



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ  
ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Τιμολόγηση Παραγώγων Προϊόντων με χρήση των  
μεθόδων Monte Carlo

Κωστούλη Νίκη-Μαύρα

Επιβλέπων Καθηγητής: Λουλάκης Μιχαήλ, Αναπλ. Καθηγητής Ε.Μ.Π

Αθήνα

Φεβρουάριος 2016



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ  
ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Τιμολόγηση Παραγώγων Προϊόντων με χρήση των  
μεθόδων Monte Carlo

Κωστούλη Νίκη-Μαύρα

Τριμελής Επιτροπή

.....

.....

.....

Λουλάκης Μιχαήλ

Κολέτσος Ιωάννης

Σπηλιώτης Ιωάννης

Αναπλ. Καθηγητής

Επικούρος Καθηγητής

Αναπλ. Καθηγητής

Ε.Μ.Π

Ε.Μ.Π

Ε.Μ.Π

Αθήνα

2016





.....  
**Κωστούλη Νίκη-Μαύρα**

Διπλωματούχος Εφαρμοσμένων Μαθηματικών & Φυσικών Επιστημών Ε.Μ.Π.

**Copyright, Κωστούλη Νίκη-Μαύρα, 2016**

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα. Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευτεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.









# Ευχαριστίες

Αρχικά θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τον επιβλέποντα μου καθηγητή κ. Λουλάκη, για τη συνεχή καθοδήγηση του στην εκπόνηση της παρούσας διπλωματικής, αλλά και για την ευκαιρία που μου έδωσε με την ανάθεσή της. Επιπρόσθετα, θα ήθελα να ευχαριστήσω ξεχωριστά τα μέλη της επιτροπής για τη σημαντική συμβολή τους στην περαίωση της διπλωματικής εργασίας. Τέλος θέλω να πω ένα μεγάλο ευχαριστώ στην οικογένεια μου και τους φίλους μου, για την στήριξη και την υπομονή τους όλα αυτά τα χρόνια.



# Περίληψη

Σκοπός της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η χρήση μεθόδων Monte Carlo για την τιμολόγηση χρηματοοικονομικών προϊόντων. Οι μέθοδοι αυτοί εν γένει αποτελούν ένα σημαντικό εργαλείο για την προσομοίωση διαφόρων τυχαίων φαινομένων. Σε αυτή την διπλωματική θα φανεί πως μπορούν να χρησιμοποιηθούν στην τιμολόγηση διαφόρων παραγώγων προϊόντων.

Το κείμενο είναι πρακτικά χωρισμένο σε δύο μέρη. Αρχικά παρατίθενται οι βασικές έννοιες καθώς και η θεωρία στην οποία βασίζονται οι μέθοδοι μας. Στη συνέχεια παρουσιάζεται η εφαρμογή των μεθόδων σε διάφορων ειδών παράγωγα προϊόντα.

Στο πρώτο κεφάλαιο αναλύονται κάποιοι βασικοί τρόποι για την παραγωγή τυχαίων δειγμάτων, τόσο απλών τυχαίων μεταβλητών, όσο και στοχαστικών διαδικασιών. Οι μέθοδοι αυτοί θα χρησιμοποιηθούν κατά κόρον κατά την τιμολόγηση των παραγώγων. Εν συνέχεια στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζονται οι βασικές αρχές των μεθόδων Monte Carlo, ο τρόπος λειτουργίας και εφαρμογής τους, όπως επίσης και τεχνικές που ελαττώνουν τη διασπορά των αποτελεσμάτων τους. Επιπρόσθετα, στο δεύτερο κεφάλαιο φανερώνεται η σχέση των μεθόδων αυτών με την τιμολόγηση, αφού παρουσιάζεται η θεωρία τιμολόγησης, στην οποία θα βασιστούμε στη συνέχεια.

Στο τρίτο κεφάλαιο υπάρχει η τιμολόγηση τριών παραγώγων προϊόντων που έχουν γνωστή θεωρητική τιμή. Συνοπτικά, γίνεται τιμολόγηση αυτών, με τις μεθόδους Monte Carlo και στη συνέχεια συγκρίνεται η εκτιμώμενη αξία με την θεωρητική. Στο τέταρτο κεφάλαιο υπάρχουν δύο προϊόντα με άγνωστη θεωρητική αξία, όπου επιχειρούμε να τα τιμολογήσουμε. Επιπρόσθετα στο τέταρτο κεφάλαιο παρατίθεται μία εφαρμογή μιας μεθόδου τεχνικής ελάττωσης διασποράς, όπου φαίνονται τα σημαντικά της πλεονεκτήματα.



# Abstract

Monte Carlo methods are widely used in simulation of various random phenomena. This thesis focuses on a variety of Monte Carlo methods used in Derivative pricing and consists of four parts. The first two parts are theoretical whereas the next two are computational. For the computational part, R software environment was used.

In the first part various methods for simulating random variables and processes are represented. These methods will be widely used in the next parts. In the second part, Monte Carlo estimators, as well as variance reduction methods for these estimators are introduced. After this central concepts from the derivative pricing theory are reviewed.

The third part consists of three derivatives, with a known theoretical price. Initially we price these derivatives with the Monte Carlo methods. After this we compare our results to the theoretical. The fourth part consist of two derivatives, with an unknown theoretical price. We price these with Monte Carlo methods, just like before. Furthermore we use a variance reduction method for the price estimator of a derivative, and we compare the results to the ordinary estimator of the derivative price.



# Περιεχόμενα

<b>1</b>	<b>Παραγωγή δειγμάτων</b>	<b>17</b>
1.1	Τυχαίες μεταβλητές . . . . .	17
1.1.1	Η μέθοδος του αντίστροφου μετασχηματισμού . . . . .	17
1.1.2	Μέθοδος αποδοχής-απόρριψης . . . . .	18
1.1.3	Μονοδιάστατες τυχαίες μεταβλητές από την Κανονική κατανομή . . . . .	21
1.1.4	Πολυδιάστατες τυχαίες μεταβλητές από την Κανονική κατανομή . . . . .	25
1.2	Τυχαία μονοπάτια στοχαστικών ανελίξεων . . . . .	26
1.2.1	Μονοδιάστατη κίνηση Brown . . . . .	27
1.2.2	Πολυδιάστατη κίνηση Brown . . . . .	34
1.2.3	Γεωμετρική κίνηση Brown . . . . .	35
<b>2</b>	<b>Θεωρία τιμολόγησης και μέθοδοι Monte Carlo</b>	<b>37</b>
2.1	Παράγωγα προϊόντα . . . . .	37
2.2	Εκτιμήτριες Monte Carlo . . . . .	38
2.3	Τεχνικές ελάττωσης διασποράς . . . . .	40
2.3.1	Μέθοδος μεταβλητών ελέγχου . . . . .	40
2.3.2	Μέθοδος αντιθετικών μεταβλητών . . . . .	44
2.4	Θεωρία τιμολόγησης . . . . .	46
2.4.1	Αδιάφορη κινδύνου τιμολόγηση . . . . .	50
2.4.2	Βασικά βήματα τιμολόγησης . . . . .	52
2.4.3	Μοντέλο Black&Scholes . . . . .	52

<b>3</b>	<b>Τιμολόγηση παραγώγων με γνωστή θεωρητική τιμή</b>	<b>53</b>
3.1	Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς . . . . .	53
3.2	Barrier δικαίωμα αγοράς . . . . .	57
3.3	Lookback δικαίωμα πώλησης . . . . .	62
<b>4</b>	<b>Τιμολόγηση παραγώγων με άγνωστη θεωρητική τιμή</b>	<b>67</b>
4.1	Double Barrier δικαίωμα αγοράς . . . . .	67
4.2	Ασιατικό δικαίωμα αγοράς . . . . .	70
4.3	Ασιατικό δικαίωμα αγοράς με χρήση μεταβλητής ελέγχου . . . . .	73
<b>5</b>	<b>Συμπεράσματα</b>	<b>77</b>
<b>6</b>	<b>Παράρτημα</b>	<b>79</b>



# Κατάλογος Σχημάτων

1.1.1 Γραφική παράσταση συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας της Κανονικής Κατανομής για διάφορες τιμές των παραμέτρων . . . . .	22
1.1.2 Ιστόγραμμα διανύσματος από την τυπική κανονική κατανομή, το οποίο λήφθηκε με ένα εκατομμύριο επαναλήψεις του αλγορίθμου Box-Müller . . . . .	24
1.1.3 Γράφημα ελέγχου κανονικότητας διανύσματος που παράχθηκε από την μέθοδο Box-Müller . . . . .	24
1.2.1 Γραφική παράσταση εκατό μονοπατιών της κίνησης Wiener στο $[0, 1]$ με βήμα διαμέρισης 0.01 . . . . .	30
1.2.2 Δύο μονοπάτια της κίνησης Brown με παράμετρο drift $\mu=0$ και διαφορετικές μεταβλητότητες, αριστερά στο χρονικό διάστημα $[0, 10]$ και δεξιά στο διάστημα $[0, 1]$ . . . . .	31
1.2.3 Δύο μονοπάτια της γεωμετρικής κίνησης Brown με ίδια μεταβλητότητα, διαφορετική παράμετρο drift και διαφορετική αρχική τιμή . . . . .	36
3.1.1 Γραφική παράσταση 20 εκτιμητών καθώς και της μέσης τιμής τους για την τιμολόγηση ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς . . . . .	55
3.1.2 Μεταβολή της αξίας του παραγώγου καθώς το επιτόκιο $r$ κυμαίνεται στο διάστημα $[0.01, 1]$ . . . . .	55
3.1.3 Μεταβολή της αξίας του παραγώγου καθώς η τιμή άσκησης $K$ κυμαίνεται στο διάστημα $[20, 80]$ . . . . .	56
3.1.4 Μεταβολή της αξίας του παραγώγου καθώς η αρχική αξία της μετοχής κυμαίνεται στο διάστημα $[10, 60]$ . . . . .	56
3.2.1 Γραφική παράσταση 20 εκτιμητών καθώς και της μέσης τιμής τους για την τιμολόγηση ενός barrier δικαιώματος αγοράς . . . . .	59
3.2.2 Γραφική παράσταση της θεωρητικής αξίας (μπλε) και των προσομοιωμένων τιμών (ροζ) για αυτή, του barrier δικαιώματος αγοράς με κάτω και εκτός φράγμα $M=37$ συναρτήσει του επιτοκίου $r \in [1, 20]$ . . . . .	60

3.2.3	Γραφική παράσταση της θεωρητικής αξίας (μπλε) και των προσομοιωμένων τιμών (ροζ) για αυτή, του barrier δικαιώματος αγοράς με το κάτω και εκτός φράγμα $M \in [20, 40]$ με βήμα 0,25 . . . . .	60
3.2.4	Γραφική παράσταση της θεωρητικής αξίας (μπλε) και των προσομοιωμένων τιμών (ροζ) για αυτή, του barrier δικαιώματος αγοράς με την αρχική αξία της μετοχής να κυμαίνεται στο διάστημα $[37, 100]$ . . . . .	61
3.2.5	Αποδεκτά μονοπάτια της μετοχής κατά την τιμολόγηση . . . . .	61
3.3.1	Γραφική παράσταση 20 εκτιμητών καθώς και της μέσης τιμής τους για την τιμολόγηση ενός Lookback δικαιώματος πώλησης . . . . .	64
3.3.2	Γραφική παράσταση θεωρητικών (μπλε) και εκτιμώμενων (ροζ) αξιών του Lookback δικαιώματος πώλησης για το άνευ ρίσκου επιτόκιο $r$ να ανήκει στο διάστημα $[0.01, 1]$ . . . . .	65
3.3.3	Γραφική παράσταση θεωρητικών (μπλε) και εκτιμώμενων (ροζ) αξιών του Lookback δικαιώματος πώλησης καθώς η αρχική αξία της μετοχής κυμαίνεται στο διάστημα $[10, 80]$ . . . . .	65
4.1.1	Γραφική παράσταση 20 εκτιμητών καθώς και της μέσης τιμής τους για την τιμολόγηση ενός Double barrier δικαιώματος αγοράς . . . . .	69
4.1.2	Γραφική παράσταση των εκτιμώμενων (ροζ) αξιών του double barrier δικαιώματος αγοράς καθώς η αρχική αξία της μετοχής κυμαίνεται στο διάστημα $[37, 47]$ . . . . .	69
4.1.3	Αποδεκτά μονοπάτια της μετοχής κατά την τιμολόγηση . . . . .	70
4.2.1	Γραφική παράσταση 20 εκτιμητών καθώς και της μέσης τιμής τους για την τιμολόγηση ενός ασιατικού δικαιώματος αγοράς . . . . .	72
4.2.2	Γραφική παράσταση εκτιμώμενων (ροζ) αξιών του ασιατικού δικαιώματος αγοράς καθώς η αρχική αξία της μετοχής κυμαίνεται στο διάστημα $[10, 80]$ . . . . .	72
4.2.3	Γραφική παράσταση εκτιμώμενων (ροζ) αξιών του ασιατικού δικαιώματος αγοράς καθώς η τιμή άσκησης κυμαίνεται στο διάστημα $[0, 50]$ . . . . .	73
4.3.1	Γραφική παράσταση εκτιμώμενων αξιών του ασιατικού δικαιώματος αγοράς χωρίς μεταβλητή ελέγχου (μπλε) και με μεταβλητή ελέγχου (ροζ) . . . . .	76

# Κεφάλαιο 1

## Παραγωγή δειγμάτων

Στο παρόν κεφάλαιο θεωρείται δεδομένη η ύπαρξη τυχαίων μεταβλητών  $U_1, U_2, \dots, U_N$  που ακολουθούν την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα  $[0, 1]$ . Η συνάρτηση κατανομής αυτών των τυχαίων μεταβλητών είναι η ακόλουθη

$$\mathbb{P}(U_i \leq x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

Οι τυχαίες μεταβλητές αυτές θα χρησιμοποιηθούν στις παρακάτω μεθόδους, ώστε μέσω διαφόρων μετασχηματισμών που θα αναλυθούν, να παραχθούν τυχαίες μεταβλητές από επιθυμητές κατανομές καθώς και ποικίλες στοχαστικές διαδικασίες.

### 1.1 Τυχαίες μεταβλητές

#### 1.1.1 Η μέθοδος του αντίστροφου μετασχηματισμού

Η γενικότερη μέθοδος για την παραγωγή μίας τυχαίας μεταβλητής, που προέρχεται από μία κατανομή με συνεχή συνάρτηση κατανομής  $F(x)$ , είναι η λεγόμενη μέθοδος του “Αντίστροφου Μετασχηματισμού” και η λειτουργία της βασίζεται στην παρακάτω πρόταση.

**Πρόταση.** *Ας υποθέσουμε την τυχαία μεταβλητή  $U \sim U[0, 1]$ . Για οποιαδήποτε γνησίως μονότονη συνάρτηση κατανομής  $F$  η τυχαία μεταβλητή της μορφής*

$$X = F^{-1}(U)$$

*θα ακολουθεί την κατανομή  $F$ . Σημειώνεται πως ως  $F^{-1}(u)$  ορίζεται η τιμή  $x$  για την οποία ισχύει  $F(x) = u$ .*

Απόδειξη. Η συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής  $X$  μας δίνει

$$F_X(a) = \mathbb{P}\{X \leq a\} = \mathbb{P}\{F^{-1}(U)\} \leq a \quad (1.1.1)$$

Δεδομένου ότι η  $F(x)$  είναι μονότονη συνάρτηση, θα ισχύει ότι  $F^{-1}(U) \leq a$  αν και μόνο εάν ισχύει ότι  $U \leq F(a)$ . Επομένως η 1.1.1 γίνεται

$$F_X(a) = \mathbb{P}\{U \leq F(a)\} = F(a)$$

□

Σύμφωνα λοιπόν με την παραπάνω πρόταση μπορούμε να παραγάγουμε μία τυχαία μεταβλητή  $X$  από την συνεχή κατανομή  $F(x)$  απλά παράγοντας μία τυχαία μεταβλητή από την ομοιόμορφη κατανομή στο  $[0, 1]$  και στη συνέχεια θέτοντας  $X = F^{-1}(U)$ . Παράλληλα η εύρεση της αντίστροφης συνάρτησης  $F^{-1}(X)$  δεν είναι πάντοτε μία εύκολη διαδικασία και σε αρκετές περιπτώσεις είναι ακόμη και αδύνατο να υπολογιστεί, για αυτό το λόγο η μέθοδος αυτή δεν είναι εφαρμόσιμη παρά σε πολύ απλές περιπτώσεις.

**Παράδειγμα.** Ας υποθέσουμε πως επιθυμούμε να παραγάγουμε ένα τυχαίο δείγμα, πλήθους  $N$  από την εκθετική κατανομή με παράμετρο 1. Έχοντας στη διάθεση μας  $N$  ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές από την ομοιόμορφη κατανομή στο  $[0, 1]$  είμαστε σε θέση να παραγάγουμε το δείγμα. Η συνάρτηση κατανομής της εκθετικής κατανομής με παράμετρο  $\theta$  θα είναι

$$F(x_i) = \mathbb{P}(X_i \leq x_i) = \begin{cases} 1 - e^{-\theta x_i} & x_i > 0 \\ 0 & x_i \leq 0 \end{cases}$$

Επομένως αν εργαστούμε με τον πάνω κλάδο, σύμφωνα με τη μέθοδο θα έχουμε

$$1 - e^{-\theta x_i} = u_i$$

όπου ύστερα από πράξεις προκύπτει

$$x_i = -\frac{1}{\theta} \log(1 - u_i) \iff F^{-1}(U_i) = -\frac{1}{\theta} \log(1 - U_i)$$

Θέτοντας τελικά  $X_i = -\frac{1}{\theta} \log(1 - U_i)$  για κάθε  $i \in [1, N]$  λαμβάνουμε το επιθυμητό δείγμα. Αξίζει να σημειωθεί πως η μεταβλητή  $1 - U_i \sim U[0, 1]$  άρα ο τύπος μπορεί να γίνει ισοδύναμα  $X_i = -\frac{1}{\theta} \log(U'_i)$  για κάθε  $i \in [1, N]$  όπου  $U'_i \sim U[0, 1]$ .

### 1.1.2 Μέθοδος αποδοχής-απόρριψης

Όπως αναφέρθηκε στην προηγούμενη ενότητα, η εύρεση της αντίστροφης συνάρτησης  $F^{-1}(x)$  της επιθυμητής συνάρτησης κατανομής δεν είναι πάντοτε εφικτή. Επιπρόσθετα ακόμη και αν είναι, μπορεί να υπάρχουν εναλλακτικοί τρόποι παραγωγής της τυχαίας μεταβλητής, οι οποίοι είναι πιο αποτελεσματικοί. Η μέθοδος

“Αποδοχής-Απόρριψης” ανακαλύφθηκε στα τέλη της δεκαετίας του 1950 από τον Von Neumann, από το πανεπιστήμιο του Princeton. Ας υποθέσουμε πως θέλουμε να παράγουμε μία τυχαία μεταβλητή  $X$  από την κατανομή  $F$ , η οποία έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας  $f(x)$ , και παράλληλα έχουμε ήδη τρόπο να παράγουμε από μία άλλη κατανομή  $G$ , με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας  $g(x)$ , η οποία “μοιάζει” με την  $f(x)$ .

Συγκεκριμένα το πηλίκο  $\frac{f(y)}{g(y)}$  πρέπει να είναι φραγμένο από έναν θετικό πραγματικό αριθμό  $c$  όσο το δυνατόν πιο κοντινό στη μονάδα. Παρακάτω παρατίθεται το αλγόριθμος της μεθόδου, όπου η ζητούμενη τυχαία μεταβλητή είναι η  $Y$ .

Αλγόριθμος μεθόδου Αποδοχής Απόρριψης

1. Παράγουμε τ.μ.  $X \sim G$
2. Παράγουμε τ.μ.  $U \sim U([0, 1])$
3. Αν  $U \leq \frac{f(y)}{c g(y)}$  θέτουμε  $Y = X$  αλλιώς επιστρέφουμε στο 1

Το γεγονός ότι η  $Y$  ακολουθεί την κατανομή  $F$  δεν προκύπτει άμεσα. Για να το αποδείξουμε αυτό θα πρέπει να δείξουμε ότι

$$\mathbb{P}[Y \leq y | U \leq \frac{f(Y)}{c g(Y)}] = F(y)$$

Θέλουμε λοιπόν να υπολογίσουμε αυτή την δεσμευμένη πιθανότητα. Γνωρίζουμε πως σύμφωνα με τον τύπο της δεσμευμένης πιθανότητας, αυτή θα ισούται

$$\mathbb{P}[Y \leq y | U \leq \frac{f(Y)}{c g(Y)}] = \frac{\mathbb{P}[U \leq \frac{f(Y)}{c g(Y)} | Y \leq y] \mathbb{P}[Y \leq y]}{\mathbb{P}[U \leq \frac{f(Y)}{c g(Y)}]} \quad (1.1.2)$$

Γνωρίζουμε πως η  $X \sim G$ , επομένως έχουμε  $\mathbb{P}[X \leq x] = G(x)$  και μένει να υπολογίσουμε τις άλλες δύο πιθανότητες που εμφανίζονται στο πηλίκο.

Αρχικά για την πιθανότητα στον παρονομαστή παρατηρούμε πως η δεσμευμένη πιθανότητα  $\mathbb{P}[U \leq \frac{f(Y)}{c g(Y)} | Y = y] = \frac{f(y)}{c g(y)}$ . Άρα αν βγάλουμε τη δέσμευση και χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι  $X \sim G$ , δηλαδή ότι η  $Y \sim G$  θα έχουμε

$$\mathbb{P}[U \leq \frac{f(Y)}{c g(Y)}] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(y)}{c g(y)} g(y) dy$$

Άρα τελικά

$$\mathbb{P}[U \leq \frac{f(Y)}{c g(Y)}] = \frac{1}{c} \quad (1.1.3)$$

Στη συνέχεια υπολογίζοντας την πρώτη πιθανότητα που εμφανίζεται στον αριθμητή θα προκύψει

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[U \leq \frac{f(Y)}{c g(Y)} \mid Y \leq y\right] &= \frac{\mathbb{P}\left[U \leq \frac{f(Y)}{c g(Y)}, Y \leq y\right]}{\mathbb{P}[Y \leq y]} \\ &= \frac{1}{G(y)} \int_{-\infty}^y \mathbb{P}\left[U \leq \frac{f(Y)}{c g(Y)} \mid Y = w \leq y\right] g(w) dw \\ &= \frac{1}{G(y)} \int_{-\infty}^y \frac{f(w)}{c g(w)} g(w) dw\end{aligned}$$

Άρα τελικά

$$\mathbb{P}\left[U \leq \frac{f(Y)}{c g(Y)} \mid Y \leq y\right] = \frac{F(y)}{c G(y)} \quad (1.1.4)$$

Ύστερα από αυτή την ανάλυση καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι ο αλγόριθμος της μεθόδου Αποδοχής-Απόρριψης πράγματι λειτουργεί, αφού η εξίσωση 1.1.2 λόγω των 1.1.3 και 1.1.4 γίνεται

$$\mathbb{P}[Y \leq y \mid U \leq \frac{f(Y)}{c g(Y)}] = F(y)$$

**Παράδειγμα.** Στο παρόν παράδειγμα θα γίνει χρήση μίας μεθόδου παραγωγής τυχαίας μεταβλητής δύο διαστάσεων από την τυπική κανονική, η οποία θα αναλυθεί στη συνέχεια, της μεθόδου “Box Müller”. Ας υποθέσουμε λοιπόν πως έχουμε στη διάθεση μας αυτή τη μέθοδο και θέλουμε να παραγάγουμε μία τυχαία μεταβλητή από την από κοινού κατανομή των  $Z_1 \sim N(0, \frac{1}{3})$  και  $Z_2 \sim N(0, \frac{2}{3})$  οι οποίες είναι ανεξάρτητες. Η κατανομή από την οποία επιθυμούμε να παραγάγουμε έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_{Z_1, Z_2}(z_1, z_2) = \frac{3}{2\sqrt{2}\pi} e^{-\frac{6z_1^2 + 3z_2^2}{4}}$$

ενώ η κατανομή από την οποία είμαστε σε θέση να παράγουμε εύκολα έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$g(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}}$$

Παρατηρούμε πως ο λόγος των δύο αυτών συναρτήσεων είναι φραγμένος από το  $\frac{3}{\sqrt{2}}$  όπως φαίνεται παρακάτω

$$\frac{f_{Z_1, Z_2}(x_1, x_2)}{g(x_1, x_2)} = \frac{3}{\sqrt{2}} e^{-\frac{5x_1^2 + 2x_2^2}{2}} \leq \frac{3}{\sqrt{2}}$$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει αφού η συνάρτηση  $e^x \leq 1 \forall x \leq 0$ . Επομένως αρκεί να εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο της μεθόδου “Αποδοχής-Απόρριψης” για να λάβουμε την επιθυμητή τυχαία μεταβλητή.

### 1.1.3 Μονοδιάστατες τυχαίες μεταβλητές από την Κανονική κατανομή

Η παραγωγή τυχαίων μεταβλητών από την Κανονική κατανομή είναι εφικτή με τις παραπάνω μεθόδους, αλλά έχουν αναπτυχθεί ειδικοί τρόποι παραγωγής τους που αξίζουν να αναφερθούν χωριστά, καθώς η διαδικασία απλοποιείται αρκετά. Συγκεκριμένα θα αναλυθεί η μέθοδος «Box Müller» η οποία θα χρησιμοποιηθεί σε εξαιρετικό βαθμό στις επόμενες ενότητες όπως επίσης και η πολική μέθοδος.

Μία τυχαία μεταβλητή  $X$  ακολουθεί την Κανονική κατανομή με μέση τιμή  $\mu$  και διασπορά  $\sigma^2$ , αν έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

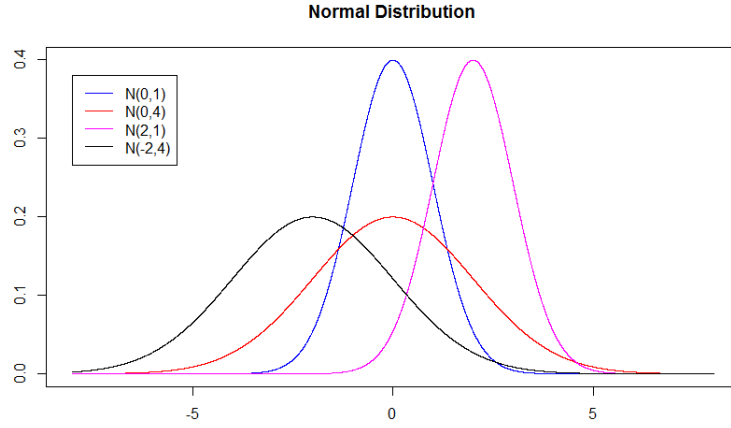
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Συμβολίζεται  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Μία ειδική περίπτωση της Κανονικής κατανομής αποτελεί η Τυπική Κανονική κατανομή, όπου μία τυχαία μεταβλητή  $Z$  είναι από αυτήν αν ακολουθεί την Κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διασπορά 1.

Συμβολίζεται  $Z \sim N(0, 1)$

Αξίζει να σημειωθεί πως οι παρακάτω μέθοδοι παράγουν τυχαίες μεταβλητές από την τυπική Κανονική κατανομή. Αν υποθέσουμε πως θέλουμε να παράξουμε από την Κανονική κατανομή με μέση τιμή  $\mu$  και διασπορά  $\sigma^2$  αρκεί να κάνουμε μία απλή μετατροπή. Έστω  $Z \sim N(0, 1)$  τότε γνωρίζουμε πως η μεταβλητή  $X = \mu + \sigma Z \sim N(\mu, \sigma^2)$ . Επομένως αρκεί να έχουμε στη διάθεση μας μία μεταβλητή από την τυπική Κανονική για να παράξουμε οποιαδήποτε μεταβλητή από όποια Κανονική επιθυμούμε.



Σχήμα 1.1.1: Γραφική παράσταση συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας της Κανονικής Κατανομής για διάφορες τιμές των παραμέτρων

### Μέθοδος Box-Müller

Η μέθοδος αυτή παράγει μία τυχαία μεταβλητή από την διδιάστατη τυπική κανονική κατανομή, δηλαδή δύο ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές από την τυπική κανονική κατανομή όπως ορίστηκε προηγουμένως. Ο αλγόριθμος της μεθόδου βασίζεται στην ακόλουθη πρόταση

**Πρόταση.** Έστω  $Z_1, Z_2$  δύο ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές από την τυπική κανονική κατανομή, τότε ισχύουν τα ακόλουθα

i) η τυχαία μεταβλητή  $R = Z_1^2 + Z_2^2$  ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο  $1/2$ , δηλαδή έχει συνάρτηση κατανομής  $F(x) = \mathbb{P}\{X \leq x\} = 1 - e^{-\frac{1}{2}x}$ , για  $x > 0$

ii) η τυχαία μεταβλητή  $\Theta = \text{Arg}(Z_1 + iZ_2)$  ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο  $[0, 2\pi]$  και είναι ανεξάρτητη της  $R$ .

*Απόδειξη.* Η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των  $Z_1$  και  $Z_2$  είναι  $f_{Z_1, Z_2}(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2 + y^2}{2}}$ . Η από κοινού συνάρτηση κατανομής των  $R$  και  $\Theta$  θα είναι

$$\begin{aligned} P\{R \leq u, \Theta \leq w\} &= \mathbb{P}\{Z_1^2 + Z_2^2 \leq 2u, \text{Arg}(Z_1 + iZ_2) \leq w\} \\ &= \int_{\{(x,y): x^2 + y^2 \leq 2u, \text{Arg}(Z_1 + iZ_2) \leq w\}} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2 + y^2}{2}} dx dy \end{aligned}$$

Κάνοντας αλλαγή σε πολικές συντεταγμένες, δηλαδή θέτοντας



$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, x^2 + y^2 = r^2$$

με τα νέα όρια ολοκλήρωσης να είναι

$$0 \leq \theta \leq w, 0 \leq r \leq \sqrt{2u}$$

θα έχουμε

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{R \leq u, \Theta \leq w\} &= \int_0^w \int_0^{\sqrt{2u}} \frac{1}{2\pi} r e^{-\frac{r^2}{2}} dr d\theta \\ &= \frac{w}{2\pi} \int_0^{\sqrt{2u}} r e^{-\frac{r^2}{2}} dr \\ &= \frac{w}{2\pi} (1 - e^{-u}) \end{aligned}$$

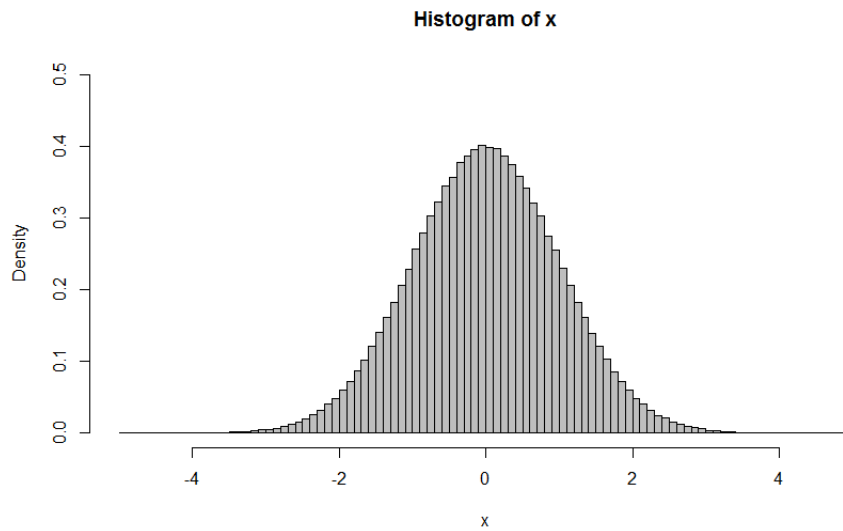
Βλέπουμε λοιπόν πως πράγματι οι μεταβλητές  $R$  και  $\Theta$  είναι ανεξάρτητες, αφού η από κοινού συνάρτηση κατανομής τους είναι το γινόμενο μίας ομοιόμορφης κατανομής στο  $[0, 2\pi]$ , ο όρος  $\frac{w}{2\pi}$ , και μιας εκθετικής, ο όρος  $(1 - e^{-u})$ .  $\square$

Επομένως, σύμφωνα με την πρόταση, για να παραχθεί ένα διάνυσμα  $(Z_1, Z_2)$  αρκεί να έχουμε στη διάθεση μας μία τυχαία μεταβλητή από την ομοιόμορφη στο  $[0, 2\pi]$  και μία από την εκθετική με παράμετρο 1. Στην ενότητα της μεθόδου του "Αντίστροφου Μετασχηματισμού" έγινε παράθεση του παραδείγματος παραγωγής τυχαίας μεταβλητής από την εκθετική κατανομή με παράμετρο  $\theta$ , άρα με απλή αντικατάσταση  $\theta = 1$  έχουμε τη μία ζητούμενη μεταβλητή. Για την παραγωγή της ομοιόμορφης στο  $[0, 2\pi]$  θα κάνουμε χρήση μίας ομοιόμορφης τυχαίας μεταβλητής  $U_1$  στο  $[0, 1]$ , όπου η  $2\pi U_1 \sim U_{([0, 2\pi])}$ . Σύμφωνα λοιπόν με την παραπάνω ανάλυση η μέθοδος έχει τα εξής βήματα, όπου  $Z_1$  και  $Z_2$  είναι οι ζητούμενες τυχαίες μεταβλητές

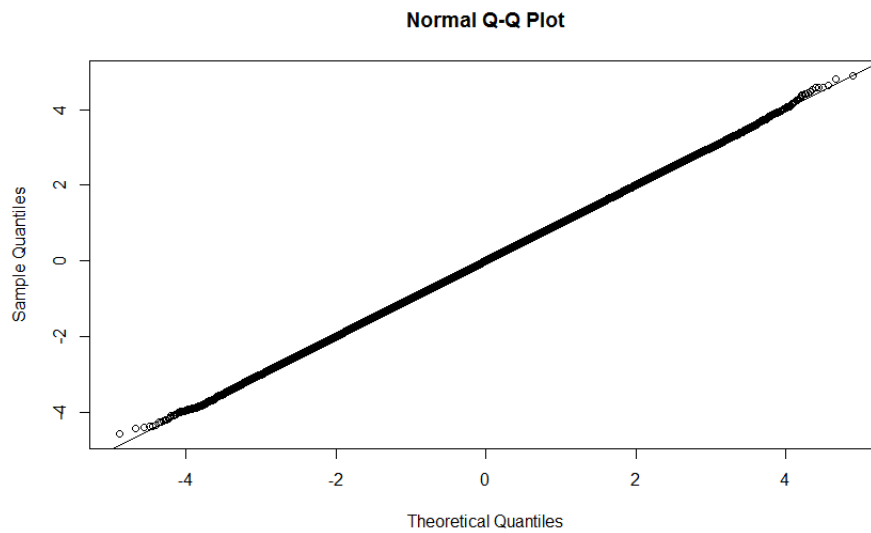
Αλγόριθμος μεθόδου Box-Müller

1. Παράγουμε  $U_1, U_2 \sim U_{([0, 1])}$
2. Θέτουμε  $Z_1 = \sqrt{-2 \ln(1 - U_2)} \cos(2\pi U_1)$  και  $Z_2 = \sqrt{-2 \ln(1 - U_2)} \sin(2\pi U_1)$

Με εφαρμογή αυτού του αλγορίθμου λαμβάνουμε ένα διάνυσμα τυχαίων μεταβλητών από την τυπική κανονική. Στο σχήμα 1.1.2 βλέπουμε το ιστόγραμμα του και εν συνεχεία εφαρμόζουμε έναν έλεγχο κανονικότητας στην  $R$  και λαμβάνουμε το σχήμα 1.1.3. Επομένως πράγματι το παραγόμενο διάνυσμα ανήκει στην τυπική κανονική κατανομή με εξαιρετική ακρίβεια.



Σχήμα 1.1.2: Ιστόγραμμα διανύσματος από την τυπική κανονική κατανομή, το οποίο λήφθηκε με ένα εκατομμύριο επαναλήψεις του αλγορίθμου Box-Müller



Σχήμα 1.1.3: Γράφημα ελέγχου κανονικότητας διανύσματος που παράχθηκε από την μέθοδο Box-Müller

### 1.1.4 Πολυδιάστατες τυχαίες μεταβλητές από την Κανονική κατανομή

Η παραγωγή πολυδιάστατων κανονικών τυχαίων μεταβλητών είναι απαραίτητη στις επόμενες ενότητες και ειδικά στην παραγωγή τυχαίων μονοπατιών στοχαστικών ανελίξεων.

Ένα τυχαίο διάνυσμα  $X = (X_1, \dots, X_d) \in \mathbb{R}^d$  ακολουθεί την  $d$ -διάστατη Κανονική κατανομή με διάνυσμα μέσων τιμών  $\mu \in \mathbb{R}^d$  και πίνακα συνδιασπορών  $\Sigma \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ , με στοιχεία  $\Sigma_{ij} = Cov[X_i, X_j]$ , ο πίνακας  $\Sigma$  είναι συμμετρικός και θετικά ημιορισμένος. Αξίζει να σημειωθεί πως η κάθε  $i$ -οστή συνιστώσα του διανύσματος  $X$  ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή την  $i$ -οστή συνιστώσα του διανύσματος των μέσων τιμών και διασπορά  $\Sigma_{ii}$ . Επιπρόσθετα αν ο πίνακας  $\Sigma$  είναι θετικά ορισμένος, το διάνυσμα  $X$  έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2} |\Sigma|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^\top \Sigma^{-1}(x-\mu)}, x \in \mathbb{R}^d$$

Συμβολίζεται  $X \sim N(\mu, \Sigma)$

Μία ειδική περίπτωση της  $d$ -διάστατης Κανονικής κατανομής αποτελεί η  $d$ -διάστατη Τυπική Κανονική κατανομή, όπου μία τυχαία μεταβλητή  $Z$  είναι από αυτήν αν ακολουθεί την Κανονική κατανομή με διάνυσμα μέσων τιμών το  $0_{\mathbb{R}^d}$  και πίνακα συνδιασπορών τον μοναδιαίο  $d \times d$  πίνακα  $I$ . Σε αυτή τη περίπτωση κάθε συνιστώσα  $i$  του διανύσματος είναι ανεξάρτητη με κάθε συνιστώσα  $j$  με  $j \neq i$ , αφού για  $j \neq i$  έχουμε  $\Sigma_{ij} = Cov[X_i, X_j] = 0$ .

Συμβολίζεται  $Z \sim N(0_{\mathbb{R}^d}, I_d)$

Δύο πολύ σημαντικές ιδιότητες τόσο για την παραγωγή τυχαίων μεταβλητών από αυτή τη κατανομή, όσο και για τις επόμενες ενότητες είναι οι ακόλουθες.

Ιδιότητα 1 (γραμμικός μετασχηματισμός): Έστω  $X \sim N(\mu, \Sigma)$ ,  $X = (X_1, \dots, X_d) \in \mathbb{R}^d$ ,  $A$  ένας  $k \times d$  πίνακας,  $k \in \mathbb{Z}$  και ένα διάνυσμα  $u$  με διάσταση  $d$ . Τότε γνωρίζουμε ότι  $u + AX \sim N(u + A\mu, A^\top \Sigma A)$ . Δηλαδή κάθε γραμμικός συνδυασμός μίας πολυδιάστατης κανονικής κατανομής, προέρχεται και αυτός από την πολυδιάστατη κατανομή.

Ιδιότητα 2 (δέσμευσης): Έστω  $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix}\right)$ , όπου τα  $X_i$ ,  $\mu_i$  μπορούν να είναι διανύσματα και τα  $\Sigma_{ij}$  μπορούν να είναι διανύσματα ή πίνακες. Αν υποθέσουμε ότι ο  $\Sigma_{22}$  είναι αντιστρέψιμος, έχουμε ότι

$$(X_1 | X_2 = x) \sim N(\mu_1 + \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(x - \mu_2), \Sigma_{11} - \Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21})$$

Δεδομένων αυτών των ιδιοτήτων ας θεωρήσουμε ότι θέλουμε να παραγάγουμε μία τυχαία μεταβλητή  $X$  από την  $d$ -διάστατη κανονική κατανομή  $N(\mu, \Sigma)$ . Είμαστε σε θέση, δεδομένων των μεθόδων για την παραγωγή μονοδιάστατων τυπικών κανονικών μεταβλητών, να παράξουμε διανύσματα από την  $d$ -διάστατη τυπική κατανομή.

Αφού όλες οι συνιστώσες του διανύσματος θα ακολουθούν την  $N(0, 1)$  και είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, αρκεί να παραγάγουμε  $d$  τυπικές κανονικές μεταβλητές, για να λάβουμε ένα  $d$ -διάστατο διάνυσμα  $Z$  από την  $d$ -διάστατη τυπική κατανομή. Γνωρίζοντας λοιπόν την πρώτη ιδιότητα θα έχουμε πως

$$X = \mu + AZ \sim N(\mu, A^T A)$$

Επομένως για να βρούμε την επιθυμητή τυχαία μεταβλητή  $X$  μένει να βρούμε έναν πίνακα  $A$  ο οποίος να μας δίνει  $A^T A = \Sigma$ . Δηλαδή στην πραγματικότητα το πρόβλημα παραγωγής τυχαίων μεταβλητών από την πολυδιάστατη κανονική κατανομή ανάγεται στην εύρεση του κατάλληλου πίνακα  $A$  όπως περιγράφηκε προηγουμένως.

## 1.2 Τυχαία μονοπάτια στοχαστικών ανελίξεων

Η ανάγκη μαθηματικής περιγραφής και μοντελοποίησης συστημάτων τα οποία εξελίσσονται χρονικά κατά τρόπο που περιέχει, σε μικρό ή μεγάλο βαθμό, τυχαιότητα, και όχι κατά τρόπο προσδιοριστικό οδήγησε στην ανάπτυξη της Θεωρίας των Στοχαστικών Ανελίξεων ή Στοχαστικών Διαδικασιών (Stochastic Processes).

Για τη μαθηματική περιγραφή της τυχαιότητας στην εξέλιξη ενός στοχαστικού συστήματος  $\alpha$ ς συμβολίσουμε με  $X(t)$  την κατάσταση του συστήματος κατά την χρονική στιγμή  $t$ ,  $t \geq 0$ . Θεωρούμε ότι για κάθε  $t$  η κατάσταση  $X(t)$  είναι μια τυχαία μεταβλητή η οποία ορίζεται πάνω σε ένα χώρο πιθανότητας  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  κοινό για όλα τα  $t$ . Είναι δηλαδή η  $X(t)$ , για συγκεκριμένο  $t$ , μια απεικόνιση  $X(\omega, t)$  με πεδίο ορισμού το δειγματικό χώρο  $\Omega$  ενός πειράματος τύχης και τιμές στο  $\mathbb{R}$ , ή στο  $\mathbb{R}^k$  γενικότερα. Για συγκεκριμένο  $\omega \in \Omega$  έχουμε την συνάρτηση  $X(\omega, t) = x(t)$ ,  $t \geq 0$ , η οποία αποτελεί μια 'τροχιά' ή 'μονοπάτι' (sample path) από όλες τις δυνατές τροχιές που μπορούν να προκύψουν από τον χώρο πιθανότητας  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  και την οικογένεια των τ.μ.  $\{X_t\}_{t \geq 0}$ . Γενικεύοντας την ερμηνεία του  $t$  ως στοιχείου ενός παραμετρικού συνόλου  $T$ , και χρησιμοποιώντας τον όρο τυχαία μεταβλητή ενιαία, είτε δηλαδή πρόκειται για μονοδιάστατες είτε πρόκειται για πολυδιάστατες, έχουμε τον παρακάτω ορισμό.

**Ορισμός.** Στοχαστική Ανέλιξη καλείται κάθε οικογένεια τυχαίων μεταβλητών  $\{X_t\}_{t \in T}$  ορισμένων πάνω σε ένα κοινό χώρο πιθανότητας  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ .

Μία κατηγορία στοχαστικών διαδικασιών που θα ασχοληθούμε, είναι οι λεγόμενες ανελίξεις Gauss.

**Ορισμός.** Μία στοχαστική διαδικασία  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  θα καλείται ανέλιξη Gauss αν  $\forall k \in \mathbb{N}$  και για κάθε  $(t_1, \dots, t_k) \in T^k$  η κατανομή του διανύσματος είναι κανονική.

Στις επόμενες ενότητες θα δούμε ακριβείς μεθόδους παραγωγής μονοπατιών στοχαστικών ανελίξεων Gauss. Με τον όρο 'ακριβείς' εννοούμε πως η από κοινού κατανομή των παραγόμενων τιμών, σε διακριτές χρονικές στιγμές, συμπίπτει με αυτή των τιμών σε συνεχή χρόνο.

### 1.2.1 Μονοδιάστατη κίνηση Brown

**Ορισμός.** Μία στοχαστική ανέλιξη  $\{W_t\}_{0 \leq t \leq T}$  θα καλείται ανέλιξη Wiener, ή αλλιώς τυπική μονοδιάστατη κίνηση Brown, αν έχει τις ακόλουθες ιδιότητες

1.  $W_0 = 0$
2. η απεικόνιση  $t \mapsto W_t$  είναι, με πιθανότητα 1, συνεχής στο διάστημα  $[0, T]$
3. οι προσαυξήσεις  $\{W_{t_1} - W_{t_0}, W_{t_2} - W_{t_1}, \dots, W_{t_k} - W_{t_{k-1}}\}$  είναι ανεξάρτητες  $\forall k \in \mathbb{N}$  και για  $\forall 0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k \leq T$
4. οι προσαυξήσεις  $W_t - W_s \sim N(0, t - s)$ ,  $\forall t, s$  τέτοια ώστε  $0 \leq s \leq t \leq T$

Λόγω των 1 και 4 έχουμε ότι

$$W_t \sim N(0, t) \quad \forall t \in [0, T]$$

**Ορισμός.** Για σταθερές  $\mu$  και  $\sigma > 0$ , η  $\{X_t\}_{0 \leq t \leq T}$  θα καλείται μονοδιάστατη κίνηση Brown με παράμετρο drift  $\mu$  και σταθερά μεταβλητότητας  $\sigma^2$ , αν η  $\frac{X_t - \mu t}{\sigma}$  είναι ανέλιξη Wiener ή αλλιώς αν γράφεται στη μορφή

$$X_t = \mu t + \sigma W_t$$

όπου  $W_t$  ανέλιξη Wiener.

Παρατηρούμε πως για σταθεροποιημένο  $t$  ισχύει ότι  $X_t \sim N(\mu t, \sigma^2 t)$ . Επιπρόσθετα η  $X_t$  είναι η λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης

$$dX_t = \mu + \sigma dW_t$$

Η παραγωγή των μονοπατιών θα γίνει σε κάποιες σταθερές χρονικές στιγμές εντός του  $[0, T]$  και θα βασιστεί στα ακόλουθα

Αρχικά παρατηρούμε πως το διάνυσμα της κίνησης Wiener  $W$  που αντιπροσωπεύει ένα μονοπάτι της κίνησης στις διακριτές χρονικές στιγμές  $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k \leq T$  θα είναι

$$\begin{aligned} W &= \begin{pmatrix} W_{t_1} \\ W_{t_2} \\ \vdots \\ W_{t_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_{t_1} \\ W_{t_1} + (W_{t_2} - W_{t_1}) \\ \vdots \\ W_{t_1} + (W_{t_2} - W_{t_1}) + \dots + (W_{t_n} - W_{t_{n-1}}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_{t_1} \\ W_{t_2} - W_{t_1} \\ \vdots \\ W_{t_n} - W_{t_{n-1}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Άρα θα ακολουθεί την  $n$ -διάστατη κανονική κατανομή  $N(0_{\mathbb{R}^n}, \Sigma)$ , λόγω της ιδιότητας του γραμμικού μετασχηματισμού, αφού το διάνυσμα  $(W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}})^T$  ακολουθεί την  $n$ -διάστατη κανονική σύμφωνα με το 4 του ορισμού της κίνησης Brown.

Εν συνεχεία αν υποθέσουμε πως έχουμε στη διάθεση μας ένα διάνυσμα  $Z = (Z_1, \dots, Z_n)$  από την  $n$ -διάστατη τυπική κανονική κατανομή, σύμφωνα και πάλι με την ιδιότητα του γραμμικού μετασχηματισμού, αρκεί να βρούμε έναν πίνακα  $A$  τέτοιον ώστε  $A^T A = \Sigma$ . Προφανώς λόγω του ότι  $W_t \sim N(0, t) \forall t \in [0, T]$  το διάνυσμα μέσω τιμών για το  $W$  θα είναι το  $0_{\mathbb{R}^n}$ . Συμπερασματικά θα έχουμε πως  $W = AZ$ .

### Εύρεση των πινάκων $A$ και $\Sigma$

Για τον προσδιορισμό του πίνακα  $\Sigma$  πρέπει να βρεθούν οι συνδιακυμάνσεις μεταξύ των συνιστωσών του διανύσματος  $W$ . Έστω λοιπόν δύο χρονικές στιγμές  $s, t \in [0, T]$  με  $s < t$ , τότε θα έχουμε

$$\begin{aligned} \text{Cov}(W_s, W_t) &= \text{Cov}(W_s, W_s + (W_t - W_s)) \\ &= \text{Cov}(W_s, W_s) + \text{Cov}(W_s, W_t - W_s) = s + 0 \\ &= \min\{s, t\} \end{aligned}$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν πως ο πίνακας των συνδιασπορών για την κίνηση Wiener θα είναι

$$\Sigma = \begin{pmatrix} t_1 & t_1 & \cdots & t_1 \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_n \end{pmatrix}$$

Ο κατάλληλος πίνακας  $A$  που θα έχει την ιδιότητα  $A^T A = \Sigma$  μπορεί να βρεθεί με διάφορες μεθόδους παραγοντοποίησης πινάκων και αποδεικνύεται ότι είναι ο

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{t_1} & 0 & \cdots & 0 \\ \sqrt{t_1} & \sqrt{t_2 - t_1} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \sqrt{t_1} & \sqrt{t_2 - t_1} & \cdots & \sqrt{t_n - t_{n-1}} \end{pmatrix}$$

Άρα λοιπόν καταλήγουμε τελικά στο συμπέρασμα ότι

$$\begin{aligned}
W &= \begin{pmatrix} W_{t_1} \\ W_{t_2} \\ \vdots \\ W_{t_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{t_1} & 0 & \cdots & 0 \\ \sqrt{t_1} & \sqrt{t_2 - t_1} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \sqrt{t_1} & \sqrt{t_2 - t_1} & \cdots & \sqrt{t_n - t_{n-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sqrt{t_1}Z_1 \\ \sqrt{t_1}Z_1 + \sqrt{t_2 - t_1}Z_2 \\ \vdots \\ \sqrt{t_1}Z_1 + \sqrt{t_2 - t_1}Z_2 + \cdots + \sqrt{t_n - t_{n-1}}Z_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sqrt{t_1}Z_1 \\ W_{t_1} + \sqrt{t_2 - t_1}Z_2 \\ \vdots \\ W_{t_{n-1}} + \sqrt{t_n - t_{n-1}}Z_n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Άρα βλέπουμε ότι οι τιμές του μονοπατιού της ανέλιξης Wiener μπορούν να παραχθούν μέσω του αναδρομικού τύπου

$$W_{t_{i+1}} = W_{t_i} + \sqrt{t_{i+1} - t_i}Z_{i+1}$$

Τέλος ο αλγόριθμος για την παραγωγή μονοπατιού της ανέλιξης Wiener είναι ο ακόλουθος

Προσομοίωση κίνησης Brown

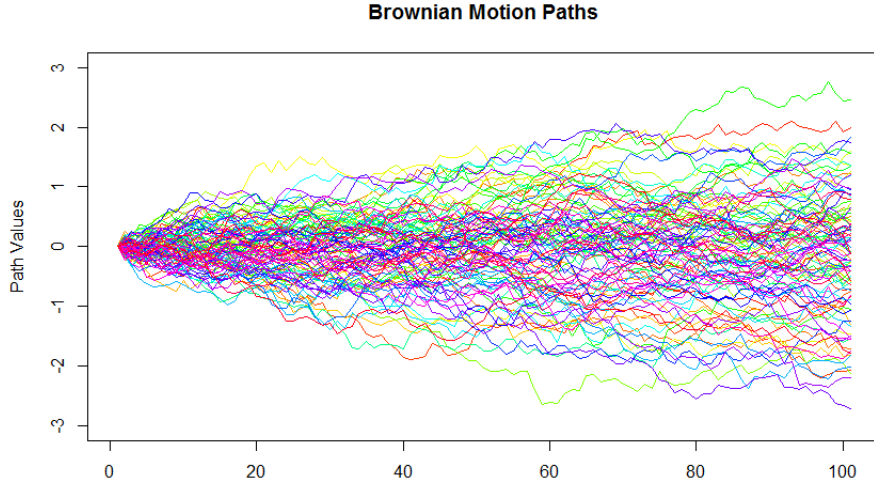
1. Παίρνω μία διαμέριση του  $[0, T]$  την  $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k \leq T$
2. Θέτω  $W_0 = 0$
3. Παράγω  $k$  ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές  $Z_i$  από την τυπική κανονική κατανομή
4. Για  $i = 1, \dots, k$   
Θέτω  $W_{t_i} = W_{t_{i-1}} + \sqrt{t_i - t_{i-1}}Z_i$

Για την παραγωγή ενός μονοπατιού της κίνησης Brown με παράμετρο drift  $\mu$  και συντελεστή διασποράς  $\sigma^2$ , θα εργαστούμε με τον ίδιο τρόπο, όπου τώρα γνωρίζοντας πως το διάνυσμα της ανέλιξης Brown προέρχεται από την  $n$ -διάστατη κανονική και πως για κάθε συνιστώσα ισχύει ότι  $X_t \sim N(\mu t, \sigma^2 t)$ , θα έχουμε

$$\begin{aligned}
X &= \begin{pmatrix} X_{t_1} \\ X_{t_2} \\ \vdots \\ X_{t_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu t_1 \\ \mu t_2 \\ \vdots \\ \mu t_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma\sqrt{t_1} & 0 & \cdots & 0 \\ \sigma\sqrt{t_1} & \sigma\sqrt{t_2-t_1} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \sigma\sqrt{t_1} & \sigma\sqrt{t_2-t_1} & \cdots & \sigma\sqrt{t_n-t_{n-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mu t_1 + \sigma\sqrt{t_1}Z_1 \\ \mu t_2 + \sigma\sqrt{t_1}Z_1 + \sigma\sqrt{t_2-t_1}Z_2 \\ \vdots \\ \mu t_n + \sigma\sqrt{t_1}Z_1 + \cdots + \sigma\sqrt{t_n-t_{n-1}}Z_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mu t_1 + \sigma\sqrt{t_1}Z_1 \\ X_{t_1} + \mu(t_2-t_1) + \sigma\sqrt{t_2-t_1}Z_2 \\ \vdots \\ X_{t_{n-1}} + \mu(t_n-t_{n-1}) + \sigma\sqrt{t_n-t_{n-1}}Z_n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

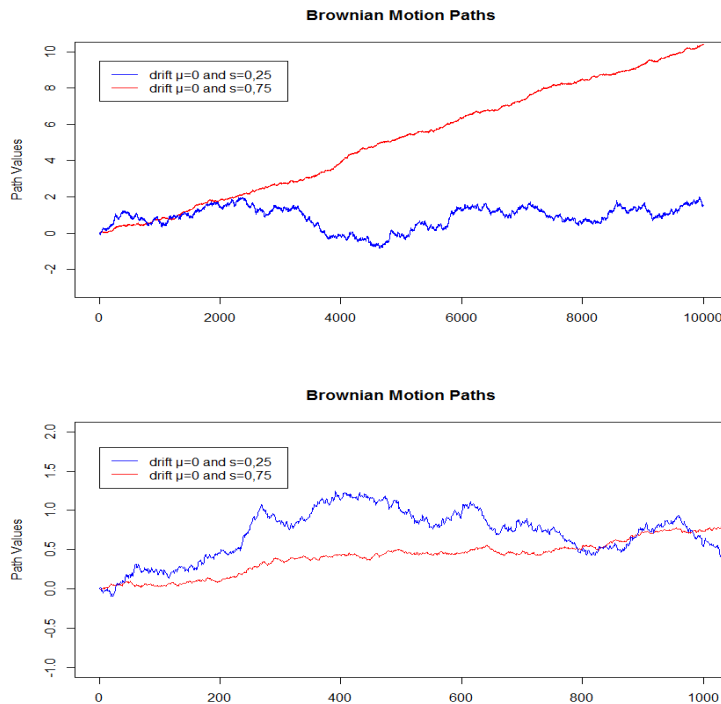
Επομένως ο αλγόριθμος για την παραγωγή παραμένει ο ίδιος, με τη μόνη διαφορά ότι αλλάζει ο αναδρομικός τύπος, ο οποίος γίνεται

$$X_{t_i} = X_{t_{i-1}} + \mu(t_i - t_{i-1}) + \sigma\sqrt{t_i - t_{i-1}}Z_i$$



Σχήμα 1.2.1: Γραφική παράσταση εκατό μονοπατιών της κίνησης Wiener στο  $[0, 1]$  με βήμα διαμέρισης 0.01





Σχήμα 1.2.2: Δύο μονοπάτια της κίνησης Brown με παράμετρο drift  $\mu=0$  και διαφορετικές μεταβλητότητες, αριστερά στο χρονικό διάστημα  $[0, 10]$  και δεξιά στο διάστημα  $[0, 1]$ .

Στο σχήμα 1.2.1 βλέπουμε τη γραφική παράσταση εκατό μονοπατιών της κίνησης Wiener στο  $[0, 1]$  με βήμα διαμέρισης 0.01. Στο σχήμα 1.2.2 έχουμε δύο μονοπάτια της κίνησης Brown, το ένα με παράμετρο drift 0 και μεταβλητότητα 0.25 (μπλε) και το άλλο με παράμετρο drift 0 και μεταβλητότητα 0.75. Αριστερά βλέπουμε τη συμπεριφορά τους στο διάστημα  $[0, 10]$  και δεξιά στο διάστημα  $[0, 1]$ . Η διαμέριση του χρόνου έγινε ανά 0,01.

Ο τρόπος παραγωγής που αναπτύχθηκε ως αυτό το σημείο, προσομοιώνει διαδοχικά τιμές του μονοπατιού που επιθυμούμε, από τα αριστερά προς τα δεξιά. Εναλλακτικά είμαστε σε θέση να παραγάγουμε τις τιμές με οποιαδήποτε σειρά προτιμούμε, δεδομένου ότι σε κάθε βήμα προσομοιώνουμε από την σωστή κατανομή που μας υποδεικνύουν οι ήδη παραχθείσες τιμές. Ας υποθέσουμε πως γνωρίζοντας ότι  $W_0 = 0$  προσομοιώνουμε την τελευταία τιμή, στη συνέχεια την μεσαία κοκ. Αυτή η τεχνική, η οποία ονομάζεται 'Γέφυρα Brown' μας δίνει μία εικόνα για το πως θα κινηθούν οι τιμές του μονοπατιού αρκετά γρηγορότερα και είναι πολύ χρήσιμη στις επόμενες ενότητες. Η 'Γέφυρα Brown' είναι εφικτή λόγω της ιδιότητας της δέσμωσης που παρατέθηκε στη ενότητα 1.1.4.

Ας υποθέσουμε αρχικά ότι έχουμε  $0 < u < s < t$  όπου γνωρίζουμε πως  $W_u = x$  και  $W_t = y$  και επιθυμούμε να προσομοιώσουμε το  $W_s$ . Θα χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα της δέσμευσης για να βρούμε την κατανομή του  $W_s$  δεδομένων των  $W_u$  και  $W_t$ . Γνωρίζουμε πως το διάνυσμα των τριών αυτών τιμών ακολουθεί την τρισδιάστατη κανονική κατανομή, δηλαδή

$$\begin{pmatrix} W_s \\ W_u \\ W_t \end{pmatrix} \sim N \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} s & u & s \\ u & u & u \\ s & u & t \end{pmatrix} \right)$$

Η ιδιότητα της δέσμευσης θα μας δώσει για τη μέση τιμή

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[W_s | W_u = x, W_t = y] &= 0 - \begin{pmatrix} u & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & u \\ u & t \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \frac{(t-s)x + (s-u)y}{(t-u)} \end{aligned}$$

και για τη διασπορά

$$\begin{aligned} \text{Var}[W_s | W_u = x, W_t = y] &= s - \begin{pmatrix} u & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & u \\ u & t \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} u \\ s \end{pmatrix} \\ &= \frac{(s-u)(t-s)}{(t-u)} \end{aligned}$$

αφού ο αντίστροφος θα είναι

$$\begin{pmatrix} u & u \\ u & t \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{t-u} \begin{pmatrix} t & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Άρα λοιπόν έχουμε ότι

$$(W_s | W_u = x, W_t = y) \sim N \left( \frac{(t-s)x + (s-u)y}{(t-u)}, \frac{(s-u)(t-s)}{(t-u)} \right)$$

Γενικότερα, ας υποθέσουμε πως οι τιμές  $W_{s_1} = x_1, W_{s_2} = x_2, \dots, W_{s_k} = x_k$  του μονοπατιού της κίνησης Brown έχουν οριστεί στις χρονικές στιγμές  $s_1 < s_2 < \dots < s_k$  και επιθυμούμε να βρούμε την  $W_s$  δεδομένων αυτών των τιμών. Αν υποθέσουμε πως  $s_i < s < s_{i+1}$  θα έχουμε

$$\mathbb{P}[W_s = x | W_{s_j} = x_j, j = 1, \dots, k] = \mathbb{P}[W_s = x | W_{s_i} = x_i, W_{s_{i+1}} = x_{i+1}]$$

Αυτό προκύπτει από την 'Μαρκοβιανή ιδιότητα' που χαρακτηρίζει την κίνηση Brown, δηλαδή δεδομένης της  $W_{s_i}$  η  $W_s$  είναι ανεξάρτητη από κάθε  $W_t$  με  $t < s_i$  και δεδομένης της  $W_{s_{i+1}}$  η  $W_s$  θα είναι ανεξάρτητη από κάθε  $W_t$  με  $t > s_{i+1}$ . Άρα η κατανομή για την  $W_s$  δεδομένων όλων των ήδη προσομοιωμένων τιμών θα είναι

$$(W_s | W_{s_j} = x_j, j = 1, \dots, k) \sim (W_s | W_{s_i} = x_i, W_{s_{i+1}} = x_{i+1}) \sim N(\mu, \sigma^2)$$

με

$$\mu = \frac{(s_{i+1} - s)x_i + (s - s_i)x_{i+1}}{(s_{i+1} - s_i)}$$

και

$$\sigma^2 = \frac{(s - s_i)(s_{i+1} - s)}{(s_{i+1} - s_i)}$$

Για να προσομοιώσουμε λοιπόν τιμές για το μονοπάτι της κίνησης Brown αρκεί να θέσουμε

$$W_s = \mu + \sigma Z$$

όπου  $Z \sim N(0,1)$  ανεξάρτητη από κάθε τιμή του μονοπατιού. Επαναλαμβάνοντας αυτή τη διαδικασία λαμβάνουμε όσες τιμές του μονοπατιού επιθυμούμε, με οποιαδήποτε σειρά.

Ο παρακάτω αλγόριθμος μας δίνει ένα μονοπάτι που αρχικά παράγουμε την τελευταία του τιμή, ύστερα τη μεσαία, και σε κάθε βήμα παράγουμε την μεσαία τιμή του κάθε διαστήματος που δημιουργείται, δεδομένων των ήδη προσομοιωμένων πλησιέστερων, στην επιθυμητή τιμή, τιμών του μονοπατιού. Με αυτό τον τρόπο δημιουργούμε μονοπάτια όπου το πλήθος των τιμών τους είναι κάποια δύναμη του 2. Αν θέλουμε κάποιο πλήθος που δεν είναι ακριβώς  $2^k$  για κάποιο  $k \in \mathbb{N}$  παράγουμε την πλησιέστερη τιμή και προσθέτουμε στη συνέχεια τις τιμές που επιθυμούμε.

Προσομοίωση γέφυρας Brown

1. Παράγουμε  $Z_1, \dots, Z_m \sim N(0,1)$
2. Θέτουμε  $h = 2^m$ ,  $j_{max} = 1$ ,  $W_h = \sqrt{t_h}Z_h$ ,  $t_0 = 0$ ,  $W_0 = 0$
3. Για  $k = 1, \dots, m$  θέτουμε
  - $i_{min} = h/2$ ,  $i = i_{min}$ ,  $l = 0$ ,  $r = h$
  - για  $j = 1, \dots, j_{max}$  θέτουμε
  - $a = ((t_r - t_i)W_l + (t_i - t_l)W_r)/(t_r - t_l)$
  - $b = \sqrt{(t_i - t_l)(t_r - t_i)/(t_r - t_l)}$
  - $W_i = a + bZ_i$
  - $i = i + h$ ,  $l = l + h$ ,  $r = r + h$
  - $j_{max} = 2 * j_{max}$
  - $h = i_{min}$

Ο παραπάνω αλγόριθμος παράγει μονοπάτι από την τυπική κίνηση Brown, ή ανέλιξη Wiener. Αν θέλαμε να παράξουμε ένα μονοπάτι από την κίνηση Brown με παράμετρο drift  $\mu$  το μόνο που θα άλλαζε στην όλη διαδικασία θα ήταν ο υπολογισμός της τελικής τιμής του μονοπατιού, καθώς η δεσμευμένη μέση τιμή αλλά και η διασπορά μένουν ανεπηρέαστες. Άρα λοιπόν σε αυτή την περίπτωση αντικαθιστούμε την

$$W_{t_n} = \sqrt{t_n}Z_n$$

με την

$$X_{t_n} = \mu t_n + \sqrt{t_n} Z_n$$

Επιπλέον αν η ανέλιξη έχει και συντελεστή μεταβλητότητας  $\sigma^2$ , η κατανομή της  $(W_s | W_{s_i} = x_i, W_{s_{i+1}} = x_{i+1})$  παραμένει η κανονική με την ίδια μέση τιμή, και διασπορά πολλαπλασιασμένη με  $\sigma$ .

### 1.2.2 Πολυδιάστατη κίνηση Brown

**Ορισμός.** Η  $d$ -διάστατη κίνηση Brown είναι μία ανέλιξη

$$W(t) = (W_1(t), \dots, W_d(t))^T, 0 \leq t \leq T$$

με τις ακόλουθες ιδιότητες:

i)  $W(0) = 0_{\mathbb{R}^d}$

ii) τα δειγματικά της μονοπάτια είναι συνεχή

iii) έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις

iv)  $W(t) - W(s) \sim N(0_{\mathbb{R}^d}, (t-s)I_d), \forall 0 \leq s < t \leq T$

Επομένως κάθε μία από τις ανελιξεις  $W_i(t), i = 1, \dots, d$ , είναι μία μονοδιάστατη τυπική κίνηση Brown και, εφόσον  $Cov[W_i(t), W_j(s)] = 0$  για  $i \neq j, \forall t, s \geq 0$ , και  $W_i, W_j$  κανονικές, οι ανελιξεις  $W_i$  και  $W_j$  θα είναι ανεξάρτητες.

**Ορισμός.** Η  $d$ -διάστατη κίνηση Brown με drift  $\mu \in \mathbb{R}^d$  και μεταβλητότητα  $\Sigma \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$  είναι μία ανέλιξη  $X(t) = (X_1(t), \dots, X_d(t))^T$  με συνεχή δειγματικά μονοπάτια και με ανεξάρτητες προσαυξήσεις, για την οποία ισχύει ότι  $X(t) - X(s) \sim N((t-s)\mu, (t-s)\Sigma)$ .

Από τα στοιχεία του πίνακα  $\Sigma$  προσδιορίζονται οι συνδιακυμάνσεις των συντελεστών του διανύσματος  $X$  στους χρόνους  $s, t$  μέσω της εξίσωσης

$$Cov[X_i(s), X_j(t)] = \min\{s, t\}\Sigma_{ij}, \text{ για } i \neq j$$

Υπό την προϋπόθεση ότι  $X(t_0) = 0_{\mathbb{R}^d}$  τότε θα έχουμε

$$\begin{pmatrix} X_1(t) \\ \vdots \\ X_d(t) \end{pmatrix} \sim N \left( \begin{pmatrix} t\mu_1 \\ \vdots \\ t\mu_d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t\Sigma_{11} & \cdots & t\Sigma_{1d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t\Sigma_{d1} & \cdots & t\Sigma_{dd} \end{pmatrix} \right)$$

Η προσομοίωση μονοπατιών από τη  $d$ -διάστατη κίνηση Brown είναι αρκετά απλή, καθώς κάθε συνιστώσα του διανύσματος  $X$  είναι μία κίνηση Brown ανεξάρτητη από κάθε άλλη συνιστώσα. Επομένως αρκεί να χρησιμοποιήσουμε τις μεθόδους που έχουμε στη διάθεση μας για την μονοδιάστατη περίπτωση.

### 1.2.3 Γεωμετρική κίνηση Brown

Μία ακόμη στοχαστική διαδικασία που έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον και μεγάλη εφαρμογή στα επόμενα κεφάλαια είναι η λεγόμενη 'Γεωμετρική κίνηση Brown'. Η γεωμετρική κίνηση Brown είναι μία στοχαστική ανέλιξη  $\{S_t\}_{t \in T}$  η οποία έχει την ιδιότητα ότι η  $\ln(S_t)$  είναι κίνηση Brown. Δηλαδή ορίζεται να είναι η  $S_t = e^{X_t}$  όπου  $X_t$  είναι κίνηση Brown. Η σημαντικότερη διαφορά της γεωμετρικής από την απλή κίνηση Brown, είναι πως η πρώτη παίρνει πάντα θετικές τιμές, ένα χαρακτηριστικό που είναι πολύ χρήσιμο για να χαρακτηρίσουμε την τιμή μετοχών. Αξίζει να σημειωθεί πως σε αντίθεση με την κίνηση Brown, η οποία έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις, η γεωμετρική κίνηση Brown έχει ανεξάρτητες ποσοστιαίες μεταβολές, δηλαδή οι

$$\frac{S_{t_2} - S_{t_1}}{S_{t_1}}, \frac{S_{t_3} - S_{t_2}}{S_{t_2}}, \dots, \frac{S_{t_n} - S_{t_{n-1}}}{S_{t_{n-1}}}$$

είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές για  $0 < t_1 < \dots < t_n$

**Ορισμός.** Μία στοχαστική διαδικασία  $\{S_t\}_{t \in T}$  θα καλείται γεωμετρική κίνηση Brown με παράμετρο drift  $\mu$  και συντελεστή μεταβλητότητας  $\sigma^2$  αν είναι λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης

$$dS_t = S_t \mu dt + S_t \sigma dW_t \quad (1.2.1)$$

όπου  $W_t$  είναι μία ανέλιξη Wiener.

Έστω  $W_t$  να είναι μία ανέλιξη Wiener και η  $X_t$  να είναι μία κίνηση Brown και παράμετρο drift  $\mu$  και σταθερά μεταβλητότητας  $\sigma^2$ . Αν θέσουμε  $S_t = S_0 e^{X_t} \equiv f(X_t)$ , τότε η εφαρμογή του κανόνα του Itô θα μας δώσει

$$\begin{aligned} dS_t &= f'(X_t) dX_t + \frac{1}{2} \sigma^2 f''(X_t) dt \\ &= S_0 e^{X_t} [\mu dt + \sigma dW_t] + \frac{1}{2} \sigma^2 S_0 e^{X_t} dt \\ &= S_t (\mu + \frac{1}{2} \sigma^2) dt + S_t \sigma dW_t \end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας τώρα τον κανόνα του Itô στην  $\ln(S_t)$  έχουμε ότι

$$d \ln(S_t) = (\mu - \frac{1}{2} \sigma^2) dt + \sigma dW_t$$

Επομένως η λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης 1.2.1 με αρχική συνθήκη  $S_0$  θα είναι

$$S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2) dt + \sigma dW_t}$$

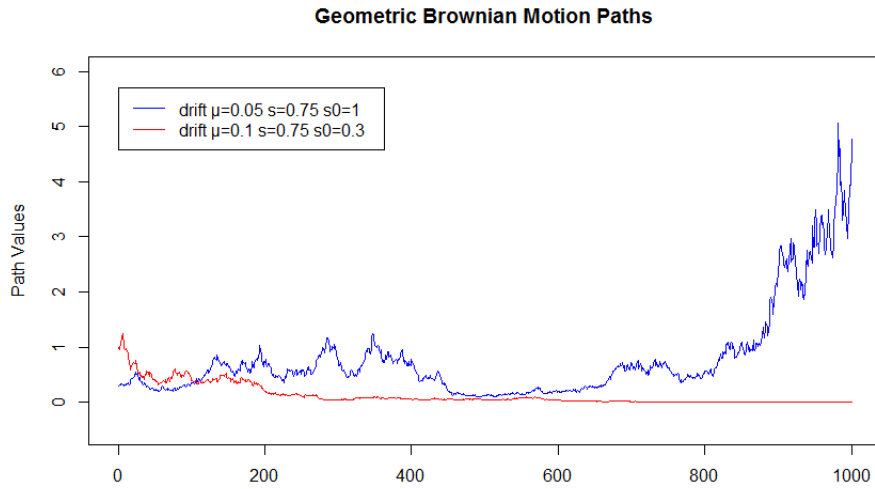
Γενικότερα για  $u < t$  έχουμε

$$S_t = S_u e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(t-u) + \sigma(W_t - W_u)}$$

Η παραγωγή ενός μονοπατιού αυτής της στοχαστικής διαδικασίας μπορεί να γίνει εύκολα, αφού γνωρίζουμε πως η ανέλιξη Wiener έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις, που ακολουθούν την  $N(0, t-u)$ , μέσω του τύπου

$$S_{t_{i+1}} = S_{t_i} e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(t_{i+1}-t_i) + \sigma\sqrt{t_{i+1}-t_i}Z_{i+1}} \quad \gamma\iota\alpha \quad i = 0, \dots, n-1$$

όπου  $Z_i \sim N(0, 1)$



Σχήμα 1.2.3: Δύο μονοπάτια της γεωμετρικής κίνησης Brown με ίδια μεταβλητότητα, διαφορετική παράμετρο drift και διαφορετική αρχική τιμή

Στο σχήμα 1.2.3 βλέπουμε τη συμπεριφορά δύο μονοπατιών της γεωμετρικής κίνησης Brown με ίδια μεταβλητότητα, διαφορετικές παραμέτρους drift και διαφορετικές αρχικές τιμές. Με κόκκινο έχουμε ένα μονοπάτι με παραμέτρους  $\mu = 0.1$  και αρχική τιμή  $S_0 = 0.3$ , ενώ με μπλε έχουμε ένα μονοπάτι με παραμέτρους  $\mu = 0.05$  και  $S_0 = 1$ .

## Κεφάλαιο 2

# Θεωρία τιμολόγησης και μέθοδοι Monte Carlo

Σε αυτό το κεφάλαιο θα αναπτυχθούν οι μέθοδοι εκτίμησης Monte Carlo αλλά και η θεωρία τιμολόγησης παραγώγων προϊόντων, πάνω στην οποία θα βασιστούμε στα επόμενα κεφάλαια. Αρχικά θα δοθεί μία γενική περιγραφή, όπως επίσης και απλά παραδείγματα, των μεθόδων Monte Carlo. Στη συνέχεια θα αναπτυχθεί η θεωρία τιμολόγησης με την απουσία ρίσκου σε πλήρεις οικονομίες. Η πιο σημαντική ιδέα για να την ανάπτυξη των παρακάτω είναι η παρουσίαση της τιμής των παραγώγων ως κάποια μέση τιμή, καθώς με αυτόν τον τρόπο θα είναι εφικτή η εκτίμηση τους με αυτές τις μεθόδους.

### 2.1 Παράγωγα προϊόντα

Παράγωγο προϊόν στα χρηματοοικονομικά ονομάζεται ένα συμβόλαιο, μεταξύ δύο συμβαλλομένων, επί ενός βασικότερου προϊόντος, τον λεγόμενο υποκείμενο τίτλο. Οι δύο συμβαλλόμενοι, μέσω αυτής της συμφωνίας, υποχρεούνται να λάβουν μέρος σε μία συναλλαγή στο μέλλον. Ειδικότερα ένας συμβαλλόμενος έχει τη θέση του αγοραστή (long position) ενώ ο άλλος έχει τη θέση του πωλητή (short position) του υποκείμενου τίτλου. Τα υποκείμενα προϊόντα από τα οποία προέρχεται ένα παράγωγο μπορεί να είναι είτε προϊόντα που τίθενται υπό διαπραγμάτευση σε μία οργανωμένη δευτερογενή αγορά, όπως ένα χρηματιστήριο, είτε προϊόντα που δεν τίθενται υπό διαπραγμάτευση σε οργανωμένες αγορές. Σε γενικές γραμμές, τα υποκείμενα προϊόντα μπορεί να είναι σχεδόν οτιδήποτε από εμπορεύσιμες μετοχές και ομόλογα μέχρι αγροτικά προϊόντα και μέταλλα.

Κάθε τέτοιο προϊόν χαρακτηρίζεται από μία ημερομηνία λήξης, την οποία συμφωνούν οι συμβαλλόμενοι και ονομάζεται ωρίμανση. Μέχρι την ημερομηνία αυτή οι αντισυμβαλλόμενοι υποχρεούνται να τηρήσουν τους όρους του συμβολαίου. Η

αξία του προϊόντος στην ωρίμανση του ονομάζεται απόδοση του παραγώγου. Η απόδοση μπορεί να εξαρτάται από ποικίλους παράγοντες, συννηθέστερα έχει άμεση σχέση με την τιμή του υποκείμενου τίτλου είτε στην ωρίμανση του παραγώγου είτε καθ' όλη τη διάρκεια ζωής του.

## 2.2 Εκτιμήτριες Monte Carlo

Οι μέθοδοι Monte Carlo βασίζονται στην αναλογία μεταξύ πιθανότητας και 'όγκου'. Η μαθηματική θεωρία συνδέει την πιθανότητα να εμφανιστεί ένα ενδεχόμενο, με όλα τα πιθανά ενδεχόμενα που υπάρχουν στο χώρο. Συγκεκριμένα η πιθανότητα να συμβεί ένα ενδεχόμενο ισούται με το μέτρο, ή τον όγκο, του ενδεχομένου, δια το μέτρο ή τον όγκο όλων των πιθανών ενδεχομένων. Οι μέθοδοι Monte Carlo λειτουργούν αντίστροφα, υπολογίζουν δηλαδή τον όγκο όλων των ενδεχομένων ώστε να παρουσιαστεί τελικά ως πιθανότητα. Πρακτικά, στην απλούστερη περίπτωση, αυτό μεταφράζεται με την παραγωγή τυχαίων δειγμάτων από τον δειγματικό χώρο, και στη συνέχεια τον υπολογισμό της πιθανότητας εμφάνισης του ενδεχομένου που μας ενδιαφέρει. Ο Ασθενής Νόμος των Μεγάλων Αριθμών διαβεβαιώνει πως η εκτίμηση αυτή συγκλίνει στην πραγματική πιθανότητα εμφάνισης του εκάστοτε ενδεχομένου. Επιπρόσθετα λόγω του Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος λαμβάνουμε πληροφορία για το μέγεθος του σφάλματος της εκτίμησης ύστερα από πεπερασμένες παραγωγές.

Ασθενής Νόμος των Μεγάλων Αριθμών (A.N.M.A.)

Αν  $X_1, X_2, \dots, X_n$  είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με  $\mathbb{E}[X_i] = \mu \forall i = 1, \dots, n$ , θα έχουμε

$$\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu \quad \text{σχεδόν βεβαίως}$$

Κεντρικό Οριακό Θεώρημα (Κ.Ο.Θ.)

Αν  $X_1, X_2, \dots, X_n$  είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με  $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ ,  $Var X_i = \sigma^2 < \infty \forall i = 1, \dots, n$  θα έχουμε

$$\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} N(0, 1) \quad \text{κατά κατανομή}$$

Όμοια το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\sqrt{n} \times error_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} N(0, \sigma^2) \quad \text{κατά κατανομή}$$

όπου

$$error_n = X_1 + \dots + X_n - n\mu$$



το σφάλμα δηλαδή της εκτίμησης μας.

Για να γίνει κατανοητή η χρήση των μεθόδων αυτών, ας υποθέσουμε πως επιθυμούμε να υπολογίσουμε το παρακάτω ολοκλήρωμα μίας συνάρτησης  $f$

$$\alpha = \int_0^1 f(x) dx$$

ως την μέση τιμή  $\mathbb{E}[f(U)]$  όπου  $U$  μία ομοιόμορφα κατανομημένη τυχαία μεταβλητή στο  $[0, 1]$ . Δεδομένου του ότι έχουμε στη διάθεση μας κάποιον τρόπο παραγωγής τέτοιων τυχαίων μεταβλητών  $U_1, U_2, \dots$  οι οποίες είναι ανεξάρτητες, είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε αυτό το ολοκλήρωμα. Υπολογίζοντας την δράση της  $f$  πάνω σε  $n$  μεταβλητές αυτού του είδους και παίρνοντας τον μέσο τους όρο προκύπτει μία εκτιμήτρια Monte Carlo

$$\hat{\alpha}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(U_i)$$

Αν η  $f$  είναι πράγματι ολοκληρώσιμη στο διάστημα  $[0, 1]$ , σύμφωνα με τον Ασθενή Νόμο των Μεγάλων Αριθμών προκύπτει

$$\hat{\alpha}_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \alpha \quad \text{με πιθανότητα 1}$$

Επιπλέον αν η  $f$  είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη, θέτουμε

$$\sigma_f^2 = \int_0^1 (f(x) - \alpha)^2 dx$$

και έπεται πως το σφάλμα της εκτίμησης Monte Carlo,  $\hat{\alpha}_n - \alpha$ , ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και τυπική τυπική απόκλιση  $\sigma_f^2/n$  καθώς  $n \rightarrow \infty$ . Η παράμετρος  $\sigma_f^2$  είναι γενικά άγνωστη, αφού το  $\alpha$  είναι άγνωστο και επιθυμούμε να το εκτιμήσουμε. Η διασπορά όμως μπορεί να εκτιμηθεί μέσω της δειγματικής τυπικής απόκλισης, η οποία δίνεται από τον τύπο

$$s_f = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (f(U_i) - \hat{\alpha}_n)^2}$$

Επομένως, από τις τιμές  $f(U_1), \dots, f(U_n)$  λαμβάνουμε, εκτός από μία εκτίμηση του ολοκληρώματος  $\alpha$ , μία εκτίμηση του σφάλματος της εκτίμησης.

Οι μέθοδοι Monte Carlo έχουν άμεση εφαρμογή στα χρηματοοικονομικά. Όπως θα δούμε σε επόμενη ενότητα, η θεωρία τιμολόγησης παραγώγων μας επιτρέπει υπό συγκεκριμένες συνθήκες να εκφράσουμε την τιμή ενός παράγωγου προϊόντος σαν μία μέση τιμή. Επομένως η τιμολόγηση ενός παραγώγου ανάγεται στον υπολογισμό μιας μέσης τιμής. Σε πολλές περιπτώσεις ο ακριβής υπολογισμός αυτής της μέσης τιμής δεν μπορεί να γίνει ακριβώς. Έτσι λοιπόν οι μέθοδοι Monte Carlo φαίνονται εξαιρετικά χρήσιμες.

## 2.3 Τεχνικές ελάττωσης διασποράς

Σε αυτή την ενότητα θα δούμε κάποιες χρήσιμες μεθόδους για την ελάττωση της διασποράς του σφάλματος των εκτιμητών Monte Carlo. Έστω  $Y_1, \dots, Y_n$  τα αποτελέσματα που λάβαμε μετά από  $n$  επαναλήψεις μιας προσομοίωσης. Υποθέτουμε ότι οι  $Y_i$  έχουν προκύψει ανεξάρτητα και ακολουθούν την ίδια κατανομή με πεπερασμένη μέση τιμή. Σκοπός να εκτιμήσουμε την πραγματική μέση τιμή  $\mathbb{E}[Y]$  την κατανομής από την οποία προήλθαν. Η συνήθης εκτιμήτρια είναι ο δειγματικός μέσος

$$\bar{Y} = \frac{Y_1 + \dots + Y_n}{n}$$

η οποία είναι αμερόληπτη και συγκλίνει σχεδόν σίγουρα στην πραγματική μέση τιμή καθώς  $n \rightarrow \infty$ . Επιπρόσθετα γνωρίζουμε πως με πιθανότητα  $(1 - \alpha)$ , η  $\mathbb{E}[Y]$  βρίσκεται σε ένα διάστημα  $[l_\alpha, r_\alpha]$ . Λόγω του Κεντρικού Οριακού θεωρήματος γνωρίζουμε πως, αν  $z_\alpha$  είναι το  $(1 - \alpha)$  ποσοστιαίο σημείο της τυπικής κανονικής κατανομής, τότε θα έχουμε

$$\mathbb{E}[Y] \in \left( \bar{Y} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma_Y}{\sqrt{n}}, \bar{Y} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma_Y}{\sqrt{n}} \right), \quad \text{με πιθανότητα } (1 - \alpha) \quad (2.3.1)$$

όπου  $\sigma_Y$  είναι η τυπική απόκλιση της  $Y$ . Ανάλογο θα ήταν και το αποτέλεσμα αν αντικαθιστούσαμε την τυπική απόκλιση με την δειγματική τυπική απόκλιση  $s_Y$ .

Παρατηρούμε πως το εύρος του διαστήματος είναι  $2z_\alpha \frac{\sigma_Y}{\sqrt{n}}$ . Άρα όσο πιο μικρό είναι το  $\alpha$ , τόσο πιο μεγάλο το  $z_\alpha$  και κατ'επέκταση και το εύρος του διαστήματος εμπιστοσύνης στην 2.3.1. Αν υποθέσουμε πως επιθυμούμε ένα διάστημα εμπιστοσύνης με συγκεκριμένο επίπεδο βεβαιότητας  $(1 - \alpha)$  υπάρχουν δύο τρόποι να μειωθεί το εύρος του, είτε να αυξηθεί το πλήθος επαναλήψεων  $n$  είτε να μειωθεί η διασπορά  $\sigma_Y^2$ . Στην ενότητα αυτή θα δούμε τεχνικές για να συμβεί το δεύτερο.

Η γενική ιδέα είναι η εξής: αντί να γίνει χρήση των  $Y_1, \dots, Y_n$  και του δειγματικού τους μέσου  $\bar{Y}$ , μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε κάποιες τυχαίες μεταβλητές  $\tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_n$  και τον δικό τους δειγματικό μέσο  $\bar{Y}'$  έτσι ώστε  $\bar{Y}' \rightarrow \mathbb{E}[Y]$  σχεδόν σίγουρα και ταυτόχρονα να ισχύει  $\sigma_{\bar{Y}'} < \sigma_{\bar{Y}}$ . Οι ακόλουθες τεχνικές ελάττωσης διασποράς δίνουν τρόπους επιλογής αυτών των νέων μεταβλητών  $\tilde{Y}_i$ .

### 2.3.1 Μέθοδος μεταβλητών ελέγχου

Η τεχνική των μεταβλητών ελέγχου είναι η πιο αποτελεσματική και ευρέως διαδεδομένη μέθοδος για την ελάττωση της διασποράς. Η τεχνική αυτή αξιοποιεί την πληροφορία που σχετίζεται με μια γνωστή ποσότητα για να εκτιμηθεί μία άλλη ποσότητα, υπό την προϋπόθεση ότι οι δυο ποσότητες σχετίζονται μεταξύ τους.

Αναλυτικότερα, ας υποθέσουμε πως επιθυμούμε να εκτιμήσουμε την  $\mathbb{E}[Y]$  και είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε την  $\mathbb{E}[X]$ , ενώ παράλληλα γνωρίζουμε πως οι  $X, Y$  έχουν κάποια συσχέτιση. Για κάθε μία  $Y_i$  που παράχθηκε υπολογίζουμε μία ακόμη τιμή  $X_i$  και υποθέτουμε ότι τα ζεύγη  $(X_i, Y_i)$  είναι ανεξάρτητα και ισόνομα για διαφορετικά  $i$ . Επιπλέον υποθέτουμε πως  $\mathbb{E}[X_i] = \mathbb{E}[X]$ . Τότε αν θεωρήσουμε ένα  $b \in \mathbb{R}$ , μπορούμε για κάθε  $i = 1, \dots, n$  να υπολογίσουμε την ποσότητα

$$Y_i(b) = Y_i - b(X_i - \mathbb{E}[X])$$

και κατά συνέπεια και τον δειγματικό τους μέσο

$$\bar{Y}(b) = \bar{Y} - b(\bar{X} - \mathbb{E}[X]) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - b(X_i - \mathbb{E}[X])) \quad (2.3.2)$$

Η 2.3.2 λέγεται 'Εκτιμήτρια Μεταβλητής Ελέγχου'. Το σφάλμα  $\bar{X} - \mathbb{E}[X]$  στην εκτιμήτρια λειτουργεί ως ένας έλεγχος κατά την εκτίμηση της  $\mathbb{E}[Y]$ .

Αυτή η εκτιμήτρια είναι αμερόληπτη

$$\mathbb{E}[\bar{Y}(b)] = \mathbb{E}[\bar{Y} - b(\bar{X} - \mathbb{E}[X])] = \mathbb{E}[\bar{Y}] = \mathbb{E}[Y]$$

και συνεπώς με πιθανότητα 1

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{Y} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i(b) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (Y_i - b(X_i - \mathbb{E}[X])) \\ &= \mathbb{E}[Y - b(X - \mathbb{E}[X])] \quad \sigma.\sigma. \\ &= \mathbb{E}[Y] \end{aligned}$$

Εν συνεχεία κάθε  $Y_i(b)$  έχει διασπορά

$$\begin{aligned} \text{Var}[Y_i(b)] &= \text{Var}[Y_i - b(X_i - \mathbb{E}[X])] \\ &= \sigma_Y^2 - 2b\text{Cov}(X, Y) + b^2\sigma_X^2 \\ &= \sigma_Y^2 - 2b\sigma_X\sigma_Y\rho_{XY} + b^2\sigma_X^2 \\ &= \sigma^2(b) \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

όπου  $\sigma_X^2 = \text{Var}[X]$ ,  $\sigma_Y^2 = \text{Var}[Y]$  και  $\rho_{XY}$  είναι ο συντελεστής συσχέτισης των  $X, Y$  που δίνεται από τον τύπο

$$\rho_{XY} = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

Επομένως σύμφωνα με τα παραπάνω, τελικά η εκτιμήτρια μεταβλητής ελέγχου έχει διασπορά

$$Var[\tilde{Y}(b)] = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n Var[Y_i(b)] = \frac{1}{n} \sigma^2(b)$$

Ο δειγματικός μέσος των  $Y_i$ , που δίνεται από την εκτιμήτρια μεταβλητής ελέγχου για  $b = 0$ , έχει διασπορά  $\sigma_Y^2/n$ . Επομένως η εκτιμήτρια μεταβλητής ελέγχου θα έχει μικρότερη διασπορά από τη συνηθισμένη εκτιμήτρια αν

$$b^2 \sigma_X - 2b \sigma_Y \rho_{XY} < 0$$

Το βέλτιστο  $b^*$  για το οποίο λαμβάνουμε την εκτιμήτρια με την ελάχιστη διασπορά δίνεται από την εξίσωση

$$b^* = \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} \rho_{XY} = \frac{Cov(X, Y)}{Var(X)} \quad (2.3.4)$$

Αντικαθιστώντας την 2.3.4 στην 2.3.3 παρατηρούμε πως ο λόγος της διασποράς της βέλτιστης εκτιμήτρια μεταβλητής ελέγχου,  $\bar{Y}(b^*)$ , προς τη διασπορά του δειγματικού μέσου θα είναι

$$\begin{aligned} \frac{Var[\bar{Y}(b^*)]}{Var[\bar{Y}]} &= \frac{\frac{1}{2} \sigma^2(b^*)}{\frac{1}{n} Var[Y]} = \\ &= \frac{\sigma_Y^2 - 2 \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} \rho_{XY} \sigma_X \sigma_Y \rho_{XY} + \frac{\sigma_Y^2}{\sigma_X^2} \rho_{XY} \sigma_X^2}{\sigma_Y^2} \\ &= 1 - \rho_{XY}^2 \end{aligned}$$

άρα δηλαδή

$$Var[\bar{Y}(b^*)] = Var[\bar{Y}] (1 - \rho_{XY}^2) \quad (2.3.5)$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι πράγματι η διασπορά μειώθηκε, παράλληλα όμως αυξήθηκαν και οι υπολογισμοί που χρειάζονται, αφού για κάθε  $Y_i$  που παράχθηκε πρέπει να υπολογιστεί και το  $X_i$ . Προκύπτει το ερώτημα σε ποιες περιπτώσεις θα είναι όντως χρήσιμη να χρησιμοποιηθεί αυτή η τεχνική. Ενδεχομένως όταν η συσχέτιση των  $X, Y$  είναι κοντά στο 1, καθώς σε αυτή τη περίπτωση η διασπορά σχεδόν θα μηδενίζεται. Ας υποθέσουμε για παράδειγμα ότι η παραγωγή μιας  $Y_i$  απαιτεί χρόνο

$\tau$ , ενώ  $\gamma$  παραγωγή του ζεύγους  $(X, Y)$  απαιτεί χρόνο  $2\tau$  και έχουμε συνολικό χρόνο  $T$  στη διάθεση μας για την παραγωγή. Τότε, χωρίς μεταβλητή ελέγχου ο παράγοντας  $\sigma/\sqrt{n}$  είναι

$$\sqrt{\text{Var}(Y) \frac{\tau}{T}}$$

ενώ με μεταβλητή ελέγχου ο παράγοντας αυτός γίνεται

$$\sqrt{\text{Var}(Y)(1 - \rho_{XY}^2)2 \frac{\tau}{T}}$$

Επομένως αν  $2(1 - \rho_{XY}^2) < 1$  μας συμφέρει να τον εισάγουμε στην εκτίμηση μας.

### Παρατηρήσεις

Σύμφωνα με την 2.3.5, η αποτελεσματικότητα μίας εκτιμήτριας μεταβλητής ελέγχου, καθορίζεται από το πόσο μεγάλη είναι η συσχέτιση μεταξύ της ποσότητας που επιθυμούμε να εκτιμήσουμε  $Y$  και της μεταβλητής ελέγχου  $X$ .

Αν η υπολογιστική προσπάθεια που απαιτείται με ή χωρίς τη μεταβλητή ελέγχου είναι η ίδια, τότε η 2.3.5 μετρά πόσο επιταχύνεται η υπολογιστική διαδικασία λόγω της χρήσης της μεταβλητής ελέγχου κατά την εκτίμηση. Αναλυτικότερα, για να πετύχουμε την ίδια διασπορά που μας δίνει η εκτιμήτρια μεταβλητής ελέγχου μετά από  $n$  επαναλήψεις, όταν χρησιμοποιούμε την συνήθη εκτιμήτρια, θα πρέπει ο αριθμός των επαναλήψεων να γίνει  $n/(1 - \rho_{XY}^2)$ .

Οι παραπάνω παρατηρήσεις, σε συνδυασμό με την 2.3.5 εφαρμόζονται στην περίπτωση που η βέλτιστη παράμετρος  $b^*$  είναι γνωστή. Αντίθετα, η  $\mathbb{E}[Y]$  είναι άγνωστη, συνεπώς είναι απίθανο οι  $\sigma_Y$  και  $\rho_{XY}$  να είναι γνωστές. Ακόμη και σε αυτή τη περίπτωση μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μια μεταβλητή ελέγχου κατά την εκτίμηση μας, εκτιμώντας την παράμετρο  $b^*$ . Αντικαθιστώντας τις  $Cov(X, Y)$ ,  $Var(X)$  στην 2.3.4 με τις αντίστοιχες δειγματικές θα έχουμε

$$\hat{b}_n = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \quad (2.3.6)$$

Διαιώνοντας τον αριθμητή και τον παρονομαστή με  $n$  στην τελευταία παράσταση, έχουμε από το νόμο των μεγάλων αριθμών ότι  $\hat{b}_n \rightarrow b^*$  σχεδόν σίγουρα καθώς  $n \rightarrow \infty$ . Επομένως τώρα, η βέλτιστη εκτιμήτρια ελέγχου γίνεται η  $\bar{Y}(\hat{b}_n)$ , δηλαδή ο δειγματικός μέσος των  $Y_i(\hat{b}_n) = Y_i - \hat{b}_n(X_i - \mathbb{E}[X])$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Οι εκτιμήτριες  $\bar{Y}(b^*)$ ,  $\bar{Y}(\hat{b}_n)$  δεν διαφέρουν ιδιαίτερα

$$\bar{Y}(b^*) - \bar{Y}(\hat{b}_n) = (\hat{b} - b^*) \left( \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - \mathbb{E}[X] \right) \rightarrow 0 \text{ σχεδόν σίγουρα}$$

Η αντικατάσταση όμως της  $b^*$  με την  $\hat{b}_n$  εισάγει μεροληψία την εκτίμηση, καθώς οι  $Y_i(\hat{b}_n)$  δεν είναι ανεξάρτητες για διαφορετικά  $i$ .

Εφαρμογή αυτής της μεθόδου θα δούμε αναλυτικά στο τέταρτο κεφάλαιο, όπου θα δούμε μία σύγκριση στην εκτίμηση της αξίας ενός παραγώγου προϊόντος με και χωρίς μεταβλητή ελέγχου.

### 2.3.2 Μέθοδος αντιθετικών μεταβλητών

Η μέθοδος των αντιθετικών μεταβλητών επιχειρεί να μειώσει τη διασπορά μιας εκτιμήτρια, εισάγοντας αντιθετικά ζεύγη τιμών κατά την εκτίμηση μιας ποσότητας. Με τον όρο αντιθετικό ζεύγος τιμών εννοούμε δύο τιμές που προέρχονται από την ίδια κατανομή και παράλληλα η μία αντισταθμίζει την άλλη, με την έννοια ότι, αν μία από δύο λάβει μία ασυνήθιστα μεγάλη τιμή, η άλλη θα πάρει μία ανάλογα μικρή τιμή. Παράδειγμα ενός αντιθετικού ζεύγους τιμών αποτελεί το ζεύγος  $(U, 1 - U)$ , όπου  $U \sim U_{[0,1]}$ . Οι τιμές  $U$  και  $1 - U$  έχουν την ίδια κατανομή και αν η μία πάρει μεγάλη τιμή η άλλη θα πάρει μικρή τιμή. Συνεπώς αν παράξουμε ένα μονοπάτι τιμών χρησιμοποιώντας  $n$  ανεξάρτητες, ομοιόμορφες τιμές  $U_1, \dots, U_n$ , είμαστε σε θέση να παράξουμε ακόμη ένα, χρησιμοποιώντας τις  $1 - U_1, \dots, 1 - U_n$ . Τότε όλες αυτές οι τιμές προέρχονται από την ίδια κατανομή και τα ζεύγη  $(U_i, 1 - U_i)$  είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους για διαφορετικά  $i$ . Συνδυάζοντας τα  $n$  αντιθετικά ζεύγη, λαμβάνουμε πάλι ένα μονοπάτι με μειωμένη διασπορά κατά την εκτίμηση της εκάστοτε ποσότητας.

Το ίδιο μπορεί να γίνει και με άλλες κατανομές, μέσω της μεθόδου του αντίστροφου μετασχηματισμού. Αν  $F$  είναι μία συνάρτηση κατανομής, τότε οι τυχαίες τιμές  $F^{-1}(U)$  και  $F^{-1}(1 - U)$  έχουν την ίδια κατανομή, καθώς επίσης αποτελούν ένα ζεύγος αντιθετικών τιμών, αφού η  $F^{-1}$  είναι εξορισμού μονότονη συνάρτηση. Επιπλέον αν η κατανομή είναι συμμετρική γύρω από το μηδέν, με την έννοια ότι  $\mu_F(A) = \mu_F(-A)$  για κάθε Borel-μετρήσιμο σύνολο  $A \in \mathbb{R}$ , όπου  $\mu_F((-\infty, x]) = F(x)$ , τότε οι  $F^{-1}(1 - x)$  και  $F^{-1}(x)$  είναι ίσες κατά απόλυτη τιμή, αλλά έχουν αντίθετα πρόσημα.

Αν για παράδειγμα κατά την εκτίμηση μιας ποσότητας πρόκειται να χρησιμοποιηθούν  $n$  ανεξάρτητες τυπικές κανονικές τιμές,  $Z_1, \dots, Z_n$ , τότε θα μπορούσαν να εφαρμοστούν αντιθετικές μεταβλητές, και να συνδυαστούν οι  $n$  αυτές τιμές με τις  $-Z_1, \dots, -Z_n$ . Αναλυτικότερα αν επιθυμούμε να εκτιμήσουμε της  $\mathbb{E}[f(Z)]$ , όπου  $Z_i \sim N(0, 1)$  και  $f$  μία αύξουσα συνάρτηση, τότε μπορούμε αντί για τον δειγματικό μέσο, να χρησιμοποιήσουμε την εκτιμήτρια αντιθετικών μεταβλητών, που δίνεται από τον τύπο

$$\overline{f(Z)} = \frac{\sum_{i=1}^n (f(Z_i) + f(-Z_i))}{2n}$$

όπου  $Z_i$  ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές από την τυπική κανονική κατανομή.

Σύμφωνα με τον νόμο των μεγάλων αριθμών θα έχουμε ότι

$$\overline{f(Z)} \rightarrow \mathbb{E}[f(Z)] \quad \text{σχεδόν σίγουρα,}$$

διότι τα αντιθετικά ζεύγη  $(Z_i, -Z_i)$  είναι ανεξάρτητα μεταξύ του, ενώ επίσης

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \frac{f(Z_i) + f(-Z_i)}{2} \right] &= \frac{1}{2} (\mathbb{E}[f(Z_i)] + \mathbb{E}[f(-Z_i)]) \\ &= \mathbb{E}[f(Z_i)] \end{aligned}$$

αφού  $-Z_i \sim N(0, 1)$  όταν  $Z_i \sim N(0, 1)$ .

**Παράδειγμα.** Θα εκτιμήσουμε την  $\mathbb{E}[e^{\alpha Z}]$ , όπου  $Z \sim N(0, 1)$ , με χρήση αντιθετικών μεταβλητών. Αρχικά παράγουμε  $n$  ανεξάρτητες τυπικές κανονικές τυχαίες μεταβλητές  $Z_1, \dots, Z_n$  και εν συνεχεία τις αντιθετικές τους  $-Z_1, \dots, Z_n$ . Αντί του δειγματικού μέσου

$$\hat{E} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e^{\alpha Z_i}$$

υπολογίζουμε την εκτιμήτρια αντιθετικών μεταβλητών

$$\hat{E}_{anti} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n (e^{\alpha Z_i} + e^{-\alpha Z_i})$$

Στην περίπτωση του δειγματικού μέσου η διασπορά θα είναι

$$\begin{aligned} \text{Var}[e^{\alpha Z}] &= \mathbb{E}[e^{2\alpha Z}] - (\mathbb{E}[e^{\alpha Z}])^2 \\ &= e^{2\alpha^2} - e^{\alpha^2} \\ &= e^{\alpha^2} (e^{\alpha^2} - 1) \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η ποσότητα  $e^{\alpha Z}$  ακολουθεί την λογαριθμικοκανονική, και μάλιστα  $\mathbb{E}[e^{\alpha X}] = e^{\alpha\mu + \frac{1}{2}\alpha^2\sigma^2}$  όταν  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ .

Λόγω της λογαριθμικοκανονικής κατανομής προκύπτει άμεσα πως

$$\mathbb{E} \left[ \frac{e^{\alpha Z} + e^{-\alpha Z}}{2} \right] = \mathbb{E}[e^{\alpha Z}]$$

Επομένως στην περίπτωση των αντιθετικών μεταβλητών θα έχουμε

$$\begin{aligned}
\text{Var} \left[ \frac{e^{\alpha Z} + e^{-\alpha Z}}{2} \right] &= \mathbb{E} \left[ \left( \frac{e^{\alpha Z} + e^{-\alpha Z}}{2} \right)^2 \right] - \left( \mathbb{E} \left[ \frac{e^{\alpha Z} + e^{-\alpha Z}}{2} \right] \right)^2 \\
&= \mathbb{E} \left[ \frac{e^{2\alpha Z} + e^{-2\alpha Z} + 2}{4} \right] - e^{\alpha^2} \\
&= \frac{2e^{2\alpha^2} + 2}{4} - e^{\alpha^2} \\
&= \frac{(e^{\alpha^2} - 1)^2}{2}
\end{aligned}$$

Συγκρίνοντας τη διασπορά των δύο, έχουμε ότι

$$\sigma_{anti}^2 = \frac{e^{\alpha^2} - 1}{2e^{\alpha^2}} \sigma^2 < \frac{1}{2} \sigma^2$$

δηλαδή πράγματι η εκτιμήτρια  $\hat{E}_{anti}$  μας δίνει χαμηλότερη διασπορά από τη συμβατική εκτιμήτρια  $\hat{E}_{anti}$ .

## 2.4 Θεωρία τιμολόγησης

Στόχος αυτής της ενότητας είναι να καταφέρουμε να ορίσουμε τις συνθήκες υπό τις οποίες η αξία ενός παραγώγου θα εκφραστεί σαν μία μέση τιμή, ώστε να χρησιμοποιηθούν οι μέθοδοι Monte Carlo.

Για να γίνει κατανοητός ο τρόπος τιμολόγησης των παραγώγων προϊόντων, ας θεωρήσουμε μία αγορά με  $d$  υποκείμενους τίτλους όπου οι τιμές τους, την χρονική στιγμή  $t$ ,  $S_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, d$  περιγράφονται από το σύστημα των στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων

$$\frac{dS_i(t)}{S_i(t)} = \mu_i(S(t), t) dt + \sigma_i(S(t), t)^\top dW^0(t) \quad (2.4.1)$$

όπου  $W^0$  είναι μία  $k$ -διάστατη κίνηση Brown,  $S(t) = (S_1(t), \dots, S_d(t))$  το διάνυσμα τιμών της παρούσας κατάστασης, κάθε  $\sigma_i \in \mathbb{R}^k$  και κάθε  $\mu_i \in \mathbb{R}$ . Έστω τώρα

$$\Sigma_{ij} = \sigma_i^\top \sigma_j, \quad i, j = 1, \dots, d \quad (2.4.2)$$

που φανερώνει την συνδιακύμανση μεταξύ των τιμών των τίτλων  $i$  και  $j$ .

Ένα χαρτοφυλάκιο χαρακτηρίζεται από ένα διάνυσμα  $\theta \in \mathbb{R}^d$ , όπου κάθε  $\theta_i$  δηλώνει το πλήθος που συμπεριλαμβάνεται από το  $i$ -οστό προϊόν. Αφού η τιμή της κάθε μονάδας του  $i$ -οστού τίτλου είναι  $S_i(t)$  την χρονική στιγμή  $t$ , η αξία του χαρτοφυλακίου έπεται να είναι



$$\theta^\top S(t) = \theta_1 S_1(t) + \dots + \theta_d S_d(t)$$

Κάθε στρατηγική αντιστάθμισης περιγράφεται από μία στοχαστική διαδικασία  $\{\theta(t)\}$  από διανύσματα χαρτοφυλακίου όπως περιγράφηκαν παραπάνω. Θα υποθέσουμε πως η στοχαστική διαδικασία είναι  $\mathcal{F}_t = \sigma(S(u)|u \leq t)$ -μετρήσιμη.

Αν κρατήσουμε σταθερό το διάνυσμα  $\theta(t)$  για  $[t, t+h]$  η αλλαγή στην τιμή του  $i$ -οστού τίτλου θα δίνεται από την σχέση

$$\theta_i(t)[S_i(t+h) - S_i(t)]$$

και αντίστοιχα η μεταβολή στην τιμή όλου του χαρτοφυλακίου θα δίνεται από την

$$\theta(t)^\top [S(t+h) - S(t)]$$

Αντίστοιχα για συνεχή χρόνο τα κέρδη κατά το διάστημα  $[0, t]$  δίνονται από το στοχαστικό ολοκλήρωμα

$$\int_0^t \theta(u)^\top dS(u)$$

όπου τα  $S$  και  $\theta$  είναι κατάλληλα ώστε το ολοκλήρωμα να ορίζεται.

Μία στρατηγική αντιστάθμισης θα καλείται αυτοχρηματοδοτούμενη αν ικανοποιεί τη σχέση

$$\theta(t)^\top S(t) - \theta(0)^\top S(0) = \int_0^t \theta(u)^\top dS(u) \quad (2.4.3)$$

για όλα τα  $t$ . Το αριστερό μέλος της ισότητας δηλώνει τη μεταβολή της αξίας του χαρτοφυλακίου από τη χρονική στιγμή 0 μέχρι στην χρονική στιγμή  $t$  και το δεξί μέλος μας δίνει το κέρδος που έχουμε στο διάστημα  $[0, t]$ . Επομένως στην αυτοχρηματοδοτούμενη στρατηγική η μεταβολή στην αξία του χαρτοφυλακίου ισούται με το κέρδος από την συναλλαγή. Αν η σχέση 2.4.3 γραφεί

$$\theta(t)^\top S(t) = \theta(0)^\top S(0) + \int_0^t \theta(u)^\top dS(u) \quad (2.4.4)$$

μας δίνει την πληροφορία ότι με αρχική επένδυση  $V(0) = \theta(0)^\top S(0)$  μπορούμε στο τέλος του χρονικού ορίζοντα  $t$  να έχουμε ένα χαρτοφυλάκιο αξίας  $V(t) = \theta(t)^\top S(t)$  ακολουθώντας στο διάστημα  $[0, t]$  την στρατηγική  $\theta$ .

Ας υποθέσουμε τώρα ένα χαρτοφυλάκιο με απόδοση  $f(S(T))$  τη χρονική στιγμή  $T$ . Επιπλέον ας υποθέσουμε πως η αξία του προϊόντος, για κάθε χρονική στιγμή  $t$ ,  $0 \leq t < T$  δίνεται από κάποια εξίσωση  $V(S(t), t)$  η οποία είναι αρκετά ομαλή. Εφαρμόζοντας την φόρμουλα του Itô θα έχουμε

$$\begin{aligned}
V(S(t), t) = & V(S(0), 0) + \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial V(S(u), u)}{\partial S_i} dS_i(u) \\
& + \int_0^t \left[ \frac{\partial V(S(u), u)}{\partial u} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d S_i(u) S_j(u) \Sigma_{ij}(S(u), u) \frac{\partial^2 V(S(u), u)}{\partial S_i \partial S_j} \right] du
\end{aligned} \tag{2.4.5}$$

όπου  $\Sigma_{ij}$  όπως στην 2.4.2.

Αν η αξία  $V(S(t), t)$  μπορεί να παραχθεί από μία αρχική επένδυση  $V(S(0), 0)$  μέσω κάποιας αυτοχρηματοδοτούμενης στρατηγικής  $\theta$ , λόγω της 2.4.4 θα έχουμε

$$V(S(t), t) = V(S(0), 0) + \sum_{i=1}^d \int_0^t \theta_i(u) dS_i(u) \tag{2.4.6}$$

Συγκρίνοντας τις σχέσεις 2.4.5 και 2.4.6 μπορούμε να καταλήξουμε σε ένα σύστημα εξισώσεων όπου η λύση του θα είναι η επιθυμητή αξία του προϊόντος. Η κατασκευή αυτού του συστήματος είναι εξαιρετικά σύνθετη, όπως επίσης και η επίλυσή του.

Μέχρι τώρα περιγράφηκε ένας τρόπος έκφρασης της αξίας των παραγώγων προϊόντων υπό την προϋπόθεση ότι αυτή προέρχεται από μία αυτοχρηματοδοτούμενη στρατηγική. Αυτό το σύστημα δεν είναι πάντοτε εύκολο να λυθεί, είτε λόγω του μεγάλου πλήθους των υποκείμενων τίτλων, είτε λόγω της δυσκολίας που μπορεί να έχει η εξίσωση της αξίας τους. Σε αυτές τις περιπτώσεις η χρήση μεθόδων Monte Carlo φαίνεται αρκετά ελκυστική. Στη συνέχεια θα δούμε πως η αξία μπορεί να εκφραστεί σαν μία μέση τιμή ώστε να είμαστε σε θέση να γίνει εφαρμογή των μεθόδων.

Η αρχική μας υπόθεση συμπεριλάμβανε την ύπαρξη  $d$  προϊόντων στην αγορά, όπου η αξία τους δίνεται από το σύστημα 2.4.1. Ας θεωρήσουμε τώρα το μέτρο  $\mathbb{P}_0$  υπό το οποίο η  $W^0$  είναι μία τυπική κίνηση Brown.

**Ορισμός.** Μία αυτοχρηματοδοτούμενη στρατηγική  $\theta$  θα καλείται στρατηγική επιτηδειότητας αν ισχύει κάποιο από τα παρακάτω για κάποιο χρόνο  $t$

1.  $\theta(0)^\top S(0) < 0$  και  $\mathbb{P}_0[\theta(t)^\top S(t) \geq 0] = 1$
2.  $\theta(0)^\top S(0) = 0$ ,  $\mathbb{P}_0[\theta(t)^\top S(t) \geq 0] = 1$  και  $\mathbb{P}_0[\theta(t)^\top S(t) > 0] > 0$

Στην πρώτη περίπτωση ξεκινάμε με μία αρνητική επένδυση όπου με πιθανότητα 1 λαμβάνουμε μη αρνητική απόδοση. Στην δεύτερη περίπτωση ξεκινάμε με μία μηδενική επένδυση όπου με πιθανότητα 1 λαμβάνουμε μη μηδενική απόδοση, συγκεκριμένα θετική με θετική πιθανότητα.

**Ορισμός.** Μία αξία ενός παραγώγου  $V(t)$  θα καλείται εφικτή αξία αν υπάρχει αυτοχρηματοδοτούμενη στρατηγική  $\theta$  τέτοια ώστε  $V(t) = \theta(t)^\top S(t)$ .

Συνεχίζοντας θα ορίσουμε μία διαδικασία η οποία θα μας φανεί πολύ χρήσιμη για την τιμολόγηση παραγώγων προϊόντων

**Ορισμός.** Μία αυστηρά θετική διαδικασία  $Z(t)$  θα καλείται numeraire, αν το πηλίκο  $V(t)/Z(t)$  είναι martingale για κάθε εφικτή αξία  $V(t)$ , και ισχύει ότι

$$\frac{V(t)}{Z(t)} = \mathbb{E}_0 \left[ \frac{V(T)}{Z(T)} \middle| \mathcal{F}_t \right] \quad \forall t < T \quad (2.4.7)$$

Σε αυτόν τον ορισμό το  $\mathbb{E}_0$  δηλώνει τη μέση τιμή υπό το μέτρο  $\mathbb{P}_0$  και  $\mathcal{F}_t = \sigma(W_q^0 | q \leq t)$ , όπου  $W^0$  είναι μία τυπική. Επιπρόσθετα η  $Z(t)$  πρέπει να είναι προσαρμοσμένη στην  $\mathcal{F}_t$ , το οποίο πρακτικά σημαίνει πως η τιμή του  $Z(t)$  εξαρτάται από όλες τις προηγούμενες τιμές της τυπικής κίνησης Brown  $W^0$ .

Γράφοντας την 2.4.7 λίγο διαφορετικά, θα έχουμε

$$V(t) = \mathbb{E}_0 \left[ V(T) \frac{Z(t)}{Z(T)} \middle| \mathcal{F}_t \right]$$

Από την οποία φαίνεται εύκολα ο λόγος που ο όρος  $1/Z(t)$  αναφέρεται ως στοχαστικός προεξοφλητικός παράγοντας, καθώς η αξία  $V(t)$  είναι η αναμενόμενη τιμή της  $V(T)$  μειωμένη σύμφωνα με τον παράγοντα  $Z(t)/Z(T)$ . Επιπλέον αξίζει να σημειωθεί πως κάθε πολλαπλάσιο ενός numeraire είναι και αυτό numeraire. Αυτό μας επιτρέπει να θέσουμε  $Z(0) = 1$ . Σε αυτή τη περίπτωση η 2.4.7 γίνεται

$$V(0) = \mathbb{E}_0 \left[ \frac{V(T)}{Z(T)} \right] \quad (2.4.8)$$

Μία εξαιρετικά χρήσιμη ιδιότητα που προσδίδει η ύπαρξη προεξοφλητικού παράγοντα, είναι ότι αποκλείει την ύπαρξη στρατηγικής επιτηδειότητας. Πράγματι αν  $\theta(t)$  είναι μία αυτοχρηματοδοτούμενη στρατηγική, τότε η  $\theta(t)^\top S(t)$  είναι μία εφικτή αξία και ο λόγος  $\theta(t)^\top S(t)/Z(t)$  πρέπει να είναι martingale. Συγκεκριμένα σε αυτή τη περίπτωση, σύμφωνα με την 2.4.8 θα έχουμε

$$\theta(0)^\top S(0) = \mathbb{E}_0 \left[ \frac{\theta(T)^\top S(T)}{Z(T)} \right] \quad (2.4.9)$$

Παρατηρούμε πως οι δύο περιπτώσεις για την ύπαρξη στρατηγικής επιτηδειότητας δεν είναι πλέον εφικτές. Πράγματι αν υποθέσουμε πως η  $\theta(T)^\top S(T)$  είναι θετική σχεδόν βεβαίως, τότε σύμφωνα με την 2.4.9 είναι αδύνατο να είναι αρνητική η  $\theta(0)^\top S(0)$ . Επιπλέον αν υποθέσουμε πως η  $\theta(T)^\top S(T)$  είναι θετική με θετική πιθανότητα και μη αρνητική σχεδόν βεβαίως, είναι αδύνατο η  $\theta(0)^\top S(0)$  να είναι μηδενική.

### 2.4.1 Αδιάφορη κινδύνου τιμολόγηση

Είδαμε λοιπόν πως η αξία ενός παράγωγου προϊόντος μπορεί να εκφραστεί σαν μία μέση τιμή. Μένει να προσδιορίσουμε τον προεξοφλητικό παράγοντα που θα χρησιμοποιήσουμε στα επόμενα κεφάλαια για τις εκτιμήσεις μας.

Ας υποθέσουμε πως ανάμεσα στα  $d$  προϊόντα που απαρτίζουν το παράγωγο υπάρχει ένα που δεν εμπεριέχει ρίσκο, υπό την έννοια ότι είναι ανεξάρτητο από κάθε άλλο τίτλο. Επιπρόσθετα ας υποθέσουμε πως η παράμετρος drift της αξίας αυτού του τίτλου είναι μία σταθερά  $r$ , η οποία μπορεί να θεωρηθεί ένα άνευ ρίσκου επιτόκιο.

Η τιμή αυτού του τίτλου, όπου θα τη συμβολίζουμε  $\beta(t)$  θα δίνεται από τη στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$\frac{d\beta(t)}{\beta(t)} = r dt \Leftrightarrow \beta(t) = e^{rt} \text{ με } \beta(0) = 1$$

Η  $\beta(t)$  είναι μία εφικτή αξία, καθώς μπορεί να αναπαρασταθεί από την στρατηγική  $\theta(t) = (1, 0, \dots, 0)$ .

Αν υπάρχει στην αγορά ένας προεξοφλητικός παράγοντας  $1/Z(t)$ , η διαδικασία  $\beta(t)/Z(t)$  θα είναι martingale, θα είναι θετική και συγκεκριμένα θα έχει μέση τιμή 1, αφού έχει και αρχική τιμή 1 λόγω του ότι  $\frac{\beta(0)}{Z(0)} = 1$ .

Γνωρίζουμε πως μία μη αρνητική ανέλιξη martingale με μέση τιμή 1, ορίζει ένα συνεπές ως προς την διήθηση  $\{\mathcal{F}_t : t \in [0, T]\}$ , μέτρο πιθανότητας  $\mathbb{P}_\beta$ , για κάποιο σταθερό  $T$ , μέσω της

$$\left( \frac{d\mathbb{P}_\beta}{d\mathbb{P}_0} \right) \Big|_{\mathcal{F}_t} = \frac{\beta(t)}{Z(t)}, \quad 0 \leq t \leq T$$

Πρακτικά αυτό σημαίνει ότι  $\forall A \in \mathcal{F}_t$  θα ισχύει

$$\mathbb{P}_\beta(A) = \mathbb{E}_0 \left[ I_A \cdot \left( \frac{d\mathbb{P}_\beta}{d\mathbb{P}_0} \right) \Big|_{\mathcal{F}_t} \right] = \mathbb{E}_0 \left[ I_A \cdot \frac{\beta(t)}{Z(t)} \right]$$

όπου  $I_A$  είναι η δείκτρια συνάρτηση του συνόλου  $A$ .

Επομένως για την μέση τιμή ως προς αυτό το νέο μέτρο πιθανότητας θα ισχύει

$$\mathbb{E}_\beta[X] = \mathbb{E}_0 \left[ X \frac{\beta(t)}{Z(t)} \right]$$

για κάθε μη αρνητική  $\mathcal{F}_t$ -μετρήσιμη τυχαία μεταβλητή  $X$ .

Το μέτρο  $\mathbb{P}_\beta$  καλείται μέτρο αδιάφορου ρίσκου και αξίζει να σημειωθεί ότι είναι ισοδύναμο με το μέτρο  $\mathbb{P}_0$  υπό την έννοια ότι για οποιοδήποτε ενδεχόμενο  $A$  ισχύει ότι  $\mathbb{P}_\beta(A) = 0$  αν και μόνο αν  $\mathbb{P}_0(A) = 0$ .

Σύμφωνα λοιπόν με όλα τα παραπάνω η 2.4.8 γίνεται

$$V(0) = \mathbb{E}_\beta \left[ \frac{V(T)}{\beta(T)} \right] = e^{-rT} \mathbb{E}_\beta[V(T)] \quad (2.4.10)$$

Αυτός ο απλός μετασχηματισμός είναι ο βασικότερος για την τιμολόγηση παραγώγων με τις μεθόδους Monte Carlo. Η εξίσωση 2.4.10 εκφράζει την παρούσα αξία του χαρτοφυλακίου ως την μέση τιμή της απόδοσης κατά την ωρίμανση του παραγώγου, δηλαδή την χρονική στιγμή  $T$ , μειωμένη σύμφωνα με την προεξοφλητικό παράγοντα  $Z$ , που στην προκειμένη περίπτωση είναι το άνευ ρίσκου επιτόκιο  $r$ . Η μεγάλη σημασία αυτού για την εφαρμογή των μεθόδων Monte Carlo φαίνεται από τα ακόλουθα

- η δυναμική των  $Z(t)$  είναι εν γένει άγνωστη και δύσκολο να προσδιοριστεί
- η δυναμική των υποκείμενων τίτλων του παραγώγου είναι πολύ πιο εύκολα προσδιορίσιμες υπό το αδιάφορο ρίσκου μέτρο  $\mathbb{P}_\beta$  από ότι υπό το μέτρο της αγοράς  $\mathbb{P}_0$ .

Η δεύτερη κουκκίδα χρειάζεται περαιτέρω επεξήγηση. Συγκεκριμένα η εξίσωση 2.4.10 γενικά γράφεται στη μορφή

$$V(t) = \mathbb{E}_\beta \left[ V(T) \frac{\beta(t)}{\beta(T)} \middle| \mathcal{F}_t \right], \quad t < T$$

με  $V(t)$  να είναι μία εφικτή αξία. Στη συνέχεια, αφού κάθε  $S_i(t)/\beta(t)$  είναι martingale υπό το μέτρο  $\mathbb{P}_\beta$ . Προσδιορίζοντας την δυναμική των τιμών κάθε τίτλου, υπό το αδιάφορο ρίσκου μέτρο, προκύπτουν συγκεκριμένου τύπου δυναμικές που λειτουργούν και πράγματι οι λόγοι  $S_i(t)/\beta(t)$  είναι martingale.

Αν οι δυναμική των τιμών μπορούσαν να εκφραστούν μέσω του συστήματος

$$\frac{dS_i(t)}{S_i(t)} = rdt + \sigma_i(S(t), t)^\top dW(t) \quad (2.4.11)$$

όπου  $W$  είναι μία τυπική  $k$ -διάστατη κίνηση Brown υπό το μέτρο  $\mathbb{P}_\beta$  τότε θα είχαμε

$$d \left( \frac{S_i(t)}{\beta(t)} \right) = \left( \frac{S_i(t)}{\beta(t)} \right) \sigma_i(S(t), t)^\top dW(t)$$

οπότε ο λόγος  $S_i(t)/\beta(t)$  θα είναι πράγματι martingale υπό το μέτρο  $\mathbb{P}_\beta$ .

Ο προσδιορισμός ενός μοντέλου της μορφής που δίνεται από την 2.4.11 είναι ευκολότερος από αυτόν που προέρχεται από την 2.4.1 καθώς όλες οι παράμετροι drift στην περίπτωση αυτή θα είναι ίσοι με το άνευ ρίσκου επιτόκιο  $r$ . Τονίζεται πως οι πιθανοί παράμετροι drift που υπάρχουν στο μοντέλο 2.4.1 είναι άσχετοι με την δυναμική που περιγράφει την τιμή των υποκείμενων τίτλων υπό το αδιάφορο ρίσκου μέτρο.

### 2.4.2 Βασικά βήματα τιμολόγησης

Συνοψίζοντας όλα τα παραπάνω καταλήγουμε σε κάποια βασικά βήματα για την τιμολόγηση παραγώγων. Ας υποθέσουμε ένα παράγωγο προϊόν με απόδοση στην ωρίμανση του  $T$ , που εξαρτάται από τις αξίες των υποκείμενων τίτλων, μέσω μιας συνάρτησης  $f$ . Για να τιμολογήσουμε το παράγωγο προϊόν, αρχικά εκφράζουμε τις τιμές των υποκείμενων τίτλων υπό το αδιάφορο ρίσκου μέτρο. Η τιμή του προϊόντος σε αυτή τη περίπτωση θα είναι  $\mathbb{E}_\beta[e^{-rT}f(S(T))]$ . Για να υπολογίσουμε αυτή τη μέση τιμή, προσομοιώνουμε μονοπάτια των υποκείμενων τίτλων κατά το χρονικό διάστημα  $[0, T]$  σύμφωνα με τη δυναμική τους υπό το αδιάφορου ρίσκου μέτρο. Η δυναμική αυτή θα παρουσιαστεί στην επόμενη ενότητα. Σε κάθε μονοπάτι υπολογίζουμε την απόδοση  $e^{-rT}f(S(T))$  και στη συνέχεια υπολογίζουμε τη μέση τιμή από όλες αυτές τις εκτιμήσεις. Η μέση τιμή αυτή είναι η αξία του παραγώγου με την μέθοδο Monte Carlo υπό το αδιάφορου ρίσκου μέτρο. Παρακάτω παρουσιάζονται συνοπτικά τα βήματα της τιμολόγησης

- αντικαθιστούμε στην 2.4.1 τις παραμέτρους drift  $\mu_i$  με το άνευ ρίσκου επιτόκιο  $r$  και προσομοιώνουμε μονοπάτια
- υπολογίζουμε την απόδοση του παραγώγου σε κάθε μονοπάτι
- πολλαπλασιάζουμε την απόδοση με τον παράγοντα  $e^{-rT}$
- υπολογίζουμε την μέση τιμή αυτών των αποδόσεων

### 2.4.3 Μοντέλο Black&Scholes

Η δυναμική μιας μετοχής σύμφωνα με το μοντέλο Black&Scholes δίνεται από τη στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu(S(t), t)dt + \sigma dW^0(t)$$

όπου  $W^0$  μία τυπική μονοδιάστατη κίνηση Brown υπό το μέτρο  $\mathbb{P}_0$  και  $\sigma$  σταθερά. Κάθε μονάδα χρήματος που επενδύεται στη χρονική στιγμή 0 θα έχει γίνει  $\beta(t) = e^{rt}$  την χρονική στιγμή  $t$ . Υπό το αδιάφορο ρίσκου μέτρο  $\mathbb{P}_\beta$  η δυναμική της μετοχής περιγράφεται από την στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = rdt + \sigma dW(t)$$

όπου  $W$  μία τυπική κίνηση Brown υπό το μέτρο  $\mathbb{P}_\beta$ . Επομένως η αξία της μετοχής την χρονική  $T$  σε αυτή τη περίπτωση δίνεται από την εξίσωση

$$S(T) = S(0)e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma W(T)}$$

## Κεφάλαιο 3

# Τιμολόγηση παραγώγων με γνωστή θεωρητική τιμή

### 3.1 Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς

Ένα ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς  $(T, K)$  είναι ένα συμβόλαιο που δίνει στον αγοραστή του το δικαίωμα να αγοράσει τον υποκείμενο τίτλο του συμβολαίου στην ωρίμανσή του  $T$ , στην τιμή  $K$ . Η απόδοση ενός προϊόντος αυτής της μορφής είναι η ακόλουθη

$$V(T) = (S(T) - K)^+ = \max\{S(T) - K, 0\}$$

όπου  $S(T)$  είναι η τιμή του υποκείμενου τίτλου στην ωρίμανση του συμβολαίου.

Σύμφωνα με την ανάλυση που έγινε στο προηγούμενο κεφάλαιο και την εξίσωση (3.1.1), η αρχική αξία ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς επί μίας μετοχής, εφόσον η δυναμική της μετοχής υπαγορεύεται από την εξίσωση Black & Scholes, θα είναι

$$V(0) = \mathbb{E} [e^{-rT} (S(T) - K)^+]$$

Η μέση τιμή αυτή μπορεί να βρεθεί, καθώς η  $S(T)$  ακολουθεί την λογαριθμικοκανονική κατανομή αφού  $S(T) = S(0) e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma W(T)}$  και η  $W(T)$  ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διασπορά  $T$ . Επομένως υπολογίζοντας την κατάλληλου στην εξίσωση

$$V(0) = S(0) \Phi \left( \frac{\ln\left(\frac{S(0)}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \right) - e^{-rT} K \Phi \left( \frac{\ln\left(\frac{S(0)}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \right) \quad (3.1.1)$$

όπου  $\Phi(x)$  είναι η συνάρτηση κατανομής της τυπικής κανονικής κατανομής, δηλαδή  $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}y^2} dy$

Είμαστε λοιπόν σε θέση να υπολογίσουμε ακριβώς την τιμή ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς. Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να το τιμολογήσουμε με τη χρήση εκτιμητών Monte Carlo.

Για να γίνει αυτό, αρκεί να παράξουμε ανεξάρτητες μεταβλητές  $Z_i, i \in [1, n]$  από την τυπική κανονική κατανομή, με χρήση κάποιας γνωστής μεθόδου όπως αναλύθηκε σε προηγούμενο κεφάλαιο. Έστερα μπορούμε να παράξουμε πολλές πιθανές τιμές για την αξία της μετοχής στην ωρίμανση  $T$  του δικαιώματος, μέσω της σχέσης  $S_i(T) = S(0) e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T}Z_i}$ . Στη συνέχεια λαμβάνουμε  $n$  πιθανές τιμές για την απόδοση του δικαιώματος μέσω της σχέσης  $C_i = e^{-rT} (S_i(T) - K)^+$ . Τέλος παίρνοντας τη μέση τιμή αυτών των πιθανών τιμών λαμβάνουμε την εκτιμήτρια Monte Carlo για την τιμή του δικαιώματος. Τα βήματα για τη διαδικασία αυτή θα έχουν ως εξής.

Εκτίμηση αξίας ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς

1. Για  $i = 1, \dots, n$   
 Παράγω  $Z_i \sim N(0, 1)$  με τη μέθοδο Box Müller  
 Θέτω  $S_i(T) = S(0) e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T}Z_i}$   
 Θέτω  $C_i = e^{-rT} (S_i(T) - K)^+$
2. Θέτω  $\hat{C}_n = \sum_{i=1}^n \frac{C_i}{n}$

### Εφαρμογή

Ας υποθέσουμε πως επιθυμούμε να ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς επί μίας μετοχής, με αξία  $S(t)$ . Η δυναμική της μετοχής σε κάθε χρονική στιγμή καθορίζεται από το μοντέλο Black&Scholes. Η ωρίμανση του δικαιώματος είναι  $T = 1$  έτος, η αρχική αξία της μετοχής είναι  $S_0 = 40\text{€}$ , η παραδοτέα τιμή είναι  $K = 40\text{€}$ , το ετήσιο επιτόκιο άνευ ρίσκου της αγοράς είναι  $r = 0.04$  και η μεταβλητότητα είναι  $\sigma = 0.2$  ανά τετραγωνική ρίζα έτους.

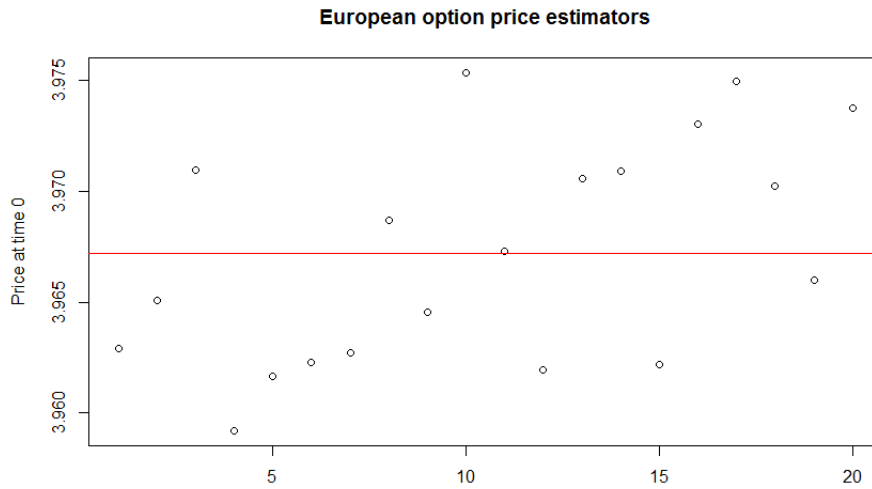
Η θεωρητική τιμή για αυτές τις παραμέτρους δίνεται από την εξίσωση 3.1.1, και είναι

$$V(0) = 3.97\text{€}$$

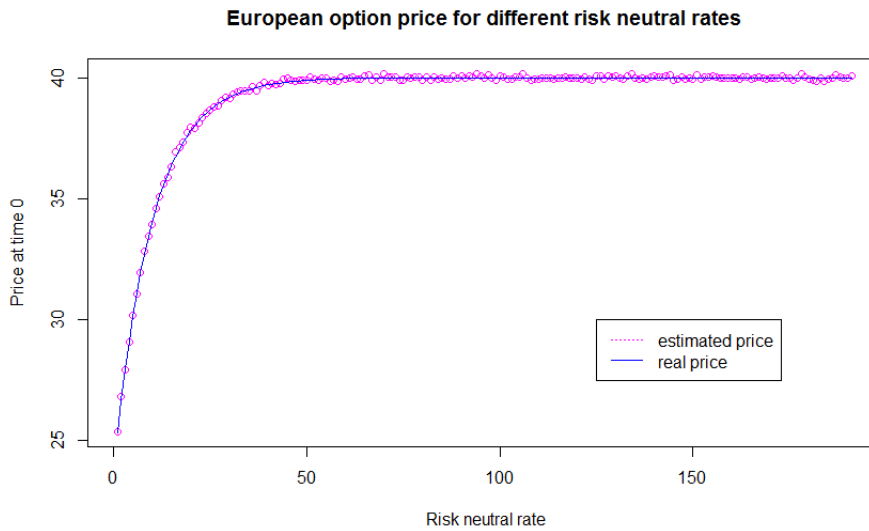
Επομένως για να αγοραστεί αυτό το δικαίωμα πρέπει ο αγοραστής να καταβάλλει αυτό το ποσό.

Παρόλο που η τιμολόγηση μπορεί να γίνει αναλυτικά σε αυτή τη περίπτωση, ας δούμε τι αποτέλεσμα θα λαμβάναμε με την εφαρμογή της μεθόδου Monte Carlo. Με ακρίβεια είκοσι εκατομμυρίων επαναλήψεων λάβαμε 20 εκτιμήσεις για την τιμή του παραγώγου, οι οποίες φαίνονται στο σχήμα 3.1.1. Η μέση τιμή των εκτιμητών αυτών έδωσε την εκτίμηση της αξίας να είναι  $V_{est}(0) = 3.967\text{€}$ . Παρατηρούμε λοιπόν πως η εκτίμηση αυτή είναι εξαιρετικά κοντά στην πραγματική τιμή.

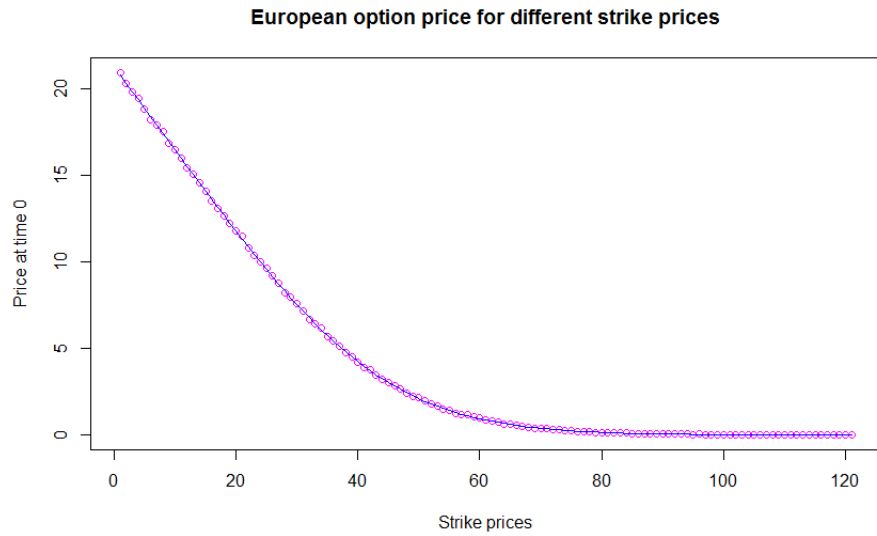




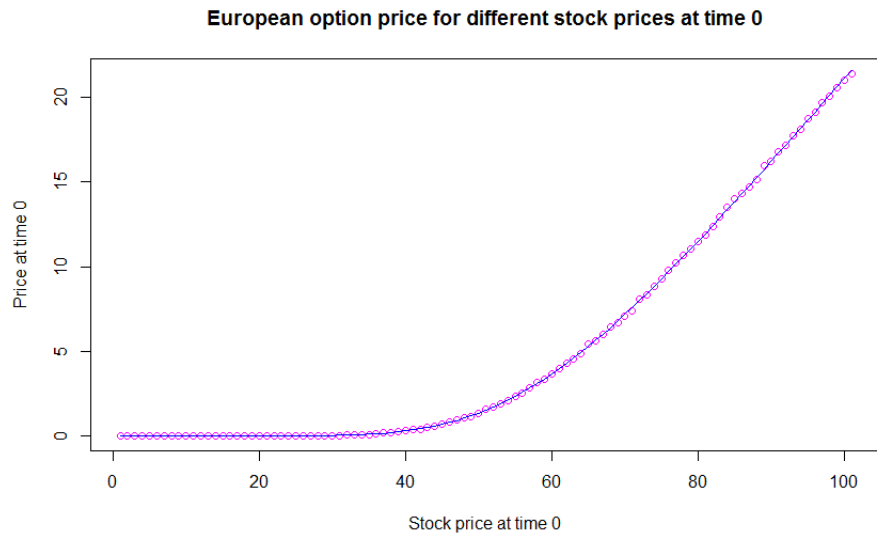
Σχήμα 3.1.1: Γραφική παράσταση 20 εκτιμητών καθώς και της μέσης τιμής τους για την τιμολόγηση ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς



Σχήμα 3.1.2: Μεταβολή της αξίας του παραγώγου καθώς το επιτόκιο  $r$  κυμαίνεται στο διάστημα  $[0.01, 1]$



Σχήμα 3.1.3: Μεταβολή της αξίας του παραγώγου καθώς η τιμή άσκησης  $K$  κυμαίνεται στο διάστημα  $[20, 80]$



Σχήμα 3.1.4: Μεταβολή της αξίας του παραγώγου καθώς η αρχική αξία της μετοχής κυμαίνεται στο διάστημα  $[10, 60]$

Στη συνέχεια στο σχήμα 3.1.2 βλέπουμε τη συμπεριφορά της αξίας ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς κατά τη μεταβολή του άνευ ρίσκου επιτοκίου  $r$ . Θα υποθέσουμε πως το επιτόκιο κυμαίνεται μεταξύ 0.01 και 1. Για κάθε τιμή του επιτοκίου λαμβάνουμε μία εκτίμηση της αξίας με ακρίβεια δέκα χιλιάδων επαναλήψεων για κάθε τιμή του επιτοκίου η οποία αναπαρίσταται με ροζ κουκκίδες. Με μπλε γραμμή βλέπουμε τη γραφική παράσταση της πραγματικής αξίας του προϊόντος συναρτήσει του επιτοκίου  $r$  για  $r \in [0.01, 1]$ . Όμοια και στα γραφήματα 3.1.3 και 3.1.4 βλέπουμε πως επηρεάζεται η αξία από την μεταβολή της τιμής άσκησης του δικαιώματος, αλλά και από την αρχική τιμή της μετοχής. Παρατηρούμε πως οι εκτιμώμενες αξίες βρίσκονται εξαιρετικά κοντά στις πραγματικές.

## 3.2 Barrier δικαίωμα αγοράς

Ένα άλλο παράγωγο προϊόν που η τιμολόγησή του είναι αρκετά ενδιαφέρουσα είναι το barrier δικαίωμα αγοράς. Ο αγοραστής ενός δικαιώματος αγοράς αυτής της μορφής επί μίας μετοχής, αγοράζοντας το δικαιούται να αγοράσει την μετοχή την χρονική στιγμή της ωρίμανσης του προϊόντος υπό την προϋπόθεση ότι η μετοχή δεν έχει πέσει κάτω από μία συγκεκριμένη τιμή  $M$ , το λεγόμενος 'κάτω και εκτός φράγμα' του παραγώγου. Η ονομασία του φράγματος προέρχεται από την μορφή της απόδοσης, καθώς αν η τιμή της μετοχής σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή πέσει κάτω από το  $M$  θα μηδενιστεί. Η απόδοση του παραγώγου εν γένει είναι της μορφής

$$V_{barr}(T) = I_{\{S(t) > M : 0 \leq t \leq T\}}(S(T) - K)^+$$

Επομένως η αξία αυτού του παραγώγου δίνεται από την μέση τιμή

$$V(0) = e^{-rT} \mathbb{E}[I_{\{S(t) > M : 0 \leq t \leq T\}}(S(T) - K)^+]$$

Αρχικά ας δούμε ποια είναι η θεωρητική τιμή αυτού του προϊόντος. Για την εύρεση της θεωρητικής τιμής θα χρησιμοποιηθεί το αποτέλεσμα ότι, αν  $C(t, S(t))$  είναι η αξία ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς την χρονική στιγμή  $t$  με παραμέτρους κοινές με το barrier δικαίωμα και  $M$  ένα κάτω και εκτός φράγμα, η αξία του barrier δικαιώματος δίνεται από τον τύπο [7]

$$C_{down\&out}(t, S(t)) = C(t, S(t)) - \left(\frac{S(t)}{M}\right)^{1 - \frac{2r}{\sigma^2}} C\left(t, \frac{M^2}{S(t)}\right)$$

Επομένως η θεωρητική τιμή του προϊόντος την χρονική στιγμή 0 θα είναι

$$C_{down\&out}(0, S(0)) = C(0, S(0)) - \left(\frac{S(0)}{M}\right)^{1 - \frac{2r}{\sigma^2}} C\left(0, \frac{M^2}{S(0)}\right)$$

### 58ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3. ΤΙΜΟΛΟΓΗΣΗ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ ΜΕ ΓΝΩΣΤΗ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΤΙΜΗ

Άρα αρκεί να υπολογίσουμε την αξία ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς με  $S'(0) = \frac{M^2}{S(0)}$  για να βρούμε τη ζητούμενη θεωρητική τιμή ενός barrier δικαιώματος αγοράς με κάτω και εκτός φράγμα. Σημειώνεται πως και σε κάθε άλλη περίπτωση ενός φράγματος υπάρχουν θεωρητικές τιμές βασισμένες στην αξία ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος.

Για την εκτίμηση της αξίας ενός barrier δικαιώματος αγοράς με χρήση της μεθόδου Monte Carlo ο αλγόριθμος που πρέπει να ακολουθηθεί είναι πιο περίπλοκος από την περίπτωση του ευρωπαϊκού δικαιώματος, καθώς η απόδοση εξαρτάται από όλες τις τιμές του μονοπατιού που θα προσομοιώσουμε και όχι μόνο από την τελική τιμή της μετοχής. Όπως θα δούμε και στη συνέχεια για την παραγωγή των μονοπατιών επιλέχθηκε η παραγωγή γέφυρας Brown καθώς μας δίνει πιο γρήγορα μία εικόνα για την μορφή του μονοπατιού της μετοχής. Ο αλγόριθμος είναι ο ακόλουθος

Αλγόριθμος τιμολόγησης ενός barrier δικαιώματος αγοράς

1. Για  $q = 1, \dots, n$   
 Παράγω  $Z_1, \dots, Z_m \sim N(0, 1)$  με τη μέθοδο Box Müller  
 Θέτουμε  $h = 2^m$ ,  $j_{max} = 1$ ,  $W_h = \sqrt{t_h}Z_h$ ,  $t_0 = 0$ ,  $W_0 = 0$   
 Για  $k = 1, \dots, m$  θέτουμε  
 $i_{min} = h/2$ ,  $i = i_{min}$ ,  $l = 0$ ,  $r = h$   
 για  $j = 1, \dots, j_{max}$  θέτουμε  
 $a = ((t_r - t_i)W_l + (t_i - t_l)W_r)/(t_r - t_l)$   
 $b = \sqrt{(t_i - t_l)(t_r - t_i)/(t_r - t_l)}$   
 $W_i = a + bZ_i$   
 Θέτω  $S_q(t_i) = S(0) e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)t_i + \sigma W_i}$   
 Αν  $S_q(t_i) \leq 37$ ; Θέτω  $C_q = 0$ ; Σταματάω  
 Αλλιώς  
 Θέτω  $i = i + h$ ;  $l = l + h$ ;  $r = r + h$ ;  $j_{max} = 2 * j_{max}$ ;  $h = i_{min}$   
 Θέτω  $C_q = e^{-rT} (S_q(T) - K)^+$
2. Θέτω  $\hat{C}_n = \sum_{q=1}^n \frac{C_q}{n}$

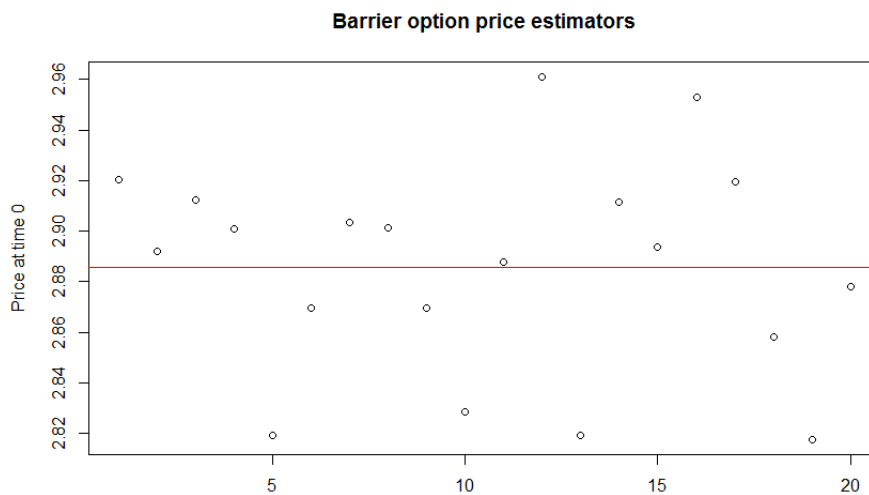
#### Εφαρμογή

Ας υποθέσουμε πως επιθυμούμε να τιμολογήσουμε ένα barrier δικαίωμα αγοράς επί μίας μετοχής, του οποίου η ωρίμανση είναι  $T = 1$  έτος, η αρχική αξία της μετοχής είναι  $S_0 = 40\text{€}$ , η παραδοτέα τιμή είναι  $K = 40\text{€}$ , το ετήσιο επιτόκιο άνευ ρίσκου της αγοράς είναι  $r = 0.04$ , η μεταβλητότητα είναι  $\sigma = 0.2$  ανά τετραγωνική ρίζα έτους και το κάτω και εκτός φράγμα είναι  $M = 37$ . Η θεωρητική τιμή αυτού του προϊόντος σύμφωνα με τα προηγούμενα προκύπτει να είναι

$$V_{barr}(0) = 2.81\text{€}$$

Στη συνέχεια κάνουμε εκτίμηση αυτής της αξίας με τη μέθοδο Monte Carlo. Διακριτοποιούμε τον χρονικό ορίζοντα σε  $2^{10}$  χρονικές στιγμές, ώστε να γίνει

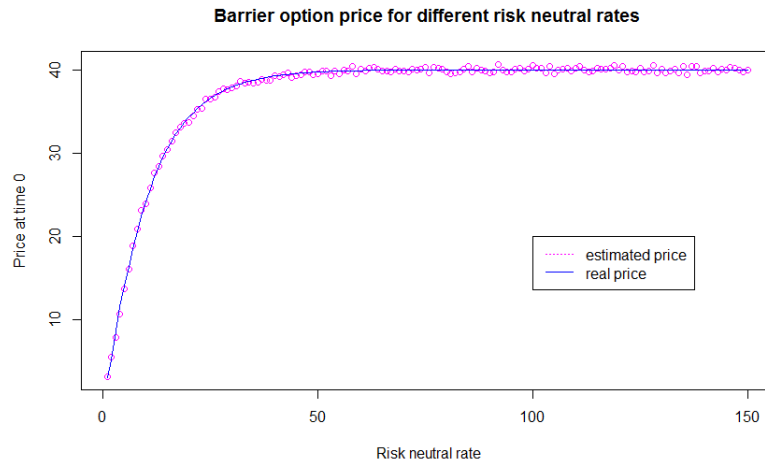
η προσομοίωση του μονοπατιού σε αυτές και να ελεγχθεί αν η τιμή της μετοχής πέφτει κάτω του φράγματος. Με ακρίβεια είκοσι εκατομμυρίων επαναλήψεων λάβαμε 20 εκτιμήσεις για την τιμή του παραγώγου, οι οποίες φαίνονται στο σχήμα 3.1.1. Η μέση τιμή των εκτιμητών αυτών έδωσε την εκτίμηση της αξίας να είναι  $V_{est}^{barr}(0) = 2.885\text{€}$ . Παρατηρούμε λοιπόν πως η εκτίμηση αυτή είναι εξαιρετικά κοντά στην πραγματική τιμή. Εν συνεχεία στο σχήμα 3.2.5 βλέπουμε τα αποδεκτά μονοπάτια που βρίσκονται εντός των ορίων που υποδεικνύει το προϊόν, δηλαδή να μην έχει πέσει σε καμία χρονική στιγμή κάτω από το κάτω και εκτός φράγμα  $M_{do} = 37$ .



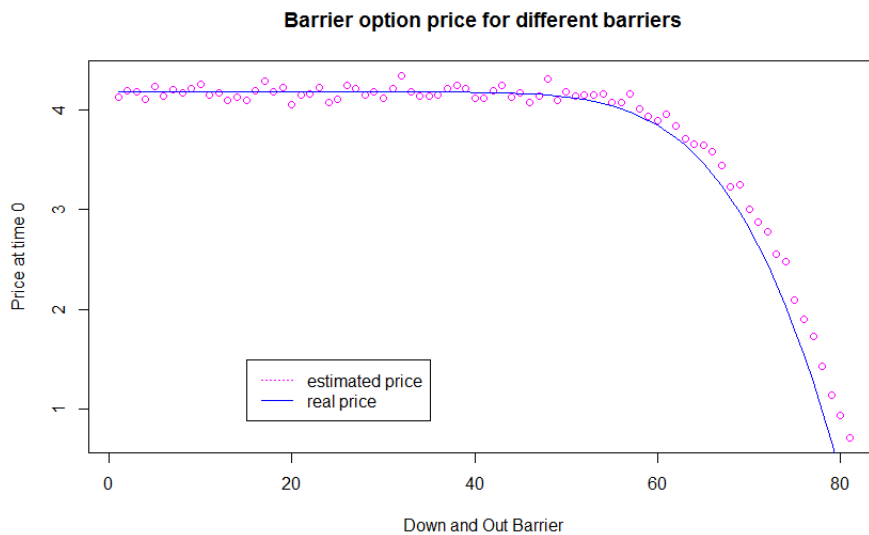
Σχήμα 3.2.1: Γραφική παράσταση 20 εκτιμητών καθώς και της μέσης τιμής τους για την τιμολόγηση ενός barrier δικαιώματος αγοράς

Παρατηρούμε πως για την προσομοίωση της κίνησης Brown στον αλγόριθμο για την τιμολόγηση του barrier δικαιώματος αγοράς, χρησιμοποιήθηκε η γέφυρα Brown. Θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί και η σειριακή παραγωγή των μονοπατιών, όπως θα δούμε όμως είναι αρκετά πιο αργή.

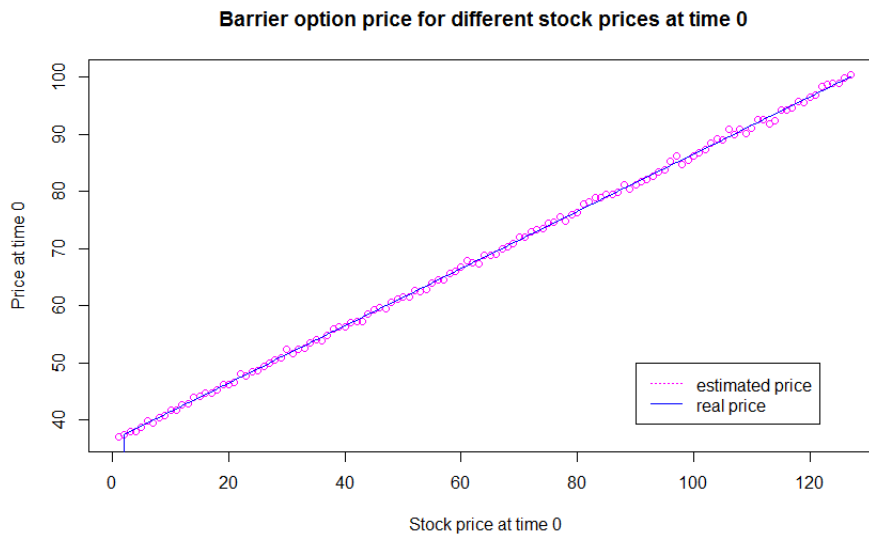
60ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3. ΤΙΜΟΛΟΓΗΣΗ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ ΜΕ ΓΝΩΣΤΗ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΤΙΜΗ



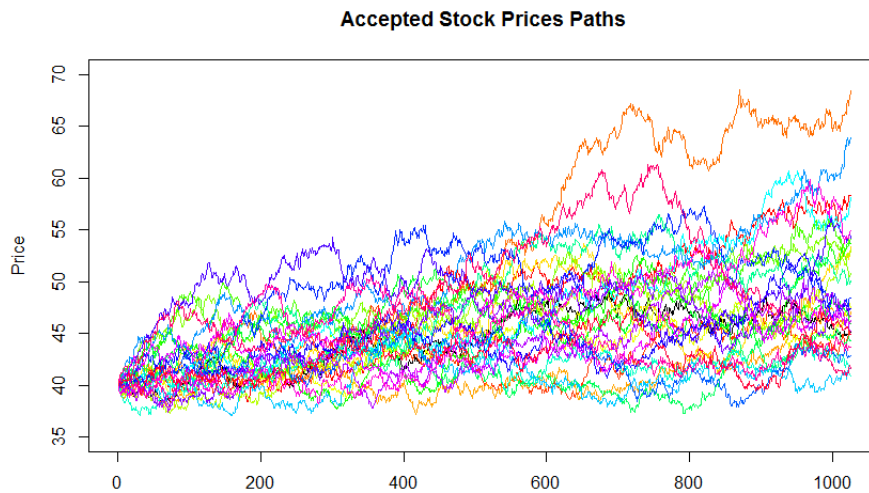
Σχήμα 3.2.2: Γραφική παράσταση της θεωρητικής αξίας (μπλε) και των προσομοιωμένων τιμών (ροζ) για αυτή, του barrier δικαιώματος αγοράς με κάτω και εκτός φράγμα  $M=37$  συναρτήσει του επιτοκίου  $r \in [1, 20]$



Σχήμα 3.2.3: Γραφική παράσταση της θεωρητικής αξίας (μπλε) και των προσομοιωμένων τιμών (ροζ) για αυτή, του barrier δικαιώματος αγοράς με το κάτω και εκτός φράγμα  $M \in [20, 40]$  με βήμα 0,25



Σχήμα 3.2.4: Γραφική παράσταση της θεωρητικής αξίας (μπλε) και των προσομοιωμένων τιμών (ροζ) για αυτή, του barrier δικαιώματος αγοράς με την αρχική αξία της μετοχής να κυμαίνεται στο διάστημα  $[37, 100]$



Σχήμα 3.2.5: Αποδεκτά μονοπάτια της μετοχής κατά την τιμολόγηση

Στα σχήματα 3.2.2, 3.2.3 και 3.2.4 βλέπουμε τη συμπεριφορά της αξίας του προϊόντος καθώς μεταβάλλονται οι διάφορες παράμετροι. Επιπρόσθετα στο γράφημα 3.2.5 βλέπουμε τα αποδεκτά μονοπάτια κατά την εκτίμηση της αξίας του παραγώγου.

### 3.3 Lookback δικαίωμα πώλησης

Ένα ακόμη δικαίωμα με γνωστή τιμή και μεγάλη χρήση είναι το lookback δικαίωμα επί μίας μετοχής. Στη περίπτωση αυτή, όπως και στο barrier δικαίωμα, η απόδοση εξαρτάται από την τροχιά της μετοχής καθόλη τη διάρκεια του χρονικού ορίζοντα. Συγκεκριμένα έχουμε εξάρτηση της απόδοσης από την μέγιστη, ή ελάχιστη, τιμή που έλαβε η μετοχή κατά το χρονικό διάστημα ζωής του δικαιώματος  $[0, T]$ . Στο lookback δικαίωμα πώλησης ο πωλητής δικαιούται να πουλήσει τη μετοχή του στην μέγιστη τιμή που έλαβε αυτό το διάστημα. Αξίζει να σημειωθεί πως εδώ δεν υπάρχει συγκεκριμένη προσυμφωνημένη τιμή όπως στις προηγούμενες περιπτώσεις. Επομένως η απόδοση αυτού του προϊόντος θα είναι

$$V_{lookback}(T) = (\max_{0 \leq t \leq T} S(t) - S(T))^+$$

Επομένως η αξία αυτού του προϊόντος θα δίνεται από την εξίσωση

$$V_{lookback}(0) = e^{-rT} \mathbb{E}_\beta[(\max_{0 \leq t \leq T} S(t) - S(T))^+]$$

Για να υπολογιστεί αυτή η μέση τιμή αρκεί να βρεθεί η κατανομή της μέγιστης τιμής που λαμβάνει η κίνηση Brown με παράμετρο drift σε πεπερασμένο χρόνο, καθώς βλέπουμε πως

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq t \leq T} S(t) &= \max_{0 \leq t \leq T} S(0) e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W(t)} = S(0) e^{\max_{0 \leq t \leq T} \{(r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W(t)\}} \\ &= S(0) e^{\sigma \max_{0 \leq t \leq T} \{W(t) + (\frac{r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2})t\}} = S(0) e^{\sigma \max_{0 \leq t \leq T} B(t)} \end{aligned}$$

όπου  $B(t) = W(t) + (\frac{r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2})t$  μία κίνηση Brown με παράμετρο drift  $\mu = (\frac{r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2})$

Γνωρίζουμε πως η εύρεση της κατανομής της μέγιστης τιμής της κίνησης Brown  $B(t)$  με παράμετρο drift  $\mu$  ανάγεται, μέσω του μετασχηματισμού Girsanov, στην εύρεση της κατανομής της μέγιστης τιμής της τυπικής κίνησης Wiener, η οποία υπολογίζεται μέσω του κανόνα της Ανάκλασης. Τελικά η κατανομή θα είναι [6]

$$\mathbb{P}[\max_{0 \leq t \leq T} B(t) \leq x] = \Phi\left(\frac{x - \mu T}{\sqrt{T}}\right) - e^{2\mu x} \Phi\left(\frac{-x - \mu T}{\sqrt{T}}\right)$$

και η μέση τιμή υπολογίζεται να είναι



$$\mathbb{E}[\max_{0 \leq t \leq T} B(t)] = \frac{1}{2\mu} (2\Phi(\mu\sqrt{T}) - 1) + \Phi(\mu\sqrt{T})\mu T + \varphi(\mu\sqrt{T})\sqrt{T} \quad (3.3.1)$$

όπου  $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}u^2} du$  και  $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$ .

Στη συνέχεια γνωρίζουμε πως η θεωρητική αξία στον χρόνο 0 δίνεται από τον τύπο [1]

$$P_{lookback}(0) = -S_0\Phi(-x - \sigma\sqrt{T}) + Me^{-rT}\Phi(-x) - \frac{S_0}{B} \left( e^{-rT} \left( \frac{S_0}{M} \right)^{-B} \Phi(-y - B\sigma\sqrt{T}) - \Phi(-y) \right)$$

όπου

$$B = \frac{2r}{\sigma^2} \quad x = \frac{\ln(\frac{S_0}{M}) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$y = \frac{-\ln(\frac{S_0}{M}) - (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad M = \max_{0 \leq t \leq T} S_t = S_0 e^{\sigma \max\{W_t + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)t\}}$$

Επομένως, δεδομένης της 3.3.1, ο υπολογισμός της θεωρητικής αξίας του lookback δικαιώματος πώλησης είναι εφικτός.

Ας υποθέσουμε πως επιθυμούμε να εκτιμήσουμε την αξία του δικαιώματος με τη χρήση της μεθόδου Monte Carlo. Μεγάλη σημασία για την εκτίμηση σε αυτή τη περίπτωση έχει η διαμέριση του διαστήματος. Όσο πιο λεπτή διαμέριση κάνουμε στο χρονικό μας διάστημα τόσο καλύτερη εκτίμηση θα λάβουμε, καθώς θα έχουμε προσεγγίσει καλύτερα την μέγιστη τιμή της μετοχής σε κάθε μονοπάτι. Ο αλγόριθμος της μεθόδου είναι ο ακόλουθος

Αλγόριθμος τιμολόγησης ενός Lookback δικαιώματος πώλησης

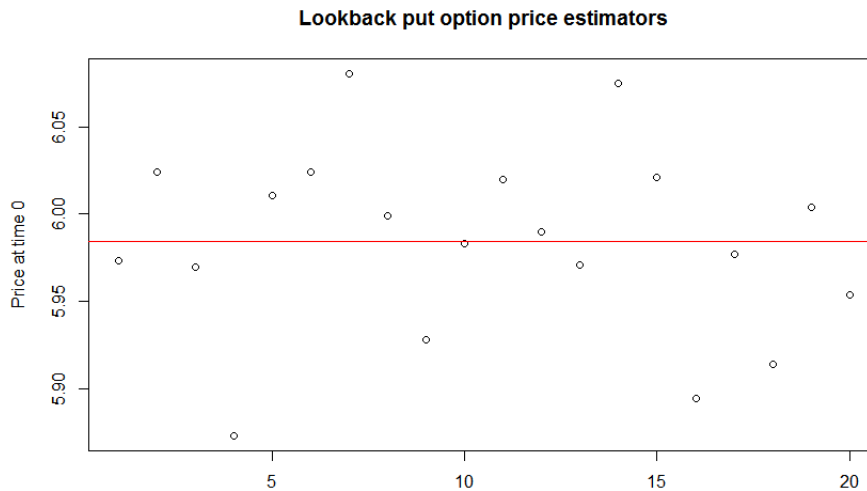
1. Παίρνω μία διαμέριση του  $[0, T]$  την  $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k = T$
2. Για  $i = 1, \dots, n$ 
  - Παράγω  $k$  ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές  $Z_i \sim N(0, 1)$
  - Θέτω  $Smax = S_0$  και
  - Για  $j = 1, \dots, k$ 
    - Θέτω  $W_{t_j} = W_{t_{j-1}} + \sqrt{t_j - t_{j-1}}Z_j$
    - Θέτω  $S_i(t_j) = S_i(t_{j-1}) e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)(t_j - t_{j-1}) + \sigma W_j}$
    - Αν  $S_i(t_j) > Smax$
    - $Smax = S_i(t_j)$
  - Θέτω  $C_i = e^{-rT}(Smax - S_i(T))$
3. Θέτω  $\hat{C}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n C_i$

### Εφαρμογή

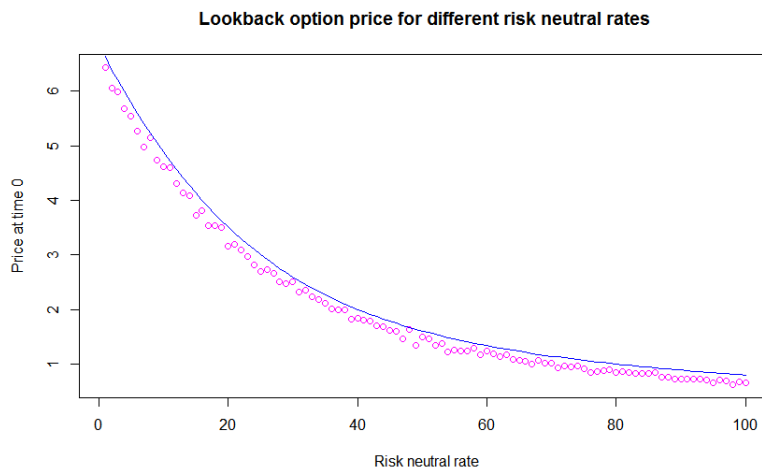
Ας υποθέσουμε πως επιθυμούμε να τιμολογήσουμε ένα lookback δικαίωμα πώλησης, επί μίας μετοχής που η δυναμική της περιγράφεται από το μοντέλο Black&Scholes, με την μέθοδο Monte Carlo. Υποθέτουμε πως η αρχική τιμή της μετοχής είναι  $S_0 = 40\text{€}$ , το επιτόκιο της αγοράς είναι  $r = 0.04$ , η μεταβλητότητα  $\sigma = 0.2$  και ο χρόνος ζωής του προϊόντος μας είναι  $T = 1$  έτος. Η θεωρητική τιμή του προϊόντος αυτού υπολογίζεται σύμφωνα με την προαναφερθείσα ανάλυση να είναι

$$V_{lookback}(0) = 5.998$$

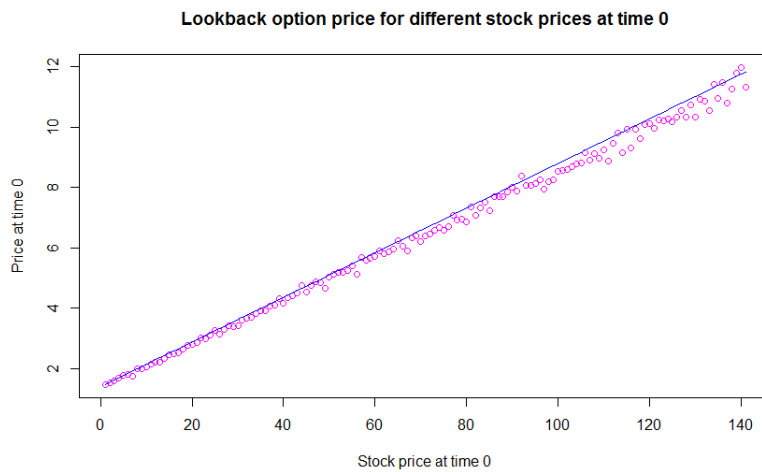
Στη συνέχεια κάνουμε εκτίμηση με χρήση της μεθόδου Monte Carlo. Παίρνουμε μία διαμέριση του διαστήματος  $[0, 1]$  και παράγουμε διαδοχικά τις τιμές της μετοχής, ελέγχοντας αν η νέα τιμή είναι μεγαλύτερη από όλες τις προηγούμενες. Με ακρίβεια δύο εκατομμυρίων επαναλήψεων, λάβαμε 20 εκτιμητές για την αξία του παραγώγου οι οποίες φαίνονται στο σχήμα 3.3.1. Η μέση τιμή των εκτιμητών αυτών έδωσε την εκτίμηση της αξίας να είναι  $V_{lookback}^{est}(0) = 5.984\text{€}$  και η διαμέριση του χρόνου έγινε ανά 0.001.



Σχήμα 3.3.1: Γραφική παράσταση 20 εκτιμητών καθώς και της μέσης τιμής τους για την τιμολόγηση ενός Lookback δικαίωματος πώλησης



Σχήμα 3.3.2: Γραφική παράσταση θεωρητικών (μπλε) και εκτιμώμενων (ροζ) αξιών του Lookback δικαιώματος πώλησης για το άνευ ρίσκου επιτόκιο  $r$  να ανήκει στο διάστημα  $[0.01, 1]$



Σχήμα 3.3.3: Γραφική παράσταση θεωρητικών (μπλε) και εκτιμώμενων (ροζ) αξιών του Lookback δικαιώματος πώλησης καθώς η αρχική αξία της μετοχής κυμαίνεται στο διάστημα  $[10, 80]$

### 66 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3. ΤΙΜΟΛΟΓΗΣΗ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ ΜΕ ΓΝΩΣΤΗ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΤΙΜΗ

Συνεχίζοντας στο σχήμα 3.3.2 βλέπουμε τις τιμές που λάβαμε για την εκτίμηση της αξίας του Lookback δικαιώματος πώλησης με κουκκίδες (ροζ) και την θεωρητική τιμή του προϊόντος (μπλε) όταν το άνευ ρίσκου επιτόκιο κυμαίνεται μεταξύ 0.01 και 1. Αξίζει να παρατηρηθεί πως το ότι η εκτιμώμενη αξία για κάθε τιμή του επιτοκίου βρίσκεται κάτω από την θεωρητική, είναι απόλυτα λογικό, αφού η πραγματική μέγιστη τιμή της μετοχής στα μονοπάτια που προσομοιώθηκαν είναι πρακτικά αδύνατο να βρεθεί ακριβώς, λόγω της διαμέρισης του συνεχούς χρόνου. Όμοια στο σχήμα 3.3.3 βλέπουμε πως κινείται η αξία του προϊόντος καθώς η αρχική αξία της μετοχής μεταβάλλεται.

## Κεφάλαιο 4

# Τιμολόγηση παραγώγων με άγνωστη θεωρητική τιμή

Μέχρι τώρα τιμολογήσαμε παράγωγα προϊόντα με γνωστή θεωρητική τιμή. Η ύπαρξη θεωρητικής τιμής δυστυχώς δεν είναι πάντοτε εφικτή. Αυτές είναι οι περιπτώσεις που οι εκτιμήσεις των αξιών με τη μέθοδο Monte Carlo είναι εξαιρετικά χρήσιμες. Στο παρόν κεφάλαιο θα τιμολογηθούν παράγωγα αυτής της κατηγορίας. Για την τιμολόγηση μας υποθέτουμε πως στην αγορά παραμένει να υπάρχει ένας καταθετικός λογαριασμός, ένα άνευ ρίσκου επιτόκιο και οι η δυναμική των μετοχών χαρακτηρίζεται από το μοντέλο Black&Scholes.

### 4.1 Double Barrier δικαίωμα αγοράς

Η πρώτη περίπτωση που θα εξετασθεί σε αυτή την κατηγορία είναι το Double Barrier δικαίωμα αγοράς. Στο προηγούμενο κεφάλαιο μελετήθηκε το Barrier δικαίωμα αγοράς. Σε αυτό το είδος υπάρχουν δύο φράγματα στην τιμολόγηση, ένα κάτω και εκτός φράγμα, καθώς και ένα άνω και εντός φράγμα. Ο αγοραστής ενός δικαιώματος αγοράς αυτής της μορφής επί μίας μετοχής, αγοράζοντας το δικαιούται να αγοράσει την μετοχή την χρονική στιγμή της ωρίμανσης  $T$  του προϊόντος σε αξία  $K$ , υπό την προϋπόθεση ότι η μετοχή δεν έχει πέσει κάτω από το κάτω και εκτός φράγμα  $M_{do}$ , αλλά και υπό την προϋπόθεση ότι δεν θα ξεπεράσει το άνω και εντός φράγμα  $M_{ui}$  καμία χρονική στιγμή κατά τη διάρκεια ζωής του προϊόντος. Η ονομασία των φραγμάτων προέρχεται από την μορφή της απόδοσης, όπως στο απλό barrier δικαίωμα. Η απόδοση του παραγώγου εν γένει είναι της μορφής

$$V_{2barr}(T) = I_{\{S(t) > M_{do} \& S(t) < M_{ui} \ \forall t \in [0, T]\}} (S(t) - K)^+$$

Αντίστοιχα η αξία του την χρονική 0 θα είναι

$$V_{2barr}(0) = e^{-rT} \mathbb{E}_\beta [I_{\{S(t) > M_{do} \& S(t) < M_{ui} \forall t \in [0, T]\}} (S(T) - K)^+]$$

Ο αλγόριθμος που θα χρησιμοποιηθεί για την τιμολόγηση ενός προϊόντος αυτής της μορφής με αρχική αξία  $S(0)$ , παραδοτέα τιμή  $K$ , με άνευ ρίσκου επιτόκιο  $r$  και μεταβλητότητα  $\sigma$  ανά τετραγωνική μονάδα έτους, με χρόνο ζωής  $T$  έτη και φράγματα  $M_{do}$  και  $M_{ui}$  είναι ο ακόλουθος

Αλγόριθμος τιμολόγησης ενός Double Barrier δικαιώματος αγοράς

1. Για  $q = 1, \dots, n$

Παράγω  $Z_1, \dots, Z_m \sim N(0, 1)$  με τη μέθοδο Box Müller

Θέτουμε  $h = 2^m$ ,  $j_{max} = 1$ ,  $W_h = \sqrt{t_h} Z_h$ ,  $t_0 = 0$ ,  $W_0 = 0$

Για  $k = 1, \dots, m$  θέτουμε

$i_{min} = h/2$ ,  $i = i_{min}$ ,  $l = 0$ ,  $r = h$

για  $j = 1, \dots, j_{max}$  θέτουμε

$a = ((t_r - t_i)W_l + (t_i - t_l)W_r) / (t_r - t_l)$

$b = \sqrt{(t_i - t_l)(t_r - t_i) / (t_r - t_l)}$

$W_i = a + bZ_i$

Θέτω  $S_q(t_i) = S(0) e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)t_i + \sigma W_i}$

Αν  $S_q(t_i) \leq 37$  ή  $S_q(t_i) \geq 47$ ; Θέτω  $C_q = 0$ ; Σταματάω

Αλλιώς

Θέτω  $i = i + h$ ;  $l = l + h$ ;  $r = r + h$ ;  $j_{max} = 2 * j_{max}$ ;  $h = i_{min}$

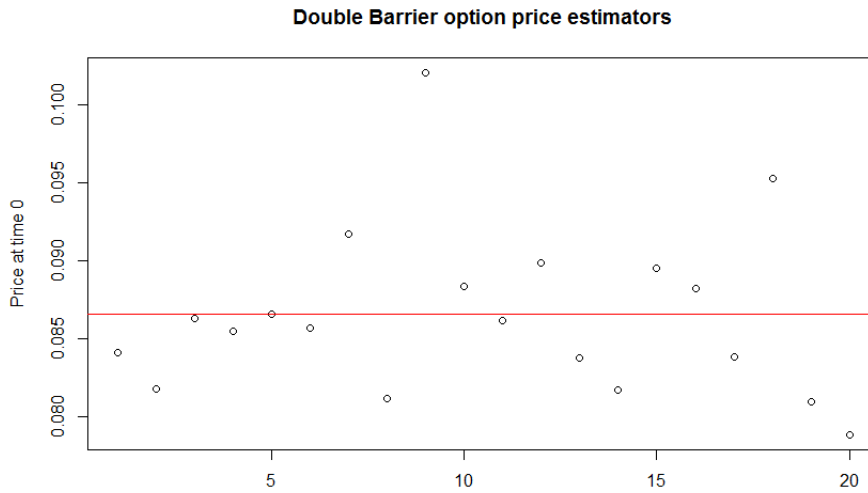
Θέτω  $S_i(T) = S(0) e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma W_i}$

Θέτω  $C_i = e^{-rT} (S_i(T) - K)^+$

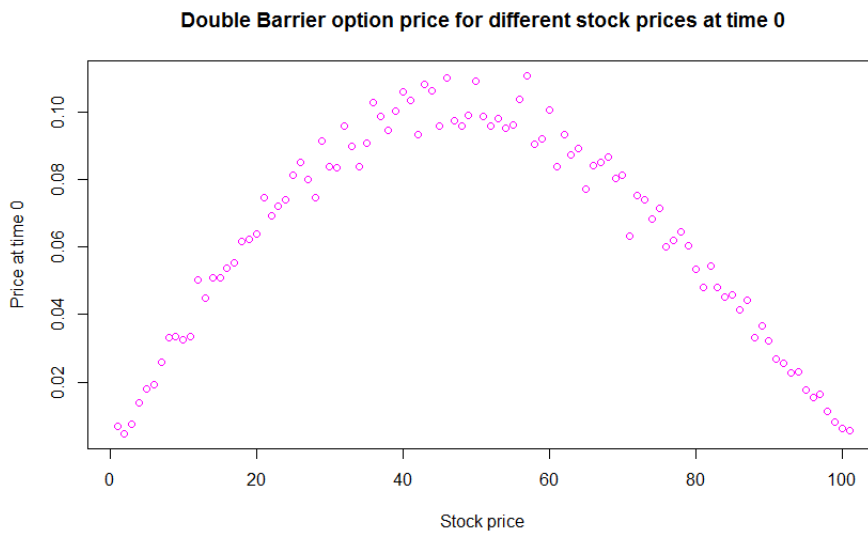
2. Θέτω  $\hat{C}_n = \sum_{i=1}^n \frac{C_i}{n}$

## Εφαρμογή

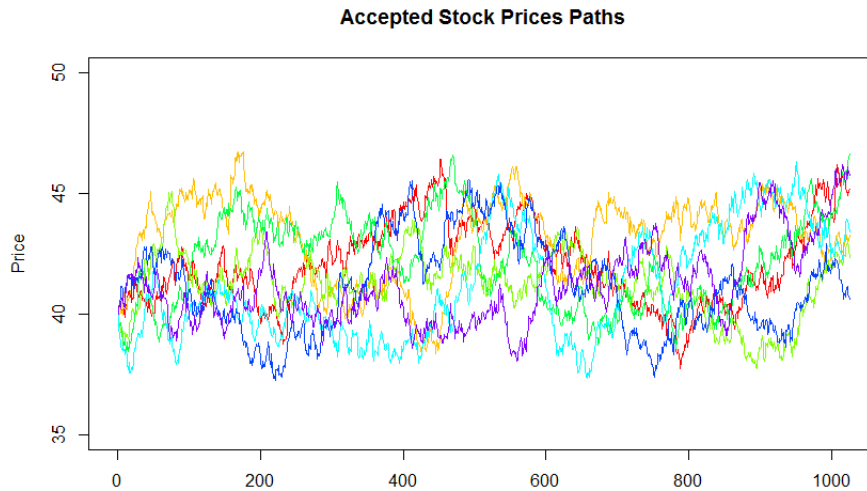
Ας υποθέσουμε πως επιθυμούμε να εκτιμήσουμε την αξία ενός προϊόντος αυτής της μορφής επί μία μετοχής την χρονική στιγμή 0 με παραμέτρους  $S(0) = 40\text{€}$ ,  $K = 40\text{€}$ ,  $r = 0.04$ ,  $\sigma = 0.2$ ,  $T = 1$  έτος και φράγματα  $M_{do} = 37$ ,  $M_{ui} = 47$  όπως ορίστηκαν προηγουμένως. Διακριτοποιούμε τον χρονικό ορίζοντα σε  $2^{10}$  χρονικές στιγμές, ώστε να γίνει η προσομοίωση του μονοπατιού σε αυτές και να ελεγχθεί αν η τιμή της μετοχής πέφτει κάτω του φράγματος  $M_{do}$  ή αν ξεπερνάει την τιμή  $M_{ui}$ . Η εφαρμογή αυτού του αλγορίθμου με ακρίβεια δύο εκατομμυρίων επαναλήψεων θα να δώσει 20 εκτιμήσεις για την τιμή του παραγώγου, οι οποίες φαίνονται στο σχήμα 4.1.1. Η μέση τιμή των εκτιμητών αυτών έδωσε την εκτίμηση της αξίας να είναι  $V_{est}^{2barr}(0) = 0.0865\text{€}$ . Στη συνέχεια στο σχήμα 4.1.2 βλέπουμε πως επηρεάζεται η αξία του προϊόντος καθώς η αρχική αξία της μετοχής κυμαίνεται μεταξύ των δύο φραγμάτων. Τέλος στο σχήμα 4.1.3 παρουσιάζονται τα μονοπάτια της μετοχής που προσομοιώθηκαν και είναι εντός των ορίων που υποδεικνύει το προϊόν.



Σχήμα 4.1.1: Γραφική παράσταση 20 εκτιμητών καθώς και της μέσης τιμής τους για την τιμολόγηση ενός Double barrier δικαιώματος αγοράς



Σχήμα 4.1.2: Γραφική παράσταση των εκτιμώμενων (ροζ) αξιών του double barrier δικαιώματος αγοράς καθώς η αρχική αξία της μετοχής κυμαίνεται στο διάστημα [37, 47]



Σχήμα 4.1.3: Αποδεκτά μονοπάτια της μετοχής κατά την τιμολόγηση

## 4.2 Ασιατικό δικαίωμα αγοράς

Ένα ακόμη προϊόν που έχει άγνωστη θεωρητική αξία και θα το εκτιμήσουμε με τις μεθόδους Monte Carlo είναι το ασιατικό δικαίωμα αγοράς. Πρόκειται για ένα συμβόλαιο που δίνει στον αγοραστή του το δικαίωμα να αγοράσει τον υποκείμενο τίτλο του συμβολαίου στην ωρίμανσή του  $T$ , στην τιμή  $K$ . Η απόδοση ενός προϊόντος αυτής της μορφής εξαρτάται από όλες τις τιμές που έχει λάβει ο υποκείμενος τίτλος κατά τη διάρκεια ζωής του συμβολαίου, συγκεκριμένα εξαρτάται με την μέση τιμή όλων των τιμών και η απόδοσή του είναι η ακόλουθη για  $m$  τιμές του υποκείμενου τίτλου

$$V(T) = (\bar{S} - K)^+ \text{ όπου } \bar{S} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m S(t_i)$$

Επομένως η αρχική αξία του δικαιώματος θα δίνεται από την εξίσωση

$$V(0) = e^{-rT} \mathbb{E}[(\bar{S} - K)^+]$$

Υποθέτουμε πως ο υποκείμενος τίτλος είναι μία μετοχή που η δυναμική της περιγράφεται από το μοντέλο Black&Scholes, επομένως θα είναι της μορφής

$$S(t) = S(0)e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W(t)}$$



για κάθε  $i = 1, \dots, T$  όπου  $W(t)$  μία μονοδιάστατη τυπική κίνηση Brown.

Για να υπολογίσουμε την αρχική αξία του δικαιώματος θα πρέπει να παραγάγουμε δείγματα της  $\bar{S}$ . Αυτό είναι εφικτό με την προσομοίωση μονοπατιών  $S_{t_1}, \dots, S_{t_m}$  και εν συνεχεία με τον υπολογισμό της μέσης τιμής τους. Αν υποθέσουμε πως επιθυμούμε να τιμολογήσουμε ένα προϊόν αυτής της μορφής με αρχική αξία  $S(0)$ , παραδοτέα τιμή  $K$ , με άνευ ρίσκου επιτόκιο  $r$  και μεταβλητότητα  $\sigma$  ανά τετραγωνική μονάδα έτους, με χρόνο ζωής  $T$  έτη, ο αλγόριθμος χρησιμοποιήσουμε είναι ο ακόλουθος

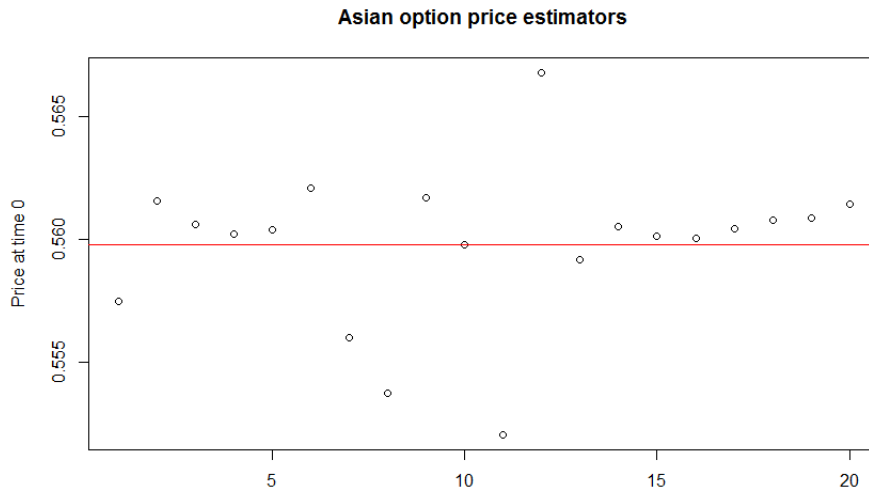
Αλγόριθμος εκτίμησης της αξίας του Ασιατικού δικαιώματος αγοράς

1. Παίρνω μία διαμέριση του  $[0, T]$  την  $0 = t_1 \leq \dots \leq t_k = T$
2. Για  $i = 1, \dots, n$ 
  - Παράγω  $m$  ανεξάρτητες  $Z_i \sim N(0, 1)$  με τη μέθοδο Box-Müller
  - Θέτω  $S(t_1) = S(0)$
  - Για  $j = 1, \dots, m$ 
    - Θέτω  $S(t_{j+1}) = S(t_j)e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)(t_{j+1} - t_j) + \sigma\sqrt{t_{j+1} - t_j}Z_m}$
    - Θέτω  $\bar{S} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m S(t_i)$
    - Θέτω  $C_i = e^{-rT}(\bar{S} - K)^+$
3. Θέτω  $\hat{C}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n C_i$

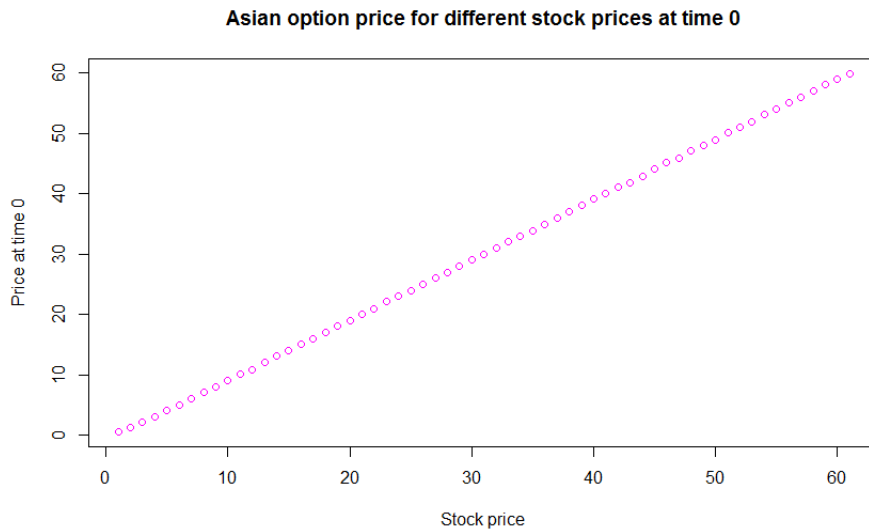
όπου προφανώς  $\hat{C}_n$  η εκτίμηση για την αξία του προϊόντος

## Εφαρμογή

Ας υποθέσουμε πως θέλουμε να εκτιμήσουμε την αξία ενός ασιατικού δικαιώματος αγοράς επί μίας μετοχής με τις παραμέτρους όπως περιγράφηκαν προηγουμένως να λαμβάνουν τις τιμές  $S_0 = 40\text{€}$ ,  $K = 40\text{€}$ ,  $T = 30$  ημέρες ή αλλιώς  $T = \frac{30}{365}$  έτη,  $r = 0.05$  και  $\sigma = 0.2$ . Με ακρίβεια εκατό χιλιάδων επαναλήψεων λάβαμε 20 εκτιμήσεις για την αξία του προϊόντος, με την διαμέριση του χρόνου να έγινε ανά 0.003, τις οποίες βλέπουμε στο σχήμα 4.2.1. Η μέση τιμή αυτών των εκτιμητών είναι  $V_{asian}(0) = 0.559$ . Στη συνέχεια στα σχήματα 4.2.2 και 4.2.3 βλέπουμε τη συμπεριφορά της αξίας του προϊόντος συναρτήσει διαφόρων τιμών για την αρχική αξία της μετοχής, καθώς και για διάφορες τιμές άσκησης του δικαιώματος.



Σχήμα 4.2.1: Γραφική παράσταση 20 εκτιμητών καθώς και της μέσης τιμής τους για την τιμολόγηση ενός ασιατικού δικαιώματος αγοράς



Σχήμα 4.2.2: Γραφική παράσταση εκτιμώμενων (ροζ) αξιών του ασιατικού δικαιώματος αγοράς καθώς η αρχική αξία της μετοχής κυμαίνεται στο διάστημα  $[10, 80]$

#### 4.3. ΑΣΙΑΤΙΚΟ ΔΙΚΑΙΩΜΑ ΑΓΟΡΑΣ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΕΛΕΓΧΟΥ73



Σχήμα 4.2.3: Γραφική παράσταση εκτιμώμενων (ροζ) αξιών του ασιατικού δικαιώματος αγοράς καθώς η τιμή άσκησης κυμαίνεται στο διάστημα  $[0, 50]$

### 4.3 Ασιατικό δικαίωμα αγοράς με χρήση μεταβλητής ελέγχου

Είδαμε στην προηγούμενη ενότητα πως η εκτίμηση της αξίας ενός ασιατικού δικαιώματος αγοράς γίνεται επί του αριθμητικού μέσου των τιμών της μετοχής, δηλαδή επί του

$$\bar{S}_A = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k S(t_k)$$

Γνωρίζουμε πως η  $S$  είναι μία γεωμετρική κίνηση Brown. Η εκτίμηση της αξίας όπως είδαμε απαιτεί την προσομοίωση μονοπατιών της μετοχής καθώς δεν υπάρχει θεωρητική τιμή για το προϊόν αυτό. Ωστόσο, γνωρίζουμε πως δικαιώματα επί του γεωμετρικού μέσου των τιμών της μετοχής, δηλαδή επί του

$$\bar{S}_G = \left( \prod_{i=1}^k S(t_i) \right)^{1/k}$$

τιμολογούνται ακριβώς, καθώς η κατανομή του γεωμετρικού μέσου όπως θα δούμε είναι η λογαριθμοκανονική.

74ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4. ΤΙΜΟΛΟΓΗΣΗ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ ΜΕ ΑΓΝΩΣΤΗ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΤΙΜΗ

Πράγματι έστω ότι κάθε χρονική στιγμή η μετοχή λαμβάνει την τιμή

$$S(t_i) = S(0)e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)t_i + \sigma W(t_i)}$$

για  $0 = t_1 \leq \dots \leq t_k = T$  όπου  $W$  μία τυπική κίνηση Brown. Τότε για τον γεωμετρικό μέσο θα έχουμε

$$\bar{S}_G = \left( \prod_{i=1}^k S(t_i) \right)^{1/k} = S(0) e^{\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k [(r-\frac{1}{2}\sigma^2)t_i + \sigma W(t_i)]} \quad (4.3.1)$$

Γνωρίζουμε πως η 4.3.1 θα ακολουθεί την κανονική κατανομή, με παραμέτρους που φαίνονται στην ακόλουθη σχέση [5]

$$\ln \left[ \left( \prod_{i=1}^k S(t_i) \right)^{1/k} / S_0 \right] \sim N \left( \left( r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \frac{k+1}{2k} T, \sigma^2 \frac{(k+1)(2k+1)}{6k^2} T \right)$$

Εν συνεχεία αποδεικνύεται πως η αξία του ασιατικού δικαιώματος αγοράς επί του γεωμετρικού μέσου δίνεται από τον τύπο [5]

$$V_{G,asian}(0) = e^{-rT} \left( S(0) e^{\hat{\mu}T} \Phi \left( \frac{\ln(\frac{S(0)}{K}) + (\hat{\mu} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2)T}{\hat{\sigma}\sqrt{T}} \right) - K \Phi \left( \frac{\ln(\frac{S(0)}{K}) + (\hat{\mu} - \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2)T}{\hat{\sigma}\sqrt{T}} \right) \right)$$

όπου

$$\hat{\sigma}^2 = \sigma^2 \frac{(k+1)(2k+1)}{6k^2}$$

και

$$\hat{\mu} = \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2 + \left( r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \frac{(k+1)}{2k}$$

Επομένως η αξία του μπορεί να υπολογιστεί αναλυτικά. Ο αλγόριθμος της μεθόδου είναι ο ακόλουθος

#### 4.3. ΑΣΙΑΤΙΚΟ ΔΙΚΑΙΩΜΑ ΑΓΟΡΑΣ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΕΛΕΓΧΟΥ 75

Αλγόριθμος εκτίμησης της αξίας του Ασιατικού δικαιώματος αγοράς

1. Παίρνω μία διαμέριση του  $[0, T]$  την  $0 = t_1 \leq \dots \leq t_k = T$
2. Για  $i = 1, \dots, n$   
 Παράγω  $m$  ανεξάρτητες  $Z_i \sim N(0, 1)$  με τη μέθοδο Box-Müller  
 Θέτω  $S(t_1) = S(0)$   
 Για  $j = 1, \dots, m$   
 Θέτω  $S(t_{j+1}) = S(t_j)e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)(t_{j+1} - t_j) + \sigma\sqrt{t_{j+1} - t_j}Z_m}$   
 Θέτω  $\bar{S}_A = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m S(t_i)$   
 Θέτω  $\bar{S}_G = (\prod_{i=1}^m S(t_i))^{1/m}$   
 Θέτω  $C_i^A = e^{-rT}(\bar{S}_A - K)^+$   
 Θέτω  $C_i^G = e^{-rT}(\bar{S}_G - K)^+$
3. Θέτω  $b = \frac{\sum_{i=1}^n (C_i^G - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n C_i^G)(C_i^A - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n C_i^A)}{\sum_{i=1}^n (C_i^G - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n C_i^G)}$   
 Θέτω  $C_j = C_j^A - b(C_j^G - \mathbb{E}[C_j^G])$

#### Εφαρμογή

Ας δούμε πως μπορούμε να τιμολογήσουμε το ασιατικό δικαίωμα αγοράς επί του αριθμητικού μέσου, που τιμολογήθηκε στην προηγούμενη ενότητα, με μεταβλητή ελέγχου το ασιατικό δικαίωμα επί του γεωμετρικού μέσου αυτή τη φορά. Στη θέση της συμβατικής εκτιμήτριας Monte Carlo για την αρχική αξία του δικαιώματος

$$\hat{V}_{asian}(0) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{Y}_i$$

όπου

$$\hat{Y}_i = e^{-rT}(\bar{S}_{A,i} - K)^+$$

και

$$\bar{S}_{A,i} = \frac{\hat{S}_{1,i} + \dots + \hat{S}_{20,i}}{20}$$

θα χρησιμοποιηθεί ως εκτιμήτρια μεταβλητής ελέγχου η

$$\hat{V}_{control}(0) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{Y}'_i$$

όπου

$$\hat{Y}'_i = \hat{Y}_i - b^* (\hat{X}_i - \mathbb{E}[X])$$

με

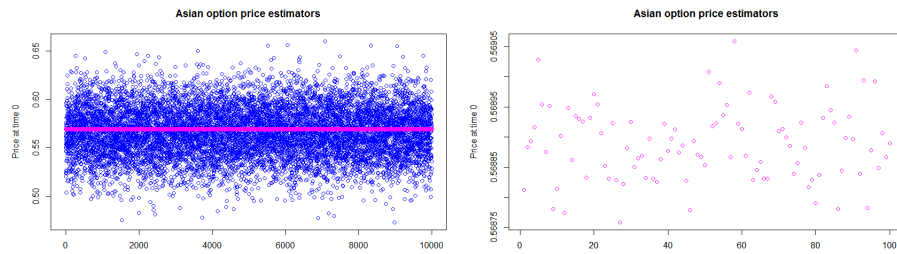
$$\hat{X}_i = e^{-rT} (\bar{S}_G^i - K)^+$$

$$\bar{S}_G^i = (\hat{S}_{1,i}, \dots, \hat{S}_{20,i})^{1/20}$$

$$b^* = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{X}_i - \sum_{i=1}^n \frac{\hat{X}_i}{n}) (\hat{Y}_i - \sum_{i=1}^n \frac{\hat{Y}_i}{n})}{\sum_{i=1}^n (\hat{X}_i - \sum_{i=1}^n \frac{\hat{X}_i}{n})^2}$$

και  $\mathbb{E}[X] = V_G(0)$  η θεωρητική τιμή του ασιατικού δικαιώματος επί του γεωμετρικού μέσου, που υπολογίζεται ακριβώς.

Τιμολογώντας ξανά το παράγωγο της προηγούμενης ενότητας με τις ίδιες παραμέτρους καταλήγουμε σε πολύ ενδιαφέροντα αποτελέσματα. Ας υποθέσουμε πως θέλουμε να εκτιμήσουμε την αξία ενός ασιατικού δικαιώματος αγοράς επί μίας μετοχής με τις παραμέτρους όπως περιγράφηκαν προηγουμένως να λαμβάνουν τις τιμές  $S_0 = 40\text{€}$ ,  $K = 40\text{€}$ ,  $T = 30$  ημέρες ή αλλιώς  $T = \frac{30}{365}$  έτη,  $r = 0.05$  και  $\sigma = 0.2$ . Με ακρίβεια χιλίων επαναλήψεων για κάθε εκτίμηση βλέπουμε στο σχήμα 4.3.1 με μπλε κουκκίδες τις εκτιμήσεις του ασιατικού προϊόντος χωρίς μεταβλητή ελέγχου, ενώ με ροζ χρώμα φαίνονται οι τιμές της εκτιμήτριας μεταβλητής ελέγχου. Η διαμέριση του χρόνου έγινε ανά  $h = 0.01$ . Όπως παρατηρούμε από το σχήμα η διασπορά της εκτιμήτριας μεταβλητής ελέγχου είναι πράγματι πολύ μικρότερη από αυτή της συμβατικής εκτιμήτριας.



Σχήμα 4.3.1: Γραφική παράσταση εκτιμώμενων αξιών του ασιατικού δικαιώματος αγοράς χωρίς μεταβλητή ελέγχου (μπλε) και με μεταβλητή ελέγχου (ροζ)

## Κεφάλαιο 5

# Συμπεράσματα

Σκοπός της παρούσας διπλωματικής εργασίας ήταν η χρήση μεθόδων Monte Carlo για την τιμολόγηση χρηματοοικονομικών προϊόντων. Οι προαναφερθείσες μέθοδοι μελετήθηκαν σε θεωρητικό, αλλά και σε πρακτικό επίπεδο με εφαρμογές διάφορα παράγωγα προϊόντα. Μέσω της ανάλυσης και της εφαρμογής τους εξάγαμε κάποια πολύ ενδιαφέροντα αποτελέσματα.

Αρχικά είδαμε πόσο καλή εφαρμογή έχουν στην εκτίμηση οποιασδήποτε μέσης τιμής. Για να εφαρμοστούν λοιπόν στην τιμολόγηση των προϊόντων, έπρεπε να αξία τους να μπορεί να εκφραστεί ως μία μέση τιμή. Είδαμε πως αυτό είναι πράγματι εφικτό, και προχωρήσαμε στην εφαρμογή των μεθόδων χρησιμοποιώντας άνευ ρίσκου μέτρα πιθανότητας.

Κατά την τιμολόγηση προϊόντων με γνωστές θεωρητικές τιμές συμπεράναμε πως πράγματι οι εκτιμήσεις αυτών των μεθόδων είναι εξαιρετικά ακριβείς. Γνωρίζοντας αυτό, προχωρήσαμε στην τιμολόγηση προϊόντων με άγνωστη μέση τιμή, όπου πλέον είμαι βέβαιοι πως θα φανερώνουν την πραγματική τιμή των προϊόντων με σχεδόν αμελητέα απόκλιση.

Τέλος έγινε μία εφαρμογή της μεθόδου ελάττωσης διασποράς με τη χρήση εκτιμητριας μεταβλητής ελέγχου για την τιμολόγηση του ασιατικού δικαιώματος αγοράς. Παρατηρήθηκε πως πράγματι η νέα εκτιμητρια της αξίας του προϊόντος είχε πολύ μικρότερη διασπορά από την συμβατική εκτιμητρια για την αξία.

Η παρούσα εργασία δημιουργεί σε αρκετά σημεία προοπτικές για μελλοντική εργασία πάνω στο συγκεκριμένο αντικείμενο. Μία πρώτη ενδιαφέρουσα προέκταση θα ήταν να μελετηθεί πως λειτουργούν οι μέθοδοι Monte Carlo σε περιπτώσεις ύπαρξης ρίσκου. Επιπρόσθετα, μία ακόμη πιο ελκυστική προέκταση θα ήταν η τιμολόγηση των δικαιωμάτων αγοράς αμερικάνικου τύπου.





## Κεφάλαιο 6

# Παράρτημα

Αλγόριθμος μεθόδου Box-Müller

```
bm<-function(n){
  z<-vector(mode="numeric",length=n) #kanoniko tupiko dianisma
  x<-seq(from=1, to=n, by=2)
  for(i in x){
    y<-runif(1,0,1) #paragei mia metavliti apo tin unif(0,1)
    s<-runif(1,0,1)
    z[i]<-sqrt(-2*log(y))*cos(2*pi*s)
    z[i+1]<-sqrt(-2*log(y))*sin(2*pi*s)
  }
  return(z)
}
```

Αλγόριθμος μεθόδου Αποδοχής-Απόρριψης

```
acceptance_rejection<-function(n, c, f, g){
  row<-1
  y<-matrix(,nrow=n,ncol=2)
  repeat{
    x<-bm(2)
    u<-runif(1,0,1)
    k<-(f(x[1],x[2]))/(3*g(x[1],x[2]))
    if(u<=k){
      y[row,1]<-x[1]
      y[row,2]<-x[1]+x[2]
      row<-row+1
      if(row>n) break
    }
  }
  return(y)
}
```

Αλγόριθμος παραγωγής  $n$  μονοπατιών της κίνησης Brown στο διάστημα  $[t_0, T]$  με διαμέριση  $h$

```
BrownianMotion_1<-function(n,t0,T,h){
times<-seq(from=t0, to=T, by=h)
m<- matrix(, nrow = n, ncol = length(times))
for(row in 1:n){
  m[row,1]=0 z<-bm(length(times))
  for(col in 1:(length(times)-1)){
    m[row,col+1]<-m[row,col]+(sqrt(h))*z[col+1]
  }
}
return(m)
}
```

Αλγόριθμος παραγωγής  $n$  μονοπατιών της κίνησης Brown με γέφυρα στο διάστημα  $[0, 1]$  με διαμέριση  $2^m$

```
brownianBridge<-function(m,n){
# m to 2^m pou tha ginei h diamerisi tou sunolou # n to plithos tw n
# monopatiwn pou thelw
times<-seq(from=0, to=1, by=(1/(2^m)))
z<-matrix(, nrow=n, ncol=length(times))
for(row in 1:n){
  h<-(length(times))-1
  nd<-bm(length(times))
  jmax<-1
  z[row,1]<-0
  z[row,length(times)]<-nd[length(times)]
  for(k in 1:m){
    imin<-((h/2)+1)
    i<-imin
    l<-1
    r<-h+1
    for(j in 1:jmax){
      a<-((times[r]-times[i])*z[row,l]+(times[i]-times[l])*z[row,r])/((times[r]-times[l]))
      b<-sqrt(((times[i]-times[l])*(times[r]-times[i]))/((times[r]-times[l])))
      z[row,i]<-a+(b*nd[i]) i<-i+(h) l<-l+(h) r<-r+(h)
    }
    jmax=2*jmax h<-imin-1
  }
}
return(z)
}
```

Αλγόριθμος παραγωγής μονοπατιού από την γεωμετρική κίνηση Brown

```
BrownianMotionGeometric<-function(n,t0,T,h,r,s){
  times<-seq(from=t0, to=T, by=h)
  m<- matrix(, nrow = n, ncol = length(times))
  for(row in 1:n){
    m[row,1]=1
    z<-bm(length(times))
    for(col in 1:(length(times)-1)){
      m[row,col+1]<-m[row,col]*exp((r-0.5*(s^2))*h+s(sqrt(h))*z[col+1])
    }
  }
  return(m)
}
```

Αλγόριθμος τιμολόγησης ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς. επιστρέφει μία εκτίμηση για προϊόν με διάρκεια ζωής  $[0, T]$

```
european_long_call_option<-function(n,T,s0,K,r,s){
  # n to plithos tw n ektimisewn
  # s metavlitotita
  # sT dianusma timwn
  # c dianusma apodosewn
  for(i in 1:n){
    z<-bm(n)
    sT<-vector(mode="numeric", length=n)
    c<-vector(mode="numeric", length=n)
    u<-sqrt(T)
    for(k in 1:n){
      sT[k]<-s0*exp(((r-(0.5*(s^2)))*T)+(s*u*z[k]))
      if((sT[k]-K)>0)
        c[k]<-exp(-r*T)*(sT[k]-K)
      else{
        c[k]<-0
      }
    }
  }
  C<-(sum(c))/n
  return(C)
}
```

```

Αλγόριθμος τιμολόγησης ενός Barrier δικαιώματος αγοράς
barrier_long_call_option<-function(d,n,m,T,s0,K,εpitokio,s,M){
# d to plithos tw n ektimitwn
# m to 2^m pou tha ginei h diamerisi tou sunolou
# n to plithos tw n monopatiwn pou thelw
# s metavlitotita
# M to katw fragma
times<-seq(from=0, to=T, by=(1/(2^m)))
sT<-matrix(, nrow=n, ncol=length(times)) #times gia kathe ektimisi
c<-vector(mode="numeric", length=n) #apodosi
z<-vector(mode="numeric", length=length(times)) #brownian motions
for(row in 1:n){
nd<-bm(length(times))
sT[row,1]=s0
sT[row,length(times)]<-s0*exp(((εpitokio-
(0.5*(s^2))*T)+(s*(sqrt(T))*nd[length(times)]))
if((sT[row,length(times)]-K)>0){
c[row]<-exp(-εpitokio*T)*(sT[row,length(times)]-K)
h<-(length(times))-1
jmax<-1
z[1]<-0
z[length(times)]<-nd[length(times)]
for(k in 1:m){
if(c[row]==0){
break
}
imin<-((h/2)+1)
i<-imin
l<-1
r<-h+1
for(j in 1:jmax){
a<-((times[r]-times[i])*z[l]+(times[i]-times[l])*z[r])/((times[r]-times[l])
b<-((sqrt(((times[i]-times[l])*(times[r]-times[i]))/(times[r]-times[l])))
z[i]<-a+(b*nd[i]) sT[row,i]<-s0*exp(((εpitokio-(0.5*(s^2))*times[i])+(s*z[i]))
if(sT[row,i]<=M) {
c[row]<-0
break
}
i<-i+(h)
l<-l+(h)
r<-r+(h)
}
jmax=2*jmax
h<-imin-1
}
}
else {
c[row]<-0
}
}
C<-((sum(c))/n)
return(C)
}

```

```

Αλγόριθμος τιμολόγησης ενός Barrier δικαιώματος αγοράς σειριακά
barrier_long_call_option_seiriaka<-function(n,m,T,s0,K,epitokio,s,M){
# d to plithos tw n ektimitwn
# m to 2^m pou tha ginei h diamerisi tou sunolou
# n to plithos tw n monopatiwn pou thelw
# s metavlitotita
# M to katw fragma
times<-seq(from=0, to=T, by=(1/m))
sT<-matrix(, nrow=n, ncol=length(times)) #times gia kathe ektimisi
c<-vector(mode="numeric", length=n) #apodosi
for(row in 1:n){
nd<-bm(length(times))
sT[row,1]=s0
z<-vector(mode="numeric", length=length(times)) #brownian motions
z[1]<-0
z[length(times)]<-nd[length(times)]
for(i in 1:(length(times)-1)){
z[i+1]<-z[i]+sqrt(1/m)*nd[i+1]
sT[row,i+1]<-s0*exp(((epitokio-(0.5*(s^2)))*(times[i+1]))+(s*z[i+1]))
if(sT[row,i+1]>M) {
c[row]<-(exp(-epitokio*T)*(sT[row,i+1]-K))
}
else{
c[row]<-0
}
if(c[row]==0){
break
}
}
if((sT[row,i+1]-K)<0){
c[row]=0
}
}
}
C<-((sum(c))/n)
return(C)
}

```

```

Αλγόριθμος τιμολόγησης ενός Lookback δικαιώματος πώλησης
lookback_option<-function(n,T,s0,r,s,h){
# n plithos ektimisewn
# s metavlitotita
# c dianusma apodosewn
times<-seq(from=0, to=T, by=h)
m<- matrix(, nrow = n, ncol = length(times))
c<-vector(mode="numeric", length=n)
for(row in 1:n){
Smax=s0
m[row,1]=0
z<-bm(length(times))
for(col in 1:(length(times)-1)){
m[row,col+1]<-m[row,col]+(sqrt(h))*z[col+1]
St<-s0*exp(((r-(0.5*(s^2)))*times[col])+(s*m[row,col+1]))
if(St>Smax){
Smax<-St
}
}
c[row]<-Smax-St
}
C<-(sum(c))/n
return(C)
}

```

```

Αλγόριθμος τιμολόγησης ενός Double Barrier δικαιώματος αγοράς
barrier2_long_call_option_plot_ektimitwn<-
  function(d,n,m,T,s0,K,epitokio,s,f,F){
# d to plithos tw n ektimitwn
# m to 2^m pou tha ginei h diamerisi tou sunolou
# n to plithos tw n monopatiwn pou thelw
# s metavlitotita # F to anw fragma
# f to katw fragma
times<-seq(from=0, to=T, by=(1/(2^m)))
sT<-matrix(, nrow=n, ncol=length(times)) #times gia kathe ektimisi
c<-vector(mode="numeric", length=n) #apodosi
z<-vector(mode="numeric", length=length(times)) #brownian motions
for(row in 1:n){
nd<-bm(length(times))
sT[row,length(times)]<-s0*exp(((epitokio-
  (0.5*(s^2))*T)+(s*(sqrt(T))*nd[length(times)]))
if((sT[row,length(times)]-K)>0){
c[row]<-exp(-epitokio*T)*(sT[row,length(times)]-K)
h<-(length(times))-1
jmax<-1
z[1]<-0
z[length(times)]<-nd[length(times)]
for(k in 1:m){
if(c[row]==0){
break
}
imin<-((h/2)+1)
i<-imin
l<-1
r<-h+1
for(j in 1:jmax){
a<-((times[r]-times[i])*z[l]+(times[i]-times[l])*z[r])/(times[r]-times[l])
b<-((sqrt(((times[i]-times[l])*(times[r]-times[i]))/(times[r]-times[l])))
z[i]<-a+(b*nd[i])
sT[row,i]<-s0*exp(((epitokio-(0.5*(s^2))*times[i])+(s*z[i]))
if(sT[row,i]<=f | sT[row,i]>=F) {
c[row]<-0
break
}
i<-i+(h)
l<-l+(h)
r<-r+(h)
}
jmax=2*jmax
h<-imin-1
}
}
else {
c[row]<-0
}
}
C<-((sum(c))/n)
}

```

Αλγόριθμος τιμολόγησης ενός ασιατικού δικαιώματος αγοράς

```

asian_call_option<-function(n,T,s0,K,r,s,h){
# m to plithos tw n ektimitwn #
n to plithos tw n ektimisewn
times<-seq(from=0, to=T, by=h)
sT<-matrix(, nrow=n, ncol=length(times))
c<-vector(mode="numeric", length=n)
for(row in 1:n){
z<-bm(length(times))
sT[row, 1]=s0
for(col in 1:(length(times)-1)){
sT[row,col+1]=sT[row,col]*exp(((r-(0.5*(s^2)))*h)+(s*sqrt(h)*z[col]))
}
M<-(sum(sT[row,])/length(times))
if((M-K)>0){
c[row]<-exp(-r*T)*(M-K)
}
else{
c[row]<-0
}
}
}
C<-(sum(c))/n return(C)
}

```



Αλγόριθμος τιμολόγησης ενός ασιατικού δικαιώματος αγοράς με τη βοήθεια μίας εκτιμήτριας μεταβλητής ελέγχου

```

asian_call_option_control_geom<-function(d,n,T,s0,K,r,s,h){
# m to plithos tw n ektimitwn
# n to plithos tw n ektimisewn
control<-vector(mode="numeric", length=d)
nocontrol<-vector(mode="numeric", length=d)
for(w in 1:d){
times<-seq(from=0, to=T, by=h)
sT<-matrix(, nrow=n, ncol=length(times))
c1<-vector(mode="numeric", length=n)
c2<-vector(mode="numeric", length=n)
a<-vector(mode="numeric", length=n)
g<-vector(mode="numeric", length=n)
y<-vector(mode="numeric", length=n)
for(row in 1:n){
z<-bm(length(times))
sT[row, 1]=s0
for(col in 1:(length(times)-1)){
sT[row,col+1]=sT[row,col]*exp(((r-(0.5*(s^2)))*h)+(s*sqrt(h)*z[col]))
}
a[row]<-(sum(sT[row,])/length(times))
g[row]<-(prod(sT[row,])^(1/length(times)))
if((a[row]-K)>0){
c1[row]<-exp(-r*T)*(a[row]-K)
}
else{
c1[row]<-0
}
if((g[row]-K)>0){
c2[row]<-exp(-r*T)*(g[row]-K)
}
else{
c2[row]<-0
}
}
}
b<-((sum((c2-((1/n)*sum(c2)))*(c1-((1/n)*sum(c1)))))/(sum((c2-
(1/n)*sum(c2))^2)))
for(q in 1:n){
y[q]<-(c1[q]-b*(c2[q]-real))
}
control[w]<-(sum(y)/n)
nocontrol[w]<-(sum(c1)/n) }
G<-((sum(control))/d)
return(G)
}

```



# Βιβλιογραφία

- [1] Conze, A. and Viswanathan (1991). Path Dependent Options: The Case of Lookback Options. *The Journal of Finance*, 46: 1893–1907
- [2] Glasserman, Paul. Monte Carlo methods in financial engineering. Vol. 53. Springer Science & Business Media, 2003.
- [3] Goldman, M. Barry, Howard B. Sosin, and Mary Ann Gatto. "Path dependent options: "Buy at the low, sell at the high"." *The Journal of Finance* 34.5 (1979): 1111-1127.
- [4] Heller, Gillian Z. "Proportional hazards regression John O'Quigley, Springer, 2008. " *Statistics in Medicine* 30.17 (2011): 2199-2199.
- [5] Higham, Desmond. An introduction to financial option valuation: mathematics, stochastics and computation. Vol. 13. Cambridge University Press, 2004.
- [6] Janssen, Augustus Josephus Elizabeth Maria, and Johannes Simeon Hendrikus Leeuwaarden. Equidistant sampling for the maximum of a Brownian motion with drift on a finite horizon. Eurandom, 2008.
- [7] John Hull, Options, Futures and Other Derivatives. Pearson/Prentice Hall, 2009.
- [8] Karatzas, Ioannis, and Steven Shreve. Brownian motion and stochastic calculus. Vol. 113. Springer Science & Business Media, 2012.
- [9] Ross, Sheldon M. Introduction to probability models. Academic press, 2014.
- [10] Shreve, Steven E. Stochastic calculus for finance II: Continuous-time models. Vol. 11. Springer Science & Business Media, 2004.