



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΑΓΡΟΝΟΜΩΝ ΤΟΠΟΓΡΑΦΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΕΡΓΩΝ ΥΠΟΔΟΜΗΣ ΚΑΙ ΑΓΡΟΤΙΚΗΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

**ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΑΠΟΔΟΣΗΣ ΝΕΡΟΥ ΑΠΟ ΠΑΡΑΚΤΙΟΥΣ  
ΥΔΡΟΦΟΡΕΙΣ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΜΟΝΤΕΛΩΝ ΚΑΙ  
ΜΕΘΟΔΩΝ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

του

ΧΑΡΑΛΑΜΠΙΟΥ ΔΗΜΟΥ

Επιβλέπων: Αριστοτέλης Μαντόγλου

Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα , Οκτώβριος 2015



## ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η μεγάλη σημασία του γλυκού νερού για τον άνθρωπο και γενικότερα για τον πλανήτη, συνυπολογίζοντας το μικρό ποσοστό αξιοποιήσιμου γλυκού νερού(0,6%) καθιστούν επιτακτική την ανάγκη της διαφύλαξης των περιορισμένων υδατικών πόρων και την κατάλληλη διαχείριση και χρήση τους. Ειδικότερα η αυξημένη ανάγκη κατανάλωσης για αγροτική, τουριστική, βιομηχανική και οικιακή χρήση επιβαρύνουν την κατάσταση, μειώνοντας αρκετά το διαθέσιμο πόσιμο νερό και δημιουργώντας διάφορα προβλήματα. Στην περίπτωση των παράκτιων υδροφορέων η υπεράντληση που πραγματοποιείται για την κάλυψη των αναγκών ιδιαίτερα τους θερινούς μήνες λόγω της αυξημένης τουριστικής προσέλευσης προκαλεί την καταστροφή των υδροφορέων μέσω του φαινομένου της υφαλμύρωσης.

Η αξιοποίηση των παράκτιων υδροφορέων, υπόγειων και επιφανειακών πρέπει να αποτελεί μέρος ενός γενικότερου πλαισίου ολοκληρωμένης διαχείρισης των υδατικών πόρων του νησιού ή της παράκτιας περιοχής. Η ολοκληρωμένη διαχείριση προϋποθέτει τον καθορισμό των βέλτιστων ποσοτήτων άντλησης με βάση τα γεωμετρικά στοιχεία, τις υδραυλικές παραμέτρους και την τροφοδοσία του υδροφορέα, προκειμένου να εξασφαλιστεί η μέγιστη ποσότητα γλυκού νερού που μπορεί να αντληθεί αποφεύγοντας την υφαλμύρωση και την γενικότερη καταστροφή του υδροφορέα. Η παρούσα εργασία εξετάζει την εξάρτηση των παροχών άντλησης από την επιφανειακή τροφοδοσία και την ευαισθησία στην αλλαγή των παροχών άντλησης με βάση την αλλαγή στη θέση των φρεάτων, αλλά και τις βέλτιστες θέσεις που τα φρέατα πρέπει να τοποθετούνται. Για την εξέταση των παραπάνω περιπτώσεων πραγματοποιήθηκε μια εφαρμογή στον παράκτιο υδροφορέα του Βαθέως της Καλύμνου.

Η συμβολή του Επιβλέποντα Καθηγητή, κ. Μαντόγλου Αριστοτέλη στην εκπόνηση της Διπλωματικής Εργασίας υπήρξε καθοριστική. Τον ευχαριστώ προσωπικά για την συνεργασιμότητα του, την καθοδήγηση και την βοήθεια που μου παρείχε. Επιπλέον θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Υποψήφιο Διδάκτορα Γιώργο Κοψιάτη για την προθυμία που επέδειξε στην επεξήγηση των προγραμμάτων που χρησιμοποιήθηκαν και γενικότερα για την βοήθεια του για την περάτωση της διπλωματικής.

## ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ .....	i
ΠΕΡΙΛΗΨΗ .....	v
ABSTRACT.....	vii
1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	1
1.1 Αντικείμενο της διπλωματικής εργασίας .....	1
1.2 Δομή και οργάνωση της διπλωματικής εργασίας .....	2
2. ΥΦΑΛΜΥΡΩΣΗ ΠΑΡΑΚΤΙΩΝ ΥΠΟΓΕΙΩΝ ΥΔΡΟΦΟΡΕΩΝ – ΜΟΝΤΕΛΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ ΥΦΑΛΜΥΡΩΣΗΣ .....	4
2.1 Υφαλμύρωση παράκτιων υπόγειων υδροφορέων .....	4
2.1.1 Ορισμός υφαλμύρωσης σε παράκτιους υπόγειους υδροφορείς.....	4
2.1.2 Αιτίες πρόκλησης της υφαλμύρωσης και επιπτώσεις αυτής .....	6
2.1.3 Τρόποι αντιμετώπισης της υφαλμύρωσης.....	7
2.2 Μοντέλα προσομοίωσης υφαλμύρωσης .....	8
2.2.1 Θεώρηση απότομης διεπιφάνειας.....	8
2.2.1.1 Προσέγγιση Ghyben – Herzberg .....	9
2.2.1.2 Ανάλυση κατά Strack.....	11
2.2.1.3 Αναλυτικές σχέσεις.....	12
2.2.1.4 Ύπαρξη φρέατος άντλησης με επίλυση κατά Starck.....	15
2.2.1.5 Το μοντέλο απότομης διεπιφάνειας (Mantoglou et al (2004)) .....	17
2.3 Συμπεράσματα .....	21
3. ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΜΕ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΕΣ ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΚΑΙ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ MODFLOW ΚΑΙ PMWIN .....	23
3.1 Εισαγωγή.....	23
3.2 Περιγραφή της διαδικασίας που ακολουθεί το MODFLOW.....	24
3.2.1 Μαθηματική διαδικασία που ακολουθείται.....	24
3.2.2 Διακριτοποίηση υδροφορέα .....	25
3.2.3 Εξίσωση πεπερασμένων διαφορών .....	27
3.2.4 Επαναληπτική διαδικασία για τον υπολογισμό του δυναμικού σε κάθε χρονικό βήμα .....	33
3.2.5 Αναδιαμόρφωση εξισώσεων .....	34
3.3 Περιγραφή λειτουργίας του Processing MODFLOW for Windows (PMWIN) .....	36
3.3.1 Εισαγωγή υδροφορέα .....	36
3.3.2 Εκτέλεση MODFLOW .....	41

3.4 Συμπεράσματα .....	43
4. ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΑΝΤΛΗΣΕΩΝ ΠΑΡΑΚΤΙΩΝ ΥΔΡΟΦΟΡΕΩΝ.....	44
4.1 Εισαγωγή.....	44
4.2 Βελτιστοποίηση αντλήσεων σε παράκτιο υπόγειο υδροφορέα με δεδομένες θέσεις φρεάτων.....	46
4.3 Μεθοδολογίες που εφαρμόζονται στην παρούσα εργασία .....	48
4.4 Μέθοδος S.Q.P.....	49
4.4.1 Ανάλυση του προβλήματος βελτιστοποίησης υπό περιορισμούς.....	50
4.4.2 Περιγραφή της διαδικασίας που ακολουθεί η μέθοδος S.Q.P.....	52
4.4.2.1 Υπολογισμός του πίνακα Hessian (H) .....	52
4.4.2.2 Επίλυση υποπροβλήματος Τετραγωνικού Προγραμματισμού (Q.P.) ..	53
4.4.2.3 Γραμμική αναζήτηση (Line Search) και συνάρτηση αξιολόγησης (Merit Function) .....	53
4.4.3 Εφαρμογή της μεθόδου S.Q.P. ....	54
4.4.4 Παράμετροι εκτέλεσης και τερματισμού του προγράμματος.....	55
4.4.5 Επιλογές του αλγόριθμου S.Q.P.....	57
4.4.6 Αποτελέσματα .....	57
4.5 Μέθοδος Interior point .....	58
4.5.1 Άμεσο βήμα.....	59
4.5.2 Conjugate Gradient βήμα .....	60
4.5.3 Εφαρμογή της μεθόδου Interior Point .....	61
4.5.4 Παράμετροι εκτέλεσης και τερματισμού του προγράμματος .....	62
4.5.5 Επιλογές του αλγόριθμου Interior-Point .....	64
4.6 Περιγραφή προγράμματος για βελτιστοποίηση αντλήσεων σε παράκτιο υπόγειο υδροφορέα με δεδομένες θέσεις φρεάτων με χρήση MATLAB .....	65
4.7 Συμπεράσματα .....	68
5. ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΤΟΝ ΠΑΡΑΚΤΙΟ ΥΔΡΟΦΟΡΕΑ ΣΤΟ ΒΑΘΥ ΚΑΛΥΜΝΟΥ ...	70
5.1 Εισαγωγή.....	70
5.2 Υδροφορέας στην κοιλάδα του Βαθέως .....	70
5.3 Δημιουργία του μοντέλου του υδροφορέα.....	73
5.4 Εκτέλεση βελτιστοποιήσεων με S.Q.P και Interior Point.....	74
5.4.1 Βελτιστοποίηση με τον αλγόριθμο Interior Point.....	75
5.4.2 Βελτιστοποίηση με τον αλγόριθμο S.Q.P.....	76

5.4.3 Σύγκριση των αποτελεσμάτων που προέκυψαν από τις δυο βελτιστοποιήσεις .....	77
5.5 Βελτιστοποιήσεις με μειωμένη την επιφανειακή τροφοδοσία.....	78
5.5.1 Βελτιστοποίηση με τον αλγόριθμο Interior Point για μείωση της επιφανειακής τροφοδοσίας 10%.....	78
5.5.2 Βελτιστοποίηση με τον αλγόριθμο Interior Point για μείωση της επιφανειακής τροφοδοσίας 20%.....	79
5.5.3 Βελτιστοποίηση με τον αλγόριθμο Interior Point για μείωση της επιφανειακής τροφοδοσίας 30%.....	80
5.5.4 Βελτιστοποίηση με τον αλγόριθμο Interior Point για μείωση της επιφανειακής τροφοδοσίας 40%.....	81
5.5.5 Βελτιστοποίηση με τον αλγόριθμο Interior Point για μείωση της επιφανειακής τροφοδοσίας 43%.....	82
5.5.6 Συμπεράσματα που προέκυψαν από την μείωση της τροφοδοσίας .....	83
5.6 Διερεύνηση επιπτώσεων της θέσης των φρεάτων.....	84
5.6.1 Βελτιστοποίηση με τον αλγόριθμο Interior Point με αλλαγή της θέσης των φρεάτων 1 .....	85
5.6.2 Βελτιστοποίηση με τον αλγόριθμο Interior Point με αλλαγή της θέσης των φρεάτων 2 .....	86
5.6.3 Βελτιστοποίηση με τον αλγόριθμο interior point με αλλαγή της θέσης των φρεάτων 3 .....	87
5.6.4 Βελτιστοποίηση με τον αλγόριθμο Interior Point με αλλαγή της θέσης των φρεάτων 4 .....	89
5.6.5 Συμπεράσματα από τις βελτιστοποιήσεις με τον αλγόριθμο Interior Point με αλλαγές στις θέσεις των φρεάτων .....	90
5.7 Συμπεράσματα .....	91
6. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ .....	93
6.1 Υφαλμύρωση παράκτιων υπόγειων υδροφορέων-Μοντέλα προσομοίωσης υφαλμύρωσης.....	93
6.2 Βελτιστοποίηση αντλήσεων υπόγειων παράκτιων υδροφορέων .....	94
6.3 Εφαρμογή στον παράκτιο υδροφορέα στο Βαθύ Καλύμνου .....	95
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ .....	98

## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Οι απαιτήσεις σε γλυκό νερό αυξάνονται όλο και περισσότερο και ιδιαίτερα σε παράκτιες περιοχές κατά τους θερινούς μήνες όπου η ζήτηση είναι ιδιαίτερος υψηλή εξαιτίας του τουρισμού. Αυτή η αυξημένη ανάγκη για γλυκό νερό προκαλεί την υφαλμύρωση των παράκτιων υδροφορέων λόγω της υψηλής ζήτησης. Για την αντιστροφή αυτού του φαινομένου είναι αναγκαία η μελέτη του προκειμένου να αντλούνται οι μέγιστες δυνατές ποσότητες αποφεύγοντας την υφαλμύρωση των φρεάτων, γι' αυτό το λόγο είναι αναγκαία η ανάπτυξη μοντέλων προσομοίωσης και βελτιστοποίησης.

Το πρόβλημα προσομοίωσης του υδροφορέα και βελτιστοποίησης των παροχών άντλησης ή τροφοδοσίας έχει απασχολήσει τη διεθνή επιστημονική κοινότητα. Ο Gorelick (1983) ανέπτυξε μεθόδους συνδυασμένης εφαρμογής των μοντέλων προσομοίωσης και βελτιστοποίησης με στόχο την ορθολογική διαχείριση ενός υδροφορέα. Ο πλέον διαδεδομένος τρόπος απόδοσης της διεπιφάνειας κατά τη μελέτη της υφαλμύρωσης είναι η θεώρηση της απότομης διεπιφάνειας – sharp interface (Emch and Yeh 1998, Cheng & Ouazar 1999, Cheng et al. 2000, Mantoglou 2002). Οι Strack (1976), Bear (1979), και Cheng & Ouazar (1999) παρουσιάζουν και εφαρμόζουν την Ανάλυση κατά Strack που χρησιμοποιείται και στη συγκεκριμένη εργασία για τη μελέτη της της υφαλμύρωσης.

Στη βελτιστοποίηση οι περισσότερες πηγές εστιάζουν στην εύρεση των βέλτιστων παροχών άντλησης με δεδομένες θέσεις φρεάτων και όχι και στην εύρεση των βέλτιστων θέσεων. Αυτοί οι οποίοι επέκτειναν το πρόβλημα είναι οι Gorelick et al. (1984) και Wang and Halfeld (1994). Η γραμμικότητα (Ahlfeld and Sawyer 1990, Hallaji and Yazicigil 1996, Mantoglou 2002) ή η μη γραμμικότητα (Gorelick et al. 1984, Shamir et al. 1984, Wang and Ahlfeld 1994, Hallazi and Yazicigil 1996, Emch and Yeh 1998, Mantoglou 2002), η συνέχεια της αντικειμενικής συνάρτησης και η ύπαρξη παραγώγων και τοπικών ελαχίστων (Cheng et al. 2000) καθορίζουν την κατάλληλη μέθοδο βελτιστοποίησης. Με το πρόβλημα της βελτιστοποίησης με ταυτόχρονη εύρεση των βέλτιστων θέσεων των πηγαδιών έχουν κυρίως ασχοληθεί οι Mantoglou, Papantoniou (2008) αλλά στην συγκεκριμένη διπλωματική δεν θα γίνει αναφορά στο συγκεκριμένο πρόβλημα.

Στην παρούσα εργασία πραγματοποιείται μια μελέτη στον παράκτιο φρεάτιο υδροφορέα στο Βαθύ της Καλύμνου. Αρχικά ορίζεται ένα μοντέλο προσομοίωσης χρησιμοποιώντας τα πραγματικά δεδομένα του υδροφορέα, σύμφωνα με τα οποία το PMWIN σε συνδυασμό με το MODFLOW δημιουργούν το μοντέλο προσομοίωσης και πρόγνωσης της συμπεριφοράς του. Στη συνέχεια συντάσσονται κατάλληλα προγράμματα στο MATLAB σύμφωνα με τα οποία πραγματοποιείται βελτιστοποίηση στον υδροφορέα με δεδομένες θέσεις φρεάτων τηρώντας δυο περιορισμούς προκειμένου να αποφευχθεί η υφαλμύρωση των φρεάτων. Έπειτα πραγματοποιούνται δύο βελτιστοποιήσεις χρησιμοποιώντας τα πραγματικά δεδομένα του υδροφορέα, με τους αλγόριθμους βελτιστοποίησης S.Q.P. και Interior Point η κάθε μια αντίστοιχα. Με βάση τα αποτελέσματα που προέκυψαν επιλέγεται ο Interior Point για την συνέχιση της εφαρμογής λόγω της πιο γρήγορης σύγκλισης που έχει.

Ακολουθούν βελτιστοποιήσεις στον συγκεκριμένο υδροφορέα μειώνοντας ποσοστιαία την επιφανειακή τροφοδοσία, για να εξεταστεί η ευαισθησία στην μείωση των παροχών άντλησεων με βάση τη μείωση της επιφανειακής τροφοδοσίας. Το συμπέρασμα που προκύπτει είναι πως οι παροχές άντλησης μειώνονται σχεδόν γραμμικά μέχρι 43% μείωση της επιφανειακής τροφοδοσίας. Εν συνεχεία πραγματοποιούνται τέσσερις βελτιστοποιήσεις αλλάζοντας τις θέσεις των φρεάτων και τοποθετώντας τα σε διαφορετικές θέσεις πάνω στον υδροφορέα προκειμένου να ελεγχθεί η ευαισθησία στην αλλαγή των παροχών άντλησης με βάση την αλλαγή των θέσεων των φρεάτων, αλλά να βρεθεί και ο τρόπος με τον οποίο τα πηγάδια πρέπει να είναι τοποθετημένα για να προκύπτουν μεγάλες παροχές άντλησης. Το συμπέρασμα που προέκυψε είναι πως ο βέλτιστος τρόπος τοποθέτησης του είναι έτσι ώστε αυτά να είναι διασπαρμένα σε όλο το μήκος και πλάτος του υδροφορέα.



## **ABSTRACT**

Demand for fresh water is increasingly growing, especially in coastal areas during the summer months due to increased consumption because of tourism. The increased need for fresh water causes salinization of coastal aquifers. To reverse this phenomenon, it is necessary to develop management methodologies in order to obtain maximum water quantity avoiding salinization of wells. This requires developing a framework which includes system simulation (modeling) and optimization.

The problem of the aquifer simulation and pumping optimization has been investigated extensively in the past. Gorelick (1983) developed methods combining simulation and optimization models in aquifer management. The most common representation of the interface in coastal aquifer models is the sharp interface approximation (Emch and Yeh 1998, Cheng & Ouazar 1999, Cheng et al. 2000, Mantoglou 2002). Strack (1976), Bear (1979), and Cheng & Ouazar (1999) present and apply Strack's analytical solution for the prediction of saltwater intrusion in coastal aquifers.

In pumping optimization, most sources focus on finding the best pumping rates for specific positions of wells and not in finding the optimal position. The following works have extended the problem: Gorelick et al. (1984) and Wang and Halfeld (1994). The methods are based on linear (Ahlfeld and Sawyer 1990, Hallaji and Yazicigil 1996, Mantoglou 2002) or nonlinear formulations (Gorelick et al. 1984, Shamir et al. 1984, Wang and Ahlfeld 1994, Hallazi and Yazicigil 1996, Emch and Yeh 1998, Mantoglou 2002 ). The continuity of the objective function and the existence of derivatives and local minimums play a role in selecting the appropriate optimization method (Cheng et al. 2000). The optimization problem while finding the best position of the wells have mainly investigated the Mantoglou, Papantoniou ( 2008 ) , but in this diploma reference will not be made to this problem.

The present work applies the underlying methodologies in a coastal aquifer in Vathy, Kalymnos. Initially, a simulation model is developed using the aquifer data from previous studies. This is based on the PMWIN in conjunction with MODFLOW software and creates the model simulation for forecasting the system behavior. Then appropriate optimization programs were developed in MATLAB with limitations

posed to prevent salinization of wells. Then, two optimizations are performed using the actual aquifer data, based on the SQP and Interior Point algorithms. Based on the results, the Interior Point is selected due to a more rapid convergence.

The effect of reduction of surface recharge is examined in order to examine the sensitivity of pumping on recharge reduction. The conclusion is that pumping is almost linearly decreasing up to about 43% reduction in recharge. Next, four optimizations were performed for various positions of the wells. By placing them in different positions on the aquifer, the sensitivity of pumping rates on the positions of the wells is investigated. It is concluded that it is best the wells to be uniformly scattered throughout the surface of the aquifer.

# 1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζεται το αντικείμενο της διπλωματικής εργασίας, στη συνέχεια παραθέτονται η δομή και η οργάνωση της.

## 1.1 Αντικείμενο της διπλωματικής εργασίας

Σκοπός της συγκεκριμένης εργασίας είναι ο έλεγχος της ευαισθησίας στην αλλαγή των παροχών άντλησης από φρέατα σε υπόγειο παράκτιο υδροφορέα, υπό συνθήκες μείωσης της επιφανειακής τροφοδοσίας και αλλαγής της θέσης των φρεάτων. Για την πραγματοποίηση των παραπάνω διαδικασιών είναι αναγκαίο να γίνουν κάποιες βελτιστοποιήσεις οι οποίες χρησιμοποιούν ένα μοντέλο προσομοίωσης το οποίο αποτυπώνει τη συμπεριφορά του υδροφορέα. Ο υδροφορέας ο οποίος χρησιμοποιείται είναι αυτός στο Βαθύ Καλύμνου στον οποίο ήταν γνωστά τα γεωμετρικά στοιχεία, οι υδραυλικές παράμετροι και η τροφοδοσία του από την διπλωματική Παπαντωνίου (2003).

Για την πραγματοποίηση των βελτιστοποιήσεων με διαφορετικές συνθήκες επιφανειακής τροφοδοσίας, και διαφορετικές θέσεις φρεάτων είναι αναγκαίο να χρησιμοποιηθεί κάποιος αλγόριθμος βελτιστοποίησης. Στην παρούσα εργασία εξετάστηκαν δύο αλγόριθμοι βελτιστοποίησης ο S.Q.P. και ο Interior Point. Αρχικά γίνεται μία θεωρητική ανάλυση τους και έπειτα γίνεται μια πρακτική σύγκριση τους πραγματοποιώντας βελτιστοποιήσεις με τα πραγματικά δεδομένα και συγκρίνοντας τα αποτελέσματα τους, την ακρίβεια τους και την ταχύτητα σύγκλισης. Έπειτα επιλέγεται ο βέλτιστος εκ των δύο για την συνέχιση της εφαρμογής.

Στην ουσία πραγματοποιείται μια σειρά από βελτιστοποιήσεις υπό περιορισμούς χρησιμοποιώντας τον βέλτιστο αλγόριθμο βελτιστοποίησης για διάφορες ποσοστιαίες μειώσεις της επιφανειακής τροφοδοσίας και για διαφορετικές θέσεις φρεάτων. Οι περιορισμοί που τίθενται στοχεύουν αποκλειστικά στην προστασία των φρεάτων από την είσοδο θαλασσινού νερού.

## 1.2 Δομή και οργάνωση της διπλωματικής εργασίας

Στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται η παρουσίαση του θέματος της διπλωματικής εργασίας, ειδικότερα συγκεκριμενοποιείται το αντικείμενο της εργασίας και αναλύεται η δομή και η οργάνωση της.

Στο δεύτερο κεφάλαιο ορίζεται η έννοια της υφαλμύρωσης και αναλύεται ως φαινόμενο με τις επιπτώσεις που έχει αυτό στις αντλήσεις από παράκτιους υπόγειους υδροφορείς. Παρουσιάζονται οι αιτίες πρόκλησης του φαινομένου και οι επιπτώσεις που αποφέρει αυτό και προτείνονται κάποιοι τρόποι αντιμετώπισης του. Επιπλέον παρουσιάζονται τα μοντέλα προσομοίωσης της υφαλμύρωσης τα οποία είναι δύο ειδών, αυτά με απότομη διεπιφάνεια και αυτά στα οποία γίνεται η θεώρηση υπόγειας ροής μεταβλητής πυκνότητας. Αναλύεται μόνο η θεώρηση της απότομης διεπιφάνειας διότι μόνο αυτή χρησιμοποιείται στη συγκεκριμένη διπλωματική και τέλος αναγράφονται τα συμπεράσματα που προέκυψαν.

Στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζεται το υπολογιστικό περιβάλλον εργασίας. Περιγράφεται ο τρόπος λειτουργίας και χρήσης του PMWIN και του MODFLOW. Επιπλέον παραθέτονται τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά, οι υδραυλικές παράμετροι, η τροφοδοσία και οι οριακές συνθήκες του εξεταζόμενου υδροφορέα στο Βαθύ Καλύμνου και ορίζεται ένα απλό μοντέλο προσομοίωσης της λειτουργίας του.

Στο τέταρτο κεφάλαιο εισάγεται η έννοια της βελτιστοποίησης και παραθέτονται και αναλύονται δύο αλγόριθμοι βελτιστοποίησης ο S.Q.P. και ο Interior Point. Γίνεται μια περιγραφή του τρόπου λειτουργίας τους και πραγματοποιείται μια θεωρητική σύγκριση τους. Επιπλέον αναλύεται η έννοια της βελτιστοποίησης αντλήσεων σε παράκτιους υδροφορείς και γίνεται μια περιγραφή του προγράμματος που συντάχθηκε στο MATLAB και χρησιμοποιήθηκε για την πραγματοποίηση των βελτιστοποιήσεων στην εφαρμογή που παραθέτεται στο πέμπτο κεφάλαιο.

Στο πέμπτο κεφάλαιο πραγματοποιείται η εφαρμογή στον υδροφορέα της Καλύμνου. Αρχικά πραγματοποιούνται δύο βελτιστοποιήσεις με τα πραγματικά δεδομένα με τους αλγόριθμους S.Q.P. και Interior Point και γίνεται μια σύγκριση τους μέσω των αποτελεσμάτων που προέκυψαν και διαφόρων άλλων παραμέτρων. Επιλέγεται ο βέλτιστος από τους δύο και χρησιμοποιείται στην συνέχιση της εφαρμογής. Στη συνέχεια πραγματοποιούνται βελτιστοποιήσεις για ποσοστιαίες μειώσεις της

επιφανειακής τροφοδοσίας προκειμένου να ελεγχθεί η ευαισθησία στην αλλαγή των παροχών άντλησης σε ενδεχόμενες μειώσεις της επιφανειακής τροφοδοσίας. Ακόμη πραγματοποιούνται βελτιστοποιήσεις με αλλαγές στις θέσεις των φρεάτων προκειμένου να ελεγχθεί η ευαισθησία σε οποιαδήποτε αλλαγή θέσης και να βρεθεί περίπου ο βέλτιστος τρόπος τοποθέτησης τους στον υδροφορέα. Τέλος παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την εφαρμογή.

Στο έκτο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα συμπεράσματα που προέκυψαν από την διπλωματική εργασία και κυρίως αυτά που προέκυψαν από την εφαρμογή που πραγματοποιήθηκε.

## **2. ΥΦΑΛΜΥΡΩΣΗ ΠΑΡΑΚΤΙΩΝ ΥΠΟΓΕΙΩΝ ΥΔΡΟΦΟΡΕΩΝ – ΜΟΝΤΕΛΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ ΥΦΑΛΜΥΡΩΣΗΣ**

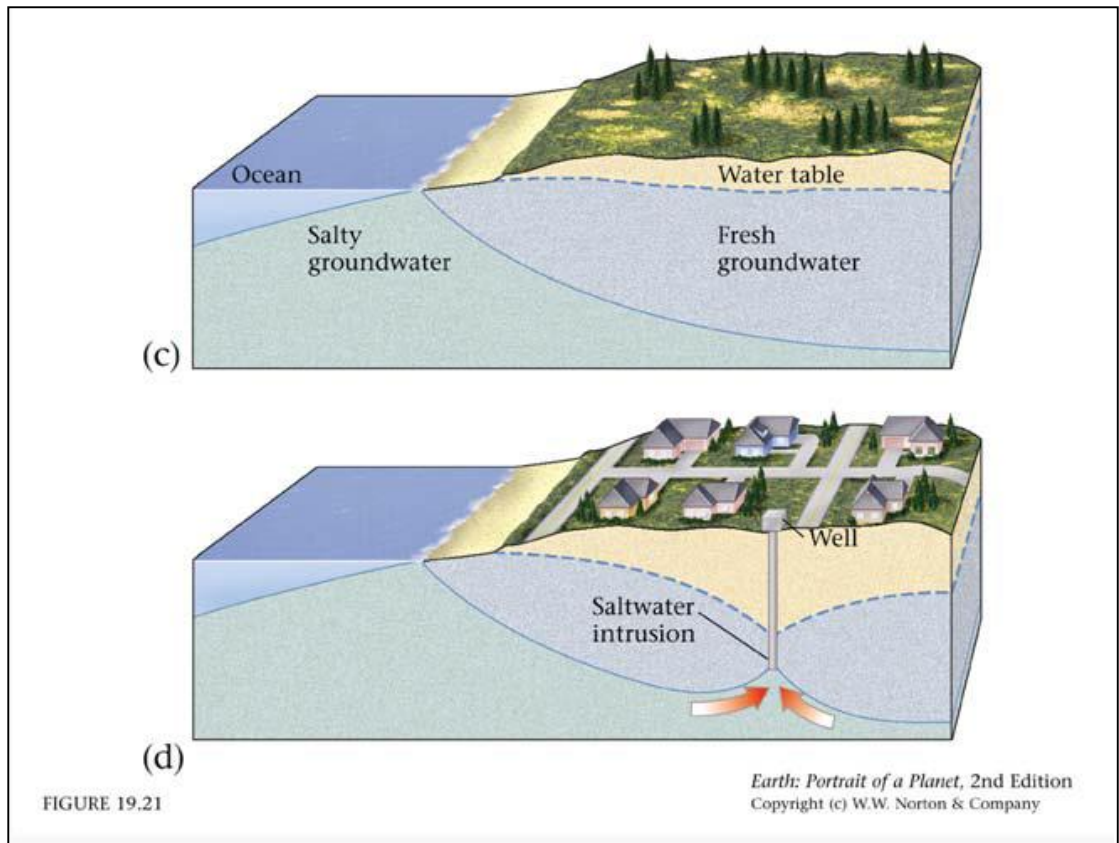
### **2.1 Υφαλμύρωση παράκτιων υπόγειων υδροφορέων**

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζεται και εξετάζεται το φαινόμενο της υφαλμύρωσης. Αναλυτικότερα δίνεται ένας πλήρης ορισμός του φαινομένου, περιγράφονται τα αίτια που το προκαλούν, αλλά και οι επιπτώσεις που μπορεί αυτό να έχει στην άντληση νερού από τους υπόγειους παράκτιους υδροφορείς και παρουσιάζονται διάφοροι τρόποι επίλυσης του προβλήματος .

#### **2.1.1 Ορισμός υφαλμύρωσης σε παράκτιους υπόγειους υδροφορείς**

Ως υφαλμύρωση σε έναν παράκτιο υπόγειο υδροφορέα ορίζεται η εισροή θαλασσινού νερού με αποτέλεσμα την ανάμειξη του γλυκού νερού με αλάτι και την υποβάθμιση της ποιότητας του. Αυτό το φαινόμενο αφαιρεί την δυνατότητα άντλησης του νερού λόγω της υποβαθμισμένης ποιότητας του η οποία δεν επιτρέπει την χρήση του για ύδρευση αλλά και για άρδευση. Γενικότερα η υφαλμύρωση προκαλεί την ποιοτική καταστροφή των γεωτρήσεων και τη διατάραξη του οικοσυστήματος.

Το φαινόμενο της υφαλμύρωσης παρατηρείται σε αρκετούς παράκτιους υδροφορείς οι οποίοι βρίσκονται κυρίως σε περιοχές με υψηλή ζήτηση νερού για την κάλυψη των αναγκών της περιοχής σε ύδρευση και άρδευση. Σε αυτές τις περιοχές το επιφανειακό δυναμικό δεν επαρκεί και έτσι γίνεται κατάχρηση του νερού των υπόγειων υδροφορέων. Τέτοια παραδείγματα αποτελούν παραθαλάσσιες περιοχές και ιδιαίτερα νησιά τα οποία λόγω της αυξημένης τουριστικής ανάπτυξης έχουν πολύ μεγάλη ζήτηση νερού η οποία πρέπει να καλυφθεί με κάποιο τρόπο. Αυτή η αυξημένη ζήτηση οδηγεί στην υποχώρηση του γλυκού νερού και την θέση του παίρνει το αλμυρό, με αποτέλεσμα σε σημεία που γίνεται κατάχρηση να αντλείται υφάλμυρο νερό. Το φαινόμενο αυτό φαίνεται στην παρακάτω εικόνα.

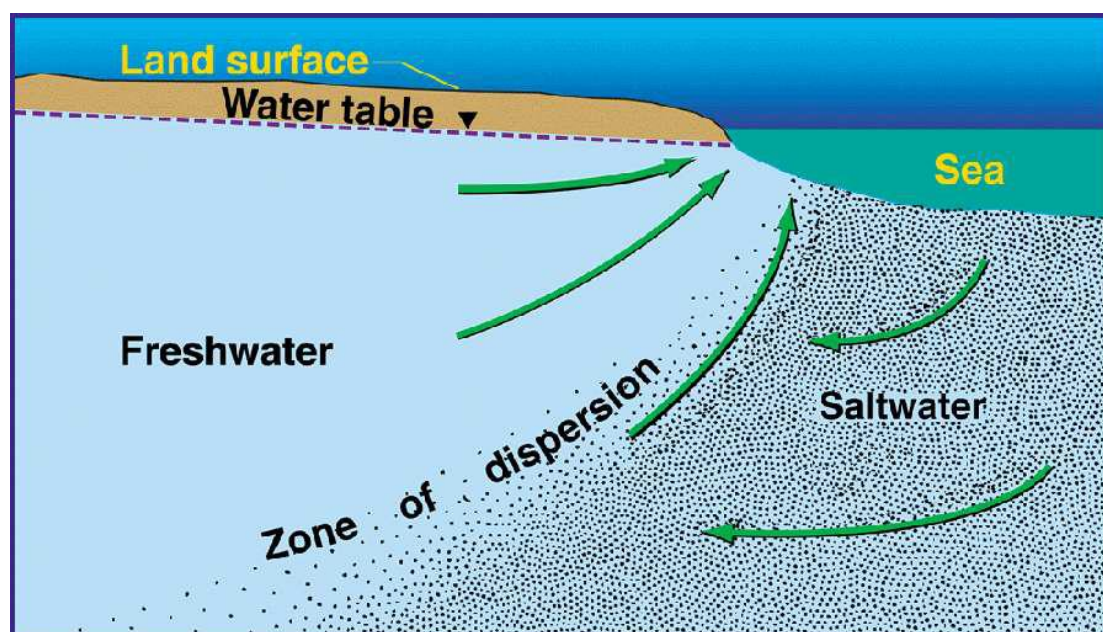


Εικόνα 2.1 : Το φαινόμενο της υφαλμύρωσης

Πηγή: Marshak (2005)

Αναλυτικότερα το γλυκό νερό ρέει προς την ακτή όπου συναντά το αλμυρό νερό. Το αλμυρό νερό έχει υψηλότερη συγκέντρωση αδιάλυτων αλάτων και γι' αυτό το λόγο είναι πιο πυκνό, συνεπώς έχει υψηλότερο υδραυλικό φορτίο από το γλυκό. Η υψηλή πίεση και η υψηλή πυκνότητα του αλμυρού νερού το οδηγεί προς το εσωτερικό των υπόγειων παράκτιων υδροφορέων, όπου κινείται σε μορφή «σφήνας» κάτω από το γλυκό νερό το οποίο είναι πιο ελαφρύ. Η έκταση της σφήνας είναι περιορισμένη διότι τα επίπεδα του υπόγειου γλυκού νερού αυξάνονται όσο αυξάνεται η ανύψωση της γης. Το αλμυρό και το γλυκό νερό συναντούνται σε μια μεταβατική ζώνη, όπου αναμιγνύονται μέσω διασποράς και διάχυσης. Η μεταβατική ζώνη αυτή ονομάζεται διεπιφάνεια. Πάνω από την διεπιφάνεια κινείται το γλυκό νερό που εξέρχεται προς την θάλασσα λόγω του ότι είναι πιο ελαφρύ(ειδικό βάρος  $1000 \text{ cm}^3/\text{gr}$ ), ενώ από κάτω κινείται το αλμυρό νερό που εισέρχεται προς το εσωτερικό του υδροφορέα (ειδικό βάρος  $1.025 \text{ cm}^3/\text{gr}$ ). Στη ζώνη αυτή οι υδραυλικές παράμετροι αλλάζουν λόγω της μίξης του αλμυρού με το γλυκό νερό, εφόσον αλλάζει η πυκνότητα λόγω

της μεταβολής συγκέντρωσης άλατος. Οι Mantoglou (2003), Mantoglou et al. (2004), Mantoglou and Papantoniou (2008), Park and Aral (2004), Karterakis et al. (2007), Das and Data (1999), Rao et al. (2004), Kourakos and Mantoglou (2009) μελέτησαν τη ροή στη ζώνη μεταβαλλόμενης πυκνότητας μέσω του κατάλληλου μοντέλου.



Εικόνα 2.2 :Κίνηση αλμυρού νερού προς το εσωτερικό υπόγειο υδροφορέα υπό μορφή "σφήνας".

Πηγή: <http://water.usgs.gov/ogw/gwrp/saltwater/salt.html>

### 2.1.2 Αιτίες πρόκλησης της υφαλμύρωσης και επιπτώσεις αυτής

Η υφαλμύρωση οφείλεται σε φυσικούς αλλά και σε ανθρωπογενείς παράγοντες. Η κύρια αιτία της είναι η αυξημένη ζήτηση γλυκού νερού κυρίως σε περιοχές με έλλειψη επιφανειακών πηγών νερού, η οποία οδηγεί σε υπερβολική άντληση από τους υπόγειους υδροφορείς. Αυτή η κατάχρηση που γίνεται οδηγεί στην υποχώρηση του γλυκού νερού και την διείσδυση του αλμυρού με αποτέλεσμα να αντλείται υφάλμυρο νερό αλλά και σε πολλές περιπτώσεις αλμυρό νερό. Η κατάσταση αυτή έχει ως αποτέλεσμα την καταστροφή του υπόγειου υδροφορέα και γενικότερα του οικοσυστήματος και οδηγεί σε καταστάσεις μη αναστρέψιμες. Παρόλα αυτά τέτοια φαινόμενα πολλές φορές οφείλονται και σε φυσικούς παράγοντες οι οποίοι είναι είτε γεωλογικοί είτε έχουν σχέση με ανύψωση της στάθμης της θάλασσας λόγω του



φαινομένου του θερμοκηπίου. Κυρίως όμως η υφαλμύρωση οφείλεται σε ανθρωπογενείς παράγοντες.

Οι επιπτώσεις που έχει το φαινόμενο αυτό κυρίως επηρεάζουν το φυσικό περιβάλλον λόγω της διατάραξης της φυσικής ισορροπίας που επέρχεται με μεγάλες επιπτώσεις για την ζωή και την υγεία του ανθρώπου. Παρόλα αυτά όμως υπάρχουν και κοινωνικοοικονομικές επιπτώσεις οι οποίες είναι απότοκα της προσπάθειας ανατροπής της κατάστασης η οποία σε πολλές περιπτώσεις δεν είναι αναστρέψιμη. Το μείζον πρόβλημα που δημιουργείται είναι η υποβάθμιση της ποιότητας του νερού το οποίο δεν είναι κατάλληλο προς πόση, αλλά ούτε και προς άρδευση. Σε μερικές περιπτώσεις που το πρόβλημα είναι ιδιαίτερα οξύμενο παρουσιάζονται καθιζήσεις σε εκτεταμένες περιοχές οι οποίες όταν πραγματοποιούνται σε κατοικημένες περιοχές ή σε περιοχές με καλλιέργειες δημιουργούν τεράστια οικονομικά προβλήματα στον άνθρωπο και επηρεάζουν την καθημερινότητα του. Πολλές φορές απαιτείται η εγκαθίδρυση δικτύου αφαλάτωσης ή εναλλακτικές μορφές άντλησης, όπου για την πραγματοποίησή τους είναι αναγκαίο ένα μεγάλο οικονομικό κεφάλαιο, με καταστροφικές συνέπειες για την οικονομία του τόπου. Επιπλέον είναι πιθανό να υπάρξουν πολιτικοοικονομικά προβλήματα όπως αυξημένα επίπεδα ανεργίας, ανέχεια σε κάποιες ομάδες του πληθυσμού, ακόμα και πόλεμο μεταξύ χωρών (Παρλατζάς 2013). Ως εκ τούτου το πρόβλημα της υφαλμύρωσης δεν επηρεάζει μόνο την ποιότητα του νερού αλλά έναν μεγάλο αριθμό θεμάτων τα οποία είναι συνυφασμένα με την καθημερινότητα του ανθρώπου και την επιβίωση του.

### **2.1.3 Τρόποι αντιμετώπισης της υφαλμύρωσης**

Έχουν εφαρμοσθεί και προταθεί διάφοροι τρόποι αντιμετώπισης για την αντιμετώπιση της υφαλμύρωσης, ο πιο αποτελεσματικός όλων είναι η πρόληψη σε αυτό το πρόβλημα έτσι ώστε να αντλείται η κατάλληλη ποσότητα νερού η οποία μπορεί φυσικά να αναπληρωθεί χωρίς την δημιουργία προβλημάτων στον υδροφορέα και στο οικοσύστημα. Λόγω της ανεξέλεγκτης άντλησης όμως πολλές περιοχές έχουν αντιμετωπίσει αυτό το πρόβλημα. Κάποιοι τρόποι που εφαρμόστηκαν για την ανατροπή του φαινομένου είναι ο περιορισμός των αντλήσεων, η χρήση εναλλακτικών πηγών ποσίμου νερού και η εγκαθίδρυση μονάδων αφαλάτωσης αλμυρού νερού. Επιπλέον σε πολλές περιπτώσεις γίνεται προσπάθεια διατήρησης των

υπόγειων υδροφορέων με χρήση των επιφανειακών πηγών νερού αλλά και με την επαναφόρτιση του υδροφόρου ορίζοντα. Ακόμη έχουν εφαρμοστεί μέθοδοι με πηγάδια επαναφόρτισης του υπόγειου υδροφορέα αλλά και με πηγάδια φράγματα τα οποία αντλούν θαλασσινό νερό και επαναφορτίζουν με γλυκό νερό προκειμένου να διατηρηθεί η ισορροπία (Παρλατζάς (2013)). Για να εφαρμοσθούν όλοι αυτοί οι τρόποι με επιτυχία πρέπει να υπάρχει μια συνεχής παρακολούθηση του υδροφορέα, της διεπιφάνειας και της σφήνας που δημιουργούνται προκειμένου να είναι δυνατό να αποφευχθεί οποιοδήποτε πρόβλημα. Τέλος για κάθε παρέμβαση είναι απαραίτητο να πραγματοποιούνται οι κατάλληλες υδρολογικές μελέτες για να εφαρμόζεται ο κατάλληλος τρόπος αντιμετώπισης σε κάθε περίπτωση.

## **2.2 Μοντέλα προσομοίωσης υφαλμύρωσης**

Στο παρόν κεφάλαιο αναλύονται τα μοντέλα προσομοίωσης, τα οποία αναπαριστούν την διεπιφάνεια μεταξύ του αλμυρού και του γλυκού νερού. Οι θεωρήσεις που υπάρχουν είναι δύο, η θεώρηση απότομης διεπιφάνειας (sharp interface) και η θεώρηση ύπαρξης ζώνης ανάμιξης και διάχυσης άλατος (variable density). Στην εφαρμογή η οποία έγινε στην παρούσα εργασία και αναλύεται σε επόμενο κεφάλαιο χρησιμοποιήθηκε η θεώρηση απότομης διεπιφάνειας. Παρακάτω αναλύεται ο τρόπος προσέγγισης της θεώρησης της απότομης διεπιφάνειας καθώς και οι αναλυτικές σχέσεις και τα χαρακτηριστικά από τα οποία διέπεται.

### **2.2.1 Θεώρηση απότομης διεπιφάνειας**

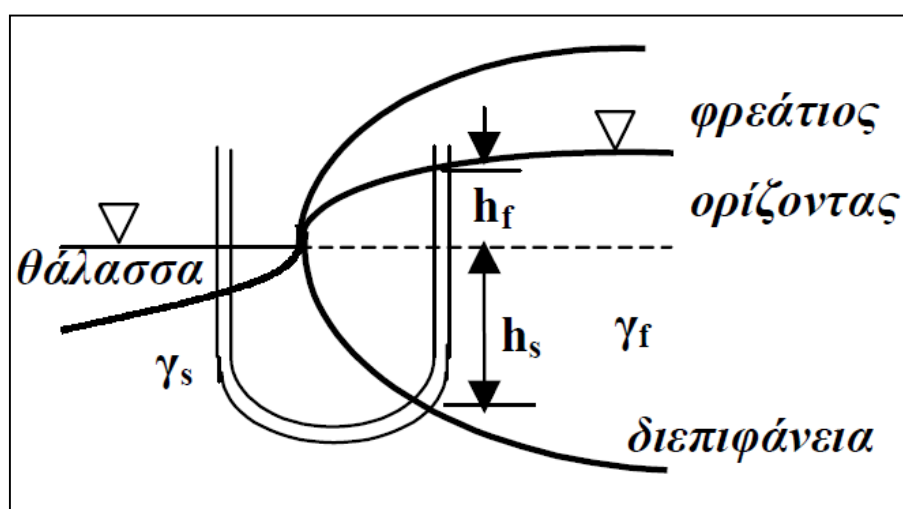
Η θεώρηση της απότομης διεπιφάνειας (sharp interface) είναι πιο απλή και γρήγορη διαδικασία από αυτή της ζώνης ανάμιξης και διάχυσης άλατος, αυτός είναι και ο λόγος που είναι η ευρύτερα χρησιμοποιούμενη μέθοδος. Αυτή είναι και η θεώρηση που χρησιμοποιείται στην εφαρμογή που πραγματοποιείται στην παρούσα διπλωματική. Με βάση αυτή την θεώρηση η διεπιφάνεια είναι απότομη, δηλαδή η μεταβατική ζώνη αλμυρού και γλυκού νερού έχει μηδενικό πάχος εν συγκρίσει με το πάχος του υδροφορέα. Η διεπιφάνεια αυτής της θεώρησης θεωρείται ακίνητη σε κατάσταση φυσικής ισορροπίας, με ταυτόχρονη εκροή γλυκού νερού προς την θάλασσα πάνω από αυτή. Υπό συνθήκες αυξημένης άντλησης γλυκού νερού η πτώση του πιεζομετρικού φορτίου έχει ως αποτέλεσμα την κίνηση της διεπιφάνειας προς το

εσωτερικό του υδροφορέα μέχρι να επιτευχθεί νέα κατάσταση ισορροπίας. «Η ποσότητα του γλυκού νερού που εξέρχεται στη θάλασσα και του αλμυρού νερού που εισέρχεται στον υδροφορέα καθορίζεται από τις τιμές του πιεζομετρικού φορτίου που σχετίζεται άμεσα με τις οριακές συνθήκες, την επιφανειακή τροφοδοσία και την άντληση» (Παπαντωνίου (2003)).

### 2.2.1.1 Προσέγγιση Ghyben – Herzberg

Οι Badhon-Ghyben (1888) και Herzberg (1901) διαπίστωσαν ότι η στάθμη του θαλασσινού νερού στο έδαφος δεν βρίσκεται στο επίπεδο της θάλασσας αλλά περίπου 40 φορές τη διαφορά στάθμης του γλυκού νερού κάτω από το επίπεδο της θάλασσας.

Η σχέση Ghyben- Herzberg προκύπτει από την υδροστατική ισορροπία μεταξύ αλμυρού και γλυκού νερού, θεωρώντας ακίνητη την αλάτινη σφήνα, επίσης ότι ισχύει η παραδοχή Dupuit και ότι η πίεση στην διεπιφάνεια είναι κοινή.



Εικόνα 2.3 : Τομή ενός φρεάτιου υδροφορέα και της θάλασσας

Πηγή: Νάνου-Γιάνναρου (2001)

Ισχύει ότι :

$$h_s \cdot \gamma_s = (h_f + h_s) \cdot \gamma_f \Rightarrow h_s = \frac{\gamma_f}{\gamma_s - \gamma_f} \cdot h_f \equiv \delta h_f \quad (1.1)$$

Όπου :  $h_f$  το ύψος του γλυκού νερού πάνω από τη στάθμη της θάλασσας

$h_s$  η θέση της διεπιφάνειας αλμυρού-γλυκού νερού κάτω από την επιφάνεια της θάλασσας

$\gamma_f$  το ειδικό βάρος του γλυκού νερού

$\gamma_s$  το ειδικό βάρος του αλμυρού νερού

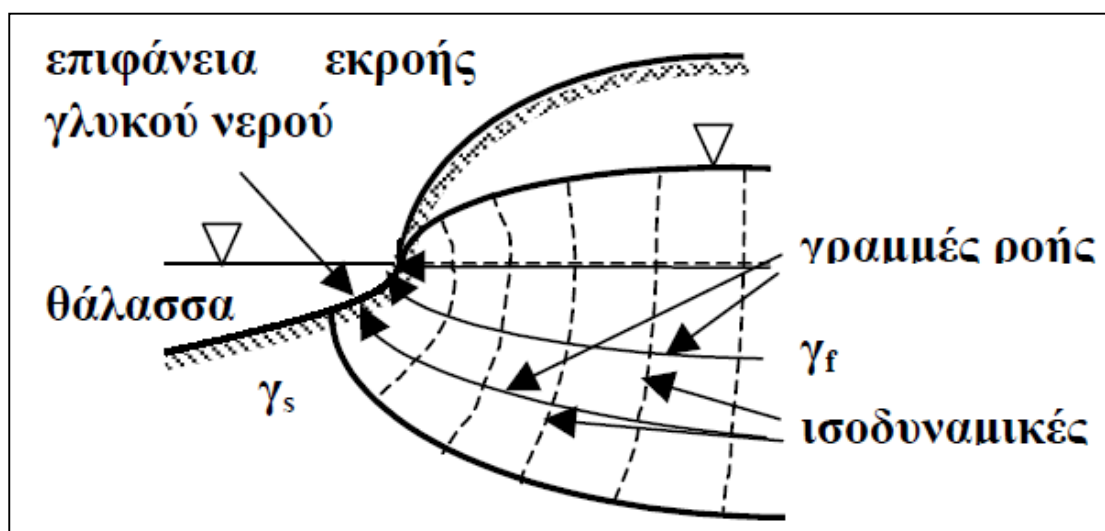
$$\delta \text{ ο λόγος } \frac{\gamma_f}{\gamma_s - \gamma_f}$$

Με αυτή τη σχέση έχοντας ως δεδομένο τη στάθμη του γλυκού νερού στα φρέατα παρατήρησης μπορεί να υπολογιστεί η θέση της διεπιφάνειας. Αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση  $\rho_f = 1000 \text{ gr/cm}^3$  και  $\rho_s = 1,025 \text{ gr/cm}^3$  προκύπτει ότι  $h_s = 40 \cdot h_f$ . Η θέση της διεπιφάνειας αλμυρού-γλυκού νερού μπορεί να βρεθεί μέσω της εξίσωσης Ghyben-Herzberg ως εξής (Νάνου-Γιάνναρου (2001)):

- Με βάση παρατηρήσεις από φρέατα της περιοχής, κατασκευάζεται ο πιεζομετρικός χάρτης του υδροφορέα για το γλυκό νερό.
- Τα πιθανά βάθη της διεπιφάνειας υπολογίζονται από την προαναφερθείσα εξίσωση, άρα ισχύει ο ίδιος πιεζομετρικός χάρτης πολλαπλασιασμένος με διαφορετικό συντελεστή.
- Από τη γεωλογική μελέτη είναι γνωστή η θέση του πυθμένα του υδροφορέα.
- Η τομή των δύο επιφανειών, της διεπιφάνειας αλμυρού-γλυκού νερού και της βάσης του υδροφορέα, αποτελεί τον πόδα της αλάτινης σφήνας.
- Η μέθοδος μπορεί να εφαρμοσθεί για περιορισμένους και φρεάτιους υδροφορείς.

Η πραγματική εικόνα όμως της διεπιφάνειας διαφέρει από την προηγούμενη πιο απλοποιημένη. Στην πραγματική εικόνα δεν ισχύει η παραδοχή οριζόντιας ροής, λόγω της ύπαρξης σημαντικών κατακόρυφων συνιστωσών ταχυτήτων. Επιπλέον η διεπιφάνεια αλμυρού γλυκού νερού κινείται προς το εσωτερικό του υδροφορέα.

Τέλος η προσέγγιση Ghyben-Herzberg δεν μπορεί να προβλέψει στην περίπτωση φρεάτιων υδροφορέων την επιφάνεια διήθησης και δεν επιτρέπει τον υπολογισμό επιφάνειας από την οποία ρέει γλυκό νερό προς την θάλασσα. Η πραγματική εικόνα της διεπιφάνειας παρουσιάζεται στην παρακάτω εικόνα.



Εικόνα 2.4 : Πραγματική εικόνα της διεπιφάνειας

Πηγή: Νάνου-Γιάνναρου (2001)

### 2.2.1.2 Ανάλυση κατά Strack

Η πολυπλοκότητα του προβλήματος της κίνησης των υπογείων υδάτων σε παράκτιους υδροφορείς απαιτεί τον καθορισμό ενός μεγάλου αριθμού παραμέτρων το οποίο είναι αδύνατο λόγω της ανομοιογένειας τους στο χώρο. Γι' αυτό το λόγο θα υιοθετηθούν κάποιες παραδοχές, οι οποίες θα απλοποιήσουν το πρόβλημα προκειμένου να προκύψουν ορθά συμπεράσματα με βάση τα υπάρχοντα κάθε φορά δεδομένα (Strack (1976), Bear (1979), Cheng & Ouazar (1999), Cheng et al. (2000), Mantoglou (2003), Mantoglou et al. (2004)).

#### Παραδοχές

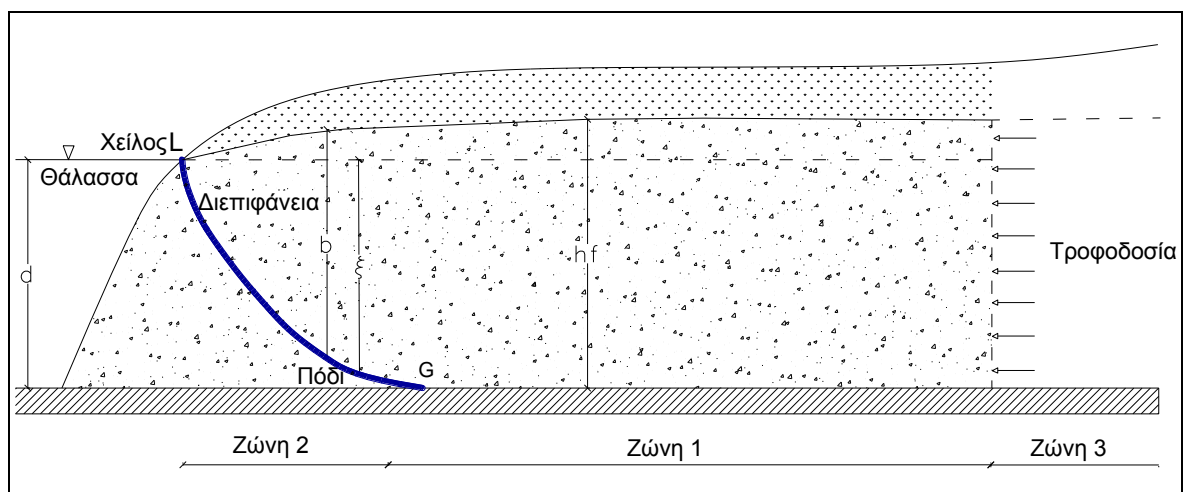
- Θεωρείται απότομη διεπιφάνεια (sharp interface) με σταθεροποιημένο το μέτωπο του αλμυρού νερού.
- Μόνιμη ροή, οπότε η αποθηκευτικότητα του υδροφορέα αγνοείται.

- Οριζόντια ροή (υπόθεση Dupuit) για το γλυκό νερό ενώ στη ζώνη 2 (Σχ.7.2) το θαλασσινό θεωρείται ακίνητο.
- Χρησιμοποιείται η σχέση των Ghyben-Herzberg για τον υπολογισμό της μορφής της διεπιφάνειας.
- Ο υδροφορέας είναι ισότροπος και ομογενής με οριζόντιο αδιαπέρατο πυθμένα.

### 2.2.1.3 Αναλυτικές σχέσεις

Θεωρείται ένας φρεάτιος υδροφορέας ο οποίος είναι ομογενής και ισότροπος και για τον οποίο γίνεται υπόθεση σταθερής οριζόντιας ροής. Ο υδροφορέας αυτός έχει κάποια χαρακτηριστικά που χρειάζονται για την μελέτη του, τα οποία αναλύονται παρακάτω:

- Ως αλάτινη σφήνα ορίζεται το τμήμα του υδροφορέα στο οποίο έχει εισέλθει το θαλασσινό νερό.
- Χείλος (L) της αλάτινης σφήνας είναι το σημείο τομής της διεπιφάνειας με την επιφάνεια της θάλασσας.
- Πόδι (G) της αλάτινης σφήνας είναι το σημείο τομής της διεπιφάνειας με τον πυθμένα του υδροφορέα.



Σχήμα 2.1 : Φρεάτιος Υδροφορέας

Πηγή: Παπαντωνίου (2003)

Ο φρεάτιος υδροφορέας του σχήματος διακρίνεται από τρεις διαφορετικές ζώνες, με διαφορετικά χαρακτηριστικά η κάθε μια. Στη ζώνη 1 ο υδροφορέας συμπεριφέρεται ακριβώς όπως ένας φρεάτιος υδροφορέας με αδιαπέρατο υπόβαθρο. Στη ζώνη 2 το γλυκό νερό έχει αναμιχθεί με το αλμυρό. Η διεπιφάνεια αποτελεί το μεταξύ τους όριο με το γλυκό νερό να επιπλέει πάνω από το αλμυρό. Τέλος η ζώνη 3 περιλαμβάνει την περιοχή τροφοδοσίας του υδροφορέα.

Για μόνιμη οριζόντια ροή, η διαφορική εξίσωση συνεχείας στη ζώνη 1 είναι :

$$\frac{\partial}{\partial x} (K \cdot h_f \frac{\partial h_f}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (K \cdot h_f \frac{\partial h_f}{\partial y}) = 0 \quad (1.2)$$

Η διαφορική εξίσωση στη ζώνη 2 είναι:

$$\frac{\partial}{\partial x} (K \cdot b \frac{\partial h_f}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (K \cdot b \frac{\partial h_f}{\partial y}) = 0 \quad (1.3)$$

Οι εξισώσεις (1.2) και (1.3) περιγράφονται από τη γενική εξίσωση :

$$\nabla(K \cdot b \nabla h_f) = 0 \quad (1.4)$$

Η εξίσωση (1.4) ισχύει για φρεάτιο και για περιορισμένο υδροφορέα χωρίς τροφοδοσία. Αν  $N$  είναι η επιφανειακή τροφοδοσία και  $Q_w$  η συνολική άντληση η (1.4) γίνεται :

$$\nabla(K \cdot b \nabla h_f) + N - Q_w = 0 \quad (1.5)$$

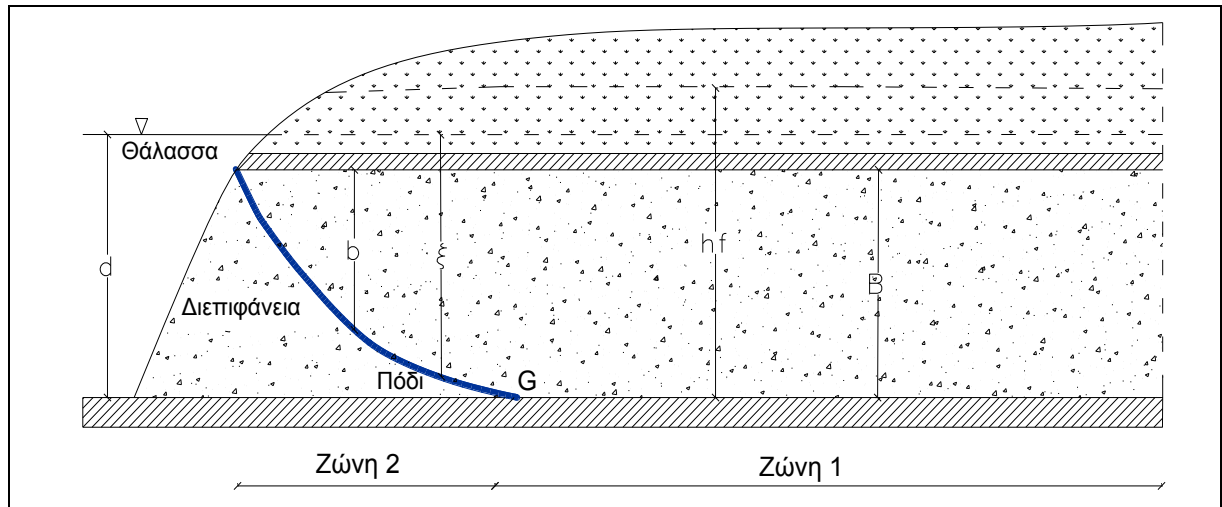
Το πάχος  $b$  του καθαρού νερού δεν είναι το ίδιο για τις δύο ζώνες και επίσης είναι διαφορετικό για φρεάτιο και περιορισμένο υδροφορέα. Τα πάχη σε κάθε ζώνη σε κάθε είδος υδροφορέα παρουσιάζονται παρακάτω:

$$b = h_f \quad \text{φρεάτιος υδροφορέας, ζώνη 1}$$

$$b = h_f - d + \xi \quad \text{φρεάτιος υδροφορέας, ζώνη 2}$$

$$b = B \quad \text{περιορισμένος υδροφορέας, ζώνη 1}$$

$$b = \xi - d + B \quad \text{περιορισμένος υδροφορέας, ζώνη 2}$$



Σχήμα 2.2 : Περιορισμένος Υδροφορέας

Πηγή: Παπαντωνίου (2003)

Η κατακόρυφη απόσταση  $\xi$  της διεπιφάνειας από τη στάθμη της θάλασσας προσδιορίζεται με τη βοήθεια της προσέγγισης Ghyben-Herzberg :

$$h_f - d = \Delta s \cdot \xi \Rightarrow \xi = \frac{1}{\Delta s} (h_f - d) \quad (1.6)$$

Το δυναμικό στις ζώνες 1 και 2 ενός παράκτιου υδροφορέα στην περίπτωση μόνιμης οριζόντιας ροής περιγράφεται από τις παρακάτω συναρτήσεις οι οποίες είναι συνεχείς μεταξύ των ζωνών 1 και 2 (Strack (1976), Cheng & Ouazar (1999)).

Φρεάτιος υδροφορέας :

$$\text{Ζώνη 1} \quad \varphi_{\delta\epsilon\xi} = \frac{1}{2 \cdot [h_f^2 - (1 + \Delta s) \cdot d^2]} \quad (1.7)$$

$$\text{Ζώνη 2} \quad \varphi_{\alpha\rho} = \frac{(1 + \Delta s)}{2\Delta s (h_f - d)^2}$$

Περιορισμένος υδροφορέας :

$$\text{Ζώνη 1} \quad \varphi_{\delta\epsilon\xi} = \frac{B \cdot h_f + \Delta s \cdot B^2}{2 - (1 + \Delta s) \cdot B \cdot d} \quad (1.8)$$



$$\text{Ζώνη 2} \quad \varphi_{\alpha\rho} = \frac{1}{(2 \cdot \Delta s) \cdot [h_f + \Delta s \cdot B - (1 + \Delta s) \cdot d]^2}$$

Στο πόδι της διεπιφάνειας (G) το δυναμικό ροής παίρνει συγκεκριμένη τιμή:

$$\text{Φρεάτιος υδροφορέας} \quad \varphi_G = \varphi_{\alpha\rho} = \varphi_{\delta\epsilon\xi} = \frac{\Delta s \cdot (1 + \Delta s)}{2 \cdot d^2} \quad (1.9)$$

$$\text{Περιορισμένος υδροφορέας} \quad \varphi_G = \varphi_{\alpha\rho} = \varphi_{\delta\epsilon\xi} = \frac{\Delta s}{2 \cdot B^2}$$

Οι εξισώσεις (1.6), (1.7), (1.8) ικανοποιούν την εξίσωση (Mantoglou 2003) :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( K \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( K \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + N - Q = 0 \quad (1.10)$$

Για ομογενή και ισότροπο υδροφορέα η εξίσωση Laplace γίνεται:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad \text{ή} \quad \nabla^2 \varphi = 0 \quad (1.11)$$

Η εξίσωση (1.11) μπορεί να γενικευτεί ώστε να περιλαμβάνει και τους όρους  $N$  (επιφανειακή τροφοδοσία) και  $Q_w$  (άντληση):

$$K \cdot \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) + N - Q_w = 0 \quad (1.12)$$

Στο χείλος της διεπιφάνειας(L) ισχύει  $\xi = 0 \Rightarrow h_f = d$ , άρα σύμφωνα με τις εξισώσεις (1.7),(1.8) το δυναμικό θα είναι 0 και για την περίπτωση φρεάτιου αλλά και περιορισμένου υδροφορέα.

#### 2.2.1.4 Ύπαρξη φρεάτος άντλησης με επίλυση κατά Starck

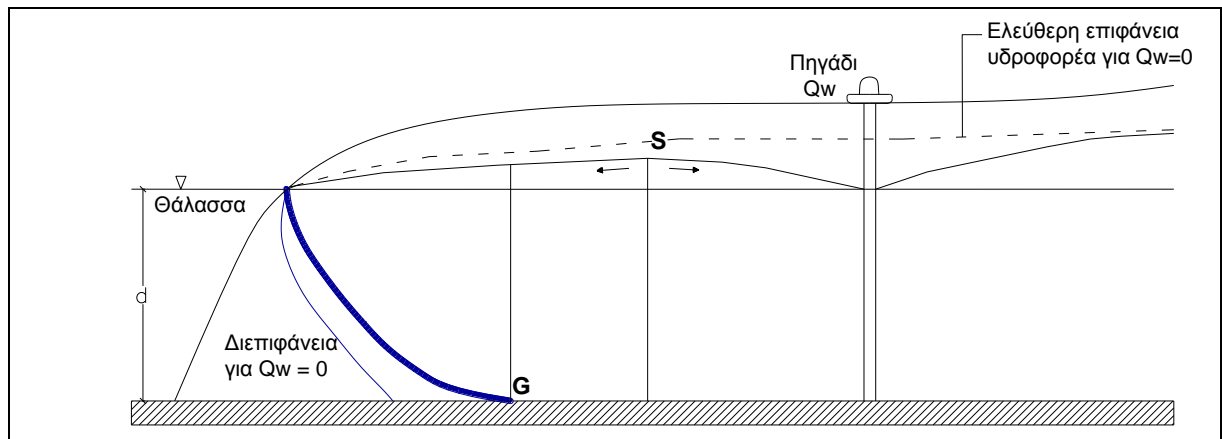
Θεωρείται ένας ημιαπείρων διαστάσεων παράκτιος υδροφορέας με παροχή ανά μονάδα πλάτους  $q$ . Έστω ότι υπάρχει ένα πηγάδι άντλησης παροχής  $Q_w$ , το οποίο βρίσκεται σε απόσταση  $x_w$  από την ακτή. Σύμφωνα με τον Strack το δυναμικό σε κάθε σημείο του υδροφορέα υπολογίζεται με τη μέθοδο των εικόνων:

$$\varphi = \frac{q}{K} \cdot x + \frac{Q_w}{4 \cdot \pi \cdot K} \cdot \ln \left[ \frac{(x - x_w)^2 + y^2}{(x + x_w)^2 + y^2} \right] \quad (1.13)$$

Από τη σχέση (1.9) μπορεί να βρεθεί το δυναμικό στη θέση του ποδιού της σφήνας και από την παρακάτω σχέση η θέση του ποδιού της σφήνας.

$$\varphi_{toe} = \frac{q}{K} \cdot x_{toe} + \frac{Q_w}{4 \cdot \pi \cdot K} \cdot \ln \left[ \frac{(x_{toe} - x_w)^2 + y^2}{(x_{toe} + x_w)^2 + y^2} \right] \quad (1.14)$$

«Υπάρχει μια κρίσιμη τιμή της παροχής  $Q_C$  για την οποία δημιουργείται μια ασταθής κατάσταση. Ελάχιστη αύξηση της άντλησης ( $Q_w > Q_C$ ) οδηγεί σε απότομη μετακίνηση του ποδιού προς το εσωτερικό του υδροφορέα προκαλώντας υφαλμύρωση του πηγαδιού.»(Παπαντωνίου (2003)) Στο παρακάτω σχήμα έχουν τοποθετηθεί το πόδι της αλάτινης σφήνας(G) και το stagnation point(S), το οποίο οριοθετεί την περιοχή τροφοδοσίας του φρέατος στη ζώνη 2 και στην ουσία λειτουργεί ως υπόγειος υδροκρίτης.



Σχήμα 2.3: Φρέατος υδροφορέας με άντληση

Πηγή: Παπαντωνίου (2003)

Τα σημεία G και S παρουσιάζουν αντίθετη συμπεριφορά στην αύξηση της παροχής άντλησης. Το G μετατοπίζεται προς το εσωτερικό του υδροφορέα ενώ το S προς την ακτή όσο η παροχή αυξάνεται. Η παροχή για την οποία το πόδι της αλάτινης σφήνας συμπίπτει με το stagnation point ονομάζεται κρίσιμη παροχή. Οποιαδήποτε

επιπρόσθετη αύξηση της παροχής οδηγεί στην άντληση υφάλμυρου νερού. Επομένως η κρίσιμη παροχή  $Q_c$  είναι η μέγιστη δυνατή χωρίς να υφαλμυρωθεί το πηγάδι. Η κρίσιμη παροχή προκύπτει από τη σχέση (Cheng and Ouazar (1999)):

$$\varphi = \frac{q \cdot x_w}{K} \cdot \sqrt{1 - \frac{Q_c}{\pi \cdot q \cdot x_w}} + \frac{Q_c}{2 \cdot \pi \cdot K} \cdot \ln \frac{1 - \sqrt{\frac{1 - Q_c}{\pi \cdot q \cdot x_w}}}{1 + \sqrt{\frac{1 - Q_c}{\pi \cdot q \cdot x_w}}} \quad (1.15)$$

Η κρίσιμη απόσταση  $x_{toe,max}$  του ποδιού της αλάτινης σφήνας από την ακτή για παροχή άντλησης  $Q_w = Q_c$  προσδιορίζεται από την σχέση :

$$x_{toe,max} = x_S = x_w \cdot \sqrt{\frac{1 - Q_w}{\pi \cdot q \cdot x_w}} \quad (1.16)$$

Αν ο αριθμός των φρεάτων είναι μεγαλύτερος του ενός και γίνεται ταυτόχρονη άντληση τότε το δυναμικό υπολογίζεται από τη σχέση (Cheng & Quazar (1999)):

$$\varphi = \frac{q}{K} \cdot x + \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{4 \cdot \pi \cdot K} \cdot \ln \frac{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}{(x + x_i)^2 + (y - y_i)^2} \quad (1.17)$$

Όπου :

$Q_i$  : η παροχή άντλησης κάθε φρεατίου

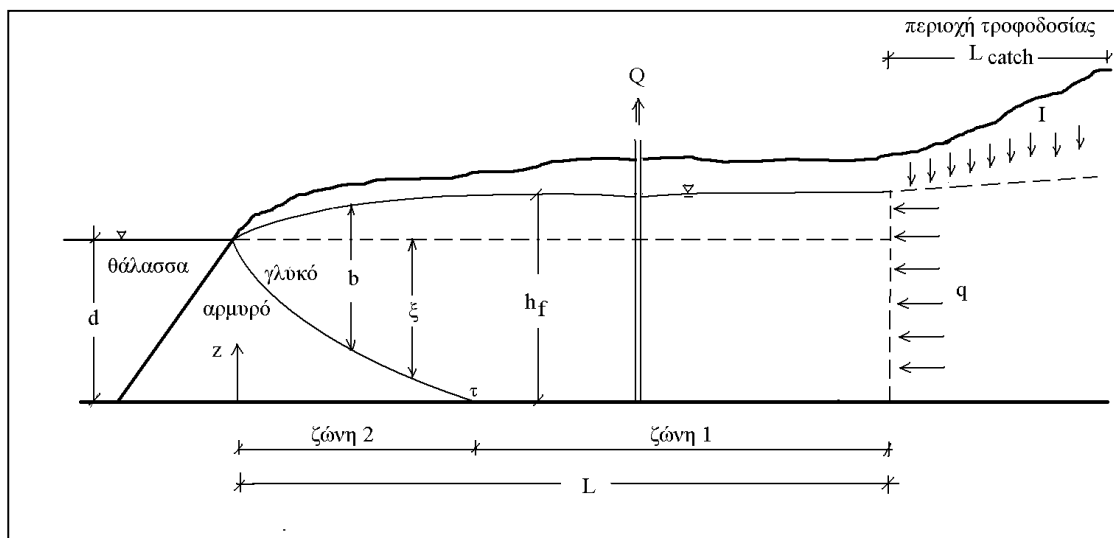
$x_i, y_i$  : οι συντεταγμένες κάθε φρεατίου άντλησης

### 2.2.1.5 Το μοντέλο απότομης διεπιφάνειας (Mantoglou et al (2004))

Το μοντέλο Mantoglou et al στηρίζεται στις θεωρήσεις που παρουσιάστηκαν προηγουμένως. Πιο συγκεκριμένα στηρίζεται :

- Στην προσέγγιση Ghyben – Herzberg
- Στην ανάλυση κατά Strack
- Στη θεώρηση ύπαρξης απότομης διεπιφάνειας γλυκού-αλμυρού νερού

Θεωρείται ένας φρεάτιος υδροφορέας όπως αυτός του παρακάτω σχήματος και γίνεται η θεώρηση μόνιμης ροής. Επιπλέον γίνεται η υπόθεση ότι υπάρχει μια διακριτή οριακή επιφάνεια που διαχωρίζει το γλυκό από το αλμυρό νερό, η οποία τέμνει τον αδιαπέρατο πυθμένα του υδροφορέα. Ακολουθώντας την ανάλυση των Stark (1976) και Cheng and Ouazar (1999) έστω  $b(x, y)$  το συνολικό βάθος του γλυκού νερού,  $\xi(x, y)$  το βάθος του γλυκού νερού ως προς τη στάθμη της θάλασσας, και  $h_f(x, y)$  το πιεζομετρικό φορτίο στη θέση  $(x, y)$ . Οι μεταβλητές  $b, \xi, h_f$  είναι συναρτήσεις της θέσης  $(x, y)$ .



Σχήμα 2.4 : Φρεάτιος Υδροφορέας

Πηγή: Μαντόγλου&Γιαννουλόπουλος (2001)

Στο σχήμα φαίνονται οι δύο ζώνες που αναφέρθηκαν προηγουμένως, καθώς επίσης και το σημείο  $\tau$  στη διατομή, που συμβολίζει την τομή της διεπιφάνειας με τη βάση του υδροφορέα. Η σχέση Ghyben – Herzberg συνδέει το υδραυλικό φορτίο  $h_f$  με το βάθος  $\xi$  με τη σχέση :

$$h_f - d = \delta \cdot \xi \quad (1.18)$$

Όπου:

$$\delta = \frac{\rho_s - \rho_f}{\rho_f} = \frac{\Delta\rho}{\rho_f} \approx 0.025$$

$\rho_s$  : η πυκνότητα του θαλασσινού νερού

$\rho_f$  : η πυκνότητα του γλυκού νερού

Με βάση την ανάλυση κατά Strack που εισάγει την έννοια του δυναμικού  $\varphi$ , είναι δυνατό να δημιουργηθεί μια γενική εξίσωση συνέχειας που ισχύει και για τις δύο ζώνες και συμπίπτει με την εξίσωση Laplace. Η εξίσωση αυτή για τον υδροφορέα του σχήματος είναι:

$$K \cdot \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) + N = 0 \quad (1.19)$$

Όπου:

$N$  : επιφανειακή τροφοδοσία

$K$  : υδραυλική αγωγιμότητα

$\varphi$  : το δυναμικό

Η παραπάνω σχέση είναι όμοια με την αντίστοιχη σχέση που ισχύει για οριζόντια ροή και ισότροπο και ομογενή περιορισμένο υδροφορέα, η οποία είναι:

$$T \cdot \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) + N = 0 \quad (1.20)$$

Όπου :

$T$  : η μεταφορικότητα

$\varphi$  : το πιεζομετρικό φορτίο

Οι δύο εξισώσεις διαφέρουν μόνο ως προς τα μεγέθη εφόσον στην μια χρησιμοποιείται η μεταφορικότητα και το υδραυλικό φορτίο ενώ στην πρώτη χρησιμοποιείται η υδραυλική αγωγιμότητα και το δυναμικό. Επομένως ο παράκτιος φρεάτιος υδροφορέας μπορεί να μελετηθεί απλοποιημένα ως ένας τυπικός περιορισμένος υδροφορέας με μεταφορικότητα ίση με την υδραυλική αγωγιμότητα του φρεάτιου. Παρά τις απλοποιήσεις η τιμή του δυναμικού εξακολουθεί να παραμένει άγνωστη, αφού η γεωμετρία του υδροφορέα δεν είναι απλή και δεν είναι εύκολο να την γνωρίζουμε σε κάθε θέση. Σε αυτή την περίπτωση εφαρμόζονται αριθμητικές μέθοδοι μέσω των γνωστών μοντέλων SUTRA (Gorelick et al. 1984,

Hallaji and Yazicigil 1996), SHARP (Emch and Yeh 1998) και MODFLOW(McDonald and Harbaugh 1988).

Επιλύεται η εξίσωση (1.21) η οποία αναφέρεται στην εξωτερική ζώνη(ζώνη 2) του υδροφορέα, ως προς το φορτίο γλυκού νερού  $h_f$  και προκύπτει η σχέση (1.22).

$$\varphi = \frac{(1+\delta)}{2\delta} (h_f - d)^2 \quad (1.21)$$

$$\varphi = \frac{(1+\delta)}{2 \cdot \delta} \cdot (h_f - d)^2 \Rightarrow (h_f - d)^2 = \frac{2 \cdot \delta}{(1+\delta)} \cdot \varphi \Rightarrow h_f = \sqrt{\frac{2 \cdot \delta}{(1+\delta)} \cdot \varphi} + d \quad (1.22)$$

Η σχέση (1.22) για πυκνότητες  $\rho_s = 1,025 \text{ gr} / \text{cm}^3$  και  $\rho_f = 1,000 \text{ gr} / \text{cm}^3$ , όπου

$$\delta = \frac{\rho_s - \rho_f}{\rho_f} = 0,025 \text{ γίνεται:}$$

$$h_f = \sqrt{\frac{0,05}{1,025} \cdot \varphi} + d \quad (1.23)$$

Όπου  $d$  το βάθος της θάλασσας με επίπεδο αναφοράς τον πυθμένα του υδροφορέα.

Εφαρμόζοντας την εξίσωση *Ghyben – Herzberg* προκύπτει :

$$\xi = \frac{h_f - d}{0,025} = 40 \cdot (h_f - d) \quad (1.24)$$

Αν τεθεί όπου  $\xi = -z$  υπολογίζεται το βάθος κάτω από το επίπεδο της θάλασσας στο οποίο βρίσκεται η διεπιφάνεια.

$$\xi = -z \Rightarrow z = -\xi = -40 \cdot (h_f - d) \quad (1.25)$$

Το συγκεκριμένο μοντέλο είναι αυτό το οποίο θα χρησιμοποιηθεί στην παρούσα εργασία. Βέβαια θα υπάρχουν κάποιες αλλαγές λόγω της ύπαρξης πηγαδιών, γι' αυτό το λόγο οι εξισώσεις (1.19) και (1.20) μετατρέπονται έτσι:

$$K \cdot \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) + N - Q_w = 0 \quad (1.26)$$

$$T \cdot \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) + N - Q_w = 0 \quad (1.27)$$

### 2.3 Συμπεράσματα

Ως υφαλμύρωση σε έναν παράκτιο υπόγειο υδροφορέα ορίζεται η εισροή θαλασσινού νερού με αποτέλεσμα την ανάμειξη του νερού με αλάτι και την υποβάθμιση της ποιότητας του. Το φαινόμενο της υφαλμύρωσης παρατηρείται σε αρκετούς παράκτιους υδροφορείς οι οποίοι βρίσκονται κυρίως σε περιοχές με υψηλή ζήτηση νερού για την κάλυψη των αναγκών της περιοχής σε ύδρευση και άρδευση. Έχουν εφαρμοσθεί και προταθεί διάφοροι τρόποι αντιμετώπισης για την αντιμετώπιση της υφαλμύρωσης, ο πιο αποτελεσματικός όλων είναι η πρόληψη σε αυτό το πρόβλημα έτσι ώστε να αντλείται η κατάλληλη ποσότητα νερού η οποία μπορεί φυσικά να αναπληρωθεί χωρίς την δημιουργία προβλημάτων στον υδροφορέα και στο οικοσύστημα.

Στους υπόγειους παράκτιους υδροφορείς το αλμυρό και το γλυκό νερό συναντούνται σε μια μεταβατική ζώνη, όπου αναμιγνύονται μέσω διασποράς και διάχυσης. Η μεταβατική ζώνη αυτή ονομάζεται διεπιφάνεια. Για την μελέτη των υπόγειων υδροφορέων είναι αναγκαία η αναπαράσταση αυτής της διεπιφάνειας η οποία αναπαρίσταται μέσω των μοντέλων προσομοίωσης. Οι θεωρήσεις που υπάρχουν είναι δύο, η θεώρηση απότομης διεπιφάνειας (sharp interface) και η θεώρηση ύπαρξης ζώνης ανάμειξης και διάχυσης άλατος (variable density). Η θεώρηση που χρησιμοποιείται πιο συχνά λόγω της απλότητας της είναι αυτή της απότομης διεπιφάνειας η οποία χρησιμοποιείται και στην εφαρμογή της παρούσας εργασίας.

Όσο αφορά την θεώρηση της απότομης διεπιφάνειας, τρεις είναι οι τρόποι προσέγγισης της απότομης διεπιφάνειας. Η προσέγγιση Ghyben – Herzberg, η ανάλυση κατά Strack και το μοντέλο Mantoglou et al (2004), το οποίο είναι αυτό το

οποίο χρησιμοποιείται στην παρούσα εργασία. Το μοντέλο απότομης διεπιφάνειας Mantoglou et al (2004) στηρίζεται στις θεωρήσεις Ghyben – Herzberg, Strack και στην ύπαρξη απότομης διεπιφάνειας γλυκού-αλμυρού νερού. Σύμφωνα με αυτό το μοντέλο ο παράκτιος φρεάτιος υδροφορέας μπορεί να μελετηθεί απλοποιημένα ως ένας τυπικός περιορισμένος υδροφορέας με μεταφορικότητα ίση με την υδραυλική αγωγιμότητα του φρεάτιου.



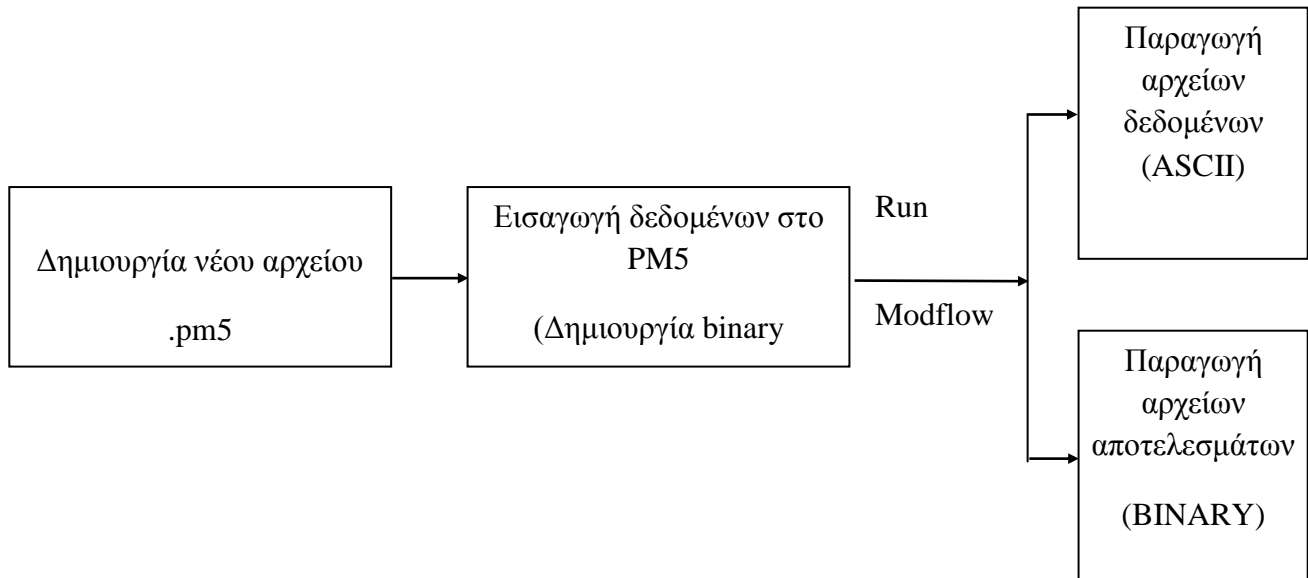
### **3. ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΜΕ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΕΣ**

#### **ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΚΑΙ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ MODFLOW ΚΑΙ PMWIN**

##### **3.1 Εισαγωγή**

Με την προσομοίωση στην ουσία γίνεται μια αναπαράσταση της λειτουργίας του υπόγειου υδροφορέα χρησιμοποιώντας το κατάλληλο λογισμικό. Στην συγκεκριμένη εργασία το λογισμικό που θα χρησιμοποιηθεί είναι το MODFLOW, το οποίο είναι ένα τρισδιάστατο μοντέλο προσομοίωσης των υπόγειων υδροφορέων. Το MODFLOW εφαρμόζει την μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών για την επίλυση των προβλημάτων ροής. Διαθέτει ένα σύνολο μοντέλων, τα οποία ασχολούνται με διαφορετικά χαρακτηριστικά το καθένα (π.χ.: επιφανειακή τροφοδοσία, εξατμισοδιαπνοή). Πολλές φορές είναι απαραίτητο τα δεδομένα που θα εισαχθούν στο MODFLOW να υποστούν μία επεξεργασία πριν την εισαγωγή τους, αυτός είναι ο λόγος που έχουν αναπτυχθεί διάφορα λογισμικά τα οποία προσφέρουν αυτή τη δυνατότητα. Ένα από τα πιο γνωστά προγράμματα τέτοιου είδους είναι το Processing MODFLOW for Windows (PMWIN), το οποίο χρησιμοποιείται στην παρούσα εργασία.

Στο PMWIN ακολουθείται μια διαδικασία κατά την οποία, εισάγονται αρχικά τα δεδομένα, οι αρχικές και οι οριακές συνθήκες του υδροφορέα και καταχωρούνται στα αντίστοιχα binary αρχεία. Ο υδροφορέας σχηματικά αποτελείται από ένα κάρναβο, κάθε κελί του οποίου έχει μια συγκεκριμένη τιμή για κάθε δεδομένο και κάθε αποτέλεσμα. Τέλος παράγονται τα αντίστοιχα αρχεία ως αποτελέσματα της επίλυσης του προβλήματος με το MODFLOW. Η διαδικασία η οποία ακολουθείται στο PMWIN και το MODFLOW παρουσιάζεται σχηματικά παρακάτω:



Σχήμα 3.1 : Σχηματική αναπαράσταση λειτουργίας PMWIN και MODFLOW

Πηγή: Παπαντωνίου (2003)

## 3.2 Περιγραφή της διαδικασίας που ακολουθεί το MODFLOW

### 3.2.1 Μαθηματική διαδικασία που ακολουθείται

Στο Modflow χρησιμοποιείται η εξίσωση συνέχειας σε τρεις διαστάσεις με βάση το νόμο του Darcy, για συνθήκες μόνιμης και μη μόνιμης ροής. Για έναν υδροφόρο μη ομογενή, ανισότροπο με μη μεταβαλλόμενη πυκνότητα και για ταύτιση των αξόνων της ροής με αυτούς της υδραυλικής αγωγιμότητας, η εξίσωση συνέχειας είναι η εξής:

$$\frac{d}{dx} \left( K_x \frac{dh}{dx} \right) + \frac{d}{dy} \left( K_y \frac{dh}{dy} \right) + \frac{d}{dz} \left( K_z \frac{dh}{dz} \right) - W = S_s \cdot \frac{dh}{dt} \quad (1.28)$$

Όπου :

$K_x, K_y, K_z$  η υδραυλική αγωγιμότητα κατά μήκος των αξόνων ροής  $x, y, z$

[L T<sup>-1</sup>]

$h$  το πιεζομετρικό φορτίο [L]

$W$  η παροχή άντλησης ή τροφοδοσίας του υδροφορέα ανά μονάδα όγκου

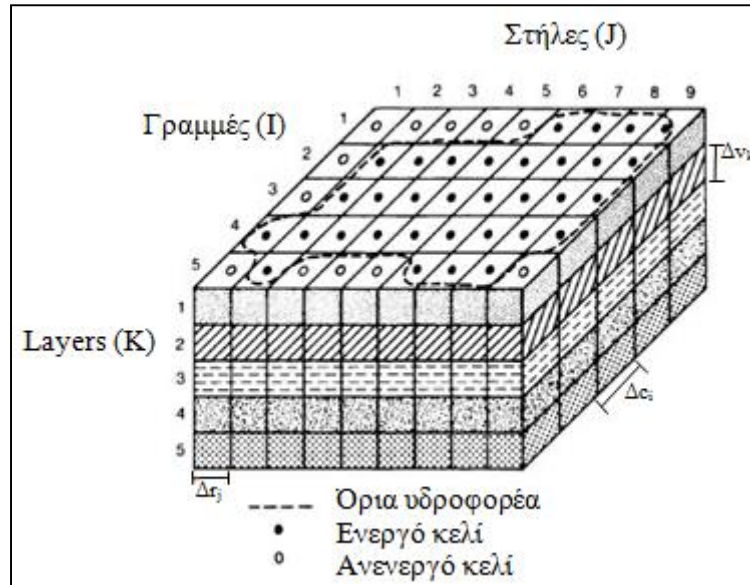
[T<sup>-1</sup>]

$S_s$  η ειδική αποθηκευτικότητα του πορώδους μέσου [L<sup>-1</sup>]

Η μαθηματική αναπαράσταση ενός συστήματος ροής γίνεται μέσω της εξίσωσης (1.28) και των αρχικών και οριακών συνθηκών. Η επίλυση της εξίσωσης (1.28) για σύνθετους υδροφορείς γίνεται μέσω αριθμητικών μεθόδων, μέσω των κατάλληλων μοντέλων, εφόσον η αναλυτική επίλυση της γίνεται μόνο για απλά προβλήματα. Το MODFLOW εφαρμόζει την αριθμητική μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών, με βάση την οποία η διαφορική εξίσωση που διέπει τη ροή του ρευστού διακριτοποιείται στο χώρο και στο χρόνο (McDonald and Harbaugh (1988)).

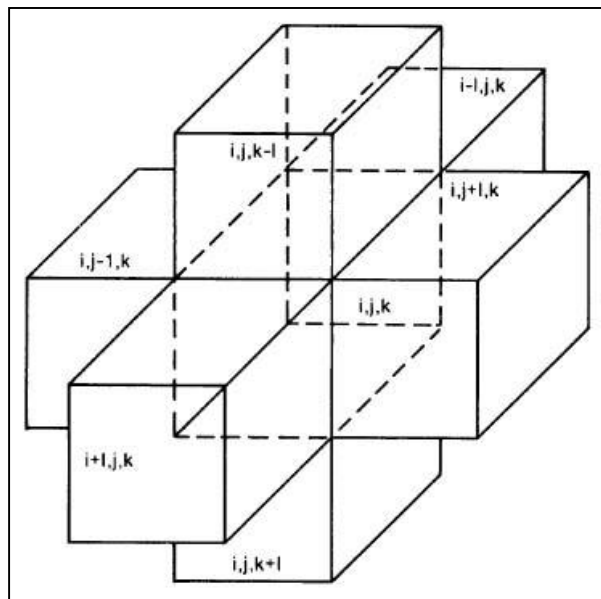
### 3.2.2 Διακριτοποίηση υδροφορέα

Η εξίσωση (1.28) προσεγγίζεται με τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών. Η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών βασίζεται στους M.G. McDonald και A.W.Harbaugh(1988). Στο παρακάτω σχήμα παρουσιάζεται ένας διακριτοποιημένος υδροφορέας που αποτελείται από ένα σύνολο κελιών τα οποία σχηματίζουν ένα τρισδιάστατο κάρναβο. Κάθε κελί ορίζεται από τρία στοιχεία  $i, j, k$ , όπου  $i$  είναι η σειρά,  $j$  η στήλη και  $k$  το οριζόντιο επίπεδο. Οι στήλες και οι γραμμές τέμνονται κάθετα μεταξύ τους, ορίζοντας ορθογώνια κελιά σε κάθε επίπεδο, οι γραμμές είναι παράλληλες στον άξονα  $x$  και οι στήλες στον άξονα  $y$ . Το πλάτος των κελιών κατά τον άξονα  $x$ , σε μια στήλη  $j$  συμβολίζεται  $\Delta x_j$ , ενώ το πλάτος των κελιών κατά  $y$  στη σειρά  $i$  είναι  $\Delta y_i$  και το πλάτος κατά  $z$  στο επίπεδο  $k$  είναι  $\Delta z_k$ .



Σχήμα3.2: Διακριτοποιημένος υδροφορέας  
Πηγή: PMWIN Tutorial

Η λύση της διακριτοποιημένης εξίσωσης δίνει ως αποτέλεσμα το πιεζομετρικό φορτίο σε καθορισμένα σημεία του καννάβου τους κόμβους οι οποίοι είναι τα κέντρα των κελιών. Για τον υπολογισμό οποιασδήποτε παραμέτρου σε ένα τυχαίο κελί  $i,j,k$  χρησιμοποιούνται τα έξι γειτονικά  $i-1,j,k$ ,  $i+1,j,k$ ,  $i,j-1,k$ ,  $i,j+1,k$ ,  $i,j,k-1$ ,  $i,j,k+1$ , όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 3.3 : Κελί  $i,j,k$  και τα 6 γειτονικά του

### 3.2.3 Εξίσωση πεπερασμένων διαφορών

Σύμφωνα με την αρχή της συνέχειας το άθροισμα όλων των εισροών και των εκροών σε κάθε κελί (i,j,k) ισούται με τη μεταβολή του όγκου νερού που βρίσκεται αποθηκευμένος σε αυτό. Με βάση την υπόθεση ότι η πυκνότητα του νερού δεν είναι μεταβαλλόμενη, η εξίσωση συνέχειας είναι η εξής:

$$\Sigma Q_i = SS \cdot \frac{dh}{dt} \cdot \Delta V \quad (1.29)$$

Όπου :  $Q_i$  ο ρυθμός ροής του νερού στο κελί [ $L^3 T^{-1}$ ]

$SS$  η ειδική αποθηκευτικότητα [ $L^{-1}$ ]

$\Delta V$  ο όγκος του κελιού [ $L^3$ ]

$dh$  η μεταβολή του υδραυλικού φορτίου σε χρονικό διάστημα  $dt$

Πραγματοποιείται μία σύμβαση κατά την οποία οι εισερχόμενες ροές στο κάθε κελί θεωρούνται θετικές ενώ οι εξερχόμενες ροές αρνητικές. Επομένως η εισροή νερού στο κελί i,j,k από το i,j-1,k κατά τη διεύθυνση της γραμμής i δίνεται από τη σχέση :

$$q_{i,j-1/2,k} = KR_{i,j-1/2,k} \cdot \Delta c_i \cdot \Delta v_k \cdot \frac{h_{i,j-1,k} - h_{i,j,k}}{\Delta r_{j-1/2}} \quad (1.30)$$

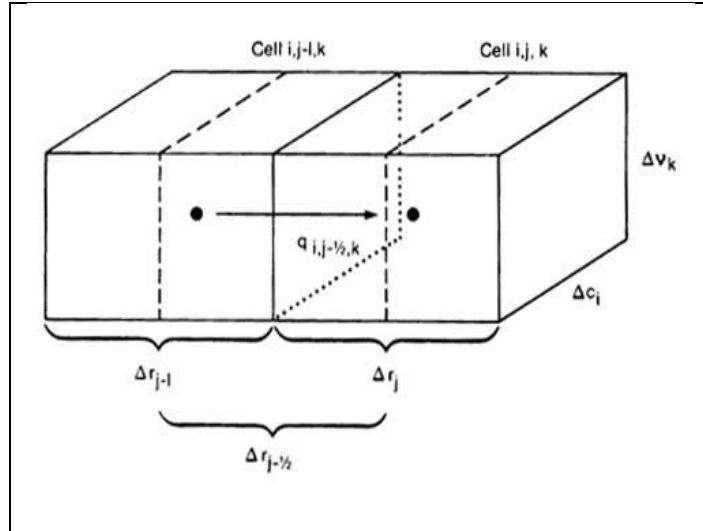
Όπου :

$KR_i$  η υδραυλική αγωγιμότητα κατά μήκος της γραμμής  $R_i$  μεταξύ των κόμβων i,j,k και i,j-1,k [ $LT^{-1}$ ]

$\Delta c_i \Delta v_k$  η επιφάνεια της διατομής μεταξύ των κελιών [ $L^2$ ]

$h_{i,j,k}, h_{i,j-1,k}$  το πιεζομετρικό φορτίο στο κελί i,j,k και i,j-1,k αντίστοιχα [ $L$ ]

$\Delta r_{j-1/2}$  η απόσταση μεταξύ των κελιών i,j,k και i,j-1,k [ $L$ ]



Σχήμα 3.4 : Ροή από το κελί  $i,j-1,k$  στο  $i,j,k$

Η ροή κατά μήκος της ίδιας γραμμής  $R_i$  μεταξύ των κελιών  $i,j,k$  και  $i,j+1,k$  προκύπτει από τη σχέση:

$$q_{i,j+1/2,k} = KR_{i,j+1/2,k} \cdot \Delta c_i \cdot \Delta v_k \cdot \frac{h_{i,j+1,k} - h_{i,j,k}}{\Delta r_{j+1/2}} \quad (1.31)$$

Οι σχέσεις για την προσέγγιση της ροής μεταξύ των υπολοίπων πέντε πλευρών του κελιού  $I,j,k$  αναγράφονται παρακάτω:

Κατά τη διεύθυνση της στήλης  $C_j$ , η ροή μεταξύ των κελιών  $i,j,k$  και  $i+1,j,k$  είναι :

$$q_{i+1/2,j,k} = KC_{i+1/2,j,k} \cdot \Delta r_j \cdot \Delta v_k \cdot \frac{h_{i+1,j,k} - h_{i,j,k}}{\Delta c_{i+1/2}} \quad (1.32)$$

Για τα κελια  $i,j,k$  και  $i-1,j,k$  :

$$q_{i-1/2,j,k} = KC_{i-1/2,j,k} \cdot \Delta r_j \cdot \Delta v_k \cdot \frac{h_{i-1,j,k} - h_{i,j,k}}{\Delta c_{i-1/2}} \quad (1.33)$$

Για την κατακόρυφη διεύθυνση μεταξύ των κελιών  $i,j,k$  και  $i,j,k+1$ , η ροή υπολογίζεται από τη σχέση :

$$q_{i,j,k+1/2} = KV_{i,j,k+1/2} \cdot \Delta r_j \cdot \Delta c_i \cdot \frac{h_{i,j,k+1} - h_{i,j,k}}{\Delta v_{k+1/2}} \quad (1.34)$$

Για τα κελιά  $i,j,k$  και  $i,j,k-1$  είναι :

$$q_{i,j,k-1/2} = KV_{i,j,k-1/2} \cdot \Delta r_j \cdot \Delta c_i \cdot \frac{h_{i,j,k-1} - h_{i,j,k}}{\Delta v_{k-1/2}} \quad (1.35)$$

Οι παραπάνω σχέσεις είναι δυνατό να απλοποιηθούν περιγράφοντας τις διαστάσεις του κελιού και την υδραυλική αγωγιμότητα (hydraulic conductivity) με μία σταθερά την αγωγιμότητα. Η οποία κατά τη διεύθυνση της γραμμής  $Ri$  μεταξύ των κελιών  $i,j,k$  και  $i,j-1,k$ , ορίζεται ως εξής :

$$CR_{i,j-1/2,k} = KR_{i,j-1/2,k} \cdot \frac{\Delta c_i \cdot \Delta v_k}{\Delta r_{j-1/2}} \quad (1.36)$$

Η αγωγιμότητα συμβολίζεται με  $CC$  κατά τη διεύθυνση της στήλης, ενώ με  $CV$  κατά την κατακόρυφη διεύθυνση. Σύμφωνα με την παραπάνω σχέση η αγωγιμότητα είναι ο λόγος της διατομής του κελιού κατά την  $i$  ή  $j$  ή κατακόρυφη διεύθυνση προς την απόσταση μεταξύ των κελιών  $i,j,k$  και  $i,j\pm 1,k$  ή  $i,j,k$  και  $i\pm 1,j,k$  ή  $i,j,k$  και  $i,j,k\pm 1$  αντίστοιχα επί τον αρμονικό μέσο της υδραυλικής αγωγιμότητας κατά την αντίστοιχη κατεύθυνση.

Αντικαθιστώντας την αγωγιμότητα στις σχέσεις (1.30) έως (1.35) προκύπτουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$q_{i,j-1/2,k} = CR_{i,j-1/2,k} (h_{i,j-1,k} - h_{i,j,k}) \quad (1.37)$$

$$q_{i,j+1/2,k} = CR_{i,j+1/2,k} (h_{i,j+1,k} - h_{i,j,k}) \quad (1.38)$$

$$q_{i-1/2,j,k} = CC_{i-1/2,j,k} (h_{i-1,j,k} - h_{i,j,k}) \quad (1.39)$$

$$q_{i+1/2,j,k} = CC_{i+1/2,j,k} (h_{i+1,j,k} - h_{i,j,k}) \quad (1.40)$$

$$q_{i,j,k-1/2} = CV_{i,j,k-1/2} (h_{i,j,k-1} - h_{i,j,k}) \quad (1.41)$$

$$q_{i,j,k+1/2} = CV_{i,j,k+1/2} (h_{i,j,k+1} - h_{i,j,k}) \quad (1.42)$$

Όσο αφορά την εξωτερική εισροή νερού στο κελί, αυτή περιγράφεται από την παρακάτω σχέση:

$$\alpha_{i,j,k,n} = p_{i,j,k,n} h_{i,j,k} + q_{i,j,k,n} \quad (1.43)$$

Όπου :

$\alpha_{i,j,k,n}$  η ροή από τη n-οστή εξωτερική πηγή στο κελί i,j,k [ $L^3 T^{-1}$ ]

$p_{i,j,k,n}$  ,  $q_{i,j,k,n}$  οι σταθερές με μονάδες [ $L^2 T^{-1}$ ] και [ $L^3 T^{-1}$ ] αντίστοιχα.

Με N εξωτερικές πηγές τότε η συνολική ροή στο κελί i,j,k είναι :

$$QS_{i,j,k} = \sum_{n=1}^N \alpha_{i,j,k,n} = \sum_{n=1}^N p_{i,j,k,n} \cdot h_{i,j,k} + \sum_{n=1}^N q_{i,j,k,n} \quad (1.44)$$

Αν  $P_{i,j,k} = \sum_{n=1}^N p_{i,j,k,n}$  και  $Q_{i,j,k} = \sum_{n=1}^N q_{i,j,k,n}$  η (1.44) μετατρέπεται :

$$QS_{i,j,k} = P_{i,j,k} h_{i,j,k} + Q_{i,j,k} \quad (1.45)$$

Αν εφαρμοστούν οι παραπάνω εξισώσεις στην εξίσωση συνέχειας προκύπτει η εξίσωση:

$$q_{i,j-1/2,k} + q_{i,j+1/2,k} + q_{i-1/2,j,k} + q_{i+1/2,j,k} + q_{i,j,k-1/2} + q_{i,j,k+1/2} + QS_{i,j,k} = SS_{i,j,k} \cdot \frac{dh_{i,j,k}}{dt} \cdot \Delta r_j \cdot \Delta c_i \cdot \Delta v_k \quad (1.46)$$

Όπου :

$\frac{dh_{i,j,k}}{dt}$  η πεπερασμένη διαφορά που αντικαθιστά την παράγωγο ως προς το χρόνο [ $LT^{-1}$ ]

$SS_{i,j,k}$  η ειδική αποθηκευτικότητα στο κελί i,j,k [ $L^{-1}$ ]

$\Delta r_j \cdot \Delta c_i \cdot \Delta v_k$  ο όγκος του κελιού i,j,k [ $L^3$ ]



Από τις εξισώσεις (1.37) έως (1.42) η εξίσωση συνέχειας μετατρέπεται ως εξής:

$$\begin{aligned}
& CR_{i,j-1/2,k} \cdot (h_{i,j-1,k} - h_{i,j,k}) + CR_{i,j+1/2,k} \cdot (h_{i,j+1,k} - h_{i,j,k}) + CC_{i-1/2,j,k} \cdot (h_{i-1,j,k} - h_{i,j,k}) + \\
& + CC_{i+1/2,j,k} \cdot (h_{i+1,j,k} - h_{i,j,k}) + CV_{i,j,k-1/2} \cdot (h_{i,j,k-1} - h_{i,j,k}) + CV_{i,j,k+1/2} \cdot (h_{i,j,k+1} - h_{i,j,k}) + \\
& + P_{i,j,k} \cdot h_{i,j,k} + Q_{i,j,k} = SS_{i,j,k} \cdot (\Delta r_j \cdot \Delta c_i \cdot \Delta v_k) \frac{dh_{i,j,k}}{dt}
\end{aligned}
\tag{1.47}$$

Με την χρήση της οπισθοδρομικής διαφοράς μπορεί να εκφραστεί η προσέγγιση με πεπερασμένες διαφορές της παραγώγου  $\frac{dh_{i,j,k}}{dt}$  από την σχέση (1.48), με βάση την οποία ισούται με τη μεταβολή του  $h$  στο χρονικό διάστημα που εκτείνεται από την προηγούμενη χρονική στιγμή  $t_{m-1}$  έως τη χρονική στιγμή ( $t_m$ ).

$$\left. \frac{dh_{i,j,k}}{dt} \right|_m = \frac{h_{i,j,k}^m - h_{i,j,k}^{m-1}}{t_m - t_{m-1}} \tag{1.48}$$

Κάνοντας χρήση των οπισθοδρομικών διαφορών η εξίσωση συνέχειας γράφεται ως εξής:

$$\begin{aligned}
& CR_{i,j-1/2,k} \cdot (h_{i,j-1,k}^m - h_{i,j,k}^m) + CR_{i,j+1/2,k} \cdot (h_{i,j+1,k}^m - h_{i,j,k}^m) + CC_{i-1/2,j,k} \cdot (h_{i-1,j,k}^m - h_{i,j,k}^m) + \\
& + CC_{i+1/2,j,k} \cdot (h_{i+1,j,k}^m - h_{i,j,k}^m) + CV_{i,j,k-1/2} \cdot (h_{i,j,k-1}^m - h_{i,j,k}^m) + CV_{i,j,k+1/2} \cdot (h_{i,j,k+1}^m - h_{i,j,k}^m) + \\
& + P_{i,j,k} \cdot h_{i,j,k}^m + Q_{i,j,k} = SS_{i,j,k} \cdot (\Delta r_j \cdot \Delta c_i \cdot \Delta v_k) \frac{h_{i,j,k}^m - h_{i,j,k}^{m-1}}{t_m - t_{m-1}}
\end{aligned}
\tag{1.49}$$

Στην εξίσωση (1.49) γνωστά είναι τα μεγέθη  $Q_{i,j,k}$ , το υδραυλικό φορτίο του χρονικού βήματος  $h_{i,j,k}^{m-1}$  και οι συντελεστές των υδραυλικών φορτίων. Ενώ τα άγνωστα μεγέθη είναι οι τιμές του υδραυλικού φορτίου στο χρονικό βήμα  $m$ . Η εξίσωση αυτή γράφεται για κάθε κόμβο μεταβλητού φορτίου και προκύπτει ένα σύστημα  $n$  εξισώσεων με  $n$  αγνώστους.

### Μόνιμη ροή

Για μόνιμη ροή το δεύτερο μέλος της εξίσωσης συνεχειάς είναι ίσο με 0.

$$\begin{aligned} & CR_{i,j-1/2,k} \cdot (h_{i,j-1,k}^m - h_{i,j,k}^m) + CR_{i,j+1/2,k} \cdot (h_{i,j+1,k}^m - h_{i,j,k}^m) + CC_{i-1/2,j,k} \cdot (h_{i-1,j,k}^m - h_{i,j,k}^m) + \\ & + CC_{i+1/2,j,k} \cdot (h_{i+1,j,k}^m - h_{i,j,k}^m) + CV_{i,j,k-1/2} \cdot (h_{i,j,k-1}^m - h_{i,j,k}^m) + CV_{i,j,k+1/2} \cdot (h_{i,j,k+1}^m - h_{i,j,k}^m) + \\ & + P_{i,j,k} \cdot h_{i,j,k}^m + Q_{i,j,k} = 0 \end{aligned} \quad (1.50)$$

Έχοντας ως δεδομένα τις αρχικές τιμές των υδραυλικών φορτίων, τις υδραυλικές παραμέτρους του υδροφορέα, τις οριακές συνθήκες και τις φορτίσεις υπολογίζονται με επαναληπτική διαδικασία τα υδραυλικά φορτία στους κόμβους του καννάβου τη δεδομένη χρονική στιγμή.

### Μη μόνιμη ροή

Υπολογίζεται η τιμή του υδραυλικού φορτίου στους κόμβους του καννάβου σε διαδοχικές χρονικές στιγμές. Έχοντας ως δεδομένα τις αρχικές τιμές των υδραυλικών φορτίων, τις υδραυλικές παραμέτρους του υδροφορέα, τις οριακές συνθήκες και τις φορτίσεις επιζητείται ο υπολογισμός του υδραυλικού φορτίου.

Οι αρχικές τιμές των υδραυλικών φορτίων αποτελούν τις τιμές του υδραυλικού φορτίου στην αρχή του 1<sup>ου</sup> χρονικού βήματος και στην εξίσωση συνεχειάς συμβολίζεται με  $h_{i,j,k}^1$  για κάθε κόμβο του καννάβου. Κατά τη διαδικασία επίλυσης, προσδιορίζονται αρχικά οι τιμές των υδραυλικών φορτίων στο τέλος του 1<sup>ου</sup> χρονικού βήματος  $h_{i,j,k}^2$ .

$$\begin{aligned} & CR_{i,j-1/2,k} \cdot (h_{i,j-1,k}^2 - h_{i,j,k}^2) + CR_{i,j+1/2,k} \cdot (h_{i,j+1,k}^2 - h_{i,j,k}^2) + CC_{i-1/2,j,k} \cdot (h_{i-1,j,k}^2 - h_{i,j,k}^2) + \\ & + CC_{i+1/2,j,k} \cdot (h_{i+1,j,k}^2 - h_{i,j,k}^2) + CV_{i,j,k-1/2} \cdot (h_{i,j,k-1}^2 - h_{i,j,k}^2) + CV_{i,j,k+1/2} \cdot (h_{i,j,k+1}^2 - h_{i,j,k}^2) + \\ & + P_{i,j,k} \cdot h_{i,j,k}^2 + Q_{i,j,k} = S_{si,j,k} \cdot \Delta r_j \cdot \Delta c_i \cdot \Delta v_k \frac{h_{i,j,k}^2 - h_{i,j,k}^1}{t_2 - t_1} \end{aligned} \quad (1.51)$$

Έπειτα πραγματοποιείται ο υπολογισμός του υδραυλικού φορτίου στο τέλος του δεύτερου χρονικού βήματος  $h_{ijk}^3$  με αρχική τιμή  $h_{ijk}^2$  και η διαδικασία συνεχίζεται με τον ίδιο τρόπο και ολοκληρώνεται όταν το υδραυλικό φορτίο υπολογισθεί για όλα τα

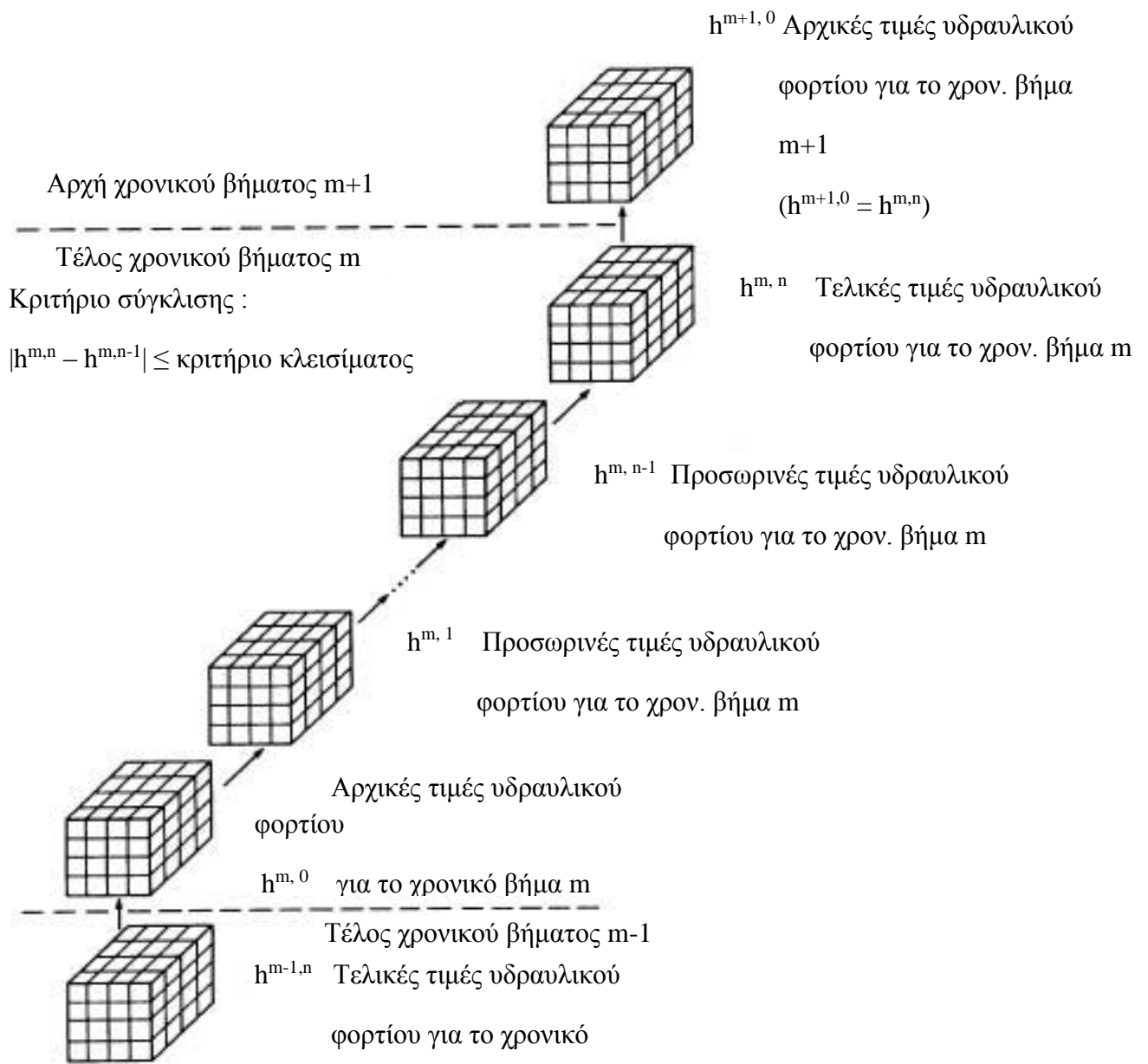
χρονικά βήματα. Ο προσδιορισμός των υδραυλικών φορτίων στο τέλος κάθε χρονικού βήματος γίνεται με επαναληπτική διαδικασία.

#### **3.2.4 Επαναληπτική διαδικασία για τον υπολογισμό του δυναμικού σε κάθε χρονικό βήμα**

Προκειμένου να επιλυθούν οι εξισώσεις των πεπερασμένων διαφορών σε κάθε χρονικό βήμα πραγματοποιείται μία επαναληπτική διαδικασία. Αρχικά δίνονται αρχικές τιμές υδραυλικού σε κάθε κελί και γίνεται έλεγχος ικανοποίησης του συστήματος των εξισώσεων. Εν συνεχεία παράγονται νέες προσωρινές τιμές οι οποίες προσεγγίζουν όλο και περισσότερο την λύση του συστήματος και η διαδικασία συνεχίζεται καθ' αυτόν τον τρόπο. Με κάθε παραγωγή νέων προσωρινών τιμών ολοκληρώνεται μια επανάληψη.

Η διαφορά των τιμών των υδραυλικών φορτίων μειώνεται συνεχώς όσο αυξάνονται οι επαναλήψεις, η επαναληπτική διαδικασία τερματίζεται όταν αυτή η διαφορά γίνει μικρότερη από το όριο που έχει οριστεί από τον χρήστη. Επίσης υπάρχουν και άλλοι περιορισμοί, όπως αυτός για τον μέγιστο αριθμό επαναλήψεων, όπου η επαναληπτική διαδικασία τερματίζεται αν ο αριθμός αυτός ξεπεραστεί.

Στο παρακάτω σχήμα παρουσιάζεται η επαναληπτική διαδικασία. Σε κάθε επανάληψη τα υπολογισμένα υδραυλικά φορτία(h) αναπαρίστανται από τους τρισδιάστατους καννάβους. Κάθε υδραυλικό φορτίο έχει δύο εκθέτες, όπου ο πρώτος υποδηλώνει το χρονικό βήμα για το οποίο υπολογίζονται τα υδραυλικά φορτία και ο δεύτερος, τον αριθμό των επαναλήψεων.



Σχήμα 3.5: Επαναληπτική διαδικασία για τον υπολογισμό των υδραυλικών φορτίων στο τέλος κάθε χρονικού βήματος

Πηγή: Παπαντωνίου (2003)

### 3.2.5 Αναδιαμόρφωση εξισώσεων

Πραγματοποιείται μια αναδιαμόρφωση των εξισώσεων για να επιλυθεί το σύστημα για κάθε κόμβο του καννάβου, προκειμένου οι όροι που περιέχουν τη μεταβλητή του υδραυλικού φορτίου στο τέλος του τρέχοντος χρονικού βήματος  $m$  να βρίσκονται στην αριστερή πλευρά της εξίσωσης ενώ οι υπόλοιποι όροι στη δεξιά.

Η εξίσωση που προκύπτει είναι η εξής:

$$\begin{aligned}
 & CV_{i,j,k-1/2} \cdot h_{i,j,k-1}^m + CC_{i-1/2,j,k} \cdot h_{i-1,j,k}^m + CR_{i,j-1/2,k} \cdot h_{i,j-1,k}^m + (-CV_{i,j,k-1/2} - CC_{i-1/2,j,k} - \\
 & -CR_{i,j-1/2,k} - CR_{i,j+1/2,k} - CC_{i+1/2,j,k} - CV_{i,j,k+1/2} + HCOF_{i,j,k}) \cdot h_{i,j,k}^m + CR_{i,j+1/2,k} \cdot h_{i,j+1,k}^m + \\
 & + CC_{i+1/2,j,k} \cdot h_{i+1,j,k}^m + CV_{i,j,k+1/2} \cdot h_{i,j,k+1}^m = RHS_{i,j,k}
 \end{aligned}
 \tag{1.52}$$

Όπου :

$$\begin{aligned}
 HCOF_{i,j,k} &= P_{i,j,k} - SCI_{i,j,k} / (t_m - t_{m-1}) && (L^2 t^{-1}) \\
 RHS_{i,j,k} &= -Q_{i,j,k} - SCI_{i,j,k} \cdot h_{i,j,k}^{m-1} / (t_m - t_{m-1}) && (L^3 t^{-1}) \\
 SCI_{i,j,k} &= SS_{i,j,k} \cdot \Delta r_j \Delta c_i \Delta v_k && (L^2)
 \end{aligned}$$

Προκύπτει έτσι, ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων που περιλαμβάνει μια εξίσωση για κάθε κελί μεταβλητού φορτίου στον κάνναβο των πεπερασμένων διαφορών. Μπορεί να γραφτεί σε μορφή πίνακα:

$$[A] \{h\} = \{q\} \tag{1.53}$$

Όπου :

$A$  ο πίνακας των συντελεστών του υδραυλικού φορτίου στο αριστερό μέρος των εξισώσεων.

$h$  ένας διανυσματικός πίνακας των τιμών του υδραυλικού φορτίου στο τέλος του χρονικού βήματος  $m$ .

$q$  ένα διάνυσμα των σταθερών όρων για όλους τους κόμβους του δικτύου.

Το σύστημα των γραμμικών εξισώσεων που προκύπτει μπορεί να επιλυθεί με επαναληπτικές διαδικασίες, όπως η προαναφερθείσα.

### **3.3 Περιγραφή λειτουργίας του Processing MODFLOW for Windows (PMWIN)**

Πρόκειται για ένα λογισμικό το οποίο βοηθάει στην επεξεργασία και προετοιμασία δεδομένων για την εισαγωγή τους στο MODFLOW. Είναι ένα πρόγραμμα αρκετά εύχρηστο, το οποίο παρέχει την δυνατότητα συνεργασίας με άλλα προγράμματα, όπως το MODFLOW. Η συνεργασία αυτών των δύο προγραμμάτων πραγματοποιείται στην συγκεκριμένη εργασία.

#### **3.3.1 Εισαγωγή υδροφορέα**

##### **1. Δημιουργία νέου μοντέλου υδροφορέα**

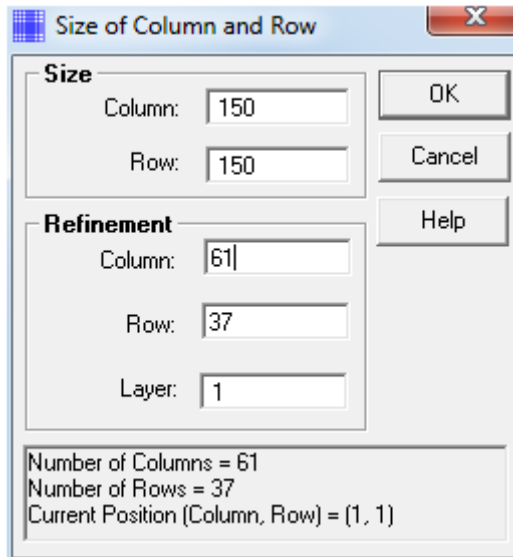
File > New Model

Ορίζεται ένα νέο μοντέλο για την αναπαράσταση του υδροφορέα και δημιουργούνται αυτόματα τα ASCII αρχεία \* .pm5, \* .trn και τα binary \* .upl, \* .pol, \* .ppl .

##### **2. Ορίζονται οι διαστάσεις του υδροφορέα**

Grid > Mesh Size

Με δεδομένες τις διαστάσεις του, ο υδροφορέας αναπαριστάται από ένα κάνναβο (mesh) 37 γραμμών (κατά τον άξονα x), 61 στηλών (κατά τον άξονα y) και 1 επιπέδου (κατακόρυφος άξονας), με διαστάσεις κελιών 150m κατά x και 150m κατά y. Σε αυτές τις διαστάσεις έχουν προστεθεί δύο επιπλέον γραμμές και 2 επιπλέον στήλες οι οποίες αποτελούν τα όρια του υδροφορέα.

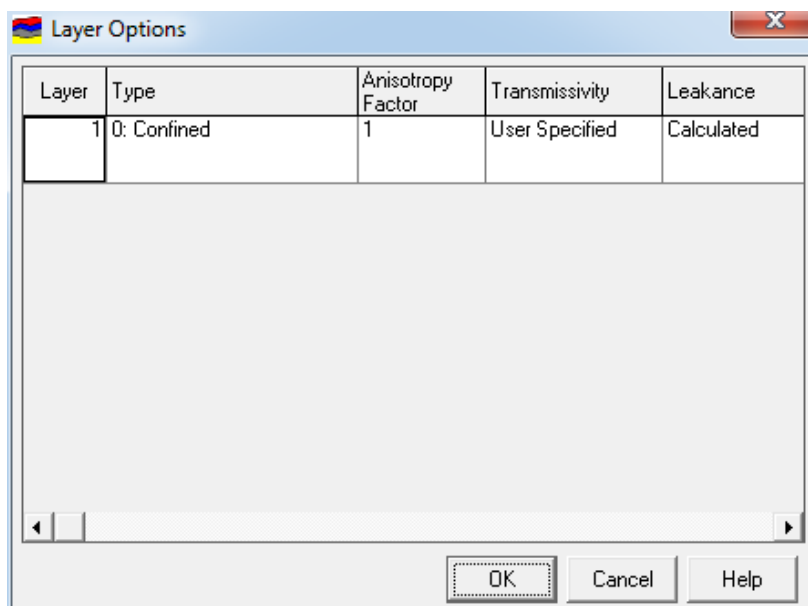


Σχήμα 3.6 : Ορισμός καννάβου

### 3. Καθορισμός είδους υδροφορέα

Grid > Layer Type

Ο υδροφορέας εισάγεται ως περιορισμένος και η μεταφορικότητα ορίζεται ίση με την υδραυλική αγωγιμότητα. Δημιουργείται αυτόματα το ASCII αρχείο \*.1



Σχήμα 3.7 : Είδος υδροφορέα

#### 4. Οριακές συνθήκες

Grid > Boundary Condition > IBOUND

- Κατάντη ο υδροφορέας συνορεύει με τη θάλασσα, άρα υπάρχει όριο σταθερού δυναμικού  $\varphi = 0$ . Στο PMWIN η συνθήκη Dirichlet αναπαρίσταται με την τιμή -1 σε καθένα από τα κελιά της στήλης του ορίου.
- Ανάντη υπάρχει αδιαπέρατο όριο το οποίο αναπαριστάται με την τιμή 0 στα κελιά της στήλης του ορίου.
- Βόρεια υπάρχει αδιαπέρατο όριο το οποίο αναπαριστάται με την τιμή 0 στα κελιά της γραμμής του ορίου.
- Νότια υπάρχει αδιαπέρατο όριο το οποίο αναπαριστάται με την τιμή 0 στα κελιά της γραμμής του ορίου.

Δημιουργούνται τα binary αρχεία \* . ibd και \* . ibz (όριο σταθερού φορτίου, αδιαπέρατο όριο) , \* . wel, \* . 299, \* . wez (πηγάδια τροφοδοσίας).

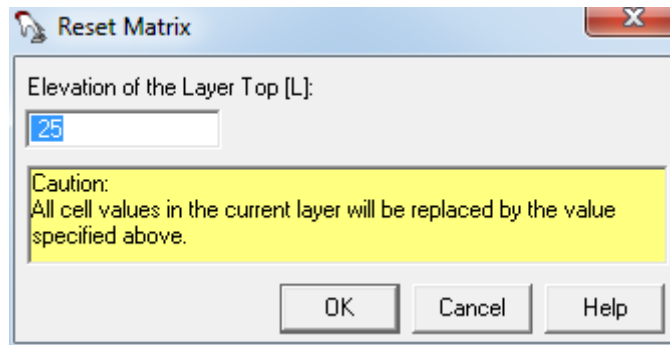
#### 5. Ανώτατο και κατώτατο ύψος υδροφόρου στρώματος

Grid > Top of Layers

Grid > Bottom of Layers

Ως ανώτατο ύψος θεωρούνται τα 25m και ως κατώτατο τα 0m, εφόσον το πάχος του υδροφορέα είναι 25m. Δημιουργούνται τα binary αρχεία \* . top, \* . toz (ανώτατο ύψος) και \* . bot, \* .boz (κατώτατο όριο).



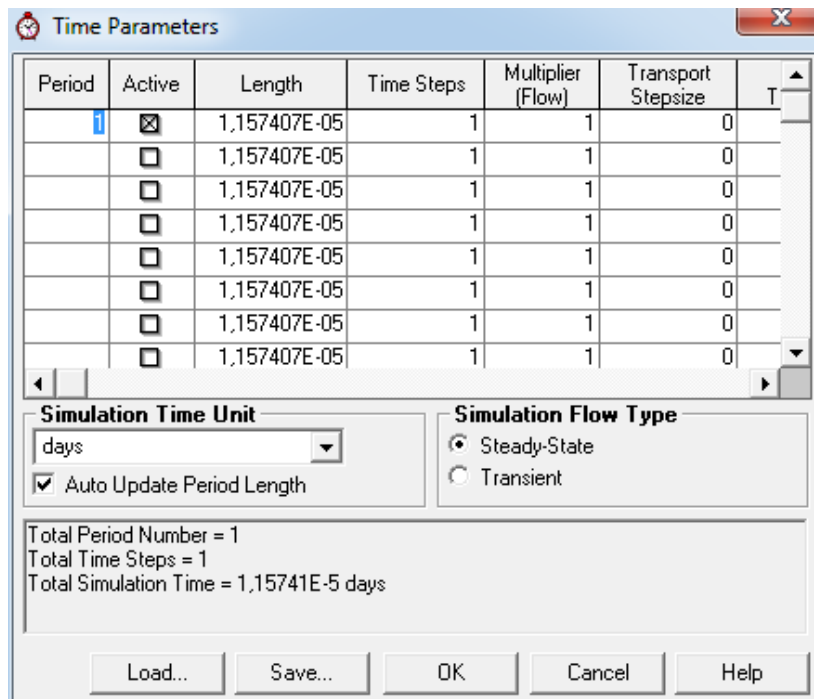


Σχήμα 3.8 : Ανώτατο ύψος υδροφόρου στρώματος

## 6. Χρόνος Προσομοίωσης

Parameters > Time

Μονάδα μέτρησης του χρόνου είναι η ημέρα (day) και ως τύπος ροής ορίζεται η μόνιμη ροή.

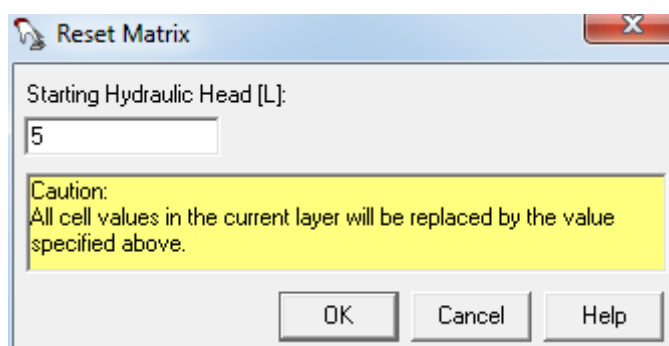


Σχήμα 3.9 : Μόνιμη ροή

## 7. Αρχικές τιμές

Parameters > Initial Hydraulic Heads

Είναι απαραίτητο να οριστούν αρχικές τιμές του δυναμικού σε κάθε κελί του υδροφορέα. Σε όλα τα κελιά τίθεται κάποια τυχαία τιμή, εκτός από την περίπτωση σταθερού δυναμικού ( $\varphi = 0$ ) όπου τίθεται η τιμή 0, η οποία παραμένει σταθερή κατά την διάρκεια των επαναλήψεων στην επίλυση με το MODFLOW. Δημιουργούνται τα binary αρχεία \* .hea και \* .hez .

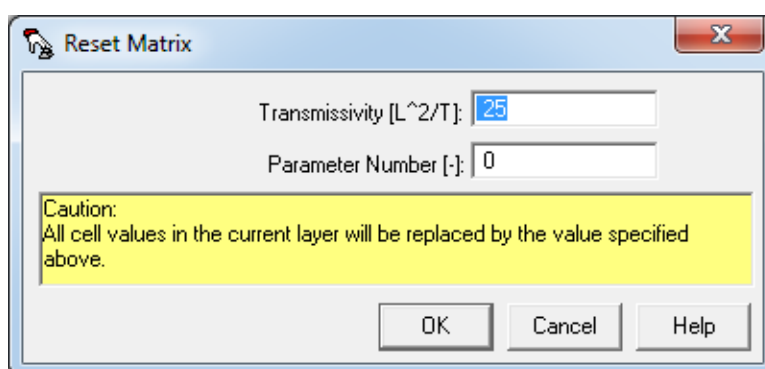


Σχήμα 3.10 : Αρχικές τιμές

## 8.Μεταφορικότητα

Parameters > Transmissivity

Η τιμή της μεταφορικότητας εισάγεται ίση με την υδραυλική αγωγιμότητα. Δημιουργούνται τα binary αρχεία \* .66, \* .htc, \* .htz .



Σχήμα 3.11 : Εισαγωγή μεταφορικότητας

## 9.Εισαγωγή πηγαδιών

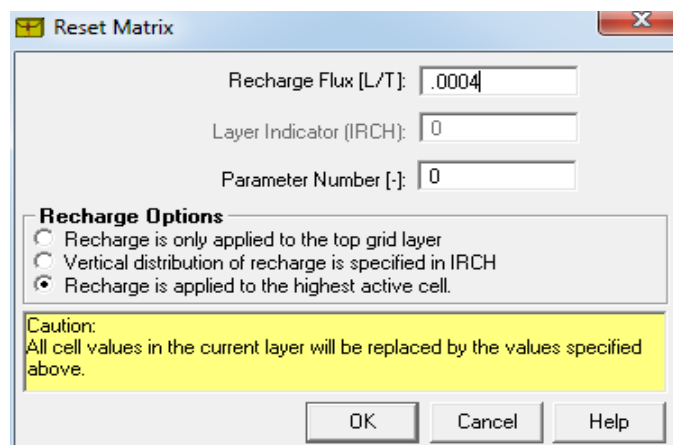
Models > MODFLOW > Well

Τοποθετούνται τα πηγάδια στις συγκεκριμένες θέσεις στις οποίες βρίσκονται μέσω του PMWIN και εκτελείται το MODFLOW για αρχικές τυχαίες τιμές άντλησης. Από αυτή τη διαδικασία δημιουργούνται τα αρχεία (heads.dat). Τέλος ενημερώνονται τα αρχεία \* .299, \* .wel, \* .wez .

## 10. Επιφανειακή τροφοδοσία

Models > MODFLOW > Recharge

Η τροφοδοσία του υδροφορέα μέσω κατείσδυσης εισάγεται στο μοντέλο, τοποθετώντας σε κάθε κελί την αντίστοιχη τιμή. Από αυτή τη διαδικασία δημιουργούνται τα αρχεία \* .295, \* .rch, \* .rci, \* .rhz .



Σχήμα 3.12 : Τροφοδοσία μέσω κατείσδυσης

### 3.3.2 Εκτέλεση MODFLOW

Αφού εισαχθούν τα παραπάνω δεδομένα και δημιουργηθούν τα απαραίτητα αρχεία εισόδου εκτελείται το MODFLOW και στην συνέχεια παράγονται αρχεία δεδομένων και αρχεία αποτελεσμάτων.

Τα αρχεία δεδομένων (input data files) είναι :

Basic Package.....BAS.DAT *Περιλαμβάνει τις αρχικές και τις οριακές συνθήκες (ASCII).*

Block-Centered Package.....BCF.DAT	Flow	Διαστάσεις κελιών και παράμετροι υδροφορέα όπως η μεταφορικότητα και η αποθηκευτικότητα (ASCII).
Output Control.....OC.DAT		
Preconditioned Conjugate Gradient Package...PCG2.DAT	2	
Recharge Package.....RCH.DAT		Επιφανειακή τροφοδοσία μέσω κατείσδυσης (ASCII αρχείο).
Well Package.....WEL.DAT		Παροχές άντλησης και τροφοδοσίας (ASCII αρχείο).

Τα αρχεία αποτελεσμάτων (output files) είναι :

OUTPUT.DAT.....	Πρόκειται για ASCII αρχείο στο οποίο γίνεται λεπτομερής αναφορά στην εκτέλεση του προγράμματος και στην αξιοπιστία των αποτελεσμάτων προσομοίωσης.
HEADS.DAT.....	Binary αρχείο με τα αποτελέσματα της επίλυσης για το δυναμικό.
DDOWN.DAT.....	Binary αρχείο που παρουσιάζει τη διαφορά των αρχικών τιμών δυναμικού από τις τελικές υπολογισμένες τιμές.
BUDGET.DAT.....	Binary αρχείο που περιλαμβάνει την παροχή υπόγειου νερού μεταξύ γειτονικών κελιών, την παροχή άντλησης και τροφοδοσίας μέσω

φρεάτων καθώς και την επιφανειακή τροφοδοσία.

MT3D.FLO..... *Binary αρχείο το οποίο χρησιμοποιείται στην εκτέλεση των προγραμμάτων MT3D ή MT3DMS.*

### **3.4 Συμπεράσματα**

Ο υδροφορέας προσομοιώνεται μέσω του PMWIN το οποίο είναι ένα πρόγραμμα προεπεξεργασίας των δεδομένων εισόδου στο MODFLOW από ένα κάρναβο με κελιά, για καθένα από τα οποία υπολογίζεται μία τιμή του δυναμικού με την χρήση μιας επαναληπτικής διαδικασίας. Για την εύρεση του δυναμικού χρησιμοποιείται το MODFLOW, το οποίο είναι ένα τρισδιάστατο μοντέλο προσομοίωσης των υπόγειων υδροφορέων και μέσω του οποίου επιλύεται η εξίσωση (1.54). Για την εκτέλεση του MODFLOW είναι αναγκαίο να εισαχθούν τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του υδροφορέα, καθώς και οι οριακές και αρχικές συνθήκες και οι υδραυλικές παράμετροι.

Ο υδροφορέας που εξετάζεται στην παρούσα εργασία βρίσκεται στο Βαθύ της Καλύμνου. Βόρεια, νότια και δυτικά έχει αδιαπέρατα όρια, ενώ ανατολικά συνορεύει με τη θάλασσα. Η εξίσωση (1.55) είναι όμοια με αυτή της οριζόντιας ροής για περιορισμένο, ομογενή και ισότροπο υδροφορέα με διαφορετικά μεγέθη όμως, εφόσον αντί για το πιεζομετρικό φορτίο υπολογίζεται το δυναμικό και αντί της μεταφορικότητας υπεισέρχεται η υδραυλική αγωγιμότητα. Γι' αυτό ο υδροφορέας εξετάζεται ως περιορισμένος με μεταφορικότητας ίση με την υδραυλική αγωγιμότητα.

## 4. ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΑΝΤΛΗΣΕΩΝ ΠΑΡΑΚΤΙΩΝ ΥΔΡΟΦΟΡΕΩΝ

### 4.1 Εισαγωγή

Η βελτιστοποίηση έχει ως στόχο την εύρεση της μέγιστης παροχής άντλησης που μπορεί να επιτευχθεί σε μια σειρά φρεάτων, τηρώντας κάποιους περιορισμούς που τίθενται από τον μελετητή όπως η αποφυγή της υφαλμύρωσης τους, μέσω της ελαχιστοποίησης της αντικειμενικής συνάρτησης, οι μεταβλητές απόφασης της οποίας είναι η παροχή άντλησης και η θέση των φρεάτων. Βέβαια στην συγκεκριμένη διπλωματική η θέση των φρεάτων δεν θα αποτελεί μεταβλητή εφόσον οι θέσεις τους θα είναι σταθερές, διότι οι μεταβλητές θέσεις δεν ανήκουν στο αντικείμενο της συγκεκριμένης διπλωματικής. Το παραπάνω πρόβλημα ανήκει στην κατηγορία των μη γραμμικών προβλημάτων βελτιστοποίησης υπό περιορισμούς. Γενικά τα προβλήματα τα οποία συναντώνται είναι τα εξής (Luenberger (1989)):

- Προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού (Linear Programming).  
Σε αυτή την περίπτωση η αντικειμενική συνάρτηση είναι γραμμική, όπως και οι περιορισμοί.
- Προβλήματα βελτιστοποίησης άνευ περιορισμών (Unconstrained Optimization)

Σε αυτού του είδους τα προβλήματα δεν υπάρχουν περιορισμοί (Aoki 1971):

$$\min f(x) \quad (1.56) \quad x \in R^n$$

- Προβλήματα βελτιστοποίησης υπό περιορισμούς (Constrained Optimization)

Στην συγκεκριμένη περίπτωση η αντικειμενική συνάρτηση  $f(x)$  με πίνακα μεταβλητών  $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , ζητείται να ελαχιστοποιηθεί τηρώντας παράλληλα τους περιορισμούς στους οποίους υπόκειται οι οποίοι είναι:

$$\triangleright G_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, m_e \quad \text{περιορισμοί υπό μορφή ισότητας}$$

➤  $Gi(x) \leq 0, i = m_e + 1, \dots, m$  περιορισμοί υπό μορφή ανισότητας

όπου  $m_e$  το πλήθος των περιορισμών υπό μορφή ισότητας

$m$  το συνολικό πλήθος των περιορισμών

Οι ενεργοί περιορισμοί είναι αυτοί οι οποίοι στην ουσία καθορίζουν το αποτέλεσμα της βελτιστοποίησης. Ενεργός είναι ένας περιορισμός ο οποίος είναι υπό μορφή ανισότητας  $Gi(x) \leq 0$ , στο σημείο  $x$  για το οποίο ισχύει  $Gi(x) = 0$ . Ανενεργός είναι όταν  $Gi(x) < 0$  (Luenberger (1989)).

➤ Οι μεταβλητές  $x_i$  παίρνουν τιμές εντός του διαστήματος  $[x_l \ x_u]$ .

Τα προβλήματα επιπλέον διακρίνονται με βάση το μέγεθος τους (Luenberger 1989):

- Προβλήματα «μικρής κλίμακας», περιλαμβάνουν συνολικά μέχρι 5 μεταβλητές απόφασης και περιορισμούς και μπορούν να επιλυθούν χωρίς τη χρήση υπολογιστή.
- Προβλήματα «μεσαίας κλίμακας», περιλαμβάνουν 5 έως 100 μεταβλητές. Η επίλυσή τους γίνεται μέσω της εφαρμογής αλγορίθμων οι οποίοι έπειτα από μία επαναληπτική διαδικασία συγκλίνουν στη βέλτιστη λύση. Γι' αυτό το λόγο η χρήση υπολογιστή είναι απαραίτητη.
- Προβλήματα «μεγάλης κλίμακας», περιλαμβάνουν χιλιάδες μεταβλητές και περιορισμούς.

Το πρόβλημα του υπολογισμού της βέλτιστης άντλησης ενός συνόλου φρεάτων με συγκεκριμένες και σταθερές θέσεις είναι ένα πρόβλημα το οποίο περιλαμβάνει 5 έως 100 μεταβλητές και η επίλυση του προϋποθέτει την χρήση υπολογιστή και την εφαρμογή αλγορίθμων, επομένως ανήκει στα προβλήματα «μεσαίας κλίμακας». Το Matlab διαθέτει διάφορους τρόπους με τους οποίους μπορεί να λυθεί ένα πρόβλημα τέτοιου είδους και αυτοί είναι με:

- **Γραμμικό προγραμματισμό**  
Linear Programming (L.P.)

- **Τετραγωνικό προγραμματισμό**  
Quadratic Programming (Q.P.)
- **Μη γραμμικό προγραμματισμό**  
Nonlinear Programming (N.P.)

Η περίπτωση του γραμμικού προγραμματισμού αναφέρεται σε γραμμική αντικειμενική συνάρτηση με γραμμικούς περιορισμούς, αυτή είναι και η πιο απλή περίπτωση. Όσο αφορά τον τετραγωνικό προγραμματισμό όπου είναι και η κατηγορία στην οποία ανήκει ο αλγόριθμος S.Q.P., η κατηγορία αυτή αναφέρεται σε περιπτώσεις μη γραμμικών αντικειμενικών συναρτήσεων οι οποίες όμως υπόκεινται σε γραμμικούς περιορισμούς. Ο μη γραμμικός προγραμματισμός αναφέρεται σε μη γραμμική αντικειμενική συνάρτηση καθώς και σε μη γραμμικούς περιορισμούς. Για την επίλυση ενός τέτοιου προβλήματος χρησιμοποιείται μια επαναληπτική διαδικασία κατά την οποία τα αποτελέσματα κάθε επανάληψης καθορίζουν την κατεύθυνση αναζήτησης της βέλτιστης λύσης εντός του πεδίου ορισμού. Το μη γραμμικό πρόβλημα βελτιστοποίησης «απλοποιείται», σε υποπροβλήματα τα οποία επιλύονται με γραμμικό προγραμματισμό ή με τετραγωνικό προγραμματισμό ή με μεθοδολογία που αναφέρεται σε βελτιστοποίηση άνευ περιορισμών.

#### **4.2 Βελτιστοποίηση αντλήσεων σε παράκτιο υπόγειο υδροφορέα με δεδομένες θέσεις φρεάτων**

Αρχικά συντάσσεται ένα πρόγραμμα βελτιστοποίησης που υπολογίζει τη βέλτιστη άντληση ενός ή περισσότερων φρεάτων με δεδομένες θέσεις. Η αντικειμενική συνάρτηση ορίζεται ως το αρνητικό άθροισμα των αντλήσεων.

$\min f(Q)$  , όπου  $f(Q) = - (Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n)$ ,  $n$  είναι ο αριθμός των φρεάτων

Όπου :  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$  η παροχή άντλησης κάθε φρεάτος.

Οι περιορισμοί εισέρχονται στο πρόβλημα μέσω μιας συνάρτησης που δημιουργείται από το χρήστη(constraints.m). Χρησιμοποιείται η συνάρτηση fmincon η οποία εφαρμόζει τους αλγόριθμους S.Q.P. και Interior Point. Το πρόγραμμα βελτιστοποίησης συντάσσεται σε περιβάλλον MATLAB.



#### 4.2.1 Ορισμός περιορισμών

Οι περιορισμοί ορίζονται προκειμένου να αντλείται η μέγιστη ποσότητα γλυκού νερού αποφεύγοντας την υφαλμύρωση. Για να επιτευχθεί αυτός ο στόχος ορίζονται κάποιοι περιορισμοί οι οποίοι είναι:

- στο δυναμικό στη θέση των φρεάτων
- στην απόσταση του ποδιού της αλάτινης σφήνας από την ακτή

Οι ποσότητες αυτές προσδιορίζονται μέσω κάποιων προγραμμάτων που συντάσσονται στο MATLAB.

##### 4.2.1.1 Περιορισμός στο δυναμικό

Το δυναμικό στη θέση κάθε πηγαδιού πρέπει να είναι μεγαλύτερο ή ίσο του 0 :

$$\varphi_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, k \quad \text{όπου } k \text{ ο αριθμός των φρεάτων} \quad (1.57)$$

$$\text{Υφάλμυρη ζώνη} \quad : \quad \varphi \geq 0 \Rightarrow \frac{(1+\Delta S)}{2\Delta S} \cdot (h_f - d)^2 \geq 0 \Rightarrow h_f \geq d \quad (1.58)$$

Ζώνη γλυκού νερού :

$$\varphi \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{2 \cdot [h_f^2 - (1+\Delta S) \cdot d^2]} \geq 0 \Rightarrow h_f^2 \geq (1+\Delta S) \cdot d^2 \Rightarrow h_f \geq 1.0124 \cdot d \quad (1.59)$$

Με τις ανισότητες (1.58), (1.59) εξασφαλίζεται ότι η ελεύθερη επιφάνεια του υδροφορέα στις θέσεις των πηγαδιών θα βρίσκεται υψηλότερα από τη στάθμη της θάλασσας.

Στο πόδι της αλάτινης σφήνας το δυναμικό για το φρεάτιο εξεταζόμενο υδροφορέα υπολογίζεται από την (1.9) και είναι  $\varphi=8.0078$ . Η στάθμη της ελεύθερης επιφάνειας του υδροφορέα στο συγκεκριμένο σημείο είναι 0.625m (1.7) πιο ψηλά από τη στάθμη της θάλασσας. Μικρότερες τιμές δυναμικού συναντώνται στην υφάλμυρη ζώνη και στη ζώνη γλυκού νερού μόνο όταν εκεί υπάρχει πηγάδι.

#### 4.2.1.2 Περιορισμός στη θέση του ποδιού της αλάτινης σφήνας

Ο δεύτερος περιορισμός ελέγχει τη θέση του ποδιού της αλάτινης σφήνας κατά μήκος της γραμμής του καννάβου που διέρχεται από το κελί του φρέατος. Το πόδι της αλάτινης σφήνας δεν πρέπει να πλησιάζει τα πηγάδια. Γι' αυτό το λόγο πρέπει:

$$x_{scti} \leq x_{wi}, i = 1, 2, \dots, k \text{ όπου } k \text{ ο αριθμός των φρεάτων}$$

(5.9)

Όπου :  $x_{scti}$  : απόσταση από την ακτή του σημείου που έχει δυναμικό  $\varphi = 8.1$

$x_w$  : η απόσταση του πηγαδιού από την ακτή

$$\varphi = s_c \cdot \varphi_G = 1.012 \cdot 8.0078 = 8.1$$

$s_c$  : συντελεστής ασφάλειας

### 4.3 Μεθοδολογίες που εφαρμόζονται στην παρούσα εργασία

Το πρόβλημα βελτιστοποίησης που παρουσιάζεται και εξετάζεται στην παρούσα εργασία είναι η εύρεση της βέλτιστης παροχής άντλησης σε δεδομένες θέσεις φρεάτων τηρώντας κάποιους περιορισμούς όπως η αποφυγή της υφαλμύρωσης.

Οι μέθοδοι που εφαρμόζονται και μελετούνται είναι δύο :

- Sequential Quadratic Programming (S.Q.P.) Ακολουθιακός Τετραγωνικός Προγραμματισμός.
- Η μέθοδος του Εσωτερικού Σημείου (Interior Point).

Για να εφαρμοσθούν και να συγκριθούν οι παραπάνω μεθοδολογίες συντάσσεται ένα πρόγραμμα βελτιστοποίησης στο πρόγραμμα Matlab. Αρχικά ορίζονται οι μεταβλητές απόφασης του προβλήματος οι οποίες είναι οι : παροχές άντλησης των πηγαδιών , το πεδίο ορισμού και οι αρχικές τιμές τους. Συντάσσονται η αντικειμενική συνάρτηση και οι περιορισμοί. Στο πρόγραμμα βελτιστοποίησης που εφαρμόζει τη μέθοδο S.Q.P και Interior point, ο ορισμός των περιορισμών γίνεται μέσω της

σύνταξης μιας ξεχωριστής συνάρτησης από την αντικειμενική, η τήρηση της οποίας ελέγχεται για τις τιμές των μεταβλητών.

Η μεθοδολογία υπολογισμού της βέλτιστης λύσης διαφέρει μεταξύ των δύο εξεταζόμενων κατηγοριών. Η μέθοδος S.Q.P. χρησιμοποιεί το αυθεντικό πρόβλημα το οποίο επιλύεται μέσω τετραγωνικού προγραμματισμού, επιπλέον η μέθοδος S.Q.P. απαιτεί τον υπολογισμό των παραγώγων τόσο της αντικειμενικής συνάρτησης όσο και των περιορισμών, ως προς τις μεταβλητές απόφασης (Aoki (1971), Luenberger (1989)). Ενώ η Interior point χρησιμοποιεί ένα κατά προσέγγιση πρόβλημα το οποίο είναι μια ακολουθία από ισότητες περιορισμένων προβλημάτων και είναι πιο εύκολο να λυθούν από την αυθεντική ανισότητα του περιορισμένου προβλήματος. Επιπλέον χρησιμοποιεί δύο ήδη βημάτων, η εκάστοτε χρήση των οποίων αναλύεται στο υποκεφάλαιο Μέθοδος Interior Point.

Όσο αφορά την αξιοπιστία και την ταχύτητα σύγκλισης οι δύο αλγόριθμοι μοιάζουν αρκετά. Ένα βασικό μειονέκτημα και των δύο μεθόδων είναι ο κίνδυνος εγκλωβισμού της λύσης σε τοπικό ελάχιστο (Optimization Toolbox (2015)). Επιπλέον, η υπέρβαση του ορισμένου από το μελετητή αριθμού επαναλήψεων, η υπέρβαση των ορισμένων από των μελετητή αξιολογήσεων της συνάρτησης, καθώς και ο ορισμός μικρής διαφοράς αλλαγής της αντικειμενικής συνάρτησης, διακόπτουν απότομα την εκτέλεση του προγράμματος, οδηγώντας πολλές φορές σε λάθος αποτελέσματα. Η ταχύτητα σύγκλισης είναι ικανοποιητική και στους δύο αλγορίθμους.

Στα κεφάλαια και στις παραγράφους που ακολουθούν αναλύονται οι δύο μέθοδοι βελτιστοποίησης. Ως περιβάλλον εργασίας επιλέγεται το MATLAB.

#### **4.4 Μέθοδος S.Q.P.**

Στο παρόν υποκεφάλαιο πραγματοποιείται αρχικά μια παράθεση των τρόπων επίλυσης των προβλημάτων βελτιστοποίησης που παρέχονται από το Matlab. Αναλύονται οι τρόποι επίλυσης των προβλημάτων που περιέχουν βελτιστοποίηση με περιορισμούς και τέλος αναλύεται η μέθοδος S.Q.P. και πιο συγκεκριμένα ο τρόπος με τον οποίο λειτουργεί καθώς και ο τρόπος εφαρμογής της μεθόδου.

#### 4.4.1 Ανάλυση του προβλήματος βελτιστοποίησης υπό περιορισμούς

Το πρόβλημα της βελτιστοποίησης της άντλησης με παράλληλη αποφυγή της υφαλμύρωσης, το οποίο είναι το πρόβλημα που μελετάται στην συγκεκριμένη διπλωματική, ανήκει στην κατηγορία βελτιστοποίησης με περιορισμούς. Τα προβλήματα βελτιστοποίησης με περιορισμούς μπορούν να λυθούν με την εφαρμογή του θεωρήματος Lagrange (Aoki (1971)), όπου η εξίσωση Lagrange συνθέτεται από την αντικειμενική συνάρτηση και τους περιορισμούς, και η εξίσωση Lagrange είναι αυτή η οποία πρέπει να ελαχιστοποιηθεί. Οι περιορισμοί πρέπει υποχρεωτικά να γραμμικοποιηθούν διότι είναι προϋπόθεση για την εφαρμογή του τετραγωνικού προγραμματισμού, αλλά και το θεώρημα Lagrange λειτουργεί με προϋπόθεση την ύπαρξη μόνο περιορισμών ισότητας:

$$\min f(x) \quad (1.56)$$

$$hi(x) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, me \quad \text{όπου } me \text{ ο αριθμός των περιορισμών ισότητας}$$

Η συνάρτηση Lagrange : 
$$L(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{me} \lambda_i \cdot hi(x) \quad (1.60)$$

Η βέλτιστη τιμή  $x^*$  αντιστοιχεί στην ελαχιστοποίηση της  $L(x)$  που εξασφαλίζεται για

$$\nabla L(x^*) = 0 \Rightarrow \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{me} \lambda_i \cdot \nabla hi(x^*) = 0 \quad \text{όπου} \quad \sum_{i=1}^{me} \lambda_i \cdot hi(x^*) = 0 \quad (1.61)$$

Η μετατροπή των περιορισμών ανισότητας σε περιορισμούς ισότητας επιτυγχάνεται με τη διάκριση των περιορισμών σε 2 κατηγορίες, στους ενεργούς και στους μη ενεργούς. Οι ενεργοί μετατρέπονται σε περιορισμούς ισότητας στην περίπτωση της βέλτιστης λύσης, ενώ οι ανενεργοί αγνοούνται.

Έστω το πρόβλημα :

$$\min f(x) \quad (1.56)$$

$$gi(x) \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m_m \quad \text{όπου } m_m \text{ ο αριθμός των περιορισμών ανισότητας}$$

η εξίσωση Lagrange γίνεται :

$$L(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{m_m} \lambda_i \cdot gi(x) \quad (1.62)$$

Έστω  $A$  το σύνολο που περιλαμβάνει όλους τους ενεργούς περιορισμούς  $g_i(x^*)=0$ ,  $i \in A$ , τότε η εξίσωση (1.62) μετασχηματίζεται :

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i \in A} \lambda_i \cdot \nabla g_i(x^*) = 0 \quad (1.63)$$

$$g_i(x) = 0, \quad i \in A$$

$$g_i(x) < 0, \quad i \in A$$

$$\lambda_i \geq 0, \quad i \in A$$

$$\lambda_i = 0, \quad i \in A$$

Οι εξισώσεις (1.63) αποτελούν τις εξισώσεις Kuhn-Tacker για μη γραμμικούς περιορισμούς υπό μορφή ανισότητας, για την επίλυσή τους χρησιμοποιείται η μέθοδος S.Q.P. Για τον υπολογισμό της βέλτιστης τιμής εκτελείται ένα πλήθος επαναλήψεων, αφού τοποθετηθούν οι αρχικές τιμές των μεταβλητών. Τα βήματα που πραγματοποιούνται κατά την εκτέλεση των επαναλήψεων φαίνονται παρακάτω (Aoki (1971)) :

1° : Δίδονται αρχικές τιμές ( $x_0$ ) στις μεταβλητές απόφασης

2° : Καθορίζεται η κατεύθυνση διερεύνησης ( $d_k$ ) για τον εντοπισμό της βέλτιστης λύσης εντός του πεδίου ορισμού των μεταβλητών.

3° : Καθορίζεται το βήμα ( $\alpha$ ) διερεύνησης

$$x_{k+1} = x_k + \alpha \cdot d_k, \quad k = 0, 1, \dots \text{ ο αριθμός των επαναλήψεων.} \quad (1.64)$$

Το εύρος του πεδίου ορισμού και ο αριθμός των περιορισμών παίζουν πολύ σημαντικό ρόλο στον χρόνο που χρειάζεται για να ολοκληρωθεί η εκτέλεση του προγράμματος, αλλά και στον συνολικό αριθμό των επαναλήψεων που θα πραγματοποιηθούν. Όπως είναι λογικό η γρήγορη σύγκλιση στα βέλτιστα αποτελέσματα επιτυγχάνεται πιο εύκολα όταν υπάρχει μεγάλος αριθμός περιορισμών αλλά και το πεδίο ορισμού είναι περιορισμένο. Για την εφαρμογή της S.Q.P. είναι απαραίτητη προϋπόθεση η αντικειμενική συνάρτηση και η πρώτη της παράγωγος να είναι συνεχείς.

#### 4.4.2 Περιγραφή της διαδικασίας που ακολουθεί η μέθοδος S.Q.P.

Η S.Q.P είναι μια επαναληπτική διαδικασία οι υπολογισμοί της οποίας αναφέρονται στην εξίσωση Lagrange και οι εργασίες που εκτελούνται είναι οι εξής:

- Υπολογίζεται ο πίνακας Hessian της εξίσωσης Lagrange εφαρμόζοντας την Quasi-Newton μέθοδο (Luenberger (1989)).
- Ο πίνακας Hessian χρησιμοποιείται στον ορισμό ενός τετραγωνικού υποπροβλήματος (Q.P.) το οποίο βασίζεται στην εκτίμηση της συνάρτησης Lagrange:  $L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot g_i(x)$  (1.65) όπου:  $g(x)$  γραμμικοί περιορισμοί ισότητας (Optimization Toolbox 2015). Η επίλυση του υποπροβλήματος καθορίζει την κατεύθυνση διερεύνησης για τον εντοπισμό της βέλτιστης λύσης.
- Εκτέλεση γραμμικής αναζήτησης (Line Search) και επίλυση της συνάρτησης αξιολόγησης (merit function) κατά τη διαδικασία εύρεσης της βέλτιστης λύσης.

##### 4.4.2.1 Υπολογισμός του πίνακα Hessian (H)

Σε κάθε επανάληψη, υπολογίζεται ο συμμετρικός πίνακας H που προσομοιώνει το γνήσια θετικό πίνακα Hessian της συνάρτησης Lagrange. Έχει διαστάσεις  $n \times n$ , όπου n ο αριθμός των μεταβλητών. Υπολογίζονται οι πολλαπλασιαστές Lagrange. Ως  $H_0$  μπορεί να θεωρηθεί οποιοσδήποτε συμμετρικός πίνακας με θετικά στοιχεία όπως ο Ιακωβιανός I. Εφαρμόζεται η μέθοδος BFGS (Fletcher (1987), Luenberger (1989), Optimization Toolbox (2015)) σύμφωνα με την οποία :

$$H_{k+1} = H_k + \frac{q_k \cdot q_k^T}{q_k^T \cdot s_k} - \frac{H_k^T \cdot H_k}{S_k^T \cdot H_k \cdot S_k} \quad (1.66)$$

όπου  $k$  : ο αριθμός των επαναλήψεων

$$s_k = x_{k+1} - x_k$$

$$q_k = \nabla f(x_{k+1}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot \nabla g_i(x_{k+1}) - \left( \nabla f(x_k) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot \nabla g_i(x_k) \right)$$

#### 4.4.2.2 Επίλυση υποπροβλήματος Τετραγωνικού Προγραμματισμού (Q.P.)

Ένα υποπρόβλημα Q.P. επιλύεται κάθε φορά σε κάθε επανάληψη της μεθόδου S.Q.P.. Γενικά ως προβλήματα τετραγωνικού προγραμματισμού θεωρούνται αυτά στα οποία υπάρχει μια τετραγωνική αντικειμενική συνάρτηση με γραμμικούς περιορισμούς με την μορφή ισότητας. Πολλές φορές οι περιορισμοί έχουν την μορφή ανισότητας και μετατρέπονται σε ισότητες μέσω των μεθόδων Active Set (Gill et al. (1984), Fletcher (1987), Luenberger (1989)).

$$\text{Ελαχιστοποίηση : } q(d) = \frac{1}{2}d^T H_k d + c^T d \quad (1.67)$$

Περιορισμοί υπό μορφή ισότητας και ανισότητας:

$$A_i d = b_i \quad i = 1, \dots, m_e$$

$$A_i d \leq b_i \quad i = m_e + 1, \dots, m$$

Ο πίνακας  $A$  έχει διαστάσεις  $m \times n$ , όπου  $m$  το σύνολο των περιορισμών και  $n$  το πλήθος των μεταβλητών.

Ο πίνακας  $d$  είναι διαστάσεων  $n \times 1$  και εκφράζει την κατεύθυνση έρευνας για τον εντοπισμό της βέλτιστης λύσης κάθε μεταβλητής σε κάθε επανάληψη της Q.P. Ο τελικός πίνακας  $d$ , που αντιστοιχεί στην ελαχιστοποίηση της  $q(d)$  αποτελεί τον υπολογισμένο πίνακα της συγκεκριμένης επανάληψης S.Q.P., ο οποίος χρησιμοποιείται στην επόμενη επανάληψη (Optimization Toolbox (2015)).

#### 4.4.2.3 Γραμμική αναζήτηση (Line Search) και συνάρτηση αξιολόγησης (Merit Function)

Ως αποτέλεσμα από την επίλυση του υποπροβλήματος Q.P. προκύπτει ο πίνακας  $d$ , ο οποίος είναι μονοδιάστατος και χρησιμοποιείται για την διαμόρφωση της επόμενης επανάληψης της μεθόδου S.Q.P..

$$x_{k+1} = x_k + \alpha \cdot d_k \quad (1.68)$$

όπου:  $\alpha$  είναι το βήμα διερεύνησης, το οποίο επιλέγεται με τέτοιο τρόπο ώστε να ελαχιστοποιεί τη συνάρτηση αξιολόγησης (Optimization Toolbox 2015) :

$$\Psi(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{me} r_i \cdot g_i(x) + \sum_{i=me+1}^m r_i \cdot \max\{0, g_i(x)\} \quad (1.69)$$

όπου :  $r_i$  παράμετρος ποινή  $r_i = (r_{k+1})_i = \max\left\{\lambda_i, \frac{1}{2} \cdot ((r_k)_i + \lambda_i)\right\}$

Ως αρχική τιμή του  $r_i$  ορίζεται  $r_i = \frac{\|\nabla f(x)\|}{\|\nabla g_i(x)\|}$ .

Η συνάρτηση αξιολόγησης (Luenberger (1989)) στην ουσία είναι ένας δείκτης ο οποίος δείχνει την σύγκλιση του ζεύγους  $(x, \lambda)$ , (όπου:  $x$  η μεταβλητή απόφασης και  $\lambda$  ο πολλαπλασιαστής) στην βέλτιστη λύση. Ο μόνος σκοπός της συνάρτησης αυτής είναι ο έλεγχος της προόδου του αλγόριθμου βελτιστοποίησης, γι' αυτό το λόγο όταν ο αλγόριθμος φτάσει στην βέλτιστη λύση αυτή μηδενίζεται.

#### 4.4.3 Εφαρμογή της μεθόδου S.Q.P.

Τα προγράμματα βελτιστοποίησης που συντάσσονται σε προγραμματιστικά περιβάλλοντα εφαρμόζουν την μέθοδο S.Q.P. για τον υπολογισμό της βέλτιστης άντλησης συγκεκριμένου αριθμού φρεάτων. Παρακάτω παραθέτονται οι υπολογισμοί οι οποίοι εκτελούνται μέσω της συνάρτησης `fmincon` του Matlab.

$$x = f \min con(@ objfun, x_0, A, b, A_{eq}, b_{eq}, lb, ub, @ confun, options) \quad (1.70)$$

Όπου:

$x$  : μονοδιάστατος πίνακας των ζητούμενων βέλτιστων τιμών όλων των μεταβλητών

`objfun` : αρχείο M.file της αντικειμενικής συνάρτησης

$x_0$  : μονοδιάστατος πίνακας αρχικών τιμών των μεταβλητών του προβλήματος

$A, b$  : πίνακες γραμμικών περιορισμών οι οποίοι εκφράζονται υπό



μορφή ανισότητας  $A \cdot x \leq b$ , όπου  $x$  πίνακας μεταβλητών.

$Aeq, beq$  : πίνακες γραμμικών περιορισμών οι οποίοι εκφράζονται μέσω της ισότητας  $Aeq \cdot x = beq$ .

$lb$  : πίνακας με το κατώτατο όριο τιμών των μεταβλητών του

$ub$  : πίνακας με το ανώτατο όριο τιμών των μεταβλητών του πίνακα  $x$ . Μαζί με τον πίνακα  $lb$  αποτελούν το πεδίο ορισμού των μεταβλητών.

confun: αρχείο M.file για τον ορισμό μη γραμμικών περιορισμών. Οι μη γραμμικοί περιορισμοί, δεν μπορούν να περιγραφούν από τους παραπάνω πίνακες  $A, b, Aeq, beq$ , είναι απαραίτητη λοιπόν η δημιουργία της κατάλληλης συνάρτησης μέσω ενός M.file.

options: κριτήρια εκτέλεσης και ολοκλήρωσης του προγράμματος βελτιστοποίησης.

#### 4.4.4 Παράμετροι εκτέλεσης και τερματισμού του προγράμματος

Είναι αναγκαίο κατά την σύνταξη του προγράμματος να καθοριστούν οι τιμές των παραμέτρων που έχουν σχέση και με τη διαδικασία εκτέλεσης και με τη σύγκλιση στο τελικό αποτέλεσμα.

Ανοχή αντικειμενικής συνάρτησης : Tolfun = 0.1

Αναφέρεται στο κριτήριο κλεισίματος που σχετίζεται με τη διαφορά μεταξύ διαδοχικά υπολογισμένων τιμών της αντικειμενικής συνάρτησης. Επιτυχής σύγκλιση επιτυγχάνεται όταν η διαφορά αυτή γίνει μικρότερη από την καθορισμένη τιμή Tolfun. Η τιμή που επιλέγεται για την Tolfun εξαρτάται από την τάξη μεγέθους της αντικειμενικής συνάρτησης.

Ανοχή της τιμής της/των μεταβλητής/τών : TolX = 0.1

Είναι κριτήριο αντίστοιχο με το παραπάνω. Αναφέρεται στη διαφορά των διαδοχικά υπολογισμένων τιμών των μεταβλητών. Επιτυχής σύγκλιση επιτυγχάνεται όταν η διαφορά αυτή γίνει μικρότερη από την καθορισμένη τιμή TolX.

Μέγιστος αριθμός επαναλήψεων : MaxIter = 700

Κάθε επανάληψη περιλαμβάνει υπολογισμό των μερικών παραγώγων επίλυση του προβλήματος Q.P. και καθορισμό του βήματος διερεύνησης. Όταν ο εκτελούμενος αριθμός επαναλήψεων S.Q.P. υπερβεί τον μέγιστο αριθμό επαναλήψεων, το πρόγραμμα τερματίζεται.

Μέγιστος αριθμός αξιολογήσεων της αντικειμενικής συνάρτησης :

MaxFunEvals = 100 \* number of variables

Όταν ο αριθμός αξιολογήσεων της αντικειμενικής συνάρτησης υπερβεί τον μέγιστο αριθμό αξιολογήσεων που έχει τεθεί από αυτό το κριτήριο ο αλγόριθμος τερματίζεται. Ως προκαθορισμένη τιμή έχει οριστεί 100 φορές επί τον αριθμό των μεταβλητών του προβλήματος.

Μέγιστη διαφορά των τιμών των μεταβλητών κατά τον υπολογισμό των μερικών παραγώγων : DiffMaxChange = 5

Ο υπολογισμός των μερικών παραγώγων γίνεται με τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών :

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{x_i} \cong \frac{f(x_i) - f(x_i - \Delta x)}{\Delta x} \quad (1.71)$$

όπου  $x_i$  κάθε μία από τις μεταβλητές του προβλήματος βελτιστοποίησης.

Το κριτήριο αυτό δεν επιτρέπει η διαφορά  $\Delta x$  της τιμής κάθε μεταβλητής μεταξύ δύο διαδοχικών επαναλήψεων να είναι μεγαλύτερη της προκαθορισμένης .

Ελάχιστη διαφορά των τιμών των μεταβλητών κατά τον υπολογισμό των μερικών παραγώγων : DiffMinChange = 0.07

Το κριτήριο αυτό δεν επιτρέπει η διαφορά  $\Delta x$  της τιμής κάθε μεταβλητής μεταξύ δύο διαδοχικών επαναλήψεων να είναι μικρότερη της προκαθορισμένης . Το  $\Delta x$  της σχέσης (1.71) παίρνει τιμές μεταξύ :

$$\text{DiffMinChange} < \Delta x < \text{DiffMaxChange}$$

#### 4.4.5 Επιλογές του αλγόριθμου S.Q.P.

- ObjectiveLimit-Είναι μια ανοχή η οποία είναι κλιμακωτή. Αν η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης φτάσει κάτω από το ObjectiveLimit και η επανάληψη είναι εφικτή, οι επαναλήψεις σταματούν, εφόσον το πρόβλημα είναι πιθανώς απεριοριστο. Η τιμή προεπιλογής είναι  $1e20$ .
- ScaleProblem- 'obj-and-constr' αναγκάζει τον αλγόριθμο να κανονικοποιήσει όλους τους περιορισμούς και την αντικειμενική συνάρτηση. Η απενεργοποίηση του επιτυγχάνεται θέτοντας ως προεπιλογή 'none'.

#### 4.4.6 Αποτελέσματα

Τα αποτελέσματα που προκύπτουν από την ολοκλήρωση της βελτιστοποίησης είναι τα ακόλουθα:

- η βέλτιστη τιμή των παραμέτρων
- η αντίστοιχη βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης
- η τιμή της παραμέτρου exitflag που ενημερώνει για το τέλος των επαναλήψεων :
  - τιμή μεγαλύτερη του 0 εκφράζει τη σύγκλιση των επαναλήψεων στα αποτελέσματα που εμφανίζονται στην οθόνη
  - τιμή ίση με 0 εκφράζει τον τερματισμό των επαναλήψεων εξαιτίας της υπέρβασης του μέγιστου αριθμού επαναλήψεων (MaxIter) ή του μέγιστου αριθμού υπολογισμών της αντικειμενικής συνάρτησης (MaxFunEvals)
  - τιμή μικρότερη του 0 εκφράζει την αδυναμία σύγκλισης
- αριθμός των επαναλήψεων S.Q.P.
- αριθμός υπολογισμών της αντικειμενικής συνάρτησης
- ο αλγόριθμος που χρησιμοποιήθηκε

#### 4.5 Μέθοδος Interior point

Η Interior point προσέγγιση στην περιορισμένη ελαχιστοποίηση είναι να λυθεί μια ακολουθία από προβλήματα ελαχιστοποίησης. Το αυθεντικό πρόβλημα είναι (Optimization Toolbox (2015)):

$$\min f(x) \text{ όπου } h(x)=0 \text{ και } g(x)\leq 0 \quad (1.56)$$

Για κάθε  $\mu > 0$ , το κατά προσέγγιση πρόβλημα είναι (Optimization Toolbox (2015))

:

$$\min_{x,s} f_{\mu}(x,s) = \min_{x,s} f(x) - \mu \cdot \sum \ln(si), \text{ όπου } h(x)=0 \text{ και } g(x)+s=0 \quad (1.72)$$

Υπάρχουν τόσες μεταβλητές  $si$  όσες οι περιοριστικές ανισότητες  $g$ . Τα  $si$  είναι περιορισμένα να είναι θετικά για να κρατούν το  $\ln(si)$  δεσμευμένο. Όσο το  $\mu$  πλησιάζει το 0, το ελάχιστο της  $f_{\mu}$  πρέπει να πλησιάζει το ελάχιστο της  $f$ . Ο προστιθέμενος λογαριθμικός όρος ονομάζεται συνάρτηση φραγμού.

Το κατά προσέγγιση πρόβλημα (εξίσωση (1.72)) είναι μια ακολουθία από ισότητες περιορισμένων προβλημάτων. Αυτές είναι πιο εύκολο να λυθούν από την αυθεντική ανισότητα του περιορισμένου προβλήματος (εξίσωση (1.56)). Για να λυθεί το κατά προσέγγιση πρόβλημα ο αλγόριθμος χρησιμοποιεί έναν από τους δύο βασικούς τύπους βημάτων σε κάθε επανάληψη:

- Ένα άμεσο βήμα σε  $(x,s)$ . Σε αυτό το βήμα γίνεται μια προσπάθεια να λυθούν οι εξισώσεις  $(\nabla_x[L(x,\lambda)]=0, \lambda_{g,i} \cdot gi(x)=0 \forall i)$  για το κατά προσέγγιση πρόβλημα μέσω μιας γραμμικής προσέγγισης. Αυτό επίσης ονομάζεται Νευτώνειο βήμα (Optimization Toolbox 2015).
- Ένα CG (συζυγής βαθμίδα) βήμα, το οποίο χρησιμοποιεί μια περιοχή εμπιστοσύνης.

Από προεπιλογή ο αλγόριθμος πρώτα προσπαθεί να πάρει ένα άμεσο βήμα. Αν δεν μπορεί προσπαθεί να πάρει ένα CG βήμα. Η περίπτωση στην οποία δεν μπορεί να χρησιμοποιήσει ένα άμεσο βήμα προκύπτει όταν το κατά προσέγγιση πρόβλημα δεν είναι τοπικά καμπύλο κοντά στην συγκεκριμένη επανάληψη. Σε κάθε επανάληψη ο αλγόριθμος μειώνει μία συνάρτηση αξίας (Optimization Toolbox (2015)):

$$f_{\mu}(x, s) + \nu \| (h(x), g(x) + s) \| \quad (1.73)$$

Η παράμετρος  $\nu$  μπορεί να αυξηθεί με αριθμό επαναλήψεων έτσι ώστε να ωθηθεί η λύση προς το εφικτό. Αν ένα βήμα δεν μειώσει την συνάρτηση αξίας, ο αλγόριθμος θα απορρίψει το βήμα και θα προσπαθήσει με ένα νέο βήμα. Αν είτε η αντικειμενική συνάρτηση είτε μια μη γραμμική περιορισμένη συνθήκη επιστρέψει μια σύνθετη τιμή σε μία επανάληψη  $x^j$ , ο αλγόριθμος απορρίπτει την  $x^j$ . Η απόρριψη έχει την ίδια επίδραση με αυτή όταν η συνάρτηση αξίας δεν μειώνεται αρκετά όπου τότε ο αλγόριθμος προσπαθεί ένα διαφορετικό μικρότερο βήμα.

#### 4.5.1 Άμεσο βήμα

Οι ακόλουθες μεταβλητές χρησιμοποιούνται για να οριστεί το άμεσο βήμα (Optimization Toolbox (2015)):

- Η υποδηλώνει τον Hessian της Lagrange του  $f_{\mu}$  :

$$H = \nabla^2 f(x) + \sum_i \lambda_i \nabla^2 g_i(x) + \sum_j \lambda_j \nabla^2 h_j(x) \quad (1.74)$$

- $Jg$  υποδηλώνει τον Ιακωβιανό της περιορισμένης συνάρτησης  $g$ .
- $Jh$  υποδηλώνει τον Ιακωβιανό της περιορισμένης συνάρτησης  $h$ .
- $S = \text{diag}(s)$
- $\lambda$  υποδηλώνει το πολλαπλασιαστικό διάνυσμα Lagrange με τους περιορισμούς  $g$ .
- $\Lambda = \text{diag}(\lambda)$
- $y$  υποδηλώνει το πολλαπλασιαστικό διάνυσμα Lagrange που σχετίζεται με το  $h$ .
- $e$  υποδηλώνει το διάνυσμα με το ίδιο μέγεθος με το  $g$ .

Η εξίσωση 8.4.5 ορίζει το άμεσο βήμα  $(\Delta X, \Delta S)$ :

$$\begin{pmatrix} H & 0 & Jh^T & Jg^T \\ 0 & S\Lambda & 0 & -S \\ Jk & 0 & I & 0 \\ Jg & -S & 0 & I \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta X \\ -\Delta \lambda \\ -\Delta y \\ \Delta S \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \nabla f - J_h^T \cdot y - J_g^T \cdot \lambda \\ S\lambda - \mu e \\ h \\ g + s \end{pmatrix} \quad (1.75)$$

Η εξίσωση προκύπτει από την λύση των εξισώσεων  $\nabla_x[L(x, \lambda)] = 0, \lambda_{g,i} \cdot g_i(x) = 0 \forall i$  χρησιμοποιώντας μια γραμμικοποιημένη Lagrange. Για να λυθεί αυτή η εξίσωση για  $(\Delta X, \Delta S)$  ο αλγόριθμος κάνει μια LDL παραγοντοποίηση του πίνακα. Αυτό είναι το πιο υπολογιστικά ακριβό βήμα. Ένα αποτέλεσμα της παραγοντοποίησης είναι η απόφαση του αν ο προβαλλόμενος Hessian είναι θετικά ορισμένος ή όχι. Αν όχι ο αλγόριθμος χρησιμοποιεί το CG βήμα που περιγράφεται στο επόμενο υποκεφάλαιο.

#### 4.5.2 Conjugate Gradient βήμα

Η CG προσέγγιση για την επίλυση του κατά προσέγγιση προβλήματος (εξίσωση 8.4.2) είναι παρόμοια με άλλους CG υπολογισμούς. Σε αυτή την περίπτωση ο αλγόριθμος ρυθμίζει και το  $x$  και το  $s$  κρατώντας το  $s$  θετικό. Η προσέγγιση είναι να ελαχιστοποιηθεί η τετραγωνική προσέγγιση στο κατά προσέγγιση πρόβλημα σε μια περιοχή εμπιστοσύνης που υπόκειται σε γραμμικούς περιορισμούς.

Ειδικότερα με το  $R$  ορίζεται η ακτίνα της περιοχής εμπιστοσύνης και οι υπόλοιπες μεταβλητές ορίζονται όπως στο άμεσο βήμα. Ο αλγόριθμος περιέχει πολλαπλασιαστές Lagrange που προσεγγιστικά επιλύουν τις εξισώσεις ( $\nabla_x[L(x, \lambda)] = 0, \lambda_{g,i} \cdot g_i(x) = 0 \forall i$ )

$$\nabla_x L = \nabla_x f(x) + \sum_i \lambda_i \nabla g_i(x) + \sum_j y_j \nabla h_j(x) = 0$$

Στη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων το  $\lambda$  είναι θετικό. Τότε παίρνει ένα βήμα για να το λύσει προσεγγιστικά.

$$\min_{\Delta x, \Delta s} \nabla f^T \Delta x + \frac{1}{2} \cdot \Delta x^T \nabla_{xx}^2 L \cdot \Delta x + \mu e^T S^{-1} \Delta s + \frac{1}{2} \Delta s^T S^{-1} \Lambda \cdot \Delta s \quad (1.76)$$

Υπόκειται στους εξής γραμμικοποιημένους περιορισμούς:

$$g(x) + J_g \cdot \Delta x + \Delta s = 0, \quad h(x) + J_h \cdot \Delta x = 0 \quad (1.77)$$

Για να λυθεί η (1.77) ο αλγόριθμος προσπαθεί να ελαχιστοποιήσει τη νόρμα των γραμμικοποιημένων περιορισμών μέσα σε μια περιοχή με ακτίνα  $R$ . Τότε η (1.76) λύνεται με τους περιορισμούς που ταιριάζουν με το υπόλοιπο από την επίλυση της εξίσωσης (1.77) παραμένοντας εντός της περιοχής εμπιστοσύνης της ακτίνας  $R$  και κρατώντας το  $s$  αυστηρά θετικό.

### 4.5.3 Εφαρμογή της μεθόδου Interior Point

Τα προγράμματα βελτιστοποίησης που συντάσσονται σε προγραμματιστικά περιβάλλοντα εφαρμόζουν την μέθοδο Interior point. για τον υπολογισμό της βέλτιστης άντλησης συγκεκριμένου αριθμού φρεάτων. Παρακάτω παραθέτονται οι υπολογισμοί οι οποίοι εκτελούνται μέσω της συνάρτησης `fmincon` του Matlab

$$x = fmincon(@objfun, x_0, A, b, A_{eq}, b_{eq}, lb, ub, @confun, options)$$

(1.78)

options: κριτήρια εκτέλεσης και ολοκλήρωσης του προγράμματος  
βελτιστοποίησης.

όπου:

$x$ : μονοδιάστατος πίνακας των ζητούμενων βέλτιστων τιμών όλων  
των μεταβλητών

objfun : αρχείο M.file της αντικειμενικής συνάρτησης

$x_0$  : μονοδιάστατος πίνακας αρχικών τιμών των μεταβλητών του  
προβλήματος

$A, b$  : πίνακες γραμμικών περιορισμών οι οποίοι εκφράζονται υπό  
μορφή ανισότητας  $A \cdot x \leq b$ , όπου  $x$  πίνακας μεταβλητών.

- $Aeq, beq$  : πίνακες γραμμικών περιορισμών οι οποίοι εκφράζονται μέσω της ισότητας  $Aeq \cdot x = beq$ .
- $lb$  : πίνακας με το κατώτατο όριο τιμών των μεταβλητών του
- $ub$  : πίνακας με το ανώτατο όριο τιμών των μεταβλητών του πίνακα  $x$ . Μαζί με τον πίνακα  $lb$  αποτελούν το πεδίο ορισμού των μεταβλητών.
- confun: αρχείο M.file για τον ορισμό μη γραμμικών περιορισμών. Οι μη γραμμικοί περιορισμοί, δεν μπορούν να περιγραφούν από τους παραπάνω πίνακες  $A, b, Aeq, beq$ , είναι απαραίτητη λοιπόν η δημιουργία της κατάλληλης συνάρτησης μέσω ενός M.file.

#### 4.5.4 Παράμετροι εκτέλεσης και τερματισμού του προγράμματος

Είναι αναγκαίο κατά την σύνταξη του προγράμματος να καθοριστούν οι τιμές των παραμέτρων που έχουν σχέση και με τη διαδικασία εκτέλεσης και με τη σύγκλιση στο τελικό αποτέλεσμα.

Ανοχή αντικειμενικής συνάρτησης : Tolfun = 0.1

Αναφέρεται στο κριτήριο κλεισίματος που σχετίζεται με τη διαφορά μεταξύ διαδοχικά υπολογισμένων τιμών της αντικειμενικής συνάρτησης. Επιτυχής σύγκλιση επιτυγχάνεται όταν η διαφορά αυτή γίνει μικρότερη από την καθορισμένη τιμή Tolfun. Η τιμή που επιλέγεται για την Tolfun εξαρτάται από την τάξη μεγέθους της αντικειμενικής συνάρτησης.

Ανοχή της τιμής της/των μεταβλητής/τών : TolX = 0.1

Είναι κριτήριο αντίστοιχο με το παραπάνω. Αναφέρεται στη διαφορά των διαδοχικά υπολογισμένων τιμών των μεταβλητών. Επιτυχής σύγκλιση επιτυγχάνεται όταν η διαφορά αυτή γίνει μικρότερη από την καθορισμένη τιμή TolX.



Μέγιστος αριθμός επαναλήψεων :  $\text{MaxIter} = 700$

Κάθε επανάληψη περιλαμβάνει υπολογισμό των μερικών παραγώγων επίλυση του προβλήματος Q.P. και καθορισμό του βήματος διερεύνησης. Όταν ο εκτελούμενος αριθμός επαναλήψεων S.Q.P. υπερβεί τον μέγιστο αριθμό επαναλήψεων, το πρόγραμμα τερματίζεται

Μέγιστος αριθμός αξιολογήσεων της αντικειμενικής συνάρτησης :

$\text{MaxFunEvals} = 100 * \text{number of variables}$

Όταν ο αριθμός αξιολογήσεων της αντικειμενικής συνάρτησης υπερβεί τον μέγιστο αριθμό αξιολογήσεων που έχει τεθεί από αυτό το κριτήριο ο αλγόριθμος τερματίζεται. Ως προκαθορισμένη τιμή έχει οριστεί 100 φορές επί τον αριθμό των μεταβλητών του προβλήματος.

Μέγιστη διαφορά των τιμών των μεταβλητών κατά τον υπολογισμό των μερικών παραγώγων :  $\text{DiffMaxChange} = 5$

Ο υπολογισμός των μερικών παραγώγων γίνεται με τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών :

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{x_i} \cong \frac{f(x_i) - f(x_i - \Delta x)}{\Delta x} \quad (1.79)$$

όπου  $x_i$  κάθε μία από τις μεταβλητές του προβλήματος βελτιστοποίησης.

Το κριτήριο αυτό δεν επιτρέπει η διαφορά  $\Delta x$  της τιμής κάθε μεταβλητής μεταξύ δύο διαδοχικών επαναλήψεων να είναι μεγαλύτερη της προκαθορισμένης .

Ελάχιστη διαφορά των τιμών των μεταβλητών κατά τον υπολογισμό των μερικών παραγώγων :  $\text{DiffMinChange} = 0.5$

Το κριτήριο αυτό δεν επιτρέπει η διαφορά  $\Delta x$  της τιμής κάθε μεταβλητής μεταξύ δύο διαδοχικών επαναλήψεων να είναι μικρότερη της προκαθορισμένης . Το  $\Delta x$  της σχέσης (1.71) παίρνει τιμές μεταξύ :

$$\text{DiffMinChange} < \Delta x < \text{DiffMaxChange}$$

#### 4.5.5 Επιλογές του αλγόριθμου Interior-Point

Εδώ παραθέτονται οι ερμηνείες και οι επιδράσεις των διαφόρων επιλογών του αλγόριθμου Interior-Point.

- `AlwaysHonorConstraints`- Όταν έχει οριστεί σε 'bounds' κάθε επανάληψη ικανοποιεί τους περιορισμούς που έχουν τεθεί. Όταν οριστεί στο 'none', ο αλγόριθμος μπορεί να παραβιάσει τους δεσμούς κατά την διάρκεια ενδιάμεσων επαναλήψεων.
- `Hessian` — Όταν οριστεί :
  - 'user-supplied', πέρασε τον Hessian της Lagrange σε μια συνάρτηση τροφοδοτούμενη από τον χρήστη, οι λειτουργίες της οποίας δίνονται στην επιλογή `HessFcn`.
  - 'bfgs', η `fmincon` υπολογίζει τον Hessian από μια πυκνή Νευτωνική προσέγγιση.
  - 'lbfgs', η `fmincon` υπολογίζει τον Hessian από μια περιορισμένη μνήμη, μεγάλης κλίμακας Νευτωνική προσέγγιση.
  - 'fin-diff-grads' η `fmincon` υπολογίζει ένα Hessian διάνυσμα προϊόν πεπερασμένων διαφορών της κλίσης (s).
- `InitBarrierParam` — Η αρχική τιμή για το  $\mu$ . Από προεπιλογή είναι 0,1.
- `ScaleProblem` — Όταν οριστεί στο 'obj-and-constr', ο αλγόριθμος δουλεύει με κλιμακωτές εκδόσεις της αντικειμενικής συνάρτησης και των περιορισμών.
- `SubproblemAlgorithm` — Καθορίζει αν πρέπει ή όχι να επιχειρήσει το άμεσο Νευτωνικό βήμα. Η προεπιλογή 'ldl-factorization' επιτρέπει σε αυτό τον τύπο

του βήματος να επιχειρηθεί. Η επιλογή 'cg' επιτρέπει μόνο βήματα συζυγούς κλίσης.

### **Αποτελέσματα**

Τα αποτελέσματα που προκύπτουν από την ολοκλήρωση της βελτιστοποίησης είναι τα ακόλουθα:

- η βέλτιστη τιμή των παραμέτρων
- η αντίστοιχη βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης
- η τιμή της παραμέτρου exitflag που ενημερώνει για το τέλος των επαναλήψεων :
  - τιμή μεγαλύτερη του 0 εκφράζει τη σύγκλιση των επαναλήψεων στα αποτελέσματα που εμφανίζονται στην οθόνη
  - τιμή ίση με 0 εκφράζει τον τερματισμό των επαναλήψεων εξαιτίας της υπέρβασης του μέγιστου αριθμού επαναλήψεων (MaxIter) ή του μέγιστου αριθμού υπολογισμών της αντικειμενικής συνάρτησης (MaxFunEvals)
  - τιμή μικρότερη του 0 εκφράζει την αδυναμία σύγκλισης
- ο αριθμός των επαναλήψεων S.Q.P.
- ο αριθμός υπολογισμών της αντικειμενικής συνάρτησης
- ο αλγόριθμος που χρησιμοποιήθηκε

## **4.6 Περιγραφή προγράμματος για βελτιστοποίηση αντλήσεων σε παράκτιο υπόγειο υδροφορέα με δεδομένες θέσεις φρεάτων με χρήση MATLAB**

Στη βελτιστοποίηση με δεδομένες θέσεις φρεάτων οι μεταβλητές απόφασης του προβλήματος είναι οι παροχές άντλησης των πηγαδιών. Η αντικειμενική συνάρτηση είναι το αρνητικό άθροισμα των παροχών άντλησης όλων των φρεάτων :

$$F = -(Q_1 + Q_2 + \dots + Q_k) , \text{ όπου } k \text{ ο αριθμός των φρεάτων } \quad (1.80)$$

Πρέπει η (1.80) να ελαχιστοποιηθεί εφαρμόζοντας τις μεθόδους S.Q.P. και Interior Point και τηρώντας τους περιορισμούς για την αποφυγή της υφαλμύρωσης οι οποίοι είναι:

- Το δυναμικό στη θέση κάθε πηγαδιού πρέπει να είναι μεγαλύτερο ή ίσο του 0

$$\varphi_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, k \quad \text{όπου } k \text{ ο αριθμός των φρεάτων} \quad (1.81)$$

- Το πόδι της αλάτινης σφήνας δεν πρέπει να προσεγγίσει το πηγάδι

$$x_{scti} \leq x_{wi}, \quad i = 1, 2, \dots, k \quad \text{όπου } k \text{ ο αριθμός των φρεάτων} \quad (1.82)$$

Όπου :  $x_{sct}$  : η απόσταση από την ακτή του σημείου με δυναμικό 8.1 κατά μήκος της γραμμής που διέρχεται από τη θέση του  $i$  πηγαδιού.

$x_w$  : η απόσταση του πηγαδιού από την ακτή

Για την πραγματοποίηση της βελτιστοποίησης με περιορισμούς σε δεδομένες θέσεις φρεάτων χρησιμοποιούνται τα παρακάτω προγράμματα βελτιστοποίησης.

➤ ObjFnc.m

Περιλαμβάνει την αντικειμενική συνάρτηση :

$$F = - (Q_1 + Q_2 + \dots + Q_k), \quad \text{όπου } k \text{ ο αριθμός των φρεάτων} \quad (1.83)$$

Όπου :  $Q_1, Q_2, \dots, Q_k$  η παροχή άντλησης κάθε φρέατος.

➤ Constraints.m

Είναι το αρχείο που εμπεριέχει τους περιορισμούς που λαμβάνονται υπόψη κατά τη βελτιστοποίηση :

$$\varphi_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (1.84)$$

$$x_{scti} \leq x_{wi}, \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (1.85)$$

Για την εφαρμογή των περιορισμών είναι απαραίτητος ο υπολογισμός των  $\varphi_i$ ,  $x_{scti}$ ,  $x_{wi}$ , τα οποία υπολογίζονται μέσω των παρακάτω βοηθητικών προγραμμάτων:

▪ GAObjFnc.m

Σε κάθε βήμα βελτιστοποίησης που εκτελείται προσδιορίζονται και ελέγχονται ως προς την καταλληλότητά τους διάφορες τιμές παροχής άντλησης. Το αρχείο wel.dat εμπεριέχει τις παροχές άντλησης των φρεάτων, το πρόγραμμα GAObjFnc.m αντικαθιστά τις τιμές αυτές με νέες σε κάθε βήμα βελτιστοποίησης έτσι ώστε να υπολογισθεί το δυναμικό σε κάθε κελί του καννάβου μέσω του Modflow.bat. Τέλος υπολογίζει την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης.

- readPMheads.m

Το συγκεκριμένο πρόγραμμα διαβάζει το binary αρχείο heads.dat που δημιουργεί το PMWIN και εμπεριέχει τα αποτελέσματα του δυναμικού σε κάθε κελί του καννάβου.

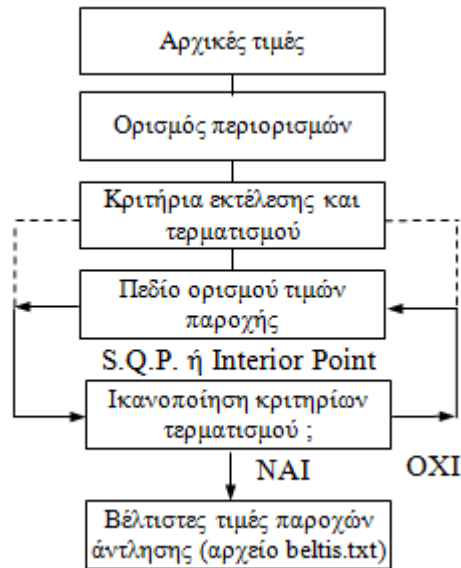
- PmwinWell.m

Στο συγκεκριμένο πρόγραμμα συντάσσεται ο κώδικας της συνάρτησης PmwinWell η οποία χρησιμοποιείται στο πρόγραμμα GAObjFnc.m προκειμένου να αντικαθιστά τις τιμές αυτές με νέες σε κάθε βήμα βελτιστοποίησης έτσι ώστε να υπολογισθεί το δυναμικό σε κάθε κελί του καννάβου μέσω του Modflow.bat.

- optimization.m

Είναι το κυρίως πρόγραμμα βελτιστοποίησης στο οποίο χρησιμοποιούνται τα αρχεία της αντικειμενικής συνάρτησης (ObjFnc.m) και των περιορισμών (Constraints.m). Αρχικά ορίζονται οι μεταβλητές του προβλήματος οι οποίες είναι ο αριθμός των φρεάτων, η διάσταση κελιού κατά τον άξονα των x, ο αριθμός γραμμών, ο αριθμός στηλών, το πάχος του υδροφορέα και το δυναμικό στο πόδι της αλάτινης σφήνας. Έπειτα ορίζονται οι αρχικές τιμές των μεταβλητών απόφασης  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$  καθώς και το πεδίο ορισμού τους. Ορίζονται οι παράμετροι εκτέλεσης και τερματισμού της βελτιστοποίησης οι οποίοι έχουν προαναφερθεί και εκτελείται η συνάρτηση fmincon εφαρμόζοντας την μέθοδο S.Q.P. ή την Interior Point.

Πραγματοποιείται ένα σύνολο επαναλήψεων με βάση τις παραπάνω παραμέτρους για την εύρεση της βέλτιστης λύσης, όταν ικανοποιηθεί κάποιο από τα κριτήρια κλεισίματος το πρόγραμμα τερματίζεται. Η διαδικασία αυτή φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα ροής.



Σχήμα 4.1 : Διάγραμμα Ροής Βελτιστοποίησης

Πηγή : Παπαντωνίου (2003)

Όταν το πρόγραμμα τερματιστεί εξάγει ως αποτέλεσμα τις παροχές του κάθε φρέατος.

#### 4.7 Συμπεράσματα

Το πρόβλημα βελτιστοποίησης που αναφέρεται στην παρούσα εργασία αφορά την εύρεση της βέλτιστης παροχής άντλησης από συγκεκριμένο αριθμό φρεάτων. Είναι ένα μη γραμμικό πρόβλημα βελτιστοποίησης με περιορισμούς όπως η αποφυγή της υφαλμύρωσης του νερού. Οι μέθοδοι οι οποίες χρησιμοποιούνται είναι οι εξής:

- Η μέθοδος του Ακολουθιακού Τετραγωνικού Προγραμματισμού – Sequential Quadratic Programming (S.Q.P.)
- Η μέθοδος του Εσωτερικού σημείου (Interior point)

Σε ότι αφορά στη μέθοδο S.Q.P., αποδίδονται πρώτα οι αρχικές τιμές των μεταβλητών απόφασης από το μελετητή και οριοθετείται το πεδίο ορισμού τους. Έπειτα από την εκτέλεση μίας επαναληπτικής διαδικασίας το πρόγραμμα συγκλίνει στη βέλτιστη λύση. Απαραίτητη προϋπόθεση αποτελεί η συνέχεια και η παραγωγισιμότητα της αντικειμενικής συνάρτησης. Σε κάθε επανάληψη υπολογίζονται οι παράγωγοι της αντικειμενικής συνάρτησης και των περιορισμών ως προς τις μεταβλητές απόφασης. Προσδιορίζεται η κατεύθυνση  $d_k$  διερεύνησης για τον

εντοπισμό της βέλτιστης λύσης, έπειτα ορίζεται το βήμα διερεύνησης. Η βελτιστοποίηση ολοκληρώνεται όταν ικανοποιηθεί κάποιο από τα κριτήρια τερματισμού που έχει ορίσει ο μελετητής.

Η μέθοδος Interior Point για να λυθεί χρησιμοποιεί ένα κατά προσέγγιση πρόβλημα με το οποίο οι περιορισμοί μετατρέπονται σε ισότητες και το οποίο στην ουσία είναι μια ακολουθία από προβλήματα ελαχιστοποίησης. Για να λυθεί το πρόβλημα ο αλγόριθμος χρησιμοποιεί δύο ήδη βημάτων το άμεσο και το CG τα οποία χρησιμοποιούνται κατά περίπτωση. Ο αλγόριθμος ξεκινά χρησιμοποιώντας το άμεσο και στην περίπτωση που δεν μπορεί αυτό χρησιμοποιεί το CG. Επιπλέον ο αλγόριθμος όπως και ο S.Q.P. χρησιμοποιεί μία συνάρτηση αξίας την οποία μειώνει σε κάθε επανάληψη.

Η σύγκριση των δύο μεθόδων γίνεται και πρακτικά στο επόμενο κεφάλαιο, στο οποίο πραγματοποιείται βελτιστοποίηση και με τους δύο σε έναν υπόγειο υδροφορέα στην Κάλυμνο, χρησιμοποιώντας τα πραγματικά δεδομένα του υδροφορέα.

Ο υπολογισμός των βέλτιστων παροχών των φρεάτων προϋποθέτει τη συνεργασία των προγραμμάτων βελτιστοποίησης και του μοντέλου προσομοίωσης. Σε κάθε βήμα, το πρόγραμμα βελτιστοποίησης προτείνει διαφορετικές τιμές στις μεταβλητές απόφασης για τις οποίες, με βάση το μοντέλο προσομοίωσης ελέγχεται η συμπεριφορά του υδροφορέα. Συντάσσεται σε περιβάλλον MATLAB ένα σύνολο προγραμμάτων. Τα προγράμματα βελτιστοποίησης περιλαμβάνουν τα αρχεία της αντικειμενικής συνάρτησης, των περιορισμών καθώς και των παραμέτρων εκτέλεσης και τερματισμού του προγράμματος.

## **5. ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΤΟΝ ΠΑΡΑΚΤΙΟ ΥΔΡΟΦΟΡΕΑ ΣΤΟ ΒΑΘΥ ΚΑΛΥΜΝΟΥ**

### **5.1 Εισαγωγή**

Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο αρχικά γίνεται μια παρουσίαση του υδροφορέα της Καλύμνου στον οποίο θα πραγματοποιηθεί η εφαρμογή και δημιουργείται το μοντέλο του υδροφορέα. Έπειτα χρησιμοποιώντας τα παρόντα αρχικά δεδομένα πραγματοποιείται βελτιστοποίηση με τους δύο αλγόριθμους οι οποίοι παρουσιάστηκαν και αναλύθηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο S.Q.P και Interior Point. Με βάση τα αποτελέσματα τα οποία προέκυψαν από τις δύο βελτιστοποιήσεις συγκρίνονται οι δύο αλγόριθμοι ως προς την αποδοτικότητα τους και την αποτελεσματικότητα τους και επιλέγεται ο βέλτιστος για την συνέχιση της εφαρμογής. Στην συνέχεια με δεδομένες τις υπάρχουσες 11 γεωτρήσεις πραγματοποιούνται βελτιστοποιήσεις με υποθετικές ποσοστιαίες μειώσεις της επιφανειακής τροφοδοσίας, αλλά και με αλλαγές στις θέσεις των πηγαδιών προκειμένου να εξετασθεί η ευαισθησία στην αλλαγή των παροχών σε ενδεχόμενες αλλαγές όπως οι προαναφερθείσες.

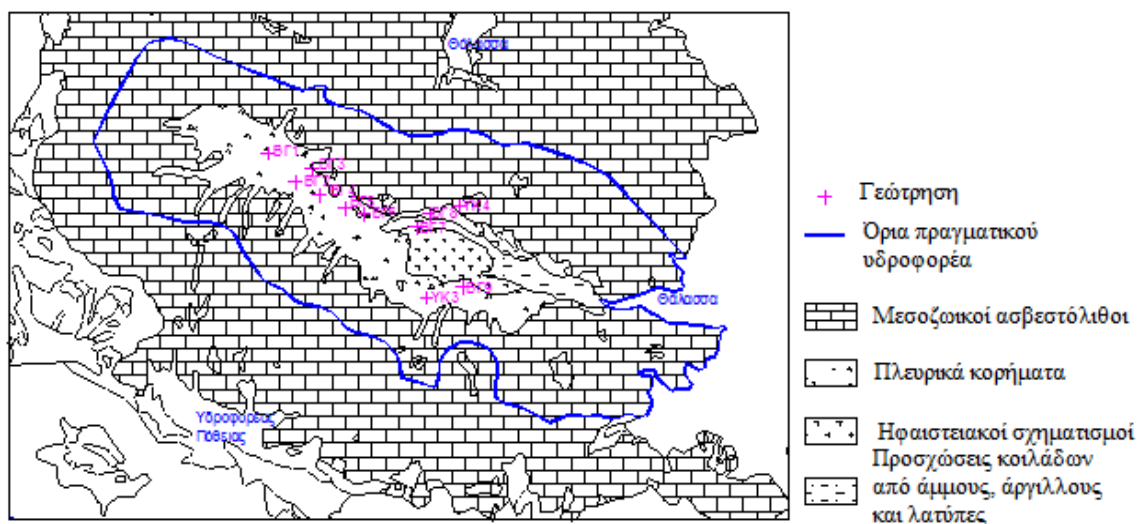
Η βελτιστοποίηση πραγματοποιείται μέσω των προγραμμάτων MATLAB χρησιμοποιώντας δεδομένα από το PMWIN ενώ τα δεδομένα για την υπάρχουσα κατάσταση αντλήθηκαν από την διπλωματική Παπαντωνίου (2003).

### **5.2 Υδροφορέας στην κοιλάδα του Βαθέως**

Στην περιοχή του Βαθέως σχηματίζεται μια κοιλάδα στην οποία εδρεύει ο υπό μελέτη υπόγειος υδροφορέας πάνω στον οποίο θα γίνει η εφαρμογή του παρόντος κεφαλαίου. Σε αυτή την κοιλάδα αναπτύσσονται δύο υδροφόροι σχηματισμοί ένας φρεάτιος και ένας καρστικός. Ο φρεάτιος καλύπτει τις ανάγκες άρδευσης στην περιοχή και σε ένα μεγάλο κομμάτι του έχει υποβαθμιστεί λόγω διαφόρων πηγών ρύπανσης και της έντονης αστικοποίησης. Ο καρστικός υδροφορέας αποτελεί την κύρια πηγή ύδρευσης στην Κάλυμνο. Για την πραγματοποίηση της συγκεκριμένης εφαρμογής οι δύο υδροφορείς θα θεωρηθούν ένας πάχους 25 μέτρων, και θα



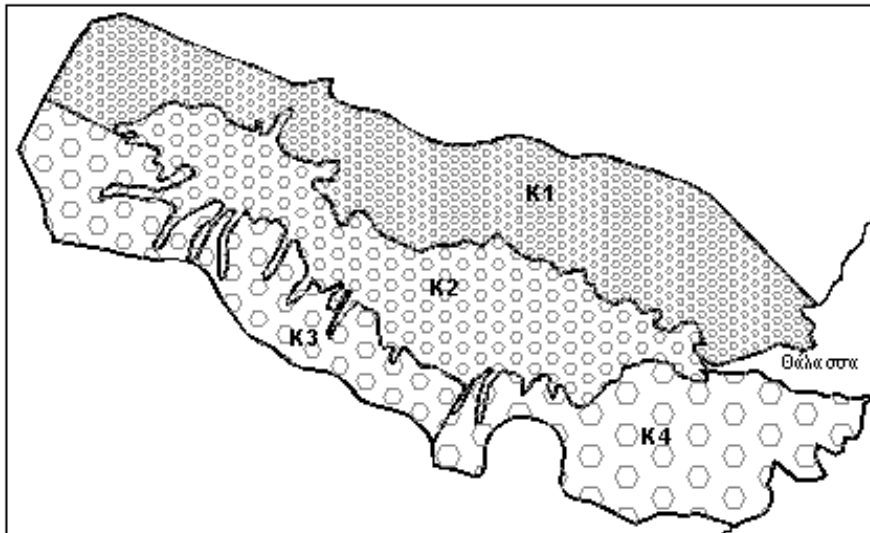
εξεταστούν ως ένα ισοδύναμο πορώδες μέσο. Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι γεωλογικοί σχηματισμοί καθώς και τα όρια του υδροφορέα.



Σχήμα 5.1 : Υδροφορέας Βαθέως

Πηγή : Παπαντωνίου (2003)

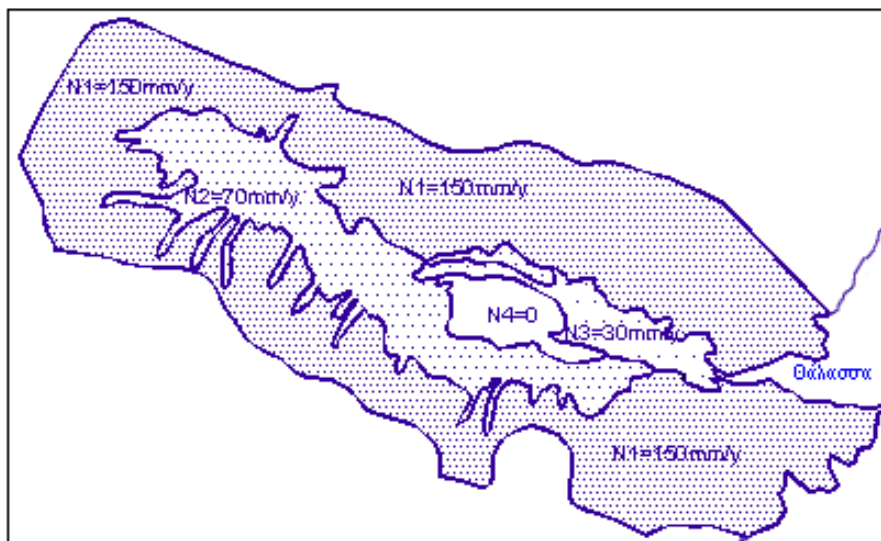
Όπως φαίνεται από το παραπάνω σχήμα ο υδροφορέας μόνο ανατολικά συνορεύει με τη θάλασσα, ενώ όσο αφορά τις άλλες κατευθύνσεις αποτελούν αδιαπέρατα όρια, ακόμα και στο βόρειο τμήμα του υδροφορέα όπου η θάλασσα είναι κοντά, λόγω της μη υπαλιμύρωσης των υδάτων. Τα υπόλοιπα όρια διαχωρίζουν τον υδροφορέα του Βαθέως από αυτόν της Πόθειας. Ο υδροφορέας θα θεωρηθεί ότι τροφοδοτείται μόνο επιφανειακά. Όσο αφορά την υδραυλική αγωγιμότητα υπάρχουν τέσσερις περιοχές με διαφορετική υδραυλική αγωγιμότητα τα όρια των οποίων φαίνονται στο παρακάτω σχήμα με αντίστοιχες τιμές:  $K_1=25\text{m/d}$ ,  $K_2=35\text{m/d}$ ,  $K_3 = 50\text{m/d}$ ,  $K_4 = 75\text{m/d}$  (Παπαντωνίου 2003).



Σχήμα 5.2 : Όρια περιοχών διαφορετικής υδραυλικής αγωγιμότητας

Πηγή : Παπαντωνίου (2003)

Η επιφανειακή τροφοδοσία στον υδροφορέα που θα χρησιμοποιηθεί είναι η ίδια με την διπλωματική Παπαντωνίου(2003) και οι αντίστοιχες τιμές της τροφοδοσίας καθώς και τα όρια των διαφορετικών τιμών τροφοδοσίας φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 5.3 : Οριοθέτηση περιοχών διαφορετικής τροφοδοσίας

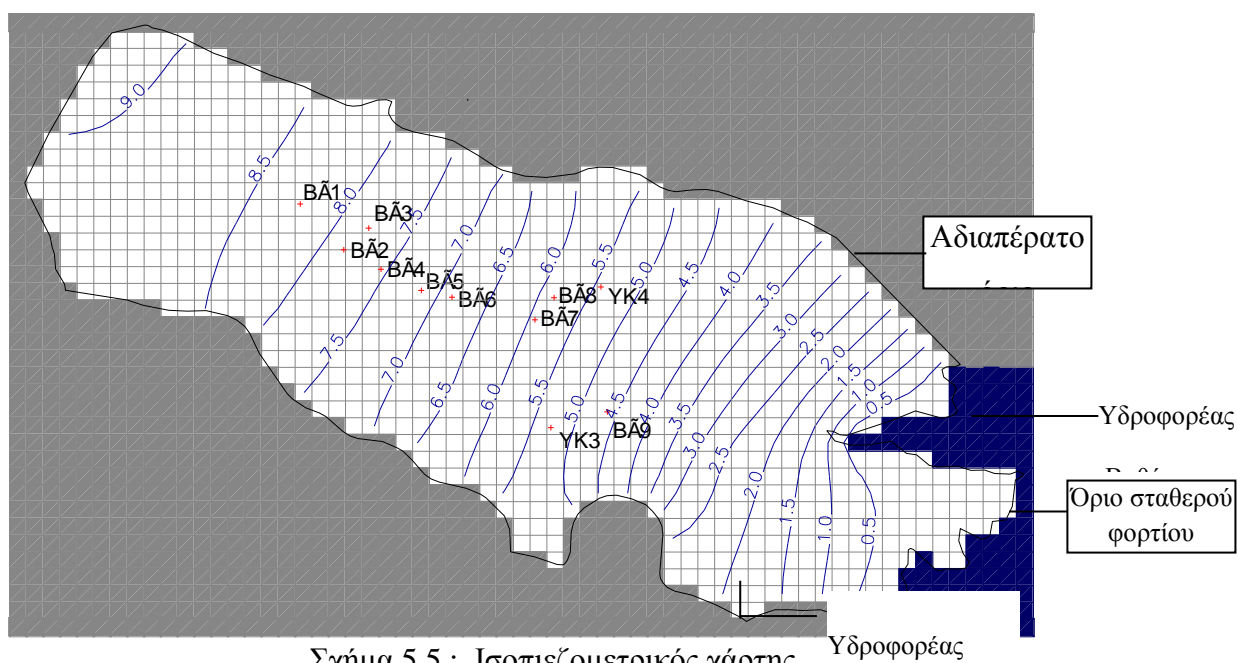
Πηγή : Παπαντωνίου (2003)

Η τροφοδοσία που εφαρμόστηκε είχε άμεση σχέση με την ικανότητα διήθησης, την διαπερατότητα των διαφόρων γεωλογικών σχηματισμών αλλά και με την υψομετρία της κάθε περιοχής. Γι' αυτούς τους λόγους στους καρστικούς ασβεστόλιθους τοποθετήθηκε τροφοδοσία 150mm/y, στα πλευρικά κορήματα 70mm/y, όπου υπήρχε

άργιλος η κατείδυση πήρε την τιμή 30mm/y, λόγω του ότι ο άργιλος την περιορίζει και στις τάφρους η τροφοδοσία θεωρήθηκε 0 mm/y.

### 5.3 Δημιουργία του μοντέλου του υδροφορέα

Εισάγεται ο υδροφορέας στο PMWIN, ορίζεται ένας κάνναβος 37 γραμμών και 61 στηλών με μέγεθος κάθε φατνίου 150mx150m. Το συνολικό μήκος του καννάβου που προσομοιώνει τον υδροφορέα είναι 9150m και το συνολικό πλάτος 5550m. Στην συνέχεια εισάγεται η υδραυλική αγωγιμότητα στις αντίστοιχες θέσεις του υδροφορέα καθώς και η επιφανειακή τροφοδοσία.



Σχήμα 5.5 : Ισοπιεζομετρικός χάρτης Υδροφορέας

Πηγή : Παπαντωνίου (2003)

Στον παραπάνω χάρτη φαίνονται οι θέσεις των γεωτρήσεων στον υδροφορέα σύμφωνα με το Ε.Μ.Π. 2000. Θα υπολογιστούν οι βέλτιστες παροχές άντλησης προκειμένου να εξασφαλίζεται η μέγιστη ποσότητα υπόγειου νερού αποφεύγοντας την υφαλμύρωση των γεωτρήσεων. Για να αποφευχθεί η υφαλμύρωση έχουν τεθεί δύο περιορισμοί στο πρόγραμμα που συντάχθηκε στο MATLAB οι οποίοι αφορούν την τιμή του δυναμικού σε κάθε γεώτρηση. Αυτοί οι περιορισμοί φαίνονται παρακάτω:

- Ο πρώτος περιορισμός περιορίζει την βελτιστοποίηση έτσι ώστε σε κάθε γεώτρηση η τιμή του δυναμικού να είναι μεγαλύτερη του 0.

$$\varphi_i \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, 11 \quad (1.86)$$

- Ο δεύτερος περιορισμός περιορίζει την βελτιστοποίηση έτσι ώστε σε κάθε γεώτρηση η απόσταση του σημείου με δυναμικό  $\varphi=8.1$  από τη δεξιά άκρη του καννάβου να είναι μικρότερη από την απόσταση του πηγαδιού από την δεξιά άκρη του καννάβου.

$$x_{scti} \leq x_{wi}, \quad i = 1, 2, \dots, 11 \quad (1.87)$$

όπου :

- $x_{scti}$  : η απόσταση του σημείου με δυναμικό 8.1 από τη δεξιά άκρη του καννάβου
- $x_{wi}$  : η απόσταση του πηγαδιού από τη δεξιά άκρη του καννάβου
- $\varphi$  το δυναμικό που προκύπτει από τον τύπο  $\varphi = \varphi_G \cdot s_c = 8.0078 \cdot 1.012 = 8.1$ , όπου  $\varphi_G$  το δυναμικό στο πόδι της αλάτινης σφήνας και  $s_c$  ο συντελεστής ασφάλειας.

Ο περιορισμός αυτός τίθεται προκειμένου τα φρέατα να βρίσκονται σε ικανοποιητική απόσταση από το πόδι της αλάτινης σφήνας για να αποφεύγεται με μεγάλη ακρίβεια η άντληση υφάλμυρου νερού. Πιο συγκεκριμένα το δυναμικό στο πόδι της αλάτινης σφήνας είναι 8.0078, επομένως με αυτό τον περιορισμό εξασφαλίζεται η τήρηση μιας ικανοποιητικής απόστασης κάθε πηγαδιού από το πόδι της αλάτινης σφήνας.

Κατά τη βελτιστοποίηση, το MODFLOW χρησιμοποιείται στον υπολογισμό του δυναμικού προκειμένου στη συνέχεια να ελεγχθεί η ισχύς των περιορισμών.

#### 5.4 Εκτέλεση βελτιστοποιήσεων με S.Q.P και Interior Point

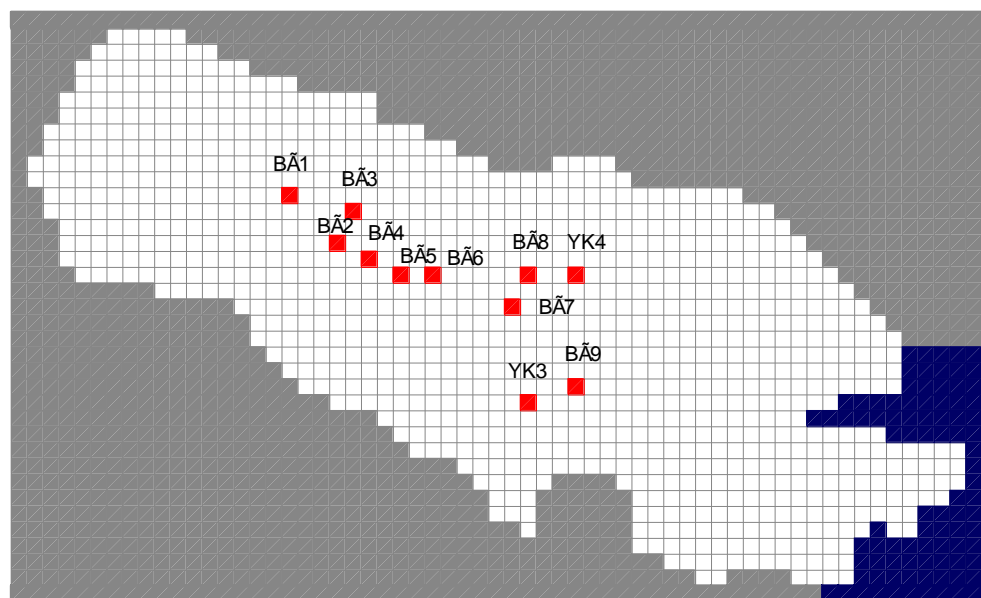
Στο παρόν υποκεφάλαιο παρουσιάζονται οι βελτιστοποιήσεις οι οποίες έγιναν στον υδροφορέα στο Βαθύ της Καλύμνου με τα παρόντα πραγματικά δεδομένα με τους αλγορίθμους S.Q.P και Interior Point και παρουσιάζονται τα δεδομένα που

προέκυψαν. Ακολουθεί μια σύγκριση των δύο με βάση τα αποτελέσματα που προέκυψαν και η επιλογή του ενός για την συνέχιση της εφαρμογής.

Έπειτα πραγματοποιούνται βελτιστοποιήσεις για ενδεχόμενη ποσοστιαία μείωση της επιφανειακής τροφοδοσίας. Στην συνέχεια πραγματοποιούνται βελτιστοποιήσεις τοποθετώντας τα πηγάδια σε διαφορετικές θέσεις και συγκρίνονται τα αποτελέσματα που προκύπτουν. Τέλος καταγράφονται και αναλύονται τα συμπεράσματα που προέκυψαν από τις παραπάνω διαδικασίες.

#### 5.4.1 Βελτιστοποίηση με τον αλγόριθμο Interior Point

Πραγματοποιήθηκε βελτιστοποίηση με βάση τα υπάρχοντα πραγματικά δεδομένα δηλαδή με τις υπάρχουσες 11 γεωτρήσεις και τα δεδομένα που αναφέρονται στο υποκεφάλαιο υδροφορέας στην κοιλάδα του Βαθέως, η πραγματική θέση των γεωτρήσεων φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Χρησιμοποιήθηκε ο αλγόριθμος Interior Point και οι αρχικές τιμές καθώς και οι τιμές διαφόρων αναγκαίων παραμέτρων φαίνονται στους παρακάτω πίνακες.



Σχήμα 5.6 : Πραγματικές θέσεις γεωτρήσεων

Πηγή : Παπαντωνίου (2003)

Πίνακας : Αρχικές τιμές των παροχών άντλησης

	Πεδίο ορισμού μεταβλητών		Αρχικές τιμές μεταβλητών
	Κάτω όριο	Άνω όριο	
Παροχή (m <sup>3</sup> /d)	0	2000	50

Πίνακας: Παράμετροι για την εφαρμογή της μεθόδου interior point.

Μέγιστος αριθμός αξιολογήσεων της αντικειμ. συνάρτ..	DiffMax Change	DiffMin Change	Επανάλ. που εντοπίζετα η βέλτ. λύση	Τελικός αριθμός αξιολογήσεων της αντικειμ. συνάρτ.
3000	5	0.5	88	1145

Πίνακας: Βέλτιστες τιμές παροχών άντλησης (m<sup>3</sup>/d)

BΓ1	BΓ3	BΓ2	BΓ4	BΓ5	BΓ6	BΓ8	ΥΚ4	BΓ7	BΓ9	ΥΚ3	<b>SUM</b>
1182,5	495,2	521,5	360,6	345,3	369,3	365	515,6	307,7	512,5	525	<b>5500,2</b>

Όπως προέκυψαν οι τιμές φαίνονται ρεαλιστικές και το άθροισμα τους ικανοποιητικό, η μέγιστη παροχή παρατηρείται στο πηγάδι BΓ1 το οποίο είναι φυσιολογικό λόγω της μεγάλης απόστασης του πηγαδιού από την άκρη της θάλασσας.

#### 5.4.2 Βελτιστοποίηση με τον αλγόριθμο S.Q.P.

Πραγματοποιήθηκε βελτιστοποίηση χρησιμοποιώντας ακριβώς τα ίδια δεδομένα που χρησιμοποιήθηκαν στο προηγούμενο υποκεφάλαιο, με μόνη διαφορά την χρήση του αλγόριθμου S.Q.P. αντί για τον Interior point. Οι τιμές των αρχικών τιμών, των παραμέτρων και τα αποτελέσματα που προέκυψαν παρουσιάζονται στους παρακάτω πίνακες.

Πίνακας: Αρχικές τιμές των παροχών άντλησης

	Πεδίο ορισμού μεταβλητών		Αρχικές τιμές μεταβλητών
	Κάτω όριο	Άνω όριο	
Παροχή (m <sup>3</sup> /d)	0	2000	50

Πίνακας: Παράμετροι για την εφαρμογή της μεθόδου interior point.

Μέγιστος αριθμός αξιολογήσεων της αντικειμ. συνάρτ..	DiffMax Change	DiffMin Change	Επανάλ. που εντοπίζετα η βέλτ. λύση	Τελικός αριθμός αξιολογήσεων της αντικειμ. συνάρτ.
2000	5	0.07	126	1790

Πίνακας: Βέλτιστες τιμές παροχών άντλησης (m<sup>3</sup>/d)

BΓ1	BΓ3	BΓ2	BΓ4	BΓ5	BΓ6	BΓ8	ΥΚ4	BΓ7	BΓ9	ΥΚ3	SUM
1182,6	495,1	521,7	360,4	345,4	369,3	365,0	515,6	307,7	512,5	524,9	<b>5500,3</b>

Παρατηρείται πως οι τιμές που προέκυψαν για τα πηγάδια είναι ίδιες με αυτές που προέκυψαν με τον αλγόριθμο Interior point εκτός από ελάχιστες αμυδρές διαφορές. Αυτό αποτυπώνεται και στο ότι η συνολική παροχή η οποία αντλείται είναι 5500,3 m<sup>3</sup>/d και διαφέρει μόνο κατά 0,1 m<sup>3</sup> με την συνολική παροχή που αντλείται με την μέθοδο Interior point. Όπως και προηγουμένως η μέγιστη παροχή παρατηρείται στο πηγάδι BΓ1 το οποίο είναι φυσιολογικό λόγω της μεγάλης απόστασης του πηγαδιού από την άκρη της θάλασσας.

#### 5.4.3 Σύγκριση των αποτελεσμάτων που προέκυψαν από τις δυο βελτιστοποιήσεις

Όπως είναι εμφανές και με τους δύο αλγόριθμους προέκυψαν σχεδόν τα ίδια αποτελέσματα, που σημαίνει πως τα αποτελέσματα είναι αξιόπιστα αλλά και ότι οι δύο αλγόριθμοι μπορούν να παράγουν ικανοποιητικά αποτελέσματα με επαρκή

ακρίβεια. Εφόσον οι δύο αλγόριθμοι έβγαλαν τα ίδια αποτελέσματα η σύγκριση των δύο θα γίνει με βάση άλλα χαρακτηριστικά όπως οι επαναλήψεις που χρειάστηκαν να γίνουν. Παρατηρείται πως με τον αλγόριθμο Interior Point χρειάστηκαν αρκετά λιγότερες επαναλήψεις συγκεκριμένα 38 για να προκύψει το ίδιο ακριβώς αποτέλεσμα και επιπλέον όπως είναι και λογικό χρειάστηκαν λιγότεροι υπολογισμοί της αντικειμενικής συνάρτησης. Επομένως ο αλγόριθμος Interior Point έχει μικρότερο υπολογιστικό κόστος και προσφέρει το ίδιο ικανοποιητικά αποτελέσματα με τον S.Q.P. σε λιγότερο χρόνο, άρα είναι αυτός ο οποίος επιλέγεται για την συνέχιση της εφαρμογής.

## **5.5 Βελτιστοποιήσεις με μειωμένη την επιφανειακή τροφοδοσία**

Στο παρόν υποκεφάλαιο πραγματοποιούνται βελτιστοποιήσεις χρησιμοποιώντας τα πραγματικά δεδομένα, αλλά μειώνοντας ποσοστιαία την επιφανειακή τροφοδοσία, προκειμένου να εντοπιστεί η ευαισθησία στην μεταβολή των παροχών άντλησης όταν μειώνεται η επιφανειακή άντληση. Στα παρακάτω υποκεφάλαια φαίνονται αναλυτικά τα αποτελέσματα που προέκυψαν από αυτή την διαδικασία.

### **5.5.1 Βελτιστοποίηση με τον αλγόριθμο Interior Point για μείωση της επιφανειακής τροφοδοσίας 10%**

Πραγματοποιήθηκε βελτιστοποίηση χρησιμοποιώντας τα υπάρχοντα πραγματικά δεδομένα, μειώνοντας κατά 10% την επιφανειακή τροφοδοσία προκειμένου να εξεταστεί η ευαισθησία στην αλλαγή των παροχών όταν μειώνεται η τροφοδοσία. Τα αποτελέσματα που προέκυψαν είναι τα παρακάτω:

Πίνακας: Αρχικές τιμές των παροχών άντλησης

	Πεδίο ορισμού μεταβλητών		Αρχικές τιμές μεταβλητών
	Κάτω όριο	Άνω όριο	
Παροχή (m <sup>3</sup> /d)	0	2000	50



Πίνακας: Παράμετροι για την εφαρμογή της μεθόδου interior point.

Μέγιστος αριθμός αξιολογήσεων της αντικειμ. συνάρτ.	DiffMax Change	DiffMin Change	Επανάλ. που εντοπίζεται η βέλτ. λύση	Τελικός αριθμός αξιολογήσεων της αντικειμ. συνάρτ.
3000	5	0.5	64	831

Πίνακας: Βέλτιστες τιμές παροχών άντλησης (m<sup>3</sup>/d)

BΓ1	BΓ3	BΓ2	BΓ4	BΓ5	BΓ6	BΓ8	ΥΚ4	BΓ7	BΓ9	ΥΚ3	SUM
667,2	608,5	584,7	383,2	344,3	357,3	342,7	478,8	289,8	473,4	489,4	<b>5019,1</b>

### 5.5.2 Βελτιστοποίηση με τον αλγόριθμο Interior Point για μείωση της επιφανειακής τροφοδοσίας 20%

Πραγματοποιήθηκε βελτιστοποίηση χρησιμοποιώντας τα υπάρχοντα πραγματικά δεδομένα, μειώνοντας κατά 20% την επιφανειακή τροφοδοσία προκειμένου να εξεταστεί η ευαισθησία στην αλλαγή των παροχών όταν μειώνεται η τροφοδοσία. Τα αποτελέσματα που προέκυψαν είναι τα παρακάτω:

Πίνακας: Αρχικές τιμές των παροχών άντλησης

	Πεδίο ορισμού μεταβλητών		Αρχικές τιμές μεταβλητών
	Κάτω όριο	Άνω όριο	
Παροχή (m <sup>3</sup> /d)	0	2000	50

Πίνακας: Παράμετροι για την εφαρμογή της μεθόδου interior point.

Μέγιστος αριθμός αξιολογήσεων της αντικειμ. συνάρτ.	DiffMax Change	DiffMin Change	Επανάλ. που εντοπίζεται η βέλτ. λύση	Τελικός αριθμός αξιολογήσεων της αντικειμ. συνάρτ.
3000	5	0.5	73	956

Πίνακας: Βέλτιστες τιμές παροχών άντλησης (m<sup>3</sup>/d)

BΓ1	BΓ3	BΓ2	BΓ4	BΓ5	BΓ6	BΓ8	ΥΚ4	BΓ7	BΓ9	ΥΚ3	SUM
610,4	526,1	537,8	329,3	302,9	315,9	309,1	427,5	257,4	422,5	435,2	<b>4474,1</b>

### 5.5.3 Βελτιστοποίηση με τον αλγόριθμο Interior Point για μείωση της επιφανειακής τροφοδοσίας 30%

Πραγματοποιήθηκε βελτιστοποίηση χρησιμοποιώντας τα υπάρχοντα πραγματικά δεδομένα, μειώνοντας κατά 30% την επιφανειακή τροφοδοσία προκειμένου να εξεταστεί η ευαισθησία στην αλλαγή των παροχών όταν μειώνεται η τροφοδοσία. Τα αποτελέσματα που προέκυψαν είναι τα παρακάτω:

Πίνακας: Αρχικές τιμές των παροχών άντλησης

	Πεδίο ορισμού μεταβλητών		Αρχικές τιμές μεταβλητών
	Κάτω όριο	Άνω όριο	
Παροχή (m <sup>3</sup> /d)	0	2000	50

Πίνακας: Παράμετροι για την εφαρμογή της μεθόδου interior point.

Μέγιστος αριθμός αξιολογήσεων της αντικειμ. συνάρτ.	DiffMax Change	DiffMin Change	Επανάλ. που εντοπίζεται η βέλτ. λύση	Τελικός αριθμός αξιολογήσεων της αντικειμ. συνάρτ.
3000	5	0.5	68	898

Πίνακας: Βέλτιστες τιμές παροχών άντλησης (m<sup>3</sup>/d)

BΓ1	BΓ3	BΓ2	BΓ4	BΓ5	BΓ6	BΓ8	ΥΚ4	BΓ7	BΓ9	ΥΚ3	SUM
554,2	454,9	466,7	287,1	264,6	276,2	267,1	374,3	225,1	369,0	380,6	<b>3919,7</b>

#### 5.5.4 Βελτιστοποίηση με τον αλγόριθμο Interior Point για μείωση της επιφανειακής τροφοδοσίας 40%

Πραγματοποιήθηκε βελτιστοποίηση χρησιμοποιώντας τα υπάρχοντα πραγματικά δεδομένα, μειώνοντας κατά 40% την επιφανειακή τροφοδοσία προκειμένου να εξεταστεί η ευαισθησία στην αλλαγή των παροχών όταν μειώνεται η τροφοδοσία. Τα αποτελέσματα που προέκυψαν είναι τα παρακάτω:

Πίνακας: Αρχικές τιμές των παροχών άντλησης

	Πεδίο ορισμού μεταβλητών		Αρχικές τιμές μεταβλητών
	Κάτω όριο	Άνω όριο	
Παροχή (m <sup>3</sup> /d)	0	2000	50

Πίνακας: Παράμετροι για την εφαρμογή της μεθόδου interior point.

Μέγιστος αριθμός αξιολογήσεων της αντικειμ. συνάρτ.	DiffMax Change	DiffMin Change	Επανάλ. που εντοπίζεται η βέλτ. λύση	Τελικός αριθμός αξιολογήσεων της αντικειμ. συνάρτ.
3000	5	0.5	62	792

Πίνακας: Βέλτιστες τιμές παροχών άντλησης (m<sup>3</sup>/d)

ΒΓ1	ΒΓ3	ΒΓ2	ΒΓ4	ΒΓ5	ΒΓ6	ΒΓ8	ΥΚ4	ΒΓ7	ΒΓ9	ΥΚ3	SUM
455,5	403,6	388,9	254,8	229,8	238,6	228,9	319,7	193,7	316,2	327,2	<b>3356,9</b>

### 5.5.5 Βελτιστοποίηση με τον αλγόριθμο Interior Point για μείωση της επιφανειακής τροφοδοσίας 43%

Πραγματοποιήθηκε βελτιστοποίηση χρησιμοποιώντας τα υπάρχοντα πραγματικά δεδομένα, μειώνοντας κατά 43% την επιφανειακή τροφοδοσία προκειμένου να εξεταστεί η ευαισθησία στην αλλαγή των παροχών όταν μειώνεται η τροφοδοσία. Τα αποτελέσματα που προέκυψαν είναι τα παρακάτω:

Πίνακας: Αρχικές τιμές των παροχών άντλησης

	Πεδίο ορισμού μεταβλητών		Αρχικές τιμές μεταβλητών
	Κάτω όριο	Άνω όριο	
Παροχή (m <sup>3</sup> /d)	0	2000	0

Πίνακας: Παράμετροι για την εφαρμογή της μεθόδου interior point.

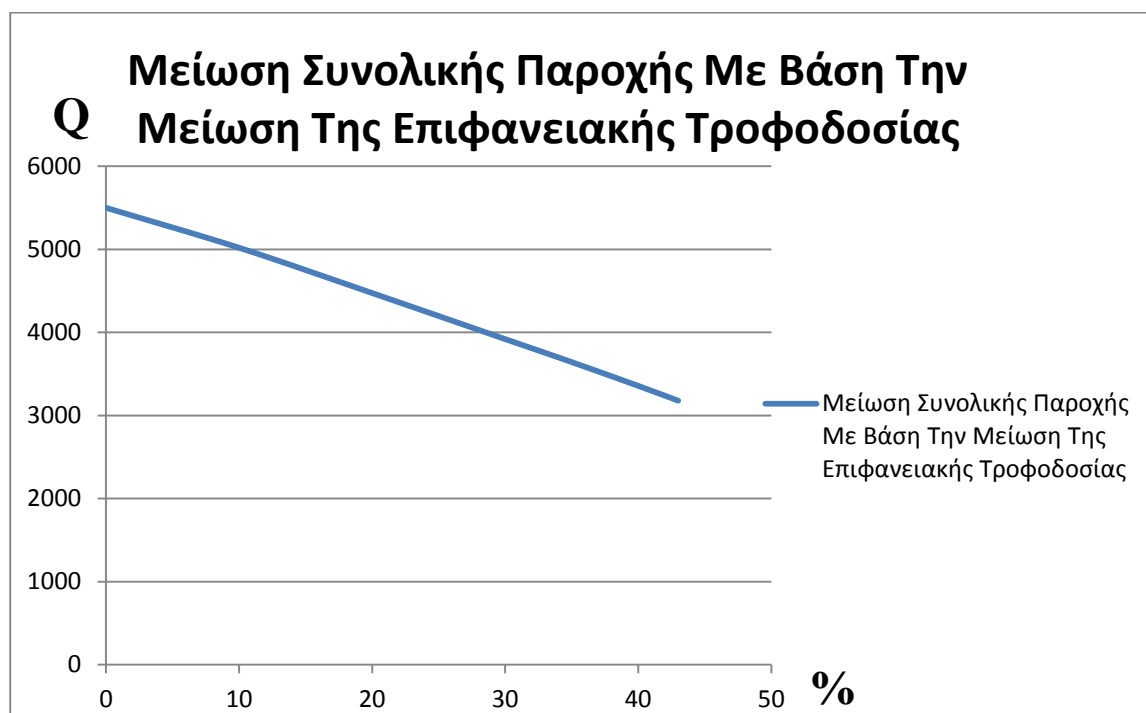
Μέγιστος αριθμός αξιολογήσεων της αντικειμ. συνάρτ.	DiffMax Change	DiffMin Change	Επανάλ. που εντοπίζεται η βέλτ. λύση	Τελικός αριθμός αξιολογήσεων της αντικειμ. συνάρτ.
3000	5	0.5	50	637

Πίνακας: Βέλτιστες τιμές παροχών άντλησης (m<sup>3</sup>/d)

ΒΓ1	ΒΓ3	ΒΓ2	ΒΓ4	ΒΓ5	ΒΓ6	ΒΓ8	ΥΚ4	ΒΓ7	ΒΓ9	ΥΚ3	SUM
353,0	341,0	345,4	313,2	244,3	243,4	223,0	306,3	190,0	302,5	316,7	<b>3178,8</b>

### 5.5.6 Συμπεράσματα που προέκυψαν από την μείωση της τροφοδοσίας

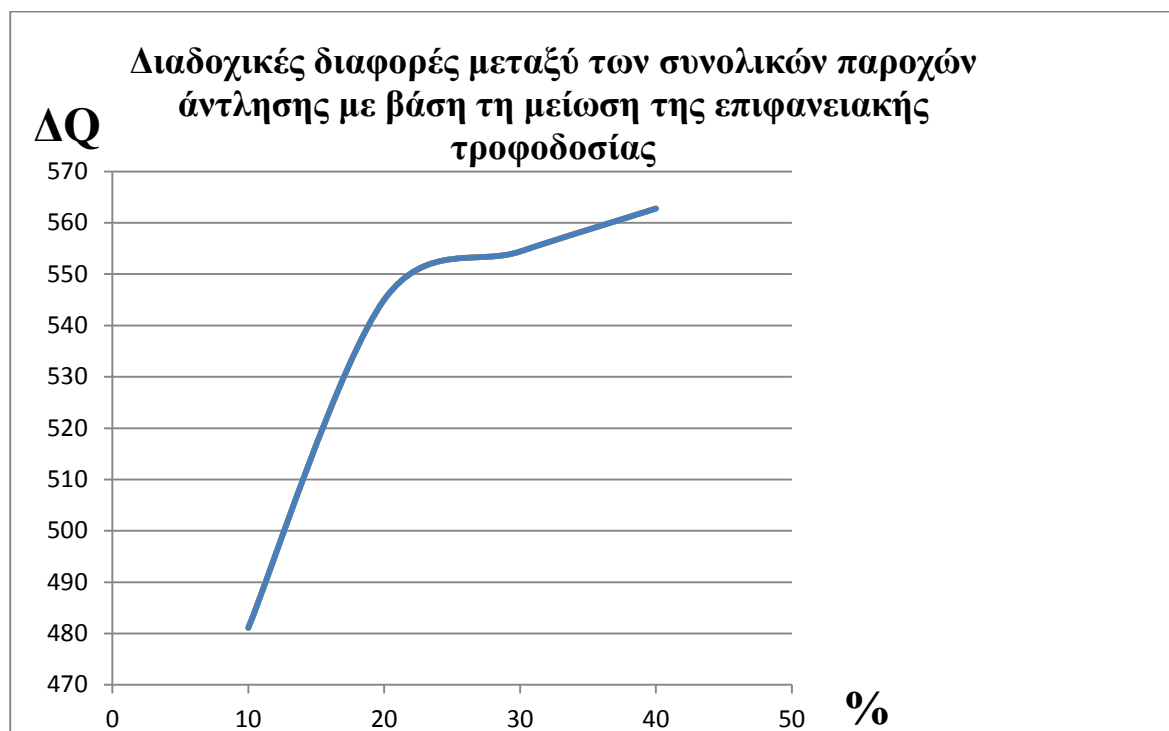
Παρατηρείται πως η επιφανειακή τροφοδοσία επηρεάζει αρκετά την συνολική άντληση από τα υπάρχοντα φρέατα, εφόσον οι μειώσεις στην συνολική παροχή δεν είναι καθόλου αμελητέες. Επιπλέον παρατηρείται πως υπάρχει μια σχεδόν γραμμική μείωση στην συνολική παροχή για μείωση μέχρι 43% της επιφανειακής τροφοδοσίας. Για μεγαλύτερη μείωση ο αλγόριθμος δεν παράγει αποτελέσματα διότι διακόπτεται λόγω των περιορισμών πριν προλάβει να φτάσει σε κάποιο ελάχιστο.



Σχήμα 5.7 : Μείωση της συνολικής παροχής με βάση την μείωση της επιφανειακής τροφοδοσίας.

Στο σχήμα 5.7 φαίνεται ότι η συνολική παροχή άντλησης μειώνεται εντελώς γραμμικά για μείωση μέχρι 43%, αυτό συμβαίνει λόγω της κλίμακας του σχήματος. Στην πραγματικότητα αυτό δεν συμβαίνει διότι αν παρατηρήσει κανείς τα αποτελέσματα οι διαδοχικές διαφορές μεταξύ των συνολικών παροχών άντλησης για

κάθε επιπλέον μείωση 10% αυξάνονται. Το φαινόμενο αυτό παρατηρείται καλύτερα στο σχήμα 5.8.



Σχήμα 5.8 : Διαδοχικές διαφορές μεταξύ των συνολικών παροχών άντλησης με βάση τη μείωση της επιφανειακής τροφοδοσίας

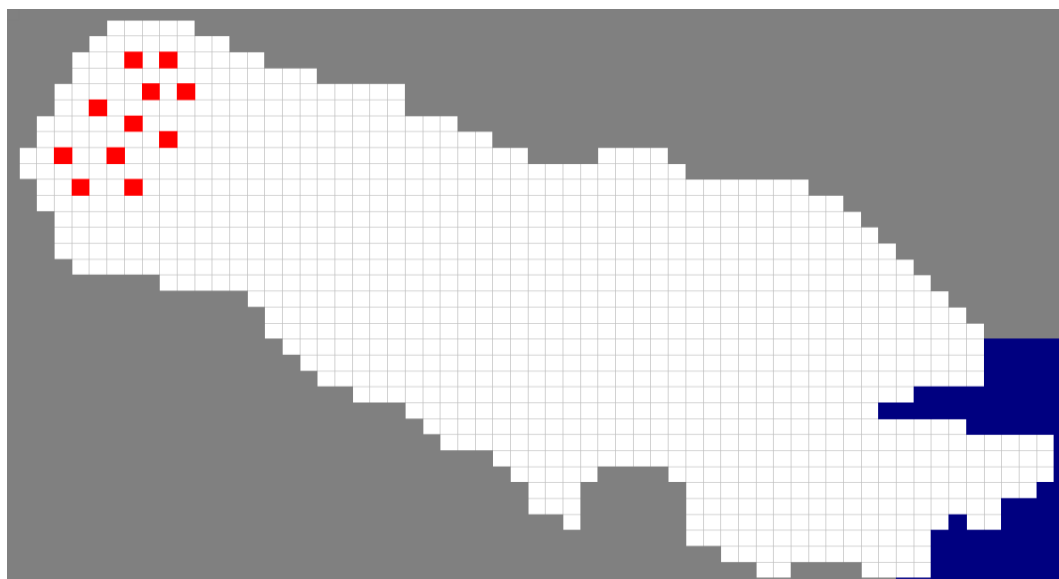
Όπως παρατηρείται στο παραπάνω σχήμα οι διαδοχικές διαφορές μεταξύ των παροχών άντλησης για κάθε επιπλέον μείωση 10% της επιφανειακής τροφοδοσίας αυξάνονται συνεχώς. Βέβαια επειδή η αύξηση αυτή είναι μικρή μπορεί να θεωρηθεί πως η μείωση των συνολικών παροχών άντλησης είναι σχεδόν γραμμική.

## 5.6 Διερεύνηση επιπτώσεων της θέσης των φρεάτων

Στο παρόν υποκεφάλαιο πραγματοποιούνται διάφορες μετατοπίσεις στις θέσεις των πηγαδιών καθώς και στην σχετική τους θέση μεταξύ τους, προκειμένου να εντοπιστεί η ευαισθησία στην μεταβολή της συνολικής παροχής μέσω της μεταβολής των θέσεων των πηγαδιών και το κατά πόσο παίζει ρόλο στην συνολική άντληση η θέση τους. Στα παρακάτω υποκεφάλαια γίνονται κάποια τυχαία παραδείγματα προκειμένου να προκύψει κάποιο συμπέρασμα.

### 5.6.1 Βελτιστοποίηση με τον αλγόριθμο Interior Point με αλλαγή της θέσης των φρεάτων 1

Στο συγκεκριμένο υποκεφάλαιο έγινε αλλαγή της θέσης των πηγαδιών, προκειμένου να ελεγχθεί η ευαισθησία της αλλαγής των παροχών άντλησης σε ενδεχόμενη αλλαγή των πηγαδιών, αλλά και προκειμένου να βρεθεί η βέλτιστη κατανομή και θέση αυτών. Στο συγκεκριμένο υποκεφάλαιο τα πηγάδια τοποθετήθηκαν όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 5.9 : Θέσεις γεωτρήσεων 1

Τα αποτελέσματα που προέκυψαν είναι τα παρακάτω:

Πίνακας: Αρχικές τιμές των παροχών άντλησης

	Πεδίο ορισμού μεταβλητών		Αρχικές τιμές μεταβλητών
	Κάτω όριο	Άνω όριο	
Παροχή (m <sup>3</sup> /d)	0	2000	50

Πίνακας: Παράμετροι για την εφαρμογή της μεθόδου interior point.

Μέγιστος αριθμός αξιολογήσεων της αντικειμ. συνάρτ.	DiffMax Change	DiffMin Change	Επανάλ. που εντοπίζεται η βέλτ. λύση	Τελικός αριθμός αξιολογήσεων της αντικειμ. συνάρτ.
5000	5	0.5	73	5001

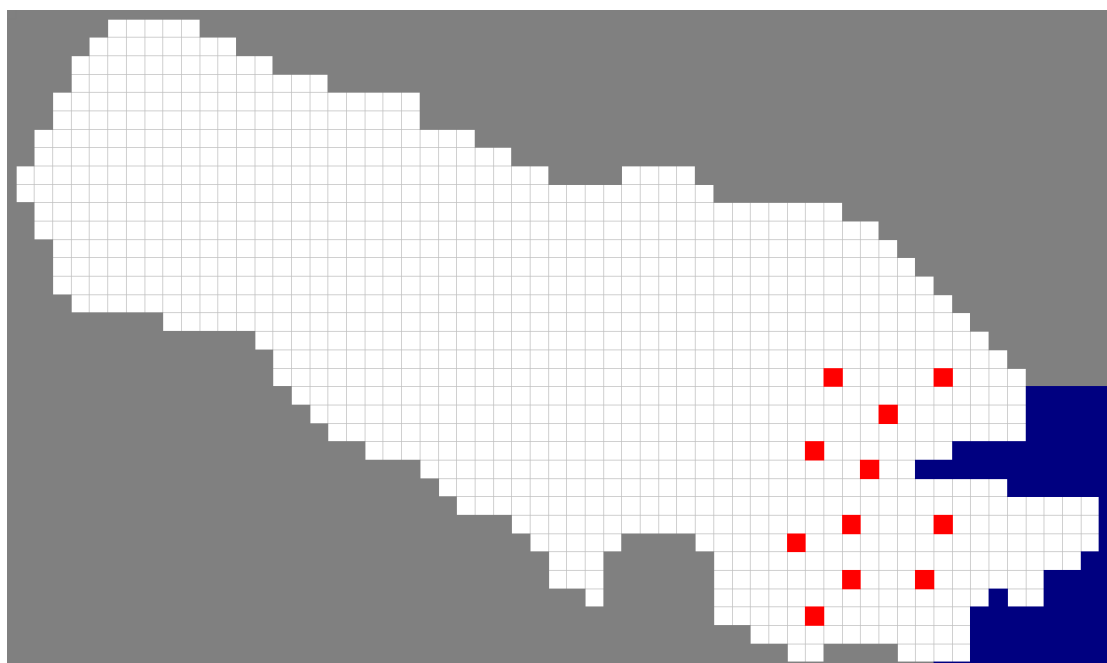
Πίνακας: Βέλτιστες τιμές παροχών άντλησης (m<sup>3</sup>/d)

ΒΓ1	ΒΓ3	ΒΓ2	ΒΓ4	ΒΓ5	ΒΓ6	ΒΓ8	ΥΚ4	ΒΓ7	ΒΓ9	ΥΚ3	SUM
80,1	129,3	240,9	369,2	291,2	366,1	293,2	448,0	467,6	284,4	338,2	<b>3308,3</b>

Όπως φαίνεται υπάρχει πολύ μεγάλη διαφορά στις επιμέρους παροχές αλλά και στην συνολική η οποία διαφέρει περίπου κατά 2200 m<sup>3</sup>/d. Οι διαφορές αυτές οφείλονται κυρίως στην πυκνή συγκέντρωση των γεωτρήσεων.

### 5.6.2 Βελτιστοποίηση με τον αλγόριθμο Interior Point με αλλαγή της θέσης των φρεάτων 2

Στο συγκεκριμένο υποκεφάλαιο έγινε αλλαγή της θέσης των πηγαδιών, προκειμένου να ελεγχθεί η ευαισθησία της αλλαγής των παροχών άντλησης σε ενδεχόμενη αλλαγή των πηγαδιών, αλλά και προκειμένου να βρεθεί η βέλτιστη κατανομή και θέση αυτών. Στο συγκεκριμένο υποκεφάλαιο τα πηγάδια τοποθετήθηκαν όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 5.10 : Θέσεις γεωτρήσεων 2



Τα αποτελέσματα που προέκυψαν είναι τα παρακάτω:

Πίνακας: Αρχικές τιμές των παροχών άντλησης

	Πεδίο ορισμού μεταβλητών		Αρχικές τιμές μεταβλητών
	Κάτω όριο	Άνω όριο	
Παροχή (m <sup>3</sup> /d)	0	2000	50

Πίνακας: Παράμετροι για την εφαρμογή της μεθόδου interior point.

Μέγιστος αριθμός αξιολογήσεων της αντικειμ. συνάρτ.	DiffMax Change	DiffMin Change	Επανάλ. που εντοπίζεται η βέλτ. λύση	Τελικός αριθμός αξιολογήσεων της αντικειμ. συνάρτ.
7000	5	0.5	73	4358

Πίνακας: Βέλτιστες τιμές παροχών άντλησης (m<sup>3</sup>/d)

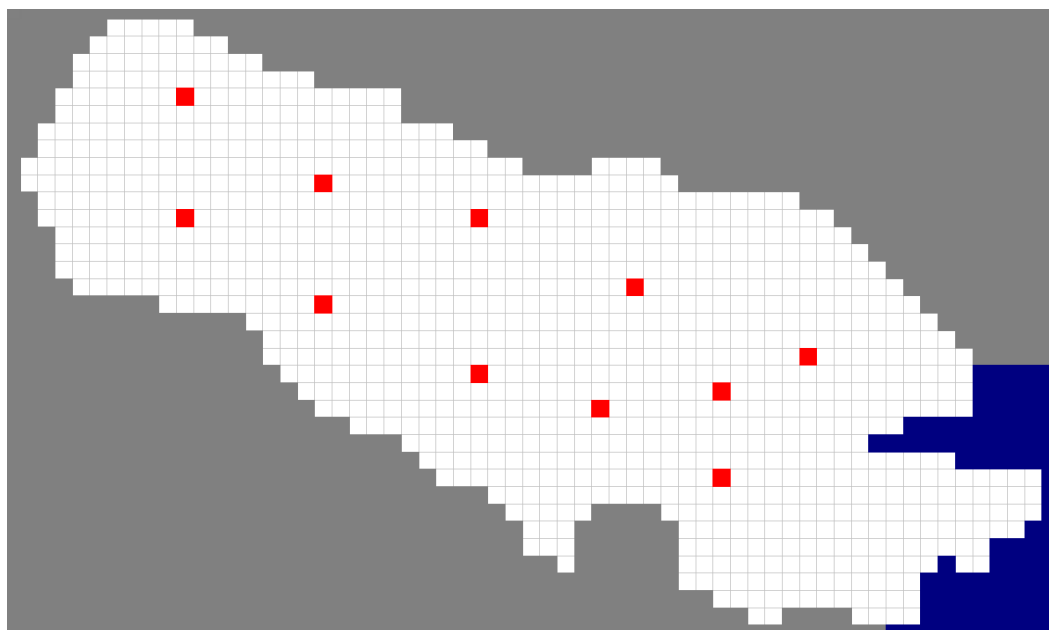
BΓ1	BΓ3	BΓ2	BΓ4	BΓ5	BΓ6	BΓ8	ΥΚ4	BΓ7	BΓ9	ΥΚ3	<b>SUM</b>
0,002	1999,9	0,003	0,002	0,003	0,003	0,010	0,002	0,004	0,008	0,003	<b>1999,9</b>

Όπως φαίνεται υπάρχει πολύ μεγάλη διαφορά στις επιμέρους παροχές συγκεκριμένα σχεδόν όλη η παροχή αντλείται από την γεώτρηση BΓ3, αλλά και στην συνολική η οποία διαφέρει περίπου κατά 3500 m<sup>3</sup>/d. . Οι διαφορές αυτές οφείλονται κυρίως στην πυκνή συγκέντρωση των γεωτρήσεων, καθώς και στην τοποθέτηση τους πολύ κοντά στην θάλασσα.

### 5.6.3 Βελτιστοποίηση με τον αλγόριθμο interior point με αλλαγή της θέσης των φρεάτων 3

Στο συγκεκριμένο υποκεφάλαιο έγινε αλλαγή της θέσης των πηγαδιών, προκειμένου να ελεγχθεί η ευαισθησία της αλλαγής των παροχών άντλησης σε ενδεχόμενη αλλαγή των πηγαδιών, αλλά και προκειμένου να βρεθεί η βέλτιστη κατανομή και θέση

αυτών. Στο συγκεκριμένο υποκεφάλαιο τα πηγάδια τοποθετήθηκαν όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 5.11 : Θέσεις γεωτρήσεων 3

Τα αποτελέσματα που προέκυψαν είναι τα παρακάτω:

Πίνακας: Αρχικές τιμές των παροχών άντλησης

	Πεδίο ορισμού μεταβλητών		Αρχικές τιμές μεταβλητών
	Κάτω όριο	Άνω όριο	
Παροχή (m <sup>3</sup> /d)	0	2000	50

Πίνακας: Παράμετροι για την εφαρμογή της μεθόδου interior point.

Μέγιστος αριθμός αξιολογήσεων της αντικειμ. συνάρτ.	DiffMax Change	DiffMin Change	Επανάλ. που εντοπίζεται η βέλτ. λύση	Τελικός αριθμός αξιολογήσεων της αντικειμ. συνάρτ.
3000	5	0.5	70	1007

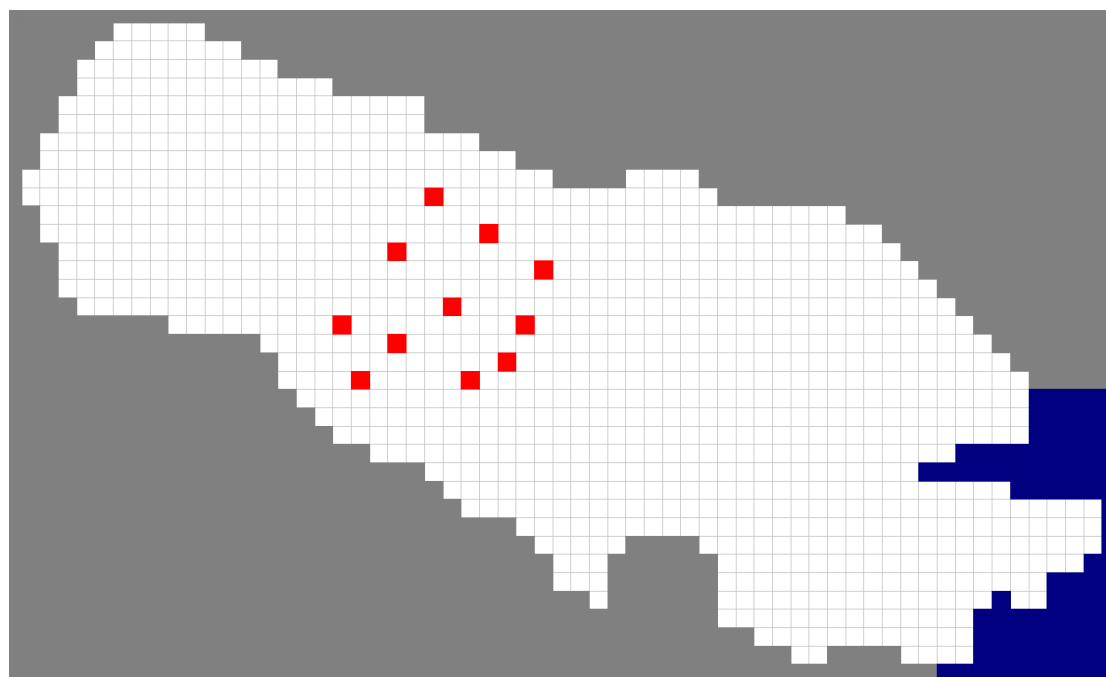
Πίνακας: Βέλτιστες τιμές παροχών άντλησης (m<sup>3</sup>/d)

ΒΓ1	ΒΓ3	ΒΓ2	ΒΓ4	ΒΓ5	ΒΓ6	ΒΓ8	ΥΚ4	ΒΓ7	ΒΓ9	ΥΚ3	SUM
665,3	625,1	669,1	547,7	538,4	713,6	451,8	588,1	376,4	449,9	627,5	<b>6252,8</b>

Παρατηρείται πως με αυτή την αλλαγή των θέσεων η συνολική παροχή αυξάνεται κατά 700 περίπου κυβικά μέτρα ανά ημέρα και αυτό διότι οι γεωτρήσεις είναι περισσότερο διεσπαρμένες πάνω στον υδροφορέα με αποτέλεσμα την μεγαλύτερη δυνατότητα άντλησης των περισσότερων.

#### 5.6.4 Βελτιστοποίηση με τον αλγόριθμο Interior Point με αλλαγή της θέσης των φρεάτων 4

Στο συγκεκριμένο υποκεφάλαιο έγινε αλλαγή της θέσης των πηγαδιών, προκειμένου να ελεγχθεί η ευαισθησία της αλλαγής των παροχών άντλησης σε ενδεχόμενη αλλαγή των πηγαδιών, αλλά και προκειμένου να βρεθεί η βέλτιστη κατανομή και θέση αυτών. Στο συγκεκριμένο υποκεφάλαιο τα πηγάδια τοποθετήθηκαν όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 5.12 : Θέσεις γεωτρήσεων 4

Τα αποτελέσματα που προέκυψαν είναι τα παρακάτω:

Πίνακας: Αρχικές τιμές των παροχών άντλησης

	Πεδίο ορισμού μεταβλητών		Αρχικές τιμές μεταβλητών
	Κάτω όριο	Άνω όριο	
Παροχή (m <sup>3</sup> /d)	0	2000	50

Πίνακας: Παράμετροι για την εφαρμογή της μεθόδου interior point.

Μέγιστος αριθμός αξιολογήσεων της αντικειμ. συνάρτ.	DiffMax Change	DiffMin Change	Επανάλ. που εντοπίζεται η βέλτ. λύση	Τελικός αριθμός αξιολογήσεων της αντικειμ. συνάρτ.
3000	5	0.5	62	794

Πίνακας: Βέλτιστες τιμές παροχών άντλησης (m<sup>3</sup>/d)

BΓ1	BΓ3	BΓ2	BΓ4	BΓ5	BΓ6	BΓ8	ΥΚ4	BΓ7	BΓ9	ΥΚ3	SUM
600,2	353,5	528,8	490,2	244,1	577,8	386,0	356,3	375,4	660,4	417,1	<b>4989,9</b>

Παρατηρείται μία μείωση της συνολικής παροχής περίπου κατά 1500m<sup>3</sup>/d η οποία είναι αρκετά μεγάλη και οφείλεται κυρίως στην συγκέντρωση όλων των γεωτρήσεων στο κέντρο του υδροφορέα, όμως αυτή η μείωση είναι η μικρότερη από τις προαναφερθείσες.

### 5.6.5 Συμπεράσματα από τις βελτιστοποιήσεις με τον αλγόριθμο Interior Point με αλλαγές στις θέσεις των φρεάτων

Το βασικό συμπέρασμα που προκύπτει από τα παραπάνω παραδείγματα που πραγματοποιήθηκαν είναι ότι η θέση των φρεάτων καθώς και η σχετική τους θέση μεταξύ τους αποτελεί έναν από τους πιο σημαντικούς παράγοντες που επηρεάζουν την συνολική παροχή άντλησης και την παροχή του κάθε φρεάτος. Ειδικότερα

παρατηρείται πως οι μεγαλύτερες αντλήσεις παρατηρούνται όταν τα φρέατα έχουν μεγάλη απόσταση μεταξύ τους καθώς και όταν βρίσκονται ομοιόμορφα κατανεμημένα στην επιφάνεια του υδροφορέα. Ένας άλλος παράγοντας που παίζει ρόλο είναι η απόσταση των φρεάτων από την θάλασσα, όσο μεγαλύτερη είναι η απόσταση τους τόσο μεγαλύτερη είναι η παροχή άντλησης τους, το οποίο είναι λογικό λόγω του περιορισμού της υφαλμύρωσης που έχει τεθεί. Επομένως η υπάρχουσα τοποθέτηση των φρεάτων κρίνεται ικανοποιητική, παρόλα αυτά έχει αρκετά περιθώρια βελτίωσης, εφόσον από το παράδειγμα τρία φαίνεται ότι με μια πιο ομοιόμορφη και αραιή τοποθέτηση τους αμέσως η συνολική παροχή τους αυξάνεται κατά 700 m<sup>3</sup>/d. Πιο αποτελεσματικός τρόπος για την εύρεση των βέλτιστων θέσεων είναι η γραφή προγράμματος το οποίο χρησιμοποιώντας αυτούς τους αλγόριθμους θα εξάγει ως αποτέλεσμα και τις βέλτιστες θέσεις των φρεάτων, βέβαια αυτή η διαδικασία δεν θα αναλυθεί στην παρούσα διπλωματική.

## **5.7 Συμπεράσματα**

Συνοψίζοντας το πρώτο συμπέρασμα που προκύπτει είναι πως ο αλγόριθμος Interior Point και ο S.Q.P. παράγουν αποτελέσματα τα οποία είναι πολύ κοντά μεταξύ τους, βέβαια ο Interior Point μπορεί να τα παράγει σε λιγότερο χρόνο και με λιγότερους υπολογισμούς γι' αυτό τον λόγο είναι και αυτός που επιλέχθηκε για την συνέχεια της εφαρμογής στον υδροφορέα του Βαθέως της Καλύμνου.

Το δεύτερο συμπέρασμα που προκύπτει είναι πως η μείωση της επιφανειακής τροφοδοσίας επηρεάζει αρκετά την συνολική άντληση και πιο συγκεκριμένα, υπάρχει μία σχεδόν γραμμική μείωση της συνολικής παροχής με βάση την μείωση της επιφανειακής τροφοδοσίας. Αυτή η σχεδόν γραμμική μείωση ισχύει για μείωση μέχρι 43% διότι για μεγαλύτερες μειώσεις ο αλγόριθμος δεν παράγει αποτελέσματα. Όπως φαίνεται και από το σχήμα 5.7 η κλίση της ευθείας είναι σταθερή που σημαίνει πως μειώνεται γραμμικά η συνολική παροχή άντλησης, ενώ στην πραγματικότητα όπως προκύπτει από το σχήμα 5.8 δεν μειώνεται εντελώς γραμμικά αλλά λόγω της κλίμακας του σχήματος φαίνεται αυτή η γραμμική μείωση. Όμως επειδή η αύξηση της μείωσης είναι μικρή μπορεί να θεωρηθεί πως η μείωση των συνολικών παροχών άντλησης είναι σχεδόν γραμμική.

Τέλος από τις διάφορες τοποθετήσεις των γεωτρήσεων προκύπτει ότι η θέση των φρεάτων είναι μέγιστης σημασίας για την συνολική παροχή άντλησης και πως η βέλτιστη τοποθέτηση τους είναι κατά τέτοιο τρόπο έτσι ώστε να βρίσκονται ομοιόμορφα τοποθετημένα σε όλο το μήκος και πλάτος του υδροφορέα, ενώ η χειρότερη να βρίσκονται συγκεντρωμένα κοντά στην άκρη της θάλασσας. Επομένως η παρούσα πραγματική τοποθέτηση τους κρίνεται αρκετά ικανοποιητική, βέβαια μπορούν να γίνουν αλλαγές οι οποίες θα επιτρέψουν την μεγαλύτερη συνολική άντληση.

## **6. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ**

Στο παρόν κεφάλαιο θα παρουσιαστούν συγκεντρωμένα τα συμπεράσματα που προέκυψαν από την συγκεκριμένη εργασία. Αρχικά γίνεται μια αναφορά στην υφαλμύρωση και στα συμπεράσματα που προέκυψαν για την αντιμετώπιση της, ακολουθεί η παρουσίαση των συμπερασμάτων που προέκυψαν από τα μοντέλα προσομοίωσης της υφαλμύρωσης, και θα γίνει μια σύγκριση τους προκειμένου να εξαχθούν παραπάνω συμπεράσματα. Έπειτα γίνεται μία παρουσίαση των συμπερασμάτων που προέκυψαν από τους αλγόριθμους βελτιστοποίησης και πραγματοποιείται μια σύγκριση τους. Τέλος αναλύονται τα συμπεράσματα που προέκυψαν από την εφαρμογή στον παράκτιο υδροφορέα, εφαρμόζοντας μειώσεις στην επιφανειακή τροφοδοσία και αλλάζοντας τις θέσεις των πηγαδιών.

### **6.1 Υφαλμύρωση παράκτιων υπόγειων υδροφορέων-Μοντέλα προσομοίωσης υφαλμύρωσης**

Ως υφαλμύρωση σε έναν παράκτιο υπόγειο υδροφορέα ορίζεται η εισροή θαλασσινού νερού με αποτέλεσμα την ανάμειξη του νερού με αλάτι και την υποβάθμιση της ποιότητας του. Το φαινόμενο της υφαλμύρωσης παρατηρείται σε αρκετούς παράκτιους υδροφορείς οι οποίοι βρίσκονται κυρίως σε περιοχές με υψηλή ζήτηση νερού για την κάλυψη των αναγκών της περιοχής σε ύδρευση και άρδευση. Έχουν εφαρμοσθεί και προταθεί διάφοροι τρόποι αντιμετώπισης για την αντιμετώπιση της υφαλμύρωσης, ο πιο αποτελεσματικός όλων είναι η πρόληψη σε αυτό το πρόβλημα έτσι ώστε να αντλείται η κατάλληλη ποσότητα νερού η οποία μπορεί φυσικά να αναπληρωθεί χωρίς την δημιουργία προβλημάτων στον υδροφορέα και στο οικοσύστημα.

Προκειμένου να μελετηθεί το φαινόμενο της υφαλμύρωσης και να αναπαρασταθεί ο υδροφορέας για να μελετηθεί είναι αναγκαία η ανάπτυξη μοντέλων προσομοίωσης. Τα μοντέλα προσομοίωσης που υπάρχουν στηρίζονται σε δύο θεωρήσεις είτε στην θεώρηση απότομης διεπιφάνειας (sharp interface), είτε στην θεώρηση ύπαρξης ζώνης ανάμειξης και διάχυσης άλατος (variable density).

Η θεώρηση που χρησιμοποιείται πιο συχνά και είναι και αυτή που θα χρησιμοποιηθεί στην παρούσα εργασία είναι η θεώρηση της απότομης διεπιφάνειας. Αυτό συμβαίνει

λόγω της απλότητας της εν συγκρίσει με αυτή της υπόγειας ροής μεταβλητής πυκνότητας, η οποία είναι ιδιαίτερα πολύπλοκη και έχει αρκετούς υπολογισμούς. Η θεώρηση της απότομης διεπιφάνειας μπορεί να προσεγγιστεί με τρεις τρόπους. Την προσέγγιση Ghyben – Herzberg, την ανάλυση κατά Strack και το μοντέλο Mantoglou et al (2004), το οποίο είναι αυτό το οποίο χρησιμοποιείται στην παρούσα εργασία. Σύμφωνα με αυτό το μοντέλο ο παράκτιος φρεάτιος υδροφορέας μπορεί να μελετηθεί απλοποιημένα ως ένας τυπικός περιορισμένος υδροφορέας με μεταφορικότητα ίση με την υδραυλική αγωγιμότητα του φρεάτιου.

## **6.2 Βελτιστοποίηση αντλήσεων υπόγειων παράκτιων υδροφορέων**

Το πρόβλημα βελτιστοποίησης που αναφέρεται στην παρούσα εργασία αφορά την εύρεση της βέλτιστης παροχής άντλησης από συγκεκριμένο αριθμό φρεάτων. Είναι ένα μη γραμμικό πρόβλημα βελτιστοποίησης με περιορισμούς όπως η αποφυγή της υφαλμύρωσης του νερού. Στην παρούσα εργασία οι μέθοδοι που θα χρησιμοποιηθούν είναι η μέθοδος του Ακολουθιακού Τετραγωνικού Προγραμματισμού – Sequential Quadratic Programming (S.Q.P.) και αυτή του Εσωτερικού Σημείου (Interior point).

Σε ότι αφορά στη μέθοδο S.Q.P., αποδίδονται πρώτα οι αρχικές τιμές των μεταβλητών απόφασης από το μελετητή και οριοθετείται το πεδίο ορισμού τους. Έπειτα από την εκτέλεση μίας επαναληπτικής διαδικασίας το πρόγραμμα συγκλίνει στη βέλτιστη λύση. Απαραίτητη προϋπόθεση αποτελεί η συνέχεια και η παραγωγισιμότητα της αντικειμενικής συνάρτησης. Σε κάθε επανάληψη υπολογίζονται οι παράγωγοι της αντικειμενικής συνάρτησης και των περιορισμών ως προς τις μεταβλητές απόφασης. Προσδιορίζεται η κατεύθυνση  $d_k$  διερεύνησης για τον εντοπισμό της βέλτιστης λύσης, έπειτα ορίζεται το βήμα διερεύνησης. Η βελτιστοποίηση ολοκληρώνεται όταν ικανοποιηθεί κάποιο από τα κριτήρια τερματισμού που έχει ορίσει ο μελετητής.

Η μέθοδος Interior Point για να λυθεί χρησιμοποιεί ένα κατά προσέγγιση πρόβλημα με το οποίο οι περιορισμοί μετατρέπονται σε ισότητες και το οποίο στην ουσία είναι μια ακολουθία από προβλήματα ελαχιστοποίησης. Για να λυθεί το πρόβλημα ο αλγόριθμος χρησιμοποιεί δύο ήδη βημάτων το άμεσο και το CG τα οποία χρησιμοποιούνται κατά περίπτωση. Ο αλγόριθμος ξεκινά χρησιμοποιώντας το άμεσο και στην περίπτωση που δεν μπορεί αυτό χρησιμοποιεί το CG. Επιπλέον ο



αλγόριθμος όπως και ο S.Q.P. χρησιμοποιεί μία συνάρτηση αξίας την οποία μειώνει σε κάθε επανάληψη.

Η σύγκριση των δύο αλγορίθμων έγινε πρακτικά πραγματοποιώντας βελτιστοποιήσεις και με τους δύο με τα ίδια ακριβώς δεδομένα στον υδροφορέα της Καλύμνου και συγκρίνοντας τα αποτελέσματα. Τα αποτελέσματα που προέκυψαν και με τους δύο αλγορίθμους είναι σχεδόν ίδια με ελάχιστες διαφορές στα δεκαδικά ψηφία. Επομένως και οι δύο αλγόριθμοι έχουν την ίδια ακρίβεια και μπορούν να παράγουν αρκετά αξιόπιστα αποτελέσματα. Παρόλα αυτά ο αλγόριθμος Interior Point κατέληξε στα ίδια αποτελέσματα σε λιγότερο χρόνο, με λιγότερες επαναλήψεις από ότι ο S.Q.P. και πιο συγκεκριμένα ο Interior Point χρειάστηκε 88 επαναλήψεις ενώ ο S.Q.P. 126. Αυτός είναι ο λόγος που επιλέχθηκε ο αλγόριθμος Interior Point ως καταλληλότερος από τον S.Q.P. και γι' αυτό το λόγο αυτός είναι που χρησιμοποιήθηκε στην συνέχεια της εφαρμογής στον υπόγειο παράκτιο υδροφορέα της Καλύμνου.

Για την πραγματοποίηση βελτιστοποίησης αντλήσεων σε παράκτιους υπόγειους υδροφορείς απαιτείται η συνεργασία των βελτιστοποίησης και του μοντέλου προσομοίωσης. Για την συνεργασία αυτών των δύο και την τήρηση των περιορισμών είναι αναγκαίο να συνταχθεί σε περιβάλλον MATLAB ένα σύνολο προγραμμάτων. Τα προγράμματα βελτιστοποίησης περιλαμβάνουν τα αρχεία της αντικειμενικής συνάρτησης, των περιορισμών καθώς και των παραμέτρων εκτέλεσης και τερματισμού του προγράμματος.

### **6.3 Εφαρμογή στον παράκτιο υδροφορέα στο Βαθύ Καλύμνου**

Στον υδροφορέα του Βαθέως αρχικά πραγματοποιήθηκαν βελτιστοποιήσεις χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο Interior Point και τα πραγματικά παρόντα δεδομένα του υδροφορέα, μειώνοντας όμως σταδιακά ποσοστιαία την επιφανειακή τροφοδοσία προκειμένου να ελεγχθεί η ευαισθησία στην αλλαγή των παροχών άντλησης με βάση την αλλαγή της επιφανειακής τροφοδοσίας. Το συμπέρασμα που προέκυψε είναι ότι η μείωση της επιφανειακής τροφοδοσίας επηρεάζει αρκετά την συνολική άντληση και πιο συγκεκριμένα, υπάρχει μία σχεδόν γραμμική μείωση της συνολικής παροχής με βάση την μείωση της επιφανειακής τροφοδοσίας. Αυτή η σχεδόν γραμμική μείωση

ισχύει για μείωση μέχρι 43% διότι για μεγαλύτερες μειώσεις ο αλγόριθμος δεν παράγει αποτελέσματα.

Στην συνέχεια πραγματοποιήθηκαν βελτιστοποιήσεις χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο Interior Point και τα πραγματικά παρόντα δεδομένα του υδροφορέα, αλλάζοντας βέβαια τις θέσεις των φρεάτων πάνω στον υδροφορέα, προκειμένου να ελεγχθεί η ευαισθησία στην αλλαγή της παροχής άντλησης με βάση την αλλαγή της θέσης των φρεάτων. Πραγματοποιήθηκαν 4 βελτιστοποιήσεις με αλλαγή της θέσης των φρεάτων, στις τρεις τα φρέατα ήταν είχαν μικρή απόσταση μεταξύ τους και βρίσκονταν σε διάφορα σημεία του υδροφορέα, ενώ στην μια περίπτωση τα φρέατα ήταν απλωμένα διάσπαρτα σε όλο το μήκος του υδροφορέα. Με βάση τα αποτελέσματα τα οποία προέκυψαν η μεγαλύτερη συνολική παροχή παρουσιάζεται στην περίπτωση 3 όπου τα φρέατα είναι διεσπαρμένα σε όλο το μήκος και το πλάτος του υδροφορέα. Αντίθετα η μικρότερη συνολική παροχή παρουσιάζεται στην περίπτωση 2 όπου τα φρέατα βρίσκονται συγκεντρωμένα κοντά στην θάλασσα, αποτέλεσμα αρκετά λογικό λόγω της μη τήρησης των περιορισμών για αποφυγή της υφαλμύρωσης σε τόσο κοντινές αποστάσεις από την θάλασσα. Από τις περιπτώσεις 1 και 4 βέλτιστη είναι η 4 όπου τα φρέατα είναι συγκεντρωμένα στο κέντρο του υδροφορέα και όχι στην άκρη του.

Το βασικό συμπέρασμα που προκύπτει από τα παραπάνω παραδείγματα που πραγματοποιήθηκαν είναι ότι η θέση των φρεάτων καθώς και η σχετική τους θέση μεταξύ τους αποτελεί έναν από τους πιο σημαντικούς παράγοντες που επηρεάζουν την συνολική παροχή άντλησης και την παροχή του κάθε φρεάτος. Ειδικότερα παρατηρείται πως οι μεγαλύτερες αντλήσεις παρατηρούνται όταν τα φρέατα έχουν μεγάλη απόσταση μεταξύ τους καθώς και όταν βρίσκονται ομοιόμορφα κατανομημένα στην επιφάνεια του υδροφορέα. Ένας άλλος παράγοντας που παίζει ρόλο είναι η απόσταση των φρεάτων από την θάλασσα, όσο μεγαλύτερη είναι η απόσταση τους τόσο μεγαλύτερη είναι η παροχή άντλησης τους, το οποίο είναι λογικό λόγω του περιορισμού της υφαλμύρωσης που έχει τεθεί. Επομένως η υπάρχουσα τοποθέτηση των φρεάτων κρίνεται ικανοποιητική, παρόλα αυτά έχει αρκετά περιθώρια βελτίωσης, εφόσον από το παράδειγμα τρία φαίνεται ότι με μια πιο ομοιόμορφη και αραιή τοποθέτηση τους αμέσως η συνολική παροχή τους αυξάνεται κατά 700 m<sup>3</sup>/d. Βέβαια ο πιο αποτελεσματικός τρόπος για την εύρεση των βέλτιστων θέσεων είναι η γραφή προγράμματος το οποίο χρησιμοποιώντας αυτούς τους

αλγόριθμους θα εξάγει ως αποτέλεσμα και τις βέλτιστες θέσεις των φρεάτων, όμως αυτή η διαδικασία δεν θα αναλυθεί στην παρούσα διπλωματική.

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

### Αγγλόφωνη Βιβλιογραφία

1. Ahlfeld D.P. and Sawyer C.S., “Well Location in Capture Zone Design Using Simulation and Optimization Techniques”, *Ground Water*, 28(4), pp.507-512, 1990.
2. Ahlfeld D.P. and Heidari M., “Applications of Optimal Hydraulic Control to Ground-Water Systems”, *J. Water Resources Planning and Management*, 120(3), pp.350-365, 1994.
3. Aoki M., “Introduction to Optimization Techniques Fundamentals and Applications of Nonlinear Programming”, Editions The Macmillan Company 1971.
4. Bear J., “Hydraulics of Groundwater”, Mcgraw-Hill, New York 1979.
5. Cheng A.H.-D., Halhal D., Naji A. and Ouazar D., “Pumping Optimization in Saltwater-Intruded Coastal Aquifers”, *Water Resources Research*, 36(8), pp.2155-2165, 2000.
6. Cheng A.H.-D. & Ouazar D., “Analytical Solutions”, in “Seawater Intrusion in Coastal Aquifers – Concepts, Methods and Practices”, J. Bear, A.H.-D. Cheng, S.Sorek, D.Ouazar and I.Herrera (Eds), Kluwer Academic Publishers 1999.
7. Das A. and Datta B., “Development of Multiobjective Management Models for Coastal Aquifers”, *J. Water Resources Planning and Management*, 125(2), pp.76-87, 1999.
8. Das A. and Datta B., “Development of Management Models for Sustainable Use of Coastal Aquifers”, *J. Irrigation and Drainage Engineering*, 125(3), pp.112-121, 1999.
9. Emch P.G. and Yeh W.W.-G., “Management Model for Conjunctive Use of Coastal Surface Water and Ground Water”, *J. Water Resources Planning and Management*, 124(3), pp.129-139, 1998.
10. Fletcher R., “A New Approach to Variable Metric Algorithms”, *Computer Journal*, 13, p.p.317-322, 1970.

11. Fletcher R., "Practical Methods of Optimization", Edition John Wiley & Sons, 1987.
12. Gill P.E., Murray W., Saunders M.A, Wright M.H., "Procedures for Optimization Problems with a Mixture of Bounds and General Linear Constraints", ACM Trans. Math. Software, 10, p.p.282-298, 1984
13. Gorelick S.M. and Clifford I.V., "Aquifer Reclamation Design: The Use of Contaminant Transport Simulation Combined With Nonlinear Programming", Water Resources Research, 20(4), pp.415-427, 1984.
14. Gorelick S.M., "A Review of Distributed Parameter Groundwater Management Modeling Methods", Water Resources Research, 19(2), pp.305-319, 1983.
15. Hallaji K. and Yazicigil H., "Optimal Management of a Coastal Aquifer in Southern Turkey", J. Water Resources Planning and Management, 122(4), pp.233-244, 1996.
16. Karterakis SM, Karatzas GP, Papadopoulou IKNMP "Application of linear programming and differential evolutionary optimization methodologies for the solution of coastal subsurface water management problems subject to environmental criteria", 2007.
17. Kourakos G, Mantoglou "A Pumping optimization of coastal aquifers based on evolutionary algorithms and surrogate modular neural network models", 2009.
18. Luenberger D.G., "Linear and Nonlinear Programming", Addison-Wesley Publishing Company, 1989.
19. Mantoglou A., Papantoniou M. & Giannouloupoulos P., 'Management of coastal Aquifers based on nonlinear optimization and evolutionary algorithms', Journal of Hydrology, pp.209-228, 2004.
20. Mantoglou, A., Pumping management of coastal aquifers using analytical models of saltwater intrusion, Water Resour. Res., 39(12), 1335, 2003.
21. Marshak S. Earth Portrait of a Planet, 2nd Edition, 2005
22. Mcdonald M.G. and HARBAUGH A.W., "A Modular Three-Dimensional Finite-Difference Ground-Water Flow Model", Chapter AI, Book 6, USGS 1988.
23. "Optimization Toolbox, For Use with Matlab", User's Guide, Constrained Nonlinear Optimization Algorithms, 2015.

24. Park CH, Aral MM “Multi-objective optimization of pumping rates and well placement in coastal aquifers”, 2004.
25. Rao S, Thandaveswara B, Sudheer K “Planning groundwater development in coastal aquifers”, 2004.
26. Shamir U. and Bear J., Gamliel A., “Optimal Annual Operation of a Coastal Aquifer”, Water Resources Research, 20(4), pp.435-444, 1984.
27. Strack O.D.L., “A Single-Potential Solution for Regional Interface Problems in Coastal Aquifers”, Water Resources Research, 12(6), p.p.1165-1174, 1976.
28. Wang W. and Ahlfeld D.P., “Optimal Groundwater Remediation with Well Location as a Decision Variable : Model Development”, Water Resources Research, 30(5), pp.1605-1618, 1994.

## Ελληνική Βιβλιογραφία

29. Γιαννουλόπουλος Γ. Κ., “Υπόγεια Υδραυλική και Μαθηματικά Μοντέλα στο Αργολικό Πεδίο”, Διδακτορική Διατριβή, Γεωπονικό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Αξιοποίησης Φυσικών Πόρων & Γεωργικής Μηχανικής, Αθήνα 2000.
30. Μαντόγλου Α., Γιαννουλόπουλος Π., “Βελτιστοποίηση Αντλήσεων Παράκτιων Υδροφορέων και Πρόληψη Υφαλμύρωσης”, Πρακτικά Συμποσίου “Αιγαίο-Νερό-Βιώσιμη Ανάπτυξη”, Πάρος 2001.
31. Νάνου-Γιάνναρου Α. “Υφαλμύρωση Παράκτιων Υδροφορέων”, ΣΥΜΠΟΣΙΟ «ΑΙΓΑΙΟ-ΝΕΡΟ-ΒΙΩΣΙΜΗ ΑΝΑΠΤΥΞΗ», Πάρος 2001
32. Παπαντωνίου Μ., “Διαχείριση Παράκτιων Υδροφορέων - Βελτιστοποίηση Αντλήσεων”, Μεταπτυχιακή Εργασία, Διεπιστημονικό - Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών "Επιστήμη & Τεχνολογία Υδατικών Πόρων", Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα 2003.
33. ΠΑΡΛΑΤΖΑΣ Ν., “Σύγκριση Μοντέλων Προσομοίωσης Κίνησης Νερού σε Παράκτιους Υδροφορείς”, Ε.Μ.Π., Αθήνα 2013