



**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**  
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ  
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ  
ΤΟΜΕΑΣ ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΗΣ ΚΑΙ  
ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

**ΜΕΛΕΤΗ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΝΕΩΝ ΜΕΘΟΔΩΝ ΑΝΑΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ  
ΘΡΑΥΣΜΕΝΩΝ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΩΝ**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΜΙΧΑΣ ΝΙΚΟΛΑΟΣ

Επίβλεψη: Κωνσταντίνος Παπαοδυσσεύς  
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Οκτώβριος 2015





**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**  
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ  
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ  
ΤΟΜΕΑΣ ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΗΣ ΚΑΙ  
ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

**ΜΕΛΕΤΗ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΝΕΩΝ ΜΕΘΟΔΩΝ ΑΝΑΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ ΘΡΑΥΣΜΕΝΩΝ  
ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΩΝ**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΜΙΧΑΣ ΝΙΚΟΛΑΟΣ

Επίβλεψη: Κωνσταντίνος Παπαοδυσσεύς, Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 27 Οκτωβρίου 2015.

.....  
Παπαοδυσσεύς  
Κωνσταντίνος  
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....  
Κουκούτση  
Ηλίας  
Επ.Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....  
Λούμος  
Βασίλειος  
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Οκτώβριος 2015

.....  
Μίχας Νικόλαος

Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

**Copyright© Μίχας Νικόλαος, 2015.**

**Copyright© Παπαοδυσσεύς Κωνσταντίνος**

**Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.**

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς το συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν το συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

## **ΠΕΡΙΛΗΨΗ**

Στην εργασία αυτή μελετούνται συγκεκριμένες μέθοδοι αυτόματης ανακατασκευής θραυσμένων αρχαιολογικών ευρημάτων με την βοήθεια ηλεκτρονικού υπολογιστή, οι οποίες παρουσιάζονται στις δημοσιεύσεις Contour-Shape Based Reconstruction of Fragmented, 1600 B.C. Wall Paintings [1] και Efficient solution to the 3D problem of automatic wall paintings reassembly [2].

Όντως, πολλά αρχαιολογικά ευρήματα μεγάλης σημασίας ανασκάπτονται σε μορφή εκατοντάδων ή και χιλιάδων θραυσμάτων, τα οποία συνήθως έχουν υποστεί φθορά. Η ανακατασκευή αυτών των ευρημάτων είναι μεγίστης σημασίας για την αρχαιολογική έρευνα. Η χρήση του υπολογιστή για την υποβοήθηση της διαδικασίας ανασύνθεσης είναι επομένως πολύτιμο εργαλείο για την Ιστορία και την Αρχαιολογία.

Τα σχετικά συστήματα και οι μέθοδοι που έχουν αναπτυχθεί επιτρέπουν το βέλτιστο τρισδιάστατο ταίριασμα ανάμεσα στα θραύσματα, εφόσον αυτό είναι εφικτό. Ο ρόλος τους είναι να προτείνουν στους επιστήμονες ταιριάσματα τα οποία είναι δύσκολο και χρονοβόρο να εντοπιστούν με το ανθρώπινο μάτι.

Στο πρώτο κεφάλαιο της παρούσας εργασίας παρουσιάζεται μια σύντομη εισαγωγή στην χρήση Ηλεκτρονικών Υπολογιστών στην Αρχαιολογία και ειδικότερα στην ανασύνθεση θραυσμένων αντικειμένων. Στο δεύτερο και στο τρίτο κεφάλαιο περιγράφεται η διαδικασία που έχει ακολουθηθεί από τους συγγραφείς των δημοσιεύσεων [1] και [2] αντίστοιχα. Στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζεται η διαδικασία που ακολουθήθηκε για την ψηφιακή επεξεργασία των θραυσμένων αντικειμένων από τον συγγραφέα της παρούσας διπλωματικής εργασίας.

## **ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ**

Αυτόματη ανακατασκευή θραυσμένων αντικειμένων, αρχαίες τοιχογραφίες, αρχαία αγγεία



## **ABSTRACT**

The aim of this dissertation is to study specific methods of computer aided reconstruction of fractured archaeological findings. These methods are described in the scientific papers Contour-Shape Based Reconstruction of Fragmented, 1600 BC Wall Paintings [1] and Efficient solution to the 3D problem of automatic wall paintings reassembly [2].

Many archaeological findings of great importance have been excavated and found in hundreds or thousands of fragments. The reconstruction of these findings is of utmost importance for a further archaeological investigation. The use of computer systems and algorithms in order to aid the reconstruction process is a valuable tool for History and Archaeology.

The systems and techniques that have been developed, allow the optimum three-dimensional matching between fragments wherever possible. Their role is to propose to the scientists matches that are difficult and time consuming to be humanly detected.

The first chapter of this paper is a brief introduction to the use of Computers in Archaeology and especially in the reconstruction of broken findings. The second and the third chapter describe the process that has been followed by the authors of publications [1] and [2] respectively. The fourth chapter presents the procedure followed for the digital processing of broken objects from the author of this thesis.

## **KEY WORDS**

Automatic fragment reassembly, ancient wall paintings, ancient vessels





## **ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ**

Θέλω να ευχαριστήσω θερμά τον καθηγητή κύριο Κ. Παπαοδυσσέα για την εμπιστοσύνη που έχει δείξει στο πρόσωπο μου καθώς και για την ευκαιρία που μου έδωσε να ασχοληθώ κατά τη διάρκεια της διπλωματικής μου με ένα πραγματικά τόσο ενδιαφέρον θέμα.

Επίσης τον κύριο Σ. Ζάννο για την αμέριστη βοήθεια του κατά την διάρκεια της εκπόνησης της εργασίας μου.

Τέλος, να ευχαριστήσω την οικογένεια μου που πάντα με στήριζε, καθώς και τους φίλους μου για την βοήθεια τους κατά την διάρκεια των σπουδών μου.



# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1	Εισαγωγή	13
1.1	Πληροφορική και Αρχαιολογία	13
1.2	Κλασική αρχαιολογία	13
1.3	Μαθηματικά και Αρχαιολογία	17
1.4	Υπολογιστική Αρχαιολογία (Computational Archaeology)	17
1.5	Ανασύνθεση αρχαιολογικών ευρημάτων και Ανάκτηση πληροφορίας από αυτά	22
2	Ανακατασκευή θραυσμένων αρχαίων ευρημάτων σε δύο διαστάσεις	29
2.1	Περιγραφή του προβλήματος	29
2.2	Περιγραφή της διαδικασίας	31
2.3	Αποτελέσματα της μεθόδου	43
3	Το πρόβλημα της ανακατασκευής θραυσμένων τοιχογραφιών σε τρεις διαστάσεις	44
3.1	Περιγραφή της μεθόδου	44
3.2	Εφαρμογή της μεθόδου	60
4	Περιγραφή της διαδικασίας	65
4.1	Περιγραφή των βημάτων επεξεργασίας	65
4.2	Χαρακτηριστικές εικόνες από την εκτέλεση της διαδικασίας	71
5	Συμπεράσματα	80



## **1. Εισαγωγή**

### **1.1 Πληροφορική και Αρχαιολογία**

Κυριολεκτικά, η αρχαιολογία είναι η «μελέτη των αρχαίων πραγμάτων». Ο ακριβής σύγχρονος ορισμός της είναι η «συστηματική μελέτη των υλικών καταλοίπων του απώτερου ή πιο πρόσφατου ανθρώπινου παρελθόντος μέσω της εφαρμογής θεωρίας και μεθόδου» [3].

Το χρονικά όριο μελέτης της αρχαιολογίας σε ό,τι αφορά στο απώτατο παρελθόν αγγίζει το χρονικό όριο των 2.000.000 ετών π.π. (δηλαδή προ παρόντος σε αβαθμονόμητη κλίμακα).

### **1.2 Κλασική αρχαιολογία**

Η κλασική αρχαιολογία, διακριτός κλάδος της αρχαιολογίας, εστιάζει στη μελέτη των υλικών υπολειμμάτων των πολιτισμών της αρχαίας Ελλάδας και της Ρώμης. Στην ευρύτερη έννοιά της, η κλασική αρχαιολογία αντλεί υλικό από ένα ευρύτερο χρονικό πλαίσιο, δηλαδή την περίοδο από την άνοδο του Μινωικού, Μυκηναϊκού και Κυκλαδικού πολιτισμού κατά τη δεύτερη 2η χιλιετία π.Χ. έως τον εκχριστιανισμό της Ελλάδας. Στην αυστηρή έννοιά της η κλασική αρχαιολογία σχετίζεται με τη μελέτη των υλικών καταλοίπων του ελληνορωμαϊκού πολιτισμού [4].

Οι αιτίες που γέννησαν την κλασική αρχαιολογία ως επιστήμη κρύβονται στην Αναγέννηση και την αναζωπύρωση του ενδιαφέροντος για τον ελληνικό και ρωμαϊκό κόσμο. Οι ανθρωπιστές, ειδικά στην Ιταλία, άρχισαν συλλογές κλασικών έργων τέχνης και ξεκίνησαν οι ανασκαφές σε κλασικές αρχαιολογικές θέσεις. Ωστόσο, αυτή η πρώιμη αρχαιολογία συνδέθηκε ιδιαίτερα με τη μελέτη των

γραπτών κειμένων. Η συλλογή των αντικειμένων τέχνης, αρχικά από άτομα και αργότερα από μουσεία, και η έμφαση στη χρησιμοποίηση της αρχαιολογίας για την ερμηνεία Ελλήνων και Λατίνων συγγραφέων έπαιξαν σημαντικό ρόλο στη διαμόρφωση της κλασικής αρχαιολογίας από τότε [5]

Σημαντικός σταθμός στην ιστορία της κλασικής αρχαιολογίας και της αρχαιολογίας γενικότερα υπήρξαν οι αποστολές του Ερρίκου Σλήμαν το 1800 στην Ελλάδα και την Τουρκία, όπου αποκάλυψε τη διαστρωμάτωση της πόλης της Τροίας σε διακριτές χρονικές περιόδους. Ένα από αυτά τα στρώματα ο Σλήμαν το ταύτισε με την ομηρική Τροία. Στην Ελλάδα πραγματοποίησε ανασκαφές στις Μυκήνες, αναζητώντας τον τάφο του Αγαμέμνονα. Πολλοί αρχαιολόγοι ακολούθησαν τον Σλήμαν, διεξάγοντας εξελιγμένες μεθοδολογικά και επιστημονικά ανασκαφές στην ευρύτερη περιοχή της μεσογειακής λεκάνης. Έτσι χάραξαν ένα σημαντικό κομμάτι της ιστορίας της αρχαιολογίας και φυσικά το κύριο σώμα ερευνών της κλασικής αρχαιολογίας.



Φωτογραφία του Ερρίκου Σλήμαν και των συνεργατών του από τις ανασκαφές στην Μυκήνες το 1876.



Κράνος του Μιλτιάδη. Ένα από τα αρχαιολογικά ευρήματα στην αρχαία Ολυμπία από τον καιρό της κλασικής εποχής. [7]



Ερυθρόμορφο αγγείο του Κυκλαδικού πολιτισμού [8]



### **1.3 Μαθηματικά και Αρχαιολογία**

Τα χρόνια μετά το 1950, όπως στις περισσότερες επιστήμες, έτσι και στην Αρχαιολογία, η έρευνα εστιάστηκε σε εφαρμογές της χρήσης των Μαθηματικών και των Υπολογιστών.

Η μεταπολεμική περίοδος οδήγησε τις Ευρωπαϊκές χώρες στο να αναζητήσουν εφαρμογές των Μαθηματικών για την ανάπτυξη διάφορων επιστημών μέσα από την ίδρυση διάφορων Οργανισμών, αλλά και Πανεπιστημίων. Έτσι άνοιξε ο δρόμος για την δημιουργία πολλών ερευνητικών θέσεων και στον τομέα της Αρχαιολογίας.

Από το 1950 έως το 1965, η τάση της ποσοτικοποίησης (quantification) κυριάρχησε στην Αρχαιολογία, με την χρήση των βασικών αρχών της στατιστικής και των πιθανοτήτων, να αποτελούν τις κύριες μεθόδους επεξεργασίας των αρχαιολογικών δεδομένων. [6]

Την ίδια περίοδο πρωτοπόροι επιστήμονες ασχολήθηκαν με την τυποποίηση, την περιγραφή και την καταγραφή των αρχαιολογικών δεδομένων με σκοπό την δημιουργία μετέπειτα αρχαιολογικών βάσεων δεδομένων.

Στην συνέχεια, οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές άρχισαν να κυριαρχούν και να εμφανίζονται σε κάθε πανεπιστήμιο και ερευνητικό κέντρο, οπότε και οι σχετικές έρευνες και εφαρμογές πολλαπλασιάστηκαν, οδηγώντας σε μια «Υπολογιστική Επανάσταση» στον τομέα αυτό και ουσιαστικά δημιουργήθηκε ο κλάδος που στην συνέχεια θα ονομαζόταν Υπολογιστική Αρχαιολογία.

### **1.4 Υπολογιστική Αρχαιολογία (Computational Archaeology)**

Η Υπολογιστική Αρχαιολογία περιγράφει τις αναλυτικές μεθόδους που βασίζονται στην χρήση ηλεκτρονικού υπολογιστή για τη μελέτη της μακροχρόνιας ανθρώπινης συμπεριφοράς και της συμπεριφοράς της εξέλιξης. Όπως και διάφοροι άλλοι υπο-

κλάδοι επιστημών που έχουν το πρόθεμα «Υπολογιστική» στο όνομά τους (π.χ. Υπολογιστική Βιολογία, Υπολογιστική Φυσική και Υπολογιστική Κοινωνιολογία), ο όρος προορίζεται για (κυρίως μαθηματικές) μεθόδους που δεν θα μπορούσαν ρεαλιστικά να εφαρμοστούν χωρίς τη βοήθεια ενός ηλεκτρονικού υπολογιστή.

Η Υπολογιστική Αρχαιολογία περιλαμβάνει τη χρήση των γεωγραφικών συστημάτων πληροφοριών (GIS), ορισμένες μορφές της στατιστικής και μαθηματικών μοντέλων, την προσομοίωση σε υπολογιστή της ανθρώπινης συμπεριφοράς και της εξελικτικής συμπεριφοράς, που είναι επίσης αδύνατον να υπολογιστεί χωρίς υπολογιστική βοήθεια.

Η Υπολογιστική Αρχαιολογία είναι επίσης γνωστή ως Αρχαιολογική Πληροφορική (Archaeological Informatics ή Archaeoinformatics), συχνά δηλώνεται με την συντομογραφία "AI" (αλλά δεν πρέπει να συγχέεται με την τεχνητή νοημοσύνη).

Το περιεχόμενο της επιστημονικής αρχαιολογίας μπορεί να χωριστεί σε δύο μεγάλα ερευνητικά θέματα που συμπληρώνουν το ένα το άλλο:

- 1) Βασική θεωρητική έρευνα σχετικά με τη δομή, τις ιδιότητες και τις δυνατότητες των αρχαιολογικών δεδομένων, συμπερασματολογία και απόκτηση γνώσεων. Επίσης περιλαμβάνει την μοντελοποίηση και την διαχείριση της ασάφειας και αβεβαιότητας σε αρχαιολογικά δεδομένα, της επίδρασης της κλίμακας, των βέλτιστων στρατηγικών δειγματοληψίας και των διάφορων χωροχρονικών επιπλοκών.
- 2) Ανάπτυξη αλγορίθμων και λογισμικού ηλεκτρονικών υπολογιστών (Εφαρμοσμένη επιστήμη Υπολογιστικής Αρχαιολογίας) που φέρνουν αυτή τη θεωρητική γνώση στη διάθεση του χρήστη.

Η Επιστήμη συμβάλλει σε πολλά θεμελιώδη ερευνητικά θέματα, που περιλαμβάνουν αλλά δεν περιορίζονται σε:

- Προηγμένη Στατιστική στην αρχαιολογία

- Χωρική και Χρονική ανάλυση αρχαιολογικών δεδομένων
- Προηγμένα πιθανοτικά μοντέλα, αβεβαιότητα και ασάφεια σε αρχαιολογικά δεδομένα, ανάλυση Bayes
- Αναπαράσταση γεωγραφικών δεδομένων, τρισδιάστατη ανάλυση, ανακατασκευή θραυσμένων αντικειμένων και έργων τέχνης
- Μοντελοποίηση αρχαίων τοποθεσιών
- Ψηφιακή αναπαράσταση και προσομοίωση
- Ψηφιακές ανασκαφές και εικονική πραγματικότητα
- Ηλεκτρονική μετάδοση δεδομένων

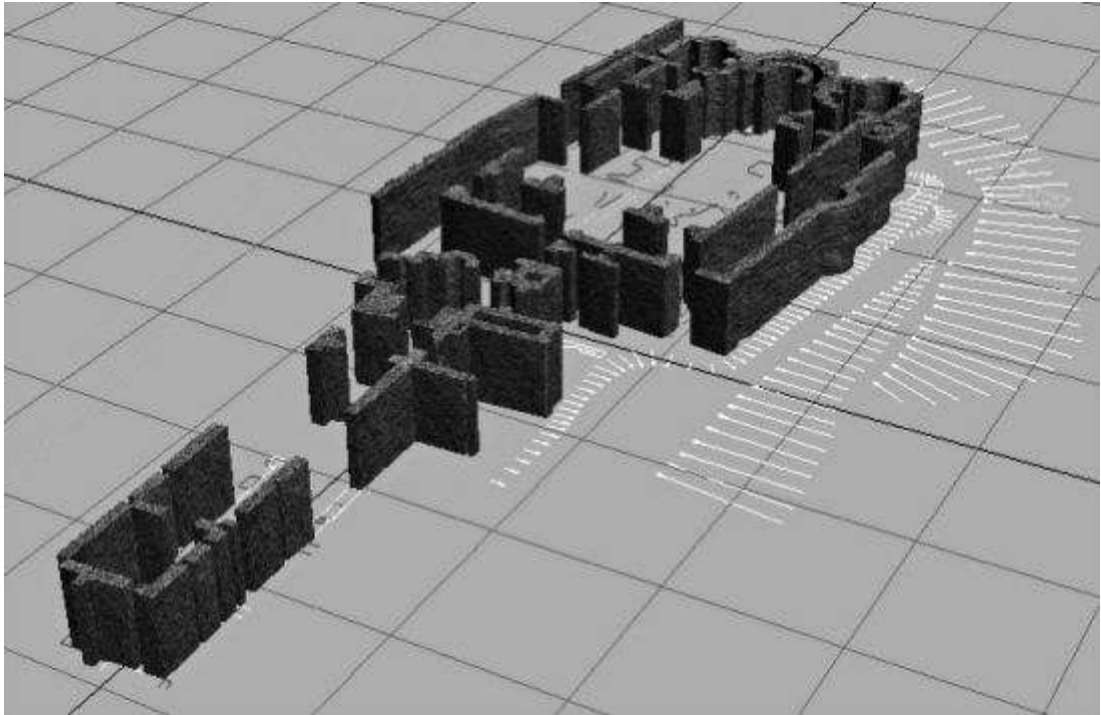
Η Υπολογιστική Αρχαιολογία είναι μια τυπική προσέγγιση στην απόκτηση γνώσεων σχετικών με την Αρχαιολογία. Είναι ένα διεπιστημονικό πεδίο εκ φύσεως, που δανείζεται, ενισχύει και προσαρμόζει μεθόδους και θεωρίες από αρκετές άλλες επιστήμες, όπως η Επιστήμη των Υπολογιστών (π.χ. Αλγόριθμοι και Σχεδιασμός Λογισμικού, Σχεδιασμός Βάσεων Δεδομένων κλπ), η Γεωπληροφορική, η Τεχνητή Νοημοσύνη (Ασαφής Λογική, Επιβλεπόμενη Εκμάθηση και Ταξινόμηση), η Οικολογία, τα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά (Θεωρία Γραφημάτων, Θεωρία Πιθανοτήτων) και η Στατιστική.



Χρήση της Πληροφορικής στην Αρχαιολογία [9]



Χρήση της Πληροφορικής στην Αρχαιολογία [9]



Ψηφιακή Αναπαράσταση Αρχαιολογικού Χώρου [10]



Τρισδιάστατη ψηφιακή αναπαράσταση της Αρχαίας Ρώμης το 40π.Χ. [11]



Ο μηχανισμός των Αντικυθήρων – εύρημα που έχει απασχολήσει αρκετά αρχαιολόγους και επιστήμονες υπολογιστών [12]

### **1.5 Ανασύνθεση αρχαιολογικών ευρημάτων και Ανάκτηση πληροφορίας από αυτά**

Η ανάκτηση πληροφορίας από τα αρχαιολογικά ευρήματα είναι ένα από τα πιο σημαντικά ζητήματα στις επιστήμες της Ιστορίας και της Αρχαιολογίας. Συνεχώς ανακαλύπτονται ευρήματα τεράστιας σημασίας που κρύβουν μυστικά για την ιστορία του ανθρώπινου είδους. Όμως, λόγω των φυσιολογικών φθορών που έχουν συμβεί στα ευρήματα κατά την διάρκεια των αιώνων αλλά και λόγω άλλων συνθηκών, όπως η ανθρώπινη παρέμβαση, τα περισσότερα από τα ευρήματα ανακαλύπτονται κατακερματισμένα σε διάφορα κομμάτια.

Έχουν ανακαλυφθεί πάρα πολλές τοιχογραφίες, αγγεία, αγάλματα και άλλα αντικείμενα τα οποία παραμένουν κατακερματισμένα και σε κακή κατάσταση λόγω των δυσκολιών ανακατασκευής τους. Τα ευρήματα αυτά βρίσκονται τόσο στην

Ελλάδα όσο και σε άλλες τοποθεσίες όπως η Αίγυπτος, η Ιταλία, η Συρία, το Ισραήλ και πολλές άλλες. Ειδικά στην χώρα μας λόγω της μεγάλης ιστορικής σημασίας που είχε τα αρχαία χρόνια για την Μεσόγειο, αλλά και ολόκληρο τον πλανήτη, τα ευρήματα αυτά είναι αρκετά και η σημασία της ανακατασκευής τους και της λύσης του μυστηρίου που υπάρχει από πίσω τους είναι επιτακτική. Από το θεματικό περιεχόμενο που προκύπτει από τα αντικείμενα αυτά η ανθρωπότητα δύναται να βγάλει συμπεράσματα για την πολιτιστική κληρονομιά που έχουν αφήσει οι αρχαίοι πολιτισμοί.

Για παράδειγμα, στο νησί της Θήρας, έχουν ανασκαφεί τοιχογραφίες μεγάλης αρχαιολογικής και ιστορικής σημασίας σε χιλιάδες κομμάτια, γεγονός που στερεί από τους επιστήμονες την άμεση πρόσβαση σε μια μεγάλη πηγή πληροφοριών. [15] Ειδικότερα στο Ακρωτήρι, ένα χωριό της Σαντορίνης με 450 κατοίκους, όπου βρίσκεται ο προϊστορικός οικισμός που ανακαλύφθηκε σε ανασκαφές, έχουν βρεθεί αρκετά τμήματα τοιχογραφιών. Οι πρώτες ανασκαφές στο Ακρωτήρι έγιναν από τον Γάλλο γεωλόγο και ηφαιστειολόγο Φερντινάν Φουκέ . Μικρή ανασκαφική έρευνα επιχειρήθηκε το 1870 από την Γαλλική Αρχαιολογική Σχολή, στη θέση Φαβατάς, νότια του Ακρωτηρίου. Στην θέση αυτή περνούσε χείμαρρος, ο οποίος έφτανε στο επίπεδο των αρχαιοτήτων και είχε ήδη αρχίσει να αποκαλύπτει κάποιες από αυτές. Οι συστηματικές, πάντως, ανασκαφές ξεκίνησαν το 1967 από τον καθηγητή Σπύρο Μαρινάτο, με τις υποδείξεις του ντόπιου Νίκου Πελέκη και στο ίδιο σημείο που έκαναν τις ανασκαφές τους οι Γάλλοι. Ο Σπύρος Μαρινάτος ξεκίνησε τις ανασκαφές στο Ακρωτήρι στην προσπάθεια του να επαληθεύσει μια παλιά δική του θεωρία, που είχε δημοσιεύσει ως Έφορος Αρχαιοτήτων Κρήτης το 1939, ότι η έκρηξη του ηφαιστείου της Θήρας προκάλεσε την κατάρρευση του πολιτισμού της Μινωικής Κρήτης.

Το μεγάλο πλήθος από τοιχογραφίες που βρέθηκε κατά την διάρκεια των ανασκαφών είναι πολύτιμη πηγή πληροφοριών για την καθημερινή ζωή στο Ακρωτήρι, την θρησκεία και την φύση του νησιού. Έχουν φιλοτεχνηθεί κατά βάση

με την τεχνική της νωπογραφίας (buon fresco), δηλαδή, η απόδοση του έργου γινόταν πάνω στο νωπό ακόμα ασβεστολιθικό κονίαμα. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα τα χρώματά τους να παραμένουν ανεξίτηλα. Μεγάλη έκπληξη προκαλεί στους επιστήμονες το γεγονός ότι με τη φασματοσκοπική μέθοδο ανακαλύφθηκε ότι το ιώδες χρώμα σε λεπτομέρειες της τοιχογραφικής σύνθεσης με τις κροκοσυλλέκτριες είναι πορφύρα, γεγονός που αποδεικνύει ότι το επίπεδο τεχνογνωσίας και πολιτισμού του νησιού ήταν ιδιαίτερα υψηλό. Τα θέματα των τοιχογραφιών ήταν ιδιαίτερα πρωτότυπα για την εποχή τους, ενώ υπήρχε ιδιαίτερη ελευθερία στον σχεδιασμό και στην χρήση των χρωμάτων.

Σχεδόν σε όλα τα ανασκαμμένα κτίρια διαπιστώθηκε η ύπαρξη τοιχογραφιών παλαιότερων από εκείνες που κοσμούσαν τους τοίχους τους όταν έγινε η καταστροφική ηφαιστειακή έκρηξη. Αυτό δείχνει ότι οι τοιχογραφίες ήταν ένας καθιερωμένος τρόπος διακόσμησης των εσωτερικών χώρων, πιθανότατα από τις αρχές του 17ου αιώνα π.Χ. [14]

Η ιστορική σημασία των τοιχογραφιών αυτών αλλά και οι ιδιαιτερότητες της περιοχής λόγω της ηφαιστειακής έκρηξης, δίνουν στην έρευνα για την ανασύνθεση των τοιχογραφιών ένα πολύ μεγάλο ενδιαφέρον.

Ομοίως, στους περίφημους αρχαιολογικούς χώρους των Μυκηνών, ενός λόφου ύψους 278 μ. από την επιφάνεια της θάλασσας που κατοικούνταν από τους Νεολιθικούς χρόνους και κυρίως μετά το 1650 προ Χριστού που ήταν έδρα πλουσίων και ισχυρών ηγεμόνων, αλλά και της αρχαίας Τίρυνθας με τα ξακουστά Κυκλώπεια τείχη, χιλιάδες θραύσματα τοιχογραφιών έχουν ανασκαφεί και δεν έχουν πλήρως ανασυντεθεί μέχρι σήμερα, ξεκινώντας από τις ανασκαφές του Σλήμαν.

Για τη λύση του προβλήματος, η επιστημονική κοινότητα έχει αναλάβει την προσπάθεια να εφαρμόσει διάφορες μεθόδους για την επανασυναρμολόγηση αυτών των θραυσμένων ευρημάτων. Αυτή η διαδικασία είναι χρονοβόρα, απαιτεί



άρτια εκπαιδευμένο προσωπικό, καθώς επίσης και ένα σημαντικό ποσό χρημάτων. Το έργο το οποίο καλούνται μέχρι τώρα να συντελέσουν οι αρχαιολόγοι, αλλά και οι ιστορικοί τέχνης, οι ζωολόγοι, οι βοτανολόγοι, οι χημικοί αλλά και οι συντηρητές αρχαιοτήτων είναι εξαιρετικά επίπονο. Ως εκ τούτου, τα τελευταία χρόνια, έχουν γίνει πολλές προσπάθειες για την ανάπτυξη των διαφόρων αυτοματοποιημένων συστημάτων που θα μπορούσαν να συμβάλουν στην προσπάθεια αυτή. Οι μηχανικοί προσπαθούν να αναπτύξουν αλγορίθμους ώστε να πραγματοποιηθεί η εικονική αποκατάσταση των τοιχογραφιών ή των άλλων ευρημάτων στον εικονικό καμβά της οθόνης ενός ηλεκτρονικού υπολογιστή. [14]

Ο ρόλος των διάφορων αλγορίθμων και συστημάτων που έχουν αναπτυχθεί είναι να επισημαίνουν πιθανές αντιστοιχίες των θραυσμάτων στους μελετητές και τους ειδικούς συντηρητές προκειμένου να διευκολυνθεί σε μεγάλο βαθμό η ανασυγκρότηση των ευρημάτων. Αυτά τα συστήματα προτείνουν όλες τις πιθανές αντιστοιχίες, προσπαθώντας ταυτόχρονα, όσο γίνεται, να μειώσουν τα αποτελέσματα που δίνουν λανθασμένες αντιστοιχίες. Οι διαδικασίες αυτές έχουν ως σκοπό να επιτευχθεί εικονική ανασύνθεση όπως ακριβώς θα έκαναν οι ειδικοί επιστήμονες αλλά με την μέγιστη δυνατή ακρίβεια συγκρίσεων, χωρίς ουσιαστική καθυστέρηση και κυρίως χωρίς το ενδεχόμενο πιθανής φθοράς. Οι μέθοδοι αυτοί σύμφωνα με του ειδικούς έχουν την προοπτική να αλλάξουν τον τρόπο που οι άνθρωποι χρησιμοποιούν την επιστήμη της αρχαιολογίας.

Όπως θα δούμε και αργότερα, γίνεται προσπάθεια ο υπολογιστής να μιμηθεί την προσέγγιση των αρχαιολόγων, όσον αφορά την εύρεση πιθανών ενώσεων μεταξύ των θραυσμάτων, ώστε να επιτευχθεί το καλύτερο αποτέλεσμα. Η εργασία αυτή όμως δεν είναι απλή καθώς θυμίζει την επίλυση ενός γιγαντιαίου παιχνιδιού τύπου πάζλ, αλλά σε πιο δύσκολη μορφή. Οι κύριες διαφορές είναι ότι τα κομμάτια που έχουν βρεθεί έχουν ποικίλα σχήματα και διαστάσεις, όπως επίσης και ότι δεν γνωρίζουμε από πριν το τι απεικονίζουν, ενώ δεν έχουν χαρακτηριστικό χρώμα ή υφή. [1]

Εξίσου σημαντικό είναι ότι τμήματα της τοιχογραφίας είναι πιθανό να μην έχουν βρεθεί ακόμα ή να έχουν καταστραφεί ή ακόμα και τα κομμάτια δύο ή περισσότερων τοιχογραφιών να έχουν αναμειχθεί, δυσκολεύοντας πολύ το έργο των αρχαιολόγων αλλά και των υπολογιστών. [12]

Το πρόβλημα της εύρεσης ταιριάσματος μεταξύ των διάφορων θραυσμάτων της τοιχογραφίας, αν και μοιάζει πολύ με την διαδικασία αυτόματου ταιριάσματος, στην πραγματικότητα είναι πολύ πιο δύσκολο. Το πρόβλημα αυτό περιλαμβάνει τον τομέα της ταξινόμησης προτύπων, ένας τομέας πάνω στον οποίο έχει γίνει μεγάλη έρευνα τις τελευταίες δεκαετίες. Διάφορα συστήματα που έχουν αναπτυχθεί για την αναγνώριση αντικειμένων χρησιμοποιούν λειτουργίες χαμηλού επιπέδου πάνω σε εικόνες για να αποκομίσουν πληροφορίες σχετικές με το βάθος της εικόνας. Άλλα συστήματα εφαρμόζουν περιγραφή των εικόνων από κάτω προς τα πάνω (bottom-up) για να παράγουν ομαδοποίηση των χαρακτηριστικών της εικόνας ανεξάρτητη από το σημείο προβολής της (ανεξάρτητα δηλαδή από το σημείο από το οποίο έχει γίνει η σάρωση). Επίσης, χρησιμοποιούνται γενικευμένοι κύλινδροι για την περιγραφή των μοντέλων και των αντικειμένων.

Επειδή η έρευνα αφορά την αναγνώριση πολύ μεγάλου αριθμού αντικειμένων, έχουν συχνά διατυπωθεί υποθέσεις και δοκιμαστικές μέθοδοι που βασίζονται στην σχεδίαση με την βοήθεια υπολογιστή (Computer Aided Design). Επίσης, έχουν αναπτυχθεί αρκετοί αλγόριθμοι που χρησιμοποιούν γράφους όψεων (aspect graphs). Και σε αυτόν τον τομέα έχει γίνει μεγάλη επιστημονική πρόοδος τα τελευταία χρόνια.

Παρ' όλα αυτά, πρέπει να τονιστεί ότι η έρευνα και η πρόοδος που γίνεται στην περιοχή αυτή δεν είναι δυνατόν να αντικαταστήσει την εμπειρία και την γνώση του ανθρώπινου παράγοντα. Τα αποτελέσματα και τα συστήματα που δημιουργούνται δίνουν απλά στους επιστήμονες αρχαιολόγους και συντηρητές ένα πολύ δυνατό εργαλείο για να ανακαλύψουν ταιριάσματα που θα ήταν δύσκολο να βρεθούν με γυμνό μάτι και να επιταχύνουν την διαδικασία της επανασυναρμολόγησης.



Φωτογραφία από τις ανασκαφές στο Ακρωτήρι της Θήρας [7]



Μερικώς ανακατασκευασμένη τοιχογραφία από το Ακρωτήρι της Θήρας [7]



Η «Μυκηναία» ,διατηρημένη τοιχογραφία από την Ακρόπολη των Μυκηνών [7]



Αρχαιολόγοι εξετάζουν την ύπαρξη ταιριάσματος θραυσμάτων από τις ανασκαφές του Ακρωτηρίου [13]

## 2. Ανακατασκευή θραυσμένων αρχαίων ευρημάτων σε δύο διαστάσεις

### 2.1 Περιγραφή του προβλήματος

Η τεχνική, η οποία θα αναπτυχθεί σε αυτήν την παράγραφο, χρησιμοποιήθηκε για την ανακατασκευή με την βοήθεια Ηλεκτρονικού Υπολογιστή των τοιχογραφιών που βρέθηκαν στις ανασκαφές στο νησί της Θήρας και χρονολογούνται περί τον 17ο αιώνα π.Χ. (Υστερη Εποχή του Χαλκού). Όπως και τα αντίστοιχα ευρήματα της Πομπηίας, αλλά και του Ερκολάνο της Νάπολη, τα ευρήματα του Ακρωτηρίου έχουν διατηρηθεί λόγω της κάλυψης του νησιού με ηφαιστειακή τέφρα από την έκρηξη του ηφαιστείου.

Λόγω του ότι οι τοιχογραφίες αυτές ανασκάφτηκαν διασπασμένες σε πάρα πολλά θραύσματα, η ανακατασκευή τους με τον παραδοσιακό τρόπο που χρησιμοποιούν οι αρχαιολόγοι απαιτεί πάρα πολύ χρόνο. Για τον λόγο αυτό αναπτύχθηκε η μεθοδολογία που θα περιγραφεί στην συνέχεια. [1]

Το προς μελέτη πρόβλημα συχνά θεωρείται αντίστοιχο με το πρόβλημα της αυτόματης ανακατασκευής ενός παιχνιδιού πάζλ. Για να υπάρχει η προσέγγιση αυτή, πρέπει το περιεχόμενο της εικόνας που προσπαθούμε να ανασυνθέσουμε να είναι γνωστό και στην συνέχεια, να ανασυνθέσουμε το πάζλ με βάση το περιεχόμενο. Η μέθοδος που χρησιμοποιείται είναι ανάλογη με τον αλγόριθμο του προβλήματος του «περιοδεύοντος πωλητή» (Travelling Salesman Problem).

Οι κύριες διαφορές μεταξύ του προβλήματος της αυτόματης ανασύνθεσης αρχαίων τοιχογραφιών και της αυτόματης κατασκευής ενός παιχνιδιού πάζλ είναι οι παρακάτω:

- 1) Δεν υπάρχει εκ των προτέρων γνώση σχετικά με το σχήμα του κάθε κομματιού και συνεπώς, δεν είναι δυνατόν να προϋποτεθεί η ύπαρξη

κρίσιμων σημείων στην οριακή καμπύλη των κομματιών. Κατ' αυτόν τον τρόπο η διαίρεση των ορίων των κομματιών σε πλευρές δεν έχει νόημα, όπως επίσης και η ανίχνευση γωνιών.

- 2) Δεν υπάρχουν κομμάτια πλαισίου (δηλαδή, κομμάτια που τουλάχιστον μία πλευρά τους να είναι ευθεία γραμμή). Συνεπώς, η στρατηγική που χρησιμοποιείται στα πάζλ όπου η ανακατασκευή της εικόνας ξεκινάει από το πλαίσιο είναι εντελώς ανεφάρμοστη.
- 3) Τα μεγέθη και τα σχήματα των κομματιών ποικίλουν σε πολύ μεγάλο βαθμό, σε αντίθεση με το ότι συμβαίνει στα παιχνίδια τύπου πάζλ.
- 4) Τα χαρακτηριστικά όπως η καμπυλότητα των πλευρών, η κυρτότητα, η Ευκλείδεια απόσταση ανάμεσα σε διπλανές γωνίες κλπ δεν μπορεί να συνεισφέρει στην επίλυση του προβλήματος, καθώς πρακτικά, περιμένουμε με βεβαιότητα ότι θα υπάρχουν κενά ανάμεσα σε διπλανά θραύσματα λόγω των φθορών.
- 5) Δεν υπάρχει εκ των προτέρων γνώση σχετικά με το περιεχόμενο της εικόνας που πρόκειται να ανακατασκευαστεί.
- 6) Δεν υπάρχει μοναδική λύση σε ότι αφορά το ταίριασμα δύο θραυσμάτων της τοιχογραφίας.
- 7) Πολύ συχνά, θραύσματα διαφόρων τοιχογραφιών μπερδεύονται λόγω της κατάρρευσης πολλών ορόφων κτιρίων ή διπλανών τοίχων, οπότε δεν ανήκουν όλα τα θραύσματα που εξετάζονται πάντα στην ίδια τοιχογραφία.

Συνεπώς, το πρόβλημα της αυτόματης επίλυσης παιχνιδιού πάζλ, θεωρείται υποπερίπτωση του προβλήματος που εξετάζουμε.

Για την ανακατασκευή των τοιχογραφιών, εκτός από το περίγραμμα των θραυσμάτων στο οποίο έχει δοθεί ιδιαίτερη έμφαση, μπορούν να ληφθούν επίσης υπόψη και άλλοι παράγοντες όπως

- Η συνέχεια των χρωμάτων ανάμεσα σε διπλανά θραύσματα
- Η συνέχεια του θεματικού περιεχομένου

- Η συνέχεια των φθορών και των ρωγμών
- Το ταίριασμα στο εσωτερικό περίγραμμα των θραυσμάτων
- Η γεωλογική πληροφορία που προκύπτει από την πίσω πλευρά του θραύσματος

## 2.2 Περιγραφή της διαδικασίας

Τα κομμάτια της τοιχογραφίας που βρέθηκαν αφού καθαρίστηκαν, έχουν φωτογραφηθεί με ένα πολύ αυστηρό πρωτόκολλο κάτω από κατάλληλες συνθήκες φωτισμού και σταθερή απόσταση από την συσκευή λήψης. Τα θραύσματα τοποθετούνται είτε ένα-ένα, είτε πολλά μαζί, μέσα σε ένα χώρο με λεπτή άμμο και δίπλα σε μια παλέτα χρωμάτων και ένα μέτρο κλίμακας ώστε να διασφαλιστεί ότι το χρώμα και οι διαστάσεις του ψηφιοποιημένου αντικειμένου θα ανταποκρίνονται στην πραγματικότητα. Στην συνέχεια οι εικόνες αποθηκεύονται σε μια βάση δεδομένων και υπόκεινται σε ψηφιακή επεξεργασία για βελτίωση της ποιότητας τους.

Στην συνέχεια η διαδικασία του διαχωρισμού των κομματιών πραγματοποιείται με την βοήθεια συγκεκριμένων αλγορίθμων κατάτμησης εικόνας. Τα θραύσματα διαχωρίζονται από το υπόβαθρο της εικόνας και αποθηκεύονται με ένα λευκό υπόβαθρό με έναν τυχαίο προσανατολισμό. Η θέση στην οποία βρίσκεται το θραύσμα καθώς και οι άξονες θα αναφέρονται στην συνέχεια ως «απόλυτο σύστημα αναφοράς» ή «απόλυτο πλαίσιο αναφοράς» για το κάθε θραύσμα ξεχωριστά.

Από το κάθε αντικείμενο, αρχικά ενδιαφέρει μόνο το περίγραμμα, το οποίο χρησιμοποιείται για την σύγκριση μεταξύ των διάφορων κομματιών. Αυτό πραγματοποιείται με τον ακόλουθο τρόπο.

Αρχικά, η παλέτα των χρωμάτων κάθε εικόνας μειώνεται δραματικά από εκατομμύρια χρώματα που μπορεί να υπάρχουν σε μόνο δύο, άσπρο και μαύρο. Το αντικείμενο μετατρέπεται σε μαύρο (τιμή «1») και το περίγραμμα σε άσπρο (τιμή «0»).

Έπειτα εξάγεται το περίγραμμα της εικόνας. Παρόλα αυτά, κανένας υπάρχων αλγόριθμος ανίχνευσης ακμών δεν θα μπορούσε να παράγει την επιθυμητή μορφή του περιγράμματος από την εικόνα που έχει παραχθεί μέχρι στιγμής

Για το λόγο αυτό, για να είναι δυνατή η μετέπειτα χρήση του, το περίγραμμα πρέπει να ικανοποιεί συγκεκριμένες προϋποθέσεις. Η αναπαράσταση του περιγράμματος χρειάζεται να είναι μια ενιαία κλειστή διαδρομή από εικονοστοιχεία (pixel). Το κάθε pixel πρέπει να συνορεύει ακριβώς με άλλα δύο και να μην σχηματίζονται γωνίες 90 μοιρών κατά μήκος της διαδρομής. Για να εξασφαλιστεί αυτό, η εικόνα πρέπει να περάσει μια απαραίτητη επεξεργασία μέσω ειδικού λογισμικού που έχει αναπτυχθεί.

Στην συνέχεια, το περίγραμμα διαχωρίζεται σε τμήματα με τον ακόλουθο τρόπο. Ένα πλαίσιο 3x3 (μάσκα) μετακινείται κατά μήκος της διαδρομής με τρόπο τέτοιο, ώστε κάθε φορά ένα pixel του περιγράμματος να είναι το κέντρο του πλαισίου. Η μάσκα έχει την παρακάτω μορφή (βλ. σχήμα).

6	7	8
5	C	1
4	3	2

Η αναζήτηση ξεκινάει ψάχνοντας οριζόντια μέχρι να βρεθεί το πρώτο εικονοστοιχείο του περιγράμματος. Αυτό το εικονοστοιχείο γίνεται το κέντρο της μάσκας και στην συνέχεια, ελέγχεται αν το επόμενο εικονοστοιχείο της μάσκας που είναι κατειλημμένο είναι το 1 ή το 2. Αυτό το εικονοστοιχείο γίνεται το δεύτερο εικονοστοιχείο του περιγράμματος με ωρολογιακή φορά. Συνεπώς αυτό γίνεται το



κέντρο της μάσκας και αναζητείται το επόμενο κατειλημμένο στοιχείο της μάσκας που θα γίνει το τρίτο εικονοστοιχείο του περιγράμματος, και ούτω καθεξής.

Έπειτα, τα εικονοστοιχεία του περιγράμματος που έχουν προκύψει διαχωρίζονται σε ομάδες ώστε να είναι συγγραμικά μεταξύ τους. Κάθε ομάδα συνεχόμενων εικονοστοιχείων που είναι συγγραμικά μεταξύ τους ανήκουν στην ίδια ομάδα (ή block).

Η διαδικασία που ακολουθείται είναι η εξής. Τα pixel #1 και #2 ανήκουν στο ίδιο block. Αν το εικονοστοιχείο #3 είναι συγγραμικό με τα #1 και #2 (δηλαδή αν τα 3 εικονοστοιχεία είναι στα τετράγωνα της μάσκας που αντιστοιχούν στους αριθμούς 6, C, 2 ή 5, C, 1) και τα pixel #2, #3, #4 είναι αντίστοιχα συγγραμικά, τότε το pixel #3 ανήκει στην ομάδα #1.

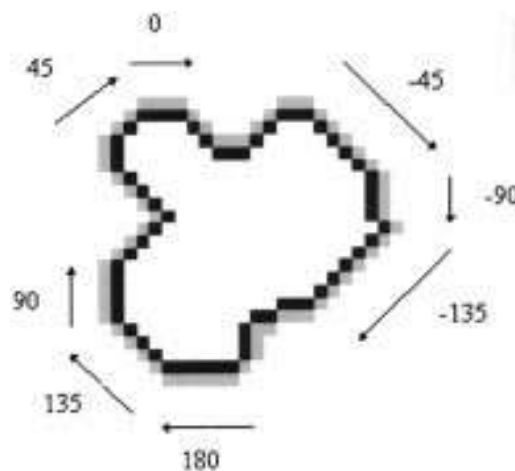
Πραγματοποιείται αλλαγή block όταν βρεθεί το πρώτο εικονοστοιχείο ώστε το  $\#(m-1)$  pixel του περιγράμματος, το  $\#m$  και το  $\#(m+1)$  είναι μη συγγραμικά. Σημειώνεται ότι το πρώτο εικονοστοιχείο κάθε ομάδας ανήκει σε δύο block. Παρόλα αυτά, στην μεθοδολογία που ακολουθείται, θεωρείται ότι κάθε τέτοιο pixel θα ανήκει στο block με τον μεγαλύτερο αύξοντα αριθμό.

Κάθε φορά που αλλάζει το block, ας πούμε στο εικονοστοιχείο  $\#m$ , η σχετική γωνία ανάμεσα στα δύο block υπολογίζεται σαν την διαφορά ανάμεσα στο pixel  $\#(m-1)$  και το  $\#(m+1)$ , ακολουθώντας τη σύμβαση που φαίνεται στην παρακάτω μάσκα (βλ. εικόνα)

135	90	45
180	C	0
-135	-90	-45

Η διαδικασία της κατασκευής του περιγράμματος ολοκληρώνεται αφού όλα τα εικονοστοιχεία του περιγράμματος τοποθετηθούν σε κάποιο block.

Ο αλγόριθμος που χρησιμοποιείται για την εύρεση του ταιριάσματος, αφού γίνουν οι παραπάνω διαδικασίες για όλα τα θραύσματα, αφορά δύο κομμάτια κάθε φορά. Το ένα κομμάτι επιλέγεται αυθαίρετα σαν σταθερό. Για το σταθερό κομμάτι υπάρχει, εκ σύμβασης, ένα βέλτιστο ταιρίασμα όπως φαίνεται στο σχήμα



Για κάθε ζεύγος κομματιών πρέπει να αποφασιστεί αν τα περιγράμματα τους ταιριάζουν και αν ναι, σε ποιο ακριβώς τμήμα τους. Το σταθερό κομμάτι τοποθετείται στο απόλυτο σύστημα αναφοράς του. Στην συνέχεια, ορίζεται ένας αριθμός εικονοστοιχείων που θα χρησιμοποιηθούν ως βασική μονάδα σύγκρισης. Το σύνολο των σημείων αυτών καλείται «μήκος σύγκρισης» (COMP\_LEN). Η ομάδα αυτών των συνεχόμενων pixel ονομάζεται «σταθερή αλυσίδα». Στην συνέχεια, το δεύτερο κομμάτι, που χαρακτηρίζεται ως «περιστρεφόμενο», τοποθετείται με ένα συγκεκριμένο προσανατολισμό στον χώρο. Ένα τμήμα του περιγράμματος του περιστρεφόμενου κομματιού τοποθετείται πλησίον του σταθερού με τον ακόλουθο τρόπο:

- Το τελευταίο pixel του περιστρεφόμενου κομματιού τοποθετείται στην θέση βέλτιστου ταιριάσματος (PMP = perfectly matching position) του πρώτου pixel του σταθερού κομματιού, η οποία ονομάζεται PMP1

- Ένας αριθμός  $k-1$  συνεχόμενων pixel του σταθερού κομματιού τοποθετούνται στο απόλυτο πλαίσιο αναφοράς του σταθερού κομματιού με παράλληλη μεταφορά
- Η παράλληλη μεταφορά του περιστρεφόμενου κομματιού στο απόλυτο πλαίσιο αναφοράς του σταθερού κομματιού, τελειώνει όταν το τελευταίο pixel του περιστρεφόμενου ικανοποιεί μια από τις παρακάτω συνθήκες :
  - α) Έστω ότι υπολογίζεται η κατεύθυνση της μέσης απόλυτης γωνίας των τελευταίων  $L$  εικονοστοιχείων της σταθερής αλυσίδας και βρίσκεται η γραμμή προς αυτή την κατεύθυνση με δεξιά γωνία (η οποία ονομάζεται οριακή γραμμή – barrier line). Το κτίσιμο της περιστρεφόμενης αλυσίδας σταματάει όταν αυτή συναντήσει την σταθερή αλυσίδα. Συνήθως το  $L$  είναι ίσο με το  $COMP\_LEN$ . Ωστόσο μπορούν να χρησιμοποιηθούν και μικρότεροι αριθμοί το ίδιο αποτελεσματικά, αρκεί το  $L$  να είναι μεγαλύτερο από το  $LBL = 0.45*COMP\_LEN$
  - β) Αν το  $k$  είναι μεγαλύτερο από έναν αριθμό pixel  $EXC\_LEN$  και δεν έχει ικανοποιηθεί η προηγούμενη συνθήκη, τότε τα δυο κομμάτια δεν ταιριάζουν. Συνήθως χρησιμοποιείται  $EXC\_LEN = COMP\_LEN*2$ . Η συνθήκη αυτή χρησιμοποιείται κυρίως για να επιταχυνθεί η διαδικασία και να αποφευχθούν αναποτελεσματικές συγκρίσεις

Η παραπάνω διαδικασία επαναλαμβάνεται για διάφορους προσανατολισμούς της περιστρεφόμενης αλυσίδας όπως θα περιγραφεί αργότερα.

### **Κριτήρια ταιριάσματος**

Για την επίλυση του προβλήματος που εξετάζεται χρησιμοποιούνται 4 κριτήρια ταιριάσματος.

- 1) Πρώτο κριτήριο ταιριάσματος περιοχής

Ακολουθώντας ένα τυπικό μαθηματικό κριτήριο, μετριέται ο αριθμός των ρixel που βρίσκονται ανάμεσα από την περιστρεφόμενη αλυσίδα με μήκος ίσο με COMP\_LEN και την σταθερή αλυσίδα καθώς και των ρixel που καλύπτουν το χάσμα ανάμεσα στα τελευταία ρixel των δυο αλυσίδων. Να σημειωθεί ότι προσμετρούνται τα εικονοστοιχεία που ανήκουν στο ενδιάμεσο των αλυσίδων αλλά και όσα ανήκουν στις δύο αυτές αλυσίδες αλλά δεν μετρούνται τα εικονοστοιχεία που έχει βρεθεί ότι είναι σε θέση τέλειου ταιριάσματος.

Ως εκ τούτου, θεωρούμε ότι το περίγραμμα των δύο θραυσμάτων A και B, ταιριάζει στα εικονοστοιχεία #Pa και #Pb, αντίστοιχα, εάν ο αριθμός κλειστών εικονοστοιχείων μεταξύ των αντίστοιχων αλυσίδων που ορίζονται προηγουμένως, είναι μικρότερος από έναν επιλεγμένο αριθμό, ας πούμε MAX\_AREA. Η κατάλληλη επιλογή του MAX\_AREA εξαρτάται από τον αναμενόμενο βαθμό φθοράς που τα θραύσματα έχουν υποστεί, καθώς και την επιλεγμένη τιμή της μεταβλητής COMP\_LEN και την ανάλυση που χρησιμοποιείται από τις φωτογραφίες των θραυσμάτων. Στην ακραία περίπτωση, όπου δεν αναμένεται καμία απόκλιση, μπορεί κανείς να επιλέξει μια πολύ μικρή τιμή του MAX\_AREA. Με μια τέτοια επιλογή, μπορεί να εφαρμοστεί η μεθοδολογία που αναπτύχθηκε εδώ, προκειμένου να λυθεί ο γρίφος του τέλειου ταιριάσματος. Στην περίπτωση μας, ωστόσο, επιλέγεται ένας μεγαλύτερος αριθμός MAX\_AREA, για να ληφθούν υπόψη οι βασικές φθορές των ανασκαφέντων θραυσμάτων. Θα πρέπει να τονιστεί ότι η μεθοδολογία αυτή αναφέρεται στην βέλτιστη περίπτωση όπου τα δύο γειτονικά θραύσματα έχουν το σωστό προσανατολισμό στο χώρο. Από την στιγμή που υπάρχει μια τυχαία περιστροφή των δύο θραυσμάτων στο απόλυτο πλαίσιο αναφοράς, η σωστή περιστροφή του στρεφόμενου θραύσματος πρέπει να πραγματοποιηθεί πριν από τη λήψη μιας απόφασης, όπως θα περιγραφεί αργότερα. Ακόμη και για το σωστό προσανατολισμό του περιστρεφόμενου κομματιού, καθώς η τιμή του MAX\_AREA μεγαλώνει,

υπάρχει μια μη μηδενική πιθανότητα ότι μπορεί να βρεθεί μια τυχαία λανθασμένη ταύτιση ανάμεσα σε δύο αλυσίδες. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι εάν τα προηγούμενα, ως πούμε  $m$ , ρixel του περιγράμματος είναι δεδομένα, τότε το  $\# m+1$  ρixel έχει έναν περιορισμένο αριθμό πιθανών θέσεων τόσο για την σταθερή και την περιστρεφόμενη αλυσίδα.

Συνοψίζοντας, μπορεί κανείς να αναφέρει ότι για ένα δεδομένο σύνολο θραυσμάτων και μια δεδομένη τιμή  $COMP\_LEN$ , είναι δυνατόν να επιλεχθεί κατάλληλη τιμή για την  $MAX\_AREA$  που να ελαχιστοποιεί ουσιαστικά την τυχαία λανθασμένη ταύτιση. Προκειμένου να μειωθεί κι άλλο ο αριθμός των λανθασμένων ταιριασμάτων μεταξύ σταθερών και περιστρεφόμενων θραυσμάτων, χρησιμοποιούνται δύο επιπρόσθετα κριτήρια, βασισμένα σε πληροφορίες που αντλούνται από το περίγραμμα.

## 2) Δεύτερο Κριτήριο Ταιριάσματος Περιοχής

Αν το πρώτο κριτήριο ταύτισης ικανοποιείται για θραύσματα  $A$  και  $B$  στα εικονοστοιχεία  $\#P_a$  και  $\#P_b$ , αντιστοίχως, για μια συγκεκριμένη περιστρεφόμενη αλυσίδα, τότε εξετάζουμε το δεύτερο κριτήριο. Εάν αυτή ήταν μια πραγματική θέση αντιστοίχισης, καμία επικάλυψη μεταξύ των δύο παρακείμενων θραυσμάτων δεν θα έπρεπε να συμβαίνει αφού όλα τα εικονοστοιχεία που περικλείονται από τη σταθερή και την περιστρεφόμενη αλυσίδα θα πρέπει να βρίσκονται ανάμεσα στο κενό μεταξύ των δύο θραυσμάτων. Ως εκ τούτου, το δεύτερο κριτήριο θα μπορούσε να είναι η απαίτηση ότι αυτή η συνθήκη όντως ισχύει. Ωστόσο, στην πράξη, παρατηρούνται μικρές αποκλίσεις που οφείλονται σε ατέλειες στις διαδικασίες επεξεργασίας και λήψης της εικόνας. Συνεπώς, το δεύτερο κριτήριο, είναι η απαίτηση ότι ο αριθμός των εικονοστοιχείων που περικλείονται στον χώρο ανάμεσα από την σταθερή και την περιστρεφόμενη αλυσίδα και ορίζει το χάσμα μεταξύ των δύο θραυσμάτων να είναι ένα ποσοστό,  $GP$ , του συνολικού αριθμού των κλειστών ρixels. Εκτεταμένα πειράματα που πραγματοποιήθηκαν από τους συγγραφείς της

μεθοδολογίας της δημοσίευσης [1], έδειξαν ότι για τις καθορισμένες διαδικασίες λήψης και επεξεργασίας εικόνας, μια πολύ καλή επιλογή φαίνεται να είναι  $GP = 0.997$ . Σαφώς, η ακριβής αξία του, καθώς και της  $MAX\_AREA$ , θα πρέπει να ρυθμίζεται ανάλογα με τις ανάγκες και τις συνθήκες της εφαρμογής της κάθε περίπτωσης.

### 3) Τρίτο Κριτήριο Ταιριάσματος Περιοχής

Αν το πρώτο και το δεύτερο κριτήριο ικανοποιούνται, τότε για αυτές τις συγκεκριμένες θέσεις και προσανατολισμό, η οικοδόμηση των σταθερών και περιστρεφόμενων αλυσίδων συνεχίζεται έως ότου ολόκληρο το περίγραμμα των θραυσμάτων A και B υπολογιστεί. Το τρίτο κριτήριο ταιριάσματος, απαιτεί ο αριθμός των επικαλυπτόμενων pixels ανάμεσα στα περιγράμματα των δύο θραυσμάτων να είναι μικρότερος από ένα κατώτερο όριο, έστω LB. Μια καλή επιλογή φαίνεται να είναι ένα δυναμικά ορισμένο LB, ως ποσοστό της μέγιστης περιφέρειας των δύο θραυσμάτων, ας πούμε LBP, καθώς όσο μεγαλύτερο είναι το μήκος, τόσο μεγαλύτερη είναι η πιθανότητα ότι τα εσωτερικά των θραυσμάτων επικαλύπτονται όταν τα A και B δεν ταιριάζουν. Συνεπώς χρησιμοποιείται  $LB = LBP * \max(\text{μήκος περιγράμματος A}, \text{μήκος περιγράμματος B})$ . Από πειράματα των συγγραφέων [1] για τις συγκεκριμένες διαδικασίες έχει βρεθεί ότι μια πολύ καλή επιλογή είναι  $LBP = 0.996$

### 4) Κριτήριο Διαφοράς Αθροίσματος γωνιών

Αποδεικνύεται ότι αν χρησιμοποιήσουμε την ποσότητα SA (η οποία ορίζεται ως το άθροισμα των γωνιών για όλα τα pixel μιας αλυσίδας), τότε εάν η μέγιστη περιοχή που περικλείεται από την σταθερή και την περιστρεφόμενη αλυσίδα είναι E, υπάρχει ένα συγκεκριμένο ανώτατο όριο, για παράδειγμα  $\mu_{\max}$ , της διαφοράς του «αθροίσματος των γωνιών» αυτών των δύο αλυσίδων. Ακριβέστερα, αν d είναι η Ευκλείδεια απόσταση μεταξύ της αρχής και του τέλους της σταθερής αλυσίδας και εάν θέσουμε  $L = EXC\_LEN$ , τότε

$$\mu_{max} = \sqrt{d^2 + \left(\frac{2 * E}{d}\right)^2} \arctan\left(\frac{2 * E}{d}\right) + \left(L - \sqrt{d^2 + \left(\frac{2 * E}{d}\right)^2}\right) \frac{\pi}{2}$$

Ως εκ τούτου, προκειμένου να αποφασίσει εάν τα προαναφερθέντα κριτήρια θα εφαρμοστούν για το ζευγάρι των αλυσίδων που ξεκινούν από τα εικονοστοιχεία #P<sub>a</sub> και #P<sub>b</sub>, το κριτήριο Διαφοράς Αθροίσματος γωνιών εφαρμόζεται, δηλώνοντας ότι αν το άθροισμα των γωνιών της σταθερής και περιστρεφόμενης αλυσίδας διαφέρουν περισσότερο από  $\mu_{max}$ , τότε, εκ των πραγμάτων, τα δύο περιγράμματα δεν ταιριάζουν για αυτή τη θέση και τον προσανατολισμό. Τονίζεται ότι η απαίτηση η διαφορά του αθροίσματος των γωνιών να είναι αρκετά μικρή, δεν αποτελεί επαρκή προϋπόθεση για να ταιριάζουν.

Δεδομένου ότι ο προσανατολισμός του περιστρεφόμενου θραύσματος σε απόλυτο πλαίσιο αναφοράς είναι εντελώς τυχαίος, προκειμένου να ελεγχθεί η αντιστοίχιση ανάμεσα σε δύο κομμάτια, πρέπει να ελεγχθούν τα τρία προαναφερθέντα κριτήρια περιοχής για όλες τις αλυσίδες που αρχίζουν σε οποιοδήποτε ζευγάρι των pixel #P<sub>a</sub> και #P<sub>b</sub> και για όλες τις πιθανές σχετικές κατευθύνσεις του σταθερού και περιστρεφόμενου θραύσματος. Οι κατευθύνσεις αυτές μπορούν να ληφθούν θεωρώντας ένα κβαντοποιημένο βήμα περιστροφής STEP. Πιο συγκεκριμένα, το περιστρεφόμενο κομμάτι B πρέπει να περιστραφεί STEP μοίρες και, κάθε φορά, πρέπει να εκτελεστούν M \* N υπολογισμοί περιοχής και συγκρίσεις. Συνεπώς, για να εξαντληθούν όλες οι δυνατές κατευθύνσεις του περιστρεφόμενου θραύσματος, πρέπει να εκτελεστούν M \* N \* (360/STEP) υπολογισμοί περιοχή και αντίστοιχες συγκρίσεις. Προκειμένου να επιτευχθεί ακριβής αντιστοίχιση, το STEP πρέπει να είναι αρκετά μικρό π.χ. STEP ≤ 1, με αποτέλεσμα τεράστια κατανάλωση χρόνου. Με την εφαρμογή αυτού του κριτηρίου μειώνεται δραστικά ο συνολικός αριθμός των υπολογισμών. Στην πραγματικότητα, ο συνολικός

χρόνος σύγκρισης δύο θραυσμάτων μειώνεται με ένα συντελεστή περίπου 20 ή, ισοδύναμα, στο 5% του συνολικού χρόνου εκτέλεσης.

Για την εφαρμογή της μεθοδολογίας που περιγράφηκε παραπάνω, έχει αναπτυχθεί από τους συγγραφείς της σχετικής δημοσίευσης [1] ένα σύστημα που λειτουργεί με τον παρακάτω τρόπο. Ο συνολικός αριθμός των εικονοστοιχείων περιγράμματος υπολογίζεται για όλα τα θραύσματα. Η εφαρμογή της μεθόδου ξεκινά με το θραύσμα με τον μεγαλύτερο αριθμό εικονοστοιχείων στο περίγραμμα του που ονομάζεται θραύσμα "αναφοράς". Χρησιμοποιώντας αυτό το θραύσμα δοκιμάζεται διαδοχικά αν ταιριάζουν όλα τα άλλα τμήματα του περιγράμματος του συνόλου. Με άλλα λόγια, το θραύσμα αναφοράς θεωρείται ότι είναι σταθερό, ενώ όλα τα άλλα είναι διαδοχικά περιστρεφόμενα. Για κάθε ζευγάρι των σταθερών και περιστρεφόμενων θραυσμάτων, γίνεται η ακόλουθη διαδικασία, η οποία αποτελείται από τέσσερα βήματα.

**Βήμα 1:** Για ένα συγκεκριμένο περιστρεφόμενο θραύσμα, η διαδικασία που περιγράφεται προηγουμένως, εφαρμόζεται αρχικά για τον προσανατολισμό του περιγράμματος αυτού του θραύσματος στο απόλυτη πλαίσιο αναφοράς του. Για αυτόν τον προσανατολισμό, το σύστημα, ξεκινώντας κάθε φορά από το εικονοστοιχείο #  $(M_k - j)$  για  $j = 0, 1, 2, \dots, M_k - 1$  του περιστρεφόμενου θραύσματος, διαδοχικά δημιουργεί περιστρεφόμενες αλυσίδες γύρω από τη σταθερή αλυσίδα που αποτελείται από εικονοστοιχεία #1, ... ,  $\# \text{mod}_N(I + \text{COMP\_LEN} - 1)$  για  $I = 2, \dots, N$  όπου  $M_k$  είναι ο αριθμός των εικονοστοιχείων του περιγράμματος του περιστρεφόμενου θραύσματος #k, ενώ  $N$  είναι ο αριθμός των εικονοστοιχείων του περιγράμματος του θραύσματος αναφοράς.

**Βήμα 2:** Για τον προσανατολισμό του περιγράμματος του περιστρεφόμενου θραύσματος στο απόλυτο πλαίσιο αναφοράς, καθώς και για κάθε ζεύγος αλυσίδων που ξεκινούν από  $I$  και  $j$ , αντίστοιχα, εφαρμόζεται το προαναφερθέν κριτήριο «άθροισμα της διαφοράς γωνιών». Δηλαδή, το «άθροισμα των γωνιών» τόσο της σταθερής όσο και της περιστρεφόμενης αλυσίδας υπολογίζεται, και βρίσκεται ίσο



με  $SA_f$  και  $SA_r$ . Αν  $|SA_f - SA_r| > \mu_{\max}$  στη συνέχεια, θεωρείται, εκ των πραγμάτων, ότι τα δύο περιγράμματα δεν ταιριάζουν σε αυτή τη θέση για αυτόν τον προσανατολισμό. Αντιθέτως, εάν  $|SA_f - SA_r| < \mu_{\max}$ , τότε η διαδικασία συνεχίζεται στο βήμα 3 ως ακολούθως.

**Βήμα 3:** Ο αριθμός των εικονοστοιχείων  $E_{i,j}$  που περικλείεται μεταξύ σταθερής και περιστρεφόμενης αλυσίδας, καθώς επίσης και ο αριθμός  $G_{i,j}$  των εικονοστοιχείων που βρίσκονται στο διάκενο μεταξύ αυτών των δύο θραυσμάτων, υπολογίζονται. Αν το  $E_{i,j}$  είναι μικρότερο από ένα συγκεκριμένο όριο  $T$  και το  $G_{i,j}$  πληροί το δεύτερο κριτήριο ταύτισης, τότε το σύστημα θεωρείται ότι τα δύο κομμάτια αυτά μπορεί να ταιριάζουν. Η τιμή του ορίου  $T$  μπορεί να υπολογιστεί ως εξής: Έστω ότι το  $(i,j)$  είναι μια πραγματική θέση ταιριάσματος των δύο θραυσμάτων στο χέρι. Τότε,  $T = \text{MAX\_AREA} + Q_R$ , όπου η  $\text{MAX\_AREA}$  επιλέγεται ώστε να ληφθούν υπόψη τα θραύσματα διάσπασης όπως περιγράφεται νωρίτερα, ενώ το  $Q_R$  είναι ένα σφάλμα που οφείλεται στην κβάντωση της περιστροφής. Μια καλή εκτίμηση για τη μέγιστη αξία του  $Q_R$  είναι

$$\max(Q_R) = \frac{1}{2} \text{COMP\_LEN}^2 \tan\left(\frac{\text{STEP}}{2}\right)$$

όπου  $\text{STEP}$  το βήμα κβαντισμού της περιστροφής. Αν  $\text{STEP} = 1^\circ$ ,  $T_1 = \text{MAX\_AREA} + 0,0044 * \text{COMP\_LEN}^2$ .

Οπότε, ένα ζευγάρι εικονοστοιχείων  $(i,j)$ , για το οποίο ισχύει ότι  $E_{i,j} \leq T_1$  και πληροί το δεύτερο κριτήριο ταιριάσματος, πρέπει να πληροί και το τρίτο κριτήριο. Αν το κριτήριο αυτό επίσης ικανοποιείται, τότε το σύστημα αποφασίζει ότι τα δύο κομμάτια αυτά μπορεί να ταιριάζουν σε αυτά τα δύο pixel. Διαφορετικά, εάν ένα από τα προαναφερθέντα κριτήρια περιοχής δεν πληρούται, το σύστημα αποφασίζει ότι δεν είναι δυνατή η αντιστοίχιση μεταξύ του θραύσματος αναφοράς και του συγκεκριμένου προσανατολισμού του περιστρεφόμενου θραύσματος στη θέση αυτή.

Με άλλα λόγια, αν υπάρχει μια πραγματική αντιστοίχιση μεταξύ των δύο θραυσμάτων σε ένα ζευγάρι εικονοστοιχείων (I,j), λόγω των χαρακτηριστικών του περιγράμματος τους και μόνο, τότε αυτό το ζευγάρι πρέπει να ανήκει στο σύνολο που προτείνεται από το σύστημα.

**Βήμα 4:** Τέλος, και τα τρία παραπάνω βήματα επαναλαμβάνονται για όλους τους πιθανούς προσανατολισμούς του περιστρεφόμενου θραύσματος, που δημιουργούνται μέσω διαδοχικών περιστροφών αυτού του θραύσματος με βήμα περιστροφής STEP = 1°.

Κάθε κομμάτι που το σύστημα δείχνει ότι θα μπορούσε να ταιριάζει με το θραύσμα αναφοράς, και το ίδιο το θραύσμα αναφοράς, τοποθετούνται στις ακριβείς θέσεις (I,j) μέσω ενός κατάλληλου κώδικα σε γλώσσα C. Το λαμβανόμενο μεγαλύτερο κομμάτι που αποτελείται από συνεχόμενα ταιριασμένα τμήματα χρησιμοποιείται ως είσοδος σε ένα εργαλείο επεξεργασίας εικόνας. Με τον τρόπο αυτό, ο χρήστης είναι σε θέση να απεικονίσει την πρόταση του συστήματος και είναι σε θέση να αποφασίσει αν αυτό είναι σωστό ή όχι. Στη συνέχεια, τα θραύσματα που ταιριάζουν συνενώνονται για να σχηματίσουν ένα νέο "τεχνητό" θραύσμα, και η συνολική προαναφερθείσα διαδικασία επαναλαμβάνεται. Το σταθερό κομμάτι αναφοράς θεωρείται πλέον το μεγάλο «τεχνητό» κομμάτι που κατασκευάστηκε προηγουμένως. Αυτή η διαδικασία επαναλαμβάνεται έως ότου δεν παρατηρείται περαιτέρω ταιρίασμα. Αν υπάρχουν θραύσματα του συνόλου που παραμένουν αταίριαστα, όλη η προαναφερθείσα διαδικασία επαναλαμβάνεται με το θραύσμα αναφοράς να είναι το θραύσμα με το μεγαλύτερο μήκος περιγράμματος που δεν έχει ταιριαστεί έως ότου όλα τα κομμάτια να εξαντληθούν.

Σημειώνεται ότι ένα ιστόγραμμα των μηκών του περιγράμματος του συνόλου των αρχικών θραυσμάτων σχηματίζεται από το πρόγραμμα, και αν παρατηρηθεί σημαντική διακύμανση στα μήκη περιγράμματος, τότε ολόκληρη η προαναφερθείσα διαδικασία επαναλαμβάνεται, για άλλα μήκη σύγκρισης COMP\_LEN.

### **2.3 Αποτελέσματα της μεθόδου**

Προκειμένου να ελεγχθεί η μεθοδολογία αυτή καθώς και το σύστημα που αναπτύχθηκε, έχουν γίνει από τους συγγραφείς της δημοσίευσης[1] δοκιμές σε επιλεγμένα σύνολα θραυσμάτων. Η πρώτη ομάδα περιελάμβανε θραύσματα που ανήκουν σε δύο διαφορετικές τοιχογραφίες που είχαν ήδη ανακατασκευαστεί από αρχαιολόγους, και χρειάστηκε ένας σημαντικός αριθμός από άνθρωπο-μήνες. Τα αποτελέσματα αξιολογήθηκαν ως πολύ θετικά καθώς τα θραύσματα βρέθηκαν ότι ταιριάζουν και ένα μεγάλο μέρος της τοιχογραφίας ανασυντέθηκε.

Το δεύτερο σύνολο περιελάμβανε θραύσματα που ανήκουν σε τοιχογραφίες που δεν έχουν ακόμα ανακατασκευαστεί. Θα πρέπει να επισημανθεί ότι, δεν έχει βρεθεί μεγάλη αντιστοιχία στα κομμάτια της δεύτερης ομάδας, λόγω του μεγάλου αριθμού των θραυσμάτων, του μεγέθους τους, του θεματικού περιεχομένου των τοιχογραφιών που έκανε πολλά κομμάτια μοιάζουν μεταξύ τους, καθώς και του γεγονότος ότι ένας σοβαρός αριθμός θραυσμάτων έλειπε. Από την διαδικασία αυτή όμως, παρόλο που δεν βρέθηκε κάποια ολοκληρωμένη τοιχογραφία, προέκυψε ένας μεγάλος αριθμός θραυσμάτων που μέχρι τώρα δεν είχε βρεθεί με το ανθρώπινο μάτι ότι ταιριάζουν.

### 3. Το πρόβλημα της ανακατασκευής θραυσμένων τοιχογραφιών σε τρεις διαστάσεις

#### 3.1 Περιγραφή της μεθόδου

Η μέθοδος που θα παρουσιαστεί σε αυτήν την παράγραφο έχει εφαρμοστεί με επιτυχία, τόσο στην ανακατασκευή τεχνητά σπασμένων αντικειμένων όσο και στην εικονική συναρμολόγηση των θραυσμάτων των τοιχογραφιών που ανήκουν στο μυκηναϊκό πολιτισμό, που έχουν ανασκαφεί σε εξαιρετικά κατακερματισμένη κατάσταση στην Τίρυνθα, στις Μυκήνες.

Η μεθοδολογία και το σχετικό πληροφοριακό σύστημα που θα αναφερθούν αναπτύχθηκαν από τους συγγραφείς της δημοσίευσης [2] και χρησιμοποιούνται για την αυτοματοποιημένη ανασύνθεση ενός αυθαίρετα κατακερματισμένου αντικειμένου, με μόνο περιορισμό ότι μία από τις επιφάνειες των θραυσμάτων, είναι επίπεδη ή σχεδόν επίπεδη, όπως και στην περίπτωση των τοιχογραφιών του προηγούμενου κεφαλαίου. Το σύστημα δεν μοντελοποιεί τις επιφάνειες επαφής, ούτε εξετάζει την ακριβή μορφή και τις θέσεις των θραυσμάτων, αλλά προσπαθεί να μιμηθεί τη διαδικασία που οι αφοσιωμένοι μελετητές ενστικτωδώς έχουν ακολουθήσει, στην προσπάθειά τους να ανασυνθέσουν μια τοιχογραφία. Επιπλέον, η μεθοδολογία λαμβάνει υπόψη την αναπόφευκτη φθορά που έχουν υποστεί τα αρχαιολογικά ευρήματα και καθορίζει ακραίες περιπτώσεις σχετικά με την γεωμετρία των γειτονικών θραυσμάτων με τη βοήθεια του λογισμού των μεταβολών.

Το πρώτο βήμα της διαδικασίας αφορά την προκαταρκτική επεξεργασία των κομματιών. Αρχικά, διαχωρίζονται οι επιφάνειες, βρίσκοντας πρώτα το άνω επίπεδο που είναι συνήθως αυτό που είναι χρωματισμένο.

Ο διαχωρισμός των επιφανειών γίνεται με τον εξής τρόπο. Κατασκευάζεται ένα βοηθητικό σχήμα που αποτελείται από δύο παράλληλα επίπεδα  $\Delta 1$  και  $\Delta 2$  και έχει

απόσταση  $2\varepsilon$ , όπου  $\varepsilon$  είναι μια σωστά επιλεγμένη πολύ μικρή ποσότητα. Έστω  $\Delta$  είναι το μέσο επίπεδο, παράλληλο με τα  $\Delta_1, \Delta_2$ . Αν φανταστούμε την κατάσταση όπου το  $\Delta$  συμπίπτει με την άνω επίπεδη επιφάνεια του θραύσματος, τότε για μια κατάλληλη επιλογή του  $\varepsilon$ , όλα τα σημεία της επιφάνειας βρίσκονται στο χώρο μεταξύ των επιπέδων  $\Delta_1, \Delta_2$ . Έστω  $N^{US}$  είναι ο αριθμός των σημείων αυτών. Επιπλέον, αν λάβουμε υπόψη την προσημασμένη απόσταση όλων αυτών των σημείων  $N^{US}$  από το  $\Delta$ , είναι λογικό να αναμένεται ότι η μέση τιμή της θα είναι κοντά στο μηδέν. Αντιθέτως, είναι αρκετά λογικό να υποθέσουμε ότι σε οποιαδήποτε άλλη θέση του βοηθητικού σχήματος, ο αριθμός των σημείων της επιφάνειας που βρίσκεται μεταξύ  $\Delta_1, \Delta_2$  θα είναι μικρότερο από  $N^{US}$  και ότι η μέση τιμή των αποστάσεων τους θα είναι λιγότερο κοντά στο μηδέν. Η τιμή της σταθεράς  $\varepsilon$  που μπορεί να εγγραφεί αυτή τη συμπεριφορά εξαρτάται από τον κυματισμό της επιφάνειας του θραύσματος, καθώς και την ανάλυση της τρισδιάστατης ψηφιακής αναπαράστασης και μπορεί να εκτιμηθεί με μία μέθοδο δοκιμής και σφάλματος. Μια πολύ ικανοποιητική επιλογή σύμφωνα με την δημοσίευση [2] για όλες τις εφαρμογές, φαίνεται να είναι  $\varepsilon = (\text{ανάλυση}) \cdot 2 \cdot 10^{-3}$ . Ως εκ τούτου, η επιφάνεια του επιπέδου του θραύσματος προσδιορίζεται μέσω του ακόλουθου κριτηρίου:

Θεωρείται η περιοχή που αποτελείται από τις τρεις γωνίες Euler  $\delta_\alpha, \delta_\beta, \delta_\gamma$  και τις τρεις προβολές τους  $\delta_x, \delta_y, \delta_z$  παράλληλα στους άξονες  $x, y, z$  αντίστοιχα. Για την κάθε μία εφαρμόζονται οι αντίστοιχοι γεωμετρικοί μετασχηματισμοί στο βοηθητικό σχήμα που περικλείεται από τα τρία παράλληλα επίπεδα  $\Delta_1, \Delta_2$  και  $\Delta$ . Στην καταληκτική θέση του βοηθητικού σχήματος μετριέται ο αριθμός  $N$  των σημείων των θραυσμάτων της επιφάνειας που βρίσκονται ανάμεσα από τα  $\Delta_1, \Delta_2$  καθώς και την μέση τιμή  $\mu^D$  και την τυπική απόκλιση  $S^D$  της προσημασμένης απόστασης αυτών των σημείων από το  $\Delta$ . Στη συνέχεια πρέπει να προσδιοριστεί ο συνδυασμός  $(\delta_\alpha, \delta_\beta, \delta_\gamma, \delta_x, \delta_y, \delta_z)$  για τον οποίο το  $N$  είναι μέγιστο και η  $\mu^D$  είναι μικρότερη από  $3.1 \cdot S^D / \sqrt{N}$ . Αυτή η κατάσταση αντιστοιχεί σε μια συγκεκριμένη θέση του βοηθητικού σχήματος, για την οποία η πάνω επιφάνεια του τμήματος ταιριάζει βέλτιστα με το  $\Delta$ .

Ο περιορισμός  $\mu^D \leq 3.1 * S^D / \sqrt{N}$  οφείλεται στην υπόθεση ότι οι προσημασμένες αποστάσεις των σημείων  $N^{US}$  από το  $\Delta$  ακολουθούν κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και το 99.9% του κανονικού πληθυσμού ικανοποιεί αυτή τη συνθήκη. Στην πράξη αυτό το κριτήριο αντικαθιστάται με την εφαρμογή ενός αλγορίθμου μεγιστοποίησης στον χώρο των σημείων  $(\delta_\alpha, \delta_\beta, \delta_\gamma, \delta_x, \delta_y, \delta_z)$ . Το επίπεδο  $\Delta 2$ , που ονομάζεται το κάτω μέρος του βέλτιστου βοηθητικού σχήματος, ορίζεται ως το πάνω μέρος του τμήματος.

Αφού βρεθεί η πάνω επιφάνεια, η οποία έστω ότι έχει εξίσωση  $A^{US}x + B^{US}y + C^{US}z + D^{US} = 0$ , μεταφέρεται, παράλληλα στο κανονικό της διάνυσμα, στην κατεύθυνση στην οποία το επίπεδο έχει μια μη κενή διατομή με το όριο της επιφάνειας του τμήματος. Η παράλληλη μετακίνηση συνεχίζεται έως ότου η διατομή να παραμείνει κενή. Σε αυτό το σημείο η επιφάνεια μετακινείται προς τα πίσω μέχρι η διατομή της με το επίπεδο να σχηματίσει μια κλειστή καμπύλη που ορίζει μια περιοχή ίση ή λίγο μεγαλύτερη από το τμήμα που εξετάζουμε. Επισημαίνεται ότι αυτό το επίπεδο είναι βοηθητικό, και αλλάζει ανάλογα με το βάθος του τμήματος. Δεν υπάρχει απαίτηση η πίσω πλευρά των θραυσμάτων της τοιχογραφίας να σχηματίζει μια επίπεδη επιφάνεια. Τελικά ορίζεται η πλευρική επιφάνεια του τμήματος ως το μέγιστο συνδεδεμένο υποσύνολο της επιφάνειας του τμήματος που έγκειται μεταξύ του πάνω και κάτω επιπέδου.

Στην συνέχεια πρέπει να οριστεί ο κεντρικός άξονας του κάθε θραύσματος. Θεωρείται ότι το θραύσμα είναι το σχήμα που περιβάλλεται από την τομή του πάνω επιπέδου με την επιφάνεια του θραύσματος, και την τομή του κάτω επιπέδου με την πλαϊνή επιφάνεια του θραύσματος. Το σχήμα αυτό θεωρείται σαν ένα ομογενές τρισδιάστατο σώμα. Ο άξονας που περνάει από το κέντρο βάρους του σώματος που είναι παράλληλος στο διάνυσμα  $\vec{n}^{US} = (A^{US}, B^{US}, C^{US})$  και κάθετος στις πάνω και κάτω επιφάνειες χαρακτηρίζεται ως ο κεντρικός άξονας του θραύσματος. Όλα τα αντικείμενα περιστρέφονται κατάλληλα ώστε ο κεντρικός τους άξονας να ταυτίζεται με τον άξονα z.

Στην προσπάθεια να βρεθεί εάν δύο θραύσματα ταιριάζουν πρέπει να ληφθεί υπόψη η αυθαιρεσία του προσανατολισμού τους. Έτσι πρέπει να παραχθούν περιστρεμμένες εκδοχές όλων των διαθέσιμων θραυσμάτων. Το κάθε θραύσμα περιστρέφεται γύρω από τον άξονα του κατά μια πολύ μικρή γωνία  $\delta\theta = 1^\circ$  δημιουργώντας έτσι την ακολουθία γωνιών  $\theta_i = \delta\theta \cdot i$ , όπου  $\theta_i$  είναι γωνία  $[0, 2\pi)$ , καθώς και όλες τις περιστρεμμένες εκδοχές των αντίστοιχων θραυσμάτων. Το σύνολο όλων των περιστρεμμένων εκδοχών ενός θραύσματος, ας πούμε του θραύσματος R, σχηματίζει το σύνολο  $\Pi^R$ .

Για την ανακατασκευή των τρισδιάστατων τοιχογραφιών χρησιμοποιούνται τέσσερα κριτήρια ταιριάσματος για να αποφασιστεί αν δύο θραύσματα ταιριάζουν ή όχι. Παρόμοια με το προηγούμενο κεφάλαιο, ένα θραύσμα επιλέγεται σαν σταθερό και τοποθετείται στο κέντρο των αξόνων με τον κεντρικό του άξονα να ταυτίζεται με τον άξονα z. Στη συνέχεια, θεωρούμε μια ομάδα μήκους  $L_c$  διαδοχικών εικονοστοιχείων ξεκινώντας από το pixel # 1 της καμπύλης  $C^F$  του περιγράμματος της επίπεδης επιφάνειας του θραύσματος. Αυτά τα pixels ονομάζονται «σταθερή αλυσίδα», η οποία συμβολίζεται με  $\Gamma_1^F$ , όπου F σημαίνει «σταθερή» και 1 για το εικονοστοιχείο έναρξης του περιγράμματος  $C^F$ .

Έπειτα, το δεύτερο θραύσμα τοποθετείται στο ίδιο καρτεσιανό σύστημα, για μια ακόμη φορά έτσι ώστε κεντρικός άξονας του είναι παράλληλος στον άξονα Z. Αυτό το δεύτερο θραύσμα έχει αυθαίρετο προσανατολισμό γύρω από τον κεντρικό του άξονα και τυχαία θέση. Με τον τρόπο που περιγράφηκε νωρίτερα δημιουργούνται περιστρεμμένες εκδοχές του δεύτερου αυτού θραύσματος. Για κάθε γωνία  $\theta_i$ , μετακινούμε παράλληλα το περιστρεφόμενο θραύσμα ώστε να γειτνιάσει με το σταθερό με τον ακόλουθο τρόπο.

Ας υποθέσουμε ότι η καμπύλη  $C^R$  του περιγράμματος της επίπεδης επιφάνειας του περιστρεφόμενου θραύσματος αποτελείται από M pixels. Τότε την μετακινούμε παράλληλα, έτσι ώστε το πρώτο pixel της  $C^F$  και το τελευταίο pixel της  $C^R$  να συμπίπτουν. Στη συνέχεια, ορίζουμε την «τερματική οριακή επιφάνεια»  $B_1^T$ , ως το

επίπεδο που διέρχεται από το τελευταίο εικονοστοιχείο της σταθερής αλυσίδας, η οποία είναι παράλληλη προς τον κεντρικό άξονα του σταθερού θραύσματος και κάθετη στην ευθεία γραμμή που ενώνει το πρώτο και το τελευταίο ρixel της σταθερής αλυσίδας.

Δημιουργείται μια περιστρεφόμενη αλυσίδα  $\Gamma_{1,M}^R$  που μετακινείται αντιωρολογιακά πάνω στην καμπύλη  $C^R$  ξεκινώντας από το ρixel #M και καταλήγοντας στην τομή της επιφάνειας τερματικού ορίου με την  $C^R$  εάν υπάρχει. Καθώς η διαδικασία συνεχίζεται αντιωρολογιακά, αυξάνοντας το μήκος της  $\Gamma_{1,M}^R$ , εάν ο αριθμός των ρixel της ξεπεράσει το όριο  $L^{EX}$ , τότε η θέση ταιριάσματος που εξετάζεται, απορρίπτεται.

Έπειτα, ορίζονται οι όροι «σταθερός κρημνός» και «περιστρεφόμενος κρημνός». Πρώτα ορίζεται η «αρχική οριακή επιφάνεια»  $B_1^S$ , ως το επίπεδο που περνάει από το πρώτο σημείο της σταθερής αλυσίδας το οποίο είναι παράλληλο στην  $B_1^T$ . Επίσης, ορίζεται το κοινό κατώτερο επίπεδο για το ζεύγος A, B το οποίο είναι το επίπεδο πυθμένα του A ή του, το πιο κοντινό στην κοινή άνω επιφάνεια τους. Ο «σταθερός κρημνός»  $E_1^F$ , ορίζεται ως η επιφάνεια που έγκειται στην πλαϊνή οριακή επιφάνεια του σταθερού θραύσματος που περικλείεται από την πάνω επίπεδη επιφάνεια του θραύσματος, το κοινό κάτω επίπεδο, καθώς και την αρχική και τερματική οριακή επιφάνεια. Παρόμοια, ο «περιστρεφόμενος κρημνός»  $E_{1,M}^R$  ορίζεται ως η πλαϊνή οριακή επιφάνεια του περιστρεφόμενου θραύσματος, περιορισμένη από την άνω οριακή επιφάνεια, το κάτω επίπεδο και την αρχική και τερματική οριακή επιφάνεια.

Η παραπάνω διαδικασία επαναλαμβάνεται, αλλάζοντας το αρχικό σημείο της περιστρεφόμενης αλυσίδας από το ρixel #M μέχρι το ρixel #1 της  $C^R$ , σχηματίζοντας έτσι ένα σύνολο περιστρεφόμενων αλυσίδων και περιστρεφόμενων κρημνών  $\Gamma_{1,M}^R$ ,  $E_{1,M}^R$ , για  $m = M, M-1, \dots$ . Τελικά παράγονται δύο σύνολα σταθερών αλυσίδων και σταθερών κρημνών μετακινώντας το αρχικό σημείο 'k' της σταθερής αλυσίδας πάνω στην  $C^F$ , τα οποία χαρακτηρίζονται  $\Gamma_k^F$ ,  $E_k^F$ , για  $k = 1, 2, \dots$



Τονίζεται ότι για δύο δεδομένα θραύσματα, η ακριβής μορφή των σταθερών και περιστρεφόμενων κρημνών  $E_k^F, E_{k,m}^R$  εξαρτάται από το πρώτο και το τελευταίο σημείο των  $\Gamma_k^F, \Gamma_{k,m}^R$ , την θέση των κάτω επιπέδων σε σχέση με το κοινό άνω επίπεδο τους, και την γωνία περιστροφής  $\theta_i$ . Επίσης τονίζεται ότι αν για μια συγκεκριμένη θέση του σταθερού κρημνού δεν υπάρχει τομή μεταξύ της τερματικής οριακής επιφάνειας  $B_1^T$  και του περιστρεφόμενου θραύσματος, τότε δεν ορίζεται σταθερός κρημνός. Για το σύστημα που εξετάζεται αυτό σημαίνει ότι δεν υπάρχει ταιρίασμα στην συγκεκριμένη σχετική θέση των θραυσμάτων A,B.

**Πρώτο κριτήριο ταιριάσματος :** Ο όγκος μιας σωστά επιλεγμένης τρισδιάστατης περιοχής ανάμεσα στα δύο θραύσματα.

Θεωρούνται δύο θραύσματα A, B και όλα τα σχετικά ζευγάρια (α) σταθερών και περιστρεφόμενων αλυσίδων ( $\Gamma_k^F, \Gamma_{k,m}^R$ ), (β) σταθερών και περιστρεφόμενων κρημνών ( $E_k^F, E_{k,m}^R$ ), (γ) αρχικών και τερματικών οριακών επιφανειών του ίδιου ζεύγους ( $B_k^S, B_k^T$ ). Επιπρόσθετα τοποθετούνται τα δύο θραύσματα στο ίδιο πλαίσιο αναφοράς όπως περιγράφηκε νωρίτερα, έτσι ώστε οι άνω επίπεδες επιφάνειες να έγκειται στο ίδιο επίπεδο κάθετα στον άξονα z.

Στην συνέχεια, έστω  $V_{k,m}$  ο κλειστός τομέας ανάμεσα (α) στους κρημνούς ( $E_k^F, E_{k,m}^R$ ) του ζεύγους, (β) στις αρχικές και τερματικές οριακές επιφάνειες του ίδιου ζεύγους ( $B_k^S, B_k^T$ ), (γ) το κοινό άνω επίπεδο και (δ) το κάτω επίπεδο του A ή του B, όποιο είναι πιο κοντά στο άνω. Ο όγκος  $\tau_{k,m}$  υπολογίζεται και εάν είναι μικρότερος του προσδιορισμένου ορίου  $\tau_T$  τότε θεωρείται η συγκεκριμένη θέση ως πιθανή θέση ταιριάσματος. Η σωστή επιλογή του  $\tau_T$  εξαρτάται από το μήκος σύγκρισης  $L_C$ , την απόσταση των κοινών άνω και κάτω επιπέδων και το κενό που είμαστε πρόθυμοι να αποδεχτούμε ανάμεσα στα δύο πραγματικά θραύσματα που ταιριάζουν.

**Δεύτερο κριτήριο ταιριάσματος :** Απαγόρευση σημαντικής αλληλοεπικάλυψης ανάμεσα σε διπλανά θραύσματα.

Το δεύτερο κριτήριο αφορά την τοπική αλλά και την συνολική αλληλοεπικάλυψη στον όγκο επαφής  $V_{k,m}$ . Στην ιδανική περίπτωση που τα δύο θραύσματα A, B ταιριάζουν, δεν πρέπει να υπάρχει καθόλου επικάλυψη ανάμεσα στους αντίστοιχους σταθερούς και περιστρεφόμενους κρημνούς. Όμως, στην πράξη, λόγω των αναπόφευκτων ανακριβειών της ψηφιακής αναπαράστασης των θραυσμάτων, είναι αναμενόμενο να υπάρχει πλευρική επικάλυψη ανάμεσα στα κομμάτια ακόμα και στην περίπτωση του τέλει πλευρικού ταιριάσματος. Έτσι, εάν σε μια συγκεκριμένη θέση των θραυσμάτων A, B το πρώτο κριτήριο ικανοποιείται, τότε απαιτείται η τοπική επικάλυψη ανάμεσα στον σταθερό και τον περιστρεφόμενο κρημό να είναι μικρότερη από ένα όριο  $\tau^0$ . Εάν η επικάλυψη είναι μεγαλύτερη από  $\tau^0$ , πρέπει να ληφθεί υπ όψιν η αυθαιρεσία στην παράλληλη μετακίνηση του θραύσματος B. Συνεπώς, για να αφαιρεθεί η αυθαιρεσία αυτή κάνουμε τα εξής: Για κάθε σημείο  $p$  του περιστρεφόμενου κρημού, θεωρείται η τομή του κάθετου επιπέδου στον άξονα  $z$  που τέμνει το  $p$ , με τον σταθερό κρημό. Βρίσκεται η ελάχιστη απόσταση  $\mu^p$  του  $p$  από όλα τα σημεία της τομής αυτής και ορίζεται ως  $\overrightarrow{\mu^p}$  το αντίστοιχο διάνυσμα. Ανάμεσα σε όλα τα  $\overrightarrow{\mu^p}$  εντοπίζεται αυτό με το μέγιστο μήκος, ας πούμε  $\vec{\mu}$ . Το περιστρεφόμενο θραύσμα B μετατρέπεται παράλληλα ως προς το  $-\vec{\mu}$  και ως προς την θέση που απέκτησε από την διαδικασία νωρίτερα και ο επικαλυπτόμενος όγκος επαναυπολογίζεται. Εάν ο όγκος είναι μικρότερος από  $\tau^0$  και το πρώτο κριτήριο ακόμα ικανοποιείται, τότε υπολογίζεται η συνολική επικάλυψη των δύο θραυσμάτων. Αντίστοιχα η συνολική επικάλυψη ανάμεσα στις ψηφιακές αναπαραστάσεις των συγκεκριμένων θραυσμάτων πρέπει να είναι μικρότερη από ένα όριο  $\tau^{F0}$ . Η ακριβής τιμή του ορίου εξαρτάται από τον όγκο των εμπλεκόμενων θραυσμάτων και την ποιότητα της μεθόδου ψηφιακής αναπαράστασης. Μετά από εκτεταμένες δοκιμές αποφασίστηκε ότι μια πολύ καλή τιμή για το όριο είναι ένα ποσοστό 0.25% του μικρότερου από τους δυο όγκους των θραυσμάτων A και B για την συγκεκριμένη μέθοδο αναπαράστασης που ακολουθείται.

**Τρίτο κριτήριο ταιριάσματος :** συσχέτιση της γεωμετρίας των επιφανειών επαφής με τον μέγιστο επιτρεπόμενο όγκο του  $V_{k,m}$

Το τρίτο κριτήριο είναι περισσότερο μια απαραίτητη συνθήκη παρά μια επαρκής. Όμως αυτό το κριτήριο που δρα σαν ένα φίλτρο απόρριψης για την εύρεση ταιριασμάτων έχει επιταχύνει δραστικά την απόδοση του συστήματος. Η βασική έννοια περιγράφεται ως ακολούθως: Έστω ότι μια συγκεκριμένη θέση τέλειου ταιριάσματος των θραυσμάτων A, B υπάρχει με την έννοια ότι το  $\tau_{k,m}$  είναι μηδέν ή ισοδύναμα οι κρημνοί  $E_k^F, E_{k,m}^R$  συμπίπτουν. Σε αυτήν την ιδανική περίπτωση, σε κάθε σημείο των κρημνών τα μοναδιαία διανύσματα κάθετα σε αυτούς  $\vec{n}_F$  και  $\vec{n}_R$  είναι αντίθετα. Στην πράξη, πρέπει να ληφθεί υπ όψιν την παρουσία αναπόφευκτων κενών ανάμεσα στα θραύσματα που ταιριάζουν, λόγω της διαδικασίας κατακερματισμού του αρχικού αντικειμένου και λόγω της φθοράς, για να δικαιολογηθεί η απόκλιση από την ιδανική κατάσταση.

Το τρίτο κριτήριο ορίζεται ως εξής. Έστω ότι τα θραύσματα A,B τοποθετούνται όπως περιγράφεται νωρίτερα και ο όγκος  $\tau_{k,m}$  είναι μικρότερος από την μεγαλύτερη αποδεκτή τιμή  $\tau^T$ . Το ολοκλήρωμα των γωνιών που ορίζεται από τον τύπο 
$$\mu = \oint_{\partial V_{k,m}} \arctan\left(\frac{\vec{n}_j}{\vec{n}_i}\right) dS$$
 ικανοποιεί την συνθήκη (1) με  $r_T, r_0$  να είναι οι αποστάσεις των  $B_k^S, B_k^T$  από τον κεντρικό άξονα του  $E_k^F$ ,  $\Delta\theta = \theta_T - \theta_0$  να είναι η γωνία που περιλαμβάνει το  $E_{k,m}^R$ .

Ισοδύναμα, εάν για την τωρινή θέση των θραυσμάτων A,B η μέση γωνία των κανονικών διανυσμάτων του  $\partial V_{k,m}$  υπερβαίνει το άνω όριο της συνθήκης (1), τότε η εξεταζόμενη θέση δεν είναι πραγματική θέση ταιριάσματος. Αυτό το κριτήριο απόρριψης έχει προκύψει από την λύση του διαφορικού προβλήματος που θα περιγραφεί στην συνέχεια με χρήση του λογισμού μεταβολών.

Έστω ένας χώρος U με οριακή επιφάνεια  $\partial U$  που αντιπροσωπεύει το κενό ανάμεσα σε δυο διπλανά θραύσματα και τα πλευρικά επιφανειακά μέρη τους σε αυτήν την

θέση. Το ολοκλήρωμα των γωνιών των μοναδιαίων διανυσμάτων που είναι κανονικά ως προς την  $\partial U$  εκφράζεται από την ποσότητα  $\mu = \oint_{\partial U} \arctan\left(\frac{\vec{n}_j}{\vec{n}_i}\right) dS$

Συνεπώς, το πρόβλημα εκφράζεται ως η αναζήτηση των ορίων της ποσότητας  $\mu$  δεδομένου ότι ο όγκος  $V$  του  $U$  περιορίζεται από  $0 \leq V \leq V_M$ . Οπότε το πρόβλημα μπορεί να διατυπωθεί χρησιμοποιώντας το Λανγκραντζιανό ολοκλήρωμα.

$$\iint_{E^R} f\left(\vec{x}, \frac{\partial \vec{x}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{x}}{\partial v}, u, v\right) dudv = \mu - \lambda \cdot V$$

Όπου  $(u, v)$  είναι οι ανεξάρτητες μεταβλητές της επιφάνειας  $\partial U$ ,  $\vec{x}(u, v)$  είναι το διάνυσμα θέσης ενός αυθαίρετου σημείου της  $\partial U$ ,  $\frac{\partial \vec{x}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{x}}{\partial v}$  οι αντίστοιχες μερικές παράγωγοι του  $\vec{x}$ . Συνεπώς το πρόβλημα μετασχηματίζεται στο πρόβλημα εύρεσης της επιφάνειας  $E^R$  (περιστρεφόμενος κρημνός) που τερματίζεται στις οριακές επίπεδες επιφάνειες  $B^S, B^T$  και τα κοινά άνω και κάτω επίπεδα  $C, D$  έτσι ώστε

$$\delta \iint_{E^R} f\left(\vec{x}, \frac{\partial \vec{x}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{x}}{\partial v}, u, v\right) dudv = 0$$

Η διαμόρφωση προτρέπει την χρήση κυλινδρικών συντεταγμένων και μια έκφραση του  $\partial U$  με τις  $\theta$  και  $z$  να είναι οι ανεξάρτητες μεταβλητές. Στην πραγματικότητα, εάν  $\vec{x}(r, \theta, z)$  είναι το διάνυσμα θέσης ενός αυθαίρετου σημείου που βρίσκεται στην επιφάνεια  $\partial U$  σε κυλινδρικές συντεταγμένες, η αρχή του διανύσματος  $\vec{x}$  (σημείο αναφοράς), θεωρείται να είναι στο εσωτερικό του  $U$  για να βεβαιωθεί η μοναδικότητα στην τιμή του  $\vec{x}$ . Είναι ολοφάνερο ότι

$$\vec{x}(\theta, z) = (r(\theta, z)\cos(\theta), r(\theta, z)\sin(\theta), z).$$

Σε καρτεσιανές συντεταγμένες, ο όγκος  $V$  του χώρου  $U$  είναι  $V = \int_U dx dy dz$ .

Εφαρμόζοντας το θεώρημα του Stokes προκύπτει  $V = \frac{1}{3} \oint_{\partial U} \vec{x}(\theta, z) \cdot \vec{n}(\theta, z) d\theta dz$ .

Αφού οι  $r$  και  $\vec{x}$  είναι συναρτήσεις των  $\theta$  και  $z$  το ολοκλήρωμα που εκφράζει τον όγκο που περικλείεται από τα  $E^R, B^S, B^T$ , και το επίπεδο  $xy$  γράφεται

$$V = \frac{1}{3} \int_S \int_{\theta_0}^{\theta_T} r(\theta, z)^2 - z r(\theta, z) \frac{\partial}{\partial z} r(\theta, z) d\theta dz$$

Το πρόβλημα τώρα μπορεί να εκφραστεί με έναν αυστηρό τρόπο ως εξής : «Ζητείται μεγιστοποίηση του  $\mu$  υπό την συνθήκη ότι  $V \leq V_M$ , όπου  $V_M$  σταθερό, και οι οριακές επιφάνειες  $B^S, B^T$  που είναι υποσύνολα του  $\partial U$  είναι γνωστά και σταθερά επίπεδα. Ο σταθερός κρημνός  $E^F$ , καθώς και η αρχική καμπύλη του περιστρεφόμενου κρημνού  $E^R$  είναι επίσης γνωστά.» Με άλλα λόγια το πρόβλημα είναι να προσδιοριστεί ο περιστρεφόμενος κρημνός που μεγιστοποιεί το  $|\mu|$  όταν  $V \leq V_M$ . Μια γενική λύση σε αυτό το πρόβλημα δίνεται στο ακόλουθο θεώρημα.

**Θεώρημα :** Θεωρούμε έναν τετράγωνο σωλήνα  $T$ , που περιορίζει ένα δισδιάστατο επίπεδο  $E^F$  σε μια επιφάνεια  $S^F$ . Έστω  $\Gamma^F$  η τομή του  $E^F$  με το  $T$  και  $\Gamma^R$  μια δεδομένη ομαλή καμπύλη πάνω στο  $T$  που δεν διασχίζει την  $\Gamma^F$ . Θεωρούμε επίσης τον χώρο  $\Omega$  που τα  $\Gamma^F$  και  $\Gamma^R$  ορίζουν στον  $T$ , και την περιοχή  $(\Omega) \geq 0$ . Ένας σταθερός άξονας, ας πούμε ο  $z$ , είναι επίσης δεδομένος και κάθετος σε δύο παράλληλα επίπεδα του  $T$ , δεν τέμνει το  $\Omega$  και το  $E^F$ , και τοποθετείται στην άλλη μεριά του  $\Gamma^R$  σε σχέση με το  $\Gamma^F$ . Επίσης θεωρούμε ότι ο άξονας  $z$  είναι μέρος του κυλινδρικού συστήματος συντεταγμένων  $(r, \theta, z)$ . Σε αυτό το σύστημα το  $\Gamma^F$  περικλείεται σε μια γωνία που ξεκινάει από τη  $\theta_0$  και τερματίζει στη  $\theta_T$ . Θεωρείται ότι κάθε τμηματικά λεία επιφάνεια  $E^R$  περιβάλλεται από το  $\Gamma^R$ , με μόνο περιορισμό ότι ο όγκος  $V$  του τρισδιάστατου χώρου που περιβάλλεται από τα  $T, E^F$  και  $E^R$ , έχει ένα άνω όριο  $V \leq V_M$ . Τότε, η ποσότητα που ορίζεται από τον τύπο

$$\mu = \int_{E^R} \arctan\left(\frac{\vec{n}^j}{\vec{n}^i}\right) dS - \int_{E^F} \arctan\left(\frac{\vec{n}^j}{\vec{n}^i}\right) dS$$

ικανοποιεί την ανισότητα

$$\left| \frac{\mu}{\Delta\theta\Delta z} \right| \leq \left| \ln\left(\frac{r_T}{r_0}\right) + \left| \frac{\Delta\theta}{2} + \frac{\Delta z}{6r^T} \left[ -r_0^2 + \frac{1}{\Delta\theta\Delta z} \int_{\theta_0}^{\theta_T} (T r(\theta, T)^2 - S r(\theta, S)^2) d\theta \right] \right| \right| \quad (1)$$

Όπου  $r_T, r_0$  είναι τα μήκη των ακτινών των σημείων του  $\Gamma^R$ , που αντιστοιχούν στα  $\theta_0$  και  $\theta_T$ ,  $\Delta\theta = \theta_T - \theta_0$ ,  $\Delta z = T - S$ , είναι η απόσταση των δυο επιπέδων του  $T$  που είναι κάθετα στο  $z$ , και  $r(\theta, T), r(\theta, S)$  είναι οι ακτίνες των μερών του  $\Gamma^R$  για  $z = T$  και  $z = S$  αντίστοιχα.

**Τέταρτο κριτήριο ταιριάσματος:** Συσχετισμός του μήκους των καμπυλών επαφής (σταθερή και περιστρεφόμενη αλυσίδα) με τη μέγιστη επιτρεπτή γεωμετρική διαφοροποίηση της άνω επιφάνειας των θραυσμάτων.

Το κριτήριο αυτό είναι άλλη μια αναγκαία συνθήκη ταιριάσματος. Υποθέτουμε ότι τα δύο θραύσματα εφάπτονται στο pixel #k του  $C^F$  και το pixel #M του  $C^R$ . Σε αυτό το σημείο, η αρχική  $B_k^S$ , και η τερματική  $B_k^T$  οριακή επιφάνεια είναι αναμφισβήτητα καθορισμένες. Στην διαδικασία του ελέγχου εάν αυτή είναι μια πραγματική θέση ταιριάσματος, το θραύσμα B περιστρέφεται γύρω από έναν άξονα κάθετο στο επίπεδο  $xy$  που περνάει από το σημείο επαφής των δύο θραυσμάτων που στιγμιαία θεωρείται σταθερό. Καθώς το θραύσμα B περιστρέφεται σε αρκετές περιπτώσεις μπορεί να μην συναντά το τερματικό οριακό επίπεδο, ή μπορεί να το συναντά ώστε να σχηματιστεί ένας περιστρεφόμενος κρημνός  $E_{k,m}^R$  αρκετά φαρδύς και σε απόσταση από τον σταθερό. Έτσι αναζητείται ο τρόπος συσχέτισης του μέγιστου επιτρεπτού πλάτους του  $E_{k,m}^R$  με τον μέγιστο επιτρεπτό όγκο  $\tau^T$  του  $V_{k,m}$ . Κάτω από πολύ εύλογες συνθήκες, που φαίνεται να ισχύουν στην πράξη, κάποιος μπορεί να εκφράσει το πλάτος του  $E_{k,m}^R$  συναρτήσει του μήκους της περιστρεφόμενης αλυσίδας  $\Gamma_{k,m}^R$ , δεδομένου ότι το κοινό κάτω επίπεδο παραμένει ίδιο. Με άλλα λόγια, αναζητούμε το πόσο μακριά μπορεί να είναι η περιστρεφόμενη αλυσίδα  $\Gamma_{k,m}^R$ , δεδομένου ότι τα κριτήρια 1 και 3 ικανοποιούνται.

**Πρόταση :** Έστω ότι σε ένα επίπεδο υπάρχει μια «σταθερή» καμπύλη  $\Gamma^F$ , μια «περιστρεφόμενη» καμπύλη  $\Gamma^R$  και δύο παράλληλα οριακά ευθύγραμμα τμήματα, ένα αρχικό  $\varepsilon^I$  και ένα τελικό  $\varepsilon^T$ . Επίσης έστω ότι το εμβαδό του τομέα που ορίζεται από τις τέσσερις αυτές καμπύλες παραμένει σταθερό και ίσο με  $\alpha$  και ότι το

ολοκλήρωμα των γωνιών  $\int_{T_A}^{T_B} \arctan\left(\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}\right) dt$  είναι επίσης γνωστό και ίσο με  $\gamma$ . Έτσι εάν η καμπύλη  $\Gamma^F$  είναι γνωστή και σταθερή, το μήκος της μεταβλητής καμπύλης  $\Gamma^R$

$$\text{δεν μπορεί να υπερβεί την τιμή } L_R = \frac{E_C}{|\bar{c}_A|} \sqrt{\frac{1}{\tan\left(\frac{\gamma}{T_{\Gamma^R-T_A}}\right)^2} + 1}$$

Το μήκος της περιστρεφόμενης αλυσίδας  $\Gamma^F$  είναι  $L^C = 100$  pixels. Η μέγιστη επιτρεπόμενη περιοχή που περικλείεται από τις καμπύλες  $\Gamma^F$ ,  $\Gamma^R$ ,  $\varepsilon^I$ ,  $\varepsilon^T$ , είναι  $\tau^T = 1000$  pixel και η μέση γωνία των διανυσμάτων που εφάπτονται στην προηγούμενη καμπύλη είναι  $\bar{\gamma} = 0.1745$  rad ή αντίστοιχα  $\bar{\gamma} = 10^\circ$ . Τότε το μέγιστο επιτρεπτό μήκος  $L^{EX}$  της περιστρεφόμενης αλυσίδας είναι  $L_R \approx 115$  pixel.

Για να εφαρμοστεί το προαναφερθέν τέταρτο κριτήριο ταιριάσματος, είναι απαραίτητο να υπάρχει μια εκτίμηση του πάνω φράγματος  $\alpha$  της περιοχής που περικλείεται από τις καμπύλες  $\Gamma^F$ ,  $\Gamma^R$ ,  $\varepsilon^I$ ,  $\varepsilon^T$ . Το άνω όριο μπορεί είτε να λαμβάνεται επί τούτου ή μπορεί να υπολογίζεται με τον εξής τρόπο: Είναι πολύ λογικό να υποθέσουμε ότι η περιοχή των εγκάρσιων τομών του τομέα  $V_{k,m}$  ακολουθεί κανονική κατανομή. Για να εξακριβωθεί αυτή η υπόθεση εφαρμόζεται ο έλεγχος Kolmogorov. Προκύπτει ότι ένα λογικό άνω όριο  $\alpha$  για την περιοχή που εξετάζεται είναι  $\alpha = 3.1 \frac{\tau^T}{\Delta z}$  αφού το 99.9% του κανονικού πληθυσμού των εγκάρσιων τομών παραμένει μέσα στο όριο. Το  $\tau^T$  είναι ο μέγιστος επιτρεπτός όγκος του  $V_{k,m}$  και  $\Delta z$  η απόσταση του άνω και κάτω επιπέδου στον άξονα  $z$ .

### **Ιεραρχία των τεσσάρων κριτηρίων ταιριάσματος.**

Για να αναπτυχθεί μια αλγεβρική αιτιολόγηση του αλγορίθμου θα χρησιμοποιηθεί μια αφαιρετική διαδικασία των στοιχείων της διαδικασίας ταιριάσματος ορίζοντας το  $D^n$  ως την αναπαράσταση των απλά συνδεδεμένων  $n$ -διάστατων ανοιχτών τομέων που ενσωματώνονται στο  $R^N$  για σταθερά  $N$ ,  $n \leq N$  και  $t : D^{n-1} \times D^{n-1} \rightarrow D^n$  που αντιπροσωπεύει τον σχηματισμό ενός  $n$ -διάστατου τομέα περιορισμένο από 2 ανοιχτά  $(n-1)$ -διάστατα οριακά στοιχεία. Προσθέτοντας τους μορφισμούς  $m$  από

τους τομείς  $D^n$  σε μια κλάση των μέτρων  $\mu^n$  σχηματίζουμε μια κατηγορία  $A^n$  με αντικείμενα  $D^{n-1} \times D^{n-1}$ ,  $D^n$ ,  $\mu^n$  και μορφισμούς  $t$ ,  $m$  και τις δυαδικές σχέσεις των σετ που μεταφέρουν οι τομείς από την κατηγορία των σχέσεων  $\text{Rel}$ . Δύο διαφορετικά ζευγάρια στο  $D^{n-1} \times D^{n-1}$  αντιστοιχίζονται μέσω ενός μορφισμού στην  $t$  σε δυο διαφορετικούς τομείς στο  $D^n$ , με την  $t$  να είναι μια κλάση μονομορφισμού, που συχνά υποδηλώνεται με το σύμβολο  $\hookrightarrow$ . Από την άλλη για να αποκτηθούν δυο διαφορετικές εικόνες του ίδιου  $n$ -τομέα στο  $\mu^n$ , χρειάζονται δύο διαφορετικές απεικονίσεις στην κλάση του  $m$ , όπου  $m$  είναι μια κλάση επιμορφισμών, που συχνά υποδηλώνεται με το βέλος  $\twoheadrightarrow$ . Έτσι, τα στοιχεία του  $A^n$  σέβονται την ακολουθία μορφισμών  $D^{n-1} \times D^{n-1} \hookrightarrow D^n \twoheadrightarrow \mu^n$ , η οποία είναι γνωστό ότι είναι ακριβής εάν οι πυρήνες των μορφισμών υπάρχουν. Ορίζοντας ένα μηδενικό στοιχείο  $A^n$ , οι πυρήνες και οι συν-πυρήνες του  $t$  και  $m$  για αυτήν την ακολουθία μορφισμών είναι σίγουρο ότι υπάρχουν. Έχει αποδειχτεί ότι επισυνάπτοντας στο  $A^n$  έναν βοηθητικό δυαδικό τελεστή, το  $A^n$  έχει το  $\emptyset$  σαν το μηδενικό του στοιχείο. Έτσι οι πυρήνες και οι συν-πυρήνες του  $A^n$  ακολουθούν την εξής σύντομη και ακριβή ακολουθία.

$$\emptyset \longrightarrow D^{n-1} \times D^{n-1} \xrightarrow{t} D^n \xrightarrow{m} \mu^n \longrightarrow \emptyset.$$

Το γεγονός ότι η ακολουθία αυτή είναι ακριβής, κάνει το  $A^n$  κανονικό αφού ο πυρήνας είναι  $m = \text{im } t$  και ο συν-πυρήνας  $t = \text{im } m$ . Συγκεντρώνοντας όλα τα  $A^n$  σε μια μεγαλύτερη κατηγορία  $A$  και ορίζοντας οριακούς τελεστές από τα αντικείμενα του  $A^n$  στα αντικείμενα του  $A^{n-1}$  μπορούμε να μετασχηματίσουμε την παραπάνω ακολουθία σε μια σύντομη ακριβή ακολουθία σύνθετων αλυσίδων.

Καθώς οι  $D^n$  είναι σύνθετοι τομείς, αποδέχονται τον οριακό τελεστή  $\partial$  που απεικονίζει κάθε τομέα πάνω στο όριο του. Για να καταστήσουμε το  $\partial D^n$  στοιχείο του  $D^{n-1}$  χρειάζεται να αφαιρέσουμε ένα σταθερό σημείο  $p$  από το  $\partial D^n$ , γράφοντας έτσι τον οριακό τελεστή στην μορφή  $\partial_p^n$ . Θεωρώντας τα στοιχεία του  $\mu^n$ , ένας οριακός τελεστής μπορεί να οριστεί σε δύο βήματα: (1) θεωρούμε ένα διαφορίσιμο μονομορφισμό  $\phi$  στην κλάση του  $t$ , του οποίου το ολικό ολοκλήρωμα ορίζεται ως  $\phi_*$ .



ανάμεσα στους εφαπτόμενους χώρους του  $D^{n-1}$  και  $D^n$ . (2) Καθώς το  $\mu^n$  έχει στοιχεία στον χώρο  $(D^n \rightarrow \mathbb{R}) / \text{im } \eta$ , θεωρούμε μια διαφορίσιμη συνάρτηση  $f : D^n \rightarrow \mathbb{R}$  και ένα μέτρο  $\mu \in \text{im } \eta$  και τα συνδυάζουμε για να ορίσουμε  $I \in \mu^n : (D, f, \mu) \rightarrow \int_D f d\mu$  και υπολογίζουμε την απόκλιση  $1^{ns}$  τάξης του  $I$  ως προς το  $\phi$ . Έτσι προκύπτει ότι το  $\mu^n$  είναι ισομορφικό στο  $D^n / \text{im}(\eta)$  και αφού το  $I$  ορίζεται σε απειροελάχιστες διαστάσεις, μπορούμε να ανασχηματίσουμε το  $I$  χρησιμοποιώντας το  $D \in D^n / \text{im}(\phi)$ . Συνεπώς

$$I = \int_D f \circ \phi d\mu = \int_D f \circ \phi \theta_\mu(\phi) \omega = \int_{\phi^{-1}(D)} f \circ \phi \theta_\mu(\phi) \phi^* \omega$$

Όπου το  $\omega$  υποδηλώνει τον όγκο στο  $D^n$ ,  $\phi^* \omega$  είναι η  $n-1$  διαφορίσιμη μορφή στο  $\phi^{-1}(D)$  που δημιουργείται από την υποχώρηση του  $\omega$  από το  $\phi$  και  $\theta_\mu(\phi)$  είναι η πυκνότητα του μέτρου  $\mu$  ως προς τον όγκο του  $D$ . Η πυκνότητα αυτή είναι εγγυημένο ότι υπάρχει από το θεώρημα Radon-Nikodym και από το γεγονός ότι  $\omega = 0 \Rightarrow \text{vol}(D) = 0 \Rightarrow D = \emptyset \Rightarrow \mu(D) = 0$  ικανοποιώντας την συνθήκη απόλυτης συνέχειας. Επιπλέον η αντίστροφη  $\phi^{-1}(D)$  του  $D$  στο  $D^{n-1} \times D^{n-1}$  υπάρχει και είναι μοναδική για κάθε  $D$  που ανήκει στο σύνολο  $\text{im}(\phi)$  αφού το  $\phi$  είναι μονομορφισμός.

Η συναρτησιακή απόκλιση του  $\phi$  μπορεί να βρεθεί, τουλάχιστον απειροστικά μέσω μιας ροής διανυσμάτων στο  $D^n$ ,  $\rho_{\eta^* X}^\varepsilon(\phi) = (\exp(\varepsilon \eta^* X))[\phi]$ , με το  $\eta$  να είναι ένα ένας αυθαίρετος διαφορίσιμος μονομορφισμός στην κλάση του  $\eta$ , το  $X$  ένα αυθαίρετο διάνυσμα πεδίου που ορίζεται στο εφαπτόμενο επίπεδο της  $\phi^{-1}(D)$ . Έτσι η απόκλιση πρώτης τάξης του  $I$  υπό την συναρτησιακή απόκλιση του  $\phi$  είναι

$$\delta I = \frac{d}{d\varepsilon} \int_{\phi^{-1}(D)} (f \theta_\mu) \circ \rho_{\eta^* X}^\varepsilon(\phi) \rho_{\eta^* X}^\varepsilon(\phi)^* \omega \Big|_{\varepsilon=0}$$

Αλλά τόσο το  $\frac{d}{d\varepsilon} (f \theta_\mu) \circ \rho_{\eta^* X}^\varepsilon(\phi) \Big|_{\varepsilon=0}$  όσο και το  $\frac{d}{d\varepsilon} \rho_{\eta^* X}^\varepsilon(\phi)^* \omega \Big|_{\varepsilon=0}$  είναι παράγωγοι Lie που δρουν σε μια συνάρτηση και μια διαφορική μορφή αντίστοιχα. Συνεπώς  $\frac{d}{d\varepsilon} (f \theta_\mu) \circ \rho_{\eta^* X}^\varepsilon(\phi) \Big|_{\varepsilon=0} = \eta^* X(f \theta_\mu)$  και από την ταυτότητα του Cartan και το

γεγονός ότι το  $\omega$  είναι ακριβές έχουμε το  $\left. \frac{d}{d\varepsilon} \rho_{\eta^*X}^\varepsilon(\varphi)^* \omega \right|_{\varepsilon=0} = (\mathbf{d}l_{\eta^*X} + l_{\eta^*X} \mathbf{d})\omega = \mathbf{d}l_{\eta^*X} \omega$ , όπου  $l_{\eta^*X}$  είναι το εσωτερικό γινόμενο μιας διαφορικής μορφής του  $\eta^*X$  και  $\mathbf{d}$  είναι η εξωτερική παράγωγος. Έτσι αντικαθιστώντας στην προηγούμενη εξίσωση έχουμε  $\delta I = \int_{\delta D} f \theta_\mu l_{\eta^*X} \omega$

Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα  $\mathbf{d}(f\theta_\mu l_{\eta^*X} \omega) = f\theta_\mu \mathbf{d}l_{\eta^*X} \omega + \eta^*X(f\theta_\mu) \omega$  και εφαρμόζοντας το θεώρημα Stokes έχουμε  $\int_D f \theta_\mu \mathbf{d}l_{\eta^*X} \omega = \int_{\partial D} f \theta_\mu \mathbf{d}l_{\eta^*X} \omega - \int_D \eta^*X(f\theta_\mu) \omega$ . Συνεπώς το δι ισούται με  $\delta I = \int_{\partial D} f \theta_\mu l_{\eta^*X} \omega$

Οπότε το  $\delta$  ορίζει έναν διαφορικό τελεστή στο  $\mu^n$ .

Αφού συμπληρώθηκε ο ορισμός των οριακών τελεστών για όλα τα στοιχεία της σύντομης ακριβής ακολουθίας, η ακολουθία μπορεί να διανεμηθεί σε σύνθετες αλυσίδες  $E = (D^{n-1} \times D^{n-1}, \partial^{n-1})$ ,  $D = (D^n, \partial^n)$ ,  $M = (\mu^n, \delta^n)$  όπως φαίνεται στο ακόλουθο αντιμεταθετικό διάγραμμα.

$$\begin{array}{ccccc}
 \downarrow \partial_p^n & & \downarrow \partial_p^{n+1} & & \delta^{n+1} \downarrow \\
 D^{n-1} \times D^{n-1} & \xrightarrow{\iota^n} & D^n & \xrightarrow{m^n} & \mu^n \\
 \downarrow \partial_p^{n-1} & & \downarrow \partial_p^n & & \delta^n \downarrow \\
 D^{n-2} \times D^{n-2} & \xrightarrow{\iota^{n-1}} & D^{n-1} & \xrightarrow{m^{n-1}} & \mu^{n-1} \\
 \downarrow \partial_p^{n-2} & & \downarrow \partial_p^{n-1} & & \delta^{n-1} \downarrow \\
 \vdots & \xrightarrow{\iota^{n-2}} & \vdots & \xrightarrow{m^{n-2}} & \vdots
 \end{array}$$

Συνεπώς με την χρήση του “zig – zag lemma” προκύπτει ότι υπάρχουν οριακές απεικονίσεις  $\widetilde{\delta}^n$  που μετατρέπουν τις ομόλογες ομάδες  $H_n(M)$  στις ομάδες  $H_{n-1}(E)$  κάνοντας την ακολουθία αυτή ακριβή.

$$\cdots \xrightarrow{\widetilde{\delta}^{n+1}} H_n(E) \xrightarrow{\iota^n} H_n(D) \xrightarrow{m^n} H_n(M) \xrightarrow{\widetilde{\delta}^n} H_{n-1}(E) \xrightarrow{\iota^{n-1}} \cdots$$

Από τον ορισμό των ομόλογων ομάδων

$$H_n(M) = \ker \delta^n / \text{im} \delta^{n+1} \quad \text{και} \quad H_{n-1}(E) = \ker \partial_p^{n-2} / \text{im} \partial_p^{n-1}$$

Αφού, εξ ορισμού, το  $\delta$  είναι γραμμικό, το  $H_n(M)$  μπορεί να γραφτεί στην μορφή της απεικόνισης  $L_{(a,b)} : (\tilde{I}^n, \delta^{n+1}I^{n+1}) \mapsto \alpha\tilde{I}^n + \beta\delta^{n+1}I^{n+1}$  όπου  $\tilde{I}^n \in \mu^n : \delta^n\tilde{I}^n = 0$  και  $I^{n+1} \in \mu^{n+1}$ . Από την άλλη, δεδομένου ενός στοιχείου  $\tilde{D}_n \in D^n : \delta^n I^n(m^n(\tilde{D}_n)) = 0$ , το προηγούμενο διάγραμμα συνεπάγεται ότι  $m^{n-1}(\partial_n^p \tilde{D}_n) = 0 \Rightarrow \partial_n^p \tilde{D}_n \in \ker m^{n-1} \Leftrightarrow \partial_n^p \tilde{D}_n \in \text{im } t^{n-1}$ . Έτσι για κάθε τέτοιο  $\tilde{D}_n$  υπάρχει ένα μοναδικό ζευγάρι  $(\tilde{D}_1^{n-2}, \tilde{D}_2^{n-2})$ . Από το “zig – zag lemma” αυτό το ζευγάρι ανήκει στο  $H_{n-1}(E)$ , και είναι ένα ζευγάρι κύκλων στο  $D^{n-2}$  πάνω σε ένα αντίστοιχο ζευγάρι ορίων στο  $D^{n-1}$  τα οποία είναι κοινά στο σταθερό σημείο  $p$ . Συνοψίζοντας τα παραπάνω, οι οριοθετημένοι τομείς που σχηματίζονται από δύο οριακά στοιχεία έτσι ώστε να αντιστοιχούν σε σταθερά σημεία ενός ολοκληρώματος Lagrange  $\tilde{I}^n$  με τους περιορισμούς που περιγράφονται από τα  $\delta^{n+1}I^{n+1}$ , έχουν τροχιές στους κύκλους  $C^{n-2}$  πάνω στα όρια των παραγμένων οριακών στοιχείων.

**Πρόταση :** Έστω δύο επιφάνειες  $E^F, E^R$  που είναι οριακά στοιχεία του τομέα  $D$  στο  $R^3$ , το οποίο καθιστά την Λανγκρατζιανή ορίζουσα  $I^3$  στατική.

(Α) Ο σχηματισμός του  $D$  από τα  $E_F, E_R$  έχει τροχιές στους κύκλους  $C^2$  πάνω στις μεταθέσεις των σημείων του  $\partial E_F$  και αντίστροφα.

Θεωρούνται επιπλέον τα ζευγάρια  $(\Gamma_S^F, \Gamma_T^F)$  και  $(\Gamma_S^R, \Gamma_T^R)$  όπου τα  $(\Gamma_S^F, \Gamma_T^F)$  είναι μέρη του περιγράμματος του  $\partial E_F$  και τα  $(\Gamma_S^R, \Gamma_T^R)$  είναι μέρη του περιγράμματος του  $\partial E_R$ . Έστω ότι υπάρχει ένα μέρος επιφάνειας  $E'_R$  με τα  $\Gamma_S^R, \Gamma_T^R$  να έγγυνται στο όριο της, καθιστώντας την Λανγκρατζιανή ορίζουσα  $I^2 + \lambda_2 \delta I^3$  στατική.

(Β) Έτσι ο σχηματισμός του  $E'_R$  από τα  $(\Gamma_S^R, \Gamma_T^R)$  έχει τροχιές στους κύκλους  $C^1$  πάνω στην δυική σχέση  $(\partial_p \Gamma_S^R, \partial_p \Gamma_T^R) \sim (\partial_p \Gamma_S^F, \partial_p \Gamma_T^F)$  πάνω στις κοινές μεταθέσεις των τερματικών σημείων των  $(\Gamma_S^F, \Gamma_T^F)$  και  $(\Gamma_S^R, \Gamma_T^R)$ .

(Γ) Αυτά τα τερματικά σημεία είναι πλήρως καθορισμένα σαν στατικά σημεία μιας Λανγκρατζιανής ορίζουσας  $I^1 + \lambda_1 \delta I^1$ .

Αυτή η ακολουθία στατικών σημείων – τροχιών – στατικών σημείων - ... είναι ακριβής υπονοώντας ότι δεν υπάρχει δεδομένος σχηματισμός Langrange στις ρυθμίσεις περιορισμού λάθους για τις ταυτόχρονες μεγιστοποιήσεις των τομέων και των οριακών στοιχείων τους.

Η ακολουθία που περιγράφεται σε αυτήν την πρόταση είναι ακριβώς η ιεραρχία των κριτηρίων της μεθοδολογίας που παρουσιάζεται.

### **3.2 Εφαρμογή της μεθόδου**

#### **1) Τρισδιάστατη σάρωση των θραυσμάτων**

Για την σάρωση χρησιμοποιείται ένα πρωτότυπο σύστημα IMETRIC GMBH ειδικά διαμορφωμένο για αρχαιολογικά ευρήματα. Το σύστημα αποτελείται από 2 κάμερες και ένα προβολέα DLP υψηλής ποιότητας, με κανονική ακρίβεια σάρωσης περίπου 3-7  $\mu\text{m}$ .

Τα αντικείμενα προς σάρωση τοποθετήθηκαν σε έναν δίσκο αναφοράς που περιείχε και ορισμένους βοηθητικούς στόχους. Αρχικά ο δίσκος σαρώθηκε και μετρήθηκε κενός ώστε να ληφθούν οι ακριβείς θέσεις στους άξονες xyz των στόχων. Η μέση ακρίβεια των μετρήσεων αυτών ήταν 5  $\mu\text{m}/1\text{ m}$ . Ο δίσκος αναφοράς τοποθετήθηκε σε μια συσκευή περιστροφής και για κάθε γωνία περιστροφής μετρήθηκε η θέση των βοηθητικών στόχων. Έπειτα, ένα προς ένα τα θραύσματα τοποθετήθηκαν στον δίσκο και οι συντεταγμένες των δειγματικών σημείων στην επιφάνεια μετρήθηκαν στη βάση των μετρήσεων των δίσκων αναφοράς. Οι συντεταγμένες των σημείων της επιφάνειας έχουν ληφθεί με φωτογραμμετρική ανασύνθεση από δύο διαφορετικές δισδιάστατες προβολές με την μεθοδολογία της φωτογραμμετρικής μεθόδου του δομημένου φωτός. Η διαδικασία της σάρωσης πραγματοποιήθηκε με ανάλυση δειγματοληψίας 0.14 mm.

## 2) Περιγραφή της διαδικασίας αυτόματης ανασύνθεσης των θραυσμένων αντικειμένων στη βάση των προαναφερθέντων κριτηρίων.

Έστω ότι υπάρχουν  $N$  διαθέσιμα θραύσματα και οι τρισδιάστατες αναπαραστάσεις τους που έχουν προκύψει από την εφαρμογή της διαδικασίας που αποτελείται από τα βήματα που περιγράφονται στη συνέχεια.

### **Βήμα 1** – Σωστή επιλογή παραμέτρων

Επιλέγεται ένα γωνιακό βήμα  $\delta\theta = 1^\circ$  για να παραχθούν όλες οι περιστρεμμένες εκδοχές του κάθε θραύσματος. Στην συνέχεια επιλέγεται το μήκος της καμπύλης επαφής στην άνω επιφάνεια  $L_C$  του σταθερού θραύσματος να είναι ένα ποσοστό 15% του μέσου μήκους/ περιμέτρου των οριακών καμπυλών των άνω επιφανειών όλων των θραυσμάτων. Επίσης υπολογίζεται η μέση περιοχή όλων των πλευρικών επιφανειών των θραυσμάτων και χρησιμοποιείται μαζί με την  $L_C$ , για να οριστεί το κατώφλι του όγκου  $\tau^T$  ώστε ένα μέγιστο μέσο κενό  $h$  mm ανάμεσα στα πραγματικά θραύσματα που ταιριάζουν να είναι αποδεκτό. Η διαδικασία ξεκινάει από μια πολύ μικρή τιμή του  $h$  ας πούμε  $h = 0.4\text{mm}$  ώστε να υπολογιστεί το σχεδόν τέλειο ταιρίασμα ανάμεσα σε διπλανά κομμάτια. Έπειτα αυξάνεται το  $h$  μέχρι την τιμή  $1.2\text{mm}$  ώστε να διερευνηθούν πιθανά ταιριάσματα με μεγαλύτερα κενά. Επιπλέον για κάθε τιμή του  $h$  ορίζεται η περιοχή κατωφλίου που περικλείουν οι καμπύλες επαφής,  $E_R = hL_C$ , μαζί με το κατώφλι οριακής απόκλισης  $\gamma = \arctan\left(\frac{h}{L_C}\right)$  για τον υπολογισμό του  $L^{EX}$ .

**Βήμα 2** – Εφαρμογή των κριτηρίων θεωρώντας ως σταθερά τα μεγαλύτερα θραύσματα.

Αρχικά εντοπίζεται το θραύσμα με την μεγαλύτερη άνω επιφάνεια, έστω  $F_1$  και το χρησιμοποιείται ως το σταθερό θραύσμα της διαδικασίας. Στη συνέχεια αναζητούνται πιθανές θέσεις ταιριάσματος ανάμεσα στο  $F_1$  και όλα τα άλλα

Θραύσματα τα οποία ονομάζονται περιστρεφόμενα, σύμφωνα με την ως τώρα ανάλυση και εφαρμόζοντας τα κριτήρια με την εξής σειρά.

A) Πρώτα εφαρμόζεται το κριτήριο 4 ελέγχοντας τα σχετικά μήκη των καμπυλών επαφής στις κοινές άνω επιφάνειες των θραυσμάτων.

B) Έπειτα, αν το κριτήριο 4 επαληθεύεται, εξετάζεται εάν οι επιφάνειες επαφής των δυο επιλεγμένων θραυσμάτων στην συγκεκριμένη σχετική θέση ικανοποιούν το κριτήριο 3 όσο αφορά την γεωμετρική τους ομοιότητα

Γ) Εάν το κριτήριο 3 ικανοποιείται, το δεύτερο κριτήριο ελέγχει για πιθανές επικαλύψεις ανάμεσα στα δύο θραύσματα στην δεδομένη θέση, τόσο τοπικά όσο και συνολικά.

Δ) Τέλος ελέγχεται το κριτήριο 1 το οποίο εξετάζει εάν ο όγκος ανάμεσα στα δύο θραύσματα είναι μικρότερος από το όριο  $\tau^T$ .

Εάν ικανοποιείται και το τελευταίο κριτήριο τότε το σύστημα χαρακτηρίζει την συγκεκριμένη σχετική θέση σαν μια θέση ταιριάσματος.

**Βήμα 3** – Συνένωση των ταιριασμένων θραυσμάτων με σκοπό την δημιουργία νησιού

Αν η εφαρμογή του δεύτερου βήματος προσφέρει ταιρίασμα του θραύσματος  $F_1$  με έναν αριθμό άλλων θραυσμάτων τότε εικονικά τα συνενώνουμε ώστε να σχηματιστεί ένα νησί  $I_1$ .

**Βήμα 4** – Επανάληψη της διαδικασίας ανασύνθεσης για τα θραύσματα που δεν έχουν ταιριαστεί ακόμα

Από τα θραύσματα που δεν ανήκουν στο νησί  $I_1$  επιλέγεται αυτό με την μεγαλύτερη άνω επιφάνεια και του ανατίθεται να έχει τον ρόλο του  $F_1$  επαναλαμβάνοντας τα βήματα 2, 3 και 4 αποκτώντας ένα σύνολο νησιών  $I_n$ . Η διαδικασία σταματάει όταν όλα τα θραύσματα έχουν ελεγχθεί και δεν έχουν αναφερθεί άλλα ταιριάσματα.

## **Βήμα 5 – Επανάληψη της διαδικασίας για νέα τιμή της σταθεράς h**

Το h αυξάνεται κατά μια μικρή ποσότητα π.χ. 0.2mm ώστε να επιτραπεί ένα μεγαλύτερο κενό ανάμεσα σε δύο διπλανά θραύσματα και να επαναληφθούν τα βήματα 1-5.

Σε περίπτωση που κατά την διάρκεια της διαδικασίας προκύψουν λανθασμένα ή ασυνεπή ταιριάσματα, τότε η διαδικασία επιστρέφει στο σημείο όπου η ασυνέπεια εμφανίστηκε για πρώτη φορά και ελέγχονται όλες τις ακολουθίες πιθανών ταιριασμάτων για να βρεθεί αυτή που δημιούργησε την ασυνέπεια. Παρόλα αυτά κατά την εφαρμογή της μεθόδου σε πραγματικά δεδομένα δεν αναφέρθηκε κανένα εσφαλμένο ταίριασμα.

### **3) Εφαρμογή της διαδικασίας ταιριάσματος στην ψηφιακή ανασύνθεση θραυσμένων προϊστορικών τοιχογραφιών.**

Πρώτα το σύστημα ελέγχθηκε από τους συγγραφείς [2] στην περίπτωση δύο αντικειμένων που έχουν σπάσει σκόπιμα. Χρησιμοποιήθηκε μια πέτρινη πλάκα η οποία τοποθετήθηκε σε ένα σφραγισμένο σάκο και έπεσε από ένα συγκεκριμένο ύψος. Η διαδικασία επαναλήφθηκε με μια δεύτερη πλάκα. Η πρώτη πλάκα χωρίστηκε σε 9 κομμάτια και η δεύτερη σε 15. Τα 24 συνολικά κομμάτια σαρώθηκαν και προ-επεξεργάστηκαν όπως περιγράφεται νωρίτερα. Η διαδικασία οδήγησε στον σωστό σχηματισμό δύο συνόλων που αντιστοιχούν στις αρχικές πλάκες.

Στην συνέχεια για να ελεγχθεί το σύστημα με τα πραγματικά επιθυμητά δεδομένα σαρώθηκαν 41 θραύσματα από την συλλογή των θραυσμάτων που βρέθηκαν σε ανασκαφές της Μυκηναϊκής Ακρόπολης στην Τίρυνθα. Το σύστημα ανίχνευσε 9 νησιά θραυσμάτων που ταιριάζουν με το κάθε νησί να αποτελείται από 2-4 θραύσματα. Τα αποτελέσματα ελέγχθηκαν από συντηρητές και αρχαιολόγους και επιβεβαιώθηκε ότι όλες οι προτεινόμενες θέσεις ταιριάσματος είναι σωστές με βάση την γνώση και την εμπειρία τους.

Κατά την διάρκεια της εφαρμογής της μεθόδου παρατηρήθηκαν οι δύο περιπτώσεις σε ότι αφορά τον χρόνο.

- (1) Όταν το σύστημα δεν ανίχνευε κάποιο ταίριασμα ανάμεσα σε ένα ζεύγος, τότε ο χρόνος που χρειαζόταν για την απόφαση δεν ξεπερνούσε τα 14 δευτερόλεπτα.
- (2) Όταν κάποιο ταίριασμα ανιχνευόταν, απαιτούνται μέχρι 8 λεπτά για να βρεθεί η βέλτιστη θέση ταιριάσματος. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι υπάρχουν αρκετές γειτονικές σχετικές θέσεις των δύο θραυσμάτων όπου όλα τα κριτήρια επαληθεύονται και πρέπει με υπολογισμούς των όγκων  $\tau_{k,m}$  και  $V_{k,m}$  να βρεθεί η βέλτιστη θέση. Σε κάθε περίπτωση η διαδικασία ταιριάσματος είναι άμεσα παραλληλοποιήσιμη και έτσι ο συνολικός χρόνος που απαιτείται για την διαδικασία μπορεί σχεδόν γραμμικά να ελαχιστοποιηθεί αυξάνοντας τον αριθμό των επεξεργαστών που χρησιμοποιούνται.



## 4. Περιγραφή της διαδικασίας ψηφιακής επεξεργασίας των τρισδιάστατων αναπαραστάσεων των θραυσμάτων

### 4.1 Περιγραφή των βημάτων επεξεργασίας

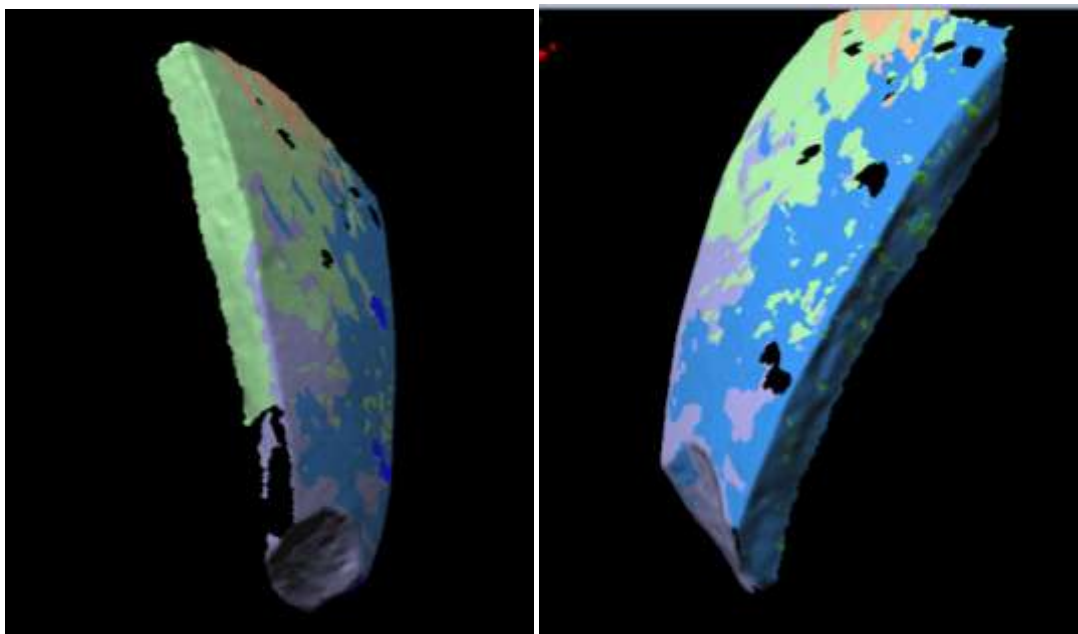
Στο κεφάλαιο αυτό, θα περιγραφεί η διαδικασία που εφαρμόσαμε για την ψηφιακή επεξεργασία των τρισδιάστατων αναπαραστάσεων αγγείων, διαδικασία που είναι απαραίτητη, ώστε στα θραύσματα αυτά να εφαρμοστεί η μεθοδολογία που περιγράφηκε στο κεφάλαιο 3.

Η διαδικασία ξεκινάει με την ψηφιακή καταγραφή των θραυσμάτων σε απεικονίσεις 3 διαστάσεων. Για την καταγραφή αυτή χρησιμοποιήθηκε ένας τρισδιάστατος σαρωτής μέσω του οποίου σαρώθηκε για το κάθε αντικείμενο ξεχωριστά η άνω και η κάτω όψη του. Η σάρωση της κάθε όψης έγινε με την βοήθεια ενός βοηθητικού δίσκου ώστε να είναι ευκολότερος ο προσδιορισμός των συντεταγμένων.

Η κάθε όψη και κατά συνέπεια το κάθε αντικείμενο αποθηκεύονται και απεικονίζονται σαν ένα σύνολο από σημεία (point cloud). Σε ένα τρισδιάστατο σύστημα απεικόνισης όπως αυτό που χρησιμοποιείται τα σημεία του συνόλου ορίζονται από τις συντεταγμένες τους στα τρία επίπεδα X, Y και Z.

Για την κάθε όψη πραγματοποιούνται πάνω από 10 σαρώσεις για την επίτευξη όσο το δυνατό πιο πυκνής ψηφιακής τρισδιάστατης απεικόνισης.

Στην συνέχεια, για την κάθε όψη έπρεπε οι εικόνες που είχαν προκύψει από τις σαρώσεις να ενοποιηθούν βέλτιστα γιατί παρά την χρήση των βοηθητικών δίσκων και των συντεταγμένων οι σαρώσεις δεν ήταν δυνατό να ταιριάξουν πλήρως χωρίς κάποια περεταίρω εργασία, με αποτέλεσμα να παρατηρηθούν αρκετές αποκλίσεις ανάμεσα στις μετρήσεις. Στις παρακάτω εικόνες φαίνεται η άνω όψη ενός θραύσματος αφού έχει σαρωθεί. Τα διάφορα χρώματα είναι οι διαφορετικές εικόνες ή μετρήσεις που έχουν προκύψει από κάθε σάρωση.



Για την πραγματοποίηση της διαδικασίας αναζητούνται οι μετρήσεις που έχουν σημεία που ανήκουν σε πλάγιες όψεις «απομονωμένες» από τις υπόλοιπες (χωρίς δηλαδή κοινά χρώματα), δηλαδή, χρώματα τα οποία βρίσκονται μόνα τους σε πλευρές του σχήματος. Για παράδειγμα, στο αριστερό σχήμα η μωβ μέτρηση βρίσκεται μόνη της στο κάτω πλαϊνό μέρος.

Αν δεν υπάρχουν τέτοιες μετρήσεις, αναζητούνται αυτές που βρίσκονται σε όψεις με λίγες μετρήσεις (περισσότερες της μίας) και με κενά. Δηλαδή σύνολα από σημεία του ίδιου χρώματος που βρίσκονται σε πλευρές του σχήματος που δεν έχουν πολλά χρωματικά σύνολα και έχουν αρκετά κενά. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι η πράσινη μέτρηση στο αριστερό σχήμα.

Σε κάθε αντικείμενο μπορεί να υπάρχουν αρκετές μετρήσεις που ικανοποιούν τα παραπάνω κριτήρια. Από τις μετρήσεις αυτές επιλέγεται μία ώστε να «κλειδωθεί» και οι υπόλοιπες να ταιριάξουν με βέλτιστο τρόπο πάνω της. Το κριτήριο επιλογής της μέτρησης που κλειδώνεται είναι να έχει σημεία τόσο στην πλάγια όψη όσο και στην κάτοψη. Δηλαδή αναζητούνται αρκετά συνεκτικά σημεία ώστε να προκύψει καλύτερο αποτέλεσμα.

Παρατηρείται ότι στις εικόνες που έχουν παρατεθεί προηγουμένως, η μέτρηση με το μωβ χρώμα ικανοποιεί τα κριτήρια που έχουν τεθεί και είναι αυτή που τελικά χρησιμοποιήθηκε.

Συνεπώς αποφασίζουμε η μωβ μέτρηση να παραμείνει σταθερή και οι υπόλοιπες να κινηθούν με αναφορά αυτή ώστε να ταιριάξουν βέλτιστα μεταξύ τους και, επάλληλα, και με την κλειδωμένη. Για να γίνει αυτό χρησιμοποιείται η μέθοδος της «ευθυγράμμισης βέλτιστου ταιριάσματος»

Κατά την μέθοδο αυτή είναι επιθυμητό το σφάλμα των στοιχειωδών μετακινήσεων να είναι μικρότερο από  $10^{-6}$ . Αυτό επιτυγχάνεται με σχετικά πολύ μικρές μετακινήσεις των επιφανειών έτσι ώστε η σύγκλιση τους να αυξάνεται συνεχώς. Κατά την διαδικασία αυτή μπορεί να παρατηρηθεί ότι κάποια μέτρηση δημιουργεί προβλήματα λόγω κακής ποιότητας κατά την λήψη της και να αφαιρεθεί από το σύνολο των μετρήσεων.

Ο αλγόριθμος που χρησιμοποιείται είναι ένας επαναληπτικός αλγόριθμος ελαχίστων τετραγώνων και έχει ως σκοπό τη βέλτιστη ευθυγράμμιση του συνόλου των τρισδιάστατων εικόνων. Ο αλγόριθμος αυτός στοχεύει στην ελαχιστοποίηση των αποστάσεων μεταξύ των επικαλυπτόμενων επιφανειών στο σύνολο αυτό και υποθέτει ότι έχει προηγηθεί μια καλή προσέγγιση της ευθυγράμμισης των επιφανειών από την σάρωση ή από τον χρήστη. Ένα σημαντικό χαρακτηριστικό της τεχνικής είναι ότι διανέμει το λάθος της ευθυγράμμισης σε ολόκληρο το αντικείμενο, παρέχοντας έτσι μια καλά ισορροπημένη ευθυγράμμιση στο τρισδιάστατο σύνολο.

Υπάρχει περίπτωση η επιφάνεια που θα επιλεγεί να κλειδωθεί να μην επιτυγχάνει την επιθυμητή σύγκλιση και να χρειαστεί να επιλέξουμε μια άλλη μέτρηση ως σταθερή και να ξανατρέξουμε την μέθοδο από την αρχή.

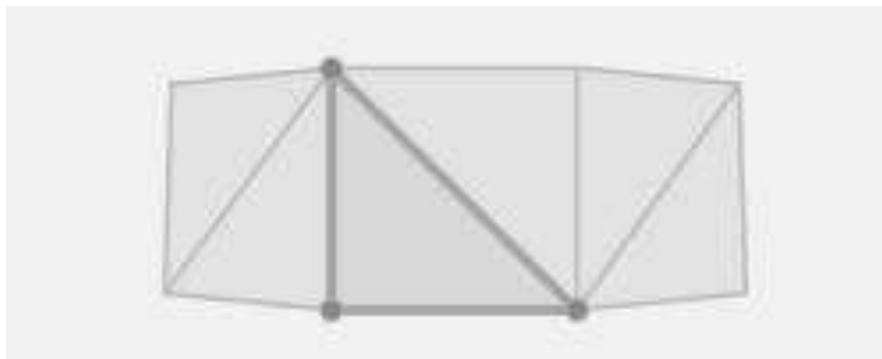
Αφού η διαδικασία αυτή πραγματοποιηθεί για την άνω και την κάτω όψη, πρέπει οι δύο επιφάνειες που έχουν προκύψει να ενωθούν σε μία. Αυτό πραγματοποιείται

κλειδώνοντας την μια επιφάνεια και ψάχνοντας το βέλτιστο ταίριασμα μεταξύ τους. Για να επιτευχθεί αυτό είναι σημαντικό να ελεγχθεί ο προσανατολισμός των δύο όψεων ώστε να μην ταιριάζουν με λάθος τρόπο.

Αφού επιλεγεί η μια από τις δύο όψεις, η δεύτερη πρέπει να προσανατολιστεί αρχικά με ανθρώπινη βοήθεια ώστε να δημιουργηθεί σχεδόν ένα συμπαγές αντικείμενο. Στην συνέχεια ο αλγόριθμος αναλαμβάνει το βέλτιστο ταίριασμα, δουλεύοντας αυτή τη φορά με δυο σετ εικόνων. Στην πράξη ο αλγόριθμος χρησιμοποιεί αυτή τη φορά μόνο 2 όψεις για να πετύχει με μικρές μετατοπίσεις το βέλτιστο ταίριασμα.

Οι επιφάνειες που έχουν προκύψει τριγωνοποιούνται. Για κάθε τρίγωνο που προκύπτει υπάρχει ένα μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στην επιφάνεια του συγκεκριμένου τριγώνου με κατεύθυνση προς το εξωτερικό του σχήματος.

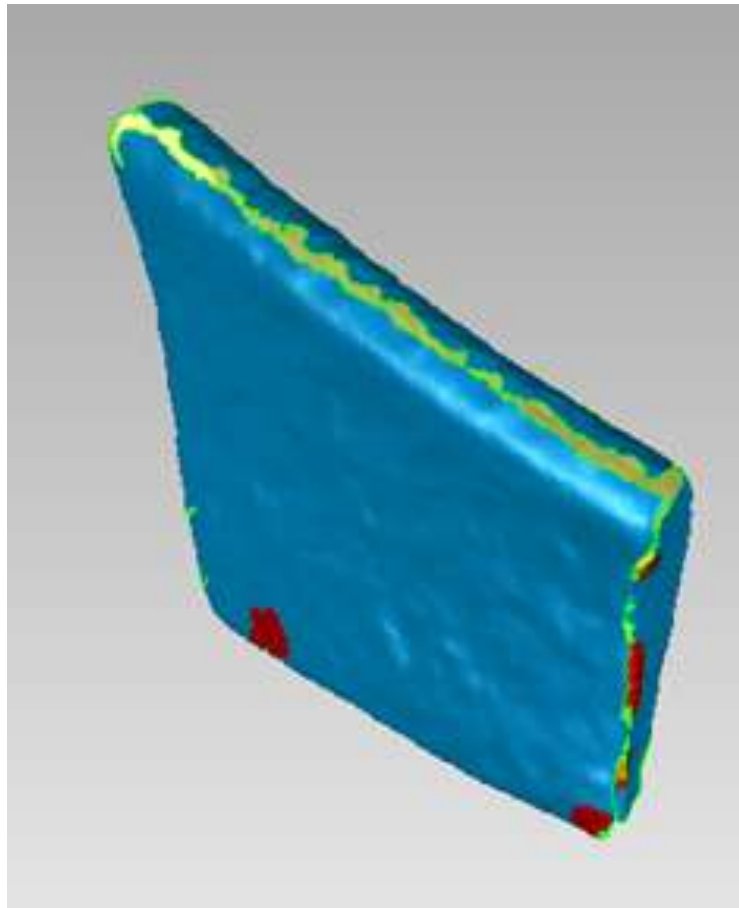
Η τρισδιάστατη μοντελοποίηση με τρίγωνα σημείων γίνεται με τον τρόπο που φαίνεται στην εικόνα:



Ουσιαστικά η διαδικασία μοιάζει με την μοντελοποίηση με την χρήση πολυγώνων, αφού το τρίγωνο είναι το πιο απλό πολύγωνο, το οποίο περιέχει τρεις πλευρές. Τα πολύγωνα (κι συγκεκριμένα εδώ τα τρίγωνα) χρησιμοποιούνται για να προσεγγιστεί η επιφάνεια του τρισδιάστατου μοντέλου όσο το δυνατό καλύτερα.

Συχνά, λόγω της ποιότητας των σαρώσεων ή λόγω ιδιαιτεροτήτων του αντικειμένου παρατηρούνται στο αντικείμενο που έχει δημιουργηθεί με τον παραπάνω τρόπο

κάποια μη φυσιολογικά εξογκώματα στο πλέγμα της επιφάνειας και κάποια κενά. Για παράδειγμα στην ακόλουθη εικόνα με κόκκινο έχουν σημειωθεί τα λάθη στο πλέγμα και με πράσινο περίγραμμα τα κενά.



Για να διορθωθούν αυτά τα σφάλματα χρησιμοποιείται μια μέθοδος όπου ελέγχει όλα τα τρίγωνα σημείων των δύο επιφανειών και συμπληρώνει τα κενά ή ομαλοποιεί τις ατέλειες όπου είναι απαραίτητο.

Μετά από τα προηγούμενα βήματα, τα ανασκαφέντα αντικείμενα έχουν μοντελοποιηθεί στον υπολογιστή και είναι έτοιμα σε ενιαία μορφή, χωρίς τρύπες και άλλες ατέλειες και με κλειστά περιγράμματα.

Στην συνέχεια πρέπει από κάθε ψηφιακό αντικείμενο να εξαχθεί το περίγραμμα και οι επιφάνειες του. Ουσιαστικά, πρέπει να βρεθούν δύο διακριτές καμπύλες που

διαχωρίζουν την άνω και κάτω όψη από την πλαϊνή. Ο διαχωρισμός αυτός γίνεται μαρκάροντας όσο το δυνατό περισσότερα από τα σημεία των καμπυλών, δημιουργώντας έτσι δύο διακριτές καμπύλες. Για να ανιχνευτεί ποια από τις δύο επιφάνειες είναι η άνω και ποια η κάτω το συχνότερο κριτήριο που χρησιμοποιείται είναι η κυρτότητα. Συνήθως η άνω επιφάνεια είναι κυρτή και η κάτω κοίλη.

Με την εκτέλεση των προηγούμενων βημάτων, προκύπτουν το άνω ή έξω περίγραμμα, το κάτω ή έσω περίγραμμα τα οποία είναι τα περιγράμματα των άνω και κάτω επιφανειών. Στη συνέχεια τα περιγράμματα χρησιμοποιούνται για να διαχωριστούν οι δύο επιφάνειες (άνω και κάτω) από την παράπλευρη.

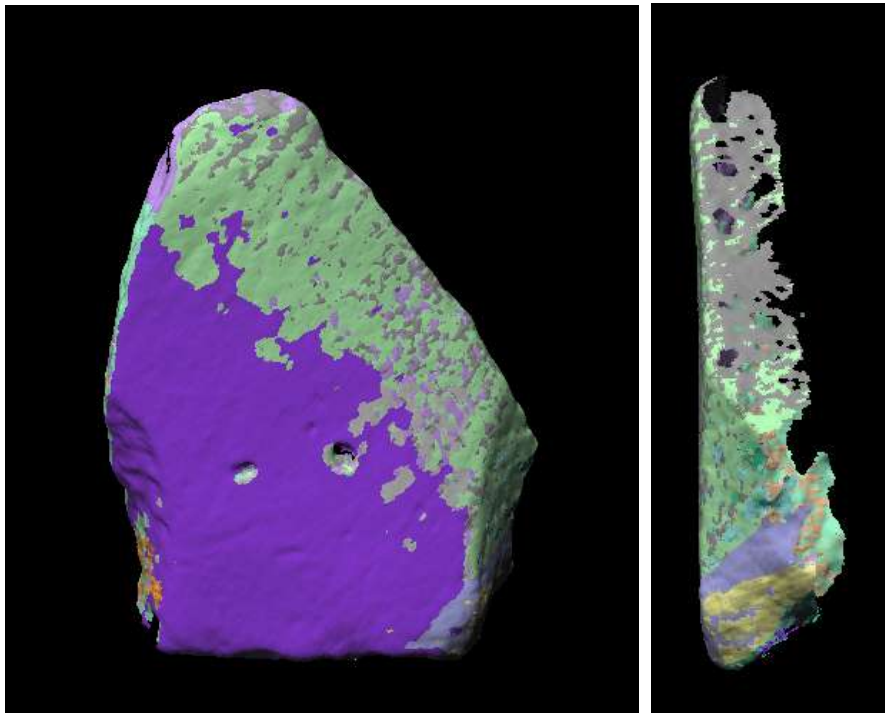
Αφού βρεθούν τα σημεία που διαχωρίζουν την πλαϊνή επιφάνεια από την άνω, οι τρεις επιφάνειες εξάγονται για να εφαρμοστούν σε αυτά οι αλγόριθμοι που ανεπτύχθησαν από τους συγγραφείς των σχετικών δημοσιεύσεων [1] και [2] και παρουσιάσαμε στις προηγούμενες ενότητες, ώστε να εξεταστεί η ύπαρξη πιθανών ταιριασμάτων.

#### 4.2 Χαρακτηριστικές εικόνες από την εκτέλεση της διαδικασίας

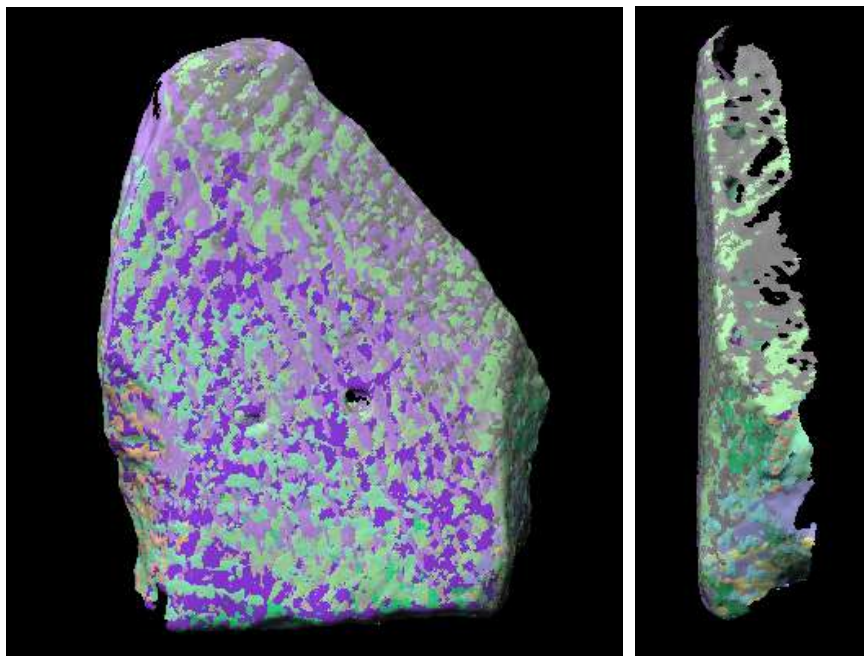
Στις εικόνες που ακολουθούν φαίνονται χαρακτηριστικά αποσπάσματα της εκτέλεσης των βημάτων που περιγράφηκαν στην προηγούμενη παράγραφο.



Η κάτω όψη του θραύσματος μαζί με τα βοηθητικά αντικείμενα που χρησιμοποιήθηκαν για την σάρωση

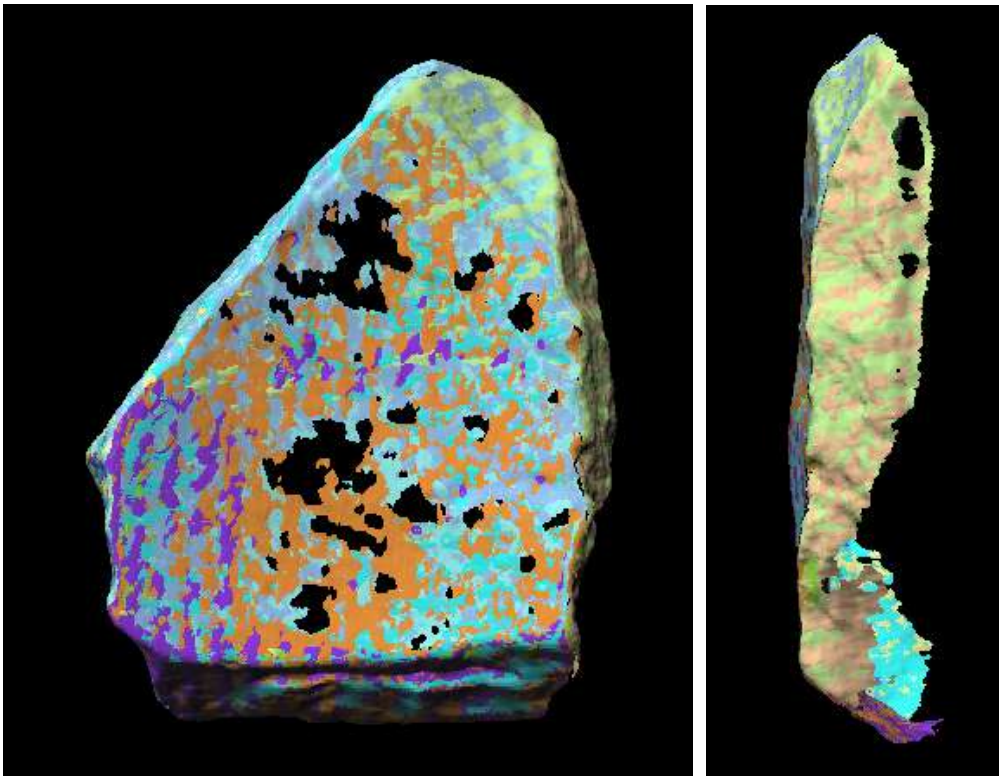
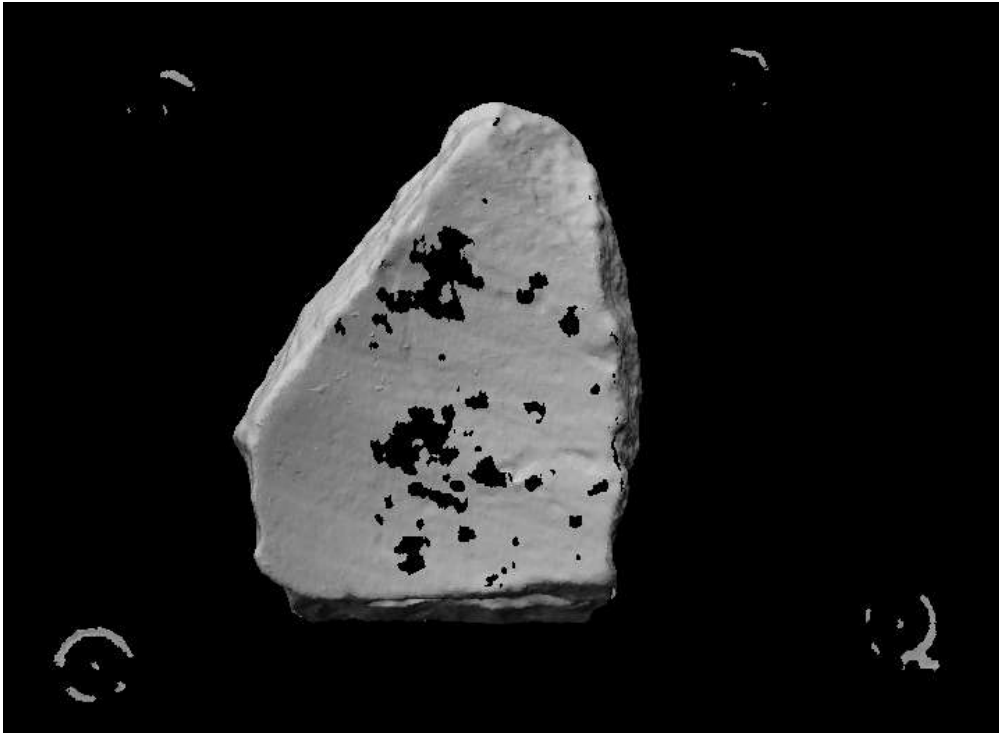


Η εμπρός και μια πλάγια όψη του άνω μέρους του θραύσματος. Το κάθε χρώμα της εικόνας αντιπροσωπεύει μια διαφορετική σάρωση του αντικειμένου.

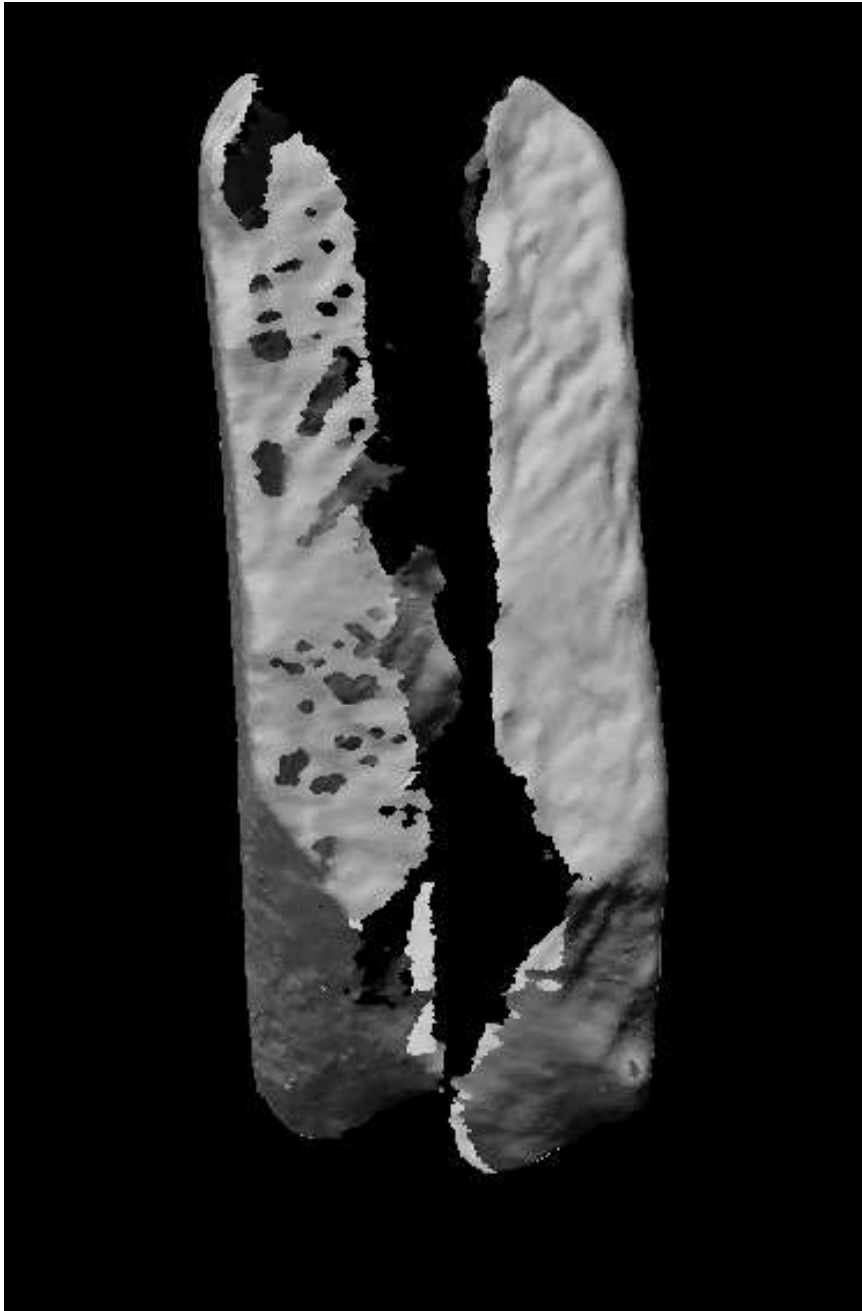


Οι αντίστοιχες όψεις μετά την εκτέλεση του επαναληπτικού αλγορίθμου ευθυγράμμισης βέλτιστου ταιριάσματος. Είναι αντιληπτό ότι οι διαφορετικές σαρώσεις έχουν ουσιαστικά ταυτιστεί.

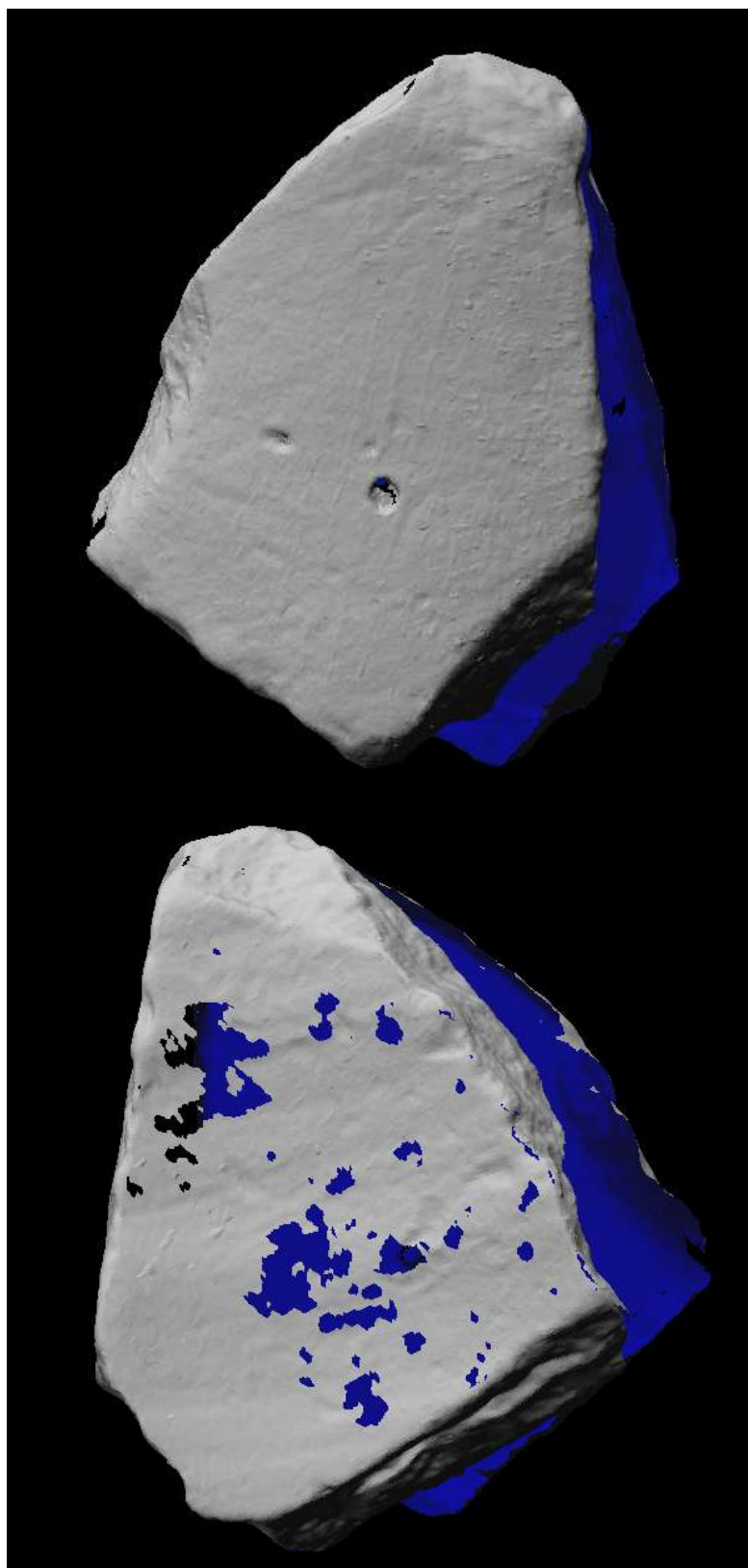




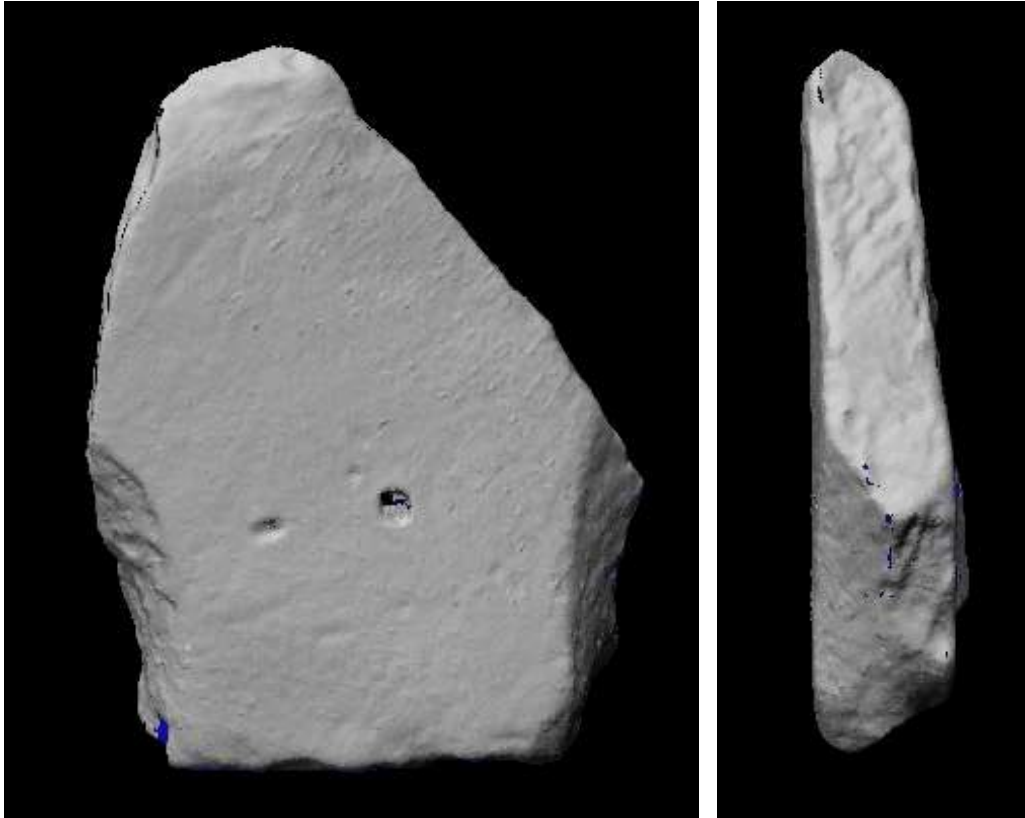
Οι αντίστοιχες απεικονίσεις για την κάτω όψη του ίδιου θραύσματος.



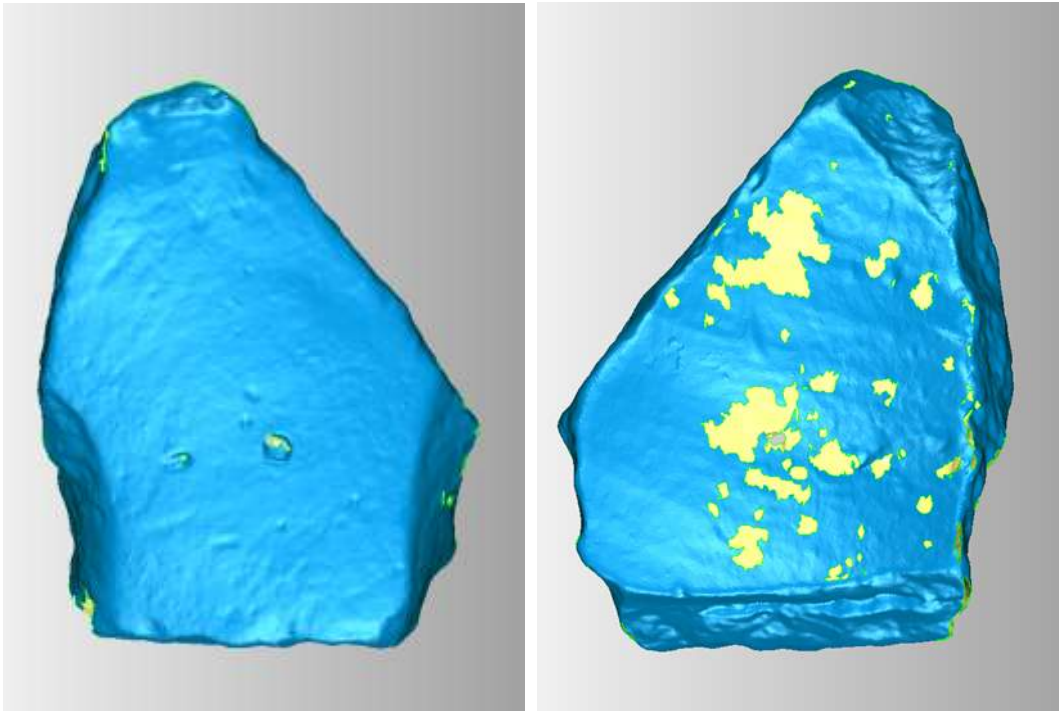
Οι δυο όψεις του θραύσματος πριν ευθυγραμμιστούν. Όπως φαίνεται υπάρχει μεγάλο κενό ανάμεσα στις δύο όψεις και χρειάζεται να μετακινηθούν αρκετά ώστε να εφαρμοστεί σωστά ο αλγόριθμος.



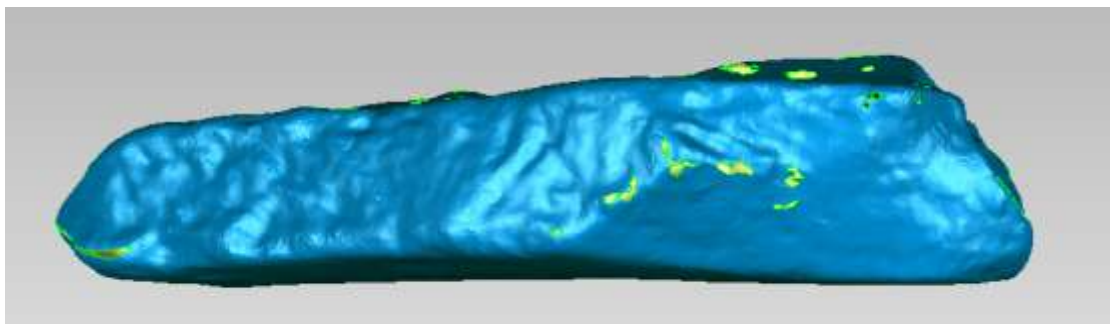
Οι δυο όψεις του θραύσματος πριν ευθυγραμμιστούν. Με μπλε χρώμα φαίνεται η εσωτερική μεριά της κάθε όψης



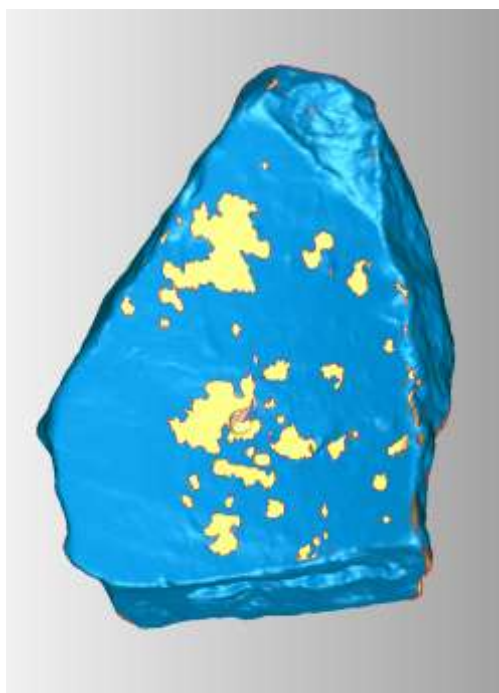
Η εμπρός και πλαϊνή όψη του θραύσματος μετά την εφαρμογή του αλγορίθμου ευθυγράμμισης βέλτιστου ταιριάσματος



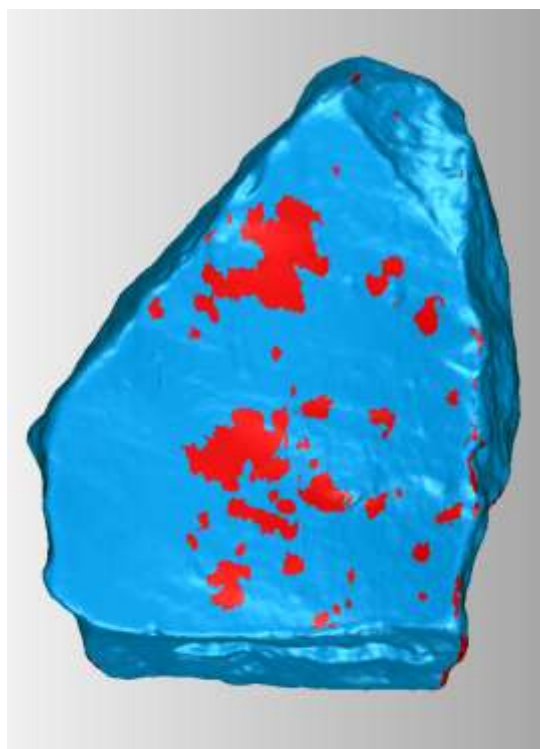
Οι δύο όψεις του θραύσματος πριν την διαδικασία της κάλυψης των κενών. Με μπλε χρώμα η εξωτερική πλευρά της κάθε όψης και με κίτρινο η εσωτερική.



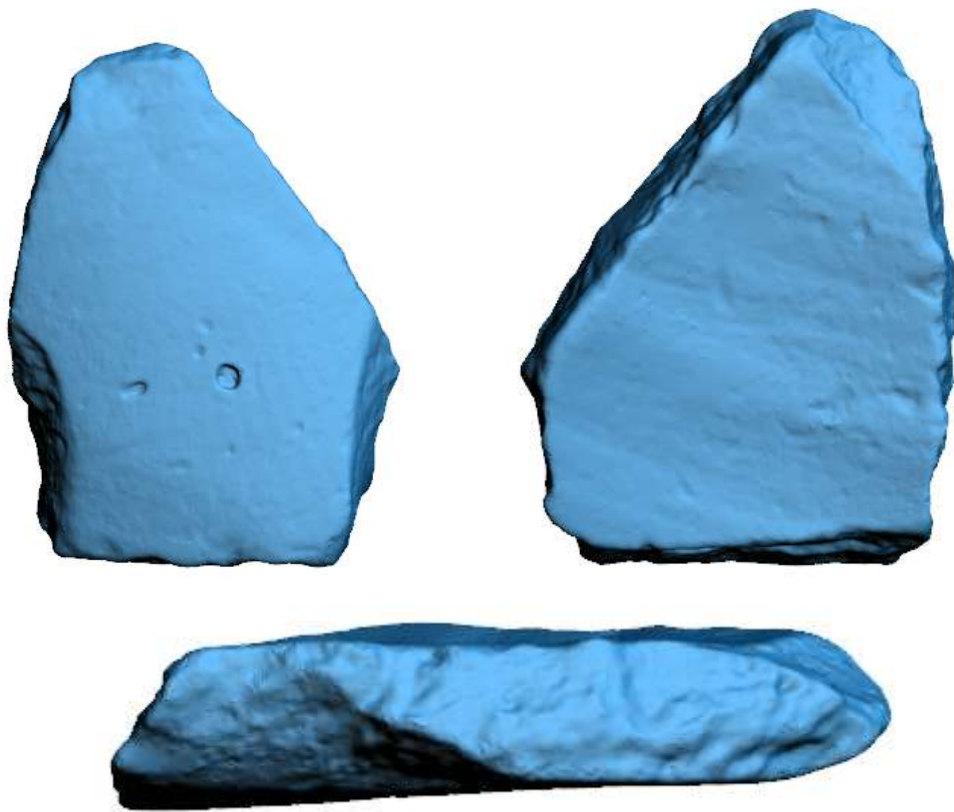
Πλάγια όψη του ίδιου θραύσματος.



Με περίγραμμα κόκκινου χρώματος φαίνονται όλα τα κενά που ανιχνεύονται και πρέπει να συμπληρωθούν.



Το θραύσμα μετά την συμπλήρωση των κενών. Με κόκκινο φαίνονται οι επιφάνειες που προστέθηκαν.



Η εμπρός, πίσω και μια πλάγια όψη του θραύσματος

## 5. Συμπεράσματα

Η ανάλυση των μεθόδων της ψηφιακής αποκατάστασης των αρχαιολογικών ευρημάτων, αλλά και η εφαρμογή τους σε ευρήματα των ανασκαφών των τάφων των Μυκηνών, έδειξαν ότι η συνεισφορά της χρήσης Ηλεκτρονικού Υπολογιστή για την ανασύνθεση θραυσμένων ευρημάτων είναι αρκετά σημαντική για την πρόοδο της Αρχαιολογικής έρευνας.

Όπως αναφέρθηκε και κατά την διάρκεια της εργασίας, με την χρήση των μεθόδων που παρουσιάστηκαν στο δεύτερο και τρίτο κεφάλαιο, ανιχνεύτηκαν ταιριάσματα θραυσμάτων τα οποία οι εξειδικευμένοι επιστήμονες δεν είχαν ανιχνεύσει και επαληθεύτηκαν πολλά από τα ήδη υπάρχοντα ταιριάσματα. Λόγω των φυσιολογικών φθορών από την πάροδο του χρόνου, αλλά και των υπολοίπων αιτιών που έχουν αναφερθεί στο πρώτο κεφάλαιο, δεν είναι δυνατόν να ανιχνευθούν όλα τα ταιριάσματα και να ανακατασκευαστούν πλήρως όλα τα ευρήματα.

Παρόλα αυτά δίνεται η δυνατότητα να υποβοηθηθεί κατά πολύ η εργασία των επιστημόνων και να επιταχυνθεί η διαδικασία της επανασυναρμολόγησης. Άλλωστε η έρευνα και η πρόοδος που γίνεται στον τομέα αυτό δεν είναι δυνατόν να αντικαταστήσουν τη συνεισφορά του ανθρώπινου παράγοντα. Τα αποτελέσματα και τα συστήματα που δημιουργούνται δίνουν στους ειδικούς ένα πολύ δυνατό εργαλείο για να ανακαλύψουν ταιριάσματα που θα ήταν δύσκολο να βρεθούν.

Η παρούσα διπλωματική εργασία εστίασε:

- Στην ανάλυση και την μελέτη της μεθόδου ανακατασκευής θραυσμένων ευρημάτων σε 2 διαστάσεις που παρουσιάστηκε στη δημοσίευση [1].
- Στην αντίστοιχη μέθοδο για 3 διαστάσεις
- Στην περιγραφή της διαδικασίας που ακολουθήθηκε για την επεξεργασία μέσω υπολογιστή των αναπαραστάσεων των αρχαιολογικών ευρημάτων με σκοπό την εφαρμογή της προαναφερθείσας μεθοδολογίας.



Ορισμένα θέματα που ενδεχομένως χρήζουν περαιτέρω διερεύνησης, είναι η χρησιμοποίηση άλλων παραμέτρων για την υποβοήθηση της διαδικασίας ανασύνθεσης των ευρημάτων όπως:

- Η συνέχιση του θεματικού περιεχομένου ανάμεσα σε δύο θραύσματα
- Η συνέχιση των χρωμάτων μεταξύ δύο διπλανών θραυσμάτων
- Η συνέχιση της καμπυλότητας ή της κυρτότητας ανάμεσα σε διπλανά θραύσματα

## Αναφορές

- [1] Contour-Shape Based Reconstruction of Fragmented, 1600 B.C. Wall Paintings - Constantin Papaodysseus, Thanasis Panagopoulos, Michael Exarhos, Constantin Triantafyllou, Dimitrios Fragoulis, and Christos Doumas
- [2] Efficient solution to the 3D problem of automatic wall paintings reassembly - Constantin Papaodysseus, Dimitris Arabadjis, Michalis Exarhos, Panayiotis Rousopoulos, Solomon Zannos, Michail Panagopoulos, Lena Papazoglou-Manioudaki
- [3] Κουκουζέλη, Αλ., Ε. Μανακίδου, Κ. Σμπόνιας (2000). Αρχαιολογία στον ελληνικό χώρο. Πάτρα: Ε.Α.Π., ISBN 960-538-489-2.
- [4] Πλάντζος, Δ. (2002) «Κύρια αρχαιολογικά πεδία των ιστορικών χρόνων: 1000-31 π.Χ.», Αρχαιολογία στον Ελληνικό χώρο, τομ. Β΄ Πάτρα: ΕΑΠ.
- [5] Μανακίδου, Ε. (2002) «Ιστορική διαδρομή της επιστήμης της αρχαιολογίας στην Ευρώπη», Αρχαιολογία στον Ελληνικό χώρο, Τομ. Α΄, Πάτρα: ΕΑΠ.
- [6] A Short History of the Beginnings of Mathematics in Archaeology - François Djindjian, Université Paris I-Pantheon-Sorbonne France.
- [7] From Wikimedia Commons, the free media repository
- [8] Ίδρυμα Ν.Π. Γουλανδρή - Μουσείο Κυκλαδικής Τέχνης - Συλλογή Ν.Π. Γουλανδρή
- [9] California Institute for Telecommunications and IT - Computer Science, Cyber-Archaeology and Cultural Heritage
- [10] Laconia Virtual Archaeology project (LAVA) - University of St Andrews

[11] Reconstruction of Ancient Rome using Architectural Software - University of California Los Angeles

[12] The remains the Antikythera mechanism. Photograph: X-Tek Group/AFP

[13] 'Virtual archaeologist' reconnects fragments of an ancient civilization - Princeton Graphics Group

[14] Ντούμας Χρ.: "Σαντορίνη, Οδηγός του Νησιού και των Αρχαιολογικών του Θησαυρών", Εκδοτική Αθηνών, Αθήνα 2005

[15] Ντούμας Χρ.: "Θήρα/Σαντορίνη", Santorini Guidebook 2007