Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Σχολή Χημικών Μηχανικών

Τομέα Ανάλυσης, Σχεδιασμού και Ανάπτυξης Διεργασιών και Συστημάτων

Συγκριτική Αποτίμηση Δικαιωμάτων Προαίρεσης Τύπου Βερμούδων με Προσομοίωση Monte Carlo και Διωνυμικό Δέντρο: Εφαρμογή σε Ελληνικά Παράγωγα

Διπλωματική εργασία του Δημητρίου Κωνσταντιλιέρη

Επιβλέπων Καθηγητής: Ανδρέας Γ. Μπουντουβής

Αθήνα, Φεβρουάριος 2016

στη Γιαγιά μου

Ευχαριστίες

Με την ευκαιρία της ολοκλήρωσης της διπλωματικής μου εργασίας, θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες προς τον κ. Ανδρέα Μπουντουβή, Καθηγητή και Κοσμήτορα της σχολής Χημικών Μηχανικών Ε.Μ.Π., για το ενδιαφέρον που έδειξε κατά την εκπόνηση της εργασίας, αλλά και για την πολύτιμη βοήθεια και καθοδήγηση κατά τη διάρκεια της έρευνας.

Ακόμη, θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα την κ. Ελένη Κορωνάκη για την πολύτιμη συμβολή της στην εκπόνηση αυτής της διπλωματικής εργασίας. Οι κατευθύνσεις που παρείχε και το διαρκές ενδιαφέρον που έδειχνε υπήρξαν κρίσιμες στην ολοκλήρωση της.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους συμφοιτητές μου Ιωάννα Μπέρκη, Γεώργιο Βερναρδάκη, Βασίλειο Κουλατζίδη, Νικόλαο Κουδούνα και Αλέξανδρο Καρβουνιάρη, καθώς και τους γονείς μου, για τη στήριξη και τις πολύτιμες συμβουλές που μου παρείχαν κατά την εκπόνηση της εργασίας.

Περίληψη

Ένα από τα πιο σημαντικά προβλήματα της θεωρίας αποτίμησης δικαιωμάτων προαίρεσης είναι η αποτίμηση παραγώγων με χαρακτηριστικά πρόωρης εξάσκησης. Τα παράγωγα αυτά συναντώνται σε όλες τις αγορές, μεταξύ των οποίων η αγορά αξιών, συναλλάγματος, ενέργειας και μετάλλων. Παρά την πρόσφατη πρόοδο, η εύρεση της αξίας και της στρατηγικής βέλτιστης εξάσκησης παραγώγων Αμερικανικού τύπου και τύπου Βερμούδων παραμένει ίσως το πιο δύσκολο και προκλητικό πρόβλημα στα χρηματοοικονομικά παραγώγων.

Σκοπός της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η παρουσίαση και η συγκριτική αξιολόγηση δύο μεθόδων επίλυσης προβλημάτων αποτίμησης παραγώγων τύπου Βερμούδων. Αρχικά αναλύεται το θεωρητικό μαθηματικό πλαίσιο των δύο μεθόδων. Στη συνέχεια αυτές εφαρμόζονται στην αποτίμηση ενός παραγώγου τύπου Βερμούδων που διαπραγματεύεται στην ελληνική αγορά, τον Τίτλο Παραστατικού Δικαιώματος Κτήσης Μετοχών (Warrant) της Alpha Bank. Τέλος, τα αποτελέσματα της αποτίμησης μελετώνται ώστε να εξαχθούν συμπεράσματα ως προς την σχετικότητα τους με τις πραγματικές τιμές διαπραγμάτευσης του παραγώγου καθώς και το εάν οι δύο μέθοδοι μπορούν να αποτελέσουν χρήσιμα εργαλεία υποστήριξης επενδυτικών αποφάσεων στην Ελληνική αγορά.

Οι δύο μέθοδοι αποτίμησης με τις οποίες ασχολείται η παρούσα εργασία είναι η μέθοδος του Διωνυμικού Δέντρου (Binomial Tree) και η μέθοδος Longstaff-Schwartz. Η μέθοδος του Διωνυμικού Δέντρου προτάθηκε το 1979 από τους Cox, Ross και Rubinstein[6] και αποτελεί πλέον μία κλασική μέθοδο τιμολόγησης δικαιωμάτων. Η απλότητα και η προσαρμοστικότητα της μεθόδου αυτής την καθιστά εύχρηστη και βρίσκει εφαρμογή στην τιμολόγηση τόσο παραγώγων Ευρωπαϊκού τύπου όσο και στην τιμολόγηση δικαιωμάτων με χαρακτηριστικά πρόωρης εξάσκησης. Το Διωνυμικό Δέντρο αποτελεί ένα γράφημα που προσομοιώνει πιθανά μονοπάτια της τιμής, βασιζόμενο στη λογική πως το υποκείμενο αγαθό μπορεί να κινηθεί είτε ανοδικά είτε πτωτικά σε μελλοντικό χρόνο. Η μέθοδος του Διωνυμικού Δέντρου χρησιμοποιείται συχνά στη βιβλιογραφία σαν σημείο αναφοράς για την αξιολόγηση αποτελεσμάτων νέων μεθόδων αποτίμησης.

Μία πιο σύγχρονη μέθοδος, ο αλγόριθμος Longstaff-Schwartz[4], συνδυάζει προσομοιώσεις Monte Carlo με παλινδρόμηση ελαχίστων τετραγώνων. Η μέθοδος αυτή θεωρείται πολύ ισχυρό εργαλείο στην αποτίμηση δικαιωμάτων προαίρεσης Αμερικανικού τύπου και τύπου Βερμούδων, όπως και μία πολλά υποσχόμενη εναλλακτική στις κλασικές μεθόδους του Διωνυμικού Δέντρου και των πεπερασμένων διαφορών, καθώς έχει πολλά πλεονεκτήματα σαν πλαίσιο αποτίμησης, διαχείρισης ρίσκου και βέλτιστης εξάσκησης δικαιωμάτων. Για τη διενέργεια των παραπάνω αναπτύχθηκε αλγόριθμος αποτίμησης σε προγραμματιστικό περιβάλλον MATLAB, όπου πραγματοποιήθηκε ο έλεγχος και η ανάλυση ευαισθησίας των μοντέλων στις μεταβολές των παραμέτρων των δικαιωμάτων.

Abstract

One of the most important problems in option pricing theory is the valuation and optimal exercise of derivatives with early exercise features. These types of derivatives are found in all major financial markets including the equity, commodity, foreign exchange, energy, and metal markets. Despite recent advances, however, the valuation and optimal exercise of American options remains one of the most challenging problems in derivatives finance.

The aim of this thesis is to present and comparatively evaluate two different methods for pricing Bermudan style derivatives. Initially, the mathematical theoretical framework is analysed. Progressing, the two methodologies are tested on pricing a Bermudan type option currently traded on the Greek market, the ALPHA Bank Warrant. The pricing results are then studied in order to draw conclusions on the relativity with real market prices of the derivative as well as to determine whether the two corresponding algorithms could be useful as investment decision support tools for the Greek market.

The two pricing methods examined are the Binomial Tree method and the Longstaff-Schwartz method. The Binomial Tree method, as proposed by Cox, Ross and Rubinstein[6] in 1979, is considered a classic option pricing method. Its simple and versatile manner renders it handy in the pricing of European and early exercise options alike. The Binomial Tree is a graph that simulates possible asset paths, based on the assumption that the underlying asset will move either upward or downward in a successive time. The method is often used as a benchmark for evaluating the results of newer pricing algorithms.

A more modern method, that of Longstaff and Schwartz[4], combines Monte Carlo simulations with Least Squares regression. This method is considered a powerful tool in American and Bermudan option valuation as well as a promising alternative to traditional finite difference and binomial techniques as it has many advantages as a framework for valuing, risk managing, and optimally exercising derivatives. In order to use and compare the two methods, a MATLAB code was developed, where an audit and sensitivity analysis to option parameters was conducted.

Περιεχόμενα

1 Χρηματοοικονομικά Παράγωγα **1**

1.1 Χρήση παραγώγων για την αντιστάθμιση ρίσκου 2

1.2 Χρήση παραγώγων για κερδοσκοπία 2

1.3 Είδη παραγώγων 2

1.3.1 Προθεσμιακά Συμβόλαια 2

1.3.2 Συμβόλαια Μελλοντικής Εκπλήρωσης (Future Contracts) 3

1.3.3 Συμβάσεις Ανταλλαγής (Swaps) 3

2 Δικαιώματα Προαίρεσης **5**

2.1 Ορολογία δικαιωμάτων προαίρεσης 5

2.1.1 Κλάση δικαιωμάτων 6

2.1.2 Καθαρή αξία δικαιωμάτων 6

2.1.3 Εσωτερική αξία 7

2.1.4 Χρονική αξία 7

2.2 Παραδοχές και συμβολισμοί 7

2.2.1 Παραδοχές 7

2.2.2 Συμβολισμοί 8

2.2.3 Θέσεις δικαιωμάτων 8

2.2.4 Υποκείμενοι τίτλοι δικαιωμάτων 10

2.3 Παράγοντες που επηρεάζουν τις τιμές των δικαιωμάτων προαίρεσης 11

2.3.1 Τιμή μετοχής και τιμή άσκησης δικαιώματος 12

2.3.2 Ο χρόνος ως τη λήξη του δικαιώματος 12

2.3.3 Μεταβλητότητα της μετοχής 13

2.3.4 Το χωρίς κίνδυνο επιτόκιο 14

2.3.5 Αποκοπή μερίσματος επί της μετοχής 14

2.4 Άνω και κάτω όρια για τις τιμές των δικαιωμάτων προαίρεσης 15

2.4.1 Άνω όρια 15

2.4.2 Κάτω όρια 15

2.5 Ισοτιμία δικαιωμάτων αγοράς-πώλησης (Put-Call Parity) 17

2.6 Δικαιώματα προαίρεσης με δυνατότητες πρόωρης εξάσκησης (Options With Early Exercise Features) 19

2.6.1 Δικαιώματα αγοράς 19

2.6.2 Δικαιώματα πώλησης 20

2.7 Δικαιώματα τύπου Βερμούδων - Τίτλοι Παραστατικών Δικαιωμάτων Κτήσεως Μετοχών (Warrants) 21

3 Μέθοδοι Αποτίμησης Δικαιωμάτων Προαίρεσης 23

3.1 Διωνυμικό Δέντρο (Binomial Tree Pricing) 23

3.1.1 Διωνυμικό Δέντρο ενός βήματος 23

3.1.2 Ουδέτερη ρίσκου αποτίμηση (Risk Neutral Valuation) 25

3.1.3 Διωνυμικά Δέντρα δύο επιπέδων 26

3.1.4 Διωνυμικό Δέντρο και δικαιώματα προαίρεσης Αμερικανικού τύπου . . 28

3.1.5 Σχέση μεταβλητότητας σ με τα u και d 28

3.1.6 Διωνυμικό Δέντρο πολλαπλών επιπέδων 30

3.1.7 Αλγεβρική έκφραση του Διωνυμικού Δέντρου 31

3.2 Στοχαστική ανάλυση 32

3.2.1 Στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις (Stochastic Differential Equations) 32

3.2.2 Μαρκοβιανές ανελίξεις (Markov Processes) 32

3.2.3 Στοχαστικές ανελίξεις συνεχούς χρόνου 33

3.2.4 Ορισμός ανέλιξης Wiener 33

3.2.5 Γενικευμένη ανέλιξη Wiener 35

3.2.6 Διαδικασία Itô 36

3.2.7 Γεωμετρική Κίνηση Brown (Geometric Brownian Motion) 37

3.2.7.1 Ιστορική Αναδρομή 37

3.2.7.2 Ορισμός 37

3.3 Η προσομοίωση Monte Carlo 39

3.3.1 Σφάλμα και διάστημα εμπιστοσύνης 41

3.4 Η μέθοδος Longstaff-Schwartz 43

3.4.1 Περιγραφή μεθόδου 43

3.4.2 Σύγκλιση 47

3.4.3 Εφαρμογή της μεθόδου Longstaff-Schwartz στη MATLAB 48

3.4.4 Αριθμητικό παράδειγμα 49

4 Αριθμητικά Αποτελέσματα **57**

4.1 Ανάλυση ευαισθησίας 57

4.2 Αποτίμηση παραστατικών τίτλων δικαιωμάτων κτήσης μετοχών Alpha Bank και συζήτηση αποτελεσμάτων 59

4.2.1 Το πλαίσιο της αποτίμησης 59

4.2.2 Αποτελέσματα 61

4.3 Ανασκόπηση αποτελεσμάτων 69

Βιβλιογραφία **70**

Παράρτημα Α: Κώδικας MATLAB **73**

Κατάλογος Σχημάτων

2.1 Αποδόσεις επένδυσης από κατοχή θέσεων σε δικαιώματα Ευρωπαϊκού τύπου, συνυπολογιζομένων των ασφαλίστρων (α) θέση αγοράς σε δικαίωμα αγοράς, (β) θέση αγοράς σε δικαίωμα πώλησης, (γ) θέση πώλησης σε δικαίωμα αγοράς, (δ) θέση πώλησης σε δικαίωμα πώλησης. 9

2.2 Επιρροή της αξίας των δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης από (α, β) την τιμή της μετοχής, (γ, δ) την τιμή της άσκησης, (ε, ζ) την περίοδο λήξης. 13

2.3 Επιρροή της αξίας των δικαιωμάτων προαίρεσης αγοράς και πώλησης από την μεταβλητότητα της υποκείμενης μετοχής (α, β) και το χωρίς κίνδυνο επιτόκιο (γ, δ). 14

2.4 Μεταβολή της τιμής ενός Αμερικανικού δικαιώματος αγοράς σε συνάρτηση με την τιμή S_0 μετοχής που δεν αποκόπτει μέρισμα 20

2.5 Μεταβολή της τιμής ενός Αμερικανικού δικαιώματος πώλησης σε συνάρτηση με την τιμή S_0 της υποκείμενης μετοχής. 21

3.1 Κίνηση της μορφής της μετοχής σε διωνυμική μορφή. 24

3.2 Κίνηση της τιμής της μετοχής σε διωνυμική μορφή δύο επιπέδων. 27

3.3 Μεταβολή της τιμής της μετοχής σε χρόνο Δt σε πραγματικό περιβάλλον (α) και σε περιβάλλον ουδέτερο κινδύνου (β) 28

3.4 Διωνυμικό Δέντρο πολλαπλών επιπέδων για αποτίμηση δικαιωμάτων προαίρεσης. 30

3.5 Γενικευμένη διαδικασία Wiener με $a = \mu = 0.3$ και $b = \sigma = 1.15$. 36

3.6 Προσομοίωση προόδου τιμής μετοχής, ως κίνηση Brown, με $S_0 = \$50$, $r = 3\%$, $\sigma = 10\%$, $\mu = 4\%$. 39

3.7 70 Διαφορετικές προσομοιώσεις προόδου τιμών μετοχής, ως κινήσεις Brown, με $S_0 = \$50$, $r = 3\%$, $\sigma = 10\%$, $\mu = 4\%$. 39

3.8 Γράφημα πολυωνύμων Laguerre $L_1, L_2, \dots, L_6$ 44

4.1 Ευαισθησία μεθόδου Longstaff-Schwartz και Διωνυμικού Δέντρου στη μεταβλητότητα της υποκείμενης μετοχής με (α) **M=100** και (β) **M=10000** . . . 59

4.2 Ιστορικό γράφημα τιμής μετοχής της Alpha Bank της τελευταίας πενταετίας. Πηγή: https://www.alpha.gr/page/default.asp?la=1&id=54 61

4.3 Συγκριτικό διάγραμμα πραγματικών διαπραγματευτικών τιμών των Warrant και τιμών από τις αποτιμήσεις Longstaff-Schwartz και Cox-Ross-Rubinstein. 63

4.4 Ανά μετοχή επιβάρυνση για τις πραγματικές τιμές, τις τιμές Long staff-Schwartz και τις τιμές του Διωνυμικού Δέντρου. 65

4.5 Διαγράμματα των τιμών της υποκείμενης μετοχής (ροζ), των τιμών των μοντέλου Longstaff-Schwartz (μπλε) kai Cox-Ross-Rubinstein (πράσινο) για το Warrant. 65

4.6 Διάγραμμα των τιμών της υποκείμενης μετοχής, των τιμών διαπραγμάτευσης του Warrant στο Χρηματιστήριο Αθηνών και των τιμών εξάσκησης του δικαιώματος. Με σκιαγράφηση η περιοχή εξάσκησης. 66

Κατάλογος Πινάκων

2.1 Ορισμός διαφορετικών τύπων καθαρής αξίας. 6

2.2 Συνδυασμός επενδυτικών θέσεων και τύπων δικαιώματος. 8

2.3 Συνοπτική παρουσίαση της επιρροής κάθε παράγοντα στην τιμή διαφορετικών τύπων δικαιωμάτων, όταν ο παράγοντας αυξάνεται ενώ όλοι οι υπόλοιποι παραμένουν σταθεροί. 12

3.1 Προσομοίωση των τιμών της υποκείμενης μετοχής με $S_0 = \$1.00$. 50

3.2 Χρηματοροές που προκύπτουν από την εξάσκηση του δικαιώματος τη χρονική στιγμή 3. 50

3.3 Παλινδρόμηση τιμών υποκείμενης μετοχής τη χρονική στιγμή 2 με χρηματοροές που προκύπτουν από εξάσκηση τη χρονική στιγμή 3. 51

3.4 Βέλτιστη στρατηγική πρόωρης εξάσκησης τη χρονική στιγμή 2. 52

3.5 Πίνακας χρηματοροών τη χρονική στιγμή 2. 52

3.6 Παλινδρόμηση τιμών υποκείμενης μετοχής τη χρονική στιγμή 1 με χρηματοροές που προκύπτουν από εξάσκηση τη χρονική στιγμή 2. 53

3.7 Βέλτιστη εξάσκηση τη χρονική στιγμή 1. 53

3.8 Στρατηγική βέλτιστης εξάσκησης. 54

3.9 Πίνακας χρηματοροών δικαιώματος. 54

4.1 Αποτελέσματα αποτίμησης δικαιωμάτων τύπου Βερμούδων, με τιμή άσκησης \$40, χωρίς ρίσκο επιτόκιο $r = 3\%$ και μηνιαία δυνατότητα εξάσκησης. 58

4.2 Αποτελέσματα αλγορίθμου για διαφορετικά πλήθη προσομοιώσεων με $S_0 = \$38$, R=3, $Strike$=40, T=1, N=12, r=3%, $\sigma = 40\%$. 58

4.3 Ημερομηνίες και τιμές εξάσκησης του Warrant. 62

4.4 Συγκεντρωτικός πίνακας αποτελεσμάτων αποτίμησης (1) 67

4.5 Συγκεντρωτικός πίνακας αποτελεσμάτων αποτίμησης (2) 68

Κεφάλαιο 1

Χρηματοοικονομικά Παράγωγα

Ο όρος παράγωγο προϊόν, χρησιμοποιείται για να περιγράψει τα χρηματοοικονομικά προϊόντα που παράγονται (derive) από άλλα απλούστερης μορφής υποκείμενα προϊόντα (underlying assets). Τα παράγωγα είναι ουσιαστικά συμβόλαια, που περιγράφουν μία μελλοντική συναλλαγή των υποκειμένων προϊόντων.

Μία από τις σημαντικότερες αγορές διεθνώς, είναι αυτή των παραγώγων. Η δυναμική της αγοράς γίνεται αντιληπτή, από το μέγεθος της, το οποίο εκτιμάται ότι το 2008 ανήλθε στα $596 τρισεκατομμύρια. Την ίδια στιγμή, η εταιρεία McKinsey & Company υπολογίζει ότι το 2008 η αξία του συνόλου των χρηματοοικονομικών περιουσιακών στοιχείων, συμπεριλαμβανομένων των μετοχών αλλά και των τραπεζικών καταθέσεων, ανερχόταν στα $167 τρισεκατομμύρια.

Τα παράγωγα, τα χαρακτηριστικά των οποίων θα συζητηθούν στη συνέχεια, θεωρούνται τα πιο σύγχρονα χρηματοοικονομικά εργαλεία, καθώς επιτρέπουν στους επενδυτές να διαμορφώνουν το ύψος του κινδύνου στο οποίο είναι διατεθειμένοι να εκτεθούν με βάση την εκτίμηση που έχουν για τη μεταβολή των τιμών της αγοράς, αλλά και την απόδοση που προσδοκούν.

Όπως γίνεται αντιληπτό, από τις εκτιμήσεις που αναφέρθηκαν, σήμερα τα παράγωγα χρησιμοποιούνται ευρύτατα παγκοσμίως. Ο λόγος της ταχύτατης ανάπτυξης της αγοράς των παραγώγων είναι η δυνατότητα που παρέχουν στους επενδυτές να διαμορφώσουν ένα χαρτοφυλάκιο που ανταποκρίνεται πλήρως στις δικές τους ανάγκες.

Ιστορικά τα παράγωγα ήταν πάντοτε βασισμένα σε εμπορεύματα (commodities) όπως πετρέλαιο, σιτάρι , καφές ή ζάχαρη. Η πρώτη απόπειρα για οργανωμένη διαπραγμάτευση τέτοιων παραγώγων έγινε στο χρηματιστήριο του Άμστερνταμ (Amsterdam Bourse) το 1688 όταν ξεκίνησε η διαπραγμάτευση των πρώτων δικαιωμάτων προαίρεσης πάνω στο βολβό της τουλίπας. Χρειάστηκαν αρκετά χρόνια από τότε ώστε το 1973 στο Σικάγο να λειτουργήσει το πρώτο οργανωμένο χρηματιστήριο παραγώγων από το Chicago Board of Trades και το Chicago Mercantile Exchange. Ακολούθησαν στη συνέχεια τα χρηματιστήρια της Νέας Υόρκης του Μόντρεαλ, του Τόκιο κ.α.

Καθώς οι αγορές παραγώγων σε ολόκληρο το κόσμο γιγαντώθηκαν το 1999, ιδρύθηκε, από το ελληνικό χρηματιστήριο, η πρώτη οργανωμένη αγορά παραγώγων στην Ελλάδα το Χρηματιστήριο Παραγώγων Αθηνών. Η διαπραγμάτευση των πρώτων προϊόντων ξεκίνησε τον Αύγουστο του ίδιου έτους.

1.1 Χρήση παραγώγων για την αντιστάθμιση ρίσκου

Όταν ένας επενδυτής ή μία εταιρεία επηρεάζεται, λόγω κάποιας δραστηριότητας του, σημαντικά από τη διακύμανση της τιμής μίας συγκεκριμένης μετοχής, ή μίας ισοτιμίας και θέλει να προστατευθεί από την πιθανή μεταβολή της τιμής αυτής, μπορεί, εάν επιθυμεί, να προστατευθεί από πιθανή μεταβολή της τιμής της μετοχής ή της διακύμανσης προς ζημιογόνα προς αυτόν κατεύθυνση, αγοράζοντας ένα δικαίωμα που περιγράφει μία συναλλαγή που θα πραγματοποιήσει μόνο στην περίπτωση αυτή για να αντιστρέψει την αρνητική, για αυτόν, μεταβολή των τιμών.

1.2 Χρήση παραγώγων για κερδοσκοπία

Όπως τα περισσότερα χρηματοοικονομικά προϊόντα, έτσι και τα παράγωγα μπορούν να αγοραστούν από τον οποιονδήποτε, που πιστεύει ότι μπορεί να προβλέψει τη μεταβολή της τιμής ενός αγαθού. Είναι σημαντικό να τονιστεί, ότι τέτοια κερδοσκοπικά ρίσκα λαμβάνουν πολλοί επενδυτές, χρηματοπιστωτικά ιδρύματα ή και εταιρείες, οι οποίοι σε πολλές περιπτώσεις δεν ενδιαφέρονται καν να αποκτήσουν το υποκείμενο αγαθό. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι οι επενδυτές που αγοράζουν παράγωγα επί μετάλλων, πετρελαίου, φυσικού αερίου και πλείστων άλλων αγαθών, χωρίς ωστόσο να ενδιαφέρονται για την αγορά του υποκείμενου αγαθού. Απλά, προσπαθούν να αποκομίσουν ένα κέρδος προβλέποντας τη διακύμανση της τιμή του εν λόγω αγαθού.

1.3 Είδη παραγώγων

Στη σύγχρονη διεθνή αγορά, τα παράγωγα χωρίζονται σε επιμέρους κατηγορίες, ανάλογα με τα βασικά χαρακτηριστικά της συναλλαγής που περιγράφουν.

1.3.1 Προθεσμιακά Συμβόλαια

Τα Προθεσμιακά Συμβόλαια (Π.Σ.) είναι η απλούστερη μορφή παραγώγου. Τέτοια συμβόλαια συνήθως πραγματοποιούνται μεταξύ δύο αντισυμβαλλομένων, δηλαδή μεταξύ δύο χρηματοοικονομικών ιδρυμάτων ή μεταξύ δύο μεγάλων εταιρειών και συνήθως η διαπραγμάτευση τους γίνεται εκτός χρηματιστηριακής αγοράς (over-the-counter market). Σύμφωνα με τους όρους του συμβολαίου, ο ένας αντισυμβαλλόμενος και πιο συγκεκριμένα αυτός που έχει τη θέση αγοράς (long position) συμφωνεί να αγοράσει μια ποσότητα ενός συγκεκριμένου αγαθού σε μια προκαθορισμένη τιμή σε ένα προκαθορισμένο χρονικό σημείο στο μέλλον. Ο αντισυμβαλλόμενος που σύμφωνα με το συμβόλαιο έχει τη θέση πώλησης (short position) είναι υποχρεωμένος να πουλήσει τη συγκεκριμένη ποσότητα του αγαθού στη προκαθορισμένη τιμή και στο προκαθορισμένο χρονικό σημείο στο μέλλον.

1.3.2 Συμβόλαια Μελλοντικής Εκπλήρωσης (Future Contracts)

Όπως και το Προθεσμιακό Συμβόλαιο, ένα Συμβόλαιο Μελλοντικής Εκπλήρωσης (Σ.Μ.Ε.) είναι μία συμφωνία μεταξύ δύο αντισυμβαλλομένων, ο ένας εκ των οποίων υπόσχεται να αγοράσει (long position) και ο άλλος να πουλήσει (short position), μία συγκεκριμένη ποσότητα ενός αγαθού, σε μία καθορισμένη ημερομηνία στο μέλλον και σε μία προκαθορισμένη τιμή συναλλαγής (delivery price). Αυτός που λαμβάνει long position προσδοκά άνοδο της τιμής του αγαθού ενώ αντίθετα αυτός που λαμβάνει short position προσδοκά πτώση της τιμής του αγαθού. Το υποκείμενο περιουσιακό αγαθό μπορεί να είναι εμπόρευμα (π.χ. ζάχαρη, μαλλί, ξυλεία, χαλκός, αλουμίνιο, χρυσός, κασσίτερος κ.α.) ή χρηματοοικονομικό αγαθό (μετοχές, συνάλλαγμα, ομόλογα κ.α.). Μερικές φορές η ημερομηνία παράδοσης δεν είναι απόλυτα προκαθορισμένη. Για παράδειγμα, μπορεί να καθορίζεται μόνο ο μήνας παράδοσης ενώ η ακριβής ημερομηνία παράδοσης να καθορίζεται από το Χρηματιστήριο Παραγώγων (συνήθως αυτό γίνεται για εμπορεύματα)

1.3.3 Συμβάσεις Ανταλλαγής (Swaps)

Τα swaps είναι ένα είδος παραγώγου, στο οποίο συνάπτεται μία συμφωνία μεταξύ των συμβαλλομένων για ανταλλαγή μελλοντικών χρηματοροών με τρόπο που προκαθορίζουν κατά τη συγγραφή του συμβολαίου. Συνήθως, στα swaps, τα χρηματικά ποσά που ανταλλάσσονται μπορεί να αναφέρονται σε διαφορετικά νομίσματα, ή να είναι το ένα σταθερό και το άλλο μεταβαλλόμενο.

Στη συνέχεια θα αναλυθεί εκτενέστερα μια συγκεκριμένη κατηγορία χρηματοοικονομικών παραγώγων, τα δικαιώματα προαίρεσης.

Κεφάλαιο 2

Δικαιώματα Προαίρεσης

2.1 Ορολογία δικαιωμάτων προαίρεσης

Τα Δικαιώματα Προαίρεσης ή απλά Δικαιώματα είναι συμβόλαια παρόμοια με τα προθεσμιακά συμβόλαια και τα Σ.Μ.Ε. Είναι προθεσμιακές συναλλαγές μεταξύ δύο αντισυμβαλλομένων παράδοσης /παραλαβής ενός υποκείμενου αγαθού σε μία μελλοντική στιγμή. Η ουσιαστική διαφορά τους με τους δυο προηγούμενους τύπους προθεσμιακών συναλλαγών έγκειται στο ότι η διαδικασία παράδοσης /παραλαβής /πληρωμής δεν είναι υποχρεωτικό να λάβει χώρα. Υπάρχουν δύο βασικοί τύποι δικαιωμάτων :

- Δικαιώματα Πώλησης (Put Options)
- Δικαιώματα Αγοράς (Call Options)

Ο κάτοχος ενός δικαιώματος αγοράς έχει το δικαίωμα να αγοράσει το υποκείμενο αγαθό σε κάποια συγκεκριμένη τιμή, σε κάποια συγκεκριμένη μελλοντική ημερομηνία. Αντίστοιχα ο κάτοχος ενός δικαιώματος πώλησης έχει το δικαίωμα να πωλήσει το υποκείμενο αγαθό κάποια συγκεκριμένη τιμή, σε κάποια μελλοντική ημερομηνία. Φυσικά σε κάθε συμβόλαιο μόνο ο ένας εκ των δύο αντισυμβαλλομένων έχει το δικαίωμα αυτό είτε είναι δικαίωμα αγοράς είτε είναι δικαίωμα πώλησης. Η κατηγοριοποίηση των Δικαιωμάτων επεκτείνεται σε δύο επιπλέον τύπους :

- Δικαιώματα Ευρωπαϊκού Τύπου (European Options), και
- Δικαιώματα Αμερικανικού Τύπου (American Options)

Τα Δικαιώματα Αμερικανικού Τύπου (American Options) μπορούν να ασκηθούν οποιαδήποτε στιγμή μέχρι την ημερομηνία παράδοσης, ενώ τα Δικαιώματα Ευρωπαϊκού Τύπου (European Options) ασκούνται μόνο την ακριβή ημερομηνία παράδοσης. Στην περίπτωση συμβολαίων δικαιωμάτων η σύναψη κάθε συμβολαίου συνοδεύεται από κάποια τιμή που αποδίδεται στον αντισυμβαλλόμενο που αναλαμβάνει την υποχρέωση έναντι του κατόχου του δικαιώματος ως ασφάλιστρο (premium).

Στην αγορά παραγώγων κάθε δεδομένη στιγμή διαπραγματεύονται πολλοί και διαφορετικοί τύποι συμβολαίων δικαιωμάτων προαίρεσης. Στο πλαίσιο αυτό έχει δημιουργηθεί κάποια ορολογία. Οι βασικότεροι όροι οι οποίοι χρήζουν περαιτέρω ανάλυσης είναι οι εξής :

1. Κλάση Δικαιωμάτων (option class)
2. Καθαρή Αξία Δικαιωμάτων (moneyness)
   (α′) Ουδέτερη Καθαρή Αξία (at-the-money)
   (β′) Θετική Καθαρή Αξία (in-the-money)
   (γ′) Αρνητική Καθαρή Αξία (out-of-the-money)
3. Χρονική Αξία (Time value)
4. Εσωτερική Αξία (Intrinsic value)

2.1.1 Κλάση δικαιωμάτων

Σε μία κλάση δικαιωμάτων ανήκουν όλα τα δικαιώματα ίδιου τύπου, δηλαδή είτε δικαιώματα αγοράς (call options) είτε δικαιώματα πώλησης (put options).

2.1.2 Καθαρή αξία δικαιωμάτων

Αυτό που καθορίζει τους τρεις διαφορετικούς τύπους καθαρής αξίας δικαιωμάτων(in the money, at the money, out of the money) είναι κατά πόσον η χρηματοροή που θα απέδιδε ένα δικαίωμα εάν ασκηθεί σήμερα είναι θετική ή αρνητική. Η χρηματοροή ενός δικαιώματος που ασκείται σήμερα ορίζεται ως η διαφορά της τιμής άσκησης (K) από την τρέχουσα τιμή (S) για δικαιώματα πώλησης και η διαφορά της τιμής άσκησης (K) από την τρέχουσα τιμή (S) για δικαιώματα αγοράς. Με βάση λοιπόν το πρόσημο της χρηματοροής προκύπτει ο παρακάτω πίνακας ορισμού των τριών διαφορετικών τύπων καθαρής αξίας.

	In the money	At the money	Out of the money
Call Option	S>K	S=K	S<K
Put Option	S<K	S=K	S>K

Πίνακας 2.1: Ορισμός διαφορετικών τύπων καθαρής αξίας.

Στον πίνακα 2.1 φαίνεται καθαρά πως για θετική χρηματοροή προκύπτει θετική καθαρή αξία (in the money), για αρνητική χρηματοροή αρνητική καθαρή αξία (out of the money) και για ουδέτερη χρηματοροή ουδέτερη καθαρή αξία (at the money). Είναι ευνόητο ότι τα δικαιώματα που συμφέρει τελικώς να ασκηθούν είναι εκείνα με θετική καθαρή αξία (in the money options).

2.1.3 Εσωτερική αξία

Ως εσωτερική αξία (intrinsic value) ορίζεται η αξία που θα αποδώσει ένα συμβόλαιο δικαιώματος εάν ασκηθεί σήμερα. Επομένως για τα δικαιώματα αγοράς ορίζεται ως

$$h_c\left(S\right) = \max\left(S - K, 0\right)$$

και για τα δικαιώματα πώλησης ως

$$h_p\left(S\right) = \max\left(K - S, 0\right)$$

όπου S η τιμή του υποκείμενου τίτλου σήμερα και K η τιμή άσκησης του δικαιώματος.

2.1.4 Χρονική αξία

Η χρονική αξία ενός συμβολαίου δικαιώματος είναι το ποσοστό της τιμής του δικαιώματος το οποίο ποσοτικοποιεί την πιθανότητα μελλοντικών κερδοφόρων μεταβολών της τιμής του υποκείμενου τίτλου.

2.2 Παραδοχές και συμβολισμοί

2.2.1 Παραδοχές

Η αγορά για την οποία γίνεται λόγος απαρτίζεται από επενδυτές για τους οποίους ισχύουν τα εξής:

1. Δεν υπάρχουν κόστη συναλλαγών (no transaction costs) .

2. Όλα τα κέρδη συναλλαγών επίκεινται στην ίδια φορολόγηση .

3. Κάθε είδους δανεισμός είναι δυνατόν να γίνει με το χωρίς ρίσκο (risk free) επιτόκιο .

4. Δεν υπάρχουν ευκαιρίες arbitrage (no arbitrage)

2.2.2 Συμβολισμοί

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιηθούν οι ακόλουθοι συμβολισμοί:

S_0: Τρέχουσα τιμή μετοχής

K: Τιμή άσκησης του δικαιώματος (strike price)

T: Χρόνος μέχρι τη λήξη του δικαιώματος

S_T : Τιμή της μετοχής στη λήξη του συμβολαίου δικαιώματος

r: Διαρκώς ανατοκιζόμενο χωρίς ρίσκο επιτόκιο

V_c^A: Τιμή δικαιώματος αγοράς Αμερικανικού

V_p^A: Τιμή δικαιώματος πώλησης Αμερικανικού τύπου

V_c^E: Τιμή δικαιώματος αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου

V_p^E: Τιμή δικαιώματος πώλησης Ευρωπαϊκού τύπου

2.2.3 Θέσεις δικαιωμάτων

Για κάθε συμβόλαιο δικαιώματος υπάρχουν δύο βασικές θέσεις που μπορεί κάθε αντισυμβαλλόμενος να κατέχει. Η θέση αγοράς (long position) την οποία κατέχει ο επενδυτής που έχει αγοράσει το συμβόλαιο και η θέση πώλησης την οποία κατέχει ο επενδυτής που έχει πουλήσει το συμβόλαιο.

	Long Position	Short Position
Call Option	1	2
Put Option	3	4

Πίνακας 2.2: Συνδυασμός επενδυτικών θέσεων και τύπων δικαιώματος.

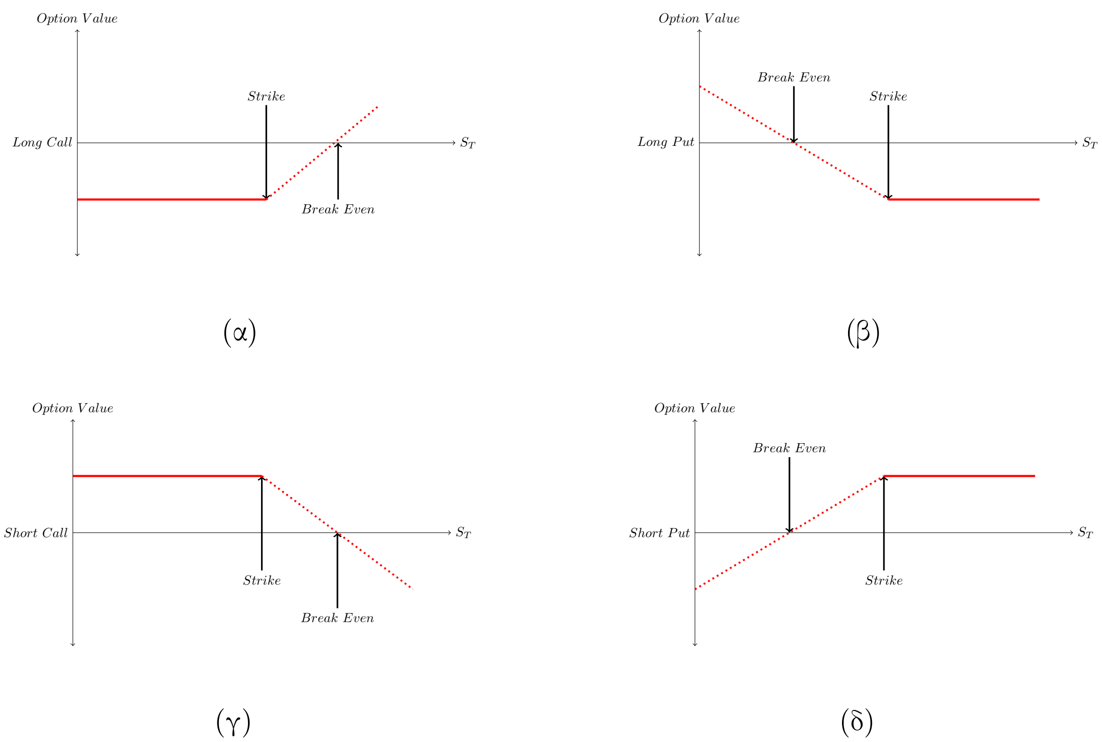
Σε συνδυασμό με τους δύο διαφορετικούς τύπους δικαιωμάτων, δικαιώματα αγοράς (call options) και δικαιώματα πώλησης (put options), όπως φαίνεται και στον πίνακα 2.2 προκύπτουν τελικά τέσσερις διαφορετικές θέσεις σε συμβόλαια δικαιωμάτων:

1. Θέση αγοράς σε δικαίωμα αγοράς (long on a call)

2. Θέση αγοράς σε δικαίωμα πώλησης (long on a put)

3. Θέση πώλησης σε δικαίωμα αγοράς (short on a call)

4. Θέση πώλησης σε δικαίωμα πώλησης (short on a put)



Σχήμα 2.1: Αποδόσεις επένδυσης από κατοχή θέσεων σε δικαιώματα Ευρωπαϊκού τύπου, συνυπολογιζομένων των ασφαλίστρων (α) θέση αγοράς σε δικαίωμα αγοράς, (β) θέση αγοράς σε δικαίωμα πώλησης, (γ) θέση πώλησης σε δικαίωμα αγοράς, (δ) θέση πώλησης σε δικαίωμα πώλησης.

Συχνά είναι χρήσιμο να χαρακτηρίζονται οι θέσεις των δικαιωμάτων Ευρωπαϊκού τύπου με όρους τελικής απόδοσης στον επενδυτή την ημερομηνία λήξης. Σε αυτή την περίπτωση το αρχικό κόστος του συμβολαίου δεν συμπεριλαμβάνεται στον υπολογισμό της τελικής απόδοσης.

Η απόδοση από κατοχή θέσης αγοράς σε ένα δικαίωμα αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου υπολογίζεται ως

$$h_c^E\left(S\right) = \max\left(S_T - K, 0\right)$$

Ως αποτέλεσμα της παραπάνω σχέσης το δικαίωμα θα ασκηθεί μόνο εφόσον $S_T > K$ ενώ δεν θα ασκηθεί αν $S_T \leq K$. Η απόδοση από κατοχή θέσης πώλησης σε δικαίωμα αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου υπολογίζεται ως

$$h_c^E\left(S\right) = -\max\left(S_T - K, 0\right) = \min(K - S_T, 0),$$

η απόδοση η απόδοση από κατοχή θέσης αγοράς σε δικαίωμα πώλησης Ευρωπαϊκού τύπου υπολογίζεται ως

$$h_p^E(S) = \max(K - S_T, 0)$$

και τέλος η απόδοση από κατοχή θέσης πώλησης σε δικαίωμα πώλησης υπολογίζεται ως

$$h_p^E(S) = -\max(K - S_T, 0) = \min(S_T - K, 0)$$

Οι παραπάνω υπολογισμοί των αποδόσεων αναλόγως της θέσης και του τύπου δικαιώματος που κατέχει ο επενδυτής φαίνονται αναλυτικά στο Σχήμα. 2.1

2.2.4 Υποκείμενοι τίτλοι δικαιωμάτων

Διεθνώς ο υποκείμενος τίτλος ενός συμβολαίου δικαιώματος προαίρεσης μπορεί να είναι οποιαδήποτε περιουσιακή αξία . Οι υποκείμενοι τίτλοι οποίοι είναι οι επικρατέστεροι σήμερα στην αγορά είναι οι εξής :

- Δικαιώματα Προαίρεσης σε Μετοχές (stock options)
- Δικαιώματα Προαίρεσης σε Δείκτες (index options)
- Δικαιώματα Προαίρεσης στην ισοτιμία ξένου συναλλάγματος (foreign currency options)
- Δικαιώματα Προαίρεσης σε Σ.Μ.Ε. (futures options)

Στην ελληνική αγορά έως σήμερα έχουν εισαχθεί μόνο συμβόλαια δικαιωμάτων στους τρεις πρώτους υποκείμενους τίτλους, ενώ συμβόλαια δικαιωμάτων σε Σ.Μ.Ε. (futures) δεν διαπραγματεύονται ακόμη στο Ξρηματιστήριο Αθηνών (Χ.Α.).

Ο μεγαλύτερος όγκος συναλλαγών δικαιωμάτων σε μετοχές λαμβάνει χώρα σε χρηματιστηριακές αγορές. Το μέγεθος το συμβολαίου είναι εκατό μετοχές δίνοντας στον κάτοχο του το δικαίωμα να αγοράσει ή να πουλήσει εκατό μετοχές στην τιμή άσκησης που συμφωνήθηκε. Συνήθως είναι Αμερικανικού τύπου και εκκαθαρίζονται με φυσική παράδοση.

Τα δικαιώματα προαίρεσης σε δείκτες διαπραγματεύονται τόσο στην χρηματιστηριακή (exchange traded) όσο και στην εξωχρηματιστηριακή αγορά (OTC market). Συνήθως είναι Ευρωπαϊκού τύπου και εκκαθαρίζονται με χρηματικό διακανονισμό. Στην Ελληνική αγορά διαπραγματεύονται συμβόλαια δικαιωμάτων στους δείκτες FTSE/ASE 20 και FTSE/ASE Mid-40.

Ο μεγαλύτερος όγκος συναλλαγών στην ισοτιμία ξένου συναλλάγματος παρουσιάζεται στην εξωχρηματηστιριακή αγορά, ή αλλιώς Over The Counter market, σε σχέση με την χρηματιστηριακή. Διεθνώς διαπραγματεύονται συμβόλαια είτε Αμερικανικού είτε Ευρωπαϊκού τύπου στην ισοτιμία διαφόρων ξένων νομισμάτων με το μέγεθος του συμβολαίου να διαφέρει για κάθε νόμισμα. Στο Χ.Α. διαπραγματεύονται μόνο στην ισοτιμία ευρώ/δολαρίου. Το υποκείμενο στοιχείο είναι το Συμβόλαιο Μελλοντικής Εκπλήρωσης στην ισοτιμία Ευρώ/Δολαρίου.

Στην διεθνή αγορά όταν διαπραγματεύεται κάποιο συγκεκριμένο future contract αντίστοιχα διαπραγματεύεται και συμβόλαιο δικαιώματος σε αυτό το future. Τα δικαιώματα σε Σ.Μ.Ε. συνήθως λήγουν ακριβώς πριν από τη λήξη του συμβολαίου μελλοντικής εκπλήρωσης. Όταν ένα τέτοιο συμβόλαιο δικαιώματος αγοράς ασκηθεί ο κάτοχος του λαμβάνει ένα long position στο Σ.Μ.Ε. και κάποιο χρηματικό ποσό που καλύπτει την διαφορά της τιμής του Σ.Μ.Ε. και της τιμής άσκησης του δικαιώματος. Αντίστοιχα για ένα συμβόλαιο δικαιώματος αγοράς που θα ασκηθεί ο κάτοχος λαμβάνει long position στο Σ.Μ.Ε. και επιπλέον το αντίστοιχο χρηματικό ποσό.

Τα δικαιώματα προαίρεσης σε Σ.Μ.Ε. αποτελούν ιδιαίτερα εύχρηστα εργαλεία διαχείρισης κινδύνου. Η αντιστάθμιση κινδύνου ουσιαστικά γίνεται μέσω του ασφαλίστρου (premium) του συμβολαίου που είναι διατεθειμένος κάθε επενδυτής να πληρώσει κατά τη σύναψη του ώστε να διασφαλίσει το δικαίωμα και είτε να επωφεληθεί από την κίνηση των τιμών των Σ.Μ.Ε. είτε να επιβαρυνθεί μόνο με το κόστος του ασφαλίστρου αφήνοντας το δικαίωμα να λήξει ανεκμετάλλευτο.

2.3 Παράγοντες που επηρεάζουν τις τιμές των δικαιωμάτων προαίρεσης

Υπάρχουν έξι διαφορετικοί παράγοντες που επηρεάζουν τις τιμές των δικαιωμάτων προαίρεσης σε μετοχές:

1. Η τρέχουσα τιμή της μετοχής S_0,
2. Η τιμή άσκησης K (strike price),
3. Ο χρόνος ως τη λήξη του δικαιώματος T (maturity),
4. Η μεταβλητότητα της τιμής της μετοχής σ(volatility),
5. Το χωρίς ρίσκο επιτόκιο (risk free interest rate) r,
6. Τα μερίσματα επί της μετοχής κατά τη διάρκεια ισχύς του δικαιώματος (dividends).

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζεται συνοπτικά το πως ο κάθε ένας από τους παράγοντες αυτούς επηρεάζει τις τιμές των δικαιωμάτων προαίρεσης σε μετοχές.

Μεταβλητή	European call	European put	American call	American put
S_0	+	-	+	-
K	-	+	-	+
T	?	?	+	+
σ	+	+	+	+
r	+	-	+	-
μέρισμα	-	+	-	+

+: Ανάλογη σχέση μεταξύ της τιμής του δικαιώματος και της μεταβλητής

-: Αντιστρόφως ανάλογη σχέση μεταξύ της τιμής του δικαιώματος και της μεταβλητής

?: Αβέβαιη σχέση

Πίνακας 2.3: Συνοπτική παρουσίαση της επιρροής κάθε παράγοντα στην τιμή διαφορετικών τύπων δικαιωμάτων, όταν ο παράγοντας αυξάνεται ενώ όλοι οι υπόλοιποι παραμένουν σταθεροί.

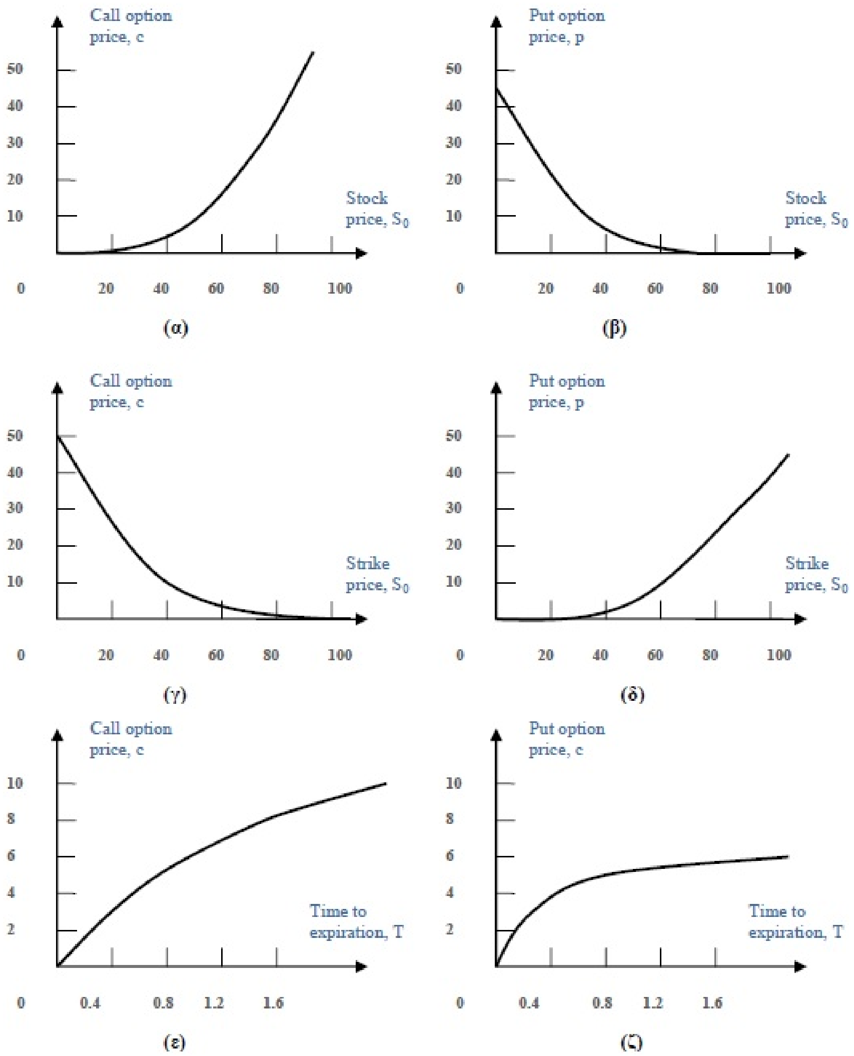
2.3.1 Τιμή μετοχής και τιμή άσκησης δικαιώματος

Εάν ένα δικαίωμα αγοράς ασκηθεί κάποια στιγμή στο μέλλον το κέρδος που θα αποφέρει είναι η διαφορά της τιμής της μετοχής με την τιμή εξάσκησής του. Έτσι, ένα δικαίωμα αγοράς αποκτά μεγαλύτερη χρηματική αξία όσο αυξάνεται η τιμή της μετοχής και μικρότερη όσο αυξάνεται η τιμή άσκησης. Τα δικαιώματα πώλησης λειτουργούν εντελώς αντίθετα.

Για ένα δικαίωμα πώλησης το κέρδος από την άσκηση του είναι το ποσό κατά το οποίο η τιμή άσκησης υπερέχει της τιμής της μετοχής. Ως εκ τούτου ένα δικαίωμα πώλησης αποκτά μικρότερη χρηματική αξία όσο αυξάνεται η τιμή της μετοχής και μεγαλύτερη χρηματική αξία όσο αυξάνεται η τιμή άσκησης . Στο Σχήμα 2.3 (α-δ) απεικονίζεται διαγραμματικά η εξάρτηση των δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης τόσο από την τιμή της μετοχής όσο και από την τιμή άσκησης του συμβολαίου.

2.3.2 Ο χρόνος ως τη λήξη του δικαιώματος

Τόσο τα δικαιώματα αγοράς όσο και τα δικαιώματα πώλησης Αμερικανικού τύπου αποκτούν μεγαλύτερη αξία όσο η περίοδος ζωής τους αυξάνεται. Αυτό συμβαίνει καθώς όσο μεγαλύτερη είναι η περίοδος μέχρι την λήξη του συμβολαίου τόσες περισσότερες ευκαιρίες έχει ο κάτοχος του να το ασκήσει. Ένα συμβόλαιο μακροπρόθεσμης λήξης θα πρέπει να αξίζει τουλάχιστον όσο αξίζει ένα αντίστοιχο συμβόλαιο βραχυπρόθεσμης λήξης. Για τα Ευρωπαϊκά δικαιώματα συνήθως ισχύει η ίδια συμπεριφορά καθώς ο χρόνος μέχρι τη λήξη του αυξάνεται. Υπό συγκεκριμένες συνθήκες ωστόσο η συμπεριφορά αυτή μπορεί να αλλάξει (αποκοπή μερίσματος).



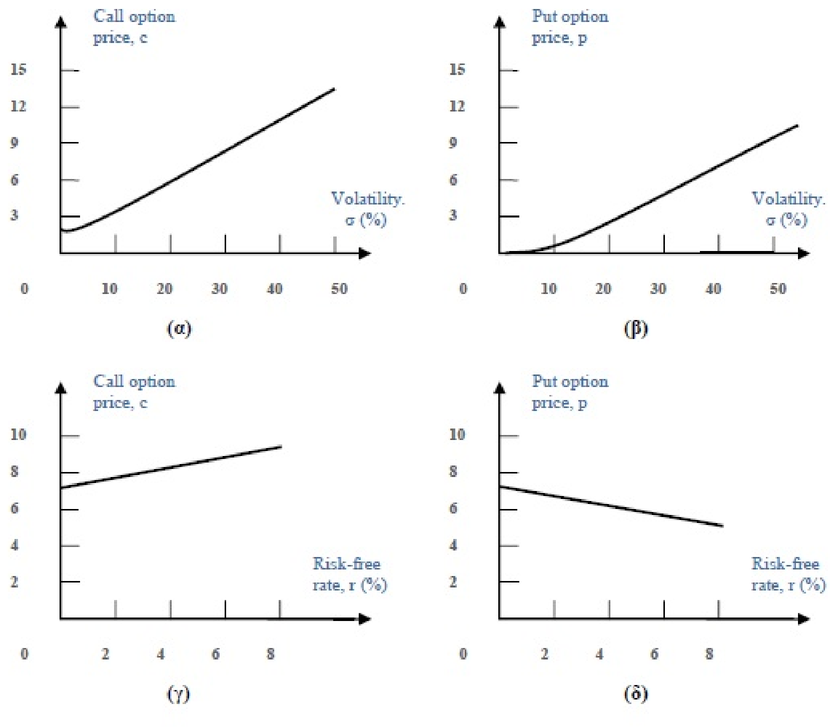
Σχήμα 2.2: Επιρροή της αξίας των δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης από (α, β) την τιμή της μετοχής, (γ, δ) την τιμή της άσκησης, (ε, ζ) την περίοδο λήξης.

2.3.3 Μεταβλητότητα της μετοχής

Η μεταβλητότητα της τιμής της μετοχής αποτελεί ένα μέτρο της αβεβαιότητας στην κίνηση της τιμής της μετοχής μελλοντικά. Ως εκ τούτου, καθώς η μεταβλητότητα αυξάνεται, η πιθανότητα η τιμή της μετοχής να κινηθεί σε πολύ υψηλά ή σε πολύ χαμηλά επίπεδα αυξάνει. Για τον κάτοχο της μετοχής οι δύο αυτές πιθανότητες απαλείφονται μεταξύ τους, ωστόσο δεν ισχύει το ίδιο και για τον κάτοχο κάποιου δικαιώματος. Πιο συγκεκριμένα ο κάτοχος ενός δικαιώματος αγοράς επωφελείται αρκετά από επικείμενη άνοδο της τιμής της μετοχής ενώ έχει περιορισμένες απώλειες σε περίπτωση επικείμενης πτώσης της. Αντίστροφα ο κάτοχος ενός δικαιώματος πώλησης θα αποκομίσει μεγάλα κέρδη από επικείμενη πτώση της τιμής της μετοχής και περιορισμένη απώλεια σε επικείμενη άνοδο της. Έτσι λοιπόν η αξία τόσο των δικαιωμάτων αγοράς όσο και των δικαιωμάτων πώλησης αυξάνονται καθώς αυξάνεται η μεταβλητότητα της τιμής της μετοχής.

2.3.4 Το χωρίς κίνδυνο επιτόκιο

Το χωρίς κίνδυνο επιτόκιο επηρεάζει την αξία των δικαιωμάτων με ένα λιγότερο ξεκάθαρο τρόπο. Όσο τα επιτόκια στην οικονομία αυξάνονται τόσο το αναμενόμενο κέρδος από την τάση των μετοχών για τους επενδυτές μειώνεται. Παράλληλα κάθε παρούσα αξία οποιαδήποτε χρηματικής ροής λαμβάνουν μειώνεται επίσης. Ως αποτέλεσμα των παραπάνω είναι καθώς τα επιτόκια αυξάνονται η αξία των δικαιωμάτων αγοράς αυξάνεται ενώ η αξία των δικαιωμάτων πώλησης μειώνεται.



Σχήμα 2.3: Επιρροή της αξίας των δικαιωμάτων προαίρεσης αγοράς και πώλησης από την μεταβλητότητα της υποκείμενης μετοχής (α, β) και το χωρίς κίνδυνο επιτόκιο (γ, δ).

2.3.5 Αποκοπή μερίσματος επί της μετοχής

Η αποκοπή μερίσματος τείνει να ρίχνει σε χαμηλότερα επίπεδα την τιμή της μετοχής με αποτέλεσμα να επηρεάζεται θετικά η αξία των δικαιωμάτων αγοράς και αρνητικά η αξία των δικαιωμάτων πώλησης.

2.4 Άνω και κάτω όρια για τις τιμές των δικαιωμάτων προαίρεσης

2.4.1 Άνω όρια

Ένα δικαίωμα αγοράς Αμερικανικού ή Ευρωπαϊκού τύπου δίνει στον κάτοχο του το δικαίωμα να αγοράσει μια μετοχή για κάποια συγκεκριμένη τιμή. Για κανένα λόγο λοιπόν το δικαίωμα δεν μπορεί να κοστίζει περισσότερο από την μετοχή. Ως εκ τούτου για τα δικαιώματα αγοράς άνω όριο για την τιμή τους είναι η τιμή της μετοχής:

$$V_c^E \leq S_0 \text{ και } V_c^A \leq S_0$$

Σε περίπτωση που οι σχέσεις αυτές δεν τηρούνται κάποιος κερδοσκόπος θα μπορούσε με να έχει ένα εύκολο κέρδος αγοράζοντας τη μετοχή και πουλώντας το δικαίωμα.

Αντίστοιχα ένα δικαίωμα πώλησης Αμερικανικού ή Ευρωπαϊκού τύπου δίνει στον κάτοχο του το δικαίωμα να πουλήσει μια μετοχή για κάποια συγκεκριμένη τιμή K. Όσο και αν μειωθεί η τιμή της μετοχής ένα δικαίωμα πώλησης δεν θα μπορούσε να κοστίζει περισσότερο από K Συνεπώς το άνω όριο για την τιμή των δικαιωμάτων πώλησης είναι:

$$V_p^E \leq K \text{ και } V_p^A \leq K$$

Τα δικαιώματα πώλησης Ευρωπαϊκού τύπου δεν είναι δυνατόν να κοστίζουν περισσότερο από την παρούσα αξία του K σήμερα άρα:

$$V_p^E \leq Ke^{-rT}$$

Εάν το όριο αυτό δεν ίσχυε ο οποιοσδήποτε επενδυτής θα ήταν δυνατόν να έχει εύκολο κέρδος εκδίδοντας ένα δικαίωμα και επενδύοντας το κέρδος από την έκδοση του δικαιώματος με το χωρίς ρίσκο επιτόκιο.

2.4.2 Κάτω όρια

Ένα κάτω όριο για την τιμή ενός δικαιώματος αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου είναι:

$$V_c^E = S_0 - Ke^{-rt}$$

Ένα παράδειγμα θα δείξει την ορθότητα του ορίου αυτού. Έστω δύο υποθετικά χαρτοφυλάκια:

Χαρτοφυλάκιο A: Ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς και ένα ποσό σε Μετρητά ίσο με Ke^{-rt}.

Χαρτοφυλάκιο B: Μία μετοχή.

Στο χαρτοφυλάκιο Α, τα μετρητά εάν επενδυθούν με το χωρίς ρίσκο επιτόκιο σε χρόνο Τ θα φτάσουν στο ποσό Κ . Εάν $S_T > K$ τότε το δικαίωμα θα ασκηθεί στη λήξη και το χαρτοφυλάκιο θα αξίζει S_T. Ενώ εάν $S_T < K$ το δικαίωμα δεν συμφέρει να ασκηθεί, θα λήξει ανεκπλήρωτο και το χαρτοφυλάκιο θα αξίζει Κ. Συνεπώς η αξία του χαρτοφυλακίου Α είναι:

$$\Pi_A = \max\left(S_T, K\right).$$

Το χαρτοφυλάκιο Β αξίζει S_T σε χρόνο Τ. Ως εκ τούτου το χαρτοφυλάκιο Α αξίζει σε κάθε περίπτωση τουλάχιστον όσο το χαρτοφυλάκιο Β στη λήξη του συμβολαίου, και υποθέτοντας ότι δεν υπάρχει ευκαιρία κερδοσκοπίας (arbitrage) η σχέση αυτή ισχύει και για σήμερα. Επομένως ισχύει:

$$V_c^E + Ke^{-rT} \geq S_0$$

$$V_c^E \geq S_0 - Ke^{-rT}$$

Επειδή στη χείριστη περίπτωση για ένα δικαίωμα αγοράς θα λήξει ανεκπλήρωτο, η αξία του δεν μπορεί να είναι αρνητική. Αυτό σημαίνει ότι:

$$V_c^E \geq \max\left(S_0 - Ke^{-rT}, 0\right).$$

Αν, χάριν παραδείγματος, υποθέσουμε πως η τιμή της υποκείμενης μετοχής ενός European call option είναι σήμερα $S_0 = \$51$, η τιμή εξάσκησης του option $K = \$50$, ο χρόνος μέχρι τη λήξη του $T = 6$ μήνες και το ετήσιο risk free επιτόκιο είναι $r = 12\%$ τότε το κατώτατο όριο του δικαιώματος θα ήταν $V_c^E = 51 - 50e^{-0.12 \cdot 0.5} = \$3.91$

Αντίστοιχα, για ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα πώλησης σε μετοχή, το κάτω όριο τιμής είναι:

$$V_p^E = Ke^{-rT} - S_0$$

Ομοίως, θεωρούμε δύο υποθετικά χαρτοφυλάκια:

Χαρτοφυλάκιο Γ: Ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα πώλησης και μία μετοχή.

Χαρτοφυλάκιο Δ: Ένα ποσό μετρητών ίσο με Ke^{-rT}

Για το χαρτοφυλάκιο Γ, εάν $S_T < K$, το δικαίωμα θα ασκηθεί στη λήξη του και η αξία του θα είναι Κ. Διαφορετικά, εάν $S_T > K$, το δικαίωμα θα λήξει ανεκπλήρωτο και η αξία του χαρτοφυλακίου ανέρχεται στην τρέχουσα τιμή της μετοχής S_T. Συνεπώς η αξία του χαρτοφυλακίου Γ σε χρόνο Τ είναι:

$$\Pi_\Gamma = \max\left(S_T, K\right).$$

Για το χαρτοφυλάκιο Δ, έστω ότι το ποσό των μετρητών επενδύεται με το χωρίς ρίσκο επιτόκιο. Τότε η αξία του χαρτοφυλακίου σε χρόνο Τ θα είναι Κ. Ως εκ τούτου συμπεραίνουμε ότι η αξία του χαρτοφυλακίου Γ είναι σε κάθε περίπτωση τουλάχιστον ίση με την αξία του χαρτοφυλακίου Δ σήμερα ή και μεγαλύτερη, υποθέτοντας ότι δεν υπάρχουν ευκαιρίες κερδοσκοπίας. Άρα:

$$V_p^E + S_0 \geq Ke^{-rT}$$

$$V_p^E \geq Ke^{-rT} - S_0$$

και επειδή η χείριστη περίπτωση για ένα δικαίωμα πώλησης είναι να λήξει ανεκπλήρωτο, η αξία του δεν μπορεί να είναι αρνητική:

$$V_p^E \geq \max\left(Ke^{-rT} - S_0, 0\right).$$

Ομοίως με την περίπτωση του European call, ας θεωρήσουμε ένα αριθμητικό παράδειγμα με ένα European put option, η τιμή της υποκείμενης μετοχής του οποίου είναι σήμερα $S_0 = \$38$, η τιμή εξάσκησης του $K = \$40$, διαρκεί $T = 3\, \mu\acute{\eta}\nu\epsilon\varsigma$ και το ετήσιο χωρίς ρίσκο επιτόκιο είναι $r = 10\%$. Εφαρμόζοντας την παραπάνω σχέση, προκύπτει πως το κάτω όριο για το εν λόγω δικαίωμα είναι $V_p^E = 40e^{-0.1 \cdot 0.25} - 38 = \$1.01$.

2.5 Ισοτιμία δικαιωμάτων αγοράς-πώλησης (Put-Call Parity)

Παρότι τα δικαιώματα αγοράς και πώλησης διαπραγματεύονται στο χρηματιστήριο παραγώγων ξεχωριστά το ένα από το άλλο, δεν σημαίνει ότι και οι τιμές τους είναι ανεξάρτητες. Αντιθέτως, υπάρχει θεωρητική σχέση η οποία συνδέει την τιμή ενός Ευρωπαϊκού call option με την τιμή ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος put option με την ίδια τιμή πώλησης και την ίδια ημερομηνία λήξης. Η θεωρητική αυτή σχέση ονομάζεται ισοτιμία δικαιωμάτων πώλησης – αγοράς (put-call parity) και είναι θεμελιακής σημασίας για ανάλυση και αποτίμηση των δικαιωμάτων προαίρεσης. Προς εξήγηση της θεωρητικής αυτής σχέσης παρατίθεται ένα παράδειγμα.

Απόδειξη Ας θεωρήσουμε τα χαρτοφυλάκια:

Χαρτοφυλάκιο Α: Ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς και ένα ποσό μετρητών ίσο με Ke^{-rT}.

Χαρτοφυλάκιο Γ: Ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα πώλησης και μία μετοχή.

Η αξία και των δύο χαρτοφυλακίων στη λήξη των δικαιωμάτων είναι $\Pi = \max(S_T, K)$. Επειδή και τα δύο δικαιώματα στα χαρτοφυλάκια είναι Ευρωπαϊκά δεν μπορούν να ασκηθούν πριν την λήξη τους και συνεπώς και τα δύο χαρτοφυλάκια θα πρέπει να έχουν την ίδια αξία σήμερα. Από το παραπάνω συμπέρασμα προκύπτει η ισοτιμία τιμής δικαιώματος αγοράς και πώλησης:

$$V_c^E + Ke^{-rT} = V_p^E + S_0$$

Στις περιπτώσεις που η ισοτιμία δικαιώματος αγοράς - πώλησης δεν ισχύει, και είτε το δικαίωμα αγοράς στο χαρτοφυλάκιο Α είναι υπερτιμημένο είτε το δικαίωμα πώλησης του χαρτοφυλακίου Γ είναι υπερτιμημένο, παρουσιάζονται ευκαιρίες κερδοσκοπίας. Συγκεκριμένα, ας εξετάσουμε δύο διαφορετικές περιπτώσεις. Αρχικά, ας υποθέσουμε πως οι δύο πιθανές τιμές για τα δικαιώματα αγοράς και πώλησης είναι \$3 και \$2,25 αντίστοιχα. Εάν τα αντικαταστήσουμε στην σχέση ισοτιμίας με τα υπόλοιπα δεδομένα όπως παρουσιάζονται στον πίνακα προκύπτει

$$3 + 30e^{-0.1 \cdot 3/12} = \$32.26 \neq 2.25 + 31 = \$33.25,$$

δηλαδή η σχέση ισοτιμίας δεν ισχύει και ότι το δικαίωμα πώλησης είναι υποτιμημένο σε σχέση με το δικαίωμα αγοράς. Στην περίπτωση που η επενδυτική στρατηγική κερδοσκοπίας είναι ο επενδυτής να πάρει θέση πώλησης (short position) στο υπερτιμημένο προϊόν, δηλαδή στο δικαίωμα πώλησης, και να αγοράσει (long position) το δικαίωμα αγοράς, επενδύοντας ταυτόχρονα τα χρήματα που ρευστοποίησε από το short position στο δικαίωμα πώλησης στη μετοχή με συνολική χρηματοροή:

$$-3 + 2.25 + 31 = \$30.25\,.$$

Στη λήξη των δικαιωμάτων ο επενδυτής θα εισπράξει από την επένδυση:

$$30.25e^{0.1 \cdot 0.25} = \$31.02\,.$$

Έτσι είτε η τιμή της μετοχής κινηθεί σε επίπεδα άνω των \$30 είτε κάτω των \$30 ο επενδυτής θα ασκήσει είτε το δικαίωμα αγοράς είτε το δικαίωμα πώλησης (short) και θα εξασφαλίσει καθαρό κέρδος:

$$\$31.02 - \$30.25 = \$1.02.$$

Στην περίπτωση τώρα που οι δύο τιμές των δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης είναι \$3 και \$1 αντίστοιχα , κάνοντας την αντικατάσταση στην σχέση ισοτιμίας προκύπτει

$$C^E + Ke^{-rT} = 3 + 30e^{-0.1 \cdot 3/12} = \$32.26$$

$$P^E + S_0 = 1 + 31 = \$32.00,$$

ότι δηλαδή η σχέση ισοτιμίας δεν επαληθεύεται. Αυτό συμβαίνει διότι το δικαίωμα πώλησης είναι υπερτιμημένο σε σχέση με το δικαίωμα αγοράς. Στην περίπτωση αυτή και πάλι η επενδυτική στρατηγική κερδοσκοπίας είναι ο επενδυτής να πάρει θέση πώλησης στο υπερτιμημένο προϊόν δηλαδή στο δικαίωμα αγοράς και να αγοράσει το δικαίωμα πώλησης αλλά και την μετοχή με αρχικό κεφάλαιο

$$\$31 + \$1 - \$3 = \$29.$$

Εάν αυτό το κεφάλαιο γίνει διαθέσιμο μέσω δανεισμού σε τρεις μήνες θα είναι:

$$\$29e^{0.1\cdot0.25} = \$29.73$$

Στη συνέχεια είτε η τιμή της μετοχής κινηθεί σε επίπεδα άνω των \$30 είτε κάτω των \$30 ο επενδυτής θα ασκήσει είτε το δικαίωμα πώλησης (long position) είτε το δικαίωμα αγοράς (short position) και θα εξασφαλίσει καθαρό κέρδος

$$\$30 - \$29.73 = \$0.27$$

2.6 Δικαιώματα προαίρεσης με δυνατότητες πρόωρης εξάσκησης (Options With Early Exercise Features)

2.6.1 Δικαιώματα αγοράς

Η άσκηση ενός δικαιώματος αγοράς σε μετοχή που δεν αποκόπτει μέρισμα, πριν από την ημερομηνία λήξης δεν είναι ποτέ η ευνοϊκότερη στρατηγική για έναν επενδυτή. Η ισχύς της παραπάνω πρότασης φαίνεται αν αναλύσουμε την εξίσωση:

$$V_c^E \geq S_0 - Ke^{-rT}$$

Επειδή ο κάτοχος ενός Αμερικανικού δικαιώματος αγοράς έχει την ευκαιρία να ασκήσει το δικαίωμα οποιαδήποτε στιγμή μέχρι τη λήξη του σε αντίθεση με τον κάτοχο του αντίστοιχα Ευρωπαϊκού δικαιώματος θα πρέπει να ισχύει:

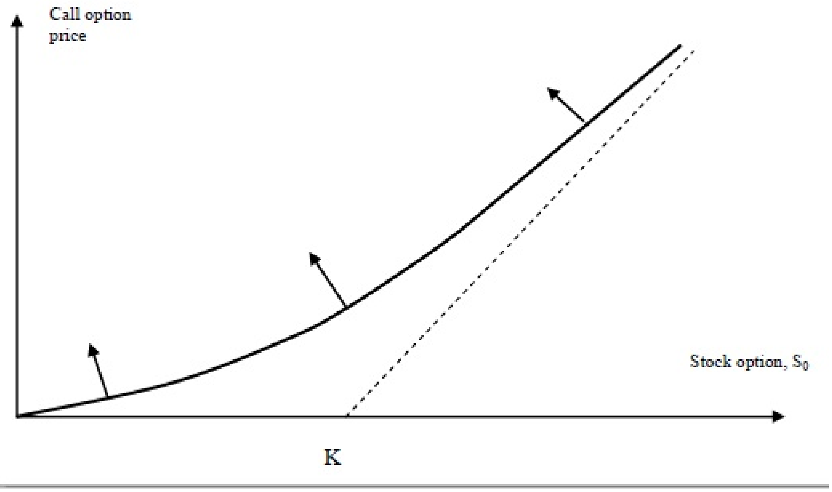
$$V_c^A \geq V_c^E$$

$$V_c^A \geq S_0 - Ke^{-rT}$$

Και δεδομένου ότι $r > 0$ προκύπτει ότι:

$$V_c^A > S_0 - K$$

Για να είναι η ευνοϊκότερη στρατηγική για έναν επενδυτή η πρόωρη άσκηση του δικαιώματος θα έπρεπε η αξία του Αμερικανικού δικαιώματος αγοράς V_c^A να είναι τουλάχιστον ίση με $S_0 - K$.



Σχήμα 2.4: Μεταβολή της τιμής ενός Αμερικανικού δικαιώματος αγοράς σε συνάρτηση με την τιμή S_0 μετοχής που δεν αποκόπτει μέρισμα

Συνεπώς σε καμία περίπτωση η πρόωρη άσκηση ενός Αμερικανικού δικαιώματος αγοράς δεν μπορεί να είναι η βέλτιστη στρατηγική. Το Σχήμα 2.4 προβάλλει σε διαγραμματική παράσταση κατά γενικό τρόπο πως μεταβάλλεται η τιμή του δικαιώματος αγοράς Αμερικανικού ή Ευρωπαϊκού τύπου σε σχέση με την τιμή της μετοχής S_0. Το διάγραμμα δείχνει ότι η τιμή του δικαιώματος αγοράς βρίσκεται πάντα κάτω από την εσωτερική αξία (intrinsic value) του $\max(S_0 - K, 0)$. Μάλιστα καθώς το επιτόκιο r ή ο χρόνος μέχρι τη λήξη Τ ή η μεταβλητότητα σ αυξάνονται, η τιμή που σχετίζει την τιμή του δικαιώματος αγοράς με την τιμή της μετοχής κινείται προς την κατεύθυνση που δείχνουν τα βέλη.

Συνοψίζοντας, υπάρχουν δυο βασικοί λόγοι για τους οποίους τα Αμερικανικά δικαιώματα αγοράς σε μετοχές που δεν αποκόπτουν μέρισμα δεν πρέπει να ασκούνται πριν από την ημερομηνία λήξης τους. Ο πρώτος έχει να κάνει με την ασφάλεια που προσφέρει ένα δικαίωμα αγοράς, σε σχέση με την ίδια τη μετοχή: προστατεύει τον κάτοχο του από τον κίνδυνο η τιμή της μετοχής να πέσει κάτω από την τιμή άσκησης του δικαιώματος. Ο δεύτερος έχει να κάνει με την χρονική αξία του χρήματος. Από την οπτική γωνία του κατόχου του δικαιώματος, όσο πιο αργά καταβληθεί η τιμή άσκησης, τόσο το καλύτερο.

2.6.2 Δικαιώματα πώλησης

Για τα Αμερικανικά δικαιώματα πώλησης σε μετοχή που δεν αποκόπτει μέρισμα η άσκηση τους πριν την ημερομηνία λήξης τους συμβολαίου μπορεί να είναι μια από τις ευνοϊκές στρατηγικές. Μάλιστα, εάν το δικαίωμα πώλησης έχει αρκετά μεγάλη θετική αξία (deep in-the-money put option) τότε πρέπει να ασκείται πριν τη λήξη. Η ισχύς της παραπάνω πρότασης φαίνεται καθαρά αν αναλύσουμε την παρακάτω σχέση:

$$V_p^E \geq Ke^{-rT} - S_0$$

Επειδή ο κάτοχος ενός Αμερικανικού δικαιώματος αγοράς έχει την ευκαιρία να ασκήσει το δικαίωμα οποιαδήποτε στιγμή μέχρι τη λήξη του σε αντίθεση με τον κάτοχο του αντίστοιχου Ευρωπαϊκού δικαιώματος θα πρέπει να ισχύει:

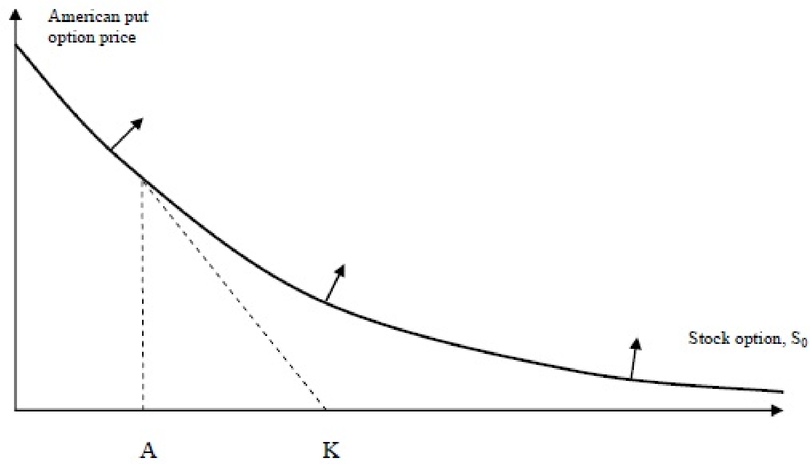
$$V_p^A \geq V_p^E$$

$$V_p^A \geq Ke^{-rT} - S_0$$

και δεδομένου ότι $r > 0$ προκύπτει ότι:

$$V_p^A \geq K - S_0.$$

Συνεπώς υπάρχουν συνθήκες κατά τις οποίες η πρόωρη άσκηση ενός δικαιώματος πώλησης μπορεί να είναι η ευνοϊκότερη στρατηγική. Στο Σχήμα 2.5 παρουσιάζεται κατά γενικό τρόπο η μεταβολή της τιμής ενός Αμερικανικού δικαιώματος πώλησης συναρτήσει της τιμής της μετοχής S_0.



Σχήμα 2.5: Μεταβολή της τιμής ενός Αμερικανικού δικαιώματος πώλησης σε συνάρτηση με την τιμή S_0 της υποκείμενης μετοχής.

2.7 Δικαιώματα τύπου Βερμούδων - Τίτλοι Παραστατικών Δικαιωμάτων Κτήσεως Μετοχών (Warrants)

Στα πλαίσια της αύξησης μετοχικού κεφαλαίου του 2013 των τεσσάρων μεγάλων συστημικών τραπεζών της Ελλάδας (Εθνική Τράπεζα της Ελλάδος, Τράπεζα Πειραιώς, Eurobank, Alpha Bank), η Alpha Bank πέτυχε την αύξηση του μετοχικού της κεφαλαίου με συμμετοχή 12% από τον ιδιωτικό τομέα, η οποία συνοδεύτηκε από την έκδοση Τίτλων Παραστατικών Δικαιωμάτων προς Κτήση Μετοχών της εταιρείας (ή αλλιώς Warrant) στην Ελληνική αγορά.

Ως αποτέλεσμα, στις 10 Ιουνίου 2013 εκδόθηκαν οι Τίτλοι Παραστατικών Δικαιωμάτων προς

Κτήση Μετοχών (Warrants) της τράπεζας, υπό την κυριότητα του Ταμείου Χρηματοπιστωτικής Σταθερότητας της χώρας και μία ημέρα αργότερα, στις 11 Ιουνίου 2013, άρχισε η διαπραγμάτευση τους στην κατηγορία Τίτλων Παραστατικών Δικαιωμάτων προς Κτήση Κινητών Αξιών, της Αγοράς Αξιών του Χρηματιστηρίου Αθηνών.

Τα Warrant διαφέρουν από τα κοινά δικαιώματα αγοράς ως προς τον εκδότη τους. Συγκεκριμένα, στην περίπτωση των Warrant της Alpha Bank, ο εκδότης είναι το Ταμείο Χρηματοπιστωτικής Σταθερότητας (Τ.Χ.Σ.).

Τα δικαιώματα αυτά, των οποίων το ασφάλιστρο θα επιχειρήσει να τιμολογήσει η παρούσα εργασία στη συνέχεια, είναι τύπου Βερμούδων. Ένα τέτοιο δικαίωμα δίνει στον αγοραστή του τη δυνατότητα να το ασκήσει σε συγκεκριμένες ημερομηνίες. Δηλαδή, καθορίζεται από την αγορά του ότι σε συγκεκριμένες ημερομηνίες στο μέλλον ο κάτοχος θα μπορεί εάν το επιθυμεί να εκτελέσει τη συμφωνία. Όπως γίνεται αντιληπτό, αυτού του τύπου τα δικαιώματα είναι διαφορετικά και από τα Ευρωπαϊκά αλλά και από τα Αμερικάνικα.

Η ονομασία αυτών των δικαιωμάτων προέκυψε καθώς τα χαρακτηριστικά τους ως προς τις ημερομηνίες εξάσκησης βρίσκονται ενδιάμεσα από τη δυνατότητα εξάσκησης μόνο κατά τη λήξη των Ευρωπαϊκών και την δυνατότητα εξάσκησης καθ όλη τη διάρκεια ζωής τους, των Αμερικανικών. Για το λόγο αυτό, πήραν το όνομα των νήσων των Βερμούδων, τα οποία βρίσκονται γεωγραφικά ανάμεσα από την αμερικανική και την ευρωπαϊκή ήπειρο.

Τα δικαιώματα Βερμούδων χρησιμοποιούνται από ερευνητές της χρηματοοικονομικής μηχανικής σαν μία προσέγγιση για την τιμολόγηση δικαιωμάτων Αμερικανικού τύπου με τα ίδια χαρακτηριστικά, καθώς το συνεχές φάσμα εξάσκησής τους είναι ανέφικτο να προσομοιωθεί. Έτσι, προσεγγίζεται από ένα σύνολο διακριτών χρονικών στιγμών εξάσκησης, σαν δικαίωμα Βερμούδων. Όσο οι τιμές αυτές πληθαίνουν, τόσο ακριβέστερα προσεγγίζεται το Αμερικανικό δικαίωμα.

Κεφάλαιο 3

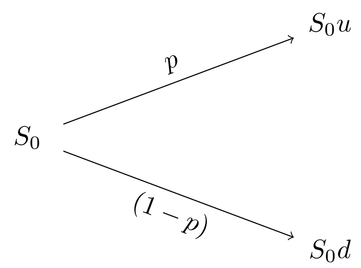
Μέθοδοι Αποτίμησης Δικαιωμάτων Προαίρεσης

3.1 Διωνυμικό Δέντρο (Binomial Tree Pricing)

Το Διωνυμικό Δέντρο αποτελεί μία πολύ χρήσιμη τεχνική αποτίμησης δικαιωμάτων. Ένα Διωνυμικό Δέντρο είναι ένα διάγραμμα το οποίο αναπαριστά διαφορετικά πιθανά μονοπάτια τα οποία δύναται να ακολουθήσει η τιμή μιας μετοχής στη διάρκεια ζωής ενός δικαιώματος προαίρεσης. Η υπόθεση που υπόκειται αυτού του μοντέλου είναι ότι η τιμή της μετοχής ακολουθεί ένα τυχαίο μονοπάτι (random walk). Σε κάθε χρονικό βήμα υπάρχει μια προκαθορισμένη πιθανότητα η τιμή να ανέβει και μια επίσης προκαθορισμένη πιθανότητα η τιμή της μετοχής να πέσει. Το περιβάλλον στο οποίο αρχικά παρουσιάζεται η μέθοδος είναι ουδέτερο κινδύνου (risk-neutral) και αυτή είναι μια γενική προσέγγιση η οποία υιοθετήθηκε από τους Cox, Ross, και Rubinstein[6].

3.1.1 Διωνυμικό Δέντρο ενός βήματος

Υποτίθεται ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο αποτελείται από Δ μερίδια μετοχής και μία θέση πώλησης σε ένα δικαίωμα αγοράς ευρωπαϊκού τύπου στην μετοχή αυτή. Τα Δ μερίδια της μετοχής υπολογίζονται έτσι ώστε το χαρτοφυλάκιο να μην εμπεριέχει κίνδυνο, δηλαδή είτε η τιμή της μετοχής ανέβει είτε πέσει η απόδοση του χαρτοφυλακίου δεν μεταβάλλεται αλλά εξαρτάται μόνο από το χωρίς κίνδυνο επιτόκιο (risk-free interest rate, r). Έστω λοιπόν ότι η αρχική τιμή της μετοχής είναι S_0, η πιθανή τιμή ανόδου της μετοχής στη διάρκεια ζωής του δικαιώματος είναι S_0u, όπου $u > 1$, ενώ η πιθανή τιμή καθόδου της μετοχής είναι S_0d, όπου $d < 1$, ενώ υπάρχει και το δικαίωμα στη μετοχή με τρέχουσα τιμή V και χρόνο μέχρι τη λήξη του T. Η ποσοστιαία αύξηση της τιμής της μετοχής σε πιθανή ανοδική κίνηση είναι $u - 1$, ενώ αντίστοιχα η ποσοστιαία μείωση της τιμής της μετοχής σε πιθανή πτώση είναι $1 - d$. Έστω ότι σε περίπτωση ανόδου της τιμής της μετοχής η απόδοση του δικαιώματος (εσωτερική αξία) είναι h_u ενώ στην αντίθετη περίπτωση είναι h_d.



Σχήμα 3.1: Κίνηση της μορφής της μετοχής σε διωνυμική μορφή.

Για να είναι ακίνδυνο το χαρτοφυλάκιο θα πρέπει υπολογισθεί ο αριθμός Δ των μεριδίων της μετοχής. Η αξία του χαρτοφυλακίου στη λήξη του δικαιώματος θα είναι :

$$S_0u\Delta - h_u,$$

ενώ, σε περίπτωση καθοδικής κίνησης της τιμής της μετοχής θα είναι:

$$S_0d\Delta - h_d.$$

Για να είναι το χαρτοφυλάκιο ακίνδυνο θα πρέπει η αξία του χαρτοφυλακίου σε κάθε περίπτωση να είναι σταθερή, άρα:

$$S_0u\Delta - h_u = S_0d\Delta - h_d$$

$$\Delta = \frac{h_u - h_d}{S_0u - S_0d} \tag{3.1}$$

Από την σχέση (3.1) φαίνεται ότι τελικά το Δ είναι ο ρυθμός μεταβολής της τιμής του δικαιώματος στη μεταβολή της τιμής της μετοχής στις δύο πιθανές κινήσεις. Συμβολίζοντας το χωρίς ρίσκο επιτόκιο με r, η *παρούσα* αξία του χαρτοφυλακίου είναι:

$$\left(S_0u\Delta - h_u\right)e^{-rT}.$$

Το *κόστος δημιουργίας* του χαρτοφυλακίου είναι:

$$S_0\Delta - V.$$

Συνεπώς, από την ισότητα των παραπάνω προκύπτει:

$$S_0\Delta - V = \left(S_0u\Delta - h_u\right)e^{-rT}$$

$$V = S_0\Delta\left(1 - ue^{-rT}\right) + e^{-rT}h_u$$

Αντικαθιστώντας από την (3.1) η παραπάνω εξίσωση μπορεί να συνοψιστεί ως εξής:

$$V = e^{-rT}\left(ph_u + (1-p)\,h_d\right) \tag{3.2}$$

Όπου:

$$p = \frac{e^{-rT} - d}{u - d} \tag{3.3}$$

Οι εξισώσεις (3.2) και (3.3) δίνουν την δυνατότητα αποτίμησης ενός δικαιώματος προαίρεσης όταν οι πιθανές κινήσεις της τιμής της μετοχής είναι γνωστές με τη μορφή ενός Διωνυμικού Δέντρου. Αυτό που είναι αξιοπρόσεκτο είναι ότι η εξίσωση (3.2) δεν περιλαμβάνει τις πιθανότητες της ανοδικής ή καθοδικής κίνησης της τιμής της μετοχής. Δηλαδή, όποια και αν είναι η πιθανότητα αυτή, το αποτέλεσμα στην τιμή του δικαιώματος δεν αλλάζει. Αυτό μάλλον φαίνεται απροσδόκητο, αφού είναι λογική η υπόθεση ότι καθώς η πιθανότητα για ανοδική κίνηση της τιμής της μετοχής αυξάνεται, η τιμή του δικαιώματος αγοράς στη μετοχή θα πρέπει να αυξάνεται και αυτή, και αντίστροφα.

Ο λόγος που δεν χρησιμοποιούνται οι πιθανότητες είναι ότι η εκτίμηση του δικαιώματος δεν γίνεται με απόλυτους όρους. Δηλαδή η τιμή του δικαιώματος υπολογίζεται με βάση την τιμή της υποκείμενης μετοχής. Οι πιθανότητες μελλοντικής ανοδικής ή καθοδικής πορείας εμπεριέχονται ήδη στις πιθανές τιμές της μετοχής, για κάθε περίπτωση.

3.1.2 Ουδέτερη ρίσκου αποτίμηση (Risk Neutral Valuation)

Παρότι, όπως αναφέρθηκε στην προηγούμενη παράγραφο, δεν είναι αναγκαίο να γίνουν υποθέσεις για τις πιθανότητες ανοδικής ή καθοδικής κίνησης της τιμής της μετοχής, ώστε να προκύψει η εξίσωση (3.2), είναι φυσική η ερμηνεία της μεταβλητής p (3.2) ως η πιθανότητα ανοδικής κίνησης της τιμής της μετοχής. Οπότε, η μεταβλητή $1 - p$ δηλώνει την πιθανότητα καθοδικής κίνησης της μετοχής και, τελικά, η προσδοκώμενη απόδοση του δικαιώματος δίνεται από την σχέση:

$$\mathbb{E}\left(h\right) = ph_u + (1-p)\,h_d.$$

Με δεδομένη αυτή την ερμηνεία του p, η εξίσωση (3.2) δηλώνει ότι η αξία του δικαιώματος σήμερα είναι η προσδοκώμενη αξία του, προεξοφλημένη κατά το χωρίς ρίσκο επιτόκιο. Η προσδοκώμενη απόδοση της μετοχής όταν η πιθανότητα ανόδου της τιμής της είναι p, σε χρόνο T, δίνεται από την σχέση :

$$\mathbb{E}\left(S_T\right) = pS_0u + (1-p)\,S_0d$$

ή

$$\mathbb{E}\left(S_T\right) = pS_0\left(u - d\right) + S_0d.$$

Αντικαθιστώντας από την εξίσωση (3.3) το p, καταλήγουμε στην παρακάτω εξίσωση:

$$\mathbb{E}\left(S_T\right) = S_0 e^{rT} \tag{3.4}$$

στην οποία φαίνεται ότι η τιμή της υποκείμενης μετοχής αυξάνεται, κατά μέσο όρο, κατά το χωρίς ρίσκο επιτόκιο. Θέτοντας λοιπόν το p ως την πιθανότητα ανοδικής κίνησης της τιμής της μετοχής, κάνουμε την υπόθεση ότι η απόδοση της μετοχής είναι ίση με το χωρίς ρίσκο επιτόκιο. Σε ένα κόσμο ουδέτερο ρίσκου οι επενδυτές είναι αδιάφοροι στο ρίσκο και η αναμενόμενη από αυτούς απόδοση ισούται με το χωρίς ρίσκο επιτόκιο. Το παραπάνω συμπέρασμα εμπεριέχεται στην γενική αρχή της ουδέτερης ρίσκου αποτίμησης (risk-neutral valuation) σύμφωνα με την οποία, στην αποτίμηση δικαιωμάτων προαίρεσης, χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορεί να υποτεθεί περιβάλλον ουδέτερο ρίσκου. Οι τιμές που προκύπτουν με αυτή την υπόθεση είναι σωστές, όχι μόνο για το χωρίς ρίσκο περιβάλλον στο οποίο υπολογίσθηκαν, αλλά για οποιοδήποτε περιβάλλον.

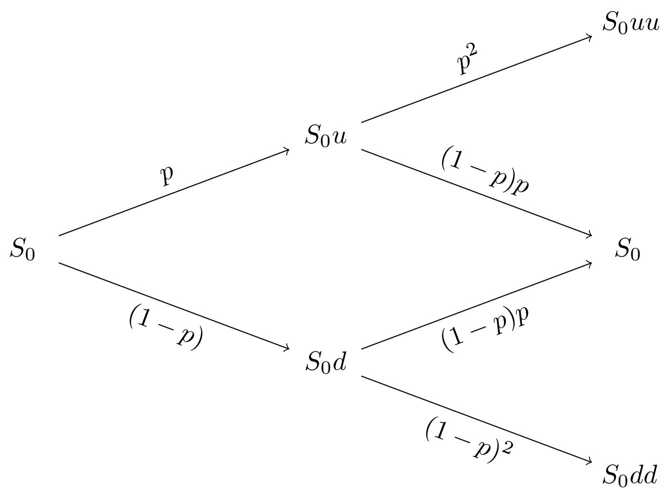
Πραγματικό περιβάλλον έναντι ουδέτερου ρίσκου περιβάλλοντος Είναι απαραίτητο να δοθεί έμφαση στο γεγονός ότι το p είναι η πιθανότητα ανοδικής κίνησης της τιμής της μετοχής σε περιβάλλον ουδέτερο ρίσκου. Γενικά η πιθανότητα αυτή δεν είναι η ίδια με την πιθανότητα ανοδικής κίνησης σε ένα πραγματικό περιβάλλον. Έστω ότι η πιθανότητα αυτή είναι p στο ουδέτερο ρίσκου περιβάλλον και p^* η αντίστοιχη πιθανότητα στο πραγματικό περιβάλλον. Έστω ακόμη πως το χωρίς ρίσκο επιτόκιο είναι r και η αναμενόμενη απόδοση της μετοχής στο πραγματικό περιβάλλον, η οποία είναι πολύ δύσκολο να υπολογισθεί επακριβώς, έστω r^*. Η αναμενόμενη απόδοση της τιμής της μετοχής θα πρέπει να ισούται με την σημερινή της αξία:

$$S_0 u p^* + S_0 d\left(1 - p^*\right) = S_0 e^{r^* T}$$

Από την παραπάνω σχέση μπορεί να υπολογισθεί το p^*, αρα και η αναμενόμενη αξία του δικαιώματος. Είναι όμως ιδιαιτέρως δύσκολο να εκτιμήσει κανείς την αναμενόμενη απόδοση της μετοχής, με αποτέλεσμα η εκτίμηση ουδέτερου ρίσκου, η οποία δίνει μια σταθερή απόδοση του επιτοκίου χωρίς κίνδυνο, να καθίσταται αρκετά πιο βολική και εύχρηστη.

3.1.3 Διωνυμικά Δέντρα δύο επιπέδων

Η ανάλυση του διωνυμικού μοντέλου μπορεί να επεκταθεί και σε δέντρα με 2 επίπεδα. Ο σκοπός και πάλι είναι να υπολογισθεί η τιμή του δικαιώματος προαίρεσης στον αρχικό κόμβο του δέντρου. Στο σχήμα 3.2 απεικονίζεται ένα τέτοιο μοντέλο, όπου S_0 είναι η αρχική τιμή της υποκείμενης μετοχής και V είναι η τιμή του δικαιώματος προαίρεσης. Σε κάθε βήμα η τιμή της μετοχής είται αυξάνεται u φορές, είτε μειώνεται d φορές από την αρχική της τιμή. Ο συμβολισμός που χρησιμοποιείται για τις αποδόσεις του δικαιώματος είναι, π.χ. μετά από δύο συνεχόμενες ανοδικές κινήσεις, είναι h_{uu}. Επίσης υποτίθεται ότι το χωρίς ρίσκο επιτόκιο είναι r και ότι η χρονική διάρκεια του βήματος είναι Δt.



Σχήμα 3.2: Κίνηση της τιμής της μετοχής σε διωνυμική μορφή δύο επιπέδων.

Λόγω του ότι το χρονικό βήμα είναι Δt και όχι T όπως προηγουμένως, οι εξισώσεις (3.2) και (3.3) μεταβάλλονται ως εξής:

$$V = e^{-r\Delta t}\left[ph_u + (1-p)\, h_d\right] \tag{3.5}$$

$$p = \frac{e^{-r\Delta t} - d}{u - d} \tag{3.6}$$

Επαναλαμβανόμενη εφαρμογή της σχέσης (3.5) δίνει:

$$h_u = e^{-r\Delta t}\left[h_{uu} + (1-p)\, h_{ud}\right] \tag{3.7}$$

$$h_d = e^{-r\Delta t}\left[h_{ud} + (1-p)\, h_{dd}\right] \tag{3.8}$$

$$V = e^{-r\Delta t}\left[ph_u + (1-p)\, h_d\right] \tag{3.9}$$

Αντικαθιστώντας από τις σχέσεις (3.7), (3.8), (3.9) προκύπτει:

$$V = e^{-2r\Delta t}\left[p^2 h_{uu} + 2p\,(1-p)\, h_{ud} + (1-p)^2\, h_{dd}\right] \tag{3.10}$$

Αυτό το αποτέλεσμα είναι σύμφωνο με την αρχή της ουδέτερης ρίσκου αποτίμησης η οποία αναφέρθηκε προηγουμένως. Οι μεταβλητές p^2, $2p\,(1-p)$ και $(1-p)^2$ είναι οι πιθανότητες ο άνω, ο μεσαίος και ο κάτω αντίστοιχα τελικός κόμβος να είναι ο τελικός προορισμός της τιμής της μετοχής. Φυσικά εκτός από δικαιώματα αγοράς με την μέθοδο αυτή αποτιμώνται εξίσου και τα δικαιώματα πώλησης.

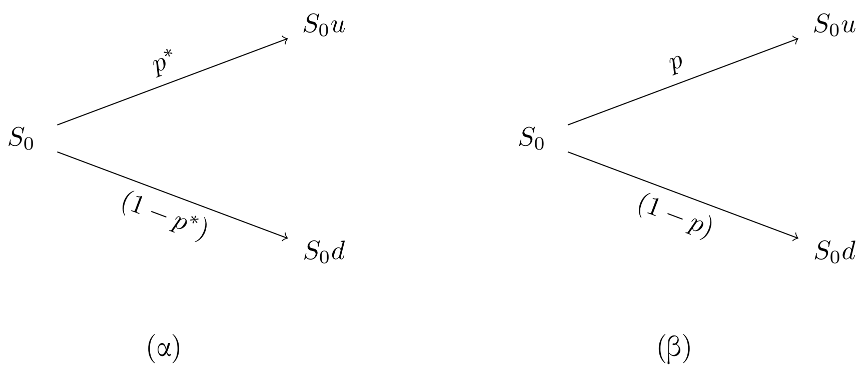
3.1.4 Διωνυμικό Δέντρο και δικαιώματα προαίρεσης Αμερικανικού τύπου

Έως τώρα τα δικαιώματα που μελετήθηκαν ήταν όλα Ευρωπαϊκού τύπου. Το Διωνυμικό Δέντρο μπορεί να αποτιμά και δικαιώματα Αμερικανικού τύπου. Η διαδικασία όμως περιέχει μια διαφορά: Το μονοπάτι της τιμής της μετοχής θα πρέπει να εξεταστεί από το τέλος προς την αρχή, ελέγχοντας σε κάθε κόμβο κατά πόσο είναι βέλτιστο να γίνει πρόωρη άσκηση του δικαιώματος. Η τιμή του δικαιώματος στους τελικούς κόμβους είναι η ίδια, όπως και για το ευρωπαϊκό δικαίωμα, ενώ στους ενδιάμεσους κόμβους η τιμή θα πρέπει να είναι μεγαλύτερη από:

- Την προεξοφλημένη μελλοντική απόδοση, όπως προκύπτει από την εξίσωση (3.5)
- Την απόδοση από την πρώιμη άσκηση του δικαιώματος

3.1.5 Σχέση μεταβλητότητας σ με τα u και d

Πρακτικά, κατά τη δημιουργία ενός διωνυμικού δέντρου προς παρουσίαση των κινήσεων της τιμής κάποιας μετοχής, οι παράμετροι u και d επιλέγονται έτσι ώστε να είναι αρκετά κοντά στην μεταβλητότητα σ της τιμής της μετοχής. Για να συμβεί αυτό υποτίθεται ότι η αναμενόμενη απόδοση της μετοχής (σε πραγματικό περιβάλλον) είναι μ και η μεταβλητότητα της είναι σ. Το σχήμα 3.3 (α) δείχνει τις κινήσεις της τιμής της μετοχής στο πρώτο επίπεδο ενός διωνυμικού δέντρου. Το βήμα έχει διάρκεια Δt . Η τιμή της μετοχής ξεκινάει από S_0 και κινείται είται ανοδικά στο S_0u είτε καθοδικά στο S_0d. Η πιθανότητα ανοδικής κίνησης της τιμής της μετοχής σε πραγματικό περιβάλλον είναι p^*.



Σχήμα 3.3: Μεταβολή της τιμής της μετοχής σε χρόνο Δt σε πραγματικό περιβάλλον (α) και σε περιβάλλον ουδέτερο κινδύνου (β)

Η αναμενόμενη τιμή της μετοχής στο τέλος του πρώτου βήματος είναι $S_0e^{\mu\Delta t}$. Στο δέντρο η αναμενόμενη τιμή της μετοχής την ίδια στιγμή είναι:

$$p^*S_0u + (1 - p^*)\, S_0d$$

Προς συμφωνία της αναμενόμενης απόδοσης της μετοχής με τις παραμέτρους του δέντρου, προκύπτει:

$$p^* S_0 u + (1 - p^*) S_0 d = S_0 e^{\mu \Delta t}$$

ή

$$p^* = \frac{e^{\mu \Delta t} - d}{u - d} \tag{3.11}$$

Η μεταβλητότητα της τιμής κάποιας μετοχής ορίζεται έτσι ώστε το σ να είναι η τυπική απόκλιση της απόδοσης στην τιμή της μετοχής, κατά τη διάρκεια μιας μικρής χρονικής περιόδου Δt. Προφανώς τότε η διασπορά της απόδοσης της τιμής της μετοχής είναι σ^2. Στο δέντρο η διασπορά της απόδοσης της τιμής της μετοχής είναι:

$$p^* u^2 (1 - p^*) d^2 - [p^* u + (1 - p^*) d]^2 .$$

Για να συμφωνεί η μεταβλητότητα της τιμής της μετοχής με τις παραμέτρους του δέντρου θα πρέπει να ισχύει:

$$p^* u^2 (1 - p^*) d^2 - [p^* u + (1 - p^*) d]^2 = \sigma^2 \sqrt{\Delta t}$$

Αντικαθιστώντας από την εξίσωση (3.11) στην (3.12) προκύπτει:

$$e^{\mu \Delta t} (u + d) - ud - e^{2\mu \Delta t} = \sigma^2 \sqrt{\Delta t} \tag{3.12}$$

Αμελώντας τους όρους Δt^2 και μεγαλύτερες δυνάμεις του Δt, προκύπτει:

$$u = e^{\sigma \sqrt{\Delta t}} \tag{3.13}$$

$$d = e^{-\sigma \sqrt{\Delta t}} \tag{3.14}$$

Η ανάλυση αυτή δείχνει ότι το δέντρο του σχήματος 3.3 (α) είναι δυνατόν να αντικατασταθεί από αυτό του σχήματος 4.3 (β), όπου η πιθανότητα ανοδικής κίνησης της τιμής της μετοχής είναι p, και έχει συμπεριφορά περιβάλλοντος ουδέτερου ρίσκου. Η μεταβλητή p δίνεται από την σχέση (3.6) ως:

$$p = \frac{a - d}{u - d},$$

όπου

$$a = e^{r \Delta t}$$

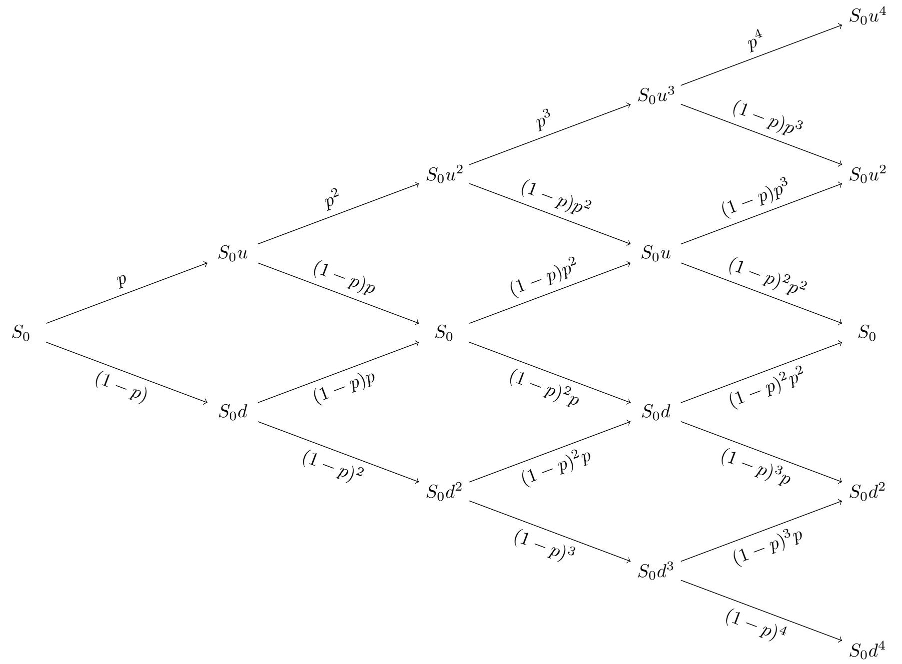
είναι η ουδέτερη ρίσκου πιθανότητα ανοδικής κίνησης της τιμής της μετοχής. Στο σχήμα 3.3 (β) η αναμενόμενη τιμή της μετοχής στο τέλος του χρονικού βήματος είναι όπως δίνεται στην εξίσωση (3.4). Η διασπορά της απόδοσης της τιμής της μετοχής είναι:

$$pu^2 (1 - p) d^2 - [pu + (1 - p) d]^2 = e^{r \Delta t} (u + d) - ud - e^{2r \Delta t}$$

Αντικαθιστώντας τα u και d από τις σχέσεις (3.13) και (3.14) καταλήγουμε πως η διασπορά είναι ίση με $\sigma\sqrt{\Delta t}$. Η ανάλυση αυτή φανερώνει ότι καθώς κινούμαστε από το πραγματικό περιβάλλον στο περιβάλλον ουδέτερου κινδύνου, η αναμενόμενη απόδοση της μετοχής μεταβάλλεται, αλλά η μεταβλητότητα της παραμένει η ίδια.

3.1.6 Διωνυμικό Δέντρο πολλαπλών επιπέδων

Στην πράξη Διωνυμικά Δέντρα ενός ή δύο επιπέδων δεν χρησιμοποιούνται, καθώς ο εκάστοτε αναλυτής δεν μπορεί παρά να προσδοκά πολύ μικρής ακρίβειας προσέγγιση στην κίνηση της τιμής της μετοχής, αν θεωρεί δέντρα μόνο ενός ή δύο επιπέδων κατά τη διάρκεια ζωής του δικαιώματος προαίρεσης. Στην πρακτική εφαρμογή της μεθόδου στην αποτίμηση δικαιωμάτων, η μοντελοποίηση της τιμής της υποκείμενης γίνεται με 30 ή περισσότερα επίπεδα, καθένα από τα οποία παριστάνει μία χρονική στιγμή.



Σχήμα 3.4: Διωνυμικό Δέντρο πολλαπλών επιπέδων για αποτίμηση δικαιωμάτων προαίρεσης.

Το σχήμα 3.4 παρουσιάζει ένα ολοκληρωμένο δέντρο με τιμές της μετοχής έτσι όπως όντως χρησιμοποιείται στην αποτίμηση δικαιωμάτων. Στο χρόνο μηδέν η τιμή της μετοχής είναι S_0, ο συμβολισμός είναι γνωστός. Μετά από Δt χρόνο υπάρχουν δύο δυνατές τιμές για την μετοχή, οι S_0u και S_0d, σε χρόνο $2\Delta t$ υπάρχουν τρείς πιθανές τιμές για την μετοχή κ.ο.κ. Γενικά σε χρόνο i θεωρούνται $i+1$ πιθανές τιμές για την μετοχή. Αυτές είναι:

$$S_0u^jd^{i-j}, \quad j = 0, 1, \ldots i$$

Πρέπει να σημειωθεί ότι η σχέση $u = \frac{1}{d}$ χρησιμοποιείται στον υπολογισμό της τιμής της μετοχής σε κάθε κόμβο του δέντρου. Η διαδικασία αποτίμησης των Δικαιωμάτων ξεκινάει από το τέλος του δέντρου (χρόνος T) και επεξεργάζεται το δέντρο αντίστροφα. Για παράδειγμα, έστω ένα δικαίωμα πώλησης αξίας $h_p = \max(K - S_T, 0)$ και ένα δικαίωμα αγοράς αξίας $h_c = \max(S_T - K, 0)$, όπου K η τιμή άσκησης του δικαιώματος. Επειδή εννοείται ουδέτερο κινδύνου περιβάλλον, η αξία σε κάθε κόμβο σε χρόνο $T - \Delta t$ μπορεί να υπολογισθεί από τις αναμενόμενες αξίες σε χρόνο T, προεξοφλημένες κατά το επιτόκιο r για χρονική περίοδο Δt. Ομοίως μπορούν αν υπολογισθούν οι αξίες στους κόμβους σε χρόνο $T - 2\Delta t$ υπολογίζοντας τις αναμενόμενες αξίες σε χρόνο $T - \Delta t$, προεξοφλημένες κατά το επιτόκιο r σε χρονική περίοδο Δt κ.ο.κ. Εάν το δικαίωμα είναι Αμερικανικού τύπου τότε θα πρέπει να ελέγχεται σε κάθε κόμβο κατά πόσο η πρόωρη άσκηση του δικαιώματος είναι συμφέρουσα. Τελικώς, με την αντίστροφη επεξεργασία του δέντρου, υπολογίζεται στο τελικό στάδιο η τιμή V του δικαιώματος σε χρόνο μηδέν.

3.1.7 Αλγεβρική έκφραση του Διωνυμικού Δέντρου

Ας υποτεθεί ότι ο χρόνος ζωής ενός δικαιώματος πώλησης Αμερικανικού χωρίζεται σε N διαστήματα διάρκειας Δt . Συμβολικά, ο j-οστός κόμβος σε χρόνο $i\Delta t$ θα αναφέρεται ως (i, j) κόμβος, όπου $0 \leq i \leq N$ και $0 \leq j \leq i$. Ορίζεται ως $V_{i,j}$ η τιμή του δικαιώματος στον κόμβο (i, j). Η τιμή της μετοχής στον κόμβο (i, j) είναι $S_0 u^j d^{i-j}$. Αφού η αξία ενός δικαιώματος πώλησης αμερικανικού τύπου είναι $h_p^A = \max(K - S_t)$ τότε ισχύει:

$$h_{N,j} = \max\left(K - S_0 u^j d^{i-j}, 0\right), \quad j = 0, 1, \ldots, N$$

Υπάρχει η πιθανότητα p μετακίνησης από τον κόμβο (i, j) σε χρόνο $i\Delta t$, στον κόμβο $(i+1, j+1)$, σε χρόνο $(i+1)\Delta t$, και η πιθανότητα $1 - p$ μετακίνησης από τον κόμβο (i, j) σε χρόνο $i\Delta t$, στον κόμβο $(i+1, j)$ σε χρόνο $(i+1)\Delta t$. Υποθέτοντας ότι το δικαίωμα δεν θα ασκηθεί πρόωρα, η ουδέτερη ρίσκου αποτίμηση δίνει:

$$h_{i,j} = e^{-r\Delta t}\left[p h_{i+1,j+1} + (1-p) h_{i+1,j}\right]$$

για $0 \leq i \leq N - 1$ και $0 \leq j \leq i$. Εάν η πρόωρη άσκηση του δικαιώματος ληφθεί υπόψη, αυτή η τιμή πρέπει να συγκριθεί με την εσωτερική αξία του δικαιώματος:

$$V_{i,j} = \max\left\{K - S_0 u^j d^{i-j}, e^{-r\Delta t}\left[p V_{i+1,j+1} + (1-p) V_{i+1,j}\right], 0\right\}$$

Πρέπει να σημειωθεί ότι επειδή οι υπολογισμοί ξεκινούν σε χρόνο T και η διαδικασία συνεχίζει αντίστροφα στο χρόνο, η αξία σε χρόνο $i\Delta t$ περιλαμβάνει όχι μόνο την επίδραση της πιθανότητας πρόωρης άσκησης σε χρόνο $i\Delta t$, αλλά και την επίδραση της πιθανότητας πρόωρης άσκησης σε επακόλουθους χρόνους.

3.2 Στοχαστική ανάλυση

3.2.1 Στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις (Stochastic Differential Equations)

Κάθε μεταβλητή η τιμή της οποίας αλλάζει στη διάρκεια του χρόνου με τρόπο αβέβαιο λέγεται ότι ακολουθεί μια στοχαστική διαδικασία. Οι στοχαστικές διαδικασίες κατηγοριοποιούνται σε διακριτού και συνεχούς χρόνου. Μία στοχαστική διαδικασία διακριτού χρόνου είναι εκείνη κατά την οποία η τιμή της μεταβλητής μπορεί να μεταβληθεί μόνο σε συγκεκριμένες τιμές στο χρόνο, ενώ σε μία διαδικασία συνεχούς χρόνου η μεταβλητή μπορεί να μεταβάλλεται κάθε στιγμή. Επίσης υπάρχουν οι διαδικασίες διακριτής μεταβλητής και συνεχούς μεταβλητής. Στην πρώτη κατηγορία η μεταβλητή μπορεί να πάρει μόνο συγκεκριμένες τιμές στη διάρκεια του χρόνου ενώ στη δεύτερη η μεταβλητή μπορεί να πάρει οποιεσδήποτε τιμές.

Η πιο δημοφιλής μέθοδος μοντελοποίησης των τιμών των μετοχών χρησιμοποιεί τις στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις. Έστω $S\left(t\right)$ μία στοχαστική διαδικασία (όπως είναι η διακύμανση των τιμών των μετοχών)[11][13] την οποία ορίζουμε ως τύπου διάχυσης, αν ακολουθεί την παρακάτω διαφορική εξίσωση:

$$S\left(t+\Delta t\right)-S\left(t\right)=\mu\left(t,S\left(t\right)\right)\Delta t+\sigma\left(t,S\left(t\right)\right)\Delta W\left(t\right)$$

όπου

$$\Delta W\left(t\right)=W\left(t+\Delta t\right)-W\left(t\right)$$

- Ο όρος $\mu\left(t,S\left(t\right)\right)$ αποτελεί την τάση του $S\left(t\right)$.
- Ο όρος $\sigma\left(t,S\left(t\right)\right)$ αποτελεί την διακύμανση, αλλιώς γνωστός ως *στοχαστικός όρος*.
- Η προσαύξηση $\Delta W\left(t\right)$ αναφέρεται στο W το οποίο ονομάζεται ανέλιξη Wiener (Wiener process), η οποία εξηγείται εκτενώς παρακάτω.

3.2.2 Μαρκοβιανές ανελίξεις (Markov Processes)

Μία διαδικασία Markov είναι ένας συγκεκριμένος τύπος στοχαστικής διαδικασίας όπου μόνο η παρούσα τιμή της μεταβλητής παίζει ρόλο στην πρόβλεψη του μέλλοντος. Η παρελθοντική ιστορία της μεταβλητής και ο τρόπος με τον οποίο το παρόν προκύπτει από το παρελθόν είναι ανεξάρτητα. Οι διακυμάνσεις των τιμών των μετοχών συνήθως ακολουθούν μια διαδικασία Markov. Έστω μια μετοχή της IBM με τιμή \$100. Εάν η μετοχή ακολουθεί διαδικασία Markov οι προβλέψεις για το μέλλον δεν θα έπρεπε να επηρεάζονται από την τιμή της μετοχής μία εβδομάδα πριν, ένα μήνα πριν ή ένα χρόνο πριν. Το μοναδικό σχετικό κομμάτι πληροφορίας που υπάρχει είναι ότι η τιμή της μετοχής σήμερα είναι \$100. Οι προβλέψεις για το μέλλον είναι αβέβαιες και πρέπει να εκφράζονται με όρους πιθανοτήτων κατανομής. Η ιδιότητα Markov υποδηλώνει ότι οι πιθανότητες κατανομής της τιμής της μετοχής σε οποιαδήποτε μελλοντική χρονική στιγμή είναι ανεξάρτητες, οποιοδήποτε μονοπάτι και αν ακολούθησε η τιμή μέχρι την παρούσα στιγμή.

$$H\, X_t\, \theta\alpha \,\text{είναι}\, \mathrm{M}arkov \iff \mathbb{P}(X_{t+i} = S|X_1 = i_1, X_2 = i_2, \ldots, X_t = i_t) = \mathbb{P}(X_{t+1} = S|X_t = i_t)$$

3.2.3 Στοχαστικές ανελίξεις συνεχούς χρόνου

Έστω μια μετοχή η οποία ακολουθεί μία διαδικασία Markov. Υποτίθεται ότι η τρέχουσα τιμή της μεταβλητής είναι 10 και ότι η μεταβολή στην τιμή της στη διάρκεια ενός χρόνου είναι $\varphi(0,1)$, όπου $\varphi(\mu,\sigma)$ συμβολίζει την πιθανότητα μιας κανονικά κατανεμημένης τυχαίας μεταβλητής με μέση τιμή μ και τυπική απόκλιση σ. Η μεταβολή στην τιμή της μεταβλητής μετά από 2 χρόνια είναι το άθροισμα των δύο κανονικών κατανομών, κάθε μια εκ των οποίων έχει μηδενική μέση τιμή και τυπική απόκλιση 1. Επειδή η μεταβλητή είναι Markov οι δύο κατανομές πιθανότητας είναι ανεξάρτητες. Κατά την πρόσθεση δύο ανεξάρτητων κανονικών κατανομών το αποτέλεσμα είναι μία νέα κανονική κατανομή με μέση τιμή το άθροισμα των δύο μέσω τιμών και διασπορά το άθροισμα των δύο διασπορών. Για τη συγκεκριμένη μεταβλητή, μετά από δύο χρόνια θα παρουσιάσει μεταβολή με μέση τιμή 0 και διασπορά 2. Άρα. η τυπική απόκλισή της θα είναι ίση με $\sqrt{2}$. Συνεπώς, θα παρουσιάσει κατανομή πιθανότητας $\varphi\left(0,\sqrt{2}\right)$.

Για την μεταβολή της μεταβλητής σε χρονική διάρκεια 6 μηνών, καθώς για την διάρκεια των δύο εξαμήνων του έτους (1^o και 2^o) παρουσιάζεται η ίδια διασπορά, τα μ_1, μ_2 όπως και τα σ_1, σ_2 θεωρούνται ισότιμα. Συνεπώς η διασπορά της μεταβολής της μεταβλητής κατά την διάρκεια 6 μηνών παρουσιάζει την μισή διασπορά από αυτή που παρουσιάζει για την διάρκεια ενός έτους. Άρα η κατανομή πιθανοτήτων για 6 μήνες είναι $\varphi\left(0,\sqrt{0.5}\right)$. Με την ίδια λογική υπολογίζεται και η κατανομή πιθανοτήτων για διάρκεια 3 ή οσωνδήποτε μηνών. Γενικεύοντας, η κατανομή πιθανότητας της μεταβολής της μεταβλητής για χρονική διάρκεια T μηνών είναι $\varphi\left(0,\sqrt{\frac{T}{12}}\right)$.

3.2.4 Ορισμός ανέλιξης Wiener

Η διαδικασία την οποία ακολούθησε η μεταβλητή και η οποία αναλύθηκε παραπάνω είναι γνωστή ως διαδικασία Wiener και αποτελεί συγκεκριμένο τύπο της στοχαστικής διαδικασίας Markov, με μέση τιμή μηδέν και ποσοστό διασποράς (variance rate) 1 ανά έτος.

Τυπικά, μια μεταβλητή S ακολουθεί μια Wiener διαδικασία όταν ικανοποιεί τις δύο παρακάτω ιδιότητες:

Ιδιότητα 1: Η μεταβολή ΔW κατά τη διάρκεια μιας μικρής χρονικής περιόδου Δt είναι

$$\Delta W = \epsilon\sqrt{\Delta t} \tag{3.15}$$

όπου το ϵ έχει συγκεκριμένη κατανομή $\varphi(0, 1)$.

Ιδιότητα 2: Οι τιμές του ΔW για δύο οποιαδήποτε διαφορετικά διαστήματα Δt είναι ανεξάρτητες.

Από την πρώτη ιδιότητα προκύπτει ότι το ΔW ακολουθεί και αυτό κανονική κατανομή με:

- μέση τιμή 0
- τυπική απόκλιση $\sqrt{\Delta t}$
- διασπορά Δt

Η δεύτερη ιδιότητα υποδηλώνει ότι η μεταβλητή S ακολουθεί διαδικασία Markov. Η μεταβολή της τιμής του S κατά την διάρκεια ενός σχετικά μεγάλου χρονικού διαστήματος T μπορεί να συμβολιστεί ως $W(T) - W(0)$. Η μεταβολή αυτή μπορεί να θεωρηθεί ως το άθροισμα των μεταβολών του S σε N πολύ μικρά χρονικά διαστήματα διάρκειας Δt όπου

$$N = \frac{T}{\Delta t}.$$

Άρα

$$W(T) - W(0) = \sum_{t=1}^{N} \epsilon_i \sqrt{\Delta t} \tag{3.16}$$

όπου τα ϵ_i $(i = 1, 2, \ldots, N)$ ακολουθούν κατανομή $\varphi(0, 1)$.

Από τη δεύτερη ιδιότητα της διαδικασίας Markov είναι γνωστό ότι τα ϵ_i είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους. Από την εξίσωση 3.13 προκύπτει ότι το $W(T) - W(0)$ είναι κανονικά κατανεμημένο με

- μέση τιμή 0
- τυπική απόκλιση $N\Delta t = T$
- διασπορά $\sqrt{T}$

Παράδειγμα Έστω ότι η τιμή S μιας μεταβλητής η οποία ακολουθεί μια διαδικασία Markov είναι αρχικά 25, και ότι ο χρόνος μετριέται σε χρόνια. Στο τέλος του πρώτου χρόνου η τιμή της μεταβλητής είναι κανονικά κατανεμημένη με μέση τιμή 25 και τυπική απόκλιση 1. Μετά από 5 χρόνια, η μεταβλητή είναι κανονικά κατανεμημένη με μέση τιμή 25 και τυπική απόκλιση $\sqrt{5}$ ή 2,236. Η αβεβαιότητα για την τιμή της μεταβλητής σε κάποια στιγμή στο μέλλον, η οποία μετράται σε όρους τυπικής απόκλισης, αυξάνεται παράλληλα με την τετραγωνική ρίζα του χρονικού ορίζοντα.

3.2.5 Γενικευμένη ανέλιξη Wiener

Η μέση μεταβολή ανά μονάδα χρόνου για μια στοχαστική διαδικασία όνομάζεται ποσοστό μεταβολής (drift rate), ενώ η διασπορά ανά μονάδα χρόνου ονομάζεται ποσοστό διασποράς (variance rate). Η βασική διαδικασία Wiener, dW, έχει ποσοστό μεταβολής μηδέν και ποσοστό διασποράς 1. Το μηδενικό ποσοστό μεταβολής σημαίνει ότι η προσδοκώμενη τιμή της W, σε οποιαδήποτε μελλοντική στιγμή, θα είναι ίση με την τιμή της στο παρόν. Η γενικευμένη διαδικασία Wiener για μία μεταβλητή S μπορεί να εκφρασθεί με όρους dW ως εξής:

$$dS = \mu dt + \sigma dW \tag{3.17}$$

όπου μ,σ σταθερές.

Για την καλύτερη κατανόηση της παραπάνω σχέσης είναι σημαντικό να εξετάσει κανείς χωριστά τους όρους της δεξιάς πλευράς της εξίσωσης. Ο όρος μdt υποδηλώνει ότι το S έχει αναμενόμενο ποσοστό μεταβολής μ ανά μονάδα χρόνου. Χωρίς τον όρο σdW η εξίσωση απλοποιείται στην$dS = \mu dt$, κάτι που υποδηλώνει ότι $dS/dt = \mu$ και, ολοκληρώνοντας ως προς το χρόνο, προκύπτει:

$$S = S_0 + \mu t$$

όπου S_0 είναι η τιμή του S σε μηδενικό χρόνο. Για μία περίοδο χρόνου T, η μεταβλητή S αυξάνεται κατά το ποσό μT. Ο όρος σdW μπορεί να θεωρηθεί ως η προσθήκη θορύβου ή μεταβλητότητας του μονοπατιού που ακολουθεί η μεταβλητή. Το ποσό αυτού του θορύβου ή της μεταβλητότητας είναι σ φορές μια διαδικασία Wiener. Μία διαδικασία Wiener έχει μεταβλητότητα 1. Επομένως σ φορές μια διαδικασία Wiener έχει μεταβλητότητα σ. Για μικρά διαστήματα Δt, η μεταβολή ΔS δίνεται από τις εξισώσεις (3.15) και (3.17):

$$\Delta S = \mu \Delta t + \sigma \epsilon \sqrt{\Delta t}$$

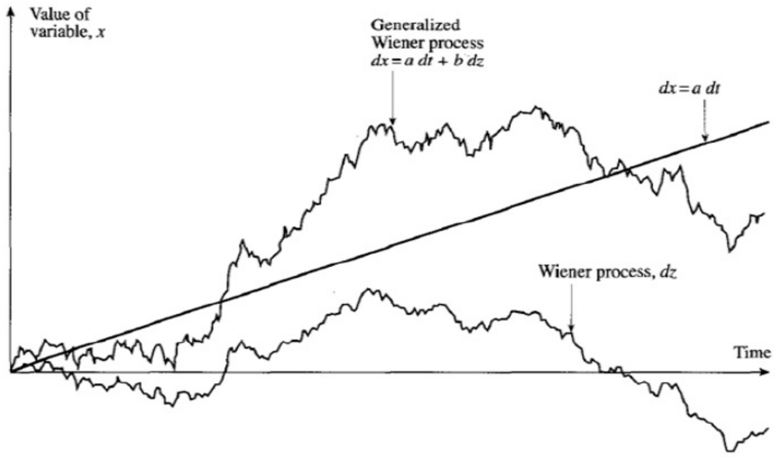
Όπου, όπως και προηγουμένως, το ϵ ακολουθεί τυπική κανονική κατανομή. Συνεπώς, το ΔS ακολουθεί κανονική κατανομή με:

- μέση τιμή μdt
- τυπική απόκλιση $\sigma\sqrt{\Delta t}$
- διασπορά $\sigma^2 \Delta t$

Με παρόμοια επιχειρήματα με αυτά που χρησιμοποιήθηκαν για την διαδικασία Wiener φαίνεται ότι η μεταβολή στην τιμή του S σε χρονικό διάστημα T είναι κανονικά κατανεμημένη με:

- μέση τιμή μT
- τυπική απόκλιση $\sigma\sqrt{T}$

- διασπορά $\sigma^2 T$



Σχήμα 3.5: Γενικευμένη διαδικασία Wiener με $a = \mu = 0.3$ και $b = \sigma = 1.15$.

Κατά συνέπεια, η γενικευμένη διαδικασία Wiener της εξίσωσης (3.16) έχει ποσοστό μεταβολής μ και ποσοστό διασποράς σ^2 ως φαίνεται και στο σχήμα 3.5.

3.2.6 Διαδικασία Itô

Είναι δυνατόν να οριστεί ακόμη ένας τύπος στοχαστικής διαδικασίας γνωστός ως διαδικασία Itô. Η διαδικασία Itô είναι και αυτή μία γενικευμένη διαδικασία Wiener της οποίας όμως οι παράμετροι μ και σ είναι συναρτήσεις των υποκείμενων μεταβλητών S και t. Μια διαδικασία Itô μπορεί να εκφρασθεί αλγεβρικά ως εξής:

$$dS = \mu\left(S,t\right)dt + \sigma\left(S,t\right)dW$$

Τόσο το ποσοστό μεταβολής όσο και το ποσοστό διασποράς μίας διαδικασίας Itô μεταβάλλονται με την πάροδο του χρόνου. Για ένα μικρό χρονικό διάστημα μεταξύ t και $t + \Delta t$ η μεταβλητή μεταβάλλεται από S σε $S + \Delta S$ όπου:

$$\Delta S = \mu \Delta t + \sigma \epsilon \sqrt{\Delta t}$$

Η παραπάνω σχέση εμπεριέχει μία μικρή προσέγγιση. Γίνεται η υπόθεση ότι τα ποσοστά μεταβολής και διασποράς του S παραμένουν σταθερά στο χρονικό διάστημα μεταξύ t και $t + \Delta t$.

3.2.7 Γεωμετρική Κίνηση Brown (Geometric Brownian Motion)

3.2.7.1 Ιστορική Αναδρομή

Την πρώτη φορά που συναντάμε την έννοια της Κίνησης Brown, είναι όταν το 1828, ο βοτανολόγος Robert Brown προσπάθησε να παρατηρήσει την κίνηση που εκτελούν μικρά σωματίδια γύρης μέσα σε κάποιο υγρό. Η τυχαία πορεία που ακολουθούσαν τα μικρά αυτά σωματίδια ήταν κάτι το περίεργο καθώς υπό τις ίδιες ακριβώς συνθήκες, το σωματίδιο ακολουθούσε κάθε φορά και διαφορετική τροχιά μέσα στο υγρό. Επομένως, εισήγαγε την έννοια της κίνησης Brown σαν ένα πιθανοθεωρητικό μοντέλο με σκοπό την περιγραφή και ανάλυση της κίνησης μικρών σωματιδίων μέσα σε ένα υγρό. Εύστοχα θεωρήθηκε το όλο πείραμα σαν ένα πείραμα τύχης, καθώς δύο ίδια σωματίδια διαγράφουν διαφορετικές τροχιές υπό τις ίδιες αρχικές συνθήκες. Ακολούθησε ο Albert Einstein το 1905, εξηγώντας πλήρως τη φύση της κίνησης αυτής και την εξάρτηση της από τις συγκρούσεις των σωματιδίων με τα μόρια του υγρού.

Λίγο νωρίτερα, το 1900, ο Louis Bachelier είχε προλάβει να μελετήσει εκτενώς την κίνηση Brown και να έχει την πρωτοπόρα ιδέα να την αξιοποιήσει σε κάτι εντελώς διαφορετικό, στην μοντελοποίηση της τιμής μιας μετοχής. Με λίγα λόγια, ο Bachelier αντιστοίχησε τις αντιδράσεις της τιμής μιας μετοχής, που οφείλονται σε μια σειρά από παράγοντες και πληροφορίες στην αγορά, με τις συγκρούσεις ενός σωματιδίου που οφείλονται στην κίνηση του μέσα σε υγρό.

Αυτή η «μαγική ικανότητα» που έδειχνε να έχει η κίνηση Brown, οδήγησε σε περαιτέρω μελέτη της, ούτως ώστε να έρθει η μαθηματική θεμελίωση της ως μια στοχαστική ανέλιξη από τους Norbert Weiner (1923) και Paul Levy (1948). Προς τιμή τους μάλιστα, η στοχαστική ανέλιξη που περιγράφει την κίνηση Brown καλείται και Weiner-Levy σ.α. Η ανέλιξη Weiner-Levy, η οποία ορίζεται παραπάνω, έχει πολλές και χρήσιμες ιδιότητες για αυτό και θεωρείται ο θεμελιώδης λίθος όλων των άλλων στοχαστικών ανελίξεων που ακολούθησαν. Μειονέκτημά της είναι το ότι δεν αποτελεί και το πλέον ρεαλιστικό μοντέλο, αλλά συνεχίζει να είναι ένα από τα πιο εύχρηστα εργαλεία στη μοντελοποίηση πολλών φαινομένων σε διάφορους κλάδους, όπως τα χρηματοοικονομικά, η βιολογία, η ρευστομηχανική, οι τηλεπικοινωνίες και άλλα.

3.2.7.2 Ορισμός

Για να μοντελοποιήσουμε την πορεία της μετοχής, ξεκινάμε από την υπόθεση πως οι αποδόσεις, και όχι οι τιμές των μετοχών, ακολουθούν ανέλιξη Wiener[5]. Οι αποδόσεις μπορούν να είναι είτε θετικές είτε αρνητικές οπότε έχουμε το εξής μοντέλο:

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dW$$

με $\frac{dx}{x}$ να είναι οι αποδόσεις της μετοχής και dW η ανέλιξη Wiener. Η παραπάνω εξίσωση μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW$$

Η εξίσωση αυτή είναι μια στοχαστική διαφορική εξίσωση (S.D.E.) η οποία περιγράφει τη διαδικασία με την οποία εξελίσσονται οι αποδόσεις των μετοχών στη διάρκεια του χρόνου. Για να αποκτήσουμε την αντίστοιχη διαδικασία για τη μετοχή, θέτουμε $Z = \ln(S)$ έτσι ώστε $dZ = \frac{dS}{S}$, και εφαρμόζοντας το λήμμα του Itô[1] , έχουμε:

$$dZ = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma dW(t)$$

το οποίο αν ολοκληρώσουμε οδηγούμαστε στα:

$$Z = Z(0) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma W(t)$$

και

$$Z(0) = \ln S(0)$$

οπότε

$$\ln S(t) = \ln S(0) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma W(t)$$

και αν υψώσουμε και τα δύο μέλη της τελευταίας στην e έχουμε:

$$S(t) = S(0) \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t + \sigma W\right)$$

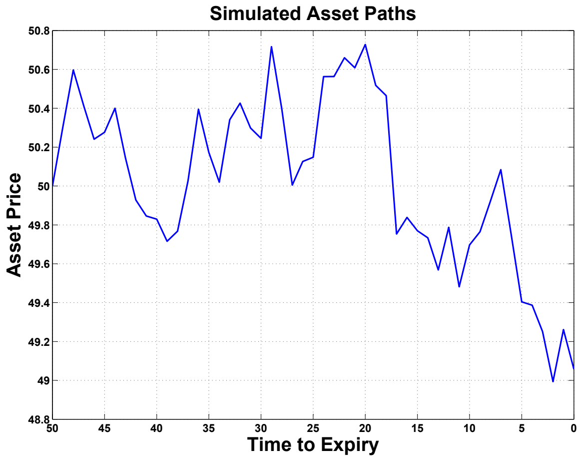
Παρατηρούμε ότι:

$$Z(t) - Z(0) \sim N\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t, \sigma\sqrt{t}\right)$$

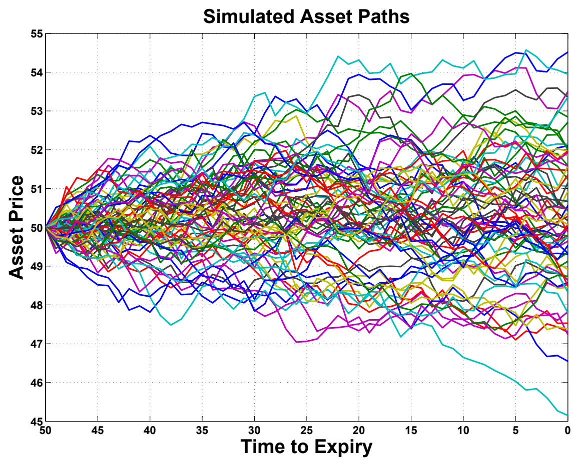
Από το οποίο καταλήγουμε ότι η $S(t)$ ακολουθεί τη λογαριθμοκανονική κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f(S(t), t, S(0)) = \frac{1}{S(t)\sigma\sqrt{2t}} \exp\left(-\frac{\ln\left(\frac{S(t)}{S(0)}\right) - \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t}{2\sigma^2 t}\right)$$

[1] $dG = \left(\frac{\partial G}{\partial x}\alpha + \frac{\partial G}{t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}b^2\right) dt + \frac{\partial G}{\partial x} b dz$



Σχήμα 3.6: Προσομοίωση προόδου τιμής μετοχής, ως κίνηση Brown, με $S_0 = \$50$, $r = 3\%$, $\sigma = 10\%$, $\mu = 4\%$.



Σχήμα 3.7: 70 Διαφορετικές προσομοιώσεις προόδου τιμών μετοχής, ως κινήσεις Brown, με $S_0 = \$50$, $r = 3\%$, $\sigma = 10\%$, $\mu = 4\%$.

3.3 Η προσομοίωση Monte Carlo

Η προσομοίωση Monte Carlo πήρε το όνομά της από το διάσημο καζίνο στο Μονακό και η αρχική χρήση της ήταν για την εκτίμηση πιθανότητας νίκης σε τυχερά παιχνίδια. Σήμερα όμως οι εφαρμογές της είναι ευρείας κλίμακας, καθώς χρησιμοποιείται στα χρηματοοικονομικά, τα μαθηματικά, τη μηχανική, τη φυσική και πλείστους άλλους κλάδους. Το μεγαλύτερο ίσως πλεονέκτημα αυτής της μεθόδου είναι ότι δίνει λύση σε δισεπίλυτα προβλήματα και μάλιστα γρήγορα, καταναλώνοντας ελάχιστους πόρους και με σχετικά μεγάλη ακρίβεια.

Στην ουσία, η προσομοίωση Monte Carlo είναι μια αριθμητική διαδικασία που εκτιμά την αναμενόμενη τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής. Κατά τη διαδικασία αυτή, παράγονται ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, των οποίων γνωρίζουμε την κατανομή, και, χρησιμοποιώντας το Νόμο των Μεγάλων Αριθμών, εκτιμούμε προσεγγιστικά την τυχαία μεταβλητή αυτή, λαμβάνοντας τον μέσο όρο των τιμών που παράχθηκαν[5][13].

Η Monte Carlo είναι ένα πολύ ευέλικτο και ισχυρό εργαλείο για την εκτίμηση ολοκληρωμάτων και προσδοκώμενων τιμών. Από τη στιγμή που το μεγαλύτερο κομμάτι της ποσοτικής ανάλυσης στα χρηματοοικονομικά και στη διαχείριση ρίσκου αφορά στον υπολογισμό ποσοτήτων που είναι προσδοκώμενες τιμές, η προσομοίωση Monte Carlo είναι ευρέως διαδεδομένη στον κλάδο αυτό.

Ας υποθέσουμε, χάριν παραδείγματος, μια γενική περίπτωση προσέγγισης της προσδοκώμενης τιμής μιας συνάρτησης h μιας τυχαίας μεταβλητής X. Έστω ο συμβολισμός:

$$\mu = \mathbb{E}\left[h\left(X\right)\right].$$

Μία απλή εφαρμογή της προσομοίωσης Monte Carlo μπορεί να περιγραφεί με τα ακόλουθα βήματα:

1. Παράγουμε δείγματα ή ανεξάρτητες και ταυτόσημα κατανεμημένες (independent identically distributed, i.i.d.) μεταβλητές $X_1, X_2, \ldots, X_n$, που ακολουθούν την ίδια κατανομή με το X.

2. Η εκτίμηση της προσδοκώμενης τιμής μορίζεται ως ο μέσος όρος του δείγματος

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\left[h\left(X_1\right) + h\left(X_2\right) + \cdots + h\left(X_n\right)\right].$$

Ενίοτε, αναφερόμαστε στα στοιχεία $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ως i.i.d. τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν την κατανομή του X. Το μέγεθος του δείγματος n επιλέγεται συνήθως να είναι μεγάλος αριθμός. Πρέπει να σημειωθεί πως το μ, η ποσότητα που θέλουμε να εκτιμήσουμε, είναι ένας σταθερός αριθμός, ενώ η εκτιμήτρια Monte Carlo $\hat{\mu}$είναι μια *τυχαία μεταβλητή*. Η τιμή της $\hat{\mu}$διαφοροποιείται ανάλογα με το δείγμα.

Για την εκτίμηση της ίδιας προσδοκώμενης τιμής μμπορούν να σχεδιαστούν πολλοί διαφορετικοί αλγόριθμοι Monte Carlo. Όλοι όμως περιγράφονται με τον ίδιο μαθηματικό φορμαλισμό: Έστω H μια τυχαία μεταβλητή, τέτοια ώστε $\mu = \mathbb{E}\left[H\right]$. Τότε η αντίστοιχη εκτιμήτρια Monte Carlo θα δίνεται από τη σχέση

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} H_i,$$

όπου $H_1, H_2, \ldots, H_n$ είναι i.i.d. αντίγραφα του H.

Γενικότερα, οι μέθοδοι Monte Carlo βασίζονται στην αναλογία μεταξύ πιθανότητας και όγκου δεδομένων. Η υποκείμενη αρχή της προσομοίωσης Monte Carlo είναι, όπως αναφέρθηκε νωρίτερα, ο Νόμος των Μεγάλων Αριθμών. Αυτός μας εξασφαλίζει πως καθώς το μέγεθος του δείγματος $n \to \infty$τότε

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\left(H_1 + H_2 + \cdots + H_n\right) \to \mathbb{E}\left[H\right] = \mu$$

με πιθανότητα 1. Έτσι, με μεγαλύτερα n η εκτιμήτρια $\hat{\mu}$προσεγγίζει καλύτερα την πραγματική τιμή μ.

3.3.1 Σφάλμα και διάστημα εμπιστοσύνης

Έστω μ η άγνωστη ποσότητα προς προσέγγιση και H μια τυχαία μεταβλητή τέτοια ώστε $\mu = \mathbb{E}\left[H\right]$. Μια εκτίμηση για τη μ είναι η

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} H_i,$$

όπου $H_1, H_2, \ldots, H_n$ i.i.d. τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν την κατανομή του H. Όπως προαναφέρθηκε, βάσει του Νόμου των μεγάλων αριθμών, όσο μεγαλύτερο το n τόσο το $\hat{\mu}$ βρίσκεται πιο κοντά στο μ. Πόσο κοντά όμως· Αφού η $\hat{\mu}$ είναι μια τυχαία μεταβλητή, το ίδιο θα ισχύει και για το σφάλμα $\hat{\mu} - \mu$. Άρα, αυτό που αναζητούμε είναι η κατανομή του σφάλματος και όχι το σφάλμα με την συνήθη του σημασία.

Ας συμβολίσουμε με σ_H^2 τη διακύμανση του H. Συνεπάγεται του κεντρικού οριακού θεωρήματος πως, καθώς $n \to \infty$, η ποσότητα

$$\frac{H_1 + H_2 + \cdots + H_n - n\mu}{\sigma_H \sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}\left(\hat{\mu} - \mu\right)}{\sigma_H}$$

συγκλίνει στην κανονική κατανομή. Δηλαδή, για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}\left\{\frac{\sqrt{n}\left(\hat{\mu} - \mu\right)}{\sigma_H} \leq \alpha\right\} \to \Phi\left(\alpha\right).$$

Απλούστερα, το σφάλμα $\hat{\mu} - \mu$ είναι, κατά προσέγγιση, κατανεμημένο κανονικά, με μέσο 0 και διακύμανση σ_H^2/n. Αυτή η ασυμπτωτική ανάλυση μας δίνει επίσης τα *διαστήματα εμπιστοσύνης* για την εκτιμήτρια Monte Carlo $\hat{\mu}$. Ακριβέστερα, έπεται της παραπάνω σχέσης ότι το $1 - \alpha$ διάστημα εμπιστοσύνης για το μ είναι κατά προσέγγιση

$$\hat{\mu} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma_H}{\sqrt{n}},$$

όπου το $z_{\frac{\alpha}{2}}$ορίζεται από την εξίσωση $\Phi\left(-z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = \frac{\alpha}{2}$. Τα διαστήματα εμπιστοσύνης είναι *τυχαία διαστήματα*. Ένα $1 - \alpha$ διάστημα εμπιστοσύνης έχει πιθανότητα $1 - \alpha$ να εμπεριέχει την πραγματική τιμή μ. Να σημειωθεί εδώ πως το πλάτος ενός διαστήματος εμπιστοσύνης μικραίνει καθώς το μέγεθος n του δείγματος μεγαλώνει, κάτι διαισθητικά φυσικό. Αν τετραπλασιάσουμε το μέγεθος του δείγματος, το διάστημα εμπιστοσύνης υποδιπλασιάζεται, το οποίο είναι προφανές από την ύπαρξη της ποσότητας $\sqrt{n}$ στην πιο πάνω σχέση.

Στην πράξη, η τυπική απόκλιση σ_H είναι σπανίως γνωστή. Αντί αυτής, χρησιμοποιείται η τυπική απόκλιση του δείγματος

$$s_H = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(H_i - \hat{\mu})^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} H_i^2 - n\hat{\mu}^2\right)}.$$

Η αντικατάσταση αυτή είναι δόκιμη, καθώς το s_H συγκλίνει στο σ_H με πιθανότητα 1 καθώς $n \to \infty$. Το εμπειρικό διάστημα εμπιστοσύνης $1-\alpha$ τότε γίνεται

$$\hat{\mu} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s_H}{\sqrt{n}}.$$

Η ποσότητα $s_H/\sqrt{n}$ καλείται το *τυπικό σφάλμα (standard error)* της Monte Carlo εκτιμήτριας $\hat{\mu}$:

$$M.S.E. = \sqrt{\frac{1}{n\,(n-1)}\left(\sum_{i=1}^{n} H_i^2 - n\hat{\mu}^2\right)}.$$

Το διάστημα εμπιστοσύνης του 95%, που χρησιμοποιείται συχνά[5], είναι ίσο με την εκτιμήτρια $\hat{\mu}$ συν/πλην δύο φορές το τυπικό σφάλμα (ενδεικτικά $z_{0.025} \approx 2$).

Η διακύμανση του H καθορίζει το πλάτος του διαστήματος εμπιστοσύνης και εμμέσως το μέγεθος του σφάλματος $\hat{\mu} - \mu$. Έχοντας ένα δεδομένο μέγεθος δείγματος, όσο μικρότερη είναι η διακύμανση, τόσο στενότερο το διάστημα εμπιστοσύνης και άρα τόσο ακριβέστερη η εκτίμηση. Κατά τη σύγκριση εκτιμήσεων, άρα, εκείνη με τη μικρότερη διακύμανση είναι η πιο αποδοτική.

Οι εκτιμήτριες που συζητήθηκαν μέχρι στιγμής είναι όλες *αμερόληπτες*:

$$\mathbb{E}[\hat{\mu}] = \mu.$$

Η αμεροληψία είναι μία πολύ επιθυμητή ιδιότητα, όμως δεν είναι πάντα εφικτή.

Σε πολλές περιπτώσεις, αν γράφαμε την σχετική προσδοκία σαν ολοκλήρωμα, θα βρίσκαμε πως η διάστασή του είναι πάρα πολύ μεγάλη, έως και άπειρη. Αυτή είναι ακριβώς η κατάσταση όπου οι προσομοιώσεις Monte Carlo είναι απόλυτα χρηστικές. Η αποτίμηση παραγώγων με προσομοιώσεις Monte Carlo συνήθως περιλαμβάνει την προσομοίωση της εξέλιξης της τιμής του υποκείμενου τίτλου, της μεταβλητότητας, των επιτοκίων, και άλλων παραμέτρων του μοντέλου μέσω μονοπατιών στοχαστικών ανελίξεων. Αντί να επιλέξουμε τυχαία σημεία από το διάστημα [0,1] ή από το $[0,1]^d$, κάνουμε δειγματοληψία από έναν χώρο μονοπατιών.

Ανάλογα με τον τύπο του μοντέλου και του προβλήματος, το πλήθος των διαστάσεων του εν λόγω χώρου μονοπατιών μπορεί να είναι πολύ υψηλό, έως και άπειρο. Το πλήθος των διαστάσεων είναι συνήθως ίσο με το πλήθος των χρονικών σημείων της προσομοίωσης και αυτό μπορεί να είναι αρκετά μεγάλο για να καθιστά τον ρυθμό σύγκλισης της Monte Carlo ανταγωνιστικότερο από εναλλακτικές μεθόδους[13][5].

3.4 Η μέθοδος Longstaff-Schwartz

3.4.1 Περιγραφή μεθόδου

Το πρόβλημα της βέλτιστης εξάσκησης έγκειται στη σύγκριση του οφέλους της άμεσης εξάσκησης με το προσδοκώμενο όφελος από την επόμενη εξάσκηση και, κατέπέκταση, η εξάσκηση του χρεογράφου μόλις η πρώτη βρεθεί να υπερτερεί. Η μέθοδος Longstaff-Schwartz, ή αλλιώς Least Squares Monte Carlo (L.S.M.), χρησιμοποιεί παλινδρόμηση ελαχίστων τετραγώνων για να προσεγγίσει τη συνάρτηση του υπό όρους προσδοκώμενου οφέλους για κάθε χρονική στιγμή εξάσκησης $t_1, ..., t_N$, με προς τα πίσω επαγωγή, καθώς τα μονοπάτια των χρηματοροών ορίζονται αναδρομικά. Συγκεκριμένα, τη χρονική στιγμή t_{k-1}, η άγνωστη μορφή της εξίσωσης που συνδέει τα δύο μεγέθη, μπορεί να προσεγγισθεί από έναν γραμμικό συνδυασμό ενός περατού συνόλου $\mathcal{F}$ μετρήσιμων συναρτήσεων βάσης.

Το δικαίωμα $\mathbf{V}$ της υποκείμενης αξίας $\mathbf{X}$ που θέλουμε να τιμολογήσουμε έχει καθαρή αξία που ορίζετε από την συνάρτηση $\mathbf{h}$ και ένα σύνολο ημερομηνιών εξάσκησης $t_1, \ldots, t_M$. Σε κάθε ημερομηνία εξάσκησης, ο κάτοχος του δικαιώματος έχει την επιλογή είτε να ασκήσει το δικαίωμα, είτε να περιμένει μέχρι την επόμενη στιγμή εξάσκησης, όπου η διαδικασία της επιλογής επαναλαμβάνεται. Τη χρονική στιγμή της λήξης $\mathbf{T}$ ο κάτοχος είτε εξασκεί, ή το δικαίωμα εκπνέει χωρίς να προσφέρει καμία αξία. Το πρόβλημα έγκειται στην εύρεση ενός κανόνα διακοπής ο οποίος να συμβουλεύει τον κάτοχο για το πότε να εξασκήσει το δικαίωμά του. Ένας τέτοιος κανόνας θα μπορούσε να βρεθεί αν βρίσκαμε την προσδοκώμενη τιμή της αξίας του δικαιώματος τη χρονική στιγμή t_{i+1}, λαμβάνοντας υπ όψιν την τιμή της υποκείμενης μετοχής και τις παραμέτρους του δικαιώματος τη χρονική στιγμή t_i:

$$\mathbb{E}\left[V\left(S_{i+1}\right)|S_i\right]$$

Η βασική ιδέα της συγκεκριμένης μεθόδου παλινδρόμησης είναι η προσέγγιση αυτής της προσδοκώμενης τιμής (conditional expectation) σε κάθε χρονική στιγμή χρησιμοποιώντας ένα σύνολο $\mathbf{R+1}$ συναρτήσεων ως βάσεις, $L_0, \ldots, L_R$, δηλαδή

$$\mathbb{E}\left[V\left(S_{i+1}\right)|S_i\right] \approx \sum_{r=0}^{R} \beta_{i,r} L_r\left(S_i\right).$$

Υπάρχουν περιορισμοί στις συναρτήσεις βάσης που μπορούμε να επιλέξουμε, όπως έχουν τεθεί από τις εργασίες των Clement et al[3] και Glasserman and Yu [14]. Για την εφαρμογή της μεθόδου στην παρούσα εργασία, αρκεί αυτές να είναι πλήρεις και γραμμικά ανεξάρτητες. Οι Longstaff και Schwartz[4] (2001) πρότειναν τη χρήση των σταθμισμένων πολυωνύμων Laguerre ως συναρτήσεις βάσης

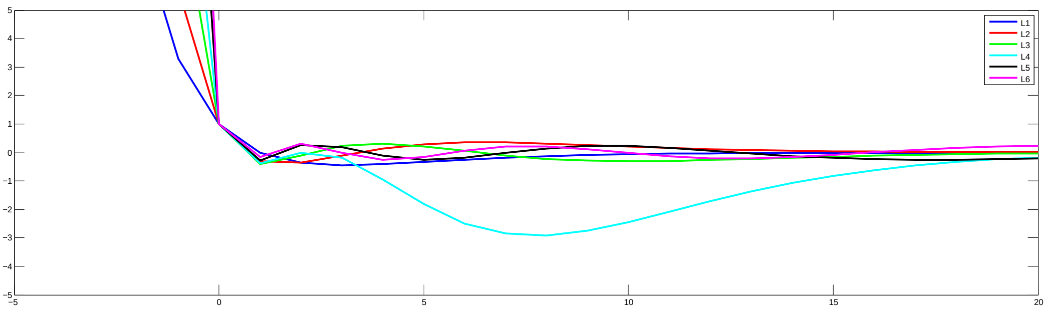
$$L_0(X) = e^{-\frac{X}{2}}$$

$$L_1(X) = e^{-\frac{X}{2}}(1 - X)$$

$$L_2(X) = e^{-\frac{X}{2}}(1 - 2X + \frac{X^2}{2})$$

$$L_n(X) = e^{-\frac{X}{2}} \frac{e^X}{n!} \frac{d^n}{dX^n}(X^n e^{-X})$$

τα οποία είναι απλώς $e^{-\frac{X}{2}}$φορές τα πολυώνυμα Laguerre. Άλλοι τύποι συναρτήσεων βάσης περιλαμβάνουν τα πολυώνυμα Hermite, Legendre και Jacobi.



Σχήμα 3.8: Γράφημα πολυωνύμων Laguerre $L_1, L_2, \ldots, L_6$

Στόχος είναι η ελαχιστοποίηση του αναμενόμενου τετραγώνου σφάλματος[13]. Παραγωγίζουμε τη σχέση:

$$\mathbb{E}\left[\left(\mathbb{E}[V\left(S_{i+1}|S_i\right)] - \sum_{r=0}^{R} \beta_{i,r} L_r\left(S_i\right)\right)^2\right]$$

και θέτουμε την παράγωγο ίση με το μηδέν. Έτσι, παίρνουμε:

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[V\left(S_{i+1}\right)|S_i\right] L_r\left(S_i\right)\right] = \sum_{r=0}^{R} \beta_i \mathbb{E}\left[L_r\left(S_i\right) L_s\left(S_i\right)\right]$$

Ορίζουμε τους πίνακες:

$$\left(\mathrm{B}_{LL}\right)_{r,s}=\mathbb{E}\left[L_r\left(S_i\right)L_s\left(S_i\right)\right]$$

και

$$\left(\mathrm{B}_{VL}\right)_r=\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[V\left(S_{i+1}\right)|S_i\right]L_r\left(S_i\right)\right]$$

Όμως το πολυώνυμο $L_i\left(X_i\right)$είναι μετρήσιμο σε σχέση με το X_i. Έτσι η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$\left(\mathrm{B}_{VL}\right)_r=\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[V\left(S_{i+1}\right)L_r\left(S_i\right)|S_i\right]\right]$$

και από τον νόμο των επαναλαμβανόμενων προσδοκιών[2][13]:

$$\left(\mathrm{B}_{VL}\right)_r=\mathbb{E}\left[V\left(S_{i+1}\right)L_r\left(S_i\right)\right]$$

Αντιστρέφοντας:

$$\beta=\mathrm{B}_{LL}^{-1}\mathrm{B}_{VL}$$

Για να βρεθούν οι συντελεστές β διενεργούμε μια προσομοίωση Monte Carlo της υποκείμενης μετοχής $X_0,\ldots,X_N$. Παράγουμε **M** μονοπάτια και θέτουμε:

$$\left(\widehat{\mathrm{B}}_{VL}\right)_r=\frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M}V\left(S_{i+1}^{(m)}\right)L_r\left(S_i^{(m)}\right)$$

και:

$$\left(\widehat{\mathrm{B}}_{\mathrm{LL}}\right)_{r,s}=\frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M}L_r\left(S_i^{(m)}\right)L_s\left(S_i^{(m)}\right)$$

Χρησιμοποιώντας αυτές τις προσεγγίσεις, μπορούμε να ορίσουμε έναν κανόνα βέλτιστης διακοπής και να εφαρμόσουμε έναν αλγόριθμο αποτίμησης για δικαιώματα είτε τύπου Βερμούδων είτε Αμερικανικού τύπου. Ο αλγόριθμος θα ξεκινάει διενεργώντας παλινδρόμηση με ελάχιστα τετράγωνα:

- Παραγωγή **M1** μονοπατιών **N** χρονικών στιγμών.
- Θέτουμε $V_N=h\left(S_N\right)$ που είναι η τερματική κατάσταση κάθε μονοπατιού.
- Προχωρώντας προς τα πίσω από το **N** στο **0**, διενεργούμε τα ακόλουθα βήματα την i-οστή χρονική στιγμή:

[2] $\mathbb{E}\left(\mathrm{X}\right)=\mathbb{E}[\mathbb{E}\left(\mathrm{X}|\mathrm{Y}\right)]$

- Υπολογίζουμε τις προσεγγίσεις $\left(\widehat{\mathrm{B}}_{LL}\right)_{r,s}$ και $\left(\widehat{\mathrm{B}}_{VL}\right)_{r}$
- Αντιστρέφουμε τον πίνακα $\left(\widehat{\mathrm{B}}_{LL}\right)_{r,s}$ για να βρούμε το συντελεστή $\hat{\beta}_i = \widehat{\mathrm{B}}_{LL}^{-1}\widehat{\mathrm{B}}_{VL}$
- Υπολογίζουμε τη δεσμευμένη προσδοκώμενη τιμή $V_{i+1}^{R}(S_i) = \sum_{r=0}^{R} \hat{\beta}_{i,r} L_i(S_i)$.
- Συγκρίνουμε την τιμή αυτή με το $h(S_i)$.
- Θέτουμε $V_i = h(S_i)$αν $h(S_i) > V_{i+1}^{R}(X_i)$ ή $V_i = e^{-r\Delta t}V_{i+1}$ αν $h(S_i) < V_{i+1}^{R}$

Από αυτή τη διαδικασία λαμβάνουμε το αποτέλεσμα της παλινδρόμησης β και μια πιθανή τιμή για το V_i. Ωστόσο, επειδή χρησιμοποιήσαμε τα ίδια μονοπάτια προσομοίωσης και για την παλινδρόμηση και για την αποτίμηση, η εκτίμηση του V_i ενδέχεται να εμπεριέχει μεροληψία[13]. Για να την περιορίσουμε, χρησιμοποιούμε ένα νέο σύνολο **M2** μονοπατιών για την εκτίμηση. Αυτή τη φορά έχουμε την επιλογή να εργαστούμε είτε προς τα μπροστά, είτε προς τα πίσω. Αν εργαζόμασταν ξανά προς τα πίσω, θα ακολουθούσαμε την παρά κάτω διαδικασία:

- Παραγωγή **M2** μονοπατιών **N** χρονικών στιγμών.
- Θέτουμε $V_N = h(S_N)$.
- Προχωρώντας προς τα πίσω από το **N** στο **0**, διενεργούμε τα ακόλουθα βήματα την i-οστή χρονική στιγμή:
    - Υπολογίζουμε την τιμή $V_{i+1}^{R}(S_i) = \sum_{r=0}^{R}\beta_{i,r} L_i(S_i)$.
    - Συγκρίνουμε την τιμή αυτή με το $h(S_i)$.
    - Θέτουμε $V_i = h(S_i)$ αν $h(S_i) > C_{i+1}^{R}(S_i)$ ή $V_i = e^{-r\Delta t}V_{i+1}$ αν $h(S_i) < V_{i+1}^{R}$.
- Εξάγουμε τον μέσο όρο των V_0 των **M2** μονοπατιών για να βρούμε την τιμή του δικαιώματος.

Με την προς τα πίσω διαδικασία όμως, ο αλγόριθμος καταλήγει να κάνει πολλούς επιπλέον υπολογισμούς. Για κάθε μονοπάτι στο οποίο βρίσκονται παρά πάνω από μία στιγμές στις οποίες θα μπορούσαμε να εξασκήσουμε το δικαίωμα, η μέθοδος αυτή θα κάνει τους υπολογισμούς για κάθε μία από αυτές, αντί μόνο για την προηγούμενη. Αν εργαζόμασταν προς τα εμπρός, ο αλγόριθμος θα σταματούσε αμέσως μετά την προηγούμενη στιγμή εξάσκησης, σύμφωνα με τον κανόνα βέλτιστης διακοπής που έχουμε ορίσει, εξοικονομώντας έτσι υπολογιστικό χρόνο. Για να εργαστούμε προς τα εμπρός, ακολουθούμε την παρά κάτω διαδικασία:

- Παραγωγή **M2** μονοπατιών **N** χρονικών στιγμών.
- Για κάθε μονοπάτι, διενεργούμε τα ακόλουθα βήματα:
    - Μετράμε από την ημερομηνία εξάσκησης **1** έως **N**.

- Σε κάθε χρονικό βήμα i θέτουμε $t_i = i\Delta t$.
- Υπολογίζουμε το $V_{i+1}^{R}(S_i) = \sum_{r=0}^{R} \beta_{i,r} L_i(S_i)$
- Αν $V_{i+1}^{R} < h(S_i)$ ή $i = \mathbf{N}$ θέτουμε $V_i(0) = e^{-i\Delta t} h(S_i)$.
- Αλλιώς, συνεχίζουμε στην επόμενη ημερομηνία εξάσκησης

- Εξάγουμε τον μέσο όρο των V_0 των **M2** μονοπατιών.

3.4.2 Σύγκλιση

Στην πρωτότυπη εργασία τους, οι Longstaff και Schwartz[4] παρέχουν λιγοστές πληροφορίες σχετικά με τη σύγκλιση του αλγορίθμου τους, εκτός από την απλή μονοπερίοδη περίπτωση. Οι Clement et al[3] παρέχουν μια πιο διεξοδική ανάλυση των ιδιοτήτων σύγκλισης του αλγορίθμου, αποδεικνύοντας ότι αυτός συγκλίνει και βρίσκοντας αποτελέσματα σχετικά με τον ρυθμό σύγκλισης. Οι Glasserman και Yu[14] δίνουν μία ανάλυση της σχέσης μεταξύ του αριθμού μονοπατιών που απαιτούνται για ένα συγκεκριμένο πλήθος συναρτήσεων βάσης για να εξασφαλισθεί σύγκλιση.

Η μεγαλύτερη δυσκολία στην ανάλυση της σύγκλισης του αλγορίθμου Longstaff-Schwartz είναι οι διάφορες πηγές σφάλματος που ενέχει. Η πρώτη πηγή είναι το γεγονός ότι προσεγγίζουμε την υπό όρους προσδοκώμενη τιμή της εξόφλησης του option μέσω ενός γραμμικού συνδυασμού ενός περατού συνόλου **R+1** συναρτήσεων βάσης

$$E\left[V\left(S_{i+1}|S_i\right)\right] \approx \sum_{r=0}^{R} \beta_{i,r} L_r\left(S_i\right)$$

Καθώς το $R \to \infty$, η ακρίβεια αυτής της προσέγγισης θα αυξάνεται. Κάτι τέτοιο φυσικά δεν είναι πρακτικό, καθώς δεν είναι εφικτό να χρησιμοποιήσουμε άπειρες σε πλήθος συναρτήσεις βάσης. Χρησιμοποιώντας την παραπάνω προσέγγιση για την τιμή συνέχισης βρίσκουμε έναν μη βέλτιστο κανόνα διακοπής για το δικαίωμα.

Μια ακόμα πηγή σφάλματος είναι η προσέγγιση των συντελεστών $\beta_{i,r}$ από μια παλινδρόμηση μονοπατιών Monte Carlo. Χρησιμοποιούμε ένα σύνολο **R+1** $\hat{\beta}$ των οποίων τα Monte Carlo Error (MCE) θα σχετίζονται με τον αριθμό των μονοπατιών **M** που χρησιμοποιούνται στην προσομοίωση. Αφού υπολογίσουμε αυτό το σύνολο των προϊόντων της παλινδρόμησης $\hat{\beta}$, το χρησιμοποιούμε για να προσεγγίσουμε έναν βέλτιστο κανόνα διακοπής και για να κάνουμε άλλη μια προσομοίωση Monte Carlo, πράγμα που ενέχει ακόμα μεγαλύτερο σφάλμα, για να βρούμε τελικά το $\hat{\mathrm{V}}_0$, την τελική τιμή του δικαιώματος.

Κατά την χρήση της L.S.M. για τιμολόγηση Αμερικανικών δικαιωμάτων προαίρεσης, υπάρχει επιπλέον πηγή σφάλματος, ανάλογο με το πλήθος των ημερομηνιών εξάσκησης **N** του δικαιώματος. Καθώς το πλήθος των στιγμών εξάσκησης αυξάνει σε μεγάλο αριθμό, προσεγγίζοντας το συνεχές φάσμα εξάσκησης των Αμερικανικών δικαιωμάτων, η προσέγγιση γίνεται πιο επισφαλής. Σε εφαρμογές όμως όπου οι στιγμές εξάσκησης είναι περατός αριθμός και η τιμολόγηση γίνεται σε δικαιώματα τύπου Βερμούδων, η συγκεκριμένη πηγή σφάλματος δεν λαμβάνεται υπ όψιν.

Στην εργασία των Clement et al [3]αποδεικνύονται δύο θεωρήματα τα οποία είναι σχετικά με τις πηγές σφάλματος που περιγράφηκαν παραπάνω. Στο θεώρημα 3.1 της εργασίας τους δείχνουν πώς

$$\lim_{R\to\infty} \mathbb{E}\left[f\left(S_{\tau_i^{(R)}}\right)|\mathcal{F}_{\mathrm{i}}\right] = \mathbb{E}\left[f\left(S_{\tau_i}\right)|\mathcal{F}_{\mathrm{i}}\right]$$

όπου τ_i είναι η βέλτιστη χρονική στιγμή εξάσκησης στο βήμα i και τ_i^R είναι η προσέγγιση αυτής της χρονικής στιγμής χρησιμοποιώντας $\mathbf{R}$ συναρτήσεις βάσης. Αυτή η απόδειξη μας καλύπτει για την πρώτη πηγή σφαλμάτων.

Συνεχίζοντας, στο θεώρημα 3.2, αποδεικνύουν πως όσο η πιθανότητα $\mathbb{P}\left(\beta_i L\left(S_i\right) = f\left(S_i\right)\right) = 0$ τότε για μια προσομοίωση Monte Carlo με $\mathbf{M}$ μονοπάτια $S^{(1)}, \ldots, S^{(M)}$

$$\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{N} f\left(S^{(m)}_{\tau_i^{m,R,M}}\right) \text{ σύγκλίνει σχεδόν σίγουρα στο } \mathbb{E}\left[f\left(S_{\tau_i^{(R)}}\right)\right]$$

καθώς το $\mathbf{M}$ τείνει στο άπειρο, για $i = 1, \ldots, M$ και όπου $\tau_i^{m,R,M}$ η $m^{\text{οστή}}$εκτιμήτρια του τ_i^R, της προσέγγισης της βέλτιστης στιγμής διακοπής. Αυτό το θεώρημα μας καλύπτει όσον αφορά τη δεύτερη πηγή σφαλμάτων.

Στην εργασία των Glasserman και Yu[14] διερευνάται η σχέση μεταξύ του αριθμού των προσομοιωμένων μονοπατιών και του αριθμού των συναρτήσεων βάσης. Ανέλυσαν τα Monte Carlo Errors των β και έθεσαν όρια στον αριθμό των μονοπατιών που απαιτούνται ώστε η ποσότητα αυτή να συγκλίνει, όταν η υποκείμενη μετοχή $\mathbf{X}$ ακολουθεί γεωμετρική κίνηση Brown. Κατέληξαν πως το ποσό των μονοπατιών που απαιτούνται για να επιτευχθεί σύγκλιση του MCE(β) μεγαλώνει σχεδόν εκθετικά, ανάλογα με το πλήθος των συναρτήσεων βάσης. Η έρευνά τους συνιστά χρήση μεγάλου πλήθους μονοπατιών ώστε να επιτευχθεί σύγκλιση και σχετική ακρίβεια των συντελεστών β. Επίσης συνιστά διερεύνηση σχετικά με τη σχέση του αριθμού των μονοπατιών $\mathbf{M}$ και του σφάλματος MCE της εφαρμογής της μεθόδου στην παρούσα εργασία.

3.4.3 Εφαρμογή της μεθόδου Longstaff-Schwartz στη MATLAB

Οι κώδικες που αναπτύχθηκαν στην MATLAB στα πλαίσια της παρούσας διπλωματικής εργασίας παρατίθενται στο Παράρτημα Α. Ο κώδικας για την τιμολόγηση των δικαιωμάτων προαίρεσης με την μέθοδο Longstaff-Schartz, που λειτουργεί με τη μορφή υποπρογράμματος συνάρτησης. Διαβάζει σαν ορίσματα το πλήθος των μονοπατιών που θα προσομοιωθούν, τον αριθμό των συναρτήσεων βάσης που θα χρησιμοποιηθούν για την παλινδρόμηση, την μεταβλητότητα της υποκείμενης μετοχής, την αρχική τιμή της μετοχής, την τιμή άσκησης του δικαιώματος, το χωρίς ρίσκο επιτόκιο και την ημερομηνία στην οποία θεωρούμε ότι εκδίδουμε το δικαίωμα και ένα διάνυσμα με τις ημερομηνίες άσκησης του δικαιώματος.

Στη συνέχεια, οι χρονικές στιγμές εξάσκησης **N** που θα χρησιμοποιηθούν βρίσκονται σε σχέση με τις παραπάνω ημερομηνίες. Η ημερομηνία έκδοσης Settle (settlement date) μας διευκολύνει στο να τιμολογήσουμε το παράγωγο ακόμα και αν έχουν εκπνεύσει μία ή και παραπάνω στιγμές εξάσκησης, λογίζοντας μόνο τις ημερομηνίες εξάσκησης που απομένουν.

Χρησιμοποιώντας την τιμή της υποκείμενης μετοχής στον παρόντα χρόνο προσομοιώνουμε **M1** μονοπάτια, στα οποία η μετοχή ακολουθεί Γεωμετρική Κίνηση Brown. Το ποσοστό μεταβολής της κίνησης της είναι $r - \frac{\sigma^2}{2}$. Στη συνέχεια του προγράμματος, αναπτύσσονται οι διαδικασίες που περιγράφονται παραπάνω, με τη μορφή πινάκων, υπολογίζοντας τα β για το πρώτο σύνολο μονοπατιών. Στο κομμάτι αυτό, για τη χρήση των πολυωνύμων Laguerre στην παλινδρόμηση χρησιμοποιείτε μία συνάρτηση, η οποία καλείτε με όρισμα την τάξη του πολυωνύμου και την τιμή της υποκείμενης μετοχής και επιστρέφει την τιμή του πολυωνύμου. Έπειτα, παράγουμε ένα **M2** σύνολο μονοπατιών στα οποία γίνεται η αποτίμηση. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα να παίρνουμε μια εκτίμηση με προς τα κάτω μεροληψία.

Η διακύμανση των εξοφλήσεων και το σφάλμα της μεθόδου δίνονται από τους τύπους:

$$\sigma^2 = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M} \left(V_m(0) - \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M} V_i(0) \right)^2$$

$$MCE = \sqrt{\frac{\sigma^2}{M}}$$

Όπως φαίνεται παρακάτω, το σ συγκλίνει σε θετικό αριθμό καθώς το MCE συγκλίνει στο μηδέν.

Η εφαρμογή της μεθόδου στη MATLAB έγινε με ευκολία καθώς οι built in εντολές τις επιτρέπουν στην ανάπτυξη διανυσματοποιημένου κώδικά και την αποφυγή, όσο είναι δυνατόν, βρόγχων for και if, οι οποίοι θα επιβάρυναν το πρόγραμμα, κάνοντας το πιο σύνθετο και χρονοβόρο.

3.4.4 Αριθμητικό παράδειγμα

Κατά την ημερομηνία λήξης του παραγώγου, ο κάτοχος επιλέγει να εξασκήσει μόνο αν το παράγωγο αποφέρει κέρδη, δηλαδή αν το παράγωγο είναι in-the-money. Πριν την ημερομηνία λήξης όμως, η βέλτιστη στρατηγική είναι η σύγκριση της αξίας από άμεση εξάσκηση με την προσδοκώμενη αξία από συνέχιση, και κατ επέκταση η εξάσκηση, εφ όσον η πρώτη είναι μεγαλύτερη. Γνωρίζοντας την αξία της άμεσης εξάσκησης από την συνάρτηση απόδοσης (payoff function) του παραγώγου, το κλειδί στην βέλτιστη εξάσκηση είναι ο υπολογισμός της προσδοκώμενης αξίας συνέχισης. Αυτό πραγματοποιείται διενεργώντας πολυωνυμική παλινδρόμηση ανάμεσα στις μελλοντικά προκύπτουσες χρηματοροές από την συνέχιση και τις, αντίστοιχες τους, τιμές της υποκείμενης μετοχής του παρόντα χρόνου, χρησιμοποιώντας ένα σύνολο συναρτήσεων σαν βάση. Η προσαρμοσμένη τιμή από αυτή την παλινδρόμηση είναι μία αποτελεσματική και αμερόληπτη εκτίμηση της συνάρτησης προσδοκίας και μας επιτρέπει να προσδιορίσουμε με ακρίβεια τον βέλτιστο κανόνα διακοπής για το δικαίωμα.

Ο καλύτερος τρόπος για να εξηγήσουμε τη διαδικασία είναι μέσα από ένα αριθμητικό παράδειγμα[4]. Ας θεωρήσουμε ένα American put option σε μια ποσότητα υποκείμενης μετοχής που δεν πληρώνει μέρισμα. Το option μπορεί να εξασκηθεί τις χρονικές στιγμές 1, 2 και 3, με την τελευταία να είναι και η καταληκτική ημερομηνία. Το ετήσιο άνευ ρίσκου επιτόκιο r είναι στο 6%. Χάριν απλούστευσης, χρησιμοποιούμε μόνο 8 μονοπάτια προσομοίωσης για την τιμή της υποκείμενης μετοχής. Αυτά φαίνονται στον πίνακα 3.1

Μονοπάτι	t=0	t=1	t=2	t=3
1	1.00	1.90	1.08	1.34
2	1.00	1.16	1.26	1.54
3	1.00	1.22	1.07	1.03
4	1.00	.93	.97	.92
5	1.00	1.11	1.56	1.52
6	1.00	.76	.77	.90
7	1.00	.92	.84	1.01
8	1.00	.88	1.22	1.34

Πίνακας 3.1: Προσομοίωση των τιμών της υποκείμενης μετοχής με $S_0 = \$1.00$.

Ο σκοπός μας εδώ είναι να καταλήξουμε σε έναν κανόνα διακοπής του option ο οποίος να μεγιστοποιεί την αξία του σε κάθε σημείο κατά μήκος κάθε μονοπατιού. Καθώς βέβαια ο αλγόριθμος λειτουργεί αναδρομικά, πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε ορισμένους ενδιάμεσους πίνακες. Υπό την προϋπόθεση πως δεν έχουμε εξασκήσει το δικαίωμα πριν το χρόνο 3, οι χρηματοροές που θα προέκυπταν από μια βέλτιστη στρατηγική εξάσκησης φαίνονται στον πίνακα 3.2.

Μονοπάτια	t=1	t=2	t=3
1	-	-	.00
2	-	-	.00
3	-	-	.07
4	-	-	.18
5	-	-	.00
6	-	-	.20
7	-	-	.09
8	-	-	.00

Πίνακας 3.2: Χρηματοροές που προκύπτουν από την εξάσκηση του δικαιώματος τη χρονική στιγμή 3.

Οι χρηματοροές αυτές είναι ίσες με εκείνες που θα προέκυπταν αν το δικαίωμα ήταν Ευρωπαϊκού τύπου αντί Αμερικανικού.

Αν το put είναι in the money τη χρονική στιγμή 2, ο κάτοχος πρέπει να εξετάσει αν τον συμφέρει να εξασκήσει το δικαίωμά του αμέσως ή να περιμένει μέχρι τη λήξη του τη χρονική στιγμή 3. Από τον πίνακα των τιμών της μετοχής φαίνεται πως το δικαίωμα είναι in the money μόνο σε πέντε από τα οκτώ μονοπάτια τη χρονική στιγμή 2. Έστω X οι τιμές της μετοχής τη χρονική στιγμή 2 για αυτά τα πέντε μονοπάτια και Υ οι αντίστοιχες προεξοφλημένες χρηματοροές της χρονικής στιγμής 3, που προκύπτουν σε περίπτωση μή πρόωρης εξάσκησης. Χρησιμοποιούμε μόνο τα in the money μονοπάτια. Αυτό μας επιτρέπει να να εκτιμήσουμε καλύτερα την συνάρτηση προσδοκίας στην περιοχή που η εξάσκηση είναι δόκιμη, κάτι που βελτιώνει αισθητά την απόδοση του αλγορίθμου. Τα διανύσματα X και Υ φαίνονται στον πίνακα 3.3.

Για να εκτιμήσουμε τις προσδοκώμενες χρηματοροές από τη συνέχιση, με βάση τις τιμές της μετοχής τη χρονική στιγμή 2, διενεργούμε παλινδρόμηση για το Υ με σταθερά X και X^2. Αυτή είναι η απλούστερη δυνατή μεθόδευση. Στη συνέχεια της εργασίας χρησιμοποιείται πιο σύνθετος τρόπος παλινδρόμησης. Η συνάρτηση προσδοκίας που προκύπτει είναι η

$$\mathbb{E}\left[Y|X\right] = -1.070 + 2.983X - 1.813X^2$$

Μονοπάτι	Y	X
1	$.00 \times .94176$	1.08
2	-	-
3	$.07 \times .94176$	1.07
4	$.18 \times .94176$	.97
5	-	-
6	$.20 \times .94176$	.77
7	$.09 \times .94176$	.84
8	-	-

Πίνακας 3.3: Παλινδρόμηση τιμών υποκείμενης μετοχής τη χρονική στιγμή 2 με χρηματοροές που προκύπτουν από εξάσκηση τη χρονική στιγμή 3.

Έχοντας αυτή την συνάρτηση προσδοκίας, συγκρίνουμε την αξία της άμεσης εξάσκησης τη χρονική στιγμή 2 με την αξία συνέχισης που δίνεται στη δεύτερη στήλη του πίνακα 3.4.

Μονοπάτι	Εξάσκηση	Συνέχιση
1	.02	.0369
2	-	-
3	.03	.0461
4	.13	.1176
5	-	-
6	.33	.1520
7	.26	.1565
8	-	-

Πίνακας 3.4: Βέλτιστη στρατηγική πρόωρης εξάσκησης τη χρονική στιγμή 2.

Η αξία της άμεσης εξάσκησης ισούται με την εγγενή αξία $1.10 - X$ για τα in the money μονοπάτια, ενώ ή η αξία συνέχισης δίνεται αν αντικαταστήσουμε τα X στην συνάρτηση προσδοκίας. Από τη σύγκριση αυτή προκύπτει ότι είναι συμφέρον να εξασκηθεί το δικαίωμα για το τέταρτο, το έκτο και το έβδομο μονοπάτι. Έτσι προκύπτει ο πίνακας 3.5, ο οποίος παρουσιάζει τις χρηματοροές που προκύπτουν υπό την προϋπόθεση ότι το δικαίωμα δεν έχει εξασκηθεί πριν τη χρονική στιγμή 2.

Παρατηρούμε πως όταν το δικαίωμα εξασκείται τη χρονική στιγμή 2, η χρηματοροή που θα προέκυπτε στην τελευταία στήλη, αν το δικαίωμα ήταν in the money τη χρονική στιγμή 3, μηδενίζεται. Αυτό συμβαίνει γιατί όταν το δικαίωμα εξασκηθεί δεν μπορούν να προκύψουν επιπλέον χρηματοροές σε μελλοντικό χρόνο, αφού ο κάτοχος μπορεί να το εξασκήσει μόνο μια φορά.

Μονοπάτι	t=1	t=2	t=3
1	-	.00	.00
2	-	.00	.00
3	-	.00	.07
4	-	.13	.00
5	-	.00	.00
6	-	.33	.00
7	-	.26	.00
8	-	.00	.00

Πίνακας 3.5: Πίνακας χρηματοροών τη χρονική στιγμή 2.

Πορευόμενοι αναδρομικά, εξετάζουμε στη συνέχεια αν το δικαίωμα πρέπει να εξασκηθεί την χρονική στιγμή 1. Από τον πίνακα των τιμών της μετοχής, υπάρχουν πάλι πέντε μονοπάτια που είναι in the money τη χρονική στιγμή 1. Για αυτά τα μονοπάτια ορίζουμε ξανά το Y ως τις προεξοφλημένες χρηματικές ροές που προκύπτουν αν, για τα πέντε μονοπάτια αυτά, εξασκούσαμε το δικαίωμα τη χρονική στιγμή 2. Ας σημειωθεί πως χρησιμοποιούμε τις πραγματικές χρηματοροές και όχι τις τιμές της συνάρτησης προσδοκίας της χρονικής στιγμής 2.

Από τη στιγμή που το δικαίωμα μπορεί να εξασκηθεί μόνο μία φορά, μελλοντικές χρηματοροές μπορούν να προκύψουν κατά τη χρονική στιγμή 2 ή 3, αλλά όχι και από τις δύο. Όμοια, στον πίνακα 3.6 τα X αντιπροσωπεύουν τις τιμές της μετοχής τη χρονική στιγμή 1 για τα μονοπάτια που είναι in the money.

Μονοπάτι	Y	X
1	$.00\times.94176$	1.09
2	-	-
3	-	-
4	$.13\times.94176$	.93
5	-	-
6	$.33\times.94176$	.76
7	$.26\times.94176$	.92
8	$.00\times.94176$	.88

Πίνακας 3.6: Παλινδρόμηση τιμών υποκείμενης μετοχής τη χρονική στιγμή 1 με χρηματοροές που προκύπτουν από εξάσκηση τη χρονική στιγμή 2.

Η συνάρτηση προσδοκίας στο χρόνο 1 υπολογίζεται ξανά παλινδρομώντας τα Y με σταθερά τα X και X^2. Η συνάρτηση προσδοκίας που προκύπτει είναι η:

$$\mathbb{E}\left[Y|X\right] = 2.038 - 3.335X + 1.356X^2$$

Με αντικατάσταση του X παίρνουμε τις προσδοκώμενες continuation values. Οι τιμές αυτές, μαζί με τις αποδόσεις της πρόωρης εξάσκησης τη χρονική στιγμή 1, δίνονται στον πίνακα 3.7. Συγκρίνοντας τις δύο στήλες, προκύπτει ότι η εξάσκηση τη χρονική στιγμή 1 είναι συμφέρουσα για τα μονοπάτια 4,6,7 και 8.

Μονοπάτια	Εξάσκηση	Συνέχιση
1	.01	.0139
2	-	-
3	-	-
4	.17	.1092
5	-	-
6	.34	.2866
7	.18	.1175
8	.22	.1533

Πίνακας 3.7: Βέλτιστη εξάσκηση τη χρονική στιγμή 1.

Έχοντας καταλήξει στη βέλτιστη στρατηγική εξάσκησης για κάθε χρονική στιγμή, ο κανόνας βέλτιστης διακοπής του δικαιώματος μπορεί να αναπαρασταθεί από τον πίνακα 3.8, όπου οι άσσοι αναπαριστούν στιγμές εξάσκησης.

Μονοπάτια	t=1	t=2	t=3
1	0	0	1
2	0	0	1
3	0	0	1
4	1	0	0
5	0	0	0
6	1	0	0
7	1	0	0
8	1	0	0

Πίνακας 3.8: Στρατηγική βέλτιστης εξάσκησης.

Είναι τώρα αρκετά εύκολο να υπολογίσουμε τις προκύπτουσες χρηματοροές από την εξάσκηση του option τις στιγμές όπου υπάρχει άσσος στον πίνακα 3.8.

Μονοπάτια	t=1	t=2	t=3
1	.00	.00	.00
2	.00	.00	.00
3	.00	.00	.07
4	.17	.00	.00
5	.00	.00	.00
6	.34	.00	.00
7	.18	.00	.00
8	.22	.00	.00

Πίνακας 3.9: Πίνακας χρηματοροών δικαιώματος.

Πλέον μπορούμε να τιμολογήσουμε το δικαίωμα προαίρεσης. Αφού έχουμε εξακριβώσει τις χρηματοροές που προκύπτουν από το American put σε κάθε χρονική στιγμή, κατα μήκος κάθε μονοπατιού, τις προεξοφλούμε στην χρονική στιγμή 0 και εξάγουμε τον μέσο όρο. Από αυτή τη διαδικασία καταλήγουμε στην τιμή

$$\hat{V}_p^A = 0.1144$$

για το American put option. Ενδεικτικό είναι πως αν προεξοφλήσουμε τις χρηματοροές που προκύπτουν τη χρονική στιγμή 3 και εξάγουμε τον μέσο όρο εκείνων, παίρνουμε την τιμή του European put,

$$\hat{V}_p^E = 0.0564,$$

που είναι σχεδόν η μίση.

Αν και υπεραπλουστευμένο, αυτό το αριθμητικό παράδειγμα απεικονίζει τον τρόπο με τον οποίο παλινδρομούμε δεδομένα διαφορετικών χρονικών στιγμών με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων για να υπολογίσουμε προσεγγιστικά μια συνάρτηση προσδοκίας. Κατ'επέκταση, αυτή χρησιμοποιείται για να παρθούν αποφάσεις περί της στρατηγικής εξάσκησης του δικαιώματος, με τρόπο που να μεγιστοποιεί την αξία του σε κάθε ημερομηνία εξάσκησης, κατά μήκος κάθε μονοπατιού. Όπως φαίνεται από αυτό το παράδειγμα η μέθοδος LSM εφαρμόζεται με ευκολία, αφού δεν απαιτείται τίποτα παραπάνω από απλή παλινδρόμηση.

Κεφάλαιο 4

Αριθμητικά Αποτελέσματα

4.1 Ανάλυση ευαισθησίας

Ο αλγόριθμος που αναπτύχθηκε εφαρμόστηκε σε μια σειρά από σενάρια τιμολόγησης διαφορετικών παραγώγων. Σκοπός ήταν η διερεύνηση της επιρροής των διάφορων μεταβλητών του μοντέλου στην τιμή του δικαιώματος, το σφάλμα και την διασπορά.

Αρχικά αποτιμήθηκαν 12 διαφορετικά δικαιώματα με χαρακτηριστικά τύπου Βερμούδων. Με κοινό χαρακτηριστικό τη μηνιαία εξάσκηση και την τιμή άσκησης ($40), διερευνήθηκε η συμπεριφορά της τιμής του ασφαλίστρου καθώς αλλάζει η μεταβλητότητα (0.2 και 0.4), ο χρόνος λήξης (1 και 2 έτη) και η αρχική τιμή της υποκείμενης μετοχής. Επίσης μελετήθηκε η μεταβολή στην τιμή του ασφαλίστρου καθώς εισάγουμε επιπλέον συναρτήσεις βάσης στην παλινδρόμηση, σε σύγκριση με τις τιμές που προκύπτουν από το Διωνυμικό Δέντρο. Στην εργασία τους οι Longstaff και Schwartz [4] επισημαίνουν ότι τα πολυώνυμα Laguerre μέχρι και τρίτης τάξης αρκούν για να πετύχουμε ικανοποιητική σύγκλιση και πως παραπάνω συναρτήσεις βάσης δεν έχουν αξιοσημείωτο όφελος.

Στον πίνακα 4.1 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της αποτίμησης των 12 αυτών σεναρίων. Οι τιμές που προκύπτουν είναι αρκετά συνεπείς ως προς τις τιμές που προκύπτουν από το Διωνυμικό Δέντρο, κάτι που επιβεβαιώνει την ορθή λειτουργία του αλγορίθμου. Σχετικά με το δόκιμο πλήθος συναρτήσεων βάσης, για τα συγκεκριμένα δεδομένα, ο μέσος όρος των αποκλίσεων από την τιμή του Διωνυμικού Δέντρου είναι πράγματι μικρότερος για τα L_3, με τα L_6 να ακολουθούν, επαληθεύοντας τα ευρήματα των Longstaff και Schwartz [4] και των Glasserman και Yu [14]. Τα L_3, δηλαδή τα πολυώνυμα Laguerre τρίτης τάξης, θα χρησιμοποιηθούν στην αποτίμηση που θα διενεργηθεί στο 4.2.

			L_1	L_2	L_3	L_4	L_5	L_6	Bin. Tree
$S_0 = \$38$	$\sigma = 0.2$	$T = 1$	2.177	2.544	2.670	2.507	2.594	2.320	2.7252
		$T = 2$	4.217	4.309	4.676	4.185	4.079	4.286	4.4611
	$\sigma = 0.4$	$T = 1$	5.008	5.228	5.090	5.362	4.750	5.301	5.7314
		$T = 2$	8.340	8.542	10.112	7.785	8.187	8.667	8.6206
$S_0 = \$40$	$\sigma = 0.2$	$T = 1$	3.130	3.905	3.614	3.674	3.640	3.306	3.7000
		$T = 2$	5.507	5.329	5.552	5.202	5.483	5.816	5.5833
	$\sigma = 0.4$	$T = 1$	5.680	6.750	6.159	6.210	6.027	6.822	6.7265
		$T = 2$	9.590	9.484	9.112	8.469	10.176	9.798	9.7707
$S_0 = \$42$	$\sigma = 0.2$	$T = 1$	4.800	4.837	5.090	4.703	4.779	4.474	5.1121
		$T = 2$	6.504	7.037	6.321	6.938	5.920	6.736	7.0083
	$\sigma = 0.4$	$T = 1$	7.927	7.366	8.204	8.220	7.458	7.777	8.1560
		$T = 2$	11.037	11.238	11.892	11.206	10.761	11.580	11.1876

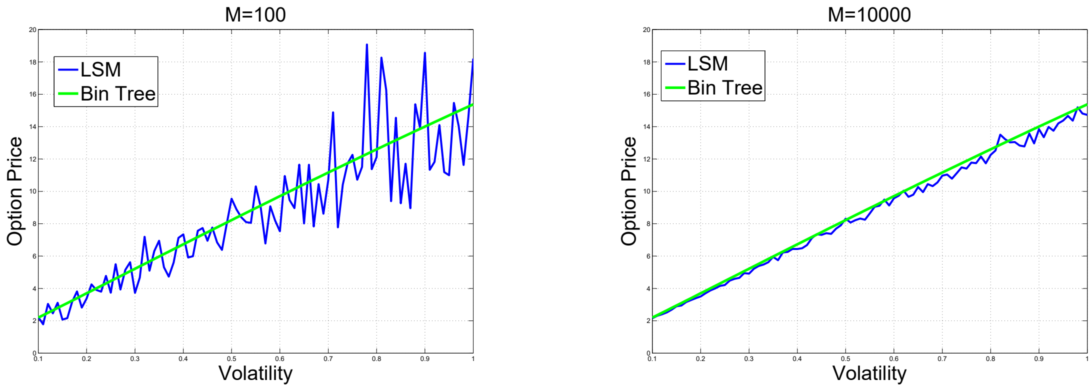
Πίνακας 4.1: Αποτελέσματα αποτίμησης δικαιωμάτων τύπου Βερμούδων, με τιμή άσκησης \$40, χωρίς ρίσκο επιτόκιο $r = 3\%$ και μηνιαία δυνατότητα εξάσκησης.

Στον πίνακα 4.2 παρατίθενται δεδομένα από την αποτίμηση ενός δικαιώματος σε πέντε διαφορετικές περιπτώσεις, όπου ο αριθμός των μονοπατιών που χρησιμοποιούνται στην προσομοίωση δεκαπλασιάζεται κάθε φορά. Η τάση που παρατηρείται είναι πως το σφάλμα MCE υποτριπλασιάζεται κάθε φορά που δεκαπλασιάζεται το πλήθος των μονοπατιών. Οι αριθμοί που προκύπτουν είναι συνεπείς με τη θεωρία, καθώς οι αριθμοί **M** και *MCE* εμφανίζονται αντιστρόφως ανάλογοι, κάτι σύμφωνο με τον Νόμο των Μεγάλων Αριθμών.

M	Value	MCE
100	6.0304	1.0718
1000	5.6460	0.3645
10000	5.3845	0.1039
100000	5.3627	0.0327
1000000	5.3903	0.0104

Πίνακας 4.2: Αποτελέσματα αλγορίθμου για διαφορετικά πλήθη προσομοιώσεων με $S_0 = \$38$, R=3, *Strike*=40, T=1, N=12, r=3%, $\sigma = 40\%$.

Στην εικόνα 4.1 φαίνεται η ευαισθησία της μεθόδου Cox-Ross-Rubinstein και της μεθόδου Longstaff-Schwartz στην σταδιακή αύξηση της μεταβλητότητας. Είναι εμφανές ότι υπάρχει συμφωνία των δύο μεθόδων ως προς την τάξη μεγέθους. Χαρακτηριστικό των τιμών της Longstaff-Schwartz είναι το ότι επηρεάζονται σε μεγάλο βαθμό από τα μονοπάτια προσομοίωσης που ακολουθούν κίνηση Brown, κάτι που διακρίνεται εύκολα από την μπλε καμπύλη, που είναι παντού συνεχής αλλά πουθενά παραγωγίσιμη. Η αύξηση της μεταβλητότητας προσθέτει θόρυβο στα αποτελέσματα, το σφάλμα της Monte Carlo, το οποίο φαίνεται να εξασθενεί καθώς το πλήθος των προσομοιώσεων ανεβαίνει. Για το διάγραμμα 4.1(α) χρησιμοποιήθηκαν 100 μονοπάτια ενώ για το (β) 10000 μονοπάτια. Αξίζει να σημειωθεί η γραμμικότητα που παρουσιάζει η σχέση των τιμών του Διωνυμικού Δέντρου με τη μεταβλητότητα. Η υπόθεση που μπορεί να εξαχθεί εδώ είναι πως αν αυξήσουμε κατά πολύ τα μονοπάτια, οι τιμές των δύο μοντέλων εν τέλη θα συγκλίνουν.



(α) (β)

Σχήμα 4.1: Ευαισθησία μεθόδου Longstaff-Schwartz και Διωνυμικού Δέντρου στη μεταβλητότητα της υποκείμενης μετοχής με (α) **M=100** και (β) **M=10000**

4.2 Αποτίμηση παραστατικών τίτλων δικαιωμάτων κτήσης μετοχών Alpha Bank και συζήτηση αποτελεσμάτων

4.2.1 Το πλαίσιο της αποτίμησης

Για την αποτίμηση των Warrants της Alpha Bank στην παρούσα εργασία χρησιμοποιήθηκαν οι δύο μέθοδοι που εξετάστηκαν παραπάνω. Συγκεκριμένα, ο συνολικός αριθμός των Warrants που εκδόθηκαν από την τράπεζα ήταν 1.233.503.482. Η διαπραγμάτευση των τίτλων ξεκίνησε την Τρίτη 11 Ιουνίου του 2013 και το Δ.Σ. του Χρηματιστηρίου Αθηνών[1] αποφάσισε αποτίμηση τους με τη μεθοδολογία Cox-Ross-Rubinstein[6], όμοια δηλαδή με το Διωνυμικό Δέντρο που χρησιμοποιείται στην παρούσα εργασία. Οι παράμετροι που χρησιμοποιήθηκαν για την αποτίμηση ήταν:

- Μεταβλητότητα 51.2%, σύμφωνα με τον υπολογισμό της τιμής του 1ου τεταρτημορίου (1st Quartile) του κυλιόμενου μέσου ετησιοποιημένης μεταβλητότητας 90 εργάσιμων ημερών, με στοιχεία αποδόσεων για το διάστημα από 1/1/2007 έως 10/6/2013, δηλαδή έως και την προηγούμενη της εισαγωγής συνεδρίαση.

- Επιτόκιο δίχως κίνδυνο 1%, σύμφωνα με το επιτόκιο κύριας αναχρηματοδότησης της Ε.Κ.Τ. κατά την 10/6/2013, προσαυξημένο κατά 50 μονάδες βάσης.

- Κάθε τίτλος (Warrant) ενσωματώνει το δικαίωμα αγοράς 7.408683070 μετοχών της Alpha Bank, κυριότητος του Ταμείου Χρηματοπιστωτικής Σταθερότητας. Συνεπώς, ο τίτλος χαρακτηρίζεται ως Call Warrant και έχει πολλαπλασιαστή (Multiplier) ίσο με 7.408683070. Ως ημερομηνία έκδοσης των τίτλων (Warrants) ορίζεται η Δευτέρα 10 Ιουνίου 2013.

Επειδή σαν προιόν το εν λόγω Warrant έχει κάποιες διαφορές από τα Warrant Ευρωπαϊκού τύπου και επειδή οι προσαρμογές μάλλον ήταν ατυχείς, το προϊόν κατέληξε να διαπραγματεύεται με χαμηλότερη τιμή που διαμορφώνεται καθημερινά στην χρηματιστηριακή αγορά. Ενώ εισήχθηκε με τιμή 1.45 €. την 11/06/2013, την αμέσως επόμενη η μέρα η τιμή διαπραγμάτευσής του διαμορφώθηκε στα 0.560€. Την 20/6/2013 η τιμή του Warrant ήταν στο κλείσιμο 0.625 ευρώ, έναντι αντίστοιχης τιμής της Alpha Bank 0.415 ευρώ.

Ας εξετάσουμε σαν επενδυτική κίνηση την αγορά ενός Warrant στις 20 Ιουνίου του 2013. Η λογική της συγκεκριμένης κίνησης είναι η καταβολή ασφαλίστρου 0.625€ για την απόκτηση του δικαιώματος ο επενδυτής να αποκτήσει δυνητικά 7.41 μετοχές Alpha Bank 6 μήνες μετά, την Α′ Εξάσκηση στις 10/12/2013. Αυτό σημαίνει πως η ανά μετοχή επιβάρυνση είναι:

$$\frac{0.625 + 7.41 \cdot 0.4488}{7.41} = 0.508$$

Η ποσοστιαία προσαύξηση θα είναι δηλαδή:

$$\frac{0.508 - 0.415}{0.415} = 22.4\%$$

Για να προβεί σε αυτή την επενδυτική κίνηση ένας επενδυτής θα πρέπει να αναμένει άνοδο της υποκείμενης μετοχής σε ένα εξάμηνο κατά 22.4% ώστε να αντισταθμιστεί το ασφάλιστρο που καταβάλει για το Warrant. Είθισται, για μια επενδυτική κίνηση με ορίζοντα 6 μηνών, να λογίζουμε μεταβλητότητα σχετική με αυτό τον ορίζοντα, δηλαδή από δεδομένα 6 μηνών πίσω. Με ένα σχετικό σφάλμα, καθώς υπολογίστηκε από εβδομαδιαία δεδομένα, η τιμή της μεταβλητότητας της Alpha Bank από 1/1/2013 έως 14/6/2013 βρέθηκε 29%. Με αυτά τα δεδομένα το Warrant έχει λογική σαν επενδυτική κίνηση, παρά τον εμφανή κίνδυνο που ενέχει η μεταβλητότητα καθώς δεν εξασφαλίζει ανοδική κίνηση.

Σημαντικό ρόλο σε τέτοιες επενδυτικές αποφάσεις παίζει όμως και το επενδυτικό περιβάλλον. Χαρακτηριστική είναι η αναβάθμιση Ελλάδας και των τεσσάρων συστημικών τραπεζών της, Alpha Bank, Eurobank, Πειραιώς και Εθνικής, από τον οίκο αξιολογήσεων Fitch, ένα μήνα πριν, σε "B-" από "CCC". Όπως αναφέρει δημοσίευμα της εφημερίδας "Το Βήμα" στις 16/05/2013:

"Η νέα αξιολόγηση «ακολουθεί την ανακεφαλαιοποίηση των τραπεζών και ένα πιο σταθερό μακροοικονομικό περιβάλλον στην Ελλάδα, το οποίο αντανακλάται στην αναβάθμιση της πιστοληπτικής ικανότητας της χώρας σε 'B-' από 'CCC' με σταθερές προοπτικές. Το outlook των μακροπρόθεσμων IDRs είναι σταθερό, αντανακλώντας τη στενή συσχέτισή του με αυτό του κράτους» επισημαίνει η Fitch."

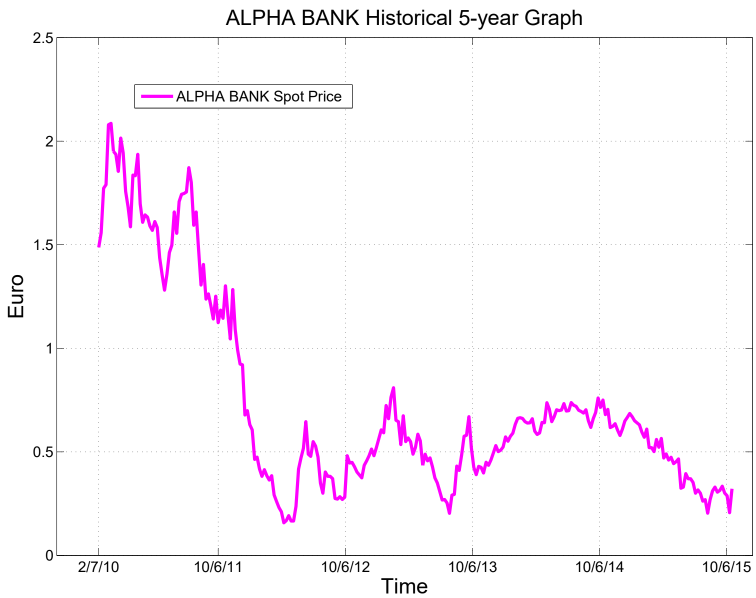
4.2.2 Αποτελέσματα

Σε αυτό το κομμάτι της εργασίας παρουσιάζονται αποτελέσματα από την προσπάθεια αποτίμησης των Warrants της Alpha Bank. Η αποτίμηση διενεργήθηκε ταυτοχρόνως χρησιμοποιώντας την μέθοδο Longstaff-Schwartz και την μέθοδο Cox-Ross-Rubinstein, δηλαδή το Διωνυμικό Δέντρο. Στη συνέχεια οι τιμές που προέκυψαν τέθηκαν σε αντιπαράθεση με τις πραγματικές τιμές διαπραγμάτευσης του Warrant στο Χ.Α. Οι τιμές των μεταβλητών που χρησιμοποιήθηκαν για την αποτίμηση είναι:

- r=0.01
- σ=0.512
- R=3
- M=100000

Το Warrant τιμολογήθηκε σε 42 διαφορετικές ημερομηνίες, από 14/6/2013 ως 26/6/2015. Η διαπραγμάτευση του συγκεκριμένου Warrant στη συνέχεια σταμάτησε, λόγω εταιρικών πράξεων (reverse split) αύξησης της ονομαστικής αξίας και μείωσης του αριθμού των μετοχών της υποχρεωτικής επικείμενης Α.Μ.Κ. του Νοεμβρίου του 2015 και λόγω της πολιτικής αστάθειας που δημιούργησε αναταραχή στο χρηματιστήριο. Ενδεικτικό είναι το ότι η τιμή του έπεσε κάτω από τα 10 λεπτά του ευρώ στις 3/8/2015, την ημέρα που το χρηματιστήριο άνοιξε ξανά μετά από 25 μέρες αργείας λόγω της επιβολής των capital controls.

Στην εικόνα 4.2 φαίνεται η πορεία της μετοχής της Alpha Bank τα τελευταία πέντε έτη.



Σχήμα 4.2: Ιστορικό γράφημα τιμής μετοχής της Alpha Bank της τελευταίας πενταετίας. Πηγή: https://www.alpha.gr/page/default.asp?la=1&id=54

Τα συγκεκριμένα Warrants, είχαν 9 χρονικές στιγμές εξάσκησης, ανά εξάμηνο κάθε 10/6 και 10/12 από το 2013 έως το 2017. Στον πίνακα 4.3 παρατίθενται οι ημερομηνίες εξάσκησης σε αντιστοιχία με τις τιμές εξάσκησης ανά εξάμηνο.

	Ημ/νία εξάσκησης	Τιμή εξάσκησης
Α΄ εξάσκηση	10/12/2013	0.4488
Β΄ εξάσκηση	10/6/2014	0.4576
Γ΄ εξάσκηση	10/12/2014	0.4686
Δ΄ εξάσκηση	10/6/2015	0.4796
Ε΄ εξάσκηση	10/12/2015	0.4928
ΣΤ΄ εξάσκηση	10/6/2016	0.5060
Ζ΄ εξάσκηση	10/12/2016	0.5214
Η΄ εξάσκηση	10/6/2017	0.5368
Θ΄ εξάσκηση	10/12/2017	0.5544

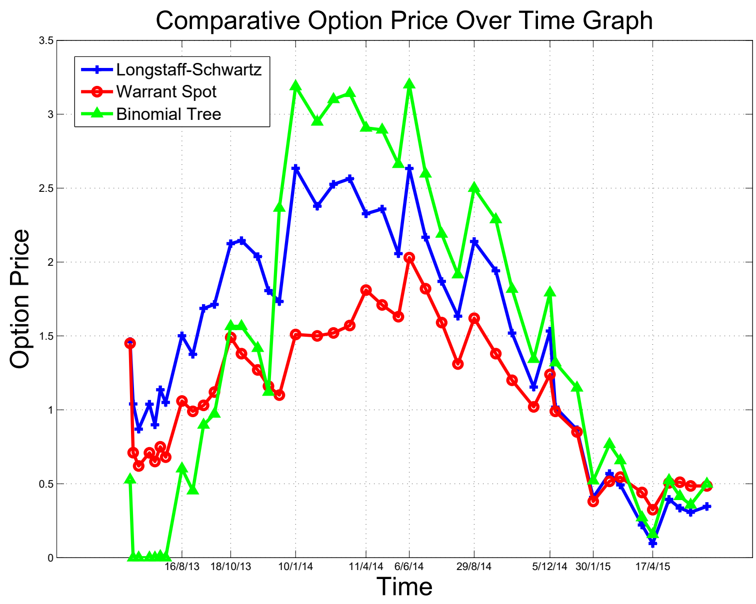
Πίνακας 4.3: Ημερομηνίες και τιμές εξάσκησης του Warrant.

Η τιμή εισαγωγής που παράγει ο αλγόριθμος Longstaff-Schwartz για τις 7 Ιουνίου του 2013 όπου η τιμή της υποκείμενης μετοχής ήταν 0.52, είναι 1.47, πολύ κοντά δηλαδή στην πραγματική τιμή εισαγωγής του 1.45. Αυτό δείχνει συμφωνία της μεθοδολογίας που χρησιμοποίησε το Χρηματιστήριο Αθηνών για την αποτίμηση με την μεθοδολογία που χρησιμοποιήθηκε στην παρούσα εργασία. Το ίδιο δεν συνέβει και με την χρήση του Διωνυμικού Δέντρου εδώ, όπου, παρόλο που οι παράμετροι που χρησιμοποιήθηκαν ήταν οι ίδιες, πιθανώς υπήρχαν διαφορές στην κατασκευή του αλγορίθμου. Όπως αναφέρει το ενημερωτικό υλικό για την Ανακεφαλαιοποίηση των Συστημικών Τραπεζών και την Έκδοση Τίτλων Παραστατικών Δικαιωμάτων προς Κτήση Κινητών Αξιών (warrants) [1] που εκδόθηκε από το Χ.Α. στις 2/12/2013 σχετικά με την μέθοδο αποτίμησης των Warrants:

"Η αποτίμηση ενός Bermudan warrant, δηλαδή ενός warrant με συγκεκριμένες ημερομηνίες εξάσκησης, μπορεί – προσεγγιστικά - να υπολογιστεί ως η μέγιστη τιμή από τα European warrants που το αποτελούν. Δηλαδή, υπολογίζουμε πρώτα για κάθε ημερομηνία λήξης και τιμή άσκησης την αξία του European warrant. Στη συνέχεια, επιλέγουμε την μεγαλύτερη αξία από αυτές και αυτή αποτελεί, κατά προσέγγιση, την τιμή του Bermudan warrant. Το μοντέλο Cox-Ross-Rubinstein, γνωστότερο και ως διωνυμικό μοντέλο, μπορεί να χρησιμοποιηθεί με μια μικρή προσαρμογή για την αποτίμηση ενός Bermudan warrant"

Ο αλγόριθμος που αναπτύχθηκε στην εργασία αυτή διενέργησε αποτίμηση κατασκευάζοντας ένα Διωνυμικό Δέντρο 9 επιπέδων, όσων και οι χρονικές στιγμές εξάσκησης. Η περιγραφή που δίνει το Χ.Α. παραπέμπει σε διαφορετική λογική, με διαίρεση του Warrant σε 9 ίσα Ευρωπαϊκού τύπου και τιμολόγηση καθενός από αυτά ξεχωριστά.

Στο Σχήμα 4.3 φαίνονται με κόκκινο οι τιμές διαπραγμάτευσης των Warrant τις χρονικές στιγμές που επιλέχτηκαν, με μπλε τα ασφάλιστρα που προκύπτουν μέσω της αποτίμησης Longstaff-Schwartz και με πράσινο τα ασφάλιστρα που προκύπτουν μέσω της αποτίμησης με το Διωνυμικό Δέντρο.



Σχήμα 4.3: Συγκριτικό διάγραμμα πραγματικών διαπραγματευτικών τιμών των Warrant και τιμών από τις αποτιμήσεις Longstaff-Schwartz και Cox-Ross-Rubinstein.

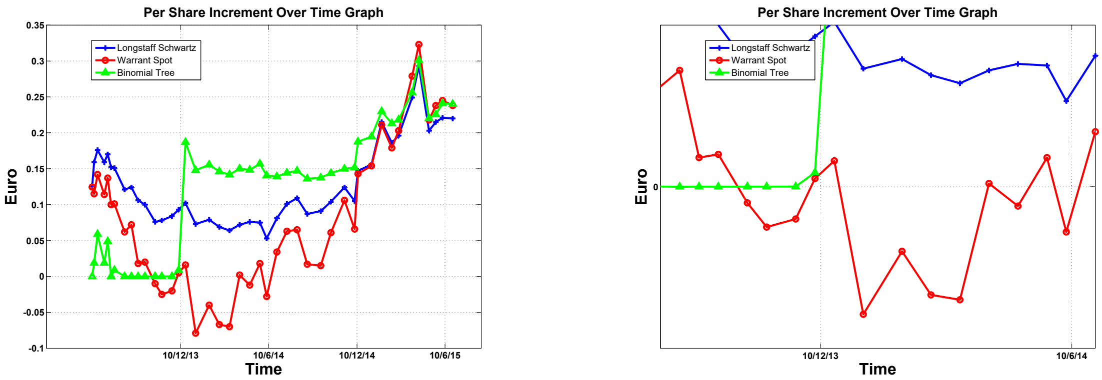
Αν και οι επενδυτικές αποφάσεις, για ένα τόσο νέο προϊόν αλλά και σε μία τόσο επισφαλή επενδυτική συγκυρία όπως τελευταία πενταετία της ελληνικής οικονομίας, δεν λαμβάνονται σε μεγάλο βαθμό από αποτιμήσεις σύνθετων μαθηματικά μοντέλων, η σύγκριση και η προοπτική που επιτρέπουν τα παρατειθέμενα διαγράμματα είναι δόκιμες για την αποτίμηση και άλλων παραγώγων μελλοντικά. Τα δεδομένα βοηθούν στο να ερμηνευτούν οι τάσεις της αγοράς και η διαμόρφωση των τιμών διαπραγμάτευσης. Στο διάγραμμα 4.3 φαίνεται ξεκάθαρα η εξάρτηση, σε διαφορετικό βαθμό, από την τιμή της μετοχής, και στις τρείς καμπύλες, αφού οι υπόλοιπες παράμετροι παραμένουν σταθερές. Φαίνεται ότι το δέντρο προσεγγίζει καλά τις πραγματικές τιμές κατά την πρώτη στιγμή εξάσκησης, ενώ η LSM υπερτιμολογεί.

Μετά την πρώτη ημερομηνία εξάσκησης και κατά τις 10/1/2014 υπάρχει σημαντική άνοδος της μετοχής. Στο διάστημα μέχρι την δεύτερη εξάσκηση (10/6/2014) η δραστηριότητα των επενδυτών εμφανίζεται πιο μετριοπαθής από την εκτίμηση των μοντέλων. Συγκεκριμένα το Διωνυμικό Δέντρο που χρησιμοποιήθηκε εμφανίζει πολύ μεγάλη ευαισθησία στην τιμή της υποκείμενης, κάτι που φαίνεται από τις δραματικές κορυφές της πράσινης καμπύλης στο διάγραμμα 4.3. Την περίοδο κατά την τρίτη εξάσκηση (10/12/2014) και ύστερα, οι τρείς καμπύλες κατά κάποιον τρόπο συγκλίνουν. Φαίνεται πολύ πιθανό οι τιμές παρόμοιων μοντέλων να οδηγούσαν τις αποφάσεις των επενδυτών εκείνη την περίοδο που η τιμή της μετοχής ακολουθούσε πτωτική πορεία και το πολιτικό περιβάλλον ήταν δυσοίωνο για την οικονομία.

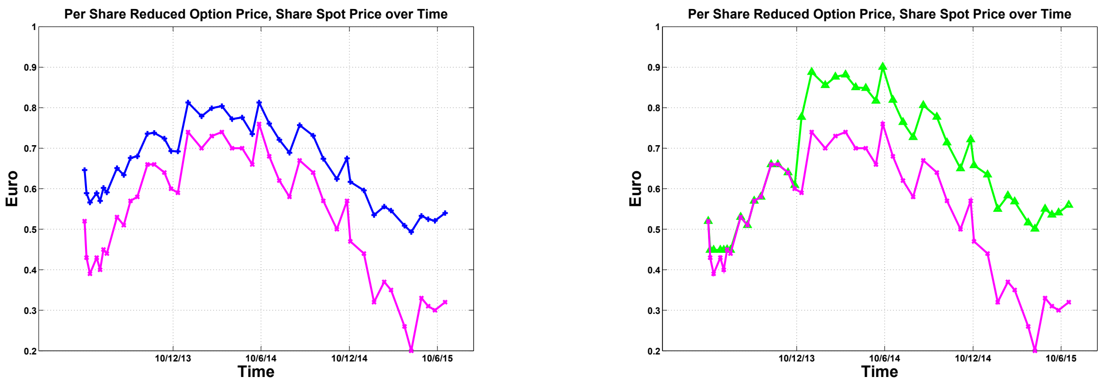
Στο χρονικό διάστημα μεταξύ πρώτης και τρίτης εξάσκησης οι εκτιμήσεις των μοντέλων σε σχέση με την τιμή διαπραγμάτευσης πέφτουν αρκετά εκτός, εμφανώς επηρεασμένα από την ανοδική πορεία της μετοχής της Alpha Bank. Αν κοιτάξουμε πιο προσεκτικά τις χρονικές στιγμές που έχουν επισημανθεί στον οριζόντιο άξονα, θα δούμε πως συγκεκριμένες κορυφές του διαγράμματος προέκυψαν σε ημερομηνίες θετικών πολιτικών ή εταιρικών ανακοινώσεων. Συγκεκριμένα, η μέγιστη τιμή συνέβηκε την ημέρα που ανακοινώθηκε το πακέτο Ντράγκι (E.L.A.) για βοήθεια στην ρευστότητα των ευρωπαϊκών τραπεζών. Στις 29/8/2014 είχαμε ανακοίνωση κερδών 267 εκατομμυρίων για την Alpha Bank. Στις 5/12/2014 το peak οφειλόταν στο "Ναι" της Ε.Ε. σε νέα εξάμηνη παράταση της δανειακής σύμβασης της Ελλάδας, ενώ οι πτώσεις στις 30/1/2015 και 17/4/2015 στα περί κρατικοποίησης των τραπεζών στις προεκλογικές δεσμεύσεις της νέας κυβέρνησης, διαπραγματευτικών αποτυχιών με την Ε.Ε. και γενικευμένης αστάθειας στο πολιτικό περιβάλλον. Οι αποκλίσεις, λοιπόν μεταξύ τιμών των μοντέλων και πραγματικότητας οφείλονται σε μεγάλο βαθμό στο γεγονός πως οι επενδυτικές αποφάσεις είναι "market driven". Στο διάγραμμα 4.4 φαίνεται η ανά μετοχή επιβάρυνση κάθε στιγμής, δηλαδή η παραπάνω ποσότητα που θα καλούνταν να πληρώσει ένας επενδυτής ο οποίος θεωρητικά θα αγόραζε το option και θα το εξασκούσε αμέσως, αγοράζοντας τις 7.41 μετοχές στην ισχύουσα τιμή άσκησης. Η τιμή αυτή προκύπτει από τον τύπο:

$$Per\,Share\,Increase_t = \frac{V_t^W + 7.408683070 \cdot Strike_t}{7.408683070} - S_t$$

Το διάγραμμα 4.4 μας βοηθάει να μελετήσουμε καλύτερα το Warrant σαν επενδυτικό εργαλείο αλλά και τον μηχανισμό της αγοράς που τείνει να εξαλείψει τις ευκαιρίες arbitrage. Γίνεται αντιληπτό ότι, αφού το διάγραμμα απεικονίζει τις προσαυξήσεις, η περιοχή που συμφέρει τον επενδυτή να αγοράσει και να εξασκήσει, είναι εκείνη που η κόκκινη καμπύλη παίρνει αρνητικές τιμές. Εκεί έχουμε αρνητική προσαύξηση, άρα θετική χρηματοροή. Οι θετικές χρηματοροές που μπορούν να προκύψουν τείνουν να εξαλειφθούν όσο πλησιάζουμε σε ημερομηνία εξάσκησης. Η τιμή του Warrant τις ημερομηνίες αυτές πρέπει να είναι ίση με $7.408683070 \cdot \mid Strike - S \mid$ ώστε να μην δημιουργούνται ευκαιρίες μηδενικού ρίσκου. Στο διάγραμμα φαίνεται ξεκάθαρα ο μηχανισμός της αγοράς αυτός καθώς η καμπύλη των πραγματικών τιμών περνάει από το μηδέν στις δύο ημερομηνίες εξάσκησης, πριν από τις οποίες οι προσαυξήσεις που προέκυπταν ήταν αρνητικές.

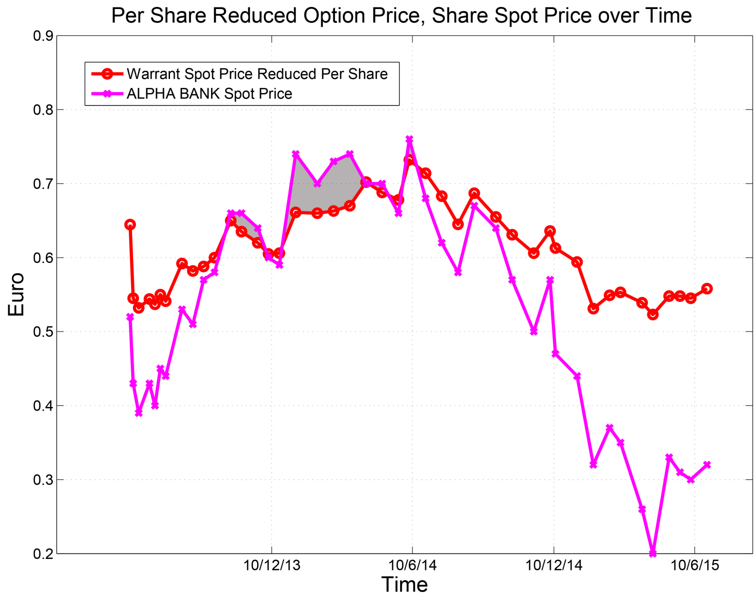


Σχήμα 4.4: Ανά μετοχή επιβάρυνση για τις πραγματικές τιμές, τις τιμές Long staff-Schwartz και τις τιμές του Διωνυμικού Δέντρου.



Σχήμα 4.5: Διαγράμματα των τιμών της υποκείμενης μετοχής (ροζ), των τιμών των μοντέλου Longstaff-Schwartz (μπλε) kai Cox-Ross-Rubinstein (πράσινο) για το Warrant.

Αντιπαραθέτοντας τις τιμές αυτές με τις αντίστοιχες τιμές της μετοχής της Alpha Bank και των τιμών εξάσκησης του Warrant προκύπτουν τα διαγράμματα 4.4, 4.5 και 4.6. Στα τρία αυτά διαγράμματα αξίζει να παρατηρηθεί η θέση της εκάστοτε καμπύλης σε σχέση με την καμπύλη της τιμής της υποκείμενης μετοχής. Το σκιαγραφημένο χωρίο είναι η περιοχή στις οποίες έχει νόημα η αγορά του Warrant σαν επενδυτική κίνηση άμεσης κερδοσκοπίας. Φαίνεται πως στο χρόνο ζωής του Warrant, το διάστημα που υπάρχει αυτή η δυνατότητα είναι πολύ μικρο, αφού σε λίγες χρονικές στιγμές η τιμή της μετοχής βρίσκετε ψηλότερα από την ανά μετοχή επιβάρυνση που προκύπτει από τις τιμές του Warrant. Σε δεύτερη ανάλυση, η διατήρηση του επιπέδου της τιμής του Warrant, και στα τρία διαγράμματα, σταθερά πάνω από την τιμή της μετοχής, ακόμα και μετά την κατάπτωση της κάτω από τιμής εξάσκησης, δείχνει πως η τιμή του παραγώγου διαμορφώνεται σε μεγάλο βαθμό βάση της προσδοκίας μελλοντικών χρηματοροών.



Σχήμα 4.6: Διάγραμμα των τιμών της υποκείμενης μετοχής, των τιμών διαπραγμάτευσης του Warrant στο Χρηματιστήριο Αθηνών και των τιμών εξάσκησης του δικαιώματος. Με σκιαγράφηση η περιοχή εξάσκησης.

Παρακάτω παρατίθενται αναλυτικά τα δεδομένα των υπολογισμών.

Ημερομηνία	S_0	Warrant	Per share	Disc.%	$\hat{V}$	Per Share	Disc.%	MCE
5/6/2013	0.52	1.45	0.645	-72%	1.4626	0.646	-72%	0.0147
14/6/2013	0.43	0.710	0.545	-27%	1.040	0.589	-94%	0.0114
21/6/2013	0.39	0.620	0.532	-37%	0.869	0.566	-106%	0.0107
5/7/2013	0.43	0.709	0.544	-27%	1.038	0.589	-94%	0.0116
12/7/2013	0.4	0.650	0.537	-34%	0.899	0.570	-103%	0.0108
19/7/2013	0.45	0.750	0.550	-22%	1.136	0.602	-89%	0.0124
26/7/2013	0.44	0.680	0.541	-23%	1.050	0.591	-90%	0.0111
16/8/2013	0.53	1.060	0.592	-12%	1.501	0.651	-70%	0.0147
30/8/2013	0.51	0.990	0.582	-14%	1.376	0.634	-73%	0.0135
13/9/2013	0.57	1.030	0.588	-3%	1.686	0.676	-62%	0.0149
27/9/2013	0.58	1.120	0.600	-3%	1.713	0.680	-59%	0.0151
18/10/2013	0.66	1.490	0.650	2%	2.124	0.736	-45%	0.0175
1/11/2013	0.66	1.380	0.635	4%	2.145	0.738	-46%	0.0175
22/11/2013	0.64	1.270	0.620	3%	2.037	0.724	-49%	0.0172
6/12/2013	0.6	1.160	0.605	-1%	1.807	0.693	-55%	0.0154
20/12/2013	0.59	1.100	0.606	-3%	1.733	0.692	-58%	0.0145
10/1/2014	0.74	1.510	0.661	11%	2.634	0.813	-36%	0.0197
7/2/2014	0.7	1.500	0.660	6%	2.378	0.779	-41%	0.0176
28/2/2014	0.73	1.520	0.663	9%	2.526	0.799	-36%	0.0186
21/3/2014	0.74	1.570	0.670	10%	2.564	0.804	-35%	0.0185
11/4/2014	0.7	1.810	0.702	0%	2.327	0.772	-40%	0.0171
2/5/2014	0.7	1.710	0.688	2%	2.359	0.776	-41%	0.0172
23/5/2014	0.66	1.630	0.678	-3%	2.057	0.735	-45%	0.0153
6/6/2014	0.76	2.030	0.732	4%	2.633	0.813	-31%	0.0180
27/6/2014	0.68	1.820	0.714	-5%	2.168	0.761	-44%	0.0155
18/7/2014	0.62	1.590	0.683	-10%	1.869	0.721	-54%	0.0141
8/8/2014	0.58	1.310	0.645	-11%	1.634	0.689	-61%	0.0126
29/8/2014	0.67	1.620	0.687	-3%	2.139	0.757	-46%	0.0150
26/9/2014	0.64	1.380	0.655	-2%	1.941	0.731	-50%	0.0137
17/10/2014	0.57	1.200	0.631	-11%	1.519	0.674	-61%	0.0116
14/11/2014	0.5	1.020	0.606	-21%	1.154	0.624	-75%	0.0097
5/12/2014	0.57	1.240	0.636	-12%	1.533	0.675	-62%	0.0113
12/12/2014	0.47	0.990	0.613	-30%	1.018	0.617	-84%	0.0085
9/1/2015	0.44	0.850	0.594	-35%	0.866	0.596	-92%	0.0076
30/1/2015	0.32	0.380	0.531	-66%	0.407	0.535	-135%	0.0048
20/2/2015	0.37	0.516	0.549	-48%	0.569	0.556	-113%	0.0057
6/3/2015	0.35	0.545	0.553	-58%	0.492	0.546	-121%	0.0052
3/4/2015	0.26	0.441	0.539	-107%	0.221	0.509	-170%	0.0033
17/4/2015	0.2	0.324	0.523	-162%	0.096	0.493	-226%	0.0019
8/5/2015	0.33	0.506	0.548	-66%	0.394	0.533	-128%	0.0044
22/5/2015	0.31	0.510	0.548	-77%	0.335	0.525	-138%	0.0040
5/6/2015	0.3	0.485	0.545	-82%	0.307	0.521	-144%	0.0038
26/6/2015	0.32	0.485	0.558	-74%	0.347	0.540	-137%	0.0040

Πίνακας 4.4: Συγκεντρωτικός πίνακας αποτελεσμάτων αποτίμησης (1)

Ημερομηνία	S_0	Bin Tree	Per Share	Disc.%
14/6/2013	0.43	0.000	0.449	-61%
21/6/2013	0.39	0.000	0.449	-76%
5/7/2013	0.43	0.000	0.449	-61%
12/7/2013	0.4	0.000	0.449	-72%
19/7/2013	0.45	0.009	0.450	-55%
26/7/2013	0.44	0.000	0.449	-58%
16/8/2013	0.53	0.602	0.530	-47%
30/8/2013	0.51	0.453	0.510	-49%
13/9/2013	0.57	0.898	0.570	-43%
27/9/2013	0.58	0.972	0.580	-42%
18/10/2013	0.66	1.565	0.660	-34%
1/11/2013	0.66	1.565	0.660	-34%
22/11/2013	0.64	1.417	0.640	-36%
6/12/2013	0.6	1.120	0.600	-40%
20/12/2013	0.59	2.366	0.777	-73%
10/1/2014	0.74	3.188	0.888	-46%
7/2/2014	0.7	2.948	0.856	-52%
28/2/2014	0.73	3.101	0.876	-47%
21/3/2014	0.74	3.142	0.882	-45%
11/4/2014	0.7	2.908	0.850	-51%
2/5/2014	0.7	2.895	0.848	-51%
23/5/2014	0.66	2.662	0.817	-58%
6/6/2014	0.76	3.200	0.890	-41%
27/6/2014	0.68	2.597	0.819	-52%
18/7/2014	0.62	2.190	0.764	-61%
8/8/2014	0.58	1.915	0.727	-67%
29/8/2014	0.67	2.500	0.806	-53%
26/9/2014	0.64	2.288	0.777	-57%
17/10/2014	0.57	1.817	0.714	-68%
14/11/2014	0.5	1.343	0.650	-80%
5/12/2014	0.57	1.793	0.711	-68%
12/12/2014	0.47	1.319	0.658	-93%
9/1/2015	0.44	1.149	0.635	-100%
30/1/2015	0.32	0.521	0.550	-140%
20/2/2015	0.37	0.767	0.583	-121%
6/3/2015	0.35	0.657	0.568	-127%
3/4/2015	0.26	0.271	0.516	-173%
17/4/2015	0.2	0.158	0.501	-230%
8/5/2015	0.33	0.523	0.550	-134%
22/5/2015	0.31	0.415	0.536	-142%
5/6/2015	0.3	0.357	0.528	-146%
26/62015	0.32	0.499	0.560	-143%

Πίνακας 4.5: Συγκεντρωτικός πίνακας αποτελεσμάτων αποτίμησης (2)

4.3 Ανασκόπηση αποτελεσμάτων

Η αποτίμηση έγινε χρησιμοποιώντας 100.000 μονοπάτια προσομοίωσης, τα οποία εξασφάλισαν μέσο όρο σφάλματος 0.0121. Το σφάλμα της προσομοίωσης είναι αρκετά μικρότερο του 5% της διακύμανσης των τιμών, που είναι το μέγιστο επιτρεπτό σφάλμα. Προηγουμένως δοκιμάστηκαν το **M** ίσο με 10000 και 1000, τα οποία όμως δεν εξασφάλιζαν ιδιαίτερη ακρίβεια. Όσον αφορά το πλήθος των συναρτήσεων βάσης, χρησιμοποιήθηκαν πολυώνυμα Laguerre έως και 3ης τάξης, κάτι που βάσει βιβλιογραφίας κρίθηκε αρκετό.

Τα δεδομένα που προκύπτουν από τους αλγορίθμους του Διωνυμικού Δέντρου και της μεθόδου Longstaff-Schwartz αποκλίνουν σημαντικά από τις πραγματικές τιμές διαπραγμάτευσης του δικαιώματος. Ενώ η πραγματική τιμή εισαγωγής (€1.45) προσεγγίζεται αρκετά καλά από την Longstaff-Schwartz (€1.45), η μέθοδος στη συνέχεια υπερτιμολογεί το δικαίωμα. Το ίδιο συμβαίνει και με το Διωνυμικό Δέντρο, το οποίο, αν και προσεγγίζει αρκετά καλά τις πραγματικές τιμές κοντά στην πρώτη ημερομηνία εξάσκησης, στη συνέχεια αποκλίνει έντονα. Οι αποκλίσεις, σε μεγάλο βαθμό, οφείλονται στην επενδυτική συμπεριφορά, η οποία ήταν μετριοπαθής σε σχέση με τις αποτιμήσεις των μοντέλων. Αυτό οφειλόταν σε μεγάλο βαθμό στο πολιτικό περιβάλλον της Ελλάδας. Κυρίαρχη στην ειδησεογραφία της εποχής ήταν η αδυναμία ολοκλήρωσης της αξιολόγησης του ελληνικού προγράμματος από την Τρόικα. Η γενικότερη πολιτική αστάθεια και η μεταβλητότητα της ελληνικής χρηματιστηριακής αγοράς την καθιστούν ακατάλληλη για αναλύσεις με τέτοιου είδους μοντέλα, καθώς αυτά δεν συνυπολογίζουν πολιτικούς και μακροοικονομικούς παράγοντες. Ενδιαφέρον θα είχε, σαν επόμενο βήμα της εργασίας αυτής, η μελέτη μοντέλων που συνυπολογίζουν στον παράγοντα της μεταβλητότητας της υποκείμενης μετοχής για μεγάλα γεγονότα (Big Events) της οικονομίας.

Σαν εργαλεία υποστήριξης επενδυτικών αποφάσεων, τα δύο μοντέλα είναι ελλειπή από μόνα τους. Ένας επενδυτής θα πρέπει, ανά περίπτωση, να συμβουλεύεται ένα σύνολο μοντέλων, για να έχει έτσι πιο πλήρη εικόνα της πιθανής κίνησης της υποκείμενης μετοχής καθώς και της πραγματικής αξίας του παραγώγου στο οποίο θέλει να επενδύσει.

Συγκριτικά, οι δύο μέθοδοι που χρησιμοποιήθηκαν έχουν αρκετές διαφορές. Η μέθοδος Longstaff-Schwartz, λόγω του μεγάλου αριθμού προσομοιώσεων Monte Carlo που διενεργεί, φαίνεται να ακολουθεί με μεγαλύτερη ακρίβεια τις τάσεις της τιμής της υποκείμενης μετοχής. Έχει όμως και πολύ μεγάλο υπολογιστικό χρόνο, κάτι που την κάνει δύσχρηστη για τη λήψη γρήγορων αποφάσεων σε υψίσυχνες συναλλαγές (high frequency trading). Ενδεικτικά, ο υπολογισμός που έγινε στην παρούσα εργασία, για 100.000 προσομοιώσεις Monte Carlo, διήρκεσε κοντά στα τριάντα λεπτά. Αντίστοιχα, ο υπολογισμός του αλγορίθμου του Διωνυμικού Δέντρου διήρκεσε κλάσματα του δευτερολέπτου. Το Διωνυμικό Δέντρο όμως δείχνει πολύ μεγάλη ευαισθησία στις μεταβολές της τιμής της μετοχής. Στο διάγραμμα 4.3 αυτό φαίνεται ξεκάθαρα, με την αποτίμηση του Διωνυμικού Δέντρου να είναι υποτιμητική στην αρχή και υπερθετική έπειτα από ένα πολύ μεγάλο άλμα. Το άλμα αυτό οφείλεται σε άλμα της τιμής της μετοχής, το οποίο όμως, όπως φαίνεται στο διάγραμμα 4.3, ακολουθούν αρκετά ηπιότερα οι άλλες δύο καμπύλες. Η αποτίμηση δείχνει πως το Διωνυμικό Δέντρο στην παρούσα εφαρμογή δεν είναι ιδιαίτερα αξιόπιστη μέθοδος. Η ακρίβεια και η καλύτερη συμπεριφορά στις μεταβολές της υποκείμενης μετοχής θα μπορούσε να βελτιωθεί με την χρήση δέντρου περισσότερων επιπέδων, μοντελοποιώντας σε ημερήσια βάση την τιμή της μετοχής. Από αυτή την άποψη, στην εφαρμογή που εξετάζεται στην παρούσα διπλωματική εργασία η μέθοδος Longstaff-Schwartz φαίνεται να υπερέχει, και οι προσομοίωση Μοντε ᾶρλο δείχνει να αποτελεί σημαντικό εργαλείο για τέτοιου είδους προβλήματα.

Στην πραγματικότητα, η μέθοδος Longstaff-Schwartz βρίσκει εφαρμογή στην αποτίμηση παραγώγων πολλαπλών υποκείμενων τίτλων. Το συγκριτικό πλεονέκτημα της μεθόδου βρίσκεται στο ότι ο υπολογιστικός χρόνος της μεθόδου αυξάνεται γραμμικά με την αύξηση των υποκείμενων τίτλων του παραγώγου, ενώ του Διωνυμικού Δέντρου εκθετικά. Υπό αυτό το πρίσμα, θα είχε ενδιαφέρον, σαν συνέχεια της σύγκρισης αυτής, να εξεταστεί η επίδοση των δύο μεθόδων στην αποτίμηση ενός Bermudan spread option, δηλαδή ενός δικαιώματος προαίρεσης που τιμολογείται ανάλογα με τη διαφορά στην τιμή δύο υποκείμενων τίτλων. Ένα παράδειγμα τέτοιου δικαιώματος είναι το Gasoline spread option, το οποίο τιμολογείται βάσει της διαφοράς της τιμής αργού πετρελαίου και βενζίνης.

Βιβλιογραφία

[1] Χρηματιστήριο Αθηνών. Ενημερωτικό υλικό για την ανακεφαλαιοποίηση των συστημικών τραπεζών και την έκδοση τίτλων παραστατικών δικαιωμάτων προς κτήση κινητών αξιών (Warrants). Δεκέμβριος 2013.

[2] ALPHA FINANCE. Ενημερωτικό δελτίο. 2013.

[3] Emmanuelle Clement, Damien Lamberton, Philip Protter. An analysis of a least squares regression method for American option pricing. *Finance and Stochastics*, 2002.

[4] Francis A. Longstaff, Eduardo S. Schwartz. Valuing American Options by Simulation: A Simple Least-Squares Approach. *The Review of Financial Studies*, 14(1):113–147, 2001.

[5] Hui Wang. *Monte Carlo Simulation with Applications to Finance.* Chapman & Hall, 2012.

[6] John C. Cox, Stephen A. Ross, Mark Rubinstein. Option Pricing: A Simplified Aproach. *Journal of Financial Economics*, 1979.

[7] John C. Hull. *Options, Futures and other Derviatives.* Pearson Prentice Hall, 2009.

[8] Julien Guyon, Pierre Henry-Labordere. *Nonlinear Option Pricing.* Chapman & Hall, 2014.

[9] Justin London. *Modeling Derivatives in C++.* Wiley, 2005.

[10] Leif Andersen, Mark Broadie. Primal-Dual Simulation Algorithm for Pricing Multidimensional American Options. *Management Science*, 50(9):1222–1234, September 2004.

[11] Mark S. Joshi. *The Concepts and Practice of Mathematical Finance.* Cambridge University Press, 2008.

[12] Paolo Brandimarte. *Handbook In Monte Carlo Simulation: Applications in Financial Engineering, Risk Management, and Economics.* Wiley, 2014.

[13] Paul Glasserman. *Monte Carlo Methods in Financial Engineering.* Springer, 2003.

[14] Paul Glasserman, Bin Yu. Number of Paths Versus Number of Basis Functions in American Option Pricing. *The Annals of Applied Probability*, 14(4):2090–2119, 2004.

Παράρτημα Α: Κώδικας MATLAB

```
ExerciseDates={'10-Dec-2013','10-Jun-2014','10-Dec-2014','10-Jun-2015','10-Dec-2015',
'10-Jun-2016','10-Dec-2016','10-Jun-2017','10-Dec-2017'};
r=0.01;
Strike=[0.4488,0.4576,0.4686,0.4796,0.4928,0.506,0.5214,0.5368,0.5544];
sigma=0.512;
R=3;
M=100000;
%LeastSquaresMonteCarlo.m
function [value,V,variance,MC_error]=LeastSquaresMonteCarlo(M,R,S0,sigma,Strike,r,
Settle,Maturity,ExerciseDates)
for i=1:numel(ExerciseDates);
   DT(i)=daysact(Settle,char(ExerciseDates(i)));
end
T=yearfrac(Settle,Maturity,0); N=numel(find(DT>0));
dt=1:N; V=zeros(M,1);
nu=r-sigma*sigma/2; timestep=T/N;
S = S0*[ones(M,1),cumprod(exp(nu*timestep+sigma*sqrt(timestep)*randn(M,numel(dt))),2)];

V=max(7.408683070*(S(:,N)-Strike(N)),0);
for y=0:N-1
   n=N-y;
   for i=0:R
      for s=0:R
         m=1:M;
         Bff(i+1,s+1)=sum(LaguerreExplicit(i,S(m,n)).*LaguerreExplicit(s,S(m,n)));

         Bff(i+1,s+1)=Mff(i+1,s+1)/M;
      end m=1:M;
      Bvf(i+1)=sum(V(m).*LaguerreExplicit(i,S(m,n)));
```

```
      Bvf(i+1)=Mvf(i+1)/M;
   end
   Beta(:,n)=inv(Bff)*Bvf.';
   Beta(:,n)=Beta(:,n)*exp(-r*T/N);
   for m=1:M;
      ContinuationVal=0;
      for i=0:R;
         ContinuationVal=ContinuationVal+LaguerreExplicit(i,S(m,n)*Beta(i+1,n));
      end
      if ContinuationVal<max(S(m,n)-Strike(numel(find(DT<0))+n),0)
         V(m)=max(7.408683070*(S(m,n)-Strike(numel(find(DT<0))+n)),0);
      else
         V(m)=exp(-r*(T/N))*V(m);
      end
   end
end
S2=S0*[ones(M,1),cumprod(exp(nu*timestep+sigma*sqrt(timestep)*randn(M,numel(dt))),2)];

V2=exp(-r*T)*max(7.408683070*(S2(:,N)-Strike(N)),0);
for m=1:M
   for n=1:N
      ContinuationVal=0;
      for i=0:R
         ContinuationVal=ContinuationVal+LaguerreExplicit(i,S2(m,n))*Beta(i+1,n);
      end
      if ContinuationVal<max(7.408683070*(S(m,n)-Strike(numel(find(DT<0))+n)),0)
|| m==M
         V2(m)=exp(-r*(T*n/N))*max(7.408683070*(S(m,n)-Strike(numel(find(DT<0))+n)),0);
         break;
      end
```

```
   end
end
value=sum(V2)/M;
variance=sum((V2-value).^2)/M;
MC_error=sqrt(variance/M);
V=mean(V);
end


%BinomialFinal.m
P0=BinomialFinal(S0,Strike,r,Settle,Maturity,sigma,ExerciseDates)
for i=1:numel(ExerciseDates);
   DT(i)=Settle-datenum(ExerciseDates(i));
end S0=S0*7.408683070;
Strike=Strike*7.408683070;
T=yearfrac(Settle,Maturity,0);
N=numel(find(DT>0));
dt=T/N;
u=exp(r*dt)*(1+sqrt(exp(sigma^2*dt)-1));
d=exp(r*dt)*(1-sqrt(exp(sigma^2*dt)-1));
q=(exp(r*dt)-d)/(u-d); P=zeros(N+1,N+1);
for i=1:N+1
   for j=0:i-1
      P(i,j+1)=nchoosek(i-1,j)*0.5^j*0.5^(i-1-j);
   end
end
S=zeros(N+1,N+1);
S(1,1)=S0;
for i=2:N+1
   for j=1:i-1
      S(i,j)=S(i-1,j)*d;
```

```
   end
   S(i,i)=S(i-1,i-1)*u;
end
V=zeros(N+1,N+1);
for i=1:N+1
   V(N+1,i)=max(S(N+1,i)-Strike(i),0);
end
for i=N:-1:1
   for j=1:i
      V(i,j)=max(S(i,j)-Strike(i),0,exp(-r*dt)*(q*V(i+1,j+1)+(1-q)*V(i+1,j)));

   end
end
P0=V(1,1);
end
```