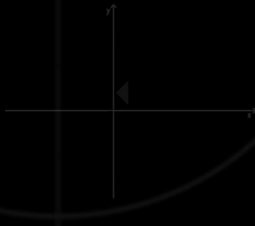


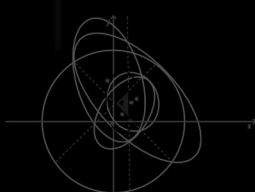
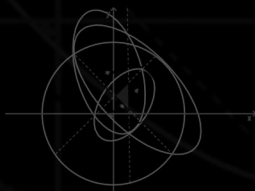
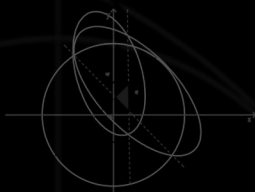
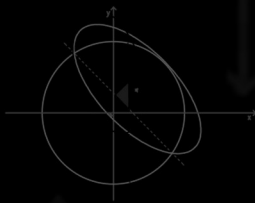


ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΕΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΔΟΜΟΣΤΑΤΙΚΗΣ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΣΤΑΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΝΤΙΣΕΙΣΜΙΚΩΝ ΕΡΕΥΝΩΝ



ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Οριακή Πλαστική Ανάλυση των Κατασκευών με Αλγορίθμους Ελλειψοειδούς και Σφαίρας



Θεοδώρα Λεβέντη
Διπλωματούχος Πολιτικός Μηχανικός Α.Π.Θ.

ΑΘΗΝΑ 2015



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΕΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΔΟΜΟΣΤΑΤΙΚΗΣ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΣΤΑΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΝΤΙΣΕΙΣΜΙΚΩΝ ΕΡΓΩΝ
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Οριακή Πλαστική Ανάλυση των Κατασκευών με Αλγόριθμους Ελλειψοειδούς και Σφαίρας

Θεοδώρα Λεβέντη

Διπλωματούχος Πολιτικός Μηχανικός Α.Π.Θ.

ΑΘΗΝΑ 2015

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ.....	1
ΠΕΡΙΛΗΨΗ.....	2
ABSTRACT.....	6
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΛΛΕΙΨΟΕΙΔΟΥΣ.....	13
1.1 Η ΣΥΜΒΟΛΗ ΤΟΥ ΚΗΑΣΗΙΑΝ.....	13
1.2 ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΓΙΑ ΤΑ ΕΛΛΕΙΨΟΕΙΔΗ.....	13
1.3 ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ ΣΤΗΝ ΘΕΩΡΙΑ ΠΟΛΥΠΛΟΚΟΤΗΤΑΣ.....	15
1.4 ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΛΛΕΙΨΟΕΙΔΟΥΣ ΓΙΑ ΕΠΙΛΥΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΑΝΙΣΟ- ΤΗΤΩΝ.....	17
1.4.1 ΚΕΝΤΡΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ.....	17
1.4.2 ΒΑΘΙΕΣ ΤΟΜΕΣ.....	23
1.5 ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΛΛΕΙΨΟΕΙΔΟΥΣ ΓΙΑ ΕΠΙΛΥΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ.....	24
1.6 ΑΚΡΙΒΗΣ ΤΙΜΗ ΑΠΟ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΗ.....	27
1.7 ΜΕΘΟΔΟΣ ΚΕΝΤΡΙΚΩΝ ΤΟΜΩΝ ΓΙΑ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΗ ΑΚΡΙΒΕΙΑ.....	28
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΜΕΘΟΔΟΙ ΣΦΑΙΡΑΣ.....	35
2.1 ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΙ – ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ.....	36
2.1.1 ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΙ.....	36
2.1.2 ΚΕΝΤΡΟ ΜΠΑΛΑΣ ΠΟΛΥΤΟΠΟΥ (Ball Center of Polytope).....	38
2.1.3 ΑΠΟΔΟΤΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ ΚΙΝΗΣΗΣ.....	39
2.2 ΜΕΘΟΔΟΣ ΣΦΑΙΡΑΣ 1 (SM-1).....	39
2.2.1 ΚΕΝΤΡΟΠΟΙΟΝ ΒΗΜΑ/ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΚΕΝΤΡΟΥ ΜΠΑΛΑΣ.....	39
2.2.1.1 LSFN ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ SM-1 (using line search in facet normal directions).....	40
2.2.1.2 LSCPD ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ SM-1 (sequence of line search steps using computed profitable directions).....	41
2.2.2 ΒΗΜΑΤΑ ΚΑΘΟΔΟΥ ΤΗΣ SM-1.....	44
2.3 ΜΕΘΟΔΟΣ ΣΦΑΙΡΑΣ 2 (SM-2).....	46
2.3.1 ΚΕΝΤΡΟΠΟΙΟΝ ΒΗΜΑ ΤΗΣ SM-2.....	47
2.3.1.1 LSFN ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ SM-2.....	47
2.3.1.2 LSCPD ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ SM-2.....	47
2.3.2 ΒΗΜΑΤΑ ΚΑΘΟΔΟΥ ΤΗΣ SM-2.....	48
2.4 ΜΕΘΟΔΟΣ ΣΦΑΙΡΑΣ 3 (SM-3).....	51
2.4.1 ΚΕΝΤΡΟΠΟΙΟΝ ΒΗΜΑ ΤΗΣ SM-3.....	51
2.4.2 ΒΗΜΑΤΑ ΚΑΘΟΔΟΥ ΤΗΣ SM-3.....	52
2.5 ΜΕΘΟΔΟΣ ΣΦΑΙΡΑΣ 4 (SM-4).....	52
2.5.1 ΚΕΝΤΡΟΠΟΙΟΝ ΒΗΜΑ ΤΗΣ SM-4.....	52
2.5.2 ΒΗΜΑΤΑ ΚΑΘΟΔΟΥ ΤΗΣ SM-4.....	53
2.6 ΜΕΘΟΔΟΣ ΣΦΑΙΡΑΣ 5 (SM-5).....	53
2.6.1 ΚΕΝΤΡΟΠΟΙΟΝ ΒΗΜΑ ΤΗΣ SM-5.....	53
2.6.1.1 ΜΕΤΑΦΟΡΑ ΑΡΧΗΣ ΣΤΟ $\mathbf{x}^{r,k}$	54
2.6.1.2 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΗΣ MinES ΤΩΝ ΔΥΪΚΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ.....	55
2.6.1.3 ΑΠΟΔΟΤΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ ΚΙΝΗΣΗΣ ΑΠΟ ΤΟ $\mathbf{x}^{r,k} \in K^{r+1}$	55
2.6.1.4 ΜΕΓΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΑΚΤΙΝΑΣ $\delta(\mathbf{x}^{r,k} + \alpha \mathbf{g}, K^{r+1})$ ΓΙΑ $\alpha \geq 0$	56
2.6.2 ΒΗΜΑΤΑ ΚΑΘΟΔΟΥ ΤΗΣ SM-5.....	58
2.7 ΜΕΘΟΔΟΣ ΣΦΑΙΡΑΣ 6 (SM-6).....	58
2.7.1 ΚΕΝΤΡΟΠΟΙΟΝ ΒΗΜΑ ΤΗΣ SM-6.....	59

2.7.1.1 ΒΗΜΑ C1.....	59
2.7.1.2 ΒΗΜΑ C2.....	60
2.7.2 ΒΗΜΑΤΑ ΚΑΘΟΔΟΥ ΤΗΣ SM-6.....	61
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΟΡΙΑΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ.....	65
3.1 ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ.....	65
3.2 ΟΡΙΑΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΜΕ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟ.....	67
3.2.1 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ ΓΙΑ ΕΠΙΠΕΔΟΥΣ ΦΟΡΕΙΣ.....	67
3.2.2 ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΔΙΑΡΡΟΗΣ.....	68
3.2.3 ΠΡΩΤΑΡΧΙΚΟ ΚΑΙ ΔΥΙΚΟ LP ΓΙΑ ΤΗΝ ΟΡΙΑΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ.....	71
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΕΠΛΥΣΗ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΩΝ ΟΡΙΑΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ.....	75
4.1 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.....	75
4.2 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.....	82
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ.....	87
5.1 ΕΛΛΕΙΨΟΕΙΔΗΣ ΜΕΘΟΔΟΣ.....	87
5.2 ΜΕΘΟΔΟΣ ΣΦΑΙΡΑΣ 1.....	87
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ.....	91
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ: ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΤΗΣ ELLIPSOID METHOD.....	91
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....	111

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΕΙΚΟΝΩΝ

Εικόνα 1.1: Κεντρικές τομές.....	19
Εικόνα 1.2: Βαθιές τομές.....	19
Εικόνα 1.3: Σχηματική αναπαράσταση παραδείγματος εύρεσης εφικτής λύσης 2-διάστατου προβλήματος με χρήση EM.....	20
Εικόνα 3.1: Κριτήριο διαρροής για αλληλεπίδραση N-M [Gendy, Saleeb (1993)].....	69
Εικόνα 3.2: Λεπτομέρεια επιφάνειας διαρροής [σχήμα M.Μανωλά, Manola (2015)].....	70
Εικόνα 4.1: Φορέας Παραδείγματος 1: Απαραμόρφωτος και κατά την κατάρρευσή του.....	75
Εικόνα 4.2: Διάγραμμα προκύπτοντος φοριστικού συντελεστή α συναρτήσει της παραμέτρου M (Δράση M).....	79
Εικόνα 4.3: Διάγραμμα προκύπτοντος συντελεστή α συναρτήσει της παραμέτρου M (MN).....	79
Εικόνα 4.4: Διάγραμμα προκύπτοντος φοριστικού συντελεστή M συναρτήσει της παραμέτρου M (MNQ).....	80
Εικόνα 4.5: Κατανομή σωστών και λανθασμένων τιμών του α συναρτήσει του M (Δράση M).....	80
Εικόνα 4.6: Κατανομή σωστών και λανθασμένων τιμών του α συναρτήσει του M (MN).....	80
Εικόνα 4.7: Κατανομή σωστών και μη σωστών τιμών του α συναρτήσει του M (MNQ).....	81
Εικόνα 4.8: Φορέας Παραδείγματος 2: απαραμόρφωτος και κατά την κατάρρευσή του.....	82
Εικόνα 4.9: Διάγραμμα προκύπτοντος φοριστικού συντελεστή α συναρτήσει της παραμέτρου M (Δράση M).....	84
Εικόνα 4.10: Κατανομή σωστών και λανθασμένων τιμών του α συναρτήσει του M (Δράση M).....	84

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΠΙΝΑΚΩΝ

Πίνακας 4.1: Αποτελέσματα αναλύσεων Παραδείγματος 1.....	76
Πίνακας 4.2: Αποτελέσματα SM1-Παράδειγμα 1 για δράση κάμψης M (α).....	76
Πίνακας 4.3: Αποτελέσματα SM1-Παράδειγμα 1 για δράση κάμψης M (β).....	77
Πίνακας 4.4: Αποτελέσματα SM1-Παράδειγμα 1 για αλληλεπίδραση κάμψης M - αξονικής δύναμης N (α).....	77
Πίνακας 4.5: Αποτελέσματα SM1-Παράδειγμα 1 για αλληλεπίδραση κάμψης M - αξονικής δύναμης N (β).....	78
Πίνακας 4.6: Αποτελέσματα SM1-Παράδειγμα 1 για αλληλεπίδραση κάμψης M - αξονικής δύναμης N – τέμνουσας Q (α).....	78
Πίνακας 4.7: Αποτελέσματα SM1-Παράδειγμα 1 για αλληλεπίδραση κάμψης M - αξονικής δύναμης N – τέμνουσας Q (β).....	78
Πίνακας 4.8: Αποτελέσματα αναλύσεων Παραδείγματος 2.....	83
Πίνακας 4.9: Αποτελέσματα SM1-Παράδειγμα 2 για δράση κάμψης M (α).....	83
Πίνακας 4.10: Αποτελέσματα SM1-Παράδειγμα 2 για δράση κάμψης M (β).....	83

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το 1979 ο L.Khachiyan δημοσίευσε τον αλγόριθμο ελλειψοειδούς για προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού που αποδείκνυε ότι τα προβλήματα αυτής της κατηγορίας επιλύονται σε πολυωνυμικό χρόνο. Παρότι ο αλγόριθμος ελλειψοειδούς έχει άρτια μαθηματική θεμελίωση και επιτρέπει στον μελετητή να χρησιμοποιήσει την διαισθητική του αντίληψη για να κατανοήσει το πρόβλημα του γραμμικού προγραμματισμού, υστερεί σημαντικά στην πρακτική εφαρμογή του και δεν μπορεί σε καμία περίπτωση να ανταγωνιστεί άλλους αλγορίθμους, όπως την Simplex ή αλγορίθμους εσωτερικού σημείου (Interior point methods).

Αρκετά χρόνια αργότερα, το 2005, ο K.Murty ανέπτυξε την πρώτη μέθοδο σφαίρας για γραμμικό προγραμματισμό (sphere method 1). Ο αλγόριθμος σφαίρας 1 και οι μεταγενέστεροι αλγόριθμοι σφαίρας (2 έως 7) επιτρέπουν επίσης τη γεωμετρική αντίληψη του προβλήματος. Δεν διαθέτουν τα μαθηματικά θεμέλια της μεθόδου ελλειψοειδούς, αλλά λειτουργούν πολύ γρήγορα σε πρακτικές εφαρμογές. Ο δημιουργός της και συνεργάτες του δημοσιεύουν αποτελέσματα βάσει των οποίων φαίνεται ότι μπορούν να ανταγωνιστούν τις εδραιωμένες μεθόδους Simplex και IPMs.

Στην παρούσα μεταπτυχιακή εργασία θεωρήθηκε ενδιαφέρον να μελετηθούν σε βάθος ο αλγόριθμος ελλειψοειδούς και οι αλγόριθμοι σφαίρας, να γίνει εφαρμογή αυτών σε προβλήματα οριακής πλαστικής ανάλυσης κατασκευών και να εξεταστεί η πιθανότητα βελτίωσης της χρήσης τους. Τα αποτελέσματα της διερεύνησης αυτής αναλύονται κριτικά και σχολιάζονται.

Με την ευκαιρία και από τη θέση αυτή επιθυμώ να εκφράσω τις θερμές ευχαριστίες μου στο σεβαστό Καθηγητή κ. Βλάση Κουμούση, για την επιλογή και ανάθεση του θέματος της μεταπτυχιακής εργασίας μου, καθώς και για την καθοδήγησή του.

Θερμές ευχαριστίες επίσης να εκφράσω στην Αικατερίνη-Μαρία (Μαρτίνα) Λεβέντη για την πολύτιμη βοήθεια και γενική υποστήριξη, στην Βασιλική Φίκα για τις παρατηρήσεις της πάνω στο κείμενο και στον Δημήτρη Κάτσιο για την γόνιμη συζήτηση πάνω στο θέμα.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η ανάλυση των κατασκευών και ο ασφαλής, λειτουργικός και οικονομικός σχεδιασμός τους αποτελούν αντικείμενο εργασίας και στόχο ενός πολιτικού μηχανικού. Η ασφάλεια επιτάσσει η κατασκευή να διατηρεί την στατική της επάρκεια ακόμη και υπό τις δυσμενέστερες φορτίσεις που μπορεί να τις επιβληθούν στον χρόνο ζωής της, ενώ η λειτουργικότητα να εκπληρώνει απρόσκοπτα την λειτουργία για την οποία σχεδιάστηκε στις συνήθεις συνθήκες. Από την άλλη πλευρά η οικονομία αποτρέπει τον μελετητή από την επιλογή υπερδιαστασιολόγησης και οδηγεί σε επιλογές που εκμεταλλεύονται στον μέγιστο βαθμό τα περιθώρια αντοχών της.

Η ταυτόχρονη ικανοποίηση ασφαλούς σχεδιασμού και πλήρους εκμετάλλευσης των διαθέσιμων αντοχών εντοπίζεται ακριβώς την στιγμή πριν την αστοχία της κατασκευής, όπου ο όρος αστοχία μπορεί να αναφέρεται στην μετατροπή της κατασκευής σε μηχανισμό (κατάρρευση), στην υπέρβαση προκαθορισμένων επιτρεπόμενων παραμορφώσεων ή σε όποια άλλη κατάσταση ο μηχανικός θέτει ως οριακή στον σχεδιασμό του.

Στην περίπτωση που η αστοχία ταυτίζεται με την κατάρρευση έχει αναπτυχθεί πληθώρα μεθόδων ανάλυσης της κατασκευής. Σε κάθε πρόβλημα μπορεί να επιδιώκεται διαφορετικό ζητούμενο, όπως για παράδειγμα η μεγιστοποίηση των φορτίων για δεδομένο σχεδιασμό ή η ελαχιστοποίηση του βάρους για δεδομένη φορτιστική κατάσταση. Οι περισσότερες μέθοδοι παρακολουθούν την ελαστική και ανελαστική συμπεριφορά της έως την κατάρρευση. Όμως το οριακό φορτίο (φορτιστικός συντελεστής κατάρρευσης α) ή το ελάχιστο βάρος w και η οριακή μορφή είναι δυνατόν να υπολογιστούν και απευθείας με εφαρμογή μεθόδων οριακής ανάλυσης.

Η οριακή ανάλυση βασίζεται στην παραδοχή τελείως πλαστικής συμπεριφοράς υλικού. Η μαθηματική διατύπωση του προβλήματος με χρήση μητρωικού λογισμού σε συνδυασμό με τα βασικά θεώρημα της οριακής ανάλυσης (στατικό, κινηματικό και θεώρημα μοναδικότητας λύσης) επιτρέπουν την επίλυσή του με εφαρμογή μεθόδων μαθηματικού προγραμματισμού. Ο μαθηματικός προγραμματισμός οδηγεί στον υπολογισμό βέλτιστης λύσης που ικανοποιεί προκαθορισμένους περιορισμούς και τοιουτοτρόπως μπορεί να προσδιοριστεί η τελική κατάσταση μιας κατασκευής στην οποία να ικανοποιούνται οι συνθήκες ισορροπίας και συμβιβαστού.

Στην περίπτωση που το υλικό είναι στερεό-ιδεωδώς πλαστικό, τα κριτήρια διαρροής διατομής είναι γραμμικοποιημένα, και δεν υπάρχουν περιορισμοί στις παραμορφώσεις της κατασκευής, το πρόβλημα που μορφώνεται εντάσσεται στην κατηγορία προβλημάτων βελτιστοποίησης γραμμικού προγραμματισμού.

Γενικά και σύμφωνα με τον Rao (2009) το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού μπορεί να διατυπωθεί ως

Πρωταρχικό

$minimize \ c \cdot X$

μεταβλητή $x_i \geq 0$

Δυϊκό

$maximize \ Y \cdot b$

i -στός ανισοτικός περιορισμός $Y \cdot A_i \leq c_i$

μεταβλητή x_i χωρίς περιορισμό προσήμου
 j -στός ισοτικός περιορισμός $X \cdot A_j = b_j$
 j -στός ανισοτικός περιορισμός $X \cdot A_j \leq b_j$
 μητρώο συντελεστών $A = [A_1 \dots A_m]$
 right-hand διάνυσμα b
 συντελεστές κόστους c

i -στός ισοτικός περιορισμός $Y \cdot A_i = c_i$
 μεταβλητή y_j χωρίς περιορισμό προσήμου
 μεταβλητή $y_j \geq 0$
 μητρώο συντελεστών $A^T = [A_1 \dots A_m]^T$
 right-hand διάνυσμα c
 συντελεστές κόστους b

ενώ συγκεκριμένα το στατικό θεώρημα της οριακής ανάλυσης μπορεί να διατυπωθεί ως πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού με την μορφή:

$$\begin{aligned} \max \quad & a \\ \text{s.t.} \quad & -B s + a f = -f_d \\ & N^T s \leq r \\ & a \geq 0 \end{aligned}$$

όπου (s, a) οι μεταβλητές σχεδιασμού, με a τον φορτιστικό συντελεστή.

Για την επίλυση προβλημάτων LPs υπάρχουν πολλοί, διαφορετικοί αλγόριθμοι. Καθένας εξ αυτών εμφανίζει πλεονεκτήματα ή μειονεκτήματα που τον καθιστούν κατάλληλο ή μη κατάλληλο για τα είδη προβλημάτων που καλείται να λύσει. Κατηγοριοποιούνται με βάση διάφορα χαρακτηριστικά τους και ένα βασικό στοιχείο διαχωρισμού αποτελεί το αν είναι εσωτερικού σημείου ή συνόρου - simplex.

Οι δύο αλγόριθμοι που επελέγησαν στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας κατατάσσονται στους αλγόριθμους εσωτερικού σημείου και επίσης ανήκουν στους γεωμετρικούς αλγόριθμους. Ο πρώτος ονομάζεται ελλειψοειδής (Ellipsoid Method), αναπτύχθηκε από τον Kachiyan το 1979 και πρόκειται για τον πρώτο αλγόριθμο που αποδεικνύει ότι το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού επιλύεται σε πολυωνυμικό χρόνο. Παρότι από θεωρητικής πλευράς ο αλγόριθμος ελλειψοειδούς είναι μαθηματικά άρτιος και πολύ σημαντικός ιστορικά, σε πρακτικό επίπεδο και συγκρινόμενος με άλλες μεθόδους λειτουργεί πολύ αργά και χρειάζεται μεγάλο αριθμό επαναλήψεων για να συγκλίνει.

Αρχικό στόχο της εργασίας αποτέλεσε η βελτίωση του αλγορίθμου, ώστε να λειτουργεί γρηγορότερα, καθώς και η εφαρμογή του σε προβλήματα οριακής ανάλυσης. Τόσο η εκτεταμένη βιβλιογραφική έρευνα όσο και πειραματικές αναλύσεις με χρήση Matlab έδειξαν ότι μικρές αλλαγές που μπορούν να εφαρμοστούν στον αλγόριθμο δεν αποδεικνύονται ικανές να τον βελτιώσουν τόσο, ώστε να γίνει ανταγωνιστικός ως προς άλλους χρησιμοποιούμενους αλγορίθμους, όπως την μέθοδο Simplex (Dantzig 1947) ή την IPM του Karmaakar. Ειδικά για την περίπτωση προβλημάτων οριακής ανάλυσης, η εκμετάλλευση των οριακών τιμών στις μεταβλητές σχεδιασμού s , που ταυτίζονται με τις αντοχές των διατομών, επέτρεψε την χρήση του αλγορίθμου σε προβλήματα μεγάλου μεγέθους, χωρίς όμως να βελτιώνεται η απόδοσή του. Βεβαίως, στην περίπτωση που αγνοήθηκαν τα όρια αυ-

τά ο αλγόριθμος τερμάτιζε πολύ νωρίς επειδή η τιμή της ακτίνας του αρχικού κύκλου ήταν άπειρη (inf).

Λόγω της μεγάλης θεωρητικής αξίας του αλγορίθμου, τμήμα της εργασίας αφιερώθηκε στην συγκέντρωση και ανάλυση των μαθηματικών αποδείξεων των επιμέρους θεωρημάτων, λημμάτων και προτάσεων που τελικά οδηγούν στην άρτια θεμελίωσή του. Επίσης, κάνοντας χρήση του κώδικα Matlab της μεθόδου ελλειψοειδούς που δημιουργήθηκε στο πλαίσιο μεταπτυχιακής εργασίας του F. Stallmann (2014) και διατίθεται στο διαδίκτυο επιλύθηκαν παραδείγματα οριακής ανάλυσης. Η απόδοση της μεθόδου σε σχέση με την linprog που διαθέτει εγγενώς η Matlab είναι όντως αποκαρδιωτική. Ενδεικτικά αναφέρεται ότι στις 6 επαναλήψεις της linprog αντιστοιχούσαν περί τις 6500 επαναλήψεις της μεθόδου ελλειψοειδούς, στις 15 της linprog περίπου 50000 της ελλειψοειδούς, ενώ όσο το μέγεθος του στιγμιότυπου μεγάλωνε, τόσο η διαφορά γινόταν μεγαλύτερη.

Ο δεύτερος αλγόριθμος που μελετήθηκε είναι ο αλγόριθμος ή μέθοδος σφαίρας (Sphere method), ο οποίος μετά την αρχική του διατύπωση το 2005 (Murty 2005), βελτιώθηκε και δημοσιεύτηκαν 5 παραλλαγές του έως και σήμερα. Ο συγκεκριμένος αλγόριθμος κατατάσσεται στους αλγορίθμους διόρθωσης και πρόβλεψης. Κάθε γενική επανάληψή του αποτελείται από δύο διακριτά υπολογιστικά σκέλη: το κεντροποιόν βήμα, με το οποίο διορθώνεται η λύση στην οποία είχε καταλήξει η προηγούμενη επανάληψη, και το βήμα καθόδου, με το οποίο γίνεται υπολογισμός της επόμενης λύσης.

Ως μέθοδος μοιράζεται κοινά στοιχεία με τον προπομπό της, την μέθοδο βαρύτητας (Gravitational Method, Chang, Murty (1989)), δεδομένου ότι στο βήμα καθόδου ακολουθεί την λογική της “πτώσης” ενός σημείου στο οποίο επιδρά βαρυτικό πεδίο. Ωστόσο λόγω του κεντροποιού βήματος οι δύο μέθοδοι διαφοροποιούνται σημαντικά. Η μέθοδος βαρύτητας ανήκει στις μεθόδους συνόρου, ενώ η σφαίρας στις μεθόδους εσωτερικού σημείου.

Οι ερευνητές που ανέπτυξαν την οικογένεια των μεθόδων σφαίρας (Murty, Oskoorouchi, Kabadı), διατείνονται ότι αυτές λειτουργούν ταχύτερα από τους υπάρχοντες αλγόριθμους σε διάφορους τύπους προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού. Η διαφορά γίνεται πιο έντονη όσο μεγαλώνει το μέγεθος του στιγμιότυπου, αυξάνει η πυκνότητα (density) του μητρώου συντελεστών και οι περιορισμοί γίνονται σημαντικά περισσότεροι από τις μεταβλητές, $m \gg n$. Στο πρόβλημα οριακής ανάλυσης με χρήση στατικού θεωρήματος ισχύει $m \gg n$ και τα στιγμιότυπα μεγαλώνουν πολύ σε μέγεθος όταν πρόκειται για πραγματικές κατασκευές. Τα μητρώα των συντελεστών, βεβαίως, δεν είναι πολύ πυκνά, ούτε όμως και τελείως sparse. Για παράδειγμα, στις περιπτώσεις που εξετάστηκαν εδώ τα μητρώα εμφάνιζαν μια πυκνότητα από $\sim 5\%$ έως $\sim 23\%$.

Τα παραπάνω εγείρουν το ενδιαφέρον, διότι υπάρχει η πιθανότητα η εφαρμογή των αλγορίθμων σφαίρας σε προβλήματα οριακής ανάλυσης να μειώνει σημαντικά τους χρόνους επίλυσής αυτών με υπολογιστή. Για τον λόγο αυτό αποφασίστηκε στην παρούσα εργασία τα παραδείγματα που λύθηκαν με την μέθοδο ελλειψοειδούς να λυθούν και με κάποια μέθοδο σφαίρας. Για την τελευταία ήταν αναγκαίο να γραφεί κώδικας στην Matlab. Επελέγη η SM1 (Sphere method 1), η οποία αποτελεί την βάση και για τις άλλες SMs, δεδομένου ότι εκείνες προκύπτουν μέσω βελτιώσεων της

πρώτης, και μπορεί έτσι να χρησιμοποιηθεί ως οδηγός για μελλοντικό προγραμματισμό και των υπολοίπων SMs. Ο κώδικας γράφτηκε ακολουθώντας ακριβώς όσα αναφέρονται στην βιβλιογραφία για την SM1 (Murty 2006a, Murty 2006b).

Πριν την εφαρμογή του κώδικα της SM1 στα προβλήματα οριακής ανάλυσης, έγινε δοκιμή του σε πρόβλημα μητρώου $A \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2$ στο οποίο και λειτούργησε κανονικά. Το ίδιο συνέβη και σε ορισμένες περιπτώσεις των παραδειγμάτων οριακής ανάλυσης που εξετάστηκαν. Ωστόσο, παρατηρήθηκε ότι όσο το μέγεθος των στιγμιοτύπων μεγάλωνε, ο αλγόριθμος “εγκλωβιζόταν” σε σημεία και αδυνατούσε να δώσει λύση. Το σε ποια επανάληψη συνέβαινε αυτός ο “εγκλωβισμός” και ποια τιμή είχε υπολογίσει έως τότε επηρεαζόταν από τις παραμέτρους M , p της big-M augmentation διαδικασίας και τις ανοχές ε που χρησιμοποιούνταν. Παρά τα προβλήματα και την αδυναμία επίλυσης, το ποσοστό μείωσης της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης στα πρώτα βήματα που εκτελούνταν πάντοτε κανονικά ήταν πολύ μεγάλο (της τάξης του 90%).

Κατά την γνώμη της συγγράφουσας της παρούσας εργασίας η παρατηρούμενη δυσλειτουργία μπορεί να οφείλεται καταρχάς στις χρησιμοποιούμενες στον κώδικα παραμέτρους και ανοχές. Για να βρεθούν οι τιμές εκείνες που σταθεροποιούν τον αλγόριθμο απαιτείται η επίλυση αρκετών στιγμιοτύπων, ώστε να μπορεί γίνει αντιληπτός ο ακριβής τρόπος με τον οποίο επηρεάζουν την λειτουργία του και να επιλεγούν τελικά οι βέλτιστες για κάθε μέγεθος στιγμιοτύπου. Επίσης, δεύτερος λόγος που οδηγεί σε παρέκκλιση της λειτουργίας από την επιθυμητή μπορεί να είναι ότι τα προβλήματα οριακής ανάλυσης περιέχουν εξ αρχής μεγάλο πλήθος ισοτικών περιορισμών, οι οποίοι χρειάζεται να μετατραπούν σε διπλές ανισότητες και στην συνέχεια να εφαρμοστεί η big-M augmentation διαδικασία, ώστε το χωρίο λύσεων να αποκτήσει μη κενό εσωτερικό. Με αυτόν τον τρόπο όμως ο χώρος όπου μπορεί να κινηθεί το εσωτερικό σημείο στην SM1 γίνεται από κάποια επανάληψη και μετά πολύ μικρού όγκου, γεγονός που δυσχεραίνει την εκτέλεσή του, αρκετά πριν γίνει μια ικανοποιητική προσέγγιση της λύσης.

Εντούτοις και παρά τα ζητήματα που προαναφέρθηκαν, η μέθοδος σφαίρας φαίνεται πολλά υποσχόμενη. Κρίνεται ενδιαφέρον να προγραμματιστούν και οι υπόλοιπες εκδοχές της και να ερευνηθούν και να συγκριθούν η λειτουργία, η αποτελεσματικότητα και η απόδοσή τους σε διάφορες μορφές και μεγέθη στιγμιοτύπων. Επιπρόσθετα, και αφού ελεγχθούν με χρήση γλώσσας προγραμματισμού Matlab ή άλλης παρεμφερούς, κρίνεται χρήσιμο να προγραμματιστούν και σε lower ή low-level γλώσσες προγραμματισμού, ώστε εκτός του αριθμού των επαναλήψεων να καταστούν συγκρίσιμοι και οι χρόνοι επίλυσης των διαφόρων στιγμιοτύπων με προϋπάρχοντες αλγορίθμους. Αν οι αλγόριθμοι γίνουν ευσταθείς και λειτουργήσουν όπως προοιωνίζεται από τις πρώτες δοκιμές, θα επιταχύνουν σημαντικά την επίλυση προβλημάτων οριακής ανάλυσης.

ABSTRACT

Analysis and design of safe, serviceable and economic structures constitute the working field and main aim of a civil engineer. Safety dictates the maintenance of structural stability, even in the worst load cases possible. Serviceability commands that a structure fulfils its fundamental purpose without any deviation from its predicted and demanded performance. On the other hand, economy helps to prevent over-sizing and leads to choices which exploit the total strength capacity of a structure.

Safe design and total usage of available resistance are simultaneously satisfied at the exact moment preceding structural failure. The term failure may refer to a structure becoming a mechanism (partial or total collapse) or exceeding predefined allowable deformations or reaching any other chosen limit state.

If structural failure is identified with collapse there exists an abundance of methods for structural analysis. A different objective, such as maximizing the applied loads for a given structure or minimizing its weight for a given load case, may be set in each problem. Most methods monitor the elastic and inelastic behaviour of a structure until it collapses. However, the limit load (plastic collapse load), the minimum weight and the structure's form at collapse can be calculated directly by applying limit analysis methods.

Limit analysis assumes a perfectly plastic material. The mathematical formulation of the problem using matrix calculus combined with the basic theorems of limit analysis (static theorem, kinematic theorem, uniqueness theorem) let us apply mathematical optimization to limit analysis problems. Mathematical programming can lead to an optimum solution of an objective function subjected to several constraints. In this way the limit state of a structure can be defined, in which equilibrium and compatibility conditions are simultaneously satisfied right before collapse (or failure in general).

When in a problem the material behaves in a rigid-perfectly plastic manner, the yield criteria are linearised and there exist no constraints on the deformations and the movements of the structure, the problem obtained is a linear optimisation programme.

Linear optimisation programme is generally formulated as found in Rao (2009)

Primal

minimize $c \cdot X$

variable $x_i \geq 0$

μεταβλητή x_i *χωρίς περιορισμό προσήμου*

j^{th} *equality constraint* $X \cdot A_j = b_j$

j^{th} *inequality constraint* $X \cdot A_j \leq b_j$

Dual

maximize $Y \cdot b$

i^{th} *inequality constraint* $Y \cdot A_i \leq c_i$

i^{th} *equality constraint* $Y \cdot A_i = c_i$

variable y_j *with unrestricted sign*

variable $y_j \geq 0$

coefficient matrix $A = [A_1 \dots A_m]$

right-hand vector b

cost-coefficient c

coefficient matrix $A^T = [A_1 \dots A_m]^T$

right-hand vector c

cost-coefficient b

and when applied to limit analysis it is given as

$$\begin{aligned} \max \quad & a \\ \text{s.t.} \quad & -\mathbf{B}\mathbf{s} + a\mathbf{f} = -\mathbf{f}_d \\ & \mathbf{N}^T \mathbf{s} \leq \mathbf{r} \\ & a \geq 0 \end{aligned}$$

where (\mathbf{s}, a) are the design variables with a the load coefficient.

There are several algorithms capable of solving LPs. Each of them shows advantages and disadvantages depending on the problem which it is applied to. This is the reason why each algorithm either is or is not appropriate for a certain class of problems. LP optimisation algorithms are classified based on their individual characteristics. A basic differentiation is made between algorithms that search the optimal solution moving in the interior of the feasible region P° (interior point methods) and those moving on the boundary ∂P .

Both algorithms studied in this thesis are Interior Point Methods and geometric algorithms. The first one, called Ellipsoid Method, was firstly introduced by Kachiyan in 1979. It was the first algorithm to prove that LP can be solved in polynomial time. Ellipsoid algorithm has a solid mathematical base and is considered really important in the mathematical programming science from a theoretical and historical point of view. However, it performs really poorly when applied to LPs, being very slow and demanding a vast number of iterations before it converges to a solution.

The initial scope of the thesis was to improve the ellipsoid algorithm so it performs faster and then to employ it in limit analysis problems. Extensive research of relevant literature and trial-runs of Matlab code showed that small changes implemented on the algorithm are unable to improve it sufficiently enough to make it competitive with other existing algorithms, such as simplex (Dantzig 1960) or IPMs. In limit analysis problems though, utilization of bounds on design variables which represent strengths of the cross-sections, when the radius of the initial sphere is computed, makes a great difference. Even in small problems, the default value obtained for the radius was Inf (overflow) and the algorithm could not be executed. The radius computed using the aforementioned bounds helped with this obstacle.

Part of the work done was dedicated to collecting, studying and presenting proofs of the theorems, lemmas and propositions that constitute the foundation of the method. Using a Matlab code created and uploaded on the web by F. Stallmann (2014) limit analysis examples (Examples 1 and 2) were solved. The ellipsoid method's performance in comparison to the linprog function of Matlab (which calls simplex or a variant of Mehrotra's predictor-corrector algorithm) is disheartening. Indicatively it is mentioned that in an instance solved after 6 linprog iterations 6500 ellipsoid method

iterations were needed, and in another instance solved after 15 linprog iterations approximately 50000 ellipsoid method iterations were needed. The difference kept growing with the size of the instance.

The second algorithm studied in the thesis is the sphere method (SM). The method was initially introduced by K.G.Murty in 2005 (Murty 2005) and has underwent 5 alterations till today. The algorithm is classified as predictor-corrector algorithm. Each of its major iterations consists of two distinguished steps: a centering step, which corrects a previously found solution, and a descent step, which predicts the next solution.

The SM shares notions and procedures with its predecessor, the gravitational method (Chang, Murty (1989)), as it also executes falls of a given point which is attracted by a gravitational force. However, the centering step differentiates these two methods significantly. As a result the gravitational method behaves as a boundary method, while sphere methods are considered interior point methods.

Researchers who developed sphere methods claim that they outperform existing algorithms when employed in some LP problems. This beneficial effect becomes more intense with the growth in the size of instances, with bigger density of their matrices and when the number of constraints is much greater than the number of variables $m \gg n$. Problems of limit analysis which are formulated according to the static theorem present $m \gg n$ and vast sizes when they correspond to real life structures. Their matrices, however, are not very dense, but they are not completely sparse either. In the cases examined here densities ranged from ~5 % to ~23 %.

The aforementioned are interesting for a civil engineer, because their implementation in limit analysis problems could accelerate greatly their solution. Thus, the choice made to include a thorough study of SMs in this thesis and to employ them in solving Examples 1 and 2. With a code for SMs not available it was necessary to develop a new one. SM1 was chosen to be programmed, because it constitutes the basis for every SM and also shares many procedures with them. So it could facilitate their programming should it be later attempted. The algorithm was programmed according to its description found in relevant articles (Murty 2006a, Murty 2006b).

The code was initially tested on a small instance (coefficient matrix $A \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2$) and worked as it was supposed to. Then it was implemented in Examples 1 and 2 its performance was not constant. First of all, the code's performance and speed were significantly affected by variations made in several programming parameters, such as M , p of big-M augmentation, choice of initial point, etc. This was something expected. However, in some cases it was observed that such changes in parameters, especially in the approximations ε used, were capable of causing major instabilities in the code. These instabilities had a gross impact on the algorithm's performance and often resulted in the code's failure (termination without producing the solution that was already known to exist). Despite these problems, though, reduction in the value of the objective function in the first few iterations was large even in the unsuccessful cases (> 80 %).

According to the writer of this thesis, the previously described malfunction can be mainly attributed to the lack of a deep understanding of how the parameters and approximation values work, which ultimately lead to selecting inappropriate ones. Some tests were run to better comprehend their function, but more need to be executed if we want to find a deterministic way to choose the right parameters for every instance. A second reason that probably caused this deviation from the wanted behaviour is the fact that limit analysis problems include many equality constraints. Each equality constraint needs to be converted into a pair of inequality constraints. In order to secure a full-dimensional area of feasible solutions, after this conversion of the constraints big-M augmentation is applied. This way the area which is available for an interior point to move in decreases significantly with increased iterations and becomes too small for the algorithm to be executed, prior to succeeding in finding a good approximation of the solution.

In conclusion, SM1 was found to be very promising, but several problems have to be fixed. In addition to fixing such problems, the rest of SMs, which is claimed to be faster, can be programmed and more instances can be solved. Thus the methods can be examined and compared to each other and to other long established algorithms for LPs. If their Matlab codes become stable and run smoothly, these algorithms may be programmed with lower- or low- level programming languages, in order for the duration of their execution to be compared to simplex's and IPMs'. Finally, if they are proven to solve limit analysis problems faster than other known algorithms, structural optimisation may become more approachable and be more frequently used by civil engineers.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Μέθοδος ελλειψοειδούς

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΛΛΕΙΨΟΕΙΔΟΥΣ

1.1 Η ΣΥΜΒΟΛΗ ΤΟΥ KHACHIYAN

Πρόδρομοι της ελλειψοειδούς μεθόδου για την επίλυση μη γραμμικών μη διαφορίσιμων προβλημάτων βελτιστοποίησης είχαν διαμορφωθεί πριν το 1979. Σε μια σύντομη ιστορική ανασκόπηση των Bland, Goldfarb, Todd (1981) αναφέρεται ότι το 1970 περιγράφηκε από τον Shor ένας νέος αλγόριθμος για τον κυρτό μη διαφορίσιμο προγραμματισμό, που βασίζεται σε προβολή παραγώγων με διαστολή χώρου, ενώ το 1976 οι Nemirovskii και Yudin έδωσαν, με κάπως έμμεσο τρόπο και βασιζόμενοι στον αλγόριθμο του Shor, μια εκδοχή του ελλειψοειδούς αλγορίθμου. Το 1979 ο Khachiyan εξέδωσε το άρθρο του: “A polynomial algorithm in Linear Programming” (Doklady Akademiia Nauk SSSR 244). Στο άρθρο αυτό αποκρυσταλλώνεται ο αλγόριθμος και εφαρμόζεται για την επίλυση προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού, τα οποία πλέον αποδεικνύεται ότι λύνονται σε πολυωνυμικό χρόνο.

Μέχρι το 1979 τα προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού δεν ανήκαν αποδεδειγμένα στην P κατηγορία. Η μέθοδος Simplex έλυνε όσα προβλήματα προέκυπταν στην πράξη, όμως στην χειρότερη θεωρητική περίπτωση τους η Simplex ήταν εκθετικού χρόνου, όπως αποδεικνύεται και από τους Papadimitriou, Steiglitz (1998). Ο Khachiyan χρησιμοποίησε την μέθοδο ελλειψοειδούς, ώστε να αποδείξει ότι τα προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού λύνονται σε πολυωνυμικό χρόνο.

1.2 ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΓΙΑ ΤΑ ΕΛΛΕΙΨΟΕΙΔΗ

Ακολουθώντας τη δομή και τους ορισμούς των Grötchel, Lovász, Schrijver (1993):

Ορισμός 1.1 Ένα σύνολο E είναι **ελλειψοειδές**, αν υπάρχει διάνυσμα $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ και συμμετρικό, θετικά ορισμένο μητρώο $\mathbf{B}_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ τ.ω.

$$E_k = E(\mathbf{B}_k, \mathbf{x}_k) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid (\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) \cdot \mathbf{B}_k^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) \leq 1\} \quad 1.1$$

Κάνοντας χρήση της ελλειψοειδούς νόρμας $\|\mathbf{x}\|_B = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{B}^{-1} \mathbf{x}}$ η 1.1 γράφεται

$$E(\mathbf{B}_k, \mathbf{x}_k) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k\|_{B_k} \leq 1\} \quad 1.2$$

δηλαδή το ελλειψοειδές είναι η μοναδιαία σφαίρα με κέντρο το \mathbf{x}_k στον διανυσματικό χώρο \mathbb{R}^n εφοδιασμένο με τη νόρμα $\|\mathbf{x}\|_{B_k} = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{B}_k^{-1} \mathbf{x}}$.

Για κάθε θετικά ορισμένο μητρώο $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n} \exists !$ θετικά ορισμένο μητρώο $\mathbf{B}^{1/2}$, τ.ω. $\mathbf{B} = \mathbf{B}^{1/2} \mathbf{B}^{1/2}$. Η 1.2 γίνεται με την ευκλείδεια νόρμα

$$E(\mathbf{B}, \mathbf{x}_k) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{B}^{-1/2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k)\| \leq 1\} \quad 1.3$$

Ο όγκος ελλειψοειδούς $E_k = E(\mathbf{B}_k, \mathbf{x}_k)$, το οποίο προκύπτει με αφινικό μετασχηματισμό της

μοναδιαίας σφαίρας, δηλαδή $E(\mathbf{B}_k, \mathbf{x}_k) = \mathbf{B}_k^{1/2} S(\mathbf{0}, 1) + \mathbf{x}_k$, δίνεται ως

$$\text{vol}(E_k) = \sqrt{\det \mathbf{B}_k} \cdot V_n \quad 1.4$$

όπου $V_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}$ ο όγκος της μοναδιαίας n -διάστατης σφαίρας και Γ η συνάρτηση γάμμα.

Το ίδιο ισχύει και για κάθε αφινικό μετασχηματισμό ενός ελλειψοειδούς, δηλαδή αν $T(\mathbf{x}) = \mathbf{D}\mathbf{x} + \mathbf{d}$ τυχαίος αφινικός μετασχηματισμός, τότε

$$\text{vol}(T(E(\mathbf{B}_k, \mathbf{x}_k))) = \det \mathbf{D} \sqrt{\det \mathbf{B}_k} V_n \quad \text{και} \quad \frac{\text{vol}(E(\mathbf{B}_k, \mathbf{x}_k))}{\text{vol}(E(\mathbf{B}_l, \mathbf{x}_l))} = \frac{\text{vol}(T(E(\mathbf{B}_k, \mathbf{x}_k)))}{\text{vol}(T(E(\mathbf{B}_l, \mathbf{x}_l)))}, \quad 1.5$$

δηλαδή το πηλίκο των όγκων δύο ελλειψοειδών μένει αναλλοίωτο κάτω από αφινικούς μετασχηματισμούς (Παράρτημα Π3).

Ακρότατα γραμμικής συνάρτησης πάνω από ελλειψοειδές

Έστω γραμμική συνάρτηση $f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{x}$, $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{a}_i \neq \mathbf{0}$ και $\mathbf{x} \in S(\mathbf{x}_k, 1)$. Τα ακρότατα της f εντοπίζονται στα σημεία $\mathbf{x}_k \pm \frac{\mathbf{a}_i}{\|\mathbf{a}_i\|}$, όπως εύκολα αποδεικνύεται (π.χ. με πολλαπλασιαστές Lagrange). Μπορεί επίσης να υπολογιστεί ότι τα ακρότατα της f πάνω από ελλειψοειδές $E(\mathbf{B}_k, \mathbf{x}_k)$ δίνονται στα σημεία $\mathbf{x}_k \pm \frac{\mathbf{B}_k \mathbf{a}_i}{\sqrt{\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{B}_k \mathbf{a}_i}}$ (1.6) (μια ωραία απόδειξη αυτού δίνεται από τους Grötchel, Lovász, Schrijver (1993)).

Ελλειψοειδές ελαχίστου όγκου

Αποδεικνύεται από τους Danzer, Laugwitz, Lenz (1957) ότι:

Θεώρημα 1.2 Για κάθε κυρτό σώμα $K \subseteq \mathbb{R}^n \exists !$ ελλειψοειδές E ελαχίστου όγκου που να περιέχει το K . Επιπλέον, το K περιέχει το ελλειψοειδές που προκύπτει από το E συρρικνωμένο περί το κέντρο του κατά παράγοντα n . (Löwner-John ellipsoid)

Πιο συγκεκριμένα, για την περίπτωση που εξετάζεται στην παρούσα εργασία, έστω το κυρτό χωρίο

$$K = E_k \cap H_k = E(\mathbf{B}_k, \mathbf{x}_k) \cap \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{x} \leq b_i\},$$

όπου $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, $b_i \in \mathbb{R}$.

Αναζητείται το ελλειψοειδές ελαχίστου όγκου που περιέχει το K , το οποίο συμβολίζεται με

$$E_{k+1} = E(\mathbf{B}_{k+1}, \mathbf{x}_{k+1}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{k+1}\|_{\mathbf{B}_{k+1}} \leq 1\}$$

$$\text{Αν } K \neq \emptyset \wedge K \neq E_k \Leftrightarrow \mathbf{a}_i \cdot \left(\mathbf{x}_k - \frac{\mathbf{B}_k \mathbf{a}_i}{\sqrt{\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{B}_k \mathbf{a}_i}} \right) < b_i < \mathbf{a}_i \cdot \left(\mathbf{x}_k + \frac{\mathbf{B}_k \mathbf{a}_i}{\sqrt{\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{B}_k \mathbf{a}_i}} \right) \Leftrightarrow |b_i - \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{x}_k| < \sqrt{\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{B}_k \mathbf{a}_i}.$$

Θέτουμε $\bar{a} := \frac{\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{x}_k - b_i}{\sqrt{\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{B}_k \mathbf{a}_i}}$, \mathbf{B}_k θετικά ορισμένο, οπότε $K \neq \emptyset \wedge K \neq E_k \Leftrightarrow -1 < \bar{a} < 1$.

Το \bar{a} μπορεί να μεταφραστεί ως η προσημασμένη απόσταση του κέντρου \mathbf{x}_k του ελλειψοειδούς από το σύνορο του ημιεπιπέδου $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{x} \leq b_i\}$ στον μετρικό χώρο $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_{\mathbf{B}_k^{-1}})$. Η απόσταση είναι μη θετική, αν το \mathbf{x}_k περιέχεται στο ημιεπίπεδο.

Οι εξισώσεις που δίνουν το ζητούμενο ελλειψοειδές ελαχίστου όγκου καθορίζονται ως εξής:

- Αν $-1 < \bar{a} \leq -1/n$, τότε $E(\mathbf{B}_{k+1}, \mathbf{x}_{k+1}) = E(\mathbf{B}_k, \mathbf{x}_k)$.
- Αν $-1/n \leq \bar{a} < 1$, τότε $E(\mathbf{B}_{k+1}, \mathbf{x}_{k+1})$ δίνεται από τις

$$\mathbf{x}_{k+1} := \mathbf{x}_k - \frac{1+n\bar{a}}{n+1} \mathbf{q}_k \tag{1.7}$$

$$\mathbf{B}_{k+1} := \frac{n^2(1-\bar{a}^2)}{n^2-1} \left(\mathbf{B}_k - \frac{2(1+n\bar{a})}{(n+1)(1+\bar{a})} \mathbf{q}_k \mathbf{q}_k^T \right) \tag{1.8}$$

$$\text{όπου } \mathbf{q}_k := \frac{\mathbf{B}_k \mathbf{a}_i}{\sqrt{\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{B}_k \mathbf{a}_i}}.$$

Για $\bar{a} = -1/n$ και πάλι προκύπτει $E(\mathbf{B}_{k+1}, \mathbf{x}_{k+1}) = E(\mathbf{B}_k, \mathbf{x}_k)$.

Στην περίπτωση που έχουμε $-1/n \leq \bar{a} < 0$ η τομή χαρακτηρίζεται ως ρηχή (shallow), αν $\bar{a} = 0$ κεντρική (central), ενώ αν $0 < \bar{a} < 1$ βαθιά (deep).

Οι αποδείξεις για την ύπαρξη και την μοναδικότητα του ελλειψοειδούς ελαχίστου όγκου, καθώς και οι αποδείξεις ότι τα ελλειψοειδή που προκύπτουν από τις 1.7, 1.8 είναι ελαχίστου όγκου και περιέχουν το K , δίνονται στο Danzer, Laugwitz, Lenz (1957), Bland, Goldfarb, Todd (1981), Papadimitriou, Steiglitz (1998).

1.3 ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ ΣΤΗΝ ΘΕΩΡΙΑ ΠΟΛΥΠΛΟΚΟΤΗΤΑΣ

Σύμφωνα με τους Grötschel, Lovász, Schrijver (1993), ένα **πρόβλημα** συνίσταται σε μια γενική ερώτηση που χρειάζεται να απαντηθεί. Η ερώτηση μπορεί να περικλείει πολλές παραμέτρους ή μεταβλητές, οι τιμές των οποίων δεν είναι καθορισμένες στην γενική μορφή του προβλήματος, αλλά παραμένουν ανοικτές. Για να κρίνεται το πρόβλημα σαφώς ορισμένο οφείλουν να δίνονται περιγραφές όλων των μεταβλητών και να διευκρινίζονται οι ιδιότητες που η λύση καλείται να ικανο-

ποιεί. Αν στις μεταβλητές δοθούν εκτός από την περιγραφή τους και συγκεκριμένες τιμές, τότε προκύπτει ένα **στιγμιότυπο** (instance) του προβλήματος.

Στην περίπτωση του γραμμικού προγραμματισμού αναζητείται το $x \in \mathbb{R}^n$ με ανοικτές παραμέτρους το μητρώο $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ και τα διανύσματα $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$. Το πρόβλημα γράφεται ως

$$\max c \cdot x$$

$$x \in P = \{x \mid Ax \leq b\}$$

1.9

Αν δοθούν ένα συγκεκριμένο μητρώο A και συγκεκριμένα διανύσματα b , c , τότε προκύπτει στιγμιότυπο του προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού. Μια λύση του στιγμιότυπου συνοψίζεται σε ένα από τα ακόλουθα: την δήλωση ότι το $P = \{x \mid Ax \leq b\}$ είναι κενό, την δήλωση ότι το $c \cdot x$ είναι μη φραγμένο ή ένα διάνυσμα x^* που μεγιστοποιεί το $c \cdot x$ πάνω στο P .

Το “μέγεθος” του στιγμιότυπου μπορεί να εκφραστεί με το μήκος της κωδικοποίησής του, δηλαδή το μήκος των συμβόλων που απαιτούνται για να γραφεί. Οι μέθοδοι κωδικοποίησης, ωστόσο, είναι περισσότερες από μία και κάθε μέθοδος οδηγεί σε διαφορετικό μήκος για το ίδιο στιγμιότυπο. Το ζήτημα αυτό της μη μοναδικότητας ανακύπτει και στα προβλήματα του γραμμικού προγραμματισμού.

Η πολυπλοκότητα ενός προβλήματος μπορεί να αφορά είτε τον χρόνο είτε τον χώρο που απαιτείται για την επίλυσή ενός στιγμιότυπού του. Για δεδομένο τρόπο κωδικοποίησης και δεδομένο αλγοριθμικό μοντέλο η συνάρτηση χρονικής πολυπλοκότητας (time complexity function) ή συνάρτηση χρόνου εκτέλεσης ενός αλγορίθμου (running time function) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ εκφράζει τον μέγιστο χρόνο $f(n)$ που απαιτείται για την επίλυση οποιουδήποτε στιγμιότυπου ενός προβλήματος με μήκος κωδικοποίησης το πολύ $n \in \mathbb{N}$, αποτελεί δηλαδή το worst case scenario όλων των στιγμιότυπων. Σε μια μηχανή Turing με την λέξη “χρόνος” εννοείται ο αριθμός των βημάτων μεταξύ της κατάστασης εκκίνησης E και της κατάστασης τερματισμού T για την επίλυση μιας συγκεκριμένης “λέξης” (string) εισόδου.

Παρομοίως, η συνάρτηση χωρικής πολυπλοκότητας ενός αλγορίθμου (space complexity function) $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ εκφράζει τον μέγιστο χώρο $g(n)$ που απαιτείται για να λυθεί κάθε στιγμιότυπο ενός προβλήματος με μήκος κωδικοποίησης το πολύ $n \in \mathbb{N}$. Στην μηχανή t-ταινιών Turing, $t \in \mathbb{N}$ με την λέξη “χώρος” εννοείται το μέγιστο μήκος γραμμών που προκύπτουν μετά την εκτέλεση των βημάτων στην ταινία i , αθροιζόμενο για $i=1, \dots, t$.

Το πλέον αποδεκτό μέτρο απόδοσης ενός αλγορίθμου είναι ο χρόνος που χρειάζεται μέχρι να τερματίσει και να δώσει τελική απάντηση, ο οποίος δίνεται από την συνάρτηση χρονικής πολυπλοκότητας, όπως αυτή ορίστηκε προηγουμένως. Ο χρόνος αυτός υπολογίζεται για εκτέλεση του αλγορίθμου σε υποθετικό υπολογιστή, όπου σε κάθε πράξη ή κίνηση - αριθμητικές πράξεις, συγκρίσεις κ.τ.λ. - αντιστοιχίζεται μια μονάδα χρόνου.

Ένας αλγόριθμος χαρακτηρίζεται ως πολυωνυμικού χρόνου (ή χώρου) είναι ένας αλγόριθμος του οποίου η συνάρτηση χρονικής (ή χωρικής) πολυπλοκότητας ικανοποιεί την ανισότητα $f(n) \leq p(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$ για κάποιο πολυώνυμο p .

Μήκος κωδικοποίησης αριθμών

Η πολυπλοκότητα ενός αλγορίθμου υπολογίζεται ως συνάρτηση του μεγέθους των δεδομένων εισόδου του και ως μέγεθος δεδομένων μπορεί να λειτουργήσει το μήκος της σειράς ή γραμμής συμβόλων που είναι απαραίτητα για την κωδικοποίησή τους. Για ακεραίους αριθμούς τον προσφιλή και συνήθη τρόπο κωδικοποίησης αποτελεί η δυαδική αναπαράσταση. Απαιτούνται $1 + \lceil \log_2(|n|+1) \rceil$ ψηφία προκειμένου να κωδικοποιηθεί ακέραιος $n \neq 0$. Το ένα ψηφίο για το πρόσημο και τα υπόλοιπα για την $\{0, 1\}$ -γραμμή της δυαδικής αναπαράστασης της απόλυτης τιμής του ακεραίου. Για το 0 χρειάζεται ένα μόνο ψηφίο. Επομένως, το μήκος κωδικοποίησης ακεραίου $n \neq 0$ δίνεται κατά τους Grötschel, Lovász, Schrijver (1993) από:

$$\langle n \rangle := 1 + \lceil \log_2(|n|+1) \rceil \quad 1.10$$

Για την κωδικοποίηση ρητού αριθμού $r \in \mathbb{Q}$ που ως γνωστόν γράφεται με μοναδικό τρόπο με την μορφή πηλίκου $\frac{p}{q}$, όπου $q > 0$ και $(p, q) = 1$, χρειάζονται

$$\langle r \rangle := \langle p \rangle + \langle q \rangle \quad 1.11$$

Ακολουθώντας παρόμοια συλλογιστική πορεία και γνωρίζοντας ότι το μήκος κωδικοποίησης διανύσματος ή μητρώου ταυτίζεται με το άθροισμα των μηκών κωδικοποίησης των στοιχείων του, καταλήγει κανείς στον υπολογισμό του μήκους του γραμμικού προγράμματος 1.9. Το μήκος αυτό συμβολίζεται με $\langle A, b, c \rangle$ και ισούται με το άθροισμα των μηκών των A, b, c .

Οι άρρητοι αριθμοί δεν μπορούν να παρασταθούν με πεπερασμένου μήκους γραμμή από 0 και 1, όποια μέθοδος κωδικοποίησης και αν χρησιμοποιηθεί. Προκειμένου να εισαχθούν δεδομένα που περιλαμβάνουν άρρητους αριθμούς, επιστρατεύονται προσεγγίσεις μέσω ρητών αριθμών (finite precision arithmetic). Το τέχνασμα αυτό, όπως είναι φυσικό, προκαλεί σφάλμα λόγω προσέγγισης, το οποίο πρέπει να μετρηθεί και να ληφθεί υπόψη. Επίσης, επειδή άρρητοι αριθμοί μπορεί να προκύπτουν και σε ενδιάμεσα βήματα ενός αλγορίθμου, κρίνεται αναγκαίο να προβλεφθεί το σφάλμα προσέγγισης, ώστε κάθε αλγόριθμος να εκτελείται με τον τρόπο που έχει σχεδιαστεί βάσει της θεωρίας του.

1.4 ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΛΛΕΙΨΟΕΙΔΟΥΣ ΓΙΑ ΕΠΙΛΥΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΑΝΙΣΟΤΗΤΩΝ

1.4.1 ΚΕΝΤΡΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ

Στα παρακάτω υιοθετείται η δομή που χρησιμοποιούν οι Grötchel, Lovász, Schrijver (1993).

Έστω ότι αναζητείται ένα n -διάστατο διάνυσμα που να ικανοποιεί το σύστημα

$$A^T x \leq b \tag{1.12}$$

όπου $A^T \in \mathbb{R}^{m \times n}$ και $b \in \mathbb{R}^{m \times 1}$, $n > 1$. Οι στήλες του μητρώου A αντιστοιχούν στα διανύσματα κατεύθυνσης των περιορισμών και συμβολίζονται με a_1, a_2, \dots, a_m και τα στοιχεία του b σημειώνονται με b_1, b_2, \dots, b_m , άρα η 1.12 γίνεται $a_i \cdot x \leq b_i$ (1.13).

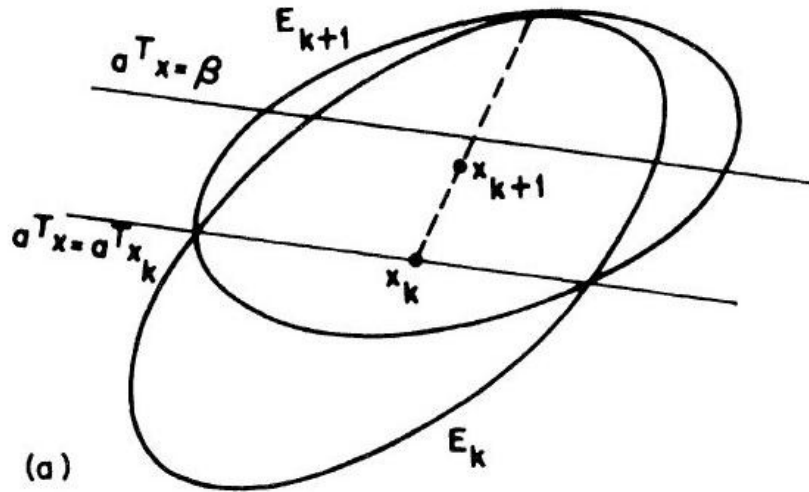
Η βασική ιδέα είναι απλή: Επιλέγεται αρχικό ελλειψοειδές E_0 , στο οποίο περιέχεται το χωρίο των λύσεων $P = \{x \mid Ax \leq b\}$. Με κατάλληλη εκλογή υπερεπιπέδων, και συγκεκριμένα υπερεπιπέδων παράλληλων προς περιορισμούς που παραβιάζονται από το κέντρο του ελλειψοειδούς E_0 , τέμνεται το E_0 και σχεδιάζεται καινούργιο, E_1 , με όγκο γνησίως μικρότερο του E_0 . Το καινούργιο ελλειψοειδές διέρχεται από τα σημεία τομής του υπερεπιπέδου διαχωρισμού με το E_0 και περιέχει το τμήμα εκείνο του E_0 που περιέχει το $P = \{x \mid Ax \leq b\}$. Δίνεται ιδιαίτερη προσοχή ώστε να λαμβάνεται ως E_1 το ελλειψοειδές εκείνο που έχει τον ελάχιστο όγκο. Με διαδοχικές επαναλήψεις της διαδικασίας, το $P = \{x \mid Ax \leq b\}$, εφόσον δεν είναι κενό, “παγιδεύεται” από συνεχώς συρρικνούμενα ελλειψοειδή και τελικά η διαδικασία τερματίζει στο ελλειψοειδές του οποίου το κέντρο ανήκει στο P .

Βασική επανάληψη

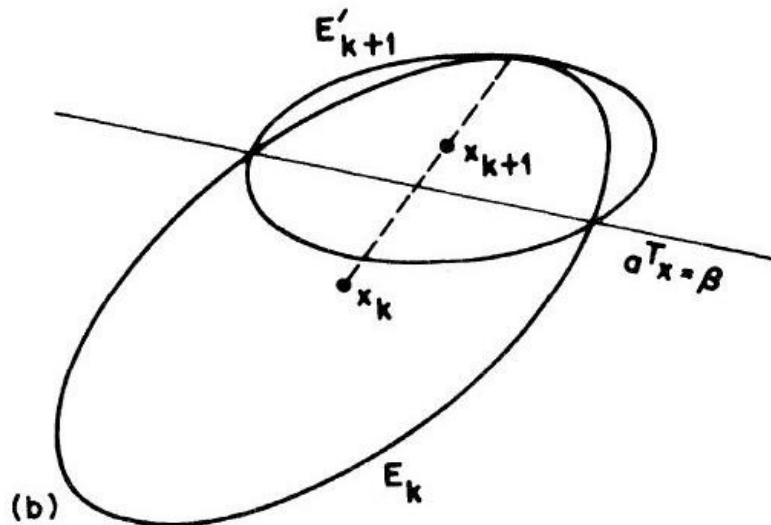
Η μέθοδος ελλειψοειδούς κατασκευάζει μια σειρά ελλειψοειδών $E_0, E_1, \dots, E_k, \dots$, καθένα από τα οποία περιέχει ένα σημείο που ικανοποιεί το 1.12, εφόσον βεβαίως υπάρχουν τέτοια σημεία. Στην $k+1$ επανάληψη η μέθοδος ελέγχει αν το κέντρο x_k του παρόντος ελλειψοειδούς E_k ικανοποιεί τους περιορισμούς του 1.12. Αν ναι, τότε η μέθοδος τερματίζει. Αν όχι, τουλάχιστον ένας περιορισμός παραβιάζεται από το x_k . Ελέγχονται οι δοθείσες ανισότητες με αντικατάσταση του x από το x_k και επιλέγεται ένας από τους περιορισμούς που παραβιάζονται από το κέντρο του ελλειψοειδούς, έστω ο $a_i \cdot x \leq b_i$. Βάσει αυτού κατασκευάζεται το ελλειψοειδές ελαχίστου όγκου που περιέχει το ημιελλειψοειδές $\{x \in E_k \mid a_i \cdot x \leq a_i \cdot x_k\}$. Αυτό το νέο ελλειψοειδές και το κέντρο του συμβολίζονται με E_{k+1} και x_{k+1} αντίστοιχα. Το παραπάνω επαναληπτικό βήμα επαναλαμβάνεται.

Με εξαίρεση την εκκίνηση, αυτή η μέθοδος δίνει έναν (πιθανώς άπειρο) επαναληπτικό αλγόριθμο για την εξακρίβωση της επιλυσιμότητας του 1.12. Ουσιαστικά, ο Khachiyan έδειξε ότι κάποιος μπορεί να διακριβώσει αν το σύστημα 1.12 είναι επιλύσιμο ή όχι μετά από προκαθορισμένο (πολυωνυμικό) αριθμό επαναλήψεων, αν: i) διαφοροποιήσει τον αλγόριθμο, ώστε να λειτουργεί για finite precision arithmetic, ii) τον εφαρμόσει σε κατάλληλη μεταβολή του συστήματος και iii) επιλέξει κατάλληλως το E_0 . Το σύστημα 1.12 είναι επιλύσιμο, αν και μόνο αν ο αλγόριθμος, όταν εφαρμοστεί σε κατάλληλα μεταβληθέν σύστημα, τερματίζει δίνοντας εφικτή λύση μετά από προκα-

θορισμένο αριθμό βημάτων.



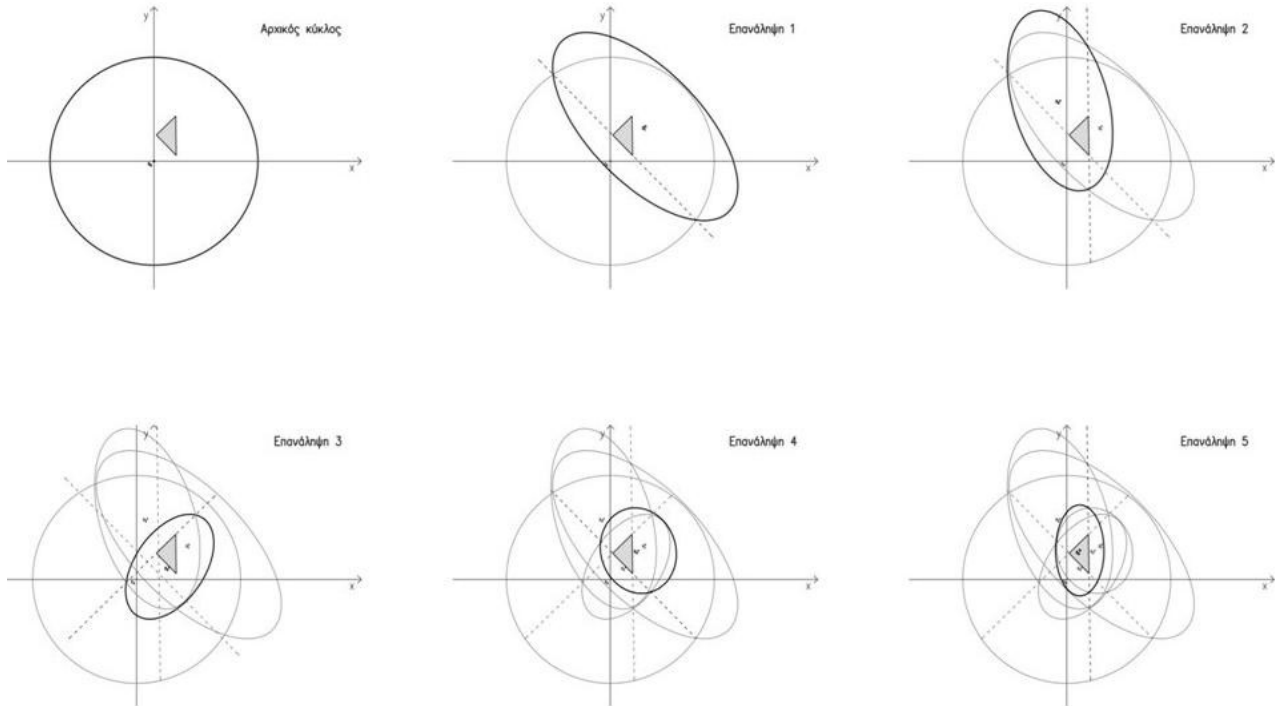
Εικόνα 1.1: Κεντρικές τομές



Εικόνα 1.2: Βαθιές τομές

Με εξαίρεση την εκκίνηση, αυτή η μέθοδος δίνει έναν (πιθανώς άπειρο) επαναληπτικό αλγόριθμο για την εξακρίβωση της επιλυσιμότητας του 1.12. Ουσιαστικά, ο Khachiyan έδειξε ότι κάποιος μπορεί να διακριβώσει αν το σύστημα 1.12 είναι επιλύσιμο ή όχι μετά από προκαθορισμένο (πολυωνυμικό) αριθμό επαναλήψεων, αν: i) διαφοροποιήσει τον αλγόριθμο, ώστε να λειτουργεί για finite precision arithmetic, ii) τον εφαρμόσει σε κατάλληλη μεταβολή του συστήματος και iii) επιλέξει καταλλήλως το E_0 . Το σύστημα 1.12 είναι επιλύσιμο, αν και μόνο αν ο αλγόριθμος, όταν εφαρμοστεί σε κατάλληλα μεταβληθέν σύστημα, τερματίζει δίνοντας εφικτή λύση μετά από προκα-

θορισμένο αριθμό βημάτων.



Εικόνα 1.3: Σχηματική αναπαράσταση παραδείγματος εύρεσης εφικτής λύσης 2-διάστατου προβλήματος με χρήση EM

Αλγεβρικά το ελλειψοειδές E_k μπορεί να αναπαρασταθεί ως

$$E_k = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid (\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) \cdot \mathbf{B}_k^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) \leq 1 \} \quad 1.14$$

όπου \mathbf{x}_k το κέντρο

\mathbf{B}_k θετικά ορισμένο, συμμετρικό μητρώο.

Το $k+1$ βήμα της μεθόδου ελλειψοειδούς με κεντρικές τομές δίνεται από τις εξισώσεις:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \tau \frac{\mathbf{B}_k \mathbf{a}_i}{\sqrt{\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{B}_k \mathbf{a}_i}} \quad 1.15$$

$$\mathbf{B}_{k+1} = \delta \left(\mathbf{B}_k - \sigma \frac{\mathbf{B}_k \mathbf{a}_i (\mathbf{B}_k \mathbf{a}_i)^T}{\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{B}_k \mathbf{a}_i} \right) \quad 1.16$$

όπου $\tau = \frac{1}{n+1}$ η παράμετρος βήματος

$$\sigma = \frac{2}{n+1} \text{ η παράμετρος διαστολής}$$

$$\delta = \frac{n^2}{n^2-1} \text{ η παράμετρος διόγκωσης}$$

Η σχέσεις 1.15, 1.16 ταυτίζονται με τις 1.7, 1.8 για $\bar{a}=0$. Το γεγονός ότι το ελλειψοειδές της $k+1$ επανάληψης περιέχει το ημιελλειψοειδές που προκύπτει από την k επανάληψη, και μάλιστα έχει τον μικρότερο όγκο από όλα τα ελλειψοειδή με αυτήν την ιδιότητα, αποδεικνύεται για την γενική περίπτωση των 1.7, 1.8 όπως προαναφέρθηκε (Danzer, Laugwitz, Lenz (1957), Bland, Goldfarb, Todd (1981), Papadimitriou, Steiglitz (1998)).

Τα παραπάνω τυπολόγιο και συμπεράσματα ισχύουν μόνο στην θεωρητική περίπτωση που υπάρχει απεριόριστη ακρίβεια στους υπολογισμούς (exact arithmetic). Στις συνήθεις συνθήκες εφαρμογής αλγορίθμων όμως, όπου γίνεται χρήση ηλεκτρονικών υπολογιστών (H/Y), η αριθμητική ακρίβεια προκαθορίζεται από τον κατασκευαστή. Τα προβλήματα που ανακύπτουν από την αποκοπή ψηφίων συζητιούνται σε επόμενη ενότητα.

Επιλυσιμότητα σε πολυωνυμικό χρόνο

Έστω $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ και $b \in \mathbb{Z}^m$. Σύμφωνα με τους Bland, Goldfarb, Todd (1981), το μήκος L των δεδομένων μπορεί να περιγραφεί βάσει του αριθμού των συμβόλων (ή ψηφίων) που απαιτούνται για την κωδικοποίησή τους, δηλαδή:

$$L = \sum_{\substack{i,j=1 \\ a_{ij} \neq 0}}^{m,n} [\log |a_{ij}|] + \sum_{\substack{i=1 \\ b_i \neq 0}}^m [\log |b_i|] + [\log n] + [\log m] + 2mn + 2m + 4 \quad 1.17$$

και, επειδή η κωδικοποίηση περιλαμβάνει τέσσερα διακριτά σύμβολα, τα +, -, 0 και 1, το ακριβές πλήθος των bits που απαιτούνται υπολογίζεται ίσο με $2L$.

Στα ακόλουθα θεωρούμε ότι η εφικτή περιοχή $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ του προβλήματος έχει μη κενό εσωτερικό. Σε περίπτωση που αυτό δεν ισχύει μπορεί να εξετάζεται τροποποιημένη περιοχή $P' = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b + \varepsilon \mathbf{1}\}$, όπως αυτή περιγράφεται ακολούθως. Το Λήμμα 1.3 και το Πρόρισμα 1.4 αποδεικνύουν ότι τα αποτελέσματα για την επίλυση του συστήματος ανισοτήτων, και δη σε πολυωνυμικό χρόνο, επεκτείνονται από το τροποποιημένο σύστημα στο αρχικό, και έτσι, χωρίς βλάβη, μπορεί να θεωρείται χωρίο με $\text{int } P \neq \emptyset$.

Λήμμα 1.3 Το σύστημα γραμμικών ανισοτήτων

$$a_i x \leq b_i \quad i=1, \dots, m \quad 1.18$$

έχει λύση, αν το σύστημα των γραμμικών γνησίων ανισοτήτων

$$a_i x < b_i + \varepsilon \quad i=1, \dots, m \quad 1.19$$

έχει λύση, όπου $\varepsilon = 2^{-2L}$ και L όπως υπολογίστηκε προηγουμένως.

Πόρισμα 1.4 Αν υπάρχει αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου για το 1.19, τότε υπάρχει αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου και για το 1.18.

Λήμμα 1.5 Έστω κυρτό πολύτοπο $P \subset \mathbb{R}^n$. Το P γράφεται ως $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ για κάποιο $A \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, $m > n$, $m, n \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{R}^m$. Αν $\text{int}(P) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax < b\} \neq \emptyset$, τότε $\exists n+1$ γραμμικά ανεξάρτητες κορυφές του P .

Θεώρημα 1.6 Έστω $B_k \in \text{Sym}^+$, δηλαδή είναι συμμετρικό, θετικά ορισμένο μητρώο, $x_k \in \mathbb{R}^n$ και $a_i \in \mathbb{R}^n$. Έστω επίσης τα B_{k+1} και x_{k+1} , όπως προκύπτουν από τους αναδρομικούς τύπους 1.15 και 1.16. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

- (1) $B_{k+1} \in \text{Sym}^+$
- (2) $E_k(B_k, x_k) \cap H_k = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \in E_k(B_k, x_k) \wedge a_i \cdot x \leq a_i \cdot x_k\} \subset E_{k+1}(B_{k+1}, x_{k+1})$
- (3) Ισχύει $\frac{\text{vol}(E_{k+1})}{\text{vol}(E_k)} = \frac{n}{n+1} \left(\frac{n^2}{n^2-1} \right)^{\frac{n-1}{2}} < e^{-1/2n}$.

Αρκεί, λοιπόν, να δειχτεί ότι ο αριθμός των βημάτων για να τερματίσει ο αλγόριθμος είναι πολυωνυμικός στο L . Για το σκοπό αυτό χρειάζονται τα Λήμματα που ακολουθούν:

Λήμμα 1.7 Αν το $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ είναι full dimensional κυρτό πολύτοπο στον \mathbb{R}^n και $A \in \mathbb{Q}^m \times \mathbb{Q}^n$, $m > n$, $m, n \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{Q}^m$, τότε $\text{vol}(P) \geq 2^{-(n+1)\langle A \rangle + n^3}$.

Λήμμα 1.8 Έστω το $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ με $A \in \mathbb{Q}^m \times \mathbb{Q}^n$, $m > n$, $m, n \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{Q}^m$ έχει μη κενό εσωτερικό. Λαμβάνεται ως αρχικό ελλειψοειδές η σφαίρα E_0 με κέντρο το $a_0 = \mathbf{0}$ και ακτίνα ίση με $R = \sqrt{n} 2^{\langle A, b \rangle - n^2}$. Αν το γενικό βήμα της μεθόδου ελλειψοειδούς με κεντρικές τομές εφαρμοστεί για $N := 2n((2n+1)\langle A \rangle + n\langle b \rangle - n^3)$ φορές, τότε $\text{vol}(E_N) < 2^{-(n+1)\langle A \rangle + n^3}$.

Λήμμα 1.9 Η μέθοδος ελλειψοειδούς τερματίζει μετά από το πολύ N επαναλήψεις, όπου N όπως δόθηκε προηγουμένως.

Εντοπίζονται δύο σημαντικά ζητήματα όταν η μέθοδος πρόκειται να εφαρμοστεί για επίλυση προβλημάτων με την χρήση υπολογιστή. Καταρχάς, οι εξισώσεις 1.15, 1.16 έχουν διατυπωθεί με

την προϋπόθεση ότι οι υπολογισμοί είναι ακριβείς (exact arithmetic). Στην πράξη, ωστόσο, οι υπολογισμοί εκτελούνται με πεπερασμένη ακρίβεια (finite precision arithmetic). Αυτό προκαλεί προβλήματα στο (1) του Θεωρήματος 1.6, αφού οι στρογγυλοποιήσεις μπορεί να οδηγήσουν σε μητρώο $\mathbf{B}_{k+1} \notin \text{Sym}^+$ ή σε μη επιτρεπτές υπόρριζες ποσότητες στους τύπους 1.15 και 1.16. Επίσης, λόγω στρογγυλοποιήσεων παύει να ισχύει το (2) του Θεωρήματος 1.6, αφού το κέντρο \mathbf{x}_{k+1} πλέον έχει μετακινηθεί από την θεωρητική του θέση και το μητρώο \mathbf{B}_{k+1} έχει τροποποιηθεί. Χρειάζεται να διογκωθεί το νέο ελλειψοειδές E_{k+1} με κατάλληλο συντελεστή προκειμένου και να εξασφαλιστεί η ισχύς του (2) ξανά και να συνεχίσει το νέο ελλειψοειδές να έχει μικρότερο όγκο από το προηγούμενο E_k . Ο Khachiyan έκανε χρήση του συντελεστή $\xi = 2^{1/4n^2}$ διατυπώνοντας παράλληλα ότι ακρίβεια της τάξης των 23L bits πριν την υποδιαστολή και 38nL μετά επαρκεί, όπως αναφέρουν οι Bland, Goldfarb, Todd (1981).

Το δεύτερο ζήτημα που ανακύπτει αφορά την διατύπωση του ζητούμενου πολυωνυμικού φράγματος N στον αριθμό των επαναλήψεων που απαιτούνται μέχρι τον τερματισμό του αλγορίθμου, το οποίο και πάλι εξαρτάται από την ακρίβεια με την οποία αποδίδονται οι αριθμοί και εκτελούνται οι πράξεις. Εύκολα παρατηρεί κανείς ότι η ακρίβεια που προδιαγράφηκε ως απαιτούμενη από τον Khachiyan και αναφέρθηκε προηγουμένως είναι μεταβλητή, αφού εξαρτάται από το μέγεθος του εξεταζόμενου κάθε φορά στιγμιοτύπου. Προφανώς, στους υπολογιστές που χρησιμοποιούνται σήμερα, η ακρίβεια είναι προκαθορισμένη, επομένως τίθεται περιορισμός στο μέγεθος προβλημάτων που μπορούν να λυθούν. Για μεγαλύτερα στιγμιότυπα δεν εξάγεται με ασφάλεια το συμπέρασμα “το πρόβλημα δεν έχει λύση” μετά από την εκτέλεση N επαναλήψεων.

1.4.2 ΒΑΘΙΕΣ ΤΟΜΕΣ

Στην μέθοδο των βαθιών τομών λαμβάνεται υπερεπίπεδο τομής με το ελλειψοειδές με $0 < \bar{\alpha} < 1$, προκειμένου να επιταχυνθεί η σύγκλιση του αλγορίθμου. Παρότι σε θεωρητικό επίπεδο η συμβολή της διαφοροποίησης αυτής κρίνεται επουσιώδης, αφού η τάξη μεγέθους του χρόνου επίλυσης ενός προβλήματος δεν αλλάζει, ωστόσο σε πρακτικό επίπεδο, μειώνονται οι απαιτούμενες επαναλήψεις μέχρι τον τερματισμό ενός στιγμιοτύπου.

Τα υπερεπίπεδα που επιλέγονται είναι οι ίδιοι οι περιορισμοί που κατά περίπτωση εντοπίζονται ως παραβιασθέντες και το τυπολόγιο που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό κάθε νέου ελλειψοειδούς συνοψίζεται στις εξισώσεις 1.7, 1.8.

Το Θεώρημα 1.6 τροποποιείται ως εξής:

Θεώρημα 1.10 Έστω $\mathbf{B}_k \in \text{Sym}^+$, δηλαδή είναι συμμετρικό, θετικά ορισμένο μητρώο, $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ και $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$. Έστω επίσης τα \mathbf{B}_{k+1} και \mathbf{x}_{k+1} , όπως προκύπτουν από τους αναδρομικούς τύπους 1.15 και 1.16. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

$$(1) \quad \mathbf{B}_{k+1} \in \text{Sym}^+$$

$$(2) \quad E_k(\mathbf{B}_k, \mathbf{x}_k) \cap H_k = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} \in E_k(\mathbf{B}_k, \mathbf{x}_k) \wedge \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{x} \leq b_i\} \subset E_{k+1}(\mathbf{B}_{k+1}, \mathbf{x}_{k+1}),$$

$$\text{όπου } \bar{a} := \frac{\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{x}_k - b_i}{\sqrt{\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{B}_k \mathbf{a}_i}} \text{ και } 0 < \bar{a} < 1.$$

(3) Το ελλειψοειδές E_{k+1} έχει ελάχιστο όγκο μεταξύ εκείνων που έχουν την ιδιότητα (2)

$$(4) \quad \text{Ισχύει } \frac{\text{vol}(E_{k+1})}{\text{vol}(E_k)} = \frac{n(1-\bar{a})}{(n+1)} \left(\frac{n^2(1-\bar{a}^2)}{n^2-1} \right)^{\frac{n-1}{2}} < e^{-1/2n} (1-\bar{a})(1-\bar{a}^2)^{\frac{n-1}{2}}.$$

Και στην περίπτωση αυτή ο αλγόριθμος τερματίζει μετά από $N \leq 2n((2n+1)\langle \mathbf{A} \rangle + n\langle \mathbf{b} \rangle - n^3)$ επαναλήψεις. Το N θα προκύπτει μικρότερο από την συγκεκριμένη τιμή ακόμη και αν $\bar{a} > 0$ μόνο σε μια επανάληψη, αφού η μείωση όγκου από το ένα ελλειψοειδές στο επόμενο θα είναι μεγαλύτερη από ότι στην περίπτωση των κεντρικών τομών. Ωστόσο ο N εξαρτάται από τους συντελεστές \bar{a} κάθε βήματος που δεν είναι εκ προοιμίου γνωστοί, γι' αυτό και δεν μπορεί να υπολογιστεί εκ των προτέρων. Χρησιμοποιείται και πάλι ο N που υπολογίστηκε, ο οποίος αποτελεί άνω φράγμα.

1.5 ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΛΛΕΙΨΟΕΙΔΟΥΣ ΓΙΑ ΕΠΙΛΥΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ

Μέχρι στιγμής έχει παρουσιαστεί η εφαρμογή της μεθόδου ελλειψοειδούς για την εύρεση εφικτού σημείου στον χώρο λύσεων συστήματος γραμμικών ανισοτήτων. Η μέθοδος, όμως, δύναται να προσαρμοστεί έτσι, ώστε να οδηγεί στον υπολογισμό της βέλτιστης λύσης του προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού:

$$\max \mathbf{c} \cdot \mathbf{x}$$

1.9

$$\mathbf{x} \in P = \{\mathbf{x} \geq 0 \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}$$

$$\text{όπου } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m.$$

Το δυϊκό πρόγραμμα του 1.9 γράφεται ως:

$$\min \mathbf{b} \cdot \mathbf{y}$$

1.20

$$\mathbf{y} \in Q = \{\mathbf{y} \geq 0 \mid \mathbf{A}^T \mathbf{y} \geq \mathbf{c}\}$$

$$\text{όπου } \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m, \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m.$$

Η προσαρμογή αυτή μπορεί να γίνει με διάφορους τρόπους. Αναφέρονται εδώ η ταυτόχρονη λύση του πρωταρχικού 1.9 και του δυϊκού προβλήματος 1.20 στον \mathbb{R}^{m+n} , η μέθοδος της διχοτόμησης

και λύση θεωρώντας την αντικειμενική συνάρτηση ως περιορισμό, όπως αυτές περιγράφονται από τους Bland, Goldfarb, Todd (1981).

Ταυτόχρονη λύση του πρωταρχικού και του δυϊκού προβλήματος

Εάν ο δυϊσμός στο πρόβλημα είναι ισχυρός, τότε το 1.9 έχει πεπερασμένη βέλτιστη λύση ανν το 1.20 έχει πεπερασμένη βέλτιστη λύση. Στην περίπτωση αυτή οι τιμές των αντικειμενικών συναρτήσεων των δύο λύσεων ταυτίζονται. Εάν ο δυϊσμός είναι ασθενής, τότε ισχύει $c \cdot x \leq b \cdot y \quad \forall x$ εφικτή λύση του 1.9 και $\forall y$ εφικτή λύση του 1.20. Η ασθενής και ισχυρή δυϊκότητα περιγράφονται από τους Boyd, Vandenberghe (2009). Γράφοντας το πρόβλημα στην κανονική του μορφή:

$$\begin{aligned} Ax &\leq b, \\ -x &\leq 0 \\ -A^T y &\leq -c \\ -y &\leq 0 \\ -c \cdot x + b \cdot y &\leq 0 \end{aligned} \tag{1.21}$$

Η μέθοδος ελλειψοειδούς εφαρμόζεται σε αυτό το σύστημα ανισοτήτων ακολουθώντας τα βήματα που έχουν δοθεί σε προηγούμενη ενότητα. Μάλιστα επιλύοντας το πρόβλημα 1.21 υπολογίζεται ταυτόχρονα με την πρωταρχική λύση και η λύση του δυϊκού προγράμματος.

Η προσέγγιση του γραμμικού προγράμματος με αυτόν τρόπο παρουσιάζει αρκετά μειονεκτήματα, όπως επισημαίνουν και οι Bland, Goldfarb, Todd (1981). Συγκεκριμένα, όπως εύκολα κανείς αντιλαμβάνεται, η σύγκλιση είναι αργή, αφού οι διαστάσεις του προβλήματος πλέον ανέρχονται σε $m+n$. Δεύτερον, ακόμη και αν διατίθενται σαφή φράγματα για τις μεταβλητές του πρωταρχικού προγράμματος, τα οποία διευκολύνουν την επιλογή ενός ελλειψοειδούς εκκίνησης $E_0 = S(\mathbf{0}, R)$ με περιορισμένο όγκο και τοιουτοτρόπως επιταχύνουν την σύγκλιση, δεν εξασφαλίζεται η εύρεση αντίστοιχων φραγμάτων για τις μεταβλητές του δυϊκού προβλήματος. Έτσι, το E_0 του 1.21 πιθανόν να είναι πολύ μεγαλύτερο από όσο χρειάζεται. Το τρίτο μειονέκτημα συνίσταται στο ότι οι λύσεις του 1.21 βρίσκονται στο υπερέπιπεδο $c \cdot x = b \cdot y$, συνεπώς, ακόμη και αν είναι το 1.21 εφικτό, το σύνολο των λύσεων του είναι μηδενικού όγκου στον \mathbb{R}^{m+n} . Για το λόγο αυτό απαιτείται μεταβολή του συστήματος, όπως περιγράφεται στο Λήμμα 1.3. Και πάλι όμως το σύνολο των λύσεων του μεταβλημένου συστήματος έχει πολύ μικρό όγκο, και επακόλουθα απαιτείται πολύ μεγάλος αριθμός επαναλήψεων. Τέλος, όταν ο αλγόριθμος καταλήγει στο συμπέρασμα “το πρόβλημα δεν είναι εφικτό”, αυτό αναφέρεται στο 1.21, επομένως ούτε παράγονται εφικτά σημεία του πρωταρχικού ή του δυϊκού προβλήματος ούτε διευκρινίζεται αν πρόκειται όντως για πρόβλημα μη εφικτό ή αν είναι μη φραγμένο.

Μέθοδος διχοτόμησης

Έστω σύστημα ανισοτήτων της μορφής

$$A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$$

$$-\mathbf{x} \leq \mathbf{0}$$

1.22

$$-\mathbf{c} \cdot \mathbf{x} \leq -\zeta$$

Εφαρμόζεται αρχικά η μέθοδος ελλειψοειδούς στους περιορισμούς του 1.9, ώστε να υπολογιστεί εφικτό σημείο \mathbf{x}_{low} , αν υπάρχει, ή να τερματίσει ο αλγόριθμος, αν δεν υπάρχει. Η τιμή $\zeta_{low} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{x}_{low}$ αποτελεί κάτω φράγμα για την βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης. Άνω φράγμα βρίσκεται είτε βάσει όσων αναφέρθηκαν στην 1.2 “ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΓΙΑ ΤΑ ΕΛΛΕΙΨΟΕΙΔΗ”, εξίσωση 1.6, ίσο με $\zeta_{upper} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{x}_k + \sqrt{\mathbf{c} \cdot \mathbf{B}_k \mathbf{c}}$ στην περίπτωση που $P \subseteq E_k$, είτε εφαρμόζοντας την μέθοδο ελλειψοειδούς στους περιορισμούς του δυϊκού προβλήματος 1.21, ίσο με $\zeta_{upper} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{y}_{upper}$. Αν το 1.21 είναι μη εφικτό, τερματίζεται ο αλγόριθμος.

Κάθε μεγάλη επανάληψη ξεκινά με ένα διάστημα $I = [\zeta_{low}, \zeta_{upper}]$ με $\mathbf{x}^* \in I$ και εφαρμόζει την μέθοδο ελλειψοειδούς στο 1.22 με $\zeta = \frac{\zeta_{low} + \zeta_{upper}}{2}$. Αν προκύψει εφικτό σημείο \mathbf{x}_k , τίθενται $\mathbf{x}_{low} \leftarrow \mathbf{x}_k$, $\zeta_{low} \leftarrow \mathbf{c} \cdot \mathbf{x}_k$ και ξεκινά νέα μεγάλη επανάληψη. Αν προκύψει ότι το σύστημα 1.22 με $\zeta = \frac{\zeta_{low} + \zeta_{upper}}{2}$ είναι μη εφικτό τίθεται $\zeta_{upper} \leftarrow \zeta$ και ακολουθεί νέα επανάληψη. Ο αλγόριθμος τερματίζει όταν το διάστημα $I = [\zeta_{low}, \zeta_{upper}]$ γίνει αρκούντως μικρό.

Βασικό μειονέκτημα της μεθόδου διχοτόμησης αποτελεί το γεγονός ότι τα συστήματα 1.22 που έχουν πολύ μεγάλο ζ είναι μη εφικτά, αλλά χρειάζονται μεγάλο πλήθος επαναλήψεων για να διαπιστωθεί κάτι τέτοιο. Για το λόγο αυτό υποχρεωτικά χρησιμοποιείται η μέθοδος ελλειψοειδούς με βαθιές τομές και τεστ για τη διαπίστωση μη εφικτού συστήματος, ώστε να τερματίζει νωρίς ο αλγόριθμος. Στα μειονεκτήματα επίσης κατατάσσεται η οπισθοχώρηση (backtracking) που αναγκάζεται να κάνει ο αλγόριθμος όταν βρίσκει μη εφικτή λύση μετά από κάποια μεγάλη επανάληψη.

Μέθοδος κυλιόμενης αντικειμενικής συνάρτησης

Όπως πριν παράγεται εφικτή λύση \mathbf{x}_{low} για το σύστημα των περιορισμών του 1.9 και χρησιμοποιείται η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης στο σημείο αυτό ως κάτω φράγμα της βέλτιστης τιμής της. Παρότι η τιμή \mathbf{x}_{low} είναι εφικτή, ο αλγόριθμος προχωρά ενεργοποιώντας το υπερεπίπεδο $\mathbf{c} \cdot \mathbf{x} \geq \mathbf{c} \cdot \mathbf{x}_{low} = \zeta$ και βρίσκοντας το ελλειψοειδές ελάχιστου όγκου που διέρχεται από τα σημεία τομής του υπερεπιπέδου και του προηγούμενου ελλειψοειδούς και περιέχει τμήμα της εφικτής περιοχής και την βέλτιστη λύση. Με αυτόν τον τρόπο, όπως καθίσταται προφανές, εξετάζονται πάντοτε εφικτά συστήματα, με εξαίρεση ίσως το αρχικό σύστημα. Κάθε φορά που ένα εφικτό σημείο μιας επανάληψης ικανοποιεί την ανισότητα $\mathbf{c} \cdot \mathbf{x}_k > \mathbf{c} \cdot \mathbf{x}_{low} = \zeta_{low}$, τίθεται $\mathbf{x}_{low} \leftarrow \mathbf{x}_k$ και $\zeta \leftarrow \zeta_{low} \leftarrow \mathbf{c} \cdot \mathbf{x}_k$ και ακολουθούνται τα ίδια βήματα ξανά.

Η μέθοδος αυτήν δείχνει να είναι η πιο αποτελεσματική για πρακτικές εφαρμογές. Εξετάζει

πάντα εφικτά συστήματα και δεν αναγκάζεται να οπισθοχωρήσει. Επίσης, οι υπολογισμοί γίνονται στον \mathbb{R}^n , δεν συντελείται δηλαδή αύξηση των διαστάσεων του προβλήματος. Σε κάθε μεγάλη επανάληψη που καταλήγει σε ελλειψοειδές του οποίου το κέντρο ικανοποιεί την ανισότητα $\mathbf{c} \cdot \mathbf{x}_k > \mathbf{c} \cdot \mathbf{x}_{low} = \zeta_{low}$ υπολογίζεται νέο άνω φράγμα της βέλτιστης τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης. Ο τύπος υπολογισμού είναι: $\zeta_{upper, k} = \min\{\zeta_{upper, k-1}, \mathbf{c} \cdot \mathbf{x}_k + \sqrt{\mathbf{c} \cdot \mathbf{B}_k \mathbf{c}}\}$. Ο αλγόριθμος τερματίζει όταν η διαφορά άνω και κάτω φράγματος της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης γίνεται αρκούντως μικρή.

1.6 ΑΚΡΙΒΗΣ ΤΙΜΗ ΑΠΟ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΗ

Με τον αλγόριθμο που περιγράφηκε παραπάνω καταλήγει κανείς σε προσεγγιστική λύση. Για $\varepsilon > 0$ το \mathbf{x} ορίζεται ως η ε -προσεγγιστική λύση του 1.9, αν υπάρχουν εφικτή λύση \mathbf{y} και βέλτιστη λύση \mathbf{x}^* τέτοιες, ώστε $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| \leq \varepsilon$ και $\mathbf{c} \cdot (\mathbf{x}^* - \mathbf{x}) \leq \varepsilon$. Από την ε -προσεγγιστική λύση χρειάζεται να μπορεί να προσδιοριστεί η ακριβής με πολυωνυμικού χρόνου αλγόριθμο (αλλιώς στερείται της πολυωνυμικής βελτιστοποίησής του γενικά το πρόβλημα).

Έστω ότι το 1.9 έχει βέλτιστη λύση (αυτό μπορεί να διαπιστωθεί με έλεγχο της ύπαρξης εφικτών λύσεων ταυτόχρονα για το πρόβλημα και το δυικό του για ισχυρό δυϊσμό). Έστω επίσης $\Delta \in \mathbb{Z}^+$ και $\mathbf{x}^* \in \mathbb{Q}^n$ της μορφής

$$\mathbf{x}^* = \left(\frac{p_1}{q_1}, \dots, \frac{p_n}{q_n} \right), \quad p_i, q_i \in \mathbb{Z}, \quad |q_i| \leq \Delta, \quad i = 1, \dots, n. \quad 1.23$$

Με δεδομένο $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο, ώστε $\mathbf{x}^* \in \text{int}\left(S\left(\mathbf{x}, \frac{1}{2\Delta^2}\right)\right)$, προκύπτει ότι το \mathbf{x}^* είναι το μοναδικό ρητό διάνυσμα της μορφής 1.23 εντός της παραπάνω σφαίρας. Από $\mathbf{y} \in S\left(\mathbf{x}, \frac{1}{2\Delta^2}\right)$ υπονοείται ότι $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}^*\| \geq \frac{1}{\Delta^2}$. Όμως αν το \mathbf{y} είναι επίσης της μορφής 1.23 και $y_j \neq x_j^*$ για κάποιο j , τότε $|y_j - x_j^*| \geq \frac{1}{\Delta^2} \Rightarrow \|\mathbf{y} - \mathbf{x}^*\| \geq \frac{1}{\Delta^2}$. Συνεπώς, αν \mathbf{x}, \mathbf{x}^* όπως περιγράφονται, με \mathbf{x} γνωστό και \mathbf{x}^* άγνωστο, μπορεί κανείς να υπολογίσει το \mathbf{x}^* με στρογγυλοποίηση όλων των συντεταγμένων του \mathbf{x} στον πλησιέστερο ρητό $\frac{p}{q}$, όπου $|q| \leq \Delta$ με την μέθοδο των συνεχών κλασμάτων.

Έστω τώρα \mathbf{x}^* είναι βέλτιστο σημείο του γραμμικού προγράμματος και \mathbf{x} όπως υπολογίζεται από την μέθοδο ελλειψοειδούς. Μπορεί κανείς να αντικαταστήσει το διάνυσμα συντελεστών της αντικειμενικής συνάρτησης, το \mathbf{c} , με το $\mathbf{d} = \gamma^n \cdot \mathbf{c} + (\gamma^0, \dots, \gamma^{n-1})^T$ έτσι, ώστε το πρόβλημα

$$\max \mathbf{d} \cdot \mathbf{x}, \text{ s.t. } \mathbf{A} \mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \quad 1.24$$

να εμφανίζει μοναδική βέλτιστη τιμή σε ακρότατο σημείο \mathbf{x}^* και το \mathbf{x}^* να λύνει, επίσης, το 1.9. Για παράδειγμα μπορεί να τεθεί $\gamma = 2^{(n+1)\langle A, \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle + 1}$. Από τον κανόνα του Cramer το \mathbf{x}^* είναι της μορφής 1.23 για $\Delta \geq |\max\{\det \mathbf{D} | \mathbf{D} \text{ υποορίζουσα } n \times n \text{ του } \mathbf{A}\}|$, όπου \mathbf{A} από το 1.9. Αυτό ισχύει για $\Delta = 2^{\langle A, \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle}$.

Για $\varepsilon > 0$ αρκούντως μικρό ισχύει

$$\|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}\| < \frac{1}{2\Delta^2} \tag{1.25}$$

για κάθε ε -προσεγγιστική λύση \mathbf{x} του 1.24. Αν επιπλέον το ε επιλεγεί έτσι, ώστε το $\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ να είναι πολυωνυμικό στα n και $\langle A, \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$, τότε μια ε -προσεγγιστική λύση γίνεται να υπολογιστεί με την μέθοδο ελλειψοειδούς σε χρόνο πολυωνυμικό στα n και $\langle A, \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$. Κάποιος επίσης μπορεί να προσδιορίσει το ε ως συνάρτηση των n , $\langle A, \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$ και $\|\mathbf{c}\|$ έτσι, ώστε να ικανοποιείται η 1.25 και το $\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ να είναι πολυωνυμικό στα n και $\langle A, \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$. Με $\Delta = 2^{\langle A, \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle}$ και $\gamma = 2^{(n+1)\langle A, \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle + 1}$ μπορεί να τεθεί $\frac{1}{\varepsilon} = n^{\frac{3}{2}} 2^{(n^2+2n+2)\langle A, \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle + 2n+5} + \|\mathbf{c}\| \sqrt{n} 2^{(2n+3)\langle A, \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle + 5}$. Επειδή $x_j < 2^{\langle A, \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle} \forall j$, η στρογγυλοποίηση του \mathbf{x} με συνεχή κλάσματα απαιτεί το πολύ $O[n(p + \langle A, \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle)]$ αριθμητικές πράξεις, κάθε μία εκ των οποίων περιλαμβάνει το πολύ $p + \langle A, \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$ δυαδικά ψηφία, όπου p ο αριθμός των δυαδικών ψηφίων στην ακρίβεια που διατηρείται κατά την μέθοδο ελλειψοειδούς.

Τα παραπάνω περιγράφονται αναλυτικά από τους Bland, Goldfarb, Todd (1981).

1.7 ΜΕΘΟΔΟΣ ΚΕΝΤΡΙΚΩΝ ΤΟΜΩΝ ΓΙΑ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΗ ΑΚΡΙΒΕΙΑ

Στις προηγούμενες παραγράφους παρουσιάστηκε η μέθοδος ελλειψοειδούς για την επίλυση LI και LP όταν οι υπολογισμοί γίνονται με απόλυτη ακρίβεια. Όταν, δηλαδή, τόσο τα δεδομένα των εκάστοτε στιγμιοτύπων, όσο και οι τιμές που προκύπτουν κατά τα ενδιάμεσα βήματα ανήκουν στους ρητούς αριθμούς και η αριθμητική ακρίβεια που διατίθεται επαρκεί για την έκφρασή τους. Ωστόσο σε πρακτικό επίπεδο, είτε από την αρχή είτε σε ενδιάμεσα στάδια, ανακύπτουν και άρρητοι αριθμοί, οι οποίοι αναγκαστικά στρογγυλοποιούνται σε κοντινούς τους ρητούς ανάλογα με την ακρίβεια που διατίθεται.

Η στρογγυλοποίηση που αναγκαστικά πραγματοποιείται προκαλεί προβλήματα με αποτέλεσμα η μέθοδος να μην λειτουργεί στην μορφή που δόθηκε με τον τρόπο που αναμένεται. Παρακάτω δίνεται περιγραφή της μεθόδου ελλειψοειδούς με κεντρικές τομές, η οποία έχει υποστεί κατάλληλες τροποποιήσεις, ώστε να μπορεί να χρησιμοποιηθεί και σε πρακτικό επίπεδο για επίλυση προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού με χρήση υπολογιστή.

Εξετάζοντας γενικά την περίπτωση κυρτού χωρίου και σύμφωνα με όσα παρουσιάζονται από τους Grötschel, Lovász, Schrijver (1993):

Θεώρημα 1.26 Υπάρχει oracle-polynomial αλγόριθμος (αλγόριθμος προφήτης) ονομαζόμενος μέθοδος ελλειψοειδούς κεντρικών τομών που λύνει το ακόλουθο πρόβλημα:

Δεδομένα: $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in \mathbb{Q}$ και περιγεγραμμένο, κλειστό, κυρτό χωρίο $(K; n, R)$ και αλγόριθμος-προφήτης SEP_K , ο οποίος, $\forall \mathbf{y} \in \mathbb{Q}^n \wedge \forall \delta > 0, \delta \in \mathbb{Q}$ είτε επιβεβαιώνει ότι $\mathbf{y} \in S(K, \delta)$ είτε βρίσκει διάνυσμα $\mathbf{c} \in \mathbb{Q}^n$ με $\|\mathbf{c}\|_\infty = 1$ τ.ω. $\mathbf{c} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{c} \cdot \mathbf{y} + \delta \quad \forall \mathbf{x} \in K$.

Αποτελέσματα: Ένα από τα ακόλουθα

1. διάνυσμα $\mathbf{x}_s \in S(K, \varepsilon)$,
2. μητρώο $\mathbf{B} \in \text{Sym}^+(\mathbb{Q}^{n \times n})$ και σημείο $\mathbf{x} \in \mathbb{Q}^n$ τ.ω. $K \subseteq E(\mathbf{B}, \mathbf{x})$ και $\text{vol}(E(\mathbf{B}, \mathbf{x})) \leq \varepsilon$.

Εφαρμόζοντας την μέθοδο ελλειψοειδούς είτε θα προκύψει σημείο εντός του $S(K, \varepsilon)$ είτε το τελευταίο ελλειψοειδές θα έχει όγκο το πολύ ίσο με ε .

Απόδειξη Θεωρήματος 1.26

Θα δοθεί σε πολλά βήματα. Καταρχάς περιγράφεται η μέθοδος, στην συνέχεια αποδεικνύεται η ορθότητά της με την υπόθεση ότι διάφορα λήμματα ισχύουν. Τέλος αποδεικνύονται τα εν λόγω λήμματα.

Έστω ότι οι αριθμοί n , R , ε και ο προφήτης SEP_K δίνονται. Χωρίς βλάβη της γενικότητας λαμβάνεται $\varepsilon < 1$.

I. Για την ακριβή περιγραφή του αλγορίθμου χρειάζονται οι ακόλουθες παράμετροι:

$$N := \lceil 5n |\log \varepsilon| + 5n^2 |\log(2R)| \rceil,$$

$$p := 8N, \tag{1.27}$$

$$\delta := 2^{-p}.$$

Ο ακέραιος N αντιπροσωπεύει τον μέγιστο αριθμό επαναλήψεων της μεθόδου ελλειψοειδούς κεντρικών τομών, ο ρητός αριθμός δ είναι το σφάλμα που επιτρέπεται στον προφήτη SEP_K να κάνει και ο ακέραιος p είναι η παράμετρος ακρίβειας της αριθμητικής αναπαράστασης. Θεωρείται από εδώ και στο εξής ότι όλες οι τιμές αποδίδονται στο δυαδικό σύστημα στρογγυλοποιημένες στα p ψηφία μετά την υποδιαστολή.

Η διαδικασία ξεκινά θέτοντας

$$\mathbf{x}_0 := \mathbf{0}$$

$$\mathbf{B}_0 := R^2 \mathbf{I} \tag{1.28}$$

έτσι ώστε $E_0 = S(\mathbf{0}, R)$ και συνεπώς $K \subseteq E_0$ (ορισμός του περιγεγραμμένου κυρτού χωρίου).

Έστω $\mathbf{x}_k, \mathbf{B}_k$ υπολογίζονται για κάποιο $k \geq 0$. Αν $k=N$, τότε το ελλειψοειδές $E_N = E(\mathbf{B}_N, \mathbf{x}_N)$ έχει την ιδιότητα που προδιαγράφεται στο (2) του θεωρήματος. και γι' αυτό ο αλγόριθμος σταματάει.

Αν $k < N$, τότε καλείται ο προφήτης SEP_K με $\mathbf{y} = \mathbf{x}_k$ και παράμετρο σφάλματος δ , όπως ορίζεται στην σχέση 1.27.

Αν ο SEP_K καταλήξει σε $\mathbf{x}_k' \in S(K, \delta)$, τότε βάσει της επιλογής του δ , $\mathbf{x}_k' \in S(K, \varepsilon)$ και ο αλγόριθμος καταλήγει στο να εκπληρώνεται το (1) του θεωρήματος.

Αν ο SEP_K καταλήξει σε $\mathbf{c}_k \in \mathbb{Q}^n$ με $\|\mathbf{c}_k\|_\infty = 1$ και $\mathbf{c}_k \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{c}_k \cdot \mathbf{y} + \delta \quad \forall \mathbf{x} \in K$, τότε ακολουθούν οι παρακάτω υπολογισμοί

$$\mathbf{x}_{k+1} := \mathbf{x}_k - \frac{1}{n+1} \frac{\mathbf{B}_k \mathbf{c}_k}{\sqrt{\mathbf{c}_k \cdot \mathbf{B}_k \mathbf{c}_k}}, \quad 1.29$$

$$\mathbf{B}_{k+1} := \frac{2n^2+3}{2n^2} \left(\mathbf{B}_k - \frac{2}{n+1} \frac{\mathbf{B}_k \mathbf{c}_k (\mathbf{B}_k \mathbf{c}_k)^T}{\sqrt{\mathbf{c}_k \cdot \mathbf{B}_k \mathbf{c}_k}} \right) \quad 1.30$$

Το σύμβολο \approx επιστρατεύεται προκειμένου να φανεί ότι η αριστερή πλευρά των εξισώσεων προκύπτει μετά από στρογγυλοποίηση των αριθμών στα p ψηφία.

II. Για να δειχθεί η ορθότητα του αλγορίθμου που περιγράφηκε, εδραιώνονται τα παρακάτω ως δεδομένα.

Λήμμα 1.11 Τα μητρώα $\mathbf{B}_0, \mathbf{B}_1, \dots \in \text{Sym}^+$. Επιπλέον, $\|\mathbf{x}_k\| \leq R 2^k$, $\|\mathbf{B}_k\| \leq R^2 2^k$ και $\|\mathbf{B}_k^{-1}\| \leq R^{-2} 4^k$, όπου χρησιμοποιούνται η ευκλείδεια νόρμα για τα διανύσματα και η νόρμα ιδιοτιμών για τα μητρώα.

Λήμμα 1.12 $K \subseteq E_k$ για $k=0, 1, \dots$.

Λήμμα 1.13 $\frac{\text{vol}(E_{k+1})}{\text{vol}(E_k)} \leq e^{-\frac{1}{5n}}$ για $k=0, 1, \dots$.

Από το Λήμμα 1.11 προκύπτει ότι οι τύποι 1.29, 1.30 έχουν νόημα, αφού δεν περιλαμβάνουν διαίρεση με το 0 και ότι οι ενδιάμεσες τιμές των \mathbf{x}_k και \mathbf{B}_k διατηρούν πολωνυμικά μήκη κωδικοποίησης. Επομένως, οι αριθμητικοί υπολογισμοί μπορούν να πραγματοποιηθούν σε πολωνυμικό χρόνο.

Αν ο αλγόριθμος βρίσκει σημείο $\mathbf{x}_s \in S(K, \varepsilon)$, τότε δεν χρειάζεται να αποδειχθεί κάτι. Αν σταματάει με $k=N$, τότε, βάσει του Λήμματος 1.12, το E_N όντως περιέχει το K , ενώ παράλληλα

από το Λήμμα 1.13 ο όγκος του E_N ικανοποιεί την σχέση $\text{vol}(E_N) \leq e^{-\frac{N}{5^n}} \text{vol}(E_0)$.

Η E_0 περιέχεται στον υπερκύβο $Q = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid -R \leq x_i \leq R, i = 1, \dots, n\}$. Με την πολύ αδρή προσέγγιση $\text{vol}(E_0) \leq \text{vol}(Q) = (2R)^n$ προκύπτει

$$\text{vol}(E_N) \leq e^{-\frac{N}{5^n}} (2R)^n < 2^{-\frac{N}{5^n}} (2R)^n \leq \varepsilon \quad 1.31$$

Από την τελευταία ανισότητα στην πραγματικότητα προσδιορίζεται και η τιμή του πολυωνυμικού φράγματος N .

Αποδείξεις των Λημμάτων στο ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΤΗΣ ELLIPSOID METHOD.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Μέθοδοι σφαίρας

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΜΕΘΟΔΟΙ ΣΦΑΙΡΑΣ

Οι μέθοδοι σφαίρας (sphere methods – SMs) για προβλήματα LP ανήκουν στις μεθόδους εσωτερικού σημείου (interior point methods – IPMs). Πρόκειται για μια σειρά μεθόδων που χαρακτηρίζονται ως μέθοδοι διόρθωσης και πρόβλεψης, καθώς αποτελούνται τόσο από βήματα διόρθωσης όσο και από βήματα πρόβλεψης. Εξετάζουν γραμμικά προγράμματα της μορφής

$$\begin{aligned} \min \mathbf{c} \cdot \mathbf{x} \\ \text{s.t. } \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \end{aligned} \quad 2.1$$

όπου $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ κανονικοποιημένα, ώστε $\|\mathbf{A}_i\| = 1 \quad \forall i = 1, \dots, m$, $\|\mathbf{c}\| = 1$ και δίνεται για αυτά μια αρχική εσωτερική εφικτή λύση $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$.

Σε αντίθεση με τις προγενέστερες τους IPMs, οι SMs δεν απαιτούν τον υπολογισμό αντίστροφου πίνακα του συνόλου των περιορισμών του εκάστοτε προγράμματος. Χρειάζονται μόνο αντιστροφή υποπίνακων του αρχικού πίνακα, οι οποίοι περιέχουν κάποιους από τους αρχικούς περιορισμούς κι όχι όλους, γεγονός που μειώνει σημαντικά το υπολογιστικό κόστος κάθε επανάληψης. Επιπρόσθετα, οι πλεονάζοντες περιορισμοί (redundant constraints) του προβλήματος δεν εισέρχονται ποτέ στους υπολογισμούς. Οι μέθοδοι σφαίρας χρησιμοποιούν κάθε φορά μόνο ένα σύνολο περιορισμών εφαπτόμενων σε κατάλληλη, εσωτερική στην εφικτή περιοχή σφαίρα.

Μέχρι σήμερα έχουν αναπτυχθεί συνολικά 7 SMs. Προσχέδιο της πρώτης εξ αυτών, της SM-1 (Sphere method 1), εμφανίζεται το 2005 (Murty 2005) ως προσπάθεια βελτίωσης της ήδη διατυπωμένης μεθόδου βαρύτητας (Gravitational method, Chang, Murty (1989)). Η μέθοδος βαρύτητας λειτούργησε ως συνοριακή μέθοδος διάστασης μεγαλύτερης από 1 (αναφέρεται ότι η Simplex είναι συνοριακή μέθοδος διάστασης 1, καθώς κινείται πάντα πάνω στις ακμές του χωρίου εφικτών λύσεων). Το γεγονός αυτό, το ότι δηλαδή το σωματίδιο μπορούσε κατά την “πτώση” του προς την βέλτιστη λύση να κινείται εκτός των ακμών και επί συνοριακών υπερεπιπέδων, διατηρούσε ανοικτό το ενδεχόμενο να εμφανίζει πολυπλοκότητα μικρότερη από την πολυπλοκότητα της Simplex. Ωστόσο αποδείχτηκε ότι η πολυπλοκότητα και αυτής της μεθόδου είναι εκθετική (Morin, Prabhu, Zhang 2001).

Μετά το προσχέδιο του 2005, στο διάστημα 2006 έως 2008, παρουσιάζεται η μέθοδος ολοκληρωμένη (Murty 2006a, Murty 2006b, Murty, Oskoorouchi 2008a, Murty, Oskoorouchi 2008b), ενώ μέχρι σήμερα έχουν προταθεί αρκετές διαφοροποιήσεις και βελτιώσεις της (Murty, Kabadi 2008, Murty 2009a, Murty 2009b, Murty, Oskoorouchi 2010a, Murty, Oskoorouchi 2010b, Murty 2013b, Murty 2014).

Στη συνέχεια παρουσιάζονται συνοπτικά οι μέθοδοι σφαίρας 1, 2, 3, 4, 5, 6 (για την 7η έχει δημοσιευτεί μόνο προσχέδιο). Πρώτα παρατίθενται ορισμένα εισαγωγικά στοιχεία και συμβολισμοί, συγκεντρωμένα από την παραπάνω βιβλιογραφία.

2.1 ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΙ – ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

Προκειμένου να εφαρμοστούν οι μέθοδοι σφαίρας απαιτείται μια αρχική, εσωτερική εφικτή λύση του προβλήματος. Για να μπορεί να υπάρχει τέτοια εσωτερική λύση πρέπει προφανώς το εσωτερικό του χωρίου των εφικτών λύσεων να είναι μη κενό, δηλαδή το πρόβλημα που εξετάζεται να είναι full-dimensional. Αυτό όπως είναι φυσικό δεν συμβαίνει πάντοτε. Επομένως το δοθέν κατά περίπτωση στιγμιότυπο χρήζει κατάλληλης τροποποίησης, ώστε η παραπάνω συνθήκη να πληρούται.

Όπως αναφέρεται στην βιβλιογραφία (Murty 2006a), η εξασφάλιση χωρίου εφικτών λύσεων που να είναι full-dimensional επιτυγχάνεται με την τροποποίηση big-M augmentation, η οποία επιστρατεύει μια τεχνητή μεταβλητή και διαμορφώνει το πρόγραμμα ως εξής:

$$\begin{aligned} \min \mathbf{c} \cdot \mathbf{x} + M x_{n+1} \\ \text{s.t. } \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{e} x_{n+1} \geq \mathbf{b}, \text{ όπου } \mathbf{e} = (1, 1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^m \text{ και } M \text{ θετικός αριθμός αρκούντως μεγάλος.} \\ x_{n+1} \geq 0 \end{aligned}$$

Η ισοδυναμία των λύσεων ωστόσο δεν εξασφαλίζεται σε αυτή την μορφή του big-M augmentation.

Με την παραπάνω τροποποίηση του προγράμματος το πλήθος των μεταβλητών αλλάζει σε $n+1$. Διευκρινίζεται, προς αποφυγήν σύγχυσης του αναγνώστη, ότι παρακάτω αναλύονται οι μέθοδοι για την γενική περίπτωση συστήματος m περιορισμών και n μεταβλητών, όπου το πρόβλημα θεωρείται ότι έχει το μέγεθος $m \times n$ μετά από την εκτέλεση όλων των απαραίτητων τροποποιήσεων.

2.1.1 ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΙ

ε = μικρή θετική ανοχή, όπως αυτή ορίζεται κατά περίπτωση.

\mathbf{x}^0 = αρχική εσωτερική εφικτή λύση.

\mathbf{x}^r = σημείο στην αρχή της μεγάλης επανάληψης $r+1$.

$\mathbf{x}^{r,F,k}$ = σημείο στην αρχή της $k+1$ εσωτερικής LSFN επανάληψης και εντός της μεγάλης επανάληψης $r+1$.

$\mathbf{x}^{r,C,k}$ = σημείο στην αρχή της $k+1$ εσωτερικής LSCPD επανάληψης και εντός της μεγάλης επανάληψης $r+1$.

$\hat{\mathbf{x}}^r$ = κέντρο μπάλας κατά την μεγάλη επανάληψη $r+1$, μετά το πέρας των LSFN και LSCPD.

K = χωρίο εφικτών λύσεων.

$K^\circ = \{\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} > \mathbf{b}\}$ = εσωτερικό του K .

$K^{r+1} = \{\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{c} \cdot \mathbf{x}^r + \varepsilon\}$ = ανανεωμένο χωρίο για την $r+1$ επανάληψη στις SM-2, SM-4, SM-5.

$H(\bar{\mathbf{x}}) = \{\mathbf{x}: \mathbf{c} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{c} \cdot \bar{\mathbf{x}}\}$ = υπερεπίπεδο της αντικειμενικής συνάρτησης που αντιστοιχεί στο σημείο $\bar{\mathbf{x}}$.

$\delta(\mathbf{x}) = \min\{A_i \cdot \mathbf{x} - b_i : i=1, \dots, m\}$ για $\mathbf{x} \in K^\circ$ = ακτίνα της μέγιστης μπάλας στο K με κέντρο \mathbf{x} .

$B(\mathbf{x}, \delta(\mathbf{x}))$ = μέγιστη μπάλα στο K με κέντρο \mathbf{x} για $\mathbf{x} \in K^\circ$.

$T(\mathbf{x}) = \text{σύνολο δεικτών } i \text{ που ικανοποιούν την } A_i \cdot \mathbf{x} - b_i = \min\{A_p \cdot \mathbf{x} - b_p : p=1, \dots, m\} = \delta(\mathbf{x}) \text{ για } \mathbf{x} \in K^\circ$. Το υπερεπίπεδο $\{\mathbf{x}: A_i \cdot \mathbf{x} = b_i\}$ είναι εφαπτόμενο στην $B(\mathbf{x}, \delta(\mathbf{x}))$ για κάθε $i \in T(\mathbf{x})$. Επομένως, το $T(\mathbf{x})$ καλείται το σύνολο δεικτών των εφαπτόμενων περιορισμών στο $\mathbf{x} \in K^\circ$.

t_{\min}, t_{\max} = ελάχιστη και μέγιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης πάνω στο K , αντίστοιχα.

Γ = σύνολο όπου αποθηκεύονται τα σημεία \mathbf{x} που προκύπτουν από τα καθοδικά βήματα που εκτελούνται σε μια μεγάλη επανάληψη, καθώς και οι τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης που αντιστοιχούν σε αυτά.

$\Gamma_1 = \{\pm A_i^T : i=1, \dots, m\}$ = σύνολο των κατευθύνσεων των κάθετων στα υπερεπίπεδα του συνόρου του K .

$\Gamma_2 = \{\pm P_{.i} : i=1, \dots, m\}$, όπου $P_{.i} = (I - \mathbf{c}^T \mathbf{c}) A_i^T$ = κάθετη προβολή του A_i στο υπερεπίπεδο $\{\mathbf{x}: \mathbf{c} \cdot \mathbf{x} = 0\}$ για $i=1, \dots, m$.

$\Gamma_1^{r+1} = \{\pm \mathbf{c}, \pm A_i : i=1, \dots, m\}$ = σύνολο των κατευθύνσεων των κάθετων στα υπερεπίπεδα του συνόρου του K^{r+1} .

$\delta[t] = \max\{\delta(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \{\mathbf{x}: \mathbf{c} \cdot \mathbf{x} = t\}\}$ = μέγιστη ακτίνα της σφαίρας που μπορεί να εγγραφεί στο K με το κέντρο περιορισμένο επί του $\{\mathbf{x}: \mathbf{c} \cdot \mathbf{x} = t\}$.

t^* = τιμή $t \in [t_{\min}, t_{\max}]$ που μεγιστοποιεί το $\delta(t)$.

$\mathbf{c}^i = (I - A_i^T A_i) \mathbf{c}^T$ = κάθετη προβολή του \mathbf{c}^T στο $\{\mathbf{x}: A_i \cdot \mathbf{x} = 0\}$ για $i=1, \dots, m$.

$\text{dist}(\mathbf{y})_i = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| : A_i \cdot \mathbf{x} = b_i = A_i \cdot \mathbf{y} - b_i$ = κάθετη απόσταση ενός σημείου $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ από το υπερεπίπεδο στο σύνορο του χωρίου λύσεων K με εξίσωση $\{\mathbf{x}: A_i \cdot \mathbf{x} = b_i\}$.

(Murty, Oskoorouchi 2008a, Murty, Oskoorouchi 2010a)

Κάθε επανάληψη των SMs αποτελείται εν γένει από δύο βήματα, ένα κεντροποιόν και ένα βήμα καθόδου. Το κεντροποιόν είναι βήμα διόρθωσης. Προσπαθεί να μετακινήσει την τρέχουσα κάθε φορά εσωτερική εφικτή λύση σε νέα με μεγαλύτερη ακτίνα $\delta(\mathbf{x})$ και τιμή αντικειμενικής συνάρτησης αμετάβλητη ή βελτιωμένη (σημείο πιο κοντά στο “κέντρο” παρά στο σύνορο του χωρίου). Η εφαρμογή του αποσκοπεί στην μεγαλύτερη μείωση της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης κατά το διάδοχο βήμα καθόδου. Η σύγκριση πραγματοποιείται με τη μείωση της αντικειμενικής συνάρ-

τησης που επιτυγχάνεται εάν το βήμα καθόδου ξεκινήσει από σημείο κοντά στο σύνορο του χωρίου. Η βελτίωση αυτή ερμηνεύεται αν σκεφτεί κανείς ότι αυξάνοντας την ακτίνα δ αυξάνεται και το ελάχιστο βήμα κίνησης από το \mathbf{x} προς οποιαδήποτε διεύθυνση. Επομένως μεγαλώνοντας το δ επιτρέπονται μεγαλύτερα βήματα προς την βέλτιστη λύση (Murty, Oskoorouchi 2010a).

Το βήμα καθόδου κατατάσσεται στα βήματα πρόβλεψης και οδηγεί σε τιμή αντικειμενικής συνάρτησης γνησίως μικρότερη από την προηγούμενη. Κατά την εκτέλεση του τα εσωτερικά σημεία που εξετάζονται πλησιάζουν κάποιο σύνορο του χωρίου. Για να μπορεί ωστόσο να διασφαλιστεί η παραμονή τους στο εσωτερικό και, συνεπώς, η κατάταξη της μεθόδου στις IPMs, αυτά μετατρέπονται σε κέντρα σφαιριδίων μικρής ακτίνας και το βήμα καθόδου μετακινεί τα σφαιρίδια συνολικά. Έτσι, τα σημεία – κέντρα σφαιριδίων απέχουν πάντοτε από το σύνορο απόσταση τουλάχιστον ίση με την ακτίνα του σφαιριδίου. Το βήμα καθόδου ολοκληρώνει μια μεγάλη επανάληψη της SM. Στην ουσία “ρίχνει” το σημείο που έχει υπολογιστεί μετά την ολοκλήρωση του κεντροποιού βήματος, ως σφαιρίδιο πλέον, προς μια από τις θεωρούμενες κατευθύνσεις καθόδου. Η κατεύθυνση αυτή είναι προφανώς εκείνη που δύναται να προκαλέσει την σημαντικότερη μείωση στην αντικειμενική συνάρτηση. Η “πτώση” ανακόπτεται από τον πρώτο περιορισμό που συναντά το σφαιρίδιο κατά την κίνησή του και μια επόμενη επανάληψη ξεκινά με αρχικό σημείο το κέντρο του προκύπτοντος σφαιριδίου.

2.1.2 ΚΕΝΤΡΟ ΜΠΑΛΑΣ ΠΟΛΥΤΟΠΟΥ (Ball Center of Polytope)

Ένα πολύτοπο διάστασης 1 είναι ευθύγραμμο τμήμα, οπότε κέντρο είναι το μέσον του. Σε πολύτοπο διάστασης $n \geq 2$, το οποίο περιγράφεται από το σύστημα εξισώσεων $\min \mathbf{c} \cdot \mathbf{x}$ και είναι $s.t. \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}$ φραγμένο και κυρτό, ως κέντρο μπάλας ορίζεται το σημείο \mathbf{x} που αποτελεί το κέντρο της μέγιστης εγγεγραμμένης στο K μπάλας (μπάλα με την μέγιστη ακτίνα). Θεωρώντας $\delta^* = \delta(\mathbf{x}^*)$, το (\mathbf{x}^*, δ^*) είναι η βέλτιστη λύση του LP

$$\begin{aligned} \max \delta \\ s.t. \delta \leq \mathbf{A}_i \cdot \mathbf{x} - b_i, \quad i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad 2.2$$

Αν το LP παρουσιάζει μοναδική λύση, αυτήν είναι το (\mathbf{x}^*, δ^*) και \mathbf{x}^* είναι το κέντρο μπάλας του K . Αν η λύση δεν είναι μοναδική, αλλά πρόκειται για γεωμετρικό τόπο λύσεων S , τότε αυτός είναι της μορφής (\mathbf{x}, δ^*) , $\mathbf{x} \in S$. Προκειμένου να εξασφαλιστεί η μοναδικότητα του κέντρου, όμως, ορίζεται διαδοχικά ως το κέντρο μπάλας του πολυτόπου S με την μικρότερη διάσταση.

Έστω η επανάληψη $r+1$ της SM με σημείο εκκίνησης το \mathbf{x}^r . Χρειάζεται να υπολογιστεί το κέντρο μπάλας του πολυτόπου K με τον επιπλέον περιορισμό ότι πρέπει να βρίσκεται επί του υπερπίεδου $H = \{\mathbf{x} \in K \mid \mathbf{c} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{x}^r = t\}$ της ισχύουσας τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης. Το ζητούμενο κέντρο μπάλας του $K \cap H$ δίνεται ως βέλτιστη λύση του LP

$$\begin{aligned}
& \max \delta \\
& \text{s.t. } \delta - A_i \leq -b_i, \quad i=1, \dots, m \\
& \quad c \cdot x = t
\end{aligned}
\tag{2.3}$$

(Murty 2009a)

Με τον παραπάνω τρόπο εξασφαλίζεται ένα καλός ορισμένο και μοναδικό κέντρο μπάλας τόσο του φραγμένου, κυρτού πολυτόπου γενικά όσο και της φραγμένης, μη κενής τομής του πολυτόπου με το υπερεπίπεδο της αντικειμενικής συνάρτησης.

Στην περίπτωση των μη φραγμένων πολυτόπων οι έννοιες των κέντρων μπάλας δεν είναι καλώς ορισμένες. Παρόλα αυτά οι τεχνικές που παρακάτω θα αναφερθούν για τον προσεγγιστικό υπολογισμό των κέντρων μπάλας πολυτόπου και τομής πολυτόπου με υπερεπίπεδο μπορούν να εφαρμοστούν κανονικά. Σε κάποια επανάληψή τους, όμως, το μήκος κίνησης σε κάποια κατεύθυνση θα προκύψει ίσο με $+\infty$, γεγονός που υποδεικνύει ότι η αντικειμενική συνάρτηση είναι μη φραγμένη προς τα κάτω και εκεί ο αλγόριθμος τερματίζει (Murty, Oskoorouchi 2010a).

2.1.3 ΑΠΟΔΟΤΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ ΚΙΝΗΣΗΣ

Ορισμός 2.1 Έστω σημείο $x^r \in K^o$. Μια κατεύθυνση κίνησης $y \in \mathbb{R}^n$, $y \neq \mathbf{0}$ ονομάζεται αποδοτική κατεύθυνση κίνησης στο x^r αν η τιμή της $\delta(x^r + \alpha y)$ αυξάνει γνησίως καθώς το α αυξάνει ξεκινώντας από το 0 (Murty, Oskoorouchi 2010a).

Αποδεικνύεται (Murty 2006a, Murty 2006b, Murty, Oskoorouchi 2008a, Murty, Oskoorouchi 2008b) ότι:

Θεώρημα 2.2 Μια κατεύθυνση $y \in \mathbb{R}^n$, $y \neq \mathbf{0}$ είναι αποδοτική στο $x^r \in K^o$ αν $A_i \cdot y > 0 \quad \forall i \in T(x^r)$. Επίσης, \nexists αποδοτική κατεύθυνση στο $x^r \in K^o$ αν είναι κέντρο μπάλας του K , το οποίο ισχύει αν το σύστημα $A_i \cdot y > 0 \quad \forall i \in T(x^r)$ δεν έχει λύση.

2.2 ΜΕΘΟΔΟΣ ΣΦΑΙΡΑΣ 1 (SM-1)

Η μέθοδος σφαίρας 1 παρουσιάζεται ολοκληρωμένη από τους Murty και Oskoorouchi (Murty, Oskoorouchi 2008a). Κάθε γενική επανάληψη $r+1$ ξεκινά με το τρέχον σημείο x^r , το οποίο έχει προκύψει κατά το πέρας της αμέσως προηγούμενης επανάληψης, και στο οποίο εκτελούνται με την σειρά ένα κεντροποιόν και ένα βήμα καθόδου, όπως αυτά αναλύονται ακολούθως.

2.2.1 ΚΕΝΤΡΟΠΟΙΟΝ ΒΗΜΑ/ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΚΕΝΤΡΟΥ ΜΠΑΛΑΣ

Ο βασικός στόχος του βήματος αυτού συνοψίζεται στον υπολογισμό του κέντρου μπάλας του χωρίου K με πρόσθετο περιορισμό το κέντρο να ανήκει στο υπερεπίπεδο $H = \{x : c \cdot x = c \cdot x^{r,k}\}$ της αντικειμενικής συνάρτησης.

2.2.1.1 LSFN ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ SM-1 (using line search in facet normal directions)

Η συγκεκριμένη τεχνική, η παρουσίαση της οποίας ακολουθεί αυτήν της βιβλιογραφίας (Murty, Oskoorouchi 2008a), επιστρατεύει βήματα αναζήτησης γραμμής σε διευθύνσεις κάθετες στα συνοριακά υπερεπίπεδα. Δεν απαιτεί αντιστροφές μητρώων. Με $x^{r,F,0} = x^r$ δεδομένο σημείο εκκίνησης δημιουργεί ακολουθία σημείων $x^{r,F,k}$, $k=1,2,\dots$ με την ακτίνα δ να αυξάνεται γνησίως από σημείο σε επόμενο σημείο.

Κατά την εκτέλεση της LSFN ελέγχονται μόνο οι διευθύνσεις οι κάθετες στα συνοριακά υπερεπίπεδα του χωρίου K , καθώς ο στόχος του κεντροποιού βήματος είναι να αυξήσει την ελάχιστη απόσταση του τρέχοντος σημείου $x^{r,F,k}$ από τα υπερεπίπεδα αυτά. Εάν αναζητούνταν το κέντρο μπάλας του χωρίου K συνολικά, θα επιλεγόταν σε κάθε επανάληψη μια αποδοτική κατεύθυνση από το σύνολο $\Gamma_1 = \{\pm A_i : i=1, \dots, m\}$ και η διαδικασία θα τερμάτιζε όταν στο τελευταία εξεταζόμενο σημείο δεν θα υπήρχε πλέον αποδοτική κατεύθυνση εντός του Γ_1 ή όταν η μείωση της ακτίνας δ από την μια επανάληψη στην επόμενη γινόταν μικρότερη από κάποια προεπιλεγμένη ανοχή. Επειδή ωστόσο ζητείται να βρεθεί το κέντρο μπάλας του K επί του $K \cap H$, δηλαδή επί της τομής του K με το υπερεπίπεδο της αντικειμενικής συνάρτησης $H(x^r)$, εκλέγονται με τον ίδιο τρόπο κατευθύνσεις από το σύνολο $\Gamma_2 = \{\pm P_i : i=1, \dots, m\}$, όπου $P_i = (I_n - c^T c) A_i^T$, οι κάθετες προβολές των A_i^T στο υπερεπίπεδο $\{x : c \cdot x = 0\}$. Η επιλογή της αποδοτικής κατεύθυνσης κάθε φορά γίνεται με τεχνικές παρόμοιες με αυτές που χρησιμοποιούνται για την επιλογή μεταβλητών που τρέπονται σε βασικές σε κάθε επανάληψη της simplex. Επί παραδείγματι μπορεί να εκλεγεί μία από τις κατευθύνσεις εκείνες που “ισοβαθμούν” ως προς την ελάχιστη τιμή της $\delta(x^{r,F,k}) = \min\{A_i \cdot x^{r,F,k} - b_i : i=1, \dots, m\}$ (Murty 2006a).

Κάθε φορά που επιλέγεται μια αποδοτική κατεύθυνση $y = P_i$ στο τρέχον σημείο $x^{r,F,k}$, χρειάζεται να υπολογιστεί το βέλτιστο μήκος κίνησης πάνω σε αυτήν την κατεύθυνση, α , το οποίο μεγιστοποιεί την ακτίνα $\delta(x^{r,F,k} + \alpha y)$ ως συνάρτηση του $\alpha \geq 0$. Το πρόβλημα συνιστά γραμμικό πρόγραμμα δύο μεταβλητών το οποίο γράφεται ως (Murty, Oskoorouchi 2008a)

$$\begin{aligned} \max \quad & \delta \\ \text{s.t.} \quad & \delta - \alpha A_i \cdot y \leq A_i \cdot x^{r,F,k} - b_i, \quad i=1, \dots, m \\ & \delta, \alpha \geq 0 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Η επίλυση του 2.4 μπορεί εύκολα να γίνει με την μέθοδο simplex.

Τελικά, σε κάθε περίπτωση, $x^{r,F,k+1} = x^{r,F,k} + \alpha y_k$ και οι επαναλήψεις τερματίζουν όταν στο τελευταία εξεταζόμενο σημείο δεν υπάρχει αποδοτική κατεύθυνση εντός του Γ_2 ή όταν η μείωση της ακτίνας δ από την μια επανάληψη στην επόμενη γίνει μικρότερη από κάποια προεπιλεγμένη

ανοχή ε .

2.2.1.2 LSCPD ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ SM-1 (sequence of line search steps using computed profitable directions)

Σύμφωνα με τους Murty και Oskoorouchi (Murty 2006a, Murty, Oskoorouchi 2008a, Murty, Oskoorouchi 2010a) για την εύρεση του κέντρου μπάλας, μετά τον τερματισμό της LSFN η οποία αναζητά κατευθύνσεις κίνησης μόνο εντός του $\Gamma_2 = \{\pm \mathbf{P}_i : i=1, \dots, m\}$, εφαρμόζεται η τεχνική LSCPD, ώστε να εξεταστούν και κατευθύνσεις εκτός του Γ_2 . Οι αποδοτικές κατευθύνσεις προκύπτουν πλέον ως λύσεις ενός συστήματος γραμμικών εξισώσεων και η διαδικασία συνεχίζεται όσο το σύνολο των διανυσμάτων $\{\mathbf{c}, \mathbf{A}_i : i \in T(\mathbf{x}^{r,C,k})\}$ παραμένει γραμμικά ανεξάρτητο, όπου $\mathbf{x}^{r,C,k}$ το αρχικό σημείο κάθε επανάληψης.

Όσο, λοιπόν, τα προαναφερθέντα διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα μια αποδοτική κατεύθυνση στο $\mathbf{x}^{r,C,k}$ υπολογίζεται από την επίλυση του

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_i \cdot \mathbf{y} &= 1 \\ \mathbf{c} \cdot \mathbf{y} &= 0 \end{aligned} \quad \forall i \in T(\mathbf{x}^{r,C,k}) \quad 2.5$$

Το σύστημα έχει προφανώς λύση, λόγω της γραμμικής ανεξαρτησίας που είναι εξασφαλισμένη από την προϋπόθεση εφαρμογής. Έστω τώρα ότι στην τελευταία επανάληψη προκύπτει λύση \mathbf{y}^k και βέλτιστο μήκος κίνησης ίσο με α^k . Παρατηρείται ότι καθώς το α^k αυξάνει από την τιμή 0, το $\mathbf{A}_i \cdot (\mathbf{x}^{r,C,k} + \alpha \mathbf{y}^k) = \mathbf{A}_i \cdot \mathbf{x}^{r,C,k} + \alpha$ αυξάνει με τον ακριβώς ίδιο ρυθμό για κάθε $i \in T(\mathbf{x}^{r,C,k})$. Από αυτό συμπεραίνεται ότι στο νέο σημείο $\mathbf{x}^{r,C,k+1} = \mathbf{x}^{r,C,k} + \alpha \mathbf{y}^k$ ισχύει $T(\mathbf{x}^{r,C,k}) \subset T(\mathbf{x}^{r,C,k+1})$. Για το λόγο αυτό η LSCPD εκτελείται το πολύ n φορές, αφού σε ενδεχόμενη $n+1$ επανάληψη ακυρώνεται σίγουρα η απαιτούμενη γραμμική ανεξαρτησία.

Κάθε λύση \mathbf{y}^k του συστήματος 2.5, όσο αυτό παραμένει υπερορισμένο, μπορεί να διαχωριστεί σε ένα βασικό και ένα μη βασικό διάνυσμα. Έστω $\mathbf{y}^k = (\mathbf{y}^{B^k}, \mathbf{y}^{D^k})$, όπου $\mathbf{A}^k = (\mathbf{B}^k : \mathbf{D}^k)$ ο διαχωρισμός των στηλών του μητρώου συντελεστών του συστήματος σε βασικό και μη βασικό τμήμα που αντιστοιχεί στον διαχωρισμό της δεδομένης λύσης \mathbf{y}^k . Οι γραμμές του \mathbf{A}^k είναι $\{\mathbf{A}_i : i \in T(\mathbf{x}^{r,C,k})\}$.

Έστω, τώρα, ότι $\{1, 2, \dots, s\} = T(\mathbf{x}^{r,C,k}) \subset T(\mathbf{x}^{r,C,k+1}) = \{1, 2, \dots, s, s+1\}$. Η αποδοτική κατεύθυνση \mathbf{y}^{k+1} που χρησιμοποιείται με σημείο εκκίνησης το $\mathbf{x}^{r,C,k+1}$ υπολογίζεται με επίλυση του συστήματος

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_i \cdot \mathbf{y} &= 1 \\ \mathbf{c} \cdot \mathbf{y} &= 0 \end{aligned} \quad \forall i \in T(\mathbf{x}^{r,C,k+1}) = \{1, 2, \dots, s, s+1\} \quad 2.6$$

και η τελευταία του σειρά διαχωρίζεται επίσης σε $\mathbf{A}_{s+1}^k = (\mathbf{A}_{s+1}^{B^k} : \mathbf{A}_{s+1}^{D^k})$.

Το σύνολο των διανυσμάτων των συντελεστών των εφαπτόμενων περιορισμών $\{A_i, i \in T(\mathbf{x}^{r,C,k+1})\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο αν $A_{s+1}^{D^k} - A_{s+1}^{B^k} (B^k)^{-1} D^k \neq \mathbf{0}$.

Όταν $A_{s+1}^{D^k} - A_{s+1}^{B^k} (B^k)^{-1} D^k = \mathbf{0}$ η ακολουθία σημείων τερματίζει, καθώς χάνεται η απαραίτητη γραμμική ανεξαρτησία, και δίνεται ως αποτέλεσμα το $\mathbf{x}^{r,C,k+1}$, που αποτελεί προσέγγιση του κέντρου μπάλας του K . Όταν πάλι $A_{s+1}^{D^k} - A_{s+1}^{B^k} (B^k)^{-1} D^k \neq \mathbf{0}$ επιλέγεται ένα μη μηδενικό στοιχείο του προκύπτοντος πίνακα και έστω ότι η στήλη στην οποία ανήκει το μη μηδενικό στοιχείο αντιστοιχεί στην μεταβλητή y_j . Η αντίστοιχη στήλη του A^k είναι η $A_{\cdot,j}^k$, οπότε $\mathbf{y}_{B^{k+1}} = (\mathbf{y}_{B^k}, y_j)$ είναι βασικό διάνυσμα του 2.6 και η ανταποκρινόμενη σε αυτό βάση του 2.6 είναι

$$B^{k+1} = \begin{pmatrix} B^k & \vdots & A_{\cdot,j}^k \\ \dots & & \dots \\ A_{s+1}^{B^k} & \vdots & a_{s+1,j} \end{pmatrix} \quad 2.7$$

όπου $a_{s+1,j}$ ο συντελεστής του A_{s+1} που αντιστοιχεί στο y_j . Έτσι

$$(B^{k+1})^{-1} = \begin{pmatrix} P & \vdots & Q \\ \dots & & \dots \\ R & \vdots & S \end{pmatrix} \quad 2.8$$

$$\text{όπου } S = \frac{1}{(a_{s+1,j} - A_{s+1}^{B^k} (B^k)^{-1} A_{\cdot,j}^k)}$$

$$R = \frac{-A_{s+1}^{B^k} (B^k)^{-1}}{a_{s+1,j} - A_{s+1}^{B^k} (B^k)^{-1} A_{\cdot,j}^k}$$

$$Q = -(B^k)^{-1} A_{\cdot,j}^k S$$

$$P = (B^k)^{-1} + \frac{QR}{S}$$

Επομένως το $(B^{k+1})^{-1}$ γίνεται να υπολογιστεί κάνοντας χρήση των παραπάνω τύπων, με αναπροσαρμογή του μητρώου $(B^k)^{-1}$.

Η παραπάνω αλληλουχία επαναλαμβάνεται με τον ίδιο τρόπο, με αρχικό πλέον σημείο το $\mathbf{x}^{r,k+1}$ μέχρι τερματισμού. Συνεπώς, στην ακολουθία αυτή, κάθε φορά που σε μια επανάληψη το σύστημα 2.6 επαυξάνεται κατά έναν νέο περιορισμό, το βασικό διάνυσμα και ο αντίστροφος του μητρώου-βάσης επαναυπολογίζονται με αποτελεσματικό τρόπο για να χρησιμοποιηθούν στην επόμενη επανάληψη.

Ένας εναλλακτικός τρόπος προσεγγιστικού υπολογισμού του κέντρου μπάλας του K , αλλά για $c \cdot x \leq c \cdot x^r$ είναι ο παρακάτω:

Έστω $x^{r,C,k}$ το τρέχον σημείο. Αναζητείται αποδοτική κατεύθυνση κίνησης από το $x^{r,C,k}$, η οποία αποτελεί βασική λύση του γραμμικού συστήματος

$$A_i \cdot y = 1 \quad \forall i \in T(x^{r,C,k}) \quad 2.9$$

Ας παρατηρηθεί ότι η πρόσθετη συνθήκη $c \cdot y = 0$ δεν συμπεριλαμβάνεται στο σύστημα 2.9, ώστε να μπορούν να επιλεγούν και κατευθύνσεις που βελτιώνουν την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης. Υποθέτουμε ότι υπολογίζεται βασική λύση y^0 για το συγκεκριμένο σύστημα και ότι η λύση αυτή σχετίζεται με το βασικό διάνυσμα y_{B^0} και την βάση B^0 . Διακρίνονται δύο περιπτώσεις:

Περίπτωση 1

Αν $c \cdot y^0 \leq 0$, τότε η κατεύθυνση y^0 δεν κρίνεται μόνο αποδοτική στο $x^{r,C,k}$, αλλά και καθοδική. Εκτελείται, λοιπόν, βήμα αναζήτησης γραμμής, όπως ήδη έχει περιγραφεί, και το κεντροποιόν βήμα προχωράει στην επόμενη επανάληψή του. Η πράξη αυτή αυξάνει την ακτίνα της μέγιστης μπάλας και μπορεί επίσης να μειώσει την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης.

Περίπτωση 2

Αν $c \cdot y^0 > 0$, τότε παρατηρούνται δύο υποπεριπτώσεις. Έστω $(B^0; D^0)$ ο διαχωρισμός του μη-τρώνου συντελεστών του συστήματος 2.9 σε βασικό και σε μη βασικό μέρος αναφορικά με το βασικό διάνυσμα y_{B^0} και έστω $(c_{B^0}; c_{D^0})$ ο αντίστοιχος διαχωρισμός του διανύσματος c .

$$\text{Υποπερίπτωση 2.1} \quad c_{D^0} - c_{B^0} (B^0)^{-1} D^0 = 0$$

Στην εξεταζόμενη υποπερίπτωση, ισχύει για κάθε λύση του 2.9 $c \cdot y = a \text{ constant} = c \cdot y^0 > 0$. Επομένως, κάνοντας χρήση οποιασδήποτε λύσης του 2.9 η τιμή της ακτίνας της μέγιστης μπάλας $\delta(x)$ αυξάνεται. Όμως παράλληλα αυξάνεται και η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης, πράγμα απευκταίο. Για τον λόγο αυτό, η ακολουθία σημείων τερματίζεται με το $x^{r,C,k}$ ως τελευταίο σημείο, το οποίο αποτελεί και την ληφθείσα από το κεντροποιόν βήμα προσέγγιση του κέντρου μπάλας.

$$\text{Υποπερίπτωση 2.2} \quad c_{D^0} - c_{B^0} (B^0)^{-1} D^0 \neq 0$$

Έστω ότι ένα μη μηδενικό στοιχείο του $c_{D^0} - c_{B^0} (B^0)^{-1} D^0$, το οποίο συμβολίζεται στο εξής με \bar{c}_j , εντοπίζεται στην στήλη της μη βασικής μεταβλητής y_j . Έστω επίσης ότι με $(D^0)_j$ γράφεται το διάνυσμα στήλη του D^0 της μη βασικής μεταβλητής y_j . Η λύση y^1 του 2.9 δίνεται από το y^0 διάνυσμα, όπου όλες οι μεταβλητές του μη βασικού διανύσματος c_{D^0} ισούνται με μηδέν, πλην της y_j που προκύπτει από

$$\mathbf{y}_{B^0} = \mathbf{y}_{B^0}^0 - \theta (\mathbf{B}^0)^{-1} (\mathbf{D}^0)_{.j}$$

$$\text{Nonbasic } \mathbf{y}_j = \theta \tag{2.10}$$

$$\theta = \frac{-1 - \mathbf{c} \cdot \mathbf{y}^0}{\bar{c}_j}, \text{ με } \mathbf{c} \cdot \mathbf{y}^1 = -1$$

Εκτελείται βήμα αναζήτησης γραμμής από το τρέχον σημείο $\mathbf{x}^{r,c,k}$ προς την κατεύθυνση \mathbf{y}^1 . Όπως και στην Περίπτωση 1, η κίνηση αυτή όχι μόνο αυξάνει την ακτίνα της μέγιστης μπάλας, αλλά μειώνει και την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης, οδηγώντας έτσι σε καλή προσέγγιση του κέντρου μπάλας.

2.2.2 ΒΗΜΑΤΑ ΚΑΘΟΔΟΥ ΤΗΣ SM-1

Σε κάθε επανάληψη το κεντροποιόν βήμα κρίνεται υπολογιστικά το πιο δαπανηρό κομμάτι της μεθόδου. Συγκριτικά με αυτό, το βήμα καθόδου επιλύεται γρηγορότερα απαιτώντας ουσιαστικά μόνο έναν υπολογισμό ελάχιστου λόγου, που εκτελείται αρκετά εύκολα. Για αυτό και σε κάθε βήμα καθόδου υπολογίζονται διάφορες καθοδικές κατευθύνσεις και επιλέγεται τελικά εκείνη που προκαλεί την σημαντικότερη μείωση στην τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης (Murty, Oskoorouchi 2010a).

Έστω $\hat{\mathbf{x}}^r$ το κέντρο μπάλας που προέκυψε στο τέλος του κεντροποιού βήματος. Με δεδομένη την κατεύθυνση κίνησης από τα παραπάνω, επιλέγεται το βήμα γ από την σχέση

$$\gamma = \min \left\{ \frac{-\mathbf{A}_i \cdot \hat{\mathbf{x}}^r + b_i + \varepsilon_1}{\mathbf{A}_i \cdot \mathbf{y}} : i \text{ τ.ω. } \mathbf{A}_i \cdot \mathbf{y} \leq 0 \right\} \tag{2.11}$$

όπου το $\varepsilon_1 > 0$ εξασφαλίζει ότι κάθε καινούργιο σημείο παραμένει στο εσωτερικό K^0

Τελικά το καινούργιο σημείο προκύπτει ίσο με

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x}^{r+1} = \hat{\mathbf{x}}^r + \gamma \mathbf{y}, \text{ όταν } \gamma < \infty \\ \text{'αντικειμενική συνάρτηση μη φραγμένη'}, \text{ όταν } \gamma = \infty \end{array} \right. \tag{2.12}$$

Στην περίπτωση που η αντικειμενική συνάρτηση δεν είναι φραγμένη, η μέθοδος τερματίζεται.

D1, Βήμα καθόδου 1

Εκτελείται βήμα καθόδου από το κέντρο μπάλας $\hat{\mathbf{x}}^r$ με κατεύθυνση $\mathbf{d}^1 = -\mathbf{c}$, όπου $\mathbf{d}^1 \in \mathbb{R}^n$ διάνυσμα στήλη.

D2, Βήμα καθόδου 2

Εκτελείται βήμα καθόδου από το κέντρο μπάλας $\hat{\mathbf{x}}^r$ με κατεύθυνση $\mathbf{d}^2 = \hat{\mathbf{x}}^r - \hat{\mathbf{x}}^{r-1}$, όπου $\hat{\mathbf{x}}^{r-1}$ το κέντρο μπάλας της προηγούμενης κύριας επανάληψης. Επομένως, η διεύθυνση αυτή αποτελεί την διεύθυνση της διαδρομής των κέντρων μπάλας που υπολογίζονται κατά την εκτέλεση του αλγορίθμου.

D3, Βήμα καθόδου 3

Ορισμός 2.3 Οι κατευθύνσεις $-\mathbf{c}^i$ για $i \in T(\hat{\mathbf{x}}^r)$ ονομάζονται GPTC directions (gradient projection on touching constraint) για την τρέχουσα επανάληψη $r+1$.

Κατά το D3 εκτελούνται βήματα καθόδου από το κέντρο μπάλας $\hat{\mathbf{x}}^r$ με κατευθύνσεις όλες τις GPTC και επιλέγεται ως \mathbf{d}^3 εκείνη που προκαλεί την μεγαλύτερη βελτίωση στην τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης.

D4, Βήμα καθόδου 4

Εκτελείται βήμα καθόδου από το κέντρο μπάλας $\hat{\mathbf{x}}^r$ με κατεύθυνση $\mathbf{d}^4 = \sum_{i \in T(\hat{\mathbf{x}}^r)} -\frac{\mathbf{c}^i}{|T(\hat{\mathbf{x}}^r)|}$, τον μέσο όρο των GPTC που ορίστηκαν προηγουμένως.

D5.1, Βήμα καθόδου 5.1

Ορισμός 2.4 Για $i \in T(\hat{\mathbf{x}}^r)$ έστω \mathbf{x}^{ir} η κάθετη προβολή του κέντρου $\hat{\mathbf{x}}^r$ στο εφαπτόμενο συνοριακό υπερεπίπεδο $\{\mathbf{x} : \mathbf{A}_i \cdot \mathbf{x} = b_i\}$, δηλαδή το σημείο στο οποίο το συγκεκριμένο συνοριακό υπερεπίπεδο εφάπτεται στην μπάλα $B(\hat{\mathbf{x}}^r, \delta(\hat{\mathbf{x}}^r))$. Τα σημεία \mathbf{x}^{ir} για $i \in T(\hat{\mathbf{x}}^r)$ ονομάζονται εφαπτόμενα σημεία (TPs – touching points) της μπάλας $B(\hat{\mathbf{x}}^r, \delta(\hat{\mathbf{x}}^r))$ με τα εφαπτόμενα σε αυτήν συνοριακά υπερεπίπεδα του χωρίου K .

Ορισμός 2.5 Έστω $0 < \varepsilon < 1$ μια μικρή ανοχή (ανοχή ίση με $\varepsilon = 0.1$ λειτουργεί καλά). Για $i \in T(\hat{\mathbf{x}}^r)$, το σημείο που βρίσκεται επί του ευθύγραμμου τμήματος που ενώνει τα $\hat{\mathbf{x}}^r$ και \mathbf{x}^{ir} , εγγύς του TP \mathbf{x}^{ir} και δίνεται από την εξίσωση $\bar{\mathbf{x}}^{ir} = \varepsilon \hat{\mathbf{x}}^r + (1 - \varepsilon) \mathbf{x}^{ir}$ ονομάζεται σχεδόν εφαπτόμενο σημείο (NTP – near touching point) που αντιστοιχεί στο εφαπτόμενο επίπεδο $\{\mathbf{x} : \mathbf{A}_i \cdot \mathbf{x} = b_i\}$ της μπάλας $B(\hat{\mathbf{x}}^r, \delta(\hat{\mathbf{x}}^r))$.

Εκτελούνται βήματα καθόδου από το NTP $\bar{\mathbf{x}}^{ir}$ με κατευθύνσεις όλες τις GPTC για κάθε $i \in T(\hat{\mathbf{x}}^r)$. Στο τέλος των βημάτων καθόδου λαμβάνεται η κατεύθυνση που προκαλεί την μεγαλύτερη βελτίωση στην τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης, καθώς και το σημείο που προκύπτει κατά το συγκεκριμένο βήμα. Η κατεύθυνση ονομάζεται $\mathbf{d}^{5.1}$ και το σημείο θα συγκριθεί στην συνέχεια με εκείνα από τα άλλα βήματα καθόδου.

D5.2. Βήμα καθόδου 5.2

Έστω $\hat{\mathbf{x}}^{r1}$ το καλύτερο, από πλευράς τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης, σημείο που προέκυψε μετά την εκτέλεση των D1 έως D5.1. Το σημείο αυτό βρίσκεται κοντά στο σύνορο του K και μάλιστα $\delta(\hat{\mathbf{x}}^{r1}) \leq \varepsilon$. Ξεκινώντας από αυτό εκτελείται το βήμα καθόδου D5.2 (Murty, Kabadi 2008, Murty, Oskoorouchi 2010a, Murty, Oskoorouchi (2010b)).

Για κάθε $i \in T(\hat{\mathbf{x}}^{r1})$, πραγματοποιείται βήμα καθόδου στην κατεύθυνση GPTC $-\mathbf{c}^i$ κι επίσης, από το ίδιο σημείο πραγματοποιείται βήμα καθόδου με κατεύθυνση τον μέσο όρο των $-\mathbf{c}^i$ για $i \in T(\hat{\mathbf{x}}^{r1})$. Συμβολίζεται με $\hat{\mathbf{x}}^{r2}$ το καλύτερο βάσει τιμής αντικειμενικής συνάρτησης από τα σημεία όπου καταλήγουν τα καθοδικά βήματα.

Αν η διαφορά $\mathbf{c} \cdot \hat{\mathbf{x}}^{r1} - \mathbf{c} \cdot \hat{\mathbf{x}}^{r2}$ είναι $>$ από την επιλεγμένη ανοχή της μείωσης της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης, με το $\hat{\mathbf{x}}^{r2}$ ως αρχικό σημείο επαναλαμβάνεται το D5.2. Αν πάλι η διαφορά $\mathbf{c} \cdot \hat{\mathbf{x}}^{r1} - \mathbf{c} \cdot \hat{\mathbf{x}}^{r2}$ είναι \leq της προεπιλεγμένης ανοχής, τότε το βήμα δίνει τελικό αποτέλεσμα το σημείο $\hat{\mathbf{x}}^{r2}$.

Σύμφωνα με τους Murty, Oskoorouchi (2010b) στην SM-1 μπορεί να εφαρμοστεί και το βήμα D5.3, το οποίο περιγράφεται ως τμήμα της SM2.

Αφού εκτελεστούν όλα τα βήματα καθόδου εκλέγεται το καλύτερο ως προς την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης σημείο, το οποίο ονομάζεται \mathbf{x}^{r+1} και αποτελεί το αρχικό σημείο της επόμενης μεγάλης επανάληψης της μεθόδου.

Η SM-1 τερματίζεται όταν για δύο σημεία υπολογισθέντα από δύο διαδοχικές μεγάλες επαναλήψεις ισχύει $\frac{\|\mathbf{x}^{r+1} - \mathbf{x}^r\|}{\|\mathbf{x}^r\|} < \varepsilon$, όπου ε η απαιτούμενη ακρίβεια του αποτελέσματος. Το σημείο \mathbf{x}^{r+1} είναι και η προσεγγιστική λύση που δίνει η SM-1 στο αρχικό πρόβλημα.

2.3 ΜΕΘΟΔΟΣ ΣΦΑΙΡΑΣ 2 (SM-2)

Η SM-2 παρουσιάζεται για πρώτη φορά το 2008 (Murty, Oskoorouchi 2008b). Η βασική διαφορά μεταξύ αυτής και της SM-1 αφορά το θεωρούμενο σε κάθε μεγάλη επανάληψή τους χωρίο λύσεων. Ενώ στην SM-1 το χωρίο K παραμένει σταθερό καθ' όλη την διάρκεια εκτέλεσης του αλγόριθμου, στην SM-2 διαφοροποιείται μειούμενο σε κάθε μεγάλη επανάληψη. Για να μπορεί να υπάρξει η απαραίτητη διάκριση μεταξύ του αρχικού $K = K^1$ και των μεταβληθέντων χωρίων, κατά την επανάληψη r το τρέχον χωρίο συμβολίζεται με K^r και ισχύει $K^r \subset K^{r+1} \subset K$ για κάθε r .

Δεύτερη διαφορά εντοπίζεται στην εκτέλεση του κεντροποιού βήματος. Στην SM-1, κατά την LSFN ακολουθία, όλα τα παραγόμενα σημεία παραμένουν επί του υπερεπιπέδου της τρέχουσας τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης, αφού οι διευθύνσεις κίνησης επιλέγονται ως αποδοτικές όχι όμως καθοδικές. Στην SM-2 η LSFN παράγει διευθύνσεις που είναι και αποδοτικές και καθοδικές,

οπότε και βελτιώνεται κατά την εκτέλεσή της η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης.

Τέλος, στην SM-2 προστίθεται και καινούργιο βήμα καθόδου, D5.2 (Murty, Kabadi 2008).

Η μέθοδος ξεκινά με δεδομένο αρχικό εσωτερικό εφικτό σημείο \mathbf{x}^0 . Κατά την επανάληψη $r+1$ ως σημείο εκκίνησης λαμβάνεται το \mathbf{x}^r , το οποίο προέκυψε ως αποτέλεσμα της προηγούμενης επανάληψης. Το τρέχον σύνολο εφικτών λύσεων είναι το $K^{r+1} = \{\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{c} \cdot \mathbf{x}^r + \varepsilon\}$, όπου $\varepsilon > 0$ μικρή ανοχή.

2.3.1 ΚΕΝΤΡΟΠΟΙΟΝ ΒΗΜΑ ΤΗΣ SM-2

Στόχος του κεντροποιού βήματος της SM-2 είναι ο προσεγγιστικός υπολογισμός του κέντρου μπάλας του πολυτόπου K^{r+1} .

2.3.1.1 LSFN ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ SM-2

Ορίζεται το σύνολο $T_1^{r+1} = \{\pm \mathbf{c}, \pm \mathbf{A}_i : i = 1, \dots, m\}$ και αναζητείται αποδοτική διεύθυνση που να ανήκει σε αυτό. Η τελική τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης, η οποία προκύπτει κατά το πέρας της τελευταίας επανάληψης της LSFN είναι σίγουρα μικρότερη εκείνης που αντιστοιχεί στο σημείο \mathbf{x}^r , αφού η αναζήτηση γίνεται εντός του K^{r+1} .

2.3.1.2 LSCPD ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ SM-2

Έστω $\mathbf{x}^{r,F,g} = \mathbf{x}^{r,C,0}$ το σημείο εκκίνησης της LSCPD μεθόδου, όπου g ο αύξων αριθμός της τελευταίας επανάληψης της LSFN. Ορίζεται ως $T^{r+1}(\mathbf{x}^{r,C,k})$ το σύνολο των εφαπτόμενων στην μπάλα $B(\mathbf{x}^{r,C,k}, d(\mathbf{x}^{r,C,k}))$ περιορισμών του K^{r+1} . Συνήθως στο σύνολο αυτό ανήκει ο περιορισμός που αντιστοιχεί στην αντικειμενική συνάρτηση. Ωστόσο, αν δεν ανήκει, η LSCPD εφαρμόζεται όπως στην SM-1, χωρίς καμία αλλαγή.

Αν όντως ανήκει, τότε επιλύεται το σύστημα

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_i \cdot \mathbf{y} &= 1 \\ -\mathbf{c} \cdot \mathbf{y} &= \beta \end{aligned} \quad \forall i \in T^{r+1}(\mathbf{x}^{r,C,k}) \quad 2.13$$

όπου β θετική παράμετρος.

Στην SM-1 χρησιμοποιείται $\beta=1$ σταθερό, ενώ στην SM-2 το β αντιμετωπίζεται ως παράμετρος, αυστηρά θετική, και η λύση δίνεται συναρτήσει του. Έστω $\mathbf{p} + \beta \mathbf{q} = \mathbf{y}$.

Όπως και στην LSCPD της SM-1, η διαδικασία επαναληπτικών επιλύσεων του συστήματος έχει νόημα όσο τα διανύσματα του συνόλου $\{\mathbf{c}, \mathbf{A}_i : i \in T(\mathbf{x}^{r,C,k})\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Επομένως, n είναι η μέγιστη πληθικότητα του συνόλου αυτού και το σύστημα 2.13 είναι πάντοτε υπερδιορισμένο.

Θεωρήθηκε προηγουμένως $\mathbf{p} + \beta \mathbf{q} = \mathbf{y}$ η λύση του 2.13. Αφού το σύστημα είναι υπερορισμένο, η λύση χωρίζεται σε ένα βασικό και ένα μη βασικό διάνυσμα. Έστω ότι αυτά είναι τα \mathbf{y}_B και \mathbf{y}_D , όπου \mathbf{B} η βάση που αντιστοιχεί στο βασικό διάνυσμα \mathbf{y}_B . Για την λύση αυτή, χωρίζονται και τα \mathbf{p} και \mathbf{q} σε “βασικό” και “μη βασικό” κομμάτι, $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_B, \mathbf{p}_D)$ και $\mathbf{q} = (\mathbf{q}_B, \mathbf{q}_D)$, με τρόπο που να συμφωνεί με τον διαχωρισμό της λύσης \mathbf{y} . Έτσι $\mathbf{q}_D = \mathbf{p}_D = \mathbf{0}$ και το \mathbf{q}_B ταυτίζεται με την τελευταία στήλη του μητρώου \mathbf{B}^{-1} και το \mathbf{p}_B ισούται με το άθροισμα των εναπομεινασών στηλών του μητρώου \mathbf{B}^{-1} .

Συνεπώς $\forall \beta > 0$, το $\mathbf{p} + \beta \mathbf{q}$ αποτελεί αποδοτική κατεύθυνση στο $\mathbf{x}^{r,C,k}$ για K^{r+1} . Με το $\mathbf{p} + \beta \mathbf{q}$ ως κατεύθυνση αναζήτησης γραμμής, το βέλτιστο μήκος κίνησης α , δηλαδή το μήκος κίνησης που μεγιστοποιεί την ακτίνα $\delta(\mathbf{x}^{r,C,k} + \alpha(\mathbf{p} + \beta \mathbf{q}))$ της μέγιστης εγγεγραμμένης στο K^{r+1} μπάλας, καθορίζεται λύνοντας το LP 3 μεταβλητών με μεταβλητές τις δ, α, γ

$max \delta$

$$s.t. \delta - \alpha \mathbf{A}_i \cdot \mathbf{p} - \gamma \mathbf{A}_i \cdot \mathbf{q} \leq \mathbf{A}_i \cdot \mathbf{x}^{r,C,k} - b_i, \quad i=1, \dots, m$$

2.14

$$\delta - \alpha(-\mathbf{c}) \cdot \mathbf{p} - \gamma(-\mathbf{c}) \cdot \mathbf{q} \leq (-\mathbf{c}) \cdot \mathbf{x}^{r,C,k} - ((-\mathbf{c}) \cdot \mathbf{x}^r - \varepsilon)$$

$$(\delta, \alpha, \gamma) \geq (0, 0, 0)$$

όπου $\alpha, \gamma > 0$ στην βέλτιστη λύση και $\gamma = \alpha \cdot \beta$.

Για την βέλτιστη λύση $\delta, \alpha^*, \gamma^*$ του παραπάνω γραμμικού προγράμματος υπολογίζεται το επόμενο σημείο, το οποίο προκύπτει ίσο με $\mathbf{x}^{r,C,k+1} = \mathbf{x}^{r,C,k} + \alpha^* \cdot \mathbf{p} + \gamma^* \cdot \mathbf{q}$. Η LSCPD μέθοδος επαναλαμβάνεται μέχρι την συμπλήρωση της ακολουθίας των σημείων (ακύρωση γραμμικής ανεξαρτησίας).

Το τελικό σημείο της LSCPD, το οποίο συνιστά προσέγγιση του κέντρου μπάλας του K^{r+1} , συμβολίζεται με $\hat{\mathbf{x}}^r$ και με αυτό η SM-2 συνεχίζει στα βήματα καθόδου.

2.3.2 ΒΗΜΑΤΑ ΚΑΘΟΔΟΥ ΤΗΣ SM-2

Αρχικά εφαρμόζονται στο τρέχον χωρίο εφικτών λύσεων K^{r+1} τα βήματα D1 έως D5.2, όπως έχουν περιγραφεί στην SM-1. Σύμφωνα με τους Murty, Oskoorouchi (2010b):

D5.3, Βήμα καθόδου 5.3

Το βήμα ξεκινά με δεδομένο το σημείο-αποτέλεσμα του D5.2, $\hat{\mathbf{x}}^{r,5.2}$. Προφανώς $\delta(\hat{\mathbf{x}}^{r,5.2}) \leq \varepsilon$.

Για κάθε $i \in T(\hat{\mathbf{x}}^{r,5.2})$, ορίζεται ως $\hat{\mathbf{x}}^{i,r,5.2} = \hat{\mathbf{x}}^{r,5.2} + (\mathbf{A}_i)^T (b_i - \mathbf{A}_i \cdot \hat{\mathbf{x}}^{r,5.2})$ η κάθετη προβολή του

$\hat{\mathbf{x}}^{r,5.2}$ στο συνοριακό υπερεπίπεδο $\{\mathbf{x}: A_i \cdot \mathbf{x} = b_i\}$ και $\bar{\mathbf{x}} = \frac{\sum_{i \in T(\hat{\mathbf{x}}^{r,5.2})} \hat{\mathbf{x}}^{ir,5.2}}{|T(\hat{\mathbf{x}}^{r,5.2})|}$. Τυπικά, μια κίνηση από

το $\hat{\mathbf{x}}^{r,5.2}$ στην κατεύθυνση $\hat{\mathbf{x}}^{r,5.2} - \bar{\mathbf{x}}$ διασχίζει το κεντρικό τμήμα του K^{r+1} , επομένως βήμα στην κατεύθυνση αυτή αναμένεται να οδηγήσει σε αξιόλογη βελτίωση της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης. Εξετάζονται δύο περιπτώσεις:

Περίπτωση 1

Αν $\mathbf{c} \cdot (\hat{\mathbf{x}}^{r,5.2} - \bar{\mathbf{x}}) < 0$, πραγματοποιείται βήμα καθόδου απ' το $\hat{\mathbf{x}}^{r,5.2}$ στην κατεύθυνση $\hat{\mathbf{x}}^{r,5.2} - \bar{\mathbf{x}}$. Το αποτέλεσμα του βήματος είναι το σημείο που προκύπτει για το μέγιστο βήμα κίνησης πλην την απαιτούμενη ανοχή. Το νέο σημείο αντικαθιστά το προηγούμενο $\hat{\mathbf{x}}^{r,5.2}$ και ο ίδιος έλεγχος εκτελείται για αυτό. Η νέα επανάληψη συντελείται με τον τρόπο που περιγράφεται στην περίπτωση στην οποία ανήκει και η διαδικασία συνεχίζεται έως ότου η βελτίωση της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης γίνει αμελητέα.

Περίπτωση 2

Αν $\mathbf{c} \cdot (\hat{\mathbf{x}}^{r,5.2} - \bar{\mathbf{x}}) \geq 0$, τίθεται \mathbf{y} η κάθετη προβολή του $\hat{\mathbf{x}}^{r,5.2} - \bar{\mathbf{x}}$ στο υπερεπίπεδο $\{\mathbf{x}: \mathbf{c} \cdot \mathbf{x} = 0\}$ και $\mathbf{y} = (\mathbf{I} - \mathbf{c}^T \mathbf{c}) (\hat{\mathbf{x}}^{r,5.2} - \bar{\mathbf{x}})$. Μετά από επίλυση του LP 2-μεταβλητών

$$\begin{aligned} \max \quad & \delta \\ \text{s.t.} \quad & \delta - \alpha A_i \cdot \mathbf{y} \leq A_i \cdot \hat{\mathbf{x}}^{r,5.2} - b_i \quad \forall i \text{ και } \delta, \alpha \geq 0 \end{aligned} \quad 2.15$$

Έστω $\bar{\delta}, \bar{\alpha}$ η βέλτιστη λύση του 2.15. Η αντικειμενική συνάρτηση στο σημείο $\hat{\mathbf{x}}^{r,5.2} + \bar{\alpha} \mathbf{y}$ παρουσιάζει τιμή ίση με $\mathbf{c} \cdot \hat{\mathbf{x}}^{r,5.2}$, αφού $\mathbf{c} \cdot \mathbf{y} = 0$. Από το σημείο αυτό εκτελούνται καθοδικά βήματα D1 έως D5.2. Το τελικό αποτέλεσμα των βημάτων αυτών ορίζεται ως το νέο $\hat{\mathbf{x}}^{r,5.2}$ και το βήμα D5.3 επαναλαμβάνεται για άλλη μια φορά, μέχρι η βελτίωση της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης να γίνει αμελητέα (μικρότερη από προκαθορισμένη ανοχή).

D5.4, Βήμα καθόδου 5.4

Το βήμα αυτό εκτελείται αφού εκτελεστούν τα βήματα D1 έως D5.3.

Έστω $\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^s$ όλα τα σημεία που υπολογίζονται στο βήμα D5.1 που εκτελέστηκε τελευταίο κατά την τρέχουσα μεγάλη επανάληψη και το \mathbf{x}^s είναι το καλύτερο από αυτά όσον αφορά την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης. Επίσης, έστω $H = \{\mathbf{x}: \mathbf{c} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{x}^s\}$ το υπερεπίπεδο της αντικειμενικής που διέρχεται από το \mathbf{x}^s , το οποίο στο εξής θα ονομάζεται τρέχουσα αντικειμενική συνάρτηση. Επιλέγεται ε_1 μικρός θετικός αριθμός, π.χ. $\varepsilon_1 = 0.1$ ή μικρότερος. Εδώ s ο αριθμός των εφαιπόμενων περιορισμών του αντίστοιχου κέντρου (έχει ήδη εξηγηθεί το γιατί ταυτίζονται ο αύξων αριθμός του κέντρου με το πλήθος των εφαιπόμενων περιορισμών).

Για κάθε $t \in \{1, \dots, s-1\}$, έστω $\tilde{\mathbf{x}}^t$ η κάθετη προβολή του $\mathbf{x}^s + \varepsilon_1(\mathbf{x}^t + \mathbf{x}^s)$ στο H . Για όλα τα t για τα οποία $\tilde{\mathbf{x}}^t \in K^r$, το $\tilde{\mathbf{x}}^t$ μένει ως έχει. Για εκείνα τα $t \in \{1, \dots, s-1\}$ για τα οποία $\tilde{\mathbf{x}}^t \notin K^r$, πραγματοποιούνται τα ακόλουθα:

Υπολογίζεται το $\theta = \max \left\{ \left(\frac{-\mathbf{A}_i \cdot \tilde{\mathbf{x}}^t + b_i}{\mathbf{A}_i \cdot \mathbf{x}^s - \mathbf{A}_i \cdot \tilde{\mathbf{x}}^t} \right) : i \text{ που ορίζουν το } K^r \text{ τ.ω. } \mathbf{A}_i \cdot \tilde{\mathbf{x}}^t - b_i < 0 \right\}$. Αντικαθίσταται το $\tilde{\mathbf{x}}^t$ με το $\theta \mathbf{x}^s + (1-\theta)\tilde{\mathbf{x}}^t$. Αποδεικνύεται ότι μετά από αυτήν την αντικατάσταση όλα τα $\tilde{\mathbf{x}}^t \in K^r$ για $t \in \{1, \dots, s-1\}$.

Στην συνέχεια προσδιορίζεται η κατεύθυνση \mathbf{y} ως μέσος όρος των $\left\{ \frac{\tilde{\mathbf{x}}^t - \mathbf{x}^s}{\|\tilde{\mathbf{x}}^t - \mathbf{x}^s\|} : t=1, \dots, s-1 \right\}$.

Όλα τα $\tilde{\mathbf{x}}^t$ για $t \in \{1, \dots, s-1\}$ διασκορπίζονται προς διαφορετικές κατευθύνσεις πάνω στο $K^r \cap H$. Επομένως η ημιευθεία που ξεκινά από το \mathbf{x}_s και έχει κατεύθυνση \mathbf{y} θα διέρχεται από το κεντρικό τμήμα του $K^r \cap H$ και έτσι το σημείο που μεγιστοποιεί την $\delta(\mathbf{x}_s + a\mathbf{y})$ για $a \geq 0$ στο τρέχον χωρίο εφικτών λύσεων K^r μπορεί να αποτελεί συνετή προσέγγιση του κέντρου μπάλας του $K^r \cap H$.

Λύνεται το LP 2-μεταβλητών της μορφής 2.15 για να βρεθεί το σημείο $\mathbf{x}^s + a\mathbf{y}$, $a \geq 0$ που μεγιστοποιεί την ακτίνα της μέγιστης εγγεγραμμένης στο K^r μπάλας με κέντρο $\mathbf{x}^s + a\mathbf{y}$. Θέτω $\bar{\mathbf{x}}^2$ το σημείο αυτό.

Έστω $S(\bar{\mathbf{x}}^2) = \{\mathbf{A}_i^T : i \in T(\bar{\mathbf{x}}^2) \text{ s.t. } \mathbf{c} \cdot \mathbf{A}_i^T < 0\} \cup \{\mathbf{A}_i^T : i \in T(\bar{\mathbf{x}}^2) \text{ s.t. } \mathbf{c} \cdot \mathbf{A}_i^T > 0\}$ και \mathbf{y} ο μέσος όρος όλων των κατευθύνσεων που ανήκουν στο $S(\bar{\mathbf{x}}^2)$. Επαναπροσδιορίζεται το χωρίο K^r και τίθεται ίσο με $\{\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \wedge \mathbf{A}_{m+1} \cdot \mathbf{x} \geq b_{m+1}\}$, όπου, όπως ήδη έχει αναφερθεί, $\mathbf{A}_{m+1} = -\mathbf{c}$ και $b_{m+1} = -\mathbf{c} \cdot \bar{\mathbf{x}}^2 - \varepsilon$, με ε μικρό, θετικό αριθμό. Επιλύεται το LP 2-μεταβλητών ώστε να μεγιστοποιηθεί η ακτίνα της μέγιστης εγγεγραμμένης μπάλας μέσα στο καινούργιο χωρίο εφικτών λύσεων με κέντρα σε κάθε μια από τις ημιευθείες $\{\bar{\mathbf{x}}^2 + a(-\mathbf{c}) : a \geq 0\}$ και $\{\bar{\mathbf{x}}^2 + \beta \mathbf{y} : \beta \geq 0\}$. Ανάμεσα στα σημεία που προκύπτουν λαμβάνεται εκείνο που ανταποκρίνεται στην μπάλα με την μέγιστη ακτίνα και ονομάζεται $\bar{\mathbf{x}}^3$.

Με το $\bar{\mathbf{x}}^3$ ως νέο κέντρο εκτελείται νέος κύκλος βημάτων καθόδου με όλα τα βήματα D1 έως D5.3 και το τέλος αυτών ακολουθεί εκ νέου το βήμα D5.4. Η διαδικασία συνεχίζεται με τον ίδιο τρόπο μέχρι να γίνει η μείωση της αντικειμενικής συνάρτησης μεταξύ δύο διαδοχικών εφαρμογών του D5.4 αμελητέα. Στην περίπτωση τερματισμού, λαμβάνεται ως τελικό σημείο όλων των προηγούμενων βημάτων και του D5.4 εκείνο που δίνει την μικρότερη τιμή αντικειμενικής συνάρτησης.

D5.5, Βήμα καθόδου 5.5

Έστω $\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^s$ όλα τα σημεία που υπολογίζονται στο βήμα D5.1 που εκτελέστηκε τελευταίο κατά την τρέχουσα μεγάλη επανάληψη, ενώ παράλληλα το \mathbf{x}^s είναι το καλύτερο από αυτά όσον αφορά την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης. Για $i=1, \dots, s-1$ ορίζεται $\mathbf{x}^i(a) = \mathbf{x}^s + a(\mathbf{x}^i - \mathbf{x}^s)$. Για $i=1, \dots, s-1$ ακολουθείται το ακόλουθο βήμα:

Βήμα: Λαμβάνεται $\alpha=2^{-p}$ με $p=1$ στην πρώτη επανάληψη. Πραγματοποιείται βήμα καθόδου από το $\mathbf{x}^i(\alpha)$ προς την κατεύθυνση $-\mathbf{c}$. Αν προκύψει σημείο με τιμή αντικειμενικής συνάρτησης μικρότερη από $\mathbf{c} \cdot \mathbf{x}^s$, το σημείο αυτό ονοματίζεται $\bar{\mathbf{x}}^i$ και ακολουθεί επανάληψη για τον επόμενο δείκτη i . Αν, πάλι, προκύψει σημείο με τιμή αντικειμενικής συνάρτησης μεγαλύτερη ή ίση με $\mathbf{c} \cdot \mathbf{x}^s$, τότε $i=ct$, $p=p+1$ και πραγματοποιείται εκ νέου το περιγραφόμενο βήμα.

Τέλος, έστω $\bar{\mathbf{x}}$ το καλύτερο σημείο μεταξύ όλων των $\bar{\mathbf{x}}^i$. Με το $\bar{\mathbf{x}}$ ως εναρκτήριο εσωτερικό εφικτό σημείο εκτελούνται με την σειρά τα D5.2 και D5.3.

2.4 ΜΕΘΟΔΟΣ ΣΦΑΙΡΑΣ 3 (SM-3)

Η SM-3 διατυπώνεται για πρώτη φορά από τους Murty, Oskoorouchi (2010b). Ως μέθοδος έχει το πλεονέκτημα ότι δεν απαιτεί καμία αντιστροφή μητρώου κατά την εκτέλεσή της. Για την εκκίνηση της χρειάζεται, ως συνήθως, μία αρχική, εσωτερική, εφικτή λύση, η \mathbf{x}^0 , αλλά το σύνηθες κεντροποιόν βήμα της αντικαθίσταται από ρουτίνα που δεν περιλαμβάνει αντιστροφές μητρώων. Στην συνέχεια περιγράφεται μια γενική, μεγάλη επανάληψη της SM-3.

2.4.1 ΚΕΝΤΡΟΠΟΙΟΝ ΒΗΜΑ ΤΗΣ SM-3

Διακρίνονται δύο περιπτώσεις:

Περίπτωση 1:

Τουλάχιστον ένας από τους δείκτες $i \in T(\mathbf{x}^r)$ ικανοποιεί την σχέση $\mathbf{c} \cdot \mathbf{A}_i < 0$.

Για κάθε $i \in T(\mathbf{x}^r)$ που ικανοποιεί την $\mathbf{c} \cdot \mathbf{A}_i < 0$ επιλύεται το LP 2-μεταβλητών που μεγιστοποιεί την $\delta(\mathbf{x}^r + \lambda \mathbf{A}_i)$ για $\lambda \geq 0$. Έστω $\mathbf{x}(i)$ βέλτιστη λύση του προγράμματος αυτού.

Επιλύεται επίσης δεύτερο LP 2-μεταβλητών, το οποίο μεγιστοποιεί την $\delta(\mathbf{x}^r + \lambda \mathbf{y})$ για $\lambda \geq 0$, όπου $\mathbf{y} =$ μέσος όρος των \mathbf{A}_i , για $i=1, \dots, m$ που ικανοποιούν την $\mathbf{c} \cdot \mathbf{A}_i < 0$.

Λαμβάνεται τελικά ως αποτέλεσμα μια από τις βέλτιστες λύσεις των παραπάνω προγραμμάτων, εκείνη που αντιστοιχεί στην μικρότερη τιμή αντικειμενικής συνάρτησης. Αυτό το σημείο χρησιμοποιείται ως αρχικό κέντρο στην τρέχουσα μεγάλη επανάληψη.

Περίπτωση 2

Για κάθε $i \in T(\mathbf{x}^r)$ για τον οποίο $\mathbf{c} \cdot \mathbf{A}_i \geq 0$ υπολογίζεται η κάθετη προβολή της διεύθυνσης \mathbf{y}^i της \mathbf{A}_i , επί του υπερεπιπέδου $\{\mathbf{x} : \mathbf{c} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{x}^r\}$.

Λύνεται το LP 2-μεταβλητών που μεγιστοποιεί την $\delta(\mathbf{x}^r + \lambda \mathbf{y}^i)$ για $\lambda \geq 0$. Έστω $\mathbf{x}(i)$ οι λύσεις που προκύπτουν. Επιλέγεται η λύση εκείνη που δίνει την μέγιστη τιμή στην ακτίνα $\delta(\mathbf{x}(i)) =$ η ακτίνα της μέγιστης εγγεγραμμένης στο K μπάλας με κέντρο το $\mathbf{x}(i)$. Η λύση αυτή χρησιμο-

ποιείται ως αρχικό κέντρο της τρέχουσας επανάληψης.

2.4.2 ΒΗΜΑΤΑ ΚΑΘΟΔΟΥ ΤΗΣ SM-3

Έστω \hat{x} το κέντρο για το ξεκίνημα των βημάτων καθόδου. Ακολουθούνται τα βήματα D1 έως D5.5, όπως αυτά έχουν ήδη περιγραφεί. Κρατείται το καλύτερο ως προς την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης σημείο που προκύπτει από την εφαρμογή όλων των βημάτων και εφαρμόζεται το βήμα D5.5 εκ νέου και για όσο η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης βελτιώνεται περισσότερο από την ανοχή που έχουμε ορίσει.

Με το σημείο που προκύπτει μετά από την τελευταία εκτέλεση του D5.5 ξεκινά νέα μεγάλη επανάληψη της SM-3.

2.5 ΜΕΘΟΔΟΣ ΣΦΑΙΡΑΣ 4 (SM-4)

Η SM-4 διατυπώνεται και αυτήν για πρώτη φορά από τους Murty, Oskoorouchi (2010b). Πρόκειται για σύνθεση δύο προηγούμενων μεθόδων, της SM-2 και της SM-3. Η SM-2 συνδυάζεται με το κεντροποιόν βήμα της SM-3, το οποίο δεν απαιτεί αντιστροφές μητρώων.

Έστω ότι αρχίζει η $r+1$ μεγάλη επανάληψη της SM-4 με σημείο εκκίνησής της το x^r , όπου κατέληξε η προηγούμενη μεγάλη επανάληψη.

2.5.1 ΚΕΝΤΡΟΠΟΙΟΝ ΒΗΜΑ ΤΗΣ SM-4

Το χωρίο των εφικτών λύσεων στην επανάληψη $r+1$ είναι $K^{r+1} = \{x: Ax \geq b \wedge c \cdot x \leq c \cdot x^r + \varepsilon\} = \{x: Ax \geq b \wedge A_{m+1} \cdot x \geq b_{m+1}\}$, όπου $A_{m+1} = -c$ και $b_{m+1} = A_{m+1} \cdot x^r - \varepsilon$. Το LP για την εύρεση του κέντρου μπάλας διαμορφώνεται ως

$$\begin{aligned} \max \quad & \delta \\ \text{s.t.} \quad & \delta \leq A_i \cdot x - b_i, \quad i = 1, \dots, m \end{aligned} \tag{2.16}$$

Οι SMs είναι IPMs, ξεκινούν από το εσωτερικό και μένουν στο εσωτερικό του χωρίου εφικτών λύσεων. Παράλληλα, ο περιορισμός-σύνορο του K^r που προκύπτει από το υπερεπίπεδο της αντικειμενικής συνάρτησης είναι μετατοπισμένος κατά ε σε σχέση με την πραγματική θέση της αντικειμενικής συνάρτησης. Επομένως, $x^r \in (K^{r+1})^o$ και οι περιορισμοί ισχύουν ως γνήσιες ανισότητες για όλα τα $i = 1, \dots, m+1$.

Έστω δ^r τέτοιο, ώστε $0 < \delta^r < \min\{A_i \cdot x^r - b_i : i = 1, \dots, m\}$. Η (δ^r, x^r) είναι εσωτερική, εφικτή λύση του 2.16. Χρησιμοποιώντας αυτήν ως αρχική, εσωτερική, εφικτή λύση, εφαρμόζεται η SM-3

για να βρεθεί βέλτιστη λύση του 2.16. Τίθεται $(\hat{\delta}^r, \hat{\mathbf{x}}^r)$ η βέλτιστη λύση και με αυτήν ο αλγόριθμος συνεχίζει στο βήμα καθόδου.

2.5.2 ΒΗΜΑΤΑ ΚΑΘΟΔΟΥ ΤΗΣ SM-4

Με το $\hat{\mathbf{x}}^r$ ως κέντρο εφαρμόζονται τα βήματα D1 έως D5.4. Το D5.4 επαναλαμβάνεται, ξεκινώντας από το βέλτιστο ως προς την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης σημείο που προέκυψε από τα βήματα που προηγήθηκαν, για όσο προκαλείται σημαντική βελτίωση (πάνω από την προκαθορισμένη ανοχή). Τα σημεία και οι τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης που αντιστοιχούν σε αυτά αποθηκεύονται στο σύνολο Γ . Επιλέγεται το καλύτερο ως προς την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης σημείο και με αυτό η μέθοδος προχωρά στην επόμενη μεγάλη επανάληψη.

2.6 ΜΕΘΟΔΟΣ ΣΦΑΙΡΑΣ 5 (SM-5)

Η μέθοδος παρουσιάζεται από τον Murty το 2013 (Murty 2013a). Στην εξεταζόμενη μέθοδο το χωρίο εφικτών λύσεων ανανεώνεται σε κάθε μεγάλη επανάληψη, όπως και στην SM-2. Λαμβάνοντας ως περιορισμό την στάθμη της αντικειμενικής συνάρτησης στο σημείο-αποτέλεσμα της προηγούμενης μεγάλης επανάληψης, το εξεταζόμενο χωρίο μικραίνει σε κάθε νέα επανάληψη.

Για το τρέχον κάθε φορά χωρίο υπολογίζεται το κέντρο μπάλας πολυτόπου με αναζήτηση γραμμής επί αποδοτικών κατευθύνσεων, όμως αυτές οι κατευθύνσεις υπολογίζονται με χρήση των διαδικασιών που προτείνονται από τους Xie, Snoeyink, Xu (2006) και Clarkson (“Coresets, sparse greedy approximation and the Frank – Wolfe algorithm”, 2010), όπως αναφέρεται από τον Murty (2013a)..

2.6.1 ΚΕΝΤΡΟΠΟΙΟΝ ΒΗΜΑ ΤΗΣ SM-5

Η μέθοδος ξεκινά με δεδομένο αρχικό εσωτερικό εφικτό σημείο \mathbf{x}^0 . Κατά την επανάληψη $r+1$ ως σημείο εκκίνησης λαμβάνεται το \mathbf{x}^r , το οποίο προέκυψε ως αποτέλεσμα της προηγούμενης επανάληψης. Το τρέχον σύνολο εφικτών λύσεων είναι το $K^{r+1} = \{\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{c} \cdot \mathbf{x}^r + \varepsilon\}$, όπου $\varepsilon > 0$ μικρή ανοχή.

Υπολογίζεται προσεγγιστικά το κέντρο μπάλας του K^{r+1} με εφαρμογή του αλγορίθμου των Xie, Snoeyink, Xu (2006). Ο αλγόριθμος παράγει ακολουθία σημείων $\mathbf{x}^{r,k}$, $k=1, 2, \dots$ που συγκλίνει στο κέντρο μπάλας του K^{r+1} ξεκινώντας από το εσωτερικό σημείο $\mathbf{x}^r = \mathbf{x}^{r,0}$.

Έστω συμβολίζονται με $\mathcal{H} = \{H_1, H_2, \dots, H_m, H_{m+1} = H(\mathbf{x}^r)\}$ τα υπερεπίπεδα των περιορισμών του K^{r+1} . Για την εύρεση του κέντρου της μέγιστης εγγεγραμμένης στο K^{r+1} μπάλας (MaxIS – Maximum Inscribed Sphere), εξετάζεται ο δυϊκός χώρος του \mathbb{R}^n και επιλύεται το πρόβλημα εύρεσης του κέντρου της ελάχιστης περιγεγραμμένης σφαίρας (MinES – Minimum Enclosing

Sphere) των δυϊκών στα υπερεπίπεδα \mathcal{H} σημείων, H_i^* , $i=1, \dots, m+1$. Η λογική της συγκεκριμένης προσέγγισης βρίσκεται εν μέρει στο παρακάτω Λήμμα:

Λήμμα 2.6 Αν το κέντρο C της MinES των σημείων H_i^* , $i=1, \dots, m+1$ συμπίπτει με την αρχή των αξόνων O , τότε \exists MaxIS των υπερεπιπέδων \mathcal{H} και το κέντρο της ταυτίζεται με το O .

Για την αναλυτική παρουσίαση του θεωρητικού υπόβαθρου και για την μαθηματική απόδειξη του ακόλουθου αλγόριθμου, ο αναγνώστης παραπέμπεται στο πρωτότυπο άρθρο των Xie, Snoeyink, Xu (2006).

Έστω ότι ο αλγόριθμος εκτελεί την $r+1$ μεγάλη επανάληψη και k εσωτερική επανάληψη κεντροποιού βήματος. Πραγματοποιούνται τα εξής:

2.6.1.1 ΜΕΤΑΦΟΡΑ ΑΡΧΗΣ ΣΤΟ $\mathbf{x}^{r,k}$

Ορίζονται οι μεταβλητές $\mathbf{y} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^{r,k}$ και με αυτές το τρέχον χωρίο γράφεται ως

$$K^{r+1} = \{ \mathbf{y} : \mathbf{A}_i \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{x}^{r,k}) \geq b_i \}, \quad i=1, \dots, m+1 \Rightarrow K^{r+1} = \{ \mathbf{y} : \mathbf{A}_i \cdot \mathbf{y} \geq b_i - \mathbf{A}_i \cdot \mathbf{x}^{r,k} \}, \quad i=1, \dots, m+1.$$

Δεδομένου ότι $\mathbf{x}^{r,k} \in K^o$, είναι γνωστό πως $b_i - \mathbf{A}_i \cdot \mathbf{x}^{r,k} < 0 \quad \forall i=1, \dots, m$ και ομοίως για $m+1$ λόγω του ορισμού του K^{r+1} . Έτσι, διαιρώντας με $b_i - \mathbf{A}_i \cdot \mathbf{x}^{r,k}$ και τις δύο πλευρές του i περιορισμού στην αναπαράσταση του K^{r+1} παραπάνω προκύπτει

$$K^{r+1} = \{ \mathbf{y} : \mathbf{A}^k \mathbf{y} \leq \mathbf{e} \}$$

όπου $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^{m+1}$ διάνυσμα στήλη με μοναδιαία όλα τα στοιχεία.

Θεωρούνται ο πρωταρχικός και ο δυϊκός χώρος με κοινή αρχή αξόνων το $\mathbf{x}^{r,k}$. Στον κοινό χώρο παριστάνονται τόσο το χωρίο K^{r+1} όσο και τα δυϊκά των \mathcal{H} υπερεπιπέδων σημεία, τα οποία συμβολίζονται με H_i^* , $i=1, \dots, m+1$.

Είναι, έτσι, $\mathbf{A}_i^k \cdot \mathbf{y} = 1$ για $\mathbf{A}_i^k = \frac{\mathbf{A}_i}{b_i - \mathbf{A}_i \cdot \mathbf{x}^{r,k}}$, $i=1, \dots, m+1$ οι εξισώσεις των υπερεπιπέδων στο καινούργιο σύστημα συντεταγμένων και $S^{r,k} = \{ \mathbf{H}_i^{*(r,k)} = (\mathbf{A}_i^{r,k})^T : i=1, \dots, m+1 \}$ το σύνολο των δυϊκών σημείων. Κάθε φορά που οι υπολογισμοί γίνονται με χρήση των δυϊκών σημείων απαιτείται οι εξισώσεις των υπερεπιπέδων να έχουν σταθερό όρο μονάδα. Όταν οι υπολογισμοί γίνονται στον πρωταρχικό χώρο, για παράδειγμα υπολογισμός της MaxIS με γνωστό σημείο-κέντρο, μπορούν να χρησιμοποιούνται για τους περιορισμούς οι αρχικές ανισώσεις.

Αν για κάποιο i το $|b_i - \mathbf{A}_i \cdot \mathbf{x}^{r,k}|$ έχει πολύ μικρή τιμή και δυσχεραίνει την διαίρεση, αντικαθίσταται το $\mathbf{b} = (b_i : i=1, \dots, m)$ με το $\mathbf{b}(\Delta) = (b_i - \Delta \|\mathbf{A}_i\| : i=1, \dots, m+1)$ στην αναπαράσταση του K^{r+1} για κάποιο $\Delta > 0$, ώστε να διευκολυνθεί η διαίρεση. Το ακόλουθο Θεώρημα (Θεώρημα 2.7)

εξασφαλίζει ότι το κέντρο μπάλας που επιδιώκεται να υπολογιστεί δεν επηρεάζεται από την παραπάνω αλλαγή στις σταθερές στο δεξί μέρος της παράστασης.

Θεώρημα 2.7 Έστω Δ θετικός αριθμός, $\mathbf{b}(\Delta) = (b_i(\Delta) = b_i - \Delta \|A_i\| : i = 1, \dots, m)$ και $K(\Delta)$ το σύνολο όλων των εφικτών λύσεων του προγράμματος

$$\begin{aligned} \min \quad & z = \mathbf{c} \cdot \mathbf{x} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{A} \mathbf{x} \geq \mathbf{b}(\Delta) \end{aligned} \tag{2.17}$$

Το χωρίο των εφικτών λύσεων του προγράμματος 2.1 είναι $K(0)$ με τον παρόντα συμβολισμό. Προφανώς $K(0) \subset K(\Delta) \forall \Delta \geq 0$. Κάθε κέντρο μπάλας του $K(0)$ είναι κέντρο μπάλας του $K(\Delta)$ και το αντίστροφο. Επίσης $\forall \mathbf{x} \in K, \Delta \geq 0, \delta(\mathbf{x}, K(\Delta)) = \delta(\mathbf{x}, K) + \Delta$.

Στην συνέχεια, ο αλγόριθμος προχωρά στον υπολογισμό αποδοτικής κατεύθυνσης κίνησης από το $\mathbf{x}^{r,k}$. Οι σταθερές επανέρχονται στην αρχική τους μορφή για τα υπόλοιπα στάδια.

2.6.1.2 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΗΣ MinES ΤΩΝ ΔΥΪΚΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ

Έστω $\mathbf{Q}^{r,k}$ το κέντρο της MinES των $S^{r,k}$ που ορίστηκαν προηγουμένως. Το σημείο $\mathbf{Q}^{r,k}$ στον \mathbf{y} -χώρο αντιστοιχεί στο σημείο $\mathbf{Q}^{r,k} + \mathbf{x}^{r,k}$ στον αρχικό \mathbf{x} -χώρο. Αποτελέσματα των Xie, Soeyink, Xu αποδεικνύουν ότι αν το $\mathbf{x}^{r,k}$ δεν είναι το κέντρο μπάλας του K^{r+1} , τότε η ευθεία γραμμή που ενώνει τα $\mathbf{x}^{r,k}$ και $\mathbf{Q}^{r,k} + \mathbf{x}^{r,k}$ πιθανόν να περιέχει σημεία \mathbf{x} τέτοια, ώστε $\delta(\mathbf{x}, K^{r+1}) > \delta(\mathbf{x}^{r,k}, K^{r+1})$. Από τη στιγμή που η μέθοδος στοχεύει στον υπολογισμό σημείου \mathbf{x} το οποίο να μεγιστοποιεί την $\delta(\mathbf{x}, K^{r+1})$, ακολουθείται τεχνική που υπολογίζει το $\mathbf{Q}^{r,k}$ και στη συνέχεια μεγιστοποιεί την ακτίνα επί της ευθείας που ενώνει τα $\mathbf{x}^{r,k}$ και $\mathbf{Q}^{r,k} + \mathbf{x}^{r,k}$.

Στο άρθρο του Clareson δίνεται απλή επαναληπτική μέθοδος για τον προσεγγιστικό υπολογισμό του σημείου $\mathbf{Q}^{r,k}$ (Murty 2013a). Η διαδικασία παράγει ακολουθία σημείων $\mathbf{Q}^{r,k,t}, t = 0, 1, \dots$, ξεκινώντας από τον μέσο όρο των σημείων $S^{r,k}$, που συμβολίζεται με $\mathbf{Q}^{r,k,0}$, και καταλήγοντας στο κέντρο της MinES $\mathbf{Q}^{r,k}$. Ο αναδρομικός τύπος υπολογισμού της ακολουθίας είναι

$$\mathbf{Q}^{r,k,t+1} = (1 - \alpha) \mathbf{Q}^{r,k,t} + \alpha \mathbf{H}^{*(t+1)} \tag{2.18}$$

όπου $\alpha = \frac{2}{t+3}$ και $\mathbf{H}^{*(t+1)}$ το σημείο εκείνο από τα $S^{r,k}$ που εμφανίζει την μεγαλύτερη ευκλείδεια απόσταση από το $\mathbf{Q}^{r,k,t}$.

Η διαδικασία τερματίζει όταν για κάποιο t ισχύσει $\|\mathbf{Q}^{r,k,t+1} - \mathbf{Q}^{r,k,t}\| \leq \varepsilon$. Το αποτέλεσμα είναι $\mathbf{Q}^{r,k,t+1} = \mathbf{Q}^{r,k}$.

2.6.1.3 ΑΠΟΔΟΤΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ ΚΙΝΗΣΗΣ ΑΠΟ ΤΟ $\mathbf{x}^{r,k} \in K^{r+1}$

Η ευθεία γραμμή που ενώνει τα $\mathbf{x}^{r,k}$ και $\mathbf{Q}^{r,k} + \mathbf{x}^{r,k}$ αποτελείται από δύο ημιευθείες, μια που ξεκινά από το $\mathbf{x}^{r,k}$ με κατεύθυνση $+\mathbf{Q}^{r,k}$ και η άλλη που ξεκινά από το $\mathbf{x}^{r,k}$ με κατεύθυνση $-\mathbf{Q}^{r,k}$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.2 το πολύ μια από αυτές τις ημιευθείες μπορεί να αποδειχτεί αποδοτική κατεύθυνση. Ελέγχεται το εξής:

1. Αν $\mathbf{A}_i \cdot \mathbf{Q}^{r,k} > 0 \quad \forall i \in T(\mathbf{x}^{r,k}, K^{r+1})$, ορίζεται $\mathbf{g} = +\mathbf{Q}^{r,k}$ και ο αλγόριθμος συνεχίζει στο 2.6.1.4 για να μεγιστοποιήσει την $\delta(\mathbf{x}^{r,k} + \alpha \mathbf{g}, K^{r+1})$ για $\alpha \geq 0$.
2. Αν $\mathbf{A}_i \cdot \mathbf{Q}^{r,k} < 0 \quad \forall i \in T(\mathbf{x}^{r,k}, K^{r+1})$, ορίζεται $\mathbf{g} = -\mathbf{Q}^{r,k}$ και ο αλγόριθμος συνεχίζει στο 2.6.1.4 για να μεγιστοποιήσει την $\delta(\mathbf{x}^{r,k} + \alpha \mathbf{g}, K^{r+1})$ για $\alpha \geq 0$.

Ας σημειωθεί ότι λόγω της ύπαρξης του $m+1$ περιορισμού στον ορισμό του τρέχοντος χωρίου των εφικτών λύσεων K^{r+1} , κάθε αποδοτική κατεύθυνση σε αυτό το στάδιο πιθανότατα είναι και καθοδική κατεύθυνση κίνησης.

Η μη ισχύς των 1 και 2 αποτελεί ένδειξη ότι το $\mathbf{x}^{r,k}$ αντιστοιχεί στο βέλτιστο ως προς την ακτίνα μέγιστης μπάλας σημείο επί της ευθείας που ενώνει τα $\mathbf{x}^{r,k}$ και $\mathbf{Q}^{r,k} + \mathbf{x}^{r,k}$. Γίνεται το $\mathbf{x}^{r,k}$ αποδεκτό ως προσεγγιστικό κέντρο μπάλας του K^{r+1} και η μέθοδος προχωρά στο Βήμα καθόδου με $\hat{\mathbf{x}}^r = \mathbf{x}^{r,k}$.

2.6.1.4 ΜΕΓΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΑΚΤΙΝΑΣ $\delta(\mathbf{x}^{r,k} + \alpha \mathbf{g}, K^{r+1})$ ΓΙΑ $\alpha \geq 0$

Έχει από την αρχή διευκρινιστεί ότι τόσο οι σειρές του μητρώου \mathbf{A} όσο και το διάνυσμα συντελεστών της αντικειμενικής συνάρτησης \mathbf{c} είναι κανονικοποιημένα. Εδώ, ωστόσο, επιλέγεται η διατύπωση των τύπων στην γενική μορφή τους.

$$\text{Προφανώς } \delta(\mathbf{x}^{r,k} + \alpha \mathbf{g}, K^{r+1}) = \min \left\{ \frac{\mathbf{A}_i \cdot (\mathbf{x}^{r,k} + \alpha \mathbf{g}) - b_i}{\|\mathbf{A}_i\|} : i = 1, \dots, m+1 \right\}. \text{ Η μέγιστη ακτίνα δίνε}$$

ται από την επίλυση του LP 2-μεταβλητών

$$\begin{aligned} & \max \delta \\ & \text{s.t. } \delta + \alpha \frac{-\mathbf{A}_i \cdot \mathbf{g}}{\|\mathbf{A}_i\|} \leq \frac{\mathbf{A}_i \cdot \mathbf{x}^{r,k} - b_i}{\|\mathbf{A}_i\|}, \quad i = 1, \dots, m+1 \\ & \delta, \alpha \geq 0 \end{aligned} \tag{2.19}$$

Εξετάζονται 3 πιθανές περιπτώσεις:

1. Αν στο 2.19 $-\mathbf{A}_i \cdot \mathbf{g} < 0 \quad \forall i$, τότε $\max \delta = +\infty$ για $\alpha = +\infty \Rightarrow \min z = -\infty$. Αναλυτική εξήγηση περιέχεται στο Murty 2013b. Σε αυτήν την περίπτωση ο αλγόριθμος τερματίζει δίνοντας αποτέλεσμα: "Αντικειμενική συνάρτηση μη φραγμένη".
2. Αν $-\mathbf{A}_i \cdot \mathbf{g} \leq 0 \quad \forall i \wedge \exists i \in \{1, \dots, m+1\} : \mathbf{A}_i \cdot \mathbf{g} = 0$, τότε δίνεται άνω φράγμα της δ

στο LP 2.19 από την $\delta^{r,k} = \min \left\{ \frac{\mathbf{A}_i \cdot \mathbf{x}^{r,k} - b_i}{\|\mathbf{A}_i\|} : i=1, \dots, m+1 \text{ τ.ω. } \mathbf{A}_i \cdot \mathbf{g} = 0 \right\}$. Βάσει ορισμού η ακτίνα $\delta(\mathbf{x}^{r,k}, K^{r+1})$ είναι πεπερασμένη και $T(\mathbf{x}^{r,k}, K^{r+1}) \neq \emptyset$. Επίσης, επειδή η \mathbf{g} είναι αποδοτική κατεύθυνση στο $\mathbf{x}^{r,k}$, ισχύει $\delta(0) < \delta^{r,k}$, όπου η $\delta(\alpha) = \min \left\{ \frac{\mathbf{A}_i \cdot (\mathbf{x}^{r,k} + \alpha \mathbf{g}) - b_i}{\|\mathbf{A}_i\|} : i=1, \dots, m+1 \right\}$, και έτσι πρέπει να υπάρχει συντελεστής του α που να είναι γνησίως μικρότερος του 0.

Στην περίπτωση αυτή η βέλτιστη τιμή του α είναι εκείνη για την οποία ισχύει $\delta(\alpha) = \delta^{r,k}$. Για τον υπολογισμό του ζητούμενου α ακολουθείται η ακόλουθη διαδικασία:

Έστω $I = \left\{ i : 1 \leq i \leq m+1 \text{ τ.ω. } \mathbf{A}_i \cdot \mathbf{g} > 0 \wedge \frac{\mathbf{A}_i \cdot \mathbf{x}^{r,k} - b_i}{\|\mathbf{A}_i\|} < \delta^{r,k} \right\}$. Μια τιμή α για την οποία ισχύει $\alpha^{r,k} = \max \left\{ \frac{\mathbf{A}_i \cdot \mathbf{x}^{r,k} - b_i}{-\mathbf{A}_i \cdot \mathbf{g}} : i \in I \right\}$. Επομένως, λαμβάνεται η $(\delta^{r,k}, \alpha^{r,k})$ ως βέλτιστη λύση LP 2.19.

3. Αν $\exists i : -\mathbf{A}_i \cdot \mathbf{g} > 0$, δηλαδή τουλάχιστον ένας συντελεστής του α στο 2.19 είναι θετικός, τότε το 2.19 μπορεί να λυθεί με οποιαδήποτε γνωστή μέθοδο επίλυσης γραμμικών προγραμμάτων. Ο Murty (Murty 2013a) επιλέγει αναζήτηση γραμμής με μη γραμμικό προγραμματισμό. Δεδομένου ότι $\delta > 0$ το

$$\beta = \min \left\{ \frac{\mathbf{A}_i \cdot \mathbf{x}^{r,k}}{-\mathbf{A}_i \cdot \mathbf{g}} : i=1, \dots, m+1 \text{ s.t. } \mathbf{A}_i \cdot \mathbf{g} < 0 \right\}$$

αποτελεί άνω φράγμα της μεταβλητής α , δηλαδή $0 \leq \alpha \leq \beta$. Το LP 2.19 είναι ισοδύναμο του NLP μιας μεταβλητής

$$\begin{aligned} \max \delta(\alpha) \\ \text{s.t. } 0 \leq \alpha \leq \beta \end{aligned}$$

Το πρόβλημα μπορεί να λυθεί με τεχνικές μη γραμμικού προγραμματισμού. Έστω ότι $\alpha^{r,k}$ είναι βέλτιστη λύση του. Τότε $(\delta^{r,k} = \delta(\alpha^{r,k}), \alpha^{r,k})$ είναι βέλτιστη λύση στο LP 2-μεταβλητών 2.19. Το σημείο του K^r που αντιστοιχεί σε αυτήν την λύση είναι το

$$\mathbf{x}^{r,k+1} = \mathbf{x}^{r,k} + \alpha^{r,k} \mathbf{g}$$

$$\delta^{r,k+1} = \delta(\mathbf{x}^{r,k+1}, K^r) = \min \left\{ \frac{\mathbf{A}_i \cdot \mathbf{x}^{r,k+1} - b_i}{\|\mathbf{A}_i\|} : i=1, \dots, m+1 \right\}$$

Αν $\|\delta(\mathbf{x}^{r,k+1}, K^r) - \delta(\mathbf{x}^{r,k}, K^r)\| \leq \varepsilon$, το κεντροποιόν βήμα τερματίζει και λαμβάνεται ως κέντρο για την επανάληψη r το σημείο $\mathbf{x}^{r,k+1}$. Αν αντιθέτως, $\|\delta(\mathbf{x}^{r,k+1}, K^r) - \delta(\mathbf{x}^{r,k}, K^r)\| > \varepsilon$ ο αλγόριθμος επιστρέφει στην αρχή του κεντροποιού βήματος με σημείο εκκίνησης το $\mathbf{x}^{r,k+1}$.

2.6.2 ΒΗΜΑΤΑ ΚΑΘΟΔΟΥ ΤΗΣ SM-5

Στην μέθοδο που εξετάζεται τη σημείο εκκίνησης μπορεί να ανήκει ή να μην ανήκει στην K^r . Ωστόσο, το νέο σημείο υποχρεωτικά πρέπει να ανήκει στην ανανεωμένη εφικτή περιοχή K^r . Εξετάζονται χωριστά οι δύο περιπτώσεις:

Περίπτωση 1: Το αρχικό σημείο ανήκει στην K^r

Το μήκος κίνησης γ βρίσκεται όπως ακριβώς και στις προηγούμενες SMs.

Περίπτωση 2: Το αρχικό σημείο δεν ανήκει στην K^r

Εστω $M = \text{ημιευθεία } \{\hat{\mathbf{x}}^r + a\mathbf{d} : a \geq 0\}$. Χρειάζεται να εξασφαλιστεί ότι η M τέμνει το K^r στο εσωτερικό του, καθώς αλλιώς το βήμα δεν μπορεί να υπολογίσει μήκος κίνησης και νέο σημείο.

Προϋπόθεση 1: Αν $\exists 1 \leq i \leq m+1 : \mathbf{A}_i \cdot \mathbf{d} = 0$, τότε πρέπει $\mathbf{A}_i \cdot \hat{\mathbf{x}}^r - b_i > 0$.

Προϋπόθεση 2:
$$\min \left\{ \frac{b_i - \mathbf{A}_i \cdot \hat{\mathbf{x}}^r}{\mathbf{A}_i \cdot \mathbf{d} : i \text{ τ.ω. } \mathbf{A}_i \cdot \mathbf{d} < 0} \right\} > \max \left\{ \frac{b_i - \mathbf{A}_i \cdot \hat{\mathbf{x}}^r}{\mathbf{A}_i \cdot \mathbf{d} : i \text{ τ.ω. } \mathbf{A}_i \cdot \mathbf{d} > 0} \right\}.$$

Τόσο για την SM5 όσο και για την SM6 πρέπει να ισχύουν οι παραπάνω δύο προϋποθέσεις να ισχύουν για το σημείο εκκίνησης του βήματος καθόδου και για την διεύθυνση καθόδου \mathbf{d} . Στην συνέχεια ο υπολογισμός του γ ακολουθεί τα γνωστά.

Εκτελούνται τα βήματα D2, D4, D5.1. Επίσης εκτελείται από το κέντρο $\hat{\mathbf{x}}^r$ βήμα με κατεύθυνση τον μέσο όρο των $\{\mathbf{A}_i : i \in T(\hat{\mathbf{x}}^r) \text{ τ.ω. } \mathbf{c} \cdot \mathbf{A}_i < 0\} \cup \{-\mathbf{A}_i : i \in T(\hat{\mathbf{x}}^r) \text{ τ.ω. } \mathbf{c} \cdot \mathbf{A}_i > 0\}$.

Στην SM5 περιγράφεται και άλλο βήμα καθόδου, το D5.7, το οποίο μπορεί να βρεθεί στην βιβλιογραφία (Murty 2013a).

2.7 ΜΕΘΟΔΟΣ ΣΦΑΙΡΑΣ 6 (SM-6)

Η SM-6 περιγράφεται από τον Murty (Murty 2013a, Murty 2013b). Διαφέρει από την SM-5, καθώς το χωρίο εφικτών λύσεων δεν ανανεώνεται σε κάθε μεγάλη επανάληψη, αλλά μένει σταθερό και ίσο με K . Με τον τρόπο αυτό διευκολύνεται πολύ το κεντροποιόν βήμα. Τα βήματα καθόδου παραμένουν ίδια, όπως στην SM-5.

Η SM-6 ξεκινά από αρχικό, εσωτερικό, εφικτό σημείο \mathbf{x}^0 και στην αρχή της επανάληψης $r+1$ σημείο εκκίνησης αποτελεί το \mathbf{x}^r που προέκυψε στο τέλος της προηγούμενης επανάληψης. Ακολούθως παρουσιάζεται μια μεγάλη επανάληψη της SM-6.

Διευκρινίζεται ότι από υπόθεση εργασίας το χωρίο εφικτών λύσεων θεωρείται φραγμένο στα παρακάτω. Η περίπτωση όπου αυτό δεν ισχύει εξετάζεται ξεχωριστά μετά την παρουσίαση της γε-

νικής επανάληψης της μεθόδου.

2.7.1 ΚΕΝΤΡΟΠΟΙΟΝ ΒΗΜΑ ΤΗΣ SM-6

2.7.1.1 ΒΗΜΑ C1

Στο βήμα C1 υπολογίζεται προσεγγιστικό κέντρο μπάλας ξεκινώντας από το \mathbf{x}^r . Χωρίζεται σε δύο διακριτά στάδια.

Στάδιο 1

Μετακινείται το υπερεπίπεδο της αντικειμενικής συνάρτησης από την στάθμη του σημείου \mathbf{x}^r στην κατεύθυνση $-\mathbf{c}$ μέχρι να γίνει εφαπτόμενο στην μέγιστη σφαίρα $B(\mathbf{x}^r, \delta(\mathbf{x}^r))$. Το σημείο επαφής είναι $\mathbf{x}^{r,z}$ και υπολογίζεται από τον τύπο $\mathbf{x}^{r,z} = \mathbf{x}^r - \frac{\delta(\mathbf{x}^r) \mathbf{c}}{\|\mathbf{c}\|}$. Υπενθυμίζεται, βεβαίως, ότι τόσο το μητρώο συντελεστών \mathbf{A} όσο και το διάνυσμα \mathbf{c} είναι κανονικοποιημένα, ώστε $\|\mathbf{A}_i\|=1$, $\forall i$ και $\|\mathbf{c}\|=1$. Ωστόσο εδώ παρατίθενται οι γενικότεροι τύποι.

Εάν $\mathbf{x}^{r,z} \in \partial K$, δηλαδή τουλάχιστον ένας από τους περιορισμούς ικανοποιείται με ισότητα, τότε το $\mathbf{x}^{r,z}$ αποτελεί βέλτιστη λύση του αρχικού προβλήματος και ο αλγόριθμος τερματίζει.

Εάν $\mathbf{x}^{r,z} \in K^o$ εφαρμόζεται το Στάδιο 2 $\forall i \in T(\mathbf{x}^r)$.

Στάδιο 2

Τίθεται \mathbf{x}^{ir} το σημείο στο οποίο το συνοριακό υπερεπίπεδο που αντιστοιχεί στον περιορισμό i εφάπτεται στην μπάλα $B(\mathbf{x}^r, \delta(\mathbf{x}^r))$, επομένως $\mathbf{x}^{ir} = \mathbf{x}^r - \frac{\delta(\mathbf{x}^r)}{\|\mathbf{A}_i\|} \mathbf{A}_i^T = \mathbf{x}^r - \frac{\mathbf{A}_i \cdot \mathbf{x}^r - b_i}{\|\mathbf{A}_i\|^2} \mathbf{A}_i^T$.

Για κάθε $i \in T(\mathbf{x}^r)$ υπολογίζεται η κάθετη προβολή $\mathbf{x}^{ir \perp z}$ του \mathbf{x}^{ir} στο υπερεπίπεδο $H(\mathbf{x}^{r,z})$ από τον τύπο $\mathbf{x}^{ir \perp z} = \mathbf{x}^{ir} - \frac{\mathbf{c} \cdot \mathbf{x}^{ir} - \mathbf{c} \cdot \mathbf{x}^{r,z}}{\|\mathbf{c}\|^2} \mathbf{c}^T$.

Ορισμός 2.8 Με $L_i^{r,z}$ συμβολίζεται η ευθεία γραμμή που ενώνει τα $\mathbf{x}^{ir \perp z}$ και $\mathbf{x}^{r,z}$, η οποία δίνεται από την εξίσωση $L_{i \perp z}^r = \{ \mathbf{x}^{ir \perp z}(\gamma) = \mathbf{x}^{ir \perp z} + \gamma(\mathbf{x}^{r,z} - \mathbf{x}^{ir \perp z}) : \gamma \in \mathbb{R} \}$.

Προκειμένου να καθοριστεί το διάστημα J για το οποίο ισχύει $\gamma \in J \Leftrightarrow \mathbf{x}^{ir \perp z}(\gamma) \in K$ απαιτείται να επιλυθεί σύστημα γραμμικών ανισοτήτων με άγνωστο το γ . Το σύστημα γράφεται ως

$$\mathbf{A}_p \cdot \mathbf{x}^{ir \perp z}(\gamma) \geq b_p, \quad p=1, \dots, m \tag{2.20}$$

Είναι $J \neq \emptyset$, αφού $\mathbf{x}^{r,z} \in K^o \Rightarrow 1 \in J^o$. Το 2.20 μπορεί να επιλυθεί με την υπορουτίνα που πα-

ρουσιάζεται ακολουθώντας:

Υπορουτίνα επίλυσης συστήματος 2.20

Μετατρέπεται το 2.20 στην μορφή $A_p \cdot \mathbf{x}^{ir \perp z} - b_p + \gamma A_p \cdot (\mathbf{x}^{r,z} - \mathbf{x}^{ir \perp z}) \geq 0$, $p=1, \dots, m$ και τίθενται $\alpha_p = A_p \cdot \mathbf{x}^{ir \perp z} - b_p$ και $d_p = A_p \cdot (\mathbf{x}^{r,z} - \mathbf{x}^{ir \perp z})$, οπότε τελικά

$$\alpha_p + \gamma d_p \geq 0, \quad p=1, \dots, m \tag{2.21}$$

Έστω $d_p \neq 0 \quad \forall p=1, \dots, m$ (αν $d_p = 0$ η ανισότητα δεν περιλαμβάνει καθόλου το γ). Το ζητούμενο διάστημα είναι $J = \left[\max \left\{ -\frac{\alpha_p}{d_p} : \forall p \text{ με } d_p > 0 \right\}, \min \left\{ -\frac{\alpha_p}{d_p} : \forall p \text{ με } d_p < 0 \right\} \right]$. Το \min (ή \max) για το κενό σύνολο είναι $-\infty$ (ή $+\infty$ αντίστοιχα).

Έχοντας υποθέσει ότι το K είναι φραγμένο, το διάστημα J_i θα είναι επίσης φραγμένο. Έστω ότι προκύπτει από την υπορουτίνα διάστημα ίσο με $J_i = [\gamma_{ir}^{min}, \gamma_{ir}^{max}]$. Τότε

$$L_{i \perp z}^r \cap K = \{ \mathbf{x}^{ir \perp z}(\gamma) : \gamma \in [\gamma_{ir}^{min}, \gamma_{ir}^{max}] \} \text{ με μήκος } l_{i \perp z}^r = \| \mathbf{x}^{ir \perp z}(\gamma_{ir}^{min}) - \mathbf{x}^{ir \perp z}(\gamma_{ir}^{max}) \|.$$

Στάδιο 3

Μεταξύ όλων των $i \in T(\mathbf{x}^r)$ επιλέγονται εκείνοι για τους οποίους το μήκος $l_{i \perp z}^r$ γίνεται μέγιστο. Έστω ότι αυτό συμβαίνει για δείκτη $i=k$. Τότε το σημείο-αποτέλεσμα του βήματος C1 είναι $\mathbf{x}^{r, C1} = \frac{\mathbf{x}^{k r \perp z}(\gamma_{ir}^{min}) + \mathbf{x}^{k r \perp z}(\gamma_{ir}^{max})}{2}$, το μέσον του ευθύγραμμου τμήματος $L_{k \perp z}^r \cap K$.

Για το στάδιο 3 υπάρχει και εναλλακτική διαδικασία:

Έστω $\Delta = \left\{ \frac{\mathbf{x}^{ir \perp z}(\gamma_{ir}^{min}) + \mathbf{x}^{ir \perp z}(\gamma_{ir}^{max})}{2} : i \in T(\mathbf{x}^r) \right\}$ το σύνολο των μέσων των ευθύγραμμων τμημάτων $L_{i \perp z}^r \cap K$ για $i \in T(\mathbf{x}^r)$. Λαμβάνεται ως $\mathbf{x}^{r, C1}$ το $\mathbf{x} \in \Delta$ που αντιστοιχεί στην μέγιστη ακτίνα $\delta(\mathbf{x})$.

Πρέπει να επιλέγεται ανάμεσα στις δύο εκείνη η διαδικασία που δίνει τα καλύτερα αποτελέσματα.

2.7.1.2 ΒΗΜΑ C2

Στο βήμα C2 υπολογίζεται προσεγγιστικό κέντρο μπάλας ξεκινώντας από το $\mathbf{x}^{r, C1}$.

Εκτελείται το βήμα C1 με αρχικό σημείο το $\mathbf{x}^{r, C1}$, αντί του \mathbf{x}^r . Το εξαγόμενο σημείο συμβολίζεται με $\mathbf{x}^{r, C2} = \hat{\mathbf{x}}^r$ και αποτελεί το κέντρο κατά την τρέχουσα επανάληψη. Με το σημείο αυτό η μέθοδος προχωρά στο Βήμα Καθόδου.

2.7.2 ΒΗΜΑΤΑ ΚΑΘΟΔΟΥ ΤΗΣ SM-6

Με σημείο εκκίνησης το $\mathbf{x}^{r,C2} = \hat{\mathbf{x}}^r$ εκτελούνται τα D1, D4 και D5.1. Επίσης, εκτελείται το D2 με κατεύθυνση $\mathbf{d}^2 = \mathbf{x}^{r,C2} - \mathbf{x}^{r,C1}$. Τα αποτελέσματα αποθηκεύονται στο σύνολο Γ και τελικά επιλέγεται ως αποτέλεσμα αυτής της μεγάλης επανάληψης το καλύτερο ως προς την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης σημείο. Η μέθοδος προχωρά στην επόμενη μεγάλη επανάληψη $r+2$ με σημείο εκκίνησης \mathbf{x}^{r+1} το σημείο-αποτέλεσμα της επανάληψης $r+1$.

Μένει να εξεταστεί η περίπτωση κατά την οποία δεν είναι εκ των προτέρων γνωστό αν το χωρίο K είναι φραγμένο. Ο αλγόριθμος εφαρμόζεται ακριβώς όπως περιγράφηκε, όμως κρίνεται αναγκαία η διερεύνηση περιπτώσεων.

Περίπτωση 1

Ο αλγόριθμος συνεχίζεται χωρίς πρόβλημα, δίνοντας φραγμένα διαστήματα $J_i, \forall i \in T(\mathbf{x}^r)$ και σε κάθε επανάληψη, και καταλήγει σε προσεγγιστική λύση του γραμμικού προγράμματος. Δεν δίνεται καμία απάντηση για το αν το K είναι φραγμένο ή όχι.

Περίπτωση 2

Τα διαστήματα J_i των γ προκύπτουν συνεχώς και $\forall i \in T(\mathbf{x}^r)$ φραγμένα, αλλά σε κάποιο βήμα καθόδου δίνεται μήκος κίνησης $\alpha = +\infty$. Η αντικειμενική συνάρτηση στην περίπτωση αυτήν είναι μη φραγμένη και ο αλγόριθμος τερματίζει δίνοντας ως αποτέλεσμα: “Αντικειμενική συνάρτηση μη φραγμένη”.

Περίπτωση 3

Κατά την εκτέλεση της $r+1$ επανάληψης, κατά το Στάδιο 2, προκύπτει διάστημα J_i μη φραγμένο για κάποιον περιορισμό $i \in T(\mathbf{x}^r)$. Στο Στάδιο αυτό θεωρείται για το συγκεκριμένο i ευθεία $L_{i^\perp z}^r = \{\mathbf{x}^{ir^\perp z}(\gamma) = \mathbf{x}^{ir^\perp z} + \gamma(\mathbf{x}^{r,z} - \mathbf{x}^{ir^\perp z}) : \gamma \in \mathbb{R}\}$ και εξετάζονται δύο διακριτά ενδεχόμενα:

Ενδεχόμενο 1

Έστω $\gamma_{ir}^{\min} = -\infty$. Τότε $A_p \cdot (\mathbf{x}^{r,z} - \mathbf{x}^{ir^\perp z}) \leq 0 \quad \forall p = 1, \dots, m$.

Αν $A_p \cdot (\mathbf{x}^{r,z} - \mathbf{x}^{ir^\perp z}) < 0 \quad \forall p = 1, \dots, m$, τότε $\delta(\mathbf{x}^{ir^\perp z} + \gamma(\mathbf{x}^{r,z} - \mathbf{x}^{ir^\perp z})) \rightarrow \infty$ για $\gamma \rightarrow -\infty \Rightarrow \mathbf{c} \cdot \mathbf{x} \rightarrow -\infty$ για $\gamma \rightarrow -\infty$.

Αν $\exists p \in \{1, \dots, m\} : A_p \cdot (\mathbf{x}^{r,z} - \mathbf{x}^{ir^\perp z}) = 0$, τότε πραγματοποιούνται βήματα καθόδου από το σημείο $\mathbf{x}^{ir^\perp z}(\gamma)$ για κάποιο $\gamma < 0$ και ο αλγόριθμος συνεχίζει στην επόμενη επανάληψη με το σημείο που προκύπτει μετά το βήμα καθόδου.

Ενδεχόμενο 2

Έστω $\gamma_{ir}^{\max} = +\infty$. Τότε $A_p \cdot (\mathbf{x}^{r,z} - \mathbf{x}^{ir^\perp z}) \geq 0 \quad \forall p = 1, \dots, m$.

Αν $A_p \cdot (\mathbf{x}^{r,z} - \mathbf{x}^{ir^{\perp z}}) > 0 \quad \forall p=1, \dots, m$, τότε $\delta(\mathbf{x}^{ir^{\perp z}} + \gamma(\mathbf{x}^{r,z} - \mathbf{x}^{ir^{\perp z}})) \rightarrow \infty$ για $\gamma \rightarrow \infty \Rightarrow \mathbf{c} \cdot \mathbf{x} \rightarrow -\infty$ για $\gamma \rightarrow \infty$.

Αν $\exists p \in \{1, \dots, m\}: A_p \cdot (\mathbf{x}^{r,z} - \mathbf{x}^{ir^{\perp z}}) = 0$, τότε πραγματοποιούνται βήματα καθόδου από το σημείο $\mathbf{x}^{ir^{\perp z}}(\gamma)$ για κάποιο $\gamma > 0$ και ο αλγόριθμος συνεχίζει στην επόμενη επανάληψη με το σημείο που προκύπτει μετά το βήμα καθόδου.

Οι SM5 και SM6 είναι αρκετά πολύπλοκες. Κάποιες λεπτομέρειες και διαδικασίες δεν παρατίθενται στο παρόν κείμενο. Για τις πλήρεις μεθόδους ο αναγνώστης παραπέμπεται στην βιβλιογραφία (Murty 2013a, Murty 2013b).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Οριακή ανάλυση κατασκευών

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΟΡΙΑΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ

3.1 ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

Σύμφωνα με τους Neal (1977), Βαρκαράκη (1988), αντικειμενικός σκοπός των πλαστικών μεθόδων ανάλυσης είναι η πρόβλεψη του οριακού φορτίου για το οποίο ένας φορέας οδηγείται σε κατάρρευση λόγω υπερβολικών παραμορφώσεων που τον μετατρέπουν ολόκληρο ή τμήμα του σε μηχανισμό (μηχανισμός πλαστικής κατάρρευσης). Το οριακό φορτίο ονομάζεται φορτίο πλαστικής κατάρρευσης και ο λόγος του φορτίου πλαστικής κατάρρευσης P_c προς το φορτίο λειτουργίας P ονομάζεται συντελεστής φορτίσεως α_c έναντι κατάρρευσης ή αλλιώς φορτιστικός συντελεστής κατάρρευσης του φορέα:

$$\alpha_c = \frac{P_c}{P}$$

Ο σχεδιασμός βασίζεται στην υπόθεση ότι οι τιμές όλως των φορτίων του φορέα αυξάνονται αναλογικά, με βάση τον κοινό συντελεστή α , δηλαδή η φόρτιση αποδίδεται από τα διανύσματα αP_1 , αP_2 , ..., αP_n .

Βασικό πλεονέκτημα του σχεδιασμού με αξιοποίηση του φορτιστικού συντελεστή κατάρρευσης α_c , με εκμετάλλευση δηλαδή των αποθεμάτων αντοχής μιας κατασκευής από την πρώτη διαρροή έως την κατάρρευση, είναι η οικονομία. Παράλληλα όμως ο πλαστικός σχεδιασμός παραμένει ανεξάρτητος από τυχόν ατέλειες των μελών, υποχωρήσεις στηρίξεων και παραμένουσες τάσεις, ενώ η ανάλυση είναι απλούστερη της ελαστικής.

Ο φορτιστικός συντελεστής κατάρρευσης ενός φορέα μπορεί να βρεθεί είτε έμμεσα, με ελαστοπλαστική βήμα προς βήμα ανάλυσή του (σταδιακή φόρτιση έως την κατάρρευση), είτε άμεσα, με οριακή – πλαστική ανάλυση. Η πρώτη μέθοδος εφαρμόζεται όταν ενδιαφέρουν τα ενδιάμεσα στάδια ελαστικής παραμόρφωσης ή όταν διερευνώνται παράδοξα αποτελέσματα των άλλων μεθόδων. Η δεύτερη βασίζεται σε 3 θεμελιώδη θεωρήματα, τα οποία παρατίθενται παρακάτω.

Αναφέρονται καταρχάς βασικές έννοιες που ανακύπτουν κατά την περιγραφή της οριακής ανάλυσης:

1. Με τον όρο μηχανισμός κατάρρευσης αποδίδεται η ενδεικτική μετακίνηση ενός κινητού φορέα, που παριστάνει τις πρόσθετες παραμορφώσεις μετρούμενες από την απαραμόρφωτη γεωμετρική μορφή του αρχικού φορέα.
2. Κινηματικά συμβιβαστός μηχανισμός θεωρείται εκείνος που ανταποκρίνεται στις συνθήκες στηρίξεως του φορέα και επιπλέον έχει κινητικότητα στις διευθύνσεις που απαιτούνται, ώστε να παράγεται θετικό έργο από την εξωτερική φόρτιση που τον προκαλεί.
3. Μια διανομή ροπών κάμψης ενός φορέα καλείται στατικά αποδεκτή όταν ικανοποιεί όλες τις συνθήκες ισορροπίας που μπορούν να διατυπωθούν για τον φορέα.
4. Μια διανομή ροπών κάμψης ενός φορέα θεωρείται ασφαλής όταν ικανοποιεί την συνθήκη πλα-

στικού περιορισμού μεγεθών, δηλαδή σε καμία διατομή δεν εμφανίζονται μεγέθη έξω από την επιτρεπτά όρια.

5. Μια διανομή ροπών κάμψης ενός φορέα αποτελεί κατανομή μηχανισμού, αν ικανοποιεί την συνθήκη μηχανισμού, δηλαδή αν εμφανίζει μεγέθη διατομής που αντιστοιχούν σε σημείο επί της επιφάνειας διαρροής του υλικού.

Γίνεται εύκολα αντιληπτό ότι για την δημιουργία μηχανισμού είναι αναγκαίο να δημιουργηθεί ικανός αριθμός πλαστικών αρθρώσεων στον αρχικά στέρεο φορέα. Στην περίπτωση αυτή οι συνολικές παραμορφώσεις αυξάνουν υπό σταθερό φορτίο λόγω στροφής των πλαστικών αρθρώσεων, ενώ τα μεγέθη διατομής μένουν σταθερά στις τιμές που οδήγησαν στην πλαστικοποίηση της διατομής. Την στιγμή της πλαστικής κατάρρευσης το έργο που παράγεται από τα εξωτερικά φορτία ισούται με το έργο που απορροφάται στις πλαστικές αρθρώσεις.

Σε υπερστατικούς φορείς η αποδεκτή διανομή ροπών κάμψης δεν είναι μονοσήμαντα ορισμένη. Έστω ένας φορέας έχει ασφαλή διανομή και υποβάλλεται στα φορτία $\alpha P_1, \alpha P_2, \dots, \alpha P_n$. Τα σημεία εφαρμογής των φορτίων και τα διανύσματα P_1, P_2, \dots, P_n μένουν σταθερά, ενώ α είναι φορτιστικός συντελεστής. Με α_c συμβολίζεται ο φορτιστικός συντελεστής κατάρρευσης.

Στατικό θεώρημα (ή κάτω ορίου)

Αν σε ένα φορέα υπάρχει διανομή ροπών κάμψης που να είναι και ασφαλής και στατικά αποδεκτή για μια φόρτιση $\alpha P_1, \alpha P_2, \dots, \alpha P_n$, τότε ισχύει $\alpha \leq \alpha_c$ και κάθε τέτοια τιμή του α αποτελεί κάτω φράγμα του φορτιστικού συντελεστή κατάρρευσης.

Κινηματικό θεώρημα (ή άνω ορίου)

Σε ένα φορέα που υποβάλλεται σε σύνολο φορτίων $\alpha P_1, \alpha P_2, \dots, \alpha P_n$ για κάθε τιμή του φορτιστικού συντελεστή α που αντιστοιχεί σε μηχανισμό ισχύει $\alpha \geq \alpha_c$ και κάθε τέτοια τιμή του α αποτελεί άνω φράγμα του φορτιστικού συντελεστή κατάρρευσης.

Αν ήταν δυνατό να υπολογιστούν οι φορτιστικοί συντελεστές όλων των ασφαλών και στατικά αποδεκτών διανομών κάμψης σε έναν φορέα, τότε ο μεγαλύτερος εξ αυτών θα ήταν ο α_c . Αντίστοιχα, αν μπορούσαν να υπολογιστούν οι φορτιστικοί συντελεστές όλων των πιθανών μηχανισμών ενός φορέα, τότε ο μικρότερος από αυτούς θα ήταν ο α_c .

Το στατικό και το κινηματικό θεώρημα μπορούν να συνδυαστούν μέσω του θεωρήματος μοναδικότητας. Από το στατικό θεώρημα προκύπτει ότι δεν υπάρχει διανομή ροπών κάμψης για τιμή του α μεγαλύτερη του α_c , η οποία να είναι ασφαλής και στατικά αποδεκτή. Επίσης από το κινηματικό θεώρημα προκύπτει ότι δεν υπάρχει μηχανισμός του οποίου ο συντελεστής α να είναι μικρότερος από τον α_c . Έτσι:

Θεώρημα μοναδικότητας

Για δεδομένο φορέα και φόρτιση υπάρχει τουλάχιστον μία ασφαλής και στατικά αποδεκτή διανομή ροπών κάμψης για την οποία δημιουργούνται αρκετές πλαστικές αρθρώσεις, ώστε να μετατραπεί ο φορέας σε μηχανισμό. Ο φορτιστικός συντελεστής που αντιστοιχεί στην προαναφερθείσα διανομή είναι ο φορτιστικός συντελεστής κατάρρευσης α_c .

Το θεώρημα μοναδικότητας αποδείχτηκε από τον Horne (1950).

3.2 ΟΡΙΑΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΜΕ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟ

Όπως αναφέρεται από την Manola (2015), ο γραμμικός προγραμματισμός συνδυάστηκε για πρώτη φορά με την οριακή ανάλυση από τον Fourier. Οι Charnes και Greenberg το 1951 εφάρμοσαν γραμμικό προγραμματισμό για επίλυση δικτυωμάτων σε οριακή κατάσταση αστοχίας, ενώ προσέγγιση εφαρμογής πεπερασμένων στοιχείων σε βέλτιστο πλαστικό σχεδιασμό κατασκευών υπό επίπεδη ένταση παρουσιάστηκε από τους Maier et al. το 1972. Στην προσέγγιση αυτή διαμορφώθηκαν και ερμηνεύθηκαν βάσει μηχανικής τόσο το κύριο όσο και το δυικό πρόβλημα. Οι Anderheggen και Knörfel το 1972 περιέγραψαν το πρόβλημα οριακής ανάλυσης σε 2D και 3D κατασκευές με χρήση μεθόδων πεπερασμένων στοιχείων και γραμμικό προγραμματισμό. Επίσης προβλήματα επίπεδης έντασης συζητήθηκαν κάτω από το ίδιο πρίσμα από τον Zavelani το 1973 και 1974. Το 1980 οι Franchi και Cohn παρουσίασαν με την σειρά τους προσέγγιση του προβλήματος ελαστοπλαστικής ανάλυσης με χρήση πεπερασμένων στοιχείων και μαθηματικό προγραμματισμό επιστρατευόμενος υπάρχον πρόγραμμα του Franchi (1977) για επίλυση με υπολογιστή. Τέλος η επιρροή του συνδυασμού τάσεων στην οριακή κατάσταση αστοχίας αναγνωρίστηκε από τον Polizzotto το 1975 και γενικεύτηκε από τους Grieson και Aly το 1980.

Προκειμένου να μπορεί να επιλυθεί το πρόβλημα οριακής ανάλυσης με μεθόδους γραμμικού προγραμματισμού πρέπει αρχικά να διατυπωθεί σε μητρική μορφή. Για το σκοπό αυτό ο φορέας αναλύεται σε μεμονωμένα μέλη στα οποία εφαρμόζονται δυνάμεις μόνο στα άκρα τους, ενώ οι παραμορφώσεις θεωρούνται μικρές ώστε να ισχύουν οι εξισώσεις ισορροπίας στην αρχική απαραμόρφωτη κατάσταση. Οι πλαστικές ζώνες περιορίζονται σε προκαθορισμένες διατομές στις οποίες αναμένεται η δημιουργία πλαστικών αρθρώσεων.

3.2.1 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ ΓΙΑ ΕΠΙΠΕΔΟΥΣ ΦΟΡΕΙΣ

Κάθε μέλος πλαισίου μήκους l (πεπερασμένο στοιχείο) αναπτύσσει έξι ακραίες δυνάμεις (κομβικές δυνάμεις). Οι δυνάμεις είναι οι $F_x^i, F_y^i, M^i, F_x^j, F_y^j, M^j$, όπου i, j τα δύο άκρα του μέλους, και αναφέρονται στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων.

Για κάθε μέλος στο επίπεδο διαθέτουμε τρεις ανεξάρτητες εξισώσεις ισορροπίας, επομένως το σύνολο των έξι κομβικών δυνάμεων μπορεί να εκφρασθεί συναρτήσει τριών ανεξαρτήτων δυνάμεων μέλους. Οι ανεξάρτητες δυνάμεις s_1^k, s_2^k, s_3^k που επιλέγονται αντιστοιχούν στις F_x^i, M^i και M^j . Τελικά, το σύνολο των κομβικών δυνάμεων συναρτήσει των s_1^k, s_2^k, s_3^k δίνεται στο καθολι-

κό σύστημα αξόνων και με μητρική διατύπωση:

$$\begin{pmatrix} F_x^i \\ F_y^i \\ M^i \\ F_x^j \\ F_y^j \\ M^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega^k & \frac{-\sin \omega^k}{L^k} & \frac{-\sin \omega^k}{L^k} \\ \sin \omega^k & \frac{\cos \omega^k}{L^k} & \frac{\cos \omega^k}{L^k} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos \omega^k & \frac{\sin \omega^k}{L^k} & \frac{\sin \omega^k}{L^k} \\ -\sin \omega^k & \frac{-\cos \omega^k}{L^k} & \frac{-\cos \omega^k}{L^k} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S_1^k \\ S_2^k \\ S_3^k \end{pmatrix} = \mathbf{B}^k \mathbf{s}^k \quad 3.1$$

Οι εξισώσεις στατικής ισορροπίας σε μητρική μορφή είναι:

$$\mathbf{B} \mathbf{s} = \alpha \mathbf{f} + \mathbf{f}_d \quad 3.2$$

όπου $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n_f} \times \mathbb{R}^{3n_{el}}$ το μητρώο στατικής ισορροπίας, προκύπτει με σύνθεση των αντίστοιχων μητρικών ισορροπίας των μεμονωμένων μελών

$\mathbf{s} \in \mathbb{R}^{3n_{el}} \times \mathbb{R}$ το διάνυσμα των ανεξάρτητων δυνάμεων όλων των μελών εκπεφρασμένων στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων κάθε μέλους

$\mathbf{f} \in \mathbb{R}^{n_f} \times \mathbb{R}$ το διάνυσμα των φορτίων των κόμβων που πολλαπλασιάζονται με τον φορτιστικό συντελεστή α στο καθολικό σύστημα αξόνων

$\mathbf{f}_d \in \mathbb{R}^{n_f} \times \mathbb{R}$ το διάνυσμα των σταθερών φορτίων των κόμβων στο καθολικό σύστημα αξόνων

n_{el} ο αριθμός των μελών του φορέα

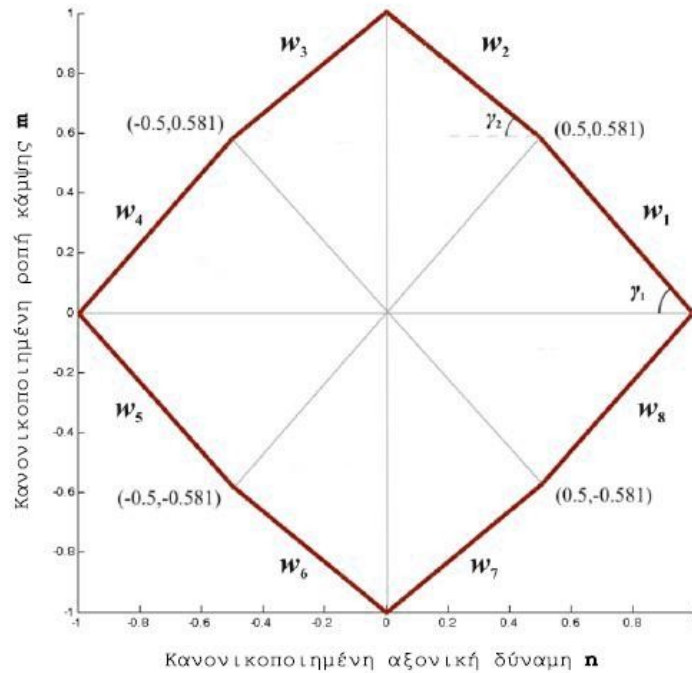
n_f ο αριθμός των βαθμών ελευθερίας της κατασκευής.

3.2.2 ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΔΙΑΡΡΟΗΣ

Για να παραμένει το πρόβλημα οριακής ανάλυσης γραμμικό και να μπορούν να εφαρμοστούν αλγόριθμοι LP για την επίλυσή του, χρειάζεται το υλικό της κατασκευής να συμπεριφέρεται ως στερεό-ιδεωδώς πλαστικό, η επιφάνεια διαρροής για κάθε διατομή του να είναι γραμμικοποιημένη και να μην υφίστανται περιορισμοί στις μετακινήσεις και τις παραμορφώσεις του. Ειδικά το πρόβλημα χάνει την γραμμική του διατύπωση και πλέον για την επίλυσή του επιστρατεύονται αλγόριθμοι μη γραμμικού προγραμματισμού.

Στην παρούσα εργασία χρησιμοποιείται κριτήριο διαρροής γραμμικό. Τόσο στην περίπτωση αλ-

ληλεπίδρασης αξονικής και κάμψης (NM) όσο και στην περίπτωση αλληλεπίδρασης αξονικής, κάμψης και τέμνουσας (NMQ) επιλέγονται τα γραμμικοποιημένα κριτήρια διαρροής των Gendy, Saleeb (1993), όπως φαίνονται στις Εικ. 3.1.



Εικόνα 3.1: Κριτήριο διαρροής για αλληλεπίδραση N-M [Gendy, Saleeb (1993)]

Μια επιφάνεια διαρροής των παραπάνω κριτηρίων εκφράζεται ως γραμμή στον \mathbb{R}^2 ή επίπεδο στον \mathbb{R}^3 . Με χρήση διανυσμάτων η ασφαλής περιοχή ή αλλιώς ελαστική περιοχή (Εικ.3.2) των διαγραμμάτων διαρροής εκφράζεται ως:

$$\{s_d | g \cdot s_d \leq r_d\} \tag{3.3}$$

- όπου g το μοναδιαίο διάνυσμα που είναι κάθετο στην επιφάνεια διαρροής
- s_d το διάνυσμα των κανονικοποιημένων ως προς το όριο τους δυνάμεων
- r_d η απόσταση της επιφάνειας διαρροής από την αρχή του συστήματος συντεταγμένων

Η γενική μητρική έκφραση των ανισώσεων που εκφράζουν το κριτήριο διαρροής είναι

$$N^T s \leq r \tag{3.4}$$

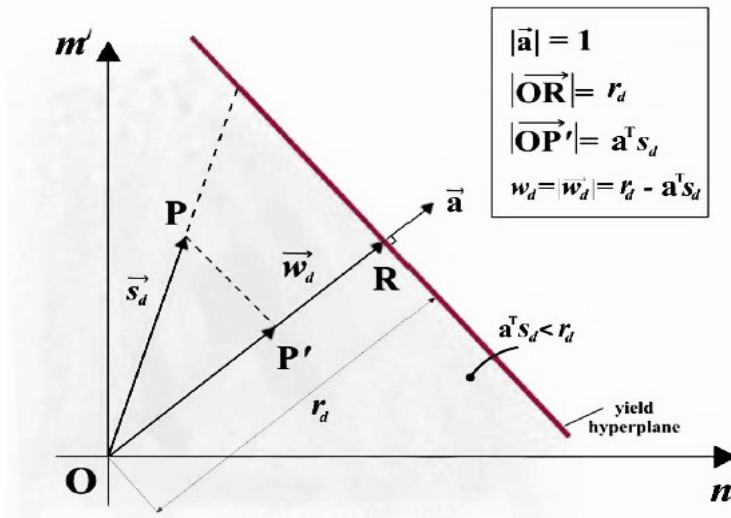
όπου $N \in \mathbb{R}^{3n_d \times \mathbb{R}^{2h_{n_d}}}$ το μητρώο όλων των μοναδιαίων, κάθετων στις επιφάνειες διαρροής διανυσμάτων

$\mathbf{r} \in \mathbb{R}^{2h_{nd}} \times \mathbb{R}$ το διάνυσμα που περιλαμβάνει όλα τα όρια διαρροής των επιφανειών διαρροής (Maier 1970)

Στην συνέχεια παράγονται αναλυτικά το μητρώο N και το διάνυσμα \mathbf{r} για τις περιπτώσεις αλληλεπίδρασης αξονικής δύναμης – ροπής και αξονικής – ροπής – τέμνουσας. Στην ΝΜ αλληλεπίδραση το κανονικοποιημένο διάνυσμα των δυνάμεων για τα δύο άκρα i και j ενός μέλους είναι

$$\begin{pmatrix} n^i & m^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{s_1^i}{s_{1y}^i} & \frac{s_2^i}{s_{2y}^i} \end{pmatrix} \text{ και } \begin{pmatrix} n^j & m^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{s_1^i}{s_{1y}^i} & \frac{s_3^i}{s_{3y}^i} \end{pmatrix} \quad 3.5$$

όπου s_{1y}^i η αξονική πλαστική αντοχή στο i άκρο
 s_{2y}^i, s_{3y}^i η πλαστική ροπή αντοχής στο i άκρο.



Εικόνα 3.2: Λεπτομέρεια επιφάνειας διαρροής [σχήμα Μ.Μανωλά, Manola (2015)]

Στην ΝΜQ αλληλεπίδραση το κανονικοποιημένο διάνυσμα των δυνάμεων για τα δύο άκρα i και j ενός μέλους είναι

$$\begin{pmatrix} n^i & v^i & m^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{s_1^i}{s_{1y}^i} & \frac{s_2^i + s_3^i}{L^k v_y^i} & \frac{s_2^i}{s_{2y}^i} \end{pmatrix} \text{ και } \begin{pmatrix} n^j & v^j & m^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{s_1^i}{s_{1y}^i} & -\frac{s_2^i + s_3^i}{L^k v_y^i} & \frac{s_3^i}{s_{3y}^i} \end{pmatrix} \quad 3.6$$

όπου L^k το μήκος του μεμονωμένου μέλους.

Τα μητρώα που απαιτούνται για την διαμόρφωση του συστήματος ανισοτήτων $N^T \mathbf{s} \leq \mathbf{r}$ είναι

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_1^i & \bar{B}_1^i & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \bar{A}_8^i & \bar{B}_8^i & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \bar{A}_1^j & 0 & \bar{B}_1^j \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \bar{A}_8^j & 0 & \bar{B}_8^j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s_{1y}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s_{2y}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{s_{3y}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1^i \\ s_2^i \\ s_3^i \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \bar{C}_1^i \\ \vdots \\ \bar{C}_8^i \\ \bar{C}_1^j \\ \vdots \\ \bar{C}_8^j \end{bmatrix} \Leftrightarrow \bar{N}^{kT} \mathbf{R}^k \mathbf{s}^k \leq \mathbf{r}^k \Leftrightarrow \mathbf{N}^{kT} \mathbf{s}^k \leq \mathbf{r}^k \text{ για NM και}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_1^i & \bar{B}_1^i & \bar{C}_1^i & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \bar{A}_8^i & \bar{B}_8^i & \bar{C}_8^i & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \bar{A}_1^j & \bar{B}_1^j & \bar{C}_1^j \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \bar{A}_8^j & \bar{B}_8^j & \bar{C}_8^j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s_{1y}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L^k v_y^i} & \frac{1}{L^k v_y^i} \\ 0 & \frac{1}{s_{2y}} & 0 \\ -\frac{1}{s_{1y}} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L^k v_y^i} & -\frac{1}{L^k v_y^i} \\ 0 & 0 & \frac{1}{s_{3y}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1^i \\ s_2^i \\ s_3^i \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \bar{D}_1^i \\ \vdots \\ \bar{D}_8^i \\ \bar{D}_1^j \\ \vdots \\ \bar{D}_8^j \end{bmatrix} \Leftrightarrow \bar{N}^{kT} \mathbf{R}^k \mathbf{s}^k \leq \mathbf{r}^k \Leftrightarrow$$

$$\mathbf{N}^{kT} \mathbf{s}^k \leq \mathbf{r}^k \text{ για NMQ}$$

Manola (2015)

3.2.3 ΠΡΩΤΑΡΧΙΚΟ ΚΑΙ ΔΥΙΚΟ LP ΓΙΑ ΤΗΝ ΟΡΙΑΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Το στατικό θεώρημα της οριακής ανάλυσης διατυπώνεται με την μορφή γραμμικού προβλήματος ως:

$$\begin{aligned} & \max a \\ & \text{s.t. } -\mathbf{B}\mathbf{s} + a \mathbf{f} = -\mathbf{f}_d \\ & \quad \mathbf{N}^T \mathbf{s} \leq \mathbf{r} \\ & \quad \mathbf{s}: \text{χωρίς περιορισμό} \\ & \quad a \geq 0 \end{aligned} \tag{3.7}$$

ή σε πιο αυστηρή μητρική έκφραση και με μετατροπή των ισοτήτων σε διπλές ανισότητες:

$$\begin{aligned}
 & \max (0, 0, \dots, 1) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{s} \\ \alpha \end{pmatrix} \\
 & \text{s.t.} \quad \begin{bmatrix} -\mathbf{B} & \mathbf{f} \\ \mathbf{B} & -\mathbf{f} \\ \mathbf{N}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{s} \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{f}_d \\ \mathbf{f}_d \\ \mathbf{r} \\ 0 \end{pmatrix} \\
 & \mathbf{s}: \text{χωρίς περιορισμό}
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

όπου $\begin{pmatrix} \mathbf{s} \\ \alpha \end{pmatrix}$ το διάνυσμα των μεταβλητών σχεδιασμού.

Το κινηματικό θεώρημα ακολουθώντας την ίδια λογική εκφράζεται ως:

$$\begin{aligned}
 & \min -\mathbf{f}_d \cdot \mathbf{u} + \mathbf{r} \cdot \mathbf{z} \\
 & \text{s.t.} \quad -\mathbf{B}^T \mathbf{u} + \mathbf{N} \mathbf{z} = \mathbf{0} \\
 & \quad \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \geq 1 \\
 & \quad \mathbf{u}: \text{χωρίς περιορισμό} \\
 & \quad \mathbf{z} \geq \mathbf{0}
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

ή σε πιο αυστηρή μητρική έκφραση:

$$\begin{aligned}
 & \min \begin{pmatrix} -\mathbf{f}_d \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{z} \end{pmatrix} \\
 & \text{s.t.} \quad \begin{bmatrix} -\mathbf{B}^T & \mathbf{N} \\ \mathbf{B}^T & -\mathbf{N} \\ -\mathbf{f}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ 1 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \\
 & \mathbf{u}: \text{χωρίς περιορισμό}
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

όπου \mathbf{u} το διάνυσμα των μετακινήσεων των κόμβων
 \mathbf{z} το διάνυσμα των πλαστικών πολλαπλασιαστών.

Στην δεύτερη περίπτωση η αντικειμενική συνάρτηση εκφράζει την πλαστική ενέργεια που αποσβένεται μειωμένη κατά το έργο της μόνιμης φόρτισης. Η σχέση προκύπτει από την εξίσωση του ρυθμού αύξησης του εξωτερικού έργου με την απόσβεση.

Με τα παραπάνω συστήματα πλήρως καθορισμένα μπορεί πλέον να γίνει υπολογισμός του μέγιστου φορτιστικού συντελεστή με εφαρμογή αλγορίθμων γραμμικού προγραμματισμού.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Επίλυση παραδειγμάτων οριακής ανάλυσης

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΩΝ ΟΡΙΑΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

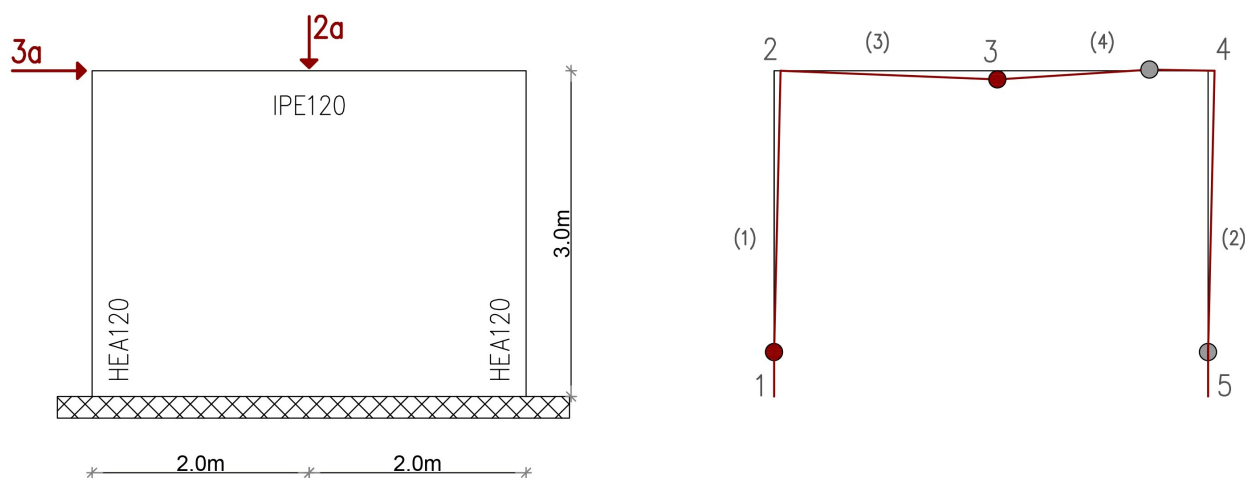
Στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας πραγματοποιείται οριακή ανάλυση απλών επίπεδων φορέων με τη βοήθεια γραμμικού προγραμματισμού. Όπως προαναφέρθηκε, χρησιμοποιούνται γραμμικοποιημένα τα κριτήρια διαρροής των Gendy, Saleeb (1993) για M, NM, NMQ αλληλεπίδραση. Επίσης στα παραδείγματα επιλύεται το πρωταρχικό γραμμικό πρόβλημα, δηλαδή αυτό που αντιστοιχεί στο στατικό θεώρημα της πλαστικής ανάλυσης.

Οι αλγόριθμοι γραμμικού προγραμματισμού που επιλέγεται να δοκιμαστούν στα προβλήματα οριακής ανάλυσης κατασκευών είναι ο αλγόριθμος ελλειψοειδούς και η SM1, το θεωρητικό κομμάτι των οποίων παρουσιάστηκε στα προηγούμενα κεφάλαια. Η ανάλυση πραγματοποιείται με χρήση της γλώσσας προγραμματισμού Matlab (R2011a). Ο κώδικας για τον αλγόριθμο ελλειψοειδούς έχει γραφτεί από τον Stallmann (2014), ενώ ο κώδικας για την SM1 γράφτηκε στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας και βασίστηκε στον Murty (2005). Τα αποτελέσματά που προκύπτουν συγκρίνονται με εκείνα που υπολογίζονται με εφαρμογή της linprog που προσφέρεται στην Matlab.

Οι αναλύσεις πραγματοποιήθηκαν σε υπολογιστή με επεξεργαστή Intel(R) Core(TM) i7-2670QM CPU @ 2.20GHz και μνήμη RAM 2GB.

4.1 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Αναλύεται επίπεδο μονώροφο μεταλλικό πλαίσιο ενός ανοίγματος, όπως φαίνεται στην Εικ.4.1. Το πλαίσιο διακριτοποιείται σε 4 μεμονωμένα μέλη, 5 κόμβους και 9 βαθμούς ελευθερίας (β.ε.). Ο χάλυβας είναι κατηγορίας S235, το ζύγωμα έχει διατομή IPE120 και τα υποστυλώματα HEA120. Οι οριακές τιμές για τα μεγέθη διατομής, με σειρά $\mathbf{n}_y = \mathbf{s}_{1y}$, $\mathbf{m}_y = \mathbf{s}_{2y}$, $\mathbf{m}_y = \mathbf{s}_{3y}$ και $\mathbf{v}_y = \mathbf{s}_{4y}$, προκύπτουν $\mathbf{s}^1 = [310.43 \ 14.27 \ 14.27 \ 85.61]$ για τα ζυγώματα, $\mathbf{s}^2 = [595.49 \ 28.08 \ 28.08 \ 114.78]$ για τα υποστυλώματα. Τα αποτελέσματα εμφανίζονται στον Πιν.4.1.



Εικόνα 4.1: Φορέας Παραδείγματος 1: Απαραμόρφωτος και κατά την κατάρρευσή του

	Κάμψη (M)			Κάμψη-Αξονική (NM)			Κάμψη-Αξονική-Τέμνουσα (NMQ)		
	linprog	EM	SM1	linprog	EM	SM1	linprog	EM	SM1
Πλήθος μεταβλητών (n_var)	13	14	14	13	14	14	13	14	14
Πλήθος ισοτικών περιορισμών (n_eq)	9	-	-	9	-	-	9	-	-
Πλήθος ανισοτικών περιορισμών (n_ineq)	16	36	36	64	84	84	256	276	276
Φορτιστικός συντελεστής κατάρρευσης (α)	7.54933	7.54940	7.54943	7.5137	7.5138	7.5125	7.1054	7.1055	7.107
Πλαστικές αρθρώσεις	4	4	4	4	4	4	4	4	4
Επαναλήψεις	5/ 17 (1)	1 (feas) 6487	9	6/ 22 (1)	0 (feas) 6561	6	7/ 82 (3)	0 (feas) 7000	6
M	-/ 790	790	790	-/ 850	850	850	-/ 2300	2300	2300
Συντελεστής *e	-/ 8	8	8	-/ 8	8	8	-/ 8	8	8
Συντελεστή προσέγγισης eapprox	-	-	10 ⁻¹⁸	-	-	10 ⁻¹⁶	-	-	10 ⁻¹⁴

Πίνακας 4.1: Αποτελέσματα αναλύσεων Παραδείγματος 1

Μέγεθος στιγμιότυπου = input size = 578

Πυκνότητα μητρώου $A = 18.1\%$

Δράση Κάμψης (M)						
Επανάληψη SMI	Πλήθος επαναλήψεων LSFN	Ακτίνα $\delta(x)$ (μετά την LSFN)	Τιμή αντικειμενικής συνάρτησης	Πλήθος επαναλήψεων LSCPD	Ακτίνα $\delta(x)$ (μετά την LSCPD)	Τιμή αντικειμενικής συνάρτησης
0		-	-	-	-	-
1	1	0.9286	1	14	0.9304	0.9890
2	39	0.0231	0.0798	9	0.0493	0.0449
3	13	0.0014	-0.0031	7	0.0028	-0.0049
4	3	6.3011·10 ⁻⁵	-0.0076	6	1.2552·10 ⁻⁴	-0.0077
5	14	8.2530·10 ⁻⁶	-0.0079	17	6.9993·10 ⁻⁴	-0.0088
6	2	1.5348·10 ⁻⁵	-0.0095	7	2.3765·10 ⁻⁵	-0.0095
7	6	4.1806·10 ⁻⁷	-0.0095	7	1.0207·10 ⁻⁵	-0.0095
8	1	1.2447·10 ⁻⁷	-0.0096	2	1.2447·10 ⁻⁷	-0.0096
9	1	1.2447·10 ⁻⁸	-0.0096	2	1.2447·10 ⁻⁸	-0.0096

Πίνακας 4.2: Αποτελέσματα SMI-Παράδειγμα 1 για δράση κάμψης M (α)

Δράση Κάμψης (M)					
Επανάληψη SM1	Διεύθυνση καθόδου	Τιμή φορτιστικού συντελεστή	Τιμή μεταβλητής x_{n+1}	Ακτίνα $\delta(x)$ (μετά την κάθοδο)	Τιμή αντικειμενικής συνάρτησης
0	-	-	-	-	-
1	5.1	10.2360	0.0927	0.0212	0.0798
2	5.1	6.4507	0.0051	0.0012	-0.0031
3	5.1	6.2519	$2.7133 \cdot 10^{-4}$	$5.7084 \cdot 10^{-5}$	-0.0076
4	5.1	6.2429	$5.0947 \cdot 10^{-5}$	$1.9799 \cdot 10^{-7}$	-0.0079
5	5.1	7.5527	$6.9006 \cdot 10^{-5}$	$1.5186 \cdot 10^{-5}$	-0.0095
6	5.1	7.5513	$3.0714 \cdot 10^{-5}$	$1.7778 \cdot 10^{-7}$	-0.0095
7	5.1	7.5497	$5.6103 \cdot 10^{-6}$	$6.7979 \cdot 10^{-8}$	-0.0096
8	5.1	7.5497	$5.3983 \cdot 10^{-6}$	$1.2447 \cdot 10^{-8}$	-0.0096
9	5.1	7.5497	$5.3808 \cdot 10^{-6}$	$1.2447 \cdot 10^{-9}$	-0.0096

Πίνακας 4.3: Αποτελέσματα SM1-Παράδειγμα 1 για δράση κάμψης M (β)

Μέγεθος στιγμιοτύπου = input size = 1442

Πυκνότητα μητρώου $A = 18\%$

Αλληλεπίδραση κάμψης – αξονικής δύναμης (MN)						
Επανάληψη SM1	Πλήθος επαναλήψεων LSFN	Ακτίνα $\delta(x)$ (μετά την LSFN)	Τιμή αντικειμενικής συνάρτησης	Πλήθος επαναλήψεων LSCPD	Ακτίνα $\delta(x)$ (μετά την LSCPD)	Τιμή αντικειμενικής συνάρτησης
0	-	-	-	-	-	-
1	1	0.9286	1	10	0.9301	0.9935
2	8	0.0842	0.0249	8	0.0404	0.0376
3	29	0.0015	-0.0021	9	0.0035	-0.0051
4	2	$6.2769 \cdot 10^{-5}$	-0.0085	4	$1.2455 \cdot 10^{-4}$	-0.0086
5	14	$1.3837 \cdot 10^{-5}$	-0.0087	8	$4.3683 \cdot 10^{-5}$	-0.0088
6	19	$8.893 \cdot 10^{-7}$	-0.0088	7	$3.3188 \cdot 10^{-6}$	-0.0088

Πίνακας 4.4: Αποτελέσματα SM1-Παράδειγμα 1 για αλληλεπίδραση κάμψης M - αξονικής δύναμης N (α)

Αλληλεπίδραση κάμψης – αξονικής δύναμης (MN)					
Επανάληψη SM1	Διεύθυνση καθόδου	Τιμή φορτιστικού συντελεστή	Τιμή μεταβλητής x_{n+1}	Ακτίνα $\delta(x)$ (μετά την κάθοδο)	Τιμή αντικειμενικής συνάρτησης
0	-	-	-	-	-
1	5.1	6.8863	0.0927	0.212	0.0846
2	5.1	7.7431	0.0071	$8.2017 \cdot 10^{-4}$	-0.0020

Αλληλεπίδραση κάμψης – αξονικής δύναμης (MN)					
Επανάληψη SM1	Διεύθυνση καθόδου	Τιμή φορτιστικού συντελεστή	Τιμή μεταβλητής x_{n+1}	Ακτίνα $\delta(x)$ (μετά την κάθοδο)	Τιμή αντικειμενικής συνάρτησης
3	5.1	7.5287	$3.2839 \cdot 10^{-4}$	$6.1143 \cdot 10^{-5}$	-0.0085
4	5.1	7.5185	$1.1365 \cdot 10^{-4}$	$2.619 \cdot 10^{-6}$	-0.0087
5	5.1	7.5129	$8.3299 \cdot 10^{-6}$	$6.2776 \cdot 10^{-8}$	-0.0088
6	5.1	7.5125	$1.0178 \cdot 10^{-6}$	$1.7798 \cdot 10^{-8}$	-0.0088

Πίνακας 4.5: Αποτελέσματα SM1-Παράδειγμα 1 για αλληλεπίδραση κάμψης M – αξονικής δύναμης N (β)

Μέγεθος στιγμιοτύπου = input size = 4930

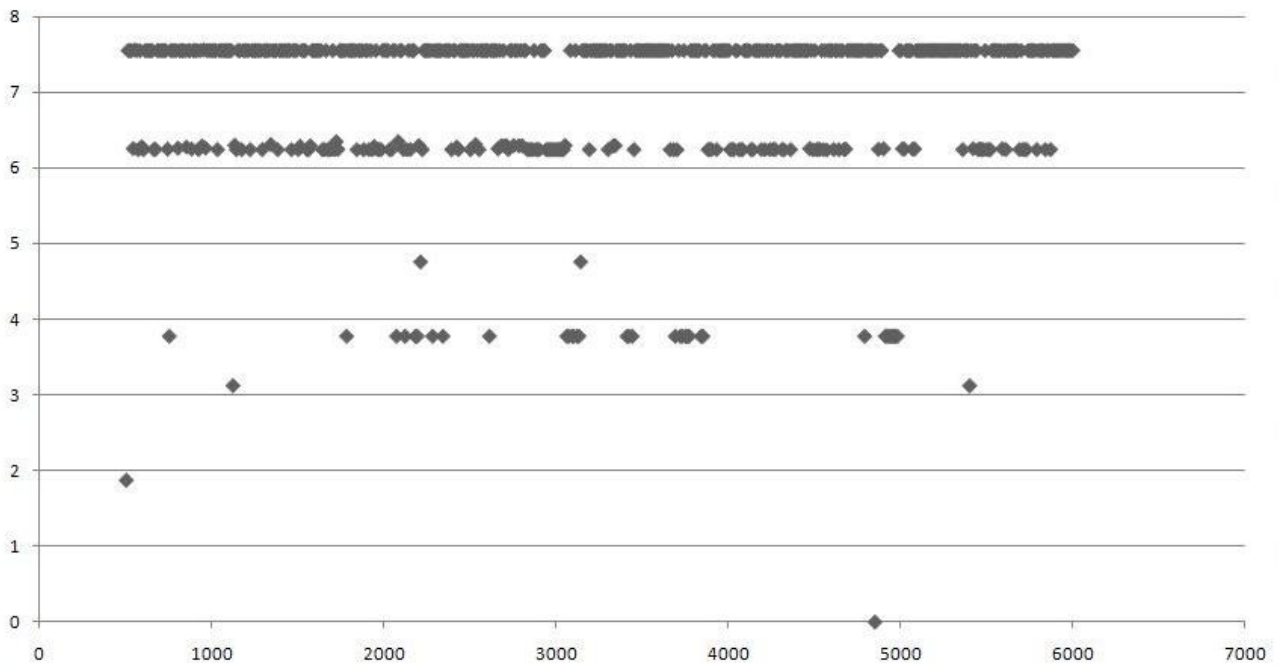
Πυκνότητα μητρώου $A = 23.36\%$

Αλληλεπίδραση κάμψης – αξονικής – τέμνουσας δύναμης (MNQ)						
Επανάληψη SM1	Πλήθος επαναλήψεων LSFN	Ακτίνα $\delta(x)$ (μετά την LSFN)	Τιμή αντικειμενικής συνάρτησης	Πλήθος επαναλήψεων LSCPD	Ακτίνα $\delta(x)$ (μετά την LSCPD)	Τιμή αντικειμενικής συνάρτησης
0	-	-	-	-	-	-
1	0	0.9286	1	2	0.9286	1
2	4	0.0112	0.0126	5	0.0117	0.0115
3	54	$2.8011 \cdot 10^{-4}$	$-4.2180 \cdot 10^{-5}$	7	$6.3150 \cdot 10^{-4}$	$-8.9645 \cdot 10^{-4}$
4	54	$2.2963 \cdot 10^{-5}$	-0.0015	10	$6.2313 \cdot 10^{-5}$	-0.0030
5	1	$3.4988 \cdot 10^{-7}$	-0.0031	2	$3.4988 \cdot 10^{-7}$	-0.0031
6	1	$1.3954 \cdot 10^{-8}$	-0.0031	3	$1.3626 \cdot 10^{-8}$	-0.0031

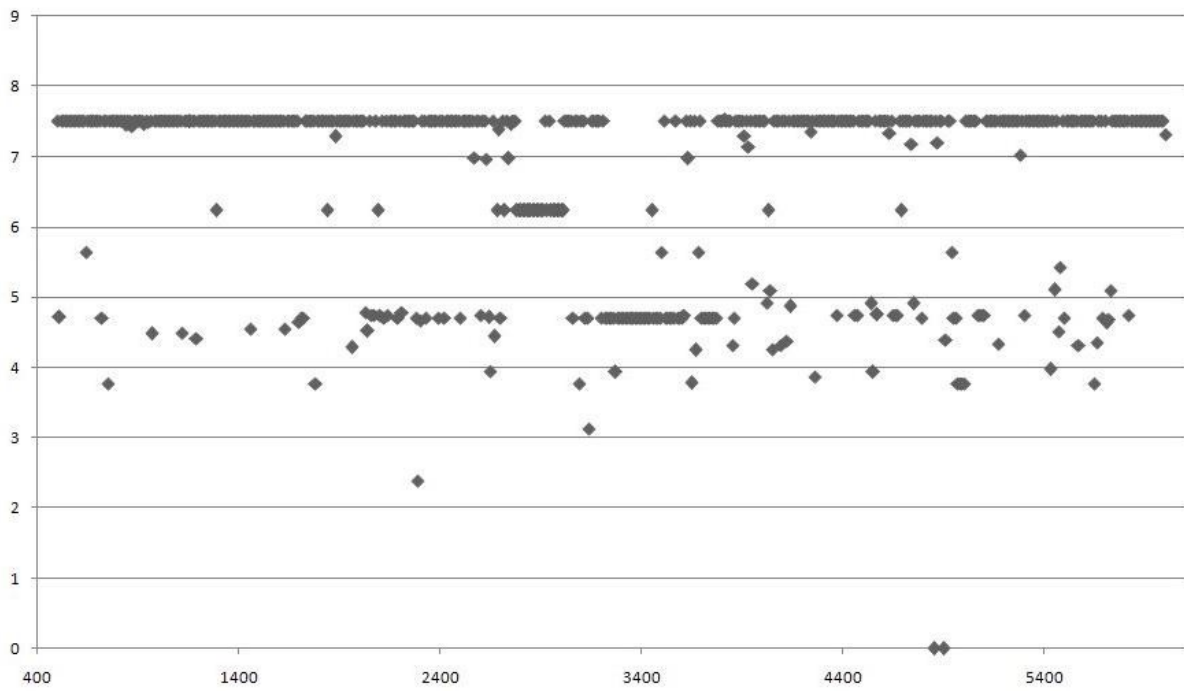
Πίνακας 4.6: Αποτελέσματα SM1-Παράδειγμα 1 για αλληλεπίδραση κάμψης M – αξονικής δύναμης N – τέμνουσας Q (α)

Αλληλεπίδραση κάμψης – αξονικής – τέμνουσας δύναμης (MNQ)					
Επανάληψη SM1	Διεύθυνση καθόδου	Τιμή φορτιστικού συντελεστή	Τιμή μεταβλητής x_{n+1}	Ακτίνα $\delta(x)$ (μετά την κάθοδο)	Τιμή αντικειμενικής συνάρτησης
0	-	0	-	-	1
1	5.1	0.0058	0.0126	0.0027	0.0126
2	5.1	3.7195	0.0016	$1.6638 \cdot 10^{-4}$	$-4.2180 \cdot 10^{-5}$
3	5.1	3.6398	$5.9596 \cdot 10^{-5}$	$5.0149 \cdot 10^{-6}$	-0.0015
4	5.1	7.1069	$1.4727 \cdot 10^{-5}$	$2.3946 \cdot 10^{-7}$	-0.0031
5	5.1	7.1070	$1.4403 \cdot 10^{-5}$	$1.3954 \cdot 10^{-8}$	-0.0031
6	5.1	7.1070	$1.4374 \cdot 10^{-5}$	$1.3626 \cdot 10^{-9}$	-0.0031

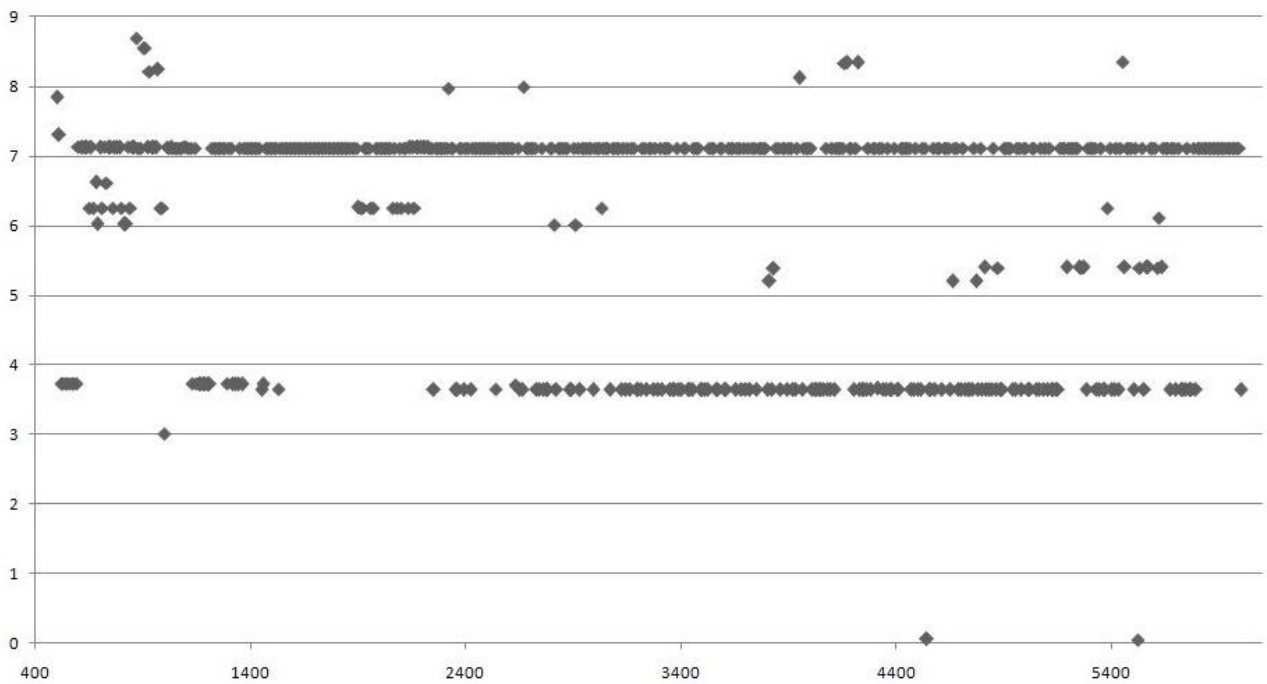
Πίνακας 4.7: Αποτελέσματα SM1-Παράδειγμα 1 για αλληλεπίδραση κάμψης M – αξονικής δύναμης N – τέμνουσας Q (β)



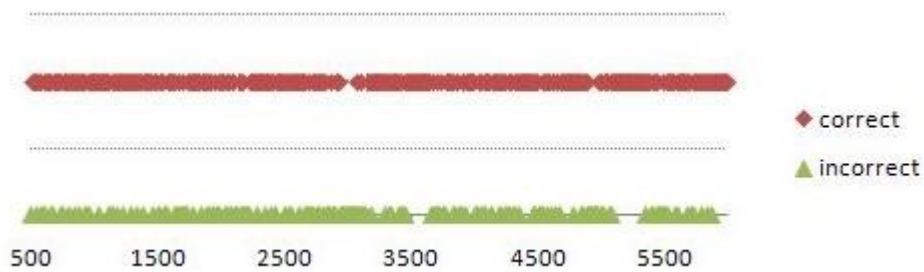
Εικόνα 4.2: Διάγραμμα προκύπτοντος φοριστικού συντελεστή α συναρτήσει της παραμέτρου M (Δράση M)



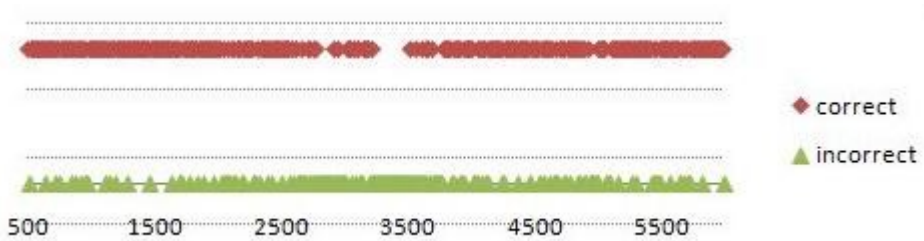
Εικόνα 4.3: Διάγραμμα προκύπτοντος συντελεστή α συναρτήσει της παραμέτρου M (MN)



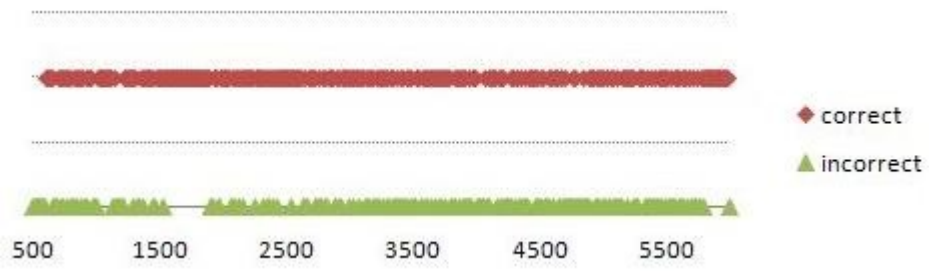
Εικόνα 4.4: Διάγραμμα προκύπτοντος φορτιστικού συντελεστή M συναρτήσει της παραμέτρου M (MNQ)



Εικόνα 4.5: Κατανομή σωστών και λανθασμένων τιμών του α συναρτήσει του M (Δράση M)



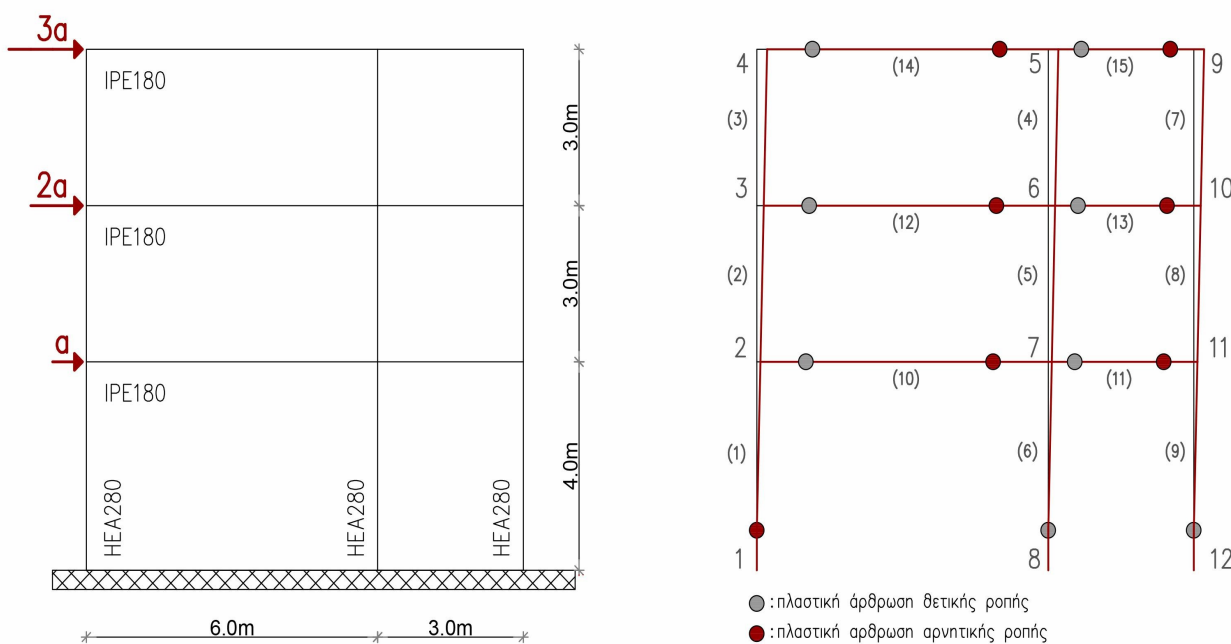
Εικόνα 4.6: Κατανομή σωστών και λανθασμένων τιμών του α συναρτήσει του M (MN)



Εικόνα 4.7: Κατανομή σωστών και μη σωστών τιμών του α συναρτήσει του M (MNQ)

4.2 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Αναλύεται επίπεδο τριώροφο μεταλλικό πλαίσιο δύο ανοιγμάτων, όπως φαίνεται στην Εικ.4.8. Το πλαίσιο διακριτοποιείται σε 15 μεμονωμένα μέλη, 12 κόμβους και 27 β.ε. Ο χάλυβας είναι κατηγορίας S235, το ζύγωμα έχει διατομή IPE180 και τα υποστυλώματα HEA280. Οι οριακές τιμές για τα μεγέθη διατομής, με σειρά $n_y=s_{1y}$, $m_y=s_{2y}$, $m_y=s_{3y}$ και $v_y=s_{4y}$, προκύπτουν $s^1=[562.82 \ 39.1 \ 39.1 \ 152.63]$ για τα ζύγωμα, $s^2=[2285.61 \ 261.32 \ 261.32 \ 430.63]$ για τα υποστυλώματα. Τα αποτελέσματα εμφανίζονται στον Πίν.4.8.



Εικόνα 4.8: Φορέας Παραδείγματος 2: απαραμόρφωτος και κατά την κατάρρευσή του

	Κάμψη (M)			Κάμψη-Αξονική (NM)			Κάμψη-Αξονική-Τέμνουσα (NMQ)		
	linprog	EM	SM1	linprog	EM	SM1	linprog	EM	SM1
Πλήθος μεταβλητών (n_var)	46	47	47	46	Δεν βρέθηκε λύση	Δεν βρέθηκε λύση	46	Δεν βρέθηκε λύση	Δεν βρέθηκε λύση
Πλήθος ισοτικών περιορισμών (n_eq)	27	-	-	27			27		
Πλήθος ανισοτικών περιορισμών (n_ineq)	60	116	116	240			960		
Φορτιστικός συντελεστής κατάρρευσης (α)	21.9853	20.00	21.9866	21.9113			21.0624		
Πλαστικές αρθρώσεις	15	15	15	15	15				

	Κάμψη (M)			Κάμψη-Αξονική (NM)			Κάμψη-Αξονική-Τέμνουσα (NMQ)		
	linprog	EM	SM1	linprog	EM	SM1	linprog	EM	SM1
Επαναλήψεις	6/ 85	1 (feas) / 38150	5	9			10		
M	-/ 3180	3180	3180	-/			-		
Συντελεστής *e	-/ 8	8	8	-			-		
Συντελεστή προσέγγισης eapprox	-	-	10 ⁻¹⁶	-			-		

Πίνακας 4.8: Αποτελέσματα αναλύσεων Παραδείγματος 2

Μέγεθος στιγμιότυπου = input size = 5751

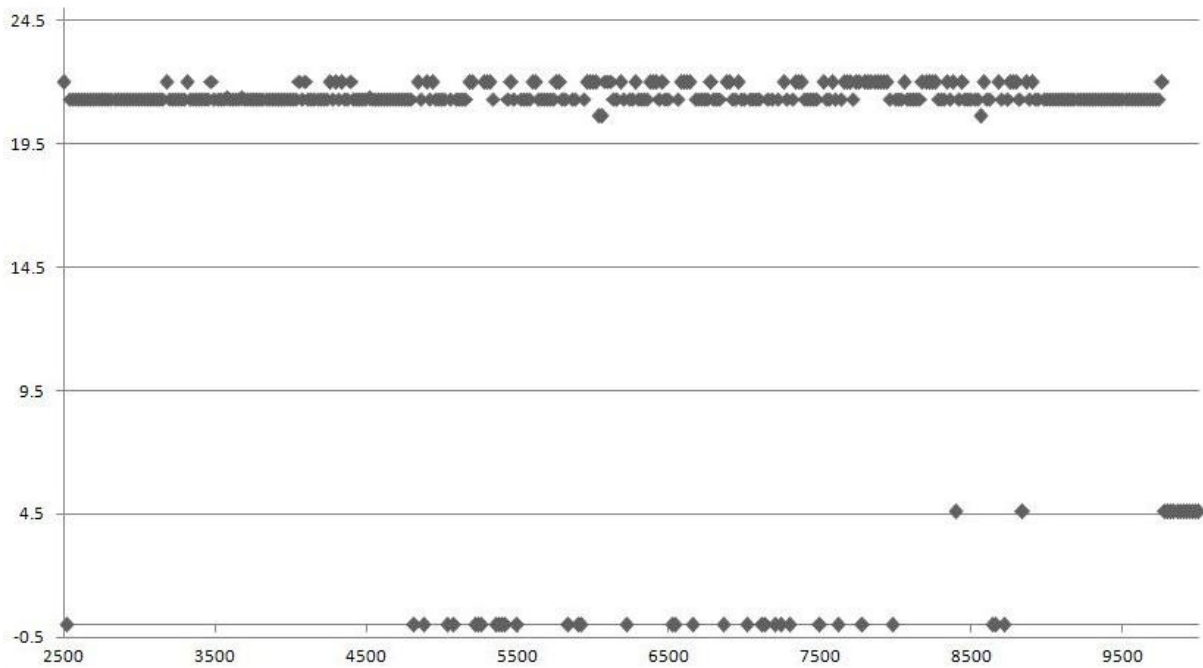
Πυκνότητα μητρώου $A = 7.09\%$

Δράση Κάμψης (M)						
Επανάληψη SM1	Πλήθος επαναλήψεων LSFN	Ακτίνα $\delta(x)$ (μετά την LSFN)	Τιμή αντικειμενικής συνάρτησης	Πλήθος επαναλήψεων LSCPD	Ακτίνα $\delta(x)$ (μετά την LSCPD)	Τιμή αντικειμενικής συνάρτησης
0	-	-	-	-	-	-
1	1	0.9224	1	39	0.9227	0.9893
2	3	0.0212	0.0884	12	0.0473	0.0481
3	0	3.4295·10 ⁻⁵	-8.091410 ⁻⁴	15	0.0026	-0.0036
4	18	7.7223·10 ⁻⁵	-0.0061	17	2.5227·10 ⁻⁴	-0.0064
5	0	3.0675·10 ⁻⁷	-0.0066	20	9.9675·10 ⁻⁵	-0.0068
6	7	7.0005·10 ⁻⁷	-0.0069	23	3.9385·10 ⁻⁶	-0.0069

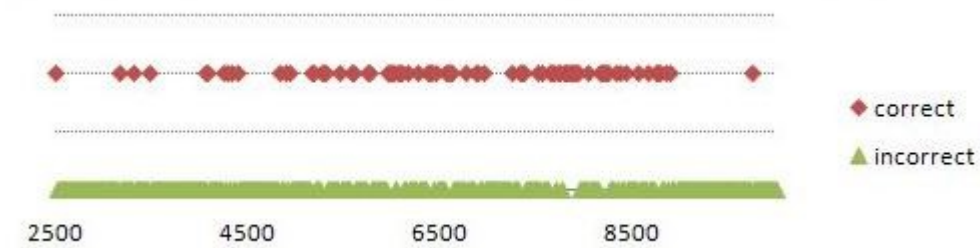
Πίνακας 4.9: Αποτελέσματα SM1-Παράδειγμα 2 για δράση κάμψης M (α)

Δράση Κάμψης (M)					
Επανάληψη SM1	Διεύθυνση καθόδου	Τιμή φορτιστικού συντελεστή	Τιμή μεταβλητής x_{n+1}	Ακτίνα $\delta(x)$ (μετά την κάθοδο)	Τιμή αντικειμενικής συνάρτησης
0	-	-	-	-	1
1	5.1	35.0303	0.0994	0.0211	0.0884
2	5.1	22.5510	0.0079	3.4295·10 ⁻⁵	8.0914·10 ⁻⁴
3	5.1	21.2942	5.5437·10 ⁻⁴	6.2419·10 ⁻⁷	-0.0061
4	5.1	21.2955	6.0847·10 ⁻⁵	3.0675·10 ⁻⁷	-0.0066
5	5.1	21.9815	9.8058·10 ⁻⁶	6.8572·10 ⁻⁷	-0.0069
6	5.1	21.9813	1.0129·10 ⁻⁶	1.2908·10 ⁻⁸	-0.0069

Πίνακας 4.10: Αποτελέσματα SM1-Παράδειγμα 2 για δράση κάμψης M (β)



Εικόνα 4.9: Διάγραμμα προκύπτοντος φορτιστικού συντελεστή α συναρτήσει της παραμέτρου M (Δράση M)



Εικόνα 4.10: Κατανομή σωστών και λανθασμένων τιμών του α συναρτήσει του M (Δράση M)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Συμπεράσματα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

5.1 ΕΛΛΕΙΨΟΕΙΔΗΣ ΜΕΘΟΔΟΣ

Η ελλειψοειδής μέθοδος για γραμμικό προγραμματισμό, παρά την μεγάλη ιστορική και θεωρητική αξία της και το γεγονός ότι δίνει την ευκαιρία στον ερευνητή να αποκτήσει καλή γεωμετρική αντίληψη του προβλήματος και να το κατανοήσει σε βάθος, δεν ενδείκνυται για πρακτικές εφαρμογές, καθώς απαιτεί πάντα πολύ μεγάλο αριθμό επαναλήψεων. Συγκρινόμενη, μάλιστα, με άλλους διαθέσιμους αλγορίθμους, η ελλειψοειδής παρουσιάζεται ακόμη πιο δύσχρηστη.

Παρά τις προσπάθειες βελτίωσής της στο πλαίσιο της εργασίας δεν βρέθηκε μεταβολή που να την επιταχύνει σημαντικά, συμπέρασμα με το οποίο συμφωνούν και ευρήματα από την βιβλιογραφία.. Ωστόσο με την εκμετάλλευση των ορίων I_b και u_b των μεταβλητών σχεδιασμού s στον υπολογισμό της ακτίνας R της αρχικής σφαίρας μπόρεσαν να λυθούν στιγμιότυπα οριακής ανάλυσης κατασκευών, που δεν επιλύονταν αρχικά, όταν γινόταν χρήση της default τιμής για την R , λόγω overflow στα δεδομένα. Το πλήθος των επαναλήψεων για όλα τα παραδείγματα ήταν τάξεις μεγέθους μεγαλύτερο από τις επαναλήψεις στις οποίες τερμάτιζε η linprog της Matlab.

5.2 ΜΕΘΟΔΟΣ ΣΦΑΙΡΑΣ 1

Στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας συντάχθηκε για την SM1 κώδικας στην Matlab με βάση την παρουσίαση του αλγορίθμου από τον Murty (2005, 2006). Ο κώδικας χρησιμοποιήθηκε για να επιλυθούν στιγμιότυπα – παραδείγματα οριακής πλαστικής ανάλυσης των κατασκευών.

Η SM1 δεν έτρεξε σε όλα τα στιγμιότυπα χωρίς προβλήματα. Αν και τερμάτιζε σε όλες τις επιλύσεις, σε πολλές από αυτές τελείωνε μεν σύμφωνα με τα κριτήρια τερματισμού που είχαν τεθεί (σταθμισμένη διαφορά μεταξύ δύο διαδοχικών λύσεων να είναι μικρότερη από επιλεγμένη ακρίβεια), όμως έδινε λανθασμένη λύση. Γνωρίζοντας την σωστή κάθε φορά λύση μέσω επίλυσης με την linprog της Matlab πραγματοποιούνταν δοκιμές συνεχώς, με μικρές αλλαγές κάθε φορά στον αλγόριθμο, μέχρι να συγκλίνει η μέθοδος στο σωστό αποτέλεσμα..

Στα στιγμιότυπα όπου η SM1 έτρεξε απρόσκοπτα και σύμφωνα με την θεωρητική περιγραφή της έδειξε ικανή να συγκριθεί με τους χρησιμοποιούμενους από την εντολή linprog αλγορίθμους (simplex algorithms και interior point algorithms). Σε αρκετές επιλύσεις μάλιστα χρειάστηκε λιγότερες επαναλήψεις από την linprog.

Το πέραςμα από τη θεωρητική διατύπωση του αλγορίθμου στο άρθρο του Murty στον κώδικα του υπολογιστή διαθέτει αρκετά σημεία στα οποία απαιτείται να επιστρατευτούν διάφορες παράμετροι και να οριστούν τιμές ανοχών και προσεγγίσεων από τον προγραμματιστή ή χρήστη. Παρατηρήθηκε ότι η μέθοδος, όταν επιλύεται με χρήση του κώδικα που στην εργασία αυτή διαμορφώθηκε, εμφανίζει πολύ μεγάλη ευαισθησία σε οποιαδήποτε μεταβολή της τιμής των διαφόρων παραμέτρων.

Ειδικά για την παράμετρο M της υπορουτίνας *big-M augmentation* που λαμβάνει χώρα πριν την επίλυση διερευνήθηκε η επιρροή της στην επίλυση των στιγμιότυπων, με στόχο να βρεθεί κάποια ασφαλής – σταθερή ζώνη τιμών της, ανάλογα με τα δεδομένα του εκάστοτε στιγμιότυπου. Κάθε στιγμιότυπο των παραδειγμάτων επιλύθηκε για πολλές τιμές της M και σχεδιάστηκαν διαγράμματα που δείχνουν την μεταβολή της λύσης σε σχέση με την τιμή της M . Η σταθερή ζώνη που αναζητούνταν δεν εντοπίστηκε, αλλά διαπιστώθηκε η μεγάλη αστάθεια του προγραμματισμένου αλγορίθμου ως προς M .

Πρέπει να τονιστεί ότι μεταβολές στις διάφορες παραμέτρους δεν προκαλούσαν απλώς αλλαγή στο πλήθος των απαιτούμενων επαναλήψεων, αλλά και στην εύρεση ή όχι της σωστής λύσης.

Στην βιβλιογραφία (Murty, Oskoorouchi 2008a, Murty, Oskoorouchi 2008b), όπου παρουσιάζονται αποτελέσματα από αντίστοιχες επιλύσεις, δεν αναφέρονται παρεμφερή προβλήματα και ο αλγόριθμος δείχνει να δίνει πάντοτε κανονικά λύση.

Είναι πιθανόν στον κώδικα να υπάρχουν λεπτομέρειες που έχουν να κάνουν με την πεπερασμένη ακρίβεια με την οποία εκτελεί πράξεις ο υπολογιστής και με το σφάλμα που μαζεύεται σε κάθε επανάληψη, οι οποίες να προξενούν την προαναφερθείσα μη προβλεπόμενη και μη επιθυμητή συμπεριφορά. Θα ήταν χρήσιμο να ελεγχθεί ο αλγόριθμος από κάποιον με μεγάλη προγραμματιστική εμπειρία, προκειμένου να αποκλειστούν τέτοια ζητήματα.

Παρά το γεγονός ότι η εφαρμογή του κώδικα δεν ήταν πλήρως επιτυχημένη, από τα επιλυμένα παραδείγματα διαφαίνεται πως ο αλγόριθμος λειτουργεί γρήγορα και συγκλίνει σε αριθμό επαναλήψεων μικρότερο, αρκετές φορές, και από εκείνο που απαιτεί η *linprog*. Να τονιστεί εδώ ιδιαιτέρως ότι η ανώτερη σε σχέση με την *linprog* απόδοσή του παρατηρείται και σε στιγμιότυπα που είναι σχετικά μικρών διαστάσεων, 116×47 , 276×14 , ενώ αποτελέσματα από την βιβλιογραφία (Murty, Oskoorouchi 2008a, Murty, Oskoorouchi 2008b) οδηγούν στο συμπέρασμα ότι η μέθοδος λειτουργεί καλύτερα όσο αυξάνουν οι διαστάσεις του προβλήματος και η διαφορά μεταξύ των m και n μεγαλώνει ($m \gg n$). Λαμβάνοντας υπόψη επιπρόσθετα ότι η *SM1* είναι η παλαιότερη και η πιο αργή από όλες τις *SMs*, καταλήγουμε στο ότι είναι ενδιαφέρον να μελετηθούν περισσότερο οι *SMs* και να παρουσιαστούν στο μέλλον ανεξάρτητα αποτελέσματα για διαφορετικά προβλήματα.

Στο κομμάτι που ενδιαφέρει τους πολιτικούς μηχανικούς, οι *SMs*, εφόσον δοθεί για αυτές κώδικας αξιόπιστος και ελεγχθεί, μπορούν να επιταχύνουν την επίλυση προβλημάτων οριακής πλαστικής ανάλυσης και να καταστήσουν το κομμάτι της βελτιστοποίησης των κατασκευών πιο προσφιλές στον μελετητή μηχανικό.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ: ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΤΗΣ ELLIPSOID METHOD

Λήμμα Π1 Κάθε κορυφή \mathbf{v} του πολυέδρου $P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$, όπου $\mathbf{A} \in \mathbb{Z}^{m \times n}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^m$, ικανοποιεί την $\|\mathbf{v}\|_\infty < 2^{\langle \mathbf{A}, \mathbf{b} \rangle - n^2}$. Επιπλέον, $v_i \in \mathbb{Q}$, $i = 1, \dots, n$ με denominators $|q| < \frac{2^{\langle \mathbf{A}, \mathbf{b} \rangle}}{mn}$, $\langle \mathbf{A}, \mathbf{b} \rangle$ το μήκος κωδικοποίησης του προβλήματος.

Απόδειξη ακολουθώντας εκείνη των Grötchel, Lovász, Schrijver (1993)

$\forall \mathbf{v}$ κορυφή του πολυέδρου $\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$, $-\mathbf{x} \leq \mathbf{0}$, $\exists \mathbf{D}$ υποπίνακας του $\begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ -\mathbf{I} \end{pmatrix}$ και \mathbf{d} “υποδιάνυσμα” του $\begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$: \mathbf{v} λύση του συστήματος $\mathbf{D}\mathbf{x} \leq \mathbf{d}$, $\det \mathbf{D} \neq 0$.

Από τον κανόνα του Cramer: $v_k = \frac{\det \mathbf{D}_k}{|\det \mathbf{D}|}$, $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$.

Ισχύει $\mathbf{D}_{ij} \in \{0, 1, \mathbf{A}_{kl}, \mathbf{b}_m\} \Rightarrow \det \mathbf{D}$, $\det \mathbf{D}_k \in \mathbb{Z}$ και $\det \mathbf{D} \neq 0$, άρα $|\det \mathbf{D}| \geq 1$ και $v_k \leq \det \mathbf{D}_k$, $\forall k = 1, \dots, n$.

Κάθε στοιχείο \mathbf{A}_{ij} ή \mathbf{b}_m εμφανίζεται ! φορά στο \mathbf{D}_k , άρα $\langle \mathbf{D}_k \rangle \leq \langle \mathbf{A}, \mathbf{b} \rangle$.

$\langle r \rangle = \lceil \log_2(|r|+1) \rceil + 1 \Leftrightarrow 2^{\langle r \rangle - 1} = 2^{\lceil \log_2(|r|+1) \rceil} \geq 2^{\log_2(|r|+1)} \Leftrightarrow |r| \leq 2^{\langle r \rangle - 1} - 1$, ενώ η ανίσωση Hadamard

δίνει $\det \mathbf{D}_k \leq \prod_{j=1}^n \|\mathbf{D}_k \mathbf{e}_j\|$. Άρα:

$$1 + |\det \mathbf{D}_k| \leq 1 + \prod_{j=1}^n \|\mathbf{d}_{kj}\| \leq \prod_{j=1}^n (1 + \|\mathbf{d}_{kj}\|) \leq \prod_{j=1}^n 2^{\langle \mathbf{d}_{kj} \rangle - n} = 2^{\langle \mathbf{D}_k \rangle - n^2} \leq 2^{\langle \mathbf{A}, \mathbf{b} \rangle - n^2}, \text{ που αποδεικνύει το ζη-}$$

τούμενο.

Πόρισμα Π2 Κάθε κορυφή \mathbf{v} του πολυέδρου $P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$, όπου $\mathbf{A} \in \mathbb{Z}^{m \times n}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^m$, περιέχεται σε σφαίρα $S(\mathbf{0}, R)$ με $R = \sqrt{n} 2^{\langle \mathbf{A}, \mathbf{b} \rangle - n^2}$ (Grötchel, Lovász, Schrijver (1993)).

Θεώρημα Π3 Ο όγκος ελλειψοειδούς στο οποίο εφαρμόζεται αφινικός μετασχηματισμός μεταβάλλεται κατά μια σταθερά. Συνεπώς, ο λόγος των όγκων δύο ελλειψοειδών μένει αναλλοίωτος μετά από κοινό αφινικό μετασχηματισμό.

Απόδειξη

Έστω αφινικός μετασχηματισμός T^* μεταξύ αφινικών χώρων πεπερασμένης διάστασης, X

και Y , με

$$T^*: X \rightarrow Y \\ \mathbf{x} \rightarrow T\mathbf{x} + \mathbf{t}, \text{ όπου } T \text{ γραμμικός μετασχηματισμός στον } X \text{ και } \mathbf{t} \in Y,$$

ο οποίος εφαρμόζεται επί ελλειψοειδούς

$$E_k = E(\mathbf{B}_k, \mathbf{x}_k) := \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \equiv X \mid (\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) \cdot \mathbf{B}_k^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) \leq 1 \}, \text{ όπου } \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n, \mathbf{B}_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$\text{ώστε } E_T = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid [T(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) + \mathbf{t}] \cdot \mathbf{B}_k^{-1} [T(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) + \mathbf{t}] \leq 1 \} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow E_T = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid (\mathbf{x} - (\mathbf{x}_k - T^{-1}\mathbf{t})) \cdot T^T \mathbf{B}_k^{-1} T (\mathbf{x} - (\mathbf{x}_k - T^{-1}\mathbf{t})) \leq 1 \}.$$

$$\text{Έχουμε } vol(E_k) = V_n \sqrt{\det \mathbf{B}_k} \text{ και } vol(E_T) = V_n \sqrt{\det(T^T \mathbf{B}_k T)} = V_n \sqrt{\det T^T \det T} \sqrt{\det \mathbf{B}_k} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow vol(E_T) = V_n |\det T| \sqrt{\det \mathbf{B}_k}.$$

Εύκολα φαίνεται από το τελευταίο ότι ο λόγος των όγκων δύο ελλειψοειδών μένει αναλλοίωτος κάτω από αφινικό μετασχηματισμό.

Θεώρημα Π4 Έστω M φραγμένο, κλειστό σύνολο σε αφινικό χώρο X διάστασης n και η κυρτή του θήκη (convex hull) $conv(M)$ περιέχει εσωτερικό σημείο, δηλαδή $\text{int}(conv(M)) \neq \emptyset$. Τότε $\exists !$ περιγεγραμμένο στο $conv(M)$ ελλειψοειδές ελάχιστου όγκου.

Απόδειξη ακολουθώντας εκείνη των Danzer, Laugwitz, Lenz (1957)

Υπαρξη

M κλειστό \wedge φραγμένο $\Rightarrow conv(M)$ κλειστό \wedge φραγμένο

Έστω ελλειψοειδές $E : conv(M) \subset E(\mathbf{D}_m, \mathbf{x})$ με κέντρο $\mathbf{m} \in conv(M)$. Χ.β.τ.γ. θεωρούμε κύριους άξονες παράλληλους με τους άξονες του συστήματος συντεταγμένων (στροφή αξόνων αφήνει αναλλοίωτο τον όγκο ενός ελλειψοειδούς). Ισχύει ότι το $\mathbf{D}_m \in Sym^+(X^n \times X^n)$ έχει μη μηδενικά στοιχεία μόνο στην κύρια διαγώνιό του και $d_{ii} \geq a, a > 0, \forall i \in \{1, \dots, n\}$ και $\forall \mathbf{m}$, αφού $\text{int}(conv(M)) \neq \emptyset$ (άρα τα Π.Ο. των d_{ii} είναι κάτω φραγμένα από κάποιο θετικό a).

Για να είναι το E ελάχιστο αναγκαστικά έχει ένα κοινό σημείο με το σύνολο του κυρτού χωρίου (αλλιώς μπορούμε να μετακινήσουμε κατάλληλα το E , να το μικρύνουμε και το νέο E' να περιέχει επίσης το κυρτό χωρίο. Άτοπο). Επομένως:

$conv(M) \subset E(\mathbf{D}_m, \mathbf{x}) \Rightarrow \max \{ \| \mathbf{D}_m^{-1/2} (\mathbf{x} - \mathbf{m}) \| : \mathbf{x} \in \partial(conv(M)) \} = 1$ από όπου προκύπτει ότι το Π.Ο. (διάστημα) για κάθε d_{ii} είναι κάτω κλειστό.

Τέλος, η συνάρτηση $f_{vol}: X^{n+} \supset A \rightarrow X$ είναι συνεχής, $\frac{\partial f_{vol}}{\partial d_{ii}} > 0, \forall i$ και $(d_{11m}, \dots, d_{mm}) \rightarrow \mathbf{D}_m \rightarrow V_n \sqrt{\det \mathbf{D}_m}$

το Π.Ο. της είναι καρτεσιανό γινόμενο διαστημάτων κάτω κλειστών και κάτω φραγμένων. Από την αρχή μεγίστου προκύπτει η ύπαρξη ελλειψοειδούς ελαχίστου όγκου $\forall \mathbf{m} \in \text{conv}(M)$ και τελικά (πάλι με αρχή μεγίστου) το ζητούμενο για ύπαρξη ελλειψοειδούς ελαχίστου όγκου που περιέχει το M .

Μοναδικότητα για δοθέν κέντρο:

Έστω $\mathbf{m} \in X$ και $\exists E_1, E_2$ δύο ελλειψοειδή με κέντρο το \mathbf{m} , που περιέχουν το $\text{conv}(M)$ και έχουν ελάχιστο όγκο. Επιλέγεται στον αφινικό χώρο σύστημα συντεταγμένων τέτοιο, ώστε να γράφονται τα E_1, E_2 ως

$$E_1 = \{ \mathbf{x} \in X \mid \mathbf{x} \cdot \frac{1}{a^2} \mathbf{x} \leq 1 \} \text{ και } E_2 = \left\{ \mathbf{x} \in X \mid \sum_{i=1}^n \left(\frac{\mathbf{x}_i^2}{b_i^2} \right) \leq 1 \right\} \text{ (σε ευκλείδειο χώρο εφαρμόζεται στα } E_1, E_2 \text{ και } \text{conv}(M) \text{ κατάλληλος αφινικός μετασχηματισμός).}$$

Έχουμε $\text{vol}(E_1) = \text{vol}(E_2) = \min V$ και $\text{vol}(E_1) = V_n a^n$ και $\text{vol}(E_2) = V_n b_1 \cdots b_n$.

Για $\mathbf{x} \in \text{conv}(M)$: $\sum_{i=1}^n \left(\frac{\mathbf{x}_i^2}{a^2} \right) \leq 1$ και $\sum_{i=1}^n \left(\frac{\mathbf{x}_i^2}{b_i^2} \right) \leq 1$, άρα και $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\mathbf{x}_i^2}{a^2} + \frac{\mathbf{x}_i^2}{b_i^2} \right) \leq 1 \quad \forall \mathbf{x} \in \text{conv}(M)$,

δηλαδή το ελλειψοειδές $E = \left\{ \mathbf{x} \in X \mid \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \left(\frac{\mathbf{x}_i^2}{a^2} + \frac{\mathbf{x}_i^2}{b_i^2} \right) \leq 1 \right\}$ περιέχει επίσης το $\text{conv}(M)$.

$$\text{vol}(E) = V_n \prod_{i=1}^n \sqrt{2} a b_i \frac{1}{\sqrt{a^2 + b_i^2}} \leq V_n \prod_{i=1}^n \sqrt{a b_i} = \sqrt{\text{vol}(E_1)} \sqrt{\text{vol}(E_2)} = \text{vol}(E_1).$$

Αποπο. (αποδείχτηκε από τον Busemann (1955))

Μοναδικότητα στην γενική περίπτωση:

Θεωρούνται δύο ελλειψοειδή E_1, E_2 ελάχιστου όγκου, τα οποία περιέχουν το $\text{conv}(M)$. Το σύστημα συντεταγμένων στον αφινικό χώρο λαμβάνεται έτσι, ώστε τα ελλειψοειδή να εκφράζονται μέσω των εξισώσεων

$$E_1 = \{ \mathbf{x} \in X \mid \sum_{i=1}^n (\mathbf{x}_i - m_i)^2 \leq 1 \} \text{ και } E_2 = \left\{ \mathbf{x} \in X \mid \sum_{i=1}^n \left(\frac{\mathbf{x}_i^2}{a_i^2} \right) \leq 1 \right\}.$$

Τοποθετείται, δηλαδή, η αρχή αξόνων στο κέντρο του E_2 , οι άξονες συντεταγμένων προσανατολίζονται σύμφωνα με τους άξονες του E_2 και παραμορφώνεται ο χώρος ώστε το E_1 να είναι σφαίρα. Από την ισότητα των όγκων πρέπει $\prod_{i=1}^n a_i = 1$.

Όπως πριν, η εξίσωση $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left((\mathbf{x}_i - m_i)^2 + \frac{\mathbf{x}_i^2}{a_i} \right) \leq \frac{1}{2} 2 = 1$ εκφράζει ελλειψοειδές που περιέχει το $\text{conv}(M)$. Μετά από πράξεις προκύπτει για το ελλειψοειδές αυτό ο τύπος

$$E = \left\{ \mathbf{x} \in X \mid \sum_{i=1}^n \frac{1}{A} \frac{(\mathbf{x}_i - d_i)^2}{b_i^2} \leq 1 \right\}$$

$$\text{όπου } A = 1 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{m_i^2}{1 + a_i^2} \leq 1 \text{ και } b_i^2 = \frac{2}{1 + \frac{1}{a_i^2}} \leq a_i.$$

Το νέο ελλειψοειδές έχει όγκο

$$\text{vol}(E) = V_n \sqrt{A}^n \prod_{i=1}^n b_i \leq V_n \prod_{i=1}^n b_i \leq V_n \prod_{i=1}^n \sqrt{a_i} = V_n.$$

Η γνήσια ανισότητα οδηγεί σε άτοπο, ενώ οι ισότητες ισχύουν αν $m_i = 0 \wedge a_i = 1$. Όμως τότε τα ελλειψοειδή E_1, E_2 ταυτίζονται, δηλαδή $\exists !$ ελλειψοειδές ελάχιστου όγκου τ.ω. να περιέχει το $\text{conv}(M)$.

Θεώρημα Π5 (Θεώρημα 1.6) Έστω $\mathbf{B}_k \in \text{Sym}^+$, δηλαδή είναι συμμετρικό, θετικά ορισμένο μη-τρώο, $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ και $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$. Έστω επίσης τα \mathbf{B}_{k+1} και \mathbf{x}_{k+1} , όπως προκύπτουν από τους αναδρομικούς τύπους 1.15 και 1.16. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

(1) $\mathbf{B}_{k+1} \in \text{Sym}^+$

(2) $E_k(\mathbf{B}_k, \mathbf{x}_k) \cap H_k = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} \in E_k(\mathbf{B}_k, \mathbf{x}_k) \wedge \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{x} \leq b_i \} \subset E_{k+1}(\mathbf{B}_{k+1}, \mathbf{x}_{k+1}),$

όπου $\bar{a} := \frac{\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{x}_k - b_i}{\sqrt{\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{B}_k \mathbf{a}_i}}$ και $-1/n \leq \bar{a} < 1$.

(3) Το ελλειψοειδές E_{k+1} έχει ελάχιστο όγκο μεταξύ εκείνων που έχουν την ιδιότητα (2)

(4) Ισχύει $\frac{\text{vol}(E_{k+1})}{\text{vol}(E_k)} = \frac{n(1-\bar{a})}{(n+1)} \left(\frac{n^2(1-\bar{a}^2)}{n^2-1} \right)^{\frac{n-1}{2}} < e^{-1/2n} (1-\bar{a})(1-\bar{a}^2)^{\frac{n-1}{2}}$.

Απόδειξη βασισμένη στους Papadimitriou, Steiglitz (1998) και Bland, Goldfarb, Todd (1981)

Για να δειχθεί το παραπάνω χρειάζονται οι εξής δύο προτάσεις:

Πρόταση Π6 Έστω n-διάστατη σφαίρα S_n και το σύνολο

$$E = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{B}^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \leq 1 \},$$

όπου $\mathbf{x}_0 = -\frac{1+n\bar{a}}{n+1}\mathbf{e}_1$ και $\mathbf{B} = \text{diag}\left(\frac{n^2(1-\bar{a})^2}{(n+1)^2}, \frac{n^2(1-\bar{a}^2)}{(n^2-1)}, \dots, \frac{n^2(1-\bar{a}^2)}{(n^2-1)}\right)$. Τότε:

- (1) $\mathbf{B} \in \text{Sym}^+$ (θετικά ορισμένος $\Leftrightarrow E$ είναι ελλειψοειδές)
- (2) $S_n \cap H_{-\bar{a}} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} \in S_n \wedge \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_1 \leq -\bar{a}\} \subset E$
- (3) Το E έχει ελάχιστο όγκο μεταξύ εκείνων που έχουν την ιδιότητα (2)
- (4) Ισχύει $\frac{\text{vol}(E)}{\text{vol}(S_n)} < e^{-1/2n}(1-\bar{a})(1-\bar{a}^2)^{\frac{n-1}{2}}$

Απόδειξη

(1) Το \mathbf{B} γράφεται ως $\mathbf{B} = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^T$, όπου $\mathbf{Q} = \text{diag}\left(\frac{n(1-\bar{a})}{(n+1)}, \frac{n\sqrt{1-\bar{a}^2}}{\sqrt{n^2-1}}, \dots, \frac{n\sqrt{1-\bar{a}^2}}{\sqrt{n^2-1}}\right)$. Άρα το μητρώο \mathbf{B} είναι θετικά ορισμένο.

(2) Έστω $\mathbf{x} \in S_n \cap H_{-\bar{a}}$, τότε

$$\begin{aligned} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) &= \left(x_1 + \frac{1+n\bar{a}}{n+1}\right)^2 \frac{(n+1)^2}{n^2(1-\bar{a})^2} + x_2^2 \frac{n^2-1}{n^2(1-\bar{a}^2)} + \dots + x_n^2 \frac{n^2-1}{n^2(1-\bar{a}^2)} = \\ &= \left[x_1^2 + 2x_1 \frac{1+n\bar{a}}{n+1} + \left(\frac{1+n\bar{a}}{n+1}\right)^2\right] \frac{(n+1)^2}{n^2(1-\bar{a})^2} - x_1^2 \frac{n^2-1}{n^2(1-\bar{a}^2)} + \|\mathbf{x}\|^2 \frac{n^2-1}{n^2(1-\bar{a}^2)} = \\ &= x_1^2 \frac{(n+1)^2}{n^2(1-\bar{a})^2} + 2x_1 \frac{(1+n\bar{a})(n+1)}{n^2(1-\bar{a})^2} + \frac{(1+n\bar{a})^2}{n^2(1-\bar{a})^2} - x_1^2 \frac{n^2-1}{n^2(1-\bar{a}^2)} + \|\mathbf{x}\|^2 \frac{n^2-1}{n^2(1-\bar{a}^2)} = \\ &= x_1^2 \frac{(n+1)^2(1+\bar{a}) - (n^2-1)(1-\bar{a})}{n^2(1-\bar{a})^2(1+\bar{a})} + 2x_1 \frac{(1+n\bar{a})(n+1)}{n^2(1-\bar{a})^2} + \\ &\quad + \frac{(1+n\bar{a})^2(1+\bar{a}) + (n^2-1)(1-\bar{a})}{n^2(1-\bar{a})^2(1+\bar{a})} + (\|\mathbf{x}\|^2 - 1) \frac{n^2-1}{n^2(1-\bar{a}^2)} = \dots \\ \dots &= 2(x_1 + \bar{a})(x_1 + 1) \frac{(1+n\bar{a})(n+1)}{n^2(1-\bar{a}^2)(1-\bar{a})} + (\|\mathbf{x}\|^2 - 1) \frac{n^2-1}{n^2(1-\bar{a}^2)} + 1 \end{aligned}$$

Όμως $-\frac{1}{n} \leq \bar{a} \leq 1$, $\|\mathbf{x}\| \leq 1$ και $x_1 \leq -\bar{a}$,

επομένως $\|\mathbf{x}\|^2 - 1 \leq 0$, $\frac{n^2-1}{n^2(1-\bar{a}^2)} > 0$, $x_1 + 1 \geq 0$, $x_1 + \bar{a} \leq 0$, $\frac{(1+n\bar{a})(n+1)}{n^2(1-\bar{a}^2)(1-\bar{a})} \geq 0$

και τελικά $2(x_1 + \bar{a})(x_1 + 1) \frac{(1+n\bar{a})(n+1)}{n^2(1-\bar{a}^2)(1-\bar{a})} + (\|\mathbf{x}\|^2 - 1) \frac{n^2-1}{n^2(1-\bar{a}^2)} \leq 0$

και $(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \leq 1$, δηλαδή $S_n \cap H_{-\bar{a}} \subset E$.

$$(3) \quad \text{Αφού } S_n \cap H_{-\bar{a}} = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} \in S_n \wedge \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_1 \leq -\bar{a} \} \subset E \Rightarrow \\ \Rightarrow \{ -\mathbf{e}_1, -\bar{a}\mathbf{e}_1 \pm \sqrt{1-\bar{a}^2}\mathbf{e}_2, \dots, -\bar{a}\mathbf{e}_1 \pm \sqrt{1-\bar{a}^2}\mathbf{e}_n \} \subset \partial S_n \cap H_{-\bar{a}} \subset E$$

Έστω το \mathbf{Q} με στήλες $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n$ και θέτω $\mathbf{q}_0 = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{q}_0$. Τότε

$$\| \mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{e}_1 - \mathbf{x}_0) \| = \| -\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_0 \| \leq 1 \Leftrightarrow \| (1-\bar{a})\mathbf{q}_1 + (\bar{a}\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_0) \| \leq 1 \text{ και}$$

$$\| \mathbf{Q}^{-1} \left[(\bar{a}\mathbf{e}_1 \pm \sqrt{1-\bar{a}^2}\mathbf{e}_i) - \mathbf{x}_0 \right] \| = \| -\bar{a}\mathbf{q}_1 \pm \sqrt{1-\bar{a}^2}\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_0 \| \leq 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \| \pm \sqrt{1-\bar{a}^2}\mathbf{q}_i + (\bar{a}\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_0) \| \leq 1 \Rightarrow \| \bar{a}\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_0 \| \leq 1$$

Όμως από $\| (1-\bar{a})\mathbf{q}_1 + (\bar{a}\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_0) \| \leq 1 \Rightarrow \| (1-\bar{a})\mathbf{q}_1 \| - \| (\bar{a}\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_0) \| \leq 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \| (1-\bar{a})\mathbf{q}_1 \| \leq 1 + \| (\bar{a}\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_0) \| \Leftrightarrow \| \mathbf{q}_1 \| \leq \frac{1 + \| (\bar{a}\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_0) \|}{(1-\bar{a})} \text{ για } -\frac{1}{n} \leq \bar{a} < 1$$

$$\text{Από } \| \pm \sqrt{1-\bar{a}^2}\mathbf{q}_i + (\bar{a}\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_0) \| \leq 1 \Leftrightarrow \| \pm \sqrt{1-\bar{a}^2}\mathbf{q}_i + (\bar{a}\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_0) \|^2 \leq 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\sqrt{1-\bar{a}^2}\mathbf{q}_i)^2 + (\bar{a}\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_0)^2 \pm 2\sqrt{1-\bar{a}^2}\mathbf{q}_i \cdot (\bar{a}\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_0) \leq 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \| \mathbf{q}_i \| \leq \frac{\sqrt{1 - (\bar{a}\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_0)^2}}{\sqrt{1-\bar{a}^2}} \text{ για } -\frac{1}{n} \leq \bar{a} < 1 \text{ και } i=2, \dots, n$$

Από την ανίσωση του Hadamard:

$$|\det \mathbf{Q}^{-1}| \leq \prod_{j=1}^n \| \mathbf{q}_j \| \leq \frac{(1 + \| (\bar{a}\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_0) \|) \sqrt{1 - (\bar{a}\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_0)^2}^{2^{n-1}}}{(1-\bar{a}) \sqrt{1-\bar{a}^2}^{2^{n-1}}} = \frac{f(\| (\bar{a}\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_0) \|)}{f(-\bar{a})}$$

Επειδή $\text{vol}(E) = V_n \det \mathbf{Q}$, τα $\text{vol}(E)$ και $\det \mathbf{Q}$ παίρνουν μαζί τις ακρότατες τιμές τους. Συνεπώς $\text{vol}(E) = \min(\text{vol}(E)) \Leftrightarrow \det \mathbf{Q}^{-1} = \max(\det \mathbf{Q}^{-1})$.

$$f(-\bar{a}) = ct \text{ και } \frac{df(x)}{dx} = \sqrt{1-x^{2^{n-1}}} + \frac{n-1}{2}(1+x)\sqrt{1-x^{2^{n-3}}}(-2x) = \\ = \sqrt{1-x^{2^{n-3}}}(1+x)[(1-x) - (n-1)x] = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{n} \text{ για } -\frac{1}{n} \leq x < 1$$

$$\frac{d^2 f}{dx^2} \left(\frac{1}{n} \right) = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{n} \right)^{2^{n-3}}} \left[-n \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right] < 0 \text{ και έτσι } \max f = f \left(\frac{1}{n} \right), \text{ όταν } -\frac{1}{n} \leq x < 1$$

Ο όγκος του ελλειψοειδούς γίνεται ελάχιστος, όταν $\| (\bar{a}\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_0) \| = \frac{1}{n}$ και ισχύουν οι ισότητες στις παραπάνω ανισότητες. Για την ανίσωση του Hadamard είναι γνωστό ότι ισότητα επιτυγχάνεται στην περίπτωση που τα διανύσματα στήλες είναι ορθογώνια μεταξύ τους. Επομένως, το μητρώο $\mathbf{B} = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^T$ προκύπτει διαγώνιο με στοιχεία

$$\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{B}^{-1} \mathbf{e}_j = \mathbf{q}_j \cdot \mathbf{q}_j = \begin{cases} \frac{(n+1)^2}{n^2(1-\bar{a})^2}, & j=1 \\ \frac{n^2-1}{n^2(1-\bar{a}^2)}, & j=2, \dots, n \end{cases}.$$

Τέλος, το διάνυσμα \mathbf{y}_0 είναι παράλληλο στο \mathbf{y}_1 και $\|\mathbf{y}_0\|=1\pm\|\mathbf{y}_1\|$. Λόγω των σχέσεων που παραπάνω χρησιμοποιήθηκαν λαμβάνεται το αρνητικό πρόσημο και έτσι:

$$\mathbf{y}_0 = \frac{1-\|\mathbf{y}_1\|}{\|\mathbf{y}_1\|} \mathbf{y}_1 = -\tau \mathbf{y}_1 \text{ με } \tau = \frac{1+n\bar{a}}{n+1}. \text{ Έτσι } \mathbf{x}_0 = -\tau \mathbf{e}_1, \text{ που ολοκληρώνει την απόδειξη.}$$

$$(4) \quad \frac{\text{vol}(E)}{\text{vol}(S_n)} = \frac{\det \mathbf{Q}}{\det \mathbf{I}_n} = \frac{n(1-\bar{a})}{(n+1)} \prod_{i=2}^n \frac{n\sqrt{(1-\bar{a}^2)}}{\sqrt{n^2-1}} = \frac{n(1-\bar{a})}{(n+1)} \left(\frac{n\sqrt{(1-\bar{a}^2)}}{\sqrt{n^2-1}} \right)^{n-1} =$$

$$= \frac{n(1-\bar{a})}{(n+1)} \left(\frac{n^2(1-\bar{a}^2)}{n^2-1} \right)^{\frac{n-1}{2}} = \sqrt{\left(\frac{n}{n+1} \right)^{n+1} \left(\frac{n}{n-1} \right)^{n-1}} \sqrt{(1-\bar{a})^{n+1} (1+\bar{a})^{n-1}}$$

Εύκολα προκύπτει ότι η συνάρτηση $\frac{\text{vol}(E)}{\text{vol}(S_n)}$ για $n=n_0 \in \mathbf{N}$ είναι φθίνουσα ως προς \bar{a} στο διάστημα $-\frac{1}{n_0} \leq \bar{a} \leq 1$ με ακρότατες τιμές 1 και 0, αντίστοιχα.

Τώρα, για $0 < \bar{a} = ct$ (deep cuts) έχουμε

$$\frac{\text{vol}(E)}{\text{vol}(S_n)} < e^{-1/2n} (1-\bar{a})(1-\bar{a}^2)^{\frac{n-1}{2}} \Leftrightarrow \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n+1} \left(\frac{n}{n-1} \right)^{n-1} < e^{\frac{1}{n}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{\frac{1}{n}} < \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n+1} \left(\frac{n-1}{n} \right)^{n-1} \Leftrightarrow \frac{1}{n} < (n+1) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) + (n-1) \ln \left(1 - \frac{1}{n} \right)$$

Όμως από ανάπτυξη σε σειρά Taylor προκύπτει

$$\ln x = \ln x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{(x-x_0)^k}{k x_0^k} \text{ για } x, x_0 \in (0, +\infty) \text{ και περί } x_0=1$$

$$\ln x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{(x-1)^k}{k}.$$

Επομένως

$$(n+1) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) + (n-1) \ln \left(1 - \frac{1}{n} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{n+1}{k n^k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n-1}{k n^k} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2}{k n^k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(n-1)}{2k n^{2k}} = \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(2k-1)n^{2k-1}} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{2k n^{2k}} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k n^{2k-1}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k n^{2k}} = \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(2k-1)n^{2k-1}} > \frac{1}{n},
 \end{aligned}$$

δηλαδή $\frac{\text{vol}(E)}{\text{vol}(S_n)} < e^{-1/2n} (1-\bar{a})(1-\bar{a}^2)^{\frac{n-1}{2}} < 1$.

Πρόταση Π7 Έστω $B_k \in \text{Sym}^+ \subset \mathbb{R}^{n \times n}$, $x_k \in \mathbb{R}^n$ και $0 \neq a_i \in \mathbb{R}^n$ τυχαίο διάνυσμα. Επίσης, έστω B_{k+1} και x_{k+1} από τις σχέσεις 1.7, 1.8, E , όπως περιγράφεται στην προηγούμενη πρόταση και E_k, E_{k+1} τα ελλειψοειδή που προκύπτουν από την εφαρμογή του αλγόριθμου στα βήματα k και $k+1$. Τότε $\exists T$ αφινικός μετασχηματισμός τέτοιος, ώστε

- (1) $T(S_n) = E_k$
- (2) $T(E) = E_{k+1}$
- (3) $T(S_n \cap H_{-a}) = E_k \cap H_k$ (από τους Papadimitriou, Steiglitz (1998)).

Απόδειξη

$B_k \in \text{Sym}^+ \Leftrightarrow \exists Q_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ με $\det Q_k \neq 0 : B_k = Q_k Q_k^T$. Επίσης, \exists ορθογωνικός πίνακας R τέτοιος, ώστε $R^T Q_k^T a_i = \|Q_k^T a_i\| e_1$. Ορίζεται μετασχηματισμός βάσει της σχέσης

$$T(x) = x_k + Q_k R x$$

$$\begin{aligned}
 (1) \quad T(S_n) &= \{T(x) \mid x \cdot x \leq 1\} = \{x \mid T^{-1}(x) \cdot T^{-1}(x) \leq 1\} = \\
 &= \{x \mid R^T Q_k^{-1}(x - x_k) \cdot R^T Q_k^{-1}(x - x_k) \leq 1\} = \\
 &= \{x \mid (x - x_k) \cdot Q_k^{-T} R R^T Q_k^{-1}(x - x_k) \leq 1\} = \\
 &= \{x \mid (x - x_k) \cdot B_k^{-1}(x - x_k) \leq 1\} = E_k
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad B_{k+1} &= \frac{n^2(1-\bar{a}^2)}{n^2-1} \left(B_k - \frac{2(1+n\bar{a})}{(n+1)(1+\bar{a})} \frac{B_k a_i (B_k a_i)^T}{a_i \cdot B_k a_i} \right) = \\
 &= \frac{n^2(1-\bar{a}^2)}{n^2-1} \left(B_k - \frac{2(1+n\bar{a})}{(n+1)(1+\bar{a})} \frac{Q_k R R^T Q_k^T a_i a_i^T Q_k R R^T Q_k^T}{a_i \cdot Q_k R R^T Q_k^T a_i} \right) = \\
 &= \frac{n^2(1-\bar{a}^2)}{n^2-1} \left(B_k - \frac{2(1+n\bar{a})}{(n+1)(1+\bar{a})} \frac{Q_k R \text{diag}(\|Q_k^T a_i\|^2, 0, \dots, 0) R^T Q_k^T}{\|Q_k^T a_i\|^2} \right) = \\
 &= \frac{n^2(1-\bar{a}^2)}{n^2-1} \left(Q_k R R^T Q_k^T - \frac{2(1+n\bar{a})}{(n+1)(1+\bar{a})} Q_k R \text{diag}(1, 0, \dots, 0) R^T Q_k^T \right) =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{n^2(1-\bar{a}^2)}{n^2-1} \mathbf{Q}_k \mathbf{R} \operatorname{diag} \left(\frac{(n-1)(1-\bar{a})}{(n+1)(1+\bar{a})}, 1, \dots, 1 \right) \mathbf{R}^T \mathbf{Q}_k^T = \\
&= \mathbf{Q}_k \mathbf{R} \operatorname{diag} \left(\frac{n^2(1-\bar{a})^2}{(n+1)^2}, \frac{n^2(1-\bar{a}^2)}{(n^2-1)}, \dots, \frac{n^2(1-\bar{a}^2)}{(n^2-1)} \right) \mathbf{R}^T \mathbf{Q}_k^T = \mathbf{Q}_k \mathbf{R} \mathbf{B} \mathbf{R}^T \mathbf{Q}_k^T,
\end{aligned}$$

όπου \mathbf{B} όπως στην προηγούμενη πρόταση.

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} - \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{x} - \mathbf{x}_k + \frac{1+n\bar{a}}{n+1} \frac{\mathbf{B}_k \mathbf{a}_i}{\sqrt{\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{B}_k \mathbf{a}_i}} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_k + \frac{1+n\bar{a}}{n+1} \frac{\mathbf{Q}_k \mathbf{R} \mathbf{R}^T \mathbf{Q}_k^T \mathbf{a}_i}{\sqrt{\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{Q}_k \mathbf{R} \mathbf{R}^T \mathbf{Q}_k^T \mathbf{a}_i}} = \\
&= \mathbf{x} - \mathbf{x}_k + \frac{1+n\bar{a}}{n+1} \frac{\mathbf{Q}_k \mathbf{R} \|\mathbf{Q}_k^T \mathbf{a}_i\| \mathbf{e}_1}{\sqrt{\|\mathbf{Q}_k^T \mathbf{a}_i\| \mathbf{e}_1 \cdot \|\mathbf{Q}_k^T \mathbf{a}_i\| \mathbf{e}_1}} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_k + \frac{1+n\bar{a}}{n+1} \frac{\mathbf{Q}_k \mathbf{R} \|\mathbf{Q}_k^T \mathbf{a}_i\| \mathbf{e}_1}{\|\mathbf{Q}_k^T \mathbf{a}_i\|} = \\
&= \mathbf{x} - \mathbf{x}_k + \frac{1+n\bar{a}}{n+1} \mathbf{Q}_k \mathbf{R} \mathbf{e}_1 = \mathbf{Q}_k \mathbf{R} \left(\mathbf{R}^T \mathbf{Q}_k^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) + \frac{1+n\bar{a}}{n+1} \mathbf{e}_1 \right) = \mathbf{Q}_k \mathbf{R} [T^{-1}(\mathbf{x}) - (\mathbf{x}_0)] =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Συνεπώς, } T(E) &= \{T(\mathbf{x}) \mid (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \leq 1\} = \{\mathbf{x} \mid (T^{-1}(\mathbf{x}) - \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{B}^{-1}(T^{-1}(\mathbf{x}) - \mathbf{x}_0) \leq 1\} = \\
&= \{\mathbf{x} \mid (T^{-1}(\mathbf{x}) - \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{R}^T \mathbf{Q}_k^T \mathbf{B}_{k+1}^{-1} \mathbf{Q}_k \mathbf{R} (T^{-1}(\mathbf{x}) - \mathbf{x}_0) \leq 1\} = \\
&= \{\mathbf{x} \mid \mathbf{Q}_k \mathbf{R} (T^{-1}(\mathbf{x}) - \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{B}_{k+1}^{-1} \mathbf{Q}_k \mathbf{R} (T^{-1}(\mathbf{x}) - \mathbf{x}_0) \leq 1\} = \\
&= \{\mathbf{x} \mid (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{k+1}) \cdot \mathbf{B}_{k+1}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{k+1}) \leq 1\} = E_{k+1}
\end{aligned}$$

(3) Έχουμε $\mathbf{R}^T \mathbf{Q}_k^T \mathbf{a}_i = \|\mathbf{Q}_k^T \mathbf{a}_i\| \mathbf{e}_1 \Leftrightarrow \mathbf{Q}_k^{-T} \mathbf{R} \mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{a}_i}{\|\mathbf{Q}_k^T \mathbf{a}_i\|}$, οπότε

$$\begin{aligned}
T(\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_1 \leq -\bar{a}\}) &= \{T(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_1 \leq -\bar{a}\} = \left\{ \mathbf{x} \mid T^{-1}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}_1 \leq \frac{b_i - \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{x}_k}{\sqrt{\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{B}_k \mathbf{a}_i}} \right\} = \\
&= \left\{ \mathbf{x} \mid \mathbf{R}^T \mathbf{Q}_k^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) \cdot \mathbf{e}_1 \leq \frac{b_i - \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{x}_k}{\sqrt{\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{Q}_k \mathbf{R} \mathbf{R}^T \mathbf{Q}_k^T \mathbf{a}_i}} \right\} = \\
&= \left\{ \mathbf{x} \mid (\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) \cdot \mathbf{Q}_k^{-T} \mathbf{R} \mathbf{e}_1 \leq \frac{b_i - \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{x}_k}{\sqrt{\mathbf{R}^T \mathbf{Q}_k^T \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{R}^T \mathbf{Q}_k^T \mathbf{a}_i}} \right\} = \\
&= \left\{ \mathbf{x} \mid \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) \cdot \mathbf{a}_i}{\|\mathbf{Q}_k^T \mathbf{a}_i\|} \leq \frac{b_i - \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{x}_k}{\|\mathbf{Q}_k^T \mathbf{a}_i\|} \right\} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{x} \leq b_i\}
\end{aligned}$$

Έτσι $T(S_n \cap H_{-\bar{a}}) = E_k \cap H_k$.

Επιστρέφοντας στο βασικό θεώρημα, τώρα:

(1) Από τα προηγούμενα προέκυψε ότι $T(E) = E_{k+1}$ (Πρόταση Π7, (2)), όπου το E είναι ελλειψοειδές (Πρόταση Π6, (1)).

- (2) Από την Πρόταση Π7, (3) $E_k \cap H_k = T(S_n \cap H_{-\bar{a}})$ και από την Πρόταση Π6, (3) $S_n \cap H_{-\bar{a}} \subseteq E \Rightarrow E_k \cap H_k \subseteq T(E) = E_{k+1}$.
- (3) Ο λόγος των όγκων ελλειψοειδών μένει αναλλοίωτος κάτω από αφινικούς μετασχηματισμούς, επομένως το E_{k+1} είναι ελάχιστο και είναι το μοναδικό με τις ζητούμενες ιδιότητες, όπως αποδεικνύεται από το Θεώρημα Π4.
- (4)
$$\frac{\text{vol}(E_{k+1})}{\text{vol}(E_k)} = \frac{\text{vol}(T(E))}{\text{vol}(T(S_n))} = \frac{\text{vol}(E)}{\text{vol}(S_n)} < e^{-1/2n} (1-\bar{a})(1-\bar{a}^2)^{\frac{n-1}{2}} < 1.$$

Λήμμα Π8 (Λήμμα 1.5) Έστω κυρτό πολύτοπο $P \subset \mathbb{R}^n$. Το P γράφεται ως $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ για κάποιο $A \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, $m > n$, $m, n \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{R}^m$. Αν $\text{int}(P) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax < b\} \neq \emptyset$ (full dimensional πολύτοπο), τότε $\exists n+1$ γραμμικά ανεξάρτητες κορυφές του $P \Rightarrow \exists n+1$ αφινικά ανεξάρτητες κορυφές του P .

Απόδειξη

Έστω ότι όλα τα σύνολα $n+1$ κορυφών του P είναι γραμμικά εξαρτημένα. Τότε το πολύτοπο $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ είναι υποσύνολο ενός υπερεπιπέδου H με $\dim H = n-1 \Rightarrow \dim P \leq n-1$ και $\text{int}(P) \subset P \Rightarrow \dim(\text{int}(P)) \leq n-1$.

Όμως $\text{int}(P) \neq \emptyset \Leftrightarrow \exists x \in \text{int}(P)$ και $P = P^\circ \Leftrightarrow \forall x \in \text{int}(P) \exists \varepsilon > 0: S_n(x, \varepsilon) \subset \text{int}(P)$, δηλαδή το $\text{int}(P)$ με $\dim(\text{int}(P)) \leq n-1$ περιέχει n -διάστατη σφαίρα. Άτοπο.

Η γραμμική ανεξαρτησία είναι ισχυρότερη της αφινικής ανεξαρτησίας και έτσι η απόδειξη ολοκληρώνεται.

Λήμμα Π9 Αν το $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ είναι full-dimensional κυρτό πολύτοπο στον \mathbb{R}^n και $A \in \mathbb{Q}^m \times \mathbb{Q}^n$, $m > n$, $m, n \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{Q}^m$, τότε $\text{vol}(P) \geq 2^{-(n+1)(A)+n^3}$.

Απόδειξη ακολουθώντας εκείνη των Grötchel, Lovász, Schrijver (1993)

Προηγουμένως δείχθηκε ότι κάθε κυρτό full-dimensional πολύτοπο στον \mathbb{R}^n περιέχει $n+1$ αφινικά ανεξάρτητες κορυφές, έστω τις v_0, v_1, \dots, v_n . Η κυρτή θήκη των κορυφών αυτών σχηματίζει ένα simplex S με $S \subseteq P$. Επομένως, ο όγκος του P είναι κάτω φραγμένος από τον όγκο του S .

Ο όγκος του S δίνεται από τον τύπο

$$\text{vol}(S) = \frac{1}{n!} \left| \det \begin{pmatrix} v_1 - v_0 & v_2 - v_0 & \dots & v_n - v_0 \end{pmatrix} \right|$$

Είναι γνωστό ότι $\forall \mathbf{v}$ κορυφή του πολυέδρου $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$, $-\mathbf{x} \leq \mathbf{0}$, $\exists \mathbf{D}$ υποπίνακας του A και \mathbf{d} “υποδιάνυσμα” του \mathbf{b} : \mathbf{v} λύση του συστήματος $\mathbf{D}\mathbf{x} \leq \mathbf{d}$, $\det \mathbf{D} \neq 0$. Από τον κανόνα του Cramer: $v_k = \frac{\det \mathbf{D}_k}{\det \mathbf{D}}$, όπου $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$.

Έτσι $|\det(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0 \quad \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_0 \quad \dots \quad \mathbf{v}_n - \mathbf{v}_0)| = \frac{1}{|\det \mathbf{D}_0 \cdot \dots \cdot \det \mathbf{D}_n|} |\det(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_0 \quad \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_0 \quad \dots \quad \mathbf{u}_n - \mathbf{u}_0)|$, όπου $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n \in \mathbb{Q}^n$. Η τελευταία ορίζουσα στην προηγούμενη σχέση ανήκει στο $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ και, επίσης, ακολουθώντας παρόμοια λογική με την απόδειξη του Λήμματος Π1, προκύπτει ότι $|\det \mathbf{D}_k| \leq 2^{\langle A \rangle - n^2}$. Άρα

$$|\det(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0 \quad \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_0 \quad \dots \quad \mathbf{v}_n - \mathbf{v}_0)| \geq \frac{1}{|\det \mathbf{D}_0 \cdot \dots \cdot \det \mathbf{D}_n|} \geq (2^{\langle A \rangle - n^2})^{-(n+1)}.$$

Κάνοντας χρήση και της ανίσωσης $n! \leq 2^{n^2}$ καταλήγουμε στο

$$\text{vol}(P) \geq \text{vol}(S) \geq \frac{1}{n!} (2^{\langle A \rangle - n^2})^{-(n+1)} \geq 2^{-(n+1)\langle A \rangle + n^3}.$$

Πρόταση Π10 Έστω το $P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}$ με $A \in \mathbb{Q}^m \times \mathbb{Q}^n$, $m > n$, $m, n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{Q}^m$ έχει μη κενό εσωτερικό. Λαμβάνεται ως αρχικό ελλειψοειδές η σφαίρα E_0 με κέντρο το $\mathbf{a}_0 = \mathbf{0}$ και ακτίνα ίση με $R = \sqrt{n} 2^{\langle A, \mathbf{b} \rangle - n^2}$. Αν το γενικό βήμα της μεθόδου ελλειψοειδούς με κεντρικές τομές εφαρμοστεί για $N := 2n((2n+1)\langle A \rangle + n\langle \mathbf{b} \rangle - n^3)$ φορές, τότε $\text{vol}(E_N) < 2^{-(n+1)\langle A \rangle + n^3}$.

Απόδειξη ακολουθώντας εκείνη των Grötchel, Lovász, Schrijver (1993)

Ισχύει ότι $E_0 \subseteq \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\|_\infty \leq R\}$, επομένως

$$\text{vol}(E_0) = V_n R^n \leq 2^n R^n = n^{\frac{n}{2}} 2^{n\langle A, \mathbf{b} \rangle - n^3 + n} = 2^{n\langle A, \mathbf{b} \rangle - n^2 + 1 + \frac{\log n}{2}} < 2^{n\langle A, \mathbf{b} \rangle}, \text{ για } n \in \mathbb{N}.$$

$$\frac{\text{vol}(E_N)}{\text{vol}(E_{N-1})} \frac{\text{vol}(E_{N-1})}{\text{vol}(E_{N-2})} \dots \frac{\text{vol}(E_1)}{\text{vol}(E_0)} \leq \prod_{i=1}^N e^{-1/2n} \Leftrightarrow \frac{\text{vol}(E_N)}{\text{vol}(E_0)} \leq e^{-N/2n} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{vol}(E_N) \leq e^{-N/2n} \text{vol}(E_0) < 2^{-\frac{N}{2n} + n\langle A, \mathbf{b} \rangle} = 2^{-(n+1)\langle A \rangle + n^3}.$$

Στην περίπτωση των βαθιών τομών, όπου $\frac{\text{vol}(E_{k+1})}{\text{vol}(E_k)} < e^{-1/2n} (1 - \bar{a})(1 - \bar{a}^2)^{\frac{n-1}{2}}$, ο αριθμός επα-

ναλήψεων N' προκύπτει μικρότερος από τον N . Ωστόσο, επειδή το \bar{a} διαφέρει σε κάθε βήμα, δεν είναι δυνατόν να υπολογιστεί ένα γενικό N' , όπως όταν εφαρμόζονται κεντρικές τομές.

Πόρισμα Π11 Η μέθοδος ελλειψοειδούς τερματίζει μετά από το πολύ N επαναλήψεις, όπου N όπως δόθηκε προηγουμένως.

Απόδειξη

Προφανές, αφού ήδη στην N -οστή επανάληψη ισχύει

$$\text{vol}(E_N) = 2^{-(n+1)\langle A \rangle + n^3} \leq \text{vol}(P)$$

Άτοπο, αφού κάθε νέο ελλειψοειδές έχει αποδειχθεί ότι περιέχει την περιοχή P . Αυτό σημαίνει ότι, αν μέχρι την N -οστή επανάληψη δεν προκύψει εφικτό σημείο, τότε μπορούμε να αποφανθούμε ότι $\text{int}(P) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} < \mathbf{b}\} = \emptyset$.

Λήμμα Π12 (Λήμμα 1.3) Το σύστημα γραμμικών ανισοτήτων

$$\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{x} \leq b_i \quad i=1, \dots, m \tag{1.18}$$

έχει λύση αν το σύστημα των γραμμικών γνησίων ανισοτήτων

$$\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{x} < b_i + \varepsilon \quad i=1, \dots, m \tag{1.19}$$

έχει λύση, όπου $\varepsilon = 2^{-2L}$, L το μήκος του προβλήματος, $\mathbf{a}_i, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Απόδειξη ακολουθώντας εκείνη των Aspvall, Stone (1980)

\Rightarrow Προφανές.

\Leftarrow Έστω το $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{x} < b_i + \varepsilon \quad i=1, \dots, m$ έχει λύση \mathbf{x}_0 . Από τη λύση αυτήν θα κατασκευαστεί λύση $\bar{\mathbf{x}}_0$ του $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{x} \leq b_i \quad i=1, \dots, m$.

Ορίζεται συνάρτηση $\theta_i(\mathbf{x}) = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{x} - b_i$, για $1 \leq i \leq m$ και έστω τυχαίο $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. Ισχυριζόμαστε ότι ισχύουν τα ακόλουθα:

- (i) $\exists \mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}^n : \theta_i(\mathbf{x}_1) \leq \max\{0, \theta_i(\mathbf{x}_0)\}$ για $1 \leq i \leq m$.
- (ii) Κάθε διάνυσμα \mathbf{a}_j γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των $\{\mathbf{a}_i \mid \theta_i(\mathbf{x}_1) \geq 0\}$.

Απόδειξη ισχυρισμού:

Το \mathbf{x}_0 προφανώς ικανοποιεί την (i). Αρκεί νδο, αν \mathbf{x}_0 δεν ικανοποιεί την (ii), τότε μπορεί να υπολογιστεί διάνυσμα \mathbf{x}_1 τ.ω. να ικανοποιεί την (i) και

$$\{\mathbf{a}_i \mid \theta_i(\mathbf{x}_1) \geq 0\} \supset \{\mathbf{a}_i \mid \theta_i(\mathbf{x}_0) \geq 0\}$$

Επαναλαμβάνοντας αυτήν την διαδικασία το πολύ m φορές, βρίσκουμε \mathbf{x}_1 που να ικανοποιεί τις (i) και (ii).

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, έστω $\theta_1(\mathbf{x}_0) \geq 0, \dots, \theta_k(\mathbf{x}_0) \geq 0$ και $\theta_{k+1}(\mathbf{x}_0) < 0, \dots, \theta_m(\mathbf{x}_0) < 0$. Υποθέτουμε ότι $\exists \mathbf{a}_l, l \in (k+1, m]$ που να είναι γραμμικά ανεξάρτητο των $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$. Τότε το σύστημα $\begin{cases} \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{y} = 0 \\ \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{y} = 1 \end{cases}, i \in \{1, \dots, k\}$ έχει λύση.

Έστω \mathbf{y}_0 λύση του και $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + t \mathbf{y}_0$, όπου

$$t = \min \left\{ \frac{-\theta_j(\mathbf{x}_0)}{\mathbf{a}_j \cdot \mathbf{y}_0} \mid \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{y}_0 > 0, k < j \leq m \right\}.$$

Αφού $\theta_j(\mathbf{x}_0) < 0$ για $k < j \leq m$ και $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{y} = 1$, έχουμε $0 < t \leq -\theta_l(\mathbf{x}_0)$. Έτσι

$$\theta_i(\mathbf{x}_1) = \theta_i(\mathbf{x}_0 + t \mathbf{y}_0) = t \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{y}_0 + \theta_i(\mathbf{x}_0) \begin{cases} = t \cdot 0 + \theta_i(\mathbf{x}_0) & \text{αν } 1 \leq i \leq k \\ \leq 0 & \text{αν } k < i \leq m \end{cases}$$

όπου η ισότητα ισχύει για $i_0 = l, k < i_0 \leq m$. Έτσι έχουμε $\{\mathbf{a}_i \mid \theta_i(\mathbf{x}_1) \geq 0\} \supseteq \{\mathbf{a}_i \mid \theta_i(\mathbf{x}_0) \geq 0\} \cup \{\mathbf{a}_{i_0}\}$, το οποίο και αποδεικνύει τον ισχυρισμό.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι το \mathbf{x}_0 ικανοποιεί το σύστημα αυστηρών ανισοτήτων 1.19 (οπότε $\theta_i(\mathbf{x}_0) < 2^{-L}$) και ότι $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{x}_0 \geq b_i$ για $1 \leq i \leq k$. Επίσης, έστω ότι γίνεται αναδιάταξη των \mathbf{a}_i τέτοια, ώστε τα $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r$ να είναι γραμμικά ανεξάρτητα και να παράγουν τα $\mathbf{a}_{r+1}, \dots, \mathbf{a}_k$. Από τον προηγούμενο ισχυρισμό συμπεραίνεται ότι τα $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r$ παράγουν και τα $\mathbf{a}_{k+1}, \dots, \mathbf{a}_m$.

Έστω \mathbf{z} λύση του συστήματος γραμμικών εξισώσεων $\mathbf{a}_j \cdot \mathbf{z} = b_j$, για $j = 1, \dots, r$. Θδο το \mathbf{z} είναι λύση του 1.18. Από τον κανόνα του Cramer και απόδειξη που προηγήθηκε γνωρίζουμε ότι $\mathbf{a}_i = \sum_{1 \leq j \leq r} \left(\frac{D_j}{D} \right) \mathbf{a}_j$ για $1 \leq i \leq m$, όπου $D \geq 0$ και D_j είναι ακέραιοι με απόλυτες τιμές μικρότερες του $\frac{2^L}{mn}$. Επομένως:

$$\begin{aligned} D(\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{z} - b_i) &= \sum_{1 \leq j \leq r} D_j \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{z} - D b_i \\ &= \sum_{1 \leq j \leq r} D_j b_j - D b_i \\ &= \sum_{1 \leq j \leq r} D_j (\mathbf{a}_j \cdot \mathbf{x}_0 - \theta_j(\mathbf{x}_0)) - D (\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{x}_0 - \theta_i(\mathbf{x}_0)) \\ &= D \theta_i(\mathbf{x}_0) - \sum_{1 \leq j \leq r} D_j \theta_j(\mathbf{x}_0) \\ &< D 2^{-L} + \sum_{1 \leq j \leq r} |D_j| 2^{-L} \end{aligned}$$

$$< \frac{1}{mn} + \frac{m}{mn} < 1, \quad m, n > 1.$$

Αφού η αριστερή πλευρά είναι ακέραιος αριθμός, όπως φαίνεται από την δεύτερη γραμμή, και αφού $D \geq 1$, έχουμε $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{z} - b_i \leq 0$, δηλαδή το \mathbf{z} ικανοποιεί το σύστημα 1.18.

Πόρισμα Π13 (Πόρισμα 1.4) Αν υπάρχει αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου για το 1.19 τότε υπάρχει αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου και για το 1.18.

Απόδειξη

Έστω σύστημα γραμμικών ανισοτήτων όπως το 1.18. Μπορούμε ισοδύναμα να ελέγξουμε αν το σύστημα $2^L \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{x} < 2^L b_i + 1, \quad i=1, \dots, m$ ικανοποιείται. Αυτό το σύστημα έχει μέγεθος το πολύ διπλάσιο του τετραγώνου του μεγέθους του 1.18.

Λήμμα Π14 (Λήμμα 1.11) Τα μητρώα $\mathbf{B}_0, \mathbf{B}_1, \dots \in \text{Sym}^+$. Επιπλέον, $\|\mathbf{x}_k\| \leq R 2^k, \|\mathbf{B}_k\| \leq R^2 2^k$ και $\|\mathbf{B}_k^{-1}\| \leq R^{-2} 4^k$, όπου χρησιμοποιούνται η ευκλείδεια νόρμα για τα διανύσματα και η νόρμα ιδιοτιμών για τα μητρώα.

Απόδειξη ακολουθώντας εκείνη των Grötchel, Lovász, Schrijver (1993)

Αποδεικνύεται με επαγωγή στο k .

Ισχύει για $k=0$, αφού $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}, R^2 = \max\{|\lambda_i| \mid \lambda_i \text{ ιδιοτιμές του } \mathbf{B}_0\}$.

Έστω ισχύει για $k \geq 0$ και $\mathbf{x}_{k+1}^*, \mathbf{B}_{k+1}^*$ τα δεξιά μέλη των 1.29, 1.30, χωρίς δηλαδή στρογγυλοποίηση. Παρατηρεί κανείς ότι $\mathbf{B}_{k+1}^{*-1} = \frac{2n^2}{2n^2+3} \left(\mathbf{B}_k^{-1} + \frac{2}{n-1} \frac{\mathbf{c}_k \mathbf{c}_k^T}{\mathbf{c}_k \cdot \mathbf{B}_k \mathbf{c}_k} \right)$, δηλαδή το \mathbf{B}_{k+1}^{*-1} αποτελεί άθροισμα ενός θετικά ορισμένου και ενός θετικά ημιορισμένου μητρώου και έτσι είναι θετικά ορισμένο. Άρα και το $\mathbf{B}_{k+1}^* \in \text{Sym}^+$.

$$\|\mathbf{B}_{k+1}^*\| = \frac{2n^2+3}{2n^2} \left\| \mathbf{B}_k - \frac{2}{n+1} \frac{\mathbf{B}_k \mathbf{c}_k (\mathbf{B}_k \mathbf{c}_k)^T}{\mathbf{c}_k \cdot \mathbf{B}_k \mathbf{c}_k} \right\| \leq \frac{2n^2+3}{2n^2} \|\mathbf{B}_k\| \leq \frac{11}{8} R^2 2^k \tag{Π1}$$

Επιπλέον, αφού κάθε στοιχείο του \mathbf{B}_{k+1} διαφέρει από το αντίστοιχο του \mathbf{B}_{k+1}^* το πολύ κατά 2^{-p} , λόγω της προηγηθείσας στρογγυλοποίησης, έχουμε

$$\|\mathbf{B}_{k+1} - \mathbf{B}_{k+1}^*\| \leq \|\mathbf{B}_{k+1} - \mathbf{B}_{k+1}^*\|_{\max} \leq n 2^{-p} \tag{Π2}$$

Επομένως, από τις Π1, Π2 και την επιλογή του p

$$\|\mathbf{B}_{k+1}\| \leq \|\mathbf{B}_{k+1} - \mathbf{B}_{k+1}^*\| + \|\mathbf{B}_{k+1}^*\| \leq n2^{-p} + \frac{11}{8} R^2 2^k \leq R^2 2^{k+1}$$

που αποδεικνύει τον δεύτερο ισχυρισμό του Λήμματος Π14.

Επιπρόσθετα, θέτοντας $\mathbf{Q}_k := \mathbf{B}_k^{1/2}$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_{k+1}^* - \mathbf{x}_k\| &= \frac{1}{n+1} \frac{\|\mathbf{B}_k \mathbf{c}_k\|}{\sqrt{\mathbf{c}_k \cdot \mathbf{B}_k \mathbf{c}_k}} = \frac{1}{n+1} \sqrt{\frac{\mathbf{c}_k \cdot \mathbf{B}_k^2 \mathbf{c}_k}{\mathbf{c}_k \cdot \mathbf{B}_k \mathbf{c}_k}} = \frac{1}{n+1} \sqrt{\frac{(\mathbf{Q}_k \mathbf{c}_k)^T \mathbf{B}_k (\mathbf{Q}_k \mathbf{c}_k)}{\mathbf{Q}_k \mathbf{c}_k \cdot \mathbf{Q}_k \mathbf{c}_k}} \leq \\ &\leq \frac{1}{n+1} \sqrt{\|\mathbf{B}_k\|} \leq \frac{1}{n+1} R 2^{k-1} \end{aligned} \quad \text{Π3,}$$

$$\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_{k+1}^*\| \leq \sqrt{n} \|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_{k+1}^*\|_\infty \leq \sqrt{n} 2^{-p} \quad \text{Π4}$$

και, έτσι, από την υπόθεση της επαγωγής, την εκλογή του p και τις ανισότητες Π3 και Π4 προκύπτει

$$\|\mathbf{x}_{k+1}\| \leq \|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_{k+1}^*\| + \|\mathbf{x}_{k+1}^* - \mathbf{x}_k\| + \|\mathbf{x}_k\| \leq \sqrt{n} 2^{-p} + \frac{1}{n+1} R 2^{k-1} + R 2^k \leq R 2^{k+1}$$

που αποδεικνύει τον πρώτο ισχυρισμό του Λήμματος Π14.

Τέλος, παρατηρείται ότι

$$\begin{aligned} \|(\mathbf{B}_{k+1}^*)^{-1}\| &\leq \frac{2n^2}{2n^2+3} \left(\|\mathbf{B}_k^{-1}\| + \frac{2}{n-1} \frac{\|\mathbf{c}_k \mathbf{c}_k^T\|}{\mathbf{c}_k \cdot \mathbf{B}_k \mathbf{c}_k} \right) \leq \frac{2n^2}{2n^2+3} \left(\|\mathbf{B}_k^{-1}\| + \frac{2}{n-1} \|\mathbf{B}_k^{-1}\| \right) \leq \\ &\leq \frac{n+1}{n-1} \|\mathbf{B}_k^{-1}\| \leq 3 R^{-2} 4^k \quad \text{Π5} \end{aligned}$$

με την τελευταία ανισότητα να προκύπτει από την υπόθεση επαγωγής.

Έστω λ_0 συμβολίζει την μικρότερη ιδιοτιμή του \mathbf{B}_{k+1} και \mathbf{v} το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα μοναδιαίου μέτρου. Τότε από τις Π2, Π5 και την επιλογή του p

$$\begin{aligned} \lambda_0 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{B}_{k+1} \mathbf{v} &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{B}_{k+1}^* \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot (\mathbf{B}_{k+1} - \mathbf{B}_{k+1}^*) \mathbf{v} \geq \|(\mathbf{B}_{k+1}^*)^{-1}\|^{-1} - \|(\mathbf{B}_{k+1} - \mathbf{B}_{k+1}^*)\| > \\ &> \frac{1}{3} R^2 4^{-k} - n 2^{-p} \geq R^2 4^{-k+1}. \end{aligned}$$

Από $\lambda_0 > 0$ καταλήγουμε στο ότι $\mathbf{B}_{k+1} \in \text{Sym}^+$, ενώ παράλληλα

$$\|\mathbf{B}_{k+1}^{-1}\| = \lambda_0^{-1} \leq R^{-2} 4^{k+1},$$

που αποδεικνύει τον τρίτο ισχυρισμό του Λήμματος Π14.

Λήμμα Π15 (Λήμμα 1.12) $K \subseteq E_k$ για $k=0,1,\dots$.

Απόδειξη ακολουθώντας εκείνη των Grötchel, Lovász, Schrijver (1993)

Αποδεικνύεται με επαγωγή στο k . Το λήμμα ισχύει για $k=0$. Έστω ότι ισχύει για k και \mathbf{x}_{k+1}^* , \mathbf{B}_{k+1}^* , όπως έχουν οριστεί προηγουμένως. Έστω $\mathbf{x} \in K$. Πρέπει ν.δ.ο.

$$(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{k+1}) \cdot \mathbf{B}_{k+1}^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{k+1}) \leq 1$$

Στα επόμενα βήματα θα υπολογιστεί το αριστερό μέλος. Με χρήση των προηγουμένων

$$\begin{aligned} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{k+1}^*) \cdot (\mathbf{B}_{k+1}^*)^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{k+1}^*) &= \\ &= \frac{2n^2}{2n^2+3} \left(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k + \frac{1}{n+1} \frac{\mathbf{B}_k \mathbf{c}}{\sqrt{(\mathbf{c} \cdot \mathbf{B}_k \mathbf{c})}} \right) \cdot \left(\mathbf{B}_k^{-1} + \frac{2}{n-1} \frac{\mathbf{c} \mathbf{c}^T}{\mathbf{c} \cdot \mathbf{B}_k \mathbf{c}} \right) \left(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k + \frac{1}{n+1} \frac{\mathbf{B}_k \mathbf{c}}{\sqrt{(\mathbf{c} \cdot \mathbf{B}_k \mathbf{c})}} \right) = \\ &= \frac{2n^2}{2n^2+3} \left((\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) \cdot \mathbf{B}_k^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) + \frac{1}{n^2-1} + \frac{2}{n-1} \frac{\mathbf{c} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_k)}{\sqrt{(\mathbf{c} \cdot \mathbf{B}_k \mathbf{c})}} + \frac{2}{n-1} \frac{(\mathbf{c} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_k))^2}{\mathbf{c} \cdot \mathbf{B}_k \mathbf{c}} \right). \end{aligned}$$

Από την υπόθεση της επαγωγής $K \subset E_k$, άρα $\mathbf{x} \in E_k$ κι έτσι ο πρώτος όρος στην προηγούμενη σχέση ισούται το πολύ με 1. Θέτοντας $t := \frac{\mathbf{c} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_k)}{\sqrt{(\mathbf{c} \cdot \mathbf{B}_k \mathbf{c})}}$ προκύπτει

$$(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{k+1}^*) \cdot (\mathbf{B}_{k+1}^*)^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{k+1}^*) \leq \frac{2n^2}{2n^2+3} \left(\frac{n^2}{n^2-1} + \frac{2}{n-1} t(t+1) \right)$$

Για να υπολογιστεί το $t(t+1)$ γράφεται $\mathbf{B}_k = \mathbf{Q}\mathbf{Q}$ και $\mathbf{Q} = \mathbf{B}_k^{-1/2}$ και το t φράσσεται από επάνω με εφαρμογή της ανισότητας Cauchy – Schwarz:

$$\begin{aligned} |\mathbf{c} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_k)| &= |\mathbf{c} \cdot \mathbf{Q}\mathbf{Q}^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_k)| \leq \|\mathbf{c}^T \mathbf{Q}\| \|\mathbf{Q}^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_k)\| = \\ &= \sqrt{(\mathbf{c} \cdot \mathbf{Q}\mathbf{Q} \mathbf{c})} \sqrt{((\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) \cdot (\mathbf{Q})^{-1} (\mathbf{Q})^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_k))} = \sqrt{(\mathbf{c} \cdot \mathbf{B}_k \mathbf{c})} \sqrt{((\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) \cdot (\mathbf{B}_k)^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_k))} \end{aligned}$$

κι έτσι αφού $\mathbf{x} \in E_k$

$$|t| = \left| \frac{\mathbf{c} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_k)}{\sqrt{(\mathbf{c} \cdot \mathbf{B}_k \mathbf{c})}} \right| \leq \sqrt{((\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) \cdot \mathbf{B}_k^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_k))} \leq 1.$$

Ο αλγόριθμος “προφήτης” εξασφαλίζει $\mathbf{c} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) \leq \delta$ και έτσι

$$t = \frac{\mathbf{c} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_k)}{\sqrt{(\mathbf{c} \cdot \mathbf{B}_k \mathbf{c})}} \leq \frac{\delta}{\|\mathbf{c}\| \sqrt{\|\mathbf{B}_k^{-1}\|^{-1}}} \leq \delta \sqrt{\|\mathbf{B}_k^{-1}\|} \leq \delta R^{-1} 2^k .$$

Με χρήση αυτού του υπολογισμού και της προηγούμενης σχέσης προκύπτει

$$t(t+1) \leq 2\delta R^{-1} 2^N .$$

Αντικαθιστώντας το άνω φράγμα για $t(t+1)$ στην παραπάνω σχέση

$$(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{k+1}^*) \cdot (\mathbf{B}_{k+1}^*)^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{k+1}^*) \leq \frac{2n^2}{2n^2+3} \left(\frac{n^2}{n^2-1} + 4\delta R^{-1} 2^N \right) \leq \frac{2n^4}{2n^4+n^2-3} + 4\delta R^{-1} 2^N .$$

Τέλος μέσω εκτίμησης λάθους

$$\begin{aligned} \Delta &:= \left| (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{k+1}) \cdot \mathbf{B}_{k+1}^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{k+1}) - (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{k+1}^*) \cdot (\mathbf{B}_{k+1}^*)^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{k+1}^*) \right| \leq \\ &\leq \left| (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{k+1}) \cdot \mathbf{B}_{k+1}^{-1} (\mathbf{x}_{k+1}^* - \mathbf{x}_{k+1}) \right| + \left| (\mathbf{x}_{k+1}^* - \mathbf{x}_{k+1}) \cdot \mathbf{B}_{k+1}^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{k+1}^*) \right| + \\ &\quad + \left| (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{k+1}^*) \cdot (\mathbf{B}_{k+1}^{-1} - (\mathbf{B}_{k+1}^*)^{-1}) (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{k+1}^*) \right| \leq \\ &\leq \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{k+1}\| \|\mathbf{B}_{k+1}^{-1}\| \|\mathbf{x}_{k+1}^* - \mathbf{x}_{k+1}\| + \|\mathbf{x}_{k+1}^* - \mathbf{x}_{k+1}\| \|\mathbf{B}_{k+1}^{-1}\| \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{k+1}^*\| + \\ &\quad + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{k+1}^*\|^2 \|\mathbf{B}_{k+1}^{-1}\| \|\mathbf{B}_{k+1}^{*-1}\| \|\mathbf{B}_{k+1}^* - \mathbf{B}_{k+1}\| . \end{aligned}$$

Από το Λήμμα Π15, την επιλογή του p και το γεγονός ότι $\mathbf{x} \in S(\mathbf{0}, R)$ και $k \leq N-1$:

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{k+1}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{x}_{k+1}\| \leq R + R 2^{k+1} \leq R 2^{N+1}$$

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{k+1}^*\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{k+1}\| + \|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_{k+1}^*\| \leq R + R 2^{k+1} + \sqrt{n} 2^{-p} \leq R 2^{N+1}$$

Έτσι

$$\begin{aligned} \Delta &\leq (R 2^{N+1}) (R^{-2} 4^N) (\sqrt{n} 2^{-p}) + (\sqrt{n} 2^{-p}) (R^{-2} 4^N) (R 2^{N+1}) + (R^2 2^{2N+2}) (R^{-2} 4^N) (R^{-2} 4^N) (n 2^{-p}) \leq \\ &\leq n R^{-1} 2^{3N+2-p} + n R^{-2} 2^{6N+2-p} \end{aligned}$$

Και τέλος, συνθέτοντας τα παραπάνω

$$\begin{aligned} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{k+1}) \cdot \mathbf{B}_{k+1}^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{k+1}) &\leq \left| (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{k+1}) \cdot \mathbf{B}_{k+1}^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{k+1}) - (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{k+1}^*) \cdot \mathbf{B}_{k+1}^{*-1} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{k+1}^*) \right| + \\ &\quad + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{k+1}^*) \cdot \mathbf{B}_{k+1}^{*-1} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{k+1}^*) \leq \\ &\leq \frac{2n^4}{2n^4+n^2-3} + 4\delta R^{-1} 2^N + n R^{-1} 2^{3N+2-p} + n R^{-2} 2^{6N+2-p} \leq \\ &\leq 1 \end{aligned}$$

όπου η τελευταία ανισότητα προκύπτει λόγω της επιλογής του p .

Λήμμα Π16 (Λήμμα 1.13) $\frac{\text{vol}(E_{k+1})}{\text{vol}(E_k)} \leq e^{-\frac{1}{5n}}$ για $k=0,1,\dots$.

Απόδειξη ακολουθώντας εκείνη των Grötchel, Lovász, Schrijver (1993)

Ο όγκος ενός ελλειμοειδούς $E_k(\mathbf{B}_k, \mathbf{x}_k) \in \mathbb{R}^n$ ισούται με $\text{vol}(E_k) = V^n \sqrt{\det(\mathbf{B}_k)}$, όπου V^n ο όγκος n -διάστατης μοναδιαίας σφαίρας. Επομένως:

$$\frac{\text{vol}(E_{k+1})}{\text{vol}(E_k)} = \sqrt{\frac{\det(\mathbf{B}_{k+1})}{\det(\mathbf{B}_k)}} = \sqrt{\frac{\det(\mathbf{B}_{k+1}^*)}{\det(\mathbf{B}_k)}} \sqrt{\frac{\det(\mathbf{B}_{k+1})}{\det(\mathbf{B}_{k+1}^*)}}$$

με \mathbf{B}_{k+1}^* το μητρώο όπως έχει οριστεί και στα προηγούμενα Λήμματα.

Γράφεται $\mathbf{B}_k = \mathbf{Q}\mathbf{Q}$, $\mathbf{Q} = \mathbf{B}^{1/2}$ και έτσι

$$\frac{\det(\mathbf{B}_{k+1}^*)}{\det(\mathbf{B}_k)} = \det(\mathbf{Q}^{-1} \mathbf{B}_{k+1}^* \mathbf{Q}^{-1}) = \left(\frac{2n^2+3}{2n^2}\right)^n \det\left(\mathbf{I} - \frac{2}{n+1} \frac{\mathbf{Q}\mathbf{c}\mathbf{c}^T\mathbf{Q}}{\mathbf{c}^T\mathbf{Q}\mathbf{Q}\mathbf{c}}\right)$$

Επειδή το $\frac{\mathbf{Q}\mathbf{c}\mathbf{c}^T\mathbf{Q}}{\mathbf{c}^T\mathbf{Q}\mathbf{Q}\mathbf{c}}$ έχει βαθμίδα 1 και ίχνος ίσο με μονάδα. το μητρώο της τελευταίας ορίζουσας εμφανίζει ιδιοτιμές ίσες με $1, \dots, 1, 1 - \frac{2}{n+1}$. Συνεπώς:

$$\frac{\det(\mathbf{B}_{k+1}^*)}{\det(\mathbf{B}_k)} = \det(\mathbf{Q}^{-1} \mathbf{B}_{k+1}^* \mathbf{Q}^{-1}) = \left(\frac{2n^2+3}{2n^2}\right)^n \frac{n-1}{n+1} \leq e^{\frac{3}{2n}} e^{-\frac{2}{n}} = e^{-\frac{1}{2n}}$$

$$\begin{aligned} \frac{\det(\mathbf{B}_{k+1})}{\det(\mathbf{B}_{k+1}^*)} &= \det\left(\mathbf{I} + (\mathbf{B}_{k+1}^*)^{-1}(\mathbf{B}_{k+1} - \mathbf{B}_{k+1}^*)\right) \leq \left\| \mathbf{I} + (\mathbf{B}_{k+1}^*)^{-1}(\mathbf{B}_{k+1} - \mathbf{B}_{k+1}^*) \right\|^n \leq \\ &\leq \left(\|\mathbf{I}\| + \left\| (\mathbf{B}_{k+1}^*)^{-1} \right\| \left\| \mathbf{B}_{k+1} - \mathbf{B}_{k+1}^* \right\| \right)^n \leq \left(1 + (R^{-2} 4^{k+1}) (n 2^{-p}) \right)^n \leq \\ &\leq e^{n^2 2^{2N-p} R^{-2}} \leq e^{\frac{1}{10n}} \end{aligned}$$

όπου η τελευταία ανίσωση προκύπτει από την επιλογή των N και p .

Επομένως

$$\frac{\text{vol}(E_{k+1})}{\text{vol}(E_k)} \leq \sqrt{\frac{\det(\mathbf{B}_{k+1}^*)}{\det(\mathbf{B}_k)}} \sqrt{\frac{\det(\mathbf{B}_{k+1})}{\det(\mathbf{B}_{k+1}^*)}} \leq e^{-\frac{1}{4n} + \frac{1}{20n}} = e^{-\frac{1}{5n}}$$

και με αυτό ολοκληρώνεται η απόδειξη.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] ASPVALL, STONE (1980) "Khachiyani's Linear Programming Algorithm", *Journal of algorithms*, vol.1, p.1-13.
- [2] BLAND, GOLDFARB, TODD (1981) "The ellipsoid method: A survey", *Operational Research*, vol.29, p.1039 - 1092.
- [3] BOYD, VANDENBERGHE (2009) "Convex Optimization", *Cambridge University Press*.
- [4] CHANG, S.Y., MURTY, K.G (1989) "The steepest descent gravitational method for linear programming", *Discrete Applied Mathematics*, vol.25, p.211-239.
- [5] DANTZIG, G.B. (1947) "Maximization of a linear function of variables subject to linear inequalities", *Published in T.C. Koopmans (1951): Activity analysis of production and allocation*, vol., p.p. 339-347.
- [6] DANZER, LAUGWITZ, LENZ (1957) "Über das Löwnersche Ellipsoid und sein Analogon unter den einem Eikörper einbeschriebenen Ellipsoiden", *Arch. Math.*, vol.8, p.214-219.
- [7] GENDY, A.S., SALEEB, A.F. (1993) "Generalized yield surface representations in the elastoplastic three-dimensional analysis of frames", *Computers & Structures*, vol.vol. 49, no. 2, p.351-362.
- [8] GRÖTSCHEL, LOVÁSZ, SCHRIJVER (1993) "Geometric Algorithms and Combinatorial Optimization", *Springer-Verlag Berlin Heidelberg*.
- [9] H.BUSEMANN (1955) "The Geometry of Geodesics", *Academic Press INC., Publishers*.
- [10] HORNE, M.R. (1950) "Fundamental propositions in the plastic theory of structures", *J. Inst.-Cibil Engrs*, vol.34, p.174.
- [11] MAIER, G. (1970) "A matrix structural theory of piecewise linear elastoplasticity with interacting yield planes", *Meccanica*, vol.vol. 5, p.54-66.
- [12] MANOLA, M.-M., (2015) "Limit load and deformation analysis for frame structures with mathematical programming", NTUA, Athens.
- [13] MORIN, T.L., PRABHU, N., ZHANG, Z. (2001) "Complexity of the gravitational method for linear programming", *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol.108, No. 3, p.633-658.
- [14] MURTY, K.G. (2005) "A gravitational interior point method for LP", *Opsearch*, vol.42, p.28-36.
- [15] MURTY, K.G. (2006a) "Linear equations, inequalities, linear programs (LP) and a new efficient algorithm", *Tutorials in OR*, vol., p.1-36.
- [16] MURTY, K.G. (2006b) "A new practically efficient interior point method for LP", *Algorithmic Operations Research*, vol.1, p.3-19.
- [17] MURTY, K.G. (2009a) "Ball centers of polytopes", *Department of IOE*.
- [18] MURTY, K.G. (2009b) "New Sphere Methods for LP", *Tutorials in OR*.
- [19] MURTY, K.G. (2013a) "Sphere methods using no matrix inversions for LPs and extension to NLP", *Department of IOE*.
- [20] MURTY, K.G. (2013b) "Fast descent methods for LPs with no matrix inversions", *Algorithmic Operations Research*, vol.7, p.51-54.

- [21] MURTY, K.G. (2014) "Sphere Method-7 using no matrix inversions for LPs", *Department of IOE*.
- [22] MURTY, K.G., KABADI, S.N. (2008) "Additional descent steps in the Sphere Method", *Department of IOE*.
- [23] MURTY, K.G., OSKOOROUCHI, M.R. (2008a) "Note on implementing the new Sphere Method for LP using matrix inversions sparingly", *Optimization Letters*, vol.3, No.1, p.137-160.
- [24] MURTY, K.G., OSKOOROUCHI, M.R. (2008b) "Sphere Methods for LP", *Department of IOE*.
- [25] MURTY, K.G., OSKOOROUCHI, M.R. (2010a) "Sphere Methods for LP", *Algorithmic Operations Research*, vol., p.21-33.
- [26] MURTY, K.G., OSKOOROUCHI, M.R. (2010b) "Fast descent methods for LPs with minimal or no matrix inversions", *Department of IOE*.
- [27] NEAL, B.G. (1977) "The plastic methods of structural analysis", *John Wiley & Sons*.
- [28] PAPADIMITRIOU, STEIGLITZ (1998) "Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity", *Dover Publications, INC*.
- [29] RAO. S. (2009) "Engineering optimization: theory and practice", *John Wiley & Sons*.
- [30] STALLMANN, F. (2014) "Ellipsoidmethod.m", www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/47837-ellipsoid-method.
- [31] XIE, Y., SNOEYINK, J., XU, J. (2006) "Efficient algorithm for approximating Maximum Inscribed Sphere in high dimensional polytope", Proc. 22nd Annual ACM Symposium on Computational Geometry (SoCG06), p.21-29, June 5-7, Sedina, Arizona, USA.
- [32] ΒΑΡΚΑΡΑΚΗΣ, Κ.Ι. (1988) "Επίλυση και σχεδιασμός των γραμμικών φορέων με τη θεωρία πλαστικότητας", *ΕΜΠ*.