Στρεφόμενα υλικά κύματα υπο την παρουσία αρμονικού δυναμικού

Παναγιώτης Βασιλόπουλος Α.Μ. 09412004*

Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία

Επιβλέπων Καθηγητής: Βασίλειος Ρόθος

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

28 Οκτωβρίου 2015

*pvasilopmath@gmail.com

Σύνοψη

Στο κεφάλαιο Εισαγωγή παραθέτουμε βασικές γνώσεις που πρέπει να έχει κάποιος νέος ερευνητής πάνω στις μη γραμμικές εξισώσεις *Shcrodinger* και τα συμπυκνώματα *Bose − Einstein* και εξηγούμε τον τρόπο με τον οποίο συνδιάζονται αυτά τα επιστημονικά πεδία. Δηλαδή πως οι μη γραμμικές εξισώσεις *Shcrodinger* χρησιμοποιούνται ως βασικό μοντέλο της δυναμικής των συμπυκνωμάτων *Bose − Einstein*.

Παρακάτω, στο δεύτερο κεφάλαιο αναφέρουμε τα βασικά μαθηματικά εργαλεία που θα χρησιμοποιήσουμε σε όλη την έκταση της εργασίας. Αυτά είναι η θεωρία διαταραχών και ειδικότερα η μέθοδος των πολλαπλών χρονικών κλιμάκων, και η μέθοδος των *Lyapunov − Schmidt* η οποία εκ των ών ουκ άνευ για τα προβλήματα της θεωρίας διακλάδωσης.

Στο τρίτο κεφάλαιο χρησιμοποιούμε την μέθοδο πολλαπλών χρονικών κλιμάκων για να εξαγάγουμε την *NLS* απο γνωστές εξισώσεις της μαθηματικής φυσικής και παρουσιάζουμε βασικές ιδιότητες της εξίσωσης.

Στο τέταρτο κεφάλαιο που είναι και το πιο ενδιαφέρον παρουσιάζουμε νέες μεθόδους που αφορούν στην ανάλυση της δυναμικής των συμπυκνωμάτων *Bose − Einstein* και τις εφαρμόζουμε σε ένα πρόβλημα συζευγμένων εξισωσεων *Gross − Pitaevski* που περιγράφει την δυναμική δύο αλληλεπιδρώντων συμπυκνωμάτων *Bose − Einstein* ή ισοδύναμα ενός συμπυκνώματος που αποτελείται απο δυο διαφορετικά είδη σωματιδίων. Πιο συγκεκριμένα μελετάμε αναλυτικά χρησιμοποιώντας θεωρία διακλάδωσης και ειδικότερα τη μέθοδο *Lyapunov − Schmidt* την δυναμική υλικών κυμάτων σε διδιάστατα και μαγνητικά παγιδευμένα συμπυκνώματα *Bose − Einstein* (*BECs*) καθώς και την αλληλεπίδραση μεταξύ των συμπυκνωμάτων για κάποιες ειδικές περιπτωσεις, στο όριο της ασθενούς αλληλεπίδρασης. Αφετηρία μας είναι η συζευγμένη εξίσωση *Gross − Pitaevski* σε στρεφόμενο σύστημα συντεταγμένων. Στη συνέχεια θα μελετήσουμε την ύπαρξη αζιμουθιακά διαμορφωμένων δομών όπως δακτύλιοι, πολύπολα και σολιτονικές αλυσίδες. Θα εφαρμόσουμε τεχνικές αναγωγής *Lyapunov − Schmidt* για να κατασκευάσουμε τέτοιες δομές. Τέλος η παραπάνω ανάλυση γίνεται για ελκτικό και αποστικό δυναμικό μεταξύ των ατόμων του συμπυκνώματος.

Η παρούσα εργασία έγινε στα πλαίσια του μεταπτυχιακού προγράμματος Εφαρμοσμένες Μαθηματικές Επιστήμες, της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Λέξεις Κλειδιά : Μή γραμμική Εξίσωση $Shrodinger$, Σολιτόνια, συζευγμένη εξίσωση $Gross - Pitaevski$, $Lyapunov - Schmidt$.

Abstract

In the first section of this master's course thesis we give the background information that is most needed to a young researcher in Non Linear Schroedinger type equations and Bose Einstein Condensates. Later, we introduce NLS as a convinient model for the study of the dynamics of BEC's.

In the second section we introduce the mathematical technique that is most importand for the study of the non linear science. That is perturbation theory and especially the theory of multiple scales and Lyapunov - Schmidt reduction method. The latter is a very powerful tool of bifurcation theory.

The third section is consisted of non linear Shrodinger equation models. We use the mathematical background of section 2 in order to take NLS from some very well known non linear equations of mathematical physics.

In the fourth section, which is the most interesting we use new methods in a coupled Gross-Pitaevski type equation. This is the governing equation for a two-dimensional coupled Bose Einstein condensate in a rotating coordinate frame. To be more specific we use Lyapunov - Schmidt reduction method in order to consider analytically the dynamics of waves in two-dimensional, magnetically trapped Bose–Einstein condensates in the weak interaction limit. In particular, we consider the existence of azimuthally modulated structures such as rings, multi-poles, soliton necklaces, and vortex necklaces. We use Lyapunov–Schmidt techniques in order to constract such structures. The analysis is given for both attractive and repulsive interactions among the condensate atoms.

Keywords: Non linear Schrodinger equation,solitons, Gross-Pitaevski coupled, Lyapunov-Schmidt

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου που ήταν πάντα κοντά μου και με στήριζαν ακόμα και όταν δεν ήμουν σίγουρος για την ορθότητα των επιλογών μου. Ευχαριστώ τους καθηγητές μου στο μεταπτυχιακό για τις συμβουλές, τη στήριξη, και τα μαθηματικά που μου έμαθαν. Επιπλέον θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή μου στην διπλωματική εργασία Βασίλη Ρόθο για την ουσιαστική συνεργασία και την υπομονή του.

Περιεχόμενα

1 Εισαγωγή

1.1 Βασικές έννοιες

Η μη γραμμική Εξίσωση *Shrodinger* είναι μια απο τις πιο σημαντικές και δημοφιλής εξισώσεις της μαθηματικής Φυσικής όχι μόνο επειδή βρίσκει εφαρμογή σε πολλά και ιδιαίτερα ενδιαφέροντα ερευνητικά ζητήματα όπως η διάδοση σολιτονίων [1], τα συμπυκνώματα Bose - Einstein, οι σχετικιστικές εξισώσεις πεδίου κ.α. αλλά επειδή όπως θα δούμε παρακάτω υπάρχει μια πλούσια συλλογή απο εξισώσεις της μαθηματικής φυσικής που μετασχηματίζονται στην μη γραμμική Εξίσωση *Shrodinger*.

Η μη γραμμική Εξίσωση *Shrodinger* με εξωτερικό δυναμικό έχει τη μορφή

$$iu_t = -\Delta u + V(x)u + \sigma(|u|^2 u) \tag{1}$$

όπου $\Delta = \sum\limits_{i=1}^{n} {\partial_{x_i}}^2$ είναι ο τελεστής του *Laplace* σε ένα χώρο με n διαστάσεις ενώ $u(x,t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ είναι η (ζητούμενη) συνάρτηση πλάτους και $V(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι μια (δεδομένη) συνάρτηση δυναμικού. Επίσης η παράμετρος σ παίρνει τιμές στο δισύνολο $\{-1, 1\}$ και δίνει το πρόσημο της κυβικής μή - γραμμικότητας. Πιο συγκεκριμένα για $\sigma = -1$ η 1 καλείται εστιάζουσα ή ελκτική ενώ για $\sigma = 1$ καλείται αφεστιάζουσα ή απωστική. Η ορολογία αλλάζει ανάλογα με το ερευνητικό πεδίο στο οποίο βρίσκει εφαρμογή η 1.

Όσον αφορά στην ίδια την ονομασία της εξίσωσης είναι σύνηθες να χρησιμοποιούμε την ονομασία *Gross – Pitaevski* όταν η δυναμική συνάρτηση δεν είναι μηδενική, ενώ στην τετριμένη περίπτωση όπου $V(x) = 0$ η 1 απλά θα καλείται *NLS* ή ελεύθερη *NLS* όπως είναι γνωστή απο την κβαντομηχανική.

Θα μας απασχολήσει ιδιαίτερα η συζευγμένη *NLS*

$$iq_t = -\Delta q + \sigma(|q|^2 + b|p|^2)q$$
$$ip_t = -a\Delta p + \sigma(b|q|^2 + |p|^2)p$$

[1] ή αλλιώς σολιτονικών ή μοναχικών κυμάτων

όπου a, b είναι πραγματικοί αριθμοί και έχουν την έννοια της παραμέτρου. $\sigma \in \{-1, 1\}$, και q, p είναι συναρτήσεις πλάτους, εν γένει μιγαδικές. Σε πολλές περιπτώσεις μπορεί να χρειάζονται περισσότερες απο δύο συναρτήσεις για την περιγραφή ενός προβλήματος. Ωστόσο, τέτοιες περιπτώσεις δε θα μας απασχολήσουν καθώς τα προβλήματα που μας ενδιαφέρουν περιγράφονται ικανοποιητικά απο την προηγούμενη συζευγμένη εξίσωση με την προσθήκη κάποιων επιπλέον όρων.

1.2 Η εξίσωση $Gross - Pitaevski$ στα συμπυκνώματα $Bose - Einstein$

Απο τα τέλη του προηγούμενου αιώνα η δυναμική των συμπυκνωμάτων $Bose - Einstein$ κερδίζει σταθερά έδαφος στην επιστημονική κοινότητα τόσο θεωρητικά όσο και πειραματικά. Η σταθερή ανάπτυξη του συγκεκριμένου επιστημονικού πεδίου έχει οδηγήσει μια μεγάλη μερίδα της κοινότητας των επιστημόνων της μη γραμμικής επιστήμης να στρέψει το ενδιαφέρον της σε εξισώσεις τύπου μη γραμμική $Schrodinger$ οι οποίες στο πεδίο έρευνας που μας ενδιαφέρει περιγράφουν ή καλύτερα προσεγγίζουν πολύ καλά τις ενδοατομικές αλληλεπιδράσεις σε ένα συμπύκνωμα $Bose-Einstein$. Πιο συγκεκριμένα, μονοδιάστατα φωτεινά και σκοτεινά σολιτόνια έχουν ανιχνευθεί σε πειράματα με αποστικά και ελκτικά συμπυκνώματα $Bose-Einstein$ αντίστοιχα. Επιπλέον, παρουσιάζει εξαιρετικό ενδιαφέρον το γεγονός πως στις μαγνητικές παγίδες υπάρχει πληθώρα εξωτερικών δυναμικών που συγκρατούν τα άτομα σε αντίθεση με άλλα φυσικά συστήματα που διέπονται απο τις ίδιες εξισώσεις όπως π.χ οι οπτικές ίνες.

Η βασική ιδέα όσον αφορά στα συμπυκνώματα $Bose - Einstein$ χρονολογείται στο έτος 1925 όταν ο $A.Einstein$ βασισμένος στην έρευνα του $S.Bose$ που αφορούσε στην στατιστική περιγραφή σωματίων με ακέραιο σπιν (τα γνωστά πλέον στην επιστημονική κοινότητα Μποζόνια!), προέβλεψε μια κατάσταση μετάπτωσης φάσης μη αλληλεπιδρώντων ατόμων. Η μετάπτωση αυτή συνδέετε άμεσα με την συμπύκνωση των ατόμων στην κατάσταση ελάχιστης ενέργειας. Με απλά λόγια θα μπορούσαμε να πούμε πως σε αυτήν την κατάσταση οι κυματοσυναρτήσεις των ατόμων αλληλοεπικαλύπτονται σχεδόν παντού με αποτέλεσμα την μη διάκριση των ατόμων και την κατάρευση του αερίου σε συμπύκνωμα. Πολλά βήματα έγινα απο τότε με το ποιό σημαντικό το 1995 απο τη συνεργασία των ερευνητικών ομάδων των $Cornel$ και $Wieman$ στο $Boulder$ και του $Ketterle$ στο MIT όταν συνδιάζοντας διαφορετικές τεχνικές ψύξης κατάφεραν να επιτύχουν τις απαιτούμενες θερμοκρασίες και πυκνότητες ώστε να παρατηρήσουν την συμπύκνωση $Bose-Einstein$ σε άτομα ρουβιδίου και νατρίου.

Όσον αφορά στην παρούσα εργασία θα ασχοληθούμε με την περίπτωση των σχεδόν επίπεδων συμπυκνωμάτων $Bose-Einstein$ η οποία είναι ίσως η πλέον ενδιαφέρουσα απο μαθηματικής άποψης αφού μας παρέχει τη δυνατότητα να μελετήσουμε μια ποικιλία απο πολύπλοκες δομές, ενω ταυτόχρονα είναι φιλική όσον αφορά στους υπολογισμούς.

Η μελέτη που ακολουθεί βασίζεται στην δημοσίευση $T.Kapitula\ et\ al.$ / $Physica\ D$ 233 (2007) 112137 στην οποία αναπτύσεται το πρόβλημα για την διδιάστατη περίπτωση επίπεδου συμπυκνώματος σε στρεφόμενο σύστημα συντεταγμένων. Στην συνέχεια θα εφαρμόσουμε την θεωρία αυτή στην ειδική περίπτωση δύο συμπυκνωμάτων $Bose-Einstein$ υπο την παρουσία ελκτικού ή αποστικού δυναμικού.

Θεωρούμε ένα συμπύκνωμα $Bose-Einstein$ στις δύο διαστάσεις υπο την παρουσία εξωτερικού δυναμικού. Η εξίσωση που περιγράφει τη δυναμική του συμπυκνώματος σε στρεφόμενο σύστημα συντεταγμένων είναι

$$i\partial_t q + \Delta q + \omega q + \alpha|q|^2 q = i\Omega\partial_\theta q + V_{ext} q \tag{2}$$

όπου $\partial_\theta = x\partial_y - y\partial_x$, $q \in \mathbb{C}$ είναι η κυματοσυνάρτηση, $\alpha \in \{-1, +1\}$ εκφραζει την μή γραμμική αλληλεπίδραση, για $\alpha = 1$ έχουμε ελκτικό δυναμικό ενώ για $\alpha = -1$ το δυναμικό είναι απωστικό, $\omega \in \mathbb{R}$ είναι μια ελεύθερη παράμετρος που εκφράζει την επίδραση του χημεικού δυναμικού, και $V_{ext} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι το δυναμικό παγίδευσης. Τέλος, ο όρος Ω αντιστοιχεί στην συχνότητα περιστροφής. Στην ανάλυση που θα ακολουθήσει υποθέτουμε πως το υπο μελέτη συμπύκνωμα υποβάλλεται σε ένα εξωτερικό δυναμικό παγίδευσης που έχει τη μορφή $V_{ext} = |x|^2$ το οποίο οφείλεται σε μαγνητικά φαινόμενα.

Ο σκοπός της εργασίας είναι να καθορίσουμε την ύπαρξη και την γραμμική ευστάθεια στρεφόμενων υλικών κυμάτων όπως δομές δακτυλίου, σολιτονικές αλυσίδες,αλυσίδες δίνης και πολύπολα, κυρίως δίπολα, τετράπολα και οκτάπολα στο όριο της ασθενούς αλληλεπίδρασης των ατόμων που συγκροτούν το συμπύκνωμα, για την ειδική περίπτωση του συζευγμένου προβλήματος.

Η ύπαρξη της δομής της αλυσίδας δίνης έχει επαληθευθεί πειραματικά απο τους N.Ginsberg, J.Brand και L.Hau (2005) ενώ έχει προβλεφθεί νωρίτερα (2002) θεωρητικά αλλά και με αριθμητικούς υπολογισμούς απο την ομάδα των L.C.Crasovan, G.Monnina-Terriza, J.Torres, L.Torner. Οι λύσεις που βρέθηκαν απο τους τελευταίους απαγορεύουν την περιστροφή της μαγνητικής παγίδας. Επίσης, οι καταστάσεις πολυπόλων έχουν προβλευθεί με αριθμητικούς υπολογισμούς απο την ομάδα των M. Liu, L. Wen, H. Xiong και M. Zhan.

Στην ανάλυση που θα ακολουθήσει στο κεφάλαιο 4 θα δούμε πως όσον αφορά μή περιστρεφόμενα υλικά κύματα, δηλαδή όταν Ω=0, η μόνη γραμμικά ευσταθής απο τις προκύπτουσες λύσεις είναι η περίπτωση της αλυσίδας δίνης. Για στρεφόμενα κύματα των οποίων η συχνότητα περιστροφής είναι

$$\Omega = -2 + 4\frac{1}{l}, l = 2, 3, 4, ...,$$

Επίσης, θα δούμε οτι οι δομή τύπου δακτυλίου είναι γραμμικά ευσταθής για $l \geq 6$ και ασταθής σε κάθε άλλη περίπτωση. Επίσης θα δούμε πως η δομή τύπου πολυπόλου και τύπου δίνης είναι ασταθής, πιο συγκεκριμένα αυτό που συμβαίνει είναι πως με την αύξηση του l αυξάνεται επίσης και ο αριθμός των ασταθών ιδιοτιμών.

2 Μαθηματικό Υπόβαθρο

2.1 Η μέθοδος πολλαπλών κλιμάκων

Υποθέτουμε πως ο αναγνώστης είναι εξοικειωμένος με την κλασική (κανονική) θεωρία διαταραχών καθώς και με τη μέθοδο $Poincare - Lindsted$, για περαιτέρω ανάγνωση προτείνουμε τα συγγράμματα των *J.David Logan* - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά και Α.Μπούντης - Μη γραμμικές Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις.

Επειδή η τελευταία αποτυγχάνει σε πολλές περιπτώσεις (ειδικά όταν τα υπο μελέτη συστήματα δεν είναι διατηρητικά) χρησιμοποιούμε την Μέθοδο Πολλαπλών Κλιμάκων. Η γενική ιδέα της μεθόδου είναι η εξής: Υποθέτουμε οτι υπάρχει μια *αργή* και μια *γρήγορη* μεταβλητή. Ουσιαστικά εκμεταλευόμαστε το γεγονός πως πολλά φυσικά φαινόμενα αποτελούνται απο διεργασίες οι οποίες συμβαίνουν σε εντελώς διαφορετικές χρονικές κλίμακες. Υπο αυτό το πρίσμα μιλάμε για *αργό* και *γρήγορο* χρόνο.

Η μέθοδος των πολλαπλών κλιμάκων βρίσκει εφαρμογή σε ένα ευρύ φάσμα προβλημάτων και για τα περισσότερα απο τα προβλήματα της μη γραμμικής επιστήμης είναι ένα πολύ σημαντικό εργαλείο. Παρακάτω θα αναπτύξουμε την μέθοδο μέσα απο παραδείγματα. Συγκεκριμένα θα παραθέσουμε δύο παραδείγματα, ένα γραμμικό και ένα μη γραμμικό. Πρώτα θα δώσουμε κάποιους χρήσιμους ορισμούς.

Ορισμός. Έστω $f(\varepsilon)$ και $g(\varepsilon)$ συναρτήσεις ορισμένες σε μια περιοχή του μηδενός. Θα λέμε ότι η $f(\varepsilon)$ είναι τάξης $o(g(\varepsilon))$ όταν $\varepsilon \to 0$ (συμβ. $f(\varepsilon) = o(g(\varepsilon))$, όταν $\varepsilon \to 0$) αν, $\lim_{\varepsilon\to 0} |\frac{f(\varepsilon)}{g(\varepsilon)}| = 0$. Επίσης θα λέμε ότι η $f(\varepsilon)$ είναι τάξης $O(g(\varepsilon))$ καθώς $\varepsilon \to 0$ (συμβ. $f(\varepsilon) = O(g(\varepsilon))$, καθώς $\varepsilon \to 0$) αν υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f(\varepsilon)| \leq M|g(\varepsilon)|$ για κάθε ε σε μια περιοχή του μηδενός.

2.1.1 Γραμμικό παράδειγμα

Ας υποθέσουμε πως θέλουμε να λύσουμε την διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = -\varepsilon\frac{dy}{dt}, \tag{3}$$

όπου $y = y(t)$. Ας θυμηθούμε πως θέλουμε να εισάγουμε μια *αργή* και μια *γρήγορη* μεταβλητή. Θέτουμε $T = \varepsilon t$ και $\bar{t} = t$. Τώρα μπορούμε να γράψουμε την y σαν μια συνάρτηση δύο μεταβλητών. Είναι προφανές πως η *αργή* μεταβλητή είναι η T ενώ η *γρήγορη* είναι η $\bar{t}$ την οποία απο εδώ και πέρα θα συμβολίζουμε απλά t μια και δεν υπάρχει λόγος σύγχυσης.

Απο τον κανόνα της αλυσίδας παίρνουμε

$$\frac{dy}{dt} \to \frac{\partial y}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial y}{\partial T} \tag{4}$$

και αν γράψουμε την τελευταία στην μορφή τελεστών

$$\frac{d}{dt} \to \frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T} \tag{5}$$

και άρα η διαφορική εξίσωση γίνεται

$$(\frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T})^2 y + y = -\varepsilon(\frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T})y, \tag{6}$$

η οποία γραμμένη σε μια πιό συνοπτική μορφή είναι

$$y_{tt} + 2\varepsilon y_{tT} + \varepsilon^2 y_{TT} + y = -\varepsilon(y_t + \varepsilon y_T). \tag{7}$$

Εκ πρώτης όψεως η εικόνα είναι περισσότερο περίπλοκη απο όσο θα θέλαμε αφού η αρχική συνήθης διαφορική εξίσωση έχει μετασχηματιστεί σε μια διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους. Στα επόμενα βήματα θα φανεί η αξία αυτού του μετασχηματιμού. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση y έχει ανάπτυγμα της μορφής $y = y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + ...$ και με αντικατάσταση στην 7 παίρνουμε την διαταραγμένη εξίσωση

$$\begin{aligned}
&(y_{0,tt} + \varepsilon y_{1,tt} + \varepsilon^2 y_{2,tt} + ...) + 2\varepsilon(y_{0,tT} + \varepsilon y_{1,tT} + \varepsilon^2 y_{2,tT} + ...) \\
&+\varepsilon^2(y_{0,TT} + \varepsilon y_{1,TT} + \varepsilon^2 y_{2,TT} + ...) + y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + ... = \\
&-\varepsilon(y_{0,t} + \varepsilon y_{1,t} + \varepsilon^2 y_{2,t} + ...) - \varepsilon^2(y_{0,T} + \varepsilon y_{1,T} + \varepsilon^2 y_{2,T} + ...),
\end{aligned}$$

η οποία για όρους τάξης 1 δίνει

$$O(1) : y_{0,tt} + y_0 = 0, \tag{8}$$

και αν λάβουμε υπόψιν μας οτι η y εξαρτάται και απο το T, παίρνουμε την γενική λύση

$$y_0(t,T) = A(T)e^{it} + c.c., \tag{9}$$

όπου $A(T)$ είναι μια αυθαίρετη συνάρτηση του T και $c.c.$ συμβολίζει το μιγαδικό συζυγές. Η εξίσωση τάξης ε είναι

$$O(\varepsilon) : y_{1,tt} + y_1 = -2y_{1,tT} - y_{0,t}, \tag{10}$$

η οποία με χρήση της 11 γίνεται

$$O(\varepsilon) : y_{1,tt} + y_1 = -i(2A_T + A)e^{it} + c.c. \tag{11}$$

Για να απαλείψουμε αιώνιους όρους απαιτούμε

$$2A_T + A = 0 \tag{12}$$

απο όπου προκύπτει

$$A(T) = A_0 e^{-T/2}, \tag{13}$$

όπου A_0 είναι μια (εν γένει μιγαδική) σταθερά. Αφήνουμε τώρα όλους τους ομογενείς όρους να απορροφηθούν στην λύση y_0 και επιλέγουμε $y_1 = 0$. Η μέχρι τώρα διαταραγμένη λύση μας είναι

$$y(t,T) = A_0 e^{-T/2} e^{it} + c.c. = A_0 e^{(i-\varepsilon/2)t} + c.c. \tag{14}$$

Μπορούμε να συνεχίσουμε τον υπολογισμό όρων υψηλότερης τάξης για το αργά μεταβαλλόμενο πλάτος $A(T)$. Ωστόσο, θα πρέπει να δείξουμε ιδιαίτερη προσοχή. Παρατηρούμε πως αν αναπτύξουμε την εξίσωση 12 ως

$$2A_T + A = \varepsilon r_1 + \varepsilon^2 r_2 + ..., \tag{15}$$

και αντικαταστήσουμε στην 11, παίρνουμε

$$y_{1,tt} + y_1 = -i(2A_T + A)e^{it} + c.c. = -i\varepsilon r_1 e^{it} + c.c. + O(\varepsilon^2). \tag{16}$$

Θέτουμε $\varepsilon R_1 = -i\varepsilon r_1 e^{it} + c.c.$ και παρατηρούμε οτι ο όρος αυτός είναι υπόλοιπο τάξης ε που πρέπει να προστεθεί στην εξίσωση επόμενης τάξης, δηλαδή την $O(\varepsilon^2)$. Τότε μπορούμε με ασφάλεια να υποθέσουμε ότι $y_1 = 0$ και να υπολογίσουμε όρους υψηλότερης τάξης για την συνάρτηση y και το πλάτος $A(T)$.

2.1.2 Μη γραμμικό παράδειγμα

Ας υποθέσουμε πως θέλουμε να λύσουμε την διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = \varepsilon y^3. \tag{17}$$

Αν κάνουμε ακριβώς τα ίδια βήματα όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα προκύπτει

$$y_{tt} + y + \varepsilon(2y_{tT} - y^3) + \varepsilon^2 y_{TT} = 0 \tag{18}$$

απο όπου όπως και πρίν παίρνουμε για την $O(1))$ εξίσωση

$$y_0(t,T) = A(T)e^{it} + c.c. \tag{19}$$

Η $O(\varepsilon)$ δίνει

$$O(\varepsilon) : y_{1,tt} + y_1 = -2y_{0,tT} - y_0^3. \tag{20}$$

Με αντικατάσταση της 19 στην τελευταία παίρνουμε

$$y_{1,tt} + y_1 = -(2iA_T - 3|A|^2 A)e^{it} + A^3 e^{3it} + c.c. \tag{21}$$

Παρατηρούμε πως οι όροι που περιέχουν το e^{it} είναι αιώνιοι εφόσον το e^{it} είναι λύση της ομογενούς εξίσωσης για το y_1. Απο την άλλη το e^{3it} δεν είναι και άρα η συνεισφορά των συντελεστών του e^{3it} είναι φραγμένη. Για τους παραπάνω λόγους απαιτούμε

$$2iA_T - 3|A|^2 A = 0, \tag{22}$$

και η εξίσωση για το y_1 γίνεται

$$y_{1,tt} + y_1 = A^3 e^{3it} + c.c. \tag{23}$$

Μπορούμε να βρούμε την λύση της 22. Αρκεί να παρατηρήσουμε οτι η ποσότητα $|A|^2$ είναι μια διατηρήσιμη ποσότητα του χρόνου δηλαδή $(|A|^2)_T = 0$. Τότε $|A|^2(T) = |A|^2(0) = A_0^2$, όπου A_0 είναι αυθαίρετη σταθερά. Έτσι, η 22 γίνεται

$$2iA_T - 3|A_0|^2 A = 0, \tag{24}$$

και έχει λύση την

$$A(T) = A_0 e^{\frac{3i}{2}|A_0|^2 T} = A_0 e^{\frac{3i}{2}|A_0|^2 \varepsilon t}. \tag{25}$$

Υποθέτουμε οτι $y_1 = Be^{3it} + c.c.$, αντικαθιστούμε στην 23 και παίρνουμε την λύση

$$y_1 = -\frac{1}{8} A_0^3 e^{-\frac{9i}{2}|A_0|^2 \varepsilon t} e^{3it} + c.c. + O(\varepsilon). \tag{26}$$

Η λύση διαταραχών που έχουμε μέχρι τώρα προσδιορίσει είναι

$$y(t) = A_0 e^{(1-\frac{3\varepsilon}{2}|A_0|^2)it} - \frac{\varepsilon}{8} A_0^3 e^{-\frac{9i}{2}|A_0|^2 \varepsilon t} e^{3it} + c.c. \tag{27}$$

Παρατηρούμε πως κύριο ρόλο στη λύση παιζει ο πρώτος όρος αφού η συνεισφορά του δευτέρου στο πλάτος είναι φραγμένη και άρα είναι $O(\varepsilon)$ μικρός σε σχέση με τον πρώτο.

2.2 Η μέθοδος Lyapunov - Schmidt

Ο βασικός σκοπός της (τοπικής) θεωρίας διακλαδώσης είναι να παρέχει πληροφορίες για τον εντοπισμό των λύσεων παραμετρικών εξισώσεων, στη γειτονιά των σημείων για τα οποία εμφανίζονται πολλαπλές λύσεις. Βασικό εργαλείο της θεωρίας διακλάδωσης είναι το ακόλουθο

Θεώρημα (Πεπλεγμένης Συνάρτησης - Πεπερασμένη διάσταση).

Θεωρούμε ένα σύστημα εξισώσεων της μορφής

$$f_i(x_1, ..., x_n, a_1, ..., a_k) = 0$$

που εξαρτάται απο k παραμέτρους a_j όπου $1 \leq i \leq n$, και $1 \leq j \leq k$.

Έστω $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $a = (a_1, ..., a_k) \in \mathbb{R}^k$ και $f = (f_1, ..., f_n) \in \mathbb{R}^n$. Με αυτό το τρόπο ορίζουμε μια απεικόνιση (*mapping*) $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ που είναι s - φορές διαφορίσιμη, όπου $1 \leq s \leq \infty$. Για κάθε (x, a) στον $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ έστω οτι $D_x f(x, a)$ είναι ο $n \times n$ Ιακωβιανός πίνακας

$$\Big(\frac{\partial_{f_i}}{\partial_{x_j}}(x, a)\Big)_{i,j=1,...,n}$$

.

Υποθέτουμε ότι για το σημείο (x_0, a_0) ισχύει

$$f(x_0, a_0) = 0$$

$$det(D_x f(x_0, a_0)) \neq 0$$

.

Τότε, υπάρχουν (ανοικτές) περιοχές U του $\mathbb{R}^n$ και V του $\mathbb{R}^k$ των x_0 και a_0 αντίστοιχα και μια συνάρτηση $X : V \to U$ τέτοια ώστε, για κάθε a στο V να υπάρχει x στο U ώστε το σύστημα να έχει μοναδική λύση την $X(a) = x \in U$. Επιπλέον εάν η f είναι κλάσης C^s τότε το ίδιο είναι και η X.

Παρατήρηση.

Το Θεώρημα Πεπλεγμένης Συνάρτησης μας δίνει ικανές συνθήκες ώστε το σύστημα να έχει λύση τοπικά για τα $x_1, ..., x_n$ σαν συναρτήσεις των a_j.

Παράδειγμα.

Για τα προβλήματα μιας εξίσωσης μίας μεταβλητής με μια παράμετρο $a = (a_1, ..., a_k) \in \mathbb{R}^k$ το θεώρημα παίρνει την ακόλουθη μορφή.

Έστω $f \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^k, \mathbb{R})$. Υποθέτουμε ότι το $(0,0)$ ικανοποιεί τις $f(0,0) = 0$ και $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \neq 0$. Τότε υπάρχουν σταθερές $\delta > 0$, $\eta > 0$ και μια συνάρτηση $X \in C^1(B_\delta(\mathbb{R}^k), \mathbb{R})$ έτσι ώστε $X(0) = 0$ και $f(X(a), a) = 0$ για κάθε a στη $B_\delta(\mathbb{R}^k)$, όπου η δ - μπάλα στον $(\mathbb{R}^k, ||.||)$ είναι το σύνολο $B_\delta(\mathbb{R}^k) = \{a \in \mathbb{R}^k : ||a|| < \delta\}$.

Επιπλέον αν υπάρχει κάποιο στοιχείο $(x_0, a_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k$ που ικανοποιεί $||a_0|| < \delta$, $|x_0| < \eta$ και $f(x_0, a_0) = 0$, τότε $x_0 = X(a_0)$.

Θα δούμε τωρα πως το Θεώρημα Πεπλεγμένης Συνάρτησης γενικεύεται στην περίπτωση των χώρων *Banach*.

Θεώρημα (Πεπλεγμένης Συνάρτησης - Άπειρη διάσταση).

Στα επόμενα οι X,Υ,Z είναι χώροι *Banach*.

Ορισμός. Εστω μια απεικόνιση $F : X \to Y$. Η F καλείται *Frechet* διαφορίσιμη σε κάποιο στοιχείο u του X αν υπάρχει ένα γραμμικό και φραγμένο συναρτησιακό $L : X \to Y$ ώστε $||F(u+h) - F(u) - Lh|| = o(||h||)$, για κάθε h σε μια περιοχή του 0_X. Συμβολίζουμε το διαφορικό του F στο u με $D_u F(u)$. Είναι σαφές οτι το $D_u F(u)$ είναι γραμμικός τελεστής. Θα λέμε οτι το F είναι κλάσης C^1 αν είναι διαφορίσιμο για κάθε u στο X και η απεικόνιση

$u \to D_u F(u)$ είναι συνεχής ως προς την τοπολογία της νόρμας.

Θεώρημα. Έστω $F : X \times Y \to Z$ μια C^1 απεικόνιση, και έστω $D_u F(u, v) : X \to Z$ το διαφορικό του F (μόνο ως προς τον X). Θεωρούμε την εξίσωση $F(u, v) = 0$ στη γειτονιά κάποιου σταθερού σημείου. Για απλότητα θεωρούμε το (0,0) ώστε $F(0, 0) = 0$. Υποθέτουμε ότι ο τελεστής $D_u F(0, 0) : X \to Z$ έχει φραγμένο αντίστροφο. Τότε, υπάρχει μια C^1 - απεικόνιση $G : Y \to X$ ώστε η $F(u, v) = 0$ να μπορεί να λυθεί τοπικά για $u = G(v)$. Ισοδύναμα, το θεώρημα εφαρμόζεται αν το F είναι μια συνεχώς διαφορίσιμη απεικόνιση απο ένα ανοικτό υποσύνολο του $X \times Y$ επι του Z, (u_0, v_0) ένα σημείο του $X \times Y$ για το οποίο ισχύει $F(u_0, v_0) = 0$ και η (μερική) παράγωγος (ως προς τον X) είναι γραμμικός ομοιομορφισμός επι του Z.

Στις περισσότερες εφαρμογές η F είναι ένας διαφορικός τελεστής. Είναι σημαντικό ο τελεστής να ειναι φραγμένος ώστε το $domain$ και το $range$ του να είναι διαφορετικοί χώροι.

Υπάρχουν πολλές περιπτώσεις για τις οποίες δεν ικανοποιούνται οι συνθήκες του Θεωρήματος Πεπλεγμένης συνάρτησης. Ένα ισχυρό εργαλείο της Θεωρίας Διακλάδωσης που εφαρμόζεται σε αυτές τις περιπτώσεις είναι η αναγωγή $Lyapunov - Schmidt$ την οποία θα περιγράψουμε ακολούθως. Αναγκαίος για την κατανόηση της μεθόδου είναι ο επόμενος

Ορισμός.Έστω X, Y χώροι $Banach$ και $L : X \to Y$ ένας γραμμικός και φραγμένος τελεστής. Ο L λέγεται $Fredholm$ αν ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) Ο πυρήνας του L είναι πεπερασμένης διάστασης υπόχωρος του X.

(ii) Το $range$ του L είναι πεπερασμένης συνδιάστασης κλειστός υπόχωρος του Y.

Εάν ο L είναι $Fredholm$ τότε ορίζουμε το $index$ του L να είναι ο ακέραιος

$ind(L) = dimkerL - codimrangeL.$

Όσον αφορά στους τελεστές $Fredholm$ τις βασικές πληροφορίες που χρειαζόμαστε περιέχει η ακόλουθη

Πρόταση.Έστω $L : X \to Y$ ένας τελεστής $Fredholm.$ Τότε υπάρχουν κλειστοί υπόχωροι A και B των X και Υ αντίστοιχα ώστε $X = kerL \bigoplus A$ και $Y = B \bigoplus rangeL$.

Παρατηρήσεις.

1) Αν οι X και Y είναι πεπερασμένης διάστασης τότε ο L είναι $fredholm$ με $ind(L) = 0$

2) Σε πολλές εφαρμογές προκύπτει ο L να είναι $Fredholm$ με $index$ μηδέν. Εάν επιπλέον

ισχύει $KerL = \{0\}$ τότε ο L είναι επί. Τότε απο το θεώρημα ανοιχτής απεικόνισης ο L έχει φραγμένο αντίστροφο. Πράγματι, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι για κάθε U υποσύνολο του Χ ανοικτό το $(L^{-1})^{-1}U$ είναι ανοικτό υποσύνολο του Y.

Επομένως, για τους τελεστές $Fredholm$ ισχύει η ακόλουθη συνεπαγωγή.

Αν ο $kerL = \{0\}$ και $ind(L) = 0$ τότε ο L είναι αντιστρέψιμος. Για διαφορικούς τελεστές (που μας ενδιαφέρουν κυρίως) οι χώροι X και Y είναι υπόχωροι του $L^2(\Omega)$, όπου Ω είναι ένα φραγμένο χωρίο στον $\mathbb{R}^n$.

Αναγωγή $Lyapunov - Schmidt$.

Έστω X, Y, M πραγματικοί χωροι $Banach$ με $X \subseteq Y$, και έστω $F : X \times M \to Y$ μια $C^k, k \geq 1$ απεικόνιση με $F = F(U, \mu)$ και $D_U F(0,0) = L$. Η μεταβλητή $\mu \in M$ παριστάνει την παράμετρο του προβλήματος. Στις πιό πολλές περιπτώσεις ο M είναι χώρος πεπερασμένης διάστασης εν γένει το πολύ χώρος δύο διαστάσεων, μπορεί όμως σε εξαιρετικές περιπτώσεις και να μην είναι.

Υποθέτουμε ότι $F(0,0) = 0$ και αναζητούμε λύσεις της $F(U, \mu)$ κοντά στο $(0,0)$. Όπως έχουμε δεί, αν ο L είναι αντιστρέψιμος και ο L^{-1} είναι φραγμένος, τότε ο L είναι γραμμικός ομοιομορφισμός και μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα Πεπλεγμένης Συνάρτησης. Τότε θα υπάρχει μια (ανοικτή) περιοχή του $(0,0)$ στον $X \times M$ ώστε (τοπικά) η $U = U(\mu)$ να είναι η μοναδική λύση της $F(U, \mu) = 0$ και η U να είναι C^k συνάρτηση του μ. Είναι χρήσιμο να παρατηρήσουμε πως αν ο L είναι φραγμένος και αντιστρέψιμος, τότε απο Θεώρημα Ανοιχτής Απεικόνισης ο L^{-1} είναι φραγμένος.

Έστω τώρα οτι ο L δεν είναι αντιστρέψιμος. Υποθέτουμε οτι ο L είναι $Fredholm$. Ορίζουμε συνεχείς προβολές $P : X \to kerL$ και $Q : Y \to rangeL$. Θέτουμε $u = PU$ και $v = (I - P)U$. Τότε το ισοδυναμο προς επίλυση σύστημα παίρνει τη μορφή

$$QF(u + v, \mu) = 0$$

$$(I - Q)F(u + v, \mu) = 0$$

.

Ισχυρισμός. Για κάθε (u, μ) σε μια γειτονιά του $(0,0)$ στο $X \times M$ η πρώτη εξίσωση έχει μοναδική λύση $v(u, \mu)$, ώστε $v(0,0) = 0$. Επιπλέον η v είναι C^k συνάρτηση σε αυτή τη γειτονιά. Πράγματι, γράφουμε $F(U, \mu) = LU + R(U, \mu)$, όπου $R(U, \mu)$ είναι το μη γραμμικό υπόλοιπο στο ανάπτυγμα $Taylor$ της F ώς προς (U, μ).

Έχουμε $F(U, \mu) = F(u + v) = L(u + v) + R(u + v, \mu) = L(v) + R(u + v, \mu)$ εφόσον το $u \in kerL$ και άρα η πρώτη εξίσωση γίνεται $QL(v) + QR(u + v, \mu) = 0$. Ωστόσο ο τελεστής QL είναι αντιστρέψιμος στο $rangeL$ και ως εκ τούτου έχει φραγμένο αντίστροφο. Επίσης απο την υπόθεση έχουμε ότι $D_v R(0,0) = 0$. Επομένως μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα Πεπλεγμένης Συνάρτησης για $u = v = 0$ και $\mu = 0$. Το αρχικό πρόβλημα λοιπόν ανάγεται στην επίλυση της δεύτερης εξίσωσης που (τοπικά) έχει τη μορφή

$$(I - Q)R(u + v(u, \mu), \mu) = 0$$

.

Η προηγούμενη εξίσωση λέγεται εξίσωση διακλάδωσης του προβλήματος.

3 Μοντέλα της μη γραμμικής εξίσωσης $Schrodinger(NLS)$

Πολλά μη γραμμικά συστήματα με διασπορά και διατήρηση της ενέργειας περιγράφονται απο την μη γραμμική εξίσωση $Schrodinger$. Στα επόμενα θα εφαρμόσουμε θεωρία διαταραχών με σκοπό να εξαγάγουμε την μη γραμμική εξίσωση $Schrodinger$ απο γνωστές εξισωσεις της μαθηματικής φυσικής.

3.1 Η NLS απο την $Klein-Gordon$

Η μη γραμμική εξίσωση $Klein-Gordon$ με δυο επιλογές για το πρόσημο του κυβικού μη γραμμικού όρου είναι

$$u_{tt} - u_{xx} + u \mp u^3 = 0 \tag{28}$$

και περιγράφει προβλήματα σχετικιστικής κβαντομηχανικής.

Υποθέτουμε ότι η 28 έχει πραγματικές λύσεις της μορφής $u(x,t) = u(\theta, X, T)$, όπου $X = \varepsilon x, T = \varepsilon t, \theta = kx - \omega t$ και $\varepsilon \ll 1$. Επίσης, η σχέση διασποράς για το γραμμικό πρόβλημα είναι $\omega^2 = 1 + k^2$. Βάσει της γενικής λύσης $u(x,t) = u(\theta, X, T)$, εισάγουμε τους τελεστές

$$\partial_t = -\omega\partial_\theta + \varepsilon\partial_T \tag{29}$$

$$\partial_x = -k\partial_\theta + \varepsilon\partial_X \tag{30}$$

και υποθέτουμε ότι η 28 έχει λύση διαταραχής $u = \varepsilon u_0 + \varepsilon^2 u_1 + ...$

Τότε η 28 γίνεται

$$\begin{aligned}((-\omega\partial_\theta + \varepsilon\partial_T)^2 - (k\partial_\theta + \varepsilon\partial_X)^2)(\varepsilon u_0 + \varepsilon^2 u_1 + ...) + (\varepsilon u_0 + \varepsilon^2 u_1 + ...)\\ \mp(\varepsilon u_0 + \varepsilon^2 u_1 + ...)^3 = 0\end{aligned}$$

η οποία για όρους μέχρι και τάξης $O(\varepsilon^2)$ δίνει:

$$O(\varepsilon) : (\omega^2 - k^2)\partial_\theta^2 u_0 + u_0 = 0 \Rightarrow u_0 = Ae^{i\theta} + c.c. \tag{31}$$

$$O(\varepsilon^2) : (\omega^2 - k^2)\partial_\theta^2 u_1 + u_1 = 2((\omega\partial_\theta\partial_T + k\partial_\theta\partial_{X)} u_0 \Rightarrow \tag{32}$$

$$(\omega^2 - k^2)\partial_\theta^2 u_1 + u_1 = 2i(\omega A_T + kA_X)e^{i\theta} + c.c. \tag{33}$$

όπου με $c.c.$ συμβολίζουμε το μιγαδικό συζυγές. Η τελευταία εξίσωση είναι μια συνήθης διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης ως προς θ και η γενική της λύση είναι το άθροισμα της λύσης της ομογενούς και μιας μερικής λύσης. Παρατηρούμε πως το χαρακτηριστικό πολυώνυμο έχει διπλή ρίζα και άρα η μερική λύση θα είναι της μορφής $cte^{i\theta}$ όπου c σταθερά. Τότε η λύση της εξίσωσης 33 θα περιέχει αιώνιους όρους. Για να αποφύγουμε τους όρους αυτούς θέτουμε το δεξιό μέρος της 33 ίσο με μηδέν. Τότε θα έχουμε

$$\omega A_T + kA_X e^{i\theta} = 0 \tag{34}$$

που είναι μια (μερική) διαφορική εξίσωση για το μιγαδικό πλάτος $A(X, T)$ το οποίο συχνά καλείται το αργά μεταβαλλόμενο κυματοπακέτο. Υποθέτουμε ότι η 34 έχει ανάπτυγμα της μορφής

$$2i(\omega A_T + kA_X) = \varepsilon g_1 + \varepsilon^2 g_2 + ... \tag{35}$$

και αφήνουμε οι ομογενείς λύσεις της 33 να απορροφηθούν στην λύση της 31 μια και δεν έχουν ιδιαίτερη σημασία με την έννοια ότι δεν αλλάζουν τη φύση της γενικής λύσης. Επομένως $u_1 = 0$. Η επόμενη διαφορική εξίσωση διαταραχών που προκύπτει είναι

$$\begin{aligned} O(\varepsilon^3) : (\omega^2 - k^2)\partial_\theta^2 u_2 + u_2 &= -(A_{TT} - A_{XX})e^{i\theta} + c.c. \\ &\pm (Ae^{i\theta} + A^* e^{-i\theta})^3 + g_1 e^{i\theta} + c.c. \end{aligned}$$

Όπως και προηγουμένως θέλουμε να απαλείψουμε αιώνιους όρους. Για το σκοπό αυτό επιλέγουμε [2]

$$g_1 = (A_{TT} - A_{XX}) \mp 3|A|^2 A^*. \tag{36}$$

Θέτουμε την 36 στο ασυμπτωτικό ανάπτυγμα για το $2i(\omega A_T + kA_X)$ και παίρνουμε

$$2i\omega(A_T + \omega'(k)A_X) = \varepsilon(A_{TT} - A_{XX}) \mp 3|A|^2 A) \tag{37}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την σχέση διασποράς για το γραμμικό πρόβλημα $\omega^2 = 1 + k^2$ για να βρούμε $\omega'(k) = k/\omega$. Αφού απαλείψουμε τους αιώνιους όρους η εξίσωση για το $O(\varepsilon^3)$ γίνεται

$$O(\varepsilon^3) : (\omega^2 - k^2)\partial_\theta^2 u_2 + u_2 = \pm A^3 e^{3i\theta} + c.c. \tag{38}$$

και έχει λύση την

$$u_2 = \mp \frac{1}{8} A^3 e^{3i\theta} + c.c. \tag{39}$$

Παρατηρούμε πως αν μεταβούμε σε σύστημα συντεταγμένων που κινείται με την ταχύτητα ομάδας του κύματος, η (38) μετασχηματίζεται σε μια νέα εξίσωση για το A που δεν περιέχει την παράμετρο ε. Πράγματι, κάνουμε τον μετασχηματισμό

$$\begin{aligned} &\eta = X - \omega'(k)T \qquad && \partial_T = -\omega'(k)\partial_\eta + \varepsilon\partial_\tau \\ &\tau = \varepsilon T = \varepsilon^2 t && \partial_X = \partial_\eta \end{aligned}$$

και τότε η 37 παίρνει την μορφή

[2] Η επιλογή γίνεται με σκοπό να απαλειφθούν μόνο οι όροι που πολλαπλασιάζουν το $e^{i\theta}$, οι οποίοι είναι και οι αιώνιοι όροι της λύσης της εξίσωσης.

$$2i\omega(-\omega'(k)A_\eta + \varepsilon A_\tau + \omega'(k)A_\eta) = \varepsilon(\omega'(k)^2 A_{\eta\eta} - A_{\eta\eta} \mp 3|A|^2 A) + O(\varepsilon^3) \tag{40}$$

η οποία απλοποιείται περαιτέρω αν χρησιμοποιήσουμε την σχέση διασποράς. Είναι

$$\omega'' = (\frac{k}{\omega})' = \frac{\omega - k\omega'}{\omega^2} = \frac{1}{\omega}(1 - (\omega')^2) \tag{41}$$

και αντικαθιστώντας στην 40 παίρνουμε την

$$iA_\tau + \frac{\omega''(k)}{2}A_{\eta\eta} \pm \frac{3}{2\omega}|A|^2 A = 0 \tag{42}$$

που είναι η μή γραμμική εξίσωση $Schrodinger$.

3.1.1 Εφαρμογή: Η NLS απο την $sine - Gordon$

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα παραπάνω αποτελέσματα για να εξαγάγουμε την NLS απο την εξίσωση $sine - Gordon$.

Η εξίσωση $sine - Gordon$ είναι

$$u_{tt} - u_{xx} + sinu = 0 \tag{43}$$

και είναι γνωστή απο την κβαντική θεωρία πεδίου. Υποθέτουμε ότι η 28 έχει λύση διαταραχής $u = \varepsilon u_0 + \varepsilon^2 u_1 + ...$ και παρατηρούμε πως αν αναπτύξουμε το ημίτονο σε δυνάμεις του u δηλαδή $sinu = u - (1/6)u^3 + ...$ προκύπτει

$$sinu = (\varepsilon u_0 + \varepsilon^2 u_1 + ...) - \frac{1}{6}(\varepsilon u_0 + \varepsilon^2 u_1 + ...)^3 + \dots \tag{44}$$

και αντικαθιστώντας στην 43 παίρνουμε

$$((-\omega\partial_\theta + \varepsilon\partial_T)^2 - (k\partial_\theta + \varepsilon\partial_X)^2)(\varepsilon u_0 + \varepsilon^2 u_1 + ...) + (\varepsilon u_0 + \varepsilon^2 u_1 + ...) \\ -\frac{1}{6}(\varepsilon u_0 + \varepsilon^2 u_1 + ...)^3 = 0$$

όπου θεωρήσαμε ότι η u έχει γενική λύση $u(x,t) = u(\theta, X, T)$ και ότι

$$\partial_t = -\omega\partial_\theta + \varepsilon\partial_T \tag{45}$$

$$\partial_x = -k\partial_\theta + \varepsilon\partial_X \tag{46}$$

.

Δεν είναι δυσκολο τώρα να επαληθεύσει κάποιος ότι οι εξισώσεις διαταραχών που προκύπτουν για όρους μέχρι και $O(\varepsilon^2)$ είναι ακριβώς οι ίδιες όπως και στην εξίσωση $Klein-Gordon$. Για την $O(\varepsilon^3)$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} O(\varepsilon^3) : (\omega^2 - k^2)\partial_\theta^2 u_2 + u_2 &= -(A_{TT} - A_{XX})e^{i\theta} + c.c. \\ &+\frac{1}{6}(Ae^{i\theta} + A^* e^{-i\theta})^3 + g_1 e^{i\theta} + c.c. \end{aligned}$$

όπου η συνάρτηση g_1 πρέπει να προσδιοριστεί ώστε να απαληφθούν αιώνιοι όροι. Έτσι, επιλέγουμε (όπως και στην περίπτωση της $Klein-Gordon$)

$$g_1 = (A_{TT} - A_{XX}) - \frac{1}{2}|A|^2 A^*. \tag{47}$$

Αν αντικαταστήσουμε τωρα την τελευταία στην 35 και χρησιμοποιήσουμε την σχέση διασποράς $\omega^2 = k^2$ παίρνουμε

$$2i(\omega A_T + \omega'(k)A_X) = \varepsilon(A_{TT} - A_{XX}) + \frac{1}{2}|A|^2 A) \tag{48}$$

απο την οποία με ακριβώς τα ίδια βήματα 40 42 προκύπτει η μη γραμμική εξίσωση $Schrodinger$

$$iA_\tau + \frac{\omega''(k)}{2}A_{\eta\eta} + \frac{1}{4\omega}|A|^2 A = 0 \tag{49}$$

Η 42 (ή η 49) επιδέχεται διαφορετικές ποιοτικά λύσεις ανάλογα με το πρόσημο του γινομένου των συντελεστών του μη γραμμικού όρου και του όρου διασποράς. Πιο συγκεκριμένα,η NLS με θετικό πρόσημο για το γινόμενο καλείται *εστιάζουσα* και έχει λύσεις τα λεγόμενα *φωτεινά* [3] *σολιτόνια*. Οι λύσεις αυτού του τύπου χαρακτηρίζονται απο το γεγονός πως είναι καλά εντοπισμένες και φθίνουν πολύ γρήγορα στο άπειρο. Για αρνητικό πρόσημο παίρνουμε την λεγόμενη *αφεστιάζουσα* NLS. Οι λύσεις της δεύτερης καλούνται *σκοτεινά σολιτόνια*. Βασικό χαρακτηριστικό τους είναι πως διατηρούν σταθερό πλάτος στο άπειρο.

Σε αυτό το σημείο είναι σημαντικό να σημειωθεί πως η εξαγωγή της NLS απο την $Klein-Gordon$ [4] θα ήταν δυνατόν να γίνει με διαφορετικό τρόπο. Η βασική ιδέα έχει ως εξής: Ψάχνουμε για λύσεις με μικρά πλάτη και για ευκολία θεωρούμε πως η 28 έχει ανάπτυγμα της μορφής $u = \varepsilon u_0 + \varepsilon^2 u_1 + ...$ Γνωρίζοντας πως οι ομογενείς όροι κάθε λύσης θα απορροφηθούν στην λύση για το u_0, περιμένουμε πως αν κάνουμε την υπόθεση πως το u_0 δέχεται ανάπτυγμα της μορφής $\varepsilon(C(T,X)e^{i\theta} + c.c.) + \varepsilon^2(D(T,X)e^{2i\theta} + c.c.) + ...$ όπου $C(T,X,), D(T,X)$ συναρτήσεις[5] τέτοιες ώστε η u_0 να είναι λύση της ομογενούς, και αντικαταστήσουμε στο ανάπτυγμα για το u όλοι οι ομογενείς [6] όροι θα απορροφηθούν στην u_0 και έτσι μηδενίζοντας τους συντελεστές του $e^{i\theta}$ θα προκύψει μια διαφορική εξίσωση για το A(X,T) απο την οποία στην συνέχεια μπορούμε εξαγάγουμε την (42). Όλα αυτά θα γίνουν σαφή στην επόμενη παράγραφο όπου θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο που μόλις περιγράψαμε για να εξαγάγουμε την NLS απο την KdV.

3.2 Η NLS απο την KdV

Όταν υδάτινα κύματα διαδίδονται σε ρηχά κανάλια οι εξισώσεις της ρευστομηχανικής μας οδηγούν στην εξίσωση KdV

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0. \tag{50}$$

[3] η ορολογία στην Αγγλική είναι αντίστοιχα $focusing - defocusing$ για θετικό και αρνητικό πρόσημο της NLS ενώ οι λύσεις λέγονται $bright - solitons$ και $dark - solitons$ αντίστοιχα.

[4] ή και απο την $sine - Gordon$

[5] εν γένει μιγαδικές

[6] στην περίπτωση της $Klein - Gordon$ ενδιαφερόμαστε κυρίως για όρους τάξης μέχρι ε^3

Υποθέτουμε ότι η λύση της 50 δέχεται λύση διαταραχής της μορφής $u = \varepsilon u_0 + \varepsilon^2 u_1 + ...$. Παρατηρούμε οτι η εξίσωση για τον κυρίαρχο όρο u_0 είναι η

$$u_{0,t} + u_{0,xxx} = 0. \tag{51}$$

της οποίας η λύση δίνεται απο την

$$u_0 = A(X,T)e^{i\theta} + c.c. + M(X,T) \tag{52}$$

όπου όπως και προηγουμένος $X = \varepsilon x, T = \varepsilon t, \theta = kx - \omega t$ και $\varepsilon \ll 1$ ενώ η σχέση διασποράς για το γραμμικό πρόβλημα είναι $\omega = -k^3$ και η $M(X,T)$ είναι μια αργά μεταβαλλόμενη πραγματική συνάρτηση που αντιστοιχεί την λύση $1 = e^{i\cdot 0\cdot\theta}$ και απο εδώ και στο εξής θα καλείται *κύριος* όρος.

Κάνουμε το $ansatz$

$$u_0 = \varepsilon(A(X,T)e^{i\theta} + c.c. + M(X,T)) + \varepsilon^2(a(X,T)e^{2i\theta} + c.c.) + ... \tag{53}$$

Τότε οι όροι τις 50 γράφονται

$$\begin{aligned} u_t &= \varepsilon((-\omega\partial_\theta + \varepsilon\partial_T)A(X,T)e^{i\theta} + c.c + \varepsilon M_T) + \varepsilon^2(-\omega\partial_\theta + \varepsilon\partial_T)(a(X,T)e^{2i\theta} + c.c.) \\ &= \varepsilon((iAk^3 + \varepsilon A_t)e^{i\theta} + c.c. + \varepsilon M_T) + \varepsilon^2((2ik^3 a + \varepsilon A_T)e^{2i\theta} + c.c.) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6uu_x = 6\varepsilon((Ae^{i\theta} + c.c. + M) + \varepsilon(ae^{2i\theta} + c.c.))\varepsilon[(ika + \varepsilon A_x)e^{i\theta} + c.c. \\ + \varepsilon M_x + \varepsilon((2ika + \varepsilon a_x)e^{2i\theta} + c.c.))] + ... \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} u_{xxx} = \varepsilon[((ik + \varepsilon\partial_x)^3 A)e^{i\theta} + c.c. + \varepsilon^3 M_{xxx} + \\ \varepsilon^2((2ik + \varepsilon\partial_x)^3 ae^{2i\theta} + c.c.)] + ... \end{aligned}$$

Θέτουμε ίσους με μηδέν όλους τους συντελεστές των $e^{i\theta}$, $e^{2i\theta}$ και των *κύριων* όρων και τότε προκύπτει

$$2ik^3a + 6ikA^2 - 8ik^3a = 0 \tag{54}$$

απο την οποία παίρνουμε ότι για το a ισχύει η σχέση $a = A^2/k^2$.

Για να απαλειψουμε αιώνιους [7] όρους θέτουμε

$$M_T + 6\varepsilon(|A|^2)_x + 6\varepsilon M M_x = 0 \tag{55}$$

και παρατηρούμε ότι $M = O(\varepsilon)$, απο όπου προκύπτει πως

$$M_T + 6\varepsilon(|A|^2)_x \backsim 0 \tag{56}$$

εφόσον $MM_X = O(\varepsilon^2)$.

Κάνουμε τον μετασχηματισμό

$$\begin{aligned} \eta &= X - \omega'(k)T & \qquad \partial_T &= -\omega'(k)\partial_\eta + \varepsilon\partial_\tau \\ \tau &= \varepsilon T = \varepsilon^2 t & \qquad \partial_X &= \partial_\eta \end{aligned}$$

και η 56 γίνεται

$$\begin{aligned} \varepsilon M_\tau - \omega' M_\eta + 6\varepsilon(|A|^2)_\eta \backsim 0 \Rightarrow -\omega' M_\eta + 6\varepsilon(|A|^2)_\eta \backsim 0 \Rightarrow \\ -\omega' M + 6\varepsilon(|A|^2) \backsim 0 \Rightarrow 3k^2 M + 6\varepsilon(|A|^2) \backsim 0 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$M \backsim -2\varepsilon\frac{|A|^2}{k^2} \tag{57}$$

[7] οι οποίοι προκύπτουν λόγο του $e^{i\cdot 0\cdot\theta}$

όπου χρησιμοποιήσαμε τη σχέση διασποράς και ότι $M = O(\varepsilon)$ και επιπλέον κατα την ολοκλήρωση δεν λάβαμε υπόψιν την σταθερά.

Για να απαλείψουμε αιώνιους που σχετίζονται με τον όρο $e^{i\theta}$ θέτουμε

$$\begin{aligned}\varepsilon^2(A_T - 3k^2 A_X + 6ikMA) + \varepsilon^3(3ikA_{XX} + 12ikaA^* \\ -6ikaA^* + 6MA_X) = 0\end{aligned}$$

Τώρα δεν είναι δύσκολο να εξαγάγουμε την NLS. Αρκεί να παρατηρήσουμε πως ο όρος $6MA_X$ είναι πρακτικά ασήμαντος εφόσον το M είναι της τάξης του ε. Μετά με αντικατάσταση της 57 στην τελευταία εξίσωση για το A προκύπτει

$$A_T - 3k^2 A_X - 12\varepsilon \frac{i|A|^2 A}{k} + 3i\varepsilon k A_{xx} + 6i\varepsilon \frac{|A|^2 A}{k} = 0.$$

Τώρα δεν είναι δύσκολο να εξαγάγουμε την μη γραμμική εξίσωση $Schrodinger$. Αρκεί να παρατηρήσουμε πως η σχέση διασποράς οδηγεί στην $\omega''(k) = -6k$ και να κάνουμε τον (γνωστό πλέον) μετασχηματισμό

$$\begin{aligned} \eta &= X - \omega'(k)T & \partial_T &= -\omega'(k)\partial_\eta + \varepsilon\partial_\tau \\ \tau &= \varepsilon T = \varepsilon^2 t & \partial_X &= \partial_\eta \end{aligned}$$

ώστε να *κινούμαστε* με την ταχύτητα του κύματος. Τελικά, προκύπτει

$$iA_\tau + \frac{\omega''(k)}{2} A_{\eta\eta} + \frac{6}{k}|A|^2 A = 0 \tag{58}$$

που είναι η ζητούμενη εξίσωση. Παρατηρούμε επίσης πως η 58 είναι μια *αφεστιάζουσα* εξίσωση $Schrodinger$ αφού το γινόμενο του μη γραμμικού όρου με τον όρο διασποράς είναι αρνητικός αριθμός.

4 Εφαρμογή της $Lyapunov - Schmidt$ στην συζευγμένη εξίσωση $Gross - Pitaevski$

Όπως έχουμε δεί η εξίσωση $Gross - Pitaevski$ περιγράφει τη δυναμική των συμπυκνωμάτων $Bose - Einstein$. Στην ανάλυσή μας θα γενικεύσουμε το μοντέλο του συμπυκνώματος όπως έχει περιγραφεί στην 1.2. για την περίπτωση που έχουμε αλληλεπίδραση μεταξύ των ατόμων διαφορετικού είδους.

4.1 Η συζευγμένη εξίσωση

Η εξίσωση που περιγράφει το συζευγμένο πρόβλημα είναι η

$$i\partial_t q + \Delta q + \omega q + (\alpha|q|^2 + b|p|^2)q = i\Omega\partial_\theta q + V_{ext}q \tag{59}$$

$$i\partial_t p + \Delta p + \omega p + (b|p|^2 + \alpha|q|^2)p = i\Omega\partial_\theta p + V_{ext}p \tag{60}$$

όπου $q, p \in \mathbb{C}$ είναι οι κυματοσυναρτήσεις των σωματιδίων του συμπυκνώματος, τα $\alpha, b \in \{-1, +1\}$ εκφράζουν την μή γραμμική αλληλεπίδραση, για $\alpha, b = 1$ έχουμε ελκτικό δυναμικό ενώ για $\alpha, b = -1$ το δυναμικό είναι απωστικό πάντα όμως μεταξύ των ατόμων του ίδιου είδους, $\omega \in \mathbb{R}$ είναι μια ελεύθερη παράμετρος που εκφράζει την επίδραση του χημεικού δυναμικού και υποθέτουμε πως και στις δύο περιπτώσεις έχουμε το ίδιο (χημεικό δυναμικό), και $V_{ext} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι το δυναμικό παγίδευσης ενώ ο όρος Ω αντιστοιχεί στην συχνότητα περιστροφής. Στην ανάλυση που θα ακολουθήσει υποθέτουμε πως το δυναμικό παγίδευσης του συζευγμένου προβλήματος έχει τη μορφή $V_{ext} = |x|^2$ και οφείλεται σε μαγνητικά φαινόμενα.

Θα μελετήσουμε διάφορες περιπτώσεις για τα α, β. Όπως θα δούμε παρακάτω η δομή των εξισώσεων διακλάδωσης αλλάζει μορφή ανάλογα με την τιμή που παίρνει το γινόμενο των α, β. Πρώτα όμως θα δούμε κάποιες χρήσιμες ιδιότητες του τελεστή $\sigma(\mathcal{L})$.

4.2 Το φάσμα του γραμμικού προβλήματος

Για να εφαρμόσουμε την τεχνικές αναγωγής Lyapunov-Schmidt είναι σημαντικό να έχουμε πρώτα κατανοήσει το φάσμα $\sigma(\mathcal{L})$ του γραμμικού τελεστή που σχετίζεται με την 2, ο οποίος αν λάβουμε επιπλέον υπόψιν μας την μορφή του εξωτερικού δυναμικού που είναι $V_{ext} = |x|^2$ παίρνει την μορφή

$$\mathcal{L} := -\Delta + i\Omega\partial_\theta + r^2 \tag{61}$$

η οποία με τις απαιτούμενες λόγο του συστήματος συντεταγμένων αντικαταστάσεις γίνετε

$$\mathcal{L} := -\partial_r^2 - \frac{1}{r}\partial r - \frac{1}{r^2}\partial_\theta^2 + i\Omega\partial_\theta + r^2. \tag{62}$$

Αν αναπτύξουμε τις κυματοσυναρτήσεις $q(r,\theta)$ κατα Fourier, δηλαδή

$$q(r,\theta) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} q_l(r)e^{il\theta}, \tag{63}$$

τότε η εξίσωση ιδιοτιμών $\mathcal{L}q = \lambda q$ ανάγεται σε μια άπειρη ακολουθία απο γραμμικές εξισώσεις *Schrodinger* ως προς την ακτινική μεταβλητή r. Πράγματι, θέτουμε την 63 στην τελευταία και παίρνουμε

$$(\mathcal{L} - \lambda)q(r,\theta) = 0 \iff$$

$$(-\partial_r^2 - \frac{1}{r}\partial r - \frac{1}{r^2}\partial_\theta^2 + i\Omega\partial_\theta + r^2 - \lambda)\sum_{l=-\infty}^{\infty} q_l(r)e^{il\theta} = 0 \iff$$

$$(-\partial_r^2 - \frac{1}{r}\partial r - \frac{l^2}{r^2} + \Omega l + r^2 - \lambda)\sum_{l=-\infty}^{\infty} q_l(r)e^{il\theta} = 0 \iff$$

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty}(\mathcal{L}_l-\lambda)q_l(r)e^{il\theta}=0 \iff$$

$$(\mathcal{L}_l-\lambda)q_l(r)=0, l\in\mathbb{Z} \tag{64}$$

όπου θέσαμε

$$\mathcal{L}_l=-\partial_r^2-\frac{1}{r}\partial r-\frac{l^2}{r^2}+\Omega l+r^2. \tag{65}$$

Όσον αφορά στον τελεστή $\mathcal{L}_l$ είναι γνωστό πως για κάθε l ακέραιο υπάρχει μια άπειρη αριθμήσιμη ακολουθία απλών ιδιοτιμών $(\lambda_{m,l})$, $m=0,1,2,...$ με την ιδιότητα

$$\lambda_{m,l}:=2(|l|+1)+4m+l\Omega, \tag{66}$$

έτσι ώστε οι κυματοσυναρτήσεις $q_{m,l}(r)$ που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές $(\lambda_{m,l})$ να έχουν ακριβώς m μηδενισμούς. Επίσης, οι κυματοσυναρτήσεις δεν εξαρτώνται απο το Ω. Επιπλέον για τον τελεστή $\mathcal{L}$ γνωρίζουμε πως για κάθε ιδιοτιμή $\lambda_{m,l}$ υπάρχουν δύο πραγματικές κυματοσυναρτήσεις $q_{m,l}(r)cosl\theta$ και $q_{m,l}(r)sinl\theta$. Καταλήγουμε λοιπόν στο συμπέρασμα πως για $l\neq 0$ η αντίστοιχη ιδιοτιμή είναι πολλαπλή και έχει γεωμετρική πολλαπλότητα μεγαλύτερη ή ίση απο 2. Επίσης είναι γνωστό πως αν $\lambda\in\sigma(\mathcal{L})$ τότε $\lambda=\lambda_{m,l}$ για κάποια m φυσικό αριθμό και l ακέραιο.

Επίσης, παρατηρούμε (απο την 66) ότι $\lambda_{m,l}=\lambda_{m',l'}$ για κάποια m',l' αν, και μόνο αν,

$$\Omega=-2-4\frac{m'-m}{l'-l}, \tag{67}$$

απο όπου συμπεραίνουμε πως αν $\Omega=0$ τότε ο τελεστής $\mathcal{L}$ έχει ημιαπλές ιδιοτιμές με πολλαπλότητα μεγαλύτερη απο 2 αν $m+|l|\geq 2$. Αν $|\Omega|=0$ υπάρχει άπειρο πλήθος ιδιοτιμών με απειρη πολλαπλότητα. Στα επόμενα θα υποθέσουμε ότι $|\Omega|<2$.

Υπόθεση. Η συχνότητα περιστροφής Ω ικανοποιεί την σχέση $|\Omega| < 2$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $l \in \mathbb{N}_0$. Ένας απο τους στόχους της εργασίας είναι μεταξύ άλλων να μελετηθεί η δομή των λύσεων που προκύπτουν απο ιδιοτιμές του τελεστή $\mathcal{L}$ οι οποιές έχουν πολλαπλότητα 3. Για παράδειγμα, είναι σαφές πως όταν $\Omega = 0$ έχουμε $\lambda_{1,0} = \lambda_{0,2} = 6$ και επιπλέον πως η ιδιοτιμή αυτή είναι πολλαπλότητας 3. Θα εστιάσουμε λοιπόν τη μελέτη μας στις ιδιοτιμές που έχουν την ιδιότητα $\lambda_{1,0} = \lambda_{0,l'} = 6$, για κάποιο $l' \in \mathbb{N}_0$. Είναι άμεσο πως αυτό ισχύει όταν $\Omega = \Omega_{l'}$

$$\Omega_{l'} = -2 + 4\frac{1}{l'}, \tag{68}$$

για κάποιο $l' \in \mathbb{N}_0$. Επίσης, παρατηρούμε ότι $-2 < \Omega_{l'} \leq 0$ για $l' \geq 2$ και ότι για $\Omega = \Omega_{l'}$ έχουμε $\lambda_{m,l}$ αν, και μόνο αν,

$$1 = m + \frac{l}{l'} \tag{69}$$

δηλαδή, όταν $(m, l) \in \{(1, 0), (0, l')\}$. Ώς εκ τούτου, έχουμε ότι για $\Omega = \Omega_{l'}$ η ιδιοτιμή $\lambda = 6$ είναι μια ιδιοτιμή του τελεστή $\mathcal{L}$ πολλαπλότητας τρία. Επιπλέον, μια βάση για τον ιδιοχώρο δίνεται απο τον πυρήνα

$ker(\mathcal{L} - 6) = span\{q_{1,0}(r), q_{0,l'}(r)cosl'\theta, q_{0,l'}(r)sinl'\theta\}$.

Πρόταση. Υποθέτουμε οτι $l' \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$. Για $\Omega = \Omega_{l'}$, όπου $\Omega_{l'}$ δίνετε στην 68, ισχύει οτι η λ=6 είναι μια ιδιοτιμή του $\mathcal{L}$ γεωμετρικής πολλαπλότητας τρία. Επιπλέον,

$ker(\mathcal{L} - 6) = span\{q_{1,0}(r), q_{0,l'}(r)cosl'\theta, q_{0,l'}(r)sinl'\theta\}$.

Παρατηρήσεις. Υπάρχουν δύο σημαντικοί λόγοι για τους οποίους η μελέτη μας εστιάζει στην περίπτωση $\Omega = \Omega_{l'}$.

- Κατα πρώτον, απο μαθηματική σκοπιά οι ιδιοτιμές πολλαπλότητας τρία αναδεικνύουν δομές πολύ πλουσιότερες απο τις αντίστιχες δομές που αντιστιχούν σε ιδιοτιμές πολλαπλότητας δύο.
- Απο την πλευρά της φυσικής παρουσιάζουν εξαιρετικό ενδιαφέρον δομές που αντιστιχούν σε διαφορετικές, διακριτές τιμές της συχνότητας περιστροφής. Οι πιο χαμηλές

απο αυτές τις συχνότητες έχουν μελετηθεί με υπολογιστικούς υπολογισμούς (Y. Kawaguchi και T. Ohmi,H. Pu, C. Law, J. Eberly, N. Bigelow) , και έχουν παρατηρηθεί πειραματικά (Y. Shin, M. Saba, M. Vengalattore, T.A. Pasquini, C. Sanner, A.E. Leanhardt, M. Prentiss, D.E. Pritchard, W. Ketterle), ενώ πρόσφατες οπτικές τεχνικές δείχνουν πως ακόμα υψηλότερες συχνότητες μπορούν δυνητικά προκύψουν σε πείραμα.

4.3 Αναγωγή Lyapunov-Schmidt

Για κάποιο $l' \geq 2$, θέτουμε $\Omega = \Omega_{l'}$, όπου το $\Omega_{l'}$ δίνετε στην 68. Γράφουμε το πρόβλημα σταθερής κατάστασης (χρονοανεξάρτητη εξίσωση) για τις συζευγμένες εξισώσεις 59 και 60 ως

$$\mathcal{L}_{l'} q - \omega q - \left(a \left| q \right|^2 + b \left| p \right|^2 \right) q = 0, \qquad \mathcal{L}_{l'} p - \omega p - \left(a \left| q \right|^2 + b \left| p \right|^2 \right) p = 0 \tag{70}$$

όπου ο τελεστής $\mathcal{L}_{l'}$ δίνετε στην 65. Βάσει της προηγούμενης πρότασης γράφουμε για την κυματοσυνάρτηση $q(r,\theta)$,

$$q = (x_1 q_{1,0}(r) + y_1 q_{0,l'}(r) cosl'\theta + y_2 q_{0,l'}(r) sinl'\theta)\varepsilon^{1/2} + \mathcal{O}(\varepsilon), \tag{71}$$

$$\omega = 6 + \Delta\omega\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^{3/2}), \tag{72}$$

όπου τα $x_1, y_1, y_2 \in \mathbb{C}$. Είναι γνωστό πως η εξίσωση για το $q(r,\theta)$ παραμένει αναλλοίωτη κάτω απο τον μετασχηματισμό βαθμίδας $q \to qe^{i\phi}$ και την (χωρική) ομάδα συμμετρίας στροφής $SO(2)$. Αντίστοιχα, για την $p = p(r,\theta)$ το ασυμπτωτικό ανάπτυγμα έχει τη μορφή

$$p = (x_1' q_{1,0}(r) + y_1' q_{0,l'}(r) cosl'\theta + y_2' q_{0,l'}(r) sinl'\theta)\varepsilon^{1/2} + \mathcal{O}(\varepsilon), \tag{73}$$

και είναι σαφές πως τα $x_1, y_1, y_2 \in \mathbb{C}$ και πως η τελευταία εξίσωση για το p ικανοποιεί τις προηγούμενες ιδιότητες διατήρησης. Επίσης, απο την θεωρία διακλαδώσης $Lyapunov -$

$Schmidt$ γνωρίζουμε πως οι εξισώσεις διακλάδωσης θα έχουν και αυτές τις ίδιες συμμετρίες. Επιπλέον, χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε πως στις εξισώσεις 71 και 73 τα x_1, x_1' είναι πραγματικοί ενώ τα y_1, y_1' είναι φανταστικοί αριθμοί. Βάσει αυτής της υπόθεσης τα ασυμπτωτικά ανάπτυγματα για τα $q(r,\theta)$ και $p(r,\theta)$ παίρνουν τη μορφή

$$q = (x_1 q_{1,0}(r) + y_1 q_{0,l'}(r) cos l'\theta + i y_2 q_{0,l'}(r) sin l'\theta)\varepsilon^{1/2} + \mathcal{O}(\varepsilon), \tag{74}$$

$$p = (x_1' q_{1,0}(r) + y_1' q_{0,l'}(r) cos l'\theta + i y_2' q_{0,l'}(r) sin l'\theta)\varepsilon^{1/2} + \mathcal{O}(\varepsilon), \tag{75}$$

όπου x_1, x_1' και $y_2, y_2' \in \mathbb{R}$ ενώ $y_1, y_1' \in \mathbb{C}$.

Πριν να προχωρίσουμε στην εξαγωγή των εξισώσεων διακλάδωσης κρίνεται σκόπιμο να κάνουμε κάποιους υπολογισμούς.

Πρώτον, ένας απευθείας υπολογισμός των ιδιοσυναρτήσεων $q_{1,0}$ και $q_{0,l'}$ [8] δίνει

$$q_{1,0}(r) = \frac{1}{\pi^{1/2}}(1 - r^2)e^{-r^2/2}, \tag{76}$$

και,

$$q_{0,l'}(r) = (\frac{2}{l'!\pi})^{1/2} r^{l'} e^{-r^2/2}. \tag{77}$$

Επίσης, θέτουμε

$$\begin{aligned} g_0 &= \int_0^\infty r q_{1,0}^4(r) dr = \frac{1}{8}\frac{1}{\pi^2} \\ g_{l'} &= \int_0^\infty r q_{0,l'}^4(r) dr = \frac{(2l')!}{4^{l'}(l'!)^2}\frac{1}{\pi^2} \\ g_{0l'} &= \int_0^\infty r q_{1,0}^2(r) q_{0,l'}^2(r) dr = \frac{l'^2 - l' + 2}{2^{l'+3}}\frac{1}{\pi^2} \end{aligned}$$

[8]οι διαφορικές εξισώσεις λύθηκαν με τη βοήθεια του προγράμματος $maple$

όπου οι υπολογισμοί των ολοκληρωμάτων γίνονται με χρήση των 76 και 77. Επιπλέον, θέτουμε

$$\mu_a = \frac{a\Delta\omega}{g_0\pi}, \qquad \mu_b = \frac{b\Delta\omega}{g_0\pi}, \tag{78}$$

$$g_1 = \frac{g_{0l'}}{g_0}, \qquad g_2 = \frac{g_{0l'}}{g_{l'}}, \qquad c_g = \frac{g_2}{g_1}. \tag{79}$$

Τις προηγούμενες ποσότητες μπορούμε να υπολογίσουμε ακριβώς απο τα $g_0, g_{l'}$ και $g_{0l'}$. Μπορούμε τωρα να εφαρμόσουμε την θεωρία αναγωγής $Lyapunov - Schmidt$. Πρώτα θα δείξουμε με ένα πιο απλό απο άποψη πράξεων παράδειγμα πως προκύπτουν οι εξισώσεις διακλάδωσης. Για απλότητα λοιπόν θα θεωρήσουμε ένα μοντέλο συμπυκνώματος Bose - Einstein που αποτελείται απο ένα μόνο είδος σωματιδίων.

4.3.1 Εφαρμογή στην εξίσωση $Gross - Pitaevski$

Σαν εφαρμογή των παραπάνω θα εξαγαγάγουμε με λεπτομέρεια τις εξισώσεις διακλάδωσης για το πρόβλημα που έχει τεθεί στην 1.2. Για απλότητα στην παρουσίαση θα υποθέσουμε ότι το συμπύκνωμα αποτελείται απο ένα και μόνο είδος σωματιδίων μια και η περίπτωση του συζευγμένου προβλήματος διαφέρει μόνο ως προς την πολυπλοκότητα των πράξεων. Τότε το πρόβλημα περιγράφεται απο την εξίσωση $Gross - Pitaevski$ όπως έχουμε δεί στην παράγραφο 2. Με βάσει τα προηγούμενα έχουμε

Για κάποιο $l' \geq 2$, θέτουμε $\Omega = \Omega_{l'}$, όπου το $\Omega_{l'}$ δίνετε στην 68 και γράφουμε το πρόβλημα σταθερής κατάστασης (χρονοανεξάρτητη εξίσωση)

$$\mathcal{L}_{l'}q - \omega q - a|q|^2 q = 0 \tag{80}$$

όπου ο τελεστής $\mathcal{L}_{l'}$ δίνετε στην 65. Αν κάνουμε χρήση της πρότασης της παραγράφου 4.1 τότε για την κυματοσυνάρτηση $q(r,\theta)$ έχουμε,

$$q = (x_1 q_{1,0}(r) + y_1 q_{0,l'}(r) cosl'\theta + y_2 q_{0,l'}(r) sinl'\theta)\varepsilon^{1/2} + \mathcal{O}(\varepsilon), \tag{81}$$

$$\omega = 6 + \Delta\omega\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^{3/2}), \tag{82}$$

όπου $x_1, y_2 \in \mathbb{R}$ και $y_2 \in \mathbb{C}$. Θέτουμε

$$q^0 = x_1 q_{1,0}(r) + y_1 q_{0,l'}(r) cosl'\theta + y_2 q_{0,l'}(r) sinl'\theta), \tag{83}$$

και αντικαθιστούμε τις 83 και 82 στην 80. Τότε παίρνουμε

$$(\mathcal{L}_{l'} - 6)q^0\varepsilon^{1/2} + (-\Delta\omega - a|q^0|^2)q^0\varepsilon^{3/2} = 0$$

Επίσης, θέτουμε

$$L = \mathcal{L}_{l'} - 6$$

και

$$R(q^0, \mu) = (-\Delta\omega - a|q^0|^2)q^0.$$

Τέλος, θέτουμε $F = Lq^0 + R(q^0, \mu)$ εκτελούμε τους πολλαπλασιασμούς και παίρνουμε το εσωτερικό γινόμενο (στον L^2) της F με τα στοιχεία του $ker(\mathcal{L}_{l'} - 6)$. Μετά απο τις πράξεις προκύπτουν οι ζητούμενες εξισώσεις διακλάδωσης

$$x_1(\mu_a + 2x_1^2 + g_1(2|y_1|^2 + y_1^2 + y_2^2)) = 0$$

$$c_g\mu_a y_1 + g_2 x_1^2(y_1^* + 2y_1) + \frac{3}{4}y_1|y_1|^2 + \frac{1}{4}y_2^2(2y_1 - y_1^*) = 0$$

$$y_2(c_g\mu_a + g_2 x_1^2 + \frac{1}{4}(2|y_1|^2 - y_1^2) + \frac{3}{4}y_2^2) = 0$$

όπου οι ποσότητες g_1, g_2 και c_g δίνονται στις 78 και 79, εφόσον τα $q_{1,0}(r)$ και $q_{0,l'}(r)$ υπολογίζονται απευθείας απο την $Lq^0 = 0$.

4.3.2 Εφαρμογή στην συζευγμένη εξίσωση $Gross - Pitaevski$

Κατάρχάς παρατηρούμε πως αρκεί να εξαγάγουμε τις εξισώσεις διακλάδωσης για μία απο τις συζευγμένες $Gross - Pitaevski$ εφόσον η δεύτερη εξίσωση δίνει ακριβώς τα ίδια αποτελέσματα αν αλλάξουμε το x_1, y_1, y_2 με το τονούμενο x'_1, y'_1, y'_2 και αντίστροφα.

Αντικαθιστούμε τα ασυμπτωτικά αναπτύγματα για τις κυματοσυναρτήσεις p και q στις εξισώσεις 70 και ακολουθούμε ακριβώς τα ίδια βήματα όπως στην προηγούμενη εφαρμογή. Οι εξισώσεις διακλάδωσης είναι:

$$\begin{aligned} x_1\Big\{\mu_a + 2x_1^2 + g_1(2|y_1|^2 + y_1^2 + y_2^2)\Big\}+ \\ +ab\Big\{(x_1 y_2'^2 + x_1' y_1(y_1'^* + y_1') + x_1|y_1'|^2)g_1 + 2x_1 x_1'^2\Big\} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_g\mu_a y_1 + g_2 x_1^2(y_1^* + 2y_1) + \frac{3}{4}y_1|y_1|^2 + \frac{1}{4}y_2^2(2y_1 - y_1^*)+ \\ +ab\Big\{g_2(x_1'^2 y_1 + x_1 x_1'(y_1'^* + y_1)) + \frac{3}{4}y_1|y_1'|^2 + \frac{1}{4}(y_2'^2 y_1 - y_2' y_2(y_1'^* - y_1'))\Big\} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_2\Big\{c_g\mu_a + g_2 x_1^2 + \frac{1}{4}(2|y_1|^2 - y_1^2) + \frac{3}{4}y_2^2\Big\}+ \\ +ab\Big\{x_1'^2 y_2 g_2 + \frac{1}{4}(|y_1'|^2 y_2 + y_2'(y_1'^* - y_1')) + \frac{3}{4}y_2'^2 y_2\Big\} = 0. \end{aligned}$$

Εκ πρώτης όψεως οι παραπάνω εξισώσεις φαίνονται εξαιρετικά πολύπλοκες και δεν μας οδηγούν σε κάποιο συμπέρασμα. Για να πάρουμε μια εικόνα της δυναμικής του προβλήματος θα χωρίσουμε τις λύσεις σε πραγματικές και φανταστικές, και επιπλέον θα εξετάσουμε διάφορες περιπτώσεις για τα $\alpha, b, x_1, y_1, y_2, x'_1, y'_1, y'_2$.

4.4 Πραγματικές λύσεις

Επειδή μας ενδιαφέρουν πραγματικές λύσεις είναι φυσικό να θεωρήσουμε πως $y_1, y'_1 \in \mathbb{R}$ και $y_2, y'_2 = 0$. Με αυτές τις συνθήκες οι εξισώσεις διακλάδωσης παίρνουν τη μορφή

$$x_1(\mu_a + 2(x_1^2 + abx_1'^2) + g_1(3y_1^2 + aby_1'^2)) + 2abg_1x_1'y_1'y_1 = 0 \tag{84}$$

$$y_1(c_g\mu_a + g_2(3x_1^2 + abx_1'^2 + abx_1x_1') + \frac{3}{4}(y_1^2 + aby_1'^2)) + abg_2'x_1x_1'y_1 = 0 \tag{85}$$

- Εξετάζουμε την περίπτωση $b = a$, $x_1' = x_1$, $y_1' = y_1$. Τότε οι εξισώσεις διακλάδωσης γίνονται:

$$x_1(\mu_a + 4x_1^2 + 6g_1y_1^2) = 0 \tag{86}$$

$$y_1(c_g\mu_a + 6g_2x_1^2 + \frac{3}{2}y_1^2) = 0 \tag{87}$$

Υπάρχουν τρείς λύσεις για το ζεύγος 86,87. Η λύση δακτυλίου,

$$\begin{pmatrix} x_1^2 \\ y_1^2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4}\mu_a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{88}$$

η λύση πολυπόλου,

$$\begin{pmatrix} x_1^2 \\ y_1^2 \end{pmatrix} = -\frac{2}{3}c_g\mu_a \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{89}$$

και η λύση σολιτονικής αλυσίδας,

$$\begin{pmatrix} x_1^2 \\ y_1^2 \end{pmatrix} = -\frac{\mu_a}{3(1 - 6g_1g_2)} \begin{pmatrix} 3(1/4 - g_2) \\ 3c_g(2/3 - g_1) \end{pmatrix}. \tag{90}$$

Η τελευταία λύση υπάρχει υπο την προυπόθεση οτι $(1/4 - g_2)(2/3 - g_1) > 0$. Έχει επαληθευθεί με αριθμητικούς υπολογισμούς οτι αυτό ισχύει όταν $l' \in \mathbb{N} \setminus \{1, 6\}$ (ας θυμηθούμε πως $l' \geq 2$). Επιπλέον, για όλες τις προηγούμενες λύσεις πρέπει να ισχύει $\mu_a < 0$, δηλαδή $sign(a\Delta\omega) < 0$. Θα δούμε αργότερα πως αυτή η συνθήκη έχει πολύ σημαντικό ρόλο στην ύπαρξη των λύσεων για την περίπτωση $b = -a$.

Λήμμα 1. Έστω $b = a$, $x_1' = x_1$, $y_1' = y_1$. Τότε υπάρχουν τρείς διακριτές λύσεις για τις 70. Η λύση δακτυλίου που δίνεται απο την $q, p \sim x_1 q_{1,0}(r)\varepsilon^{1/2}$, η λύση πολυπόλου που δίνεται αντίστοιχα απο την $q, p \sim y_1 q_{0,l'}(r) cosl'\theta\varepsilon^{1/2}$ και τέλος η λύση σολιτονικής αλυσίδας που δινεται απο την $q, p \sim (x_1 q_{1,0}(r) + y_1 q_{0,l'}(r) cosl'\theta)\varepsilon^{1/2}$, όπου το ζεύγος (x_1, y_1) δίνεται στην εξίσωση 90. Η λύση σολιτονικής αλυσίδας υπάρχει για κάθε $l' \in \mathbb{N} \setminus \{1, 6\}$. Τέλος οι λύσεις απαιτούν $a\Delta\omega < 0$.

Παρατήρηση. Είναι ανοικτό ερώτημα γιατί η λύση σολιτονικής αλυσίδας δεν υπάρχει για $l' = 6$, δηλαδή όταν $\Omega = \Omega_6 = 4/3$. Φαίνεται σαν αυτη η συχνότητα περιστροφής να είναι μοναδική κατα κάποιο μη κατανοητό και μέχρι στιγμής απροσδιόριστο τρόπο.

- Εξετάζουμε την περίπτωση $b = a$, $x_1' = -x_1$, $y_1' = y_1$. Σε αυτή την περίπτωση το προκύπτον σύστημα είναι:

$$x_1(\mu_a + 4x_1^2 + 2g_1 y_1^2) = 0 \tag{91}$$

$$y_1(c_g\mu_a + 2g_2 x_1^2 + \frac{3}{2} y_1^2) = 0. \tag{92}$$

Παρατηρούμε πως και σε αυτή τη περίπτωση προκύπτουν οι λύσεις δακτυλίου και πολυπόλου οι οποίες είναι ακριβώς οι ίδιες με τις 88 και 89. Ενδιαφέρον παρουσιάζει η λύση σολιτονικής αλυσίδας:

$$\begin{pmatrix} x_1^2 \\ y_1^2 \end{pmatrix} = -\frac{2\mu_a}{(3 - 2g_1 g_2)} \begin{pmatrix} (3/4 - g_2) \\ c_g(2 - g_1) \end{pmatrix}. \tag{93}$$

η οποία ιφύσταται υπο την προυπόθεση οτι $(3/4 - g_2)(2 - g_1) > 0$. Ένας αριθμητικός υπολογισμός θα μας πείσει πως αυτό συμβαίνει όταν $l' \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

Λήμμα 2. Έστω $b = a$, $x_1' = -x_1$, $y_1' = y_1$. Τότε υπάρχουν τρείς διακριτές λύσεις για τις 70. Η λύση δακτυλίου που δίνεται απο την $q \sim x_1 q_{1,0}(r)\varepsilon^{1/2}$,

$p \sim -x_1 q_{1,0}(r)\varepsilon^{1/2}$ η λύση πολυπόλου που δίνεται αντίστοιχα απο την

$q, p \sim y_1 q_{0,l'}(r) cosl'\theta\varepsilon^{1/2}$ και τέλος η λύση σολιτονικής αλυσίδας που δινεται απο την $q \sim (x_1 q_{1,0}(r) + y_1 q_{0,l'}(r) cosl'\theta)\varepsilon^{1/2}$, $p \sim (-x_1 q_{1,0}(r) + y_1 q_{0,l'}(r) cosl'\theta)\varepsilon^{1/2}$ όπου το ζεύγος (x_1, y_1) δίνεται στην εξίσωση 93. Η λύση σολιτονικής αλυσίδας υπάρχει για κάθε $l' \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Τέλος οι λύσεις απαιτούν $a\Delta\omega < 0$.

- Συνεχίζουμε εξετάζοντας την περίπτωση $b = a$, $x_1' = -x_1$, $y_1' = -y_1$. Σε αυτή την περίπτωση το προκύπτον σύστημα είναι:

$$x_1(\mu_a + 4x_1^2 + 6g_1 y_1^2) = 0 \tag{94}$$

$$y_1(c_g\mu_a + 4g_2 x_1^2 + \frac{3}{2}y_1^2) = 0. \tag{95}$$

Και πάλι οι λύσεις δακτυλίου και πολυπόλου είναι ακριβώς οι ίδιες με τις 88 και 89, ενώ για τη λύση σολιτονικής αλυσίδας προκύπτει:

$$\begin{pmatrix} x_1^2 \\ y_1^2 \end{pmatrix} = -\frac{\mu_a}{3(1 - 4g_1g_2)} \begin{pmatrix} 3(1/4 - g_2) \\ 2c_g(1 - g_1) \end{pmatrix}. \tag{96}$$

η οποία ιφύσταται υπο την προυπόθεση οτι $(1/4 - g_2)(1 - g_1) > 0$. Με αριθμητικούς υπολογισμούς βρήκαμε πως η ανωτέρο ανισότητα ικανοποιείται όταν $l' \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2, 3\}$.

Λήμμα 3. Έστω $b = a$, $x_1' = -x_1$, $y_1' = -y_1$. Τότε υπάρχουν τρείς διακριτές λύσεις για τις 70. Η λύση δακτυλίου που δίνεται απο την $q \sim x_1 q_{1,0}(r)\varepsilon^{1/2}$,

$p \sim -x_1 q_{1,0}(r)\varepsilon^{1/2}$,η λύση πολυπόλου που δίνεται αντίστοιχα απο την

$q \sim y_1 q_{0,l'}(r) cosl'\theta\varepsilon^{1/2}$, $p \sim -y_1 q_{0,l'}(r) cosl'\theta\varepsilon^{1/2}$και τέλος,

η λύση σολιτονικής αλυσίδας που δινεται απο την $q \sim (x_1 q_{1,0}(r) + y_1 q_{0,l'}(r) cosl'\theta)\varepsilon^{1/2}$, $p \sim (-x_1 q_{1,0}(r) - y_1 q_{0,l'}(r) cosl'\theta)\varepsilon^{1/2}$ όπου το ζεύγος (x_1, y_1) δίνεται στην εξίσωση 96. Η λύση σολιτονικής αλυσίδας υπάρχει για κάθε $l' \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2, 3\}$. Τέλος οι λύσεις απαιτούν $a\Delta\omega < 0$.

- Τέλος θα εξετάσουμε την περίπτωση $b = a$, $x_1' = x_1$, $y_1' = -y_1$. Σε αυτή την περίπτωση το σύστημα που προκύπτει είναι:

$$x_1(\mu_a + 4x_1^2 + 2g_1 y_1^2) = 0 \tag{97}$$

$$y_1(c_g\mu_a + 4g_2 x_1^2 + \frac{3}{2}y_1^2) = 0. \tag{98}$$

Και πάλι οι λύσεις δακτυλίου και πολυπόλου είναι ακριβώς οι ίδιες με τις 88 και 89, ενώ για τη λύση σολιτονικής αλυσίδας προκύπτει:

$$\begin{pmatrix} x_1^2 \\ y_1^2 \end{pmatrix} = -\frac{\mu_a}{3 - 4g_1g_2} \begin{pmatrix} 3/4 - g_2 \\ 2c_g(1 - g_1) \end{pmatrix}. \tag{99}$$

η οποία ιφύσταται υπο την προυπόθεση οτι $(3/4 - g_2)(1 - g_1) > 0$. Με αριθμητικούς υπολογισμούς βρήκαμε πως η ανωτέρο ανισότητα ικανοποιείται όταν $l' \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2, 3\}$.

Λήμμα 4. Έστω $b = a$, $x_1' = x_1$, $y_1' = -y_1$. Τότε υπάρχουν τρείς διακριτές λύσεις για τις 70. Η λύση δακτυλίου που δίνεται απο την $q, p \sim x_1 q_{1,0}(r)\varepsilon^{1/2}$, η λύση πολυπόλου που δίνεται αντίστοιχα απο την

$q \sim y_1 q_{0,l'}(r) cosl'\theta\varepsilon^{1/2}$, $p \sim -y_1 q_{0,l'}(r) cosl'\theta\varepsilon^{1/2}$και τέλος,

η λύση σολιτονικής αλυσίδας που δινεται απο την $q \sim (x_1 q_{1,0}(r) + y_1 q_{0,l'}(r) cosl'\theta)\varepsilon^{1/2}$, $p \sim (x_1 q_{1,0}(r) - y_1 q_{0,l'}(r) cosl'\theta)\varepsilon^{1/2}$ όπου το ζεύγος (x_1, y_1) δίνεται στην εξίσωση

99. Η λύση σολιτονικής αλυσίδας υπάρχει για κάθε $l' \in \mathbb{N} \setminus \{1,2,3\}$. Τέλος οι λύσεις απαιτούν $a\Delta\omega < 0$.

4.5 Μιγαδικές λύσεις

Μέχρι στιγμής έχουμε μελετήσει πραγματικές λύσεις για τις εξισώσεις 70. Για να μελετήσουμε τις πιθανές μιγαδικές λύσεις θέτουμε $y_1 = y_1' = se^{i\psi}$, με $s \in \mathbb{R}^+$ και οι εξισώσεις διακλάδωσεις παίρνουν την μορφή:

$$x_1\left\{\mu_a + 2x_1^2 + g_1((2+e^{2i\psi})s^2 + y_2^2)\right\}+$$
$$+ab\left\{(x_1y_2'^2 + x_1's^2(1+e^{2i\psi}) + x_1s^2)g_1 + 2x_1x_1'^2\right\} = 0$$

$$s\left\{c_g\mu_a + g_2x_1^2(e^{-2i\psi}+2) + \frac{3}{4}s^2 + \frac{1}{4}y_2^2(2-e^{-2i\psi})+\right.$$
$$\left.+ab(g_2(x_1'^2 + x_1x_1'(e^{-2i\psi}+1)) + \frac{3}{4}s^2 + \frac{1}{4}(y_2'^2 - y_2'y_2(e^{-2i\psi}-1)))\right\} = 0$$

$$y_2\left\{c_g\mu_a + g_2x_1^2 + \frac{1}{4}(2-e^{2i\psi})s^2 + \frac{3}{4}y_2^2\right\}+$$
$$+ab\left\{x_1'^2y_2g_2 + \frac{1}{4}(s^2y_2 + sy_2'(e^{-i\psi} - e^{i\psi})) + \frac{3}{4}y_2'^2y_2\right\} = 0.$$

Παρατηρούμε ότι $(x_1, s, y_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$. Επιπλέον το φανταστικό μέρος των εξισώσεων ικανοποιεί:

$$(x_1 + abx_1')s^2 sin2\psi = 0 \tag{100}$$

$$(g_2x_1^2 - \frac{1}{4}y_2^2 + ab(g_2x_1x_1' - \frac{1}{4}y_2y_2'))sin2\psi = 0 \tag{101}$$

Παρακάτω θα εξετάσουμε κάποιες ειδικές περιπτώσεις για τα a, b, x_1, s, y_2.

- Υποθέτουμε οτι $s = 0$ και $ab = 1$, $x_1' = x_1$, $y_2' = \pm y_2$

  Τότε οι εξισώσεις διακλάδωσης παίρνουν τη μορφή:

$$x_1(\mu_a + 4x_1^2 + 2g_1 y_2^2) = 0 \tag{102}$$

$$y_1(c_g\mu_a + 2g_2 x_1^2 + \frac{3}{2}y_2^2) = 0. \tag{103}$$

  Η μοναδική λύση που δεν έχουμε ακόμα παρατηρήσει στην προηγούμενη παράγραφο είναι η λύση που απο εδώ και πέρα θα καλείτε λύση αλυσίδας δίνης,

$$\begin{pmatrix} x_1^2 \\ y_2^2 \end{pmatrix} = -\frac{2\mu_a}{(3 - 2g_1 g_2)} \begin{pmatrix} 3/4 - g_2 \\ c_g(2 - g_1) \end{pmatrix}. \tag{104}$$

  η οποία μπορεί να ισχύει υπο την προυπόθεση οτι $(3/4 - g_2)(2 - g_1) > 0$. Όπως έχουμε βρεί απο αριθμητικούς υπολογισμούς αυτό συμβαίνει όταν $l' \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Επιπλέον θα πρέπει να ισχύει $\mu_a < 0$.

  Παρατήρηση. Η προηγούμενη περίπτωση καλύπτει ένα ευρύ φάσμα όσον αφορά στις διαφορετικές τιμές που μπορούν να πάρουν τα a, b, x_1, s, y_2. Η απαίτηση $ab = 1$ μας δίνει τις περιπτώσεις $a = 1$, $b = 1$ και $a = -1$, $b = -1$, (θυμηθείτε οτι $a, b \in \{-1, 1\}$).

- Ας υποθέσουμε τώρα πως $s \neq 0$ και a, b, x_1, y_2 όπως προηγουμένως. Τότε απο την 100 είναι άμεσο οτι $\psi = 0(mod\pi/2)$ και το πραγματικό μέρος των εξισώσεων διακλάδωσης παίρνει τη μορφή:

$$x_1\Big\{\mu_a + 4x_1^2 + 2g_1((2 + cos2\psi)s^2 + y_2^2)\Big\}$$

$$s\Big\{c_g\mu_a + 2g_2x_1^2(cos2\psi + 2) + \frac{3}{4}s^2 + \frac{1}{2}y_2^2(2 - cos2\psi)$$

$$y_2\left\{c_g\mu_a + 2g_2x_1^2 + \frac{1}{4}(3 - cos2\psi)s^2 + \frac{3}{2}y_2^2\right\}$$

Ο στόχος μας είναι να προσδιορίσουμε λύσεις που δεν έχουν ήδη βρεθεί στην προηγούμενη παράγραφο. Η ακτινικά συμμετρική λύση δίνης δίνεται απο $\psi = 0(mod\pi)$ με $x_1 = 0$ και

$$\begin{pmatrix} s^2 \\ y_2^2 \end{pmatrix} = -c_g\mu_a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{105}$$

Τέλος, υποθέτουμε ότι $\psi = 0(mod\pi)$ και $y_2' = y_2$. Σε αυτή την περίπτωση η λύση δίνεται απο

$$\begin{pmatrix} x_1^2 \\ s^2 \\ y_2^2 \end{pmatrix} = -\frac{\mu_a}{4(6g_1g_2 - 1)} \begin{pmatrix} 1 - 4g_2 \\ c_g(-2 + 4g_1 - 4g_1g_2) \\ 2c_g(6g_1g_2 - 1) \end{pmatrix}. \tag{106}$$

Με αριθμητικούς υπολογισμούς προκύπτει πως η λύση για την τελευταία εξίσωση υπάρχει για $l' = 6$. Παρουσιάζει λοιπόν εξαιρετικό ενδιαφέρον το γεγονός πως η λύση αυτή προκύπτει συμπληρωματικά ως προς τις τιμές του l' για τις οποίες εμφανίζεται η λύση σολιτονικής αλυσίδας που είδαμε προηγουμένως.

Λήμμα. Έστω $ab = 1$, $x_1' = x_1$, $y_2' = y_2$. Τότε υπάρχουν τρείς διακριτές λύσεις για τις 70. Η ακτινικά συμμετρική λύση δίνης που δίνεται απο την

$q \sim y_2q_{0,l'}(r)e^{il'\theta}\varepsilon^{1/2}$, $p \sim \pm y_2q_{0,l'}(r)e^{il'\theta}\varepsilon^{1/2}$, όπου το y_2 δίνεται απο την 105.

Η λύση αλυσίδας δίνης που δίνεται αντίστοιχα απο την

$q \sim (x_1q_{1,0}(r) + iy_2q_{0,l'}(r)sinl'\theta)\varepsilon^{1/2}$, $p \sim (x_1q_{1,0}(r) \pm iy_2q_{0,l'}(r)sinl'\theta)\varepsilon^{1/2}$ και τέλος, για $l' = 6$ υπάρχει μια επιπλέον λύση που δινεται απο την

$q \sim (x_1q_{1,0}(r) + sq_{0,l'}(r)cosl'\theta + iy_2q_{0,l'}(r)sinl'\theta)\varepsilon^{1/2}$,

$p \sim (x_1 q_{1,0}(r) + s q_{0,l'}(r) cos l'\theta + i y_2 q_{0,l'}(r) sin l'\theta)\varepsilon^{1/2}$ όπου η τριπλέτα (x_1, s, y_2) δίνεται στην εξίσωση 106. Τέλος, όλες οι λύσεις απαιτούν $a\Delta\omega < 0$.

Παρατηρήσεις

– Επιλέξαμε να παρουσιάσουμε τις προηγούμενες περιπτώσεις για πραγματικές και μιγαδικές λύσεις επειδή ήταν αυτές που δείχνουν να μπορούν να πραγματοποιηθούν, δηλαδή να παρατηρηθούν σε πείραμα. Για παράδειγμα, ας εξετάσουμε την περίπτωση $b = -a$, $x_1' = -x_1$, $y_1' = y_1$. Τότε το σύστημα που προκύπτει είναι:

$$x_1(\mu_a + 4g_1 y_1^2) = 0 \tag{107}$$

$$y_1(c_g \mu_a + 4g_2 x_1^2) = 0, \tag{108}$$

και εκτός απο τη τετριμένη λύση, μπορούμε να βρούμε

$$\begin{pmatrix} x_1^2 \\ y_1^2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4}\mu_a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{109}$$

και

$$\begin{pmatrix} x_1'^2 \\ y_1'^2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4}\mu_b \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{110}$$

το οποίο δεν μπορεί να ισχύει ταυτόχρονα εφ'όσον απαιτούμε $a\Delta\omega < 0$ και $b\Delta\omega < 0$. Απο μαθηματικής άποψης παρουσιάζει ενδιαφέρον το ερώτημα αν μια λύση σαν και αυτή θα μπορούσε προκύψει σε ένα σύστημα τις μορφής

$$iq_t \quad + \quad \Delta q + \omega_1 q + \left(a\,|q|^2 + b\,|p|^2\right) q = i\Omega\partial_\theta q + V_{ext}(x) q$$

$$ip_t \quad + \quad \Delta p + \omega_2 p + \left(a\,|q|^2 + b\,|p|^2\right) p = i\Omega\partial_\theta p + V_{ext}(x)p, \qquad (111)$$

όπου $\omega_1 \cdot \omega_2 < 0$. Ερώτημα που πιθανότατα θα μας απασχολήσει στη συνέχεια.

– Απο την μελέτη που έχουμε κάνει εως τώρα μπορούμε με κατάλληλους μετασχηματισμούς να περιγράψουμε και το πρόβλημα της συζευγμένης εξίσωσης $Gross - Pitaevski$ για δεδομένους συνδιασμούς των g_{11}, g_{12} και g_{22}.

$$\begin{aligned} iq_t \quad &+ \quad \Delta q + \omega_1 q + \left(g_{11}\,|q|^2 + g_{12}\,|p|^2\right) q = i\Omega\partial_\theta q + V_{ext}(x)q \\ ip_t \quad &+ \quad \Delta p + \omega_2 p + \left(g_{12}\,|q|^2 + g_{22}\,|p|^2\right) p = i\Omega\partial_\theta p + V_{ext}(x)p. \qquad (112) \end{aligned}$$

– Ο αυστηρός καθορισμός της ευστάθειας των λύσεων που έχουμε προσδιορίσει εως τώρα ξεπερνά τον σκοπό της παρούσης εργασίας. Θα αρκεστούμε στην εξής απλή ανάλυση. Υποθέτουμε ότι $q, p = u + iv$, γραμμικοποιούμε γύρω απο μια μιγαδική λύση $Q = U + iV$ και διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1)Για $b = a = \pm 1$ η συζευγμένη εξίσωση παίρνει τη μορφή

$$iq_t + \Delta q + \omega q + 2|q|^2 q = i\Omega\partial_\theta q + V_{ext}(x)q \qquad (113)$$

Απ΄όπου προκύπτει η εξίσωση ιδιοτιμών:

$$\mathcal{J}\mathcal{L}u = \lambda u, \qquad (114)$$

όπου

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (115)$$

και

$$\mathcal{L} = (\mathcal{L}_{l'} - \omega)\mathbb{I} \mp 2 \begin{pmatrix} 3U^2 + V^2 & 2UV \\ 2UV & U^2 + 3V^2 \end{pmatrix}. \tag{116}$$

2) Για $b = \pm 1$ και $a = \mp 1$ (ουσιαστικά μιλάμε για την περίπτωση $b = -a$) το πρόβλημα γίνεται γραμμικό.

5 Βιβλιογραφία

1. Ablowitz, Non linear dispersive waves, Cambridge university press - 2011

2. P. Chossat, R. Lauterbach, Methods in Equivariant Bifurcations and Dynamical Systems, in: Advanced Series in Nonlinear Dynamics, vol. 15,World Scientific, 2000.

3. Kenichi Kasamatsu and Makoto Tsubota, Modulation instability and solitary wave formation in two-component Bose-Einstein condensates

4. Golubitsky M. et al. Singularities and groups in bifurcation theory, Springer

5. L.C.Crasovan, G.Monnina-Terriza, J.Torres, Globally linked vortex clusters in trapped wave fields, Phys.Rev.E 66(3)(2002)036612

6. P. G. DRAZIN, "Solitons" , Cambridge University Press (2002)

7. P. G. DRAZIN, "Nonlinear Systems" , Cambridge University Press (1992)

8. T. Kapitula, P. Kevrekidis, R.Gonzalez / Physica D 233 (2007) 112137: Rotating matter waves in Bose - Einstein condensates

9. T. Kapitula, P. Kevrekidis, Bose–Einstein condensates in the presence of a magnetic trap and optical lattice, Chaos 15 (3) (2005) 037114.