ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΟΜΑΔΕΣ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ

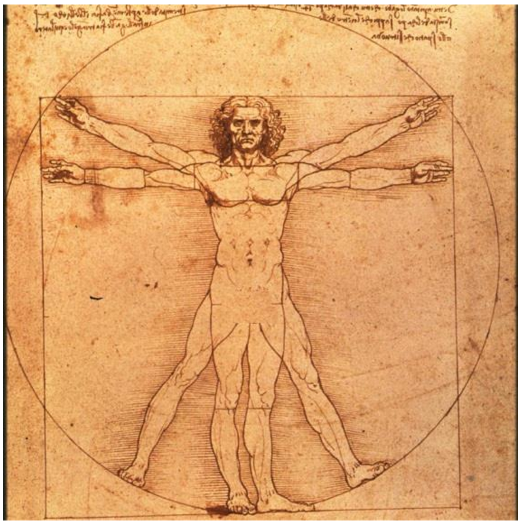
ΑΛΚΗΣΤΙΣ ΜΑΡΙΝΑ ΜΠΟΥΡΜΠΟΥΛΗ

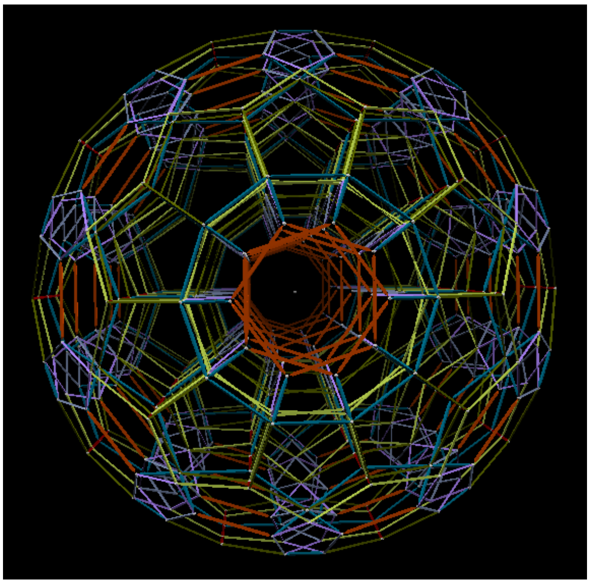
ΣΕΜΦΕ

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΜΑΡΤΙΟΣ 2016

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΦΕΛΛΟΥΡΗΣ ΑΝΑΡΓΥΡΟΣ





ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Η παρούσα διπλωματική εργασία εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών για την απόκτηση προπτυχιακού διπλώματος που απονέμει η Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Εγκρίθηκε την 04/03/16 από εξεταστική επιτροπή αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	
1. Φελλούρης Ανάργυρος (επιβλέπων καθηγητής)	Αναπληρωτής Καθηγητής
2. Ψαράκος Παναγιώτης	Καθηγητής
3. Στεφανέας Πέτρος	Λέκτορας

Περίληψη

Στα πλαίσια αυτής της εργασίας μελέτησα την αφηρημένη άλγεβρα και τη θεωρία ομάδων, τα οποία καταγράφονται στο πρώτο κεφάλαιο. Στο δεύτερο κεφάλαιο γίνεται μια κατηγοριοποίηση των ομάδων σημείων, ένας προσδιορισμός των διαφόρων μορφών συμμετρίας στο δισδιάστατο και το τρισδιάστατο χώρο. Ακόμα σε αυτό το κεφάλαιο γίνονται αναφορές στις κρυσταλλογραφικές ομάδες σημείων, τις ομάδες πλέγματος και τις κρυσταλλικές δομές. Στο τρίτο κεφάλαιο αναφέρονται κάποιες εφαρμογές των ομάδων συμμετρίας, όπως το θεώρημα του Leonardo. Επίσης γίνεται η καταγραφή των 17 ομάδων του επιπέδου καθώς και των 7 ομάδων ζωοφόρου.

Λέξεις κλειδιά : συμμετρία, κρυσταλλογραφικές ομάδες, πλέγματα, ομάδες ταπετσαρίας

Ευχαριστίες

Ευχαριστώ ιδιαιτέρως τον επιβλέποντα καθηγητή κ. Φελλούρη γιατί τη βοήθεια που μου παρείχε κατά την εκπόνηση της διπλωματικής μου εργασίας. Η καθοδήγηση του έπαιξε καθοριστικό ρόλο στο τελικό αποτέλεσμα. Ακόμα ευχαριστώ όλες τους καθηγητές της ΣΕΜΦΕ για τις γνώσεις και τον τρόπο σκέψης που μου δίδαξαν κατά την διάρκεια της φοίτησης.
Ακόμα θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια και τους φίλους μου για τη συμπαράσταση και την κατανόηση που έδειξαν όλο αυτό το διάστημα.

Περιεχόμενα

ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΔΟΜΕΣ

1.0 Εισαγωγή

Συμμετρία

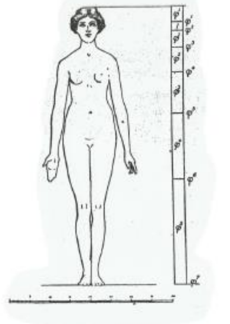
Αναζητώντας τη λέξη συμμετρία σε ένα λεξικό βρίσκουμε τον εξής ορισμό:

1. Η διάταξη των μερών ενός όλου με ένα τρόπο που να αντιστοιχεί το καθένα στο ομόλογό του με μια σχέση ισοτιμίας (στο μήκος ,το πλάτος ,το ύψος).
2. Η αντιστοιχία οργάνων ή τμημάτων του σώματος ως προς νοητό άξονα, επίπεδο ή σημείο.
3. Ο μετασχηματισμός τρισδιάστατου ή δισδιάστατου σχήματος με διατήρηση των αποστάσεων μεταξύ των σημείων του και αντιστροφή του προσανατολισμού των ευθυγράμμων τμημάτων: άξονας συμμετρίας.

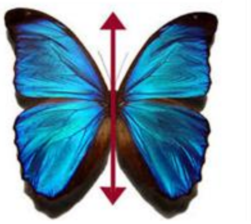
Οι συμμετρίες στα μαθηματικά απλοποιούν σημαντικά τη μελέτη αντικείμενων όπως εικόνες, μοτίβα και σχήματα. Παραδείγματος χάρη: σε τομείς χημικών προϊόντων, όπως η κρυσταλλογραφία, οι ομάδες χώρων και οι ομάδες σημείων περιγράφουν τη μοριακή συμμετρία και τις κρυσταλλικές συμμετρίες. Αυτές οι συμμετρίες διέπουν τη χημική και φυσική συμπεριφορά των συστημάτων αυτών.
Επιπρόσθετα η θεωρία ομάδων επιτρέπει την απλούστευση της κβαντικής μηχανικής και την ανάλυση των ιδιοτήτων της.
Οι πεπερασμένες ομάδες συμμετρίας, όπως οι ομάδες Μάθιου (Mathieu), χρησιμοποιούνται στη θεωρία κωδικοποίησης, η οποία με τη σειρά της εφαρμόζεται στη διόρθωση των σφαλμάτων των μεταδιδόμενων δεδομένων και σε συσκευές αναπαραγωγής CD.

Στην αφηρημένη άλγεβρα, η ομάδα συμμετρίας ενός αντικειμένου είναι η ομάδα όλων των μετασχηματισμών μέσω των οποίων ένα αντικείμενο μένει αναλλοίωτο με πράξη της ομάδας τη σύνθεση απεικονίσεων.

Δύο σχήματα στο επίπεδο είναι ισοδύναμα, αν το ένα μπορεί να μετασχηματιστεί στο άλλο με ένα συνδυασμό περιστροφών, αντικατοπτρισμών και μεταφορών. Κάποια σχήματα όμως είναι ισοδύναμα με τον εαυτό τους με παραπάνω από έναν τρόπους .



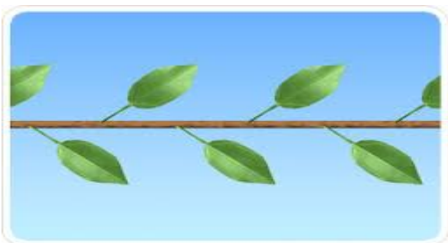
Στη καθημερινή μας ζωή όταν αναφερόμαστε σε συμμετρίες συχνά εννοούμε τη δεξιά και αριστερή συμμετρία. Παραδείγματος χάρη στο ανθρώπινο σώμα η δεξιά του πλευρά είναι ο καθρέφτης της αριστερής. Αυτής της μορφής η συμμετρία είναι η **κατοπτρική ή ανακλαστική**. Κάποια παραδείγματα κατοπτρικής συμμετρίας που βλέπουμε καθημερινά είναι τα ακόλουθα :



Ωστόσο δε είναι η μόνη μορφή συμμετρίας καθώς υπάρχει και η **περιστροφική συμμετρία**. Η νιφάδα χιονιού είναι ένα παράδειγμα περιστροφικής συμμετρίας, στην οποία παρατηρούμε παραπάνω από έναν άξονα συμμετρίας. Ένα ακόμα παράδειγμα περιστροφικής συμμετρίας είναι η σημαία του Isle of Man.

Το παρακάτω άπειρο μοτίβο αποτελείται από ίδια λουλούδια διατεταγμένα σε σειρά

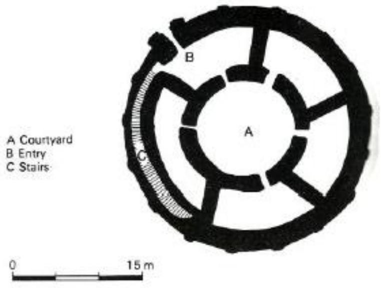
με μεταφορά προς τα δεξιά. Η κάθε μεταφορά παίρνει κάθε λουλούδι στο επόμενο στα δεξιά και έτσι όλο το άπειρο μοτίβο απεικονίζεται στο εαυτό του ή είναι σταθερό. Όλα τα λουλούδια είναι ολόιδια. Αν μετακινήσουμε ένα λουλούδι στα δεξιά μια συγκεκριμένη απόσταση δε έχει καμία επίδραση στο μοτίβο. Αυτή η μορφή συμμετρίας είναι η **μεταφορική**.



Μια ακόμα μορφή συμμετρίας είναι αυτή της **ανάκλασης διολίσθησης**, η οποία αποτελείται από μια ανάκλαση ως προς τη γραμμή και μιας μεταφοράς κατά μήκος της γραμμής .

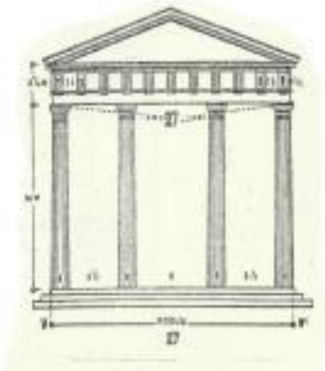
Από την αρχαιότητα οι άνθρωποι επιδίωκαν την συμμετρία στη καθημερινότητα τους, κάτι που γίνεται αντιληπτό και από τη δομή των κατοικιών που δημιουργούσαν .

Η παρακάτω εικόνα μας δείχνει μια κάτοψη ενός κτιρίου στην Uch Tepe στη Μεσοποταμία περίπου το 3000 π.χ.



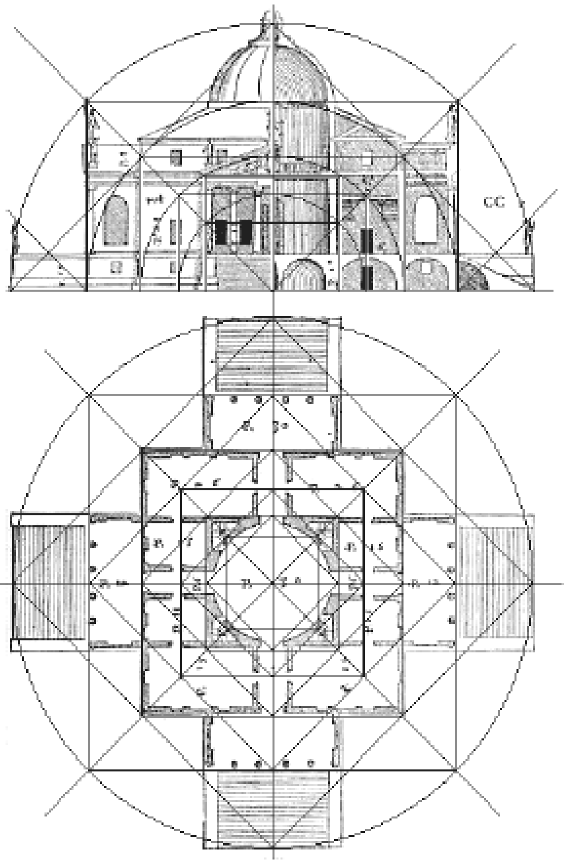
Η οικία παρουσιάζει περιστροφική συμμετρία.

Ο τετράστηλος ρωμαϊκός ναός και το Θησείο παρουσιάζουν μεταφορική συμμετρία ως προς τους κίονες. Τα κτίρια επίσης στο σύνολό τους παρουσιάζουν ανακλαστική συμμετρία .



Αναφερόμενος στα χαρακτηριστικά της ιδανικής εκκλησίας ο Alberti ξεκαθαρίζει ότι μπορούμε να πετύχουμε την απαράμιλλη ομορφιά, προκειμένου η εκκλησία να είναι το στολίδι όλης της πόλης, βασιζόμενοι σε μια λογική ενσωμάτωση των αναλογιών και των μερών ενός κτιρίου με τέτοιο τρόπο, ώστε το κάθε μέρος να έχει απόλυτα σταθερό μέγεθος και σχήμα, χωρίς τίποτα να μπορεί να προστεθεί ή να αφαιρεθεί, και παράλληλα να μη καταστρέφει την αρμονία του συνόλου.

Το παρακάτω σχέδιο του Andrea Palladio χρησιμοποιήθηκε στην ανέγερση της La Rotonda. Παρουσιάζει ανακλαστική συμμετρία ως προς περισσότερους από ένα άξονες και περιστροφική συμμετρία.



1.1 Αφηρημένες ομάδες

Ορισμός 1.1.1: **Διαμέριση** ενός συνόλου λέγεται μια ανάλυση του συνόλου σε μη κενά υποσύνολα ξένα μεταξύ τους, τέτοια ώστε κάθε στοιχείο του συνόλου να ανήκει σε ένα και μόνο ένα από τα υποσύνολα. Αυτά είναι τα **υποσύνολα της διαμέρισης**.

Ορισμός 1.1.2 : Σχέση ή διμελής σχέση S από το σύνολο A στο σύνολο B είναι ένα υποσύνολο του καρτεσιανού γινομένου $A \times B$.

Ορισμός 1.1.3 : Έστω S ένα μη κενό σύνολο και μια σχέση $\sim$ μεταξύ των στοιχείων του S. Η σχέση αυτή λέγεται **σχέση ισοδυναμίας,** αν για κάθε α, b, c στο S ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

1. (Ανακλαστική) $a \sim a$
2. (Συμμετρική) Αν $a \sim b$, τότε $b \sim a$
3. (Μεταβατική) Αν $a \sim b$ και $b \sim c$, τότε $a \sim c$

Τότε ορίζεται με φυσιολογικό τρόπο μια διαμέριση του S, αποτελούμενη από σύνολα $\bar{a}$=$\{\chi \in S \mid \chi \sim a\}$ του S. Αντιστρόφως κάθε διαμέριση του S ορίζει με φυσιολογικό τρόπο μια σχέση ~ που ικανοποιεί την ανακλαστική, τη συμμετρική και τη μεταβατική ιδιότητα, αν $\alpha \sim b$ οριστεί να σημαίνει $\alpha \in \bar{b}$.

Ορισμός 1.1.4 : Μια **διμελής πράξη** * σε ένα σύνολο S είναι μια απεικόνιση με την οποία σε κάθε διατεταγμένο ζεύγος (a, b) στοιχείων του S αντιστοιχίζεται ένα μόνο στοιχείο του S.

Ορισμός 1.1.5 :

- Έστω ένα σύνολο A διάφορο του κενού. Μια απεικόνιση π της μορφής :

$$\pi: A \times A \rightarrow A$$

ονομάζεται **εσωτερική πράξη** στο A. Αν $(\alpha, \beta) \in A \times A$, τότε το στοιχείο $\pi(\ (\alpha\ , \beta)\ )$ ονομάζεται **αποτέλεσμα** της εσωτερικής πράξης π μεταξύ των α και β.

- Έστω τα σύνολα A και B διάφορα του κενού. Μια απεικόνιση φ της μορφής :

$$\varphi: A \times\ B \rightarrow B$$

ονομάζεται **εξωτερική πράξη** στο Β με σύνολο τελεστών το Α. Αν $(\lambda, \beta) \in A \times B$, τότε το στοιχείο $\varphi(\ (\lambda\ , \beta)\ )$ ονομάζεται **αποτέλεσμα** της εξωτερικής πράξης φ μεταξύ των $\lambda\ \in A$ και $\beta \in B$.

Ορισμός 1.1.6: Έστω το σύνολο A διάφορο του κενού και οι εσωτερικές πράξεις * και ° στο σύνολο Α.

1. Η εσωτερική πράξη ° στο σύνολο A ονομάζεται **αντιμεταθετική**, αν και μόνο αν για κάθε $\alpha, \beta \in A$ ισχύει :

$$\alpha \circ \beta =\ \beta \circ \alpha$$

2. Η εσωτερική πράξη ° στο σύνολο Α ονομάζεται **προσεταιριστική**, αν για κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in A$ ισχύει ότι :

$$(\alpha \circ \beta) \circ \gamma = \alpha \circ (\ \beta \circ \gamma)$$

3. Η εσωτερική πράξη ° στο σύνολο A ονομάζεται **επιμεριστική** ως προς την πράξη * , αν για κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in A$ ισχύει :

$$\alpha \circ (\beta * \gamma) = (\alpha \circ \beta)\ * (\beta \circ \gamma) \quad \textbf{αριστερά επιμεριστική}$$

$$(\alpha * \beta)^\circ \gamma = (\alpha \circ \gamma) * (\beta \circ \gamma) \quad \textbf{δεξιά επιμεριστική}$$

Ορισμός 1.1.7: Έστω * μια εσωτερική πράξη στο σύνολο A . Ένα στοιχείο $e \in A$ καλείται **ουδέτερο στοιχείο** ως προς τη πράξη * , αν για κάθε $\alpha \in A$:

$$\alpha * e = e * \alpha = \alpha$$

Ορισμός 1.1.8: Έστω * μια εσωτερική πράξη στο σύνολο Α. Τότε το **ουδέτερο στοιχείο** του Α ως προς την πράξη *, αν υπάρχει είναι μοναδικό.

Απόδειξη

Έστω e και e' είναι δύο ουδέτερα στοιχεία του Α ως προς τη * . Τότε ισχύει ότι :
e * e' = e
e * e' = e'

Άρα e = e' , οπότε το ουδέτερο στοιχείο αν υπάρχει είναι μοναδικό .

Ορισμός 1.1.9 :Έστω * μια εσωτερική πράξη στο A ως προς την οποία υπάρχει ουδέτερο στοιχείο $e \epsilon A$. Τα στοιχεία α και α' ονομάζονται **συμμετρικά** ως προς τη πράξη * αν ισχύει :

$$\alpha' * \alpha = \alpha * \alpha' = e$$

Παρόμοια με το ουδέτερο θα αποδείξουμε ότι το στοιχείο g' είναι μοναδικό (όπου g' είναι το συμμετρικό του g ως προς τη πράξη *).
Υποθέτουμε ότι $g'' \in G$ τέτοιο ώστε $g * g'' = e$. Θεωρώντας την πράξη * και χρησιμοποιώντας το προσεταιριστικό νόμο, έχουμε

$$g'{=}g' * e{=}g' * (g * g''){=}(g' * g) * g''{=}e * g'' = g''.$$

Ορισμός 1.1.10: Μια **ομάδα** είναι ένα σύνολο αντικείμενων $\{g, h, k\ldots\}$ (όχι απαραίτητα πεπερασμένου πλήθους) διάφορο του κενού, εφοδιασμένο με μια διμελή πράξη *, που αντιστοιχεί κάθε διατεταγμένο ζευγάρι στοιχείων g, h στη G,σε ένα τρίτο στοιχείο gh στη G. Η διμελής πράξη υπόκειται στις ακόλουθες απαιτήσεις :

(1) **Προσεταιριστικός νόμος**: Η ταυτότητα $(g * h) * k = g * (h * k)$ ικανοποιείται για όλα τα $g, h, k \in G$.
(2) Υπάρχει στοιχείο e στη G που καλείται το **ουδέτερο στοιχείο,** τέτοιο ώστε $g * e = e * g = g$ για όλα τα $g \in G$.
(3) Για κάθε $g \in G$ υπάρχει στη G ένα **συμμετρικό στοιχείο** τέτοιο ώστε $g * g'{=}g' * g = e$.
(Το συμμετρικό στοιχείο το καλούμε αντίστροφο όταν η διμελής πράξη είναι ο πολλαπλασιασμός)

Ένα σύνολο εφοδιασμένο με μια ή περισσότερες εσωτερικές ή εξωτερικές πράξεις λέμε ότι έχει αλγεβρική δομή. Η **αλγεβρική δομή** χαρακτηρίζεται από τις ιδιότητες που έχουν οι πράξεις με τις οποίες είναι εφοδιασμένο το σύνολο.

Ορισμός 1.1.11 : Η αλγεβρική δομή (G ,*) είναι **ημιομάδα,** αν η πράξη * είναι προσεταιριστική.

Ορισμός 1.1.12 : Αν $g * h = h * g$ λέμε ότι τα στοιχεία g και h αντιμετατίθενται. Αν όλα τα στοιχεία της G αντιμετατίθενται, λέμε ότι η G είναι **αντιμεταθετική ή αβελιανή ομάδα** .

Ορισμός 1.1.13 : Η αλγεβρική δομή (Δ, + , ˙) ονομάζεται **δακτύλιος** αν ισχύουν ότι :
1. Η αλγεβρική δομή (Δ, +) είναι αβελιανή ομάδα
2. Η αλγεβρική δομή (Δ, ˙) είναι ημιομάδα
3. Η πράξη ˙ είναι επιμεριστική ως προς τη πράξη +.

Ορισμός 1.1.14 : Η αλγεβρική δομή (Σ, + , ˙) ονομάζεται **σώμα** αν ισχύουν:
1. Η αλγεβρική δομή (Σ , + , ˙) είναι μη μηδενικός αντιμεταθετικός δακτύλιος.
2. Η αλγεβρική δομή $(\Sigma^*, \ \dot{} \ )$ είναι ομάδα , με $\Sigma^* = \Sigma - \{0\}$.

Ο δακτύλιος (Σ,+, ˙) είναι **αντιμεταθετικός**, όταν η πράξη ˙ είναι αντιμεταθετική.

Ορισμός 1.1.15 : Αν η G έχει πεπερασμένο αριθμό στοιχείων τότε έχει **πεπερασμένη τάξη** $n(G)$, όπου $n(G)$ είναι ο αριθμός των στοιχείων της G. Αλλιώς η G καλείται **μη πεπερασμένη** ομάδα (απειροομάδα).

Θεώρημα 1.1.1 (Νόμος της διαγραφής): Αν G μια ομάδα με διμελή πράξη την * , τότε ο αριστερός νόμος της διαγραφής ισχύουν στην G, δηλαδή αν $\alpha * \beta = \alpha * c$, τότε $\beta = c$ για όλα τα $\alpha, \beta, c \in G$. (αντίστοιχα και για το δεξιό νόμο διαγραφής αν $\beta * \alpha = c * \alpha$, τότε $\beta = c$)

<u>**Απόδειξη**</u>

Υποθέτουμε ότι $\alpha * \beta = \alpha * c$ τότε από το ορισμό της ομάδας θα υπάρχει α'(συμμετρικό ως την πράξη *)

$$\alpha' * (\alpha * \beta) = \alpha' * (\alpha * c)$$

από τον προσεταιριστικό νόμο $(\alpha' * \alpha) * \beta = (\alpha' * \alpha) * c$

από τον ορισμό του α' $e * \beta = e * c$

και από το ορισμό του ουδέτερου στοιχείου τελικά $b = c$.

Θεώρημα 1.1.2 : Αν G μια ομάδα με διμελή πράξη την * , και α , β είναι οποιαδήποτε στοιχεία στη G, τότε οι γραμμικές εξισώσεις $\alpha * \chi = \beta$ και $y * \alpha = \beta$ έχουν μοναδικές λύσεις στην G.

<u>**Απόδειξη**</u>

Έστω α' το συμμετρικό του α. Τότε έχουμε :

$$\begin{aligned} \alpha * (\alpha' * \beta) &= (\alpha * \alpha') * \beta \\ &= e * \beta = \beta \\ &= \beta \end{aligned}$$

Άρα το $\chi = \alpha' * \beta$ είναι τουλάχιστον μία λύση της εξίσωσης $\alpha * \chi = \beta$. Όμοια η λύση της εξίσωσης $y * \alpha = \beta$ είναι η $y = \beta * \alpha'$.
Για να δειχθεί η μοναδικότητα του y υποθέτω ότι υπάρχουν y_1, y_2 τέτοια ώστε $y_1 * a = \beta$ και $y_1 * a = \beta$. Άρα $y_1 * a = y_2 * a$ και από το θεώρημα 1.1.1 $y_1 = y_2$. Όμοια αποδεικνύεται ότι $\chi_1 = \chi_2$.

Ορισμός 1.1.16 : Έστω G μια ομάδα και S ένα υποσύνολο της G. Αν για κάθε $a, b \in G$ ισχύει ότι το γινόμενο ab υπολογισμένο στην G ανήκει και στο S, τότε λέμε ότι το S είναι **κλειστό** ως προς την πράξη ομάδας της G. Η διμελής πράξη, που ορίζεται με αυτόν τον τρόπο στο S, λέγεται η **επαγόμενη πράξη** στο S από την G.

Ορισμός 1.1.17 : Αν ένα υποσύνολο H μιας ομάδας G είναι κλειστό ως προς τη διμελή πράξη της G και αν το H είναι και αυτό ομάδα, τότε το H λέγεται **υποομάδα** της G .
Θα γράφουμε $H \leq G$ ή $G \geq H$ για να συμβολίζουμε το ότι η H είναι υποομάδα της G και γράφοντας $H < G$ ή $G > H$ θα εννοούμε ότι $H \leq G$, αλλά $H \neq G$.

Ορισμός 1.1.18 : Αν G είναι μια ομάδα οι υποομάδες G και η $\{e\}$ καλούνται **μη γνήσιες** υποομάδες της G. Όλες οι άλλες υποομάδες καλούνται **γνήσιες** .

Θεώρημα 1.1.3 : Ένα μη κενό υποσύνολο H μιας ομάδας G είναι υποομάδα, αν και μόνο αν, ισχύουν οι δύο παρακάτω συνθήκες :
(1) Αν $h, k \in H$, τότε $hk \in H$
(2) Αν $h \in H$, τότε $h^{-1} \in H$

<u>Απόδειξη</u>

Αν H είναι υποομάδα τότε προφανώς οι (1) και (2) ισχύουν. Έστω ότι οι συνθήκες ισχύουν τότε θα δείξουμε ότι η H ικανοποιεί τις απαιτήσεις της ομάδας. Ο προσεταιριστικός νόμος ισχύει μιας και ισχύει για τη G. Θα υπάρχει $h \in H$ μιας και η H είναι μη κενή τότε σύμφωνα με τη (2) το $h^{-1} \in H$. Από την (1) hh^{-1}=$e \in H$, έτσι η H έχει ουδέτερο στοιχείο.

Ορισμός1.1.19 :Έστω $X = \{1,2,\dots,n\}$ ένα πεπερασμένο σύνολο. **Η συμμετρική ομάδα S_n** με n ένα θετικό ακέραιο ονομάζεται το σύνολο των μεταθέσεων n αντικειμένων του X με πράξη τη σύνθεση απεικονίσεων. Η μετάθεση των n στοιχείων του X είναι μια 1-1 απεικόνιση του X στο εαυτό του.

Μια τέτοια μετάθεση γράφεται

$$s=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}$$

και λέμε: το 1 απεικονίζεται στο p_1, το 2 στο p_2 ,..., το n στο p_n.

Οι αριθμοί $p_1, p_{2,\dots,}p_n$ είμαι μια αναδιάταξη των $1,2,..n$. Η σειρά με την οποία οι στήλες είναι γραμμένες δε έχει σημασία. Η αντίστροφη μετάθεση s^{-1} δίνεται από τη σχέση:

$$s^{-1}=\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

Το γινόμενο των δύο μεταθέσεων s και t

$$t=\begin{pmatrix} q_1 & q_2 & \cdots & q_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

δίνεται από τη μετάθεση των s και t :

$$st=\begin{pmatrix} q_1 & q_2 & \cdots & q_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}$$

όπου το γινόμενο διαβάζεται από τα δεξιά στα αριστερά. Έτσι ο ακέραιος q_i απεικονίζεται στο i

μέσω του t και το i απεικονίζεται στο p_i μέσω του s, έτσι το q_i απεικονίζεται στο p_i μέσω του $st.$
Για παράδειγμα :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Δηλαδή $\sigma(1) = 4, \sigma(2) = 2$ και ούτω καθ' εξής. Έστω

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Τότε από το πολλαπλασιασμό των μεταθέσεων προκύπτει :

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Πιο αναλυτικά $\sigma\tau(2) = \sigma(\tau(2)) = \sigma(5) = 1.$
Η ταυτοτική μετάθεση είναι η εξής :

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots. & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

Η μετάθεση n αντικειμένων από μια ομάδα S_n καλείται συμμετρική ομάδα n τάξης. Η S_n έχει τάξη $n!$.

Μια μετάθεση $\sigma \in S_n$ λέγεται **κύκλος**, αν έχει το πολύ μια τροχιά, η οποία περιέχει περισσότερα από ένα στοιχεία. Το **μήκος ενός κύκλου** λέγεται το πλήθος των στοιχείων της μεγαλύτερης τροχιάς του.

1.2 Υποομάδες και σύμπλοκα

Ορισμός 1.2.1 : Έστω H μια υποομάδα μιας ομάδας G και $g \in G$. Το σύνολο $gH = \{gh : h \in H\}$ καλείται αριστερό **σύμπλοκο** του H που περιέχει το g. Παρόμοια ορίζεται το δεξί σύμπλοκο της G ως $Hg = \{hg : h \in H\}$.

Επιπρόσθετα $g = ge \in gH$.

Πρόταση 1.2.1 :Δύο αριστερά σύμπλοκα ταυτίζονται ή δε έχουν κανένα κοινό σημείο .

<u>Απόδειξη</u>

Έστω ότι τα σύμπλοκα gH και kH έχουν τουλάχιστον ένα κοινό σημείο. Έστω $\alpha = gh_1 = kh_2$ με $h_1, h_2 \in H$ τότε $g = kh_2h_1^{-1} \in kH$ και $gH \subseteq kH$. Όμοια $k = gh_1h_2^{-1} \in gH$ και $kH \subseteq gH$. Άρα $gH = kH$, και άρα έχουν τα ίδια στοιχεία .

Πρόταση 1.2.2 : Έστω H μια υποομάδα της G. Κάθε αριστερό σύμπλοκο και κάθε δεξί σύμπλοκο της H έχει το ίδιο πλήθος στοιχείων με την H.

<u>Απόδειξη</u>

Θα το δείξουμε ορίζοντας μια ένα προς ένα απεικόνιση της H επί του αριστερού συμπλόκου gH της H για οποιοδήποτε στοιχείο g της G.
Αν η H έχει πεπερασμένη τάξη, αυτό δείχνει ότι το gH έχει το ίδιο πλήθος στοιχείων με τη H.
Αν η H είναι άπειρη, η ύπαρξη μιας τέτοιας απεικόνισης θεωρείται ως ο ορισμός της ισότητας του μεγέθους της Η και του μεγέθους του gH.
Η επιλογή της ένα προς ένα απεικόνισης $\varphi: H \to gH$ είναι προφανής. Θέτουμε $\varphi(h) = gh$ για κάθε $h \in H$. Η απεικόνιση αυτή είναι επί του gH επειδή το gH ορίστηκε ως $\{gH \mid h \in H\}$. Για να δείξουμε ότι είναι ένα προς ένα υποθέτουμε ότι $\varphi(h_1) = \varphi(h_2)$ για κάποια h_1 και h_2 στην H. Τότε $gh_1 = gh_2$ και από το νόμο της διαγραφής στην ομάδα G έχουμε $h_1 = h_2$. Αυτό δείχνει ότι η φ είναι ένα προς ένα .

Θεώρημα 1.2.1 (Lagrange theorem): Η τάξη μιας υποομάδας μιας πεπερασμένης ομάδας διαιρεί την τάξη της ομάδας .

<u>Απόδειξη</u>

Ας υποθέσουμε ότι η G είναι μια ομάδα πεπερασμένης τάξης $n(G)$. Τότε η υποομάδα H είναι επίσης πεπερασμένη και κάθε αριστερό σύμπλοκο gH περιέχει ακριβώς $n(H)$ ξεχωριστά στοιχεία. Διαμερίζουμε τα στοιχεία της G σε πεπερασμένο αριθμό ξένων αριστερών συμπλόκων $g_1H, g_2H, \ldots, g_mH$. Μιας και έχουμε m σύμπλοκα και το καθένα περιέχει $n(H)$ στοιχεία, έπεται ότι $n(G) = m \cdot n(H)$.

Ορισμός 1.2.2 : Ο ακέραιος $m = n(G)/n(H)$ καλείται **δείκτης** του H στο G, δηλαδή είναι το πλήθος των αριστερών συμπλόκων της H στην G και συμβολίζεται $(G{:}\,H)$.

Το θεώρημα που Lagrange περιορίζει σημαντικά τις πιθανές τάξεις των υποομάδων. Παραδείγματος χάρη μια ομάδα τάξης p, όπου p είναι πρώτος, δε έχει γνήσιες υποομάδες .

Χρησιμοποιώντας αριστερά ή δεξιά σύμπλοκα έχουμε διαμερίσει τα στοιχεία της G σε ξένα σύνολα. Ένας άλλος τρόπος να διαμερίσουμε τη G είναι μέσω συζυγών κλάσεων.

Ορισμός 1.2.3 : Ένα στοιχείο h ομάδας καλείται **συζυγές** του στοιχείου k της ομάδας και γράφουμε $h \sim k$, αν υπάρχει $g \in G$ τέτοιο ώστε $k = ghg^{-1}$.

Πρόταση 1.2.3 : Η σχέση της συζυγίας είναι μια σχέση ισοδυναμίας, αφού ισχύουν:

Έστω μια ομάδα G και η σχέση συζυγίας $a \sim b$, αν υπάρχει $g \in G$ τέτοιο ώστε $b = gag^{-1}$.
(1) Αν $a = eae^{-1}$,τότε $a \sim a$ άρα η σχέση είναι ανακλαστική.
(2) Αν $a \sim b$ τότε υπάρχει $g \in G$ τέτοιο ώστε $gag^{-1} = b$. Τότε $\alpha = gbg^{-1}$, τότε $b \sim a$. Έτσι η σχέση είναι συμμετρική.
(3) Αν $a \sim b$ και $b \sim c$ τότε υπάρχουν $g, h \in G$ τέτοια ώστε $b = gag^{-1}$ και $c = hbh^{-1}$. Τότε $c = (hg)a(hg)^{-1}$, άρα $\alpha \sim c$ και σχέση είναι μεταβατική.

Έτσι τα στοιχεία της G μπορούν να διαιρεθούν σε **κλάσεις συζυγίας** από αμοιβαία συζυγή στοιχεία. Η κλάση που περιέχει το e αποτελείται από μόνο ένα στοιχείο μιας και $geg^{-1} = e$ για όλα τα $g \in G$. Διαφορετικές συζυγής κλάσεις δε περιέχουν απαραίτητα το ίδιο αριθμό στοιχείων.

Πρόταση 1.2.4 :Αν G είναι πεπερασμένη ο αριθμός των στοιχείων σε κάθε συζυγής κλάση είναι παράγοντας του $n(G)$.

Απόδειξη

Για να το αποδείξουμε αυτό διαλέγουμε ένα $g \in G$ και θεωρούμε το σύνολο

$$H^g = \{h \in G : hgh^{-1} = g\}.$$

Προφανώς το H^g είναι μια υποομάδα της G. Ο αριθμός των στοιχείων που είναι συζυγή στο g είναι ίσος με το αριθμό των διακριτών στοιχείων kgk^{-1} που μπορούν να σχηματιστούν από το k στη G. Δείχνουμε ότι αυτός είναι ο αριθμός των αριστερών συμπλόκων της H^g, και παράγοντας του $n(G)$.

Αν $k_1 g\, k_1^{-1} = k_2\, g\, k_2^{-1}$ τότε:

$k_1^{-1} k_1 g\, k_1^{-1} = k_1^{-1} k_2 g\, k_2^{-1}$

$k_1^{-1} k_1 g\, k_1^{-1} k_1 = k_1^{-1} k_2 g\, k_2^{-1} k_1$

$(k_1^{-1} k_1) g\, (k_1^{-1} k_1) = (k_1^{-1} k_2) g\, (k_1^{-1} k_2)^{-1} = g$

Έτσι $k_1^{-1} k_2 \in H^g$ ή $k_2 \in k_1 H^g$.

Τέλος αν $k_2 \in k_1 H^g$ τότε $k_1 g k_1^{-1} = k_2 g k_2^{-1}$.

Ορισμός 1.2.4 : Η υποομάδα H της G είναι σ**υζυγής στην υποομάδα** K, αν υπάρχει ένα $g \in G$ τέτοιο ώστε $K = gHg^{-1}$ ή $Kg = gH$, για κάθε $g \in G$.

Ορισμός 1.2.5 : Μια υποομάδα N της G είναι **κανονική (αυτοσυζυγής),** αν $gNg^{-1} = N$, για όλα τα $g \in G$ ή ισοδύναμα, αν και μόνο αν, $gN = Ng$ για όλα τα $g \in G$.

Ορισμός 1.2.6 : Αν N είναι μια κανονική υποομάδα μπορούμε να κατασκευάσουμε μια ομάδα από σύμπλοκα της N, που ονομάζεται **ομάδα πηλίκο** G/N .

Τα στοιχεία της G/N είναι τα σύμπλοκα gN, $g \in G$. Φυσικά για δύο σύμπλοκα $gN, g'N$ που περιέχουν τα ίδια στοιχεία της G, ισχύει ότι $gN = g'N$.

Μιας και η N είναι κανονική έπεται ότι $(g_1N)(g_2N) = (g_1N)(Ng_2) = g_1Ng_2 = g_1g_2N.$ Έτσι λοιπόν ορίζεται ο πολλαπλασιασμός στην G/N από τη σχέση $(g_1N)(g_2N) = g_1g_2N$.

Αν G είναι πεπερασμένη, τότε η τάξη του G/N είναι ο δείκτης του N στην G.

Θεωρώντας οποιοδήποτε στοιχείο g στην G ορίζουμε το στοιχείο της ομάδας g^n, με n ένα ακέραιο, τέτοιο ώστε :

$$g^n = \begin{cases} e \quad \alpha\nu\ n = 0 \\ gg \dots g \quad (n\ \varphi o\rho\acute{\varepsilon}\varsigma) \quad \alpha\nu\ n > 0 \\ g^{-1}g^{-1} \dots g^{-1} \quad (-n\ \varphi o\rho\acute{\varepsilon}\varsigma) \quad \alpha\nu\ n < 0 \end{cases}$$

Έστω $S = \{g, h, ..\}$ ένα αυθαίρετο υποσύνολο της G. Θεωρούμε το σύνολο $\boldsymbol{G_s}$ που αποτελείται από όλα τα πεπερασμένα γινόμενα της μορφής $g_1^{n_1} g_2^{n_2} \dots g_j^{n_j}$ με $g_1, g_2, \dots, g_j \in S$, $n_1, n_2, .. n_j$ θετικοί ακέραιοι. Σύμφωνα με το γινόμενο της ομάδας G,η G_s είναι μια υποομάδα που καλείται υποομάδα που παράγεται από το σύνολο S.

Ορισμός 1.2.7 : Αν η H είναι υποομάδα της G και $S \subseteq H$ τότε $G_s \subseteq H$. Έτσι η G_s είναι η μικρότερη υποομάδα της G που περιέχει το S. Η ομάδα H παράγεται από $S = \{g\}$, αν κάθε $h \in H$ μπορεί να γραφτεί στη μορφή $h = g^n$. Τότε η H ονομάζεται **κυκλική**. Η κυκλική ομάδα τάξης n συμβολίζεται και ως C_n.

Η **τάξη ενός στοιχείου** $g \in G$ είναι η τάξη της κυκλικής υποομάδας που παράγεται από το $\{g\}$ ή ο μικρότερος θετικός ακέραιος m τέτοιος ώστε $g^m = e$. Από το θεώρημα 1.2.1 (Lagrange theorem) το m διαιρεί τη τάξη της G.

Πρόταση 1.2.5 : Η κυκλική ομάδα H είναι υποομάδα της G .

<u>Απόδειξη</u>

1) Η ομάδα H θα πρέπει να είναι κλειστή ως τη διμελή πράξη της G. Για $r, s \in \mathbb{Z}$ ισχύει ότι $g^r g^s = g^{r+s}$, έτσι το γινόμενο δύο στοιχείων της H ανήκει και πάλι στην H.
2) Το ταυτοτικό της G θα πρέπει να ανήκει στην H. Το οποίο ισχύει γιατί $g^0 = e$ άρα $e \in H$
3) Για κάθε $g \in H$ ισχύει $g^{-1} \in H$. Αν $g^r \in H$ τότε $g^{-r} \in H$ και $g^{-r} g^r = e$.

Πόρισμα 1.2.6: Κάθε ομάδα με τάξη πρώτο αριθμό είναι κυκλική .

<u>Απόδειξη</u>

Έστω G έχει τάξη τον πρώτο αριθμό p, και έστω α ένα στοιχείο της G διαφορετικό από το ουδέτερο. Τότε η κυκλική υποομάδα $< \alpha >$ της G που παράγεται από το α έχει τουλάχιστον δύο στοιχεία το α και το e. Όμως από το θεώρημα Langrange η τάξη $m \geq 2$ της $< \alpha >$ πρέπει να διαιρεί τον πρώτο p. Πρέπει λοιπόν m = p και $< \alpha > = G$, άρα η G είναι κυκλική.

Θεώρημα 1.2.2 :Κάθε κυκλική ομάδα είναι αβελιανή.

<u>Απόδειξη</u>

Έστω G μια κυκλική ομάδα και α ένας γεννήτορας της G, δηλαδή $G =< \alpha >= \{a^n | n \in Z\}$
Αν g_1 και g_2 είναι δύο οποιαδήποτε στοιχεία της G, υπάρχουν ακέραιοι r και s τέτοιοι ώστε $g_1 = \alpha^r$ και $g_2 = a^s$. Τότε :
$g_1 g_2 = \alpha^r a^s = \alpha^{r+s} = \alpha^{s+r} = \alpha^s \alpha^r = g_2 g_1$. Άρα η G είναι αβελιανή .

Θεώρημα 1.2.3 : Κάθε υποομάδα μιας κυκλικής ομάδας είναι κυκλική .

<u>Απόδειξη</u>

Έστω G μια κυκλική ομάδα με γεννήτορα το α και H μια υποομάδα G. Αν $H = \{e\}$ τότε η $H =< e >$ είναι κυκλική. Αν $H \neq e$ τότε $\alpha^{\mathrm{n}} = e$ για κάποιο n στο $\mathbb{Z}^+$. Έστω m ο μικρότερος θετικός φυσικός αριθμός για το οποίο ισχύει $\alpha^m \in H$.
Έστω ότι $c = \alpha^m$ παράγει τη H.

$$H =< \alpha^m >=< c >$$

Θα δείξω ότι κάθε $b \in H$ είναι δύναμη του c. Αφού $b \in H$ και $H <= G$ έχουμε $b = \alpha^\eta$ για κάποιο n. Έστω p, q τέτοιοι ώστε $n = mq + r$ και $0 \leq r < m$

$$\alpha^n = \alpha^{mq+r} = (\alpha^m)^q \alpha^r$$

$$\text{άρα} \quad \alpha^r = (\alpha^m)^{-q} \alpha^\eta$$

Αφού $\alpha^\eta \in H$ και $\alpha^m \in H$ και το H είναι ομάδα τα $(\alpha^m)^{-q}$ και α^n ανήκουν και τα δύο στη H.
Άρα $(\alpha^m)^{-q}\alpha^\eta \in H$ δηλαδή $\alpha^r \in H$.
Αφού ο m ήταν ο μικρότερος θετικός ακέραιος για τον οποίο $\alpha^m \in H$ και $0 \leq r < m$ πρέπει $r = 0$.
Άρα $\eta = qm$ και
$b = \alpha^\eta = (\alpha^m)^q = c^q$ δηλαδή το b είναι δύναμη του c.

Παρατήρηση : Ταξινόμηση κυκλικών ομάδων

<u>Περίπτωση 1</u>
Η G έχει άπειρα στο πλήθος στοιχεία δηλαδή η τάξη του α είναι άπειρη .
<u>Περίπτωση 2</u>
Η G έχει πεπερασμένη τάξη .

Θεώρημα 1.2.4 : Αν G είναι πεπερασμένη ομάδα τάξης $2n$ και N είναι μια υποομάδα τάξης n, τότε η N είναι κανονική και η ομάδα πηλίκο G/N είναι κυκλική τάξης δύο.

<u>Απόδειξη</u>

Μιας και $2n(N) = n(G)$ υπάρχουν μόνο δύο αριστερά σύμπλοκα στη G : $eN = N$ και gN με $g \notin N$. Όμοια υπάρχουν μόνο δύο δεξιά σύμπλοκα N και Ng .
Κάθε στοιχείο της G περιέχεται σε ένα ακριβώς αριστερό σύμπλοκο και ακριβώς ένα δεξί.
Έτσι πρέπει να έχουμε $gN = Ng$ για όλα τα $g \in G$, $g \notin N$.
Η τελευταία σχέση ισχύει ακόμα για $g \in N$. Έτσι η N είναι κανονική .
Από τις σχέσεις $NN = N$, $N(gN) = (gN)N = gN$ και $(gN)(gN) = N$, $g \notin N$ έπεται ότι G/N είναι κυκλική τάξης δύο.
Η τελευταία σχέση προκύπτει από το ότι $g^2 \in gN$. Αν $g^2 \in gN$ τότε $g \in N$.
Άτοπο .

Ακολουθούν τα σχήματα μας δίνουν τις συμμετρίες των C_n για n=2,3,4,5,6.

1.3 *Ομομορφισμός , ισομορφισμός και αυτομορφισμός*

Ορισμός 1.3.1 : Ένας **ομομορφισμός** μ είναι μια απεικόνιση από μια ομάδα G σε μια ομάδα G' που απεικονίζει γινόμενα σε γινόμενα. Έτσι για κάθε $g_1, g_2 \in G$ ισχύει ότι $\mu(g_1 g_2) = \mu(g_1)\mu(g_2)$.

Ένας ομομορφισμός μ από τη G στη G' συχνά συμβολίζεται με μ: $G \to G'$.

Έστω e, e' τα ουδέτερα στοιχεία των G, G' αντίστοιχα. Τότε $\mu(e) = \mu(ee) = \mu(e)\mu(e)$, από όπου προκύπτει ότι $\mu(e) = e'$.
Έτσι η μ απεικονίζει το ουδέτερο στοιχείο της G στο ουδέτερο στοιχείο της G'.

Όμοια αποδεικνύεται ότι $\mu(g^{-1}) = \mu(g)^{-1}$, δηλαδή η μ απεικονίζει το αντίστροφο στοιχείο του g στο αντίστροφο στοιχέιο του $\mu(g)$.

Το **πεδίο ορισμού** της μ είναι η G, το **πεδίο τιμών** της μ είναι η

$$\mu(G) = \{\mu(g) \in G' : g \in G\} \subseteq G'.$$

Προφανώς η $\mu(G)$ είναι υποομάδα της G'.

Ορισμός 1.3.2 : Αν $\mu(G) = G'$ τότε η μ λέγεται **επί** .

Ορισμός 1.3.3 : Αν $\mu(g_1) \neq \mu(g_2)$, όταν $g_1 \neq g_2$τότε η μ λέγεται **1-1** .

Ορισμός 1.3.4 : Ένας ομομορφισμός που είναι 1-1 και επί καλείται **ισομορφισμός** .

Πρόταση 1.3.1 : Αν ο μ είναι ισομορφισμός μπορεί να αντιστραφεί κατά προφανή τρόπο, ώστε να ορίσει ισομορφισμό μ^{-1} της G' στη G. Τότε ισχυεί :
$\mu(x)^{-1} = \mu(x^{-1})$, για $x \in G$.

<u>Απόδειξη</u>

$\mu(x^{-1})\mu(x) = \mu(x^{-1}x) = \mu(x)\mu(x^{-1})$ οπότε $\mu(x)^{-1} = \mu(x^{-1})$

Πρόταση 1.3.2 : Αν μ ισομορφισμός από τη G στη G' και G είναι αβελιανή ομάδα, τότε και η G' θα είναι αβελιανή .

<u>Απόδειξη</u>

Έστω $x', y' \in G$ και $\mu(x) = x'$, $\mu(y) = y'$. Τότε έχουμε
$x'y' = \mu(x)\mu(y) = \mu(xy) = \mu(y)\mu(x) = y'x'$

Ορισμός 1.3.5 : Πυρήνας της μ είναι το αντίστοιχο του πυρήνα ενός γραμμικού μετασχηματισμού. Είναι το σύνολο :

$$K = \{g \in G : \ \mu(g) = e'\}$$

Θεώρημα 1.3.1 : Ο πυρήνας K είναι κανονική υποομάδα της G.

<u>Απόδειξη</u>

Αν $k_1, k_2 \in K$, τότε $\mu\,(k_1k_2) = \mu(k_1)\,\mu(k_2) = e'e' = e'$, όπου $k_1k_2 \in K$. Ακόμα αν $k \in K$, τότε $\mu(k^{-1}) = \mu(k)^{-1}$=$(e')^{-1}$=e' , οπότε $k^{-1} \in K$.
Από το θεώρημα 1.1.3 η K είναι υποομάδα της G .

Για να δείξουμε ότι η K είναι κανονική μένει να δείξουμε ότι $gkg^{-1} \in K$ για όλα τα $k \in K,\ g \in G$. Αυτό προκύπτει από το ότι $\mu(gkg^{-1}) = \mu(g)\mu(k)\mu(g)^{-1} = \mu(g)e'\mu(g)^{-1} = e'$.

Παρατηρήσεις :

- Όλα τα στοιχεία στο αριστερό σύμπλοκο gK απεικονίζονται στο ίδιο στοιχείο $\mu(g)$ στη G' μιας και $\mu(gk) = \mu(g)\mu(k) = \mu(g)$ για όλα τα $k \in K$.
- Ακόμα δύο στοιχεία με τη ίδια εικόνα μέσω της μ βρίσκονται στο ίδιο αριστερό σύμπλοκο , $\mu(g_1)$=$\mu(g_2) \Rightarrow \mu(g_1^{-1}g_2)$=e' από όπου προκύπτει $g_1^{-1}g_2 \in K$ ή $g_2 \in g_1K$.

Από τις παραπάνω παρατηρήσεις συμπεραίνουμε ότι:

- Η μ είναι 1-1, αν και μόνο αν, ο πυρήνας της αποτελείται μόνο από το ουδέτερο στοιχείο .
- Η μ είναι σταθερή στα αριστερά σύμπλοκα της K, αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να ορίσουμε ένα μετασχηματισμό $\mu': G/K \to \mu(G)$ απεικονίζοντας το χώρο πηλίκο G/K στη υποομάδα $\mu(G)$ της G' . Αυτή η απεικόνιση ορίζεται από τη $\mu'(gK) = \mu(g), g \in G$.

Πρόταση 1.3.2 : Η απεικόνιση ορίζεται από τη $\mu'(gK) = \mu(g)$, $g \in G$ είναι ένας ομομορφισμός.

<u>Απόδειξη</u>

$\mu'[(g_1K)(g_2K)]$=
=$\mu'[g_1g_2K]$
=$\mu(g_1g_2)$
=$\mu(g_1)\mu(g_2)$
=$\mu'(g_1K)\mu'(g_2K)$.

Θεώρημα 1.3.2 : Έστω K ο πυρήνας του ομομορφισμού $\mu: G \to G'$. Τότε η απεικόνιση μ' είναι ισομορφισμός στη ομάδα πηλίκο G/K .

Ορισμός 1.3.6 : Ένας ισομορφισμός $v: G \to G$ μιας ομάδας G στον εαυτό της καλείται **αυτομορφισμός** .

Για $h \in G$ η απεικόνιση $v_h(g) = hgh^{-1}$ είναι αυτομορφισμός, μιας και $v_h(g_1g_2) = hg_1g_2h^{-1} = hg_1h^{-1}hg_2h^{-1} = v_h(g_1)v_h(g_2)$.
Η v_h είναι επίσης 1-1 και επί αφού :

1. $v_h(g_1) = v_h(g_2) \Rightarrow hg_1h^{-1} = hg_2h^{-1} \Rightarrow h^{-1}hg_1h^{-1}h = h^{-1}hg_2h^{-1}h \Rightarrow (h^{-1}h)g_1(h^{-1}h) = (h^{-1}h)g_2(h^{-1}h) \Rightarrow g_1 = g_2$
2. $v_h(g) = hgh^{-1} \Rightarrow g = h^{-1}v_h(g)h$

Ορισμός 1.3.7 : Η απεικόνιση $v_h, h \in G$ καλείται **εσωτερικός αυτομορφισμός** .

Ορισμός 1.3.8 :Το σύνολο όλων των αυτομορφισμών στη G ορίζει την ομάδα $A(G)$, που ονομάζεται **ομάδα αυτομορφισμών** της ομάδας G.

Ορισμός 1.3.9 :Το **γινόμενο δύο αυτομορφισμών** $v_{1,}v_2$ ορίζεται μέσω της σύνθεσης απεικονίσεων ως $v_1v_2(g)$= $v_1\big(v_2(g)\big)$ για $g \in G$, ενώ το ουδέτερο στοιχείο ορίζεται ως η ταυτοτική απεικόνιση της G στον εαυτό της .

Το σύνολο $I(G\ )$ των εσωτερικών αυτομορφισμών της G σχηματίζει μια υποομάδα της $A(G\ )$.

1.4 Ομάδα μετασχηματισμών

Ορισμός 1.4.1 :Μια **μετάθεση** ενός μη κενού συνόλου X είναι μια 1-1 και επί απεικόνιση του X στο εαυτό του.

Έτσι αν x , y , z είναι τα στοιχεία του X, μια μετάθεση σ είναι μια απεικόνιση από το X στο X έτσι ώστε $\sigma(\chi) = \sigma(y)$, αν και μόνο αν, $x = y$ και για κάθε $z \in X$ υπάρχει $x \in X$ έτσι ώστε $\sigma(x) = z$.

Μια τέτοια μετάθεση είναι και η ταυτοτική μετάθεση $1(x) = x$, για όλα τα $x \in X$.
Το γινόμενο δύο μεταθέσεων $\sigma, \tau \in S_x$, γράφεται ως $\sigma\tau(\chi) = \sigma(\tau(\chi))$ για όλα τα $x \in X$. Προφανώς το $\sigma\tau$ είναι και πάλι μια μετάθεση στο X.

Τα ουδέτερα στοιχεία στο X είναι το 1 και το αντίστροφο σ^{-1} του σ που ορίζεται με τη προϋπόθεση ότι $\sigma^{-1}(x) = y$, αν και μόνο αν, $\sigma(y) = x$.

Ορισμός 1.4.2 : Το σύνολο S_x όλων των μεταθέσεων του X σχηματίζουν μια ομάδα με πράξη την σύνθεση απεικονίσεων, τη **πλήρη ομάδα συμμετρίας** στο X.

Απόδειξη

- Η S_x θα δείξουμε ότι είναι ομάδα με βάση τον πολλαπλασιασμό μεταθέσεων. Έστω οι μεταθέσεις σ, τ και μ και οι σύνθετες μεταθέσεις $(\sigma\tau)\mu$ και $\sigma(\tau\mu)$.

$[(\sigma\tau)\mu](\alpha) = (\sigma\tau)\mu(\alpha) = \sigma(\tau(\mu(\alpha))) = \sigma((\tau\mu)(\alpha)) = [\sigma(\tau\mu)](\alpha)$. Άρα $(\sigma\tau)\mu = \sigma(\tau\mu)$.
Με τις μεταθέσεις $(\sigma\tau)\mu$ και $\sigma(\tau\mu)$ απεικονίζεται κάθε $\alpha \in X$ στο ίδιο στοιχείο $\sigma(\tau(\mu(\alpha)))$, δηλαδή προκύπτει η ίδια μετάθεση. Άρα η σύνθεση μεταθέσεων είναι προσεταιριστική.

- Η μετάθεση $\iota(\alpha) = \alpha$, για κάθε $\alpha \in X$, δρα σαν το ταυτοτικό στοιχείο.
- Για μια μετάθεση σ ορίζουμε την σ^{-1}. Το $\sigma^{-1}(\alpha)$ πρέπει να είναι το στοιχειά α' που ανήκει στο X, για το οποίο ισχύει $\alpha = \sigma(\alpha')$. Αυτό το στοιχείο υπάρχει γιατί η σ είναι ένα προς ένα και επί.

$$\iota(\alpha) = \alpha = \sigma(\alpha') = \sigma\big(\sigma^{-1}(\alpha)\big) = (\sigma\,\sigma^{-1})(\alpha)$$
$$\iota(\alpha') = \alpha' = \sigma^{-1}(\alpha) = \sigma^{-1}\big(\sigma(\alpha')\big) = (\sigma^{-1}\sigma)(\alpha')$$

Άρα $\sigma\,\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\sigma = \iota$

Το σύνολο X μπορεί να έχει άπειρο αριθμό στοιχείων, παραδείγματος χάριν μπορεί να αποτελείται από όλα τα σημεία του επιπέδου. Αν το X είναι άπειρο, τότε το S_x είναι μια μη πεπερασμένη ομάδα. Αν το X έχει πεπερασμένο αριθμό στοιχείων, έστω n, τότε μπορούμε να ταυτίσουμε τη S_n με τη συμμετρική ομάδα S_x. Δηλαδή η ομάδα S_x και η ομάδα S_n είναι ισομορφικές σε περίπτωση που το X έχει n στοιχεία .

Ορισμός 1.4.3 : Αν συμβολίσουμε ένα μετασχηματισμό του χώρου με t, τότε για κάθε σημείο P το οποίο καλούμε **αρχικό** υπάρχει ακριβώς ένα σημείο Q, η **εικόνα** του σημείου P που δίνεται από το μετασχηματισμό t(P)=Q. Κάθε σημείο Q του χώρου είναι η εικόνα κάποιου σημείου P που δίνεται από το μετασχηματισμό t, όπου ίσες εικόνες αντιστοιχούν σε ίσα αρχικά σημεία. Τα σημεία P, Q καλούνται **ομόλογα σημεία** του μετασχηματισμού t.

Ορισμός 1.4.4 : Ένα σχήμα είναι μη κενή ομάδα σημείων στο χώρο. Το σχήμα f καλείται **αναλλοίωτο** ως προς το μετασχηματισμό S αν S(f)=f , και σε αυτή τη περίπτωση S καλείται **συμμετρία του σχήματος f**.

Ορισμός 1.4.5 : Για το **ταυτοτικό** μετασχηματισμό I στο χώρο, ισχύει ότι I(P)=P. Ο ταυτοτικός μετασχηματισμός είναι μια συμμετρία για οποιαδήποτε σχήμα.

Ορισμός 1.4.6 : Κάθε σχήμα του οποίου η ομάδα συμμετρίας αποτελείται μόνο από το ταυτοτικό μετασχηματισμό καλείται **μη συμμετρικό.**

Παραδείγματος χάρη τα γράμματα A,B,M έχουν κατοπτρική συμμετρία ,τα γράμματα I και O έχουν περιστροφική συμμετρία, ενώ τα γράμματα P, Γ είναι μη συμμετρικά.

Ορισμός 1.4.7 : Ομάδα μετασχηματισμών ή μεταθέσεων στο X είναι μια υποομάδα της S_x.
Αν G είναι μια ομάδα μετασχηματισμών στο X τότε τα στοιχεία g της G ορίζουν μεταθέσεις $g(x)$ του X. Αυτές οι μεταθέσεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να αναλύσουν το X σε αμοιβαία ξένα υποσύνολα .

Ορισμός 1.4.8 :Το x είναι **G-ισοδύναμο** στο y $(x \sim y)$ αν $g(x) = y$ για κάποιο $g \in G$.

Πρόταση 1.4.1 :Η $\sim$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας, για κάθε $a, b \in A$, ορίζουμε $a \sim b$, αν και μόνο αν, $b = \sigma^n(a)$, με $n \in \mathbb{Z}$:

<u>Απόδειξη</u>

- <u>Ανακλαστική</u> Προφανώς $\alpha \sim \alpha$ αφού $\alpha = \iota(\alpha) = \sigma^0(\alpha)$.
- <u>Συμμετρική</u> Αν $\alpha \sim b$ τότε $b = \sigma^n(\alpha)$ για κάποιο $\eta \in \mathbb{Z}$. Όμως τότε $\alpha = \sigma^{-n}(b)$ και $-n \in \mathbb{Z}$, άρα $b \sim a$.
- <u>Μεταβατική</u> Υποθέτουμε ότι $\alpha \sim b$ και $b \sim c$ οπότε $b = \sigma^n(\alpha)$ και $c = \sigma^m(\alpha)$ για κάποια $n, m \in \mathbb{Z}$. Αντικαθιστώντας, βρίσκουμε ότι $c = \sigma^m(\sigma^n(a)) = \sigma^{n+m}(a)$ άρα $\alpha \sim c$.

Ορισμός 1.4.9 : Οι κλάσεις ισοδυναμίας του X ως προς τις σχέσεις ισοδυναμίας $\sim$ ονομάζονται **G-τροχιές** ή απλά **τροχιές** .

Έτσι x και y ανήκουν στη ίδια τροχιά, αν και μόνο αν, $y = g(x)$ για κάποιο $g \in G$. Η τροχιά που περιέχει το x είναι το σύνολο $\{g(x) : g \in G\}$.

Ορισμός 1.4.10 : Αν υπάρχει μια μόνο τροχιά στο X λέμε ότι η ομάδα μετασχηματισμών G είναι **μεταβατική**. Σε αυτή τη περίπτωση για κάθε ζεύγος στοιχείων x, y στο X υπάρχει $g \in G$ τέτοια ώστε $y = g(x)$.

Ορισμός 1.4.11: α) Ο μιγαδικός πίνακας A λέγεται **ορθομοναδιαίος** αν ικανοποιεί τις ισότητες $AA^* = A^*A = I$ ή ισοδύναμα $A^* = A^{-1}$, όπου ο A^* είναι ο αναστροφοσυζυγής πίνακας του A.
β) Ο πραγματικός πίνακας A λέγεται **ορθογώνιος,** αν ικανοποιεί τις ισότητες
$AA^T = A^TA = I$ ή ισοδύναμα $A^T = A^{-1}$.

Ορισμός 1.4.12 : Το σύνολο των ορθογωνίων πινάκων
$O(n) = \{ A : A \in M_n(\mathbb{R}) \; και \; A^T = A^{-1}\}$ αποτελεί ομάδα με πράξη των πολλαπλασιασμό πινάκων η οποία λέγεται **ορθογώνια ομάδα**.

Θεώρημα 1.4.1 : Έστω $A \in M_n(K)$, $K = C$ (αντίστοιχα $K = R$) και $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ μια ορθοκανονική βάση του C^n (αντίστοιχα $\mathbb{R}^n$).
Οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες :

1. Ο A ανήκει στο σύνολο των ορθομοναδιαίων πινάκων (αντίστοιχα στην ορθογωνία ομάδα).
2. $<Ae_i \,|Ae_j>=\delta_{ij}$, δηλαδή $\{Ae_1, Ae_2, .., Ae_n\}$ είναι ορθοκανονική βάση του C^n (αντίστοιχα R^n).
3. Οι γραμμές του A αποτελούν ορθοκανονική βάση του C^n(αντίστοιχα $\mathbb{R}^n$).
4. Οι στήλες του A αποτελούν ορθοκανονική βάση του C^n(αντίστοιχα $\mathbb{R}^n$).

Έστω ο ορθογώνιος πίνακας $A_{2\times 2}$:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

Από το θεώρημα 1.4.1 οι γραμμές του A αποτελούν ορθοκανονικές βάσεις του $\mathbb{R}^2$, άρα έχουμε τις παρακάτω εξισώσεις :

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1$$
$$\gamma^2 + \delta^2 = 1$$
$$\alpha\gamma + \beta\delta = 0$$

επιπλέον $detA = \pm 1$ έχουμε

$$\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$$

Από τις δύο τελευταίες σχέσεις προκύπτει ότι $\alpha = \pm\delta$ και $\beta = \pm\gamma$
Λύνοντας το σύστημα με τη μέθοδο της αντικατάστασης προκύπτει ότι $\delta = cos\theta$ και $\gamma = sin\theta$.
Άρα A=$\begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{pmatrix}$ ή A=$\begin{pmatrix} cos\theta & sin\theta \\ sin\theta & -cos\theta \end{pmatrix}$ για θ ανήκει [0 ,2π) .

Σε ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων (x_1, x_2) στο Ευκλείδειο επίπεδο X, έστω G το σύνολο όλων των περιστροφών γύρω από την αρχή. Τα στοιχεία g_φ της G εξαρτώνται από τη συνεχή παράμετρο φ, η οποία είναι η γωνία περιστροφής σε rad και μετριέται από θετικό άξονα x_1. Αν $x \in X$ έχει συντεταγμένες (x_1, x_2) , τότε $y = g_\varphi(x)$ έχει συντεταγμένες:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\varphi & -sin\varphi \\ sin\varphi & cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι $g_\varphi = g_{\varphi+2\pi}$.Τα στοιχεία g_φ σχηματίζουν ομάδα μιας και $g_\varphi g_\theta = g_{\varphi+\theta}$.

Ορισμός 1.4.13 :Η περιστροφική ομάδα σε ένα δισδιάστατο χώρο είναι ισομορφική με την ομάδα πίνακων SO(2,R),

$$SO(2,R)=\{ \begin{pmatrix} cos\varphi & -sin\varphi \\ sin\varphi & cos\varphi \end{pmatrix}, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi\}$$

η οποία καλείται **ειδική ορθογώνια ομάδα σε δισδιάστατο χώρο** .

Αν Y είναι υποσύνολο του X και $g \in G$, συμβολίζουμε με $g(Y)$ το σύνολο $\{g(y): y \in Y\}$.

Το υποσύνολο $\{x\}$ του X είναι αναλοίωτο, αν $gx = x$ για όλα τα $g \in G$, δηλαδή, αν και μόνο αν, η G-τροχιά που περιέχει το x αποτελείται από το x μόνο.

Ορισμός 1.4.14 : Ένα υποσύνολο Y του X καλείται **G-αναλλοίωτο ή απλά αναλλοίωτο** αν $g(Y) \subset Y$ για όλα τα $g \in G$.

Ορισμός 1.4.15 : Για ένα αυθαίρετο υποσύνολο Y του X μπορούμε να βρούμε ένα υποσύνολο $K = \{g \in G: g(Y) \subseteq Y\}$. Η K είναι μια ομάδα μετασχηματισμού και Y είναι ένα K-αναλλοίωτο υποσύνολο του X. Η K λέγεται **G-συμμετρία** ή **ομάδα συμμετρίας του Y**.

Για ένα πεπερασμένο σύνολο, μια διμελή πράξη στο σύνολο αυτό, μπορεί να οριστεί με τη βοήθεια ενός πίνακα που ονομάζεται πίνακας Caley.
Ο **πίνακας** ορίζει μια διμελή πράξη * στο S={a,b,c} με το ακόλουθο κανόνα :
(i-στό στοιχείο στ' αριστερά)(j-στό στοιχείο στην κορυφή)=*
(στοιχείο στην i-στή γραμμή και j-στή στήλη του κυρίως πίνακα)

Ιδιότητες των πινάκων Cayley

Από μια ομάδα μπορούμε να βρούμε το πίνακα Cayley της και από ένα πίνακα Cayley μπορούμε να βρούμε τη ομάδα στη οποία αντιστοιχεί. Έτσι οι ιδιότητες που ισχύουν για τους πίνακες Cayley είναι ιδιότητες ουσιαστικά που ισχύουν για όλες τις ομάδες. Δύο πολύ βασικές ιδιότητες που ισχύουν σε όλους τους πίνακες Cayley είναι οι εξής:

- *Ιδιότητα sudoku: Σε κάθε γραμμή ή στήλη ενός πίνακα Cayley δε μπορεί να εμφανιστεί ένα στοιχείο της ομάδας δύο φορές.*

Απόδειξη

Αν η υπόθεση μας δεν ήταν σωστή τότε θα υπήρχε μια γραμμή έστω r στην οποία θα υπήρχαν δύο ίσα στοιχεία. Έστω τώρα ότι αυτά τα στοιχεία βρίσκονται στις στήλες c_1 και c_2. Από το γεγονός ότι αυτά τα στοιχεία είναι ίσα συνεπάγεται, ότι ισχύει η σχέση: $r \circ c_1 = r \circ c_2$.
Από τα αξιώματα των ομάδων προκύπτει :

$r^{-1}*(r \circ c_1) = r^{-1}*(r \circ c_2)$

$(r^{-1}*r)\circ c_1 = (r^{-1}*r)\circ c_2$

$e \circ c_1 = e \circ c_1$

$c_1 = c_2$

- *Αν το αποτέλεσμα της διμελής πράξης δύο στοιχείων ενός πίνακα Cayley είναι το ταυτοτικό, τότε αυτά τα στοιχειά είναι συμμετρικά ως προς τη κύρια διαγώνιο του πίνακα.*

Απόδειξη

Ένας άλλος τρόπος να εκφράσουμε την παραπάνω παρατήρηση είναι ότι το ταυτοτικό e εμφανίζεται στη γραμμή r και στη στήλη c, επίσης στη γραμμή c και στη στήλη r. Έτσι ο στόχος μας είναι να δείξουμε ότι $r * c = e$ συνεπάγεται $c * r = e$.

$r^{-1}*(r*c) = r^{-1}*e$

$(r^{-1}*r)*c = r^{-1}$

$e*c = r^{-1}$

$c = r^{-1}$

$c*r = r^{-1}*r$

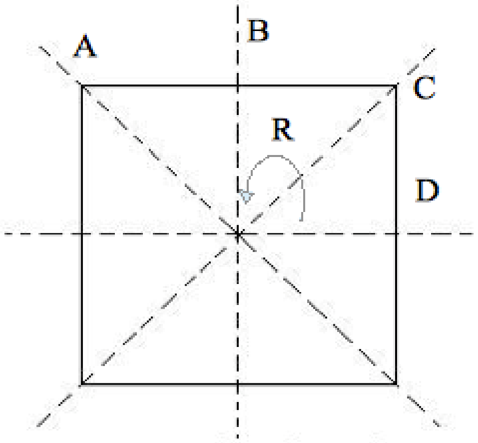
$c*r = e$

Στη συνέχεια θα μελετηθούν οι συμμετρίες και ο πίνακας Cayley του τετραγώνου

Έστω X το Ευκλείδειο επίπεδο και G η ομάδα O(2) όλων των περιστροφών και ανακλάσεων στο επίπεδο που αφήνουν ένα σημείο p αναλλοίωτο .

Υπάρχουν 8 συμμετρίες στο τετράγωνο : η περιστροφή των 90 μοιρών αντί ωρολογιακά R, οι ωρολογιακές περιστροφές R^2, R^3 κατά 180 °, 270 ° αντίστοιχα και τέσσερις ανακλάσεις A , B , C και D κατά την δεύτερη διαγώνιο, τον κάθετο άξονα, την κύρια διαγώνιο και τον οριζόντιο άξονα αντίστοιχα. Η τελευταία συμμετρία του τετραγώνου είναι η ταυτοτική απεικόνιση.

'Ενας εύκολος τρόπος να γράψουμε αυτές τις συμμετρίες είναι με τη χρήση ενός κυκλικού συμβολισμού, για τη μετάθεση των πλευρών με κάθε συμμετρίας .



Αυτές οι οχτώ συμμετρίες σχηματίζουν τη ομάδα D_4, τη διεδρική ομάδα τάξης οχτώ.

Επιπρόσθετα το γινόμενο δύο συμμετριών είναι επίσης συμμετρία, παραδείγματος χάρη $AD = R^3$, το αποτέλεσμα μιας ανάκλασης του τετραγώνου γύρω από τον οριζόντιο άξονα που ακολουθείται από μια ανάκλαση γύρω από την δεύτερη διαγώνιο μια είναι ισοδύναμο με μια περιστροφή κατά 270 ° ορολογιακά .

Οι συζυγείς κλάσεις της D_4 μπορούν να περιέχουν ένα, δύο, τρία ή τέσσερα στοιχεία μιας και αυτοί είναι οι παράγονται του 8 .

Οι πέντε συζυγείς κλάσεις του τετραγώνου είναι $\{1\}, \{R, R^3\}, \{R^2\}, \{D, B\}$ και $\{C , A\}$.

Μιας συζυγής σχέση όπως η $RDR^{-1} = B$ μπορεί να ερμηνευτεί με τους παρακάτω τρόπους :

Κάνοντας μια ανάκλαση γύρω από τον κάθετο άξονα ή περιστρέφοντας το τετράγωνο αντί ωρολογιακά και στην συνέχεια κάνοντας μια ανάκλαση γύρω από το οριζόντιο άξονα που ακολουθείται από μια περιστροφή πάλι κατά 90° ωρολογιακά .

Αν X είναι ένα τετράγωνο οι συμμετρίες του είναι $\{I, R, R^2, R^3, A , B , C , D\}$. Σε κάθε πεπερασμένη ομάδα, μπορούμε να σχηματίσουμε τον πίνακα της ομάδας που παρουσιάζει κάθε πιθανό γινόμενο.

Ο πίνακας της ομάδας συμμετριών του τετραγώνου είναι ο εξής :

	I	**R**	**R^2**	**R^3**	**A**	**B**	**C**	**D**
I	I	R	R^2	R^3	A	B	C	D
R	R	R^2	R^3	I	B	C	D	A
R^2	R^2	R^3	I	R	C	D	A	B
R^3	R^3	I	R	R^2	D	A	B	C
A	A	D	C	B	I	R^3	R^2	R
B	B	A	D	C	R	I	R^3	R^2
C	C	B	A	D	R^2	R	I	R^3
D	D	C	B	A	R^3	R^2	R	I

Μπορούμε να ελέγξουμε μερικές από αυτές με τη βοήθεια ενός μικρού τετράγωνου χαρτιού. Αριθμούμε τις γωνίες στη μια μεριά του χαρτιού 1,2,3,4 και τις γωνίες στη άλλη μεριά του χαρτιού με τέτοιο τρόπο ώστε κάθε γωνία να έχει το ίδιο αριθμό στη μπροστινή και στη πίσω μεριά του χαρτιού .

Αν ελέγξουμε το πίνακα προσεκτικά παρατηρούμε ότι $AB \neq BA$. Οι συμμετρικές πράξεις συχνά αποτυγχάνουν να αντιμετατεθούν .

Παρατηρούμε ακόμα ότι ο πίνακας έχει ένα πολύ καθορισμένο μοτίβο. Τα A, B, C προωθούνται με σειρά με κατεύθυνση εμπρός ή πίσω καθώς πάμε κατά μήκος των γραμμών ή των στηλών. Συγκεκριμένα παρατηρούμε ότι $RA = B$, $R^2A = C$ και $R^3\ A = D$. Έτσι και οι οχτώ πράξεις μπορούν να παραχθούν από τη R και A.

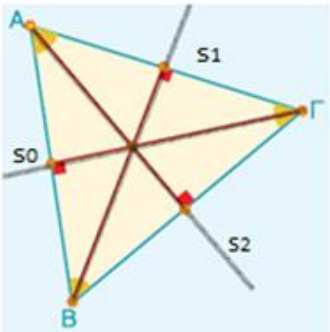
Τώρα $R^4 = I$, $A^2 = I$. Ακόμα $AR = R^3A$ κάτι που συχνά γράφεται και ως $AR = AR^{-1}$. Αυτές οι σχέσεις επαρκούν για να παράγουν όλα τα γινόμενα στην ομάδα .

Έτσι οι συνδυασμοί $I, R, R^2, R^3, A, RA, R^2A, R^3A$ μπορούν να γραφούν στη εξής μορφή R^iA^j με $i = 0,1,2,3$ και $j = 0,1$.

Η τελική μορφή της ομάδας είναι $< R, A|\ R^4 = A^2 = I\ ,\ AR = R^{-1}A >$.

Θα μελετήσω το πίνακα Cayley που δείχνει τις συμμετρίες ενός ισόπλευρου τριγώνου .Το r_0 δηλώνει το ταυτοτικό στοιχείο, το r_1 δηλώνει την αντί ωρολογιακή περιστροφή κατά 120 μοίρες γύρω από το σημείο τομής των αξόνων και r_2 αντί ωρολογιακή περιστροφή κατά 240 μοίρες. Ακόμα s_0, s_1, s_2 αντιπροσωπεύουν ανακλάσεις κατά τους αντίστοιχους άξονες της εικόνας.

Απόδειξη



	$\mathbf{r_0}$	$\mathbf{r_1}$	$\mathbf{r_2}$	$\mathbf{s_0}$	$\mathbf{s_1}$	$\mathbf{s_2}$
$\mathbf{r_0}$	r_0	r_1	r_2	s_0	s_1	s_2
$\mathbf{r_1}$	r_1	r_2	r_0	s_1	s_2	s_0
$\mathbf{r_2}$	r_2	r_0	r_1	s_2	s_0	s_1
$\mathbf{s_0}$	s_0	s_2	s_1	r_0	r_2	r_1
$\mathbf{s_1}$	s_1	s_0	s_2	r_1	r_0	r_2
$\mathbf{s_2}$	s_2	s_1	s_0	r_2	r_1	r_0

Οι παραπάνω σχέσεις πέρα από την παρατήρηση μέσω σχήματος μπορούν να αποδειχτούν και μέσω αλγεβρικών πράξεων.

Ορισμός 1.4.16 : Για κάθε $x \in X$ η ομάδα $G^x = \{g \in G : g(x) = x\}$ καλείται **ισότροπη** υποομάδα της G στο x. Περιέχει τα στοιχεία της G που αφήνουν το x σταθερό .

Θεώρημα 1.4.2 :Κάθε αριστερό σύμπλοκο της G^x περιέχει όλα τα στοιχεία της G που απεικονίζουν το x σε ένα συγκεκριμένο σημείο y. Έτσι υπάρχει μια 1-1 σχέση μεταξύ των σημείων στη τροχιά της G που περιέχουν το x και το αριστερό σύμπλοκο της G^x. Αν η G είναι πεπερασμένη, η τροχιά της G που περιέχει το x αποτελείται από $n(G)/n(G^x)$ σημεία .

Απόδειξη

Αρχικά πρέπει να δειχτεί η 1-1 σχέση μεταξύ των σημείων στη τροχιά της G μέσω του x και τα αριστερά σύμπλοκα της G^x.
Έστω $y \in X$ τέτοιο ώστε $x \sim y$, τότε υπάρχει $g \in G$ τέτοιο ώστε $y = g(x)$.
Τότε $gh(x) = g(x) = y$ για όλα τα $h \in G^x$, έτσι όλα τα στοιχεία στο σύμπλοκο

$g(G^x)$ απεικονίζουν το x στο y .
Αν $y = k(x)$ για κάποιο $k \in G$ τότε $g(x) = k(x)$ ή $x = g^{-1}k(x)$, έτσι $g^{-1}(k)$ ανήκει στη G^x, από το οποίο έπεται ότι $k \in g(G^x)$.

Κάθε αφηρημένη ομάδα στη άλγεβρα μπορεί να γίνει αντιληπτή σαν μια ομάδα μετασχηματισμών που δρα στο εαυτό της.

Θεώρημα 1.4.3 : Κάθε ομάδα G είναι ισομορφική με μια υποομάδα της πλήρους μεταθετικής ομάδας S_G. Και συγκεκριμένα, κάθε πεπερασμένη ομάδα τάξης n είναι ισομορφική με μια υποομάδα της S_n.

Θεώρημα 1.4.4 :
1. Η μετάθεση g στέλνει το x στο y, αν και μόνο αν, hgh^{-1}στέλνει το $h(x)$ στο $h(y)$.
2. Το σημείο x είναι αναλλοίωτο από τη g, αν και μόνο αν, $h(x)$ είναι αναλλοίωτη κάτω από τη hgh^{-1}.

<u>Απόδειξη</u>
1) $g(x) = y$, αν και μόνο αν, $(hgh^{-1})h(x) = y$
2) $g(x) = x$, αν και μόνο αν, $(hgh^{-1})h(x) = hx$

1.5 Νέες ομάδες και παλαιές ομάδες

Από δύο ομάδες G και G' μπορούμε να κατασκευάσουμε καινούριες ομάδες, οι οποίες περιέχουν νέες ομάδες ισομορφικές με τις G και G' .

Ορισμός 1.5.1 : Το **ευθύ γινόμενο** $G \times G'$είναι μια ομάδα που αποτελείται από όλα τα διατεταγμένα ζευγάρια (g, g') με $g \in G$ και $g \in G'$. Το γινόμενο δύο ομάδων στοιχείων δίνεται από τη σχέση:
$(g_1, g_1')(g_2, g_2')$=$(g_1g_2, g_1'g_2')$.

Πρόταση 1.5.1 :Το $G \times G'$ είναι ομάδα .

<u>Απόδειξη</u>

Περιέχει το ουδέτερο στοιχείο (e, e') με e και e' τα ουδέτερα στοιχεία των G και G' αντίστοιχα.
Ακόμα $(g, g')^{-1} = (g^{-1}, g'^{-1})$.
Ο προσεταιριστικός νόμος ισχύει γιατί
$((g_1, g_1')\,(g_2, g_2'))(g_3, g_3') = (g_1g_2, g_1'g_2')(g_3, g_3') = (g_1g_2g_3, g_1'g_2'g_3')$
$(g_1, g_1')((g_2, g_2')(g_3, g_3')) = (g_1, g_1')(g_2g_3, g_2'g_3') = (g_1g_2g_3, g_1'g_2'g_3')$

Η υποομάδα $G \times \{e'\} = \{(g, e') : g \in G\}$ της $G \times G'$είναι ισομορφική με τη G, με τον ισομορφισμό να δίνεται από τη σχέση $(g, e') \leftrightarrow g$. Όμοια η υποομάδα $\{e\} \times G'$είναι ισομορφική με τη G' .
Μιας και $(g, e')(e, g') = (e, g')(g, e') = (g, g')$ έπεται ότι (1) τα στοιχεία της $G \times \{e'\}$ αντιμετατίθενται με τα στοιχεία της $\{e\} \times G'$και (2) κάθε στοιχείο στη $G \times G'$ μπορεί να γραφτεί μοναδικά σα γινόμενο στοιχείων της $G \times \{e'\}$και της $\{e\} \times G'$.

Θεώρημα 1.5.1 :Μια ομάδα είναι το **ευθύ γινόμενο** των υποομάδων της H και K $(G = H \times K)$ αν
(1) $hk = kh$ για όλα τα $h \in H, k \in K$ και
(2) Κάθε $g \in G$ μπορεί να εκφραστεί μοναδικά στη μορφή $g = hk$, $h \in H, k \in K$.
Οι υποομάδες H και K λέγονται **ευθείς παράγοντες** της G.

Έπεται ότι H και K έχουν μόνο ένα κοινό στοιχείο, το ουδέτερο στοιχείο της ομάδας G. Αν $g \in H \cap K$ τότε $g = ge = eg$ και από τη μοναδικότητα πρέπει $g = e$.

Οι H και K είναι κανονικές υποομάδες της G.

Ο παραπάνω ορισμός μπορεί εύκολα να επεκταθεί ώστε να ορίζει ευθέα γινόμενα $G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n$ n ομάδων. Επιπρόσθετα, αν G έχει πεπερασμένη τάξη, είναι προφανές ότι η τάξη του ευθέος γινομένου είναι γινόμενο των τάξεων των ευθέων παραγόντων .

Ορισμός 1.5.2 : Έστω H και K να είναι ομάδες και έστω μια απεικόνιση $k \to v_k$ να είναι ένας ομομορφισμός του K στη ομάδα αυτομορφισμού $A(H)$ της H. Τότε το σύνολο όλων των διατεταγμένων ζευγαριών $< h, k >$, $h \in H$, $k \in K$, σχηματίζει μια ομάδα, το **ημιευθύ γινόμενο** των H και K, με το πολλαπλασιασμό ομάδων

$$< h, k >< h', k' >=< hv_k(h'), kk' >$$

Πρόταση 1.5.2 : Η απεικόνιση v_k είναι αυτομορφισμός της H για κάθε $k \in K$. Επιπλέον, $v_e = 1$, ο ουδέτερος αυτομορφισμός και $v_{kk}{}'(h) = v_k[v'_k(h)]$ για όλα τα $k, k' \in K, h \in H$. Η δυική σχέση :

$$< h, k >< h', k' >=< hv_k(h'), kk' >$$

ικανοποιεί τις προϋποθέσεις της ομάδας.

<u>Απόδειξη</u>

Ο προσεταιριστικός νόμος σχηματίζει τη σχέση :

$$(<h_1, k_1> <h_2, k_2>) <h_3, k_3> = <h_1 v_{k1}(h_2), k_1 k_2> <h_3, k_3>$$
$$= <h_1 v_{k1}(h_2) v_{k1k2}(h_3), k_1 k_2 k_3>$$

και

$$<h_1, k_1> (<h_2, k_2> <h_3, k_3>) = <h_1, k_1> (<h_2 v_{k2}(h_3), k_2 k_3>)$$
$$= <h_1 v_{k1}(h_2 v_{k_2}(h_3)), k_1 k_2 k_3>$$
$$= <h_1 v_{k1}(h_2) v_{k1k2}(h_3), k_1 k_2 k_3>$$

Το ουδέτερο στοιχείο είναι το $< e, e >$ αφού
$< h, k >< e, e >=< hv_k(e), k >=< h, k >$
$< e, e >< h, k >=< v_e(h), k >=< h, k >$

Το αντίστροφο του $< h, k >$ είναι $< v_{k^{-1}}(h^{-1}), k^{-1} >$

Αν το $v_k = 1$, τότε για όλα τα $k \in K$ το ημιευθύ γινόμενο μετατρέπεται σε ευθύ γινόμενο .

Όπως με το ευθύ γινόμενο μπορούμε να καταλάβουμε ότι η ομάδα $< H, e >$ είναι η H χρησιμοποιώντας τη απεικόνιση $<h, e> \rightarrow h$ όπως και για τις ομάδες $< e, K >$ και K .Έτσι τα στοιχεία g του ημιευθέος γινομένου της G γράφονται κατά μοναδικό τρόπο $g =< g, k >= hk$ και ο πολλαπλασιασμός γράφεται $(h_1k_1)(h_2k_2)$= $(h_1v_{k1}(h_2))(k_1k_2)$.

Έτσι έπεται ότι $H \cap K$={e} , k είναι μια υποομάδα της G και H είναι μια κανονική ομάδα της G . Πράγματι, αν $k \in K$ και $h \in H$, τότε $khk^{-1} =< e, k >< h, k^{-1} >= v_k(h)$. Έτσι για $g = hk$ στην G , $h' \in H$ έχουμε $gh'g^{-1} = (hk)h'(k^{-1}h^{-1}) = h\left(kh'^{k^{-1}}\right)h^{-1} \in H$ και H είναι κανονική .

ΟΙ ΚΡΥΣΤΑΛΛΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΟΜΑΔΕΣ

2.1 Η ορθογώνια ομάδα σε τρισδιάστατο χώρο

Ένας διανυσματικός χώρος V πάνω στο σώμα K= $\mathbb{R}$ λέγεται **χώρος εσωτερικού γινομένου**, αν είναι εφοδιασμένος με μια απεικόνιση

$$< , > : V \times V \to K, \quad (x, y) \to < x, y >$$

Η οποία για κάθε $x, y, z \in V$ και $\lambda, \mu \in K$ ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. $< \lambda x + \mu y, z >= \lambda < x, z > + \mu < y, z >$
2. $< y, x >=< x, y >$
3. $< x, x > \geq 0$

Ακόμα, αν η διάσταση του V είναι πεπερασμένη, τότε ο χώρος εσωτερικού γινομένου V λέγεται **Ευκλείδειος** .

Ο $\mathbb{R}^3$ είναι ο τρισδιάστατος πραγματικός Ευκλείδειος χώρος. Χρησιμοποιώντας ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων με αρχή το Ο σε αυτό το χώρο αντιστοιχούμε κάθε σημείο P στον $\mathbb{R}^3$, μια μοναδική τριάδα πραγματικών αριθμών (x_1, x_2, x_3), με την προβολή του P σε τρεις αμοιβαία ορθογώνιους άξονες συντεταγμένων. Ο $\mathbb{R}^3$ μπορεί να γίνει αντιληπτός και σαν ένας τρισδιάστατος διανυσματικός χώρος με στοιχεία $x = (x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^{3} x_i e_i$, με e_1, e_2, e_3 να είναι τα μοναδιαία διανύσματα κατά μήκος των αξόνων συντεταγμένων, η διγραμμική μορφή

$$< x, y >= \sum_{i=1}^{3} x_i y_i \text{ με } x, y \in \mathbb{R}^3$$

ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο, σε αυτό το χώρο .

Κάθε χώρος εσωτερικού γινομένου γίνεται και διανυσματικός χώρος με νόρμα.

Η νόρμα $||x|| = \sqrt{< x, x >}$ είναι το Ευκλείδειο μήκος του διανύσματος x και

$$cos\varphi =< x, y > / \, ||x|| \, ||y||$$

είναι το συνημίτονο της γωνίας φ μεταξύ των διανυσμάτων x και y, αν τα x και y είναι μη μηδενικά.

Αναζητούμε γραμμικούς μετασχηματισμούς $O: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ που διατηρούν το μήκος, όπως για παραδείγματα όλοι οι γραμμικοί μετασχηματισμοί O τέτοιοι ώστε $< Ox , Ox > = < x, x >$ για όλα τα $x \in \mathbb{R}^3$.

Από τη σχέση

- $< x + y, x + y >=< x, x + y > +< y, x + y >$

$=< x, x > +< x, y > + < y, x > +< y, y >$

$=< x, x > + 2 < x, y > +< y, y >$

- $< x-y, x-y \geq < x,x > - < x,y > - < y,x > + < y,y >$
$$= < x,x > -2 < x,y > + < y,y >$$

Αν προσθέσουμε τις δύο παραπάνω σχέσεις προκύπτει :
$4 < x,y > = < x+y, x+y > - < x-y, x-y >$
ή όπως αλλιώς μπορεί να γραφεί :
$< x,y > = \frac{<x+y,x+y> - <x-y,x-y>}{4}$ (2.1)
Αφού αναζητούμε μετασχηματισμούς που διατηρούν το μήκος η δεξιά μεριά της παραπάνω σχέσης ισούται με
$\frac{<O(x+y),O(x+y)> - <O(x-y),O(x-y)>}{4} =$
$$(< O(x)+O(y), O(x)+O(y) > - < O(x)-O(y), O(x)-O(y) >)/4$$
Από τη σχέση (2.1) έπεται ότι
$$< Ox, Oy > = < x, y >$$

Ορισμός 2.1.1 : Θεωρούμε τον Ευκλείδειο χώρο V. Ένας γραμμικός μετασχηματισμός $f: V \to V$, δηλαδή $f \in L(V)$ λέγεται **ορθογώνιος**, αν για κάθε $x, y \in V$ ισχύει :
$$< f(x), f(y) > = < x,y >$$

Ένα μη κενό σύνολο V λέγεται **μετρικός χώρος**, αν μπορεί να εφοδιαστεί με μια μετρική. Μια **μετρική** είναι μια απεικόνιση της μορφής
$$d: V \times V \to \mathbb{R}, \qquad (x,y) = d(x,y)$$

που ικανοποιεί για κάθε $x, y, z \in V$ τις συνθήκες :
1. $d(x,y) \geq 0$ και $d(x,y) = 0$, αν και μόνο αν, $x = y$
2. $d(x,y) = d(y,x)$
3. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

Ένας διανυσματικός χώρος εσωτερικού γινομένου γίνεται μετρικός χώρος μέσω της απεικόνισης
$$d(x,y) = ||x-y|| = \sqrt{< x-y, x-y >}$$

Θεώρημα 2.1.1 : Ένας ορθογώνιος μετασχηματισμός $f: V \to V$, όπου V Ευκλείδειος χώρος, διατηρεί τη νόρμα και την απόσταση, δηλαδή για κάθε $x, y \in V$ ισχύει :
i. $|| f(x) || = || x ||$
ii. $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$

Για τον υπολογισμό των πιθανών μετασχηματισμών O που διατηρούν το μήκος χρησιμοποιούμε πίνακες .
Ο πίνακας T των γραμμικών μετασχηματισμών $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ως προς τη βάση $\{e_1, e_2, e_3\}$, ορίζεται ως $T = (T_{ij})$, $1 \leq i,j \leq 3$ με
$$Te_j = \sum_{i=1}^{3} (T_{ij} e_i)$$

Ο ταυτοτικός τελεστής $I(x) = x$ έχει το πίνακα $I_3 = (\delta_{ij})$, με δ_{ij} να είναι το δέλτα του Kronecker .

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

Το γινόμενο δύο μετασχηματισμών TQ ορίζεται ως $TQx = T(Qx)$ που αντιστοιχεί στο γινόμενο πινάκων TQ, με $(TQ)_{ij} = \sum_k T_{ik}Q_{kj}$. Ακόμα ο αντίστροφος ενός αντιστρέψιμου τελεστή T αντιστοιχεί το αντίστροφο πίνακα T^{-1} του αντιστρέψιμου πίνακα T.

Από το $Ox = \sum_{ij} O_{ij}x_j e_i$ σε συνδυασμό με τη σχέση $< O_x, O_y >=< x, y >$ έχουμε:
$\sum_{i=1}^{3} O_{ij}O_{ik}$=$\delta_{jk}$ ή $O^tO = I_3$ με το πολλαπλασιασμό πινάκων .

Ο O^t είναι ο ανάστροφος του πίνακα O, $O_{ij}^t = O_{ji}$. Έτσι ότι $O^t = O^{-1}$ είναι απαραίτητη και ικανή συνθήκη για να διατηρεί το εσωτερικό γινόμενο ο τελεστής O.

Επιπρόσθετα $O(3) = \{3 \times 3\ πραγματικοί\ πίνακες\ O: O^tO = I_3\}$.
Οι $O(3)$ πίνακες είναι αντιστρέψιμοι. Τώρα $(O_1O_2)^t(O_1O_2) = O_2^tO_1^tO_1O_2 = O_2^tO_2$=$E_3$ αν $O_1O_2 \in E_3$, έτσι $O_1O_2 \in O(3)$.
Ακόμα $I_3 \in O(3)$ και $(O_1^{-1})^tO_1^{-1} = O_1O_1^{-1}$=$I_3$ έτσι $O^{-1} \in O(3)$.
Η $O(3)$ είναι η **πραγματική ορθογώνια ομάδα** στο τρισδιάστατο χώρο .

Για τη $O(3)$ μπορούμε να χρησιμοποιούμε τη μορφή του τελεστή, ή τη μορφή του πίνακα.
Κάθε αφηρημένη θεωρητική ιδιότητα της ομάδας που ισχύει για τη μια θεώρηση της $O(3)$ αυτόματα ισχύει και για την άλλη.

Λήμμα 2.1.1 : $det(O) = \pm 1$, αν $O \in O(3)$

<u>Απόδειξη</u>
Μιας και $O^tO = I(3)$, έπεται ότι $(det(O^tO))$=1. Αλλά $det(O^tO)$= $det(O^t)\ det(O)$= $det(O)^2$.

Ακόμα I_3 και $-I_3$ είναι στοιχεία της O(3) με $det(I_3)$=1 και $det(-I_3)$ =-1. Ο τελεστής -I με το πίνακα $-I_3$ ορίζεται ως $-I(x) = -x$ για όλα τα $x \in R_3$ και καλείται αντίστροφος τελεστής. Ακόμα $(-I)^2 = I$.

Ορισμός 2.1.2 : Μιας και $det(O_1\ O_2) = det(O_1\ ) \cdot\ det\ (O_2)$ έπεται ότι το σύνολο

$$SO(3) = \{O \in O(3) :\ det\ O = +1\ \}$$

σχηματίζει την υποομάδα του $O(3)$, που καλείται **ειδική ορθογώνια ομάδα (γνήσια ορθογώνια ομάδα) στον τρισδιάστατο χώρο** ή απλά **ομάδα περιστροφών**.

Θεώρημα 2.1.2 : Κάθε ορθογώνιος πίνακας $A \in O(3)$, $A \neq I_3$ με $det\ A = 1$, δηλαδή $A \in SO(3)$, ορίζει ένα ορθογώνιο μετασχηματισμό

$$f: R^3 \to R^3, \boldsymbol{r} \to f(\boldsymbol{r}) := A\boldsymbol{r}$$

στροφής κατά γωνία θ γύρω από τον άξονα ε : $\boldsymbol{r} = t\boldsymbol{u}$, $t \in R$, όπου

$$A\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u} \text{ και } cos\theta = \frac{trA-1}{2}$$

Θεώρημα 2.1.3: Κάθε ορθογώνιος πίνακας $A \in O(3)$ με $det\ A = -1$ ορίζει ένα ορθογώνιο μετασχηματισμό

$$g: R^3 \to R^3, \boldsymbol{r} \to g(\boldsymbol{r}) := A\boldsymbol{r},$$

όπου είναι η σύνθεση της **στροφής**, η οποία ορίζεται από τον πίνακα -A και της απεικόνισης της αντιστροφής

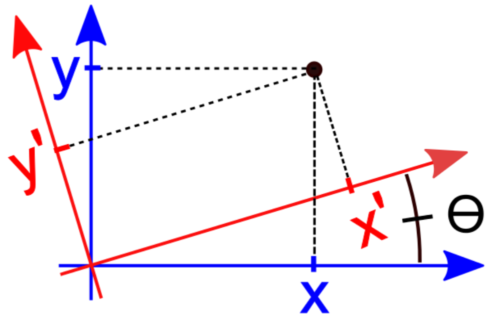
$$J: R^3 \to R^3, \boldsymbol{r} \to J(\boldsymbol{r}) := (-I_3)\boldsymbol{r} = -\boldsymbol{r}$$

δηλαδή είναι $g = J * R_u(\theta)$, όπου $A\boldsymbol{u} = \ -\boldsymbol{u}$ και $cos\theta = -\frac{trA-1}{2}$

Η απεικόνιση $O \rightarrow detO$ ορίζει έναν ομομορφισμό του $O(3)$ στην κυκλική ομάδα τάξης 2 με τα στοιχεία 1=e και -1. Ο πυρήνας αυτού του ομομορφισμού είναι η $SO(3)$, απ' όπου έπεται ότι η $SO(3)$ είναι κανονική υποομάδα της $O(3)$. Επιπλέον από το Θεώρημα 1.3.1 συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν ακριβώς δύο $SO(3)$ −σύμπλοκα στην $O(3)$: $SO(3)$ και $-I_3 \cdot SO(3)$.

Τα στοιχεία του πρώτου συμπλόκου είναι όλα **γνήσιοι** ορθογώνιοι (περιστροφικοί) πίνακες και τα στοιχειά του δεύτερου συμπλόκου είναι **μη γνήσιοι** (έχουν αρνητικές ορίζουσες). Έτσι, όλα τα μη γνήσια στοιχεία Ο' μπορούν να γραφούν μοναδικά στη μορφή Ο'=$-I_3O$, μια περιστροφή που ακολουθείται από μια αντιστροφή.

Στροφή σε δύο διαστάσεις είναι μια απεικόνιση από ένα xy σύστημα συντεταγμένων σε ένα x΄y΄ καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων στο οποίο η αρχή διατηρείται σταθερή και οι x΄y΄ άξονες προκύπτουν από αντί ωρολογιακή περιστροφή των αξόνων x,y κατά γωνία θ.



Κάθε μη τετριμμένη περιστροφή σε τρεις διαστάσεις σταθεροποιεί μοναδικά ένα γραμμικό υπόχωρο μιας διάστασης του $\mathbb{R}^3$, ο οποίος καλείται άξονας της περιστροφής. Έτσι τέτοιες περιστροφές δρουν σαν δισδιάστατη περιστροφή σε επίπεδο ορθογώνιο με αυτό τον άξονα. Μιας και κάθε δισδιάστατη περιστροφή μπορεί να αναπαρασταθεί από γωνία φ, έτσι και μια αυθαίρετη τρισδιάστατη περιστροφή μπορεί να συγκεκριμενοποιηθεί από έναν άξονα περιστροφής μαζί με μια τη γωνία της περιστροφής κατά αυτόν τον άξονα.

Θεώρημα 2.1.4 : Έστω $O \in SO(3)$. Τότε υπάρχει διάνυσμα $f_3 \in \mathbb{R}^3$, $\|f_3\|$=1, τέτοιο ώστε $Of_3 = f_3$. Αν $O \neq I$ ο άξονας που ορίζεται από το $\pm f_3$ είναι ο **άξονας της περιστροφής** .

<u>**Απόδειξη**</u>

Σύμφωνα με το θεώρημα ο τελεστής O έχει μοναδιαίο ιδιοδιάνυσμα f_3 με ιδιοτιμή λ=1. Αυτό το είναι ισοδύναμο με το ότι λ=1 είναι λύση της χαρακτηριστικής εξίσωσης $\det(O - \lambda I_3) = 0$.
Αλλά
$\det(I_3 - O) = \det(OO^t - O) = \det[O(O^t - I_3)] =$
$de\,t(O)\,de\,t(O^t - I_3) = de\,t[-(I_3 - O)^t] = (-1)^3 de\,t(I_3 - O) = -\det(I_3 - O)$

Έτσι $\det(O - I_3) = 0$ και λ=1 είναι η ιδιοτιμή του O.
Συνεπώς το επιθυμητό διάνυσμα f_3 υπάρχει αλλά δε είναι μοναδικό.
Τώρα διαλέγουμε μοναδιαία διανύσματα f_1, f_2 έτσι ώστε $\{f_1, f_2, f_3\}$ να είναι μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^3$, έτσι ώστε $< f_j, f_k >= \delta_{ij}$. Υπολογίζουμε το πίνακα O' του O σύμφωνα με αυτή τη βάση. Η σχέση $< Of_j\,, Of_k > =< f_j, f_k >= \delta_{ij}$ οδηγεί στο

$Of_1 = \alpha_1 f_1 + \beta_1 f_2 \qquad , \quad \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 = 0$

$$\begin{aligned} Of_2 &= \alpha_2 f_1 + \beta_2 f_2 \qquad , \quad \alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1 \qquad\qquad (2.1) \\ Of_3 &= f_3 \qquad\qquad\qquad , \quad \alpha_2^2 + \beta_2^2 = 1 \end{aligned}$$

Αυτές οι εξισώσεις έχουν μοναδική λύση ($det\ O' = 1$)
$\alpha_1 = \beta_2 = cos\theta\ ,\ \beta_1 = -\alpha_2 = sin\theta\ \ , \theta <= 2\pi$

Έτσι ο πίνακας του O στην f βάση είναι

$$O' = \begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta & 0 \\ sin\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (2.2)$$

Έπεται από τη αναλυτική γεωμετρία ότι το O μπορεί να αναπαρασταθεί σαν μια αντί ωρολογιακή περιστροφή κατά γωνία θ γύρω από τον άξονα της περιστροφής f_3.

Χρησιμοποιείται ο συμβολισμός $O = C_k(\theta)$, με $k = f_3$ να είναι ο άξονας της περιστροφής και θ να είναι η γωνία της περιστροφής .
Ακόμα

$$C_k(\varphi + \theta) = C_k(\theta)C_k(\varphi)$$

Και

$$C_k(a + 2\pi) = C_k(a).$$

Το **k** και το –**k** χρησιμοποιούνται για να καθορίσουν τον ίδιο άξονα περιστροφής έτσι :

$$C_k(\theta) = C_{-k}(2\pi - \theta)$$

Οι πίνακες O και O' είναι οι πίνακες του ίδιου μετασχηματισμού O σε διαφορετικά συστήματα. Αυτοί οι πίνακες πρέπει να είναι όμοιοι. Έτσι $O' = QOQ^{-1}$ με Q να είναι ο ορθογώνιος πίνακας που δίνει τις αλλαγές της βάσης. Άρα οι O και O' έχουν την ίδια ορίζουσα και το ίδιο ίχνος. Συγκεκριμένα :

$$Tr\ O\ = \sum_{i=1}^{3} O_{ij} = tr\ O'\ = 1\ + 2cos\theta$$

Οι μη κανονικές περιστροφές έχουν απλή γεωμετρική ερμηνεία. Μια **μη γνήσια περιστροφή** μπορεί να γραφεί μοναδικά στη μορφή :

$$O' = -I_3 C_k(\pi + \theta) = -I_3 C_k(\ \pi) C_k(\theta) = \sigma_k C_k\ (\theta),$$

όπου $\sigma_k = -I_3 C_k(\pi)$ είναι μια ανάκλαση του επιπέδου μέσω της αρχής του $\mathbb{R}^3$ κάθετη στο k.
Έτσι μια **μη γνήσια περιστροφή (περιστροφό-ανάκλαση)** είναι ίση με μια περιστροφή γύρω από ένα άξονα k που ακολουθείται από μια ανάκλαση σε επίπεδο κάθετο στο k. Γράφουμε

$$S_k(\theta) = \sigma_k C_{k(\theta)}$$

Οι συζυγείς κλάσεις στη $O(3)$ και στη $SO(3)$ έχουν απλή φυσική σημασία. Η σχέση

$$OC_k(\theta)O^{-1} = C_{Ok}(\theta),\ O \in SO(3) \quad (2.3)$$

δείχνει ότι όλες οι περιστροφές κατά γωνία θ γύρω από άξονα που βρίσκονται στη ίδια συζυγή κλάση της $SO(3)$. Έτσι οι συζυγείς κλάσεις μπορούν να κατηγοριοποιούν από τη γωνία θ, $0 \leq \theta \leq \pi$.

2.2 Η Ευκλείδεια ομάδα

Ορισμός 2.2.1 : Οι μετασχηματισμοί T του $\mathbb{R}^3$ στο $\mathbb{R}^3$ που διατηρούν αποστάσεις μεταξύ κάθε ζεύγους σημείων :

$$||T(x) - T(y)|| = ||x - y||, x, y \in \mathbb{R}^3 \quad (2.2.1)$$

καλούνται **ισομετρίες**.

Μπορεί κανείς να σκεφτεί το T σαν μετάθεση των στοιχείων του $\mathbb{R}^3$ που διατηρεί αποστάσεις.
Το σύνολο όλων των ισομετριών το συμβολίζουμε με $\boldsymbol{E(3)}$,που αποτελεί ομάδα ως προς την σύνθεση απεικονίσεων.

Ορισμός 2.2.2 : Στη Ευκλείδεια γεωμετρία δύο υποσύνολα S, S' του $\mathbb{R}^3$ λέγονται **ισοδύναμα** αν υπάρχει ένα $T \in E(3)$ τέτοιο ώστε $S' = T(S)$, δηλαδή αν τα σημεία του S μπορούν να συμπίπτουν με τα σημεία της S' μέσω ενός μετασχηματισμού που διατηρεί αποστάσεις.

Ορισμός 2.2.3 : Από τα στοιχεία του $E(3)$ είναι εύκολο να κατασκευάσουμε τη **μεταφορά** $T_\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}^3$:

$$T_a(x) = x + a$$

Μέσω της T_a κάθε σημείο του $\mathbb{R}^3$ απεικονίζεται στο στοιχείο $x + \alpha$.
Το σύνολο $\boldsymbol{T(3)}$ όλων των μεταφορών του τρισδιάστατου χώρου σχηματίζει την υποομάδα του $E(3)$.

Έστω T στοιχείο του $E(3)$ και υποθέτουμε ότι $T(\theta) = \alpha$ με $\theta = (0,0,0)$ να είναι η αρχή.
Τότε $T_{-\alpha}\big(T(\theta)\big) = T(\theta) + (-a) = a - a = \theta$.Έτσι $T_{-\alpha}T = O$ είναι στοιχείο του $E(3)$ που αφήνει την αρχή αναλλοίωτη . Άρα $T_{-\alpha} = T_\alpha^{-1}$.
Όλα τα $O \in O(3)$, είναι στοιχεία του $E(3)$ που αφήνουν την αρχή αναλλοίωτη. Στην πράξη η $O(3)$ είναι μια υποομάδα της Ε(3). Τα στοιχεία της $O(3)$ είναι οι μόνες ισομετρίες που σταθεροποιούν το θ.

Θεώρημα 2.2.1 :Στο Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^n$:

i. Η ισομετρία $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι 1-1.

ii. Η απεικόνιση μεταφορά $\tau_\alpha: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ x \to \tau_\alpha(x) := x + \alpha$ είναι ισομετρία.
iii. Το σύνολο $E(n)$ όλων των ισομετριών επί του $\mathbb{R}^n$ αποτελεί ομάδα ως προς τη σύνθεση των απεικονίσεων
iv. Κάθε ισομετρία f επί του $\mathbb{R}^n$ με $f(0) = 0$ είναι ορθογώνιος μετασχηματισμός.
v. Αν f είναι ισομετρία επί του $\mathbb{R}^n$, τότε υπάρχουν μοναδικές απεικονίσεις τ και φ, όπου τ είναι μεταφορά του $\mathbb{R}^n$ και φ είναι ορθογώνιος μετασχηματισμός του $\mathbb{R}^n$, έτσι ώστε $f = \tau * \varphi$.

<u>Απόδειξη</u>

i. Επειδή ισχύουν οι συνεπαγωγές :
$T(x) = T(y)$ τότε από τη σχέση (2.2.1) $||T(x) - T(y)|| = 0 \Rightarrow ||x - y|| = 0 \Rightarrow x = y$,
Η ισομετρία $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι 1-1.
ii. $||\tau_\alpha(x) - \tau_\alpha(y)|| = ||x + \alpha - (y + \alpha)|| = ||x - y||$.
iii. Αν f, g είναι ισομετρίες επί του $\mathbb{R}^n$, τότε ορίζεται και η σύνθεσή τους $f * g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ και είναι ισομετρία, αφού για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$ ισχύει ότι:
$|| (f * g)(x) - (f * g)(y) || = || f(g(x)) - f(g(y)) ||$
$= ||g(x) - g(y)||$ γιατί η f είναι ισομετρία
$= || x - y ||$ γιατί η g είναι ισομετρία

Το ουδέτερο στοιχείο του συνόλου $E(n)$ είναι η ταυτοτική απεικόνιση

$$I := id_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, x \to I(x) := x,$$

η οποία είναι προφανώς ισομετρία, αφού $|| I(x) - I(y)|| = || x - y||$
Ομοίως, επειδή η f είναι 1-1 και επί, ορίζεται η $f^{-1}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ και ισχύει ότι $f^{-1} * f = I$ (η ταυτοτική απεικόνιση του επί του $\mathbb{R}^n$).

Επιπλέον ισχύει ότι $|| f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(y))|| = || x - y|| = || f(x) - f(y) ||$
οπότε η f^{-1} είναι ισομετρία . Επιπλέον ισχύει $f^{-1}(f(x)) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$, οπότε η f^{-1} είναι και επί του $\mathbb{R}^n$.
Ακόμα η σύνθεση απεικονίσεων ικανοποιεί την προσεταιριστική ιδιότητα, άρα το σύνολο $E(n)$των ισομετριών επί του $\mathbb{R}^n$ αποτελεί ομάδα ως προς τη σύνθεση απεικονίσεων.

iv. Για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ ισχύει ότι
$||f(x)|| = d(f(x), 0) = d(f(x), f(0)) = d(x, 0) = ||x||$.

Ακόμα για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$
$d\big(f(x), f(y)\big) = d(x, y) \Leftrightarrow \big||f(x) - f(y)|\big| = \big||x - y|\big|$
$\big||f(x) - f(y)|\big|^2 = \big||x - y|\big|^2$
$< f(x) - f(y), f(x) - f(y) > = < x - y, x - y >$
$< f(x), f(x) > -2 < f(x), f(y) > + < f(y), f(y) > = < x, x > -2 < x, y > + < y, y >$
$\big||f(x)|\big|^2 - 2 < f(x), f(y) > + \big||f(y)|\big|^2 = \big||x|\big|^2 - 2 < x, y > + \big||y|\big|^2$
$< f(x), f(y) > = < x, y >$

Έστω $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$, για την οποία ισχύει ότι $< e_i, e_j > = \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$. Τότε και το σύνολο $\{f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)\}$ είναι ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$ αφού $< f(e_i), f\big(e_j\big) > = < e_i, e_j > = \delta_{ij}$.
Άρα αν $x = x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_ne_n \in \mathbb{R}^n$ τότε $x_i = < x, e_i >, i = 1, 2, \dots, n$.
Επίσης αν $f(x) = \sum_{i=1}^n \xi_i f(e_i)$, τότε $\xi_i = < f(x), f(e_i) > = < x, e_i > = x_i$, οπότε $f(x) = \sum_{i=1}^n x_i f(e_i)$.

Άρα αν $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, y=$\sum_{i=1}^{n} y_i e_i \in \mathbb{R}^n$, τότε $\lambda x + \mu y = \sum_{i=1}^{n}(\lambda x_i + \mu y_i)e_i$, και $f(\lambda x + \mu y) = \sum_{i=1}^{n}(\lambda x_i + \mu y_i)f(e_i)$=$\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) + \mu \sum_{i=1}^{n} y_i f(e_i)$=$\lambda f(x) + \mu f(y)$.
Επομένως η f είναι γραμμική και ορθογώνιος μετασχηματισμός .

v. Θεωρούμε τη μεταφορά τ: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \tau(x) = x + f(0)$, που είναι ισομετρία επί του $\mathbb{R}^n$, τότε και η απεικόνιση τ^{-1}: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, με τύπο $\tau^{-1}(x) = x - f(0)$ είναι ισομετρία επί του $\mathbb{R}^n$.
Επομένως και η σύνθεση $\tau^{-1} * f$ είναι ισομετρία επί του $\mathbb{R}^n$ και ισχύει $(\tau^{-1} * f)(0) = 0$, άρα λόγο του iv. η $\tau^{-1} * f$ είναι ορθογώνιος μετασχηματισμός, έστω $\varphi = \tau^{-1} * f$.
Άρα $f = \tau * \varphi$, όπου τ είναι μεταφορά και φ είναι ορθογώνιος μετασχηματισμός.

Για να δειχθεί η μοναδικότητα έστω ότι $f = \tau * \varphi$= $\tau' * \varphi'$ τότε

$$\tau * \varphi = \tau' * \varphi'$$
$$\varphi = \tau^{-1} * \tau' * \varphi'$$
$$\varphi(0) = (\tau^{-1} * \tau' * \varphi')(0)$$
$$\varphi(0) = (\tau^{-1} * \tau')(0) = 0$$

Γιατί $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$ λόγο της γραμμικότητας των φ και φ'.
Όμως η απεικόνιση $\tau^{-1} * \tau'$είναι μεταφορά με $(\tau^{-1} * \tau')(0) = 0$, άρα $\tau^{-1} * \tau' = I$ δηλάδη $\tau = \tau'$.
Από $\tau * \varphi$= $\tau' * \varphi'$ και $\tau = \tau'$ έπεται ότι $\tau * \varphi$= $\tau * \varphi'$ και

$$\tau^{-1} * (\tau * \varphi) = \tau^{-1} * (\tau * \varphi')$$
$$\varphi = \varphi'$$

Έτσι κάθε $T \in E(3)$ μπορεί να γραφεί μοναδικά στη μορφή

$$T = T_a * O = \{\alpha, O\} \quad O \in O(3).$$

Κάθε γινόμενο της παραπάνω μορφής ορίζει ένα στοιχείο του Ε(3). Σημειώνεται ότι $T_a = T_a * I = \{\alpha, I\}$ και $O = T_\theta * O = \{\theta, O\}$. Η δράση των στοιχείων του $E(3)$ στο $\mathbb{R}^3$ δίνεται από

$$(T_\alpha * O)(x) = T_a * O(x) = \{\alpha, O\}x = O(x) + \alpha \quad , \quad x \in \mathbb{R}_3$$

και ο κανόνας του γινομένου είναι

$$\{a_1, O_1\}\ \{a_2, O_2\}(\mathrm{x}) =$$
$$\{a_1 O_1\}\,\{\{a_2, O_2\}(x)\} =$$
$$\{a_1 O_1\}\{T_{a_2} * O_2(x)\} =$$
$$\{a_1\ O_1\}(O_2(x) + \alpha_2) =$$
$$Ta_1 * O_1(O_2(x) + \alpha_2) =$$
$$a_1 + O_1(O_2(x) + \alpha_2) =$$
$$a_1 + O_1\, O_2(x) + O_1\, \alpha_2$$

$$\{a_1, O_1\}\ \{a_2, O_2\} = \{a_1 + O_1 a_2, O_1 O_2\}$$

Έστω ότι $T \in E(3)$ αφήνει ένα σημείο α αναλλοίωτο, $T(\alpha) = \alpha$.

Μετά $T_a^{-1} T T_a = O$ αφήνει το θ αναλλοίωτο

$$T_a^{-1} T T_a(\theta) = T_a^{-1} T\big(T_a(\theta)\big) = T_a^{-1} T(\alpha) = T_a^{-1}(\alpha) = \theta$$

έτσι

$$T = T_a O T_a^{-1}, \quad O \in O(3).$$

Αντιστρόφως, κάθε ομάδα στοιχείων της μορφής $T_a O T_a^{-1}$ αφήνει το a αναλλοίωτο. Τα στοιχεία $T = T_a^{-1} O T_a$ είναι περιστροφές ή περιστροφές-ανακλάσεις γύρω από τους άξονες μέσω του a. Όλα αυτά τα στοιχεία σχηματίζουν μια υποομάδα του $O_a(3)$, την **ορθογώνια ομάδα στο α**. Άρα έχουμε :

$$O_a(3) = T_a O(3) T_a^{-1}.$$

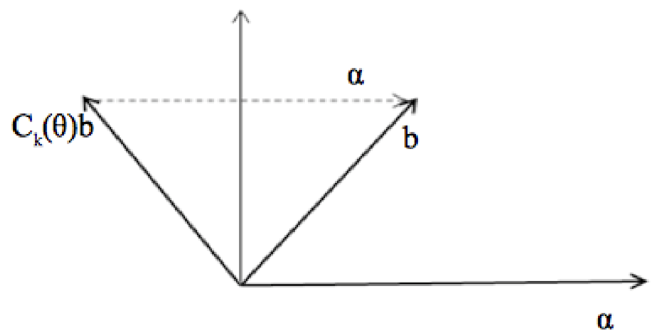
Η **υποομάδα των περιστροφών ή περιστροφών-ανακλάσεων στο α** είναι συζυγής, και ισομετρική στο $O(3)$.

Μια μικρή επέκταση αυτού του επιχειρήματος δείχνει ότι όλες οι περιστροφές γύρω από ένα σταθερό σημείο θ, $0 \leq \theta \leq \pi$, γύρω από οποιαδήποτε άξονα στο $\mathbb{R}^3$, σχηματίζουν μια συζυγή κλάση στο $E(3)$. Το ίδιο ισχύει για όλες τις περιστροφές-ανακλάσεις γύρω από σταθερή γωνία θ'.

Για μια γεωμετρική αναπαράσταση των στοιχείων του $E(3)$, πρώτα σκεφτόμαστε τα στοιχεία $\{\alpha, C_k(\theta)\} = T_\alpha + C_k(\theta)$ με $\theta \neq 0$ και $< \alpha, k >= 0$.Το α είναι κάθετο στον άξονα της περιστροφής. Αυτός ο μετασχηματισμός έχει ένα σταθερό σημείο b.
Πράγματι η σχέση

$$\begin{gathered} T_b^{-1}\{\alpha, O\} T_b(x) = \\ T_b^{-1} * (T_\alpha * O) * (b + x) = \\ T_b^{-1} * (a + O) * (b + x) = \\ T_b^{-1} * \big(a + O(b + x)\big) = \\ T_b^{-1} * (a + Ob + Ox) = \\ -b + a + Ob + Ox \\ \{\alpha - b + Ob, O\} \end{gathered}$$

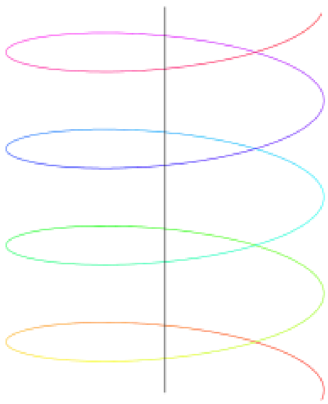
και η παρατήρηση $T = T_a O T_a^{-1}$ δείχνει ότι $\{a, C_k(\theta)\}$ αφήνει το b αναλλοίωτο αν $b - C_k(\theta) b = a$.
Κοιτώντας στο επίπεδο που περνά από το a και είναι κάθετο στο k, προκύπτει το παρακάτω σχήμα.



Υπάρχουν άπειρες λύσεις b που σχηματίζουν έναν άξονα παράλληλο στο k.
Έτσι $\{a, C_k(\theta)\}$ αντιστοιχεί σε μια περιστροφή γωνίας θ γύρω από τον αναλλοίωτο άξονα.

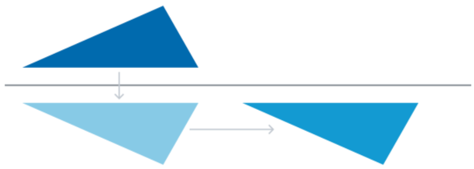
Αν a είναι αυθαίρετο διάνυσμα, μπορούμε να γράψουμε το $a = a_1 + a_2$ μοναδικά, όπου a_1 είναι παράλληλο στο k και a_2 είναι κάθετο στο k .

Τότε $\{a, C_k(\theta)\}$=T_{a_1} $\{a_2, C_k(\theta)\}$



Ορισμός 2.2.4 :Ο παραπάνω μετασχηματισμός καλείται **ελικοειδής (screw) μετατόπιση** και είναι μια περιστροφή γύρω από τον **ελικοειδή άξονα** κατά μια γωνία θ**,** που ακολουθείται από μια μεταφορά κατά μήκος του άξονα κατά μια απόσταση $\|a_1\|$. (Μπορούμε να σκεφτούμε μια περιστροφή και μια μεταφορά που πραγματοποιούνται ταυτοχρόνως, με αποτέλεσμα να προκύπτει μια δεξιόστροφη κίνηση βίδας.

Ορισμός 2.2.5 :Η ισομετρία $\{\alpha\ , S_k(0)\} = \{\alpha\ , \sigma_\kappa\}$
είναι το γινόμενο μιας ανάκλασης σε επίπεδο κάθετο στο k, το **επίπεδο διολίσθησης (glide)** και μιας μεταφοράς σε αυτό το επίπεδο. Ο μετασχηματισμός αυτός καλείται **glide ανάκλαση ή ανάκλαση διολίσθησης**.

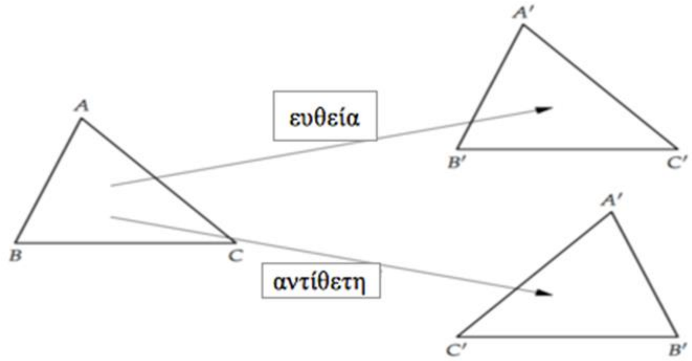


Τελικά η ισομετρία {a ,$S_k(\theta)$ } , $\theta \neq 2\pi n$ αντιπροσωπεύει μια περιστροφή -αντιστροφή γύρω από ένα σημείο.

Η ευκλείδεια ομάδα αποτελείται από μεταφορές, περιστροφές, περιστροφές-αντιστροφές, ελικοειδείς μετατοπίσεις και ανακλάσεις διολίσθησης.

Η απεικόνιση $\{a\ , O\} \rightarrow\ det\ O$ ορίζει ένα ομομορφισμό του *E(3)* στη κυκλική ομάδα τάξης 2 .

Η γνήσια Ευκλείδεια ομάδα $E^+(3)$ στο τρισδιάστατο χώρο ή η ομάδα ανελαστικής κίνησης είναι μια κανονική υποομάδα του E(3) που αποτελείται από όλες τις μεταφορές, περιστροφές και ελικοειδής μετατοπίσεις. Τα στοιχεία της $E^+(3)$ είναι επίσης ευθείες ισομετρίες ή ευθείες συμμετρίες .



Ευθείες και αντίθετες ισομετρίες

Σκεφτόμαστε ένα τρίγωνο ABC του επιπέδου με κορυφές αντίστοιχα τα A,B,C. Αν εφαρμόσουμε κάποια ισομετρία στο τρίγωνο οι κορυφές θα εμφανίζονται ωρολογιακά ή αντί ωρολογιακά. Αν ο προσανατολισμός παραμένει ίδιος η ισομετρία είναι **ευθεία**, άλλα αν ο προσανατολισμός αλλάζει, τότε η ισομετρία είναι **αντίθετη** .

Είναι εύκολο να κατηγοριοποιήσουμε τις ισομετρίες σε ευθείες και αντίθετες :

- Μια μεταφορά είναι ευθεία ισομετρία
- Μια περιστροφή είναι ευθεία ισομετρία
- Μια ανάκλαση είναι αντίθετη ισομετρία
- Μια ανάκλαση ολίσθησης είναι αντίθετη ισομετρία

Σταθερό σημείο ισομετρίας

Ένα σταθερό σημείο μιας ισομετρίας f είναι ένα σημείο P τέτοιο ώστε $f(P) = P$.

Είναι εύκολο να διακρίνουμε ποιες ισομετρίες έχουν σταθερό σημείο και ποιες όχι :

- Μια μεταφορά που δεν είναι ταυτοτική δεν έχει σταθερό σημείο.
- Μια περιστροφή έχει ένα σταθερό σημείο, το οποίο λέγεται κέντρο της περιστροφής .
- Μια ανάκλαση έχει άπειρα σταθερά σημεία τα οποία ονομάζουμε σημεία στο καθρεπτικό άξονα.
- Μια ανάκλαση διολίσθησης που δεν είναι ανάκλαση δεν έχει σταθερό σημείο.

2.3 Συμμετρία και διακριτές υποομάδες της E(3)

Ορισμός 2.3.1 :Έστω S μια υποομάδα του χώρου $\mathbb{R}^3$ και ορίζουμε

$$G = \{T \in E(3) : T(S) = S\}$$

τη ομάδα όλων των στοιχείων που απεικονίζουν το S στο εαυτό του. Ονομάζεται η G η **πλήρης ομάδα συμμετρίας** του S. Κάθε υποομάδα της G καλείται **ομάδα συμμετρίας** της S.

Για να βρούμε όλες τις δυνατές ομάδες συμμετρίας είναι απαραίτητο να κατηγοριοποιηθούν όλες οι υποομάδες της $E(3)$. Κάτι το πολύ δύσκολο. Ευτυχώς μόνο δύο τύποι ομάδων συμμετρίας εμφανίζονται συχνά στις φυσικές επιστήμες: οι διακριτές ομάδας και οι ομάδες Lie. Αυτές οι ομάδες χρησιμοποιούνται σε εφαρμογές, αλλά υπάρχουν και καλοί γεωμετρικοί και φυσικοί λόγοι για να ασχοληθούμε με αυτές.

Ορισμός 2.3.2: Μια **διακριτή ομάδα** G είναι ένα υποσύνολο της ομάδας μετασχηματισμών $E(3)$ τέτοια ώστε για όλα τα $x \in \mathbb{R}_3$ και κάθε σφαίρα $B_r = \{y \in \mathbb{R}^3, ||y|| <= r\}$ να υπάρχει μόνο ένας πεπερασμένος αριθμός σημείων σε κάθε G-τροχιά του x που περιέχεται στη B_r.

Αν G είναι μια διακριτή ομάδα τότε τα σημεία $Gx = \{y = gx: g \in G\}$ διαμοιράζονται στον $\mathbb{R}^3$ έτσι ώστε μόνο ένας πεπερασμένος αριθμός τους να περιέχεται σε κάθε φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$. Προφανώς κάθε πεπερασμένη υποομάδα του $E(3)$ είναι διακριτή, μιας και κάθε G-τροχιά μιας πεπερασμένης ομάδας περιέχει μόνο έναν πεπερασμένο αριθμό στοιχείων.

Η ομάδα των μεταφορών $\{T_a\}$ όπου

$$a = \alpha_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 (3.1)$$

και $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ είναι ακέραιοι είναι μια μη πεπερασμένη διακριτή ομάδα .

Μια άλλη μη πεπερασμένη ομάδα μη διακριτή ομάδα είναι αυτή που παράγεται από μια περιστροφή κατά γωνία $2\pi/\alpha$ γύρω από έναν άξονα, όπου α δεν είναι ρητός.

Διακριτές **ομάδες πεπερασμένης επέκτασης** είναι αυτές που μπορούν να περιληφθούν πλήρως μέσα σε κάποια μεγάλη σφαίρα B_r .

Σε αυτές τις ομάδας δε μπορούν να συμπεριληφθούν οι μη ταυτοτικές μεταφορές και οι ανακλάσεις διολίσθησης, γιατί αυτοί οι μετασχηματισμοί επαναλαμβάνονται επ' άπειρο, οπότε μπορούν να απεικονίσουν σημεία έξω από τη σφαίρα B_r. Έτσι οι μόνοι επιτρεπτοί μετασχηματισμοί συμμετρίας είναι οι περιστροφές και οι περιστροφές-αντιστροφές.

Θεώρημα 2.3.1 : Έστω S να είναι ένα μη κενό σύνολο πεπερασμένης επέκτασης και έστω G να είναι μια διακριτή ομάδα συμμετρίας του S. Τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο $y \in \mathbb{R}^3$ το οποίο παραμένει σταθερό από όλα τα $g \in G$.

<u>Απόδειξη</u>

Μιας και το S είναι φραγμένο μπορεί να περιέχει μέσα του μια σφαίρα B_r. Έστω $x \in S$ και θεωρούμε τη G-τροχιά που περιέχει το x. Όλα τα σημεία στην G- τροχιά πρέπει να είναι μέσα στη S και κατά συνέπεια στην B_r. Μιας και η G είναι διακριτή ομάδα έπεται ότι η τροχιά της πεπερασμένη :

$$Gx = \{x_1 = x, x_2, \ldots, x_n\}$$

Έστω

$$y = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \quad (3.2)$$

είναι το κέντρο βάρους της Gx. Επειδή η δράση των στοιχείων της $E(3)$ στον $\mathbb{R}^3$ δίνεται από την

$$\{\alpha, O\}x = Ox + \alpha \qquad x \in R_3$$

έπεται ότι

$$gy = \frac{\sum_{i=1}^{n} gx_i}{n}, \quad g \in G \quad (3.3)$$

Το κέντρο βάρους του πεπερασμένου συνόλου $\{x_i\}$ απεικονίζεται στο κέντρο βάρους του $\{gx_i\}$ για κάθε $g \in G$. Από την άλλη μεριά, ο μετασχηματισμός g απλώς μεταθέτει τα στοιχεία της G-τροχιάς μέσω του x. Έτσι οι δεξιές μεριές των σχέσεων (3.2) και (3.3) είναι ίσες εκτός της τάξης τους και τα αθροίσματά τους είναι ίσα. Καταλήγουμε ότι $\boldsymbol{gy = y}$ έτσι το κέντρο βάρους y είναι ένα κοινό σταθερό σημείο για όλες τις συμμετρίες του S.

Πόρισμα 2.3.1 :Τα στοιχεία μιας πεπερασμένης υποομάδας της $E(3)$ έχουν ένα κοινό σταθερό σημείο.

Θεώρημα 2.3.1 : Έστω G να είναι μια διακριτή υποομάδα ομάδα του $E(3)$ της οποίας τα στοιχεία έχουν ένα κοινό σταθερό σημείο y. Τότε η G είναι πεπερασμένη υποομάδα της ορθογώνιας ομάδας $O(3)$ των περιστροφών και των περιστροφο-αναστροφών γύρω από το y.

<u>Απόδειξη</u>

Έστω $x_1, .. x_4$ να είναι τέσσερα μη συνεπίπεδα σημεία που βρίσκονται σε μια σφαίρα b_r με κέντρο y.
Αφού και $\|gx_i - y\|$=$\|gx_i - gy\|$=$\|x_i - y\|$, οι τροχιές $\{Gx_i\}$ είναι όλες μέσα στην ίδια σφαίρα. Μιας και η G είναι διακριτή υπάρχει μόνο ένας πεπερασμένος αριθμός στοιχείων σε κάθε G- τροχιά. Τώρα ο μετασχηματισμος $g \in G$ είναι μοναδικά καθορισμένος από τα τέσσερα μη συνεπίπεδα σημεία $\{gxi\}$.
Αν $gx_i = g'xi,\ 1 \le i \le 4$, τότε τα $\{x_i\}$ είναι αναλλοίωτα κάτω από $g^{-1}g'$, έτσι $g^{-1}g' = I$, ο ταυτοτικός τελεστής .Ένα στοιχειό της $E(3)$ καθορίζεται μοναδικά από μια δράση στο $\{x_i\}$. Έτσι $g = g'$ και έτσι η G είναι πεπερασμένη ομάδα.

Η διακριτή ομάδα συμμετρίας του σώματος S πεπερασμένης επέκτασης είναι πάντα μια πεπερασμένη ομάδα G περιστροφών και περιστροφό – ανακλάσεων γύρω από κάποιο σταθερό σημείο y.
Αν θεωρήσουμε τη $O(3)$ σαν την ορθογώνια ομάδα με σταθερό σημείο το θ, είναι προφανές ότι η G είναι συζυγής στη πεπερασμένη υποομάδα $T_y^{-1}\ G\ T_y = K$ του $O(3)$ και K είναι η ομάδα συμμετρίας του $T_y^{-1}S$. Όμοια αν $T \in\ E(3)$ με $T(\theta) = y$ τότε TKT^{-1} είναι μια πεπερασμένη ομάδα περιστροφών και περιστροφό-ανακλάσεων με σταθερό σημείο y.

Από την κατηγοριοποίηση των ομάδων συμμετρίας θα προκύψουν οι συζυγείς υποομάδες της $E(3)$. Οι συζυγείς ομάδες συμμετρίας είναι φυσικά μη διακριτές. Στη αφηρημένη άλγεβρα μπορεί κανείς να διαπιστώσει δύο ομάδες είναι ισομορφικές, αν έχουν τον ίδιο πίνακα πολλαπλασιασμού. Αυτό δεν ισχύει για την κατηγοριοποίηση σε συζυγείς υποομάδες του $E(3)$. Οι συζυγείς υποομάδες είναι ισομορφικές, αλλά ισομορφικές υποομάδες της $E(3)$ δεν είναι απαραίτητα συζυγείς .

Για παράδειγμα η κυκλική ομάδα τάξης δύο που παράγεται από μια περιστροφή 180 μοιρών γύρω από έναν άξονα και μια ανάκλαση σε ένα επίπεδο αντίστοιχα είναι ισομορφικές αλλά όχι συζυγείς.

Ορισμός 2.3.3 : Οι υποομάδες της ομάδας μετασχηματισμών $O(3)$ καλούνται **ομάδες σημείων** μιας και έχουν πάντα ένα σταθερό σημείο .
Αυτές οι ομάδες είναι δύο ειδών: Οι ομάδες σημείων του **πρώτου είδους** που αποτελούνται μόνο από περιστροφές και οι ομάδες του **δεύτερου είδους** που αποτελούνται και από περίστροφο-ανακλάσεις .

Έστω G μια πεπερασμένη ομάδα σημείων και θεωρούμε το ομομορφισμό $g \to detg,\ g \in G$ που απεικονίζε τη G στην κυκλική ομάδα τάξης 2. Το g απεικονίζεται στο +1 αν είναι μια περιστροφή και στο -1 αν είναι περίστροφό-αναστροφή .

Αν ο πυρήνας αυτού του ομομορφισμού είναι η G, τότε η G είναι ομάδα του πρώτου είδους.

Αν ο πυρήνας είναι η K μια κανονική υποομάδα της G τότε από το θεώρημα 1.2.3 και 1.2.4 η K είναι κανονική υποομάδα με τα μισά στοιχεία της G.
Επιπρόσθετα η αποσύνθεση της G με σύμπλοκα είναι $\{K\ , g_0K\ =\ Kg_0\}$. Τα στοιχεία της K είναι περιστροφές και τα στοιχεία της g_0K συμπεριλαμβανομένου και του g_0 είναι περίστροφό-αναστροφές .

Υπάρχουν δύο πιθανότητες ή η G να περιέχει τη αντιστροφή $-I$ ή να μη την περιέχει. Αν $-I \in G$ τότε $-I \in g_0K$ έτσι η G περιέχει τη αντιστροφή $-I$ ή δε τη περιέχει .
Αν$-\ I \in G$ τότε$-I \in g_0K$ έτσι $-IK = g_0K$ και έχουμε $g_0 = -I$.

Αντίστροφα αν K είναι μια πεπερασμένη ομάδα περιστροφής τότε το σύνολο $\{K, -\ IK\}$ σχηματίζει μια ομάδα σημείων του δεύτερου είδους .

Αν $-I \notin G$ τότε η περιγραφή της G γίνεται πιο πολύπλοκη .
Έστω :

$$K^+ = \{-Ig\colon g \in G, g \notin K\}.$$

Το παραπάνω σύνολο αποτελείται από κανονικές περιστροφές .

Προφανώς:
1. Η τομή K^+ και K είναι το κενό ,αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι το $-I \notin G$.
2. Οι K^+ και K περιέχουν το ίδιο αριθμό στοιχείων.

Τώρα έστω $G^+ = K \cup K^+$.Θα δείξουμε ότι G^+ είναι μια ομάδα σημείων του πρώτου είδους ισομορφική με τη G.

Ο ισομορφισμός είναι το ταυτοτικό στο K και απεικονίζει το $g \notin K$ στο $-Ig$ στο K^+. Αυτό απεικονίζει ένα ισομορφισμό γιατί το$-I$ αντιμεταθέτεται με όλα τα στοιχεία ομάδων .

Πράγματι τα στοιχεία του G^+ μπορούν να γραφτούν στην μορφή $(-I)^{\varepsilon}\, g$ για $g \in G$,όπου $\varepsilon = 0$ αν $g \in K$ και $\varepsilon = 1$ αν $g \notin K$. Τότε :

$$((-I)^{\varepsilon_1} g_1)((-I)^{\varepsilon_2} g_2) = (-I)^{\varepsilon_1+\varepsilon_2} g_1 g_2$$

Όπου $(-I)^{\varepsilon_1+\varepsilon_2} = I$ αν $g_1 g_2 \in K$, αλλιώς είναι ίσο με το $-I$, το οποίο αποδεικνύει ότι η απεικόνιση είναι ομομορφισμός .

Θεώρημα 2.3.1 :Έστω G να είναι μια πεπερασμένη υποομάδα του $O(3)$ και έστω $K = G \cap SO(3)$ η υποομάδα των περιστροφών στην G. Υπάρχουν ακριβώς τρεις πιθανότητες :

1. $G = K$
2. $G = K \cup (-IK)$
3. $G \neq K, -I \notin G$

Στη τελευταία περίπτωση G είναι ισομορφική με τη ομάδα των περιστροφών $G^+ = K \cup K^+$

Έτσι οι πεπερασμένες περιστροφικές ομάδες G με δύο τροχιές που έχουν δύο πόλους, κάθε πόλος σταθεροποιείται από όλα τα στοιχεία της

2.4 Ομάδες σημείων του πρώτου είδους

Έστω G μια πεπερασμένη υποομάδα της $SO(3)$ με τάξη $n(G) \geq 2$. Τότε η G δρα σαν ομάδα μετασχηματισμού στον Ευκλείδειο χώρο του οποίου τα στοιχεία έχουν την αρχή θ σαν κοινό σταθερό σημείο .
Έστω B_r μια σφαίρα στον $\mathbb{R}^3$ με κέντρο την αρχή θ και ακτίνα $r > 0$. Τα στοιχεία της G προφανώς απεικονίζουν την επιφάνεια S_r της σφαίρας στον εαυτό της.

Ορισμός 2.4.1: Ένα στοιχείο x στην S_r λέγεται ότι είναι **πόλος,** αν $gx = x$, για κάποιο $g \in G$ (όχι το ουδέτερο στοιχείο) .

Ο πόλος είναι ένα σημείο τομής της S_r και του άξονα της μη τετριμμένης περιστροφής στη G. Προφανώς κάθε σημείο στη G εκτός του ουδέτερου σχετίζεται με δύο πόλους. Η ομάδα μετασχηματισμών της G απεικονίζει πόλους σε πόλους .

Πράγματι, αν x είναι ένας πόλος που σχετίζεται με το g_1 τότε g_2x είναι πόλος που σχετίζεται με το $g_2 g_1 g_2^{-1}$. Έπεται ότι το σύνολο των πόλων στη S_r διαμερίζεται σε G-τροχιές .

Σύμφωνα με το θεώρημα 1.4.2 ο αριθμός των πόλων σε τροχιά που περιέχει το x είναι $p = \frac{n(G)}{n(G^x)}$, όπου G^x είναι η ισότροπη υποομάδα του G που αντιστοιχεί στο x. Η G^x είναι υποομάδα όλων των περιστροφών με πόλο x.

Έτσι στις πεπερασμένες ομάδες περιστροφών G με δύο τροχιές που σχετίζονται με δύο πόλους, κάθε πόλος σταθεροποιείται από όλα τα στοιχεία της G. Υπάρχει μόνο ένας άξονας της περιστροφής .

Η κυκλική ομάδα C_n τάξης n $(n = 2,3,..)$ που παράγεται από μια περιστροφή κατά γωνία $2\pi/n$ γύρω από ένα σταθερό άξονα ικανοποιεί τις παραπάνω απαιτήσεις. Αυτές οι ομάδες είναι οι μόνες ομάδες σημείων του πρώτου είδους των οποίων οι πόλοι μπορούν να διαχωριστούν σε δύο τροχιές.

Λήμμα 2.4.1: Έστω G μια ομάδα τάξης $n >= 2$ που αποτελείται από περιστροφές γύρω από έναν σταθερό άξονα. Τότε $G = C_n$.

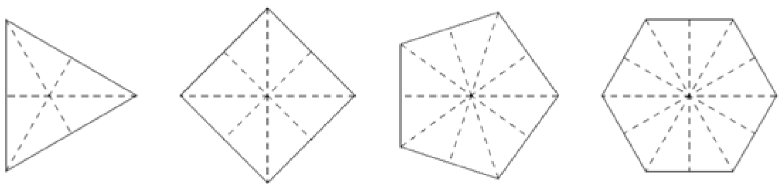
<u>Απόδειξη</u>

Τα n στοιχεία $e, g_{1,\dots}, g_{n-1}$ της G αντιστοιχούν σε περιστροφές κατά γωνίες $0, \theta_1, \dots \theta_{n-1}$ γύρω από σταθερό άξονα. Και το 0 αντιστοιχεί στο ταυτοτικό στοιχείο. Υποθέτουμε ότι $0 < \theta_i < \pi$, $0 \leq i \leq n-1$, αν οι γωνίες περιστροφής είναι εκφρασμένες σε rad, και αλλάζουμε την αρίθμηση των στοιχείων του G ώστε θ_1 να είναι η μικρότερη θετική γωνία περιστροφής. Χρησιμοποιώντας τον ευκλείδειο αλγόριθμο βλέπουμε ότι για κάθε θ_i, $2 \leq i \leq n-1$, υπάρχει ακέραιος m_i τέτοιος ώστε

$$\theta_i = m_i\theta_1 + \varphi_i \text{ , } 0 \leq \varphi_i < \theta_1$$

Αλλά $g_i g_1^{-m_i} \in G$, έτσι φ_1 είναι γωνία περιστροφής κάποιου στοιχείου της G. Αφού και θ_1 είναι η μικρότερη θετική γωνία περιστροφής, $\varphi_i = 0$. Έτσι η G είναι μια κυκλική ομάδα που παράγεται από το g_1. Μιας και G έχει τάξη n έπεται ότι $\theta_1 = 2\pi/n$.

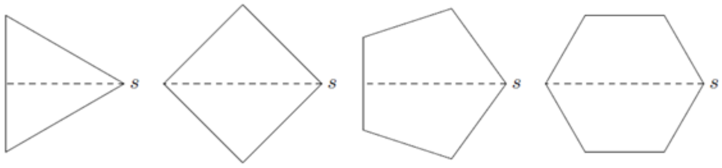
Για $n \geq 3$ η διεδρική ομάδα D_n ορίζεται ως μια κίνηση στο επίπεδο που αφήνει ένα κανονικό n-γωνο αναλλοίωτο, με πράξη ομάδας τη σύνθεση.
Ακολουθούν παραδείγματα των ομάδων D_3, D_4, D_5 και D_6. Οι διακεκομμένες γραμμές μας δείχνουν τις γραμμές των ανακλάσεων των πολυγώνων.



Πέρα όμως από τις ανακλάσεις, και οι περιστροφές κατά πολλαπλάσια των 2π/n rad γύρω από το κέντρο, επαναφέρουν το σχήμα στον εαυτό του.
Γενικά, αν έχουμε ένα κανονικό πολύγωνο με n κορυφές θα έχει n περιστροφές και n ανακλάσεις .

Αν το πολύγωνο έχει περιττό αριθμό κορυφών, τότε οι άξονες συμμετρίας του θα διέρχονται από μια κορυφή και το μέσο της απέναντι πλευράς.

Στη D_n συνηθίζεται να γράφουμε με r τη αντι ωρολογιακή περιστροφή κατά 2π/n rad, με s συμβολίζουμε την ανάκλαση κατά μια γραμμή που περνά από μια κορυφή. Κάθε ανάκλαση έχει τάξη 2, έτσι $s^2 = 1$ και $s^{-1} = s$.



Θεώρημα 2.4.1 : Οι n ανακλάσεις στην D_n είναι $s, rs, r^2s, \dots, r^{n-1}s$

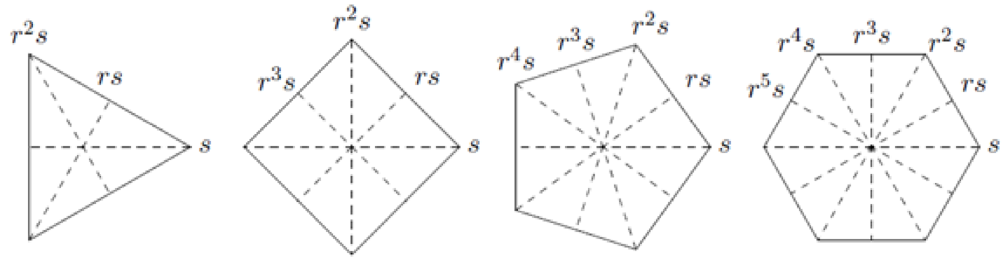
<u>Απόδειξη</u>

Οι $s, rs, r^2 s, \dots, r^{n-1}s$ είναι όλες διαφορετικές μιας και οι περιστροφές $1, r, r^2, \dots, r^{n-1}$ είναι διαφορετικές και πολλαπλασιάζονται με το ίδιο στοιχείο s. Η $r^k s$ δεν είναι περιστροφή γιατί αν $r^k s = r^l$ τότε $s = r^{l-k}$, αλλά η s δεν είναι περιστροφή.
Έτσι η D_n αποτελείται από n περιστροφές και n ανακλάσεις, και καμία $r^k s$ δε είναι περιστροφή, έτσι είναι όλες ανακλάσεις.

Το γινόμενο μιας περιστροφής και μιας ανάκλασης είναι ανάκλαση.

Ακολουθεί μια γεωμετρική αναπαράσταση των διαδοχικών ανακλάσεων $s, rs, r^2 s, \dots, r^{n-1}s$.

Έχουν σχεδιαστεί οι γραμμές των ανακλάσεων των κανονικών n-γώνων και κινούμενοι αντί-ωρολογιακά γύρω από το πολύγωνο ξεκινώντας από μια κορυφή που σταθεροποιείται από την s συναντούμε τις γραμμές που σταθεροποιούνται από τις $rs, r^2 s, \dots, r^{n-1}s$.

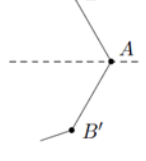


Θεώρημα 2.4.1 : Τα r και s δεν αντιμετατίθενται. Η σχέση μέσω της οποίας αντιμετατίθενται είναι η ακόλουθη:

$$s\,rs^{-1} = r^{-1}$$

<u>Απόδειξη</u>

Έστω s μια ανάκλαση που σταθεροποιεί μια κορυφή του πολυγώνου, έστω A να είναι αυτή η κορυφή και B να είναι η κορυφή που εμφανίζεται αντι-ωρολογιακά του A και B΄ η κορυφή που εμφανίζεται ωρολογιακά του A

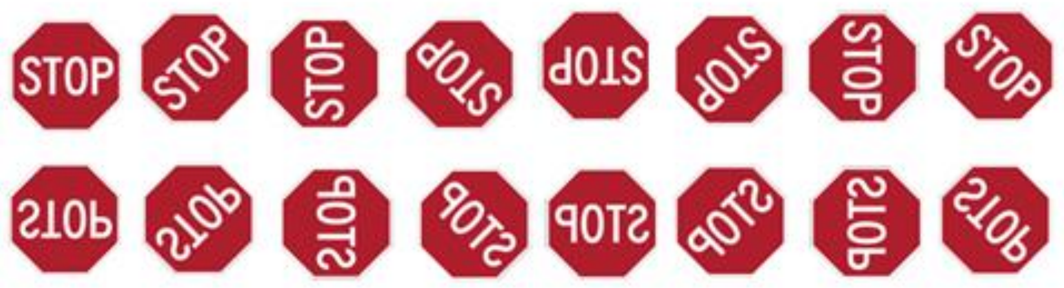


Έτσι $r(A) = B$, $r^{-1}(A) = B'$, $s(A) = A$ και $s(B) = B'$.
Οι τιμές των $s\,rs^{-1}$ και r^{-1} στο A είναι

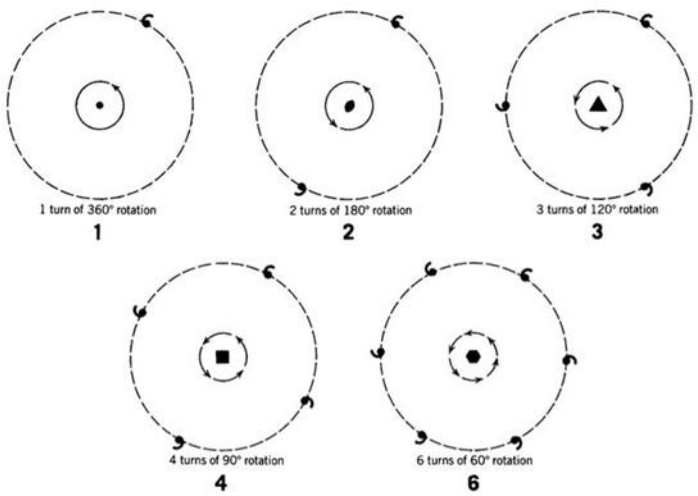
$s\,rs^{-1}(A) = (srs)(A) = sr\big(s(A)\big) = sr(A) = s(B) = B'$ και $r^{-1}(A) = B'$.
Αντίστοιχα οι τιμές για το B είναι :
$(srs^{-1})(B) = (srs)(B) = sr\big(s(B)\big) = sr(B') = s(A) =$A και $r^{-1}(B) = A$.

Μιας και τα $s\,rs^{-1}$ και r^{-1} είναι ίσα στα A και B, είναι ίσα και οπουδήποτε αλλού στο πολύγωνο, έτσι $s\,rs^{-1} = r^{-1}$ στην D_n .

Ακολουθεί ένα παράδειγμα της διεδρικής ομάδας τάξης 8 που συναντούμε στη καθημερινή μας ζωή.



Ορισμός 2.4.3 : Υπάρχει άξονας περιστροφής που αντιστοιχεί σε υποομάδα περιστροφών τάξης m. Από το λήμμα 2.4.1 έπεται ότι αυτή η υποομάδα C_m παράγεται από την περιστροφή κατά γωνία 2π/m γύρω από άξονα L. Λέμε ότι ο L είναι ένας **m -πολλαπλότητας** άξονας .



Οι πόλοι του L βρίσκονται στη ίδια τροχιά. Έχουμε m στοιχεία της ομάδας σημείων. Υπάρχουν m διπλής πολλαπλότητας άξονες περιστροφών $l_1, \dots, l_m$ των οποίων οι πόλοι διαιρούνται σε δύο τροχιές m πόλων ο καθένας.
Επειδή και οι δύο πόλοι του L σχηματίζουν μια μόνη τροχιά και κάθε μια από τις περιστροφές κατά π rad γύρω από έναν διπλής πολλαπλότητας άξονα l_i πρέπει να εναλλάσσει τους πόλους .

Έτσι οι διπλής πολλαπλότητας άξονες είναι κάθετοι στο L. Μια περιστροφή κατά 2π/m γύρω από το L απεικονίζει το l_i στο εαυτό της. Σε μια περιστροφή γύρω από διπλής πολλαπλότητας άξονες η γωνία μεταξύ δύο διαδοχικών l_i σε επίπεδο κάθετο στο L είναι σταθερή. Έτσι η γωνία μεταξύ δύο διαδοχικών l_i πρέπει να είναι π/m .

Έστω C μια περιστροφή κατά $2\pi/m$ γύρω από το L και έστω τ μια περιστροφή κατά π γύρω από ένα από τους διπλής πολλαπλότητας άξονες. Αφού και η κυκλική ομάδα C_m παράγεται από τη C έχει τάξη m, έπεται ότι τα στοιχεία της G μπορούν να διαιρεθούν σε δύο σύμπλοκα C_m και τC_m. Τα m στοιχεία στο δεύτερο σύμπλοκο είναι τάξης δύο, μιας και εναλλάσσουν τους πόλους του L. Έτσι $\tau^{-1} = \tau$ και $(\tau C)^2 = e$ ή $\tau C = C^{-1}\tau$.
Κάθε στοιχείο g του G μπορεί να γραφεί μοναδικά στη μορφή

$$g = \tau^{\varepsilon} C^{\kappa}, \varepsilon=0,1 \quad \kappa = 0,1,\ldots,m-1$$

Ο πολλαπλασιασμός των δύο ομάδων στοιχείων είναι τότε μοναδικά καθορισμένος από τη σχέση $\tau C = C^{-1}\tau$. Για παράδειγμα

$$(\tau C^{\kappa 1})(C^{\kappa 2})=\tau C^{\kappa 2+\kappa 1} \ , \ (\tau C^{\kappa 1})(\tau C^{\kappa 2})=C^{\kappa 2-\kappa 1}$$

Ορισμός 2.4.4 : Η αφηρημένη ομάδα που ορίζεται με τους παραπάνω κανόνες είναι η **διεδρική ομάδα** τάξης 2n.

Ακολουθούν οι συμμετρίες των διεδρικών ομάδων D_n.

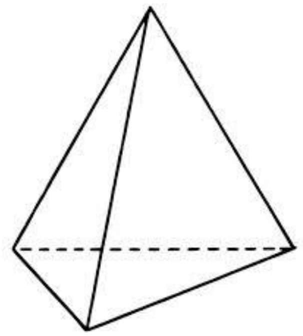
Ορισμός 2.4.5 :Ο L είναι **δίπλευρος** (two sided) επειδή και οι δύο πόλοι του L βρίσκονται στην ίδια τροχιά .

Οι περιστροφές εναλλάσσουν τους πόλους του L, έτσι οι περιστροφές $C^k, C^{-k} = C^{m-k}, \ \ k = 1,\ldots,m-1$ είναι συζυγείς .

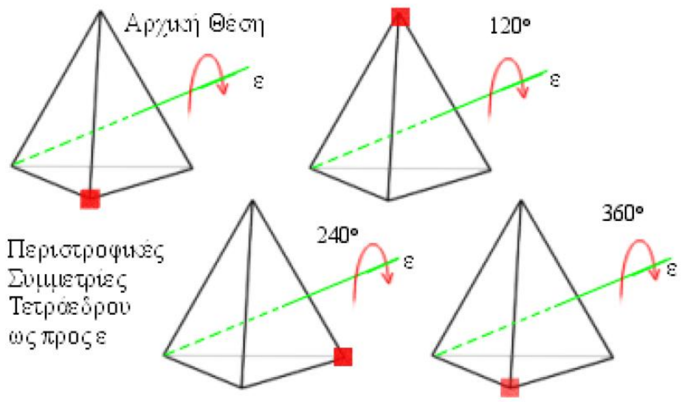
Αφού και η C_m είναι κανονική υποομάδα του D_m, οι συζυγείς κλάσεις { C^k, C^{m-k}} δεν περιέχουν στοιχεία τους στη C_m. Υπάρχουν $1 + (m/2)$ τέτοιες κλάσεις, αν το m είναι άρτιος και $(m+1)/2$, αν το m είναι περιττό. Οι m περιστροφές $\tau_{1,\ldots}, \tau_m$ γύρω από τους διπλής πολλαπλότητας άξονες σχηματίζουν μια μονή συζυγή κλάση αν m είναι περιττό και δύο κλάσεις αν το m είναι άρτιο. 'Ετσι η D_m έχει $(3+m)/2$ κλάσεις για m περιττό και $3 + (m/2)$ κλάσεις για m άρτιο .

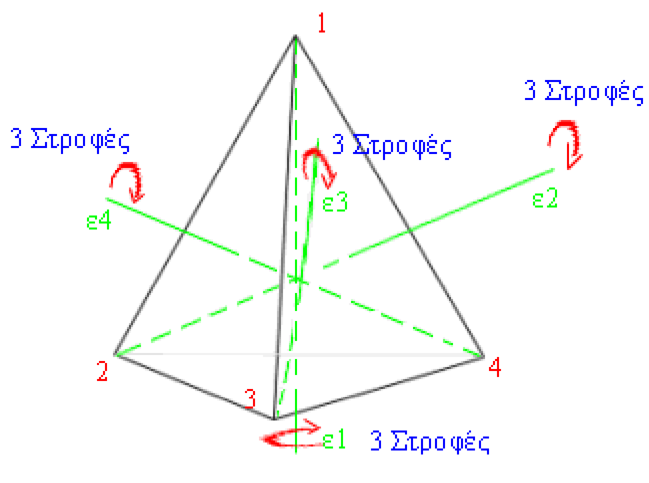
Έστω $\{x_1,\ldots,x_4\}$ να είναι οι πόλοι σε μια από τις τροχιές που περιέχουν τέσσερα στοιχεία. Τα στοιχεία της G μεταθέτουν αυτούς τους πόλους μεταβατικά και πιστά. Κάθε πόλος x_1 είναι σταθερός από μια κυκλική υποομάδα C_3 τάξης τρία. Έπεται ότι για $2 \le i \le j \le 4$ υπάρχουν $g \in C_3$ τέτοια ώστε $gx_1 = x_1, \ gx_i = x_j$. Έτσι για διαφορετικά i,j,k υπάρχει ένα $g \in G$ τέτοιο ώστε $gx_i = x_i, \ gx_j = x_k$, το ευθύγραμμο τμήμα $[x_i, x_j]$ απεικονίζεται στο $[x_i, x_k]$ μέσω της περιστροφής g. Έτσι οι πόλοι $\{x_1, \ldots x_4\}$ βρίσκονται στο χώρο σε ίσες αποστάσεις το ένα από το άλλο στη σφαίρα S_r και το τετράεδρο με αυτούς τους πόλους σαν διανύσματα έχει τη G σαν ομάδα συμμετρίας .

Προφανώς η G είναι υποομάδα της **τετραεδρικής ομάδας *T*** όλων των ευθέων συμμετριών του τετράεδρου. Παρόλα αυτά $n(T) = 12$ έτσι $G = T$.

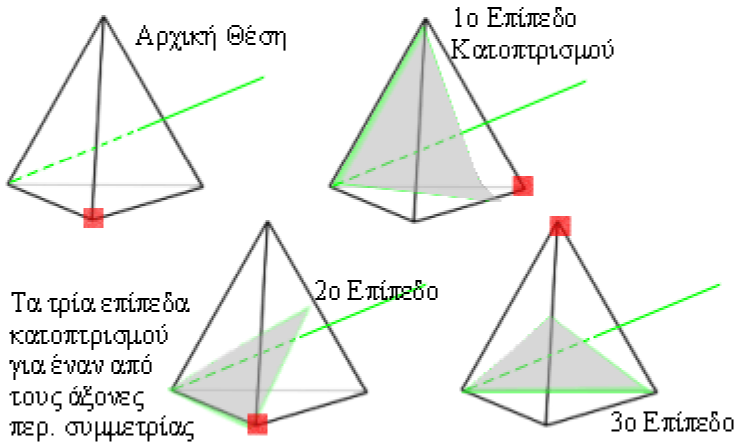


Πράγματι κάθε ομάδα συμμετρίας του τετραέδρου μπορεί να αντιπροσωπευτεί μοναδικά σαν μετάθεση των τεσσάρων διανυσμάτων $x_1, \dots, x_4$. Το τετράεδρο έχει τέσσερα ίσα ισόπλευρα τρίγωνα ως έδρες και 4 κορυφές που σε κάθε μια προσπίπτουν 3 ακμές. Το κέντρο κάθε έδρας και η απέναντι από αυτήν κορυφή ορίζουν έναν άξονα περιστροφής γύρω από τον οποίο το τετράεδρο έχει τριπλή περιστροφική συμμετρία, ενώ οι τρεις διπλής πολλαπλότητας άξονες ενώνουν τα μεσαία σημεία των μη τεμνόμενων ακμών. Υπάρχουν τέσσερις συζυγείς κλάσεις: η ταυτοτική, τέσσερις περιστροφές κατά 120°, τέσσερις περιστροφές κατά 240° και τρεις περιστροφές κατά 180° .
Αναλυτικότερα :
Υπάρχουν 4 τέτοιοι άξονες περιστροφικής συμμετρίας, ε1, ε2, ε3, ε4, όπως φαίνεται στο σχήμα.





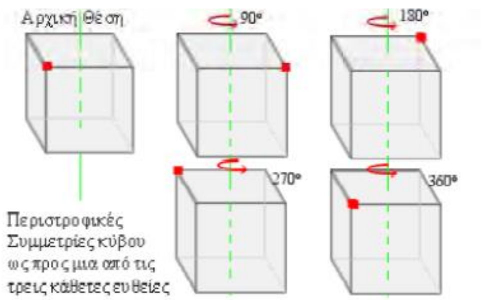
Ακόμη, σε κάθε ένα τέτοιο άξονα αντιστοιχούν 3 επίπεδα κατοπτρισμού



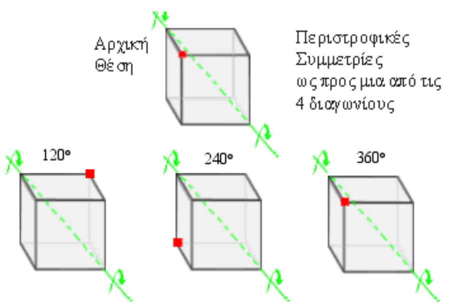
Οκταεδρική ομάδα *O*: Έχει τρεις τετραπλής πολλαπλότητας άξονες L_1, L_2, L_3 δέκα τριπλής πολλαπλότητας άξονες και δεκαπέντε διπλής πολλαπλότητας άξονες. Όλοι οι άξονες είναι δίπλευροι. Μπορούμε να κατασκευάσουμε έναν κύβο τέτοιο ώστε οι έξι πόλοι σχηματίζουν τα μεσαία σημεία των έξι εδρών του κύβου.$n(O) = 24$

Οι συμμετρίες του κύβου .

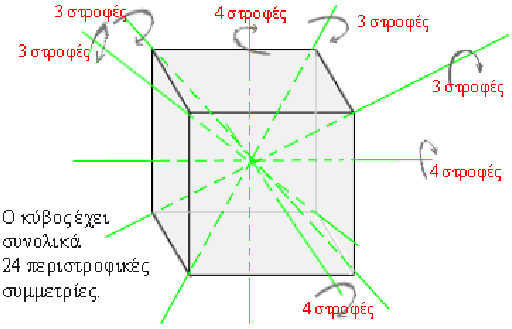
Ο κύβος έχει 8 κορυφές και σε κάθε κορυφή συναντώνται τρεις ακμές. Η συμμετρία του είναι οκταεδρική. Στον κύβο υπάρχουν 3 κάθετες ευθείες που διέρχονται από τα κέντρα των εδρών του κύβου ως προς τις οποίες ο κύβος έχει 4 δυνατές περιστροφικές συμμετρίες σε κάθε μία. Δηλαδή γίνεται να περιστρέψουμε τον κύβο γύρω από μια τέτοια κάθετη ευθεία σε αυτόν κατά τρεις διαφορετικές γωνίες 90,180 ,270 και 360 μοιρών χωρίς να αλλάξει ο προσανατολισμός του κύβου, δηλαδή θα μείνει αναλλοίωτος στη μορφή, όπως φαίνεται στο σχήμα.



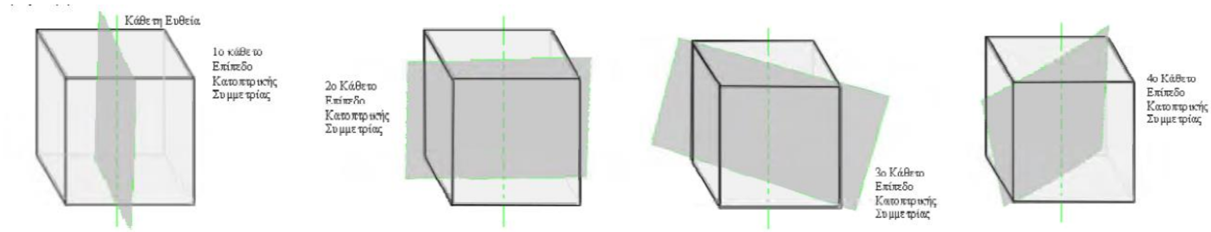
Ακόμη υπάρχουν τέσσερις διαγώνιες ευθείες ως προς τις οποίες ο κύβος έχει τρεις περιστροφικές συμμετρίες για κάθε μια διαγώνιο.



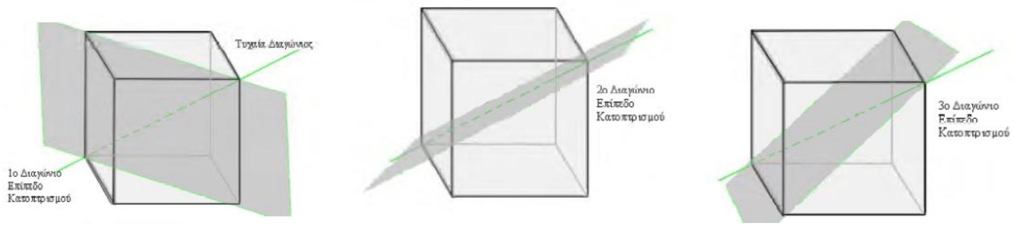
Στο ακόλουθο σχήμα βλέπουμε τις 24 δυνατές περιστροφικές συμμετρίες ως προς όλες αυτές τις ευθείες.



Επίσης, κάθε μια από τις κάθετες ευθείες ορίζει τέσσερα διαφορετικά και ανά δύο κάθετα επίπεδα ως προς το οποία ο κύβος έχει ανακλαστική συμμετρία.

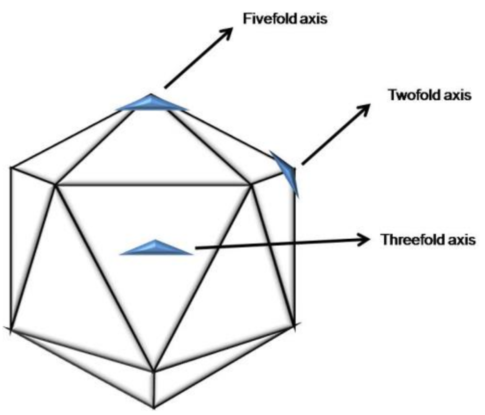


Τέλος για κάθε μια από τις τέσσερις διαγώνιες ευθείες ορίζονται τρία επίπεδα ανάκλασης.



Ένα κανονικό εικοσάεδρο έχει 60 περιστροφικές συμμετρίες και η τάξη της συμμετρίας είναι 120 συμπεριλαμβανομένων και των μετασχηματισμών που συνδυάζουν μια περιστροφή και μια ανάκλαση .Το εικοσάεδρο μπορεί να κατασκευαστεί αν ενώσουμε είκοσι ισόπλευρα τρίγωνα μαζί κατα μήκος των ακμών .

Η ευθεία ομάδα συμμετρίας του εικοσαέδρου είναι η **εικοσαεδρική ομάδα $\boldsymbol{Y}$**. Οι μόνοι πιθανοί άξονες του εικοσαέδρου είναι: έξι πενταπλής πολλαπλότητας άξονες κατά μήκος των ζευγαριών αντίθετων κορυφών, 10 τριπλής πολλαπλότητας άξονες κατά μήκος των μεσαίων σημείων αντίθετων εδρών, και 15 διπλής πολλαπλότητας άξονες κατά μήκος των μεσαίων σημείων αντίθετων ακμών.



Υπάρχουν πέντε συζυγείς κλάσεις στη Y: η κλάση των ταυτοτικών στοιχείων, η κλάση των 15 περιστροφών κατά 180 μοίρες, η κλάση των 10 περιστροφών κατά 240 μοίρες, η κλάση των 6 περιστροφών κατά 72 μοίρες και 6 περιστροφών κατά 288 μοίρες και η κλάση 6 περιστροφών των 144 μοιρών και 6 περιστροφών των 216 μοιρών .

Ακόμα η ομάδα του εικοσαέδρου είναι ευθεία ομάδα συμμετρίας για το δωδεκάδρο. Αυτό το κανονικό πολύγωνο μπορεί να δημιουργηθεί αν ενώσουμε με ίσιες γραμμές τα μεσαία σημεία των διαδοχικών εδρών του εικοσαέδρου.

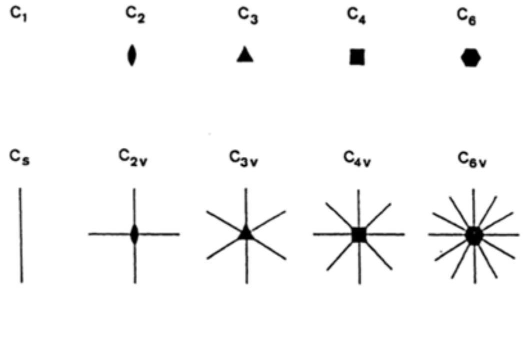
Η πλήρης λίστα των ομάδων σημείων του πρώτου είδους αποτελείται από την κυκλική ομάδα C_m, τη διεδρική D_m , $m \geq 2$, την τετραεδρική ομάδα T, την οκταεδρική ομάδα O, και την εικοσαερδική ομάδα Y.

2.5 Ομάδες σημείων του δεύτερου είδους

Αρχικά καταγράφουμε τη λίστα των ομάδων που παράγονται από μια αντιστροφή I και μια ομάδα σημείων του πρώτου είδους K. Προφανώς $n\ (G)\ = 2n\ (K)$. Σαν αφηρημένη ομάδα η G είναι ισομορφική με το ευθύ γινόμενο $K \times H = K \cup IK$, όπου H είναι ομάδα με δύο στοιχεία $\{I, -I\}$. Έτσι ο πίνακας πολλαπλασιασμού για τη G μπορεί να βρεθεί από τον πίνακα πολλαπλασιασμού της K. Ο αριθμός των συζυγών κλάσεων της G είναι διπλάσιος του αριθμού της K .

Η λίστα είναι η ακόλουθη .

(1) $C_n \cup I(C_n)$ είναι μια αβελιανή ομάδα τάξης 2n που αποτελείται από όλες τις περιστροφές κατά γωνία 2π/n γύρω από ένα σταθερό άξονα και όλες αυτές οι περιστροφές ακολουθούνται από μια αντιστροφή . Η ομάδα έχει 2n συζυγείς κλάσεις και κάθε κλάση αποτελείται από ένα στοιχείο .
(2) $D_n \cup I(D_n)$, $n >= 2$. Αυτή η ομάδα τάξης 4n έχει 3+n συζυγείς κλάσεις αν το n είναι περιττός και $6 + n$, αν το η είναι άρτιος .
(3) $T \cup I(T)$=T_h .Η ομάδα T_h είναι τάξης 24 και περιέχει 8 συζυγείς κλάσεις .
(4) $O \cup I(O) = O_h$. Η ομάδα O_h είναι πλήρης ομάδα συμμετρίας του κύβου. Έχει τάξη 48 και περιέχει 12 συζυγείς κλάσεις .
(5) $Y \cup I(Y) = Y_h$. Αυτή είναι η πλήρης ομάδα του εικοσαέδρου. Περιέχει 120 στοιχεία χωρισμένα σε 10 συζυγείς κλάσεις .



Η G^+ περιέχει μια υποομάδα K με δείκτη δύο. Αν $G^+ = K\ U\ K^+$ έπεται ότι $G = K\ U\ I(K^+)$ είναι ομάδα σημείων του δεύτερου είδους ισομορφική με τη G^+. Εξετάζοντας τη λίστα με τις ομάδες σημείων πρώτου είδους προκύπτει ο παρακάτω πίνακας .

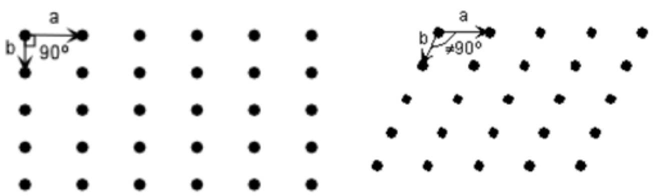
	G^+	K	Η τάξη της G	Αριθμός συζυγών κλάσεων
6	C_{2n}	C_n	$2n$	$2n$
7	D_n	$C_n, n \geq 2$	$2n$	$\begin{cases} (3+n)/2, n\ περιττός \\ 3+(n/2), n\ άρτιος \end{cases}$
8	D_{2n}	$D_n, n \geq 2$	$4n$	$3+n$
9	O	T	24	5

2.5 Ομάδα πλέγματος

Γεωμετρικά, το **πλέγμα** είναι μια επαναλαμβανόμενη επ' άπειρον, διάταξη σημείων.
Ένα πλέγμα καθορίζεται από τις αποστάσεις μεταξύ των σημείων του σε διαφορετικές κατευθύνσεις. Μπορεί να παραχθεί μεταφέροντας επαναληπτικά ένα σημείο με κατάλληλα μοναδιαία διανύσματα ενός συστήματος αξόνων αναφοράς. Δηλαδή το σημείο μεταφέρεται με μια διαδικασία συμμετρικής μεταφοράς. Ο τύπος του πλέγματος καθορίζεται από τη γεωμετρική σχέση μεταξύ των μοναδιαίων διανυσμάτων.

Ο αριθμός των διαφορετικών γεωμετρικών πλεγμάτων εξαρτάται από το αν το σύστημα αναφοράς αφορά μία, δυο ή τρεις διαστάσεις. Δεν υπάρχει παρά μόνο ένα **μονοδιάστατο πλέγμα**, η γραμμή σημείων, ενώ υπάρχουν πέντε διαφορετικά **επίπεδα πλέγματα** και δεκατέσσερα **χωροπλέγματα**, καθένα από τα οποία παρουσιάζει μια διαφορετική συμμετρία.

Στο παρακάτω παράδειγμα βλέπουμε ένα ορθογώνιο πλέγμα και ένα πλάγιο.



Μια ομάδα πλέγματος G είναι μια μη τετριμμένη διακριτή υποομάδα του $T(3)$, η ομάδα μεταφορών του δισδιάστατου χώρου. Με το όρο μη τετριμμένη εννοούμε ότι η G δεν αποτελείται μόνο από το ταυτοτικό στοιχείο. Μιας και τα στοιχεία T_a της $T(3)$ καθορίζονται πλήρως από διανύσματα της μορφής $a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$, μπορούμε να σκεφτούμε τη G σαν μια ομάδα 3-διανυσμάτων a, των οποίων ο νόμος για το πολλαπλασιασμό ομάδων είναι η πρόσθεση διανυσμάτων και δίνεται από την παρακάτω σχέση :

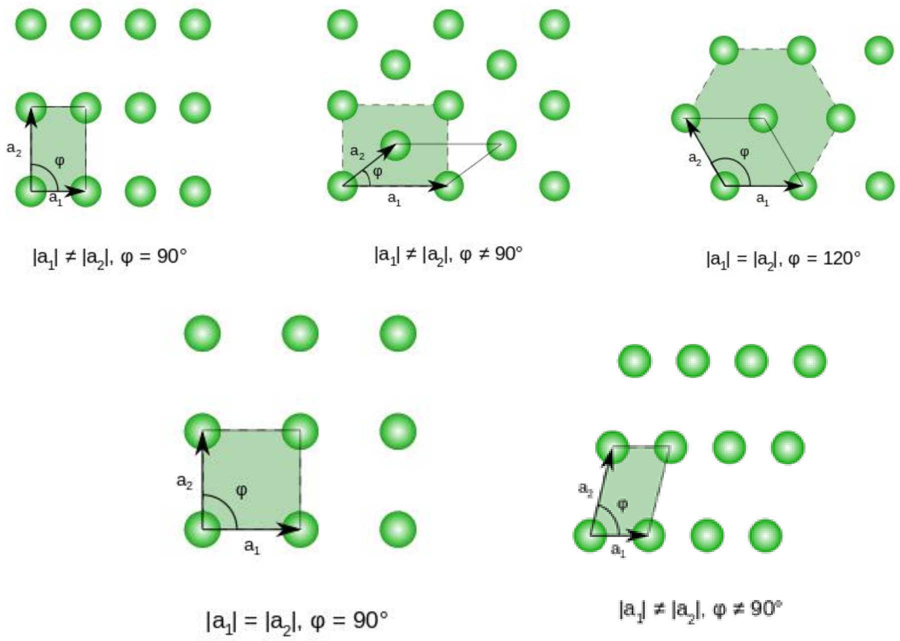
$$T_{a_1} + T_{a_2} = T_{a_1 + a_2}$$

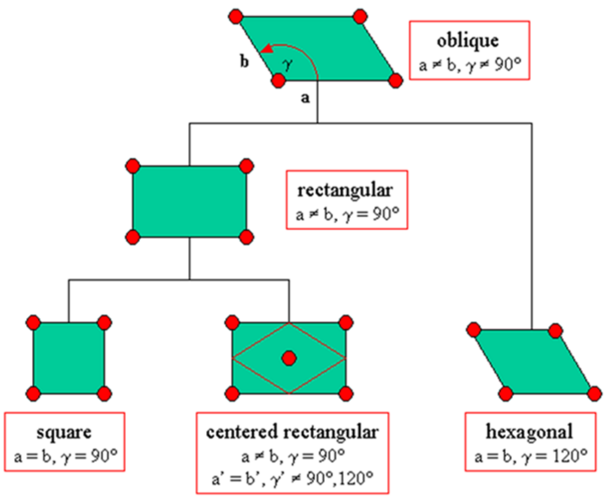
Ορισμός 2.6.1 : Αν η διανυσματική ομάδα G περιέχει τρία γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα λέγεται **τρισδιάστατη**.

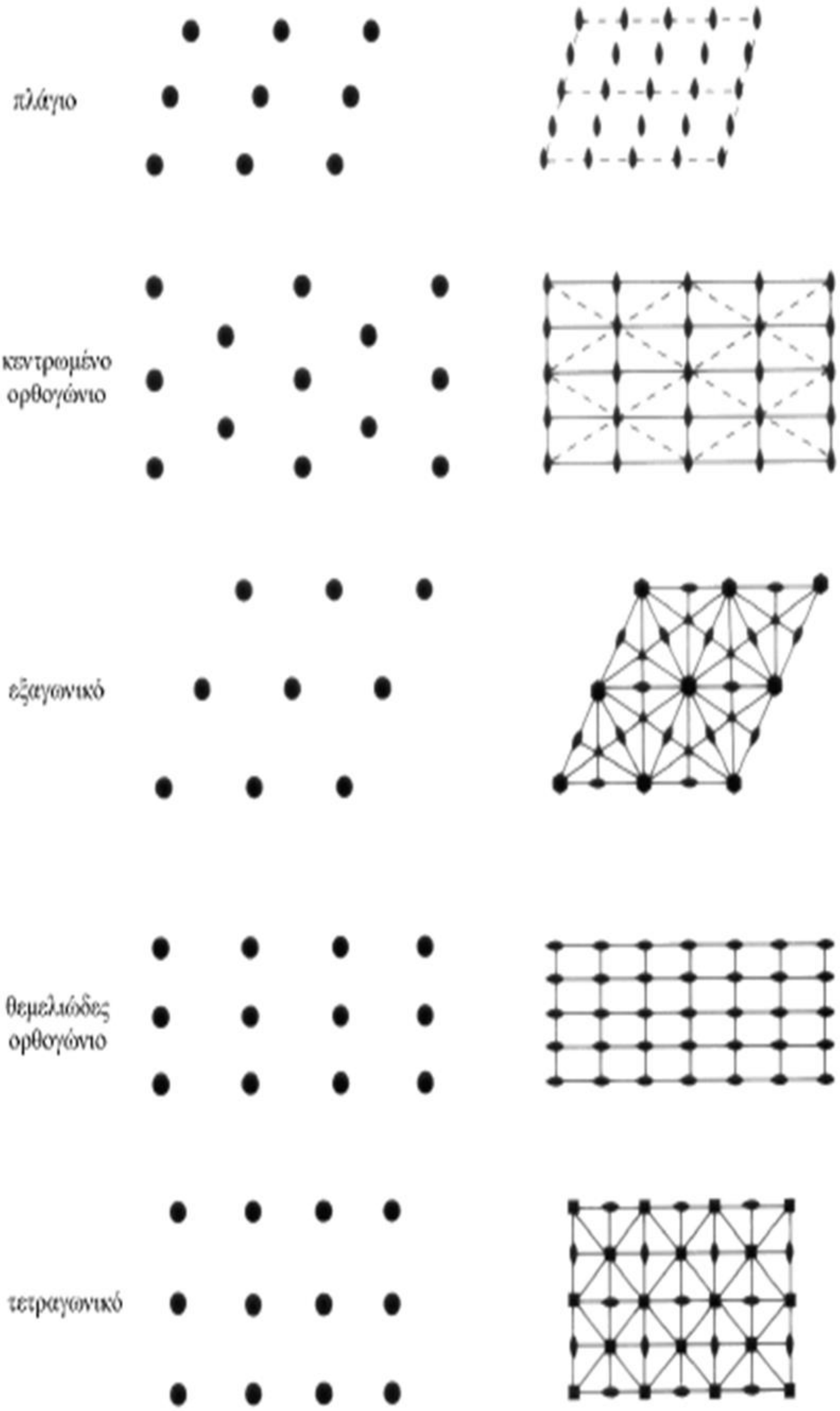
Ορισμός 2.6.2 : Αν η G περιέχει μόνο δύο γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα, δηλαδή αν όλα τα διανύσματα βρίσκονται σε επίπεδο μέσω του θ, τότε η G είναι **δισδιάστατη** .

Ορισμός 2.6.3 :Αν όλα τα διανύσματα βρίσκονται σε μια γραμμή που περνά από το θ, τότε η G είναι **μιας διάστασης**.

Η μοναδιαία κυψελίδα είναι το μικρότερο σχήμα ή αλλιώς, είναι ένα επαναλαμβανόμενο τμήμα του πλέγματος που αποδίδει πλήρως τη συμμετρία της κρυσταλλικής δομής.

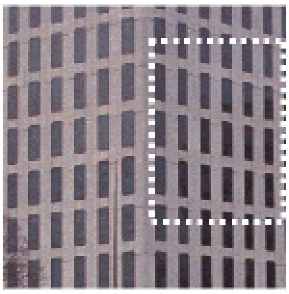
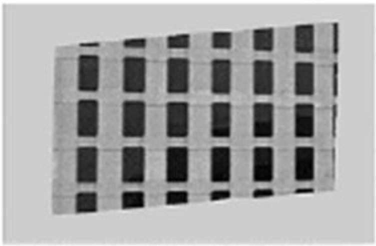
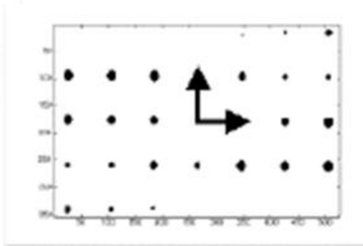





πλάγιο
κεντρωμένο ορθογώνιο
εξαγωνικό
θεμελιώδες ορθογώνιο
τετραγωνικό

Στα παραπάνω σχήματα βλέπουμε τα πέντε επίπεδα πλέγματα και τις συμμετρίες τους. Οι ελλείψεις, τα τρίγωνα τα τετράγωνα και τα εξάγωνα συμβολίζουν άξονες διπλής, τριπλής, τετραπλής και εξαπλής πολλαπλότητας αντίστοιχα καθέτους στο επίπεδο της σελίδας. Οι συνεχείς γραμμές είναι κατοπτρικά επίπεδα κάθετα στη σελίδα .

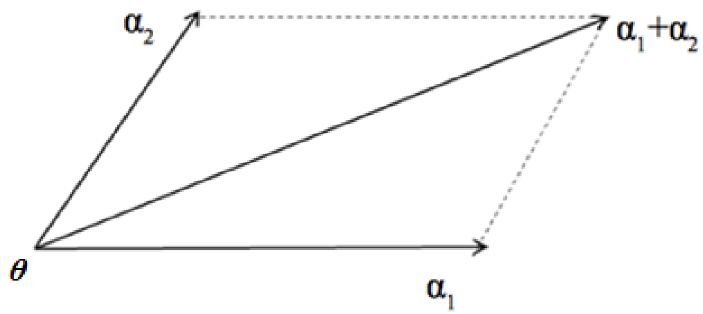
Ένα πλέγμα το οποίο μπορούμε να αναγνωρίσουμε εύκολο στη καθημερινότητά μας είναι το ακόλουθο :

Αν $a_1, \ldots, a_k$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα σε μια κ-διάστατη ομάδα πλέγματος τότε κάθε a στη G μπορεί να γραφεί στη μορφή
$a = \alpha_1\, a_1 + \ldots + \alpha_\kappa\, a_\kappa$
όπου α_i να είναι πραγματικοί αριθμοί .

Η αρχή της κυψελίδας μπορεί να επιλεγεί αυθαίρετα οπουδήποτε στον χώρο του πλέγματος, συνεπώς μπορεί να συμπίπτει ή όχι με πλεγματικό σημείο

Δύο γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα a_1 και a_2 σε μια ομάδα πλέγματος καθορίζουν ένα παραλληλόγραμμο με διανύσματα θ, a_1, a_2 και $a_1 + a_2$.



Όμοια τρία γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα ορίζουν ένα παραλληλεπίπεδο με διανύσματα θ , a_1, a_2, a_3, $a_1 + a_2$, $a_1 + a_3$, $a_2 + a_3$, $a_1 + a_2 + a_3$ στη G .

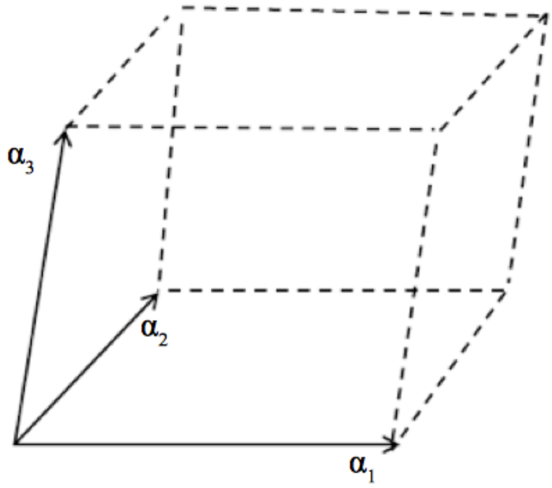
Θεώρημα 2.6.1: Έστω G μια τρισδιάστατη ομάδα πλέγματος. Τότε υπάρχουν γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα b_1, b_2, b_3 στη G, τέτοια ώστε κάθε a στη G να μπορεί να γραφεί μοναδικά στη μορφή

$$a = n_1 b_1 + n_2 b_2 + n_3 b_3$$

όπου n_i είναι ακέραιοι .

Απόδειξη

Έστω a_1, a_2, a_3 γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα στη G και έστω P μια κυψελίδα στον $\mathbb{R}^3$, που καθορίζεται από το αυτά τα διανύσματα. (Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η P αποτελείται από το εσωτερικό του παραλληλογράμμου, τις πλευρές του, τις έδρες και τις γωνίες του).



Υπάρχει πεπερασμένος αριθμός στοιχείων της διακριτής ομάδας G στο P. Έστω b_1 το μικρότερου μέτρο μη μηδενικό διάνυσμα στη $G \cap P$, που είναι παράλληλο με το a_1. Αυτό είναι στην ακμή της P με τελικά σημεία θ και a_1. Διαλέγουμε το στοιχείο $b_1 \neq \theta$ της G, το πιο κοντινό στο θ.
Τώρα, έστω $b_2 \in G$ στο παραλληλόγραμμο που παράγεται από τα a_1, a_2, τέτοια ώστε το παραλληλόγραμμο που παράγεται από τα b_1, b_2 να έχει το μικρότερο δυνατό μη μηδενικό εμβαδόν.
Τέλος διαλέγουμε $b_3 \in G \cap P$, τέτοιο ώστε το παραλληλεπίπεδο Q που παράγεται από τα b_1, b_2, b_3 να έχει το μικρότερο δυνατό όγκο.
Τα διανύσματα b_i είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Για οποιαδήποτε a στη G υπάρχουν μοναδικοί πραγματικοί αριθμοί α_i τέτοιοι ώστε

$$a = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3$$

Έστω n_i ο μεγαλύτερος ακέραιος μεταξύ των α_i , $i = 1,2,3$. Τότε

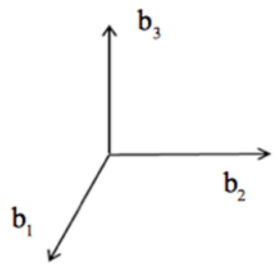
$$a - \sum_{i=1}^{3} n_i b_i = \sum_{i=1}^{3} \beta_i b_i = b$$

με $0 \leq \beta_i < 1$. Το διάνυσμα b είναι στοιχείο της $G \cap Q$.

Ακολουθεί η απόδειξη ότι το $b = \theta$, όπου θ είναι το μηδενικό διάνυσμα.
Έστω $0 < \beta_3 < 1$. Τότε ο όγκος $V(Q')$ του παραλληλεπιπέδου Q' που παράγεται από $b_{1,} b_{2,} b$ είναι αυστηρά μικρότερος από το όγκο $V(Q)$. Στη πράξη V(Q')=$\beta_3 V(Q)$, αλλά αν $b \in P$ αυτό είναι αδύνατο μιας και αντιβαίνει τη υπόθεση μας για το b_3.
Αν $b \notin P$ μπορούμε να βρούμε ακεραίους $m_{1,} m_2$ τέτοιους ώστε $b' = b + m_1 a_1 + m_2 a_2$ στο P και το παραλληλεπίπεδο Q'' που παράγεται από τα b_1, b_2, b', έχει όγκο $V(Q'') = \beta_3 V(Q) < V(Q)$. Αυτό είναι αδύνατο. Έτσι $\beta_3 = 0$ και b βρίσκεται πάνω στο επίπεδο που ορίζεται από τα a_1 και a_2 .
Αν $0 < \beta_2 < 1$ τότε το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που παράγεται από b_1, b είναι β_2 φορές το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που παράγεται από τα b_1, b_2. Αυτό έρχεται σε αντίθεση με την επιλογή μας για το b_2, αν $b \in P$. Αν $b \notin P$ τότε υπάρχει ακέραιος m_i τέτοιος ώστε $b' = b + ma_i \in P$ και το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που παράγεται από τα b_1, b' είναι β_2 φορές το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που παράγεται από τα b_1, b_2. Αυτό είναι αδύνατο. Έτσι β_2=0 και

$b = \beta_1 b_1$. Αν $0 < \beta_1 < 1$τότε το b είναι πιο κοντά στο θ από το b_1. Αυτό είναι αδύνατο έτσι $b = \theta$.

Ορισμός 2.6.4 : Την ομάδα πλέγματος είναι μια ομάδα μετασχηματισμών στο $\mathbb{R}^3$. Έστω τα στοιχεία $b_{1,} b_2, b_3$ στη G που ικανοποιούν τη συνθήκη για, $a = n_1 b_1 + n_2 b_2 + n_3 b_3 \;\in G$. Αυτή η τριάδα ονομάζεται **βασικά διανύσματα**.



Ορισμός 2.6.5 : Έστω $x \in \mathbb{R}^3$. Εφαρμόζοντας στο x τους μετασχηματισμούς στη G που αντιστοιχούν στο $b_{1,}$ b_2, b_3, $b_1 + b_2$, $b_1 + b_3$, $b_2 + b_3$ και $b_1 + b_2 + b_3$, παίρνουμε ένα παραλληλεπίπεδο στο $\mathbb{R}^3$ που καλείται **βασικό παραλληλεπίπεδο ή πρωτογενής κυψελίδα**.

Όταν ένα πλέγμα περιέχει **μόνο ένα πλεγματικό σημείο,** η μοναδιαία κυψελίδα είναι **θεμελιώδης** (ή απλή ή ***πρωτογενής*:** primitive unit cell), όπως και τα διανύσματα μεταφοράς που την καθορίζουν.

Εφαρμόζοντας όλα τα στοιχεία της G στο x , κατασκευάζοντας τη G-τροχιά που περιέχει το x, φτιάχνουμε ένα γεωμετρικό πλέγμα στοιχείων στο $\mathbb{R}^3$.
Από το θεώρημα 2.6.1 έπεται ότι αυτό πλέγμα είναι απλά ότι μπορούμε να πάρουμε αν ενώσουμε αντίγραφα πρωτογενών κυψελίδων, έτσι ώστε να γεμίσει όλα το $\mathbb{R}^3$.

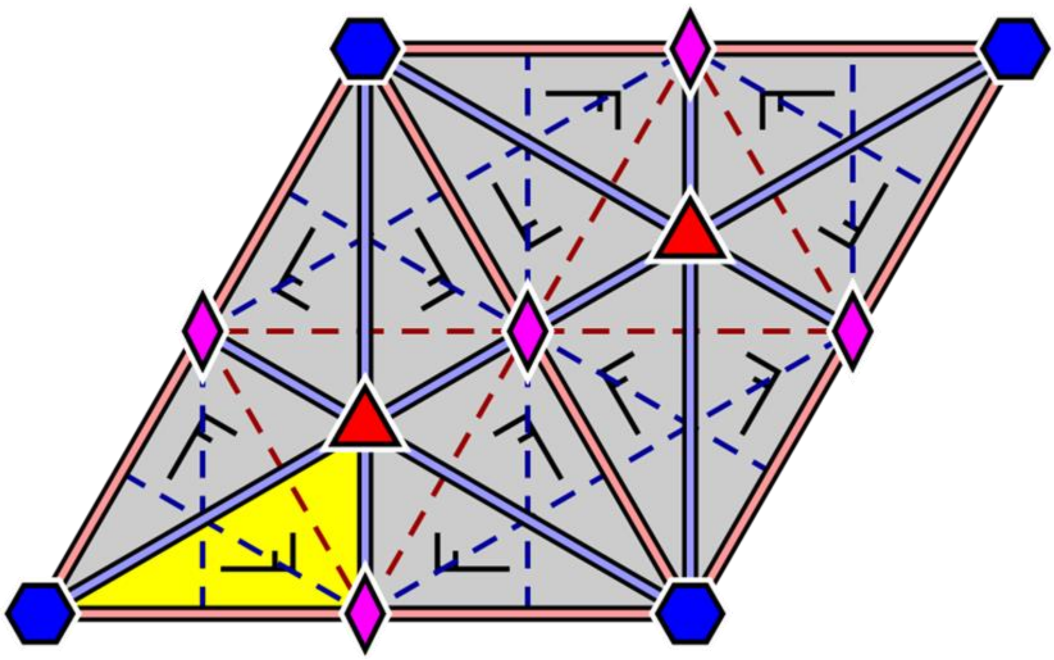
Μπορεί να κατασκευαστεί ένα πλέγμα που περιέχει οποιοδήποτε σημείο x. Δύο σημεία βρίσκονται στο ίδιο πλέγμα, αν και μόνο αν, ανήκουν στην ίδια G-τροχιά.

Ορισμός 2.6.6 : Η ολότητα όλων των πλεγμάτων, όλων των G-τροχιών καλείται **κρυσταλλικό πλέγμα**.

Ορισμός 2.6.7 : Αν αποκλείουμε κατάλληλα κάποιες έδρες, ακμές και κορυφές από μια πρωτογενή κυψελίδα κατασκευάσουμε ένα **θεμελιώδες πεδίο** για τη G. Το θεμελιώδες πεδίο της G είναι ένα υποσύνολο D του $\mathbb{R}^3$,τέτοιο ώστε το D να αποτελείται από ακριβώς ένα σημείο από κάθε G-τροχιά του $\mathbb{R}^3$.

Ακολουθεί ένα παράδειγμα εξαγωνικού πλέγματος με κέντρα περιστροφής 2-πλής, 3-πλής και 6-πλής πολλαπλότητας. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα το θεμελιώδες πεδίο είναι σημειωμένο με κίτρινο χρώμα.

Κέντρο περιστροφής τάξης 2 (180°).
Κέντρο περιστροφής τάξης 3 (120°).
Κέντρο περιστροφής τάξης 4(90°).
Κέντρο περιστροφής τάξης 6 (60°).
Άξονας ανάκλασης
Άξονας ανάκλασης διολίσθησης



Πόρισμα 2.6.1 : Σε αντιστοιχία με κάθε δύο γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα a_1 , a_2 στη G, υπάρχει μια πρωτογενής κυψελίδα Q , με μια ακμή που κατευθύνεται κατά μήκος του a_1 και έδρα στο επίπεδο που ορίζουν τα a_1 , a_2.

Οι πρωτογενείς κυψελίδες της G μπορούν να χαρακτηριστούν σαν κυψελίδες με το μικρότερο όγκο .

Έστω b_1, b_2, b_3 να είναι βασικά διανύσματα μιας πρωτογενούς κυψελίδας Q, όγκου $V(Q)$ και έστω a_1, a_2, a_3 να είναι τρία γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα στη G με κυψελίδα P. Τότε ισχύει:

Θεώρημα 2.6.2 : $V(Q) \leq V(P)$

Απόδειξη

Σύμφωνα με τα διανύσματα e_1, e_2, e_3 μιας τυπικής ορθοκανονικής βάσης, τα a_i και b_i μπορούν να γραφούν σαν

$$a_i = \sum_{j=1}^{3} \alpha_{ij} e_j \quad , b_k = \sum_{j=1}^{3} b_{jk} e_j \;\; i,k = 1,2,3$$

όπου οι 3×3 πίνακας $A = (\alpha_{ij}), B = (b_{kj})$ είναι μη αντιστρέψιμοι πίνακες. Όμοια

$$a_i = \sum_{k=1}^{3} c_{ki} b_k \, , i = 1,2,3$$

και ο μη αντιστρέψιμος πίνακας $C = (c_{ik})$ έχει στοιχεία ακεραίους, μιας και b_k είναι βασικά διανύσματα. Από το πολλαπλασιασμό πινάκων $A = BC$. Επιπλέον:
$V(P) = |a_1 \cdot (a_2 \times a_3)| = |det\, A|$.
Έτσι $V(P) = |det\, BC| = |det\, C| \cdot |det\, B| = |det\, C| \cdot V(Q)$
και $|det\, C|$ >=1 μιας και ο C έχει στοιχεία ακεραίους .

Ιδιαιτέρως, το $V(P)$ είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του $V(Q)$.

Πόρισμα 2.6.2 : Μια πρωτογενής κυψελίδα της G είναι μια κυψελίδα με τον ελάχιστο μη μηδενικό όγκο. Οι όγκοι οποιαδήποτε δύο πρωτογενών κυψελίδων είναι ίσοι.

Πόρισμα 2.6.3 :Αν τα διανύσματα a_i σχετίζονται με τα βασικά διανύσματα b_i ,τότε από τη σχέση $a_i = \sum_{k=1}^{3} c_{ki} b_k$, $i = 1,2,3$ τα a_i είναι βασικά διανύσματα, αν και μόνο αν, $detC = \pm 1$.

2.7 Κρυσταλλογραφικές ομάδες σημείων

Έστω H να είναι μια τρισδιάστατη ομάδα πλέγματος, θεωρούμε το πλέγμα L που σχηματίζεται από μια δράση της H σε ένα δοθέν σημείο $x \in \mathbb{R}^3$, έστω $x = \theta$. Μιας και L είναι ένα μη φραγμένο σύνολο σημείων στη $\mathbb{R}^3$, έχει μια πλήρη ομάδα συμμετρίας G. Προφανώς, η H είναι μια υποομάδα μεταφοράς της G μιας και τα στοιχεία της H απεικονίζουν το L στο εαυτό του.

Έστω t ένα στοιχείο στη $G \cap T(3)$ και t είναι μια μεταφορά στη G. Τότε $t(\theta) = b$ είναι ένα πλεγματικό σημείο του L. Αν b_1, b_2, b_3 είναι βασικά διανύσματα για την H, τότε υπάρχουν μοναδικοί ακέραιοι n_i τέτοιοι ώστε :
$b = n_1 b_1 + n_2 b_2 + n_3 b_3$.

Μιας και t είναι μια μεταφορά απεικονίζει οποιαδήποτε $y \in \mathbb{R}^3$ στο $y + n_1 b_1 + n_2 b_2 + n_3 b_3$.

Έτσι $t \in H$ και $H = G \cap T(3)$.
Αν $g \in G$, τότε $g(\theta) = b$ είναι ένα πλέγμα σημείων του L. Αν $t \in H$ είναι η μεταφορά πλέγματος που απεικονίζει το θ στο b τότε

$$g(\theta) = b$$
$$g(\theta) = t(\theta)$$
$$t^{-1} g(\theta) = t^{-1} t(\theta)$$
$$t^{-1} g(\theta) = \theta$$

η μεταφορά $f = t^{-1} g \in G$ αφήνει το θ σταθερό.

Έτσι, κάθε στοιχείο g της G μπορεί να γραφεί μοναδικά στη μορφή $g = tf$, όπου $t \in H$ και f η μεταφορά που αφήνει το θ σταθερό.
Αν F είναι η υποομάδα της G που σταθεροποιεί το θ, βλέπουμε ότι $G = HF$ και G είναι το ημιευθή γινόμενο των H και F .Στη πράξη το γινόμενο των δύο σημείων $t_1 f_1$ και $t_2 f_2$ στη G δίνεται από :

$$(t_1 f_1)(t_2 f_2) = t_1 (f_1 t_2 f_1^{-1})(f_1 f_2)$$

μια και $f_1 t_2 f_1^{-1} \in G \cap T(3) = H$.

Τα στοιχεία της G διατηρούν αποστάσεις. Επιπρόσθετα, υπάρχει μόνο ένας πεπερασμένος αριθμός στοιχείων πλέγματος μέσα σε κάθε σφαίρα με κέντρο θ, έτσι η F πρέπει να είναι πεπερασμένη ομάδα σημείων. Η G είναι διακριτή. Κάθε δύο τρισδιάστατες ομάδες πλέγματος H_1, H_2 είναι προφανώς ισομορφικές. Έτσι για να υπολογίσουμε όλες τις πλήρεις ομάδες συμμετρίας των πλέγματων ως προς την ισομορφία είναι αρκετό να υπολογίσουμε όλες τις πιθανές ομάδες σημείων F. Μια αυθαίρετη ομάδα συμμετρίας του L, όχι απαραίτητα η πλήρης ομάδα συμμετρίας, είναι μια αυθαίρετη υποομάδα G' της G.

Ορισμός 2.7.1 : Μια υποομάδα της $E(3)$ που σταθεροποιεί ένα σημείο x και απεικονίζει ένα τρισδιάστατο πλέγμα L που περιέχει το x στο εαυτό του καλείται **κρυσταλλογραφική ομάδα σημείων**. Η μεγαλύτερη κρυσταλλογραφική ομάδα σημείων F στο x καλείται **ολοεδρία** της L στο x.

Θεώρημα 2.7.1 : (θεώρημα κρυσταλλογραφικού περιορισμού) Έστω K μια κρυσταλλογραφική ομάδα σημείων. Αν $g \in K$ είναι μη τετριμμένη περιστροφη, τότε g έχει τάξη δύο, τρία, τέσσερα ή έξι. Αν $g = -Ik$ είναι μια περιστροφό- αναστροφή στην K, τότε η περιστροφή k είναι τάξης ένα, δύο, τρία, τέσσερα ή έξι .

<u>Απόδειξη</u>

Έστω $b_{1,} b_2, b_3$ να είναι βασικά διανύσματα του πλέγματος L στο οποίο δρα η K.

$$gb_i = \sum_{i=1}^{3} c_{ji} b_j$$

βλέπουμε ότι C=(c_{ij}) είναι ο πίνακας μετασχηματισμού g ως προς τη βάση $\{b_i\}$. Γνωρίζουμε ότι το ίχνος ενός πίνακα είναι αναλλοίωτο κάτω από μετασχηματισμούς ομοιότητας. Το ίχνος της g είναι ανεξάρτητο της βάσης. Μιας και b_i είναι βασικά διανύσματα του L, έπεται ότι τα c_{ij} είναι ακέραιοι, έτσι το ίχνος του C είναι ακέραιος. Γνωρίζουμε ότι για ορθοκανονικές βάσεις με ένα βασικό διάνυσμα κατά το μήκος του άξονα της περιστροφής, το ίχνος είναι $\pm(1 + 2\cos\varphi)$, όπου φ είναι η γωνία περιστροφής σε σχέση με τη g. Το σύμβολό μείον αναφέρεται σε περιστροφό - αναστροφή. Έτσι

$$\text{tr C} = \pm(1 + 2\cos\varphi)$$

και ο μόνος τρόπος αυτό να είναι ακέραιος είναι για $\varphi = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{n\pi}{3}$ με $n = 0,1, \ldots, 5$.

Το θεώρημα μας δείχνει ότι καμία ομάδα σημείων που περιέχει στοιχεία με περιστροφές τάξεων πέντε ή μεγαλύτερων του έξι, δεν μπορεί να είναι κρυσταλλογραφική ομάδα σημείων. Οι πιθανές ομάδες του πρώτου είδους είναι οι $C_{1,} C_2, C_3, C_4, C_6$, οι διεδρικές ομάδες D_2, D_3, D_4, D_6, η τετραεδρική ομάδα T, και η οκταεδρική ομάδα O. Οι πιθανές ομάδες σημείων του δεύτερου είδους είναι S_2, S_4, S_6, C_{1h}, C_{2h}, C_{4h}, C_{6h}, C_{2v}, C_{3v}, C_{4v}, C_{6v}, D_{2h}, D_{3h}, T_h, T_d, D_{4h}, D_{6h}, D_{2d}, D_{3d} και O_h.

Ορισμός 2.7.2 : Δύο πλέγματα L , L' είναι στο ίδιο **κρυσταλλικό σύστημα,** αν οι ολοεδρίες F, F' είναι συζυγείς υποομάδες της $E(3)$.

Έστω L να είναι ένα πλέγμα στο $x = \theta$ και έστω F η ολοεδρία του στο x.

Θεώρημα 2.7.3 : Η αντιστροφή -I είναι στοιχείο της F.

Απόδειξη

Αν b_1, b_2, b_3 είναι βασικά διανύσματα του L, το πλέγμα σημείων του L είναι ακριβώς τα σημεία $b = n_1 b_1 + n_2 b_2 + n_3 b_3$, με n_1, n_2, n_3 ακέραιοι. Έπεται ότι $-b \in L$, αν $b \in L$. Έτσι $-I \in F$.

Εν κατακλείδι, οι ολοεδρίες είναι απαραίτητα ομάδες σημείων του δεύτερου είδους που περιέχουν το $-I$.

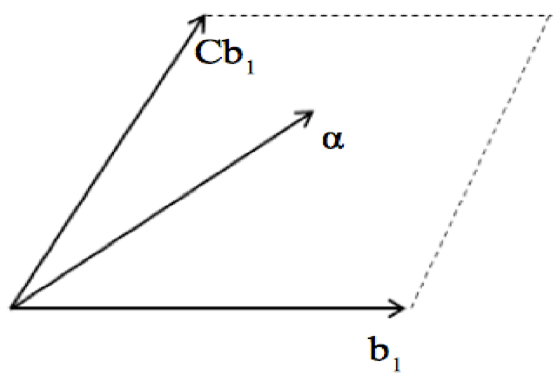
Θεώρημα 2.7.4 : Αν η F περιέχει την κυκλική υποομάδα C_n, $n = 1,2,3$ τότε η F περιέχει τη C_{nv}.

Απόδειξη

Η ανάκλαση και οι C_n περιστροφές παράγουν τη C_{nv}. Πρέπει να δειχθεί ότι αν η F περιέχει n-πολλαπλότητας άξονα περιστροφής l τότε περιέχει ένα επίπεδο ανάκλασης P στο οποίο βρίσκεται ο l. Έστω $C \in F$ να είναι μια περιστροφή γύρω από το l με γωνία περιστροφής $2\pi/n$ και έστω Q το επίπεδο στο $x = \theta$ που είναι κάθετο στο l.
Αν y είναι ένα σημείο πλέγματος του L όχι στο l, τότε $Cy - y$ είναι ένα μη μηδενικό σημείο πλέγματος που βρίσκεται στο Q .
Έτσι, η $Q \cap L$ περιέχει μη μηδενικά διανύσματα. Έστω b_1 ένα μη μηδενικό διάνυσμα ελαχίστου μήκους στο $Q \cap L$. Από το θεώρημα 2.6.1 και το αντίστοιχο πόρισμα μπορούμε να εισάγουμε το b_1 σε ένα σύστημα βασικών διανυσμάτων b_1, b_2, b_3 του L, τέτοιο ώστε το b_2 να βρίσκεται στο Q .
Στη πράξη μπορούμε να θέσουμε $b_2 = Cb_1$, αν υπάρχει ένα $\alpha \in Q \cap L$ στο εσωτερικό του παραλληλογράμμου που παράγεται από το b_1και Cb_1. Τότε, τουλάχιστον ένα από τα διανύσματα πλέγματος $Cb_1 - \alpha$, $Cb_1 + b_1 - a$, $b_1 - a$, a είναι μικρότερο του b_1. Αυτό είναι αδύνατο, έτσι $b_2 = Cb_1$.
Γνωρίζουμε ότι b_3 δεν είναι στο Q και μπορεί να γραφεί μοναδικά στη μορφή

$$b_3 = u + v$$

όπου το διάνυσμα u έχει κατεύθυνση προς το l και το v βρίσκεται στο Q. Τα u και v είναι οι προβολές των b_3 στο l και Q .



Μιας και $Cb_3 - b_3 \in L \cap Q$ και $Cu = u$ τότε υπάρχουν ακέραιοι n_1, n_2 τέτοιοι ώστε

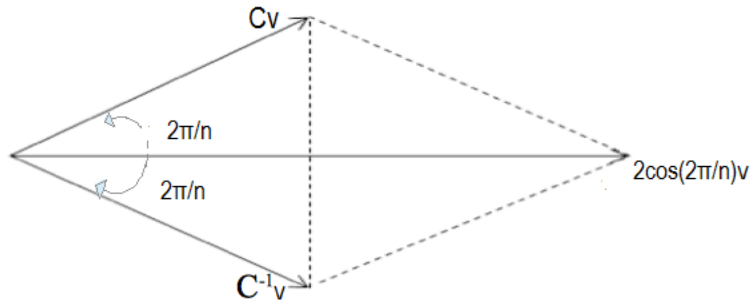
$$Cb_3 - b_3 = Cv - v = n_1 b_1 + n_2 Cb_1. \ (7.1)$$

Πολλαπλασιάζοντας τη παραπάνω σχέση με C^{-1}

$v - C^{-1}v = n_1 C^{-1} b_1 + n_2 b_1$ (7.2)

και μετά αφαιρώντας τις σχέσεις (7.1) και (7.2)
$Cv + C^{-1}v - 2v = n_2Cb_1 - n_1C^{-1}b_1 + (n_1 - n_2)b_1$
Από τριγωνομετρία :

$$Cv + C^{-1}v = 2\cos(2\pi/n)v$$
$$Cb_1 + C^{-1}b_1 = 2cos(2\pi/n)b_1$$



Έτσι
$2[\cos(2\pi/n) - 1]v = (n_1 + n_2)b_2 + [n_1 + n_2 - 2\text{n}\cos(2\pi/n)]b_1$ (7)

Έστω σ μια ανάκλαση στο επίπεδο P που περιέχει το l και είναι κάθετο στο b_1.
Προφανώς $\sigma b_1 = -b_1,\ \sigma u = u$. Αν δείξουμε ότι σb_2 και σb_3 είναι σημεία πλέγματος έπεται ότι $\sigma \in F$.
Για $n = 3$ έχουμε $\sigma b_2 = b_1 + b_2 \in L$: για $n = 4$,$\sigma b_2 = b_2 \in L$ και για $n = 6$,$\sigma b_2 = b_2 - b_1 \in L$.
Σε κάθε περίπτωση ισχύει
$\sigma b_3 = u + \sigma v = u + v + (n_1 - n_2)b_1 = b_3 + (n_1 + n_2)b_1 \in L$

Από τη λίστα μας με τις 32 πιθανές ομάδες σημείων μόνο 7 ικανοποιούν τις προϋποθέσεις των θεωρημάτων 2.7.3 και 2.7.4. Αυτές είναι οι $S_2,\ C_{2\text{h}},\ D_{2\text{h}}$,$D_{3\text{h}},\ D_{3\text{d}},\ D_{4\text{h}}, D_{6\text{h}}$ και O_h .
Έτσι υπάρχουν το πολύ 7 ολοεδρίες .

2.8 Πλέγματα bravais

Δύο ομάδες πλέγματος L_0, L_1 που ανήκουν στη ίδια ολοεδρία F, είναι του ίδιου **τύπου,** αν και μόνο αν, ένα από αυτά μπορεί να μπορεί να ληφθεί από το άλλο από μια συνεχή παραμόρφωση πλέγματος L_t , $0 \leq t \leq 1$, με τρόπο ώστε κατά τη διάρκεια της παραμόρφωσης η ολοεδρία F_t να περιέχει τη F .

Δύο πλέγματα που ανήκουν στη ίδια ολοεδρία, δεν έχουν απαραίτητα ισομορφικά πλήρεις ομάδες συμμετρίας. Τα επτά κρυσταλλικά συστήματα θα διαιρεθούν σε 14 τύπους πλέγματος και 14 πλέγματα Bravais. Κάθε πλέγμα ανήκει σε ακριβώς ένα τύπο πλέγματος και αυτός ο τύπος καθορίζει την πλήρη ομάδα συμμετρίας του πλέγματος.

Οι υποψήφιοι για ολοεδρίες ικανοποιούν τις σχέσεις των υποομάδων. Συγκεκριμένα $S_2 = \{I, -I\}$ περιέχεται σε όλες αυτές τις ομάδες. Σύμφωνα με το θεώρημα 2.7.3 κάθε πλέγμα δέχεται τη S_2 σαν κρυσταλλογραφική ομάδα σημείων .
Εκτός από τη S_2 αυτές οι ομάδες περιέχουν n-πολλαπλότητας άξονες περιστροφής l (n=2,4 ή 6) και

μια ανάκλαση σ_h στο επίπεδο P γύρω από το θ κάθετο σε αυτό το άξονα .

Έστω C μια περιστροφή κατά γωνία 2π/n γύρω από το l .
Μπορούμε πάντα να διαλέγουμε τρία βασικά διανύσματα b_1, b_2, b_3 για το L τέτοια ώστε τα b_1, b_2 να βρίσκονται στο P .
Από το πόρισμα 2.6.1 μπορούμε να διαλέξουμε b_1, b_2 στο P. Το τρίτο βασικό διάνυσμα γράφεται μοναδικά στη μορφή

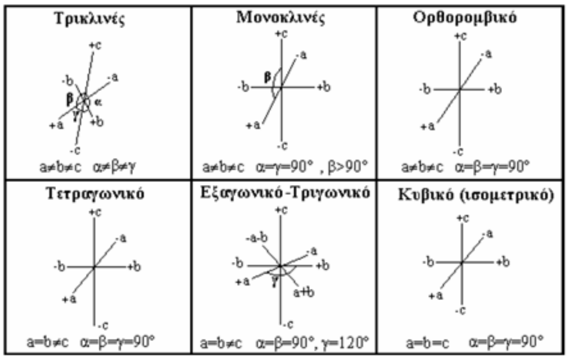
$$b_3 = u + v \quad (8.1)$$

όπου u βρίσκεται κατά μήκος του l και v είναι κατά μήκος του P.

Εάν ένας κρύσταλλος διαθέτει σχετικά λίγα στοιχεία συμμετρίας, τότε χαρακτηρίζεται από **χαμηλή συμμετρία**.
Εάν διαθέτει πολλά στοιχεία συμμετρίας, χαρακτηρίζεται από **υψηλή συμμετρία.**

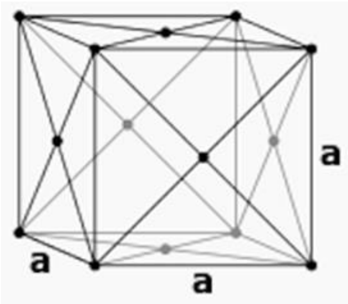
Οι κρυσταλλικές τάξεις απαιτούν συνολικά έξι συστήματα αξόνων, καθένα από τα οποία αντιπροσωπεύει ένα **κρυσταλλικό σύστημα**. Οι άξονες σε κάθε κρυσταλλικό σύστημα ονομάζονται **κρυσταλλογραφικοί άξονες**.

Ειδικότερα, για τον προσδιορισμό των κρυσταλλικών συστημάτων χρησιμοποιούνται δεξιόστροφα συστήματα τριών ή και τεσσάρων αξόνων, με τα οποία καθορίζονται οι διευθύνσεις και τα μήκη σε έναν κρύσταλλο. Ανάλογα με την ισχύουσα συμμετρία σημείου, οι διευθύνσεις μπορεί να είναι κάθετες ή όχι, μεταξύ τους, ενώ τα μοναδιαία διαστήματα πάνω σε κάθε άξονα μπορεί να είναι ή να μην είναι ίσα σε μήκος. Κάθε κρυσταλλικό σύστημα είναι ουσιαστικά ένα διαφορετικό σύστημα κρυσταλλογραφικών αξόνων.

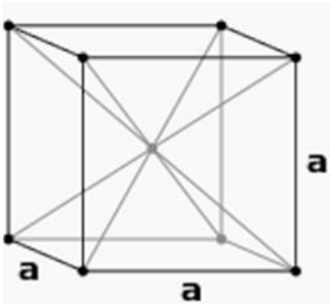


Ο παραπάνω πίνακας (πίνακας 1) μας δείχνει τα κρυσταλλικά συστήματα.

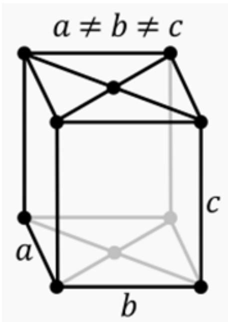
Εδροκεντρωμένο πλέγμα: Η μοναδιαία κυψελίδα απεικονίζεται με πλεγματικά σημεία στις κορυφές και τα κέντρα των εδρών.



Χωροκεντρωμένο πλέγμα: Η μοναδιαία κυψελίδα απεικονίζεται με πλεγματικά σημεία στις κορυφές και στο κέντρο της.



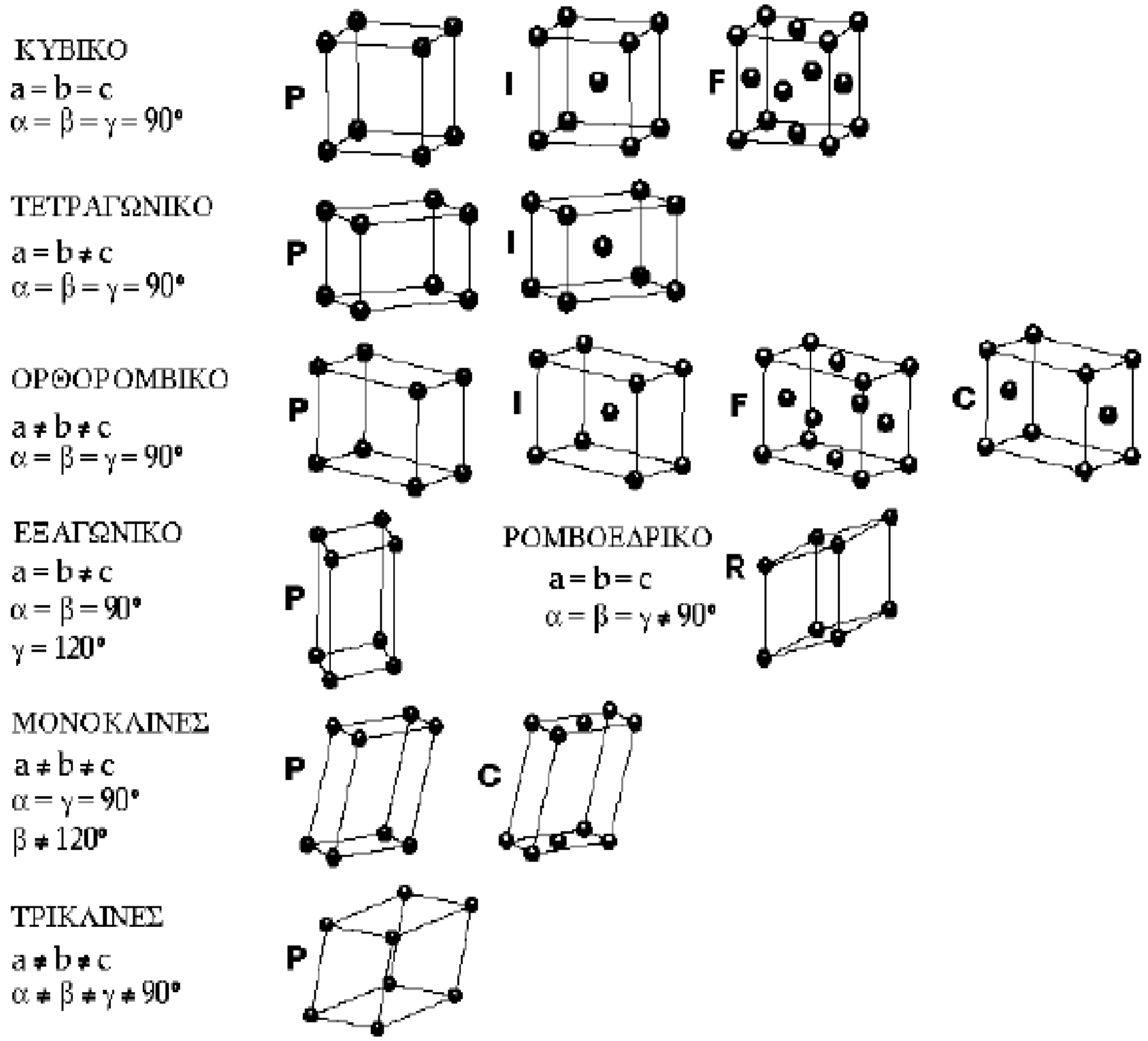
Πλευροκεντρωμένο ή βαση-κεντρωμένο πλέγμα : Η μοναδιαία κυψελίδα απεικονίζεται με πλεγματικά σημεία στις κορυφές και στα κέντρα δυο απέναντι εδρών.



Η μοναδιαία κυψελίδα είναι **κεντρωμένη,** όταν περιέχει περισσότερα από ένα πλεγματικά σημεία. Η απαρίθμηση των πλεγματικών σημείων που αντιστοιχούν σε κάθε τύπο βασικού παραλληλεπιπέδου υπακούει σε ορισμένους απλούς κανόνες, όπως για παράδειγμα κρυσταλλικές πυκνότητες.

Διαπιστώνεται, πως ο αριθμός των δυνατών διαφορετικών χωροπλεγμάτων είναι δεκατέσσερα. Καθένα από αυτά περιγράφεται με μία πρωτογενή είτε κεντρωμένη μοναδιαία κυψελίδα. Τα πλέγματα και οι αντίστοιχες κυψελίδες ονομάζονται Bravais.
Στον παρακάτω πίνακα καταγράφονται συνολικά τα κρυσταλλικά συστήματα, οι αντίστοιχες ελάχιστες συμμετρίες σημείου που απαιτούνται για να ανήκει ένας κρύσταλλος σε δεδομένο κρυσταλλικό σύστημα, καθώς και οι τύποι διαφορετικών μοναδιαίων κυψελίδων που περιλαμβάνει κάθε σύστημα.

P = θεμελιώδες, I = χωροκεντρωμένο, F = εδροκεντρωμένο, C = πλευροκεντρωμένο, R = ρομβοεδρικό



Σχήμα 2.14

2.9 Κρυσταλλική δομή

Σε αυτή την ενότητα θα δοθεί η φυσική σημασία του κρυστάλλου, για αυτό το λόγο θα περιοριστούμε σε διακριτές ομάδες σημείων για να περιγράψουμε τις συμμετρίες ενός σώματος S πεπερασμένης επέκτασης.

Σύμφωνα με την ατομική θεωρία μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το S είναι φτιαγμένο από n άτομα. ΚάθεΠληκτρολογήστε την εξίσωση εδώ. συμμετρία του S περιλαμβάνει μια μετάθεση των n ατόμων. Τα άτομα σχηματίζουν συγκροτήματα (βάσεις) που επαναλαμβάνονται περιοδικά οικοδομώντας ένα κρύσταλλο.
Αν τα άτομα δε βρίσκονται σε ένα μόνο επίπεδο τότε η συμμετρία g του S είναι μοναδικά καθορισμένη από τη μετάθεση που περιλαμβάνει. Μιας και υπάρχουν $n!$ μεταθέσεις των n ατόμων,

η πλήρης ομάδα συμμετρίας G του S πρέπει να είναι πεπερασμένης τάξης που διαιρείται με το $n!$.

Αν τα άτομα του S βρίσκονται στο επίπεδο P, αλλά όχι κατά μήκος μιας γραμμής, τότε η συμμετρία g καθορίζεται από τη μετάθεση που περιέχει και από μια πιθανή ανάκλαση P. Η τάξη της πλήρης ομάδας συμμετρίας G του S είναι διαιρέτης του $2n!$. Η τάξη της G είναι διπλάσια από τη τάξη της επίπεδης ομάδας συμμετρίας που λαμβάνεται από το S, αν θεωρηθεί ως ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$.

Αν τα άτομα του S βρίσκονται σε έναν άξονα l, τότε η ομάδα συμμετρίας δε θα είναι πλέον διακριτή. Πράγματι, αν το S αποτελείται από ένα άτομο, η πλήρης ομάδας συμμετρίας είναι η ορθογώνια ομάδα O(3).

Αν το S αποτελείται από περισσότερα από ένα άτομα κατά μήκος του l, τότε το S έχει ως πλήρη ομάδας συμμετρίας τη μη διακριτή ομάδα $C_{\dots}v$, που αποτελείται από όλες τις περιστροφές γύρω από το l.

Επιπρόσθετα, αν το S περιλαμβάνει μια ανάκλαση σ σε επίπεδο P κάθετο στο l, τότε η $D_{\dots h} = C_{\dots v} \times \{I, \sigma\}$ είναι η πλήρης ομάδα συμμετρίας του S. Αν το S δεν περιλαμβάνει μια ανάκλαση σ, τότε η $C_{\dots}v$ είναι η πλήρης ομάδα συμμετρίας του.

Είναι σημαντικό να γίνει αναφορά στη σχέση μεταξύ φυσικών κρυστάλλων, των ομάδων πλέγματος και των κρυσταλλογραφικών ομάδων σημείων. Έστω ότι οι κρύσταλλοι υπάρχουν στο χώρο. Μπορεί κάποιος να σκεφτεί ότι ο κρύσταλλος σχηματίζεται αν στοιβάξουμε μεμονωμένα αντίγραφα μιας μοναδιαίας κυψελίδας C, έτσι ώστε να γεμίσουν όλο το χώρο. Η μοναδιαία κυψελίδα περιέχει κάποια κατανομή των ατόμων. Ακόμα, όλα τα άτομα γυρίζουν γύρω από σημεία ισορροπίας του κρύσταλλου .

Δύο σημεία x και y σε ένα κρύσταλλο λέγονται **ισοδύναμα,** αν όλες οι φυσικές τους ιδιότητες των κρυστάλλων είναι ίδιες στα x και y. Ο κρύσταλλος όπως μπορεί να τον βλέπει ένας παρατηρητής στο x, είναι ίδιος όπως θα τον έβλεπε ο παρατηρητής από το y. Είναι ξεκάθαρο ότι το σημείο x είναι ισοδύναμο με τουλάχιστον όλα τα σημεία της μορφής $x + n_1b_1 + n_2b_2 + n_3b_3$, όπου n_1, n_2, n_3 είναι αυθαίρετοι ακέραιοι και b_1, b_2, b_3 είναι διανύσματα που παράγουν τη μοναδιαία κυψελίδα C.

Ορίζουμε την πλήρη ομάδα συμμετρίας ενός κρυστάλλου σαν μια υποομάδα της $E(3)$, που αποτελείται από εκείνες της Ευκλείδειες κινήσεις που απεικονίζουν κάθε σημείο x στο κρύσταλλο σε ένα σημείο y ισοδύναμο με το x. Στο μοντέλο μας η ομάδα πλέγματος

$$H = \{T_a : a = n_1b_1 + n_2b_2 + n_3b_3\} \quad (9.1)$$

είναι υποομάδα της πλήρους ομάδας συμμετρίας.

Τώρα αν ξεχάσουμε το υποθετικό μας μοντέλο και απλώς ορίσουμε ένα **ιδανικό κρύσταλλο** σαν συμπαγή (που γεμίζει όλο το χώρο), που ικανοποιεί τα αξιώματα του πλέγματος.

Υπάρχουν μη συνεπίπεδα διανύσματα b_1, b_2, b_3, τέτοια ώστε κάθε σημείο x είναι ισοδύναμο με όλα τα σημεία

$$x + n_1b_1 + n_2b_2 + n_3b_3, \qquad n_1, n_2, n_3 \text{ ακέραιοι} \qquad (9.2)\ .$$

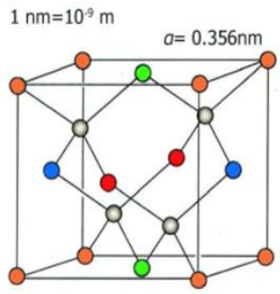
Τα αξιώματα του πλέγματος υπακούν στην απαίτηση, ότι η ομάδα πλέγματος H που δίνεται από τη σχέση (9.1) είναι ομάδα συμμετρίας του κρυστάλλου. Ακόμη απαιτούμε ότι η H να είναι η μέγιστη ομάδα συμμετρίας πλέγματος του κρυστάλλου. Αν T είναι μια μεταφορική συμμετρίας, τότε $T \in H$. Έστω G η πλήρη ομάδα συμμετρίας του κρυστάλλου. Η H είναι υποομάδα της G.
Η G καλείται **κρυσταλλική ομάδα ή ομάδα χώρου**. Μια λίστα των πιθανών κλάσεων

ισομορφισμού των ομάδων χώρου, λειτουργεί σαν λίστα των πιθανών τύπων συμμετρίας των ιδανικών κρυστάλλων. Μια τέτοια λίστα είναι των πιθανών τύπων συμμετρίας των ιδανικών κρυστάλλων είναι σημαντική, γιατί λειτουργεί σαν σύστημα ταξινόμησης στο οποίο μπορούν να ενταχθούν οι κρύσταλλοι. Επιπλέον η συμμετρία του κρυστάλλου χρησιμοποιείται στο να καθοριστούν οι φυσικές ιδιότητες του κρυστάλλου.

Ένας **πραγματικός κρύσταλλος** καθορίζεται από ένα φυσικό ή ένα κρυσταλλογράφο .

Κάθε H-τροχιά κάθε σημείου x σε ένα κρύσταλλο είναι ένα πλέγμα Bravais L. Παρόλα αυτά δεν ισχύει ότι κάθε κρύσταλλος μπορεί να αναγνωριστεί με το L. Συγκεκριμένα τα στοιχεία της ολοεδρίας F του L μπορεί να μην είναι στοιχεία της ομάδας χώρου G.

Για να γίνει αυτό αντιληπτό μπορούμε να σκεφτούμε ένα κρύσταλλο, που δημιουργείται αν ενώσουμε ίδια μοτίβα ατόμων σε κάθε κορυφή σε ένα πλέγμα L. Η μεταφορική συμμετρία καθορίζεται πλήρως από το πλέγμα. Παρόλα αυτά, η πλήρη ομάδα συμμετρίας εξαρτάται και από το μοτίβο των ατόμων σε κάθε σημείο του πλέγματος. Κάποιες από τις συμμετρίες του κρυστάλλου μπορεί να είναι ελικοειδείς μετατοπίσεις και ανακλάσεις διολίσθησης.



{Στην παραπάνω εικόνα βλέπουμε το βασικό παραλληλεπίπεδο του διαμαντιού και τις θέσεις των ατόμων του άνθρακα .}

Η ομάδα χώρου G ενός ιδανικού κρυστάλλου μπορεί να εξεταστεί με περισσότερες λεπτομέρειες. Κάθε $g \in G$ μπορεί να γραφεί μοναδικά στη μορφή :

$$g = \{\alpha, O\} = T_\alpha * O \qquad (9.3)$$

Όπου $O \in O(3)$ η ορθογώνια ομάδα γύρω από το θ. Αν $O = I$, τότε $\{\alpha, I\} = T_\alpha \in H$, το α μπορεί να γραφεί στη μορφή (9.1). Μιας και $T(3)$ είναι κανονική υποομάδα του $E(3)$

$$gT_a g^{-1} \in T(3) \cap G = H \qquad (9.4)$$

έτσι η H είναι κανονική στη G .

Έστω K να είναι το σύνολο όλων των $O \in O(3)$ που υπάρχουν στη σχέση (9.3), όταν η g δρα στα στοιχεία της G. Η σχέση

$$g_1 g_2 = \{a_1, O_1\}\ \{a_2, O_2\} = \{a_1 + O_1 a_2, O_1 O_2\}, \qquad (9.5)$$

για $g_1 g_2 \in G$ αποδεικνύει ότι K είναι μια ομάδα .
Επιπρόσθετα

$$gT_g g^{-1} = \{Ob, I\} = T_{Ob} \in H \qquad (9.6)$$

ισχύει για $b \in H$ και $g \in G$ και από τη σχέση (9.3), αποδεικνύεται ότι $O \in K$ απεικονίζει κάθε διάνυσμα πλέγματος $b \in H$ σε ένα άλλο διάνυσμα πλέγματος .
Αυτό αποδεικνύει, ότι το K είναι μια από τις 32 κρυσταλλογραφικές ομάδες σημείων. Έτσι σε κάθε ιδανικό κρύσταλλο μπορούμε να βρούμε μια μοναδική κρυσταλλογραφική ομάδα σημείων K.

Το βασικό παραλληλεπίπεδο περιέχει σχετικά λίγα άτομα. Σε ένα πραγματικό κρύσταλλο το μήκος των βασικών διανυσμάτων b_i είναι της τάξης των αποστάσεων ανάμεσα σε γειτονικά άτομα του κρυστάλλου. Αυτό το μήκος είναι τόσο μικρό, που δεν μπορεί να γίνει ορατό μέσο μακροσκοπικού παρατηρητή .

Ο μακροσκοπικός παρατηρητής βλέπει τη μεταφορική ομάδα συμμετρίας του κρυστάλλου σαν την $T(3)$, αν οι φυσικές ιδιότητες του κρυστάλλου παραμένουν αναλλοίωτες κατά από τις μεταφορές. Έτσι, όσον αφορά το μακροσκοπικό παρατηρητή κάθε κρύσταλλος ανήκει σε μια από τις 32 κρυσταλλικές κλάσεις, που καθορίζονται από τη κρυσταλλογραφική ομάδα σημείων K.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

O Leonardo da Vinci ήταν ζωγράφος, γλύπτης, αρχιτέκτονας, επιστήμονας, μουσικός, μαθηματικός, μηχανικός ,εφευρέτης, χαρτογράφος, γεωλόγος, βοτανολόγος και συγγραφέας.

Το παρακάτω σκίτσο προέρχεται από το σημειωματάριο του da Vinci.
O Leonardo ήθελε να καθορίσει όλες τις πιθανές συμμετρίες ενός κτιρίου.

3.1 *Το θεώρημα του Leonardo*

Ορισμός 3.1.1 : Επίπεδο σχήμα είναι ένα μη κενό υποσύνολο του επιπέδου.

Ορισμός 3.1.2 : Συμμετρίες επίπεδων σχημάτων: Έστω F ένα επίπεδο σχήμα. Μια ισομετρία α είναι συμμετρία του F, αν και μόνο αν, το α σταθεροποιεί το F.

Θεώρημα 3.1.3 :Έστω F επίπεδο σχήμα. Το σύνολο όλων των συμμετριών του F είναι μια ομάδα, που καλείται ομάδα συμμετρίας του F.

<u>Απόδειξη</u>

Έστω F ένα επίπεδο σχήμα και $S=\{\alpha$: α είναι συμμετρία του $F\}$.

- <u>Το ταυτοτικό</u> $\iota \in S$,το σύνολο S δε είναι κενό υποσύνολο του I. Το σύνολο I είναι το σύνολο όλων των ισομετριών μιας ομάδας.
- <u>Κλειστότητα</u> :Έστω $\alpha, \beta \in S$ η σύνθεση των ισομετριών είναι ισομετρία .Έτσι ελέγχουμε αν $\alpha * \beta$ σταθεροποιεί το F. Αλλά αφού $\alpha, \beta \in S$ έχουμε $(\alpha * \beta)(F) = \alpha(\beta(F)) = \alpha(F) = F$.
- <u>Αντίστροφος</u>: Έστω $\alpha \in S$,γνωρίζουμε ότι $\alpha^{-1} \in I$.Πρέπει να δείξουμε ότι το α^{-1} σταθεροποιεί το F. Αλλά $\alpha^{-1}(F) = \alpha^{-1}(\alpha(F))=(\alpha^{-1} * \alpha)(F)$=F έτσι επίσης το α^{-1} σταθεροποιεί τη F. Έτσι $\alpha^{-1} \in S$ όποτε $a \in S$.

Έτσι λοιπόν αποδεικνύεται ότι η ομάδα συμμετρίας ενός επίπεδου σχήματος είναι υποομάδα της ομάδας ισομετριών .

Λήμμα 3.1.1 : Μια πεπερασμένη ομάδα συμμετρίας δεν μπορεί να περιέχει μια μεταφορά ή μια ανάκλαση διολίσθησης

<u>Απόδειξη</u>

Προφανώς όταν αναφερόμαστε σε μεταφορά δεν αναφερόμαστε στην ταυτοτική. Γνωρίζουμε ότι κάθε ομάδα ισομετριών περιέχει το ταυτοτικό στοιχείο. Αν η ομάδα συμμετρίας περιέχει μια μεταφορά T , τότε η ομάδα θα περιέχει επίσης τις συνθέσεις: $T \circ T$, $T \circ T \circ T$, $T \circ T \circ T \circ T$ και τα λοιπά. Αυτές οι ισομετρίες δεν μπορούν να είναι ίδιες, γιατί μεταφέρονται σε διαφορετικές αποστάσεις. Μιας και είναι απείρως πολλές ισομετρίες δεν μπορούν να ενταχθούν σε μια πεπερασμένη ομάδα.

Αν μια ομάδα συμμετρίας περιέχει μια ανάκλαση διολίσθησης S, τότε η ομάδα θα πρέπει επίσης να περιέχει τη μεταφορά $T=S\circ S$. Όπως προαναφέρθηκε οι μεταφορές δεν ανήκουν σε πεπερασμένες ομάδες συμμετρίας. Άρα, ούτε οι ανακλάσεις διολίσθησης ανήκουν σε πεπερασμένες ομάδας συμμετρίας.

Λήμμα 3.1.2 : Σε κάθε άπειρη ομάδα συμμετρίας, είτε κάθε ισομετρία είναι ευθεία, είτε υπάρχει ένας ίσος αριθμός από ευθείες και αντίθετες ισομετρίες .

<u>Απόδειξη</u>

Ας ονομάσουμε τις ευθείς ισομετρίες $R_{1,}R_{,}\dots, R_m$. Αν υπάρχει έστω μια αντίθετη ισομετρία, τότε ονομάζουμε τις αντίθετες ισομετρίες $M_{1,}M_{2,\dots}, M_n$. Έτσι η ομάδα συμμετρίας μας έχει m ευθείες ισομετρίες και n αντίθετες ισομετρίες. Ο στόχος μας είναι να δείξουμε ότι $m = n$.

Έστω ότι M είναι μια αντίθετη ισομετρία. Τότε $M * R_{1,} M * R_2, \dots, M * R_m$ είναι όλες αντίθετες ισομετρίες, αφού είναι συνθέσεις αντίθετων και ευθειών ισομετριών . Επιπλέον, αυτές θα πρέπει να είναι διακριτές από την ιδιότητα sudoku των ομάδων. Έτσι $\{M * R_{1,} M * R_{2,} \dots, M * R_m\}$ είναι υποσύνολο του $\{M_{1,} M_{2,} \dots, M_n\}$ και συνεπάγεται ότι $m \leq n$. (1)

Αντίστοιχα, υποθέτουμε ότι M είναι μια από τις αντίθετες ισομετρίες και $M * M_{1,} M * M_2, .., M * M_m$ είναι όλες ευθείες ισομετρίες, επειδή είναι σύνθεση δύο αντίθετων ισομετριών. Από την ιδιότητα sudoku των ομάδων πρέπει να είναι διακριτές. Έτσι το $\{M * M_1, M * M_2, \dots, M * M_n\}$ είναι υποσύνολο του $\{R_{1,} R_{2,} \dots, R_m\}$, άρα $n \leq m$. (2)

Από (1) και (2) προκύπτει ότι $m = n$.

Λήμμα 3.1.3: Σε μια πεπερασμένη ομάδα συμμετρίας, κάθε περιστροφή πρέπει να έχει το ίδιο κέντρο.

<u>Απόδειξη</u>

Υποθέτουμε ότι οι πεπερασμένες ομάδες έχουν περιστροφή R_1 με κέντρο O_1 και περιστροφή R_2 με κέντρο O_2 .Ο στόχος μας είναι να δείξουμε ότι $O_1 = O_2$. Θεωρούμε τη σύνθεση $R_2^{-1} * R_1^{-1} * R_2 * R_1$. Λόγο του τρόπου που οι περιστροφές συνθέτονται, η σύνθεση θα είναι μια μεταφορά. Αλλά γνωρίζουμε ότι η ομάδα μας δεν περιέχει μεταφορές που δεν είναι ταυτοτικές, άρα η σύνθεση $R_2^{-1} * R_1^{-1} * R_2 * R_1$ πρέπει να είναι ταυτοτική.

$R_2^{-1} * R_1^{-1} * R_2 * R_1(O_1)$=$O_1$από το οποίο προκύπτει ότι $R_2^{-1} * R_1^{-1} * R_2(O_1) = O_1$

Αν πολλαπλασιάσουμε με το R_2 : $R_2 * R_2^{-1} * R_1^{-1} * R_2(O_1) = R_2(O_1)$

η σχέση απλοποιείται $R_1^{-1} * R_2(O_1) = R_2(O_1)$

Τώρα, πολλαπλασιάζοντας με R_1, προκύπτει $R_1 * R_2(O_1) = R_2(O_1)$.

Ένας άλλους τρόπος να εκφράσουμε το παραπάνω, είναι ότι το $R_2(O_1)$ είναι ένα σταθερό σημείο της R_1. Μιας και η R_1είναι περιστροφή γνωρίζουμε ότι έχει ένα μοναδικό σταθερό σημείο το οποίο μπορούμε να ονομάσουμε O_1. Έτσι, $R_2(O_1)$=O_1, δηλαδή το O_1 είναι ένα σταθερό σημείο για το R_2. Μιας και η R_2 είναι περιστροφή, γνωρίζουμε ότι θα έχει ένα μοναδικό σταθερό σημείο, το οποίο καλούμε O_2. Συνεπώς καταλήγουμε στο ότι O_1=O_2.

Λήμμα 3.1.4 : Σε μια πεπερασμένη ομάδα συμμετρίας, οι κατοπτρικοί άξονες διέρχονται από το ίδιο σημείο.

<u>Απόδειξη</u>

Αν υπάρχει μόνο ένας κατοπτρικός άξονας σε μια πεπερασμένη ομάδα συμμετρίας, τότε το ζητούμενο έχει αποδειχτεί. Αν υπάρχουν τουλάχιστον δύο κατοπτρικοί άξονες, τότε μπορούμε να συνθέσουμε τις αντίστοιχες ανακλάσεις ώστε να παράγουν περιστροφή. Από το προηγούμενο λήμμα γνωρίζουμε ότι όλες οι περιστροφές έχουν το ίδιο κέντρο O.

Τώρα υποθέτουμε ότι δύο κατοπτρικοί άξονες τέμνονται στο σημείο P. Τότε η σύνθεσή αντίστοιχων ανακλάσεων είναι μια περιστροφή με κέντρο το P. Η περιστροφή περιέχεται στην πεπερασμένη ομάδα συμμετρίας, άρα έχει ως κέντρο το O. Έτσι, οι δύο κατοπτρικοί άξονες τέμνονται στο O.

Λήμμα 3.1.5: Σε μια πεπερασμένη ομάδα συμμετρίας οι περιστροφές είναι όλες της μορφής $I, R, R^{2,}R^{3,}..., R^{n-1}$ για κάποια περιστροφή R.

Θεώρημα 3.1.6 : Το θεώρημα του Leonardo

Κάθε πεπερασμένη ομάδα ισομετριών είναι ή η C_n ή η D_n για κάποιο $n \geq 1$.

<u>Απόδειξη</u>

- Έστω μια πεπερασμένη ομάδα συμμετρίας, από το λήμμα που αποδείξαμε νωρίτερα, γνωρίζουμε ότι στην ομάδα δεν περιέχονται μεταφορές ή ανακλάσεις διολίσθησης. Με άλλα λόγια κάθε στοιχείο της πεπερασμένης ομάδας συμμετρίας πρέπει να είναι ή περιστροφή ή ανάκλαση.
- Αν υπάρχουν μόνο περιστροφές, τότε το τελευταίο λήμμα μας εξασφαλίζει, ότι η πεπερασμένη ομάδα συμμετρίας πρέπει να είναι η C_n για κάποιο θετικό ακέραιο n.
- Αν υπάρχουν μόνο ανακλάσεις, όπως η ταυτοτική, τότε η πεπερασμένη ομάδα συμμετρίας είναι η D_1, γιατί πρέπει να υπάρχει ίσος αριθμός από ευθείες και αντίθετες ισομετρίες .
- Αν στην πεπερασμένη ομάδα συμμετρίας περιέχονται περιστροφές και ανακλάσεις, τότε το πλήθος τους θα είναι ίσο. Σύμφωνα με το λήμμα 3.1.3, όλες οι περιστροφές πρέπει να έχουν το ίδιο κέντρο και από το λήμμα 3.1.4 όλοι οι κατοπτρικοί άξονες πρέπει να διέρχονται από το O.
- Γνωρίζουμε ότι, όλες οι περιστροφές είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες. Έτσι, οι περιστροφές γίνονται κατά γωνίες 0°, $\frac{360}{n}$°, $2 \times \frac{360}{n}$°,...,$(n-1) \times \frac{360}{n}$° για κάποιο θετικό ακέραιο n. Αν οι κατοπτρισμοί δεν ήταν ομοιόμορφα κατανεμημένοι, τότε η σύνθεση των ανακλάσεων θα παρήγαγε περιστροφή με γωνία περιστροφής μικρότερη από $\frac{360}{n}$° . Αντίφαση.
- Έτσι συμπεραίνουμε ότι, οι περιστροφές είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες με κέντρο O και οι κατοπτρισμοί είναι ομοιόμορφα κατανεμημένοι και οι κατοπτρικοί άξονες διέρχονται από το O. Άρα, η πεπερασμένη ομάδα συμμετρίας είναι η διεδρική .

3.2 Ομάδα wallpaper και οι 17 ομάδες συμμετρίας στο επίπεδο

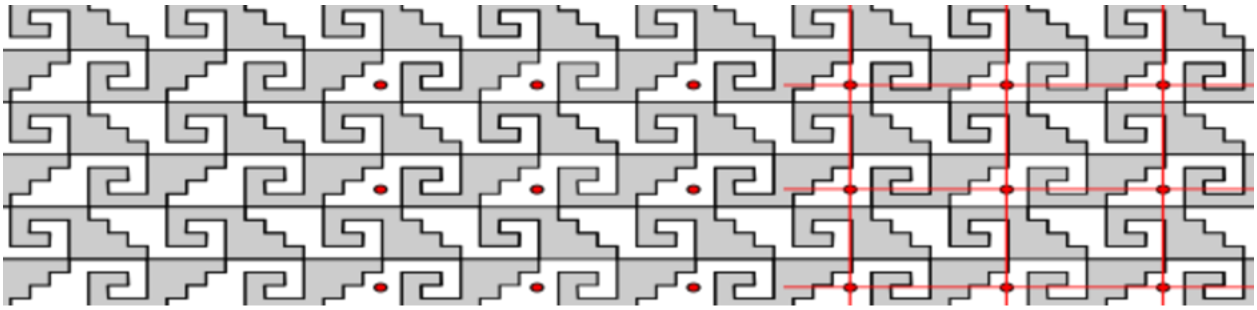
Κατάλογος ταπετσαριών του Remondini-Bassano στην Ιταλία του 18ου αιώνα.

Η ομάδα wallpaper ή ομάδα ταπετσαρίας ή επίπεδη ομάδα συμμετρίας ή επίπεδη κρυσταλλογραφική ομάδα είναι μία μαθηματική ταξινόμηση ενός επαναλαμβανόμενου μοτίβου 2 διαστάσεων, με βάση τις συμμετρίες στο μοτίβο. Τέτοια μοτίβα χρησιμοποιούνται συχνά στην αρχιτεκτονική και στις τέχνες διακόσμησης.

Ένα μοτίβο σε μια ομάδα ταπετσαρίας είναι ένα σχήμα του επιπέδου που έχει συμμετρίες μεταφοράς σε περισσότερες από μια κατευθύνσεις. Το όνομα σχετίζεται με τις πραγματικές ταπετσαρίες, οι οποίες πρέπει να επαναλαμβάνονται δεξιά και αριστερά έτσι ώστε να μπορούν να τοποθετηθούν σε λωρίδες. Ακόμα οι ταπετσαρίες πρέπει να επαναλαμβάνονται κάθετα έτσι ώστε πολλαπλές λωρίδες να μπορούν να κοπούν από το ίδιο ρολό.

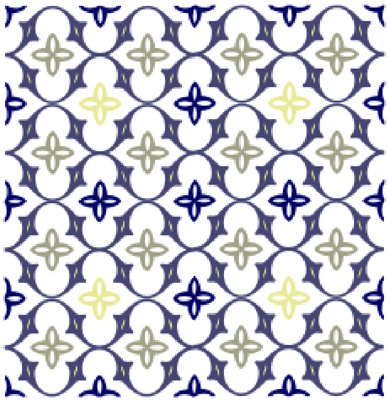
Τα μοτίβα ταπετσαρίας μπορούν να καλύψουν μέσω μεταφορικής συμμετρίας ένα ολόκληρο επίπεδο. Το πλέγμα της ταπετσαρίας είναι η συλλογή όλων των εικόνων των σημείων που έχουν μεταφερθεί. Όταν αναζητούμε το πλέγμα της ομάδας ταπετσαρίας διαλέγουμε ένα σημείο στο σχήμα και μετά μαρκάρουμε όλες τις μεταφορές αυτού του σημείου. Σε αυτή τη διαδικασία δε μαρκάρουμε τα σημεία των ανακλάσεων και των περιστροφών αυτού του σημείου.

Ακολουθεί ένα μοτίβο ταπετσαρίας που χρησιμοποιείται συχνά σε κολομβιανά υφάσματα. Έχουν σημειωθεί τα σημεία του πλέγματος και παρατηρούμε ότι σχηματίζουν ένα ορθογώνιο πλέγμα.

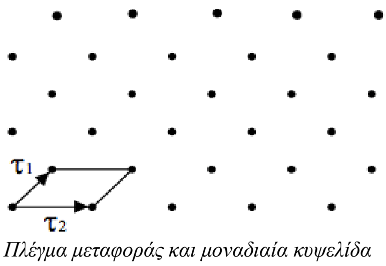


Ορισμός 3.2.1 : Δύο μεταφορές είναι **ανεξάρτητες,** αν και μόνο αν, τα αντίστοιχα διανύσματά διολίσθησής ανάκλασής τους είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Ορισμός 3.2.2 :Ένα **μοτίβο ταπετσαρίας** είναι ένα επίπεδο σχήμα W με ανεξάρτητες συμμετρίες μεταφορών τ_1 και τ_2 που ικανοποιούν την ακόλουθη ιδιότητα:
Για δύο οποιεσδήποτε συμμετρίες μεταφοράς τ υπάρχουν ακέραιοι i και j τέτοιοι ώστε $\tau = \tau_2^j * \tau_1^i$.
Οι μεταφορές τ_1 και τ_2 καλούνται **βασικές μεταφορές**. Η ομάδα συμμετρίας ενός μοτίβου wallpaper καλείται **ομάδα ταπετσαρίας**.



Ορισμός 3.2.3 : Έστω W ένα μοτίβο ταπετσαρίας με βασικές μεταφορές τ_1 και τ_2. Δοθέντος ενός σημείου A, έστω $\tau_1(A) = B, \tau_2(B) = C$ και $\tau_2(A) = D$. Η μοναδιαία κυψελίδα του W ως προς το A ,τ_1 και τ_2 είναι η επίπεδη περιοχή, φραγμένη από το παραλληλόγραμμο ABCD. **Το πλέγμα μεταφοράς** του W καθορισμένο από το A, είναι το σύνολο των $\{\tau_2^n * \tau_1^m(A): m, n \in \mathbb{Z}\}$. Αυτό το πλέγμα είναι τετράγωνο, τρίγωνο, ρομβοειδές, ή εξαγωνικό, αν και μόνο αν, η μοναδιαία κυψελίδα του W ως προς το A ,τ_1και τ_2 είναι τετράγωνο, τρίγωνο , ρόμβος ή εξάγωνο.

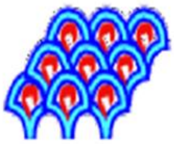


Πλέγμα μεταφοράς και μοναδιαία κυψελίδα

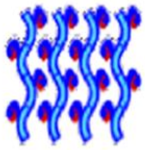
Ορισμός 3.2.4 : Έστω W ένα μοτίβο ταπετσαρίας. Ένα σημείο P είναι το **n-κέντρο** του W, αν και μόνο αν, η ομάδα συμμετρίας W είναι η C_n με $n \geq 1$, με κέντρο το P.

Υπάρχουν 17 ομάδες συμμετρίας, σύμφωνα με τις αποδείξεις του Evgraf Fedorov το 1891 και του George Plya. Αυτές οι αποδείξεις μας έδειξαν ότι υπάρχουν μόνο 17 δυνατά μοτίβα που δημιουργούν τις παρακάτω ομάδες συμμετρίας .

p1

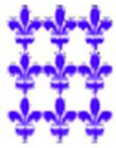


pg



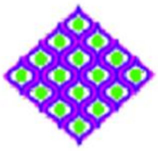
pgg

pm



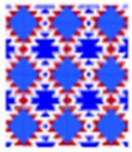
cm

cmm



pmg

pmm



p2

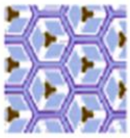
p4

p4m

p4g

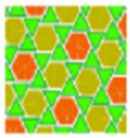
p3

p3m1



p31m

p6



p6m

LATTICE UNITS WITH SYMMETRIES OF PERIODIC PLANE PATTERNS

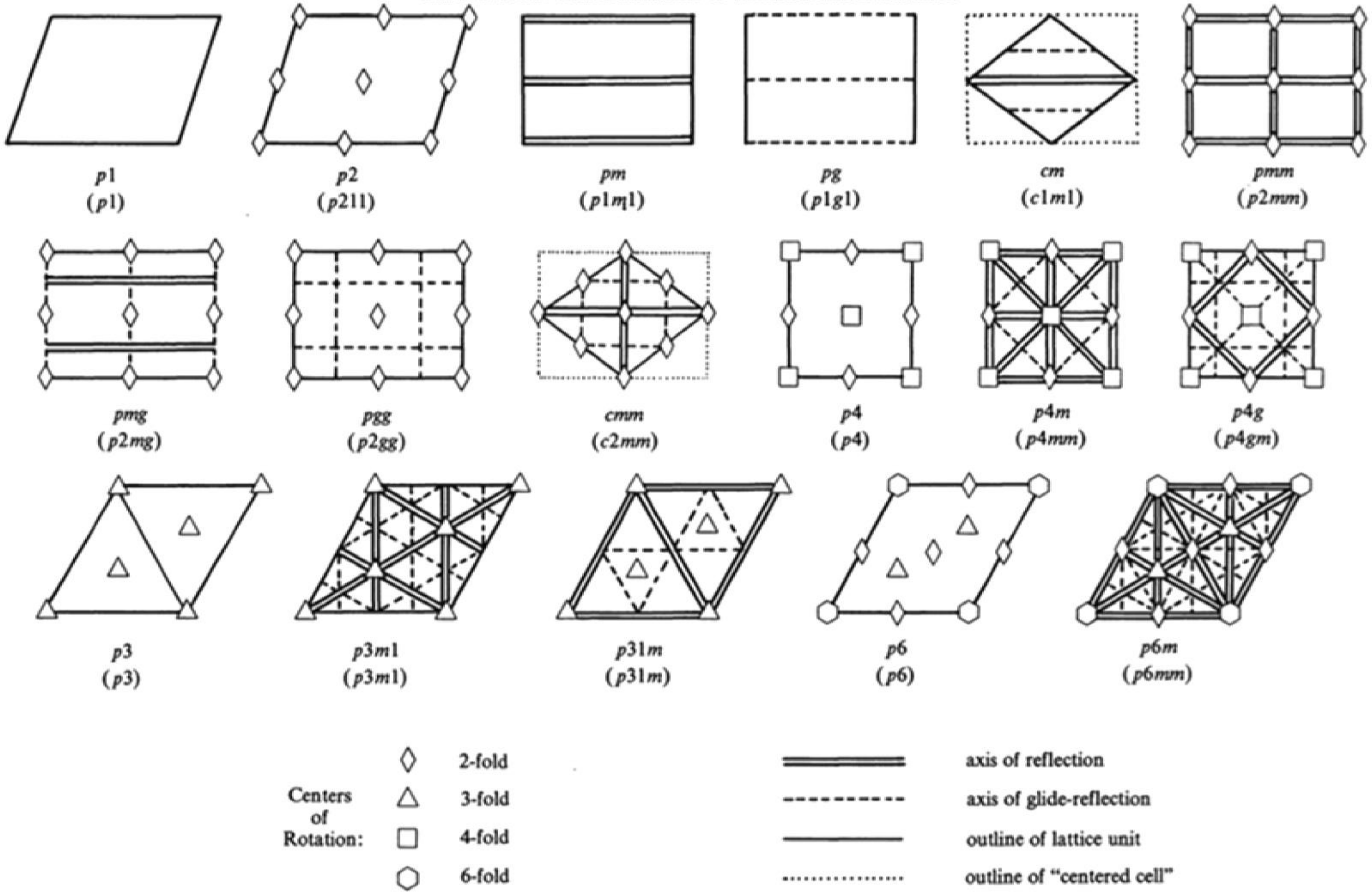
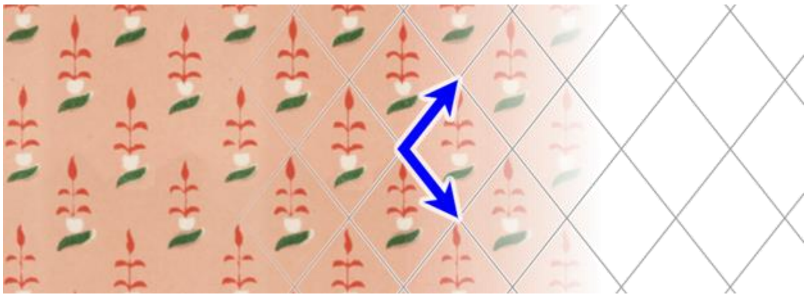
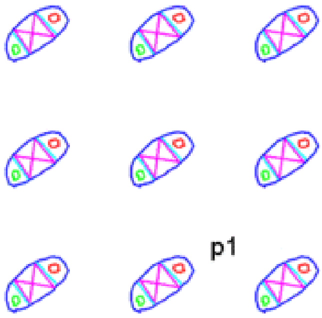


CHART 2. International notation identifies the seventeen two-dimensional crystallographic groups. The short form is given first, with the full notation in parentheses.

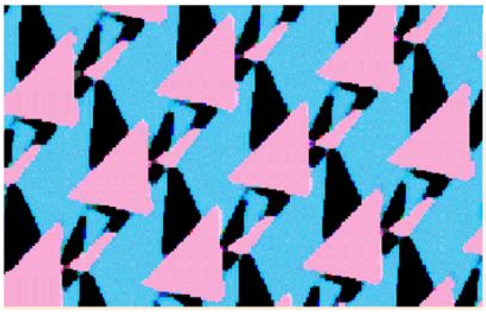
Ομάδα συμμετρίας 1: p1

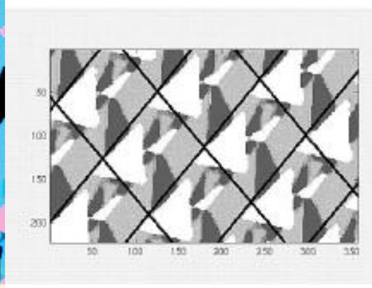


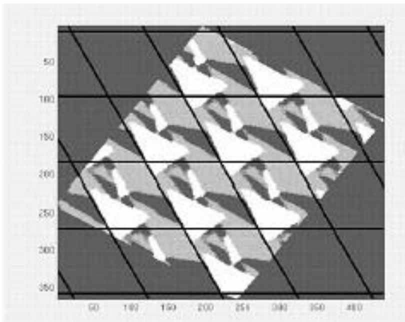
Η πρώτη ομάδα συμμετρίας δημιουργείται μόνο από μεταφορές. Το πλέγμα της είναι ένα παραλληλόγραμμο και οι άξονες της παράλληλης μεταφοράς μπορεί να είναι κεκλιμένοι κατά μια γωνία. Αυτή η ομάδα έχει το πιο απλό μοτίβο που το καταλαβαίνουμε μόνο κοιτώντας. Δεν περιέχει περιστροφές ή ανακλάσεις.



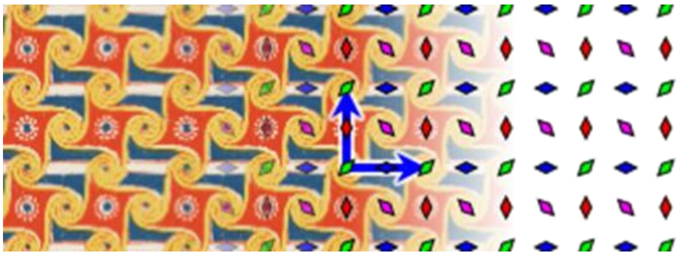
Στο παρακάτω παράδειγμά μπορούμε να καταλάβουμε με μεγαλύτερη ευκολία το πλέγμα της ομάδας, το οποίο είναι παραλληλόγραμμο.



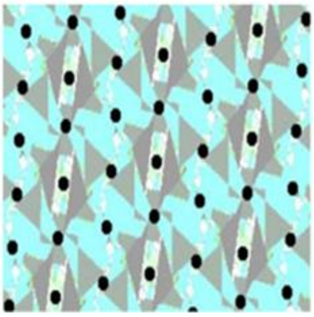


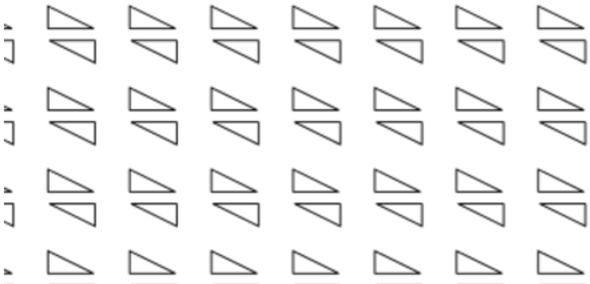


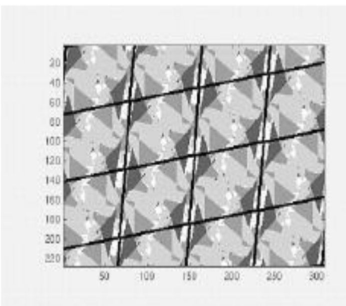
Ομάδα συμμετρίας 2: p2

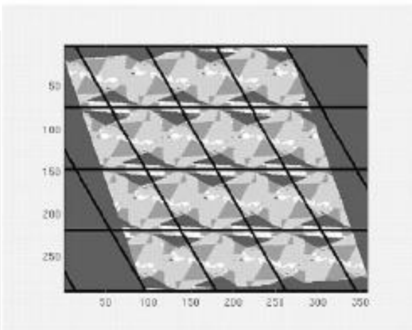


Η ομάδα p2 δημιουργείται από μεταφορές και περιστροφές .Δεν περιλαμβάνονται ανακλάσεις ή ανακλάσεις διολίσθησης. Το πλέγμα της είναι ένα παραλληλόγραμμο και οι άξονες της παράλληλης μεταφοράς μπορεί να είναι κεκλιμένοι κατά οποιαδήποτε γωνία. Η εικόνα με τις κουκίδες μας δείχνει τα σταθερά σημεία των μισών στροφών. Οι περιστροφές των 180 μοιρών αναφέρονται ως μισές στροφές .

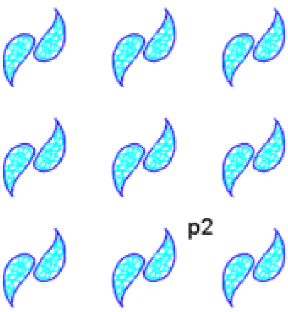








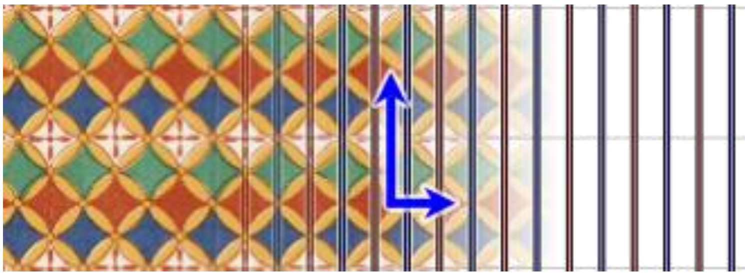
Κάποια ακόμα παραδείγματα από την ομάδα p2 είναι τα ακόλουθα.



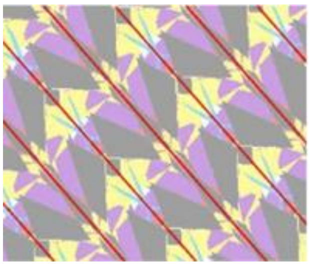
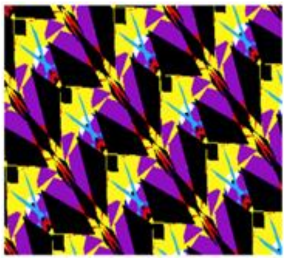
 

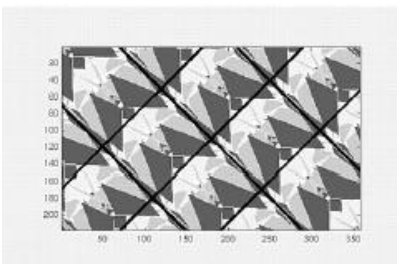
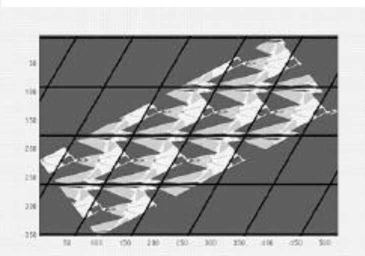
Η τελευταία εικόνα είναι αιγυπτιακό σχέδιο. Οι οριζόντιες γραμμές των λουλουδίων και των κίτρινων κυμάτων δε μας επιτρέπουν να έχουμε περιστροφές τάξης μεγαλύτερης του 2. Και τα κίτρινα κύματα μπορούν να περιστραφούν μόνο ωρολογιακά γύρω από το μπλε κέντρο.

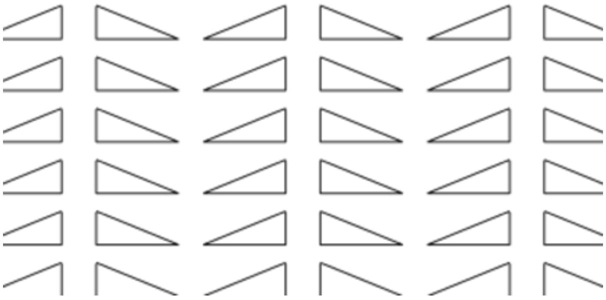
Ομάδα συμμετρίας 3: (pm)



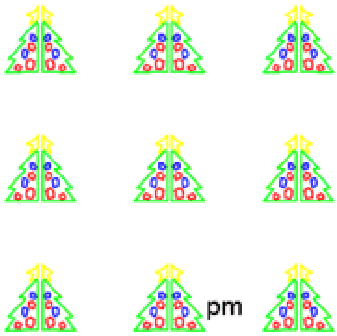
Η ομάδα αυτή αποτελείται από ανακλάσεις και μεταφορές. Το πλέγμα αυτής της ομάδας είναι ορθογώνιο. Οι κόκκινες γραμμές αντιπροσωπεύουν τους άξονες των ανακλάσεων . Οι άξονες των ανακλάσεων είναι παράλληλοι μεταξύ τους και κάθετοι στους άξονες μεταφοράς.

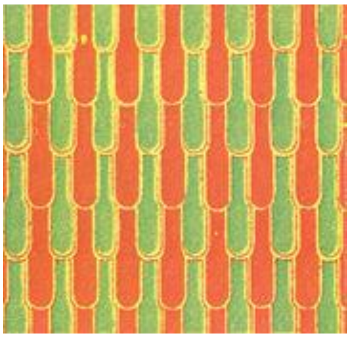
 

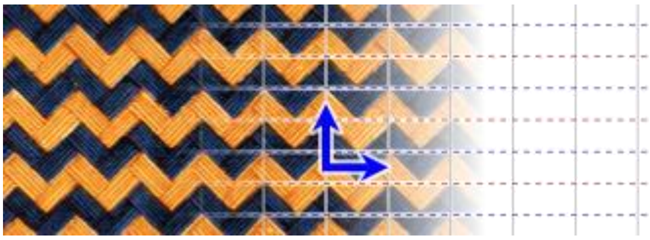


Κάποια άλλα παραδείγματα της ομάδας pm είναι τα ακόλουθα :

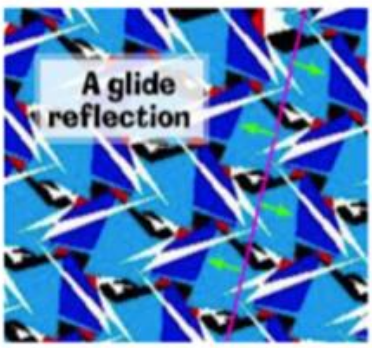


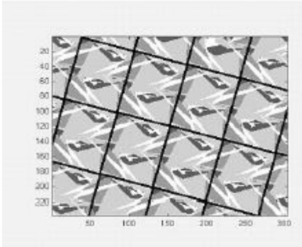


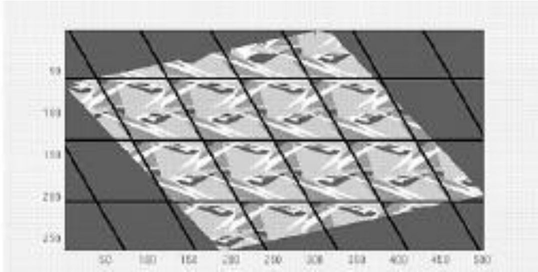
Ομάδα συμμετρίας 4 :(pg)



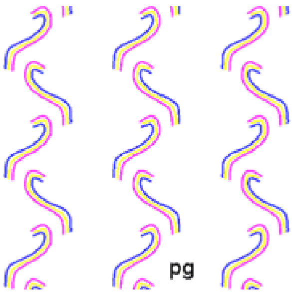
Αυτή η ομάδα συμμετρίας περιλαμβάνει ανακλάσεις διολίσθησης και μεταφορές. Οι ανακλάσεις διολίσθησης είναι δύσκολο να διακριθούν. Οι άξονες των ανακλάσεων διολίσθησης είναι παράλληλοι μεταξύ τους και κάθετοι στους άξονες της παράλληλης μεταφοράς. Το πλέγμα είναι ορθογώνιο. Στην μεσαία εικόνα παρακάτω βλέπουμε ότι οι άξονες των ανακλάσεων διολίσθησης συμβολίζονται με πράσινες γραμμές.

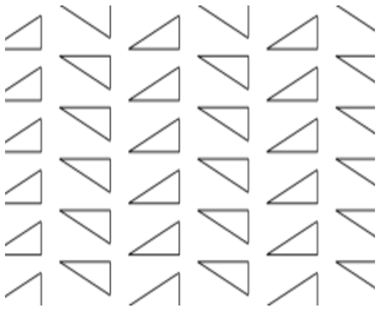




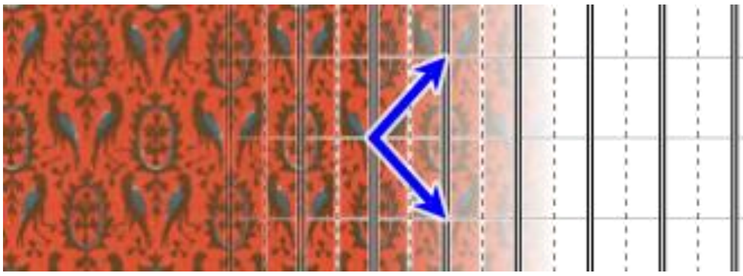


Παραδείγματα της ομάδας συμμετρίας pg είναι και τα ακόλουθα

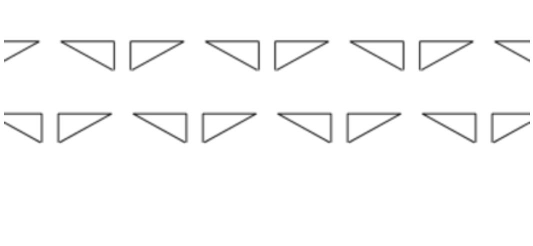


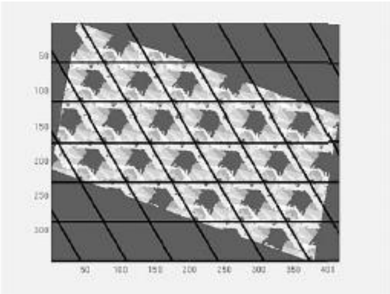


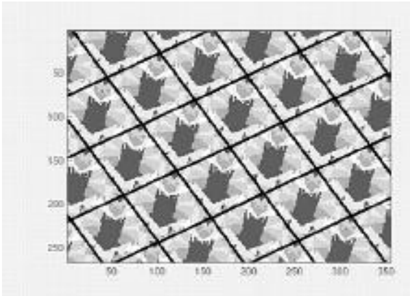
Ομάδα συμμετρίας 5 (cm)



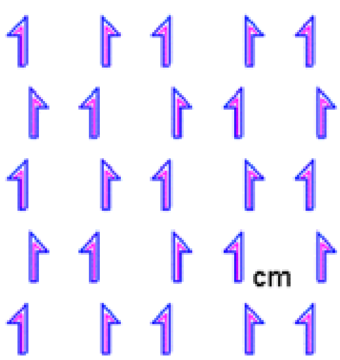
Αυτή η ομάδα συμμετρίας αποτελείται από ανακλάσεις και ανακλάσεις διολίσθησης με παράλληλους άξονες και μεταφορές. Οι άξονες μεταφοράς μπορεί να είναι κεκλιμένοι κατά οποιαδήποτε γωνία. Οι άξονες των ανακλάσεων διχοτομούν τη γωνία που σχηματίζουν οι άξονες μεταφοράς. Το πλέγμα είναι ρόμβος. Οι κόκκινες γραμμές είναι οι άξονες των ανακλάσεων και οι πράσινες γραμμές είναι οι άξονες των ανακλάσεων διολίσθησης. Σε αυτή την ομάδα δεν περιλαμβάνονται περιστροφές.



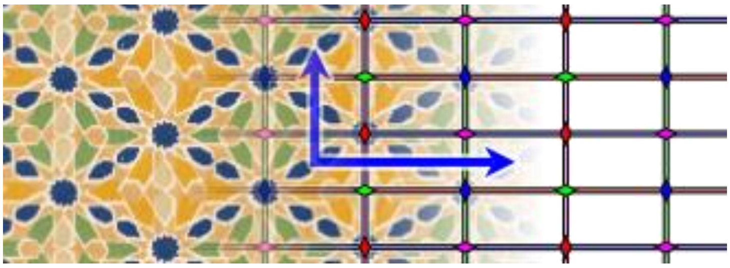




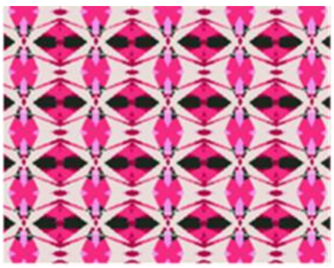
Παραδείγματα της ομάδας cm :

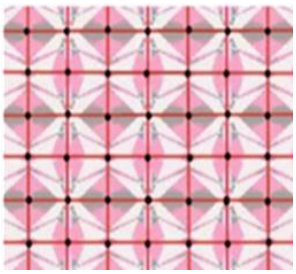


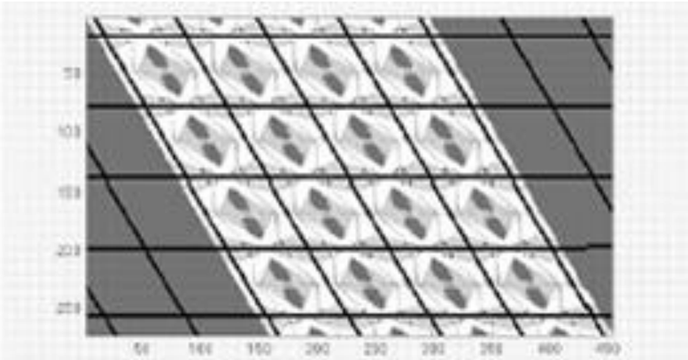
Ομάδα συμμετρίας 6 :(pmm)



Αυτή η ομάδα αποτελείται από ανακλάσεις, οι άξονες των οποίων είναι κάθετοι και περιστροφές μισής στροφής. Τα κέντρα των περιστροφών βρίσκονται στα σημεία όπου οι άξονες των ανακλάσεων τέμνονται. Το πλέγμα είναι ορθογώνιο. Οι κόκκινες γραμμές αντιπροσωπεύουν τους άξονες των ανακλάσεων και οι κουκκίδες τα σταθερά σημεία των μισών στροφών .

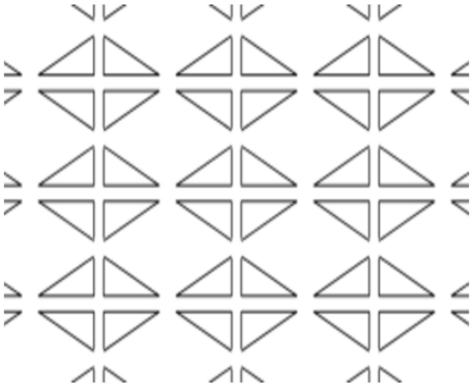




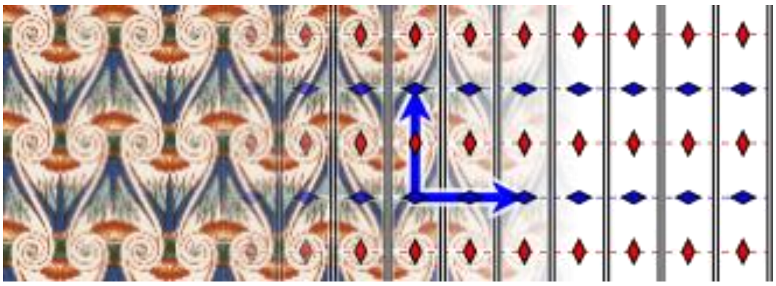


Τρία ακόμα παραδείγματα είναι τα ακόλουθα :

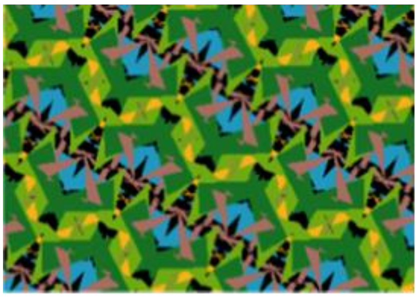


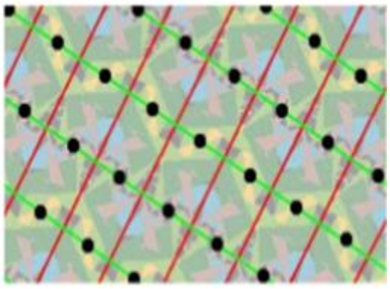


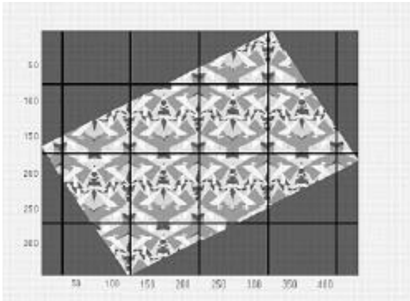
Ομάδα συμμετρίας 7 :(pmg)

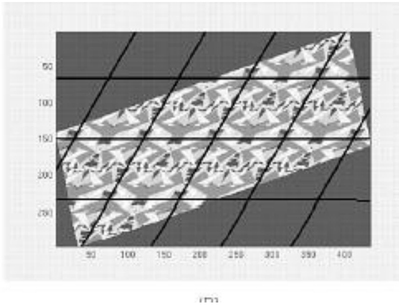


Αυτή η ομάδα περιλαμβάνει ανακλάσεις με παράλληλους άξονες, ανακλάσεις διολίσθησης με παράλληλους άξονες όπως και μεταφορές και περιστροφές μισών στροφών. Οι άξονες των ανακλάσεων διολίσθησης είναι κάθετοι με τους άξονες των ανακλάσεων. Τα κέντρα των περιστροφών βρίσκονται πάνω στους άξονες των ανακλάσεων διολίσθησης. Το πλέγμα είναι ορθογώνιο. Οι κόκκινες γραμμές είναι οι άξονες των ανακλάσεων και οι πράσινες γραμμές είναι οι άξονες των ανακλάσεων διολίσθησης, οι μαύρες κουκκίδες είναι σταθερά σημεία των μισών στροφών .

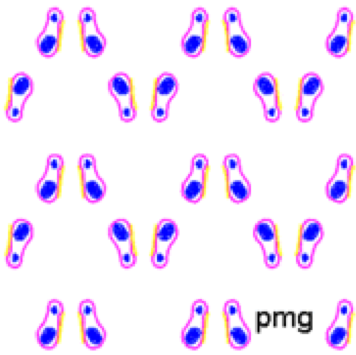


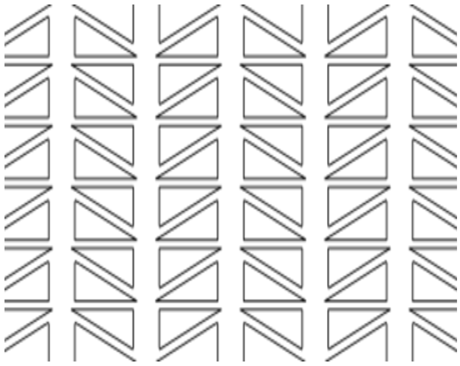




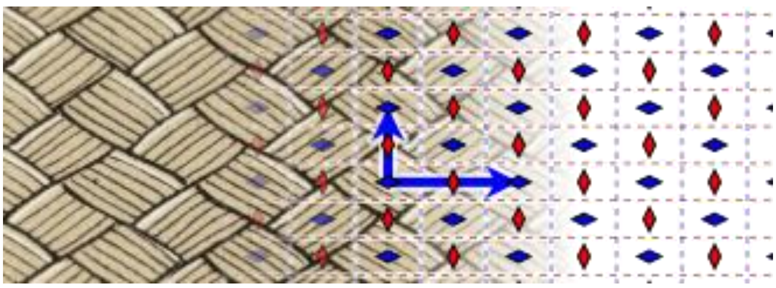


Στην ομάδα pmg ανήκουν και τα παρακάτω παραδείγματα :

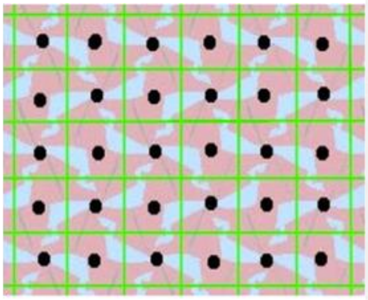


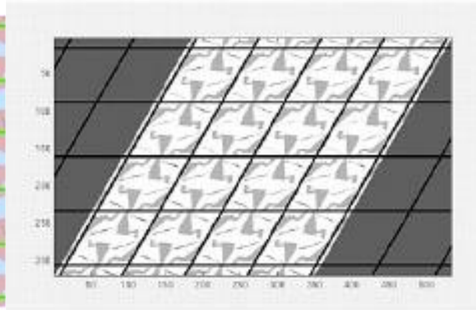


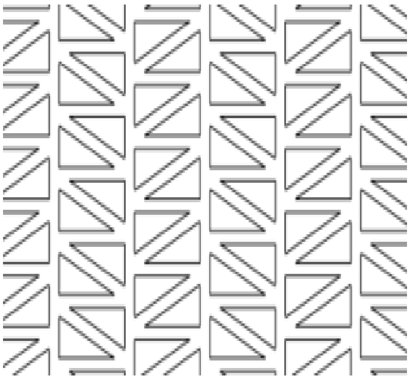
Ομάδα συμμετρίας 8 :(pgg)



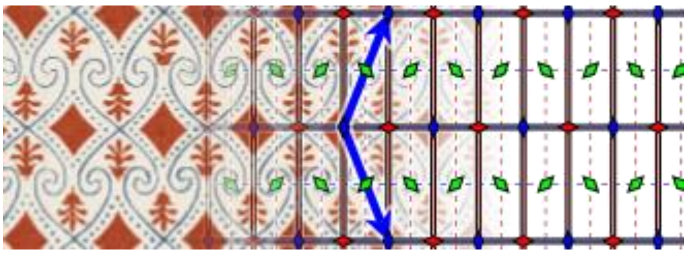
Αυτή η ομάδα συμμετρίας αποτελείται από ανακλάσεις διολίσθησης, μισές στροφές και μεταφορές. Το πλέγμα είναι ορθογώνιο .Οι άξονες των ανακλάσεων διολίσθησης είναι κάθετοι. Τα κέντρα των περιστροφών δε βρίσκονται στους άξονες των ανακλάσεων διολίσθησης.



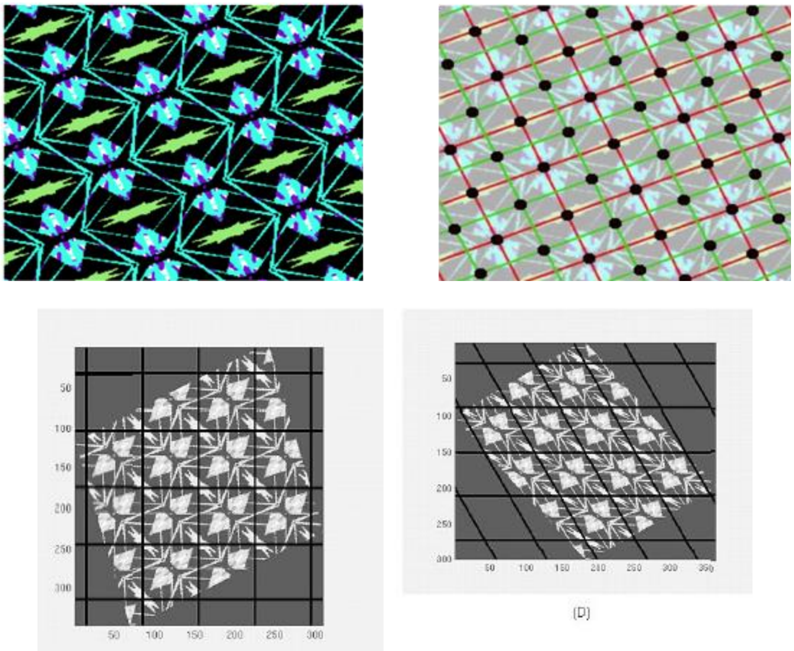




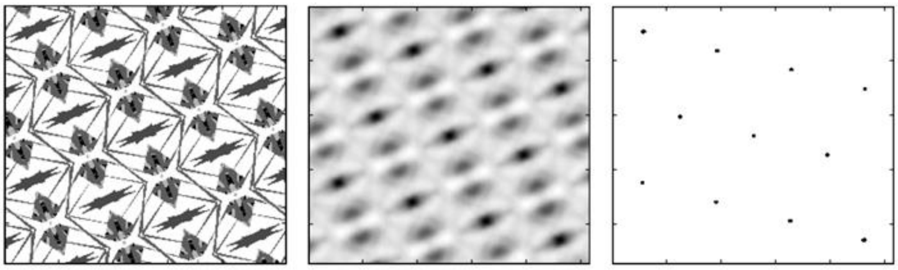
Ομάδα συμμετρίας 9: (cmm)



Η ομάδα αυτή περιλαμβάνει ανακλάσεις με άξονες κάθετους και περιστροφές των 180 μοιρών. Το πλέγμα είναι ρόμβος. Τα κέντρα όλων των περιστροφών δε βρίσκονται πάνω στους άξονες των ανακλάσεων. Η παρακάτω εικόνα μας δείχνει τα σημεία της μισής στροφής και τους άξονες των ανακλάσεων.

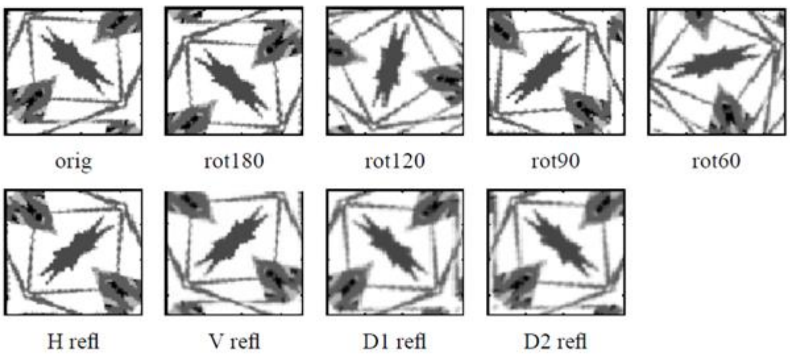


Πιο αναλυτικά

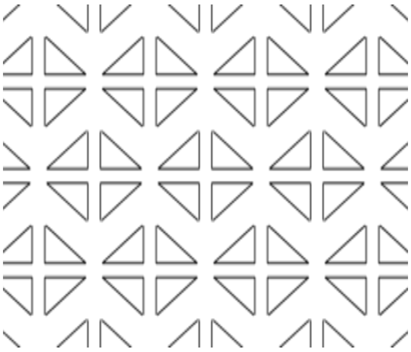


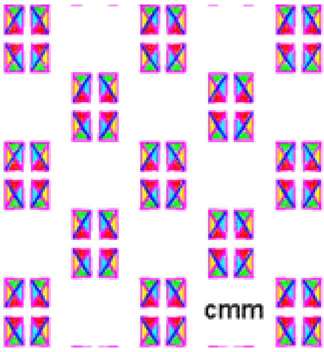
Μέσω των παραπάνω εικόνων μπορούμε να διακρίνουμε εμφανώς τα σημεία του πλέγματος.

Συνεχίζοντας την ανάλυσή μας απομονώνουμε μια μοναδιαία κυψελίδα για να καταλάβουμε τον τύπο των περιστροφών και των ανακλάσεων στη συγκεκριμένη ομάδα.

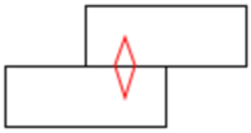


Στην πρώτη εικόνα αριστερά έχουμε τη μοναδιαία κυψελίδα. Οι επόμενες τέσσερις εικόνες έχουν προέλθει από την περιστροφή του αρχικού σχήματος κατά 180, 120, 90 και 60 μοίρες αντίστοιχα. Οι τέσσερις εικόνες της δεύτερης σειράς αντιπροσωπεύουν ανακλάσεις οριζόντια κάθετα και κατά μήκος των δύο διαγωνίων.



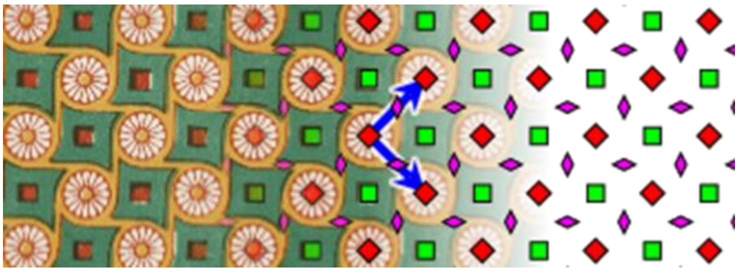


Σε αυτή την ομάδα ανήκει ένα από τα χαρακτηριστικότερα παραδείγματα ομάδας συμμετρίας του επιπέδου στη καθημερινή μας ζωή.

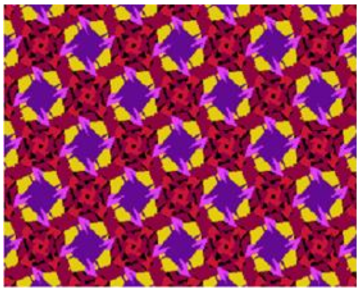


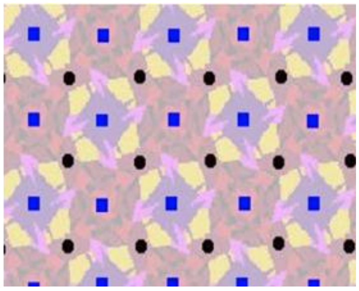
Οι γραμμές των τούβλων είναι οριζόντιες και θα παραμείνουν οριζόντιες και μετά τις περιστροφές των 180 μοιρών. Το μοτίβο έχει συμμετρίες ανακλάσεων κάθετες και οριζόντιες. Το κέντρο των περιστροφών είναι σημειωμένο με κόκκινο και δε βρίσκεται κατά μήκος κάποιου άξονα ανακλαστικής συμμετρίας. Επίσης, έχουμε περιστροφική συμμετρία τάξης δύο στο κέντρο του κάθε τούβλου.

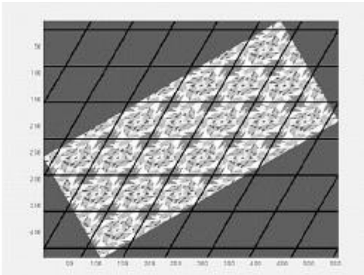
Ομάδα συμμετρίας 10 :(p4)

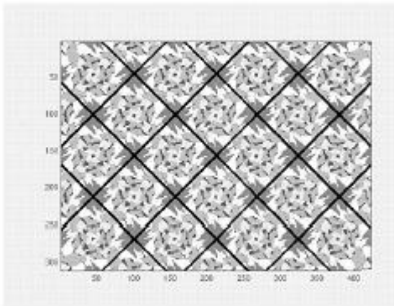


Αυτή η ομάδα περιλαμβάνει περιστροφές 180 μοιρών, μεταφορές και περιστροφές 90 μοιρών. Τα κέντρα των μισών στροφών βρίσκονται στο μέσο των αποστάσεων μεταξύ των κέντρων περιστροφικής συμμετρίας τάξης 4. Το πλέγμα είναι τετράγωνο. Οι μαύρες κουκκίδες αντιπροσωπεύουν τα κέντρα των μισών στροφών και τα μπλε τετράγωνα αντιπροσωπεύουν τα κέντρα περιστροφών 90 μοιρών.

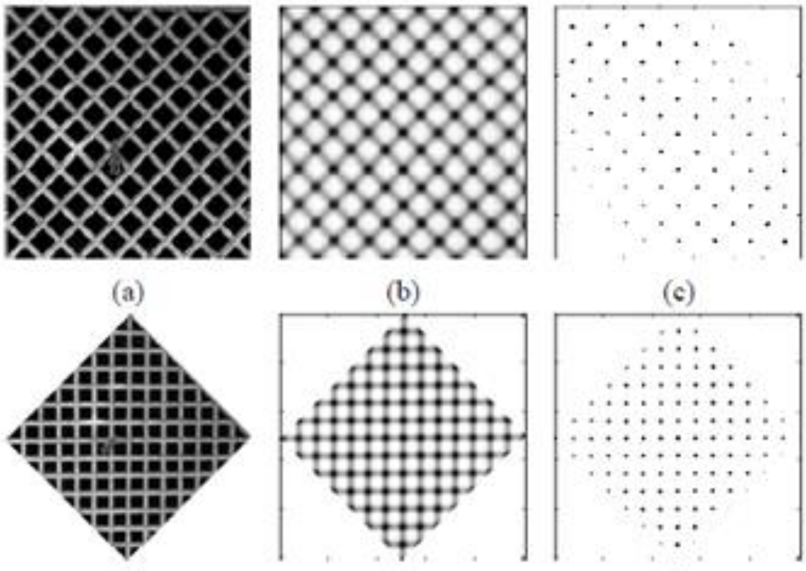






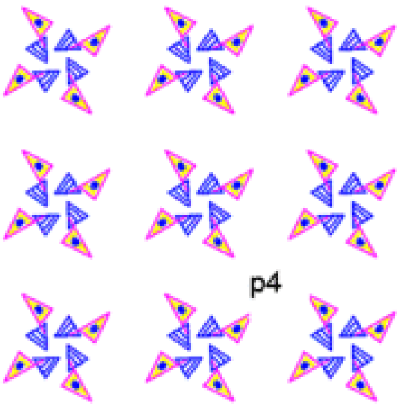


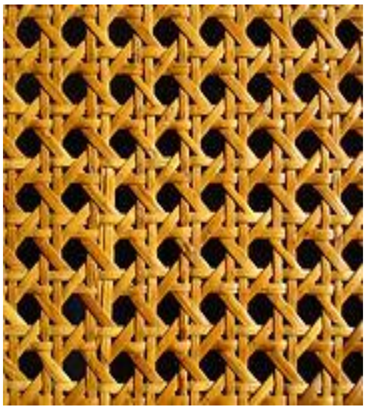
Ένα ακόμα παράδειγμα της ομάδας p4 το οποίο μπορούμε να αναγνωρίσουμε στην καθημερινότητα μας είναι το ακόλουθο. Αν απομονώσουμε το παράθυρο της πόρτας και διακρίνουμε τα σημεία του πλέγματος παρατηρούμε ότι το πλέγμα είναι τετράγωνο.

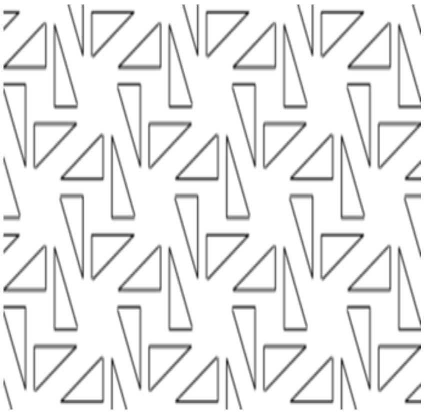


(a) (b) (c)

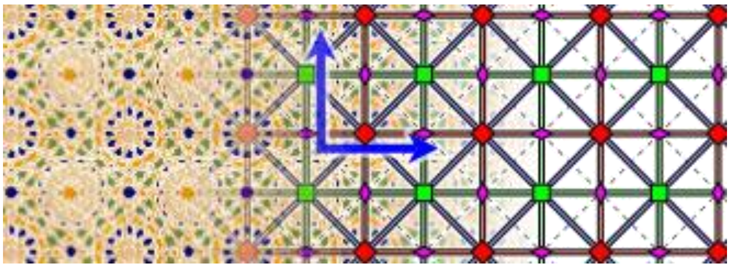
(d) (e) (f)



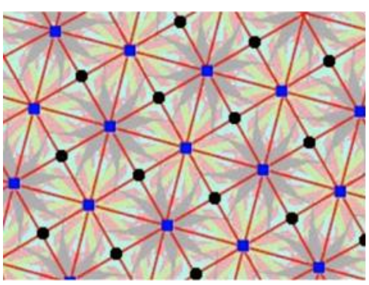


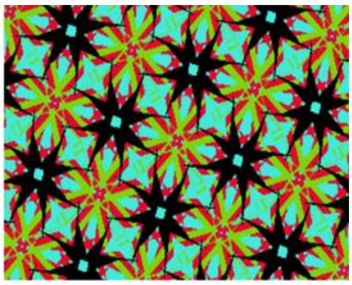


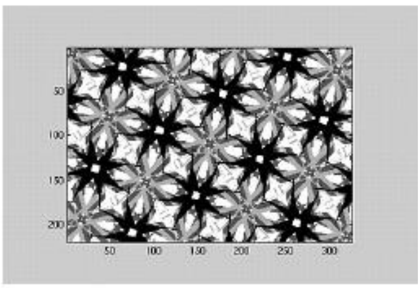
Ομάδες συμμετρίας 11(p4m)

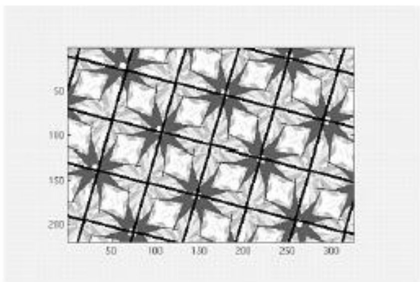


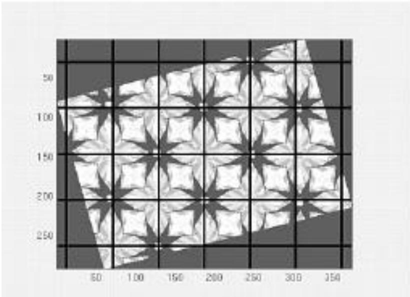
Αυτή η ομάδα περιλαμβάνει περιστροφές τάξεων 2 και 4, μεταφορές και ανακλάσεις. Σε αυτή την ομάδα υπάρχουν τέσσερις άξονες ανακλάσεων. Οι άξονες των ανακλάσεων είναι μεταξύ τους κεκλιμένοι κατά 45 μοίρες, έτσι ώστε να διέρχονται από τα κέντρα των περιστροφών τάξης 4. Τα κέντρα περιστροφής είναι πάνω στους άξονες των ανακλάσεων. Το πλέγμα είναι τετράγωνο. Υπάρχουν ακόμα ανακλάσεις διολίσθησης στην ομάδα p4m. Οι άξονες των ανακλάσεων διολίσθησης τέμνονται στα κέντρα τάξης 2.

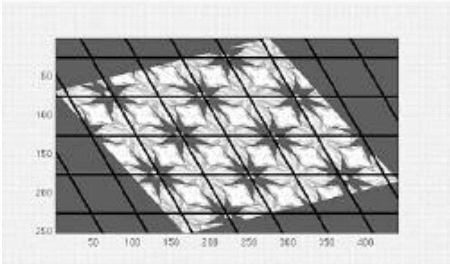


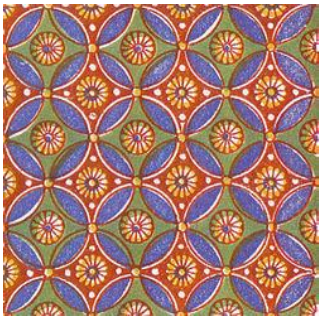


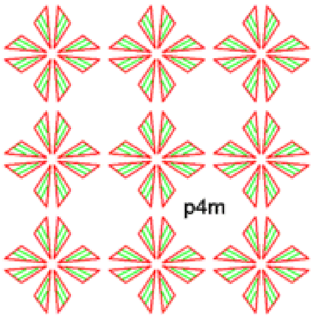




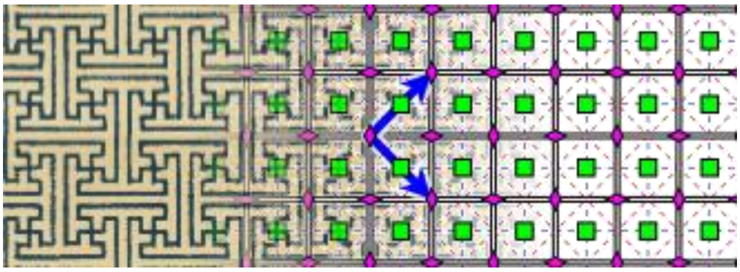




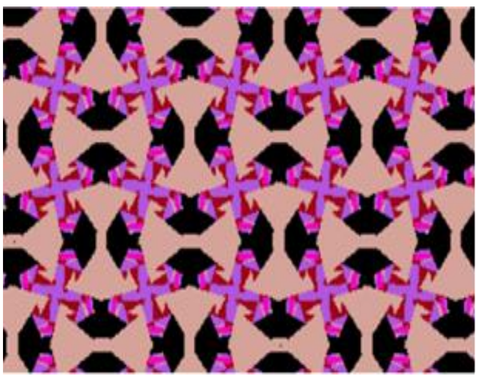


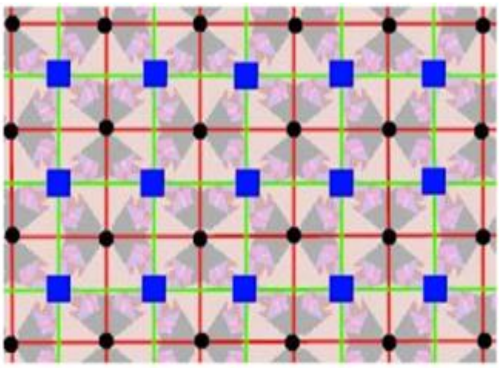


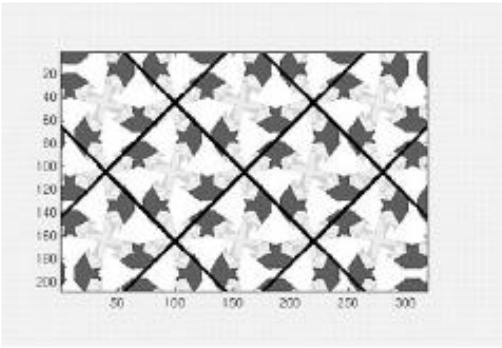
Ομάδες συμμετρίας 12 (p4g)

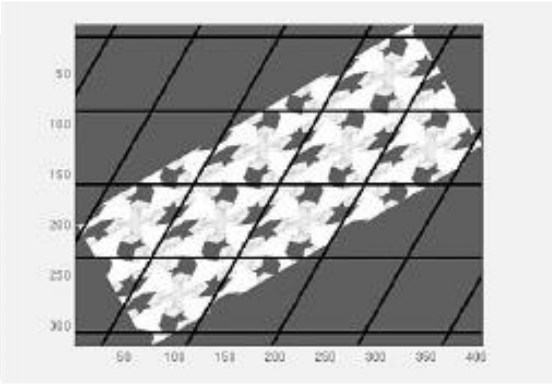


Η ομάδα p4g περιλαμβάνει ανακλάσεις, ανακλάσεις διολίσθησης και περιστροφές τάξης 2 και 4. Οι άξονες των ανακλάσεων είναι κάθετοι. Τα κέντρα των περιστροφών τάξης 2 βρίσκονται στο σημείο τομής των αξόνων των ανάκλασεων. Το πλέγμα είναι τετράγωνο.

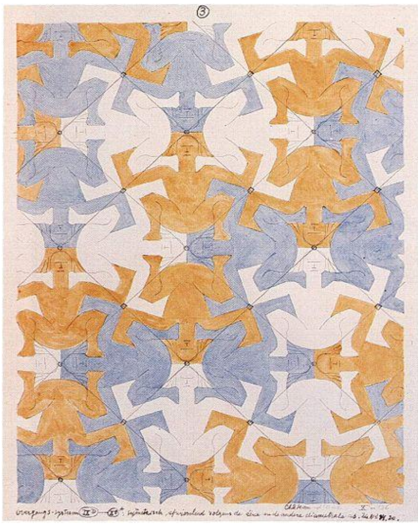




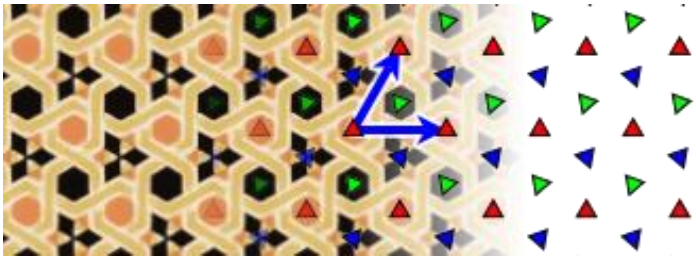




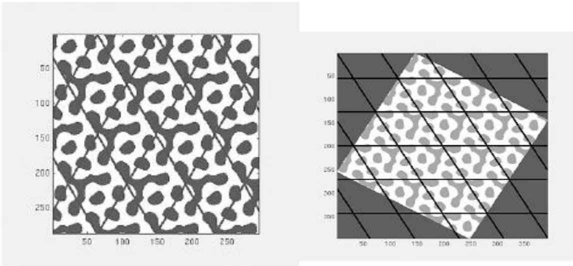
Ακολουθούν δυο σκίτσα του Escher: «Άγγελοι και διάβολοι», οι αρσυβαρίστες. Στο σκίτσο «Άγγελοι και διάβολοι » η μεγαλύτερη περιστροφική συμμετρία είναι τάξης 4. Το κέντρο αυτών των περιστροφών είναι στο σημείο που τα φτερά των αγγέλων και των διαβόλων συναντιούνται. Ακόμα παρατηρούμε ότι έχουμε άξονες ανακλάσεων οριζόντιους και κάθετους.

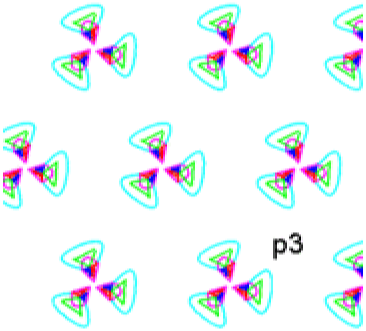


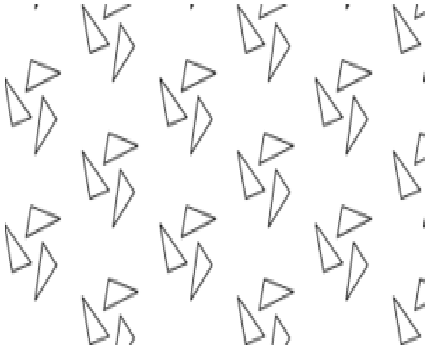
Ομάδα συμμετρίας 13 (p3)



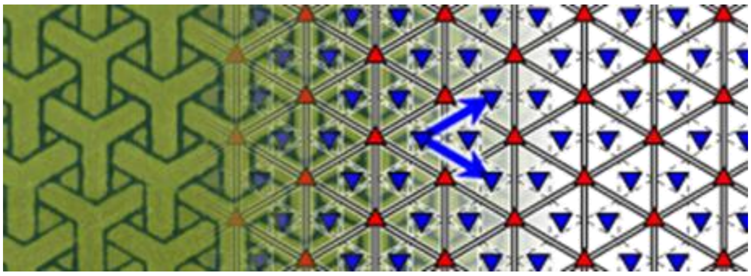
Αυτή η ομάδα περιλαμβάνει περιστροφές και μεταφορές. Το πλέγμα είναι εξάγωνο. Τα κέντρα των περιστροφών συμβολίζονται με τρίγωνα και αντιπροσωπεύουν περιστροφές 120 μοιρών.



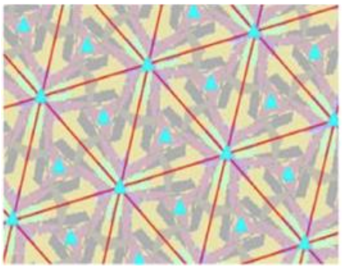


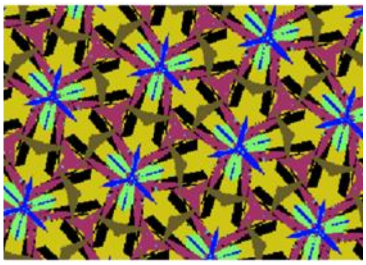


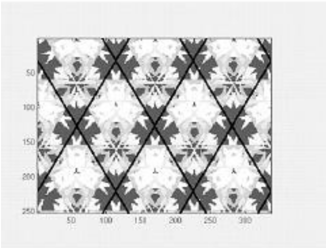
Ομάδα συμμετρίας 14 (p31 m)

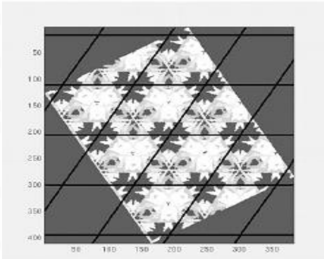


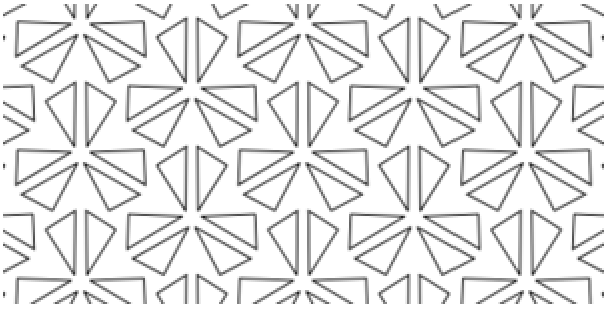
Αυτή η ομάδα περιλαμβάνει ανακλάσεις και περιστροφές. Οι άξονες των ανακλάσεων είναι σε κλίση 60 μοιρών μεταξύ τους και σχηματίζουν ισόπλευρα τρίγωνα. Οι περιστροφές είναι τάξης 3. Το πλέγμα είναι εξάγωνο. Κάποια από τα κέντρα των περιστροφών βρίσκονται πάνω στους άξονες των ανακλάσεων και κάποια όχι. Συναντάμε και κάποιες ανακλάσεις διολίσθησης σε αυτή την ομάδα.



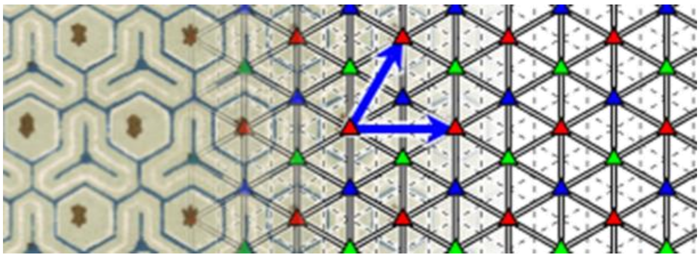




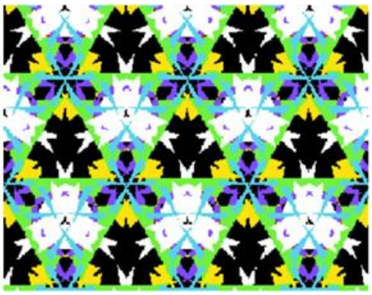
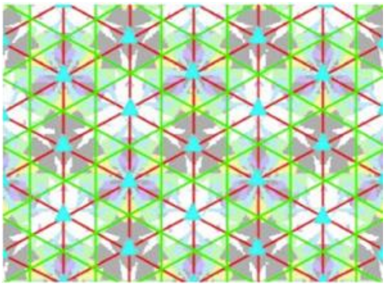


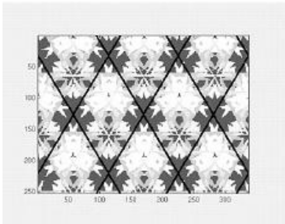
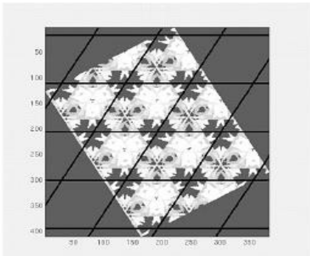


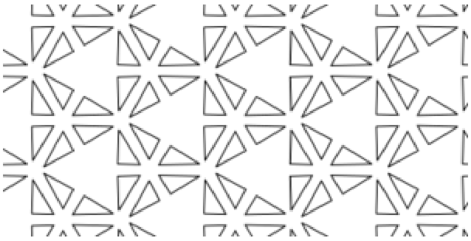
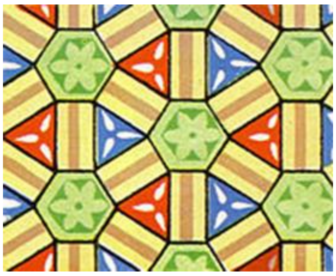
Ομάδα συμμετρίας 15 (p3m1)



Αυτή η ομάδα παρουσιάζει αρκετές ομοιότητες με τη p31m , περιλαμβάνει ανακλάσεις οι άξονες των οποίων σχηματίζουν γωνίες 60 μοιρών και περιστροφές τάξης 3. Η διαφορά είναι ότι τα όλα τα κέντρα περιστροφών βρίσκονται στους άξονες των ανακλάσεων. Το πλέγμα είναι εξάγωνο.

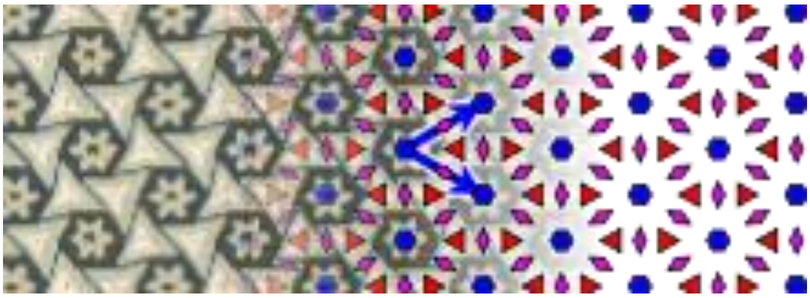
 

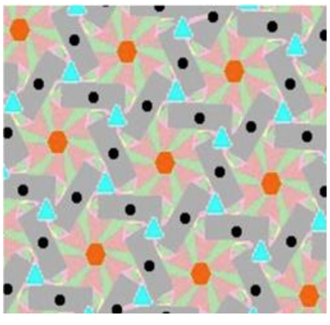
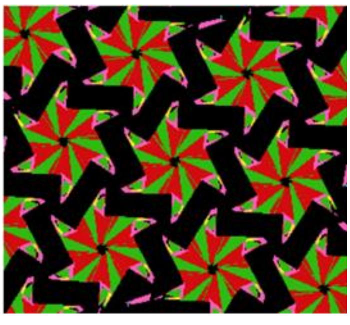
 

\

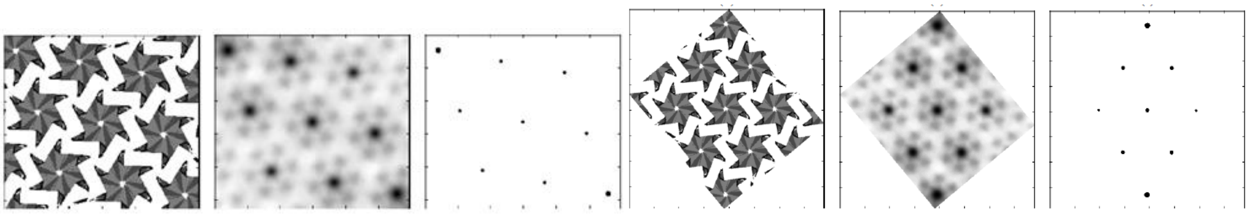
Ομάδα συμμετρίας 16 : (p6)

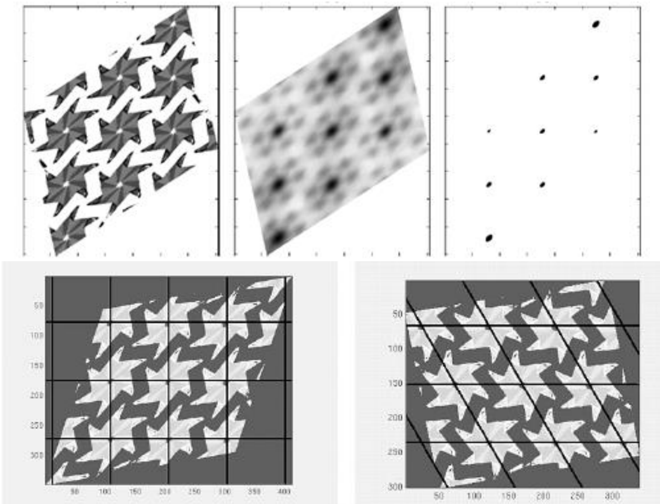


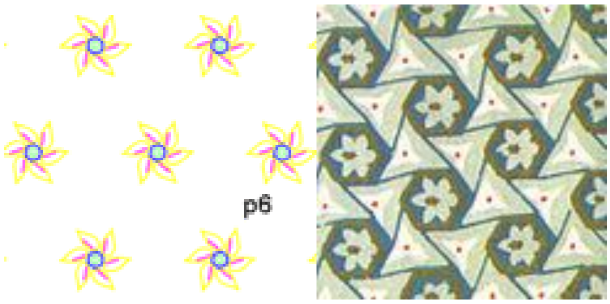
Η ομάδα p6 περιλαμβάνει περιστροφές και μεταφορές .Οι περιστροφές είναι 60 και 180 μοιρών και μισές στροφές. Το πλέγμα είναι εξάγωνο. Δε υπάρχουν ανακλάσεις σε αυτή τη ομάδα .

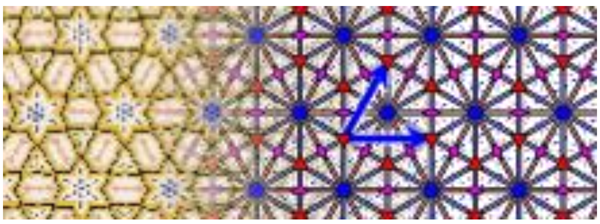
Στις παρακάτω εικόνες παρατηρούμε τα σημεία του πλέγματος της ομάδας p6.



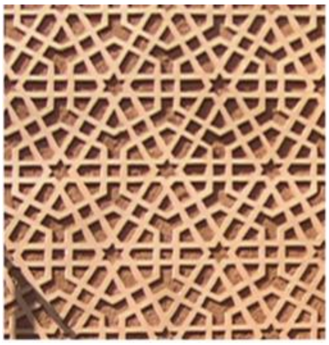
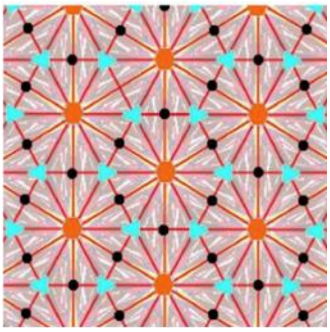
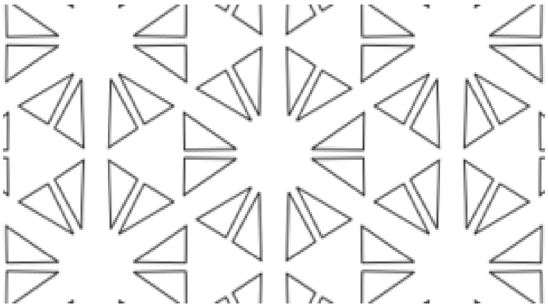


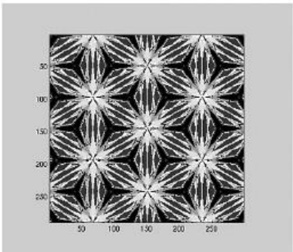
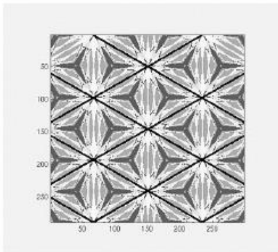


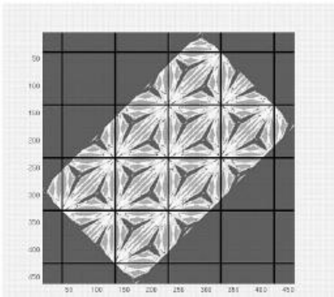
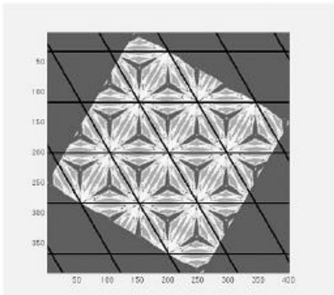
Ομάδα συμμετρίας 17 (p6m)

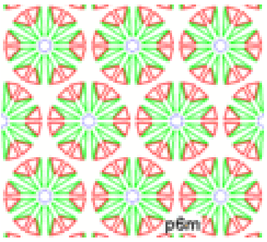


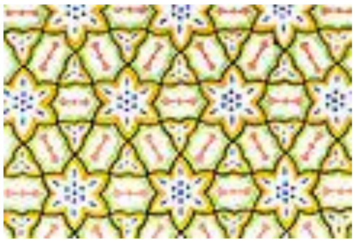
Η πιο σύνθετη ομάδα είναι η ομάδα p6m. Περιλαμβάνει ανακλάσεις, περιστροφές, μεταφορές και ανακλάσεις διολίσθησης. Οι περιστροφές είναι 120, 60 και 180 μοιρών. Οι άξονες των ανακλάσεων τέμνουν όλα τα κέντρα περιστροφών. Το πλέγμα είναι εξάγωνο. Οι άξονες των ανακλάσεων διολίσθησης είναι στη μέση των παράλληλων αξόνων των ανακλάσεων και διέρχονται από το κέντρο των μισών στροφών . Οι άξονες των ανακλάσεων σχηματίζουν γωνίες 30 μοιρών.

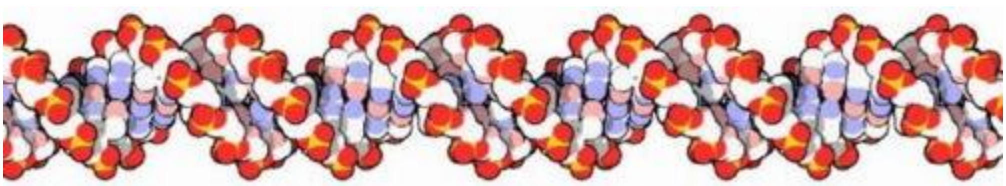








Ομάδες ζωφόρου(Frieze)



Η ομάδα ζωφόρου χρησιμοποιείται για να κατηγοριοποιήσουμε σχέδια δύο διαστάσεων. Τα μοτίβα ζωοφόρου έχουν μεταφορική συμμετρία. Η ομάδα αυτή είναι μια ομάδα ισομετριών που διατηρούν μια ίσια γραμμή αναλλοίωτη και περιλαμβάνουν μεταφορές κατά μήκος αυτής της γραμμής. Τέτοια μοτίβα χρησιμοποιούνται συχνά στη αρχιτεκτονική και στη διακόσμηση. Η μαθηματική μελέτη αυτών των μοτίβων μας έδειξε ότι υπάρχουν 7 τέτοιοι τύποι μοτίβων.

Όπως και οι ομάδες ταπετσαρίας, οι ομάδες ζωφόρου συχνά οπτικοποιούνται με περιοδικά μοτίβα.

Ένα επίπεδο σχήμα F έχει **γραμμή συμμετρία,** αν και μόνο αν, κάποια ανάκλαση είναι μια συμμετρία του F. Η γραμμή αυτή μιας κατοπτρικής συμμετρίας του F καλείται γραμμή συμμετρίας του F.

Ορισμός ομάδων ζωοφόρου (frieze)

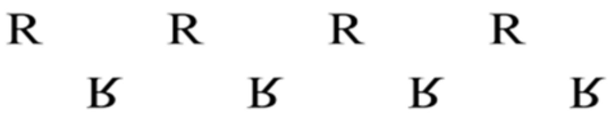
Μια ομάδα ισομετριών η οποία σταθεροποιεί μια δοθείσα ευθεία ε και της οποίας οι μεταφορές σχηματίζουν μια άπειρη κυκλική ομάδα είναι μια **ομάδα ζωοφόρου** με **κεντρικό άξονα** την ευθεία ε.

Όλες οι μη ταυτοτικές μεταφορικές συμμετρίες του F σταθεροποιούν την ίδια γραμμή.

Υπάρχουν 7 ομάδες ζωοφόρου

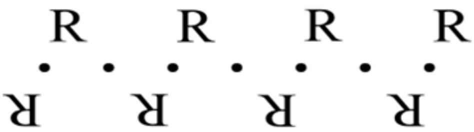
- Η F_1 πρώτη ομάδα έχει μόνο μεταφορική συμμετρία. Υπάρχουν δυο μεταφορικές συμμετρίες ελαχίστου μήκους, αυτή προς τα δεξιά και αυτή προς τα αριστερά.

- Η δεύτερη ομάδα έχει συμμετρία ανάκλασης διολίσθησης και μεταφορική συμμετρία.

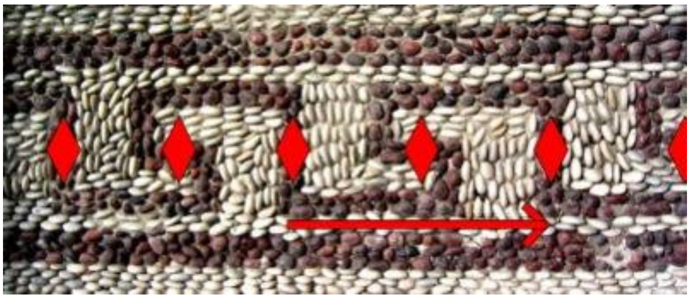


- Η τρίτη ομάδα ζωοφόρου έχει μεταφορική συμμετρία και συμμετρία ανακλάσεων.

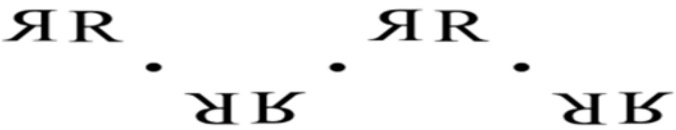
- Η τέταρτη ομάδα ζωοφόρου έχει μεταφορική συμμετρία και συμμετρία μισής στροφής.



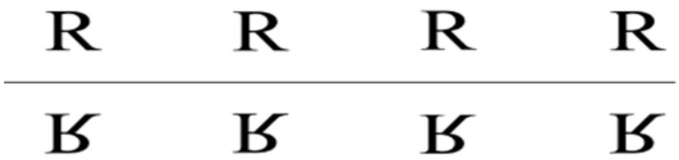
Πεζοδρόμιο στη ρόδο



- Η πέμπτη ομάδα ζωοφόρου έχει μεταφορική συμμετρία, συμμετρία μισής στροφής και συμμετρία ανακλάσεις διολίσθησης.



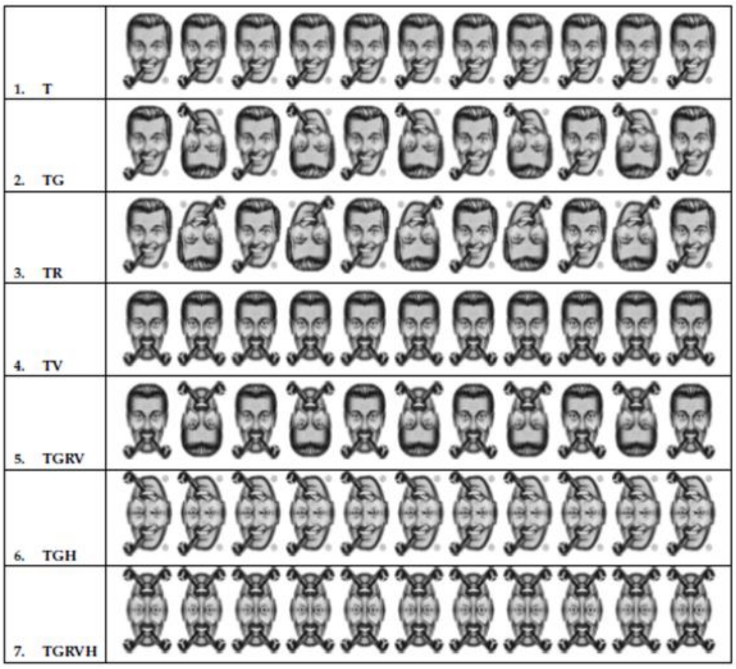
- Η έκτη ομάδα ζωοφόρου F_6 έχει μεταφορική και ανακλαστική συμμετρία.



- Η έβδομη ομάδα ζωοφόρου F_7 έχει μεταφορική συμμετρία, περιλαμβάνει κάθετες και οριζόντιες ανακλάσεις και περιστροφές.

Συγκεντρωτικά οι επτά ομάδες ζωοφόρου με τους συμβολισμούς τους :

T = Μεταφορά
G = Ανάκλαση διολίσθησης
R = Περιστροφή 180 μοιρών
V = Κάθετες ανακλάσεις
H = Οριζόντιες ανακλάσεις



ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Symmetry groups and their aplications , Willard W. Miller, Academic pres 1972
- Γραμμική Άλγεβρα και αναλυτική γεωμετρία ,Αργύρης Γ. Φελλούρης, 2009
- Εισαγωγή στην Άλγεβρα, John B. Fraleigh, πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης
- Πανεπιστημιακά Μαθηματικά Κείμενα 4, Νίκος Μαρμαρίδης, Leader Books, 2002
- Geometric Crystallography: An Axiomatic Introduction to Crystallography, P. Engel

ΙΣΤΟΤΟΠΟΙ :

- http://sites.millersville.edu/rumble/Math.505/Book/chapter4.pdf
- https://caicedoteaching.files.wordpress.com/2012/05/nelson-newman-shipley.pdf
- http://www.math.uoa.gr/me/dipl/dipl_Margeti_Ioanna.pdf
- http://thalesandfriends.org/wp-content/uploads/2012/03/math-yliko1_Part4.pdf
- http://thalesandfriends.org/wp-content/uploads/2012/03/math-yliko1_Part3.pdf
- http://web.science.mq.edu.au/~chris/geometry/CHAP07%20htSymmetry%20Groups
- http://users.monash.edu.au/~normd/documents/MATH-348
- https://www.ri.cmu.edu/pub_files/pub2/liu_yanxi_1998_1/liu_yanxi_1998_1
- http://www.uio.no/studier/emner/matnat/kjemi/MEF3000/h06/undervisningsmateriale/Symmetry_operations_42.pdf
- http://www.math.uconn.edu/~kconrad/blurbs/grouptheory/dihedral.pdf
- https://en.wikipedia.org/wiki/Hexagonal_lattice
- http://euler.slu.edu/escher/index.php/Wallpaper_Patterns
- https://en.wikipedia.org/wiki/Glide_reflection
- https://en.wikipedia.org/wiki/Wallpaper_group

- https://en.wikipedia.org/wiki/Orthorhombic_crystal_system
- http://www1.spms.ntu.edu.sg/~frederique/lecture6ws.pdf
- http://www.people.vcu.edu/~rhammack/Math122/bob.pdf
- http://www.clarku.edu/~djoyce/wallpaper/seventeen.html
- http://carlosreynoso.com.ar/archivos/varios/jablan.pdf
- http://www.google.gr/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&ved=0ahUKEwjV9eOV1avLAhVCEiwKHTapDeoQFggaMAA&url=http%3A%2F%2Fecourses.dbnet.ntua.gr%2Ffsr%2F10480%2FCrystalography.pdf&usg=AFQjCNHBlbREv_Nc6sBkT9j2SacPaJDZ_A&sig2=3Hyc1YaihzjqRg4NhtHN_A&bvm=bv.116274245,d.bGg
- http://staff.chess.cornell.edu/~smilgies/xrd/IntroductionSurfaces.html
- https://en.wikipedia.org/wiki/Bravais_lattice
- http://www.math.lsa.umich.edu/~rauch/555/Conformal_Matrices.pdf
- http://www.cut-the-knot.org/triangle/Frieze.shtml
- http://www.math.uoa.gr/me/dipl/dipl_papagiannakopoulou.vassiliki.pdf