



**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**  
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ  
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ ΥΨΗΛΩΝ ΕΝΕΡΓΕΙΩΝ

**Εφαρμογή του μετασχηματισμού Legendre σε ελλείψεις με στόχο  
τον εντοπισμό της κοινής εφαπτομένης τους**

**ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

του

**Υπερίωνα Μπριστογιάννη**

**Επιβλέπων:** Θεόδωρος Αλεξόπουλος  
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Μάρτιος 2016





**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**  
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ  
ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ  
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ ΥΨΗΛΩΝ ΕΝΕΡΓΕΙΩΝ

**Εφαρμογή του μετασχηματισμού Legendre σε ελλείψεις με στόχο  
τον εντοπισμό της κοινής εφαπτομένης τους**

**ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

του

**Υπερίωνα Μπριστογιάννη**

**Επιβλέπων: Θεόδωρος Αλεξόπουλος**  
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή στις 7 Μαρτίου 2016.

.....  
Θ. Αλεξόπουλος  
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....  
Ε. Γαζής  
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....  
Σ. Μαλτέζος  
Αν. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Μάρτιος 2016

.....  
**Υπερίων Μπριστογιάννης**  
Φυσικός Εφαρμογών Ε.Μ.Π.

# Περίληψη

Εφαρμόζουμε τον μετασχηματισμό Legendre σε ένα σύνολο ελλείψεων με στόχο την δημιουργία ενός αλγορίθμου για την ανακατασκευή ευθειών. Θεωρούμε έναν υποθετικό ανιχνευτή με σήμα εξόδου ένα σύνολο ελλείψεων των οποίων η κοινή εφαρμοσμένη αντιστοιχεί στην τροχιά ενός υποθετικού σωματιδίου. Ο αλγόριθμος ελέγχεται με την μέθοδο Monte Carlo σε ιδανικές καταστάσεις και σε καταστάσεις υψηλού θορύβου.



# Abstract

In this study, we apply the Legendre transform on a set of ellipses in order to implement a track reconstruction algorithm. We consider a hypothetical detector with the output signal of a set of ellipses whose common tangent represents the trajectory of hypothetical charged particle. The algorithm is tested using Monte Carlo generated tracks on ideal, and high noise conditions.





# Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή, δρ. Θεόδωρο Αλεξόπουλο, για την καθοδήγησή του και την έμπνευση που μου προσέφερε. Το θέμα που μου πρότεινε, που απορρέει από την ευρύτερη έρευνα του ATLAS στο CERN, ήταν εξαιρετικά ενδιαφέρον, κρατώντας με ενθουσιώδη και σε εγρήγορση καθ'όλη τη διάρκεια της διπλωματικής εργασίας μου. Επίσης, είναι μοναδική η ευκαιρία που μου δόθηκε να προχωρήσω σε δημοσίευση του κεντρικού τμήματος της διπλωματικής.

Επιπλέον είμαι ιδιαίτερα ευγνώμων στο δρ. Στέφανο Λεοντσίνη, ο οποίος κατά την διάρκεια της διπλωματικής μου, ολοκλήρωνε την διδακτορική του διατριβή. Παρ'όλο τον φόρτο εργασίας του, ήταν πάντα διαθέσιμος για να με βοηθήσει σε κάθε απορία που είχα. Επίσης, με βοήθησε στην εκμάθηση των εργαλείων που χρησιμοποίησα.



# Περιεχόμενα

<b>1</b>	<b>Εισαγωγή</b>	<b>1</b>
1.1	Το πρόβλημα προς επίλυση . . . . .	2
1.2	Ορισμός του προβλήματος . . . . .	3
1.3	Μεθοδολογία . . . . .	4
1.4	Πλαίσιο . . . . .	4
1.5	Εργαλεία . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Ο μετασχηματισμός Legendre</b>	<b>7</b>
2.1	Ορισμός . . . . .	7
2.2	Παραδείγματα . . . . .	9
2.2.1	Παραβολή . . . . .	10
2.2.2	Εκθετική συνάρτηση . . . . .	11
2.2.3	Λογαριθμική συνάρτηση . . . . .	11
2.2.4	Υπερβολή . . . . .	12
2.3	Ιδιότητες του μετασχηματισμού Legendre . . . . .	13
2.3.1	Κλιμάκωση (Scaling) . . . . .	13
2.3.2	Επέκταση (Stretching) . . . . .	13
2.3.3	Μετάβαση (Translation) . . . . .	14
2.3.4	Γραμμική πρόσθεση (Linear Addition) . . . . .	14
2.3.5	Ανισότητα του Young (Young's Inequality) . . . . .	14
2.3.6	Παλινδρόμηση (Involutivity) . . . . .	14
2.4	Μετασχηματισμός Legendre σε περισσότερες διαστάσεις . . . . .	15
2.4.1	Ορισμός του μετασχηματισμού Legendre σε $n$ διαστάσεις . . . . .	15

2.4.2	Κατώτατη συνέλιξη (Infimal convolution) . . . . .	17
2.4.3	Συζυγής κυρτότητα (Adjoint Convexity) . . . . .	18
2.5	Ο μετασχηματισμός Legendre του κύκλου . . . . .	18
2.5.1	Εξίσωση του κύκλου . . . . .	18
2.5.2	Ο μετασχηματισμός του κύκλου . . . . .	19
2.6	Κανονική μορφή . . . . .	21
<b>3</b>	<b>Ο μετασχηματισμός Legendre της έλλειψης</b>	<b>25</b>
3.1	Ο μετασχηματισμός Legendre σε έλλειψη με κέντρο την αρχή των αξόνων . . . . .	26
3.1.1	Εξίσωση της έλλειψης με κέντρο την αρχή των αξόνων . . . . .	26
3.1.2	Κοίλο μέρος . . . . .	27
3.1.3	Κυρτό μέρος . . . . .	27
3.2	Ο μετασχηματισμός Legendre σε έλλειψη με κέντρο $C(x_0, y_0)$ . . . . .	28
3.2.1	Εξίσωση της έλλειψης . . . . .	28
3.2.2	Κοίλο μέρος . . . . .	29
3.2.3	Κυρτό μέρος . . . . .	30
3.3	Από τον μετασχηματισμό στην ευθεία . . . . .	31
3.3.1	Στο κοίλο μέρος . . . . .	32
3.3.2	Στο κυρτό μέρος . . . . .	32
3.4	Κανονική μορφή . . . . .	33
3.4.1	Η εξίσωση της ευθείας στη κανονική μορφή . . . . .	33
3.4.2	Στο κοίλο μέρος . . . . .	34
3.4.3	Στο κυρτό μέρος . . . . .	34
3.5	Αποτελέσματα . . . . .	35
3.5.1	Αποτελέσματα των βημάτων . . . . .	35
3.5.2	Επιβεβαίωση με του κύκλου . . . . .	36
3.6	Σφάλμα του $r(\theta)$ . . . . .	36
3.6.1	Σφάλμα του μετασχηματισμού Legendre για τον κύκλο . . . . .	36
3.6.2	Σφάλμα του μετασχηματισμού Legendre για την έλλειψη . . . . .	37
<b>4</b>	<b>Γεννήτρια ευθειών-ελλείψεων</b>	<b>39</b>
4.1	Γεννήτρια ευθείας . . . . .	40

4.1.1	Τομή της ευθείας με τον άξονα $y$ . . . . .	41
4.1.2	Κλίση της ευθείας . . . . .	41
4.2	Γεννήτρια ελλείψεων . . . . .	42
4.2.1	Εντοπισμός του $T_c(x_{tc}, y_{tc})$ για κύκλο με $C(x_0, y_0)$ και ακτίνα $R$ . . . . .	42
4.2.2	Εντοπισμός του $T_c(x_{tc}, y_{tc})$ για κύκλο με $C(x_0, y_0)$ και άγνωστη ακτίνα . . . . .	43
4.2.3	Καθορισμός κρίσιμων σημείων . . . . .	44
4.2.4	Εξίσωση της εφαπτομένης . . . . .	46
4.2.5	Υπολογισμός των διαστάσεων $a$ και $b$ . . . . .	48
4.2.6	Εκκεντρότητα της έλλειψης . . . . .	49
4.2.7	Η εκκεντρότητα συναρτήσει της κλίσης της εφαπτομένης . . . . .	49
4.2.8	Διαστάσεις $a$ και $b$ συναρτήσει της εκκεντρότητας . . . . .	50
4.2.9	Συνοπτικά . . . . .	50
4.3	Επαναληπτική διαδικασία . . . . .	51
<b>5</b>	<b>Περιγραφή της μεθόδου</b> . . . . .	<b>53</b>
5.1	Δεδομένα . . . . .	53
5.2	Ιστογράμματα . . . . .	53
5.2.1	Πρωτεύον βήμα . . . . .	56
5.2.2	Δευτερεύον βήμα . . . . .	59
5.3	Περαιτέρω βελτίωση των ευθειών . . . . .	62
5.3.1	Συσχέτιση ελλείψεων με ευθείες . . . . .	62
5.3.2	Απλή γραμμική παλινδρόμηση . . . . .	63
5.3.3	Εντοπισμός του σημείου $T$ χωρίς την πραγματική ευθεία . . . . .	63
5.3.4	Εντοπισμός του $T(x_t, y_t)$ . . . . .	64
5.3.5	Μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων . . . . .	65
5.3.6	Έλεγχος προσαρμογής $\chi^2$ . . . . .	65
<b>6</b>	<b>Μελέτη απόδοσης</b> . . . . .	<b>67</b>
6.1	Αποτελεσματικότητα ανακατασκευής, ρυθμός ψεύδους και ρυθμός αποτυχίας . . . . .	68
6.2	Ανάλυση (Resolution) . . . . .	69
6.2.1	Συμβάντα μιας τροχιάς . . . . .	69

---

6.2.2	Συμβάντα πολλαπλών τροχιών . . . . .	71
<b>7</b>	<b>Συμπεράσματα</b>	<b>77</b>
7.1	Επιτυχία της μεθόδου . . . . .	77
7.2	Δυσκολίες . . . . .	78
7.3	Περαιτέρω μελέτη . . . . .	78
	<b>Βιβλιογραφία</b>	<b>81</b>

# 1

## Εισαγωγή

Ο μετασχηματισμός Legendre μπορεί να εφαρμοστεί σε κύκλους με σκοπό την ανίχνευση των κοινών τους εφαπτομένων και κατ'επέκτασιν, την πορεία ενός φορτισμένου σωματιδίου που διασχίζει τον παρακολουθούμενο θάλαμο ολίσθησης (Monitored Drift Chamber) του πειράματος ATLAS στο CERN, όπως απέδειξε προηγούμενη έρευνα των Alexopoulos et al.

Σε αυτή τη διπλωματική εργασία ανιχνεύουμε τις κοινές εφαπτομένες ενός δεδομένου συνόλου ελλείψεων. Αυτό το επιτυγχάνουμε εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό Legendre στην έλλειψη. Στη συνέχεια σχεδιάζουμε μια μέθοδο εύρεσης της εφαπτομένης ευθείας, βασισμένη στα αποτελέσματα του μετασχηματισμού.

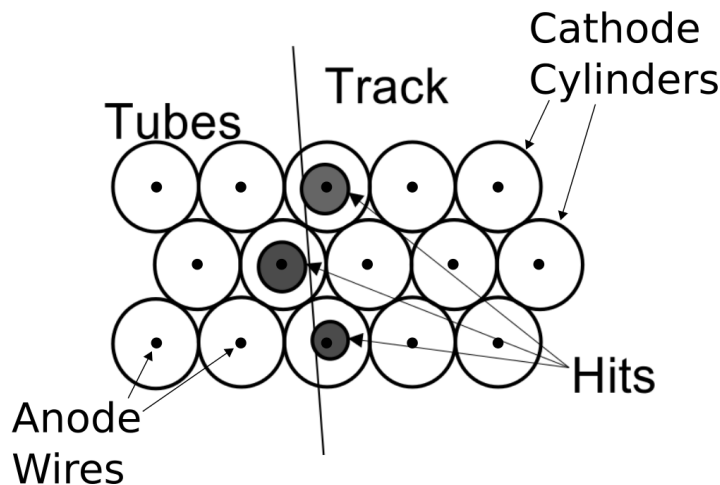
Για να αξιολογήσουμε τη σχεδιασμένη μέθοδο, δημιουργούμε έναν υποθετικό ανιχνευτή που αποτελείται από πολλαπλά επίπεδα θαλάμων, καθένας από τους οποίους έχει ως σήμα εξόδου μια έλλειψη. Βασιζόμενοι σε αυτές τις ελλείψεις, ανιχνεύουμε την κοινή εφαπτομένη ευθεία που με τη σειρά της εκπροσωπεί την τροχιά ενός υποτιθέμενου σωματιδίου. Έπειτα, δημιουργούμε Monte Carlo παραγόμενες τροχιές που περνάνε από τον ανιχνευτή. Καθώς μια τροχιά περνάει από τους θαλάμους, δημιουργούμε ελλειπτικά σήματα (hits). Αυτές οι ελλείψεις δημιουργούνται ώστε να είναι ομόκεντρες με τους θαλάμους και εφαπτόμενες στις τροχιές. Επίσης μελετάμε τη μέθοδό μας σε μη ιδανικές καταστάσεις όπως δουλεύοντας με ελλείψεις με διαταραγμένα χαρακτηριστικά, ή με θόρυβο μηχανής που δημιουργεί ελλείψεις μη σχετικές με οποιαδήποτε κοινή εφαπτομένη.

Η αποτελεσματικότητα του αλγόριθμου μετριέται βάση των διαφορών μεταξύ των χαρακτηριστικών των αρχικών και των ανακατασκευασμένων τροχιών.

## 1.1 Το πρόβλημα προς επίλυση

Καταρχάς, ας δούμε πως λειτουργούν οι θάλαμοι του Monitored Drift Tube ανιχνευτή του ATLAS στο CERN. Οι θάλαμοι του ανιχνευτή αποτελούνται από μια γειωμένη κυλινδρική κάθοδο και ένα ομοαξονικό ανοδικό καλώδιο με θετικό δυναμικό. Επίσης, κάθε θάλαμος είναι γεμάτος με ένα μείγμα αερίων, άρα όταν ένα φορτισμένο σωματίδιο περνάει μέσα από το θάλαμο, το αέριο στη διαδρομή του σωματιδίου ionίζεται. Το αποτέλεσμα είναι να δημιουργείται μια καταίγίδα ηλεκτρονίων προς την κατεύθυνση της ανόδου ενώ τα παραγόμενα ιόντα παρασύρονται (drift) προς την κάθοδο. Και στις δύο περιπτώσεις, δημιουργείται ένας παλμός ο οποίος ανιχνεύεται από τα ηλεκτρονικά του ανιχνευτή.

Ως χρόνο περιπλάνησης ορίζουμε το χρονικό διάστημα μεταξύ της δημιουργίας του παλμού που προκαλείται από τα ιόντα και την κάθοδο και του παλμού που προκαλείται από τα ηλεκτρόνια και την άνοδο. Το χρόνο αυτό μπορούμε να τον μεταφράσουμε ως την απόσταση μεταξύ της τροχιάς του σωματιδίου και το ανοδικό καλώδιο στο κέντρο του θαλάμου. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα το σήμα κάθε θαλάμου να αναπαριστάται ως ένας κύκλος (εικόνα 1.1.I), ομόκεντρος του θαλάμου, εκπροσωπώντας ταυτόχρονα όλες τις πιθανές τροχιές του σωματιδίου. Όμως, από όλες τις πιθανές τροχιές του κάθε θαλάμου μόνο μια θα είναι κοινή σε ένα σύνολο κύκλων.



**Σχήμα 1.1.I:** Τμήμα του ανιχνευτή από όπου η τροχιά ενός φορτισμένου σωματιδίου περνάει μέσα από τους θαλάμους και τα κυκλικά σήματα που έχει ως αποτέλεσμα



Εμείς, θέλουμε την γενίκευση του κύκλου σε έλλειψη και θέτουμε το εξής ερώτημα: Μπορούμε να έχουμε έναν ανιχνευτή ο οποίος θα επιστρέφει ελλειπτικά σήματα;

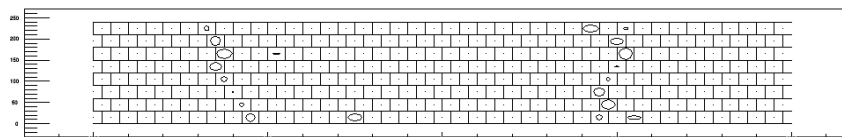
Το ηλεκτρικό πεδίο του σύρματος, ή ανοδικού καλωδίου στην περίπτωση μας, έχει κυκλική συμμετρία και είναι αντιστρόφως ανάλογο της απόστασης, ή ακτίνας,  $r$ , δηλαδή  $E \propto 1/r$ . Αλλά όταν βάζουμε όρια, το ηλεκτρικό πεδίο διαταράσσεται και επομένως δημιουργεί ελλείψεις. Συνεπώς, αν τα όρια του ανιχνευτή δεν είναι ακριβώς τετράγωνα αλλά για παράδειγμα ορθογώνια, υπάρχει περίπτωση τα σήματα να φαίνονται σαν ελλείψεις.

Παρ'όλα αυτά, πρόκειται για ένα ακαδημαϊκό ερώτημα με μια υποθετική απάντηση και για αυτό στην παρούσα διπλωματική εργασία συγκεντρωνόμαστε στην αναγνώριση της κοινής εφαπτομένης ενός συνόλου τροχιών και όχι στη φυσική του υποθετικού ανιχνευτή. Πρόκειται δηλαδή για μια εργασία πάνω στην προτεινόμενη μέθοδο αναγνώρισης προτύπων.

## 1.2 Ορισμός του προβλήματος

Στόχος μας είναι να ανιχνεύσουμε την κοινή εφαπτομένη ενός δεδομένου συνόλου ελλείψεων. Αν το σύνολο των ελλείψεων αποτελείται από υποσύνολα ελλείψεων (σχήμα 1.2.I), τότε πρέπει να βρούμε μια κοινή εφαπτομένη για κάθε υποσύνολο ελλείψεων.

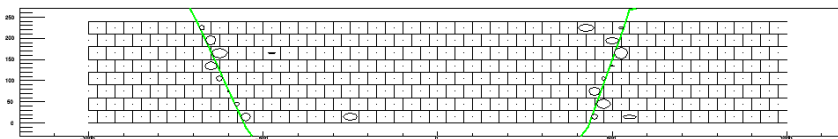
Με άλλα λόγια, στις ελλείψεις μας, αναζητάμε ομάδες ελλείψεων οι οποίες είναι διατεταγμένες στο επίπεδο με τρόπο ώστε να μοιράζονται μια εφαπτόμενη ευθεία. Η ευθεία αυτή θα πρέπει να είναι μοναδική.



**Σχήμα 1.2.I:** Απεικόνιση ενός συνόλου ελλείψεων που αποτελείται από 2 υποσύνολα ελλείψεων

## 1.3 Μεθοδολογία

Για να λύσουμε το πρόβλημα, εφαρμόζουμε στις δεδομένες ελλείψεις τον μετασχηματισμό Legendre κατά την κανονική μορφή. Έχοντας τις ημιτονοειδείς συναρτήσεις των εφαπτομένων των ελλείψεων, εντοπίζουμε τις ευθείες, με ανάλυση μέσω ιστογραμμάτων, αφού τα σημεία τομής των συναρτήσεων εκπροσωπούν τις κοινές εφαπτομένες (σχήμα 1.3.I). Τέλος, βελτιώνουμε τις εφαπτομένες με την μέθοδο της γραμμικής παλινδρόμησης (linear fit).



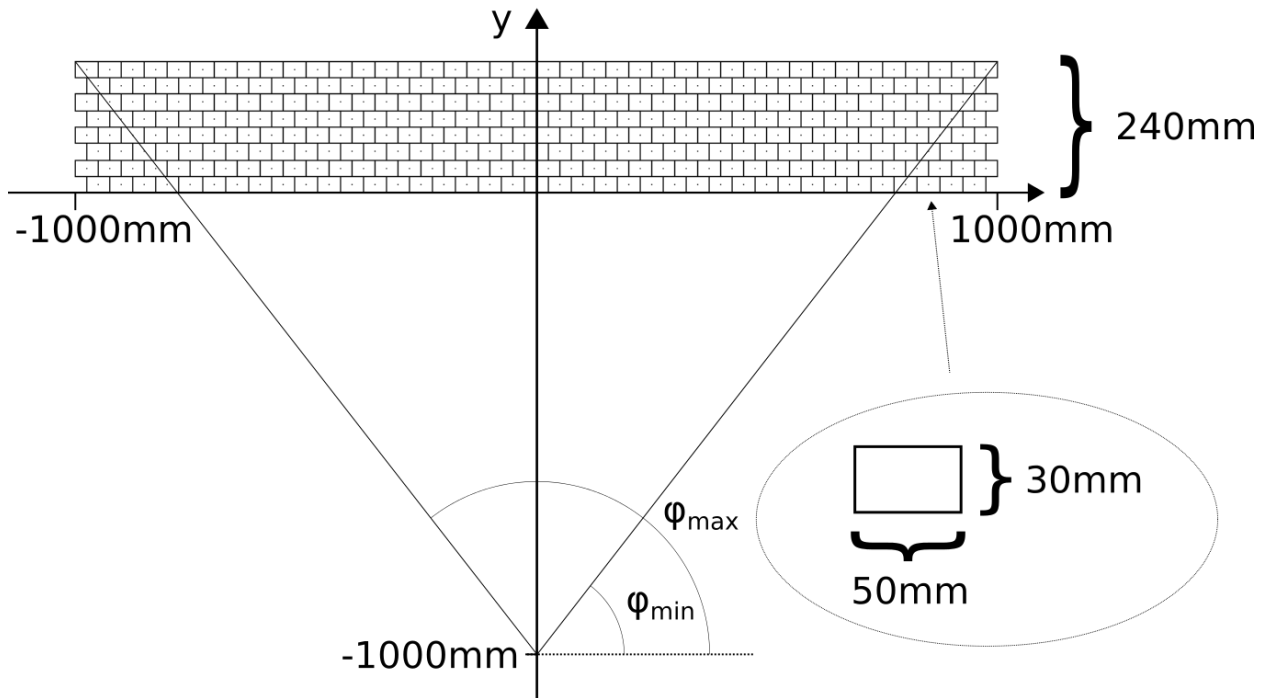
**Σχήμα 1.3.I:** Απεικόνιση ενός συνόλου ελλείψεων που αποτελείται από 2 υποσύνολα ελλείψεων για οποίες έχουμε εντοπίσει τις κοινές εφαπτομένες

## 1.4 Πλαίσιο

Ως πρόβλημα για επίλυση για τον αλγόριθμό μας, εφαρμόζουμε την πρότασή μας σε έναν υποθετικό ανιχνευτή ο οποίος αποτελείται από 8 επίπεδα ορθογώνιων θαλαμίσκων με πλάτος  $\text{chamber}_{\text{width}} = 50\text{mm}$  και ύψος  $\text{chamber}_{\text{height}} = 30\text{mm}$  (σχήμα 1.4.I). Ο ανιχνευτής έχει 2 μέτρα πλάτος και συνολικό ύψος 240 χιλιοστά. Έχουμε θέσει την αρχή των αξόνων στην βάση του ανιχνευτή, δηλαδή  $y = (0\text{mm}, 240\text{mm})$ , και στο κέντρο του κατά τον άξονα  $x$ , δηλαδή  $x \in (-1000\text{mm}, 1000\text{mm})$ . Οι ευθείες αποτελούν τις τροχιές υποθετικών σωματιδίων που τέμνουν τον άξονα  $y$  στο  $-1$  μέτρο.

Βάσει των παραπάνω, και εφαρμόζοντας την μέθοδο Monte Carlo, παράγουμε τροχιές που περνάνε μέσα από τον ανιχνευτή. Τα κατάλληλα ελλειπτικά σήματα (hits) δημιουργούνται όπως περνάει η τροχιά μέσα από τους θαλάμους. Επίσης, προσομοιώνουμε τις συνθήκες θορύβου διαταράσσοντας τα χαρακτηριστικά των ελλείψεων, ή προσθέτοντας ελλείψεις μη σχετικές με οποιαδήποτε κοινή εφαπτομένη, για προσομοίωση θορύβου των ηλεκτρονικών.

Μετράμε την αποτελεσματικότητα του αλγόριθμου βάση των διαφορών μεταξύ των χαρακτηριστικών των αρχικών και των ανακατασκευασμένων τροχιών.



Σχήμα 1.4.I: Προδιαγραφές του ανιχνευτή και των θαλάμων.

## 1.5 Εργαλεία

Για την υλοποίηση της μεθόδου, χρησιμοποιούμε την γλώσσα προγραμματισμού C++, μέσα σε ένα πλαίσιο λογισμικού, το αποκαλούμενο ROOT του CERN. Πιο συγκεκριμένα, δουλεύουμε με την έκδοση 2011 της C++ και την έκδοση v5.34.34 της ROOT.

Ο τρέχουσα κώδικας για την υλοποίηση της μεθόδου Monte Carlo για την παραγωγή ευθειών και ελλείψεων καθώς επίσης και η μέθοδος ανίχνευσης ευθειών φτάνει τις  $4,1 \cdot 10^3$  γραμμές. Δηλαδή αγγίζει ένα μέγεθος που τον καθιστά αρκετά δύσκολο για συντήρηση.



# 2

## Ο μετασχηματισμός Legendre

Ο μετασχηματισμός Legendre είναι ένα μαθηματικό εργαλείο στη θεωρητική φυσική, με ιδιαίτερα κρίσιμο ρόλο στη κλασική μηχανική, όπου συνδέει την Λαγκρανζιανή  $L(\dot{q})$  με την Χαμιλτονιανή  $H(p)$ ,  $L(u) = up - H(p(u))$ , αλλά και στην θερμοδυναμική, όπου μπορεί να συνδέσει την εσωτερική ενέργεια  $E$  με διάφορα θερμοδυναμικά δυναμικά. Επίσης, ο μετασχηματισμός Legendre είναι καταλυτικός στην επίλυση προβλημάτων αναγνώρισης προτύπων, όπως στην δική μας περίπτωση. Με την χρήση του, παίρνουμε όλες τις δυνατές εφαπτομένες μιας συνάρτησης. Εξ'ορισμού του μετασχηματισμού Legendre, η συνάρτηση αυτή μπορεί να είναι είτε κυρτή είτε κοίλη.

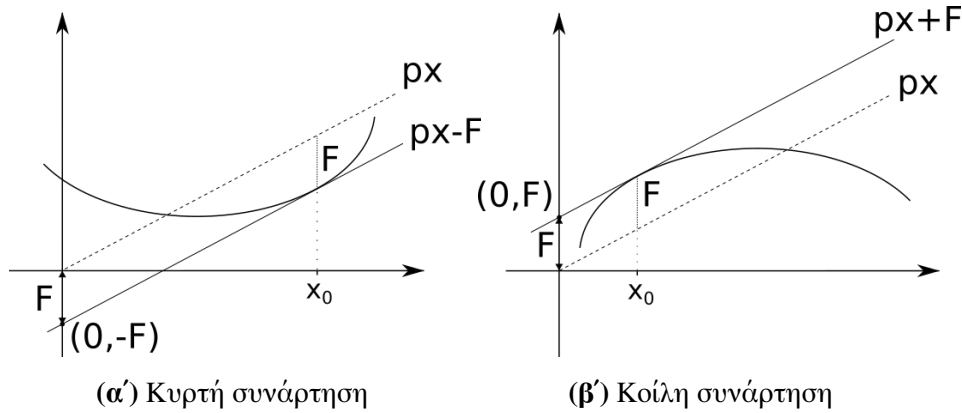
Επίσης, ο μετασχηματισμός Legendre είναι κατηγορηματικός όσον αφορά το πως κωδικοποιούνται οι πληροφορίες. Δηλαδή μας δείχνει πως να δημιουργούμε μια συνάρτηση  $F(p)$  η οποία περιέχει της ίδια πληροφορία όπως η μετασχηματισμένη  $f(x)$  αλλά σαν συνάρτηση της κλίσης της  $f(x)$ . Τέλος, η μετασχηματισμένη συνάρτηση,  $F(p)$ , έχει τις ίδιες μονάδες μέτρησης με την  $f(x)$  που μετασχηματίστηκε.

### 2.1 Ορισμός

Ο μετασχηματισμός Legendre  $F(p)$  μιας κυρτής συνάρτησης  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , όπου  $d^2f/dx^2 > 0$ , για μια τιμή  $p = df/dx$  ορίζεται ως:

$$F(p) = \sup_x [px - f(x)] = -\inf_x [f(x) - px]$$

Η γραφική αναπαράσταση του παραπάνω βρίσκεται στο σχήμα 2.1.Ια΄)



**Σχήμα 2.1.Ι:** Μετασχηματισμός Legendre

και ο μετασχηματισμός μιας κοίλης συνάρτησης, όπου  $d^2 f/dx^2 < 0$ , ως:

$$F(p) = \sup_x [f(x) - px] = -\inf_x [px - f(x)]$$

Η γραφική αναπαράσταση του παραπάνω βρίσκεται στο σχήμα 2.1.Ιβ΄)

Ο συμβολισμός  $\sup_x$  σημαίνει supremum της  $px - f(x)$  ως προς το  $x$ . Δηλαδή, αναζητάμε το μέγιστο της συνάρτησης  $px - f(x)$  ως προς το  $x$  όπου το  $p$  είναι σταθερό. Γεωμετρικά, έχουμε μια συνάρτηση  $f(x)$  και αναζητάμε το σημείο της συνάρτησης όπου μια ευθεία με κλίση  $\text{slope} = p$  περνάει μέσα από το σημείο  $(x, f(x))$  και έχει μια μέγιστη τομή με τον άξονα  $y$ , intercept. Τότε, αυτή η ευθεία θα είναι εφαπτόμενη στην  $f(x)$  σε αυτό το σημείο, και δε θα έχει καμία άλλη σχέση με τη συνάρτηση αφού η συνάρτηση είναι κυρτή. Ο συμβολισμός  $\inf_x$  σημαίνει infimum, δηλαδή την ελαχιστοποίηση  $f(x) - px$  ως προς το  $x$  ή αλλιώς, την ελάχιστη τομή με τον άξονα  $y$ . Αν λύσουμε την  $p = df/dx$  ως προς  $x$ , μπορούμε να εκφράσουμε τον μετασχηματισμό Legendre ως συνάρτηση του  $p$ :

$$F(p) = \begin{cases} f(x(p)) - px(p) & , \text{ για κοίλη συνάρτηση} \\ px(p) - f(x(p)) & , \text{ για κυρτή συνάρτηση} \end{cases}$$

όπου κάθε σημείο  $(p, F(p))$  στο χώρο Legendre εκπροσωπεί μια ευθεία, εφαπτόμενη στην καμπύλη  $f(x)$ , της οποίας η κλίση,  $\text{slope}$ , ισούται με  $p$  και η τομή με τον άξονα

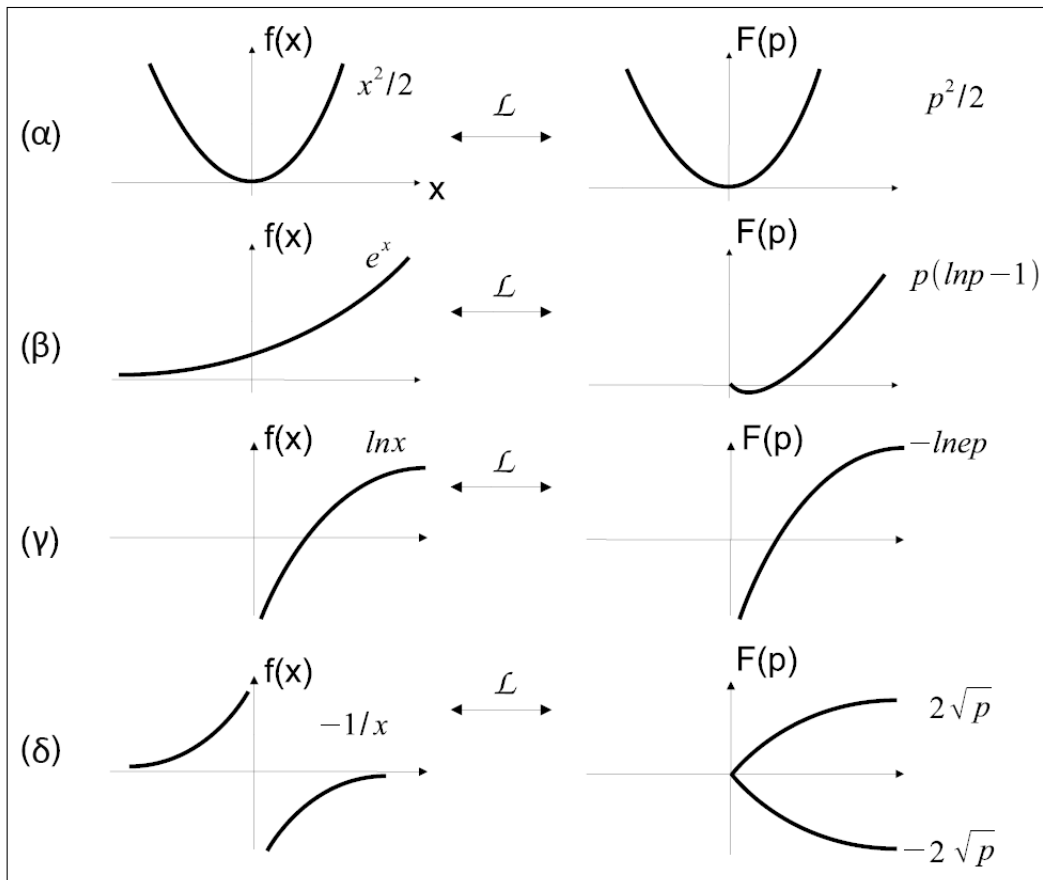
$y$ , intercept, ισούται με  $-F(p)$  ή  $F(p)$ , αν η ευθεία είναι εφαπτόμενη σε κυρτή ή κοίλη συνάρτηση αντίστοιχα. Οπότε η εξίσωση της ευθείας μπορεί να οριστεί ως:

$$y = \text{slope} \cdot x + \text{intercept} = \begin{cases} px + F(p) & , \text{ για κοίλη συνάρτηση} \\ px - F(p) & , \text{ για κυρτή συνάρτηση} \end{cases}$$

Τώρα, μπορούμε εύκολα να καταλήξουμε στο συμπέρασμα ότι όταν δύο ή παραπάνω καμπύλες στον χώρο Legendre τέμνονται, από το σημείο τομής  $(p_t, F(p_t))$  του χώρου Legendre, μπορούμε να εξάγουμε τα χαρακτηριστικά μιας ευθείας η οποία θα είναι εφαπτόμενη στις συναρτήσεις του χώρου  $(x, y)$ . Αυτή θα είναι η βάση του αλγορίθμου που θα υλοποιήσουμε.

## 2.2 Παραδείγματα

Στη συνέχεια, ορισμένα παραδείγματα του μετασχηματισμού Legendre για κοινές συναρτήσεις (εικόνα 2.2.1) θα παρουσιαστούν μαζί με τους υπολογισμούς τους.



Σχήμα 2.2.I: Κοινές συναρτήσεις

### 2.2.1 Παραβολή

Η συνάρτηση  $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$  της παραβολής, ορίζεται ως:

$$f(x) = \frac{x^2}{2}$$

Για  $f(x)$ , έχουμε κλίση:

$$p = \frac{df}{dx} = x$$

το οποίο ως συνάρτηση του  $x$  συναρτήσει του  $p$ , είναι

$$x(p) = p$$



Συνεπώς ο μετασχηματισμός Legendre  $F(p)$  ορίζεται από:

$$F(p) = px(p) - f(x(p)) = p^2 - \frac{p^2}{2} = \frac{p^2}{2}$$

Δηλαδή:

$$\frac{x^2}{2} \overset{L}{\leftrightarrow} \frac{p^2}{2}$$

Παρατηρούμε ότι η παραβολή παραμένει παραβολή στο χώρο Legendre.

### 2.2.2 Εκθετική συνάρτηση

Η συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  της εκθετικής συνάρτησης, ορίζεται ως:

$$f(x) = e^x$$

Στη περίπτωση αυτή, έχουμε κλίση  $p$ :

$$p = \frac{df}{dx} = e^x$$

το οποίο ως συνάρτηση του  $x$  συναρτήσει του  $p$ , είναι

$$x(p) = \ln p$$

Συνεπώς ο μετασχηματισμός Legendre  $F(p)$  της εκθετικής συνάρτησης δίνεται από:

$$F(p) = px(p) - f(x(p)) = p \ln p - e^{\ln p} = p(\ln p - 1) = \ln \left(\frac{p}{e}\right)^p$$

Δηλαδή:

$$e^x \overset{L}{\leftrightarrow} \ln \left(\frac{p}{e}\right)^p$$

### 2.2.3 Λογαριθμική συνάρτηση

Η συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  της λογαριθμικής συνάρτησης, ορίζεται ως:

$$f(x) = \ln x$$

Στη περίπτωση αυτή, έχουμε κλίση  $p$ :

$$p = \frac{df}{dx} = \frac{1}{x}$$

το οποίο ως συνάρτηση του  $x$  συναρτήσει του  $p$ , είναι

$$x(p) = \frac{1}{p}$$

Συνεπώς ο μετασχηματισμός Legendre  $F(p)$  της λογαριθμικής συνάρτησης, η οποία παρεμπιπτόντως είναι κοίλη συνάρτηση, δίνεται από:

$$F(p) = f(x(p)) - px(p) = \ln \frac{1}{p} - p \frac{1}{p} = -1 - \ln p = \ln e + \ln p = -\ln(ep) = \ln \frac{1}{ep}$$

Δηλαδή:

$$\ln x \stackrel{L}{\leftrightarrow} \ln \frac{1}{ep}$$

### 2.2.4 Υπερβολή

Η συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  της υπερβολικής συνάρτησης, ορίζεται ως:

$$f(x) = -\frac{1}{x}$$

Στη περίπτωση αυτή, έχουμε κλίση  $p$ :

$$p = \frac{df}{dx} = \frac{1}{x^2}$$

το οποίο ως συνάρτηση του  $x$  συναρτήσει του  $p$ , είναι

$$x(p) = \pm \sqrt{\frac{1}{p}}$$

όπου  $p > 0$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση της υπερβολής αποτελείται από μια κυρτή συνάρτηση για  $x \in (-\infty, 0)$  με  $x(p) = -\sqrt{1/p}$  και από μια κοίλη συνάρτηση για  $x \in (0, +\infty)$  με  $x(p) = +\sqrt{1/p}$ .

Συνεπώς ο μετασχηματισμός Legendre  $F(p)$  της υπερβολικής συνάρτησης είναι:

Για το κυρτό τμήμα:

$$F(p) = px(p) - f(x(p)) = -p\sqrt{\frac{1}{p}} - \sqrt{p} = -2\sqrt{p}$$

Δηλαδή:

$$-\frac{1}{x} \stackrel{L}{\leftrightarrow} -2\sqrt{p}$$

Για το κοίλο τμήμα:

$$F(p) = f(x(p)) - px(p) = \sqrt{p} + p\sqrt{\frac{1}{p}} = +2\sqrt{p}$$

Δηλαδή:

$$-\frac{1}{x} \stackrel{L}{\leftrightarrow} +2\sqrt{p}$$

## 2.3 Ιδιότητες του μετασχηματισμού Legendre

Ο μετασχηματισμός Legendre ως μετασχηματισμός μη-γραμμικών συναρτήσεων (non-linear functions), συνοδεύεται με μια σειρά ιδιοτήτων. Οι βασικότερες αυτών παρουσιάζονται στη συνέχεια.

### 2.3.1 Κλιμάκωση (Scaling)

Η ιδιότητα της κλιμάκωσης ορίζεται ως:

$$af(x) \stackrel{L}{\leftrightarrow} aF\left(\frac{p}{a}\right)$$

Υποθέτοντας ότι  $f(x) \stackrel{L}{\leftrightarrow} F(p)$ , υπολογίζουμε τον μετασχηματισμό Legendre της  $g(x) = af(x)$  ως:

$$G(p) = px - g(x) = px - af(x) = a\left(\frac{p}{a}x - g(x)\right) = aF\left(\frac{p}{a}\right)$$

### 2.3.2 Επέκταση (Stretching)

Η ιδιότητα της επέκτασης ορίζεται ως:

$$f(ax) \stackrel{L}{\leftrightarrow} F\left(\frac{p}{a}\right)$$

Έστω  $g(x) = f(ax)$ , τότε:

$$G(p) = px - g(x) = px - f(ax) = \frac{p}{a}(ax) - f(ax) = F\left(\frac{p}{a}\right)$$

### 2.3.3 Μετάβαση (Translation)

Η ιδιότητα της μετάβασης ορίζεται ως:

$$f(x - a) \stackrel{L}{\leftrightarrow} F(p) + pa$$

Έστω  $g(x) = f(x - a)$ , τότε:

$$G(p) = px - g(x) = px - f(x - a) = p(x - a) + pa - f(x - a) = F(p) + pa$$

### 2.3.4 Γραμμική πρόσθεση (Linear Addition)

Η ιδιότητα της γραμμικής πρόσθεσης ορίζεται ως:

$$f(x) + bx + c \stackrel{L}{\leftrightarrow} F(p - b) - c$$

Έστω  $g(x) = f(x) + bx + c$ , τότε:

$$G(p) = px - g(x) = px - f(x) - bx - c = [(p - b)x - f(x)] - c = F(p - b) - c$$

### 2.3.5 Ανισότητα του Young (Young's Inequality)

Η ιδιότητα της ανισότητας του Young ορίζεται ως:

$$px \leq f(x) + g(p)$$

Δύο συναρτήσεις  $f$  και  $g$  ονομάζονται διπλές κατά Young εάν αποτελούν τον μετασχηματισμό Legendre η μια της άλλης.

Από τον ορισμό του μετασχηματισμού Legendre έχουμε ότι  $g(p) = \sup_x [px - f(x)]$ ,

άρα:

$$px - f(x) \leq g(p) \Rightarrow px \leq f(x) + g(p)$$

### 2.3.6 Παλινδρόμηση (Involutivity)

Η ιδιότητα της παλινδρόμησης, δηλαδή ότι ο μετασχηματισμός Legendre είναι ο αντίστροφος του εαυτού του, ορίζεται ως:

$$L(L(f)) = f$$

Ας υποθέσουμε μια κυρτή συνάρτηση  $f(x)$ . Ο μετασχηματισμός Legendre θα είναι:

$$L(f) = px - f(x)$$

Ένας επιπλέον μετασχηματισμός θα δώσει:

$$L(L(f)) = px - [px - f(x)] = px - px + f(x) = f$$

## 2.4 Μετασχηματισμός Legendre σε περισσότερες διαστάσεις

Στις προηγούμενες ενότητες, ο μετασχηματισμός Legendre ορίστηκε για κυρτές και κοίλες συναρτήσεις σε μια διάσταση. Εδώ, θα παρουσιαστεί η αναγωγή του μετασχηματισμού Legendre σε περισσότερες διαστάσεις. Οι ιδιότητες του μετασχηματισμού Legendre που προαναφέρθηκαν ισχύουν και στην πολυδιάστατη περίπτωση. Στην περίπτωση πολλαπλών διαστάσεων, όμως, θα προσθέσουμε μερικές ιδιότητες ακόμη.

### 2.4.1 Ορισμός του μετασχηματισμού Legendre σε $n$ διαστάσεις

Ας υποθέσουμε μια κυρτή συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  σε πολυδιάστατο χώρο  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  όπου  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  και  $\nabla^2 f > 0$ . Ο μετασχηματισμός Legendre αυτής της συνάρτησης  $F(\vec{p})$  είναι επίσης μια πολυδιάστατη συνάρτηση ορισμένη από τη σχέση:

$$F(\vec{p}) = \sup_x (\vec{p} \cdot \vec{x} - f(\vec{x}))$$

όπου  $\vec{p} = \nabla f(\vec{x})$ .

Η γεωμετρική αναπαράστασή της είναι παρόμοια με αυτής της μονοδιάστατης συνάρτησης. Θα εξηγήσουμε τις γεωμετρικές ιδιότητες με ένα παράδειγμα σε τρεις διαστάσεις. Υποθέτουμε μια κυρτή συνάρτηση  $f(x, y): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $z = f(x, y)$  και ένα επίπεδο  $z = \vec{p} \cdot \vec{x}$ , το οποίο ορίζεται από ένα σημείο στην αρχή των αξόνων  $(0,0,0)$  και ένα κάθετο διάνυσμα  $\vec{p}$ . Ο μετασχηματισμός Legendre κατασκευάζεται επιλέγοντας ένα σημείο  $\vec{x}$  στο επιλεγμένο επίπεδο, τέτοιο ώστε να μεγιστοποιείται η κάθετη απόσταση (κατά τον άξονα  $z$ ) από την επιφάνεια. Ως προς αυτό το σημείο, ο μετασχηματισμός Legendre δίνεται από τη συνάρτηση  $F(\vec{p}) = \vec{p} \cdot \vec{x} - f(\vec{x})$ .

Αυτή η αναπαράσταση δίνει το εφαπτόμενο επίπεδο στην επιφάνεια  $f(x, y)$  για το συγκεκριμένο σημείο. Αυτό προκύπτει εύκολα εαν πάρουμε την εξίσωση ενός επιπέδου εφαπτόμενου σε μια επιφάνεια  $f(x, y)$ :

$$z = \nabla f \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0) + z_0$$

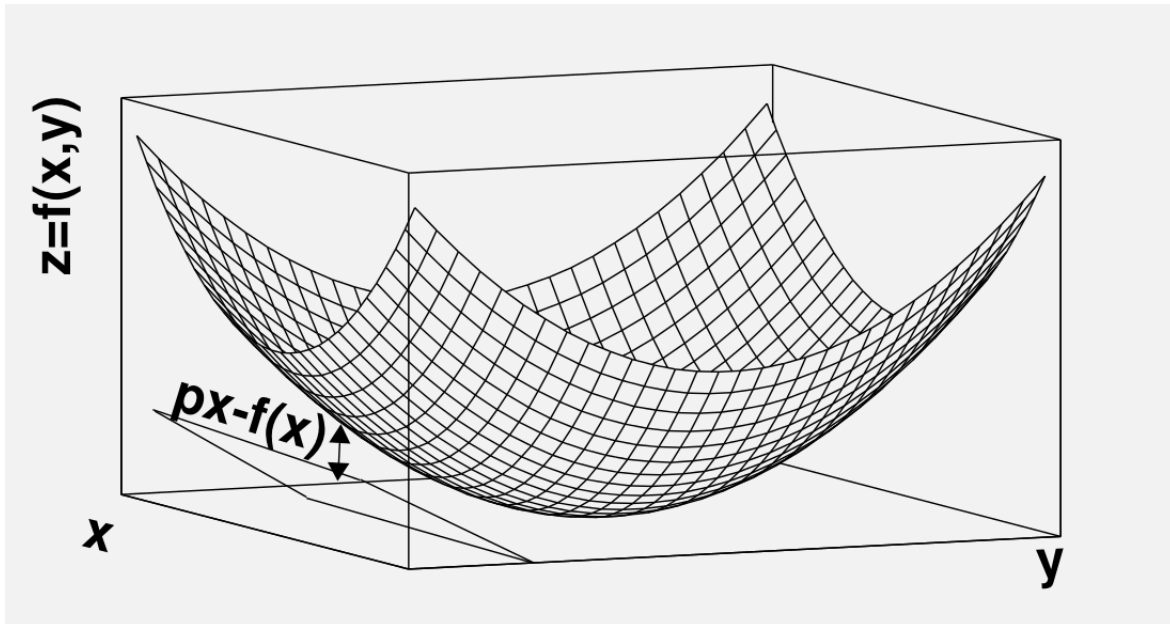
Η κλίση της επιφάνειας  $\nabla f$  κατευθύνεται κάθετα στην επιφάνεια ώστε το διάνυσμα  $\vec{p}$  να πρέπει να είναι ίσο στην κλίση  $\vec{p} = \nabla f(\vec{x})$  και η μετατόπιση κατά τον άξονα  $z$ ,  $z_0$ , να είναι ίση με  $-F(\vec{p})$ , παρομοίως με την μονοδιάστατη περίπτωση. Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να ορίσουμε τον μετασχηματισμό Legendre για κοίλες συναρτήσεις χρησιμοποιώντας τη σχέση:

$$F(\vec{p}) = \sup_x (f(\vec{x}) - \vec{p} \cdot \vec{x})$$

όπου  $\vec{p} = \nabla f(\vec{x})$ , με την μετατόπιση κατά τον άξονα  $z$  να είναι ίση με  $F(\vec{p})$ .

Ένα απλό παράδειγμα για την εξήγηση της μεθόδου είναι να υπολογίσουμε τον μετασχηματισμό Legendre μιας παραβολοειδούς επιφάνειας (σχήμα 2.4.I)

$$z = f(x, y) = \frac{(x^2 + y^2)}{2}$$



Σχήμα 2.4.I: Μετασχηματισμός Legendre σε 2 διαστάσεις

Έχουμε λοιπόν:

$$\vec{p} = (p_x, p_y) = \nabla f(x, y) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = (x, y) \Rightarrow \vec{x} = \vec{p}$$

Ο μετασχηματισμός Legendre θα γίνει:

$$F(\vec{p}) = \vec{p} \cdot \vec{x} - f(\vec{x}) = \vec{p} \cdot \vec{p} - f(\vec{p}) \Rightarrow F(p_x, p_y) = p_x^2 + p_y^2 - \frac{p_x^2 + p_y^2}{2} = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2}$$

Άρα η παραβολή παραμένει παραβολή στον χώρο Legendre.

## 2.4.2 Κατώτατη συνέλιξη (Infimal convolution)

Η κατώτατη συνέλιξη δύο κυρτών συναρτήσεων  $f(\vec{x})$  και  $g(\vec{x})$  σε  $n$ -διαστάσεις ( $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ) ορίζεται ως:

$$(f \star_{\text{inf}} g)(\vec{x}) = \inf_{y \in \mathbb{R}^n} (f(\vec{x} - \vec{y}) + g(\vec{y}))$$

Εάν οι  $f(\vec{x})$  και  $g(\vec{x})$  είναι κοίλες συναρτήσεις σε  $n$ -διαστάσεις ( $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ) τότε μπορούμε να ορίσουμε την ανώτατη συνέλιξη (supremum convolution) με τον ίδιο τρόπο:

$$(f \star_{\text{sup}} g)(\vec{x}) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} (f(\vec{x} - \vec{y}) + g(\vec{y}))$$

Μπορεί να αποδειχθεί ότι ο μετασχηματισμός της κατώτατης συνέλιξης είναι:

$$(f \star_{\text{inf}} g)(\vec{x}) \stackrel{L}{\leftrightarrow} F(\vec{p}_1) + G(\vec{p}_2)$$

όπου  $f(\vec{x}) \stackrel{L}{\leftrightarrow} F(\vec{p}_1), g(\vec{x}) \stackrel{L}{\leftrightarrow} G(\vec{p}_2)$ , με  $\vec{p}_1 = \nabla f(\vec{x}), \vec{p}_2 = \nabla g(\vec{x})$ .

Αυτό το πόρισμα μπορεί να γενικευτεί για  $n$ -κυρτές συναρτήσεις  $f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \dots, f_n(\vec{x})$ :

$$(f_1 \star_{\text{inf}} f_2 \star_{\text{inf}} \dots \star_{\text{inf}} f_n)(\vec{x}) \stackrel{L}{\leftrightarrow} \sum_{i=1}^n F_i(\vec{p}_i)$$

όπου  $f_i(\vec{x}) \stackrel{L}{\leftrightarrow} F_i(\vec{p}_i)$ , με  $\vec{p}_i = \nabla f_i(\vec{x})$

### 2.4.3 Συζυγής κυρτότητα (Adjoint Convexity)

Έστω  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος και  $X^* \subseteq \mathbb{R}^n$  συζυγής χώρος του  $X$ , όπως προκύπτει από τον μετασχηματισμό Legendre. Τα στοιχεία των δύο διανυσματικών χώρων θα σημειωθούν ως  $\vec{x}$  και  $\vec{p}$  αντίστοιχα. Το συζυγές ζευγάρι  $\langle \vec{p}, \vec{x} \rangle$  ορίζεται ως:

$$\langle \vec{p}, \vec{x} \rangle : X^* \times X \rightarrow \mathbb{R}$$

με  $\vec{p} \in X^*$  και  $\vec{x} \in X$ . Το συζυγές ζευγάρι  $\langle \vec{p}, \vec{x} \rangle$  είναι για την ακρίβεια το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων  $\vec{x}$  και  $\vec{p}$ . Για την συνάρτηση:

$$f(\vec{x}) : X \rightarrow \mathbb{R}$$

όπου  $\vec{x} \in X$ , μπορούμε να ορίσουμε τη συζυγή κυρτή συνάρτηση  $f^*$  ως:

$$f^*(\vec{p}) = \sup_x [\langle \vec{p}, \vec{x} \rangle - f(\vec{x})] = -\inf_x [f(\vec{x}) - \langle \vec{p}, \vec{x} \rangle]$$

Για αυτό το γενικευμένο μετασχηματισμό, η ανισότητα του Young μπορεί να γενικευτεί στην ανισότητα Young-Fenchel

$$\langle \vec{p}, \vec{x} \rangle \leq f(\vec{x}) + f^*(\vec{p})$$

## 2.5 Ο μετασχηματισμός Legendre του κύκλου

Ο μετασχηματισμός του κύκλου είναι σημαντική βάση για το επόμενο κεφάλαιο στο οποίο θα εφαρμόσουμε τον μετασχηματισμό Legendre στην έλλειψη. Συνεπώς, θα αναλυθεί διεξοδικά.

### 2.5.1 Εξίσωση του κύκλου

Η εξίσωση ενός κύκλου με κέντρο  $C(x_0, y_0)$  και ακτίνα  $R$ :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

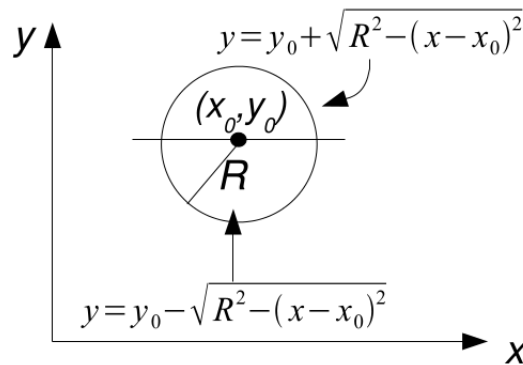
Αν λύσουμε ως προς  $y$  έχουμε:

$$(y - y_0)^2 = R^2 - (x - x_0)^2 \Rightarrow \\ y = y_0 \pm \sqrt{R^2 - (x - x_0)^2}$$



Άρα ο κύκλος μπορεί να οριστεί από το συνδυασμό μιας κοίλης και μιας κυρτής συνάρτησης  $f_1(x)$  και  $f_2(x)$  αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.5.I με τις συναρτήσεις:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) = y_0 + \sqrt{R^2 - (x - x_0)^2} & \text{Κοίλο μέρος} \\ f_2(x) = y_0 - \sqrt{R^2 - (x - x_0)^2} & \text{Κυρτό μέρος} \end{cases}$$



Σχήμα 2.5.I: Ο κύκλος χωρισμένος σε κυρτή και σε κοίλη συνάρτηση

## 2.5.2 Ο μετασχηματισμός του κύκλου

Στη περίπτωση του κοίλου τμήματος, ο μετασχηματισμός Legendre μια κοίλης συνάρτησης είναι:

$$F_1(p) = \sup_x [f_1(x) - px]$$

όπου  $p = \frac{df_1}{dx}$

Η πρώτη παράγωγος του  $p = df_1/dx$  θα είναι:

$$p = \frac{df_1}{dx} = \frac{d}{dx} \left[ y_0 + \sqrt{R^2 - (x - x_0)^2} \right] = -\frac{x - x_0}{\sqrt{R^2 - (x - x_0)^2}} \Rightarrow$$

$$p^2 = \frac{(x - x_0)^2}{(R^2 - (x - x_0)^2)} \Rightarrow (x - x_0)^2 (1 + p^2) = R^2 p^2 \Rightarrow (x - x_0)^2 = \frac{R^2 p^2}{1 + p^2} \Rightarrow$$

$$(x - x_0) = \frac{R|p|}{\sqrt{1 + p^2}} \Rightarrow x = x_0 \pm \frac{R|p|}{\sqrt{1 + p^2}}$$

Αφού η  $f_1$  είναι κοίλη συνάρτηση, έχουμε:

$$x = x_0 - \frac{Rp}{\sqrt{1+p^2}}$$

Άρα ο μετασχηματισμός Legendre του κοίλου τμήματος του κύκλου είναι:

$$F_1(p) = f_1(x) - px_0 = y_0 + \sqrt{R^2 - (x - x_0)^2} - px_0 = y_0 + \sqrt{R^2 - \frac{R^2 p^2}{1+p^2}} - x_0 p \Rightarrow$$

$$F_1(p) = y_0 - px_0 + R\sqrt{1+p^2}$$

Όπως ήδη αναφέρθηκε προηγουμένως, κάθε ζευγάρι  $(p, f(p))$  καθορίζει μια εφαπτομένη ευθεία στον κύκλο. Για να το περιγράψουμε καλύτερα, η εξίσωση της ευθείας μπορεί να εκφραστεί και με την κανονική της μορφή (canonical form):

$$r = x \cos \theta + y \sin \theta$$

έτσι ώστε  $p = -\cot \theta$  και  $F(p) = r/\sin \theta$ . Σε αυτή την περίπτωση, ο μετασχηματισμός Legendre γίνεται:

$$\frac{r}{\sin \theta} = y_0 + x_0 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} + \frac{R}{\sin \theta} \Rightarrow$$

$$r = x_0 \cos \theta + y_0 \sin \theta + R$$

Αυτή η εξίσωση απεικονίζει μια ημιτονοειδή συνάρτηση στο χώρο Legendre  $(\theta, r)$  όπως φαίνεται στο σχήμα 2.5.Π. Ακολουθώντας τα ίδια βήματα και για την περίπτωση του κυρτού τμήματος, αποδεικνύεται ότι ο μετασχηματισμός Legendre του κύκλου υπολογίζεται ως:

$$F_2(p) = px_0 - y_0 + R\sqrt{1+p^2}$$

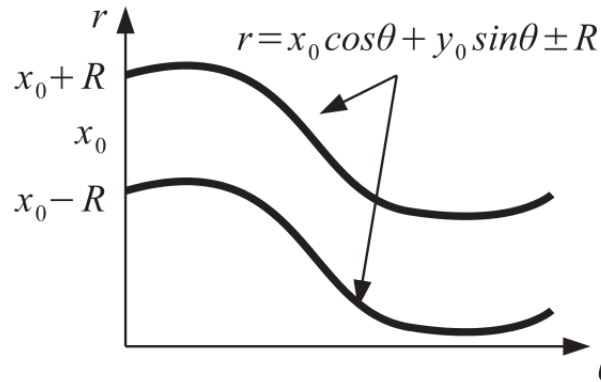
και η αναπαράστασή του στον χώρο  $(\theta, r)$ :

$$r = x_0 \cos \theta + y_0 \sin \theta - R$$

Τελικά, από τις παραπάνω εξισώσεις, καταλήγουμε στο μετασχηματισμό Legendre του κύκλου, στην κανονική μορφή:

$$f(x) \xleftrightarrow{L} r(\theta) = \begin{cases} x_0 \cos \theta + y_0 \sin \theta + R & \text{Κοίλο μέρος} \\ x_0 \cos \theta + y_0 \sin \theta - R & \text{Κυρτό μέρος} \end{cases}$$

Η γραφική αναπαράσταση των παραπάνω εξισώσεων βρίσκεται στο σχήμα 2.5.Π



**Σχήμα 2.5.Π:** Ο μετασχηματισμός του κύκλου στο χώρο Legendre

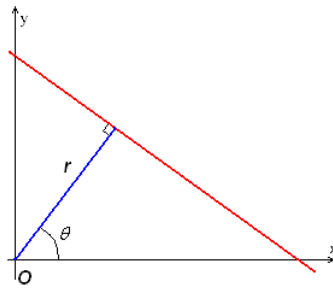
Αξίζει να σημειωθεί ότι όταν ο κύκλος μειώνεται σε σημείο,  $R \rightarrow 0$ , ο μετασχηματισμός Legendre μειώνεται στο μετασχηματισμό Radon/Hough του σημείου  $(x_0, y_0)$ , παρέχοντάς μας μια και μοναδική ημιτονοειδή συνάρτηση στο χώρο  $(\theta, r)$ . Ο μετασχηματισμός Hough θεωρείται γνωστή τεχνική στον τομέα αναγνώρισης προτύπων (pattern recognition), που εφαρμόζεται πολύ συχνά στην αναγνώριση εικόνων, την τομογραφία εκπομπής ποζιτρονίων (Positron Emission Tomography- PET) και σε άλλες εφαρμογές. Σε αυτή την περίπτωση, ο μετασχηματισμός Legendre αντιπροσωπεύει όλες τις πιθανές ευθείες που περνάνε από το σημείο  $(x_0, y_0)$ .

## 2.6 Κανονική μορφή

Μια ευθεία  $\varepsilon$  με εξίσωση:

$$y = \text{slope} \cdot x + \text{intercept}$$

μπορεί να μετατραπεί στην κανονική της μορφή αν θεωρήσουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα μήκους  $r$  από την αρχή των αξόνων μέχρι το σημείο όπου τέμνει κάθετα την ευθεία  $\varepsilon$  (σχήμα 2.6.Ι).



**Σχήμα 2.6.I:** Η ευθεία (κόκκινο χρώμα) και το ευθύγραμμο τμήμα (μπλε χρώμα)

Με αυτά τα δεδομένα, μπορούμε να υπολογίσουμε της ιδιότητες της ευθείας συναρτήσει των  $\theta$  και  $r$ . Δηλαδή:

$$\text{slope} = -\frac{\cos \theta}{\sin \theta}, \text{ intercept} = \frac{r}{\sin \theta}$$

άρα η εξίσωση της ευθείας γίνεται:

$$y = -\frac{\cos \theta}{\sin \theta}x + \frac{r}{\sin \theta}$$

όπου  $\theta \in (0, \pi)$ .

Στη συνέχεια, αν λύσουμε ως προς  $r$ , παίρνουμε την εξίσωση

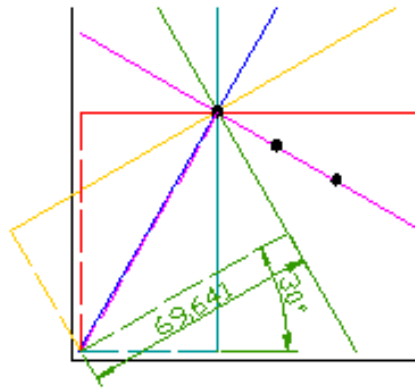
$$r = x \cos \theta + y \sin \theta \quad (2.6.1)$$

Με άλλα λόγια, με τη χρήση της κανονικής μορφής περνάμε από το χώρο  $(x, y)$  στο χώρο  $(\theta, r)$ , όπου η ευθεία  $\varepsilon$  έχει μετατραπεί σε ένα σημείο  $(\theta_\varepsilon, r_\varepsilon)$ . Αν όμως, θεωρήσουμε ένα σημείο στο χώρο  $(x, y)$  με συντεταγμένες  $(x_0, y_0)$  και εφαρμόσουμε την εξίσωση 2.6.1 για το δεδομένο σημείο και την  $\theta$  ως ανεξάρτητη μεταβλητή

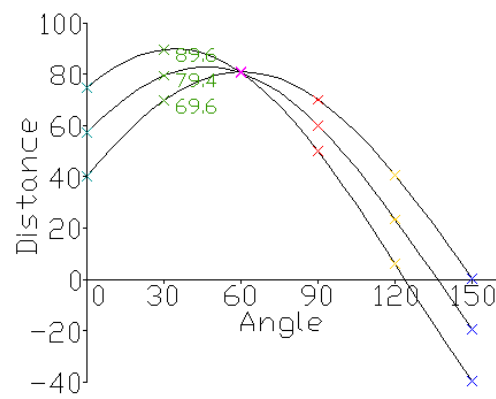
$$r(\theta) = x_0 \cos \theta + y_0 \sin \theta$$

παίρνουμε μια καμπύλη στο χώρο  $(\theta, r)$  η οποία εκπροσωπεί όλες τις ευθείες που τέμνουν το σημείο  $(x_0, y_0)$ .

Επίσης, ας θεωρήσουμε ένα σύνολο σημείων στο χώρο  $(x, y)$  (σχήμα 2.6.II), των οποίων οι καμπύλες τους στο χώρο  $(\theta, r)$  θα τέμνονται (σχήμα 2.6.III). Από το σημείο τομής των καμπυλών, εξάγονται τα χαρακτηριστικά της ευθείας που τέμνει τα σημεία που αντιστοιχούν στις καμπύλες που τέμνονταν.



**Σχήμα 2.6.Π:** Τρία σημεία στον χώρο  $(x, y)$  και διάφορες πιθανές ευθείες τους.



**Σχήμα 2.6.ΠΙ:** Οι καμπύλες των τριών σημείων. Το σημείο όπου οι καμπύλες τέμνονται εκπροσωπεί την κοινή τους εφαπτομένη.



# 3

## Ο μετασχηματισμός Legendre της έλλειψης

Ο μετασχηματισμός κάθε έλλειψης από ένα σύνολο ελλείψεων στον χώρο Legendre θα έχει ως αποτέλεσμα μια σειρά από καμπύλες. Οι τομές αυτών των καμπυλών εκπροσωπούν τις κοινές εφαπτομένες των μετασχηματισμένων ελλείψεων. Από το σημείο από το οποίο περνάνε όλες οι καμπύλες μπορούμε να εξάγουμε τα χαρακτηριστικά της κοινής εφαπτομένης του συνόλου των ελλείψεων.

Καθώς ο μετασχηματισμός Legendre εφαρμόζεται μόνο σε κυρτές ή κοίλες συναρτήσεις, θα ορίσουμε την έλλειψη ως το συνδυασμό μιας κυρτής και μιας κοίλης συνάρτησης. Έχοντας αναλύσει την εξίσωση της έλλειψης σε κοίλη και κυρτή συνάρτηση, ο μετασχηματισμός Legendre μπορεί να εφαρμοστεί με ευκολία.

Όμως, πριν ξεκινήσουμε την ανάλυση, θα πρέπει να σημειώσουμε ότι η συμμετρική έλλειψη, στην οποία θα αναφερόμαστε ως έλλειψη, ορίζεται με κέντρο  $(x_0, y_0)$ , και από τον μεγάλο άξονα  $a$  και τον μικρό άξονα  $b$ . Οι άξονες αυτοί συνδέονται με την ανισοτική σχέση  $a \geq b > 0$ . Επίσης, οι συμμετρικές ελλείψεις έχουν κλίση  $\phi = 0$ . Δηλαδή ο μεγάλος άξονας  $a$  εκτείνεται κατά τον άξονα  $x$ , ενώ ο μικρός άξονας  $b$  εκτείνεται κατά τον άξονα  $y$ .

### 3.1 Ο μετασχηματισμός Legendre σε έλλειψη με κέντρο την αρχή των αξόνων

#### 3.1.1 Εξίσωση της έλλειψης με κέντρο την αρχή των αξόνων

Η εξίσωση της έλλειψης με κέντρο την αρχή των αξόνων:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Λύνουμε ως προς  $y$ :

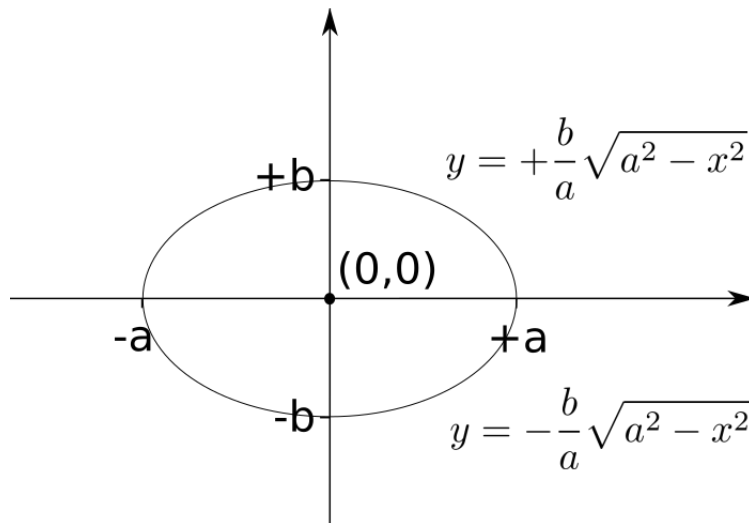
$$y^2 = \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) b^2$$

$$y = \pm b \sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

Άρα:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) = +\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} & \text{Κοίλο μέρος} \\ f_2(x) = -\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} & \text{Κυρτό μέρος} \end{cases}$$

Έχοντας αναλύσει την εξίσωση της έλλειψης με κέντρο την αρχή των αξόνων σε κοίλο και κυρτό μέρος (εικόνα 3.1.1), μπορούμε να προχωρήσουμε στο μετασχηματισμό των συναρτήσεων στον χώρο Legendre.



**Σχήμα 3.1.1:** Ο διαχωρισμός της έλλειψης με κέντρο την αρχή των αξόνων σε κυρτή και κοίλη συνάρτηση



### 3.1.2 Κοίλο μέρος

Για το κοίλο τμήμα της έλλειψης με κέντρο  $C(0, 0)$ , ο μετασχηματισμός της κοίλης συνάρτησης μπορεί να εφαρμοστεί:

$$F_1(p) = \sup_x [f_1(x) - px]$$

όπου  $p = \frac{df_1}{dx}$  είναι η πρώτη παράγωγος της  $f_1(x)$  ως προς  $x$ .

Θέλουμε να βρούμε το  $x$  συναρτήσει του  $p$ , άρα:

$$\begin{aligned} p &= \frac{df_1}{dx} = \frac{d}{dx} \left[ \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \right] = \frac{b}{a} \frac{1}{2\sqrt{a^2 - x^2}} (-2x) = \frac{b}{a} \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \Rightarrow \\ p^2 &= \frac{b^2}{a^2} \frac{x^2}{(a^2 - x^2)} \Rightarrow a^2 p^2 - p^2 x^2 = \frac{b^2}{a^2} x^2 \Rightarrow \frac{b^2}{a^2} x^2 + p^2 x^2 = a^2 p^2 \Rightarrow x^2 \left( \frac{b^2}{a^2} + p^2 \right) = \\ a^2 p^2 &\Rightarrow x^2 = \frac{a^2 p^2}{\frac{b^2}{a^2} + p^2} = \frac{a^2 p^2}{\frac{b^2 + a^2 p^2}{a^2}} = \frac{a^4 p^2}{b^2 + a^2 p^2} \Rightarrow \\ x &= \pm \frac{a^2 |p|}{\sqrt{b^2 + a^2 p^2}} \end{aligned}$$

Αφού η  $f_1$  είναι κοίλη συνάρτηση, γνωρίζουμε ότι:

$$x > 0, \text{ αν } p < 0 \text{ και } x < 0, \text{ αν } p > 0$$

Άρα:

$$x = -\frac{a^2 p}{\sqrt{b^2 + a^2 p^2}}$$

Άρα:

$$\begin{aligned} F_1(p) &= f_1(x) - px = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} - px = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - \frac{a^4 p^2}{b^2 + a^2 p^2}} + p \frac{a^2 p}{\sqrt{b^2 + a^2 p^2}} = \frac{b}{a} \sqrt{\frac{a^2(b^2 + a^2 p^2) - a^4 p^2}{b^2 + a^2 p^2}} + \\ &\frac{a^2 p^2}{\sqrt{b^2 + a^2 p^2}} = \\ &= \frac{b}{a} \sqrt{\frac{a^2 b^2}{b^2 + a^2 p^2}} + \frac{a^2 p^2}{\sqrt{b^2 + a^2 p^2}} = \frac{b}{\sqrt{b^2 + a^2 p^2}} + \frac{a^2 p^2}{\sqrt{b^2 + a^2 p^2}} = \frac{b^2 + a^2 p^2}{\sqrt{b^2 + a^2 p^2}} = \sqrt{b^2 + a^2 p^2} \end{aligned}$$

Άρα ο μετασχηματισμός Legendre του κοίλου μέρους της έλλειψης με κέντρο  $C(0, 0)$ , είναι:

$$F_1(p) = \sqrt{b^2 + a^2 p^2}$$

### 3.1.3 Κυρτό μέρος

Για το κυρτό τμήμα της έλλειψης με κέντρο  $C(0, 0)$ , ο μετασχηματισμός της κυρτής συνάρτησης μπορεί να εφαρμοστεί:

$$F_2(p) = \sup_x [px - f_2(x)]$$

όπου  $p = \frac{df_2}{dx}$  είναι η πρώτη παράγωγος της  $f_2(x)$  ως προς  $x$ .

Θέλουμε να βρούμε το  $x$  συναρτήσει του  $p$ , άρα:

$$p = \frac{df_2}{dx} = \frac{d}{dx} \left[ -\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \right] = -\frac{b}{a} \frac{1}{2\sqrt{a^2 - x^2}} (-2x) = \frac{b}{a} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$p^2 = \frac{b^2}{a^2} \frac{x^2}{(a^2 - x^2)} \Rightarrow a^2 p^2 - p^2 x^2 = \frac{b^2}{a^2} x^2 \Rightarrow \frac{b^2}{a^2} x^2 + p^2 x^2 = a^2 p^2 \Rightarrow x^2 \left( \frac{b^2}{a^2} + p^2 \right) =$$

$$a^2 p^2 \Rightarrow x^2 = \frac{a^2 p^2}{\frac{b^2}{a^2} + p^2} = \frac{a^2 p^2}{\frac{b^2 + a^2 p^2}{a^2}} = \frac{a^4 p^2}{b^2 + a^2 p^2} \Rightarrow$$

$$x = \pm \frac{a^2 |p|}{\sqrt{b^2 + a^2 p^2}}$$

Αφού η  $f_2$  είναι κυρτή συνάρτηση, γνωρίζουμε ότι:

$$x < 0, \text{ αν } p < 0 \text{ και } x > 0, \text{ αν } p > 0$$

Άρα:

$$x = \frac{a^2 p}{\sqrt{b^2 + a^2 p^2}}$$

Άρα:

$$\begin{aligned} F_2(p) &= px - f_2(x) = px + \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} = p \frac{a^2 p}{\sqrt{b^2 + a^2 p^2}} + \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - \frac{a^4 p^2}{b^2 + a^2 p^2}} = \frac{b}{a} \sqrt{\frac{a^2(b^2 + a^2 p^2) - a^4 p^2}{b^2 + a^2 p^2}} + \\ &\frac{a^2 p^2}{\sqrt{b^2 + a^2 p^2}} = \\ &= \frac{b}{a} \sqrt{\frac{a^2 b^2}{b^2 + a^2 p^2}} + \frac{a^2 p^2}{\sqrt{b^2 + a^2 p^2}} = \frac{b}{\sqrt{b^2 + a^2 p^2}} + \frac{a^2 p^2}{\sqrt{b^2 + a^2 p^2}} = \frac{b^2 + a^2 p^2}{\sqrt{b^2 + a^2 p^2}} = \sqrt{b^2 + a^2 p^2} \end{aligned}$$

Άρα ο μετασχηματισμός Legendre του κυρτού μέρους της έλλειψης με κέντρο  $C(0, 0)$ , είναι:

$$F_2(p) = \sqrt{b^2 + a^2 p^2}$$

## 3.2 Ο μετασχηματισμός Legendre σε έλλειψη με κέντρο $C(x_0, y_0)$

### 3.2.1 Εξίσωση της έλλειψης

Η εξίσωση της έλλειψης με κέντρο  $C(x_0, y_0)$ :

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

Λύνουμε ως προς  $y$ :

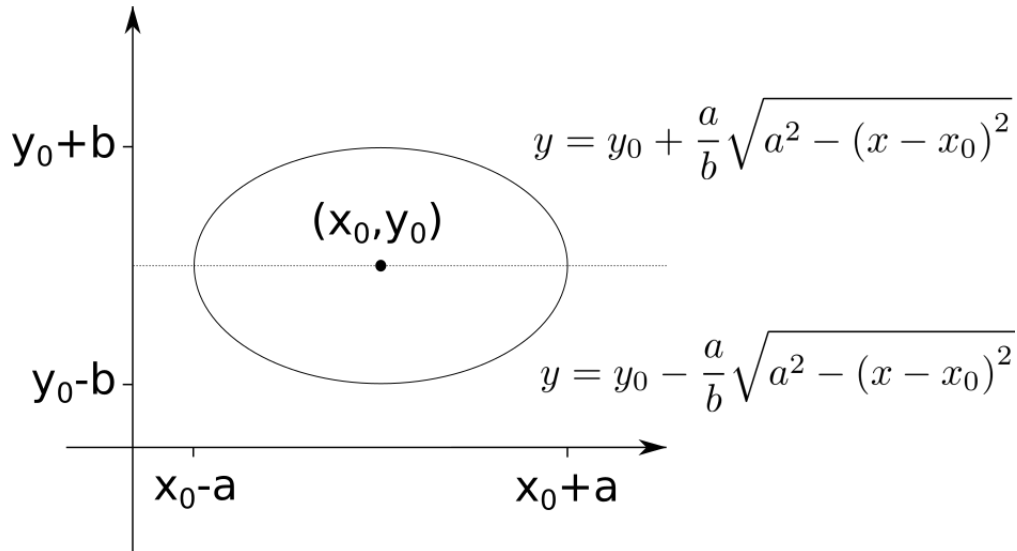
$$(y - y_0)^2 = \left(1 - \frac{(x-x_0)^2}{a^2}\right) b^2$$

$$y = y_0 \pm b \sqrt{\left(1 - \frac{(x-x_0)^2}{a^2}\right)} = y_0 \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - (x - x_0)^2}$$

Άρα:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) = y_0 + \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - (x - x_0)^2} & \text{Κοίλο μέρος} \\ f_2(x) = y_0 - \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - (x - x_0)^2} & \text{Κυρτό μέρος} \end{cases}$$

Έχοντας αναλύσει την εξίσωση της έλλειψης με κέντρο  $C(x_0, y_0)$  σε κοίλο και κυρτό μέρος (εικόνα 3.2.1), μπορούμε να προχωρήσουμε στο μετασχηματισμό των συναρτήσεων στον χώρο Legendre.



**Σχήμα 3.2.1:** Ο διαχωρισμός της έλλειψης με κέντρο  $C(x_0, y_0)$  σε κυρτή και κοίλη συνάρτηση

### 3.2.2 Κοίλο μέρος

Για το κοίλο τμήμα της έλλειψης με κέντρο  $C(x_0, y_0)$ , ο μετασχηματισμός της κοίλης συνάρτησης μπορεί να εφαρμοστεί:

$$F_1(p) = \sup_x [f_1(x) - px]$$

όπου  $p = \frac{df_1}{dx}$  είναι η πρώτη παράγωγος της  $f_1(x)$  ως προς  $x$ .

Θέλουμε να βρούμε το  $x$  συναρτήσει του  $p$ , άρα:

$$p = \frac{df_1}{dx} = \frac{d}{dx} \left[ y_0 + \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - (x - x_0)^2} \right] = \frac{b}{a} \frac{1}{2\sqrt{a^2 - (x - x_0)^2}} (-2(x - x_0)) = \frac{b}{a} \frac{-(x - x_0)}{\sqrt{a^2 - (x - x_0)^2}} \Rightarrow$$

$$p^2 = \frac{b^2}{a^2} \frac{(x - x_0)^2}{(a^2 - (x - x_0)^2)} \Rightarrow a^2 p^2 - p^2 (x - x_0)^2 = \frac{b^2}{a^2} (x - x_0)^2 \Rightarrow \frac{b^2}{a^2} (x - x_0)^2 + p^2 (x - x_0)^2 =$$

$$a^2 p^2 \Rightarrow (x - x_0)^2 \left( \frac{b^2}{a^2} + p^2 \right) = a^2 p^2 \Rightarrow (x - x_0)^2 = \frac{a^2 p^2}{\frac{b^2}{a^2} + p^2} = \frac{a^4 p^2}{\frac{b^2 + a^2 p^2}{a^2}} = \frac{a^4 p^2}{b^2 + a^2 p^2} \Rightarrow$$

$$x = x_0 \pm \frac{a^2 |p|}{\sqrt{b^2 + a^2 p^2}}$$

Αφού η  $f_1$  είναι κοίλη συνάρτηση, γνωρίζουμε ότι:

$$x > x_0, \text{ αν } p < 0 \text{ και } x < x_0, \text{ αν } p > 0$$

Άρα:

$$x = x_0 - \frac{a^2 p}{\sqrt{b^2 + a^2 p^2}}$$

Άρα:

$$F_1(p) = f_1(x) - px = y_0 + \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - (x - x_0)^2} - px = y_0 + \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - \frac{a^4 p^2}{b^2 + a^2 p^2}} -$$

$$p \left( x_0 - \frac{a^2 p}{\sqrt{b^2 + a^2 p^2}} \right) = y_0 + \frac{b}{a} \sqrt{\frac{a^2(b^2 + a^2 p^2) - a^4 p^2}{b^2 + a^2 p^2}} - px_0 + \frac{a^2 p^2}{\sqrt{b^2 + a^2 p^2}} =$$

$$= y_0 - px_0 + \frac{b}{a} \sqrt{\frac{a^2 b^2}{b^2 + a^2 p^2}} + \frac{a^2 p^2}{\sqrt{b^2 + a^2 p^2}} = y_0 - px_0 + \frac{b}{\sqrt{b^2 + a^2 p^2}} + \frac{a^2 p^2}{\sqrt{b^2 + a^2 p^2}} = y_0 - px_0 +$$

$$\frac{b^2 + a^2 p^2}{\sqrt{b^2 + a^2 p^2}} = y_0 - px_0 + \sqrt{b^2 + a^2 p^2}$$

Άρα ο μετασχηματισμός Legendre του κοίλου μέρους της έλλειψης με κέντρο  $C(x_0, y_0)$ , είναι:

$$F_1(p) = y_0 - px_0 + \sqrt{b^2 + a^2 p^2}$$

### 3.2.3 Κυρτό μέρος

Για το κυρτό τμήμα της έλλειψης με κέντρο  $C(x_0, y_0)$ , ο μετασχηματισμός της κυρτής συνάρτησης μπορεί να εφαρμοστεί:

$$F_2(p) = \sup_x [px - f_2(x)]$$

όπου  $p = \frac{df_2}{dx}$  είναι η πρώτη παράγωγος της  $f_2(x)$  ως προς  $x$ .

Θέλουμε να βρούμε το  $x$  συναρτήσει του  $p$ , άρα:

$$p = \frac{df_2}{dx} = \frac{d}{dx} \left[ y_0 - \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - (x - x_0)^2} \right] = -\frac{b}{a} \frac{1}{2\sqrt{a^2 - (x - x_0)^2}} (-2(x - x_0)) = \frac{b}{a} \frac{(x - x_0)}{\sqrt{a^2 - (x - x_0)^2}} \Rightarrow$$

$$p^2 = \frac{b^2}{a^2} \frac{(x - x_0)^2}{(a^2 - (x - x_0)^2)} \Rightarrow a^2 p^2 - p^2 (x - x_0)^2 = \frac{b^2}{a^2} (x - x_0)^2 \Rightarrow \frac{b^2}{a^2} (x - x_0)^2 + p^2 (x - x_0)^2 =$$

$$a^2 p^2 \Rightarrow (x - x_0)^2 \left( \frac{b^2}{a^2} + p^2 \right) = a^2 p^2 \Rightarrow (x - x_0)^2 = \frac{a^2 p^2}{\frac{b^2}{a^2} + p^2} = \frac{a^2 p^2}{\frac{b^2 + a^2 p^2}{a^2}} = \frac{a^4 p^2}{b^2 + a^2 p^2} \Rightarrow$$

$$x = x_0 \pm \frac{a^2 |p|}{\sqrt{b^2 + a^2 p^2}}$$

Αφού η  $f_2$  είναι κυρτή συνάρτηση, γνωρίζουμε ότι:

$$x < x_0, \text{ αν } p < 0 \text{ και } x > x_0, \text{ αν } p > 0$$

Άρα:

$$x = x_0 + \frac{a^2 p}{\sqrt{b^2 + a^2 p^2}}$$

Άρα:

$$F_2(p) = px - f_2(x) = px - y_0 + \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - (x - x_0)^2} = p \left( x_0 + \frac{a^2 p}{\sqrt{b^2 + a^2 p^2}} \right) - y_0 +$$

$$\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - \frac{a^4 p^2}{b^2 + a^2 p^2}} = px_0 + \frac{a^2 p^2}{\sqrt{b^2 + a^2 p^2}} - y_0 + \frac{b}{a} \sqrt{\frac{a^2(b^2 + a^2 p^2) - a^4 p^2}{b^2 + a^2 p^2}} =$$

$$= px_0 - y_0 + \frac{b}{a} \sqrt{\frac{a^2 b^2}{b^2 + a^2 p^2}} + \frac{a^2 p^2}{\sqrt{b^2 + a^2 p^2}} = px_0 - y_0 + \frac{b}{\sqrt{b^2 + a^2 p^2}} + \frac{a^2 p^2}{\sqrt{b^2 + a^2 p^2}} = px_0 - y_0 +$$

$$\frac{b^2 + a^2 p^2}{\sqrt{b^2 + a^2 p^2}} = px_0 - y_0 + \sqrt{b^2 + a^2 p^2}$$

Άρα ο μετασχηματισμός Legendre του κυρτού μέρους της έλλειψης με κέντρο  $C(x_0, y_0)$ , είναι:

$$F_2(p) = px_0 - y_0 + \sqrt{b^2 + a^2 p^2}$$

### 3.3 Από τον μετασχηματισμό στην ευθεία

Βρήκαμε ότι ο μετασχηματισμός Legendre σε έλλειψη με κέντρο  $C(x_0, y_0)$  και ακτίνες  $a, b$  είναι:

$$F(p) = \begin{cases} F_1(p) = y_0 - px_0 + \sqrt{b^2 + a^2 p^2} & \text{Κοίλο μέρος} \\ F_2(p) = px_0 - y_0 + \sqrt{b^2 + a^2 p^2} & \text{Κυρτό μέρος} \end{cases}$$

Παρακάτω θα μετατρέψουμε τα αποτελέσματα του μετασχηματισμού στην εξίσωση της ευθείας. Οι ευθείες αυτές θα είναι εφαπτόμενες στις ελλείψεις μας.

### 3.3.1 Στο κοίλο μέρος

Στο κοίλο μέρος έχουμε:

- κλίση = slope =  $p$
- τομή με άξονα  $y$  = intercept =  $F_1(p)$

Άρα:

$$F_1(p) = y_0 - px_0 + \sqrt{b^2 + a^2p^2} \Rightarrow$$

$$\text{intercept} = y_0 - px_0 + \sqrt{b^2 + a^2p^2}$$

### 3.3.2 Στο κυρτό μέρος

Στο κυρτό μέρος έχουμε:

- κλίση = slope =  $p$
- τομή με άξονα  $y$  = intercept =  $-F_2(p)$

Άρα:

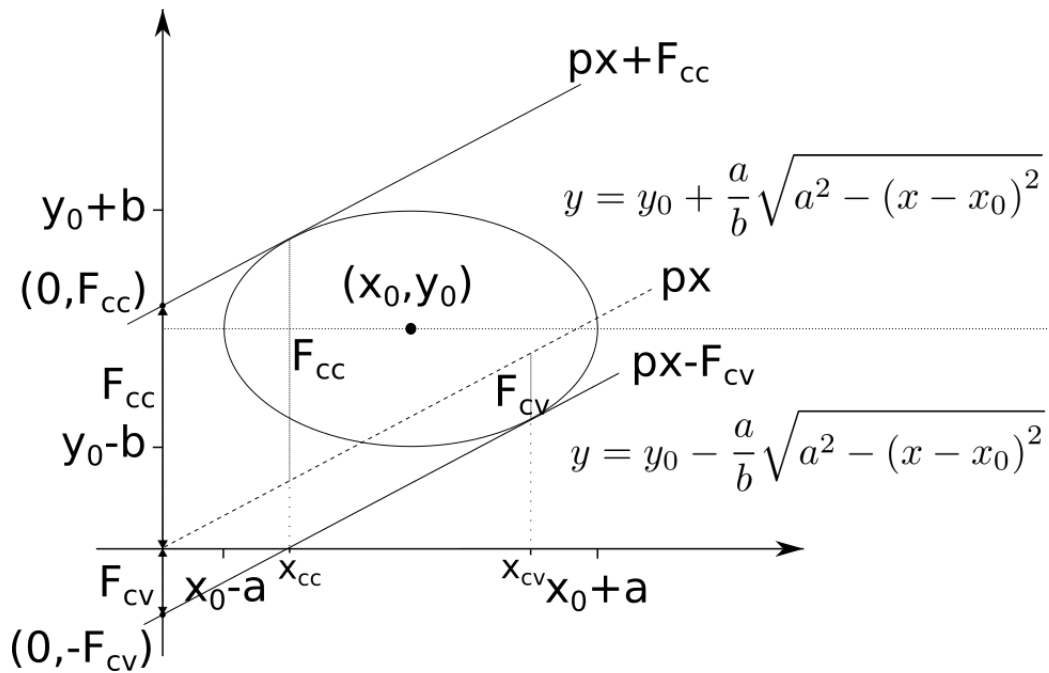
$$-F_2(p) = - \left( px_0 - y_0 + \sqrt{b^2 + a^2 \left( \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right)^2} \right) \Rightarrow$$

$$\text{intercept} = y_0 - px_0 - \sqrt{b^2 + a^2 \left( \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right)^2}$$

$$F(p) = \begin{cases} y_0 - px_0 + \sqrt{b^2 + a^2p^2} & , \text{για το κοίλο μέρος} \\ y_0 - px_0 - \sqrt{b^2 + a^2p^2} & , \text{για το κυρτό μέρος} \end{cases} \Rightarrow \quad (3.3.1)$$

$$y = \text{slope} \cdot x + \text{intercept} = \begin{cases} p(x - x_0) + y_0 + \sqrt{b^2 + a^2p^2} & , \text{για το κοίλο μέρος} \\ p(x + x_0) - y_0 + \sqrt{b^2 + a^2p^2} & , \text{για το κυρτό μέρος} \end{cases} \quad (3.3.2)$$

Η γραφική αναπαράσταση των παραπάνω βρίσκεται στο σχήμα 3.3.1.



**Σχήμα 3.3.I:** Ο διαχωρισμός της έλλειψης σε κυρτή και κοίλη συνάρτηση και οι μετασχηματισμοί Legendre των συναρτήσεων

### 3.4 Κανονική μορφή

Παρόλο που μια εφαπτομένη της έλλειψης μπορεί να οριστεί από το ζεύγος  $(p, F(p))$ , εξαιτίας του μεγάλου εύρους τιμών που μπορεί να λάβει το  $p$ , αρμόζει καλύτερα να εκφράσουμε την γραμμική εξίσωση με την κανονική της μορφή. Στην κανονική μορφή, όπου η κλίση είναι  $\text{slope} = p = -\cos \theta / \sin \theta$  και η τομή με τον άξονα  $y$  είναι  $\text{intercept} = r / \sin \theta$ , όπου ο άξονας  $\theta$  περιορίζεται στο διάστημα  $\theta \in (0, \pi)$ . Με αυτόν τον τρόπο, μειώνουμε το υπολογιστικό κόστος και κάνουμε τον αλγόριθμό μας πιο αποδοτικό.

#### 3.4.1 Η εξίσωση της ευθείας στη κανονική μορφή

Όπως ειπώθηκε και προηγουμένως, η εξίσωση της ευθείας στην κανονική μορφή είναι:

$$y = -\frac{\cos \theta}{\sin \theta} x + \frac{r}{\sin \theta} \Rightarrow \tag{3.4.1}$$

$$r = x \cos \theta + y \sin \theta \quad (3.4.2)$$

όπου

$$\text{slope} = p = -\frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

$$\text{intercept} = \frac{r}{\sin \theta}$$

Θα εφαρμόσουμε τα παραπάνω στις εξισώσεις 3.3.2:

$$\text{intercept} = \begin{cases} y_0 - px_0 + \sqrt{b^2 + a^2 p^2} & \text{Κοίλο μέρος} \\ y_0 - px_0 - \sqrt{b^2 + a^2 p^2} & \text{Κυρτό μέρος} \end{cases}$$

### 3.4.2 Στο κοίλο μέρος

Στο κοίλο μέρος της έλλειψης, εφαρμόζουμε τις προαναφερθείσες εξισώσεις:

$$\text{intercept} = y_0 - px_0 + \sqrt{b^2 + a^2 p^2} \Rightarrow \frac{r}{\sin \theta} = y_0 + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} x_0 + \sqrt{b^2 + a^2 \left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta}\right)^2} \Rightarrow r =$$

$$y_0 \sin \theta + x_0 \cos \theta + \sqrt{b^2 + a^2 \left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta}\right)^2} \sin \theta$$

Άρα

$$r = x_0 \cos \theta + y_0 \sin \theta + \sqrt{b^2 \sin^2 \theta + a^2 \cos^2 \theta}$$

Αυτή η εξίσωση αντιπροσωπεύει την ημιτονοειδή αναπαράσταση στο χώρο Legendre, όπου κάθε ζεύγος  $(\theta, r(\theta))$  αντιπροσωπεύεται από μια ευθεία στον χώρο  $(x, y)$ .

### 3.4.3 Στο κυρτό μέρος

Στο κυρτό μέρος της έλλειψης, εφαρμόζουμε τις προαναφερθείσες εξισώσεις:

$$\text{intercept} = y_0 - px_0 - \sqrt{b^2 + a^2 p^2} \Rightarrow -\frac{r}{\sin \theta} = -\frac{\cos \theta}{\sin \theta} x_0 - y_0 + \sqrt{b^2 + a^2 \left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta}\right)^2} \Rightarrow$$

$$r = x_0 \cos \theta + y_0 \sin \theta - \sqrt{b^2 + a^2 \left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta}\right)^2} \sin \theta$$

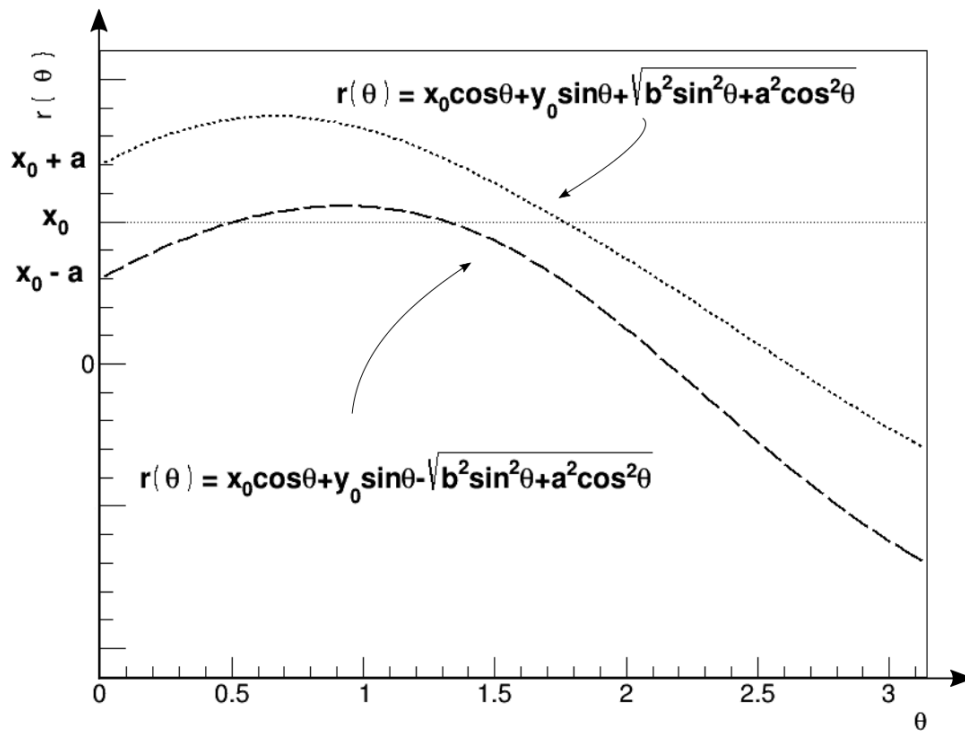
Άρα

$$r = x_0 \cos \theta + y_0 \sin \theta - \sqrt{b^2 \sin^2 \theta + a^2 \cos^2 \theta}$$



Ομοίως με πριν, αυτή η εξίσωση αντιπροσωπεύει την ημιτονοειδή αναπαράσταση στο χώρο Legendre, όπου κάθε ζεύγος  $(\theta, r(\theta))$  αντιπροσωπεύεται από μια ευθεία στον χώρο  $(x, y)$ .

Ο μετασχηματισμός Legendre της έλλειψης στην κανονική μορφή αναπαριστάται γραφικά στην εικόνα 3.4.I



**Σχήμα 3.4.I:** Η αναπαράσταση του μετασχηματισμού Legendre της έλλειψης στον χώρο  $(\theta, r(\theta))$

## 3.5 Αποτελέσματα

### 3.5.1 Αποτελέσματα των βημάτων

Η εξίσωση μιας έλλειψης με κέντρο  $C(x_0, y_0)$  και ακτίνες  $a, b$  ως προς  $y$ :

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) = y_0 + \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - (x - x_0)^2} & \text{Κοίλο μέρος} \\ f_2(x) = y_0 - \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - (x - x_0)^2} & \text{Κυρτό μέρος} \end{cases}$$

Ο μετασχηματισμός Legendre της έλλειψης:

$$F(p) = \begin{cases} F_1(p) = y_0 - px_0 + \sqrt{b^2 + a^2p^2} & \text{Κοίλο μέρος} \\ F_2(p) = px_0 - y_0 + \sqrt{b^2 + a^2p^2} & \text{Κυρτό μέρος} \end{cases}$$

Ο μετασχηματισμός με χαρακτηριστικά ευθείας:

$$\text{intercept} = \begin{cases} y_0 - \text{slope} \times x_0 + \sqrt{b^2 + a^2\text{slope}^2} & \text{Κοίλο μέρος} \\ y_0 - \text{slope} \times x_0 - \sqrt{b^2 + a^2\text{slope}^2} & \text{Κυρτό μέρος} \end{cases}$$

Σε κανονική μορφή:

$$r(\theta) = \begin{cases} x_0 \cos \theta + y_0 \sin \theta + \sqrt{b^2 \sin^2 \theta + a^2 \cos^2 \theta} & \text{Κοίλο μέρος} \\ x_0 \cos \theta + y_0 \sin \theta - \sqrt{b^2 \sin^2 \theta + a^2 \cos^2 \theta} & \text{Κυρτό μέρος} \end{cases} \quad (3.5.1)$$

Παρατηρούμε ότι αν θέσουμε  $C(x_0 = 0, y_0 = 0)$  τότε παίρνουμε τον μετασχηματισμό της έλλειψης με κέντρο την αρχή των αξόνων.

### 3.5.2 Επιβεβαίωση με του κύκλου

Αν θέσουμε  $a = b = R$  τότε τα αποτελέσματα ταυτίζονται με του κύκλου. Δηλαδή:

$$r(\theta) = \begin{cases} x_0 \cos \theta + y_0 \sin \theta + R & \text{Κοίλο μέρος} \\ x_0 \cos \theta + y_0 \sin \theta - R & \text{Κυρτό μέρος} \end{cases}$$

## 3.6 Σφάλμα του $r(\theta)$

### 3.6.1 Σφάλμα του μετασχηματισμού Legendre για τον κύκλο

Ορίζουμε ένα  $\delta\theta$  σφάλμα για την ανεξάρτητη μεταβλητή  $\theta$ ,  $\delta R$  για την ακτίνα  $R$  του κύκλου και  $\delta r$  για την εξαρτημένη μεταβλητή  $r$  την οποία θα υπολογίσουμε μέσω του τύπου

$$\delta r = \sqrt{\left(\frac{\partial r}{\partial R} \delta R\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \theta} \delta \theta\right)^2}$$

Οπότε έχουμε

$$\frac{\partial r}{\partial R} = \pm 1$$

και

$$\frac{\partial r}{\partial \theta} = -x_0 \sin \theta + y_0 \cos \theta$$

άρα

$$\begin{aligned} \delta r &= \sqrt{(\pm 1 \delta R)^2 + (-x_0 \sin \theta + y_0 \cos \theta)^2 \delta \theta^2} \Rightarrow \\ \delta r &= \sqrt{\delta R^2 + (x_0 \sin \theta - y_0 \cos \theta)^2 \delta \theta^2} \end{aligned}$$

### 3.6.2 Σφάλμα του μετασχηματισμού Legendre για την έλλειψη

Ορίζουμε ένα  $\delta \theta$  σφάλμα του  $\theta$ ,  $\delta a$  και  $\delta b$  για τις ακτίνες της έλλειψης και  $\delta r$  του  $r$  το οποίο θα υπολογίσουμε μέσω του τύπου

$$\delta r = \sqrt{\left(\frac{\partial r}{\partial a} \delta a\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial b} \delta b\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \theta} \delta \theta\right)^2}$$

για την εξίσωση  $r$ . Οπότε έχουμε

$$\frac{\partial r}{\partial a} = \pm \frac{1}{2\sqrt{b^2 \sin^2 \theta + a^2 \cos^2 \theta}} \frac{\partial}{\partial a} (a^2 \cos^2 \theta) = \pm \frac{1}{\sqrt{b^2 \sin^2 \theta + a^2 \cos^2 \theta}} a \cos^2 \theta$$

$$\frac{\partial r}{\partial b} = \pm \frac{1}{2\sqrt{b^2 \sin^2 \theta + a^2 \cos^2 \theta}} \frac{\partial}{\partial b} (b^2 \sin^2 \theta) = \pm \frac{1}{\sqrt{b^2 \sin^2 \theta + a^2 \cos^2 \theta}} b \sin^2 \theta$$

και

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial \theta} &= -x_0 \sin \theta + y_0 \cos \theta \pm \frac{1}{2\sqrt{b^2 \sin^2 \theta + a^2 \cos^2 \theta}} \frac{\partial}{\partial \theta} (b^2 \sin^2 \theta + a^2 \cos^2 \theta) \\ &= -x_0 \sin \theta + y_0 \cos \theta \pm \frac{1}{2\sqrt{b^2 \sin^2 \theta + a^2 \cos^2 \theta}} (2b^2 \sin \theta \cos \theta - 2a^2 \cos \theta \sin \theta) \\ &= -x_0 \sin \theta + y_0 \cos \theta \pm \frac{(b^2 - a^2) \sin \theta \cos \theta}{\sqrt{b^2 \sin^2 \theta + a^2 \cos^2 \theta}} \end{aligned}$$

Όμως,

$$\left(\frac{\partial r}{\partial a} \delta a\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial b} \delta b\right)^2 = \left(\pm \frac{a \cos^2 \theta}{\sqrt{b^2 \sin^2 \theta + a^2 \cos^2 \theta}} \delta a\right)^2 + \left(\pm \frac{b \sin^2 \theta}{\sqrt{b^2 \sin^2 \theta + a^2 \cos^2 \theta}} \delta b\right)^2 = \frac{(a \cos^2 \theta \delta a)^2 + (b \sin^2 \theta \delta b)^2}{b^2 \sin^2 \theta + a^2 \cos^2 \theta}$$

Άρα,

$$\delta r = \sqrt{\frac{(a \cos^2 \theta \delta a)^2 + (b \sin^2 \theta \delta b)^2}{b^2 \sin^2 \theta + a^2 \cos^2 \theta} + \left( -x_0 \sin \theta + y_0 \cos \theta \pm \frac{(b^2 - a^2) \sin \theta \cos \theta}{\sqrt{b^2 \sin^2 \theta + a^2 \cos^2 \theta}} \right)^2} \delta \theta^2$$

Αν  $\delta a = \delta b = \delta R$ , τότε

$$\delta r = \sqrt{\frac{(a \cos^2 \theta)^2 + (b \sin^2 \theta)^2}{b^2 \sin^2 \theta + a^2 \cos^2 \theta} \delta R^2 + \left( -x_0 \sin \theta + y_0 \cos \theta \pm \frac{(b^2 - a^2) \sin \theta \cos \theta}{\sqrt{b^2 \sin^2 \theta + a^2 \cos^2 \theta}} \right)^2} \delta \theta^2$$

Αφού  $b \leq a$ , τότε και  $b^2 \leq a^2$  άρα και  $b \sin^2 \leq a \sin^2$  και  $b^2 \sin^2 \leq a^2 \sin^2$ . Άρα

$$\delta r \leq \sqrt{(\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) \delta R^2 + (-x_0 \sin \theta + y_0 \cos \theta)^2 \delta \theta^2}$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση σφάλματος είναι παρόμοια με αυτή του κύκλου. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι το  $\delta r$  του κύκλου και το  $\delta r$  της έλλειψης βγαίνουν από διαφορετικούς τύπους και αν θέλουμε να θέσουμε  $a = b = R$ , τότε θα πρέπει να το θέσουμε και στην εξίσωση του  $r(\theta)$  της έλλειψης πριν υπολογίσουμε τον τύπο του σφάλματος.

Παρ'όλα αυτά ισχύει ότι

$$\cos^4 \theta + \sin^4 \theta \leq 1$$

άρα έχουμε:

$$\begin{aligned} \delta r &\leq \sqrt{\delta R^2 + (-x_0 \sin \theta + y_0 \cos \theta)^2 \delta \theta^2} \Rightarrow \\ \delta r &\leq \sqrt{\delta R^2 + (-x_0 \sin \theta + y_0 \cos \theta)^2 \delta \theta^2} \end{aligned}$$

Άρα το σφάλμα της έλλειψης είναι μικρότερο ή ίσο του σφάλματος του κύκλου.

# 4

## Γεννήτρια ευθειών-ελλείψεων

Σε αυτό το κεφάλαιο, είναι χρήσιμο να αναφερθούμε στην μέθοδο Monte Carlo που θα υλοποιήσουμε. Ο λόγος που το κάνουμε αυτό είναι γιατί θεωρούμε ότι θα είναι ευκολότερο να κάνουμε κατανοητή τη μέθοδο που θα προτείνουμε εξηγώντας πρώτα το πρόβλημα που επινοούμε.

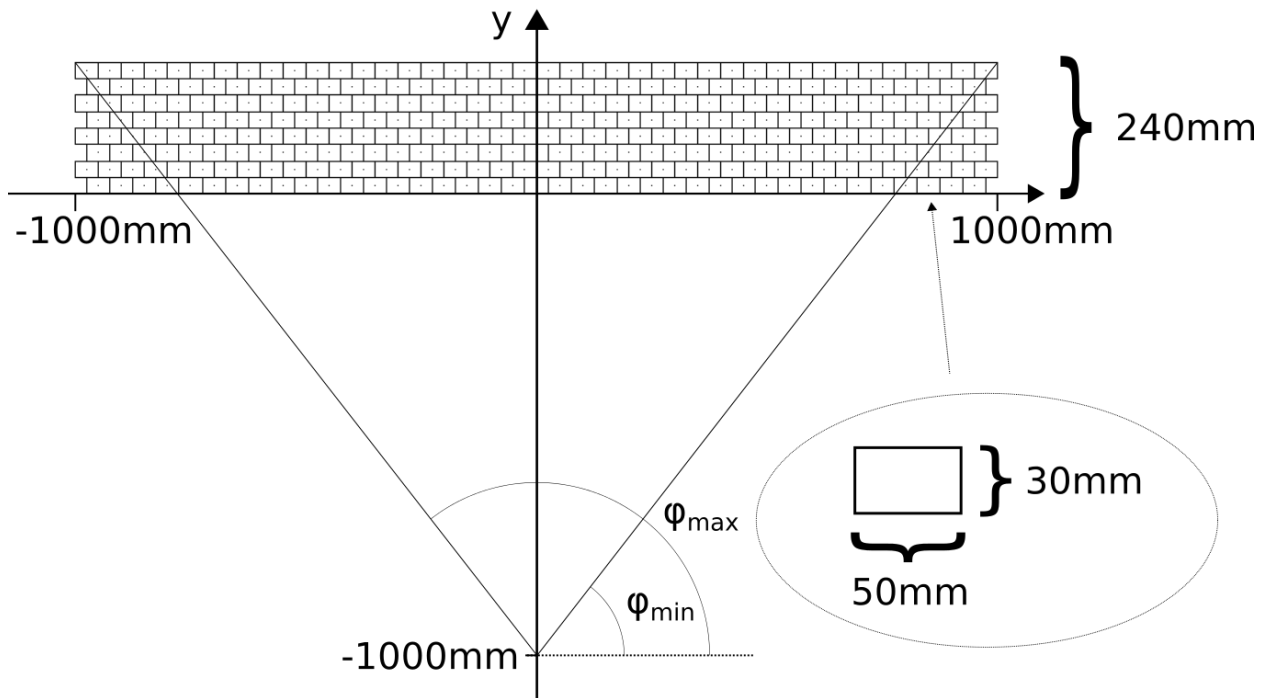
Η μέθοδος Monte Carlo στηρίζεται στη χρήση τυχαίων αριθμών για την κατασκευή δεδομένων. Τα δεδομένα αυτά θα χρησιμοποιηθούν για την αξιολόγηση της μεθόδου που προτείνουμε.

Για να αξιολογήσουμε λοιπόν τη μέθοδο που κατασκευάσαμε, επινοούμε έναν υποθετικό ανιχνευτή (εικόνα 4.0.I). Ο ανιχνευτής αποτελείται από 8 επίπεδα θαλαμίσκων. Η διατομή των θαλαμίσκων έχει πλάτος 50mm και ύψος 30mm.

Έπειτα, δημιουργούμε μια μέθοδο Monte Carlo που παράγει τυχαίες ευθείες οι οποίες περνάνε μέσα από τον ανιχνευτή. Σε κάθε θαλαμίσκο μέσα από τον οποίο περνάει μια ευθεία, δημιουργείται ένα σήμα-έλλειψη. Η έλλειψη πρέπει να ικανοποιεί τις εξής συνθήκες:

- Να είναι συμμετρική
- Να είναι ομόκεντρη με τον θαλαμίσκο
- Η ευθεία να είναι εφαπτομένη της

Τα υπόλοιπα χαρακτηριστικά, δηλαδή η εκκεντρότητα και οι διαστάσεις  $a$  και  $b$ , είναι τυχαία, αρκεί να ικανοποιούνται οι προαναφερθείσες συνθήκες.



**Σχήμα 4.0.1:** Προδιαγραφές του ανιχνευτή και των θαλάμων.

Αφού δημιουργήσουμε τις ελλείψεις, μπορούμε να προσομοιώσουμε τον θόρυβο. Αυτό το επιτυγχάνουμε εφαρμόζοντας ένα Γκαουσιανό σφάλμα στις διαστάσεις  $a$  και  $b$ . Επίσης, σαν θόρυβο ηλεκτρονικών μπορούμε να δημιουργήσουμε επιπλέον τυχαίες συμμετρικές ελλείψεις. Για τις ελλείψεις αυτές, επιλέγουμε τυχαία κενούς θαλαμίσκους και τις τοποθετούμε έτσι ώστε τα σχήματα να είναι ομόκεντρα. Η οποιαδήποτε σχέση μεταξύ έλλειψης-θορύβου με κάποια από τις ευθείες είναι καθαρά συμπτωματική.

## 4.1 Γεννήτρια ευθείας

Αρχικά, δημιουργούμε την ευθεία μας. Αποφασίζουμε τα χαρακτηριστικά της ξεκινώντας από την τομή της με τον άξονα  $y$  και συνεχίζουμε με την κλίση της.

### 4.1.1 Τομή της ευθείας με τον άξονα $y$

Κατ'αρχάς, θέλουμε η ευθεία μας να “ξεκινάει” ένα μέτρο (1m) μακριά από τον ανιχνευτή μας. Όσον αφορά την προσέγγισή μας, δεν μας ενδιαφέρει ένα ευθύγραμμο τμήμα, αλλά μια ευθεία χωρίς να μας απασχολεί το μήκος της. Αυτό, μαθηματικά, σημαίνει ότι η ευθεία μας είναι άπειρη στο μήκος και ότι θα περνάει από το σημείο  $(0, -1000\text{mm})$  δηλαδή τέμνει τον άξονα  $y$  στο  $-1000\text{mm}$ .

### 4.1.2 Κλίση της ευθείας

Τώρα μας μένει να θέσουμε την κλίση της ευθείας. Η κλίση θα είναι τυχαία, αλλά θα πρέπει να ορίσουμε το όριο των τιμών που θα μπορεί να πάρει. Αυτό θα επιτευχθεί παίρνοντας τα όρια του ανιχνευτή κατά τον άξονα  $y$ , δηλαδή τη βάση του ανιχνευτή  $y_{\text{low}} = 0\text{mm}$  και το ύψος  $y_{\text{high}} = 240\text{mm}$ .

Εφόσον η ευθεία μας τέμνει τον άξονα  $y$  στο  $-1\text{m}$ , η μικρότερη κλίση της ευθείας θα είναι:

$$\text{slope}_{\text{min}} = \frac{y_{\text{high}} - y_{\text{low}} - \text{intercept}}{x_{\text{high}}} = \frac{240 - (-1000)}{1000} = \frac{1240}{1000} = 1.240\text{rad}$$

σε μοίρες:

$$\phi_{\text{min}} = \arctan(\text{slope}_{\text{min}}) \approx 51$$

ενώ λόγω συμμετρίας του ανιχνευτή ως προς τον άξονα  $x$ , η μεγαλύτερη γωνία:

$$\phi_{\text{max}} = \pi - \text{slope}_{\text{min}} \approx 129$$

με κλίση:

$$\text{slope}_{\text{max}} = \tan(\phi_{\text{max}}) = -1.240\text{rad}$$

το οποίο ταυτίζεται με το αποτέλεσμα της εξίσωσης:

$$\text{slope}_{\text{max}} = \frac{y_{\text{high}} - y_{\text{low}} - \text{intercept}}{x_{\text{low}}} = \frac{240 - (-1000)}{-1000} = -\frac{1240}{1000} = -1.240\text{rad}$$

την οποία θα χρησιμοποιούσαμε στην περίπτωση που τα  $x_{\text{low}}$  και  $x_{\text{high}}$  δεν ισαπείχαν ως προς τον άξονα  $y$ .

Άρα:

$$x\hat{O}\varepsilon \in (\phi_{\text{max}}, \phi_{\text{min}}) = (129, 51)$$

## 4.2 Γεννήτρια ελλείψεων

Αφού δημιουργήσουμε μια ευθεία, βάσει της ευθείας και των κέντρων των θαλαμίσκων μέσω των οποίων περνάει, δημιουργούμε ομόκεντρες ελλείψεις. Παρ'όλα αυτά, οι ελλείψεις δεν είναι ντετερμινιστικές όπως οι κύκλοι.

Για τους κύκλους, θα δείξουμε ότι αρκεί να γνωρίζουμε την εφαπτομένη και το κέντρο του κύκλου για να καθορίσουμε που εφάπτονται ακόμα και αν δεν γνωρίζουμε την ακτίνα του κύκλου. Αντιθέτως, για τις ελλείψεις θα πρέπει πρώτα να καθορίσουμε το διάστημα μέσα στο οποίο θα βρίσκεται το εφαπτόμενο σημείο και μετά να διαλέξουμε ένα τυχαίο σημείο βάσει του οποίου θα υπολογίσουμε τις διαστάσεις  $a$  και  $b$  της έλλειψης.

Ο λόγος που ασχολούμαστε με τον κύκλο είναι για να περιορίσουμε το διάστημα μέσα στο οποίο η ευθεία μας μπορεί να εφάπτεται με μια έλλειψη. Θα φράξουμε το διάστημα αυτό με μια σειρά από κρίσιμα σημεία. Μέσα στα σημεία αυτά, αν γίνεται, θα βρίσκεται και το σημείο στο οποίο η ευθεία μας θα ήταν εφαπτόμενη σε έναν κύκλο, ομόκεντρο του θαλαμίσκου.

### 4.2.1 Εντοπισμός του $T_c(x_{tc}, y_{tc})$ για κύκλο με $C(x_0, y_0)$ και ακτίνα $R$

Εντοπισμός του σημείου  $T_c(x_{tc}, y_{tc})$  με δεδομένη ευθεία  $\varepsilon$  και κύκλο με κέντρο  $C(x_0, y_0)$  και ακτίνα  $R$ :

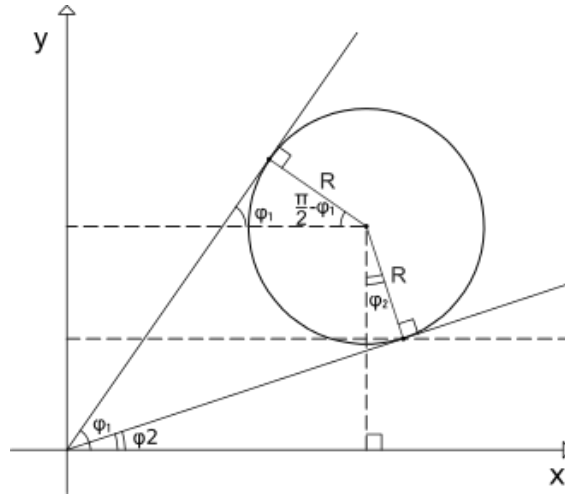
$$\varepsilon: y = \text{slope} \cdot x + \text{intercept}$$

Από το σχήμα 4.2.1 βλέπουμε ότι το σημείο  $T_c(x_{tc}, y_{tc})$  βρίσκεται αν λύσουμε τις:

$$x_c = x_0 \pm R \cos \phi$$

$$y_c = y_0 \pm R \sin \phi$$





Σχήμα 4.2.1: Εντοπισμός του εφαπτόμενου σημείου ενός κύκλου και μιας ευθείας

Γνωρίζουμε ότι:

$$\text{slope} = \tan \phi = \frac{\sin \phi}{\cos \phi}$$

Αν λύσουμε ως προς  $\cos \phi$ :

$$\text{slope}^2 = \frac{\sin^2 \phi}{\cos^2 \phi} = \frac{\sin^2 \phi - 1 + 1}{\cos^2 \phi} = \frac{\sin^2 \phi - \sin^2 \phi - \cos^2 \phi + 1}{\cos^2 \phi} = \frac{1 - \cos^2 \phi}{\cos^2 \phi} = \frac{1}{\cos^2 \phi} - 1 \Rightarrow \cos^2 \phi = \frac{1}{\text{slope}^2 + 1} \Rightarrow \cos \phi = \frac{1}{\sqrt{\text{slope}^2 + 1}}$$

Αν λύσουμε ως προς  $\sin \phi$ :

$$\text{slope}^2 = \frac{\sin^2 \phi}{\cos^2 \phi} = \frac{\sin^2 \phi}{\cos^2 \phi - 1 + 1} = \frac{\sin^2 \phi}{\cos^2 \phi - \sin^2 \phi - \cos^2 \phi + 1} = \frac{\sin^2 \phi}{1 - \sin^2 \phi} \Rightarrow \sin^2 \phi = \frac{\text{slope}^2}{\text{slope}^2 + 1} \Rightarrow \sin \phi = \frac{\text{slope}}{\sqrt{\text{slope}^2 + 1}}$$

Άρα

$$x_c = x_0 \pm R \frac{1}{\sqrt{\text{slope}^2 + 1}}$$

και

$$y_c = y_0 \pm R \frac{\text{slope}}{\sqrt{\text{slope}^2 + 1}}$$

#### 4.2.2 Εντοπισμός του $T_c(x_{tc}, y_{tc})$ για κύκλο με $C(x_0, y_0)$ και άγνωστη ακτίνα

Εντοπισμός του σημείου  $T_c(x_{tc}, y_{tc})$  με δεδομένη ευθεία  $\varepsilon_1$  και κύκλο με κέντρο  $C(x_0, y_0)$  αλλά άγνωστη ακτίνα:

$$\varepsilon_1: y = \text{slope} \cdot x + \text{intercept}_1$$

Έστω ευθεία  $\varepsilon_2$  τέτοια ώστε να είναι κάθετη στην  $\varepsilon_1$  και να περνάει από το σημείο  $C(x_0, y_0)$ :

$$\varepsilon_2: y = -\frac{1}{\text{slope}} \cdot x + \text{intercept}_2$$

Το τμήμα της ευθείας  $\varepsilon_2$  από το κέντρο του κύκλου  $C(x_0, y_0)$  μέχρι το σημείο τομής της με την  $\varepsilon_1$ , αποτελεί την ακτίνα  $r$  του κύκλου.

Αφού περνάει από το σημείο  $C(x_0, y_0)$ , έχουμε:

$$y_0 = -\frac{1}{\text{slope}} \cdot x_0 + \text{intercept}_2 \Rightarrow \text{intercept}_2 = y_0 + \frac{1}{\text{slope}} \cdot x_0$$

Άρα:

$$\varepsilon_2: y = -\frac{1}{\text{slope}} \cdot x + y_0 + \frac{1}{\text{slope}} \cdot x_0$$

Στο σημείο  $T_c(x_{tc}, y_{tc})$  οι 2 ευθείες θα πρέπει να τέμνονται. Οπότε έχουμε:

$$\varepsilon_1: y_{tc} = \text{slope} \cdot x_{tc} + \text{intercept}_1$$

$$\varepsilon_2: y_{tc} = -\frac{1}{\text{slope}} \cdot x_{tc} + y_0 + \frac{1}{\text{slope}} \cdot x_0$$

$$\text{slope} \cdot x_{tc} + \text{intercept}_1 = -\frac{1}{\text{slope}} \cdot x_{tc} + y_0 + \frac{1}{\text{slope}} \cdot x_0 \Rightarrow$$

$$\left(\text{slope} + \frac{1}{\text{slope}}\right) \cdot x_{tc} = y_0 + \frac{1}{\text{slope}} \cdot x_0 - \text{intercept}_1 \Rightarrow$$

$$x_{tc} = \frac{y_0 + \frac{1}{\text{slope}} \cdot x_0 - \text{intercept}_1}{\text{slope} + \frac{1}{\text{slope}}} = \frac{y_0 + \frac{1}{\text{slope}} \cdot x_0 - \text{intercept}_1}{\frac{\text{slope}^2}{\text{slope}} + \frac{1}{\text{slope}}} = \frac{y_0 + \frac{1}{\text{slope}} \cdot x_0 - \text{intercept}_1}{\frac{\text{slope}^2 + 1}{\text{slope}}}$$

Τελικά:

$$x_{tc} = \frac{x_0 + \text{slope}(y_0 - \text{intercept}_1)}{\text{slope}^2 + 1} \quad (4.2.1)$$

$$y_{tc} = \text{slope} \cdot x_{tc} + \text{intercept}_1 \quad (4.2.2)$$

### 4.2.3 Καθορισμός κρίσιμων σημείων

Για κάθε στρώση του ανιχνευτή, θα εντοπίσουμε τα κρίσιμα σημεία. Τα σημεία αυτά αποτελούνται από:

- Το σημείο εισόδου της ευθείας στη στρώση του ανιχνευτή  $(x_{\text{entry}}, y_{\text{entry}})$
- Το σημείο εξόδου της ευθείας από τη στρώση  $(x_{\text{exit}}, y_{\text{exit}})$
- Το κέντρο του θαλαμίσκου  $(x_h, y_h)$
- Το σημείο τομής της ευθείας με μια νοητή οριζόντια ευθεία που περνάει από το κέντρο του θαλαμίσκου  $(x_w, y_w)$

- Το σημείο όπου η ευθεία μας θα έτεμνε έναν κύκλο με κέντρο το κέντρο του θαλαμίσκου  $(x_{tc}, y_{tc})$

Από τα σημεία αυτά, μας ενδιαφέρει η θέση τους ως προς τον άξονα  $x$ , για αυτό, εκτός από την εξίσωση της ευθείας:

$$y = f(x) = \text{slope} \times x + \text{intercept}$$

θα ορίσουμε και την αντίστροφή της:

$$x = g(y) = \frac{y - \text{intercept}}{\text{slope}}$$

Οπότε η εύρεση των σημείων εισόδου  $(x_{\text{entry}}, y_{\text{entry}})$ , εξόδου  $(x_{\text{exit}}, y_{\text{exit}})$ , και τομής της ευθείας με την νοητή οριζόντια ευθεία  $(x_w, y_w)$  είναι τετριμμένη. Από την εξίσωση 4.2.1 θα βρούμε πού η ευθεία μας θα έτεμνε έναν νοητό κύκλο με κέντρο το κέντρο του θαλαμίσκου ενώ το κέντρο του θαλαμίσκου είναι ήδη γνωστό.

Στη συνέχεια, οι συντεταγμένες των σημείων αυτών εκχωρούνται σε ένα πίνακα εκτός από την συντεταγμένη  $x_{tc}$ , η οποία θα εκχωρηθεί μόνο αν είναι μέσα στα όρια του ανιχνευτή, όσον αφορά τον άξονα  $x$ . Δηλαδή

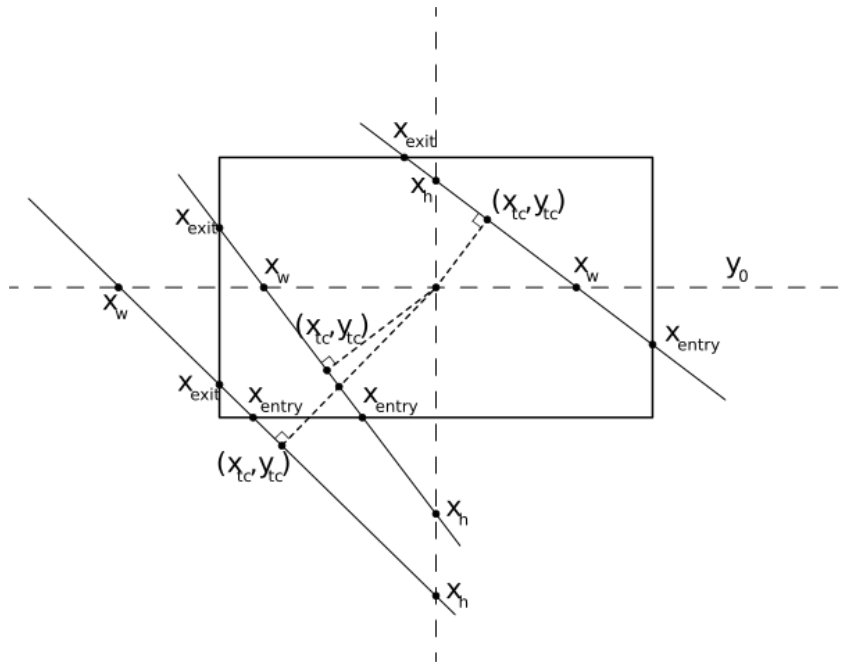
$$|x_h - x_{tc}| < \frac{\text{ch}_{\text{width}}}{2}$$

Τέλος, τα σημεία ταξινομούνται σε αύξουσα σειρά και ανάλογα με το  $x_{tc}$  αποφασίζεται ποια θα είναι τα όρια, κατά τον άξονα  $x$ , μέσα στα οποία η ευθεία θα εφάπτεται με την έλλειψη που θα δημιουργήσουμε.

Αν, λοιπόν, το  $x_{tc}$  μείνει εκτός του πίνακα, τα δύο μεσαία σημεία του πίνακα θα χρησιμοποιηθούν ως  $(x_{\min}, x_{\max})$ , ενώ αν εκχωρηθεί, τότε εξαρτάται από την κλίση της ευθείας και το ύψος του  $y_{tc}$  σε σχέση με το ύψος του κέντρου του θαλάμου.

Αν η κλίση είναι αρνητική (σχήμα 4.2.II) και το κέντρο του θαλαμίσκου χαμηλότερα από το σημείο  $(x_{tc}, y_{tc})$  ή θετική (σχήμα 4.2.III) και το κέντρο του θαλαμίσκου ψηλότερα, τότε τα όρια  $(x_{\min}, x_{\max})$  θα τεθούν από το τρίτο μικρότερο στοιχείο και το δεύτερο μεγαλύτερο αντιστοίχως.

Αν όμως η κλίση είναι αρνητική και το κέντρο του θαλαμίσκου ψηλότερα από το σημείο  $(x_{tc}, y_{tc})$  ή θετική και το κέντρο του θαλαμίσκου χαμηλότερα, τότε τα όρια  $(x_{\min}, x_{\max})$  θα τεθούν από το δεύτερο μικρότερο στοιχείο και το τρίτο μεγαλύτερο αντιστοίχως.



**Σχήμα 4.2.Π:** Κρίσιμα σημεία για τροχιές με αρνητική κλίση

Το διάστημα αυτό θα χρησιμοποιηθεί για να υπολογιστεί αποδοτικότερα ένα τυχαίο σημείο στο οποίο η ευθεία θα εφάπτεται της έλλειψης (σχήμα 4.2.IV). Επειτα, βάση του σημείου αυτού, θα υπολογιστούν οι διαστάσεις  $a$  και  $b$ .

#### 4.2.4 Εξίσωση της εφαπτομένης

Θα ξεκινήσουμε ψάχνοντας για μια σύνδεση μεταξύ μιας δεδομένης έλλειψης και της εφαπτομένης της.

Η εξίσωση της έλλειψης με κέντρο  $C(x_0, y_0)$  και ακτίνες  $a, b$  είναι:

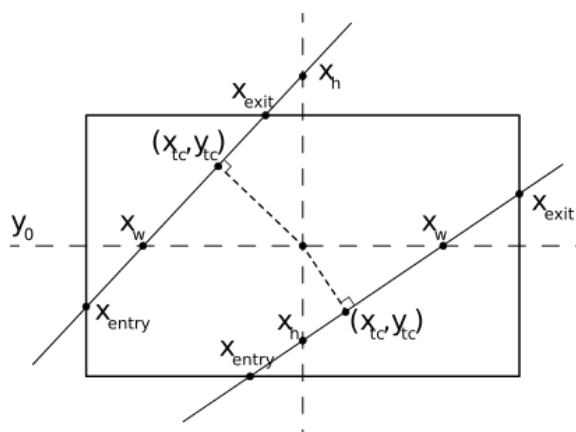
$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \quad (4.2.3)$$

όπου  $a > b > 0$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης με κέντρο  $C(x_0, y_0)$  στο σημείο  $T(x_t, y_t)$ :

$$\frac{(x - x_0)(x_t - x_0)}{a^2} + \frac{(y - y_0)(y_t - y_0)}{b^2} = 1 \quad (4.2.4)$$

Λύνοντας την εξίσωση 4.2.4 ως προς το  $y$  έχουμε:



**Σχήμα 4.2.III:** Κρίσιμα σημεία για τροχιές με θετική κλίση

$$\begin{aligned} \frac{b^2}{a^2} (x - x_0) (x_t - x_0) + (y - y_0) (y_t - y_0) &= b^2 \Rightarrow \\ (y - y_0) (y_t - y_0) &= b^2 - \frac{b^2}{a^2} (x - x_0) (x_t - x_0) \Rightarrow \\ y (y_t - y_0) - y_0 (y_t - y_0) &= b^2 - \frac{b^2}{a^2} (x - x_0) (x_t - x_0) \Rightarrow \\ y (y_t - y_0) &= b^2 - \frac{b^2}{a^2} (x - x_0) (x_t - x_0) + y_0 (y_t - y_0) \Rightarrow \\ y &= \frac{b^2}{(y_t - y_0)} - \frac{b^2 (x_t - x_0)}{a^2 (y_t - y_0)} x + \frac{b^2 (x_t - x_0)}{a^2 (y_t - y_0)} x_0 + y_0 \Rightarrow \\ y &= -\frac{b^2 (x_t - x_0)}{a^2 (y_t - y_0)} x + \frac{b^2 (x_t - x_0)}{a^2 (y_t - y_0)} x_0 + \frac{b^2}{(y_t - y_0)} + y_0 \end{aligned}$$

Άρα έχουμε την εξίσωση της ευθείας με κλίση:

$$\text{slope} = -\frac{b^2 (x_t - x_0)}{a^2 (y_t - y_0)} \quad (4.2.5)$$

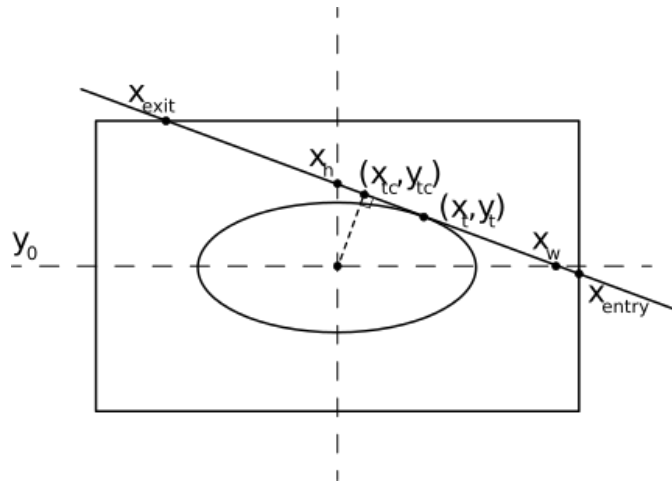
και τομή με τον άξονα  $y$ :

$$\text{intercept} = \frac{b^2 (x_t - x_0)}{a^2 (y_t - y_0)} x_0 + \frac{b^2}{(y_t - y_0)} + y_0 \quad (4.2.6)$$

ή καλύτερα:

$$\text{intercept} = -\text{slope} \cdot x_0 + \frac{b^2}{(y_t - y_0)} + y_0 \quad (4.2.7)$$

Έχοντας ήδη δημιουργήσει μια ευθεία, γνωρίζουμε τα slope και intercept. Αν διαλέξουμε ένα κατάλληλο σημείο της εφαπτομένης  $(x_t, y_t)$  τότε θα έχουμε 2 εξισώσεις με 2 αγνώστους, τις διαστάσεις  $a$  και  $b$ .



**Σχήμα 4.2.IV:** Κρίσιμα σημεία για τροχιές με αρνητική κλίση και η έλλειψη που δημιουργήθηκε

#### 4.2.5 Υπολογισμός των διαστάσεων $a$ και $b$

Εφόσον έχουμε 2 εξισώσεις με 2 αγνώστους, θα δημιουργήσουμε 2 σχέσεις για να υπολογίσουμε τις διαστάσεις  $a$  και  $b$ .

Αν λύσουμε την εξίσωση 4.2.7 ως προς  $b$  έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{b^2}{(y_0 - y_i)} &= \text{intercept} - y_i + \text{slope} \cdot x_i \Rightarrow \\ b^2 &= (\text{slope} \cdot x_i - y_i + \text{intercept}) (y_0 - y_i) \Rightarrow \\ b &= \pm \sqrt{(\text{slope} \cdot x_i - y_i + \text{intercept}) (y_0 - y_i)} \Rightarrow \\ b &= \sqrt{(\text{slope} \cdot x_i - y_i + \text{intercept}) (y_0 - y_i)}, \text{ αφού } b > 0 \end{aligned}$$

Αν μετά λύσουμε την εξίσωση 4.2.5 ως προς  $a$  έχουμε:

$$\begin{aligned} \text{slope} &= -\frac{b^2 (x_t - x_0)}{a^2 (y_t - y_0)} \Rightarrow \\ a^2 &= -\frac{(\text{slope} \cdot x_i - y_i + \text{intercept}) (y_0 - y_i) (x_0 - x_i)}{\text{slope} (y_0 - y_i)} \Rightarrow \\ a^2 &= -\frac{(\text{slope} \cdot x_i - y_i + \text{intercept}) (x_0 - x_i)}{\text{slope}} \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι έχουμε έναν θετικό αριθμό υψωμένο στο τετράγωνο να ισούται με ένα τύπο ο οποίος έχει αρνητικό πρόσημο. Αν και θα υποθέταμε ότι κάποια από τις παρενθέσεις είναι αρνητική, αυτό δεν ισχύει πάντα. Το ίδιο πρόβλημα υπήρξε και από το υπόριζο του  $b$ . Παρουσίαζε αρνητικές τιμές με αποτέλεσμα να μην μπορεί να υπολογιστεί η ρίζα. Καθώς αυτή η μέθοδος δεν οδηγεί σε αποτελέσματα, θα προτιμήσουμε μια διαφορετική προσέγγιση.

### 4.2.6 Εκκεντρότητα της έλλειψης

Η διαφορετική προσέγγιση θα γίνει μέσω της εκκεντρότητας της έλλειψης. Θα βρούμε μια σχέση μεταξύ της εφαπτομένης και της εκκεντρότητας, και των διαστάσεων  $a$  και  $b$  και της εκκεντρότητας. Τέλος, θα συνδυάσουμε τις σχέσεις αυτές με αποτέλεσμα να υπολογίζουμε αποδοτικά κατάλληλες ελλείψεις.

Η εκκεντρότητα της έλλειψης εκφράζει την σχέση των διαστάσεων  $a$  και  $b$  και ισούται με:

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} \quad (4.2.8)$$

όπου  $0 < \varepsilon < 1$ .

Άρα:

$$\varepsilon^2 = 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2 \Rightarrow \frac{b^2}{a^2} = 1 - \varepsilon^2 \Rightarrow \frac{b}{a} = \sqrt{1 - \varepsilon^2} \quad (4.2.9)$$

Παρατηρούμε ότι αν  $\varepsilon = 0$ , τότε  $a = b$  άρα η έλλειψή μας είναι κύκλος. Επίσης, αν  $\varepsilon \rightarrow 1$ , τότε  $\frac{b}{a} \rightarrow 0$ , δηλαδή  $a \gg b$ , άρα η έλλειψη μας τείνει να μεταμορφωθεί σε μια οριζόντια ευθεία.

### 4.2.7 Η εκκεντρότητα συναρτήσει της κλίσης της εφαπτομένης

Θα επιχειρήσουμε να βρούμε μια σχέση μεταξύ της εκκεντρότητας, του κέντρου της ελλείψεως και της εφαπτομένης.

Βάση των εξισώσεων 4.2.5 και 4.2.9 έχουμε:

$$\begin{aligned} \text{slope} &= -\frac{b^2 (x_t - x_0)}{a^2 (y_t - y_0)} = -(1 - \varepsilon^2) \frac{(x_t - x_0)}{(y_t - y_0)} = (\varepsilon^2 - 1) \frac{(x_t - x_0)}{(y_t - y_0)} \Rightarrow \\ \text{slope} \cdot \frac{(y_t - y_0)}{(x_t - x_0)} &= (\varepsilon^2 - 1) \Rightarrow \text{slope} \cdot \frac{(y_t - y_0)}{(x_t - x_0)} + 1 = \varepsilon^2 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\varepsilon = \sqrt{\text{slope} \cdot \frac{(y_t - y_0)}{(x_t - x_0)} + 1} \quad (4.2.10)$$

Από την παραπάνω εξίσωση, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι από την ίδια ευθεία, μπορούμε να έχουμε πολλές ελλείψεις οι οποίες θα έχουν κέντρο  $C(x_0, y_0)$ . Κάθε σημείο  $T(x_t, y_t)$  αντιστοιχεί σε διαφορετική εκκεντρότητα  $\varepsilon$ , δηλαδή διαφορετικό συνδυασμό των διαστάσεων  $a$  και  $b$ . Με άλλα λόγια, ενώ για μια δεδομένη εφαπτομένη και ένα δεδομένο κέντρο θα ήταν δυνατόν να έχουμε ένα μόνο κύκλο, στη περίπτωση της έλλειψης έχουμε άπειρες ελλείψεις, με μοναδικό περιορισμό την διακριτική μας ικανότητα.

### 4.2.8 Διαστάσεις $a$ και $b$ συναρτήσει της εκκεντρότητας

Έχοντας καταλήξει σε μια σχέση μεταξύ της εκκεντρότητας  $\varepsilon$  και της κλίσης slope, θα βρούμε την σχέση μεταξύ της εκκεντρότητας και των διαστάσεων  $a$  και  $b$ .

Η εξίσωση της έλλειψης με κέντρο  $C(x_0, y_0)$  και ακτίνες  $a, b$  ορίζεται ως:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

Βρίσκουμε τη διάσταση  $b$  της έλλειψης συναρτήσει της διάστασης  $a$  και της εκκεντρότητας:

$$b^2 = a^2 (1 - \varepsilon^2) \Rightarrow$$

$$b = a\sqrt{1 - \varepsilon^2}$$

Άρα στο σημείο  $T(x_t, y_t)$  έχουμε:

$$\frac{(x_t - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y_t - y_0)^2}{a^2(1 - \varepsilon^2)} = 1$$

Λύνουμε ως προς  $a$ :

$$a^2 = (x_t - x_0)^2 + \frac{(y_t - y_0)^2}{(1 - \varepsilon^2)} \Rightarrow$$

$$a = \sqrt{(x_t - x_0)^2 + \frac{(y_t - y_0)^2}{(1 - \varepsilon^2)}}$$

Άρα θα υπολογίζουμε την διάσταση  $a$  συναρτήσει του κέντρου  $C(x_0, y_0)$ , ενός σημείου  $T(x_t, y_t)$  μέσα από το διάστημα που έχουμε καθορίσει και την εκκεντρότητα  $\varepsilon$ . Έπειτα, θα υπολογίζουμε την διάσταση  $b$  συναρτήσει της διάστασης  $a$  και της εκκεντρότητας  $\varepsilon$ .

### 4.2.9 Συνοπτικά

Εν συντομία, εντοπίζουμε το διάστημα της ευθείας μέσα στον θάλαμο στον οποίο μπορεί να υπάρχει το σημείο στο οποίο η ευθεία μας εφάπτεται με την έλλειψη. Μέσα από αυτό το διάστημα επιλέγουμε ένα τυχαίο σημείο  $T(x_t, y_t)$  βάση του οποίου υπολογίζουμε την εκκεντρότητα  $\varepsilon$  και τέλος, τις διαστάσεις  $a$  και  $b$ .



### 4.3 Επαναληπτική διαδικασία

Η γεννήτρια ευθειών-ελλείψεων βασίζεται σε μια επαναληπτική διαδικασία. Για κάθε ευθεία που δημιουργείται, πριν δημιουργηθεί η επόμενη, γεμίζουμε τους θαλάμους του ανιχνευτή, μέσα από τους οποίους περνάει η ευθεία, με ελλείψεις. Το γέμισμα του ανιχνευτή γίνεται ανά επίπεδο. Αν η ευθεία μας περνάει μέσα από 2 θαλάμους του ίδιου επιπέδου, ο αλγόριθμος θα υπολογίσει τα κατάλληλα διαστήματα και έπειτα θα δημιουργήσει τις ελλείψεις ξεχωριστά. Δηλαδή η δημιουργία της έλλειψης είναι εξαρτημένη μόνο από την ευθεία και τις συντεταγμένες και τα χαρακτηριστικά του ανιχνευτή.

Η ποιότητα των ελλείψεων εξασφαλίζεται με τον εξής τρόπο: Όλοι οι όροι της εξίσωσης της ευθείας μεταφέρονται στο ένα μέλος της εξίσωσης. Ομοίως και για την εξίσωση της έλλειψης και του μετασχηματισμού Legendre. Το αποτέλεσμα από τις πράξεις τις εξίσωσης της ευθείας και της έλλειψης θα πρέπει να είναι μηδέν. Αυτό όμως υπολογιστικά είναι σχεδόν αδύνατον οπότε είμαστε ικανοποιημένοι αν το αποτέλεσμα είναι μικρότερο του  $10^{-15}$ . Όσον αφορά τις εξισώσεις του μετασχηματισμού Legendre, ισχύει το ίδιο με την διαφορά ότι μόνο η μια από τις δύο εξισώσεις θα πρέπει να πληρεί την παραπάνω προϋπόθεση. Διαφορετικά, αυτό θα σημαίνει ότι το κυρτό και το κοίλο μέλος της έλλειψης έχουν την ίδια εφαπτομένη, πράγμα αδύνατον.

Αν η έλλειψη δεν πληρεί τις προϋποθέσεις του ποιοτικού ελέγχου, η διαδικασία επαναλαμβάνεται και ένα νέο σημείο  $T(x_t, y_t)$  επιλέγεται. Αν μετά από έναν αριθμό επαναλήψεων, ο αλγόριθμος αδυνατεί να δημιουργήσει μια έλλειψη μέσα στον θαλαμίσκο, ο θαλαμίσκος παραμένει κενός. Αν, κατ'επέκτασιν, μια ευθεία έχει έναν μικρό αριθμό ελλείψεων, η ευθεία απορρίπτεται.



# 5

## Περιγραφή της μεθόδου

Σε αυτό το κεφάλαιο θα περιγράψουμε την μέθοδο που υλοποιήσαμε για την εξαγωγή ευθειών από σύνολα ελλείψεων.

### 5.1 Δεδομένα

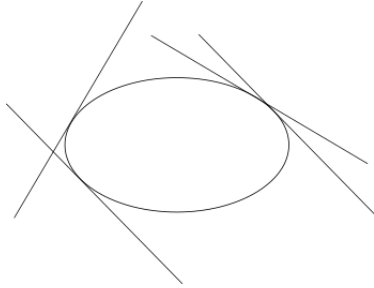
Τα δεδομένα της μεθόδου είναι ένα σύνολο συμμετρικών ελλείψεων οι οποίες αποτελούνται από το κέντρο  $C(x_0, y_0)$  και τις διαστάσεις  $a$  και  $b$ . Επίσης, οι διαστάσεις του επιπέδου που θα αναλυθεί είναι αναγκαίες για τον καθορισμό των ορίων των ιστογραμμμάτων.

### 5.2 Ιστογράμματα

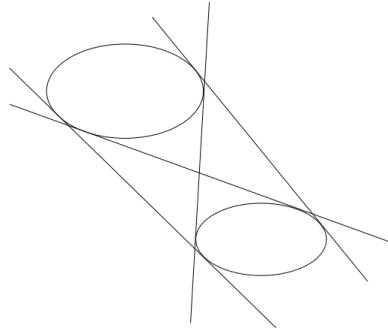
Το κυριότερο εργαλείο μας είναι ο μετασχηματισμός Legendre. Κατά την μετατροπή των δεδομένων ελλείψεων στο χώρο Legendre, δισδιάστατα ιστογράμματα γεμίζουν και σχηματίζονται πυρήνες γύρω από τις κορυφές που δημιουργούνται. Για την εξαγωγή αυτών των πυρήνων από τα ιστογράμματα, δημιουργούμε έναν αλγόριθμο εξαγωγής ευθειών.

Η εξαγωγή αυτών των πυρήνων διευκολύνεται με την εφαρμογή ενός κατωφλίου στις κλάσεις (bins) του ιστογράμματος έτσι ώστε όλα τα bins με τιμή χαμηλότερη του κατωφλίου, να αγνοούνται. Το κατώφλι αυτό αντιστοιχεί σε 3 καμπύλες λόγω του ότι τουλάχιστον 3 ελλείψεις χρειάζονται για να έχουμε το πολύ 2 κοινές εφαπτομένες

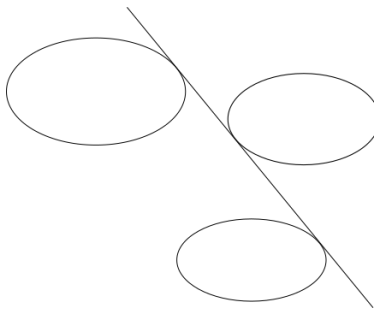
(εικόνες 5.2.Ιγ' και 5.2.Ιδ').



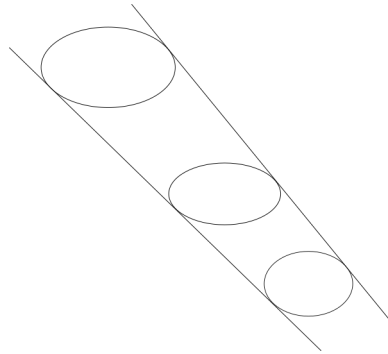
(α') Μια έλλειψη έχει άπειρο αριθμό εφαπτομένων



(β') Δύο ελλείψεις έχουν τέσσερις κοινές εφαπτομένες



(γ') Τρεις ελλείψεις οι οποίες έχουν μόνο μια κοινή εφαπτομένη

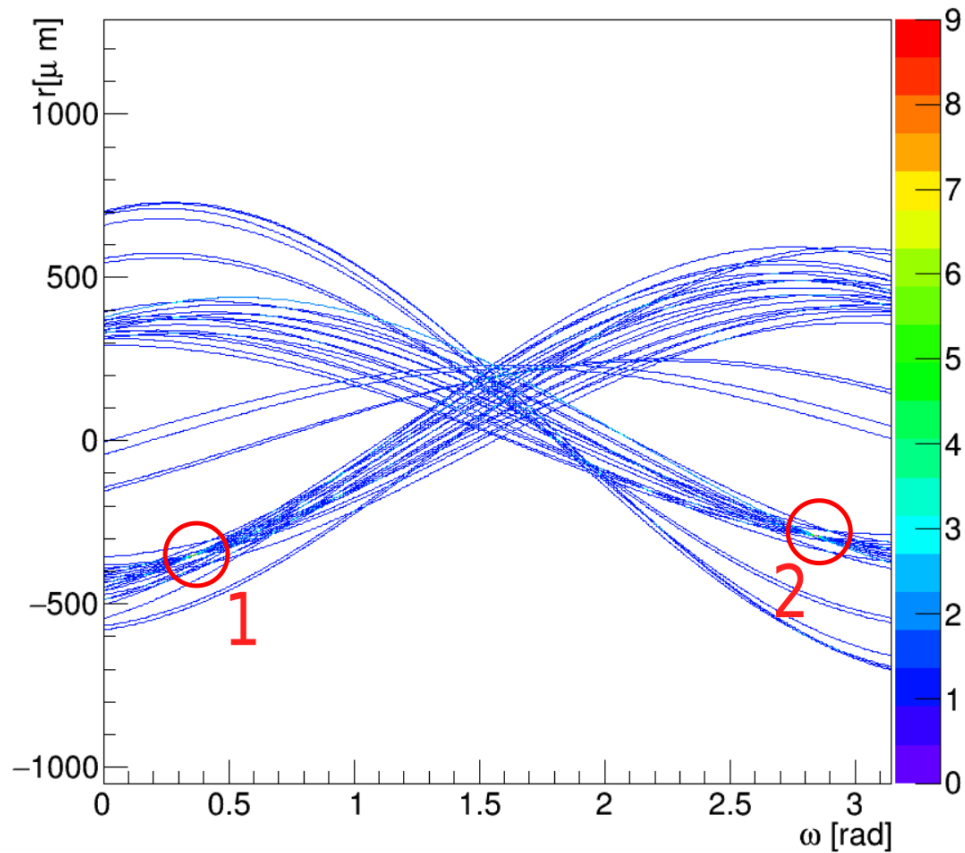


(δ') Ένα συμμετρικό σύνολο ελλείψεων στο οποίο υπάρχουν δύο κοινές εφαπτομένες

**Σχήμα 5.2.Ι:** Η σχέση μεταξύ ελλείψεων μέσω των εφαπτομένων για διάφορα σύνολα ελλείψεων

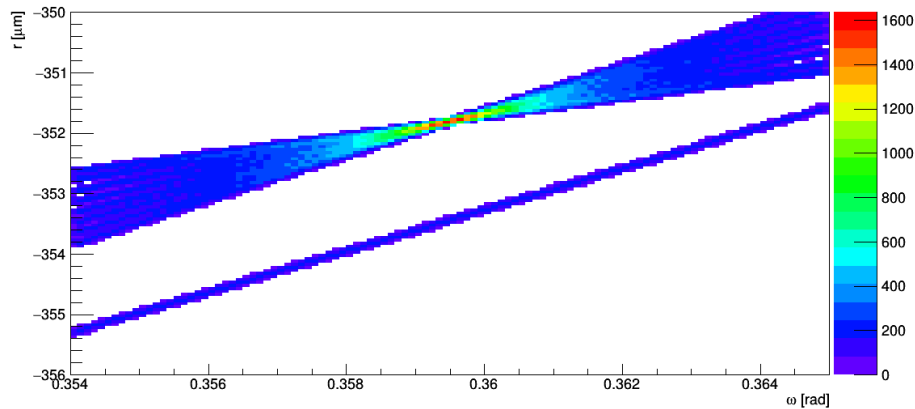
Ο αλγόριθμος για την εξαγωγή των ευθειών αποτελείται από 2 βήματα τα οποία στηρίζονται σε ανάλυση βασισμένη στον μετασχηματισμό Legendre. Αρχικά, ένα πρωτεύον γενικό βήμα με ένα ιστογράμμα (σχήμα 5.2.ΙΙ) το οποίο καλύπτει όλο το χώρο Legendre της περιοχής που θέλουμε να αναλύσουμε. Έπειτα, ένα δευτερεύον βήμα το οποίο μελετάει τις περιοχές του χώρου Legendre όπου εμφανίστηκαν κορυφές κατά την επεξεργασία του πρωτεύοντος ιστογράμματος (σχήμα 5.2.ΙΙα' και 5.2.ΙΙβ').

Τα ιστογράμματα των δύο βημάτων διαφέρουν μεταξύ τους. Στο πρώτο βήμα χρησιμοποιούμε ένα ιστογράμμα με ένα προκαθορισμένο αριθμό κλάσεων (fixed number

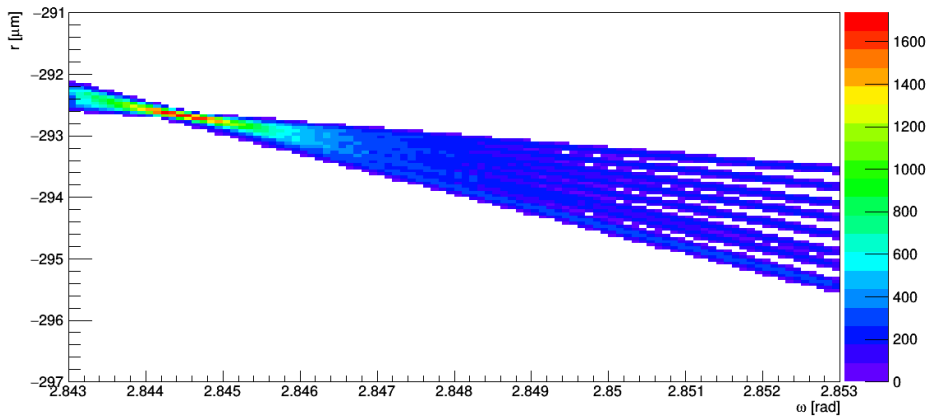


**Σχήμα 5.2.11:** Παράδειγμα πρωτεύοντος ιστογράμματος

of bins) και για τους δύο άξονες. Επίσης, όταν υπολογίζεται μια καμπύλη ότι περνάει μέσα από ένα bin, η τιμή του bin αυξάνεται κατά 1. Αυτό μας βοηθάει να μειώσουμε το φόρτο της ανάλυσης και να επεξεργαστούμε γρήγορα μια μεγάλη περιοχή της οποίας το μεγαλύτερο μέρος δεν μας προσφέρει κάποια σημαντική πληροφορία για τις ευθείες μας. Στο δεύτερο βήμα, χρησιμοποιούμε ιστογράμματα με προκαθορισμένο εύρος κλάσης (bin size) για τον κάθε άξονα. Επίσης, όταν περνάει μια ευθεία μέσα από ένα bin, αντί να αυξάνουμε την τιμή του bin κατά 1, προσθέτουμε ένα δισδιάστατο Γκαουσιανό σήμα το οποίο έχει ως μέσους όρους του τις τιμές των συγκεκριμένων bins. Αυτό μας βοηθάει να αυξήσουμε κατά πολύ την ακρίβεια των αποτελεσμάτων μας.



(α') Παράδειγμα δευτερεύοντος ιστογράμματος για την κορυφή 1



(β') Παράδειγμα δευτερεύοντος ιστογράμματος για την κορυφή 2

Σχήμα 5.2.III: Παραδείγματα δευτερευόντων ιστογραμμάτων

### 5.2.1 Πρωτεύον βήμα

Στο πρωτεύον βήμα, για την δημιουργία του ιστογράμματος, πρέπει πρώτα να ασχοληθούμε με το μέγεθος του ιστογράμματος.

#### Όρια του πρωτεύοντος ιστογράμματος

Γνωρίζουμε ήδη ότι κατά τον άξονα  $\theta$  του πρωτεύοντος ιστογράμματος, το όριο του θα είναι από 0 έως  $\pi$  λόγω της κανονικής μορφής. Αντιθέτως, στον άξονα  $r$  το όριο θα είναι βάσει των διαστάσεων του επιπέδου που θέλουμε να μελετήσουμε και θα το υπολογίσουμε με τη χρήση των παρακάτω σχέσεων:

$$r(\theta) = \begin{cases} x_0 \cos \theta + y_0 \sin \theta + \sqrt{b^2 \sin^2 \theta + a^2 \cos^2 \theta} & \text{Κοίλο μέρος} \\ x_0 \cos \theta + y_0 \sin \theta - \sqrt{b^2 \sin^2 \theta + a^2 \cos^2 \theta} & \text{Κυρτό μέρος} \end{cases}$$

Γενικότερα, οι διαστάσεις που μπορούν να πάρουν οι παραπάνω τιμές είναι:

$$x_0 \in (x_{\min}, x_{\max})$$

$$y_0 \in (y_{\min}, y_{\max})$$

$$a \in (0, a_{\max})$$

$$b \in (0, b_{\max})$$

όπου  $|x_{\min}| = |x_{\max}|$ ,  $a_{\max} > b_{\max}$  και πάντα  $a > b$ .

Επίσης γνωρίζουμε ότι για  $x_{\max} > 0$  και  $x_{\max} < 0$ , ισχύει ότι:

$$|x_0 \cos \theta| \leq |x_0| \cdot |\cos \theta| \leq |x_0|$$

ομοίως για το  $y$ :

$$|y_0 \sin \theta| \leq |y_0| \cdot |\sin \theta| \leq |y_0|^1$$

και για την ρίζα βλέπουμε ότι:

$$\sqrt{b^2 \sin^2 \theta + a^2 \cos^2 \theta} \leq \sqrt{b^2 + a^2} < \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2} < 2a$$

Εναλλακτικά, θέτουμε  $c$  τέτοιο ώστε  $b^2 = a^2 - c^2$  και έχουμε:

$$\sqrt{b^2 \sin^2 \theta + a^2 \cos^2 \theta} = \sqrt{a^2 \sin^2 \theta - c^2 \sin^2 \theta + a^2 \cos^2 \theta} = \sqrt{a^2 - c^2 \sin^2 \theta}$$

Αφού  $b^2 > 0$ , έχω  $a^2 > c^2$  άρα  $\sqrt{a^2 - c^2 \sin^2 \theta} \leq \sqrt{a^2} = a$

Αφού οι ρίζες των πραγματικών αριθμών είναι πάντα θετικές, την μέγιστη τιμή του  $r$  θα την πάρουμε από την συνάρτηση του  $r$  στο κοίλο μέρος, ενώ την ελάχιστη από το κυρτό.

Άρα έχουμε:

$$r_{\max} = x_0 \cos \theta + y_0 \sin \theta + \sqrt{b^2 \sin^2 \theta + a^2 \cos^2 \theta} < x_{\max} + y_{\max} + a$$

και

$$r_{\min} = x_0 \cos \theta + y_0 \sin \theta - \sqrt{b^2 \sin^2 \theta + a^2 \cos^2 \theta} < x_{\min} + y_{\min} - a$$

Δηλαδή τα όρια του ιστογράμματος είναι:

$$r \in (x_{\min} + y_{\min} - a, x_{\max} + y_{\max} + a)$$

<sup>1</sup>Το  $\sin \theta$  είναι πάντα θετικό αφού  $\theta \in (0, \pi)$

Εξαιτίας του εύρους του άξονα  $r$ , προτιμάμε έναν συγκεκριμένο bin number αντί ενός συγκεκριμένου bin size.

### Γέμισμα του πρωτεύοντος ιστογράμματος

Για να γεμίσουμε το πρωτεύων ιστόγραμμα με τα αποτελέσματα του μετασχηματισμού Legendre, για κάθε μια από τις κλάσεις (bins) του άξονα  $\theta$ , υπολογίζουμε την τιμή στην μέση της κλάσης (bin) και για κάθε έλλειψη υπολογίζουμε το  $r(\theta)$  βάσει των εξισώσεων 3.5.1 και το εκχωρούμε στο ιστόγραμμα. Να σημειώσουμε ότι πρέπει να υπολογίσουμε και τους δύο τύπους της εξίσωσης 3.5.1 γιατί δεν γνωρίζουμε ποιο μέρος της έλλειψης θα εφάπτεται με την ευθεία.

### Εντοπισμός των πυρήνων του πρωτεύοντος ιστογράμματος

Αφού τελειώσει η μετατροπή στο χώρο Legendre και εφαρμοστεί το κατώφλι, ταξινομούμε τα bins βάσει των υψών τους. Έπειτα, με μια επαναληπτική διαδικασία, ο αλγόριθμος εξαγωγής ευθειών εντοπίζει τους πυρήνες (clusters). Όσο είναι δυνατόν, οι πυρήνες έχουν την κορυφή τους στο κέντρο τους. Τότε, ελέγχεται το ύψος της κορυφής του cluster. Αν το 70% της τιμής της κορυφής είναι μεγαλύτερο από την τιμή του κατωφλίου, αυξάνουμε σε αυτή τη τιμή το κατώφλι.

Έπειτα, από όσα bins βρίσκονται πάνω από την τιμή του κατωφλίου, υπολογίζουμε τους μέσους όρους  $r$  και  $\theta$  καθώς επίσης και την κλίση, slope, και τομή με τον άξονα  $y$ , intercept:

$$\text{slope} = -\frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

$$\text{intercept} = \frac{r}{\sin \theta}$$

και τα σφάλματά τους:

$$\delta \text{slope} = \sqrt{\left(\frac{\partial \text{slope}}{\partial \theta} \delta \theta\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{\sin^2 \theta - \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} \delta \theta\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{\sin^2 \theta} \delta \theta\right)^2} = \frac{1}{\sin^2 \theta} \delta \theta$$

$$\delta \text{intercept} = \sqrt{\left(\frac{\partial \text{intercept}}{\partial \theta} \delta \theta\right)^2 + \left(\frac{\partial \text{intercept}}{\partial \rho} \delta \rho\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{-\rho \cos \theta}{\sin^2 \theta} \delta \theta\right)^2 + \left(\frac{1}{\sin \theta} \delta \rho\right)^2}$$



$$= \sqrt{\frac{1}{\sin^2 \theta} \left( \frac{-\rho \cos \theta}{\sin \theta} \delta\theta \delta\theta \right)^2 + \frac{1}{\sin^2 \theta} (\delta\rho)^2} = \frac{1}{\sin \theta} \sqrt{(\rho \cot \theta \delta\theta)^2 + (\delta\rho)^2}$$

Από τους πυρήνες αθροίζουμε τα ύψη (hits) των bins (πάνω από το κατώφλι) και τα διαιρούμε με τον αριθμό των bins του cluster πάνω από το κατώφλι. Έπειτα, ταξινομούμε τους πυρήνες βάση της τιμής του λόγου hits/bins. Οι πυρήνες με τα μεγαλύτερα ύψη επιλέγονται για περαιτέρω ανάλυση από το δευτερεύον βήμα, όπου τα όρια των πυρήνων θα χρησιμεύσουν ως όρια των δευτερευόντων δισδιάστατων ιστογραμμάτων.

Θα πρέπει να ξεκαθαρίσουμε ότι κάθε πυρήνας θεωρείται ότι είναι διαφορετική ευθεία άρα και διαφορετική λύση στο πρόβλημά μας. Αυτό σημαίνει ότι ο αλγόριθμός μας δουλεύει πάντα για περιπτώσεις στις οποίες θα έχουμε πάνω από ένα υποσύνολο ελλείψεων, δηλαδή παραπάνω από μια εφαπτόμενη ευθεία. Επίσης, θεωρούμε ότι όλα τα υποσύνολα ελλείψεων μπορεί να είναι συμμετρικά, άρα θα υπάρχουν 2 εφαπτόμενες ανά υποσύνολο, μέχρι να αποδειχτεί το αντίθετο.

### 5.2.2 Δευτερεύον βήμα

Στο δεύτερο βήμα της ανάλυσης, δημιουργούμε πολλαπλά ιστογράμματα, ένα για κάθε ένα από τους πυρήνες που υπερίσχυσαν κατά το προηγούμενο βήμα. Αντιθέτως με πριν, επιλέγουμε βήματα  $\delta\theta$  και  $\delta r$  για το μέγεθος των κλάσεων των ιστογραμμάτων (bin size) αντί για ένα προκαθορισμένο αριθμό κλάσεων (bin number).

Έπειτα, ακολουθούμε μια παρόμοια διαδικασία με αυτήν του πρωτεύοντος βήματος αλλά με δύο σημαντικές διαφορές. Πρώτον, αντί να αυξάνουμε την τιμή μιας κλάσης (bin height) κατά 1 κάθε φορά που υπολογίζουμε ότι μια καμπύλη περνάει μέσα από αυτό, εφαρμόζουμε ένα Γκαουσιανό σήμα. Δηλαδή δημιουργούμε πυρήνες από αθροίσματα δισδιάστατων Γκαουσιανών καμπυλών. Δεύτερον, αναζητάμε μόνο έναν πυρήνα από το κάθε ιστόγραμμα. Δηλαδή αντιμετωπίζουμε τα ιστογράμματα αυτά ως μεμονωμένες ευθείες, άρα και ξεχωριστές λύσεις του προβλήματος μας.

#### Τα όρια του δευτερεύοντος ιστογράμματος

Ως όρια στα δευτερεύοντα ιστογράμματα, χρησιμοποιούμε την ορθογώνια περιοχή των πυρήνων που επιλέξαμε ως πιθανές λύσεις από το πρωτεύον ιστόγραμμα. Όμως,

στα δευτερεύοντα ιστογράμματα αντί για ένα προκαθορισμένο αριθμό κλάσεων (bins), έχουμε ένα προκαθορισμένο μέγεθος κλάσεων (binning) για κάθε άξονα. Για αυτό το μέγεθος θα στρογγυλοποιήσουμε τα όρια, επεκτείνοντάς τα, έτσι ώστε να έχουμε ένα ακέραιο αριθμό bins.

### Μέγεθος κλάσεων του δευτερεύοντος ιστογράμματος

Το binning των δευτερευόντων ιστογραμμάτων, καθορίζεται από την διακριτοποίηση των αξόνων  $\theta$  και  $r$  που χρειαζόμαστε για να βελτιώσουμε την διακριτική μας ικανότητα.

Θα υπολογίσουμε το binning κατά τον άξονα  $r$  όπως το σφάλμα  $\delta r$  από το τύπο σφάλματος του  $r$  το οποίο υπολογίσαμε ως:

$$\delta r \leq \sqrt{\delta R^2 + (-x_0 \sin \theta + y_0 \cos \theta)^2 \delta \theta^2}$$

όπου το  $\delta R$  είναι το σφάλμα των ακτίνων  $a$  και  $b$  το οποίο θα θέσουμε ως το μεγαλύτερο από τα δύο  $\delta R = \max \{\delta a, \delta b\}$ .

Αν, επίσης, θέσουμε το  $\delta \theta$  πολύ μικρότερο του  $\delta R$  τότε:

$$\delta R \gg \delta \theta \Rightarrow \delta r \approx \delta R$$

Άρα και το binning του άξονα  $r$  είναι  $\delta r = \delta R$

Ένα από τα αποτελέσματα των παραπάνω είναι ότι ο αριθμός των bins για κάθε άξονα για κάθε δευτερεύον ιστογράμμα θα είναι διαφορετικός. Πιο συγκεκριμένα, ο αριθμός των κλάσεων υπολογίζεται ως εξής:

$$\text{bins}_r = \frac{\text{Όρια κατά άξονα } r}{\delta r}$$

$$\text{bins}_\theta = \frac{\text{Όρια κατά άξονα } \theta}{\delta \theta}$$

Για να έχουμε την μεγαλύτερη δυνατή ακρίβεια, τα μεγέθη των κλάσεων θα πρέπει να είναι όσο το δυνατό μικρότερα. Αυτό μπορεί να προκαλέσει προβλήματα σε περιβάλλοντα με θόρυβο, αφού οι καμπύλες στο χώρο Legendre δεν θα τέμνονται όλες στο ίδιο σημείο, δηλαδή στο ίδιο bin. Το αποτέλεσμα θα είναι να μην δημιουργούνται κορυφές.

### Αθροίσματα Γκαουσιανών σημάτων

Το κλειδί για να δημιουργήσουμε κορυφές στα δευτερεύοντα ιστογράμματα, οι οποίες λόγω θορύβου δεν θα υπήρχαν, είναι να εφαρμόσουμε μια ανάλυση βάσει αθροισμάτων Γκαουσιανών σημάτων. Δηλαδή, όπως είπαμε προηγουμένως, κατά το πέρας των αποτελεσμάτων στο δισδιάστατο ιστόγραμμα, αντί να αυξάνουμε τον αριθμό των hits στο κατάλληλο bin κατά 1, θα εφαρμόζουμε ένα δισδιάστατο Γκαουσιανό σήμα. Η δισδιάστατη Γκαουσιανή θα έχει ως μέσους όρους τα κέντρα του bin στο οποίο υπολογίστηκε. Επίσης θα έχει ως τυπική απόκλιση τα σφάλματα των βημάτων των bins,  $\delta\theta$  και  $\delta r$ , που θέσαμε προηγουμένως.

Έστω ένα δισδιάστατο Γκαουσιανό σήμα:

$$f_{gauss}(\theta, r) = A \exp\left(-\left(\frac{(\theta - \theta_0)^2}{2\sigma_\theta^2} + \frac{(r - r_0)^2}{2\sigma_r^2}\right)\right)$$

όπου  $\sigma_\theta = \delta\theta$ ,  $\sigma_r = \delta r$ , και A μια αυθαίρετη σταθερά.

Για κάθε bin του ιστογράμματος θα πρέπει να υπολογίζουμε το άθροισμα των Γκαουσιανών σημάτων για κάθε καμπύλη της κάθε έλλειψης. Με άλλα λόγια θα πρέπει να προσθέτουμε στο ιστόγραμμα το συνολικό σήμα του bin:

$$G_{signal}(\theta, r) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^2 f_{gauss}(\theta, r(\theta)) \Rightarrow$$

$$G_{signal}(\theta, r) = A \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^2 \exp\left(-\left(\frac{(\theta - \theta_{ij})^2}{2\sigma_\theta^2} + \frac{(r - r(\theta_{ij}))^2}{2\sigma_r^2}\right)\right)$$

Οι καμπύλες για το κυρτό και κοίλο τμήμα μιας έλλειψης στον χώρο Legendre δε πρέπει ποτέ να τέμνονται μεταξύ τους. Παρ'όλα αυτά, συνεχίζουμε να πρέπει να εκτιμήσουμε και τις δύο καμπύλες καθώς δε μπορούμε να γνωρίζουμε a priori ποιες από τις καμπύλες θα περάσουν από το bin που μελετάμε. Το ίδιο ισχύει και για όλες τις ελλείψεις, με την έννοια ότι δε θα έχουν όλες μια εφαπτομένη ευθεία αναπαριστώμενη από το συγκεκριμένο ζεύγος  $(\theta, r(\theta))$  στο υπό κατασκευή ιστόγραμμα.

Τέλος, κάθε Γκαουσιανή αναπαράσταση κόβεται σε ένα κεντρικό τμήμα. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα η τιμή της αναπαράστασης να προστίθεται στο ιστόγραμμα μόνο εάν υπερβαίνει ένα συγκεκριμένο όριο. Συνεπώς, η διαδικασία πρόσθεσης του σήματος στο ιστόγραμμα, ξεκινά από την κορυφή της Γκαουσιανής αναπαράστασης και συνεχίζει προς τα έξω, σε συνεχόμενα γειτονικά bins μέχρι να συναντήσει το προαναφερθέν όριο. Τότε, η διαδικασία σταματάει.

## 5.3 Περαιτέρω βελτίωση των ευθειών

Έχοντας εντοπίσει τις ευθείες, μπορούμε να βελτιώσουμε την ακρίβεια των χαρακτηριστικών τους με μια διαδικασία τριών βημάτων. Αυτά τα βήματα μπορούν να βελτιώσουν ή να απορρίψουν ευθείες

### 5.3.1 Συσχέτιση ελλείψεων με ευθείες

Αφού εντοπίσουμε τις ευθείες από την ανάλυση με τα ιστογράμματα Legendre, και εφόσον είναι δυνατό, οι δεδομένες ελλείψεις συσχετίζονται με τις ευθείες, εάν πληρούν ένα συγκεκριμένο κριτήριο.

Το κριτήριο που χρησιμοποιούμε για να συσχετίσουμε μια έλλειψη με μια ευθεία είναι η απόσταση  $d$  μεταξύ της ανιχνευμένης ευθείας και του πλησιέστερου σημείου της έλλειψης στην ευθεία. Αυτή η απόσταση πρέπει να είναι μικρότερη από  $n_\sigma$  φορές την τιμή του  $\sigma_r$ . Εάν η ευθεία έχει λιγότερες ελλείψεις από το ελάχιστο αποδεκτό όριο

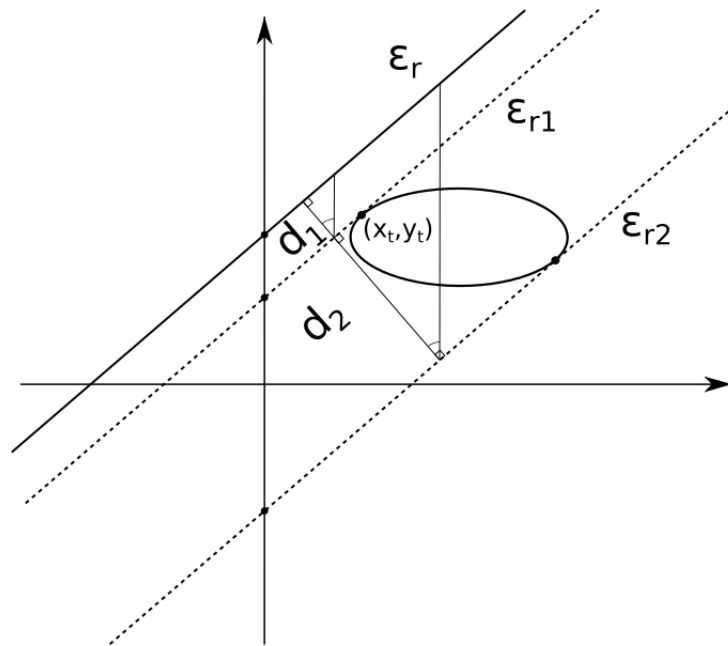
$$d_{\text{closest}} < n_\sigma \sigma_r$$

που έχει οριστεί από εμάς, το αποτέλεσμα θα θεωρείται ψευδώς θετικό και συνεπώς θα απορρίπτεται.

Για κάθε έλλειψη δημιουργούμε δύο ευθείες παράλληλες στην ανιχνευμένη μας ευθεία όπως φαίνεται στο σχήμα 5.3.I. Η μια ευθεία είναι εφαπτόμενη στο κοίλο τμήμα της έλλειψης και η άλλη στο κυρτό. Επιλέγουμε την ευθεία που είναι πλησιέστερη στην ανιχνευμένη ευθεία και εφαρμόζουμε το κριτήριο.

Παρ'όλα αυτά, δεν δεσμεύουμε τις ελλείψεις σε μια μόνο ευθεία αλλά τις ελέγχουμε όλες. Με αυτόν το τρόπο, μπορούμε να ελέγχουμε και τις ευθείες που μπορεί να εντοπίσαμε λόγω της συμμετρίας κάποιου συνόλου ελλείψεων. Εναλλακτικά, αν ο αλγόριθμος εντόπιζε πρώτα μια από τις συμμετρικές ευθείες, μετά δεν θα καταχωρούσε τις ελλείψεις στην ευθεία που προσπαθούμε να εντοπίσουμε.

Εάν η ευθεία έχει λιγότερες ελλείψεις από ένα ελάχιστο όριο που μπορούμε να θέσουμε, τότε η ευθεία θεωρείται ότι έχει παραχθεί από ελλείψεις-θορύβους και αφαιρείται από τις πιθανές λύσεις.



**Σχήμα 5.3.I:** Η ανιχνευμένη ευθεία  $\varepsilon_r$  και οι παράλληλες της,  $\varepsilon_{r1}$  και  $\varepsilon_{r2}$ . Σε αυτή τη περίπτωση, η ευθεία  $\varepsilon_{r1}$  θα επιλεγθεί.

### 5.3.2 Απλή γραμμική παλινδρόμηση

Με τις ελλείψεις να συσχετίζονται με τις τροχιές, μπορούμε πλέον να εφαρμόσουμε μια γραμμική παλινδρόμηση (linear fit/ least square fit) σε κάθε τροχιά, έτσι ώστε να αυξήσουμε την ακρίβειά τους. Πρώτα όμως πρέπει να εντοπίσουμε μια σειρά από σημεία από τις συσχετιζόμενες ελλείψεις σε σχέση με τις τροχιές τους, τα ονομαζόμενα εφαπτόμενα σημεία.

Για να εντοπίσουμε τα εφαπτόμενα σημεία μεταξύ μιας τροχιάς και της έλλειψής της, η πλησιέστερη παράλληλος επαναχρησιμοποιείται (σχήμα 5.3.I). Συνεπώς, τα εφαπτόμενα σημεία υπολογίζονται χρησιμοποιώντας την παρακάτω μεθοδολογία.

### 5.3.3 Εντοπισμός του σημείου T χωρίς την πραγματική ευθεία

Έστω ότι έχουμε μια ευθεία  $\varepsilon_r$ :  $y = \text{slope}_r \cdot x + \text{intercept}_r$  και μια έλλειψη με κέντρο  $C(x_0, y_0)$  και ακτίνες  $a$  και  $b$ .

Θα δημιουργήσουμε δύο ευθείες παράλληλες στην  $\varepsilon_r$ , τέτοιες ώστε να είναι εφαπτόμενες σε μια έλλειψη με κέντρο  $C(x_0, y_0)$  και ακτίνες  $a, b$ . Δηλαδή:

$$\varepsilon_{r1}: y = \text{slope}_r \cdot x + \text{intercept}_{r1}$$

$$\varepsilon_{r2}: y = \text{slope}_r \cdot x + \text{intercept}_{r2}$$

Για να υπολογίσουμε τα  $\text{intercept}$  θα χρησιμοποιήσουμε τον μετασχηματισμό Legendre και τον μετασχηματισμό Hough στον χώρο  $(\text{slope}, \text{intercept})$ . Δηλαδή:

$$F(p) = \begin{cases} F_1(p) = y_0 - px_0 + \sqrt{b^2 + a^2p^2} & \text{Κοίλο μέρος} \\ F_2(p) = px_0 - y_0 + \sqrt{b^2 + a^2p^2} & \text{Κυρτό μέρος} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \text{intercept}_{r1} = y_0 - px_0 + \sqrt{b^2 + a^2p^2} & \text{Κοίλο μέρος} \\ \text{intercept}_{r2} = y_0 - px_0 - \sqrt{b^2 + a^2p^2} & \text{Κυρτό μέρος} \end{cases}$$

Από τις δύο ευθείες κρατάμε την κοντινότερη στην ευθεία  $\varepsilon_r$  και υπολογίζουμε το σημείο με το οποίο η ευθεία που κρατήσαμε εφάπτεται με την έλλειψη.

### 5.3.4 Εντοπισμός του $T(x_t, y_t)$

Εντοπισμός του σημείου  $T(x_t, y_t)$  με δεδομένη έλλειψη και εξίσωση ευθείας της εφαπτομένης:

Από την εξίσωση 4.2.7 έχουμε:

$$\text{intercept} = -\text{slope} \cdot x_0 + \frac{b^2}{(y_t - y_0)} + y_0 \Rightarrow \text{intercept} + \text{slope} \cdot x_0 - y_0 = \frac{b^2}{(y_t - y_0)} \Rightarrow$$

$$(y_t - y_0) = \frac{b^2}{\text{intercept} + \text{slope} \cdot x_0 - y_0} \Rightarrow y_t = y_0 + \frac{b^2}{\text{intercept} + \text{slope} \cdot x_0 - y_0}$$

Άρα:

$$y_t = y_0 + \frac{b^2}{\text{intercept} + \text{slope} \cdot x_0 - y_0}$$

Από την εξίσωση 4.2.5 έχουμε:

$$\text{slope} = -\frac{b^2 (x_t - x_0)}{a^2 (y_t - y_0)} \Rightarrow \text{slope} = -\frac{b^2 \frac{(x_t - x_0)}{1}}{\frac{b^2}{\text{intercept} + \text{slope} \cdot x_0 - y_0}} = -\frac{1}{a^2} \frac{(x_t - x_0)}{\frac{1}{\text{intercept} + \text{slope} \cdot x_0 - y_0}} =$$

$$-\frac{1}{a^2} (x_t - x_0) (\text{intercept} + \text{slope} \cdot x_0 - y_0) \Rightarrow$$

$$(x_t - x_0) = -\frac{\text{slope} \cdot a^2}{(\text{intercept} + \text{slope} \cdot x_0 - y_0)} \Rightarrow x_t = x_0 - \frac{\text{slope} \cdot a^2}{(\text{intercept} + \text{slope} \cdot x_0 - y_0)}$$

Άρα:

$$x_t = x_0 - \frac{\text{slope} \cdot a^2}{(\text{intercept} + \text{slope} \cdot x_0 - y_0)}$$

Με σφάλματα:

$$\delta y_{tc} = \sqrt{\left(\frac{\partial y_{tc}}{\partial \text{slope}} \delta \text{slope}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_{tc}}{\partial \text{intercept}} \delta \text{intercept}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_{tc}}{\partial a} \delta a\right)^2 + \left(\frac{\partial y_{tc}}{\partial b} \delta b\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{-b^2 x_0}{(\text{intercept} + \text{slope} \cdot x_0 - y_0)^2} \delta \text{slope}\right)^2 + \left(\frac{-b^2}{(\text{intercept} + \text{slope} \cdot x_0 - y_0)^2} \delta \text{intercept}\right)^2 + \left(\frac{2b}{(\text{intercept} + \text{slope} \cdot x_0 - y_0)^2} \delta b\right)^2}$$

$$\begin{aligned}
&= \left( \frac{b}{(\text{intercept} + \text{slope} \cdot x_0 - y_0)} \right)^2 \sqrt{(x_0 \delta \text{slope})^2 + (\delta \text{intercept})^2 + \left( \frac{2\delta b}{b} \right)^2} \\
\delta x_{tc} &= \sqrt{\left( \frac{\partial x_{tc}}{\partial \text{slope}} \delta \text{slope} \right)^2 + \left( \frac{\partial x_{tc}}{\partial \text{intercept}} \delta \text{intercept} \right)^2 + \left( \frac{\partial x_{tc}}{\partial a} \delta a \right)^2 + \left( \frac{\partial x_{tc}}{\partial b} \delta b \right)^2} \\
&\text{όποτε έχουμε κάθε όρο να ισούται με:} \\
\left( \frac{\partial x_{tc}}{\partial \text{slope}} \delta \text{slope} \right)^2 &= \left( \frac{(y_0 - \text{intercept}) a^2}{(\text{intercept} + \text{slope} \cdot x_0 - y_0)^2} \delta \text{slope} \right)^2 \\
\left( \frac{\partial x_{tc}}{\partial \text{intercept}} \delta \text{intercept} \right)^2 &= \left( \frac{\text{slope} \cdot a^2}{(\text{intercept} + \text{slope} \cdot x_0 - y_0)^2} \delta \text{intercept} \right)^2 \\
\left( \frac{\partial x_{tc}}{\partial a} \delta a \right)^2 + \left( \frac{\partial x_{tc}}{\partial b} \delta b \right)^2 &= \left( \frac{2 \text{slope} \cdot a}{(\text{intercept} + \text{slope} \cdot x_0 - y_0)^2} (\text{intercept} + \text{slope} \cdot x_0 - y_0) \delta a \right)^2 \\
&\text{Συνολικά βρίσκουμε:} \\
\delta x_{tc} &= \left( \frac{a}{(\text{intercept} + \text{slope} \cdot x_0 - y_0)} \right)^2 \cdot \\
&\cdot \sqrt{((y_0 - \text{intercept}) \delta \text{slope})^2 + (\text{slope} \delta \text{intercept})^2 + \left( \frac{2 \text{slope} \cdot \delta a}{a} \right)^2 (\text{intercept} + \text{slope} \cdot x_0 - y_0)}
\end{aligned}$$

### 5.3.5 Μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων

Είδαμε ότι για μια παράλληλη τροχιά της μορφής  $y = \text{slope} \cdot x + \text{intercept}$ , τα επαπτόμενα σημεία υπολογίζονται χρησιμοποιώντας τις παρακάτω εξισώσεις:

$$\begin{aligned}
x_t &= x_0 - \frac{\text{slope} \cdot a^2}{(\text{intercept} + \text{slope} \cdot x_0 - y_0)} \\
y_t &= y_0 + \frac{b^2}{\text{intercept} + \text{slope} \cdot x_0 - y_0}
\end{aligned}$$

όπου  $(x_0, y_0)$  είναι το κέντρο της έλλειψης και  $a$  και  $b$ , ο μεγάλος και ο μικρός άξονάς της αντιστοίχως.

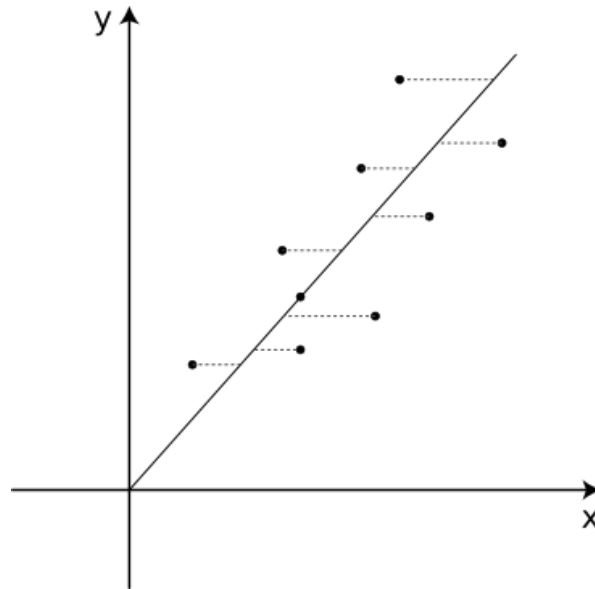
Αυτή η διεργασία επαναλαμβάνεται για κάθε μια από τις ελλείψεις που συσχετίζεται με την ανακατασκευασμένη τροχιά. Στη συνέχεια, η γραμμική παλινδρόμηση εφαρμόζεται στα επαπτόμενα σημεία. Οι ιδιότητες των ανακατασκευασμένων τροχιών, όπως προέκυψαν από την ανάλυση των ιστογραμμάτων, χρησιμοποιούνται ως αρχικές τιμές.

### 5.3.6 Έλεγχος προσαρμογής $\chi^2$

Τέλος, περνάμε τις ευθείες από έναν έλεγχο προσαρμογής  $\chi^2$  (chi-squared test). Το  $\chi^2$  test είναι στατιστικό-υποθετικό τεστ που κατασκευάζεται από το άθροισμα των

τετραγώνων των σφαλμάτων (σχήμα 5.3.Π):

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i,\text{line}})^2$$



**Σχήμα 5.3.Π:** Το  $\chi^2$  είναι το άθροισμα των τετραγώνων των μηκών των διακεκομμένων γραμμών

Μας ενδιαφέρει ο λόγος του  $\chi^2$  ως προς τον αριθμό βαθμών ελευθερίας (NDF). Πιο συγκεκριμένα, ο αριθμός βαθμών ελευθερίας είναι το πλήθος των τιμών στον τελικό υπολογισμό μιας στατιστικής οι οποίες είναι ελεύθερες να ποικίλουν. Συνεπώς, θέλουμε ο λόγος αυτός να είναι μικρότερος από 0.5:

$$\frac{\chi^2}{\text{NDF}} < 0.5$$

εναλλακτικά η ευθεία απορρίπτεται. Αυτό, έχει ως αποτέλεσμα να αφαιρεθούν ευθείες που δημιουργήθηκαν λόγω θορύβου από το σύνολο των αποτελεσμάτων μας.



# 6

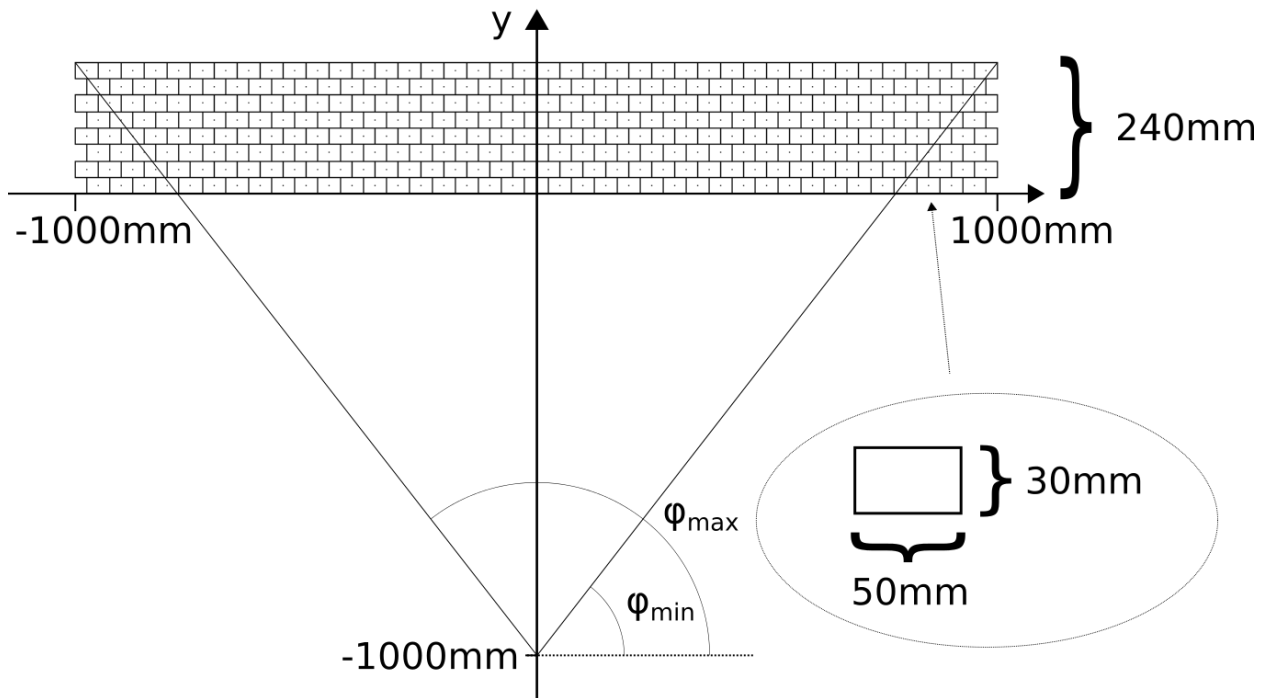
## Μελέτη απόδοσης

Για να αξιολογήσουμε τη σχεδιασμένη μέθοδο, δημιουργούμε έναν υποθετικό ανιχνευτή (σχήμα 6.0.I). Ο ανιχνευτής αυτός αποτελείται από 8 επίπεδα θαλάμων, καθένας από τους οποίους έχει ως σήμα εξόδου μια έλλειψη. Οι θάλαμοι έχουν ορθογώνια διατομή με πλάτους  $\text{ch}_{\text{width}} = 50\text{mm}$  και ύψους  $\text{ch}_{\text{height}} = 30\text{mm}$  (πίνακας 6.0.1).

**Πίνακας 6.0.1:** Προδιαγραφές του ανιχνευτή και των θαλάμων

Ιδιότητα	Τιμή
$n_{\text{layers}}$	8
$x_{\text{min}}$	-1 m
$x_{\text{max}}$	+1 m
$y_{\text{min}}$	0 mm
$y_{\text{max}}$	240 mm
$\text{ch}_{\text{width}}$	50 mm
$\text{ch}_{\text{height}}$	30 mm

Στη συνέχεια εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο Monte Carlo. Παράγουμε τυχαίες τροχιές και δημιουργούμε ελλείψεις για κάθε θάλαμο από τον οποίο περνά η κάθε τροχιά. Αφού παράξουμε τις ελλείψεις, διαταράσσουμε τα χαρακτηριστικά τους εφαρμόζοντας έναν Γκαουσιανό θόρυβο μέτρησης. Επιπλέον, τυχαίες ελλείψεις παράγονται ώστε να προσομοιώσουν τον θόρυβο των ηλεκτρονικών. Βασιζόμενοι σε αυτές τις



Σχήμα 6.0.I: Προδιαγραφές του ανιχνευτή και των θαλάμων.

ελλείψεις, ανιχνεύουμε την κοινή επαπτομένη ευθεία που με τη σειρά της εκπροσωπεί την τροχιά ενός υποτιθέμενου σωματιδίου. Συμβάν ονομάζουμε κάθε κύκλο δημιουργίας αρχικών τροχιών και ελλείψεων, και της ανακατασκευής των αρχικών τροχιών.

Η μελέτη πραγματοποιείται για συμβάντα της μιας τροχιάς αλλά και των πολλών τροχιών. Σε κάθε περίπτωση, υπολογίζονται οι ανακατασκευασμένοι παράμετροι της ευθείας.

## 6.1 Αποτελεσματικότητα ανακατασκευής, ρυθμός ψεύδους και ρυθμός αποτυχίας

Η αποτελεσματικότητα ανακατασκευής εισάγεται εδώ ώστε να αξιολογήσουμε την απόδοση του αλγορίθμου. Η αποτελεσματικότητα ανακατασκευής, αναφερόμενη ως αποτελεσματικότητα (efficiency) από δω και στο εξής, ορίζεται ως ο λόγος του πλήθους των τροχιών,  $N_{\text{match}}$ , των οποίων τα χαρακτηριστικά προσεγγίζουν αυτά

των αρχικών τροχιών προς το πλήθος των προσομοιωμένων, ή αλλιώς αρχικών, τροχιών,  $N_{\text{sim}}$ .

Μια ανακατασκευασμένη ευθεία της μορφής  $y = \text{slope}_r x + \text{intercept}_r$  θεωρείται ταιριαστή σε μια προσομοιωμένη ευθεία της μορφής  $y = \text{slope}_s x + \text{intercept}_s$  εάν:

$$\left| \frac{\text{slope}_{\text{sim}} - \text{slope}_{\text{reco}}}{\text{slope}_{\text{sim}}} \right| < \text{slope}_{\text{threshold}} \text{ και } \left| \frac{\text{intercept}_{\text{sim}} - \text{intercept}_{\text{reco}}}{\text{intercept}_{\text{sim}}} \right| < \text{intercept}_{\text{threshold}}$$

Εάν τα παραπάνω κριτήρια δεν πληρούνται, οι τροχιές θα κατηγοριοποιούνται ως ψευδείς. Ο ρυθμός εμφάνισης ψευδών αποτελεσμάτων καθορίζεται ως ο λόγος του πλήθους των ανακατασκευασμένων τροχιών που δεν έχουν ταιριάξει με μια προσομοιωμένη τροχιά  $N_{\text{fake}}$  προς το πλήθος των προσομοιωμένων τροχιών.

Τέλος, ο ρυθμός αποτυχίας ορίζεται σαν απουσία αποτελεσμάτων σε σύγκριση με τον αριθμό των αποτελεσμάτων που αναμένεται από το συμβάν. Συνεπώς, κάθε φορά που ένας αλγόριθμος αποτυγχάνει να εμφανίσει έναν αριθμό τροχιών, ίσο ή μεγαλύτερο από του αρχικού πλήθους των τροχιών, ο μετρητής αποτυχίας αυξάνεται κατά τον αριθμό των τροχιών που απέτυχε να παράξει.

## 6.2 Ανάλυση (Resolution)

Για την ποσοτική αξιολόγηση της ανάλυσης του αλγορίθμου, εισάγονται οι κατάλληλες παράμετροι. Αυτές αποτελούνται από την κλίση,  $\text{slope} = \tan \phi$ , και την τομή με τον άξονα του  $y$ ,  $\text{intercept}$ . Η αποτελεσματικότητα του αλγορίθμου θα κριθεί με βάση της διαφοράς μεταξύ των παραμέτρων των αρχικών τροχιών και των παραμέτρων των ανακατασκευασμένων τροχιών.

Οι τροχιές παράγονται με τυχαίες γωνίες  $\phi$  από μια πηγή που βρίσκεται 1m μακριά από τον ανιχνευτή. Οι τροχιές αυτές ανακατασκευάζονται με βάση την μέθοδο που επινοήσαμε και οι ανακατασκευασμένες παράμετροι συγκρίνονται με τις αρχικές προσομοιωμένες τιμές.

### 6.2.1 Συμβάντα μιας τροχιάς

Συμβάντα μιας τροχιάς παράγονται για διαφορετικές παραμέτρους θορύβου. Στο σχήμα 6.2.1 βλέπουμε τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων για διαταραχή των διαστάσεων  $a$  και  $b$  των ελλείψεων,  $\text{smearing} = 0 \mu\text{m}$  και  $\text{smearing} = 0.1 \mu\text{m}$  αλλά με

**Πίνακας 6.2.1:** Όρια και σταθερές χρησιμοποιούμενες κατά την εκτέλεση του αλγορίθμου

Σταθερά/ Όριο	Τιμή
Ελάχιστο ανώτατο ύψος	3 καμπύλες
Αριθμός κλάσεων $\theta$ -άξονα για πρωτεύων ιστόγραμμα	1000 bins
Αριθμός κλάσεων $r$ -άξονα για πρωτεύων ιστόγραμμα	1000 bins
Μέγεθος κλάσεων $\theta$ -άξονα για δευτερεύοντα ιστογράμματα $\sigma_\theta$	$10^{-4}$ rad
Μέγεθος κλάσεων $r$ -άξονα για δευτερεύοντα ιστογράμματα $\sigma_r$	0.05 $\mu\text{m}$
Τυπική απόκλιση Γκαουσιανού σήματος ως προς τον άξονα $\theta$ $\sigma_\theta$	$10^{-4}$ rad
Τυπική απόκλιση Γκαουσιανού σήματος ως προς τον άξονα $r$ $\sigma_r$	0.05 $\mu\text{m}$
Συντελεστής για τον έλεγχο εγγυήτας τροχιάς-έλλειψης $n_\sigma$	20
Ελάχιστες ελλείψεις ανά τροχιά	5 Ελλείψεις ανά τροχιά
$\chi^2/\text{NDF}$ όριο	0.5

απουσία κάθε θορύβου των ηλεκτρονικών. Στα σχήματα 6.2.Ια' και 6.2.Ιγ' βλέπουμε την Γκαουσιανή κατανομή των σχετικών σφαλμάτων που αφορούν την κλίση των ανακατασκευασμένων τροχιών για  $\text{smearing} = 0 \mu\text{m}$  και  $\text{smearing} = 0.1 \mu\text{m}$  αντιστοίχως. Τα σχετικά σφάλματα (relative errors) μπορούν να υπολογιστούν ως:

$$\text{Relative error} = \frac{\text{value}_{\text{sim}} - \text{value}_{\text{reco}}}{\text{value}_{\text{sim}}} 100\%$$

Στα σχήματα 6.2.Ιβ' και 6.2.Ιδ' μπορούμε να δούμε την Γκαουσιανή κατανομή των σχετικών σφαλμάτων που αφορούν την τομή των ανακατασκευασμένων τροχιών ως προς τον άξονα  $y$  για  $\text{smearing} = 0 \mu\text{m}$  και  $\text{smearing} = 0.1 \mu\text{m}$  αντιστοίχως. Τέλος, στα σχήματα 6.2.Ιε' και 6.2.Ιστ' βλέπουμε την Γκαουσιανή κατανομή των υπολοίπων μεταξύ των σημείων και των ανακατασκευασμένων τροχιών κατά τον άξονα  $y$  (residuals) για  $\text{smearing} = 0 \mu\text{m}$  και  $\text{smearing} = 0.1 \mu\text{m}$  αντιστοίχως.

Στους πίνακες 6.2.2 και 6.2.3 παρουσιάζουμε όλα τα αποτελέσματα για σταθερά επίπεδα θορύβου 0% και διαφορετικές τιμές  $\text{smearing}$ . Παρουσιάζουμε αυτά τα αποτελέσματα γραφικά στο σχήμα 6.2.ΙΙ. Στο γράφημα μπορούμε να δούμε ότι παρ'όλη την απότομη αύξηση των τυπικών αποκλίσεων από  $\text{smearing} = 0 \mu\text{m}$  μέχρι  $10 \mu\text{m}$ , παρουσιάζεται μια γραμμική σχέση (σχήμα 6.2.ΙΙβ') μεταξύ των τυπικών αποκλίσεων όλων των κλίσεων, τομών ως προς άξονα  $y$ , και υπολοίπων σε σχέση με το  $\text{smearing}$ .

Επίσης μπορούμε να δούμε ότι η αποδοτικότητα επίσης φθίνει γραμμικά, καθώς οι τιμές των smearing αυξάνονται (σχήμα 6.2.Πα΄).

**Πίνακας 6.2.2:** Αποδοτικότητα του αλγορίθμου για διάφορες τιμές διαταραχών smearing

Smearing	0 $\mu\text{m}$	10 $\mu\text{m}$	50 $\mu\text{m}$
Αποδοτικότητα [%]	$99.8 \pm 4.5$	$99.4 \pm 4.5$	$95.5 \pm 4.4$
Ρυθμός ψεύδους [%]	$0.0 \pm 0.0$	$0.0 \pm 0.0$	$0.6 \pm 0.3$
Ρυθμός αποτυχίας [%]	$0.2 \pm 0.1$	$0.6 \pm 0.3$	$3.9 \pm 0.6$
$\sigma_{\text{slope}}$ [%]	$(1.04 \pm 0.04) 10^{-5}$	$(1.21 \pm 0.05) 10^{-2}$	$(6.16 \pm 0.26) 10^{-2}$
$\sigma_{\text{intercept}}$ [%]	$(1.08 \pm 0.04) 10^{-5}$	$(1.36 \pm 0.05) 10^{-2}$	$(6.74 \pm 0.28) 10^{-2}$
$\sigma_{\text{residuals}}$ [ $\mu\text{m}$ ]	$(2.55 \pm 0.03) 10^{-4}$	$(2.56 \pm 0.03) 10^{-2}$	$(1.13 \pm 0.02) 10^{-1}$

Στο πίνακα 6.2.4 έχουμε τα αποτελέσματα για διάφορα επίπεδα θορύβου αλλά με μηδενική θόλωση (smearing) των διαστάσεων των ελλείψεων.

**Πίνακας 6.2.3:** Αποδοτικότητα του αλγορίθμου για διάφορες τιμές διαταραχών smearing

Smearing	100 $\mu\text{m}$	150 $\mu\text{m}$	200 $\mu\text{m}$
Αποδοτικότητα [%]	$88.6 \pm 4.1$	$82.8 \pm 4.1$	$76.8 \pm 3.7$
Ρυθμός ψεύδους [%]	$2.7 \pm 0.5$	$4.4 \pm 0.5$	$4.9 \pm 0.7$
Ρυθμός αποτυχίας [%]	$8.7 \pm 1.0$	$13.8 \pm 1.0$	$18.3 \pm 1.5$
$\sigma_{\text{slope}}$ [%]	$(1.22 \pm 0.05) 10^{-1}$	$(1.81 \pm 0.08) 10^{-1}$	$(2.40 \pm 0.12) 10^{-1}$
$\sigma_{\text{intercept}}$ [%]	$(1.34 \pm 0.06) 10^{-1}$	$(1.85 \pm 0.09) 10^{-1}$	$(2.41 \pm 0.12) 10^{-1}$
$\sigma_{\text{residuals}}$ [ $\mu\text{m}$ ]	$(2.19 \pm 0.03) 10^{-1}$	$(3.08 \pm 0.04) 10^{-1}$	$(3.71 \pm 0.05) 10^{-1}$

## 6.2.2 Συμβάντα πολλαπλών τροχιών

Συμβάντα δύο (εικόνα 6.2.IV) και τριών τροχιών παράγονται χωρίς κάποια παράμετρο θορύβου. Από το πίνακα 6.2.5 προκύπτει ότι ο αριθμός των τροχιών ελάχιστα

**Πίνακας 6.2.4:** Αποδοτικότητα του αλγορίθμου για διάφορες τιμές θορύβου noise

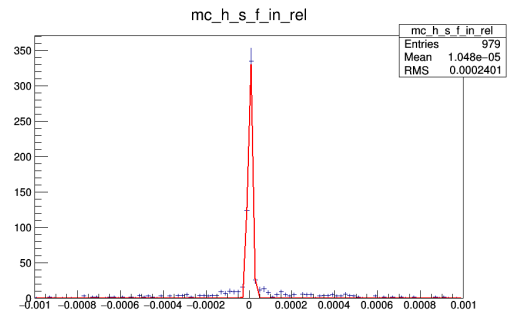
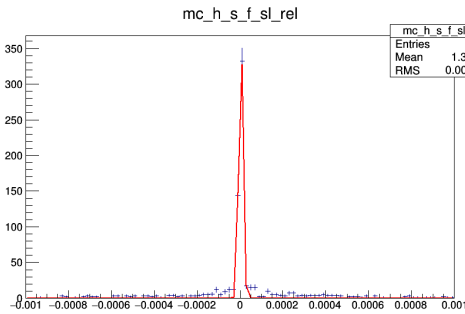
Επίπεδο θορύβου	0 %	10 %	50 %	100 %	150 %
Αποδοτικότητα [%]	99.8 ± 4.5	99.5 ± 4.5	98.8 ± 4.5	99.2 ± 4.5	98.2 ± 4.5
Ρυθμός ψεύδους [%]	0.0 ± 0.0	0.1 ± 0.1	0.6 ± 0.3	0.4 ± 0.2	0.7 ± 0.2
Ρυθμός αποτυχίας [%]	0.2 ± 0.1	0.4 ± 0.2	0.5 ± 0.2	0.4 ± 0.2	1.1 ± 0.3
$\sigma_{\text{slope}}$ [%]	$(1.04 \pm 0.04) 10^{-5}$	$(1.14 \pm 0.04) 10^{-5}$	$(1.08 \pm 0.04) 10^{-5}$	$(1.14 \pm 0.04) 10^{-5}$	$(1.14 \pm 0.04) 10^{-5}$
$\sigma_{\text{intercept}}$ [%]	$(1.08 \pm 0.04) 10^{-5}$	$(1.12 \pm 0.04) 10^{-5}$	$(1.11 \pm 0.04) 10^{-5}$	$(1.10 \pm 0.04) 10^{-5}$	$(1.07 \pm 0.03) 10^{-5}$
$\sigma_{\text{residuals}}$ [ $\mu\text{m}$ ]	$(2.55 \pm 0.03) 10^{-4}$	$(2.62 \pm 0.03) 10^{-4}$	$(2.55 \pm 0.03) 10^{-5}$	$(2.37 \pm 0.03) 10^{-5}$	$(2.20 \pm 0.02) 10^{-5}$

επιηρεάζει την αποτελεσματικότητα.

**Πίνακας 6.2.5:** Αποδοτικότητα του αλγορίθμου για διάφορες τιμές διαταραχών smearing

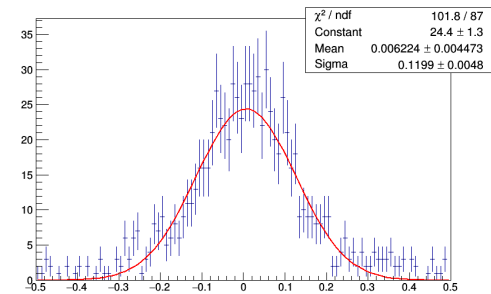
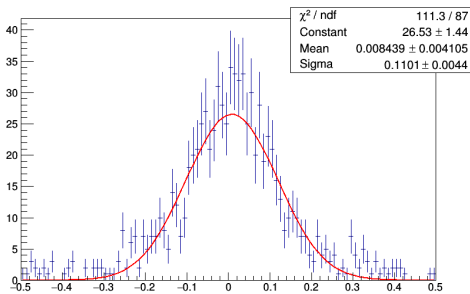
Πλήθος τροχιών	1	2	3
Αποδοτικότητα [%]	99.8 ± 4.5	98.8 ± 3.3	98.9 ± 3.3
Ρυθμός ψεύδους [%]	0.0 ± 0.0	1.0 ± 0.2	0.9 ± 0.2
Ρυθμός αποτυχίας [%]	0.2 ± 0.1	0.1 ± 0.1	0.1 ± 0.1
$\sigma_{\text{slope}}$ [%]	$(1.04 \pm 0.04) 10^{-5}$	$(1.16 \pm 0.03) 10^{-5}$	$(0.76 \pm 0.05) 10^{-5}$
$\sigma_{\text{intercept}}$ [%]	$(1.08 \pm 0.04) 10^{-5}$	$(1.12 \pm 0.03) 10^{-5}$	$(0.87 \pm 0.07) 10^{-5}$
$\sigma_{\text{residuals}}$ [ $\mu\text{m}$ ]	$(2.55 \pm 0.03) 10^{-4}$	$(2.65 \pm 0.02) 10^{-4}$	$(2.58 \pm 0.02) 10^{-4}$

Στην εικόνα 6.2.IV έχουμε ένα παράδειγμα ενός συμβάντος 2 τροχιών με 50% θόρυβο. Παρατηρούμε ότι βρήκε και τις 2 ευθείες ενώ είναι σχεδόν παράλληλες. Αν και το επίπεδο θορύβου δεν είναι αρκετά μεγάλο, στην περιοχή όπου βρίσκονται οι ελλείψεις των δύο τροχιών, υπάρχει μια πολύ μεγάλη πυκνότητα ελλείψεων. Με άλλα λόγια, οι ελλείψεις της μιας τροχιάς αποτελούν τον θόρυβο της διπλανής και το αντίστροφο.



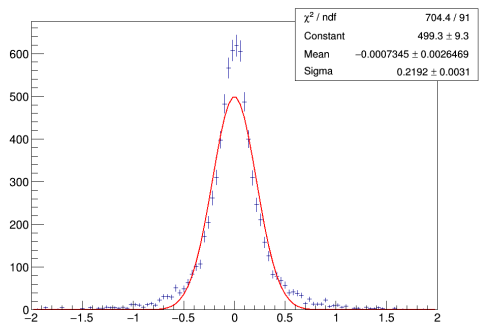
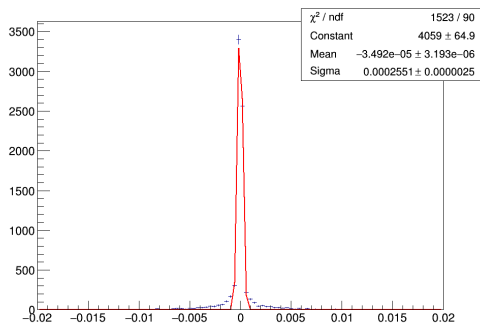
(α) Σχετικά σφάλματα της κλίσης [%]

(β) Σχετικά σφάλματα της τομής με τον άξονα  $y$  [%]



(γ) Σχετικά σφάλματα της κλίσης [%]

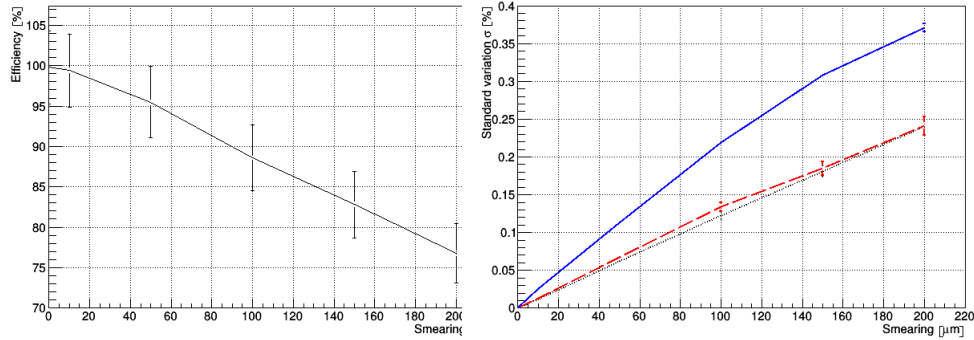
(δ) Σχετικά σφάλματα της τομής με τον άξονα  $y$  [%]



(ε) Residuals [mm]

(στ) Residuals [mm]

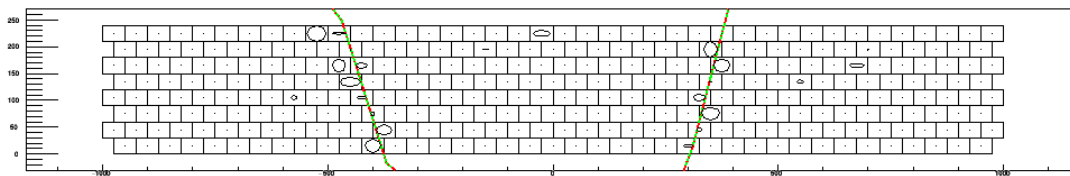
**Σχήμα 6.2.1:** Ιστογράμματα των αποτελεσμάτων της Monte Carlo για (α- β, ε) smearing = 0 μm και noise = 0%, (γ- δ, στ) smearing = 0.1 μm και noise = 0%.



(α') Η αποδοτικότητα του αλγορίθμου συναρτῆσει του smearing

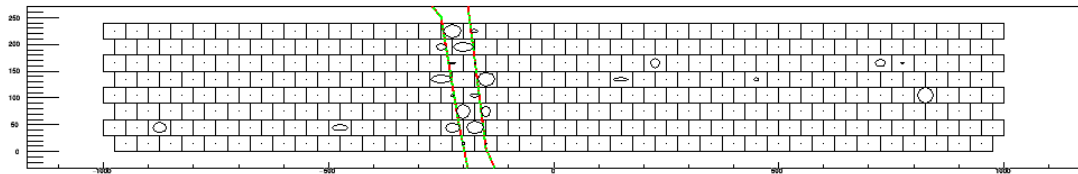
(β') Τυπική απόκλιση των σχετικών σφαλμάτων της κλίσης (κόκκινη διακεκομμένη γραμμῆ), και της τομῆς με τον άξονα  $y$  (μαύρη γραμμῆ) και τυπική απόκλιση των residuals (μπλε γραμμῆ) συναρτῆσει του smearing

**Σχῆμα 6.2.Π:** Αποτελέσματα για διάφορες τιμές smearing αλλά επίπεδο θορύβου 0%



**Σχῆμα 6.2.ΙΙΙ:** Ένα συμβάν των δύο τροχιών με 50% θόρυβο. Οι πράσινες ευθείες είναι οι ανακατασκευασμένες τροχιές. Οι κόκκινες διακεκομμένες ευθείες είναι οι αρχικές τροχιές. Από αυτό το σύνολο ελλείψεων, ο αλγόριθμος δημιούργησε τα ιστογράμματα του σχήματος 5.2.ΙΙΙ.





**Σχήμα 6.2.IV:** Ένα συμβάν των δύο τροχιών με 50% θόρυβο. Οι πράσινες ευθείες είναι οι ανακατασκευασμένες τροχιές. Οι κόκκινες διακεκομμένες ευθείες είναι οι αρχικές τροχιές. Ο αλγόριθμος βρήκε και τις 2 ευθείες ενώ είναι σχεδόν παράλληλες. Δηλαδή ενώ οι ελλείψεις της αριστερής τροχιάς αποτελούν τον θόρυβο για την δεξιά τροχιά και το αντίστροφο.



## Συμπεράσματα

Στα πλαίσια αυτής της διπλωματικής εργασίας, μια μέθοδος ανακατασκευής τροχιών δημιουργήθηκε, χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό Legendre ελλείψεων σε συνδυασμό με Γκαουσιανά αθροίσματα και τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων (least square fit). Αυτή η μέθοδος εφαρμόζεται σε μια σειρά από ελλείψεις χρησιμοποιώντας προσομοιωμένα δεδομένα μέσω της τεχνικής Monte Carlo.

### 7.1 Επιτυχία της μεθόδου

Η μέθοδός μας, αν και δεν παρουσίασε την ίδια ποιότητα αποτελεσμάτων με την παλαιότερη εργασία πάνω στους κύκλους, είναι και πάλι επιτυχής. Πριν την συγκρίνουμε με τους κύκλους, θα πρέπει να λάβουμε υπ'όψιν μας ότι η έλλειψη είναι πολυπλοκότερη του κύκλου, ειδικά όταν πρέπει να εκτελέσουμε μια γεωμετρική ανάλυση που αφορά τις εφαπτομένες της.

Στην περίπτωση του κύκλου, η μόνη διαφορά μεταξύ ενός δεδομένου συνόλου κύκλων, με εξαίρεση την θέση του κάθε κύκλου, είναι η ακτίνα τους. Αν γενικεύσουμε τον κύκλο με χαρακτηριστικά έλλειψης, τότε εισάγουμε την έννοια της εκκεντρότητας. Δηλαδή την σχέση των δύο ακτίνων  $a$  και  $b$ . Ο γενικευμένος κύκλος, έχει φυσικά ίσες αυτές τις δύο ακτίνες και κατ'επέκτασιν, όλοι οι κύκλοι έχουν εκκεντρότητα ίση με μηδέν. Αντιθέτως, οι ελλείψεις μας δεν είχαν ίδιες εκκεντρότητες μεταξύ τους. Αυτό περιπλέκει την κατάσταση περαιτέρω, όταν θολώνουμε τις διαστάσεις τους για την προσομοίωση του θορύβου.

Παρόλα αυτά η μέθοδός μας λειτούργησε με επιτυχία, ειδικά σε συνθήκες υψηλού

θορύβου μηχανής αλλά και σε συνθήκες πολλαπλών τροχιών. Είδαμε ακόμα και παράδειγμα όπου ενώ δύο τροχιές ήταν πολύ κοντά μεταξύ τους, και παράλληλα με θόρυβο ηλεκτρονικών πολύ κοντά στις τροχιές, ο αλγόριθμος κατάφερε να εντοπίσει και τις δύο.

## 7.2 Δυσκολίες

Κατά την υλοποίηση της μεθόδου τα προβλήματα που αντιμετωπίσαμε περιορίστηκαν κυρίως σε προβλήματα προσαρμογής της μεθόδου του κύκλου στην έλλειψη ενώ φάνηκε, ότι θα έπρεπε να είχε προσεγγιστεί εκ νέου. Επίσης, υλοποιήθηκε με μια πολύ δύσκολη γλώσσα προγραμματισμού, την C++, μέσα σε ένα πλαίσιο λογισμικού του CERN, το ROOT.

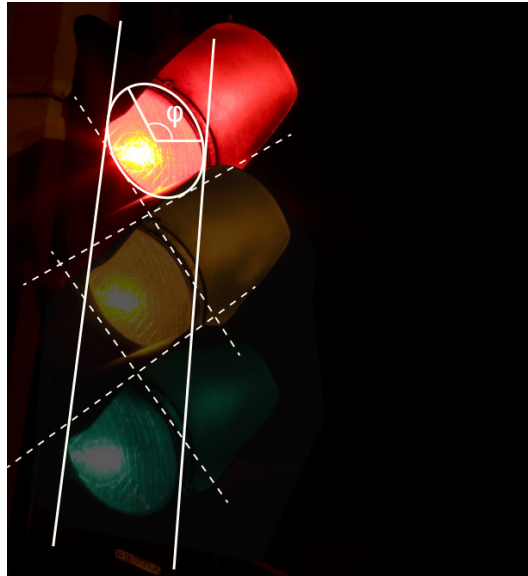
Η μέθοδος αρχικά ήταν υπολογιστικά βαριά και χρειαζόταν χρόνο για να τρέξει ένα συμβάν. Όμως, με εκτεταμένες προσπάθειες βελτιστοποίησης, τώρα πια είναι πολύ αποδοτική αλγοριθμικά και προσφέρει τα αποτελέσματα των συμβάντων άμεσα. Κατ'επέκταση, και η μέθοδος Monte Carlo επιστρέφει γρήγορα αποτελέσματα.

Άλλη μια δυσκολία που αντιμετωπίσαμε, ήταν η γενίκευση της μεθόδου ώστε να είναι ανεξάρτητη του πλαισίου του προβλήματος. Με άλλα λόγια, η μόνη είσοδος στον αλγόριθμο να είναι το σύνολο των ελλείψεων. Αυτό το πρόβλημα επίσης αντιμετωπίστηκε, με μια μοναδική εξαίρεση, των διαστάσεων του ανιχνευτή για την δημιουργία του ιστογράμματος του πρώτου βήματος. Όμως και αυτό θα μπορούσε να ξεπεραστεί αν χρησιμοποιούσαμε τα κέντρα των ακραίων ελλείψεων για τα όρια του ιστογράμματος. Ο λόγος που δεν το εφαρμόσαμε, ήταν ότι προτιμήσαμε τη σταθερότητα στο πρωτεύων ιστόγραμμα και όχι τις τυχαίες αλλαγές του, είτε αφορούσαν το μέγεθος των κλάσεων, είτε το πλήθος τους. Επίσης, σε περιπτώσεις θορύβου, δεν θα ήταν αποδοτικότερο, γιατί έτσι και αλλιώς θα υπήρχαν ελλείψεις σε ακραίες θέσεις, άρα και πάλι θα έπρεπε να αναλύσουμε όλο το χώρο του ανιχνευτή.

## 7.3 Περαιτέρω μελέτη

Όπως έχουμε προαναφέρει, η εργασία αυτή είναι πάνω στις συμμετρικές ελλείψεις. Άρα θα μπορούσε να γενικευτεί και σε ελλείψεις με κλίση  $\phi$  διάφορη του μηδενός. Ιδανικά αυτό θα μπορούσε να αποτελέσει την βάση για εφαρμογές στη καθημερι-

νότητα, όπου οι ελλείψεις σπανίως είναι συμμετρικές (εικόνα 7.3.I).



**Σχήμα 7.3.I:** Παράδειγμα εφαρμογής σε πρόβλημα αναγνώρισης προτύπων

Επίσης, δείξαμε ότι ο μετασχηματισμός Legendre μπορεί να εφαρμοστεί και σε συναρτήσεις  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Οπότε μια άλλη πιθανή προέκταση της εργασίας θα ήταν σε ελλειψοειδείς επιφάνειες.



## Βιβλιογραφία

- [1] T. Alexopoulos et al., Implementation of the Legendre Transform for track reconstruction in drift tube chambers, *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, 592, 456-462
- [2] ATLAS collaboration The ATLAS Experiment at the CERN Large Hadron Collider, *Journal of Instrumentation*, 3, S08003
- [3] R. K. P. Zia, Edward F. Redish, Susan R. McKay, Making Sense of the Legendre transform, *American Journal of Physics*, 77, 614-622, arXiv:0806.1147v2
- [4] Sam Kennerly, A graphical derivation of the Legendre transform, 12 April 2011
- [5] Joel W. Cannon, Connecting thermodynamics to students' calculus, *American Journal of Physics*, 72, 753-757
- [6] W. C. Kerr, J. C. Macosko, Thermodynamic Venn diagrams: Sorting out forces fluxes, and Legendre transforms, *American Association of Physics Teachers*, 22 May 2011
- [7] A. Handa, R. A. Newcombe, A. Angeli, A. J. Davison, Applications of Legendre-Fenchel transformation to computer vision problems
- [8] T. Alexopoulos et al., Identification of circles from datapoints using Gaussian sums, *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, 745, 16-23, arXiv:1403.4413v3