

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο  
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών  
Τομέας Ρευστών  
Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών  
Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστομηχανικής  
& Βελτιστοποίησης

Υλοποίηση Αναπτύγματος Πολυωνυμικού Χάους στον  
Αεροδυναμικά Στιβαρό Σχεδιασμό – Βελτιστοποίηση με  
Εξελικτικούς Αλγορίθμους υπό Στοχαστικές Εισόδους

Διπλωματική Εργασία

Πάμπαλης Γεώργιος

Επιβλέπων: Κυριάκος Χ. Γιαννάκογλου, Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, Σεπτέμβριος 2015







## Ευχαριστίες

Ξεκινώντας, θα ήθελα να ευχαριστήσω συγκεκριμένα πρόσωπα, τα οποία συνέβαλαν με το δικό τους τρόπο στην υλοποίηση αυτής της διπλωματικής εργασίας.

Πρώτα και κυριότερα, οφείλω ένα μεγάλο ευχαριστώ στον επιβλέποντα Καθηγητή, κ. Κυριάκο Γιαννάκογλου, για την πολύτιμη βοήθεια και υποστήριξη που προσέφερε, αλλά και για την υπομονή που επέδειξε μαζί μου, καθόλη τη διάρκεια της ενασχόλησής μου με την παρούσα εργασία. Βρισκόμενος κοντά στο τέλος της, μπορώ να πω πως η επιλογή του θέματος ήταν ιδανική, και του είμαι ευγνώμων για τη δυνατότητα που μου έδωσε να ασχοληθώ με ένα τόσο καινοτόμο και ενδιαφέρον θέμα.

Στη συνέχεια, πρέπει να ευχαριστήσω τα μέλη της ομάδας της ΜΠΥΡ&Β του Τομέα Ρευστών, και πρωτίστως τη Δρ. Βαρβάρα Ασούτη, για τις σημαντικές συμβουλές της και όλες τις επεξηγήσεις και διορθώσεις που μου έδωσε όταν τις χρειάστηκα. Ταυτόχρονα, ο Δρ. Βαγγέλης Παπουτσής-Κιαχαγιάς και ο υποψήφιος διδάκτορας Δημήτρης Καφούλης βοήθησαν με τη συνεισφορά τους πάνω σε συγκεκριμένα προβλήματα που αντιμετώπισα.

Προχωρώντας, τίποτα δε θα ήταν δυνατό χωρίς τη συμβολή των γονιών μου, Σμαράγδας και Κωνσταντίνου, αλλά και της αδερφής μου, Χριστίνας, που στάθηκαν με κατανόηση δίπλα μου και με υποστήριξαν με τη συνεχή ενθάρρυνσή τους.

Τέλος, ευχαριστώ τον κοντινό μου φίλο Κωνσταντίνο Πατέλη, μαζί με το μεγάλο πλήθος εκείνων των ατόμων που με βοήθησαν και μου συμπαραστάθηκαν, όχι μόνο στο τελευταίο εξάμηνο, αλλά καθόλη τη διάρκεια φοίτησής μου στη σχολή.



~ *Ever Skyward.*





ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ  
ΤΟΜΕΑΣ ΡΕΥΣΤΩΝ  
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΘΕΡΜΙΚΩΝ ΣΤΡΟΒΙΛΟΜΗΧΑΝΩΝ  
ΜΟΝΑΔΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗΣ &  
ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

**Υλοποίηση Αναπτύγματος Πολυωνυμικού Χάους στον  
Αεροδυναμικά Στιβαρό Σχεδιασμό – Βελτιστοποίηση με  
Εξελικτικούς Αλγορίθμους υπό Στοχαστικές Εισόδους**

Διπλωματική Εργασία  
του

**Γεώργιου Πάμπαλη**

Επιβλέπων: Κυριάκος Χ. Γιαννάκογλου, Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, Σεπτέμβριος 2015

**Περίληψη**

Η παρούσα διπλωματική εργασία αποσκοπεί στην ανάπτυξη της θεωρίας του πολυωνυμικού χάους (Polynomial Chaos Expansion, PCE), καθώς και του αντίστοιχου λογισμικού, για μονοδιάστατα, αλλά και πολυδιάστατα, προβλήματα αεροδυναμικά στιβαρού σχεδιασμού-βελτιστοποίησης. Η θεωρία του πολυωνυμικού χάους βασίζεται στη χρήση ορθογώνιων πολυωνύμων για τη μοντελοποίηση της στοχαστικότητας και την ανεξαρτητοποίηση των επιδράσεων των διαφορετικών στοχαστικών μεταβλητών εισόδου. Η μέθοδος πολυωνυμικού χάους μπορεί να λύσει αποτελεσματικά προβλήματα όπου απαιτείται η εύρεση της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης μιας συνάρτησης με είσοδο μεταβλητές που ακολουθούν κάποια στοχαστική κατανομή.

Ειδικά στην αεροδυναμική, πολλά προβλήματα σχεδιασμού ζητούν τη βελτιστοποίηση της συμπεριφοράς ενός αεροδυναμικού σώματος σε συνθήκες ροής (μεταβλητές περιβάλλοντος) που μεταβάλλονται στοχαστικά γύρω από κάποια μέση τιμή με τυπική απόκλιση που είτε είναι γνωστή, είτε αναγκαστικά προκύπτει υποθέτοντας ένα σχετικό μοντέλο. Σε αυτές τις περιπτώσεις, είναι επιθυμητή η εύρεση των τιμών των μεταβλητών σχεδιασμού οι οποίες εξασφαλίζουν βέλτιστη αεροδυναμική συμπεριφορά όχι σε ένα σημείο, αλλά σε ένα εύρος λειτουργίας, καθιστώντας το μελετούμενο σώμα σχετικά ανεπηρέαστο από πιθανές διαταραχές ή αβεβαιότητες των συνθηκών ροής. Αυτός είναι ο αεροδυναμικά στιβαρός σχεδιασμός μορφών σε προβλήματα υπολογιστικής ρευστοδυναμικής (ΥΡΔ), ο οποίος “παραδοσιακά” απαιτεί επαναλαμβανόμενες δειγματοληψίες στο χώρο των μεταβλητών περιβάλλοντος και αντίστοιχους υπολογισμούς της αντικειμενικής συνάρτησης. Η μέθοδος που αναπτύχθηκε στη διπλωματική

εργασία καθιστά την επίλυση αυτών των προβλημάτων πιο οικονομική σε σχέση με άλλες μεθόδους δειγματοληψίας, πχ. Monte Carlo, ενώ ταυτόχρονα είναι και πιο εύκολα εφαρμόσιμη σε αιτιοκρατικές μεθόδους, καθώς δεν απαιτεί την εύρεση παραγώγων υψηλής τάξης. Η μέθοδος αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως “μαύρο κουτί”, σε συνδυασμό με στοχαστικές μεθόδους βελτιστοποίησης, όπως οι εξελικτικοί αλγόριθμοι, για τη βελτιστοποίηση με βάση κατάλληλα ορισμένη αντικειμενική συνάρτηση. Στη θεωρία του πολυωνυμικού χάους, χρησιμοποιείται η οικογένεια των ορθογωνίων πολυωνύμων, συγκεκριμένα τα πολυώνυμα Hermite για την κανονική κατανομή, για την ταχύτερη εύρεση της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης, μέσω της μεθόδου ολοκλήρωσης υλοποιώντας τα πλήρη πλέγματα Gauss ή τα αραιά πλέγματα Smolyak για ακόμα οικονομικότερη ολοκλήρωση σε πολυδιάστατα προβλήματα (προβλήματα με δύο ή περισσότερες στοχαστικές μεταβλητές εισόδου).

Η θεωρία και το λογισμικό που αναπτύχθηκε στην παρούσα διπλωματική εργασία εφαρμόστηκαν πρώτα σε μικρές περιπτώσεις αριθμητικών προβλημάτων για την κατανόηση της μεθόδου, κι έπειτα σε πρόβλημα ροής σε διδιάστατη πτερύγωση συμπιεστή για την πιστοποίηση της μεθόδου. Τέλος, συνδυάστηκε με οικείο λογισμικό εξελικτικών αλγορίθμων για τον αεροδυναμικό στιβαρό σχεδιασμό-βελτιστοποίηση μεμονωμένης αεροτομής. Και στα δύο προβλήματα, ως περιβαλλοντικές μεταβλητές θεωρήθηκαν οι συνθήκες της ροής στα όρια του υπολογιστικού χωρίου.

NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS  
SCHOOL OF MECHANICAL ENGINEERING  
FLUIDS DEPARTMENT  
LABORATORY OF THERMAL TURBOMACHINES  
PARALLEL CFD & OPTIMIZATION UNIT

# **Implementation of Polynomial Chaos Expansion in Aerodynamically Robust Design – Optimization using Evolutionary Algorithms with Stochastic Inputs**

Diploma Thesis  
by

**George Pampalis**

Supervisor: Kyriakos C. Giannakoglou, Professor NTUA

**Athens, September 2015**

## **Abstract**

This thesis aims at developing the theory of polynomial chaos expansion (PCE) and the corresponding software, for single and multi-dimensional problems of aerodynamically robust design-optimization of shapes. The theory of polynomial chaos is based on the use of orthogonal polynomials to model stochasticity and independently analyze the effects of different stochastic input variables and effectively solving problems which require the mean value and standard deviation of a function with input variables that follow a stochastic distribution.

In aerodynamics, in particular, many design problems seek the optimal performance of an airfoil with flow conditions (environmental variables) which vary stochastically around an average value with a standard deviation that is either known or necessarily taken as known. In these cases, it is desirable to select values for the design and environmental variables that are optimal in a range of operating conditions rather than a single point, making the studied body relatively unaffected by possible perturbations or uncertainties in the flow conditions. This is what is usually referred to as aerodynamically robust design-optimization in computational fluid dynamics (CFD) and normally requires repeated sampling of the environmental variables and the corresponding evaluations of the objective function. The method developed in this thesis solves these problems more efficiently than other sampling methods, such as Monte Carlo, while being more readily applicable to deterministic optimization methods, since it does not require computing any derivatives of the objective function. PCE can be used as a “black box”, in combination with stochastic methods, such as evolutionary algorithms, to optimize the properly defined objective function.

For the expansion of the polynomial chaos, families of orthogonal polynomials are used, namely the Hermite polynomials for the normal distribution, in order to compute faster the mean value and standard deviation, via integration, by implementing either full grids or the Smolyak sparse grids. The latter are more efficient for integrations in multidimensional problems (problems with two or more environmental variables).

The theory and software developed in this thesis were firstly applied in mathematical problems for a better understanding of the method and secondly to a two-dimensional compressor cascade. Finally, they were combined with an in-house evolutionary algorithm based software (EASY) for the aerodynamically robust design-optimization of an isolated airfoil. In both problems, the boundary conditions of the flow were considered as the environmental variables.

## Ακρωνύμια - Συμβολισμοί

EMΠ Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

ΕΘΣ Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών

ΜΠΤΡ&Β Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής  
Ρευστοδυναμικής & Βελτιστοποίησης

---

CFD Computational Fluid Dynamics

NTUA National Technical University of Athens

---

N-S Navier-Stokes

DP Design Point

SOO Single-Objective Optimization

MOO Multi-Objective Optimization

DD Direct Differentiation

AM Adjoint Method

GPU Graphic Processing Unit

---

PCE Polynomial Chaos Expansion

MC Monte Carlo

PDF Probability Density Function

GQ Gauss Quadrature

GHQ Gauss-Hermite Quadrature



# Περιεχόμενα

Περιεχόμενα	i
<b>1 Εισαγωγή</b>	<b>1</b>
1.1 Περί Βελτιστοποίησης και Αεροδυναμικά Στιβαρού Σχεδιασμού . . . . .	1
1.2 Αλγόριθμος Βελτιστοποίησης και Τρόποι Επίλυσης Προβλημάτων Αερο- δυναμικά Στιβαρού Σχεδιασμού . . . . .	5
1.3 Εισαγωγικές Πληροφορίες για το Πολυωνυμικό Χάος . . . . .	9
1.4 Στόχος της Διπλωματικής Εργασίας . . . . .	10
1.5 Δομή της Διπλωματικής Εργασίας . . . . .	12
<b>2 Ανάπτυγμα Πολυωνυμικού Χάους σε Μονοδιάστατα Προβλήμα- τα</b>	<b>13</b>
2.1 Πολυωνυμικό Χάος και Στατιστικές Ροπές . . . . .	13
2.2 Ορθογώνια Πολυώνυμα . . . . .	14
2.3 Συντελεστές Πολυωνυμικού Χάους και Οικονομική Ολοκλήρωση . . . . .	17
2.3.1 Ολοκλήρωση με Gauss Quadrature . . . . .	19
2.4 Πολυωνυμικό Χάος σε Κανονική Κατανομή . . . . .	20
2.5 Αριθμητικά Παραδείγματα PCE με Μία Στοχαστική Μεταβλητή . . . . .	24
2.5.1 Εφαρμογή σε Γραμμική Συνάρτηση . . . . .	24
2.5.2 Εφαρμογή σε Εκθετική Συνάρτηση . . . . .	29
2.5.3 Εφαρμογή σε Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις . . . . .	33
<b>3 Ανάπτυγμα Πολυδιάστατου Πολυωνυμικού Χάους</b>	<b>37</b>
3.1 Εισαγωγικά Σχόλια . . . . .	37
3.2 Πολυδιάστατο Πολυωνυμικό Χάος . . . . .	38

3.3	Ορθογώνια Πολυώνυμα Πολλαπλών Διαστάσεων . . . . .	39
3.4	Παραγωγή Πολυδιάστατων Ορθογωνίων Πολυωνύμων και Συνδυαστική - Παράδειγμα . . . . .	41
3.5	Πολυδιάστατη Ολοκλήρωση . . . . .	47
3.5.1	Cubature και Τανυστικό Γινόμενο . . . . .	48
3.5.2	Έννοια Πλήρους Πλέγματος και η Κατάρα της Διαστασιμότητας .	49
3.6	Εφαρμογή σε Πολλές Διαστάσεις . . . . .	51
3.6.1	Εφαρμογή σε Πολυωνυμική Συνάρτηση . . . . .	51
3.6.2	Εφαρμογή σε Τριγωνομετρική Συνάρτηση . . . . .	57
<b>4</b>	<b>Τρόποι Οικονομικής Επίλυσης Προβλημάτων με Πολλές Στο- χαστικές Εισόδους</b>	<b>61</b>
4.1	Αραιά Πλέγματα Smolyak . . . . .	62
4.1.1	Τρόπος Παραγωγής Αραιού Πλέγματος . . . . .	62
4.1.2	Παράδειγμα Αραιού Πλέγματος Smolyak . . . . .	64
4.2	Στοχαστική Επίλυση με Στοιχεία Σύμπτωσης . . . . .	67
<b>5</b>	<b>Εφαρμογή της Μεθόδου PCE στον Αεροδυναμικά Στιβαρό Σχεδιασμό Διδιάστατης Πτερύγωσης Συμπιεστή</b>	<b>69</b>
5.1	Περίπτωση Χωρίς Στοχαστικές Μεταβλητές . . . . .	71
5.2	Περίπτωση Μίας Στοχαστικής Μεταβλητής . . . . .	73
5.3	Περίπτωση Δύο Στοχαστικών Μεταβλητών . . . . .	78
<b>6</b>	<b>Αεροδυναμικά Στιβαρός Σχεδιασμός-Βελτιστοποίηση Μεμο- νωμένης Αεροτομής με Εξελικτικούς Αλγορίθμους</b>	<b>83</b>
6.1	Βελτιστοποίηση Χωρίς Αβεβαιότητες . . . . .	86
6.2	Βελτιστοποίηση Με Αβεβαιότητες . . . . .	90
<b>7</b>	<b>Ανακεφαλαίωση – Συμπεράσματα</b>	<b>97</b>
7.1	Ανακεφαλαίωση και Συμπεράσματα . . . . .	97
7.2	Προτάσεις για Μελλοντική Μελέτη . . . . .	99



<b>Α' Πολυώνυμα Hermite</b>	<b>103</b>
Α'.1 Πληροφορίες και Ιδιότητες Πολυωνύμων Hermite . . . . .	103
Α'.2 Ρίζες και Βάρη Πολυωνύμων Hermite . . . . .	108
<b>Β' Μετασχηματισμός Box-Muller</b>	<b>109</b>
<b>Γ' Συνάρτηση Σφάλματος Gauss</b>	<b>111</b>
<b>Δ' Λεπτομερής Επίλυση Αριθμητικών Εφαρμογών</b>	<b>113</b>
Δ'.1 Λύση Εφαρμογής 2.5.3 - Μονοδιάστατη Τριγωνομετρική Συνάρτηση . . .	113
Δ'.2 Λύση Εφαρμογής 3.6.2 - Διδιάστατη Τριγωνομετρική Συνάρτηση . . . .	115
<b>Ε' Αποδείξεις Μαθηματικών Σχέσεων</b>	<b>121</b>
Ε'.1 Μέση Τιμή και Τυπική Απόκλιση με τη Μέθοδο των Ροπών . . . . .	121
Ε'.1.1 Ορισμοί . . . . .	121
Ε'.1.2 Μέση Τιμή Αντικειμενικής Συνάρτησης . . . . .	122
Ε'.1.3 Διακύμανση Αντικειμενικής Συνάρτησης . . . . .	124
Ε'.1.4 Παράγωγοι Ευαισθησίας Αντικειμενικής Συνάρτησης . . . . .	128
<b>Βιβλιογραφία</b>	<b>131</b>



# Κεφάλαιο 1

## Εισαγωγή

### 1.1 Περί Βελτιστοποίησης και Αεροδυναμικά Στιβαρού Σχεδιασμού

Η βελτιστοποίηση αποτελεί ένα κυρίαρχο είδος προβλημάτων, σε πολλά επιστημονικά πεδία. Η εύρεση της καλύτερης δυνατής λύσης για ένα συγκεκριμένο πρόβλημα δεν είναι μόνο επιθυμητή, αλλά και απαραίτητη στη σύγχρονη εποχή.

Στόχος της βελτιστοποίησης μαθηματικά μεταφράζεται και υλοποιείται ως η εύρεση της ελάχιστης ή της μέγιστης τιμής μιας αντικειμενικής συνάρτησης  $F$  (objective function) ως προς συγκεκριμένες μεταβλητές σχεδιασμού ή μεταβλητές βελτιστοποίησης.

Υπάρχουν δύο κατηγορίες μεθόδων βελτιστοποίησης, οι στοχαστικές (stochastic) και οι αιτιοκρατικές (deterministic) μέθοδοι [1]. Οι πρώτες απαιτούν αποκλειστικά την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης, χωρίς κάποια παραπάνω πληροφορία. Τα σημεία υπολογισμού της αντικειμενικής συνάρτησης επιλέγονται τυχαυματικά και εφαρμόζονται ειδικοί αλγόριθμοι επιλογής των κατάλληλων κλήσεων της αντικειμενικής συνάρτησης για την ταχύτερη δυνατή σύγκλιση της διαδικασίας βελτιστοποίησης. Ένα τέτοιο παράδειγμα αποτελούν οι εξελικτικοί αλγόριθμοι (evolutionary algorithms) [2] [3]. Οι αιτιοκρατικές μέθοδοι υπολογίζουν (ή, ενίοτε, προσεγγίζουν) και εκμεταλλεύονται τις τιμές των παραγώγων (πρώτων ή και σπανιότερα δεύτερων) της αντικειμενικής συνάρτησης για ταχύτερη σύγκλιση. Με τον τρόπο αυτό επιτυγχάνεται μία κατευθυνόμενη σύγκλιση της βελτιστοποίησης, ταχύτερη σε σχέση με την περίπτωση των στοχαστικών μεθόδων. Όμως, υπάρχει η πιθανότητα η σύγκλιση να εγκλωβιστεί σε κάποιο τοπικό ακρότατο, με αποτέλεσμα να μην βρεθεί η ολική βέλτιστη τιμή. Αυτό δεν συμβαίνει στις στοχαστικές μεθόδους, εφόσον βέβαια δεν τερματιστούν πρόωρα.

Ένας διαχωρισμός των προβλημάτων βελτιστοποίησης γίνεται με βάση τον αριθμό των

συναρτήσεων-στόχων προς βελτιστοποίηση. Αν το πρόβλημα έχει μία μόνο συνάρτηση-στόχο τότε αποτελεί πρόβλημα μονοκριτηριακής βελτιστοποίησης (Single Objective Optimization, SOO). Αντίθετα, αν υπάρχουν πολλές συναρτήσεις-στόχοι προς βελτιστοποίηση, τότε το πρόβλημα χαρακτηρίζεται ως πρόβλημα πολυκριτηριακής βελτιστοποίησης (Multi Objective Optimization, MOO).

Γενικότερα, στη βελτιστοποίηση αντιμετωπίζονται προβλήματα εύρεσης ελάχιστης ή μέγιστης τιμής. Καθώς όμως τα προβλήματα μεγιστοποίησης μπορούν να μετατραπούν εύκολα σε προβλήματα ελαχιστοποίησης (εύρεση του  $\min\{-F_\alpha\}$ , αντί του  $\max\{F_\alpha\}$ ), στην παρούσα διπλωματική εργασία μελετώνται μόνο προβλήματα ελαχιστοποίησης.

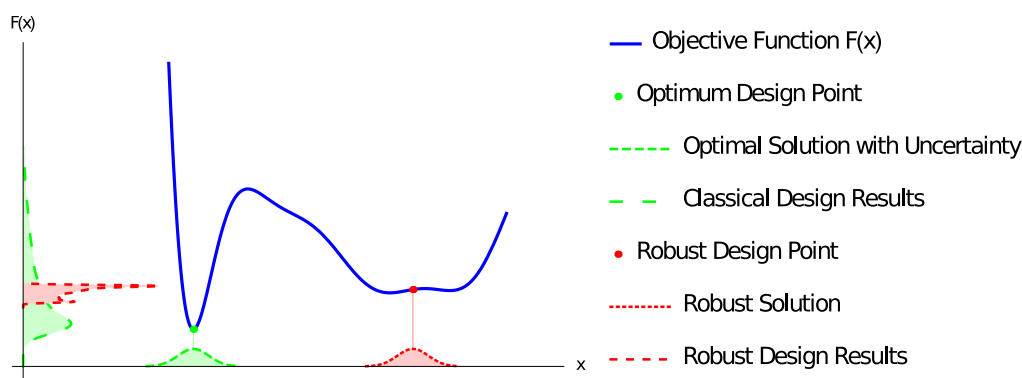
Στα προβλήματα αεροδυναμικού σχεδιασμού-βελτιστοποίησης υπάρχει, επίσης, ο διαχωρισμός των μεταβλητών εισόδου σε δύο κατηγορίες, ανάλογα με την ελεγχξιμότητά τους από το σχεδιαστή.

Η πρώτη κατηγορία περιλαμβάνει τις **μεταβλητές σχεδιασμού** (design variables), πλήθους  $N$  ( $\vec{b} \in \mathbb{R}^N$ ), οι οποίες είναι πλήρως ελεγχόμενες από το σχεδιαστή, υπό την έννοια ότι μπορεί ασφαλώς να επιβάλλει αυτές να έχουν τις τιμές που θα προκύψουν από την επίλυση του προβλήματος βελτιστοποίησης. Ένα τέτοιο παράδειγμα αποτελούν οι γεωμετρικές διαστάσεις μιας αεροτομής, υπό την προϋπόθεση ότι δεν υπάρχουν κατασκευαστικές αβεβαιότητες.

Η δεύτερη κατηγορία περιλαμβάνει μεταβλητές, πλήθους  $M$  ( $\vec{c} \in \mathbb{R}^M$ ), οι οποίες δεν είναι απόλυτα καθορισμένες και σταθερές, αλλά διέπονται από μία στοχαστικότητα, χωρίς τη δυνατότητα καθολικού ελέγχου τους από τον παρατηρητή. Αυτές αποτελούν τις **μεταβλητές περιβάλλοντος** (environmental variables), υπό την έννοια ότι αυτές καθορίζουν το “μεταβλητό περιβάλλον” εντός του οποίου πρέπει να υλοποιηθεί ο βέλτιστος σχεδιασμός. Ενίοτε ονομάζονται και μεταβλητές αεροδυναμικής στιβαρότητας (αδόμικα, αλλά σύντομα, θα ονομάζονταν και “στιβαρές” μεταβλητές, robust variables), δεδομένου ότι ο επιδιωκόμενος σχεδιασμός οφείλει να είναι αεροδυναμικά στιβαρός (robust), χωρίς να επηρεάζεται (πέραν ενός αποδεκτού βαθμού) από ανεξέλεγκτες μεταβολές στις τιμές των στιβαρών ή περιβαλλοντικών μεταβλητών. Σε αυτήν την εργασία, καθορίζεται η χρήση του όρου “**στοχαστικές μεταβλητές**” για την περιγραφή των εισόδων ενός προβλήματος βελτιστοποίησης που ακολουθούν μία στοχαστική κατανομή.

Για παράδειγμα, η γωνία πρόσπτωσης της ροής ή η ταχύτητα Mach του αέρα δεν μπορούν να καθοριστούν με ακρίβεια εκ των προτέρων σε ένα πρόβλημα αεροδυναμικού σχεδιασμού μίας αεροτομής, αλλά γίνεται η παραδοχή ότι μεταβάλλονται με βάση μία στοχαστική κατανομή, για την οποία ο σχεδιαστής αναγκαστικά οφείλει να κάνει παραδοχές ως προς τον τύπο της, τη μέση τιμή της και την τυπική της απόκλιση. Στη βιβλιογραφία, τέτοιου είδους προβλήματα συναντώνται και ως σχεδιασμός/βελτιστοποίηση υπό αβεβαιότητες (design/optimization under uncertainty) [4] [5].

Σημείο προσοχής αποτελεί η ύπαρξη πιθανότητας μεταβολής της τιμής μίας μεταβλητής σχεδιασμού ( $b_k$ ) σε ένα πρόβλημα. Λόγου χάρη, αν ένα μήκος ή μία γωνία που καθορίζει το σχήμα της αεροτομής δεν μπορεί να επιβληθεί με ακρίβεια, αλλά διέπεται από κατασκευαστική αβεβαιότητα, τότε αυτή η μεταβλητή αποτελεί ταυτόχρονα και μετα-



**Σχήμα 1.1:** Διαφορά λύσεων κλασικού (δηλαδή, χωρίς αβεβαιότητες) και στιβαρού σχεδιασμού (στην περίπτωση που υπάρχουν αβεβαιότητες ως προς το περιβάλλον στο οποίο υλοποιείται η βελτιστοποίηση). Για την ελαχιστοποίηση μίας συνάρτησης (συνεχής μπλε γραμμή) ο κλασικός βέλτιστος σχεδιασμός προτείνει διαφορετική λύση σε σχέση με το στιβαρό. Ο πρώτος δίνει ως βέλτιστη τιμή το πραγματικό ελάχιστο της συνάρτησης, που όμως σε περίπτωση στοχαστικής εισόδου, π.χ. μεταβλητή που κατανέμεται κανονικά (πράσινες παύλες), το τελικό σύνολο τιμών χαρακτηρίζεται από μεγάλη τυπική απόκλιση. Αντιθέτως, ο στιβαρός σχεδιασμός προτείνει μία όχι εξίσου καλή λύση (κόκκινες τελείες), που όμως σε περίπτωση διαταραχών στην είσοδο, δεν εμφανίζει μεγάλες μεταβολές στο τελικό αποτέλεσμα, καθώς διαθέτει μικρότερη τυπική απόκλιση.

βλητή σχεδιασμού, αλλά και μεταβλητή περιβάλλοντος. Τότε, η “αβέβαιη” μεταβλητή σχεδιασμού γράφεται ως  $b_k + db_k$ , όπου  $db_k$  η μεταβολή της, η οποία και θεωρείται ως επιπλέον ανεξάρτητη στοχαστική μεταβλητή  $c$ .

Μία τέτοια περίπτωση είναι οι επικαθίσεις σωματιδίων στα πτερύγια ενός συμπιεστή που μεταβάλλουν τις γεωμετρικές διαστάσεις των πτερυγίων κατά τη διάρκεια ζωής τους, οπότε τότε η μεταβολή των γεωμετρικών διαστάσεων μοντελοποιείται ως μία παραπάνω στοχαστική μεταβλητή του προβλήματος.

Όταν οι μεταβλητές ενός προβλήματος βελτιστοποίησης είναι αποκλειστικά  $\vec{b}$  μεταβλητές, δηλαδή της πρώτης κατηγορίας, τότε ενδιαφέρον έχει η εύρεση του βέλτιστου σημείου σχεδιασμού (design point, DP), στο οποίο η αντικειμενική συνάρτηση εμφανίζει τη βέλτιστη τιμή της (μέγιστη ή ελάχιστη, κατά περίπτωση).

Υπάρχουν όμως και προβλήματα βελτιστοποίησης κατά τα οποία στις μεταβλητές σχεδιασμού συμπεριλαμβάνονται και μεταβλητές της δεύτερης κατηγορίας (συνολικά  $\vec{x} = (b_1, b_2, \dots, b_N, c_1, c_2, \dots, c_M)$ ,  $\vec{x} \in \mathbb{R}^{M+N}$ ). Πλέον, δεν έχει νόημα η βελτιστοποίηση για την εύρεση ενός μοναδικού σημείου σχεδιασμού, αφού σε περίπτωση, ακόμα και μικρών, μεταβολών των στοχαστικών μεταβλητών  $\vec{c}$  μπορεί να μεταβάλλεται σημαντικά το αποτέλεσμα της συνάρτησης  $F$ . Σε τέτοιες περιπτώσεις προτιμάται η αναζήτηση ενός εύρους τιμών κατά το οποίο η προς βελτιστοποίηση αντικειμενική συνάρτηση να εμφανίζει ικανοποιητικά αποτελέσματα, χωρίς μεγάλες αλλαγές τιμών (Σχήμα 1.1).

Τα προβλήματα στα οποία ζητείται ο σχεδιασμός μορφής που αποφέρει αποδεκτά αποτελέσματα σε ένα εύρος τιμών μεταβλητών σχεδιασμού, και όχι σε αποκλειστικά

ένα σημείο λειτουργίας, αποτελούν προβλήματα “αεροδυναμικά στιβαρού σχεδιασμού-βελτιστοποίησης” (aerodynamically robust design-optimization), καθώς ζητείται η μελετούμενη συνάρτηση να μην εμφανίζει μεγάλη ευαισθησία σε μεταβολές τιμών γύρω από το σημείο σχεδιασμού. Πλέον, μεγαλύτερο ενδιαφέρον αποκτά η μελέτη και βελτιστοποίηση μίας τροποποιημένης αντικειμενικής συνάρτησης-στόχου  $\hat{F}$  που εκφράζει τη στιβαρότητα (robustness) της  $F$  [6]. Αυτή εκφράζεται με τα μεγέθη της μέσης εκτιμώμενης τιμής ( $\hat{\mu}_F$ ) και της τυπικής απόκλισης γύρω από αυτή ( $\hat{\sigma}_F$ ) της αρχικής  $F$ .

Σε αυτό το σημείο καθιερώνεται η χρήση του όρου **βασική αντικειμενική συνάρτηση** για το συμβολισμό της αρχικής αντικειμενικής συνάρτησης προς βελτιστοποίηση  $F$ , η οποία σε προβλήματα αεροδυναμικού σχεδιασμού μπορεί να εκφράζει, για παράδειγμα, την άνοση (lift), την οπισθέλκουσα (drag), την απώλεια ολικής πίεσης (total pressure loss), κ.λπ, όπως προκύπτουν από την επίλυση των εξισώσεων Navier-Stokes (N-S), ενώ για την τροποποιημένη αντικειμενική συνάρτηση  $\hat{F}$  που εκφράζει τη στιβαρότητα της  $F$  χρησιμοποιείται ο όρος **μετρική αεροδυναμικής στιβαρότητας**.

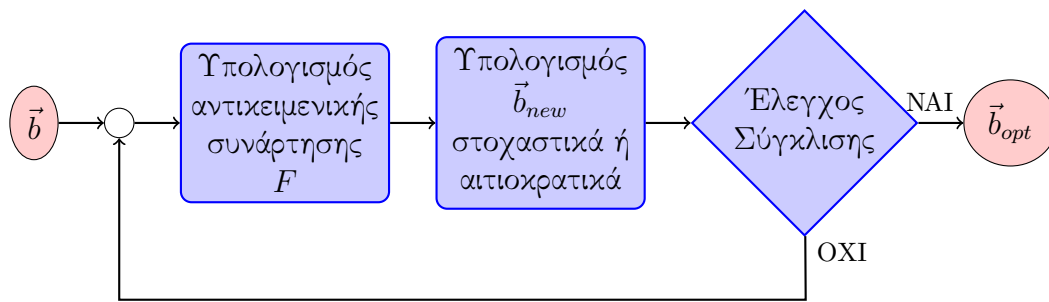
Η επιλογή της μετρικής αεροδυναμικής στιβαρότητας  $\hat{F}$  βασίζεται στον τρόπο έκφρασης της μεταβλητότητας των στιβαρών μεταβλητών. Ένας συνήθης τρόπος [7] είναι με την παραδοχή του σχεδιασμού «**Έξι Σίγμα**» (Six Sigma Design) [8] [9], σύμφωνα με την οποία κάθε στιβαρή μεταβλητή  $c_i$  θεωρείται πως κατανέμεται κανονικά γύρω από μία μέση τιμή  $\mu_i$  και σε ένα εύρος  $6\sigma_i$ , όπου  $\sigma_i$  η τυπική απόκλισή της. Η ορολογία «Έξι Σίγμα» για το σχεδιασμό με βάση μία στοχαστική μεταβλητή  $c_i$  προέρχεται από το γεγονός ότι σε μία κανονική κατανομή το 99.73% των τιμών της στοχαστικής μεταβλητής ανήκει στο διάστημα  $[\mu_i - 3\sigma_i, \mu_i + 3\sigma_i]$ , δηλαδή εντός ενός εύρους  $6\sigma_i$  γύρω από τη μέση τιμή  $\mu_i$ .

Τότε, η μετρική αεροδυναμικής στιβαρότητας  $\hat{F}$ , όπως θα αποκαλείται χάριν συντομίας, μπορεί να οριστεί ως

$$\hat{F} = \hat{\mu}_F + \kappa \hat{\sigma}_F \quad (1.1)$$

όπου  $\hat{\mu}_F$  είναι η μέση εκτιμώμενη τιμή της βασικής αντικειμενικής συνάρτησης  $F$ , ενώ  $\hat{\sigma}_F$  είναι η τυπική απόκλιση των τιμών της  $F$  γύρω από την  $\hat{\mu}_F$ . Η επιλογή του  $\kappa$  ως θετικός ή αρνητικός αριθμός εξαρτάται από τη φιλοσοφία επίλυσης του προβλήματος στιβαρού σχεδιασμού. Η χρήση ενός αρνητικού αριθμού  $\kappa$  σε προβλήματα ελαχιστοποίησης (ή ενός θετικού σε προβλήματα μεγιστοποίησης) αντιπροσωπεύει το χειρότερο/καλύτερο δυνατό σενάριο (worst/best-case scenario) και τη στάση αντιμετώπισης του προβλήματος (απαισιόδοξη ή αισιόδοξη αντίστοιχα).

Το μέγεθος της σταθεράς  $\kappa$  εκφράζει τη δυνατότητα μεταβολής της βασικής αντικειμενικής συνάρτησης  $F$  γύρω από τη μέση εκτιμώμενη τιμή της και καθορίζεται από το σχεδιαστή. Μικρή τιμή σταθεράς  $\kappa$  δηλώνει ότι ενδιαφέρει πρωτευόντως η ελαχιστοποίηση της μέσης τιμής, χωρίς να δίνεται ιδιαίτερη βαρύτητα στην τιμή της τυπικής απόκλισης. Μεγάλο  $\kappa$  σημαίνει ότι προτιμώνται λύσεις που έχουν λίγο χειρότερη μέση τιμή της βασικής αντικειμενικής συνάρτησης, αλλά με πολύ μικρή τυπική απόκλιση, με



**Σχήμα 1.2:** Διάγραμμα ροής βελτιστοποίησης. Με τις αρχικές τιμές μεταβλητών σχεδιασμού υπολογίζεται η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης. Έπειτα, αξιοποιείται η τιμή αυτή είτε με μία στοχαστική μέθοδο, είτε με μία αιτιοκρατική, και ανανεώνονται οι τιμές των μεταβλητών σχεδιασμού, ενώ στη συνέχεια ελέγχεται η επιτυχία της σύγκλισης. Αν το κριτήριο σύγκλισης ικανοποιείται, τότε ο αλγόριθμος σταματά έχοντας βρει τις ιδανικές τιμές μεταβλητών σχεδιασμού. Διαφορετικά, η διαδικασία επαναλαμβάνεται, και ξαναυπολογίζεται η αντικειμενική συνάρτηση με βάση τις ανανεωμένες τιμές των μεταβλητών σχεδιασμού.

στόχο την καλύτερη απόδοση σε ένα μεγαλύτερο εύρος τιμών μεταβλητών περιβάλλοντος.

## 1.2 Αλγόριθμος Βελτιστοποίησης και Τρόποι Επίλυσης Προβλημάτων Αεροδυναμικά Στιβαρού Σχεδιασμού

Όπως αναφέρθηκε, στα προβλήματα αεροδυναμικής βελτιστοποίησης και αεροδυναμικού σχεδιασμού για κάθε υπολογισμό της  $F$  απαιτείται η επίλυση των εξισώσεων του μοντέλου ροής που υιοθετείται για την περιγραφή του προβλήματος, π.χ. εξισώσεις Navier-Stokes. Για το λόγο αυτό, μπορεί να οριστεί ως συνολική χρονική διάρκεια επίλυσης του προβλήματος ο αριθμός των κλήσεων του επιλύτη των N-S. Όσες περισσότερες φορές απαιτείται η κλήση του επιλύτη των εξισώσεων N-S, τόσο μεγαλύτερο είναι και το υπολογιστικό κόστος.

Στα προβλήματα αεροδυναμικής βελτιστοποίησης, ακολουθείται ο αλγόριθμος επίλυσης που αναγράφεται και στο Σχήμα 1.2. Τα βήματα που ακολουθούνται είναι τα εξής:

- Πρώτα, δίνονται αρχικές τιμές στις μεταβλητές σχεδιασμού. Οι τιμές αυτές χρησιμοποιούνται για την εκκίνηση του προβλήματος βελτιστοποίησης.
- Με δεδομένες τιμές μεταβλητών σχεδιασμού υπολογίζεται η τιμή της αντικειμε-

νικής συνάρτησης  $F$ . Στα προβλήματα αεροδυναμικής βελτιστοποίησης, αυτό το βήμα απαιτεί την επίλυση των εξισώσεων N-S της ροής και είναι το πιο ακριβό από άποψη χρονικής διάρκειας αλλά και υπολογιστικού κόστους.

- Έχοντας την τιμή της  $F$  ανανεώνονται οι μεταβλητές σχεδιασμού, με τις νέες τιμές τους να προκύπτουν από κάποια μέθοδο, στοχαστική ή αιτιοκρατική. Όπως ήδη προαναφέρθηκε, οι στοχαστικές μέθοδοι ακολουθούν μία τυχηματική διαδικασία για την εκλογή των νέων τιμών μεταβλητών σχεδιασμού, ενώ οι αιτιοκρατικές υπολογίζουν και χρησιμοποιούν σε αυτό το σημείο την παράγωγο της αντικειμενικής συνάρτησης στον καθορισμό των νέων τιμών μεταβλητών σχεδιασμού. Για τις αιτιοκρατικές μεθόδους, το βήμα αυτό επίσης έχει υψηλό υπολογιστικό κόστος, καθώς για την εύρεση των παραγώγων απαιτείται και πάλι η αριθμητική επίλυση των εξισώσεων N-S, σε αριθμό που συχνά εξαρτάται από τον αριθμό των μεταβλητών σχεδιασμού. Εξάιρεση αποτελεί η περίπτωση της **Συζυγούς Μεθόδου** (Adjoint Method, AM) [1] [10], η οποία απαιτεί μία μόνο επιπλέον επίλυση των συζυγών εξισώσεων, με κόστος περίπου όσο αυτό της επίλυσης των αντίστοιχων εξισώσεων ροής, ανεξαρτήτως του πλήθους των μεταβλητών σχεδιασμού. Τότε, διαθέτοντας τις παραγώγους της αντικειμενικής συνάρτησης ως προς κάθε μεταβλητή σχεδιασμού, βρίσκονται οι νέες τιμές των μεταβλητών σχεδιασμού με μία διαδικασία ανανέωσης, η πιο απλή από τις οποίες είναι η απότομη κάθοδος (steepest descent),

$$b_i^{new} = b_i^{old} - \eta \frac{\partial F}{\partial b_i} \quad (1.2)$$

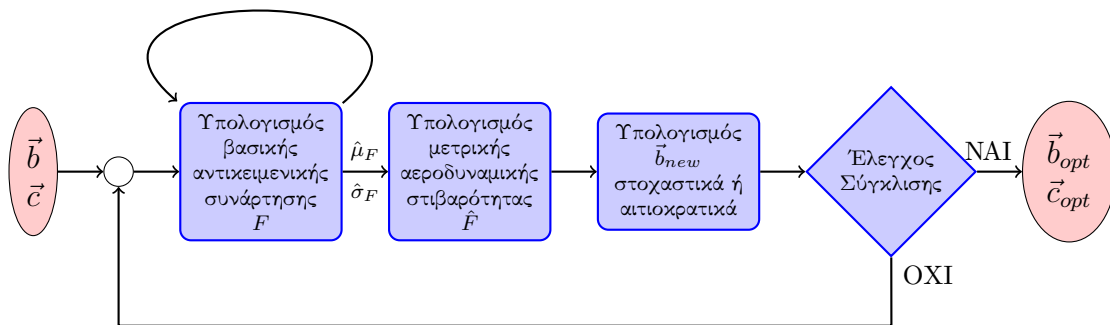
όπου  $b_i$  είναι οι μεταβλητές σχεδιασμού,  $\frac{\partial F}{\partial b_i}$  η παράγωγος ευαισθησίας της αντικειμενικής συνάρτησης ως προς κάθε μεταβλητή σχεδιασμού και  $\eta$  μία βαθμωτή ποσότητα που εκφράζει το βήμα της καθόδου.

- Τέλος, ελέγχεται η σύγκλιση της διαδικασίας. Αν το κριτήριο σύγκλισης δεν ικανοποιείται, τότε επαναλαμβάνεται η διαδικασία ξεκινώντας από το 2ο βήμα και υπολογίζοντας τη νέα τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης, με βάση τις νέες τιμές μεταβλητών σχεδιασμού που προέκυψαν. Διαφορετικά, ο αλγόριθμος σταματά, και προκύπτουν οι τελικές τιμές μεταβλητών σχεδιασμού, στις οποίες (θεωρητικά) επιτυγχάνεται η βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης.

Εστιάζοντας τώρα στα προβλήματα στιβαρού σχεδιασμού, ο αλγόριθμος επίλυσης που ακολουθείται (Σχήμα 1.3) είναι περίπου παρόμοιος με αυτόν των προβλημάτων βελτιστοποίησης, με μία βασική διαφορά:

Πλέον ελαχιστοποιείται η μετρική αεροδυναμικής στιβαρότητας  $\hat{F}$ , με βάση τις μεταβλητές σχεδιασμού και περιβάλλοντος (στιβαρές). Για να γίνει αυτό, απαιτείται γνώση των τιμών  $\hat{m}_F$  και  $\hat{\sigma}_F$  της βασικής αντικειμενικής συνάρτησης  $F$ . Έτσι, υλοποιείται





**Σχήμα 1.3:** Διάγραμμα ροής στιβαρού σχεδιασμού. Με τις αρχικές τιμές μεταβλητών σχεδιασμού και μεταβλητών περιβάλλοντος (στοχαστικές μεταβλητές) πραγματοποιείται ένας εσωτερικός βρόχος δειγματοληψίας τιμών της βασικής αντικειμενικής συνάρτησης. Έπειτα, με κατάλληλη επεξεργασία υπολογίζεται η μέση τιμή και η τυπική της απόκλιση, και προκύπτει η τιμή της μετρική αεροδυναμικής στιβαρότητας. Αυτή αξιοποιείται, είτε στοχαστικά είτε αιτιοκρατικά, και ανανεώνονται οι τιμές των μεταβλητών σχεδιασμού και περιβάλλοντος, ενώ στη συνέχεια ελέγχεται αν έχει επιτευχθεί η σύγκλιση. Αν το κριτήριο σύγκλισης δεν ικανοποιείται, τότε η διαδικασία επαναλαμβάνεται και ξαναυπολογίζεται η μετρική αεροδυναμικής στιβαρότητας με βάση τις ανανεωμένες τιμές των μεταβλητών σχεδιασμού και περιβάλλοντος. Διαφορετικά, ο αλγόριθμος σταματά, έχοντας βρει τις ιδανικές τιμές μεταβλητών σχεδιασμού και περιβάλλοντος.

έναν εσωτερικό βρόχο για τη δειγματοληψία τιμών της  $F$ , από τις οποίες προκύπτει, με κατάλληλη επεξεργασία, η μέση τιμή της και η τυπική της απόκλιση. Στη βιβλιογραφία, αναπτύσσονται αρκετοί τρόποι δειγματοληψίας και επεξεργασίας των τιμών της  $F$ , και εύρεσης των  $\hat{\mu}_F$  και  $\hat{\sigma}_F$ . Όλοι όμως έχουν υψηλό υπολογιστικό κόστος, δεδομένου ότι αντιμετωπίζονται προβλήματα βελτιστοποίησης αεροδυναμικού σχεδιασμού που απαιτούν την πολλαπλή επίλυση των εξισώσεων N-S, κι αυτό για ένα μόνο βήμα βελτιστοποίησης! Στη συνέχεια, ανανεώνονται οι τιμές των μεταβλητών (σχεδιασμού και περιβάλλοντος) χρησιμοποιώντας μία μέθοδο βελτιστοποίησης (στοχαστική ή αιτιοκρατική) για τον έλεγχο ικανοποίησης του κριτηρίου σύγκλισης και την εύρεση της τελικής βέλτιστης λύσης.

Προχωρώντας στους τρόπους εύρεσης των χαρακτηριστικών τιμών  $\hat{\mu}_F$  και  $\hat{\sigma}_F$  της βασικής αντικειμενικής συνάρτησης, έχουν αναπτυχθεί δύο τρόποι στη βιβλιογραφία. Όπως και με τις μεθόδους βελτιστοποίησης, αλλά με απολύτως διαφορετικό σκοπό, υπάρχουν στοχαστικές και αιτιοκρατικές μέθοδοι καθορισμού των  $\hat{\mu}_F$  και  $\hat{\sigma}_F$ .

Από αυτές, η αντιπροσωπευτικότερη στοχαστική μέθοδος είναι η μέθοδος Monte Carlo [7] [11], σύμφωνα με την οποία, αν ληφθεί τυχαία ένα αρκετά μεγάλο δείγμα τιμών μίας στοχαστικής μεταβλητής, τότε οι χαρακτηριστικές τιμές του συνόλου τιμών της βασικής αντικειμενικής συνάρτησης  $F$  τείνουν προς τις πραγματικές  $\hat{\mu}_F$  και  $\hat{\sigma}_F$ , με ακρίβεια που αυξάνεται, όσο αυξάνεται και το μέγεθος του δείγματος. Συχνά, απαιτείται δείγμα μεγέθους τουλάχιστον μερικών χιλιάδων τιμών, για ικανοποιητική ακρίβεια, και αυτό για ένα βήμα βελτιστοποίησης.

Σε συνδυασμό με μία στοχαστική μέθοδο βελτιστοποίησης, που χρειάζεται μερικές εκατοντάδες ή ίσως και χιλιάδες αξιολογήσεις (κλήσεις του επιλύτη των εξισώσεων N-S) για τον εντοπισμό της βέλτιστης λύσης ή των βέλτιστων λύσεων, προκύπτει μία αντιμετώπιση ενός προβλήματος που απαιτεί υπερβολικά μεγάλο αριθμό αξιολογήσεων της αντικειμενικής συνάρτησης.

Πρέπει να σημειωθεί ότι έχουν αναπτυχθεί κι άλλες στοχαστικές μέθοδοι που μπορούν να αντικαταστήσουν τη Monte Carlo, και οι οποίες μειώνουν το υπολογιστικό κόστος για την εύρεση των χαρακτηριστικών τιμών για κάθε βήμα βελτιστοποίησης, όχι όμως σε βαθμό που να αρκεί. Ενδεικτικά αναφέρονται οι Quasi-Monte Carlo Method [11] [12] και Latin Hypercube Sampling [13] [14], οι οποίες επιλέγουν δείγματα μικρότερης ασυμφωνίας (discrepancy) [15], γεγονός που εξυπηρετεί στην οικονομικότερη δειγματοληψία τιμών της αντικειμενικής συνάρτησης  $F$  προς εύρεση των  $\hat{\mu}_F$  και  $\hat{\sigma}_F$ .

Από την άλλη, μία αιτιοκρατική μέθοδος καθορισμού των  $\hat{\mu}_F$  και  $\hat{\sigma}_F$  είναι η **Μέθοδος των Ροπών** (Method of Moments) [16], κατά την οποία οι δύο χαρακτηριστικές τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης μπορούν να ορισθούν συναρτήσει των παραγώγων ευαισθησίας της  $F$ . Η συγκεκριμένη μέθοδος δηλαδή, αξιοποιεί τις πρώτες και δεύτερες παραγώγους της βασικής αντικειμενικής συνάρτησης για την εύρεση των  $\hat{\mu}_F$  και  $\hat{\sigma}_F$ , με πιο οικονομικό τρόπο από ότι με τη μέθοδο Monte Carlo. Συγκεκριμένα, αποδεικνύεται [17] (βλ. Παράρτημα Ε'.1) πως η μέση εκτιμώμενη τιμή της  $F$  δίνεται από τη σχέση

$$\hat{\mu}_F = F + \frac{1}{2} \frac{d^2 F}{dc_i^2} \sigma_i^2 \quad (1.3)$$

ενώ η διακύμανσή της  $F$  γύρω από την  $\hat{\mu}_F$  από τη σχέση

$$\hat{\sigma}_F^2 = \left[ \frac{dF}{dc_i} \right]^2 \sigma_i^2 + \frac{1}{2} \left[ \frac{d^2 F}{dc_i dc_j} \right]^2 \sigma_i^2 \sigma_j^2 \quad (1.4)$$

Μάλιστα, το υπολογιστικό κόστος κάθε βήματος βελτιστοποίησης προκύπτει ανάλογο του αριθμού  $M$  των στιβαρών μεταβλητών, και ίσο με  $2M+2$  κλήσεις της αντικειμενικής συνάρτησης.

Αυτός ο τρόπος καθορισμού των  $\hat{\mu}_F$  και  $\hat{\sigma}_F$  μπορεί να συνδυαστεί με ένα στοχαστικό αλγόριθμο βελτιστοποίησης της μετρικής αεροδυναμικής στιβαρότητας  $\hat{F}$ , πχ. εξελικτικοί αλγόριθμοι. Αν όμως συνδυαστεί με έναν αιτιοκρατικό αλγόριθμο, ο οποίος χρησιμοποιεί τη συζυγή μέθοδο, τότε το υπολογιστικό κόστος μειώνεται δραματικά. Το μειονέκτημα όμως αυτού του τρόπου στιβαρού σχεδιασμού είναι πως απαιτείται η εύρεση της παραγώγου ευαισθησίας της  $\hat{F}$  ως προς κάθε μεταβλητή σχεδιασμού (συνήθως των μεταβλητών γεωμετρίας στον αεροδυναμικό σχεδιασμό)  $b_i$ , για να χρησιμοποιηθεί στην ανανέωση των τιμών των μεταβλητών σχεδιασμού  $b_i^{new}$ , λόγω χάρη με τη μέθοδο της απότομης καθόδου, όπως αναλύθηκε στην εξίσωση (1.2), όπου η  $F$  αντικαθίσταται από την  $\hat{F}$ .

Οι παράγωγοι ευαισθησίας της  $\hat{F}$  ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού μπορούν να βρεθούν αν χρησιμοποιηθεί η έκφραση (1.1) της  $F$ , κι έπειτα αντικατασταθούν οι αντίστοιχες εκφράσεις (1.3) και (1.4) για τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση της βασικής αντικειμενικής συνάρτησης. Αποδεικνύεται (βλ. Παράρτημα Ε.1) ότι για τον υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας απαιτείται ο υπολογισμός της τρίτης παραγώγου της  $F$  (δεύτερης ως προς τις στοχαστικές μεταβλητές και πρώτης ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού).

Συγκεκριμένα, προκύπτει η παρακάτω σχέση

$$\frac{d\hat{F}}{db_l} = \frac{dF}{db_l} + \frac{1}{2} \frac{d^3 F}{dc_i^2 db_l} \sigma_i^2 + \kappa \frac{2 \frac{dF}{dc_i} \frac{d^2 F}{dc_i db_l} \sigma_i^2 + \frac{d^2 F}{dc_i dc_j} \frac{d^3 F}{dc_i dc_j db_l} \sigma_i^2 \sigma_j^2}{2 \sqrt{\left[ \frac{dF}{dc_i} \right]^2 \sigma_i^2 + \frac{1}{2} \left[ \frac{d^2 F}{dc_i dc_j} \right]^2 \sigma_i^2 \sigma_j^2}} \quad (1.5)$$

η οποία απαιτεί υπολογιστικό κόστος ανάλογο του  $2 + 3M + M^2$ . Η ΜΠΤΡ&Β/ΕΘΣ έχει αναπτύξει μεθόδους και λογισμικό που υπολογίζει τις υψηλής τάξης παραγώγους που απαιτεί η Σχέση 1.5 [18].

Συνολικά λοιπόν, είναι προφανής η ανάγκη ανάπτυξης μίας μεθόδου υπολογισμού των χαρακτηριστικών τιμών της αντικειμενικής συνάρτησης, που να είναι οικονομική, σε αντίθεση με τη Monte Carlo, αλλά και να αποφεύγει την πολύπλοκη και ακριβή εύρεση των παραγώγων ευαισθησίας της  $F$ . Κάτι τέτοιο είναι ακόμα πιο ελκυστικό σε προβλήματα αεροδυναμικού σχεδιασμού, όπου το υπολογιστικό κόστος επίλυσης των εξισώσεων ροής είναι ιδιαίτερα περιοριστικό.

### 1.3 Εισαγωγικές Πληροφορίες για το Πολυωνυμικό Χάος

Η μέθοδος αναπτύγματος πολυωνυμικού χάους (Polynomial Chaos Expansion, PCE) αναπτύχθηκε το 1938 από τον Norbert Wiener [19]. Αρχικά, η μέθοδος μπορούσε να εφαρμοστεί αποκλειστικά για στοχαστικές μεταβλητές που κατανέμονταν κανονικά, με χρήση των ορθογώνιων πολυωνύμων Hermite. Όμως, το 2002 στη δουλειά των Xiu και Karniadakis [20], αναπτύσσεται η θεωρία του γενικευμένου πολυωνυμικού χάους (generalized Polynomial Chaos, gPC), εκμεταλλευόμενοι την προσπάθεια των Askey και Wilson [21] πάνω στη γενίκευση των ορθογώνιων πολυωνύμων. Πλέον, η μέθοδος του PCE μπορεί να εφαρμοστεί για μεταβλητές οποιαδήποτε στοχαστικής κατανομής, όχι μόνο κανονικής. Εφόσον στα προβλήματα του αεροδυναμικού σχεδιασμού, όπως και στην παρούσα διπλωματική εργασία, λαμβάνεται η παραδοχή του σχεδιασμού «Έξι Σίγμα», η μέθοδος του PCE περιορίζεται στα αρχικά Hermite πολυώνυμα.

Στη γενική περίπτωση, υπάρχουν δύο είδη μεθόδων υλοποίησης του PCE, οι επεμβα-

τικές (intrusive) και οι μη-επεμβατικές (non-intrusive) μέθοδοι [22] [23].

Με τις επεμβατικές μεθόδους, το πολυωνυμικό ανάπτυγμα εφαρμόζεται στις στοχαστικές εισόδους (inputs) και εξόδους (outputs) του εκάστοτε προβλήματος στο πρωτογενές επίπεδο λύσης καθώς και στον κώδικα αριθμητικής επίλυσης, διαμορφώνοντας διαφορετικά τις εξισώσεις περιγραφής του προβλήματος, και εν τέλει την αντικειμενική συνάρτηση  $F$  και μεταβάλλοντας σε μεγάλο βαθμό τον τρόπο αντιμετώπισης του προβλήματος. Εννοείται, ότι για διαφορετικά προβλήματα είναι αναγκαία πλέον κι η εκ νέου επέμβαση στον κώδικα επίλυσης.

Αντίθετα, με τις μη-επεμβατικές μεθόδους, η οποιαδήποτε αντικειμενική συνάρτηση  $F$  αντιμετωπίζεται ως μαύρο κουτί (black box), όπου απλά επιλέγονται οι κατάλληλες τιμές της  $F$  (sampling). Βέβαια, μεγάλη σημασία έχει η επιλογή του τρόπου δειγματοληψίας, καθώς είναι επιθυμητή η ανάγκη υπολογισμού όσο το δυνατό λιγότερων τιμών της αντικειμενικής συνάρτησης.

Οι επεμβατικές μέθοδοι μειώνουν πολύ το υπολογιστικό κόστος επίλυσης ενός προβλήματος με στοχαστικές εισόδους, λόγω της μοντελοποίησης κάθε μεγέθους ως πολυωνύμου, απλοποιώντας οποιεσδήποτε σύνθετες πράξεις. Όμως, εφόσον για διαφορετικά προβλήματα είναι αναγκαία και η διαφορετική μοντελοποίηση των στοχαστικών μεγεθών εισόδου και εξόδου, γενικά προτιμάται η χρήση μη-επεμβατικών μεθόδων και η αντιμετώπιση του επιλύτη του προβλήματος ως ανεξάρτητου προγράμματος. Με τον τρόπο αυτό αποφεύγεται η εκ νέου (ad-hoc) υλοποίηση του PCE στον κώδικα επίλυσης κάθε διαφορετικού προβλήματος, ενώ ταυτόχρονα αποφεύγεται και η δύσκολη (αν όχι αδύνατη) μοντελοποίηση των στοχαστικών εισόδων και εξόδων σε ένα πρόβλημα επίλυσης εξισώσεων N-S. Το μειονέκτημα όμως της χρήσης των μη-επεμβατικών μεθόδων είναι ο αυξημένος χρόνος επίλυσης του προβλήματος, συγκριτικά με την περίπτωση χρήσης των επεμβατικών.

Στην παρούσα διπλωματική εργασία, θα δοθεί βάση μόνο στις μη-επεμβατικές μεθόδους PCE. Μάλιστα, οι μέθοδοι που θα αναλυθούν θα μπορούν να εφαρμοστούν σε κάθε πρόβλημα αεροδυναμικά στιβαρού σχεδιασμού-βελτιστοποίησης, σε αντίθεση με την περίπτωση ανάλυσης μίας επεμβατικής μεθόδου, η οποία είναι διαφορετική για κάθε ξεχωριστό πρόβλημα.

## 1.4 Στόχος της Διπλωματικής Εργασίας

Στα κεφάλαια που ακολουθούν παρουσιάζεται αναλυτικά το ανάπτυγμα πολυωνυμικού χάους αρχικά για μία μόνο στοχαστική μεταβλητή (single-variate PCE), ενώ στη συνέχεια γενικεύεται για περισσότερες μεταβλητές (multi-variate PCE). Όπως όμως θα εξηγηθεί, στις περισσότερες διαστάσεις ελοχεύει η ονομαζόμενη “curse of dimensionality”, και η μέθοδος μπορεί να γίνει πολύ κοστοβόρα, πολύ γρήγορα. Για το λόγο αυτό, αναπτύσσονται και μέθοδοι ‘οικονομικότερης’ επίλυσης. Κάθε κεφάλαιο συνοδεύεται κι από μερικές αριθμητικές εφαρμογές, για την καλύτερη κατανόηση της μεθόδου

που αναλύεται. Ακολουθούν δύο εφαρμογές σε προβλήματα αεροδυναμικά στιβαρού σχεδιασμού-βελτιστοποίησης, πρώτα σε μία διδιάστατη (2D) περύγωση συμπίεστη για την πιστοποίηση της μεθόδου, κι έπειτα σε μία μεμονωμένη αεροτομή σε συνδυασμό με εξελικτικό αλγόριθμο με σκοπό τη βελτιστοποίηση της στιβαρής αεροδυναμικής της μορφής. Και οι δύο περιπτώσεις επιλύονται με τη βοήθεια του λογισμικού ανάλυσης (επιλύτης των εξισώσεων N-S) που έχει αναπτυχθεί σε κάρτες γραφικών (GPUs) στη ΜΠΥΡ&B/ΕΘΣ του Τομέα Ρευστών του ΕΜΠ. Τέλος, η εργασία ολοκληρώνεται με προτάσεις βελτίωσης και επέκτασης της μεθόδου PCE για την αποτελεσματικότερη και ευρύτερη εφαρμογή σε προβλήματα βέλτιστου αεροδυναμικού σχεδιασμού.

## 1.5 Δομή της Διπλωματικής Εργασίας

Η δομή της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η εξής:

- Στο 2<sup>ο</sup> κεφάλαιο αναπτύσσεται η θεωρία του πολυωνυμικού χάους για μία στοχαστική μεταβλητή. Συγκεκριμένα, ορίζονται τα ορθογώνια πολυώνυμα και δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στα πολυώνυμα Hermite, τα οποία χρησιμοποιούνται στην περίπτωση **μίας στοχαστικής μεταβλητής** που κατανέμεται κανονικά. Ακολουθούν μερικά αριθμητικά παραδείγματα για την πληρέστερη κατανόηση της μεθόδου.
- Στο 3<sup>ο</sup> κεφάλαιο γενικεύεται η μέθοδος, ώστε να εφαρμόζεται και σε προβλήματα **περισσότερων στοχαστικών μεταβλητών**. Αναπτύσσεται ο τρόπος δημιουργίας ενός πλήρους πλέγματος (Full-Grid), καθώς και τα αντίστοιχα πολυδιάστατα Hermite πολυώνυμα που πρέπει να χρησιμοποιηθούν. Ακολουθούν ακόμα μερικά αριθμητικά παραδείγματα, κατά τα οποία θα παρατηρηθεί ο εκθετικός τρόπος αύξησης του αριθμού των δειγμάτων που πρέπει να ληφθούν.
- Στο 4<sup>ο</sup> κεφάλαιο γίνεται λόγος για τρόπους αποδοτικότερης αντιμετώπισης των πολυδιάστατων προβλημάτων, προκειμένου να αποφευχθεί η εκθετική, όπως αναφέρθηκε, αύξηση των δειγμάτων. Αυτό γίνεται με την υλοποίηση των **αραιών πλεγμάτων Smolyak**, ή **Sparse Grids** όπως ονομάζονται στη βιβλιογραφία [24] [25].
- Στο 5<sup>ο</sup> κεφάλαιο εφαρμόζεται η μέθοδος σε ένα πρόβλημα αεροδυναμικά στιβαρού αεροδυναμικού σχεδιασμού. Συγκεκριμένα, μοντελοποιείται σε κάρτες γραφικών η ροή σε μία διδιάστατη περύγωση συμπιεστή, με συγκεκριμένες διαστάσεις και στοιχεία ροής, και επιλέγεται ένας αριθμός συνθηκών περιβάλλοντος που μεταβάλλονται στοχαστικά. Η εφαρμογή αυτή βοηθά στη σύγκριση της μεθόδου PCE με τη Monte Carlo και στην πιστοποίηση της πρώτης.
- Στο 6<sup>ο</sup> κεφάλαιο χρησιμοποιείται η μέθοδος του PCE στον αεροδυναμικά στιβαρό σχεδιασμό της μορφής μιας μεμονωμένης αεροτομής καθώς μεταβάλλονται στοχαστικά τα χαρακτηριστικά της επί άπειρο ροής. Η εφαρμογή αυτή αποσκοπεί στην ανάδειξη των διαφορετικών λύσεων που προκύπτουν με τη θεώρηση στοχαστικών εισόδων.
- Στο 7<sup>ο</sup> κεφάλαιο παρουσιάζονται τα συμπεράσματα από τη χρήση της μεθόδου PCE, με τα πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα της και προτείνονται τρόποι οι οποίοι θα μπορούσαν να αναπτυχθούν, ούτως ώστε να βελτιωθεί ή και να επεκταθεί η συγκεκριμένη μέθοδος.
- Στα παραρτήματα παρουσιάζονται αναλυτικότερα μερικές χρήσιμες μαθηματικές έννοιες και αποδεικνύονται συγκεκριμένες ιδιότητες που χρησιμοποιήθηκαν κατά την παρουσίαση της μεθόδου PCE.

## Κεφάλαιο 2

# Ανάπτυγμα Πολυωνυμικού Χάους σε Μονοδιάστατα Προβλήματα

Σε αυτό το κεφάλαιο αναλύεται η θεωρία της μεθόδου PCE σε μία διάσταση, δηλαδή για προβλήματα με μία μόνο στοχαστική μεταβλητή, μαζί με μερικά αριθμητικά παραδείγματα που βοηθούν στην κατανόηση της μεθόδου και στη σύγκρισή της με τη μέθοδο Monte Carlo καθώς και με την αναλυτική επίλυση, όπου αυτή είναι δυνατή.

### 2.1 Πολυωνυμικό Χάος και Στατιστικές Ροπές

Η θεωρία του αναπτύγματος Πολυωνυμικού Χάους προτείνει [26] [27] [28] πως μία συνάρτηση  $F$ , με μία στοχαστική μεταβλητή εισόδου  $x$ , προσεγγίζεται και αναπτύσσεται μέσω μίας κατάλληλης σειράς πολυωνύμων ώστε να υπολογιστεί αναλυτικά, κι άρα ακριβώς, κάθε στατιστική της ροπή (statistical moment) έως το σημείο αποκοπής της σειράς. Κυρίως ενδιαφέρει η εύρεση της μέσης τιμής και της διακύμανσής της, δηλαδή της πρώτης και δεύτερης στατιστικής ροπής αντίστοιχα. Εξαιτίας αυτής της αναλυτικής επίλυσης, η μέθοδος είναι ιδιαίτερα αποδοτική. Αναγκαία συνθήκη είναι η στατιστική ροπή που πρόκειται να υπολογιστεί να είναι πεπερασμένη [29].

Έστω λοιπόν μία βασική αντικειμενική συνάρτηση  $F(x)$ , όπου η μεταβλητή εισόδου  $x$  κατανέμεται με βάση τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας  $w(x)$  (Probability Density Function, PDF). Επίσης, έστω μία οικογένεια  $\mathcal{P}$  πολυωνύμων  $p_i(x)$ , μέγιστου βαθμού  $i$  η καθεμιά

$$\mathcal{P} = \{p_0(x), p_1(x), \dots, p_k(x), \dots\} \quad (2.1)$$

Σύμφωνα με τη θεωρία του πολυωνυμικού χάους, η βασική αντικειμενική συνάρτηση

$F$  μπορεί να προσεγγιστεί σε ικανοποιητικό βαθμό από μία συνάρτηση  $f$  με την ίδια στοχαστική είσοδο, η οποία  $f$  όμως αποτελεί γραμμικό συνδυασμό της οικογένειας πολυωνύμων  $\mathcal{P}$ , με σύνολο τιμών το σύνολο  $Y$ . Δηλαδή, είναι

$$F(x) \simeq f(x) := \sum_{i=0}^{\infty} a_i p_i(x) \quad (2.2)$$

όπου  $y = f(x) \mapsto Y$ .

Η  $\nu$ -οστή στατιστική ροπή του συνόλου  $Y$  μπορεί να γραφτεί ως

$$\begin{aligned} \langle y^\nu \rangle &= \int_D (f(x))^\nu w(x) dx = \int_D \left( \sum_{i=0}^{\infty} a_i p_i(x) \right)^\nu w(x) dx \\ &= \int_D \underbrace{\left( \sum_{i=0}^{\infty} a_i p_i(x) \right) \cdots \left( \sum_{i=0}^{\infty} a_i p_i(x) \right)}_{\nu \text{ φορές}} w(x) dx \\ &= \sum_{i_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{i_\nu=0}^{\infty} a_{i_1} \cdots a_{i_\nu} \int_D p_{i_1}(x) \cdots p_{i_\nu}(x) w(x) dx \quad (2.3) \end{aligned}$$

Οι ολοκληρώσεις, αν και σύνθετες, μπορούν να αντιμετωπιστούν αναλυτικά, γεγονός που σημαίνει ότι και κάθε στατιστική ροπή βαθμού  $\nu$  είναι (θεωρητικά) υπολογίσιμη.

Για να απλοποιηθεί η έκφραση (2.3), θα χρησιμοποιηθεί μία ειδική οικογένεια πολυωνύμων, τα λεγόμενα **ορθογώνια πολυώνυμα** (orthogonal polynomials).

## 2.2 Ορθογώνια Πολυώνυμα

Τα ορθογώνια πολυώνυμα διαθέτουν μία πολύ χρήσιμη ιδιότητα, η οποία απλοποιεί σημαντικά την εξίσωση (2.3).

Ειδικότερα, για κάθε είδος στοχαστικής κατανομής  $w(x)$  (ομοιόμορφη, κανονική, εκθετική, κ.α.) υπάρχει και μία αντίστοιχη οικογένεια ορθογωνίων πολυωνύμων  $p_n$ . Το εσωτερικό γινόμενο (προβολή Galerkin) δύο πολυωνύμων που ανήκουν σε αυτή, με συνάρτηση βάρους την  $w(x)$  στο πεδίο ορισμού  $D$ , είναι μηδενικό, με εξαίρεση την περίπτωση που τα δύο πολυώνυμα ταυτίζονται.

Δηλαδή, ισχύει

$$\langle p_i(x), p_j(x) \rangle_w = \int_D p_i(x) p_j(x) w(x) dx = \langle p_i(x), p_i(x) \rangle_w \delta_{ij} \quad (2.4)$$



Κατανομή	PDF	Ονομασία Πολυωνύμων $p_n$	Συνάρτηση Βάρους $w(x)$	Πεδίο ορισμού $D$
Ομοιόμορφη	$\frac{1}{2}$	<i>Legendre</i> $P_n(x)$	1	$[-1, 1]$
Κανονική	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$	<i>Hermite</i> $He_n(x)$	$e^{-\frac{x^2}{2}}$	$(-\infty, \infty)$
$\beta$ -	$\frac{(1-x)^\alpha (1+x)^\beta}{2^{\alpha+\beta+1} B(\alpha+1, \beta+1)}$	<i>Jacobi</i> $J_n^{\alpha, \beta}(x)$	$(1-x)^\alpha (1+x)^\beta$ , $\alpha, \beta > -1$	$[-1, 1]$
Εκθετική	$e^{-x}$	<i>Laguerre</i> $L_n(x)$	$e^{-x}$	$[0, \infty)$
Γάμμα	$\frac{x^\alpha e^{-x}}{\Gamma(\alpha+1)}$	<i>Generalized Laguerre</i> $L_n^\alpha(x)$	$x^\alpha e^{-x}$	$[0, \infty)$

**Πίνακας 2.1:** Στοιχεία συχνών στοχαστικών κατανομών. Καθεμία ορίζεται σε συγκεκριμένο πεδίο ορισμού  $D$ , διαθέτει τη δική της συνάρτηση κατανομής και συνάρτηση βάρους, ενώ επίσης έχει και τη δική της ορθογώνια οικογένεια πολυωνύμων.

όπου  $\delta_{ij}$  είναι το σύμβολο *Kronecker*, το οποίο ισούται με μηδέν όταν  $i \neq j$  και με τη μονάδα όταν  $i = j$ , δηλαδή

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} \quad (2.5)$$

Στην ειδική περίπτωση που  $i = j$ , τότε το εσωτερικό γινόμενο (2.4) ταυτίζεται με το τετράγωνο της κατά  $w$ -νόρμα του πολυωνύμου  $p_i$

$$\langle p_i(x), p_i(x) \rangle_w \equiv \|p_i\|_w^2 = \gamma_i \quad (2.6)$$

όπου  $\sqrt{\gamma_n}$  ορίζεται ως το **μέτρο κανονικότητας** του πολυωνύμου  $p_n$ . Το μέτρο κανονικότητας δεν είναι αναγκαστικά ίσο με μονάδα, παρά μόνο στις **ορθοκανονικές οικογένειες πολυωνύμων**.

Υπάρχουν πολλά είδη στοχαστικών κατανομών, καθεμιά με τα αντίστοιχα ορθογώνια πολυώνυμα  $p_n$  και συνάρτηση βάρους  $w(x)$ . Μερικά χρήσιμα μελέτης παρουσιάζονται στον Πίνακα 2.1. Κοινό χαρακτηριστικό όλων των οικογενειών  $p_n$  είναι ότι το πρώτο πολυώνυμο, μηδενικού βαθμού, είναι ίσο με τη μονάδα. Άρα, είναι

$$p_0 = 1, \quad \text{ανεξαρτήτου στοχαστικής κατανομής } w(x) \quad (2.7)$$

Επιστρέφοντας στην εξίσωση (2.3), η  $f$  αντικαθίσταται με το κατάλληλο ανάπτυγμα για την εύρεση της πρώτης στατιστικής ροπής (εκθέτης  $\nu = 1$ ), της **μέσης τιμής** ή **προσδοχίας** (expectation) όπως επίσης ονομάζεται. Να τονιστεί ότι στη σχέση (2.8) δεν έχει γίνει, προς το παρόν, κάποια αποκοπή και διατηρούνται οι άπειροι όροι του αναπτύγματος.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y] = \mu_Y = \langle y^1 \rangle &= \int_D (f(x))^1 w(x) dx = \int_D f(x) w(x) dx \\ &= \int_D \left( \sum_{i=0}^{\infty} a_i p_i(x) \right) w(x) dx = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \int_D p_i(x) w(x) dx \end{aligned} \quad (2.8)$$

Όμως  $p_0(x)=1$  και  $\int_D w(x)dx=1$ , αφού από τον ορισμό μιας στοχαστικής κατανομής η συνολική πιθανότητα ενός στοχαστικού φαινομένου ισούται με τη μονάδα. Τότε

$$\int_D p_i(x)w(x)dx = \int_D p_i(x) \cdot 1 \cdot w(x)dx = \int_D p_i(x)p_0(x)w(x)dx \equiv 0 \quad (2.9)$$

για κάθε  $i > 0$  εξαιτίας της ιδιότητας ορθογωνιότητας, κι επομένως

$$\mu_Y = a_0 \int_D p_0(x)w(x)dx + \sum_{i=1}^{\infty} a_i \int_D p_i(x)w(x)dx \Rightarrow \mu_Y = a_0 \int_D 1 \cdot w(x)dx$$

ή

$$\mu_Y = a_0 \quad (2.10)$$

Για τη δεύτερη στατιστική ροπή, δηλαδή τη **διακύμανση** (variance,  $var$ ) και για την τυπική απόκλιση  $\sigma_Y$ , ισχύει

$$var(Y) = \sigma_Y^2 = \langle y^2 \rangle - \mu_Y^2 \quad (2.11)$$

$$\sigma_Y = \sqrt{\sigma_Y^2} = \sqrt{\langle y^2 \rangle - \mu_Y^2} \quad (2.12)$$

με

$$\begin{aligned} \langle y^2 \rangle &= \int_D (f(x))^2 w(x)dx = \int_D \left( \sum_{i=0}^{\infty} a_i p_i(x) \right)^2 w(x)dx \\ &= \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} a_{i_1} a_{i_2} \int_D p_{i_1}(x) p_{i_2}(x) w(x)dx \end{aligned}$$

όπου, απλοποιώντας με την ιδιότητα ορθογωνιότητας 2.4, προκύπτει

$$\langle y^2 \rangle = \sum_{i=0}^{\infty} a_i^2 \int_D p_i(x)^2 w(x)dx = \sum_{i=0}^{\infty} a_i^2 \|p_i(x)\|_w^2$$

ώστε, τελικά από τον ορισμό της νόρμας 2.6

$$\langle y^2 \rangle = \sum_{i=0}^{\infty} a_i^2 \gamma_i \quad (2.13)$$

Αν  $\gamma_n = 1$ , τότε τα πολυώνυμα είναι και **κανονικά**, κι η αντίστοιχη οικογένεια  $\tilde{p}_n(x)$

ονομάζεται **ορθοκανονική**. Ένας τρόπος κανονικοποίησης των πολυωνύμων του Πίνακα 2.1 επιτυγχάνεται διαιρώντας τα πολυώνυμα κάθε οικογένειας με το αντίστοιχο μέτρο κανονικότητας,

$$\tilde{p}_n(x) = \frac{p_n(x)}{\|p_n(x)\|} = \frac{p_n(x)}{\sqrt{\gamma_n}} \quad (2.14)$$

Με την απλοποίηση αυτή, προκύπτει η σχέση

$$\langle y^2 \rangle = \sum_{i=0}^{\infty} a_i^2 \quad (2.15)$$

Από τις εξισώσεις (2.10), (2.12) και (2.15) προκύπτει η τελική σχέση υπολογισμού της τυπικής απόκλισης

$$\sigma_Y = \sqrt{\sum_{i=0}^{\infty} a_i^2 - a_0^2}$$

ή, απλούστερα,

$$\sigma_Y = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2} \quad (2.16)$$

Εφόσον η συνάρτηση  $f$  έχει εκφραστεί για δεδομένη στοχαστική κατανομή (άρα και δεδομένα ορθογώνια πολυώνυμα, με βάση τον Πίνακα 2.1) ως το άθροισμα της εξίσωσης (2.2), καταρχήν με άπειρους όρους-πολυώνυμα και, στη συνέχεια, αναγκαστικά έχοντας υποστεί αποκοπή, το επόμενο βασικό βήμα είναι ο υπολογισμός των συντελεστών  $a_i$ . Έχοντας υπολογίσει τους συντελεστές αυτούς, οι σχέσεις (2.10) και (2.16) δίνουν εύκολα τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση της βασικής αντικειμενικής συνάρτησης, ποσότητες απαραίτητες για να οριστεί η μετρική αεροδυναμικής στιβαρότητας  $\hat{F}$ .

## 2.3 Συντελεστές Πολυωνυμικού Χάους και Οικονομική Ολοκλήρωση

Πριν τον υπολογισμό των συντελεστών  $a_i$  της σχέσης (2.2), πρέπει να οριστεί ένα σημείο  $k$  αποκοπής του αναπτύγματος, που ονομάζεται **τάξη χάους** (chaos order). Φυσικά, όσο μεγαλύτερο είναι το  $k$ , τόσο μεγαλύτερη θα είναι και η ακρίβεια της μεθόδου στον υπολογισμό των στατιστικών ροπών, αλλά και το υπολογιστικό κόστος. Στα προβλήματα αεροδυναμικά στιβαρού σχεδιασμού-βελτιστοποίησης ενδιαφέρει κατά κύριο λόγο η εύρεση της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης.

Συνεπώς, για τάξη χάους ίση με  $k$ , χρησιμοποιώντας ορθοκανονικά πολυώνυμα, η

συνάρτηση  $f$  αναπτύσσεται σε γραμμικό συνδυασμό  $k+1$  πολυωνύμων, συμπεριλαμβανομένου και του σταθερού όρου. Είναι δηλαδή

$$f(x) \simeq \sum_{i=0}^k a_i \tilde{p}_i(x) \quad (2.17\alpha')$$

$$\mu_Y \simeq a_0 \quad (2.17\beta')$$

$$\sigma_Y \simeq \sqrt{\sum_{i=1}^k a_i^2} \quad (2.17\gamma')$$

Για την εύρεση των  $k+1$  συντελεστών  $a_i$ ,  $i = 0, 1 \dots k$ , χρησιμοποιείται το εσωτερικό γινόμενο συναρτήσεων, ή όπως ονομάζεται **προβολή Galerkin** (Galerkin Projection), καθώς και οι ιδιότητες ορθογωνιότητας και κανονικότητας των πολυωνύμων. Για  $i = 0, 1 \dots k$  είναι

$$\langle f(x), \tilde{p}_i(x) \rangle_w = \int_D f(x) \tilde{p}_i(x) w(x) dx \simeq \int_D F(x) \tilde{p}_i(x) w(x) dx \quad (2.18)$$

που γράφεται και ως

$$\langle f(x), \tilde{p}_i(x) \rangle_w = \left\langle \sum_{\lambda=0}^k a_\lambda \tilde{p}_\lambda(x), \tilde{p}_i(x) \right\rangle_w = a_i \|\tilde{p}_i(x)\|_w^2 = a_i \quad (2.19)$$

Εξισώνοντας τα τελευταία μέλη των εξισώσεων (2.18) και (2.19), προκύπτει η εξίσωση

$$a_i = \int_D F(x) \tilde{p}_i(x) w(x) dx \quad (2.20)$$

από την οποία υπολογίζονται οι συντελεστές  $a_i$ , εφόσον έχουν επιλεγεί (α) η τάξη του χάους  $k$ , (β) η υπόψη στατιστική κατανομή, και άρα η μορφή της PDF, και (γ) τα αντίστοιχα ορθοκανονικά πολυώνυμα, σύμφωνα με τον Πίνακα 2.1.

Το πρόβλημα πλέον μετατοπίζεται στον οικονομικό υπολογισμό των ολοκληρωμάτων (2.20), καθώς είναι επιθυμητή η κλήση της συνάρτησης  $F$  που βρίσκεται στην προς ολοκλήρωση ποσότητα όσο το δυνατό λιγότερες φορές. Ο λόγος είναι ότι σε ένα πρόβλημα αεροδυναμικής βελτιστοποίησης, μία κλήση της  $F$  συνήθως απαιτεί την επίλυση των εξισώσεων ροής και, συνεπώς, ανάλογα με την εφαρμογή, μπορεί να έχει εξαιρετικά υψηλό υπολογιστικό κόστος.

### 2.3.1 Ολοκλήρωση με Gauss Quadrature

Εφόσον έχει ήδη εισαχθεί η έννοια της συνάρτησης κατανομής βάρους  $w(x)$ , ένας τρόπος υπολογισμού του ολοκληρώματος της εξίσωσης (2.20) είναι με τη χρήση της μεθόδου Gauss Quadrature (GQ) [30].

Σύμφωνα με τη Gauss Quadrature, το ολοκλήρωμα μίας συνάρτησης  $g(x)$  σε ένα πεδίο ολοκλήρωσης  $D$  μπορεί να υπολογιστεί ως το άθροισμα  $n$  γινομένων της τιμής της  $g$  σε μερικούς -κατάλληλα επιλεγμένους- προβολή Galerkin  $z'_i$  (Gaussian nodes ή abscissas) με συγκεκριμένα βάρη  $w'_i$  (weights). Δηλαδή

$$\int_D g(x)dx = \sum_{j=1}^n w'_j g(z'_j) \quad (2.21)$$

Το πλήθος των κόμβων Gauss που θα επιλεγεί καθορίζει την ακρίβεια κατά τον υπολογισμό του ολοκληρώματος. Μεγαλύτερο πλήθος κόμβων Gauss συνεπάγεται περισσότερες κλήσεις της εκάστοτε συνάρτησης κι άρα υψηλότερο υπολογιστικό κόστος.

Η μέθοδος GQ επιφέρει καλύτερα αποτελέσματα [31] όταν η συνάρτηση  $g$  αναλύεται προσεγγιστικά ως γινόμενο μίας πολυωνυμικής συνάρτησης  $f$  με μία συνάρτηση βάρους  $w$ , αξιοποιώντας με τον τρόπο αυτό τη στοχαστικότητα της μεταβλητής εισόδου και τη συνάρτηση κατανομής της (PDF) στην επιλογή των  $\omega_j$  και  $z_j$ , ενώ, επίσης, αντιμετωπίζει αποτελεσματικά και οποιαδήποτε ιδιόμορφα σημεία προκύπτουν κατά την ολοκλήρωση [32],

$$g(x) = w(x)f(x) \quad (2.22)$$

οπότε και

$$\int_D g(x)dx = \int_D w(x)f(x)dx = \sum_{j=1}^n \omega_j f(z_j) \quad (2.23)$$

όπου τώρα τα  $\omega_j$  και  $z_j$  εξαρτώνται από τη συνάρτηση βάρους  $w(x)$ .

Για προβλήματα μίας στοχαστικής μεταβλητής, το ολοκλήρωμα (2.20) υπολογίζεται με οικονομικό τρόπο χρησιμοποιώντας τη Gauss Quadrature. Μάλιστα αποδεικνύεται ότι απαιτεί αποκλειστικά  $k+1$  δείγματα τιμών της  $f$ , όπου  $k$  είναι η τάξη του χάους.

Έστω  $p_n$  η οικογένεια των ορθογώνιων πολυωνύμων για τη συγκεκριμένη στοχαστική κατανομή  $w$ , επιλεγμένα κατάλληλα σύμφωνα με τον Πίνακα 2.1.

Τα σημεία  $z_j$  είναι οι ρίζες του πολυωνύμου βαθμού  $k+1$ ,  $p_{k+1}$ , ενώ τα βάρη υπολογίζονται από τη σχέση

$$\omega_j = \frac{A_{k+1}}{A_k} \cdot \frac{\gamma_k}{p'_{k+1}(z_j) \cdot p_k(z_j)} \quad (2.24)$$

όπου ως  $A_k$  ορίζεται ο συντελεστής του όρου  $x^k$  στο πολυώνυμο βαθμού  $k$ .

Ακολουθούν μερικές παρατηρήσεις πάνω στα βάρη.

- Τα βάρη είναι πάντοτε θετικά. Δεν υπάρχουν αρνητικά βάρη στις Gauss Quadratures.
- Για στατιστικές κατανομές που το πεδίο ορισμού τους περιλαμβάνει και αρνητικούς αριθμούς, τα βάρη είναι συμμετρικά ως προς τη μεσαία τιμή (αν το πλήθος είναι περιττό), ή τις μεσαίες τιμές (αν το πλήθος είναι άρτιο).
- Το σφάλμα τους (error) για  $a < \xi < b$  δίνεται από τη σχέση:  $E_n = \frac{\gamma_n}{A_n^2} \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}$  [33]. Αυτό σημαίνει ότι μπορεί να υπολογιστεί με ακρίβεια το ολοκλήρωμα οποιουδήποτε πολυωνύμου, βαθμού έως  $2k-1$ , όπου  $k$  είναι η τάξη του χάους.
- Ειδικά στην περίπτωση της Gauss-Hermite Quadrature, το άθροισμα όλων των βαρών είναι σταθερό ( $\sqrt{2\pi}$  για τα πιθανοτικά πολυώνυμα, μονάδα για τα κανονικοποιημένα πιθανοτικά, και  $\sqrt{\pi}$  για τα πολυώνυμα του φυσικού).

Συμπερασματικά, στα προβλήματα που συναντώνται στον τομέα της αεροδυναμικής βελτιστοποίησης, αρκούν ελάχιστες τιμές της υπολογιστικά κοστοβόρας συνάρτησης  $F$  για τον υπολογισμό της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης σε προβλήματα αεροδυναμικά στιβαρού σχεδιασμού-βελτιστοποίησης.

Εάν, όμως, το πλήθος των στοχαστικών μεταβλητών είναι δύο ή μεγαλύτερο, τότε, όπως αναλύεται στο Κεφάλαιο 3, αντιμετωπίζεται πρόβλημα με τη ραγδαία εκθετική αύξηση του αριθμού των δειγμάτων της  $F$  που απαιτούνται για την εφαρμογή της Gauss-Quadrature. Στο Κεφάλαιο 4, αναφέρονται τρόποι μείωσης του πλήθους των δειγμάτων που πρέπει να ληφθούν σε πολυδιάστατα προβλήματα.

## 2.4 Πολυωνυμικό Χάος σε Κανονική Κατανομή

Στη συνέχεια, θα μελετηθεί μόνο η περίπτωση μίας στοχαστικής μεταβλητής που κατανέμεται κανονικά (Normal Distribution) με συγκεκριμένη μέση τιμή  $\mu$  και τυπική απόκλιση  $\sigma$

$$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2) : w(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad (2.25)$$

Ειδικά για την περίπτωση κανονικής κατανομής, η οικογένεια πολυωνύμων που χρησιμοποιείται ονομάζεται *Hermite* ( $He_k$ ), και ο υπολογισμός του ολοκληρώματος (2.20) θα γίνει με χρήση της λεγόμενης Gauss-Hermite Quadrature (GHQ).

Αν η στοχαστική μεταβλητή κατανεμόταν διαφορετικά (κατανομή Legendre, Chebyshev, κ.λπ.), τότε θα γινόταν χρήση των αντίστοιχων ομωνύμων πολυωνύμων και μεθόδου ολοκλήρωσης (*Gauss – Legendre*, *Gauss – Chebyshev Quadrature*, κ.ο.κ.), χωρίς όμως κάποια άλλη βασική αλλαγή στη μέθοδο.

Υπάρχουν δύο είδη πολυωνύμων Hermite, τα πιθανοτικά (probabilists') και τα πολυ-

ώνυμα Hermite του φυσικού (physicists'). Οι διαφορές τους, που οφείλονται στον επιστημονικό τομέα όπου εφαρμόζονται, αναφέρονται στο Παράρτημα Α'.1. Στην ανάλυση που ακολουθεί χρησιμοποιούνται αποκλειστικά τα πρώτα.

Τα πιθανοτικά Hermite πολυώνυμα είναι τα εξής:

$$\begin{aligned} He_0(x) &= 1, \\ He_1(x) &= x, \\ He_2(x) &= x^2 - 1, \\ He_3(x) &= x^3 - 3x, \\ He_4(x) &= x^4 - 6x^2 + 3, \\ He_5(x) &= x^5 - 10x^3 + 15x, \\ &\dots \end{aligned}$$

ή αναδρομικά

$$He_{k+1}(x) = xHe_k - kHe_{k-1} \quad (2.26)$$

με το συντελεστή του όρου  $x^k$  στο εκάστοτε  $He_k$  να ισούται με  $A_k = 1$  (μονικά πολυώνυμα), ενώ, η κατά  $w$ -νόρμα τους αποδεικνύεται [34] ότι είναι ίση με

$$\|He_k\|_w^2 \equiv \gamma_k = \langle He_k(x), He_k(x) \rangle_w = \int_{-\infty}^{+\infty} He_k^2(x)w(x)dx = k!$$

ή

$$\|He_k\|_w = \sqrt{k!} \quad (2.27)$$

όπου  $w$  είναι η τυποποιημένη κανονική κατανομή ( $\mu=0$  και  $\sigma=1$ )

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (2.28)$$

Ορίζονται και τα κανονικοποιημένα Hermite πολυώνυμα

$$\widetilde{He}_k(x) := \frac{He_k(x)}{\|He_k\|_w} = \frac{He_k(x)}{\sqrt{k!}} \implies \|\widetilde{He}_k(x)\|^2 \equiv \gamma_k = 1, \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.29)$$

όπου πλέον τα πολυώνυμα είναι μη-μονικά, δηλαδή ο συντελεστής του όρου  $x^k$  δεν ισούται με τη μονάδα, αλλά είναι ίσος με

$$A_k = \frac{1}{\sqrt{k!}} \quad (2.30)$$

Όπως αναφέρεται και στο Παράρτημα Α'.1, μη-μονικά είναι και τα Hermite πολυώνυμα του φυσικού.

Καθώς δεν διέπονται όλα τα πραγματικά προβλήματα από κανονική κατανομή με μηδενική μέση τιμή και τυπική απόκλιση ίση με τη μονάδα (η ονομαζόμενη τυποποιημένη κανονική κατανομή), πριν την επιστροφή στον υπολογισμό των συντελεστών  $a_i$  του PCE, πρέπει πρώτα να εφαρμοστεί κατάλληλος μετασχηματισμός για την αλλαγή της στοχαστικής μεταβλητής από το τυποποιημένο σύνολο της κανονικής κατανομής  $Z$  ( $z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ ) στο πραγματικό στοχαστικό σύνολο  $X$  ( $x \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ ).

$$\frac{x - \mu}{\sigma} = z \longrightarrow x = \sigma z + \mu, \quad \text{ώστε και} \quad dx = \sigma dz \quad (2.31)$$

Με την αλλαγή (2.31) και αντικαθιστώντας τη συνάρτηση κατανομής (2.25), το ολοκλήρωμα (2.20) γράφεται

$$a_i = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) \widetilde{H}e_i\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) w(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\sigma z + \mu) \widetilde{H}e_i(z) e^{-\frac{z^2}{2}} dz \quad (2.32)$$

ή, κατά GHQ, προσεγγίζεται ως άθροισμα  $n$  όρων της μορφής

$$a_i = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) \widetilde{H}e_i\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) w(x) dx = \sum_{j=1}^n \omega_j^{(n)} \widetilde{H}e_i(z_j^{(n)}) F(\sigma z_j^{(n)} + \mu) \quad (2.33)$$

Ο εκθέτης στα  $z_j^{(n)}$  και  $\omega_j^{(n)}$  υποδηλώνει ότι αποτελούν τις ρίζες του πολυωνύμου *Hermite* ενός βαθμού μεγαλύτερου από την τάξη του PCE, με τα αντίστοιχα βάρη. Ισχύει δηλαδή  $n = k+1$ , όπου  $n$  ο αριθμός των σημείων της GHQ, και  $k$  η τάξη χάους που ζητείται [26] [28].

Προς αποφυγή τυχόν συγχύσεων, δε θα χρησιμοποιείται το σύμβολο  $n$  της GHQ, αλλά θα γράφεται  $k+1$  όπου απαιτείται, εννοώντας ότι οι εκφράσεις (2.34) και (2.35) είναι απολύτως ισοδύναμες.

$$z_j^{(n)}, j = 1, 2 \dots n \mid \widetilde{H}e_n(z_j^{(n)}) = 0 \quad (2.34)$$

$$z_j^{(k+1)}, j = 1, 2 \dots k+1 \mid \widetilde{H}e_{k+1}(z_j^{(k+1)}) = 0 \quad (2.35)$$

Επιπλέον, για απλοποίηση των σχέσεων που ακολουθούν, εννοείται η χρήση του εκθέτη στα  $z_j^{(k+1)}$  και  $\omega_j^{(k+1)}$ , οπότε και θα παραλείπεται.



Ταυτόχρονα, τα βάρη  $\omega_j$  μπορούν να βρεθούν από τη σχέση (2.36)

$$\omega_j = \frac{A_{k+1}}{A_k} \cdot \frac{\gamma_k}{\widetilde{H}e'_{k+1}(z_j) \cdot \widetilde{H}e_k(z_j)} \quad (2.36)$$

ή, λόγω των (2.30) και (2.29)

$$\omega_j = \frac{\frac{1}{\sqrt{(k+1)!}}}{\frac{1}{\sqrt{k!}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{k+1} \cdot \widetilde{H}e_k(z_j) \cdot \widetilde{H}e_k(z_j)}$$

εφόσον αποδεικνύεται ότι

$$\widetilde{H}e'_{k+1}(x) \equiv \frac{d(\widetilde{H}e_{k+1})}{dx} = \sqrt{k+1} \cdot \widetilde{H}e_k(x) \quad (2.37)$$

Με απλοποιήσεις, προκύπτει η εύχρηστη σχέση

$$\omega_j = \frac{1}{(k+1) \cdot \widetilde{H}e_k^2(z_j)} \quad (2.38)$$

Έτσι, η μέση τιμή κατά PCE τάξης  $k$  της βασικής αντικειμενικής συνάρτησης για την προαναφερθείσα κατανομή της στοχαστικής μεταβλητής, με χρήση της GHQ βαθμού  $n = k + 1$ , μπορεί να εκφραστεί ως

$$\mu_Y = a_0 = \sum_{j=1}^{k+1} \omega_j \widetilde{H}e_0(z_j) F(\sigma z_j + \mu)$$

ή

$$\mu_Y = a_0 = \sum_{j=1}^{k+1} \omega_j F(\sigma z_j + \mu) \quad (2.39)$$

εφόσον  $\widetilde{H}e_0(x) = 1$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ , ενώ η διακύμανσή της γράφεται

$$\sigma_Y^2 = \sum_{i=1}^k a_i^2 = \sum_{i=1}^k \left( \sum_{j=1}^{k+1} \omega_j \widetilde{H}e_i(z_j) F(\sigma z_j + \mu) \right)^2 \quad (2.40)$$

Τελικά, αποκτάται και το προσεγγιστικό πολωνυμικό ανάπτυγμα της αντικειμενικής

συνάρτησης, το οποίο θα είναι ίσο με

$$F(x) \simeq \sum_{i=0}^k a_i \widetilde{He}_i\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \quad (2.41)$$

Το ανάπτυγμα αυτό είναι πολύ χρήσιμο όταν χρειάζεται η διαφορίση της αντικειμενικής συνάρτησης. Για την εύρεση της παραγώγου της  $F$  ως προς την στοχαστική μεταβλητή  $x$ , τότε απλά πρέπει να παραγωγιστούν τα πολυώνυμα Hermite, μία πολύ “φθηνή” διαδικασία από άποψη υπολογιστικών κόστους. Από την άλλη, αν το πρόβλημα βελτιστοποίησης διαθέτει και μία μεταβλητή σχεδιασμού  $b$  και επιλυθεί αιτιοκρατικά, τότε θα χρειαστεί η εύρεση της παραγώγου ευαισθησίας της αντικειμενικής συνάρτησης  $F(b, x)$ , κι άρα ο υπολογισμός του όρου

$$\frac{da_i(b)}{db} = \frac{d}{db} \int_D F(b, x) p_i w(x) dx \quad (2.42)$$

Συνοψίζοντας, η μέθοδος του PCE για μία στοχαστική μεταβλητή είναι ιδιαίτερα χαμηλού υπολογιστικού κόστους, καθώς απαιτεί τον υπολογισμό μόνο των  $k+1$  σημείων  $F(x_j)$ . Η αποδοτικότητα της μεθόδου έγκειται κυρίως στο ότι κάθε δείγμα της  $F$  χρησιμοποιείται στον υπολογισμό κάθε συντελεστή  $a_i$ ,  $i = 0, 1, \dots$

## 2.5 Αριθμητικά Παραδείγματα PCE με Μία Στοχαστική Μεταβλητή

Ακολουθούν ορισμένες εφαρμογές βαθμιαία αυξανόμενης δυσκολίας, για την πληρέστερη κατανόηση της μεθόδου που αναλύθηκε σε αυτό το κεφάλαιο.

### 2.5.1 Εφαρμογή σε Γραμμική Συνάρτηση

Έστω βασική αντικειμενική συνάρτηση  $f(x) = 2x + 1$ , με το  $x$  να ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή  $\mu = 1$  και διακύμανση  $\sigma^2 = 4$ , άρα τυπική απόκλιση  $\sigma = 2$ . Συνοπτικά αυτό γράφεται

$$x \sim \mathcal{N}(1, 4)$$

Από τη σχέση (2.25) προκύπτει με αντικατάσταση η συνάρτηση βάρους  $w$ , ως

$$w(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{2}\right)^2}$$

Πριν από οποιαδήποτε ανάλυση, από βασικές γνώσεις στατιστικής και ιδιοτήτων μέσης τιμής και τυπικής απόκλισης και δεδομένου ότι η  $f$  που μελετάται είναι γραμμική συνάρτηση, αναμένεται ότι  $\mu_Y = 2 \cdot 1 + 1 = 3$  και  $\sigma_Y = 2 \cdot |2| = 4$ .

Αρχικά λοιπόν, το πρόβλημα επιλύεται αναλυτικά. Η μέση τιμή βρίσκεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} \mu_Y &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)w(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (2x+1)\frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{2}\right)^2} dx \implies \\ \implies \mu_Y &= \left[ \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left( -8e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{2}\right)^2} + 3\sqrt{2\pi} \cdot \operatorname{erf}\left(\frac{x-1}{2\sqrt{2}}\right) \right) \right]_{-\infty}^{+\infty} \equiv [\Phi_1(x)]_{-\infty}^{+\infty} \end{aligned} \quad (2.43)$$

όπου τέθηκε

$$\Phi_1(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left( -8e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{2}\right)^2} + 3\sqrt{2\pi} \cdot \operatorname{erf}\left(\frac{x-1}{2\sqrt{2}}\right) \right)$$

ενώ ορίζεται επίσης και η

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \quad (2.44)$$

γνωστή ως συνάρτηση σφάλματος Gauss (*Gauss error function*), περισσότερο για την οποία αναφέρονται στο Παράρτημα Γ'.

Υπολογίζοντας κατάλληλα τα όρια της (2.43), προκύπτει το αποτέλεσμα που αναμενόταν.

$$\begin{aligned} \mu_Y &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi_1(x) - \lim_{x \rightarrow -\infty} \Phi_1(x) \implies \\ \implies \mu_Y &= 1.5 - (-1.5) = 3 \end{aligned}$$

Για την εύρεση της τυπικής απόκλισης πρέπει πρώτα να υπολογιστεί ο όρος  $\langle y^2 \rangle$ ,

$$\begin{aligned} \langle y^2 \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} (f(x))^2 w(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (2x+1)^2 \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{2}\right)^2} dx \implies \\ \implies \langle y^2 \rangle &= \left[ \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left( -16e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{2}\right)^2} (x+2) + 25\sqrt{2\pi} \cdot \operatorname{erf}\left(\frac{x-1}{2\sqrt{2}}\right) \right) \right]_{-\infty}^{+\infty} \equiv [\Phi_2(x)]_{-\infty}^{+\infty} \end{aligned}$$

όπου, αυτή τη φορά, τέθηκε

$$\Phi_2(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left( -16e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{2}\right)^2} (x+2) + 25\sqrt{2\pi} \cdot \operatorname{erf}\left(\frac{x-1}{2\sqrt{2}}\right) \right)$$

Ξανά, υπολογίζοντας τα όρια της νέας συνάρτησης  $\Phi_2(x)$  προκύπτει

$$\begin{aligned}\langle y^2 \rangle &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi_2(x) - \lim_{x \rightarrow -\infty} \Phi_2(x) \implies \\ \implies \langle y^2 \rangle &= 12.5 - (-12.5) = 25\end{aligned}$$

ώστε, αντικαθιστώντας το αποτέλεσμα στη σχέση (2.12), αποκτάται το προβλεπόμενο αποτέλεσμα για την τυπική απόκλιση

$$\begin{aligned}\sigma_Y &= \sqrt{\sigma_Y^2} = \sqrt{\langle y^2 \rangle - \mu_Y^2} \\ \sigma_Y &= \sqrt{25 - 3^2} = \sqrt{16} = 4\end{aligned}$$

Ακολουθεί η εύρεση των δύο τιμών με χρήση του PCE. Τα βήματα που ακολουθούνται είναι τα εξής:

1. Εφόσον η κατανομή είναι κανονική, χρησιμοποιούνται τα κανονικοποιημένα πιθανοτικά Hermite πολυώνυμα και τα ολοκληρώματα υπολογίζονται με την Gauss-Hermite Quadrature.
2. Αρχικά, πρέπει να οριστεί η τάξη χάους  $k$ . Εφόσον η δοθείσα συνάρτηση είναι πολυωνυμική 1ου βαθμού, το αναπτύγμα που θα προκύψει δεν απαιτεί τους συντελεστές  $a_2, a_3, \dots$ , και για αυτό δεν χρειάζεται τάξη χάους μεγαλύτερη της μονάδας. Αυτό, προφανώς, είναι μία ειδική αντιμετώπιση σε ένα τέτοιο απλό πρόβλημα κατανόησης, για το οποίο η αναλυτική έκφραση της αντικειμενικής συνάρτησης είναι διαθέσιμη.  
Στην περίπτωση που η τάξη  $k$  είναι μεγαλύτερη από τον μέγιστο εκθέτη του πολυωνύμου της βασικής αντικειμενικής συνάρτησης του παρόντος παραδείγματος, τότε όλοι οι 'μη-απαραίτητοι' συντελεστές θα προκύψουν ίσοι με μηδέν. Για να φανεί αυτό, θα επιλεχθεί  $k=2$ , οπότε και θα αποδειχθεί ότι ο συντελεστής  $a_2$  είναι μηδενικός, στη συγκεκριμένη περίπτωση.
3. Έχοντας ορίσει τάξη χάους, κι άρα και βαθμό αποκοπής του αναπτύγματος, υπολογίζονται οι ρίζες του πολυωνύμου Hermite ενός βαθμού μεγαλύτερου ( $n=3$ ), καθώς και τα αντίστοιχα βάρη. Εφόσον τα πολυώνυμα είναι αμετάβλητα σε οποιοδήποτε πρόβλημα, οι ρίζες και τα βάρη είναι γνωστά και σταθερά, κι επομένως μπορούν να οριστούν εκ των προτέρων κατά τον προγραμματισμό της μεθόδου σε κώδικα, εξοικονομώντας χρόνο (αν και ελάχιστο) από την υπολογιστική διαδικασία. Στο Παράρτημα Α'2 αναγράφονται οι ρίζες των πολυωνύμων Hermite και τα αντίστοιχα βάρη για τα τρία είδη πολυωνύμων που έχουν αναφερθεί (πιθανοτικά, κανονικοποιημένα πιθανοτικά, και πολυώνυμα φυσικού) για βαθμό GHQ από 1 έως 8.

Εδώ, όπου  $k+1=3$ , οι ρίζες του τρίτου πολυωνύμου Gauss-Hermite είναι

$$\begin{aligned} \widetilde{H}e_{k+1}(z) = 0 \rightarrow \widetilde{H}e_3(z) = 0 \Rightarrow \frac{z^3-3z}{\sqrt{(3+1)!}} = 0 \iff \\ \iff \begin{cases} z_1 = \sqrt{3} \\ z_2 = 0 \\ z_3 = -\sqrt{3} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.45)$$

ενώ αντίστοιχα τα βάρη

$$\begin{aligned} \omega_j = \frac{1}{(k+1) \cdot \widetilde{H}e_k^2(z_j)} \rightarrow \omega_j = \frac{1}{(2+1) \cdot \widetilde{H}e_2^2(z_j)} \Rightarrow \omega_j = \frac{1}{3 \cdot \left(\frac{z_j^2-1}{\sqrt{2!}}\right)^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \omega_j = \frac{2}{3(z_j^2-1)^2} \iff \begin{cases} \omega_1 = \frac{1}{6} \\ \omega_2 = \frac{2}{3} \\ \omega_3 = \frac{1}{6} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.46)$$

4. Έπειτα, καλείται η συνάρτηση  $f$  στα κατάλληλα σημεία, έχοντας πρώτα εφαρμόσει αλλαγή μεταβλητής από  $z_j$  σε  $x_j$ . Αυτό το βήμα είναι το πιο ακριβό σε όλη τη διαδικασία από άποψης υπολογιστικής ισχύος, καθώς είναι το σημείο όπου πρέπει να επιλυθούν οι εξισώσεις *Navier-Stokes* στα προβλήματα βελτιστοποίησης αεροδυναμικού σχεδιασμού. Βέβαια, εδώ, είναι απλά ο υπολογισμός μίας πολυωνυμικής παράστασης

$$\begin{aligned} f(x_j) = f(\sigma z_j + \mu) = 2(2 \cdot z_j + 1) + 1 \iff \\ \iff \begin{cases} f(x_1) = 3 + 4\sqrt{3} \\ f(x_2) = 3 \\ f(x_3) = 3 - 4\sqrt{3} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.47)$$

5. Στη συνέχεια, υπολογίζονται οι συντελεστές  $a_i$ ,  $i = 0, 1, 2$  εφαρμόζοντας τη σχέση (2.32).

$$\begin{aligned} a_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \widetilde{H}e_0\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) w(x) dx = \sum_{j=1}^3 f(\sigma z_j + \mu) \widetilde{H}e_0(z_j) \omega_j \Rightarrow \\ \Rightarrow a_0 = f(x_1) \widetilde{H}e_0(z_1) \omega_1 + f(x_2) \widetilde{H}e_0(z_2) \omega_2 + f(x_3) \widetilde{H}e_0(z_3) \omega_3 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow a_0 &= (3 + 4\sqrt{3}) \cdot \frac{1}{\sqrt{0!}} \cdot \frac{1}{6} + (3) \cdot \frac{1}{\sqrt{0!}} \cdot \frac{2}{3} + (3 - 4\sqrt{3}) \cdot \frac{1}{\sqrt{0!}} \cdot \frac{1}{6} \Rightarrow \\ &\Rightarrow a_0 = \frac{3}{6} + \frac{6}{3} + \frac{3}{6} = 3\end{aligned}\quad (2.48)$$

$$\begin{aligned}a_1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \widetilde{H}e_1\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) w(x) dx = \sum_{j=1}^3 f(\sigma z_j + \mu) \widetilde{H}e_1(z_j) \omega_j \Rightarrow \\ &\Rightarrow a_1 = f(x_1) \widetilde{H}e_1(z_1) \omega_1 + f(x_2) \widetilde{H}e_1(z_2) \omega_2 + f(x_3) \widetilde{H}e_1(z_3) \omega_3 \Rightarrow \\ &\Rightarrow a_1 = (3 + 4\sqrt{3}) \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1!}} \cdot \frac{1}{6} + (3) \cdot \frac{0}{\sqrt{1!}} \cdot \frac{2}{3} + (3 - 4\sqrt{3}) \cdot \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{1!}} \cdot \frac{1}{6} \Rightarrow \\ &\Rightarrow a_1 = 4(\sqrt{3})^2 \cdot \frac{1}{6} + 4(\sqrt{3})^2 \cdot \frac{1}{6} = 4\end{aligned}\quad (2.49)$$

$$\begin{aligned}a_2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \widetilde{H}e_2\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) w(x) dx = \sum_{j=1}^3 f(\sigma z_j + \mu) \widetilde{H}e_2(z_j) \omega_j \Rightarrow \\ &\Rightarrow a_2 = f(x_1) \widetilde{H}e_2(z_1) \omega_1 + f(x_2) \widetilde{H}e_2(z_2) \omega_2 + f(x_3) \widetilde{H}e_2(z_3) \omega_3 \Rightarrow \\ &\Rightarrow a_2 = (3 + 4\sqrt{3}) \cdot \frac{(\sqrt{3})^2 - 1}{\sqrt{2!}} \cdot \frac{1}{6} + (3) \cdot \frac{0^2 - 1}{\sqrt{2!}} \cdot \frac{2}{3} + (3 - 4\sqrt{3}) \cdot \frac{(-\sqrt{3})^2 - 1}{\sqrt{2!}} \cdot \frac{1}{6} \Rightarrow \\ &\Rightarrow a_2 = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{\sqrt{2} \cdot 6} - \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{\sqrt{2} \cdot 6} = 0\end{aligned}\quad (2.50)$$

6. Τέλος, αντικαθιστώντας στις σχέσεις (2.17β') και (2.17γ') προκύπτουν τα ίδια αποτελέσματα με προηγουμένως,

$$\mu_Y = a_0 = 3 \quad (2.51)$$

$$\sigma_Y = \sqrt{\sum_{i=1}^2 a_i^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \sqrt{4^2 + 0^2} = 4 \quad (2.52)$$

Παρατηρείται ότι η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση εμφανίζουν μηδενικό σφάλμα. Αυτό συμβαίνει διότι, σε αυτό το απλό παράδειγμα εξοικείωσης με τη μέθοδο, η  $f$  είναι μία πολυωνυμική παράσταση, η οποία μπορεί να αναπτυχθεί ακριβώς με οικογένειες πολυωνύμων, με τους κατάλληλους συντελεστές, αρκεί η τάξη του χάους να είναι τουλάχιστον ίση με το μέγιστο εκθέτη της πολυωνυμικής  $f$ . Διαφορετικά, σε περίπτωση που η τάξη  $k$  υπερβαίνει τον μέγιστο εκθέτη, τότε όλοι οι μεγαλύτεροι συντελεστές θα μηδενίζονται, όπως συνέβη εδώ με το συντελεστή  $a_2$ .

Μέθοδος	$\mu_Y$	Σχετικό Σφάλμα ( %)	$\sigma_Y$	Σχετικό Σφάλμα ( %)
Αναλυτική	3	—	4	—
PCE	3	0	4	0
MC (200)	2.7827	7.243	4.2261	5.650
MC (1000)	3.0797	2.657	4.0261	0.653
MC (10000)	2.9924	0.253	4.0070	0.175
MC (50000)	3.0090	0.300	3.9979	0.053

**Πίνακας 2.2:** Εφαρμογή 2.5.1. Σύγκριση αποτελεσμάτων μέσης τιμής και τυπικής απόκλισης και αντίστοιχων σχετικών σφαλμάτων των μεθόδων PCE και Monte Carlo μίας πολυωνυμικής βασικής αντικειμενικής συνάρτησης με μία στοχαστική μεταβλητή εισόδου.

Για να φανεί πόσο σημαντική είναι η μέθοδος που αναπτύχθηκε, θα εκτελεστούν και μερικά πειράματα με τη μέθοδο Monte Carlo, όπως αυτή εξηγήθηκε στο κεφάλαιο 1, για να συγκριθούν τα αποτελέσματα που θα προκύψουν.

Κατ' αρχάς, πρέπει να υλοποιηθεί μία γεννήτρια τυχαίων αριθμών κανονικής κατανομής. Στη Fortran77 αυτό επιτυγχάνεται με την κλήση της υπορουτίνας `ran3` [32] για την παραγωγή τυχαίων ομοιόμορφα κατανομημένων τιμών, και έπειτα εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό Box-Muller (βλ. Παράρτημα Β') για τη μετατροπή τους σε ανεξάρτητες κανονικά κατανομημένες τιμές, ή, πιο εύκολα, με τη βοήθεια της Wolfram Programming Language.

Το συγκεκριμένο πείραμα θα επαναληφθεί με αρκετά δείγματα, διαφορετικού πλήθους κάθε φορά, για να φανεί η συμπεριφορά της μεθόδου.

Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον Πίνακα 2.2, συγκρινόμενα με την αναλυτική λύση, όπου φαίνεται ξεκάθαρα πόσο υπερτερεί η μέθοδος PCE έναντι της MC, αφού ακόμα και με 50.000 δείγματα, η τελευταία δεν επέφερε απόλυτη ακρίβεια με μία πολυωνυμική συνάρτηση.

Μάλιστα, αποδεικνύεται ότι το σφάλμα υπολογισμού στη MC είναι ανάλογο του  $\frac{1}{\sqrt{N}}$ , ενώ στο PCE είναι ανάλογο του  $e^{-N}$ , όπου N το μέγεθος του δείγματος. Αυτό σημαίνει ότι στην πρώτη, για να μειωθεί το σφάλμα υπολογισμού κατά μία τάξη μεγέθους πρέπει να χρησιμοποιηθεί 100-πλάσιο σε μέγεθος δείγμα, ενώ στη δεύτερη αρκεί δείγμα  $\ln(10) \approx 3$  φορές μεγαλύτερο, [26] [11].

## 2.5.2 Εφαρμογή σε Εκθετική Συνάρτηση

Σε αυτή την εφαρμογή θα υλοποιηθεί η μέθοδος PCE στην εκθετική συνάρτηση (άρα μη-πολυωνυμική) για διαφορετικές τάξεις χάους, για να αποδειχθεί η επίδραση του  $k$  στην ακρίβεια του αποτελέσματος. Το ενδιαφέρον που έχει αυτό το νέο παράδειγμα είναι ότι, σε αντίθεση με προηγούμενους, η βασική αντικειμενική συνάρτηση παύει να

είναι πολυωνυμική, άρα είναι σίγουρο ότι το ανάπτυγμα πολυωνυμικού χάους (2.17α') δεν είναι ικανό να την αναπαράγει με απόλυτη ακρίβεια.

Έστω  $f(x) = e^x$  με  $x \sim \mathcal{N}(0, 1)$ , δηλαδή στοχαστική μεταβλητή  $x$  με κατανομή κανονική, μέσης τιμής  $\mu = 0$  και διακύμανσης  $\sigma^2 = 1$ , άρα τυπικής απόκλισης  $\sigma = 1$ . Αντικαθιστώντας στη σχέση (2.25), προκύπτει ότι η συνάρτηση βάρους ταυτίζεται με την τυποποιημένη κατανομή Gauss.

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad (2.53)$$

Η αναλυτική λύση για τη μέση τιμή δίνει

$$\begin{aligned} \mu_Y &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)w(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \left[ \frac{1}{2} \sqrt{e} \cdot \operatorname{erf} \left( \frac{x-1}{\sqrt{2}} \right) \right]_{-\infty}^{+\infty} \implies \\ &\implies \mu_Y = \sqrt{e} = 1.6487212708 \dots \end{aligned}$$

Για την τυπική απόκλιση, απαιτείται πρώτα η τιμή του μεγέθους  $\langle y^2 \rangle$

$$\begin{aligned} \langle y^2 \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} (f(x))^2 w(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (e^x)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \left[ \frac{1}{2} e^2 \operatorname{erf} \left( \frac{x-2}{\sqrt{2}} \right) \right]_{-\infty}^{+\infty} \implies \\ &\implies \langle y^2 \rangle = e^2 = 7.3890560989 \dots \end{aligned}$$

οπότε, από την (2.12) βρίσκεται η τυπική απόκλιση

$$\sigma_Y = \sqrt{\langle y^2 \rangle - \mu_Y^2} = \sqrt{4.6707742701} = 2.1611974158 \dots$$

Όσον αφορά την επίλυση με PCE, δεδομένου ότι για την εύρεση της τυπικής απόκλισης απαιτείται τάξη τουλάχιστον ίση με τη μονάδα, θα μελετηθούν οι τιμές από  $k=1$  ως και  $k=6$ . Για λόγους συντομίας, η μέθοδος αναλύεται λεπτομερώς μόνο για την περίπτωση  $k=1$ . Για τις υπόλοιπες τιμές του  $k$  παρατίθενται απλά τα αποτελέσματα, δεδομένου ότι έχει ήδη αποκτηθεί μία οικειότητα με τη μέθοδο.

- $k = 1$

– Αρχικά, βρίσκονται οι ρίζες του πολυωνύμου Hermite  $1+1=2$ ου βαθμού

$$\widetilde{H}e_{k+1}(z) = 0 \rightarrow \widetilde{H}e_2(z) = 0 \Rightarrow \frac{z^2-1}{\sqrt{(2+1)!}} = 0 \iff$$



$$\iff \begin{cases} z_1 = 1 \\ z_2 = -1 \end{cases}$$

και, στη συνέχεια, τα βάρη

$$\begin{aligned} \omega_j &= \frac{1}{(k+1) \cdot \widetilde{H}e_k^2(z_j)} \rightarrow \omega_j = \frac{1}{(1+1) \cdot \widetilde{H}e_1^2(z_j)} \Rightarrow \omega_j = \frac{1}{2 \cdot \left(\frac{z_j}{\sqrt{1!}}\right)^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \omega_j = \frac{1}{2z_j^2} \iff \begin{cases} \omega_1 = \frac{1}{2} \\ \omega_2 = \frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Οι τιμές αυτές, όπως προειπώθηκε, αναφέρονται και στο Παράρτημα Α'.2.

– Τα απαιτούμενα δείγματα της  $f$  ισούνται με

$$f(x_j) = f(\sigma z_j + \mu) = e^{z_j} \iff \begin{cases} f(x_1) = e \\ f(x_2) = \frac{1}{e} \end{cases}$$

– Προχωρώντας στους συντελεστές  $a_0$  και  $a_1$

$$a_0 = \sum_{j=1}^2 f(x_j) \widetilde{H}e_0(z_j) \omega_j \Rightarrow a_0 = \frac{e}{2} + \frac{1}{2e} = 1.5430806348$$

$$a_1 = \sum_{j=1}^2 f(x_j) \widetilde{H}e_1(z_j) \omega_j \Rightarrow a_1 = \frac{e}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2e} \cdot (-1) = 1.1752011936$$

– Η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση προκύπτουν άμεσα από τους συντελεστές  $a_0$  και  $a_1$ , εφόσον  $k = 1$ .

$$\mu_Y = a_0 = 1.5430806348$$

$$\sigma_Y = \sqrt{a_1^2} = |a_1| = 1.1752011936$$

•  $k = 2$

$$\left. \begin{array}{l} a_0 = 1.63819248 \\ a_1 = 1.580586564 \\ a_2 = 0.9025404607 \end{array} \right\} \implies \begin{cases} \mu_Y = 1.63819248 \\ \sigma_Y = 1.820118998 \end{cases}$$

- $k = 3$

$$\left. \begin{array}{l} a_0 = 1.64796896 \\ a_1 = 1.642349065 \\ a_2 = 1.132190329 \\ a_3 = 0.5480384855 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \mu_Y = 1.64796896 \\ \sigma_Y = 2.068698038 \end{cases}$$

- $k = 4$

$$\left. \begin{array}{l} a_0 = 1.648679429 \\ a_1 = 1.648283117 \\ a_2 = 1.162889038 \\ a_3 = 0.6587788111 \\ a_4 = 0.2834995271 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \mu_Y = 1.648679429 \\ \sigma_Y = 2.140913275 \end{cases}$$

- $k = 5$

$$\left. \begin{array}{l} a_0 = 1.648719366 \\ a_1 = 1.648697518 \\ a_2 = 1.165629352 \\ a_3 = 0.6719245446 \\ a_4 = 0.3310579621 \\ a_5 = 0.1299253982 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \mu_Y = 1.648719366 \\ \sigma_Y = 2.157511962 \end{cases}$$

- $k = 6$

$$\left. \begin{array}{l} a_0 = 1.648721197 \\ a_1 = 1.648720209 \\ a_2 = 1.16581188 \\ a_3 = 0.6730148831 \\ a_4 = 0.3361274422 \\ a_5 = 0.148567521 \\ a_6 = 0.05402857612 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \mu_Y = 1.648721197 \\ \sigma_Y = 2.160629018 \end{cases}$$

Για λόγους σύγκρισης, επαναλαμβάνονται πάλι τα πειράματα Monte Carlo με αυξανόμενο πλήθος δειγμάτων ανά περίπτωση.

Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον Πίνακα 2.3, μαζί με τα αντίστοιχα σχετικά σφάλματα ως προς την αναλυτική λύση. Έως τώρα, μπορούν να εξαχθούν τα ακόλουθα συμπεράσματα:

- Οι συντελεστές  $a_i$  βαίνουν μειούμενοι (σε απόλυτη τιμή) κατά περίπτωση (Σχήμα 2.1). Κάτι τέτοιο θυμίζει τις ιδιοτιμές σε προβλήματα γραμμικής Άλγεβρας, όπου κάθε τιμή επηρεάζει όλο και λιγότερο το τελικό αποτέλεσμα.
- Η απόδοση της PCE μεθόδου όχι μόνο υπερτερεί κατά πολλαπλές τάξεις με-

Μέθοδος	$\mu_Y$	Σφάλμα $\mu_Y$ ( % )	$\sigma_Y$	Σφάλμα $\sigma_Y$ ( % )
Αναλυτική	1.6487212708	—	2.1611974158	—
PCE (1)	1.543080635	6.4074	1.175201194	45.62268186
PCE (2)	1.638192480	0.6386	1.820118998	15.781918
PCE (3)	1.647968960	$4.5630E - 2$	2.068698038	4.280006
PCE (4)	1.648679429	$2.5380E - 3$	2.140913275	0.938560
PCE (5)	1.648719366	$1.1550E - 4$	2.157511962	0.170528
PCE (6)	1.648721197	$4.4280E - 6$	2.160629018	0.026300
MC (200)	1.59590	3.2038	1.90801	11.71515
MC (1000)	1.56131	5.3018	1.80963	16.26725
MC (10000)	1.66271	0.8485	2.22562	2.98087
MC (50000)	1.64106	0.4647	2.12694	1.58511

**Πίνακας 2.3:** Εφαρμογή 2.5.2. Σύγκριση αποτελεσμάτων μέσης τιμής και τυπικής απόκλισης και αντίστοιχων σχετικών σφαλμάτων των μεθόδων PCE και Monte Carlo μίας εκθετικής βασικής αντικειμενικής συνάρτησης με μία στοχαστική μεταβλητή εισόδου. Η αύξηση ακρίβειας στη μέθοδο του πολυωνυμικού χάους είναι εκθετική, ενώ στη Monte Carlo σημαντικά πιο αργή, και χωρίς σταθερή απόδοση.

γέθους της Monte Carlo, αλλά επιφέρει και πιο ‘σταθερά’ αποτέλεσμα, εφόσον μπορεί να παρατηρηθεί ότι αύξηση του πλήθους δειγμάτων με τη Monte Carlo δεν επιφέρει πάντα καλύτερα αποτελέσματα.

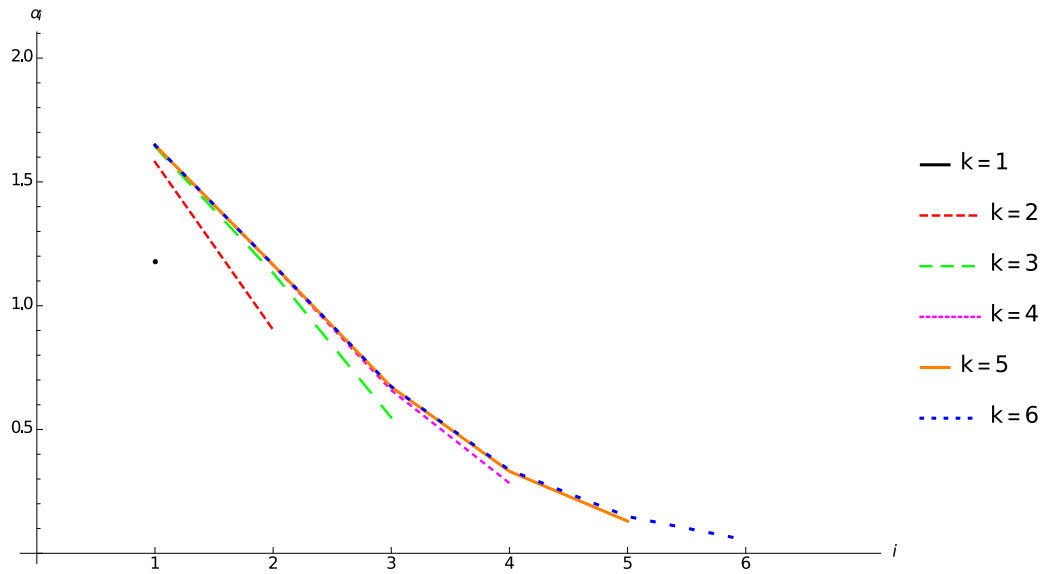
- Σε κάθε περίπτωση, η τυπική απόκλιση διορθώνεται πολύ πιο αργά από τη μέση τιμή. Αυτό σημαίνει ότι αν τύχει η μελέτη κάποιου προβλήματος που απαιτεί μεγαλύτερη ακρίβεια στην τυπική απόκλιση, τότε ο σχεδιαστής οφείλει να επιλέξει χάος υψηλότερης τάξης.

### 2.5.3 Εφαρμογή σε Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις

Έστω  $f(x) = \sin(\frac{\pi x}{3} + \frac{\pi}{4}) \cdot \cos(\frac{\pi x}{2})$  με  $x \sim \mathcal{N}(4, 0.25)$ , δηλαδή κανονική κατανομή με μέση τιμή  $\mu = 4$  και διακύμανση  $\sigma^2 = 0.25$ , επομένως με τυπική απόκλιση  $\sigma = 0.5$ . Συνάρτηση βάρους  $w$  σύμφωνα με τη σχέση (2.25), θα είναι η

$$w(x) = \frac{1}{0.5\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-4}{0.5}\right)^2} \quad (2.54)$$

Χρησιμοποιώντας ένα συμβολογραφικό λογισμικό, όπως το Mathematica, επιλύονται



**Σχήμα 2.1:** Εφαρμογή 2.5.2. Φθίνουσα πορεία συντελεστών πολυωνυμικού χάους για κάθε  $k$ . Με κάθε μεγαλύτερη τάξη, οι συντελεστές προσεγγίζονται ακριβέστερα, ενώ ταυτόχρονα η τιμή κάθε επόμενου συντελεστή είναι μικρότερη από την προηγούμενη, γεγονός που έχει ως αποτέλεσμα την όλο και μικρότερη επιρροή των υψηλότερων τάξεων στο τελικό αποτέλεσμα.

τα απαραίτητα ολοκληρώματα χωρίς αριθμητικούς υπολογισμούς. Έτσι, θα ισχύει

$$\begin{aligned} \mu_Y &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)w(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin\left(\frac{\pi x}{3} + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \frac{1}{0.5\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-4}{0.5}\right)^2} dx \implies \\ &\implies \mu_Y = -0.6717320675 \dots \end{aligned}$$

καθώς και

$$\begin{aligned} \langle y^2 \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} (f(x))^2 w(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sin\left(\frac{\pi x}{3} + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right)^2 \frac{1}{0.5\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-4}{0.5}\right)^2} dx \implies \\ &\implies \langle y^2 \rangle = 0.5458305554 \dots \end{aligned}$$

και μέσω της (2.12)

$$\sigma_Y = \sqrt{0.5458305554 - (-0.6717320675)^2} = \sqrt{0.0946065849} = 0.3075818345$$

Για λόγους συνέχειας, η λεπτομερής επίλυση της εφαρμογής με τη μέθοδο PCE παρατίθεται στο Παράρτημα Δ'.1. Στη συνέχεια, αναφέρονται τα αποτελέσματα που προέκυψαν, για  $k=5$ .

Μέθοδος	$\mu_Y$	Σφάλμα $\mu_Y$ ( % )	$\sigma_Y$	Σφάλμα $\sigma_Y$ ( % )
Αναλυτική	-0.6717320675	—	0.3075818345	—
PCE	-0.6717198033	1.82576E - 3	0.3020126204	1.810644
MC (200)	-0.647965	3.5381767	0.324277	5.4278776
MC (1000)	-0.667387	0.6468453	0.306481	0.3578997
MC (10000)	-0.672089	0.0531361	0.306258	0.4304007
MC (50000)	-0.671173	0.0832278	0.306576	0.3270136

**Πίνακας 2.4:** Εφαρμογή 2.5.3. Σύγκριση αποτελεσμάτων μέσης τιμής και τυπικής απόκλισης και αντίστοιχων σχετικών σφαλμάτων των μεθόδων PCE και Monte Carlo μίας τριγωνομετρικής βασικής αντικειμενικής συνάρτησης με μία στοχαστική μεταβλητή εισόδου. Η ακρίβεια στη μέση τιμή με τη μέθοδο του πολυωνυμικού χάους είναι ασύγκριτα καλύτερη από τα αποτελέσματα με τη Monte Carlo. Για την τυπική απόκλιση δεν προέκυψαν ικανοποιητικά αποτελέσματα εξαιτίας της ισχυρά ταλαντωτικής συμπεριφοράς της αντικειμενικής συνάρτησης, που δύσκολα προσεγγίζεται με χαμηλού βαθμού πολυώνυμα.

$$\left. \begin{array}{l} a_0 = -0.6717198033 \\ a_1 = +0.0392066879 \\ a_2 = +0.2704677715 \\ a_3 = -0.0500215515 \\ a_4 = -0.1158847702 \\ a_5 = +0.0242971868 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \mu_Y = -0.6717198033 \\ \sigma_Y = 0.3020126204 \end{cases}$$

Μένει η επίλυση του προβλήματος εκτελώντας τα πειράματα *Monte Carlo*. Όπως και στις προηγούμενες εφαρμογές, θα χρησιμοποιηθεί το ίδιο πλήθος δειγμάτων, για λόγους σύγκρισης.

Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον πίνακα 2.4, απ' όπου συμπεραίνεται ότι η μέση τιμή με τη μέθοδο PCE υπερτερεί σε ακρίβεια ακόμα και αυτής που προέκυψε με τη Monte Carlo για πλήθος 50.000 δειγμάτων. Από την άλλη, το σφάλμα στην τυπική απόκλιση κατά PCE είναι μεγαλύτερο, αλλά η απόδοση της μεθόδου (6 υπολογισμοί της  $f$ , αντί για 1000 ή 50000) είναι συντριπτικά καλύτερη.

Σε αντίθεση με πριν, οι συντελεστές δεν ακολουθούν φθίνουσα σειρά, τουλάχιστον όχι διαδοχικά. Το γεγονός αυτό μπορεί να εξηγηθεί, αν ληφθεί υπόψη το ανάπτυγμα των τριγωνομετρικών συναρτήσεων κατά Taylor,

$$\sin(x) \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad (2.55\alpha')$$

$$\cos(x) \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad (2.55\beta')$$

Οι σχέσεις (2.55α') και (2.55β') δείχνουν ότι οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις μπορούν να αναπτυχθούν σε ένα άθροισμα μονωνύμων, περιττού βαθμού για το ημίτονο,

και άρτιου για το συνημίτονο, με εναλλασσόμενο πρόσημο. Οι συντελεστές  $a_i$  του PCE εκφράζουν τη συνεισφορά των κατά Taylor συντελεστών, με τους περιττούς να αντιστοιχούν στη συνεισφορά του ημιτόνου και τους άρτιους στη συνεισφορά του συνημιτόνου.

# Κεφάλαιο 3

## Ανάπτυγμα Πολυδιάστατου Πολυωνυμικού Χάους

### 3.1 Εισαγωγικά Σχόλια

Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο γενικεύεται η μέθοδος του πολυωνυμικού χάους που ήδη έχει αναπτυχθεί, και αναπτύσσεται η θεωρία για την αντιμετώπιση προβλημάτων αεροδυναμικά στιβαρού σχεδιασμού-βελτιστοποίησης με πολλαπλές στοχαστικές εισόδους. Πιο συγκεκριμένα, η βασική αντικειμενική συνάρτηση  $F$  σε ένα  $d$ -διάστατο πρόβλημα στιβαρού σχεδιασμού-βελτιστοποίησης, πλέον λαμβάνει ως είσοδο ένα διάνυσμα τιμών στοχαστικών μεταβλητών πλήθους  $d$ ,

$$F = F(\vec{x}), \quad \text{όπου } \vec{x} = (x_1, x_2 \dots x_d) \quad (3.1)$$

για τις οποίες λαμβάνονται οι εξής παραδοχές:

- όλες ακολουθούν την ίδια γενική στοχαστική κατανομή, είτε αυτή είναι κανονική είτε ομοιόμορφη, Γάμμα, Βήτα, κ.λπ., δυνητικά με διαφορετικές παραμέτρους για κάθε μεταβλητή, π.χ.  $\mu$  και  $\sigma$  για κανονική κατανομή,  $\alpha$  και  $\beta$  για Βήτα ή μόνο  $\alpha$  για κατανομή Γάμμα, και,
- καθεμιά εξ αυτών δεν επηρεάζει, αλλά και δεν επηρεάζεται, από μεταβολές στις υπόλοιπες, είναι δηλαδή ανεξάρτητες μεταξύ τους.

Για παράδειγμα, σε ένα διδιάστατο πρόβλημα αεροδυναμικά στιβαρού σχεδιασμού-βελτιστοποίησης, κατά το οποίο η βασική αντικειμενική συνάρτηση  $F$  λαμβάνει δύο στοχαστικές εισόδους, την ταχύτητα Mach ( $M$ ) και τη γωνία εισόδου ( $\alpha$ ) της ροής

του αέρα, θεωρείται ότι και οι δύο ακολουθούν κοινό είδος κατανομής, με διαφορετική όμως μέση τιμή και τυπική απόκλιση καθεμιά. Ταυτόχρονα, όμως, μεταβολές στις τιμές της μιας εισόδου δεν επηρεάζουν την κατανομή της δεύτερης, και αντίστροφα.

Τρόποι αντιμετώπισης αυτών των δύο περιορισμών αναφέρονται στο Κεφάλαιο 7.2, ως προτάσεις μελλοντικής έρευνας, καθώς ξεφεύγουν από το πλαίσιο αυτής της διπλωματικής εργασίας.

## 3.2 Πολυδιάστατο Πολυωνυμικό Χάος

Έστω, λοιπόν, η βασική αντικειμενική συνάρτηση  $F$ , η οποία λαμβάνει περισσότερες από μία εισόδους  $\vec{x}$ , με πεδίο ορισμού  $\vec{D} \equiv D_1 \times D_2 \times \dots \times D_M$ , όπου καθεμιά κατανέμεται βάσει δικής της στοχαστικής κατανομής  $w_i(x_i)$ , για  $i = 1, 2, \dots, d$ . Η θεωρία πολυωνυμικού χάους προτείνει ότι η  $F$  μπορεί και πάλι να προσεγγιστεί με μία συνάρτηση  $f$ , η οποία όμως αποτελεί γραμμικό συνδυασμό πολυωνύμων μίας νέας οικογένειας  $\Psi$

$$\Psi = \{\psi_0(\vec{x}), \psi_1(\vec{x}), \dots, \psi_k(\vec{x}), \dots\} \quad (3.2)$$

Δηλαδή, θα είναι

$$F(\vec{x}) \simeq f(\vec{x}) := \sum_{i=0}^{\infty} a_i \psi_i(\vec{x}) \quad (3.3)$$

όπου πάλι  $y = f(\vec{x}) \mapsto Y$ .

Αυτή τη φορά, αν τεθεί

$$W(\vec{x}) = \prod_{i=1}^d w_i(x_i) = w_1(x_1) w_2(x_2) \cdots w_d(x_d) \quad (3.4)$$

τότε η  $\nu$ -οστή στατιστική ροπή του συνόλου  $Y$  ορίζεται ως

$$\begin{aligned} \langle y^\nu \rangle &= \int \cdots \int_{\vec{D}} (f(\vec{x}))^\nu W(\vec{x}) d\vec{x} = \int \cdots \int_{\vec{D}} \left( \sum_{i=0}^{\infty} a_i \psi_i(\vec{x}) \right)^\nu W(\vec{x}) d\vec{x} \\ &= \int \cdots \int_{\vec{D}} \underbrace{\left( \sum_{i=0}^{\infty} a_i \psi_i(\vec{x}) \right) \cdots \left( \sum_{i=0}^{\infty} a_i \psi_i(\vec{x}) \right)}_{\nu \text{ φορές}} \left( \prod_{i=1}^d w_i(x_i) \right) dx_1 \cdots dx_d \end{aligned}$$



η οποία, με εφαρμογή των επιμεριστικών πράξεων, γίνεται

$$\langle y^\nu \rangle = \sum_{i_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{i_\nu=0}^{\infty} a_{i_1} \cdots a_{i_\nu} \int \cdots \int_{\vec{D}} \psi_{i_1}(\vec{x}) \cdots \psi_{i_\nu}(\vec{x}) w_1(x_1) \cdots w_d(x_d) dx_1 \cdots dx_d \quad (3.5)$$

Η σχέση (3.5) προδίδει πόσο επιτακτικός είναι ο “έξυπνος” ορισμός των πολυωνύμων  $\psi_i$  για την απλούστευση των σχέσεων υπολογισμού των στατιστικών ροπών. Φυσικά, δεδομένου ότι έχουν ήδη οριστεί στο Κεφάλαιο 2, θα χρησιμοποιηθούν ξανά τα ορθογώνια πολυώνυμα και οι ιδιότητές τους. Πρώτα όμως πρέπει να γενικευθεί ο ορισμός τους για να περιλαμβάνει περισσότερες από μία στοχαστικές μεταβλητές.

### 3.3 Ορθογώνια Πολυώνυμα Πολλαπλών Διαστάσεων

Όπως αναφέρθηκε, η περίπτωση των πολυδιάστατων προβλημάτων απλουστεύεται κι αυτή, με τη χρήση των πολυδιάστατων ορθογωνίων πολυωνύμων τα οποία, όμως, καθορίζονται διαφορετικά, ώστε να λαμβάνουν περισσότερες από μία μεταβλητές εισόδου.

Συγκεκριμένα, όλες οι σχέσεις που ισχύουν για τα μονοδιάστατα πολυώνυμα του Κεφαλαίου 2 αποδεικνύεται πως ισχύουν και για τα πολυδιάστατα, αν τεθεί κάθε πολυώνυμο  $\psi_n$  τάξης  $k$  ως το γινόμενο ενός αριθμού μονοδιάστατων πολυωνύμων  $p_{i_l}$ , με τέτοιο τρόπο ώστε το άθροισμα των βαθμών  $i_l$  κάθε πολυωνύμου  $\mathcal{P}$  από το οποίο απαρτίζεται το γινόμενο να ισούται με τη ζητούμενη τάξη  $k$  του  $\psi_n$ . Δηλαδή, τα πολυώνυμα  $\Psi$  ορίζονται ως

$$\psi_{m_j^k}(\vec{x}) = \prod_{l=1}^d p_{i_l}(x_l) \quad (3.6)$$

αρκεί να ισχύει

$$\sum_{l=1}^d i_l = k \quad (3.7)$$

Η έννοια του πολλαπλού δείκτη  $m_j^k$  θα εξηγηθεί στη συνέχεια. Προς στιγμή, θα χρησιμοποιηθεί στη θέση του ο απλούστερος δείκτης  $n$  για την αναφορά σε κάποιο πολυδιάστατο πολυώνυμο.

Με τον παραπάνω ορισμό (3.6), το κάθε εσωτερικό γινόμενο (προβολή Galerkin) δύο πολυωνύμων της οικογένειας  $\Psi$  θα είναι μηδενικό, εκτός από την περίπτωση που ταυτίζονται μεταξύ τους, που συμβαίνει αν, και μόνο αν, ταυτίζονται ένας προς έναν και

οι δείκτες  $i_l$  των συστατικών πολυωνύμων,

$$\begin{aligned}
\langle \psi_i(\vec{x}), \psi_j(\vec{x}) \rangle_W &= \int_{\vec{D}} \cdots \int \psi_i(\vec{x}) \psi_j(\vec{x}) W(\vec{x}) d\vec{x} \\
&= \int_{\vec{D}} \cdots \int \prod_{l=1}^d p_{i_l}(x_l) \prod_{l=1}^d p_{j_l}(x_l) \prod_{l=1}^d w_l(x_l) dx_1 \cdots dx_d \\
&= \left( \int_{D_1} p_{i_1}(x_1) p_{j_1}(x_1) w_1(x_1) dx_1 \right) \cdots \left( \int_{D_d} p_{i_d}(x_d) p_{j_d}(x_d) w_d(x_d) dx_d \right) \\
&= \prod_{l=1}^d \left( \int_{D_l} p_{i_l}(x_l) p_{j_l}(x_l) w_l(x_l) dx_l \right) \\
&= \prod_{l=1}^d \left( \delta_{i_l}^{j_l} \int_{D_l} p_{i_l}^2(x_l) w_l(x_l) dx_l \right) = \prod_{l=1}^d \delta_{i_l}^{j_l} \prod_{l=1}^d \left( \int_{D_l} p_{i_l}^2(x_l) w_l(x_l) dx_l \right) \\
&= \delta_{ij} \int_{\vec{D}} \cdots \int \left( \prod_{l=1}^d p_{i_l}^2(x_l) w_l(x_l) \right) d\vec{x} \\
&= \delta_{ij} \int_{\vec{D}} \cdots \int \left( \prod_{l=1}^d p_{i_l}(x_l) \right)^2 W(\vec{x}) d\vec{x} \\
&= \delta_{ij} \int_{\vec{D}} \cdots \int (\psi_n(\vec{x}))^2 W(\vec{x}) d\vec{x}
\end{aligned}$$

Θα ισχύει δηλαδή

$$\langle \psi_i(\vec{x}), \psi_j(\vec{x}) \rangle_W = \int_{\vec{D}} \cdots \int \psi_i(\vec{x}) \psi_j(\vec{x}) W(\vec{x}) d\vec{x} = \langle \psi_i(\vec{x}), \psi_i(\vec{x}) \rangle_W \delta_{ij} \quad (3.8)$$

όπου το  $\delta_{ij} \equiv \delta_i^j$  επαναλαμβάνεται πως είναι το σύμβολο Kronecker (βλ. Εξίσωση (2.5)).

Όταν  $i=j$ , τότε το εσωτερικό γινόμενο (3.8) ισούται ξανά με το τετράγωνο της κατά  $W$ -νόρμα του πολυωνύμου  $\psi_i$ . Αυτό αποδεικνύεται αναλύοντας κάθε  $\psi_n$  στα συστατικά

του πολυώνυμου

$$\begin{aligned}
\langle \psi_n(\vec{x}), \psi_n(\vec{x}) \rangle_W &= \int \cdots \int_{\bar{D}} \psi_n^2(\vec{x}) W(\vec{x}) d\vec{x} = \int \cdots \int_{\bar{D}} \prod_{l=1}^d p_{i_l}^2(x_l) \prod_{l=1}^d w_l(x_l) dx_1 \cdots dx_d \\
&= \int_{D_1} p_{i_1}^2 w_1(x_1) dx_1 \cdots \int_{D_d} p_{i_d}^2 w_d(x_d) dx_d \\
&= \prod_{l=1}^d \int_{D_l} p_{i_l}^2 w_l(x_l) dx_l = \prod_{l=1}^d \|p_{i_l}\|_{w_l}^2 \\
&= \left( \prod_{l=1}^d \|p_{i_l}\|_{w_l} \right)^2 = (\|\psi_n\|_W)^2 = \|\psi_n\|_W^2
\end{aligned}$$

στην οποία τέθηκε

$$\|\psi_n\|_W = \prod_{l=1}^d \|p_{i_l}\|_{w_l} \quad (3.9)$$

Γενικά, λοιπόν,

$$\langle \psi_n(\vec{x}), \psi_n(\vec{x}) \rangle_W \equiv \|\psi_n\|_W^2 = \gamma_n \quad (3.10)$$

όπου  $\sqrt{\gamma_n}$  το μέτρο κανονικότητας του πολυωνύμου  $\psi_n$ . Τονίζεται, πάλι, ότι το μέτρο κανονικότητας δεν είναι, στην πλειοψηφία των περιπτώσεων, ίσο με τη μονάδα, καθώς αποτελεί ιδιότητα που ανήκει συγκεκριμένα στις ορθοκανονικές οικογένειες πολυωνύμων. Τέλος, να σημειωθεί ότι αν τεθεί πλήθος στοχαστικών εισόδων  $d = 1$ , τότε προκύπτουν οι σχέσεις που αναφέρθηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο.

Μένει να αναλυθεί ο τρόπος παραγωγής των  $\psi_n$ . Επειδή όμως η διαδικασία από την οποία προκύπτουν είναι σύνθετη, θα χρησιμοποιηθεί ένα επεξηγηματικό παράδειγμα για την ευκολότερη κατανόησή της.

### 3.4 Παραγωγή Πολυδιάστατων Ορθογωνίων Πολυωνύμων και Συνδυαστική - Παράδειγμα

Έστω η περίπτωση ενός τριδιάστατου προβλήματος ( $d = 3$ ), κατά το οποίο οι τρεις στοχαστικές μεταβλητές κατανέμονται κανονικά

$$\begin{aligned}
x_1 &\sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2) \\
x_2 &\sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2) \\
x_3 &\sim \mathcal{N}(\mu_3, \sigma_3^2)
\end{aligned}$$

Όπως και στα προβλήματα μίας διάστασης, έτσι και εδώ, τα ορθογώνια πολυώνυμα που θα χρησιμοποιηθούν είναι τα Hermite, και συγκεκριμένα τα πιθανοτικά (probabilists' Hermite Polynomials), περισσότερα για τα οποία αναπτύσσονται λεπτομερώς στο Παράρτημα Α'.1.

Προκειμένου να γίνει ευκολότερα αντιληπτή η διαδικασία παραγωγής τους και για να οριστεί ο πολλαπλός δείκτης  $m_k^j$  που χρησιμοποιήθηκε στη σχέση (3.6) χωρίς τις απαραίτητες διευκρινίσεις, θα αναζητηθούν τα πολυδιάστατα ορθογώνια πολυώνυμα έως και τρίτης τάξης, δηλαδή για  $k=0, 1, 2$  και  $3$ .

Από το πεδίο των Διακριτών Μαθηματικών, της Συνδυαστικής και της Συνολοθεωρίας [35] [36] είναι γνωστή η έννοια του «πολυσυνόλου» (multiset), σύμφωνα με την οποία υπάρχουν πολλοί συνδυασμοί κατά τους οποίους ένας ακέραιος αριθμός  $k$  αναλύεται σε άθροισμα μικρότερων ακεραίων, πλήθους  $d$ . Μάλιστα, όσο μεγαλύτερος είναι ο ακέραιος  $k$ , τόσο περισσότεροι συνδυασμοί αθροίσματος μπορούν να προκύψουν. Το πλήθος των δυνατών συνδυασμών δίνεται από τη σχέση

$$\binom{\binom{d}{k}}{k} = \binom{k+d-1}{k} = \frac{(k+d-1)!}{k!(d-1)!} = \frac{d(d+1)(d+2)\cdots(d+k-1)}{k!} \quad (3.11)$$

Για την κατάταξη όλων των συνδυασμών που έχουν σταθερό άθροισμα  $k$  χρησιμοποιείται ο δείκτης  $j$ , για τον οποίο ισχύει

$$1 \leq j \leq \binom{k+d-1}{k} \quad (3.12)$$

Αυτή αποτελεί τη σχετική κατάταξη των αθροισμάτων, η οποία δεν λαμβάνει υπόψη συνδυασμούς με άθροισμα μικρότερο του ελάχιστου  $k$ .

Από τη θεωρία της Συνδυαστικής, το πλήθος των δυνατών συνδυασμών  $d$  στοιχείων με άθροισμα μικρότερο ή ίσο ενός  $k_{max}$  είναι ίσο με

$$\binom{k_{max}+d}{k_{max}} = \frac{(k_{max}+d)!}{k_{max}!d!} = \frac{d(d+1)(d+2)\cdots(d+k_{max})}{k_{max}!} \quad (3.13)$$

Αυτά τα  $\frac{(k_{max}+d)!}{k_{max}!d!}$  δυνατά αθροίσματα αναλαμβάνει να οργανώσει ο δείκτης  $m_j^k$  σε μία απόλυτη κατάταξη, αντιστοιχίζοντας όλους τους συνδυασμούς αθροισμάτων για  $k=0, 1, 2, \dots, k_{max}$  με έναν αριθμό που ανήκει στο εύρος

$$0 \leq m_j^k \leq \frac{(k_{max}+d)!}{k_{max}!d!} - 1 \quad (3.14)$$

Όσον αφορά το παράδειγμα που μελετάται, οι συνδυασμοί που προκύπτουν για  $d=3$  και  $0 \leq k \leq 3$  παρουσιάζονται στον Πίνακα 3.1, όπου κάθε τιμή του απόλυτου δείκτη  $m_j^k$

Τάξη	Κατάταξη πολυωνύμων $\Psi$		Βαθμός $p_{i_l}$			Πλήθος $\binom{k+d-1}{k}$	Πλήθος $\binom{k_{max}+d}{k_{max}}$
	Σχετική ( $j$ )	Απόλυτη ( $m_j^k$ )	$l=1$	$l=2$	$l=3$		
			$i_1$	$i_2$	$i_3$		
$k=0$	1	0	0	0	0	1	20
$k=1$	1	1	1	0	0	3	
	2	2	0	1	0		
	3	3	0	0	1		
$k=2$	1	4	2	0	0	6	
	2	5	1	1	0		
	3	6	1	0	1		
	4	7	0	2	0		
	5	8	0	1	1		
	6	9	0	0	2		
$k=3$	1	10	3	0	0	10	
	2	11	2	1	0		
	3	12	2	0	1		
	4	13	1	2	0		
	5	14	1	1	1		
	6	15	1	0	2		
	7	16	0	3	0		
	8	17	0	2	1		
	9	18	0	1	2		
	10	19	0	0	3		

**Πίνακας 3.1:** Αντιστοίχιση δεικτών απόλυτης και σχετικής κατάταξης με τους βαθμούς μονοδιάστατων πολυωνύμων για τάξεις  $k$  από 0 έως 3. Με κάθε αναβάθμιση τάξης, ο σχετικός δείκτης επανεκκινεί την καταμέτρηση, ενώ ο απόλυτος συνεχίζει να απαριθμεί από την προηγούμενη τιμή. Στην τριάδα των στηλών ( $l=1, 2, 3$ ) αναγράφονται όλοι οι πιθανοί συνδυασμοί των μονοδιάστατων πολυωνύμων με άθροισμα ίσο με την εκάστοτε τάξη.

και του σχετικού δείκτη  $j$  (κάθε τάξης  $k$ ) αντιστοιχίζεται μία προς μία με την τριάδα βαθμών των μονοδιάστατων πολυωνύμων  $\mathcal{P}$ . Ένας τρόπος παραγωγής των τριάδων των βαθμών στο συγκεκριμένο παράδειγμα, αλλά και κάθε ομάδας συνδυασμών στη γενικότερη περίπτωση, είναι μέσω ενός **πλήρους παραγοντικού σχεδιασμού** (Full Factorial Design) [37] [38], αν τεθεί ο περιορισμός του αθροίσματος να είναι μικρότερος ή ίσος από τη μέγιστη τάξη που ζητείται. Με τον τρόπο αυτό αφαιρούνται από τον πλήρη σχεδιασμό οι πλεονάζουσες τιμές, και παραμένει ο σωστός αριθμός συνδυασμών.

Στον Πίνακα 3.2 παρουσιάζονται τα ζητούμενα πολυδιάστατα πολυώνυμα, από τον οποίο επιβεβαιώνονται τα κάτωθι:

- Όμοια με την περίπτωση της μίας διάστασης, το μηδενικό πολυώνυμο ισούται με τη μονάδα, ανεξαρτήτου κατανομής, αφού αποτελεί γινόμενο μονοδιάστατων

Τάξη	Τριδιάστατο πιθανοτικό πολυώνυμο Hermite		
$k = 0$	$\psi_0(\vec{x})$	$= He_0(x_1)He_0(x_2)He_0(x_3)$	$= 1$
$k = 1$	$\psi_1(\vec{x})$	$= He_1(x_1)He_0(x_2)He_0(x_3)$	$= x_1$
	$\psi_2(\vec{x})$	$= He_0(x_1)He_1(x_2)He_0(x_3)$	$= x_2$
	$\psi_3(\vec{x})$	$= He_0(x_1)He_0(x_2)He_1(x_3)$	$= x_3$
$k = 2$	$\psi_4(\vec{x})$	$= He_2(x_1)He_0(x_2)He_0(x_3)$	$= x_1^2 - 1$
	$\psi_5(\vec{x})$	$= He_1(x_1)He_1(x_2)He_0(x_3)$	$= x_1x_2$
	$\psi_6(\vec{x})$	$= He_1(x_1)He_0(x_2)He_1(x_3)$	$= x_1x_3$
	$\psi_7(\vec{x})$	$= He_0(x_1)He_2(x_2)He_0(x_3)$	$= x_2^2 - 1$
	$\psi_8(\vec{x})$	$= He_0(x_1)He_1(x_2)He_1(x_3)$	$= x_2x_3$
	$\psi_9(\vec{x})$	$= He_0(x_1)He_0(x_2)He_2(x_3)$	$= x_3^2 - 1$
$k = 3$	$\psi_{10}(\vec{x})$	$= He_3(x_1)He_0(x_2)He_0(x_3)$	$= x_1^3 - 3x_1$
	$\psi_{11}(\vec{x})$	$= He_2(x_1)He_1(x_2)He_0(x_3)$	$= (x_1^2 - 1)x_2$
	$\psi_{12}(\vec{x})$	$= He_2(x_1)He_0(x_2)He_1(x_3)$	$= (x_1^2 - 1)x_3$
	$\psi_{13}(\vec{x})$	$= He_1(x_1)He_2(x_2)He_0(x_3)$	$= x_1(x_2^2 - 1)$
	$\psi_{14}(\vec{x})$	$= He_1(x_1)He_1(x_2)He_1(x_3)$	$= x_1x_2x_3$
	$\psi_{15}(\vec{x})$	$= He_1(x_1)He_0(x_2)He_2(x_3)$	$= x_1(x_3^2 - 1)$
	$\psi_{16}(\vec{x})$	$= He_0(x_1)He_3(x_2)He_0(x_3)$	$= x_2^3 - 3x_2$
	$\psi_{17}(\vec{x})$	$= He_0(x_1)He_2(x_2)He_1(x_3)$	$= (x_2^2 - 1)x_3$
	$\psi_{18}(\vec{x})$	$= He_0(x_1)He_1(x_2)He_2(x_3)$	$= x_2(x_3^2 - 1)$
$\psi_{19}(\vec{x})$	$= He_0(x_1)He_0(x_2)He_3(x_3)$	$= x_3^3 - 3x_3$	

**Πίνακας 3.2:** Τριδιάστατα ορθογώνια πολυώνυμα Hermite, μηδενικής, πρώτης, δευτέρας και τρίτης τάξης. Τα πολυδιάστατα ορθογώνια προκύπτουν από το γινόμενο αντίστοιχων μονοδιάστατων πολυωνύμων διαφορετικών στοχαστικών μεταβλητών, με τέτοιο τρόπο ώστε το άθροισμα των βαθμών τους να ισούται με το εκάστοτε  $k$ . Εδώ, εφόσον οι τρεις στοχαστικές μεταβλητές κατανέμονται κανονικά, τα ζητούμενα τριδιάστατα πολυώνυμα αποτελούν το γινόμενο μονοδιάστατων πολυωνύμων Hermite.

μοναδιαίων πολυωνύμων

$$\psi_0(\vec{x}) = 1, \quad \text{ανεξαρτήτου κατανομών } W(\vec{x}) \quad (3.15)$$

- Το άθροισμα των βαθμών των μονοδιάστατων πολυωνύμων σε ένα γινόμενο ισούται με την τάξη του πολυδιάστατου πολυωνύμου.
- Για κάθε τάξη  $k > 0$  υπάρχουν περισσότερα του ενός ορθογώνια πολυώνυμα. Συγκεκριμένα, κάθε τάξη απαιτεί  $\frac{(k+d-1)!}{(d-1)!k!}$  πολυώνυμα, καθώς τόσοι είναι και οι πιθανοί συνδυασμοί, δεδομένου σταθερού αθροίσματος ίσο με  $k$ .
- Συνολικά, για τάξεις έως και  $k_{max}$ , ο αθροιστικός αριθμός των πολυωνύμων που προκύπτει είναι ίσος με  $\frac{(k_{max}+d)!}{k_{max}!d!}$ .

Έχοντας ορίσει πλέον τα πολυδιάστατα ορθογώνια πολυώνυμα, επόμενο βήμα είναι η απλοποίηση της εξίσωσης (3.5) και η εύρεση της μέσης τιμής (πρώτη στατιστική ροπή,  $\nu = 1$ ), χωρίς να έχει εφαρμοστεί κάποια αποκοπή μέχρι στιγμής. Εφαρμόζοντας τον ορισμό (3.8) και την ιδιότητα (3.15), προκύπτει

$$\begin{aligned}\mu_Y = \langle y^1 \rangle &= \int \cdots \int_{\vec{D}} (f(\vec{x}))^1 W(\vec{x}) d\vec{x} = \int \cdots \int_{\vec{D}} f(\vec{x}) W(\vec{x}) d\vec{x} \\ &= \int \cdots \int_{\vec{D}} \left( \sum_{i=0}^{\infty} a_i \psi_i(\vec{x}) \right) W(\vec{x}) d\vec{x} = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \int \cdots \int_{\vec{D}} \psi_i(\vec{x}) W(\vec{x}) d\vec{x}\end{aligned}\quad (3.16)$$

Όμως  $\psi_0(\vec{x}) = 1$  και

$$\int \cdots \int_{\vec{D}} W(\vec{x}) d\vec{x} = \left( \int_{D_1} w_1(x_1) dx_1 \right) \cdots \left( \int_{D_d} w_d(x_d) dx_d \right) = 1 \quad (3.17)$$

αφού η συνολική αθροιστική πιθανότητα εμφάνισης κάθε στοχαστικού φαινομένου ισούται με τη μονάδα. Τότε

$$\int \cdots \int_{\vec{D}} \psi_i(\vec{x}) W(\vec{x}) d\vec{x} \equiv 0, \quad \forall i > 0 \quad (3.18)$$

εξαιτίας της ορθογωνιότητας με το μηδενικό πολυώνυμο. Άρα

$$\begin{aligned}\mu_Y &= a_0 \int \cdots \int_{\vec{D}} \psi_0(\vec{x}) W(\vec{x}) d\vec{x} + \sum_{i=1}^{\infty} a_i \int \cdots \int_{\vec{D}} \psi_i(\vec{x}) W(\vec{x}) d\vec{x} \Rightarrow \\ \Rightarrow \mu_Y &= a_0 \int \cdots \int_{\vec{D}} 1 \cdot W(\vec{x}) d\vec{x} = a_0 \int_{D_1} w_1(x_1) dx_1 \cdots \int_{D_d} w_d(x_d) dx_d\end{aligned}$$

ή

$$\mu_Y = a_0 \quad (3.19)$$

απολύτως όμοια με την περίπτωση της μίας διάστασης.

Στη συνέχεια, αποδεικνύεται η σχέση υπολογισμού της τυπικής απόκλισης σε πολυδιάστατα προβλήματα. Υπενθυμίζεται ο ορισμός της, (2.12), ως η τετραγωνική ρίζα της διακύμανσης (εξίσωση (2.11))

$$\text{var}(Y) = \sigma_Y^2 = \langle y^2 \rangle - \mu_Y^2 \quad (3.20)$$

$$\sigma_Y = \sqrt{\sigma_Y^2} = \sqrt{\langle y^2 \rangle - \mu_Y^2} \quad (3.21)$$

Αυτή τη φορά, όμως

$$\begin{aligned} \langle y^2 \rangle &= \int \cdots \int_{\vec{D}} (f(\vec{x}))^2 W(\vec{x}) d\vec{x} = \int \cdots \int_{\vec{D}} \left( \sum_{i=0}^{\infty} a_i \psi_i(\vec{x}) \right)^2 W(\vec{x}) d\vec{x} \\ &= \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} a_{i_1} a_{i_2} \int \cdots \int_{\vec{D}} \psi_{i_1}(\vec{x}) \psi_{i_2}(\vec{x}) W(\vec{x}) d\vec{x} \end{aligned}$$

Εκμεταλλευόμενοι την ιδιότητα ορθογωνιότητας 3.8, αποκτάται

$$\langle y^2 \rangle = \sum_{i=0}^{\infty} a_i^2 \int \cdots \int_{\vec{D}} \psi_i(\vec{x})^2 W(\vec{x}) d\vec{x} = \sum_{i=0}^{\infty} a_i^2 \|\psi_i(\vec{x})\|_W^2$$

από όπου, με τον ορισμό της νόρμας 3.10, είναι

$$\langle y^2 \rangle = \sum_{i=0}^{\infty} a_i^2 \gamma_i \quad (3.22)$$

Για  $\gamma_n = 1$ , τα πολυώνυμα είναι πλέον ορθοκανονικά, κι αυτό επιτυγχάνεται εύκολα διαιρώντας κάθε οικογένεια με το αντίστοιχο μέτρο κανονικότητας.

$$\tilde{\psi}_n(\vec{x}) = \frac{\psi_n(\vec{x})}{\|\psi_n(\vec{x})\|} = \frac{\psi_n(\vec{x})}{\sqrt{\gamma_n}} \quad (3.23)$$

Έτσι, η (3.22) απλοποιείται

$$\langle y^2 \rangle = \sum_{i=0}^{\infty} a_i^2 \quad (3.24)$$



Από τις (3.19),(3.20) και (3.24) υπολογίζεται η τυπική απόκλιση

$$\sigma_Y = \sqrt{\sum_{i=0}^{\infty} a_i^2 - a_0^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2} \quad (3.25)$$

Τελικώς, απομένει μόνο ο υπολογισμός των συντελεστών  $a_i$  για την εύρεση της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης της βασικής αντικειμενικής συνάρτησης από τις σχέσεις (3.19) και (3.25), προκειμένου να αξιολογηθεί η τιμή της μετρικής αεροδυναμικής στιβαρότητας  $\hat{F}$ .

### 3.5 Πολυδιάστατη Ολοκλήρωση

Όπως και στην περίπτωση μίας διάστασης, πριν τον υπολογισμό των συντελεστών  $a_i$  εφαρμόζεται μία αποκοπή (τάξη χάους), έστω  $k$ , στο ανάπτυγμα της  $f$ . Πλέον, για το λόγο που αναλύθηκε, η  $f$  θα αποτελείται από  $N = \binom{k_{max}+d}{k_{max}}$  όρους, δηλαδή όλους τους δυνατούς συνδυασμούς γινομένων με άθροισμα βαθμών μικρότερο ή ίσο του  $k$ . Επομένως, η  $f$ , μαζί με τη μέση και την τυπική απόκλιση, γράφονται

$$f(\vec{x}) = \sum_{i=0}^N a_i \tilde{\psi}_i(\vec{x}) \quad (3.26\alpha')$$

$$\mu_Y = a_0 \quad (3.26\beta')$$

$$\sigma_Y \simeq \sqrt{\sum_{i=1}^N a_i^2} \quad (3.26\gamma')$$

όπου χρησιμοποιήθηκε ορθοκανονική οικογένεια πολυδιάστατων πολυωνύμων.

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου συναρτήσεων και των ιδιοτήτων των ορθοκανονικών πολυώνυμων, βρίσκονται ξανά οι συντελεστές  $a_i$

$$\left. \begin{aligned} \langle f(\vec{x}), \tilde{\psi}_i(\vec{x}) \rangle_W &= \int_{\vec{D}} \cdots \int f(\vec{x}) \tilde{\psi}_i(\vec{x}) W(\vec{x}) d\vec{x} \simeq \int_{\vec{D}} \cdots \int F(\vec{x}) \tilde{\psi}_i(\vec{x}) W(\vec{x}) d\vec{x} \\ \langle f(\vec{x}), \tilde{\psi}_i(\vec{x}) \rangle_W &= \left\langle \sum_{\lambda=0}^k a_\lambda \tilde{\psi}_\lambda(\vec{x}), \tilde{\psi}_i(\vec{x}) \right\rangle_W = a_i \|\tilde{\psi}_i(\vec{x})\|_W^2 = a_i \end{aligned} \right\} \implies$$

$$\implies a_i \simeq \int_{\vec{D}} \cdots \int F(\vec{x}) \tilde{\psi}_i(\vec{x}) W(\vec{x}) d\vec{x} \quad (3.27)$$

Ειδικά για την περίπτωση στοχαστικών μεταβλητών που κατανέμονται κανονικά και τη χρήση των κανονικοποιημένων πιθανοτικών πολυωνύμων Hermite, η εξίσωση (3.27) ισοδυναμεί με

$$a_i = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^d} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty}}_{d \text{ φορές}} F(\vec{x}) \tilde{\psi}_i(\vec{x}) e^{-\frac{\sum_{l=1}^d x_l^2}{2}} dx_1 \cdots dx_d \quad (3.28)$$

ενώ το προσεγγιστικό πολυωνυμικό ανάπτυγμα της αντικειμενικής συνάρτησης θα είναι ίσο με

$$F(\vec{x}) \simeq \sum_{i=0}^N \left( a_i \prod_{l=1}^d \widetilde{H}e_{i_l} \left( \frac{x_l - \mu_l}{\sigma_l} \right) \right) \quad (3.29)$$

### 3.5.1 Cubature και Τανυστικό Γινόμενο

Η αριθμητική επίλυση του ολοκληρώματος (3.27) χρησιμοποιεί την Gauss Quadrature, η οποία σε προβλήματα πολλών διαστάσεων είναι ευρύτερα γνωστή με την ονομασία “**cubature**” [39] [40]. Χρησιμοποιώντας έναν ορισμό παρόμοιο με τον (2.22), έστω μία συνάρτηση  $g(\vec{x})$  που αναλύεται σε

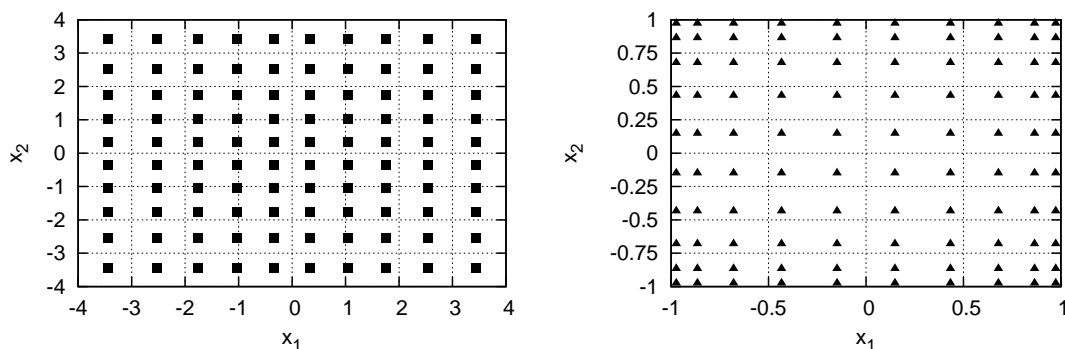
$$g(\vec{x}) = W(\vec{x}) f(\vec{x}) \quad (3.30)$$

όπου  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_d)$ , της οποίας το ολοκλήρωμα κατά cubature θα ισούται με

$$\int_{\vec{D}} \cdots \int g(\vec{x}) d\vec{x} = \int_{\vec{D}} \cdots \int W(\vec{x}) f(\vec{x}) d\vec{x} = \sum_{j=1}^N W^{(j)} f(\vec{z}^{(j)}) \quad (3.31)$$

με  $W^{(j)}$  το γινόμενο βαρών  $\omega_l^{(j)}$  που αντιστοιχούν σε κάθε συνδυασμό συντεταγμένων  $\vec{z}^{(j)} = (z_1^{(j)}, \dots, z_d^{(j)})$ .

Στην ουσία της, η εξίσωση (3.31) αναλύει το ζητούμενο ολοκλήρωμα σε ένα άθροισμα όλων των δυνατών γινομένων μεταξύ των βαρών και αξιολογήσεων της συνάρτησης  $f$  σε όλους τους συνδυασμούς κόμβων για κάθε διάσταση. Αυτό συνεπάγεται ότι ο αριθμός των διαστάσεων επηρεάζει σημαντικά και τον αριθμό κλήσεων της  $f$ .



(α') Πλήρες πλέγμα 100 κόμβων για την Gauss-Hermite Quadrature. (β') Πλήρες πλέγμα 100 κόμβων για την Gauss-Legendre Quadrature.

**Σχήμα 3.1:** Παραδείγματα πλήρους πλέγματος για δύο ειδών *Gauss Quadrature*, *Hermite* (αριστερά), σε περιπτώσεις κανονικής κατανομής, και *Legendre* (δεξιά), σε περιπτώσεις ομοιόμορφης κατανομής. Σημειώνεται η υψηλή πυκνότητα του πλέγματος (100 σημεία) για την ολοκλήρωση με δύο μεταβλητές σε ένα πρόβλημα πολυωνυμικού χάους 9ης τάξης.

### 3.5.2 Έννοια Πλήρους Πλέγματος και η Κατάρρα της Διαστασιμότητας

Κατά την ολοκλήρωση με GQ σε προβλήματα με περισσότερες από μία διαστάσεις, απαιτείται η αξιολόγηση της αντικειμενικής συνάρτησης σε κάθε δυνατό συνδυασμό συντεταγμένων σημείων. Το σύνολο αυτών των σημείων ονομάζεται **πλήρες πλέγμα** (Full-Grid) [25] [23]. Τρεις περιπτώσεις πλήρους πλέγματος φαίνονται στα Σχήματα 3.1 και 3.2, όπου γίνεται αντιληπτή η πυκνότητα των αναγκαίων δειγμάτων για την επίτευξη της ολοκλήρωσης.

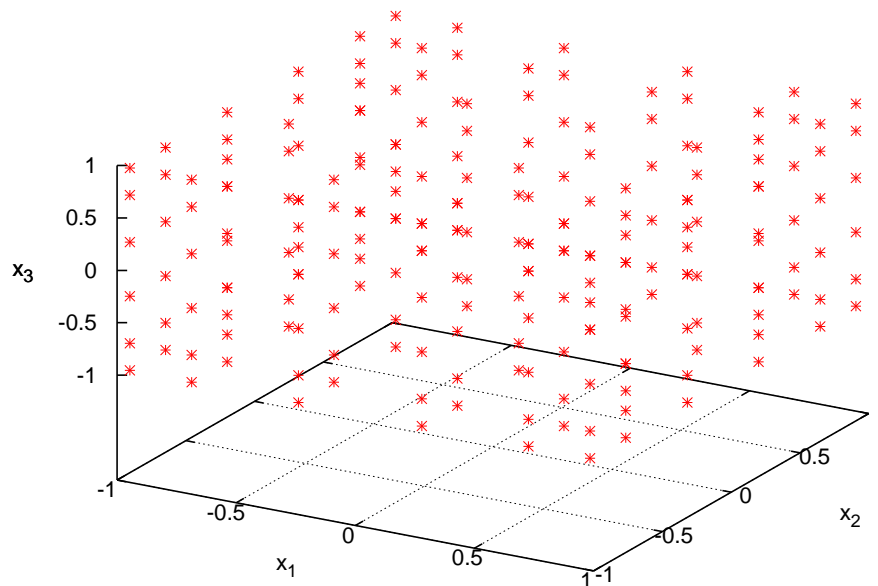
Σύμφωνα με την Gauss Quadrature σε ολοκληρώσεις μίας διάστασης, χρειάζονται  $k+1$  δείγματα ανά κατεύθυνση, το οποίο σημαίνει ότι συνολικά θα χρειαστούν  $(k+1)^d$  αξιολογήσεις της αντικειμενικής συνάρτησης για τον υπολογισμό των συντελεστών  $a_i$ , δηλαδή, ο αριθμός κλήσεων της  $F$  εξαρτάται εκθετικά από τον αριθμό των διαστάσεων του προβλήματος. Στον Πίνακα 3.3 φαίνεται ευκολότερα η ραγδαία αύξηση των δειγμάτων της  $F$  που πρέπει να αξιολογηθούν με τη μέθοδο του πλήρους πλέγματος.

Η εκθετική αύξηση των σημείων που θα χρησιμοποιηθούν για τον υπολογισμό της προς ολοκλήρωσης ποσότητας είναι γνωστή ως «**κατάρρα της διαστασιμότητας**» (curse of dimensionality) [41] [42]. Η “κατάρρα” αυτή είναι ένας σημαντικός κίνδυνος στον οποίο υπόκεινται τα προβλήματα πολλών διαστάσεων, και απαιτεί την προσεκτική αντιμετώπισή τους. Μάλιστα, ο αριθμός των αξιολογήσεων αντικειμενικής συνάρτησης αυξάνεται τόσο γρήγορα, που, για έναν αριθμό διαστάσεων και πάνω, προτιμάται η χρήση στοχαστικών μεθόδων υπολογισμού των συντελεστών του πολυωνυμικού χάους, π.χ. επίλυση με χρήση **στοιχείων σύμπτωσης** (collocation points). Τέτοιου είδους

$k + 1 \backslash d$	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1
2	2	4	8	16	32	64
3	3	9	27	81	243	729
4	4	16	64	256	1024	4096
5	5	25	125	625	3125	15625
6	6	36	216	1296	7776	46656

**Πίνακας 3.3:** Αριθμός αξιολογήσεων αντικειμενικής συνάρτησης για την ολοκλήρωση με χρήση πλήρους πλέγματος  $GQ$ . Η αύξηση με τον αριθμό των διαστάσεων του προβλήματος είναι εκθετική. Συχνά, είναι αναγκαία η χρήση άλλων μεθόδων για την εξοικονόμηση χρόνου και υπολογιστικού κόστους.

προβλήματα, με πολύ μεγάλο αριθμό στοχαστικών εισόδων, σπάνια συναντώνται σε προβλήματα αεροδυναμικού σχεδιασμού. Παρόλα αυτά γίνεται μία νύξη στη μέθοδο στο επόμενο κεφάλαιο, για λόγους πληρότητας. Για όλα τα υπόλοιπα προβλήματα, τα οποία περιλαμβάνουν ένα σχετικά υψηλό αριθμό στοχαστικών εισόδων, η μέθοδος των



**Σχήμα 3.2:** Τριδιάστατο πλήρες πλέγμα για την υλοποίηση της Gauss-Chebyshev Quadrature. Με τρεις μεταβλητές και 6 κόμβους σε κάθε κατεύθυνση, ο συνολικός αριθμός σημείων είναι  $6^3 = 216$ .

αραιών πλεγμάτων Smolyak (Smolyak Sparse Grids), όπως αναπτύσσεται στο Κεφάλαιο 4, αποδεικνύεται ιδιαίτερα χρήσιμη και οικονομική, αφού απαιτεί σημαντικά λιγότερες αξιολογήσεις της βασικής αντικειμενικής συνάρτησης.

## 3.6 Εφαρμογή σε Πολλές Διαστάσεις

Για την κατανόηση της θεωρίας που αναπτύχθηκε, ακολουθούν μερικά αριθμητικά παραδείγματα ανάλογα με αυτά του Κεφαλαίου 2.5.

### 3.6.1 Εφαρμογή σε Πολυωνυμική Συνάρτηση

Έστω βασική αντικειμενική συνάρτηση

$$f(\vec{x}) = f(x_1, x_2) = 4x_1 + x_2, \quad f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$$

με τις μεταβλητές  $x_1$  και  $x_2$  να κατανομούνται στοχαστικά ως εξής:

$$x_1 \sim \mathcal{N}(2, 1)$$

$$x_2 \sim \mathcal{N}(1, 9)$$

Από τη σχέση (2.25) προκύπτουν αρχικά οι συναρτήσεις βάρους  $w_1$  και  $w_2$

$$w_1(x_1) = \frac{1}{\sqrt{1}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1-2}{\sqrt{1}}\right)^2}$$

$$w_2(x_2) = \frac{1}{\sqrt{9}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_2-1}{\sqrt{9}}\right)^2}$$

ενώ η ολική συνάρτηση βάρους είναι

$$W(\vec{x}) = w_1(x_1) w_2(x_2) = \frac{1}{\sqrt{1}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1-2}{\sqrt{1}}\right)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{9}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_2-1}{\sqrt{9}}\right)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W(x_1, x_2) = \frac{1}{(1 \cdot 3)\sqrt{2\pi}^2} e^{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x_1-2}{1}\right)^2 + \left(\frac{x_2-1}{3}\right)^2\right]}$$

Καθώς η αντικειμενική συνάρτηση είναι γραμμική και ως προς τις δύο μεταβλητές, από

τις γραμμικές ιδιότητες της μέσης τιμής και της διακύμανσης μπορεί να εκτιμηθεί ότι

$$\mu_Y = 4\mu_{x_1} + \mu_{x_2} \Rightarrow \mu_Y = 4 \cdot 2 + 1 = 9$$

και

$$\sigma_Y^2 = 4^2\sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2 \Rightarrow \sigma_Y^2 = 16 \cdot 1 + 9 = 25$$

άρα, αναμένεται και τυπική απόκλιση ίση με

$$\sigma_Y = \sqrt{\sigma_Y^2} = \sqrt{4^2\sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2} \Rightarrow \sigma_Y = \sqrt{25} = 5$$

Πρώτα υπολογίζεται η αναλυτική λύση για λόγους σύγκρισης με την Monte Carlo και την PCE. Η μέση τιμή είναι

$$\begin{aligned} \mu_Y &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2) w_1(x_1) w_2(x_2) dx_1 dx_2 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (4x_1 + x_2) \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{x_1-2}{1} \right)^2 + \left( \frac{x_2-1}{3} \right)^2 \right]} dx_1 dx_2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \mu_Y &= [[\Phi_1(\vec{x})]_{-\infty}^{+\infty}]_{-\infty}^{+\infty} \end{aligned} \quad (3.32)$$

με

$$\Phi_1(\vec{x}) = \frac{\operatorname{erf}\left(\frac{x_1-2}{\sqrt{2}}\right) \left[ 27\pi \operatorname{erf}\left(\frac{x_2-1}{3\sqrt{2}}\right) - 9\sqrt{2\pi} e^{-\frac{1}{18}(x_2-1)^2} \right] - 12e^{\frac{1}{2}(x_1-2)^2} \sqrt{2\pi} \operatorname{erf}\left(\frac{x_2-1}{3\sqrt{2}}\right)}{12\pi} \quad (3.33)$$

όπου ξαναχρησιμοποιήθηκε η συνάρτηση σφάλματος Gauss, erf (βλ. Παράρτημα Γ'). Ο υπολογισμός των ορίων της (3.32) δίνει

$$\mu_Y = 9 \quad (3.34)$$

Έπειτα, πρέπει να βρεθεί ο όρος  $\langle y^2 \rangle$ ,

$$\begin{aligned} \langle y^2 \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (f(x_1, x_2))^2 w_1(x_1) w_2(x_2) dx_1 dx_2 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (4x_1 + x_2)^2 \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{x_1-2}{1} \right)^2 + \left( \frac{x_2-1}{3} \right)^2 \right]} dx_1 dx_2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \langle y^2 \rangle &= [[\Phi_2(\vec{x})]_{-\infty}^{+\infty}]_{-\infty}^{+\infty} \end{aligned}$$

όπου τέθηκε

$$\Phi_2(\vec{x}) = \left\{ -e^{2+\frac{x_1^2}{2}} \operatorname{erf}\left(\frac{x_1-2}{\sqrt{2}}\right) \left[ 3e^{\frac{x_2}{9}} \sqrt{2\pi}(17+x_2) - 106\pi e^{\frac{1}{18}(x_2^2+1)} \operatorname{erf}\left(\frac{x_2-1}{3\sqrt{2}}\right) \right] + 8e^{2x_1} \left[ 6e^{\frac{x_2}{9} - e^{\frac{1}{18}(x_2^2+1)}} \sqrt{2\pi}(5+2x_1) \operatorname{erf}\left(\frac{x_2-1}{3\sqrt{2}}\right) \right] \right\} \frac{e^{-\frac{1}{18}(x_2^2+9x_1^2+37)}}{4\pi}$$

Υπολογίζοντας τώρα τα όρια της νέας  $\Phi_2$  προκύπτει

$$\langle y^2 \rangle = 106 \quad (3.35)$$

ώστε, με αντικατάσταση στη σχέση (3.20), βρίσκεται

$$\begin{aligned} \sigma_Y &= \sqrt{\sigma_Y^2} = \sqrt{\langle y^2 \rangle - \mu_Y^2} \\ \sigma_Y &= \sqrt{106 - 9^2} = \sqrt{25} = 5 \end{aligned}$$

Στη συνέχεια, επιλύεται το πρόβλημα χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του PCE. Τα βήματα που ακολουθούνται είναι όμοια με αυτά της Εφαρμογής 2.5.1.

Εφόσον οι κατανομές είναι κανονικές, χρησιμοποιούνται τα κανονικοποιημένα πιθανοτικά πολυώνυμα Hermite, ενώ, όσον αφορά την τάξη του χάους επιλέγεται  $k_{max} = 1$ , καθώς η αντικειμενική συνάρτηση είναι πολυωνυμική. Για διδιάστατο πρόβλημα,  $d=2$ , προκύπτει

- Συνολικό πλήθος πολυωνύμων, σύμφωνα με την (3.13), ίσο με

$$\binom{k_{max} + d}{k_{max}} = \frac{(k_{max} + d)!}{k_{max}! d!} = \frac{(1 + 2)!}{1! 2!} = \frac{3!}{2} = 3$$

- Πλήθος πολυωνύμων για  $k=0$ , σύμφωνα με την 3.11

$$\binom{\binom{d}{k}}{k} = \binom{k + d - 1}{k} = \frac{(k + d - 1)!}{k! (d - 1)!} = \frac{(0 + 2 - 1)!}{0! (2 - 1)!} = \frac{1!}{1} = 1$$

όπου χρησιμοποιήθηκε η εξ' ορισμού ισότητα  $0! = 1$ , ενώ,

- Πλήθος πολυωνύμων για  $k=1$

$$\binom{\binom{d}{k}}{k} = \frac{(1 + 2 - 1)!}{1! (2 - 1)!} = \frac{2!}{1} = 2$$

Συνοπτικά, τα αποτελέσματα αναγράφονται στον Πίνακα 3.4.

Τάξη	Κατάταξη πολυωνύμων $\Psi$		Βαθμός $p_{i_l}$		Πλήθος $\binom{k+d-1}{k}$	Πλήθος $\binom{k_{max}+d}{k_{max}}$
	Σχετική ( $j$ )	Απόλυτη ( $m_j^k$ )	$l=1$ $i_1$	$l=2$ $i_2$		
$k=0$	1	0	0	0	1	3
$k=1$	1 2	1 2	1 0	0 1	2	

**Πίνακας 3.4:** Εφαρμογή 3.6.1. Αντιστοίχιση δεικτών απόλυτης και σχετικής κατάταξης με τους βαθμούς μονοδιάστατων πολυωνύμων για τάξεις  $k$  από 0 έως 1 σε διδιάστατο πρόβλημα. Στις δύο στήλες ( $l=1,2$ ) αναγράφονται οι πιθανοί συνδυασμοί των μονοδιάστατων πολυωνύμων με άθροισμα ίσο με την εκάστοτε τάξη.

Τα αντίστοιχα πολυδιάστατα πολυώνυμα που θα χρησιμοποιηθούν για το PCE θα είναι τα

$$\tilde{\psi}_0(z_1, z_2) = \tilde{p}_0(z_1)\tilde{p}_0(z_2) = 1$$

$$\tilde{\psi}_1(z_1, z_2) = \tilde{p}_1(z_1)\tilde{p}_0(z_2) = z_1$$

$$\tilde{\psi}_2(z_1, z_2) = \tilde{p}_0(z_1)\tilde{p}_1(z_2) = z_2$$

Έπειτα, βρίσκονται οι ρίζες-κόμβοι του πολυώνυμου  $\tilde{\psi}$  βαθμού  $n = k_{max} + 1 = 2$ , καθώς και τα αντίστοιχα βάρη. Συμβουλευόμενοι το Παράρτημα Α'.2, χρησιμοποιούνται τα

$$\begin{aligned} z_{l,1} &= 1, & \omega_1 &= 0.5 \\ z_{l,2} &= -1, & \omega_2 &= 0.5 \end{aligned}$$

για  $l=1,2$  οι δύο διαστάσεις του προβλήματος.

Σε αυτό το σημείο, πρέπει να υπολογιστούν οι τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης για κάθε πιθανό συνδυασμό. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να κατασκευαστεί το πλήρες πλέγμα, σύμφωνα με το οποίο το πλήθος των δειγμάτων που πρέπει να αξιολογηθούν είναι

$$(k_{max} + 1)^d = (1 + 1)^2 = 4$$

Αυτά θα είναι στα ζεύγη σημείων με συντεταγμένες

$$\begin{aligned} x_{1,1} &= \sigma_{x_1} z_{1,1} + \mu_{x_1} = 1 \cdot 1 + 2 = 3 & \& & x_{2,1} &= \sigma_{x_2} z_{1,1} + \mu_{x_2} = 3 \cdot 1 + 1 = 4, \\ x_{1,1} &= \sigma_{x_1} z_{1,1} + \mu_{x_1} = 1 \cdot 1 + 2 = 3 & \& & x_{2,2} &= \sigma_{x_2} z_{2,2} + \mu_{x_2} = 3 \cdot (-1) + 1 = -2, \\ x_{1,2} &= \sigma_{x_1} z_{2,2} + \mu_{x_1} = 1 \cdot (-1) + 2 = 1 & \& & x_{2,1} &= \sigma_{x_2} z_{1,1} + \mu_{x_2} = 3 \cdot 1 + 1 = 4, \\ x_{1,2} &= \sigma_{x_1} z_{2,2} + \mu_{x_1} = 1 \cdot (-1) + 2 = 1 & \& & x_{2,2} &= \sigma_{x_2} z_{2,2} + \mu_{x_2} = 3 \cdot (-1) + 1 = -2 \end{aligned}$$



άρα, οι αντίστοιχες τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης είναι

$$\begin{aligned} f(3, 4) &= 4 \cdot 3 + 4 = 16 \\ f(3, -2) &= 4 \cdot 3 - 2 = 10 \\ f(1, 4) &= 4 \cdot 1 + 4 = 8 \\ f(1, -2) &= 4 \cdot 1 - 2 = 2 \end{aligned}$$

Απομένει ο υπολογισμός των συντελεστών  $a_0$ ,  $a_1$  και  $a_2$ , χρησιμοποιώντας τη Σχέση (3.27). Για το συντελεστή  $a_0$  θα είναι

$$a_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2) \tilde{\psi}_0\left(\frac{x_1 - \mu_{x_1}}{\sigma_{x_1}}, \frac{x_2 - \mu_{x_2}}{\sigma_{x_2}}\right) w_1(x_1) w_2(x_2) dx_1 dx_2$$

που σύμφωνα με την Gauss Quadrature, γίνεται

$$\begin{aligned} a_0 &= \sum_{j_1=1}^2 \sum_{j_2=1}^2 \omega_{j_1} \omega_{j_2} \tilde{\psi}_0(z_{j_1}, z_{j_2}) f(x_{j_1}, x_{j_2}) \\ a_0 &= \sum_{j_1=1}^2 \omega_{j_1} \left( \omega_1 \tilde{\psi}_0(z_{j_1}, z_{2,1}) f(x_{j_1}, x_{2,1}) + \omega_2 \tilde{\psi}_0(z_{j_1}, z_{2,2}) f(x_{j_1}, x_{2,2}) \right) \\ a_0 &= \omega_1 \omega_1 \tilde{\psi}_0(z_{1,1}, z_{2,1}) f(x_{1,1}, x_{2,1}) + \omega_2 \omega_1 \tilde{\psi}_0(z_{1,2}, z_{2,1}) f(x_{1,2}, x_{2,1}) \\ &\quad + \omega_1 \omega_2 \tilde{\psi}_0(z_{1,1}, z_{2,2}) f(x_{1,1}, x_{2,2}) + \omega_2 \omega_2 \tilde{\psi}_0(z_{1,2}, z_{2,2}) f(x_{1,2}, x_{2,2}) \end{aligned}$$

η οποία, αντικαθιστώντας με τις αντίστοιχες τιμές, γίνεται

$$\begin{aligned} a_0 &= 0.5 \cdot 0.5 \cdot 1 \cdot 16 + 0.5 \cdot 0.5 \cdot 1 \cdot 8 + 0.5 \cdot 0.5 \cdot 1 \cdot 10 + 0.5 \cdot 0.5 \cdot 1 \cdot 2 \\ a_0 &= 4 + 2 + 2.5 + 0.5 \\ a_0 &= 9 \end{aligned}$$

αποτέλεσμα που είναι ακριβώς ίσο με το αποτέλεσμα της αναλυτικής λύσης της μέσης τιμής.

Προχωρώντας στους συντελεστές  $a_1$  και  $a_2$ , διαδοχικά ισχύει

$$\begin{aligned} a_1 &= \sum_{j_1=1}^2 \sum_{j_2=1}^2 \omega_{j_1} \omega_{j_2} \tilde{\psi}_1(z_{j_1}, z_{j_2}) f(x_{j_1}, x_{j_2}) \\ a_1 &= \sum_{j_1=1}^2 \omega_{j_1} \left( \omega_1 \tilde{\psi}_1(z_{j_1}, z_{2,1}) f(x_{j_1}, x_{2,1}) + \omega_2 \tilde{\psi}_1(z_{j_1}, z_{2,2}) f(x_{j_1}, x_{2,2}) \right) \end{aligned}$$

$$a_1 = \omega_1 \omega_1 \tilde{\psi}_1(z_{1,1}, z_{2,1}) f(x_{1,1}, x_{2,1}) + \omega_2 \omega_1 \tilde{\psi}_1(z_{1,2}, z_{2,1}) f(x_{1,2}, x_{2,1}) \\ + \omega_1 \omega_2 \tilde{\psi}_1(z_{1,1}, z_{2,2}) f(x_{1,1}, x_{2,2}) + \omega_2 \omega_2 \tilde{\psi}_1(z_{1,2}, z_{2,2}) f(x_{1,2}, x_{2,2})$$

όπου αντικαθιστώντας

$$a_1 = 0.5 \cdot 0.5 \cdot z_{1,1} \cdot 16 + 0.5 \cdot 0.5 \cdot z_{1,2} \cdot 8 + 0.5 \cdot 0.5 \cdot z_{1,1} \cdot 10 + 0.5 \cdot 0.5 \cdot z_{1,2} \cdot 2 \\ a_1 = 0.5 \cdot 0.5 \cdot 1 \cdot 16 + 0.5 \cdot 0.5 \cdot (-1) \cdot 8 + 0.5 \cdot 0.5 \cdot 1 \cdot 10 + 0.5 \cdot 0.5 \cdot (-1) \cdot 2 \\ a_1 = 4 + 2 - 2.5 - 0.5 \\ a_1 = 4$$

καθώς και

$$a_2 = \sum_{j_1=1}^2 \sum_{j_2=1}^2 \omega_{j_1} \omega_{j_2} \tilde{\psi}_2(z_{j_1}, z_{j_2}) f(x_{j_1}, x_{j_2}) \\ a_2 = \sum_{j_1=1}^2 \omega_{j_1} \left( \omega_1 \tilde{\psi}_2(z_{j_1}, z_{2,1}) f(x_{j_1}, x_{2,1}) + \omega_2 \tilde{\psi}_1(z_{j_1}, z_{2,2}) f(x_{j_1}, x_{2,2}) \right) \\ a_2 = \omega_1 \omega_1 \tilde{\psi}_2(z_{1,1}, z_{2,1}) f(x_{1,1}, x_{2,1}) + \omega_2 \omega_1 \tilde{\psi}_2(z_{1,2}, z_{2,1}) f(x_{1,2}, x_{2,1}) \\ + \omega_1 \omega_2 \tilde{\psi}_2(z_{1,1}, z_{2,2}) f(x_{1,1}, x_{2,2}) + \omega_2 \omega_2 \tilde{\psi}_2(z_{1,2}, z_{2,2}) f(x_{1,2}, x_{2,2})$$

και, με αντικατάσταση

$$a_2 = 0.5 \cdot 0.5 \cdot z_{2,1} \cdot 16 + 0.5 \cdot 0.5 \cdot z_{2,2} \cdot 8 + 0.5 \cdot 0.5 \cdot z_{2,1} \cdot 10 + 0.5 \cdot 0.5 \cdot z_{2,2} \cdot 2 \\ a_2 = 0.5 \cdot 0.5 \cdot 1 \cdot 16 + 0.5 \cdot 0.5 \cdot 1 \cdot 8 + 0.5 \cdot 0.5 \cdot (-1) \cdot 10 + 0.5 \cdot 0.5 \cdot (-1) \cdot 2 \\ a_2 = 4 + 2 - 2.5 - 0.5 \\ a_2 = 3$$

οι οποίοι δίνουν

$$\sigma_Y^2 = a_1^2 + a_2^2 = 4^2 + 3^2 = 25 \\ \sigma_Y = \sqrt{\sigma_Y^2} = 5$$

αποτέλεσμα το οποίο συμπίπτει ακριβώς με εκείνο της αναλυτικής λύσης.

Κατόπιν, υπολογίζεται η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση τεσσάρων πειραμάτων Monte Carlo, από 10000 έως και 500000 αξιολογήσεις της αντικειμενικής συνάρτησης. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον Πίνακα 3.5, όπου φαίνεται η μεγάλη υστέρηση της Monte Carlo, και το μεγάλο πλεονέκτημα χρήσης του πολυωνυμικού χάους στην

Μέθοδος	$\mu_Y$	Σχετικό Σφάλμα ( % )	$\sigma_Y$	Σχετικό Σφάλμα ( % )
Αναλυτική	9	–	5	–
PCE	9	0	5	0
MC (10000)	9.09852	1.09467	4.97571	0.4858
MC (50000)	8.99734	0.02956	5.03779	0.7558
MC (100000)	8.99091	0.10101	4.99224	0.1552
MC (500000)	9.00236	0.02622	5.00125	0.0250

**Πίνακας 3.5:** Εφαρμογή 3.6.1. Σύγκριση αποτελεσμάτων μέσης τιμής, τυπικής απόκλισης και αντίστοιχων σχετικών σφαλμάτων μεταξύ των μεθόδων Monte Carlo και PCE μίας πολυωνυμικής βασικής αντικειμενικής συνάρτησης με δύο στοχαστικές μεταβλητές εισόδου.

μοντελοποίηση πολυωνυμικών αντικειμενικών συναρτήσεων.

### 3.6.2 Εφαρμογή σε Τριγωνομετρική Συνάρτηση

Έστω  $f(x_1, x_2) = \sin\left(\frac{\pi x_1}{3} + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi x_2}{2}\right)$  με

$$x_1 \sim \mathcal{N}(4, 0.25)$$

$$x_2 \sim \mathcal{N}(4, 0.25)$$

δηλαδή οι δύο μεταβλητές ακολουθούν την ίδια κανονική κατανομή με μέση τιμή  $\mu = 4$  και τυπική απόκλιση  $\sigma = \sqrt{0.25} = 0.5$ .

Για  $l = 1, 2$ , οι απαρτίζουσες συναρτήσεις βάρους  $w_l$  είναι οι

$$w_l(x_l) = \frac{1}{0.5\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_l-4}{0.5}\right)^2}$$

ενώ η ολική συνάρτηση βάρους είναι

$$W(x_1, x_2) = \frac{1}{0.5\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1-4}{0.5}\right)^2} \frac{1}{0.5\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_2-4}{0.5}\right)^2} \quad (3.36)$$

$$W(x_1, x_2) = \frac{4}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x_1-4}{0.5}\right)^2 + \left(\frac{x_2-4}{0.5}\right)^2\right]} \quad (3.37)$$

Μέσω του Mathematica βρίσκονται τα ολοκληρώματα της αναλυτικής λύσης, για τα

Μέθοδος	$\mu_Y$	Σφάλμα $\mu_Y$ ( % )	$\sigma_Y$	Σφάλμα $\sigma_Y$ ( % )
Αναλυτική	-0.6186774599	–	0.3153543361	–
PCE	-0.6186773992	$9.811E - 6$	0.3184780732	0.990548
MC (200)	-0.6230551	0.70758	0.3183023	0.93481
MC (1000)	-0.6106294	1.30085	0.3224632	2.25425
MC (10000)	-0.6229158	0.68506	0.3155542	0.063378
MC (50000)	-0.6198981	0.19730	0.3178436	0.78935

**Πίνακας 3.6:** Εφαρμογή 3.6.2. Σύγκριση αποτελεσμάτων μέσης τιμής και τυπικής απόκλισης και αντίστοιχων σχετικών σφαλμάτων των μεθόδων PCE και Monte Carlo μίας τριγωνομετρικής βασικής αντικειμενικής συνάρτησης με δύο στοχαστικές μεταβλητές εισόδου. Η ακρίβεια στη μέση τιμή με τη μέθοδο του πολυωνυμικού χάους είναι συντριπτικά καλύτερη από τα αποτελέσματα με τη Monte Carlo. Η τυπική απόκλιση υστερεί ελάχιστα σε ακρίβεια, παραμένει όμως πολύ καλό αποτέλεσμα.

οποία ισχύει

$$\begin{aligned}
\mu_Y &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2) w_1(x_1) w_2(x_2) dx_1 dx_2 \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin\left(\frac{\pi x_1}{3} + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi x_2}{2}\right) \frac{4}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x_1-4}{0.5}\right)^2 + \left(\frac{x_2-4}{0.5}\right)^2\right]} dx_1 dx_2 \implies \\
\implies \mu_Y &= -0.6186774598762621 \dots
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
\langle y^2 \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (f(x_1, x_2))^2 w_1(x_1) w_2(x_2) dx_1 dx_2 \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sin\left(\frac{\pi x_1}{3} + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi x_2}{2}\right)\right)^2 \frac{4}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x_1-4}{0.5}\right)^2 + \left(\frac{x_2-4}{0.5}\right)^2\right]} dx_1 dx_2 \implies \\
\implies \langle y^2 \rangle &= 0.4843654903509488 \dots
\end{aligned}$$

για την αντικατάσταση στην Εξίσωση (3.20),

$$\sigma_Y = \sqrt{0.484365490 - (-0.618677460)^2} = \sqrt{0.0946065849} = 0.31535433614$$

Όπως και η Εφαρμογή 2.5.3, το συγκεκριμένο παράδειγμα επιλύεται κατά PCE λεπτομερώς στο Παράρτημα Δ'.2, με  $k=5$ . Οι συντελεστές που προέκυψαν παρουσιάζονται

παρακάτω.

$$\left. \begin{array}{l|l}
 a_0 = -0.6186773992 & a_{10} = -0.0094788477 \\
 & a_{11} \approx 0 \\
 a_1 = +0.0867991234 & a_{12} = -0.0523114603 \\
 a_2 \approx 0 & a_{13} \approx 0 \\
 & a_{14} = -0.0477081666 \\
 a_3 = +0.1199350130 & \\
 a_4 \approx 0 & \\
 a_5 = +0.2698454553 & a_{15} = +0.0006191403 \\
 & a_{16} \approx 0 \\
 a_6 = -0.0097152812 & a_{17} = +0.0042374661 \\
 a_7 \approx 0 & a_{18} \approx 0 \\
 a_8 = -0.0378587435 & a_{19} = +0.0066933543 \\
 a_9 \approx 0 & a_{20} \approx 0
 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \mu_Y = -0.6186773992 \\ \sigma_Y = 0.3184780732 \end{cases}$$

(3.38)

Τα τελικά αποτελέσματα συγκρίνονται με αυτά που προέκυψαν από πειράματα Monte Carlo, πλήθους έως και 50000 δειγμάτων, στον Πίνακα 3.6. Παρατηρείται ότι η ακρίβεια στη μέση τιμή με τη μέθοδο του πολυωνυμικού χάους είναι εντυπωσιακή ( $10^{-6}$  τάξη σχετικού σφάλματος). Από την άλλη, το σφάλμα στην τυπική απόκλιση κατά PCE τυχαίνει να είναι λίγο μεγαλύτερο, αλλά η απόδοση της μεθόδου (6 κλήσεις της  $f$ , αντί για 1000 ή 50000) και η σταθερότητα στα αποτελέσματα είναι σίγουρα πιο επιθυμητή.

Μια παρατήρηση στα αποτελέσματα (3.38) είναι το μεγάλο πλήθος των μηδενικών συντελεστών που προέκυψαν. Αυτό οφείλεται στη φύση των τριγωνομετρικών συναρτήσεων, οι οποίες μοντελοποιούνται (βλ. Σχέσεις Taylor (2.55α') και (2.55β')) χρησιμοποιώντας αποκλειστικά μονές δυνάμεις για το ημίτονο, και ζυγές δυνάμεις για το συνημίτονο. Εξαιτίας αυτού, οι συντελεστές που αντιπροσωπεύουν περιττές δυνάμεις του  $x_1$  (η μεταβλητή μέσα στον όρο του ημιτόνου της αντικειμενικής συνάρτησης) και οι άρτιες δυνάμεις του  $x_2$  (η μεταβλητή μέσα στον όρο του συνημιτόνου) δεν μηδενίζονται, ενώ, αντίθετα, όλοι οι υπόλοιποι συνδυασμοί οι οποίοι αντιστοιχούν σε δυνάμεις που δεν συνεισφέρουν στη μοντελοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης, είναι μηδενικοί.



## Κεφάλαιο 4

# Τρόποι Οικονομικής Επίλυσης Προβλημάτων με Πολλές Στοχαστικές Εισόδους

Στο Κεφάλαιο 3 μελετήθηκε η περίπτωση του πολυωνυμικού χάους σε περισσότερες από μία διαστάσεις. Ειδικότερα, οι συντελεστές  $a_i$  του πολυωνυμικού χάους αρχικά ορίστηκαν χρησιμοποιώντας τις προβολές Galerkin (εσωτερικό γινόμενο συναρτήσεων), και έπειτα υπολογίστηκαν ολοκληρώνοντας με τη μέθοδο της Gauss Quadrature. Η ολοκλήρωση με GQ απαιτεί τη δημιουργία ενός πλήρους πλέγματος δειγμάτων, που σημαίνει ότι ο αριθμός αξιολογήσεων της αντικειμενικής συνάρτησης εξαρτάται εκθετικά από τις διαστάσεις του προβλήματος. Στις περιπτώσεις προβλημάτων αεροδυναμικά στιβαρού σχεδιασμού-βελτιστοποίησης, η ραγδαία αύξηση του αξιολογήσεων της βασικής αντικειμενικής συνάρτησης καθιστά την επίλυση τους αδύνατη, ειδικά όταν απαιτείται και κάποια σχετική ακρίβεια στα αποτελέσματα (τάξη χάους  $k \geq 3$ ). Για το λόγο αυτό, έχουν αναπτυχθεί μέθοδοι οι οποίες, όταν πρόκειται για προβλήματα με μεγάλο αριθμό στοχαστικών εισόδων, απαιτούν λιγότερες αξιολογήσεις της βασικής αντικειμενικής συνάρτησης συγκριτικά με την μέθοδο ολοκλήρωσης πλήρους πλέγματος.

Στο παρόν κεφάλαιο αναπτύσσεται η μέθοδος των αραιών πλεγμάτων Smolyak, η οποία στηρίζεται κι αυτή στον υπολογισμό των συντελεστών  $a_i$  με ολοκλήρωση κατά GQ, απαιτεί όμως σημαντικά λιγότερα δείγματα, καθώς δημιουργεί αραιότερο πλέγμα σε σχέση με τη μέθοδο της GQ πλήρους πλέγματος. Από την άλλη, παρουσιάζεται κι η μέθοδος των στοιχείων σύμπτωσης, που προσεγγίζει διαφορετικά, πιο στοχαστικά, το πρόβλημα υπολογισμού των συντελεστών του πολυωνυμικού χάους.

## 4.1 Αραιά Πλέγματα Smolyak

Η μέθοδος των αραιών πλεγμάτων Smolyak (Smolyak Sparse Grids) [24] [25] πρωτοαναπτύχθηκε από τον Smolyak το 1963, ως ένας τρόπος αντιμετώπισης της ραγδαίας αύξησης του υπολογιστικού κόστους των πλήρων πλεγμάτων κατά την ολοκλήρωση με GQ. Απελευθερωμένα έως ένα βαθμό από την κατάρρα της διαστασιμότητας, τα αραιά πλέγματα Smolyak μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την προσέγγιση της τιμής των ολοκληρωμάτων πολλών διαστάσεων χωρίς υπερβολικά υψηλό κόστος. Η καινοτομία των αραιών πλεγμάτων στηρίζεται στην ιδέα ότι δεν χρειάζονται όλοι οι κόμβοι ενός πλήρους πλέγματος για τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων, παρά μόνο συγκεκριμένοι πιο σημαντικοί, οι οποίοι διαθέτουν πλέον διαφορετικά –τροποποιημένα– βάρη.

Υπάρχουν πολλά ήδη αραιών πλεγμάτων Smolyak, τα οποία διαθέτουν διαφορετικό βαθμό «εμφωλιασμού»(nesting) [23] [43]. Ονομάζονται **εμφωλιασμένα πλέγματα** καθώς κάθε μεγαλύτερη τάξη προσέγγισης περιλαμβάνει έναν αριθμό κόμβων μικρότερης τάξης. Μεγάλος **βαθμός εμφωλιασμού** ενός αραιού πλέγματος σημαίνει ότι δίνεται μεγάλη βαρύτητα στις κεντρικές τιμές, με αποτέλεσμα το πλέγμα να μην περιλαμβάνει πολλές ακραίες τιμές και άρα να προκύπτει αραιότερο.

### 4.1.1 Τρόπος Παραγωγής Αραιού Πλέγματος

Έστω συνάρτηση  $f(\vec{x})$ , όπου  $\vec{x} = (x_1, x_2 \dots x_d)$ , για την οποία ζητείται το ολοκλήρωμα  $I$ . Τότε, η Gauss-Quadrature ορίζει ότι θα ισχύει

$$I = \int \cdots \int_{\vec{D}} f(\vec{x}) d\vec{x} = \sum_{n=0}^N \left( f(\vec{x}^{(n)}) \prod_{l=0}^d \omega_{j_{i_l}}^{(i_l)} \right) \quad (4.1)$$

Σύμφωνα με τη μέθοδο αραιών πλεγμάτων Smolyak, η διαδικασία που ακολουθείται για την παραγωγή ενός αραιού πλέγματος είναι η ακόλουθη:

- Επιλέγεται η τάξη προσέγγισης του πλέγματος, έστω  $k$ , η οποία ορίζει την ποιότητα του πλέγματος. Μεγαλύτερες τιμές τάξης  $k$  χρησιμοποιούν περισσότερους κόμβους και αυξάνουν την ακρίβεια της προσέγγισης. Παράλληλα όμως αυξάνεται και ο αριθμός των αξιολογήσεων της αντικειμενικής συνάρτησης και το υπολογιστικό κόστος της διαδικασίας της ολοκλήρωσης.
- Καθορίζονται όλοι οι δυνατοί συνδυασμοί  $N_{SM}$  οι οποίοι ικανοποιούν την ανισότητα

$$d \leq \sum_{l=1}^d i_l \leq d + k$$



Αν τεθεί  $|i| \equiv \sum_{l=1}^d i_l = i_1 + i_2 + \dots + i_d$  και  $k + d = q$ , τότε αρκεί

$$d \leq |i| \leq q \quad (4.2)$$

- Υπολογίζονται τα νέα τροποποιημένα βάρη για  $j = 1 \dots N_{SM}$  που αντιστοιχούν σε κάθε κόμβο (συνδυασμό συντεταγμένων) του πλέγματος, από τη σχέση

$$W_n = (-1)^{q-|i|} \binom{d-1}{q-|i|} \prod_{l=1}^d \omega_{j_{i_l}}^{(i_l)} \quad (4.3)$$

- Το ολοκλήρωμα κατά GQ χρησιμοποιώντας αραιό πλέγμα Smolyak ισούται με

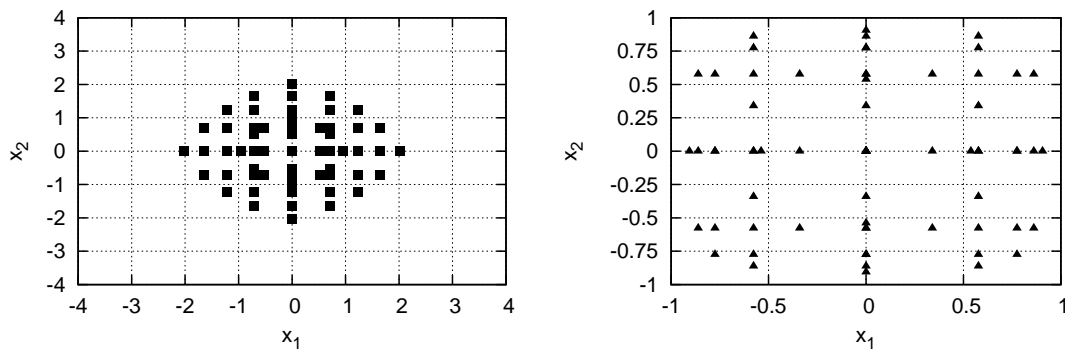
$$I_{SM} = \sum_{j=0}^{N_{SM}} \omega_j f(\vec{x}_j) \quad (4.4)$$

		Πλήρες Πλέγμα / Αραιό Πλέγμα						
$k \backslash d$		1	2	3	4	5	6	7
0		1/1	1/1	1/1	1/1	1/1	1/1	1/1
1		2/3	4/5	8/7	16/9	32/11	64/13	128/15
2		3/5	9/13	27/25	81/41	243/61	729/85	2187/113
3		4/9	16/29	64/69	256/137	1024/241	4096/389	16384/589
4		5/17	25/65	125/177	625/401	3125/801	15625/1457	78125/2465
5		6/33	36/145	216/441	1296/1105	7776/2433	46656/4865	279936/9017

**Πίνακας 4.1:** Σύγκριση αριθμού αξιολογήσεων αντικειμενικής συνάρτησης για την ολοκλήρωση κατά GQ, με χρήση πλήρους πλέγματος και αραιού πλέγματος Smolyak για αυξανόμενες τάξεις χάους  $k$ . Φαίνεται η καλύτερη απόδοση του πλήρους πλέγματος στις μικρές διαστάσεις (για αριθμό στοχαστικών εισόδων  $d=1, 2, 3$ ), έναντι του αραιού πλέγματος που αποδίδει καλύτερα σε προβλήματα πέντε διαστάσεων και άνω.

Πρέπει να σημειωθεί ότι η συγκεκριμένη μέθοδος, με τον τρόπο που αναπτύχθηκε εδώ, χρησιμοποιείται όταν οι στοχαστικές διαστάσεις του προβλήματος είναι σχετικά αρκετές. Όπως παρουσιάζει και ο Πίνακας 4.1, σε χαμηλό αριθμό διαστάσεων, π.χ. έως και 3, η μέθοδος των αραιών πλεγμάτων Smolyak υστερεί σε σχέση με την ολοκλήρωση χρησιμοποιώντας πλήρη πλέγματα. Τα πλέγματα των σχημάτων 4.1 και 4.2, απεικονίζουν τους απαραίτητους κόμβους, όπως προκύπτουν από την παραπάνω μέθοδο, οι οποίοι όμως είναι περισσότεροι σε αριθμό των αντίστοιχων πλήρων πλεγμάτων για ίδια μέγιστη τάξη  $k$ . Η μεγάλη εξοικονόμηση υπολογιστικού κόστους γίνεται αντιληπτή σε προβλήματα με  $d \geq 5$ .

Ακολουθεί ένα παράδειγμα παραγωγής αραιού πλέγματος Smolyak, για την πληρέστερη κατανόηση της μεθόδου.



(α') Αραιό πλέγμα 57 μοναδικών κόμβων για την Gauss-Hermite Quadrature. (β') Αραιό πλέγμα 57 μοναδικών κόμβων για την Gauss-Legendre Quadrature.

**Σχήμα 4.1:** Παραδείγματα αραιών πλεγμάτων για δύο ειδών Gauss Quadrature, Hermite (αριστερά), σε περιπτώσεις κανονικής κατανομής, και Legendre (δεξιά), σε περιπτώσεις ομοιόμορφης κατανομής. Παρατηρείται η μεγαλύτερη έμφαση (πυκνότητα) που δίνεται στους δύο βασικούς άξονες των μεταβλητών, παρά στα άκρα τους, χρειάζοντας συνολικά 70 κόμβους (13 επαναλαμβανόμενους) για την ολοκλήρωση με δύο μεταβλητές σε ένα πρόβλημα πολυωνυμικού χάους 4ης τάξης, αριθμός μεγαλύτερος των 25 κόμβων, που απαιτούνται στα αντίστοιχα πλήρη πλέγματα κοινής μέγιστης τάξης  $k$ .

#### 4.1.2 Παράδειγμα Αραιού Πλέγματος Smolyak

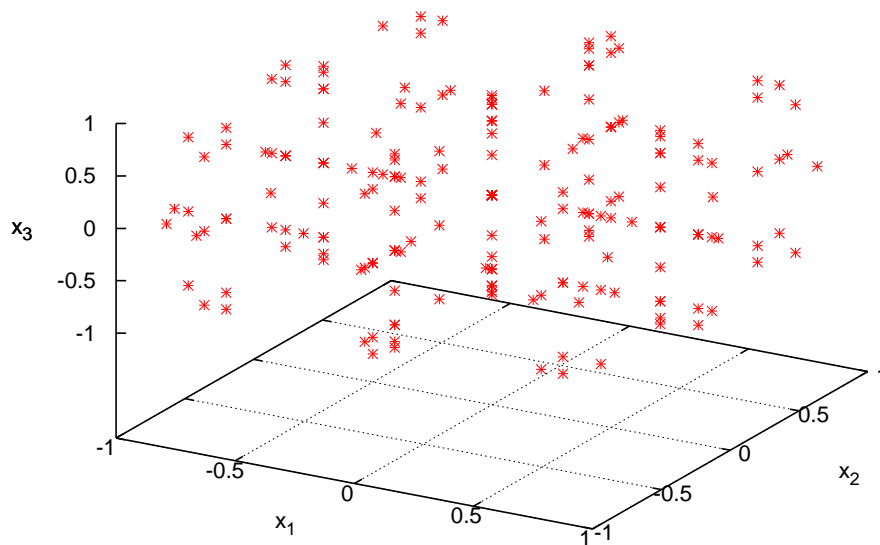
Έστω η περίπτωση ενός πενταδιάστατου προβλήματος με  $k_{max}=2$ , και ζητούνται όλοι οι πιθανοί κόμβοι του αραιού πλέγματος. Οι δυνατές συντεταγμένες ανά διάσταση ( $l=1, 2, 3, 4, 5$ ) είναι οι

$$\begin{aligned}
 x_1 &= 0, & \text{για: } i_1 &= 1 \\
 x_1 &= -\alpha, \quad x_2 = \alpha, & \text{για: } i_2 &= 2 \\
 x_1 &= -\beta, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = \beta, & \text{για: } i_3 &= 3
 \end{aligned}$$

όπου  $\beta > \alpha > 0$ . Τότε αυτές θα έχουν την ακόλουθη διάταξη

$$-\beta < -\alpha < 0 < \alpha < \beta$$

Οι δυνατοί συνδυασμοί δεικτών  $i_l$  είναι όσοι διαθέτουν άθροισμα που ανήκει στο εύρος που ορίζει η εξίσωση (4.2), για  $d=5$ ,  $k=2$  και άρα  $q=7$ . Τότε, για κάθε περίπτωση αντιστοιχίζονται οι δείκτες με τις αντίστοιχες συντεταγμένες, λαμβάνοντας υπόψη την πολλαπλότητα τους. Με τον τρόπο αυτό, παράγονται όλοι οι δυνατοί συνδυασμοί συντεταγμένων του Πίνακα (4.2). Συνολικά, προκύπτουν 66 κόμβοι, 5 από τους οποίους επαναλαμβάνονται (“redundant” [R])– διαθέτουν ίδιες συντεταγμένες με την αρχή των



**Σχήμα 4.2:** Τριδιάστατο αραιό πλέγμα για την υλοποίηση της Gauss-Chebyshev Quadrature. Με τρεις μεταβλητές και μέγιστη τάξη προσέγγισης  $k = 4$ , ο συνολικός αριθμός των μοναδικών κόμβων είναι 177, όταν στα πλήρη πλέγματα χρειάζονται 125 για το ίδιο  $k$ .

αξόνων), γεγονός που σημαίνει ότι η αξιολόγηση της αντικειμενικής συνάρτησης στα σημεία αυτά μπορεί να αποφευχθεί για κάθε επόμενο κόμβο πλυν του πρώτου. Συγκριτικά, το πλήρες πλέγμα απαιτεί  $(2 + 1)^5 = 243$  κόμβους, καθιστώντας το κέρδος σε αυτήν την περίπτωση ιδιαίτερα σημαντικό.

Καταλήγοντας, τα αραιά πλέγματα Smolyak είναι πολύ χρήσιμα σε προβλήματα με αρκετές διαστάσεις, και γλιτώνουν πολύ χρόνο από την υπολογιστική διαδικασία. Όταν όμως ο αριθμός των στοχαστικών μεταβλητών αυξάνεται πάρα πολύ, τότε ούτε κι η μέθοδος που πρότεινε ο Smolyak μπορεί να χρησιμοποιηθεί. Σε αυτήν την περίπτωση, είναι προτιμότερη η χρήση στοχαστικού τρόπου καθορισμού των συντελεστών του πολυωνυμικού χάους, όπως αναφέρεται στην επόμενη παράγραφο.

Άθροισμα ( $ i $ )	$i_1$	$i_2$	$i_3$	$i_4$	$i_5$	Κόμβοι
5	1	1	1	1	1	$(0, 0, 0, 0, 0)$
	2	1	1	1	1	$(\pm\alpha, 0, 0, 0, 0)$
6	1	2	1	1	1	$(0, \pm\alpha, 0, 0, 0)$
	1	1	2	1	1	$(0, 0, \pm\alpha, 0, 0)$
	1	1	1	2	1	$(0, 0, 0, \pm\alpha, 0)$
	1	1	1	1	2	$(0, 0, 0, 0, \pm\alpha)$
	3	1	1	1	1	$(0, 0, 0, 0, 0)$ [R] $(\pm\beta, 0, 0, 0, 0)$
7	2	2	1	1	1	$(\pm\alpha, \pm\alpha, 0, 0, 0)$
	2	1	2	1	1	$(\pm\alpha, 0, \pm\alpha, 0, 0)$
	2	1	1	2	1	$(\pm\alpha, 0, 0, \pm\alpha, 0)$
	2	1	1	1	2	$(\pm\alpha, 0, 0, 0, \pm\alpha)$
	1	3	1	1	1	$(0, 0, 0, 0, 0)$ [R] $(0, \pm\beta, 0, 0, 0)$
	1	2	2	1	1	$(0, \pm\alpha, \pm\alpha, 0, 0)$
	1	2	1	2	1	$(0, \pm\alpha, 0, \pm\alpha, 0)$
	1	2	1	1	2	$(0, \pm\alpha, 0, 0, \pm\alpha)$
	1	1	3	1	1	$(0, 0, 0, 0, 0)$ [R] $(0, 0, \pm\beta, 0, 0)$
	1	1	2	2	1	$(0, 0, \pm\alpha, \pm\alpha, 0)$
	1	1	2	1	2	$(0, 0, \pm\alpha, 0, \pm\alpha)$
	1	1	1	3	1	$(0, 0, 0, 0, 0)$ [R] $(0, 0, 0, \pm\beta, 0)$
	1	1	1	2	2	$(0, 0, 0, \pm\alpha, \pm\alpha)$
	1	1	1	1	3	$(0, 0, 0, 0, 0)$ [R] $(0, 0, 0, 0, \pm\beta)$

**Πίνακας 4.2:** Παράδειγμα 4.1.2. Δυνατοί συνδυασμοί δεικτών για τους κόμβους ενός αραιού πλέγματος Smolyak, των οποίων το άθροισμα  $|i|$  ανήκει στο εύρος  $d \leq |i| \leq d+k$ , όπου  $d = 5$ , ο αριθμός των στοχαστικών εισόδων, και  $k = 2$ , η μέγιστη τάξη χάους. Οι επαναλαμβανόμενοι κόμβοι σημειώνονται με ένα [R] (redundant) δίπλα στο διάνυσμα συντεταγμένων, καθώς, στη συγκεκριμένη περίπτωση, ταυτίζονται με την πρώτη τιμή, την αρχή των αξόνων.

## 4.2 Στοχαστική Επίλυση με Στοιχεία Σύμπτωσης

Προσεγγίζοντας με τελείως διαφορετικό τρόπο τον υπολογισμό των συντελεστών του πολυωνυμικού χάους, η **μέθοδος των στοιχείων σύμπτωσης** (collocation points) είναι ιδιαίτερα χρήσιμη όταν οι στοχαστικές μεταβλητές του προβλήματος είναι μερικές δεκάδες ή εκατοντάδες. Σε αυτές τις περιπτώσεις, είναι προτιμότερη η χρήση, υπό περιορισμούς, κάποιας στοχαστικής μεθόδου καθορισμού των  $a_i$ , αποφεύγοντας την υλοποίηση πλεγμάτων. Φυσικά, όσο μικρότερη είναι η ασυμφωνία (discrepancy) στα δείγματα που θα ληφθούν, τόσο μικρότερο είναι το υπολογιστικό κόστος, αλλά και μεγαλύτερη η ακρίβεια της μεθόδου.

Για μία συνάρτηση  $f$

$$f(\vec{x}) = \sum_{n=0}^N a_n \psi_n(\vec{x}) \quad (4.5)$$

με πεδίο ορισμού το  $\vec{D} = D_1 \times \dots \times D_d$ , υπολογίζονται προσεγγιστικά οι συντελεστές  $a_n$  με μία δειγματοληψία σημείων  $\vec{x}_n$

$$\begin{bmatrix} f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_1(\vec{x}_1) & \dots & \psi_1(\vec{x}_N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_N(\vec{x}_1) & \dots & \psi_N(\vec{x}_N) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

τέτοια ώστε οι συντελεστές να προκύπτουν από την

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_1(\vec{x}_1) & \dots & \psi_1(\vec{x}_N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_N(\vec{x}_1) & \dots & \psi_N(\vec{x}_N) \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_N) \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Όπως αναφέρεται στη βιβλιογραφία [23], σε αυτήν τη μέθοδο είναι απαραίτητη μία υπερ-δειγματοληψία, για την επίλυση μέσω ελαχίστων τετραγώνων. Μάλιστα, συνιστάται η δημιουργία υπερ-ορισμένου συστήματος εξισώσεων και η λήψη  $\frac{2(d+k)!}{d!k!}$  δειγμάτων, αριθμός που για μεγάλα  $d$  είναι μικρότερος από τον  $(k+1)^d$  των πλήρων πλεγμάτων.

Στην παρούσα διπλωματική εργασία, η συγκεκριμένη μέθοδος δεν αναπτύχθηκε περαιτέρω. Περισσότερες πληροφορίες για τη μέθοδο και τα πλεονεκτήματα (ή και μειονεκτήματά της) αναλύονται στις βιβλιογραφικές πηγές [25] [28] [44].



## Κεφάλαιο 5

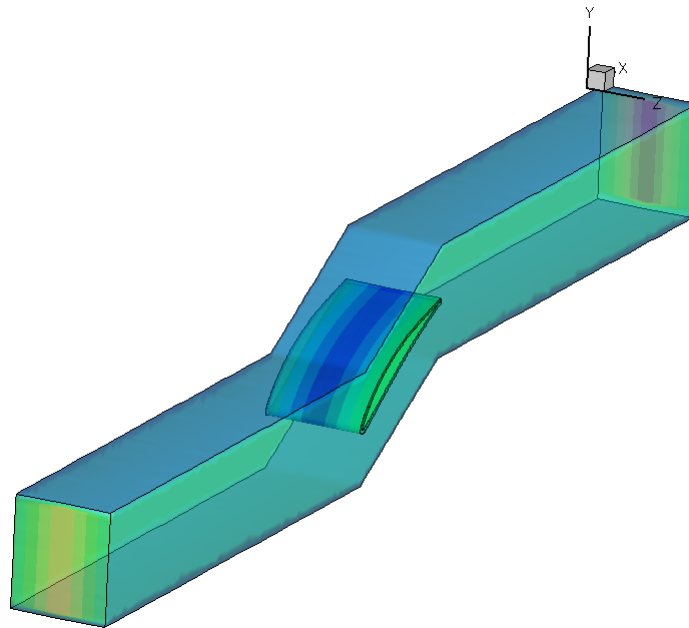
# Εφαρμογή της Μεθόδου PCE στον Αεροδυναμικά Στιβαρό Σχεδιασμό Διδιάστατης Πτερύγωσης Συμπιεστή

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζεται μία εφαρμογή της θεωρίας του πολυωνυμικού χάους, όπως αναπτύχθηκε στα προηγούμενα κεφάλαια, σε ένα πρόβλημα αεροδυναμικής φύσεως. Η εφαρμογή αυτή στοχεύει στην πιστοποίηση της αξιοπιστίας των αποτελεσμάτων που προκύπτουν από το PCE και σε αεροδυναμικά προβλήματα, μέσω της σύγκρισής του με τη μέθοδο Monte Carlo.

Συγκεκριμένα, εξετάζεται το πρόβλημα μίας διδιάστατης πτερύγωσης συμπιεστή ελεγχόμενης διάχυσης (controlled diffusion airfoil), όπως φαίνεται στο σχήμα 5.1. Το πρόβλημα μοντελοποιήθηκε σε κάρτες γραφικών (GPUs) [45] [46], λύνοντας τις εξισώσεις N-S για συμπιεστό ρευστό, μαζί με το μοντέλο τύρβης των Spalart-Allmaras [47], με συναρτήσεις τοίχου (wall-functions). Η διάσταση κατά  $z$  αποτελεί απλή εξώθηση των στοιχείων, και επομένως το τριδιάστατο πλέγμα ουσιαστικά μοντελοποιεί ένα διδιάστατο πρόβλημα, όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.2. Συγκεκριμένα, το επίπεδο της ροής αποτελείται από ένα μη-δομημένο πλέγμα με 11792 κόμβους και 18910 στοιχεία, 14828 εκ των οποίων είναι τριγωνικά και 4082 είναι τετραπλευρικά.

Σχετικά με τις συνθήκες ροής, υιοθετήθηκε αριθμός Reynolds ίσος με  $Re = 8.41 \cdot 10^5$ , ενώ οι στοχαστικές μεταβλητές του προβλήματος είναι οι

- Γωνία εισόδου της ροής στην πτερύγωση ( $\alpha_1$ ), μέσης τιμής  $\mu_{\alpha_1} = 47^\circ$  και τυπικής απόκλισης  $\sigma_{\alpha_1} = 0.5^\circ$ , και



**Σχήμα 5.1:** Πτερύγωση συμπιεστή στις δύο διαστάσεις, όπου η τρίτη αποτελεί απλή ορθογώνια εξώθηση (ψευδοδιάσταση), μιας και ο επιλύτης της ροής που χρησιμοποιήθηκε αφορά τριδιάστατες ροές. Ταυτόχρονα, φαίνεται και το χωρίο μελέτης που χρησιμοποιήθηκε.

- Ισεντροπικός αριθμός Mach της εξόδου ( $M_{2is}$ ), μέσης τιμής  $\mu_{M_{2is}} = 0.4557$  και τυπικής απόκλισης  $\sigma_{M_{2is}} = 0.015$ .

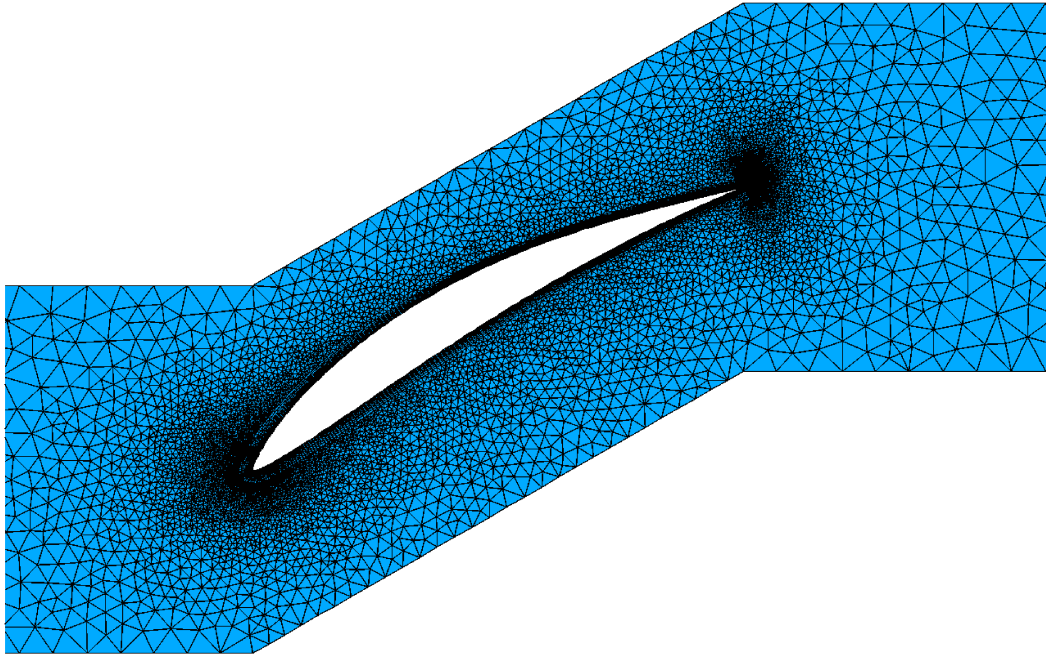
Ως βασική αντικειμενική συνάρτηση  $F$  του προβλήματος τέθηκε ο **συντελεστής απωλειών ολικής πίεσης** (omegaloss), ο οποίος ορίζεται ως

$$\Delta p_t = \frac{p_{t1} - p_{t2}}{p_{t1} - p_1} \quad (5.1)$$

όπου 1 είναι η είσοδος, και 2 η έξοδος της πτερύγωσης.

Απώτερος στόχος αυτής της εφαρμογής είναι η μελέτη της επιρροής των δύο στοχαστικών μεταβλητών στο συντελεστή απωλειών της ολικής πίεσης, πρώτα με τη μέθοδο Monte-Carlo κι έπειτα με τη μέθοδο πολυωνυμικού χάους, για να συγκριθούν τα αποτελέσματα μεταξύ τους ως προς την ακρίβεια και το υπολογιστικό τους κόστος. Πρέπει να καταστεί σαφές ότι σε αυτήν την εφαρμογή δεν επιχειρείται βελτιστοποίηση, αλλά απλή μελέτη και σύγκριση των τιμών της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης που υπολογίζουν οι δύο συγκρινόμενες μέθοδοι.





**Σχήμα 5.2:** Πλέγμα γύρω από τη διδιάστατη περύγωση συμπίεστη. Το πλέγμα είναι μη-δομημένο, αποτελούμενο από 11792 κόμβους και 18910 τριγωνικά και τετραπλευρικά στοιχεία.

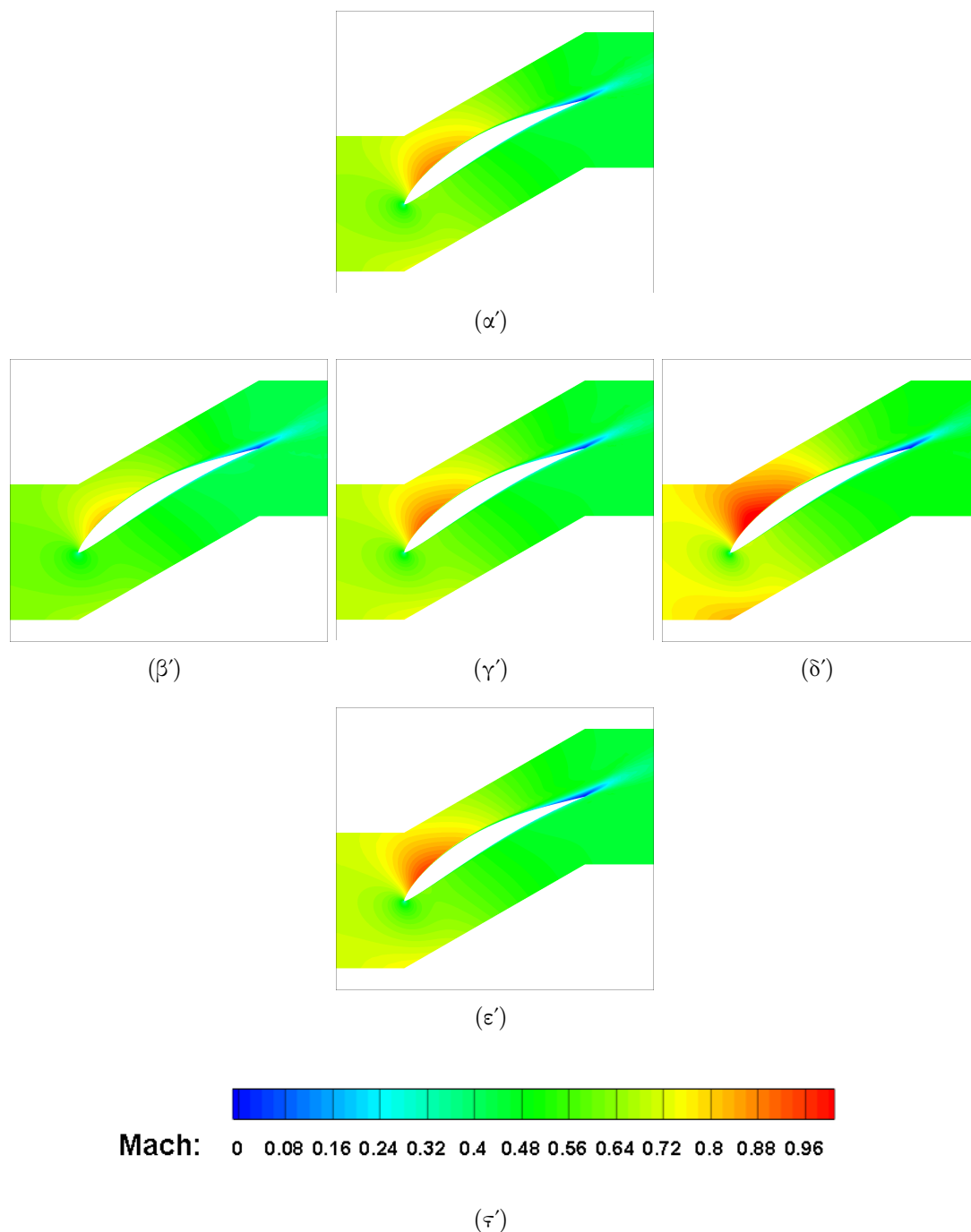
## 5.1 Περίπτωση Χωρίς Στοχαστικές Μεταβλητές

Σε πρώτη φάση, έγινε μία μελέτη της περύγωσης σε διάφορα σημεία λειτουργίας, χωρίς την ύπαρξη στοχαστικών μεταβλητών. Ειδικότερα, μελετήθηκαν 5 σημεία λειτουργίας, όπως φαίνονται στα Σχήματα 5.3, στα οποία οι τιμές κάθε μεταβλητής περιβάλλοντος θεωρήθηκαν σταθερές, και ίσες με:

- $\alpha_1 = \mu_{\alpha_1} = 47^\circ$  και  $M_{2is} = \mu_{M_{2is}} = 0.4557$  για το κεντρικό σχήμα [5.3(γ')],
- $\alpha_1 = \mu_{\alpha_1} \pm 2\sigma_{\alpha_1} = 47^\circ \pm 1^\circ$  και  $M_{2is} = \mu_{M_{2is}} = 0.4557$  για τα σχήματα πάνω [5.3(α')] και κάτω [5.3(ε')], και
- $\alpha_1 = \mu_{\alpha_1} = 47^\circ$  και  $M_{2is} = \mu_{M_{2is}} \pm 2\sigma_{M_{2is}} = 0.4557 \pm 0.03$  για τα σχήματα αριστερά [5.3(β')] και δεξιά [5.3(δ')].

Με τα σχήματα αυτά, γίνεται φανερή η επίδραση της στοχαστικής φύσης των περιβαλλοντικών μεταβλητών στην τελική ροή που προκύπτει και η αναγκαιότητα του αεροδυ-

ναμικά στιβαρού σχεδιασμού-βελτιστοποίησης, λόγω της μεγάλης μεταβλητότητας των αποτελεσμάτων ροής του προβλήματος.



**Σχήμα 5.3:** Εφαρμογή 5.1. Διαγράμματα ροής 5 περιπτώσεων σημείων λειτουργίας. Στο κεντρικό οι μεταβλητές περιβάλλοντος διαθέτουν τιμή ίση με την αντίστοιχη μέση τιμή τους. Αντίθετα, πάνω και κάτω η γωνία εισόδου  $\alpha_1$  είναι μικρότερη ή μεγαλύτερη αντίστοιχα κατά δύο τυπικές αποκλίσεις, και όμοια, αριστερά και δεξιά ο αριθμός Mach  $M_{2is}$  διαφέρει αρνητικά ή θετικά κατά δύο αντίστοιχες τυπικές αποκλίσεις.

## 5.2 Περίπτωση Μίας Στοχαστικής Μεταβλητής

Εδώ, θεωρήθηκε σταθερός ο  $M_{2is}$  και ίσος με

$$M_{2is} = 0.4557$$

προκειμένου να μελετηθεί το πρόβλημα του αεροδυναμικού σχεδιασμού με την αντικειμενική συνάρτηση (συντελεστής απωλειών ολικής πίεσης) να έχει μόνο μία στοχαστική μεταβλητή εισόδου, την  $\alpha_1$  (inlet flow angle), η οποία ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή  $\mu_{\alpha_1} = 47^\circ$  και τυπική απόκλιση  $\sigma_{\alpha_1} = 0.5^\circ$ . Αυτό σημαίνει ότι οι τιμές της γωνίας εισόδου που ανήκουν στο εύρος  $(45.5^\circ, 48.5^\circ)$  διαθέτουν πιθανότητα εμφάνισης 99.73%. Η περίπτωση αυτή αντιμετωπίζεται με τον τρόπο που αναπτύχθηκε στο Κεφάλαιο 2, πρώτα με δειγματοληψία Monte Carlo 1000 τιμών κι έπειτα με PCE με τάξεις χάους από 3 έως 6, χρησιμοποιώντας τα πλήρη πλέγματα. Τα αραιά πλέγματα Smolyak δεν χρησιμοποιήθηκαν, καθώς πρόκειται για πρόβλημα μίας στοχαστικής μεταβλητής, όπου δεν προσφέρουν καλύτερη απόδοση.

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο του πολυωνυμικού χάους, προκύπτει ότι η αντικειμενική συνάρτηση (omegaloss) μπορεί να προσεγγιστεί από τα παρακάτω αναπτύγματα/πολυώνυμα:

- για τάξη χάους  $k=3$

$$\begin{aligned} \Delta p_t(\alpha_1) \simeq & 3.29063168 \cdot 10^{-2} \widetilde{H}e_0\left(\frac{\alpha_1 - \mu_{\alpha_1}}{\sigma_{\alpha_1}}\right) + 8.68793068 \cdot 10^{-4} \widetilde{H}e_1\left(\frac{\alpha_1 - \mu_{\alpha_1}}{\sigma_{\alpha_1}}\right) \\ & + 4.50366657 \cdot 10^{-5} \widetilde{H}e_2\left(\frac{\alpha_1 - \mu_{\alpha_1}}{\sigma_{\alpha_1}}\right) + 1.22495111 \cdot 10^{-6} \widetilde{H}e_3\left(\frac{\alpha_1 - \mu_{\alpha_1}}{\sigma_{\alpha_1}}\right) \end{aligned}$$

- για τάξη χάους  $k=4$

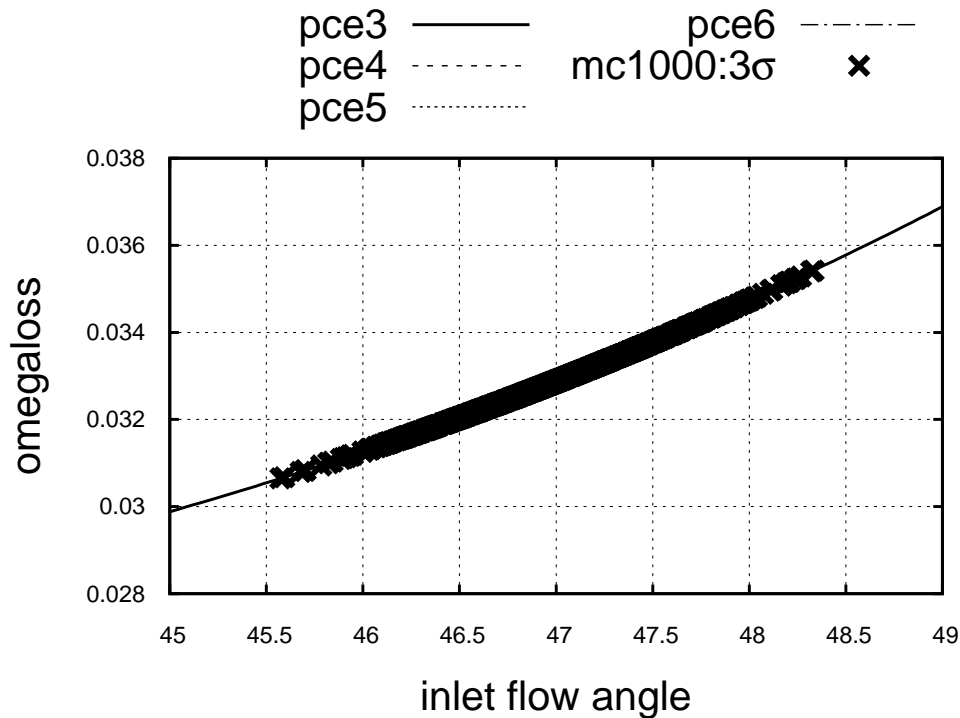
$$\begin{aligned} \Delta p_t(\alpha_1) \simeq & 3.29062174 \cdot 10^{-2} \widetilde{H}e_0\left(\frac{\alpha_1 - \mu_{\alpha_1}}{\sigma_{\alpha_1}}\right) + 8.68804002 \cdot 10^{-4} \widetilde{H}e_1\left(\frac{\alpha_1 - \mu_{\alpha_1}}{\sigma_{\alpha_1}}\right) \\ & + 4.47475046 \cdot 10^{-5} \widetilde{H}e_2\left(\frac{\alpha_1 - \mu_{\alpha_1}}{\sigma_{\alpha_1}}\right) + 1.15205760 \cdot 10^{-6} \widetilde{H}e_3\left(\frac{\alpha_1 - \mu_{\alpha_1}}{\sigma_{\alpha_1}}\right) \\ & + 3.58892428 \cdot 10^{-7} \widetilde{H}e_4\left(\frac{\alpha_1 - \mu_{\alpha_1}}{\sigma_{\alpha_1}}\right) \end{aligned}$$

- για τάξη χάους  $k=5$

$$\begin{aligned} \Delta p_t(\alpha_1) \simeq & 3.29063652 \cdot 10^{-2} \widetilde{H}e_0\left(\frac{\alpha_1 - \mu_{\alpha_1}}{\sigma_{\alpha_1}}\right) + 8.68862198 \cdot 10^{-4} \widetilde{H}e_1\left(\frac{\alpha_1 - \mu_{\alpha_1}}{\sigma_{\alpha_1}}\right) \\ & + 4.49547265 \cdot 10^{-5} \widetilde{H}e_2\left(\frac{\alpha_1 - \mu_{\alpha_1}}{\sigma_{\alpha_1}}\right) + 1.09798911 \cdot 10^{-6} \widetilde{H}e_3\left(\frac{\alpha_1 - \mu_{\alpha_1}}{\sigma_{\alpha_1}}\right) \\ & + 1.02940669 \cdot 10^{-8} \widetilde{H}e_4\left(\frac{\alpha_1 - \mu_{\alpha_1}}{\sigma_{\alpha_1}}\right) - 2.62494469 \cdot 10^{-8} \widetilde{H}e_5\left(\frac{\alpha_1 - \mu_{\alpha_1}}{\sigma_{\alpha_1}}\right) \end{aligned}$$

- για τάξη χάους  $k=6$

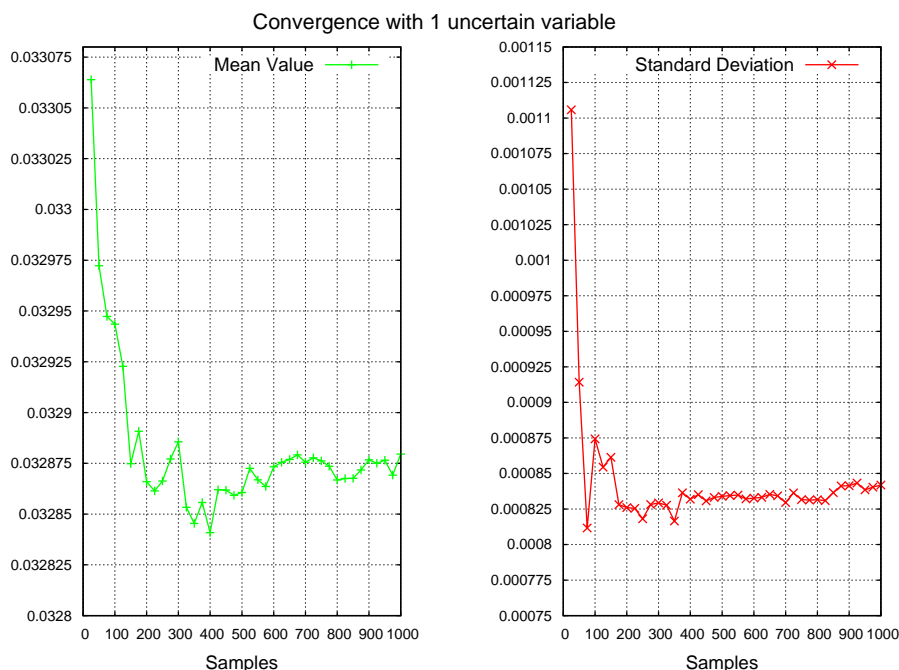
$$\begin{aligned} \Delta p_t(\alpha_1) \simeq & 3.29062416 \cdot 10^{-2} \widetilde{H}e_0\left(\frac{\alpha_1 - \mu_{\alpha_1}}{\sigma_{\alpha_1}}\right) + 8.68762744 \cdot 10^{-4} \widetilde{H}e_1\left(\frac{\alpha_1 - \mu_{\alpha_1}}{\sigma_{\alpha_1}}\right) \\ & + 4.48837142 \cdot 10^{-5} \widetilde{H}e_2\left(\frac{\alpha_1 - \mu_{\alpha_1}}{\sigma_{\alpha_1}}\right) + 1.21250776 \cdot 10^{-6} \widetilde{H}e_3\left(\frac{\alpha_1 - \mu_{\alpha_1}}{\sigma_{\alpha_1}}\right) \\ & + 2.64010870 \cdot 10^{-7} \widetilde{H}e_4\left(\frac{\alpha_1 - \mu_{\alpha_1}}{\sigma_{\alpha_1}}\right) - 2.26435081 \cdot 10^{-8} \widetilde{H}e_5\left(\frac{\alpha_1 - \mu_{\alpha_1}}{\sigma_{\alpha_1}}\right) \\ & - 2.32891137 \cdot 10^{-7} \widetilde{H}e_6\left(\frac{\alpha_1 - \mu_{\alpha_1}}{\sigma_{\alpha_1}}\right) \end{aligned}$$



**Σχήμα 5.4:** Εφαρμογή 5.2. Σύγκριση αναπτυγμάτων πολυωνυμικού χάους, τάξεως 3 έως 6, με τις 1000 τιμές που επιλέχθηκαν κατά τη δειγματοληψία Monte Carlo. Η ακρίβεια της μεθόδου PCE οποιουδήποτε βαθμού είναι τέτοια, που τα διαφορετικά αναπτύγματα ταυτίζονται στο εύρος  $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$  γύρω από τη μέση τιμή.

Στο Σχήμα 5.4 παρουσιάζονται τα 1000 δείγματα που προέκυψαν από τη δειγματοληψία με Monte Carlo καθώς και τα παραπάνω αναπτύγματα της αντικειμενικής συνάρτησης, για τάξεις χάους από 3 έως 6. Ειδικά για την περίπτωση της Monte Carlo, η σύγκλιση (convergence) της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης φαίνεται στο Σχήμα 5.5, όπου είναι προφανής η ταλαντωτική της συμπεριφορά, άρα και η πολύ αργή σύγκλιση. Από την άλλη, η ακρίβεια με τη μέθοδο αναπτύγματος πολυωνυμικού χάους είναι τέτοια, που οι γραφικές παραστάσεις των αναπτυγμάτων των διαφόρων τάξεων χάους σχεδόν ταυτίζονται στο εύρος  $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$ .

Η ακρίβεια ξεκινά να ελαττώνεται σημαντικά εκτός των ορίων  $[\mu - 7\sigma, \mu + 7\sigma]$ , όπως



**Σχήμα 5.5:** Εφαρμογή 5.2. Σύγκλιση μέσης τιμής και τυπικής απόκλισης για 1000 δείγματα με τη μέθοδο Monte Carlo. Είναι πρόδηλη η ταλαντωτική συμπεριφορά, η οποία συνεπάγεται και αργή σύγκλιση και μεγάλο υπολογιστικό κόστος.

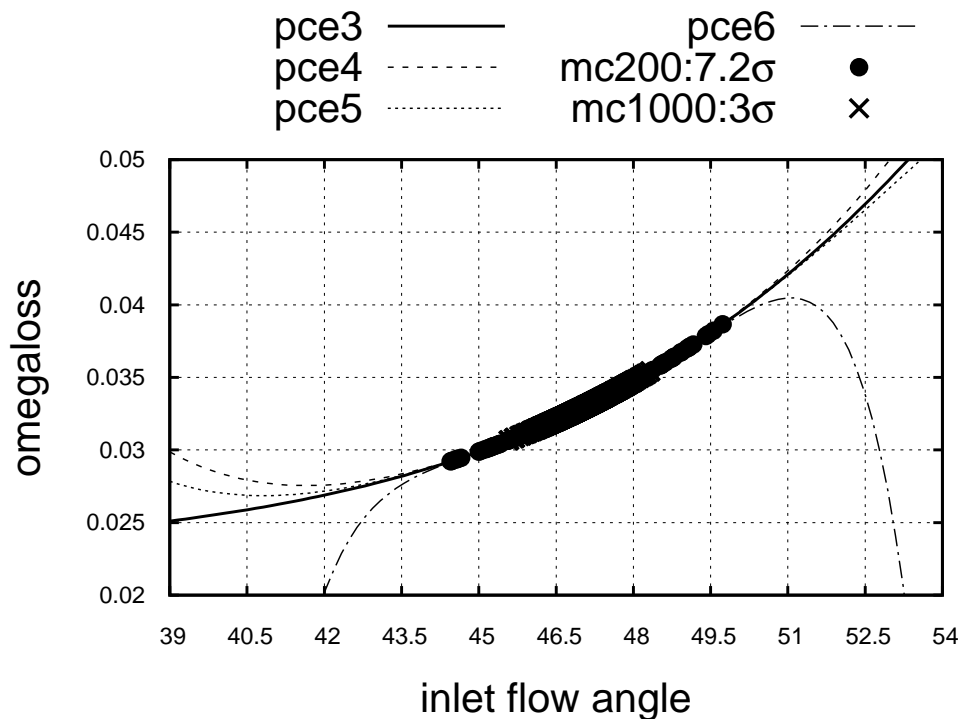
φαίνεται στο Σχήμα 5.6, όπου φαίνεται επιπλέον και μία δειγματοληψία Monte Carlo 200 τιμών εύρους  $[\mu - 7.2\sigma, \mu + 7.2\sigma]$ . Οι τιμές εκτός αυτών των ορίων δεν ενδιαφέρουν πρακτικά τον μηχανικό, καθώς η πιθανότητα εμφάνισης μίας τιμής που να ανήκει πέραν των συγκεκριμένων ορίων, άρα κι η πιθανότητα σημαντικού σφάλματος, είναι μικρότερη από μία προς ένα δισεκατομμύριο!

Στον Πίνακα 5.1 αναγράφονται αναλυτικά τα αποτελέσματα που προέκυψαν από τη δειγματοληψία MC 1000 τιμών και με το ανάπτυγμα πολυωνυμικού χάους (για διαφορετικές τάξεις χάους  $k$ ), για τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση της βασικής αντικειμενικής συνάρτησης,  $\mu_F$  και  $\sigma_F$  αντίστοιχα.

Μέθοδος	Μέση Τιμή ( $\mu_F$ )	Τυπική Απόκλιση ( $\sigma_F$ )
MC(1000)	3.2879571962E-002	8.4181454124E-004
PCE(3)	3.2906316792E-002	8.6996045663E-004
PCE(4)	3.2906217387E-002	8.6995642932E-004
PCE(5)	3.2906365224E-002	8.7002508745E-004
PCE(6)	3.2906241614E-002	8.6992232302E-004

**Πίνακας 5.1:** Εφαρμογή 5.2. Σύγκριση αποτελεσμάτων της Monte Carlo και του PCE. Η Monte Carlo παρουσιάζει μία μικρή διαφορά από τις τιμές του PCE, γεγονός που οφείλεται στη συνεχιζόμενη ταλαντωτική συμπεριφορά της σύγκλισης.

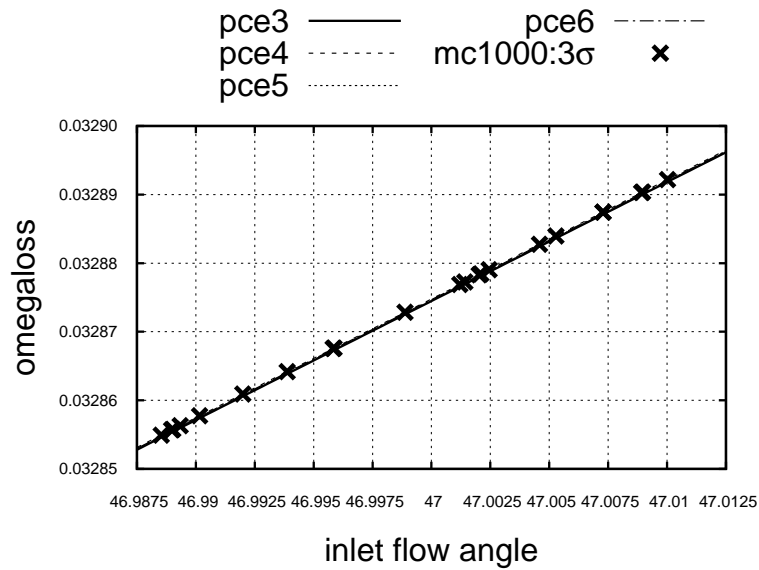
Τέλος, στα Σχήματα 5.7(α') και 5.7(β') φαίνεται η μικρή διαφορά στην ακρίβεια μεταξύ



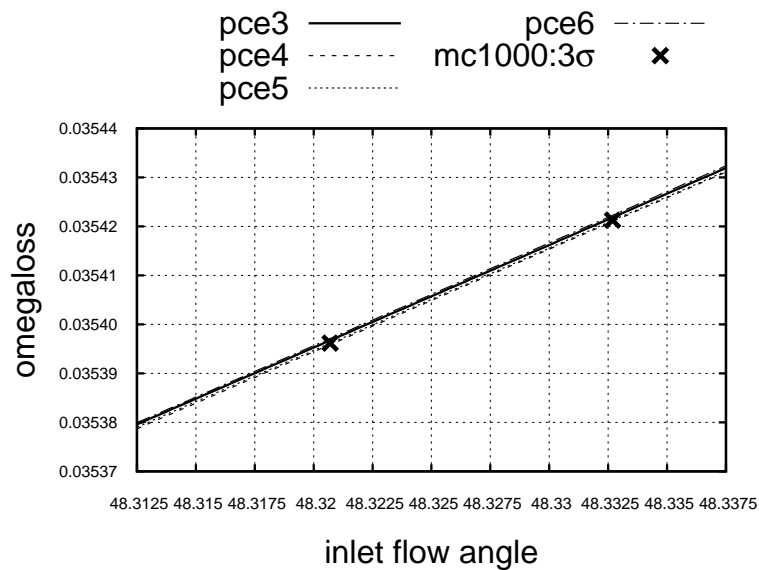
**Σχήμα 5.6:** Εφαρμογή 5.2. Σύγκριση αναπτυγμάτων πολυωνυμικού χάους, τάξεως 3 έως 6, με 1000 τιμές δειγματοληψίας Monte Carlo στο εύρος  $[\mu-3\sigma, \mu+3\sigma]$  γύρω από τη μέση τιμή της γωνίας εισόδου, δηλαδή για γωνίες εντός του διαστήματος  $(45.5^\circ, 48.5^\circ)$ , και 200 τιμές δειγματοληψίας στο εύρος  $[\mu-7.2\sigma, \mu+7.2\sigma]$ . Ακόμα και εντός του τελευταίου εύρους, τα αναπτύγματα πολυωνυμικού χάους εμφανίζουν ελάχιστο σφάλμα. Η περιοχή εκτός αυτών των ορίων δεν ενδιαφέρει τον μηχανικό, καθώς η πιθανότητα εμφάνισης είναι μικρότερη από ένα δισεκατομμυριοστό.

των αναπτυγμάτων διαφορετικών τάξεων χάους, αλλά και με τα δείγματα της Monte Carlo, πρώτα στο κέντρο του εύρους μελέτης, κι έπειτα κοντά στο άνω όριο  $\mu+3\sigma$  (ακρότατες τιμές δειγματοληψίας).

Από τη συγκεκριμένη εφαρμογή, γίνεται φανερή η σπουδαιότητα της μεθόδου πολυωνυμικού χάους, η οποία μπορεί να προσεγγίσει μία αντικειμενική συνάρτηση μίας στοχαστικής μεταβλητής απαιτώντας ελάχιστες κλήσεις της, με ακρίβεια που παραμένει ικανοποιητική και εκτός του εύρους  $[\mu-3\sigma, \mu+3\sigma]$ , και με κόστος σχεδόν μηδαμινό σε σχέση με τη Monte Carlo. Συγκεκριμένα, η Monte Carlo χρειάστηκε 1000 αξιολογήσεις της αντικειμενικής συνάρτησης, διάρκειας 150 δευτερολέπτων καθεμία (και, μάλιστα, χρησιμοποιώντας σύγχρονους επεξεργαστές καρτών γραφικών, όπως αυτές που διαθέτει η ΜΠΥΡ&Β/ΕΘΣ του ΕΜΠ), ενώ η μέθοδος του πολυωνυμικού χάους χρειάστηκε  $4 \div 7$  κλήσεις του επιλύτη N-S.



(α') Δείγματα Monte Carlo και γραφικές παραστάσεις PCE κοντά στο κέντρο του εύρους μελέτης. Είναι εντυπωσιακή η ταύτιση των τεσσάρων αναπτυγμάτων, που εμφανίζουν ακρίβεια τουλάχιστον 4 σημαντικών ψηφίων.



(β') Δείγματα Monte Carlo και γραφικές παραστάσεις PCE κοντά στο άνω όριο του εύρους μελέτης ( $\mu + 3\sigma$ ). Μόνο τώρα τα τέσσερα αναπτύγματα ξεχωρίζουν, αλλά παρ' όλ' αυτά η ακρίβεια παραμένει σημαντική.

**Σχήμα 5.7:** Εφαρμογή 5.2. Διαγράμματα σύγκρισης ακρίβειας μεταξύ των αναπτυγμάτων διαφορετικής τάξης χάους και με μερικά δείγματα της Monte Carlo, πρώτα (πάνω) στο κέντρο του μελετούμενου εύρους, κοντά στη μέση τιμή, κι έπειτα (κάτω) κοντά στο άνω άκρο ( $\mu + 3\sigma$ ).

### 5.3 Περίπτωση Δύο Στοχαστικών Μεταβλητών

Στη συνέχεια, προστέθηκε και η δεύτερη στοχαστική μεταβλητή, ο ισηντροπικός αριθμός Mach της εξόδου, κανονικά κατανεμημένος, με μέση τιμή  $\mu_{M_{2is}} = 0.4557$  και τυπική απόκλιση  $\sigma_{M_{2is}} = 0.015$ . Η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση για τη γωνία εισόδου της ροής παρέμειναν ίδια με προηγουμένως ( $\mu_{\alpha_1} = 47^\circ$ ,  $\sigma_{\alpha_1} = 0.5^\circ$ ).

Πραγματοποιήθηκε νέα δειγματοληψία Monte Carlo σε δύο διαστάσεις, και εφαρμόστηκε εκ νέου το ανάπτυγμα πολυωνυμικού χάους, όπως παρουσιάστηκε στο Κεφάλαιο 3, με πολλαπλές τάξεις χάους  $k$ . Και σε αυτό το πρόβλημα χρησιμοποιήθηκε αποκλειστικά η μέθοδος ολοκλήρωσης με πλήρη πλέγματα, δεδομένου ότι απαιτούν λιγότερα σημεία σε σχέση με τη μέθοδο των αραιών πλεγμάτων Smolyak στις διαστάσεις.

Στο Σχήμα 5.8 παρουσιάζονται οι γραφικές παραστάσεις των αναπτυγμάτων του πολυωνυμικού χάους (επιφάνειες αυτή τη φορά), καθώς και τα σημεία της Monte Carlo εντός του εύρους  $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$  προς κάθε κατεύθυνση, ενώ στο Σχήμα 5.9 για εύρος προς κάθε κατεύθυνση μεγαλύτερο από  $[\mu - 6\sigma, \mu + 6\sigma]$ . Και στα δύο φαίνεται η μονότονη αύξηση των απωλειών συναρτήσει της  $\alpha_1$  και του  $M_{2is}$ .

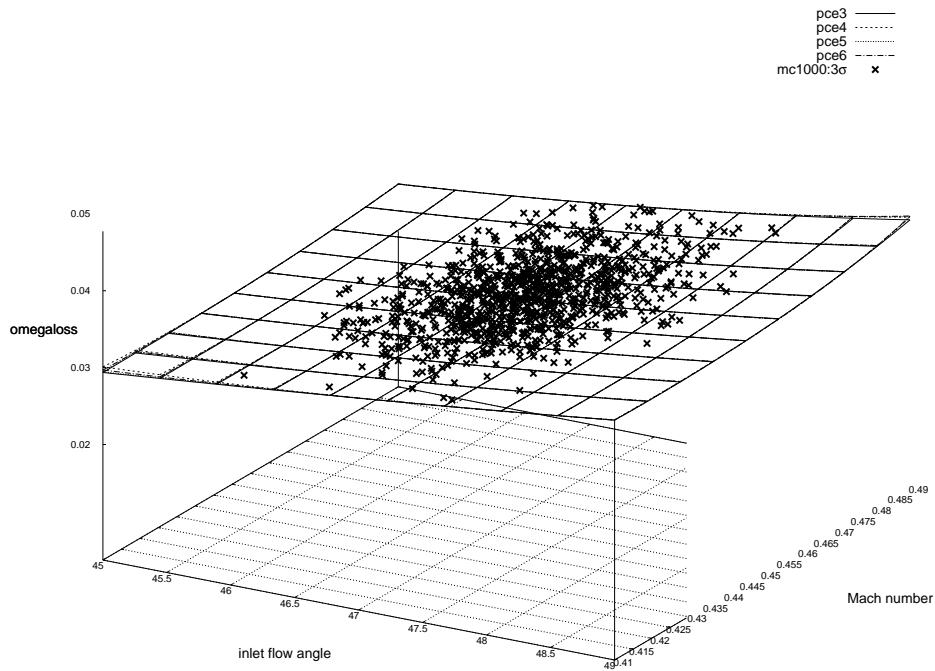
Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται αναλυτικά στον Πίνακα 5.2. Υπενθυμίζεται ότι σε αυτήν την περίπτωση, το υπολογιστικό κόστος του πολυωνυμικού χάους είναι ανάλογο του  $(k + 1)^2$ .

Μέθοδος	Μέση Τιμή ( $\mu_F$ )	Τυπική Απόκλιση ( $\sigma_F$ )
MC(1000)	3.3008630918E-002	0.9804116359E-003
PCE(3)	3.3043011092E-002	1.0334831564E-003
PCE(4)	3.3043294689E-002	1.0353582658E-003
PCE(5)	3.3042955628E-002	1.0348641107E-003
PCE(6)	3.3043014961E-002	1.0346748191E-003

**Πίνακας 5.2:** Εφαρμογή 5.3. Πρόβλημα διδιάστατης περύγωσης συμπίεστη με δύο στοχαστικές μεταβλητές. Σύγκριση αποτελεσμάτων της Monte Carlo και του PCE.

Το πολυωνυμικό ανάπτυγμα της αντικειμενικής συνάρτησης (omegaloss) στην περίπτωση των δύο στοχαστικών μεταβλητών, και για τάξη χάους  $k = 3$ , δίνεται από την

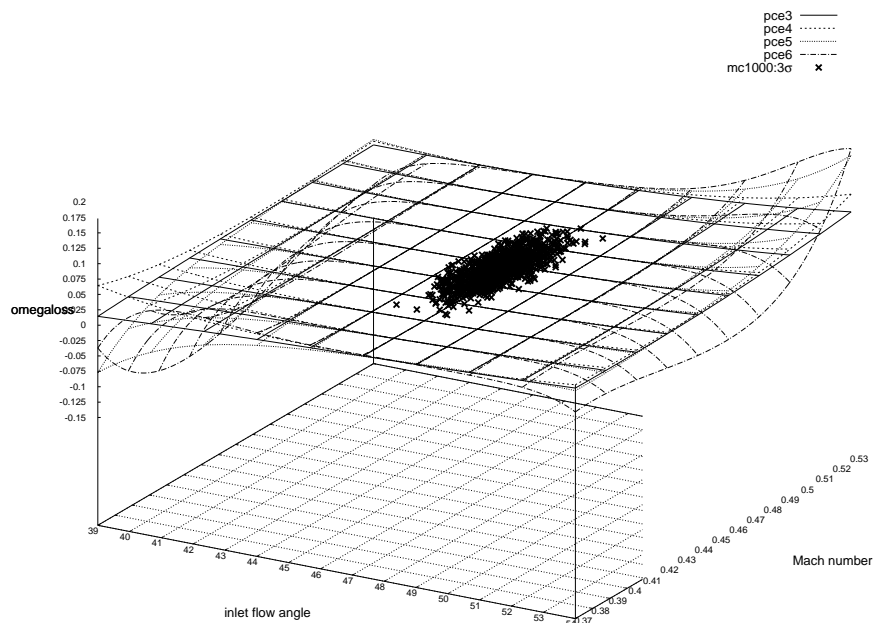




**Σχήμα 5.8:** Εφαρμογή 5.3. Σύγκριση αναπτυγμάτων πολυωνυμικού χάους, τάξεως 3 έως 6, με τις 1000 τιμές που επιλέχθηκαν κατά τη δειγματοληψία Monte Carlo. Η ακρίβεια της μεθόδου PCE είναι τέτοια, που τα διαφορετικά αναπτύγματα (επιφάνειες) σχεδόν ταυτίζονται εντός του εύρους  $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$  προς κάθε κατεύθυνση.

παρακάτω σχέση

$$\begin{aligned}
 \Delta p_t(\alpha_1, M_{2is}) \simeq & 3.30430111 \cdot 10^{-2} \widetilde{H}e_0\left(\frac{\alpha_1 - \mu_{\alpha_1}}{\sigma_{\alpha_1}}\right) \widetilde{H}e_0\left(\frac{M_{2is} - \mu_{M_{2is}}}{\sigma_{M_{2is}}}\right) \\
 & + 8.78860904 \cdot 10^{-4} \widetilde{H}e_1\left(\frac{\alpha_1 - \mu_{\alpha_1}}{\sigma_{\alpha_1}}\right) \widetilde{H}e_0\left(\frac{M_{2is} - \mu_{M_{2is}}}{\sigma_{M_{2is}}}\right) \\
 & + 5.01442389 \cdot 10^{-4} \widetilde{H}e_0\left(\frac{\alpha_1 - \mu_{\alpha_1}}{\sigma_{\alpha_1}}\right) \widetilde{H}e_1\left(\frac{M_{2is} - \mu_{M_{2is}}}{\sigma_{M_{2is}}}\right) \\
 & + 4.69838259 \cdot 10^{-5} \widetilde{H}e_2\left(\frac{\alpha_1 - \mu_{\alpha_1}}{\sigma_{\alpha_1}}\right) \widetilde{H}e_0\left(\frac{M_{2is} - \mu_{M_{2is}}}{\sigma_{M_{2is}}}\right) \\
 & + 4.53545350 \cdot 10^{-5} \widetilde{H}e_1\left(\frac{\alpha_1 - \mu_{\alpha_1}}{\sigma_{\alpha_1}}\right) \widetilde{H}e_1\left(\frac{M_{2is} - \mu_{M_{2is}}}{\sigma_{M_{2is}}}\right) \\
 & + 1.98156116 \cdot 10^{-4} \widetilde{H}e_0\left(\frac{\alpha_1 - \mu_{\alpha_1}}{\sigma_{\alpha_1}}\right) \widetilde{H}e_2\left(\frac{M_{2is} - \mu_{M_{2is}}}{\sigma_{M_{2is}}}\right) \\
 & + 1.71278704 \cdot 10^{-6} \widetilde{H}e_3\left(\frac{\alpha_1 - \mu_{\alpha_1}}{\sigma_{\alpha_1}}\right) \widetilde{H}e_0\left(\frac{M_{2is} - \mu_{M_{2is}}}{\sigma_{M_{2is}}}\right) \\
 & + 8.21155509 \cdot 10^{-6} \widetilde{H}e_2\left(\frac{\alpha_1 - \mu_{\alpha_1}}{\sigma_{\alpha_1}}\right) \widetilde{H}e_1\left(\frac{M_{2is} - \mu_{M_{2is}}}{\sigma_{M_{2is}}}\right) \\
 & + 1.73044082 \cdot 10^{-5} \widetilde{H}e_1\left(\frac{\alpha_1 - \mu_{\alpha_1}}{\sigma_{\alpha_1}}\right) \widetilde{H}e_2\left(\frac{M_{2is} - \mu_{M_{2is}}}{\sigma_{M_{2is}}}\right) \\
 & + 1.86094256 \cdot 10^{-5} \widetilde{H}e_0\left(\frac{\alpha_1 - \mu_{\alpha_1}}{\sigma_{\alpha_1}}\right) \widetilde{H}e_3\left(\frac{M_{2is} - \mu_{M_{2is}}}{\sigma_{M_{2is}}}\right)
 \end{aligned}$$



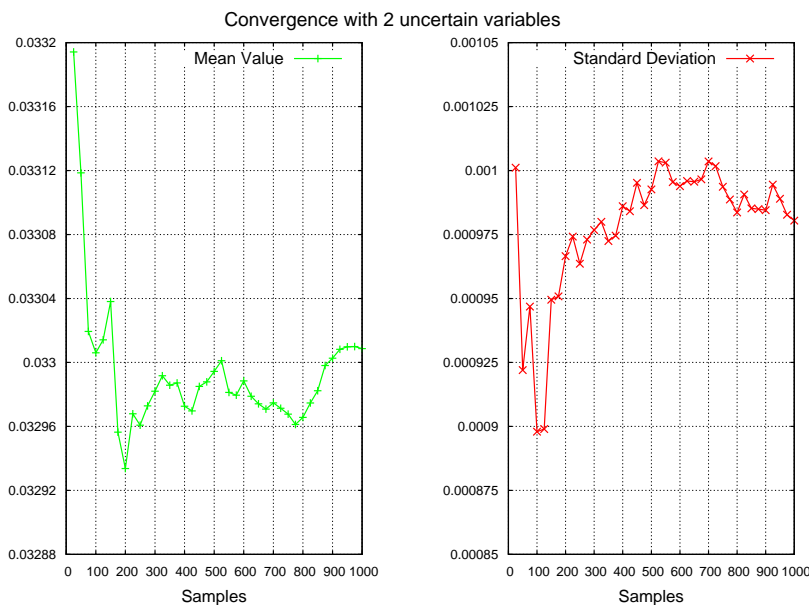
**Σχήμα 5.9:** Εφαρμογή 5.3. Σύγκριση αναπτυγμάτων πολυωνυμικού χάους, τάξεως 3 έως 6, με 1000 τιμές δειγματοληψίας Monte Carlo σε ευρύτερο εύρος. Οι αποκλίσεις των επιφανειών που προέκυψαν με το PCE ξεκινούν σε μεγάλη απόσταση από το πεδίο μελέτης των έξι Σήμα, που δεν ενδιαφέρει τον μηχανικό.

ενώ, με ανάλογο τρόπο γράφεται το ανάπτυγμα και για τάξεις χάους από 4 έως και 6, αλλά με περισσότερους όρους.

Η σύγκλιση της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης φαίνονται στο Σχήμα 5.10, όπου μπορεί να παρατηρηθεί ότι οι 1000 αξιολογήσεις που πραγματοποιήθηκαν δεν αρκούν, καθώς οι δύο γραφικές παραστάσεις δεν έχουν σταθεροποιηθεί ακόμα. Όπως αναφέρεται και στις βιβλιογραφικές πηγές [11] [26], εξαιτίας του ρυθμού σύγκλισης της Monte Carlo, θα απαιτούνταν περίπου 4000 αξιολογήσεις για να επιτευχθεί παρόμοια ποιότητα αποτελέσματος με την περίπτωση μίας διάστασης.

Συνοψίζοντας, αποδεικνύεται ότι η μέθοδος πολυωνυμικού χάους όχι μόνο υπολογίζει αποδοτικά και με μεγάλη ακρίβεια τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση μίας αντικειμενικής συνάρτησης με στοχαστικές εισόδους, αλλά και το ανάπτυγμα που προκύπτει προσεγγίζει πολύ καλά την ίδια τη συνάρτηση σε ένα μεγάλο εύρος, με λίγες μόνο αξιολογήσεις. Αυτό είναι πολύ σημαντικό, καθώς η γρήγορη δημιουργία προσεγγιστικού αναπτύγματος μπορεί να εκμεταλλευτεί από αιτιοκρατικές μεθόδους βελτιστοποίησης, για την ταχεία εύρεση παραγώγων (δεδομένου ότι πλέον μπορεί να χρησιμοποιηθεί το ανάπτυγμα, το οποίο αποτελεί απλή πολυωνυμική παράσταση).

Όπως αναφέρθηκε, ο απαραίτητος αριθμός αξιολογήσεων ισούται με  $(k+1)^d$ , όπου  $k$  είναι η τάξη του χάους, και  $d$  ο αριθμός των στοχαστικών μεταβλητών. Γίνεται, λοιπόν, φανερό η επίδραση της κατάρας διαστασιμότητας, η οποία προκαλεί την εκθετική



**Σχήμα 5.10:** Εφαρμογή 5.3. Σύγκλιση μέσης τιμής και τυπικής απόκλισης για 1000 δείγματα με τη μέθοδο Monte Carlo. Είναι πρόδηλη η ταλαντωτική συμπεριφορά, η οποία συνεπάγεται και αργή σύγκλιση.

αύξηση των απαιτούμενων αξιολογήσεων της βασικής αντικειμενικής συνάρτησης για τη δημιουργία του αναπτύγματος. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, ο αριθμός των αξιολογήσεων αυξήθηκε από 4, 5, 6 και 7 που ήταν για μία στοχαστική μεταβλητή και για  $k = 3 \div 6$  αντίστοιχα, σε 16, 25, 36 και 49 για τις δύο στοχαστικές μεταβλητές! Η αύξηση αυτή είναι ιδιαίτερα σημαντική όταν η κάθε αξιολόγηση απαιτεί 150 δευτερόλεπτα. Σίγουρα, όμως, ο αριθμός αυτός είναι σημαντικά μικρότερος, και η αντίστοιχη ακρίβεια πολύ καλύτερη, σε σχέση με της μεθόδου Monte Carlo.



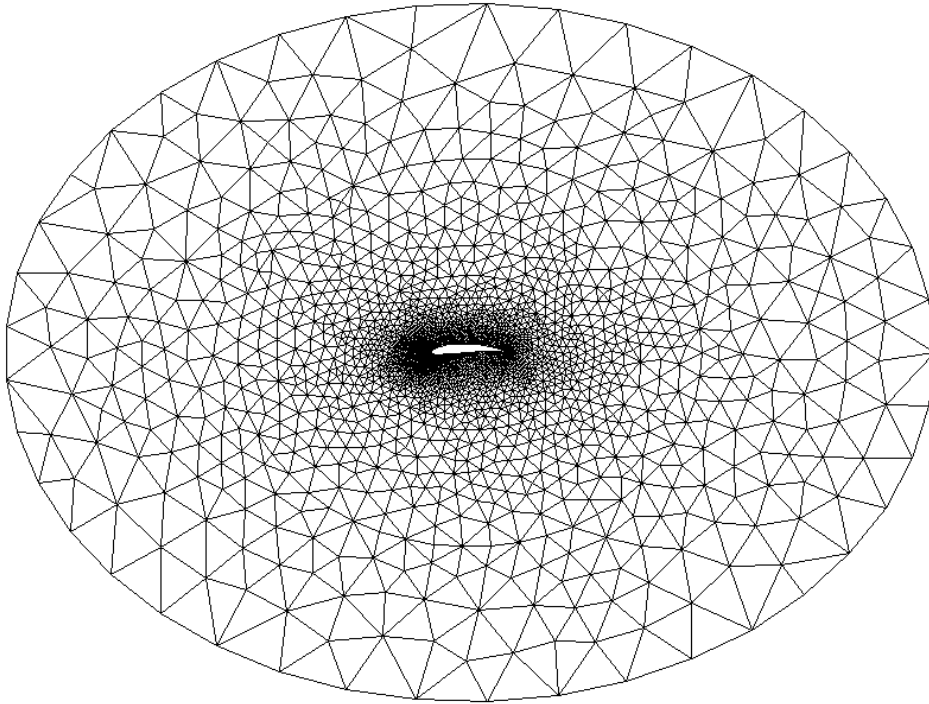
## Κεφάλαιο 6

# Αεροδυναμικά Στιβαρός Σχεδιασμός-Βελτιστοποίηση Μεμονωμένης Αεροτομής με Εξελικτικούς Αλγορίθμους

Έχοντας πιστοποιήσει την ακρίβεια της μεθόδου του πολυωνυμικού χάους σε ένα αεροδυναμικό πρόβλημα, μπορεί πλέον να υλοποιηθεί ένας αεροδυναμικά στιβαρός σχεδιασμός-βελτιστοποίηση μορφής. Ειδικότερα, μελετάται η περίπτωση μίας μεμονωμένης αεροτομής, για την οποία ζητείται ο βέλτιστος σχεδιασμός της προς **μειγιστοποίηση του συντελεστή άνωσης** ( $C_l$ ), πρώτα με σταθερές συνθήκες περιβάλλοντος (optimal design), και στη συνέχεια με δύο στοχαστικές μεταβλητές, τη γωνία ( $\alpha_\infty$ ) και την ταχύτητα (αριθμός Mach,  $M_\infty$ ) της επάπειρον ροής (robust design).

Το συγκεκριμένο πρόβλημα περιγράφεται από τις εξισώσεις συμπιεστού ρευστού. Δεδομένου όμως ότι πρόκειται για περίπτωση *ατριβούς ροής*, οι εξισώσεις μεταπίπτουν στις απλούστερες εξισώσεις *Euler*. Το πλέγμα που χρησιμοποιήθηκε αποτελείται από 2662 κόμβους, και φαίνεται στο Σχήμα 6.1.

Η αεροτομή αναφοράς σχεδιάστηκε χρησιμοποιώντας καμπύλες Bezier, συνολικά με 10 σημεία ελέγχου. Η αρίθμηση των συντεταγμένων Bezier γίνεται ως εξής: Ξεκινώντας από την αρχή των αξόνων και το σημείο 0, η αρίθμηση αυξάνεται προς τα δεξιά έχοντας συνολικά 6 σημεία στην πλευρά υπερπίεσης, κι έπειτα η αρίθμηση συνεχίζει με το σημείο 6 από αριστερά και πάνω (πλευρά υποπίεσης) και καταλήγει στο σημείο 11 με συντεταγμένες (1,0). Οι τιμές για την αεροτομή αναφοράς και τα όρια μεταβολών



**Σχήμα 6.1:** Πλέγμα μελέτης της ροής γύρω από τη μεμονωμένη αεροτομή. Συνολικά αποτελείται από 2688 κόμβους και 5247 τριγωνικά στοιχεία, που περιλαμβάνονται εντός τριών ελλείψεων μικρότερης πυκνωσης για μεγαλύτερη απόσταση από την αεροτομή.

κάθε μεταβλητής σχεδιασμού βρίσκονται στους Πίνακες 6.1 και 6.2 αντίστοιχα, όπως επίσης και η αρχική τιμή του συντελεστή άνωσης, για τον οποίο θα πραγματοποιηθεί η βελτιστοποίηση.

Εφόσον πρόκειται για πρόβλημα αεροδυναμικά στιβαρού σχεδιασμού-βελτιστοποίησης, απαιτούνται κι οι κατάλληλες μεταβλητές σχεδιασμού (σε αντίθεση με την εφαρμογή του Κεφαλαίου 5, όπου έγινε μία απλή μελέτη της επίδρασης της στοχαστικότητας στις τιμές μίας αντικειμενικής συνάρτησης). Εδώ, λοιπόν, τέθηκαν ως μεταβλητές σχεδιασμού οι  $\hat{X}$ -συντεταγμένες των Bezier σημείων ελέγχου ( $\hat{X}_2, \hat{X}_3, \hat{X}_4, \hat{X}_7, \hat{X}_8, \hat{X}_9$ ) της αεροτομής, καθώς και της  $\hat{Y}$ -συντεταγμένης του μεσαίου κόμβου ελέγχου της πλευράς υποπίεσης (συντεταγμένη  $\hat{Y}_8$ ). Προκειμένου να υπάρχει ένας μερικός έλεγχος της επιλογής των σημείων, τοποθετήθηκαν περιορισμοί στο εύρος τιμών που μπορεί να λάβει η εκάστοτε μεταβλητή σχεδιασμού. Τα σημεία ελέγχου Bezier και η δυνατότητα μεταβολής κάθε μεταβλητής σχεδιασμού φαίνονται στο Σχήμα 6.2.

Πλέον, έχοντας ορίσει τις 7 παραπάνω μεταβλητές σχεδιασμού, μπορεί να πραγματοποιηθεί αεροδυναμικά στιβαρός σχεδιασμός-βελτιστοποίηση της μορφής της αεροτομής, ώστε η ίδια η αεροτομή να διαθέτει σταθερή απόδοση στις μεταβολές των στοχαστικών μεταβλητών εισόδου. Ως αντικειμενική συνάρτηση τέθηκε ο συντελεστής άνωσης ( $C_l$ ), για τον οποίο ζητείται η μεγιστοποίησή του.

Το πρόβλημα μοντελοποιείται σε κάρτες γραφικών με τον κώδικα του ΜΠΤΡ&Β/ΕΘΣ

Σημείο Ελέγχου Bezier ( $i$ )	$\hat{X}_i$	$\hat{Y}_i$
0	0.0	0.0
1	0.0	-0.0306657
2	0.0949888	-0.0471204
3	0.31264	0.00373972
4	0.572177	0.0186986
5	0.824981	0.0254301
6	0.0	0.0635752
7	0.1638	0.124159
8	0.440539	0.147345
9	0.652954	0.112939
10	0.816754	0.0762902
11	1.0	0.0
Αρχική τιμή ( $-C_l$ )	-1.14334282	

**Πίνακας 6.1:** Τιμές σημείων ελέγχου Bezier για την αεροτομή αναφοράς. Οι 6 πρώτες ανήκουν στην πλευρά υπερπίεσης της αεροτομής, ενώ οι 6 επόμενες στην πλευρά υποπίεσης. Επίσης, δίνεται κι η αρχική τιμή του συντελεστή άνωσης, ο οποίος αναμένεται να αυξηθεί κατά απόλυτη τιμή.

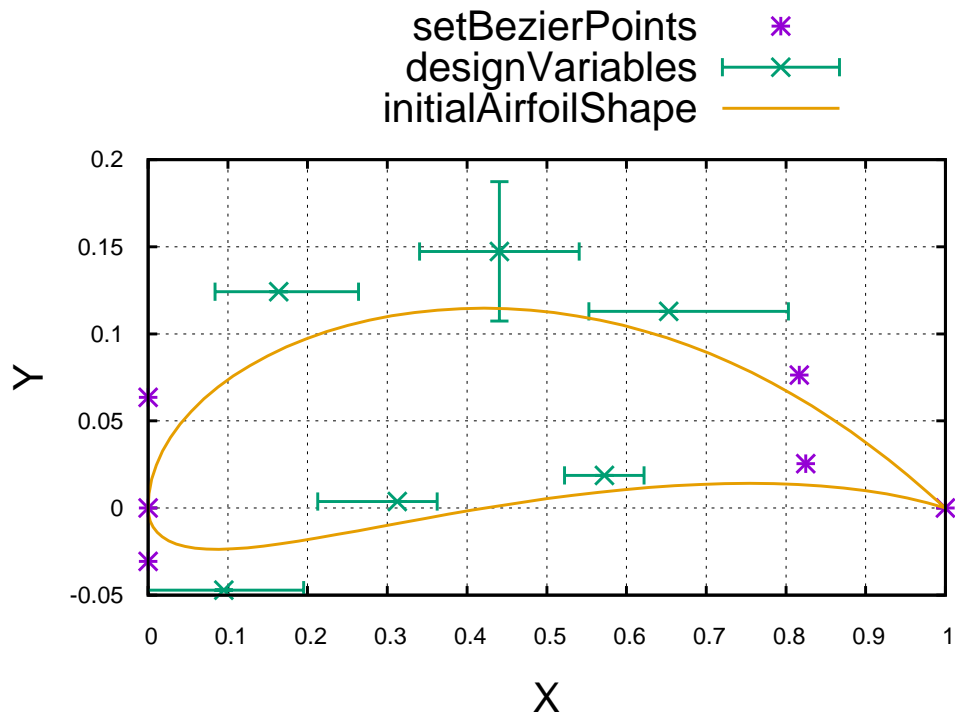
Μεταβλητή Σχεδιασμού	Εύρος Μεταβολών $\Delta X_i$	Εύρος Τιμών $X_i + \Delta X_i$
$\hat{X}_2$	(-0.1, 0.1)	(-0.0050112, 0.1949888)
$\hat{X}_3$	(-0.1, 0.05)	(0.21264, 0.36264)
$\hat{X}_4$	(-0.05, 0.05)	(0.522177, 0.622177)
$\hat{X}_7$	(-0.08, 0.1)	(0.0838, 0.2638)
$\hat{X}_8$	(-0.1, 0.1)	(0.340539, 0.540539)
$\hat{X}_9$	(-0.1, 0.15)	(0.552954, 0.802954)
$\hat{Y}_8$	(-0.04, 0.04)	(0.107345, 0.187345)

**Πίνακας 6.2:** Δυνατές μεταβολές και εύρη τιμών των μεταβλητών σχεδιασμού για το πρόβλημα μεγιστοποίησης του συντελεστή άνωσης μεμονωμένης αεροτομής.

του ΕΜΠ, χρησιμοποιώντας τον οικείο εξελικτικό αλγόριθμο βελτιστοποίησης (EASY) [48] [49]. Καθώς, όμως, ο συγκεκριμένος αλγόριθμος επιλύει αποκλειστικά προβλήματα ελαχιστοποίησης, ως βασική αντικειμενική συνάρτηση τέθηκε ο αρνητικός συντελεστής άνωσης,

$$F = -C_l \quad (6.1)$$

Προτού πραγματοποιηθεί όμως ο στιβαρός σχεδιασμός-βελτιστοποίηση, για λόγους σύγκρισης γίνεται πρώτα η βελτιστοποίηση της αεροτομής χωρίς την ύπαρξη στοχαστικών μεταβλητών, ενώ στη συνέχεια, εφαρμόζεται ο στιβαρός σχεδιασμός-βελτιστοποίηση με τις δύο προαναφερθείσες στοχαστικές μεταβλητές περιβάλλοντος ( $\alpha_\infty$  και  $M_\infty$ ).



**Σχήμα 6.2:** Καμπύλη Bezier αναφοράς, σημεία ελέγχου της υπό μελέτης μεμονωμένης αεροτομής και εύρος τιμών για καθεμία από τις 7 μεταβλητές σχεδιασμού. Με μωβ αστερίσκους υποδεικνύονται τα αμετάβλητα σημεία, ενώ με πράσινο x τα σημεία ελέγχου με μεταβαλλόμενες συντεταγμένες, καθώς και το δυνατό εύρος τιμών τους.

## 6.1 Βελτιστοποίηση Χωρίς Αβεβαιότητες

Πριν το στιβαρό σχεδιασμό-βελτιστοποίηση της αεροτομής, πραγματοποιείται μονοκριτηριακή βελτιστοποίηση της μορφής της αεροτομής χωρίς αβεβαιότητες. Η γωνία και ο αριθμός Mach της επί άπειρο ροής τέθηκαν σταθερά, και ίσα με

$$\alpha_{\infty} = 1^{\circ}$$

$$M_{\infty} = 0.6$$

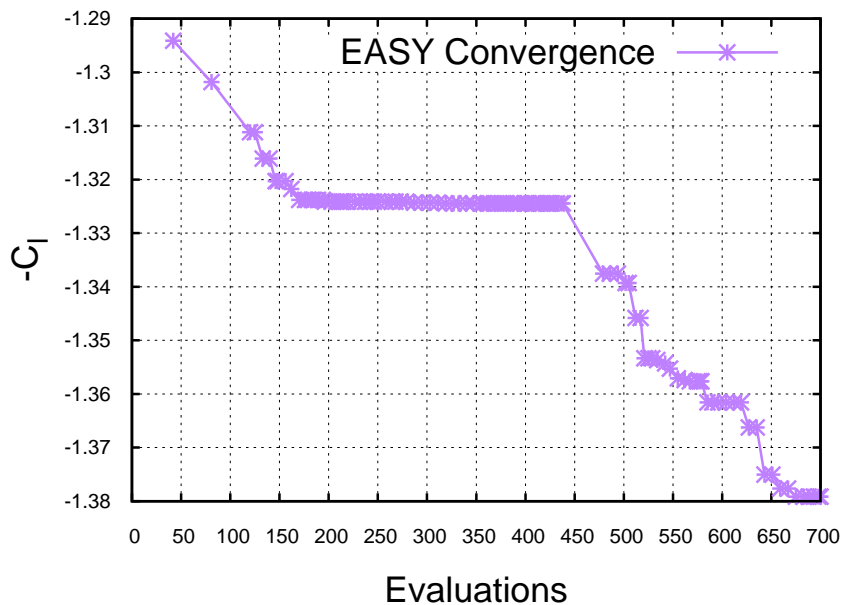
ενώ, για λόγους πληρότητας, επαναλαμβάνεται ότι ως αντικειμενική συνάρτηση τέθηκε ο αρνητικός συντελεστής άνωσης,

$$F = -C_l$$

Οι παράμετροι για τον εξελικτικό αλγόριθμο [48] ήταν οι εξής:

- Πληθυσμός γονέων  $\mu = 20$ ,





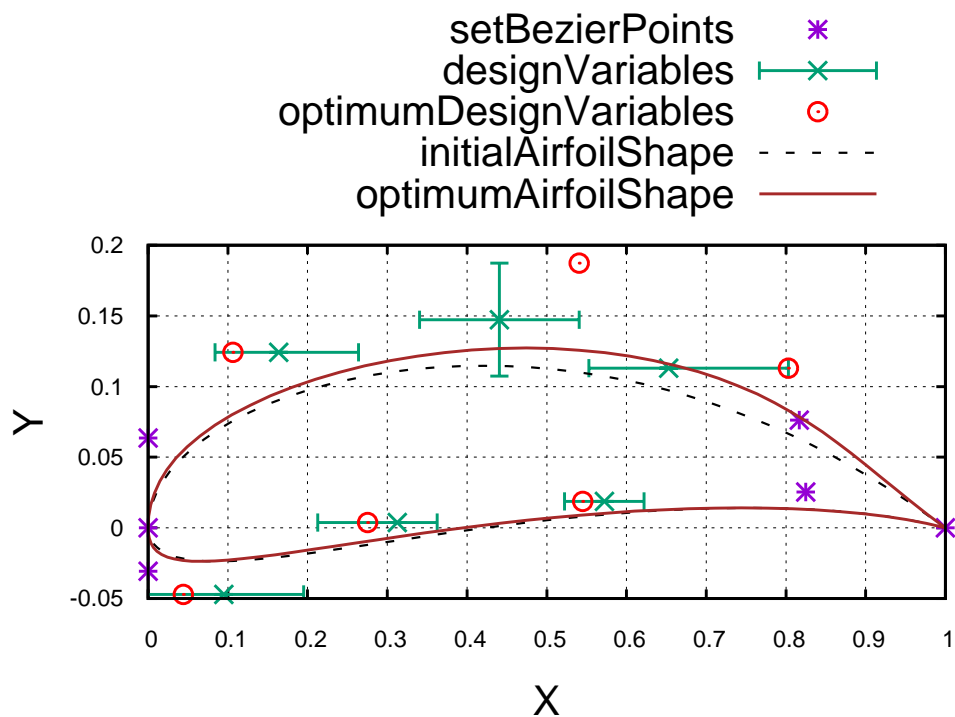
**Σχήμα 6.3:** Σύγκλιση μονοκριτηριακής βελτιστοποίησης για τη μεγιστοποίηση του συντελεστή άνωσης (ελαχιστοποίηση του  $-C_1$ ) κατά τη διάρκεια των 700 αξιολογήσεων, χωρίς την ύπαρξη αβέβαιων περιβαλλοντικών μεταβλητών. Αν και φαίνεται πως υπάρχει η δυνατότητα περαιτέρω βελτίωσης, για τις μετέπειτα συγκρίσεις χρησιμοποιήθηκε ο ίδιος αριθμός αξιολογήσεων.

- Πληθυσμός απογόνων  $\lambda = 42$ ,
- Χρήση μεταπροτύπων για προσεγγιστική προαξιολόγηση των υποψήφιων λύσεων.

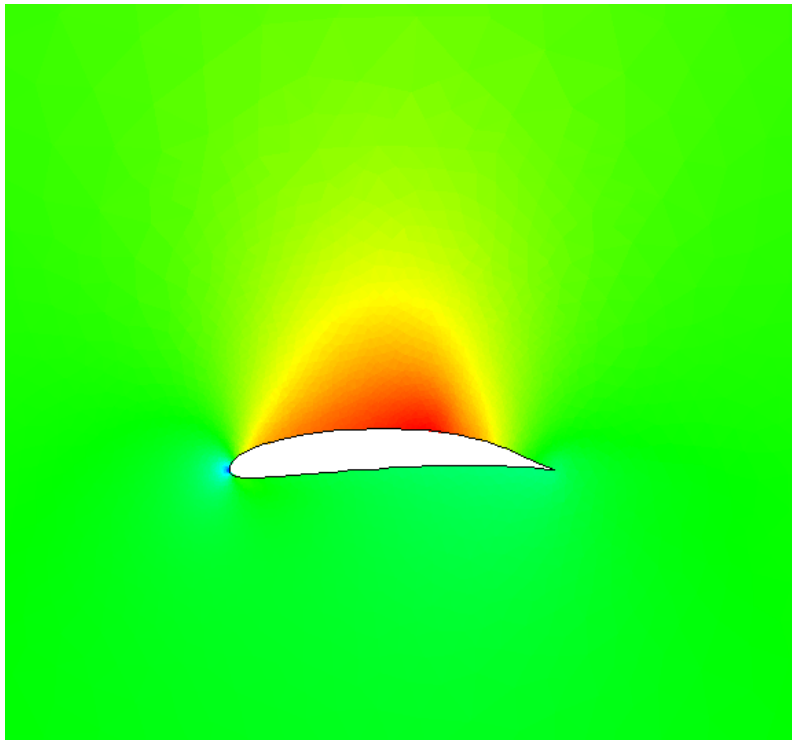
Ο αλγόριθμος έτρεξε για 700 αξιολογήσεις, η σύγκλιση του οποίου φαίνεται στο Σχήμα 6.3. Παρόλο που φαίνεται πως υπάρχει ακόμη περιθώριο περαιτέρω βελτίωσης, η βελτιστοποίηση μέσω εξελικτικών αλγορίθμων τερματίστηκε στις 700 αξιολογήσεις για λόγους περιορισμού του υπολογιστικού κόστους. Εξάλλου, όπως θα φανεί παρακάτω, όλες οι επόμενες συγκρίσεις έγιναν βάσει ίδιου αριθμού αξιολογήσεων. Στο Σχήμα 6.4 φαίνονται τα βέλτιστα σημεία ελέγχου Bezier με την προκύπτουσα καμπύλη της αεροτομής. Οι τελικές βέλτιστες τιμές των μεταβλητών σχεδιασμού αναγράφονται στον Πίνακα 6.3. Στο Σχήμα 6.5 φαίνεται η βέλτιστη μορφή της αεροτομής, αλλά και η ροή γύρω από αυτή.

Μεταβλητή Σχεδιασμού	Τιμή
$\hat{X}_2$	0.044225
$\hat{X}_3$	0.275366
$\hat{X}_4$	0.545162
$\hat{X}_7$	0.106537
$\hat{X}_8$	0.540539
$\hat{X}_9$	0.802945
$\hat{Y}_8$	0.187345
Βέλτιστη τιμή ( $-C_l$ )	-1.3791533

**Πίνακας 6.3:** Βέλτιστες τιμές μεταβλητών σχεδιασμού για το πρόβλημα μεγιστοποίησης του συντελεστή άνωσης μεμονωμένης αεροτομής, έπειτα από 700 αξιολογήσεις του εξελικτικού αλγορίθμου.



**Σχήμα 6.4:** Βέλטיστα σημεία ελέγχου Bezier της υπό μελέτης μεμονωμένης αεροτομής, συγκρινόμενα με τα αρχικά σημεία και το εύρος τιμών καθεμιάς από τις 7 μεταβλητές σχεδιασμού.



**Σχήμα 6.5:** Ροή αέρα γύρω από την αεροτομή, όπως προέκυψε από τη βελτιστοποίηση των 7 επιλεγμένων μεταβλητών σχεδιασμού. Η συγκεκριμένη αεροτομή επιτυγχάνει τη μέγιστη άωση, δεδομένων των παραμέτρων που τέθηκαν, για την περίπτωση που δεν υπάρχουν αβέβαιες περιβαλλοντικές μεταβλητές.

## 6.2 Βελτιστοποίηση Με Αβεβαιότητες

Σε αυτό το σημείο, έχοντας πλέον τη βέλτιστη μορφή της αεροτομής για το μέγιστο συντελεστή άνωσης, μελετήθηκε η περίπτωση δύο στοχαστικών μεταβλητών περιβάλλοντος για τον αεροδυναμικά στιβαρό σχεδιασμό-βελτιστοποίηση της αεροτομής. Αντί, όμως, να χρησιμοποιηθεί μία εκ-νέου ορισμένη μετρική αεροδυναμικής στιβαρότητας, με προκαθορισμένο και σταθερό  $\kappa$ , όπως προτάθηκε στο Κεφάλαιο 1,

$$\hat{F} = \mu_{C_l} + \kappa \sigma_{C_l} \quad (6.2)$$

προτιμήθηκε η αντιμετώπιση του προβλήματος ως πρόβλημα δικριτηριακής βελτιστοποίησης, με συναρτήσεις στόχου την ελαχιστοποίηση της τυπικής απόκλισης ( $\sigma_{C_l}$ ) και τη μεγιστοποίηση της μέσης τιμής του συντελεστή άνωσης (ή, ισοδύναμα, ελαχιστοποίηση της  $-\mu_{C_l}$ ),

$$\begin{cases} F_1 = -\mu_{C_l} \\ F_2 = \sigma_{C_l} \end{cases} \quad (6.3)$$

για τις οποίες πραγματοποιήθηκαν 700 αξιολογήσεις (για την “αμερόληπτη” σύγκριση με την προηγούμενη περίπτωση), ενώ ταυτόχρονα, όλες οι υπόλοιπες ρυθμίσεις παρέμειναν αμετάβλητες. Επιπλέον, για τις δύο αβέβαιες μεταβλητές τέθηκε

$$\begin{aligned} \mu_{\alpha_\infty} &= 1^\circ & \text{και} & \sigma_{\alpha_\infty} = 0.5^\circ, \\ \mu_{M_\infty} &= 0.6 & \text{και} & \sigma_{M_\infty} = 0.05 \end{aligned}$$

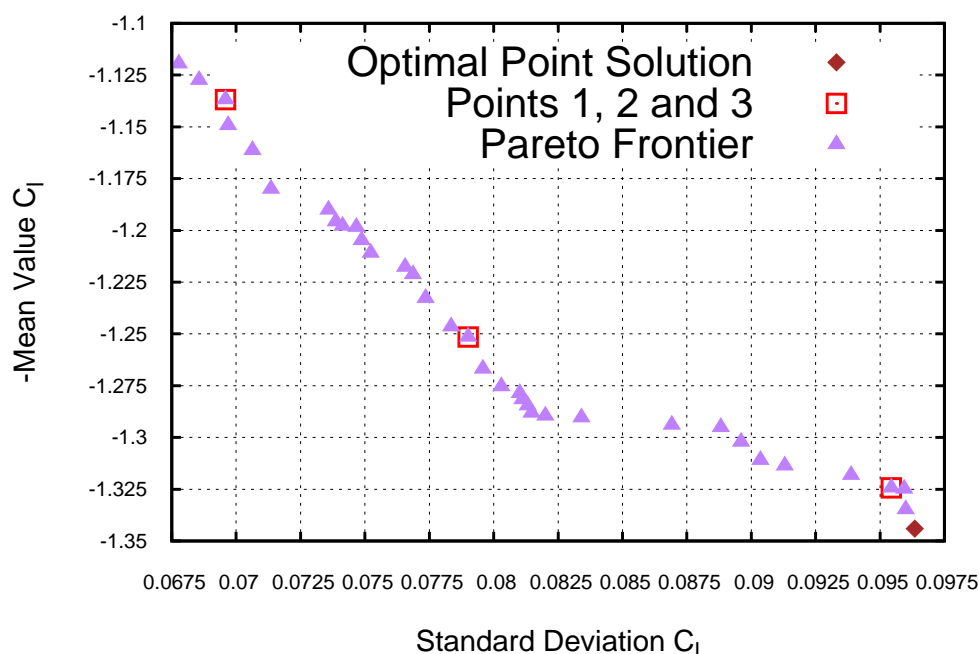
Καθώς πρόκειται για πρόβλημα αεροδυναμικά στιβαρού σχεδιασμού-βελτιστοποίησης, κάθε αξιολόγηση από τον εξελικτικό αλγόριθμο, και άρα κάθε συνδυασμός μεταβλητών σχεδιασμού, απαιτεί την εύρεση της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης του συντελεστή άνωσης. Για το σκοπό αυτό, εφαρμόστηκε η μέθοδος αναπτύγματος πολυωνυμικού χάους με τάξη χάους  $k_{pce} = 3$ , χρησιμοποιώντας πλήρη πλέγματα, δεδομένου ότι τα αραιά πλέγματα Smolyak δεν είναι εξίσου αποδοτικά για δύο στοχαστικές μεταβλητές. Το συνολικό υπολογιστικό κόστος αυτής της διαδικασίας ήταν ο αριθμός αξιολογήσεων της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης από τον εξελικτικό αλγόριθμο, ίσος με 700, πολλαπλασιασμένος με τον αριθμό αξιολογήσεων που απαιτεί το λογισμικό του πολυωνυμικού χάους, αριθμός που είναι ίσος με  $(k_{pce} + 1)^d$ . Τελικά, δηλαδή, το κόστος της διαδικασίας του αεροδυναμικά στιβαρού σχεδιασμού-βελτιστοποίησης προκύπτει ίσο με

$$700 \cdot (3 + 1)^2 = 700 \cdot 16 = 11200 \text{ αξιολογήσεις}$$

Κάθε αξιολόγηση χρειαζόταν 7.5 δευτερόλεπτα σε σειριακό CPU. Ο αριθμός αυτός

μπορεί να είναι μεγάλος, αλλά μπορεί να μειωθεί αν η διαδικασία του PCE παραλληλοποιηθεί, πραγματοποιώντας δηλαδή ταυτόχρονα τρεξίματα, ειδικά σε κάρτες γραφικών που διαθέτουν μεγαλύτερη υπολογιστική ισχύ. Με τον τρόπο αυτό, ο πραγματικός χρόνος (wall clock time) μπορεί να μειωθεί σημαντικά.

Το μέτωπο Pareto που προκύπτει από τη διαδικασία βελτιστοποίησης, δεδομένου ότι πρόκειται για πρόβλημα δύο συναρτήσεων στόχου, παρουσιάζεται στο Σχήμα 6.6. Μπορεί να παρατηρηθεί ότι σημεία με μικρή τυπική απόκλιση, κι άρα με σχετικά ευσταθή συντελεστή άνωσης, εμφανίζουν χαμηλή μέση τιμή (κατά απόλυτη τιμή), ενώ αντίθετα, σημεία με καλή μέση απόδοση διαθέτουν και μεγαλύτερη τυπική απόκλιση, προκαλώντας μεγαλύτερη διακύμανση στις τιμές του συντελεστή άνωσης. Σημειώνονται τρία σημεία 1, 2 και 3 στο Σχήμα 6.6, αυξανόμενης τυπικής απόκλισης, τα οποία θα μελετηθούν περαιτέρω.



**Σχήμα 6.6:** Μέτωπο Pareto του προβλήματος αεροδυναμικά στιβαρού σχεδιασμού-βελτιστοποίησης μεμονωμένης αεροτομής, όπου οι δύο συναρτήσεις στόχου είναι η τυπική απόκλιση και η μέση τιμή (ή πιο σωστά, η αρνητική μέση τιμή) του συντελεστή άνωσης της αεροτομής. Παρατηρείται ότι όσο μεγαλύτερη είναι μέση τιμή του συντελεστή άνωσης, τόσο μεγαλύτερη είναι κι η τυπική απόκλιση, δημιουργώντας το δίλημμα μεταξύ ιδανικής απόδοσης αλλά μεγάλης αστάθειας, ή σχετικά καλής απόδοσης με ευσταθή αποτελέσματα. Σημειώνονται με κόκκινα τετράγωνα **τρία** σημεία μελέτης (1,2,3), **αυξανόμενης τυπικής απόκλισης**, και με καφέ ρόμβο η αντίστοιχη θέση του σημείου σχεδιασμού που προέκυψε από τη βελτιστοποίηση χωρίς αβεβαιότητες.

Στον Πίνακα 6.4 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για τις τρεις σημειωμένες περιπτώσεις του μετώπου Pareto. Επιλέχθηκαν οι συγκεκριμένες, καθώς δύο βρίσκονται

στα αντίθετα άκρα (μεγάλη μέση τιμή με υψηλή τυπική απόκλιση, ή το αντίστροφο), και μία περίπου στη μέση (σχετικά μέτρια αρνητική μέση τιμή και τυπική απόκλιση). Οι μεταβλητές σχεδιασμού για καθεμία παρουσιάζονται στο Σχήμα 6.7, όπου μπορεί να παρατηρηθεί πόσο διαφέρουν μεταξύ τους οι τιμές στις τρεις περιπτώσεις για την ίδια μεταβλητή σχεδιασμού. Επίσης, οι αντίστοιχες μορφές της αεροτομής συγκρίνονται στο Σχήμα 6.8, ενώ απεικονίζονται με την αντίστοιχη περιβάλλουσα ροή του αέρα στο Σχήμα 6.10, όπου οι στοχαστικές μεταβλητές στη συγκεκριμένη απεικόνιση ισούνται με την αντίστοιχη μέση τιμή ( $\alpha_\infty = \mu_{\alpha_\infty}$  και  $M_\infty = \mu_{M_\infty}$ ).

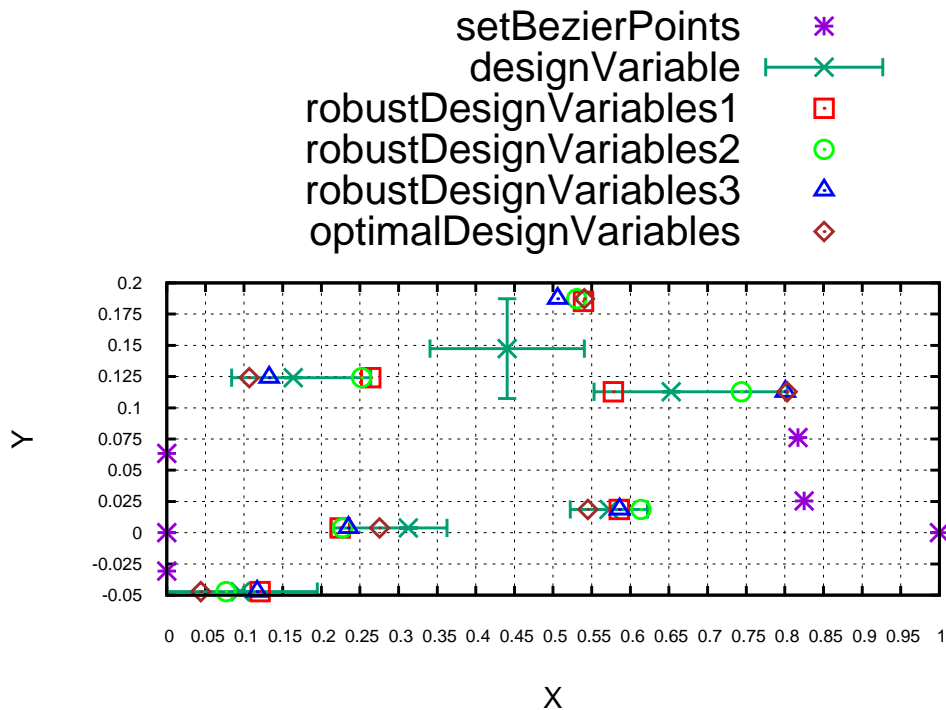
Μεταβλητή Σχεδιασμού	Τιμή Σημείου 1	Τιμή Σημείου 2	Τιμή Σημείου 3
$\hat{X}_3$	0.1206944362	0.07684622948	0.1169997524
$\hat{X}_4$	0.2245980836	0.2274764672	0.2352291401
$\hat{X}_5$	0.5855621957	0.613930342	0.5861652489
$\hat{X}_7$	0.2638	0.2521512087	0.1324864164
$\hat{X}_8$	0.5391435112	0.5306211598	0.5058056247
$\hat{X}_9$	0.5781973653	0.7436382195	0.8006321406
$\hat{Y}_4$	0.1852654638	0.1872905605	0.187345
Μέση τιμή $C_l$	1.1368745622928	1.2515353103548	1.3243495989646
Τυπική απόκλιση $C_l$	0.069590701288704	0.079008150998708	0.095437749836759

**Πίνακας 6.4:** Τιμές των μεταβλητών σχεδιασμού και των δύο συναρτήσεων στόχου για τρεις περιπτώσεις του δικριτηριακού προβλήματος μεγιστοποίησης μέσης τιμής και τυπικής απόκλισης του συντελεστή άνωσης μεμονωμένης αεροτομής.

Τέλος, στο Σχήμα 6.9 σχεδιάζονται οι καμπύλες κατανομής πιθανότητας του συντελεστή άνωσης των τριών περιπτώσεων. Κατά την επίλυση του προβλήματος δικριτηριακής βελτιστοποίησης, ζητήθηκε η ταυτόχρονη ελαχιστοποίηση της τυπικής απόκλισης και της αρνητικής μέσης τιμής του συντελεστή άνωσης. Η μαθηματική ερμηνεία αυτής της συνθήκης αναπαριστάται με το μέτωπο Pareto των μη-κυριαρχούμενων λύσεων του Σχήματος 6.6. Όμως, η αντίστοιχη φυσική ερμηνεία φαίνεται καλύτερα στο Σχήμα 6.9, όπου συγκρίνονται οι τρεις κανονικές κατανομές. Σε αυτό το σχήμα γίνεται αντιληπτή η σημαντική υστέρηση της πρώτης επιλογής, καθώς εμφανίζει (σταθερά) κακή απόδοση, σε σχέση με τις άλλες δύο, γεγονός που την καθιστά λύση προς αποφυγή σε μηχανικά προβλήματα αεροδυναμικά στιβαρού σχεδιασμού-βελτιστοποίησης.

Να σημειωθεί ότι η μορφή των συναρτήσεων πυκνότητας πιθανότητας του Σχήματος 6.9 θυμίζουν πολύ τη μορφή της κανονικής κατανομής. Αυτό αποτελεί ιδιαιτερότητα του συγκεκριμένου προβλήματος, δεδομένου ότι, στο εύρος που μελετάται, ο συντελεστής άνωσης εξαρτάται περίπου γραμμικά από τη γωνία και την ταχύτητα Mach του περιβάλλοντος, και μάλιστα με παρόμοια μονοτονία (αύξουσες και οι δύο). Αν δεν συνέβαινε αυτό, τότε η μορφή της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας του συντελεστή άνωσης θα διέφερε σημαντικά. Ένα παράδειγμα τέτοιας περίπτωσης φαίνεται στο Σχήμα 1.1, όπου η επιλογή του “καλύτερου” σημείου λειτουργίας αποτελεί πιο σύνθετη απόφαση.

Συνοψίζοντας, αν συγκριθούν τα Σχήματα 6.5 και 6.10 διακρίνεται η διαφορά στη μορφή των αεροτομών και στη ροή του αέρα μεταξύ των περιπτώσεων βελτιστοποίησης

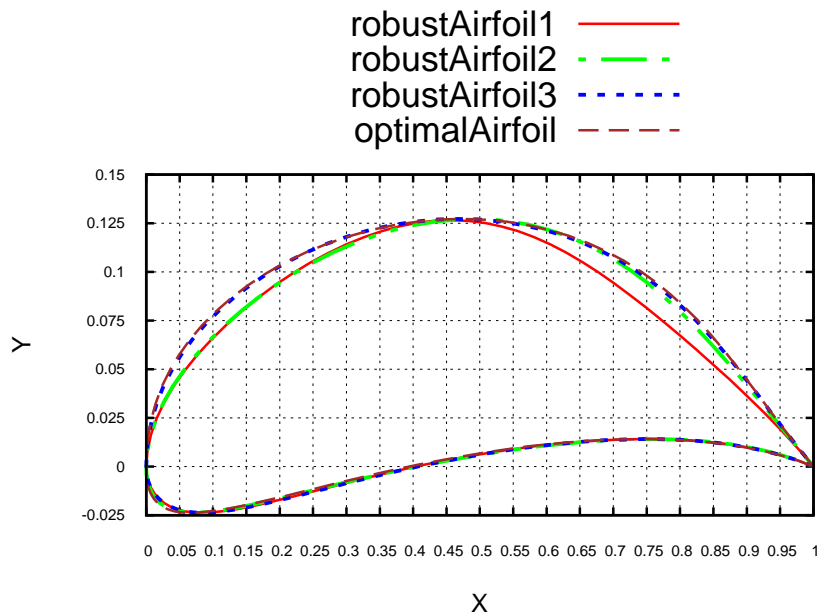


**Σχήμα 6.7:** Σημεία ελέγχου *Bezier* της υπό μελέτη μεμονωμένης αεροτομής τριών διαφορετικών περιπτώσεων, όπως προέκυψαν από τον αεροδυναμικά στιβαρό σχεδιασμό-βελτιστοποίησή της, συγκρινόμενα με τα αρχικά σημεία, το εύρος τιμών καθεμίας από τις 7 μεταβλητές σχεδιασμού, αλλά και με τα βέλτιστα σημεία ελέγχου της βελτιστοποίησης ενός σημείου.

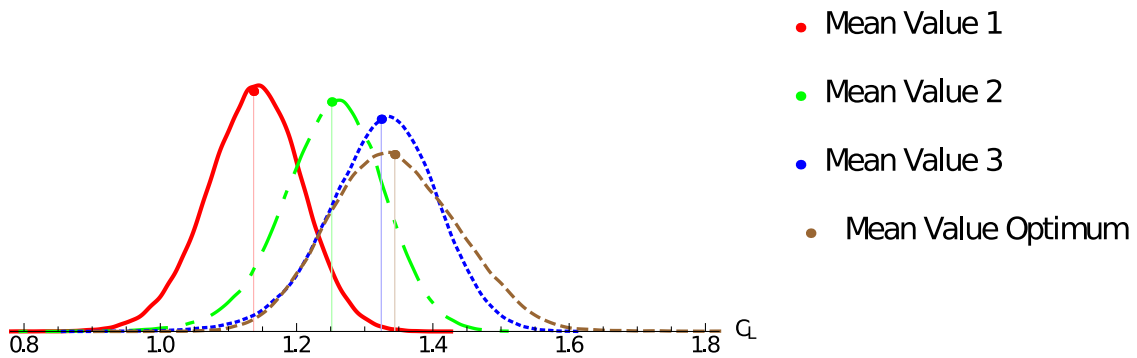
ενός σημείου και αεροδυναμικά στιβαρού σχεδιασμού-βελτιστοποίησης. Φυσικά, ο αεροδυναμικά στιβαρός σχεδιασμός-βελτιστοποίηση δεν αντικαθιστά σε καμία περίπτωση τη βελτιστοποίηση μορφής. Οι δύο μέθοδοι που παρουσιάστηκαν αντιμετωπίζουν διαφορετικά είδους προβλήματα, με την απλή βελτιστοποίηση να επιλέγεται στις ειδικές περιπτώσεις που δεν υπάρχουν στοχαστικές μεταβλητές, ενώ ο αεροδυναμικά στιβαρός σχεδιασμός-βελτιστοποίηση σε περιπτώσεις που ενδέχεται να μεταβάλλονται συγκεκριμένοι παράμετροι.

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο του πολυωνυμικού χάους στον αεροδυναμικά στιβαρό σχεδιασμό-βελτιστοποίηση αντιμετωπίζονται αποτελεσματικά προβλήματα με ασταθείς μεταβλητές εισόδους. Όμως, η αντιμετώπιση αυτή συνεπάγεται και το ανάλογο υπολογιστικό κόστος, που αυξάνεται σημαντικά, όσο αυξάνεται και ο αριθμός των αβέβαιων μεταβλητών. Ειδικά στη συγκεκριμένη περίπτωση, ο αριθμός των αξιολογήσεων της βελτιστοποίησης ενός σημείου ήταν 700, ενώ στον αεροδυναμικά στιβαρό σχεδιασμό-βελτιστοποίηση ήταν  $700 \cdot 16 = 11200$  αξιολογήσεις.

Προφανώς όμως, αυτό που έχει σημασία είναι κυρίως η σύγκριση του υπολογιστικού κόστους της μεθόδου πολυωνυμικού χάους με αυτό της Monte Carlo, μιας και πρόκειται για δύο μεθόδους επίλυσης προβλημάτων αεροδυναμικά στιβαρού σχεδιασμού-



**Σχήμα 6.8:** Οι μορφές της αεροτομής, όπως προέκυψαν κατά τη βελτιστοποίηση ενός σημείου, αλλά και για τρεις περιπτώσεις αεροδυναμικά στιβαρού σχεδιασμού-βελτιστοποίησης. Μπορεί να παρατηρηθεί η τάση της τρίτης καμπύλης να συμπέσει με την καμπύλη που προκύπτει από τη βελτιστοποίηση ενός σημείου λειτουργίας.

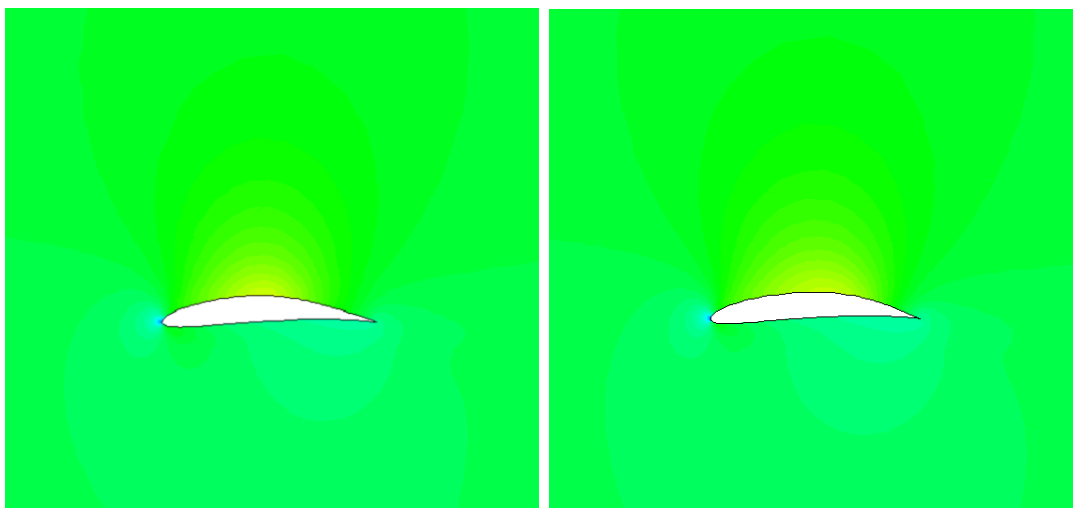


**Σχήμα 6.9:** Καμπύλες κατανομής πιθανότητας του συντελεστή άωσης για τα τρία επιλεγμένα σημεία, συγκρινόμενα με την αντίστοιχη για τη λύση που προέκυψε με την κλασική βελτιστοποίηση, αν ξαφνικά εμφανίζονταν αβεβαιότητες στο περιβάλλον. Αν και κάθε λύση είναι μη-κυριαρχούμενη ως προς τις άλλες, είναι προφανής η μη-αποδοτική επιλογή της πρώτης, η οποία χαρακτηρίζεται από κακή μέση τιμή, αλλά χαμηλή τυπική απόκλιση. Αυτό σημαίνει ότι διαθέτει κακή, αν και σταθερότερη, απόδοση, γεγονός που δεν είναι σε καμία περίπτωση επιθυμητό ως λύση στα προβλήματα αεροδυναμικού σχεδιασμού.

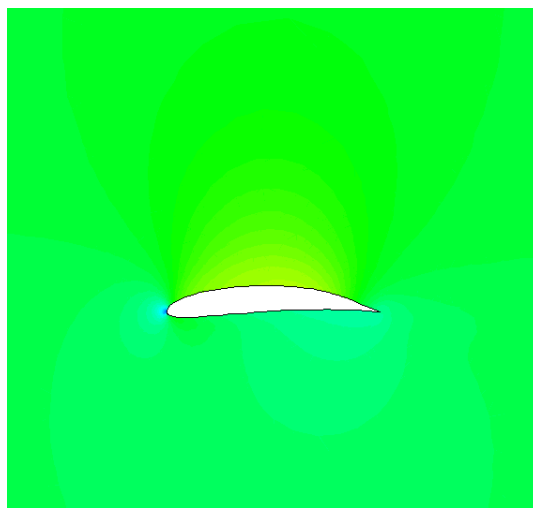
βελτιστοποίησης. Φυσικά, είναι σαφές ότι η Monte Carlo είναι δραματικά πιο αργή



από τη μέθοδο του πολυωνυμικού χάους, με την τελευταία μάλιστα να μπορεί να παραλληλοποιηθεί σε μία πολυεπεξεργαστική πλατφόρμα.



(α') Περίπτωση 1, μικρής τυπικής απόκλισης με κακή απόδοση μέσης τιμής. (β') Περίπτωση 2, μέτριας τυπικής απόκλισης και μέσης τιμής.



(γ') Περίπτωση 3, μεγάλης τυπικής απόκλισης με καλή απόδοση μέσης τιμής.

**Σχήμα 6.10:** Τρεις διαφορετικές περιπτώσεις μορφών αεροτομής και ροής αέρα γύρω από αυτές, όπως προέκυψαν από τον αεροδυναμικά στιβαρό σχεδιασμό-βελτιστοποίηση με 7 μεταβλητές σχεδιασμού και δύο αβέβαιες περιβαλλοντικές μεταβλητές (στη μέση τους τιμή). Οι τρεις εικόνες δε φαίνεται να διαφέρουν πολύ μεταξύ τους. Μεγάλη διαφορά θα μπορούσε να παρατηρηθεί αν το σημείο μελέτης δεν ήταν η μέση τιμή, αλλά κάποιο άκρο, π.χ. τρεις τυπικές αποκλίσεις μακριά.



# Κεφάλαιο 7

## Ανακεφαλαίωση – Συμπεράσματα

Το κύριο μέρος της εργασίας κλείνει ανακεφαλαιώνοντας τα βασικά σημεία που παρουσιάστηκαν στα προηγούμενα κεφάλαια και αναφέροντας συμπεράσματα αλλά και μερικές ιδέες για τη μελλοντική αναβάθμιση της αναπτυχθείσας μεθόδου.

### 7.1 Ανακεφαλαίωση και Συμπεράσματα

Στην παρούσα διπλωματική εργασία αναπτύχθηκε η θεωρία αναπτύγματος πολυωνυμικού χάους για μία και περισσότερες διαστάσεις, υπολογίζοντας τους συντελεστές του πολυωνυμικού χάους μέσω ολοκληρώσεων. Για τις περιπτώσεις που ο αριθμός των στοχαστικών μεταβλητών είναι μεγάλος, αναφέρθηκαν δύο μέθοδοι αποδοτικότερης εύρεσης των απαραίτητων συντελεστών (αραιά πλέγματα Smolyak και επιλογή στοιχείων σύμπτωσης), οι οποίες αποφεύγουν την “κατάρα της διαστασιμότητας”. Η μέθοδος του πολυωνυμικού χάους εφαρμόστηκε σε μερικά αριθμητικά παραδείγματα, αλλά και σε μία εφαρμογή διδιάστατης πτερύγωσης συμπιεστή, για την αποτελεσματική εύρεση της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης μίας αντικειμενικής συνάρτησης με έναν μικρό αριθμό αβέβαιων εισόδων. Τέλος, υλοποιήθηκε η βελτιστοποίηση της μορφής μίας μεμονωμένης αεροτομής για τη μεγιστοποίηση του συντελεστή άνωσης, πρώτα χωρίς κάποια αβέβαια είσοδο, κι έπειτα με δύο στοχαστικές περιβαλλοντικές μεταβλητές στο πλαίσιο του αεροδυναμικά στιβαρού σχεδιασμού-βελτιστοποίησης. Με την εφαρμογή αυτή επισημάνθηκε η συνεισφορά του πολυωνυμικού χάους στην αποδοτικότερη υλοποίηση του αεροδυναμικά στιβαρού σχεδιασμού-βελτιστοποίησης, ειδικά συγκρινόμενη με τη μέθοδο Monte Carlo.

Παρακάτω αναφέρονται μερικά συμπεράσματα που προέκυψαν κατά τη μελέτη του θέματος:

- Η μέθοδος του πολυωνυμικού χάους είναι ιδιαίτερα αποδοτική σε προβλήματα

αεροδυναμικά στιβαρού σχεδιασμού-βελτιστοποίησης με μία στοχαστική μεταβλητή. Με ελάχιστες μόνο μετρήσεις, η ακρίβεια των αποτελεσμάτων είναι εντυπωσιακή.

- Η εύρεση των συντελεστών του αναπτύγματος του πολυωνυμικού χάους πραγματοποιείται εύκολα και με μεγάλη ακρίβεια με αριθμητικές ολοκληρώσεις Gauss Quadrature. Προσοχή όμως απαιτείται σε περιπτώσεις περισσότερων στοχαστικών μεταβλητών, στις οποίες ο απαιτούμενος αριθμός αξιολογήσεων της αντικειμενικής συνάρτησης αυξάνεται εκθετικά (περίπτωση πλήρους πλέγματος).
- Η υλοποίηση των αραιών πλεγμάτων Smolyak ή των στοχαστικών στοιχείων σύμπτωσης αντιμετωπίζουν αποτελεσματικά την “κατάρα της διαστασιμότητας” σε μεγάλες διαστάσεις.
- Η μέθοδος του πολυωνυμικού χάους μπορεί να εφαρμοστεί και σε προβλήματα αεροδυναμικής φύσεως. Πρέπει, όμως, να δοθεί ιδιαίτερη προσοχή στην τάξη του χάους που επιλέγεται, καθώς μεγαλύτερες τάξεις διαθέτουν και υψηλότερο υπολογιστικό κόστος.
- Ο αεροδυναμικά στιβαρός σχεδιασμός-βελτιστοποίηση μορφών διευκολύνεται σημαντικά με τη χρήση της μεθόδου πολυωνυμικού χάους. Ειδικά σε περιπτώσεις που η πολύ μεγάλη ακρίβεια στα αποτελέσματα δεν είναι αναγκαία, ο συνδυασμός της με εξελικτικούς αλγορίθμους συνιστά αξιόλογο τρόπο αντιμετώπισης προβλημάτων βελτιστοποίησης με αβέβαιες μεταβλητές εισόδου.

## 7.2 Προτάσεις για Μελλοντική Μελέτη

- Στην παρούσα διπλωματική εργασία μελετήθηκε εκτενώς η περίπτωση της στοχαστικής μεταβλητής που κατανέμεται σύμφωνα με την κανονική κατανομή. Υπάρχει, όμως, η πιθανότητα η στοχαστική κατανομή μίας περιβαλλοντικής μεταβλητής να προσαρμόζεται καλύτερα με κάποια άλλη κατανομή, π.χ. κατανομή Βήτα, εκθετική, ή ομοιόμορφη [50]. Μία πρόταση για περαιτέρω μελέτη είναι η υλοποίηση του γενικευμένου πολυωνυμικού χάους (generalized Polynomial Chaos, gPC) [21] για περισσότερες στοχαστικές κατανομές, ώστε να μπορεί να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος σε προβλήματα στα οποία οι στοχαστικές μεταβλητές δεν προτείνεται να μετατραπούν σε κανονικά κατανομημένες με μία αλλαγή βάσης, κάποια αναμόρφωση [51], ή και με προσεγγιστικές παραμετρικές μετατροπές [52], λόγω αργής σύγκλισης του αναπτύγματος που προκύπτει [20] [53].
- Όσον αφορά τα πολυδιάστατα προβλήματα, η μέθοδος που αναπτύχθηκε στα προηγούμενα κεφάλαια αντιμετωπίζει μόνο περιπτώσεις που όλες οι στοχαστικές μεταβλητές κατανέμονται κανονικά. Στις πηγές [54], [55] και [56] προτείνεται η γενίκευση του PCE σε περιπτώσεις που οι στοχαστικές μεταβλητές κατανέμονται με διαφορετικούς τρόπους (multi-element generalized polynomial chaos, ME-gPC).
- Μειονέκτημα της μεθόδου που αναπτύχθηκε αποτελεί το γεγονός ότι οι στοχαστικές μεταβλητές εισόδου σε πολυδιάστατα προβλήματα πρέπει να είναι στατιστικά ανεξάρτητες μεταξύ τους ή να εξαρτώνται έστω και γραμμικά. Στην περίπτωση της γραμμικής εξάρτησης, αυτή μπορεί να αφαιρεθεί από το πρόβλημα με την ανάλυση κυρίων συνιστωσών (Principal Component Analysis, PCA) [57], ή με κάποια άλλη, ισοδύναμη μέθοδο [44] [58]. Η αποσύνθεση στοχαστικών μεταβλητών που εξαρτώνται με τρόπο μη-γραμμικό αποτελεί επίσης ένα σημαντικό τομέα για μελλοντική έρευνα.
- Στο Κεφάλαιο 4 μελετήθηκε και υλοποιήθηκε αποκλειστικά η περίπτωση των ισότροπων αραιών πλεγμάτων Smolyak. Υπάρχει, όμως, η δυνατότητα χρήσης και ανισότροπων αραιών πλεγμάτων (anisotropic sparse grids) στην περίπτωση που συγκεκριμένες στοχαστικές μεταβλητές εισόδου δεν επηρεάζουν τόσο πολύ την αντικειμενική συνάρτηση, κι άρα υπάρχει η δυνατότητα περαιτέρω αραιώσης του πλέγματος αποκλειστικά κατά τις αντίστοιχες διαστάσεις. Στην περίπτωση όπου ένας αριθμός μεταβλητών επηρεάζει κατά πολύ μεγαλύτερο βαθμό την αντικειμενική συνάρτηση σε σχέση με άλλες, η χρήση αραιών πλεγμάτων μπορεί να συνδυαστεί με την ανάλυση κυρίων συνιστωσών (PCA) [24] για την απάλειψη των μη-απαραίτητων επιρροών και την ακόμα οικονομικότερη επίλυση του προβλήματος αεροδυναμικά στιβαρού σχεδιασμού-βελτιστοποίησης.
- Στην περίπτωση που οι στοχαστικές μεταβλητές ενός προβλήματος αεροδυναμικά στιβαρού σχεδιασμού-βελτιστοποίησης ξεπερνούν τις εκατοντάδες, όπως φάνηκε και στο αντίστοιχο κεφάλαιο, η εύρεση των συντελεστών πολυωνυμικού χάους

με χρήση ολοκληρώσεων είναι ασύμφορη. Για την αντιμετώπιση αυτών των περιπτώσεων, προτείνεται η υλοποίηση και χρήση της στοχαστικής μεθόδου επίλυσης με στοιχεία σύμπτωσης, για την οποία γίνεται απλά μία νύξη στο Κεφάλαιο 4.2.

- Μέχρι τώρα, σε κάθε αναφορά στοχαστικής μεταβλητής θεωρούταν γνωστή κι η συνάρτηση κατανομής της, κάτι που δεν είναι απαραίτητο. Υπάρχουν περιπτώσεις στοχαστικών μεταβλητών των οποίων η κατανομή δεν είναι γνωστή. Στη βιβλιογραφία [59] αναπτύσσεται η μέθοδος του αυθαίρετου πολυωνυμικού χάους (arbitrary Polynomial Chaos, aPC) για την περίπτωση που δεν είναι γνωστή ολόκληρη η στοχαστική κατανομή μίας μεταβλητής εισόδου, παρά μόνο μερικές τιμές της, οι οποίες και εκμεταλλεύονται για την επίλυση προβλημάτων αεροδυναμικά στιβαρού σχεδιασμού-βελτιστοποίησης.
- Τέλος, προτείνεται ο συνδυασμός του PCE με αιτιοκρατικό αλγόριθμο βελτιστοποίησης, αναπτύσσοντας μαθηματική διατύπωση της συζυγούς μεθόδου (adjoint method) [22] [18] για την περίπτωση του πολυωνυμικού χάους, με σκοπό την επίλυση προβλημάτων αεροδυναμικά στιβαρού σχεδιασμού-βελτιστοποίησης, με τρόπο αποδοτικότερο από αυτούς που αναπτύχθηκαν στο πρώτο κεφάλαιο και που υλοποιήθηκαν στο έκτο.







# Παράρτημα Α΄

## Πολυώνυμα Hermite

### Α΄.1 Πληροφορίες και Ιδιότητες Πολυωνύμων Hermite

Τα πολυώνυμα Hermite είναι τα ορθογώνια πολυώνυμα που χρησιμοποιούνται στο ανάπτυγμα πολυωνυμικού χάους για κανονική κατανομή στοχαστικής μεταβλητής. Υπάρχουν δύο διαφορετικά είδη Hermite πολυωνύμων, ανάλογα με τον επιστημονικό τομέα που χρησιμοποιούνται. Στη στατιστική χρησιμοποιούνται κατά κόρον τα πιθανοτικά Hermite πολυώνυμα (probabilists'),  $He_n$ , ενώ σε τομείς της φυσικής προτιμώνται τα Hermite πολυώνυμα φυσικού (physicists'),  $H_n$ . Αυτό συμβαίνει λόγω της χρήσης διαφορετικής συνάρτησης βάρους  $w(x)$  (weight function).

Τα δύο διαφορετικά είδη ορίζονται στο πεδίο ορισμού  $(-\infty, \infty)$  ως εξής:

- Τα πιθανοτικά πολυώνυμα Hermite

$$He_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{2}} = \left(x - \frac{d}{dx}\right)^n \cdot 1 \quad (\text{A'.1})$$

- Τα πολυώνυμα Hermite του φυσικού

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} = \left(2x - \frac{d}{dx}\right)^n \cdot 1 \quad (\text{A'.2})$$

Οι δύο ορισμοί δεν είναι ταυτόσημοι, αλλά αποτελούν μετασχηματισμό ο ένας του άλλου. Συγκεκριμένα,

$$H_n(x) = 2^{\frac{n}{2}} He_n(\sqrt{2}x) \quad (\text{A'.3})$$

$$He_n(x) = 2^{-\frac{n}{2}} H_n\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \quad (\text{A'.4})$$

Τα δέκα πρώτα πολυώνυμα από κάθε είδος φαίνονται παρακάτω.

- Πιθανοτικά Hermite πολυώνυμα

$$\begin{aligned} He_0(x) &= 1 \\ He_1(x) &= x \\ He_2(x) &= x^2 - 1 \\ He_3(x) &= x^3 - 3x \\ He_4(x) &= x^4 - 6x^2 + 3 \\ He_5(x) &= x^5 - 10x^3 + 15x \\ He_6(x) &= x^6 - 15x^4 + 45x^2 - 15 \\ He_7(x) &= x^7 - 21x^5 + 105x^3 - 105x \\ He_8(x) &= x^8 - 28x^6 + 210x^4 - 420x^2 + 105 \\ He_9(x) &= x^9 - 36x^7 + 378x^5 - 1260x^3 + 945x \end{aligned}$$

- Hermite πολυώνυμα του φυσικού

$$\begin{aligned} H_0(x) &= 1 \\ H_1(x) &= 2x \\ H_2(x) &= 4x^2 - 2 \\ H_3(x) &= 8x^3 - 12x \\ H_4(x) &= 16x^4 - 48x^2 + 12 \\ H_5(x) &= 32x^5 - 160x^3 + 120x \\ H_6(x) &= 64x^6 - 480x^4 + 720x^2 - 120 \\ H_7(x) &= 128x^7 - 1344x^5 + 3360x^3 - 1680x \\ H_8(x) &= 256x^8 - 3584x^6 + 13440x^4 - 13440x^2 + 1680 \\ H_9(x) &= 512x^9 - 9216x^7 + 48384x^5 - 80640x^3 + 30240x \end{aligned}$$

Στη συνέχεια, ακολουθεί μία αντιπαράθεση των ιδιοτήτων τους.

- **Συνάρτηση Βάρους**

Η συνάρτηση βάρους των πιθανοτικών πολυωνύμων είναι η

$$w^{(He)}(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (\text{A'.5})$$

ενώ των φυσικών είναι η

$$w^{(H)}(x) = e^{-x^2} \quad (\text{A'.6})$$

- **Αναδρομική Σχέση**

Από την εξίσωση ορισμού του κάθε είδους, μπορεί να προκύψει η αναδρομική σχέση για τον εκάστοτε όρο

$$He_{n+1}(x) = xHe_n(x) - nHe_{n-1}(x) \quad (\text{A'.7})$$

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x) \quad (\text{A'.8})$$

αλλά και για την παράγωγό του

$$He'_n(x) = nHe_{n-1}(x) \quad (\text{A'.9})$$

$$H'_n(x) = 2nH_{n-1}(x) \quad (\text{A'.10})$$

Δεδομένου ότι η σχέση ορισμού για  $n=0$  απλοποιείται στη

$$He_0(x) = H_0(x) = 1 \quad (\text{A'.11})$$

αν χρησιμοποιηθεί κι η αναδρομική σχέση, προκύπτει ότι ο συντελεστής του όρου με το μέγιστο εκθέτη στα πιθανοτικά πολυώνυμα είναι πάντα ίσος με μονάδα (μονικά πολυώνυμα), ενώ στα φυσικά ισούται με  $2^n$  (μη μονικά),

$$A_n^{(He)}(x) = 1 \quad (\text{A'.12})$$

$$A_n^{(H)}(x) = 2^n \quad (\text{A'.13})$$

- **Ορθογωνιότητα**

Καθένα εκ των δύο ειδών είναι ορθογώνιο ως προς την εκάστοτε συνάρτηση βάρους  $w$ , είναι δηλαδή

$$\int_{-\infty}^{\infty} He_m(x)He_n(x)e^{-\frac{x^2}{2}} dx = n!\sqrt{2\pi}\delta_{mn} \quad (\text{A'.14})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x)H_n(x)e^{-x^2} dx = 2^n n!\sqrt{\pi}\delta_{mn} \quad (\text{A'.15})$$

όπου  $\delta_{mn}$  το σύμβολο Kronecker.

- **Νόρμα**

Η κατά  $w$ -νόρμα του εκάστοτε είδους βρίσκεται από τη σχέση ορθογωνιότητας, για  $m = n$ ,

$$\|He_n\|_w^2 = \int_{-\infty}^{\infty} He_n(x)He_n(x)e^{-\frac{x^2}{2}} dx = n!\sqrt{2\pi} \equiv \gamma_n^{(He)} \quad (A'.16)$$

$$\|H_n\|_w^2 = \int_{-\infty}^{\infty} H_n(x)H_n(x)e^{-x^2} dx = 2^n n! \sqrt{\pi} \equiv \gamma_n^{(H)} \quad (A'.17)$$

- **Βάρη Gauss-Hermite Quadrature**

Τα βάρη σε μία Gauss Quadrature βρίσκονται [33] γενικά από την κοινή σχέση

$$\omega_j = -\frac{A_{n+1}}{A_n} \cdot \frac{\gamma_n}{\phi_{n+1}(x_j) \cdot \phi'_n(x_j)} \quad (A'.18)$$

όπου  $\phi_n$  η ορθογώνια οικογένεια πολυωνύμων που χρησιμοποιείται, και  $x_j$  οι ρίζες του πολυωνύμου  $\phi_n$ .

Μέσω της συσχέτισης προηγούμενου με επόμενο όρο στα ορθογώνια πολυώνυμα

$$\phi_{n+1}(x_j) = -\frac{A_{n+1}A_{n-1}}{A_n^2} \cdot \frac{\gamma_n}{\gamma_{n-1}} \phi_{n-1}(x_j) \quad (A'.19)$$

προκύπτει

$$\omega_j = \frac{A_n}{A_{n-1}} \cdot \frac{\gamma_{n-1}}{\phi'_n(x_j) \cdot \phi_{n-1}(x_j)} \quad (A'.20)$$

Κατά την εφαρμογή τους στην Gauss-Hermite Quadrature, τα βάρη  $\omega_j$  υπολογίζονται χρησιμοποιώντας τα πολυώνυμα Hermite, με τα κατάλληλα  $A_{n-1}$ ,  $A_n$  και  $\gamma_{n-1}$ , όπου  $x_j$  οι ρίζες του πολυωνύμου Hermite βαθμού  $n$ .

$$\begin{aligned} \omega_j &= \frac{(n-1)!\sqrt{2\pi}}{He'_n(x_j) \cdot He_{n-1}(x_j)} = \frac{(n-1)!\sqrt{2\pi}}{n \cdot He_{n-1}^2(x_j)} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \omega_j = \frac{n!\sqrt{2\pi}}{n^2 \cdot He_{n-1}^2(x_j)} \end{aligned} \quad (A'.21)$$

$$\omega_j = 2 \cdot \frac{2^{n-1}(n-1)!\sqrt{\pi}}{H'_n(x_j) \cdot H_{n-1}(x_j)} = \frac{2^{n-1}(n-1)!\sqrt{\pi}}{n \cdot H_{n-1}^2(x_j)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega_j = \frac{2^{n-1}n!\sqrt{\pi}}{n^2 \cdot H_{n-1}^2(x_j)} \quad (\text{A'.22})$$

Τέλος, υπενθυμίζεται ότι κατά την εφαρμογή της GHQ στο ανάπτυγμα πολυωνυμικού χάους, αντί του συμβολισμού  $n$ , προτιμάται ο συμβολισμός  $k+1$ , με  $n = k + 1$  όπου  $k$  η τάξη αποκοπής τους χάους.

## A'.2 Ρίζες και Βάρη Πολυωνύμων Hermite

Δεδομένου ότι κατά την ολοκλήρωση με Gauss-Hermite Quadrature οι τιμές των ριζών και τα αντίστοιχα βάρη παραμένουν σταθερά, αυτές μπορούν να πινακοποιηθούν για γρηγορότερη αναφορά κατά την επίλυση αριθμητικών εφαρμογών.

Στον Πίνακα A'.1 αναγράφονται οι ρίζες και τα βάρη για τα πολυώνυμα Hermite τριών κατηγοριών: πιθανοτικά ( $He_n$ ), κανονικά πιθανοτικά ( $\widetilde{He}_n$ ), και πολυώνυμα φυσικού ( $H_n$ ), για βαθμό GHQ από 1 έως 8.

Βαθμός GHQ ( $n$ )	Πολυώνυμα $He_n$		Πολυώνυμα $\widetilde{He}_n$		Πολυώνυμα $H_n$	
	Ρίζες ( $z_j$ )	Βάρη ( $w_j$ )	Ρίζες ( $z_j$ )	Βάρη ( $w_j$ )	Ρίζες ( $z_j$ )	Βάρη ( $w_j$ )
1	0	2.506628275	0	1	0	1.77245385091
2	1 -1	1.25331414 1.25331414	1 -1	0.5 0.5	0.7071067812 -0.7071067812	0.886226925 0.886226925
3	1.732050808 0 -1.732050808	0.417771379 1.671085516 0.417771379	1.732050808 0 -1.732050808	0.1666666667 0.6666666667 0.1666666667	1.224744871 0 -1.224744871	0.295408975 1.181635901 0.295408975
4	2.334414218 0.7419637843 -0.7419637843 -2.334414218	0.11499371 1.13832042 1.13832042 0.11499371	2.334414218 0.7419637843 -0.7419637843 -2.334414218	0.04587585477 0.4541241452 0.4541241452 0.04587585477	1.650680124 0.5246476233 -0.5246476233 -1.650680124	0.0813128354 0.80491409 0.80491409 0.0813128354
5	2.856970014 1.35562618 0 -1.35562618 -2.856970014	0.028218146 0.55666179 1.336868413 0.55666179 0.028218146	2.856970014 1.35562618 0 -1.35562618 -2.856970014	0.01125741133 0.222075922 0.5333333333 0.222075922 0.01125741133	2.02018287 0.9585724646 0 -0.9585724646 -2.02018287	0.0199532421 0.393619323 0.9453087205 0.393619323 0.0199532421
6	3.324257434 1.889175878 0.6167065902 -0.6167065902 -1.889175878 -3.324257434	0.0064064014 0.22212673 1.02478100 1.02478100 0.22212673 0.0064064014	3.324257434 1.889175878 0.6167065902 -0.6167065902 -1.889175878 -3.324257434	0.002555784402 0.08861574604 0.4088284696 0.4088284696 0.08861574604 0.002555784402	2.350604974 1.335849074 0.4360774119 -0.4360774119 -1.335849074 -2.350604974	0.00453000991 0.1570673203 0.724629595 0.724629595 0.1570673203 0.00453000991
7	3.750439718 2.366759411 1.154405395 0 -1.154405395 -3.366759411 -3.750439718	0.001374306 0.07709668 0.60189955 1.145887211 0.60189955 0.07709668 0.001374306	3.750439718 2.366759411 1.154405395 0 -1.154405395 -2.366759411 -3.750439718	0.0005482689 0.03075712 0.24012318 0.4571428571 0.24012318 0.03075712 0.0005482689	2.651961357 1.673551629 0.8162878829 0 -0.8162878829 -1.673551629 -2.651961357	0.000971781245 0.05451558282 0.4256072526 0.8102646176 0.4256072526 0.05451558282 0.000971781245
8	4.144547186 2.802485861 1.636519042 0.5390798114 -0.5390798114 -1.636519042 -2.802485861 -4.144547186	0.0002822828 0.02415192 0.29387687 0.935003072 0.935003072 0.29387687 0.02415192 0.0002822828	4.144547186 2.802485861 1.636519042 0.5390798114 -0.5390798114 -1.636519042 -2.802485861 -4.144547186	0.0001126145 0.009635220 0.11723991 0.373012258 0.373012258 0.11723991 0.009635220 0.0001126145	2.930637420 2.981656757 1.157193712 0.3811869902 -0.3811869902 -1.157193712 -2.981656757 -2.930637420	0.0001996041 0.01707798 0.20780233 0.661147013 0.661147013 0.20780233 0.01707798 0.0001996041

**Πίνακας A'.1:** Ρίζες και βάρη πολυωνύμων Hermite (πιθανοτικών, κανονικοποιημένων πιθανοτικών και πολυωνύμων φυσικού) για προβλήματα ολοκλήρωσης κατά Gauss Quadrature, τάξεως  $n=1, 2, \dots, 8$ .

## Παράρτημα Β΄

### Μετασχηματισμός Box-Muller

Ο μετασχηματισμός Box-Muller (Box-Muller Transform), όπως αναπτύσσεται στο [60], επιτρέπει τη μετατροπή ζεύγους ανεξάρτητων τιμών που προκύπτουν από μία ομοιόμορφη κατανομή (uniform distribution), σε ζεύγος ανεξάρτητων τιμών που κατανέμονται με βάση την τυποποιημένη (standard) κανονική κατανομή  $[0, 1]$ , δηλαδή διαθέτουν μηδενική μέση τιμή και τυπική απόκλιση ίση με τη μονάδα.

Η μέθοδος αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην Fortran77, η οποία δεν διαθέτει εσωτερική γεννήτρια τυχαίων αριθμών κανονικής κατανομής. Μπορεί να συνδυαστεί με τη γνωστή υπορουτίνα *ran3*, η οποία γεννά τυχαίους αριθμούς που ανήκουν σε ομοιόμορφη κατανομή.

Έστω  $r_1$  και  $r_2$  δύο τυχαίες τιμές που προκύπτουν με χρήση της υπορουτίνας *ran3*, είτε από κάποια άλλη εσωτερική εντολή, οι οποίες κατανέμονται ομοιόμορφα στο εύρος  $(0, 1)$ . Τότε, σύμφωνα με τη μετατροπή Box-Muller, ορίζονται οι μεταβλητές  $\hat{R}_1$  και  $\hat{R}_2$  ως εξής

$$\hat{R}_1 = \sqrt{-2 \ln(r_1)} \cos(2\pi r_2) \quad (\text{B'.1})$$

$$\hat{R}_2 = \sqrt{-2 \ln(r_1)} \sin(2\pi r_2) \quad (\text{B'.2})$$

Οι μεταβλητές αυτές αποδεικνύεται ότι κατανέμονται στοχαστικά με βάση την τυποποιημένη κανονική κατανομή, όταν οι μεταβλητές  $r_1$  και  $r_2$  κατανέμονται ομοιόμορφα στο εύρος  $(0, 1)$ . Πρακτικά, οι  $\hat{R}_1$  και  $\hat{R}_2$  ανήκουν στο εύρος  $[-3, 3]$  με πιθανότητα  $(100 - 0.3)\% = 99.7\%$ .

Διαφορετικά, μπορούν να μετασχηματιστούν έτσι ώστε να ανήκουν με πιθανότητα 97%

στο εύρος  $[0, 1]$ , δηλαδή να διαθέτουν μέση τιμή  $\frac{1}{2}$  και τυπική απόκλιση  $\frac{1}{6}$

$$\tilde{R}_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\hat{R}_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot \sqrt{-2\ln(r_1)} \cos(2\pi r_2) \quad (\text{B'.3})$$

$$\tilde{R}_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\hat{R}_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot \sqrt{-2\ln(r_1)} \sin(2\pi r_2) \quad (\text{B'.4})$$

Τέλος, μπορεί να οριστεί κι ο γενικότερος μετασχηματισμός για τη δημιουργία μίας κανονικής κατανομής μεταβλητής με μέση τιμή  $\mu$  και τυπική απόκλιση  $\sigma$

$$\begin{aligned} R_1 &= \mu + \sigma \cdot \hat{R}_1 = \mu + \sigma \cdot \sqrt{-2\ln(r_1)} \cos(2\pi r_2) & (\text{B'.5}) \\ &= (\mu - 3\sigma) + 6\sigma\tilde{R}_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_2 &= \mu + \sigma \cdot \hat{R}_2 = \mu + \sigma \cdot \sqrt{-2\ln(r_1)} \sin(2\pi r_2) & (\text{B'.6}) \\ &= (\mu - 3\sigma) + 6\sigma\tilde{R}_2 \end{aligned}$$

όπου  $R_1, R_2 \in \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ .



## Παράρτημα Γ'

### Συνάρτηση Σφάλματος Gauss

Στον τομέα της στατιστικής και των πιθανοτήτων ορίζεται [61] η ειδική συνάρτηση σφάλματος Gauss (Gauss Error Function)

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-x}^x e^{-t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \quad (\Gamma'.1)$$

η οποία είναι πολύ σημαντική στη θεωρία σφαλμάτων, από όπου κι έλαβε το όνομα της. Σημειώνεται ότι η  $\operatorname{erf}(x)$  είναι περιττή συνάρτηση

$$\operatorname{erf}(-x) = -\operatorname{erf}(x) \quad (\Gamma'.2)$$

ιδιότητα που χρησιμοποιήθηκε για να προκύψει η δεύτερη ισότητα της (Γ'.1).

Ταυτόχρονα, μπορεί να οριστεί κι η συμπληρωματική συνάρτηση σφάλματος  $\operatorname{erfc}$ ,

$$\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt \quad (\Gamma'.3)$$

Η συνάρτηση σφάλματος Gauss συνδέεται με την αθροιστική συνάρτηση κατανομής  $\Phi$  (Cumulative Distribution Function, CDF), που αποτελεί το ολοκλήρωμα της τυποποιημένης κανονικής κατανομής  $[0, 1]$ ,

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} \left[ 1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \right] = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(-\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \quad (\Gamma'.4)$$

όπου

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad (\Gamma'.5)$$

Γενικεύοντας, για μία κανονική κατανομή με μέση τιμή  $\mu$  και τυπική απόκλιση  $\sigma$ , η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της  $F$  ισούται με

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{2} \left[ 1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x - \mu}{\sigma\sqrt{2}}\right) \right] \quad (\Gamma'.6)$$

Εφόσον η συνάρτηση  $e^{-t^2}$  αναπτύσσεται σε δυναμοσειρά

$$e^{-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{n!} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{24} + \dots \quad (\Gamma'.7)$$

μπορεί να αντικατασταθεί στη σχέση ορισμού της erf, για να προκύψει κι αυτή, έπειτα από ολοκλήρωση του εκάστοτε όρου, ως έκφραση δυναμοσειράς

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(2n+1)} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \frac{x^7}{42} + \frac{x^9}{216} - \dots \right) \quad (\Gamma'.8)$$

Τελικά, μπορεί να οριστεί κι η αντίστοιχα δυναμοσειρά για την αθροιστική συνάρτηση τυποποιημένης κανονικής κατανομής  $\Phi$

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \left[ x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{3 \cdot 5} + \frac{x^7}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \dots \right]$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!!} \quad (\Gamma'.9)$$

όπου το διπλό παραγοντικό (!! ) (double factorial) ορίζεται ως

$$n!! = \begin{cases} \prod_{k=1}^{n/2} (2k) = n(n-2) \dots 2, & \text{αν το } n \text{ είναι άρτιος} \\ \prod_{k=1}^{(n+1)/2} (2k-1) = n(n-2) \dots 1, & \text{αν το } n \text{ είναι περιττός} \end{cases} \quad (\Gamma'.10)$$

## Παράρτημα Δ'

### Λεπτομερής Επίλυση Αριθμητικών Εφαρμογών

Προκειμένου να μη διασπαστεί η ροή της εργασίας, θεωρήθηκε προτιμότερο να παρουσιαστεί εδώ η λεπτομερής επίλυση μερικών εφαρμογών.

#### Δ'.1 Λύση Εφαρμογής 2.5.3 - Μονοδιάστατη Τριγωνομετρική Συνάρτηση

Δίνεται αντικειμενική συνάρτηση  $f$

$$f(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{3} + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

Η κατανομή της στοχαστικής μεταβλητής  $x$  είναι κανονική, σύμφωνα με την εξίσωση (2.54), που για λόγους πληρότητας παρατίθεται παρακάτω, με  $\mu=4$  και  $\sigma=0.5$ .

$$w(x) = \frac{1}{0.5\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-4}{0.5}\right)^2}$$

Όπως αναφέρθηκε και στο κεφάλαιο 2, επιλέγεται  $k=5$  για υψηλότερη ακρίβεια στο τελικό αποτέλεσμα.

Για κανονική κατανομή στοχαστικής μεταβλητής και τάξη χάους ίση με 5, υπολογίζονται οι ρίζες  $z_j$  του πολωνύμου  $\widetilde{H}_{e_{5+1}}(z)$  και στη συνέχεια τα αντίστοιχα βάρη  $\omega_j$ ,

$$\widetilde{H}e_6(z) = 0 \Rightarrow \frac{z^6 - 15z^4 + 45z^2 - 15}{\sqrt{6!}} = 0 \Rightarrow \begin{cases} z_1 = -z_6 = 3.3242574346 \\ z_2 = -z_5 = 1.8891758778 \\ z_3 = -z_4 = 0.6167065902 \end{cases}$$

$$\omega_j = \frac{1}{(5+1) \cdot \widetilde{H}e_5^2(z_j)} \Rightarrow \omega_j = \frac{1}{6 \cdot \left(\frac{z_j^5 - 10z_j^3 + 15z_j}{\sqrt{5!}}\right)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega_j = \frac{120}{6(z_j^5 - 10z_j^3 + 15z_j)^2} \Rightarrow \begin{cases} \omega_1 = \omega_6 = 0.002555784402 \\ \omega_2 = \omega_5 = 0.08861574604 \\ \omega_3 = \omega_4 = 0.4088284696 \end{cases}$$

Τώρα, καθορίζονται οι απαραίτητες τιμές της  $f(x)$

$$f(x_j) = f(\sigma z_j + \mu) \Rightarrow \begin{cases} f(x_1) = -0.3607660 \\ f(x_2) = -0.0273302 \\ f(x_3) = -0.7379560 \\ f(x_4) = -0.8833210 \\ f(x_5) = -0.0649286 \\ f(x_6) = +0.0792474 \end{cases}$$

Έχοντας βρει όλες τις απαραίτητες τιμές, υπολογίζονται οι συντελεστές  $a_0$  και  $a_1$  ως εξής

$$a_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \widetilde{H}e_0\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) w(x) dx = \sum_{j=1}^6 f(\sigma z_j + \mu) \omega_j \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_0 = f(x_1)\omega_1 + f(x_2)\omega_2 + f(x_3)\omega_3 + f(x_4)\omega_4 + f(x_5)\omega_5 + f(x_6)\omega_6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_0 = -0.6717198033$$

$$a_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \widetilde{H}e_1\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) w(x) dx = \sum_{j=1}^6 f(\sigma z_j + \mu) \widetilde{H}e_1(z_j) \omega_j \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1 = f(x_1)\widetilde{H}e_1(z_1)\omega_1 + f(x_2)\widetilde{H}e_1(z_2)\omega_2 + f(x_3)\widetilde{H}e_1(z_3)\omega_3 +$$

$$+ f(x_4)\widetilde{H}e_1(z_4)\omega_4 + f(x_5)\widetilde{H}e_1(z_5)\omega_5 + f(x_6)\widetilde{H}e_1(z_6)\omega_6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1 = 0.0392066879$$

και όμοια για τους υπόλοιπους συντελεστές,

$$a_2 = +0.2704677715$$

$$a_3 = -0.0500215515$$

$$a_4 = -0.1158847702$$

$$a_5 = +0.0242971868$$

Αντικαθιστώντας στις (2.17β') και (2.17γ') προκύπτουν τα αποτελέσματα

$$\mu_Y = a_0 = -0.6717198033$$

$$\sigma_Y = \sqrt{\sum_{i=1}^2 a_i^2} = \sqrt{0.09121162287} = 0.3020126204$$

## Δ'.2 Λύση Εφαρμογής 3.6.2 - Διδιάστατη Τριγωνομετρική Συνάρτηση

Δίνεται αντικειμενική συνάρτηση  $f$

$$f(x_1, x_2) = \sin\left(\frac{\pi x_1}{3} + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi x_2}{2}\right) \quad (\Delta'.1)$$

Οι κατανομές των δύο στοχαστικών μεταβλητών  $x_1$  και  $x_2$  είναι κανονική, σύμφωνα με την εξίσωση (3.6.2), οι οποίες παρατίθενται παρακάτω για λόγους πληρότητας, μαζί με την ολική συνάρτηση βάρους, όπου  $\mu_{x_l} = 4$  και  $\sigma_{x_l} = 0.5$ , για  $l = 1, 2$ .

$$w_l(x_l) = \frac{1}{0.5\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_l-4}{0.5}\right)^2}$$

$$W(x_1, x_2) = \frac{4}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x_1-4}{0.5}\right)^2 + \left(\frac{x_2-4}{0.5}\right)^2\right]} \quad (\Delta'.2)$$

Σχετικά με την τάξη χάους, επιλέγεται  $k = 5$  για να συγκριθεί το αποτέλεσμα με την αντίστοιχη εφαρμογή του Κεφαλαίου 2.5.3. Επειδή οι στοχαστικές μεταβλητές κατανέμονται κανονικά και η τάξη του χάους είναι ίση με 5, χρησιμοποιούνται οι ρίζες

Τάξη	Κατάταξη πολυωνύμων $\Psi$		Βαθμός $p_{i_l}$		Πλήθος $\binom{k+d-1}{k}$	Πλήθος $\binom{k_{max}+d}{k_{max}}$
	Σχετική ( $j$ )	Απόλυτη ( $m_j^k$ )	$l=1$	$l=2$		
			$i_1$	$i_2$		
$k=0$	1	0	0	0	1	21
$k=1$	1	1	1	0	2	
	2	2	0	1		
$k=2$	1	3	2	0	3	
	2	4	1	1		
	3	5	0	2		
$k=3$	1	6	3	0	4	
	2	7	2	1		
	3	8	1	2		
	4	9	0	3		
$k=4$	1	10	4	0	5	
	2	11	3	1		
	3	12	2	2		
	4	13	1	3		
	5	14	0	4		
$k=5$	1	15	5	0	6	
	2	16	4	1		
	3	17	3	2		
	4	18	2	3		
	5	19	1	4		
	6	20	0	5		

**Πίνακας Δ'.1:** Εφαρμογή 3.6.2, Αντιστοίχιση δεικτών απόλυτης και σχετικής κατάταξης με τους βαθμούς μονοδιάστατων πολυωνύμων για τάξεις  $k$  από 0 έως 5 σε διασδιάστατο πρόβλημα. Στις δύο στήλες ( $l=1,2$ ) αναγράφονται οι πιθανοί συνδυασμοί των μονοδιάστατων πολυωνύμων με άθροισμα ίσο με την εκάστοτε τάξη.

$z_j$  του πολυωνύμου  $\widetilde{H}e_{5+1}(z)$  και τα αντίστοιχα βάρη  $\omega_j$  από το Παράρτημα Α'.2.

$$z_1 = 3.3242574346 = -z_6$$

$$z_2 = 1.8891758778 = -z_5$$

$$z_3 = 0.6167065902 = -z_4$$

$$\omega_1 = 0.002555784402 = \omega_6$$

$$\omega_2 = 0.08861574604 = \omega_5$$

$$\omega_3 = 0.4088284696 = \omega_4$$

Καθώς πρόκειται για περίπτωση προβλήματος με περισσότερες από μία εισόδους, πρέπει να βρεθούν οι δυνατοί συνδυασμοί δεικτών που προκύπτουν για δύο μεταβλητές με

άθροισμα ίσο ή μικρότερο του  $k=5$ .

Οι συνδυασμοί αυτοί αναγράφονται στον Πίνακα Δ'.1. Τότε, τα αντίστοιχα  $\tilde{\psi}_n$  για το PCE είναι

$$\tilde{\psi}_0(z_1, z_2) = \tilde{p}_0(z_1)\tilde{p}_0(z_2) = 1$$

$$\tilde{\psi}_1(z_1, z_2) = \tilde{p}_1(z_1)\tilde{p}_0(z_2) = z_1$$

$$\tilde{\psi}_2(z_1, z_2) = \tilde{p}_0(z_1)\tilde{p}_1(z_2) = z_2$$

$$\tilde{\psi}_3(z_1, z_2) = \tilde{p}_2(z_1)\tilde{p}_0(z_2) = \frac{z_1^2 - 1}{2!}$$

$$\tilde{\psi}_4(z_1, z_2) = \tilde{p}_1(z_1)\tilde{p}_1(z_2) = z_1 z_2$$

$$\tilde{\psi}_5(z_1, z_2) = \tilde{p}_0(z_1)\tilde{p}_2(z_2) = \frac{z_2^2 - 1}{2!}$$

$$\tilde{\psi}_6(z_1, z_2) = \tilde{p}_3(z_1)\tilde{p}_0(z_2) = \frac{z_1^3 - 3z_1}{3!}$$

$$\tilde{\psi}_7(z_1, z_2) = \tilde{p}_2(z_1)\tilde{p}_1(z_2) = \frac{z_1^2 - 1}{2!} z_2$$

$$\tilde{\psi}_8(z_1, z_2) = \tilde{p}_1(z_1)\tilde{p}_2(z_2) = z_1 \frac{z_2^2 - 1}{2!}$$

$$\tilde{\psi}_9(z_1, z_2) = \tilde{p}_0(z_1)\tilde{p}_3(z_2) = \frac{z_2^3 - 3z_2}{3!}$$

$$\tilde{\psi}_{10}(z_1, z_2) = \tilde{p}_4(z_1)\tilde{p}_0(z_2) = \frac{z_1^4 - 6z_1^2 + 3}{4!}$$

$$\tilde{\psi}_{11}(z_1, z_2) = \tilde{p}_3(z_1)\tilde{p}_1(z_2) = \frac{z_1^3 - 3z_1}{3!} z_2$$

$$\tilde{\psi}_{12}(z_1, z_2) = \tilde{p}_2(z_1)\tilde{p}_2(z_2) = \frac{z_1^2 - 1}{2!} \frac{z_2^2 - 1}{2!}$$

$$\tilde{\psi}_{13}(z_1, z_2) = \tilde{p}_1(z_1)\tilde{p}_3(z_2) = z_1 \frac{z_2^3 - 3z_2}{3!}$$

$$\tilde{\psi}_{14}(z_1, z_2) = \tilde{p}_0(z_1)\tilde{p}_4(z_2) = \frac{z_2^4 - 6z_2^2 + 3}{4!}$$

Τιμές Αντικειμενικής Συνάρτησης $f(\sigma_{x_1}z_1 + \mu_{x_1}, \sigma_{x_2}z_2 + \mu_{x_2})$						
$z_2 \backslash z_1$	3.324257	1.889176	0.616707	-0.616707	-1.889176	-3.324257
3.324257	-0.3607640778	0.2711527489	0.719165983	0.8608296108	0.6441776432	0.07924850461
1.889176	0.03636389487	-0.02733135216	-0.07248969012	-0.08676894237	-0.06493109913	-0.007988002321
0.616707	0.3701900745	-0.2782373925	-0.737956258	-0.8833212546	-0.6610086326	-0.0813190992
-0.616707	0.3701900745	-0.2782373925	-0.737956258	-0.8833212546	-0.6610086326	-0.0813190992
-1.889176	0.03636389487	-0.02733135216	-0.07248969012	-0.08676894237	-0.06493109913	-0.007988002321
-3.324257	-0.3607640778	0.2711527489	0.719165983	0.8608296108	0.6441776432	0.07924850461

**Πίνακας Δ'.2:** Εφαρμογή 3.6.2. Πλήρες πλέγμα αξιολογήσεων της αντικειμενικής συνάρτησης. Ένας από τους κινδύνους ολοκλήρωσης κατά  $GQ$  σε προβλήματα πολλών διαστάσεων είναι η εκθετική αύξηση των σημείων διεγματοληψίας. Εδώ, οι μεταβλητές είναι 2, ενώ η μέγιστη τάξη τους χάους είναι ίση με 5. Η ολοκλήρωση με *gauss Quadrature*, επομένως, χρησιμοποιεί συνολικά  $(5+1)^2=36$  σημεία.

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}_{15}(z_1, z_2) &= \tilde{p}_5(z_1)\tilde{p}_0(z_2) = \frac{z_1^5 - 10z_1^3 + 15z_1}{5!} \\ \tilde{\psi}_{16}(z_1, z_2) &= \tilde{p}_4(z_1)\tilde{p}_1(z_2) = \frac{z_1^4 - 6z_1^2 + 3}{4!}z_2 \\ \tilde{\psi}_{17}(z_1, z_2) &= \tilde{p}_3(z_1)\tilde{p}_2(z_2) = \frac{z_1^3 - 3z_1}{3!} \frac{z_2^2 - 1}{2!} \\ \tilde{\psi}_{18}(z_1, z_2) &= \tilde{p}_2(z_1)\tilde{p}_3(z_2) = \frac{z_1^2 - 1}{2!} \frac{z_2^3 - 3z_2}{3!} \\ \tilde{\psi}_{19}(z_1, z_2) &= \tilde{p}_1(z_1)\tilde{p}_4(z_2) = z_1 \frac{z_2^4 - 6z_2^2 + 3}{4!} \\ \tilde{\psi}_{20}(z_1, z_2) &= \tilde{p}_0(z_1)\tilde{p}_5(z_2) = \frac{z_2^5 - 10z_2^3 + 15z_2}{5!}\end{aligned}$$

Στον Πίνακα Δ'.2 αναρτώνται οι τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης στα σημεία που ορίζονται από την Gauss-Quadrature. Γνωρίζοντας και τις τιμές της  $f$ , παραμένει ο υπολογισμός των συντελεστών  $a_i$ , για  $i = 1, \dots, 5$ . Ειδικότερα, ο συντελεστής  $a_0$  θα είναι

$$a_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2) \tilde{\psi}_0\left(\frac{x_1 - \mu_{x_1}}{\sigma_{x_1}}, \frac{x_2 - \mu_{x_2}}{\sigma_{x_2}}\right) w_1(x_1)w_2(x_2) dx_1 dx_2$$

ή, κατά Gauss Quadrature,

$$a_0 = \sum_{j_1=1}^6 \sum_{j_2=1}^6 \omega_{j_1} \omega_{j_2} \tilde{\psi}_0(z_{j_1}, z_{j_2}) f(x_{j_1}, x_{j_2})$$

δηλαδή αποτελεί άθροισμα  $6 \times 6 = 36$  γινομένων (όπως και κάθε επόμενος συντελεστής  $a_i$ ), του οποίου το αποτέλεσμα είναι ίσο με

$$a_0 = -0.61867739916371101$$



ενώ ο συντελεστής  $a_1$  βρίσκεται από τη σχέση

$$a_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2) \tilde{\psi}_1\left(\frac{x_1 - \mu_{x_1}}{\sigma_{x_1}}, \frac{x_2 - \mu_{x_2}}{\sigma_{x_2}}\right) w_1(x_1) w_2(x_2) dx_1 dx_2$$

ή, κατά GQ,

$$a_1 = \sum_{j_1=1}^6 \sum_{j_2=1}^6 \omega_{j_1} \omega_{j_2} \tilde{\psi}_1(z_{j_1}, z_{j_2}) f(x_{j_1}, x_{j_2})$$

όπου αναπτύσσοντας τα αθροίσματα και αντικαθιστώντας τις ήδη γνωστές τιμές, βρίσκονται

$$a_1 = 0.086799123388418414$$

Ανάλογα και οι υπόλοιποι συντελεστές,

$$a_2 \approx 0$$

$$a_3 = +0.119935013018209$$

$$a_4 \approx 0$$

$$a_5 = +0.269845455324224$$

$$a_6 = -0.009715281189229$$

$$a_7 \approx 0$$

$$a_8 = -0.037858743513424$$

$$a_9 \approx 0$$

$$a_{10} = -0.009478847688395$$

$$a_{11} \approx 0$$

$$a_{12} = -0.052311460287644$$

$$a_{13} \approx 0$$

$$a_{14} = -0.047708166626672$$

$$a_{15} = 0.000619140293920$$

$$a_{16} \approx 0$$

$$a_{17} = 0.004237466052024$$

$$a_{18} \approx 0$$

$$a_{19} = 0.006693354318844$$

$$a_{20} \approx 0$$

ώστε, αντικαθιστώντας στις (3.26β') και (3.26γ'), προκύπτουν τα αποτελέσματα

$$\mu_Y = a_0 = -0.61867739916371101$$

$$\sigma_Y = \sqrt{\sum_{i=1}^2 a_i^2} = \sqrt{0.101428283116} = 0.3184780732105457$$

## Παράρτημα Ε΄

### Αποδείξεις Μαθηματικών Σχέσεων

#### Ε΄.1 Μέση Τιμή και Τυπική Απόκλιση με τη Μέθοδο των Ροπών

Σε αυτό το παράρτημα αποδεικνύονται οι σχέσεις υπολογισμού της μέσης τιμής, της τυπικής απόκλισης αλλά και της αντικειμενικής συνάρτησης με στοχαστικές μεταβλητές εισόδου, όπως ορίζονται από τη μέθοδο των Ροπών και αναλύονται στη βιβλιογραφία [17].

##### Ε΄.1.1 Ορισμοί

Έστω  $\phi$  μία στοχαστική μεταβλητή, με συνάρτηση κατανομής (PDF) την  $g(\phi)$ . Τότε, η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση δίνονται αντίστοιχα από τις σχέσεις

$$\bar{\phi} = \int \phi g(\phi) d\phi \quad (\text{E}' .1)$$

$$\sigma_{\phi}^2 = \int (\phi - \bar{\phi})^2 g(\phi) d\phi \quad (\text{E}' .2)$$

όπου

$$\int g(\phi) d\phi = 1 \quad (\text{E}' .3)$$

Η τρίτη και η τέταρτη στατιστική ροπή, ασυμμετρία ( $\gamma$ ) και κύρτωση  $k$ , ορίζονται ως

$$\gamma_\phi = \int (\phi - \bar{\phi})^3 g(\phi) d\phi \quad (\text{E'.4})$$

$$k_\phi = \int (\phi - \bar{\phi})^4 g(\phi) d\phi \quad (\text{E'.5})$$

Όπως προτείνει και η ονομασία της, η στατιστική ροπή της ασυμμετρίας είναι μηδενική όταν η κατανομή είναι συμμετρική. Επίσης, σχετικά με την κύρτωση σε μία κανονική κατανομή αυτή είναι πάντα ίση με  $k_\phi = 3\sigma^2$  [62].

### E'.1.2 Μέση Τιμή Αντικειμενικής Συνάρτησης

Η μέση τιμή μίας αντικειμενικής συνάρτησης  $F$  συναρτήσει των στοχαστικών μεταβλητών εισόδου  $\mathbf{c}$  (κατά κύριο λόγο περιβαλλοντικές μεταβλητές στα προβλήματα αεροδυναμικά στιβαρού σχεδιασμού-βελτιστοποίησης), βρίσκεται χρησιμοποιώντας την Εξίσωση (E'.1). Λαμβάνοντας υπόψη τις  $c_i, i \in [1, M]$ , αυτή αναλύεται ως εξής

$$\mu_F(\mathbf{c}) = \int Fg(\mathbf{c})d\mathbf{c} = \int_{c_1} \int_{c_2} \dots \int_{c_M} Fg(c_1)g(c_2) \dots g(c_M)dc_1dc_2 \dots dc_M \quad (\text{E'.6})$$

Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα Taylor δεύτερης τάξης της  $F$ , και το γεγονός ότι όλες οι περιβαλλοντικές μεταβλητές είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, η (E'.6) γράφεται

$$\begin{aligned} \mu_F(\mathbf{c}) &= \underbrace{F|_{\bar{\mathbf{c}}} \int_{c_1} g(c_1)dc_1 \dots \int_{c_M} g(c_M)dc_M}_{\mu_1} \\ &+ \underbrace{\frac{dF}{dc_1} \Big|_{\bar{\mathbf{c}}} \int_{c_1} (c_1 - \bar{c}_1)g(c_1)dc_1 + \dots + \frac{dF}{dc_M} \Big|_{\bar{\mathbf{c}}} \int_{c_M} (c_M - \bar{c}_M)g(c_M)dc_M}_{\mu_2} \\ &+ \underbrace{\int_{c_1} \int_{c_2} \dots \int_{c_M} Gg(c_1) \dots g(c_M)dc_1 \dots dc_M}_{\mu_3} \end{aligned} \quad (\text{E'.7})$$

όπου

$$G = \frac{1}{2} \left[ \frac{d^2 F}{dc_1 dc_1} \Big|_{\bar{c}} (c_1 - \bar{c}_1)^2 + 2 \frac{d^2 F}{dc_1 dc_2} \Big|_{\bar{c}} (c_1 - \bar{c}_1)(c_2 - \bar{c}_2) + \dots \right. \\ \left. + 2 \frac{d^2 F}{dc_{M-1} dc_M} \Big|_{\bar{c}} (c_{M-1} - \bar{c}_{M-1})(c_M - \bar{c}_M) + \frac{d^2 F}{dc_M dc_M} \Big|_{\bar{c}} (c_M - \bar{c}_M)^2 \right]$$

Εφόσον όλες οι παράγωγοι αναφέρονται στο σημείο  $\bar{c}$ , για απλοποίηση των σχέσεων που ακολουθούν ο δείκτης  $\bar{c}$  θα παραλείπεται.

Χρησιμοποιώντας τις (Ε'.1) και (Ε'.3), αποδεικνύεται εύκολα ότι

$$\mu_1 = F|_{\bar{c}}, \quad \mu_2 = 0 \quad (\text{Ε'.8})$$

Ο όρος  $\mu_3$  αναλύεται σε δύο μέρη, πρώτα στο άθροισμα των διαγωνίων όρων του Εσσιανού μητρώου και έπειτα στο άθροισμα όλων των μη-διαγωνίων, δηλαδή

$$\mu_3 = \mu_{3d} + \mu_{3o} \quad (\text{Ε'.9})$$

με

$$\mu_{3d} = \frac{1}{2} \int_{c_1} \int_{c_2} \dots \int_{c_M} \left[ \frac{d^2 F}{dc_1 dc_1} (c_1 - \bar{c}_1)^2 + \dots + \frac{d^2 F}{dc_M dc_M} (c_M - \bar{c}_M)^2 \right] g(c_1) \dots g(c_M) dc_1 \dots dc_M \quad (\text{Ε'.10})$$

$$\mu_{3o} = \frac{1}{2} \int_{c_1} \int_{c_2} \dots \int_{c_M} \left[ 2 \frac{d^2 F}{dc_1 dc_2} (c_1 - \bar{c}_1)(c_2 - \bar{c}_2) + \dots \right. \\ \left. + 2 \frac{d^2 F}{dc_{M-1} dc_M} (c_{M-1} - \bar{c}_{M-1})(c_M - \bar{c}_M) \right] g(c_1) \dots g(c_M) dc_1 \dots dc_M \quad (\text{Ε'.11})$$

Παρατηρώντας τον  $k$  όρο του  $\mu_{3d}$ , αποδεικνύεται, χωρίς να εννοείται άθροιση κατά  $k$ , ότι

$$\frac{1}{2} \int_{c_1} \dots \int_{c_k} \dots \int_{c_M} \frac{d^2 F}{dc_k dc_k} (c_k - \bar{c}_k)^2 g(c_1) \dots g(c_k) \dots g(c_M) dc_1 \dots dc_k \dots dc_M \\ = \frac{1}{2} \int_{c_1} g(c_1) dc_1 \dots \int_{c_k} \frac{d^2 F}{dc_k dc_k} (c_k - \bar{c}_k)^2 g(c_k) dc_k \dots \int_{c_M} g(c_M) dc_M \\ = \frac{1}{2} \int_{c_k} \frac{d^2 F}{dc_k dc_k} (c_k - \bar{c}_k)^2 g(c_k) dc_k = \frac{1}{2} \frac{d^2 F}{dc_k dc_k} \sigma_k^2 \quad (\text{Ε'.12})$$

και, αθροίζοντας όλους τους όρους του  $\mu_{3d}$ , προκύπτει

$$\mu_{3d} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M \frac{d^2 F}{dc_i^2} \sigma_i^2 \quad (\text{E'.13})$$

Μελετώντας τον  $(k, l)$  όρο του  $\mu_{3o}$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{c_1} \dots \int_{c_k} \int_{c_l} \dots \int_{c_M} \frac{d^2 F}{dc_k dc_l} (c_k - \bar{c}_k)(c_l - \bar{c}_l) g(c_1) \dots g(c_k) g(c_l) \dots g(c_M) dc_1 \dots dc_k dc_l \dots dc_M \\ &= \frac{1}{2} \frac{d^2 F}{dc_k dc_l} \int_{c_1} g(c_1) dc_1 \dots \int_{c_k} \int_{c_l} (c_k - \bar{c}_k)(c_l - \bar{c}_l) g(c_k) g(c_l) dc_k dc_l \dots \int_{c_M} g(c_M) dc_M \\ &= \frac{1}{2} \frac{d^2 F}{dc_k dc_l} \int_{c_k} (c_k - \bar{c}_k) g(c_k) dc_k \int_{c_l} (c_l - \bar{c}_l) g(c_l) dc_l = 0 \end{aligned} \quad (\text{E'.14})$$

συμπεραίνεται ότι  $\mu_{3o} = 0$ , και

$$\mu_3 = \mu_{3d} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M \frac{d^2 F}{dc_i^2} \sigma_i^2 \quad (\text{E'.15})$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις (E'.7), (E'.8) και (E'.15), προκύπτει η τελική έκφραση 2ης τάξεως για τη  $\mu_F$

$$\mu_F = F|_{\bar{\mathbf{c}}} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M \frac{d^2 F}{dc_i^2} \Big|_{\bar{\mathbf{c}}} \sigma_i^2 \quad (\text{E'.16})$$

### E'.1.3 Διακύμανση Αντικειμενικής Συνάρτησης

Η διακύμανση (ή διασπορά) μίας αντικειμενικής συνάρτησης  $F$  συναρτήσει των περιβαλλοντικών μεταβλητών  $\mathbf{c}$  ενός προβλήματος αεροδυναμικά στιβαρού σχεδιασμού-βελτιστοποίησης, δίνεται από την

$$\sigma_F^2(\mathbf{c}) = \int (F - \mu_F)^2 g(\mathbf{c}) d\mathbf{c} \quad (\text{E'.17})$$

Αντικαθιστώντας τη μέση τιμή από την (Ε'.16), και μετά από μία αναδιάταξη, η (Ε'.17) γράφεται

$$\begin{aligned}
\sigma_F^2 &= \underbrace{\int \left[ \sum_{i=1}^M \frac{dF}{dc_i} (c_i - \bar{c}_i) \right]^2 g(\mathbf{c}) d\mathbf{c}}_{\sigma_1} \\
&+ \underbrace{\int \left[ \sum_{k=1}^M \frac{dF}{dc_k} (c_k - \bar{c}_k) \right] \left[ \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \frac{d^2 F}{dc_i dc_j} (c_i - \bar{c}_i)(c_j - \bar{c}_j) \right] g(\mathbf{c}) d\mathbf{c}}_{\sigma_2} \\
&+ \underbrace{\frac{1}{4} \int \left[ \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \frac{d^2 F}{dc_i dc_j} (c_i - \bar{c}_i)(c_j - \bar{c}_j) \right]^2 g(\mathbf{c}) d\mathbf{c}}_{\sigma_3} \\
&- \underbrace{\int \left[ \sum_{k=1}^M \frac{dF}{dc_k} (c_k - \bar{c}_k) \right] \left[ \sum_{i=1}^M \frac{d^2 F}{dc_i^2} \sigma_i^2 \right] g(\mathbf{c}) d\mathbf{c}}_{\sigma_4} \\
&- \underbrace{\frac{1}{2} \int \left[ \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \frac{d^2 F}{dc_i dc_j} (c_i - \bar{c}_i)(c_j - \bar{c}_j) \right] \left[ \sum_{k=1}^M \frac{d^2 F}{dc_k^2} \sigma_k^2 \right] g(\mathbf{c}) d\mathbf{c}}_{\sigma_5} \\
&+ \underbrace{\frac{1}{4} \int \left[ \sum_{i=1}^M \frac{d^2 F}{dc_i^2} \sigma_i^2 \right]^2 g(\mathbf{c}) d\mathbf{c}}_{\sigma_6} \tag{Ε'.18}
\end{aligned}$$

Ο πρώτος όρος αναλύεται ως

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= \int \left[ \sum_{i=1}^M \frac{dF}{dc_i} (c_i - \bar{c}_i) \right] \left[ \sum_{j=1}^M \frac{dF}{dc_j} (c_j - \bar{c}_j) \right] g(\mathbf{c}) d\mathbf{c} \\
&= \int \left[ \left( \frac{dF}{dc_1} \right)^2 (c_1 - \bar{c}_1)^2 + \left( \frac{dF}{dc_2} \right)^2 (c_2 - \bar{c}_2)^2 + \dots \right] g(\mathbf{c}) d\mathbf{c} \\
&= \sum_{i=1}^M \left[ \frac{dF}{dc_i} \right]^2 \sigma_i^2 \tag{Ε'.19}
\end{aligned}$$

δεδομένου ότι όλοι οι μη-τετραγωνικοί όροι μηδενίζονται λόγω της (Ε'.1).

Ο δεύτερος όρος γράφεται

$$\begin{aligned}
\sigma_2 &= \int \left[ \sum_{k=1}^M \frac{dF}{dc_k} (c_k - \bar{c}_k) \right] \left[ \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \frac{d^2 F}{dc_i dc_j} (c_i - \bar{c}_i)(c_j - \bar{c}_j) \right] g(\mathbf{c}) d\mathbf{c} \\
&= \int \left\{ \left[ \frac{dF}{dc_1} (c_1 - \bar{c}_1) + \frac{dF}{dc_2} (c_2 - \bar{c}_2) + \dots \right] \right. \\
&\quad \left. \left[ \frac{d^2 F}{dc_1 dc_1} (c_1 - \bar{c}_1)^2 + 2 \frac{d^2 F}{dc_1 dc_2} (c_1 - \bar{c}_1)(c_2 - \bar{c}_2) + \dots \right] \right\} g(\mathbf{c}) d\mathbf{c} \\
&= \sum_{i=1}^M \frac{dF}{dc_i} \frac{d^2 F}{dc_i^2} \gamma_i \tag{E'.20}
\end{aligned}$$

εφόσον όλοι οι πρώτης-τάξεως όροι  $(\int (c_i - \bar{c}_i) g(c_i) dc_i)$  είναι μηδενικοί.

Σχετικά με τον τρίτο όρο, είναι

$$\begin{aligned}
\sigma_3 &= \frac{1}{4} \int \left[ \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \frac{d^2 F}{dc_i dc_j} (c_i - \bar{c}_i)(c_j - \bar{c}_j) \right]^2 g(\mathbf{c}) d\mathbf{c} \\
&= \frac{1}{4} \int \left\{ \left( \frac{d^2 F}{dc_1 dc_1} (c_1 - \bar{c}_1)^2 + 2 \frac{d^2 F}{dc_1 dc_2} (c_1 - \bar{c}_1)(c_2 - \bar{c}_2) \dots \right) \right. \\
&\quad \left. \left( \frac{d^2 F}{dc_1 dc_1} (c_1 - \bar{c}_1)^2 + 2 \frac{d^2 F}{dc_1 dc_2} (c_1 - \bar{c}_1)(c_2 - \bar{c}_2) \dots \right) \right\} g(\mathbf{c}) d\mathbf{c} \\
&= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^M \left[ \frac{d^2 F}{dc_i^2} \right]^2 k_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1, j \neq i}^M \left[ \frac{d^2 F}{dc_i dc_j} \right]^2 \sigma_i^2 \sigma_j^2 \\
&\quad + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1, j \neq i}^M \left[ \frac{d^2 F}{dc_i^2} \right]^2 \sigma_i^2 \left[ \frac{d^2 F}{dc_j^2} \right]^2 \sigma_j^2 \tag{E'.21}
\end{aligned}$$

Ο τέταρτος όρος ισούται με μηδέν, αφού

$$\begin{aligned}
\sigma_4 &= - \int \left[ \sum_{k=1}^M \frac{dF}{dc_k} (c_k - \bar{c}_k) \right] \left[ \sum_{i=1}^M \frac{d^2 F}{dc_i^2} \sigma_i^2 \right] g(\mathbf{c}) d\mathbf{c} \\
&= - \sum_{i=1}^M \frac{d^2 F}{dc_i^2} \sigma_i^2 \int \left[ \sum_{k=1}^M \frac{dF}{dc_k} (c_k - \bar{c}_k) \right] g(\mathbf{c}) d\mathbf{c} = 0 \tag{E'.22}
\end{aligned}$$



Η ανάλυση του πέμπτου όρου δίνει

$$\begin{aligned}
\sigma_5 &= -\frac{1}{2} \int \left[ \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \frac{d^2 F}{dc_i dc_j} (c_i - \bar{c}_i)(c_j - \bar{c}_j) \right] \left[ \sum_{k=1}^M \frac{d^2 F}{dc_k^2} \sigma_k^2 \right] g(\mathbf{c}) d\mathbf{c} \\
&= -\frac{1}{2} \left[ \sum_{k=1}^M \frac{d^2 F}{dc_k^2} \sigma_k^2 \right] \int \left[ \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \frac{d^2 F}{dc_i dc_j} (c_i - \bar{c}_i)(c_j - \bar{c}_j) \right] g(\mathbf{c}) d\mathbf{c} \\
&= -\frac{1}{2} \left[ \sum_{k=1}^M \frac{d^2 F}{dc_k^2} \sigma_k^2 \right] \left[ \sum_{k=1}^M \frac{d^2 F}{dc_k^2} \sigma_k^2 \right] \quad (\text{E'.23})
\end{aligned}$$

Η τελευταία ισότητα της (E'.23) αποδεικνύεται κατά την ανάλυση του  $\mu_3$  στο κεφάλαιο E'.1.2

Τέλος, ο έκτος όρος γράφεται

$$\sigma_6 = \frac{1}{4} \int \left[ \sum_{i=1}^M \frac{d^2 F}{dc_i^2} \sigma_i^2 \right]^2 g(\mathbf{c}) d\mathbf{c} = \frac{1}{4} \left[ \sum_{i=1}^M \frac{d^2 F}{dc_i^2} \sigma_i^2 \right] \left[ \sum_{i=1}^M \frac{d^2 F}{dc_i^2} \sigma_i^2 \right] \quad (\text{E'.24})$$

Το άθροισμα των δύο τελευταίων όρων, πέμπτου και έκτου, δίνει

$$\begin{aligned}
\sigma_{56} &= \sigma_5 + \sigma_6 = -\frac{1}{4} \left[ \sum_{i=1}^M \frac{d^2 F}{dc_i^2} \sigma_i^2 \right] \left[ \sum_{i=1}^M \frac{d^2 F}{dc_i^2} \sigma_i^2 \right] \\
&= -\frac{1}{4} \sum_{i=1}^M \left[ \frac{d^2 F}{dc_i^2} \sigma_i^2 \right]^2 - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1, j \neq i}^M \left[ \frac{d^2 F}{dc_i^2} \right]^2 \sigma_i^2 \left[ \frac{d^2 F}{dc_j^2} \right]^2 \sigma_j^2 \quad (\text{E'.25})
\end{aligned}$$

Εκμεταλλεύοντας τις σχέσεις E'.18 έως και E'.25, η διακύμανση γράφεται με την εξής γενική έκφραση

$$\begin{aligned}
\sigma_F^2 &= \sum_{i=1}^M \left[ \frac{dF}{dc_i} \right]^2 \sigma_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \left[ \frac{d^2 F}{dc_i dc_j} \right]^2 \sigma_i^2 \sigma_j^2 \\
&\quad + \sum_{i=1}^M \frac{dF}{dc_i} \frac{d^2 F}{dc_i^2} \gamma_i + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^M \left[ \frac{d^2 F}{dc_i^2} \right]^2 (k_i - 3\sigma_i^4) \quad (\text{E'.26})
\end{aligned}$$

Η (E'.26) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό του  $\sigma_F^2$  για οποιοδήποτε είδος κατανομή των  $\mathbf{c}$ , εφόσον οι εώς και τετάρτου βαθμού στατιστικές ροπές των  $c_i, i \in [1, M]$  υπάρχουν και είναι πραγματικοί αριθμοί. Αν επιπλέον οι μεταβλητές  $\mathbf{c}$

κατανέμονται κανονικά, η Εξίσωση (Ε'.26) απλοποιείται στην

$$\sigma_F^2 = \sum_{i=1}^M \left[ \frac{dF}{dc_i} \right]^2 \sigma_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \left[ \frac{d^2 F}{dc_i dc_j} \right]^2 \sigma_i^2 \sigma_j^2 \quad (\text{Ε'.27})$$

δεδομένου ότι ισχύουν οι ιδιότητες (Ε'.4) και (Ε'.5).

### Ε'.1.4 Παράγωγοι Ευαισθησίας Αντικειμενικής Συνάρτησης

Σε προβλήματα αεροδυναμικά στιβαρού σχεδιασμού-βελτιστοποίησης, αναζητούνται οι παράγωγοι ευαισθησίας της  $\hat{F}$  ως προς τις μεταβλητές γεωμετρίας  $b_l$ ,  $l = 1, \dots, N$ , οι οποίες υπολογίζονται από την έκφραση (1.1) της μετρικής αεροδυναμικής στιβαρότητας ως εξής

$$\frac{d\hat{F}}{db_l} = \frac{d\mu_F}{db_l} + k \frac{d\sigma_F}{db_l}$$

από όπου, με αντικατάσταση των (Ε'.16) και (Ε'.27) προκύπτει

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{F}}{db_l} &= \frac{d}{db_l} \left( F + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M \frac{d^2 F}{dc_i^2} \sigma_i^2 \right) + k \frac{d}{db_l} \sqrt{\sum_{i=1}^M \left[ \frac{dF}{dc_i} \right]^2 \sigma_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \left[ \frac{d^2 F}{dc_i dc_j} \right]^2 \sigma_i^2 \sigma_j^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{d\hat{F}}{db_l} = \frac{dF}{db_l} + \frac{1}{2} \frac{d}{db_l} \sum_{i=1}^M \frac{d^2 F}{dc_i^2} \sigma_i^2 + k \frac{\frac{d}{db_l} \sum_{i=1}^M \left[ \frac{dF}{dc_i} \right]^2 \sigma_i^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{db_l} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \left[ \frac{d^2 F}{dc_i dc_j} \right]^2 \sigma_i^2 \sigma_j^2}{2 \sqrt{\sum_{i=1}^M \left[ \frac{dF}{dc_i} \right]^2 \sigma_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \left[ \frac{d^2 F}{dc_i dc_j} \right]^2 \sigma_i^2 \sigma_j^2}} \end{aligned}$$

Υιοθετώντας τον συμβολισμό του Einstein, κατά τον οποίο γινόμενο μεγεθών με κοινό δείκτη δηλώνει άθροισμα, η παραπάνω σχέση γράφεται πιο απλά

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{F}}{db_l} &= \frac{dF}{db_l} + \frac{1}{2} \frac{d}{db_l} \frac{d^2 F}{dc_i^2} \sigma_i^2 + k \frac{\frac{d}{db_l} \left[ \frac{dF}{dc_i} \right]^2 \sigma_i^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{db_l} \left[ \frac{d^2 F}{dc_i dc_j} \right]^2 \sigma_i^2 \sigma_j^2}{2 \sqrt{\left[ \frac{dF}{dc_i} \right]^2 \sigma_i^2 + \frac{1}{2} \left[ \frac{d^2 F}{dc_i dc_j} \right]^2 \sigma_i^2 \sigma_j^2}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{d\hat{F}}{db_l} = \frac{dF}{db_l} + \frac{1}{2} \frac{d^3 F}{dc_i^2 db_l} \sigma_i^2 + k \frac{2 \frac{dF}{dc_i} \frac{d^2 F}{dc_i db_l} \sigma_i^2 + \frac{d^2 F}{dc_i dc_j} \frac{d^3 F}{dc_i dc_j db_l} \sigma_i^2 \sigma_j^2}{2 \sqrt{\left[ \frac{dF}{dc_i} \right]^2 \sigma_i^2 + \frac{1}{2} \left[ \frac{d^2 F}{dc_i dc_j} \right]^2 \sigma_i^2 \sigma_j^2}} \end{aligned}$$

η οποία ταυτίζεται με την (1.5)

Στο παράρτημα αυτό, όλες οι σχέσεις εύρεσης της μέσης τιμής, της τυπικής απόκλισης, και των παραγώγων ευαισθησίας της αντικειμενικής συνάρτησης  $F$  αποδείχθηκαν χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα Taylor δευτέρου βαθμού γύρω από την τιμή  $\bar{c}$ . Οι αντίστοιχες σχέσεις με ακρίβεια πρώτου βαθμού μπορούν να βρεθούν ακολουθώντας την ίδια διαδικασία, αλλά αμελώντας τους όρους δεύτερης τάξεως του αναπτύγματος.



## Βιβλιογραφία

- [1] Γιαννάκογλου, Κ. Χ.: *Μέθοδοι Βελτιστοποίησης στην Αεροδυναμική*. Ε.Μ.Π., 2006.
- [2] Ashlock, D.: *Evolutionary Computation for Modeling and Optimization*. Springer, 2006.
- [3] Bäck, T.: *Evolutionary Algorithms in Theory and Practice: Evolution Strategies, Evolutionary Programming, Genetic Algorithms*. Oxford University Press, 1996.
- [4] XinJiang Lu and Han-Xiong Li: *Perturbation Theory Based Robust Design Under Model Uncertainty*. Journal of Mechanical Design, 131(11), 2009.
- [5] Hamarat, C., Kwakkel, J.H. and Pruyt, E.: *Adaptive Robust Design under deep uncertainty*. Journal of Technological Forecasting and Social Change, 80(3):408–418, 2013.
- [6] Zein, Samih: *A polynomial chaos expansion trust region method for robust optimization*. Communications in Computational Physics, 14(2):412–424, 2013.
- [7] Martinelli, M. and Duvigneau, D.I.: *Comparison of second-order derivatives and metamodel-based Monte-Carlo approaches to estimate statistics for robust design of a transonic wing*. 49th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, 2008.
- [8] Tennant, Geoff: *Six Sigma: SPC and TQM in Manufacturing Services*. Gower Publishing, Ltd., 2001.

- [9] Shimoyama, K., Oyama, A. and Fujii, K.: *Development of Multi-Objective Six Sigma Approach for Robust Design Optimization*. Journal of Aerospace Computing, Information, and Communication, 5(8):215–233, 2008.
- [10] Μυραλίδη, Ι. Χ.: *Η διακριτή και η συνεχής συζυγής μέθοδος για τον υπολογισμό πρώτων και δεύτερων παραγώγων ευαισθησίας. Εφαρμογές στον αντίστροφο σχεδιασμό αγωγού*. Διπλωματική Εργασία. Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών, Ε.Μ.Π., 2008.
- [11] Asmussen, S. and Glynn, P. W.: *Stochastic Simulation: Algorithms and Analysis*. Springer, 2007.
- [12] Morokoff, W. and Caflisch, R.: *Quasi-Monte Carlo integration*. Journal of Computational Physics, 122(2):218–230, 1995.
- [13] McKay, M.D., Beckman, R.J. and Conover, W.J.: *A Comparison of Three Methods for Selecting Values of Input Variables in the Analysis of Output from a Computer Code*. Technometrics (JSTOR Abstract) (American Statistical Association), 21(2):239–245, May 1979.
- [14] Iman, R.L., Helton, J.C. and Campbell, J.E.: *An approach to sensitivity analysis of computer models, Part 1. Introduction, input variable selection and preliminary variable assessment*. Journal of Quality Technology, 13(3):174–183, 1981.
- [15] Dick, J. and Pillichshammer, F.: *Digital Nets and Sequences. Discrepancy Theory and Quasi-Monte Carlo Integration*. Cambridge University Press, Cambridge, 2010.
- [16] Bowman, K. O. and Shenton, L. R.: *Estimator: Method of Moments*. Encyclopedia of statistical sciences, Wiley, pages 2092–2098, 1998.
- [17] Παπουτσής-Κιαχαγιάς, Ε.: *Συζυγείς μέθοδοι χαμηλού υπολογιστικού κόστους για τυρβώδεις ροές, στην αεροδυναμική βελτιστοποίηση*. Διδακτορική διατριβή, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2013.

- [18] Παπουτσής-Κιαχαγιάς, Ε.: *Συζυγείς μέθοδοι για το στιβαρό σχεδιασμό αεροδυναμικών μορφών με υπολογισμό τρίτων παραγώγων. Εφαρμογή σε μονοδιάστατους αγωγούς. Διπλωματική Εργασία. Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., 2009.*
- [19] Wiener, W.: *The homogeneous chaos.* American Journal of Mathematics, 60(4):897–926, 1938.
- [20] Xiu, D. and Karniadakis, G. E.: *The Wiener-Askey polynomial chaos for stochastic differential equations.* SIAM Journal on Scientific Computing, 24(2):619–644, 2002.
- [21] Askey, W. and Wilson, J.: *Some basic hypergeometric polynomials that generalize Jacobi polynomials.* Memoirs of the American Mathematical Society, AMS, Providence, RI, page 319, 1985.
- [22] Shankaran, Sriram and Jameson, A.: *Robust Optimal Control using Polynomial Chaos and Adjoint for Systems with Uncertain Inputs.* 20th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference, 2011.
- [23] Eldred, M. S. and Burkardt, J.: *Comparison of Non-Intrusive Polynomial Chaos and Stochastic Collocation Methods for Uncertainty Quantification.* American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2009.
- [24] Judd, K. L., Maliar, L., Maliar, S. and Valero, R.: *Smolyak method for solving dynamic economic models: Lagrange interpolation, anisotropic grid and adaptive domain.* Journal of Economic Dynamics & Control, 44:92–123, 2014.
- [25] Xiu, D. and Hesthaven, J. S.: *High-order collocation methods for differential equations with random inputs.* SIAM Journal on Scientific Computing, 27(3):1118–1139, 2005.
- [26] Poles, S. and Lovinson, A.: *A Polynomial Chaos Approach to Robust Multiobjective Optimization.* Hybrid and Robust Approaches to Multiobjective Optimization, 2009.

- [27] Dodson, M. and Parks, G.T.: *Robust aerodynamic Design Optimization Using Polynomial-Chaos*. Journal of Aircraft, 46(2):635–646, 2009.
- [28] Xiu, D.: *fast Numerical Methods for Stochastic Computations. A Review*. Communications in Computational Physics, 5(2–4):242–272644, 2009.
- [29] Cameron, R. H. and Martin, W. T.: *The orthogonal development of nonlinear functionals in series of Fourier-Hermite functionals*. Annals of Mathematics, 48(2):385–392, 1947.
- [30] Γιαννόκογλου, Κ. Χ.: *Αριθμητική Ανάλυση για Μηχανικούς*. Ε.Μ.Π., 2003.
- [31] Golub, G. H. and Welsch, J. H.: *Calculation of Gauss Quadrature Rules*. Mathematics of Computation, 23:221–230, 1969.
- [32] Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T. and Flannery, B. P.: *Numerical Recipes in Fortran 77: The Art of Scientific Programming, Second Edition*. Press Syndicate of the University of Cambridge, 1992.
- [33] Hildebrand, F. B.: *Introduction to Numerical Analysis*. Gordon and Breach, 1956.
- [34] Chihara, T. S.: *An introduction to orthogonal polynomials*. New York: McGraw-Hill, 1978.
- [35] Anderson, I.: *Combinatorics of Finite Sets*. Clarendon Press, 1987.
- [36] Blizard, W. D.: *Multiset theory*. Notre Dame Journal of Formal Logic, 30(1):36–66, 1989.
- [37] Καψούλης, Δ.: *Σχεδιασμός Πειραμάτων και Εξωτερικά Μεταπρότυπα για την Υποβοήθηση της Διαδικασίας Βελτιστοποίησης με Εξελικτικούς Αλγορίθμους*. Διπλωματική Εργασία. Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών, Ε.Μ.Π., 2014.
- [38] Montgomery, D. C.: *Design and Analysis of Experiments, 5th edition*. John Wiley & Sons, 2008.



- [39] Ueberhuber, C. W.: *Numerical Computation 2: Methods, Software, and Analysis*. Springer-Verlag, Berlin, 1997.
- [40] Krommer, A. R. and Ueberhuber, C. W.: *Computational Integration. Construction of Cubature Formulas*. Philadelphia, PA: SIAM, 1998.
- [41] Bellman, R.: *Dynamic Programming*. Princeton University Press, 1957.
- [42] *An interactive visualization to teach about the curse of dimensionality, webpage.* <http://simplystatistics.org/2014/10/24/an-interactive-visualization-to-teach-about-the-curse-of-dimensionality/>.
- [43] *Sparse Grids for Sandia, webpage.* [http://people.sc.fsu.edu/~jburkardt/m\\_src/sandia\\_sparse/sandia\\_sparse.html](http://people.sc.fsu.edu/~jburkardt/m_src/sandia_sparse/sandia_sparse.html).
- [44] Li, H. and Zhang, D.: *Probabilistic collocation method for flow in porous media: Comparisons with other stochastic methods*. Water Resources Research, 43:44–48, 2009.
- [45] Ασούτη, Β.: *Μέθοδοι αεροδυναμικής ανάλυσης και σχεδιασμού για ροές υψηλών και χαμηλών ταχυτήτων, σε πολυεπεξεργαστικό περιβάλλον. Διδακτορική διατριβή, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2009.*
- [46] Τρομπούκης, Ξ.: *Αριθμητική επίλυση προβλημάτων αεροδυναμικής-αεροελαστικότητας σε επεξεργαστές καρτών γραφικών. Διδακτορική διατριβή, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2012.*
- [47] Spalart, P. and Allmaras, S.: *A one-equation turbulence model for aerodynamic flows*. AIAA Paper 1992-439, 30th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Reno, Nevada, USA, January 6–9 1992.
- [48] *Evolutionary Algorithm System (EASY), webpage.* <http://147.102.55.162/EASY/>.
- [49] Karakasis, M. K., Giotis, A. P. and Giannakoglou, K. C.: *Inexact Information Aided, Low-cost, Distributed Genetic Algorithms for Aerodynamic Shape Opti-*

- misation*. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 43:1149–1166, 2003.
- [50] Ντούρος, Ι.: *Ανάπτυξη ολοκληρωμένης μεθοδολογίας για την εκτίμηση της επιβάρυνσης της αστικής ποιότητας αέρα από αιωρούμενα σωματίδια*. Διδακτορική διατριβή, Εργαστήριο Μετάδοσης Θερμότητας και Περιβαλλοντικής Μηχανικής, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο, Θεσσαλονίκη, 2012.
- [51] Wackernagel, H.: *Multivariate Geostatistics, An Introduction With Applications, Second*. volume 106. Springer, Berlin, 1998.
- [52] Ditlevsen, O. and Madsen, H. O.: *Structural Reliability Method*. John Wiley and Sons, New York, 1992.
- [53] Xiu, D. and Karniadakis, G. E.: *Modeling uncertainty in flow simulations via generalized polynomial chaos*. Journal of Computational Physics, 187:137–167, 2003.
- [54] Wan, X. and Karniadakis, G. E.: *Multi-element generalized polynomial chaos for arbitrary probability measures*. SIAM Journal of Scientific Computing, 28(3):901–928, 2006.
- [55] Wan, X. and Karniadakis, G. E.: *Error control in multi-element generalized polynomial chaos method for elliptic problems with random coefficients*. Communication in Computational Physics, 5:793–820, 2009.
- [56] Prempraneerach, P., Hover, F.S., Triantafyllou, M. S. and Karniadakis, G. E.: *Uncertainty quantification in simulations of power systems: Multielement polynomial chaos methods*. Reliability Engineering and System Safety, 95, 2010.
- [57] Pearson, K.: *On Lines and Planes of Closest Fit to Systems of Points in Space*. Philosophical Magazine, 2(6):559–572, 1901.
- [58] Lumley, J. L.: *The structure of inhomogeneous turbulent flows*. In Atmospheric Turbulence and Wave Propagation, ed. A. M. Yaglom, V. I. Tatarski, pages 166–178, 1967.

- [59] Oladyshkin, S. and Nowak, W.: *Data-driven uncertainty quantification using the arbitrary polynomial chaos expansion*. Reliability Engineering and System Safety , 106:179–190, 2012.
- [60] Box, G. E. P. and Muller, M. E.: *A note on the generation of random normal deviates*. Annals of Mathematical Statistics, 29(2):610–611, 1958.
- [61] Andrews, L. C.: *Special Functions of Mathematics for Engineers*. SPIE Press, 1992.
- [62] Cramer, D.: *Fundamental Statistics for Social Research: Step-by-Step Calculations and Computer Techniques Using SPSS for Windows*. Routledge, 1997.

