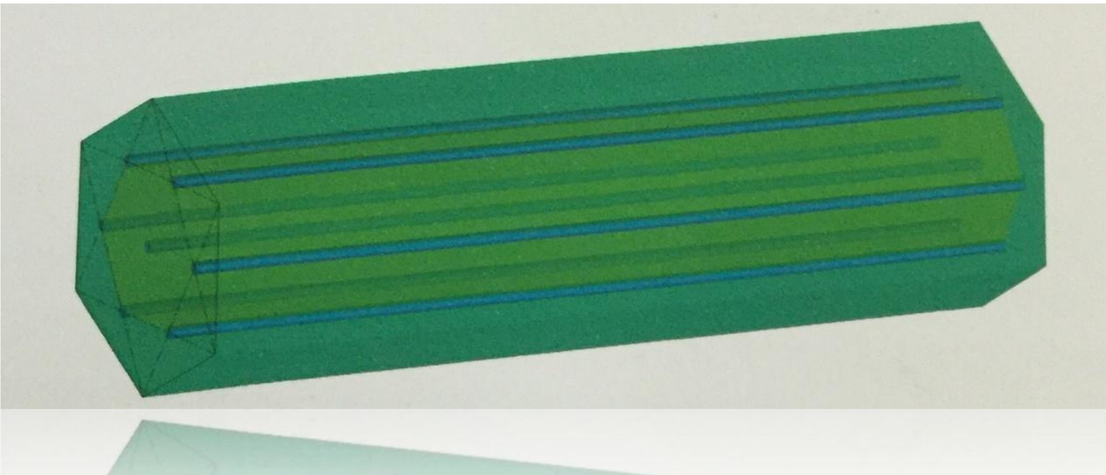
ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ Σ.Ε.Μ.Φ.Ε

<u>ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ</u>

ΜΕΛΕΤΗ ΤΩΝ ΘΕΡΜΟΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΕΛΑΣΤΙΚΩΝ ΣΤΑΘΕΡΩΝ ΙΝΩΔΩΝ ΥΛΙΚΩΝ ΜΕΣΩ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΕΝΔΙΑΜΕΣΟΥ ΦΑΣΕΩΣ



ΒΓΟΝΤΖΑΣ ΙΩΑΝΝΗΣ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΑΙΜ.ΣΙΔΕΡΙΔΗΣ

ΕΠΙΚΟΥΡΟΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ Ε.Μ.Π

ΑΘΗΝΑ 2015

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να εκφράσω τις ευχαριστίες μου σε όλους εκείνους που με βοήθησαν και με στήριξαν καθ' όλη τη διάρκεια της παρούσας προπτυχιακής εργασίας, συμβάλλοντας στην επιτυχή ολοκλήρωση της.

Ιδιαίτερες ευχαριστίες στον επιβλέποντα καθηγητή της διπλωματικής μου εργασίας κ. Αιμίλιο Σιδερίδη, Επίκουρο Καθηγητή ΕΜΠ, για την επιστημονική του καθοδήγηση, την αμέριστη συμπαράσταση του αλλά και για όλες τις γνώσεις που έλαβα από τον ίδιο κατά τη διάρκεια εκπόνησης της παρούσας εργασίας.

Ολόψυχες ευχαριστίες στην οικογένεια μου, στην μητέρα μου, στη κοπέλα μου για την στήριξη, εμπιστοσύνη και κατανόηση που έδειξαν και συνεχίζουν να δείχνουν στις προσπάθειες μου.

Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ. Δημήτρη που δε βρίσκεται σήμερα κοντά μας αλλά σίγουρα μας προσέχει από εκεί ψηλά.

Με τιμή,
Ιωάννης Βγόντζας
Αθήνα, Οκτώβριος 2015

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Σε αυτή τη προπτυχιακή εργασία, αναπτύχθηκαν θεωρητικές εκφράσεις για την πρόβλεψη των ελαστικών σταθερών και θερμικών συντελεστών ενός ινώδους σύνθετου υλικού.

Για την ανάπτυξη του μοντέλου χρησιμοποιήθηκε η έννοια της ενδιαμέσου φάσεως ανάμεσα στις ίνες και τη μήτρα. Αυτό το μοντέλο θεωρεί ότι το σύνθετο υλικό αποτελείται από επτά φάσεις, δηλαδή, ίνα-ενδιάμεση φάση-μήτρα-ενδιάμεση φάση-ίνα-ενδιάμεση φάση-μήτρα. Η ενδιάμεση φάση είναι το τμήμα της πολυμερικής μήτρας που κείται κοντά στην επιφάνεια της ίνας. Στην παρούσα μελέτη θεωρούμε ότι η ενδιάμεση φάση είναι ανομοιογενής με συνεχώς μεταβαλλόμενες μηχανικές ιδιότητες.

Για τον προσδιορισμό των ελαστικών σταθερών, λόγου Poisson και των θερμικών συντελεστών του σύνθετου υλικού συνολικά ελήφθησαν υπόψη διαφορετικοί νόμοι μεταβολών.

Τα αποτελέσματα που εξήχθησαν συγκρίθηκαν με τις αντίστοιχες τιμές άλλων μοντέλων όπως επίσης και με πειραματικά δεδομένα.

ABSTRACT

Theoretical expressions for the prediction of the elastic moduli and thermal expansion coefficients in fiber-reinforced composites were developed. The concept of interphase between fibers and matrix was used for the development of the model. This model considers that the composite material consists of three phases, that is, fiber-interphase-matrix-interphase-fiber-interphase-matrix. The latter is the part of the polymer matrix lying at the close vicinity of the fiber surface. In the present investigation it was assumed that the interphase is inhomogeneous in nature with continuously varying mechanical properties. Different laws of variation of its elastic modulus, Poisson ratio and thermal expansion coefficients were taken into account in order to define the overall moduli of the composite. The results obtained were compared with the respective values of other models as well as with experimental data.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 ΟΡΙΣΜΟΣ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

Για ένα σύστημα ο όρος "σύνθετο υλικό" σημαίνει ότι τούτο αποτελείται από δύο ή περισσότερα διακριτά μέρη. Από γενική άποψη, λοιπόν, ένα υλικό αποτελούμενο από δύο ή περισσότερα διαφορετικά υλικά ή φάσεις, μπορεί να χαρακτηριστεί ως σύνθετο υλικό(composite material).

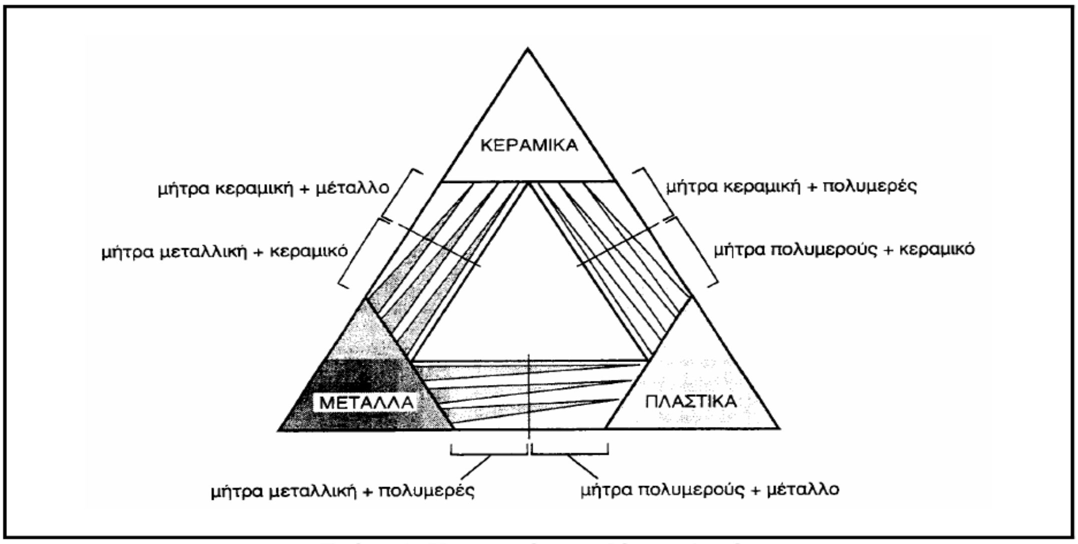
Πιο ειδικά, σήμερα, ως σύνθετα αναγνωρίζονται εκείνα τα υλικά, τα οποία συντίθενται από επιμέρους υλικά με σημαντικά διαφορετικές μηχανικές και φυσικές ιδιότητες μεταξύ τους, ενώ και το ίδιο το σύνθετο υλικό έχει επίσης σημαντικά διαφορετικές ιδιότητες από εκείνες των συστατικών του.

Για να καταταχθεί ένα υλικό στην κατηγορία των σύνθετων, θα ακολουθείται ο εξής κανόνας: Το υλικό πρέπει να προκύπτει ως συνδυασμός συστατικών μερών, στα οποία οι ιδιότητες του ενός από τα μέρη αυτά να είναι σημαντικά μεγαλύτερες από του άλλου (τουλάχιστον 5πλάσιες) και η κατ' όγκο περιεκτικότητα του ενός να μην είναι πολύ μικρή (> 10%).

ΟΡΙΣΜΟΣ (Agarwal-1990): Σύνθετα είναι τα υλικά, τα οποία μακροσκοπικά αποτελούνται από δύο ή περισσότερα χημικά ευδιάκριτα συστατικά μέρη που έχουν μια συγκεκριμένη διαχωριστική επιφάνεια μεταξύ τους.

Το ένα από τα συστατικά μέρη, χαρακτηρίζεται ως συστατικό ενίσχυσης και προσδίδει στο σύνθετο βελτιωμένες μηχανικές, κυρίως, ιδιότητες. Το δεύτερο συστατικό καλείται μήτρα, είναι συνήθως χαμηλής πυκνότητας και η συμμετοχή του στο σύνθετο εξασφαλίζει τη μέγιστη δυνατή εκμετάλλευση των ιδιοτήτων της ενίσχυσης.

Στο Σχ.1 παρουσιάζεται ο συνδυασμός ανά δύο των βασικών οικογενειών υλικών (μεταλλικά, πολυμερικά και κεραμικά υλικά) και οι ομάδες συνθέτων που προκύπτουν.



Σχήμα 1: Κατηγορίες συνθέτων υλικών

1.2 ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΕΞΕΛΙΞΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

Τα σύνθετα υλικά χρησιμοποιούνται ευρύτατα από τον άνθρωπο από αρχαιοτάτων χρόνων. Υλικά που εύκολα βρίσκουμε στη φύση (ξύλο, πέτρα, πηλός, κόκκαλα) χρησιμοποιήθηκαν ευρύτατα από τον άνθρωπο, ο οποίος σύντομα έμαθε να βελτιώνει τις ιδιότητες τους ενισχύοντας τα υλικά αυτά με πρόσθετα συστατικά.

Για παράδειγμα, οι Αιγύπτιοι (5000 π.Χ.) χρησιμοποιούσαν την τεχνική της ενίσχυσης τούβλων με πλέγμα άχυρων, με αποτέλεσμα τη μείωση των τάσεων συστολής που αναπτύσσονταν κατά την ξήρανση του πηλού. Επίσης, παρατήρησαν ότι οι πλάκες από πολύστρωτες βέργες ξύλου, παρουσίαζαν πολύ μεγαλύτερη αντοχή από το φυσικό ξύλο έναντι στρέβλωσης που οφειλόταν στην απορρόφηση υγρασίας.

Στη Μεσοποταμία (1000 π.Χ.) εφαρμόστηκε η τεχνική του βερνικώματος των τούβλων και των πλακιδίων με σκοπό τον περιορισμό της επιφανειακής φθοράς, ενώ, κατά τους Ρωμαϊκούς χρόνους, η οδοποιία στηρίχθηκε στην ενίσχυση του οδοστρώματος με τρίμματα κεραμιδιών.

Η χρήση της σιδηρόβεργας για προεντεταμένο σκυρόδεμα, που χρησιμοποιείται στις οικοδομές της σύγχρονης εποχής, δεν είναι παρά η μετεξέλιξη της τεχνικής της ανάμιξης γύψου με ζωικό τρίχωμα, η οποία ήταν μια πρακτική μέθοδος ενίσχυσης εύθραυστων υλικών κατασκευής στους αναπτυσσόμενους πολιτισμούς.

Το πρώτο συνθετικό υλικό βασισμένο σε μήτρα πλαστικού εμφανίστηκε τη δεκαετία του 1920 και επρόκειτο για μίγμα ινιδίων ξύλου με φαινολική φορμαλδεΰδη, γνωστό αργότερα ως βακελίτης προς τιμήν του Βέλγου επιστήμονα Leo Beaekeland.

Η ανάπτυξη των σύνθετων υλικών με ενίσχυση ινών κατά την διάρκεια των τελευταίων 30 ετών υπήρξε ραγδαία και συνδυάστηκε με την προηγηθείσα ανάπτυξη των υψηλής αντοχής ινών γυαλιού και των υψηλής δυσκαμψίας ινών βορίου (1960) και την έντονη τάση της αεροδιαστημικής βιομηχανίας για μεγαλύτερη απόδοση με παράλληλη μείωση βάρους αεροσκαφών και διαστημοπλοίων.

Το 1964 διατέθηκαν στην αγορά, αρχικά σε μικρές ποσότητες, οι ίνες άνθρακα (carbon fibers), οι οποίες τελευταία αποτελούν τις ευρύτερα χρησιμοποιούμενες ενισχύσεις στις αεροδιαστημικές κατασκευαστικές εφαρμογές.

Το 1971 διατέθηκαν στο εμπόριο οι ίνες αραμιδίου, οι οποίες τώρα χρησιμοποιούνται ευρύτατα στα ελαστικά αυτοκινήτων, καθώς και σε αρκετές αεροδιαστημικές και ναυπηγικές κατασκευές.

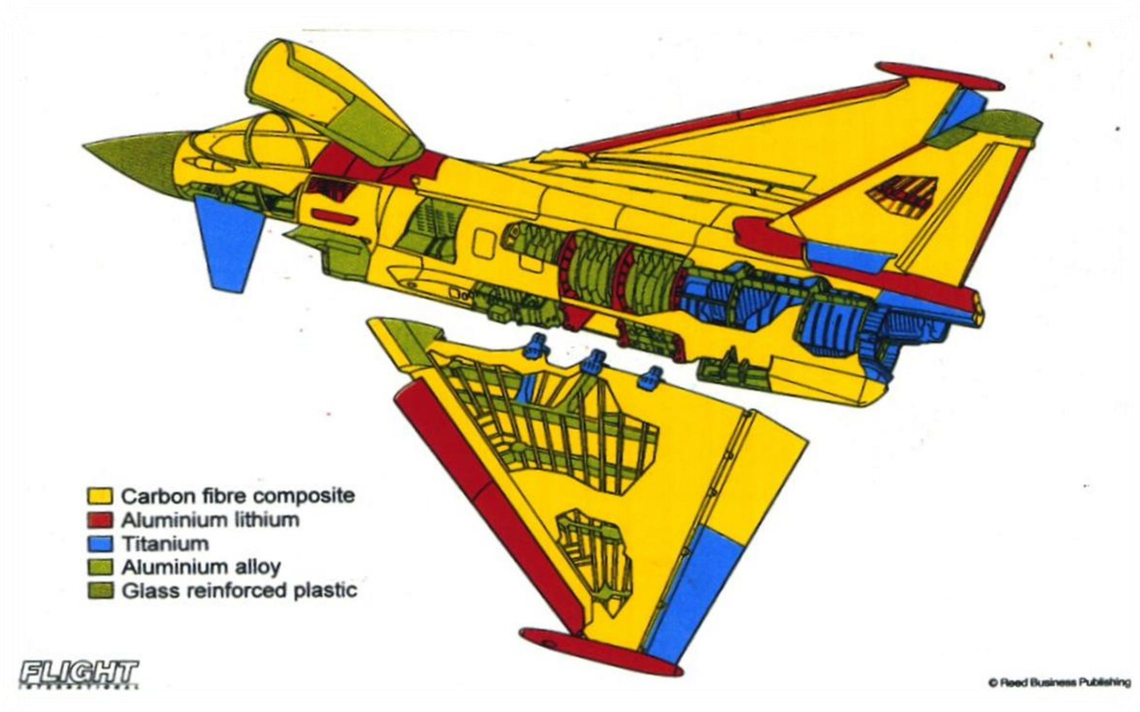
Η ειδική αντοχή (λόγος αντοχής προς πυκνότητα) και η ειδική δυσκαμψία (λόγος δυσκαμψίας προς πυκνότητα) των ενισχυτικών ινών βαίνουν συνεχώς αυξανόμενες τα τελευταία 30 χρόνια, π.χ. η ειδική αντοχή και η ειδική δυσκαμψία των ινών γυαλιού, άνθρακα, αραδιμίου και βορίου έχουν φτάσει στο 10-14πλάσιο των αντίστοιχων τιμών του αλουμινίου (ελαφρό μέταλλο).

Τα σύνθετα υλικά καλύπτουν μεγάλο μέρος των εφαρμογών των νέων τεχνολογιών αιχμής στις κατασκευές και έχουν μεταβάλει σημαντικά τις ακολουθούμενες διαδικασίες σχεδίασης, παραγωγής, ελέγχου και συντήρησης.

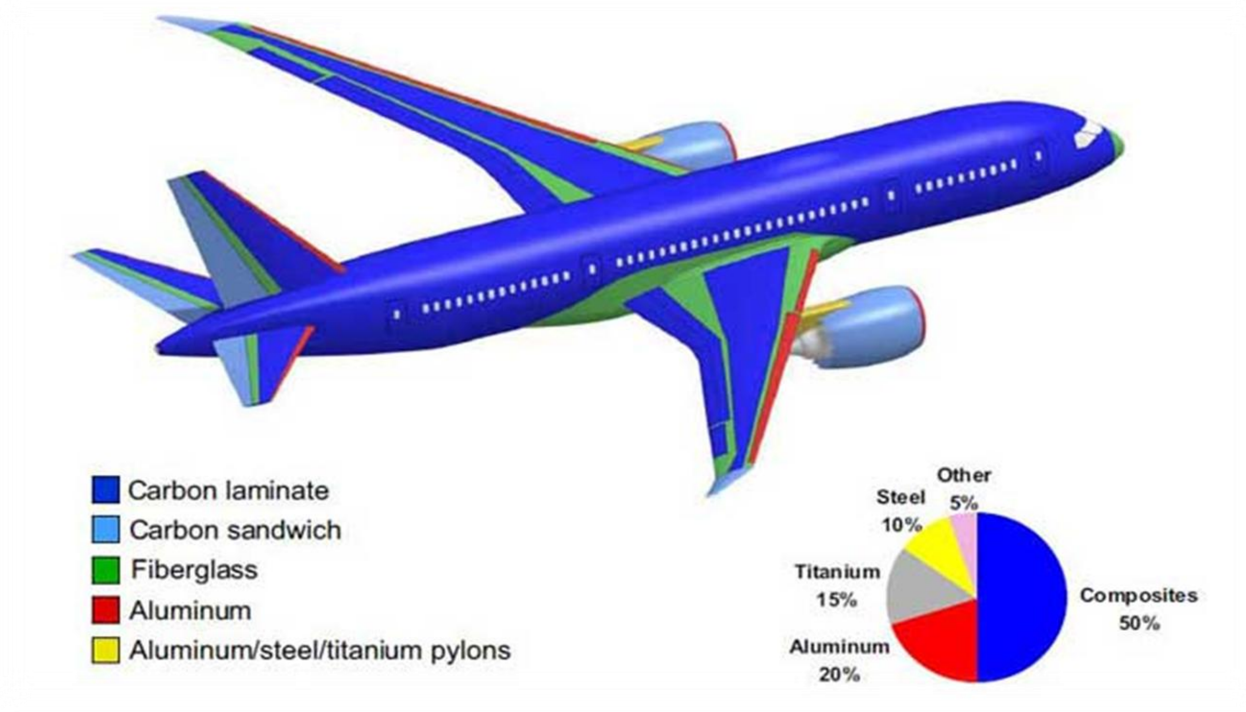
Η μεγάλη ποικιλία ινών και ρητινών, καθώς και οι διάφορες μέθοδοι κατασκευής παρέχουν στο σχεδιαστή τη δυνατότητα να επιλέξει το πιο κατάλληλο σύστημα υλικών που καλύπτει τις απαιτήσεις του, σύστημα που έχει συγκεκριμένα χαρακτηριστικά και ιδιότητες, που πολλές φορές μπορεί να είναι και μοναδικά.

Το μικρό βάρος, η υψηλή αντοχή, η εξαιρετική αντοχή σε διάβρωση, η πολύ καλή συμπεριφορά σε κόπωση, σε κρούση και στη διάδοση ρωγμών, οι σχετικά εύκολες διαδικασίες παραγωγής και το μικρό κόστος συντήρησης είναι μερικοί από τους παράγοντες εκείνους που έχουν οδηγήσει τα σύνθετα υλικά στην πρώτη θέση μεταξύ των κατασκευαστικών υλικών για μεγάλο πλήθος εφαρμογών.

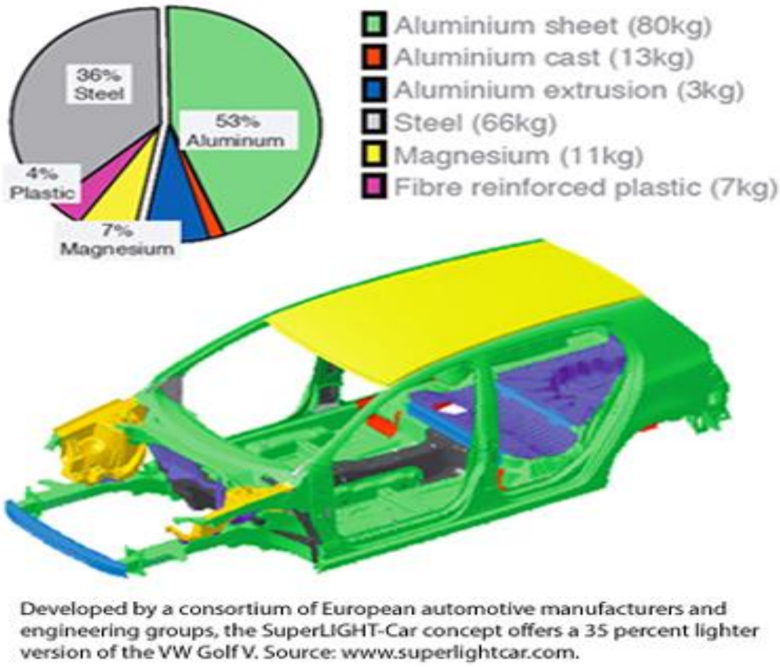
Μερικά μειονεκτήματα των συνθέτων υλικών, όπως τα υψηλά επίπεδα ερπυσμού, η μικρή αντίσταση σε μηχανική φθορά, η ιδιαίτερη και πολλές φορές ευαίσθητη συμπεριφορά σε δυσμενείς συνθήκες περιβάλλοντος (θαλάσσιο περιβάλλον, υψηλές θερμοκρασίες, χημικό περιβάλλον, κλπ) καθώς και το υψηλό αρχικό τους κόστος, βαθμιαία αντιμετωπίζονται πιο αποτελεσματικά μέσω της συνεχούς τεχνολογικής ανάπτυξης στην παραγωγή νέων και καλύτερων ινών, ρητινών και εξέλιξης των μεθόδων παραγωγής.



Εικόνα 1.1 Eurofighter F-35

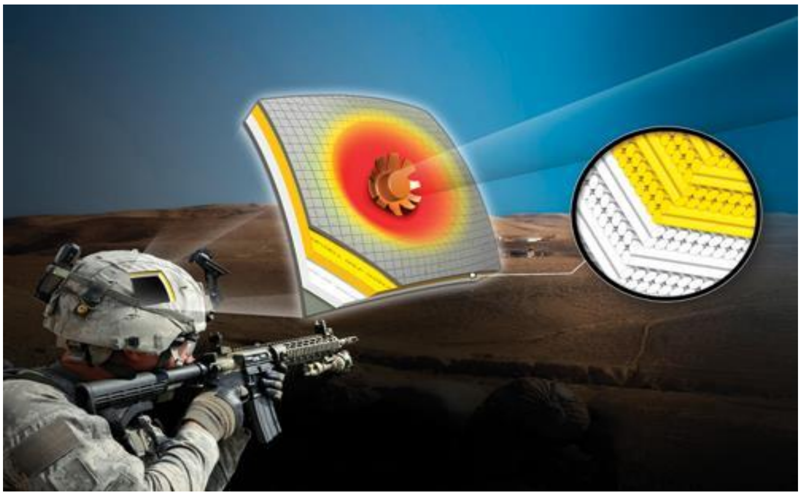


Εικόνα 1.2 Boeing 787

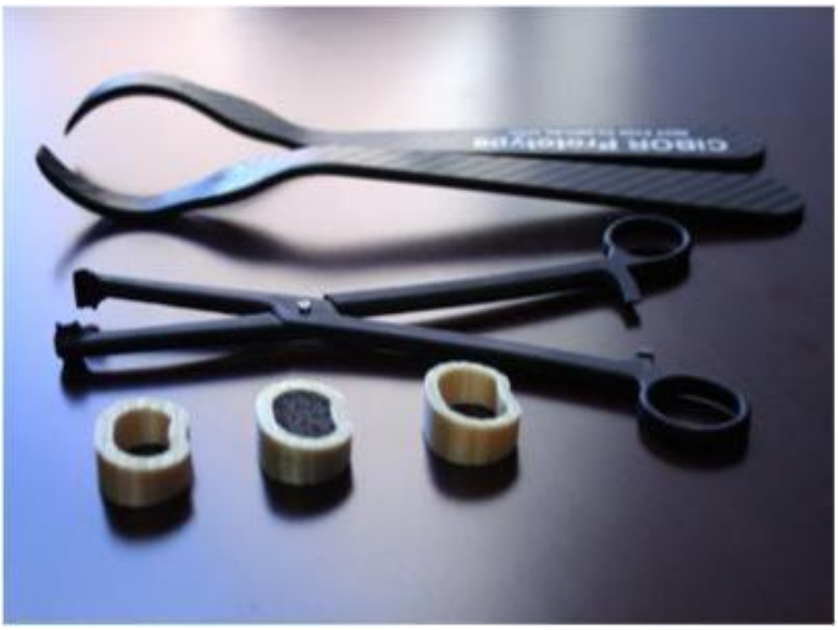


Εικόνα 1.3 VW Golf V

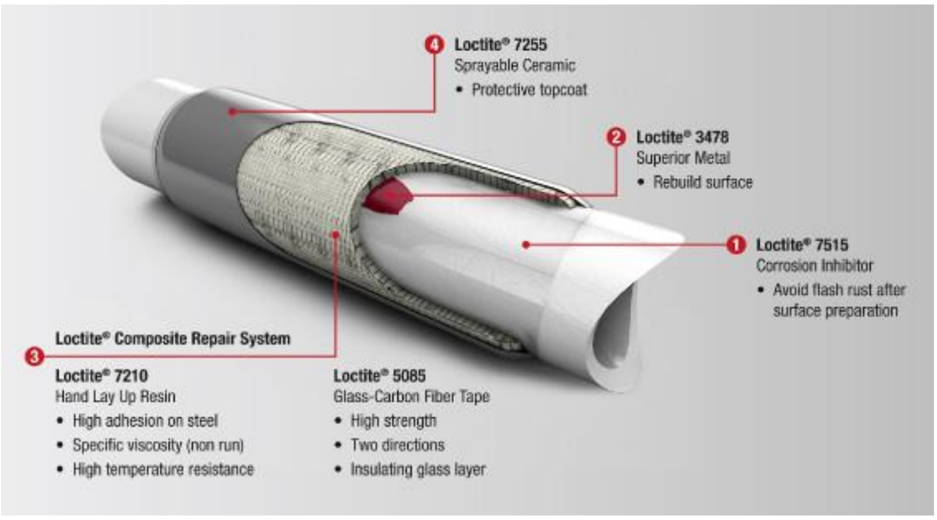
Εικόνα 1.4 Composite footwear



Εικόνα 1.5 Antiballistic composites



Εικόνα 1.6 Tools



Εικόνα 1.7 Composite materials for pipes

1.3 ΠΛΕΟΝΕΚΤΗΜΑΤΑ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

Τα τελευταία χρόνια παρατηρείται μια ραγδαία αύξηση στο ρυθμό αντικατάστασης παραδοσιακών υλικών από σύνθετα, σε πολλές τεχνολογικές εφαρμογές και κατασκευές. Αυτή η τάση αντικατάστασης μόνο τυχαία δε θα μπορούσε να θεωρηθεί, μιας και τα σύνθετα υλικά πλεονεκτούν έναντι των παραδοσιακών υλικών σε μια σειρά από παραμέτρους και ιδιότητες και κυρίως στο γεγονός ότι διαθέτουν συνήθως τις βέλτιστες ιδιότητες των υλικών που τα αποτελούν, αλλά και επιπλέον ιδιότητες που τα αρχικά υλικά δεν διαθέτουν.

Ένα σημαντικό πλεονέκτημα των σύνθετων υλικών έναντι των παραδοσιακών, είναι οι άριστες μηχανικές ιδιότητες, αποτέλεσμα της από κοινού συνεισφοράς ινών και μήτρας στη βελτίωση της συνολικής μηχανικής συμπεριφοράς του σύνθετου. Καταλυτικό ρόλο σε αυτή τη πτυχή των συνθέτων, έπαιξε η δυνατότητα σχεδιασμού και κατασκευής ενός τέτοιου υλικού, σύμφωνα με τις ανάγκες της εκάστοτε εφαρμογής για την οποία προορίζεται, έχοντας τις επιθυμητές ιδιότητες. Ο σχεδιασμός ενός σύνθετου είναι άλλο ένα σημαντικό πλεονέκτημα αυτών των υλικών, μιας και υπάρχει μια σειρά παραμέτρων, που εάν ληφθούν υπόψη, μπορούν να συμβάλλουν ουσιαστικά στις τέλειες ιδιότητες, αλλά και στη συμπεριφορά του σύνθετου. Η συμβατότητα για παράδειγμα, των αρχικών υλικών που θα επιλεχθούν να απαρτίσουν ένα σύνθετο είναι μείζονος σημασίας, όπως επίσης και ο τρόπος κατασκευής του.

Ο σημαντικότερος λόγος που επιλέγονται τα σύνθετα υλικά σε διάφορες εφαρμογές, είναι οι «ειδικές ιδιότητες» (specific properties) που διαθέτουν, έναντι άλλων υλικών. Με τον όρο ειδική ιδιότητα, αναφερόμαστε στο λόγο μιας ιδιότητας του υλικού, προς την πυκνότητα του. Όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή της ειδικής ιδιότητας, τόσο ελαφρύτερο είναι το υλικό, διαθέτοντας ταυτόχρονα υψηλότερη τιμή της συγκεκριμένης ιδιότητας. Αυτή η παράμετρος είναι ζωτικής σημασίας για τη χρήση των συνθέτων σαν δομικά στοιχεία, σε εφαρμογές όπου η ελάττωση του βάρους έχει σαν αντίκτυπο στην αποδοτικότερη λειτουργία τους, όπως επίσης και στη μείωση του κόστους. Αντικαθιστώντας μεταλλικά υλικά με σύνθετα σε κατασκευές, όπως οι άτρακτοι των αεροπλάνων, οι μειώσεις του βάρους μπορούν να φτάσουν αλλά και να υπερβούν ορισμένες το 50%.

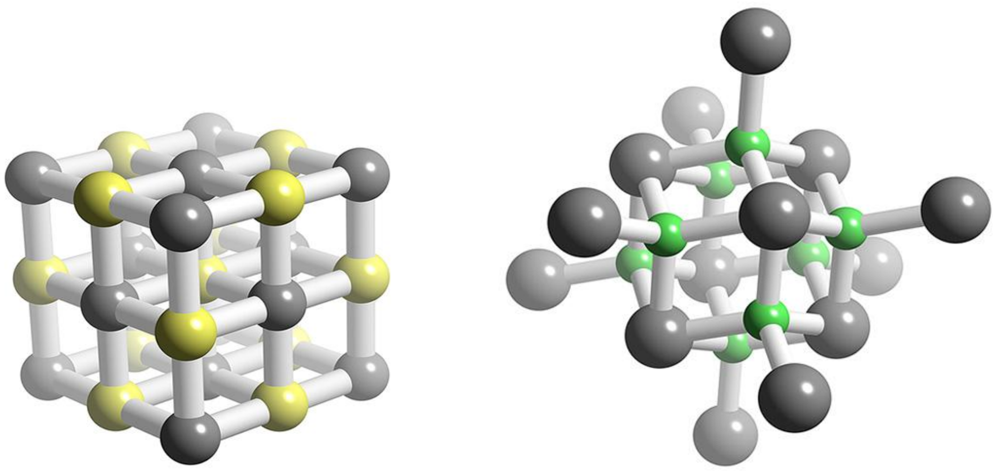
Ένα άλλο σημαντικό χαρακτηριστικό των σύνθετων υλικών είναι τα μεγάλα φορτία που εξακολουθούν να αναλαμβάνουν, ακόμα και μετά από πιθανή αστοχία τους. Το φαινόμενο αυτό παρατηρήθηκε σε στατικές δοκιμές σε ινώδη σύνθετα υλικά και οφείλεται στο γεγονός ότι ακόμα και μετά την αστοχία του σύνθετου, παρόλο που οι ίνες θραύονται, η τάση μεταβιβάζεται σε πολλαπλές κατευθύνσεις μέσα στη μάζα του υλικού και κυρίως σε άλλες ίνες οι οποίες δεν έχουν ακόμη αστοχήσει. Παρατηρήθηκε επίσης ότι τα ινώδη σύνθετα παρουσιάζουν μικρή ευαισθησία στην ύπαρξη εγκοπών, ενώ η διάδοση των ρωγμών είναι περιορισμένη. Κατασκευές από τέτοια σύνθετα υλικά, επέδειξαν μεγαλύτερη διάρκεια ζωής και αυξημένη αντοχή σε κόπωση, συγκριτικά με αυτή αντίστοιχων μεταλλικών κατασκευών.

Κάποια άλλα πλεονεκτήματα των συνθέτων είναι η καταπληκτική αντίσταση τους στην ηλεκτροχημική διάβρωση, φαινόμενο ασυνήθιστο στα μεταλλικά υλικά. Η απόσβεση ταλαντώσεων που παρουσιάζουν κάποιοι τύποι σύνθετων (sandwich), μέσω της μεγάλης απορρόφησης ενέργειας είναι ένα χαρακτηριστικό τους γνώρισμα, όπως επίσης και η υψηλή αντοχή που επιδεικνύουν τα ινώδη σύνθετα σε κρουστικά φορτία υψηλής ενέργειας, με αποτέλεσμα τη διατήρηση της σταθερότητας των κατασκευών στις οποίες βρίσκουν εφαρμογή.

1.4 ΠΟΛΥΜΕΡΗ

1.4.1 ΟΡΙΣΜΟΣ

Πολυμερή ονομάζονται οι χημικές ενώσεις με μεγάλα μόρια, τα «μακρομόρια», που σχηματίζονται από τη σύνδεση πολλών μικρών μορίων. Τα πολυμερή προκύπτουν από την χημική αντίδραση των μονομερών που ονομάζεται πολυμερισμός.

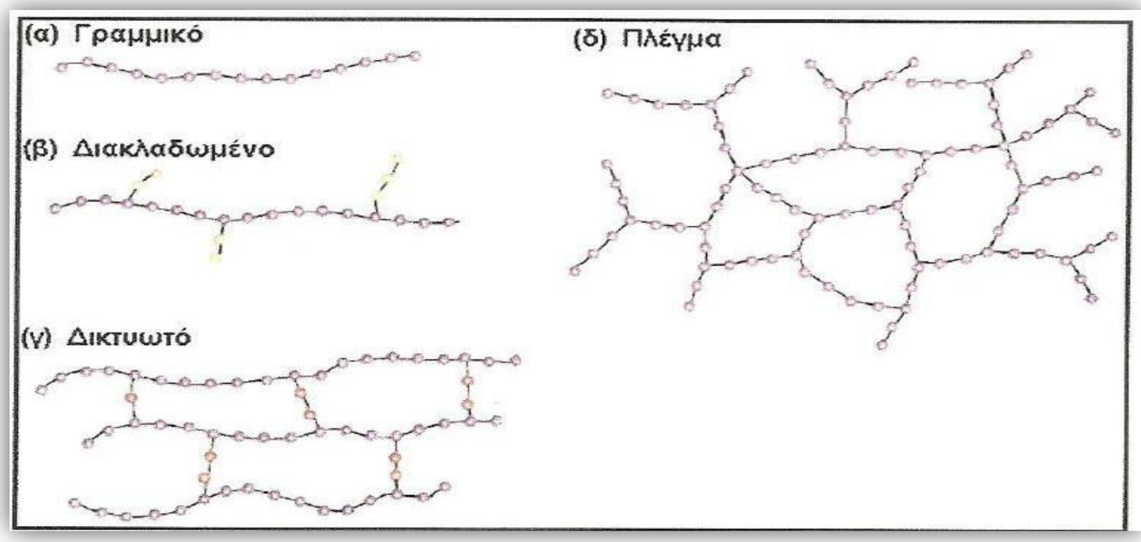


Εικόνα 1.8

1.4.2 ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗ ΠΟΛΥΜΕΡΩΝ

Α. Με κριτήριο την αρχιτεκτονική της πολυμερικής αλυσίδας τους διακρίνονται σε:

- Γραμμικά
- Διακλαδωμένα
- Δικτυωτά ή διασταυρούμενα (crosslinked) ή πλέγμα (network)



Εικόνα 1.9

Β. Με κριτήριο το είδος των ατόμων που συμμετέχουν στη δομή της κύριας αλυσίδας τους:

1. Ομοαλυσωτά: Η αλυσίδα τους αποτελείται από ένα είδος ατόμων
2. Ετεροαλυσωτά: Η αλυσίδα τους αποτελείται από περισσότερα είδη ατόμων

Γ. Με κριτήριο την προέλευση και τη χημική τους σύσταση διακρίνονται σε:

1. Φυσικά: Λαμβάνονται απευθείας από τη φύση (μαλλί, μετάξι)
2. Ημισυνθετικά: Προκύπτουν από χημικό μετασχηματισμό φυσικών προϊόντων (εβονίτης, νιτροκυτταρίνη, rayon, cellofan)
3. Συνθετικά: Τα μονομερή που τα συνθέτουν, δεν υπάρχουν στη φύση (PVC, Nylon 6 και 6.6, Teflon).

Δ. Με κριτήριο τη χρήση τους διακρίνονται σε:

1. Ευρείας χρήσης: Παράγονται σε πολύ υψηλό ποσοστό, είναι φθηνά και έχουν ποικίλα πεδία εφαρμογών στην καθημερινή ζωή(πολυαιθυλένιο, πολυστυρένιο, PVC, ABS).
2. Τεχνικά: Με μηχανικές ιδιότητες σημαντικά ανώτερες από εκείνες των πολυμερών ευρείας χρήσης, χρησιμοποιούνται δε, σε τμήματα μηχανών και κατασκευών σε αντικατάσταση μεταλλικών τμημάτων τους (πολυαμίδια(nylon), πολυανθρακικά (PC), εποξειδικές ρητίνες)
3. Προηγμένα: Με εξαιρετικές μηχανικές ιδιότητες και μεγάλη σταθερότητα σε υψηλές θερμοκρασίες, παράγονται σε μικρές ποσότητες και προορίζονται για ειδικές εφαρμογές (Πολυαμίδια,πολύ(αιθεροκετόνη), πολύ(μεθακρυλικό μεθύλιο)).

1.5 ΜΗΤΡΕΣ

Ο ρόλος της μήτρας συνίσταται σε:

- Συγκράτηση των ινών μεταξύ τους.
- Προστασία των ινών από περιβαλλοντικές φθορές και προσβολές.
- Μεταβίβαση των μηχανικών τάσεων που ασκούνται συνολικά στο σύνθετο υλικό προς τις ίνες.
- Ανακοπή της διάδοσης των ρωγμών, που ξεκινούν από θραύση των ινών.

Για να ικανοποιεί το ρόλο, με τον οποίο είναι επιφορτισμένη η μήτρα , πρέπει να χαρακτηρίζεται από:

- Ολκιμότητα.
- Ανθεκτικότητα.
- Σχετική ευκαμψία.
- Σημείο τήξης μεγαλύτερο από τη μέγιστη θερμοκρασία λειτουργίας του συνθέτου υλικού.

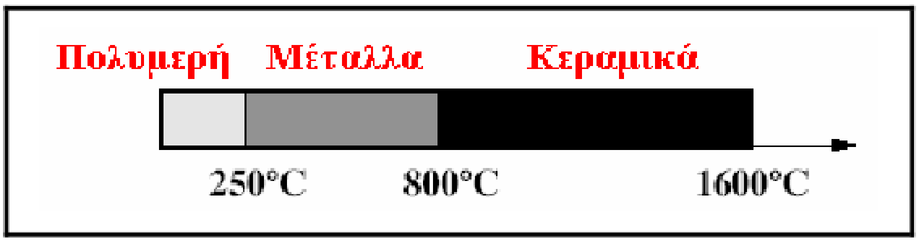
Οι ιδιότητες αυτές πρέπει επίσης να παρουσιάζουν «συμβατότητα» με τις αντίστοιχες ιδιότητες των ενισχυτικών ινών.

Συνήθως, το υλικό της μήτρας έχει χαμηλότερη πυκνότητα, αντοχή και δυσκαμψία από τις ίνες. Τέλος, για τη σωστή λειτουργία του συνθέτου υλικού, καθοριστικός παράγοντας είναι η καλή πρόσφυση ίνας – μήτρας.

Ανάλογα με το υλικό της μήτρας διακρίνουμε τις ακόλουθες ομάδες υλικών μήτρας για σύνθετα υλικά:

- Οργανικές.
- Μεταλλικές.
- Κεραμικές.

Η επιλογή κατάλληλης μήτρας εξαρτάται από τη θερμοκρασία και το περιβάλλον χρήσης του συνθέτου. Μία γενική οδηγία αναφορικά με τα θερμοκρασιακά όρια για κάθε ομάδα υλικών παρουσιάζεται στο Σχ. 15.



Σχήμα 15: Θερμοκρασιακά όρια χρήσης των υλικών

Τα αντίστοιχα σύνθετα υλικά χαρακτηρίζονται με τις ακόλουθες συντμήσεις:

PMC: Polymer Matrix Composite
MMC: Metal Matrix Composite
CMC: Ceramic Matrix Composite

1.5.1 ΟΡΓΑΝΙΚΕΣ ΜΗΤΡΕΣ

Οι οργανικές μήτρες διακρίνονται σε:

1. **<u>Θερμοπλαστικές</u>**:

Πρόκειται για πολυμερή με γραμμικές αλυσίδες. Παρουσιάζουν δομή, όπου οι μοριακές αλυσίδες διασυνδέονται με ασθενείς δυνάμεις Van der Waals, που λύονται με την αύξηση της θερμοκρασίας με αντιστρεπτή όμως διαδικασία, καθιστώντας το υλικό μαλακότερο σε υψηλές θερμοκρασίες.
Λόγω του χαμηλού τους κόστους, χρησιμοποιούνται σε εφαρμογές ευρείας κατανάλωσης. Αντιπροσωπευτικά παραδείγματα αποτελούν οι μήτρες πολυαιθυλενίου (PE) και πολυστυρενίου (PS).
Ως ενισχυτικά υλικά θερμοπλαστικών μητρών χρησιμοποιούνται φθηνά υλικά (αμίαντος, μαρμαρυγίες, κ.α.), ώστε και το τελικό προϊόν να είναι χαμηλής τιμής.

2. **<u>Θερμοσκληρυνόμενες</u>**:

Χρησιμοποιούνται σε περιπτώσεις όπου απαιτούνται καλύτερες μηχανικές ιδιότητες. Τα θερμοσκληρυνόμενα πολυμερή παρουσιάζουν τρισδιάστατη δομή πλέγματος από πρωτογενείς ισχυρούς δεσμούς μεταξύ των μοριακών αλυσίδων. Αύξηση της θερμοκρασίας αυξάνει το πλήθος των διαμοριακών δεσμών καθιστώντας τα υλικά αυτά σκληρότερα και ψαθυρότερα.

Τέτοιες μήτρες είναι:

- **Πολυεστερικές ρητίνες** που ενισχύονται με ίνες γυαλιού.
- **Εποξυδικές ρητίνες** με μέγιστη θερμοκρασία λειτουργίας τους 200 ^{o}C, καλύτερες μηχανικές ιδιότητες από τις προηγούμενες και χρήση στη αεροναυπηγική.
- **Φαινολικές ρητίνες,** οι οποίες έχουν χαμηλή πλαστικότητα και μέτριες μηχανικές ιδιότητες. Η μέγιστη θερμοκρασία λειτουργίας τους φτάνει τους 400 ^{o}C.

3. <u>Ελαστομερείς:</u>

Είναι συνήθως γραμμικά πολυμερή με διακλαδισμένες αλυσίδες οι οποίες έχουν τυχαίο προσανατολισμό. Διαθέτουν μικρή δυσκαμψία με αποτέλεσμα όταν υποστούν μεγάλες παραμορφώσεις να επανέρχονται στο αρχικό τους σχήμα μετά την άρση του εξωτερικού φορτίου που τις προκάλεσε. Το φυσικό και συνθετικό καουτσούκ βρίσκει την κυριότερη εφαρμογή του στα λάστιχα των αυτοκινήτων. Το φυσικό καουτσούκ, το λάστιχο, δεν επανέρχεται πλήρως στο αρχικό του μήκος μετά την αποφόρτιση γιατί τα μακρομόρια έχουν υποστεί πλαστική παραμόρφωση. Για να αποφευχθεί η πλαστική παραμόρφωση γίνεται ο λεγόμενος βουλκανισμό, όπου το καουτσούκ θερμαίνεται με θείο. Η διαδικασία του βουλκανισμού έχει σαν αποτέλεσμα τη δημιουργία σταυροδεσμών (cross-link) μεταξύ των μορίων, οι οποίοι ενισχύουν τη δομή του ελαστικού. Με τον τρόπο αυτόν το ελαστομερές γίνεται σκληρότερο, ανθεκτικότερο, αποκτά αντίσταση στη διάβρωση από λάδια, όζον, οξέα και καθιστά λιγότερο ευαίσθητο στις θερμοκρασιακές μεταβολές. Όμως η διαδικασία του βουλκανισμού είναι μια πολυδάπανη και χρονοβόρα διαδικασία και για αυτό αναπτύχθηκαν τα ελαστομερή που διαθέτουν τις ιδιότητες του καουτσούκ και των οποίων είναι εύκολη η μορφοποίηση και αντίστοιχη εκείνης των θερμοπλαστικών.

Εικόνα 1.9: πολυεστερική ρυτίνη

1.5.2 ΜΕΤΑΛΛΙΚΕΣ ΜΗΤΡΕΣ

Μέταλλα, όπως το αλουμίνιο, το τιτάνιο και το νικέλιο, χρησιμοποιούνται όλο και περισσότερο ως υλικά μμήτρας προσφέροντας σημαντικά πλεονεκτήματα. Για εφαρμογές υψηλών θεοκρασιών επιβάλλεται η χρήση μεταλλικών ή κεραμικών μμητρών, αφού η μέγιστη επιτρεπτή θεοκρασία χρησιμοποίησης οργανικών μμητρών είναι πολύ χαμηλή (~300 ^oC), ενώ οι ανθρακούχες μμήτρες οξειδώνονται σε θεοκρασία μμεγαλύτερη από 500 ^oC.

Σε σχέση με τις οργανικές μήτρες, οι μεταλλικές παρουσιάζουν πλεονεκτήματα, αλλά και μειονεκτήματα, τα σπουδαιότερα των οποίων φαίνονται στον Πίν.8.

ΠΛΕΟΝΕΚΤΗΜΑΤΑ	ΜΕΙΟΝΕΚΤΗΜΑΤΑ
• Μεγαλύτερη ολκιμότητα και καλλίτερες μηχανικές ιδιότητες. • Βελτίωση μηχανικών ιδιοτήτων του συνθέτου σε καταπονήσεις ασκούμενες σε διευθύνσεις διαφορετικές από αυτές του προσανατολισμού των ινών. • Βελτίωση της ακαμψίας και αύξηση του μέτρου ελαστικότητας του συνθέτου. • Μείωση της ευαισθησίας του συνθέτου στην παρουσία διαλυτών και διεύρυνση των θερμοκρασιακών ορίων χρήσης του συνθέτου. • Βελτίωση της θερμικής και ηλεκτρικής αγωγιμότητας του συνθέτου για ειδικές εφαρμογές. • Ευκολότερη σύνδεση τεμαχίων του συνθέτου υλικού (συγκόλληση, κόλλη-ση).	• Δημιουργία εύθραυστων μεσομεταλλικών ενώσεων στη διεπιφάνεια μετάλλου-ίνας συμβάλλουν στην αποκόλληση ινών από τη μήτρα που οδηγεί στη μικρορωγμάτωση και τη θραύση των ινών. • Μεγαλύτερη πυκνότητα και επομένως μεγαλύτερο βάρος της συνολικής κατασκευής. • Φαινόμενα διάλυσης ινών στη μήτρα, σε υψηλές θερμοκρασίες (π.χ. διάλυση ινών SiO_2 σε μήτρα Al). • Ασυνέχεια της καμπύλης εφελκυσμού των συνθέτων υλικών στο όριο διαρροής της μήτρας. • Δύσκολη παραγωγή συνθέτου υλικού και μεγαλύτερο κόστος.

ΠΙΝΑΚΑΣ 8: Πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα των μεταλλικών μητρών (έναντι των οργανικών μητρών)

1.5.3 ΚΕΡΑΜΙΚΕΣ ΜΗΤΡΕΣ

Τα κεραμικά υλικά είναι σκληρά, δύστηκτα, μεγάλης στιβαρότητας και μεγάλης αντοχής στη διάβρωση και την χημική προσβολή.

Στην περίπτωση της κεραμικής μήτρας, οι ίνες αποβλέπουν αφενός στη βελτίωση της αντοχής του κεραμικού στους θερμικούς αιφνιδιασμούς και αφέτερου στην αύξηση της μηχανικής του αντοχής. Η ολκιμότητα και το ποσοστό των ινών επιδρούν ευνοϊκά στη βελτίωση της αντοχής της μήτρας.Το σημαντικότερο πρόβλημα στη χρήση κεραμικών μητρών εντοπίζεται στη συνάφεια ινών– μήτρας και οφείλεται στη μεγάλη διαφορά μεταξύ των συντελεστών γραμμικής διαστολής της κεραμικής μήτρας και των συνήθων ενισχυτικών ινών. Μεγάλη εφαρμογή βρίσκουν, επίσης, οι μήτρες άνθρακα, ενώ ειδική περίπτωση κεραμικής μήτρας αποτελεί το τσιμέντο.

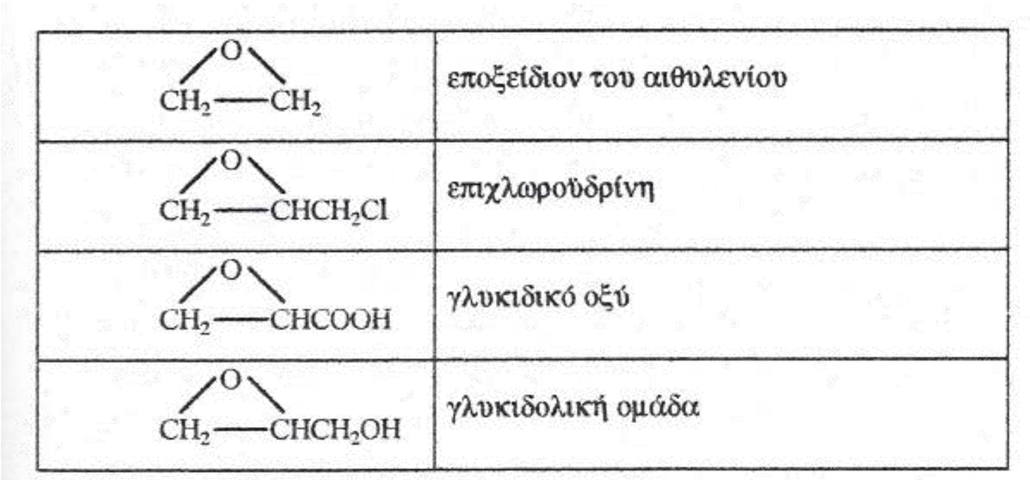
Είναι γνωστές οι οικοδομικές κατασκευές τσιμέντου με ενίσχυση χάλυβα (οπλισμένο σκυρόδεμα), ινών αμιάντου (ελενίτ), ινών γυαλιού, καθώς επίσης και οι κατασκευές από γύψο με ενίσχυση ινών γυαλιού ή αμιάντου.

1.6 ΕΠΟΞΕΙΔΙΚΕΣ ΡΗΤΙΝΕΣ

1.6.1 ΓΕΝΙΚΑ-ΟΡΙΣΜΟΣ

Με τον όρο εποξειδική ρητίνη εννοούμε την ένωση η οποία σχηματίζεται από περισσότερα από ένα εποξείδια τα οποία συνδέονται μεταξύ τους υπό μορφή ευθείας ή δακτυλίου. Ως εποξείδιο ή εποξειδικό εννοούμε τη χημική ομάδα που αποτελείται από ένα άτομο οξυγόνου [O], ενωμένο με δύο άτομα άνθρακα [C] που είναι ήδη ενωμένα με άτομα άλλων στοιχείων.

Στο Σχήμα 1.1 φαίνονται οι συντακτικοί τύποι διαφόρων εποξειδίων και η αντίστοιχη ονοματολογία τους. Η ονοματολογία αυτή προκύπτει από το όνομα της ομάδας που ενώνεται με το τρίτο άτομο άνθρακα του εποξειδίου.



Σχήμα 1.1

Οι εποξειδικές ρητίνες ανήκουν στην κατηγορία των θερμοσκληρυνομένων ή θερμοσταθερών πολυμερών. Είναι προϊόντα ατελούς πολυμερισμού που θερμαινόμενα γίνονται μαλακά. Με την αύξηση όμως της θερμοκρασίας, ο πολυμερισμός καθίσταται πλήρης και σκληρύνονται οριστικά.

Οι στερεές εποξειδικές ρητίνες παρουσιάζουν ισχυρή αντίσταση τριβής και επίσης πολύ καλή χημική αντίσταση.

Τα σημαντικότερα πλεονεκτήματα των στερεών εποξειδικών ρητινών σε σύγκριση με των υγρών ρητινών, είναι η εύκολη επεξεργασία τους, η μηχανική αντοχή, η υψηλή χημική αντίσταση, το άριστο κολλώδες.

Ένας σημαντικός αριθμός ιδιοτήτων των εποξειδικών ρητινών είχε ως αποτέλεσμα το γρήγορο ρυθμό ανάπτυξης και την ευρεία σε έκταση χρήση τους. Έτσι αποτελούν σχεδόν πάντα το ένα από τα δύο ή περισσότερα προϊόντα που συνδυάζονται για να δώσουν το τελικό σύνθετο υλικό. Σε πάρα πολλές δε περιπτώσεις χρησιμοποιούνται και εντελώς μόνες τους.

1.6.2 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΤΕΡΕΩΝ ΕΠΟΞΕΙΔΙΚΩΝ ΡΗΤΙΝΩΝ

Οι στερεές εποξειδικές ρητίνες είναι άκαμπτα άμορφα στερεά που μοιάζουν με γυαλί. Επίσης οι στερεές εποξιδικές ρητίνες πρέχουν σκληρή και αμετάβλητη αντίσταση τριβής και πολύ καλή χημική σύσταση. Τα σημαντικότερα **πλεονεκτήματα** των στερεών εποξειδικών ρητινών σε σχέση με τις υγρές ρητίνες είναι η **εύκολη επεξεργασία** τους, η **μηχανική αντοχή,** η **υψηλή χημική αντίσταση** και το **άριστο κολλώδες.**

Εικόνα 1.10

1.6.3 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΥΓΡΩΝ ΕΠΟΞΕΙΔΙΚΩΝ ΡΗΤΙΝΩΝ

Οι υγρές εποξειδικές ρητίνες παρουσιάζουν τις παρακάτω ιδιότητες:

1. Χαμηλή υγροσκοπικότητα και ικανοποιητική αντοχή στην επίδραση διαλύματος οξέων, βάσεων και πολλών οργανικών διαλυτών.
2. Είναι υγρά με χαμηλό ιξώδες (lowviscosity), καθώς και τα μίγματα τους με πρόσθετα (πλαστικοποιητές, σκληρυντές) με αποτέλεσμα τη εύκολη κατεργασία τους.
3. Οι βασικές τους ιδιότητες μπορούν να τροποποιούνται κάθε φορά ανάλογα με τις απαιτήσεις της συγκεκριμένης εφαρμογής (ανάμιξη με κάποιο πρόσθετο της επιλογής μας, χρήση τροποποιητικών και συνθέσεων). κάτι που έχει σαν αποτέλεσμα την ποικιλία των εφαρμογών.
4. Υψηλή δύναμη συγκόλλησης, στη σύγχρονη τεχνολογία πλαστικών, ιδιότητα που είναι από τις μεγαλύτερες που έχουν παρατηρηθεί. .
5. Υψηλές μηχανικές ιδιότητες και άριστη ηλεκτρική μόνωση. .
6. Εύκολη επεξεργασία των ρητινών από 5°C έως 150°C, ενώ αυτό εξαρτάται και από την εκλογή του προσθέτου.
7. Μικρή συστολή κατά τον πολυμερισμό κατά τη διάρκεια της
8. επεξεργασίας τους. Αυτή η μικρή συστολή είναι ένα μεγάλο πλεονέκτημα για τις εποξειδικές ρητίνες.
9. Εξασφαλίζουν πρόσφυση σε ξηρές και υγρές επιφάνειες , ενώ
10. στερεοποιούνται και κάτω από την επιφάνεια ύδατος. Η πρόσφυση εξασφαλίζεται πάνω σε γνωστά δομικά υλικά, όπως σκυρόδεμα, μέταλλα, μάρμαρα, πέτρα και ξύλο.
11. Παρουσιάζουν καλή χημική αντίσταση, που εξαρτάται από το πρόσθετο
12. που χρησιμοποιείται. Συνολικά οι Περισσότερες ρητίνες έχουν υψηλή αντίσταση στα καυστικά και καλή μέχρι άριστη στα οξέα.
13. Συνδυάζουν υψηλή αντοχή, δεν έχουν όγκο κατά την σκλήρυνση και δεν
14. γίνονται εύθραυστες. Είναι απόλυτα μη διαβρωτικές και είναι κατάλληλες
15. για χρήση σε κατασκευές από οπλισμένο σκυρόδεμα ή δομικό χάλυβα.

1.6.4 ΟΙ ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΙΣ ΕΠΟΞΕΙΔΙΚΕΣ ΡΗΤΙΝΕΣ

Μερικές από τις σημαντικότερες εφαρμογές των εποξειδικών ρητινών είναι οι ακόλουθες:

1. Στην κατασκευή κτιρίων, αυτοκινητοδρόμων, γενικά σε κατασκευές που έχουν απαιτήσεις για υψηλή χημική αντίσταση (βασικό συγκολλητικό σκυροδέματος).
2. Στη βιομηχανία κατασκευής αεροσκαφών, αυτοκινήτων, πλοίων (βασικό συγκολλητικό σε δόκιμα μέρη της ατράκτου αεροσκάφους, μεταλλικών και πλαστικών τμημάτων σε βάρκες και αυτοκίνητα) λόγω της υψηλής και τέλειας στεγανότητας.
3. Στην κατασκευή τριχών για πινέλα
4. Ως φυλλώδεις ρητίνες (laminatedretins) για την κατασκευή πλαισίων και τελειωμάτων αεροσκαφών και πυραύλων.
5. Ως διαλύματα επίστρωσης που έχουν ως βασικό συστατικό τη ρητίνη, που είναι χρήσιμα για τη συντήρηση και την Κατασκευή τελειωμάτων όπως τελειώματα θαλάσσιας υφής, τελειώματα λιθοδομής, τελειώματα αεροσκαφών. Ακόμη χρησιμοποιούνται για επαλείψεις κατασκευαστικού χάλυβα, επαλείψεις δεξαμενών, πτυσσόμενων αγωγών και πλακών σκυροδέματος.
6. Συστήματα εποξυ-ρητινών χρησιμοποιούνται σαν συγκολλητικά, επικαλυπτικά και σα μέσα ενσωμάτωσης ηλεκτρικών εξαρτημάτων.
7. Τυπικές εφαρμογές χυτών εποξυ-ρητινών αποτελούν οι κατασκευές ανθεκτικών σε χημικά αντλιών και σωλήνων, εργαλείων, μήτρων, καθώς και ηλεκτρομαγνητικών μονωτικών ειδών.

Επίσης υπάρχουν ρητίνες (wetcome) δύο συστατικών για επαλείψεις επιφανειών (υγρών και στερεών). Η ξηρή μεμβράνη που σχηματίζουν έχει πυρανασχετικές ιδιότητες και έτσι δεν επιτρέπουν την εξάπλωση της φωτιάς.

1. Οι ρητίνες αυτές προορίζονται για υγρομόνωση, για προστασία και
2. Διακόσμηση δαπέδων , τοίχων και ορόφων σε
3. οικοδομικούς, βιομηχανικούς, αγροτικούς και άλλους χώρους.
4. Εφαρμόζονται σε επιφάνειες σκυροδέματος. τσιμεντοκονιάματος, πέτρας,
5. σοβάδων, τούβλων, γύψου, ασφάλτου κ.α.
6. Για τη σύνδεση παλιού και νέου σκυροδέματος κυρίως σε υγρούς χώρους.
7. Για την προστασία κτιρίων από τη διάβρωση και διείσδυση της υγρασίας.

8. Για την υγρομόνωση πισινών και δεξαμενών.
9. Για την υγρομόνωση υπογείων χώρων και παταριών, δαπέδων κ.λ.π

Μειονέκτημα των εποξυ-ρητινών αποτελεί το υψηλό τους κόστος. Το γεγονός αυτό αντισταθμίζεται όμως από τη μεγάλη χρησιμότητα τους και την ευρεία εφαρμογή που έχουν.

1.7 ΕΓΚΛΕΙΣΜΑΤΑ

1.7.1 ΣΥΝΤΟΜΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ

Τα εγκλείσματα (ή ενισχυτικά υλικά) είναι **ανόργανα υλικά** που περικλείονται μέσα σε μία μήτρα και επιτελούν πολλές σημαντικές λειτουργίες. Κατά κύριο λόγο, οι επιθυμητές ιδιότητες επιτυγχάνονται επιλέγοντας τον κατάλληλο τύπο και υλικό ενίσχυσης. Έχουν επιφορτισθεί με το να φέρουν εις πέρας τις αυξημένες μηχανικές απαιτήσεις που χαρακτηρίζουν τα σύνθετα υλικά, μίας και είναι εκείνες που περιλαμβάνουν τα φορτία. Για αυτό και τα εγκλείσματα που χρησιμοποιούνται έχουν μηχανικές ιδιότητες κατά πολύ ανώτερες σε σχέση με το υλικό που αποτελεί την μήτρα, προσδίδοντας στο σύνθετο υλικό αυξημένη αντοχή και μέτρο ελαστικότητας. Τα εγκλείσματα που χρησιμοποιούνται είναι πολλά και διαφέρουν ως προς το μέγεθος την γεωμετρία και τα φυσικά χαρακτηριστικά τους.

Υπάρχουν τρεις κύριες κατηγορίες εγκλεισμάτων βάσει του σχήματος τους:

- Εγκλείσματα σε μορφή **κόκκων**.
- Εγκλείσματα σε μορφή **ινών**.
- Εγκλείσματα σε μορφή **νιφάδων**.

Τα εγκλείσματα έχουν αρκετά μικρές διαστάσεις της τάξης του «Μίκρο».

1.7.2 Η ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΩΝ ΕΓΚΛΕΙΣΜΑΤΩΝ ΣΤΙΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΕΠΟΞΕΙΔΙΚΩΝ ΡΗΤΙΝΩΝ

Η παρουσία των εγκλεισμάτων στις ρητίνες γενικά αυξάνει το μέτρο ελαστικότητας σε αυτές, ενώ αντίθετα η παραμόρφωση θραύσης ελαττώνεται.

Η μεταβολή αυτή είναι ανάλογη με την περιέκτικότητα της σε έγκλεισμα. Αυτό ισχύει για μετρήσεις σε θερμοκρασίες περιβάλλοντος.

- **Συστολή**

Η συστολή κατά τη διάρκεια σκλήρυνσης της ρητίνης ελαττώνεται ανάλογα με την αύξηση της περιεκτικότητας σε έγκλεισμα του σύνθετου υλικού. Αυτό οφείλεται στο ότι η ρητίνη αντικαθίσταται τοπικά από υλικό που δεν εμφανίζει μεταβολή στις διαστάσεις του, σε αντίθεση με την καθαρή ρητίνη.

- **Αντοχή σε χημικά αντιδραστήρια και σε διάβρωση**

Μερικά εγκλείσματα όπως π.χ το ανθρακικό ασβέστιο μειώνουν την αντοχή των ρητινών σε οξέα ενώ άλλα όπως το αλουμίνιο μειώνουν τη αντοχή αυτή σε υγρασία. Τα εγκλείσματα γενικά μειώνουν την ταχύτητα διάχυσης του νερού στα σύνθετα υλικά και επίσης συμμετεχουν στην διάβρωση των πολυμερών στην επαφή τους με μέταλλα.

Ιόντα που υπάρχουν στην στερεοποιημένη μήτρα μπορούν να μεταφέρουν γαλβανικά ρύματα κα να ενισχύσουν τη διάβρωση. Αυτό οφείλεται στην αύξηση της αγωγιμότητας του σύνθετου, λόγω της ικανότητας των εγκλεισμάτων να απελευθερώνουν ιόντα.

- **Ειδική πυκνότητα**

Τα εγκλείσματα που στην πλειοψηφία τους έχουν μεγαλύτερη πυκνότητα από την ρητίνη, αυξάνουν την πυκνότητα των σύνθετων υλικών ανάλογα με την κατ’ όγκο περιεκτικότητα τους. Έτσι η παρουσία των εγκλεισμάτων μειώνει αισθητά το κόστος του σύνθετου υλικού.

- **Ιξώδες**

Τα εγκλείσματα αυξάνουν το ιξώδες των εποξειδικών ρητινών. Η αύξηση αυτή είναι μεγαλύτερη με ινώδη υλικά και λιγότερο με κοκκώδη εγκλείσματα.

- **Συντελεστής θερμικής διαστολής**

Ο συντελεστής θερμικής διαστολής της στερεοποιημένης εποξειδικής ρητίνης ελαττώνεται με την αύξηση της κατ’ όγκο συγκέντρωσης σε εγκλείσματα. Η ελάττωση αυτή δεν είναι γραμμική.

- **Πρόσφυση**

Τα εγκλείσματα ελαττώνουν το βαθμό συστολής και έτσι αυξάνουν την ικανότητα πρόσφυσης των εποξειδικών ρητινών αποτελεσματικά.

- **Θερμική σταθερότητα**

Ενισχύεται με την παρουσία εγκλεισμάτων. Με τον όρο θερμική σταθερότητα εννοούμε την κατάσταση του σύνθετου όταν δεν παρατηρούνται αλλοιώσεις στη δομή του συναρτήσει της θερμοκρασίας.

- **Θερμική αγωγιμότητα**

Τα εγκλείσματα αυξάνουν τη θερμική αγωγιμότητα των ρητινών, αν και σε μεγάλες περιεκτικότητες αυξάνουν την παρουσία φυσαλίδων αέρα μέσα στο σύνθετο, που ως γνωστό αποτελούν θερμομονωτικά σώματα. Περισσότερο αυξάνεται η θερμική αγωγιμότητα στην περίπτωση των μεταλλικών ινών συγκριτικά με τα κοκκώδη μεταλλικά εγκλείσματα.

- **Αντοχή στη συμπίεση**

Τα κοκκώδη εγκλείσματα αυξάνουν την αντοχή σε συμπίεση λόγω της δυσκαμψίας που προκαλούν.

- **Συμπεριφορά στην κρούση**

Τα κοκκώδη εγκλείσματα επηρεάζουν την αντοχή σε κρούση των σκληρυνόμενων εποξειδικών ρητινών σε βαθμό που οικίλει ανάλογα με τον τύπο του εγκλείσματος, τον τύπο της ρητίνης και το είδος της δομικής κρούσης. Γενικά τόσο τα κοκκώδη όσο και τα ινώδη εγκλείσματα ενισχύουν την αντοχή των ρητινών σε κρούση.

- **Συμπεριφορά στην κάμψη**

Τα κοκκώδη εγκλείσματα γενικά ελαττώνουν την αντοχή στην κάμψη και αυξάνουν το μέτρο ελαστικότητας σε κάμψη.

- **Σκληρότητα επιφάνειας-αντίσταση στην τριβή**

Τα εγκλείσματα αυξάνουν την σκληρότητα της επιφάνειας του σύνθετου και την αντίσταση σε τριβή.

1.8 ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

Ανάλογα με τη μορφή του συστατικού ενίσχυσης, τα σύνθετα κατατάσσονται σε τρεις μεγάλες κατηγορίες:

α. Ινώδη Σύνθετα (Fibrous Composites): Με ενίσχυση ινών εμποτισμένων σε υλικό μήτρας.

β. Κοκκώδη Σύνθετα (Particulate Composites): Με ενίσχυση σωματιδίων διασκορπισμένων στο υλικό μήτρας.

γ. Στρωματικά Σύνθετα ή Πολύστρωτα (Πολυστρώματα) (Laminated Composites): Με επάλληλες στρώσεις υλικών.

Τα ινώδη σύνθετα διακρίνονται περαιτέρω ανάλογα με τον προσανατολισμό και τη διάταξη των ινών μέσα στη μήτρα. Σύμφωνα με την ταξινόμηση αυτή τα ινώδη σύνθετα διακρίνονται σε:

α. Μονοδιευθυντικά σύνθετα: Οι ίνες έχουν όλες την ίδια διεύθυνση.

β. Πολυδιευθυντικά σύνθετα: Οι ίνες έχουν διαφορετικές διευθύνσεις.

Η ιδιότητα αυτή οδηγεί άμεσα σε ταξινόμηση των πολυδιευθυντικών σύνθετων στις ακόλουθες υποομάδες:

α. Σύνθετα με ίνες τυχαίας διεύθυνσης.

β. Σύνθετα με ίνες σε πλέξη ύφανσης

γ. Σύνθετα με ίνες σε τρισορθογώνια ύφανση.

Μία επιπλέον διάκριση των ινωδών σύνθετων στηρίζεται στο λόγο μήκους προς διάμετρο (l/d) των ινών, οι οποίες χαρακτηρίζονται ως εξής:

α. Συνεχείς ή μεγάλου μήκους ίνες (continuous fibers), όταν είναι $l/d > 100$.

β. Ασυνεχείς ή βραχείες (κοντές) ίνες (discontinuous fibers), όταν είναι $l/d < 100$.

γ. Νηματίδια ή τριχίτες (whiskers), όταν $d < 1\mu m$ και $l = 100\mu m$ (πρόκειται για λεπτούς μονοκρυστάλλους κεραμικού υλικού).

1.9 ΙΝΩΔΗ ΣΥΝΘΕΤΑ ΥΛΙΚΑ

1.9.1 ΣΥΝΤΟΜΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ

Αποτελεί ίσως τη σημαντικότερη κατηγορία σύνθετων υλικών, δεδομένης της ευρύτατης εξάπλωσης που αυτά γνωρίζουν σε πληθώρα εφαρμογών. Ο οπλισμός, ο οποίος είναι τοποθετημένος στη μήτρα με τη μορφή ινών, αποτελείται εναλλακτικά από γυαλί (Glass), βόριο (Boron), άνθρακα (Carbon), γραφίτη (graphite), αραμίδιο (Κέβλαρ) ή και κάποιο μέταλλο, αντίθετα η μήτρα είναι συνήθως μια εποξειδική ρητίνη ή κάποιο άλλο πολυμερές, χωρίς να απαγορεύει την κατάταξη στην ίδια κατηγορία συνθέτων υλικών με μεταλλική μήτρα (π.χ αλουμινίου) και τη χρήση οπλισμού από ένα ή περισσότερα παραπάνω υλικά.

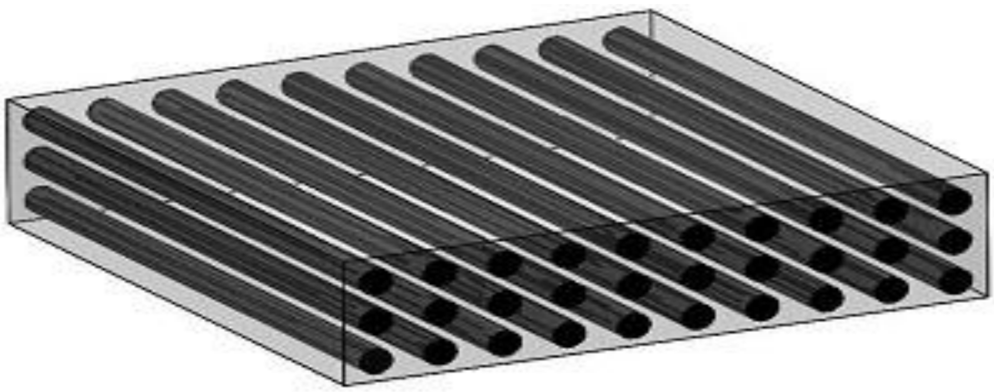
1.9.2 ΜΗΧΑΝΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΙΝΩΔΩΝ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

Τα ινώδη σύνθετα υλικά παρουσιάζουν γενικά πολύ καλή συμπεριφορά σε εφελκυσμό ειδικά κατά την περίπτωση που η διεύθυνση της τάσης ταυτίζεται με αυτή των ινών. Θα πρέπει βέβαια να σημειωθεί, πως για να παρουσιάζει το σύνθετο υλικό καλύτερες ιδιότητες από τη μήτρα, χρειάζεται η κατ' όγκο περιεκτικότητα των ινών U_f να ξεπερνά μια κρίσιμη ελάχιστη τιμή, γιατί διαφορετικά η εφαρμοζόμενη τάση αναλαμβάνεται από την όλκιμη μήτρα η οποία και παραμορφώνεται .

Η αντοχή τους σε θλίψη είναι μειωμένη κάτι που οφείλεται σε φαινόμενα κύρτωσης, αναδίπλωσης και λυγισμού των ινών (buckling effect) που προκαλούνται όταν ασκούνται θλιπτικά φορτία.

Σε ότι αφορά τη συμπεριφορά τους σε κόπωση, αυτή είναι δύσκολο να προβλεφθεί, αφού δεν ισχύει στην περίπτωση αυτή ο κανόνας των μειγμάτων, αλλά απαιτούνται πειραματικές πειραματικές δοκιμές για κάθε συγκεκριμένο ινώδες υλικό. Ανάλογες δοκιμές έδειξαν πως την καλύτερη συμπεριφορά σε κόπωση παρουσιάζουν τα ινώδη υλικά αποτελούμενα από εποξειδική μήτρα και ίνες γραφίτη.

Τέλος σε ότι αφορά τη συμπεριφορά τους σε τριβή, αυτή εξαρτάται από το μήκος, τον προσανατολισμό και τις μηχανικές ιδιότητες των ινών.

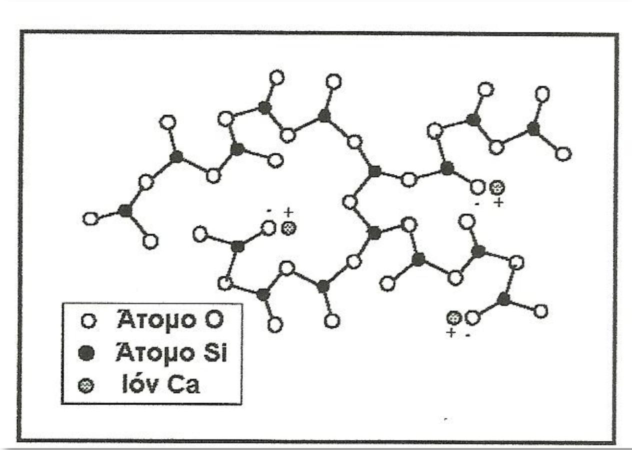


Εικόνα 1.11 (Ινώδες υλικό με συνεχείς ίνες)

1.9.3 ΙΝΕΣ ΓΥΑΛΙΟΥ

Οι ίνες γυαλιού χρησιμοποιήθηκαν στα σύνθετα πρώτης γενιάς (1940) και η χρήση τους συνεχίζεται επιτυχώς μέχρι σήμερα. Είναι από τους πλέον διαδεδομένους τύπους ενισχυτικών ινών στα σύνθετα πολυμερικής μήτρας. Η δομική τους βάση είναι τα οξείδια πυριτίου, ασβεστίου, βορίου, αλουμινίου κ.α. Θεωρούνται από τα πιο φθηνά ενισχυτικά υλικά.

Χαρακτηριστική δομή του γυαλιού παρουσιάζεται στην εικόνα που ακολουθεί.



Εικόνα 1.12

Ανάλογα με τη χημική τους σύσταση οι ίνες γυαλιού χαρακτηρίζονται τύπου E,C και S των οποίων οι κύριες φυσικές και μηχανικές ιδιότητες παρουσιάζονται στο παρακάτω πίνακα.

ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ	ΤΥΠΟΣ			
	E	C	S	SiO_2 καθαρή
Χημική σύσταση (%)				
SiO_2	54	60	65	>99,5
Al_2O_3	16	25	25	-
B_2O_3	8	-	-	-
CaO	17	9	-	-
MgO	5	6	10	-
Μέτρο Ελαστικότητας (GPa)	75	80	84	72
Αντοχή σε εφελκυσμό (MPa)	2100-3400	2500-4400	2800-4800	3500-8800
Πυκνότητα (g/cm^3)	2,54	2,50	2,48	2,20
Θερμοκρασία τήξης (^oC)	900-1200	1400-1600	1400-1600	1720
Μέγιστη θερμοκρασία χρήσης (^oC)	550	650	650	750

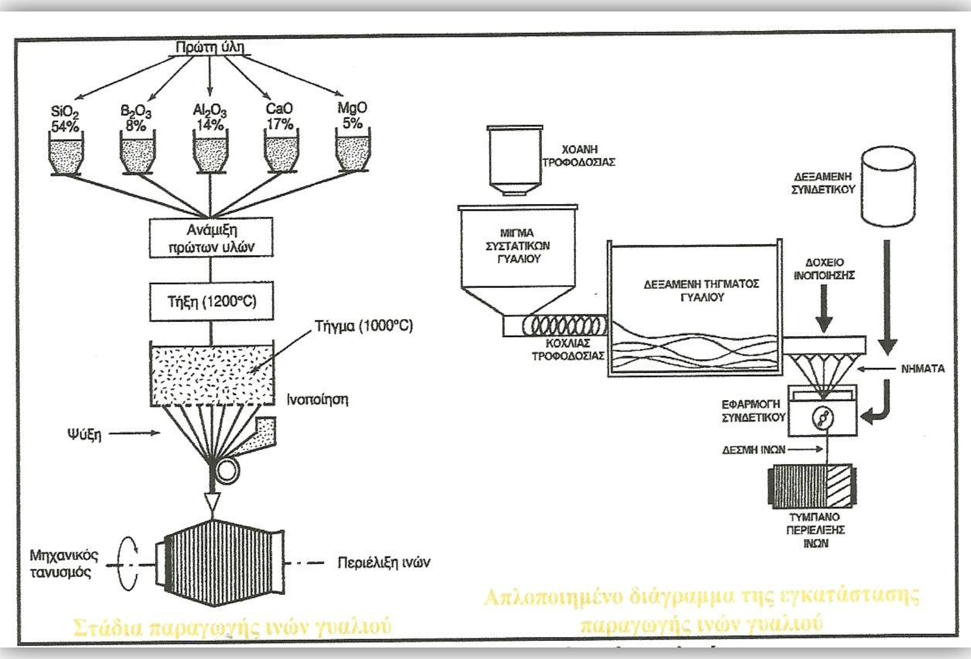
Πίνακας Β

E- glass (E=electrical): Πρόκειται για τα συχνότερα χρησιμοποιούμενα υαλονήματα με καλές ηλεκτρικές ιδιότητες, αντοχή, και δυσκαμψία, καθώς και πολύ καλή συμπεριφορά στην αλλαγή των καιρικών συνθηκών, αλλά με μέτρια αντοχή σε χημικά αντιδραστήρια.
C-glass (C=corrosion): Υαλονήματα με υψηλή αντίσταση στη χημική διάβρωση, αλλά και με καλλίτερες μηχανικές ιδιότητες από τις ίνες τύπου Ε, από τις οποίες όμως είναι ακριβότερες.
S-glass (S=stiffness): Ακριβότερο υλικό από το E-glass , αλλά με υψηλότερη δυσκαμψία και θερμική αντοχή. Χρησιμοποιείται κυρίως στην αεροπορική βιομηχανία.

Όταν περιέχονται μεγάλα ποσοστά SiO_2 (>99.5%) παρατηρούνται αυξημένες τιμές των μηχανικών ιδιοτήτων της ίνας και της μέγιστης θερμοκρασίας χρήσης του σύνθετου. Γι'αυτό το λόγο, σε ειδικές εφαρμογές όπου απαιτούνται υψηλές μηχανικές ιδιότητες κάτω από υψηλή θερμοκρασία χρησιμοποιούνται ίνες από 100% καθαρή πυριτία.

Τα βασικά πλεονεκτήματα των υαλονημάτων είναι το χαμηλό κόστος και η υψηλή αντοχή, ενώ στα κύρια μειονεκτήματα τους εντάσσονται το χαμηλό μέτρο ελαστικότητας και η μικρή αντοχή τους έναντι φθοράς εκτριβής (λύση της συνέχειας της επιφάνειας τους). Εγχαράξεις και εκδορές δημιουργούν περιοχές συγκέντρωσης τάσεων στην επιφάνεια της ίνας, με αποτέλεσμα την ταχεία υποβάθμιση των μηχανικών τους ιδιοτήτων και της ικανότητας πρόσφυσης τους στη πολυμερική μήτρα.

Η παραγωγή των ινών γυαλιού γίνεται με εκβολή τήγματος γυαλιού διαμέσου μήτρας με διάτρητο πυθμένα και περιλαμβάνει τις ακόλουθες φάσεις:



Εικόνα 1.13

- Η πρώτη ύλη τοποθετείται σε δεξαμενή, όπου τήκεται.

- Το τήγμα τοποθετείται σε σειρά κυλινδρικών δοχείων με διάτρητο πυθμένα (διάμετρος οπών 1-2 mm)

- Το γυαλί ρέει μέσα από τις οπές του πυθμένα υπό την επίδραση της βαρύτητας.

- Οι παραγόμενες ίνες συγκεντρώνονται σε ένα σύνολο και τανύονται μηχανικά μέχρις ότου αποκτήσουν την κατάλληλη διάμετρο (1-15 μm) και ακολουθεί ελαφρός ψεκασμός τους με νερό (ψύξη).

- Ακολούθως οι ίνες διέρχονται από ιμάντα που επιβάλλει σε αυτές προστατευτικό λιπαντικό συνδετικό υλικό (binder) ή ειδικά κολλοειδή πρόσθετα που δρουν ως προστατευτικές επικαλύψεις και συνεισφέρουν στην καλύτερη πρόσφυση ινών-μήτρας.

- Τέλος, οι ίνες περιτυλίγονται ανά δέσμες (stand ή end) των 204 νημάτιων (τυπική τιμή) γύρω από τύμπανο, που περιστρέφεται με μεγάλη ταχύτητα (της τάξης των 50m/s).

- Οι ρόλοι υαλονήματος υφίστανται ξήρανση πριν υποβληθούν σε οποιαδήποτε περαιτέρω διεργασία μορφής.

Σημειώνονται τα ακόλουθα:

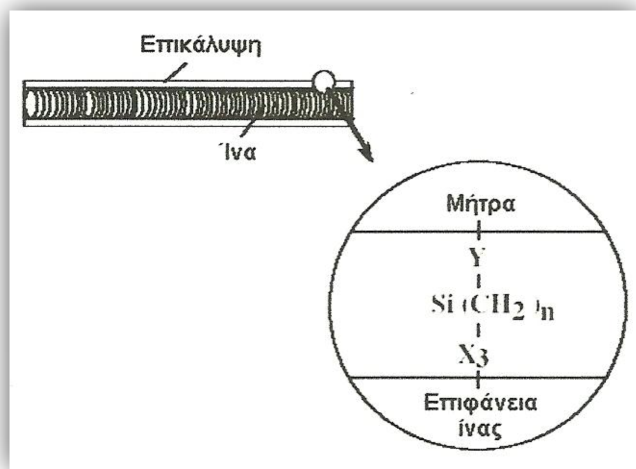
- Ο έλεγχος της διαμέτρου των ινών γίνεται με ρύθμιση της στάθμης τήγματος μέσα στη δεξαμενή, της πυκνότητας του, της διαμέτρου των οπών και της ταχύτητας περιστροφής του τυμπάνου.

- Κατά τη διάρκεια παραγωγής των ινών, πρέπει να αποφεύγεται η επαφή ινών μεταξύ τους, καθώς και με άλλα αντικείμενα, που μπορεί να προκαλέσουν επιφανειακές κακώσεις στην ίνα.

- Τα χημικά πρόσθετα (sizes) διακρίνονται σε προσωρινά και συμβατά. Τα προσωρινά πρόσθετα έχουν κύριο στόχο αφενός τη προστασία της ίνας έναντι μείωσης της αντοχής λόγω τριβής της με τις άλλες ίνες και αφετέρου τη σύνδεση των ινών μεταξύ τους στην περίπτωση που διαμορφωθούν σε πλέξη ύφανσης και ακόμη προσδίδουν στην ίνα αντιστατικές ιδιότητες.

Συνήθως χρησιμοποιούνται αμυλέλαια, που διευκολύνουν αποτελεσματικά την πρόσφυση ίνας και ρητίνης εμποτισμού. Τα προσωρινά πρόσθετα απομακρύνονται εύκολα με θέρμανση των ινών σε κλιματιζόμενο περιβάλλον σε θερμοκρασία > 340^{o}C για χρονικό διάστημα 15-20h.

Τα συμβατά πρόσθετα έχουν στόχο τη βελτίωση της αρχικής πρόσφυσης ρητίνης-γυαλιού και τη μείωση των δυσάρεστων επιπτώσεων της υγρασίας ή άλλων περιβαλλοντικών επιδράσεων. Πρόκειται περί οργανοπυριτικών ενώσεων τύπου X3Si(CH2)nY, όπου η Y ομάδα συμβατή προς την πολυμερική μήτρα, X υδρολυόμενη ομάδα στο πυρίτιο και n=0-3 η δράση των οποίων περιγράφεται στο παρακάτω σχήμα



Εικόνα 1.14

• Η αντοχή και η δυσκαμψία του γυαλιού προσδιορίζεται από την τρισδιάστατη δομή και διάταξη των συστατικών οξειδίων του. Λόγω αυτής της δομής τα υαλονήματα είναι ισότροπα υλικά και παρουσιάζουν γραμμική ελαστική συμπεριφορά. Η συμμετοχή και των μεταλλικών οξειδίων στη σύνθεση των ινών μπορεί να επιφέρει αλλαγές στις φυσικοχημικές τους ιδιότητες.

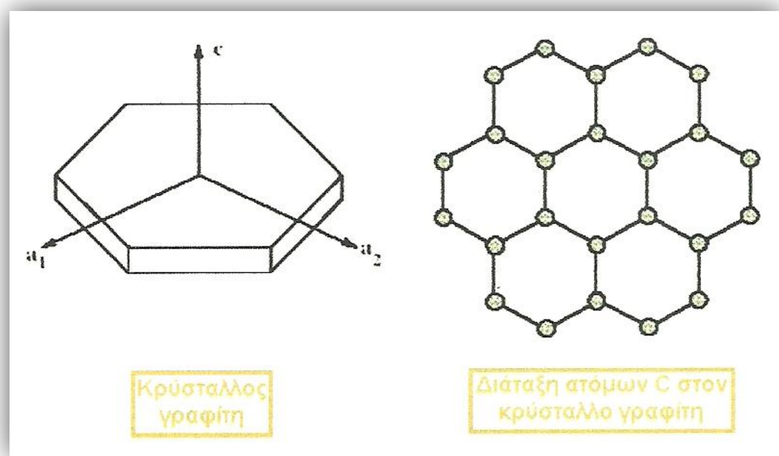
1.9.4 ΙΝΕΣ ΑΝΘΡΑΚΑ

Οι ίνες γραφίτη είναι η επικρατέστερη ενίσχυση υψηλής αντοχής και υψηλού μέτρου ελαστικότητας, η οποία χρησιμοποιείται για την παρασκευή υψηλών επιδόσεων σύνθετων υλικών ρητινικής μήτρας. Γενικά, όταν απαιτείται ο βέλτιστος συνδυασμός μηχανικής συμπεριφοράς και ελάττωσης βάρους, οι χρησιμοποιούμενες ίνες είναι, συνήθως, ίνες άνθρακα.

Επίσης, οι ίνες άνθρακα προτιμούνται όταν η θερμική διαστολή ενός υλικού πρέπει να συγκρατηθεί σε χαμηλό επίπεδο ή όταν απαιτείται συμβατότητα των χαρακτηριστικών διαστολής δύο συνενωμένων διαφορετικών υλικών.

Η υπεροχή αυτή των ανθρακονημάτων οφείλεται στη φύση του άνθρακα (ως στοιχείου) και τους ενδοατομικούς δεσμούς που σχηματίζει με άλλα άτομα άνθρακα. Ο γραφίτης αποτελείται από ανισότροπους πολυκρυσταλλίτες, των οποίων η ανισοτροπία εξαρτάται από τις συνθήκες παρασκευής τους.

Αποτέλεσμα του ισχυρού προσανατολισμού των κρυσταλλιτών παράλληλα στο διαμήκη άξονα των ανθρακονημάτων είναι η υψηλή στιβαρότητα και αντοχή σε θραύση και ο χαμηλός συντελεστής θερμικής διαστολής κατά τη διεύθυνση αυτή. Στη γραφιτική δομή τα άτομα C διατάσσονται πολύ πυκνά με τη μορφή εξαγωνικών επιπέδων όπως φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί.



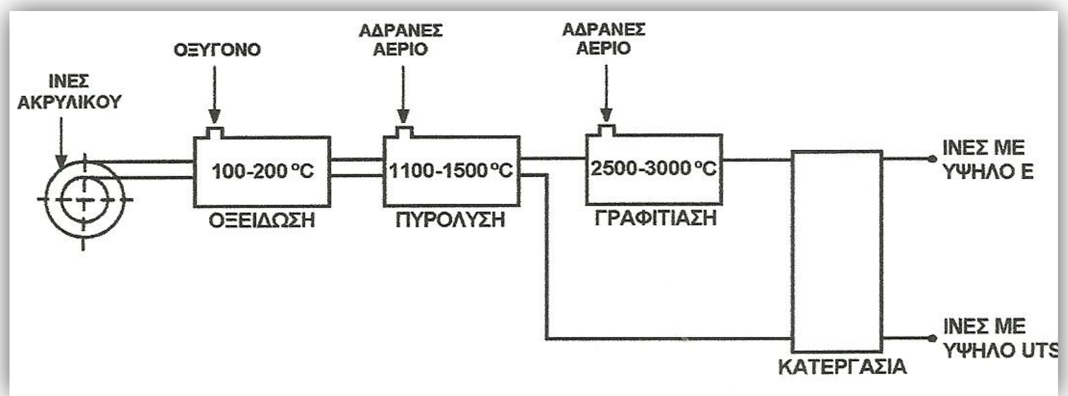
Εικόνα 1.15

Ο ισχυρός δεσμός μεταξύ των ατόμων στις επίπεδες αυτές εξαγωνικές στρώσεις οδηγεί σε εξαιρετικά υψηλό μέτρο ελαστικότητας. Αντίθετα, ο ασθενής τύπου Van Der Waals δεσμός που υφίσταται μεταξύ γειτονικών στρώσεων, έχει ως αποτέλεσμα ένα χαμηλότερης τιμής μέτρο ελαστικότητας σε αυτή τη διεύθυνση. Τυπική δομή του ανθρακονήματος, όπως έχει ληφθεί από ηλεκτρονικό μικροσκόπιο παρουσιάζεται στην εικόνα που ακολουθεί.

Εικόνα 1.16

Στην παραγωγή ανθρακονημάτων, ως πρώτη ύλη χρησιμοποιούνται ποκλυμερικές ίνες πολυακρυλονιτρίλιου (PAN), ίνες τεχνητής μέταξας (rayon) και πίσσα.

Η παραγωγή ινών γραφίτη από ίνες (PAN) πραγματοποείται σε τρία στάδια:



Εικόνα 1.17

• Οξείδωση των ινών PAN στον αέρα και σε χαμηλή θερμοκρασία (100-200^{o}C), με ταυτόχρονη εφαρμογή τάσης, η οποία είναι απαραίτητη για την ευθυγράμμιση των αλυσίδων του πολυμερούς.

• Πυρόλυση, υπό τάση, σε ουδέτερη ή αναγωγική ατμόσφαιρα και σε θερμοκρασία 1100-1500 ^{o}C. Οι παραγόμενες ίνες στο στάδιοχαρακτηρίζονται ως ίνες υψηλής αντοχής (high strength carbon fibers) και η αντοχή τους φτάνει τα 3000 MPa.

• Η θέρμανση σε ουδέτερη ή αναγωγική ατμόσφαιρα συνεχίζεται σε υψηλές θερμοκρασίες (2500-3500 ^{o}C), οπότε πραγματοποείται γραφιτίαση, με ταυτόχρονη ανακρυστάλλωση, που οδηγεί σε ισχυρό προσανατολισμό των κρυσταλλιτών. Οι παραγόμενες ίνες σε αυτό το στάδιο χαρακτηρίζονται ως ίνες υψηλού μέτρου ελαστικότητας (high module carbon fibers) και έχουν μέτρο ελαστικότητας περίπου 400GPa, η δε διάμετρος τους είναι περίπου 10μm. Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται τα χαρακτηριστικά ινών άνθρακα που έχουν παραχθεί σε δύο στάδια οξείδωση και πυρόλυση) και σε τρία στάδια (οξείδωση, πυρόλυση, θέρμανση σε υψηλή θερμοκρασία), αντίστοιχα.

ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ	ΙΝΕΣ ΥΨΗΛΗΣ ΑΝΤΟΧΗΣ	ΙΝΕΣ ΥΨΗΛΟΥ ΜΕΤΡΟΥ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ
Μέτρο Ελαστικότητας (GPa)	180-230	350-420
Αντοχή σε εφελκυσμό (MPa)	2500-3400	1900-2300
% περιεκτικότητα άνθρακα	95-98	99
Πυκνότητα (g/cm^3)	1,8	1,9
Μέγιστη θερμοκρασία χρήσης (^{o}C)	2000	2500

Πίνακας C

Σημειώνεται τα ακόλουθα:

- Σε οξειδωτική ατμόσφαιρα, η μέγιστη θερμοκρασία χρήσης των ανθρακονημάτων περιορίζεται στους 500 ^{o}C και για τους δύο τύπους ινών. Κατά το σχεδιασμό του συνθέτου πρέπει οπωσδήποτε να λαμβάνεται υπόψη και η μέγιστη θερμοκρασία χρήσης της μήτρας.
- Οι ιδιότητες των χρησιμοποιούμενων ανθρακονημάτων εξαρτώνται σημαντικά από την αρχιτεκτονική των ινών του PAN (μονοδιευθυντικές ίνες, διδιάστατο πλέγμα, τρισδιάστατο πλέγμα). Ο τρόπος διευθέτησης των ινών αυτών καθορίζει και το βαθμό ανισοτροπίας των ανθρακονημάτων που προκύπτουν και μπορεί να ποικίλλει από την πλήρη ισοτροπία ως την πλήρη ανισοτροπία.
- Η δυνατότητα επιλογής, από ένα μεγάλο εύρος τιμών της θερμοκρασίας κάθε σταδίου παραγωγής ανθρακονημάτων, δίνει την ευχέρεια παραγωγής ανθρακονημάτων διαφορετικού βαθμού γραφιτίασης και διαφορετικών ιδιοτήτων (οι μηχανικές και φυσικές ιδιότητες, ο΄πως η θερμική και η ηλεκτρική αγωγιμότητα, εξαρτώνται από το βαθμό γραφιτίασης και το βαθμό ανισοτροπίας). Γενικά, όσο καλύτερα προσανατολισμένες είναι οι ίνες και όσο υψηλότερη περιεκτικότητα σε γραφίτη διαθέτουν τόσο καλύτερες μηχανικές ιδιότητες επιδεικνύουν.
- Τέλος το κόστος παραγωγής των ινών γραφίτη είναι δέκα φορές τουλάχιστον υψηλότερο από το κόστος παραγωγής των ινών γυαλιού.

1.9.5 ΙΝΕΣ ΠΟΛΥΜΕΡΟΥΣ

Οι πιο διαδεδομένες ίνες πολυμερούς είναι οι ίνες από Nylon, πολυαιθυλένιο και Kevlar. Τα νήματα Nylon και πολυεστέρα παράγονται με φυγοκεντρική περιδίνηση τήγματος, ενώ ακρυλικά και κυτταρινικά νήματα παρασκευάζονται με φυγοκεντρική περιδήνηση διαλύματος και συνακόλουθες τεχνικές καθίζησης ιζήματος. Η αντοχή τους δεν ξεπερνά τα 10Pa, ενώ το μέτρο ελαστικότητας πλησιάζει τα 1000 Pa. Παρόλο που από μηχανικής άποψης δεν κατατάσσονται στις ίνες υψηλής απόδοσης, εντούτοις το χαμηλό κόστος παραγωγής τους τις καθιστά δημοφιλείς στην αγορά.

Η πρώτη υψηλής απόδοση οργανική ίνα αραμιδίου κατασκευάστηκε από την DuPont και έγινε γνωστή με την εμπορική ονομασία Kevlar και παράγεται σε τρεις τύπους:

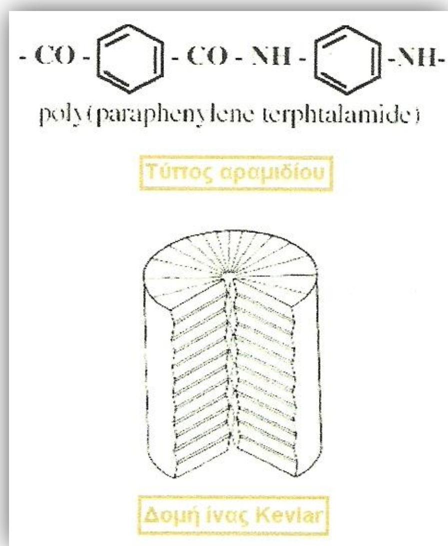
- **Kevlar-29:** Με μέτρο ελαστικότητας 60 GPa και αντοχή σε εφελκυσμό 3,6GPa.
- **Kevlar-49:** Με μέτρο ελαστικότητας 120 GPa και αντοχή σε εφελκυσμό3,6 GPa.
- **Kevlar-149:** Με μέτρο ελαστικότητας 180 GPa και αντοχή σε εφελκυσμό3,4 GPa.

Η πυκνότητα και των τριών τύπων είναι ίδια (1.45 g/cm^3), ενώ η διαφορετική ελαστικότητα οφείλεται στο γεγονός της βελτιωμένης ευθυγράμμισης των μοριακών αλυσίδων, που αυξάνει την δυσκαμψία στη διεύθυνση του άξονα της ίνας. Στον πίνακα που ακολουθεί παρατίθενται οι βασικές ιδιότητες των ινών Kevlar.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ	Kevlar 29	Kevlar 49
Μέτρο ελαστικότητας (GPa)	60	130
Αντοχή σε εφελκυσμό (MPa)	2700	3600
Επιμήκυνση θραύσης (%)	4.5	2
Πυκνότητα (g/cm^3)	1.45	1.45
Μέγιστη θερμοκρασία χρήσης (^{o}C)	200	200
Θερμοκρασία αστοχίας (^{o}C)	400	425

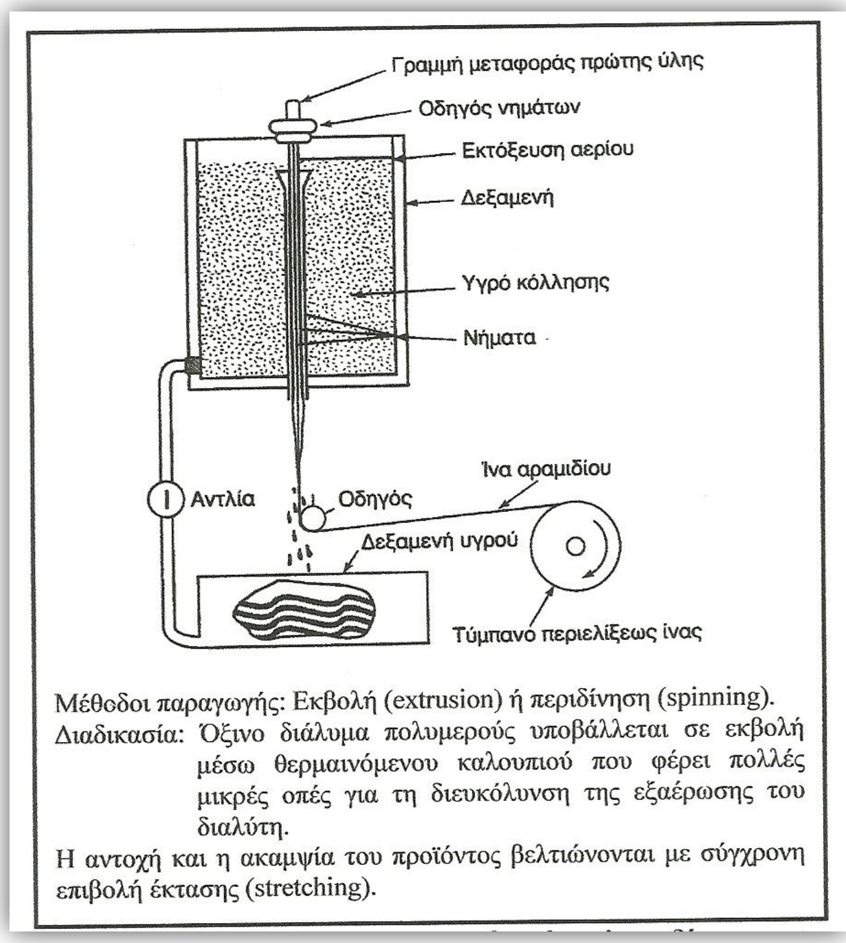
Πίνακας D

Οι υψηλές τιμές των μηχανικών ιδιοτήτων του Kevlar οφείλονται στο γεγονός ότι οι πολυμερικές δομικές αλυσίδες του υλικού είναι αυτές καθ’αυτές πιο ισχυρές και συντάσσονται έτσι, ώστε να δημιουργούν ένα σταθερότερο πλέγμα, σε μορφή επίπεδης ταινίας όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Εικόνα 1.18

Ο κυλινδρικός φλοιός της ίνας περικλείει και συγκρατεί το υλικό του πυρήνα αποδίδοντας στο προιόν ιδιαίτερα υψηλές επιδόσεις κατά την αξονική διεύθυνση, αλλά φτωχή συμπεριφορά κατά την εγκάρσια διεύθυνση. Επιπλέον, ενώ στην εφελκυστική καταπόνηση το υλικό συμπεριφέρεται ελαστικά με παραμόρφωση έως και 2%, η μεγάλη του αδυναμία εμφανίζεται στη θλίψη, όπου σε 0,3% θλιπτική παραμόρφωση αναπτύσσεται πλαστικού τύπου αστοχία. Αξιοσημείωτο, όμως, είναι ότι η αστοχία αυτή δεν είναι καταστροφική, αλλά έχει τη μορφή πτυχώσεων (kink bands).



Εικόνα 1.19

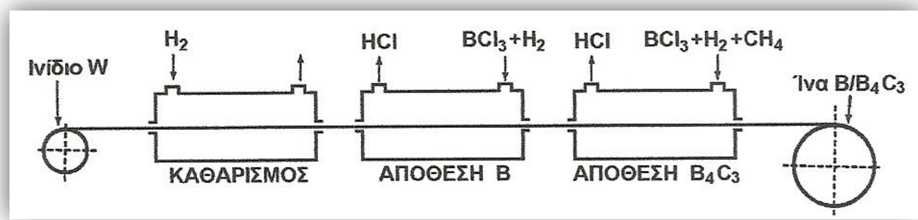
1.9.6 ΜΕΤΑΛΛΙΚΕΣ ΙΝΕΣ

Διάφορα μέταλλα όπως το βόριο (B), το βηρύλλιο (Be) και το βολφράμιο (W) θα μπορούσαν να αποτελέσουν εξαιρετικά ενισχυτικά συνθέτων υλικών, αφού παρουσιάζουν υψηλή τιμή ακαμψίας σε σχέση με το ειδικό βάρος τους (ειδική ακαμψία). Το βόριο είναι το περισσότερο υποσχόμενο υλικό για την κατασκευή ινών ενίσχυση, ωστόσο οι τεχνικές παραγωγής μεταλλικών ινών ενίσχυσης εξακολουθούν να παραμένουν πολύ δαπανηρές.

Σήμερα χρησιμοποιούνται δύο τεχνικές για την παραγωγή ινών βορίου:

- Αναγωγή από αλογονίδιο του βορίου

Αλογονίδιο του βορίου (συνήθως BCl_3) ανάγεται από υδρογόνο σε έναν κλειστό θάλαμο υψηλής θερμοκρασίας (1100 ^oC) και αποτίθεται σε πολύ λεπτό νήμα βολφραμίου, διαμέτρου 10-15 μm, όπως φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί. Η διάμετρος των παραγόμενων ινών με αυτήν την τεχνική κυμαίνεται μεταξύ 100-200 μm, ενώ οι ίνες παρουσιάζουν εξαιρετική δυσκαμψία και μηχανική αντοχή.



Εικόνα 1.20

- Απόθεση με τεχνική CVD

Το βόριο αποτίθεται σε νήμα άνθρακα ή βολφραμίου με την τεχνική της χημικής εναπόθεσης ατμών (CVD). Η τεχνική αυτή είναι η οικονομικότερη από την προηγούμενη, αλλά το προιόν έχει χαμηλότερη μηχανική αντοχή.

Οι ίνες βορίου έχουν υψηλή μηχανική αντοχή (E=300-420 GPa, UTS=3000-3700 MPa), ενώ οι τιμές των ιδιοτήτων τους διατηρούνται σταθερές ως τους 500 ^{o}C. Για τη χρήση τους σε υψηλότερες θερμοκρασίες, θα πρέπει να χρησιμοποιείται προστατευτικό επίστρωμα καρβιδίου του πυριτίου (ίνες Borsic) ή νιτριδίου του βορίου. Τα επιστρώματα αυτά αποτρέπουν την αντίδραση του υλικού ενίσχυσης με αυτό της μήτρας, δεδομένου ότι σε υψηλές θερμοκρασίες, κυρίως σε σύνθετα με μεταλλική μήτρα τιτανίου ή αλουμινίου, ευνοούνται η διάχυση μέσω της διεπιφάνειας ίνας-μήτρα και οι αντιδράσεις σε στερεά κατάσταση που οδηγούν στο σχηματισμό εύθραυστων μεσομεταλλικών ενώσεων και αστοχία του συνθέτου.

1.9.7 ΚΕΡΑΜΙΚΕΣ ΙΝΕΣ

Οι κεραμικές ίνες χρησιμοποιούνται σε εφαρμογές υψηλών θερμοκρασιών. Χαρακτηρίζονται από υψηλή αντοχή, στιβαρότητα και θερμική ευστάθεια. Οι συνηθέστερα χρησιμοποιούμενες κεραμικές ίνες είναι οι ίνες καρβιδίου και πυριτίου (SiC) και αλουμινίου (Al_2O_3), ενώ σπανιότερα συναντώνται και ίνες Si_3N_4, BeO, B_4C και ZrO_2.

Το καρβίδιο του πυριτίου (SiC) και αλούμινας (Al_2O_3), είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθεί ως ενισχυτικό υλικό είτε με τη μορφή ινών είτε με τη μορφή φυλλιδίων. Οι ίνες SiC παρουσιάζουν υψηλές τιμές αντοχής και ανώτερες μηχανικές ιδιότητες από τα φυλλίδια. Οι μέθοδοι παραγωγής των υπόψη ινών συνίστανται στις παρακάτω:

- Με χημική εναπόθεση ατμών (CVD) χλωριούχου σιλανίου σε ίνες άνθρακα. Οι παραγόμενες ίνες έχουν πυρήνα διαμέτρου 10-25 μm και εξωτερική διάμετρο 100-150μm.

• Από πολυμερικές ίνες (Nicalon).

Θέρμανση σε κενό σε θερμοκρασία 850 ^{o}C μετατρέπει την πολυμερική ίνα σε ανόργανο SiC , ενώ θέρμανση σε υψηλότερη θερμοκρασία (>1000 ^{o}C) προκαλεί κρυστάλλωση σε β- SiC. Οι παραγόμενες ίνες έχουν διάμετρο 10-15μm.

• Τριχίτες SiC από φλοιό ρυζιού.

Ο φλοιός του ρυζιού περιέχει ~15% κ.β SiO_2

Θέρμανση σε θερμοκρασία 700-900 ^{o}C οδηγεί σε υπόλλειμα SiO_2 και ελεύθερο άνθρακα.

Θέρμανση του υπολλείματος σε θερμοκρασία ~1500 ^{o}C και σε περιβάλλον αζώτου ή αμμωνίας οδηγεί στο σχηματισμό SiC.

Οι παραγόμενοι τριχίτες έχουν διάμετρο ~0,1-1μm και μήνος ~50μm.

Παρακάτω παρουσιάζεται συγκριτικός πίνακας των ιδιοτήτων των ινών από κάθε μέθοδο.

Γενικά οι μέθοδοι παρασκευής των κεραμικών ινών είναι ιδιαίτερα δαπανηρές.

Μέθοδος / Ιδιότητα	CVD	Nicalon	Τριχίτες
Πυκνότητα , ρ (g/cm^3)	3.3	2.6	-
Αντοχή, UTS (MPa)	3500	2000	7000
Μέτρο ελαστικότητας, E (GPa)	430	180	480
Διάμετρος ίνας, d (μm)	140	15	<1

Πίνακας Ε

Το SiC παρουσιάζει σταθερή μηχανική αντοχή ως τους 1400 ^{o}C, ωστόσο η μέγιστη επιτρεπτή θερμοκρασία χρήσης του, περιορίζεται στους 900 ^{o}C, λόγω της σημαντικής δραστικότητας του πάνω από τη θερμοκρασία αυτή.

Οι μονοκρυσταλλικές ίνες αλουμίνας (Al_2O_3) διαμέτρου 250mm έχουν εξαιρετικές μηχανικές ιδιότητες. Λόγω της ισχυρής φύσεως των χημικών δεσμών, η σταθερότητα των μηχανικών τους ιδιοτήτων διατηρείται ως τους 800 ^{o}C. Οι μονοκρυσταλλικές ίνες αλουμίνας είναι εξαιρετικά ευαίσθητες έναντι επιφανειακής φθοράς που οδηγεί ταχύτατα σε αστοχία.

1.9.8 ΤΡΙΧΙΤΕΣ (WHISKERS)

Οι τριχιτές είναι νηματικοί μονοκρύσταλλοι που παράγονται με αποσύνθεση άλατος μετάλλου σε αναγωγική ατμόσφαιρα, κάτω από αυστηρά ελεγχόμενες συνθήκες θερμοκρασίας. Η διάμετρος τους είναι της τάξης του 1μm, ενώ το μήκος τους μπορεί να φτάσει τα μερικά χιλιοστά και παρουσιάζουν τις μηχανικές ιδιότητες ενός τέλειου κρυστάλλου. Οι εξωτερικές τους επιφάνειες είναι λείες και δεν παρουσιάζουν ζώνες συγκέντρωσης τάσεων.

Οι ευρύτερα χρησιμοποιούμενοι τριχίτες είναι από αλουμίνα, γραφίτη, καρβίδιο του πυριτίου, βηρύλλια και νιτρίδιο του πυριτίου. Η παραγωγή τριχιτών σε βιομηχανική κλίμακα είναι δύσκολη. Στο πίνακα γίνεται σύγκριση των ιδιοτήτων ινών τριχιτών από SiC και Al_2O_3 .

ΙΔΙΟΤΗΤΑ	$SiC_{ΙΝΑ}$	$SiC_{ΤΡΙΧΙΤΗΣ}$	Al_2O_3 ΙΝΑ	Al_2O_3 ΤΡΙΧΙΤΗΣ
Μέτρο ελαστικότητας (GPA)	480	840	500	755
Αντοχή σε εφελκυσμό (MPA)	2300	21000	2000	19500
Πυκνότητα (g/cm^3)	3,2	3,2	4,0	4,0
Μέγιστη θερμοκρασία χρήσης (°C)	900	1600	800	1300

Πίνακας F

1.9.9 ΙΝΕΣ ΦΥΣΙΚΩΝ ΟΡΥΚΤΩΝ ΠΟΡΩΝ

Αρκετά ορυκτά που βρίσκονται σε ινώδη ή φυλλώδη μορφή, μπορούν να αποτελέσουν φθηνό ενισχυτικό υλικό, αλλά χαμηλών προδιαγραφών. Ευρύτερα χρησιμοποιούμενα τέτοια ορυκτά είναι ο αμίαντος και η μαρμαρυγία (mica).

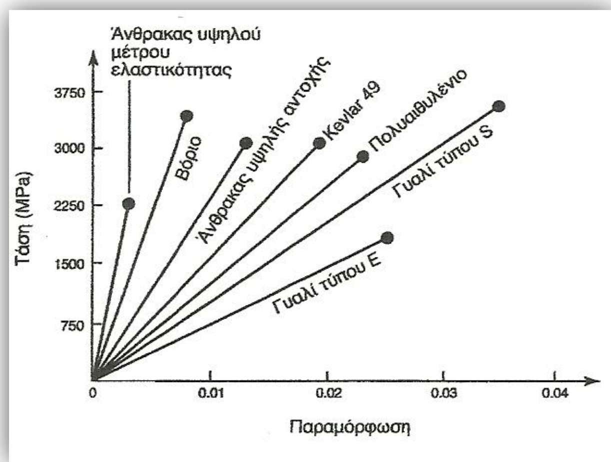
Οι ίνες αμιάντου αποτελούνται από 500 περίπου στοιχειώση ινίδια, διαμέτρου ~10nm, και έχουν διάμετρο ~2010μm και μήκος αρκετά cm. Μπορούν να χρησιμοποιηθούν μέχρι θερμοκρασία 500 °C, οπότε η μηχανική αντοχή του υλικού μειώνεται σημαντικά. Το μέτρο ελαστικότητας της ίνας είναι της τάξης των 160GPa, ενώ η μηχανική αντοχή μπορεί να φθάσει μέχρι 5500GPa. Ο αμίαντος λόγω του χαμηλού του κόστους χρησιμοποιείται ευρύτατα.

Οι μαρμαρυγίες ανήκουν στην κατηγορία των φυλλοπυριτικών ορυκτών, χαρακτηρίζονται από τέλειο σχισμό και αποχωρίζονται εύκολα από το πέτρωμα με μορφή φυλλιδίων, τα οποία χρησιμοποιούνται ως συστατικό ενίσχυσης του σύνθετου υλικού. Η αντοχή σε εφελκυσμό μπορεί να φθάσει μέχρι 2500 MPa (τέλεια φυλλίδια), ενώ λόγω ατελειών στις άκρες των φυλλιδίων , οι συνήθεις τιμές της αντοχής κυμαίνονται στην περιοχή 700-

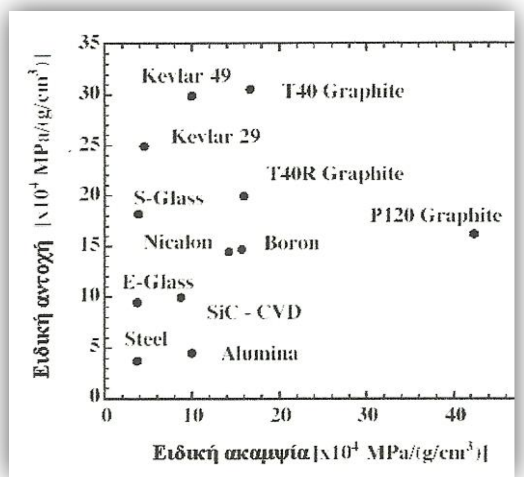
900MPa. Το μέτρο ελαστικότητας των μαρμαρυγιών είναι περίπου 250 GPa και η πυκνότητα τους 2,8 g/cm^3

1.9.10 ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΕΝΙΣΧΥΤΙΚΩΝ ΙΝΩΝ

- Ως προς την ειδική αντοχή και ειδική ακαμψία



Εικόνα 1.21



Εικόνα 1.22

- Ως προς την θερμική ευστάθεια

Ίνα	T_{max} (^oC)
Spectra	150
Kevlar	250
Glass	800
SiC	1000
Alumina	1370
Carbon	2000*

* Παρουσία οξυγόνου: T_{max}=500 ^oC

Πίνακας G

• Ως προς την παραμόρφωση θραύσης

Ίνα	Παραμόρφωση θραύσης (%)
Kevlar	3-4
Glass	2
Carbon	1
Ceramic	<1

Πίνακας Η

1.10 ΚΟΚΚΩΔΗ ΣΥΝΘΕΤΑ ΥΛΙΚΑ

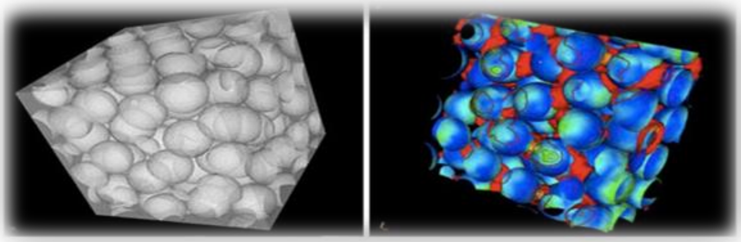
Τα κοκκώδη σύνθετα υλικά αποτελούνται από πολύ μικρά σωματίδια σε σχήμα κόκκου, κάποιου ισχυρού και ανθεκτικού υλικού, τα οποία είναι διεσπαρμένα μέσα στη μήτρα η οποία είναι από διαφορετικό υλικό. Οι κόκκοι μπορεί να είναι μεταλλικοί ή μη, όπως επίσης και η μήτρα. Τα κοκκώδη υλικά έχουν υποδεέστερες μηχανικές ιδιότητες σε σχέση με τα ινώδη, μιας και η συνεισφορά των σωματιδίων στη μηχανική συμπεριφορά του σύνθετου είναι μικρότερη από αυτή των ινών. Ένα σημαντικό γνώρισμα των κοκκωδών σύνθετων υλικών είναι η χαμηλή συνήθως πυκνότητα σε σωματίδια, πράγμα που προσδίδει αρκετές καλές ιδιότητες σε αυτά τα υλικά. Ως πρώτη ύλη στα κοκκώδη, μπορούν να χρησιμοποιηθούν κάποια φυσικά ορυκτά όπως ο τάλκης, ενώ η διαδικασία μορφοποίησης αυτών των υλικών είναι σχετικά απλή και αυτοματοποιημένη, γεγονός που επιτρέπει την μαζική παραγωγή προϊόντων. Κοκκώδη υλικά χρησιμοποιούνται σε εφαρμογές μη υψηλών απαιτήσεων όπως αντικείμενα καθημερινής χρήσης, εξαρτήματα αυτοκινήτων, και άλλα. Οι κόκκοι μπορεί να είναι μεταλλικής υφής ή μη και δύναται να συνδυασθούν με διαφόρων τύπων μήτρες. Οι διάφοροι συνδυασμοί μήτρας/κόκκων που μπορούν να επιτευχθούν, αναφέρονται παρακάτω. Έτσι, από αυτήν την άποψη έχουμε τέσσερις δυνατούς συνδυασμούς:

1. **<u>Υλικά μη μεταλλικού εγκλείσματος εντός μη μεταλλικής μήτρας</u>**

Το μη οπλισμένο σκυρόδεμα αποτελεί το πιο κοινό παράδειγμα ενός τέτοιου υλικού. Το σκυρόδεμα αποτελείται από κόκκους άμμου και πέτρας «δεμένους» με ένα μείγμα τσιμέντου και νερού, το οποίο έχει αντιδράσει χημικά και έχει σκληρύνει. Η αντοχή του σκυροδέματος αποδίδεται στην ύπαρξη κόκκων πέτρας. Επίσης φλούδες μη μεταλλικών υλικών, όπως ο μαρμαρυγίας ή το γυαλί, μπορούν να αποτελέσουν το κοκκώδες έγκλεισμα μιας γυάλινης ή πλαστικής μήτρας.

2. **<u>Υλικά μεταλλικού εγκλείσματος εντός μη μεταλλικής μήτρας</u>**

Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα τέτοιου υλικού είναι το έγκλεισμα χαλκού μέσα σε εποξειδική ρητίνη, που αυξάνει κατά πολύ την ηλεκτρική αγωγιμότητα αυτής. Επίσης είναι συνήθη τα σύνθετα υλικά με έγκλεισμα από το μέταλλο αυτό, υπό μορφή φλούδας. Σκοπός της παρασκευής τέτοιων σύνθετων υλικών είναι η δημιουργία ενός υλικού με βελτιωμένες μηχανικές ιδιότητες(αντοχή, μέτρο ελαστικότητας, όριο διαρροής), η αύξηση της ηλεκτρικής και θερμικής αγωγιμότητας καθώς και η μείωση του συντελεστή θερμικής διαστολής και της φθοράς της μήτρας.



Εικόνα 1.23

3. **<u>Υλικά μεταλλικού εγκλείσματος εντός μεταλλικής μήτρας</u>**

Ένα παράδειγμα υλικού αυτής της κατηγορίας είναι τα κράματα χαλκού ή χάλυβα που περιέχουν κόκκους μόλυβδου, η ύπαρξη των οποίων καθιστά τα παραπάνω υλικά κατεργάσιμα στις εργαλειομηχανές. Επίσης πολλά μέταλλα που έχουν πολύτιμες ιδιότητες αλλά είναι εύθραυστα σε θερμοκρασία περιβάλλοντος, όπως είναι το χρώμιο, το βολφράμιο και το μολυβδαίνιο, μπορούν να αποτελέσουν το κοκκώδες έγκλεισμα άλλων μετάλλων τα οποία παρουσιάζουν όλκιμη συμπεριφορά σε θερμοκρασία περιβάλλοντος. μολυβδαίνιο, μπορούν να αποτελέσουν το κοκκώδες έγκλεισμα άλλων μετάλλων τα οποία παρουσιάζουν όλκιμη συμπεριφορά σε θερμοκρασία περιβάλλοντος. Το σύνθετο υλικό που προκύπτει είναι όλκιμο στη θερμοκρασία αυτή και διαθέτει παράλληλα και κάποιες από τις ιδιότητες του εύθραυστου εγκλείσματος.

4. **<u>Υλικά μη μεταλλικού εγκλείσματος εντός μεταλλικής μήτρας</u>**

Μη μεταλλικά υλικά μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε μορφή κοκκώδους εγκλείσματος μέσα σε μεταλλική μήτρα. Τα υλικά που προκύπτουν ονομάζονται **κεραμομέταλλα**. Τα κεραμομέταλλα μπορούν να είναι δυο ειδών ανάλογα με το έγκλεισμα. Το πρώτο είδος είναι **κεραμομέταλλα με κόκκους οξειδίου ενός μετάλλου μέσα σε μεταλλική μήτρα**, τα οποία χρησιμοποιούνται στην κατασκευή εργαλείων και σε εφαρμογές υψηλής θερμοκρασίας όπου η αντίσταση στη διάβρωση είναι σημαντική. Το δεύτερο είδος είναι τα **κεραμομέταλλα με κόκκους καρβιδίου ενός μετάλλου μέσα σε μεταλλική μήτρα**. Έτσι, το καρβίδιο του βολφραμίου μέσα σε μήτρα κοβαλτίου χρησιμοποιείται σε τμήματα μηχανών τα οποία απαιτούν μεγάλη αντοχή στην οξείδωση και στη διάβρωση, ενώ έχει συντελεστή θερμικής διαστολής παραπλήσιο με αυτόν του χάλυβα και έτσι είναι κατάλληλο για χρήσεις σε βαλβίδες κ.α. Επίσης το καρβίδιο του τιτανίου μέσα σε μήτρα νικελίου ή κοβαλτίου χρησιμοποιείται συχνά σε εφαρμογές υψηλής θερμοκρασίας, όπως π.χ. σε διάφορα μέρη στροβιλομηχανών. Τέλος τα κεραμομέταλλα χρησιμοποιούνται στους πυρηνικούς αντιδραστήρες σαν καύσιμα.

Τα κοκκώδη σύνθετα υλικά δύναται να ταξινομηθούν και με κριτήριο το μέγεθος των κόκκων ως εξής:

1. Σύνθετα με ενίσχυση σωματιδίων μεγάλου μεγέθους.

Τα σωματίδια έχουν διάμετρο λίγων μm και περιέχονται σε ποσοστό μεγαλύτερο του 25%. Η συνήθης κατ' όγκο περιεκτικότητα κυμαίνεται ανάμεσα 60-90%.

2. Σύνθετα με ενίσχυση μικρών σωματιδίων σε διασπορά.

Τα εγκλείσματα, που συνήθως πρόκειται για οξείδια, περιέχονται στο σύνθετο σε συγκεντρώσεις μικρότερες του 15% κατ' όγκο. Η διάμετρος των σωματιδίων ποικίλει μεταξύ 0,01-0,1 μm. Η ισχυροποίηση της μήτρας επιτυγχάνεται με την παρεμπόδιση της μετάδοσης των διαταραχών εξαιτίας της ύπαρξης σωματιδίων.

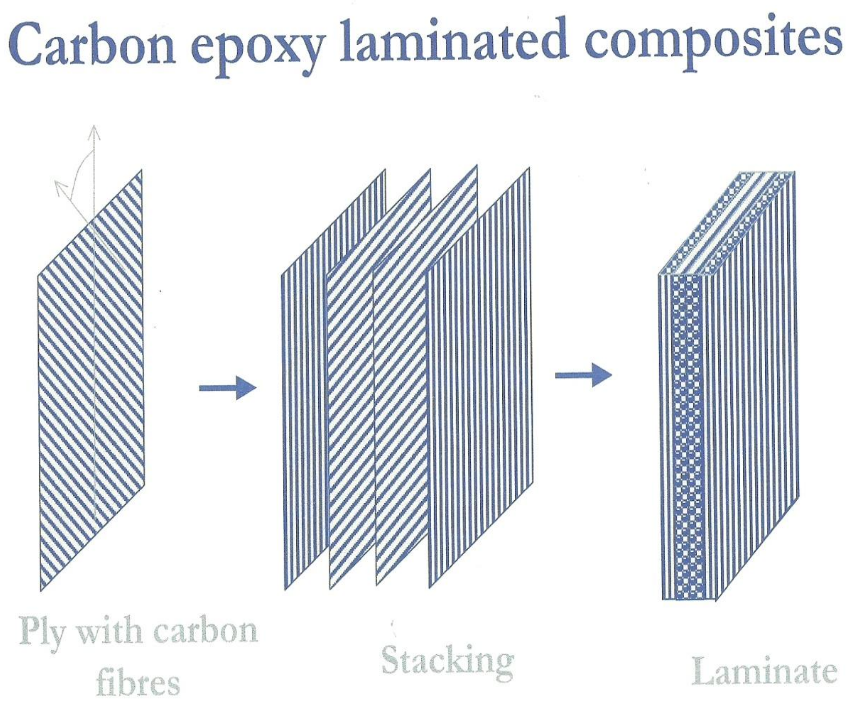
1.11 ΣΤΡΩΜΑΤΙΚΑ ΣΥΝΘΕΤΑ ΥΛΙΚΑ

Τα πολύστρωτα(laminate) ή στρωματικά σύνθετα υλικά είναι μια κατηγορία σύνθετων υλικών στην οποία τα υλικά της μήτρας και της ενίσχυσης είναι υπό τη μορφή στρώσεων και φύλλων. Διάφορα υλικά μπορούν να συνδυασθούν ή και να αποτελέσουν τις στρώσεις (στρώματα ή φύλλα(ply)) που συνθέτουν τα πολύστρωτα σύνθετα υλικά. Τα σύνθετα αυτού του τύπου μπορεί να έχουν πολύ καλές ιδιότητες, όπως δυσκαμψία, αντοχή, αντίσταση στη διάβρωση και στη φθορά, ακουστική και θερμική μόνωση κ.α.

Οι επιμέρους στρώσεις αποτελούνται από ίνες υψηλής αντοχής και υψηλές τιμές μέτρου ελαστικότητας, «δεμένες» με ένα πολυμερές, μεταλλικό ή κεραμεικό συνδετικό υλικό. Να πούμε εδώ ότι οι ίνες των στρώσεων μπορούν να είναι και διαφορετικά προσανατολισμένες(Εικ.25), πράγμα το οποίο βελτιώνει τις μηχανικές ιδιότητες του υλικού σε πολλές διευθύνσεις. Ίνες που χρησιμοποιούνται συνήθως, περιλαμβάνουν γραφίτη, γυαλί, βόριο, και καρβίδιο του πυριτίου. Μερικά συνδετικά υλικά είναι εποξειδικές ρητίνες, οι πολυϊμίδες, το αλουμίνιο, το τιτάνιο και η αλουμίνα. Επίσης οι επιμέρους στρώσεις γενικά είναι ορθότροπες (δηλαδή, με κύριες ιδιότητες σε ορθογώνιες κατευθύνσεις) ή εγκαρσίως ισότροπες (με ισότροπες ιδιότητες στο εγκάρσιο επίπεδο). Ωστόσο οι επιμέρους στρώσεις μπορούν να παρουσιάζουν και ανισότροπες (με μεταβλητή κατεύθυνση των κύριων ιδιοτήτων), ορθότροπες, ή ημι-ισότροπες ιδιότητες. Τα ημι-ισοτροπικά ελάσματα εμφανίζουν ισότροπη (δηλαδή, ανεξάρτητη από την κατεύθυνση) απόκριση εντός του επιπέδου αλλά δεν περιορίζονται σε ισοτροπική (καμπτική) απόκριση εκτός αυτού.

Τα κυριότερα είδη των πολύστρωτων σύνθετων υλικών είναι:

1. *τα διμέταλλα*
2. *τα επιμεταλλωμένα μέταλλα*
3. *η ύαλος ασφαλείας*
4. *τα υλικά με επίστρωση πλαστικού*



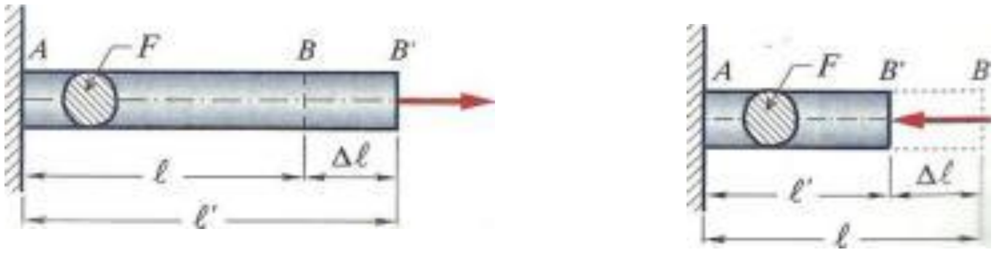
Εικόνα 1.24

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2:ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ

2.1 ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

2.1.1 ΣΥΝΤΟΜΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

Νόμος του Hooke:



Εικόνα 2.1

Ο Robert Hooke (1678) απέδειξε πειραματικά ότι υπάρχει σχέση μεταξύ τάσης και παραμόρφωσης η οποία διατυπώνεται παρακάτω.

Έστω η πρισματική αβαρής ράβδος *AB*, η οποία καταπονείται από αξονική εφελκυστική δύναμη *P* που ασκείται στο κέντρο βάρους *B* της διατομής της Εικόνας (1). Έστω επίσης *P το* εμβαδό της διατομής, το οποίο θεωρείται σταθερό σε ολόκληρο το μήκος ℓ της ράβδου.

Με την επενέργεια της εφελκυστικής δύναμης *P* η ράβδος θα επιμηκυνθεί κατά $\Delta\ell$ και τελικά το σημείο *B* εφαρμογής της δύναμης, θα μετατοπιστεί δεξιότερα στη θέση *B'* οπότε το τελικό μήκος της ράβδου, θα γίνει ℓ'.

Ο Hooke πειραματιζόμενος με τέτοιες πρισματικές ράβδους ποικίλων υλικών, υποβαλλόμενες σε μονοαξονικό εφελκυσμό εντός της περιοχής της ελαστικής συμπεριφοράς των υλικών, παρατήρησε οτι η επιμήκυνση $\Delta\ell$ της ράβδου ήταν ανάλογη τόσο προς την εφελκύουσα δύναμη P, όσο και προς το αρχικό της μήκος ℓ και αντιστρόφως ανάλογη του εμβαδού *P* της διατομής .

Η πλήρης μαθηματική διατύπωση του νόμου του Hooke είναι η παρακάτω:

$$\Delta\ell = \frac{P\ell}{EF} \tag{2.1.1}$$

Όπου $\Delta\ell = \ell' - \ell$ = *(BB')* είναι η παραμόρφωση της ράβδου που για τον εφελκυσμό καλείται επιμήκυνση ή μήκυνση ενώ για τη θλίψη επιβράχυνση ή βράχυνση , (σε m, cm, mm κλπ).

P, είναι το αξονικό φορτίο (δύναμη) εφελκυσμού (σε N, t, κλπ).

F, είναι το εμβαδό της κάθετης διατομής στον άξονα της ράβδου (σε m^2, cm^2, κλπ).

E, είναι ο συντελεστής αναλογίας, που είναι η ελαστική σταθερά η οποία εξαρτάται από το είδος του υλικού. Η σταθερά αυτή ονομάζεται μέτρο ελαστικότητας ή μέτρο του Young (σε N/m^2, at, κλπ).

Ο νόμος αυτός επιβεβαιώθηκε στη συνέχεια από πολλούς ερευνητές, οι οποίοι πειραματίστηκαν σε μεγάλο πλήθος δοκιμίων και από διάφορα υλικά. Διαπιστώθηκε δε ότι αυτός ισχύει όχι μόνο για δοκίμια υποβαλλόμενα σε εφελκυσμό αλλά και θλίψη.

Με την παραδοχή ότι οι αναπτυσσόμενες ορθές τάσεις σε μία τυχαία διατομή της ράβδου κατανέμονται ομοιόμορφα σε αυτήν (όπως συμβαίνει περίπου και στην πράξη) και αν αμελήσουμε το ίδιο βάρος της, η ορθή τάση σ είναι $\sigma = P/F$, η δε ανηγμένη παραμόρφωση ε από τη σχέση ορισμού της είναι $\varepsilon = \Delta\ell/\ell$.

Οπότε λαμβάνοντας υπόψη τις δύο προηγούμενες εξισώσεις, ο νόμος του Hooke γράφεται και με την εξής απλούστερη μορφή:

$$\sigma = \varepsilon E \qquad (2.1.2)$$

Η ανωτέρω εξίσωση εκφρασμένη με λόγια, διατυπώνει συνοπτικά το νόμο του Hooke με τη παρακάτω φράση:

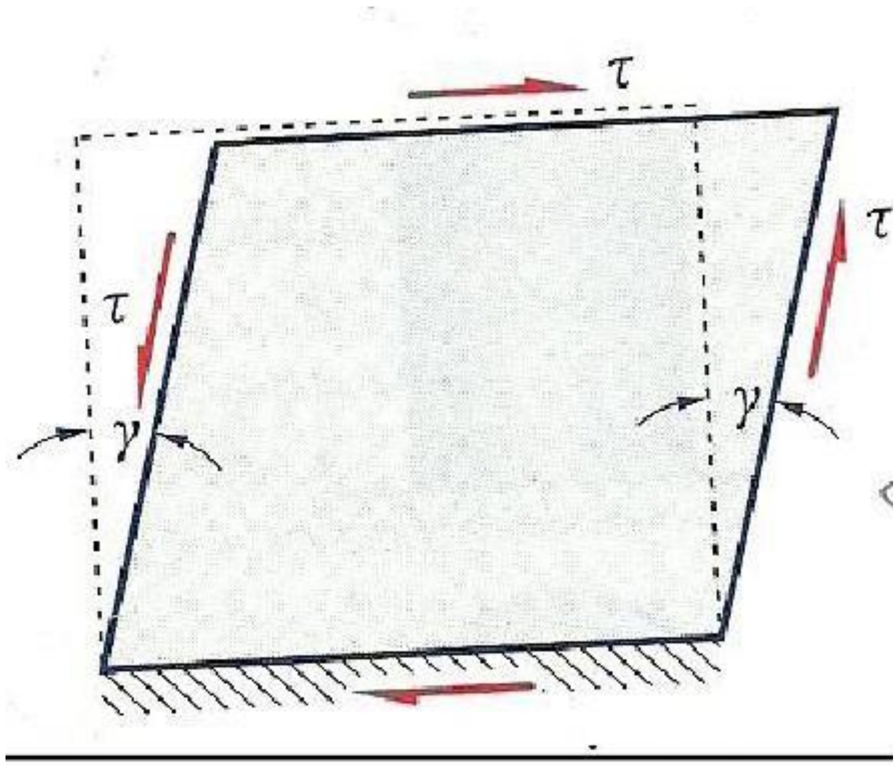
« Η τάση είναι ανάλογη προς την ανηγμένη παραμόρφωση».

Το μέτρο ελαστικότητας *E* είναι ο συντελεστής αναλογίας μεταξύ της τάσης και της ανηγμένης παραμόρφωσης, όπως προκύπτει από την ανωτέρω εξίσωση. Λύνοντας τη δε ως προς *E* έχουμε :

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \qquad (2.1.3)$$

Επειδή η ανηγμένη παραμόρφωση ε είναι αδιάστατο μέγεθος , το μέτρο ελαστικότητας *E* έχει μονάδες τάσης. Από τον ορισμό προκύπτει ότι το *E* αντιπροσωπεύει την τάση εκείνη σ, η οποία θα προκαλούσε ανηγμένη παραμόρφωση ε=1, δηλαδή $\Delta\ell = \ell$ ή διαφορετικά, αντιπροσωπεύει την τάση εκείνη η οποία θα διπλασίαζε το αρχικό μήκος μιας ράβδου.

<u>Μέτρο Διάτμησης:</u>



Εικόνα 2.2

Διαπιστώσαμε ότι ο νόμος του Hooke συνδέει τις ορθές τάσεις με την ανηγμένη παραμόρφωση στην ελαστική περιοχή, με την γραμμική σχέση

$\sigma = \varepsilon E$. Αντίστοιχα ο νόμος του Hooke συνδέει τις διατμητικές τάσεις τ με τη γωνιακή παραμόρφωση γ με την ανάλογη γραμμική σχέση.

$$\tau = G\gamma \text{ όπου } \gamma \text{ σε rad.} \tag{2.1.4}$$

Το G είναι σταθερή ποσότητα που έχει διαστάσεις τάσης, όπως φαίνεται από την παραπάνω εξίσωση και χαρακτηρίζει τις μηχανικές ιδιότητες των διαφόρων υλικών. Είναι δε κάτι ανάλογο του μέτρου ελαστικότητας E και ονομάζεται μέτρο διάτμησης.

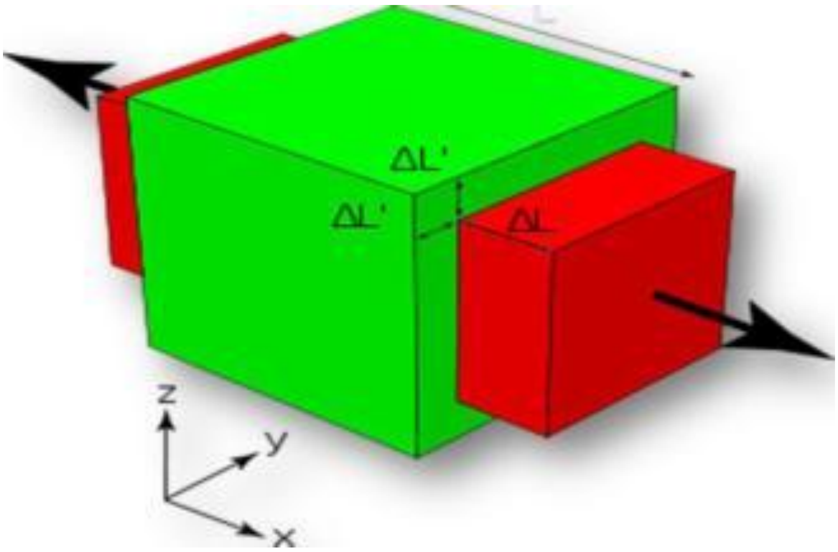
<u>Λόγος Poisson:</u>

Όπώς είναι γνωστό μία πρισματική ράβδος μήκους , με την επενέργεια εφελκυστικής δύναμης P παρουσιάζει μεταβολή και συγκεκριμένα αύξηση του ανηγμένων πλευρικών βραχύνσεων εy και εz κατά τους άξονες y και z αντίστοιχα , προς την ανηγμένη αξονική επιμήκυνση είναι ίσα προς έναν αριθμό ν, σταθερό για κάθε υλικό που καταπονείται με φορτία τέτοια ώστε να ισχύει ο νόμος του Hooke. Η σταθερά αυτή ονομάζεται **λόγος του Poisson** ή **συντελεστής εγκάρσιας παραμόρφωσης.**

Έτσι ισχύει η σχέση:

$$v = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = -\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_\chi} \qquad (2.1.5)$$

Δεδομένου ότι οι ανηγμένες βραχύνσεις είναι αρνητικοί αριθμοί, το αρνητικό πρόσημο στη σχέση (2.1.5), δικαιολογείται. Ο λόγος Poisson είναι «καθαρός» αριθμός, ο οποίος πάντοτε είναι μικρότερος ή ίσος από 0.5 και μεγαλύτερος ή ίσος του 0. Για τα μέταλλα για παράδειγμα ισχύει ότι $0.25 \leq v \leq 0.35$. Ο λόγος Poisson παίρνει την μεγαλύτερή του τιμή για κάποιο υλικό, στο όριο ανάμεσα στην «ελαστική» και «πλαστική» περιοχή, όπου και σταματά να ισχύει ο νόμος του Hooke.

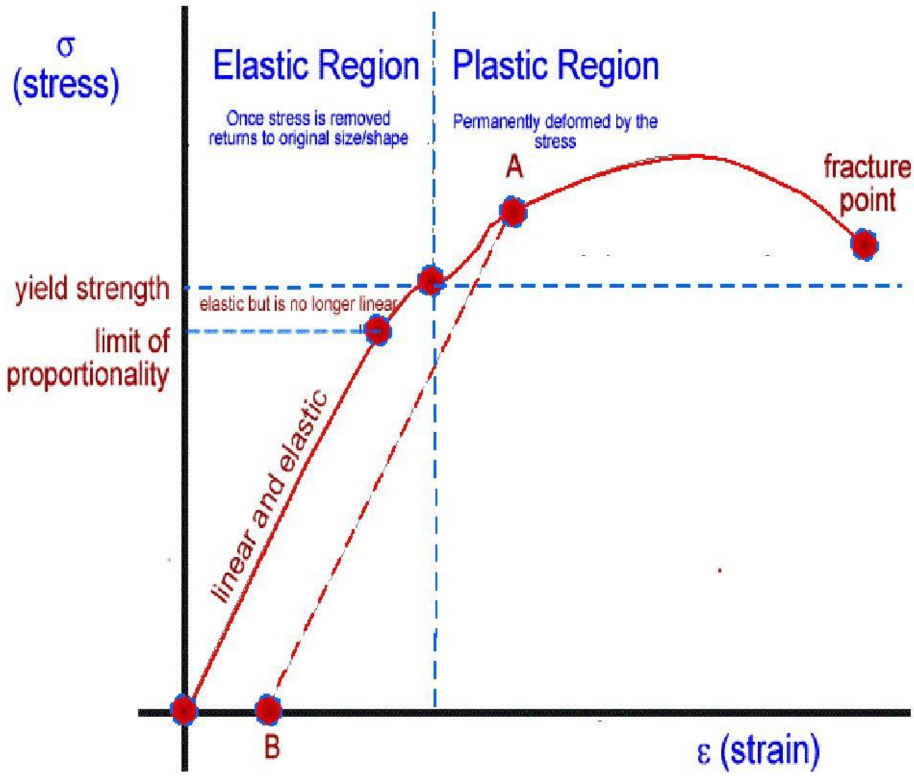


Εικόνα 2.3

<u>Ομοιογενές υλικό:</u> ονομάζεται εκείνο το υλικό που παρουσιάζει τις ίδιες ιδιότητες σε όλα τα σημεία της μάζας του. Διαφορετικά λέγεται **ανομοιογενές.**

<u>«Τελείως ελαστικό» σώμα:</u> ονομάζεται το σώμα εκείνο, το οποίο επανέρχεται ακριβώς στο αρχικό του σχήμα και όγκο μετά την αποφόρτιση. Οι δε, προκαλούμενες παραμορφώσεις , ονομάζονται τότε «ελαστικές».

<u>«Τελείως πλαστικό» σώμα:</u> χαρακτηρίζεται το σώμα εκείνο, το οποίο παραμένει απολύτως στη παραμορφωμένη κατάσταση που έφτασε και μετά την αποφόρτιση. Στη περίπτωση αυτή λέμε ότι το σώμα έχει υποστεί μόνιμη ή πλαστική παραμόρφωση.



Εικόνα 2.4(Διάγραμμα σ-ε)

<u>Ανηγμένη διόγκωση:</u>

Κατά την καταπόνηση μις ράβδου σε εφελκυσμό πριν από την επιβολή του εξωτερικού φορτίου, η ράβδος είχε μήκος ℓ (Εικόνα 2.2), εμβαδό διατομής F ανάλογο του τετραγώνου της διάστασης b, δηλαδή $F=\lambda b^2$ και όγκο $V = \ell F = \lambda \ell b^2$, όπου το λ είναι καθαρός αριθμός χαρακτηριστικός του είδους της διατομής.

Μετά την επιβολή του εφελκυστικού φορτίου και την επέλθουσα παραμόρφωση, το τελικό μήκος έστω ℓ' της ράβδου γίνεται:

$$\ell' = \ell + \Delta\ell = \ell(1+\varepsilon) \qquad (2.1.6)$$

Η τελική διάσταση της εγκάρσιας πλευράς - της ράβδου, προκύπτει από τη σχέση ορισμού του λόγου Poisson v και είναι:

$$v = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_\chi} = -\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_\chi} = -\frac{b'-b}{\varepsilon b} \Rightarrow b' = b\,(1 - v\varepsilon) \qquad (2.1.7)$$

Το τελικό εμβαδό F' της διατομής μετά την παραμόρφωση είναι:

$$V' = F'\ell = \lambda \ell b^2 (1+\varepsilon)(1-\nu\varepsilon)^2 = \lambda \ell b^2 (1+\varepsilon - 2\nu\varepsilon + \varepsilon^2 - 2\nu\varepsilon^2 + \varepsilon^2) \qquad (2.1.8)$$

Επειδή το ε στην ελαστική περιοχή είναι πολύ μικρός αριθμός, χωρίς σημαντικό σφάλμα, μπορούμε να παραλείψουμε τους όρους που περιέχουν ε^2 και ε^3 στην πιο πάνω εξίσωση, οπότε ο νέος όγκος είναι περίπου:

$$V' \approx \lambda \ell b^2 (1+\varepsilon - 2\nu\varepsilon) \qquad (2.1.9)$$

Ονομάζουμε ανηγμένη μεταβολή όγκου Θ (ή ανηγμένη διόγκωση) της ράβδου το πηλίκο:

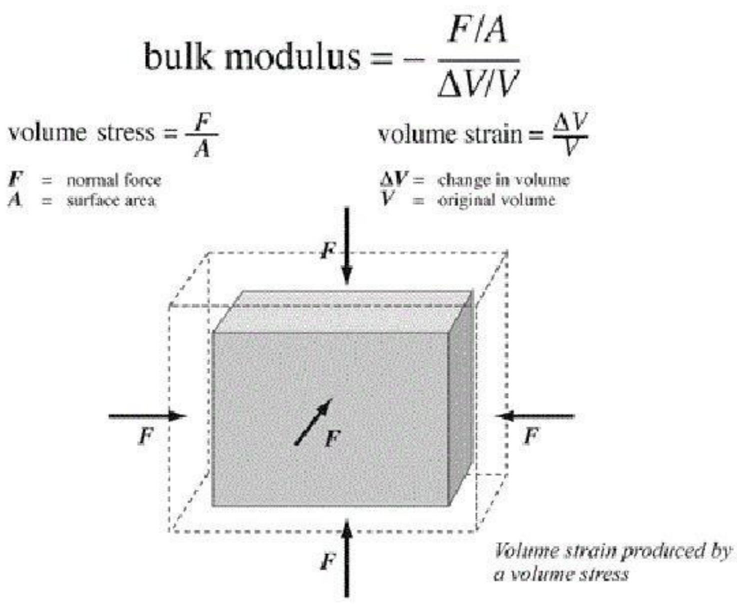
$$\Theta = \frac{\Delta V}{V} = \frac{V' - V}{V} = \varepsilon(1-2\nu) = \frac{\sigma}{E}(1-2\nu) \qquad (2.1.10)$$

Μέτρο Διόγκωσης:

Ονομάζουμε μέτρο διόγκωσης K ενός υλικού, το λόγο:

$$K = \frac{\sigma}{\Theta} = \frac{P}{\Delta V / V} \qquad (2.1.11)$$

Το K από τη σχέση ορισμού του προκύπτει ότι έχει μονάδες τάσης [N/m^2].
Είναι δηλαδή και αυτό μία ελαστική σταθερά, όπως το E και το G.



Εικόνα 2.5

2.1.2 ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗΣ, ΣΤΕΡΡΟΤΗΤΑ

Οι δύο θεμελιώδεις τρόποι με τους οποίους τα υλικά αντιδρούν στην επιβολή εξωτερικών δυνάμεων είναι η αλλαγή του όγκου τους και η αλλαγή του σχήματός τους.

Η αλλαγή του όγκου ενός στοιχειώδους κύβου μπορεί να γίνει με ομοιόθετη αλλαγή όλων των γραμμικών του διαστάσεων και προφανώς θα πρέπει να εξαρτάται μόνον από τις ορθές παραμορφώσεις. Στην περίπτωση αυτή ο στοιχειώδης κύβος διατηρεί το σχήμα του, αλλά με διαφορετικές διαστάσεις των ακμών του.

Η αλλαγή σχήματος ενός στοιχειώδους κύβου μπορεί να επιτευχθεί με δυο τρόπους:

a) Με αλλαγή των γωνιών του κύβου χωρίς αισθητή αλλαγή των γραμμικών του διαστάσεων (π.χ. περίπτωση καθαρής διατμήσεως).
b) Με μη ομοιόθετη αλλαγή των γραμμικών διαστάσεών του,

   οπότε αυτός μετατρέπεται σε στοιχειώδες ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο.

Αυτό βεβαία σημαίνει ότι μερικές γωνίες, θα αλλάξουν τιμή, όπως εκείνες των διαγωνίων του. Επομένως, η αλλαγή του σχήματός του επιτυγχάνεται και από ορθές και από διατμητικές παραμορφώσεις.

Για τις αλλαγές αυτές απαιτείται η καταβολή εξωτερικού έργου που επιτυγχάνεται από την επιβολή φορτίων. Το έργο αυτό αποθηκεύεται στο δοκίμιο ως **ενέργεια παραμόρφωσης,** η οποία αποτελείται από δυο προσθετέους, έναν που αντιστοιχεί στην αλλαγή όγκου και ονομάζεται **ενέργεια μεταβολής όγκου** και έναν που αντιστοιχεί στην αλλαγή σχήματος ή αλλιώς στρέβλωση του υλικού και καλείται **στροφική ενέργεια.** Προφανώς το άθροισμα των δυο αυτών όρων παριστά το σύνολο της ενέργειας παραμόρφωσης που αποθηκεύθηκε στο υλικό και ισούται με το έργο των εξωτερικών δυνάμεων που δαπανήθηκε για τη φόρτιση του δοκιμίου.

Το εμβαδόν του χωρίου ανάμεσο στην καμπύλη σ-ε και τον άξονα των παραμορφώσεων (Εικ.2.4) παριστάνει τη συνολική πυκνότητα της ενέργειας παραμόρφωσης που έχει αποθηκευθεί στο υλικό ή καταναλωθεί από αυτό από την αρχή της φόρτισης του μέχρι τη στιγμή που η τάση είναι σ(τυχαίο) και η αντίστοιχη παραμόρφωση ε(τυχαίο). Όταν το ζεύγος (σ,ε) αντιστοιχεί στο σημείο θραύσης θ του υλικού τότε η συνολική πυκνότητα της ενέργειας παραμόρφωσης καλείται **στερρότητα** του υλικού και αποτελεί μέτρο τα απαιτούμενης από το υλικό ενέργειας για τη θραύση.

2.1.3 Η ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗ ΤΩΝ ΜΕΣΩΝ ΒΑΣΕΙ ΤΩΝ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΩΝ ΕΛΑΣΤΙΚΩΝ ΣΤΑΘΕΡΩΝ

Ανισότροπο τρικλινές μέσο: το μέσο το οποίο δεν παρουσιάζει συμμετρίες και έχει 21 ελαστικές σταθερές ανεξάρτητες.

Μονοκλινές μέσο: το μέσο αυτό έχει ένα επίπεδο συμμετρίας και κάθε διεύθυνση έχει ίδιες ιδιότητες με την συμμετρική της ως προς το επίπεδο αυτό. Αποδεικνύεται ότι το μέσο αυτό έχει 13 ελαστικές σταθερές.

Ορθότροπο μέσο: όταν το υλικό παρουσιάζει συνολικά δύο κάθετα επίπεδα συμμετρίας τότε λέγεται ορθότροπο. Το μέσο αυτό έχει 9 ανεξάρτητες ελαστικές σταθερές.

Εγκαρσίως ισότροπο μέσο: μια ακόμα ανώτερη τάξη ελαστικής συμμετρίας από αυτή του ορθότροπου μέσου. Το μέσο σε αυτή την περίπτωση παρουσιάζει έναν άξονα συμμετρίας ως προς τις μηχανικές ιδιότητες. Οι ανεξάρτητες ελαστικές σταθερές είναι 5.

Ισότροπο μέσο: τα μέσα στα οποία κάθε διεύθυνση είναι διεύθυνση υλικής συμμετρίας. Αρκούν μόνο 2 ελαστικές σταθερές για την περιγραφή του μέσου(το μέτρο ελαστικότητας Ε και ο λόγος Poisson v).

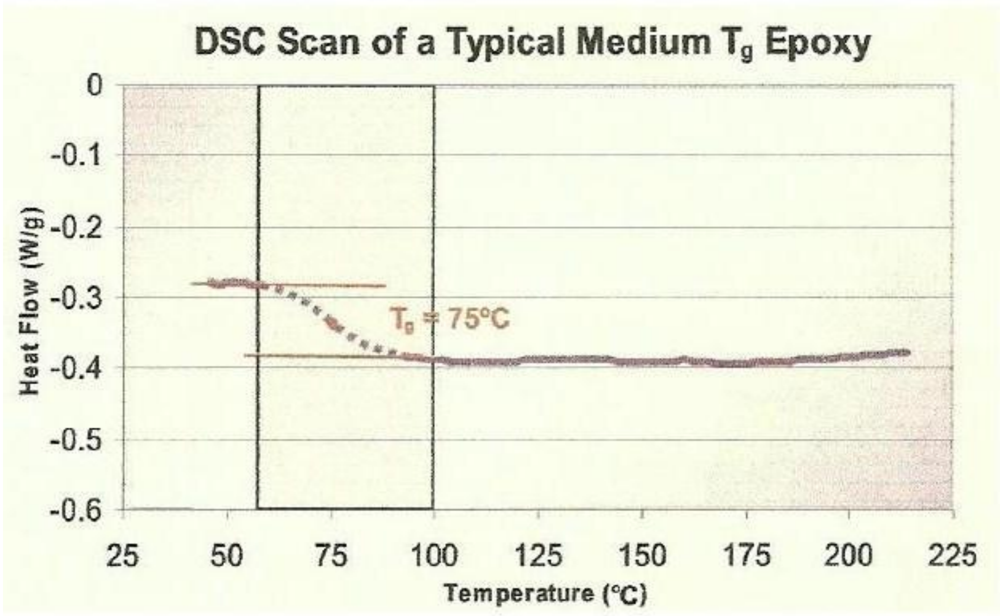
2.2 ΘΕΩΡΙΑ ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΦΑΣΗΣ

2.1.1 ΟΡΙΣΜΟΣ ΥΑΛΩΔΟΥΣ ΜΕΤΑΠΤΩΣΗΣ ΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΑΣ T_g

Η θερμοκρασία υαλώδους μετάπτωσης (T_g) είναι ένα εύρος θερμοκρασιών όπου ένα θερμοσκληρυνόμενο πολυμερές μεταβαίνει από τη σκληρή, στερεά και υαλώδη κατάσταση σε μία περισσότερο εύκαμπτη μαλακή, ελαστική.

Στην πραγματικότητα το (T_g) δεν είναι μία ξεκάθαρη θερμοδυναμική μετάβαση, αλλά ένα εύρος θερμοκρασιών στο οποίο αυξάνεται σημαντικά η κινητικότητα των πολυμερικών αλυσίδων. Η μέγιστη τιμή (T_g) καθορίζεται από τη χημική δομή της εποξειδικής ρητίνης, τον τύπο του σκληρυντή και το βαθμό της θερμικής κατεργασίας.

Δεδομένου ότι η θερμοκρασία υαλώδους μετάπτωσης (T_g) , είναι ένα εύρος θερμοκρασιών και όχι μία συγκεκριμένη θερμοκρασία, είναι βολικό να ορίζουμε μία μέση τιμή της περιοχής που οριοθετείται από τις εφαπτόμενες στις δύο περιοχές της καμπύλης ροής της θερμότητας όπου στη περίπτωση του εποξειδικού της παρακάτω καμπύλης είναι οι 75 ^{o}C.



Επίσης τονίζεται ότι η T_g μετριέται χρησιμοποιώντας το θερμικό αναλυτή Differential Scanning Calorimetry (DSC).

2.2.2 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΦΑΣΗΣ

Μεταξύ των σπουδαιότερων παραγόντων οι οποίοι προσδιορίζουν την βισκοελαστική συμπεριφορά των σύνθετων υλικών με πολυμερική μήτρα, είναι:

a. η προσρόφηση πολυμερικών μακρομορίων εντός των εγκλεισμάτων.
b. η πρόσφυση μεταξύ μήτρας και εγκλείσματος.

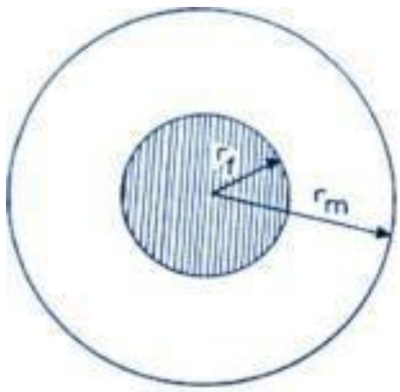
Η προσρόφηση των πολυμερικών μακρομορίων από το έγκλεισμα, είναι η κύρια αιτία για την διαφορετική διαμόρφωση των μακρομορίων γύρω από το έγκλεισμα σε σχέση με τη διαμόρφωση τους στη μήτρα γενικότερα. Η αλλαγή της κατάστασης των μακρομορίων γύρω από το έγκλεισμα, προσδιορίζει την περιοχή της ενδιάμεσης φάσης, η οποία έχει διαφορετική δομή και ιδιότητες από τη μήτρα. Έτσι, καταλήγουμε ότι η παρουσία εγκλείσματος μέσα στην πολυμερική μήτρα δημιουργεί μία ατέλεια στο πολυμερικό δομικό δίκτυο της.

Είναι γνωστό ότι οι ιδιότητες των πολυμερικών σύνθετων υλικών κατά την χαλάρωση, επηρεάζονται σημαντικά από την ύπαρξη της ενδιάμεσης φάσης [7]-[13]. Από αυτή την άποψη είναι πολύ σημαντική η μελέτη της θερμομηχανικής συμπεριφοράς αυτών των σύνθετων υλικών και η συλλογή πληροφοριών για την δομή και τις ιδιότητες της ενδιάμεσης φάσης καθώς επίσης και την επίδραση της στην βισκοελαστική συμπεριφορά του σύνθετου συστήματος μας.

Ωστόσο, η δομή και οι ιδιότητες της ενδιάμεσης φάσης εξαρτώνται, σε σημαντικό βαθμό, από την **μεθοδολογία** που χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό της. Αυτό συμβαίνει διότι κάθε μία από τις μεθόδους που χρησιμοποιούνται χαρακτηρίζεται από τους δικούς της ιδιαίτερους περιορισμούς. Ως συνέπεια των παραπάνω, τα αποτελέσματα τα οποία λαμβάνονται από τις διαφορετικές μεθόδους προσδιορισμού της ενδιάμεσης φάσης είναι συχνά διαφορετικά μεταξύ τους. Για παράδειγμα γνωρίζουμε ότι ο προσδιορισμός της ενδιάμεσης φάσης είναι άρρηκτα συνδεδεμένος με την θερμοκρασία υαλώδους μεταβάσεως T_g . Ωστόσο, ενώ υπάρχουν αρκετές πειραματικές μέθοδοι για την εύρεση τιμών για την T_g , όπως η θερμιδομετρία, η διαστολομετρία, οι δυναμικές μετρήσεις κ.α., αυτές εξάγουν διαφορετικά αποτελέσματα μεταξύ τους [14],[15].

Λόγω της παραπάνω δυσκολίας, δημιουργήθηκε ένα χάσμα ανάμεσα στα ευρήματα διαφόρων ερευνητών για την επίδραση της κατ' όγκο περιεκτικότητας του εγκλείσματος , στην υαλώδη μεταβατική θερμοκρασία T_g [16]. Για παράδειγμα, αρκετοί ερευνητές βρήκαν ότι όταν αυξάνεται η περιεκτικότητα σε έγκλεισμα ενός σύνθετου υλικού, αυξάνεται και η θερμοκρασία υαλώδους μεταβάσεως T_g και ότι η σχέση αυτή είναι γραμμική. Άλλοι ερευνητές βρήκαν ότι η θερμοκρασία υαλώδους μεταβάσεως T_g δεν επηρεάζεται σημαντικά από την κατ' όγκο περιεκτικότητα του εγκλείσματος [17],[18],[19].Τέλος υπήρχαν και ερευνητές που βρήκαν ότι οι τιμές της υαλώδους μεταβατικής θερμοκρασίας T_g εξαρτώνται πολύ από την κατ' όγκο περιεκτικότητα του εγκλείσματος, και σε πολλές περιπτώσεις η T_g ελαττώνεται όταν αυξάνεται η περιεκτικότητα[20].

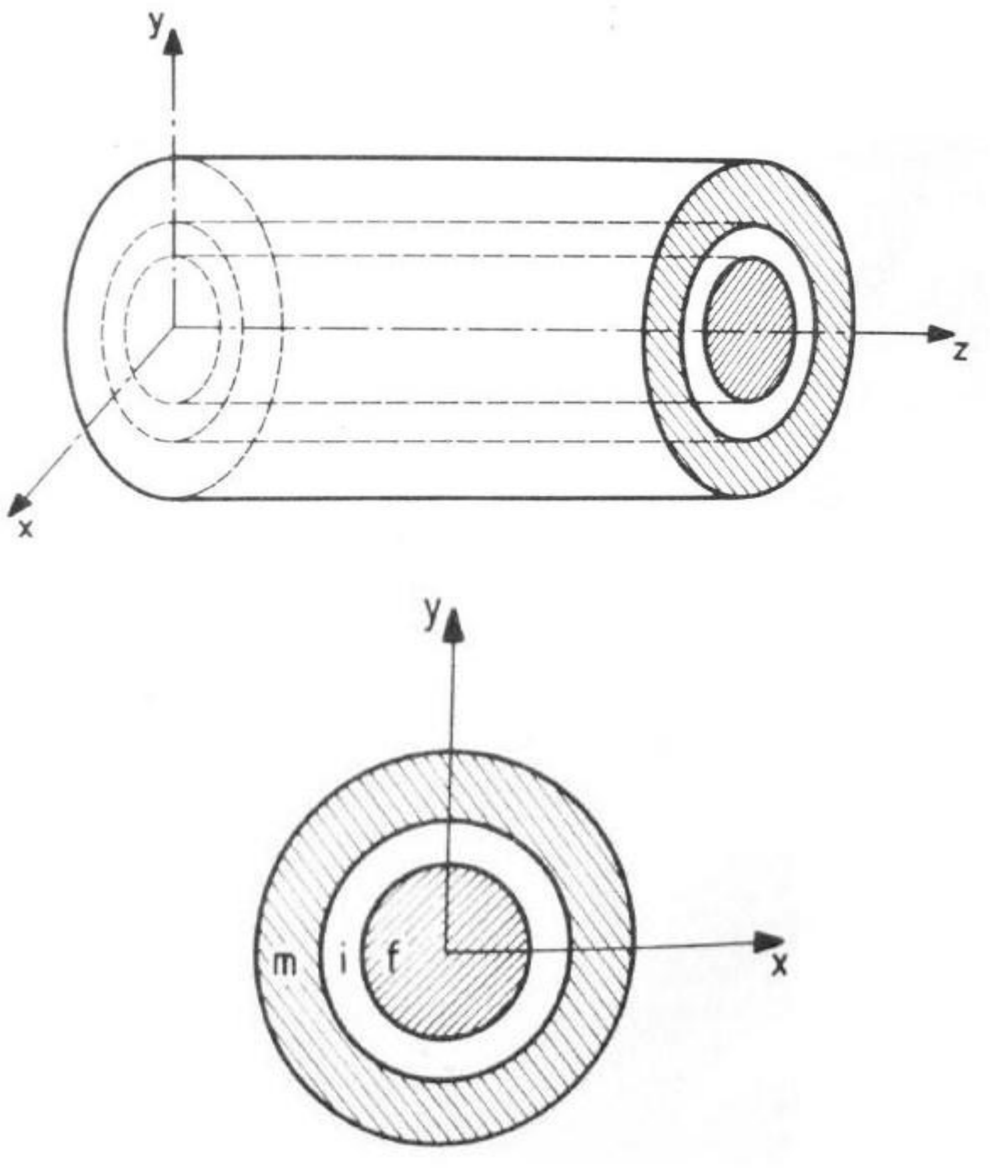
Στην περίπτωση μετρήσεων με την μέθοδο της θερμιδομετρίας μια παράμετρος η οποία επιδρά στον προσδιορισμό των υαλωδών μεταβατικών θερμοκρασιών T_g, είναι ο ρυθμός θέρμανσης ανά μάζα ή αλλιώς ειδική θερμότητα. Έχει παρατηρηθεί ότι, σε D.S.C μετρήσεις που έγιναν με την βοήθεια ενός θερμικού αναλυτή, η εξάρτηση της υαλώδους μεταβατικής θερμοκρασίας από την ειδική θερμότητα H_r, είναι τέτοια ώστε διαφορές της τάξεως των 15^o C να μπορούν να παρατηρηθούν για διαφορετικούς ρυθμούς θέρμανσης [21],[22],[23].



Εικόνα 2.6(Διφασικό μοντέλο)

2.2.3 ΘΕΩΡΗΤΙΚΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΠΑΧΟΥΣ ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΦΑΣΗΣ

Πιο αναλυτικά παρακάτω θα περιγραφεί η διαδικασία εύρεσης του πάχους της ενδιάμεσης φάσης. Ας θεωρήσουμε ένα στοιχείο ελέγχου κάνοντας χρήση του τριφασικού μοντέλου(Εικ. 2.7), το οποίο προκύπτει ουσιαστικά από το διφασικό μοντέλο(Εικ.2.6) με την προσθήκη της ενδιάμεσης φάσης, και είναι το δομικό «κύτταρο» για ένα ινώδες σύνθετο υλικό, το οποίο αποτελείται από μέσα προς τα έξω, από έγκλεισμα, ενδιάμεση φάση και μήτρα αντίστοιχα.



Εικόνα 2.7(Τριφασικό μοντέλο)

Αν ορίσουμε ως r_f, r_i και r_m τις ακτίνες των περιοχών των φάσεων του παραπάνω μοντέλου, με τους δείκτες f, i, m να συμβολίζουν το έγκλεισμα, την ενδιάμεση φάση και την μήτρα αντιστοίχως, τότε οι αντίστοιχες κατ ‘ όγκο περιεκτικότητες θα γράφονται ως:

$$U_f = \frac{r_f^{\ 2}}{r_m^{\ 2}},\ U_i = \frac{r_i^{\ 2} - r_f^{\ 2}}{r_m^{\ 2}},\ U_m = \frac{r_m^{\ 2} - r_i^{\ 2}}{r_m^{\ 2}} \qquad (2.2.1)$$

Και επίσης θα ισχύει:

$$U_m = (1 - U_f - U_i) \qquad (2.2.2)$$

Καθώς η κατ' όγκο περιεκτικότητα του εγκλείσματος αυξάνεται, το ποσοστό των μακρομορίων της μήτρας, τα οποία χαρακτηρίζονται από μειωμένη κινητικότητα, επίσης **αυξάνεται.** Αυτό ισοδυναμεί με αύξηση της κατ' όγκο περιεκτικότητας της ενδιάμεσης φάσης και οδηγεί στο συμπέρασμα ότι υπάρχει μία σχέση ανάμεσα στο ΔC_p το οποίο εκφράζει την απότομη μεταβολή της ειδικής θερμότητας στην υαλώδη μεταβατική περιοχή μιας ουσίας, και της κατ' όγκο περιεκτικότητας της ενδιάμεσης φάσης. Η σχέση αυτή για τα ινώδη υλικά εκφράζεται από τον παρακάτω τύπο[5],[26]:

$$\frac{(r_f + \Delta r)^2}{r_f^{\ 2}} - 1 = \frac{\mu U_f}{1 - U_f} \qquad (2.2.3)$$

Όπου το Δr εκφράζει το πάχος της ενδιάμεσης φάσης και η παράμετρος **μ** δίνεται βάσει από τον τύπο:

$$\mu = 1 - \frac{\Delta C_p^f}{\Delta C_p^0} \qquad (2.2.4)$$

Όπου ΔC_p^f είναι η απότομη μεταβολή της ειδικής θερμότητας για την πολυμερική μήτρα με έγκλεισμα, ενώ ΔC_p^0 είναι η απότομη μεταβολή της ειδικής θερμότητας για την πολυμερική μήτρα «σκέτη», χωρίς έγκλεισμα, στις αντίστοιχες υαλώδεις μεταβατικές θερμοκρασίες τους.

Η σχέση (2.2.3), αφού $r_f + \Delta r$ ισούται ουσιαστικά με r_i με την βοήθεια των σχέσεων(2.2.1),μπορεί να γραφτεί και σαν:

$$\frac{U_i}{U_f} = \frac{\mu U_f}{1 - U_f} \qquad (2.2.5)$$

Η σχέση (2.2.5) μαζί με την (2.2.1) και την (2.2.2) εξάγουν την εξής σχέση:

$$cnt = \frac{r_f^{\,2}}{r_i^{\,2}} = \frac{U_f}{U_f + U_i} = \frac{1 - U_f}{1 - U_f(1-\mu)} \qquad (2.2.6)$$

Τέλος υπολογίζοντας με την βοήθεια των DSC(differential scanning calorimetry) μετρήσεων, τα άλματα της ειδικής θερμότητας ΔC_p στην υαλώδη μετάβαση ενός ινώδους σύνθετου υλικού και του αντίστοιχου πολυμερούς του, από το οποίο είναι αποκλειστικά φτιαγμένη η μήτρα του σύνθετου υλικού, μπορούμε να εκτιμήσουμε τον παράγοντα **μ** και άρα και το πάχος της ενδιάμεσης φάσης αφού μας είναι γνωστή η κατ' όγκο περιεκτικότητα του εγκλείσματος.

2.2.4 ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΚΑΙ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΠΑΧΟΥΣ ΚΑΙ ΤΗΣ ΚΑΤ' ΟΓΚΟ ΠΕΡΙΕΚΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΤΗΣ ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΦΑΣΗΣ

Στο Εργαστήριο Αντοχής Υλικών του ΕΜΠ έχουν γίνει συστηματικές μετρήσεις θερμοχωρητικότητας επί δοκιμίων εποξειδικής ρητίνης και ινών γυαλιού. Παρακάτω θα περιγράψουμε μία από τις πειραματικές έρευνες [28],[29],[30] που έγιναν για την μέτρηση του πάχους και της κατ' όγκο περιεκτικότητας της ενδιάμεσης φάσης.

Στην συγκεκριμένη έρευνα χρησιμοποιήθηκαν ινώδη σύνθετα υλικά μονής κατεύθυνσης αποτελούμενα από μία εποξειδική μήτρα(PermaglassXE5/1, Permali Ltd.,U.K) ενισχυμένη με συνεχείς ίνες γυαλιού τύπου-Ε. Το υλικό της μήτρας βασίσθηκε σε διγλυκιδυλαιθέρα της δισφαινόλης *A,* συνδυασμένο με σκληρυντή από αρωματική αμίνη(Araldite My 750/HT972, Ciba-Geigy, U.K). Οι ίνες γυαλιού είχαν διάμετρο $1{,}2\text{x}10^{-5}$ m και η κατ' όγκο περιεκτικότητά τους ήταν 0.65.

Η κατ' όγκο περιεκτικότητα των ινών γυαλιού προσδιορίστηκε με το συνήθη τρόπο, δηλαδή καίγοντας δείγματα του ινώδους σύνθετου υλικού και ζυγίζοντας το υπόλοιπο. Έτσι η κατά μάζα περιεκτικότητα του γυαλιού υπολογίστηκε 79.6% (+/- 0.28%). Με την χρήση του αποτελέσματος αυτού και των τιμών των ειδικών πυκνοτήτων του γυαλιού (ρ_g =2.55gr/cm^3) και της εποξειδικής μήτρας(ρ_c=1.20gr/cm^3), και κάνοντας και κάποιους εύκολους υπολογισμούς, υπολογίζεται ότι η κατ' όγκο περιεκτικότητα των ινών γυαλιού του πειράματος μας είναι 0.65.

Από την άλλη μεριά , δοκίμια με διάμετρο 0.004m και πάχους που ποικίλει από 0.001m μέχρι 0.0015m, φτιαγμένα είτε από ινώδες σύνθετο υλικό σε διάφορες κατ' όγκο περιεκτικότητες είτε φτιαγμένα από το υλικό της μήτρας υποβλήθηκαν σε δοκιμές DSC, με θερμικό αναλυτή στην περιοχή της υαλώδους μεταβατικής θερμοκρασίας τους, έτσι ώστε να προσδιορισθούν οι τιμές της ειδικής θερμότητάς τους.

Οι τιμές του παράγοντα **μ** (σχέση 2.2.4) εξήχθηκαν από τις τιμές των αλμάτων των ειδικών θερμοτήτων της μήτρας ενισχυμένης με ίνες γυαλιού και της μη ενισχυμένης μήτρας, δηλαδή των ΔC_p^f και ΔC_p^0 αντίστοιχα, που υπολογίσθηκαν από τα ΔC_p = *f(T)* διαγράμματα σύμφωνα με το διάγραμμα της **Εικόνας 2.8.** Οι τιμές του *μ* που προσδιορίσθηκαν από τα DSC τεστ, επέτρεψαν και την εκτίμηση του πάχους της ενδιάμεσης φάσης για κάθε σύνθετο υλικό(για κάθε διαφορετική κατ' όγκο περιεκτικότητα σε έγκλεισμα).

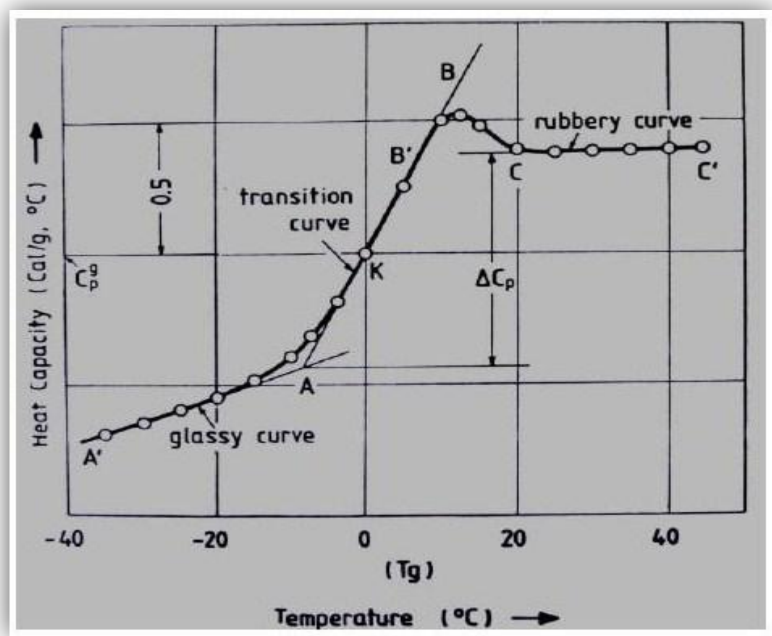
Έχει δειχθεί ότι για της μιας κατεύθυνσης ινώδη σύνθετα υλικά, υπάρχει μια παραβολική σχέση ανάμεσα στην κατ' όγκο περιεκτικότητα της ενδιάμεσης φάσης και στην κατ' όγκο περιεκτικότητα του εγκλείσματος.

Αυτή η σχέση είναι ως εξής:

$$U_i = CU_f^{\ 2} \tag{2.2.7}$$

Όπου με U_i και U_f συμβολίζουμε την κατ' όγκο περιεκτικότητα της ενδιάμεσης φάσης και του εγκλείσματος αντίστοιχα.

Η σταθερά C στην περίπτωση μας είναι ίση με 0.123.

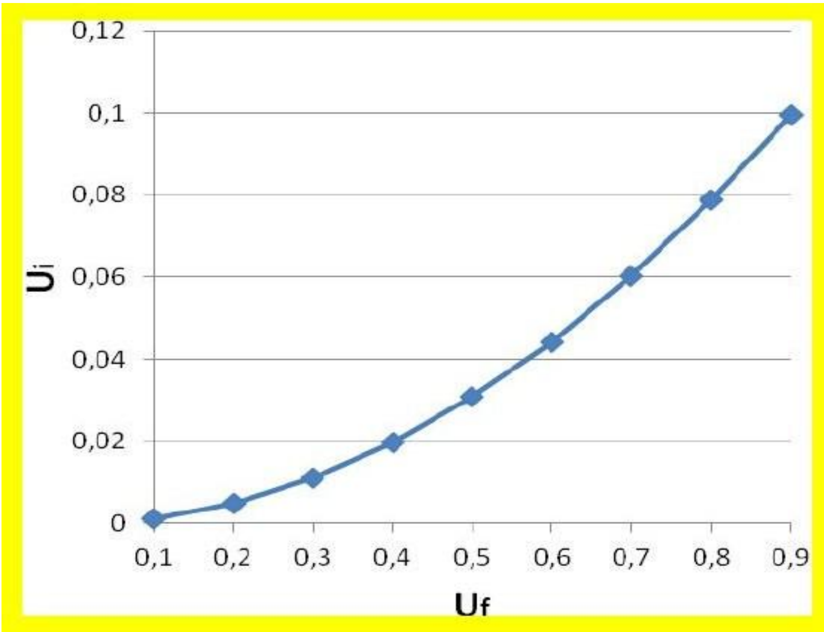


Εικόνα 2.8

Να σημειώσουμε εδώ ότι ύστερα από τον υπολογισμό της σχέσης (2.2.7) και με την βοήθεια της σχέσης (2.2.3) εξάγεται ο παρακάτω πίνακας τιμών για το τριφασικό μοντέλο με ενδιάμεση φάση και παρατηρούμε από το ακόλουθο διάγραμμα ότι η μεταβολή της κατ’ όγκο περιεκτικότητας της ενδιάμεσης φάσης συναρτήσει της κατ' όγκο περιεκτικότητας του εγκλείσματος είναι περίπου παραβολική:

U_f	U_i	$r_{i(\mu m)}$
0.10	0.0012	6.036
0.20	0.00492	6.073
0.30	0.01107	6.110
0.40	0.01968	6.146
0.50	0.03075	6.182
0.60	0.04428	6.217
0.65	0.052	6.235
0.70	0.06027	6.254
0.80	0.07872	6.288
0.90	0.09963	6.323

Πίνακας Ι



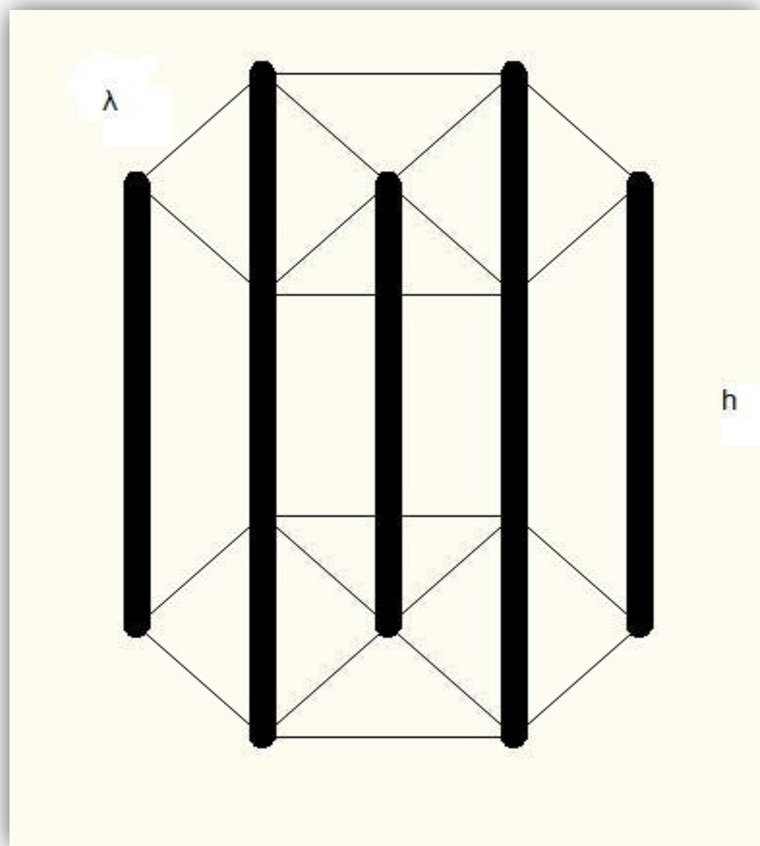
Εικόνα 2.9

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 : ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΗΤΙΚΩΝ ΜΟΝΤΕΛΩΝ

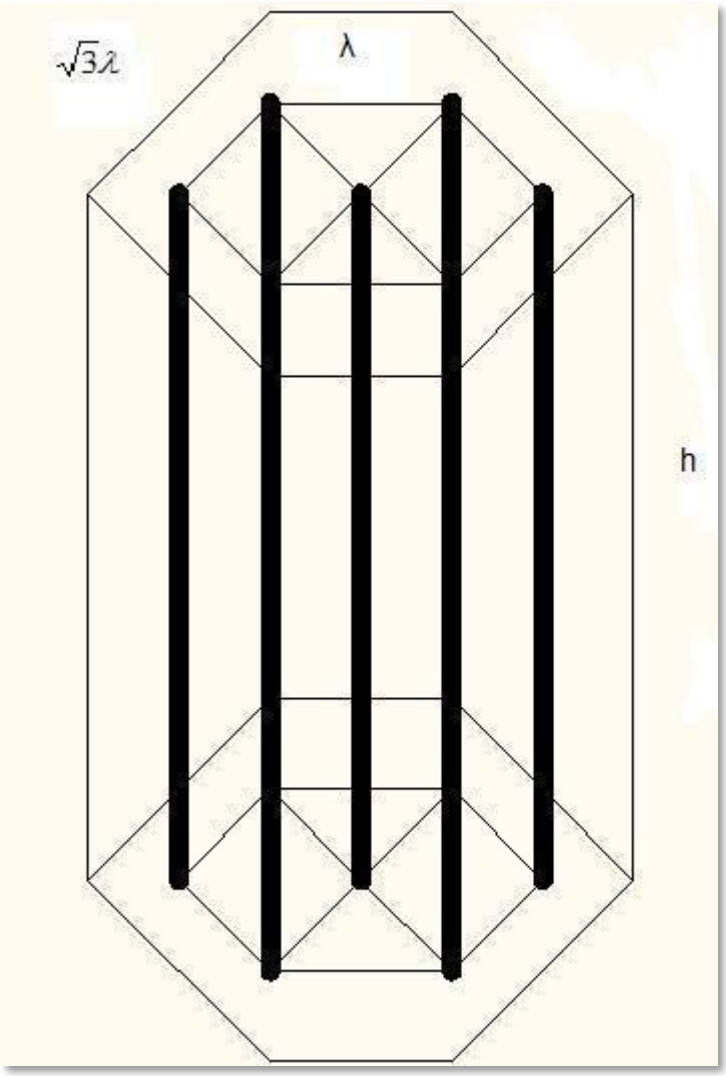
3.1 ΘΕΩΡΗΤΙΚΟΣ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΑΚΤΙΝΩΝ ΤΕΤΡΑΦΑΣΙΚΟΥ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΧΩΡΙΣ ΕΝΔΙΑΜΕΣΗ ΦΑΣΗ

3.1.1 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΙΝΩΝ

Σε αυτήν την υποενότητα, θα θεωρήσουμε τον τρόπο με τον οποίο κατανέμονται οι ίνες γυαλιού(ινώδη εγκλείσματα) μέσα στη μάζα της μήτρας ενός ινώδους σύνθετου υλικού έτσι ώστε να μπορέσουμε ύστερα να προσδιορίσουμε τις ακτίνες του κυλινδρικού μοντέλου που θα προκύψει μέσα από αυτήν την μελέτη.



Εικόνα 3.1



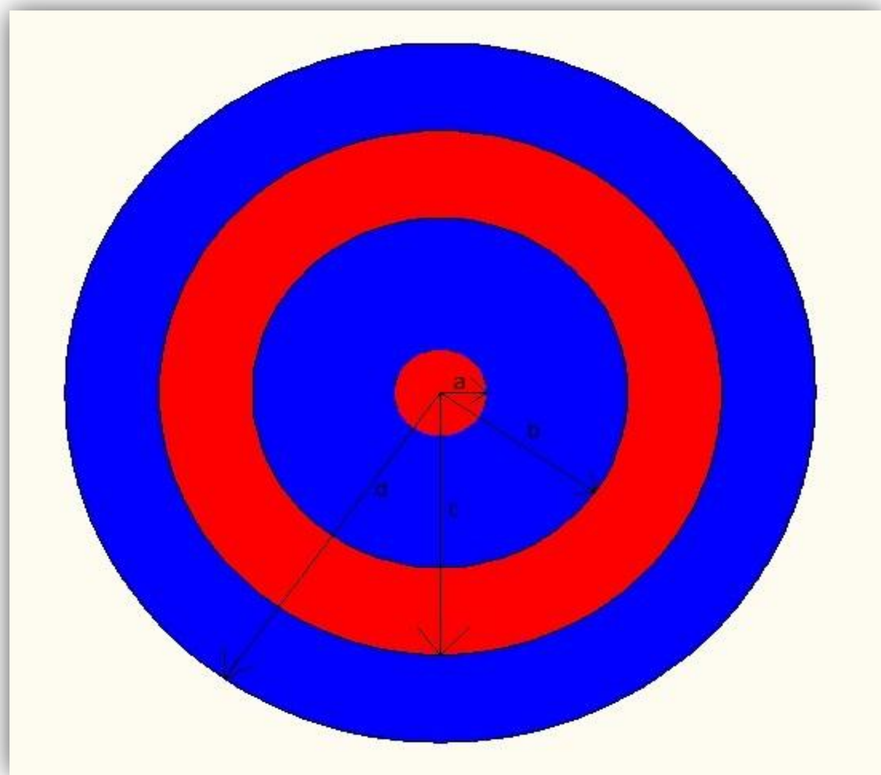
Εικόνα 3.2

Θεωρούμε λοιπόν ότι 6 ίνες καταλαμβάνουν τις κορυφές ενός τυχαίου εξαγωνικού πρίσματος ακμής λ και πεπερασμένου μήκους h και 1 ίνα καταλαμβάνει το κέντρο βάρους του. Το υπόψη πρίσμα περικλείεται σε ένα δεύτερο εξαγωνικό πρίσμα ακμής $\sqrt{3}\lambda$ και ίδιου μήκους. Το πρίσμα αυτό επαναλαμβάνεται συμμετρικά σε όλη την μάζα του σύνθετου υλικού και το ορίζουμε ως το στοιχειώδες δομικό «κύτταρο» του υλικού. Το τμήμα μεταξύ των ινών αλλά και το τμήμα ανάμεσα στο αρχικό εξαγωνικό πρίσμα και το δομικό «κύτταρο» του υλικού, αντιπροσωπεύει την μήτρα του σύνθετου υλικού.

Το πρίσμα ακμής $\sqrt{3}\lambda$ θα το αναγάγουμε τώρα, σε ένα «ισοδύναμο» κυλινδρικό μοντέλο με ίδιο μήκος h για να εκμεταλλευθούμε έτσι την κυλινδρική συμμετρία και τις απλοποιήσεις που θα προκύψουν από αυτήν, σε ένα τετραφασικό μοντέλο.

Το τετραφασικό μοντέλο μας, θα αποτελείται από τέσσερις ομόκεντρους κυλίνδρους ακτίνας *a,b,c,d* $(a<b<c<d)$*(Εικόνα 3.3).* Σε αυτό το μοντέλο , η

δεύτερη και η τέταρτη φάση (μπλε) , που τις αποτελούν ο κυλινδρικός φλοιός με εσωτερική ακτίνα a και εξωτερική b , και ο κυλινδρικός φλοιός με εσωτερική ακτίνα c και εξωτερική ακτίνα d, αντιπροσωπεύουν το υλικό της μήτρας και θα τα συμβολίζουμε με m. Ο κύλινδρος με ακτίνα a καθώς και ο κυλινδρικός φλοιός με εσωτερική ακτίνα b και εξωτερική ακτίνα c, πρώτη και τρίτη φάση (κόκκινο), αντιπροσωπεύουν το σύνολο των ινών του δομικού μας «κυττάρου» και τα συμβολίζουμε με f.



Εικόνα 3.3

Για ένα ινώδες σύνθετο υλικό, ξέρουμε την κατ' όγκο περιεκτικότητα των ινών του U_f, όπως επίσης και την ακτίνα των ινών του r_f. Για το πρίσμα ακμής $\sqrt{3}\lambda$ η U_f θα προκύπτει ως ο λόγος του όγκου των πέντε ινών του, προς τον όγκο ολόκληρου του πρίσματος, δηλαδή:

$$U_f = \frac{7\pi r_f^2 h}{\frac{9}{2}\sqrt{3}\lambda^2 h} \Rightarrow \lambda = r_f \sqrt{\frac{7\pi}{4{,}5\sqrt{3}U_f}} \qquad (3.1.1)$$

Επίσης ο όγκος του πρίσματος με ακμή $\sqrt{3}\lambda$ αντιπροσωπεύεται από τον όγκο του κυλίνδρου ακτίνας d στο κυλινδρικό μοντέλο. Έτσι θα έχουμε:

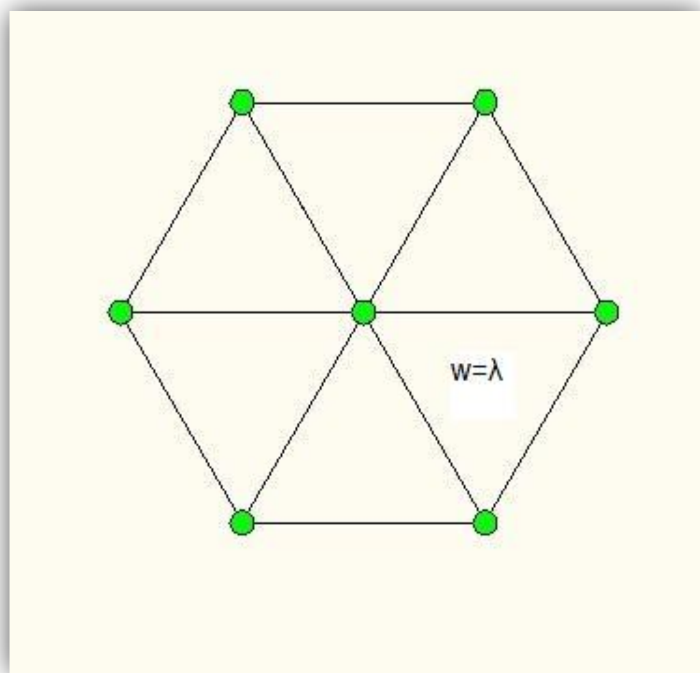
$$\frac{9}{2}\sqrt{3}\lambda^2 h = \pi d^2 h \Rightarrow d = \lambda\sqrt{\frac{9\sqrt{3}}{2\pi}} \text{ και από (3.1.1) } \Rightarrow d = r_f\sqrt{\frac{7}{U_f}} \tag{3.1.2}$$

Η πρώτη φάση αποτελείται από την κυλινδρική ίνα που βρίσκεται στο κέντρο βάρους του πρίσματος. Οπότε θα ισχύει:

$$a = r_f \tag{3.1.3}$$

Επομένως βήμα είναι ο υπολογισμός των ακτινών b,c.

Θεωρούμε το εξαγωνικό πρίσμα ακμής λ όπως πριν. Η απόσταση από τον κεντρικό άξονα του , έως μία εκ των κορυφών του, όπως προκύπτει από εφαρμογή γεωμετρικών υπολογισμών, έχει μήκος λ. Αν ονομάσουμε αυτήν την απόσταση w, το w θα αντιπροσωπεύει την απόσταση του άξονα του πρίσματος από τα κέντρα των ινών και ισχύει ότι (Εικ.3.4):



Εικόνα 3.4

Θεωρούμε επίσης ότι ο κυλινδρικός φλοιός με ακτίνες b,c κατανέμεται ισοογκικά εκατέρωθεν της κυλινδρικής επιφάνειας που ορίζει η ακτίνα w, προσαρμοσμένη στο τετραφασικό μοντέλο. Θα ισχύει λοιπόν:

$$\pi(c^2 - w^2)h = \pi(w^2 - b^2)h \Rightarrow 2w^2 = b^2 + c^2 \qquad (3.1.5)$$

Ο όγκος της τρίτης φάσης ισούται με τον όγκο των έξι ινών και άρα θα πρέπει:

$$\pi(c^2 - b^2)h = 6\pi r_f^{\,2} h \Rightarrow c^2 - b^2 = 6r_f^{\,2} \qquad (3.1.6)$$

Από το σύστημα των εξισώσεων (3.1.5), (3.1.6) προκύπτουν οι εκφράσεις των c,b ως εξής:

$$b = \sqrt{w^2 - 3r_f^{\,2}} \qquad (3.1.7)$$

$$c = \sqrt{w^2 + 3r_f^{\,2}} \qquad (3.1.8)$$

Και άρα από τις σχέσεις (3.1.1) και (3.1.3) θα έχουμε:

$$a = r_f \qquad (3.1.9)$$

$$b = \sqrt{\frac{7\pi r_f^{\,2}}{4{,}5\sqrt{3}U_f} - 3r_f^{\,2}} \qquad (3.1.10)$$

$$c = \sqrt{\frac{7\pi r_f^{\,2}}{4{,}5\sqrt{3}U_f} + 3r_f^{\,2}} \qquad (3.1.11)$$

$$d = r_f\sqrt{\frac{7}{U_f}} \qquad (3.1.12)$$

Καταφέραμε έτσι να εκφράσουμε τις ακτίνες a, b, c, d συναρτήσει των γνωστών μεγεθών U_f και r_f.

3.1.2 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ

Σε αυτή την υποενότητα θα εξετάσουμε τους γεωμετρικούς περιορισμούς που προκύπτουν για το κυλινδρικό τετραφασικό μοντέλο μας χωρίς ενδιάμεση φάση, βάσει της κατανομής των ινών γυαλιού που έχουμε θεωρήσει.

Να σημειώσουμε εδώ ότι η θεώρηση ύπαρξης ενδιάμεσης φάσης στο συγκεκριμένο μοντέλο, δεν επηρεάζει τις σχέσεις των γεωμετρικών περιορισμών και αυτό διότι η ενδιάμεση φάση θεωρείται αλλοιωμένη μήτρα και συνεπώς είναι μέρος της μήτρας. Άρα θα έχουμε:

$$b > 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{7\pi r_f^{\,2}}{4{,}5\sqrt{3}U_f} - 3r_f^{\,2}} > 0 \Rightarrow \frac{7\pi r_f^{\,2}}{4{,}5\sqrt{3}U_f} - 3r_f^{\,2} > 0 \Rightarrow U_f < \frac{7\pi}{13{,}5\sqrt{3}} \Rightarrow U_f < 0{,}94049 \tag{3.1.13}$$

$$a < b \Rightarrow r_f < \sqrt{w^2 - 3r_f^{\,2}} \Rightarrow 4r_f^{\,2} < w^2 \Rightarrow 4r_f^{\,2} < r_f^{\,2}\frac{7\pi}{4{,}5\sqrt{3}U_f} \Rightarrow U_f < \frac{7\pi}{18\sqrt{3}} \Rightarrow U_f < 0{,}7054 \tag{3.1.14}$$

$$c < d \Rightarrow \sqrt{w^2 + 3r_f^{\,2}} < r_f\sqrt{\frac{7}{U_f}} \Rightarrow U_f < \frac{31{,}5\sqrt{3} - 7\pi}{13{,}5\sqrt{3}} \Rightarrow U_f < 1{,}3928 \tag{3.1.15}$$

Άρα συμπεραίνουμε ότι βάσει αυτού του μοντέλου **η μέγιστη επιτρεπτή κατ' όγκο περιεκτικότητα σε ινώδες έγκλεισμα** θα είναι $U_f < 0{,}7054$.

3.2 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΑΚΤΙΝΩΝ ΚΑΙ ΚΑΤ' ΟΓΚΟ ΠΕΡΙΕΚΤΙΚΟΤΗΤΩΝ ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΦΑΣΗΣ ΣΤΟ ΕΠΤΑΦΑΣΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ

Για να αναπτύξουμε το ***επταφασικό κυλινδρικό μοντέλο*** το μόνο που έχουμε να κάνουμε είναι να θεωρήσουμε την προσθήκη ενδιάμεσης φάσης στο τετραφασικό μοντέλο που αναπτύχθηκε στην προηγούμενη ενότητα. Η ενδιάμεση φάση σχηματίζει τρεις κυλινδρικούς φλοιούς γύρω από τις φάσεις των εγκλεισμάτων στο τετραφασικό μοντέλο και άρα προσθέτονται τρεις ακόμα φάσεις σε αυτό(Εικ.42). Άρα το νέο κυλινδρικό μας μοντέλο θα έχει εφτά φάσεις. Η πρώτη φάση, από μέσα προς τα έξω, με ακτίνα r_1 αντιπροσωπεύει την πρώτη περιοχή του εγκλείσματος. Η δεύτερη φάση, είναι ο κυλινδρικός φλοιός με εσωτερική ακτίνα την r_1 και εξωτερική ακτίνα την r_2 και αντιπροσωπεύει την πρώτη περιοχή της ενδιάμεσης φάσης. Η τρίτη φάση, είναι ο κυλινδρικός φλοιός με εσωτερική ακτίνα την r_2 και εξωτερική ακτίνα την r_3 και αντιπροσωπεύει την πρώτη περιοχή της μήτρας. Η τέταρτη φάση είναι ο κυλινδρικός φλοιός με εσωτερική ακτίνα την r_3 και εξωτερική ακτίνα την r_4 και αντιπροσωπεύει την δεύτερη περιοχή της ενδιάμεσης φάσης. Η πέμπτη φάση είναι ο κυλινδρικός φλοιός με εσωτερική ακτίνα την r_4 και εξωτερική ακτίνα την r_5 και αντιπροσωπεύει την δεύτερη περιοχή του εγκλείσματος. Η έκτη φάση είναι ο κυλινδρικός φλοιός με εσωτερική ακτίνα r_5 και εξωτερική ακτίνα r_6 και αντιπροσωπεύει τη τρίτη περιοχή της ενδιάμεσης φάσης. Η έβδομη και τελευταία φάση είναι ο κυλινδρικός φλοιός με εσωτερική ακτίνα r_6 και εξωτερική ακτίνα r_7 και αντιπροσωπεύει τη δεύτερη περιοχή της μήτρας.

Εικόνα 3.5

Αρχικά πρέπει να προσδιορίσουμε τις ακτίνες στις περιοχές της ενδιάμεσης φάσης, την r_2, r_3 και r_6 (Εικ.3.5), καθώς και την κατ' όγκο περιεκτικότητα της, σε κάθε περιοχή ξεχωριστά.

Οι κατ' όγκο περιεκτικότητες στο επταφασικό κυλινδρικό μοντέλο ορίζονται ως εξής:

1. U_1 η κατ' όγκο περιεκτικότητα της πρώτης περιοχής του εγκλείσματος (της πρώτης φάσης).
2. U_2 η κατ' όγκο περιεκτικότητα της πρώτης περιοχής της ενδιάμεσης φάσης (της δεύτερης φάσης).
3. U_3 η κατ' όγκο περιεκτικότητα της πρώτης περιοχής της μήτρας (της τρίτης φάσης).
4. U_4 η κατ' όγκο περιεκτικότητα της δεύτερης περιοχής της ενδιάμεσης φάσης (της τέταρτης φάσης).
5. U_5 η κατ' όγκο περιεκτικότητα της δεύτερης περιοχής του εγκλείσματος (της πέμπτης φάσης).

6. U_6 η κατ' όγκο περιεκτικότητα της τρίτης περιοχής της ενδιάμεσης φάσης (της έκτης φάσης).
7. U_7 η κατ' όγκο περιεκτικότητα της δεύτερης περιοχής της μήτρας (της έβδομης φάσης).

Θεωρούμε επίσης τα κάτωθι:

1. $U_m = U_3 + U_7$, όπου U_m είναι η συνολική κατ' όγκο περιεκτικότητα της μήτρας στο μοντέλο μας, επίσης
2. $U_i = U_2 + U_4 + U_6$, όπου U_i είναι η συνολική κατ' όγκο περιεκτικότητα της ενδιάμεσης φάσης και
3. $U_f = U_1 + U_5$ όπου είναι η συνολική κατ' όγκο περιεκτικότητα της ίνας.

Επίσης συμβολίζουμε ως εξής:

1. $U_1 = U_{f,1}$
2. $U_2 = U_{i,1}$
3. $U_3 = U_{m,1}$
4. $U_4 = U_{i,2}$
5. $U_5 = U_{f,2}$
6. $U_6 = U_{i,3}$
7. $U_7 = U_{m,2}$

Κάνοντας τη παραδοχή τώρα, ότι η ενδιάμεση φάση μπορεί να θεωρηθεί μήτρα και ότι η αναλογία της θα είναι σταθερή και στις δύο περιοχές εμφάνισης της θα ισχύει ότι:

$$\frac{U_{i,1}+U_{i,2}}{U_{m,1}} = \frac{U_{i,3}}{U_{m,2}} = \frac{U_{i,1}+U_{i,2}+U_{i,3}}{U_{m,1}+U_{m,2}} = \frac{U_i}{U_m} = \frac{U_i}{1-U_f-U_i} = k \tag{3.2.1}$$

Γνωρίζοντας βέβαια ότι γενικά ισχύει:

$$U_m = 1 - U_f - U_i \tag{3.2.2}$$

Άρα από τις σχέσεις (3.2.1), (3.2.2) θεωρώντας ότι $U_{i,1} = U_{i,2}$ προκύπτουν τα παρακάτω:

$$\frac{U_{i,1}}{U_{m,1}}=k\Rightarrow kU_{m,1}=U_{i,1}\Rightarrow\frac{\pi(r_2^{\,2}-r_1^{\,2})h}{\pi d^2h}=k\frac{\pi(r_3^{\,2}-r_2^{\,2})h}{\pi d^2h}\Rightarrow(r_2^{\,2}-r_1^{\,2})=k(r_3^{\,2}-r_2^{\,2})\Rightarrow$$

$$(k+1)r_2^{\,2}=kr_3^{\,2}+r_1^{\,2}\Rightarrow r_2^{\,2}=\frac{kr_3^{\,2}+r_1^{\,2}}{k+1}\Rightarrow r_2=\sqrt{\frac{kr_3^{\,2}+r_1^{\,2}}{k+1}} \tag{3.2.3}$$

$$U_{i,2}=kU_{m,1}\Rightarrow\frac{\pi(r_4^{\,2}-r_3^{\,2})h}{\pi d^2h}=k\frac{\pi(r_3^{\,2}-r_2^{\,2})h}{\pi d^2h}\Rightarrow(r_4^{\,2}-r_3^{\,2})=k(r_3^{\,2}-r_2^{\,2})\Rightarrow$$

$$r_3^{\,2}=\frac{kr_2^{\,2}+r_4^{\,2}}{k+1}\Rightarrow r_3=\sqrt{\frac{kr_2^{\,2}+r_4^{\,2}}{k+1}} \tag{3.2.4}$$

$$U_{i,3}=kU_{m,2}\Rightarrow\frac{\pi(r_6^{\,2}-r_5^{\,2})h}{\pi d^2h}=k\frac{\pi(r_7^{\,2}-r_6^{\,2})h}{\pi d^2h}\Rightarrow(r_6^{\,2}-r_5^{\,2})=k(r_7^{\,2}-r_6^{\,2})\Rightarrow$$

$$(k+1)r_6^{\,2}=kr_7^{\,2}+r_5^{\,2}\Rightarrow r_6^{\,2}=\frac{kr_7^{\,2}+r_5^{\,2}}{(k+1)}\Rightarrow r_6=\sqrt{\frac{kr_7^{\,2}+r_5^{\,2}}{(k+1)}} \tag{3.2.5}$$

Με χρήση του (3.2.3) και (3.2.4) προκύπτει:

$$r_2=\sqrt{\frac{kr_4^{\,2}+(k+1)r_1^{\,2}}{(2k+1)}} \tag{3.2.6}$$

Σε αυτό το σημείο να σημειώσουμε ότι οι σχέσεις των ακτινών του τετραφασικού μοντέλου χωρίς ενδιάμεση φάση, που συμβολίζονταν στη προηγούμενη ενότητα(βλ. Εικ. 3.3) με a, b, c, d χρησιμοποιούνται και στη θεωρητική ανάπτυξη του επταφασικού μοντέλου οι ακτίνες a, b, c, d του τετραφασικού μοντέλου χωρίς ενδιάμεση φάση, απλώς μετονομάζονται σε r_1, r_4, r_5, r_7 αντίστοιχα και ορίζουν τις εξωτερικές ακτίνες των περιοχών της 1ης, 4ης, 5ης, 7ης φάσης του επταφασικού μας μοντέλου. Αυτό συμβαίνει γιατί η ενδιάμεση φάση θεωρείται αλλοιωμένη μήτρα και άρα δεν υπάρχει προσθήκη άλλου υλικού στο μοντέλο μας. Αυτό έχει ως συνέπεια, πρώτον, να μην αλλάξει η εξωτερική ακτίνα του τετραφασικού μοντέλου χωρίς ενδιάμεση φάση, κατά την θεώρηση της εισαγωγής της ενδιάμεσης φάσης γύρω από το έγκλεισμα και άρα την ανάπτυξη του επταφασικού μοντέλου μας και δεύτερον, να παραμείνει όμοια και η εξωτερική και εσωτερική ακτίνα της φάσης του εγκλείσματος από το τετραφασικό μοντέλο χωρίς ενδιάμεση φάση, στο επταφασικό μας μοντέλο. Το τελευταίο συμβαίνει γιατί ουσιαστικά η θεώρηση της ενδιάμεσης φάσης δεν επηρεάζει την κατ’ όγκο περιεκτικότητα σε έγκλεισμα, παρά μόνο την κατ’ όγκο περιεκτικότητα σε μήτρα.

Από προηγούμενη μελέτη (βλέπε Κεφ.2), για κάθε τιμή της κατ' όγκο περιεκτικότητας σε έγκλεισμα υπάρχει μία συγκεκριμένη τιμή της κατ' όγκο περιεκτικότητας σε ενδιάμεση φάση. Τα ζευγάρια των τιμών των παραπάνω περιεκτικοτήτων παρουσιάζονται στο **Πίνακα Ε**.

U_f	U_i
0.10	0.0012
0.20	0.00492
0.30	0.01107
0.40	0.01968
0.50	0.03075
0.60	0.04428
0.65	0.052
0.70	0.06027
0.80	0.07872
0.90	0.09963

Πίνακας Ε

Χρησιμοποιώντας τώρα, τις σχέσεις (3.1.9), (3.1.10), (3.1.11), (3.1.12), (3.2.1), (3.2.2), (3.2.3), (3.2.4), (3.2.5), (3.2.6) για κάθε ζεύγος τιμών (U_f, U_i) του **Πίνακα Ε,** υπολογίζονται οι ακτίνες για όλες τις φάσεις του επταφασικού μας μοντέλου και παρουσιάζονται αναλυτικά στο **Πίνακα Κ**. Εδώ να αναφέρουμε ότι η διάμετρος των εγκλεισμάτων θεωρείται γνωστή, και έχει τιμή 12μm. Άρα και η ακτίνα τους, r_f θα είναι ίση με 6μm.

U_f	U_i	r_1 **(μm)**	r_2 **(μm)**	r_3 **(μm)**	r_4 **(μm)**	r_5 **(μm)**	r_6 **(μm)**	r_7 **(μm)**
0.10	0.0012	6	6,096	30,109	30,128	33,522	33,550	50,200
0.20	0.00492	6	6,183	19,941	19,997	24,817	24,896	35,496
0.30	0.01107	6	6,247	15,085	15,185	21,132	21,279	28,983
0.40	0.01968	6	6,284	11,935	12,080	19,024	19,254	25,100
0.50	0.03075	6	6,279	9,577	9,754	17,639	17,972	22,450
0.60	0.04428	6	6,206	7,666	7,829	16,652	17,120	20,494
0.65	0.052	6	6,131	6,832	6,947	16,256	16,811	19,690

Πίνακας Κ

Έχοντας υπολογίσει τις ακτίνες του επταφασικού κυλινδρικού μας μοντέλου θα είναι εύκολος και ο υπολογισμός των κατ' όγκο περιεκτικοτήτων των επτά φάσεων. Για τις κατ' όγκο περιεκτικότητες και των επτά φάσεων θα ισχύει κατά τα γνωστά:

$$U_1 = U_{f,1} = \frac{\pi r_1^2 h}{\pi r_7^2 h} = \frac{r_1^2}{r_7^2}$$

$$U_2 = U_{i,1} = \frac{\pi (r_2^2 - r_1^2) h}{\pi r_7^2 h} = \frac{(r_2^2 - r_1^2)}{r_7^2}$$

$$U_3 = U_{m,1} = \frac{\pi (r_3^2 - r_2^2) h}{\pi r_7^2 h} = \frac{(r_3^2 - r_2^2)}{r_7^2}$$

$$U_4 = U_{i,2} = \frac{\pi (r_4^2 - r_3^2) h}{\pi r_7^2 h} = \frac{(r_4^2 - r_3^2)}{r_7^2}$$

$$U_5 = U_{f,2} = \frac{\pi (r_5^2 - r_4^2) h}{\pi r_7^2 h} = \frac{(r_5^2 - r_4^2)}{r_7^2}$$

$$U_6 = U_{i,3} = \frac{\pi (r_6^2 - r_5^2) h}{\pi r_7^2 h} = \frac{(r_6^2 - r_5^2)}{r_7^2}$$

$$U_7 = U_{m,2} = \frac{\pi (r_7^2 - r_6^2) h}{\pi r_7^2 h} = \frac{(r_7^2 - r_6^2)}{r_7^2}$$

Παρακάτω παραθέτουμε τον **Πίνακα L** με συγκεντρωμένες τις τιμές των κατ' όγκο περιεκτικοτήτων των επτά φάσεων για διάφορες τιμές της κατ' όγκο περιεκτικότητας σε έγκλεισμα. Επίσης στους **Πίνακες K** και **L** έχουμε λάβει υπόψιν και τους γεωμετρικούς περιορισμούς που μελετήθηκαν στην υποενότητα 3.1.2.

U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6	U_7
0,0143	0,00046	0,34500	0,00046	0,08571	0,00074	0,55334
0,0286	0,00176	0,28525	0,00176	0,17143	0,00314	0,50807
0,0429	0,00361	0,22443	0,00361	0,25714	0,00741	0,46095
0,0571	0,00554	0,16341	0,00554	0,34286	0,01396	0,41155
0,0714	0,00680	0,10375	0,00680	0,42857	0,02353	0,35911
0,0857	0,00600	0,04821	0,00600	0,51429	0,03761	0,30218
0,0929	0,00409	0,02345	0,00409	0,55714	0,04730	0,27106

Πίνακας L

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4:ΕΛΑΣΤΙΚΕΣ ΣΤΑΘΕΡΕΣ ΚΑΙ ΛΟΓΟΙ POISSON ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΦΑΣΗΣ

4.1 ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΕΛΑΣΤΙΚΩΝ ΣΤΑΘΕΡΩΝ ΚΑΙ ΛΟΓΩΝ POISSON ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΦΑΣΗΣ

Η φυσική συμπεριφορά του συστήματος εξαρτάται ξεχωριστά από τις ιδιότητες του εγκλείσματος και της μήτρας, όπως επίσης και από την αλληλεπίδραση τους. Αυτή η αλληλεπίδραση είναι δυνατό να ληφθεί υπόψη υπό τη μορφή της ενδιάμεσης φάσης, η οποία δημιουργείται κατά την παραγωγή του σύνθετου υλικού και παίζει σημαντικό ρόλο στη γενική θερμομηχανική συμπεριφορά του.

Γενικώς το μέτρο ελαστικότητας E_i , το μέτρο διάτμησης G_i και ο λόγος Poisson v_i της ενδιάμεσης φάσης μπορούν να εκφρασθούν ως ένα πολυώνυμο n βαθμού με μεταβλητή ακτίνα r .

Δηλαδή:

$$E_i = f(r), G_i = h(r)\, \kappa\alpha\iota\, v_i(r) = g(r)$$

ή

$$E_i(r) = Ar^n + Br^{n-1} + Cr^{n-2} + ..., G_i(r) = A'r^n + B'r^{n-1} + C'r^{n-2} + ...,$$
$$v_i(r) = A''r^n + B''r^{n-1} + C''r^{n-2} + ...$$

όπου

$r_{f,1} \le r \le r_{i,1}$, $r_{m,1} \le r \le r_{i,2}$ και $r_{f,2} \le r \le r_{i,3}$ για κάθε ενδιάμεση φάση.

Στη μελέτη αυτή για λόγους απλούστευσης, λαμβάνουμε υπ’οψιν τη γραμμική και την παραβολική μεταβολή των E_i , G_i, v_i.

Θεωρούμε ότι $E_m \le E(r) \le E_f$, $G_m \le G_i(r) \le G_f$ και $v_f \le v_i(r) \le v_m$ όταν

$r_{f,1} \le r \le r_{i,1}$, $r_{m,1} \le r \le r_{i,2}$ και $r_{f,2} \le r \le r_{i,3}$ για κάθε ενδιάμεση φάση. Επειδή στο επταφασικό μοντέλο έχουμε 3 ενδιάμεσες φάσεις, οι οριακές συνθήκες θα είναι οι παρακάτω:

- Για την πρώτη ενδιάμεση φάση (περιοχή 2 στην Εικ.3.5)

Στο $r = r_{f,1}$: $E_i(r) = nE_f$, $G_i(r) = nG_f$ και $v_i(r) = nv_f$

Στο $r = r_{i,1}$: $E_i(r) = E_m$, $G_i(r) = G_m$ και $v_i(r) = v_m$

• Για την δεύτερη ενδιάμεση φάση (περιοχή 4 στην Εικ.3.5)

Στο $r = r_{m,1}$: $E_i(r) = E_m$, $G_i(r) = G_m$ και $v_i(r) = v_m$

Στο $r = r_{i,2}$: $E_i(r) = nE_f$, $G_i(r) = nG_f$ και $v_i(r) = nv_f$

• Για την τρίτη ενδιάμεση φάση (περιοχή 6 στην Εικ.3.5)

Στο $r = r_{f,2}$: $E_i(r) = nE_f$, $G_i(r) = nG_f$ και $v_i(r) = nv_f$

Στο $r = r_{i,3}$: $E_i(r) = E_m$, $G_i(r) = G_m$ και $v_i(r) = v_m$

Με i, m, f θα συμβολίζουμε την ενδιάμεση φάση, την μήτρα και το έγκλεισμα αντίστοιχα.

Δεχόμαστε δηλαδή, ότι τα $E_i(r)$, $G_i(r)$ *και* $v_i(r)$της ενδιάμεσης φάσης στο όριο αυτής με τη μήτρα είναι ίσα με E_m , G_m και v_m αντιστοίχως, αφού θεωρήσαμε ότι η ενδιάμεση φάση είναι μια περιοχή αλλοιωμένης μήτρας. Επίσης, στο όριο αυτής με το έγκλεισμα είναι τμήμα των E_f , G_f και v_f αντιστοίχως που εκφράζεται με τον συντελεστή *n*. Όμως για να εκτιμήσουμε τη μέγιστη δυνατή επίδραση της ενδιάμεσης φάσης, θα θεωρήσουμε ότι τα $E_i(r)$, $G_i(r)$ *και* $v_i(r)$ στο όριο αυτής με το έγκλεισμα είναι ίσα με E_f, G_f και v_f Αντιστοίχως, δηλαδή ότι n=1.

Να σημειώσουμε ότι οι μετρήσεις και οι υπολογισμοί για τις παρακάτω υποενότητες έγιναν με βάση τις τιμές της μελέτης για το τριφασικό μοντέλο με ενδιάμεση φάση [27],[28],[29] και παρουσιάζονται στον **Πίνακα Μ.**

Υλικό	Μέτρο Ελαστικότητας E(GPa)	Λόγος Poisson *v*	Μέτρο διατμήσεως G(GPa)
Εποξ. Ρητίνη	3.5	0.35	1.29
Ύαλος	72	0.20	30

Πίνακας Μ

4.1.1 ΜΕΛΕΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

Σύμφωνα με αυτή τη μεταβολή τα $E_i(r)$, $G_i(r)$, $v_i(r)$ μεταβάλλονται ως εξής:

$E_i(r) = A + Br$, $G_i(r) = A' + B'r$, $v_i(r) = A'' + B''r$ με $r_{f,i} \le r \le r_{i,1}, r_{m,1} \le r \le r_{i,2}$ και $r_{f,2} \le r \le r_{i,3}$ για κάθε ενδιάμεση φάση.

Εφαρμόζοντας τώρα και τις οριακές συνθήκες που έχουμε αναφέρει πιο πάνω και για τις 3 ενδιάμεσες φάσεις, υπολογίζουμε τις σταθερές A, B, A', B', A'', B''. Έτσι προκύπτει ότι:

- Για την πρώτη ενδιάμεση φάση:

$$A = nE_f - \frac{nE_f - E_m}{r_1 - r_2} r_1 \qquad B = \frac{nE_f - E_m}{r_1 - r_2}$$

$$A' = nG_f - \frac{nG_f - G_m}{r_1 - r_2} r_1 \qquad B' = \frac{nG_f - G_m}{r_1 - r_2}$$

$$A'' = nv_f - \frac{nv_f - v_m}{r_1 - r_2} r_1 \qquad B'' = \frac{nv_f - v_m}{r_1 - r_2}$$

- Για την δεύτερη ενδιάμεση φάση:

$$A = nE_f - \frac{nE_f - E_m}{r_4 - r_3} r_4 \qquad B = \frac{nE_f - E_m}{r_4 - r_3}$$

$$A' = nG_f - \frac{nG_f - G_m}{r_4 - r_3} r_4 \qquad B' = \frac{nG_f - G_m}{r_4 - r_3}$$

$$A'' = nv_f - \frac{nv_f - v_m}{r_4 - r_3} r_4 \qquad B'' = \frac{nv_f - v_m}{r_4 - r_3}$$

- Για την Τρίτη ενδιάμεση φάση:

$$A = nE_f - \frac{nE_f - E_m}{r_5 - r_6} r_5 \qquad B = \frac{nE_f - E_m}{r_5 - r_6}$$

$$A' = nG_f - \frac{nG_f - G_m}{r_5 - r_6} r_5 \qquad B' = \frac{nG_f - G_m}{r_5 - r_6}$$

$$A'' = nv_f - \frac{nv_f - v_m}{r_5 - r_6} r_5 \qquad B'' = \frac{nv_f - v_m}{r_5 - r_6}$$

Επιπλέον υπολογίζουμε την μέση τιμή του μέτρου ελαστικότητας, του μέτρου διατμήσεως και του λόγου Poisson της κάθε ενδιάμεσης φάσης.

- Για την πρώτη ενδιάμεση φάση:

$$\overline{E}_i = \frac{1}{V}\int_{r_1}^{r_2} E_i(r)dV = \frac{1}{V}\int_{r_1}^{r_2}(A+Br)dV$$

$$\overline{G}_i = \frac{1}{V}\int_{r_1}^{r_2} G_i(r)dV = \frac{1}{V}\int_{r_1}^{r_2}(A'+B'r)dV$$

$$\overline{v}_i = \frac{1}{V}\int_{r_1}^{r_2} v_i(r)dV = \frac{1}{V}\int_{r_1}^{r_2}(A''+B''r)dV$$

- Για την δεύτερη ενδιάμεση φάση:

$$\overline{E}_i = \frac{1}{V}\int_{r_3}^{r_4} E_i(r)dV = \frac{1}{V}\int_{r_3}^{r_4}(A+Br)dV$$

$$\overline{G}_i = \frac{1}{V}\int_{r_3}^{r_4} G_i(r)dV = \frac{1}{V}\int_{r_3}^{r_4}(A'+B'r)dV$$

$$\overline{v}_i = \frac{1}{V}\int_{r_3}^{r_4} v_i(r)dV = \frac{1}{V}\int_{r_3}^{r_4}(A''+B''r)dV$$

- Για την τρίτη ενδιάμεση φάση:

$$\overline{E}_i = \frac{1}{V}\int_{r_5}^{r_6} E_i(r)dV = \frac{1}{V}\int_{r_5}^{r_6}(A+Br)dV$$

$$\overline{G}_i = \frac{1}{V}\int_{r_5}^{r_6} G_i(r)dV = \frac{1}{V}\int_{r_5}^{r_6}(A'+B'r)dV$$

$$\overline{v}_i = \frac{1}{V}\int_{r_5}^{r_6} v_i(r)dV = \frac{1}{V}\int_{r_5}^{r_6}(A''+B''r)dV$$

Όπου $V = \frac{V_i}{V_{o\lambda}}$ και $dV = \frac{2\pi rhdr}{\pi {r_7}^2 h}$

Επομένως προκύπτει:

- Για την πρώτη ενδιάμεση φάση:

$$\overline{E}_i = \frac{2}{r_2^{\,2} - r_1^{\,2}}\left[\frac{A}{2}(r_2^{\,2} - r_1^{\,2}) + \frac{B}{3}(r_2^{\,3} - r_1^{\,3})\right]$$

$$\overline{G}_i = \frac{2}{r_2^{\,2} - r_1^{\,2}}\left[\frac{A'}{2}(r_2^{\,2} - r_1^{\,2}) + \frac{B'}{3}(r_2^{\,3} - r_1^{\,3})\right]$$

$$\overline{v}_i = \frac{2}{r_2^{\,2} - r_1^{\,2}}\left[\frac{A''}{2}(r_2^{\,2} - r_1^{\,2}) + \frac{B''}{3}(r_2^{\,3} - r_1^{\,3})\right]$$

- Για την δεύτερη ενδιάμεση φάση:

$$\overline{E}_i = \frac{2}{r_4^{\,2} - r_3^{\,2}}\left[\frac{A}{2}(r_4^{\,2} - r_3^{\,2}) + \frac{B}{3}(r_4^{\,3} - r_3^{\,3})\right]$$

$$\overline{G}_i = \frac{2}{r_4^{\,2} - r_3^{\,2}}\left[\frac{A'}{2}(r_4^{\,2} - r_3^{\,2}) + \frac{B'}{3}(r_4^{\,3} - r_3^{\,3})\right]$$

$$\overline{v}_i = \frac{2}{r_4^{\,2} - r_3^{\,2}}\left[\frac{A''}{2}(r_4^{\,2} - r_3^{\,2}) + \frac{B''}{3}(r_4^{\,3} - r_3^{\,3})\right]$$

- Για την τρίτη ενδιάμεση φάση:

$$\overline{E}_i = \frac{2}{r_6^{\,2} - r_5^{\,2}}\left[\frac{A}{2}(r_6^{\,2} - r_5^{\,2}) + \frac{B}{3}(r_6^{\,3} - r_5^{\,3})\right]$$

$$\overline{G}_i = \frac{2}{r_6^{\,2} - r_5^{\,2}}\left[\frac{A'}{2}(r_6^{\,2} - r_5^{\,2}) + \frac{B'}{3}(r_6^{\,3} - r_5^{\,3})\right]$$

$$\overline{v}_i = \frac{2}{r_6^{\,2} - r_5^{\,2}}\left[\frac{A''}{2}(r_6^{\,2} - r_5^{\,2}) + \frac{B''}{3}(r_6^{\,3} - r_5^{\,3})\right]$$

Παρακάτω παρουσιάζουμε σε μορφή πινάκων τους μέσους όρους των ελαστικών σταθερών και των λόγων Poisson για την $1^{η}$ ενδιάμεση φάση στο κυλινδρικό επταφασικό μοντέλο, στην γραμμική μεταβολή για διάφορες τιμές του n.

ΜΕΤΡΟ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ E (GPa)

U_f	n=0,2	n=0,4	n=0,6	n=0,8	n=1
0,10	8,94	16,12	23,30	30,48	37,66
0,20	8,92	16,09	23,25	30,41	37,58
0,30	8,91	16,06	23,22	30,37	37,52
0,40	8,91	16,05	23,20	30,34	37,49
0,50	8,91	16,05	23,20	30,34	37,49
0,60	8,92	16,08	23,24	30,40	37,57
0,65	8,93	16,10	23,28	30,45	37,63

Πίνακας Ν

ΜΕΤΡΟ ΔΙΑΤΜΗΣΗΣ G (GPa)

U_f	n=0,2	n=0,4	n=0,6	n=0,8	n=1
0,10	3,639	6,631	9,623	12,615	15,607
0,20	3,633	6,618	9,603	12,588	15,573
0,30	3,629	6,609	9,589	12,569	15,548
0,40	3,627	6,604	9,581	12,557	15,534
0,50	3,627	6,604	9,582	12,559	15,536
0,60	3,632	6,615	9,598	12,581	15,564
0,65	3,636	6,626	9,615	12,604	15,593

Πίνακας Ο

ΛΟΓΟΣ POISSON (v)

U_f	n=0,2	n=0,4	n=0,6	n=0,8	n=1
0,10	0,1954	0,2154	0,2353	0,2552	0,2752
0,20	0,1958	0,2157	0,2356	0,2555	0,2754
0,30	0,1960	0,2159	0,2358	0,2556	0,2755
0,40	0,1962	0,2160	0,2359	0,2557	0,2756
0,50	0,1962	0,2160	0,2359	0,2557	0,2756
0,60	0,1959	0,2158	0,2356	0,2555	0,2754
0,65	0,1956	0,2155	0,2354	0,2553	0,2753

Πίνακας Ρ

4.1.2 ΜΕΛΕΤΗ ΠΑΡΑΒΟΛΙΚΗΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

Σύμφωνα με αυτήν την μεταβολή τα $E_i(r), G_i(r), v_i(r)$ μεταβάλλονται ως εξής:
$E\ (r) = Ar^2 + Br + C$, $G_i(r) = A'r^2 + B'r + C'$ και $v_i(r) = A''r^2 + B''r + C''$ με $r_{f,1} \le r \le r_{i,1}, r_{m,1} \le r \le r_{i,2}$ και $r_{f,2} \le r \le r_{i,3}$ για κάθε ενδιάμεση φάση.

Για τον υπολογισμό των A, B, C, A', B', C' και A'', B'', C'' εκτός από τις προαναφερθείσες οριακές συνθήκες θα θεωρήσουμε ότι η $E_i(r), G_i(r), v_i(r)$ παρουσιάζουν μέγιστο για τις θέσεις $r = r_{i,1}, r = r_{m,1}$ και $r = r_{i,3}$. Δηλαδή:

- Για την πρώτη ενδιάμεση φάση στο $r = r_{i,1}$ έχουμε:

$\frac{dE_i(r)}{dr} = 0$ με $\frac{d^2E_i(r)}{dr^2} > 0$ και

$\frac{dG_i(r)}{dr} = 0$ με $\frac{d^2G_i(r)}{dr^2} > 0$ και

$\frac{dv_i(r)}{dr} = 0$ με $\frac{d^2v_i(r)}{dr^2} < 0$

- Για την δεύτερη ενδιάμεση φάση στο $r = r_{m,1}$ έχουμε:

$\frac{dE_i(r)}{dr} = 0$ με $\frac{d^2E_i(r)}{dr^2} > 0$ και

$\frac{dG_i(r)}{dr} = 0$ με $\frac{d^2G_i(r)}{dr^2} > 0$ και

$\frac{dv_i(r)}{dr} = 0$ με $\frac{d^2v_i(r)}{dr^2} < 0$

- Για την τρίτη ενδιάμεση φάση στο $r = r_{i,3}$ έχουμε:

$\frac{dE_i(r)}{dr} = 0$ με $\frac{d^2E_i(r)}{dr^2} > 0$ και

$\frac{dG_i(r)}{dr} = 0$ με $\frac{d^2G_i(r)}{dr^2} > 0$ και

$\frac{dv_i(r)}{dr} = 0$ με $\frac{d^2v_i(r)}{dr^2} < 0$

• Για την πρώτη ενδιάμεση φάση έχουμε:

$$A=\frac{\left(nE_f-E_m\right)}{(r_1-r_2)^2} \qquad B=-\frac{2r_2}{(r_1-r_2)^2}(nE_f-E_m)$$

$$C=\frac{nE_f r_2{}^2+E_m r_1{}^2-2E_m r_1 r_2}{(r_1-r_2)^2}$$

$$A'=\frac{\left(nG_f-G_m\right)}{(r_1-r_2)^2} \qquad B'=-\frac{2r_2}{(r_1-r_2)^2}(nG_f-G_m)$$

$$C'=\frac{nG_f r_2{}^2+G_m r_1{}^2-2G_m r_1 r_2}{(r_1-r_2)^2}$$

$$A''=\frac{\left(nv_f-v_m\right)}{(r_1-r_2)^2} \qquad B''=-\frac{2r_2}{(r_1-r_2)^2}(nv_f-v_m)$$

$$C''=\frac{nv_f r_2{}^2+v_m r_1{}^2-2v_m r_1 r_2}{(r_1-r_2)^2}$$

• Για την δεύτερη ενδιάμεση φάση έχουμε:

$$A=\frac{\left(nE_f-E_m\right)}{(r_4-r_3)^2} \qquad B=-\frac{2r_3}{(r_4-r_3)^2}(nE_f-E_m)$$

$$C=\frac{nE_f r_3{}^2+E_m r_4{}^2-2E_m r_4 r_3}{(r_4-r_3)^2}$$

$$A'=\frac{\left(nG_f-G_m\right)}{(r_4-r_3)^2} \qquad B'=-\frac{2r_3}{(r_4-r_3)^2}(nG_f-G_m)$$

$$C'=\frac{nG_f r_3{}^2+G_m r_4{}^2-2G_m r_4 r_3}{(r_4-r_3)^2}$$

$$A''=\frac{\left(nv_f-v_m\right)}{(r_4-r_3)^2} \qquad B''=-\frac{2r_3}{(r_4-r_3)^2}(nv_f-v_m)$$

$$C''=\frac{nv_f r_3{}^2+v_m r_4{}^2-2v_m r_4 r_3}{(r_4-r_3)^2}$$

• Για την τρίτη ενδιάμεση φάση έχουμε:

$$A = \frac{\left(nE_f - E_m\right)}{(r_5 - r_6)^2} \qquad B = -\frac{2r_6}{(r_5 - r_6)^2}(nE_f - E_m)$$

$$C = \frac{nE_f r_6{}^2 + E_m r_5{}^2 - 2E_m r_5 r_6}{(r_5 - r_6)^2}$$

$$A' = \frac{\left(nG_f - G_m\right)}{(r_5 - r_6)^2} \qquad B' = -\frac{2r_6}{(r_5 - r_6)^2}(nG_f - G_m)$$

$$C' = \frac{nG_f r_6{}^2 + G_m r_5{}^2 - 2G_m r_5 r_6}{(r_5 - r_6)^2}$$

$$A'' = \frac{\left(nv_f - v_m\right)}{(r_5 - r_6)^2} \qquad B'' = -\frac{2r_6}{(r_5 - r_6)^2}(nv_f - v_m)$$

$$C'' = \frac{nv_f r_6{}^2 + v_m r_5{}^2 - 2v_m r_5 r_6}{(r_5 - r_6)^2}$$

Επιπλέον υπολογίζουμε την μέση τιμή του μέτρου ελαστικότητας, του μέτρου διατμήσεως και του λόγου Poisson της κάθε ενδιάμεσης φάσης.

• Για την πρώτη ενδιάμεση φάση έχουμε:

$$\overline{E}_i = \frac{1}{V}\int_{r_1}^{r_2} E_i(r)dV = \frac{1}{V}\int_{r_1}^{r_2}(Ar^2 + Br + C)dV$$

$$\overline{G}_i = \frac{1}{V}\int_{r_1}^{r_2} G_i(r)dV = \frac{1}{V}\int_{r_1}^{r_2}(A'r^2 + B'r + C')dV$$

$$\overline{v}_i = \frac{1}{V}\int_{r_1}^{r_2} v_i(r)dV = \frac{1}{V}\int_{r_1}^{r_2}(A''r^2 + B''r + C'')dV$$

• Για την δεύτερη ενδιάμεση φάση έχουμε:

$$\overline{E}_i = \frac{1}{V}\int_{r_3}^{r_4} E_i(r)dV = \frac{1}{V}\int_{r_3}^{r_4}(Ar^2 + Br + C)dV$$

$$\overline{G}_i = \frac{1}{V}\int_{r_3}^{r_4} G_i(r)dV = \frac{1}{V}\int_{r_3}^{r_4}(A'r^2 + B'r + C')dV$$

$$\bar{v}_i = \frac{1}{V}\int_{r_3}^{r_4} v_i(r)dV = \frac{1}{V}\int_{r_3}^{r_4}(A''r^2 + B''r + C'')dV$$

• Για την τρίτη ενδιάμεση φάση έχουμε:

$$\bar{E}_i = \frac{1}{V}\int_{r_5}^{r_6} E_i(r)dV = \frac{1}{V}\int_{r_5}^{r_6}(Ar^2 + Br + C)dV$$

$$\bar{G}_i = \frac{1}{V}\int_{r_5}^{r_6} G_i(r)dV = \frac{1}{V}\int_{r_5}^{r_6}(A'r^2 + B'r + C')dV$$

$$\bar{v}_i = \frac{1}{V}\int_{r_5}^{r_6} v_i(r)dV = \frac{1}{V}\int_{r_5}^{r_6}(A''r^2 + B''r + C'')dV$$

Όπου $V = \dfrac{V_i}{V_{o\lambda}}$ και $dV = \dfrac{2\pi rhdr}{\pi r_7^{\,2} h}$

Επομένως προκύπτει:

• Για την πρώτη ενδιάμεση φάση:

$$\bar{E}_i = \frac{2}{r_2^{\,2} - r_1^{\,2}}\left[\frac{A}{4}(r_2^{\,4} - r_1^{\,4}) + \frac{B}{3}(r_2^{\,3} - r_1^{\,3}) + \frac{C}{2}(r_2^{\,2} - r_1^{\,2})\right]$$

$$\bar{G}_i = \frac{2}{r_2^{\,2} - r_1^{\,2}}\left[\frac{A'}{4}(r_2^{\,4} - r_1^{\,4}) + \frac{B'}{3}(r_2^{\,3} - r_1^{\,3}) + \frac{C'}{2}(r_2^{\,2} - r_1^{\,2})\right]$$

$$\bar{v}_i = \frac{2}{r_2^{\,2} - r_1^{\,2}}\left[\frac{A''}{4}(r_2^{\,4} - r_1^{\,4}) + \frac{B''}{3}(r_2^{\,3} - r_1^{\,3}) + \frac{C''}{2}(r_2^{\,2} - r_1^{\,2})\right]$$

• Για την δεύτερη ενδιάμεση φάση έχουμε:

$$\bar{E}_i = \frac{2}{r_4^{\,2} - r_3^{\,2}}\left[\frac{A}{4}(r_4^{\,4} - r_3^{\,4}) + \frac{B}{3}(r_4^{\,3} - r_3^{\,3}) + \frac{C}{2}(r_4^{\,2} - r_3^{\,2})\right]$$

$$\bar{G}_i = \frac{2}{r_4^{\,2} - r_3^{\,2}}\left[\frac{A'}{4}(r_4^{\,4} - r_3^{\,4}) + \frac{B'}{3}(r_4^{\,3} - r_3^{\,3}) + \frac{C'}{2}(r_4^{\,2} - r_3^{\,2})\right]$$

$$\bar{v}_i = \frac{2}{r_4^{\,2} - r_3^{\,2}}\left[\frac{A''}{4}(r_4^{\,4} - r_3^{\,4}) + \frac{B''}{3}(r_4^{\,3} - r_3^{\,3}) + \frac{C''}{2}(r_4^{\,2} - r_3^{\,2})\right]$$

• Για την τρίτη ενδιάμεση φάση έχουμε:

$$\overline{E}_i = \frac{2}{r_6^{\,2} - r_5^{\,2}}\left[\frac{A}{4}(r_6^{\,4} - r_5^{\,4}) + \frac{B}{3}(r_6^{\,3} - r_5^{\,3}) + \frac{C}{2}(r_6^{\,2} - r_5^{\,2})\right]$$

$$\overline{G}_i = \frac{2}{r_6^{\,2} - r_5^{\,2}}\left[\frac{A'}{4}(r_6^{\,4} - r_5^{\,4}) + \frac{B'}{3}(r_6^{\,3} - r_5^{\,3}) + \frac{C'}{2}(r_6^{\,2} - r_5^{\,2})\right]$$

$$\overline{v}_i = \frac{2}{r_6^{\,2} - r_5^{\,2}}\left[\frac{A''}{4}(r_6^{\,4} - r_5^{\,4}) + \frac{B''}{3}(r_6^{\,3} - r_5^{\,3}) + \frac{C''}{2}(r_6^{\,2} - r_5^{\,2})\right]$$

Παρακάτω παρουσιάζουμε σε μορφή πινάκων τους μέσους όρους των ελαστικών σταθερών και των λόγων Poisson για την 1$^{\eta}$ ενδιάμεση φάση στο κυλινδρικό επταφασικό μοντέλο, στην παραβολική μεταβολή για διάφορες τιμές του n.

ΜΕΤΡΟ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ E(GPa)

U_f	n=0,2	n=0,4	n=0,6	n=0,8	n=1
0,10	7,12	11,90	16,68	21,46	26,24
0,20	7,11	11,87	16,63	21,40	26,16
0,30	7,10	11,85	16,60	21,35	26,10
0,40	7,09	11,84	16,58	21,32	26,07
0,50	7,09	11,84	16,58	21,33	26,07
0,60	7,10	11,86	16,62	21,38	26,14
0,65	7,11	11,89	16,66	21,44	26,21

Πίνακας T

ΜΕΤΡΟ ΔΙΑΤΜΗΣΕΩΣ G(GPa)

U_f	n=0,2	n=0,4	n=0,6	n=0,8	n=1
0,10	2,85	4,85	6,84	8,83	10,82
0,20	2,85	4,83	6,82	8,80	10,79
0,30	2,84	4,82	6,80	8,78	10,76
0,40	2,84	4,82	6,80	8,77	10,75
0,50	2,84	4,82	6,80	8,77	10,75
0,60	2,85	4,83	6,81	8,80	10,78
0,65	2,85	4,84	6,83	8,82	10,81

Πίνακας U

ΛΟΓΟΣ POISSON ν

U_f	n=0,2	n=0,4	n=0,6	n=0,8	n=1
0,10	0,2471	0,2604	0,2736	0,2869	0,3002
0,20	0,2474	0,2607	0,2739	0,2871	0,3004
0,30	0,2477	0,2610	0,2741	0,2873	0,3005
0,40	0,2479	0,2610	0,2742	0,2874	0,3006
0,50	0,2478	0,2610	0,2742	0,2874	0,3006
0,60	0,2475	0,2608	0,2740	0,2872	0,3004
0,65	0,2472	0,2605	0,2737	0,2870	0,3003

Πίνακας V

4.2 ΠΙΝΑΚΕΣ-ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ-ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

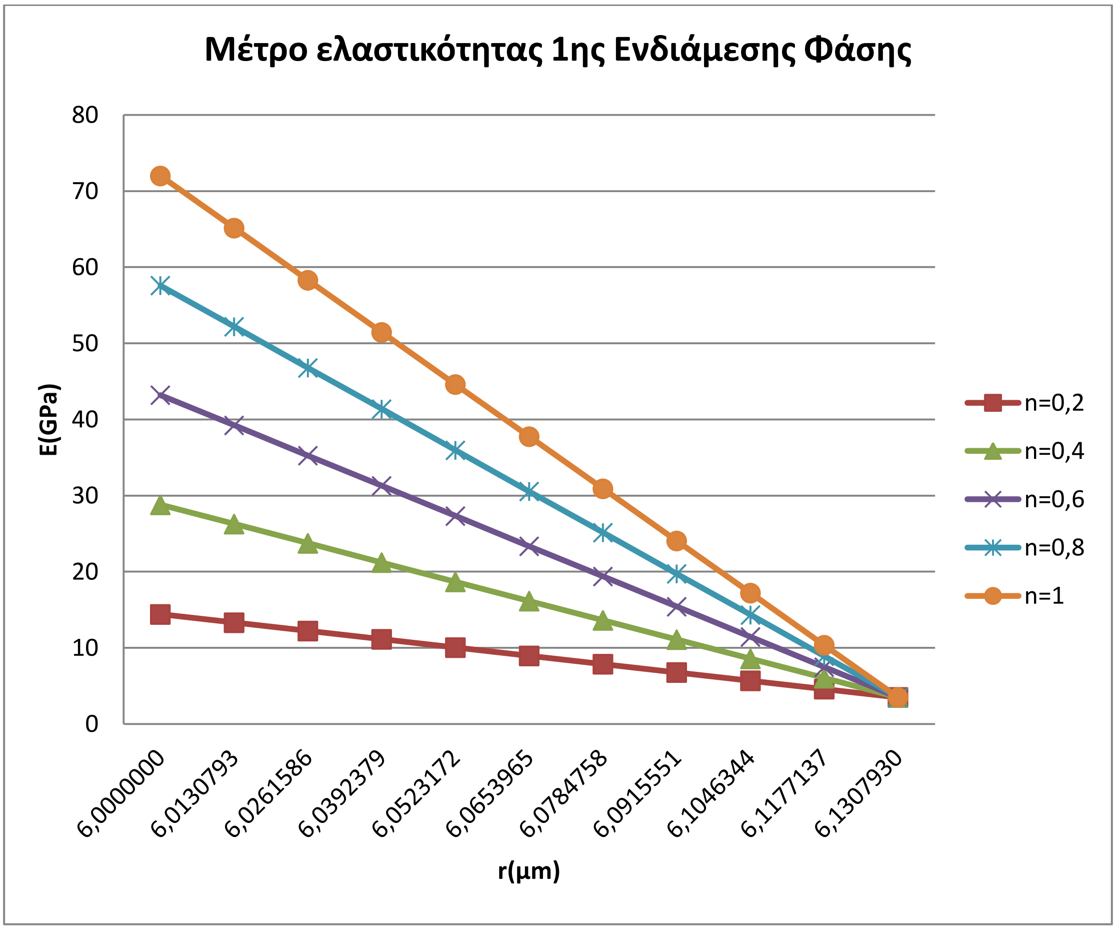
Στους παρακάτω πίνακες και διαγράμματα παρουσιάζονται αναλυτικά οι τιμές των ελαστικών σταθερών και του λόγου Poisson για μια συγκεκριμένη κατ' όγκο περιεκτικότητα σε έγκλεισμα, για κάθε μία από τις τρεις ενδιάμεσες φάσεις του επταφασικού μοντέλου και κάθε μία από τις μεταβολές που μελετήσαμε, δηλαδή την γραμμική και την παραβολική. Η κατ' όγκο περιεκτικότητα που επιλέχθηκε είναι η $U_f = 0.65$.

Στη παρουσίαση που ακολουθεί έχουμε ενεργήσει ως εξής: Για την παραπάνω κατ' όγκο περιεκτικότητα γνωρίζουμε την ακτίνα r της ενδιάμεσης φάσης που αντιστοιχεί σε αυτήν, στο επταφασικό μοντέλο με ενδιάμεση φάση [27],[28],[29]. Αυτήν την ακτίνα την χωρίζουμε σε 10 ίσα διαστήματα. Σε αυτά τα διαστήματα, δηλαδή στη περιοχή της ενδιάμεσης φάσης για κατ' όγκο περιεκτικότητα 0.65, υπολογίζουμε τις ελαστικές σταθερές μας και το λόγο Poisson για διάφορα n που όπως είπαμε και προηγούμενα δηλώνουν την επίδραση του εγκλείσματος στην ενδιάμεση φάση. Τέλος να σημειωθεί ότι για κάθε πίνακα παρακάτω ακολουθεί και ένα διάγραμμα ενώ πραγματοποιείται και σύγκριση των μοντέλων για την οριακή συνθήκη n=1.

Μέτρο Ελαστικότητας 1ης Ενδιάμεσης Φάσης Γραμμικό Μοντέλο

Μέτρο Ελαστικότητας 1ης Ενδιάμεσης Φάσης E(GPa)					
r(μm)	**n=0,2**	**n=0,4**	**n=0,6**	**n=0,8**	**n=1**
6,0000000	14,4	28,8	43,2	57,6	72
6,0130793	13,31	26,27	39,23	52,19	65,15
6,0261586	12,22	23,74	35,26	46,78	58,3
6,0392379	11,13	21,21	31,29	41,37	51,45
6,0523172	10,04	18,68	27,32	35,96	44,6
6,0653965	8,95	16,15	23,35	30,55	37,75
6,0784758	7,86	13,62	19,38	25,14	30,9
6,0915551	6,77	11,09	15,41	19,73	24,05
6,1046344	5,68	8,56	11,44	14,32	17,2
6,1177137	4,59	6,03	7,47	8,91	10,35
6,1307930	3,5	3,5	3,5	3,5	3,5

Πίνακας W

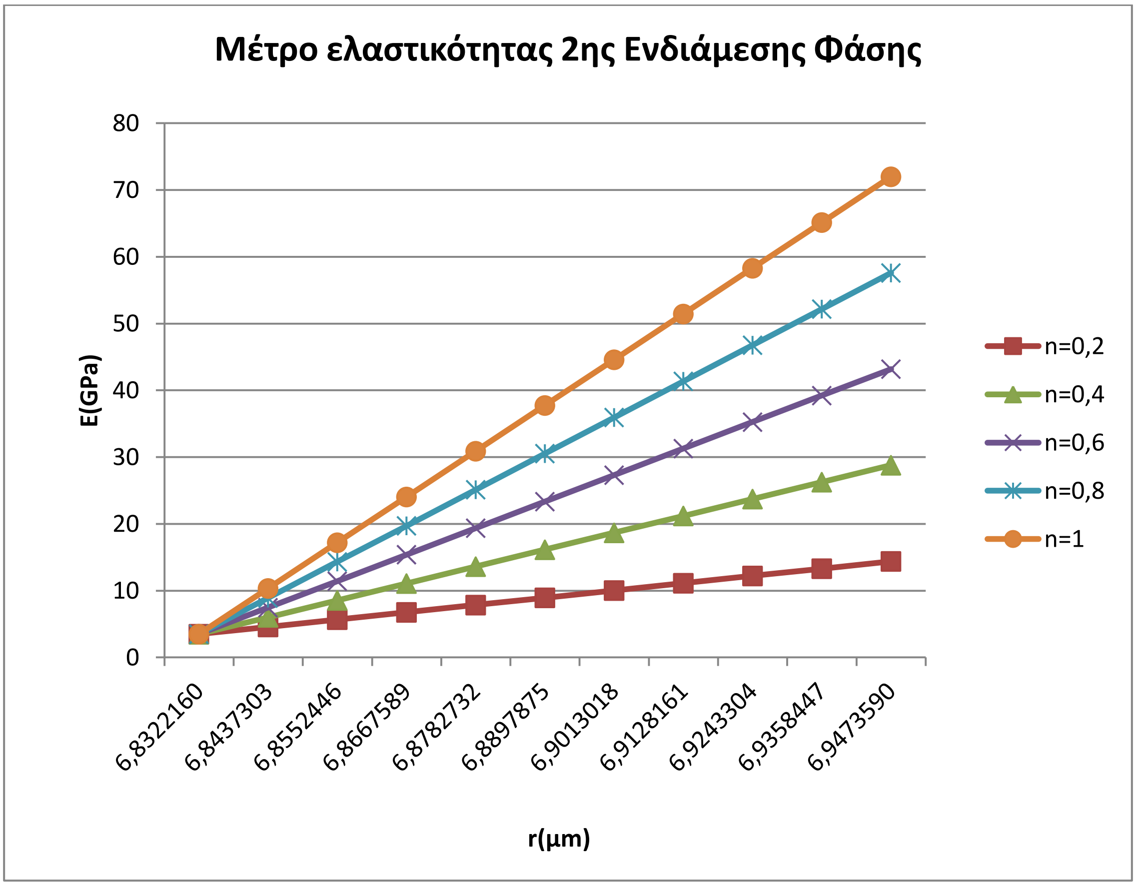


Διάγραμμα 1

Μέτρο Ελαστικότητας 2ης Ενδιάμεσης Φάσης Γραμμικό Μοντέλο

Μέτρο Ελαστικότητας 2ης Ενδιάμεσης Φάσης E (GPa)					
r(μm)	n=0,2	n=0,4	n=0,6	n=0,8	n=1
6,8322160	3,5	3,5	3,5	3,5	3,5
6,8437303	4,59	6,03	7,47	8,91	10,35
6,8552446	5,68	8,56	11,44	14,32	17,2
6,8667589	6,77	11,09	15,41	19,73	24,05
6,8782732	7,86	13,62	19,38	25,14	30,9
6,8897875	8,95	16,15	23,35	30,55	37,75
6,9013018	10,04	18,68	27,32	35,96	44,6
6,9128161	11,13	21,21	31,29	41,37	51,45
6,9243304	12,22	23,74	35,26	46,78	58,3
6,9358447	13,31	26,27	39,23	52,19	65,15
6,9473590	14,4	28,8	43,2	57,6	72

Πίνακας Χ

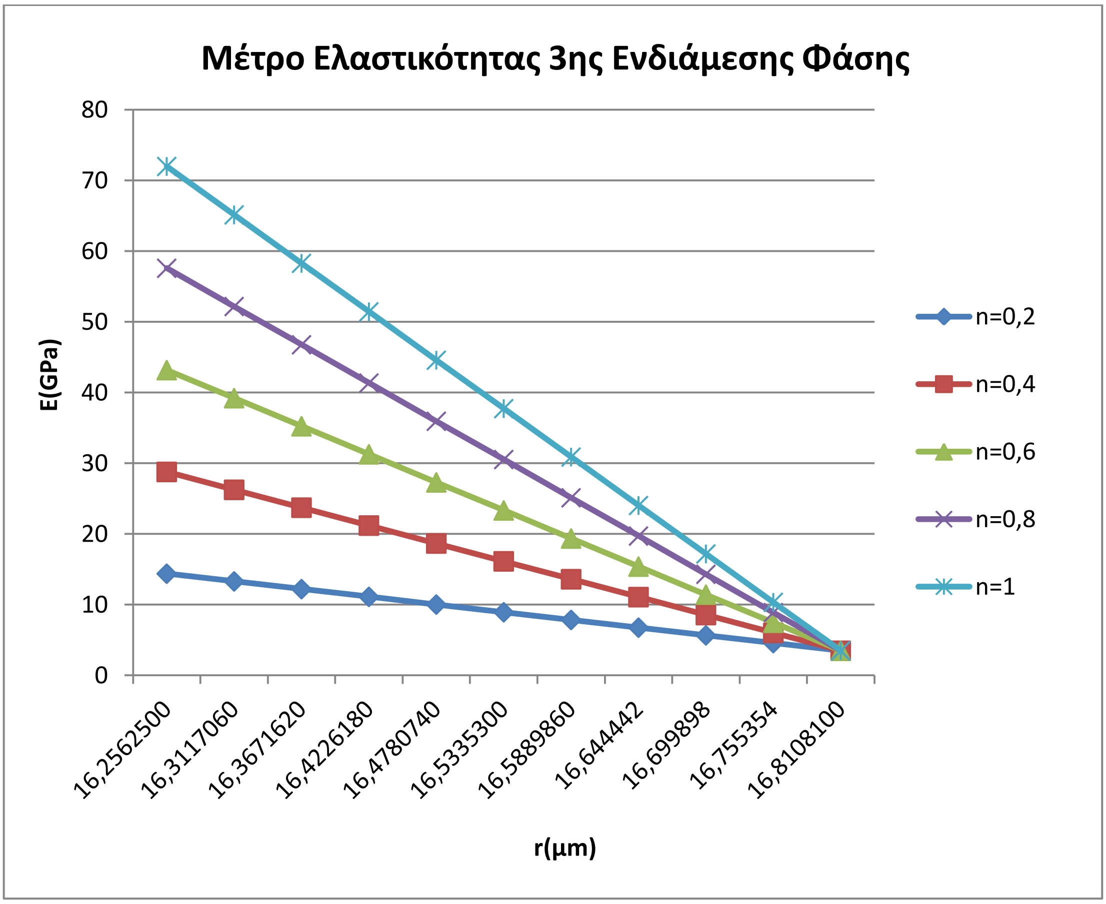


Διάγραμμα 2

Μέτρο Ελαστικότητας 3ης Ενδιάμεσης Φάσης Γραμμικό Μοντέλο

Μέτρο Ελαστικότητας 3ης Ενδιάμεσης Φάσης E(GPa)					
r(μm)	n=0,2	n=0,4	n=0,6	n=0,8	n=1
16,2562500	14,4	28,8	43,2	57,6	72
16,3117060	13,31	26,27	39,23	52,19	65,15
16,3671620	12,22	23,74	35,26	46,78	58,3
16,4226180	11,13	21,21	31,29	41,37	51,45
16,4780740	10,04	18,68	27,32	35,96	44,6
16,5335300	8,95	16,15	23,35	30,55	37,75
16,5889860	7,86	13,62	19,38	25,14	30,9
16,644442	6,77	11,09	15,41	19,73	24,05
16,699898	5,68	8,56	11,44	14,32	17,2
16,755354	4,59	6,03	7,47	8,91	10,35
16,8108100	3,5	3,5	3,5	3,5	3,5

Πίνακας Υ

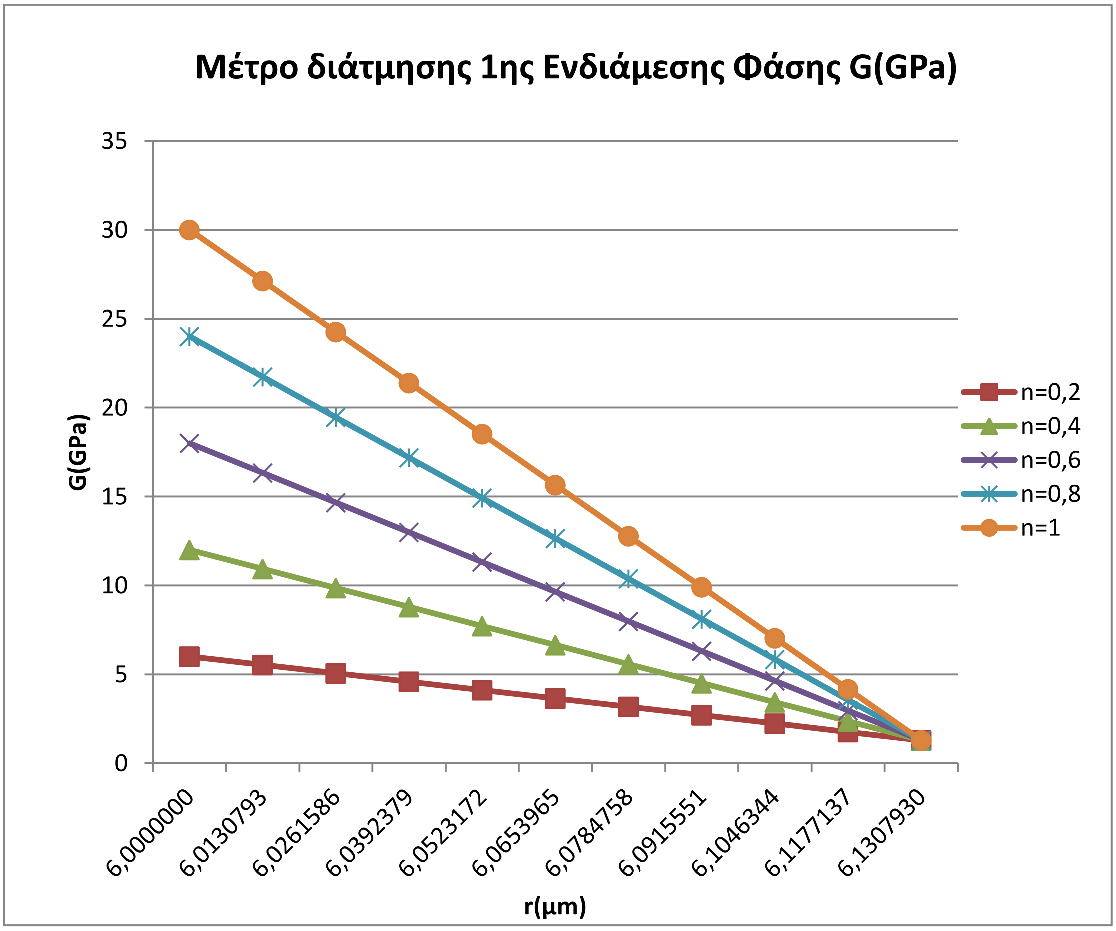


Διάγραμμα 3

Μέτρο Διατμήσεως 1ης Ενδιάμεσης Φάσης Γραμμικό Μοντέλο

Μέτρο Διάτμησης 1ης Ενδιάμεσης Φάσης G(GPa)					
r(μm)	n=0,2	n=0,4	n=0,6	n=0,8	n=1
6,0000000	6	12	18	24	30
6,0130793	5,529	10,929	16,329	21,729	27,129
6,0261586	5,058	9,858	14,658	19,458	24,258
6,0392379	4,587	8,787	12,987	17,187	21,387
6,0523172	4,116	7,716	11,316	14,916	18,516
6,0653965	3,645	6,645	9,645	12,645	15,645
6,0784758	3,174	5,574	7,974	10,374	12,774
6,0915551	2,703	4,503	6,303	8,103	9,903
6,1046344	2,232	3,432	4,632	5,832	7,032
6,1177137	1,761	2,361	2,961	3,561	4,161
6,1307930	1,29	1,29	1,29	1,29	1,29

Πίνακας Ζ

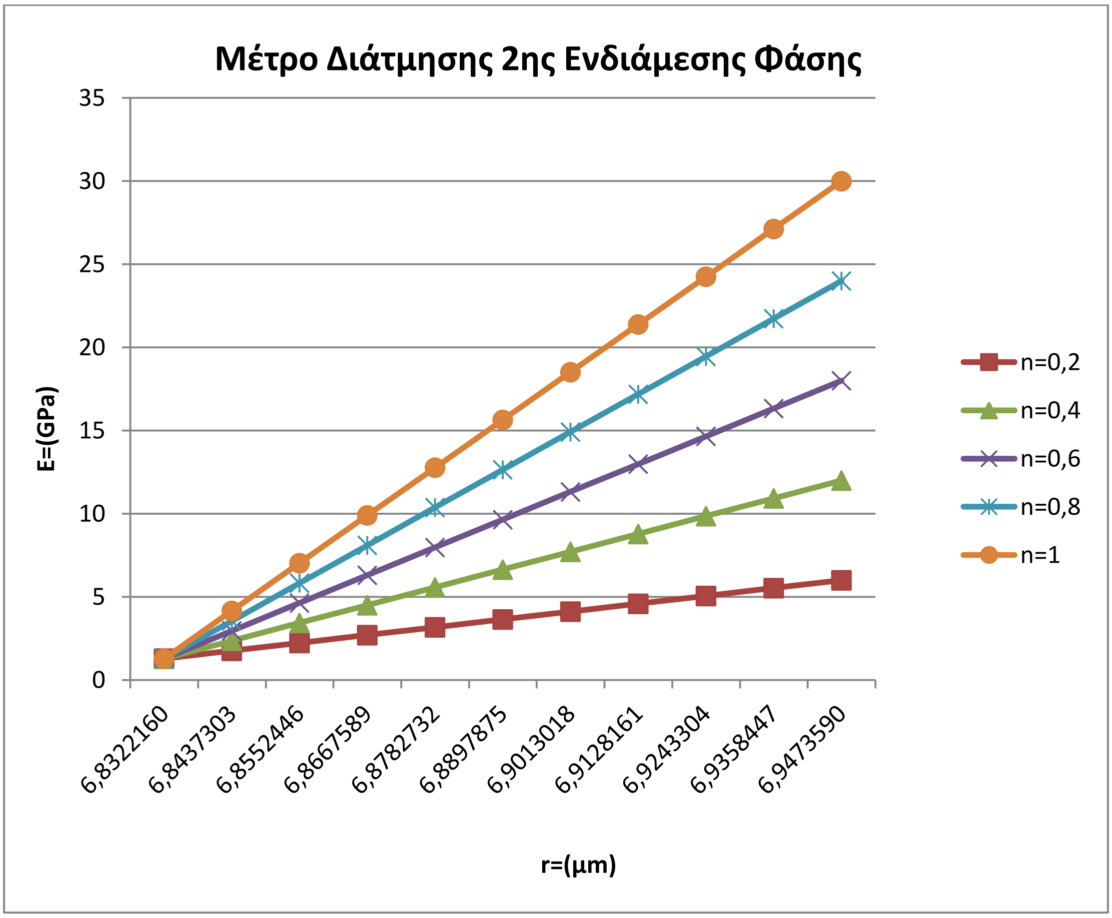


Διάγραμμα 4

Μέτρο Διατμήσεως 2^{ης} Ενδιάμεσης Φάσης Γραμμικό Μοντέλο

Μέτρο Διάτμησης 2^{ης} Ενδιάμεσης Φάσης G(GPa)					
r(μm)	**n=0,2**	**n=0,4**	**n=0,6**	**n=0,8**	**n=1**
6,8322160	1,29	1,29	1,29	1,29	1,29
6,8437303	1,761	2,361	2,961	3,561	4,161
6,8552446	2,232	3,432	4,632	5,832	7,032
6,8667589	2,703	4,503	6,303	8,103	9,903
6,8782732	3,174	5,574	7,974	10,374	12,774
6,8897875	3,645	6,645	9,645	12,645	15,645
6,9013018	4,116	7,716	11,316	14,916	18,516
6,9128161	4,587	8,787	12,987	17,187	21,387
6,9243304	5,058	9,858	14,658	19,458	24,258
6,9358447	5,529	10,929	16,329	21,729	27,129
6,9473590	6	12	18	24	30

Πίνακας Α1

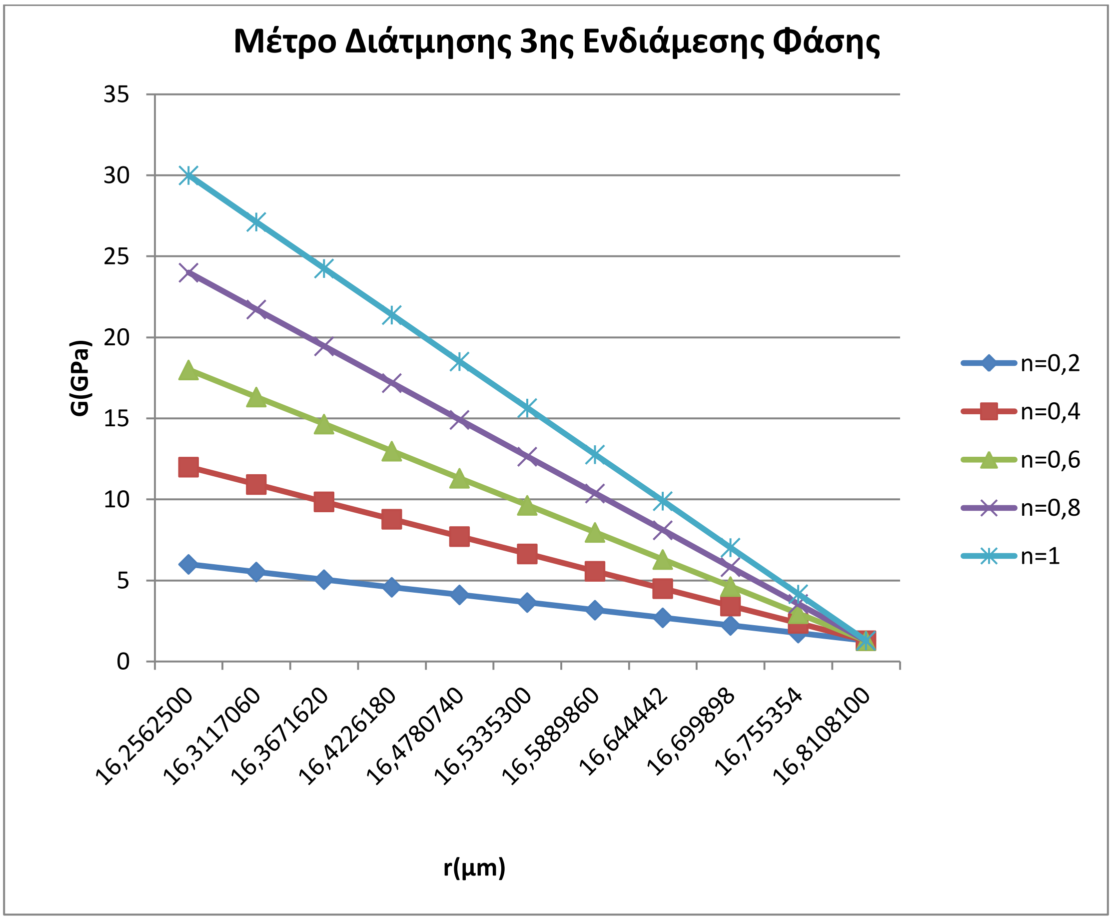


Διάγραμμα 5

Μέτρο Διατμήσεως 3ης Ενδιάμεσης Φάσης Γραμμικό Μοντέλο

Μέτρο Διάτμησης 3ης Ενδιάμεσης Φάσης G(GPa)					
r(μm)	**n=0,2**	**n=0,4**	**n=0,6**	**n=0,8**	**n=1**
16,2562500	6	12	18	24	30
16,3117060	5,529	10,929	16,329	21,729	27,129
16,3671620	5,058	9,858	14,658	19,458	24,258
16,4226180	4,587	8,787	12,987	17,187	21,387
16,4780740	4,116	7,716	11,316	14,916	18,516
16,5335300	3,645	6,645	9,645	12,645	15,645
16,5889860	3,174	5,574	7,974	10,374	12,774
16,644442	2,703	4,503	6,303	8,103	9,903
16,699898	2,232	3,432	4,632	5,832	7,032
16,755354	1,761	2,361	2,961	3,561	4,161
16,8108100	1,29	1,29	1,29	1,29	1,29

Πίνακας Β1

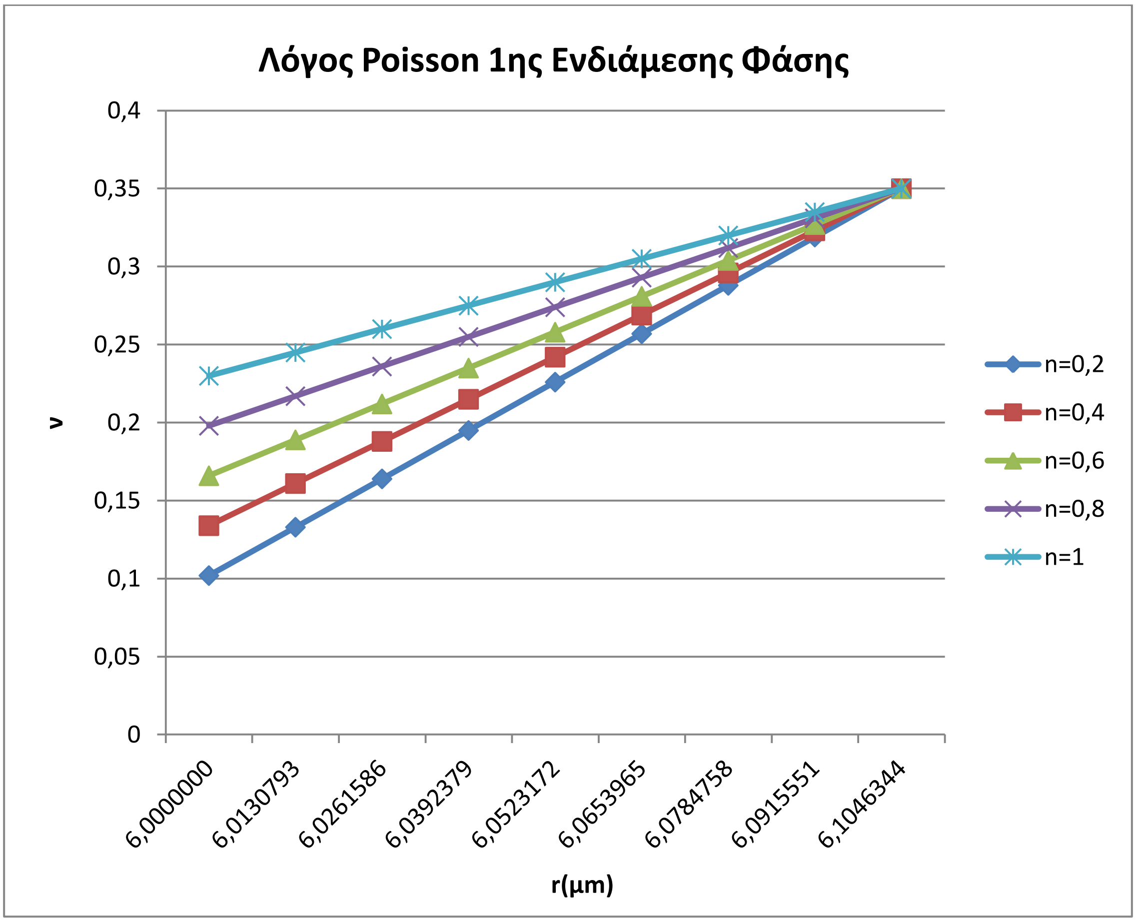


Διάγραμμα 6

Λόγος Poisson 1^{ης} Ενδιάμεσης Φάσης Γραμμικό Μοντέλο

Λόγος Poisson (v) 1ης Ενδιάμεσης Φάσης					
r(μm)	n=0,2	n=0,4	n=0,6	n=0,8	n=1
6,0000000	0,04	0,08	0,12	0,16	0,2
6,0130793	0,071	0,107	0,143	0,179	0,215
6,0261586	0,102	0,134	0,166	0,198	0,23
6,0392379	0,133	0,161	0,189	0,217	0,245
6,0523172	0,164	0,188	0,212	0,236	0,26
6,0653965	0,195	0,215	0,235	0,255	0,275
6,0784758	0,226	0,242	0,258	0,274	0,29
6,0915551	0,257	0,269	0,281	0,293	0,305
6,1046344	0,288	0,296	0,304	0,312	0,32
6,1177137	0,319	0,323	0,327	0,331	0,335
6,1307930	0,35	0,35	0,35	0,35	0,35

Πίνακας C1

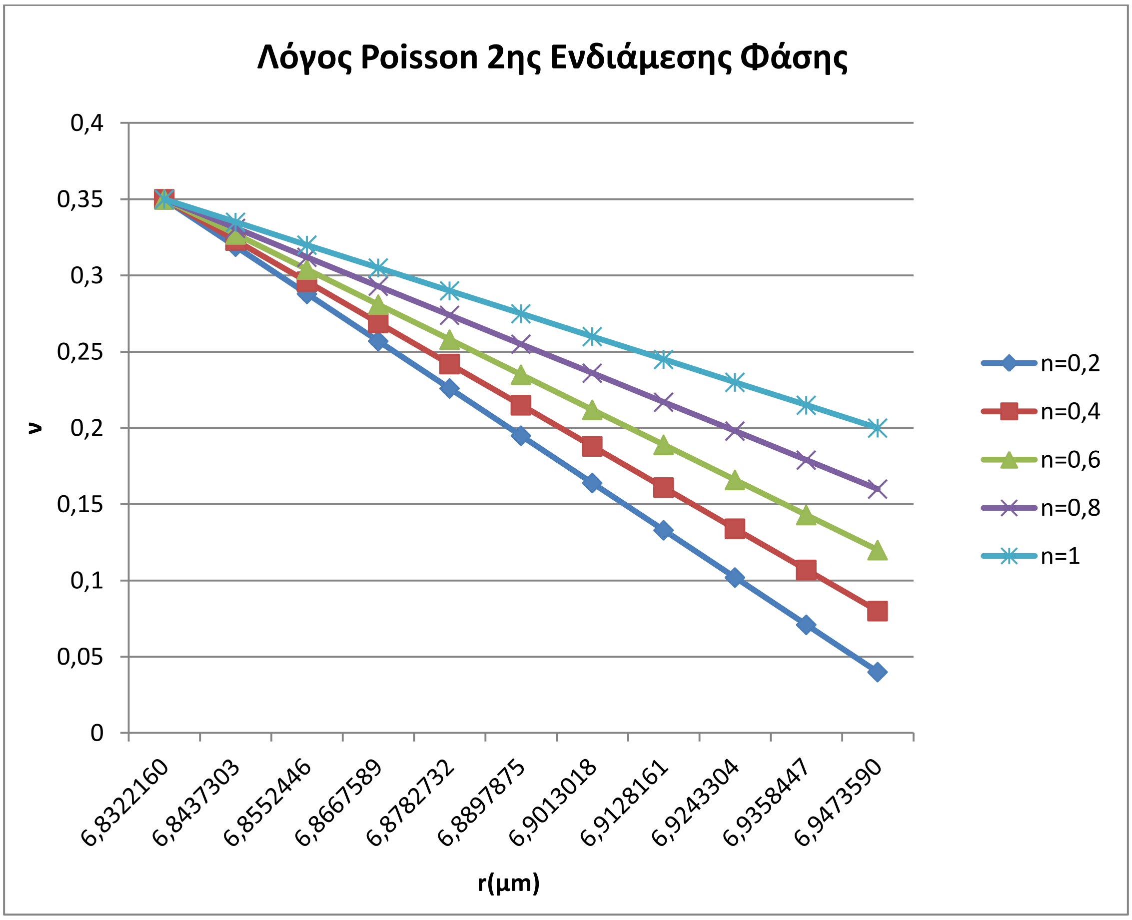


Διάγραμμα 7

Λόγος Poisson 2ης Ενδιάμεσης Φάσης Γραμμικό Μοντέλο

Λόγος Poisson (v) 2ης Ενδιάμεσης Φάσης					
r(μm)	**n=0,2**	**n=0,4**	**n=0,6**	**n=0,8**	**n=1**
6,8322160	0,35	0,35	0,35	0,35	0,35
6,8437303	0,319	0,323	0,327	0,331	0,335
6,8552446	0,288	0,296	0,304	0,312	0,32
6,8667589	0,257	0,269	0,281	0,293	0,305
6,8782732	0,226	0,242	0,258	0,274	0,29
6,8897875	0,195	0,215	0,235	0,255	0,275
6,9013018	0,164	0,188	0,212	0,236	0,26
6,9128161	0,133	0,161	0,189	0,217	0,245
6,9243304	0,102	0,134	0,166	0,198	0,23
6,9358447	0,071	0,107	0,143	0,179	0,215
6,9473590	0,04	0,08	0,12	0,16	0,2

Πίνακας D1

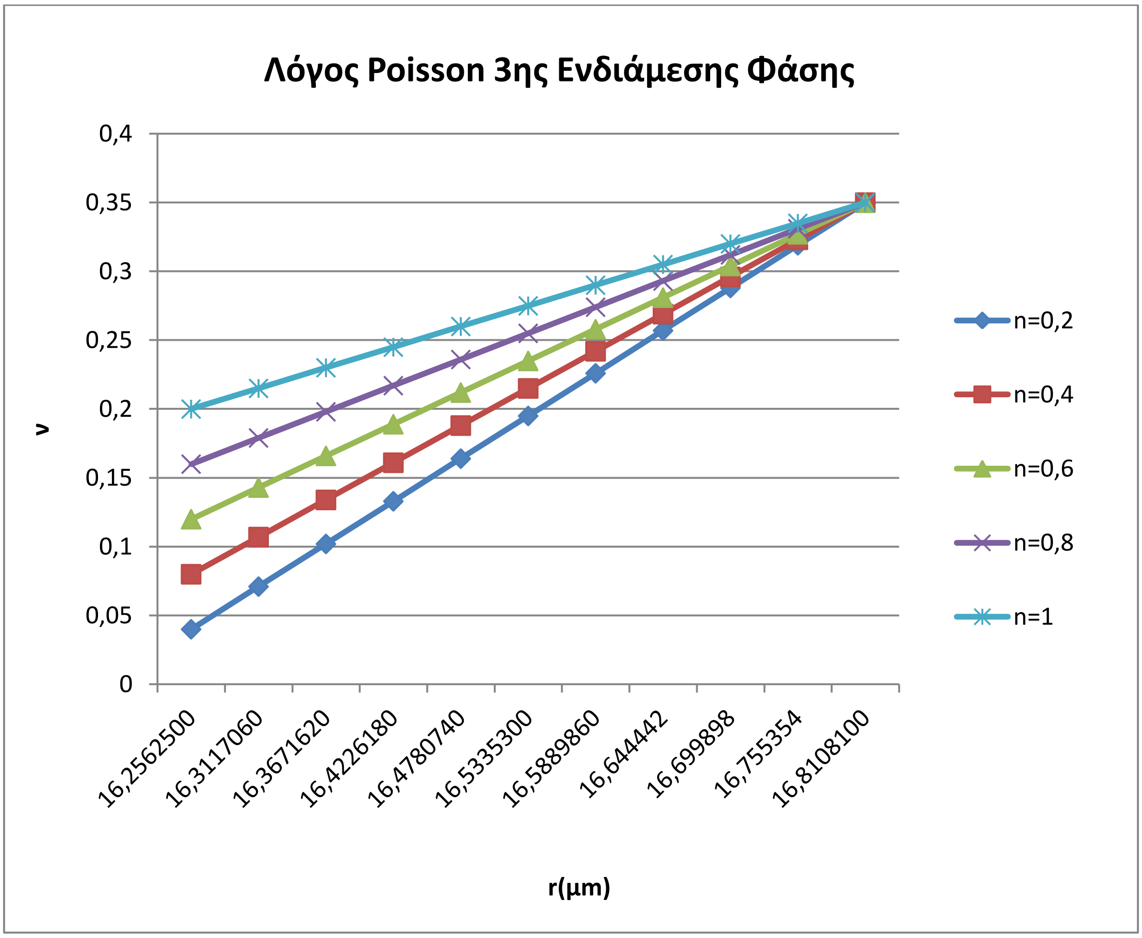


Διάγραμμα 8

Λόγος Poisson 3^{ης} Ενδιάμεσης Φάσης Γραμμικό Μοντέλο

Λόγος Poisson (ν) 3ης Ενδιάμεσης Φάσης					
r(μm)	**n=0,2**	**n=0,4**	**n=0,6**	**n=0,8**	**n=1**
16,2562500	0,04	0,08	0,12	0,16	0,2
16,3117060	0,071	0,107	0,143	0,179	0,215
16,3671620	0,102	0,134	0,166	0,198	0,23
16,4226180	0,133	0,161	0,189	0,217	0,245
16,4780740	0,164	0,188	0,212	0,236	0,26
16,5335300	0,195	0,215	0,235	0,255	0,275
16,5889860	0,226	0,242	0,258	0,274	0,29
16,644442	0,257	0,269	0,281	0,293	0,305
16,699898	0,288	0,296	0,304	0,312	0,32
16,755354	0,319	0,323	0,327	0,331	0,335
16,8108100	0,35	0,35	0,35	0,35	0,35

Πίνακας Ε1

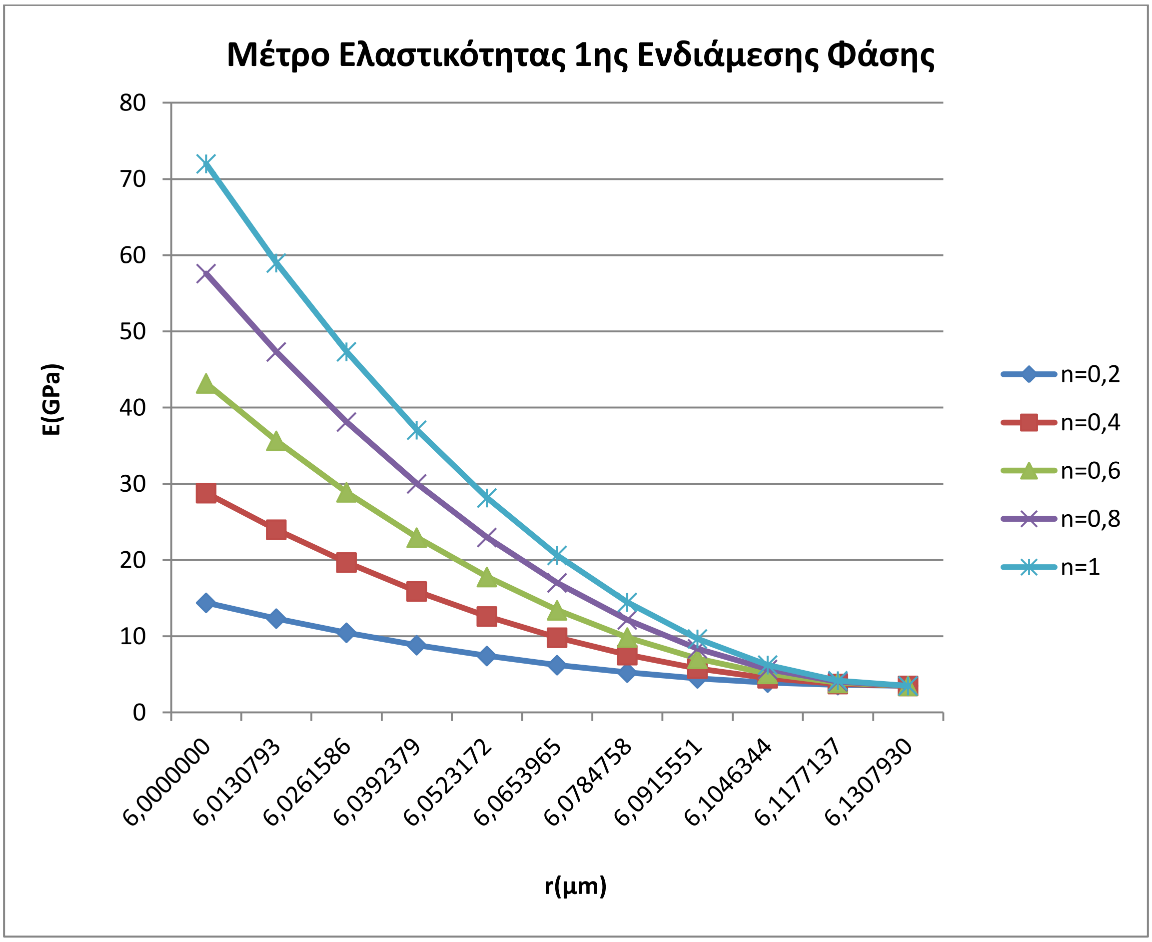


Διάγραμμα 9

Μέτρο Ελαστικότητας 1^{ης} Ενδιάμεσης Φάσης Παραβολικό Μοντέλο

Μέτρο Ελαστικότητας 1^{ης} Ενδιάμεσης Φάσης E(GPa)					
r(μm)	**n=0,2**	**n=0,4**	**n=0,6**	**n=0,8**	**n=1**
6,0000000	14,4	28,8	43,2	57,6	72
6,0130793	12,329	23,993	35,657	47,321	58,985
6,0261586	10,476	19,692	28,908	38,124	47,34
6,0392379	8,841	15,897	22,953	30,009	37,065
6,0523172	7,424	12,608	17,792	22,976	28,16
6,0653965	6,225	9,825	13,425	17,025	20,625
6,0784758	5,244	7,548	9,852	12,156	14,46
6,0915551	4,481	5,777	7,073	8,369	9,665
6,1046344	3,936	4,512	5,088	5,664	6,24
6,1177137	3,609	3,753	3,897	4,041	4,185
6,1307930	3,5	3,5	3,5	3,5	3,5

Πίνακας F1

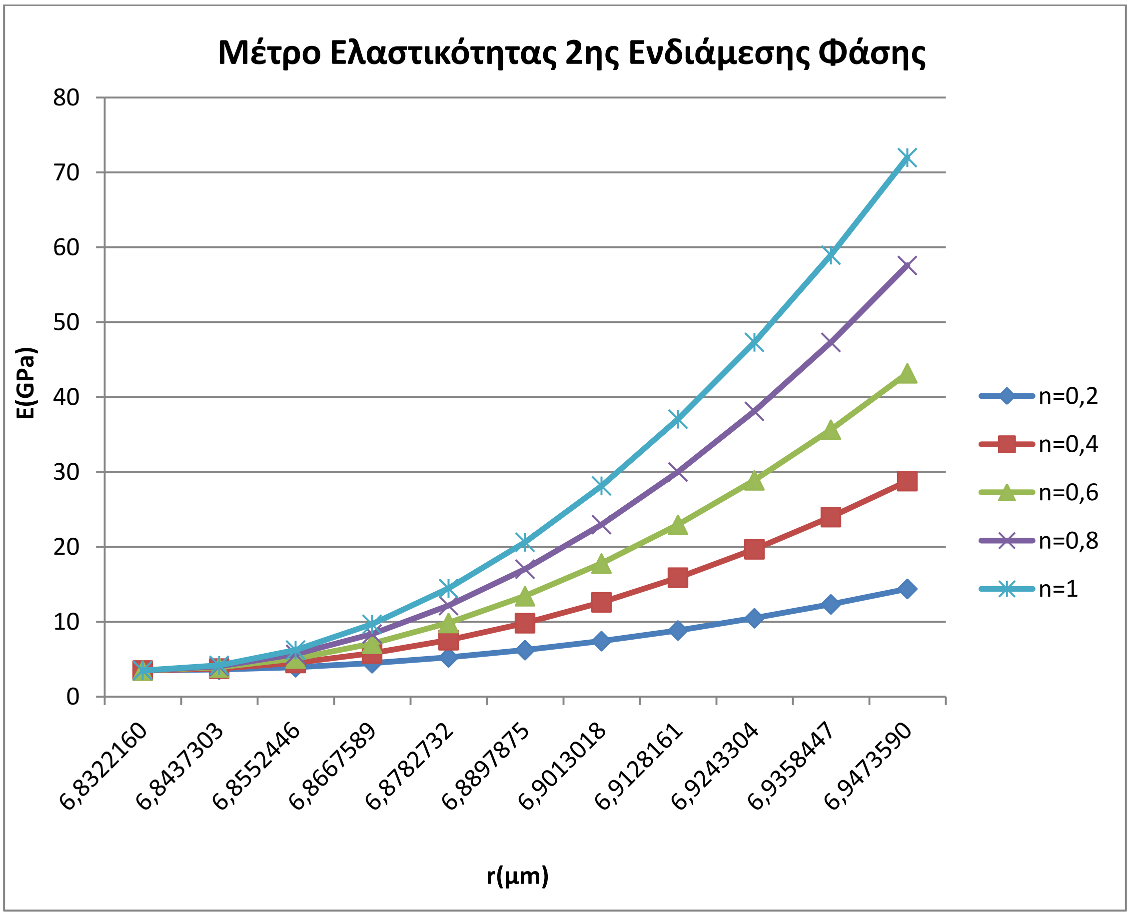


Διάγραμμα 10

Μέτρο Ελαστικότητας 2ης Ενδιάμεσης Φάσης Παραβολικό Μοντέλο

Μέτρο Ελαστικότητας 2ης Ενδιάμεσης Φάσης E(GPa)					
r(μm)	**n=0,2**	**n=0,4**	**n=0,6**	**n=0,8**	**n=1**
6,8322160	3,5	3,5	3,5	3,5	3,5
6,8437303	3,609	3,753	3,897	4,041	4,185
6,8552446	3,936	4,512	5,088	5,664	6,24
6,8667589	4,481	5,777	7,073	8,369	9,665
6,8782732	5,244	7,548	9,852	12,156	14,46
6,8897875	6,225	9,825	13,425	17,025	20,625
6,9013018	7,424	12,608	17,792	22,976	28,16
6,9128161	8,841	15,897	22,953	30,009	37,065
6,9243304	10,476	19,692	28,908	38,124	47,34
6,9358447	12,329	23,993	35,657	47,321	58,985
6,9473590	14,4	28,8	43,2	57,6	72

Πίνακας G1

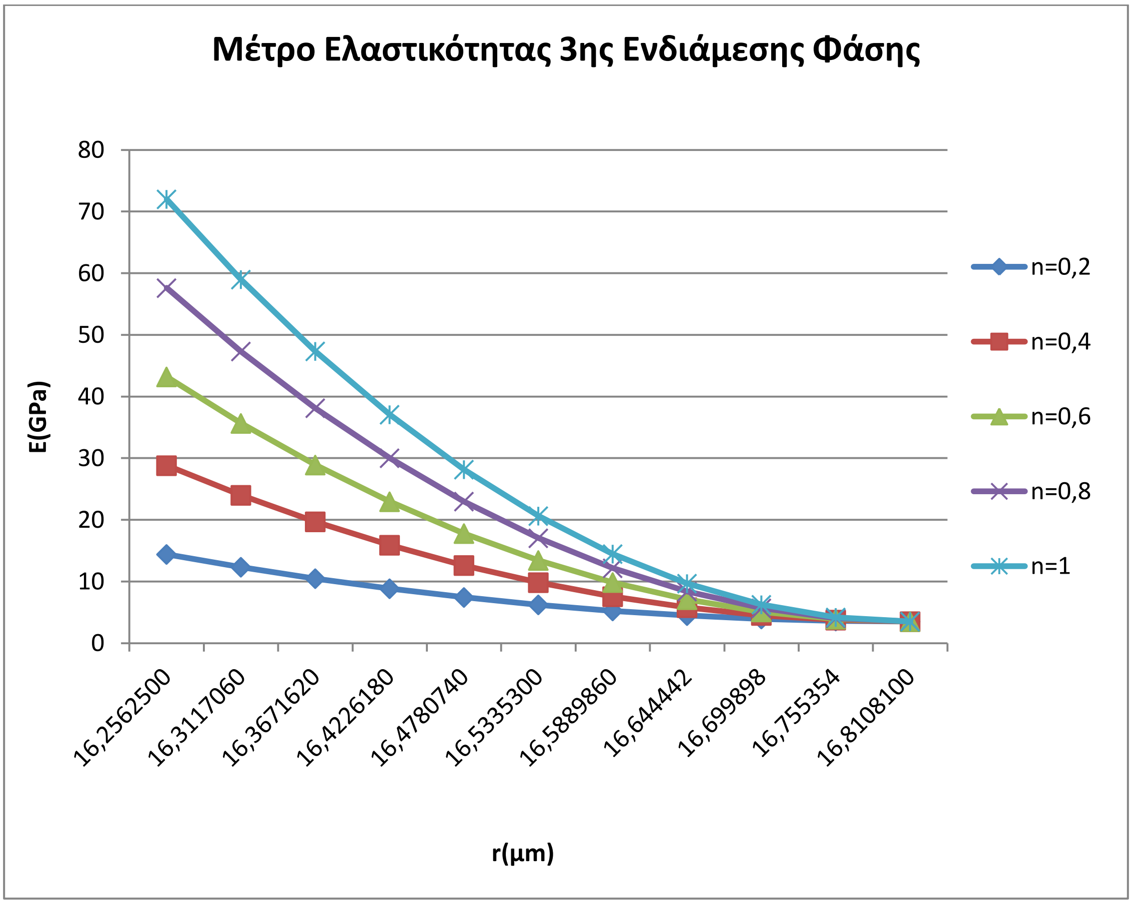


Διάγραμμα 11

Μέτρο Ελαστικότητας 3ης Ενδιάμεσης Φάσης Παραβολικό Μοντέλο

Μέτρο Ελαστικότητας 3ης Ενδιάμεσης Φάσης E(GPa)					
r(μm)	**n=0,2**	**n=0,4**	**n=0,6**	**n=0,8**	**n=1**
16,2562500	14,4	28,8	43,2	57,6	72
16,3117060	12,329	23,993	35,657	47,321	58,985
16,3671620	10,476	19,692	28,908	38,124	47,34
16,4226180	8,841	15,897	22,953	30,009	37,065
16,4780740	7,424	12,608	17,792	22,976	28,16
16,5335300	6,225	9,825	13,425	17,025	20,625
16,5889860	5,244	7,548	9,852	12,156	14,46
16,644442	4,481	5,777	7,073	8,369	9,665
16,699898	3,936	4,512	5,088	5,664	6,24
16,755354	3,609	3,753	3,897	4,041	4,185
16,8108100	3,5	3,5	3,5	3,5	3,5

Πίνακας Η1

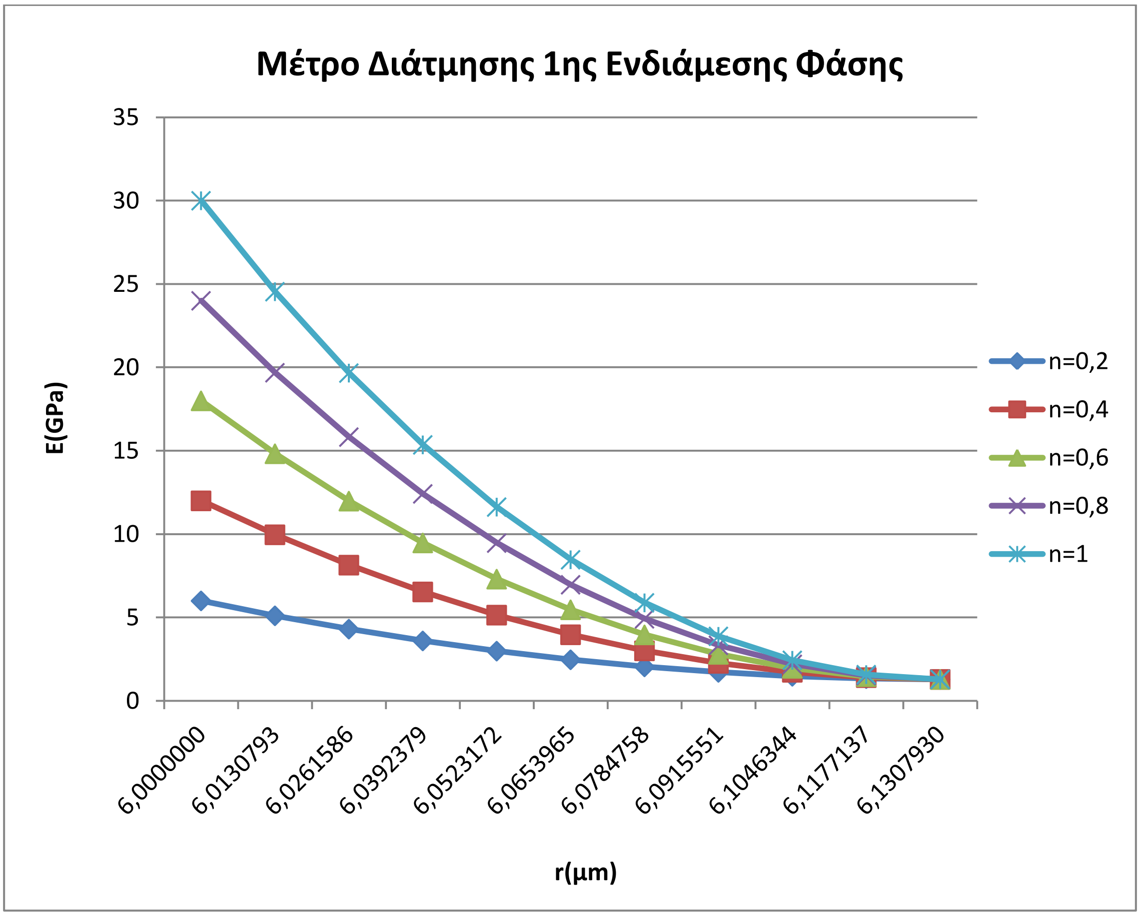


Διάγραμμα 12

Μέτρο Διατμήσεως 1ης Ενδιάμεσης Φάσης Παραβολικό Μοντέλο

Μέτρο Διάτμησης 1ης Ενδιάμεσης Φάσης G(GPa)					
r(μm)	n=0,2	n=0,4	n=0,6	n=0,8	n=1
6,0000000	6	12	18	24	30
6,0130793	5,1051	9,9651	14,8251	19,6851	24,5451
6,0261586	4,3044	8,1444	11,9844	15,8244	19,6644
6,0392379	3,5979	6,5379	9,4779	12,4179	15,3579
6,0523172	2,9856	5,1456	7,3056	9,4656	11,6256
6,0653965	2,4675	3,9675	5,4675	6,9675	8,4675
6,0784758	2,0436	3,0036	3,9636	4,9236	5,8836
6,0915551	1,7139	2,2539	2,7939	3,3339	3,8739
6,1046344	1,4784	1,7184	1,9584	2,1984	2,4384
6,1177137	1,3371	1,3971	1,4571	1,5171	1,5771
6,1307930	1,29	1,29	1,29	1,29	1,29

Πίνακας Ι1

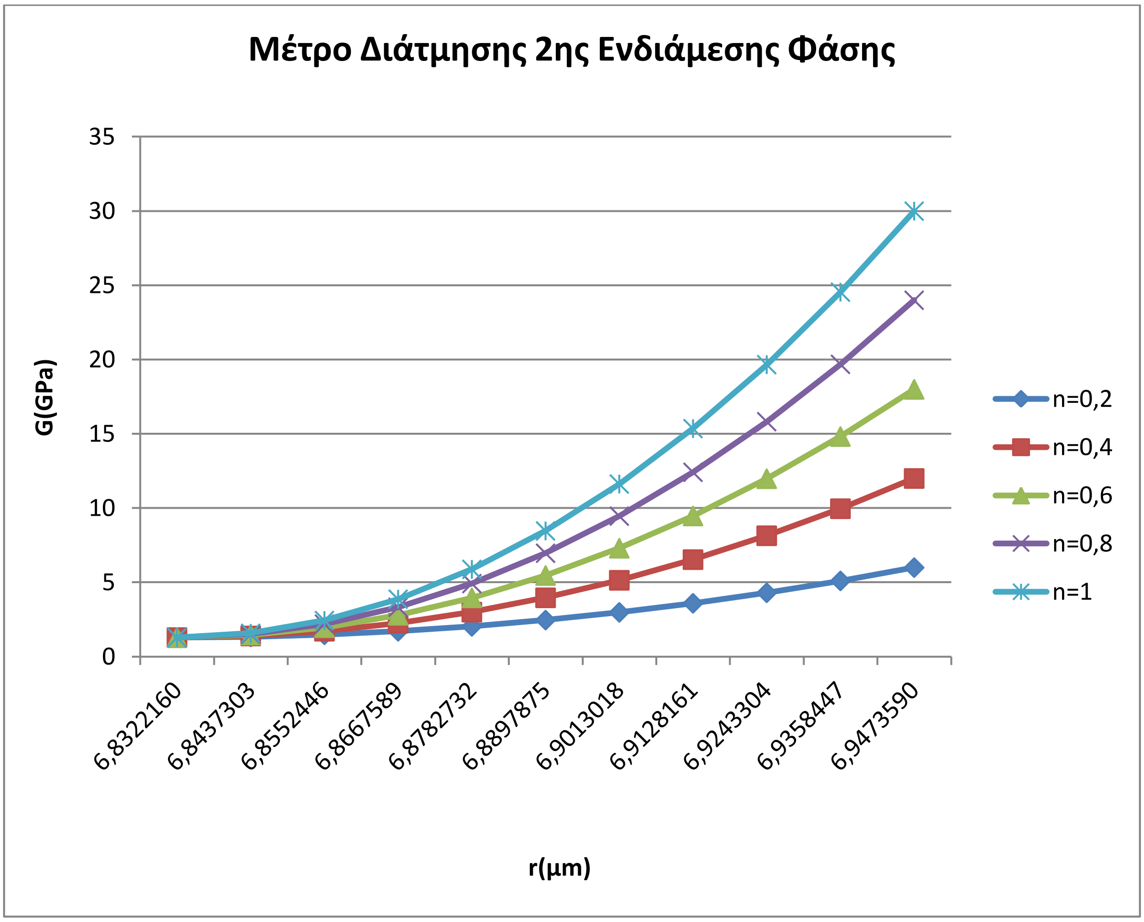


Διάγραμμα 13

Μέτρο Διατμήσεως 2^{ης} Ενδιάμεσης Φάσης Παραβολικό Μοντέλο

Μέτρο Διάτμησης 2^{ης} Ενδιάμεσης Φάσης G (GPa)					
r(μm)	**n=0,2**	**n=0,4**	**n=0,6**	**n=0,8**	**n=1**
6,8322160	1,29	1,29	1,29	1,29	1,29
6,8437303	1,3371	1,3971	1,4571	1,5171	1,5771
6,8552446	1,4784	1,7184	1,9584	2,1984	2,4384
6,8667589	1,7139	2,2539	2,7939	3,3339	3,8739
6,8782732	2,0436	3,0036	3,9636	4,9236	5,8836
6,8897875	2,4675	3,9675	5,4675	6,9675	8,4675
6,9013018	2,9856	5,1456	7,3056	9,4656	11,6256
6,9128161	3,5979	6,5379	9,4779	12,4179	15,3579
6,9243304	4,3044	8,1444	11,9844	15,8244	19,6644
6,9358447	5,1051	9,9651	14,8251	19,6851	24,5451
6,9473590	6	12	18	24	30

Πίνακας J1

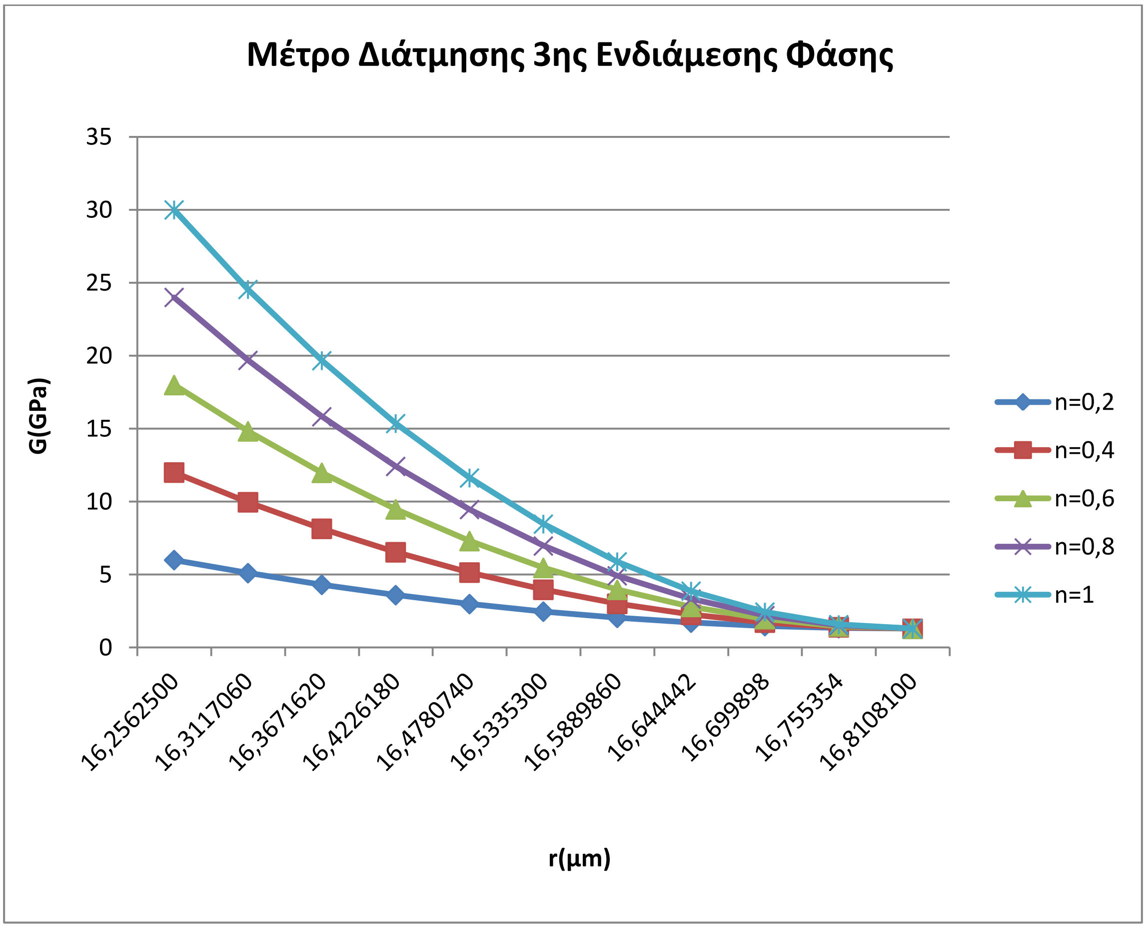


Διάγραμμα 14

Μέτρο Διατμήσεως 3^{ης} Ενδιάμεσης Φάσης Παραβολικό Μοντέλο

Μέτρο Διάτμησης 3^{ης} Ενδιάμεσης Φάσης G(GPa)					
r(μm)	**n=0,2**	**n=0,4**	**n=0,6**	**n=0,8**	**n=1**
16,2562500	6	12	18	24	30
16,3117060	5,1051	9,9651	14,8251	19,6851	24,5451
16,3671620	4,3044	8,1444	11,9844	15,8244	19,6644
16,4226180	3,5979	6,5379	9,4779	12,4179	15,3579
16,4780740	2,9856	5,1456	7,3056	9,4656	11,6256
16,5335300	2,4675	3,9675	5,4675	6,9675	8,4675
16,5889860	2,0436	3,0036	3,9636	4,9236	5,8836
16,644442	1,7139	2,2539	2,7939	3,3339	3,8739
16,699898	1,4784	1,7184	1,9584	2,1984	2,4384
16,755354	1,3371	1,3971	1,4571	1,5171	1,5771
16,8108100	1,29	1,29	1,29	1,29	1,29

Πίνακας Κ1

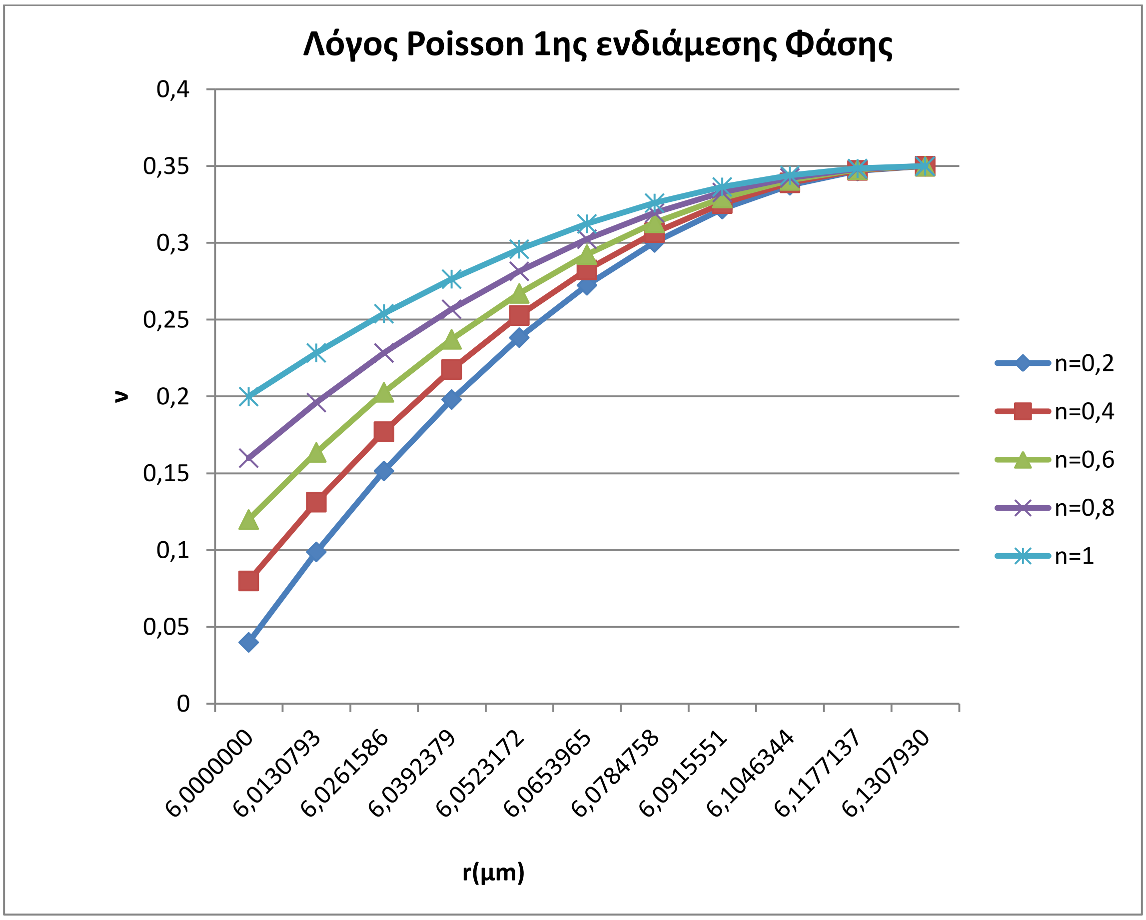


Διάγραμμα 15

Λόγος Poisson $1^{ης}$ Ενδιάμεσης Φάσης Παραβολικό Μοντέλο

Λόγος Poisson (ν) 1ης Ενδιάμεσης Φάσης					
r(μm)	n=0,2	n=0,4	n=0,6	n=0,8	n=1
6,0000000	0,04	0,08	0,12	0,16	0,2
6,0130793	0,0989	0,1313	0,1637	0,1961	0,2285
6,0261586	0,1516	0,1772	0,2028	0,2284	0,254
6,0392379	0,1981	0,2177	0,2373	0,2569	0,2765
6,0523172	0,2384	0,2528	0,2672	0,2816	0,296
6,0653965	0,2725	0,2825	0,2925	0,3025	0,3125
6,0784758	0,3004	0,3068	0,3132	0,3196	0,326
6,0915551	0,3221	0,3257	0,3293	0,3329	0,3365
6,1046344	0,3376	0,3392	0,3408	0,3424	0,344
6,1177137	0,3469	0,3473	0,3477	0,3481	0,3485
6,1307930	0,35	0,35	0,35	0,35	0,35

Πίνακας L1

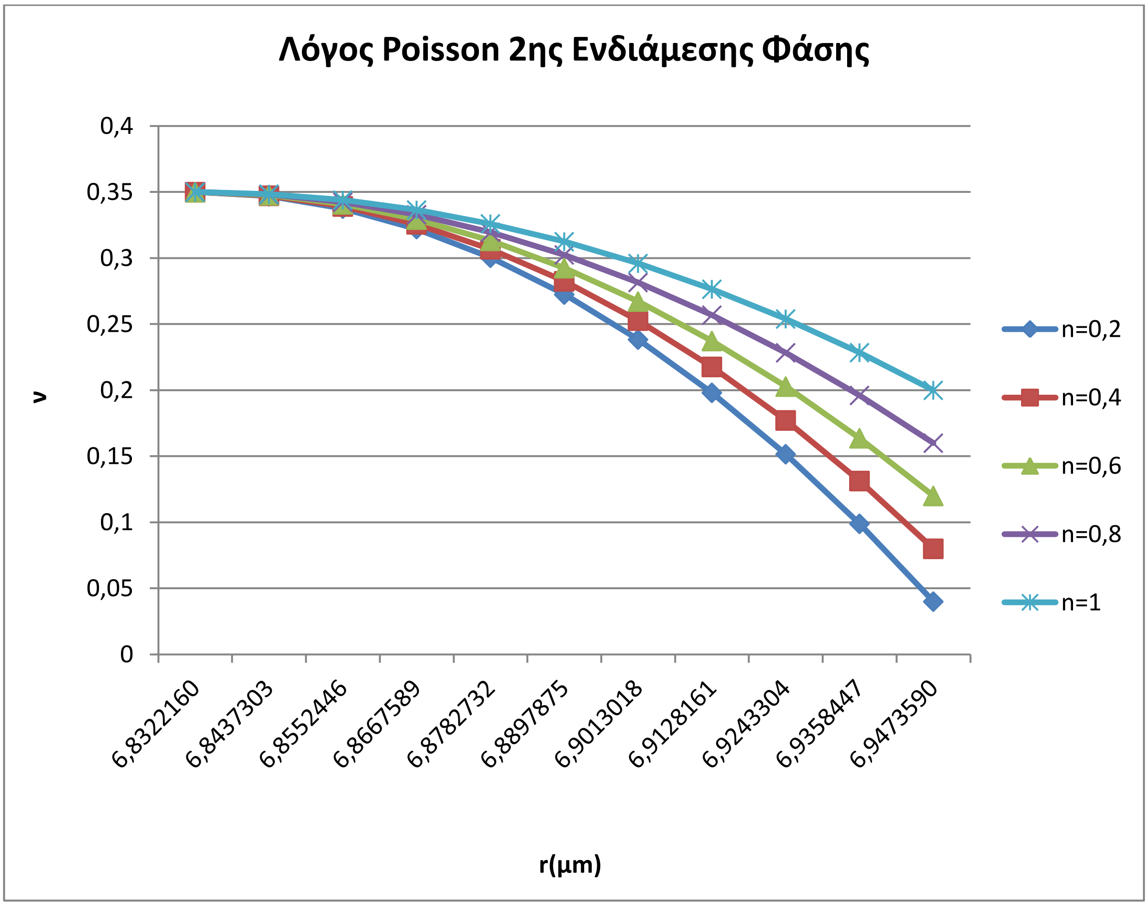


Διάγραμμα 16

Λόγος Poisson 2ης Ενδιάμεσης Φάσης Παραβολικό Μοντέλο

Λόγος Poisson (v) 2ης Ενδιάμεσης Φάσης					
r(μm)	n=0,2	n=0,4	n=0,6	n=0,8	n=1
6,8322160	0,35	0,35	0,35	0,35	0,35
6,8437303	0,3469	0,3473	0,3477	0,3481	0,3485
6,8552446	0,3376	0,3392	0,3408	0,3424	0,344
6,8667589	0,3221	0,3257	0,3293	0,3329	0,3365
6,8782732	0,3004	0,3068	0,3132	0,3196	0,326
6,8897875	0,2725	0,2825	0,2925	0,3025	0,3125
6,9013018	0,2384	0,2528	0,2672	0,2816	0,296
6,9128161	0,1981	0,2177	0,2373	0,2569	0,2765
6,9243304	0,1516	0,1772	0,2028	0,2284	0,254
6,9358447	0,0989	0,1313	0,1637	0,1961	0,2285
6,9473590	0,04	0,08	0,12	0,16	0,2

Πίνακας Μ1

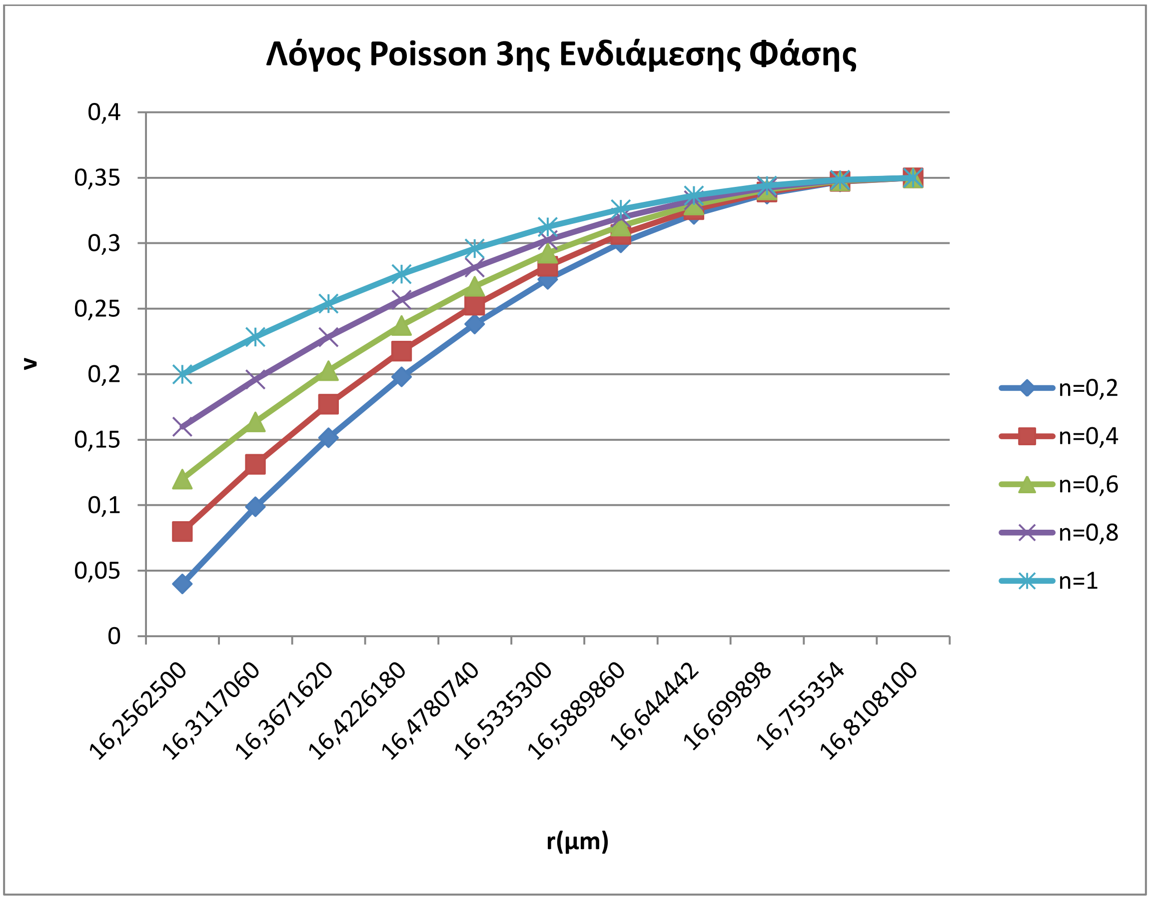


Διάγραμμα 17

Λόγος Poisson 3ης Ενδιάμεσης Φάσης Παραβολικό Μοντέλο

Λόγος Poisson (ν) 3ης Ενδιάμεσης Φάσης					
r(μm)	n=0,2	n=0,4	n=0,6	n=0,8	n=1
16,2562500	0,04	0,08	0,12	0,16	0,2
16,3117060	0,0989	0,1313	0,1637	0,1961	0,2285
16,3671620	0,1516	0,1772	0,2028	0,2284	0,254
16,4226180	0,1981	0,2177	0,2373	0,2569	0,2765
16,4780740	0,2384	0,2528	0,2672	0,2816	0,296
16,5335300	0,2725	0,2825	0,2925	0,3025	0,3125
16,5889860	0,3004	0,3068	0,3132	0,3196	0,326
16,644442	0,3221	0,3257	0,3293	0,3329	0,3365
16,699898	0,3376	0,3392	0,3408	0,3424	0,344
16,755354	0,3469	0,3473	0,3477	0,3481	0,3485
16,8108100	0,35	0,35	0,35	0,35	0,35

Πίνακας Ν1

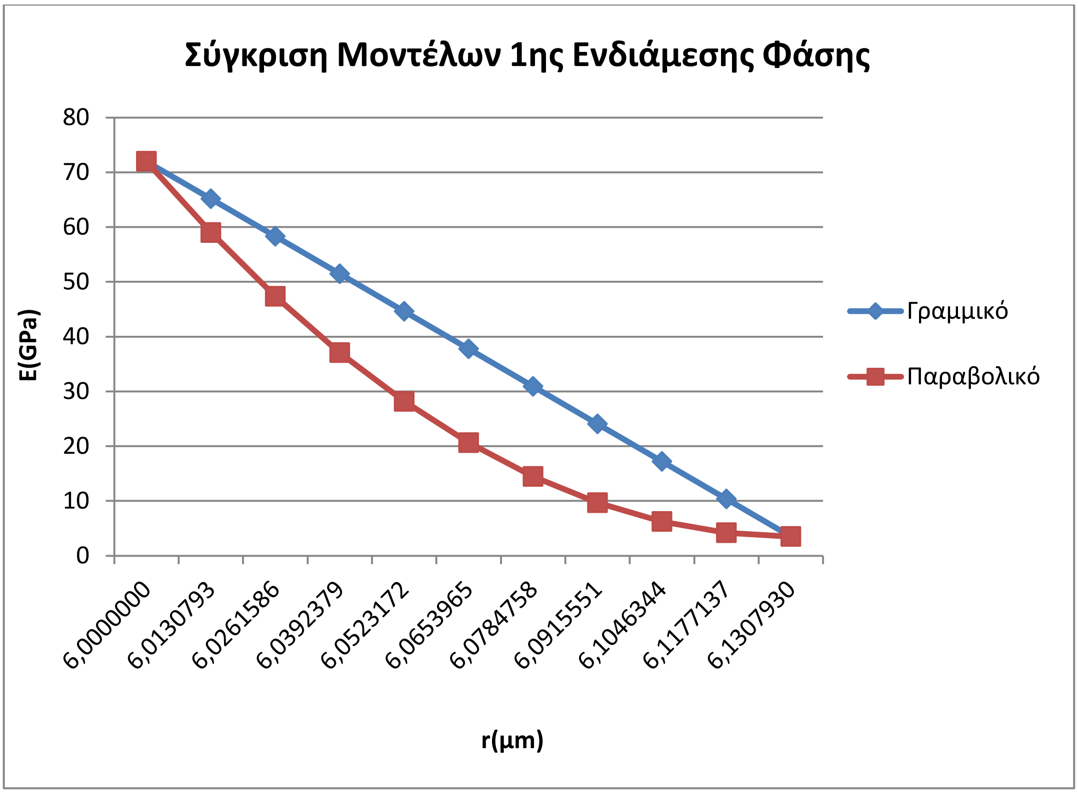


Διάγραμμα 18

Σύγκριση Μοντέλων για το Μέτρο Ελαστικότητας 1ης Ενδιάμεσης Φάσης-οριακή συνθήκη n=1

Μέτρο Ελαστικότητας 1ης Ενδιάμεσης Φάσης για n=1 (Gpa)		
r(μm)	**Γραμμικό**	**Παραβολικό**
6,0000000	72	72
6,0130793	65,15	58,985
6,0261586	58,3	47,34
6,0392379	51,45	37,065
6,0523172	44,6	28,16
6,0653965	37,75	20,625
6,0784758	30,9	14,46
6,0915551	24,05	9,665
6,1046344	17,2	6,24
6,1177137	10,35	4,185
6,1307930	3,5	3,5

Πίνακας Ο1

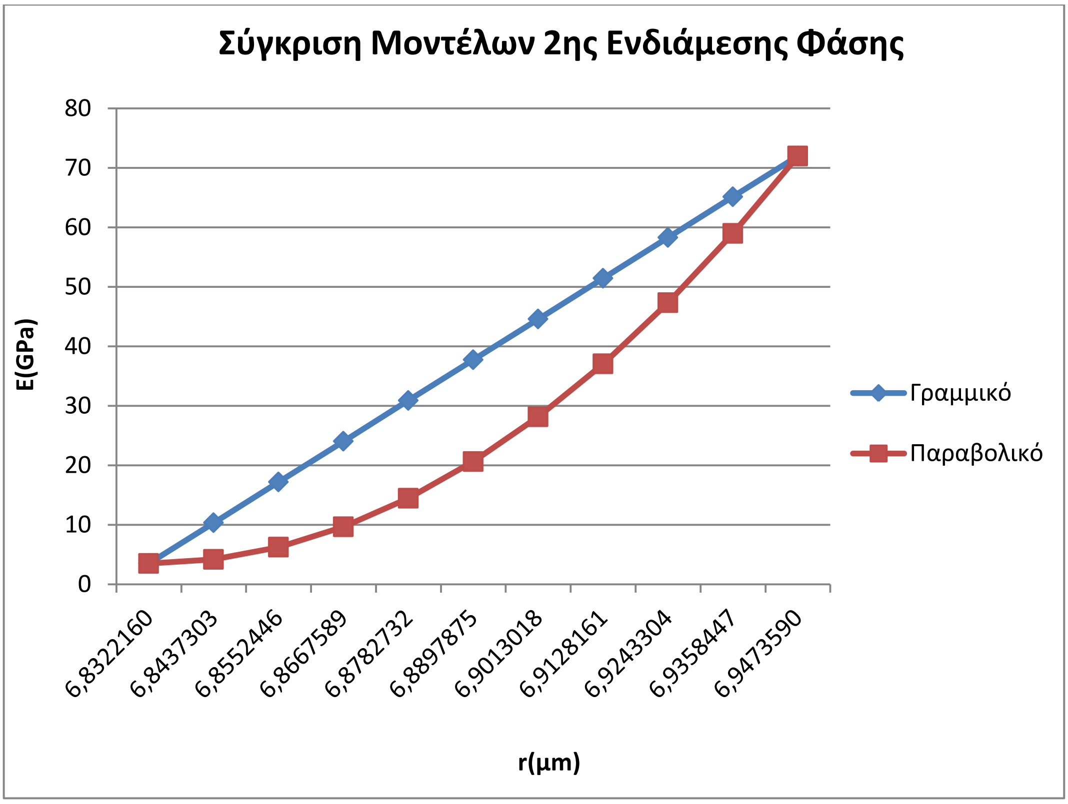


Διάγραμμα 19

Σύγκριση Μοντέλων για το Μέτρο Ελαστικότητας 2ης Ενδιάμεσης Φάσης-οριακή συνθήκη n=1

Μέτρο Ελαστικότητας 2ης Ενδιάμεσης Φάσης για n=1 (Gpa)		
r(μm)	Γραμμικό	Παραβολικό
6,8322160	3,5	3,5
6,8437303	10,35	4,185
6,8552446	17,2	6,24
6,8667589	24,05	9,665
6,8782732	30,9	14,46
6,8897875	37,75	20,625
6,9013018	44,6	28,16
6,9128161	51,45	37,065
6,9243304	58,3	47,34
6,9358447	65,15	58,985
6,9473590	72	72

Πίνακας P1

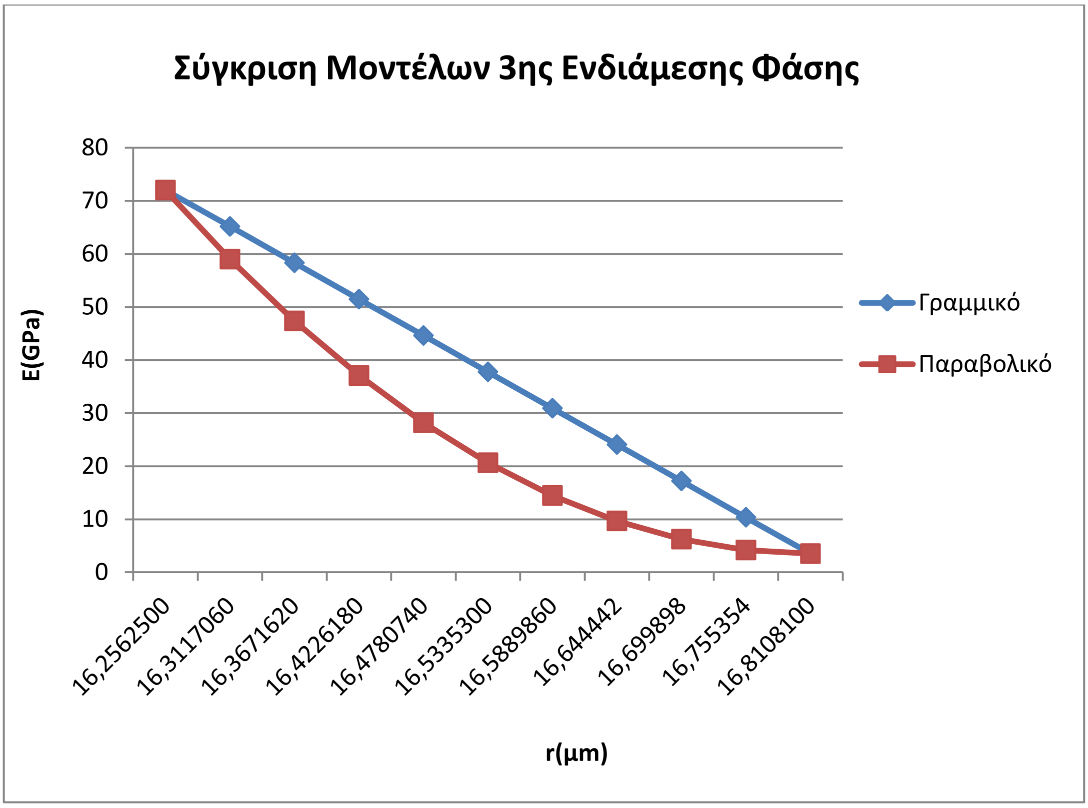


Διάγραμμα 20

Σύγκριση Μοντέλων για το Μέτρο Ελαστικότητας 3ης Ενδιάμεσης Φάσης-οριακή συνθήκη n=1

Μέτρο Ελαστικότητας 3ης Ενδιάμεσης Φάσης για n=1 (Gpa)		
r(μm)	**Γραμμικό**	**Παραβολικό**
16,2562500	72	72
16,3117060	65,15	58,985
16,3671620	58,3	47,34
16,4226180	51,45	37,065
16,4780740	44,6	28,16
16,5335300	37,75	20,625
16,5889860	30,9	14,46
16,644442	24,05	9,665
16,699898	17,2	6,24
16,755354	10,35	4,185
16,8108100	3,5	3,5

Πίνακας Q1

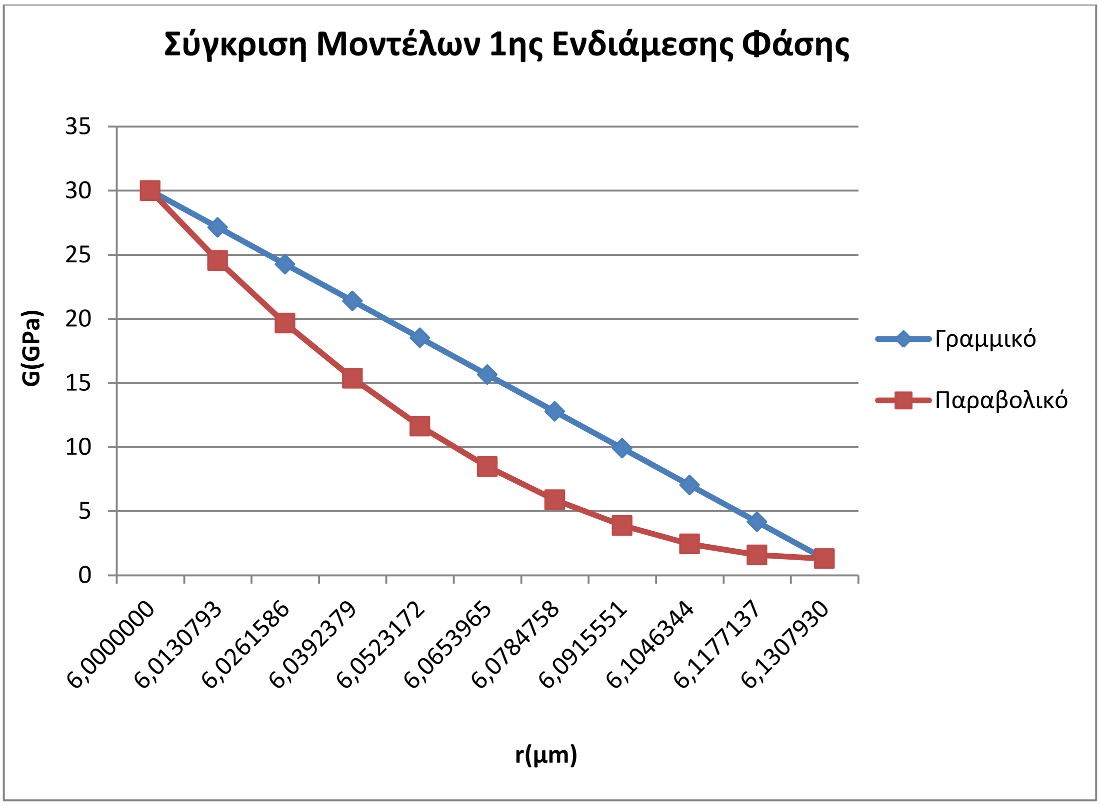


Διάγραμμα 21

Σύγκριση Μοντέλων για το Μέτρο Διατμήσεως 1^{ης} Ενδιάμεσης Φάσης-οριακή συνθήκη n=1

Μέτρο Διάτμησης 1ης Ενδιάμεσης Φάσης για n=1 (Gpa)		
r(μm)	**Γραμμικό**	**Παραβολικό**
6,0000000	30	30
6,0130793	27,129	24,5451
6,0261586	24,258	19,6644
6,0392379	21,387	15,3579
6,0523172	18,516	11,6256
6,0653965	15,645	8,4675
6,0784758	12,774	5,8836
6,0915551	9,903	3,8739
6,1046344	7,032	2,4384
6,1177137	4,161	1,5771
6,1307930	1,29	1,29

Πίνακας R1

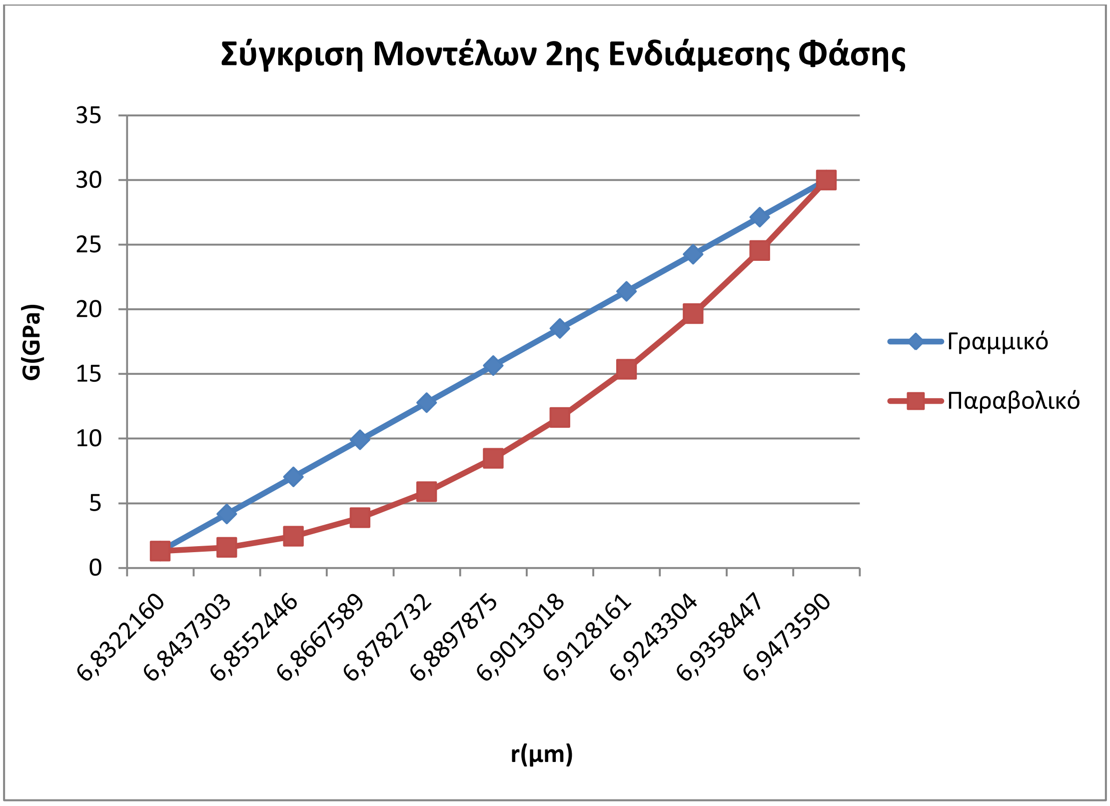


Διάγραμμα 22

Σύγκριση Μοντέλων για το Μέτρο Διατμήσεως 2^{ης} Ενδιάμεσης Φάσης-οριακή συνθήκη n=1

Μέτρο Διάτμησης 2ης Ενδιάμεσης Φάσης για n=1 (Gpa)		
r(μm)	Γραμμικό	Παραβολικό
6,8322160	1,29	1,29
6,8437303	4,161	1,5771
6,8552446	7,032	2,4384
6,8667589	9,903	3,8739
6,8782732	12,774	5,8836
6,8897875	15,645	8,4675
6,9013018	18,516	11,6256
6,9128161	21,387	15,3579
6,9243304	24,258	19,6644
6,9358447	27,129	24,5451
6,9473590	30	30

Πίνακας S1

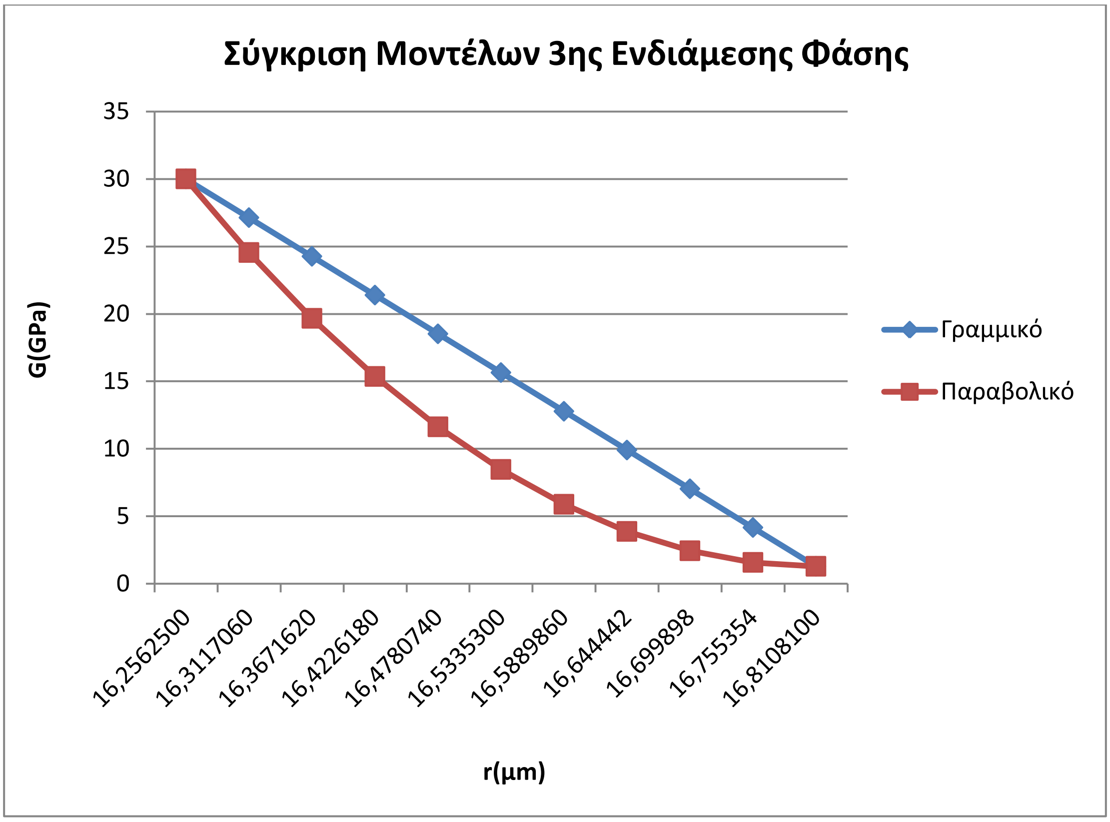


Διάγραμμα 23

Σύγκριση Μοντέλων για το Μέτρο Διατμήσεως 3^{ης} Ενδιάμεσης Φάσης-οριακή συνθήκη n=1

Μέτρο Διάτμησης 3ης Ενδιάμεσης Φάσης για n=1 (Gpa)		
r(μm)	Γραμμικό	Παραβολικό
16,2562500	30	30
16,3117060	27,129	24,5451
16,3671620	24,258	19,6644
16,4226180	21,387	15,3579
16,4780740	18,516	11,6256
16,5335300	15,645	8,4675
16,5889860	12,774	5,8836
16,644442	9,903	3,8739
16,699898	7,032	2,4384
16,755354	4,161	1,5771
16,8108100	1,29	1,29

Πίνακας Τ1

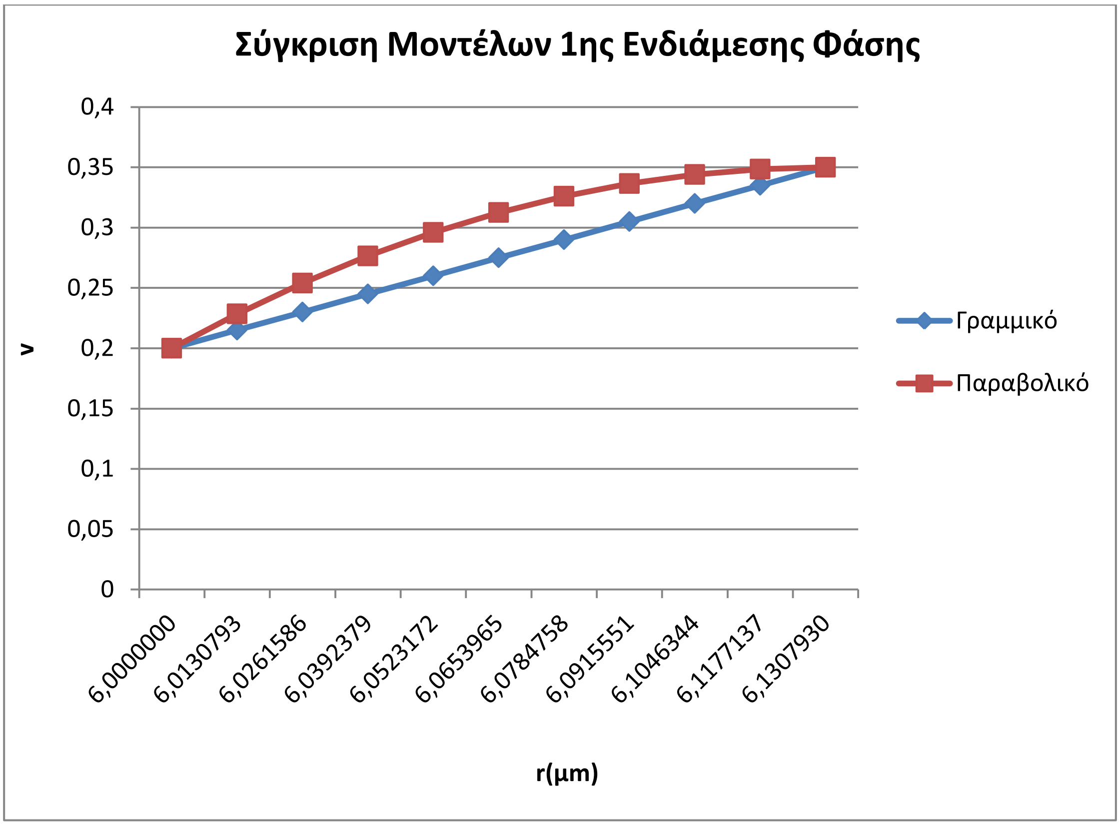


Διάγραμμα 24

Σύγκριση Μοντέλων για το Λόγο Poisson 1ης Ενδιάμεσης Φάσης-οριακή συνθήκη n=1

Λόγος Poisson (v) 1ης Ενδιάμεσης Φάσης για n=1		
r(μm)	**Γραμμικό**	**Παραβολικό**
6,0000000	0,2	0,2
6,0130793	0,215	0,2285
6,0261586	0,23	0,254
6,0392379	0,245	0,2765
6,0523172	0,26	0,296
6,0653965	0,275	0,3125
6,0784758	0,29	0,326
6,0915551	0,305	0,3365
6,1046344	0,32	0,344
6,1177137	0,335	0,3485
6,1307930	0,35	0,35

Πίνακας U1

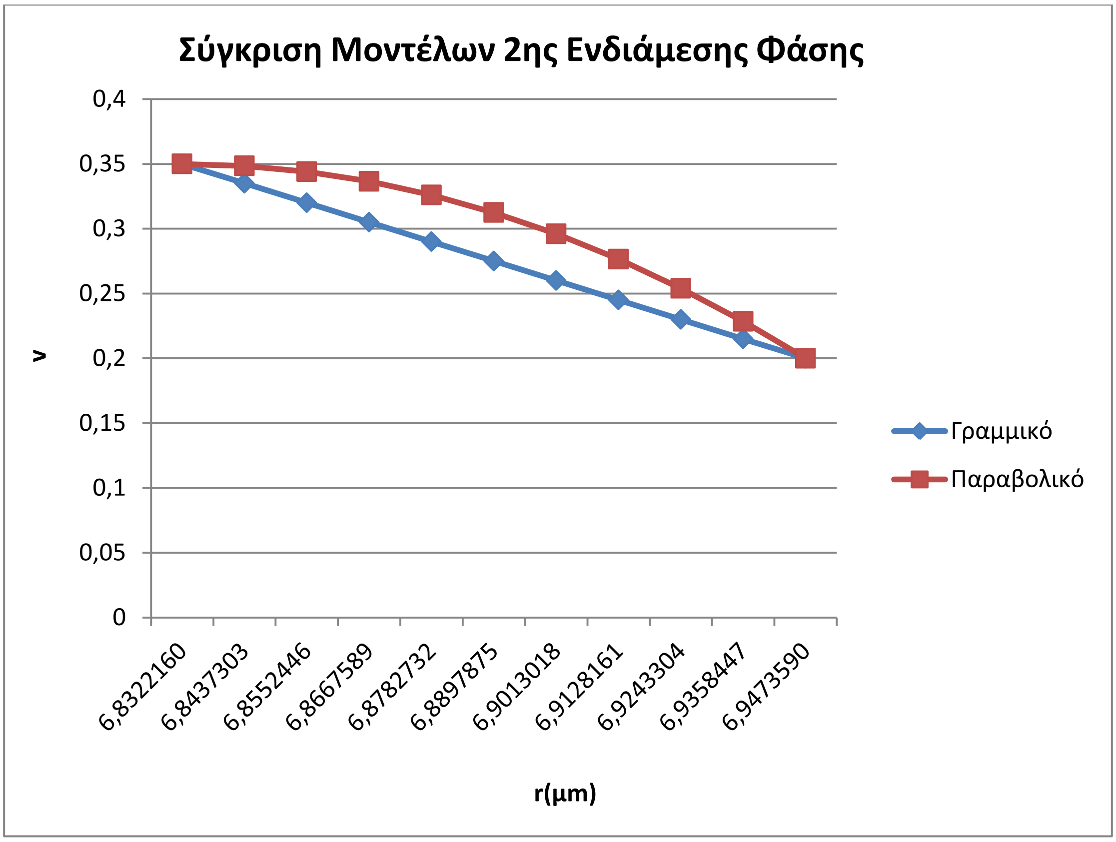


Διάγραμμα 25

Σύγκριση Μοντέλων για το Λόγο Poisson 2ης Ενδιάμεσης Φάσης-οριακή συνθήκη n=1

Λόγος Poisson (v) 2ης Ενδιάμεσης Φάσης για n=1		
r(μm)	**Γραμμικό**	**Παραβολικό**
6,8322160	0,35	0,35
6,8437303	0,335	0,3485
6,8552446	0,32	0,344
6,8667589	0,305	0,3365
6,8782732	0,29	0,326
6,8897875	0,275	0,3125
6,9013018	0,26	0,296
6,9128161	0,245	0,2765
6,9243304	0,23	0,254
6,9358447	0,215	0,2285
6,9473590	0,2	0,2

Πίνακας V1

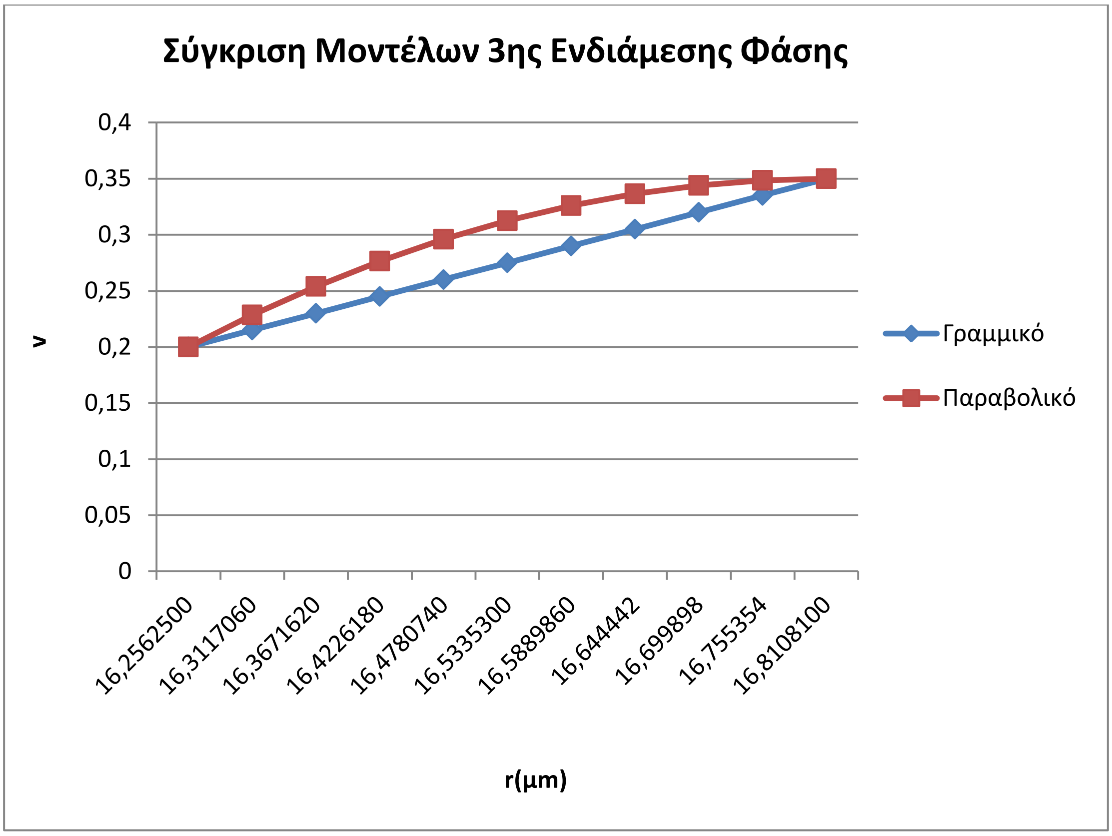


Διάγραμμα 26

Σύγκριση Μοντέλων για το Λόγο Poisson 3ης Ενδιάμεσης Φάσης-οριακή συνθήκη n=1

Λόγος Poisson (v) 3ης Ενδιάμεσης Φάσης για n=1		
r(μm)	Γραμμικό	Παραβολικό
16,2562500	0,2	0,2
16,3117060	0,215	0,2285
16,3671620	0,23	0,254
16,4226180	0,245	0,2765
16,4780740	0,26	0,296
16,5335300	0,275	0,3125
16,5889860	0,29	0,326
16,644442	0,305	0,3365
16,699898	0,32	0,344
16,755354	0,335	0,3485
16,8108100	0,35	0,35

Πίνακας W1



Διάγραμμα 27

<u>ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ</u>

Τα γενικά συμπεράσματα είναι τα εξής:

Σε ότι αφορά την $1^{η}$ ενδιάμεση φάση και για τα δύο μοντέλα παρατηρούμε μία μείωση του μέτρου ελαστικότητας και του μέτρου διάτμησης με την αύξηση της ακτίνας r κάτι το οποίο είναι λογικό δεδομένου ότι απομακρυνόμαστε από το έγκλεισμα και πλησιάζουμε τη μήτρα η οποία έχει μικρότερο μέτρο ελαστικότητας και μικρότερο μέτρο διάτμησης. Επίσης παρατηρούμε ότι όσο μειώνονται οι τιμές του $η$ οι καμπύλες δίνουν μικρότερες τιμές για τις αρχικές τιμές του r ενώ όσο αυξάνεται το r τείνουν να συγκλίνουν σε μια μόνο τιμή. Αυτό συμβαίνει γιατί όσο βρισκόμαστε κοντά στο έγκλεισμα το $η$ είναι ο συντελεστής που δείχνει πόσο επηρεάζεται η ενδιάμεση φάση από αυτό και άρα όσο μειώνεται το $η$ τόσο μειώνεται και η επίδραση του εγκλείσματος στην ενδιάμεση φάση. Από την άλλη πλευρά , έχουμε αρχικά θεωρήσει ότι η μήτρα επηρεάζει την ενδιάμεση φάση στο 100% και άρα στο όριο της μήτρας με την ενδιάμεση φάση θα έχουμε μια συγκλίνουσα τιμή, την τιμή που προσδιορίζει την τιμή της εκάστοτε μηχανικής σταθεράς της μήτρας.

Σε ότι αφορά την $2^{η}$ ενδιάμεση φάση και τα δύο μοντέλα παρατηρούμε μία αύξηση του μέτρου ελαστικότητας και του μέτρου διάτμησης με την αύξηση της ακτίνας r κάτι το οποίο είναι λογικό δεδομένου ότι απομακρυνόμαστε από τη μήτρα και πλησιάζουμε το έγκλεισμα το οποίο έχει μεγαλύτερο μέτρο ελαστικότητας και μέτρο διάτμησης.

Επίσης παρατηρούμε ότι όσο μειώνονται οι τιμές του $η$ οι καμπύλες δίνουν μικρότερες τιμές για τις τελικές τιμές του r τείνουν να συγκλίνουν σε μια μόνο τιμή. Αυτό συμβαίνει γιατί όσο βρισκόμαστε κοντά στο έγκλεισμα το $η$ είναι ο συντελεστής που δείχνει πόσο επηρεάζεται η ενδιάμεση φάση από αυτό και άρα όσο μειώνεται το $η$ τόσο μειώνεται και η επίδραση του εγκλείσματος στην ενδιάμεση φάση. Από την άλλη πλευρά , έχουμε αρχικά θεωρήσει ότι η μήτρα επηρεάζει την ενδιάμεση φάση στο 100% και άρα στο όριο της μήτρας με την ενδιάμεση φάση θα έχουμε μια συγκλίνουσα τιμή, την τιμή που προσδιορίζει την τιμή της εκάστοτε μηχανικής σταθεράς της μήτρας.

Σε ότι αφορά την $3^{η}$ ενδιάμεση φάση και τα δύο μοντέλα παρατηρούμε μία μείωση του μέτρου ελαστικότητας και του μέτρου διάτμησης με την αύξηση της ακτίνας r κάτι το οποίο είναι λογικό δεδομένου ότι απομακρυνόμαστε από το έγκλεισμα και πλησιάζουμε τη μήτρα η οποία έχει μικρότερο μέτρο ελαστικότητας και μέτρο διάτμησης.

Επίσης παρατηρούμε ότι όσο μειώνονται οι τιμές του $η$ οι καμπύλες τείνουν να συγκλίνουν σε μια μόνο τιμή. Αυτό συμβαίνει διότι όσο βρισκόμαστε κοντά στο έγκλεισμα το $η$ είναι ο συντελεστής που δείχνει πόσο επηρεάζεται η ενδιάμεση φάση από αυτό και άρα όσο μειώνεται το $η$ τόσο μειώνεται και η επίδραση του εγκλείσματος στην ενδιάμεση φάση. Από την άλλη πλευρά , έχουμε αρχικά θεωρήσει ότι η μήτρα επηρεάζει την ενδιάμεση φάση στο 100% και άρα στο όριο της μήτρας με την ενδιάμεση φάση θα έχουμε μια συγκλίνουσα τιμή, την τιμή που προσδιορίζει την τιμή της εκάστοτε μηχανικής σταθεράς της μήτρας.

Σε ότι αφορά την $1^{η}$ ενδιάμεση φάση και τα δύο μοντέλα παρατηρούμε μία αύξηση του λόγου Poisson με την αύξηση της ακτίνας r κάτι το οποίο είναι λογικό δεδομένου ότι απομακρυνόμαστε από το έγκλεισμα και πλησιάζουμε τη μήτρα η οποία έχει μεγαλύτερο λόγο Poisson.

Σε ότι αφορά την $2^{η}$ ενδιάμεση φάση και τα δύο μοντέλα παρατηρούμε μία μείωση του λόγου Poisson με την αύξηση της ακτίνας r κάτι το οποίο είναι λογικό δεδομένου ότι απομακρυνόμαστε από τη μήτρα και πλησιάζουμε το έγκλεισμα το οποίο έχει μικρότερο λόγο Poisson.

Σε ότι αφορά την $3^{η}$ ενδιάμεση φάση και τα δύο μοντέλα παρατηρούμε μία αύξηση του λόγου Poisson με την αύξηση της ακτίνας r κάτι το οποίο είναι λογικό δεδομένου ότι απομακρυνόμαστε από το έγκλεισμα και πλησιάζουμε τη μήτρα η οποία έχει μεγαλύτερο λόγο Poisson.

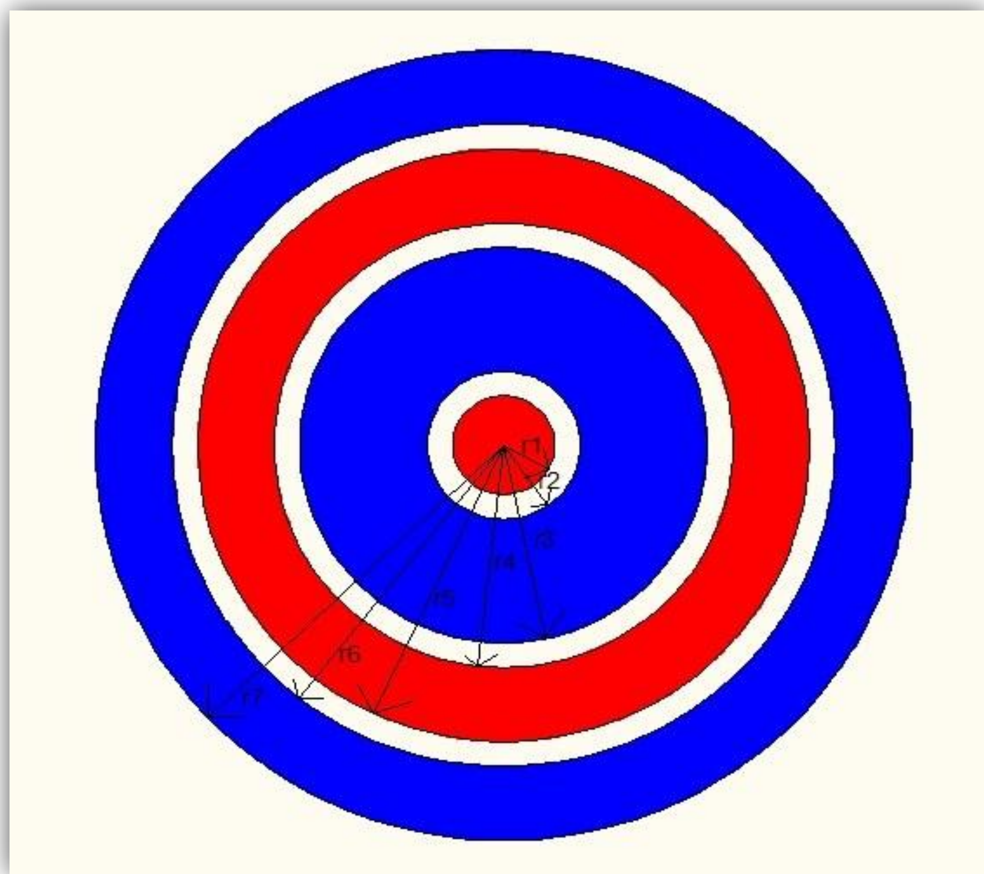
Τέλος από τη σύγκριση των μοντέλων παρατηρούμε ότι το γραμμικό και το παραβολικό μοντέλο σχεδόν ταυτίζονται. Αυτό συμβαίνει διότι το πάχος και των τριών ενδιάμεσων φάσεων είναι πολύ μικρό.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5:ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΕΠΤΑΦΑΣΙΚΟΥ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ

5.1 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟΥ ΕΠΤΑΦΑΣΙΚΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ

Η θεωρητική ανάπτυξη του κυλινδρικού επταφασικού μοντέλου που θα χρησιμοποιήσουμε για την παρακάτω μελέτη βασίζεται στις εξής παραδοχές:

- Το έγκλεισμα αποτελείται από ίνες που έχουν τέλειο κυλινδρικό σχήμα
- Οι φάσεις του σύνθετου υλικού θεωρούνται ελαστικά, ομογενή και ισότροπα υλικά
- Ο αριθμός των εγκλεισμάτων είναι μεγάλος και η κατανομή τους ομοιόμορφη έτσι ώστε το σύνθετο υλικό να μπορεί να θεωρηθεί ομοιογενές
- Οι παραμορφώσεις που αναπτύσσονται στο σύνθετο υλικό είναι αρκετά μικρές ώστε μπορεί να θεωρηθεί ότι ισχύουν οι γραμμικές σχέσεις τάσεων-παραμορφώσεων.



Εικόνα 5.1(Εγκάρσια τομή κυλινδρικού επταφασικού μοντέλου)

Να αναφέρουμε σε αυτό το σημείο ότι:

$Q_{f,1} = Q_1$ το «1» συμβολίζει την 1η φάση (περιοχή με έγκλεισμα)

$Q_{i,1} = Q_2$ το «2» συμβολίζει την 2η φάση (περιοχή ενδιάμεσης φάσης)

$Q_{m,1} = Q_3$ το «3» συμβολίζει την 3η φάση (περιοχή με μήτρα)

$Q_{i,2} = Q_4$ το «4» συμβολίζει την 4η φάση (περιοχή ενδιάμεσης φάσης)

$Q_{f,2} = Q_5$ το «5» συμβολίζει την 5η φάση (περιοχή με έγκλεισμα)

$Q_{i,3} = Q_6$ το «6» συμβολίζει την 6η φάση (περιοχή ενδιάμεσης φάσης)

$Q_{m,2} = Q_7$ το «7» συμβολίζει την 7η φάση (περιοχή με μήτρα)

Όπου Q μπορεί να συμβολίζει είτε το μέτρο ελαστικότητας Ε, είτε το λόγο Poisson v, είτε το μέτρο διατμήσεως G.

Στις ενότητες που θα ακολουθήσουν, θα εξάγουμε θεωρητικούς τύπους για τον υπολογισμό, του διαμήκους και του εγκάρσιου μέτρου ελαστικότητας , του διαμήκους και εγκάρσιου λόγου Poisson, του διαμήκους μέτρου διατμήσεως, του σύνθετου υλικού με βάση το κυλινδρικό επταφασικό μοντέλο και με την βοήθεια της θεωρίας ελαστικότητας. Στο τέλος του κεφαλαίου θα παρουσιάσουμε τους θεωρητικούς τύπους για τον υπολογισμό του μέτρου ελαστικότητας , του μέτρου διατμήσεως και τον λόγο Poisson ενός σύνθετου υλικού που δέχεται φόρτιση υπό γωνία σε συγκεκριμένη κατ' όγκο περιεκτικότητα σε έγκλεισμα.

5.2 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΔΙΑΜΗΚΟΥΣ ΜΕΤΡΟΥ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ EL

Θεωρούμε το επταφασικό κυλινδρικό μοντέλο όπως το περιγράψαμε στην **ενότητα 5.1**. Με την χρήση αυτού του μοντέλου θα εξάγουμε έναν θεωρητικό τύπο για τον υπολογισμό του διαμήκους μέτρου ελαστικότητας στο σύνθετο υλικό.

Έστω τώρα ότι ασκούμε εξωτερικά μια σταθερή αξονική παραμόρφωση **ε,** η οποία είναι η ίδια και για τις επτά φάσεις του υλικού (Εικ.5.1). Η ανάλυση έχει ως εξής:

ΤΑΣΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Θεωρούμε την τασική συνάρτηση Φ που περιγράφει το πρόβλημά μας εκφρασμένη σε κυλινδρικές συντεταγμένες. Η γενική μορφή της τασικής συνάρτησης είναι:

$$\nabla^4\Phi = \frac{d^4\Phi}{dr^4} + \frac{2}{r}\frac{d^3\Phi}{dr^3} - \frac{1}{r^2}\frac{d^2\Phi}{dr^2} + \frac{1}{r^3}\frac{d\Phi}{dr} \tag{5.2.1}$$

Η πιο πάνω διαφορική εξίσωση είναι τύπου Euler της οποίας η γενική λύση έχει τη μορφή:

$$\Phi = J_1 \ln r + J_2 r^2 \ln r + J_3 r^2 + J_4 \tag{5.2.2}$$

Όπου J_1, J_2, J_3 και J_4 είναι σταθερές.

Η κάθε μία από τις επτά φάσεις έχει την δική της τασική συνάρτηση που την χαρακτηρίζει και άρα θα έχουμε:

$$\Phi_1 = A_1 \ln r + A_2 r^2 \ln r + A_3 r^2 + A_4 \tag{5.2.3}$$

$$\Phi_2 = B_1 \ln r + B_2 r^2 \ln r + B_3 r^2 + B_4 \tag{5.2.4}$$

$$\Phi_3 = C_1 \ln r + C_2 r^2 \ln r + C_3 r^2 + C_4 \tag{5.2.5}$$

$$\Phi_4 = D_1 \ln r + D_2 r^2 \ln r + D_3 r^2 + D_4 \tag{5.2.6}$$

$$\Phi_5 = F_1 \ln r + F_2 r^2 \ln r + F_3 r^2 + F_4 \tag{5.2.7}$$

$$\Phi_6 = K_1 \ln r + K_2 r^2 \ln r + K_3 r^2 + K_4 \tag{5.2.8}$$

$$\Phi_7 = H_1 \ln r + H_2 r^2 \ln r + H_3 r^2 + H_4 \tag{5.2.9}$$

ΤΑΣΕΙΣ

Αρχικά υπολογίζουμε τις τάσεις σ_r και σ_θ με την βοήθεια των τασικών συναρτήσεων και από τις σχέσεις:

$$\sigma_r = \frac{1}{r}\frac{d\Phi}{dr} \quad \text{και} \quad \sigma_\theta = \frac{d^2\Phi}{dr^2}$$

Έτσι έχουμε λοιπόν:

$$\sigma_{r,1} = \frac{A_1}{r^2} + A_2(2\ln r + 1) + 2A_3 \quad (5.2.10)$$

$$\sigma_{\theta,1} = -\frac{A_1}{r^2} + A_2(2\ln r + 3) + 2A_3 \quad (5.2.11)$$

$$\sigma_{r,2} = \frac{B_1}{r^2} + B_2(2\ln r + 1) + 2B_3 \quad (5.2.12)$$

$$\sigma_{\theta,2} = -\frac{B_1}{r^2} + B_2(2\ln r + 3) + 2B_3 \quad (5.2.13)$$

$$\sigma_{r,3} = \frac{C_1}{r^2} + C_2(2\ln r + 1) + 2C_3 \quad (5.2.14)$$

$$\sigma_{\theta,3} = -\frac{C_1}{r^2} + C_2(2\ln r + 3) + 2C_3 \quad (5.2.15)$$

$$\sigma_{r,4} = \frac{D_1}{r^2} + D_2(2\ln r + 1) + 2D_3 \quad (5.2.16)$$

$$\sigma_{\theta,4} = -\frac{D_1}{r^2} + D_2(2\ln r + 3) + 2D_3 \quad (5.2.17)$$

$$\sigma_{r,5} = \frac{F_1}{r^2} + F_2(2\ln r + 1) + 2F_3 \quad (5.2.18)$$

$$\sigma_{\theta,5} = -\frac{F_1}{r^2} + F_2(2\ln r + 3) + 2F_3 \quad (5.2.19)$$

$$\sigma_{r,6} = \frac{K_1}{r^2} + K_2(2\ln r + 1) + 2K_3 \quad (5.2.20)$$

$$\sigma_{\theta,6} = -\frac{K_1}{r^2} + K_2(2\ln r + 3) + 2K_3 \quad (5.2.21)$$

$$\sigma_{r,7} = \frac{H_1}{r^2} + H_2(2\ln r + 1) + 2H_3 \quad (5.2.22)$$

$$\sigma_{\theta,7} = -\frac{H_1}{r^2} + H_2(2\ln r + 3) + 2H_3 \quad (5.2.23)$$

Για να αποφύγουμε τον απειρισμό των τάσεων στην θέση $r = 0$ θα πρέπει οι σταθερές A_1 και A_2 να ισούνται με το μηδέν. Δηλαδή $A_1 = A_2 = 0$. Επίσης μπορεί να δειχθεί εξισώνοντας τις εκφράσεις των μετατοπίσεων για την 2η και 3η φάση, για την 3η και 4η φάση, για την 4η και 5η φάση, για την 5η και 6η και για την 6η και 7η, ότι $B_2 = C_2 = D_2 = F_2 = K_2 = H_2 = 0$. Οι σχέσεις (5.2.10)-(5.2.23) μετασχηματίζονται σε:

$$\sigma_{r,1} = 2A_3 \tag{5.2.24}$$

$$\sigma_{\theta,1} = 2A_3 \tag{5.2.25}$$

$$\sigma_{r,2} = \frac{B_1}{r^2} + 2B_3 \tag{5.2.26}$$

$$\sigma_{\theta,2} = -\frac{B_1}{r^2} + 2B_3 \tag{5.2.27}$$

$$\sigma_{r,3} = \frac{C_1}{r^2} + 2C_3 \tag{5.2.28}$$

$$\sigma_{\theta,3} = -\frac{C_1}{r^2} + 2C_3 \tag{5.2.29}$$

$$\sigma_{r,4} = \frac{D_1}{r^2} + 2D_3 \tag{5.2.30}$$

$$\sigma_{\theta,4} = -\frac{D_1}{r^2} + 2D_3 \tag{5.2.31}$$

$$\sigma_{r,5} = \frac{F_1}{r^2} + 2F_3 \tag{5.2.32}$$

$$\sigma_{\theta,5} = -\frac{F_1}{r^2} + 2F_3 \tag{5.2.33}$$

$$\sigma_{r,6} = \frac{K_1}{r^2} + 2K_3 \tag{5.2.34}$$

$$\sigma_{\theta,6} = -\frac{K_1}{r^2} + 2K_3 \tag{5.2.35}$$

$$\sigma_{r,7} = \frac{H_1}{r^2} + 2H_3 \tag{5.2.36}$$

$$\sigma_{\theta,7} = -\frac{H_1}{r^2} + 2H_3 \tag{5.2.37}$$

Οι αξονικές τάσεις $\sigma_{z,1}, \sigma_{z,2}, \sigma_{z,3}, \sigma_{z,4}, \sigma_{z,5}, \sigma_{z,6}, \sigma_{z,7}$ θα υπολογιστούν από τις σχέσεις τάσεων-παραμορφώσεων και την συνθήκη $\varepsilon_{z,1}, \varepsilon_{z,2}, \varepsilon_{z,3}, \varepsilon_{z,4}, \varepsilon_{z,5}, \varepsilon_{z,6}, \varepsilon_{z,7} = \varepsilon$

$$\varepsilon_{z,1} = \frac{1}{E_1}\left[\sigma_{z,1} - v_1(\sigma_{r,1} + \sigma_{\theta,1})\right] = \varepsilon \qquad (5.2.38)$$

$$\varepsilon_{z,2} = \frac{1}{E_2}\left[\sigma_{z,2} - v_2(\sigma_{r,2} + \sigma_{\theta,2})\right] = \varepsilon \qquad (5.2.39)$$

$$\varepsilon_{z,3} = \frac{1}{E_3}\left[\sigma_{z,3} - v_3(\sigma_{r,3} + \sigma_{\theta,3})\right] = \varepsilon \qquad (5.2.40)$$

$$\varepsilon_{z,4} = \frac{1}{E_4}\left[\sigma_{z,4} - v_4(\sigma_{r,4} + \sigma_{\theta,4})\right] = \varepsilon \qquad (5.2.41)$$

$$\varepsilon_{z,5} = \frac{1}{E_5}\left[\sigma_{z,5} - v_5(\sigma_{r,5} + \sigma_{\theta,5})\right] = \varepsilon \qquad (5.2.42)$$

$$\varepsilon_{z,6} = \frac{1}{E_6}\left[\sigma_{z,6} - v_6(\sigma_{r,6} + \sigma_{\theta,6})\right] = \varepsilon \qquad (5.2.43)$$

$$\varepsilon_{z,7} = \frac{1}{E_7}\left[\sigma_{z,7} - v_7(\sigma_{r,7} + \sigma_{\theta,7})\right] = \varepsilon \qquad (5.2.44)$$

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων (5.2.38)-(5.2.44) και κάνοντας χρήση των εξισώσεων (5.2.24)-(5.2.37) καταλήγουμε στις παρακάτω εκφράσεις για τις αξονικές τάσεις:

$$\sigma_{z,1} = \varepsilon E_1 + 4v_1 A_3 \qquad (5.2.45)$$

$$\sigma_{z,2} = \varepsilon E_2 + 4v_2 B_3 \qquad (5.2.46)$$

$$\sigma_{z,3} = \varepsilon E_3 + 4v_3 C_3 \qquad (5.2.47)$$

$$\sigma_{z,4} = \varepsilon E_4 + 4v_4 D_3 \qquad (5.2.48)$$

$$\sigma_{z,5} = \varepsilon E_5 + 4v_5 F_3 \qquad (5.2.49)$$

$$\sigma_{z,6} = \varepsilon E_6 + 4v_6 K_3 \qquad (5.2.50)$$

$$\sigma_{z,7} = \varepsilon E_7 + 4v_7 H_3 \qquad (5.2.51)$$

ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΕΙΣ

Οι ακτινικές μετατοπίσεις δίνονται από τις εξισώσεις:

$$u_{r,1} = \frac{r}{E_1}\left[2A_3(1-v_1-2v_1{}^2) - E_1 v_1 \varepsilon\right] \qquad (5.2.52)$$

$$u_{r,2} = \frac{r}{E_2}\left[-(1+v_2)\frac{B_1}{r^2} + 2B_3(1-v_2-2v_2{}^2) - E_2 v_2 \varepsilon\right] \qquad (5.2.53)$$

$$u_{r,3} = \frac{r}{E_3}\left[-(1+v_3)\frac{C_1}{r^2} + 2C_3(1-v_3-2v_3{}^2) - E_3 v_3 \varepsilon\right] \qquad (5.2.54)$$

$$u_{r,4} = \frac{r}{E_4}\left[-(1+v_4)\frac{D_1}{r^2} + 2D_3(1-v_4-2v_4{}^2) - E_4 v_4 \varepsilon\right] \qquad (5.2.55)$$

$$u_{r,5} = \frac{r}{E_5}\left[-(1+v_5)\frac{F_1}{r^2} + 2F_3(1-v_5-2v_5{}^2) - E_5 v_5 \varepsilon\right] \qquad (5.2.56)$$

$$u_{r,6} = \frac{r}{E_6}\left[-(1+v_6)\frac{K_1}{r^2} + 2K_3(1-v_6-2v_6{}^2) - E_6 v_6 \varepsilon\right] \qquad (5.2.57)$$

$$u_{r,7} = \frac{r}{E_7}\left[-(1+v_7)\frac{H_1}{r^2} + 2H_3(1-v_7-2v_7{}^2) - E_7 v_7 \varepsilon\right] \qquad (5.2.58)$$

ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΙΣ

Οι εκφράσεις για τις παραμορφώσεις ε_r και ε_θ των επτά φάσεων προκύπτουν από τις σχέσεις (5.2.52)-(5.2.58) και τις παρακάτω σχέσεις:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} \quad \text{και} \quad \varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}$$

$$\varepsilon_{r,1} = \frac{\left[2A_3(1-v_1-2v_1{}^2) - \varepsilon E_1 v_1\right]}{E_1} \qquad (5.2.59)$$

$$\varepsilon_{\theta,1} = \frac{\left[2A_3(1-v_1-2v_1{}^2) - \varepsilon E_1 v_1\right]}{E_1} \qquad (5.2.60)$$

$$\varepsilon_{z,1} = \varepsilon \qquad (5.2.61)$$

$$\varepsilon_{r,2} = \frac{\left[(1+v_2)\frac{B_1}{r^2} + 2B_3(1-v_2-2v_2{}^2) - \varepsilon E_2 v_2\right]}{E_2} \qquad (5.2.62)$$

$$\varepsilon_{\theta,2} = \frac{\left[-(1+v_2)\dfrac{B_1}{r^2} + 2B_3(1-v_2-2{v_2}^2) - \varepsilon E_2 v_2\right]}{E_2} \tag{5.2.63}$$

$$\varepsilon_{z,2} = \varepsilon \tag{5.2.64}$$

$$\varepsilon_{r,3} = \frac{\left[(1+v_3)\dfrac{C_1}{r^2} + 2C_3(1-v_3-2{v_3}^2) - \varepsilon E_3 v_3\right]}{E_3} \tag{5.2.65}$$

$$\varepsilon_{\theta,3} = \frac{\left[-(1+v_3)\dfrac{C_1}{r^2} + 2C_3(1-v_3-2{v_3}^2) - \varepsilon E_3 v_3\right]}{E_3} \tag{5.2.66}$$

$$\varepsilon_{z,3} = \varepsilon \tag{5.2.67}$$

$$\varepsilon_{r,4} = \frac{\left[(1+v_4)\dfrac{D_1}{r^2} + 2D_3(1-v_4-2{v_4}^2) - \varepsilon E_4 v_4\right]}{E_4} \tag{5.2.68}$$

$$\varepsilon_{\theta,4} = \frac{\left[-(1+v_4)\dfrac{D_1}{r^2} + 2D_3(1-v_4-2{v_4}^2) - \varepsilon E_4 v_4\right]}{E_4} \tag{5.2.69}$$

$$\varepsilon_{z,4} = \varepsilon \tag{5.2.70}$$

$$\varepsilon_{r,5} = \frac{\left[(1+v_5)\dfrac{F_1}{r^2} + 2F_3(1-v_5-2{v_5}^2) - \varepsilon E_5 v_5\right]}{E_5} \tag{5.2.71}$$

$$\varepsilon_{\theta,5} = \frac{\left[-(1+v_5)\dfrac{F_1}{r^2} + 2F_3(1-v_5-2{v_5}^2) - \varepsilon E_5 v_5\right]}{E_5} \tag{5.2.72}$$

$$\varepsilon_{z,5} = \varepsilon \tag{5.2.73}$$

$$\varepsilon_{r,6} = \frac{\left[(1+v_6)\dfrac{K_1}{r^2} + 2K_3(1-v_6-2{v_6}^2) - \varepsilon E_6 v_6\right]}{E_6} \tag{5.2.74}$$

$$\varepsilon_{\theta,6} = \frac{\left[-(1+v_6)\dfrac{K_1}{r^2} + 2K_3(1-v_6-2{v_6}^2) - \varepsilon E_6 v_6\right]}{E_6} \tag{5.2.75}$$

$$\varepsilon_{z,6} = \varepsilon \tag{5.2.76}$$

$$\varepsilon_{r,7} = \frac{\left[(1+v_7)\dfrac{H_1}{r^2} + 2H_3(1-v_7-2v_7{}^2) - \varepsilon E_7 v_7 \right]}{E_7} \tag{5.2.77}$$

$$\varepsilon_{\theta,7} = \frac{\left[-(1+v_7)\dfrac{H_1}{r^2} + 2H_3(1-v_7-2v_7{}^2) - \varepsilon E_7 v_7 \right]}{E_7} \tag{5.2.78}$$

$$\varepsilon_{z,7} = \varepsilon \tag{5.2.79}$$

ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΤΑΣΕΩΝ

Για $r = r_1$: $\sigma_{r,1} = \sigma_{r,2}$ και άρα $2A_3 = \dfrac{B_1}{r_1{}^2} + 2B_3$ (5.2.80)

Για $r = r_2$: $\sigma_{r,2} = \sigma_{r,3}$ και άρα $\dfrac{B_1}{r_2{}^2} + 2B_3 = \dfrac{C_1}{r_2{}^2} + 2C_3$ (5.2.81)

Για $r = r_3$: $\sigma_{r,3} = \sigma_{r,4}$ και άρα $\dfrac{C_1}{r_3{}^2} + 2C_3 = \dfrac{D_1}{r_3{}^2} + 2D_3$ (5.2.82)

Για $r = r_4$: $\sigma_{r,4} = \sigma_{r,5}$ και άρα $\dfrac{D_1}{r_4{}^2} + 2D_3 = \dfrac{F_1}{r_4{}^2} + 2F_3$ (5.2.83)

Για $r = r_5$: $\sigma_{r,5} = \sigma_{r,6}$ και άρα $\dfrac{F_1}{r_5{}^2} + 2F_3 = \dfrac{K_1}{r_5{}^2} + 2K_3$ (5.2.84)

Για $r = r_6$: $\sigma_{r,6} = \sigma_{r,7}$ και άρα $\dfrac{K_1}{r_6{}^2} + 2K_3 = \dfrac{H_1}{r_6{}^2} + 2H_3$ (5.2.85)

Για $r = r_7$: $\sigma_{r,7} = 0$ και άρα $\dfrac{H_1}{r_7{}^2} + 2H_3 = 0$ (5.2.86)

ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΕΩΝ

Οι συνοριακές συνθήκες για τις μετατοπίσεις θα είναι:

Για $r = r_1$: $u_{r,1} = u_{r,2}$ και άρα από τις σχέσεις (5.2.52),(5.2.53) θα έχουμε

$$E_2\left[2A_3(1-v_1-2v_1{}^2) - E_1 v_1 \varepsilon\right] = E_1\left[-(1+v_2)\frac{B_1}{r_1{}^2} + 2B_3(1-v_2-2v_2{}^2) - E_2 v_2 \varepsilon \right]$$

(5.2.87)

Για $r=r_2$: $u_{r,2}=u_{r,3}$ και άρα από τις σχέσεις (5.2.53),(5.2.54) θα έχουμε

$$E_3\left[-(1+v_2)\frac{B_1}{{r_2}^2}+2B_3(1-v_2-2{v_2}^2)-E_2v_2\varepsilon\right]=E_2\left[-(1+v_3)\frac{C_1}{{r_2}^2}+2C_3(1-v_3-2{v_3}^2)-E_3v_3\varepsilon\right] \tag{5.2.88}$$

Για $r=r_3$: $u_{r,3}=u_{r,4}$ και άρα από τις σχέσεις (5.2.54),(5.2.55) θα έχουμε

$$E_4\left[-(1+v_3)\frac{C_1}{{r_3}^2}+2C_3(1-v_3-2{v_3}^2)-E_3v_3\varepsilon\right]=E_3\left[-(1+v_4)\frac{D_1}{{r_3}^2}+2D_3(1-v_4-2{v_4}^2)-E_4v_4\varepsilon\right] \tag{5.2.89}$$

Για $r=r_4$: $u_{r,4}=u_{r,5}$ και άρα από τις σχέσεις (5.2.55),(5.2.56) θα έχουμε

$$E_5\left[-(1+v_4)\frac{D_1}{{r_4}^2}+2D_3(1-v_4-2{v_4}^2)-E_4v_4\varepsilon\right]=E_4\left[-(1+v_5)\frac{F_1}{{r_4}^2}+2F_3(1-v_5-2{v_5}^2)-E_5v_5\varepsilon\right] \tag{5.2.90}$$

Για $r=r_5$: $u_{r,5}=u_{r,6}$ και άρα από τις σχέσεις (5.2.56),(5.2.57) θα έχουμε

$$E_6\left[-(1+v_5)\frac{F_1}{{r_5}^2}+2F_3(1-v_5-2{v_5}^2)-E_5v_5\varepsilon\right]=E_5\left[-(1+v_6)\frac{K_1}{{r_5}^2}+2K_3(1-v_6-2{v_6}^2)-E_6v_6\varepsilon\right] \tag{5.2.91}$$

Για $r=r_6$: $u_{r,6}=u_{r,7}$ και άρα από τις σχέσεις (5.2.57),(5.2.58) θα έχουμε

$$E_7\left[-(1+v_6)\frac{K_1}{{r_6}^2}+2K_3(1-v_6-2{v_6}^2)-E_6v_6\varepsilon\right]=E_6\left[-(1+v_7)\frac{H_1}{{r_6}^2}+2H_3(1-v_7-2{v_7}^2)-E_7v_7\varepsilon\right] \tag{5.2.92}$$

Σε αυτό το σημείο θεωρούμε ότι η μήτρα αλλά και το έγκλεισμα επιδρούν τα μέγιστα στα σύνορα με την ενδιάμεση φάση και άρα θα έχουμε ότι n=1 και άρα θα έχουμε τις επιπλέον συνοριακές συνθήκες:

Για $r=r_1$: $E_1=E_2$ και $v_1=v_2$ (5.2.93)

Για $r=r_2$: $E_2=E_3$ και $v_2=v_3$ (5.2.94)

Για $r=r_3$: $E_3=E_4$ και $v_3=v_4$ (5.2.95)

Για $r=r_4$: $E_4=E_5$ και $v_4=v_5$ (5.2.96)

Για $r=r_5$: $E_5=E_6$ και $v_5=v_6$ (5.2.97)

Για $r=r_6$: $E_6=E_7$ και $v_6=v_7$ (5.2.98)

Διαμορφώνοντας τώρα τις εξισώσεις (5.2.87)-(5.2.92) χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (5.2.93)-(5.2.98) θα έχουμε ότι:

Για $r = r_1$: $u_{r,1} = u_{r,2}$ και άρα θα έχουμε:

$$(1+v_1)\frac{B_1}{r_1^{\,2}} = 2(B_3 - A_3)(1 - v_1 - 2v_1^{\,2}) \qquad (5.2.99)$$

Για $r = r_2$: $u_{r,2} = u_{r,3}$ και άρα θα έχουμε:

$$(1+v_3)\frac{(B_1 - C_1)}{r_2^{\,2}} = 2(B_3 - C_3)(1 - v_3 - 2v_3^{\,2}) \qquad (5.2.100)$$

Για $r = r_3$: $u_{r,3} = u_{r,4}$ και άρα θα έχουμε:

$$(1+v_3)\frac{(C_1 - D_1)}{r_3^{\,2}} = 2(C_3 - D_3)(1 - v_3 - 2v_3^{\,2}) \qquad (5.2.101)$$

Για $r = r_4$: $u_{r,4} = u_{r,5}$ και άρα θα έχουμε:

$$(1+v_3)\frac{(B_1 - C_1)}{r_4^{\,2}} = 2(B_3 - C_3)(1 - v_3 - 2v_3^{\,2}) \qquad (5.2.102)$$

Για $r = r_5$: $u_{r,5} = u_{r,6}$ και άρα θα έχουμε:

$$(1+v_5)\frac{(F_1 - K_1)}{r_5^{\,2}} = 2(F_3 - K_3)(1 - v_5 - 2v_5^{\,2}) \qquad (5.2.103)$$

Για $r = r_6$: $u_{r,6} = u_{r,7}$ και άρα θα έχουμε:

$$(1+v_7)\frac{(K_1 - H_1)}{r_6^{\,2}} = 2(K_3 - H_3)(1 - v_7 - 2v_7^{\,2}) \qquad (5.2.104)$$

Οι εξισώσεις (5.2.80)-(5.2.86) και (5.2.99)-(5.2.105) αποτελούν **σύστημα 13 εξισώσεων με 13 αγνώστους**. Η λύση του παραπάνω συστήματος δίνει τις τιμές των σταθερών $A_3, B_1, B_3, C_1, C_3, D_1, D_3, F_1, F_3, K_1, K_3, H_1, H_3$.

Οι τιμές των σταθερών αυτών λύνοντας το παραπάνω σύστημα θα είναι:
$A_3 = B_1 = B_3 = C_1 = C_3 = D_1 = D_3 = F_1 = F_3 = K_1 = K_3 = H_1 = H_3 = 0$

Οι τιμές των σταθερών μετά την λύση του συστήματος ήταν αναμενόμενες και άκρως επιθυμητές γιατί έτσι απλουστεύεται αρκετά η εύρεση του θεωρητικού τύπου του διαμήκους μέτρου ελαστικότητας E_L και του διαμήκους λόγου Poisson v_{LT} ενώ παράλληλα, όπως θα δούμε στο παρακάτω κεφάλαιο οι τιμές που θα βρούμε για το διάμηκες μέτρο ελαστικότητας και λόγο Poisson συνεχίζουν να είναι πολύ κοντά στις πειραματικές τιμές.

Για τον υπολογισμό του διαμήκους μέτρου ελαστικότητας E_L του σύνθετου υλικού, θεωρούμε ότι η ενέργεια παραμόρφωσης του υλικού ισούται με το άθροισμα των ενεργειών παραμόρφωσης των επτά φάσεων από τις οποίες αποτελείται. Έχουμε λοιπόν ότι:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_{V_c} E_L \varepsilon^2 dV_c = {} & \frac{1}{2}\int_{V_1}(\sigma_{r,1}\varepsilon_{r,1}+\sigma_{\theta,1}\varepsilon_{\theta,1}+\sigma_{z,1}\varepsilon_{z,1})dV_1 \\
& +\frac{1}{2}\int_{V_2}(\sigma_{r,2}\varepsilon_{r,2}+\sigma_{\theta,2}\varepsilon_{\theta,2}+\sigma_{z,2}\varepsilon_{z,2})dV_2 \\
& +\frac{1}{2}\int_{V_3}(\sigma_{r,3}\varepsilon_{r,3}+\sigma_{\theta,3}\varepsilon_{\theta,3}+\sigma_{z,3}\varepsilon_{z,3})dV_3 \\
& +\frac{1}{2}\int_{V_4}(\sigma_{r,4}\varepsilon_{r,4}+\sigma_{\theta,4}\varepsilon_{\theta,4}+\sigma_{z,4}\varepsilon_{z,4})dV_4 \\
& +\frac{1}{2}\int_{V_5}(\sigma_{r,5}\varepsilon_{r,5}+\sigma_{\theta,5}\varepsilon_{\theta,5}+\sigma_{z,5}\varepsilon_{z,5})dV_5 \\
& +\frac{1}{2}\int_{V_6}(\sigma_{r,6}\varepsilon_{r,6}+\sigma_{\theta,6}\varepsilon_{\theta,6}+\sigma_{z,6}\varepsilon_{z,6})dV_6 \\
& +\frac{1}{2}\int_{V_7}(\sigma_{r,7}\varepsilon_{r,7}+\sigma_{\theta,7}\varepsilon_{\theta,7}+\sigma_{z,7}\varepsilon_{z,7})dV_7 \qquad (5.2.105)
\end{aligned}
$$

Όπου $dV = 2\pi rhdr$.

Η παραπάνω σχέση μετασχηματίζεται σε:

$$\frac{1}{2}\int_{V_c} E_L \varepsilon^2 dV_c = \frac{1}{2}\int_0^{r_1}(\sigma_{r,1}\varepsilon_{r,1}+\sigma_{\theta,1}\varepsilon_{\theta,1}+\sigma_{z,1}\varepsilon_{z,1})2\pi h dr$$

$$+\frac{1}{2}\int_{r_1}^{r_2}(\sigma_{r,2}\varepsilon_{r,2}+\sigma_{\theta,2}\varepsilon_{\theta,2}+\sigma_{z,2}\varepsilon_{z,2})2\pi h dr$$

$$+\frac{1}{2}\int_{r_2}^{r_3}(\sigma_{r,3}\varepsilon_{r,3}+\sigma_{\theta,3}\varepsilon_{\theta,3}+\sigma_{z,3}\varepsilon_{z,3})2\pi h dr$$

$$+\frac{1}{2}\int_{r_3}^{r_4}(\sigma_{r,4}\varepsilon_{r,4}+\sigma_{\theta,4}\varepsilon_{\theta,4}+\sigma_{z,4}\varepsilon_{z,4})2\pi h dr$$

$$+\frac{1}{2}\int_{r_4}^{r_5}(\sigma_{r,5}\varepsilon_{r,5}+\sigma_{\theta,5}\varepsilon_{\theta,5}+\sigma_{z,5}\varepsilon_{z,5})2\pi h dr$$

$$+\frac{1}{2}\int_{r_5}^{r_6}(\sigma_{r,6}\varepsilon_{r,6}+\sigma_{\theta,6}\varepsilon_{\theta,6}+\sigma_{z,6}\varepsilon_{z,6})2\pi h dr$$

$$+\frac{1}{2}\int_{r_6}^{r_7}(\sigma_{r,7}\varepsilon_{r,7}+\sigma_{\theta,7}\varepsilon_{\theta,7}+\sigma_{z,7}\varepsilon_{z,7})2\pi h dr \qquad (5.2.106)$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (5.2.106) τις εκφράσεις των τάσεων από τις σχέσεις (5.2.24)-(5.2.37) και (5.2.45)-(5.2.51) αλλά και των παραμορφώσεων από τις σχέσεις (5.2.59)-(5.2.79) και αντικαθιστώντας τις τιμές των σταθερών $A_3, B_1, B_3, C_1, C_3, D_1, D_3, F_1, F_3, K_1, K_3, H_1, H_3$ που εξάγαμε από τη λύση του συστήματος παραπάνω και τέλος κάνοντας τις απαραίτητες απλοποιήσεις προκύπτει η σχέση:

$$E_L\int_0^{r_7} r dr = E_1\int_0^{r_1} r dr + \int_{r_1}^{r_2} rE_2(r)dr + E_3\int_{r_2}^{r_3} r dr + \int_{r_3}^{r_4} rE_4(r)dr + E_5\int_{r_4}^{r_5} r dr + \int_{r_5}^{r_6} rE_6(r)dr + E_7\int_{r_6}^{r_7} r dr \qquad (5.2.107)$$

Εκτελώντας τις ολοκληρώσεις και γνωρίζοντας ότι:

- $U_1 = \dfrac{r_1^{\,2}}{r_7^{\,2}}$

- $U_2 = \dfrac{(r_2^{\,2} - r_1^{\,2})}{r_7^{\,2}}$
- $U_3 = \dfrac{(r_3^{\,2} - r_2^{\,2})}{r_7^{\,2}}$
- $U_4 = \dfrac{(r_4^{\,2} - r_3^{\,2})}{r_7^{\,2}}$
- $U_5 = \dfrac{(r_5^{\,2} - r_4^{\,2})}{r_7^{\,2}}$
- $U_6 = \dfrac{(r_6^{\,2} - r_5^{\,2})}{r_7^{\,2}}$
- $U_7 = \dfrac{(r_7^{\,2} - r_6^{\,2})}{r_7^{\,2}}$

Θα έχουμε ότι:

$$E_L = E_1U_1 + \frac{2}{r_7^{\,2}}\int_{r_1}^{r_2} rE_2(r)dr + E_3U_3 + \frac{2}{r_7^{\,2}}\int_{r_3}^{r_4} rE_4(r)dr + E_5U_5 + \frac{2}{r_7^{\,2}}\int_{r_5}^{r_6} rE_6(r)dr + E_7U_7$$

(5.2.108)

Θεωρούμε τώρα ότι οι συναρτήσεις E_2(r), E_4(r) και E_6(r) ακολουθούν την παραβολική μεταβολή γιατί έχει αποδειχθεί ότι η μεταβολή αυτή είναι καλύτερη και πιο ρεαλιστική από την γραμμική και την υπερβολική μεταβολή δίνοντας καλύτερα αποτελέσματα σε σχέση με τα υπάρχοντα πειραματικά δεδομένα[27].

Άρα εκτελώντας τις ολοκληρώσεις κάνοντας χρήση της παραβολικής μεταβολής θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
E_L = {} & E_1U_1 + \frac{(E_1 - E_3)(r_2 + r_1)(r_2^{\,2} + r_1^{\,2})}{2(r_2 - r_1)} - \frac{4r_2(E_1 - E_3)(r_2^{\,2} + r_1^{\,2} + r_1r_2)}{3r_7^{\,2}(r_2 - r_1)} + \\
& + \frac{(E_1r_2^{\,2} + E_3r_1^{\,2} - 2E_3r_1r_2)(r_2 + r_1)}{r_7^{\,2}(r_2 - r_1)} + E_3U_3 + \frac{(E_5 - E_3)(r_4 + r_3)(r_4^{\,2} + r_3^{\,2})}{2r_7^{\,2}(r_4 - r_3)} - \\
& - \frac{4r_3(E_5 - E_3)(r_4^{\,2} + r_3^{\,2} + r_4r_3)}{3r_7^{\,2}(r_4 - r_3)} + \frac{(E_5r_3^{\,2} + E_3r_4^{\,2} - 2E_3r_3r_4)(r_4 + r_3)}{r_7^{\,2}(r_4 - r_3)} + E_5U_5 + \\
& + \frac{(E_5 - E_7)(r_6 + r_5)(r_6^{\,2} + r_5^{\,2})}{2r_7^{\,2}(r_6 - r_5)} - \frac{4r_6(E_5 - E_7)(r_6^{\,2} + r_5^{\,2} + r_6r_5)}{3r_7^{\,2}(r_6 - r_5)} + \\
& + \frac{(E_5r_6^{\,2} + E_7r_5^{\,2} - 2E_7r_6r_5)(r_6 + r_5)}{r_7^{\,2}(r_6 - r_5)} + E_7U_7
\end{aligned}$$

(5.2.109)

Κάνοντας πράξεις και αντικαθιστώντας τις ακτίνες με τις κατ' όγκο περιεκτικότητες της μήτρας, του εγκλείσματος και της ενδιαμέσου φάσεως θα έχουμε τον τελικό τύπο για το διάμηκες μέτρο ελαστικότητας του σύνθετου υλικού:

$$
\begin{aligned}
E_L ={}& E_1 U_1 + \frac{(E_1 - E_3)(\sqrt{U_1 + U_2} + \sqrt{U_1})(2U_1 + U_2)}{2(\sqrt{U_1 + U_2} - \sqrt{U_1})} - \\
&- \frac{4(\sqrt{U_1 + U_2})(E_1 - E_3)(2U_1 + U_2 + \sqrt{U_1 + U_2}\sqrt{U_1})}{3(\sqrt{U_1 + U_2} - \sqrt{U_1})} + \\
&+ \frac{[E_1(U_1 + U_2) + E_3 U_1 - 2E_3\sqrt{U_1 + U_2}\sqrt{U_1}](\sqrt{U_1 + U_2} + \sqrt{U_1})}{(\sqrt{U_1 + U_2} - \sqrt{U_1})} + E_3 U_3 + \\
&+ \frac{(E_5 - E_3)(\sqrt{U_1 + U_2 + U_3 + U_4} + \sqrt{U_1 + U_2 + U_3})(2U_1 + 2U_2 + 2U_3 + U_4)}{2(\sqrt{U_1 + U_2 + U_3 + U_4} - \sqrt{U_1 + U_2 + U_3})} - \\
&- \frac{4(\sqrt{U_1 + U_2 + U_3})(E_5 - E_3)(2U_1 + 2U_2 + 2U_3 + U_4 + \sqrt{U_1 + U_2 + U_3 + U_4}\sqrt{U_1 + U_2 + U_3})}{3(\sqrt{U_1 + U_2 + U_3 + U_4} - \sqrt{U_1 + U_2 + U_3})} + \\
&+ \frac{\left[E_5(U_1 + U_2 + U_3) + E_3(U_1 + U_2 + U_3 + U_4)\right](\sqrt{(U_1 + U_2 + U_3 + U_4} + \sqrt{U_1 + U_2 + U_3})}{\sqrt{U_1 + U_2 + U_3 + U_4} - \sqrt{U_1 + U_2 + U_3}} - \\
&- \frac{2E_3(\sqrt{(U_1 + U_2 + U_3)(U_1 + U_2 + U_3 + U_4)})(\sqrt{U_1 + U_2 + U_3 + U_4} + \sqrt{U_1 + U_2 + U_3})}{\sqrt{U_1 + U_2 + U_3 + U_4} - \sqrt{U_1 + U_2 + U_3}} + \\
&+ E_5 U_5 + \frac{(E_5 - E_7)(\sqrt{1 - U_7} + \sqrt{1 - U_6 - U_7})(2 - 2U_7 - U_6)}{2(\sqrt{1 - U_7} - \sqrt{1 - U_6 - U_7})} - \\
&- \frac{4(\sqrt{1 - U_7})(E_5 - E_7)(2 - 2U_7 - U_6 + \sqrt{1 - U_7}\sqrt{1 - U_6 - U_7})}{3(\sqrt{1 - U_7} - \sqrt{1 - U_6 - U_7})} + \\
&+ \frac{(E_5(1 - U_7) + E_7(1 - U_7 - U_6) - 2E_7(\sqrt{1 - U_7})(\sqrt{1 - U_7 - U_6})(\sqrt{1 - U_7} + \sqrt{1 - U_7 - U_6})}{(\sqrt{1 - U_7} - \sqrt{1 - U_7 - U_6})} + \\
&+ E_7 U_7
\end{aligned}
\tag{5.2.110}
$$

5.3 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΔΙΑΜΗΚΟΥΣ ΛΟΓΟΥ POISSON ν_{LT}

Ο διαμήκης λόγος Poisson του σύνθετου υλικού με βάση το επταφασικό κυλινδρικό μοντέλο ορίζεται ως:

$$
\nu_{LT} = -\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_z} = -\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon} \tag{5.3.1}
$$

Η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφτεί στην παρακάτω μορφή:

$$
\nu_{LT} = -\frac{1}{\varepsilon V_c}\int_{V_c} \varepsilon_r dV_c = -\frac{1}{\varepsilon V_c}\left[\int_{V_1} \varepsilon_{r,1} dV_1 + \int_{V_2} \varepsilon_{r,2} dV_2 + \int_{V_3} \varepsilon_{r,3} dV_3 + \int_{V_4} \varepsilon_{r,4} dV_4 + \int_{V_5} \varepsilon_{r,5} dV_5 + \int_{V_6} \varepsilon_{r,6} dV_6 + \int_{V_7} \varepsilon_{r,7} dV_7\right] \tag{5.3.2}
$$

Όπου $V = \pi r^2 h$ και άρα $dV = 2\pi r h$ και άρα θα έχουμε:

$$v_{LT} = -\frac{1}{\varepsilon \pi h r_7^{\,2}}$$
$$\left[\int_0^{r_1} 2\pi r h \varepsilon_{r,1} dr + \int_{r_1}^{r_2} 2\pi r h \varepsilon_{r,2} dr + \int_{r_2}^{r_3} 2\pi r h \varepsilon_{r,3} dr + \int_{r_3}^{r_4} 2\pi r h \varepsilon_{r,4} dr + \int_{r_4}^{r_5} 2\pi r h \varepsilon_{r,5} dr + \int_{r_5}^{r_6} 2\pi r h \varepsilon_{r,6} dr + \int_{r_6}^{r_7} 2\pi r h \varepsilon_{r,7} dr \right]$$

(5.3.3)

Αν στην εξίσωση (5.3.3) αντικαταστήσουμε τις ακτινικές παραμορφώσεις με τις σχέσεις (5.2.59),(5.2.62),(5.2.68).(5.2.71),(5.2.74),(5.2.77) και λάβουμε υπόψη τη λύση του συστήματος (13 εξ. με 13 αγνώστους), κάνουμε κάποιες απλοποιήσεις και εκτελέσουμε τις ολοκληρώσεις γνωρίζοντας ότι:

- $U_1 = \dfrac{r_1^{\,2}}{r_7^{\,2}}$
- $U_2 = \dfrac{(r_2^{\,2} - r_1^{\,2})}{r_7^{\,2}}$
- $U_3 = \dfrac{(r_3^{\,2} - r_2^{\,2})}{r_7^{\,2}}$
- $U_4 = \dfrac{(r_4^{\,2} - r_3^{\,2})}{r_7^{\,2}}$
- $U_5 = \dfrac{(r_5^{\,2} - r_4^{\,2})}{r_7^{\,2}}$
- $U_6 = \dfrac{(r_6^{\,2} - r_5^{\,2})}{r_7^{\,2}}$
- $U_7 = \dfrac{(r_7^{\,2} - r_6^{\,2})}{r_7^{\,2}}$

Θα έχουμε ότι:

$$v_{LT} = v_1 U_1 + \frac{2}{r_7^{\,2}} \int_{r_1}^{r_2} v_2(r) dr + v_3 U_3 + \frac{2}{r_7^{\,2}} \int_{r_3}^{r_4} v_4(r) dr + v_5 U_5 + \frac{2}{r_7^{\,2}} \int_{r_5}^{r_6} v_6(r) dr + v_7 U_7$$

(5.3.4)

Θεωρούμε τώρα, όπως και πριν στον υπολογισμό του διαμήκους μέτρου ελαστικότητας E_{LT}, ότι οι συναρτήσεις $v_2(r)$, $v_4(r)$, $v_6(r)$, ακολουθούν την παραβολική μεταβολή. Εκτελώντας τις ολοκληρώσεις και εφαρμόζοντας τους τύπους της παραβολικής μεταβολής (βλέπε Κεφ.4) θα έχουμε ότι:

$$
\begin{aligned}
v_{LT} &= v_1U_1 + \frac{(v_1 - v_3)(r_2 + r_1)(r_2^{\,2} + r_1^{\,2})}{2r_7^{\,2}(r_2 - r_1)} - \frac{4r_2(v_1 - v_3)(r_2^{\,2} + r_1^{\,2} + r_1r_2)}{3r_7^{\,2}(r_2 - r_1)} + \\
&+ \frac{(v_1r_2^{\,2} + v_3r_1^{\,2} - 2v_3r_1r_2)(r_2 + r_1)}{r_7^{\,2}(r_2 - r_1)} + v_3U_3 + \frac{(v_5 - v_3)(r_4 + r_3)(r_4^{\,2} + r_3^{\,2})}{2r_7^{\,2}(r_4 - r_3)} - \\
&- \frac{4r_3(v_5 - v_3)(r_4^{\,2} + r_3^{\,2} + r_4r_3)}{3r_7^{\,2}(r_4 - r_3)} + \frac{(v_5r_3^{\,2} + v_3r_4^{\,2} - 2v_3r_3r_4)(r_4 + r_3)}{r_7^{\,2}(r_4 - r_3)} + v_5U_5 + \\
&+ \frac{(v_5 - v_7)(r_6 + r_5)(r_6^{\,2} + r_5^{\,2})}{2r_7^{\,2}(r_6 - r_5)} - \frac{4r_6(v_5 - v_7)(r_6^{\,2} + r_5^{\,2} + r_6r_5)}{3r_7^{\,2}(r_6 - r_5)} + \\
&+ \frac{(v_5r_6^{\,2} + v_7r_5^{\,2} - 2v_7r_6r_5)(r_6 + r_5)}{r_7^{\,2}(r_6 - r_5)} + v_7U_7
\end{aligned}
$$

(5.3.5)

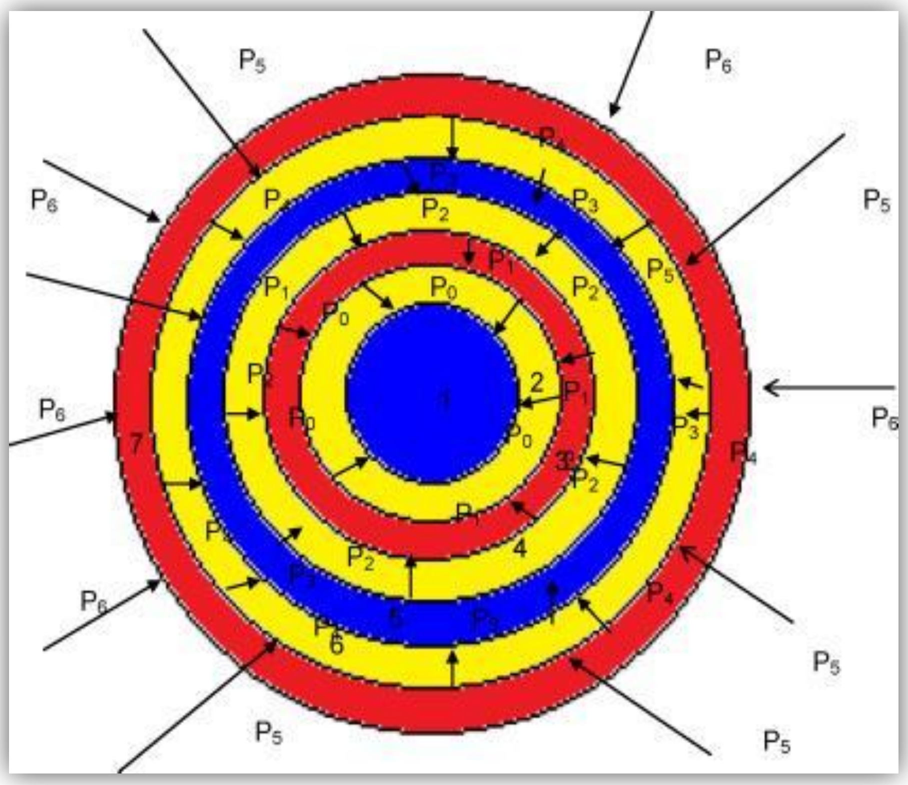
Κάνοντας πράξεις και αντικαθιστώντας τις ακτίνες με τις κατ' όγκο περιεκτικότητες της μήτρας, του εγκλείσματος και της ενδιαμέσου φάσεως θα έχουμε τον τελικό θεωρητικό τύπο για τον διαμήκη λόγο Poisson:

$$
\begin{aligned}
v_L &= v_1U_1 + \frac{(v_1 - v_3)(\sqrt{U_1 + U_2} + \sqrt{U_1})(2U_1 + U_2)}{2(\sqrt{U_1 + U_2} - \sqrt{U1})} - \\
&- \frac{4(\sqrt{U_1 + U_2})(v_1 - v_3)(2U_1 + U_2 + \sqrt{U_1 + U_2}\sqrt{U_1})}{3(\sqrt{U_1 + U_2} - \sqrt{U_1})} + \\
&+ \frac{\left[E_1(U_1 + U_2) + E_3U_1 - 2E_3(\sqrt{U_1 + U_2}\sqrt{U_1})\right](\sqrt{U_1 + U_2} + \sqrt{U_1})}{(\sqrt{U_1 + U_2} - \sqrt{U_1})} + v_3U_3 + \\
&+ \frac{(v_5 - v_3)(\sqrt{U_1 + U_2 + U_3 + U_4} + \sqrt{U_1 + U_2 + U_3})(2U_1 + 2U_2 + 2U_3 + U_4)}{2(\sqrt{U_1 + U_2 + U_3 + U_4} - \sqrt{U_1 + U_2 + U_3})} - \\
&- \frac{4(\sqrt{U_1 + U_2 + U_3})(v_5 - v_3)(2U_1 + 2U_2 + 2U_3 + U_4 + \sqrt{U_1 + U_2 + U_3 + U_4}\sqrt{U_1 + U_2 + U_3})}{3(\sqrt{U_1 + U_2 + U_3 + U_4} - \sqrt{U_1 + U_2 + U_3})} + \\
&+ \frac{\left[v_5(U_1 + U_2 + U_3) + v_3(U_1 + U_2 + U_3 + U_4) - 2v_3\sqrt{(U_1 + U_2 + U_3)(U_1 + U_2 + U_3 + U_4)}\right](\sqrt{U_1 + U_2 + U_3 + U_4} + \sqrt{U_1 + U_2 + U_3})}{(\sqrt{U_1 + U_2 + U_3 + U_4} - \sqrt{U_1 + U_2 + U_3})} + \\
&+ v_5U_5 + \frac{(v_5 - v_7)(\sqrt{1 - U_7} + \sqrt{1 - U_6 - U_7})(2 - 2U_7 - U_6)}{2(\sqrt{1 - U_7} - \sqrt{1 - U_6 - U_7})} - \\
&- \frac{4(\sqrt{1 - U_7})(v_5 - v_7)(2 - 2U_7 - U_6 + \sqrt{1 - U_7}\sqrt{1 - U_6 - U_7})}{3(\sqrt{1 - U_7} - \sqrt{1 - U_6 - U_7})} + \\
&+ \frac{(v_5(1 - U_7) + v_7(1 - U_7 - U_6) - 2v_7\sqrt{1 - U_7}\sqrt{1 - U_7 - U_6})(\sqrt{1 - U_7} + \sqrt{1 - U_7 - U_6})}{(\sqrt{1 - U_7} - \sqrt{1 - U_7 - U_6})} + v_7U_7
\end{aligned}
$$

(5.3.6)

5.4 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΕΓΚΑΡΣΙΟΥ ΜΕΤΡΟΥ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ E_T

Θεωρούμε το επταφασικό κυλινδρικό μοντέλο όπως το περιγράψαμε στην ***ενότητα 5.1.*** Με την χρήση αυτού του μοντέλου θα εξάγουμε έναν θεωρητικό τύπο για τον υπολογισμό του εγκάρσιου μέτρου ελαστικότητας στο σύνθετο υλικό.
Έστω ότι στην εξωτερική επιφάνεια του κυλίνδρου ακτίνας r_7 ασκούμε ομοιόμορφα ακτινική πίεση P_6. Λόγω της αλληλεπίδρασης μεταξύ 6ης και 7ης φάσης στα σύνορά τους , θα ασκείται τώρα μια πίεση P_5 . Αντίστοιχα στα σύνορα της 5ης και 6ης φάσης , 4ης και 5ης φάσης, 3ης και 4ης φάσης , 2ης και 3ης φάσης, 1ης και 2ης θα ασκούνται πιέσεις P_4, P_3, P_2, P_1, P_0 αντίστοιχα (Εικ.5.2).



Εικόνα 5.2

ΤΑΣΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Η τασική συνάρτηση Airy που περιγράφει το πρόβλημα καθώς και η λύση της είναι ίδιες με αυτές της ενότητας 5.2, δηλαδή θα έχουμε:

$$\nabla^4\Phi = \frac{d^4\Phi}{dr^4} + \frac{2}{r}\frac{d^3\Phi}{dr^3} - \frac{1}{r^2}\frac{d^2\Phi}{dr^2} + \frac{1}{r^3}\frac{d\Phi}{dr} \tag{5.4.1}$$

Η πιο πάνω διαφορική εξίσωση είναι τύπου Euler της οποίας η γενική λύση έχει τη μορφή:

$$\Phi = J_1 \ln r + J_2 r^2 \ln r + J_3 r^2 + J_4 \tag{5.4.2}$$

Όπου J_1, J_2, J_3 και J_4 είναι σταθερές.

Η κάθε μία από τις επτά φάσεις όπως και στην ενότητα 5.2, έχει την δική της τασική συνάρτηση που την χαρακτηρίζει και άρα θα έχουμε:

$$\Phi_1 = A_1 \ln r + A_2 r^2 \ln r + A_3 r^2 + A_4 \tag{5.4.3}$$

$$\Phi_2 = B_1 \ln r + B_2 r^2 \ln r + B_3 r^2 + B_4 \tag{5.2.4}$$

$$\Phi_3 = C_1 \ln r + C_2 r^2 \ln r + C_3 r^2 + C_4 \tag{5.4.5}$$

$$\Phi_4 = D_1 \ln r + D_2 r^2 \ln r + D_3 r^2 + D_4 \tag{5.4.6}$$

$$\Phi_5 = F_1 \ln r + F_2 r^2 \ln r + F_3 r^2 + F_4 \tag{5.4.7}$$

$$\Phi_6 = K_1 \ln r + K_2 r^2 \ln r + K_3 r^2 + K_4 \tag{5.4.8}$$

$$\Phi_7 = H_1 \ln r + H_2 r^2 \ln r + H_3 r^2 + H_4 \tag{5.4.9}$$

ΤΑΣΕΙΣ

Επειδή η τασική συνάρτηση παραμένει η ίδια με την ενότητα 5.2, έπεται πως και οι τάσεις σ_r, σ_θ θα προκύπτουν οι ίδιες και για λόγους πληρότητας θα παρατεθούν ξανά:

$$\sigma_{r,1} = 2A_3 \tag{5.4.10}$$

$$\sigma_{\theta,1} = 2A_3 \tag{5.4.11}$$

$$\sigma_{r,2} = \frac{B_1}{r^2} + 2B_3 \tag{5.4.12}$$

$$\sigma_{\theta,2} = -\frac{B_1}{r^2} + 2B_3 \tag{5.4.13}$$

$$\sigma_{r,3} = \frac{C_1}{r^2} + 2C_3 \tag{5.4.14}$$

$$\sigma_{\theta,3} = -\frac{C_1}{r^2} + 2C_3 \tag{5.4.15}$$

$$\sigma_{r,4} = \frac{D_1}{r^2} + 2D_3 \tag{5.4.16}$$

$$\sigma_{\theta,4} = -\frac{D_1}{r^2} + 2D_3 \tag{5.4.17}$$

$$\sigma_{r,5} = \frac{F_1}{r^2} + 2F_3 \tag{5.4.18}$$

$$\sigma_{\theta,5} = -\frac{F_1}{r^2} + 2F_3 \tag{5.4.19}$$

$$\sigma_{r,6} = \frac{K_1}{r^2} + 2K_3 \tag{5.4.20}$$

$$\sigma_{\theta,6} = -\frac{K_1}{r^2} + 2K_3 \tag{5.4.21}$$

$$\sigma_{r,7} = \frac{H_1}{r^2} + 2H_3 \tag{5.4.22}$$

$$\sigma_{\theta,7} = -\frac{H_1}{r^2} + 2H_3 \tag{5.4.23}$$

Οι αξονικές τάσεις $\sigma_{z,1}, \sigma_{z,2}, \sigma_{z,3}, \sigma_{z,4}, \sigma_{z,5}, \sigma_{z,6}, \sigma_{z,7}$ θα υπολογιστούν από τις σχέσεις τάσεων-παραμορφώσεων, δηλαδή μέσω των σχέσεων:

$$\varepsilon_{z,1} = \frac{1}{E_1}\left[\sigma_{z,1} - \nu_1(\sigma_{r,1} + \sigma_{\theta,1})\right] = 0 \tag{5.4.24}$$

$$\varepsilon_{z,2} = \frac{1}{E_2}\left[\sigma_{z,2} - \nu_2(\sigma_{r,2} + \sigma_{\theta,2})\right] = 0 \tag{5.4.25}$$

$$\varepsilon_{z,3} = \frac{1}{E_3}\left[\sigma_{z,3} - \nu_3(\sigma_{r,3} + \sigma_{\theta,3})\right] = 0 \tag{5.4.26}$$

$$\varepsilon_{z,4} = \frac{1}{E_4}\left[\sigma_{z,4} - v_4(\sigma_{r,4} + \sigma_{\theta,4})\right] = 0 \tag{5.4.27}$$

$$\varepsilon_{z,5} = \frac{1}{E_5}\left[\sigma_{z,5} - v_5(\sigma_{r,5} + \sigma_{\theta,5})\right] = 0 \tag{5.4.28}$$

$$\varepsilon_{z,6} = \frac{1}{E_6}\left[\sigma_{z,6} - v_6(\sigma_{r,6} + \sigma_{\theta,6})\right] = 0 \tag{5.4.29}$$

$$\varepsilon_{z,7} = \frac{1}{E_7}\left[\sigma_{z,7} - v_7(\sigma_{r,7} + \sigma_{\theta,7})\right] = 0 \tag{5.4.30}$$

Οι παραπάνω αξονικές παραμορφώσεις θεωρούμε ότι ισούνται με το μηδέν διότι το μήκος του κυλινδρικού μοντέλου είναι αναλογικά απείρως μεγαλύτερο σε σχέση με την επιμήκυνση που δέχεται ο άξονας του.

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων (5.4.24)-(5.4.30) και κάνοντας χρήση και των εξισώσεων (5.4.10)-(5.4.23) καταλήγουμε στις παρακάτω εκφράσεις για τις αξονικές τάσεις:

$$\sigma_{z,1} = 4v_1A_3 \tag{5.4.31}$$

$$\sigma_{z,2} = 4v_2B_3 \tag{5.4.32}$$

$$\sigma_{z,3} = 4v_3C_3 \tag{5.4.33}$$

$$\sigma_{z,4} = 4v_4D_3 \tag{5.4.34}$$

$$\sigma_{z,5} = 4v_5F_3 \tag{5.4.35}$$

$$\sigma_{z,6} = 4v_6K_3 \tag{5.4.36}$$

$$\sigma_{z,7} = 4v_7H_3 \tag{5.4.37}$$

<u>ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΕΙΣ</u>

Γνωρίζουμε γενικά ότι ισχύει:

$$\varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}$$

Λόγω όμως της κυλινδρικής συμμετρίας η γωνιακή μετατόπιση u_θ δεν εξαρτάται από το θ και άρα θα ισχύει:

$$\varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r} \Rightarrow u_r = r\varepsilon_\theta \qquad (5.4.39)$$

Άρα ξεχωριστά για τις επτά φάσεις θα έχουμε:

$$u_{r,1} = r\varepsilon_{\theta,1} \qquad (5.4.40)$$

$$u_{r,2} = r\varepsilon_{\theta,2} \qquad (5.4.41)$$

$$u_{r,3} = r\varepsilon_{\theta,3} \qquad (5.4.42)$$

$$u_{r,4} = r\varepsilon_{\theta,4} \qquad (5.4.43)$$

$$u_{r,5} = r\varepsilon_{\theta,5} \qquad (5.4.44)$$

$$u_{r,6} = r\varepsilon_{\theta,6} \qquad (5.4.45)$$

$$u_{r,7} = r\varepsilon_{\theta,7} \qquad (5.4.46)$$

Επίσης από τις σχέσεις τάσεων-παραμορφώσεων γνωρίζουμε ότι:

$$\varepsilon_{\theta,1} = \frac{\sigma_{\theta,1} - v_1(\sigma_{r,1} + \sigma_{z,1})}{E_1} \qquad (5.4.47)$$

$$\varepsilon_{\theta,2} = \frac{\sigma_{\theta,2} - v_2(\sigma_{r,2} + \sigma_{z,2})}{E_2} \qquad (5.4.48)$$

$$\varepsilon_{\theta,3} = \frac{\sigma_{\theta,3} - v_3(\sigma_{r,3} + \sigma_{z,3})}{E_3} \qquad (5.4.49)$$

$$\varepsilon_{\theta,4} = \frac{\sigma_{\theta,4} - v_4(\sigma_{r,4} + \sigma_{z,4})}{E_4} \qquad (5.4.50)$$

$$\varepsilon_{\theta,5} = \frac{\sigma_{\theta,5} - v_5(\sigma_{r,5} + \sigma_{z,5})}{E_5} \qquad (5.4.51)$$

$$\varepsilon_{\theta,6} = \frac{\sigma_{\theta,6} - v_6(\sigma_{r,6} + \sigma_{z,6})}{E_6} \qquad (5.4.52)$$

$$\varepsilon_{\theta,7} = \frac{\sigma_{\theta,7} - v_7(\sigma_{r,7} + \sigma_{z,7})}{E_7} \qquad (5.4.53)$$

Αντικαθιστώντας στις σχέσεις (5.4.47)-(5.453), τις σχέσεις των τάσεων (5.4.10)-(5.4.23) και (5.4.31)-(5.4.37) θα έχουμε ότι:

$$\varepsilon_{\theta,1} = \frac{2A_3(1-\nu_1-2\nu_1{}^2)}{E_1} \tag{5.4.54}$$

$$\varepsilon_{\theta,2} = \frac{\left[-(1+\nu_2)\dfrac{B_1}{r^2}+2B_3(1-\nu_2-2\nu_2{}^2)\right]}{E_2} \tag{5.4.55}$$

$$\varepsilon_{\theta,3} = \frac{\left[-(1+\nu_3)\dfrac{C_1}{r^2}+2C_3(1-\nu_3-2\nu_3{}^2)\right]}{E_3} \tag{5.4.56}$$

$$\varepsilon_{\theta,4} = \frac{\left[-(1+\nu_4)\dfrac{D_1}{r^2}+2D_3(1-\nu_4-2\nu_4{}^2)\right]}{E_4} \tag{5.4.57}$$

$$\varepsilon_{\theta,5} = \frac{\left[-(1+\nu_5)\dfrac{F_1}{r^2}+2F_3(1-\nu_5-2\nu_5{}^2)\right]}{E_5} \tag{5.4.58}$$

$$\varepsilon_{\theta,6} = \frac{\left[-(1+\nu_6)\dfrac{K_1}{r^2}+2K_3(1-\nu_6-2\nu_6{}^2)\right]}{E_6} \tag{5.4.59}$$

$$\varepsilon_{\theta,7} = \frac{\left[-(1+\nu_7)\dfrac{H_1}{r^2}+2H_3(1-\nu_7-2\nu_7{}^2)\right]}{E_7} \tag{5.4.60}$$

Και άρα αντικαθιστώντας τις σχέσεις (5.4.54)-(5.4.60) στις σχέσεις (5.4.40)-(5.4.46) των μετατοπίσεων οι ακτινικές μετατοπίσεις θα γίνουν:

$$u_{r,1} = \frac{2A_3(1-\nu_1-2\nu_1{}^2)r}{E_1} \tag{5.4.61}$$

$$u_{r,2} = \frac{\left[-(1+\nu_2)\dfrac{B_1}{r^2}+2B_3(1-\nu_2-2\nu_2{}^2)\right]r}{E_2} \tag{5.4.62}$$

$$u_{r,3} = \frac{\left[-(1+\nu_3)\dfrac{C_1}{r^2}+2C_3(1-\nu_3-2\nu_3{}^2)\right]r}{E_3} \tag{5.4.63}$$

$$u_{r,4} = \frac{\left[-(1+v_4)\frac{D_1}{r^2} + 2D_3(1-v_4-2v_4{}^2)\right]r}{E_4} \tag{5.4.64}$$

$$u_{r,5} = \frac{\left[-(1+v_5)\frac{F_1}{r^2} + 2F_3(1-v_5-2v_5{}^2)\right]r}{E_5} \tag{5.4.65}$$

$$u_{r,6} = \frac{\left[-(1+v_6)\frac{K_1}{r^2} + 2K_3(1-v_6-2v_6{}^2)\right]r}{E_6} \tag{5.4.66}$$

$$u_{r,7} = \frac{\left[-(1+v_7)\frac{H_1}{r^2} + 2H_3(1-v_7-2v_7{}^2)\right]r}{E_7} \tag{5.4.67}$$

<u>ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΙΣ</u>

Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε τις ακτινικές παραμορφώσεις και ύστερα θα παρουσιάσουμε και τις ήδη υπολογισμένες αξονικές και γωνιακές παραμορφώσεις συγκεντρωτικά.

Οι ακτινικές παραμορφώσεις θα εξαχθούν από τον γενικό τύπο:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}$$

Άρα θα έχουμε ότι:

$$\varepsilon_{r,1} = \frac{2A_3(1-v_1-2v_1{}^2)}{E_1} \tag{5.4.68}$$

$$\varepsilon_{r,2} = \frac{\left[(1+v_2)\frac{B_1}{r^2} + 2B_3(1-v_2-2v_2{}^2)\right]}{E_2} \tag{5.4.69}$$

$$\varepsilon_{r,3} = \frac{\left[(1+v_3)\frac{C_1}{r^2} + 2C_3(1-v_3-2v_3{}^2)\right]}{E_3} \tag{5.4.70}$$

$$\varepsilon_{r,4} = \frac{\left[(1+v_4)\frac{D_1}{r^2} + 2D_3(1-v_4-2v_4{}^2)\right]}{E_4} \tag{5.4.71}$$

$$\varepsilon_{r,5} = \frac{\left[(1+v_5)\frac{F_1}{r^2} + 2F_3(1-v_5-2v_5{}^2)\right]}{E_5} \tag{5.4.72}$$

$$\varepsilon_{r,6} = \frac{\left[(1+v_6)\frac{K_1}{r^2} + 2K_3(1-v_6-2v_6{}^2)\right]}{E_6} \tag{5.4.73}$$

$$\varepsilon_{r,7} = \frac{\left[(1+v_7)\frac{H_1}{r^2} + 2H_3(1-v_7-2v_7{}^2)\right]}{E_7} \tag{5.4.74}$$

Επίσης υπολογισμένες από πριν οι αξονικές και γωνιακές παραμορφώσεις θα είναι:

$$\varepsilon_{z,1} = \frac{1}{E_1}\left[\sigma_{z,1} - v_1(\sigma_{r,1} + \sigma_{\theta,1})\right] = 0 \tag{5.4.75}$$

$$\varepsilon_{z,2} = \frac{1}{E_2}\left[\sigma_{z,2} - v_2(\sigma_{r,2} + \sigma_{\theta,2})\right] = 0 \tag{5.4.76}$$

$$\varepsilon_{z,3} = \frac{1}{E_3}\left[\sigma_{z,3} - v_3(\sigma_{r,3} + \sigma_{\theta,3})\right] = 0 \tag{5.4.77}$$

$$\varepsilon_{z,4} = \frac{1}{E_4}\left[\sigma_{z,4} - v_4(\sigma_{r,4} + \sigma_{\theta,4})\right] = 0 \tag{5.4.78}$$

$$\varepsilon_{z,5} = \frac{1}{E_5}\left[\sigma_{z,5} - v_5(\sigma_{r,5} + \sigma_{\theta,5})\right] = 0 \tag{5.4.79}$$

$$\varepsilon_{z,6} = \frac{1}{E_6}\left[\sigma_{z,6} - v_6(\sigma_{r,6} + \sigma_{\theta,6})\right] = 0 \tag{5.4.80}$$

$$\varepsilon_{z,7} = \frac{1}{E_7}\left[\sigma_{z,7} - v_7(\sigma_{r,7} + \sigma_{\theta,7})\right] = 0 \tag{5.4.81}$$

$$\varepsilon_{\theta,1} = \frac{2A_3(1-v_1-2v_1{}^2)}{E_1} \tag{5.4.82}$$

$$\varepsilon_{\theta,2} = \frac{\left[-(1+v_2)\frac{B_1}{r^2} + 2B_3(1-v_2-2v_2{}^2)\right]}{E_2} \tag{5.4.83}$$

$$\varepsilon_{\theta,3} = \frac{\left[-(1+v_3)\frac{C_1}{r^2} + 2C_3(1-v_3-2v_3{}^2)\right]}{E_3} \tag{5.4.84}$$

$$\varepsilon_{\theta,4} = \frac{\left[-(1+v_4)\frac{D_1}{r^2} + 2D_3(1-v_4-2v_4{}^2)\right]}{E_4} \tag{5.4.85}$$

$$\varepsilon_{\theta,5} = \frac{\left[-(1+v_5)\frac{F_1}{r^2} + 2F_3(1-v_5-2v_5{}^2)\right]}{E_5} \tag{5.4.86}$$

$$\varepsilon_{\theta,6} = \frac{\left[-(1+v_6)\frac{K_1}{r^2} + 2K_3(1-v_6-2v_6{}^2)\right]}{E_6} \tag{5.4.87}$$

$$\varepsilon_{\theta,7} = \frac{\left[-(1+v_7)\frac{H_1}{r^2} + 2H_3(1-v_7-2v_7{}^2)\right]}{E_7} \tag{5.4.88}$$

<u>ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΤΑΣΕΩΝ</u>

Για $r = r_1$: $\sigma_{r,1} = \sigma_{r,2}$ και άρα $2A_3 = \frac{B_1}{r_1{}^2} + 2B_3$ (5.4.89)

Για $r = r_2$: $\sigma_{r,2} = \sigma_{r,3}$ και άρα $\frac{B_1}{r_2{}^2} + 2B_3 = \frac{C_1}{r_2{}^2} + 2C_3$ (5.4.90)

Για $r = r_3$: $\sigma_{r,3} = \sigma_{r,4}$ και άρα $\frac{C_1}{r_3{}^2} + 2C_3 = \frac{D_1}{r_3{}^2} + 2D_3$ (5.4.91)

Για $r = r_4$: $\sigma_{r,4} = \sigma_{r,5}$ και άρα $\frac{D_1}{r_4{}^2} + 2D_3 = \frac{F_1}{r_4{}^2} + 2F_3$ (5.4.92)

Για $r = r_5$: $\sigma_{r,5} = \sigma_{r,6}$ και άρα $\frac{F_1}{r_5{}^2} + 2F_3 = \frac{K_1}{r_5{}^2} + 2K_3$ (5.4.93)

Για $r = r_6$: $\sigma_{r,6} = \sigma_{r,7}$ και άρα $\frac{K_1}{r_6{}^2} + 2K_3 = \frac{H_1}{r_6{}^2} + 2H_3$ (5.4.94)

Για $r = r_7$: $\sigma_{r,7} = P_5$ και άρα $H_3 = -\frac{H_1}{2r_7{}^2} - \frac{P_5}{2}$ (5.4.95)

ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΕΩΝ

Οι συνοριακές συνθήκες για τις μετατοπίσεις θα είναι:

Για $r = r_1$: $u_{r,1} = u_{r,2}$ και άρα από τις σχέσεις (5.4.61),(5.4.62) θα έχουμε

$$E_2\left[2A_3(1-v_1-2{v_1}^2)\right] = E_1\left[-(1+v_2)\frac{B_1}{{r_1}^2} + 2B_3(1-v_2-2{v_2}^2)\right] \tag{5.4.96}$$

Για $r = r_2$: $u_{r,2} = u_{r,3}$ και άρα από τις σχέσεις (5.4.62),(5.4.63) θα έχουμε

$$E_3\left[-(1+v_2)\frac{B_1}{{r_2}^2} + 2B_3(1-v_2-2{v_2}^2)\right] = E_2\left[-(1+v_3)\frac{C_1}{{r_2}^2} + 2C_3(1-v_3-2{v_3}^2)\right] \tag{5.4.97}$$

Για $r = r_3$: $u_{r,3} = u_{r,4}$ και άρα από τις σχέσεις (5.4.63),(5.4.64) θα έχουμε

$$E_4\left[-(1+v_3)\frac{C_1}{{r_3}^2} + 2C_3(1-v_3-2{v_3}^2)\right] = E_3\left[-(1+v_4)\frac{D_1}{{r_3}^2} + 2D_3(1-v_4-2{v_4}^2)\right] \tag{5.4.98}$$

Για $r = r_4$: $u_{r,4} = u_{r,5}$ και άρα από τις σχέσεις (5.4.64),(5.4.65) θα έχουμε

$$E_5\left[-(1+v_4)\frac{D_1}{{r_4}^2} + 2D_3(1-v_4-2{v_4}^2)\right] = E_4\left[-(1+v_5)\frac{F_1}{{r_4}^2} + 2F_3(1-v_5-2{v_5}^2)\right] \tag{5.4.99}$$

Για $r = r_5$: $u_{r,5} = u_{r,6}$ και άρα από τις σχέσεις (5.4.65),(5.4.66) θα έχουμε

$$E_6\left[-(1+v_5)\frac{F_1}{{r_5}^2} + 2F_3(1-v_5-2{v_5}^2)\right] = E_5\left[-(1+v_6)\frac{K_1}{{r_5}^2} + 2K_3(1-v_6-2{v_6}^2)\right] \tag{5.4.100}$$

Για $r = r_6$: $u_{r,6} = u_{r,7}$ και άρα από τις σχέσεις (5.4.66),(5.4.67) θα έχουμε

$$E_7\left[-(1+v_6)\frac{K_1}{{r_6}^2} + 2K_3(1-v_6-2{v_6}^2)\right] = E_6\left[-(1+v_7)\frac{H_1}{{r_6}^2} + 2H_3(1-v_7-2{v_7}^2)\right] \tag{5.4.101}$$

Σε αυτό το σημείο θεωρούμε ότι η μήτρα αλλά και το έγκλεισμα επιδρούν τα μέγιστα στα σύνορα με την ενδιάμεση φάση και άρα θα έχουμε ότι n=1 και άρα θα έχουμε τις επιπλέον συνοριακές συνθήκες:

Για $r = r_1$: $E_1 = E_2$ και $v_1 = v_2$ (5.4.102)

Για $r = r_2$: $E_2 = E_3$ και $v_2 = v_3$ (5.4.103)

Για $r = r_3$: $E_3 = E_4$ και $v_3 = v_4$ (5.4.104)

Για $r = r_4$: $E_4 = E_5$ και $v_4 = v_5$ (5.4.105)

Για $r = r_5$: $E_5 = E_6$ και $v_5 = v_6$ (5.4.106)

Για $r = r_6$: $E_6 = E_7$ και $v_6 = v_7$ (5.4.107)

Διαμορφώνοντας τώρα τις εξισώσεις (5.4.96)-(5.4.101) χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (5.4.102)-(5.4.107) θα έχουμε:

Για $r = r_1$: $u_{r,1} = u_{r,2}$ και άρα θα έχουμε:

$$(1+v_2)\frac{B_1}{r_1^{\,2}} = 2(B_3 - A_3)(1 - v_2 - 2v_2^{\,2}) \quad (5.4.108)$$

Για $r = r_2$: $u_{r,2} = u_{r,3}$ και άρα θα έχουμε:

$$(1+v_3)\frac{(B_1 - C_1)}{r_2^{\,2}} = 2(B_3 - C_3)(1 - v_3 - 2v_3^{\,2}) \quad (5.4.109)$$

Για $r = r_3$: $u_{r,3} = u_{r,4}$ και άρα θα έχουμε:

$$(1+v_4)\frac{(C_1 - D_1)}{r_3^{\,2}} = 2(C_3 - D_3)(1 - v_4 - 2v_4^{\,2}) \quad (5.4.110)$$

Για $r = r_4$: $u_{r,4} = u_{r,5}$ και άρα θα έχουμε:

$$(1+v_5)\frac{(D_1 - F_1)}{r_4^{\,2}} = 2(D_3 - F_3)(1 - v_5 - 2v_5^{\,2}) \quad (5.4.111)$$

Για $r = r_5$: $u_{r,5} = u_{r,6}$ και άρα θα έχουμε:

$$(1+v_6)\frac{(F_1 - K_1)}{r_5^{\,2}} = 2(F_3 - K_3)(1 - v_6 - 2v_6^{\,2}) \quad (5.4.112)$$

Για $r = r_6$: $u_{r,6} = u_{r,7}$ και άρα θα έχουμε:

$$(1+v_7)\frac{(K_1 - H_1)}{r_6^{\,2}} = 2(K_3 - H_3)(1 - v_7 - 2v_7^{\,2}) \quad (5.4.113)$$

Οι εξισώσεις (5.4.89)-(5.4.95) και (5.4.108)-(5.4.113) αποτελούν **σύστημα 13 εξισώσεων με 13 αγνώστους**.Η λύση του παραπάνω συστήματος δίνει τιςτιμές των σταθερών $A_3, B_1, B_3, C_1, C_3, D_1, D_3, F_1, F_3, K_1, K_3, H_1, H_3$.

Οι τιμές των σταθερών αυτών λύνοντας το παραπάνω σύστημα θα είναι:

$$A_3 = B_3 = C_3 = D_3 = F_3 = K_3 = H_3 = \left(-\frac{1}{2}P_4\right) \text{ και } B_1 = C_1 = D_1 = F_1 = K_1 = H_1 = 0$$

Οι τιμές των σταθερών μετά την λύση του συστήματος ήταν αναμενόμενες και άκρως επιθυμητές γιατί έτσι απλουστεύεται αρκετά η εύρεση του θεωρητικού τύπου του εγκάρσιου μέτρου ελαστικότητας E_T και του εγκάρσιου λόγου Poisson v_{TT} ενώ παράλληλα, όπως θα δούμε στο παρακάτω κεφάλαιο οι τιμές που θα βρούμε για το εγκάρσιο μέτρο ελαστικότητας και λόγο Poisson συνεχίζουν να είναι πολύ κοντά στις πειραματικές τιμές.

Για τον υπολογισμό του εγκάρσιου μέτρου ελαστικότητας E_T του σύνθετου υλικού, θεωρούμε ότι η **ενέργεια παραμόρφωση**ς του υλικού ισούται με το άθροισμα των ενεργειών παραμόρφωσης των επτά φάσεων από τις οποίες αποτελείται. Έχουμε λοιπόν ότι:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_{V_c}\frac{P_4^{\,2}}{K_c}dV_c &= \frac{1}{2}\int_{V_1}(\sigma_{r,1}\varepsilon_{r,1}+\sigma_{\theta,1}\varepsilon_{\theta,1}+\sigma_{z,1}\varepsilon_{z,1})dV_1 \\
&+\frac{1}{2}\int_{V_2}(\sigma_{r,2}\varepsilon_{r,2}+\sigma_{\theta,2}\varepsilon_{\theta,2}+\sigma_{z,2}\varepsilon_{z,2})dV_2 \\
&+\frac{1}{2}\int_{V_3}(\sigma_{r,3}\varepsilon_{r,3}+\sigma_{\theta,3}\varepsilon_{\theta,3}+\sigma_{z,3}\varepsilon_{z,3})dV_3 \\
&+\frac{1}{2}\int_{V_4}(\sigma_{r,4}\varepsilon_{r,4}+\sigma_{\theta,4}\varepsilon_{\theta,4}+\sigma_{z,4}\varepsilon_{z,4})dV_4 \\
&+\frac{1}{2}\int_{V_5}(\sigma_{r,5}\varepsilon_{r,5}+\sigma_{\theta,5}\varepsilon_{\theta,5}+\sigma_{z,5}\varepsilon_{z,5})dV_5 \\
&+\frac{1}{2}\int_{V_6}(\sigma_{r,6}\varepsilon_{r,6}+\sigma_{\theta,6}\varepsilon_{\theta,6}+\sigma_{z,6}\varepsilon_{z,6})dV_6 \\
&+\frac{1}{2}\int_{V_7}(\sigma_{r,7}\varepsilon_{r,7}+\sigma_{\theta,7}\varepsilon_{\theta,7}+\sigma_{z,7}\varepsilon_{z,7})dV_7 \qquad (5.4.114)
\end{aligned}
$$

Όπου $dV = 2\pi rhdr$ και K_c το μέτρο διόγκωσης

Η παραπάνω σχέση μετασχηματίζεται σε:

$$\frac{1}{2}\frac{P_4^{\ 2}}{K_c}\int_{V_c} 2\pi rhdr = \frac{1}{2}\int_0^{r_1}(\sigma_{r,1}\varepsilon_{r,1}+\sigma_{\theta,1}\varepsilon_{\theta,1}+\sigma_{z,1}\varepsilon_{z,1})2\pi hdr$$

$$+\frac{1}{2}\int_{r_1}^{r_2}(\sigma_{r,2}\varepsilon_{r,2}+\sigma_{\theta,2}\varepsilon_{\theta,2}+\sigma_{z,2}\varepsilon_{z,2})2\pi hdr$$

$$+\frac{1}{2}\int_{r_2}^{r_3}(\sigma_{r,3}\varepsilon_{r,3}+\sigma_{\theta,3}\varepsilon_{\theta,3}+\sigma_{z,3}\varepsilon_{z,3})2\pi hdr$$

$$+\frac{1}{2}\int_{r_3}^{r_4}(\sigma_{r,4}\varepsilon_{r,4}+\sigma_{\theta,4}\varepsilon_{\theta,4}+\sigma_{z,4}\varepsilon_{z,4})2\pi hdr$$

$$+\frac{1}{2}\int_{r_4}^{r_5}(\sigma_{r,5}\varepsilon_{r,5}+\sigma_{\theta,5}\varepsilon_{\theta,5}+\sigma_{z,5}\varepsilon_{z,5})2\pi hdr$$

$$+\frac{1}{2}\int_{r_5}^{r_6}(\sigma_{r,6}\varepsilon_{r,6}+\sigma_{\theta,6}\varepsilon_{\theta,6}+\sigma_{z,6}\varepsilon_{z,6})2\pi hdr$$

$$+\frac{1}{2}\int_{r_6}^{r_7}(\sigma_{r,7}\varepsilon_{r,7}+\sigma_{\theta,7}\varepsilon_{\theta,7}+\sigma_{z,7}\varepsilon_{z,7})2\pi hdr \qquad (5.4.115)$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (5.4.115) τις εκφράσεις των τάσεων από τιε σχέσεις (5.4.10)-(5.4.23) και (5.4.31)-(5.4.37) αλλά και των παραμορφώσεων από τις σχέσεις (5.4.68)-(5.4.88) και αντικαθιστώντας τις τιμές των σταθερών $A_3, B_1, B_3, C_1, C_3, D_1, D_3, F_1, F_3, K_1, K_3, H_1, H_3$ που εξαγάγαμε από την λύση του συστήματος παραπάνω και τέλος κάνοντας τις απαραίτητες απλοποιήσεις προκύπτει η σχέση:

$$\frac{1}{2K_c}\int_0^{r_7} rdr = \frac{2(2-v_1-2v_1^{\ 2})}{E_1}\int_0^{r_1} rdr + 2\int_{r_1}^{r_2}\frac{\left[1-v_2(r)-(2v_2(r))^2\right]r}{E_2(r)}dr + \frac{1(2-v_3-2v_3^{\ 2})}{E_3}\int_{r_2}^{r_3} rdr +$$
$$+2\int_{r_3}^{r_4}\frac{\left[1-v_4(r)-(2v_4(r))^2\right]r}{E_4(r)}dr + \frac{1(2-v_5-2v_5^{\ 2})}{E_5}\int_{r_4}^{r_5} rdr + 2\int_{r_5}^{r_6}\frac{\left[1-v_6(r)-(2v_6(r))^2\right]r}{E_6(r)}dr +$$
$$+\frac{1(2-v_7-2v_7^{\ 2})}{E_7}\int_{r_6}^{r_7} rdr$$

(5.4.116)

Εκτελώντας τις ολοκληρώσεις και γνωρίζοντας ότι:

- $U_1 = \dfrac{r_1^{\ 2}}{r_7^{\ 2}}$
- $U_2 = \dfrac{(r_2^{\ 2} - r_1^{\ 2})}{r_7^{\ 2}}$
- $U_3 = \dfrac{(r_3^{\ 2} - r_2^{\ 2})}{r_7^{\ 2}}$
- $U_4 = \dfrac{(r_4^{\ 2} - r_3^{\ 2})}{r_7^{\ 2}}$
- $U_5 = \dfrac{(r_5^{\ 2} - r_4^{\ 2})}{r_7^{\ 2}}$
- $U_6 = \dfrac{(r_6^{\ 2} - r_5^{\ 2})}{r_7^{\ 2}}$
- $U_7 = \dfrac{(r_7^{\ 2} - r_6^{\ 2})}{r_7^{\ 2}}$

Θα έχουμε:

$$\frac{1}{2K_c} = \frac{U_1(1-v_1-2v_1^{\ 2})}{E_1} + \frac{2}{r_7^{\ 2}}\int_{r_1}^{r_2}\frac{\left[1-v_2(r)-2(v_2(r))^2\right]r}{E_2(r)}dr + \frac{U_3(1-v_3-2v_3^{\ 2})}{E_3} + $$
$$+\frac{2}{r_7^{\ 2}}\int_{r_3}^{r_4}\frac{\left[1-v_4(r)-2(v_4(r))^2\right]r}{E_4(r)}dr + \frac{U_5(1-v_5-2v_5^{\ 2})}{E_5} + \frac{2}{r_7^{\ 2}}\int_{r_5}^{r_6}\frac{\left[1-v_6(r)-2(v_6(r))^2\right]r}{E_6(r)}dr +$$
$$+\frac{U_7(1-v_7-2v_7^{\ 2})}{E_7}$$

(5.4.117)

Το μέτρο διόγκωσης για το σύνθετο υλικό μας γνωρίζουμε ότι είναι ίσο με [28]:

$$K_c = \frac{P}{\frac{\Delta V}{V}} = \frac{1}{2\left[\frac{1-v_{TT}}{E_T} - \frac{2v_{LT}^{\ 2}}{E_T}\right]} \tag{5.4.118}$$

Κάνοντας χρήση της σχέσης (5.4.117), η (5.4.118) θα γίνει:

$$\frac{1-v_{TT}}{E_T}-\frac{2v_{LT}^{\ 2}}{E_L}=\frac{U_1(1-v_1-2v_1^{\ 2})}{E_1}+\frac{2}{r_7^{\ 2}}\int_{r_1}^{r_2}\frac{\left[1-v_2(r)-2(v_2(r))^2\right]r}{E_2(r)}dr+\frac{U_3(1-v_3-2v_3^{\ 2})}{E_3}+$$
$$+\frac{2}{r_7^{\ 2}}\int_{r_3}^{r_4}\frac{\left[1-v_4(r)-2(v_4(r))^2\right]r}{E_4(r)}dr+\frac{U_5(1-v_5-2v_5^{\ 2})}{E_5}+\frac{2}{r_7^{\ 2}}\int_{r_5}^{r_6}\frac{\left[1-v_6(r)-2(v_6(r))^2\right]r}{E_6(r)}dr+$$
$$+\frac{U_7(1-v_7-2v_7^{\ 2})}{E_7}$$

(5.4.119)

Η σχέση (5.4.119) μας δίνει το εγκάρσιο μέτρο ελαστικότητας E_T. Οι συναρτήσεις $v_2(r), v_4(r), v_6(r), E_2(r), E_4(r), E_6(r)$ θεωρούμε ότι ακολουθούν την παραβολική μεταβολή που έχει βρεθεί ότι δίνει καλύτερα αποτελέσματα από την υπερβολική και την γραμμική μεταβολή [28]. Οι θεωρητικοί τύποι του διαμήκους μέτρου ελαστικότητας E_L και του διαμήκους λόγου Poisson v_{LT} έχουν υπολογιστεί στις προηγούμενες ενότητες ενώ ο εγκάρσιος λόγος Poisson θα υπολογιστεί στην επόμενη ενότητα.

5.5 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΕΓΚΑΡΣΙΟΥ ΛΟΓΟΥ POISSON v_{TT}

Τον εγκάρσιο λόγο Poisson του σύνθετου υλικού θα τον υπολογίσουμε από τον αντίστροφο νόμο των φάσεων με την χρήση του επταφασικού κυλινδρικού μοντέλου με ενδιάμεση φάση, από την σχέση:

$$\frac{1}{v_{TT}}=\frac{U_1}{v_1}+\frac{U_2}{v_2(r)}+\frac{U_3}{v_3}+\frac{U_4}{v_4(r)}+\frac{U_5}{v_5}+\frac{U_6}{v_6(r)}+\frac{U_7}{v_7} \qquad (5.5.1)$$

Γνωρίζουμε ότι:

$$U_2=\frac{(r_2^{\ 2}-r_1^{\ 2})}{r_7^{\ 2}}$$

$$U_4=\frac{(r_4^{\ 2}-r_3^{\ 2})}{r_7^{\ 2}}$$

$$U_6=\frac{(r_6^{\ 2}-r_5^{\ 2})}{r_7^{\ 2}}$$

Η σχέση (5.5.1) μπορεί να γραφτεί τώρα ως:

$$\frac{1}{v_{TT}}=\frac{U_1}{v_1}+\frac{r_2^{\,2}-r_1^{\,2}}{r_7^{\,2}}\frac{1}{v_2(r)}+\frac{U_3}{v_3}+\frac{r_4^{\,2}-r_3^{\,2}}{r_7^{\,2}}\frac{1}{v_4(r)}+\frac{U_5}{v_5}+\frac{r_6^{\,2}-r_5^{\,2}}{r_7^{\,2}}\frac{1}{v_6(r)}+\frac{U_7}{v_7}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{1}{v_{TT}}=\frac{U_1}{v_1}+\frac{1}{r_7^{\,2}}\int_{r_1}^{r_2}\frac{\left[(r+dr)^2-r^2\right]}{v_2(r)}dr+\frac{U_3}{v_3}+\frac{1}{r_7^{\,2}}\int_{r_3}^{r_4}\frac{\left[(r+dr)^2-r^2\right]}{v_4(r)}dr+\frac{U_5}{v_5}+$$

$$+\frac{1}{r_7^{\,2}}\int_{r_5}^{r_6}\frac{\left[(r+dr)^2-r^2\right]}{v_6(r)}dr+\frac{U_7}{v_7}\Rightarrow\frac{1}{v_{TT}}=\frac{U_1}{v_1}+\frac{2}{r_7^{\,2}}\int\frac{r}{v_2(r)}dr+\frac{U_3}{v_3}+\frac{2}{r_7^{\,2}}\int_{r_3}^{r_4}\frac{r}{v_4(r)}dr+$$

$$+\frac{U_5}{v_5}+\frac{2}{r_7^{\,2}}\int_{r_5}^{r_6}\frac{r}{v_6(r)}dr+\frac{U_7}{v_7}$$

Και άρα θα έχουμε τελικά:

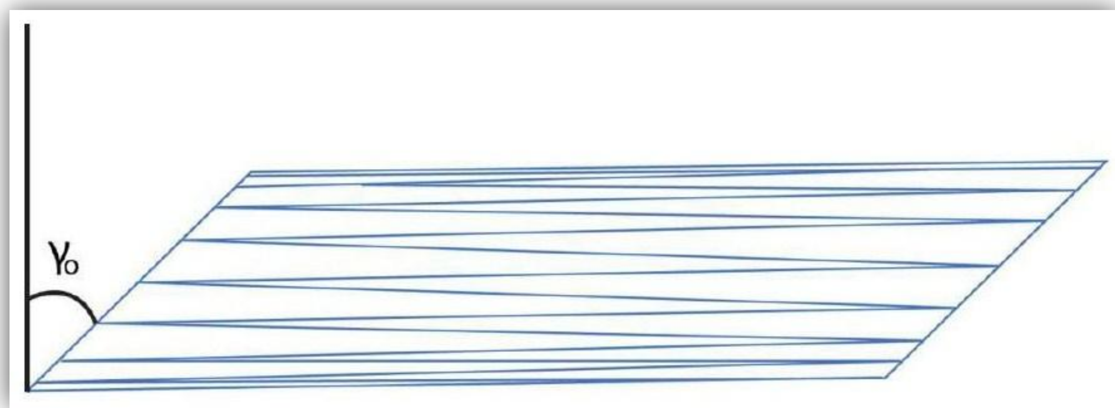
$$\frac{1}{v_{TT}}=\frac{U_1}{v_1}+\frac{2}{r_7^{\,2}}\int\frac{r}{v_2(r)}dr+\frac{U_3}{v_3}+\frac{2}{r_7^{\,2}}\int_{r_3}^{r_4}\frac{r}{v_4(r)}dr+\frac{U_5}{v_5}+\frac{2}{r_7^{\,2}}\int_{r_5}^{r_6}\frac{r}{v_6(r)}dr+\frac{U_7}{v_7} \qquad (5.5.2)$$

Οι συναρτήσεις $v_2(r), v_4(r), v_6(r)$ όπως και στις προηγούμενες ενότητες, θεωρούμε ότι ακολουθούν την παραβολική μεταβολή.

5.6 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΔΙΑΜΗΚΟΥΣ ΜΕΤΡΟΥ ΔΙΑΤΜΗΣΕΩΣ G_{LT}

Θεωρούμε το επταφασικό κυλινδρικό μοντέλο μας με ενδιάμεση φάση και έστω ότι ασκούμε μια διάτμηση γ_0 (Εικόνα 5.3).

Από τη θεωρία ελαστικότητας, οι μετατοπίσεις και οι τάσεις για το κυλινδρικό μοντέλο μας όταν υφίσταται διάτμηση γ_0 θα είναι [29]:



Εικόνα 5.3

ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΕΙΣ

$$u_{z,1} = \left(A_1 r + \frac{A_2}{r} \right) \cos\theta \tag{5.6.1}$$

$$u_{r,1} = A_3 z \cos\theta \tag{5.6.2}$$

$$u_{\theta,1} = -A_3 z \sin\theta \tag{5.6.3}$$

$$u_{z,2} = \left(B_1 r + \frac{B_2}{r} \right) \cos\theta \tag{5.6.4}$$

$$u_{r,2} = B_3 z \cos\theta \tag{5.6.5}$$

$$u_{\theta,2} = -B_3 z \sin\theta \tag{5.6.6}$$

$$u_{z,3} = \left(C_1 r + \frac{C_2}{r} \right) \cos\theta \tag{5.6.7}$$

$$u_{r,3} = C_3 z \cos\theta \tag{5.6.8}$$

$$u_{\theta,3} = -C_3 z \sin\theta \tag{5.6.9}$$

$$u_{z,4} = \left(D_1 r + \frac{D_2}{r} \right) \cos\theta \tag{5.6.10}$$

$$u_{r,4} = D_3 z \cos\theta \tag{5.6.11}$$

$$u_{\theta,4} = -D_3 z \sin\theta \tag{5.6.12}$$

$$u_{z,5} = \left(F_1 r + \frac{F_2}{r} \right) \cos\theta \tag{5.6.13}$$

$$u_{r,5} = F_3 z \cos\theta \tag{5.6.14}$$

$$u_{\theta,5} = -F_3 z \sin\theta \tag{5.6.15}$$

$$u_{z,6} = \left(K_1 r + \frac{K_2}{r} \right) \cos\theta \tag{5.6.16}$$

$$u_{r,6} = K_3 z \cos\theta \tag{5.6.17}$$

$$u_{\theta,6} = -K_3 z \sin\theta \tag{5.6.18}$$

$$u_{z,7} = \left(H_1 r + \frac{H_2}{r} \right) \cos\theta \tag{5.6.19}$$

$$u_{r,7} = H_3 z\cos\theta \tag{5.6.20}$$

$$u_{\theta,7} = -H_3 z\sin\theta \tag{5.6.21}$$

ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΙΣ

Οι παραμορφώσεις υπολογίζονται από τις σχέσεις:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}, \ \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \ \varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}\right],$$

$$\varepsilon_{rz} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial z}\right], \ \varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z}\right]$$

Άρα θα έχουμε:

$$\varepsilon_{r,1} = \varepsilon_{\theta,1} = \varepsilon_{r\theta,1} = 0, \ \varepsilon_{rz,1} = \frac{1}{2}\left[A_1 + A_3 - \frac{A_2}{r^2}\right]\cos\theta, \ \varepsilon_{\theta z,1} = -\frac{1}{2}\left[A_1 + A_3 + \frac{A_2}{r^2}\right]\sin\theta$$

(5.6.22.a,b,c)

$$\varepsilon_{r,2} = \varepsilon_{\theta,2} = \varepsilon_{r\theta,2} = 0, \ \varepsilon_{rz,2} = \frac{1}{2}\left[B_1 + B_3 - \frac{B_2}{r^2}\right]\cos\theta, \ \varepsilon_{\theta z,2} = -\frac{1}{2}\left[B_1 + B_3 + \frac{B_2}{r^2}\right]\sin\theta$$

(5.6.23.a,b,c)

$$\varepsilon_{r,3} = \varepsilon_{\theta,3} = \varepsilon_{r\theta,3} = 0, \ \varepsilon_{rz,3} = \frac{1}{2}\left[C_1 + C_3 - \frac{C_2}{r^2}\right]\cos\theta, \ \varepsilon_{\theta z,3} = -\frac{1}{2}\left[C_1 + C_3 + \frac{C_2}{r^2}\right]\sin\theta$$

(5.6.24.a,b,c)

$$\varepsilon_{r,4} = \varepsilon_{\theta,4} = \varepsilon_{r\theta,4} = 0, \varepsilon_{rz,4} = \frac{1}{2}\left[D_1 + D_3 - \frac{D_2}{r^2}\right]\cos\theta, \varepsilon_{\theta z,4} = -\frac{1}{2}\left[D_1 + D_3 + \frac{D_2}{r^2}\right]\sin\theta$$

(5.6.25.a,b,c)

$$\varepsilon_{r,5} = \varepsilon_{\theta,5} = \varepsilon_{r\theta,5} = 0, \ \varepsilon_{rz,5} = \frac{1}{2}\left[F_1 + F_3 - \frac{F_2}{r^2}\right]\cos\theta, \ \varepsilon_{\theta z,5} = -\frac{1}{2}\left[F_1 + F_3 + \frac{F_2}{r^2}\right]\sin\theta$$

(5.6.26.a,b,c)

$$\varepsilon_{r,6} = \varepsilon_{\theta,6} = \varepsilon_{r\theta,6} = 0, \varepsilon_{rz,6} = \frac{1}{2}\left[K_1 + K_3 - \frac{K_2}{r^2}\right]\cos\theta,$$

$$\varepsilon_{\theta z,6} = -\frac{1}{2}\left[K_1 + K_3 + \frac{K_2}{r^2}\right]\sin\theta$$

(5.6.27.a,b,c)

$$\varepsilon_{r,7} = \varepsilon_{\theta,7} = \varepsilon_{r\theta,7} = 0 \;\; \varepsilon_{rz,7} = \frac{1}{2}\left[H_1 + H_3 - \frac{H_2}{r^2}\right]\cos\theta \;\; \varepsilon_{\theta z,7} = -\frac{1}{2}\left[H_1 + H_3 + \frac{H_2}{r^2}\right]\sin\theta$$

(5.6.28.a,b,c)

ΤΑΣΕΙΣ

Οι τάσεις υπολογίζονται από τις σχέσεις τάσεων-παραμορφώσεων:

$\sigma_{rz} = 2G\varepsilon_{rz}$, $\sigma_{r\theta} = 2G\varepsilon_{r\theta}$, $\sigma_{\theta z} = 2G\varepsilon_{\theta z}$

$$\sigma_{rz,1} = G_1(A_1 + A_3 - \frac{A_2}{r^2})\cos\theta \tag{5.6.29}$$

$$\sigma_{\theta z,1} = -G_1(A_1 + A_3 + \frac{A_2}{r^2})\sin\theta \tag{5.6.30}$$

$$\sigma_{rz,2} = G_2(B_1 + B_3 - \frac{B_2}{r^2})\cos\theta \tag{5.6.31}$$

$$\sigma_{\theta z,2} = -G_2(B_1 + B_3 + \frac{B_2}{r^2})\sin\theta \tag{5.6.32}$$

$$\sigma_{rz,3} = G_3(C_1 + C_3 - \frac{C_2}{r^2})\cos\theta \tag{5.6.33}$$

$$\sigma_{\theta z,3} = -G_3(C_1 + C_3 + \frac{C_2}{r^2})\sin\theta \tag{5.6.34}$$

$$\sigma_{rz,4} = G_4(D_1 + D_3 - \frac{D_2}{r^2})\cos\theta \tag{5.6.35}$$

$$\sigma_{\theta z,4} = -G_4(D_1 + D_3 + \frac{D_2}{r^2})\sin\theta \tag{5.6.36}$$

$$\sigma_{rz,5} = G_5(F_1 + F_3 - \frac{F_2}{r^2})\cos\theta \tag{5.6.37}$$

$$\sigma_{\theta z,5} = -G_5(F_1 + F_3 + \frac{F_2}{r^2})\sin\theta \tag{5.6.38}$$

$$\sigma_{rz,6} = G_6(K_1 + K_3 - \frac{K_2}{r^2})\cos\theta \tag{5.6.39}$$

$$\sigma_{\theta z,6} = -G_6(K_1 + K_3 + \frac{K_2}{r^2})\sin\theta \tag{5.6.40}$$

$$\sigma_{rz,7} = G_7(H_1 + H_3 - \frac{H_2}{r^2})\cos\theta \quad (5.6.41)$$

$$\sigma_{\theta z,7} = -G_7(H_1 + H_3 + \frac{H_2}{r^2})\sin\theta \quad (5.6.42)$$

Επίσης ισχύει ότι:

$$\sigma_{rr,i} = \sigma_{\theta\theta,i} = \sigma_{zz,i} = 0 \quad \forall i = 1,2,3,4,5,6,7 \quad (5.4.43)$$

Για να αποφύγουμε τον απειρισμό των τάσεων στη θέση $r = 0$ θα πρέπει η σταθερά A_2 να είναι ίση με το μηδέν δηλαδή $A_2 = 0$. Επίσης στο σύνορο της έβδομης φάσης, εκεί δηλαδή που επιδρά η διάτμηση γ_0, η ακτινική μετατόπιση ισούται με $\gamma_0 z\cos\theta$. Άρα από την σχέση (5.6.20) προκύπτει ότι:

$$H_3 z\cos\theta = \gamma_0 z\cos\theta \Rightarrow H_3 = \gamma_0 \quad (5.6.44)$$

<u>ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΤΑΣΕΩΝ</u>

Οι συνοριακές συνθήκες για τις τάσεις είναι:

Για $r = r_1$: $\sigma_{rz,1} = \sigma_{rz,2}$ και άρα θα έχουμε

$$G_1(A_1 + A_3) = G_2(B_1 + B_3 - \frac{B_2}{r_1^{\;2}}) \quad (5.6.45)$$

Για $r = r_2$: $\sigma_{rz,2} = \sigma_{rz,3}$ και άρα θα έχουμε

$$G_2(B_1 + B_3 - \frac{B_2}{r_2^{\;2}}) = G_3(C_1 + C_3 - \frac{C_2}{r_2^{\;2}}) \quad (5.6.46)$$

Για $r = r_3$: $\sigma_{rz,3} = \sigma_{rz,4}$ και άρα θα έχουμε

$$G_3(C_1 + C_3 - \frac{C_2}{r_3^{\;2}}) = G_4(D_1 + D_3 - \frac{D_2}{r_3^{\;2}}) \quad (5.6.47)$$

Για $r = r_4$: $\sigma_{rz,4} = \sigma_{rz,5}$ και άρα θα έχουμε

$$G_4(D_1 + D_3 - \frac{D_2}{r_4^{\;2}}) = G_5(F_1 + F_3 - \frac{F_2}{r_4^{\;2}}) \quad (5.6.48)$$

Για $r = r_5$: $\sigma_{rz,5} = \sigma_{rz,6}$ και άρα θα έχουμε

$$G_5(F_1 + F_3 - \frac{F_3}{r_5^{\ 2}}) = G_6(K_1 + K_3 - \frac{K_2}{r_5^{\ 2}}) \quad (5.6.49)$$

Για $r = r_6$: $\sigma_{rz,6} = \sigma_{rz,7}$ και άρα θα έχουμε

$$G_6(K_1 + K_3 - \frac{K_2}{r_6^{\ 2}}) = G_7(H_1 + H_3 - \frac{H_2}{r_6^{\ 2}}) \quad (5.6.50)$$

Όπου G_2, G_4, G_6 θεωρούμε τους μέσους όρους των συναρτήσεων $G_2(r), G_4(r), G_6(r)$ αντίστοιχα, θεωρώντας ότι ακολουθούν την παραβολική μεταβολή με την μέγιστη επίδραση της μήτρας και του εγκλείσματος στα σύνορα με την ενδιάμεση φάση.

ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΕΩΝ

Οι συνοριακές συνθήκες για τις μετατοπίσεις θα είναι:

Για $r = r_1$: $u_{r,1} = u_{r,2}$ και $u_{z,1} = u_{z,2}$ θα έχουμε:

$$A_3 = B_3 \quad (5.6.51)$$

$$A_1 = B_1 + \frac{B_2}{r_1^{\ 2}} \quad (5.6.52)$$

Για $r = r_2$: $u_{r,2} = u_{r,3}$ και $u_{z,2} = u_{z,3}$ θα έχουμε:

$$B_3 = C_3 \quad (5.6.53)$$

$$B_1 + \frac{B_2}{r_2^{\ 2}} = C_1 + \frac{C_2}{r_2^{\ 2}} \quad (5.6.54)$$

Για $r = r_3$: $u_{r,3} = u_{r,4}$ και $u_{z,3} = u_{z,4}$ θα έχουμε:

$$C_3 = D_3 \quad (5.6.55)$$

$$C_1 + \frac{C_2}{r_3^{\ 2}} = D_1 + \frac{D_2}{r_3^{\ 2}} \quad (5.6.56)$$

Για $r = r_4$: $u_{r,4} = u_{r,5}$ και $u_{z,4} = u_{z,5}$ θα έχουμε:

$$D_3 = F_3 \quad (5.6.57)$$

$$D_1 + \frac{D_2}{r_4^{\,2}} = F_1 + \frac{F_2}{r_4^{\,2}} \tag{5.6.58}$$

Για $r = r_5$: $u_{r,5} = u_{r,6}$ και $u_{z,5} = u_{z,6}$ θα έχουμε:

$$F_3 = K_3 \tag{5.6.59}$$

$$F_1 + \frac{F_2}{r_5^{\,2}} = K_1 + \frac{K_2}{r_5^{\,2}} \tag{5.6.60}$$

Για $r = r_6$: $u_{r,6} = u_{r,7}$ και $u_{z,6} = u_{z,7}$ θα έχουμε:

$$K_3 = H_3 \tag{5.6.61}$$

$$K_1 + \frac{K_2}{r_6^{\,2}} = H_1 + \frac{H_2}{r_6^{\,2}} \tag{5.6.62}$$

Για $r = r_7$: $u_{r,6} = u_{r,7}$ και $u_{z,6} = u_{z,7}$ θα έχουμε:

$$H_3 = \gamma_0 \tag{5.6.63}$$

$$H_1 + \frac{H_2}{r_7^{\,2}} = 0 \tag{5.6.64}$$

Οι εξισώσεις (5.6.45)-(5.6.64) αποτελούν ένα σύστημα 20 εξισώσεων με 20 αγνώστους του οποίου η λύση δίνει τις τιμές των σταθερών $A_1, A_3, B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3, D_1, D_2, D_3, F_1, F_2, F_3, K_1, K_2, K_3, H_1, H_2, H_3$. Οι τιμές αυτές θα προκύψουν ως συνάρτηση των σταθερών μεγεθών $G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6, G_7, \gamma_0$ και των ακτινών $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7$. Επειδή όμως με την αλλαγή της κατ' όγκο περιεκτικότητας του εγκλείσματος αλλάζουν και οι τιμές των ακτινών αλλά και των μέσων όρων των συναρτήσεων $G_2(r), G_4(r), G_6(r)$ έπεται ότι και οι σταθερές $A_1, A_3, B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3, D_1, D_2, D_3, F_1, F_2, F_3, K_1, K_2, K_3, H_1, H_2, H_3$ θα αλλάζουν επίσης. Αρχικά εύκολα μπορούμε να δούμε ότι $A_3 = B_3 = C_3 = D_3 = F_3 = K_3 = H_3 = \gamma_0$.

Για τον υπολογισμό του διαμήκους μέτρου διατμήσεως G_{LT} του σύνθετου υλικού, θεωρούμε ότι η ενέργεια παραμόρφωσης του υλικού ισούται με το άθροισμα των ενεργειών παραμόρφωσης και των επτά φάσεων από τις οποίες αποτελείται. Λαμβάνοντας υπόψη και την σχέση (5.6.43) έχουμε:

$$\frac{1}{2}\int_{V_c} G_{LT}\gamma_0{}^2 dV_c = \frac{1}{2}\int_{V_1}(\sigma_{rz,1}\gamma_{rz,1}+\sigma_{\theta z,1}\gamma_{\theta z,1})dV_1 + \frac{1}{2}\int_{V_2}(\sigma_{rz,2}\gamma_{rz,2}+\sigma_{\theta z,2}\gamma_{\theta z,2})dV_2 +$$
$$+\frac{1}{2}\int_{V_3}(\sigma_{rz,3}\gamma_{rz,3}+\sigma_{\theta z,3}\gamma_{\theta z,3})dV_3 + \frac{1}{2}\int_{V_4}(\sigma_{rz,4}\gamma_{rz,4}+\sigma_{\theta z,4}\gamma_{\theta z,4})dV_4$$
$$+\frac{1}{2}\int_{V_5}(\sigma_{rz,5}\gamma_{rz,5}+\sigma_{\theta z,5}\gamma_{\theta z,5})dV_5 + \frac{1}{2}\int_{V_6}(\sigma_{rz,6}\gamma_{rz,6}+\sigma_{\theta z,6}\gamma_{\theta z,6})dV_6$$
$$+\frac{1}{2}\int_{V_7}(\sigma_{rz,7}\gamma_{rz,7}+\sigma_{\theta z,7}\gamma_{\theta z,7})dV_7$$

(5.6.65)

Όπου $dV = 2\pi rhdrd\theta$

Η παραπάνω σχέση (5.6.65) μετατρέπεται ως εξής:

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{r_7} G_{LT}\gamma_0{}^2 2\pi rhdrd\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{r_1}(\sigma_{rz,1}\gamma_{rz,1}+\sigma_{\theta z,1}\gamma_{\theta z,1})2\pi rhdrd\theta +$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_{r_1}^{r_2}(\sigma_{rz,2}\gamma_{rz,2}+\sigma_{\theta z,2}\gamma_{\theta z,2})2\pi rhdrd\theta +$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_{r_2}^{r_3}(\sigma_{rz,3}\gamma_{rz,3}+\sigma_{\theta z,3}\gamma_{\theta z,3})2\pi rhdrd\theta +$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_{r_3}^{r_4}(\sigma_{rz,4}\gamma_{rz,4}+\sigma_{\theta z,4}\gamma_{\theta z,4})2\pi rhdrd\theta +$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_{r_4}^{r_5}(\sigma_{rz,5}\gamma_{rz,5}+\sigma_{\theta z,5}\gamma_{\theta z,5})2\pi rhdrd\theta +$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_{r_5}^{r_6}(\sigma_{rz,6}\gamma_{rz,6}+\sigma_{\theta z,6}\gamma_{\theta z,6})2\pi rhdrd\theta +$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_{r_6}^{r_7}(\sigma_{rz,7}\gamma_{rz,7}+\sigma_{\theta z,7}\gamma_{\theta z,7})2\pi rhdrd\theta \qquad (5.6.66)$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι $\gamma = \sigma/G$ και αντικαθιστώντας στην σχέση (5.6.63) τις εκφράσεις των τάσεων σ_{rz} και $\sigma_{\theta z}$ από τις σχέσεις (5.6.29)-(5.6.42) προκύπτει ότι:

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{r_7} G_{LT}\gamma_0{}^2 2\pi r dr d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{r_1}\left[G_1(A_1+\gamma_0)^2(\cos\theta)^2+G_2(A_1+\gamma_0)^2(\sin\theta)^2\right] r dr d\theta +$$

$$\int_0^{2\pi}\int_{r_1}^{r_2}\left[G_2(B_1+\gamma_0-\frac{B_2}{r^2})^2(\cos\theta)^2+G_2(B_1+\gamma_0+\frac{B_2}{r^2})^2(\sin\theta)^2\right] r dr d\theta +$$

$$\int_0^{2\pi}\int_{r_2}^{r_3}\left[G_3(C_1+\gamma_0-\frac{C_2}{r^2})^2(\cos\theta)^2+G_3(C_1+\gamma_0+\frac{C_2}{r^2})^2(\sin\theta)^2\right] r dr d\theta +$$

$$\int_0^{2\pi}\int_{r_3}^{r_4}\left[G_4(D_1+\gamma_0-\frac{D_2}{r^2})^2(\cos\theta)^2+G_4(D_1+\gamma_0+\frac{D_2}{r^2})^2(\sin\theta)^2\right] r dr d\theta +$$

$$\int_0^{2\pi}\int_{r_4}^{r_5}\left[G_5(F_1+\gamma_0-\frac{F_2}{r^2})^2(\cos\theta)^2+G_5(F_1+\gamma_0+\frac{F_2}{r^2})^2(\sin\theta)^2\right] r dr d\theta +$$

$$\int_0^{2\pi}\int_{r_5}^{r_6}\left[G_6(K_1+\gamma_0-\frac{K_2}{r^2})^2(\cos\theta)^2+G_6(K_1+\gamma_0+\frac{K_2}{r^2})^2(\sin\theta)^2\right] r dr d\theta +$$

$$\int_0^{2\pi}\int_{r_6}^{r_7}\left[G_7(H_1+\gamma_0-\frac{H_2}{r^2})^2(\cos\theta)^2+G_7(H_1+\gamma_0+\frac{H_2}{r^2})^2(\sin\theta)^2\right] r dr d\theta \quad (5.6.67)$$

Εκτελώντας τις διπλές ολοκληρώσεις θα έχουμε:

$$G_{LT}\gamma_0{}^2 r_5{}^2 = G_1 r_1{}^2(A_1+\gamma_0)^2 + G_2(r_2{}^2-r_1{}^2)\left[(B_1+\gamma_0)^2+\frac{B_2{}^2}{r_1 r_2}\right]+$$
$$+G_3(r_3{}^2-r_2{}^2)\left[(C_1+\gamma_0)^2+\frac{C_2{}^2}{r_2 r_3}\right]+$$
$$+G_4(r_4{}^2-r_3{}^2)\left[(D_1+\gamma_0)^2+\frac{D_2{}^2}{r_3 r_4}\right]+$$
$$+G_5(r_5{}^2-r_4{}^2)\left[(F_1+\gamma_0)^2+\frac{F_2{}^2}{r_4 r_5}\right]+$$
$$+G_6(r_6{}^2-r_5{}^2)\left[(K_1+\gamma_0)^2+\frac{K_2{}^2}{r_5 r_6}\right]+$$
$$+G_7(r_7{}^2-r_6{}^2)\left[(H_1+\gamma_0)^2+\frac{H_2{}^2}{r_6 r_7}\right] \quad (5.6.68)$$

Διαιρούμε τέλος και τα δύο μέλη της παραπάνω σχέσης με $r_5{}^2$ και γ_0 (το γ_0 απλοποιείται από όλες τις σταθερές $A_1, B_1, B_2, C_1, C_2, D_1, D_2, F_1, F_2, K_1, K_2, H_1, H_2$ και προκύπτει η τελική έκφραση για το G_{LT} ως εξής:

$$
\begin{aligned}
G_{LT} = G_1U_1(A_1+1)^2 + G_2U_2\left[(B_1+1)^2+\frac{B_2}{r_1r_2}\right] &+ \\
+G_3U_3\left[(C_1+1)^2+\frac{C_2}{r_2r_3}\right] &+ \\
+G_4U_4\left[(D_1+1)^2+\frac{D_2}{r_3r_4}\right] &+ \\
+G_5U_5\left[(F_1+1)^2+\frac{F_2}{r_4r_5}\right] &+ \\
+G_6U_6\left[(K_1+1)^2+\frac{K_2}{r_5r_6}\right] &+ \\
+G_7U_7\left[(H_1+1)^2+\frac{H_2}{r_6r_7}\right] &
\end{aligned} \tag{5.6.69}
$$

Όπου:

- $U_1 = \dfrac{r_1^{\,2}}{r_7^{\,2}}$
- $U_2 = \dfrac{(r_2^{\,2}-r_1^{\,2})}{r_7^{\,2}}$
- $U_3 = \dfrac{(r_3^{\,2}-r_2^{\,2})}{r_7^{\,2}}$
- $U_4 = \dfrac{(r_4^{\,2}-r_3^{\,2})}{r_7^{\,2}}$
- $U_5 = \dfrac{(r_5^{\,2}-r_4^{\,2})}{r_7^{\,2}}$
- $U_6 = \dfrac{(r_6^{\,2}-r_5^{\,2})}{r_7^{\,2}}$
- $U_7 = \dfrac{(r_7^{\,2}-r_6^{\,2})}{r_7^{\,2}}$

5.7 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ $E_\theta, v_\theta, G_\theta$.

Σε αυτή την ενότητα θα παρουσιάσουμε τους θεωρητικούς τύπους για το μέτρο ελαστικότητας, το μέτρο διατμήσεως και το λόγο Poisson, υπό γωνία φόρτισης θ. Η γωνία θ, είναι η γωνία που σχηματίζει ο άξονας φορτίσεως με την διεύθυνση των ινών. Οι σχέσεις που χρησιμοποιούμε είναι οι ακόλουθες [30]:

Για το μέτρο ελαστικότητας E_θ υπό γωνία φόρτισης θ θα έχουμε:

$$\frac{1}{E_\theta} = \frac{1}{E_L}(\cos\theta)^4 + \left(\frac{1}{G_{LT}} - \frac{2v_{LT}}{E_L}\right)(\sin\theta)^2(\cos\theta)^2 + \frac{1}{E_T}(\sin\theta)^4 \tag{5.7.1}$$

Για το μέτρο διατμήσεως G_θ υπό γωνία φόρτισης θ θα έχουμε:

$$\frac{1}{G_\theta} = 2\left(\frac{2}{E_L} + \frac{2}{E_T} + \frac{4v_{LT}}{E_L} - \frac{1}{G_{LT}}\right)(\sin\theta)^2(\cos\theta)^2 + \frac{1}{G_{LT}}\left[(\sin\theta)^4 + (\cos\theta)^4\right] \tag{5.7.2}$$

Για τον λόγο Poisson v_θ υπό γωνία φόρτισης θ θα έχουμε:

$$v_\theta = E_\theta\left[\frac{v_{LT}}{E_L}\left[(\sin\theta)^4 + (\cos\theta)^4\right] - \left(\frac{1}{E_L} + \frac{1}{E_T} - \frac{1}{G_{LT}}\right)(\sin\theta)^2(\cos\theta)^2\right] \tag{5.7.3}$$

Στο επόμενο κεφάλαιο η εφαρμογή των εκφράσεων που παρουσιάστηκαν παραπάνω για τα $E_\theta, v_\theta, G_\theta$ θα γίνει για κατ' όγκο περιεκτικότητα σε έγκλεισμα 0,65 [6] και άρα και τα μεγέθη E_L, E_T, G_{LT}, v_{LT} θα είναι υπολογισμένα στην συγκεκριμένη περιεκτικότητα.

5.8 ΜΟΝΤΕΛΑ ΚΑΙ ΕΚΦΡΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΙΣ ΕΛΑΣΤΙΚΕΣ ΣΤΑΘΕΡΕΣ ΚΑΙ ΤΟΥΣ ΛΟΓΟΥΣ POISSON ΙΝΩΔΩΝ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

Στη συνέχεια παραθέτουμε θεωρητικές σχέσεις που κατά καιρούς έχουν εκφράσει διάφοροι ερευνητές για τον υπολογισμό του διαμήκους μέτρου ελαστικότητας E_L ,του διαμήκη λόγου Poisson v_L, του εγκάρσιου μέτρου ελαστικότητας E_T και του διαμήκους μέτρου διάτμησης G_{LT}. Να αναφέρουμε κατά τα γνωστά πως ο δείκτης f δηλώνει το έγκλεισμα(filler) ενώ ο δείκτης ο m δηλώνει την μήτρα(matrix).

5.8.1 ΤΥΠΟΙ ΔΙΑΜΗΚΟΥΣ ΜΕΤΡΟΥ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ E_L

Εξίσωση Θεοχάρη-Σιδερίδη-Παπανικολάου[27]:

Οι παραπάνω ερευνητές θεώρησαν την ύπαρξη μιας ενδιάμεσης φάσης η οποία δημιουργείται ανάμεσα στην μήτρα και στο έγκλεισμα. Το μοντέλο τους είναι κυλινδρικό τριφασικό και η κατανομή του διαμήκους μέτρου ελαστικότητας της ενδιάμεσης φάσης στον παρακάτω τύπο επιλέχθηκε να είναι παραβολική.

$$E_L = E_f U_f + E_m U_m + \frac{3(E_f + E_m)(1-U_m)^{\frac{3}{2}} + U_f^{\frac{1}{2}}(1-U_m) + U_f(1-U_m)^{\frac{1}{2}} + U_f^{\frac{3}{2}}}{6\left[(1-U_m)^{\frac{1}{2}} - U_f^{\frac{1}{2}}\right]} +$$
$$+ \frac{8(E_f - E_m)(1-U_m)^{\frac{1}{2}}\left\{1 - U_m + U_f + \left[U_f(1-U_m)\right]^{\frac{1}{2}}\right\}}{6\left[(1-U_m)^{\frac{1}{2}} - U_f^{\frac{1}{2}}\right]} +$$
$$+ \frac{6\left\{E_f(1-U_m) + E_m U_f - 2E_m\left[U_f(1-U_m)\right]^{\frac{1}{2}}\left[(1-U_m)^{\frac{1}{2}} + U_f^{\frac{1}{2}}\right]\right\}}{\left[(1-U_m)^{\frac{1}{2}} - U_f^{\frac{1}{2}}\right]} \tag{5.8.1}$$

Όπου εδώ λόγω της ενδιάμεσης φάσης: $U_m = 1 - U_f - U_i$

Νόμος των φάσεων (mixture law):

$$E_L = E_f U_f + E_m U_m \tag{5.8.2}$$

Εξίσωση Ekvall [31]:

$$E_L = E_f U_f + E_{m'} U_m \tag{5.8.3}$$

Όπου $E_{m'} = \dfrac{E_m}{(1-2v_m)^2}$

5.8.2 ΤΥΠΟΙ ΔΙΑΜΗΚΟΥΣ ΛΟΓΟΥ POISSON v_{LT}

Εξίσωση Θεοχάρη-Σιδερίδη-Παπανικολάου [27]:

Θεωρώντας και πάλι το κυλινδρικό τριφασικό μοντέλο με την ενδιάμεση φάση και χρησιμοποιώντας την παραβολική μεταβολή, οι παραπάνω ερευνητές έδειξαν ότι ισχύει η εξής σχέση:

$$v_{LT} = v_f U_f + v_m U_m + \frac{3(v_f + v_m)(1-U_m)^{\frac{3}{2}} + U_f^{\frac{1}{2}}(1-U_m) + U_f(1-U_m)^{\frac{1}{2}} + U_f^{\frac{3}{2}}}{6\left[(1-U_m)^{\frac{1}{2}} - U_f^{\frac{1}{2}}\right]} +$$

$$+ \frac{8(v_f - v_m)(1-U_m)^{\frac{1}{2}}\left\{1 - U_m + U_f + \left[U_f(1-U_m)\right]^{\frac{1}{2}}\right\}}{6\left[(1-U_m)^{\frac{1}{2}} - U_f^{\frac{1}{2}}\right]} +$$

$$+ \frac{6\left\{v_f(1-U_m) + v_m U_f - 2v_m\left[U_f(1-U_m)\right]^{\frac{1}{2}}\left[(1-U_m)^{\frac{1}{2}} + U_f^{\frac{1}{2}}\right]\right\}}{\left[(1-U_m)^{\frac{1}{2}} - U_f^{\frac{1}{2}}\right]}$$

(5.8.4)

Όπου εδώ λόγω της ενδιάμεσης φάσης: $U_m = 1 - U_f - U_i$

Νόμος των φάσεων (mixture law):

$$v_{LT} = v_f U_f + v_m U_m \qquad (5.8.5)$$

Εξίσωση Rosen [32]:

$$v_{LT} = \frac{U_f E_f L_1 + U_m E_m L_2 v_m}{U_f E_f L_3 + U_m E_m L_2} \qquad (5.8.6)$$

Όπου:

$$L_1 = 2v_f(1 - v_m^2)U_f + v_m(1 + v_m)U_m$$

$$L_2 = U_f(1 - v_f - 2v_f^2)U_f + (1 + v_m)U_m$$

$$L_3 = 2(1 - v_m^2)U_f + (1 + v_m)U_m$$

5.8.3 ΤΥΠΟΙ ΕΓΚΑΡΣΙΟΥ ΜΕΤΡΟΥ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ E_T

Εξίσωση Σιδερίδη [28]:

Θεωρώντας την ύπαρξη ενδιάμεσης φάσης στο κυλινδρικό τριφασικό μοντέλο και έστω ότι $E_i(r)$ και $v_i(r)$ οι συναρτήσεις που περιγράφουν το μέτρο ελαστικότητας και τον λόγο Poisson της ενδιάμεσης φάσης αντίστοιχα με βάση την παραβολική μεταβολή, τότε το εγκάρσιο μέτρο ελαστικότητας του μοντέλου E_T θα είναι:

$$\frac{1-v_{TT}}{E_T}-\frac{2v_{LT}{}^2}{E_L}=\frac{1}{E_f}(1-v_f-2v_f{}^2)U_f+\frac{1}{E_m}(1-v_m-2v_m{}^2)U_m+ \\ +\frac{2U_f}{a^2}\int_a^b\frac{(1-v_i(r)-2v_i{}^2(r))}{E_i(r)}rdr \tag{5.8.7}$$

Όπου τα E_L και τα v_{LT} δίνονται από τις σχέσεις (5.8.1) και (5.8.4). Και εδώ πάλι λόγω της ενδιάμεσης φάσης θα ισχύει ότι $U_m=1-U_f-U_i$

Εξίσωση Paul [33]:

Η εξίσωση του Paul αποτελεί ένα ελάχιστο όριο για το E_T και είναι η εξής:

$$\frac{1}{E_T}=\frac{U_f}{E_f}+\frac{U_m}{E_m} \tag{5.8.8}$$

Εξίσωση Whitney-Riley [34]:

$$E_T=\frac{2K_c(1-v_T)E_L}{E_L+4K_cv_L{}^2} \tag{5.8.9}$$

Όπου K_c το μέτρο διογκώσεως του σύνθετου υλικού και ισχύει η σχέση:

$$K_c=\frac{(k_f+G_m)k_m-(k_f-k_m)G_mU_f}{(k_f+G_m)-(k_f-k_m)U_f}$$

με $k_f=\dfrac{E_f}{(1-v_f-2v_f{}^2)}$ και $k_m=\dfrac{E_m}{(1-v_m-2v_m{}^2)}$

Εξίσωση Ekvall [35]:

$$E_T=\frac{E_fE_{m'}}{U_fE_{m'}+U_mE_f(1-v_m{}^2)} \tag{5.8.10}$$

Όπου $E_{m'} = \dfrac{E_m}{(1-2v_m)^2}$

Εξίσωση Tsai-Hahn [52]:

$$\frac{1}{E_T} = \frac{1}{U_f + n_2 U_m}\left[\frac{U_f}{E_f} + \frac{n_2 U_m}{E_m}\right] \qquad \text{όπου } n_2 = 0.50 \tag{5.8.11}$$

Εξίσωση Halpin-Tsai [52]:

$$E_T = E_m\left(\frac{1+\xi n U_f}{1-nU_f}\right) \qquad \text{όπου } n = \frac{E_f/E_m - 1}{E_f/E_m + \xi} \qquad \text{και } \xi=2 \tag{5.8.12}$$

5.8.4 ΤΥΠΟΙ ΔΙΑΜΗΚΟΥΣ ΜΕΤΡΟΥ ΔΙΑΤΜΗΣΕΩΣ G_{LT}

Εξίσωση Σιδερίδη [29]:

Θεωρείται από τον ερευνητή το τριφασικό μοντέλο με την ενδιάμεση φάση, όπου με $G_i(r)$ συμβολίζεται το διάμηκες μέτρο διατμήσεως της ενδιάμεσης φάσης το οποίο περιγράφεται με την παραβολική μεταβολή. Το διάμηκες μέτρο διατμήσεως G_{LT} θα είναι:

$$G_{LT}\gamma_0 = G_f(A+\gamma_0)^2 U_f + \frac{2U_f}{a^2}\int_a^b G_i(r)(D+\gamma_0)^2 r dr + G_m\left[(K+\gamma_0)^2 + \frac{K^2}{1-U_m}\right]U_m \tag{5.8.13}$$

Όπου $A = D = \dfrac{(G_m - G_i)(c^2 - b^2)}{(G_m + G_i)b^2 - (G_i - G_m)b^2}\gamma_0$, $K = \dfrac{(G_i - G_m)b^2}{(G_m + G_i)b^2 - (G_i - G_m)b^2}\gamma_0$

και $U_m = 1 - U_f - U_i$

Νόμος των φάσεων (mixture law):

$$G_{LT} = \frac{G_f G_m}{G_f U_m + G_m U_f} \tag{5.8.14}$$

Εξίσωση Hashin-Rosen [38]:

Οι Hashin και Rosen έδωσαν μια έκφραση η οποία αποτελεί ένα κάτω όριο για το G_{LT} και είναι η εξής:

$$G_{LT} = G_m \frac{(1+U_f)G_f + G_m U_m}{(1+U_f)G_m + G_f U_m} \tag{5.8.15}$$

Εξίσωση Hashin [39]:

Ο Hashin έδωσε επίσης μια έκφραση που αποτελεί ένα άνω όριο για το G_{LT} και είναι η εξής:

$$G_{LT} = G_f \frac{(1+U_m)G_m + G_f U_f}{(1+U_m)G_f + G_m U_f} \tag{5.8.16}$$

Εξίσωση Ekvall-Greszcuk [36],[37]:

$$G_{LT} = \frac{G_m G_f}{G_f U_m + G_m U_f} \tag{5.8.17}$$

Εξίσωση Tsai-Hahn [52]:

$$\frac{1}{G_{LT}} = \frac{1}{U_f + n_2 U_m}\left[\frac{U_f}{G_f} + \frac{n_2 U_m}{G_m}\right] \qquad \text{όπου } n_2 = 0.50 \tag{5.8.18}$$

Εξίσωση Halpin-Tsai [52]:

$$G_{LT} = G_m\left(\frac{1+\xi n U_f}{1-nU_f}\right) \qquad \text{όπου } n = \frac{G_f/G_m - 1}{G_f/G_m + \xi} \qquad \text{και } \xi = 2 \tag{5.8.19}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6:ΣΥΓΚΡΙΤΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ ΚΑΙ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

6.1 ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ, ΥΛΙΚΑ ΚΑΙ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ

Για τον υπολογισμό των ελαστικών σταθερών και των λόγων Poisson, μέσω των θεωρητικών σχέσεων που εξήχθησαν στο προηγούμενο κεφάλαιο, χρησιμοποιήσαμε το πρόγραμμα "Microsoft Excel 2007". Στο υπολογιστικό φύλλο του "Microsoft Excel" δημιουργήθηκε μια κύρια γραμμή με τις επιτρεπτές κατ' όγκο περιεκτικότητες U_f του εγκλείσματος και με βάση αυτή την γραμμή υπολογίστηκαν οι υπόλοιποι τύποι με την χρήση συναρτήσεων και την δυνατότητα συσχέτισης μεταξύ των κελιών από το πρόγραμμα. Αυτό είχε σαν αποτέλεσμα τον υπολογισμό των ελαστικών σταθερών και λόγων Poisson του σύνθετου υλικού , με βάση το κυλινδρικό επταφασικό μοντέλο, για κάθε διαφορετική περιεκτικότητα σε έγκλεισμα.

Οι υπολογισμοί των ορισμένων ολοκληρωμάτων ,της θεωρητικής σχέσης (5.4.120) για την εύρεση του εγκάρσιου μέτρου ελαστικότητας E_T, και της θεωρητικής σχέσης (5.5.2) για τον προσδιορισμό του εγκάρσιου λόγου Poisson v_{TT}, έγιναν με το πρόγραμμα Mathematica 10.2 και Matlab 2011.

Τα υλικά των οποίων τα στοιχεία έχουν χρησιμοποιηθεί σ' αυτήν την μελέτη για τον υπολογισμό των ελαστικών σταθερών και των λόγων Poisson από τους θεωρητικούς τύπους που εξήχθησαν στο κεφάλαιο 5, είναι ινώδη σύνθετα υλικά μονής κατεύθυνσης. Τα υλικά αυτά αποτελούνται από μία εποξειδική μήτρα(Permaglass XE5/1, Permali Ltd.,U.K) ενισχυμένη με συνεχείς ίνες γυαλιού τύπου-Ε. Το υλικό της μήτρας βασίσθηκε σε διγλυκιδυλαιθέρα της δισφαινόλης Α, συνδυασμένο με σκληρυντή από αρωματική αμίνη(Araldite My 750/HT972, Ciba-Geigy, U.K). Οι ίνες γυαλιού είχαν διάμετρο $1{,}2 \times 10^{-5} m$. Οι τιμές των ελαστικών σταθερών και των λόγων Poisson της μήτρας αλλά και των ινών γυαλιού που χρησιμοποιήθηκαν δίνονται στο **πίνακα G2**.

Υλικό	Μέτρο Ελαστικότητας E(GPα)	Λόγος Poisson ν	Μέτρο διατμήσεως G(GPα)
Εποξ. Ρητίνη	3.5	0.35	1.29
Ύαλος	72	0.20	30

Πίνακας G2

6.2 ΠΙΝΑΚΕΣ

Σε αυτήν την ενότητα θα παραθέσουμε τις τιμές των ελαστικών σταθερών και των λόγων Poisson για διάφορες περιεκτικότητες σε έγκλεισμα, έτσι όπως υπολογίσθηκαν από την εφαρμογή των τύπων, τους οποίους εξαγάγαμε εμείς βάσει του επταφασικού κυλινδρικού μοντέλου μας. Επίσης θα παραθέσουμε τιμές που υπολογίστηκαν από άλλους ερευνητές βάσει των δικών τους μοντέλων(Πίνακες K2,L2,M2,N2), όπως επίσης και πειραματικές τιμές δεδομένων που υπάρχουν στην βιβλιογραφία.(Πίνακες O2,P2,Q2,R2).

Πιο συγκεκριμένα, στο **Πίνακα H2** παρουσιάζονται συγκεντρωτικά οι τιμές των ελαστικών σταθερών, των λόγων Poisson, των κατ' όγκο περιεκτικοτήτων όλων των φάσεων καθώς και των ακτίνων τους, που υπολογίσθηκαν βάσει του κυλινδρικού επταφασικού μοντέλου. Να σημειώσουμε εδώ ότι στο **Πίνακα H2** παραθέτεται και το λ που είναι το μήκος της πλευράς του εσωτερικού εξαγωνικού πρίσματος του δομικού «κυττάρου» μας, πριν το αναγάγουμε σε κυλινδρικό.

Στο **Πίνακα J2** παραθέτουμε τις τιμές του μέτρου ελαστικότητας, του μέτρου διατμήσεως και του λόγο Poisson, υπό γωνία φόρτισης θ(από 0^o μέχρι 90^o), σε 0.65 κατ' όγκο περιεκτικότητα σε έγκλεισμα. Οι τιμές υπολογίστηκαν από τους θεωρητικούς τύπους στην ενότητα 5.7 του προηγούμενου κεφαλαίου.

Τα πειραματικά αποτελέσματα για το E_L, που περιλαμβάνονται στον **Πίνακα O2** και έχουν αντληθεί από τις πηγές [40],[41],[42] της βιβλιογραφίας αναφέρονται σε αυτόν, ως ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ I, ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ II αντίστοιχα.

Τα πειραματικά αποτελέσματα για το v_{LT} , που περιλαμβάνονται στον **Πίνακα P2** και έχουν αντληθεί από τις πηγές [41],[43] της βιβλιογραφίας αναφέρονται σε αυτόν ως ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ I, ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ II αντίστοιχα.

Τα πειραματικά αποτελέσματα για το E_T, που περιλαμβάνονται στον **Πίνακα Q2** και έχουν αντληθεί από τις πηγές [41],[44],[45] της βιβλιογραφίας αναφέρονται σε αυτόν ως ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ I, ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ II, ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ III αντίστοιχα.

Τα πειραματικά αποτελέσματα για το G_{LT} ,που περιλαμβάνονται στον **Πίνακα R2** και έχουν αντληθεί από τις πηγές [46],[47],της βιβλιογραφίας αναφέρονται σε αυτόν ως ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ I, ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ II αντίστοιχα.

Και τέλος τα πειραματικά αποτελέσματα για το $E_\theta, v_\theta, G_\theta$ που περιλαμβάνονται στον **Πίνακα S2** και έχουν αντληθεί από την πηγή [6] της βιβλιογραφίας, για περιεκτικότητα εγκλείσματος 65%, αναφέρονται σε αυτόν ως E_θ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ, v_θ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ, G_θ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Τα πειραματικά αποτελέσματα για το εγκάρσιο μέτρο ελαστικότητας E_T και το διάμηκες μέτρο διατμήσεως το G_{LT} προέκυψαν από ανάγνωση αντίστοιχων διαγραμμάτων. Επειδή δεν υπήρχαν οι πίνακες με τις ακριβείς πειραματικές τιμές , είναι πιθανή η ύπαρξη μιας μικρής απόκλισης των τιμών των Πινάκων Q2,R2 από τις πραγματικές που εξήχθησαν από τους διάφορους πειραματιστές.

ΕΠΤΑΦΑΣΙΚΟ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ							
κατ' όγκο περιεκτικότητα εγκλείσματος U_f	10%	20%	30%	40%	50%	60%	65%
U_1	0,014286	0,028571	0,042857	0,057143	0,071429	0,085714	0,092857
U_2	0,000461	0,001765	0,003606	0,005542	0,006799	0,006001	0,004092
U_3	0,345002	0,285251	0,224426	0,163412	0,103754	0,048208	0,023453
U_4	0,000461	0,001765	0,003606	0,005542	0,006799	0,006001	0,004092
U_5	0,085714	0,171429	0,257143	0,342857	0,428571	0,514286	0,557143
U_6	0,000739	0,003144	0,007407	0,013957	0,023533	0,037615	0,047300
U_7	0,553338	0,508075	0,460955	0,411548	0,359115	0,302176	0,271063
λ(μm)	31,87048	22,53583	18,40043	15,93524	14,25291	13,01107	12,50063
r_1**(μm)**	6	6	6	6	6	6	6
r_2**(μm)**	6,095962	6,182563	6,247333	6,284207	6,279069	6,206478	6,130793
r_3**(μm)**	30,10925	19,94091	15,08465	11,93485	9,576994	7,666001	6,832216
r_4**(μm)**	30,12852	19,99660	15,18473	12,08023	9,754257	7,828661	6,947359
r_5**(μm)**	33,52205	24,81660	21,13234	19,02451	17,63932	16,65197	16,25625
r_6**(μm)**	33,54980	24,89629	21,27904	19,25421	17,97237	17,11976	16,81081
r_7**(μm)**	50,19960	35,49648	28,98275	25,09980	22,44994	20,49390	19,68990
E_L	10,38786	17,35206	24,38282	31,46971	38,59426	45,72652	49,28273
v_{LT}	0,334917	0,319667	0,304271	0,288752	0,273151	0,257533	0,249746
v_{TT}	0,325498	0,304054	0,285149	0,268373	0,253411	0,240019	0,233853
E_T	5,328671	6,583586	7,925918	9,5856	11,82018	15,07041	17,32904
G_{LT}	2,173	2,721	3,258	3,816	4,512	5,423	5,996

Πίνακας Η2

ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΧΕΣΕΩΝ E_{Θ},v_{Θ},G_{Θ}			
(θ^o)	**E_{Θ}**	**v_{Θ}**	**G_{Θ}**
0	49,283	0,2497	5,996
5	47,2434	0,267341	6,082372
10	42,1658	0,310555	6,346301
15	36,08957	0,360199	6,798128
20	30,49697	0,402252	7,446857
25	25,9684	0,431169	8,29057
30	22,52865	0,446343	9,278244
35	20,01645	0,448924	10,27626
40	18,24327	0,440288	11,05121
45	17,04812	0,42157	11,34761
50	16,31113	0,393657	11,05121
55	15,93632	0,357416	10,27626
60	15,84995	0,314023	9,278244
65	15,98569	0,26542	8,29057
70	16,27319	0,214642	7,446857
75	16,63741	0,166053	6,798128
80	16,98629	0,125106	6,346301
85	17,23787	0,097546	6,082372
90	17,33	0,087805	5,996

Πίνακας J2

ΔΙΑΜΗΚΕΣ ΜΕΤΡΟ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ E_L (GPa)										
U_f κατ' όγκο περιεκτικότητα σε έγκλεισμα	0%	10%	20%	30%	40%	50%	60%	65%	70%	80%
ΘΕΟΧΑΡΗΣ ΣΙΔΕΡΙΔΗΣ ΠΑΠΑΝΙΚΟΛΑΟΥ	3,50	10,38	17,31	24,3	31,35	38,45	45,6	49,13	52,81	60,08
ΝΟΜΟΣ ΤΩΝ ΦΑΣΕΩΝ	3,50	10,35	17,20	24,05	30,90	37,75	44,60	48,03	51,45	58,30
EKVALL	4,64	11,37	18,11	24,85	31,59	38,32	45,05	48,42	51,79	58,53
ΕΠΤΑΦΑΣΙΚΟ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ	3,50	10,39	17,35	24,38	31,47	38,59	45,73	49,28	-	-

Πίνακας K2

ΛΟΓΟΣ POISSON v_{LT}										
U_f κατ'ογκο περιεκτικότητα σε έγκλεισμα	0%	10%	20%	30%	40%	50%	60%	65%	70%	80%
ΘΕΟΧΑΡΗΣ ΣΙΔΕΡΙΔΗΣ ΠΑΠΑΝΙΚΟΛΑΟΥ	0,350	0,335	0,320	0,304	0,289	0,273	0,258	0,250	0,242	0,226
ΝΟΜΟΣ ΤΩΝ ΦΑΣΕΩΝ	0,350	0,335	0,320	0,305	0,290	0,275	0,260	0,253	0,245	0,230
ROSEN	0,350	0,331	0,314	0,297	0,281	0,266	0,252	0,245	0,238	0,225
ΕΠΤΑΦΑΣΙΚΟ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ	0,350	0,335	0,320	0,304	0,289	0,273	0,258	0,250	-	-

Πίνακας L2

ΕΓΚΑΡΣΙΟ ΜΕΤΡΟ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ E_T (GPa)										
U_f κατ'όγκο περιεκτικότητα σε έγκλεισμα	0%	10%	20%	30%	40%	50%	60%	65%	70%	80%
ΣΙΔΕΡΙΔΗΣ	3,50	5,32	6,56	7,88	9,48	11,60	14,67	17,15	19,64	29,22
PAUL-LOWER BOUND	3,50	3,87	4,32	4,90	5,65	6,68	8,16	9,32	10,48	14,65
WHITNEY-RILEY	3,50	5,13	6,08	6,98	8,02	9,31	11,04	12,28	13,53	17,48
EKVALL	4,64	5,12	5,70	6,45	7,41	8,74	10,57	12,00	13,44	18,43
HALPIN-TSAI	3,50	4,50	5,70	7,19	9,08	11,54	14,88	17,29	19,71	27,27
TSAI-HAHN	3,50	4,23	5,13	6,28	7,80	9,93	13,15	15,48	18,65	30,26
ΕΠΤΑΦΑΣΙΚΟ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ	3,50	5,33	6,58	7,92	9,59	11,82	15,07	17,33	-	-

Πίνακας Μ2

ΔΙΑΜΗΚΕΣ ΜΕΤΡΟ ΔΙΑΤΜΗΣΗΣ G_{LT} (GPa)										
U_f κατ'όγκο περιεκτικότητα σε έγκλεισμα	0%	10%	20%	30%	40%	50%	60%	65%	70%	80%
ΣΙΔΕΡΙΔΗΣ	1,30	1,57	1,90	2,33	2,91	3,74	4,99	5,89	7,12	11,57
ΝΟΜΟΣ ΤΩΝ ΦΑΣΕΩΝ	1,30	4,17	7,04	9,91	12,78	15,65	18,52	19,96	21,39	24,26
TSAI-HAHN	1,29	1,56	1,90	2,33	2,90	3,70	4,93	5,82	7,05	11,68
EKVALL-GRESZCZUK	1,30	1,44	1,61	1,82	2,11	2,49	3,05	3,44	3,94	5,54
HASHIN-ROSEN	1,30	1,56	1,88	2,29	2,81	3,50	4,48	5,14	5,96	8,45
HASHIN	1,30	2,87	4,61	6,54	8,71	11,14	13,90	15,42	17,06	20,7
ΕΠΤΑΦΑΣΙΚΟ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ	1,30	2,17	2,72	3,26	3,82	4,51	5,42	6,00	-	-

Πίνακας Ν2

ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ E_L (GPa)										
U_f κατ'όγκο περιεκτικότητα σε έγκλεισμα	0%	10%	20%	30%	40%	50%	60%	65%	70%	80%
ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ I	3,50	10,36	17,22	26,07	30,92	37,77	44,62	48,13	51,47	58,31
ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ II	3,45	10,41	17,38	_	_	38,11	45,12	48,62	52,15	_
ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ III	_	_	_	_	_	_	48,14	52,15	56,16	_

Πίνακας Ο2

ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ v_{LT}										
U_f κατ' όγκο περιεκτικότητα σε έγκλεισμα	0%	10%	20%	30%	40%	50%	60%	65%	70%	80%
ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ I	0,350	0,332	0,315	0,300	0,286	0,273	0,262	0,256	0,251	0,241
ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ II	0,350	0,330	0,320	_	_	0,280	0,260	_	_	_

Πίνακας Ρ2

ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ E_T (GPa)									
U_f κατ' όγκο περιεκτικότητα σε έγκλεισμα	20%	30%	40%	50%	55%	60%	65%	70%	75%
ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ I	4,40	7,52	_	11,60	_	15,00	_	19,60	_
ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ II	_	_	_	_	15,80	_	17,60	_	_
ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ III	_	_	_	_	_	15,40	_	_	20,20

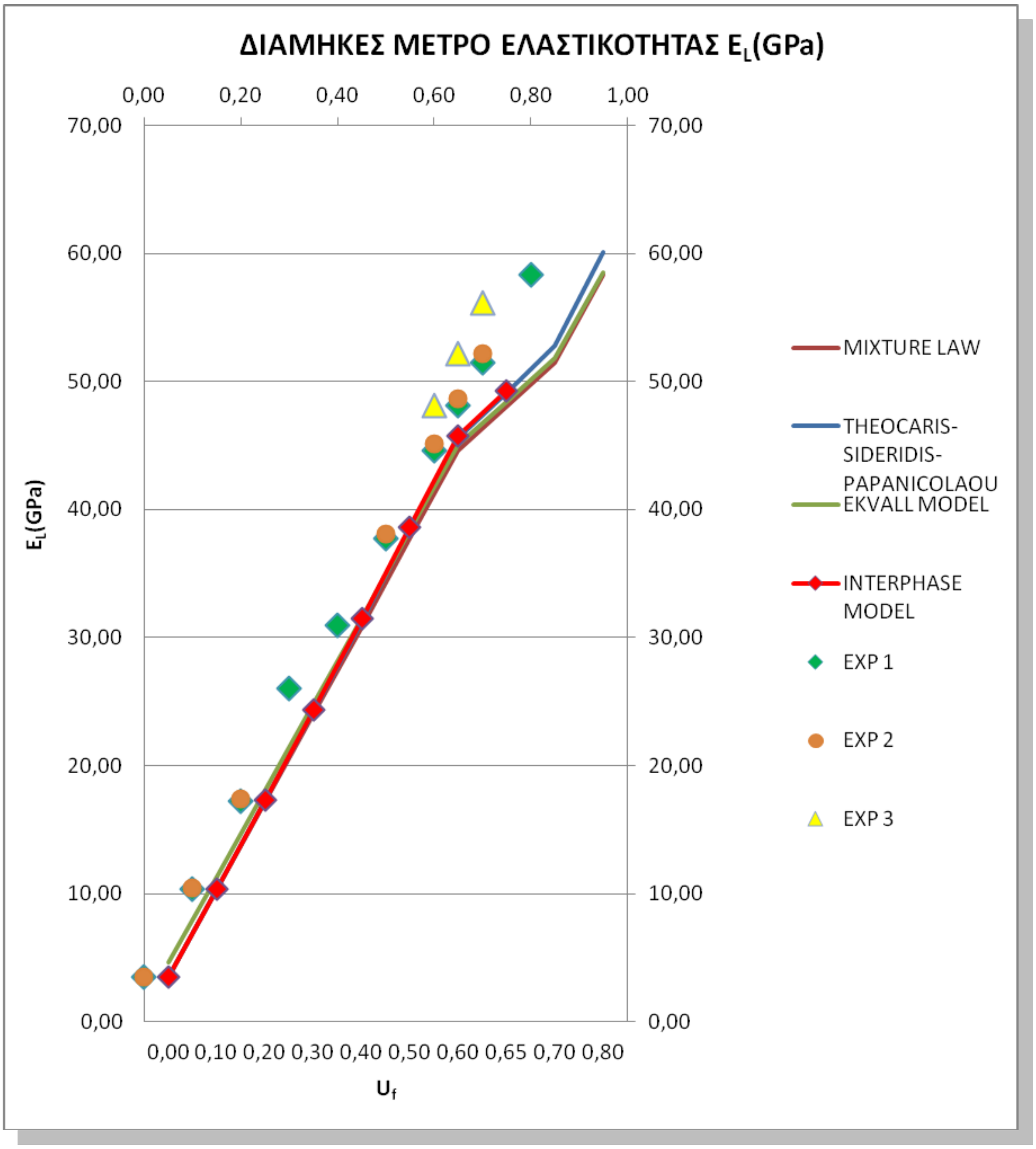
Πίνακας Q2

ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ G_{LT} (GPa)				
U_f κατ' όγκο περιεκτικότητα σε έγκλεισμα	55%	60%	65%	70%
ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ I	6,41	6,88	7,50	_
ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ II	_	6,09	6,79	7,97

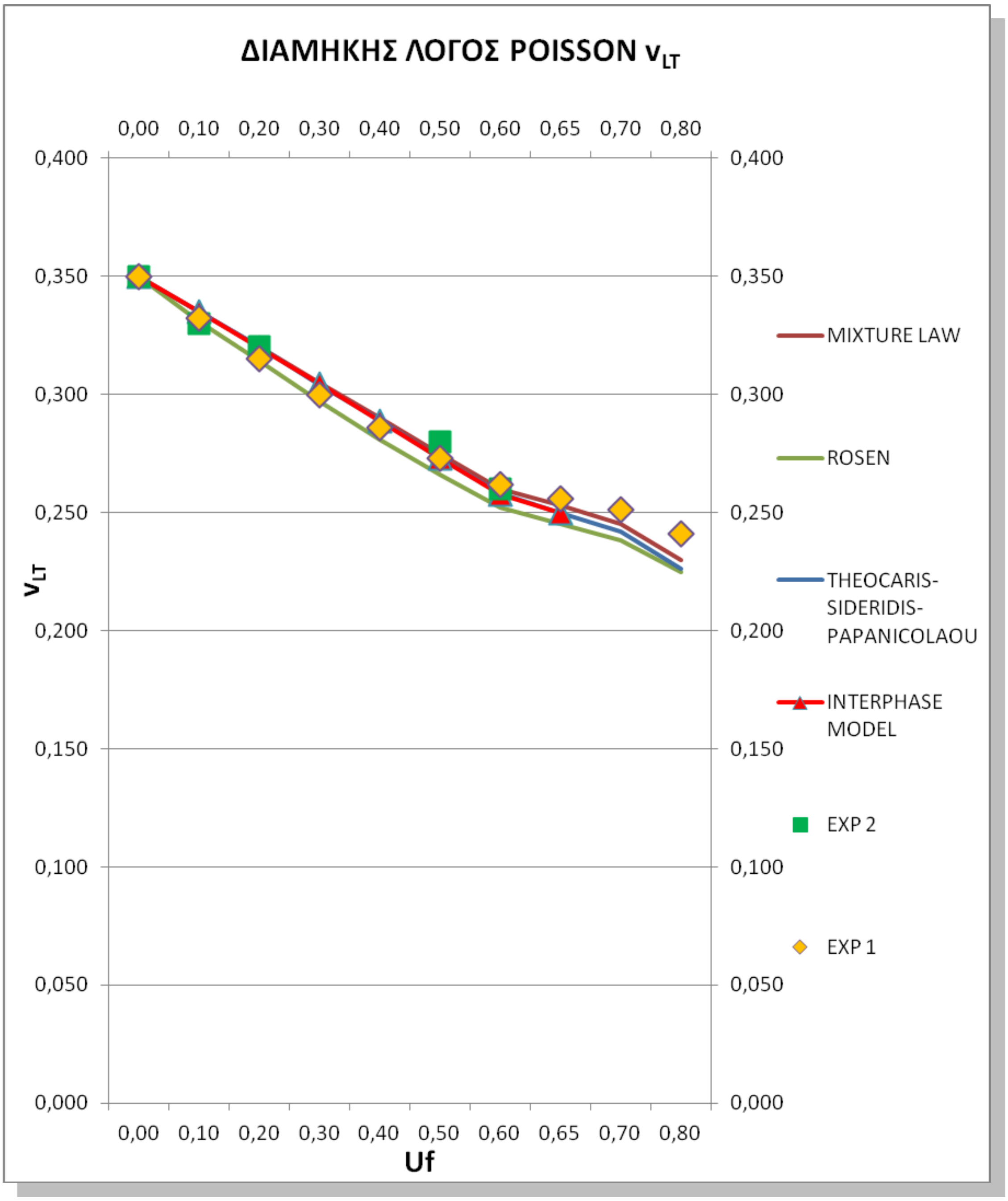
Πίνακας R2

6.3 ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ

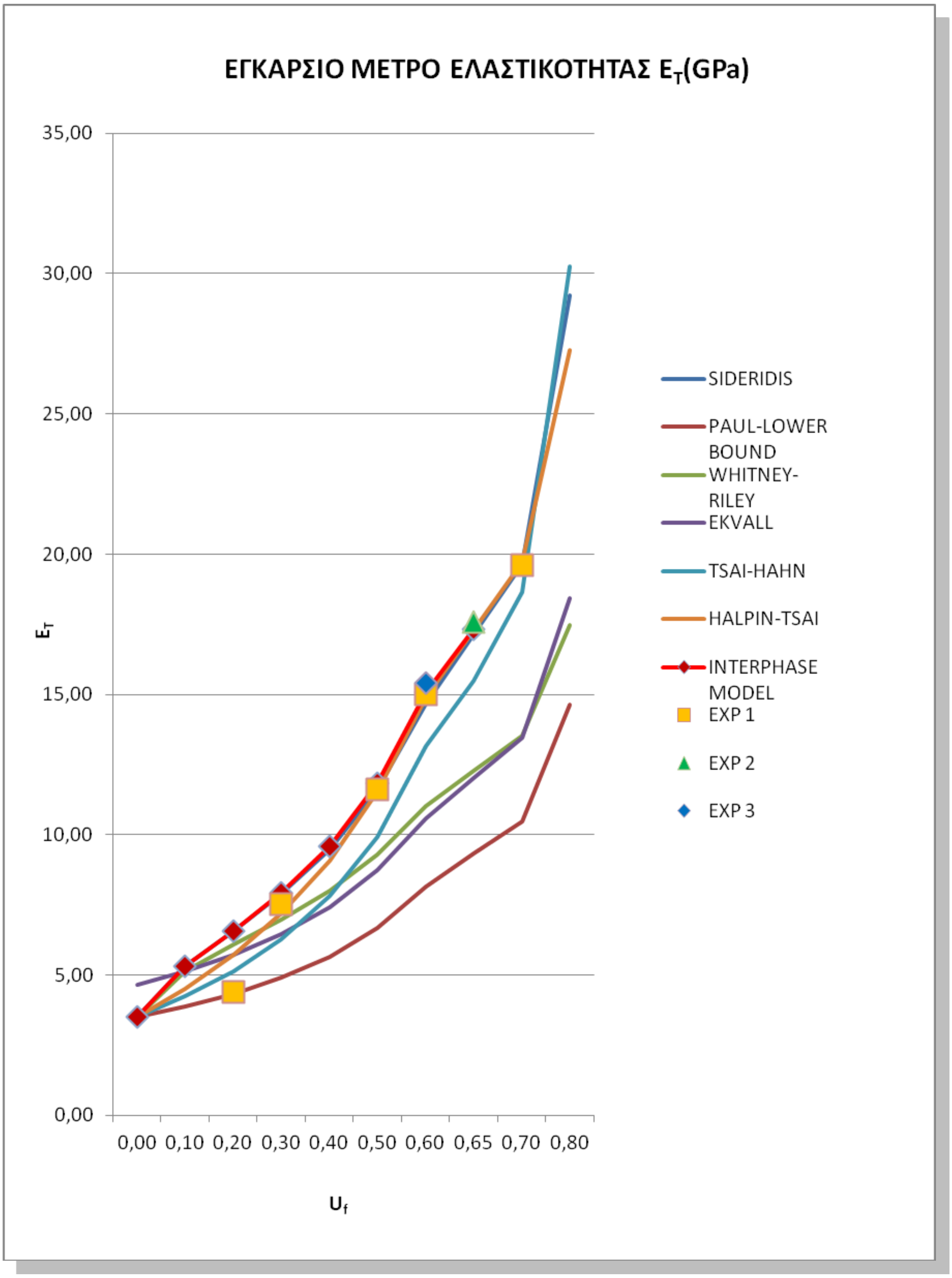
Παρακάτω παρατίθενται τα διαγράμματα με τις τιμές των διάφορων μοντέλων για τις ελαστικές σταθερές και τους λόγους Poisson. Κάθε μοντέλο απεικονίζεται με μία γραμμή διαφορετικού χρώματος. Οι πειραματικές τιμές απεικονίζονται με σημεία(κυρίως μικρούς κύβους). Στο τέλος της ενότητας ακολουθούν, ένας συγκεντρωτικός πίνακας με τις τιμές που εξήχθησαν από το επταφασικό μας μοντέλο των $E_\theta, G_\theta, v_\theta$ και τις πειραματικές τιμές αυτών, και τα τρία διαγράμματα των $E_\theta, G_\theta, v_\theta$ για κατ' όγκο περιεκτικότητα σε έγκλεισμα 65%, και οι πειραματικές τιμές αυτών. Τέλος με την βοήθεια των διαγραμμάτων, η σύγκριση των μοντέλων μεταξύ τους αλλά και με τις πειραματικές τιμές θα είναι πιο εύκολη και περισσότερο κατανοητή.



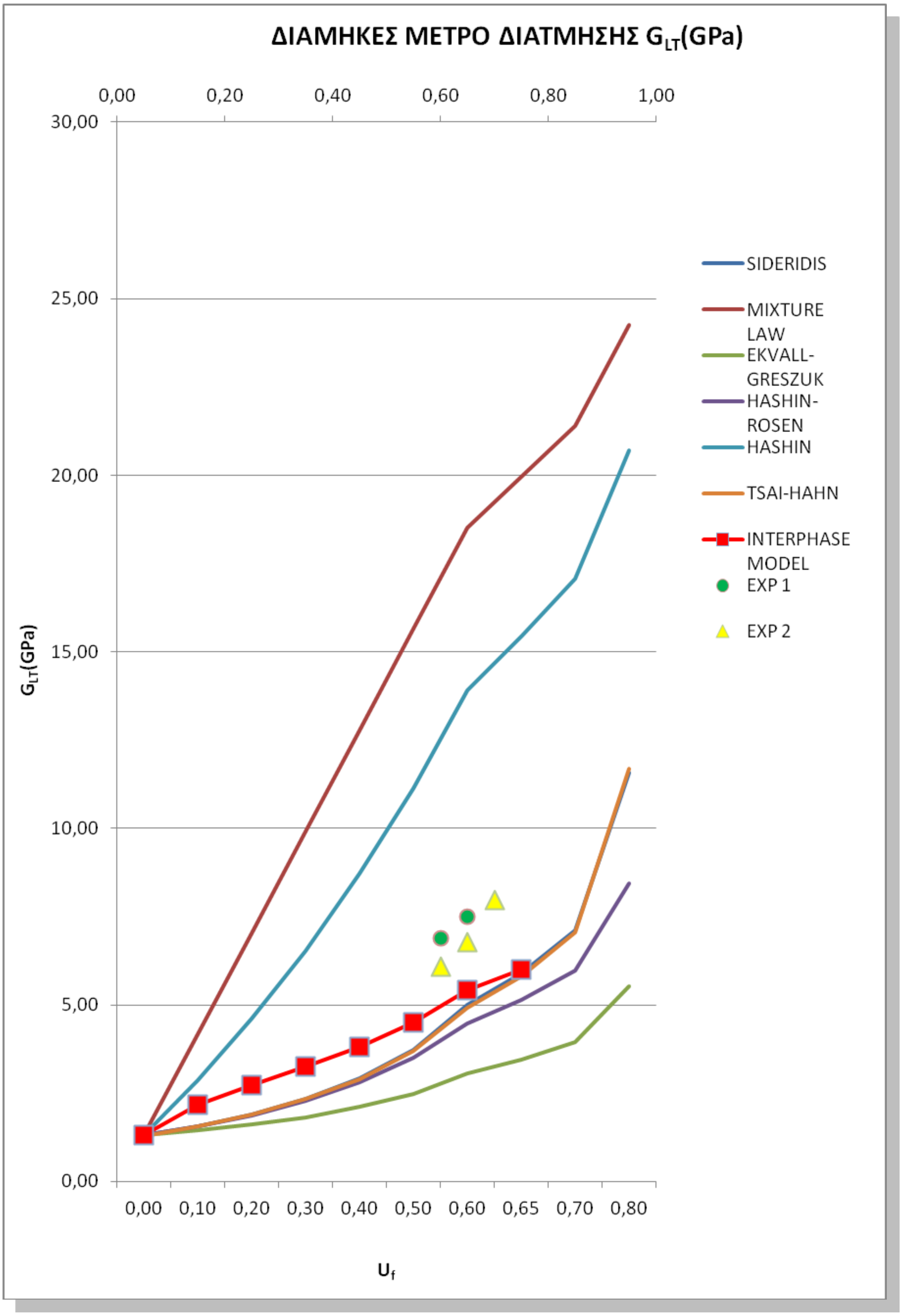
Διάγραμμα 28



Διάγραμμα29



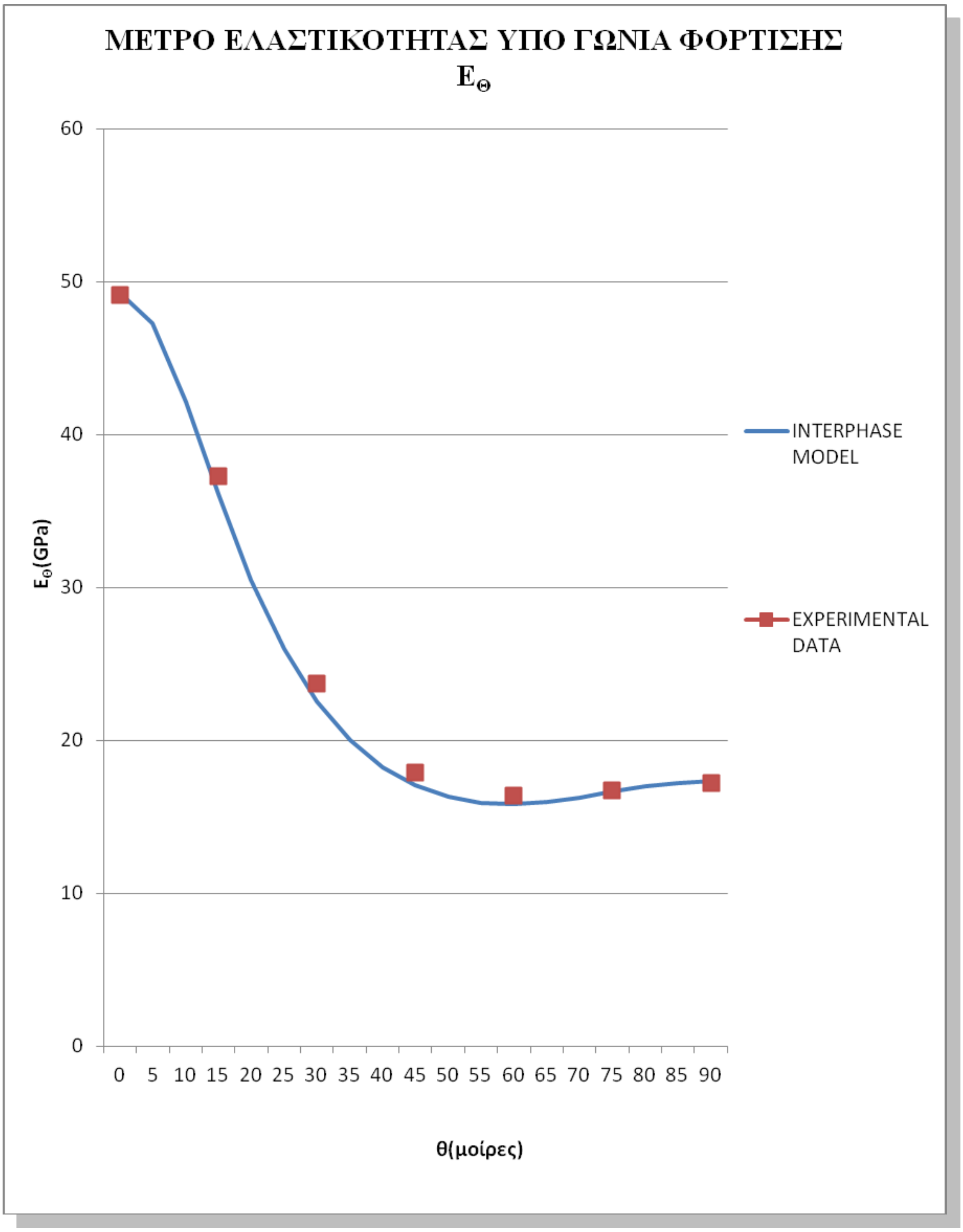
Διάγραμμα 30



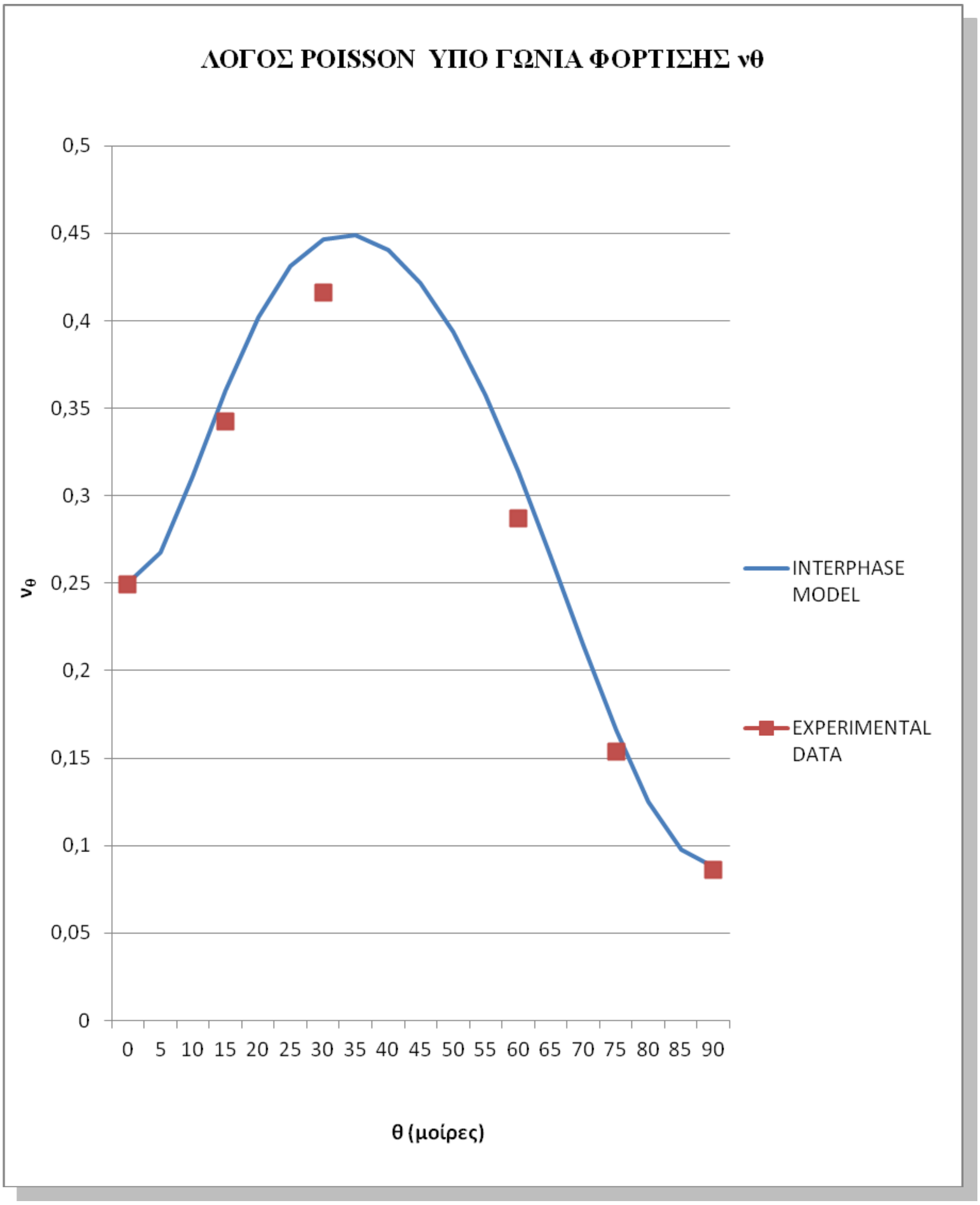
Διάγραμμα 31

ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΧΕΣΕΩΝ $E_θ$,$v_θ$,$G_θ$						
θ	**$E_θ$**	**$v_θ$**	**$G_θ$**	**$E_θ$ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ**	**$v_θ$ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ**	**$G_θ$ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ**
0	49,283	0,250	5,996	49,130	0,249	6,450
5	47,243	0,267	6,082			
10	42,166	0,311	6,346			
15	36,090	0,360	6,798	37,273	0,342	7,229
20	30,497	0,402	7,447			
25	25,968	0,431	8,291			
30	22,529	0,446	9,278	23,735	0,416	9,532
35	20,016	0,449	10,276			
40	18,243	0,440	11,051			
45	17,048	0,422	11,348	17,921		11,339
50	16,311	0,394	11,051			
55	15,936	0,357	10,276			
60	15,850	0,314	9,278	16,363	0,287	9,532
65	15,986	0,265	8,291			
70	16,273	0,215	7,447			
75	16,637	0,166	6,798	16,749	0,154	7,229
80	16,986	0,125	6,346			
85	17,238	0,098	6,082			
90	17,330	0,088	5,996	17,220	0,086	6,450

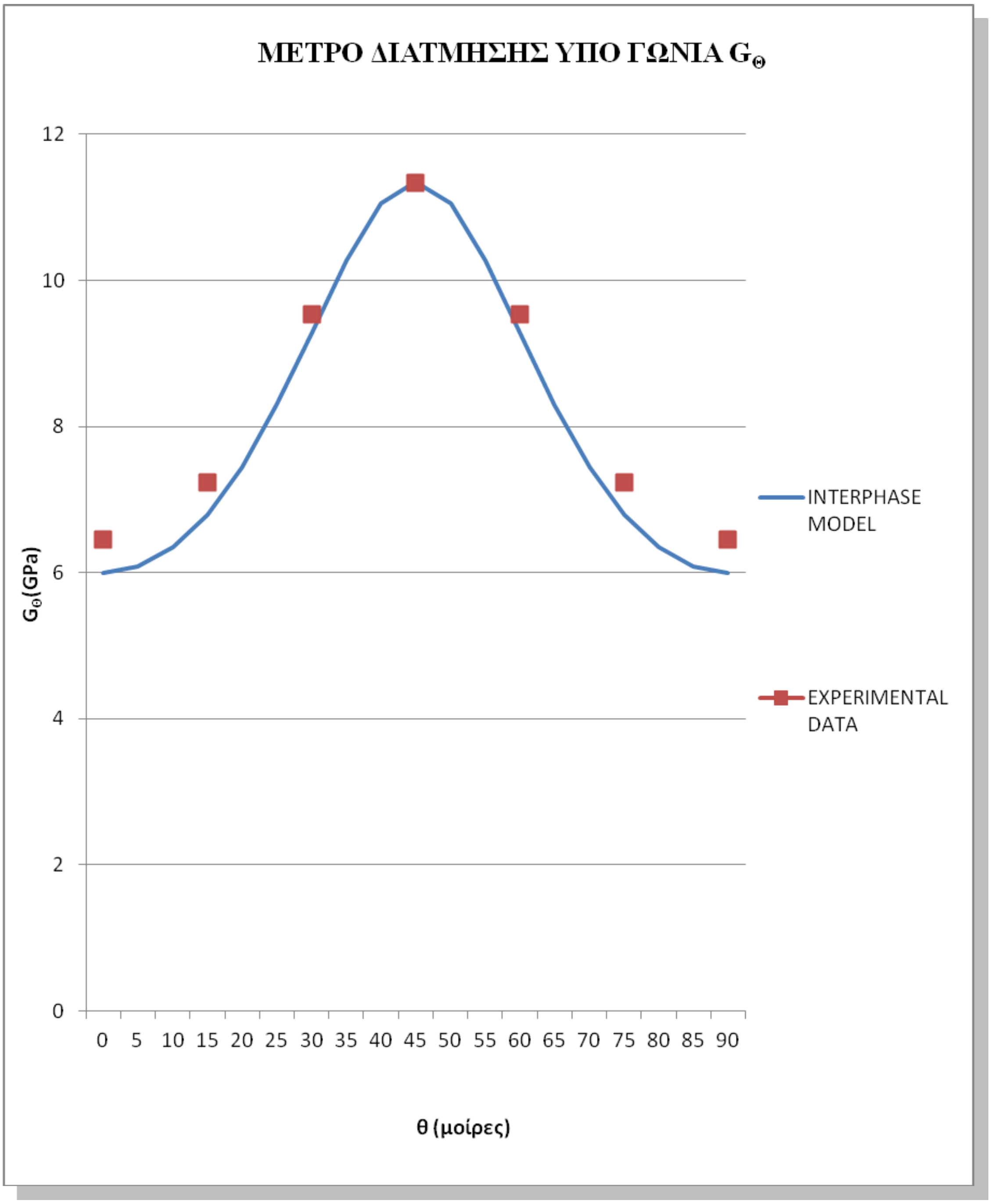
Πίνακας S2



Διάγραμμα 32



Διάγραμμα 33



Διάγραμμα 34

6.4 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ, ΣΧΟΛΙΑΣΜΟΣ & ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

Αρχικά να αναφέρουμε ότι η απόκλιση των τιμών των ελαστικών σταθερών αλλά και των λόγων Poisson, που εξήχθησαν από το επταφασικό κυλινδρικό μοντέλο μας, σε σχέση με τα πειραματικά δεδομένα είναι αναμενόμενη κυρίως για τους εξής λόγους:

1. Η κατανομή των ινών μέσα στη ρητίνη στην δύναται να θεωρηθεί ομοιογενής όπως έχουμε υποθέσει.

2. Ύπαρξη ατελειών στη μήτρα (φυσαλίδες, ατελείς δεσμοί κλπ.)

3. Ύπαρξη ασυνέχειας μεταξύ εγκλείσματος και μήτρας, δηλαδή όχι καλή συνοχή του υλικού.

4. Το θεωρητικό μοντέλο μας προβλέπει τέλεια γεωμετρικά σχήματα (κυλινδρικές ίνες) ενώ στην πραγματικότητα δύναται να υπάρχουν μικρές ατέλειες στην επιφάνεια και ολίγον διαφορετικό μέγεθος ινών.

5. Η ευθυγράμμιση των ινών που είναι πολύ δύσκολο να επιτευχθεί κατά την διάρκεια του υλικού των δοκιμίων.

Κατά τα άλλα παρατηρούμε ότι σε γενικά πλαίσια το μοντέλο μας ανταποκρίνεται αρκετά καλά στην πραγματικότητα και οι τιμές που εξήχθησαν από αυτό, προσεγγίζουν ιδανικά τα πειραματικά δεδομένα στις περισσότερες των περιπτώσεων. Πιο αναλυτικά έχουμε:

I. <u>ΔΙΑΜΗΚΕΣ ΜΕΤΡΟ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ E_L</u>

Στο διάγραμμα (28) απεικονίζεται η μεταβολή του διαμήκους μέτρου ελαστικότητας (E_L) συναρτήσει της κατ' όγκο περιεκτικότητος των ινών. Στο υπόψη διάγραμμα φαίνονται η μεταβολή του διαμήκους μέτρου ελαστικότητας που προέκυψε από το προταθέν μοντέλο, από τους ερευνητές Θεοχάρης-Σιδερίδης-Παπανικολάου [27] και Ekvall [31], από το Νόμο των Φάσεων [5.8.2], και από τα πειραματικά αποτέλεσματα I [40],II [41],III [43].

Παρατηρούμε ότι όσο αυξάνει η περιεκτικότητα των ινών το διάμηκες μέτρο ελαστικότητας αυξάνει σε όλες τις περιπτώσεις.

Επίσης παρατηρούμε ότι οι θεωρητικές τιμές που προκύπτουν από την μελέτη των ερευνητών Θεοχάρη-Σιδερίδη-Παπανικολάου [27], συγκλίνουν με τις τιμές του προταθέντος μοντέλου. Αυτό δύναται να θεωρηθεί λογικό με δεδομένο ότι και τα δύο μοντέλα έχουν προκύψει με τη θεώρηση της ενδιαμέσου φάσεως. Το πρώτο προκύπτει από το βασικό διφασικό μοντέλο προσθέτοντας την ενδιάμεση φάση ενώ το δεύτερο, το προταθέν, λαμβάνει υπόψη την επίδραση των γειτονικών ινών και την ενδιάμεση φάση.

Επίσης οι θεωρητικές τιμές που προκύπτουν από τη μελέτη του Νόμου των Φάσεων [5.8.2] και τον Ekvall [31] συγκλίνουν με τις τιμές του προταθέντος μοντέλου.

Τέλος παρατηρούμε ότι τα πειραματικά αποτελέσματα I [40],II [41],III [43] συγκλίνουν με τις τιμές του προταθέντος μοντέλου.

II. ΔΙΑΜΗΚΗΣ ΛΟΓΟΣ POISSON v_{LT}

Στο διάγραμμα (29) απεικονίζεται η μεταβολή του διαμήκους λόγου Poisson (v_{LT}) συναρτήσει της κατ' όγκο περιεκτικότητας των ινών. Στο υπόψη διάγραμμα φαίνονται η μεταβολή του διαμήκους λόγου Poisson που προέκυψε από το προταθέν μοντέλο, από τους ερευνητές Θεοχάρης-Σιδερίδης-Παπανικολάου [27] και Rosen [32], από το Νόμο των Φάσεων [5.8.5], και από τα πειραματικά αποτέλεσματα I [41],II [43].

Παρατηρούμε ότι όσο αυξάνει η περιεκτικότητα των ινών ο διαμήκης λόγος Poisson μειώνεται σε όλες τις περιπτώσεις.

Επίσης παρατηρούμε ότι οι θεωρητικές τιμές που προκύπτουν από την μελέτη των ερευνητών Θεοχάρη-Σιδερίδη-Παπανικολάου [27], συγκλίνουν με τις τιμές του προταθέντος μοντέλου. Αυτό δύναται να θεωρηθεί λογικό με δεδομένο ότι και τα δύο μοντέλα έχουν προκύψει με τη θεώρηση της ενδιαμέσου φάσεως. Το πρώτο προκύπτει από το βασικό διφασικό μοντέλο προσθέτοντας την ενδιάμεση φάση ενώ το δεύτερο, το προταθέν, λαμβάνει υπόψη την επίδραση των γειτονικών ινών και την ενδιάμεση φάση.

Επίσης οι θεωρητικές τιμές που προκύπτουν από τη μελέτη του Νόμου των Φάσεων [5.8.5] και τον Rosen [32] συγκλίνουν με τις τιμές του προταθέντος μοντέλου.

Τέλος παρατηρούμε ότι τα πειραματικά αποτελέσματα I [41],II [43] συγκλίνουν με τις τιμές του προταθέντος μοντέλου.

III. ΕΓΚΑΡΣΙΟ ΜΕΤΡΟ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ E_T

Στο διάγραμμα (30) απεικονίζεται η μεταβολή του εγκάρσιου μέτρου ελαστικότητας (E_T) συναρτήσει της κατ' όγκο περιεκτικότητας των ινών. Στο υπόψη διάγραμμα φαίνονται η μεταβολή του εγκάρσιου μέτρου ελαστικότητας που προέκυψε από το προταθέν μοντέλο, από τους ερευνητές Σιδερίδης [28], Paul-Lower Bound [33], Whitney-Riley [34], Ekvall [35], Tsai-Hahn [52] και Halpin-Tsai[52] μαζί με τα πειραματικά αποτελέσματα I [41],II [44],III [45].

Παρατηρούμε ότι όσο αυξάνει η περιεκτικότητα των ινών το εγκάρσιο μέτρο ελαστικότητας αυξάνεται σε όλες τις περιπτώσεις.

Επίσης παρατηρούμε ότι οι θεωρητικές τιμές που προκύπτουν από την μελέτη του ερευνητή Σιδερίδη [28] και των Halpin-Tsai[52], συγκλίνουν με τις τιμές του προταθέντος μοντέλου και σε μικρότερο βαθμό με τις τιμές των ερευνητών Tsai-Hahn[52]. Αυτό δύναται να θεωρηθεί λογικό με δεδομένο ότι και τα δύο μοντέλα έχουν προκύψει με τη θεώρηση της ενδιαμέσου φάσεως. Το πρώτο προκύπτει από το βασικό διφασικό μοντέλο προσθέτοντας την ενδιάμεση φάση ενώ το δεύτερο, το προταθέν, λαμβάνει υπόψη την επίδραση των γειτονικών ινών και την ενδιάμεση φάση.

Σε ότι αφορά τις θεωρητικές τιμές που προκύπτουν από τη μελέτη των ερευνητών Whitney-Riley [34], Ekvall [35] συγκλίνουν.

Οι θεωρητικές τιμές που προκύπτουν από την μελέτη των ερευνητών Paul-Lower Bound [33] δεν συγκλίνουν με τις τιμές κανενός από τα προαναφερθέντα μοντέλα, συγκεκριμένα παρουσιάζονται σημαντικά μειωμένες.

IV. ΔΙΑΜΗΚΕΣ ΜΕΤΡΟ ΔΙΑΤΜΗΣΕΩΣ G_{LT}

Στο διάγραμμα (31) απεικονίζεται η μεταβολή του διαμήκους μέτρου διάτμησης (G_{LT}) συναρτήσει της κατ' όγκο περιεκτικότητας των ινών. Στο υπόψη διάγραμμα φαίνονται η μεταβολή του διαμήκους μέτρου διατμήσεως που προέκυψε από το προταθέν μοντέλο, από τους ερευνητές Σιδερίδη [29], Ekvall-Greszczuk [36],[37] Hashin [39], Hashin-Rosen [38], από το Νόμο των Φάσεων [5.8.12],Tsai-Hahn[52] και από τα πειραματικά αποτελέσματα I [46],II [47].

Παρατηρούμε ότι όσο αυξάνει η περιεκτικότητα των ινών το διάμηκες μέτρο διατμήσεως αυξάνει σε όλες τις περιπτώσεις.

Επίσης παρατηρούμε ότι οι θεωρητικές τιμές που προκύπτουν από την μελέτη των ερευνητών Σιδερίδη [29] και Halpin-Tsai[28], συγκλίνουν με τις τιμές του προταθέντος μοντέλου. Αυτό δύναται να θεωρηθεί λογικό με δεδομένο όπως προαναφέρθη ότι και τα δύο μοντέλα έχουν προκύψει με τη θεώρηση της ενδιαμέσου φάσεως. Το πρώτο προκύπτει από το βασικό διφασικό μοντέλο προσθέτοντας την ενδιάμεση φάση ενώ το δεύτερο, το προταθέν, λαμβάνει υπόψη την επίδραση των γειτονικών ινών και την ενδιάμεση φάση.

Επίσης οι θεωρητικές τιμές που προκύπτουν από τη μελέτη του Νόμου των Φάσεων [5.8.12] και τον Ekvall-Greszczuk [36],[37] συγκλίνουν με τις τιμές του προταθέντος μοντέλου.

Τέλος παρατηρούμε ότι τα πειραματικά αποτελέσματα I [46],II [47] συγκλίνουν με τις τιμές του προταθέντος μοντέλου.

V. ΜΕΤΡΟ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΥΠΟ ΓΩΝΙΑ ΦΟΡΤΙΣΗΣ $E_θ$ (ή E_x)

Στο διάγραμμα (32) απεικονίζεται η μεταβολή του μέτρου ελαστικότητας $E_θ$ του ινώδους υλικού συναρτήσει της γωνίας ινών (θ). Παρατηρούμε ότι το μέτρο αυτό μειώνεται αρκετά στην αρχή και μέχρι τις 50^0, εν συνεχεία σχεδόν σταθεροποιείται μέχρι τις 70^0 και μετά λίγο αυξάνει μέχρι τις 90^o όπου εκεί λαμβάνει την τιμή του E_T. Η πορεία των πειραματικών τιμών έχει την ίδια μορφή με την θεωρητική καμπύλη του $E_θ$.

Υπάρχει πολύ καλή σύγκλιση μεταξύ των πειραματικών αποτελεσμάτων και των τιμών οι οποίες προκύπτουν από το προτεινόμενο θεωρητικό μοντέλο.

VI. ΛΟΓΟΣ POISSON ΥΠΟ ΓΩΝΙΑ ΦΟΡΤΙΣΗΣ ν_{θ}(ή ν_{xy})

Στο διάγραμμα (33) φαίνεται η μεταβολή του λόγου Poisson ν_{θ} του ινώδους υλικού συναρτήσει της γωνίας ινών(θ). Παρατηρούμε ότι το ν_{θ} αυξάνει από τις 0^0 που είναι η τιμή του διαμήκους λόγου Poisson μέχρι τις 40^0 όπου υπάρχει ένα μέγιστο εν συνεχεία ελαττώνεται μέχρι τις 90^0. Η πορεία των πειραματικών τιμών έχει την ίδια μορφή με την θεωρητική καμπύλη.

Γενικά υπάρχει αρκετά καλή σύγκλιση μεταξύ των πειραματικών τιμών και των τιμών που προκύπτουν από το προτεινόμενο θεωρητικό μοντέλο.

VII. ΜΕΤΡΟ ΔΙΑΤΜΗΣΕΩΣ ΥΠΟ ΓΩΝΙΑ ΦΟΡΤΙΣΗΣ G_{θ} (ή G_{xy})

Στο διάγραμμα (34) απεικονίζεται η μεταβολή του μέτρου Διάτμησης G_{θ} συναρτήσει της γωνίας των ινών (θ). Παρατηρούμε ότι το μέτρο αυτό αυξάνει από τις 0^0 μέχρι τις 45^o όπου αποκτά μέγιστο. Εν συνέχεια ελαττώνεται μέχρι τις 90^0. Η πορεία των πειραματικών τιμών έχει την ίδια μορφή με την θεωρητική καμπύλη του G_{θ} .

Σημειώνεται ότι οι αρχικές και τελικές πειραματικές τιμές είναι μεγαλύτερες .

Γενικά, υπάρχει μικρή απόκλιση στις τιμές από 0^0 μέχρι 25^o και από 65^o μέχρι 90^0 . Το διάγραμμα είναι συμμετρικό.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7: ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ ΘΕΡΜΙΚΗΣ ΔΙΑΣΤΟΛΗΣ ΙΝΩΔΟΥΣ ΥΛΙΚΟΥ ΜΕ ΕΝΔΙΑΜΕΣΗ ΦΑΣΗ

7.1 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΔΙΑΜΗΚΟΥΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΟΥ ΘΕΡΜΙΚΗΣ ΔΙΑΣΤΟΛΗΣ a_L

Θεωρούμε το επταφασικό κυλινδρικό μοντέλο όπως το περιγράψαμε στην ενότητα 5.1. Με την χρήση της θεωρίας της αντοχής των υλικών θα εξάγουμε έναν θεωρητικό τύπο για τον υπολογισμό του διαμήκους συντελεστού θερμικής διαστολής a_L.

Από τη βιβλιογραφία [53] γνωρίζουμε τις τιμές των συντελεστών θερμικής διαστολής ανάλογα το υλικό του εγκλείσματος και της μήτρας που θα χρησιμοποιήσουμε. Έχουμε λοιπόν:

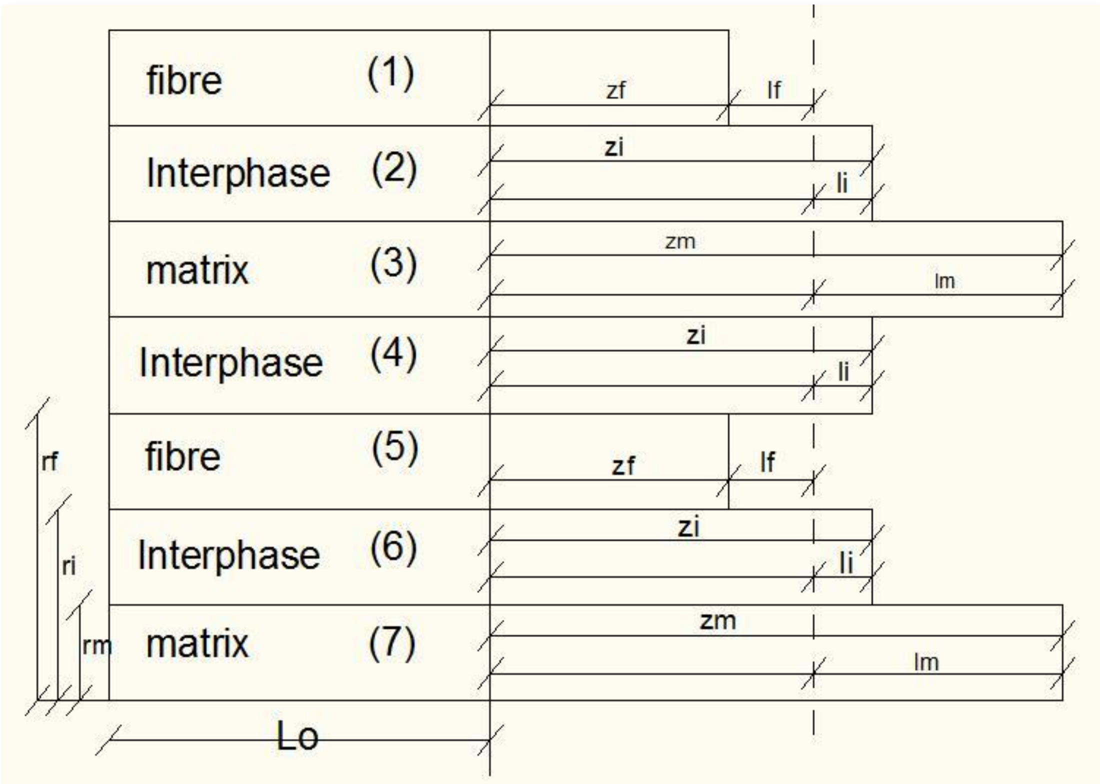
Υλικό	Ύαλος	Εποξ. Ρητίνη
Συντελεστής θερμικής διαστολής α x 10^{-6}($^{o}C^{-1}$)	5,0	52,5

Έστω τώρα ότι έχουμε τη διάταξη των φάσεων όπως φαίνεται στην Εικ.7.1. Εάν οι κατά μήκος μεταβολές του μηκους του εγκλείσματος, της μήτρας και της ενδιαμέσου φάσεως, που οφείλονται σε τυχαία αύξηση θερμοκρασίας ΔΤ , συμβολίζονται ως z_f, z_m και z_i αντιστοίχως τότε θα έχουμε:

$$z_f = L_0 a_f \Delta T \;,\; z_i = L_0 a_i \Delta T \text{ και } z_m = L_0 a_m \Delta T \qquad (7.1.1,2,3)$$

Επειδή όμως εμείς αναπτύσσουμε περιορισμούς, το πραγματικό όριο της συνολικής διαστολής σημειώνεται με διακεκομμένη γραμμή στην Εικ.7.1. Η περιορισμένη διαστολή (ή συστολή) του εγκλείσματος, της μήτρας και της ενδιαμέσου φάσεως συμβολίζονται ως l_f, l_m και l_i αντίστοιχα. Οι αξονικές παραμορφώσεις των φάσεων αυτών θα είναι:

$$\varepsilon_{z,f} = \frac{l_f}{L_0} \;,\; \varepsilon_{z,m} = \frac{l_m}{L_0} \text{ και } \varepsilon_{z,i} = \frac{l_i}{L_0} \qquad (7.1.4,5,6)$$



Εικόνα 7.1

Επίσης έχουμε:

$z_2 - z_1 = l_1 + l_2$, $z_3 - z_2 = l_3 - l_2$ (7.1.7,8)

και $z_6 - z_5 = l_5 + l_6$, $z_7 - z_6 = l_7 + l_6$ αντίστοιχα. (7.1.9,10)

Το εφελκυστικό φορτίο στο έγκλεισμα είναι ίσο με το θλιπτικό φορτίο της μήτρας και της ενδιάμεσης φάσης. Έτσι έχουμε:

$$\frac{l_f}{L_o} E_f A_f = \frac{l_i}{L_o} E_i(r) A_i + \frac{l_m}{L_o} E_m A_m \qquad (7.1.11)$$

Η επίλυση από το σύστημα των σχέσεων (7.1.1,2,3),(7.1.7,8),(7.1.9,10) και (7.1.11) μας δίνει τα l_f, l_m, l_i .

$$l_f = L_o \Delta T \times \frac{\left\lfloor a_i(r) E_i(r) A_i + a_m E_m A_m - a_f (E_i(r) A_i + E_m A_{m)}) \right\rfloor}{E_f A_f + E_m A_m + E_i(r) A_i} \qquad (7.1.12)$$

$$l_m = L_o \Delta T \times \frac{\left\lfloor a_i(r)(E_i(r) A_i + E_f A_f) - (a_i(r) E_i(r) A_i + a_f E_f A_f) \right\rfloor}{E_f A_f + E_m A_m + E_i(r) A_i} \qquad (7.1.13)$$

$$l_i = L_o \Delta T \times \frac{\left\lfloor a_i(r)(E_f A_f + E_m A_m) - (a_f E_f A_f + a_m E_m A_{m)}) \right\rfloor}{E_f A_f + E_m A_m + E_i(r) A_i} \qquad (7.1.14)$$

Ο διαμήκης συντελεστής θερμικής διαστολής μπορεί να βρεθεί από τη σχέση : $l_f + z_f = a_L L_o \Delta T$ αντικαθιστώντας τα z_f και l_f από τις προηγούμενες σχέσεις. Έτσι θα έχουμε:

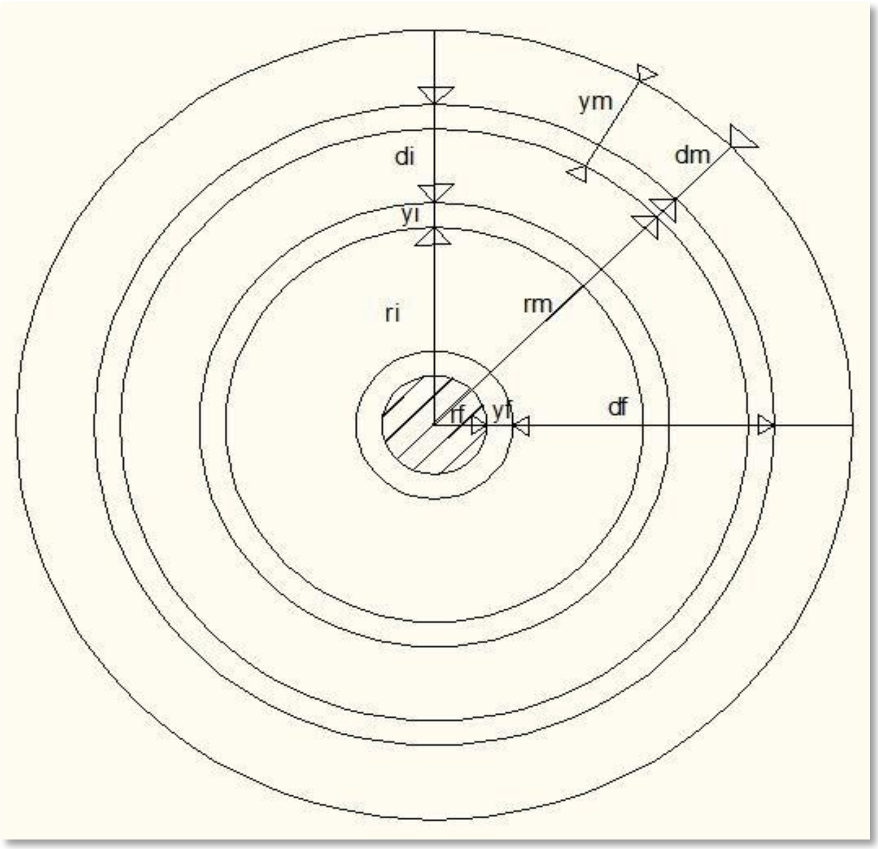
$$a_L = \frac{a_f E_f U_f + a_m E_m U_m + a_i(r)E_i(r)U_i}{E_f U_f + E_m U_m + E_i(r)U_i} \tag{7.1.15}$$

Ο παραπάνω τύπος μπορεί να γραφεί στην εξής μορφή:

$$\boxed{a_L = \frac{a_f E_f (U_1 + U_5) + a_m E_m (U_3 + U_7) + \frac{2}{r_7^2}\int_{r_1}^{r_2} a_2(r)E_2(r)rdr + \frac{2}{r_7^2}\int_{r_3}^{r_4} a_4(r)E_4(r)rdr + \frac{2}{r_7^2}\int_{r_5}^{r_6} a_6(r)E_6(r)rdr}{E_f (U_1 + U_5) + E_m (U_3 + U_7) + \frac{2}{r_7^2}\int_{r_1}^{r_2} E_2(r)rdr + \frac{2}{r_7^2}\int_{r_3}^{r_4} E_4(r)rdr + \frac{2}{r_7^2}\int_{r_5}^{r_6} E_6(r)rdr}}$$

(7.1.16)

7.2.1 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΕΓΚΑΡΣΙΟΥ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΟΥ ΘΕΡΜΙΚΗΣ ΔΙΑΣΤΟΛΗΣ a_T .(ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΑΝΤΟΧΗΣ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ)



Εικόνα 7.2

Ας παρατηρήσουμε την Εικ.7.2. Η εξαναγκασμένη διαστολή του εγκλείσματος, της μήτρας και της ενδιαμέσου φάσεως κατά την εγκάρσια διεύθυνση είναι η y_f, y_m και y_i αντίστοιχα και η διαστολή τους (ή συστολή) με περιορισμούς συμβολίζονται με d_f, d_m και d_i αντίστοιχα.

$$\varepsilon_{y,f} = -v_f \varepsilon_{z,f} = -v_f \frac{\lfloor a_i(r)E_i(r)A_i + a_m E_m A_m - a_f(E_i(r)A_i + E_m a_m) \rfloor}{E_f A_f + E_m A_m + E_i(r)A_i} \Delta\mathrm{T}$$
$$= v_f(a_L - a_f)\Delta\mathrm{T}$$

(7.2.1)

$$\varepsilon_{y,mf} = -v_m \varepsilon_{z,m} = -v_m \frac{\lfloor a_m(E_i(r)A_i + E_f A_f) - (a_i(r)E_i(r)A_i + a_f E_f A_f) \rfloor}{E_f A_f + E_m A_m + E_i(r)A_i} \Delta\mathrm{T}$$
$$= v_m(a_m - a_L)\Delta\mathrm{T}$$

(7.2.2)

$$\varepsilon_{y,i} = -v_i(r)\varepsilon_{z,i} = -v_i(r) \frac{\lfloor a_i(r)(E_f A_f + E_m A_m) - (a_f E_f A_f + a_m E_m A_m) \rfloor}{E_f A_f + E_m A_m + E_i(r)A_i} \Delta\mathrm{T}$$
$$= v_i(r)(a_i(r) - a_L)\Delta\mathrm{T}$$

(7.2.3)

Οι τιμές των $\varepsilon_{z,f}, \varepsilon_{z,m}$ και $\varepsilon_{z,i}$ έχουν υπολογισθεί από τις σχέσεις (7.1.12)-(7.1.14) ως εξής: $\varepsilon_{z,f} = L_f / L_o$, $\varepsilon_{z,m} = L_m / L_o$ και $\varepsilon_{z,i} = L_i / L_o$.
Οι ολικές παραμορφώσεις των τριών φάσεων είναι:

$$\varepsilon^t_{y,f} = a_f \Delta\mathrm{T} + \varepsilon_{y,f} = a_f \Delta\mathrm{T} - v_f(a_L - a_f)\Delta\mathrm{T} \quad (7.2.4)$$

$$\varepsilon^t_{y,mf} = a_m \Delta\mathrm{T} - \varepsilon_{y,m} = a_m \Delta\mathrm{T} - v_m(a_m - a_L)\Delta\mathrm{T} \quad (7.2.5)$$

$$\varepsilon^t_{y,i} = a_i(r)\Delta\mathrm{T} - \varepsilon_{y,i} = a_i(r)\Delta\mathrm{T} + v_i(r)(a_i(r) - a_L)\Delta\mathrm{T} \quad (7.2.6)$$

Η ολική παραμόρφωση του συνθέτου υλικού είναι ίση με:

$$\varepsilon^t{}_{y,c} = \varepsilon^t{}_{y,f} U_f + \varepsilon^t{}_{y,m} U_m + \varepsilon^t{}_{y,i} U_i \quad (7.2.7)$$

Αντικαθιστώντας τις παραμορφώσεις που υπολογίσαμε παραπάνω και την ολική παραμόρφωση με $\varepsilon^t_{y,c} = a_T \Delta\mathrm{T}$ καταλήγουμε εν τέλει στη σχέση:

$$a_T = (1+v_f)a_f U_f + (1+v_m)a_m U_m + (1+v_i(r))a_i(r)U_i - a_L(v_f U_f + v_m U_m + v_i(r)U_i)$$

(7.2.8)

Η οποία σχέση μπορεί να γραφεί και με την εξής μορφή:

$$a_T = (1+v_f)a_f U_f + (1+v_m)a_m U_m + \frac{2}{r_m^{\ 2}}\int_{r_f}^{r_i}(1+v_i(r))a_i(r)dr -$$
$$- a_L(v_f U_f + v_m U_m + \frac{2}{r_m^{\ 2}}\int_{r_f}^{r_i} v_i(r)rdr)$$

(7.2.9)

Στην προκειμένη περίπτωση έχουμε δύο περιοχές εγκλείσματος, δύο περιοχές μήτρας και τρεις περιοχές ενδιάμεσης φάσεως. Εξαιτίας αυτού ο τύπος θα είναι:

$$\boxed{\begin{aligned}&a_T = (1+v_f)a_f U_f + (1+v_m)a_m U_m + \frac{2}{r_{m,2}^{\ 2}}\int_{r_{f,1}}^{r_{i,1}}(1+v_{i,1}(r))a_{i,1}(r)dr +\\ &+\frac{2}{r_{m,2}^{\ 2}}\int_{r_{m,1}}^{r_{i,2}}(1+v_{i,2}(r))a_{i,2}(r)dr + \frac{2}{r_{m,2}^{\ 2}}\int_{r_{f,2}}^{r_{i,3}}(1+v_{i,3}(r))a_{i,3}(r)dr - a_L[v_f U_f +\\ &+ v_m U_m + \frac{2}{r_{m,2}^{\ 2}}\int_{r_{f,1}}^{r_{i,1}}v_{i,1}(r)rdr + \frac{2}{r_{m,2}^{\ 2}}\int_{r_{m,1}}^{r_{i,2}}v_{i,2}(r)dr + \frac{2}{r_{m,2}^{\ 2}}\int_{r_{f,2}}^{r_{i,3}}v_{i,3}(r)dr]\end{aligned}}$$

(7.2.10a)

Γνωρίζοντας όμως ότι $U_1 = U_{f,1}$, $U_5 = U_{f,2}$ και $U_3 = U_{m,1}$, $U_7 = U_{m,2}$ και αντιστοίχως $a_{f,1} = a_{f,2} = a_f$, $a_{m,1} = a_{m,2} = a_m$ και $v_{f,1} = v_{f,2} = v_f, v_{m,1} = v_{m,2} = v_m$ και $r_1 = r_{f,1}, r_2 = r_{i,1}$, $r_3 = r_{m,1}$, $r_4 = r_{i,2}$, $r_5 = r_{f,2}$, $r_6 = r_{i,3}$, $r_7 = r_{m,2}$. Ισχύει όμως ότι $U_{f,1} + U_{f,2} = U_f$ και $U_{m,1} + U_{m,2} = U_m$ άρα θα έχουμε:

$$\boxed{\begin{aligned}&a_T = (1+v_f)a_f(U_{f,1}+U_{f,2}) + (1+v_m)a_m(U_{m,1}+U_{m,2}) + \frac{2}{r_{m,2}^{\ 2}}\int_{r_{f,1}}^{r_{i,1}}(1+v_{i,1}(r))a_{i,1}(r)dr +\\ &+\frac{2}{r_{m,2}^{\ 2}}\int_{r_{m,1}}^{r_{i,2}}(1+v_{i,2}(r))a_{i,2}(r)dr + \frac{2}{r_{m,2}^{\ 2}}\int_{r_{f,2}}^{r_{i,3}}(1+v_{i,3}(r))a_{i,3}(r)dr - a_L[v_f(U_{f,1}+U_{f,2}) +\\ &+ v_m(U_{m,1}+U_{m,2}) + \frac{2}{r_{m,2}^{\ 2}}\int_{r_{f,1}}^{r_{i,1}}v_{i,1}(r)rdr + \frac{2}{r_{m,2}^{\ 2}}\int_{r_{m,1}}^{r_{i,2}}v_{i,2}(r)dr + \frac{2}{r_{m,2}^{\ 2}}\int_{r_{f,2}}^{r_{i,3}}v_{i,3}(r)dr]\end{aligned}}$$

(7.2.10b)

Επίσης $a_{i,1} = a_2$, $a_{i,2} = a_4$, $a_{i,3} = a_6$ και $v_{i,1} = v_2, v_{i,2} = v_4, v_{i,3} = v_6$. Επομένως ο τελικός τύπος θα είναι:

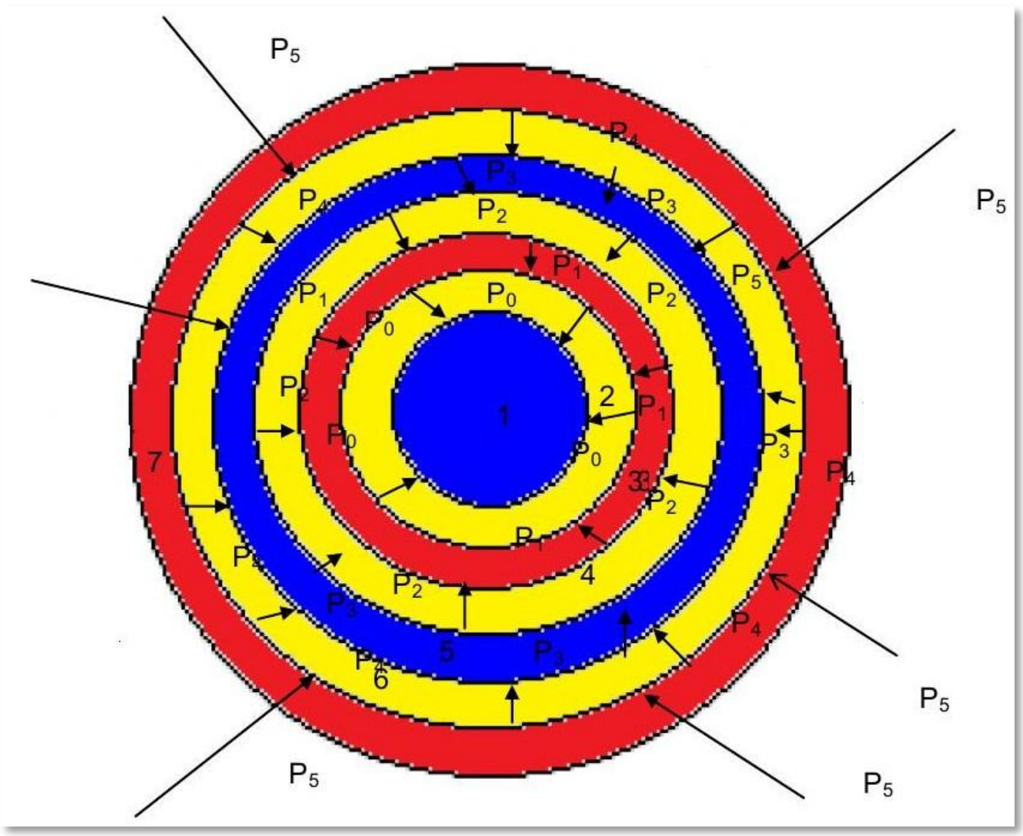
$$\boxed{\begin{aligned} a_T &= (1+v_f)a_f(U_1+U_5)+(1+v_m)a_m(U_3+U_7)+\frac{2}{r_7^{\,2}}\int_{r_1}^{r_2}(1+v_2(r))a_2(r)dr+ \\ &+\frac{2}{r_7^{\,2}}\int_{r_3}^{r_4}(1+v_4(r))a_4(r)dr+\frac{2}{r_7^{\,2}}\int_{r_5}^{r_6}(1+v_6(r))a_6(r)dr - a_L[v_f(U_1+U_5)+v_m(U_3+U_7)+ \\ &+\frac{2}{r_7^{\,2}}\int_{r_1}^{r_2}v_2(r)rdr+\frac{2}{r_7^{\,2}}\int_{r_3}^{r_4}v_4(r)dr+\frac{2}{r_7^{\,2}}\int_{r_5}^{r_6}v_6(r)dr] \end{aligned}}$$

(7.2.10c)

7.2.2 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΕΓΚΑΡΣΙΟΥ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΟΥ ΘΕΡΜΙΚΗΣ ΔΙΑΣΤΟΛΗΣ a_T .(ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ)

Θεωρούμε λοιπόν το επταφασικό κυλινδρικό μοντέλο, όπως αυτό προκύπτει από την ανάλυση των προηγούμενων παραγράφων.

Έστω ότι μεταβάλλουμε τη θερμοκρασία του σύνθετου υλικού κατά ΔΤ. Εξαιτίας της θερμοκρασιακής μεταβολής εμφανίζονται εσωτερικές τάσεις στο υλικό. Έστω P_0 η πίεση που ασκείται στο σύνορο μεταξύ 1^{ης} και 2^{ης} φάσης λόγω της αλληλεπίδρασης, P_1 η πίεση που ασκείται στο σύνορο μεταξύ 2^{ης} και 3^{ης} φάσης, P_2 η πίεση που ασκείται στο σύνορο μεταξύ 3^{ης} και 4^{ης} φάσης, P_3 η πίεση που ασκείται μεταξύ 4^{ης} και 5^{ης} φάσης, P_4 η πίεση που ασκείται μεταξύ 5^{ης} και 6^{ης} φάσης και τέλος P_5 η πίεση που ασκείται στο σύνορο μεταξύ 6^{ης} και 7^{ης} φάσης. Οι πιέσεις που ασκούνται στα σύνορα των φάσεων ασκούνται ομοιόμορφα και ακτινικά προς την επιφάνεια των κυλινδρικών φλοιών όπως δείχνει το σχήμα 7.3 .



Σχήμα 7.3

ΤΑΣΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Η τασική συνάρτηση Airy που περιγράφει το πρόβλημα καθώς και η λύση της είναι ίδιες με αυτές της ενότητας 5.2, δηλαδή θα έχουμε:

$$\nabla^4 \Phi = \frac{d^4\Phi}{dr^4} + \frac{2}{r}\frac{d^3\Phi}{dr^3} - \frac{1}{r^2}\frac{d^2\Phi}{dr^2} + \frac{1}{r^3}\frac{d\Phi}{dr} \tag{7.2.2.1}$$

Η πιο πάνω διαφορική εξίσωση είναι τύπου Euler της οποίας η γενική λύση έχει τη μορφή:

$$\Phi = J_1 \ln r + J_2 r^2 \ln r + J_3 r^2 + J_4 \tag{7.2.2.2}$$

Όπου J_1, J_2, J_3 και J_4 είναι σταθερές.

Η κάθε μία από τις επτά φάσεις όπως και στην **ενότητα 5.2**, έχει την δική της τασική συνάρτηση που την χαρακτηρίζει και άρα θα έχουμε:

$$\Phi_1 = A_1 \ln r + A_2 r^2 \ln r + A_3 r^2 + A_4 \tag{7.2.2.3}$$

$$\Phi_2 = B_1 \ln r + B_2 r^2 \ln r + B_3 r^2 + B_4 \tag{7.2.2.4}$$

$$\Phi_3 = C_1 \ln r + C_2 r^2 \ln r + C_3 r^2 + C_4 \tag{7.2.2.5}$$

$$\Phi_4 = D_1 \ln r + D_2 r^2 \ln r + D_3 r^2 + D_4 \tag{7.2.2.6}$$

$$\Phi_5 = F_1 \ln r + F_2 r^2 \ln r + F_3 r^2 + F_4 \tag{7.2.2.7}$$

$$\Phi_6 = K_1 \ln r + K_2 r^2 \ln r + K_3 r^2 + K_4 \tag{7.2.2.8}$$

$$\Phi_7 = H_1 \ln r + H_2 r^2 \ln r + H_3 r^2 + H_4 \tag{7.2.2.9}$$

<u>ΤΑΣΕΙΣ</u>

Αρχικά υπολογίζουμε τις τάσεις σ_r και σ_θ με την βοήθεια των τασικών συναρτήσεων και από τις σχέσεις:

$$\sigma_r = \frac{1}{r}\frac{d\Phi}{dr} \text{ και } \sigma_\theta = \frac{d^2\Phi}{dr^2}$$

Έτσι έχουμε λοιπόν:

$$\sigma_{r,1} = \frac{A_1}{r^2} + A_2(2\ln r + 1) + 2A_3 \tag{7.2.2.10}$$

$$\sigma_{\theta,1} = -\frac{A_1}{r^2} + A_2(2\ln r + 3) + 2A_3 \tag{7.2.2.11}$$

$$\sigma_{r,2} = \frac{B_1}{r^2} + B_2(2\ln r + 1) + 2B_3 \tag{7.2.2.12}$$

$$\sigma_{\theta,2} = -\frac{B_1}{r^2} + B_2(2\ln r + 3) + 2B_3 \tag{7.2.2.13}$$

$$\sigma_{r,3} = \frac{C_1}{r^2} + C_2(2\ln r + 1) + 2C_3 \tag{7.2.2.14}$$

$$\sigma_{\theta,3} = -\frac{C_1}{r^2} + C_2(2\ln r + 3) + 2C_3 \tag{7.2.2.15}$$

$$\sigma_{r,4} = \frac{D_1}{r^2} + D_2(2\ln r + 1) + 2D_3 \tag{7.2.2.16}$$

$$\sigma_{\theta,4} = -\frac{D_1}{r^2} + D_2(2\ln r + 3) + 2D_3 \tag{7.2.2.17}$$

$$\sigma_{r,5} = \frac{F_1}{r^2} + F_2(2\ln r + 1) + 2F_3 \tag{7.2.2.18}$$

$$\sigma_{\theta,5} = -\frac{F_1}{r^2} + F_2(2\ln r + 3) + 2F_3 \tag{7.2.2.19}$$

$$\sigma_{r,6} = \frac{K_1}{r^2} + K_2(2\ln r + 1) + 2K_3 \tag{7.2.2.20}$$

$$\sigma_{\theta,6} = -\frac{K_1}{r^2} + K_2(2\ln r + 3) + 2K_3 \tag{7.2.2.21}$$

$$\sigma_{r,7} = \frac{H_1}{r^2} + H_2(2\ln r + 1) + 2H_3 \tag{7.2.2.22}$$

$$\sigma_{\theta,7} = -\frac{H_1}{r^2} + H_2(2\ln r + 3) + 2H_3 \tag{7.2.2.23}$$

Για να αποφύγουμε τον απειρισμό των τάσεων στην θέση $r = 0$ θα πρέπει οι σταθερές A_1 και A_2 να ισούνται με το μηδέν. Δηλαδή $A_1 = A_2 = 0$. Επίσης μπορεί να δειχθεί εξισώνοντας τις εκφράσεις των μετατοπίσεων για την 2η και 3η φάση, για την 3η και 4η φάση, για την 4η και 5η φάση, για την 5η και 6η και για την 6η και 7η, ότι $B_2 = C_2 = D_2 = F_2 = K_2 = H_2 = 0$. Οι σχέσεις (7.2.2.10)-(7.2.2.23) μετασχηματίζονται σε:

$$\sigma_{r,1} = 2A_3 \tag{7.2.2.24}$$

$$\sigma_{\theta,1} = 2A_3 \tag{7.2.2.25}$$

$$\sigma_{r,2} = \frac{B_1}{r^2} + 2B_3 \tag{7.2.2.26}$$

$$\sigma_{\theta,2} = -\frac{B_1}{r^2} + 2B_3 \tag{7.2.2.27}$$

$$\sigma_{r,3} = \frac{C_1}{r^2} + 2C_3 \tag{7.2.2.28}$$

$$\sigma_{\theta,3} = -\frac{C_1}{r^2} + 2C_3 \tag{7.2.2.29}$$

$$\sigma_{r,4} = \frac{D_1}{r^2} + 2D_3 \tag{7.2.2.30}$$

$$\sigma_{\theta,4} = -\frac{D_1}{r^2} + 2D_3 \tag{7.2.2.31}$$

$$\sigma_{r,5} = \frac{F_1}{r^2} + 2F_3 \tag{7.2.2.32}$$

$$\sigma_{\theta,5} = -\frac{F_1}{r^2} + 2F_3 \tag{7.2.2.33}$$

$$\sigma_{r,6} = \frac{K_1}{r^2} + 2K_3 \tag{7.2.2.34}$$

$$\sigma_{\theta,6} = -\frac{K_1}{r^2} + 2K_3 \tag{7.2.2.35}$$

$$\sigma_{r,7} = \frac{H_1}{r^2} + 2H_3 \tag{7.2.2.36}$$

$$\sigma_{\theta,7} = -\frac{H_1}{r^2} + 2H_3 \tag{7.2.2.37}$$

Οι αξονικές τάσεις $\sigma_{z,1}, \sigma_{z,2}, \sigma_{z,3}, \sigma_{z,4}, \sigma_{z,5}, \sigma_{z,6}, \sigma_{z,7}$ θα υπολογιστούν από τις σχέσεις τάσεων-παραμορφώσεων:

$$\varepsilon_{z,1} = \frac{1}{E_1}\left[\sigma_{z,1} - v_1(\sigma_{r,1} + \sigma_{\theta,1})\right] = 0 \tag{7.2.2.38}$$

$$\varepsilon_{z,2} = \frac{1}{E_2}\left[\sigma_{z,2} - v_2(\sigma_{r,2} + \sigma_{\theta,2})\right] = 0 \qquad (7.2.2.39)$$

$$\varepsilon_{z,3} = \frac{1}{E_3}\left[\sigma_{z,3} - v_3(\sigma_{r,3} + \sigma_{\theta,3})\right] = 0 \qquad (7.2.2.40)$$

$$\varepsilon_{z,4} = \frac{1}{E_4}\left[\sigma_{z,4} - v_4(\sigma_{r,4} + \sigma_{\theta,4})\right] = 0 \qquad (7.2.2.41)$$

$$\varepsilon_{z,5} = \frac{1}{E_5}\left[\sigma_{z,5} - v_5(\sigma_{r,5} + \sigma_{\theta,5})\right] = 0 \qquad (7.2.2.42)$$

$$\varepsilon_{z,6} = \frac{1}{E_6}\left[\sigma_{z,6} - v_6(\sigma_{r,6} + \sigma_{\theta,6})\right] = 0 \qquad (7.2.2.43)$$

$$\varepsilon_{z,7} = \frac{1}{E_7}\left[\sigma_{z,7} - v_7(\sigma_{r,7} + \sigma_{\theta,7})\right] = 0 \qquad (7.2.2.44)$$

Έχοντας το σύστημα των εξισώσεων (7.2.2.38)-(7.2.2.44) και κάνοντας χρήση και των εξισώσεων (7.2.2.24)-(7.2.2.37) καταλήγουμε στις εξής εκφράσεις για τις αξονικές τάσεις:

$$\sigma_{z,1} = 4v_1A_3 \qquad (7.2.2.45)$$

$$\sigma_{z,2} = 4v_2B_3 \qquad (7.2.2.46)$$

$$\sigma_{z,3} = 4v_3C_3 \qquad (7.2.2.47)$$

$$\sigma_{z,4} = 4v_4D_3 \qquad (7.2.2.48)$$

$$\sigma_{z,5} = 4v_5F_3 \qquad (7.2.2.49)$$

$$\sigma_{z,6} = 4v_6K_3 \qquad (7.2.2.50)$$

$$\sigma_{z,7} = 4v_7H_3 \qquad (7.2.2.51)$$

ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΕΙΣ

Γνωρίζουμε γενικά ότι ισχύει:

$$\varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \tag{7.2.2.52}$$

Λόγω όμως της κυλινδρικής συμμετρίας η γωνιακή μετατόπιση u_θ δεν εξαρτάται από το θ και άρα θα ισχύει:

$$\varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r} \Rightarrow u_r = r\varepsilon_\theta \tag{7.2.2.53}$$

Άρα ξεχωριστά για τις επτά φάσεις θα έχουμε:

$$u_{r,1} = r\varepsilon_{\theta,1} \tag{7.2.2.54}$$

$$u_{r,2} = r\varepsilon_{\theta,2} \tag{7.2.2.55}$$

$$u_{r,3} = r\varepsilon_{\theta,3} \tag{7.2.2.56}$$

$$u_{r,4} = r\varepsilon_{\theta,4} \tag{7.2.2.57}$$

$$u_{r,5} = r\varepsilon_{\theta,5} \tag{7.2.2.58}$$

$$u_{r,6} = r\varepsilon_{\theta,6} \tag{7.2.2.59}$$

$$u_{r,7} = r\varepsilon_{\theta,7} \tag{7.2.2.60}$$

Επίσης από τις σχέσεις τάσεων-παραμορφώσεων γνωρίζουμε ότι:

$$\varepsilon_{\theta,1} = \frac{\sigma_{\theta,1} - \nu_1(\sigma_{r,1} + \sigma_{z,1})}{E_1} \tag{7.2.2.61}$$

$$\varepsilon_{\theta,2} = \frac{\sigma_{\theta,2} - v_2(\sigma_{r,2} + \sigma_{z,2})}{E_2} \tag{7.2.2.62}$$

$$\varepsilon_{\theta,3} = \frac{\sigma_{\theta,3} - v_3(\sigma_{r,3} + \sigma_{z,3})}{E_3} \tag{7.2.2.63}$$

$$\varepsilon_{\theta,4} = \frac{\sigma_{\theta,4} - v_4(\sigma_{r,4} + \sigma_{z,4})}{E_4} \tag{7.2.2.64}$$

$$\varepsilon_{\theta,5} = \frac{\sigma_{\theta,5} - v_5(\sigma_{r,5} + \sigma_{z,5})}{E_5} \tag{7.2.2.65}$$

$$\varepsilon_{\theta,6} = \frac{\sigma_{\theta,6} - v_6(\sigma_{r,6} + \sigma_{z,6})}{E_6} \tag{7.2.2.66}$$

$$\varepsilon_{\theta,7} = \frac{\sigma_{\theta,7} - v_7(\sigma_{r,7} + \sigma_{z,7})}{E_7} \tag{7.2.2.67}$$

Αντικαθιστώντας στις σχέσεις (7.2.2.61)-(7.2.2.67), τις σχέσεις των τάσεων (7.2.2.45)-(7.2.2.51) και (7.2.2.24)-(7.2.2.37) θα έχουμε ότι:

$$\varepsilon_{\theta,1} = \frac{2A_3(1 - v_1 - 2v_1{}^2)}{E_1} \tag{7.2.2.68}$$

$$\varepsilon_{\theta,2} = \frac{\left[-(1+v_2)\frac{B_1}{r^2} + 2B_3(1 - v_2 - 2v_2{}^2)\right]}{E_2} \tag{7.2.2.69}$$

$$\varepsilon_{\theta,3} = \frac{\left[-(1+v_3)\frac{C_1}{r^2} + 2C_3(1 - v_3 - 2v_3{}^2)\right]}{E_3} \tag{7.2.2.70}$$

$$\varepsilon_{\theta,4} = \frac{\left[-(1+v_4)\frac{D_1}{r^2} + 2D_3(1 - v_4 - 2v_4{}^2)\right]}{E_4} \tag{7.2.2.71}$$

$$\varepsilon_{\theta,5} = \frac{\left[-(1+v_5)\dfrac{F_1}{r^2} + 2F_3(1-v_5-2v_5{}^2)\right]}{E_5} \tag{7.2.2.72}$$

$$\varepsilon_{\theta,6} = \frac{\left[-(1+v_6)\dfrac{K_1}{r^2} + 2K_3(1-v_6-2v_6{}^2)\right]}{E_6} \tag{7.2.2.73}$$

$$\varepsilon_{\theta,7} = \frac{\left[-(1+v_7)\dfrac{H_1}{r^2} + 2H_3(1-v_7-2v_7{}^2)\right]}{E_7} \tag{7.2.2.74}$$

Και άρα αντικαθιστώντας τις σχέσεις (7.2.2.68)-(7.2.2.74) στις σχέσεις (7.2.2.54)-(7.2.2.60) των μετατοπίσεων οι ακτινικές μετατοπίσεις θα γίνουν:

$$u_{r,1} = \frac{2A_3(1-v_1-2v_1{}^2)r}{E_1} \tag{7.2.2.75}$$

$$u_{r,2} = \frac{\left[-(1+v_2)\dfrac{B_1}{r^2} + 2B_3(1-v_2-2v_2{}^2)\right]r}{E_2} \tag{7.2.2.76}$$

$$u_{r,3} = \frac{\left[-(1+v_3)\dfrac{C_1}{r^2} + 2C_3(1-v_3-2v_3{}^2)\right]r}{E_3} \tag{7.2.2.77}$$

$$u_{r,4} = \frac{\left[-(1+v_4)\dfrac{D_1}{r^2} + 2D_3(1-v_4-2v_4{}^2)\right]r}{E_4} \tag{7.2.2.78}$$

$$u_{r,5} = \frac{\left[-(1+v_5)\dfrac{F_1}{r^2} + 2F_3(1-v_5-2v_5{}^2)\right]r}{E_5} \tag{7.2.2.79}$$

$$u_{r,6} = \frac{\left[-(1+v_6)\dfrac{K_1}{r^2} + 2K_3(1-v_6-2v_6{}^2)\right]r}{E_6} \tag{7.2.2.80}$$

$$u_{r,7} = \frac{\left[-(1+v_7)\frac{H_1}{r^2} + 2H_3(1-v_7-2v_7^{\,2})\right]r}{E_7} \tag{7.2.2.81}$$

ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΙΣ

Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε τις ακτινικές παραμορφώσεις και ύστερα θα παρουσιάσουμε και τις ήδη υπολογισμένες αξονικές και γωνιακές παραμορφώσεις συγκεντρωτικά.

Οι ακτινικές παραμορφώσεις θα εξαχθούν από τον γενικό τύπο:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}$$

Άρα θα έχουμε ότι:

$$\varepsilon_{r,1} = \frac{2A_3(1-v_1-2v_1^{\,2})}{E_1} \tag{7.2.2.82}$$

$$\varepsilon_{r,2} = \frac{\left[(1+v_2)\frac{B_1}{r^2} + 2B_3(1-v_2-2v_2^{\,2})\right]}{E_2} \tag{7.2.2.83}$$

$$\varepsilon_{r,3} = \frac{\left[(1+v_3)\frac{C_1}{r^2} + 2C_3(1-v_3-2v_3^{\,2})\right]}{E_3} \tag{7.2.2.84}$$

$$\varepsilon_{r,4} = \frac{\left[(1+v_4)\frac{D_1}{r^2} + 2D_3(1-v_4-2v_4^{\,2})\right]}{E_4} \tag{7.2.2.85}$$

$$\varepsilon_{r,5} = \frac{\left[(1+v_5)\frac{F_1}{r^2} + 2F_3(1-v_5-2v_5^{\,2})\right]}{E_5} \tag{7.2.2.86}$$

$$\varepsilon_{r,6} = \frac{\left[(1+v_6)\frac{K_1}{r^2} + 2K_3(1-v_6-2v_6{}^2)\right]}{E_6} \tag{7.2.2.87}$$

$$\varepsilon_{r,7} = \frac{\left[(1+v_7)\frac{H_1}{r^2} + 2H_3(1-v_7-2v_7{}^2)\right]}{E_7} \tag{7.2.2.88}$$

$$\varepsilon_{\theta,1} = \frac{2A_3(1-v_1-2v_1{}^2)}{E_1} \tag{7.2.2.89}$$

$$\varepsilon_{\theta,2} = \frac{\left[-(1+v_2)\frac{B_1}{r^2} + 2B_3(1-v_2-2v_2{}^2)\right]}{E_2} \tag{7.2.2.90}$$

$$\varepsilon_{\theta,3} = \frac{\left[-(1+v_3)\frac{C_1}{r^2} + 2C_3(1-v_3-2v_3{}^2)\right]}{E_3} \tag{7.2.2.91}$$

$$\varepsilon_{\theta,4} = \frac{\left[-(1+v_4)\frac{D_1}{r^2} + 2D_3(1-v_4-2v_4{}^2)\right]}{E_4} \tag{7.2.2.92}$$

$$\varepsilon_{\theta,5} = \frac{\left[-(1+v_5)\frac{F_1}{r^2} + 2F_3(1-v_5-2v_5{}^2)\right]}{E_5} \tag{7.2.2.93}$$

$$\varepsilon_{\theta,6} = \frac{\left[-(1+v_6)\frac{K_1}{r^2} + 2K_3(1-v_6-2v_6{}^2)\right]}{E_6} \tag{7.2.2.94}$$

$$\varepsilon_{\theta,7} = \frac{\left[-(1+v_7)\frac{H_1}{r^2} + 2H_3(1-v_7-2v_7{}^2)\right]}{E_7} \tag{7.2.2.95}$$

ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΤΑΣΕΩΝ

Για $r = r_1$: $\sigma_{r,1} = -P_0$ και $\sigma_{r,2} = -P_0$ (7.2.2.96)

Για $r = r_2$: $\sigma_{r,2} = -P_1$ και $\sigma_{r,3} = -P_1$ (7.2.2.97)

Για $r = r_3$: $\sigma_{r,3} = -P_2$ και $\sigma_{r,4} = -P_2$ (7.2.2.98)

Για $r = r_4$: $\sigma_{r,4} = -P_3$ και $\sigma_{r,5} = -P_3$ (7.2.2.99)

Για $r = r_5$: $\sigma_{r,5} = -P_4$ και $\sigma_{r,6} = -P_4$ (7.2.2.100)

Για $r = r_6$: $\sigma_{r,6} = -P_5$ και $\sigma_{r,7} = -P_5$ (7.2.2.101)

Για $r = r_7$: $\sigma_{r,7} = 0$ (7.2.2.102)

Οι εξισώσεις (7.2.2.24,26,28,30,32,34,36) μετασχηματίζονται αντίστοιχα:

$$2A_3 = -P_0 \tag{7.2.2.103}$$

Για $r = r_1$ θα έχω $\dfrac{B_1}{r_1^2} + 2B_3 = -P_0$ (7.2.2.104)

Για $r = r_2$ θα έχω $\dfrac{B_1}{r_2^2} + 2B_3 = -P_1$ (7.2.2.105)

Για $r = r_2$ θα έχω $\dfrac{C_1}{r_2^2} + 2C_3 = -P_1$ (7.2.2.106)

Για $r = r_3$ θα έχω $\dfrac{C_1}{r_3^2} + 2C_3 = -P_2$ (7.2.2.107)

Για $r = r_3$ θα έχω $\dfrac{D_1}{r_3^2} + 2D_3 = -P_2$ (7.2.2.108)

Για $r = r_4$ θα έχω $\dfrac{D_1}{r_4^2} + 2D_3 = -P_3$ (7.2.2.109)

Για $r = r_4$ θα έχω $\dfrac{F_1}{r_4^2} + 2F_3 = -P_3$ (7.2.2.110)

Για $r = r_5$ θα έχω $\dfrac{F_1}{r_5^2} + 2F_3 = -P_4$ (7.2.2.111)

Για $r = r_5$ θα έχω $\dfrac{K_1}{r_5^2} + 2K_3 = -P_4$ (7.2.2.112)

Για $r = r_6$ θα έχω $\dfrac{K_1}{r_6^2} + 2K_3 = -P_5$ (7.2.2.113)

Για $r = r_6$ θα έχω $\dfrac{H_1}{r_6^2} + 2H_3 = -P_5$ (7.2.2.114)

Για $r = r_7$ θα έχω $\dfrac{H_1}{r_7^2} + 2H_3 = 0$ (7.2.2.115)

Από τη λύση της εξίσωσης (7.2.2.103) προκύπτει η τιμή της σταθεράς A_3. Οι εξισώσεις (7.2.2.104)-(7.2.2.105), (7.2.2.106)-(7.2.2.107), (7.2.2.108)-(7.2.2.109), (7.2.2.110)-(7.2.2.111), (7.2.2.112)-(7.2.2.113), (7.2.2.114)-(7.2.2.115) αποτελούν 6 συστήματα 2 εξισώσεων με 2 αγνώστους. Από τη λύση των 6 συστημάτων προκύπτουν οι τιμές των σταθερών $B_1 - B_3$, $C_1 - C_3$, $D_1 - D_3$, $F_1 - F_3$, $K_1 - K_3$, $H_1 - H_3$. Οι τιμές που προκύπτουν είναι:

$A_3 = -\dfrac{P_0}{2}$ (7.2.2.116)

$B_1 = \dfrac{(P_1 - P_0) r_1^2 r_2^2}{(r_2^2 - r_1^2)}$ (7.2.2.117) $B_3 = \dfrac{P_0 r_1^2 - P_1 r_2^2}{2(r_2^2 - r_1^2)}$ (7.2.2.118)

$C_1 = \dfrac{(P_2 - P_1) r_2^2 r_3^2}{(r_3^2 - r_2^2)}$ (7.2.2.119) $C_3 = \dfrac{P_1 r_2^2 - P_2 r_3^2}{2(r_3^2 - r_2^2)}$ (7.2.2.120)

$$D_1 = \frac{(P_3 - P_2) r_3^2 r_4^2}{(r_4^2 - r_3^2)} \quad (7.2.2.121)$$

$$D_3 = \frac{P_2 r_3^2 - P_3 r_4^2}{2(r_4^2 - r_3^2)} \quad (7.2.2.122)$$

$$F_1 = \frac{(P_4 - P_3) r_4^2 r_5^2}{(r_5^2 - r_4^2)} \quad (7.2.2.123)$$

$$F_3 = \frac{P_3 r_4^2 - P_4 r_5^2}{2(r_5^2 - r_4^2)} \quad (7.2.2.124)$$

$$H_1 = \frac{-P_5 r_6^2 r_7^2}{(r_7^2 - r_6^2)} \quad (7.2.2.125)$$

$$H_3 = \frac{P_5 r_6^2}{2(r_7^2 - r_6^2)} \quad (7.2.2.126)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (7.2.2.89), (7.2.2.90), (7.2.2.91), (7.2.2.92), (7.2.2.93), (7.2.2.94), (7.2.2.95) έχουμε:

$$\varepsilon_{\theta,1} = \frac{1}{E_1} 2A_3 (1 - v_1 - 2v_1^2) = -\frac{P_0}{E_1}(1 - v_1 - 2v_1^2) \quad (7.2.2.127)$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\theta,2} &= \frac{1}{E_2}\left[-(1+v_2)\frac{B_1}{r^2} + 2B_3(1 - v_2 - 2v_2^2)\right] = \\ &= \frac{1}{E_2}\left[-(1+v_2)\frac{(P_1 - P_0) r_1^2 r_2^2}{(r_2^2 - r_1^2) r^2} + \frac{(P_0 r_1^2 - P_1 r_2^2)(1 - v_2 - 2v_2^2)}{(r_2^2 - r_1^2)}\right]\end{aligned} \quad (7.2.2.128)$$

$$\varepsilon_{\theta,3} = \frac{1}{E_3}\left[-(1+v_3)\frac{(P_2 - P_1) r_2^2 r_3^2}{(r_3^2 - r_2^2) r^2} + \frac{(P_1 r_2^2 - P_2 r_3^2)(1 - v_3 - 2v_3^2)}{(r_3^2 - r_2^2)}\right] \quad (7.2.2.129)$$

$$\varepsilon_{\theta,4} = \frac{1}{E_4}\left[-(1+v_4)\frac{(P_3 - P_2) r_3^2 r_4^2}{(r_4^2 - r_3^2) r^2} + \frac{(P_2 r_3^2 - P_3 r_4^2)(1 - v_4 - 2v_4^2)}{(r_4^2 - r_3^2)}\right] \quad (7.2.2.130)$$

$$\varepsilon_{\theta,5} = \frac{1}{E_5}\left[-(1+v_5)\frac{(P_4 - P_3) r_4^2 r_5^2}{(r_5^2 - r_4^2) r^2} + \frac{(P_3 r_4^2 - P_4 r_5^2)(1 - v_5 - 2v_5^2)}{(r_5^2 - r_4^2)}\right] \quad (7.2.2.131)$$

$$\varepsilon_{\theta,6} = \frac{1}{E_6}\left[-(1+v_6)\frac{(P_5 - P_4) r_5^2 r_6^2}{(r_6^2 - r_5^2) r^2} + \frac{(P_4 r_5^2 - P_5 r_6^2)(1 - v_6 - 2v_6^2)}{(r_6^2 - r_5^2)}\right] \quad (7.2.2.132)$$

$$\varepsilon_{\theta,7} = \frac{1}{E_7}\left[(1+v_7)\frac{P_5 r_6^2 r_7^2}{(r_7^2 - r_6^2) r^2} + \frac{P_5 r_6^2 (1 - v_7 - 2v_7^2)}{(r_7^2 - r_6^2)}\right] \quad (7.2.2.133)$$

Η διαστολή του κυλινδρικού σώματος λόγω θερμοκρασιακής μεταβολής ΔΤ δίνεται από τη σχέση $\varepsilon_{\theta,i} = a_i \Delta T$, όπου a_i ο συντελεστής θερμικής διαστολής της i φάσης ($i = 1,2,3,4,5,6,7$).

<u>ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ</u>

- Για $r = r_1$ ισχύει:

$\varepsilon_{\theta,1} = a_1 \Delta T$

$\varepsilon_{\theta,2} = a_2 \Delta T$

Αφαιρώντας κατά μέλη θα έχω :

$$\varepsilon_{\theta,2} - \varepsilon_{\theta,1} = (a_2 - a_1)\Delta T =$$

$$= \left[\frac{(1+v_2)}{E_2} \frac{(P_0 - P_1) r_1^2 r_2^2}{(r_2^2 - r_1^2) r_1^2} + \frac{1}{E_2} \frac{(P_0 r_1^2 - P_1 r_2^2)(1 - v_2 - 2v_2^2)}{(r_2^2 - r_1^2)} \right] + \frac{P_0}{E_1}(1 - v_1 - 2v_1^2) =$$
$$= \frac{(1+v_2)}{E_2(r_2^2 - r_1^2)} \left[(P_0 - P_1) r_2^2 + (1 - 2v_2)(P_0 r_1^2 - P_1 r_2^2) \right] + \frac{P_0}{E_1}(1 - v_1 - 2v_1^2) =$$
$$= \frac{(1+v_2) r_2^2}{E_2(r_2^2 - r_1^2)} P_0 - \frac{(1+v_2) r_2^2}{E_2(r_2^2 - r_1^2)} P_1 + \frac{(1+v_2)(1-2v_2) r_1^2}{E_2(r_2^2 - r_1^2)} P_0 - \frac{(1+v_2)(1-2v_2) r_2^2}{E_2(r_2^2 - r_1^2)} P_1 +$$
$$+ \frac{(1 - v_1 - 2v_1^2)}{E_1} P_0 = P_0 \left[\frac{(1+v_2) r_2^2}{E_2(r_2^2 - r_1^2)} + \frac{r_1^2 (1 - v_2 - 2v_2^2)}{E_2(r_2^2 - r_1^2)} + \frac{(1 - v_1 - 2v_1^2)}{E_1} \right] -$$
$$- P_1 \left[\frac{(1+v_2) r_2^2}{E_2(r_2^2 - r_1^2)} + \frac{r_2^2 (1 - v_2 - 2v_2^2)}{E_2(r_2^2 - r_1^2)} \right]$$

(7.2.2.134)

- Για $r = r_2$ ισχύει:

$\varepsilon_{\theta,2} = a_2 \Delta T$

$\varepsilon_{\theta,3} = a_3 \Delta T$

Αφαιρώντας κατά μέλη θα έχω :

$$\varepsilon_{\theta,3}-\varepsilon_{\theta,2}=(a_3-a_2)\Delta\mathrm{T}=$$

$$=\left[\frac{(1+v_3)}{E_3}\frac{(P_1-P_2)r_2^2r_3^2}{(r_3^2-r_2^2)r_2^2}+\frac{1}{E_3}\frac{(P_1r_2^2-P_2r_3^2)(1-v_3-2v_3^2)}{(r_3^2-r_2^2)}\right]-$$

$$-\frac{(1+v_2)}{E_2(r_2^2-r_1^2)}\left[(P_0-P_1)r_1^2+(1-2v_2)(P_0r_1^2-P_1r_2^2)\right]=\frac{(1+v_3)}{E_3(r_3^2-r_2^2)}\left[(P_1-P_2)r_3^2+(1-2v_3)(P_1r_2^2-P_2r_3^2)\right]-$$

$$-\frac{(1+v_2)}{E_2(r_2^2-r_1^2)}\left[(P_0-P_1)r_1^2+(1-2v_2)(P_0r_1^2-P_1r_2^2)\right]=\frac{(1+v_3)r_3^2}{E_3(r_3^2-r_2^2)}P_1-\frac{(1+v_3)r_3^2}{E_3(r_3^2-r_2^2)}P_2+$$

$$+\frac{r_2^2(1-v_3-2v_3^2)}{E_3(r_3^2-r_2^2)}P_1-\frac{r_3^2(1-v_3-2v_3^2)}{E_3(r_3^2-r_2^2)}P_2-\frac{r_1^2(1+v_2)}{E_2(r_2^2-r_1^2)}P_0+\frac{r_1^2(1+v_2)}{E_2(r_2^2-r_1^2)}P_1-\frac{r_1^2(1-v_2-2v_2^2)}{E_2(r_2^2-r_1^2)}P_0+$$

$$+\frac{r_2^2(1-v_2-2v_2^2)}{E_2(r_2^2-r_1^2)}P_1=-P_0\left[\frac{(1+v_2)r_1^2}{E_2(r_2^2-r_1^2)}+\frac{r_1^2(1-v_2-2v_2^2)}{E_2(r_2^2-r_1^2)}\right]-P_2\left[\frac{r_3^2(1+v_3)}{E_3(r_3^2-r_2^2)}+\frac{r_3^2(1-v_3-2v_3^2)}{E_3(r_3^2-r_2^2)}\right]+$$

$$+P_1\left[\frac{r_3^2(1+v_3)}{E_3(r_3^2-r_2^2)}+\frac{r_2^2(1-v_3-2v_3^2)}{E_3(r_3^2-r_2^2)}+\frac{r_1^2(1+v_2)}{E_2(r_2^2-r_1^2)}+\frac{r_2^2(1-v_2-2v_2^2)}{E_2(r_2^2-r_1^2)}\right]$$

(7.2.2.135)

- Για $r=r_3$ ισχύει:

$$\varepsilon_{\theta,3}=a_3\Delta\mathrm{T}$$

$$\varepsilon_{\theta,4}=a_4\Delta\mathrm{T}$$

Αφαιρώντας κατά μέλη θα έχω αντιστοίχως :

$$\varepsilon_{\theta,4}-\varepsilon_{\theta,3}=(a_4-a_3)\Delta\mathrm{T}=$$

$$=-P_1\left[\frac{(1+v_3)r_2^2}{E_3(r_3^2-r_2^2)}+\frac{r_2^2(1-v_3-2v_3^2)}{E_3(r_3^2-r_2^2)}\right]-P_3\left[\frac{r_4^2(1+v_4)}{E_4(r_4^2-r_3^2)}+\frac{r_4^2(1-v_4-2v_4^2)}{E_4(r_4^2-r_3^2)}\right]+$$

$$+P_2\left[\frac{r_4^2(1+v_4)}{E_4(r_4^2-r_3^2)}+\frac{r_3^2(1-v_4-2v_4^2)}{E_4(r_4^2-r_3^2)}+\frac{r_2^2(1+v_3)}{E_3(r_3^2-r_2^2)}+\frac{r_3^2(1-v_3-2v_3^2)}{E_3(r_3^2-r_2^2)}\right]$$

(7.2.2.136)

- Για $r=r_4$ ισχύει:

$$\varepsilon_{\theta,4}=a_4\Delta\mathrm{T}$$

$$\varepsilon_{\theta,5}=a_5\Delta\mathrm{T}$$

Αφαιρώντας κατά μέλη θα έχω αντιστοίχως :

$$\varepsilon_{\theta,5}-\varepsilon_{\theta,4}=(a_5-a_4)\Delta\mathrm{T}=$$

$$=-P_2\left[\frac{(1+v_4)r_3^{\,2}}{E_4(r_4^{\,2}-r_3^{\,2})}+\frac{r_3^{\,2}(1-v_4-2v_4^{\,2})}{E_4(r_4^{\,2}-r_3^{\,2})}\right]-P_4\left[\frac{r_5^{\,2}(1+v_5)}{E_5(r_5^{\,2}-r_4^{\,2})}+\frac{r_5^{\,2}(1-v_5-2v_5^{\,2})}{E_5(r_5^{\,2}-r_4^{\,2})}\right]+$$
$$+P_3\left[\frac{r_5^{\,2}(1+v_5)}{E_5(r_5^{\,2}-r_4^{\,2})}+\frac{r_4^{\,2}(1-v_5-2v_5^{\,2})}{E_5(r_5^{\,2}-r_4^{\,2})}+\frac{r_3^{\,2}(1+v_4)}{E_4(r_4^{\,2}-r_3^{\,2})}+\frac{r_4^{\,2}(1-v_4-2v_4^{\,2})}{E_4(r_4^{\,2}-r_3^{\,2})}\right]$$

(7.2.2.137)

- Για $r=r_5$ ισχύει:

$$\varepsilon_{\theta,5}=a_5\Delta\mathrm{T}$$

$$\varepsilon_{\theta,6}=a_6\Delta\mathrm{T}$$

Αφαιρώντας κατά μέλη θα έχω αντιστοίχως :

$$\varepsilon_{\theta,6}-\varepsilon_{\theta,5}=(a_6-a_5)\Delta\mathrm{T}=$$

$$=-P_3\left[\frac{(1+v_5)r_4^{\,2}}{E_5(r_5^{\,2}-r_4^{\,2})}+\frac{r_4^{\,2}(1-v_5-2v_5^{\,2})}{E_5(r_5^{\,2}-r_4^{\,2})}\right]-P_5\left[\frac{r_6^{\,2}(1+v_6)}{E_6(r_6^{\,2}-r_5^{\,2})}+\frac{r_6^{\,2}(1-v_6-2v_6^{\,2})}{E_6(r_6^{\,2}-r_5^{\,2})}\right]+$$
$$+P_4\left[\frac{r_6^{\,2}(1+v_6)}{E_6(r_6^{\,2}-r_5^{\,2})}+\frac{r_5^{\,2}(1-v_6-2v_6^{\,2})}{E_6(r_6^{\,2}-r_5^{\,2})}+\frac{r_4^{\,2}(1+v_5)}{E_5(r_5^{\,2}-r_4^{\,2})}+\frac{r_5^{\,2}(1-v_5-2v_5^{\,2})}{E_5(r_5^{\,2}-r_4^{\,2})}\right]$$

(7.2.2.138)

- Για $r=r_6$ ισχύει:

$$\varepsilon_{\theta,6}=a_6\Delta\mathrm{T}$$

$$\varepsilon_{\theta,7}=a_7\Delta\mathrm{T}$$

Αφαιρώντας κατά μέλη θα έχω αντιστοίχως :

$$\varepsilon_{\theta,7} - \varepsilon_{\theta,6} = (a_7 - a_6)\Delta\mathrm{T} =$$

$$= -P_4\left[\frac{(1+v_6)r_5^{\,2}}{E_6(r_6^{\,2}-r_5^{\,2})} + \frac{r_5^{\,2}(1-v_6-2v_6^{\,2})}{E_6(r_6^{\,2}-r_5^{\,2})}\right] +$$

$$+ P_5\left[\frac{r_7^{\,2}(1+v_7)}{E_7(r_7^{\,2}-r_6^{\,2})} + \frac{r_6^{\,2}(1-v_7-2v_7^{\,2})}{E_7(r_7^{\,2}-r_6^{\,2})} + \frac{r_5^{\,2}(1+v_6)}{E_6(r_6^{\,2}-r_5^{\,2})} + \frac{r_6^{\,2}(1-v_6-2v_6^{\,2})}{E_6(r_6^{\,2}-r_5^{\,2})}\right] \tag{7.2.2.139}$$

Για διευκόλυνση των πράξεων θέτουμε τα παρακάτω :

$$\mathrm{A} = \left[\frac{(1+v_2)r_2^{\,2}}{E_2(r_2^{\,2}-r_1^{\,2})} + \frac{r_1^{\,2}(1-v_2-2v_2^{\,2})}{E_2(r_2^{\,2}-r_1^{\,2})} + \frac{(1-v_1-2v_1^{\,2})}{E_1}\right] \tag{7.2.2.140}$$

$$\mathrm{B} = \left[\frac{(1+v_2)r_2^{\,2}}{E_2(r_2^{\,2}-r_1^{\,2})} + \frac{r_2^{\,2}(1-v_2-2v_2^{\,2})}{E_2(r_2^{\,2}-r_1^{\,2})}\right] \tag{7.2.2.141}$$

$$\Gamma = \left[\frac{(1+v_2)r_1^{\,2}}{E_2(r_2^{\,2}-r_1^{\,2})} + \frac{r_1^{\,2}(1-v_2-2v_2^{\,2})}{E_2(r_2^{\,2}-r_1^{\,2})}\right] \tag{7.2.2.142}$$

$$\Delta = \left[\frac{r_3^{\,2}(1+v_3)}{E_3(r_3^{\,2}-r_2^{\,2})} + \frac{r_2^{\,2}(1-v_3-2v_3^{\,2})}{E_3(r_3^{\,2}-r_2^{\,2})} + \frac{r_1^{\,2}(1+v_2)}{E_2(r_2^{\,2}-r_1^{\,2})} + \frac{r_2^{\,2}(1-v_2-2v_2^{\,2})}{E_2(r_2^{\,2}-r_1^{\,2})}\right] \tag{7.2.2.143}$$

$$\mathrm{Z} = \left[\frac{r_3^{\,2}(1+v_3)}{E_3(r_3^{\,2}-r_2^{\,2})} + \frac{r_3^{\,2}(1-v_3-2v_3^{\,2})}{E_3(r_3^{\,2}-r_2^{\,2})}\right] \tag{7.2.2.144}$$

$$\mathrm{H} = \left[\frac{(1+v_3)r_2^{\,2}}{E_3(r_3^{\,2}-r_2^{\,2})} + \frac{r_2^{\,2}(1-v_3-2v_3^{\,2})}{E_3(r_3^{\,2}-r_2^{\,2})}\right] \tag{7.2.2.145}$$

$$\Theta = \left[\frac{r_4^{\,2}(1+v_4)}{E_4(r_4^{\,2}-r_3^{\,2})} + \frac{r_3^{\,2}(1-v_4-2v_4^{\,2})}{E_4(r_4^{\,2}-r_3^{\,2})} + \frac{r_2^{\,2}(1+v_3)}{E_3(r_3^{\,2}-r_2^{\,2})} + \frac{r_3^{\,2}(1-v_3-2v_3^{\,2})}{E_3(r_3^{\,2}-r_2^{\,2})}\right] \tag{7.2.2.146}$$

$$\mathrm{I} = \left[\frac{r_4^{\,2}(1+v_4)}{E_4(r_4^{\,2}-r_3^{\,2})} + \frac{r_4^{\,2}(1-v_4-2v_4^{\,2})}{E_4(r_4^{\,2}-r_3^{\,2})}\right] \tag{7.2.2.147}$$

$$\mathrm{K} = \left[\frac{(1+v_4)r_3^{\,2}}{E_4(r_4^{\,2}-r_3^{\,2})} + \frac{r_3^{\,2}(1-v_4-2v_4^{\,2})}{E_4(r_4^{\,2}-r_3^{\,2})} \right] \tag{7.2.2.148}$$

$$\Lambda = \left[\frac{r_5^{\,2}(1+v_5)}{E_5(r_5^{\,2}-r_4^{\,2})} + \frac{r_4^{\,2}(1-v_5-2v_5^{\,2})}{E_5(r_5^{\,2}-r_4^{\,2})} + \frac{r_3^{\,2}(1+v_4)}{E_4(r_4^{\,2}-r_3^{\,2})} + \frac{r_4^{\,2}(1-v_4-2v_4^{\,2})}{E_4(r_4^{\,2}-r_3^{\,2})} \right] \tag{7.2.2.149}$$

$$\mathrm{M} = \left[\frac{r_5^{\,2}(1+v_5)}{E_5(r_5^{\,2}-r_4^{\,2})} + \frac{r_5^{\,2}(1-v_5-2v_5^{\,2})}{E_5(r_5^{\,2}-r_4^{\,2})} \right] \tag{7.2.2.150}$$

$$\mathrm{N} = \left[\frac{(1+v_5)r_4^{\,2}}{E_5(r_5^{\,2}-r_4^{\,2})} + \frac{r_4^{\,2}(1-v_5-2v_5^{\,2})}{E_5(r_5^{\,2}-r_4^{\,2})} \right] \tag{7.2.2.151}$$

$$\Xi = \left[\frac{r_6^{\,2}(1+v_6)}{E_6(r_6^{\,2}-r_5^{\,2})} + \frac{r_5^{\,2}(1-v_6-2v_6^{\,2})}{E_6(r_6^{\,2}-r_5^{\,2})} + \frac{r_4^{\,2}(1+v_5)}{E_5(r_5^{\,2}-r_4^{\,2})} + \frac{r_5^{\,2}(1-v_5-2v_5^{\,2})}{E_5(r_5^{\,2}-r_4^{\,2})} \right] \tag{7.2.2.152}$$

$$\mathrm{O} = \left[\frac{r_6^{\,2}(1+v_6)}{E_6(r_6^{\,2}-r_5^{\,2})} + \frac{r_6^{\,2}(1-v_6-2v_6^{\,2})}{E_6(r_6^{\,2}-r_5^{\,2})} \right] \tag{7.2.2.153}$$

$$\Pi = \left[\frac{(1+v_6)r_5^{\,2}}{E_6(r_6^{\,2}-r_5^{\,2})} + \frac{r_5^{\,2}(1-v_6-2v_6^{\,2})}{E_6(r_6^{\,2}-r_5^{\,2})} \right] \tag{7.2.2.154}$$

$$\mathrm{P} = \left[\frac{r_7^{\,2}(1+v_7)}{E_7(r_7^{\,2}-r_6^{\,2})} + \frac{r_6^{\,2}(1-v_7-2v_7^{\,2})}{E_7(r_7^{\,2}-r_6^{\,2})} + \frac{r_5^{\,2}(1+v_6)}{E_6(r_6^{\,2}-r_5^{\,2})} + \frac{r_6^{\,2}(1-v_6-2v_6^{\,2})}{E_6(r_6^{\,2}-r_5^{\,2})} \right] \tag{7.2.2.155}$$

Επομένως θα έχουμε ένα σύστημα 6 εξισώσεων με 6 αγνώστους τις εσωτερικές πιέσεις $P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$, άρα :

$$\mathrm{A}P_0 - \mathrm{B}P_1 = (a_2 - a_1)\Delta\mathrm{T} \tag{7.2.2.156}$$

$$-\Gamma P_0 + \Delta P_1 - ZP_2 = (a_3 - a_2)\Delta\mathrm{T} \tag{7.2.2.157}$$

$$-\mathrm{H}P_1 + \Theta P_2 - \mathrm{I}P_3 = (a_4 - a_3)\Delta\mathrm{T} \tag{7.2.2.158}$$

$$-KP_2 + \Lambda P_3 - \mathrm{M}P_4 = (a_5 - a_4)\Delta\mathrm{T} \tag{7.2.2.159}$$

$$-\mathrm{N}P_3 + \Xi P_4 - \mathrm{O}P_5 = (a_6 - a_5)\Delta\mathrm{T} \tag{7.2.2.160}$$

$$-\Pi P_4 + \mathrm{P}P_5 = (a_7 - a_6)\Delta\mathrm{T} \tag{7.2.2.161}$$

Γνωρίζοντας τις ακτίνες, τα μέτρα ελαστικότητας, τους συντελεστές θερμικής διαστολής και τους λόγους Poisson για κάθε φάση και για κάθε περιεκτικότητα U_f επιλύουμε το παραπάνω σύστημα με τη βοήθεια του προγράμματος Matlab 2011 και προκύπτουν οι τιμές των εσωτερικών πιέσεων.

- Για $r = r_7$ ισχύει :

$$\varepsilon_{\theta,7}\big|_{r=r_7} = (a_7 - a_T)\Delta T \tag{7.2.2.162}$$

Όπου αντικαθιστώντας στη σχέση (7.2.2.133) για $r = r_7$ θα έχουμε :

$$\varepsilon_{\theta,7}\big|_{r=r_7} = \frac{1}{E_7}\left[(1+v_7)\frac{P_5 r_6^{\,2}}{(r_7^{\,2}-r_6^{\,2})} + \frac{P_5 r_6^{\,2}(1-v_7-2v_7^{\,2})}{(r_7^{\,2}-r_6^{\,2})}\right] \tag{7.2.2.163}$$

Άρα η σχέση (7.2.2.162) μέσω της σχέσης (7.2.2.163) γίνεται :

$$\varepsilon_{\theta,7}\big|_{r=r_7} = \frac{1}{E_7}\left[(1+v_7)\frac{P_5 r_6^{\,2}}{(r_7^{\,2}-r_6^{\,2})} + \frac{P_5 r_6^{\,2}(1-v_7-2v_7^{\,2})}{(r_7^{\,2}-r_6^{\,2})}\right] = (\alpha_7 - \alpha_T)\Delta T \Rightarrow$$

$$\boxed{a_T = a_7 - \frac{1}{E_7}\left[(1+v_7)\frac{P_5 r_6^{\,2}}{(r_7^{\,2}-r_6^{\,2})} + \frac{P_5 r_6^{\,2}(1-v_7-2v_7^{\,2})}{(r_7^{\,2}-r_6^{\,2})}\right]} \tag{7.2.2.164}$$

7.3 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΟΥ ΘΕΡΜΙΚΗΣ ΔΙΑΣΤΟΛΗΣ ΥΠΟ ΓΩΝΙΑ θ a_θ

Οι τιμές που προέκυψαν από πριν για τον διαμήκη συντελεστή θερμικής διαστολής a_L και τον εγκάρσιο συντελεστή θερμικής διαστολής a_T μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον υπολογισμό του γραμμικού συντελεστού θερμικής διαστολής a_θ που αφορά τη γωνία που σχηματίζει ο άξονας φορτίσεως με τη διεύθυνση των ινών του εγκλείσματος. Ισχύει η εξής σχέση:

$$a_\theta = a_L \cos^2\Theta + a_T \sin^2\Theta \tag{7.3.1}$$

7.4 ΜΟΝΤΕΛΑ ΚΑΙ ΕΚΦΡΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΙΣ ΘΕΡΜΟΕΛΑΣΤΙΚΕΣ ΣΤΑΘΕΡΕΣ ΙΝΩΔΩΝ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

Στη συνέχεια παραθέτουμε θεωρητικές σχέσεις που κατά καιρούς έχουν εκφράσει διάφοροι ερευνητές για τον υπολογισμό του διαμήκους συντελεστού θερμικής διαστολής a_L ,του εγκάρσιου συντελεστού θερμικής διαστολής a_T και του συντελεστού θερμικής διαστολής υπό γωνία φόρτισης a_θ . Να αναφέρουμε κατά τα γνωστά πως ο δείκτης f δηλώνει το έγκλεισμα (filler) ενώ ο δείκτης ο m δηλώνει την μήτρα(matrix).

7.4.1 ΤΥΠΟΙ ΔΙΑΜΗΚΟΥΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΟΥ ΘΕΡΜΙΚΗΣ ΔΙΑΣΤΟΛΗΣ a_L

<u>Εξίσωση Schapery [53]:</u>

$$a_L = \frac{E_f a_f u_f + E_m a_m u_m}{E_f u_f + E_m u_m} \tag{7.4.1}$$

<u>Εξίσωση Van Fo Fy [53]:</u>

$$a_L = a_m - (a_m - a_f) \times \frac{(1+v_m)E_f u_f - (1+v_f)(E_L - E_m u_m)}{(v_m - v_f)E_L} \tag{7.4.2}$$

7.4.2 ΤΥΠΟΙ ΕΓΚΑΡΣΙΟΥ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΟΥ ΘΕΡΜΙΚΗΣ ΔΙΑΣΤΟΛΗΣ a_T

<u>Εξίσωση Schapery [53]:</u>

$$a_T = (1+v_f)a_f u_f + (1+v_m)a_m u_m - a_L(v_f u_f + v_m u_m) \tag{7.4.3}$$

<u>Εξίσωση Van Fo Fy [53]:</u>

$$a_T = a_m + (a_m - a_L)v_{LT} - (a_m - a_f)(1+v_f)\frac{v_m - v_{LT}}{v_m - v_f} \tag{7.4.4}$$

<u>Εξίσωση Chamberlain [53]:</u>

$$a_T = a_m + \frac{2(a_f - a_m)u_f}{v_m(F - 1 + u_m) + (F + u_f) + E_m(1 - v_{LT})(F - 1 + u_m)/E_f} \tag{7.4.5}$$

όπου $F = 0{,}9096$ για εξαγωνικό μοντέλο και $F = 0{,}7854$ για τετραγωνικό μοντέλο.

<u>Εξίσωση Schneider [53]:</u>

$$a_T = a_m - (a_m - a_f) \times \left[\frac{2(1+v_m)(v_m^2 - 1)C}{(1+1.1u_f)/(1.1u_f - 1) - v_m + 2v_m^2 C} - \frac{v_m \dfrac{E_f}{E_m}}{\dfrac{1}{C} + \dfrac{E_f}{E_m}} \right] \tag{7.4.6}$$

όπου $C = \frac{1.1u_f}{(1-1.1u_f)}$

7.4.3 ΤΥΠΟΙ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΟΥ ΘΕΡΜΙΚΗΣ ΔΙΑΣΤΟΛΗΣ ΥΠΟ ΓΩΝΙΑ ΦΟΡΤΙΣΗΣ a_Θ

Εξίσωση Schapery [53]:

$$a_\theta = a_L \cos^2\Theta + a_T \sin^2\Theta \tag{7.4.7}$$

Όπου a_L και a_T Θεωρούμε τις τιμές του διαμήκη και εγκαρσίου συντελεστού θερμικής διαστολής που προέκυψαν από τις αντίστοιχες εξισώσεις του ερευνητή Schapery [53] .

7.5 ΠΙΝΑΚΕΣ

Σε αυτήν την ενότητα θα παραθέσουμε τις τιμές των θερμοελαστικών σταθερών για διάφορες περιεκτικότητες σε έγκλεισμα, έτσι όπως υπολογίσθηκαν από την εφαρμογή των τύπων, τους οποίους εξαγάγαμε εμείς βάσει του επταφασικού κυλινδρικού μοντέλου μας. Επίσης θα παραθέσουμε τιμές που υπολογίστηκαν από άλλους ερευνητές βάσει των δικών τους μοντέλων(Πίνακες K΄2,L΄2), όπως επίσης και πειραματικές τιμές δεδομένων που υπάρχουν στην βιβλιογραφία [53].(Πίνακες O΄2,P΄2). Στον Πίνακα Q΄2 παραθέτονται οι τιμές του συντελεστού θερμικής διαστολής a_θ που προέκυψαν από την ανάπτυξη του επταφασικού μοντέλου καθώς και οι αντίστοιχες πειραματικές τιμές δεδομένων που υπάρχουν στην βιβλιογραφία [53].

ΔΙΑΜΗΚΗΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΘΕΡΜΙΚΗΣ ΔΙΑΣΤΟΛΗΣ a_L										
U_f κατ' όγκο περιεκτικότητα σε έγκλεισμα	0%	10%	20%	30%	40%	50%	60%	65%	70%	80%
SIDERIDIS	52,5	19,45	12,79	9,96	8,42	7,46	6,82	6,60	6,37	6,05
SCHAPERY	52,5	19,46	12,73	9,84	8,23	7,20	6,49	6,03	5,97	5,57
VAN FO FY	52,5	19,46	12,73	9,84	8,23	7,20	6,49	6,03	5,97	5,57
INTERPHASE MODEL	52,2	19,23	12,81	9,99	8,47	7,52	6,86	6,60	-	-

Πίνακας K΄2

ΕΓΚΑΡΣΙΟΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΘΕΡΜΙΚΗΣ ΔΙΑΣΤΟΛΗΣ a_T										
U_f κατ'όγκο περιεκτικότητα σε έγκλεισμα	0%	10%	20%	30%	40%	50%	60%	65%	70%	80%
SIDERIDIS	52,5	57,84	53,70	48,13	42,05	35,71	29,20	25,89	22,57	15,85
SCHAPERY	52,5	57,87	53,83	48,41	42,54	36,46	30,26	27,13	24,00	17,69
CHAMBERLAIN(F=0,91)	52,5	45,23	38,64	32,61	27,15	22,10	17,44	15,28	13,12	9,11
CHAMBERLAIN(F=0,79)	52,5	44,14	36,67	29,95	23,88	18,35	13,30	10,98	8,66	4,38
VAN FO FY	52,5	57,87	53,83	48,41	42,54	36,46	30,26	27,14	24,01	17,69
SCHNEIDER	68,35	55,56	49,48	42,60	35,75	29,13	22,79	19,77	16,74	10,98
INTERPHASE MODEL (ΘΕΩΡΙΑ ΑΝΤΟΧΗΣ ΥΛΙΚΩΝ)	52,5	57,83	53,33	47,33	40,70	33,75	26,67	23,12	-	-
INTERPHASE MODEL (ΘΕΩΡΙΑ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ)	52,5	51,06	45,33	39,09	33,62	28,72	24,68	22,7	-	-

Πίνακας L΄2

ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ a_L										
U_f κατ' όγκο περιεκτικότητα σε έγκλεισμα	**0%**	**10%**	**20%**	**30%**	**40%**	**50%**	**60%**	**65%**	**70%**	**80%**
ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ Ι	-	-	-	-	-	-	**6,57**	**6,31**	**6,07**	-
ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ ΙΙ	-	-	-	-	-	-	-	**6,43**	-	-

Πίνακας Ο΄2

ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ a_T										
U_f κατ' όγκο περιεκτικότητα σε έγκλεισμα	**0%**	**10%**	**20%**	**30%**	**40%**	**50%**	**60%**	**65%**	**70%**	**80%**
ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ Ι	-	-	-	-	-	-	**30**	**25,6**	**21,6**	-
ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ ΙΙ	-	-	-	-	-	-	-	**24,12**	-	-

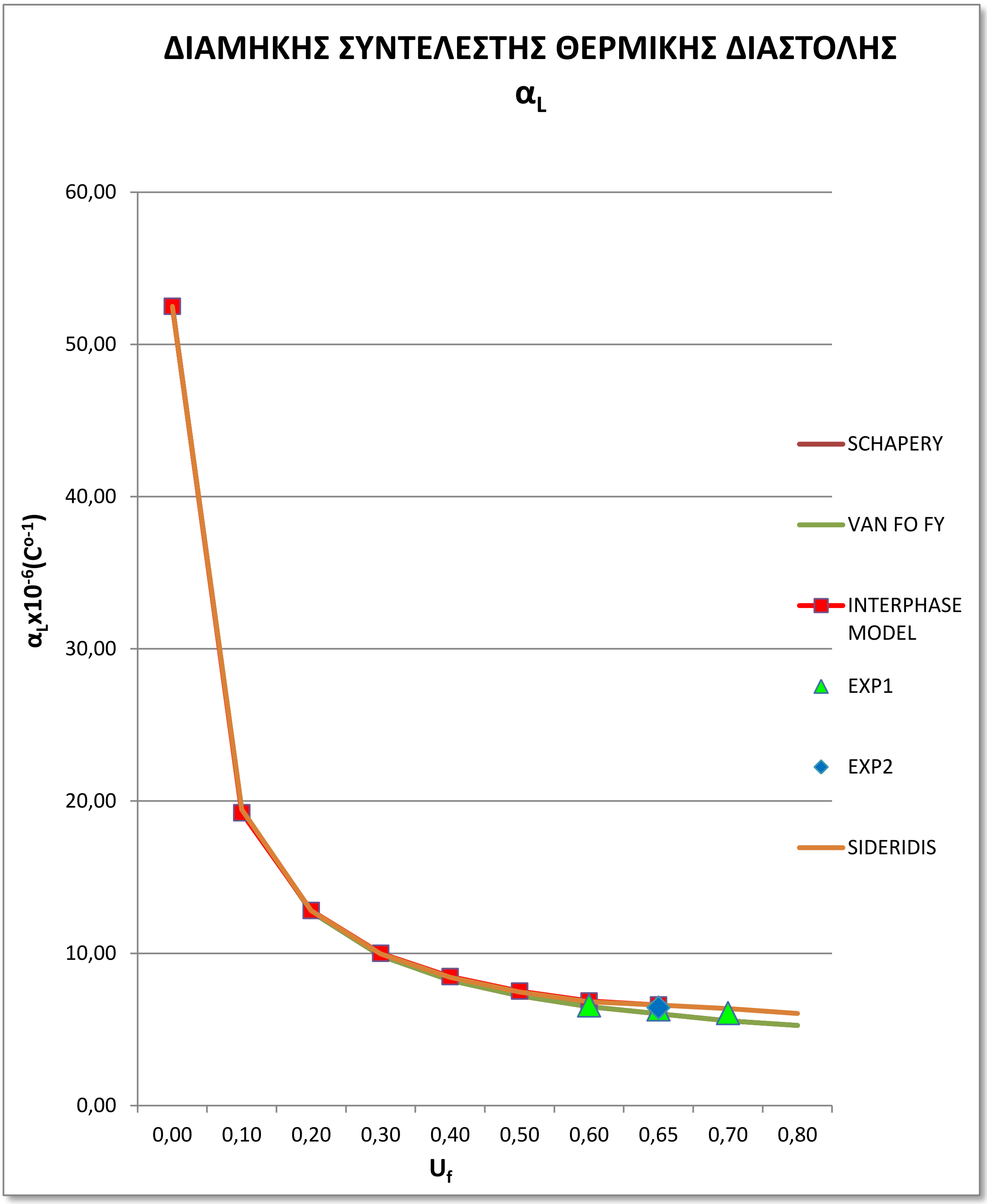
Πίνακας Ρ΄2

(θ°)	a_θ	Schapery	Πειραματικά δεδομένα
0	6,61	6,03	6,1
5	6,73	6,19	-
10	7,10	6,67	-
15	7,71	7,44	7,4
20	8,54	8,50	-
25	9,56	9,80	-
30	10,73	11,30	11,5
35	12,04	12,97	-
40	13,43	14,75	-
45	14,86	16,58	16,5
50	16,30	18,41	-
55	17,69	20,19	-
60	18,99	21,85	20,1
65	20,17	23,36	-
70	21,19	24,66	-
75	22,02	25,72	23,7
80	22,63	26,49	-
85	23,00	26,97	-
90	23,12	27,13	26,1

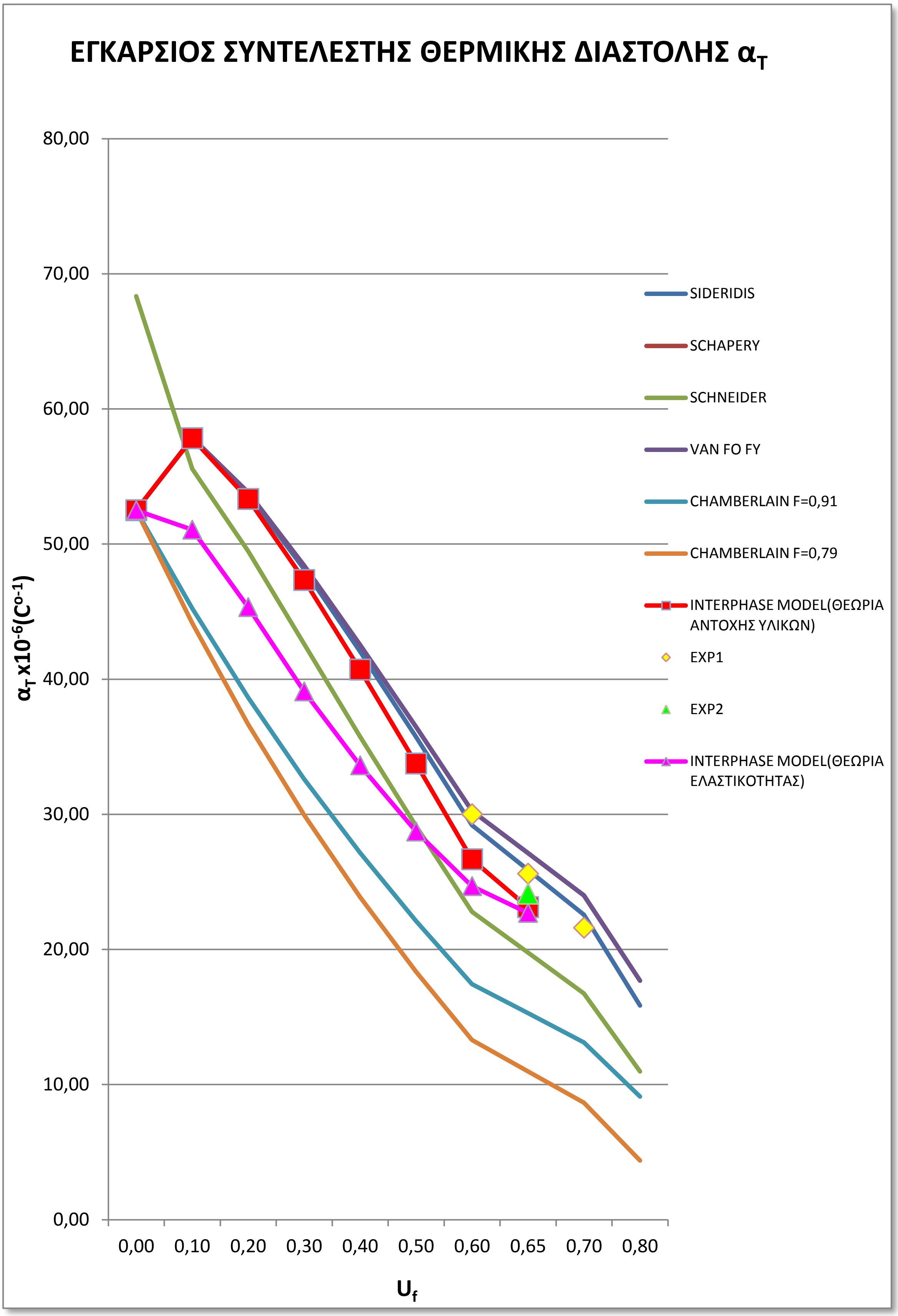
Πίνακας Q΄2

7.6 ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ

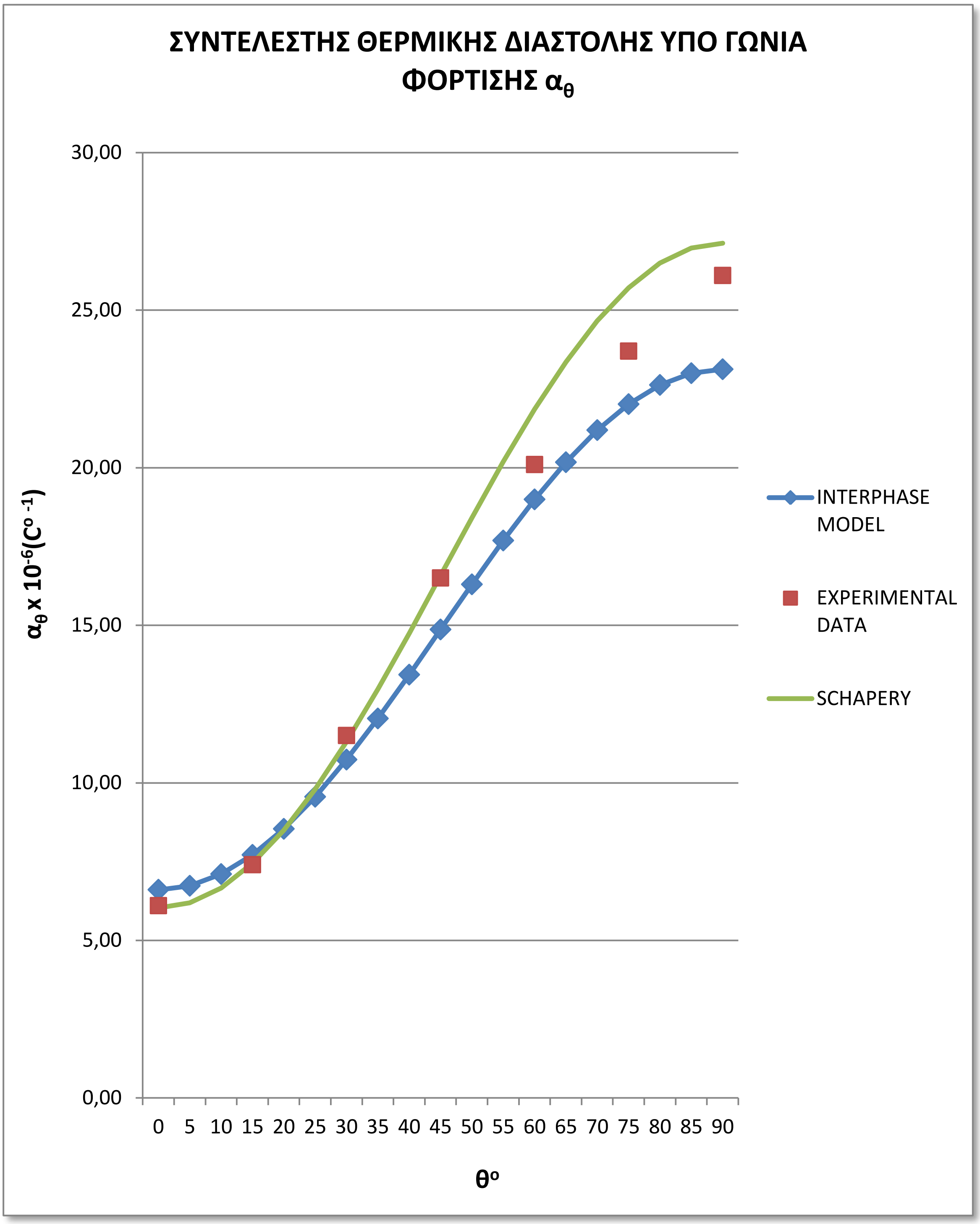
Παρακάτω παρατίθενται τα διαγράμματα με τις τιμές των διάφορων μοντέλων για τις θερμοελαστικές σταθερές. Κάθε μοντέλο απεικονίζεται με μία γραμμή διαφορετικού χρώματος. Οι πειραματικές τιμές απεικονίζονται με σημεία(κυρίως μικρούς κύβους). Τέλος με την βοήθεια των διαγραμμάτων, η σύγκριση των μοντέλων μεταξύ τους αλλά και με τις πειραματικές τιμές θα είναι πιο εύκολη και περισσότερο κατανοητή.



Διάγραμμα 35



Διάγραμμα 36



Διάγραμμα 37

7.7 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ, ΣΧΟΛΙΑΣΜΟΣ & ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

Αρχικά να αναφέρουμε ότι η απόκλιση των τιμών των συντελεστών θερμικής διαστολής, που εξήχθησαν από το επταφασικό κυλινδρικό μοντέλο μας, σε σχέση με τα πειραματικά δεδομένα είναι αναμενόμενη κυρίως για τους εξής λόγους:

1. Η κατανομή των ινών μέσα στη ρητίνη στην δύναται να θεωρηθεί ομοιογενής όπως έχουμε υποθέσει.

2. Ύπαρξη ατελειών στη μήτρα (φυσαλίδες, ατελείς δεσμοί κλπ.)

3. Ύπαρξη ασυνέχειας μεταξύ εγκλείσματος και μήτρας, δηλαδή όχι καλή συνοχή του υλικού.

4. Το θεωρητικό μοντέλο μας προβλέπει τέλεια γεωμετρικά σχήματα (κυλινδρικές ίνες) ενώ στην πραγματικότητα δύναται να υπάρχουν μικρές ατέλειες στην επιφάνεια και ολίγον διαφορετικό μέγεθος ινών.

5. Η ευθυγράμμιση των ινών που είναι πολύ δύσκολο να επιτευχθεί κατά την διάρκεια του υλικού των δοκιμίων.

Κατά τα άλλα παρατηρούμε ότι σε γενικά πλαίσια το μοντέλο μας ανταποκρίνεται αρκετά καλά στην πραγματικότητα και οι τιμές που εξήχθησαν από αυτό, προσεγγίζουν ιδανικά τα πειραματικά δεδομένα στις περισσότερες των περιπτώσεων. Πιο αναλυτικά έχουμε:

I. ΔΙΑΜΗΚΗΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΘΕΡΜΙΚΗΣ ΔΙΑΣΤΟΛΗΣ a_L

Στο διάγραμμα (35) απεικονίζεται η μεταβολή του διαμήκους συντελεστού θερμικής διαστολής a_L συναρτήσει της κατ' όγκο περιεκτικότητας των ινών. Στο υπόψη διάγραμμα φαίνονται η μεταβολή του διαμήκους συντελεστού θερμικής διαστολής που προέκυψε από το προταθέν μοντέλο, από τους ερευνητές Schapery [53], Van Fo Fy [53], Σιδερίδη [53] και από τα πειραματικά αποτελέσματα I [53],II [53].

Παρατηρούμε ότι όσο αυξάνει η περιεκτικότητα των ινών ο διαμήκης συντελεστής θερμικής διαστολής ελαττώνεται σε όλες τις περιπτώσεις.

Επίσης παρατηρούμε ότι οι θεωρητικές τιμές που προκύπτουν από την μελέτη του ερευνητή Σιδερίδη [53], συγκλίνουν με τις τιμές του προταθέντος μοντέλου. Αυτό δύναται να θεωρηθεί λογικό με δεδομένο ότι και τα δύο μοντέλα έχουν προκύψει με τη θεώρηση της ενδιαμέσου φάσεως. Το πρώτο προκύπτει από το βασικό διφασικό μοντέλο προσθέτοντας την ενδιάμεση φάση ενώ το δεύτερο, το προταθέν, λαμβάνει υπόψη την επίδραση των γειτονικών ινών και την ενδιάμεση φάση.

Επίσης οι θεωρητικές τιμές που προκύπτουν από τον ερευνητή Schapery [53] και τον Van Fo Fy [53] συγκλίνουν με τις τιμές του προταθέντος μοντέλου.

Τέλος παρατηρούμε ότι τα πειραματικά αποτελέσματα I [53],II [53] συγκλίνουν με τις τιμές του προταθέντος μοντέλου.

II. ΕΓΚΑΡΣΙΟΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΘΕΡΜΙΚΗΣ ΔΙΑΣΤΟΛΗΣ a_T

Στο διάγραμμα (36) απεικονίζεται η μεταβολή του εγκαρσίου συντελεστού θερμικής διαστολής a_T συναρτήσει της κατ' όγκο περιεκτικότητας των ινών. Στο υπόψη διάγραμμα φαίνονται η μεταβολή του εγκαρσίου συντελεστού θερμικής διαστολής που προέκυψε από το προταθέν μοντέλο με χρήση της θεωρίας της αντοχής των υλικών, με χρήση της θεωρίας ελαστικότητας, από τους ερευνητές Schapery [53], Schneider [53], Chamberlain [53], από τον Van Fo Fy [53], Σιδερίδη [53] και από τα πειραματικά αποτέλεσματα
I [53],II [53].

Όσον αφορά την επίλυση με τη θεωρία αντοχής των υλικών παρατηρούμε ότι αρχικά για περιεκτικότητα ινών μέχρι 0,10 έχουμε μια αύξηση του συντελεστού αλλά στη συνέχεια όσο μεγαλώνει η περιεκτικότητα των ινών τόσο πιο μικρός γίνεται ο εγκάρσιος συντελεστής θερμικής διαστολής.

Επίσης παρατηρούμε ότι οι θεωρητικές τιμές που προκύπτουν από την μελέτη του ερευνητή Σιδερίδη [27], συγκλίνουν με τις τιμές του προταθέντος μοντέλου. Αυτό δύναται να θεωρηθεί λογικό με δεδομένο ότι και τα δύο μοντέλα έχουν προκύψει με τη θεώρηση της ενδιαμέσου φάσεως. Το πρώτο προκύπτει από το βασικό διφασικό μοντέλο προσθέτοντας την ενδιάμεση φάση ενώ το δεύτερο, το προταθέν, λαμβάνει υπόψη την επίδραση των γειτονικών ινών και την ενδιάμεση φάση.

Επίσης οι θεωρητικές τιμές που προκύπτουν από τους ερευνητές Van Fo Fy [53] και Schapery [53] συγκλίνουν με τις τιμές του προταθέντος μοντέλου αλλά λιγότερο συγκριτικά με τις τιμές του ερευνητή Σιδερίδη [53]. Ακόμη όσον αφορά τις θεωρητικές τιμές που προκύπτουν από τους ερευνητές Chamberlain [53] και Schneider [53] υπάρχει σύγκλιση με τις τιμές του προταθέντος μοντέλου αλλά δεν είναι αρκετά μεγάλη.

Όσον αφορά την επίλυση με τη θεωρία ελαστικότητας παρατηρούμε πως υπάρχει απόκλιση ανάμεσα στις θεωρητικές τιμές που προκύπτουν και τις τιμές των ερευνητών Σιδερίδη [53], Van Fo Fy [53], Chamberlain [53] και Schapery [53]. Αντιθέτως μπορούμε να ισχυριστούμε πως υπάρχει κάποια σύγκλιση με τον ερευνητή Schneider [53].

Τέλος παρατηρούμε ότι τα πειραματικά αποτελέσματα I [53],II [53] συγκλίνουν ικανοποιητικά με τις τιμές του προταθέντος μοντέλου με την επίλυση μέσω θεωρίας αντοχής υλικών ενώ συγκλίνουν λιγότερο με τις τιμές του προταθέντος μοντέλο επιλυόμενο με τη θεωρία ελαστικότητας.

III. ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΘΕΡΜΙΚΗΣ ΔΙΑΣΤΟΛΗΣ ΥΠΟ ΓΩΝΙΑ ΦΟΡΤΙΣΗΣ a_θ

Στο διάγραμμα (37) απεικονίζεται η μεταβολή του συντελεστού θερμικής διαστολής υπό γωνία θ a_θ του ινώδους υλικού συναρτήσει της γωνίας ινών (θ). Στο υπόψη διάγραμμα φαίνονται η μεταβολή του συντελεστού θερμικής διαστολής υπό γωνία που προέκυψε από το προταθέν μοντέλο, η οποία συγκρίνεται με τα πειραματικά δεδομένα που υπάρχουν στη βιβλιογραφία [53] και τις θεωρητικές τιμές που προκύπτουν από τον ερευνητή Schapery [53].

Παρατηρούμε ότι όσο αυξάνεται η γωνία θ τόσο αυξάνεται και ο συντελεστής. Αρχικά οι πειραματικές τιμές είναι μικρότερες από αυτές του προταθέντος μοντέλου. Αυτό παρατηρείται για γωνία θ μέχρι 20-25^o. Από εκεί και πέρα για μεγαλύτερες γωνίες παρατηρείται ότι οι πειραματικές τιμές είναι μεγαλύτερες των τιμών του προταθέντος μοντέλου.

Γενικά υπάρχει αρκετά καλή σύγκλιση μεταξύ των πειραματικών τιμών και αυτών που προκύπτουν από το προτεινόμενο θεωρητικό μοντέλο.

Τέλος όσον αφορά την σύγκλιση των τιμών του προταθέντος μοντέλου με τις τιμές του ερευνητή Schapery, θα λέγαμε πως αρχικά για γωνία θ από 0^o έως περίπου 30-35^o υπάρχει μεγάλη σύγκλιση η οποία όμως ελαττώνεται όσο μεγαλώνει η γωνία θ.

ΓΕΝΙΚΑ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Τα περισσότερα θεωρητικά μοντέλα που περιγράφουν τις μηχανικές ιδιότητες των σύνθετων υλικών θεωρούν τις επιφάνειες των εγκλεισμάτων ως τέλειες μαθηματικές επιφάνειες. Αυτό το γεγονός εισάγει υψηλές διατμητικές παραμορφώσεις στα σύνορα, που είναι κάτι το μη ρεαλιστικό.

Για να διορθώσουμε αυτή την μη ρεαλιστική κατάσταση παρουσιάσθηκε σε αυτή την μελέτη ένα νέο μοντέλο, το οποίο έχει επτά φάσεις, τρεις από τις οποίες αντιπροσωπεύουν την ενδιάμεση φάση που αναπτύσσεται ως ένα λεπτό συνοριακό στρώμα μεταξύ των φάσεων της μήτρας και της ίνας κατά την διάρκεια του πολυμερισμού της μήτρας. Οι ιδιότητες αυτής της ενδιάμεσης φάσης εξαρτώνται από τις ιδιότητες των φάσεων και την ποιότητα της πρόσφυσης μεταξύ αυτών.

Αυτό το είδος της ενδιαμέσου φάσεως, έχει μεταβλητές ιδιότητες οι οποίες κυμαίνονται μεταξύ των ιδιοτήτων της μήτρας και της ίνας.

Στην εργασία αυτή, χρησιμοποιώντας την θεωρία του Lipatov, (η οποία συσχετίζει τα απότομα άλματα της ειδικής θερμότητας των σύνθετων υλικών στην περιοχή της θερμοκρασίας μεταβάσεως στην υαλώδη κατάσταση με τις τιμές του μεγέθους των ενδιάμεσων στρωμάτων) υπολογίσθηκε το πάχος της ενδιάμεσης φάσης.

Έχει παρατηρηθεί ότι η ενδιάμεση φάση η οποία δημιουργείται μεταξύ των ινών και της πολυμερικής μήτρας των σύνθετων υλικών ενισχυμένες με συνεχείς ίνες μονής διεύθυνσης επηρεάζει τις ιδιότητες του σύνθετου υλικού. Σε αυτή την μελέτη εξήχθησαν πέντε σχέσεις, για το διάμηκες μέτρο ελαστικότητας και διατμήσεως, για το εγκάρσιο μέτρο ελαστικότητας, για τον εγκάρσιο και διαμήκη λόγο Poisson.

Οι νέες αυτές σχέσεις δίνουν ικανοποιητικά αποτελέσματα όταν συγκρίνονται με τα υπάρχοντα πειραματικά δεδομένα καθώς και με άλλες θεωρητικές σχέσεις της βιβλιογραφίας. Οι θεωρητικές προβλέψεις όπως είδαμε συμφωνούν καλύτερα με τα αντίστοιχα πειραματικά αποτελέσματα σε σχέση με άλλες θεωρητικές τιμές οι οποίες εξήχθησαν από άλλες ερευνητικές εργασίες οι οποίες θεωρούνται «επιτυχημένες» για τον προσδιορισμό των ελαστικών σταθερών και των λόγων Poisson των σύνθετων υλικών ενισχυμένων με συνεχείς ίνες μονής διεύθυνσης.

Επίσης σε αυτή τη μελέτη εξήχθησαν και τρεις σχέσεις που προσδιορίζουν τον διαμήκη συντελεστή θερμικής διαστολής, τον εγκάρσιο συντελεστή και τον συντελεστή υπό γωνία θ. Οι σχέσεις αυτές δίνουν ικανοποιητικά αποτελέσματα ως προς την σύγκριση με τα υπάρχοντα πειραματικά δεδομένα και τις άλλες θεωρητικές σχέσεις της βιβλιογραφίας.

Τέλος οφείλουμε να σχολιάσουμε τις αποκλίσεις στις ‘τροχιές’ που λαμβάνουν τα διαγράμματα των E_L, E_T, v_{LT}, G_{LT} και a_T για περιεκτικότητα $U_f > 0{,}70$. Αυτό οφείλεται σε δύο λόγους. Ο πρώτος έχει να κάνει αυστηρά με το μοντέλο που αναπτύχθηκε. Στην **υποενότητα 3.1.2** υπολογίσαμε τους γεωμετρικούς περιορισμούς που προκύπτουν για το κυλινδρικό τετραφασικό μοντέλο μας χωρίς ενδιάμεση φάση, βάσει της κατανομής των ινών γυαλιού που θεωρήσαμε. Έτσι προέκυψε **η μέγιστη επιτρεπτή κατ’ όγκο περιεκτικότητα σε ινώδες έγκλεισμα** που είναι $U_f < 0{,}7054$. Ο δεύτερος λόγος έχει να κάνει με την σχέση που υποθέσαμε στην **υποενότητα 2.2.4** όπου θεωρήσαμε πως το ινώδες σύνθετο υλικό του μοντέλου μας έχει μόνο μία κατεύθυνση και έτσι υπάρχει μια παραβολική σχέση ανάμεσα στην κατ' όγκο περιεκτικότητα της ενδιάμεσης φάσης και στην κατ' όγκο περιεκτικότητα του εγκλείσματος. Αυτή είναι η $U_i = CU_f^{\,2}$ (C=0,123). Η σχέση αυτή όμως για περιεκτικότητες εγκλείσματος μεγαλύτερες από 0,65 δεν ευσταθεί καθώς παραδείγματος χάριν για $U_f = 0{,}90$ το υπόλοιπο 0,10 σύμφωνα με τα παραπάνω αποτελεί την περιεκτικότητα της ενδιαμέσου φάσεως. Αυτό συνεπάγεται πως η περιεκτικότητα της μήτρας είναι μηδενική πράγμα άτοπο. Επομένως θα πρέπει να επεκτείνουμε τις προβλέψεις μας για τους συντελεστές πέρα της $U_f = 0{,}65$ η οποία και είναι η βασική περιεκτικότητα ινών που χρησιμοποιείται στις πειραματικές μεθόδους. Έτσι λοιπόν μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η περιεκτικότητα της ενδιαμέσου φάσεως , η οποία είναι μηδέν για $U_f = 0$ αφού δεν υπάρχουν ίνες, αυξάνεται και φτάνει σε μία μέγιστη τιμή για μια συγκεκριμένη περιεκτικότητα U_f και έπειτα μειώνεται τείνοντας στο μηδέν όταν $U_f = 1$ όπου δεν υπάρχει πλέον καθόλου μήτρα καθώς σύμφωνα με το μοντέλο μας ισχύει η σχέση $U_i = 1 - U_f - U_m$. Φυσικά θα πρέπει να τονίσουμε πως για ένα πραγματικό υλικό η περιεκτικότητα του σε ίνες δεν μπορεί να υπερβεί το 90% για οποιαδήποτε κατανομή ινών.

Έτσι λοιπόν θεωρούμε μία τριτοβάθμια παραβολική σχέση, η οποία μπορεί να περιγράψει καλύτερα τη σχέση μεταξύ εγκλείσματος και ενδιαμέσου φάσεως:

$$\boxed{U_i = C_1 U_f^{\;3} + C_2 U_f^{\;2} + C_3 U_f + C_4}$$

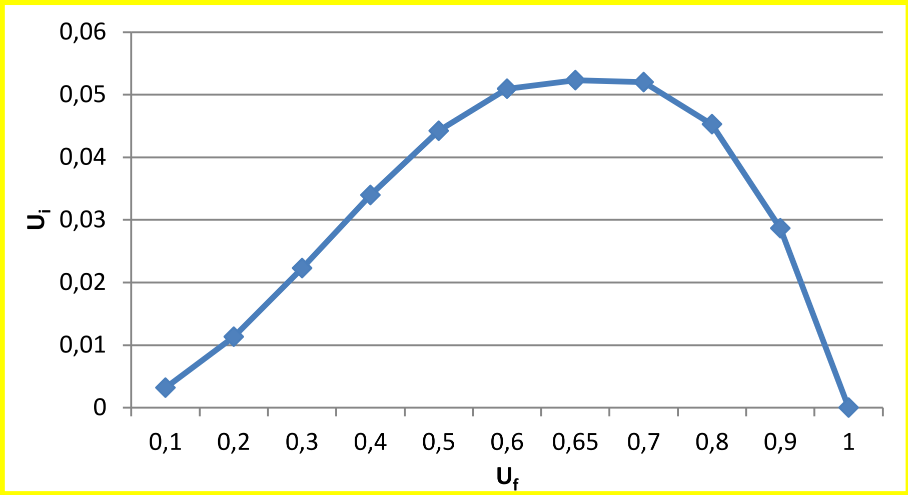
Για να υπολογίσουμε τις σταθερές C_1, C_2, C_3, C_4 μπορούμε να επιλέξουμε τη πειραματική τιμή για $U_f = 0{,}65$ καθώς και τις συνοριακές συνθήκες: α) $U_i = 0$ όταν $U_f = 0$ καθώς δεν έχουμε ίνες εκεί, β) $U_i = 0$ όταν $U_f = 1$ (στη πραγματικότητα $U_f = 0{,}90$) όπου δεν υπάρχει καθόλου μήτρα, γ) για $U_f = 0$ να υπάρχει τοπικό ακρότατο δηλαδή θα ισχύει $\frac{\partial U_i}{\partial U_f} = 0$, δ) για $U_f = 0{,}65$ θα πρέπει $U_i = 0{,}052$. Χρησιμοποιώντας αυτές τις συνοριακές συνθήκες υπολογίζουμε τις σταθερές C_1, C_2, C_3, C_4 και έχουμε : $C_1 = -0{,}3537$, $C_2 = 0{,}3537$, $C_3 = 0$ και $C_4 = 0$. Επομένως η ακριβής σχέση είναι η:

$$\boxed{U_i = -0{,}3537 U_f^{\;3} + 0{,}3537 U_f^{\;2}}$$

Να σημειώσουμε εδώ ότι ύστερα από τον υπολογισμό της σχέσης εξάγεται ο παρακάτω πίνακας τιμών για το τετραφασικό μοντέλο με ενδιάμεση φάση και παρατηρούμε από το ακόλουθο διάγραμμα ότι η μεταβολή της κατ' όγκο περιεκτικότητας της ενδιάμεσης φάσης συναρτήσει της κατ' όγκο περιεκτικότητας του εγκλείσματος είναι περίπου παραβολική:

U_f	U_i
0,10	0,003183
0,20	0,011318
0,30	0,022283
0,40	0,033955
0,50	0,044213
0,60	0,050933
0,65	0,052303
0,70	0,051994
0,80	0,045274
0,90	0,02865

Πίνακας Ι΄



Εικόνα 7.4

Κάνοντας χρήση των τιμών των περιεκτικοτήτων U_i που προέκυψαν και ακολουθώντας την ίδια πορεία υπολογισμού, όπως στο κεφάλαιο 3, υπολογίζουμε τις καινούργιες ακτίνες και περιεκτικότητες των επτά φάσεων. Έτσι έχουμε :

U_f	U_i	r_1 **(μm)**	r_2 **(μm)**	r_3 **(μm)**	r_4 **(μm)**	r_5 **(μm)**	r_6 **(μm)**	r_7 **(μm)**
0,10	0,003183	6	6,250795	30,07749	30,12852	33,52205	33,59563	50,1996
0,20	0,011318	6	6,409066	19,86927	19,9966	24,8166	24,99954	35,49648
0,30	0,022283	6	6,48096	14,98576	15,18473	21,13234	21,42661	28,98275
0,40	0,033955	6	6,472098	11,83401	12,08023	19,02451	19,41913	25,0998
0,50	0,044213	6	6,387884	9,504762	9,754258	17,63932	18,11626	22,44994
0,60	0,050933	6	6,23348	7,644062	7,828663	16,65197	17,18894	20,4939
0,65	0,052303	6	6,13145	6,831627	6,94736	16,25625	16,814	19,6899

Πίνακας K΄

U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6	U_7
0,014286	0,001219	0,343485	0,001219	0,085714	0,00196	0,552117
0,028571	0,004029	0,280724	0,004029	0,171429	0,007233	0,503986
0,042857	0,007146	0,217346	0,007146	0,257143	0,014909	0,453453
0,057143	0,009346	0,155803	0,009346	0,342857	0,02408	0,401425
0,071429	0,009534	0,098285	0,009534	0,428571	0,033836	0,348812
0,085714	0,006801	0,046608	0,006801	0,514286	0,043266	0,296524
0,092857	0,004113	0,023411	0,004113	0,557143	0,047575	0,270787

Πίνακας L΄

Έπειτα, ακολουθώντας την ίδια μεθοδολογία με το **κεφάλαιο 4** και σύμφωνα με τη μελέτη της παραβολικής μεταβολής, προκύπτουν οι θεωρητικές τιμές για το μέτρο ελαστικότητας E, μέτρο διατμήσεως G και λόγο Poisson v των τριών ενδιάμεσων φάσεων. Χρησιμοποιώντας αυτές τις τιμές υπολογίζουμε στην συνέχεια τις τιμές του διαμήκους μέτρου ελαστικότητας E_L, του διαμήκους λόγου Poisson v_{LT}, του εγκαρσίου λόγου Poisson v_{TT} και του εγκαρσίου μέτρου ελαστικότητας E_T. Οι τιμές αυτές απεικονίζονται στο παρακάτω πίνακα :

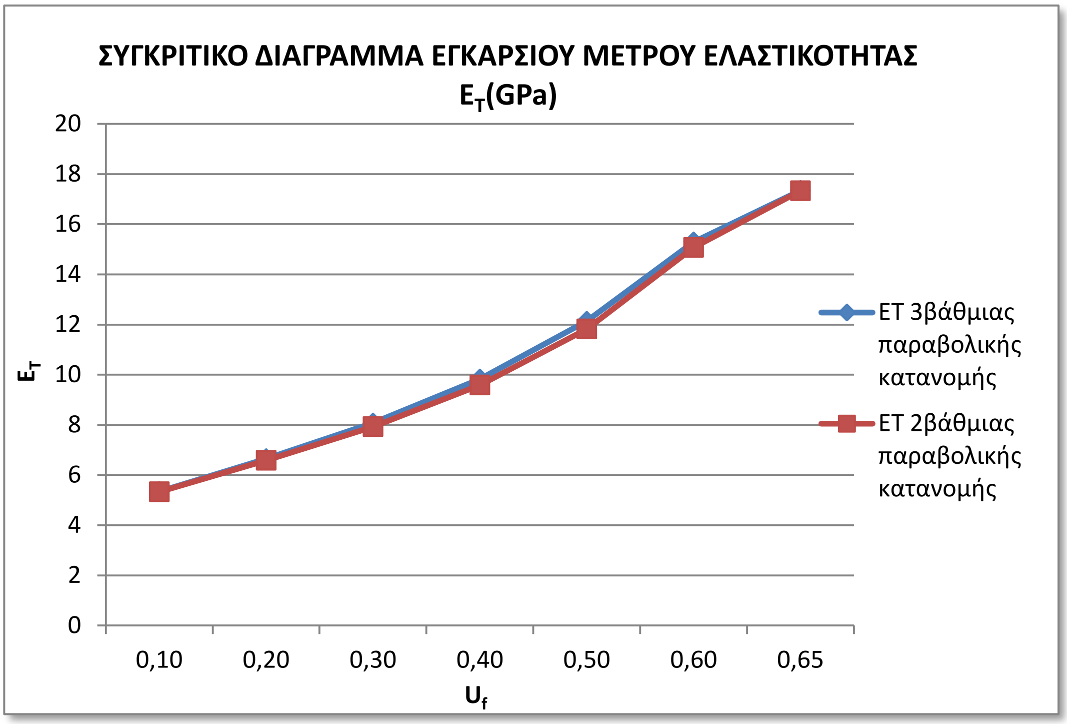
v_{TT}	v_{LT}	E_L	E_T
0,325361	0,334781	10,45013	5,34702
0,303678	0,319239	17,54745	6,649322
0,28459	0,303548	24,71299	8,069485
0,267771	0,287874	31,87087	9,825008
0,252934	0,27237	38,95081	12,12903
0,239824	0,257175	45,89008	15,29048
0,233844	0,24973	49,28987	17,34142

Πίνακας Μ΄

Τέλος έπειτα και από τον υπολογισμό του εγκαρσίου μέτρου ελαστικότητας E_T μπορούμε να συγκρίνουμε τις τιμές αυτές με εκείνες που προέκυψαν από το **κεφάλαιο 5** θεωρώντας ότι η σχέση, ανάμεσα στην κατ' όγκο περιεκτικότητα της ενδιάμεσης φάσης και την κατ' όγκο περιεκτικότητα του εγκλείσματος, είναι η $U_i = CU_f^{\,2}$. Παρακάτω στον **Πίνακα Ν΄** και στο **Διάγραμμα 7.5** παρουσιάζονται συγκεντρωτικά οι τιμές και οι αντίστοιχες καμπύλες συναρτήσει των περιεκτικοτήτων U_f.

E_T (3βάθμια παραβολική κατανομή)	E_T (2βάθμια παραβολική κατανομή)
5,34702	5,328671
6,649322	6,583586
8,069485	7,925918
9,825008	9,5856
12,12903	11,82018
15,29048	15,07041
17,34142	17,32904

Πίνακας Ν΄



Διάγραμμα 7.5

Παρατηρούμε ότι υπάρχει πολύ καλή σύγκλιση μεταξύ των δύο κατανομών.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Theocaris P. S., Spathis G. D., Sideridis E.P., Fibre Sci and Technology, Vol.17, p.169 (1982)
2 Theocaris P. S., Papanicolaou G. C. and Spathis G. D Fibre Sci. and Technology, Vol. 15, p.187(1981)
3. Papanicolaou G. C. Theocaris P. S. and Spathis G. D. Colloid and Polymer Science, Vol. 258, 11, p. 1231 (1980)
4. Papanikolaou G. C., Paipetis S. A. and Theocaris P. S. , Colloid and Polymer Science, Vol. 256, 7, p. 625(1978)
5. Theocaris P. S. and Papanikolaou G. C. , Fibre Science and Technology, Vol.12, 6, p.421(1979)
6. G. A. Papadopoulos, E. Sideridis, Study of Orthotropic materials: The Interphase Model and the Crack Initiation., Archive of Applied Mechanics 66 (1995) 111-125
7.Yu.S. Lipatov, V.F. Babich and V.F. Rosovizky, J. Appl. Polym. Sci., 18, p. 1213 (1974).
8. Yu.S. Lipatov and L.M. Sergeeva, Adsorpion of Polymer, New York, (1974).
9. Yu.S. Lipatov, Plaste Kautschuk, 10, p. 738 (1973).
10. Yu.S. Lipatov and V.F. Babich, Vysokomol, Soedin, B10, p. 848 (1968).
11. Yu.S. Lipatov and T.E Geller, Vysokomol, Soedin, 8, p. 592, (1966).
12. Yu.S. Lipatov and F.G. Fabulyak, J. Appl. Polym. Sci., 16, p. 2131 (1972).
13. Yu.S. Lipatov, V.F. Babich and V.F. Rosovozky, J. Appl. Polymer Sci., 20, p. 1787 (1976).
14. G.C. Papanicolaou, P.S. Theocaris, Colloid and Polymer Sci., 257, 3, p. 239 (1979).
15. P.S. Theocaris and G.C. Papanicolaou, Colloid and Polymer Sci., 258, 9, pp. 1044-1051 (1980).
16. R.F. Landel and T.L. Smith, American Rocket Society Jnl., p. 599 (1961).
17. S. Turner, Appl. Mat. Res., p. 10, (1965).
18. C.W. Van Der Wal, H.W. Bree and F.R. Schwarzl, J. Appl. Pol. Sci., 9, p. 2143 (1965).
19. C.A. Kumins and J. Roteman, J. Pol. Sci., 1-A, p. 527 (1963).
20. G.C. Papanicolaou, S.A. Paipetis and P.S. Theocaris, J. Appl. Pol. Sci., 21, p. 689 (1977).
21. S. Strella and P.F. Erhardt, J. Appl. Pol. Sci., 13, p. 1373 (1969).
22. S. Strella, J. Appl. Pol. Sci., 7, p. 569 (1963).
23. S. Strella, J. Appl. Pol. Sci., 7, p. 1281 (1963).
24. Αιμ. Σιδερίδης, "Μελέτη της θερμομηχανικής συμπεριφοράς των κοκκωδών και ινωδών συνθέτων υλικών διά της θεωρίας της ενδιαμέσου φάσεως", Διδακτορική διατριβή, ΕΜΠ (1998).
25. Yu.S. Lipatov, Physical Chemistry of Filled Polymers, Originally published " Khimiya"(Moscow 1977). Translated from the Russian by R.J. Moseley, International Polymer Science and Technology Monograph No. 2

26. Theocaris P. S., “The Interphase and its Influence on the Mechanical Properties of Composites,” New developments in the Characterization of Polymers in the Solid State, Advances in Polymer Science, H. H. Kausch & H.C. Zachmann Editors, Springer Verlag Publ.(1984); see also P. S. Theocaris, “On the Evaluation of Adhesion Between Phases in Fiber Composites,” Colloid and Polymer Journal (1984).
27. P.S. Theocaris, E.P. Sideridis, G.C Papanicolaou, “The Elastic Longitudinal Modulus and Poisson ’s Ratio of Fiber Composites” Journal of Reinforced Plastics and Composites, Vol. 4, (October 1985)
28. E. Sideridis, “The Transverse Elastic Modulus of Fiber-Reinforced Composites as Defined by the Concept of Interphase” Journal of Applied Polymer Science, Vol. 48, 243-255 (1993)
29. E. Sideridis, “The In-Plane Shear Modulus of Fiber Reinforced Composites as Defined by the Concept of Interphase” Composites Science and Technology 31(1988) 35-53.
30. E. Sideridis, “The Off-Axis Elastic Constants of Unidirectional Glass Fibre Composites Defined by the Concept of Interphase”.
31. Ekvall J.C. , “ASME” (1961).
32. Rosen B.W. , “Composites” (1974).
33. Paul, Trans. Mettalurgical Soc. AIME, 21. 8, 36 (1960)
34. J.M. Whitney and M.B. Riley, AIAA J. , 1537(1966)
35. J.C Ekvall, “Structural Behaviour of Monofilament Composites”, Proc. AIAA 6th Structures and Materials Conf. , AIAA, New York (1965)
36. J.C. Ekvall, ASME Paper No.63-WA-223 (1963)
37. L.B Greszczuk, “Membrane Analysis Methods for Composites Structures”, Douglas Aircraft Co. Inc. , SM-41543 (1962)
38. Z. Hashin and B.W. Rosen, J. Appl. Mech. , Trans. Asme, 86 (1964), 223.
39. Z. Hashin, J. Mech. Phys. Solids, 12 (1965), 119.
40. Theocaris P.S. , “The Unfolding Model for the Representation of the Interphase Layer in Composites”, Proc. Nat. Acad. Athens, Vol.59, No. II, pp.87-100 (1984)
41. Sih G.C. , Hilton P.D. , Badaliance R. , Schenberger P.S and Villareal G. , “Fractured Mechanics for Fibrous Composites, ASTM STP 521 , pp. 98-132 (1973).
42. Clements L.L and Moore R.L. , Composites, 1, p.93 (1978).
43. Whitney J.M. and Riley M.B. , AIAA Journal, 4(9), p.1537 (1966).
44. L.B. Gteszczuk, “Theoretical and Experimental Studies on Properties and Behaviour of Filamentary Composites”, SPI 21st Conference, Chicago, IL, Sect. 5-B (1966).
45. S.W. Tsai, NASA CR-71 (1964)
46. R.M. Orgrkiewicz and A.A.M. Sayigh, J. Strain Analysis, 6 (1971), 226.
47. Z. Hashin, Int. J. Solids Structures, 6 (1970), 797.
50. Π. Α. Βουθούνης, «Τεχνική Μηχανική», Αθήνα (1993)
51. www.epotec.gr (Tg-Glass Transition Temperature for Epoxies)

52.S.W. Tsai and H.T. Hahn, “Introduction to composite materials”, Technomic , Lancaster, Pa (1985)
53.E. Sideridis , “Thermal expansion coefficients of fiber composites defined by the concept of the interphase” (1993)