e + 2 \cdot gw_c)^2 - B_e^2 \right] = 1.094 \times 10^{-6}$$

**Κρύος κύλινδρος (κύλινδρος συμπίεσης)**

Νεκρός όγκος κυλίνδρου  $V_{d_c}$  σε  $m^3$ :  $V_{d_c} := 103.1 \cdot 10^{-6}$

Πλάτος διακένου μεταξύ κυλίνδρου και εκτοπιστή  $gw_c$  σε  $m$  :  $gw_c := 0.5 \cdot 10^{-3}$

Μήκος διακένου μέχρι τη τσιμούχα (σφράγιση)  $lg_c$  σε  $m$  :  $lg_c := 0.227$

Όγκος διακένου μέχρι τη τσιμούχα  $V_{gap_c}$  σε  $m^3$  :

$$V_{gap_c} := l_{g_c} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \left[ (B_e + 2 \cdot gw_c)^2 - B_e^2 \right] = 3.904 \times 10^{-5}$$

**Νεκροί όγκοι χώρων συνδεσης (connecting ducts) μεταξύ των διαφόρων μερών**

Νεκρός όγκος μεταξύ κρύου θερμαντήρα και κρύου αναγεννητή  $V_{r'h}$  σε  $m^3$  :  $V_{r'h} := 64.7 \cdot 10^{-6}$

Νεκρός όγκος μεταξύ κρύου αναγεννητή και κρύου ψύκτη  $V_{rk}$  σε  $m^3$  :  $V_{rk} := 61.4 \cdot 10^{-6}$

Νεκρός όγκος μεταξύ χώρων συμπίεσης  $V_m$  σε  $m^3$  :  $V_m := 32 \cdot 10^{-6}$

Νεκρός όγκος μεταξύ ζεστού ψύκτη και ζεστού αναγεννητή  $V_{rk}$  σε  $m^3$  :  $V_{rk} := 48.3 \cdot 10^{-6}$

Νεκρός όγκος μεταξύ ζεστού αναγεννητή και ζεστού θερμοαντάρα  $V_{rh}$  σε  $m^3$  :  $V_{rh} := 40 \cdot 10^{-6}$

Συνολικός νεκρός όγκος αριστερά και δεξιά του ζεστού αναγεννητή  $V_{cnst}$  σε  $m^3$  :

$$V_{cnst} := V_{rh} + V_{rk} = 8.83 \times 10^{-5}$$

Συνολικός νεκρός όγκος αριστερά και δεξιά του κρύου αναγεννητή  $V_{cnst'}$  σε  $m^3$  :

$$V_{cnst'} := V_{rh'} + V_{rk'} = 1.261 \times 10^{-4}$$

#### **Μεταβαλλόμενοι όγκοι των εργαζόμενων χώρων (working spaces)**

Νεκρός όγκος ζεστού χώρου εκτόνωσης  $V_{cle}$  σε  $m^3$  :  $V_{cle} := V_{d_e} + V_{gap_e} = 4.596 \times 10^{-5}$

Νεκρός όγκος κρύου χώρου εκτόνωσης  $V_{cle'}$  σε  $m^3$  :  $V_{cle'} := V_{d_{e'}} + V_{gap_{e'}} = 1.117 \times 10^{-4}$

Νεκρός όγκος ζεστού χώρου συμπίεσης  $V_{clc}$  σε  $m^3$  :  $V_{clc} := V_{d_c} + V_{gap_c} + \frac{V_m}{2} = 2.742 \times 10^{-4}$

Νεκρός όγκος κρύου χώρου συμπίεσης  $V_{clc'}$  σε  $m^3$  :  $V_{clc'} := V_{d_{c'}} + V_{gap_{c'}} + \frac{V_m}{2} = 1.581 \times 10^{-4}$

Όγκος εμβολισμού ζεστού χώρου εκτόνωσης  $V_{swe}$  σε  $m^3$  :  $V_{swe} := S_e \cdot \frac{\pi}{4} \cdot B_e^2 = 4.927 \times 10^{-4}$

Όγκος εμβολισμού κρύου χώρου εκτόνωσης  $V_{swe'}$  σε  $m^3$  :  $V_{swe'} := S_{e'} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot B_{e'}^2 = 5.972 \times 10^{-4}$

Όγκος εμβολισμού ζεστού χώρου συμπίεσης  $V_{swc}$  σε  $m^3$  :

$$V_{swc} := S_e \cdot \frac{\pi}{4} \cdot (B_e^2 - D_{rod_e}^2) = 4.612 \times 10^{-4}$$

Όγκος εμβολισμού κρύου χώρου συμπίεσης  $V_{swc'}$  σε  $m^3$  :

$$V_{swc'} := S_e' \cdot \frac{\pi}{4} \cdot (B_{e'}^2 - D_{rod_{e'}}^2) = 5.52 \times 10^{-4}$$

Εξίσωση μεταβολής του όγκου του ζεστού χώρου συμπίεσης :

$$V_c(\theta) := V_{clc} + \frac{V_{swc}}{2} \cdot (1 + \cos(\theta \cdot \text{deg}))$$

Εξίσωση μεταβολής του όγκου του κρύου χώρου συμπίεσης :

$$V_{c'}(\theta) := V_{clc'} + \frac{V_{swc'}}{2} \cdot [1 + \cos[(\theta - 90) \cdot \text{deg}]]$$

Εξίσωση μεταβολής του όγκου του ζεστού χώρου εκτόνωσης :

$$V_e(\theta) := V_{cle} + \frac{V_{swe}}{2} \cdot (1 - \cos(\theta \cdot \text{deg}))$$

Εξίσωση μεταβολής του όγκου του κρύου χώρου εκτόνωσης :

$$V_{e'}(\theta) := V_{cle'} + \frac{V_{swe'}}{2} \cdot [1 - \cos[(\theta - 90) \cdot \text{deg}]]$$

Ολικός όγκος ροής μηχανής:

$$V_t(\theta) := V_c(\theta) + V_e(\theta) + V_k + V_r + V_h + V_{c'}(\theta) + V_{e'}(\theta) + V_{k'} + V_{r'} + V_{h'} + V_{cnst} + V_{cnst'}$$

### **ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΙΣΟΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΑΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ**

Μεταβολή της πίεσης του αερίου συναρτήσει της γωνίας  $\theta$  (έχει θεωρηθεί ότι η πίεση  $p$  έχει την ίδια τιμή μιά δοσμένη χρονική στιγμή σε όλη την έκταση της μηχανής, **δηλαδή δεν υπάρχει πτώση πίεσης**). Επίσης έχει γίνει η υπόθεση ότι οι θερμοκρασίες των συνδετικών χώρων αριστερά και δεξιά των αναγεννητών αντιστοιχούν στις θερμοκρασίες των εκατέρωθεν θερμαντήρων και ψυκτών.

Όγκος ροής  $V_H(\theta)$  θερμού χώρου της μηχανής:

$$V_H(\theta) := V_e(\theta) + V_h + V_{rh}$$

Όγκος ροής  $V_{TC}(\theta)$  μέσης θερμοκρασίας χώρου της μηχανής:

$$V_{TC}(\theta) := V_{c'}(\theta) + V_c(\theta) + V_k + V_{k'} + V_{rk} + V_{r'k'}$$

Όγκος ροής  $V_{H'}(\theta)$  κρύου χώρου της μηχανής:

$$V_{H'}(\theta) := V_{e'}(\theta) + V_{h'} + V_{r'h'}$$

Πίεση συναρτήσει της γωνία  $\theta$  :

$$p(\theta) := \frac{M \cdot R}{\frac{V_H(\theta)}{T_h} + \frac{V_r}{T_r} + \frac{V_{TC}(\theta)}{T_k} + \frac{V_{r'}}{T_{r'}} + \frac{V_{H'}(\theta)}{T_{h'}}$$

Η μέση πίεση του εργαζόμενου μέσου δίνεται απλά από τη μέση τιμή του αθροίσματος της κάθε τιμής της πίεσης που βρήκαμε από τον προηγούμενο τύπο για κάθε τιμή της γωνίας  $\theta$ .

$$P_{\text{mean}} := \frac{\sum_{\theta=0}^{359} p(\theta)}{360} \quad P_{\text{mean}} = 1.007 \times 10^7$$

Για το ισοθερμοκρασιακό μοντέλο μηχανής η θερμότητα και το έργο κατά τις συμπίεση είναι ίσα και δίνονται από τη σχέση:

$$W_c(\theta) := \int_0^\theta p(\theta) \cdot \frac{d}{d\theta} V_c(\theta) d\theta$$

$$Q_c(\theta) := W_c(\theta)$$

$$W_{c'}(\theta) := \int_0^\theta p(\theta) \cdot \frac{d}{d\theta} V_{c'}(\theta) d\theta$$

$$Q_{c'}(\theta) := W_{c'}(\theta)$$

Επίσης για το ισοθερμοκρασιακό μοντέλο μηχανής, η θερμότητα και το έργο κατά τη εκτόνωση είναι ίσα και δίνονται από τη σχέση:

$$W_e(\theta) := \int_0^\theta p(\theta) \cdot \frac{d}{d\theta} V_e(\theta) d\theta$$

$$Q_e(\theta) := W_e(\theta)$$

$$W_{e'}(\theta) := \int_0^\theta p(\theta) \cdot \frac{d}{d\theta} V_{e'}(\theta) d\theta$$

$$Q_{e'}(\theta) := W_{e'}(\theta)$$

Η παραγόμενη θερμική ενέργεια είναι:

$$Q(\theta) := |Q_c(\theta) + Q_{c'}(\theta)|$$

Η θεωρητικά παραγόμενη ωφέλιμη θερμική ισχύς  $Q_{\text{ind}}$  (σε W) δίνεται από τη σχέση:

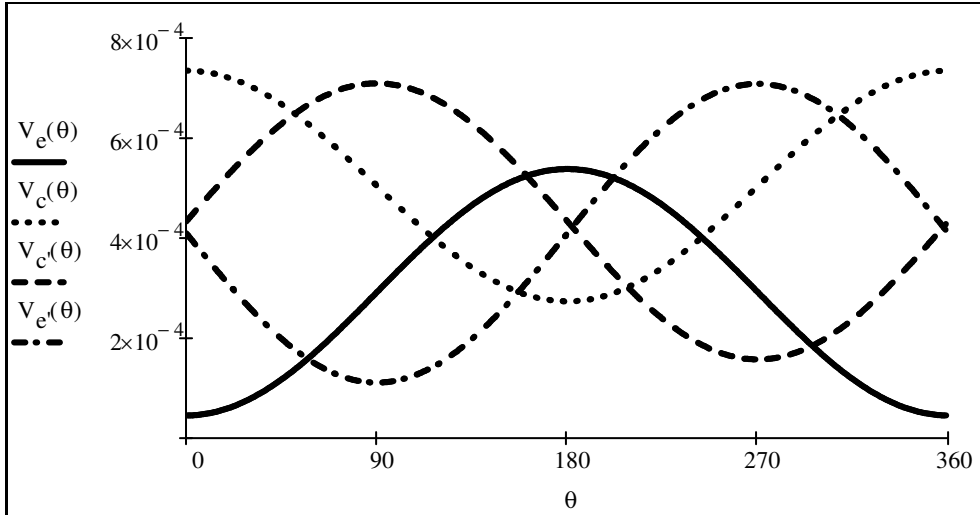
$$Q_{\text{ind}} := Q(360) \cdot f \quad Q_{\text{ind}} = 3.234 \times 10^3$$

Ο θερμικός συντελεστής συμπεριφοράς  $\text{COP}_{\text{th}}$  της αντλίας θερμότητας είναι:

$$\text{COP}_{\text{th}} := \frac{Q(360)}{Q_e(360)} \quad \text{COP}_{\text{th}} = 3.146$$

### Διαγράμματα

Διάγραμμα όγκων εργαζόμενων χώρων ( $m^3$ ) ως προς τη γωνία  $\theta$  (deg).

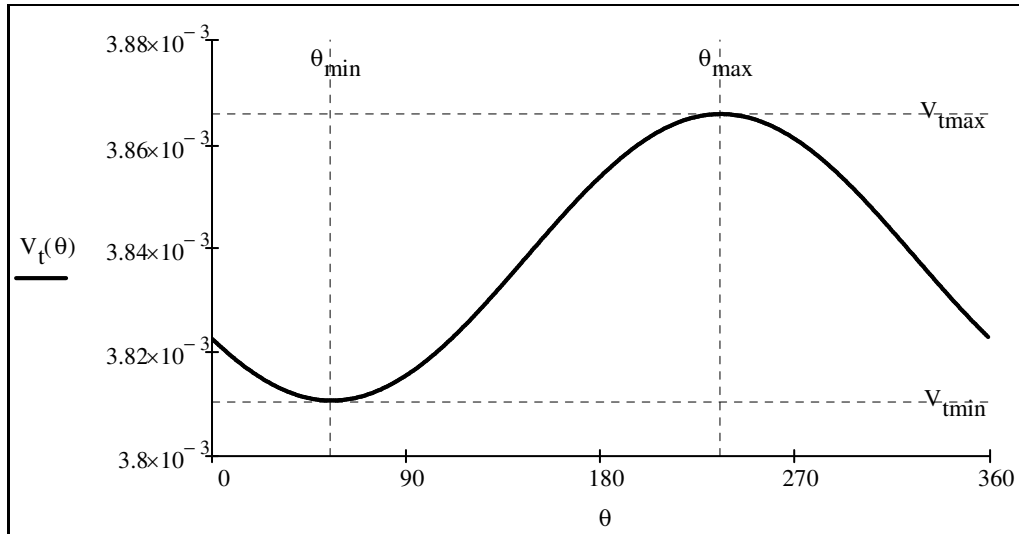


Διάγραμμα συνολικού όγκου της μηχανής  $V_t$  ( $m^3$ ) ως προς τη γωνία  $\theta$  (deg).

$$V_t'(\theta) := \frac{d}{d\theta} V_t(\theta)$$

$$\theta_{\max} := \text{root}(V_t'(\theta), \theta, 100, 350) \quad V_{t\max} := V_t(\theta_{\max}) \quad \theta_{\max} = 235.222 \quad V_{t\max} = 3.86582 \times 10^{-3}$$

$$\theta_{\min} := \text{root}(V_t'(\theta), \theta, 0, 100) \quad V_{t\min} := V_t(\theta_{\min}) \quad \theta_{\min} = 55.223 \quad V_{t\min} = 3.81074 \times 10^{-3}$$



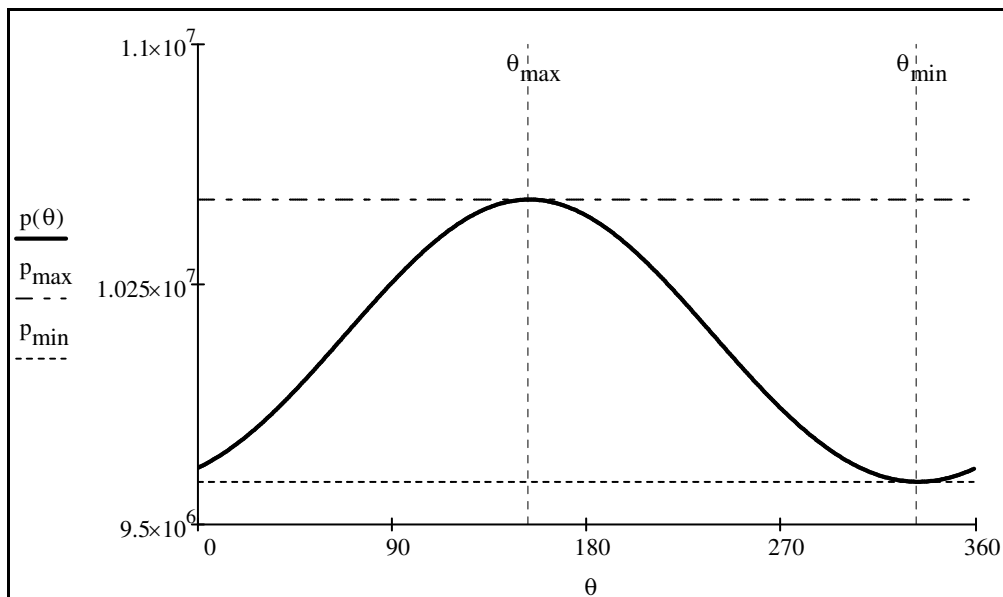
Διάγραμμα πίεσης  $p$  (Pa) ως προς τη γωνία  $\theta$  (deg).

$$p(\theta) := \frac{M \cdot R}{\frac{VH(\theta)}{T_h} + \frac{V_r}{T_r} + \frac{VTC(\theta)}{T_k} + \frac{V_{r'}}{T_{r'}} + \frac{VH'(\theta)}{T_{h'}}$$

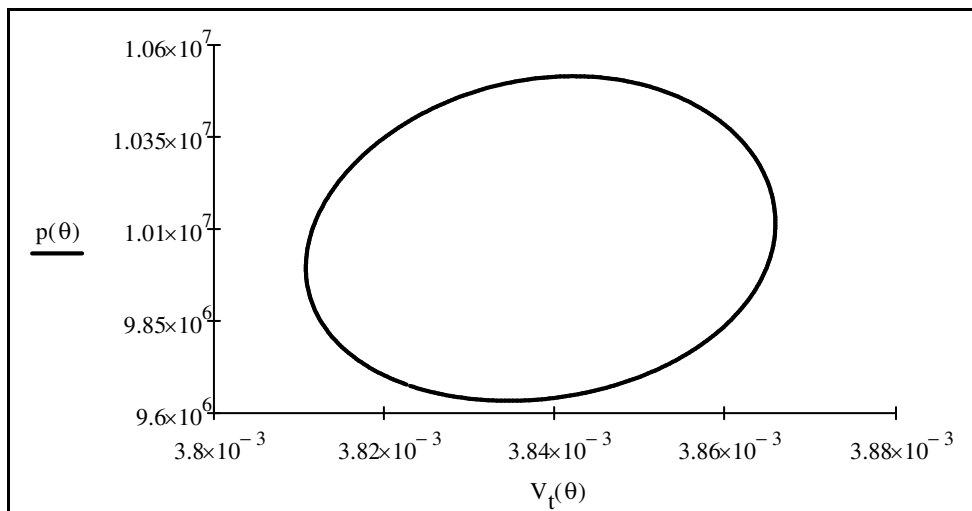
$$p'(\theta) := \frac{d}{d\theta} p(\theta)$$

$$\theta_{\max} := \text{root}(p'(\theta), \theta, 0, 180) \quad p_{\max} := p(\theta_{\max}) \quad \theta_{\max} = 153.109 \quad p_{\max} = 1.05161 \times 10^7$$

$$\theta_{\min} := \text{root}(p'(\theta), \theta, 180, 360) \quad p_{\min} := p(\theta_{\min}) \quad \theta_{\min} = 333.109 \quad p_{\min} = 9.6344 \times 10^6$$



Διάγραμμα πίεσης  $p$  (Pa) ως προς το συνολικό όγκο  $V$  ( $m^3$ )



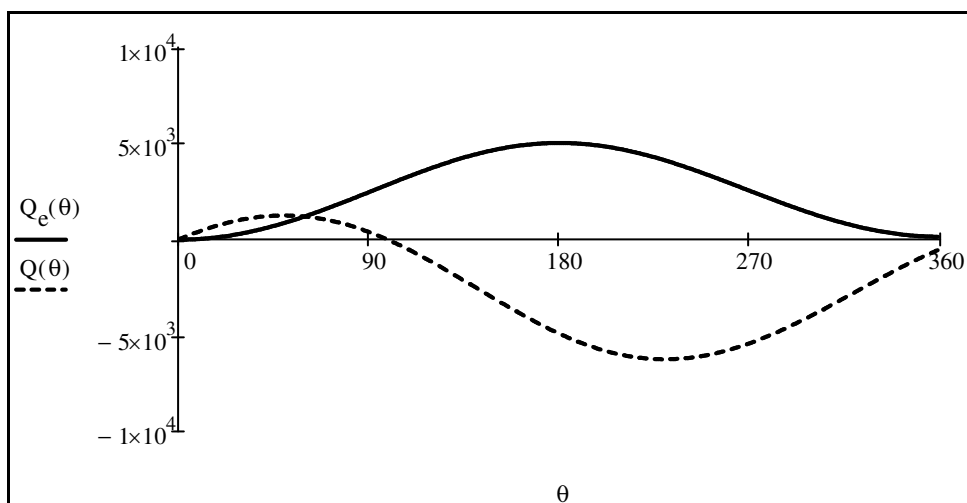
Διάγραμμα Ενεργειών  $Q_e$  (J),  $Q$  (J) ως προς τη γωνία  $\theta$  (deg).

Η προσφερόμενη θερμότητα είναι:

$$Q_{\text{in}}(\theta) := \int_0^\theta p(\theta) \cdot \frac{d}{d\theta} V_e(\theta) d\theta$$

Η ωφέλιμη θερμότητα είναι:

$$Q(\theta) := \int_0^\theta p(\theta) \cdot \left( \frac{d}{d\theta} V_c(\theta) + \frac{d}{d\theta} V_{c'}(\theta) \right) d\theta$$





*Αποτελέσματα ιδανικού ισοθερμοκρασιακού μοντέλου*

1. Η παραγόμενη (ενδεικνύμενη) θερμική ισχύς  $Q_{\text{ind}}$  (σε W) :  $Q_{\text{ind}} = 3.234 \times 10^3$
2. Ο θερμικός συντελεστής συμπεριφοράς  $\text{COP}_{\text{th}}$  :  $\text{COP}_{\text{th}} = 3.146$
3. Μέση πίεση εργαζόμενου μέσου  $p_{\text{mean}}$  (σε Pa) :  $p_{\text{mean}} = 1.007 \times 10^7$
4. Μέγιστη πίεση εργαζόμενου μέσου  $p_{\text{max}}$  (σε Pa) :  $p_{\text{max}} = 1.052 \times 10^7$
5. Ελάχιστη πίεση εργαζόμενου μέσου  $p_{\text{min}}$  (σε Pa) :  $p_{\text{min}} = 9.634 \times 10^6$

**ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ VMK2**  
**ΜΗΧΑΝΗ ΤΟΥ KUHL (1990)**  
**VUILLEUMIER HEAT PUMP - ΜΟΝΤΕΛΟ ΑΠΩΛΕΙΩΝ I.URIELI**

Στο πρόγραμμα VMK2 εφαρμόζεται το μοντέλο απωλειών του I.Urieli στην περίπτωση της Vuilleumier αντλίας θερμότητας του KUHL. Οι εξισώσεις αυτές αναφέρονται στο " Stirling Engine Cycle Analysis ", Urieli I. and Berchowitz D., Adam Hilger Ltd, Bristol, 1984. Για την επίλυση των σχέσεων αυτών ήταν απαραίτητο να παρθούν αποτελέσματα απ' το ισοθερμοκρασιακό μοντέλο ανάλυσης που εφαρμόστηκε στο πρόγραμμα VMK1. Σύστημα μονάδων σε **S.I.**

***Παράμετροι λειτουργίας (operating parameters)***

Εργαζόμενο αέριο (working gas) : Ήλιο (He)

***Στοιχεία μηχανισμού στροφάλου (crank mechanism)***

Πλάτος ταλάντωσης κρύου εκτοπιστή  $X_d$  σε m :  $X_d := 0.032$

Πλάτος ταλάντωσης ζεστού εκτοπιστή  $X_{d'}$  σε m :  $X_{d'} := 0.032$

Διαμετρος κρύου εκτοπιστή  $D_d$  σε m :  $D_d := 0.109$

Διάμετρος ζεστού εκτοπιστή  $D_{d'}$  σε m :  $D_{d'} := 0.099$

Μήκος ζεστού εκτοπιστή  $L_d$  σε m :  $L_d := 0.207$

Μήκος κρύου εκτοπιστή  $L_{d'}$  σε m :  $L_{d'} := 0.237$

Ειδική θερμική αγωγιμότητα ζεστού εκτοπιστή  $k_d$  σε Wm/K :  $k_d := 20$

Ειδική θερμική αγωγιμότητα κρύου εκτοπιστή  $k_{d'}$  σε Wm/K :  $k_{d'} := 16$

Θερμοκρασιακή αγωγιμότητα ζεστού εκτοπιστή  $\alpha_d$  σε  $m^2/sec$  :  $\alpha_d := 5.405 \times 10^{-6}$

Θερμοκρασιακή αγωγιμότητα κρύου εκτοπιστή  $\alpha_{d'}$  σε  $m^2/sec$  :  $\alpha_{d'} := 4.054 \times 10^{-6}$

***Ιδιότητες αερίου στα διάφορα μέρη της μηχανής***

Ειδική θερμική αγωγιμότητα αερίου  $k_g (T_r)$  σε W/mK:  $k_g := 0.2237$

Ειδική θερμική αγωγιμότητα αερίου  $k_{g'} (T_r)$  σε W/mK:  $k_{g'} := 0.1529$

### **Στοιχεία αναγεννητών**

#### **Ζεστός Αναγεννητής (τύπου wire screen)**

Διάμετρος σύρματος (wire diameter)  $D_{\text{wire}}$  σε m :  $D_{\text{wire}} := 0.00028$

Υδραυλική διάμετρος (hydraulic diameter)  $D_r$  σε m :  $D_r := D_{\text{wire}} \cdot \frac{\psi}{1 - \psi} = 2.723 \times 10^{-4}$

#### **Κρύος Αναγεννητής (τύπου wire screen)**

Διάμετρος σύρματος (mesh wire diameter)  $D_{\text{wire}'}$  σε m :  $D_{\text{wire}'} := 0.00028$

Υδραυλική διάμετρος (hydraulic diameter)  $D_r'$  σε m :  $D_r' := D_{\text{wire}'} \cdot \frac{\psi'}{1 - \psi'} = 2.723 \times 10^{-4}$

### **Στοιχεία κυλίνδρων μηχανής (hot, cold and warm cylinders)**

#### **Ζεστός κύλινδρος (κύλινδρος εκτόνωσης)**

Διάμετρος κυλίνδρου  $D_{c_e}$  σε m:  $D_{c_e} := 0.1$

Πλάτος διακένου μεταξύ κυλίνδρου και εκτοπιστή  $h$  σε m :  $h := 0.5 \cdot 10^{-3}$

Μήκος διακένου μέχρι τη τσιμούχα (σφράγιση)  $l_g$  σε m :  $l_g := 0.2$

#### **Κρύος κύλινδρος (κύλινδρος εκτόνωσης)**

Διάμετρος κυλίνδρου  $D_{c_e}'$  σε m:  $D_{c_e}' := 0.11$

#### **Κρύος κύλινδρος (κύλινδρος συμπίεσης)**

Πλάτος διακένου μεταξύ κυλίνδρου και εκτοπιστή  $h'$  σε m :  $h' := 0.5 \cdot 10^{-3}$

Μήκος διακένου μέχρι τη τσιμούχα (σφράγιση)  $l_g'$  σε m :  $l_g' := 0.227$

Οι μάζες  $m_i$  και οι παροχές μάζας  $g_{A_i}$  του εργαζόμενου αερίου για κάθε μέρος της μηχανής συναρτήσκει της γωνίας στροφάλου  $\theta$  υπολογίζονται παρακάτω. Οι σχέσεις τους προκύπτουν απλά μέσω της καταστατικής εξίσωσης των τελείων αερίων.

$$\Sigma(V_i/T_i)(\theta) := \frac{V_H(\theta)}{T_h} + \frac{V_r}{T_r} + \frac{V_{TC}(\theta)}{T_k} + \frac{V_{r'}}{T_{r'}} + \frac{V_{H'}(\theta)}{T_{h'}} \quad V_{tc}(\theta) := V_c(\theta) + V_{c'}(\theta)$$

$$m_{e'}(\theta) := \frac{\frac{V_{e'}(\theta)}{T_{h'}}}{\Sigma(V_i/T_i)(\theta)} \cdot M \quad m_{h'}(\theta) := \frac{\frac{V_{h'}}{T_{h'}} + \frac{V_{r'h'}}{T_{h'}}}{\Sigma(V_i/T_i)(\theta)} \cdot M \quad m_{r'}(\theta) := \frac{\frac{V_{r'}}{T_{r'}}}{\Sigma(V_i/T_i)(\theta)} \cdot M$$

$$m_{k'}(\theta) := \frac{\frac{V_{r'k'}}{T_k} + \frac{V_{k'}}{T_k}}{\Sigma(V_i/T_i)(\theta)} \cdot M \quad m_c(\theta) := \frac{\frac{V_{tc}(\theta)}{T_k}}{\Sigma(V_i/T_i)(\theta)} \cdot M \quad m_k(\theta) := \frac{\frac{V_{rk}}{T_k} + \frac{V_k}{T_k}}{\Sigma(V_i/T_i)(\theta)} \cdot M$$

$$m_r(\theta) := \frac{\frac{V_r}{T_r}}{\Sigma(V_i/T_i)(\theta)} \cdot M \quad m_h(\theta) := \frac{\frac{V_h}{T_h} + \frac{V_{rh}}{T_h}}{\Sigma(V_i/T_i)(\theta)} \cdot M \quad m_e(\theta) := \frac{\frac{V_e(\theta)}{T_h}}{\Sigma(V_i/T_i)(\theta)} \cdot M$$

$$dV_e(\theta) := \frac{d}{d\theta} V_e(\theta) \quad dV_{e'}(\theta) := \frac{d}{d\theta} V_{e'}(\theta) \quad dp(\theta) := \frac{d}{d\theta} p(\theta)$$

$$dV_{tc}(\theta) := \frac{d}{d\theta} V_{tc}(\theta)$$

$$dm_{e'}(\theta) := \frac{\left( \frac{dp(\theta)}{p(\theta)} + \frac{dV_{e'}(\theta)}{V_{e'}(\theta)} \right)}{\Sigma(V_i/T_i)(\theta)} \cdot \left( M \cdot \frac{V_{e'}(\theta)}{T_{h'}} \right) \quad dm_e(\theta) := \frac{\left( \frac{dp(\theta)}{p(\theta)} + \frac{dV_e(\theta)}{V_e(\theta)} \right)}{\Sigma(V_i/T_i)(\theta)} \cdot \left( M \cdot \frac{V_e(\theta)}{T_h} \right)$$

$$dm_{h'}(\theta) := \frac{\frac{dp(\theta)}{p(\theta)}}{\Sigma(V_i/T_i)(\theta)} \cdot \left( M \cdot \frac{V_{h'}}{T_{h'}} \right) \quad dm_h(\theta) := \frac{\frac{dp(\theta)}{p(\theta)}}{\Sigma(V_i/T_i)(\theta)} \cdot \left( M \cdot \frac{V_h}{T_h} \right)$$

$$dm_{r'}(\theta) := \frac{\frac{dp(\theta)}{p(\theta)}}{\Sigma(V_i/T_i)(\theta)} \cdot \left( M \cdot \frac{V_{r'}}{T_{r'}} \right) \quad dm_r(\theta) := \frac{\frac{dp(\theta)}{p(\theta)}}{\Sigma(V_i/T_i)(\theta)} \cdot \left( M \cdot \frac{V_r}{T_r} \right)$$

$$dm_{k'}(\theta) := \frac{\frac{dp(\theta)}{p(\theta)}}{\Sigma(V_i/T_i)(\theta)} \cdot \left( M \cdot \frac{V_{k'}}{T_{k'}} \right) \quad dm_k(\theta) := \frac{\frac{dp(\theta)}{p(\theta)}}{\Sigma(V_i/T_i)(\theta)} \cdot \left( M \cdot \frac{V_k}{T_k} \right)$$

$$dm_c(\theta) := \frac{\frac{dp(\theta)}{p(\theta)} + \frac{dV_{tc}(\theta)}{V_{tc}(\theta)}}{\Sigma(V_i/T_i)(\theta)} \cdot \left( M \cdot \frac{V_{tc}(\theta)}{T_k} \right)$$

$$gA_{e'h'}(\theta) := -dm_{e'}(\theta) \quad gA_{h'r'}(\theta) := gA_{e'h'}(\theta) - dm_{h'}(\theta) \quad gA_{r'k'}(\theta) := gA_{h'r'}(\theta) - dm_{r'}(\theta)$$

$$gA_{k'c'}(\theta) := gA_{r'k'}(\theta) - dm_{k'}(\theta) \quad gA_{ck}(\theta) := gA_{k'c'}(\theta) - dm_c(\theta) \quad gA_{kr}(\theta) := gA_{ck}(\theta) - dm_k(\theta)$$

$$gA_{rh}(\theta) := gA_{kr}(\theta) - dm_r(\theta) \quad gA_{he}(\theta) := gA_{rh}(\theta) - dm_h(\theta)$$

$$gA_{h'}(\theta) := 0.5 \cdot (gA_{e'h'}(\theta) + gA_{h'r'}(\theta)) \quad gA_{r'}(\theta) := 0.5 \cdot (gA_{h'r'}(\theta) + gA_{r'k'}(\theta))$$

$$gA_{k'}(\theta) := 0.5 \cdot (gA_{r'k'}(\theta) + gA_{k'c'}(\theta)) \quad gA_k(\theta) := 0.5 \cdot (gA_{ck}(\theta) + gA_{kr}(\theta))$$

$$gA_r(\theta) := 0.5 \cdot (gA_{kr}(\theta) + gA_{rh}(\theta)) \quad gA_h(\theta) := 0.5 \cdot (gA_{rh}(\theta) + gA_{he}(\theta))$$

**Απώλειες λόγω πτώσης πίεσης στους θερμοεναλλάκτες  $Q_{ff}$  σε Watts**

**Ζεστός αναγεννητής**

Σταθερά sutherland  $T_{su}$  σε για αέριο ήλιο :  $T_{su} := 80$

Δυναμική συνεκτικότητα εργαζόμενου αερίου  $\mu_r$  σε kg/m sec :

$$\mu_r := 18.85 \cdot 10^{-6} \cdot \left( \frac{273 + T_{su}}{T_r + T_{su}} \right) \cdot \left( \frac{T_r}{273} \right)^{\frac{3}{2}} = 2.875 \times 10^{-5}$$

Πυκνότητα αερίου στον αναγεννητή  $\rho_r$  σε kg/m<sup>3</sup> :  $\rho_r(\theta) := \frac{m_r(\theta)}{V_r}$

Παροχή μάζας αερίου στον αναγεννητή  $gA_r$  σε kg/sec :  $gA_r(\theta)$

Αριθμός Reynolds  $Re_r$  :  $Re_r(\theta) := \left| \frac{f \cdot 360 \cdot gA_r(\theta) \cdot D_r}{\mu_r \cdot A_r} \right|$

Συντελεστής τριβής Reynolds  $f_{Tr}$  (στρωτή ροή) :

$$f_{Tr}(\theta) := 54 + 1.43 \cdot (Re_r(\theta))^{0.48}$$

Πτώση πίεσης στον αναγεννητή  $\Delta p_r$  σε Pa :

$$\Delta p_r(\theta) := \frac{360 \cdot f \cdot 2 \cdot f_{Tr}(\theta) \cdot \mu_r \cdot g A_r(\theta) \cdot V_r}{A_r^2 \cdot D_r^2 \cdot \rho_r(\theta)}$$

Απώλεια λόγω πτώσης πίεσης αερίου στον αναγεννητή  $Q_{fflr}$  σε Watts :

$$Q_{fflr}(\theta) := \frac{\Delta p_r(\theta) \cdot g A_r(\theta) \cdot V_r}{m_r(\theta)}$$

$$Q_{fflr} := f \cdot \int_0^{359} Q_{fflr}(\theta) d\theta = 24.064$$

### **Κρύος αναγεννητής**

Δυναμική συνεκτικότητα εργαζόμενου αερίου  $\mu_r$  σε kg/m sec :

$$\mu_r := 18.85 \cdot 10^{-6} \cdot \left( \frac{273 + T_{su}}{T_r + T_{su}} \right) \cdot \left( \frac{T_r}{273} \right)^{\frac{3}{2}} = 1.981 \times 10^{-5}$$

Πυκνότητα αερίου στον αναγεννητή  $\rho_r$  σε kg/m<sup>3</sup> :

$$\rho_r(\theta) := \frac{m_r(\theta)}{V_r}$$

Παροχή μάζας αερίου στον αναγεννητή  $g A_r$  σε kg/sec :

$$g A_r(\theta)$$

Αριθμός Reynolds  $Re_r$  :

$$Re_r(\theta) := \left| \frac{f \cdot 360 \cdot g A_r(\theta) \cdot D_r}{\mu_r \cdot A_r} \right|$$

Συντελεστής τριβής Reynolds  $f_{Tr}$  (στρωτή ροή) :

$$f_{Tr}(\theta) := 54 + 1.43 \cdot (Re_r(\theta))^{0.48}$$

Πτώση πίεσης στον αναγεννητή  $\Delta p_r$  σε Pa :

$$\Delta p_r(\theta) := \frac{360 \cdot f \cdot 2 \cdot f_{Tr}(\theta) \cdot \mu_r \cdot g A_r(\theta) \cdot V_r}{A_r^2 \cdot D_r^2 \cdot \rho_r(\theta)}$$

Απώλεια λόγω πτώσης πίεσης αερίου στον αναγεννητή  $Q_{fflr}$  σε Watts :

$$Q_{fflr}'(\theta) := \frac{\Delta p_{r'}(\theta) \cdot gA_{r'}(\theta) \cdot V_{r'}}{m_{r'}(\theta)}$$

$$Q_{fflr} := f \cdot \int_0^{359} Q_{fflr}'(\theta) d\theta = 8.982$$

### Ζεστός θερμαντήρας

Δυναμική συνεκτικότητα εργαζόμενου αερίου  $\mu_h$  σε kg/m sec :

$$\mu_h := 18.85 \cdot 10^{-6} \cdot \left( \frac{273 + T_{su}}{T_h + T_{su}} \right) \cdot \left( \frac{T_h}{273} \right)^{\frac{3}{2}} = 3.717 \times 10^{-5}$$

Πυκνότητα αερίου στον θερμαντήρα  $\rho_h$  σε kg/m<sup>3</sup> :

$$\rho_h(\theta) := \frac{m_h(\theta)}{V_h}$$

Παροχή μάζας αερίου στον θερμαντήρα  $gA_h$  σε kg/sec :

$$gA_h(\theta)$$

Αριθμός Reynolds  $Re_h$  :

$$Re_h(\theta) := \left| \frac{f \cdot 360 \cdot gA_h(\theta) \cdot Di_h}{\mu_h \cdot A_h} \right|$$

Συντελεστής τριβής Reynolds  $f_{rh}$  (τυρβώδης ροή) :

$$f_{rh}(\theta) := 0.0791 \cdot (Re_h(\theta))^{0.75}$$

Πτώση πίεσης στον θερμαντήρα  $\Delta p_h$  σε Pa :

$$\Delta p_h(\theta) := \frac{360 \cdot f \cdot 2 \cdot f_{rh}(\theta) \cdot \mu_h \cdot gA_h(\theta) \cdot V_h}{A_h^2 \cdot Di_h^2 \cdot \rho_h(\theta)}$$

Απώλεια λόγω πτώσης πίεσης αερίου στον θερμαντήρα  $Q_{fflh}$  σε Watts :

$$Q_{fflh}(\theta) := \frac{\Delta p_h(\theta) \cdot gA_h(\theta) \cdot V_h}{m_h(\theta)}$$

$$Q_{fflh} := f \cdot \int_0^{359} Q_{fflh}(\theta) d\theta = 32.477$$

### **Κρύος θερμαντήρας**

Δυναμική συνεκτικότητα εργαζόμενου αερίου  $\mu_{h'}$  σε kg/m sec :

$$\mu_{h'} := 18.85 \cdot 10^{-6} \cdot \left( \frac{273 + T_{su}}{T_{h'} + T_{su}} \right) \cdot \left( \frac{T_{h'}}{273} \right)^{\frac{3}{2}} = 1.885 \times 10^{-5}$$

Πυκνότητα αερίου στον θερμαντήρα  $\rho_{h'}$  σε kg/m<sup>3</sup> :  $\rho_{h'}(\theta) := \frac{m_{h'}(\theta)}{V_{h'}}$

Παροχή μάζας αερίου στον θερμαντήρα  $g_{A_{h'}}$  σε kg/sec :  $g_{A_{h'}}(\theta)$

Αριθμός Reynolds  $Re_{h'}$  :  $Re_{h'}(\theta) := \left| \frac{f \cdot 360 \cdot g_{A_{h'}}(\theta) \cdot Di_{h'}}{\mu_{h'} \cdot A_{h'}} \right|$

Συντελεστής τριβής Reynolds  $f_{th'}$  (τυρβώδης ροή) :  $f_{th'}(\theta) := 0.0791 \cdot (Re_{h'}(\theta))^{0.75}$

Πτώση πίεσης στον θερμαντήρα  $\Delta p_{h'}$  σε Pa :  $\Delta p_{h'}(\theta) := \frac{360 \cdot f \cdot 2 \cdot f_{th'}(\theta) \cdot \mu_{h'} \cdot g_{A_{h'}}(\theta) \cdot V_{h'}}{A_{h'}^2 \cdot Di_{h'}^2 \cdot \rho_{h'}(\theta)}$

Απώλεια λόγω πτώσης πίεσης αερίου στον θερμαντήρα  $Q_{fflh'}$  σε Watts :  $Q_{fflh'}(\theta) := \frac{\Delta p_{h'}(\theta) \cdot g_{A_{h'}}(\theta) \cdot V_{h'}}{m_{h'}(\theta)}$

$$Q_{fflh'} := f \cdot \int_0^{359} Q_{fflh'}(\theta) d\theta = 6.334$$

### **Ψύκτης ζεστού κυλίνδρου**

Δυναμική συνεκτικότητα εργαζόμενου αερίου  $\mu_k$  σε kg/m sec :

$$\mu_k := 18.85 \cdot 10^{-6} \cdot \left( \frac{273 + T_{su}}{T_k + T_{su}} \right) \cdot \left( \frac{T_k}{273} \right)^{\frac{3}{2}} = 2.079 \times 10^{-5}$$



Πυκνότητα αερίου στον ψύκτη  $\rho_k$  σε  $\text{kg/m}^3$  :

$$\rho_k(\theta) := \frac{m_k(\theta)}{V_k}$$

Παροχή μάζας αερίου στον ψύκτη  $gA_k$  σε  $\text{kg/sec}$  :

$$gA_k(\theta)$$

Αριθμός Reynolds  $Re_k$  :

$$Re_k(\theta) := \left| \frac{f \cdot 360 \cdot gA_k(\theta) \cdot Di_k}{\mu_k \cdot A_k} \right|$$

Συντελεστής τριβής Reynolds  $f_{rk}$  (τυρβώδης ροή) :

$$f_{rk}(\theta) := 0.0791 \cdot (Re_k(\theta))^{0.75}$$

Πτώση πίεσης στον ψύκτη  $\Delta p_k$  σε Pa :

$$\Delta p_k(\theta) := \frac{360 \cdot f \cdot 2 \cdot f_{rk}(\theta) \cdot \mu_k \cdot gA_k(\theta) \cdot V_k}{A_k^2 \cdot Di_k^2 \cdot \rho_k(\theta)}$$

Απώλεια λόγω πτώσης πίεσης αερίου στον ψύκτη  $Q_{fflk}$  σε Watts :

$$Q_{fflk}(\theta) := \frac{\Delta p_k(\theta) \cdot gA_k(\theta) \cdot V_k}{m_k(\theta)}$$

$$Q_{fflk} := f \cdot \int_0^{359} Q_{fflk}(\theta) d\theta = 1.754$$

### ***Ψύκτης κρύου κυλίνδρου***

Δυναμική συνεκτικότητα εργαζόμενου αερίου  $\mu_k$  σε  $\text{kg/m sec}$  :

$$\mu_{k'} := 18.85 \cdot 10^{-6} \cdot \left( \frac{273 + T_{su}}{T_{k'} + T_{su}} \right) \cdot \left( \frac{T_{k'}}{273} \right)^{\frac{3}{2}} = 2.079 \times 10^{-5}$$

Πυκνότητα αερίου στον ψύκτη  $\rho_{k'}$  σε  $\text{kg/m}^3$  :

$$\rho_{k'}(\theta) := \frac{m_{k'}(\theta)}{V_{k'}}$$

Παροχή μάζας αερίου στον ψύκτη  $gA_{k'}$  σε kg/ sec :

$$gA_{k'}(\theta)$$

Αριθμός Reynolds  $Re_{k'}$  :

$$Re_{k'}(\theta) := \left| \frac{f \cdot 360 \cdot gA_{k'}(\theta) \cdot Di_{k'}}{\mu_{k'} \cdot A_{k'}} \right|$$

Συντελεστής τριβής Reynolds  $f_{rk'}$  (τυρβώδης ροή) :

$$f_{rk'}(\theta) := 0.0791 \cdot (Re_{k'}(\theta))^{0.75}$$

Πτώση πίεσης στον ψύκτη  $\Delta p_{k'}$  σε Pa :

$$\Delta p_{k'}(\theta) := \frac{360 \cdot f \cdot 2 \cdot f_{rk'}(\theta) \cdot \mu_{k'} \cdot gA_{k'}(\theta) \cdot V_{k'}}{A_{k'}^2 \cdot Di_{k'}^2 \cdot \rho_{k'}(\theta)}$$

Απώλεια λόγω πτώσης πίεσης αερίου στον ψύκτη  $Q_{fflk'}$  σε Watts :

$$Q_{fflk'}(\theta) := \frac{\Delta p_{k'}(\theta) \cdot gA_{k'}(\theta) \cdot V_{k'}}{m_{k'}(\theta)}$$

$$Q_{fflk'} := f \cdot \int_0^{359} Q_{fflk'}(\theta) d\theta = 7.981$$

$$Q_{ffl} := Q_{fflr} + Q_{fflr'} + Q_{fflh} + Q_{fflh'} + Q_{fflk} + Q_{fflk'} = 81.591$$

**Απώλειες λόγω τακτικής μεταφοράς θερμότητας  $Q_{sh}$  σε Watts :**

$$Q_{sh} := \frac{\pi \cdot D_d \cdot k_g \cdot X_d^2}{2 \cdot h \cdot l_g} \cdot (T_h - T_k) + \frac{\pi \cdot D_d \cdot k_g \cdot X_d^2}{2 \cdot h' \cdot l_g'} \cdot (T_k - T_{h'}) = 173.31$$

**Απώλειες λόγω μεταφοράς ενθαλπίας αερίου  $Q_{pu}$  σε Watts**

Διαφορά φάσης μεταξύ πίεσης και ταχύτητας ζεστού εκτοπιστή  $\phi_p$  σε μοίρες :  $\phi_p := 154$

Διαφορά φάσης μεταξύ πίεσης και ταχύτητας κρού εκτοπιστή  $\phi_p$  σε μοίρες :  $\phi_p := 64$

$$Q_{puhc} := \frac{\gamma}{\gamma - 1} \cdot \pi \cdot D_d \cdot (p_{max} - p_{mean}) \cdot h \cdot X_d \cdot \omega \cdot \ln\left(\frac{T_h}{T_k}\right) \cdot \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi \cdot f}{(\alpha_d)} \cdot h}} \cdot \frac{k_g}{k_d} \right] \cdot \sin(\phi_p \cdot \text{deg})$$

$$Q_{pucc} := \frac{\gamma}{\gamma - 1} \cdot \pi \cdot D_{d'} \cdot (p_{max} - p_{mean}) \cdot h' \cdot X_{d'} \cdot \omega \cdot \ln\left(\frac{T_{k'}}{T_{h'}}\right) \cdot \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi \cdot f}{(\alpha_{d'})} \cdot h'}} \cdot \frac{k_{g'}}{k_{d'}} \right] \cdot \sin(\phi_p \cdot \text{deg})$$

$$Q_{pu} := Q_{puhc} + Q_{pucc} = 60.898$$

**Απώλειες θερμοδυναμικού έργου στη σφράγιση  $Q_{seal}$  σε Watts :**

$$Q_{sealhcc} := \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot D_d \cdot (p_{max} - p_{mean}) \cdot h \cdot X_d \cdot \omega \cdot \sin(\phi_p \cdot \text{deg})$$

$$Q_{sealccc} := \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot D_{d'} \cdot (p_{max} - p_{mean}) \cdot h' \cdot X_{d'} \cdot \omega \cdot \sin(\phi_p \cdot \text{deg})$$

$$Q_{seal} := Q_{sealhcc} + Q_{sealccc} = 67.048$$

**Απώλειες λόγω αγωγιμότητας αερίου  $Q_{cond1}$  σε Watts**

Εσωτερική διάμετρος του ζεστού εκτοπιστή  $Di_d$  σε m :  $Di_d := 0.088$

Εσωτερική διάμετρος του κρού εκτοπιστή  $Di_{d'}$  σε m :  $Di_{d'} := 0.103$

Επιφάνεια ροής αερίου εσωτερικά τού ζεστού εκτοπιστή  $Ai_d$  σε m :

$$Ai_d := \frac{\pi}{4} Di_d^2 = 6.08212 \times 10^{-3}$$

Επιφάνεια ροής αερίου εσωτερικά τού κρύου εκτοπιστή  $Ai_d$  σε m :

$$Ai_{d'} := \frac{\pi}{4} Di_{d'}^2 = 8.33229 \times 10^{-3}$$

$$Q_{cond1} := \frac{k_g \cdot Ai_{d'} \cdot (T_h - T_k)}{L_d} + \frac{k_g' \cdot Ai_{d'} \cdot (T_{k'} - T_{h'})}{L_{d'}} = 3.239$$

### ***Απώλειες λόγω αγωγιμότητας τοιχωμάτων εκτοπιστών $Q_{cond2}$ σε Watts***

Θερμική αγωγιμότητα τοιχώματος ζεστού εκτοπιστή  $k_{wd}$  σε W/K :  $k_{wd} := 0.435$

Θερμική αντίσταση τοιχώματος ζεστού εκτοπιστή  $R_{wd}$  σε K/W :  $R_{wd} := \frac{1}{k_{wd}} = 2.299$

Θερμική αγωγιμότητα τοιχώματος κρύου εκτοπιστή  $k_{wd'}$  σε W/K :  $k_{wd'} := 0.701$

Θερμική αντίσταση τοιχώματος κρύου εκτοπιστή  $R_{wd'}$  σε K/W :  $R_{wd'} := \frac{1}{k_{wd'}} = 1.427$

$$Q_{cond2} := \frac{T_h - T_k}{R_{wd}} + \frac{T_{k'} - T_{h'}}{R_{wd'}} = 228.14$$

### ***Απώλειες λόγω αγωγιμότητας τοιχωμάτων κυλίνδρων $Q_{cond3}$ σε Watts***

Θερμική αγωγιμότητα τοιχώματος ζεστού κυλίνδρου  $k_{we}$  σε W/K :  $k_{we} := 0.435$

Θερμική αντίσταση τοιχώματος ζεστού κυλίνδρου  $R_{we}$  σε K/W :  $R_{we} := \frac{1}{k_{we}} = 2.299$

Θερμική αγωγιμότητα τοιχώματος κρύου κυλίνδρου  $k_{we'}$  σε W/K :  $k_{we'} := 0.701$

Θερμική αντίσταση τοιχώματος κρύου κυλίνδρου  $R_{we'}$  σε K/W :  $R_{we'} := \frac{1}{k_{we'}} = 1.427$

$$Q_{cond3} := \frac{T_h - T_k}{R_{we}} + \frac{T_{k'} - T_{h'}}{R_{we'}} = 228.14$$

### **Απώλειες λόγω αγωγιμότητας τοιχωμάτων αναγεννητών $Q_{\text{cond4}}$ σε Watts**

Θερμική αγωγιμότητα τοιχώματος ζεστού αναγεννητή  $k_{\text{wr}}$  σε W/K :  $k_{\text{wr}} := 0.181$

Θερμική αντίσταση τοιχώματος ζεστού αναγεννητή  $R_{\text{wr}}$  σε K/W :  $R_{\text{wr}} := \frac{1}{k_{\text{wr}}} = 5.525$

Θερμική αγωγιμότητα τοιχώματος κρύου αναγεννητή  $k_{\text{wr}'}$  σε W/K :  $k_{\text{wr}'} := 0.502$

Θερμική αντίσταση τοιχώματος κρύου αναγεννητή  $R_{\text{wr}'}$  σε K/W :  $R_{\text{wr}'} := \frac{1}{k_{\text{wr}'}} = 1.992$

$$Q_{\text{cond4}} := \frac{T_h - T_k}{R_{\text{wr}}} \cdot N_r + \frac{T_{k'} - T_{h'}}{R_{\text{wr}'}} \cdot N_{r'} = 826.72$$

$$Q_{\text{cond}} := Q_{\text{cond1}} + Q_{\text{cond2}} + Q_{\text{cond3}} + Q_{\text{cond4}} = 1.286 \times 10^3$$

$$Q_{\text{losses}} := Q_{\text{ffl}} + Q_{\text{sh}} + Q_{\text{pu}} + Q_{\text{seal}} + Q_{\text{cond}} = 1.669 \times 10^3$$

$$Q_u := Q_{\text{ind}} - Q_{\text{losses}} = 1.565 \times 10^3$$

$$Q_{\text{net}} := 1.028 \cdot 10^3$$

$$\text{COP}_h := \frac{Q_u}{Q_e} = 1.523$$

### **Αποτελέσματα**

1. Απώλειες λόγω πτώσης πίεσης στους θερμοεναλλάκτες  $Q_{\text{ffl}}$  σε Watts :  $Q_{\text{ffl}} = 81.591$
2. Απώλειες λόγω τακτικής μεταφοράς θερμότητας  $Q_{\text{sh}}$  σε Watts :  $Q_{\text{sh}} = 173.31$
3. Απώλειες λόγω μεταφοράς ενθαλπίας αερίου  $Q_{\text{pu}}$  σε Watts :  $Q_{\text{pu}} = 60.898$
4. Απώλειες λόγω αγωγής  $Q_{\text{cond}}$  σε Watts :  $Q_{\text{cond}} = 1.286 \times 10^3$
5. Απώλειες θερμοδυναμικού έργου στη σφράγιση  $Q_{\text{seal}}$  σε Watts :  $Q_{\text{seal}} = 67.048$
6. Συνολικές απώλειες  $Q_{\text{losses}}$  σε Watts :  $Q_{\text{losses}} = 1.669 \times 10^3$
7. Η ενδεικνύμενη θερμική ισχύς  $Q_{\text{ind}}$  (σε W) :  $Q_{\text{ind}} = 3.234 \times 10^3$
8. Ωφέλιμη θερμική ισχύς  $Q_u$  σε Watts :  $Q_u = 1.565 \times 10^3$
9. Συντελεστής συμπεριφοράς COP :  $\text{COP}_h = 1.523$

<p><b>ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ VMK3</b>  <b>ΜΗΧΑΝΗ ΤΟΥ KUHL (1990)</b>  <b>VUILLEUMIER HEAT PUMP - ΜΟΝΤΕΛΟ ΑΠΩΛΕΙΩΝ D. BERCHOWITZ</b></p>
--

Στο πρόγραμμα VMK3 εφαρμόζεται το μοντέλο απωλειών του D. Berchowitz στην περίπτωση της Vuilleumier αντλίας θερμότητας του KUHL. Οι εξισώσεις αυτές αναφέρονται στο " Stirling Engine Cycle Analysis ", Urieli I. and Berchowitz D., Adam Hilger Ltd, Bristol, 1984 και στο " Stirling Cycle Engine Design and Optimisation (Thesis) ", Athens, Ohio, August 1986. Για την επίλυση των σχέσεων αυτών ήταν απαραίτητο να παρθούν αποτελέσματα απ' το ισοθερμοκρασιακό μοντέλο ανάλυσης που εφαρμόστηκε στο πρόγραμμα VMK1.

Σύστημα μονάδων σε **S.I.**

**Παράμετροι λειτουργίας (operating parameters)**

Εργαζόμενο αέριο (working gas) : Ήλιο (He)

**Απώλειες λόγω πτώσης πίεσης στους θερμοεναλλάκτες  $Q_{ffl}$  σε Watts (ίδιες με Urieli)**

$$Q_{ffl} = 81.591$$

**Απώλειες λόγω τακτικής μεταφοράς θερμότητας  $Q_{sh}$  σε Watts :**

$$Q_{sh} := \frac{\pi \cdot D_d \cdot k_g \cdot X_d^2}{2 \cdot h \cdot l_g} \cdot (T_h - T_k) + \frac{\pi \cdot D_d \cdot k_g \cdot X_d'^2}{2 \cdot h' \cdot l_g'} \cdot (T_k' - T_h') = 173.31$$

**Απώλειες λόγω μεταφοράς ενθαλπίας αερίου  $Q_{pu}$  σε Watts**

$$Q_{puhc} := \frac{1}{2} \cdot \frac{\gamma}{\gamma - 1} \cdot \omega \cdot D_d \cdot h \cdot p_{mean} \cdot \ln\left(\frac{T_h}{T_k}\right) \cdot \left[ \left(\frac{X_d}{2 \cdot L_d}\right)^2 + \left(\frac{P_{max} - P_{mean}}{P_{mean}}\right)^2 \right]^{0.5} \cdot X_d$$

$$Q_{puhc'} := \frac{1}{2} \cdot \frac{\gamma}{\gamma - 1} \cdot \omega \cdot D_d \cdot h' \cdot p_{mean} \cdot \ln\left(\frac{T_k'}{T_h'}\right) \cdot \left[ \left(\frac{X_d'}{2 \cdot L_d'}\right)^2 + \left(\frac{P_{max} - P_{mean}}{P_{mean}}\right)^2 \right]^{0.5} \cdot X_d'$$

$$Q_{pu} := Q_{puhc} + Q_{puhc'} = 77.36$$

*Απώλειες θερμοδυναμικού έργου στη σφράγιση  $Q_{seal}$  σε Watts (ίδιες με Urieli) :*

$$Q_{seal} = 67.048$$

*Απώλειες λόγω αγωγής  $Q_{cond}$  σε Watts (ίδιες με Urieli) :*

$$Q_{cond} = 1.286 \times 10^3$$

*Απώλειες λόγω υστέρησης αερίου  $Q_{hys}$  σε Watts*

Θερμοκρασία τοιχώματος ζεστού χώρου συμπίεσης  $T_{wc}$  σε K :  $T_{wc} := T_k$

Θερμοκρασία τοιχώματος ζεστού χώρου εκτόνωσης  $T_{we}$  σε K :  $T_{we} := T_h$

Θερμοκρασία τοιχώματος κρύου χώρου συμπίεσης  $T_{wc'}$  σε K :  $T_{wc'} := T_{k'}$

Θερμοκρασία τοιχώματος κρύου χώρου εκτόνωσης  $T_{we'}$  σε K :  $T_{we'} := T_{h'}$

Μέση βρεχόμενη επιφάνεια ζεστού χώρου συμπίεσης  $A_{wc}$  σε  $m^2$  :

$$A_{wc} := 4 \cdot \frac{V_{clc} + \frac{V_{swc}}{2}}{Dc_e} + \pi \cdot \frac{Dc_e^2}{2} = 0.036$$

Μέση βρεχόμενη επιφάνεια ζεστού χώρου εκτόνωσης  $A_{we}$  σε  $m^2$ :

$$A_{we} := 4 \cdot \frac{V_{cle} + \frac{V_{swe}}{2}}{Dc_e} + \pi \cdot \frac{Dc_e^2}{2} = 0.027$$

Μέση βρεχόμενη επιφάνεια κρύου χώρου συμπίεσης  $A_{wc'}$  σε  $m^2$  :

$$A_{wc'} := 4 \cdot \frac{V_{clc'} + \frac{V_{swc'}}{2}}{Dc_{e'}} + \pi \cdot \frac{Dc_{e'}^2}{2} = 0.035$$

Μέση βρεχόμενη επιφάνεια κρύου χώρου εκτόνωσης  $A_{we}$  σε  $m^2$  :

$$A_{we}' := 4 \cdot \frac{V_{cle}' + \frac{V_{swe}'}{2}}{Dc_{e'}} + \pi \cdot \frac{Dc_{e'}^2}{2} = 0.034$$

Θερμοκρασιακή αγωγιμότητα αερίου  $\alpha_{gh}(T_h)$  σε  $m^2/sec$ :  $\alpha_{gh} := 8.883 \times 10^{-6}$

Θερμοκρασιακή αγωγιμότητα αερίου  $\alpha_{gh'}(T_h)$  σε  $m^2/sec$ :  $\alpha_{gh'} := 1.599 \times 10^{-6}$

Θερμοκρασιακή αγωγιμότητα αερίου  $\alpha_{gk}(T_k)$  σε  $m^2/sec$ :  $\alpha_{gk} := 2.012 \times 10^{-6}$

Θερμοκρασιακή αγωγιμότητα αερίου  $\alpha_{gk'}(T_k)$  σε  $m^2/sec$ :  $\alpha_{gk'} := \alpha_{gk}$

$$Q_{hysc} := \sqrt{\frac{1}{32} \cdot \omega \cdot \alpha_{gh} \cdot A_{we}} \cdot \frac{(P_{max} - P_{mean})^2}{\gamma \cdot P_{mean}} + \sqrt{\frac{1}{32} \cdot \omega \cdot \alpha_{gk} \cdot A_{wc}} \cdot \frac{(P_{max} - P_{mean})^2}{\gamma \cdot P_{mean}} = 1.832$$

$$Q_{hysc} := \sqrt{\frac{1}{32} \cdot \omega \cdot \alpha_{gh'} \cdot A_{we}} \cdot \frac{(P_{max} - P_{mean})^2}{\gamma \cdot P_{mean}} + \sqrt{\frac{1}{32} \cdot \omega \cdot \alpha_{gk'} \cdot A_{wc}} \cdot \frac{(P_{max} - P_{mean})^2}{\gamma \cdot P_{mean}} = 1.274$$

$$Q_{hys} := Q_{hysc} + Q_{hysc} = 3.106$$

$$Q_{losses} := Q_{ffl} + Q_{sh} + Q_{pu} + Q_{seal} + Q_{cond} + Q_{hys} = 1.689 \times 10^3$$

$$Q_{ind} = 3.234 \times 10^3$$

$$Q_{wv} := Q_{ind} - Q_{losses} = 1.546 \times 10^3$$

$$Q_e = 1.028 \times 10^3$$

$$COP_{h,w} := \frac{Q_u}{Q_e} = 1.504$$



### *Αποτελέσματα*

1. Απώλειες λόγω πτώσης πίεσης στους θερμοεναλλάκτες  $Q_{ff}$  σε Watts :  $Q_{ff} = 81.591$
2. Απώλειες λόγω τακτικής μεταφοράς θερμότητας  $Q_{sh}$  σε Watts :  $Q_{sh} = 173.31$
3. Απώλειες λόγω μεταφοράς ενθαλπίας αερίου  $Q_{pu}$  σε Watts :  $Q_{pu} = 77.36$
4. Απώλειες λόγω αγωγής  $Q_{cond}$  σε Watts :  $Q_{cond} = 1.286 \times 10^3$
5. Απώλειες λόγω υστέρησης αερίου  $Q_{hys}$  σε Watts :  $Q_{hys} = 3.106$
6. Απώλειες θερμοδυναμικού έργου στη σφράγιση  $Q_{seal}$  σε Watts :  $Q_{seal} = 67.048$
7. Συνολικές απώλειες  $Q_{losses}$  σε Watts :  $Q_{losses} = 1.689 \times 10^3$
8. Η ενδεικνύμενη θερμική ισχύς  $Q_{ind}$  (σε W) :  $Q_{ind} = 3.234 \times 10^3$
9. Ωφέλιμη θερμική ισχύς  $Q_u$  σε Watts :  $Q_u = 1.546 \times 10^3$
10. Συντελεστής συμπεριφοράς COP :  $COP_h = 1.504$

**ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ VMK4**  
**ΜΗΧΑΝΗ ΤΟΥ KUHL (1990)**  
**VUILLEUMIER HEAT PUMP - ΜΟΝΤΕΛΟ ΑΠΩΛΕΙΩΝ Υ. ΤΙΜΟΥΜΙ**

Στο πρόγραμμα VMK4 εφαρμόζεται το μοντέλο απωλειών του Υ. Timoumi στην περίπτωση της Vuilleumier αντλίας θερμότητας του KUHL. Οι εξισώσεις αυτές αναφέρονται στο '' Design and performance optimization of GPU-3 Stirling engines '', Υ. Timoumi, I. Tlili and S. B. Nasrallah, 2008. Για την επίλυση των σχέσεων αυτών ήταν απαραίτητο να παρθούν αποτελέσματα απ' το ισοθερμοκρασιακό μοντέλο ανάλυσης που εφαρμόστηκε στο πρόγραμμα VMK1.

Σύστημα μονάδων σε **S.I.**

**Παράμετροι λειτουργίας (operating parameters)**

Εργαζόμενο αέριο (working gas) : Ήλιο (He)

**Στοιχεία μηχανισμού στροφάλου (crank mechanism)**

Διαδρομή κρύου εκτοπιστή  $S_{d'}$  σε m :  $S_{d'} := 0.064$

Διαδρομή ζεστού εκτοπιστή  $S_d$  σε m :  $S_d := 0.064$

**Απώλειες λόγω πτώσης πίεσης στους θερμοεναλλάκτες  $Q_{ffl}$  σε Watts (ίδιες με Urieli και Berchowit) :**

$$Q_{ffl} = 81.591$$

**Απώλειες λόγω τακτικής μεταφοράς θερμότητας  $Q_{sh}$  σε Watts :**

$$Q_{sh} := \frac{0.4 \cdot D_d \cdot k_g \cdot S_d^2}{h \cdot L_d} \cdot (T_h - T_k) + \frac{0.4 \cdot D_{d'} \cdot k_g \cdot S_{d'}^2}{h' \cdot L_{d'}} \cdot (T_{k'} - T_{h'}) = 170.482$$

**Απώλειες λόγω αγωγής θερμότητας στους θερμοεναλλάκτες  $Q_{cond}$  σε Watts**

**Οι απώλειες κατά μήκος των θερμοαντήρων και των ψυκτών θεωρούνται αμελητέες καθώς η θερμοκρασία του αερίου κατά μήκος τους είναι περίπου σταθερή (μεταβάλλεται ελάχιστα).**

Ειδική θερμική αγωγιμότητα υλικού μήτρας ζεστού αναγεννητή  $k_{mrx}$  σε W/mK:

$$k_{mrx} := 0.663$$

Ειδική θερμική αγωγιμότητα υλικού μήτρας κρύου αναγεννητή  $k_{mr}$  σε W/mK:

$$k_{mXR} := 0.456$$

Ενεργός επιφάνεια ζεστού αναγεννητή  $A_{eff_r}$  σε  $m^2$ :

$$A_{eff_r} := 1.963 \times 10^{-3}$$

Ενεργός επιφάνεια κρύου αναγεννητή  $A_{eff_r'}$  σε  $m^2$ :

$$A_{eff_r'} := 3.632 \times 10^{-3}$$

$$Q_{condr} := N_r \cdot k_{mXR} \cdot A_{eff_r} \cdot \frac{T_h - T_k}{L_r} = 47.894$$

$$Q_{condr'} := N_{r'} \cdot k_{mXR} \cdot A_{eff_r'} \cdot \frac{T_{k'} - T_{h'}}{L_{r'}} = 12.619$$

$$Q_{cond} := Q_{condr} + Q_{condr'} = 60.513$$

### ***Απώλειες λόγω υστέρησης αερίου $Q_{hys}$ σε Watts***

Πλάτος όγκου ζεστού χώρου συμπίεσης  $\Delta V_c$  σε  $m^3$  :

$$\Delta V_c := \frac{V_{swc}}{2} = 2.306 \times 10^{-4}$$

Πλάτος όγκου κρύου χώρου συμπίεσης  $\Delta V_{c'}$  σε  $m^3$  :

$$\Delta V_{c'} := \frac{V_{swc'}}{2} = 2.76 \times 10^{-4}$$

Πλάτος όγκου ζεστού χώρου εκτόνωσης  $\Delta V_e$  σε  $m^3$  :

$$\Delta V_e := \frac{V_{swe}}{2} = 2.463 \times 10^{-4}$$

Πλάτος όγκου κρύου χώρου εκτόνωσης  $\Delta V_{e'}$  σε  $m^3$  :

$$\Delta V_{e'} := \frac{V_{swe'}}{2} = 2.986 \times 10^{-4}$$

Μέσος όγκος ζεστού χώρου συμπίεσης  $V_{Bc}$  σε  $m^3$  :

$$V_{Bc} := V_{clc} + \frac{V_{swc}}{2} = 5.048 \times 10^{-4}$$

Μέσος όγκος ζεστού χώρου εκτόνωσης  $V_{Be}$  σε  $m^3$  :

$$V_{Be} := V_{cle} + \frac{V_{swe}}{2} = 2.923 \times 10^{-4}$$

Μέσος όγκος κρύου χώρου συμπίεσης  $V_{Bc'}$  σε  $m^3$  :

$$V_{Bc'} := V_{clc'} + \frac{V_{swc'}}{2} = 4.341 \times 10^{-4}$$

Μέσος όγκος κρύου χώρου εκτόνωσης  $V_{Be'}$  σε  $m^3$  :

$$V_{Be'} := V_{cle'} + \frac{V_{swe'}}{2} = 4.103 \times 10^{-4}$$

Ειδική θερμική αγωγιμότητα αερίου  $k_{gh}(T_h)$  σε W/mK:  $k_{gh} := 0.2364$

Ειδική θερμική αγωγιμότητα αερίου  $k_{gh'}(T_{h'})$  σε W/mK:  $k_{gh'} := 0.146$

Ειδική θερμική αγωγιμότητα αερίου  $k_{gk}(T_k)$  σε W/mK:  $k_{gk} := 0.1602$

Ειδική θερμική αγωγιμότητα αερίου  $k_{gk'}(T_{k'})$  σε W/mK:  $k_{gk'} := k_{gk}$

$$Q_{hysc} := \sqrt{\frac{1}{32} \cdot \omega \cdot \gamma^3 \cdot (\gamma - 1) \cdot T_{wc} \cdot P_{mean} \cdot k_{gk}} \cdot \left(\frac{\Delta V_c}{V_{Bc}}\right)^2 \cdot A_{wc} = 340.198$$

$$Q_{hysc'} := \sqrt{\frac{1}{32} \cdot \omega \cdot \gamma^3 \cdot (\gamma - 1) \cdot T_{wc'} \cdot P_{mean} \cdot k_{gk'}} \cdot \left(\frac{\Delta V_{c'}}{V_{Bc'}}\right)^2 \cdot A_{wc'} = 638.451$$

$$Q_{hyse'} := \sqrt{\frac{1}{32} \cdot \omega \cdot \gamma^3 \cdot (\gamma - 1) \cdot T_{we'} \cdot P_{mean} \cdot k_{gh'}} \cdot \left(\frac{\Delta V_{e'}}{V_{Be'}}\right)^2 \cdot A_{we'} = 727.354$$

$$Q_{hys} := Q_{hysc} + Q_{hysc'} + Q_{hyse'} = 1.706 \times 10^3$$

$$Q_{losses} := Q_{ffl} + Q_{sh} + Q_{cond} + Q_{hys} = 2.019 \times 10^3$$

$$Q_{ind} = 3.234 \times 10^3$$

$$Q_{net} := Q_{ind} - Q_{losses} = 1.216 \times 10^3$$

$$Q_e = 1.028 \times 10^3$$

### *Αποτελέσματα*

1. Απώλειες λόγω πτώσης πίεσης στους θερμοεναλλάκτες  $Q_{ffl}$  σε Watts :  $Q_{ffl} = 81.591$
2. Απώλειες λόγω τακτικής μεταφοράς θερμότητας  $Q_{sh}$  σε Watts :  $Q_{sh} = 170.482$
3. Απώλειες λόγω αγωγής  $Q_{cond}$  σε Watts :  $Q_{cond} = 60.513$
4. Απώλειες λόγω υστέρησης αερίου  $Q_{hys}$  σε Watts :  $Q_{hys} = 1.706 \times 10^3$
5. Συνολικές απώλειες  $Q_{losses}$  σε Watts :  $Q_{losses} = 2.019 \times 10^3$
6. Η ενδεικνύμενη θερμική ισχύς  $Q_{ind}$  (σε W) :  $Q_{ind} = 3.234 \times 10^3$
7. Ωφέλιμη θερμική ισχύς  $Q_u$  σε Watts :  $Q_u = 1.216 \times 10^3$

<p><b>ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ VMK5</b>  <b>ΜΗΧΑΝΗ ΤΟΥ KUHL (1990)</b>  <b>VUILLEUMIER HEAT PUMP - ΜΟΝΤΕΛΟ ΑΠΩΛΕΙΩΝ W.MARTINI</b></p>
--

Στο πρόγραμμα VMK5 εφαρμόζεται το μοντέλο απωλειών του W. Martini στην περίπτωση της Vuilleumier αντλίας θερμότητας του KUHL. Οι εξισώσεις αυτές αναφέρονται στο "Stirling engine design manual", Martini W., NASA report, National Technical Information Services, US Department of Commerce, Spring Field, USA, 1978. Για την επίλυση των σχέσεων αυτών ήταν απαραίτητο να παρθούν αποτελέσματα απ' το ισοθερμοκρασιακό μοντέλο ανάλυσης που εφαρμόστηκε στο πρόγραμμα VMK1.  
 Σύστημα μονάδων σε **S.I.**

**Παράμετροι λειτουργίας (operating parameters)**

Εργαζόμενο αέριο (working gas) : Ήλιο (He)

**Στοιχεία εκτοπιστών**

Αριθμός ακτινοβολούντων προστατευτικών καλυμμάτων εσωτερικά του ζεστού εκτοπιστή  $nrs_d$  :  $nrs_d := 0$

Αριθμός ακτινοβολούντων προστατευτικών καλυμμάτων εσωτερικά του κρύου εκτοπιστή  $nrs_d'$  :  $nrs_d' := 0$

**Στοιχεία αναγεννητών**

**Ζεστός Αναγεννητής (τύπου wire screen)**

Αριθμός στρωματώσεων του πλέγματος  $N_s$  :  $N_s := 357$

Αριθμός συρμάτων ανά μέτρο του πλέγματος mesh : mesh := 1149

**Κρύος Αναγεννητής (τύπου wire screen)**

Αριθμός στρωματώσεων του πλέγματος  $N_s'$  :  $N_s' := 150$

Αριθμός συρμάτων ανά μέτρο του πλέγματος mesh' : mesh' := 1152

**ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΙΣΟΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΑΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ**

Μεταβολή της πίεσης του αερίου συναρτήσεται της γωνίας  $\theta$  (έχει θεωρηθεί ότι η πίεση  $p$  έχει την ίδια τιμή μιά δοσμένη χρονική στιγμή σε όλη την έκταση της μηχανής, **δηλαδή δεν υπάρχει πτώση πίεσης**). Επίσης έχει γίνει η υπόθεση ότι οι θερμοκρασίες των συνδετικών χώρων αριστερά και δεξιά των αναγεννητών αντιστοιχούν στις θερμοκρασίες των εκατέρωθεν θερμοαντήρων και ψυκτών.

Όγκος ροής  $VH(\theta)$  θερμού χώρου της μηχανής:  $VH(\theta) := V_e(\theta) + V_h + V_{rh}$

Όγκος ροής VTC(θ) μέσης θερμοκρασίας χώρου της μηχανής:  $VTC(\theta) := V_c(\theta) + V_{c'}(\theta) + V_k + V_{k'} + V_{rk} + V_{rk'}$

$$VC(\theta) := V_c(\theta) + V_k + V_{rk}$$

$$VC'(\theta) := V_{c'}(\theta) + V_{k'} + V_{rk'}$$

Όγκος ροής VH'(θ) κρύου χώρου της μηχανής:  $VH'(\theta) := V_e(\theta) + V_h + V_{r'h'}$

Πίεση συναρτήσει της γωνία θ :

$$p(\theta) := \frac{M \cdot R}{\frac{VH(\theta)}{T_h} + \frac{V_r}{T_r} + \frac{VTC(\theta)}{T_k} + \frac{V_{r'}}{T_{r'}} + \frac{VH'(\theta)}{T_{h'}}$$

Η μέση πίεση του εργαζόμενου μέσου δίνεται απλά από τη μέση τιμή του αθροίσματος της κάθε τιμής της πίεσης που βρήκαμε από τον προηγούμενο τύπο για κάθε τιμή της γωνίας θ.

$$p_{mean} := \frac{\sum_{\theta=0}^{359} p(\theta)}{360} \quad p_{mean} = 1.007 \times 10^7$$

**Οι παροχές μάζας τώρα μπορεί να υπολογιστούν:**

Στο θερμό χώρο (H)

$$FH(\theta) := \frac{p(\theta) \cdot VH(\theta)}{M \cdot R \cdot T_h} \quad FH_{mean} := \frac{\int_0^{359} FH(\theta) d\theta}{360} \quad FH_{mean} = 0.065$$

Υπολογισμός μέγιστης και ελάχιστης παροχής στο θερμό χώρο (H)

$$FH'(\theta) := \frac{d}{d\theta} FH(\theta)$$

$$\theta_{min} := \text{root}(FH'(\theta), \theta, 181, 359) \quad \theta_{min} = 358.782$$

$$\text{Η min τιμή είναι:} \quad FH(\theta_{min}) = 0.033 \quad FH_{min} := FH(\theta_{min})$$

$$\theta_{max} := \text{root}(FH'(\theta), \theta, 90, 270) \quad \theta_{max} = 176.692$$

$$\text{Η max τιμή είναι:} \quad FH(\theta_{max}) = 0.098 \quad FH_{max} := FH(\theta_{max})$$

Υπολογισμός ενεργού τιμής.

$$FH_{eff} := \left[ \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{359} (FH(\theta))^2 d\theta \cdot \text{deg} \right]^{0.5} \quad FH_{eff} = 0.069$$

Στο κρύο χώρο (H')

$$F'H(\theta) := \frac{p(\theta) \cdot V_H'(\theta)}{M \cdot R \cdot T_{H'}} \quad F'H_{\text{mean}} := \frac{\int_0^{359} F'H(\theta) d\theta}{360} \quad F'H_{\text{mean}} = 0.206$$

Υπολογισμός μέγιστης και ελάχιστης παροχής στο κρύο χώρο (H')

$$F'H'(\theta) := \frac{d}{d\theta} F'H(\theta)$$

$$\theta_{\text{min}} := \text{root}(F'H'(\theta), \theta, 0, 180) \quad \theta_{\text{min}} = 87.611$$

$$H \text{ min τιμή είναι:} \quad F'H(\theta_{\text{min}}) = 0.107 \quad F'H_{\text{min}} := F'H(\theta_{\text{min}})$$

$$\theta_{\text{max}} := \text{root}(F'H'(\theta), \theta, 180, 359) \quad \theta_{\text{max}} = 262.967$$

$$H \text{ max τιμή είναι:} \quad F'H(\theta_{\text{max}}) = 0.304 \quad F'H_{\text{max}} := F'H(\theta_{\text{max}})$$

Υπολογισμός ενεργού τιμής.

$$F'H_{\text{eff}} := \left[ \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{359} (F'H(\theta))^2 d\theta \cdot \text{deg} \right]^{0.5} \quad F'H_{\text{eff}} = 0.217$$

Στους χώρους μέσης θερμοκρασίας (C,C')

$$F'C(\theta) := \frac{p(\theta) \cdot V_C(\theta)}{M \cdot R \cdot T_k} \quad F'C_{\text{mean}} := \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{359} F'C(\theta) d\theta \cdot \text{deg} \quad F'C_{\text{mean}} = 0.206$$

Υπολογισμός μέγιστης και ελάχιστης παροχής στον χώρο (C)

$$F'C'(\theta) := \frac{d}{d\theta} F'C(\theta)$$

$$\theta_{\text{max}} := \text{root}(F'C'(\theta), \theta, 0, 180) \quad \theta_{\text{max}} = 5.169$$

$$H \text{ max τιμή είναι:} \quad F'C(\theta_{\text{max}}) = 0.267 \quad F'C_{\text{max}} := F'C(\theta_{\text{max}})$$

$$\theta_{\text{min}} := \text{root}(F'C'(\theta), \theta, 180, 359) \quad \theta_{\text{min}} = 182.603$$

$$H \text{ min τιμή είναι:} \quad F'C(\theta_{\text{min}}) = 0.145 \quad F'C_{\text{min}} := F'C(\theta_{\text{min}})$$

Υπολογισμός ενεργού τιμής.

$$F'C_{\text{eff}} := \left[ \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{359} (F'C(\theta))^2 d\theta \cdot \text{deg} \right]^{0.5} \quad F'C_{\text{eff}} = 0.211$$

$$F'C(\theta) := \frac{p(\theta) \cdot V_C(\theta)}{M \cdot R \cdot T_k} \quad F'C_{\text{mean}} := \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{359} F'C(\theta) d\theta \cdot \text{deg} \quad F'C_{\text{mean}} = 0.187$$



Υπολογισμός μέγιστης και ελάχιστης παροχής στον χώρο (C')

$$F'C(\theta) := \frac{d}{d\theta} F'C(\theta)$$

$$\theta_{\max} := \text{root}(F'C(\theta), \theta, 0, 180)$$

$$\theta_{\max} = 96.973$$

Η max τιμή είναι:

$$F'C(\theta_{\max}) = 0.275$$

$$F'C_{\max} := F'C(\theta_{\max})$$

$$\theta_{\min} := \text{root}(F'C(\theta), \theta, 180, 359)$$

$$\theta_{\min} = 272.708$$

Η min τιμή είναι:

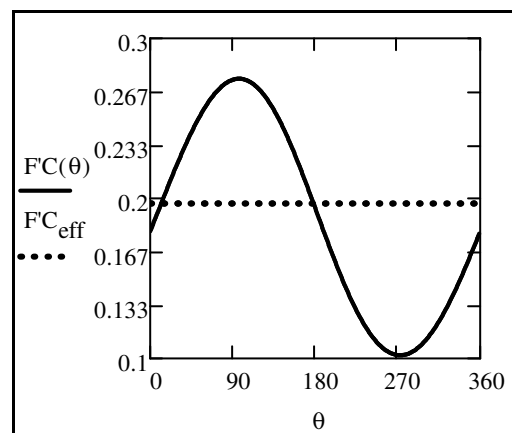
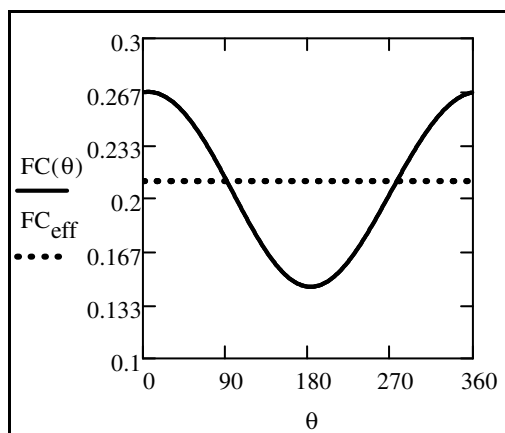
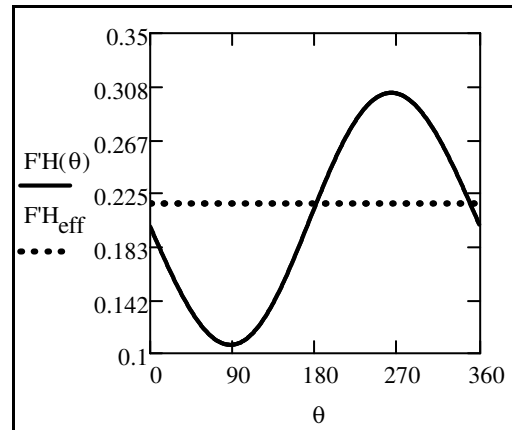
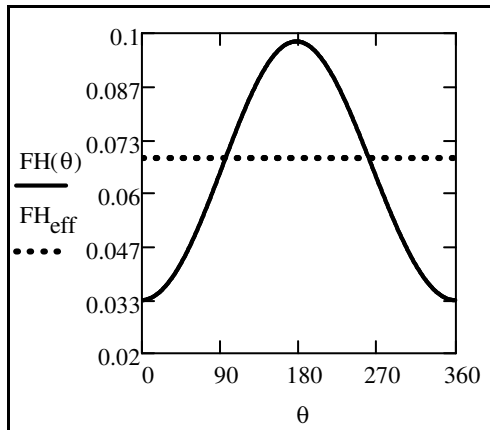
$$F'C(\theta_{\min}) = 0.102$$

$$F'C_{\min} := F'C(\theta_{\min})$$

Υπολογισμός ενεργού τιμής.

$$F'C_{\text{eff}} := \left[ \frac{1}{2\pi} \int_0^{359} (F'C(\phi))^2 d\phi \cdot \text{deg} \right]^{0.5}$$

$$F'C_{\text{eff}} = 0.197$$



$$FCT12 := FH_{\text{eff}} \quad FCT12 = 0.069$$

$$FCT34 := FC_{\text{eff}} \quad FCT34 = 0.211$$

$$FCT12' := F'H_{\text{eff}} \quad FCT12' = 0.217$$

$$FCT34' := F'C_{\text{eff}} \quad FCT34' = 0.197$$

Για τον υπολογισμό των FCT<sub>H</sub> FCT<sub>H'</sub> και FCT<sub>K</sub> FCT<sub>K'</sub> χρησιμοποιήθηκαν οι ενεργές τιμές που υπολογίστηκαν πιο πάνω.

$$FCT_H := FCT_{12} \quad FCT_H = 0.069 \quad FCT_K := FCT_{34} \quad FCT_K = 0.211 \quad FCT_R := \frac{FCT_H + FCT_K}{2}$$

$$FCT_{H'} := FCT_{12'} \quad FCT_{H'} = 0.217 \quad FCT_{K'} := FCT_{34'} \quad FCT_{K'} = 0.197 \quad FCT_{R'} := \frac{FCT_{H'} + FCT_{K'}}{2}$$

$$FCT_R = 0.14$$

$$FCT_{R'} = 0.207$$

**Τελικά οι ενεργές παροχές σε kg/s στους θερμοαντάκτες, ψύκτες και αναγεννητές είναι αντίστοιχα:**

$$gA_{eff_H} := \frac{FH_{max} - FH_{min}}{FCT_H} \cdot f \cdot M \quad gA_{eff_H} := 204.324 \cdot 10^{-3}$$

$$gA_{eff_{H'}} := \frac{F'H_{max} - F'H_{min}}{FCT_{H'}} \cdot f \cdot M \quad gA_{eff_{H'}} := 199.567 \cdot 10^{-3}$$

$$gA_{eff_K} := \frac{FC_{max} - FC_{min}}{FCT_K} \cdot f \cdot M \quad gA_{eff_K} := 80.983 \cdot 10^{-3}$$

$$gA_{eff_{K'}} := \frac{F'C_{max} - F'C_{min}}{FCT_{K'}} \cdot f \cdot M \quad gA_{eff_{K'}} := 183.560 \cdot 10^{-3}$$

$$gA_{eff_R} := \frac{gA_{eff_H} + gA_{eff_K}}{2} \quad gA_{eff_R} := 104.564 \cdot 10^{-3}$$

$$gA_{eff_{R'}} := \frac{gA_{eff_{H'}} + gA_{eff_{K'}}}{2} \quad gA_{eff_{R'}} := 189.459 \cdot 10^{-3}$$

**Απώλειες λόγω πτώσης πίεσης στους θερμοαλλάκτες  $Q_{ff}$  σε Watts**

**Ζεστός αναγεννητής**

Δυναμική συνεκτικότητα εργαζόμενου αερίου  $\mu_r$  σε kg/m sec :

$$\mu_r := \left[ \left[ 196.14 + 0.464(T_R - 293) - 0.093 \cdot \frac{P_{mean}}{10^6} \right] \cdot 10^{-7} \right] = 2.953 \times 10^{-5}$$

Μοριακό βάρος αερίου ηλίου  $M_w$  σε kg/mol :

$$M_w := 0.004$$

Μέση πυκνότητα αερίου στον αναγεννητή  $\rho_r$  σε  $\text{kg/m}^3$  :  $\rho_{r, \text{mean}} := \frac{M_w}{22414} \cdot \frac{p_{\text{mean}}}{0.1013} \cdot \frac{273}{T_r} = 9.514$

Παροχή μάζας  $g_r$  ανά μονάδα επιφάνειας ροής σε  $\text{kg/m}^2\text{sec}$  :  $g_r := \frac{gA_{\text{eff}_r}}{A_r} = 13.503$

Υγρή επιφάνεια ροής στον αναγεννητή  $A_{wg_r}$  σε  $\text{m}^2$  :

$$A_{wg_r} := \frac{\pi^2}{2} \cdot \text{mesh} \cdot D_{\text{wire}} \cdot D_i^2 \cdot N_r \cdot N_s = 11.336$$

Υδραυλική ακτίνα  $R_r$  σε m:  $R_r := \frac{A_r \cdot L_r}{A_{wg_r}} = 6.832 \times 10^{-5}$

Αριθμός Reynolds :  $Re_r := \frac{4 \cdot R_r \cdot g_r}{\mu_r} = 124.933$

Αφού  $60 < Re_r < 1000$  ο συντελεστής τριβής  $f_{fr}$  είναι:  $f_{fr} := 10^{(0.714 - 0.365 \cdot \log(Re_r))} = 0.889$

Πτώση πίεσης στον αναγεννητή  $\Delta p_r$  σε Pa :  $\Delta p_r := \frac{f_{fr} \cdot g_r^2 \cdot L_r}{2 \cdot R_r \cdot \rho_r} = 1.246 \times 10^4$

Απώλεια λόγω πτώσης πίεσης αερίου στον αναγεννητή  $Q_{\text{flr}}$  σε Watts :  $Q_{\text{flr}} := \frac{2 \cdot \Delta p_r \cdot gA_{\text{eff}_r} \cdot FCT_r}{\rho_r} = 38.333$

### Κρύος αναγεννητής

Δυναμική συνεκτικότητα εργαζόμενου αερίου  $\mu_r$  σε  $\text{kg/m sec}$

$$\mu_{r, \text{mean}} := \left[ \left[ 196.14 + 0.464(T_r - 293) - 0.093 \cdot \frac{p_{\text{mean}}}{10^6} \right] \cdot 10^{-7} \right] = 1.95 \times 10^{-5}$$

Μοριακό βάρος αερίου ηλίου  $M_w$  σε  $\text{kg/mol}$  :  $M_{w, \text{mean}} := 0.004$

Μέση πυκνότητα αερίου στον αναγεννητή  $\rho_r$  σε  $\text{kg/m}^3$  :  $\rho_{r, \text{mean}} := \frac{M_w}{22414} \cdot \frac{p_{\text{mean}}}{0.1013} \cdot \frac{273}{T_r} = 16.548$

Παροχή μάζας  $g_r$  ανά μονάδα επιφάνειας ροής σε  $\text{kg/m}^2\text{sec}$  :  $g_{r, \text{mean}} := \frac{gA_{\text{eff}_r}}{A_r} = 13.227$

Υγρή επιφάνεια ροής στον αναγεννητή  $A_{wg_r}$  σε  $m^2$  :

$$A_{wg_r} := \frac{\pi^2}{2} \cdot \text{mesh}' \cdot D_{\text{wire}} \cdot Di_r'^2 \cdot N_r' \cdot N_s' = 8.832$$

Υδραυλική ακτίνα  $R_r$  σε m:  $R_r' := \frac{A_r' \cdot L_r'}{A_{wg_r}} = 6.811 \times 10^{-5}$

Αριθμός Reynolds :

$$Re_r' := \frac{4 \cdot R_r' \cdot g_r'}{\mu_r'} = 184.811$$

Αφού  $60 < Re_r < 1000$  ο συντελεστής τριβής  $f_{fr}$  είναι:  $f_{fr}' := 10^{(0.714 - 0.365 \cdot \log(Re_r'))} = 0.77$

Πτώση πίεσης στον αναγεννητή  $\Delta p_r$  σε Pa :

$$\Delta p_r' := \frac{f_{fr}' \cdot g_r'^2 \cdot L_r'}{2 \cdot R_r' \cdot \rho_r'} = 2.511 \times 10^3$$

Απώλεια λόγω πτώσης πίεσης αερίου στον αναγεννητή  $Q_{flr}$  σε Watts :

$$Q_{flr}' := \frac{2 \cdot \Delta p_r' \cdot gA_{eff_r}' \cdot FCT_r'}{\rho_r'} = 11.911$$

### Ζεστός θερμαντήρας

Δυναμική συνεκτικότητα εργαζόμενου αερίου  $\mu_h$  σε kg/m sec :

$$\mu_h := \left[ 196.14 + 0.464(T_h - 293) - 0.093 \cdot \frac{p_{\text{mean}}}{10^6} \right] \cdot 10^{-7} = 4.179 \times 10^{-5}$$

Μοριακό βάρος αερίου ηλίου  $M_w$  σε kg/mol :

$$M_w := 0.004$$

Μέση πυκνότητα αερίου στον θερμαντήρα  $\rho_h$  σε kg/m<sup>3</sup> :

$$\rho_h := \frac{M_w \cdot p_{\text{mean}} \cdot 273}{22414 \cdot 0.1013 \cdot T_h} = 6.263$$

Παροχή μάζας  $g_h$  ανά μονάδα επιφάνειας ροής σε kg/m<sup>2</sup>sec :

$$g_h := \frac{gA_{eff_h}}{A_h} = 508.112$$

Αριθμός Reynolds :

$$Re_h := \frac{Di_h \cdot g_h}{\mu_h} = 4.863 \times 10^4$$

Αφού  $Re_h > 2000$  ο συντελεστής τριβής  $f_{fh}$  είναι:  $f_{fh} := 10^{(-1.34 - 0.20 \cdot \log(Re_h))} = 5.28 \times 10^{-3}$

Πτώση πίεσης στον θερμαντήρα  $\Delta p_h$  σε Pa :

$$\Delta p_h := \frac{2 \cdot f_{fh} \cdot g_h^2 \cdot L_h}{D_{ih} \cdot \rho_h} = 5.442 \times 10^4$$

Απώλεια λόγω πτώσης πίεσης αερίου στον θερμαντήρα  $Q_{fth}$  σε Watts :

$$Q_{fth} := \frac{2 \cdot \Delta p_h \cdot g_{Aeffh} \cdot FCT_h}{\rho_h} = 244.705$$

### Κρύος θερμαντήρας

Δυναμική συνεκτικότητα εργαζόμενου αερίου  $\mu_h$  σε kg/m sec :

$$\mu_h := \left[ \left[ 196.14 + 0.464(T_{h'} - 293) - 0.093 \cdot \frac{p_{mean}}{10^6} \right] \cdot 10^{-7} \right] = 1.859 \times 10^{-5}$$

Μοριακό βάρος αερίου ηλίου  $M_w$  σε kg/mol :

$$M_w := 0.004$$

Μέση πυκνότητα αερίου στον θερμαντήρα  $\rho_h$  σε kg/m<sup>3</sup> :

$$\rho_h := \frac{M_w \cdot p_{mean} \cdot 273}{22414 \cdot 0.1013 \cdot T_{h'}} = 17.733$$

Παροχή μάζας  $g_h$  ανά μονάδα επιφάνειας ροής σε kg/m<sup>2</sup>sec :

$$g_h := \frac{g_{Aeffh'}}{A_{h'}} = 214.609$$

Αριθμός Reynolds :

$$Re_{h'} := \frac{D_{ih'} \cdot g_{h'}}{\mu_{h'}} = 2.309 \times 10^4$$

Αφού  $Re_h > 2000$  ο συντελεστής τριβής  $f_{fh}$  είναι:

$$f_{fh} := 10^{(-1.34 - 0.20 \cdot \log(Re_{h'}))} = 6.128 \times 10^{-3}$$

Πτώση πίεσης στον θερμαντήρα  $\Delta p_{h'}$  σε Pa :

$$\Delta p_{h'} := \frac{2 \cdot f_{fh'} \cdot g_{h'}^2 \cdot L_{h'}}{D_{ih'} \cdot \rho_{h'}} = 2.228 \times 10^3$$

Απώλεια λόγω πτώσης πίεσης αερίου στον θερμαντήρα  $Q_{fth'}$  σε Watts :

$$Q_{fth'} := \frac{2 \cdot \Delta p_{h'} \cdot g_{Aeffh'} \cdot FCT_{h'}}{\rho_{h'}} = 10.897$$

### Ψύκτης ζεστού κυλίνδρου

Δυναμική συνεκτικότητα εργαζόμενου αερίου  $\mu_k$  σε kg/m sec :

$$\mu_{k'} := \left[ \left[ 196.14 + 0.464(T_k - 293) - 0.093 \cdot \frac{P_{\text{mean}}}{10^6} \right] \cdot 10^{-7} \right] = 2.045 \times 10^{-5}$$

Μοριακό βάρος αερίου ηλίου  $M_w$  σε kg/mol :  $M_w := 0.004$

Μέση πυκνότητα αερίου στον ψύκτη  $\rho_k$  σε kg/m<sup>3</sup> :  $\rho_k := \frac{M_w}{22414} \cdot \frac{P_{\text{mean}}}{0.1013} \cdot \frac{273}{T_k} = 15.466$

Παροχή μάζας  $g_k$  ανά μονάδα επιφάνειας ροής σε kg/m<sup>2</sup>sec :  $g_k := \frac{gA_{\text{eff}k}}{A_k} = 103.942$

Αριθμός Reynolds :  $Re_k := \frac{Di_k \cdot g_k}{\mu_k} = 1.017 \times 10^4$

Αφού  $Re_k > 2000$  ο συντελεστής τριβής  $f_{fk}$  είναι:  $f_{fk} := 10^{(-1.34 - 0.20 \cdot \log(Re_k))} = 7.221 \times 10^{-3}$

Πτώση πίεσης στον ψύκτη  $\Delta p_k$  σε Pa :  $\Delta p_k := \frac{2 \cdot f_{fk} \cdot g_k^2 \cdot L_k}{Di_k \cdot \rho_k} = 938.157$

Απώλεια λόγω πτώσης πίεσης αερίου στον ψύκτη  $Q_{\text{ff}k}$  σε Watts :  $Q_{\text{ff}k} := \frac{2 \cdot \Delta p_k \cdot gA_{\text{eff}k} \cdot FCT_k}{\rho_k} = 2.073$

### **Ψύκτης κρύου κυλίνδρου**

Δυναμική συνεκτικότητα εργαζόμενου αερίου  $\mu_k$  σε kg/m sec

$$\mu_{k'} := \left[ \left[ 196.14 + 0.464(T_{k'} - 293) - 0.093 \cdot \frac{P_{\text{mean}}}{10^6} \right] \cdot 10^{-7} \right] = 2.045 \times 10^{-5}$$

Μοριακό βάρος αερίου ηλίου  $M_w$  σε kg/mol :  $M_w := 0.004$

Μέση πυκνότητα αερίου στον ψύκτη  $\rho_k$  σε kg/m<sup>3</sup> :  $\rho_k := \frac{M_w}{22414} \cdot \frac{P_{\text{mean}}}{0.1013} \cdot \frac{273}{T_{k'}} = 15.466$

Παροχή μάζας  $g_{k'}$  ανά μονάδα επιφάνειας ροής σε kg/m<sup>2</sup>sec :  $g_{k'} := \frac{gA_{\text{eff}k'}}{A_{k'}} = 197.395$

Αριθμός Reynolds :  $Re_{k'} := \frac{Di_{k'} \cdot g_{k'}}{\mu_{k'}} = 1.931 \times 10^4$

Αφού  $Re_{k'} > 2000$  ο συντελεστής τριβής  $f_{fk'}$  είναι:  $f_{fk'} := 10^{(-1.34-0.20 \cdot \log(Re_{k'}))} = 6.351 \times 10^{-3}$

Πτώση πίεσης στον ψύκτη  $\Delta p_{k'}$  σε Pa :  $\Delta p_{k'} := \frac{2 \cdot f_{fk'} \cdot g_{k'}^2 \cdot L_{k'}}{D_{i_{k'}} \cdot \rho_{k'}} = 2.24 \times 10^3$

Απώλεια λόγω πτώσης πίεσης αερίου στον ψύκτη  $Q_{ffk'}$  σε Watts :  $Q_{ffk'} := \frac{2 \cdot \Delta p_{k'} \cdot g_{k'} \cdot A_{eff_{k'}} \cdot FCT_{k'}}{\rho_{k'}} = 10.477$

$$Q_{ffl} := Q_{fflr} + Q_{fflr'} + Q_{fflh} + Q_{fflh'} + Q_{fflk} + Q_{fflk'} = 318.397$$

**Απώλειες λόγω τακτικής μεταφοράς θερμότητας  $Q_{sh}$  σε Watts :**

Μήκος κύματος θερμοκρασίας  $lt_1$  στο τοίχωμα του ζεστού εκτοπιστή σε m :  $lt_1 := 0.0032$

Μήκος κύματος θερμοκρασίας  $lt_1'$  στο τοίχωμα του κρύου κυλίνδρου σε m :  $lt_1' := 0.0027$

Μήκος κύματος θερμοκρασίας  $lt_2$  στο τοίχωμα του ζεστού κυλίνδρου σε m :  $lt_2 := 0.0029$

Μήκος κύματος θερμοκρασίας  $lt_2'$  στο τοίχωμα του κρύου κυλίνδρου σε m :  $lt_2' := 0.0022$

$$lb := 1 + \frac{k_g}{2 \cdot \pi \cdot h} \left( \frac{lt_1}{k_d} + \frac{lt_2}{k_{we}} \right) = 1.486 \quad lb' := 1 + \frac{k_{g'}}{2 \cdot \pi \cdot h'} \left( \frac{lt_1'}{k_{d'}} + \frac{lt_2'}{k_{we'}} \right) = 1.161$$

$$Q_{sh} := \frac{1 + lb}{1 + lb^2} \cdot \frac{\pi \cdot S_d^2 \cdot k_g \cdot (T_h - T_k) \cdot Dc_e}{8 \cdot h \cdot L_d} + \frac{1 + lb'}{1 + lb'^2} \cdot \frac{\pi \cdot S_{d'}^2 \cdot k_{g'} \cdot (T_{k'} - T_{h'}) \cdot Dc_{e'}}{8 \cdot h' \cdot L_{d'}} = 132.319$$

**Απώλειες λόγω αναθέρμανσης στους αναγεννητές  $Q_{rh}$  σε Watts :**

Αδιάστατος αριθμός Prandtl  $pr$  για  $T_r$  στον ζεστό κύλινδρο :  $pr := 0.717$

Αδιάστατος αριθμός Prandtl  $pr'$  για  $T_r'$  στον κρύο κύλινδρο :  $pr' := 0.680$

Υπολογίζουμε τους συντελεστές μεταφοράς θερμότητας  $h_{ov}$  και  $h_{ov}'$  σε  $W/m^2 K$  :

$$\Pi_1 := -0.13 - 0.412 \cdot \log(Re_r) = -0.994 \quad \Pi_1' := -0.13 - 0.412 \cdot \log(Re_r') = -1.064$$

$$\Pi_2 := \log\left(\frac{1}{g_r \cdot c_p} \text{pr}^{\frac{2}{3}}\right) = -4.941$$

$$\Pi_2' := \log\left(\frac{1}{g_r' \cdot c_p} \text{pr}'^{\frac{2}{3}}\right) = -4.948$$

$$h_{OV} := 10^{\Pi_1 - \Pi_2} = 8.864 \times 10^3$$

$$h_{OV'} := 10^{\Pi_1' - \Pi_2'} = 7.655 \times 10^3$$

Οι αριθμοί μεταφερόμενων μονάδων για τους αναγεννητές χρησιμοποιώντας θερμοχωρητικότητα υπό σταθερό όγκο :

$$NTU_V := \frac{h_{OV} \cdot Aw_{g_r}}{g_{Aeff_r} \cdot c_v} = 309.518$$

$$NTU_{V'} := \frac{h_{OV'} \cdot Aw_{g_r'}}{g_{Aeff_r'} \cdot c_v} = 114.953$$

$$Q_{rh} := FCT_r \cdot g_{Aeff_r} \cdot c_v \cdot (T_h - T_k) \cdot \frac{2}{NTU_V + 2} + FCT_r \cdot g_{Aeff_r} \cdot c_v \cdot (T_{k'} - T_{h'}) \cdot \frac{2}{NTU_{V'} + 2} = 190.457$$

### ***Απώλειες λόγω μεταφοράς ενθαλπίας αερίου $Q_{pu}$ σε Watts***

Εφόσον η θερμοκρασία αερίου είναι μεγαλύτερη από 70 K έχουμε:  $Z_1 := 1$   $Z_1' := 1$

$$Q_{puhc} := \left(\pi \cdot \frac{Dc_e}{k_g}\right)^{0.6} \cdot \frac{2 \cdot L_d \cdot (T_h - T_k)}{1.5 \cdot Z_1} \cdot \left[\frac{2 \cdot (p_{max} - p_{min}) \cdot f \cdot c_p}{(T_h + T_k)R}\right]^{1.6} \cdot h^{2.6} = 5.003$$

$$Q_{puhc'} := \left(\pi \cdot \frac{Dc_e'}{k_g'}\right)^{0.6} \cdot \frac{2 \cdot L_d' \cdot (T_{k'} - T_{h'})}{1.5 \cdot Z_1'} \cdot \left[\frac{2 \cdot (p_{max} - p_{min}) \cdot f \cdot c_p}{(T_{k'} + T_{h'})R}\right]^{1.6} \cdot h'^{2.6} = 1.778$$

$$Q_{pu} := Q_{puhc} + Q_{puhc'} = 6.781$$

### ***Απώλειες λόγω παλινδρόμησης θερμοκρασίας $Q_{ts}$ σε Watts***

Πυκνότητα του υλικού της μήτρας του ζεστού αναγεννητή  $\rho_{mx}$  σε  $\text{kg/m}^3$  :  $\rho_{mx} := 7500$

Θερμοχωρητικότητα της μήτρας του ζεστού αναγεννητή  $c_{pmx}$  σε  $\text{J/kg K}$  :  $c_{pmx} := 525$

Πυκνότητα του υλικού της μήτρας του κρύου αναγεννητή  $\rho_{mx'}$  σε  $\text{kg/m}^3$  :  $\rho_{mx'} := 7500$



Θερμοχωρητικότητα της μήτρας του κρύου αναγεννητή  $c_{pmx}$  σε J/kg K :  $c_{pmx} := 525$

Μάζες όλου του υλικού της μήτρας των αναγεννητών  $mmx$  και  $mmx'$  σε kg:

$$mmx := N_r \cdot \frac{\pi}{4} \cdot Di_r^2 \cdot L_r \cdot (1 - \psi) \cdot \rho_{mx} = 5.973$$

$$mmx' := N_r' \cdot \frac{\pi}{4} \cdot Di_r'^2 \cdot L_r' \cdot (1 - \psi') \cdot \rho_{mx'} = 4.64$$

Παλινδρόμηση της θερμοκρασίας πάνω στο υλικό της μήτρας των αναγεννητών  $deltmx$ ,  $deltmx'$  σε K :

$$deltmx := \frac{gAeff_r \cdot c_v \cdot FCT_r \cdot (T_h - T_k)}{f \cdot mmx \cdot c_{pmx}} = 1$$

$$deltmx' := \frac{gAeff_r' \cdot c_v \cdot FCT_r' \cdot (T_k' - T_h')}{f \cdot mmx' \cdot c_{pmx'}} = 0.3$$

$$Q_{ts} := \frac{FCT_r \cdot gAeff_r \cdot c_v \cdot deltmx}{2} + \frac{FCT_r' \cdot gAeff_r' \cdot c_v \cdot deltmx'}{2} = 40.986$$

**Απώλειες λόγω αγωγιμότητας αερίου εσωτερικά των εκτοπιστών  $Q_{cond1}$  σε Watts**

$$Q_{cond1} := \frac{k_g \cdot Ai_d \cdot (T_h - T_k)}{L_d} + \frac{k_g' \cdot Ai_{d'} \cdot (T_k' - T_h')}{L_{d'}} = 3.239$$

**Απώλειες λόγω αγωγιμότητας αερίου στο διάκενο  $Q_{cond2}$  σε Watts**

Επιφάνεια ροής του αερίου στο διάκενο  $A_{gap}$  για ζεστό κύλινδρο σε  $m^2$  :

$$A_{gap} := \pi \cdot Dc_e \cdot h = 1.571 \times 10^{-4}$$

Επιφάνεια ροής του αερίου στο διάκενο  $A_{gap'}$  για κρύο κύλινδρο σε  $m^2$  :

$$A_{gap'} := \pi \cdot Dc_e' \cdot h' = 1.728 \times 10^{-4}$$

$$Q_{cond2} := \frac{k_g \cdot A_{gap} \cdot (T_h - T_k)}{L_d} + \frac{k_g' \cdot A_{gap'} \cdot (T_k' - T_h')}{L_{d'}} = 0.083$$

**Απώλειες λόγω ακτινοβολίας αερίου εσωτερικά των εκτοπιστών  $Q_{cond3}$  σε Watts**

Συντελεστής επιφάνειας για την ακτινωτή μεταφορά θερμότητας  $FA_d$ :  $\frac{Di_d}{L_d} = 0.425$

Εφόσον  $0.2 < Di_d / L_d < 7$  έχουμε:  $FA_d := 0.50 + 0.20 \cdot \ln\left(\frac{Di_d}{L_d}\right) = 0.329$

Συντελεστής εκπομπής ακτινοβολίας για το θερμό εσωτερικό του ζεστού εκτοπιστή  $EH_d$  είναι:

$$EH_d := 0.6$$

Συντελεστής εκπομπής ακτινοβολίας για το κρύο εσωτερικό του ζεστού εκτοπιστή  $EH_d$  είναι:

$$EC_d := 0.5$$

Ο συντελεστής ικανότητας ακτινοβολίας για την ακτινωτή μεταφορά θερμότητας  $FE_d$  είναι:

$$FE_d := EC_d \cdot EH_d = 0.3$$

Συντελεστής ικανότητας της ακτινοβολίας θερμότητας του προστατευτικού καλύμματος (Radiation shield factor)  $FN_d$  είναι

$$FN_d := \frac{1}{1 + nrs_d} = 1$$

Σταθερά των Stefan - Boltzmann  $\sigma$  σε  $W/m^2 K^4$  είναι:  $\sigma := 5.6697 \cdot 10^{-8}$

$$Q_{cond3\_hd} := FA_d \cdot FE_d \cdot FN_d \cdot Ai_d \cdot \sigma \cdot (T_h^4 - T_k^4) = 11.823$$

Συντελεστής επιφάνειας για την ακτινωτή μεταφορά θερμότητας  $FA'_d$ :  $\frac{Di_{d'}}{L_{d'}} = 0.435$

Εφόσον  $0.2 < Di_{d'} / L_{d'} < 7$  έχουμε:  $FA_{d'} := 0.50 + 0.20 \cdot \ln\left(\frac{Di_{d'}}{L_{d'}}\right) = 0.333$

Συντελεστής εκπομπής ακτινοβολίας για το θερμό εσωτερικό του ζεστού εκτοπιστή  $EH_{d'}$  είναι:

$$EH_{d'} := 0.6$$

Συντελεστής εκπομπής ακτινοβολίας για το κρύο εσωτερικό του ζεστού εκτοπιστή  $EH_{d'}$  είναι:

$$EC_{d'} := 0.5$$

Ο συντελεστής ικανότητας ακτινοβολίας για την ακτινωτή μεταφορά θερμότητας  $FE_{d'}$  είναι:

$$FE_{d'} := EC_{d'} \cdot EH_{d'} = 0.3$$

Συντελεστής ικανότητας της ακτινοβολίας θερμότητας του προστατευτικού καλύμματος (Radiation shield factor)  $FN_{d'}$  είναι

$$FN_{d'} := \frac{1}{1 + nrs_{d'}} = 1$$

Σταθερά των Stefan - Boltzmann  $\sigma$  σε  $W/m^2 K^4$  είναι:  $\sigma := 5.6697 \cdot 10^{-8}$

$$Q_{cond3\_cd} := FA_{d'} \cdot FE_{d'} \cdot FN_{d'} \cdot Ai_{d'} \cdot \sigma \cdot (T_{k'}^4 - T_{h'}^4) = 0.191$$

$$Q_{cond3} := Q_{cond3\_hd} + Q_{cond3\_cd} = 12.014$$

**Απώλειες λόγω αγωγιμότητας τοιχωμάτων εκτοπιστών  $Q_{cond4}$  σε Watts**

$$Q_{cond4} := \frac{T_h - T_k}{R_{wd}} + \frac{T_{k'} - T_{h'}}{R_{wd'}} = 228.14$$

**Απώλειες λόγω αγωγιμότητας τοιχωμάτων κυλίνδρων  $Q_{cond5}$  σε Watts**

$$Q_{cond5} := \frac{T_h - T_k}{R_{we}} + \frac{T_{k'} - T_{h'}}{R_{we'}} = 228.14$$

**Απώλειες λόγω αγωγιμότητας τοιχωμάτων αναγεννητών  $Q_{cond6}$  σε Watts**

$$Q_{cond6} := \frac{T_h - T_k}{R_{wr}} \cdot N_r + \frac{T_{k'} - T_{h'}}{R_{wr'}} \cdot N_{r'} = 826.72$$

**Απώλειες λόγω αγωγιμότητας της μήτρας των αναγεννητών  $Q_{cond7}$  σε Watts**

Ειδική θερμική αγωγιμότητα υλικού μήτρας ζεστού αναγεννητή  $k_{mr}$  σε  $W/mK$ :  $k_{mr} := 19$

Ειδική θερμική αγωγιμότητα υλικού μήτρας κρύου αναγεννητή  $k_{mr'}$  σε  $W/mK$ :  $k_{mr'} := 16$

$$I := \frac{1 + \frac{k_{mr}}{k_g}}{1 - \frac{k_{mr}}{k_g}} = -1.024 \quad I' := \frac{1 + \frac{k_{mr'}}{k_{g'}}}{1 - \frac{k_{mr'}}{k_{g'}}} = -1.019$$

Ειδική θερμική αγωγιμότητα της μήτρας του ζεστού αναγεννητή  $k_{mx}$  σε  $W/m K$  :

$$k_{mx} := k_g \cdot \left( \frac{\Gamma - 1 + \psi}{\Gamma + 1 - \psi} \right) = 0.663$$

Ειδική θερμική αγωγιμότητα της μήτρας του κρύου αναγεννητή  $k_{mx}$  σε W/m K :

$$k_{mx'} := k_g \cdot \left( \frac{\Gamma' - 1 + \psi'}{\Gamma' + 1 - \psi'} \right) = 0.456$$

Επιφάνεια διατομής κατά τη ροή του αερίου ζεστού αναγεννητή  $A_{fr}$  σε  $m^2$  :

$$A_{fr} := \frac{\pi}{4} \cdot Di_r^2 = 1.963 \times 10^{-3}$$

Επιφάνεια διατομής κατά τη ροή του αερίου κρύου αναγεννητή  $A_{fr'}$  σε  $m^2$  :

$$A_{fr'} := \frac{\pi}{4} \cdot Di_{r'}^2 = 3.632 \times 10^{-3}$$

$$Q_{cond7} := \frac{N_r \cdot k_{mx'} \cdot A_{fr'} \cdot (T_h - T_k)}{L_r} + \frac{N_r \cdot k_{mx} \cdot A_{fr} \cdot (T_h - T_k)}{L_r} = 95.753$$

$$Q_{cond} := Q_{cond1} + Q_{cond2} + Q_{cond3} + Q_{cond4} + Q_{cond5} + Q_{cond6} + Q_{cond7} = 1.394 \times 10^3$$

$$Q_{losses} := Q_{ffl} + Q_{sh} + Q_{pu} + Q_{rh} + Q_{cond} + Q_{ts} = 2.083 \times 10^3$$

$$Q_{ind} = 3.234 \times 10^3$$

$$Q_{nw} := Q_{ind} - Q_{losses} = 1.151 \times 10^3$$

$$Q_e = 1.028 \times 10^3$$

$$COP_{nw} := \frac{Q_u}{Q_e} = 1.12$$

### *Αποτελέσματα*

1. Απώλειες λόγω πτώσης πίεσης στους θερμοεναλλάκτες  $Q_{ff}$  σε Watts :  $Q_{ff} = 318.397$
2. Απώλειες λόγω τακτικής μεταφοράς θερμότητας  $Q_{sh}$  σε Watts :  $Q_{sh} = 132.319$
3. Απώλειες λόγω μεταφοράς ενθαλπίας αερίου  $Q_{pu}$  σε Watts :  $Q_{pu} = 6.781$
4. Απώλειες λόγω αναθέρμανσης  $Q_{rh}$  σε Watts :  $Q_{rh} = 190.457$
5. Απώλειες λόγω παλινδρόμησης θερμοκρασίας  $Q_{ts}$  σε Watts :  $Q_{ts} = 40.986$
6. Απώλειες λόγω αγωγής  $Q_{cond}$  σε Watts :  $Q_{cond} = 1.394 \times 10^3$
7. Συνολικές απώλειες  $Q_{losses}$  σε Watts :  $Q_{losses} = 2.083 \times 10^3$
8. Η ενδεικνύμενη θερμική ισχύς  $Q_{out}$  (σε W) :  $Q_{ind} = 3.234 \times 10^3$
9. Ωφέλιμη θερμική ισχύς  $Q_u$  σε Watts :  $Q_u = 1.151 \times 10^3$
10. Συντελεστής συμπεριφοράς COP :  $COP_h = 1.12$

**ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ VMK6**  
**ΜΗΧΑΝΗ ΤΟΥ KUHL (1990)**  
**VUILLEUMIER HEAT PUMP - ΜΟΝΤΕΛΟ ΑΠΩΛΕΙΩΝ J.PFEIFFER**

Στο πρόγραμμα VMK6 εφαρμόζεται το μοντέλο απωλειών του J. Pfeiffer στην περίπτωση της Vuilleumier αντλίας θερμότητας του KUHL. Οι εξισώσεις αυτές αναφέρονται στο "Optimization of the Appendix Gap Design in Stirling Engines", Jens Pfeiffer, Hans-Detlev Kuehl, TU Dortmund University, Lehrstuhl fur Thermodynamic, 13th International Energy Conversion Engineering Conference, July 27-31, 2015, Orlando, Florida. Για την επίλυση των σχέσεων αυτών ήταν απαραίτητο να παρθούν αποτελέσματα απ' το ισοθερμοκρασιακό μοντελό ανάλυσης που εφαρμόστηκε στο πρόγραμμα VMK1.

Σύστημα μονάδων σε **S.I.**

**Το πρόγραμμα αυτό παρέχει τις Shuttle heat transfer, Enthalpy heat transfer και Conduction loss κατα μήκος των εμβόλων μιας μηχανής Vuilleumier.**

**Θεωρείται μια σταθερή τιμή για το άθροισμα των τριών αυτών ενεργειών και έπειτα μια επαναληπτική μέθοδος δίνει το προφίλ της θερμοκρασίας του αερίου στο διάκενο εμβόλου-κυλίνδρου. Το προφίλ αυτό αλλάζει σημαντικά τα αντίστοιχα χωρικά προφίλ των τριών παραπάνω μεταφορών θερμότητας.**

**Η σταθερή τιμή του αθροίσματος δεν μπαίνει αυθαίρετα. Αν θεωρηθεί γραμμικό προφίλ θερμοκρασίας, τότε προκύπτει ένα χωρικό προφίλ του αθροίσματος. Η μέση τιμή αυτού του προφίλ μπαίνει σαν δεδομένο εισόδου στο πρόγραμμα για το "Σ\*".**

**Στην αρχή του προγράμματος εισάγονται διάφορα στοιχεία της μηχανής.**

**Στοιχεία μηχανής (ζεστός κύλινδρος)**

Διάκενο ζεστού εκτοπιστή - κυλίνδρου:

$h$

Αδιαβατικό μήκος ζεστού εκτοπιστή :

$l_{ad} := 0.136$

Μήκος διακένου ζεστού εκτοπιστή :

$l_a := 0.2$

Μισή διαδρομή ζεστού εκτοπιστή :	$x' := 0.032$	
Διάμετρος ζεστού κυλίνδρου :	$d_C := 0.1$	
Όγκος σάρωσης του ζεστού εκτοπιστή:	$V_C := \frac{\pi}{4} \cdot d_C^2 \cdot 2 \cdot x'$	$V_C = 5.027 \times 10^{-4}$
Μήκος του μέρους του ζεστού εκτοπιστή που βρίσκεται δίπλα στην τσιμούχα :	$l_{bot} := x'$	
Λόγος μηκών :	$r_x := \frac{x'}{l_{ad}}$	$r_x = 0.235$
Κυκλική συχνότητα :	$\omega$	
Συχνότητα περιστροφής :	$n(\omega) := \frac{\omega}{2 \cdot \pi}$	
Διάσταση διακένου στο bottom :	$h_0$	
Κωνικότητα :	$c_h$	
Λόγος μηκών διακένου στο bottom :	$r_h$	
Πάχος τοιχώματος ζεστού εκτοπιστή :	$h_D := 0.0053$	
Πάχος τοιχώματος ζεστού κυλίνδρου :	$h_C := 0.02$	

### Στοιχεία αερίου

Είδος αερίου :	Helium
Σταθερά αερίου :	$R := 2080$

Αδιαβατικός δείκτης :	$\gamma := 1.67$
Ειδική θερμοχωρητικότητα :	$c_p := \gamma \cdot \frac{R}{\gamma - 1} \quad c_p = 5184.478$
Θερμοκρασία ζεστού θερμαντήρα :	$T_h := 773$
Θερμοκρασία ψύκτη ζεστού κυλίνδρου:	$T_k := 313$
Κλίση θερμοκρασίας :	$Y_0 := \frac{T_h - T_k}{l_{ad}} = 3382.353$
Λόγος θερμοκρασιών :	$r_T := \frac{0.5 \cdot x' \cdot Y_0}{\left( \frac{T_h - T_k}{\ln\left(\frac{T_h}{T_k}\right)} \right)} \quad r_T = 0.106$
Μέση πίεση :	$p_{av} := 1.007 \cdot 10^7$
Πλάτος πίεσης :	$p' := 4.505 \cdot 10^5$
Διαφορά φάσης μεταξύ της πίεσης και της ταχύτητας του ζεστού εκτοπιστή :	$\theta_p := 154 \cdot \frac{\pi}{180} = 2.688$
Αριθμός Prandtl :	$Pr := 0.717$



$$\text{Hel} := \begin{pmatrix} 0.6399534868 \cdot 10^{-5} \\ 0.5114187829 \cdot 10^{-7} \\ -0.1719432062 \cdot 10^{-10} \\ 0.4455918887 \cdot 10^{-14} \\ -0.1326210920 \cdot 10^{-13} \\ -0.1476490870 \cdot 10^{-3} \\ 0.4542092830 \cdot 10^{-11} \\ 0.1330719443 \cdot 10^{-18} \\ 5.19 \end{pmatrix}$$

$$\mu(p, T_{Cw}) := \text{Hel}_0 + \text{Hel}_1 \cdot T_{Cw} + \text{Hel}_2 \cdot T_{Cw}^2 + \text{Hel}_3 \cdot T_{Cw}^3 + \text{Hel}_4 \cdot p + \frac{\text{Hel}_5}{(T_{Cw} - \text{Hel}_8) + \text{Hel}_6 \cdot p} \cdot \frac{(T_{Cw} - \text{Hel}_8) + \text{Hel}_7 \cdot p^2}{(T_{Cw} - \text{Hel}_8)}$$

Εύρος όπου δουλεύει η παραπάνω σχέση:  
 $1 < p < 200 \text{ bar}$  ,  $77 < T < 1273 \text{ K}$   
 Η θερμοκρασία σε K και η πίεση σε bar.

Κινηματικό ιξώδες :

$$\nu(p, T_{Cw}) := \frac{\mu(p, T_{Cw}) \cdot R \cdot T_{Cw}}{p \cdot 10^5}$$

Συντελεστής θερμικής διαχυτότητας :

$$\alpha(p, T_{Cw}) := \frac{\nu(p, T_{Cw})}{Pr}$$

Αριθμός Prandtl :

$$Pr(p, T_{Cw}) := \frac{\nu(p, T_{Cw})}{\alpha(p, T_{Cw})}$$

### Stainless Steel thermal conductivity

$$\lambda(T_{Cw}) := 0.0140 \cdot T_{Cw} + 10.5$$

**Έχουν προστεθεί οι συναρτήσεις Ψ1, Ψ2, Ψ3, Ψ4 και Ψ5. Αυτό έγινε για να απλοποιηθούν οι εκφράσεις των μεταφορών θερμότητας  $Q_{sh}$ ,  $H_{en}$ ,  $Q_{cond}$  και επιπλέον να φανεί ότι αυτές είναι γραμμικές συναρτήσεις της κλίσης της θερμοκρασίας "Y".**

$$h(x^*, c_h, h_0) := h_0 \cdot (c_h \cdot x^* + 1)$$

$$Re_\omega(\omega, p, T_{Cw}, h) := \frac{4 \cdot h^2 \cdot \omega}{\nu(p, T_{Cw})}$$

$$Re_\omega(x^*, \omega, p, c_h, T_{Cw}, h_0) := Re_\omega(\omega, p, T_{Cw}, h(x^*, c_h, h_0))$$

$$Pe_\omega(Re_\omega, Pr) := Re_\omega \cdot Pr$$

$$Pe_\omega(x^*, \omega, p, c_h, T_{Cw}, h_0) := Pe_\omega(Re_\omega(x^*, \omega, p, c_h, T_{Cw}, h_0), Pr(p, T_{Cw}))$$

$$k(\text{Re}_\omega) := \frac{1}{4} \cdot \sqrt{i \cdot \text{Re}_\omega}$$

$$\underline{k}(x^*, \omega, p, c_h, T_{Cw}, h_0) := k(\text{Re}_\omega(x^*, \omega, p, c_h, T_{Cw}, h_0))$$

$$b(k, \text{Pr}) := k \cdot \sqrt{\text{Pr}}$$

$$\underline{b}(x^*, \omega, p, c_h, T_{Cw}, h_0) := b(k(x^*, \omega, p, c_h, T_{Cw}, h_0), \text{Pr}(p, T_{Cw}))$$

$$\underline{J}(x^*, c_h, r_h) := \frac{l_{\text{bot}}}{l_{\text{ad}}} \cdot r_h + \frac{c_h \cdot x^* + \ln\left[\left(\frac{T_h}{T_k} - 1\right) \cdot x^* + 1\right] \cdot \left(1 - c_h \cdot \frac{T_k}{T_h - T_k}\right)}{\frac{T_h}{T_k} - 1}$$

$$\underline{\Gamma}(x^*, r_p, c_h, r_h, T_{Cw}, J) := \frac{T_{Cw}}{T_k} \cdot \frac{1}{1 + c_h \cdot x^*} \cdot \sqrt{\left(r_h - \frac{r_p}{r_x} \cdot \sin(\theta_p) \cdot J\right)^2 + \left(\frac{r_p}{r_x} \cdot \cos(\theta_p) \cdot J\right)^2}$$

$$\underline{\Gamma}(x^*, r_p, c_h, r_h, T_{Cw}) := \Gamma(x^*, r_p, c_h, r_h, T_{Cw}, J(x^*, c_h, r_h))$$

$$\theta_u(r_p, r_h, J) := -\text{atan}\left(\frac{-r_p \cdot \cos(\theta_p) \cdot J}{r_x \cdot r_h - r_p \cdot \sin(\theta_p) \cdot J}\right)$$

$$\underline{\theta}_u(x^*, r_p, r_h, c_h) := \theta_u(r_p, r_h, J(x^*, c_h, r_h))$$

$$\Lambda(\theta_u, \Gamma, k) := \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma \cdot e^{-i \cdot \theta_u} - \frac{1}{2 \cdot k} \cdot \tanh(k)}{\frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot k} \cdot \tanh(k)}$$

$$\underline{\Lambda}(x^*, \omega, p, r_p, c_h, r_h, T_{Cw}, h_0) := \Lambda(\theta_u(x^*, r_p, r_h, c_h), \Gamma(x^*, r_p, c_h, r_h, T_{Cw}), k(x^*, \omega, p, c_h, T_{Cw}, h_0))$$

$$\Xi 1(b, k, Pr) := \frac{b}{\tanh(2 \cdot b)} - \frac{Pr \cdot k}{\tanh(2 \cdot k)}$$

$$\underline{\Xi 1}(x^*, \omega, p, c_h, T_{Cw}, h_0) := \Xi 1(b(x^*, \omega, p, c_h, T_{Cw}, h_0), k(x^*, \omega, p, c_h, T_{Cw}, h_0), Pr(p, T_{Cw}))$$

$$\Xi 2(b, k) := \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{b^2 - (\bar{k})^2} \cdot \left( \frac{\bar{k}}{\sinh(2 \cdot \bar{k})} - \frac{b}{\sinh(2 \cdot b)} \right)$$

$$\underline{\Xi 2}(x^*, \omega, p, c_h, T_{Cw}, h_0) := \Xi 2(b(x^*, \omega, p, c_h, T_{Cw}, h_0), k(x^*, \omega, p, c_h, T_{Cw}, h_0))$$

$$\Xi 3(b, k) := \frac{\tanh(b)}{2 \cdot b} - \frac{1}{4 \cdot \cosh(b) \cdot \cosh(\bar{k})} \cdot \left( \frac{\sinh(b - \bar{k})}{b - \bar{k}} + \frac{\sinh(b + \bar{k})}{b + \bar{k}} \right)$$

$$\underline{\Xi 3}(x^*, \omega, p, c_h, T_{Cw}, h_0) := \Xi 3(b(x^*, \omega, p, c_h, T_{Cw}, h_0), k(x^*, \omega, p, c_h, T_{Cw}, h_0))$$

$$\Xi 4(b, k) := \frac{1}{4 \cdot \sinh(2 \cdot b) \cdot \sinh(2 \cdot \bar{k})} \cdot \left( \frac{\sinh(2 \cdot b - 2 \cdot \bar{k})}{b - \bar{k}} - \frac{\sinh(2 \cdot b + 2 \cdot \bar{k})}{b + \bar{k}} \right)$$

$$\Xi4(x^*, \omega, p, c_h, T_{CW}, h_0) := \Xi4(b(x^*, \omega, p, c_h, T_{CW}, h_0), k(x^*, \omega, p, c_h, T_{CW}, h_0))$$

$$\Psi1(\omega, \alpha, Pe_\omega, Pr, k, b, \Lambda, \Xi1, T_{CW}) := 8 \cdot \pi \cdot \frac{\sqrt{\frac{\alpha}{\omega}}}{d_C} \cdot \frac{1}{\sqrt{Pe_\omega}} \cdot \left[ \frac{x'}{T_{CW}} \cdot \frac{c_p}{R} \cdot \frac{1}{1 - Pr} \cdot \text{Re}[\Xi1 - \Lambda \cdot (b \cdot \tanh(b) - Pr \cdot k \cdot \tanh(k))] \right]$$

$$\Psi1(x^*, \omega, p, r_p, r_h, c_h, T_{CW}, h_0) := \Psi1(\omega, \alpha(p, T_{CW}), Pe_\omega(x^*, \omega, p, c_h, T_{CW}, h_0), Pr(p, T_{CW}), k(x^*, \omega, p, c_h, T_{CW}, h_0), b(x^*, \omega, p, c_h, T_{CW}, h_0), \Lambda(x^*, \omega, p, r_p, c_h, r_h))$$

$$\Psi2(\omega, \alpha, Pe_\omega, b, r_p) := -8 \cdot \pi \cdot \frac{\sqrt{\frac{\alpha}{\omega}}}{d_C} \cdot \frac{1}{\sqrt{Pe_\omega}} \cdot r_p \cdot \text{Im}(e^{-i \cdot \theta_p \cdot b \cdot \tanh(b)})$$

$$\Psi2(x^*, \omega, p, r_p, c_h, T_{CW}, h_0) := \Psi2(\omega, \alpha(p, T_{CW}), Pe_\omega(x^*, \omega, p, c_h, T_{CW}, h_0), b(x^*, \omega, p, c_h, T_{CW}, h_0), r_p)$$

$$\Psi3(\omega, \alpha, Pe_\omega, Pr, \Lambda, \Gamma, \Xi2, \Xi3, \Xi4, \theta_u, T_{CW}) := \pi \cdot \frac{\sqrt{\frac{\alpha}{\omega}}}{d_C} \cdot \sqrt{Pe_\omega} \cdot \left[ \frac{x'}{T_{CW}} \cdot \frac{c_p}{R} \cdot \frac{1}{1 - Pr} \cdot \text{Im} \left[ \Lambda \cdot \left( -\Xi2 - 2 \cdot \bar{\Lambda} \cdot \Xi3 + \Xi4 + \Gamma \cdot e^{i \cdot \theta_u} \right) + \bar{\Lambda} \cdot \Xi3 - \Xi4 \right] \right]$$

$$\Psi3(x^*, \omega, p, r_p, c_h, r_h, T_{CW}, h_0, \Xi2, \Xi3, \Xi4, \theta_u) := \Psi3(\omega, \alpha(p, T_{CW}), Pe_\omega(x^*, \omega, p, c_h, T_{CW}, h_0), Pr(p, T_{CW}), \Lambda(x^*, \omega, p, r_p, c_h, r_h, T_{CW}, h_0), \Gamma(x^*, r_p, c_h, r_h, T_{CW}))$$

$$\Psi3(x^*, \omega, p, r_p, r_h, c_h, T_{CW}, h_0) := \Psi3(x^*, \omega, p, r_p, c_h, r_h, T_{CW}, h_0, \Xi2(x^*, \omega, p, c_h, T_{CW}, h_0), \Xi3(x^*, \omega, p, c_h, T_{CW}, h_0), \Xi4(x^*, \omega, p, c_h, T_{CW}, h_0), \theta_u(x^*, r_p, r_h, c_h))$$

$$\Psi4(\omega, \alpha, Pe_\omega, r_p, \Lambda, \Gamma, \Xi2, \Xi3, \Xi4, \theta_u) := -\pi \cdot \frac{\sqrt{\frac{\alpha}{\omega}}}{d_C} \cdot \sqrt{Pe_\omega} \cdot \left[ r_p \cdot \left[ \Gamma \cdot \cos(\theta_p - \theta_u) + \text{Re} \left[ \left( -\Xi2 - 2 \cdot \bar{\Lambda} \cdot \Xi3 + \Xi4 \right) \cdot e^{-i \cdot \theta_p} \right] \right] \right]$$

$$\Psi4(x^*, \omega, p, r_p, c_h, r_h, T_{Cw}, h_0, \Xi2, \Xi3, \Xi4, \theta_u) := \Psi4(\omega, \alpha(p, T_{Cw}), Pe_\omega(x^*, \omega, p, c_h, T_{Cw}, h_0), r_p, \Lambda(x^*, \omega, p, r_p, c_h, r_h, T_{Cw}, h_0), \Gamma(x^*, r_p, c_h, r_h, T_{Cw}), \Xi2, \Xi3,$$

$$\Psi4(x^*, \omega, p, r_p, r_h, c_h, T_{Cw}, h_0) := \Psi4(x^*, \omega, p, r_p, c_h, r_h, T_{Cw}, h_0, \Xi2(x^*, \omega, p, c_h, T_{Cw}, h_0), \Xi3(x^*, \omega, p, c_h, T_{Cw}, h_0), \Xi4(x^*, \omega, p, c_h, T_{Cw}, h_0), \theta_u(x^*, r_p, r_h, c_h$$

$$\Psi5(\omega, \lambda) := \frac{1}{n(\omega) \cdot p_{av} \cdot V_C} \cdot \pi \cdot d_C \cdot (h_C \cdot \lambda + h_D \cdot \lambda)$$

$$\Psi5(\omega, T_{Cw}) := \Psi5(\omega, \lambda(T_{Cw}))$$

$$Q_{sh}^*(\Psi1, \Psi2, Y) := \Psi1 \cdot Y + \Psi2$$

$$Q_{sh}^*(x^*, \omega, p, r_p, r_h, c_h, T_{Cw}, h_0, Y) := Q_{sh}^*(\Psi1(x^*, \omega, p, r_p, r_h, c_h, T_{Cw}, h_0), \Psi2(x^*, \omega, p, r_p, c_h, T_{Cw}, h_0), Y)$$

$$H_{en}^*(\Psi3, \Psi4, Y) := \Psi3 \cdot Y + \Psi4$$

$$H_{en}^*(x^*, \omega, p, r_p, r_h, c_h, T_{Cw}, h_0, Y) := H_{en}^*(\Psi3(x^*, \omega, p, r_p, r_h, c_h, T_{Cw}, h_0), \Psi4(x^*, \omega, p, r_p, r_h, c_h, T_{Cw}, h_0), Y)$$

$$Q_{cond}^*(\Psi5, Y) := \Psi5 \cdot Y$$

$$Q_{cond}^*(\omega, T_{Cw}, Y) := Q_{cond}^*(\Psi5(\omega, T_{Cw}), Y)$$

$$\Sigma^*(Q_{sh}^*, H_{en}^*, Q_{cond}^*) := Q_{sh}^* + H_{en}^* + Q_{cond}^*$$

$$\Sigma^*(x^*, \omega, p, r_p, r_h, c_h, T_{Cw}, h_0, Y) := \Sigma^*(Q_{sh}^*(x^*, \omega, p, r_p, r_h, c_h, T_{Cw}, h_0, Y), H_{en}^*(x^*, \omega, p, r_p, r_h, c_h, T_{Cw}, h_0, Y), Q_{cond}^*(\omega, T_{Cw}, Y))$$

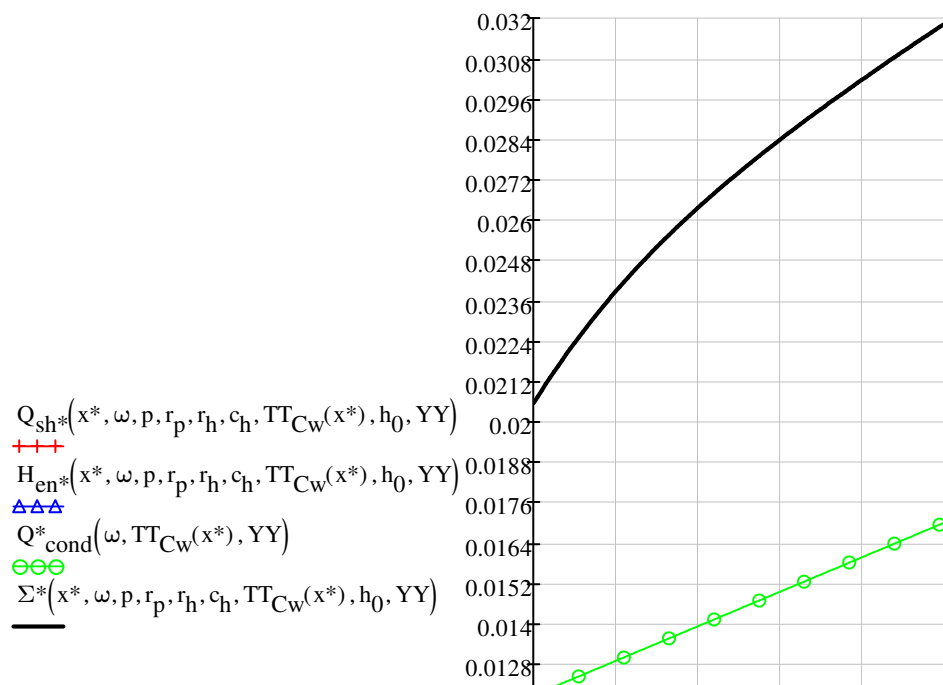
**Εισάγονται κάποια βασικά στοιχεία της μηχανής (ζεστός κύλινδρος).**

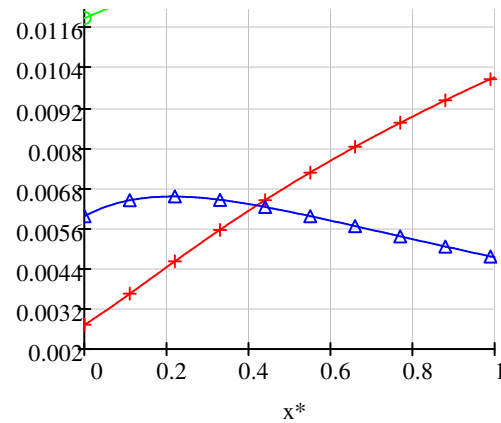
$$r_p := 0.0447 \quad p := 100.7 \quad h_0 := 0.0005 \quad c_h := 0 \quad r_h := 1 \quad \omega := 41.89 \quad x^* := 0, .01.. 1$$

Ορίζεται ένα γραμμικό προφίλ θερμοκρασίας και μια σταθερή κλίση θερμοκρασίας. Αυτά τα μεγέθη είναι προσωρινά. Χρησιμοποιούνται μόνο για να βρεθεί μια σταθερή τιμή για το  $\Sigma^*$ .

$$TT_{Cw}(x^*) := Tk + (Th - Tk) \cdot x^* \quad YY := \frac{Th - Tk}{l_{ad}}$$

Σχεδιάζονται τα προφίλ των 3 μεταφορών θερμότητας και του αθροίσματος  $\Sigma^*$ . Η μέση τιμή του  $\Sigma^*$  θα χρησιμοποιηθεί αμέσως παρακάτω σαν δεδομένο εισόδου προκειμένου να βρεθεί το προφίλ της θερμοκρασίας.





$$\sum_{x^*} := \frac{\sum_{x^*} \Sigma^*(x^*, \omega, p, r_p, r_h, c_h, TT_{Cw}(x^*), h_0, YY)}{100} = 0.0273$$

Με δεδομένο το άθροισμα  $\Sigma^*$ , η κλίση της θερμοκρασίας γράφεται σαν συνάρτηση των 3 μεταφορών θερμότητας. Ακολουθεί ένα υποπρόγραμμα που βρίσκει την θερμοκρασία για κάθε  $x^*$  με βάση την κλίση θερμοκρασίας από το προηγούμενο βήμα. Το υποπρόγραμμα έχει σαν δεδομένο εισόδου μια αρχική τιμή για την αδιάστατη κλίση ( $Grad^*$ ). Έπειτα, με την εντολή Given-Find βρίσκεται η ακριβής αρχική αδιάστατη κλίση ώστε η θερμοκρασία στο  $x^*=0$  να είναι  $T_k$  και στο  $x^*=1$  να είναι  $T_h$ . Προκύπτει λοιπόν το προφίλ της θερμοκρασίας και της κλίσης της θερμοκρασίας.



$$\Theta(T_{Cw}) := \frac{T_{Cw} - T_k}{T_h - T_k} \quad T_{Cw}(\Theta) := T_k + (T_h - T_k) \cdot \Theta$$

$$Y(x^*, T_{Cw}, \Sigma^*, h_0) := \frac{\Sigma^* - (\Psi_2(x^*, \omega, p, r_p, c_h, T_{Cw}, h_0) + \Psi_4(x^*, \omega, p, r_p, r_h, c_h, T_{Cw}, h_0))}{\Psi_1(x^*, \omega, p, r_p, r_h, c_h, T_{Cw}, h_0) + \Psi_3(x^*, \omega, p, r_p, r_h, c_h, T_{Cw}, h_0) + \Psi_5(\omega, T_{Cw})}$$

$$\text{Grad}^*(x^*, T_{Cw}, \Sigma^*, h_0) := \frac{Y(x^*, T_{Cw}, \Sigma^*, h_0)}{Y_0}$$

$$\text{Grad}^*(x^*, \Theta, \Sigma^*, h_0) := \text{Grad}^*(x^*, T_{Cw}(\Theta), \Sigma^*, h_0)$$

$$\underline{F}(N, IN, \Sigma^*, h_0) := \left[ \begin{array}{l}
 x^*_0 \leftarrow 0 \\
 \Theta_0 \leftarrow 0 \\
 \text{grad}^*_0 \leftarrow IN \\
 \text{for } i \in 1..N \\
 \quad \left| \begin{array}{l}
 x^*_i \leftarrow \frac{i}{N} \\
 \Theta_i \leftarrow \Theta_{i-1} + \frac{\text{grad}^*_{i-1}}{N} \\
 \text{grad}^*_i \leftarrow \text{Grad}^*(x^*_i, \Theta_i, \Sigma^*, h_0)
 \end{array} \right. \\
 \left( \begin{array}{c}
 x^* \\
 \Theta \\
 \text{grad}^*
 \end{array} \right)
 \end{array} \right]$$

$$\underline{N} := 1000 \quad \underline{IN} := 1$$

Given

$$(F(N, IN, \Sigma^*, h_0)_1)_0 = 0.000$$

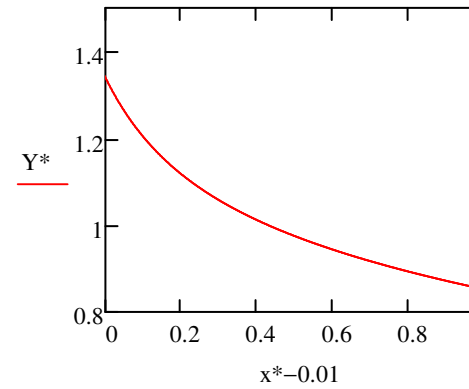
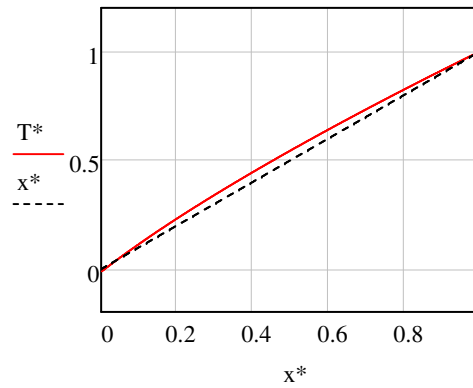
$$(F(N, IN, \Sigma^*, h_0)_1)_N = 1.000$$

$$\underline{INN} := \text{Find}(\underline{IN}) = -11.606$$

$$\begin{pmatrix} x^* \\ T^* \\ Y^* \end{pmatrix} := F(N, INN, \Sigma^*, h_0)$$

---

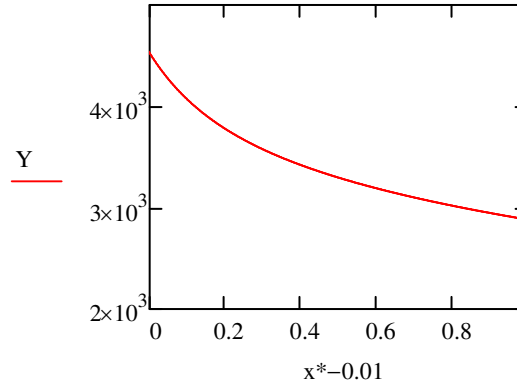
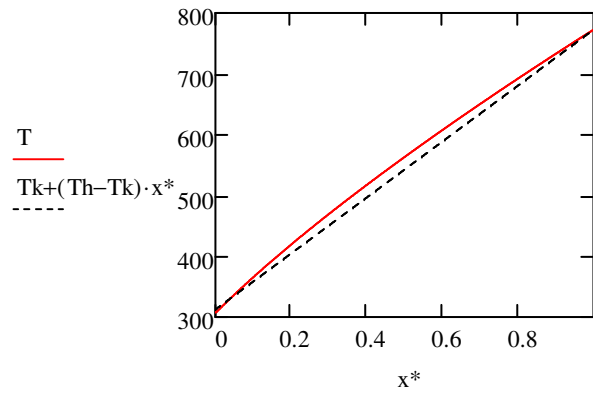
**Αδιάστατη θερμοκρασία και κλίση θερμοκρασίας:**




---

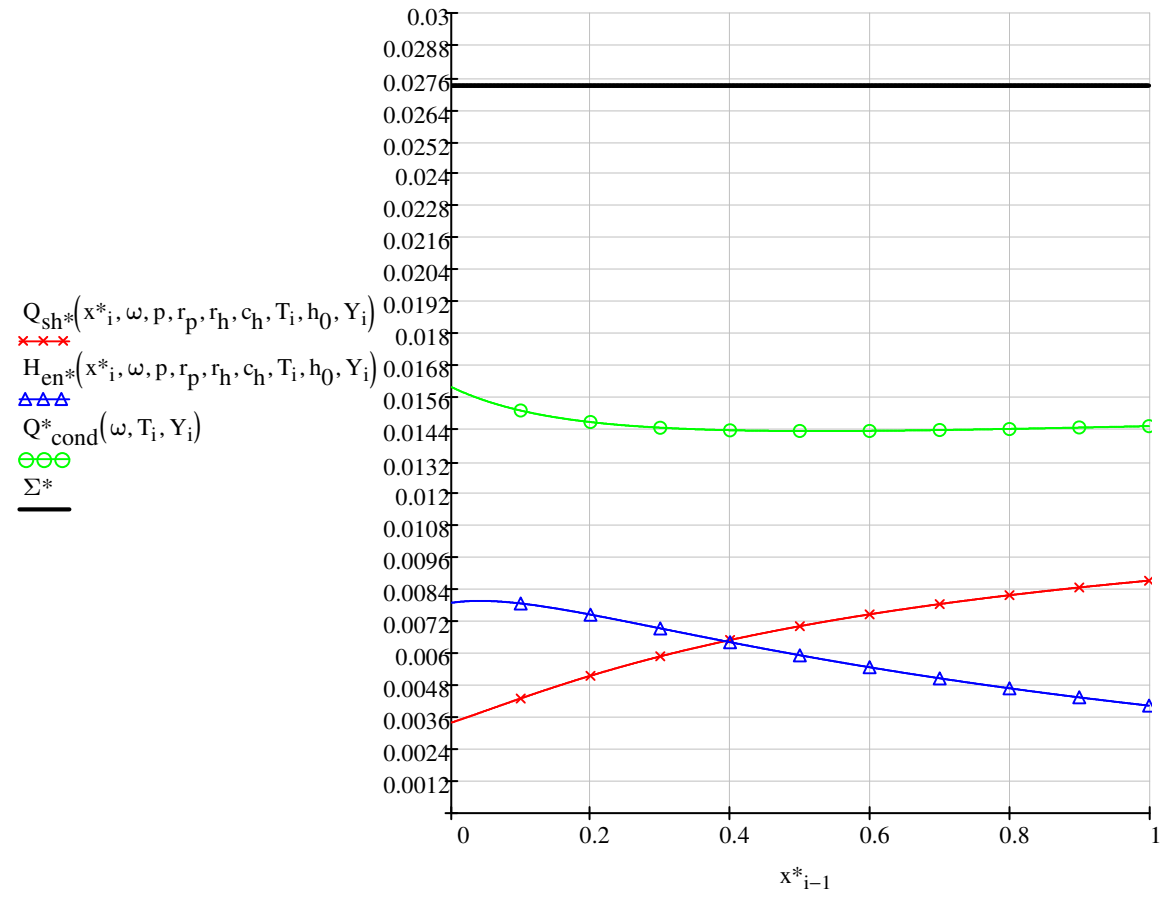
**Διαστατή θερμοκρασία και κλίση θερμοκρασίας:**

$$\underline{Y} := Y^* \cdot Y_0 \qquad \underline{T} := T_k + T^* \cdot (T_h - T_k)$$



**Τέλος, με δεδομένο πλέον το προφίλ της θερμοκρασίας, υπολογίζονται τα προφίλ των τριών μεταφορών θερμότητας. Σχεδιάζονται σε γράφημα μαζί με το σταθερό άθροισμα  $\Sigma^*$ .**

$i := 0..N$



$$Q_{sh} := p \cdot 10^5 \cdot n(\omega) \cdot V_C \cdot 0.0070228 = 236.996$$

$$H_{en} := p \cdot 10^5 \cdot n(\omega) \cdot V_C \cdot 0.0059309 = 200.148$$

$$Q_{cond} := p \cdot 10^5 \cdot n(\omega) \cdot V_C \cdot 0.014338 = 483.859$$

$$Q_{condD} := \pi \cdot d_C \cdot h_D \cdot \lambda(563.5) \cdot (3310.6) = 101.366$$

$$Q_{condC} := \pi \cdot d_C \cdot h_C \cdot \lambda(563.5) \cdot (3310.6) = 382.512$$

### Στοιχεία μηχανής (κρύος κύλινδρος)

Διάκενο κρύου εκτοπιστή - κυλίνδρου:	$h'$
Αδιαβατικό μήκος κρύου εκτοπιστή :	$l_{ad}' := 0.163$
Μήκος διακένου κρύου εκτοπιστή :	$l_a' := 0.227$
Μισή διαδρομή κρύου εκτοπιστή :	$x'' := 0.032$
Διάμετρος κρύου κυλίνδρου :	$d_{C'} := 0.11$
Όγκος σάρωσης του κρύου εκτοπιστή:	$V_{C'} := \frac{\pi}{4} \cdot d_{C'}^2 \cdot 2 \cdot x'' = 6.082 \times 10^{-4}$
Μήκος του μέρους του κρύου εκτοπιστή που βρίσκεται δίπλα στην τσιμούχα :	$l_{bot}' := x''$
Λόγος μηκών :	$r_{x'} := \frac{x''}{l_{ad}'} = 0.196$

Διάσταση διακένου στο bottom :	$h_0'$
Κωνικότητα :	$c_h'$
Λόγος μηκών διακένου στο bottom :	$r_h'$
Πάχος τοιχώματος κρύου εκτοπιστή :	$h_{D'} := 0.0032$
Πάχος τοιχώματος κρύου κυλίνδρου :	$h_{C'} := 0.012$

### Στοιχεία αερίου

Θερμοκρασία κρύου θερμαντήρα :	$T_k := 313$
Θερμοκρασία ψύκτη κρύου κυλίνδρου:	$T_h' := 273$
Κλίση θερμοκρασίας :	$Y_0' := \frac{T_k - T_h'}{l_{ad'}} = 245.399$
Λόγος θερμοκρασιών :	$r_T' := \frac{0.5 \cdot x'' \cdot Y_0'}{\left( \frac{T_k - T_h'}{\ln\left(\frac{T_k}{T_h'}\right)} \right)} = 0.013$
Διαφορά φάσης μεταξύ της πίεσης και της ταχύτητας του ζεστού εκτοπιστή :	$\theta_{p'} := 64 \cdot \frac{\pi}{180} = 1.117$

Αριθμός Prandtl :

$$Pr' := 0.680$$

**Οι αντίστοιχες απώλειες σε Watts για τον κρύο κύλινδρο:**

$$Q_{sh'} := 2.514$$

$$H_{en'} := -4.674$$

$$Q_{cond'} := 18.947$$

$$Q_{condC'} := 14.959$$

$$Q_{condD'} := 3.989$$

**Οι συνολικές απώλειες σε Watts:**

$$Q_{sht} := Q_{sh} + Q_{sh'} = 239.51$$

$$H_{ent} := H_{en} + H_{en'} = 195.474$$

$$Q_{condt} := Q_{cond} + Q_{cond'} = 502.806$$

$$Q_{cond\_cyl\_total} := Q_{condC'} + Q_{condC} = 397.471$$

$$Q_{cond\_dis\_total} := Q_{condD'} + Q_{condD} = 105.355$$

$$Q_{losses} := Q_{sht} + H_{ent} + Q_{condt} = 937.789$$



### *Αποτελέσματα*

1. Απώλειες λόγω τακτικής μεταφοράς θερμότητας  $Q_{\text{sht}}$  σε Watts :  $Q_{\text{sht}} = 239.51$
2. Απώλειες λόγω μεταφοράς ενθαλπίας αερίου  $H_{\text{ent}}$  ή  $Q_{\text{put}}$  σε Watts :  $H_{\text{ent}} = 195.474$
3. Απώλειες λόγω αγωγής  $Q_{\text{condt}}$  σε Watts :  $Q_{\text{condt}} = 502.806$
4. Συνολικές απώλειες  $Q_{\text{losses}}$  σε Watts :  $Q_{\text{losses}} = 937.789$

**ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ VMK7**  
**ΜΗΧΑΝΗ ΤΟΥ KUHL (1990)**  
**VUILLEUMIER HEAT PUMP - ΑΔΙΑΒΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ - ΜΟΝΤΕΛΟ BERCHOWITZ**

Στο πρόγραμμα VMK7 θα εφαρμόσουμε το ιδανικό αδιαβατικό μοντέλο ανάλυσης στην περίπτωση της Vuilleumier αντλίας θερμότητας του KUHL. Με βάση το μοντέλο αυτό θα υπολογιστούν οι απώλειες και η απόδοση κατά το μοντέλο του Berchowitz. Τα χαρακτηριστικά της μηχανής αυτής (λειτουργικά, γεωμετρικά και θερμοδυναμικά) ελήφθησαν από το "Measured Performance of an Experimental Vuilleumier Heat Pump in Comparison to 3rd Order Theory", Energy Conversion Engineering Conference, 1990, IECEC-90, Proceedings of the 25th Intersociety, volume 5. Σύστημα μονάδων σε **S.I.**

***Παράμετροι λειτουργίας (operating parameters)***

Εργαζόμενο αέριο (working gas) :	Ήλιο (He)
Θερμοκρασία ζεστού θερμαντήρα $T_h$ σε K :	$T_h := 773$
Θερμοκρασία κρύου θερμαντήρα $T_{h'}$ σε K :	$T_{h'} := 273$
Θερμοκρασία ψύκτη ζεστού κυλίνδρου $T_k$ σε K :	$T_k := 313$
Θερμοκρασία ψύκτη κρύου κυλίνδρου $T_{k'}$ σε K :	$T_{k'} := 313$

***Νεκροί όγκοι χώρων συνδεσης (connecting ducts) μεταξύ των διαφόρων μερών***

Νεκρός όγκος μεταξύ κρύου αναγεννητή και κρύου ψύκτη  $V_{rk'}$  σε  $m^3$  :  $V_{k'Γ'} := 61.4 \cdot 10^{-6}$

Νεκρός όγκος μεταξύ ζεστού ψύκτη και ζεστού αναγεννητή  $V_{rk}$  σε  $m^3$  :  $V_{kr} := 48.3 \cdot 10^{-6}$

Συνολικός νεκρός όγκος αριστερά και δεξιά του ζεστού αναγεννητή  $V_{cnst}$  σε  $m^3$  :

$$V_{cnst} := V_{rh} + V_{kr} = 8.83 \times 10^{-5}$$

Συνολικός νεκρός όγκος αριστερά και δεξιά του κρύου αναγεννητή  $V_{cnst'}$  σε  $m^3$  :

$$V_{cnst'} := V_{rh'} + V_{kr'} = 1.261 \times 10^{-4}$$

Εξίσωση μεταβολής του όγκου του ζεστού χώρου συμπίεσης :  $V_{c,c}(θ) := V_{c,lc} + \frac{V_{swc}}{2} \cdot (1 + \cos(θ \cdot \text{deg}))$

Εξίσωση μεταβολής του όγκου του κρύου χώρου συμπίεσης :  $V_{c,c'}(θ) := V_{c,lc'} + \frac{V_{swc'}}{2} \cdot [1 + \cos[(θ - 90) \cdot \text{deg}]]$

Εξίσωση μεταβολής του όγκου του ζεστού χώρου εκτόνωσης :  $V_{c,e}(θ) := V_{c,le} + \frac{V_{swe}}{2} \cdot (1 - \cos(θ \cdot \text{deg}))$

Εξίσωση μεταβολής του όγκου του κρύου χώρου εκτόνωσης :  $V_{c,e'}(θ) := V_{c,le'} + \frac{V_{swe'}}{2} \cdot [1 - \cos[(θ - 90) \cdot \text{deg}]]$

Εξίσωση μεταβολής του όγκου του συνολικού χώρου συμπίεσης :  $V_{t,c}(θ) := V_{c,c}(θ) + V_{c,c'}(θ)$

Ολικός όγκος ροής μηχανής:

$$V_c(\theta) := V_c(\theta) + V_e(\theta) + V_k + V_r + V_h + V_c(\theta) + V_e(\theta) + V_{k'} + V_{r'} + V_{h'} + V_{cnst} + V_{cnst'}$$

### **ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΑΔΙΑΒΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ**

$$\frac{dV_{e'}(\theta)}{d\theta} := \frac{d}{d\theta} V_{e'}(\theta) \quad \frac{dV_e(\theta)}{d\theta} := \frac{d}{d\theta} V_e(\theta) \quad \frac{dV_c(\theta)}{d\theta} := \frac{d}{d\theta} V_c(\theta) \quad \frac{dV_{c'}(\theta)}{d\theta} := \frac{d}{d\theta} V_{c'}(\theta)$$

$$\frac{dV_{e'}/V_{e'}(\theta)}{d\theta} := \frac{dV_{e'}(\theta)}{V_{e'}(\theta)} \quad \frac{dV_e/V_e(\theta)}{d\theta} := \frac{dV_e(\theta)}{V_e(\theta)} \quad \frac{dV_c/V_c(\theta)}{d\theta} := \frac{dV_c(\theta)}{V_c(\theta)}$$

$$\frac{dV_{t_c}(\theta)}{d\theta} := \frac{d}{d\theta} V_{t_c}(\theta) \quad \frac{dV_t(\theta)}{d\theta} := \frac{d}{d\theta} V_t(\theta) \quad \frac{dV_{c'}/V_{c'}(\theta)}{d\theta} := \frac{dV_{c'}(\theta)}{V_{c'}(\theta)}$$

$$\frac{dV_{t_c}/V_{t_c}(\theta)}{d\theta} := \frac{dV_{t_c}(\theta)}{V_{t_c}(\theta)}$$

$$\text{Tr}(\text{Th}, \text{Tk}) := \frac{\text{Th} - \text{Tk}}{\ln\left(\frac{\text{Th}}{\text{Tk}}\right)} \quad \text{Tr}'(\text{Th}', \text{Tk}) := \frac{\text{Tk} - \text{Th}'}{\ln\left(\frac{\text{Tk}}{\text{Th}'}\right)}$$

$$\text{cnst}'(\text{Th}', \text{Tk}) := \frac{V_{h'}}{\text{Th}'} + \frac{V_{r'h'}}{\text{Th}'} + \frac{V_{r'}}{\text{Tr}'(\text{Th}', \text{Tk})} + \frac{V_{k'r'}}{\text{Tk}} + \frac{V_{k'}}{\text{Tk}}$$

$$\text{cnst}(\text{Th}, \text{Tk}) := \frac{V_h}{\text{Th}} + \frac{V_{rh}}{\text{Th}} + \frac{V_r}{\text{Tr}(\text{Th}, \text{Tk})} + \frac{V_{kr}}{\text{Tk}} + \frac{V_k}{\text{Tk}}$$

$$\Sigma Vi/Ti(Te', Te, Tc, Th', Th, Tk, \theta) := \frac{V_{e'}(\theta)}{Te'} + \text{cnst}'(Th', Tk) + \frac{V_{t_c}(\theta)}{Tc} + \text{cnst}(Th, Tk) + \frac{V_e(\theta)}{Te}$$

$$DP/P(DTE', Te', DTE, Te, DTC, Tc, Th', Th, Tk, \theta) := \frac{\frac{dV_{e'}(\theta)}{Te'} + \frac{dV_e(\theta)}{Te} + \frac{dV_{t_c}(\theta)}{Tc} - \left( \frac{V_{e'}(\theta) \cdot DTE'}{Te'^2} + \frac{V_e(\theta) \cdot DTE}{Te^2} + \frac{V_{t_c}(\theta) \cdot DTC}{Tc^2} \right)}{\frac{V_{e'}(\theta)}{Te'} + \text{cnst}'(Th', Tk) + \frac{V_{t_c}(\theta)}{Tc} + \text{cnst}(Th, Tk) + \frac{V_e(\theta)}{Te}}$$



$$Te'_{\phi} := s_{\phi+360 \cdot (\text{cntr}-1), 1} \quad Te_{\phi} := s_{\phi+360 \cdot (\text{cntr}-1), 2} \quad Tc_{\phi} := s_{\phi+360 \cdot (\text{cntr}-1), 3}$$

$$Te'_{\text{mean}} := \frac{\sum_{\phi=0}^{359} Te'_{\phi}}{360} \quad Te_{\text{mean}} := \frac{\sum_{\phi=0}^{359} Te_{\phi}}{360} \quad Tc_{\text{mean}} := \frac{\sum_{\phi=0}^{359} Tc_{\phi}}{360} \quad dP/P_{\phi} := s_{\phi+360 \cdot (\text{cntr}-1), 0}$$

$$\varphi := 359 \quad \phi := 0.. \varphi$$

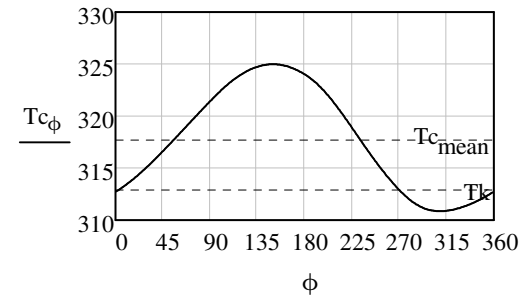
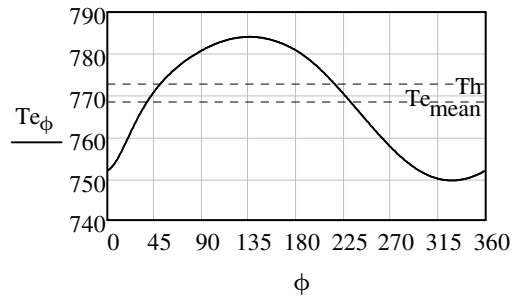
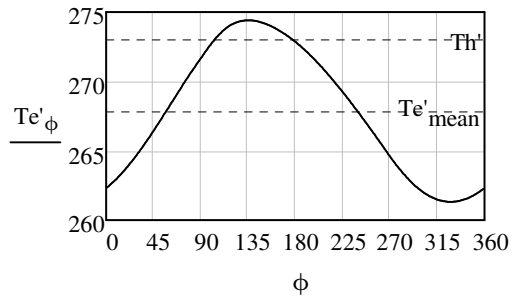
$$P/M(Te', Te, Tc, Th', Th, Tk, \theta) := \frac{R}{\Sigma Vi/Ti(Te', Te, Tc, Th', Th, Tk, \theta)}$$

$$P/M_{\phi} := P/M(Te'_{\phi}, Te_{\phi}, Tc_{\phi}, Th', Th, Tk, \phi)$$

$$dP/M(DTE', Te', DTE, Te, DTC, Tc, \theta) := \frac{R \left[ \frac{dVe'(\theta)}{Te'} + \frac{dVe(\theta)}{Te} + \frac{dVtc(\theta)}{Tc} - \left( \frac{Ve'(\theta) \cdot DTE'}{Te'^2} + \frac{Ve(\theta) \cdot DTE}{Te^2} + \frac{Vtc(\theta) \cdot DTC}{Tc^2} \right) \right]}{(\sum Vi/Ti(Te', Te, Tc, Th', Th, Tk, \theta))^2}$$

$$\frac{dP}{M}_\phi := P/M_\phi \cdot dP/P_\phi$$

$$\sum(Vi/Ti)_\theta := \sum Vi/Ti(Te'_\theta, Te_\theta, Tc_\theta, Th', Th, Tk, \theta)$$



$$\frac{dTe}{Te}_\phi := \text{if} \left( \phi < 360, \frac{Te_{\phi+1}}{Te_\phi} - 1, \frac{Te_0}{Te_{359}} - 1 \right)$$

$$\frac{dTe'}{Te'}_\phi := \text{if} \left( \phi < 360, \frac{Te'_{\phi+1}}{Te'_\phi} - 1, \frac{Te'_0}{Te'_{359}} - 1 \right)$$

$$\frac{dTc}{Tc}_\phi := \text{if} \left( \phi < 360, \frac{Tc_{\phi+1}}{Tc_\phi} - 1, \frac{Tc_0}{Tc_{359}} - 1 \right)$$

$$P_\phi := M \cdot P/M_\phi$$

$$P_{\text{mean}} := \frac{\sum_{\phi=0}^{359} P_{\phi}}{360} = 1.00783 \times 10^7$$

$$me'_{r\phi} := \frac{\frac{V_e(\phi)}{Te'_{\phi}}}{\Sigma(Vi/Ti)_{\phi}}$$

$$mh'_{r\phi} := \frac{\frac{V_{h'}}{Th'} + \frac{V_{r'h'}}{Th'}}{\Sigma(Vi/Ti)_{\phi}}$$

$$mr'_{r\phi} := \frac{\frac{V_{r'}}{Tr'(Th', Tk)}}{\Sigma(Vi/Ti)_{\phi}}$$

$$mk'_{r\phi} := \frac{\frac{V_{k'r'}}{Tk} + \frac{V_{k'}}{Tk}}{\Sigma(Vi/Ti)_{\phi}}$$

$$mc_{r\phi} := \frac{\frac{V_{t_c}(\phi)}{Tc_{\phi}}}{\Sigma(Vi/Ti)_{\phi}}$$

$$mk_{r\phi} := \frac{\frac{V_{kr}}{Tk} + \frac{V_k}{Tk}}{\Sigma(Vi/Ti)_{\phi}}$$

$$mr_{r\phi} := \frac{\frac{V_r}{Tr(Th, Tk)}}{\Sigma(Vi/Ti)_{\phi}}$$

$$mh_{r\phi} := \frac{\frac{V_h}{Th} + \frac{V_{rh}}{Th}}{\Sigma(Vi/Ti)_{\phi}}$$

$$me_{r\phi} := \frac{\frac{V_e(\phi)}{Te_{\phi}}}{\Sigma(Vi/Ti)_{\phi}}$$

$$\underline{DMe/Me'}_{\phi} := dP/P_{\phi} + dVe/Ve'(\phi) - dTe/Te'_{\phi}$$

$$DMc/Mc_{t\phi} := dP/P_{\phi} + dVtc/Vtc(\phi) - dTc/Tc_{\phi}$$

$$\underline{DMe/Me}_{\phi} := dP/P_{\phi} + dVe/Ve(\phi) - dTe/Te_{\phi}$$

$$Dme'_{r\phi} := me'_{r\phi} \cdot DMe/Me'_{\phi}$$

$$Dmh'_{r\phi} := mh'_{r\phi} \cdot dP/P_{\phi}$$

$$Dmr'_{r\phi} := mr'_{r\phi} \cdot dP/P_{\phi}$$

$$Dmk'_{r\phi} := mk'_{r\phi} \cdot dP/P_{\phi}$$

$$Dmc_{r\phi} := mc_{r\phi} \cdot DMc/Mc_{t\phi}$$

$$Dmk_{r\phi} := mk_{r\phi} \cdot dP/P_{\phi}$$

$$Dmr_{r\phi} := mr_{r\phi} \cdot dP/P_{\phi}$$

$$Dmh_{r\phi} := mh_{r\phi} \cdot dP/P_{\phi}$$

$$Dme_{r\phi} := me_{r\phi} \cdot DMe/Me_{\phi}$$

$$gAr_{e'h'}_{\phi} := -Dme'_{r\phi} \quad gAr_{h'r'}_{\phi} := gAr_{e'h'}_{\phi} - Dmh'_{r\phi} \quad gAr_{r'k'}_{\phi} := gAr_{h'r'}_{\phi} - Dmr'_{r\phi} \quad gAr_{k'c}_{\phi} := gAr_{r'k'}_{\phi} - Dmk'_{r\phi}$$

$$gAr_{ck}_{\phi} := gAr_{k'c}_{\phi} - Dmc_{r\phi} \quad gAr_{kr}_{\phi} := gAr_{ck}_{\phi} - Dmk_{r\phi} \quad gAr_{rh}_{\phi} := gAr_{kr}_{\phi} - Dmr_{r\phi} \quad gAr_{he}_{\phi} := gAr_{rh}_{\phi} - Dmh_{r\phi}$$

$$gAr_{h'}_{\phi} := 0.5 \cdot (gAr_{e'h'}_{\phi} + gAr_{h'r'}_{\phi}) \quad gAr_{r'}_{\phi} := 0.5 \cdot (gAr_{h'r'}_{\phi} + gAr_{r'k'}_{\phi}) \quad gAr_{k'}_{\phi} := 0.5 \cdot (gAr_{r'k'}_{\phi} + gAr_{k'c}_{\phi})$$

$$gAr_{k}_{\phi} := 0.5 \cdot (gAr_{ck}_{\phi} + gAr_{kr}_{\phi}) \quad gAr_{r}_{\phi} := 0.5 \cdot (gAr_{kr}_{\phi} + gAr_{rh}_{\phi}) \quad gAr_{h}_{\phi} := 0.5 \cdot (gAr_{rh}_{\phi} + gAr_{he}_{\phi})$$

$$qe'_{r\phi} := P/M_{\phi} \cdot dVe'(\phi) \quad qe_{r\phi} := P/M_{\phi} \cdot dVe(\phi) \quad qc_{r\phi} := P/M_{\phi} \cdot dVtc(\phi) \quad w_{r\phi} := qe'_{r\phi} + qe_{r\phi} + qc_{r\phi}$$

$$qe'_{t\phi} := M \cdot \sum_{\phi=0}^{\phi} qe'_{r\phi} \quad qe_{t\phi} := M \cdot \sum_{\phi=0}^{\phi} qe_{r\phi} \quad qc_{t\phi} := M \cdot \sum_{\phi=0}^{\phi} qc_{r\phi} \quad w_{t\phi} := M \cdot \sum_{\phi=0}^{\phi} w_{r\phi}$$

$$qe'_{rt} := \left( \sum_{\phi=0}^{359} qe'_{r\phi} \right) \quad qe_{rt} := \left( \sum_{\phi=0}^{359} qe_{r\phi} \right) \quad qc_{rt} := \left( \sum_{\phi=0}^{359} qc_{r\phi} \right) \quad w_{rt} := \left( \sum_{\phi=0}^{359} w_{r\phi} \right)$$

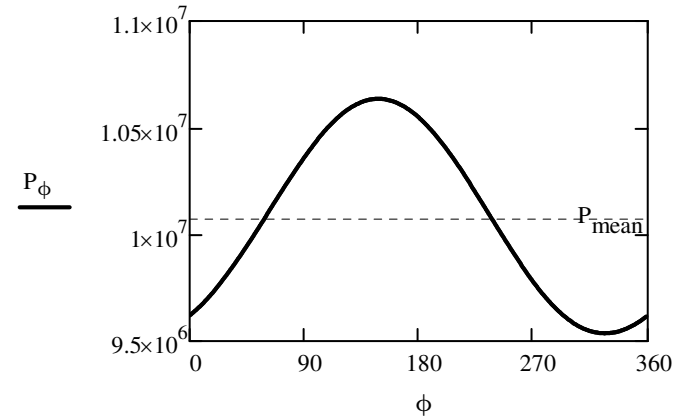
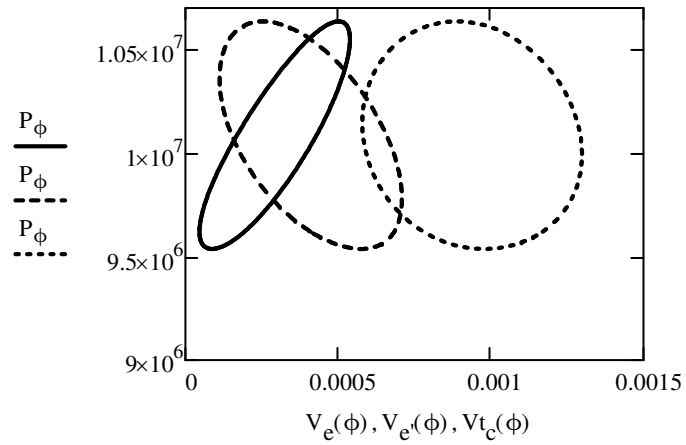
$$Qe'_{rt}(f, M) := \frac{f \cdot M}{10^3} \cdot qe'_{rt} \quad Qe_{rt}(f, M) := \frac{f \cdot M}{10^3} \cdot qe_{rt} \quad Qc_{rt}(f, M) := \frac{f \cdot M}{10^3} \cdot qc_{rt} \quad W_{rt}(f, M) := \frac{f \cdot M}{10^3} \cdot w_{rt}$$

$$Qe'_{rt}(f, M) = 2.911 \quad Qe_{rt}(f, M) = 1.505 \quad Qc_{rt}(f, M) = -4.099 \quad W_{rt}(f, M) = 0.316$$



$$\text{COP}_{\text{th}} := \frac{|Q_{c_{\text{rt}}}(f, M)|}{Q_{e_{\text{rt}}}(f, M)} = 2.724$$

$$Q_{\text{ind}} := 1000 \cdot (|Q_{c_{\text{rt}}}(f, M)|) = 4.099 \times 10^3$$



$$\begin{aligned} \phi_{\text{max}} &:= 148 & P_{\text{max}} &:= P_{\phi_{\text{max}}} & P_{\text{max}} &= 1.0637 \times 10^7 \\ \phi_{\text{min}} &:= 326 & P_{\text{min}} &:= P_{\phi_{\text{min}}} & P_{\text{min}} &= 9.53823 \times 10^6 \end{aligned}$$

### **Αποτελέσματα ιδανικού αδιαβατικού μοντέλου**

1. Η παραγόμενη (ενδεικνύμενη) θερμική ισχύς  $Q_{ind}$  (σε W) :  $Q_{ind} = 4.099 \times 10^3$
2. Ο θερμικός συντελεστής συμπεριφοράς  $COP_{th}$  :  $COP_{th} = 2.724$
3. Μέση πίεση εργαζόμενου μέσου  $P_{mean}$  (σε Pa) :  $P_{mean} = 1.0078 \times 10^7$
4. Μέγιστη πίεση εργαζόμενου μέσου  $P_{max}$  (σε Pa) :  $P_{max} = 1.064 \times 10^7$
5. Ελάχιστη πίεση εργαζόμενου μέσου  $P_{min}$  (σε Pa) :  $P_{min} = 9.538 \times 10^6$

### **Απώλειες λόγω πτώσης πίεσης στους θερμοεναλλάκτες $Q_{ffl}$ σε Watts**

#### **Ζεστός αναγεννητής**

Δυναμική συνεκτικότητα εργαζόμενου αερίου  $\mu_r$  σε kg/m sec :

$$\mu_r := 18.85 \cdot 10^{-6} \cdot \left( \frac{273 + T_{su}}{Tr(Th, Tk) + T_{su}} \right) \cdot \left( \frac{Tr(Th, Tk)}{273} \right)^{\frac{3}{2}} = 2.875 \times 10^{-5}$$

Πυκνότητα αερίου στον αναγεννητή  $\rho_r$  σε kg/m<sup>3</sup> :

$$\rho_r := \frac{M \cdot m_r \cdot \phi}{V_r}$$

Αριθμός Reynolds  $Re_r$  :

$$Re_{r\phi} := \left| \frac{f \cdot 360 \cdot M \cdot gAr_{r\phi} \cdot D_r}{\mu_r \cdot A_r} \right|$$

Συντελεστής τριβής Reynolds  $f_r$  (στρωτή ροή) :

$$f_{r\phi} := 54 + 1.43 \cdot (Re_{r\phi})^{0.48}$$

Πτώση πίεσης στον αναγεννητή  $\Delta p_r$  σε Pa :

$$\Delta p_{r\phi} := \frac{360 \cdot f \cdot 2 \cdot f_{rr\phi} \cdot \mu_r \cdot M \cdot gAr_{r\phi} \cdot V_r}{A_r^2 \cdot D_r^2 \cdot \rho_{r\phi}}$$

Απώλεια λόγω πτώσης πίεσης αερίου στον αναγεννητή  $Q_{fflr}$  σε Watts :

$$Q_{fflr\phi} := \frac{M \cdot \Delta p_{r\phi} \cdot gAr_{r\phi} \cdot V_r}{M \cdot m_{r\phi}}$$

$$Q_{fflr} := f \cdot \sum_{\phi=0}^{359} Q_{fflr\phi} = 21.534$$

### ***Κρύος αναγεννητής***

Δυναμική συνεκτικότητα εργαζόμενου αερίου  $\mu_r$  σε kg/m sec :

$$\mu_{r'} := 18.85 \cdot 10^{-6} \cdot \left( \frac{273 + T_{su}}{Tr'(Th', Tk') + T_{su}} \right) \cdot \left( \frac{Tr'(Th', Tk')}{273} \right)^{\frac{3}{2}} = 1.981 \times 10^{-5}$$

Πυκνότητα αερίου στον αναγεννητή  $\rho_{r'}$  σε  $\text{kg/m}^3$  :

$$\rho_{r'} := \frac{M \cdot m_{r'}}{V_{r'}}$$

Αριθμός Reynolds  $Re_{r'}$  :

$$Re_{r'} := \left| \frac{f \cdot 360 \cdot M \cdot gAr_{r'} \cdot D_{r'}}{\mu_{r'} \cdot A_{r'}} \right|$$

Συντελεστής τριβής Reynolds  $f_{r'}$  (στρωτή ροή) :

$$f_{r'} := 54 + 1.43 \cdot (Re_{r'})^{0.48}$$

Πτώση πίεσης στον αναγεννητή  $\Delta p_{r'}$  σε Pa :

$$\Delta p_{r'} := \frac{360 \cdot f \cdot 2 \cdot f_{r'} \cdot \mu_{r'} \cdot M \cdot gAr_{r'} \cdot V_{r'}}{A_{r'}^2 \cdot D_{r'}^2 \cdot \rho_{r'}}$$

Απώλεια λόγω πτώσης πίεσης αερίου στον αναγεννητή  $Q_{filr}$  σε Watts :

$$Q_{filr} := \frac{\Delta p_{r'} \cdot gAr_{r'} \cdot V_{r'}}{m_{r'}}$$

$$Q_{\text{fflr}'} := f \cdot \sum_{\phi=0}^{359} Q_{\text{fflr}'\phi} = 9.196$$

### Ζεστός θερμαντήρας

Δυναμική συνεκτικότητα εργαζόμενου αερίου  $\mu_h$  σε kg/m sec :

$$\mu_h := 18.85 \cdot 10^{-6} \cdot \left( \frac{273 + T_{\text{su}}}{T_h + T_{\text{su}}} \right) \cdot \left( \frac{T_h}{273} \right)^{\frac{3}{2}} = 3.717 \times 10^{-5}$$

Πυκνότητα αερίου στον θερμαντήρα  $\rho_h$  σε kg/m<sup>3</sup> :

$$\rho_{h\phi} := \frac{M \cdot m_{r\phi}}{V_h}$$

Αριθμός Reynolds  $Re_h$  :

$$Re_{h\phi} := \left| \frac{M \cdot f \cdot 360 \cdot g A_{r_{h\phi}} \cdot Di_h}{\mu_h \cdot A_h} \right|$$

Συντελεστής τριβής Reynolds  $f_{th}$  (τυρβώδης ροή) :

$$f_{th\phi} := 0.0791 \cdot (Re_{h\phi})^{0.75}$$

Πτώση πίεσης στον θερμαντήρα  $\Delta p_h$  σε Pa :

$$\Delta p_{h\phi} := \frac{M \cdot 360 \cdot f \cdot 2 \cdot f_{rh\phi} \cdot \mu_h \cdot gAr_{h\phi} \cdot V_h}{A_h^2 \cdot Di_h^2 \cdot \rho_{h\phi}}$$

Απώλεια λόγω πτώσης πίεσης αερίου στον θερμαντήρα  $Q_{fflh}$  σε Watts :

$$Q_{fflh\phi} := \frac{\Delta p_{h\phi} \cdot gAr_{h\phi} \cdot V_h}{mh_{r\phi}}$$

$$Q_{fflh} := f \cdot \sum_{\phi=0}^{359} Q_{fflh\phi} = 25.765$$

### **Κρύος θερμαντήρας**

Δυναμική συνεκτικότητα εργαζόμενου αερίου  $\mu_h$  σε kg/m sec :

$$\mu_{h'} := 18.85 \cdot 10^{-6} \cdot \left( \frac{273 + T_{su}}{T_h' + T_{su}} \right) \cdot \left( \frac{T_h'}{273} \right)^{\frac{3}{2}} = 1.885 \times 10^{-5}$$

Πυκνότητα αερίου στον θερμαντήρα  $\rho_h$  σε kg/m<sup>3</sup> :

$$\rho_{h\phi} := \frac{M \cdot mh'_{r\phi}}{V_{h'}}$$

Αριθμός Reynolds  $Re_{h'_{\phi}}$  :

$$Re_{h'_{\phi}} := \left| \frac{M \cdot f \cdot 360 \cdot gAr_{h'_{\phi}} \cdot Di_{h'_{\phi}}}{\mu_{h'_{\phi}} \cdot A_{h'_{\phi}}} \right|$$

Συντελεστής τριβής Reynolds  $f_{rh'_{\phi}}$  (τυρβώδης ροή) :

$$f_{rh'_{\phi}} := 0.0791 \cdot (Re_{h'_{\phi}})^{0.75}$$

Πτώση πίεσης στον θερμοαντήρα  $\Delta p_{h'_{\phi}}$  σε Pa :

$$\Delta p_{h'_{\phi}} := \frac{M \cdot 360 \cdot f \cdot 2 \cdot f_{rh'_{\phi}} \cdot \mu_{h'_{\phi}} \cdot gAr_{h'_{\phi}} \cdot V_{h'_{\phi}}}{A_{h'_{\phi}}^2 \cdot Di_{h'_{\phi}}^2 \cdot \rho_{h'_{\phi}}}$$

Απώλεια λόγω πτώσης πίεσης αερίου στον θερμοαντήρα  $Q_{fllh'_{\phi}}$  σε Watts :

$$Q_{fllh'_{\phi}} := \frac{\Delta p_{h'_{\phi}} \cdot gAr_{h'_{\phi}} \cdot V_{h'_{\phi}}}{mh'_{r_{\phi}}}$$

$$Q_{fllh'} := f \cdot \sum_{\phi=0}^{359} Q_{fllh'_{\phi}} = 6.743$$

### **Ψύκτης ζεστού κυλίνδρου**

Δυναμική συνεκτικότητα εργαζόμενου αερίου  $\mu_k$  σε kg/m sec :

$$\mu_k := 18.85 \cdot 10^{-6} \cdot \left( \frac{273 + T_{su}}{T_k + T_{su}} \right) \cdot \left( \frac{T_k}{273} \right)^{\frac{3}{2}} = 2.079 \times 10^{-5}$$

Πυκνότητα αερίου στον ψύκτη  $\rho_k$  σε  $\text{kg/m}^3$  :

$$\rho_{k\phi} := \frac{M \cdot m_{T\phi}}{V_k}$$

Αριθμός Reynolds  $Re_k$  :

$$Re_{k\phi} := \left| \frac{M \cdot f \cdot 360 \cdot gAr_{k\phi} \cdot Di_k}{\mu_k \cdot A_k} \right|$$

Συντελεστής τριβής Reynolds  $f_{rk}$  (τυρβώδης ροή) :

$$f_{rk\phi} := 0.0791 \cdot (Re_{k\phi})^{0.75}$$

Πτώση πίεσης στον ψύκτη  $\Delta p_k$  σε Pa :

$$\Delta p_{k\phi} := \frac{M \cdot 360 \cdot f \cdot 2 \cdot f_{rk\phi} \cdot \mu_k \cdot gAr_{k\phi} \cdot V_k}{A_k^2 \cdot Di_k^2 \cdot \rho_{k\phi}}$$

Απώλεια λόγω πτώσης πίεσης αερίου στον ψύκτη  $Q_{fllk}$  σε Watts :

$$Q_{fllk\phi} := \frac{\Delta p_{k\phi} \cdot gAr_{k\phi} \cdot V_k}{m_{T\phi}}$$



$$Q_{\text{fflk}} := f \cdot \sum_{\phi=0}^{359} Q_{\text{fflk}_{\phi}} = 1.671$$

### **Ψύκτης κρύου κυλίνδρου**

Δυναμική συνεκτικότητα εργαζόμενου αερίου  $\mu_k$  σε kg/m sec :

$$\mu_{k'} := 18.85 \cdot 10^{-6} \cdot \left( \frac{273 + T_{\text{su}}}{T_{k'} + T_{\text{su}}} \right) \cdot \left( \frac{T_{k'}}{273} \right)^{\frac{3}{2}} = 2.079 \times 10^{-5}$$

Πυκνότητα αερίου στον ψύκτη  $\rho_k$  σε kg/m<sup>3</sup> :

$$\rho_{k'_{\phi}} := \frac{M \cdot m_{k'_{\phi}}}{V_{k'_{\phi}}}$$

Αριθμός Reynolds  $Re_{k'}$  :

$$Re_{k'_{\phi}} := \left| \frac{M \cdot f \cdot 360 \cdot g \cdot Ar_{k'_{\phi}} \cdot Di_{k'_{\phi}}}{\mu_{k'_{\phi}} \cdot A_{k'_{\phi}}} \right|$$

Συντελεστής τριβής Reynolds  $f_{rk}$  (τυρβώδης ροή) :

$$f_{rk'_{\phi}} := 0.0791 \cdot \left( Re_{k'_{\phi}} \right)^{0.75}$$

Πτώση πίεσης στον ψύκτη  $\Delta p_{k'}$  σε Pa :

$$\Delta p_{k'_{\phi}} := \frac{M \cdot 360 \cdot f \cdot 2 \cdot f_{rk'_{\phi}} \cdot \mu_{k'_{\phi}} \cdot g A_{rk'_{\phi}} \cdot V_{k'_{\phi}}}{A_{k'_{\phi}}^2 \cdot D_{k'_{\phi}}^2 \cdot \rho_{k'_{\phi}}}$$

Απώλεια λόγω πτώσης πίεσης αερίου στον ψύκτη  $Q_{fflk'}$  σε Watts :

$$Q_{fflk'_{\phi}} := \frac{\Delta p_{k'_{\phi}} \cdot g A_{rk'_{\phi}} \cdot V_{k'_{\phi}}}{m k'_{r_{\phi}}}$$

$$Q_{fflk'} := f \cdot \sum_{\phi=0}^{359} Q_{fflk'_{\phi}} = 8.001$$

$$Q_{ffl} := Q_{fflr} + Q_{fflr'} + Q_{fflh} + Q_{fflh'} + Q_{fflk} + Q_{fflk'} = 72.91$$

**Απώλειες λόγω τακτικής μεταφοράς θερμότητας  $Q_{sh}$  σε Watts :**

$$Q_{sh} := \frac{\pi \cdot D_d \cdot k_g \cdot X_d^2}{2 \cdot h \cdot l_g} \cdot (Th - Tk) + \frac{\pi \cdot D_d \cdot k_g \cdot X_d'^2}{2 \cdot h \cdot l_g'} \cdot (Tk' - Th') = 173.31$$

**Απώλειες λόγω μεταφοράς ενθαλπίας αερίου  $Q_{pu}$  σε Watts :**

$$Q_{\text{puhc}} := \frac{1}{2} \cdot \frac{\gamma}{\gamma - 1} \cdot \omega \cdot D_d \cdot h \cdot P_{\text{mean}} \cdot \ln\left(\frac{T_h}{T_k}\right) \cdot \left[ \left( \frac{X_d}{2 \cdot L_d} \right)^2 + \left( \frac{P_{\text{max}} - P_{\text{mean}}}{P_{\text{mean}}} \right)^2 \right]^{0.5} \cdot X_d$$

$$Q_{\text{pucc}} := \frac{1}{2} \cdot \frac{\gamma}{\gamma - 1} \cdot \omega \cdot D_{d'} \cdot h' \cdot P_{\text{mean}} \cdot \ln\left(\frac{T_k'}{T_h'}\right) \cdot \left[ \left( \frac{X_{d'}}{2 \cdot L_{d'}} \right)^2 + \left( \frac{P_{\text{max}} - P_{\text{mean}}}{P_{\text{mean}}} \right)^2 \right]^{0.5} \cdot X_{d'}$$

$$Q_{\text{pu}} := Q_{\text{puhc}} + Q_{\text{pucc}} = 82.626$$

**Απώλειες θερμοδυναμικού έργου στη σφράγιση  $Q_{\text{seal}}$  σε Watts :**

$$Q_{\text{sealh}} := \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot D_d \cdot (P_{\text{max}} - P_{\text{mean}}) \cdot h \cdot X_d \cdot \omega \cdot \sin(\phi_p \cdot \text{deg})$$

$$Q_{\text{sealc}} := \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot D_{d'} \cdot (P_{\text{max}} - P_{\text{mean}}) \cdot h' \cdot X_{d'} \cdot \omega \cdot \sin(\phi_p \cdot \text{deg})$$

$$Q_{\text{seal}} := Q_{\text{sealh}} + Q_{\text{sealc}} = 83.151$$

**Απώλειες λόγω αγωγής  $Q_{\text{cond}}$  σε Watts (ίδιες με Urieli) :**

$$Q_{\text{cond}} = 1.286 \times 10^3$$

**Απώλειες λόγω υστέρησης αερίου  $Q_{hys}$  σε Watts**

$$Q_{hyshc} := \sqrt{\frac{1}{32} \cdot \omega \cdot \alpha_{gh} \cdot A_{we}} \cdot \frac{(P_{max} - P_{mean})^2}{\gamma \cdot P_{mean}} + \sqrt{\frac{1}{32} \cdot \omega \cdot \alpha_{gk} \cdot A_{wc}} \cdot \frac{(P_{max} - P_{mean})^2}{\gamma \cdot P_{mean}} = 2.813$$

$$Q_{hyscc} := \sqrt{\frac{1}{32} \cdot \omega \cdot \alpha_{gh} \cdot A_{we}} \cdot \frac{(P_{max} - P_{mean})^2}{\gamma \cdot P_{mean}} + \sqrt{\frac{1}{32} \cdot \omega \cdot \alpha_{gk} \cdot A_{wc}} \cdot \frac{(P_{max} - P_{mean})^2}{\gamma \cdot P_{mean}} = 1.958$$

$$Q_{hys} := Q_{hyshc} + Q_{hyscc} = 4.771$$

$$Q_{losses} := Q_{ffl} + Q_{sh} + Q_{pu} + Q_{hys} + Q_{seal} + Q_{cond} = 1.703 \times 10^3 \quad Q_{ind} := Q_{ind} - Q_{losses} = 2.396 \times 10^3$$

$$Q_e := 1000 \cdot Q_{e_{it}}(f, M) = 1.505 \times 10^3$$

$$COP_r := \frac{Q_u}{Q_e} = 1.592$$

**Αποτελέσματα**

1. Απώλειες λόγω πτώσης πίεσης στους θερμοεναλλάκτες  $Q_{ffl}$  σε Watts :  $Q_{ffl} = 72.91$
2. Απώλειες λόγω τακτικής μεταφοράς θερμότητας  $Q_{sh}$  σε Watts :  $Q_{sh} = 173.31$
3. Απώλειες λόγω μεταφοράς ενθαλπίας αερίου  $Q_{pu}$  σε Watts :  $Q_{pu} = 82.626$
4. Απώλειες λόγω αγωγής  $Q_{cond}$  σε Watts :  $Q_{cond} = 1.286 \times 10^3$

5. Απώλειες λόγω υστέρησης αερίου  $Q_{\text{hys}}$  σε Watts :  $Q_{\text{hys}} = 4.771$
6. Απώλειες θερμοδυναμικού έργου στη σφράγιση  $Q_{\text{seal}}$  σε Watts :  $Q_{\text{seal}} = 83.151$
7. Συνολικές απώλειες  $Q_{\text{losses}}$  σε Watts :  $Q_{\text{losses}} = 1.703 \times 10^3$
8. Η ενδεικνύμενη θερμική ισχύς  $Q_{\text{ind}}$  (σε W) :  $Q_{\text{ind}} = 4.099 \times 10^3$
9. Ωφέλιμη θερμική ισχύς  $Q_u$  σε Watts :  $Q_u = 2.396 \times 10^3$
10. Συντελεστής συμπεριφοράς  $\text{COP}_h$  :  $\text{COP}_h = 1.592$

## Ευρετήριο σχημάτων

Σχήμα 1.1 : Η παραδοσιακή μηχανή Vuilleumier και τα χαρακτηριστικά της .....	8
Σχήμα 1.2 : Διαγράμματα T-S συνδυάζοντας δύο ψυκτικούς κύκλους .....	10
Σχήμα 1.3 : Συνδυασμός ενός εργοπαραγωγού με έναν ψυκτικό κύκλο .....	10
Σχήμα 1.4 : Ο θερμοδυναμικός κύκλος Vuilleumier .....	11
Σχήμα 1.5 : Αντλία θερμότητας Vuilleumier με στρόφαλο - διωστήρα .....	13
Σχήμα 1.6 : Παραστατική απεικόνιση κύκλου αντλίας θερμότητας VM .....	13
Σχήμα 1.7 : Γράφημα απόδοσης εξέργειας εργαζόμενων αερίων σε μηχανές VM .....	14
Σχήμα 1.8 : Διαγράμματα P-V εργοπαραγωγού και ψυκτικού κύκλου Stirling .....	15
Σχήμα 1.9 : Διάγραμμα P-V ενός κύκλου Vuilleumier .....	15
Σχήμα 1.10 : Η αντλία θερμότητας ελευθέρων εμβόλων VM ισχύος 25 kW της εταιρείας Thermolift .....	17
Σχήμα 2.1 : Προσχέδιο της αντλίας θερμότητας VP4 τύπου Vuilleumier .....	19
Σχήμα 2.2 : Ο ξεχωριστός μηχανισμός στροφάλου της αντλίας θερμότητας VP4 .....	20
Σχήμα 2.3 : Η αντλία θερμότητας VP4 τύπου Vuilleumier .....	20
Σχήμα 2.4 : Προσχέδιο της κρυογονικής VM μηχανής ισχύος 1.6 W .....	21
Σχήμα 2.5 : Ο θερμοκαταλυτικός καυστήρας της κρυογονική μηχανής VM .....	22
Σχήμα 2.6 : Η κρυογονική μηχανή VM ισχύος 1.6 W .....	23
Σχήμα 2.7 : Σχηματική απεικόνιση της FPVM της SANYO Electric .....	24
Σχήμα 2.8 : Στιγμιότυπο της FPVM της SANYO Electric .....	24
Σχήμα 2.9 : Επίδραση θερμοκρασίας αερίου (θερμός χώρος) στο ενδεικνύμενο έργο, στη διαφορά φάσης εκτοπιστών και στα πλάτη $S_h, S_c$ των εκτοπιστών (ζεστού και κρύου αντίστοιχα) .....	25
Σχήμα 2.10 : Προσχέδιο της αντλίας θερμότητας Vuilleumier του Kuhl .....	26
Σχήμα 2.11 : Διαγράμματα πίεσης – όγκου κύκλου VM αντλίας θερμότητας του Kuhl .....	27
Σχήμα 2.12 : Διαγράμματα ροής θερμικής ισχύος για διάφορες στροφές λειτουργίας .....	27
Σχήμα 3.1 : Ενδεικτικά ποσοστά απωλειών επί της συνολικής θερμικής ισχύος μηχανής VM κατά το μοντέλο του Urieli .....	34

Σχήμα 3.2 : Ενδεικτικά ποσοστά απωλειών επί της συνολικής θερμικής ισχύος μηχανής VM κατά το μοντέλο του Berchowitz.....	34
Σχήμα 3.3 : Ενδεικτικά ποσοστά απωλειών επί της συνολικής θερμικής ισχύος μηχανής VM κατά το μοντέλο του Timoumi .....	35
Σχήμα 3.4 : Ενδεικτικά ποσοστά απωλειών επί της συνολικής θερμικής ισχύος μηχανής VM κατά το μοντέλο του Martini .....	36
Σχήμα 3.5 : Ενδεικτικά ποσοστά απωλειών επί της συνολικής θερμικής ισχύος μηχανής VM κατά το μοντέλο του Pfeiffer.....	37
Σχήμα 3.6 : Ιδανικό ισοθερμοκρασιακό μοντέλο .....	37
Σχήμα 3.7 : Γενικευμένο κελί.....	40
Σχήμα 3.8 : Μηχανισμός απώλειας λόγω τακτικής μεταφοράς θερμότητας.....	45
Σχήμα 3.9 : Γεωμετρία διακένου μεταξύ εκτοπιστή και κυλίνδρου .....	45
Σχήμα 3.10 : Συνεργαζόμενοι άξονες συντεταγμένων εκτοπιστή και κυλίνδρου .....	49
Σχήμα 3.11 : Μηχανισμός των appendix gap losses .....	52
Σχήμα 3.12 : Μηχανισμός απωλειών λόγω αγωγής θερμότητας σε μηχανή Vuilleumier.....	60
Σχήμα 3.13 : Μηχανισμός της shuttle loss κατά Martini.....	64
Σχήμα 3.14 : Μηχανισμός των απωλειών αναθέρμανσης κατά Martini .....	65
Σχήμα 3.15 : Προφίλ θερμοκρασίας στο διάκενο εκτοπιστή – κυλίνδρου .....	68
Σχήμα 3.16 : Ιδανικό αδιαβατικό μοντέλο .....	71
Σχήμα 4.1 : Η αντλία θερμότητας Vuilleumier του Kuhl .....	81
Σχήμα 4.2 : Γράφημα όγκων εργαζόμενων χώρων (εκτόνωσης, συμπίεσης) $V$ σε $m^3$ συναρτήσει της γωνίας στροφάλου $\theta$ σε μοίρες.....	82
Σχήμα 4.3 : Γράφημα πίεσης $p$ του αερίου σε $Pa$ συναρτήσει της γωνίας $\theta$ του στροφάλου σε μοίρες.....	82
Σχήμα 4.4 : Γράφημα $p-V_i$ της μηχανής VM του Kuhl .....	83
Σχήμα 4.5 : Γράφημα (πίτα) ποσοστών απωλειών επί των συνολικής ισχύος απωλειών κατά το μοντέλο του Urieli.....	84
Σχήμα 4.6 : Γράφημα (ραβδόγραμμα) θερμικής απόδοσης κατά το μοντέλο του Urieli .....	84
Σχήμα 4.7 : Γράφημα (πίτα) ποσοστών απωλειών επί της συνολικής ισχύος απωλειών κατά το μοντέλο του Berchowitz.....	86

Σχήμα 4.8 : Γράφημα (ραβδόγραμμα) θερμικής απόδοσης κατά το μοντέλο του Berchowitz.....	86
Σχήμα 4.9 : Γράφημα (πίτα) ποσοστών απωλειών επί της συνολικής ισχύος απωλειών κατά το μοντέλο του Martini.....	88
Σχήμα 4.10 : Γράφημα (ραβδόγραμμα) θερμικής απόδοσης κατά το μοντέλο του Martini.....	89
Σχήμα 4.11 : Γράφημα (πίτα) σύγκρισης ποσοστών απωλειών <i>flow friction</i> επί της ενδεικνυόμενης ισχύος βάσει ισοθερμοκρασιακού μοντέλου για την μηχανή του Kuhl .....	90
Σχήμα 4.12 : Γράφημα (πίτα) σύγκρισης ποσοστών απωλειών <i>shuttle</i> επί της ενδεικνυόμενης ισχύος βάσει ισοθερμοκρασιακού μοντέλου για την μηχανή του Kuhl .....	90
Σχήμα 4.13 : Γράφημα (πίτα) σύγκρισης ποσοστών απωλειών <i>rumping</i> επί της ενδεικνυόμενης ισχύος βάσει ισοθερμοκρασιακού μοντέλου για την μηχανή του Kuhl .....	90
Σχήμα 4.14 : Γράφημα (πίτα) σύγκρισης ποσοστών απωλειών <i>conduction</i> επί της ενδεικνυόμενης ισχύος βάσει ισοθερμοκρασιακού μοντέλου για την μηχανή του Kuhl .....	91
Σχήμα 4.15 : Γράφημα (πίτα) σύγκρισης συνολικών απωλειών επί της ενδεικνυόμενης ισχύος βάσει ισοθερμοκρασιακού μοντέλου για την μηχανή του Kuhl.....	91
Σχήμα 4.16 : Γράφημα (ραβδόγραμμα) σύγκρισης COP για την μηχανή του Kuhl.....	91
Σχήμα 4.17 : Γράφημα πίεσης $p$ του αερίου σε $Pa$ συναρτήσει της γωνίας $\varphi$ του στροφάλου σε μοίρες.....	94
Σχήμα 4.18 : Γράφημα πίεσης $p$ του αερίου σε $Pa$ συναρτήσει των όγκων $V$ των εργαζόμενων χώρων συμπίεσης και εκτόνωσης σε $m^3$ .....	94
Σχήμα 4.19 : Γράφημα (ραβδόγραμμα) σύγκρισης θερμικού συντελεστή συμπεριφοράς της μηχανής VM του Kuhl με το μοντέλο του Berchowitz .....	97
Σχήμα 4.20 : Γράφημα (ραβδόγραμμα) σύγκρισης θερμικής ισχύος εξόδου της μηχανής VM του Kuhl με το μοντέλο του Berchowitz .....	97



## Ευρετήριο πινάκων

Πίνακας 3.1 : Ονοματολογία και σημασία συμβόλων για την ανάλυση μηχανών VM .....	28
Πίνακας 3.2 : Δείκτες και η σημασία τους στην ανάλυση μηχανών VM.....	31
Πίνακας 3.3 : Άλλα σύμβολα και η σημασία τους .....	33
Πίνακας 3.4 : Εξιιώσεις με βάση το ισοθερμικό μοντέλο ανάλυσης για μηχανή VM .....	41
Πίνακας 3.5 : Εξιιώσεις απωλειών Urieli για μηχανή VM .....	53
Πίνακας 3.6 : Εξιιώσεις απωλειών Berchowitiz για μηχανή VM.....	58
Πίνακας 3.7 : Εξιιώσεις απωλειών Timoumi για μηχανή VM .....	61
Πίνακας 3.8 : Εξιιώσεις απωλειών Martini για μηχανή VM .....	66
Πίνακας 3.9 : Εξιιώσεις απωλειών Pfeiffer για μηχανή VM.....	70
Πίνακας 3.10 : Εξιιώσεις με βάση το αδιαβατικό μοντέλο ανάλυσης για μηχανή VM.....	75
Πίνακας 4.1 : Παράμετροι λειτουργίας της GPU – 3 κατά Martini.....	77
Πίνακας 4.2 : Απώλειες της GPU – 3 κατά το μοντέλο του Martini.....	78
Πίνακας 4.3 : Παράμετροι λειτουργίας της GPU – 3 κατά Pfeiffer .....	78
Πίνακας 4.4 : Απώλειες της GPU – 3 κατά το μοντέλο του Pfeiffer .....	78
Πίνακας 4.5 : Παράμετροι λειτουργίας της GPU – 3 κατά Berchowitiz .....	79
Πίνακας 4.6 : Απώλειες της GPU – 3 κατά το μοντέλο του Berchowitiz.....	79
Πίνακας 4.7 : Παράμετροι λειτουργίας της GPU – 3 κατά Timoumi .....	79
Πίνακας 4.8 : Απώλειες της GPU – 3 κατά το μοντέλο του Timoumi.....	79
Πίνακας 4.9 : Παράμετροι λειτουργίας της GPU – 3 κατά Urieli.....	80
Πίνακας 4.10 : Απώλειες της GPU – 3 κατά το μοντέλο του Urieli.....	80
Πίνακας 4.11 : Αποτελέσματα ιδανικού ισοθερμοκρασιακού μοντέλου .....	81
Πίνακας 4.12 : Αποτελέσματα μοντέλου απωλειών του Urieli.....	83
Πίνακας 4.13 : Αποτελέσματα μοντέλου απωλειών του Berchowitiz .....	85
Πίνακας 4.14 : Αποτελέσματα μοντέλου απωλειών του Timoumi.....	87
Πίνακας 4.15 : Αποτελέσματα μοντέλου απωλειών του Martini.....	88
Πίνακας 4.16 : Αποτελέσματα μοντέλου απωλειών του Pfeiffer .....	89

<i>Πίνακας 4.17 : Αποτελέσματα ιδανικού αδιαβατικού μοντέλου.....</i>	<i>93</i>
<i>Πίνακας 4.18 : Αποτελέσματα μοντέλου απωλειών του Berchowitz με βάση το αδιαβατικό μοντέλο.....</i>	<i>95</i>
<i>Πίνακας 4.19 : Γραφήματα (πίτες) με σταδιακή προσθήκη απωλειών του μοντέλου Berchowitz για την αντλία θερμότητας VM του Kuhl.....</i>	<i>95</i>