



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ & ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ

**ΜΕΛΕΤΗ ΣΤΡΕΠΤΙΚΩΝ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΩΝ ΑΞΟΝΑ
ΚΙΝΟΥΜΕΝΟΥ ΜΕΣΩ ΣΥΝΔΕΣΜΟΥ CARDAN**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

της

ΑΓΓΕΛΙΚΗΣ – ΧΡΙΣΤΙΝΑΣ ΛΑΔΕΡΟΥ



Επιβλέπων : Ιωάννης Αντωνιάδης
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Φεβρουάριος 2016

Ευχαριστίες

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία ολοκληρώνει τις σπουδές μου ως προπτυχιακού φοιτητή της Σχολής Μηχανολόγων Μηχανικών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Πριν την παρουσίαση των αποτελεσμάτων της παρούσας διπλωματικής εργασίας, αισθάνομαι την υποχρέωση να ευχαριστήσω ορισμένους από τους ανθρώπους που γνώρισα, συνεργάστηκα μαζί τους και έπαιξαν πολύ σημαντικό ρόλο στην πραγματοποίηση της

Πρώτο από όλους θέλω να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή της εργασίας, Καθηγητή της Σχολής Μηχανολόγων Μηχανικών, Δρ. Ιωάννη Αντωνιάδη για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε με την ανάθεση της παρούσας διπλωματικής, την άριστη συνεργασία αλλά και την απλόχερη μετάδοση γνώσεων.

Ιδιαίτερες ευχαριστίες θέλω να απευθύνω στους γονείς μου που με υπομονή μου προσέφεραν την απαραίτητη υποστήριξη για την ολοκλήρωση των σπουδών μου.

Περίληψη

Ένας σύνδεσμος Cardan αποτελεί μια απλή μηχανική σύνδεση, η οποία χρησιμοποιείται σχεδόν από την αρχαιότητα, για μετάδοσης κίνησης, ταχύτητας ή ροπής. Οι χρήσεις του είναι απεριόριστες και δεν φαίνεται να υπάρχει τάση προς αντικατάσταση του στα επόμενα χρόνια.

Όπως είναι αναμενόμενο, ο σύνδεσμος αυτός έχει μελετηθεί κατά κόρον, ενώ πλέον κατασκευάζεται από πολύ διαφορετικά υλικά ώστε να καλύπτονται οι ανάγκες του εύρους των κατασκευών στις οποίες συναντάται. Φυσικά, και από άποψη διαστάσεων, ένας σύνδεσμος Cardan, θεωρείται πλήρως τυποποιημένος, αφού υπάρχει διαθέσιμη στην αγορά πληθώρα καταλόγων με τυποποιημένους συνδέσμους, όπου με ελάχιστα χαρακτηριστικά της κατασκευής, ο μηχανικός είναι σε θέση να επιλέξει τον κατάλληλο για την εφαρμογή του.

Ωστόσο, δεν υπάρχουν τόσες μελέτες που να αφορούν τη δυναμική ανάλυση της λειτουργίας ενός τέτοιου συνδέσμου, ενώ γνωρίζουμε πως ακριβώς αυτή η κίνηση του τον οδηγεί σε φθορά και αστοχία, τα κύρια προβλήματα κατά τη χρήση του στη σημερινή εποχή. Στην παρούσα διπλωματική εργασία, λοιπόν, θα ασχοληθούμε μια δυναμική ανάλυση με σκοπό τον εντοπισμό των αιτιών φθοράς του συνδέσμου.

Αρχικά, δημιουργώντας ένα τυπικό μοντέλο που αναπαριστά μια κοινή χρήση του συνδέσμου θα επιδιώξουμε μαθηματικά και με τη βοήθεια των υπολογιστικών φύλλων excel να κάνουμε μια πρώτη προσέγγιση της ακριβούς λειτουργίας του συνδέσμου κατά την περιστροφή των αξόνων που συνδέει, βλέποντας ουσιαστικά την έξοδο του (ταχύτητα και ροπή), σε σχέση φυσικά με την είσοδο αλλά και τη θέση των αξόνων που συνδέει. Έτσι, θα μπορέσουμε να διακρίνουμε ελαφρώς τα αίτια που πιθανών επηρεάζουν την λειτουργία του.

Εφόσον τα παραπάνω αποτελούν μια προσέγγιση και μόνον της πραγματικής απόκρισης, δημιουργείται η ανάγκη η μελέτη να γίνει αναλυτικά και μάλιστα με χρήση λογισμικού, και συγκεκριμένα τις Matlab. Μάλιστα, για τη μελέτη θα χρησιμοποιηθεί η συνάρτηση ode45 ενώ ο κώδικας που θα περιγράφει το δυναμικό σύστημα που μελετούμε θα δημιουργηθεί. Λόγω του ότι, τόσο η συνάρτηση όσο και ο κώδικας, θα πρέπει να ελεγχθούν ως προς τη λειτουργία τους, θα γίνει αρχικά εφαρμογή τους σε γνωστά δυναμικά συστήματα προς επιβεβαίωση των αποτελεσμάτων.

Με δεδομένη πλέον την σωστή λειτουργία των υπολογιστικών εργαλείων, μπορούμε να προχωρήσουμε στην εφαρμογή τους για τη μελέτη της λειτουργίας του συνδέσμου. Το δυναμικό σύστημα που δημιουργήθηκε, αν και ενός βαθμού ελευθερίας, μπορεί να οδηγήσει σε πολύ καλή προσέγγιση των αιτιών που μπορούν να επηρεάσουν την έξοδο. Μετά από αριθμό εφαρμογών με διαφορετικά δεδομένα εισόδου, όσον αφορά τη θέση των αξόνων, την ελαστικότητά τους αλλά και την ταχύτητα διέγερσης, μπορούμε να καταλήξουμε στο συμπέρασμα πως η γωνία λειτουργίας και η ελαστικότητα των αξόνων έχουν εξαιρετικά σημαντική επίδραση στη

μεταφερόμενη από τον σύνδεσμο ταχύτητα. Η γωνία, από τη μια, δημιουργεί ταλαντώσεις σταθερού αλλά σεβαστού πλάτους, ενώ η ελαστικότητα, από την άλλη, έχει ακόμη μεγαλύτερη επίδραση, αφού εκτός του /ότι δημιουργεί ταλαντώσεις μεγαλύτερους πλάτους, αυτές δεν έχουν σταθερή μορφή, ενώ από κάποιες γωνίες λειτουργίες και πάνω, ακόμη κι αν φαίνεται πως ηρεμούν, διατηρούν ταλαντώσεις σταθερού μεν αλλά όχι αμελητέου πλάτους.

Λέξεις Κλειδιά: σύνδεσμος Cardan, δυναμική ανάλυση, φθορά, συνάρτηση ode45

Abstract

A Cardan joint is a simple mechanical connection, which is used almost since antiquity for transmission of movement, speed or torque. Its uses are limitless and therefore there is no tendency to replace it the coming years.

As expected, this link has been studied extensively, and now it is made of very different materials to meet the needs of the construction range where found. Of course, in terms of dimensions, a Cardan joint is fully considered standard, since it is available on the market with of catalogs with standard joints, where with a minimum of data, the engineer is able to select the appropriate for the application.

However, there are not many studies that relate the dynamic analysis of the functioning of the joint, although we know that this movement leads to wear and failure, which are the main problems when using today. In this Diploma Thesis, therefore, we will deal a dynamic analysis with the aim of identifying the causes of the joint's wear.

First, we will create a typical model that represents a common joint's use and we will seek mathematically with the aid of computational excel sheets to make a first approximation of the exact operation of the joint during rotation of the connecting shafts watching substantially the output (speed and torque) relatively to the input and the position of the connecting shafts. Thus, we can distinguish the slightly causes potential affect its operation.

Since the above is only an approximation of the actual response, there is need to study analytically and using software, and notably with Matlab. Indeed, the function ode45 will be used while the code that describes the dynamic system we are studying will be created. Because both the function and the code should be tested for their operation will be initially applied to known dynamical systems to confirm the results.

Given the correct operation of the computational tools, we can proceed to the application for the study of the joint. The dynamic system which is created, although with one degree of freedom, may lead to a very good approximation of the causes which can affect the output. After a number of applications with different input data on the position of shafts, their elasticity and the stimulation speed, we can conclude that the operation angle and the elasticity of the shafts have highly significant effect on transported speed by the joint. The angle creates oscillations with constant but respected width, elasticity, on the other hand has even greater effect, apart from the fact that it generates vibrations with higher width, they are not in stable form, while for large operation angles even though it seems calm, it maintains stable oscillations but not negligible width.

Keywords: Cardan joint, dynamic analysis, wear, function ode45

Πίνακας περιεχομένων

1	Σύνδεσμος Cardan.....	1
1.1	Εισαγωγή.....	1
1.1.1	Εφαρμογές.....	2
1.2	Ιστορική Αναδρομή	3
1.3	Γενικά Χαρακτηριστικά.....	5
1.3.1	Πλεονεκτήματα.....	6
1.3.2	Μειονεκτήματα.....	6
1.3.3	Διαστάσεις – Επιλογή Μεγέθους Συνδέσμου.....	6
1.3.4	Συντήρηση.....	11
1.4	Αστοχία.....	11
1.4.1	Αίτια.....	12
1.4.2	Σημάδια Φθοράς.....	14
1.4.3	Λύσεις.....	14
2	Μαθηματική Επίλυση Δυναμικού Μοντέλου	15
2.1	Δυναμικό Σύστημα Συνδέσμου Cardan	15
2.2	Μαθηματική Επίλυση	16
2.2.1	Εξισώσεις Mathieu – Hill	17
2.2.2	Θεωρία Floquet	18
2.3	Επίλυση Συστήματος	19
2.3.1	Δεδομένα	20
2.3.2	Εξισώσεις.....	20
2.4	Αποτελέσματα.....	21
2.4.1	Αναλυτική Περιγραφή για Γωνία Λειτουργίας $\beta = 20^\circ$	21
2.4.2	Επίδραση Γωνίας Λειτουργίας.....	25
2.4.3	Επίδραση Ταχύτητας Εισόδου	29
3	Εφαρμογές Αλγόριθμου ode45 σε Δυναμικά Συστήματα	31
3.1	Αλγόριθμος ode45	31
3.2	Δυναμικά Συστήματα Ενός Βαθμού Ελευθερίας.....	32

3.2.1	Γενική Περιγραφή	32
3.2.2	Επίλυση Συστήματος	33
3.2.3	Σύστημα με αρμονική εξωτερική διέγερση.....	34
3.2.4	Σύστημα με εξωτερική διέγερση Heaviside.....	43
3.3	Δυναμικά Συστήματα Δύο Βαθμών Ελευθερίας.....	48
3.3.1	Γενική Περιγραφή	48
3.3.2	Σύστημα με Μηδενική Εξωτερική Διέγερση (1).....	50
3.3.3	Σύστημα με Μηδενική Εξωτερική Διέγερση (2).....	54
3.3.4	Σύστημα με Εξωτερική Διέγερση Heaviside	57
3.3.5	Σύστημα με Αρμονική Εξωτερική Διέγερση.....	62
3.4	Δυναμικό Σύστημα Ενός Βαθμού Ελευθερίας με Κινηματική Εξωτερική Διέγερση	65
3.4.1	Γενική περιγραφή – Περιγραφή εξωτερικής διέγερσης	66
3.4.2	Θεωρούμε ότι $T_1 = \infty$	68
3.4.3	Θεωρούμε ότι $T_2 = \infty$	71
3.4.4	Θεωρούμε ότι $T - T_2 = \infty$	75
3.4.5	Απόκριση ως προς $x(t)$	78
4	Μοντελοποίηση Συστήματος Με σύνδεσμο Cardan.....	83
4.1	Περιγραφή Συστήματος	83
4.2	Αριθμητική Επίλυση	86
4.2.1	Εξωτερική Διέγερση	87
4.2.2	Αποτελέσματα.....	89
4.2.3	Συμπέρασμα	126
5	Επίλογος	129
6	Βιβλιογραφία.....	131

Κατάλογος σχημάτων

Σχήμα 2.1 Δυναμικό σύστημα δυο βαθμών ελευθερίας με σύνδεσμο Cardan.....	16
Σχήμα 2.2 Γωνιακή ταχύτητα εξόδου ως προς τη γωνία περιστροφής για ταχύτητα εισόδου $\Omega_{in} = 600$ rpm	21
Σχήμα 2.3 Ροπή εξόδου ως προς τη γωνία περιστροφής για για ταχύτητα εισόδου $\Omega_{in} = 600$ rpm.....	22
Σχήμα 2.4 Γωνιακή ταχύτητα εξόδου ως προς τη γωνία περιστροφής για ταχύτητα εισόδου $\Omega_{in} = 1400$ rpm	23
Σχήμα 2.5 Ροπή εξόδου ως προς τη γωνία περιστροφής για ταχύτητα εισόδου $\Omega_{in} = 1400$ rpm	23
Σχήμα 2.6 Γωνιακή ταχύτητα εξόδου ως προς τη γωνία περιστροφής για ταχύτητα εισόδου $\Omega_{in} = 2000$ rpm	24
Σχήμα 2.7 Ροπή εξόδου ως προς τη γωνία περιστροφής για ταχύτητα εισόδου $\Omega_{in} = 2000$ rpm	24
Σχήμα 2.8 Γωνιακή ταχύτητα εξόδου ως προς τη γωνία περιστροφής για ταχύτητα εισόδου $\Omega_{in} = 600$ rpm και γωνία β από 5 έως 20°	25
Σχήμα 2.9 Γωνιακή ταχύτητα εξόδου ως προς τη γωνία περιστροφής για ταχύτητα εισόδου $\Omega_{in} = 600$ rpm και γωνία β από 25 έως 40°	26
Σχήμα 2.10 Γωνιακή ταχύτητα εξόδου ως προς τη γωνία περιστροφής για ταχύτητα εισόδου $\Omega_{in} = 1000$ rpm και γωνία β από 5 έως 20°	27
Σχήμα 2.11 Γωνιακή ταχύτητα εξόδου ως προς τη γωνία περιστροφής για ταχύτητα εισόδου $\Omega_{in} = 1000$ rpm και γωνία β από 25 έως 40°	27
Σχήμα 2.12 Γωνιακή ταχύτητα εξόδου ως προς τη γωνία περιστροφής για ταχύτητα εισόδου $\Omega_{in} = 1400$ rpm και γωνία β από 5 έως 20°	28
Σχήμα 2.13 Γωνιακή ταχύτητα εξόδου ως προς τη γωνία περιστροφής για ταχύτητα εισόδου $\Omega_{in} = 1400$ rpm και γωνία β από 25 έως 40°	28
Σχήμα 3.1 Δυναμικό Σύστημα ενός Βαθμού Ελευθερίας	32
Σχήμα 3.2 Αρμονική Εξωτερική Διέγερση	34
Σχήμα 3.3 Απόκριση $x(t)$ συστήματος 1 Β.Ε. με αρμονική εξωτερική διέγερση για Ω_1 και t_1	36
Σχήμα 3.4 Απόκριση $x(t)$ συστήματος 1 Β.Ε. με αρμονική εξωτερική διέγερση για Ω_1 και t_1	37
Σχήμα 3.5 Απόκριση $x(t)$ συστήματος 1 Β.Ε. με αρμονική εξωτερική διέγερση για Ω_1 και t_2	37
Σχήμα 3.6 Απόκριση $x(t)$ συστήματος 1 Β.Ε. με αρμονική εξωτερική διέγερση για Ω_1 και t_2	38

Σχήμα 3.7 Απόκριση $x(t)$ συστήματος 1 B.E. με αρμονική εξωτερική διέγερση για Ω_2 και t_1	38
Σχήμα 3.8 Απόκριση $x(t)$ συστήματος 1 B.E. με αρμονική εξωτερική διέγερση για Ω_2 και t_1	39
Σχήμα 3.9 Απόκριση $x(t)$ συστήματος 1 B.E. με αρμονική εξωτερική διέγερση για Ω_2 και t_2	39
Σχήμα 3.10 Απόκριση $x(t)$ συστήματος 1 B.E. με αρμονική εξωτερική διέγερση για Ω_2 και t_2	40
Σχήμα 3.11 Απόκριση $x(t)$ συστήματος 1 B.E. με αρμονική εξωτερική διέγερση για Ω_3 και t_1	40
Σχήμα 3.12 Απόκριση $x(t)$ συστήματος 1 B.E. με αρμονική εξωτερική διέγερση για Ω_3 και t_1	41
Σχήμα 3.13 Απόκριση $x(t)$ συστήματος 1 B.E. με αρμονική εξωτερική διέγερση για Ω_3 και t_2	41
Σχήμα 3.14 Απόκριση $x(t)$ συστήματος 1 B.E. με αρμονική εξωτερική διέγερση για Ω_3 και t_2	42
Σχήμα 3.15 Εξωτερική Διέγερση Heaviside	44
Σχήμα 3.16 Απόκριση $x(t)$ συστήματος 1 B.E. με διέγερση Heaviside για χρόνο t_1	46
Σχήμα 3.17 Απόκριση $x(t)$ συστήματος 1 B.E. με διέγερση Heaviside για χρόνο t_1	46
Σχήμα 3.18 Απόκριση $x(t)$ συστήματος 1 B.E. με διέγερση Heaviside για χρόνο t_2	47
Σχήμα 3.19 Απόκριση $x(t)$ συστήματος 1 B.E. με διέγερση Heaviside για χρόνο t_2	47
Σχήμα 3.20 Δυναμικό Σύστημα δύο Βαθμών Ελευθερίας	48
Σχήμα 3.21: Σχηματική αναπαράσταση εξεταζόμενου διβάθμιου συστήματος $m - k$	50
Σχήμα 3.22 Απόκριση $x_1(t)$ συστήματος 2 B.E. με μηδενική εξωτερική διέγερση (1)	51
Σχήμα 3.23 Απόκριση $x_2(t)$ συστήματος 2 B.E. με μηδενική εξωτερική διέγερση (1)	52
Σχήμα 3.24 Απόκριση $x_1(t)$ συστήματος 2 B.E. με μηδενική εξωτερική διέγερση (1)	52
Σχήμα 3.25 Απόκριση $x_2(t)$ συστήματος 2 B.E. με μηδενική εξωτερική διέγερση (1)	53
Σχήμα 3.26 Διβάθμιο Σύστημα $m - k$	54
Σχήμα 3.27 Απόκριση $x_1(t)$ συστήματος 2 B.E. με μηδενική εξωτερική διέγερση (2)	55
Σχήμα 3.28 Απόκριση $x_2(t)$ συστήματος 2 B.E. με μηδενική εξωτερική διέγερση (2)	56
Σχήμα 3.29 Απόκριση $x_1(t)$ συστήματος 2 B.E. με μηδενική εξωτερική διέγερση (2)	56
Σχήμα 3.30 Απόκριση $x_2(t)$ συστήματος 2 B.E. με μηδενική εξωτερική διέγερση (2)	57
Σχήμα 3.31 Διέγερση Heaviside	58
Σχήμα 3.32 Απόκριση $x_1(t)$ συστήματος 2 B.E. με διέγερση Heaviside	59
Σχήμα 3.33 Απόκριση $x_2(t)$ συστήματος 2 B.E. με διέγερση Heaviside	60
Σχήμα 3.34 Απόκριση $x_1(t)$ συστήματος 2 B.E. με διέγερση Heaviside	60
Σχήμα 3.35 Απόκριση $x_2(t)$ συστήματος 2 B.E. με διέγερση Heaviside	61
Σχήμα 3.36 Σχηματική αναπαράσταση διβάθμιου δυναμικού συστήματος	62

Σχήμα 3.37 Απόκριση $x_1(t)$ συστήματος 2 B.E. με αρμονική εξωτερική διέγερση	63
Σχήμα 3.38 Απόκριση $x_2(t)$ συστήματος 2 B.E. με αρμονική εξωτερική διέγερση	64
Σχήμα 3.39 Απόκριση $x_1(t)$ συστήματος 2 B.E. με αρμονική εξωτερική διέγερση	64
Σχήμα 3.40 Απόκριση $x_2(t)$ συστήματος 2 B.E. με αρμονική εξωτερική διέγερση	65
Σχήμα 3.41 Δυναμικό σύστημα ενός βαθμού ελευθερίας με κινηματική διέγερση	66
Σχήμα 3.42 Μορφή ταχύτητας διέγερσης	66
Σχήμα 3.43 Μορφή επιτάχυνσης διέγερσης	67
Σχήμα 3.44 Απόκριση $u(t)$ συστήματος 1 B.E. με κινηματική διέγερση για $T_1=\infty$	70
Σχήμα 3.45 Απόκριση $du(t)$ συστήματος 1 B.E. με κινηματική διέγερση για $T_1=\infty$	70
Σχήμα 3.46 Απόκριση $du(t)$ συστήματος 1 B.E. με κινηματική διέγερση για $T_2=\infty$ και μηδενικές αρχικές συνθήκες.....	73
Σχήμα 3.47 Απόκριση $u(t)$ συστήματος 1 B.E. με κινηματική διέγερση για $T_2=\infty$ και μη μηδενικές αρχικές συνθήκες.....	74
Σχήμα 3.48 Απόκριση $du(t)$ συστήματος 1 B.E. με κινηματική διέγερση για $T_2=\infty$ και μη μηδενικές αρχικές συνθήκες.....	74
Σχήμα 3.49 Απόκριση $u(t)$ συστήματος 1 B.E. με κινηματική διέγερση για $T - T_2=\infty$	77
Σχήμα 3.50 Απόκριση $du(t)$	77
Σχήμα 3.51 Απόκριση $dx(t)$ συστήματος 1 B.E. για $T_1 = \infty$	79
Σχήμα 3.52 Απόκριση $x(t)$ συστήματος 1 B.E. για $T_2 = \infty$	80
Σχήμα 3.53 Απόκριση $dx(t)$ συστήματος 1 B.E. για $T_1 = \infty$	80
Σχήμα 3.54 Απόκριση $x(t)$ συστήματος 1 B.E. για $T - T_2 = \infty$	81
Σχήμα 3.55 Απόκριση $dx(t)$ συστήματος 1 B.E. για $T - T_2 = \infty$	82
Σχήμα 4.1 Δυναμικό σύστημα με σύνδεσμο Cardan.....	84
Σχήμα 4.2 Διέγερση τύπου Heaviside	88
Σχήμα 4.3 Απόκριση θ για $\beta = 0^\circ$ και $\omega_{\max}=600$ rpm	89
Σχήμα 4.4 Απόκριση u για $\omega_{\max}=600$ rpm.....	90
Σχήμα 4.5 Απόκριση θ για $\beta = 0^\circ$ και $\omega_{\max}=1100$ rpm	91
Σχήμα 4.6 Απόκριση u για $\omega_{\max}=1100$ rpm.....	91
Σχήμα 4.7 Απόκριση θ για $\beta = 0^\circ$ και $\omega_{\max}=2400$ rpm	92
Σχήμα 4.8 Απόκριση u για $\omega_{\max}=2400$ rpm.....	92
Σχήμα 4.9 Απόκριση θ για $\beta = 5^\circ$ και $\omega_{\max}=600$ rpm	93
Σχήμα 4.10 Μεγέθυνση απόκρισης θ για $\beta = 5^\circ$ και $\omega_{\max}=600$ rpm.....	93
Σχήμα 4.11 Απόκριση θ για $\beta = 5^\circ$ και $\omega_{\max}=1100$ rpm	94
Σχήμα 4.12 Μεγέθυνση απόκρισης θ για $\beta = 5^\circ$ και $\omega_{\max}=1100$ rpm.....	94
Σχήμα 4.13 Απόκριση θ για $\beta = 5^\circ$ και $\omega_{\max}=2400$ rpm	95
Σχήμα 4.14 Μεγέθυνση απόκρισης θ για $\beta = 5^\circ$ και $\omega_{\max}=2400$ rpm.....	95

Σχήμα 4.15 Απόκριση θ για $\beta = 15^\circ$ και $\omega_{\max} = 600$ rpm	96
Σχήμα 4.16 Μεγέθυνση απόκρισης θ για $\beta = 15^\circ$ και $\omega_{\max} = 600$ rpm	96
Σχήμα 4.17 Απόκριση θ για $\beta = 15^\circ$ και $\omega_{\max} = 1100$ rpm	97
Σχήμα 4.18 Μεγέθυνση απόκρισης θ για $\beta = 15^\circ$ και $\omega_{\max} = 1100$ rpm	97
Σχήμα 4.19 Απόκριση θ για $\beta = 15^\circ$ και $\omega_{\max} = 2400$ rpm	98
Σχήμα 4.20 Μεγέθυνση απόκρισης θ για $\beta = 15^\circ$ και $\omega_{\max} = 2400$ rpm	98
Σχήμα 4.21 Απόκριση f_0 για $\beta = 0^\circ$ και $\omega_{\max} = 600$ rpm.....	99
Σχήμα 4.22 Απόκριση f_0 για $\beta = 0^\circ$ και $\omega_{\max} = 1100$ rpm.....	100
Σχήμα 4.23 Απόκριση f_0 για $\beta = 0^\circ$ και $\omega_{\max} = 2400$ rpm.....	100
Σχήμα 4.24 Απόκριση f_0 για $\beta = 5^\circ$ και $\omega_{\max} = 600$ rpm.....	101
Σχήμα 4.25 Μεγέθυνση απόκρισης f_0 για $\beta = 0^\circ$ και $\omega_{\max} = 600$ rpm	101
Σχήμα 4.26 Απόκριση f_0 για $\beta = 5^\circ$ και $\omega_{\max} = 1100$ rpm.....	103
Σχήμα 4.27 Μεγέθυνση απόκρισης f_0 για $\beta = 0^\circ$ και $\omega_{\max} = 600$ rpm	103
Σχήμα 4.28 Απόκριση f_0 για $\beta = 5^\circ$ και $\omega_{\max} = 2400$ rpm.....	104
Σχήμα 4.29 Μεγέθυνση απόκρισης f_0 για $\beta = 5^\circ$ και $\omega_{\max} = 1100$ rpm	104
Σχήμα 4.30 Απόκριση f_0 για $\beta = 15^\circ$ και $\omega_{\max} = 600$ rpm.....	105
Σχήμα 4.31 Μεγέθυνση απόκρισης f_0 για $\beta = 15^\circ$ και $\omega_{\max} = 600$ rpm	105
Σχήμα 4.32 Απόκριση f_0 για $\beta = 15^\circ$ και $\omega_{\max} = 1100$ rpm.....	106
Σχήμα 4.33 Μεγέθυνση απόκρισης f_0 για $\beta = 15^\circ$ και $\omega_{\max} = 1100$ rpm	106
Σχήμα 4.34 Απόκριση f_0 για $\beta = 15^\circ$ και $\omega_{\max} = 2400$ rpm.....	107
Σχήμα 4.35 Μεγέθυνση απόκρισης f_0 για $\beta = 15^\circ$ και $\omega_{\max} = 2400$ rpm	107
Σχήμα 4.36 Απόκριση λόγου η για γωνία $\beta = 0^\circ$ και $\omega_{\max} = 600$ rpm	108
Σχήμα 4.37 Απόκριση λόγου η για γωνία $\beta = 0^\circ$ και $\omega_{\max} = 1100$ rpm	109
Σχήμα 4.38 Απόκριση λόγου η για γωνία $\beta = 0^\circ$ και $\omega_{\max} = 2400$ rpm	109
Σχήμα 4.39 Απόκριση λόγου η για γωνία $\beta = 5^\circ$ και $\omega_{\max} = 600$ rpm	110
Σχήμα 4.40 Απόκριση λόγου η για γωνία $\beta = 5^\circ$ και $\omega_{\max} = 1100$ rpm	111
Σχήμα 4.41 Απόκριση λόγου η για γωνία $\beta = 0^\circ$ και $\omega_{\max} = 2400$ rpm	111
Σχήμα 4.42 Απόκριση λόγου η για γωνία $\beta = 15^\circ$ και $\omega_{\max} = 600$ rpm	112
Σχήμα 4.43 Απόκριση λόγου η για γωνία $\beta = 15^\circ$ και $\omega_{\max} = 1100$ rpm	112
Σχήμα 4.44 Απόκριση λόγου η για γωνία $\beta = 15^\circ$ και $\omega_{\max} = 2400$ rpm	113
Σχήμα 4.45 Απόκριση θ για $\beta = 0^\circ$ και $\omega_{\max} = 600$ rpm.....	113
Σχήμα 4.46 Απόκριση θ για $\beta = 0^\circ$ και $\omega_{\max} = 1100$ rpm.....	114
Σχήμα 4.47 Απόκριση θ για $\beta = 0^\circ$ και $\omega_{\max} = 2400$ rpm.....	115
Σχήμα 4.48 Απόκριση θ για $\beta = 5^\circ$ και $\omega_{\max} = 600$ rpm.....	115
Σχήμα 4.49 Μεγέθυνση απόκρισης θ για $\beta = 5^\circ$ και $\omega_{\max} = 600$ rpm	116
Σχήμα 4.50 Απόκριση θ για $\beta = 5^\circ$ και $\omega_{\max} = 1100$ rpm.....	116

Σχήμα 4.51 Μεγέθυνση απόκρισης θ για $\beta=0^\circ$ και $\omega_{\max}=600\text{rpm}$	117
Σχήμα 4.52 Απόκριση θ για $\beta=5^\circ$ και $\omega_{\max}=2400\text{rpm}$	117
Σχήμα 4.53 Απόκριση θ για $\beta=15^\circ$ και $\omega_{\max}=600\text{rpm}$	118
Σχήμα 4.54 Μεγέθυνση απόκρισης θ για $\beta=15^\circ$ και $\omega_{\max}=600\text{rpm}$	118
Σχήμα 4.55 Απόκριση θ για $\beta=15^\circ$ και $\omega_{\max}=1100\text{rpm}$	119
Σχήμα 4.56 Μεγέθυνση απόκρισης θ για $\beta=15^\circ$ και $\omega_{\max}=1100\text{rpm}$	119
Σχήμα 4.57 Απόκριση θ για $\beta=15^\circ$ και $\omega_{\max}=2400\text{rpm}$	120
Σχήμα 4.58 Μεγέθυνση απόκρισης θ για $\beta=15^\circ$ και $\omega_{\max}=2400\text{rpm}$	120
Σχήμα 4.59 Απόκριση φ_0 για $\beta=0^\circ$ και $\omega_{\max}=600\text{rpm}$	121
Σχήμα 4.60 Απόκριση φ_0 για $\beta=0^\circ$ και $\omega_{\max}=1100\text{rpm}$	122
Σχήμα 4.61 Απόκριση φ_0 για $\beta=0^\circ$ και $\omega_{\max}=2400\text{rpm}$	122
Σχήμα 4.62 Απόκριση φ_0 για $\beta=5^\circ$ και $\omega_{\max}=600\text{rpm}$	123
Σχήμα 4.63 Απόκριση φ_0 για $\beta=5^\circ$ και $\omega_{\max}=1100\text{rpm}$	124
Σχήμα 4.64 Απόκριση φ_0 για $\beta=5^\circ$ και $\omega_{\max}=2400\text{rpm}$	124
Σχήμα 4.65 Απόκριση φ_0 για $\beta=15^\circ$ και $\omega_{\max}=600\text{rpm}$	125
Σχήμα 4.66 Απόκριση φ_0 για $\beta=15^\circ$ και $\omega_{\max}=1100\text{rpm}$	125
Σχήμα 4.67 Απόκριση φ_0 για $\beta=15^\circ$ και $\omega_{\max}=2400\text{rpm}$	126

Κατάλογος πινάκων

Πίνακας 4.1 Σύνοψη αποτελεσμάτων υπολογιστικών φύλλων excel για $\beta=5^\circ$ και $\Omega_{in} = 600$ rpm.....	102
Πίνακας 4.2 Αποτελέσματα για γωνία λειτουργίας $\beta=0^\circ$	127
Πίνακας 4.3 Αποτελέσματα για γωνία λειτουργίας $\beta=5^\circ$	127
Πίνακας 4.4 Αποτελέσματα για γωνία λειτουργίας $\beta = 15^\circ$	128

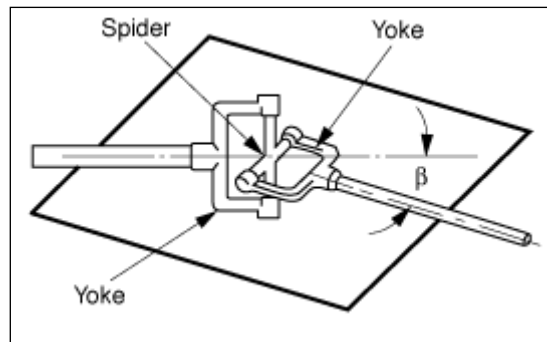
1

Σύνδεσμος Cardan

1.1 Εισαγωγή

Ένας σύνδεσμος *Universal* είναι μια μηχανική σύνδεση μεταξύ δύο περιστρεφόμενων αξόνων, οι οποίοι συνήθως δεν είναι παράλληλοι, αλλά τέμνονται. Χρησιμοποιούνται για τη μετάδοση κίνησης, δύναμης, ή και τα δύο.[1]

Ο απλούστερος και πιο κοινός τύπος ονομάζεται *Cardan* ή *Hooke*. Αποτελείται από δύο αναβολείς, ένα σε κάθε άξονα, που συνδέονται με ένα σταυροειδές ενδιάμεσο μέλος που ονομάζεται αράχνη (spider), όπως φαίνεται στο *σχήμα 1.1*. Η γωνία μεταξύ των δύο αξόνων καλείται γωνία λειτουργίας (β). Είναι γενικά, αλλά όχι κατ' ανάγκην, σταθερή κατά τη διάρκεια της λειτουργίας. Καλή πρακτική του σχεδιασμού απαιτεί μικρές γωνίες λειτουργίας, συχνά λιγότερο από 25° , ανάλογα με την εφαρμογή. Ανεξάρτητα από αυτή την κατευθυντήρια γραμμή, μηχανική παρέμβαση στην κατασκευή των αρθρώσεων *Cardan* περιορίζει τη γωνία λειτουργίας σε ένα μέγιστο (συχνά περίπου $37,5^\circ$), ανάλογα με τις διαστάσεις της.



Σχήμα 1. 1: Σύνδεσμος Cardan, τα κύρια μέρη του

1.1.1 Εφαρμογές

Τυπικές εφαρμογές περιλαμβάνουν αεροσκάφη, ηλεκτρικές συσκευές, μηχανισμούς ελέγχου, ηλεκτρονικά, τεχνικό εξοπλισμό, ιατρικές και οπτικές συσκευές, πυροβολικό, ραδιόφωνο, ραπτομηχανές, κλωστοϋφαντουργικές μηχανές και εργαλεία δίσκων.[2]

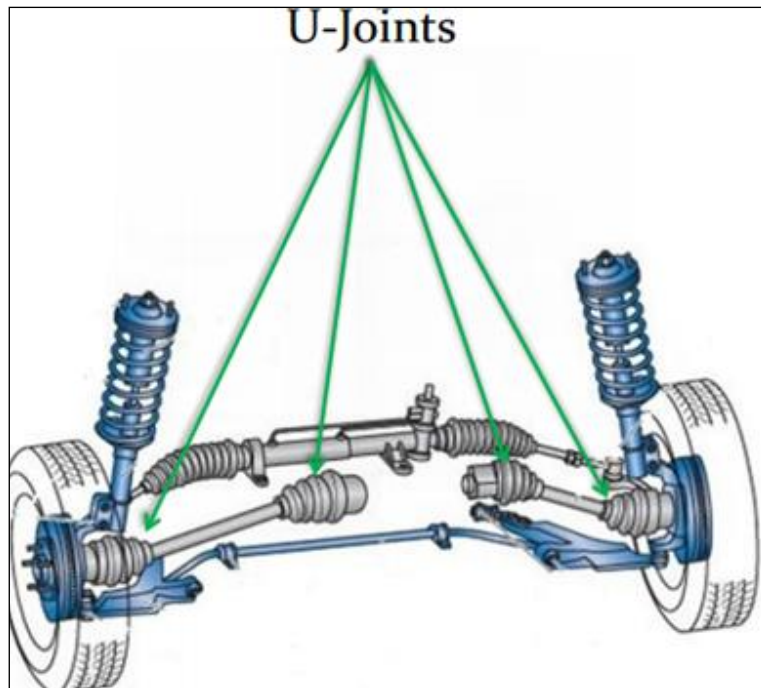
Ένας σύνδεσμος *Cardan* μπορεί να κατασκευαστεί εξ ολοκλήρου από χάλυβα ή από συνδυασμό χάλυβα και θερμοπλαστικών μελών. Αυτοί που είναι κατασκευασμένοι από χάλυβα έχουν μέγιστη ικανότητα μεταφοράς φορτίου για ένα δεδομένο μέγεθος, ενώ αυτοί με θερμοπλαστικά μέλη χρησιμοποιούνται σε βιομηχανικές εφαρμογές φωτισμού ενώ τα χαρακτηριστικά τους ότι αυτολιπαίνονται, έχουν μικρό βάρος, αμελητέα παλινδρόμηση, αντοχή στη διάβρωση και ικανότητα για λειτουργία υψηλής ταχύτητας είναι σημαντικά πλεονεκτήματα.

Σύνδεσμοι *Cardan* ειδικών κατασκευών (όπως ball-jointed) είναι επίσης διαθέσιμοι. Αυτοί χρησιμοποιούνται για λειτουργία υψηλής ταχύτητας και για την μεταβίβαση μεγάλων ροπών.

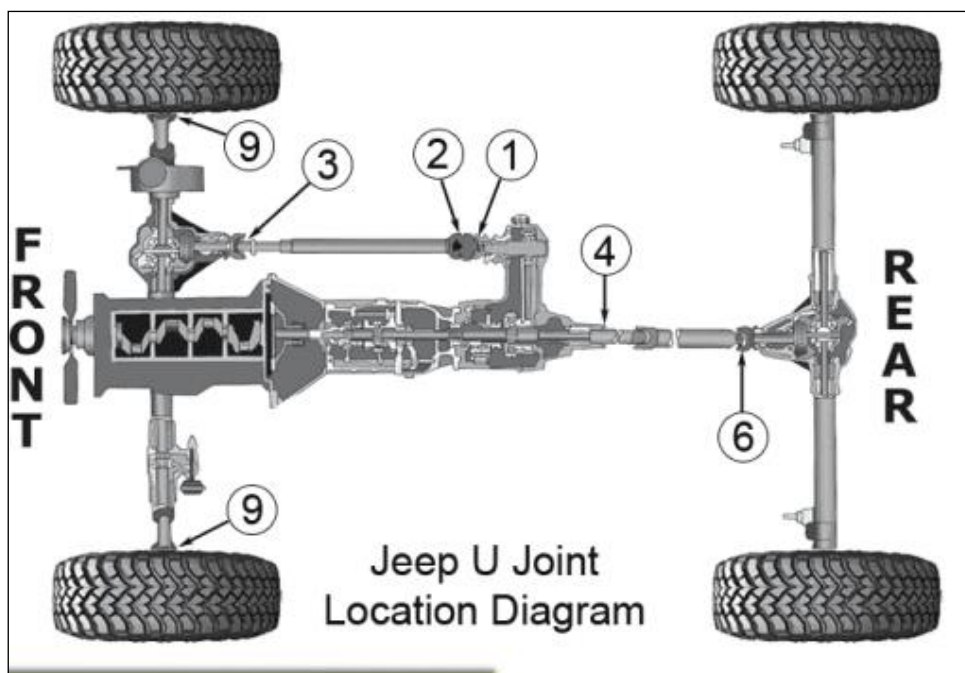
Στον τομέα των οχημάτων, οι σύνδεσμοι *Cardan* χρησιμοποιούνται σε πολλά σημεία όπως στα συστήματα διεύθυνσης του οχήματος, στη γραμμή μεταφοράς, στο σύστημα μετάδοσης κίνησης (εμπρός / πίσω), ειδικότερα στα βαρέα οχήματα (*σχήματα 1.2 έως 1.4*).



Σχήμα 1. 2: Σύστημα διεύθυνσης οχήματος



Σχήμα 1. 3: Σύστημα μετάδοσης κίνησης (εμπρός / πίσω)



Σχήμα 1. 4: Σύνδεσμοι στα βαρέα οχήματα

1.2 Ιστορική Αναδρομή

Η κύρια ιδέα του βασίζεται στο σχεδιασμό των γυροσκοπίων, τα οποία έχουν χρησιμοποιηθεί από την αρχαιότητα. Ένας πρόδρομος του συνδέσμου *Universal* χρησιμοποιούνταν από τους αρχαίους Έλληνες για βαλλίστρες. Στην Ευρώπη, ο σύνδεσμος *Universal* αποκαλείται συχνά σύνδεσμος *Cardano* ή άξονας *Cardan*, από

τον Ιταλό μαθηματικό Girolamo Cardano. Ωστόσο, στα γραπτά του, ανέφερε μόνο βάσεις για γυροσκοπικούς μηχανισμούς, δεν είχε συνδέσμους *Universal*.

Ο μηχανισμός περιγράφηκε αργότερα στο *Technica curiosa mirabilia artis* (1664) από τον Gaspar Schott, ο οποίος λανθασμένα ισχυρίζεται ότι ήταν ένας αρθρωτός σύνδεσμος σταθερής ταχύτητας. Λίγο αργότερα, μεταξύ 1667 και 1675, ο Robert Hooke ανέλυσε το σύνδεσμο και διαπίστωσε ότι η ταχύτητα περιστροφής ήταν ανομοιόμορφη, αλλά ότι αυτή η ιδιότητα θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για να παρακολουθείται η κίνηση της σκιάς ενός ηλιακού ρολογιού. Στην πραγματικότητα, η συνιστώσα της εξίσωσης του χρόνου που καλύπτει την κλίση του ισημερινού επιπέδου σε σχέση με το εκλειπτικό είναι απολύτως ανάλογη με την μαθηματική περιγραφή της άρθρωσης *Universal*. Η πρώτη καταγεγραμμένη χρήση του όρου συνδέσμου *Universal* για αυτή την συσκευή ήταν από τον Hooke το 1676, στο βιβλίο του *Helioscopes*. Έχει εκδώσει μια περιγραφή το 1678, με αποτέλεσμα τη χρήση του όρου άρθρωση Hooke στον αγγλόφωνο κόσμο. Το 1683, ο Hooke πρότεινε μια λύση για την μη ομοιόμορφη ταχύτητα περιστροφής του συνδέσμου *Universal*: ένα ζευγάρι των αρθρώσεων Hooke 90° εκτός φάσης σε κάθε άκρο του ενδιάμεσου άξονα, μια ρύθμιση που είναι τώρα γνωστή ως ένα είδος άρθρωσης σταθερής ταχύτητας. Ο Christopher Polhem της Σουηδίας αργότερα εφεύρε εκ νέου τον σύνδεσμο *Universal*, δίνοντας αφορμή για την ονομασία Polhemsknut στα σουηδικά.

Το 1841, ο Άγγλος επιστήμονας Robert Willis ανέλυσε την κίνηση του συνδέσμου *Universal*. Από το 1845, ο Γάλλος μηχανικός και μαθηματικός Jean-Victor Poncelet είχε αναλύσει την κίνηση του συνδέσμου *Universal* χρησιμοποιώντας σφαιρική τριγωνομετρία.

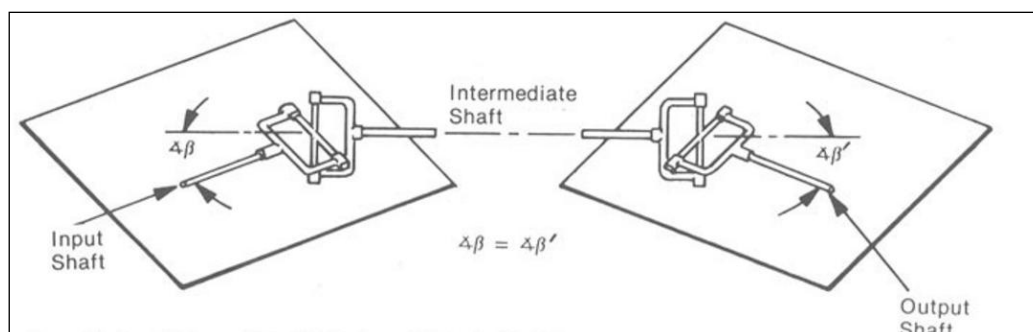
Ο όρος σύνδεσμος *Universal* χρησιμοποιήθηκε κατά τον 18ο αιώνα και ήταν σε κοινή χρήση το 19ο αιώνα. Η πατέντα του Edmund Morewood, το 1844, για ένα μηχανήμα μεταλλικής επίστρωσης ζητούσε ένα σύνδεσμο *Universal*, με αυτό το όνομα, για να δεχθεί μικρά λάθη ευθυγράμμισης μεταξύ του κινητήρα και των περιστρεφόμενων αξόνων των μύλων. Στο εγχειρίδιο του Lardner, το 1877, περιγράφονται τόσο ο απλός όσο και ο διπλός σύνδεσμος *Universal*, και σημείωσε ότι χρησιμοποιούνται στα συστήματα του άξονα των μύλων βαμβακιού. Ο Jules Weisbach περιγράφει τα μαθηματικά του αρθρωτού συνδέσμου και τη διπλή σταυρωτή άρθρωση στο σύγγραμμά του για τους μηχανικούς, που δημοσιεύθηκε στην αγγλική γλώσσα το 1883.

Οι χρήσεις του συνδέσμου *Universal* τον 19ου αιώνα κάλυψαν ευρύ φάσμα εφαρμογών. Πολυάριθμοι σύνδεσμοι *Universal* χρησιμοποιήθηκαν για να συνδέσουν τους άξονες ελέγχου του τηλεσκοπίου Northumberland στο Πανεπιστήμιο του Cambridge το 1843. Η ατμομηχανή ευρεσιτεχνίας του Ephriam Shay το 1881, για παράδειγμα, χρησιμοποιεί διπλό σύνδεσμο *Universal* σε κινητήριο άξονα της μηχανής του. Ο Charles Amidon χρησιμοποίησε ένα πολύ μικρότερο σύνδεσμο *Universal*, το 1884. Η σφαιρική, περιστροφική, ατμομηχανή υψηλής ταχύτητας του Beauchamp Tower χρησιμοποιεί μια προσαρμογή του συνδέσμου *Universal*, περίπου το 1885.

Ο όρος σύνδεσμος *Cardan* φαίνεται να είναι πρόσφατος στην αγγλική γλώσσα. Πολλές χρήσεις του εμφανίζονται τον 19ου αιώνα στις μεταφράσεις από τα γαλλικά ή επηρεάζονται έντονα από τις γαλλικές χρήσεις. Τα παραδείγματα περιλαμβάνουν μια έκθεση του 1868 σχετικά με την Έκθεση *Universelle* του 1867, καθώς και ένα άρθρο για το δυναμόμετρο σε μετάφραση από τα γαλλικά το 1881.

1.3 Γενικά Χαρακτηριστικά

Ένα βασικό χαρακτηριστικό του συνδέσμου *Cardan* είναι η ανομοιομορφία της μετάδοσης κίνησης μέσω της άρθρωσης. Η αναλογία της γωνιακής ταχύτητα μεταξύ των αξόνων εισόδου και εξόδου μεταβάλλεται κυκλικά σε δύο κύκλους ανά περιστροφή του άξονα εισόδου. Αυτή η διακύμανση, η οποία συνοδεύεται από αντίστοιχες γωνιακές επιταχύνσεις, αυξάνει με τη γωνία λειτουργίας και μπορεί να είναι όσο το 15% της μέγιστης γωνιακής ταχύτητας (σε περίπτωση μιας γωνίας λειτουργίας 30 °). Κατά την επιλογή ενός συνδέσμου θα πρέπει να έχουμε κατά νου την επίδραση αυτών των διακυμάνσεων στην στατική ροπή, τη ροπή αδράνειας και την απόδοση του συστήματος.



Σχήμα 1. 5: Διπλός Σύνδεσμος Cardan

Η ανομοιομορφία της μετάδοσης μπορεί να εξαλειφθεί με τη χρήση δύο κατάλληλων συνδέσμων σε σειρά, όπως φαίνεται στο *σχήμα 1.5*. Σε τέτοιες περιπτώσεις, η μεταβολή της ταχύτητας που προκαλείται από ένα σύνδεσμο μπορεί να ακυρωθεί από αυτήν του άλλου, μεταδίδοντας έτσι μια σταθερή (1: 1) αναλογία γωνιακής ταχύτητας μεταξύ των αξόνων. Η διακύμανση της γωνιακής ταχύτητας του ενδιάμεσου άξονα, ωστόσο, δεν μπορεί να αποφευχθεί. Δύο αρθρώσεις σε σειρά επιτρέπουν, επίσης, τη σύζευξη δύο μετατοπισμένων αξόνων (μονοί *Cardan* περιορίζονται σε τεμνόμενους άξονες).

1.3.1 Πλεονεκτήματα

Οι σύνδεσμοι *Cardan* συγκεντρώνουν αρκετά πλεονεκτήματα, για το λόγο αυτό είναι και τόσο κοινή η χρήση τους σε πληθώρα κατασκευών. Μερικά από τα πλεονεκτήματά τους αναφέρονται παρακάτω :

1. Χαμηλό κόστος κατασκευής
2. Απλή και στιβαρή κατασκευή
3. Μεγάλη διάρκεια ζωής
4. Ευκολία συντήρησης
5. Χαμηλή πλευρική ώθηση στα έδρανα
6. Μεγάλες γωνιακές μετατοπίσεις
7. Υψηλή στρεπτική ακαμψία
8. Υψηλή ροπή στρέψης

Επίσης, εκτός από την παροχή της αναγκαίας ροπής σε ένα περιορισμένο χώρο λειτουργίας, οι σύνδεσμοι *Cardan* έχουν την ικανότητα να αντέχουν σε σχετικώς υψηλές εξωτερικά επιβεβλημένες αξονικές δυνάμεις και σχετικά υψηλές ταχύτητες λειτουργίας.

1.3.2 Μειονεκτήματα

Βέβαια, παρά τα θετικά τους χαρακτηριστικά, οι σύνδεσμοι *Cardan* εμφανίζουν κι ορισμένα μειονεκτήματα, όπως :

1. Η διακύμανση της ταχύτητας και της επιτάχυνσης αυξάνεται με την γωνία λειτουργίας
2. Απαιτείται λίπανση για τη μείωση της φθοράς
3. Οι άξονες πρέπει να βρίσκονται ακριβώς στο ίδιο επίπεδο
4. Η αντίδραση (δονήσεις) είναι δύσκολο να ελεγχθεί

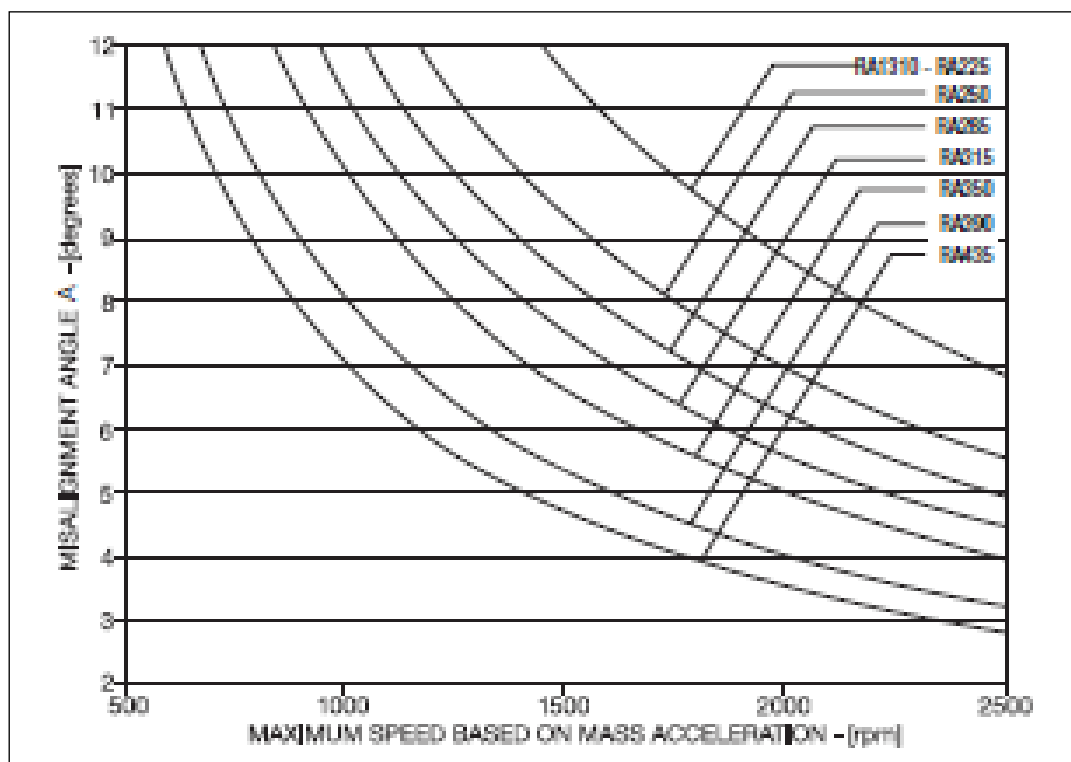
1.3.3 Διαστάσεις – Επιλογή Μεγέθους Συνδέσμου

1.3.3.1 Περιορισμοί

Κατά τη διαδικασία επιλογής του κατάλληλου μεγέθους συνδέσμου *Cardan* που απαιτείται για την εκάστοτε εφαρμογή είναι απαραίτητο να λάβουμε υπόψη κάποιους βασικούς περιορισμούς.[3] Μερικοί από αυτούς είναι :

1. Όριο ταχύτητας βάση της επιτάχυνσης της μάζας

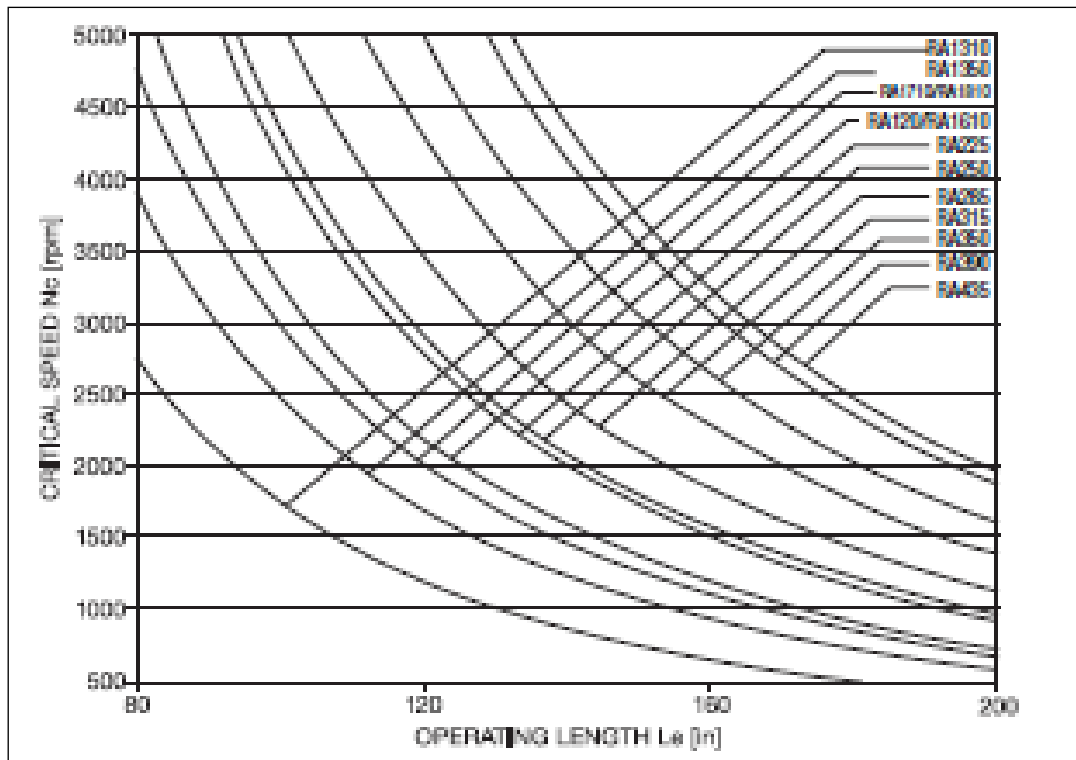
Όταν οι σύνδεσμοι *Cardan* λειτουργούν σε οποιοδήποτε γωνία μεγαλύτερη από το μηδέν, το κεντρικό τμήμα της άρθρωσης λειτουργεί πάντα ακανόνιστα, δηλαδή επιταχύνεται ή επιβραδύνεται δύο φορές σε κάθε περιστροφή. Οι μέγιστες τιμές της ροπής επιτάχυνσης της μάζας που προκύπτουν, εξαρτώνται από την ταχύτητα λειτουργίας και τη γωνία απόκλισης (β) αλλά και από τη ροπή αδρανείας του κεντρικού τμήματος του άξονα. Για να εξασφαλιστεί η ομαλή λειτουργία του συνδέσμου, η ροπή επιτάχυνσης της μάζας δεν πρέπει να επιτρέπεται να υπερβαίνει κάποια όρια, που συνήθως λαμβάνονται από πίνακες. Ένας τέτοιος πίνακας παρουσιάζεται στο παρακάτω σχήμα 1.6.



Σχήμα 1. 6: Πίνακας μέγιστων τιμών ροπής επιτάχυνσης

2. Όριο ταχύτητας βάση κρίσιμης ταχύτητας

Σε εφαρμογές όπου απαιτούνται μεγάλα μήκη αξόνων, η ταχύτητα περιορίζεται από την κρίσιμη πλευρική ταχύτητα του κεντρικού τμήματος. Η κρίσιμη πλευρική ταχύτητα είναι μια συνάρτηση του πάχους του τοιχώματος του κεντρικού σωλήνα και του ενεργού μήκους του. Η μέγιστη ταχύτητα λειτουργίας πρέπει να είναι μικρότερη από την κρίσιμη πλευρική ταχύτητα, η οποία δίνεται και πάλι από κατάλληλους πίνακες (σχήμα 1.7), ενώ φυσικά λαμβάνεται και ένας συντελεστής ασφαλείας, συνήθως 1,25. Αξίζει να σημειώσουμε πως σε ορισμένες εφαρμογές, λειτουργία σε ταχύτητες περίπου στο μισό της κρίσιμης, δημιουργούν επίσης μη αποδέκτες δονήσεις. Για αυτές τις εφαρμογές, η ταχύτητα λειτουργίας θα πρέπει να είναι 8% πάνω ή κάτω από το μισό της κρίσιμης ταχύτητας που έχει υπολογιστεί.



Σχήμα 1. 7: Πίνακας τιμών πλευρικής κρίσιμης ταχύτητας

1.3.3.2 Υπολογισμοί

Κατά την επιλογή του κατάλληλου συνδέσμου για κάθε εφαρμογή, ο μηχανικός θα πρέπει να προβεί σε κάποιους υπολογισμούς που θα τον οδηγήσουν στη σωστή διαστασιολόγηση του συνδέσμου. Οι υπολογισμοί αυτοί περιλαμβάνουν την εύρεση των παρακάτω ροπών :

- Ροπής Αντοχής (Endurance torque) - T_e

Είναι η κανονική τιμή για την πλήρη ροπή αναστροφής με βάση την αντοχή του υλικού και δίνεται από την παρακάτω σχέση :

$$T_e = k_p k_a k_l T_n$$

όπου k_p : ένας συντελεστής ισχύος (από πίνακες)

k_a : ένας συντελεστής γωνίας (από πίνακες)

k_l : ένας συντελεστής απαιτούμενης διάρκειας ζωής (από πίνακες)

T_n : ονομαστική ροπή

- Ροπή Αντοχής μιας κατεύθυνσης (One way endurance torque) - T_{ow}

Είναι η κανονική τιμή για την κυμαινόμενη ροπή σε μια κατεύθυνση με βάση την αντοχή του υλικού.

- Ροπή ζωής (Life torque) - T_L

Είναι η τιμή για τη διάρκεια ζωής των στηρίξεων του συνδέσμου. Υπολογίζεται από δεδομένα για συνδέσμους που λειτουργούν 5000 ώρες με γωνία απόκλισης 3° και αποτελούν την ελάχιστη διάρκεια ζωής του 90% των συνδέσμων *Cardan*, ενώ οι περισσότεροι τύποι έχουν διάρκεια ζωής 5 φορές περισσότερο από τις ελάχιστες που χρησιμοποιούνται ως δεδομένα παραπάνω. Ουσιαστικά, η ροπή ζωής αποτελεί τυποποιημένο μέγεθος για την επιλογή ενός συνδέσμου.[4]

- Μέγιστη Ροπή (Peak torque) - T_p

Είναι η μέγιστη επιτρεπόμενη ροπή με βάση το όριο διαρροής του συνδέσμου.

- Ροπή Εφαρμογής (Application torque) – T_a

Ο υπολογισμός της ροπής της εφαρμογής γίνεται με τη βοήθεια του ακόλουθου τύπου σε (lb x in) :

$$T_a = \frac{HP \times 63025}{N} \quad (1.1)$$

όπου N η ταχύτητα περιστροφής σε rpm

- Ροπή συλλογής (Selection torque – T_s)

Σύμφωνα με τον παρακάτω τύπο, η ροπή συλλογής είναι :

$$T_s = \frac{KW \times 9550}{N} \quad (1.2)$$

Οι τιμές των παραπάνω ροπών λειτουργούν ως δείκτες στην επιλογή ενός συνδέσμου και για το λόγο αυτό όταν πλησιάζουμε τα όρια αυτά θα πρέπει να γίνεται εκ νέου αξιολόγηση. Για παράδειγμα, όταν η ροπή συλλογής (T_s) προσεγγίζει τη ροπή αντοχής (T_e) ή όταν η μεγαλύτερη ροπή πλησιάζει την μέγιστη ροπή (T_p) της άρθρωσης, συνιστάται ενσωματωμένα επιθέματα στην επιφάνεια ένωσης με τον άξονα.

Στην συνέχεια της διαδικασίας επιλογής συνδέσμου θα πρέπει να βρεθεί η διάρκεια ζωής αναφοράς που αναφέραμε προηγουμένως. Η διάρκεια ζωής αναφοράς (L_h) δίνεται ως :

$$L_h = \frac{1.5 \times 10^6}{A \times N} \left[\frac{T_L}{T_a} \right] \quad (1.3)$$

όπου A είναι η γωνία λειτουργίας σε μοίρες.

- Μέγιστη Ταχύτητα

Σε περιπτώσεις όπου απαιτείται μετάδοση υψηλών ταχυτήτων ή πολύ μακρών αξόνων, το μήκος του κινητήριου άξονα μπορεί να περιορίζεται από την κρίσιμη ταχύτητα του συγκροτήματος του άξονα οδήγησης. Η μέγιστη ασφαλής ταχύτητα περιστροφής, για έναν άξονα από χάλυβα, μπορεί να προσδιοριστεί από την ακόλουθη σχέση μεταξύ του μεγέθους του σωλήνα και του μήκους του άξονα.

$$n_{max} = \frac{6.814 \cdot 10^7 \sqrt{D^2 + d^2}}{l^2} \quad (1.4)$$

όπου n_{max} : η μέγιστη ασφαλής γωνιακή ταχύτητα [rpm]

D : εξωτερική διάμετρος κινητήριου άξονα [mm]

d : εσωτερική διάμετρος κινητήριου άξονα [mm]

l : μήκος άξονα [mm]

Βέβαια, υπάρχουν κι άλλα στοιχεία τα οποία μπορούν να καθορίσουν την επιλογή του μεγέθους του συνδέσμου *Cardan* που τελικά θα επιλέξουμε. Μερικά από αυτά είναι :

- Οι περιορισμοί διαμέτρου και μήκους
- Η διάσταση του διαμετρήματος
- Οι περιορισμοί σε δυνάμεις και ροπές των άλλων στοιχείων
- Τα όρια ταχύτητας

Ένας πίνακας που περιλαμβάνει τυπικές τιμές των παραπάνω μεγεθών, όπως αυτοί δημιουργούνται από τις εταιρίες κατασκευής τους[5], φαίνεται παρακάτω στον πίνακα 1.1 :

Size	RA1310		RA1350		RA1410		RA1480		RA1550	
Torque Ratings										
	Lb.in.	Nm	Lb.in.	Nm	Lb.in.	Nm	Lb.in.	Nm	Lb.in.	Nm
T_e	9,419	1,064	13,275	1,500	13,275	1,500	15,171	1,714	19,596	2,214
T_{ow}	13,187	1,490	18,585	2,100	18,585	2,100	21,240	2,400	27,435	3,100
T_L	4,800	542	8,160	922	9,840	1,112	13,200	1,492	16,800	1,898
T_p	19,200	2,169	27,120	3,064	32,400	3,661	39,960	4,515	52,800	5,966
Dimensional Data (inches and millimeters except where noted)										
B	20"		20"		20"		22"		22"	
B (SC)	15"		8"		8"		8"		5"	
	inch	mm	inch	mm	inch	mm	inch	mm	inch	mm
A	3.88	98.6	4.62	117.3	4.62	117.3	5.88	149.4	5.88	149.4
B	2.38	60.5	2.75	69.9	2.75	69.9	3.75	95.3	3.75	95.3
C	3.75	95.3	4.25	108.0	4.69	119.1	4.81	122.2	5.63	143.0
D ⁽¹⁾	2.50	63.5	3	76.2	3.50	88.9	3.50	88.9	3.50	88.9
E	0.06	1.5	0.06	1.5	0.06	1.5	0.06	1.5	0.06	1.5
F	0.38	9.7	0.38	9.7	0.38	9.7	0.38	9.7	0.38	9.7
K	1.38	35.1	1.56	39.6	1.69	42.9	2	50.8	2	50.8
K (SC)	1.38	35.1	1.56	39.6	1.69	42.9	1.50	38.1	2	50.8
DBC	3.12	79.2	3.75	95.3	3.75	95.3	4.75	120.7	4.75	120.7
Bolt Qty.	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
H	0.38	9.7	0.44	11.2	0.44	11.2	0.50	12.7	0.50	12.7
Minimum Length L⁽²⁾ / Length Compensation S										
ST L	13	330.2	14.88	378.0	14.13	358.9	15.25	387.4	15.38	390.7
S	3.06	77.7	3.62	91.9	3.47	88.1	2.50	63.5	2.50	63.5
SF L	7.67	194.8	8.59	218.2	9.03	229.4	10.03	254.8	10.80	274.3
SC L	8.88	225.6	9.50	241.3	9.50	241.3	8.50	215.9	9.75	247.7
S	1.25	31.8	0.75	19.1	0.75	19.1	1	25.4	1	25.4

Πίνακας 1. 1: Τυπικές τιμές παραμέτρων επιλογής διαστάσεων συνδέσμου

1.3.4 Συντήρηση

Η συντήρηση ενός συνδέσμου *Cardan* μπορεί να δοθεί από την παρακάτω σχέση :

$$B_{10} = \frac{1,5 \cdot 10^6}{n \cdot \theta} \left(\frac{T_d}{T} \right)^{\frac{10}{3}} \quad (1.5)$$

όπου B_{10} : ο χρόνος συντήρησης σε ώρες

n : η ταχύτητα περιστροφής του άξονα

θ : η γωνία του συνδέσμου

T_d : η αντοχή του συνδέσμου

T : η ροπή του άξονα

1.3.4.1 Λίπανση

Για την καλύτερη απόδοση των συνδέσμων αλλά και την αύξηση του χρόνου συντήρησης, συνίσταται η χρήση λιπαντικών τα οποία να έχουν τα εξής χαρακτηριστικά :

- Καλής ποιότητας λιπαντικό με αντοχή υψηλών πιέσεων
- Φόρτιση Timken τουλάχιστον 23 kg
- Θερμοκρασία λειτουργίας από -23 έως 163° C

1.4 Αστοχία

Η μετάδοση με χρήση συνδέσμων *Cardan* στα οχήματα και στις διάφορες βιομηχανικές μηχανές είναι μέρος της κινηματικής αλυσίδας που μεταφέρει περιστροφική κίνηση από τη μηχανή στους κινητήριους τροχούς ή στα κινούμενα μέρη. Η αντίσταση στη μετάδοση κίνησης μέσω των συνδέσμων *Cardan* υπολογίζεται για τα κύρια στοιχεία, τα οποία είναι κι αυτά που επιφορτίζονται περισσότερο, δηλαδή οι άξονες, οι συνδέσεις και οι στηρίξεις (ρουλεμάν) ανάλογα με τις φορτίσεις και τις συνθήκες λειτουργίας. Μετά από έρευνες, έχει αποδειχθεί ότι τα στοιχεία που φορτίζονται περισσότερο είναι οι δύο σταυροί του συνδέσμου *Cardan*. [6]

Αναλυτικότερα, με βάση πειραματικές δοκιμές, προέκυψε ότι στα μοντέλα που μελετήθηκαν βρέθηκαν διάφορες ζώνες παραμετρικών ασταθειών. Αυτές είναι ζώνες :

- κύριων παραμετρικών ασταθειών
- συνδυασμένου τύπου
- διαφορικού συνδυασμένου τύπου

Οι παραμετρικές αστάθειες εμφανίζονται σε σημαντικά μεγέθη ακόμη και σε κανονικές λειτουργικές συνθήκες. Βέβαια, σε πραγματικά μοντέλα αυτοκινήτων φαίνεται να

εμφανίζονται μόνο εκτός κανονικών ορίων λειτουργίας. Ακόμη, σε ένα σύστημα που οδηγείται από ένα σύνδεσμο *Cardan* εμφανίζονται και αυτο-διεγερόμενες αστάθειες που προκαλούνται λόγω της μεταδιδόμενης ροπής όταν οι άξονες δεν είναι συγγραμμικοί.

Οι αστοχίες των συνδέσμων *Cardan* έχουν, κατά κύριο λόγο, προοδευτικό χαρακτήρα και επιταχύνονται γρήγορα με αποτέλεσμα την δημιουργία μιας μάζας λιωμένων αξόνων περιστροφής και εδράνων.

1.4.1 Αίτια

1. Ανισορροπία Κινητήριου άξονα

Ο κινητήριος άξονας σε ένα όχημα περιστρέφεται συνήθως σε ένα υψηλότερη συχνότητα από ό, τι του ελαστικού. Για το λόγο αυτό τα ημιαξόνια θα πρέπει να είναι ευθυγραμμισμένοι (καλιμπραρισμένοι). [7]

2. Κρίσιμη Ταχύτητα

Κάθε κινητήριος άξονας έχει μια κρίσιμη ταχύτητα. Κρίσιμη ταχύτητα είναι το σημείο στο οποίο ο περιστρεφόμενος κινητήριος άξονας αρχίζει να κάμπτεται(αποκλίνει) από την κεντρική γραμμή περιστροφής του. Οι κινητήριοι άξονες αρχίζουν να δονούνται καθώς πλησιάζουν κρίσιμη ταχύτητα. Αν λειτουργούν σε σχεδόν κρίσιμη ταχύτητα για μια παρατεταμένη περίοδο, συχνά αστοχούν. Η τιμή της κρίσιμης ταχύτητας επηρεάζεται από την ισορροπία του άξονα αλλά και τη γωνία λειτουργίας.

3. Γωνίες λειτουργίας

Κάθε άρθρωση που λειτουργεί υπό γωνία εμφανίζει δονήσεις. Μάλιστα, αποτελούν την πιο κοινή αιτία εμφάνισης δονήσεων. Συμβάλλουν σε προβλήματα που συσχετίζονται με :

- Δονήσεις
- Μειωμένη διάρκεια ζωής
- Αστοχίες μετάδοσης του κιβωτίου ταχυτήτων
- Προβλήματα συγχρονισμού
- Προβλήματα διαφορικού
- Αστοχία στις στεγανοποιήσεις

Γνωρίζουμε ότι λόγω των χαρακτηριστικών των συνδέσμων, ακόμη και αν ο κινητήριος άξονας δέχεται σταθερή ροπή και γωνιακή ταχύτητα, ο κινούμενος άξονας λαμβάνει κυμαινόμενη γωνιακή ταχύτητα, καμπτική και στρεπτική ροπή. Αυτά είναι πηγές παραμετρικών και εξαναγκασμένων ασταθειών.

4. Καμπτικές ροπές

Οι καμπτικές ροπές προκαλούν ισχυρές παραμετρικές αστάθειες στο σύστημα και, αν συμπεριληφθεί και η ελαστικότητα των αξόνων, τότε οδηγούμαστε σε νέες ζώνες αστάθειας. Αυτές οι ζώνες, ανάλογα με τις φυσικές παραμέτρους του συστήματος, μπορεί να εμφανιστούν ακόμη και σε επιτρεπόμενες συνθήκες λειτουργίας, εάν η γωνιακή ταχύτητα φθάσει σε τιμή ίση με τη φυσική συχνότητα του συστήματος δια δύο. Μετά από πειράματα, βρέθηκε ότι σε γραμμικά τόσο άκαμπτα όσο και εύκαμπτα συστήματα υπάρχουν αστάθειες για όλες τις τιμές της ταχύτητας περιστροφής και της ροπής, όταν η απόσβεση είναι μηδέν, για εργαστηριακά αλλά και για πραγματικά μοντέλα αυτοκινήτων. Ωστόσο, για μικρές τιμές της απόσβεσης, οι ζώνες μετακινούνται εκτός των πρακτικών λειτουργικών περιοχών. Όσον αφορά τις παραμετρικές αστάθειες, διαπιστώθηκε ότι οι καμπτικές ροπές μπορούν να προκαλέσουν ισχυρές παραμετρικές αστάθειες στο σύστημα. Οι υπόλοιπες ροπές επίσης οδηγούν σε αστάθειες που, σε σύγκριση με αυτές που προκαλούνται από τις καμπτικές ροπές, βρέθηκαν να είναι μικρές.

5. Διακύμανση της γωνιακής ταχύτητας

Η διακύμανση της γωνιακής ταχύτητας του κινητήριου άξονα οδηγεί κι αυτή σε παραμετρικές αστάθειες. Αυτές είναι επίσης χαμηλές σε σύγκριση με αυτές που προκαλούνται από τις ροπές κάμψης.

6. Φθορά υλικού κατασκευής

Οι αιτίες που οδηγούν στην αστοχία των συνδέσμων Cardan είναι, σε αρκετές περιπτώσεις, οι παράμετροι που φθείρουν το υλικό κατασκευής τους. Οι παράμετροι αυτοί μπορεί να είναι η επιφανειακή πίεση, η λίπανση και η διακύμανση της φόρτισης.

7. Μικτή τριβή

Η φθορά των συνδέσμων εμφανίζεται σε συνθήκες μικτής τριβής ως αποτέλεσμα των δυσμενών συνθηκών λειτουργίας που δημιουργούνται από υψηλές φορτίσεις, δυσμενή λίπανση και απόξεση μεταξύ των επιφανειών ολίσθησης. Μάλιστα, η σκόνη και αλλά και το μέγεθος των επιφανειών ολίσθησης λειτουργούν ως αντίθετα λιπαντικά οδηγώντας έτσι σε αυξημένη φθορά.

8. Καταστροφή λιπαντικού φιλμ

Η καταστροφή αυτή μπορεί να προέρχεται από έλλειψη λιπαντικού, ανεπαρκή ποιότητα λιπαντικού ή αποτυχία στη σωστή και συχνή λίπανση.

9. Εγκατάσταση

Οι φθορές που συσχετίζονται με την εγκατάσταση μπορεί να οφείλονται σε κατασκευαστικές αποκλίσεις, υπερβολικά υψηλές γωνίες απόκλισης των αξόνων και μεγάλα μήκη άξονα για τις ταχύτητες λειτουργίας.

1.4.2 Σημάδια Φθοράς

Μερικά αναγνωρίσιμα σημάδια της φθοράς είναι :

1. Δονήσεις
2. Χαλάρωση (λασκάρισμα)
3. Αποχρωματισμός, που οφείλεται στην υπερβολική συσσώρευση θερμότητας
4. Αδυναμία καθαρισμού των στεγανοποιήσεων με τη λίπανση

Μάλιστα, τα σημάδια 2 έως 4 πρέπει να ελέγχονται σε κάθε συντήρηση του συνδέσμου.

1.4.3 Λύσεις

Μία αύξηση στην απόσβεση του εδράνου θα σταθεροποιήσει το σύστημα, αφού οι ζώνες παραμετρικής αστάθειας εμφανίζονται για υψηλότερες τιμές ροπών όταν αυξάνεται η απόσβεση. Κυρίως επηρεάζονται οι ζώνες διαφορικού συνδυασμένου τύπου, ενώ και οι άλλες δύο επηρεάζονται αλλά σε μικρότερο βαθμό. Μάλιστα, έχουν προταθεί και συγκεκριμένα μοντέλα για την επιλογή της κατάλληλης απόσβεσης.

Σε πολλές κατασκευές, όπως αυτές σε βαρέα οχήματα, που δέχονται υψηλά φορτία, για την μείωση της φθοράς οι σύνδεσμοι ενισχύονται με πλαϊνά επιθέματα στις θέσεις ένωσης του σταυρού τα οποία συνήθως κατασκευάζονται από κράματα χαλκού – αλουμινίου ή πλαστικό, τα οποία αποτελούν στοιχεία που μπορούν να αντικατασταθούν αν φθαρούν. Τα υπόλοιπα στοιχεία του συνδέσμου κατασκευάζονται από θερμικά επεξεργασμένο χάλυβα, ώστε να είναι ανθεκτικά στη φθορά για τεχνικούς αλλά και οικονομικούς λόγους, αφού η αντικατάστασή τους αποτελεί σημαντική δαπάνη.

Όσον αφορά την επίδραση της κρίσιμης ταχύτητας, μπορούμε να αυξήσουμε την τιμή της είτε αυξάνοντας τη διάμετρο του άξονα είτε μικραίνοντας το μήκος του.

Ακόμη, η ασυμμετρία της δυσκαμψίας της στήριξης έχει μια σταθεροποιητική επίδραση επί του συστήματος.

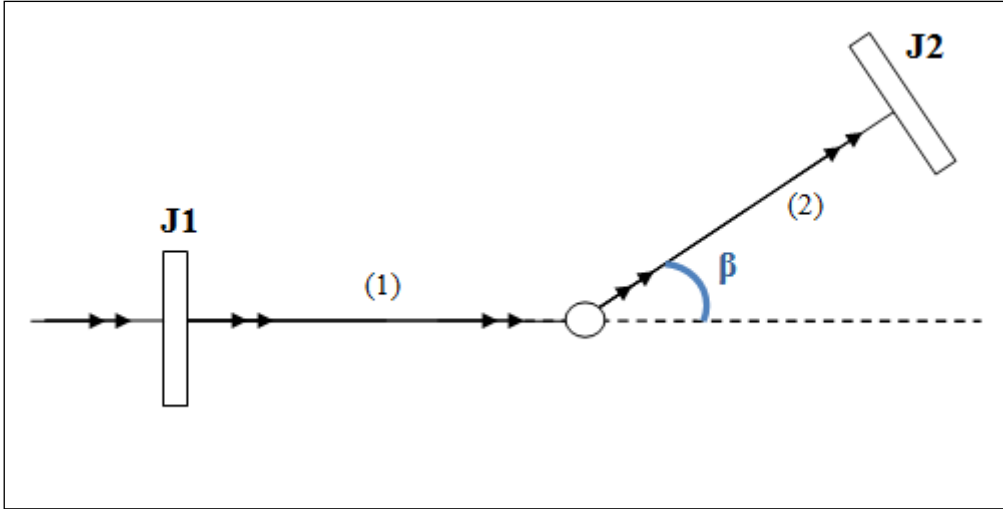
2

Μαθηματική Επίλυση Δυναμικού Μοντέλου

Στο κεφάλαιο αυτό, θα γίνει μία πρώτη προσέγγιση ενός δυναμικού συστήματος το οποίο περιλαμβάνει έναν σύνδεσμο *Cardan*. Τα συστήματα αυτά, περιγράφονται από διαφορικά συστήματα εξισώσεων και η επίλυσή τους προς εύρεση της απόκρισής τους αποτελεί μια πολύπλοκη διαδικασία, η οποία συνήθως γίνεται αναλυτικά. Όμως, στην παρούσα φάση θα γίνει μια προσέγγιση της λύσης του συστήματος μαθηματικά με τη βοήθεια υπολογιστικών φύλλων *excel*.

2.1 Δυναμικό Σύστημα Συνδέσμου Cardan

Για τη κατασκευή ενός μοντέλου στο οποίο περιλαμβάνεται ένας σύνδεσμος *Cardan*, θεωρούμε δύο άξονες που συνδέονται με το σύνδεσμο με μία γωνία λειτουργίας β . Κάθε άξονας μοντελοποιείται ως ένα σύστημα ενός βαθμού ελευθερίας που αποτελείται από ένα στροφικό ελατήριο k , και έναν στροφικό αποσβεστήρα c που συνδέονται με ένα δίσκο κυκλικής αδράνειας J , ενώ θεωρούμε ότι ο κινητήριος άξονας στρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα Ω_0 . Σε αυτό το σημείο, αξίζει να σημειώσουμε ότι το μοντέλο αυτό παρουσιάζει τη θεμελιώδη συμπεριφορά του συστήματος. [8],[9],[10]



Σχήμα 2.1 Δυναμικό σύστημα δυο βαθμών ελευθερίας με σύνδεσμο Cardan

Οι στρεπτικές ταλαντώσεις του συστήματος, περιγράφονται από το παρακάτω σύστημα εξισώσεων :

$$I_1 \ddot{\theta}_1 + c_1 \dot{\theta}_1 - \eta c_2 \dot{\theta}_2 + k_1 \theta_1 - \eta k_2 \theta_2 = 0 \quad (2.1)$$

$$I_2 [\ddot{\theta}_2 + \eta \ddot{\theta}_1 + \dot{\eta}(\Omega_0 + \dot{\theta}_1)] + c_2 \dot{\theta}_2 + k_2 \theta_2 = 0 \quad (2.2)$$

Όπου θ_1 και θ_2 είναι οι στρεπτικές συντεταγμένες, ενώ η διαφορίση γίνεται ως προς το χρόνο. Ως η , συμβολίζεται ο λόγος μετάδοσης ταχυτήτων μεταξύ των δύο αξόνων και δίνεται από τη σχέση :

$$\eta = \frac{\Omega_{out}}{\Omega_{in}} = \frac{\cos \beta}{1 - \sin^2 \beta \sin^2 \varphi_1} \quad (2.3)$$

Στην παραπάνω σχέση, συμμετέχει η γωνία λειτουργίας μεταξύ των αξόνων β ενώ η γωνία φ_1 ορίζεται ως :

$$\varphi_1 = \Omega_0 t + \theta_1 \quad (2.5)$$

κι εκφράζει τη συνολική γωνιακή θέση της εισόδου του συνδέσμου.

Αξίζει να σημειώσουμε πως, αν και έχουμε θεωρήσει ότι η γωνία β παραμένει σταθερή κατά την περιστροφική κίνηση του συστήματος, η γωνία φ μεταβάλλεται με το χρόνο με αποτέλεσμα και ο λόγος μεταβολής να είναι χρονικά μεταβαλλόμενος και εξαρτώμενος της γωνίας β του συστήματος.

2.2 Μαθηματική Επίλυση

Το παραπάνω σύστημα εξισώσεων αποτελεί ένα σύστημα γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με περιοδικούς συντελεστές, ή διαφορετικά, αποτελεί ένα σύστημα εξισώσεων *Mathieu* –

Hill. Η επίλυση των εξισώσεων αυτών υπόκειται σε δεδομένη μεθοδολογία που παρατίθεται ακολούθως.

2.2.1 Εξισώσεις Mathieu – Hill

Στα μαθηματικά, οι συναρτήσεις Mathieu είναι ορισμένες ειδικές συναρτήσεις χρήσιμες για την επίλυση μιας ποικιλίας προβλημάτων στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά.

Η κανονική μορφή για την διαφορική εξίσωση Mathieu είναι :

$$\frac{dy^2}{dx^2} + [a - 2q \cos(2x)]y = 0 \quad (2.6)$$

όπου a και q είναι πραγματικές σταθερές σε φυσικές εφαρμογές.

Η εξίσωση Mathieu είναι μια εξίσωση Hill με μόνο μία αρμονική κατάσταση.

Στενά συνδεδεμένη είναι η τροποποιημένη διαφορική εξίσωση του Mathieu :

$$\frac{dy^2}{du^2} - [a - 2q \cosh(2u)]y = 0 \quad (2.7)$$

η οποία προκύπτει από την αντικατάσταση $u = ix$.

Η υποκατάσταση $t = \cos(x)$ μετατρέπει την εξίσωση Mathieu στην αλγεβρική μορφή :

$$(1 - t^2) \frac{d^2y}{dt^2} - t \frac{dy}{dt} + (a + 2q(1 - 2t^2))y = 0 \quad (2.8)$$

Αυτή έχει δύο κανονικές ιδιομορφίες για $t = -1, 1$ και μια μη κανονική ιδιομορφία στο άπειρο, πράγμα που σημαίνει ότι σε γενικές γραμμές (σε αντίθεση με πολλές άλλες ειδικές συναρτήσεις), οι λύσεις της εξίσωσης Mathieu δεν μπορούν να εκφραστούν με όρους υπεργεωμετρικών συναρτήσεων.

Στα μαθηματικά, η εξίσωση Hill ή Hill διαφορική εξίσωση είναι η δεύτερης τάξης γραμμική συνήθης διαφορική εξίσωση :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + f(t)y = 0 \quad (2.9)$$

όπου $f(t)$ είναι περιοδική συνάρτηση.

Μπορούμε πάντα να υποθέσουμε ότι η περίοδος της $f(t)$ ισούται με π . Τότε, η εξίσωση Hill μπορεί να ξαναγραφεί με τη χρήση της σειράς Fourier της $f(t)$:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \left(\theta_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n \cos(2nt) + \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m \sin(2mt) \right) y = 0 \quad (2.10)$$

Σημαντικές ειδικές περιπτώσεις της εξίσωσης του Hill περιλαμβάνουν την εξίσωση Mathieu στην οποία περιλαμβάνονται μόνο οι όροι που αντιστοιχούν σε $n = 0, 1$.

Η εξίσωση Hill είναι ένα σημαντικό παράδειγμα στην κατανόηση των περιοδικών διαφορικών εξισώσεων. Ανάλογα με το ακριβές σχήμα της $f(t)$, οι λύσεις μπορεί να οριοθετούνται για όλο το χρόνο, ή το πλάτος των ταλαντώσεων σε λύσεις μπορεί να αυξηθεί

εκθετικά. Η ακριβής μορφή των λύσεων με την εξίσωση Hill, περιγράφεται από την θεωρία Floquet.

2.2.2 Θεωρία Floquet

Η θεωρία Floquet είναι ένας κλάδος της θεωρίας των συνήθων διαφορικών εξισώσεων που σχετίζονται με την κατηγορία των λύσεων σε περιοδικές γραμμικές διαφορικές εξισώσεις της μορφής :

$$\dot{x} = A(t)x \quad (2.11)$$

με $A(t)$ μία τμηματική συνεχή περιοδική συνάρτηση με περίοδο T που ορίζει την σταθερότητα των λύσεων.

Το βασικό θεώρημα της θεωρίας Floquet, δίνει μια κανονική μορφή για κάθε θεμελιώδη μήτρα λύσεων αυτού του κοινού γραμμικού συστήματος. Δίνει μια αλλαγή συντεταγμένων:

$$y = Q^{-1}(t)x \quad (2.12)$$

με

$$Q(t + 2T) = Q(t) \quad (2.13)$$

που μετατρέπει το περιοδικό σύστημα σε ένα παραδοσιακό γραμμικό σύστημα με σταθερούς, πραγματικούς συντελεστές.

Σημειώστε ότι οι λύσεις της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης σχηματίζουν ένα διάνυσμα χώρου. Μια μήτρα $\Phi(t)$ ονομάζεται θεμελιώδης μήτρα λύσεων αν όλες οι στήλες είναι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις και υπάρχει t_0 τέτοιο ώστε $\Phi(t_0)$ να είναι μια ταυτότητα. Μια κύρια θεμελιώδης μήτρα μπορεί να κατασκευαστεί από μια θεμελιώδη μήτρα χρησιμοποιώντας:

$$\Phi(t) = \varphi(t)\varphi^{-1}(t_0) \quad (2.14)$$

Η λύση της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (2.9) με την αρχική κατάσταση είναι $x(0) = x_0$ είναι:

$$x(t) = \varphi(t)\varphi^{-1}(0)x_0 \quad (2.15)$$

όπου $\varphi(t)$ είναι η θεμελιώδης μήτρα λύσεων.

Ας είναι ο $\dot{x} = A(t)x$ μια γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης, όπου $x(t)$ είναι ένα διάνυσμα στήλη μήκους n και $A(t)$ ένας $n \times n$ περιοδικός πίνακας με περίοδο T (δηλαδή $A(t + T) = A(t)$ για πραγματικές τιμές του t). Ας είναι ο $\Phi(t)$ μια θεμελιώδης μήτρα λύσεων αυτής της διαφορικής εξίσωσης. Τότε, για κάθε $t \in R$:

$$\Phi(t + T) = \varphi(t)\varphi^{-1}(0)\varphi(T) \quad (2.16)$$

Όπου $\varphi^{-1}(0)\varphi(T)$ είναι γνωστή ως μονόδρομη μήτρα. Επιπλέον, για κάθε μήτρα B (πιθανώς σύμπλεγμα) τέτοια ώστε:

$$e^{TB} = \varphi^{-1}(0)\varphi(T) \quad (2.17)$$

υπάρχει μια περιοδική (περίοδος T) συνάρτηση πίνακας $t \rightarrow P(t)$ τέτοια ώστε :

$$\varphi(t) = P(t)e^{tB} \quad (2.18)$$

για κάθε $t \in R$.

Επίσης, υπάρχει μια πραγματική μήτρα R και μια πραγματική περιοδική (περίοδος $2T$) μήτρα συναρτήσεων $t \rightarrow Q(t)$ τέτοια ώστε για κάθε $t \in R$ να ισχύει :

$$\varphi(t) = Q(t)e^{tR} \quad (2.19)$$

Στα παραπάνω B, P, Q και R είναι $n \times n$ μήτρες.

Αυτή η αντιστοίχιση της (2.19) οδηγεί σε εξαρτώμενη από το χρόνο μεταβολή των συντεταγμένων $y = Q^{-1}(t)x$, βάσει του οποίου το αρχικό μας σύστημα γίνεται ένα γραμμικό σύστημα με πραγματικούς σταθερούς συντελεστές $\dot{y} = Ry$. Δεδομένου ότι $Q(t)$ είναι συνεχής και περιοδική πρέπει να οριοθετείται. Έτσι, η σταθερότητα της μηδενικής λύσης για $y(t)$ και $x(t)$ προσδιορίζεται από τις ιδιοτιμές του R .

Η αναπαράσταση $\varphi(t) = P(t)e^{tB}$ ονομάζεται κανονική μορφή Floquet για τη θεμελιώδη μήτρα $\varphi(t)$.

Οι ιδιοτιμές του e^{tB} ονομάζονται χαρακτηριστικοί πολλαπλασιαστές του συστήματος. Ένας εκθέτης Floquet (μερικές φορές ονομάζεται χαρακτηριστικός εκθέτης), είναι ένα συγκρότημα μ έτσι ώστε $e^{\mu T}$ να είναι ένας χαρακτηριστικός πολλαπλασιαστής του συστήματος.

Παρατηρήστε ότι οι εκθέτες Floquet δεν είναι μοναδικοί, δεδομένου ότι $e^{(\mu + \frac{2\pi ik}{T})T} = e^{\mu T}$, όπου το k είναι ένας ακέραιος. Τα πραγματικά μέρη των εκθετών Floquet ονομάζεται εκθέτες Lyapunov. Η μηδενική λύση είναι ασυμπτωτικά σταθερή αν όλοι οι εκθέτες Lyapunov είναι αρνητικοί, οι σταθερές Lyapunov εάν οι εκθέτες Lyapunov είναι μη – θετικοί και ασταθείς.

2.3 Επίλυση Συστήματος

Στην προηγούμενη παράγραφο, περιγράψαμε σύντομα τη θεωρία που διέπει τη μαθηματική επίλυση του συστήματος. Δεδομένου ότι στο στάδιο αυτό θέλουμε μια προσέγγιση της συμπεριφοράς του συστήματος θα αγνοήσουμε την επίδραση της τάξεως του συστήματος και θα λύσουμε το σύστημα πιο απλοϊκά. Ουσιαστικά, θα επιχειρήσουμε μια προσέγγιση της ροπής εξόδου που λαμβάνουμε σε σχέση τόσο με την ταχύτητα περιστροφής όσο και με τη γωνία λειτουργίας.

2.3.1 Δεδομένα

Η ταχύτητα εισόδου σε ένα σύστημα αξόνων που ενώνονται με ένα σύνδεσμο *Cardan* θεωρείται σταθερή. Αν θεωρήσουμε ότι το σύστημα αξόνων βρίσκεται σε ένα όχημα, τότε η γωνιακή ταχύτητα εισόδου, που αντιστοιχεί σε μία ροπή εισόδου, προέρχεται από έναν κινητήρα.[11] Ως δεδομένα λάβαμε τις τιμές ταχύτητας – ροπής που χαρακτηρίζουν έναν τυπικό κινητήρα diesel 450 hp, τα οποία παρουσιάζονται στον πίνακα 2.1 :

<u>ΣΤΡΟΦΕΣ ΜΗΧΑΝΗΣ (RPM)</u>	<u>ΡΟΠΗ ΜΗΧΑΝΗΣ (LB ft)</u>
600	550
800	700
1000	1250
1200	1250
1400	1250
1600	1070
1800	900
2000	800
2200	0

Πίνακας 2. 1: Τιμές ροπής – στροφών κινητήρα 450hp

Οι τιμές αυτές προέκυψαν προσεγγιστικά από το διάγραμμα ροπής – στροφών του κινητήρα. Για την γωνία λειτουργίας β λάβαμε τιμές από 5 έως 40°, που αποτελούν τα συνήθη όρια γωνίας λειτουργίας για τους άξονες που ενώνει ο σύνδεσμος, με βάση πειράματα. Αντίθετα, η γωνία φ λαμβάνει τιμές από 0 έως 360°, αφού ουσιαστικά παρουσιάζει την περιστροφή του άξονα εισόδου, η οποία δεν υπόκειται σε κανένα περιορισμό.

2.3.2 Εξισώσεις

Για να προσεγγίσουμε απλώς την γωνιακή ταχύτητα εξόδου του συνδέσμου *Cardan*, αρκεί να χρησιμοποιήσουμε το λόγο μετάδοσης ταχυτήτων, αφού θεωρούμε δεδομένη την ταχύτητα εισόδου. Υπενθυμίζουμε πως ο λόγος μετάδοσης ταχυτήτων δίνεται από τη σχέση :

$$\eta = \frac{\Omega_{out}}{\Omega_{in}} = \frac{\cos \beta}{1 - \sin^2 \beta \sin^2 \varphi_1} \quad (2.20)$$

Ακόμη, στο σύστημα αυτό η ροπή διατηρείται, επομένως θα ισχύει :

$$M_{in} \Omega_{in} = M_{out} \Omega_{out} \quad (2.21)$$

Έτσι, εφόσον γνωρίζουμε την γωνιακή ταχύτητα εξόδου μπορούμε να βρούμε τη ροπή εξόδου. Από τη μεταφερόμενη ροπή, μπορούμε να κάνουμε τόσο μια εκτίμηση του βαθμού απόδοσης του συνδέσμου αλλά και των απωλειών ροπής, οι οποίες ουσιαστικά αποτελούν τις δονήσεις του συστήματος.

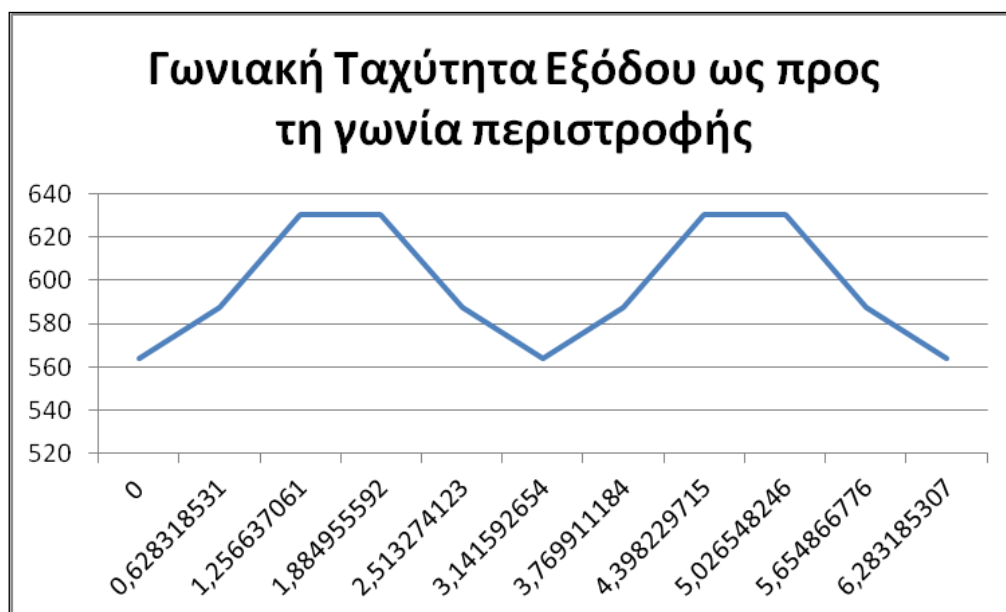
Η παραπάνω διαδικασία πραγματοποιείται με τη βοήθεια των υπολογιστικών φύλλων *excel*.

2.4 Αποτελέσματα

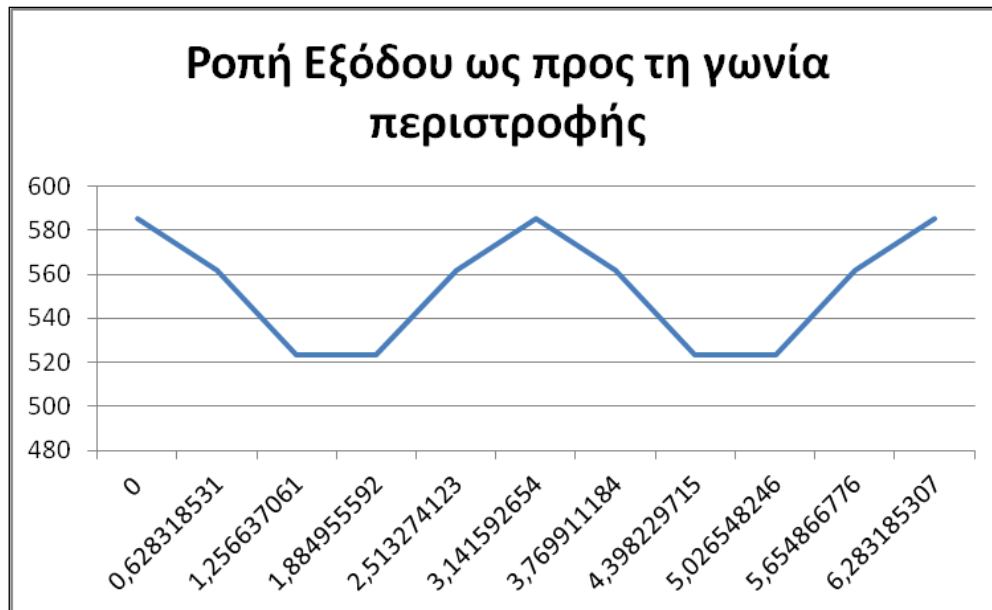
2.4.1 Αναλυτική Περιγραφή για Γωνία Λειτουργίας $\beta = 20^\circ$

Γνωρίζουμε ότι, βάσει πειραμάτων, η συνηθέστερη τιμή της γωνίας λειτουργίας ενός συνδέσμου *Cardan* είναι 20° , καθώς θεωρείται ότι σε αυτή την τιμή έχουμε καλύτερη απόδοση. Για το λόγο αυτό, επιλέγουμε, για αυτή την πρώτη προσεγγιστική μελέτη λειτουργίας του συνδέσμου, να αναλύσουμε τα αποτελέσματα για αυτή τη γωνία λειτουργίας.

Έτσι, αν λάβουμε ως γωνιακή ταχύτητα εισόδου $\Omega_{in} = 600$ rpm και αντίστοιχη ροπή $M_{in} = 550$ LB ft, η έξοδος του συστήματος είναι :



Σχήμα 2.2 Γωνιακή ταχύτητα εξόδου ως προς τη γωνία περιστροφής για ταχύτητα εισόδου $\Omega_{in} = 600$ rpm

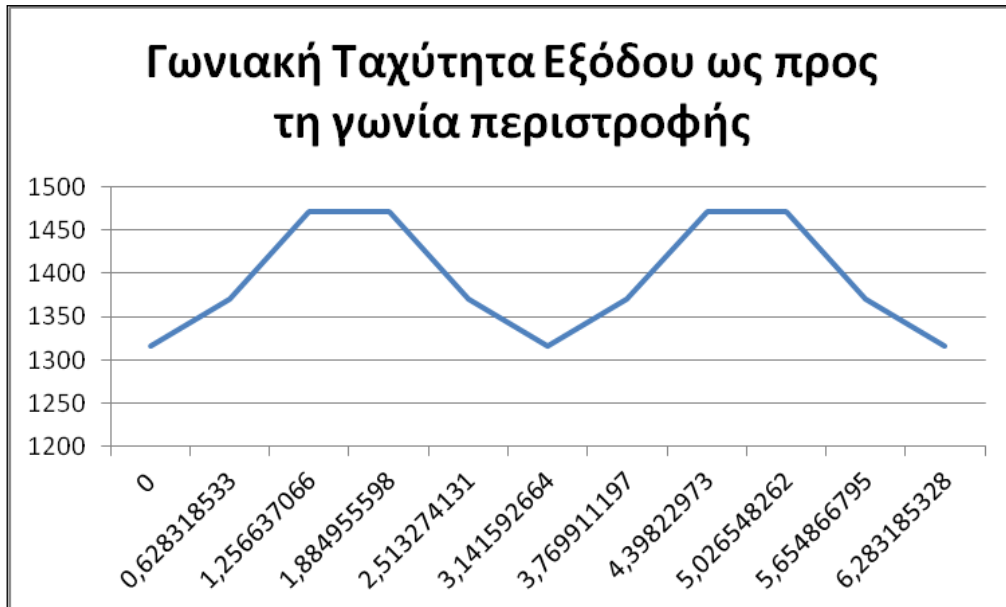


Σχήμα 2.3 Ροπή εξόδου ως προς τη γωνία περιστροφής για για ταχύτητα εισόδου $\Omega_{in} = 600$ rpm

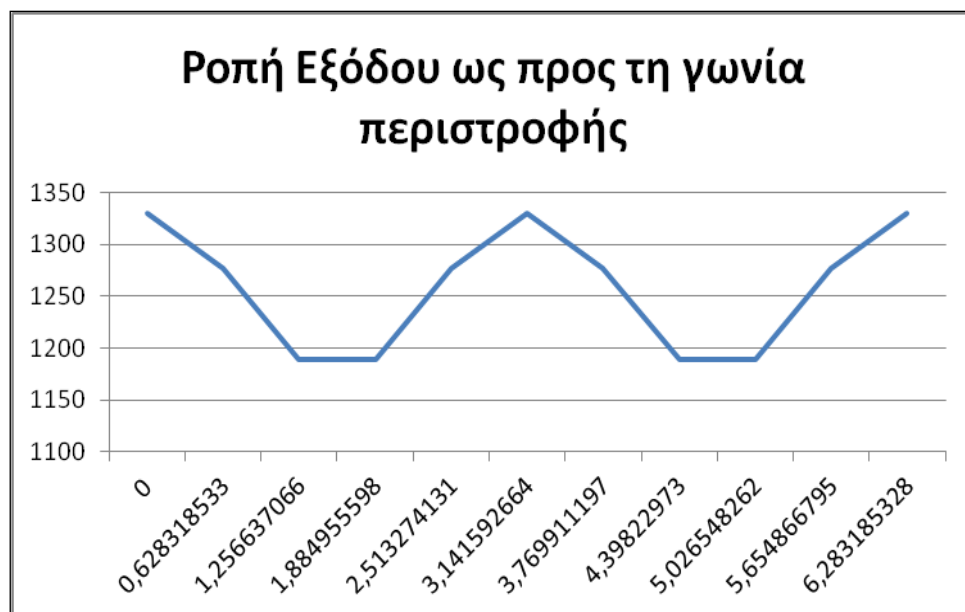
Στα *σχήματα 2.1 και 2.2* βλέπουμε την γωνιακή ταχύτητα εξόδου καθώς και τη ροπή εξόδου από το σύνδεσμο σε συνάρτηση με τη γωνία περιστροφής του άξονα, για τις δοσμένες τιμές εισόδου. Αρχικά, πρέπει να αναφέρουμε πως η μορφή του διαγράμματος δεν είναι εξαιρετικά ακριβής αφενός γιατί στην προσέγγισή μας έχουν αμεληθεί αρκετές παράμετροι και αφετέρου γιατί η μελέτη έγινε για μία μόνο πλήρη περιστροφή του άξονα. Παρόλα αυτά, μπορούμε να εξάγουμε τα εξής συμπεράσματα. Αν και η είσοδος, δηλαδή η ταχύτητα, ελήφθη σταθερή, η γωνιακή ταχύτητα εξόδου έχει ημιτονοειδή μορφή με δύο πλήρεις κύκλους σε μία περιστροφή. Από την άλλη, αντίστοιχα αποτελέσματα λαμβάνουμε και για τη ροπή, η οποία βέβαια έχει συνημιτονοειδή μορφή, αφού είναι αντιστρόφως ανάλογη της ταχύτητας. Ακόμη, παρατηρούμε πως οι ταλαντώσεις γίνονται κοντά στην τιμή εισόδου, ενώ ακόμη και στις ακραίες τιμές δεν έχουμε μεγάλες αποκλίσεις από την είσοδο.

Ενδεικτικά, στα *σχήματα* που ακολουθούν, βλέπουμε την απόκριση του συστήματος για άλλες δύο ταχύτητες εισόδου, 1400 και 2000 rpm.

- Για γωνιακή ταχύτητα εισόδου $\Omega_{in} = 1400$ rpm



Σχήμα 2.4 Γωνιακή ταχύτητα εξόδου ως προς τη γωνία περιστροφής για ταχύτητα εισόδου $\Omega_{in} = 1400$ rpm



Σχήμα 2.5 Ροπή εξόδου ως προς τη γωνία περιστροφής για ταχύτητα εισόδου $\Omega_{in} = 1400$ rpm

- Για γωνιακή ταχύτητα εισόδου $\Omega_{in} = 2000$ rpm



Σχήμα 2.6 Γωνιακή ταχύτητα εξόδου ως προς τη γωνία περιστροφής για ταχύτητα εισόδου $\Omega_{in} = 2000$ rpm



Σχήμα 2.7 Ροπή εξόδου ως προς τη γωνία περιστροφής για ταχύτητα εισόδου $\Omega_{in} = 2000$ rpm

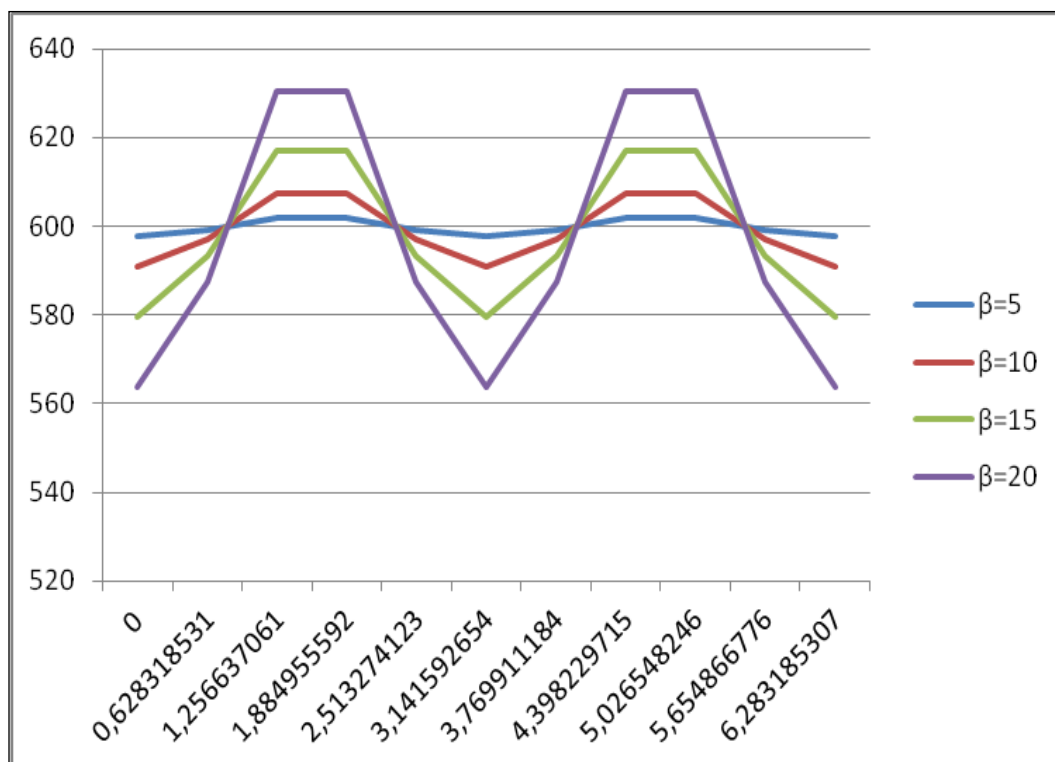
Παρατηρούμε ότι τα αποτελέσματα (σχήματα 2.4 έως 2.7) είναι αντίστοιχα με αυτά που ελήφθησαν για γωνιακή ταχύτητα εισόδου 600rpm, αν και όσο αυξάνεται η ταχύτητα εισόδου τόσο αυξάνεται η απόκλιση της τιμής εξόδου από αυτήν, σε μικρό ποσοστό βέβαια. Το φαινόμενο αυτό θα αναλυθεί σε επόμενη παράγραφο.

2.4.2 Επίδραση Γωνίας Λειτουργίας

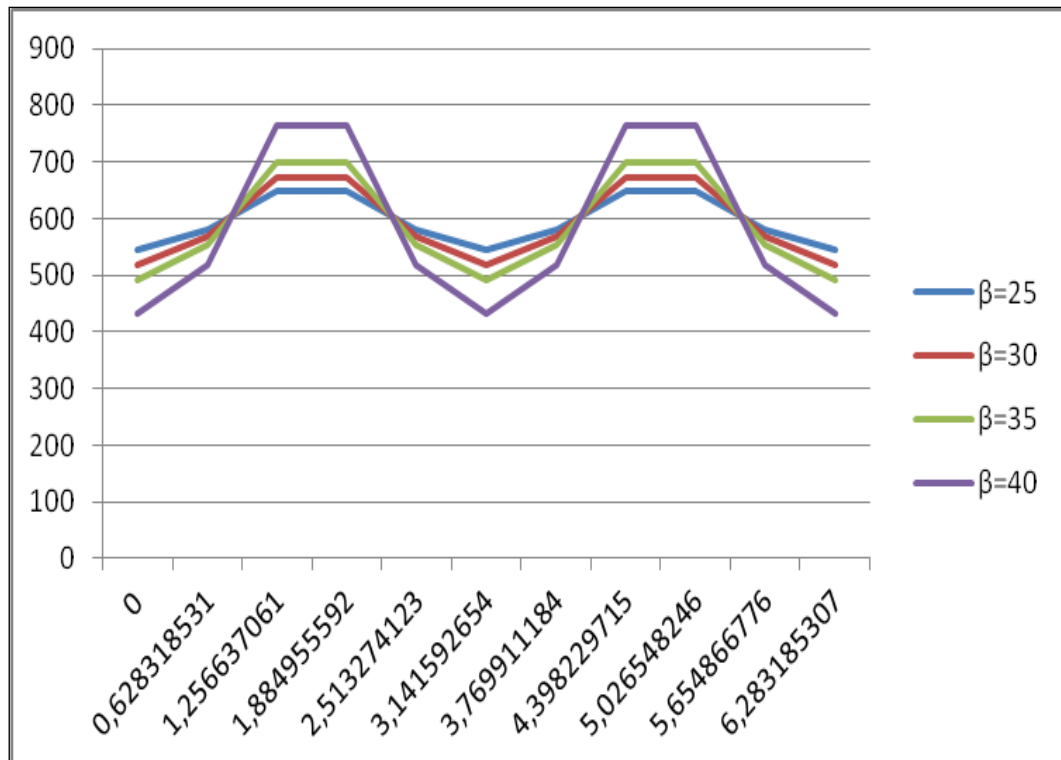
Στην προηγούμενη ενότητα περιγράψαμε την απόκριση του συστήματος για δεδομένη ταχύτητα εισόδου και γωνία λειτουργίας. Όμως, γνωρίζουμε πως η γωνία λειτουργίας έχει μεγάλη επίδραση στη συμπεριφορά του συνδέσμου *Cardan*. Επομένως, έχει μεγάλο ενδιαφέρον να συγκρίνουμε, για δεδομένη ταχύτητα εισόδου, την απόκριση του συστήματος για διάφορες γωνίες λειτουργίας.

Έτσι, θεωρήσαμε μία σταθερή ταχύτητα περιστροφής, και μεταβάλλοντας τη γωνία λειτουργίας, μπορούμε να δούμε την επίδρασή της στην ταχύτητα εξόδου. Για την εξαγωγή των συμπερασμάτων, εξετάσαμε ταχύτητες από 600 – 2200 rpm και γωνίες από 5 έως 40°, όσο και το φάσμα λειτουργίας ενός συνδέσμου *Cardan*. Ωστόσο, για πρακτικούς λόγους στα σχήματα που ακολουθούν θα παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα για ταχύτητες 600, 1000, 1400 rpm αντίστοιχα.

- Για γωνιακή ταχύτητα εισόδου $\Omega_{in} = 600 \text{ rpm}$



Σχήμα 2.8 Γωνιακή ταχύτητα εξόδου ως προς τη γωνία περιστροφής για ταχύτητα εισόδου $\Omega_{in} = 600$ rpm και γωνία β από 5 έως 20°

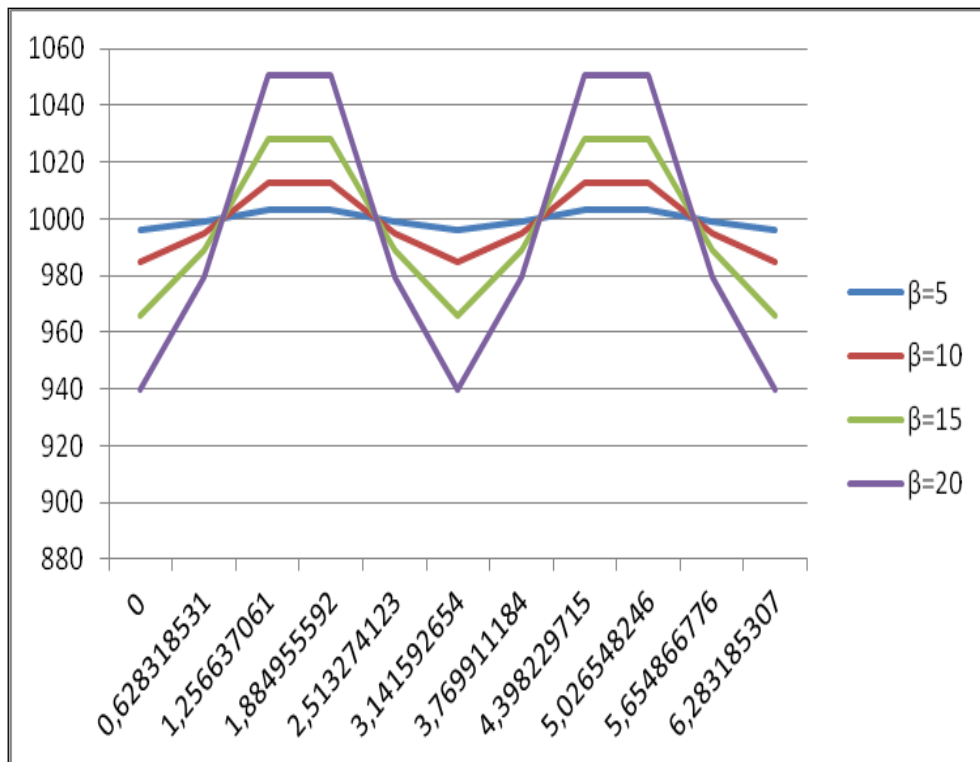


Σχήμα 2.9 Γωνιακή ταχύτητα εξόδου ως προς τη γωνία περιστροφής για ταχύτητα εισόδου $\Omega_{in} = 600$ rpm και γωνία β από 25 έως 40°

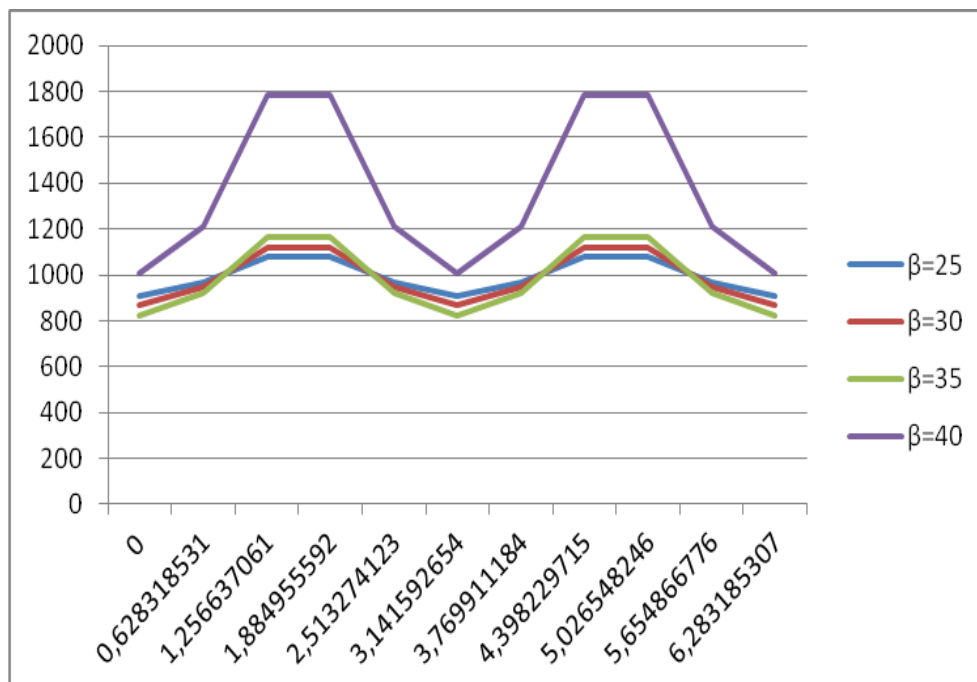
Παρατηρούμε, στα σχήματα 2.8 και 2.9, πως για δεδομένη ταχύτητα εισόδου λαμβάνουμε διαφορετικές τιμές της ταχύτητας εξόδου ανάλογα με τη γωνία λειτουργίας β . Αναλυτικότερα, βλέπουμε πως, παρόλο που η μορφή της ταλάντωσης είναι όμοια, το πλάτος της αυξάνεται με την αύξηση της γωνίας β .

Ανάλογα αποτελέσματα, όπως φαίνονται και στα ακόλουθα σχήματα (2.10 έως 2.13), λαμβάνουμε και για άλλες γωνιακές ταχύτητες εισόδου, 1000 και 1400 rpm.

- Για γωνιακή ταχύτητα εισόδου $\Omega_{in} = 1000 \text{ rpm}$

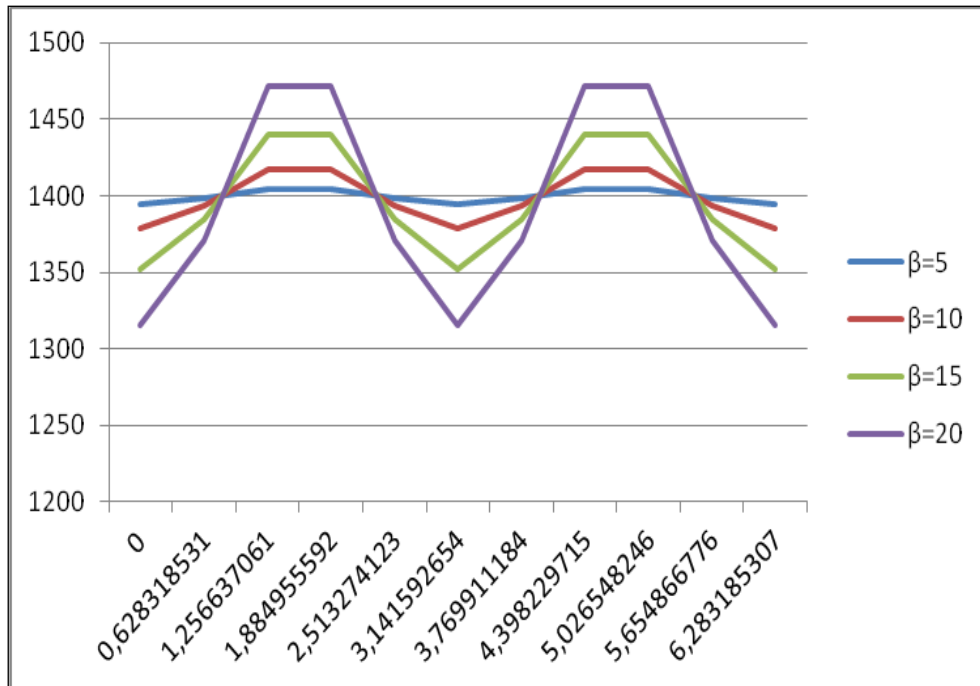


Σχήμα 2.10 Γωνιακή ταχύτητα εξόδου ως προς τη γωνία περιστροφής για ταχύτητα εισόδου $\Omega_{in} = 1000 \text{ rpm}$ και γωνία β από 5 έως 20°

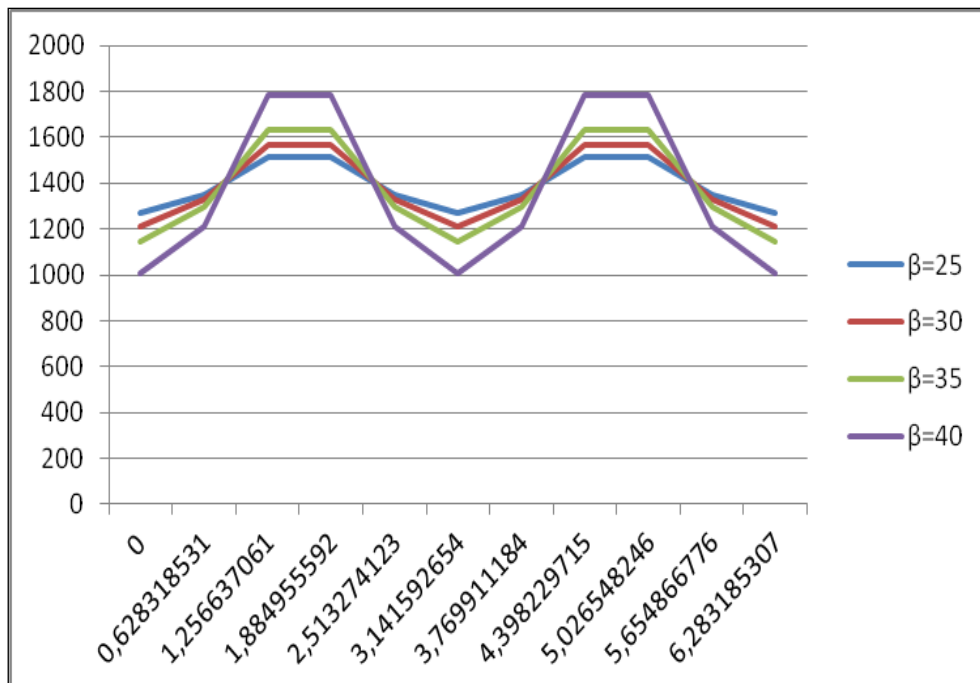


Σχήμα 2.11 Γωνιακή ταχύτητα εξόδου ως προς τη γωνία περιστροφής για ταχύτητα εισόδου $\Omega_{in} = 1000 \text{ rpm}$ και γωνία β από 25 έως 40°

- Για γωνιακή ταχύτητα εισόδου $\Omega_{in} = 1400 \text{ rpm}$



Σχήμα 2.12 Γωνιακή ταχύτητα εξόδου ως προς τη γωνία περιστροφής για ταχύτητα εισόδου $\Omega_{in} = 1400 \text{ rpm}$ και γωνία β από 5 έως 20°



Σχήμα 2.13 Γωνιακή ταχύτητα εξόδου ως προς τη γωνία περιστροφής για ταχύτητα εισόδου $\Omega_{in} = 1400 \text{ rpm}$ και γωνία β από 25 έως 40°

2.4.3 Επίδραση Ταχύτητας Εισόδου

Αφού παρατηρήσαμε την επίδραση της γωνίας λειτουργίας, στην παράγραφο αυτή, καλούμαστε να μελετήσουμε την επίδραση της ταχύτητας εισόδου, με δεδομένη τη γωνία, στην έξοδο του συστήματος. Η προσπάθεια αυτή γίνεται, γιατί όπως έχει ήδη περιγραφεί στη θεωρία που διέπει ένα σύνδεσμο *Cardan*, για κάποιες ταχύτητες περιστροφής ένας σύνδεσμος είναι πιθανό να έχει πολύ μεγάλες απώλειες με αποτέλεσμα να μην είναι συμφέρουσα η μετάδοση κίνησης και ροπής ή να οδηγεί σε αστοχία των στηρίξεων.

Πρακτικά, τα συμπεράσματά μας για την επίδραση της γωνιακής ταχύτητας εισόδου προέκυψαν συγκρίνοντας, για σταθερή γωνία λειτουργίας, την έξοδο του συστήματος για διάφορες τιμές της γωνιακής ταχύτητας εισόδου. Συγκεκριμένα, για γωνίες λειτουργίας από 5 έως 40°, σταθερές κάθε φορά, θεωρήθηκαν είσοδοι από 600 έως 2200 rpm. Για πρακτικούς λόγους, και πάλι, επιλέγουμε να παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα για γωνίες λειτουργίας $\beta = 5, 20$ και 35° .

- Για γωνία λειτουργίας $\beta = 5^\circ$

<u>Ω_{in}</u>	<u>Ω_{min}</u>	<u>Ποσοστό μείωσης</u>	<u>Ω_{max}</u>	<u>Ποσοστό αύξησης</u>
600	597,7168	-0,00381	601,852	0,003087
800	796,9558	-0,00381	802,4693	0,003087
1000	996,1947	-0,00381	1003,087	0,003087
1200	1195,434	-0,00381	1203,704	0,003087
1400	1394,673	-0,00381	1404,321	0,003087
1600	1593,912	-0,00381	1604,939	0,003087
1800	1793,15	-0,00381	1805,556	0,003087
2000	1992,389	-0,00381	2006,173	0,003087
2200	2191,628	-0,00381	2206,791	0,003087

Πίνακας 2. 2 Μεταβολή γωνιακής ταχύτητας εξόδου λόγω γωνιακής ταχύτητας εισόδου για $\beta = 5^\circ$

- Για γωνία λειτουργίας $\beta = 20^\circ$

<u>Ω_{in}</u>	<u>Ω_{min}</u>	<u>Ποσοστό μείωσης</u>	<u>Ω_{max}</u>	<u>Ποσοστό αύξησης</u>
600	563,8156	-0,06031	630,5303	0,050884
800	751,7541	-0,06031	840,7071	0,050884
1000	939,6926	-0,06031	1050,884	0,050884
1200	1127,631	-0,06031	1261,061	0,050884
1400	1315,57	-0,06031	1471,237	0,050884
1600	1503,508	-0,06031	1681,414	0,050884
1800	1691,447	-0,06031	1891,591	0,050884
2000	1879,385	-0,06031	2101,768	0,050884
2200	2067,324	-0,06031	2311,945	0,050884

Πίνακας 2. 3 Μεταβολή γωνιακής ταχύτητας εξόδου λόγω γωνιακής ταχύτητας εισόδου για $\beta = 20^\circ$

- Για γωνία λειτουργίας $\beta = 35^\circ$

<u>Ω_{in}</u>	<u>Ω_{min}</u>	<u>Ποσοστό μείωσης</u>	<u>Ω_{max}</u>	<u>Ποσοστό αύξησης</u>
600	491,4912	-0,18085	699,7055	0,166176
800	655,3216	-0,18085	932,9407	0,166176
1000	819,152	-0,18085	1166,176	0,166176
1200	982,9825	-0,18085	1399,411	0,166176
1400	1146,813	-0,18085	1632,646	0,166176
1600	1310,643	-0,18085	1865,881	0,166176
1800	1474,474	-0,18085	2099,117	0,166176
2000	1638,304	-0,18085	2332,352	0,166176
2200	1802,134	-0,18085	2565,587	0,166176

Πίνακας 2. 4 Μεταβολή γωνιακής ταχύτητας εξόδου λόγω γωνιακής ταχύτητας εισόδου για $\beta = 35^\circ$

Με βάση τα αποτελέσματα που παρατέθηκαν στους πίνακες 2.2 έως 2.4, μπορούμε να παρατηρήσουμε πως για κάθε γωνία λειτουργίας, η μεταβολή της γωνιακής ταχύτητας εξόδου δεν εξαρτάται από την ταχύτητα εισόδου, αφού το ποσοστό μεταβολής παραμένει σε κάθε περίπτωση σταθερό. Παρόλα αυτά, επιβεβαιώνεται ότι με την αύξηση της γωνίας η μεταβολή αυτή αυξάνεται.

3

Εφαρμογές Αλγόριθμου ode45 σε Δυναμικά

Συστήματα

Η μελέτη της απόκρισης ενός συνδέσμου *Cardan* που συνδέει δύο άξονες θα ερευνηθεί με τη χρήση του λογισμικού της *Matlab* και συγκεκριμένα της συνάρτησης *ode45*. Για να ελέγξουμε την λειτουργία αλλά και την απόδοση της συνάρτησης αυτής θα την εφαρμόσουμε σε γνωστά δυναμικά συστήματα, ώστε να επιβεβαιώσουμε την απόδοσή της. Στο κεφάλαιο αυτό, θα παρουσιάσουμε τις εφαρμογές αυτές αλλά και τα αποτελέσματά τους.

3.1 Αλγόριθμος ode45

Η συνάρτηση *ode45* αποτελεί μία έτοιμη συνάρτηση του λογισμικού της *Matlab* και χρησιμοποιείται συχνά στην επίλυση συστημάτων διαφορικών εξισώσεων[12]. Υλοποιεί μια μέθοδο Runge-Kutta με ένα μεταβλητό χρονικό βήμα για τον αποτελεσματικό υπολογισμό. Η *ode45* έχει σχεδιαστεί για να χειριστεί το ακόλουθο γενικό πρόβλημα :

$$\frac{dy}{dt} = f(y, y) , y(t_0) = y_0 \quad (3.1)$$

όπου t είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή και y είναι ένα διάνυσμα εξαρτημένων μεταβλητών που θέλουμε να υπολογιστεί. Το μαθηματικό πρόβλημα ορίζεται όταν το διάνυσμα των διαφορικών εξισώσεων βρίσκεται στη δεξιά πλευρά της εξίσωσης και οι αρχικές συνθήκες, $y(t_0) = y_0$ στο χρόνο t_0 έχουν ορισθεί.

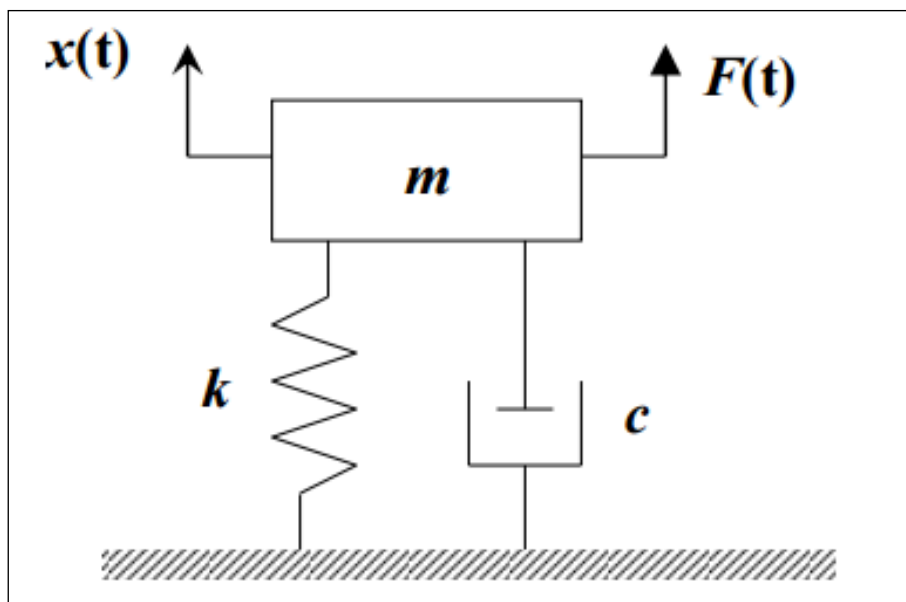
Όμως, δεν μπορεί να επιλύσει προβλήματα στα οποία συμμετέχουν παράγωγοι δεύτερης τάξης και για το λόγο αυτό στα προβλήματά μας καλούμαστε να κάνουμε υποβιβασμό της τάξης των συστημάτων που επιλύουμε.

Ακόμη, πρέπει να αναφέρουμε, για την πρακτική λειτουργία της συνάρτησης *ode45*, πρέπει προηγουμένως να δημιουργήσουμε μία άλλη συνάρτηση, στην οποία να περιγράψουμε το πρόβλημα που θέλουμε να επιλύσουμε, η οποία ‘καλείται’ από την *ode45* προς επίλυση.

3.2 Δυναμικά Συστήματα Ενός Βαθμού Ελευθερίας

3.2.1 Γενική Περιγραφή

Θεωρούμε ένα δυναμικό σύστημα ενός βαθμού ελευθερίας[13], δηλαδή ένα σύστημα στο οποίο μία μάζα στηρίζεται σε ένα ελατήριο και έναν αποσβεστήρα, όπως αυτό παρουσιάζεται στο ακόλουθο σχήμα :



Σχήμα 3.1 Δυναμικό Σύστημα ενός Βαθμού Ελευθερίας

Στο σύστημα αυτό συμβολίζουμε : m : μάζα

k : ελατήριο

c : αποσβεστήρας

$F(t)$: εξωτερική διέγερση

$x(t)$: απόκριση συστήματος

Υπενθυμίζουμε πως το κάτω άκρο του ελατηρίου και του αποσβεστήρα είναι συνδεδεμένο στην κάτω ακλόνητη επιφάνεια, ενώ το άνω άκρο είναι συνδεδεμένο με τη μάζα και εμφανίζει ίδια μετατόπιση με αυτή.

Η καταστατική εξίσωση που περιγράφει το σύστημα, όπως αυτή προκύπτει από τη δυναμική ισορροπία, είναι :

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t) \quad (3.2)$$

Αξίζει να σημειώσουμε πως η μάζα εκφράζει την αδράνεια του συστήματος, ο αποσβεστήρας την καταστροφή ενέργειας, το ελατήριο την παραμορφωσιμότητά του, ενώ στην εξωτερική διέγερση $F(t)$ αγνοούμε την επίδραση της βαρύτητας, καθώς αυτή, λόγω του ότι αποτελεί μόνιμη φόρτιση, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι έχει συμπεριληφθεί στην κατάσταση ισορροπίας του συστήματος, αν ως αρχή της μετατόπισης θεωρηθεί και η παραμόρφωση του συστήματος που έχει προκληθεί από το βάρος.

3.2.2 Επίλυση Συστήματος

Μαθηματικά, η καταστατική εξίσωση του συστήματος ενός βαθμού ελευθερίας, μπορεί να επιλυθεί, όπως κάθε διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης, ως εξής :

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) \quad (3.3)$$

όπου $x_h(t)$: η ομογενής λύση της εξίσωσης

$x_p(t)$: η μερική λύση της εξίσωσης

Όμως, η καταστατική εξίσωση του συστήματος μπορεί να γραφεί και ως :

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega\dot{x} + \omega^2x = \frac{F(t)}{m} \quad (3.4)$$

Στην εξίσωση ως ω συμβολίζουμε την κυκλική συχνότητα του συστήματος, η οποία ισούται με :

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad [\text{rad/sec}] \quad (3.5)$$

Ενώ με ζ συμβολίζουμε την απόσβεση του συστήματος η οποία ισούται με :

$$\zeta = \left(\frac{c}{2\omega m} \right) \quad (3.6)$$

Εύκολα, κατ' αντιστοιχία, λόγω των παραπάνω εξισώσεων, μπορούμε να γράψουμε :

$$k = \omega^2 m \quad (3.7)$$

$$\text{και } c = 2\zeta\omega m \quad (3.8)$$

3.2.3 Σύστημα με αρμονική εξωτερική διέγερση

3.2.3.1 Περιγραφή εξωτερικής διέγερσης

Η εξωτερική αρμονική διέγερση σε ένα σύστημα μοντελοποιείται ως :

$$F(t) = F_0 \cos(\Omega t) \quad (3.9)$$

όπου Ω είναι η συχνότητα της αρμονικής διέγερσης

Το πλάτος της αρμονικής αυτής διέγερσης δίνεται από τη σχέση :

$$F_0 = kX_{ST} \quad (3.10)$$

Στη σχέση (3.10) με k συμβολίζουμε, κατά τα γνωστά, τη σταθερά του ελατηρίου ενώ με X_{ST} συμβολίζουμε το ισοδύναμο στατικό πλάτος. Το ισοδύναμο στατικό πλάτος παριστάνει τη μετατόπιση του συστήματος εάν η εξωτερική διέγερση είναι ανεξάρτητη του χρόνου.

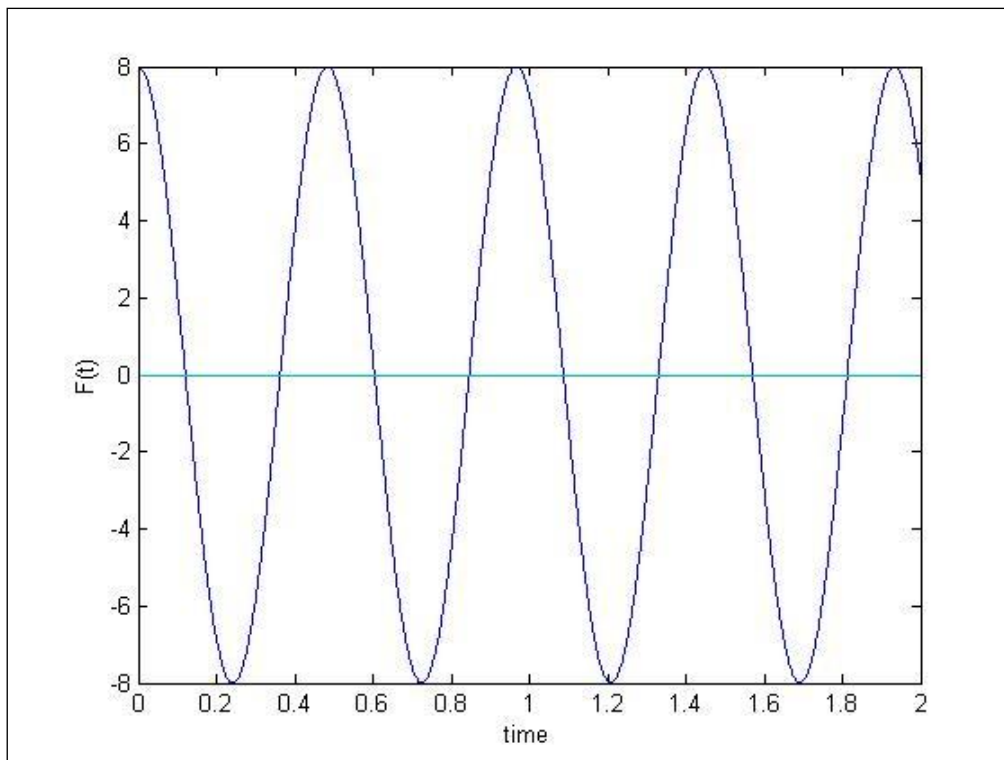
Έτσι, η καταστατική εξίσωση του συστήματος ενός βαθμού ελευθερίας γράφεται :

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \cos(\Omega t) = kX_{ST} \cos(\Omega t) \quad (3.11)$$

Η ισοδύναμη

$$\ddot{x} + \frac{2\zeta\omega}{m}\dot{x} + \frac{\omega^2}{m}x = \frac{F_0}{m} \cos(\Omega t) = \frac{\omega^2 X_{ST}}{m} \cos(\Omega t) \quad (3.12)$$

Γραφικά, η αρμονική εξωτερική διέγερση παρουσιάζεται στο *σχήμα 3.2* :



Σχήμα 3.2 Αρμονική Εξωτερική Διέγερση

3.2.3.2 Επίλυση με το λογισμικό της Matlab

Αρχικά, ας δώσουμε τα αριθμητικά δεδομένα που περιγράφουν το σύστημα. Στην εφαρμογή μας, λοιπόν, θεωρούμε ότι :

- i. Η μάζα του συστήματος είναι $m = 1\text{kg}$
- ii. Η απόσβεση του συστήματος είναι $\zeta = 0,05$ (υποκρίσιμη απόσβεση)
- iii. Η κυκλική συχνότητα είναι $\omega = 4\pi \text{ rad/sec}$
- iv. Η ιδιοσυχνότητα του συστήματος είναι $\omega_n = \omega\sqrt{1 - \zeta^2} = 3,995\pi \text{ rad / sec}$
(αποσβενόμενης ταλάντωσης)
- v. Η σταθερά του ελατηρίου λαμβάνεται $k = \omega_n^2 \cdot m = (3,995\pi)^2 \cdot 1 = 15,96\pi^2 \text{ N/m}$
- vi. Η σταθερά του αποσβεστήρα προκύπτει $c = 2 \cdot \zeta \cdot \omega_n \cdot m = 2 \cdot 0,05 \cdot 3,995\pi \cdot 1 = 0,3995\pi \text{ N sec/m}$
- vii. Το ισοδύναμο πλάτος θεωρείται $X_{ST} = 0,05$, άρα $F_0 = kX_{ST} = 0,798\pi^2 \text{ N}$

Σημειώνουμε ότι οι παραπάνω υπολογισμοί έγιναν με χρήση της ιδιοσυχνότητας κι όχι της φυσικής συχνότητας του συστήματος, αφού έχουμε υποκρίσιμη απόσβεση.

Έτσι, η καταστατική εξίσωση του συστήματος μπορεί να γραφεί, αντικαθιστώντας τα δεδομένα, ως :

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\cos(\Omega t) = \frac{kX_{ST}}{m}\cos(\Omega t) \quad (3.13)$$

Για την συχνότητα της αρμονικής διέγερσης Ω θα λάβουμε τρεις διαφορετικές τιμές, δηλαδή :

- $\Omega = \omega/2$
- $\Omega = \omega$
- $\Omega = 3\omega/2$

Η περίοδος του συστήματος υπολογίζεται ως :

$$T_p = \frac{2\pi}{\omega_n} = 0.5 \text{ sec} \quad (3.14)$$

Έτσι, θα ελέγξουμε την απόκριση του συστήματος για δύο χρονικά διαστήματα :

- $t_1 = T_{ext} = 10T_p$
- $t_2 = T_{ext} = 20T_p$

Πλέον, μπορούμε να ξεκινήσουμε τη διαδικασία της επίλυσης. Όμως, το λογισμικό της *Matlab* δεν επιτρέπει την επίλυση διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης με τη χρήση της *ode45*. Για το λόγο αυτό πρέπει να κάνουμε υποβιβασμό της τάξης του συστήματος, να το

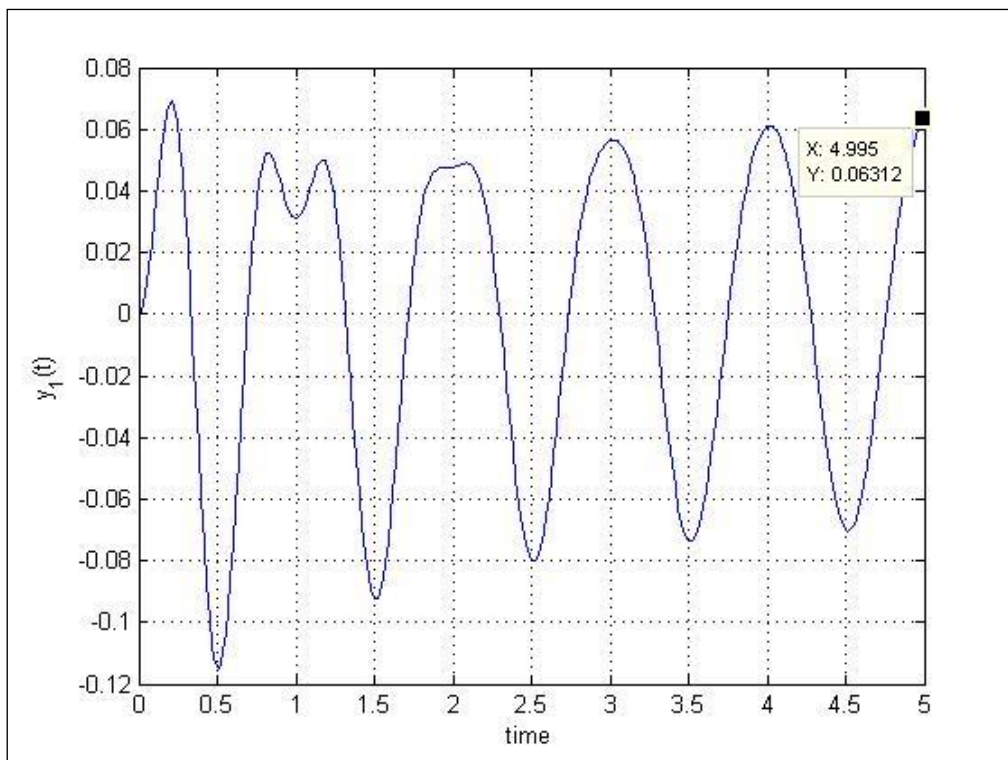
μετατρέψουμε, δηλαδή, από μια διαφορική εξίσωση δεύτερης τάσης σε ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης. Για να το κάνουμε αυτό θεωρούμε :

$$\begin{cases} \dot{x} = y(1) \\ \dot{y}(1) = y(2) \end{cases} \quad (3.15)$$

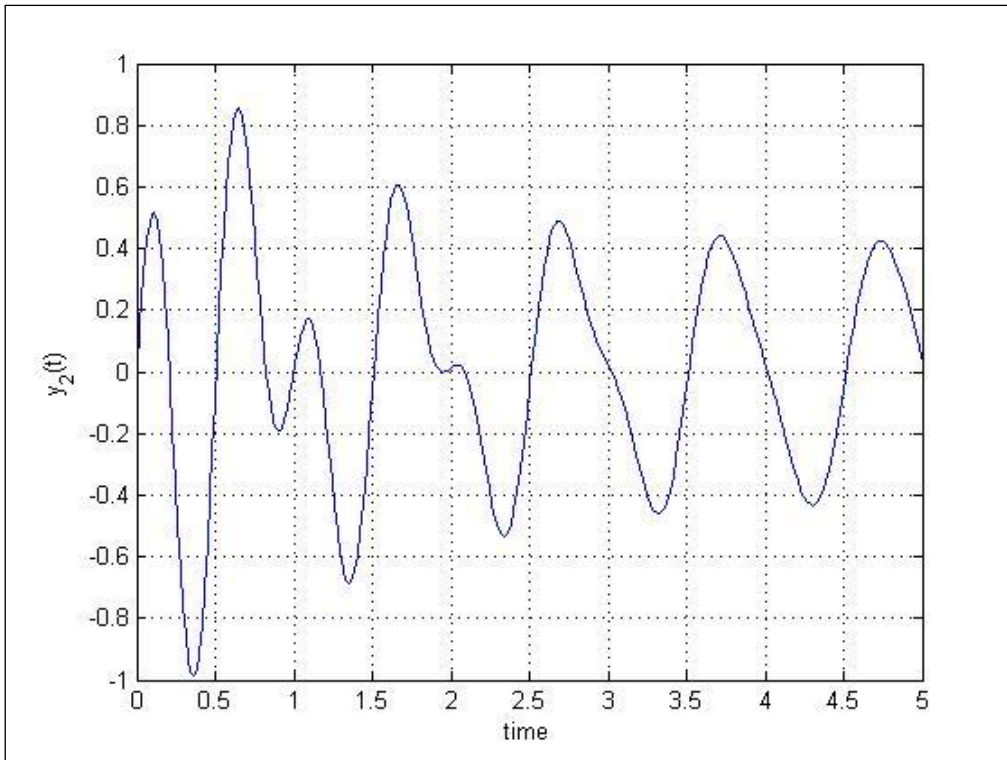
Τελικά, η καταστατική εξίσωση του συστήματος παίρνει τη μορφή του ακόλουθου συστήματος :

$$\begin{cases} \dot{x} = y(1) \\ \dot{y}(1) = y(2) \\ m\dot{y}(2) = F(t) - c y(2) - k y(1) \end{cases} \quad (3.16)$$

- Για $\Omega_1 = \omega/2$ παίρνουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα και για χρόνο $t_1 = 10T_{\text{ext}} = 5 \text{ sec}$:

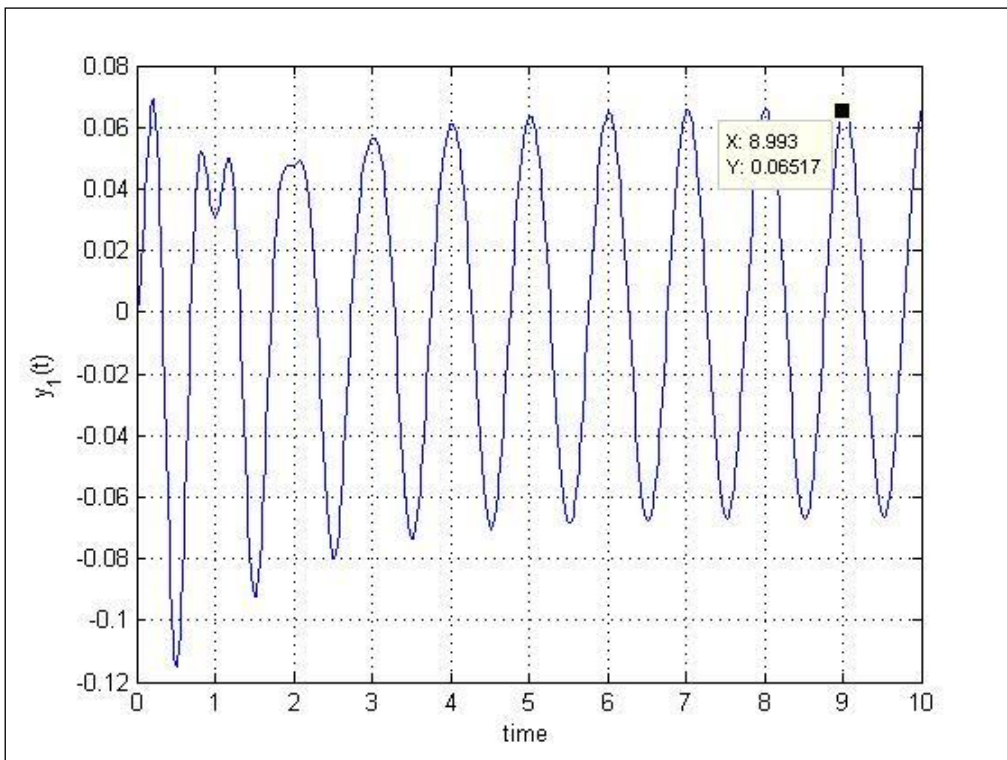


Σχήμα 3.3 Απόκριση $x(t)$ συστήματος 1 Β.Ε. με αρμονική εξωτερική διέγερση για Ω_1 και t_1

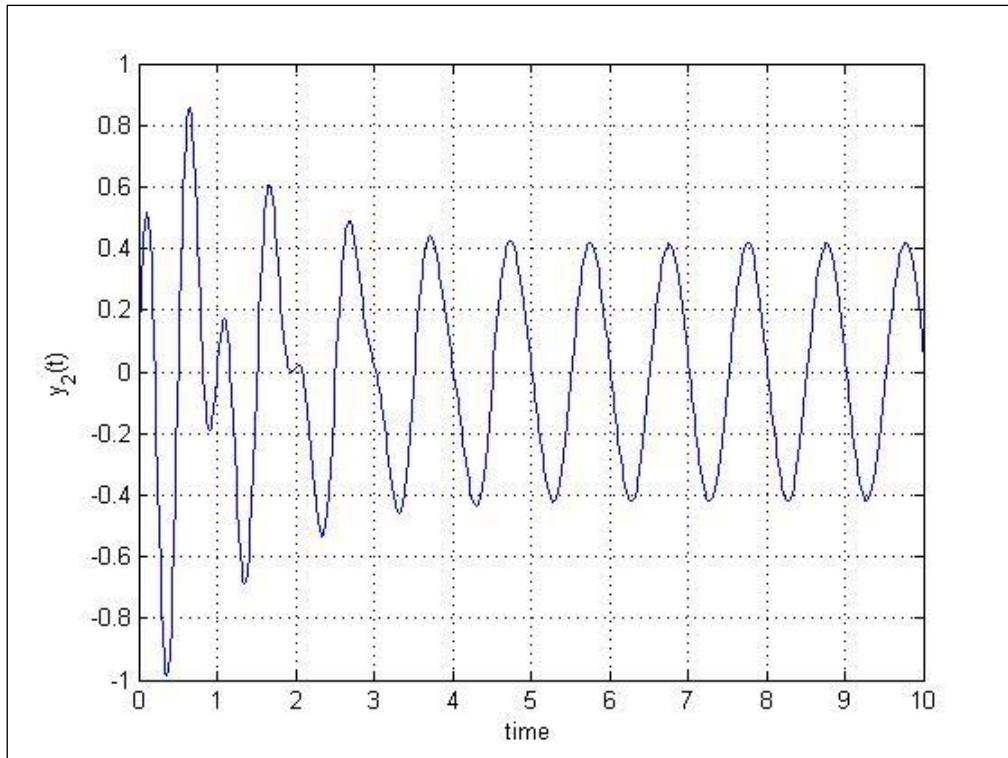


Σχήμα 3.4 Απόκριση $\dot{x}(t)$ συστήματος 1 Β.Ε. με αρμονική εξωτερική διέγερση για Ω_1 και t_1

- Για $\Omega_1 = \omega/2$ και για χρόνο $t_2 = 20T_{\text{ext}} = 10 \text{ sec}$ παίρνουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα

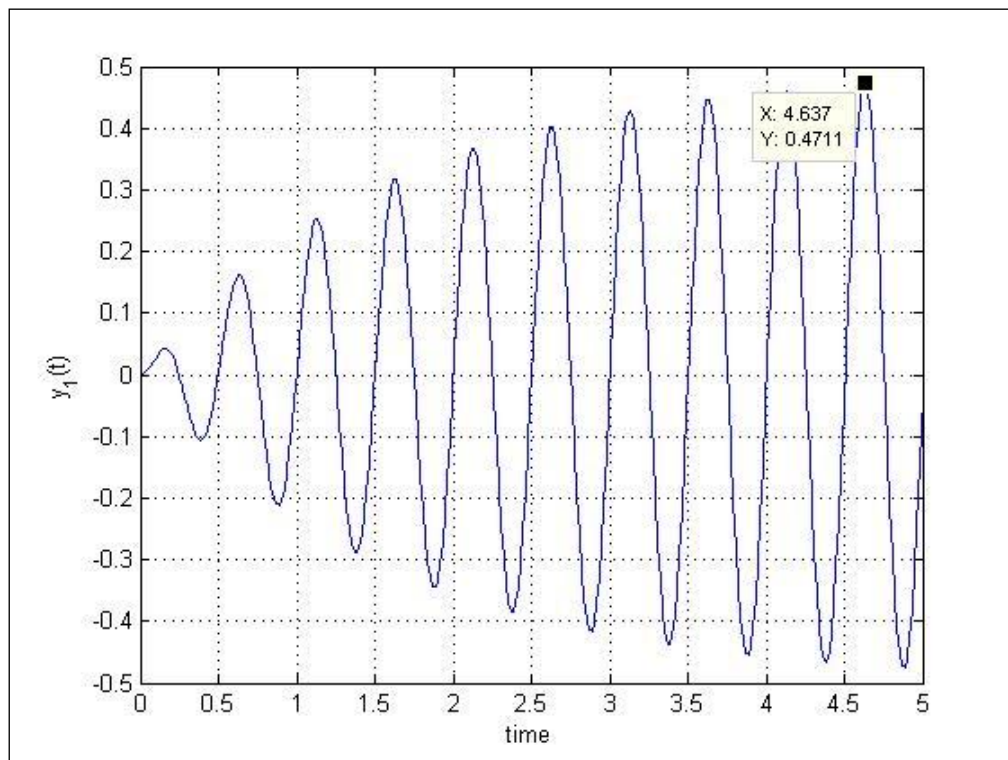


Σχήμα 3.5 Απόκριση $x(t)$ συστήματος 1 Β.Ε. με αρμονική εξωτερική διέγερση για Ω_1 και t_2

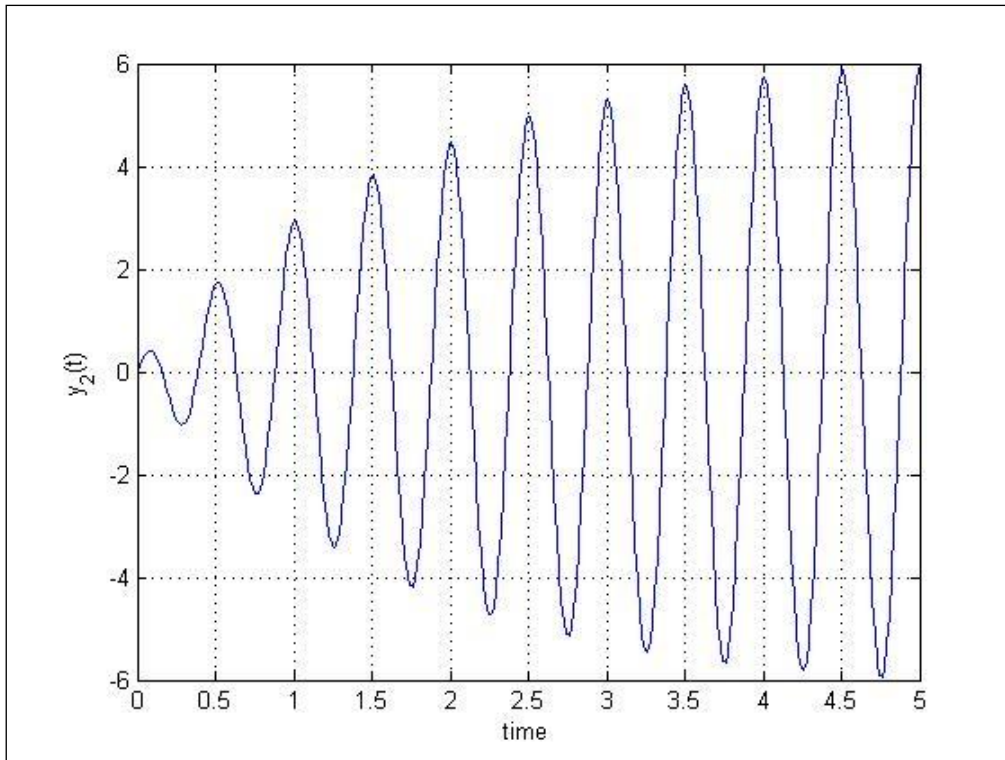


Σχήμα 3.6 Απόκριση $\mathbf{x}(t)$ συστήματος 1 Β.Ε. με αρμονική εξωτερική διέγερση για Ω_1 και t_2

- Για $\Omega_2 = \omega$ και για χρόνο $t_1 = 10T_{\text{ext}} = 5 \text{ sec}$:

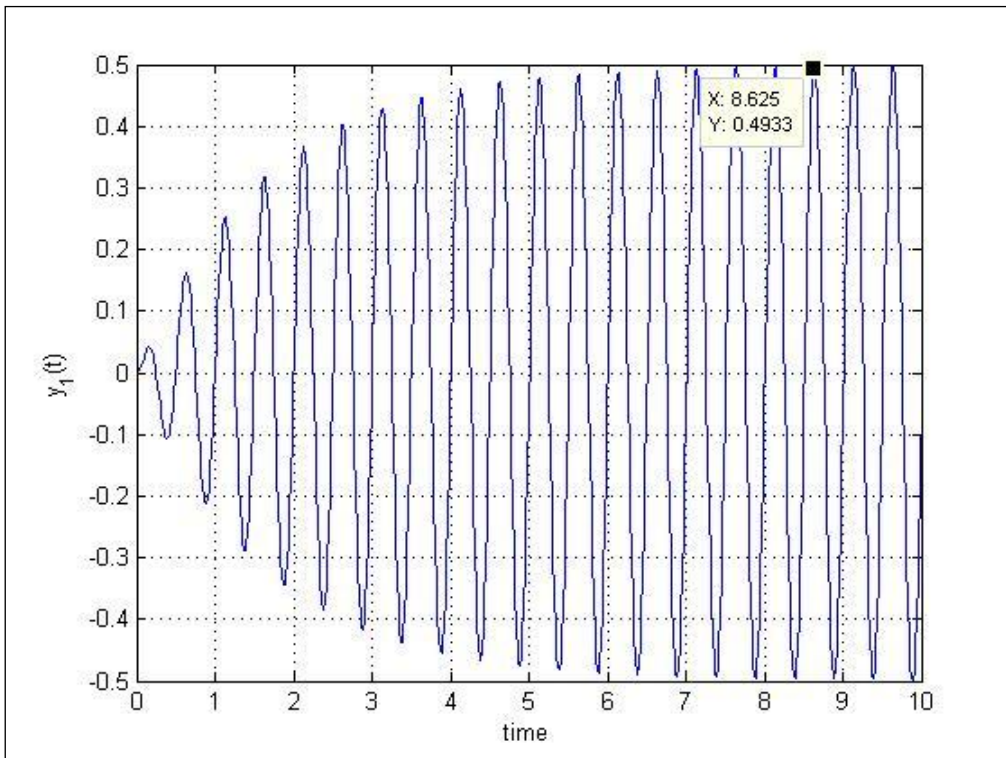


Σχήμα 3.7 Απόκριση $\mathbf{x}(t)$ συστήματος 1 Β.Ε. με αρμονική εξωτερική διέγερση για Ω_2 και t_1

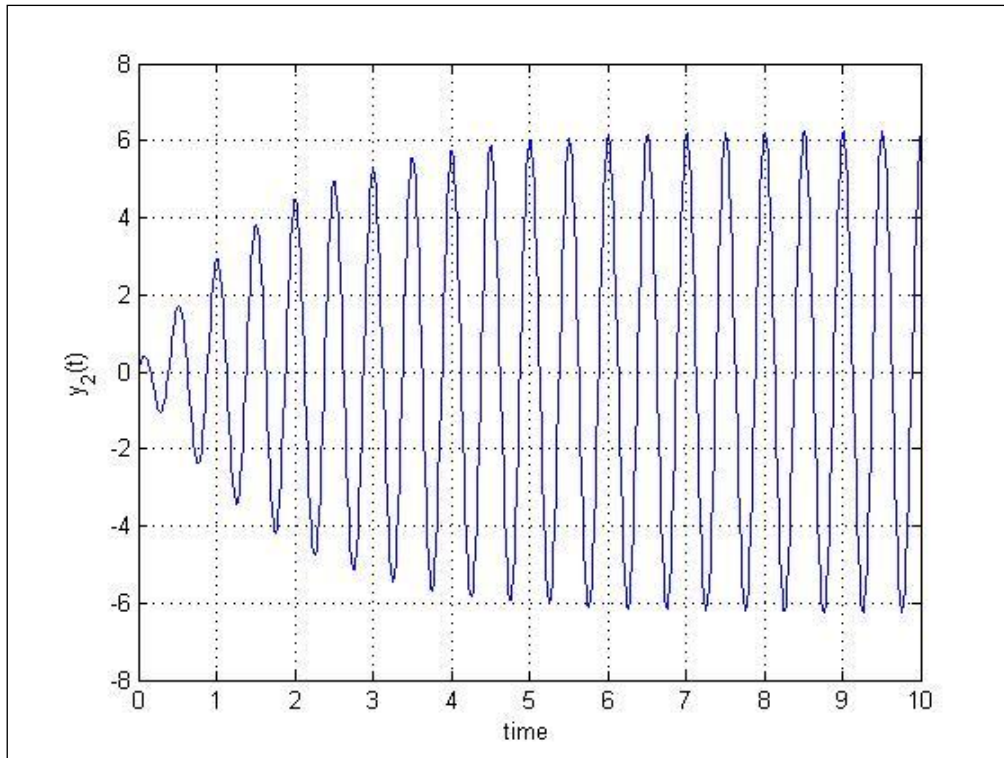


Σχήμα 3.8 Απόκριση $\mathbf{x}(t)$ συστήματος 1 Β.Ε. με αρμονική εξωτερική διέγερση για Ω_2 και t_1

- Για $\Omega_2 = \omega$ και για χρόνο $t_2 = 20T_{\text{ext}} = 10 \text{ sec}$:

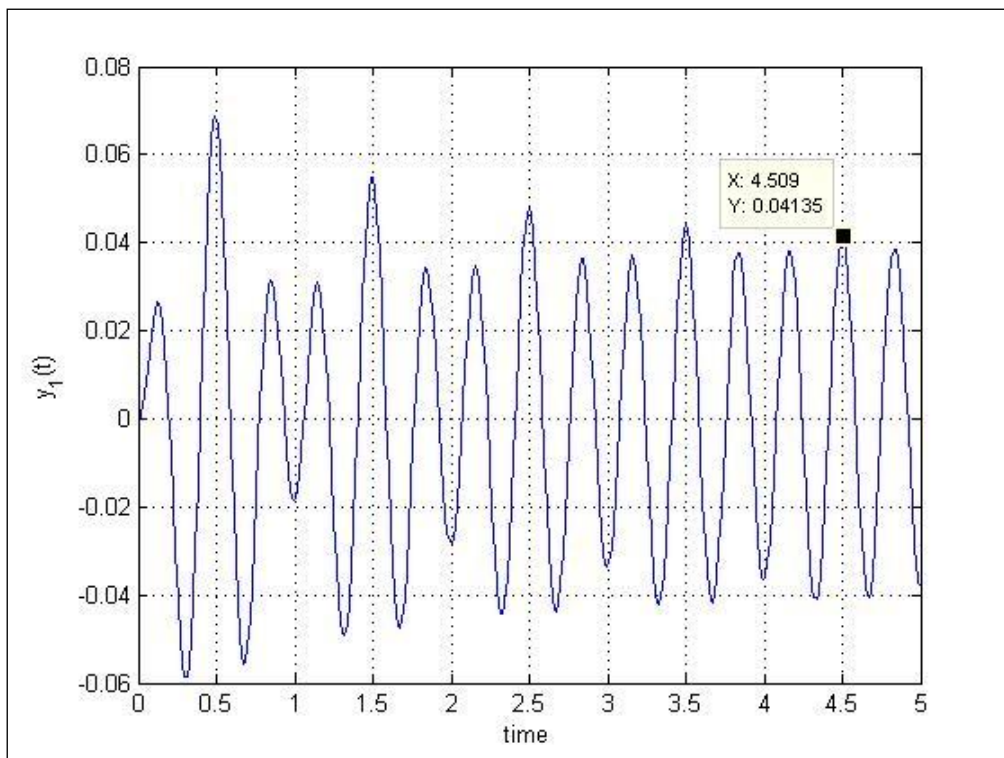


Σχήμα 3.9 Απόκριση $x(t)$ συστήματος 1 Β.Ε. με αρμονική εξωτερική διέγερση για Ω_2 και t_2

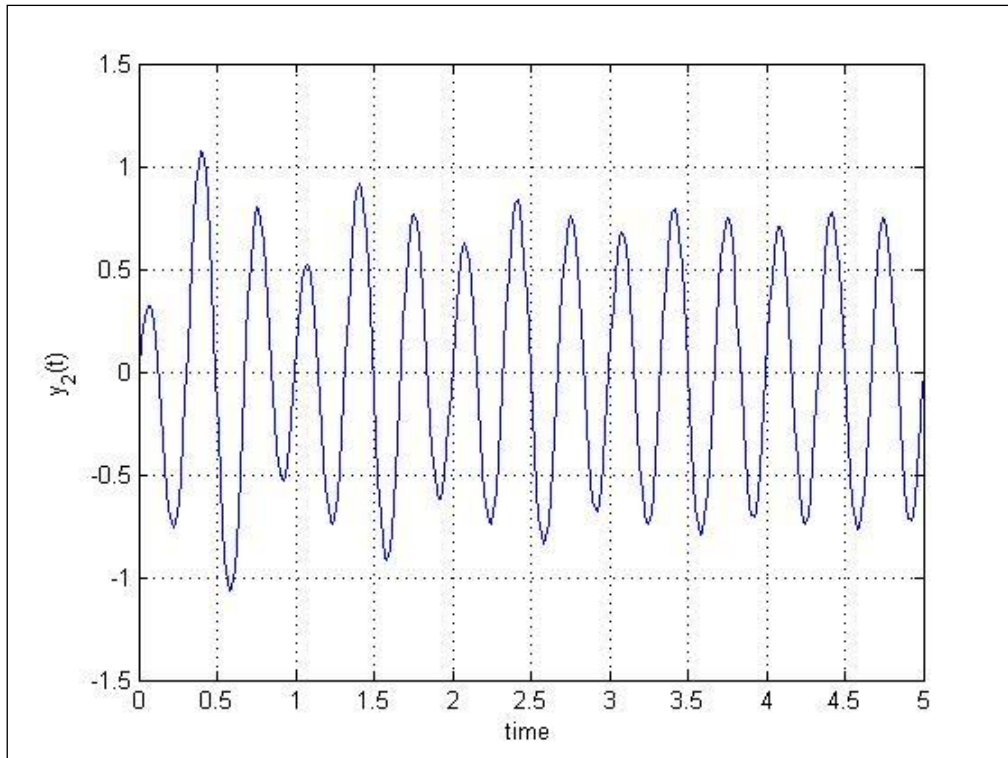


Σχήμα 3.10 Απόκριση $\dot{x}(t)$ συστήματος 1 Β.Ε. με αρμονική εξωτερική διέγερση για Ω_2 και t_2

- Για $\Omega_3 = 3\omega/2$ και για χρόνο $t_1 = 10T_{\text{ext}} = 5 \text{ sec}$:

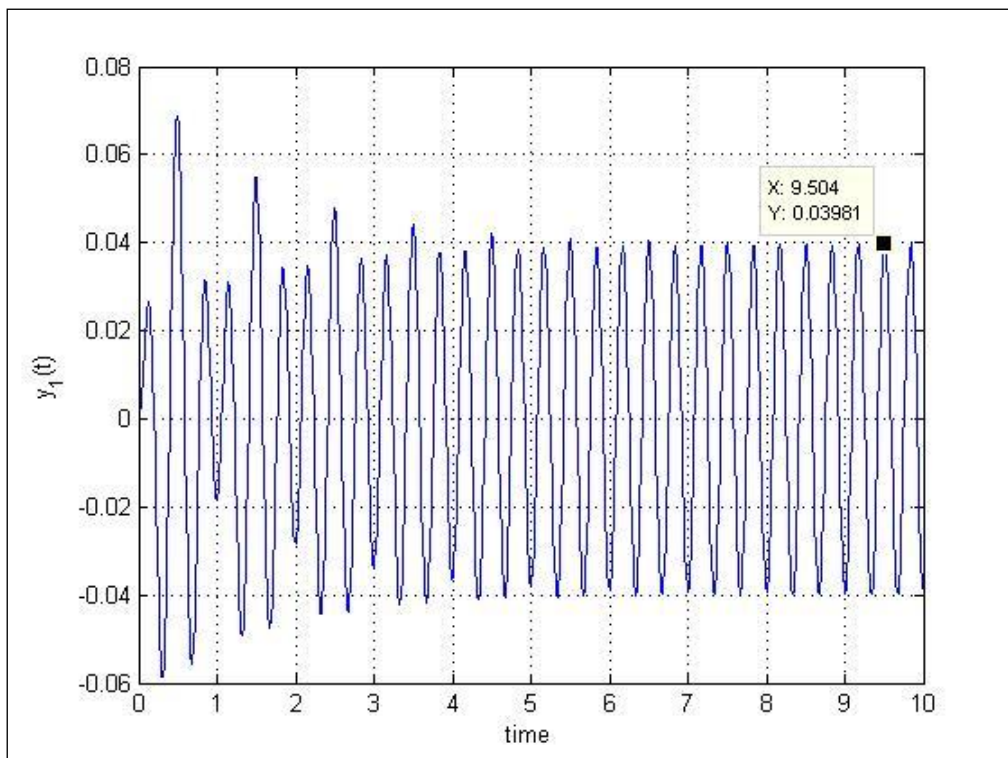


Σχήμα 3.11 Απόκριση $x(t)$ συστήματος 1 Β.Ε. με αρμονική εξωτερική διέγερση για Ω_3 και t_1

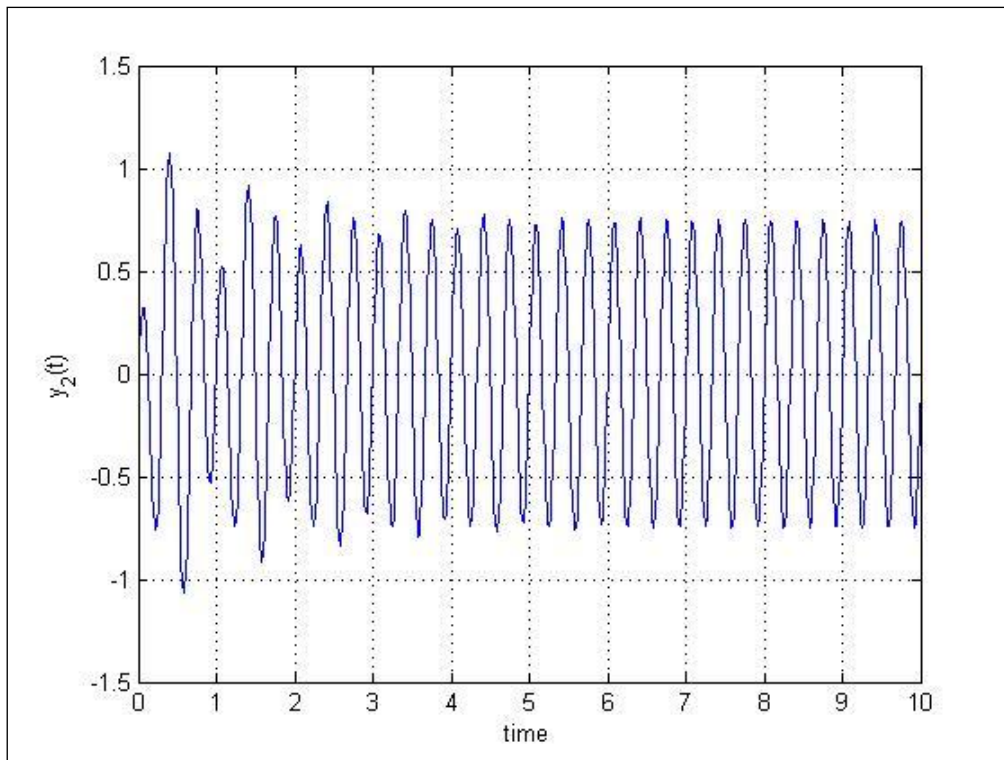


Σχήμα 3.12 Απόκριση $\dot{x}(t)$ συστήματος 1 Β.Ε. με αρμονική εξωτερική διέγερση για Ω_3 και t_1

- Για $\Omega_3 = 3\omega/2$ και για χρόνο $t_2 = 20T_{\text{ext}} = 10 \text{ sec}$:



Σχήμα 3.13 Απόκριση $x(t)$ συστήματος 1 Β.Ε. με αρμονική εξωτερική διέγερση για Ω_3 και t_2



Σχήμα 3.14 Απόκριση $\dot{x}(t)$ συστήματος 1 Β.Ε. με αρμονική εξωτερική διέγερση για Ω_3 και t_2

3.2.3.3 Μαθηματική επαλήθευση

- Για $\Omega_1 = \omega/2$:

Με βάση τη θεωρία, γνωρίζουμε ότι μετά από χρόνο $t \approx 3\omega_n$ παύει το μεταβατικό στάδιο και το σύστημα ηρεμεί. Στην ηρεμία, η μετατόπιση του συστήματος λαμβάνει μια σταθερή τιμή, που ονομάζεται μόνιμη λύση του συστήματος. Η μόνιμη λύση του συστήματος δίνεται από τη σχέση :

$$\frac{X}{X_{ST}} = \frac{\omega^2}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + (2\zeta\omega\Omega)^2}} \quad (3.17)$$

Όπου $\omega = \omega_n$, αφού έχουμε κρίσιμη απόσβεση.

Αντικαθιστώντας, βρίσκουμε $X = 0.0665$ ενώ ηρεμία επέρχεται μετά από χρόνο :

$$t = \frac{3}{\zeta\omega_n} = 4.7806 \text{ sec} \quad (3.18)$$

Τα παραπάνω, όπως προκύπτουν μαθηματικά, επαληθεύονται και από τα αποτελέσματα που λάβαμε κατά την αριθμητική επίλυση του συστήματος.

- Για $\Omega_2 = \omega$:

Ομοίως με την προηγούμενη περίπτωση, ελέγχουμε τα αποτελέσματα μαθηματικά και έχουμε:

$$\frac{X}{X_{ST}} = \frac{\omega^2}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + (2\zeta\omega\Omega)^2}} \Rightarrow X = 0.5$$

σε χρόνο $t = \frac{3}{\zeta\omega_n} = 4.7806 \text{ sec}$

▪ Για $\Omega_3 = 3\omega/2$:

Ελέγχουμε και για την τελευταία περίπτωση και βρίσκουμε :

$$\frac{X}{X_{ST}} = \frac{\omega^2}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + (2\zeta\omega\Omega)^2}} \Rightarrow X = 0,0397 \approx 0,04$$

σε χρόνο $t = \frac{3}{\zeta\omega_n} = 4.7806 \text{ sec}$.

3.2.4 Σύστημα με εξωτερική διέγερση Heaviside

3.2.4.1 Περιγραφή εξωτερικής διέγερσης

Η εξωτερική διέγερση Heaviside σε ένα σύστημα μοντελοποιείται ως :

$$\begin{cases} F(t) = \frac{F_0}{T_D} t, & \text{αν } 0 \leq t \leq T_D \\ F(t) = F_0, & \text{αν } t > T_D \end{cases} \quad (3.19)$$

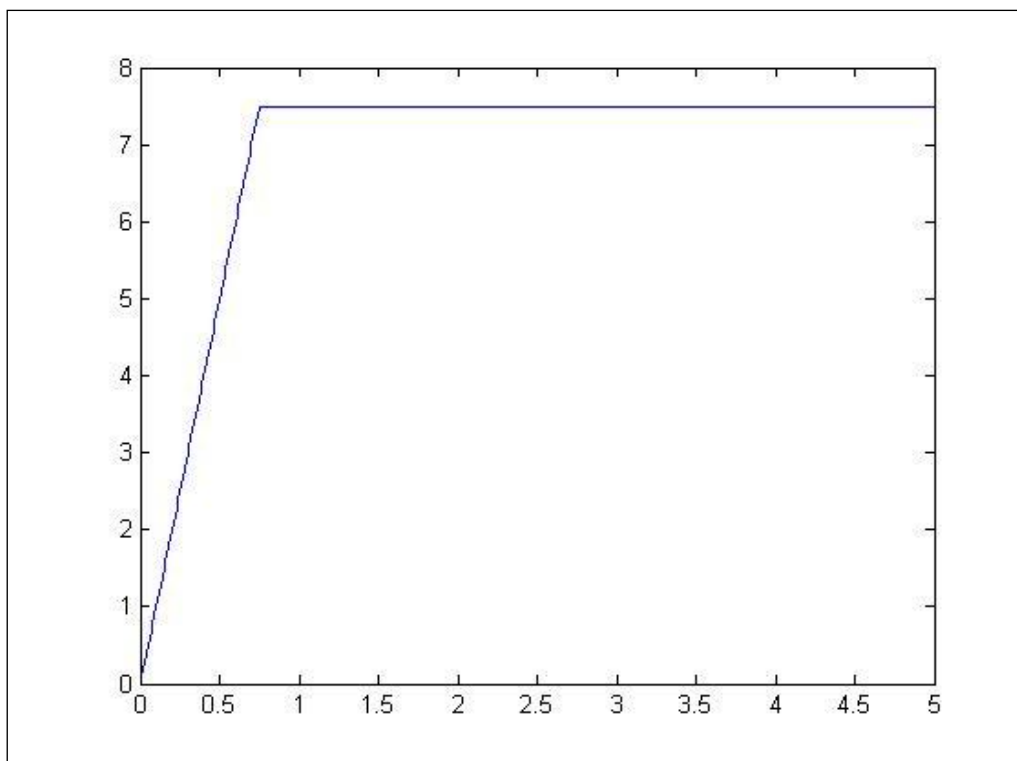
Έτσι, η καταστατική εξίσωση του συστήματος ενός βαθμού ελευθερίας γράφεται :

$$\begin{cases} m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \frac{F_0}{T_D} t, & \text{αν } 0 \leq t \leq T_D \\ m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0, & \text{αν } t > T_D \end{cases} \quad (3.20)$$

Η ισοδύναμη

$$\begin{cases} \ddot{x} + \frac{2\zeta\omega}{m}\dot{x} + \frac{\omega^2}{m}x = \frac{F_0}{mT_D} t, & \text{αν } 0 \leq t \leq T_D \\ \ddot{x} + \frac{2\zeta\omega}{m}\dot{x} + \frac{\omega^2}{m}x = \frac{F_0}{m}, & \text{αν } t > T_D \end{cases} \quad (3.21)$$

Γραφικά, η εξωτερική διέγερση Heaviside παρουσιάζεται στο παρακάτω σχήμα :



Σχήμα 3.15 Εξωτερική Διέγερση Heaviside

3.2.4.2 Επίλυση με το λογισμικό της Matlab

Τώρα, θα επιλύσουμε το δυναμικό σύστημα ενός βαθμού ελευθερίας με εξωτερική διέγερση Heaviside. Για την επίλυσή του θα χρησιμοποιήσουμε και πάλι το λογισμικό της *Matlab* και την συνάρτηση *ode45*.

Τα αριθμητικά δεδομένα που περιγράφουν το σύστημα είναι όμοια με αυτά της προηγούμενης εφαρμογής, δηλαδή :

- i. Η μάζα του συστήματος είναι $m = 1\text{kg}$
- ii. Η απόσβεση του συστήματος είναι $\zeta = 0,05$ (υποκρίσιμη απόσβεση)
- iii. Η κυκλική συχνότητα είναι $\omega = 4\pi \text{ rad/sec}$
- iv. Η ιδιοσυχνότητα του συστήματος είναι $\omega_n = \omega\sqrt{1 - \zeta^2} = 3,995\pi \text{ rad/sec}$
(αποσβενόμενης ταλάντωσης)
- v. Η σταθερά του ελατηρίου λαμβάνεται $k = \omega_n^2 \cdot m = (3,995\pi)^2 \cdot 1 = 15,96\pi^2 \text{ N/m}$
- vi. Η σταθερά του αποσβεστήρα προκύπτει $c = 2 \cdot \zeta \cdot \omega_n \cdot m = 2 \cdot 0,05 \cdot 3,995\pi \cdot 1 = 0,3995\pi \text{ N sec/m}$
- vii. Το ισοδύναμο πλάτος θεωρείται $X_{ST} = 0,05$, άρα $F_0 = kX_{ST} = 0,798\pi^2 \text{ N}$

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, η εξωτερική διέγερση Heaviside μοντελοποιείται από τη σχέση :

$$\begin{cases} F_1(t) = \frac{F_0}{T_D} t, \text{ αν } 0 \leq t \leq T_D \\ F_2(t) = F_0, \text{ αν } t > T_D \end{cases} \quad (3.22)$$

Στην δική μας εφαρμογή, έχουμε λάβει ως T_D :

$$T_D = \frac{3}{2} \frac{2\pi}{\omega_n} = 0.7509 \quad (3.23)$$

Τώρα, μπορούμε να ξεκινήσουμε τη διαδικασία της επίλυσης, όπως και στην προηγούμενη εφαρμογή, αφού διαμορφώσουμε και πάλι το σύστημα ώστε να είναι πρώτης τάξης. Έχουμε, λοιπόν, το ακόλουθο σύστημα προς επίλυση :

$$\begin{cases} x = y(1) \\ \dot{x} = y(2) \\ dy(2) + \frac{c}{m} y(2) + \frac{k}{m} y(1) = \frac{F_i(t)}{m} \end{cases} \quad (3.24)$$

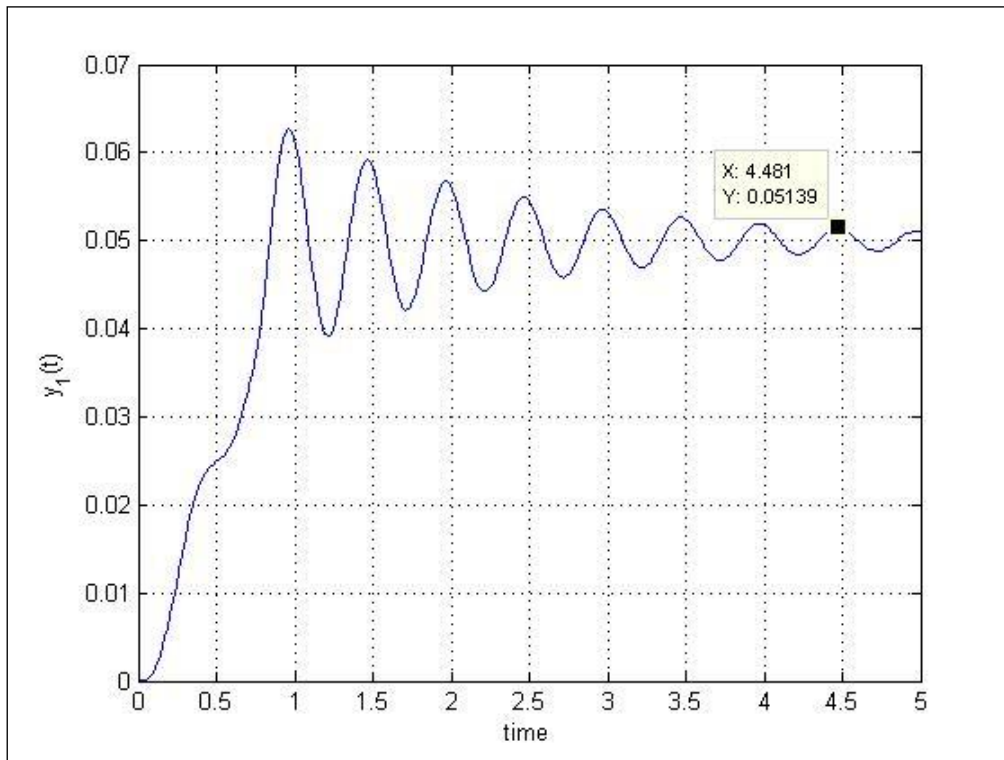
Το σύστημα αυτό, όπως και προηγουμένως, περιγράφεται στην συνάρτηση την οποία καλεί η *ode45* για να ξεκινήσει την επαναληπτική διαδικασία.

Θα ελέγξουμε την απόκριση του συστήματος για δύο χρονικά διαστήματα, όπως προηγουμένως :

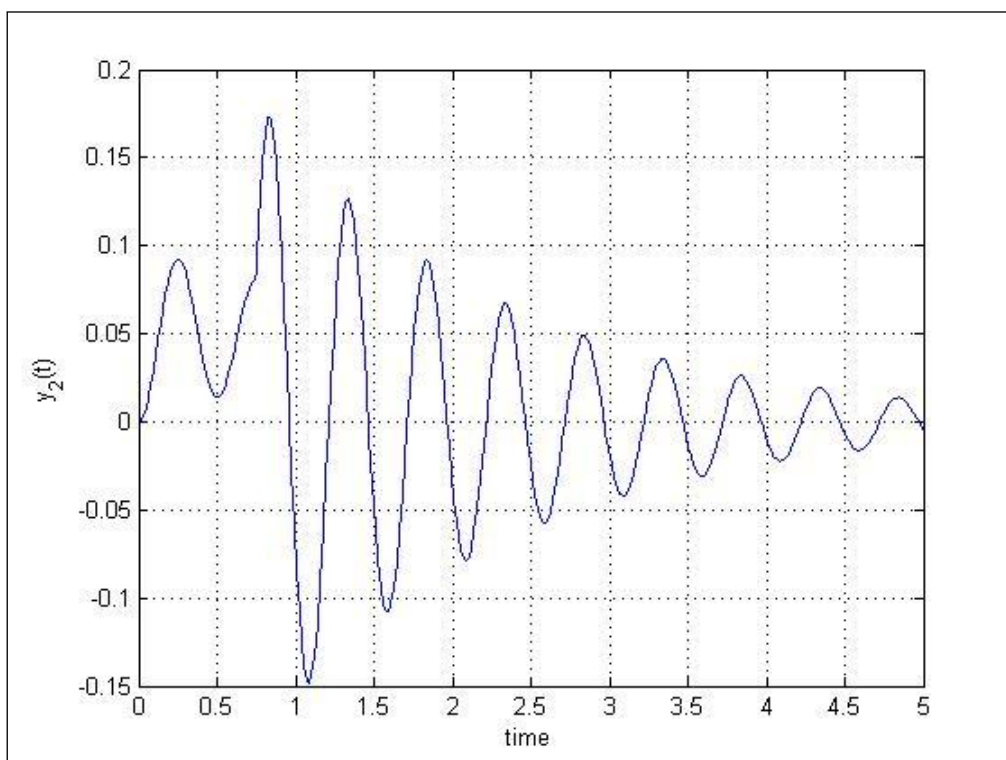
- $t_1 = T_{ext} = 10T_p$
- $t_2 = T_{ext} = 20T_p$

Λαμβάνουμε έτσι τα ακόλουθα αποτελέσματα της απόκρισης του συστήματος :

- Για χρόνο $t_1 = 10T_{\text{ext}} = 5 \text{ sec}$:

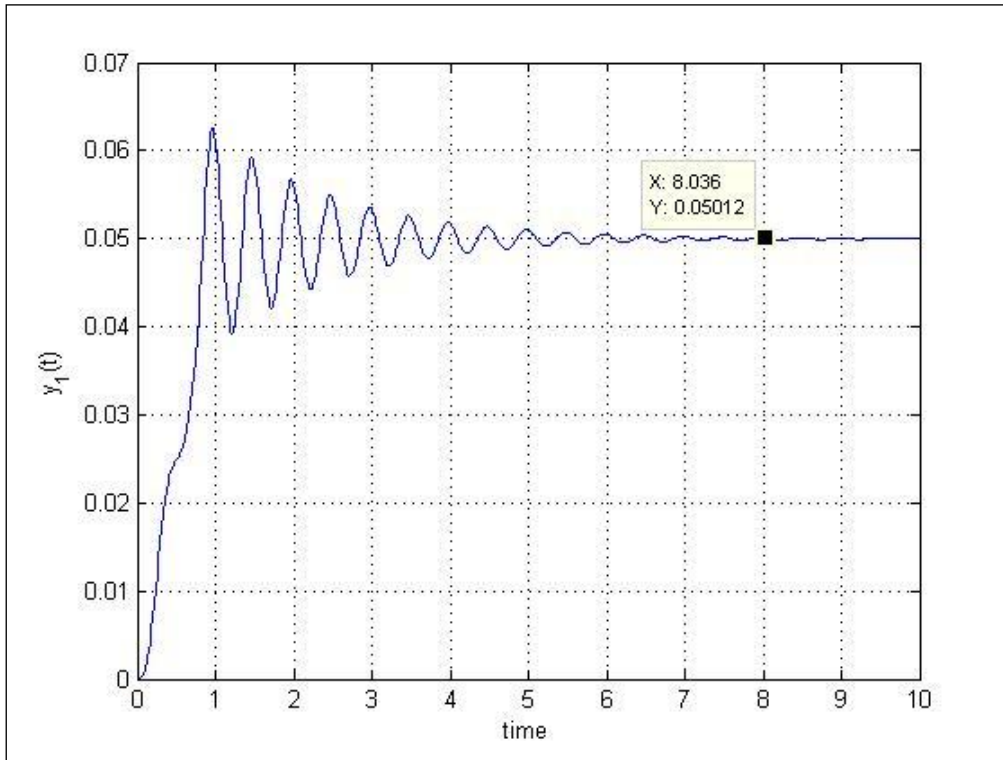


Σχήμα 3.16 Απόκριση $x(t)$ συστήματος 1 Β.Ε. με διέγερση Heaviside για χρόνο t_1

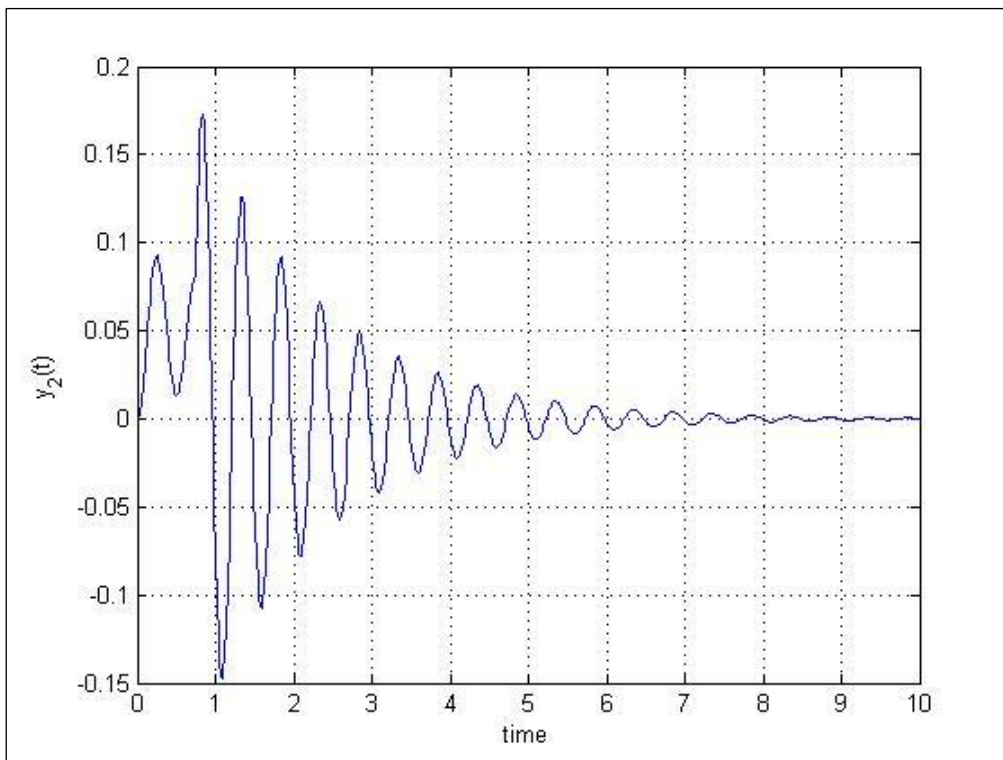


Σχήμα 3.17 Απόκριση $\dot{x}(t)$ συστήματος 1 Β.Ε. με διέγερση Heaviside για χρόνο t_1

- Για χρόνο $t_2 = 20T_{ext} = 10 \text{ sec}$:



Σχήμα 3.18 Απόκριση $x(t)$ συστήματος 1 Β.Ε. με διέγερση Heaviside για χρόνο t_2



Σχήμα 3.19 Απόκριση $\dot{x}(t)$ συστήματος 1 Β.Ε. με διέγερση Heaviside για χρόνο t_2

3.2.4.3 Μαθηματική επαλήθευση

Όπως και στους υπολογισμούς για την αρμονική διέγερση, έτσι και στη Heaviside, θα επαληθεύσουμε τα αποτελέσματα μας συγκρίνοντάς τα με τη μαθηματική επίλυση του συστήματος.

Θεωρούμε ως χρονική στιγμή $t(0) = T_D$ για την φάση Β της διέγερσης κι αντικαθιστώντας στον τύπο της απόκρισης βρίσκουμε την τελική τιμή της ως εξής :

$$x(t) = \frac{F_0}{k} \left[e^{-\zeta\omega t} \left\{ [x(0) - 1] \cos \omega_n t + \frac{v(0) + \zeta\omega[x(0)-1]}{\omega_n} \sin \omega_n t \right\} + 1 \right] \quad (3.25)$$

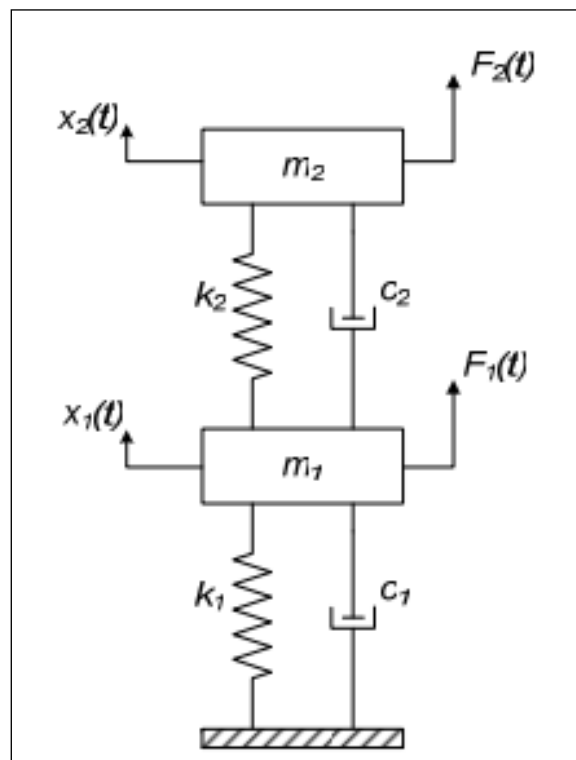
$$\Rightarrow x(10) \approx 0.05$$

που επαληθεύει την τιμή που λάβαμε με την αριθμητική επίλυση.

3.3 Δυναμικά Συστήματα Δύο Βαθμών Ελευθερίας

3.3.1 Γενική Περιγραφή

Θεωρούμε ένα δυναμικό σύστημα δύο βαθμών ελευθερίας[13], δηλαδή ένα σύστημα το οποίο αποτελείται από δύο μονοβάθμια συστήματα, συνδεδεμένα με τέτοιο τρόπο ώστε η κίνηση της κάθε μάζας να είναι ανεξάρτητη, όπως αυτό παρουσιάζεται στο *σχήμα 3.20* :



Σχήμα 3.20 Δυναμικό Σύστημα δύο Βαθμών Ελευθερίας

Στο σύστημα αυτό συμβολίζουμε : m_1, m_2 : μάζες

k_1, k_2 : ελατήρια

c_1, c_2 : αποσβεστήρες

$F_1(t), F_2(t)$: εξωτερικές διεγέρσεις

$x_1(t), x_2(t)$: αποκρίσεις συστήματος

Υπενθυμίζουμε πως οι μετατοπίσεις $x_1(t), x_2(t)$ συνδέονται μεταξύ τους μέσω της δυναμικής συμπεριφοράς του συστήματος και όχι μέσω της κινηματικής του συμπεριφοράς.

Γνωρίζουμε ότι ένα δυναμικό σύστημα δύο βαθμών ελευθερίας συνηθέστερα επιλύεται με τη βοήθεια της *Ενεργειακής Μεθόδου Lagrange*. Παρακάτω παρατίθεται το τελικό σύστημα εξισώσεων που περιγράφει τις αποκρίσεις του συστήματος, ενώ τα ενδιάμεσα βήματα παραλείπονται, καθώς θεωρούνται γνωστά. Τελικά, οι αποκρίσεις του δυναμικού συστήματος δύο βαθμών ελευθερίας δίνονται από την επίλυση του συστήματος :

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + c_1 \dot{x}_1 + c_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_1 x_1 + k_2 (x_1 - x_2) = F_1 \\ m_2 \ddot{x}_2 + c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_2 (x_2 - x_1) = F_2 \end{cases} \quad (3.26)$$

Ομαδοποιώντας ως προς τις ανεξάρτητες κινηματικές μεταβλητές το σύστημα γράφεται ως εξής:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 + c_2) \dot{x}_1 + (-c_2) \dot{x}_2 + (k_1 + k_2) x_1 + (-k_2) x_2 = F_1 \\ m_2 \ddot{x}_2 + (-c_2) \dot{x}_1 + c_2 \dot{x}_2 + (-k_2) x_1 + k_2 x_2 = F_2 \end{cases} \quad (3.27)$$

Μητρωϊκά μπορούμε να γράψουμε :

$$\begin{cases} [m_1 \quad 0] \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + [c_1 + c_2 \quad -c_2] \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + [k_1 + k_2 \quad -k_2] \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ [0 \quad m_2] \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + [-c_2 \quad c_2] \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + [-k_2 \quad k_2] \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F_2 \end{Bmatrix} \end{cases} \quad (3.28)$$

Και συνολικά :

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \quad (3.29)$$

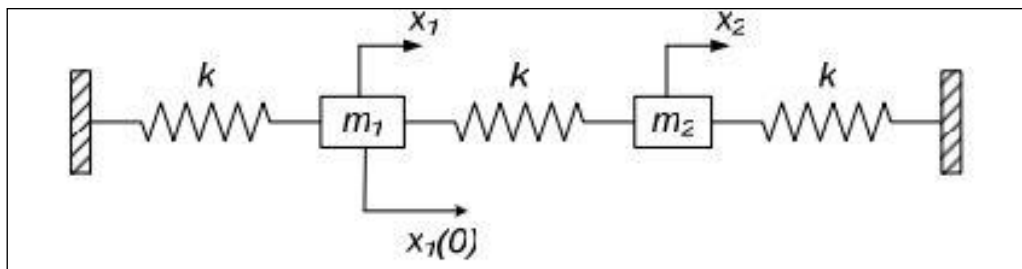
Σημειώνουμε, για λόγους πληρότητας, ότι στη δημιουργία αυτών των εξισώσεων που περιγράφουν το σύστημα έχει αμεληθεί η δύναμη της βαρύτητας.

Στις εφαρμογές που θα ακολουθήσουν θα επιλύσουμε το παραπάνω σύστημα για διάφορες εξωτερικές διεγέρσεις, με την προϋπόθεση ότι οι αποσβέσεις είναι μηδενικές.

3.3.2 Σύστημα με Μηδενική Εξωτερική Διέγερση (1)

3.3.2.1 Περιγραφή συστήματος

Όπως προαναφέρθηκε, θα επιλύσουμε ένα δυναμικό σύστημα δύο βαθμών ελευθερίας στο οποίο θεωρούμε μηδενικές αποσβέσεις και περιγράφεται από το ακόλουθο σχήμα :



Σχήμα 3.21: Σχηματική αναπαράσταση εξεταζόμενου διβάθμιου συστήματος $m - k$

Αναλύοντας το παραπάνω, είναι ένα σύστημα το οποίο αποτελείται από τρία όμοια ελατήρια και δύο μάζες. Τα αριθμητικά δεδομένα του συστήματος είναι :

- i. Οι μάζες του συστήματος είναι $m_1 = 4 \text{ kg}$ και $m_2 = 1 \text{ kg}$
- ii. Η σταθερά του κάθε ελατηρίου είναι $k = 1 \text{ N/m}$
- iii. Οι αρχικές συνθήκες του συστήματος είναι : $x_1(0) = 1$

$$\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = \dot{x}_2(0) = 0$$

Προφανώς, η απόκριση του συστήματος που καλούμαστε να βρούμε είναι οι δύο ανεξάρτητες μεταβλητές του, δηλαδή η μετατόπιση της μάζας m_1 (x_1) και η μετατόπιση της μάζας m_2 (x_2). Η εξωτερική διέγερση του συστήματος είναι μηδενική $F(t) = 0$.

3.3.2.2 Επίλυση με το λογισμικό της Matlab

Το σύστημα των εξισώσεων που περιγράφει το σύστημα είναι :

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + 2kx_1 + (-k)x_2 = 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 + (-k)x_1 + 2kx_2 = 0 \end{cases} \quad (3.30)$$

Για να κάνουμε υποβιβασμό της τάξης του συστήματος, όπως απαιτείται, θεωρούμε :

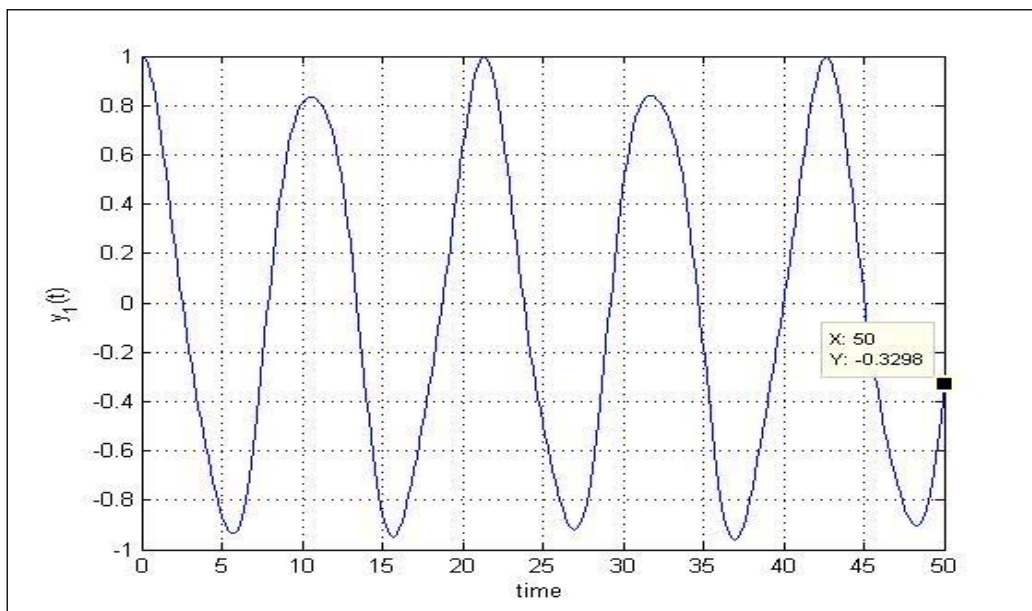
$$\begin{cases} x_1 = y(1) \\ x_2 = y(2) \\ \dot{x}_1 = y(3) \\ \dot{x}_2 = y(4) \end{cases} \quad (3.31)$$

Τελικά, το σύστημα παίρνει την ακόλουθη μορφή:

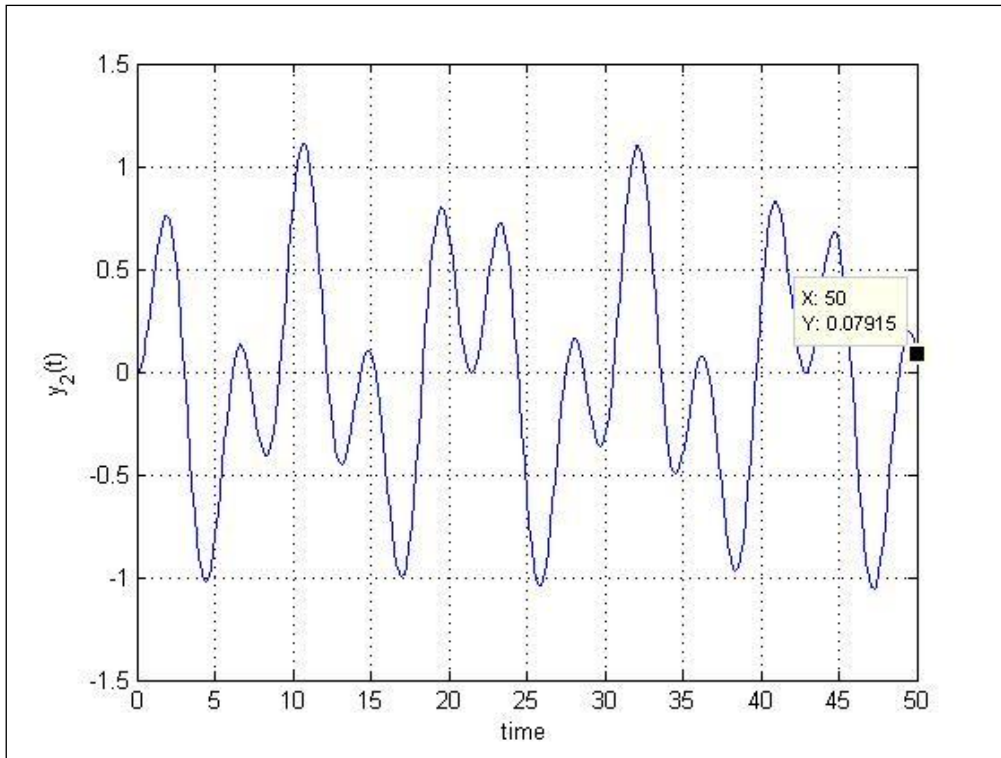
$$\begin{cases} x_1 = y(1) \\ x_2 = y(2) \\ \dot{x}_1 = y(3) \\ \dot{x}_2 = y(4) \\ dy(3) = \left(-\frac{2k}{m_1}\right)y(1) + \left(\frac{k}{m_1}\right)y(2) \\ dy(4) = \left(\frac{k}{m_2}\right)y(1) + \left(-\frac{2k}{m_2}\right)y(2) \end{cases} \quad (3.32)$$

Αφού έχουμε φέρει το σύστημα στην κατάλληλη μορφή, μπορούμε να γράψουμε πλέον τον κατάλληλο κώδικα, για να ξεκινήσει η επίλυση.

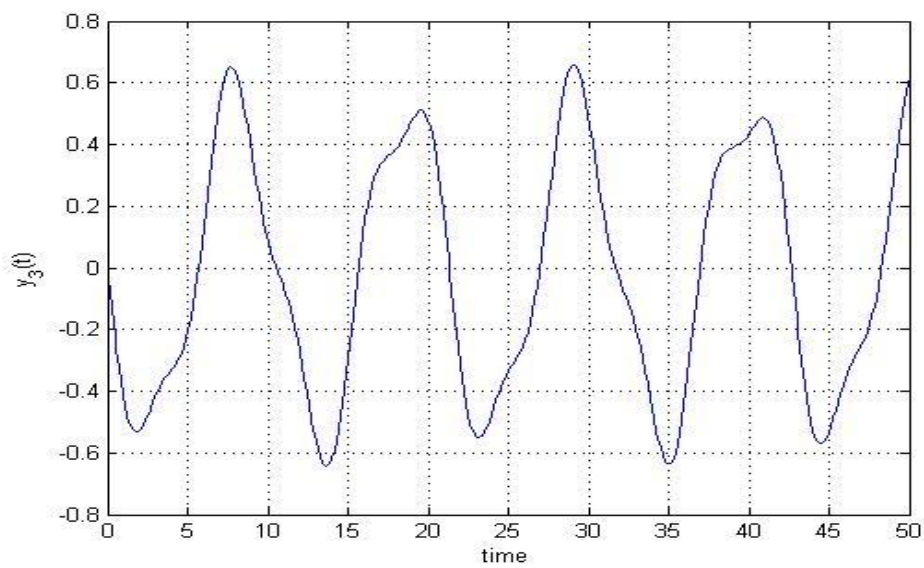
Έτσι, λαμβάνουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα για την απόκριση του συστήματος :



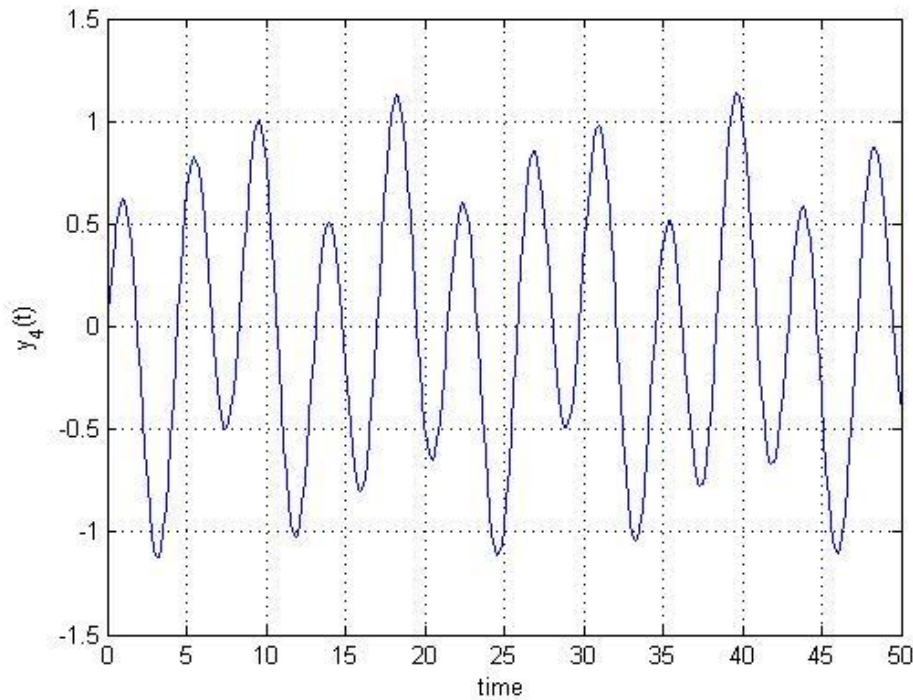
Σχήμα 3.22 Απόκριση $x_1(t)$ συστήματος 2 Β.Ε. με μηδενική εξωτερική διέγερση (1)



Σχήμα 3.23 Απόκριση $x_2(t)$ συστήματος 2 Β.Ε. με μηδενική εξωτερική διέγερση (1)



Σχήμα 3.24 Απόκριση $\dot{x}_1(t)$ συστήματος 2 Β.Ε. με μηδενική εξωτερική διέγερση (1)



Σχήμα 3.25 Απόκριση $\dot{x}_2(t)$ συστήματος 2 Β.Ε. με μηδενική εξωτερική διέγερση (1)

3.3.2.3 Μαθηματική επαλήθευση

Αν επιλύαμε το σύστημα μαθηματικά, τότε την απόκριση του θα την λαμβάναμε από τις παρακάτω εξισώσεις :

$$\begin{cases} x_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t) + B_1 \sin(\omega_1 t) + A_2 \cos(\omega_2 t) + B_2 \sin(\omega_2 t) \\ x_2(t) = [A_1 \cos(\omega_1 t) + B_1 \sin(\omega_1 t)] \times (0.6056) + [A_2 \cos(\omega_2 t) + B_2 \sin(\omega_2 t)] \\ \quad \times (-6.6056) \end{cases} \quad (3.33)$$

Οι συντελεστές A_1, A_2, B_1, B_2 προκύπτουν από τις αρχικές συνθήκες, δηλαδή $A_1 = 0,9160$, $A_2 = 0,084$, $B_1 = B_2 = 0$.

Τελικά, έχουμε :

$$\begin{cases} x_1(t) = 0,9160 \cos(\omega_1 t) + 0,084 \cos(\omega_2 t) \\ x_2(t) = [0,916 \cos(\omega_1 t)] \times (0.6056) + [0,084 \cos(\omega_2 t)] \times (-6.6056) \end{cases} \quad (3.34)$$

Από την επίλυση του συστήματος με χρήση της *Ενεργειακής Μεθόδου Lagrange* βρίσκουμε τις ιδιοσυχνότητες του συστήματος $\omega_1 = 0,5904$ και $\omega_2 = 1,4668$.

Έτσι, η απόκριση του συστήματος είναι για χρόνο $t = 50 \text{ sec}$: $x_1(50) = -0.33$

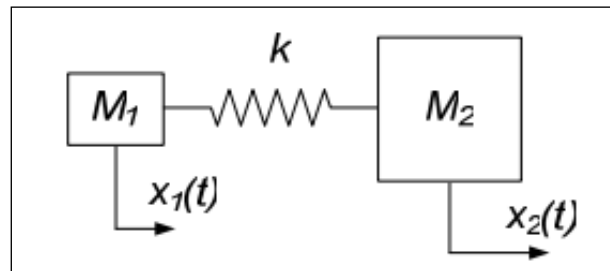
$$x_2(50) = 0.08$$

που επιβεβαιώνει την αριθμητική επίλυση.

3.3.3 Σύστημα με Μηδενική Εξωτερική Διέγερση (2).

3.3.3.1 Περιγραφή συστήματος

Σ' αυτή την εφαρμογή θα επιλύσουμε ένα διβάθμιο σύστημα χωρίς απόσβεση, όπως αυτό φαίνεται στο σχήμα :



Σχήμα 3.26 Διβάθμιο Σύστημα m – k

Τα αριθμητικά δεδομένα του συστήματος είναι :

- i. Οι μάζες του συστήματος είναι $m_1 = 10 \text{ kg}$ και $m_2 = 10 \text{ kg}$
- ii. Η σταθερά του κάθε ελατηρίου είναι $k = 40 \text{ N/m}$
- iii. Οι αρχικές συνθήκες του συστήματος είναι : $x_1(0) = x_2(0) = 0$
 $\dot{x}_1(0) = 1$
 $\dot{x}_2(0) = 3$

Το σύστημα των εξισώσεων που περιγράφει το σύστημα είναι :

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + kx_1 + (-k)x_2 = 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 + (-k)x_1 + kx_2 = 0 \end{cases} \quad (3.35)$$

3.3.3.2 Επίλυση με το λογισμικό της Matlab

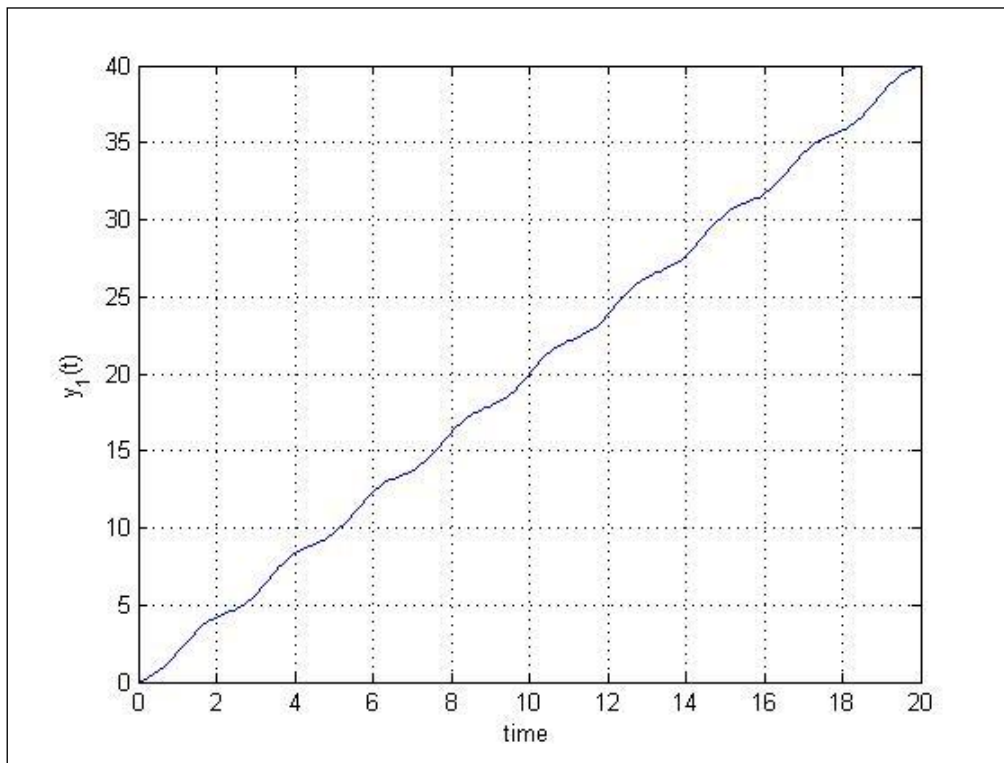
Όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις, αρχικά κάνουμε υποβιβασμό της τάξης του συστήματος, θεωρώντας :

$$\begin{cases} x_1 = y(1) \\ x_2 = y(2) \\ \dot{x}_1 = y(3) \\ \dot{x}_2 = y(4) \end{cases} \quad (3.36)$$

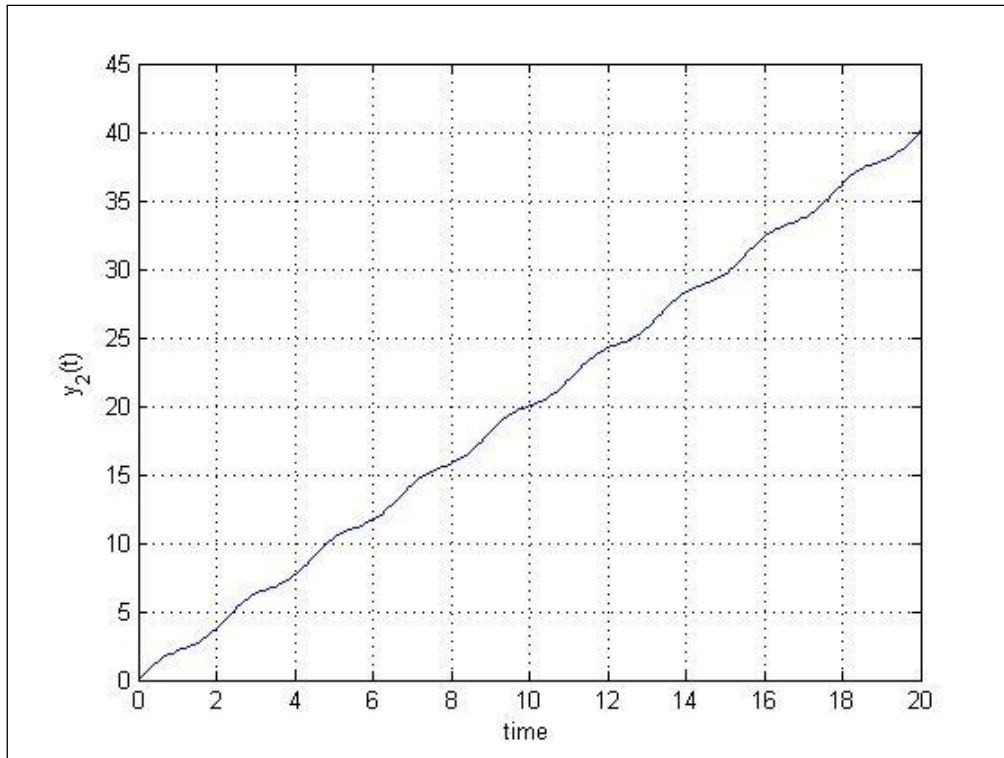
Τελικά, το σύστημα παίρνει την ακόλουθη μορφή:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = y(1) \\ x_2 = y(2) \\ \dot{x}_1 = y(3) \\ \dot{x}_2 = y(4) \\ dy(3) = \left(-\frac{k}{m_1}\right)y(1) + \left(\frac{k}{m_1}\right)y(2) \\ dy(4) = \left(\frac{k}{m_2}\right)y(1) + \left(-\frac{k}{m_2}\right)y(2) \end{array} \right. \quad (3.37)$$

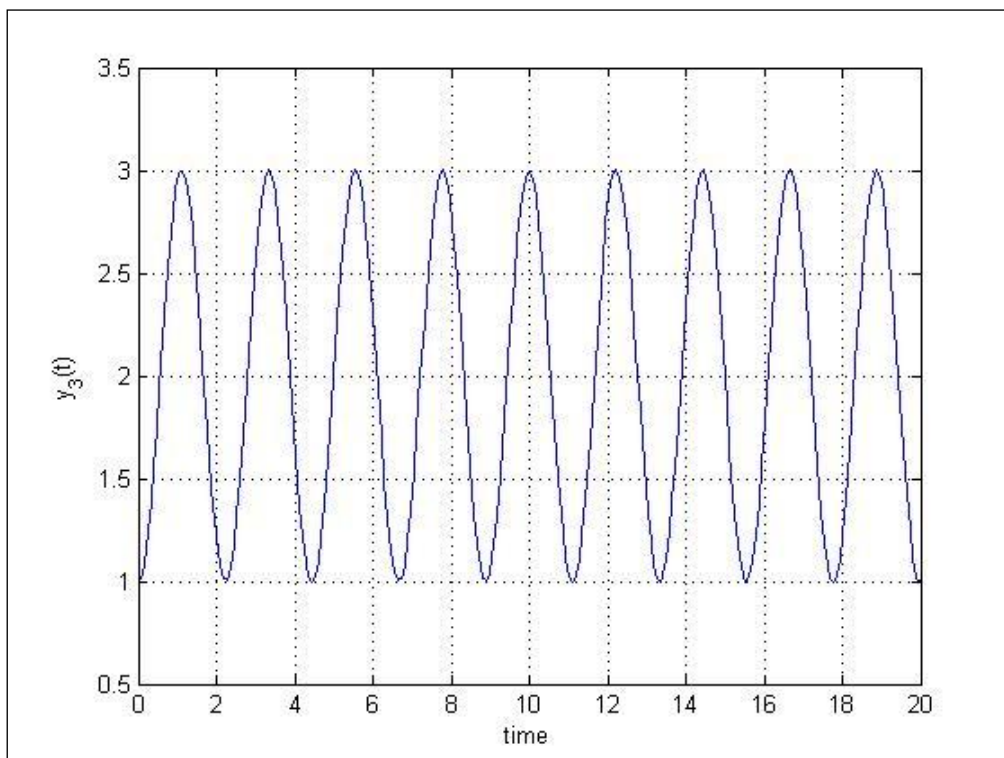
Επομένως, η απόκριση του συστήματος προκύπτει :



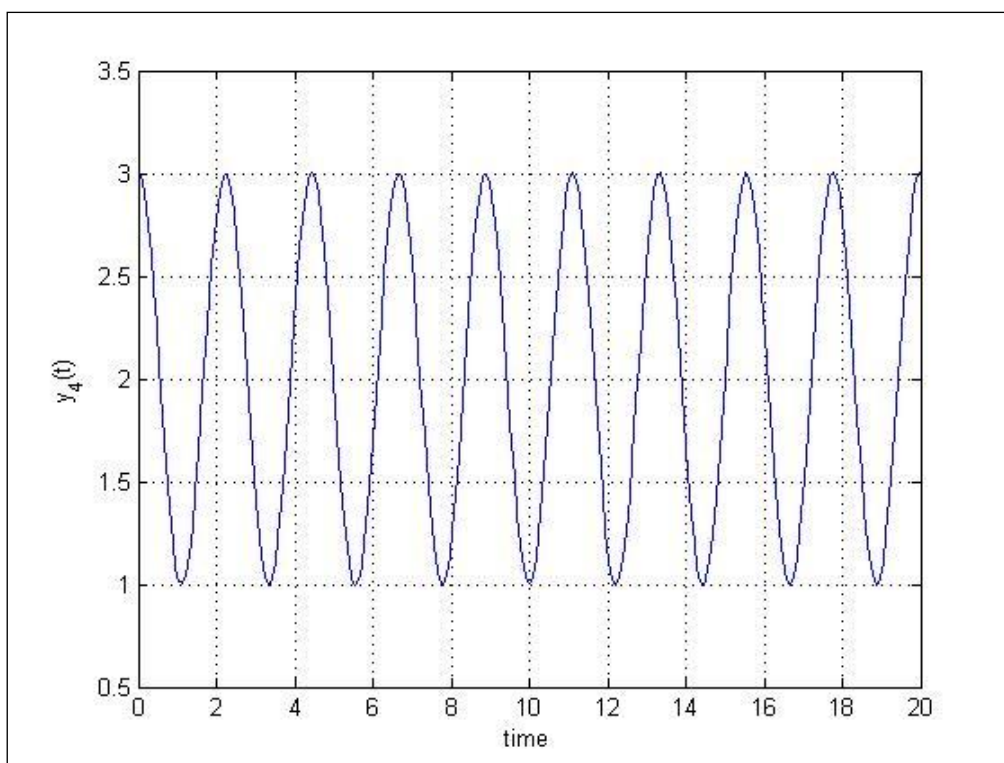
Σχήμα 3.27 Απόκριση $x_1(t)$ συστήματος 2 Β.Ε. με μηδενική εξωτερική διέγερση (2)



Σχήμα 3.28 Απόκριση $x_2(t)$ συστήματος 2 Β.Ε. με μηδενική εξωτερική διέγερση (2)



Σχήμα 3.29 Απόκριση $x_1(t)$ συστήματος 2 Β.Ε. με μηδενική εξωτερική διέγερση (2)



Σχήμα 3.30 Απόκριση $\dot{x}_2(t)$ συστήματος 2 Β.Ε. με μηδενική εξωτερική διέγερση (2)

3.3.3.3 Μαθηματική Επαλήθευση

Αν επιλύαμε το σύστημα μαθηματικά, τότε την απόκριση του θα την λαμβάναμε από τις παρακάτω εξισώσεις :

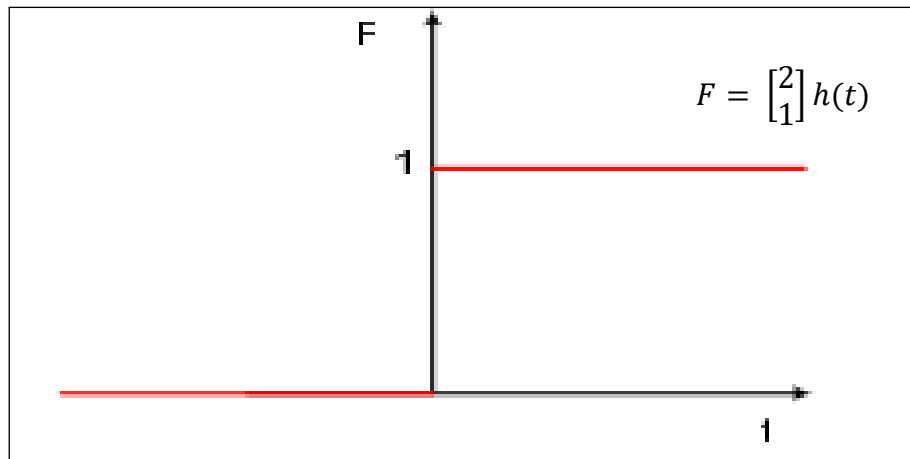
$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.6 \\ 2.6 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 1.342 \\ -0.3355 \end{bmatrix} \sin(2.236t) \quad (3.38)$$

Αντικαθιστώντας τα χρονικά δεδομένα, μπορούμε να επιβεβαιώσουμε τα αποτελέσματα που παρουσιάστηκαν παραπάνω.

3.3.4 Σύστημα με Εξωτερική Διέγερση Heaviside

3.3.4.1 Περιγραφή συστήματος

Στην παράγραφο αυτή θα επιλύσουμε ένα δυναμικό σύστημα δύο βαθμών ελευθερίας με μεταβατική εξωτερική διέγερση (Heaviside), στο οποίο η απόσβεση και πάλι αμελείται. Η διέγερση Heaviside περιγράφεται ως γνωστόν ως :



Σχήμα 3.31 Διέγερση Heaviside

Τα αριθμητικά δεδομένα σ' αυτήν την περίπτωση είναι :

- i. Οι μάζες του συστήματος είναι $m_1 = 3 \text{ kg}$ και $m_2 = 2 \text{ kg}$
- ii. Η σταθερά του κάθε ελατηρίου είναι $k_1 = 2 \text{ N/m}$ και $k_2 = 3 \text{ N/m}$
- iii. Οι αρχικές συνθήκες του συστήματος είναι :

$$x_1(0) = \dot{x}_1(0) = x_2(0) = \dot{x}_2(0) = 0$$

Το σύστημα των εξισώσεων που περιγράφει το σύστημα είναι :

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 + k_2 (x_1 - x_2) = F_1 \\ m_2 \ddot{x}_2 + k_2 (x_2 - x_1) = F_2 \end{cases} \quad (3.39)$$

3.3.4.2 Επίλυση με το λογισμικό της Matlab

Η επίλυση του συστήματος με σκοπό τον υπολογισμό των αποκρίσεων του θα γίνει και πάλι με χρήση *Matlab* και τη συνάρτηση *ode45*.

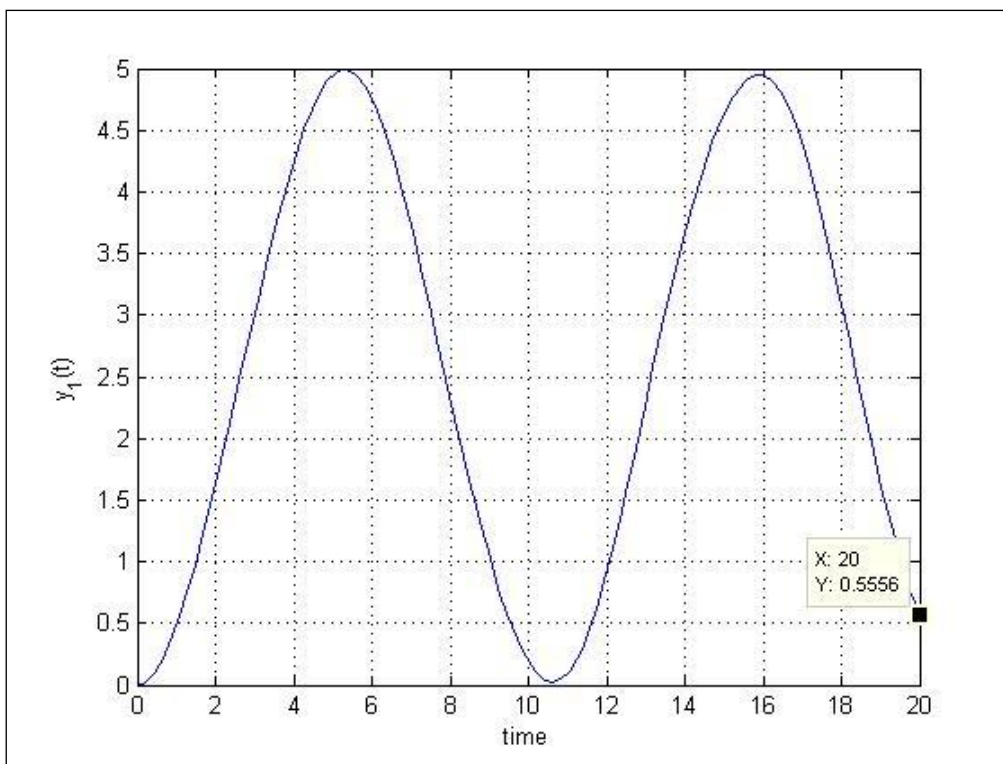
Πρέπει να κάνουμε υποβιβασμό της τάξης του συστήματος. Για να το κάνουμε αυτό θεωρούμε :

$$\begin{cases} x_1 = y(1) \\ x_2 = y(2) \\ \dot{x}_1 = y(3) \\ \dot{x}_2 = y(4) \end{cases} \quad (3.40)$$

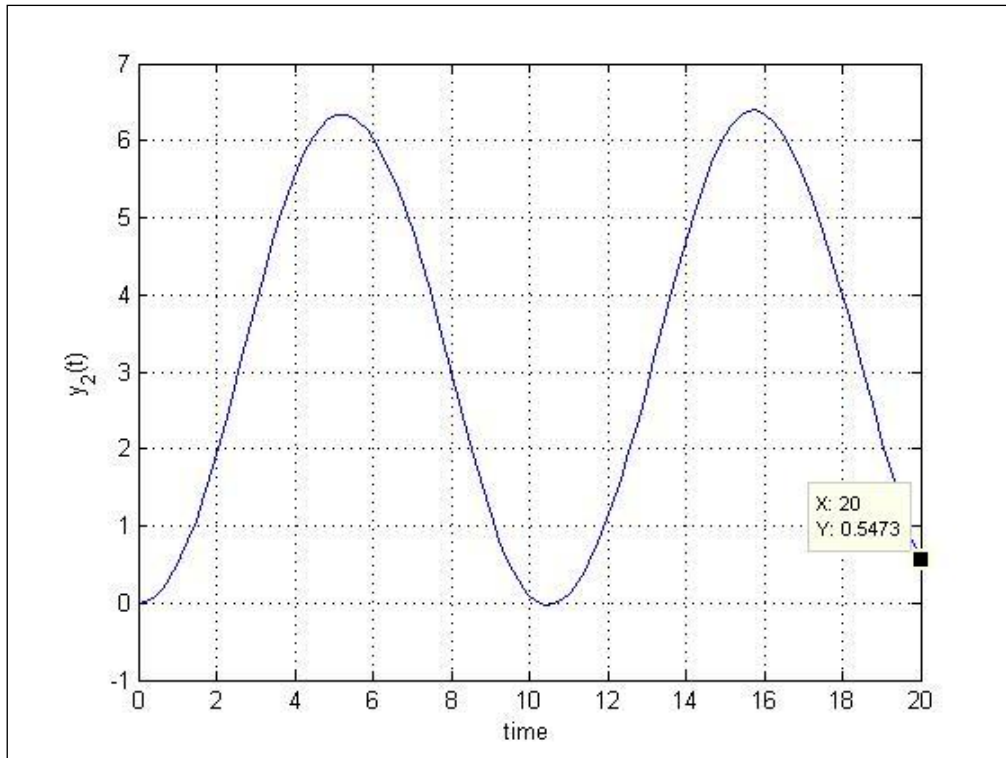
Τελικά, το σύστημα παίρνει την ακόλουθη μορφή:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = y(1) \\ x_2 = y(2) \\ \dot{x}_1 = y(3) \\ \dot{x}_2 = y(4) \\ dy(3) = F_1 + \left(-\frac{k_1 + k_2}{m_1}\right)y(1) + \left(\frac{k_2}{m_1}\right)y(2) \\ dy(4) = F_2 + \left(\frac{k_2}{m_2}\right)y(1) + \left(-\frac{k_2}{m_2}\right)y(2) \end{array} \right. \quad (3.41)$$

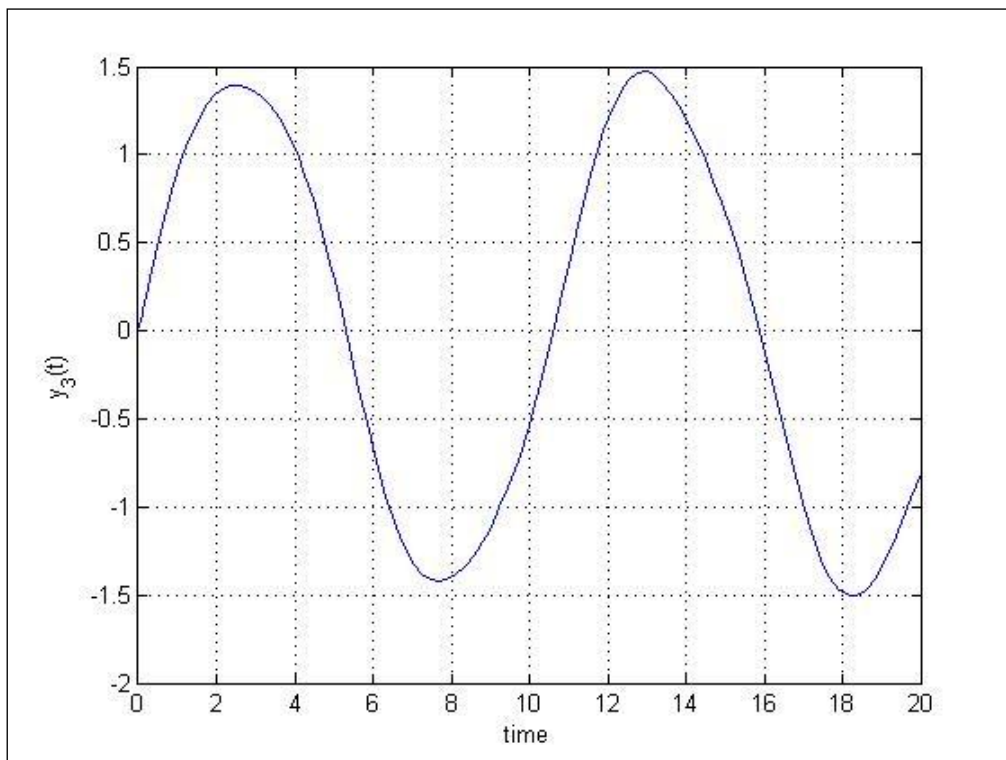
Έτσι, λαμβάνουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα για την απόκριση του συστήματος :



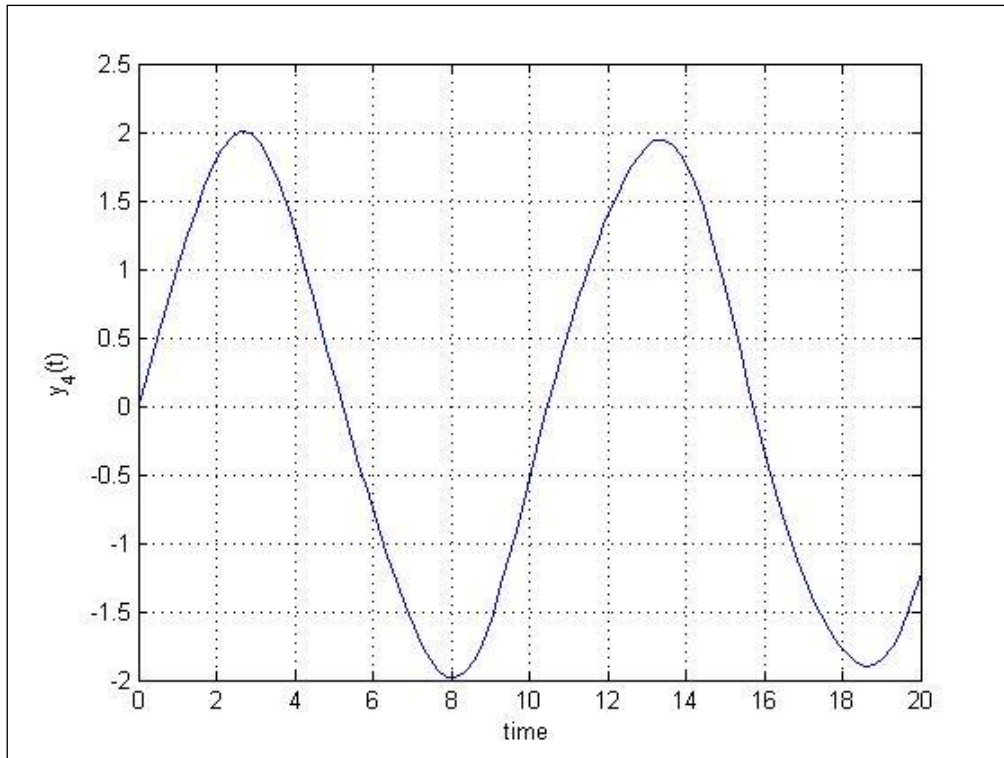
Σχήμα 3.32 Απόκριση $x_1(t)$ συστήματος 2 Β.Ε. με διέγερση Heaviside



Σχήμα 3.33 Απόκριση $x_2(t)$ συστήματος 2 Β.Ε. με διέγερση Heaviside



Σχήμα 3.34 Απόκριση $\dot{x}_1(t)$ συστήματος 2 Β.Ε. με διέγερση Heaviside



Σχήμα 3.35 Απόκριση $\dot{x}_2(t)$ συστήματος 2 Β.Ε. με διέγερση Heaviside

3.3.4.3 Μαθηματική επαλήθευση

Αν επιλύαμε το σύστημα μαθηματικά, τότε την απόκριση του θα την λαμβάναμε από τις παρακάτω εξισώσεις :

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.49 \\ 1.83 \end{bmatrix} h(t) - \begin{bmatrix} 1.44 \\ 1.89 \end{bmatrix} \cos(\omega_1 t) - \begin{bmatrix} 0.0541 \\ -0.0619 \end{bmatrix} \cos(\omega_2 t) \quad (3.42)$$

με $\omega_1 = 0,597$ και $\omega_2 = 1,67$, όπως προκύπτουν με εφαρμογή της *Ενεργειακής Μεθόδου Lagrange*.

Τελικά, για χρόνο $t = 20$ sec, η απόκριση του συστήματος είναι : $x_1(20) = 0.4906$

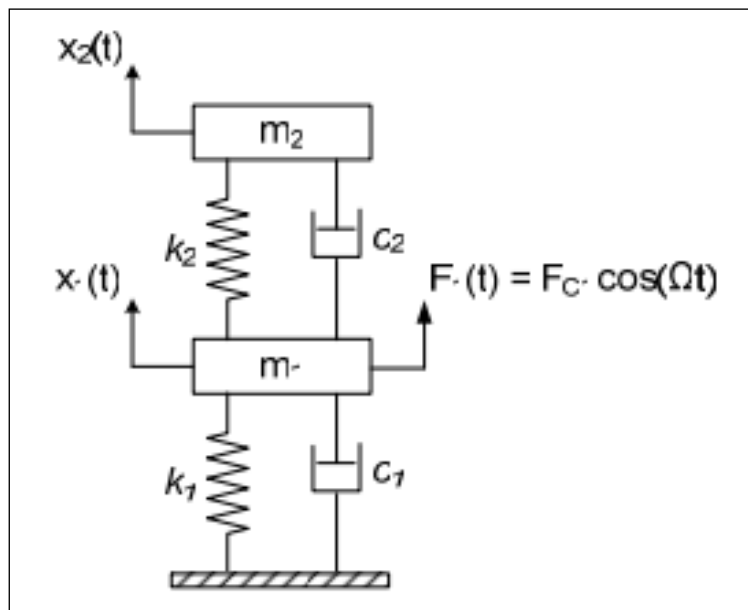
$$x_2(20) = 0.4994$$

Παρατηρούμε ότι υπάρχει μια μικρή απόκλιση μεταξύ των δύο τιμών, η οποία πιθανώς οφείλεται στο προβλεπόμενο σφάλμα της επαναληπτικής μεθόδου.

3.3.5 Σύστημα με Αρμονική Εξωτερική Διέγερση

3.3.5.1 Περιγραφή Συστήματος

Στην παράγραφο αυτή θα επιλύσουμε ένα δυναμικό σύστημα δύο βαθμών ελευθερίας με αρμονική εξωτερική διέγερση, δηλαδή $F = F_0 \cos(\Omega t)$, στο οποίο η απόσβεση και πάλι αμελείται.



Σχήμα 3.36 Σχηματική αναπαράσταση διβάθμιου δυναμικού συστήματος

Τα αριθμητικά δεδομένα και σ αυτήν την περίπτωση είναι :

- i. Οι μάζες του συστήματος είναι $m_1 = 4 \text{ kg}$ και $m_2 = 1 \text{ kg}$
- ii. Η σταθερά του κάθε ελατηρίου είναι $k = 1 \text{ N/m}$
- iii. Η συχνότητα διέγερσης λαμβάνεται $\Omega = 4\pi \text{ rad/sec}$ και το πλάτος της $F_{c1} = 1 \text{ N}$
- iv. Οι αρχικές συνθήκες του συστήματος είναι μηδενικές

Το σύστημα των εξισώσεων που περιγράφει το σύστημα είναι :

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 + k_2 (x_1 - x_2) = F_1 \\ m_2 \ddot{x}_2 + k_2 (x_2 - x_1) = 0 \end{cases} \quad (3.43)$$

3.3.5.2 Επίλυση με το λογισμικό της Matlab

Η επίλυση του συστήματος με σκοπό τον υπολογισμό των αποκρίσεων σου θα γίνει και πάλι με χρήση *Matlab* και τη συνάρτηση *ode45*.

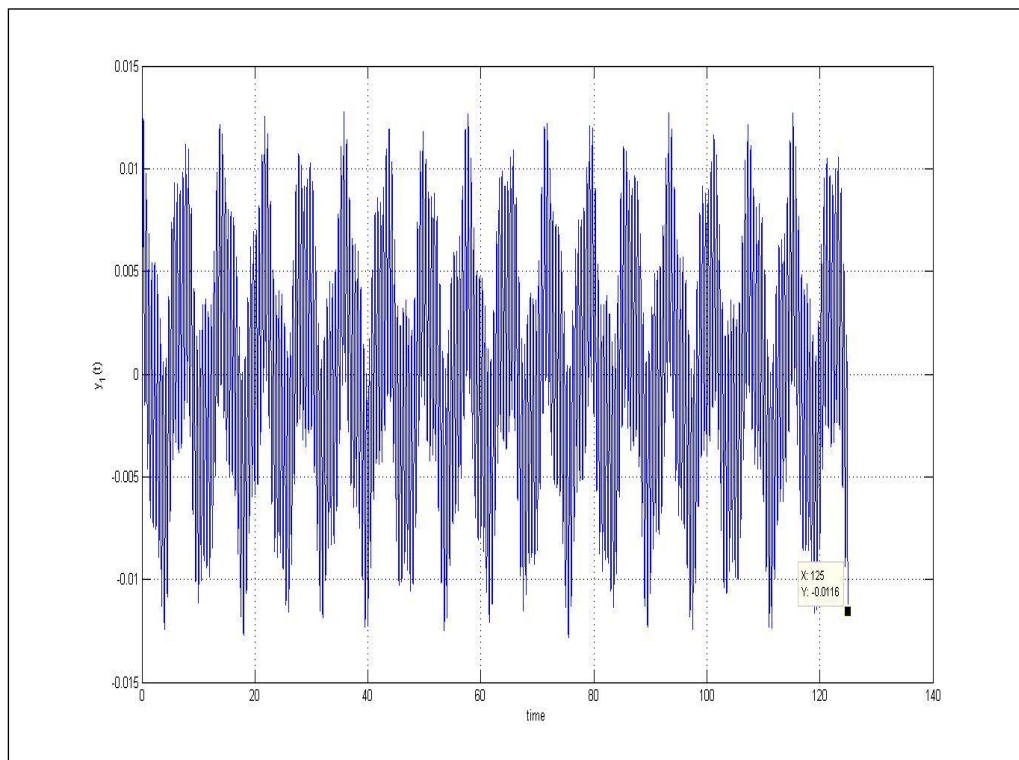
Κατά τα γνωστά, πρέπει να κάνουμε υποβιβασμό της τάξης του συστήματος. Για να το κάνουμε αυτό θεωρούμε :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = y(1) \\ \dot{x}_2 = y(2) \\ \dot{x}_1 = y(3) \\ \dot{x}_2 = y(4) \end{cases} \quad (3.44)$$

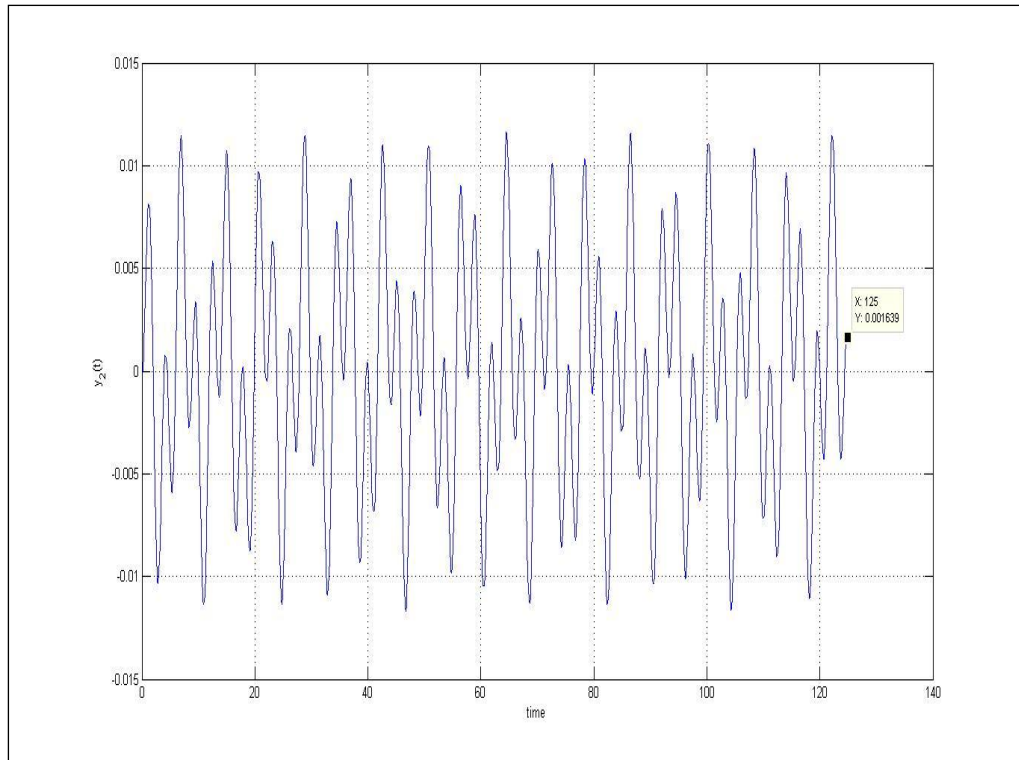
Τελικά, το σύστημα παίρνει την ακόλουθη μορφή:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = y(1) \\ \dot{x}_2 = y(2) \\ \dot{x}_1 = y(3) \\ \dot{x}_2 = y(4) \\ dy(3) = F_1 + \left(-\frac{2k}{m_1}\right)y(1) + \left(\frac{k}{m_1}\right)y(2) \\ dy(4) = \left(\frac{k}{m_2}\right)y(1) + \left(-\frac{k}{m_2}\right)y(2) \end{cases} \quad (3.45)$$

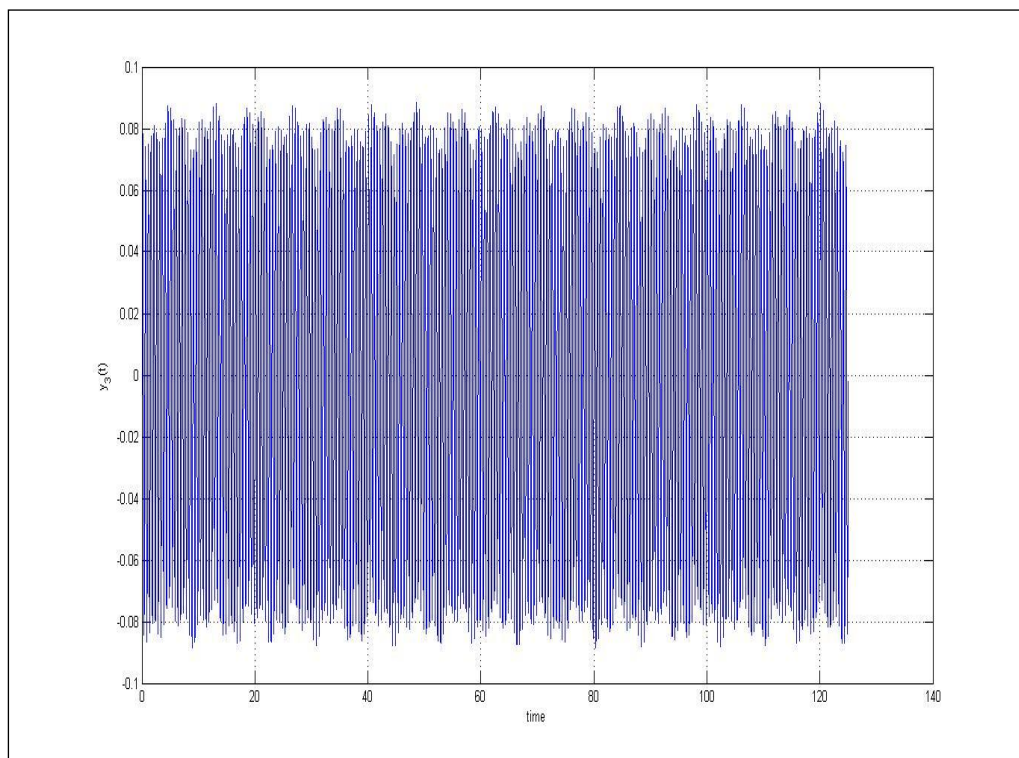
Έτσι, λαμβάνουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα για την απόκριση του συστήματος :



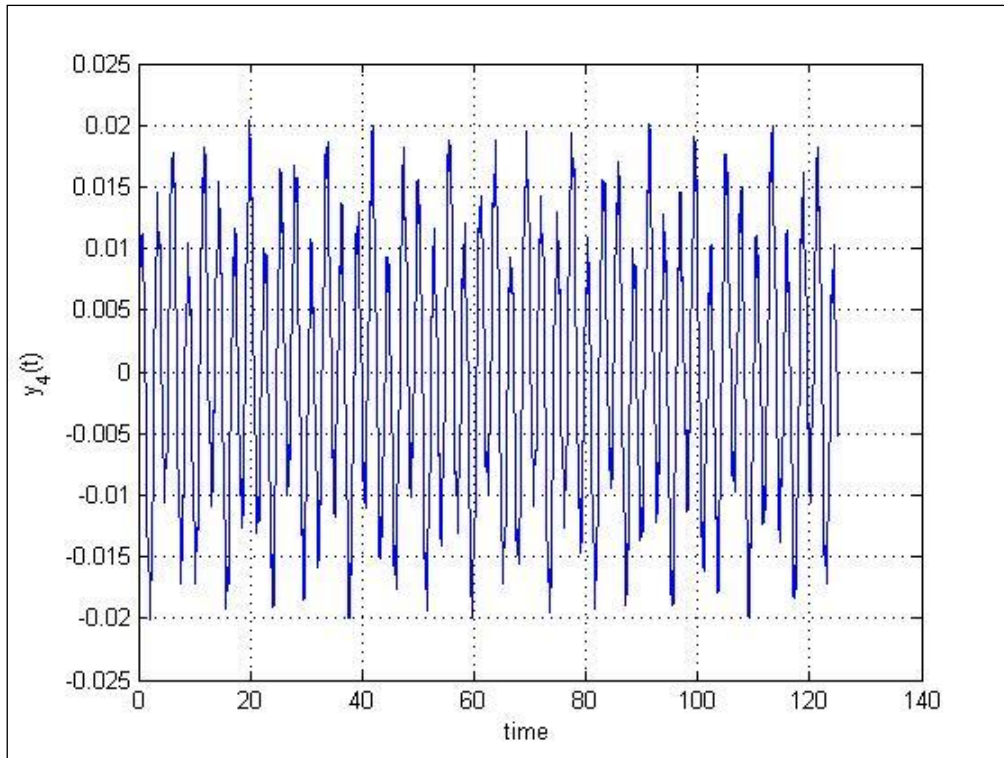
Σχήμα 3.37 Απόκριση $x_1(t)$ συστήματος 2 Β.Ε. με αρμονική εξωτερική διέγερση



Σχήμα 3.38 Απόκριση $x_2(t)$ συστήματος 2 Β.Ε. με αρμονική εξωτερική διέγερση



Σχήμα 3.39 Απόκριση $x_1(t)$ συστήματος 2 Β.Ε. με αρμονική εξωτερική διέγερση



Σχήμα 3.40 Απόκριση $\dot{x}_2(t)$ συστήματος 2 Β.Ε. με αρμονική εξωτερική διέγερση

3.3.5.3 Μαθηματική Επαλήθευση

Μαθηματικά, η επίλυση του συστήματος δίνει :

$$\begin{cases} x_1(t) = X_{c1} \cos(\Omega t) = -0.0001 \\ x_2(t) = X_{c2} \cos(\Omega t) = 0.001 \end{cases} \quad (3.46)$$

που επιβεβαιώνει την αριθμητική επίλυση.

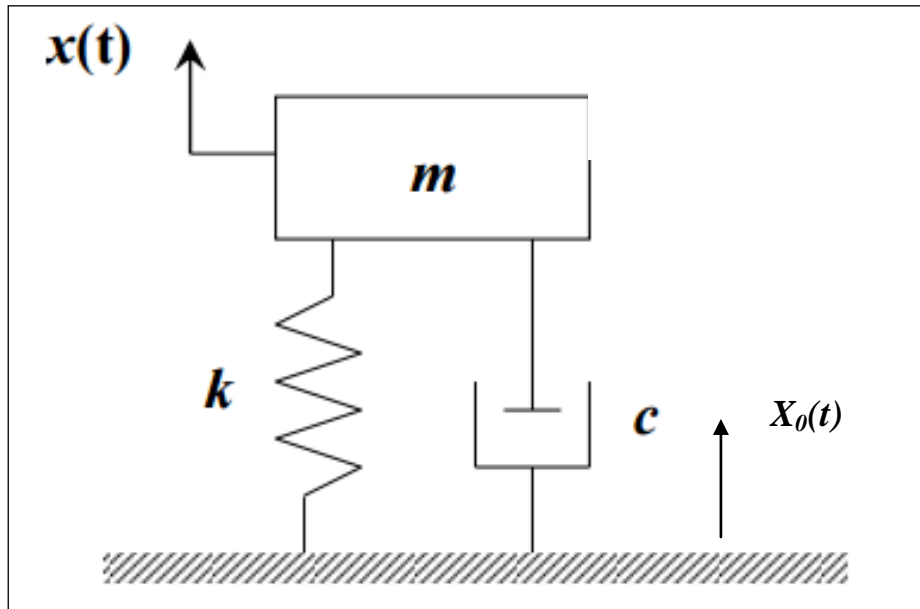
3.4 Δυναμικό Σύστημα Ενός Βαθμού Ελευθερίας με

Κινηματική Εξωτερική Διέγερση

Ιδιαίτερη έμφαση δίνουμε στη μελέτη της απόκρισης ενός δυναμικού συστήματος ενός βαθμού ελευθερίας με κινηματική διέγερση, καθώς αυτό προσομοιάζει σε μεγάλο βαθμό την απόκριση του συστήματος με σύνδεσμο *Cardan*, το οποίο θα μελετήσουμε σε επόμενο κεφάλαιο, μιας και, όπως έχουμε ήδη αναφέρει, ένας σύνδεσμος *Cardan* δέχεται, θεωρητικά σταθερή, κινηματική εξωτερική διέγερση.

3.4.1 Γενική περιγραφή – Περιγραφή εξωτερικής διέγερσης

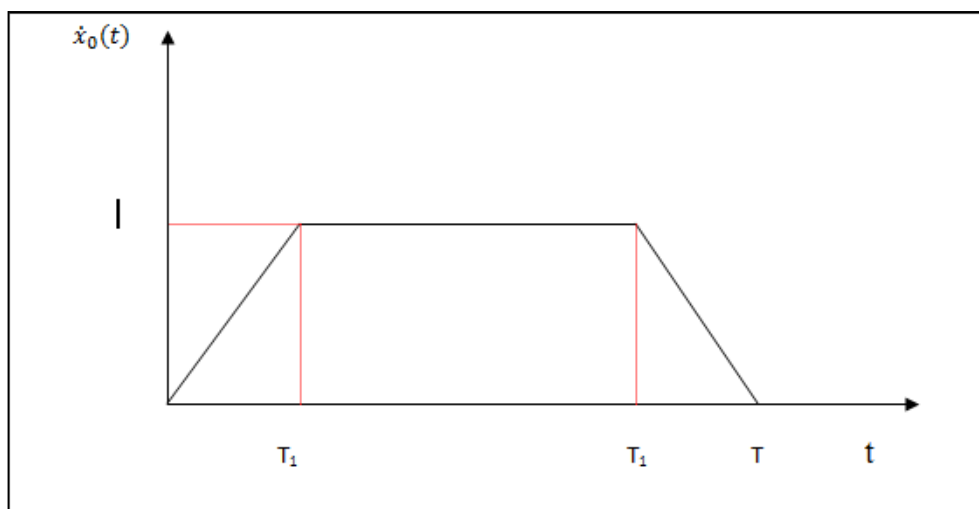
Το συγκεκριμένο μοντέλο ακολουθεί ακριβώς την λογική του Δυναμικού Συστήματος 1 Β.Ε. με εξωτερική διέγερση δύναμη, όπως αυτό έχει περιγραφεί, και παρουσιάζεται στο ακόλουθο σχήμα :



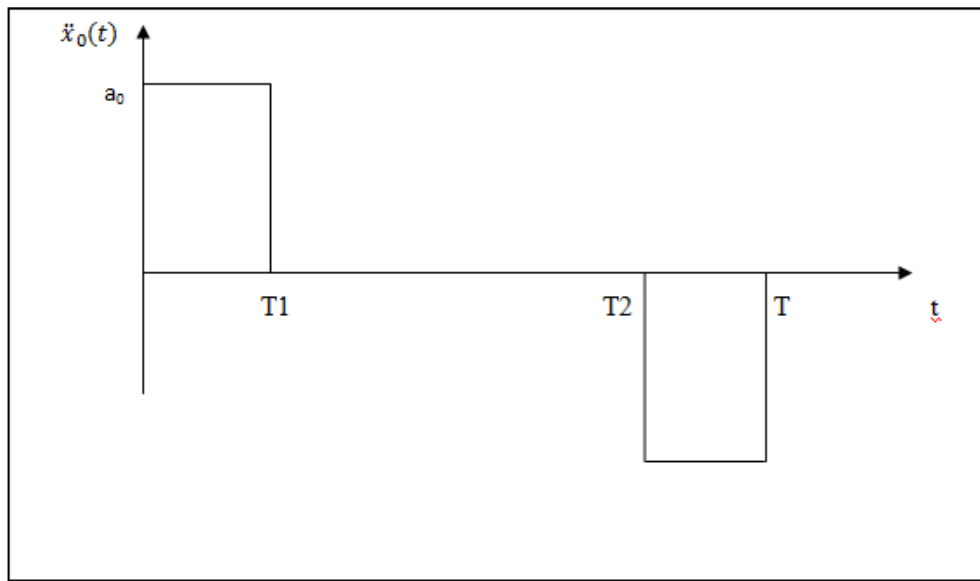
Σχήμα 3.41 Δυναμικό σύστημα ενός βαθμού ελευθερίας με κινηματική διέγερση

Το σύστημα αυτό είναι ενός βαθμού ελευθερίας, αφού τα στοιχεία m, k, c έχουν κοινή μετατόπιση $x(t)$.

Θεωρούμε ότι στο σύστημα αυτό ασκείται κινηματική εξωτερική διέγερση $x_0(t)$, η οποία περιγράφεται στα ακόλουθα σχήματα :



Σχήμα 3.42 Μορφή ταχύτητας διέγερσης



Σχήμα 3.43 Μορφή επιτάχυνσης διέγερσης

Θεωρώντας θετική φορά προς τα πάνω έχουμε :

$$\begin{cases} F_c = c(\dot{x} - \dot{x}_0) \\ F_k = k(x - x_0) \end{cases} \quad (3.47)$$

Η εξίσωση ισορροπίας του συστήματος θα είναι :

$$m\ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{x}_0) + k(x - x_0) = 0 \quad (3.48)$$

$$\text{Θέτουμε } x - x_0 = u \Rightarrow \dot{u} = \dot{x} - \dot{x}_0 \quad (3.49)$$

$$\ddot{u} = \ddot{x} - \ddot{x}_0$$

Έτσι,

$$m(\ddot{u} + \ddot{x}_0) + c\dot{u} + ku = 0 \Rightarrow m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = -m\ddot{x}_0 \quad (3.50)$$

Παρατηρούμε ότι στο δεξί μέλος της παραπάνω εξίσωσης, η εξωτερική κινηματική διέγερση μπορεί να θεωρηθεί ως μια δύναμη διέγερσης :

$$F = -m\ddot{x}_0 \quad (3.51)$$

Για το λόγο αυτό το σύστημα έχει δυναμική απόκριση.

3.4.2 Θεωρούμε ότι $T_1 = \infty$

Αν θεωρήσουμε ότι η χρονική περίοδος T_1 , όπως αυτή φαίνεται στο σχήμα που περιγράφει την εξωτερική διέγερση, είναι άπειρη, τότε το σύστημά μας δέχεται, ουσιαστικά, μια εξωτερική κινηματική διέγερση που αντιστοιχεί σε μια σταθερή επιτάχυνση ή σταθερά επιταχυνόμενη κίνηση ή σταθερά αυξανόμενη ταχύτητα.

Τα αριθμητικά δεδομένα του συστήματος είναι :

- Επιτάχυνση $a_0 = 176,8 \text{ m/sec}^2$
- Μάζα : $m = 4,04 \text{ kg}$
- Σταθερά ελατηρίου : $k = 714,286 \text{ N/m}$
- Σταθερά αποσβεστήρα : $c = 0.602 \text{ N sec/m}$
- Συχνότητα : $\omega = 13,2967 \text{ rad/sec}$
- Περίοδος : $T = 0,47 \approx 0,5 \text{ sec}$
- Απόσβεση : $\zeta = 0,006$

3.4.2.1 Μαθηματική επίλυση

Η λύση του συστήματος θα είναι της μορφής :

$$u(t) = u_h(t) + u_p(t) \quad (3.52)$$

✓ Για την ομογενή λύση της εξίσωσης του συστήματος έχουμε :

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0 \quad (3.53)$$

Άρα,

$$u_h(t) = C_1 e^{-0.0745t} \cos(13,295t) + C_2 e^{-0.0745t} \sin(13,295t) \quad (3.54)$$

✓ Για την μερική λύση της εξίσωσης έχουμε :

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = -m\ddot{x}_0 \quad (3.55)$$

Αφού η μερική λύση $u_p(t)$ θα πρέπει να επαληθεύει την διαφορική εξίσωση που περιγράφει το σύστημα, καταλήγουμε ότι :

$$ku_p(t) = -F_0 \Rightarrow u_p(t) = -\frac{F_0}{k} \Rightarrow u_p(t) = -\frac{ma_0}{k} \quad (3.56)$$

Έτσι, η λύση της εξίσωσης προκύπτει :

$$u(t) = C_1 e^{-0.0745t} \cos(13,295t) + C_2 e^{-0.0745t} \sin(13,295t) + (-1) \quad (3.57)$$

Η παράγωγος της θα είναι :

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) = & e^{-0.0745t}[-13.296C_1 \sin(13.296t) - 0.0745C_1 \cos(13.296t)] + \\ & e^{-0.0745t}[13.296C_2 \cos(13.296t) - 0.0745C_2 \sin(13.296t)] \end{aligned} \quad (3.58)$$

Για τον υπολογισμό των σταθερών C_1 , C_2 χρειαζόμαστε δύο αρχικές συνθήκες για το σύστημα, οι οποίες είναι :

$$\begin{aligned} \text{Για } t=0 : u(0) = x(0) - x_0(0) &= 0 \\ \dot{u}(0) = \dot{x}(0) - \dot{x}_0(0) &= 0 \end{aligned}$$

Επομένως, αντικαθιστώντας τις αρχικές συνθήκες στην τελική λύση του συστήματος βρίσκουμε για τις σταθερές :

$$\begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = \frac{0.0745}{13.296} = 0.006 \end{cases} \quad (3.59)$$

Τελικά, η λύση της εξίσωσης κίνησης του συστήματος είναι :

$$u(t) = 1e^{-0.0745t} \cos(13,295t) + 0,006e^{-0.0745t} \sin(13,295t) + (-1) \quad (3.60)$$

3.4.2.2 Επίλυση με το λογισμικό της Matlab

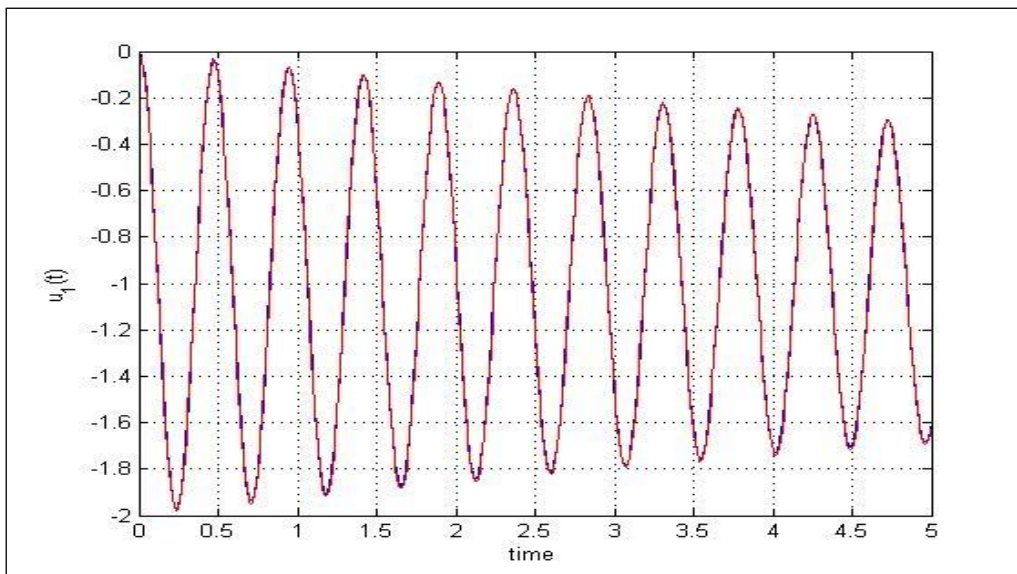
Η απόκριση του συστήματος αυτού μπορεί να υπολογιστεί και με τη χρήση του λογισμικού της *Matlab* και τη συνάρτηση *ode45*. Για τη δημιουργία της βοηθητικής συνάρτησης που περιγράφει το πρόβλημα και ‘καλείται’ από την *ode45* προς επίλυση του συστήματος πρέπει να θεωρήσουμε :

$$\begin{cases} y_1 = u \\ y_2 = \dot{u} \end{cases} \quad (3.61)$$

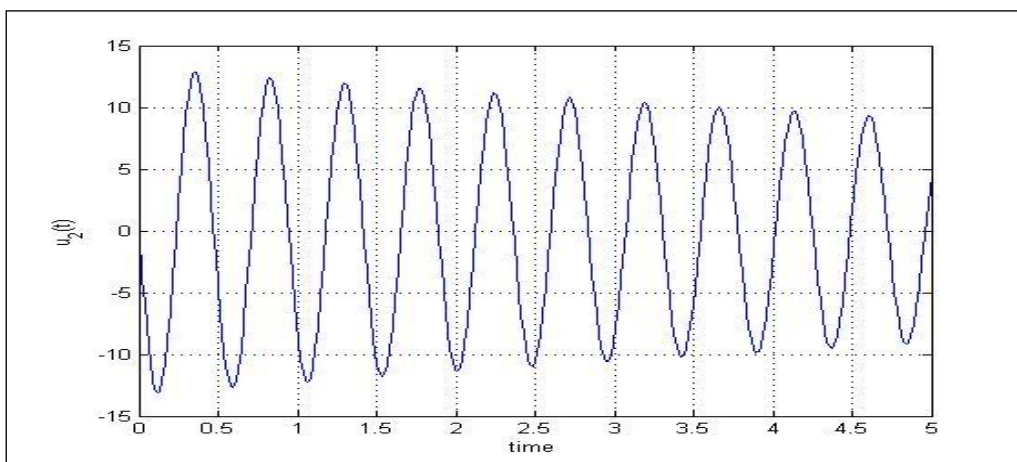
Τότε, η κίνηση του συστήματος περιγράφεται από το εξής σύστημα εξισώσεων :

$$\begin{cases} dy_1 = y_2 \\ dy_2 = -a_0 - \frac{c}{m}(y_2) - \frac{k}{m}(y_1) \end{cases} \quad (3.62)$$

Αν επιλύσουμε το σύστημα ως προς την $u(t)$ λαμβάνουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα. Με την κόκκινη γραμμή παρουσιάζεται η μαθηματική επίλυση του προβλήματος, που όπως φαίνεται, ταυτίζεται με την αριθμητική. Έτσι, έχουμε :



Σχήμα 3.44 Απόκριση $u(t)$ συστήματος 1 Β.Ε. με κινηματική διέγερση για $T_1=\infty$



Σχήμα 3.45 Απόκριση $u_2(t)$ συστήματος 1 Β.Ε. με κινηματική διέγερση για $T_1=\infty$

3.4.3 Θεωρούμε ότι $T_2 = \infty$

Σε αυτή την εφαρμογή θεωρούμε ότι χρονική περίοδος T_2 είναι άπειρη. Έτσι, έχουμε ένα σύστημα προς επίλυση το οποίο δέχεται ως εξωτερική διέγερση μια σταθερή ταχύτητα, δηλαδή η επιτάχυνση είναι μηδενική.

Τα αριθμητικά δεδομένα του συστήματος και σε αυτή την περίπτωση είναι :

- Επιτάχυνση : $a_0 = 0 \text{ m/sec}^2$
- Μάζα : $m = 4,04 \text{ kg}$
- Σταθερά ελατηρίου : $k = 714,286 \text{ N/m}$
- Σταθερά αποσβεστήρα : $c = 0.602 \text{ N sec/m}$
- Συχνότητα : $\omega = 13,2967 \text{ rad/sec}$
- Περίοδος : $T = 0,47 \approx 0,5 \text{ sec}$
- Απόσβεση : $\zeta = 0,006$

δηλαδή παραμένουν όμοια με της προηγούμενης εφαρμογής.

3.4.3.1 Μαθηματική επίλυση

Η λύση του συστήματος θα είναι της μορφής :

$$u(t) = u_h(t) + u_p(t) \quad (3.63)$$

✓ Για την ομογενή λύση της εξίσωσης του συστήματος έχουμε :

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0 \quad (3.64)$$

Άρα,

$$u_h(t) = C_1 e^{-0.0745t} \cos(13,295t) + C_2 e^{-0.0745t} \sin(13,295t) \quad (3.65)$$

Επομένως, δεν υπάρχει καμία αλλαγή μέχρι εδώ.

✓ Για την μερική λύση της εξίσωσης δεν υπολογίζουμε κάτι αφού ταυτίζεται με την ομογενή .

Για τον υπολογισμό των σταθερών C_1 , C_2 χρειαζόμαστε δύο αρχικές συνθήκες για το σύστημα, οι οποίες είναι :

$$\text{Για } t=0 : u(0) = x(0) - x_0(0) = 0 \quad (3.66)$$

$$\dot{u}(0) = \dot{x}(0) - \dot{x}_0(0) = 0$$

Επομένως, αντικαθιστώντας τις αρχικές συνθήκες στην τελική λύση του συστήματος βρίσκουμε :

$$\begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 0 \end{cases} \quad (3.67)$$

Τελικά, η λύση της εξίσωσης κίνησης του συστήματος είναι :

$$u(t) = 0 \quad (3.68)$$

Επειδή, όπως βλέπουμε, οι μηδενικές αρχικές συνθήκες δεν βοηθούν στη παρατήρηση της απόκρισης του συστήματος, θεωρούμε ότι προϋπήρξε μια διέγερση και λαμβάνουμε ως αρχικές συνθήκες τις τελικές τιμές αυτής. Έτσι, αν η προηγούμενη διέγερση διήρκησε $t = 2.5T$, έχουμε για τις αρχικές συνθήκες :

$$\text{Για } t=2.5T=1.25 : u(1.25) = -0.564 \quad (3.69)$$

$$\dot{u}(1.25) = 10.046$$

Επομένως, αντικαθιστώντας τις αρχικές συνθήκες στην τελική λύση του συστήματος βρίσκουμε :

$$\begin{cases} C_1 = 1.036 \\ C_2 = -0.02 \end{cases} \quad (3.70)$$

Τελικά, η λύση της εξίσωσης κίνησης του συστήματος είναι :

$$u(t) = 1.036e^{-0.0745t} \cos(13,295t) - 0.02e^{-0.0745t} \sin(13,295t) \quad (3.71)$$

3.4.3.1.1 Επίλυση με το λογισμικό της Matlab

Η απόκριση του συστήματος αυτού μπορεί να υπολογιστεί και με τη χρήση του λογισμικού της *Matlab* και τη συνάρτηση *ode45*, όπως και στην προηγούμενη περίπτωση. Για τη δημιουργία της βοηθητικής συνάρτησης που περιγράφει το πρόβλημα και καλείται από την *ode45* προς επίλυση του συστήματος πρέπει να θεωρήσουμε :

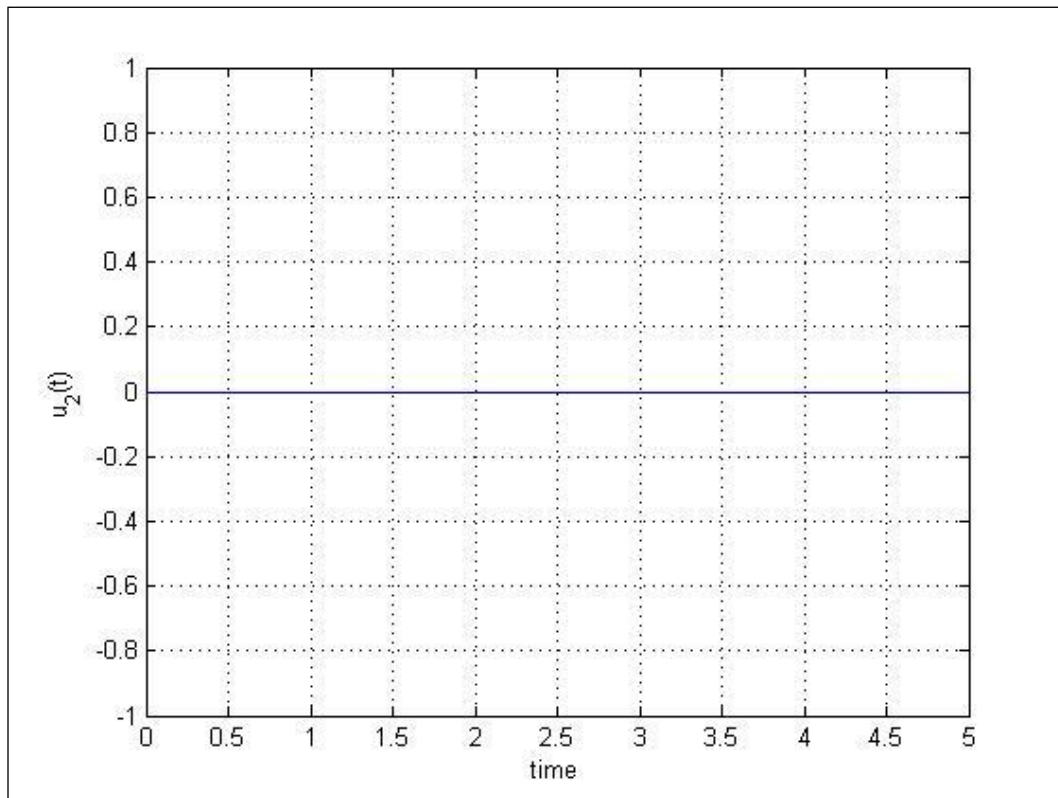
$$\begin{cases} y_1 = u \\ y_2 = \dot{u} \end{cases} \quad (3.72)$$

Τότε, η κίνηση του συστήματος περιγράφεται από το εξής σύστημα εξισώσεων :

$$\begin{cases} dy_1 = y_2 \\ dy_2 = -a_0 - \frac{c}{m}(y_2) - \frac{k}{m}(y_1) \end{cases} \quad (3.73)$$

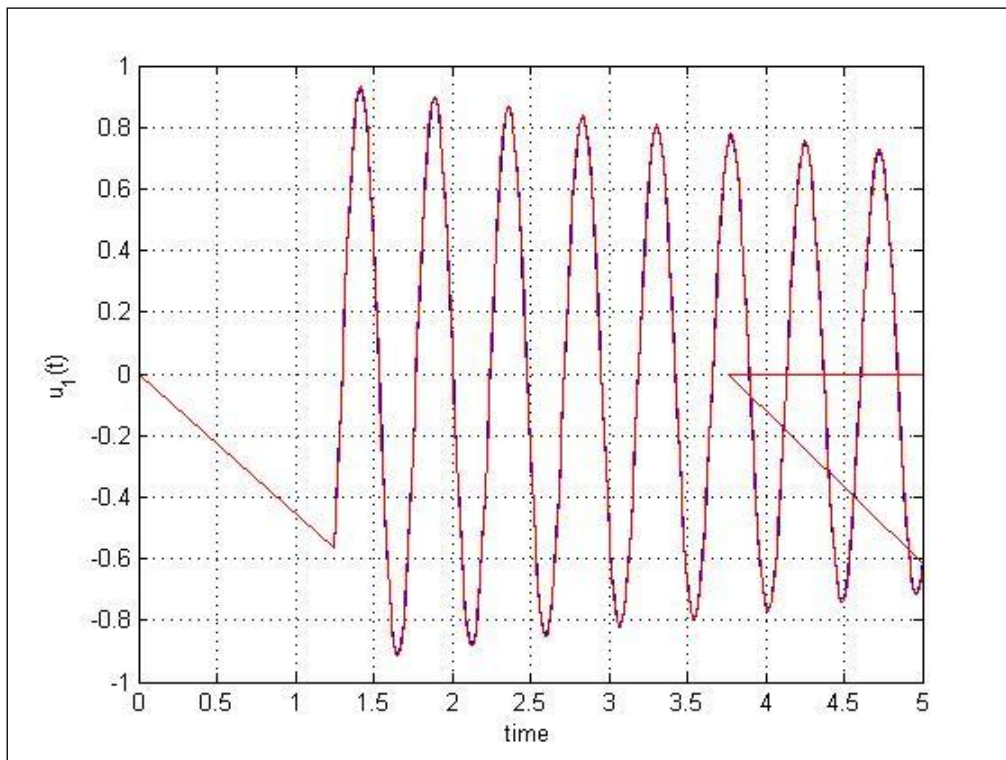
Δηλαδή , όσον αφορά τη δυναμική περιγραφή του συστήματος, αυτή δεν υφίσταται καμία αλλαγή πέραν από τις τιμές της διέγερσης και των αρχικών συνθηκών. Επιλύοντας το σύστημα λαμβάνουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα. Με την κόκκινη γραμμή παρουσιάζεται και πάλι η μαθηματική επίλυση του προβλήματος.

- Για μηδενικές αρχικές συνθήκες

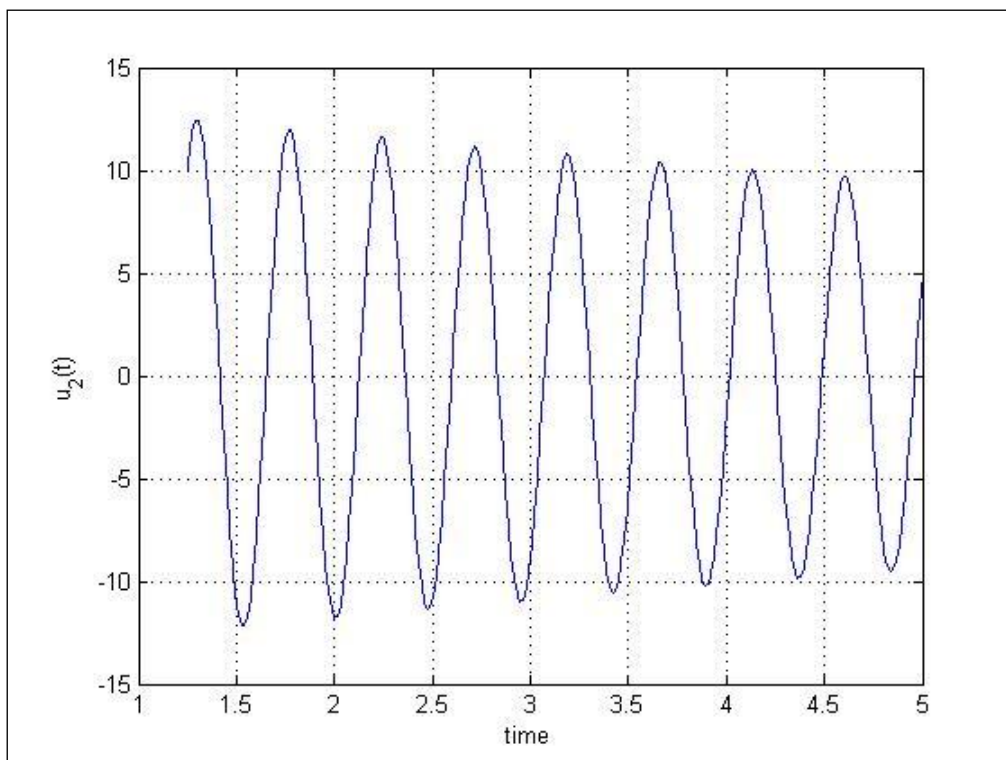


Σχήμα 3.46 Απόκριση $u_2(t)$ συστήματος 1 Β.Ε. με κινηματική διέγερση για $T_2=\infty$ και μηδενικές αρχικές συνθήκες

- Για αρχικές συνθήκες με $t_0 = 1,25$ sec



Σχήμα 3.47 Απόκριση $u(t)$ συστήματος 1 Β.Ε. με κινηματική διέγερση για $T_2=\infty$ και μη μηδενικές αρχικές συνθήκες



Σχήμα 3.48 Απόκριση $du(t)$ συστήματος 1 Β.Ε. με κινηματική διέγερση για $T_2=\infty$ και μη μηδενικές αρχικές συνθήκες

3.4.4 Θεωρούμε ότι $T - T_2 = \infty$

Σε αυτή την περίπτωση, ως εξωτερική διέγερση του συστήματος, λαμβάνουμε μόνο την τελευταία πιθανή περίπτωση για την a_0 . Αυτό σημαίνει πως, τώρα το σύστημα δέχεται σταθερή επιβράδυνση ή, αλλιώς, υφίσταται ομαλή επιβραδυνόμενη κίνηση.

Ομοίως, τα αριθμητικά δεδομένα του συστήματος λαμβάνονται :

- $a_0 = -176.8 \text{ m/sec}^2$
- Μάζα : $m = 4,04 \text{ kg}$
- Σταθερά ελατηρίου : $k = 714,286 \text{ N/m}$
- Σταθερά αποσβεστήρα : $c = 0.602 \text{ N sec/m}$
- Συχνότητα : $\omega = 13,2967 \text{ rad/sec}$
- Περίοδος : $T = 0,47 \approx 0,5 \text{ sec}$
- Απόσβεση : $\zeta = 0,006$

3.4.4.1 Μαθηματική Επίλυση

Η λύση του συστήματος θα είναι της μορφής :

$$u(t) = u_h(t) + u_p(t) \quad (3.74)$$

✓ Για την ομογενή λύση της εξίσωσης του συστήματος έχουμε :

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0 \quad (3.75)$$

Άρα,

$$u_h(t) = C_1 e^{-0.0745t} \cos(13,295t) + C_2 e^{-0.0745t} \sin(13,295t) \quad (3.76)$$

✓ Για την μερική λύση της εξίσωσης έχουμε :

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = -m\ddot{x}_0 \quad (3.77)$$

Αφού η μερική λύση $u_p(t)$ θα πρέπει να επαληθεύει την διαφορική εξίσωση που περιγράφει το σύστημα, καταλήγουμε ότι :

$$ku_p(t) = -F_0 \Rightarrow u_p(t) = -\frac{F_0}{k} \Rightarrow u_p(t) = -\frac{ma_0}{k} \quad (3.78)$$

Έτσι, η λύση της εξίσωσης προκύπτει :

$$u(t) = C_1 e^{-0.0745t} \cos(13,295t) + C_2 e^{-0.0745t} \sin(13,295t) + 1 \quad (3.79)$$

Η παράγωγος της θα είναι :

$$\dot{u}(t) = e^{-0.0745t} [-13.296C_1 \sin(13.296t) - 0.0745C_1 \cos(13.296t)] + e^{-0.0745t} [13.296C_2 \cos(13.296t) - 0.0745C_2 \sin(13.296t)] \quad (3.80)$$

Για τον υπολογισμό των σταθερών C_1 , C_2 χρειαζόμαστε δύο αρχικές συνθήκες για το σύστημα, οι οποίες είναι :

$$\text{Για } t=0 : u(0) = x(0) - x_0(0) = 0 \Rightarrow C_1 = -1 \quad (3.81)$$

$$\dot{u}(0) = \dot{x}(0) - \dot{x}_0(0) = 0 \Rightarrow C_2 = -\frac{0.0745}{13.296} = -0.006$$

Τελικά, η λύση της εξίσωσης κίνησης του συστήματος είναι :

$$u(t) = -1e^{-0.0745t} \cos(13,295t) - 0,006e^{-0.0745t} \sin(13,295t) + 1 \quad (3.82)$$

3.4.4.1.1 Επίλυση με το λογισμικό της Matlab

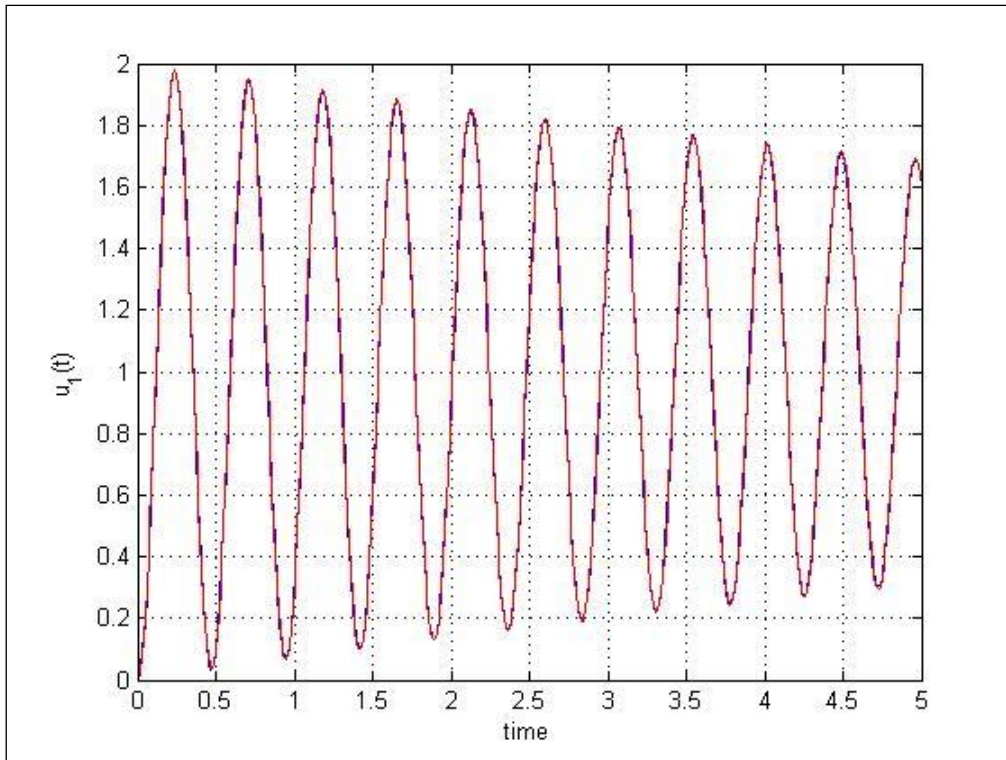
Όπως και στις προηγούμενες εφαρμογές, έτσι κι εδώ, επιλύουμε το δυναμικό σύστημα με το λογισμικό της *Matlab* και τη συνάρτηση *ode45*. Το σύστημα περιγράφεται, ομοίως με παραπάνω θεωρώντας :

$$\begin{cases} y_1 = u \\ y_2 = \dot{u} \end{cases} \quad (3.83)$$

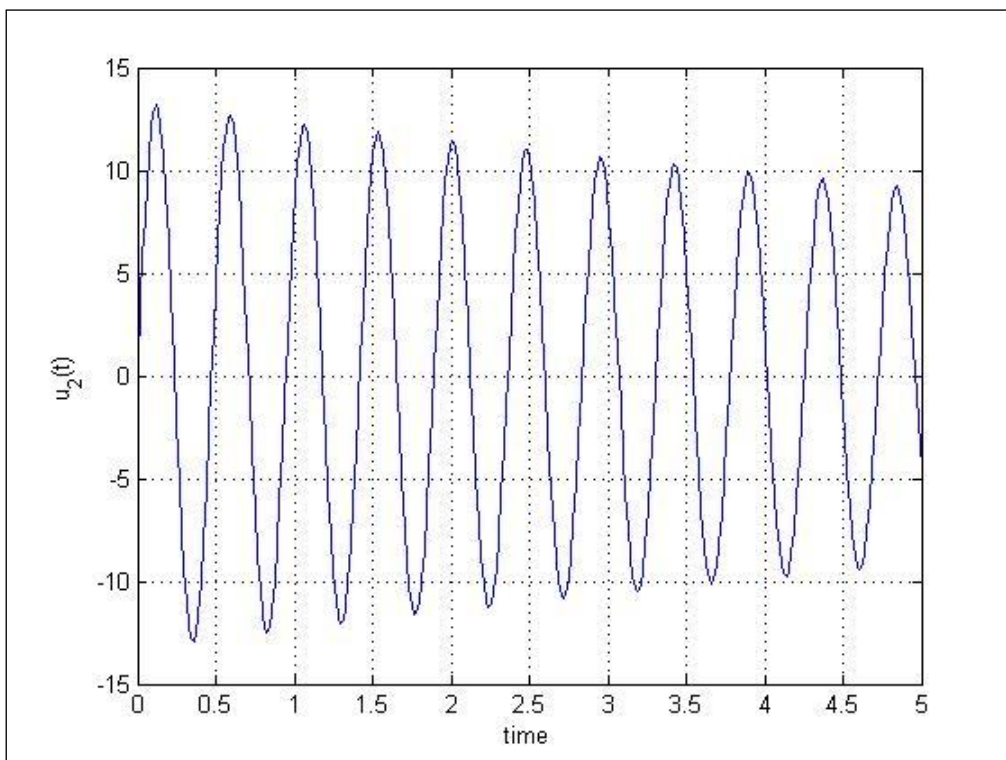
Επομένως, η κίνηση του συστήματος περιγράφεται από το εξής σύστημα εξισώσεων :

$$\begin{cases} dy_1 = y_2 \\ dy_2 = -a_0 - \frac{c}{m}(y_2) - \frac{k}{m}(y_1) \end{cases} \quad (3.84)$$

Επιλύοντας το σύστημα ως προς την $u(t)$ λαμβάνουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα, όπου με την κόκκινη γραμμή παρουσιάζεται η μαθηματική επίλυση του προβλήματος, που ταυτίζεται με την αριθμητική. Άρα, έχουμε :



Σχήμα 3.49 Απόκριση $u(t)$ συστήματος 1 Β.Ε. με κινηματική διέγερση για $T - T_2 = \infty$



Σχήμα 3.50 Απόκριση $du(t)$

3.4.5 Απόκριση ως προς $x(t)$

Αφού έχουμε ελέγξει την απόκριση του συστήματος ως προς $u(t)$, για καθεμιά από τις παραπάνω περιπτώσεις, μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε και την πραγματική απόκρισή του ως προς $x(t)$.

Ως προς τη μαθηματική επίλυση του συστήματος για την απόκριση της μετατόπισης $x(t)$, αυτή προκύπτει εύκολα για κάθε περίπτωση ως εξής :

Εφόσον έχουμε επιλύσει το σύστημα ως προς $u(t)$ θεωρώντας ότι μεταξύ $u(t)$ και $x(t)$ ισχύει :

$$u(t) = x(t) - x_0(t) \quad (3.85)$$

με δεδομένη για κάθε περίπτωση τη σχέση που περιγράφει την $u(t)$, τότε :

$$x(t) = u(t) + x_0(t) \quad (3.86)$$

Φυσικά, οι συναρτήσεις που περιγράφουν την $u(t)$ αλλά και την διέγερση $x_0(t)$ εξαρτώνται από την τιμή που έχουμε δώσει στην εξωτερική διέγερση a_0 .

Για να επιλύσουμε το σύστημα ως προς $x(t)$ αναλυτικά, με τη βοήθεια της Matlab, αρκεί να θεωρήσουμε :

$$\begin{cases} y_1 = x \\ y_2 = \dot{x} \end{cases} \quad (3.87)$$

Δηλαδή να περιγράψουμε το σύστημα ως :

$$\begin{cases} dy_1 = y_2 \\ dy_2 = \frac{1}{m}F_1 - \frac{c}{m}(y_2 - dy_0) - \frac{k}{m}(y_1 - y_0) \end{cases} \quad (3.88)$$

όπου έχουμε ορίσει ως $F_1(y_0)$ την εξωτερική κινηματική διέγερση (a_0) του συστήματος σε κάθε περίπτωση, ως dy_0 το ολοκλήρωμα της, δηλαδή την αντίστοιχη ταχύτητα, κι, τέλος, ως y_0 , το ολοκλήρωμα της ταχύτητας, δηλαδή την μετατόπιση που αντιστοιχεί στη διέγερση αυτή.

Τα αποτελέσματα της επίλυσης αυτής παρουσιάζονται ακολούθως για όλες τις τιμές της εξωτερικής διέγερσης a_0 . Με μπλε γραμμή φαίνονται τα αποτελέσματα της αριθμητικής επίλυσης ενώ με κόκκινη γραμμή φαίνεται η γραφική απεικόνιση της μαθηματικής επίλυσης.

3.4.5.1 Θεωρούμε ότι $T_1 = \infty$

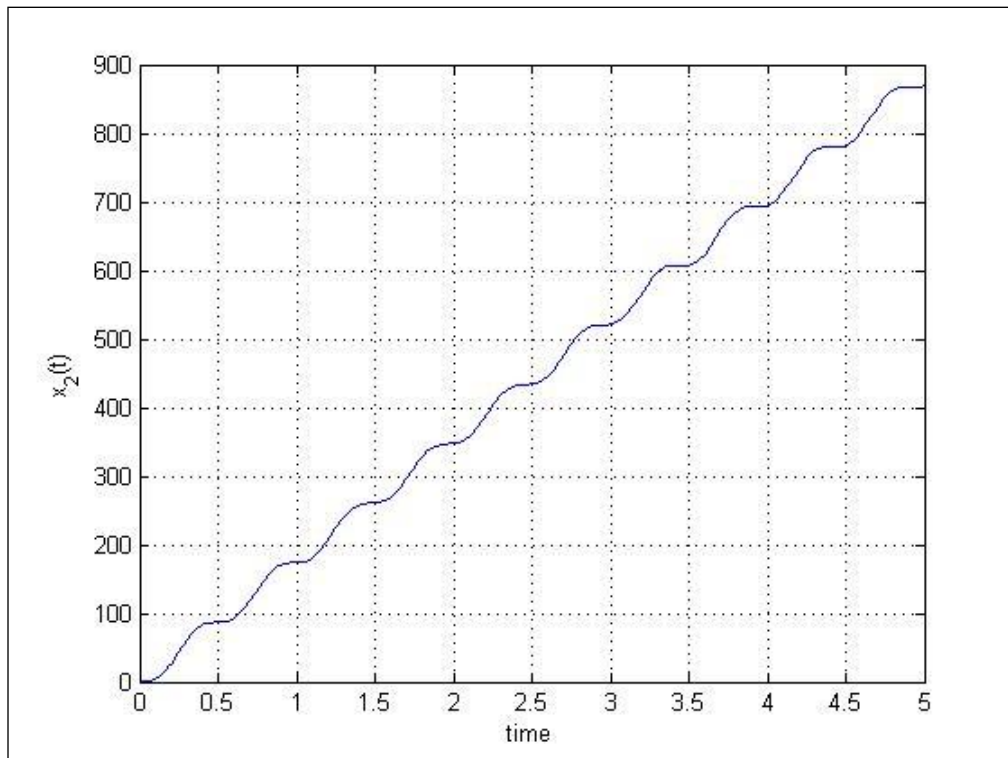
Για την πρώτη περίπτωση, η εξωτερική διέγερση, καθώς και οι ολοκληρώσεις της, περιγράφονται από τις παρακάτω σχέσεις :

$$a_0 = 176,8 \tag{3.89}$$

$$u_0 = dy_0 = a_0 * t$$

$$x_0 = y_0 = \frac{1}{2} * a_0 * t^2$$

Έτσι, η απόκριση της μετατόπισης προκύπτει :



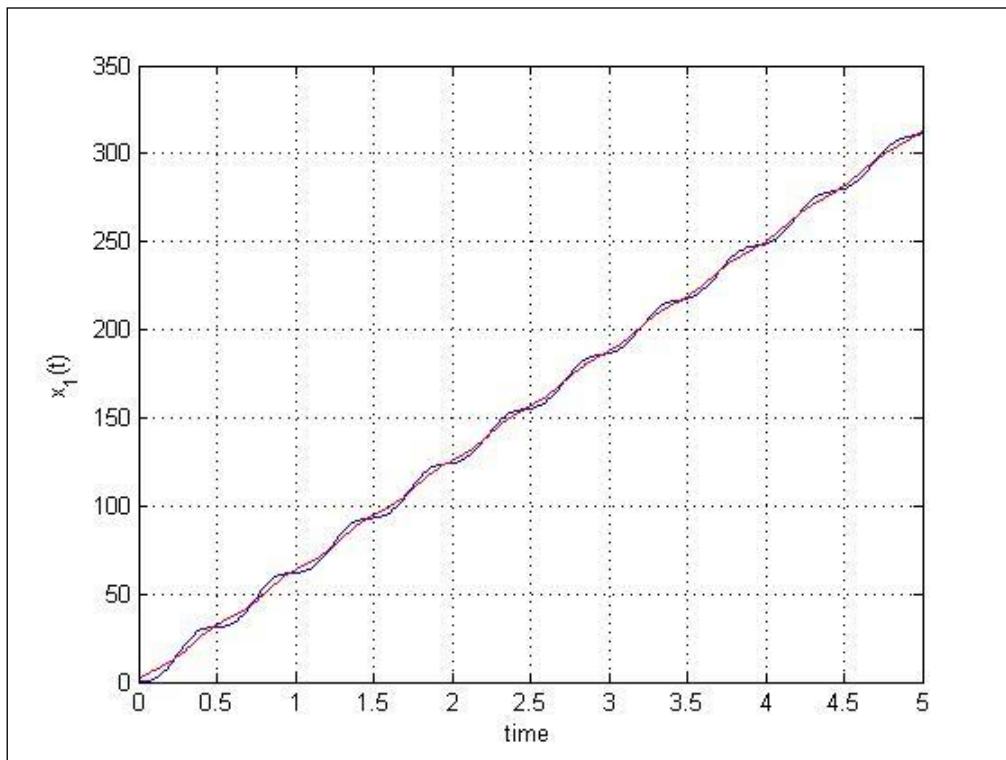
Σχήμα 3.51 Απόκριση $dx(t)$ συστήματος 1 Β.Ε. για $T_1 = \infty$

3.4.5.2 Θεωρούμε ότι $T_2 = \infty$

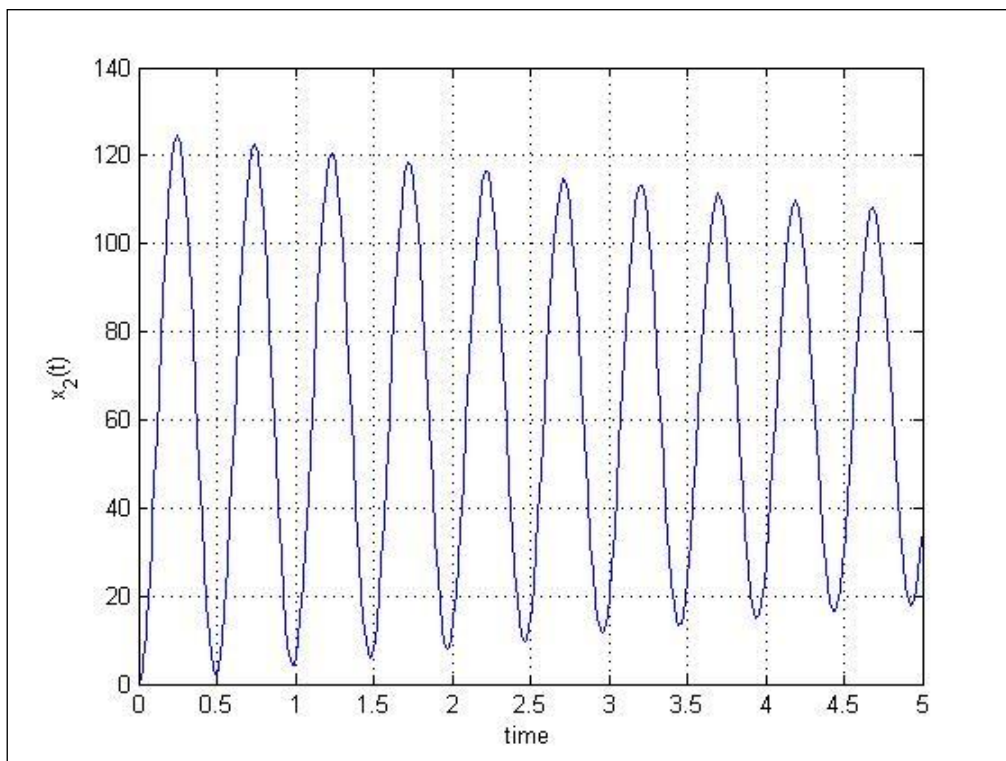
Για την δεύτερη περίπτωση, η εξωτερική διέγερση, καθώς και οι ολοκληρώσεις της, περιγράφονται από τις παρακάτω σχέσεις :

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ u_0 = dy_0 = 221 \\ x_0 = y_0 = u_0 * t + 138 \end{cases} \tag{3.90}$$

Επομένως, για την απόκριση της μετατόπισης παίρνουμε :



Σχήμα 3.52 Απόκριση $x(t)$ συστήματος 1 Β.Ε. για $T_2 = \infty$



Σχήμα 3.53 Απόκριση $dx(t)$ συστήματος 1 Β.Ε. για $T_1 = \infty$

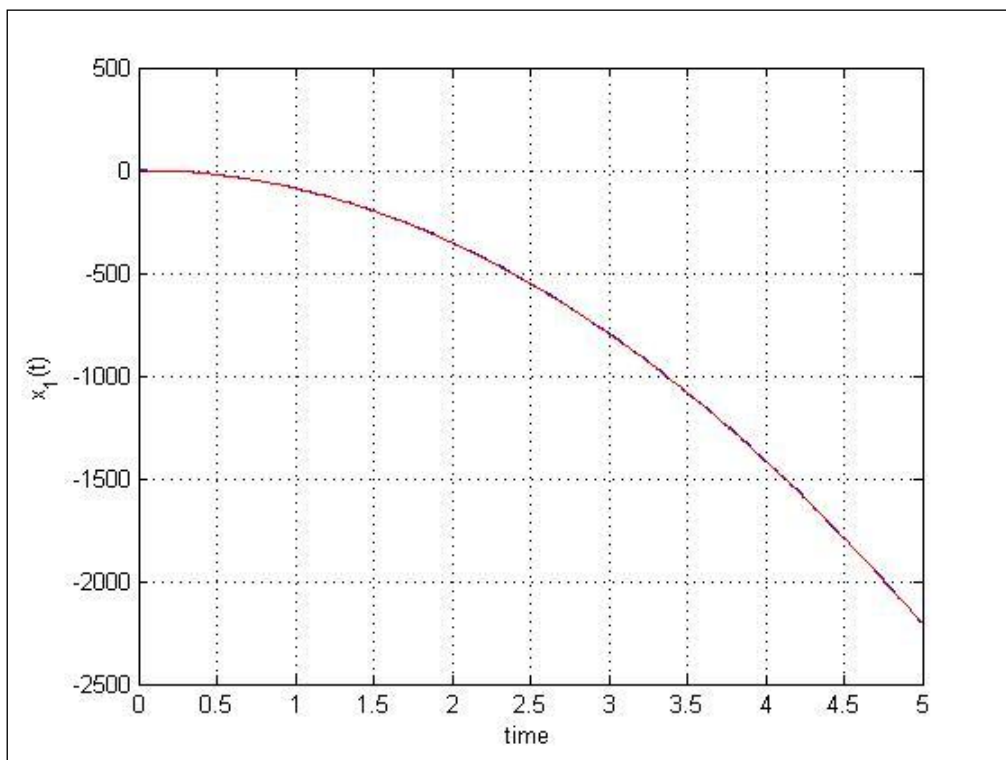
για μη μηδενικές αρχικές συνθήκες, όπως εξηγήθηκε και στην περίπτωση της απόκρισης $u(t)$.

3.4.5.3 Θεωρούμε ότι $T - T_2 = \infty$

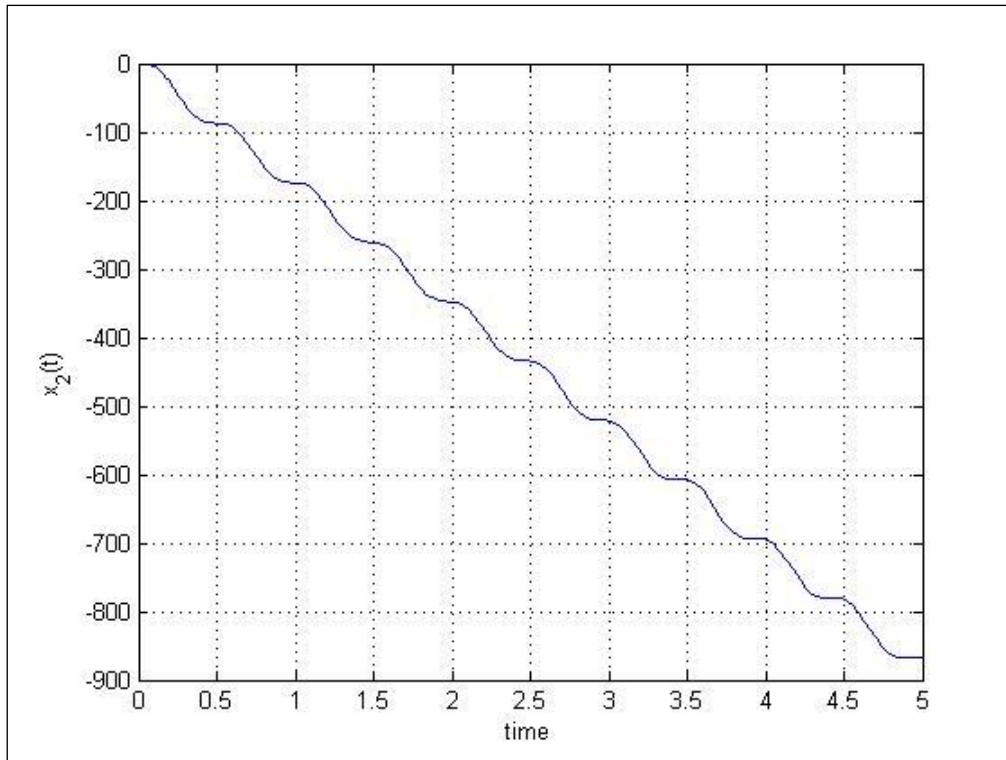
Για την τρίτη περίπτωση, η εξωτερική διέγερση, καθώς και οι σχέσεις που περιγράφουν συνολικά την εξωτερική διέγερση του συστήματος είναι οι ακόλουθες :

$$\begin{cases} a_0 = -176,8 \\ u_0 = dy_0 = -a_0 * t \\ x_0 = y_0 = -\frac{1}{2} * a_0 * t^2 \end{cases} \quad (3.91)$$

Έτσι, η απόκριση της μετατόπισης προκύπτει :



Σχήμα 3.54 Απόκριση $x(t)$ συστήματος 1 Β.Ε. για $T - T_2 = \infty$



Σχήμα 3.55 Απόκριση $dx(t)$ συστήματος 1 Β.Ε. για $T - T_2 = \infty$

4

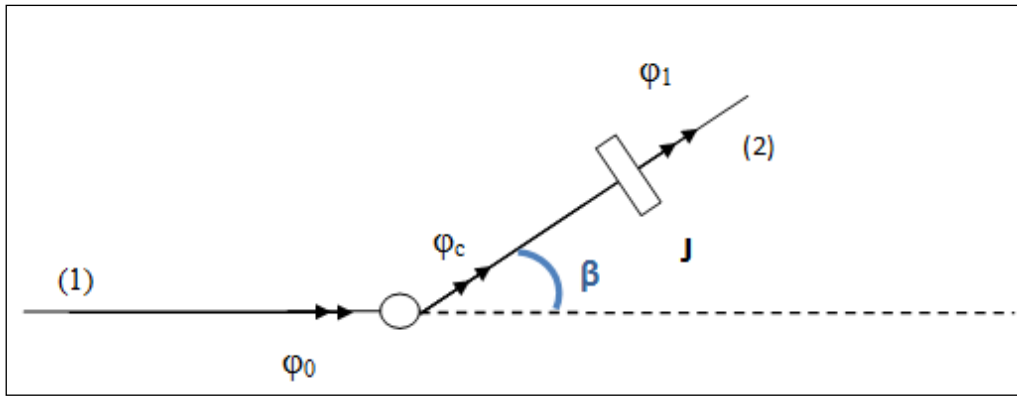
Μοντελοποίηση Συστήματος Με σύνδεσμο

Cardan

Στο κεφάλαιο αυτό θα γίνει αναλυτική μελέτη ενός δυναμικού συστήματος το οποίο διαθέτει και έναν σύνδεσμο *Cardan*. Σκοπός μας είναι η μελέτη της απόκρισής του για διάφορες εξωτερικές διεγέρσεις, με αποτέλεσμα την δημιουργία συμπερασμάτων για την επίδραση της διέγερσης, της ελαστικότητας του άξονα αλλά και της γωνίας λειτουργίας στην απόκρισή του. Παρακάτω θα γίνει μια περιγραφή του συστήματος, οι απόδειξη των εξισώσεων κίνησης που το περιγράφουν αλλά και η επίλυσή του με το λογισμικό της *Matlab*. Τέλος, θα αναλυθούν τα συμπεράσματα που προέκυψαν από την μελέτη αυτή.

4.1 Περιγραφή Συστήματος

Θεωρούμε ένα μοντέλο το οποίο αποτελείται από έναν άκαμπτο άξονα (1), ο οποίος συνδέεται με έναν εύκαμπτο άξονα (2) μέσω ενός συνδέσμου *Cardan*, όπως φαίνεται στο *σχήμα 4.1*,



Σχήμα 4.1 Δυναμικό σύστημα με σύνδεσμο Cardan

σχηματίζοντας μία γωνία β ενώ στην άκρη του εύκαμπτου άξονα θεωρούμε έναν δίσκο με αδράνεια J .

Στο δυναμικό σύστημα αυτό, έχουμε ορίσει τρεις γωνίες, τις φ_0, φ_c και φ_1 . Η γωνία φ_0 αντιστοιχεί στην είσοδο του συστήματος, δηλαδή η παράγωγός της δίνει την γωνιακή ταχύτητα εισόδου. Η γωνία φ_c (γωνία *Cardan*) εκφράζει τη σχέση μετάδοσης της κίνησης του κινητήριου άξονα (1) προς τον κινούμενο άξονα (2) εξαιτίας του συνδέσμου. Τέλος, η γωνία φ_1 αποτελεί την γωνία εξόδου του συστήματος. Οι γωνίες αυτές εκφράζουν την γωνιακή μετατόπιση του εκάστοτε σημείου.

Λόγω της ελαστικότητας του άξονα (2) πρέπει να σημειωθεί ότι κατά την κίνησή του υφίστανται μία γωνία μεταβολής λόγω ελαστικότητας. Τη γωνία αυτή ονομάζουμε θ και αποτελεί το βαθμό ελευθερίας του συστήματός μας.

Γνωρίζουμε ότι κάθε σύνδεσμος *Cardan* χαρακτηρίζεται από έναν λόγο μετάδοσης των γωνιακών ταχυτήτων :

$$\eta = \frac{\Omega_{out}}{\Omega_{in}} \quad (4.1)$$

Ο λόγος αυτός, εισάγοντας και τη γωνία των αξόνων β , μπορεί να γραφεί ως :

$$\eta = \frac{\cos \beta}{1 - \cos^2 \varphi_0 \sin^2 \beta} \quad (4.2)$$

Όμως, εξαιτίας της σχέσης (4.1) αλλά και του ορισμού των χαρακτηριστικών γωνιών του συστήματος θα ισχύει ακόμη :

$$\dot{\varphi}_c = \eta \dot{\varphi}_0 \quad (4.3)$$

Επίσης, για τις γωνίες που ορίσαμε θα ισχύουν οι παρακάτω μεταξύ τους σχέσεις :

$$\varphi_1 = \varphi_c + \theta \quad (4.4)$$

$$\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_c + \dot{\theta} = \eta \dot{\varphi}_0 + \dot{\theta} \quad (4.5)$$

Σημειώνουμε ότι ο λόγος μετάδοσης η είναι συνάρτηση της γωνίας φ_0 . Έτσι, μπορούμε να θεωρήσουμε :

$$f_0 = \eta(\varphi_0) * \dot{\varphi}_0 \quad (4.6)$$

Και τελικά να έχουμε :

$$\varphi_1 = f_0 + \dot{\theta} \quad (4.7)$$

Στο σημείο αυτό πρέπει να υπενθυμίσουμε ότι η παράγωγος της γωνίας φ_0 αποτελεί την γωνιακή ταχύτητα εισόδου του συστήματος, δηλαδή :

$$\dot{\varphi}_0 = \omega_0(t) \quad (4.8)$$

Προχωρούμε τώρα στην δημιουργία των εξισώσεων που περιγράφουν την κίνηση του συστήματος. Η κατάστρωσή τους θα γίνει με χρήση της *Ενεργειακής Μεθόδου Lagrange* για έναν βαθμό ελευθερίας, τη γωνία θ . Έτσι προκύπτει :

$$\text{Η κινητική ενέργεια του συστήματος : } T = \frac{1}{2} J \dot{\varphi}_1^2 \quad (4.9)$$

$$\text{Η δυναμική ενέργεια του συστήματος : } U = \frac{1}{2} k \theta^2 \quad (4.10)$$

$$\text{Η ενέργεια του συστήματος : } P_c = \frac{1}{2} c \dot{\theta}^2 \quad (4.11)$$

$$\text{Η ισχύς του συστήματος : } P_t = 0 \quad (4.12)$$

Η ενεργειακή έκφραση της μεθόδου *Lagrange* θα είναι :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{\partial P_c}{\partial \dot{\theta}} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt} \left[J \dot{\varphi}_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial \dot{\theta}} \right] + k\theta + c\dot{\theta} = 0 \Rightarrow$$

$$J \frac{d(\varphi_1)}{dt} + k\theta + c\dot{\theta} = 0 \quad (4.13)$$

Τελικά, η εξίσωση που περιγράφει την κίνηση του συστήματος είναι :

$$J \frac{d(\varphi_1)}{dt} + k\theta + c\dot{\theta} = 0 \quad (4.14)$$

Όπου J : η αδράνεια του δίσκου

k : η ελαστικότητα του άξονα

c : η απόσβεση του άξονα

Στο σημείο αυτό πρέπει να τονίσουμε ότι ο αποσβεστήρας και το ελατήριο έχουν χρησιμοποιηθεί στην μοντελοποίηση ώστε να προσομοιάσουμε τον ελαστικό άξονα.

Με βάση τα δεδομένα που δόθηκαν προκύπτει :

- Η ισοδύναμη σταθερά του ελατηρίου : $K_{tot} = 7142,86 \text{ N / m}$
- Η ισοδύναμη σταθερά του αποσβεστήρα : $C_{tot} = 0.602 \text{ N sec / m}$
- Η ισοδύναμη αδράνεια : $J_{tot} = 0,404 \text{ kg m}^2$

Επομένως, η συχνότητα του συστήματος προκύπτει :

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{J}} = \sqrt{\frac{7142,86}{0,404}} = 132,9675 \text{ rad / sec} \quad (4.15)$$

Άρα, η περίοδος είναι :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 0,0473 \approx 0,05 \text{ sec} \quad (4.16)$$

Και η απόσβεση :

$$\zeta = \frac{C_{tot}}{2\omega J_{tot}} = 5.6 \cdot 10^{-3} \quad (4.17)$$

4.2 Αριθμητική Επίλυση

Σκοπός της επίλυσης του παραπάνω συστήματος είναι η εύρεση της γωνίας μεταβολής θ και κατ' επέκταση των ελαστικών ροπών που αναπτύσσονται στο σύστημα. Ο υπολογισμός των γωνιών θα γίνει επαναληπτικά με τη βοήθεια του λογισμικού της *Matlab* και συγκεκριμένα της συνάρτησης *ode45*.

Πριν την επίλυση του συστήματος θα ορίσουμε τις μεταβλητές που θα υπολογίζει η επαναληπτική διαδικασία. Αυτές θα είναι :

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= \theta \\ y_2 &= \dot{\psi}_1 \\ y_3 &= \varphi_0 \end{aligned} \right\} \quad (4.18)$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις 4.18 εκφράζουμε τις μεταβλητές που ορίσαμε ώστε να βρίσκεται η μεταβλητή προς επίλυση στο αριστερό μέλος των εξισώσεων κι έχουμε :

$$\left. \begin{aligned} \dot{y}_3 &= \omega_0(t) \\ f_0 &= \eta * \dot{y}_3 \\ \dot{y}_1 &= y_2 - f_0 \\ \dot{y}_2 &= \frac{1}{J} \{-ky_1 - c[y_2 - f_0]\} \end{aligned} \right\} \quad (4.19)$$

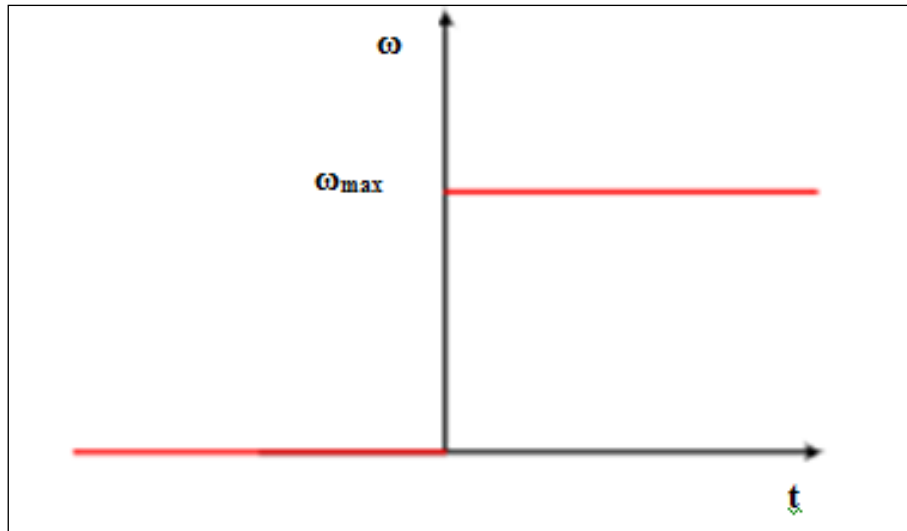
Η συνάρτηση με το παραπάνω τελικό σύστημα του μοντέλου, καλείται από την *ode45* και υπολογίζουμε την απόκρισή του.

4.2.1 Εξωτερική Διέγερση

Για να ελέγξουμε την απόκριση του δυναμικού συστήματος που δημιουργήσαμε για να προσομοιάσουμε την λειτουργία του συνδέσμου *Cardan*, θα πρέπει να ασκήσουμε σε αυτόν μια διέγερση. Η διέγερση είναι φυσικά κινηματική εφόσον η “είσοδος” του συνδέσμου είναι πάντοτε ένας περιστρεφόμενος άξονας.

Η διέγερση αυτή, μπορεί να λάβει οποιαδήποτε από τις συνήθεις μορφές, προσομοιάζοντας κάθε φορά το πραγματικό πρόβλημα. Στη δική μας μελέτη επιλέξαμε να χρησιμοποιήσουμε διέγερση τύπου Heaviside. Προτού περιγράψουμε λεπτομερώς τη διέγερση ας αναφερθούμε στα πλεονεκτήματα που μας δίνει αυτή η επιλογή. Από τη μια, μεταφέροντας την αλλαγή από το χρόνο μηδέν σε κάποια μεταγενέστερη χρονική στιγμή, μπορούμε να προσομοιάσουμε εν μέρει απότομες αλλαγές στη διέγερση που μπορεί να προκύψουν σε ένα πραγματικό πρόβλημα. Από την άλλη, η σταθερή τιμή που έχει το μεγαλύτερο χρόνο μας βοηθά να ελέγξουμε την απόκριση σε προβλήματα που συμβαίνουν συνήθως στα βαρέα οχήματα μιας που σε αυτές τις περιπτώσεις οι άξονες διατηρούν σταθερές ταχύτητες περιστροφής για σεβαστά χρονικά διαστήματα.

Ας προχωρήσουμε τώρα στην αναλυτική περιγραφή της διέγερσης που χρησιμοποιήσαμε. Όπως, έχουμε ήδη δει στο προηγούμενο κεφάλαιο, η διέγερση τύπου Heaviside περιγράφεται από το ακόλουθο σχήμα :



Σχήμα 4.2 Διέγερση τύπου Heaviside

Όπως εύκολα μπορούμε να παρατηρήσουμε, θεωρούμε ότι ο άξονας δέχεται αρχικά μηδενική διέγερση και μετά από μια χρονική στιγμή, την οποία ονομάζουμε t^* , λαμβάνει μια σταθερή τιμή, την οποία ονομάζουμε ω_{max} . Στην περίπτωση μας, θα θεωρήσουμε πως η διέγερση λαμβάνει τις εξής μέγιστες τιμές :

1. $\omega_{max} = 600 \text{ rpm}$
2. $\omega_{max} = 1100 \text{ rpm}$
3. $\omega_{max} = 2400 \text{ rpm}$

Επίσης, για καθεμιά από τις παραπάνω περιπτώσεις ταχύτητας, θα θεωρήσουμε ότι η μετάβαση από τη μηδενική τιμή γίνεται σε χρόνο :

1. $t^* = 0$
2. $t^* = T = 0,05 \text{ sec}$
3. $t^* = 10T = 0,5 \text{ sec}$

Η μοντελοποίηση, άρα και ο κώδικας, που περιγράφει το μοντέλο *Cardan*, δεν μεταβάλλεται με την αλλαγή της εξωτερικής διέγερσης, επομένως μένει μόνο να περιγράψουμε σωστά την διέγερση, δηλαδή :

$$\left. \begin{aligned} \omega &= 0 & , \text{ αν } t < t^* \\ \omega &= \omega_{max} & , \text{ αν } t > t^* \end{aligned} \right\} \quad (4.20)$$

4.2.2 Αποτελέσματα

Σε αυτή την παράγραφο, θα παραθέσουμε, σχολιάζοντας τα, τα αποτελέσματα της επίλυσης του μοντέλου, όπως περιγράφηκε παραπάνω. Για διευκόλυνση, αναφερόμαστε σε κάθε μέγεθος ξεχωριστά για όλες τις περιπτώσεις διέγερσης που επιλέξαμε προηγουμένως. Σημειώνουμε, βέβαια, πως παρόλο που οι δοκιμές έγιναν για όλες τις περιπτώσεις που αναφέρθηκαν στην προηγούμενη παράγραφο, παρακάτω δεν θα δούμε διαφορετικά διαγράμματα για κάθε χρόνο μεταβολής, αφού ουσιαστικά δεν παρατηρήθηκε κάποια αλλαγή.

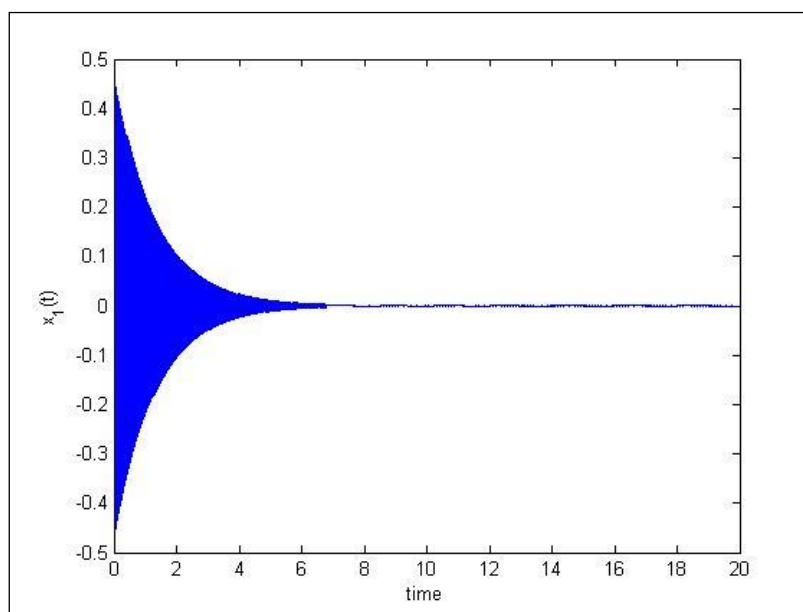
4.2.2.1 Απόκριση θ

Το πρώτο μέγεθος του οποίου την απόκριση θα παρουσιάσουμε είναι η γωνία θ . Όπως έχουμε ήδη αναφέρει εμφανίζεται λόγω του ότι ο άξονας (2) είναι εύκαμπτος, ενώ στα διαγράμματα που ακολουθούν περιγράφεται ουσιαστικά η γωνιακή μετατόπιση του.

Για καθεμιά από τις περιπτώσεις ταχύτητας διέγερσης που αναφέραμε παραπάνω θα θεωρήσουμε πως η γωνία λειτουργίας μεταξύ των αξόνων είναι 5, 10 και 15°. Έτσι, οδηγούμαστε στα ακόλουθα αποτελέσματα.

- Γωνία $\beta = 0^\circ$

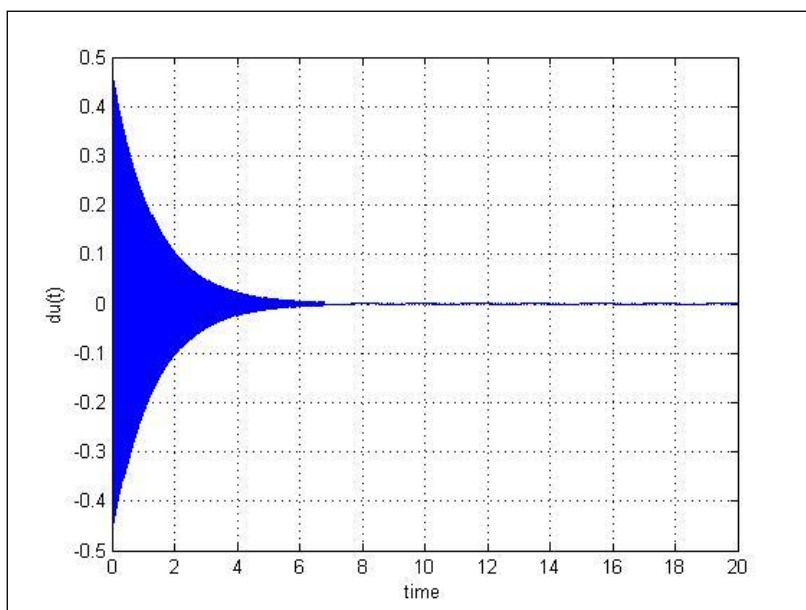
Στο παρακάτω διάγραμμα βλέπουμε την απόκριση της θ όταν η γωνία λειτουργίας είναι 0° και η ταχύτητα διέγερσης 600 rpm.



Σχήμα 4.3 Απόκριση θ για $\beta = 0^\circ$ και $\omega_{\max} = 600$ rpm

Παρατηρούμε ότι εκτελεί αποσβενύμενη ταλάντωση γύρω από το 0. Το μέγιστο πλάτος είναι περίπου 0,46 ενώ το σύστημα ηρεμεί μετά από χρόνο περίπου 9 sec. Στην ηρεμία εξακολουθεί να ταλαντώνεται με σταθερό πλάτος, το οποίο όμως είναι τόσο μικρό ($\ll 0,01$) που μπορεί να αμεληθεί.

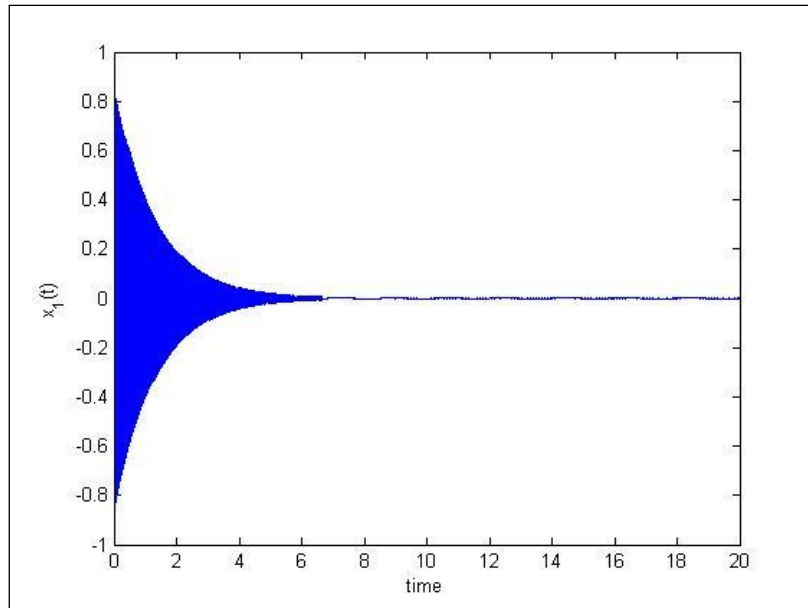
Στην περίπτωση αυτή, που η γωνία λειτουργίας είναι 0° η απόκριση του συστήματος με το σύνδεσμο *Cardan*, θα πρέπει να ταυτίζεται με αυτή ενός δυναμικού συστήματος ενός βαθμού ελευθερίας με κινηματική διέγερση. Στο σχήμα 4.3 βλέπουμε την απόκριση του συστήματος αυτού.



Σχήμα 4.4 Απόκριση u για $\omega_{\max}=600$ rpm

Εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε πως τα δύο μεγέθη έχουν ακριβώς ίδια απόκριση, γεγονός που επιβεβαιώνει τα αποτελέσματά μας για το σύστημα με σύνδεσμο *Cardan*.

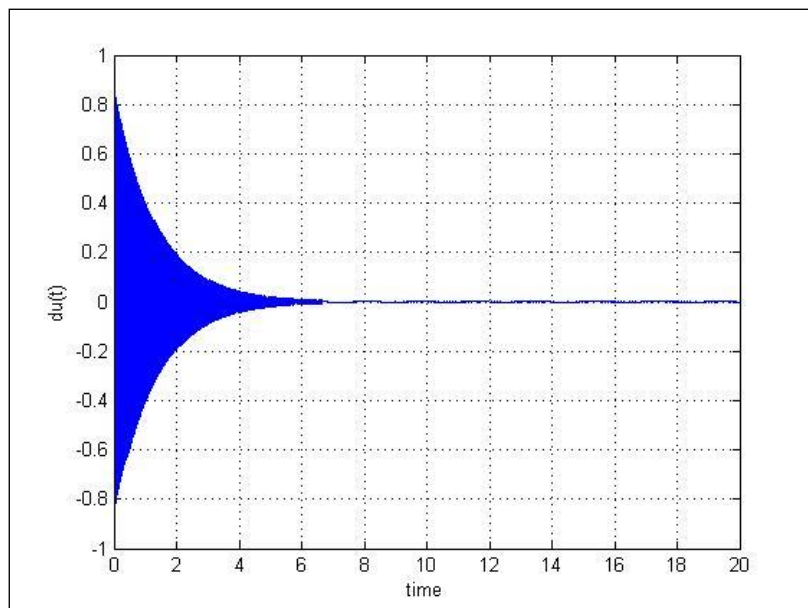
Στη συνέχεια θα δούμε την απόκριση της γωνίας θ για ταχύτητα διέγερσης 1100 rpm.



Σχήμα 4.5 Απόκριση θ για $\beta = 0^\circ$ και $\omega_{\max} = 1100$ rpm

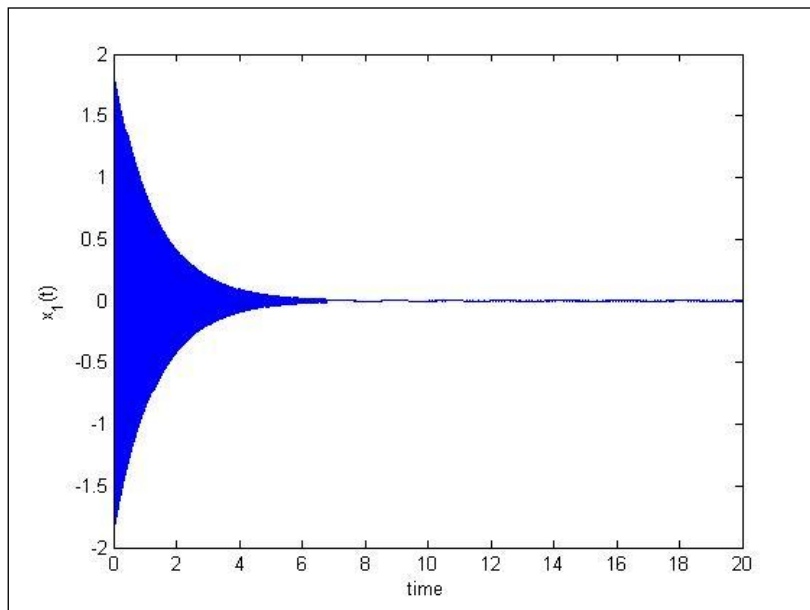
Εκτελεί αποσβενύμενη ταλάντωση γύρω από το μηδέν. Το μέγιστο πλάτος είναι περίπου 0,85, δηλαδή σχεδόν διπλάσιο από το προηγούμενο. Αφού σχεδόν διπλασιάσαμε την ταχύτητα διέγερσης μπορούμε να θεωρήσουμε πως υπάρχει ανάλογη σχέση μεταξύ του πλάτους και της ταχύτητας διέγερσης. Ο χρόνος ηρεμίας είναι και πάλι περίπου 9 sec ενώ η γωνία επίσης διατηρεί μια αμελητέα ταλάντωση.

Συγκρίνοντας και πάλι με το δυναμικό σύστημα ενός βαθμού ελευθερίας με κινηματική διέγερση, επιβεβαιώνουμε τα παραπάνω, όπως φαίνεται στο *σχήμα 4.6*.



Σχήμα 4.6 Απόκριση u για $\omega_{\max} = 1100$ rpm

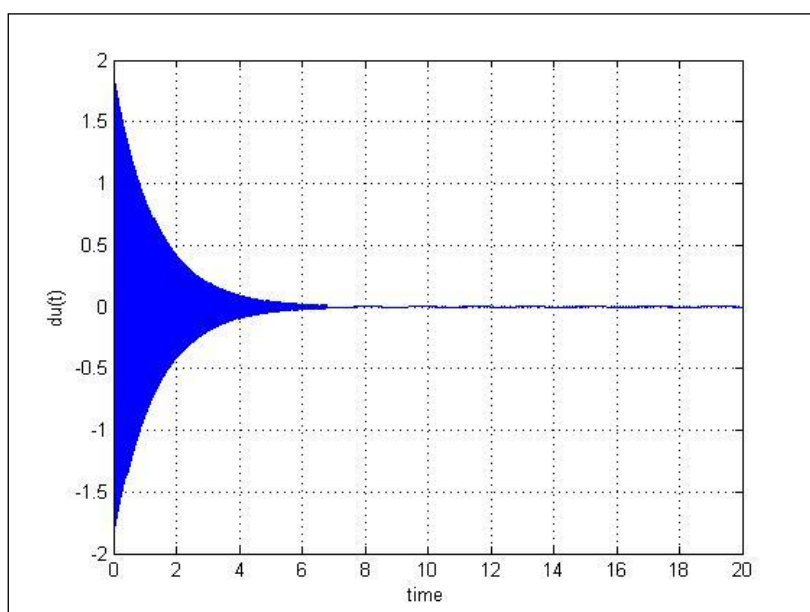
Τέλος, θα δούμε την απόκριση της γωνίας θ για ταχύτητα διέγερσης 2400 rpm.



Σχήμα 4.7 Απόκριση θ για $\beta = 0^\circ$ και $\omega_{\max} = 2400$ rpm

Η γωνία εκτελεί αποσβενύμενη ταλάντωση γύρω από το μηδέν. Το μέγιστο πλάτος είναι 1,84 περίπου, μεγαλύτερο από το διπλάσιο της προηγούμενης εφαρμογής αφού η ταχύτητα αυξήθηκε παραπάνω. Επομένως, θα μπορούσαμε να πούμε πως η αναλογία διατηρείται. Όσον αφορά την ηρεμία, αυτή επέρχεται στα 9 sec και οδηγεί σε αμελητέου πλάτους ταλαντώσεις.

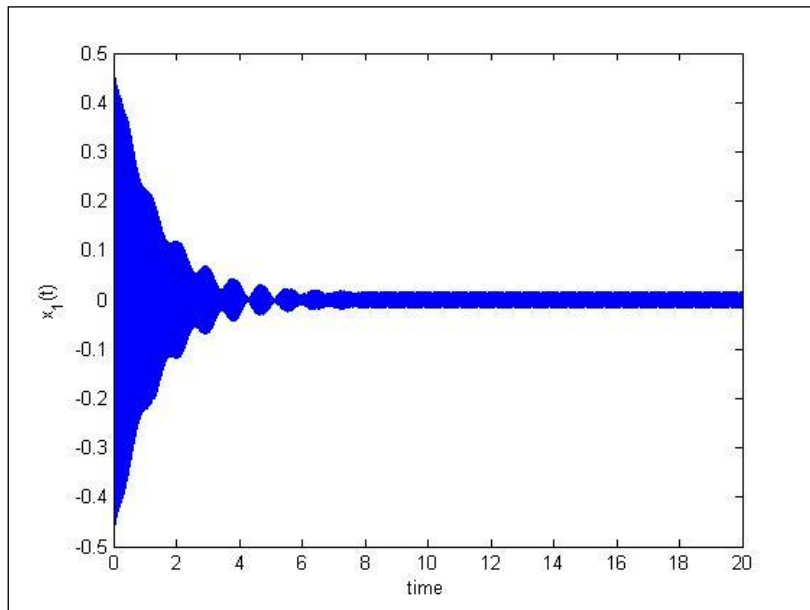
Η επιβεβαίωση των παραπάνω αποτελεσμάτων φαίνεται και για αυτή την περίπτωση από την απόκριση του συστήματος ενός βαθμού ελευθερίας με κινηματική διέγερση, από το ακόλουθο διάγραμμα.



Σχήμα 4.8 Απόκριση u για $\omega_{\max} = 2400$ rpm

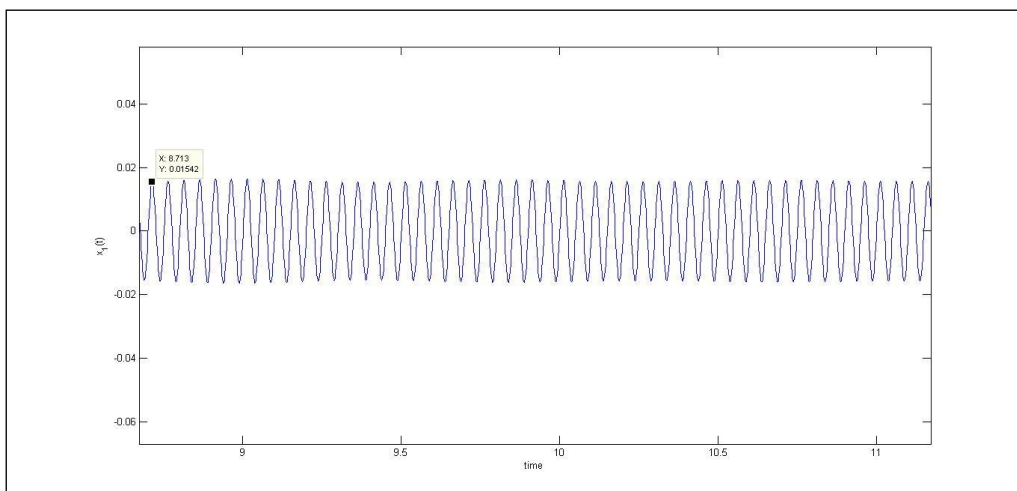
- Γωνία $\beta = 5^\circ$

Τώρα θα δούμε την απόκριση της γωνίας θ όταν η γωνία λειτουργίας είναι 5° και η ταχύτητα διέγερσης 600 rpm.



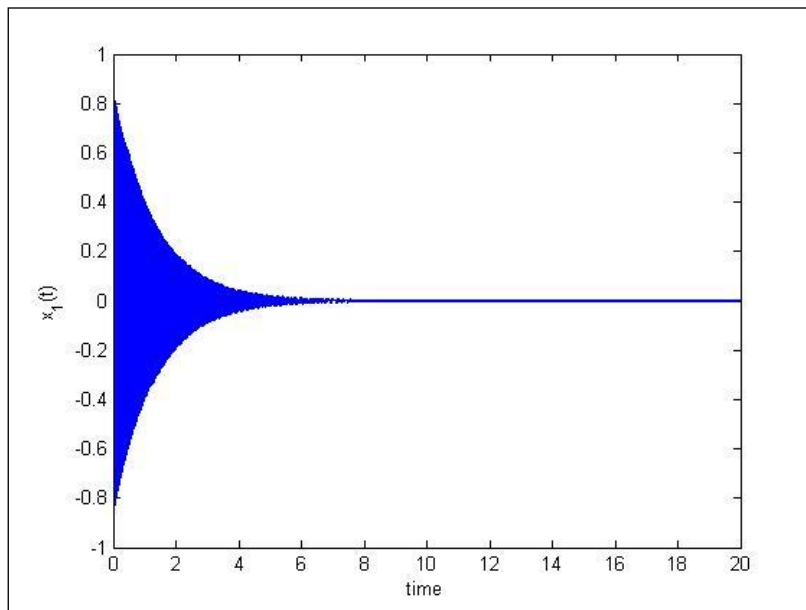
Σχήμα 4.9 Απόκριση θ για $\beta = 5^\circ$ και $\omega_{\max} = 600$ rpm

Παρατηρούμε πως το σύστημα εκτελεί και πάλι αποσβενύμενη ταλάντωση ενώ η μέγιστη τιμή του πλάτους δεν διαφέρει από την προηγούμενη περίπτωση για ταχύτητα διέγερσης 600 rpm. Αυτό που πρέπει να τονίσουμε είναι πως από τη μία η μείωση του πλάτους δεν γίνεται ομαλά πλέον και από την άλλη πως, μετά την ηρεμία, που επέρχεται και πάλι μετά από 9 sec, το σύστημα διατηρεί μια ταλάντωση σταθερού αλλά όχι αμελητέου πλάτους, περίπου 0,015. Αυτή φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα.



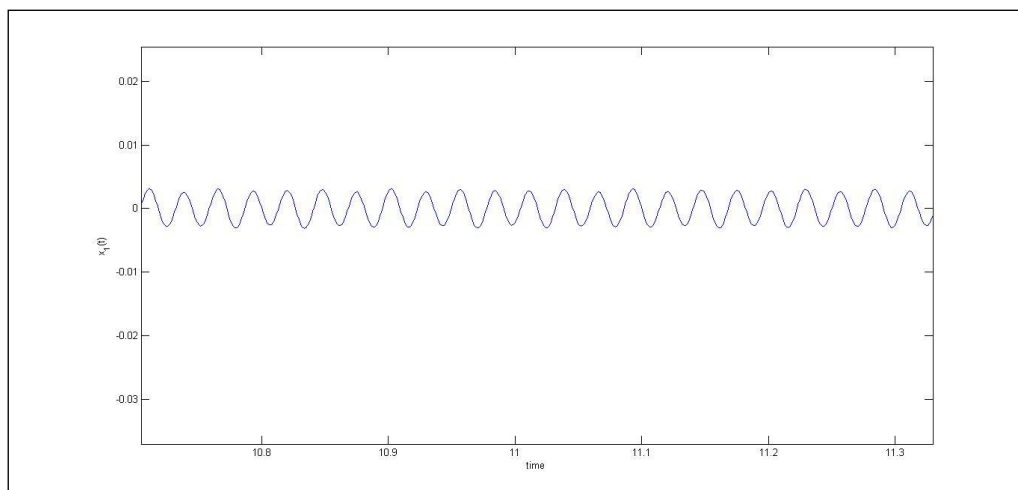
Σχήμα 4.10 Μεγέθυνση απόκρισης θ για $\beta = 5^\circ$ και $\omega_{\max} = 600$ rpm

Ακολουθώς, βλέπουμε την απόκριση για ταχύτητα διέγερσης 1100 rpm.



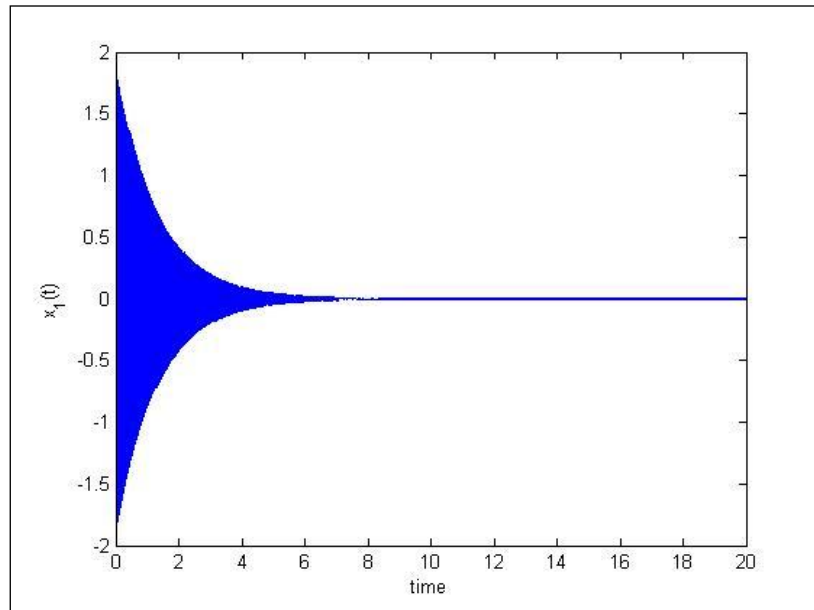
Σχήμα 4.11 Απόκριση θ για $\beta = 5^\circ$ και $\omega_{\max} = 1100$ rpm

Παρατηρούμε ότι διατηρείται η μορφή της αποσβενύμενης ταλάντωσης γύρω από το μηδέν ενώ το σύστημα ηρεμεί και πάλι στα 9 sec. Ενώ το μέγιστο πλάτος θα παρουσιάζει μεταβολή για ταχύτητα διέγερσης 1100 rpm με την αλλαγή της γωνίας. Βέβαια, πρέπει να σημειώσουμε ότι σε αυτή την περίπτωση δεν διατηρείται ταλάντωση μετά την ηρεμία, όπως φαίνεται και σε μεγέθυνση στο παρακάτω διάγραμμα :



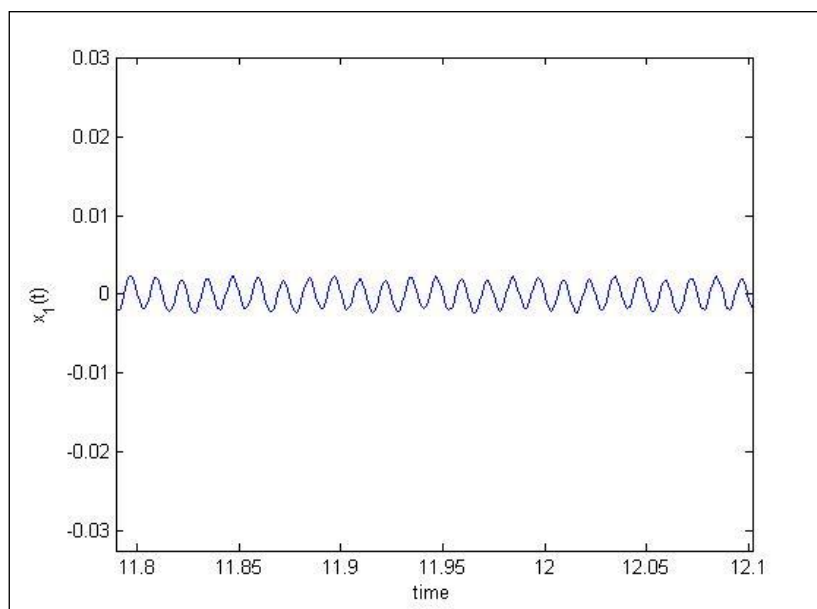
Σχήμα 4.12 Μεγέθυνση απόκρισης θ για $\beta = 5^\circ$ και $\omega_{\max} = 1100$ rpm

Τέλος, για ταχύτητα διέγερσης 2400 rpm έχουμε :



Σχήμα 4.13 Απόκριση θ για $\beta = 5^\circ$ και $\omega_{\max} = 2400$ rpm

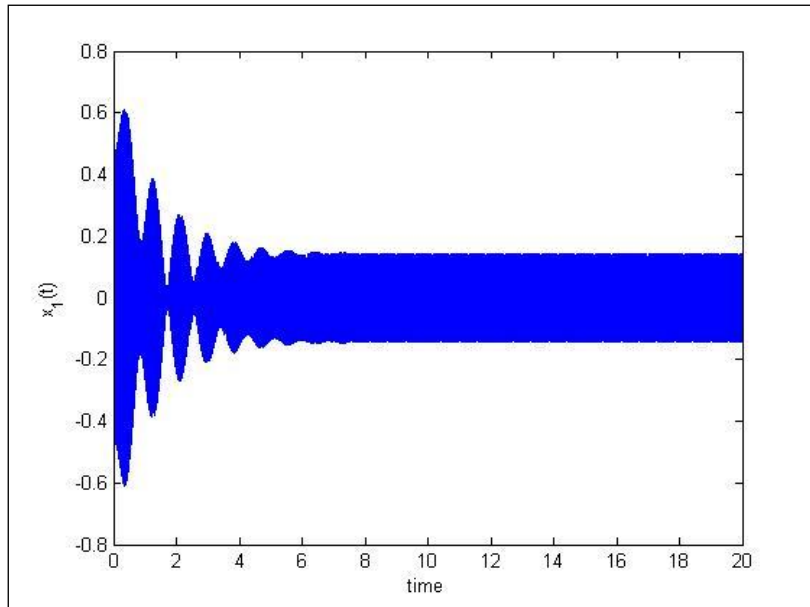
Βλέπουμε ότι το μέγιστο πλάτος της αποσβενύμενης ταλάντωσης δεν έχει αλλάξει, συγκρίνοντας το με την προηγούμενη εφαρμογή για την ίδια ταχύτητα διέγερσης. Επίσης σταθερός έχει μείνει ο χρόνος στον οποίο επέρχεται ηρεμία μετά την οποία, όπως καθαρά θα φανεί στο επόμενο διάγραμμα, δεν διατηρείται ταλάντωση τουλάχιστον σημαντικού πλάτους.



Σχήμα 4.14 Μεγέθυνση απόκρισης θ για $\beta = 5^\circ$ και $\omega_{\max} = 2400$ rpm

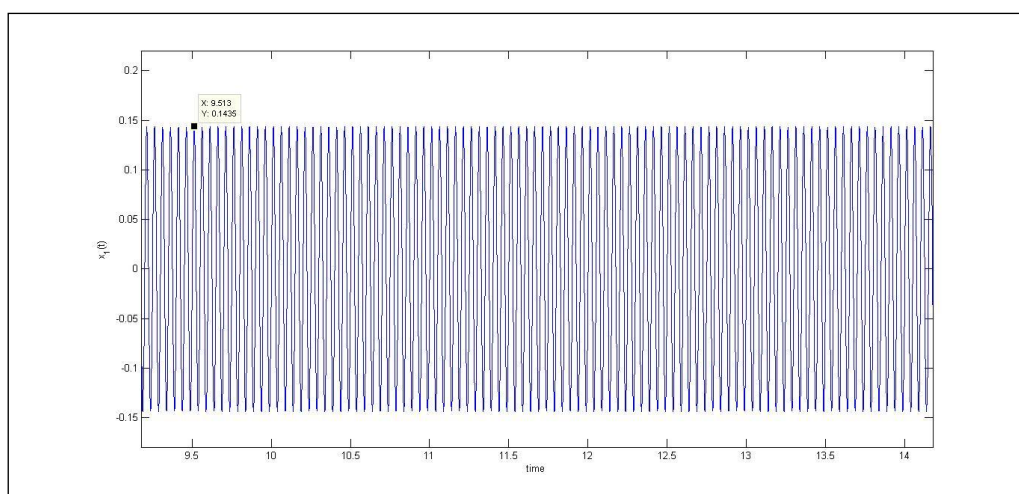
- Γωνία $\beta = 15^\circ$

Αυξάνοντας τη γωνία θ στις 15° και για ταχύτητα διέγερσης 600 rpm, η απόκριση της γωνίας θ προκύπτει :



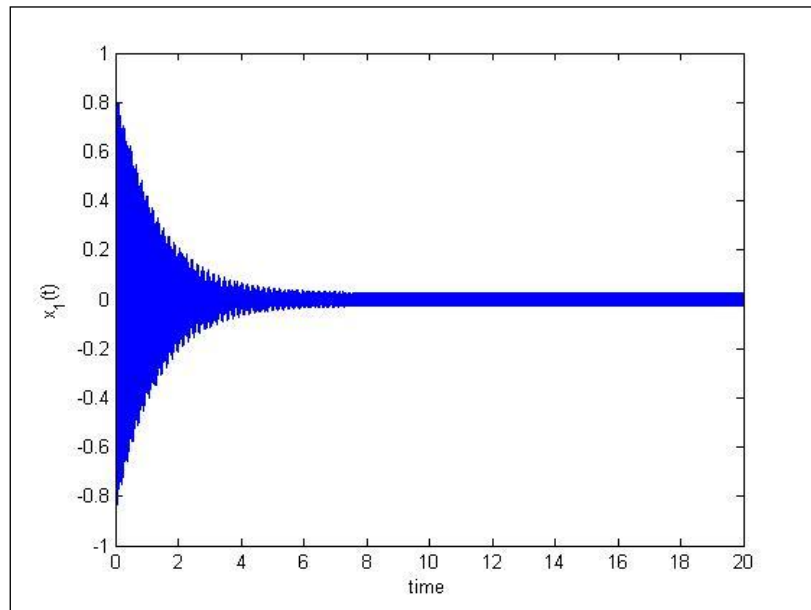
Σχήμα 4.15 Απόκριση θ για $\beta = 15^\circ$ και $\omega_{\max} = 600$ rpm

Βλέπουμε ότι εκτελεί αποσβενύμενη ταλάντωση γύρω από το μηδέν και ηρεμεί μετά από χρόνο περίπου 9 sec. Ως προς το μέγιστο πλάτος παρατηρείται αύξηση (0,6) σε σχέση με τις προηγούμενες εφαρμογές για την ίδια ταχύτητα διέγερσης. Όμως, μετά την ηρεμία διατηρείται ταλάντωση μεγαλύτερου πλάτους (0,15) , όπως φαίνεται καθαρότερα στο παρακάτω διάγραμμα :



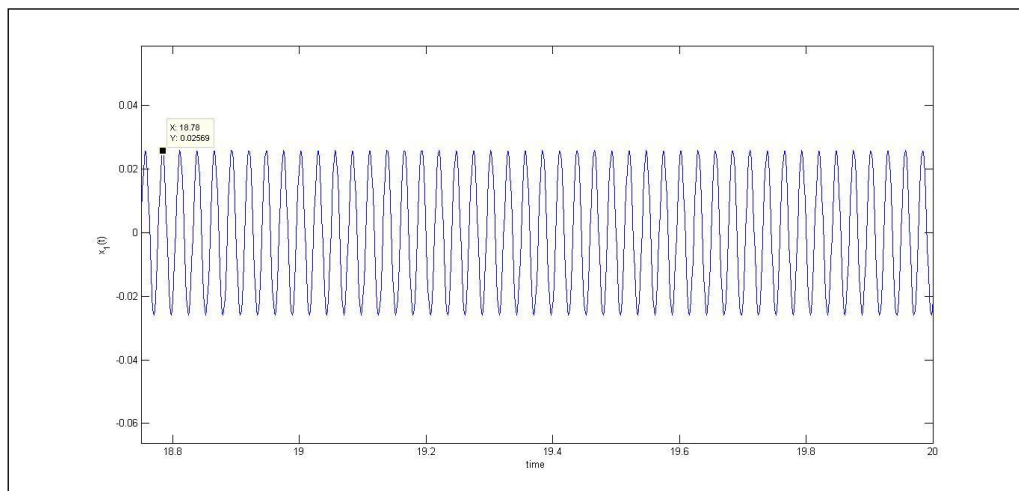
Σχήμα 4.16 Μεγέθυνση απόκρισης θ για $\beta = 15^\circ$ και $\omega_{\max} = 600$ rpm

Αν αυξήσουμε την ταχύτητα διέγερσης στα 1100 rpm, παίρνουμε την ακόλουθη απόκριση :



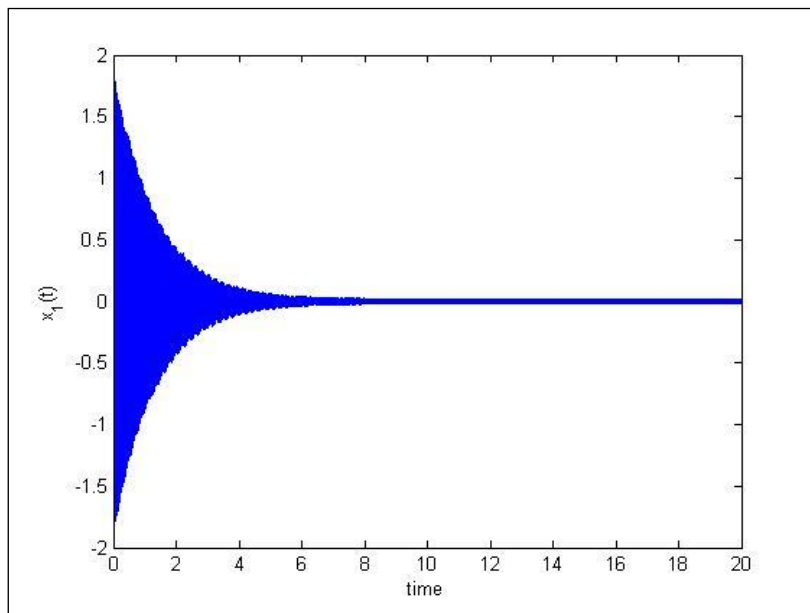
Σχήμα 4.17 Απόκριση θ για $\beta = 15^\circ$ και $\omega_{\max} = 1100$ rpm

Βλέπουμε πως η αποσβενύμενη ταλάντωση διατηρεί το μέγιστο πλάτος των προηγούμενων εφαρμογών αλλά και τον χρόνο ηρεμίας, για την ίδια ταχύτητα διέγερσης. Διατηρεί όμως ταλάντωση πλάτους 0,025 , η οποία φαίνεται παρακάτω :



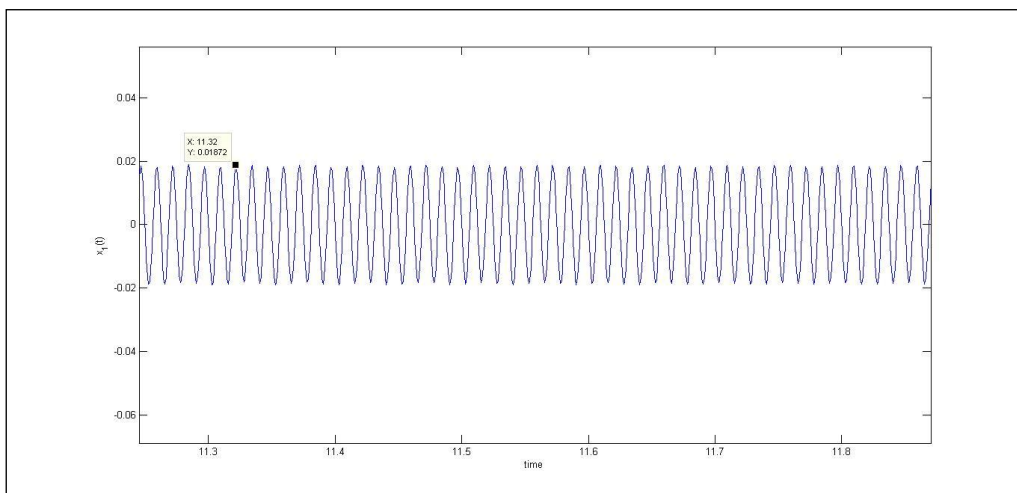
Σχήμα 4.18 Μεγέθυνση απόκρισης θ για $\beta = 15^\circ$ και $\omega_{\max} = 1100$ rpm

Τέλος, για διέγερση 2400 rpm έχουμε :



Σχήμα 4.19 Απόκριση θ για $\beta = 15^\circ$ και $\omega_{\max} = 2400$ rpm

Και για την διέγερση αυτή δεν παρατηρείται αλλαγή στην τιμή του μεγίστου πλάτους και του χρόνου ηρεμίας. Η ταλάντωση που μένει φαίνεται παρακάτω :



Σχήμα 4.20 Μεγέθυνση απόκρισης θ για $\beta = 15^\circ$ και $\omega_{\max} = 2400$ rpm

4.2.2.2 Απόκριση f_0

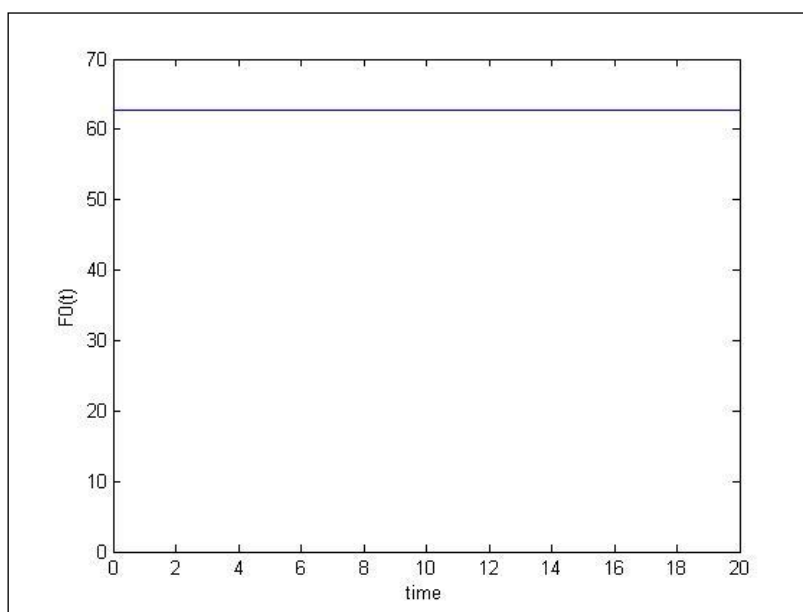
Υπενθυμίζουμε ότι ως f_0 έχουμε ορίσει :

$$f_0 = \eta * \dot{\gamma}_3 \quad (4.21)$$

Η απόκριση του μεγέθους αυτού είναι ιδιαίτερος σημαντική στη μελέτη μας, καθώς ουσιαστικά παρουσιάζει την γωνιακή ταχύτητα που μεταφέρει ο σύνδεσμος *Cardan* από τον άξονα (1) στον άξονα (2). Ας δούμε στα παρακάτω διαγράμματα, τα αποτελέσματα που λάβαμε.

- Γωνία $\beta = 0^\circ$

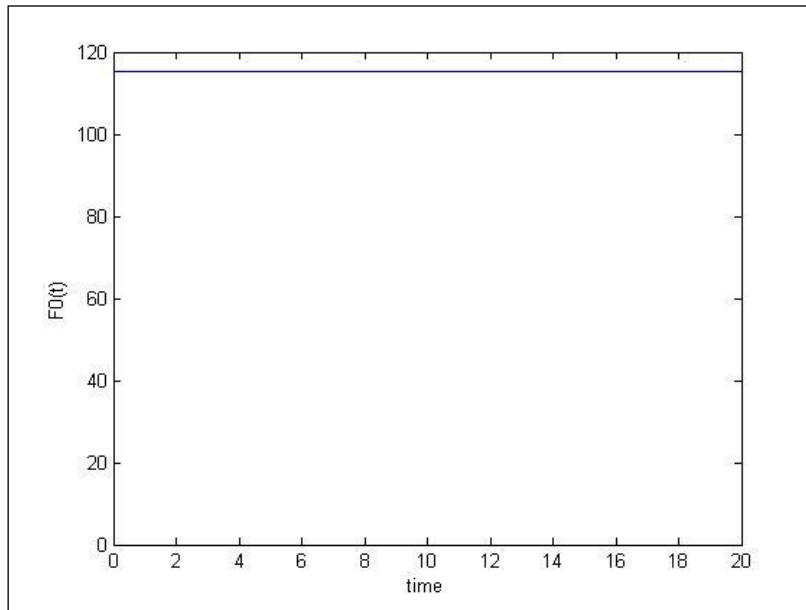
Στο διάγραμμα που ακολουθεί βλέπουμε την απόκριση του ορισμένου μεγέθους F_0 για γωνία λειτουργίας $\beta = 0^\circ$ και ταχύτητα διέγερσης 600 rpm. Υπενθυμίζουμε πως έχουμε ορίσει $F_0 = n * \dot{\phi}_0$.



Σχήμα 4.21 Απόκριση f_0 για $\beta=0^\circ$ και $\omega_{\max}=600\text{rpm}$

Με βάση το παραπάνω διάγραμμα το F_0 βλέπουμε πως έχει σταθερή τιμή σε όλο τον χρόνο ελέγχου, η οποία μάλιστα ταυτίζεται με την ταχύτητα διέγερσης ($600 \text{ rpm} = 62.8319 \text{ rad/sec}$). Το αποτέλεσμα αυτό ήταν αναμενόμενο, κι αυτό θα φανεί και παρακάτω όπου θα δούμε την απόκριση τόσο του n όσο και του $\dot{\phi}_0$.

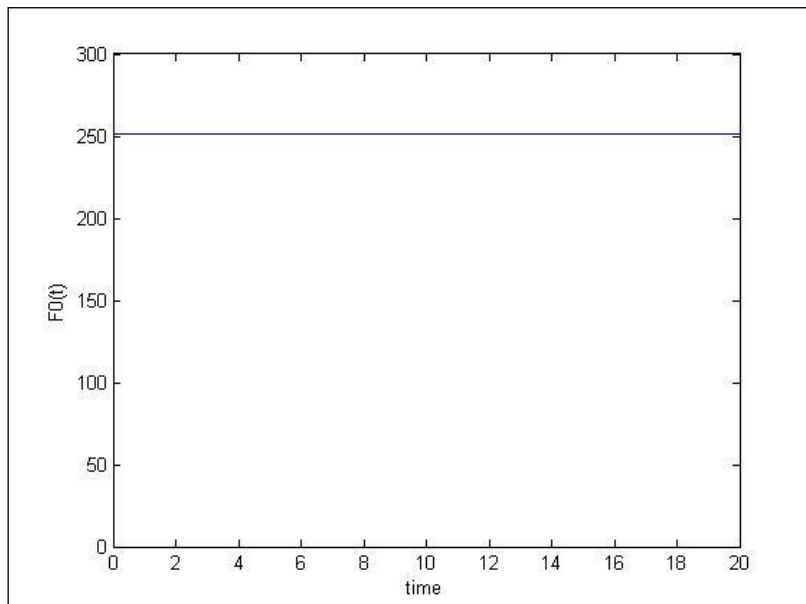
Στη συνέχεια, θα δούμε την απόκριση για ταχύτητα διέγερσης 1100 rpm.



Σχήμα 4.22 Απόκριση f_0 για $\beta=0^\circ$ και $\omega_{\max}=1100\text{rpm}$

Παρατηρούμε πως και πάλι έχει σταθερά την τιμή της ταχύτητας διέγερσης, αφού $1100\text{ rpm} = 115,1917\text{ rad/sec}$. Η επιβεβαίωση θα φανεί παρακάτω από τα μεγέθη η και $\dot{\phi}_0$.

Τέλος, ας δούμε την απόκριση για ταχύτητα διέγερσης 2400 rpm.

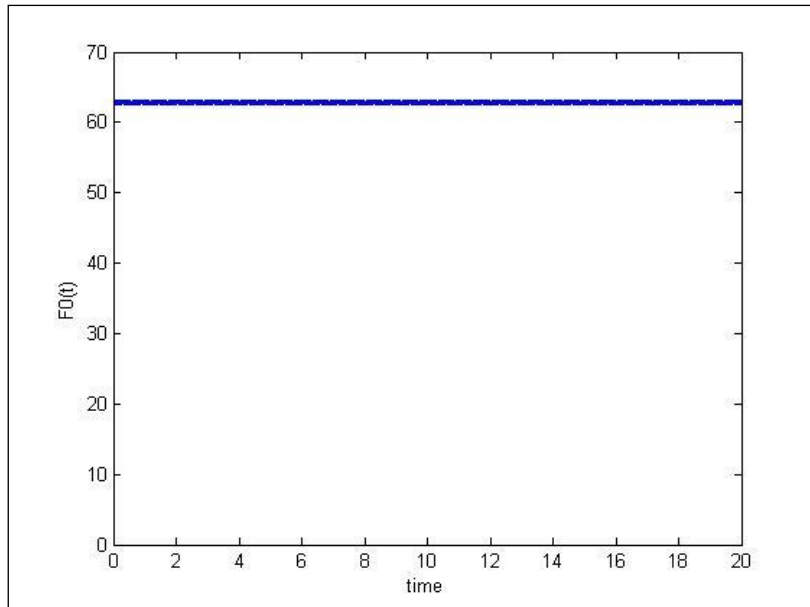


Σχήμα 4.23 Απόκριση f_0 για $\beta=0^\circ$ και $\omega_{\max}=2400\text{rpm}$

Η απόκριση είναι και πάλι μια ευθεία με τιμή ίση με την ταχύτητα διέγερσης, αφού $2400 \text{ rpm} = 251,3274 \text{ rad/sec}$.

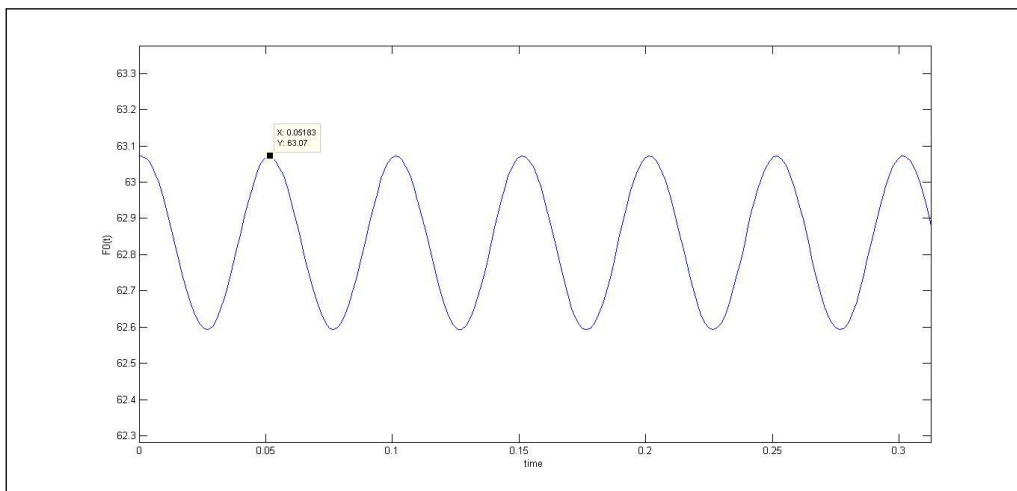
- Γωνία $\beta = 5^\circ$

Για γωνία λειτουργίας $\beta = 5^\circ$ και ταχύτητα διέγερσης 600 rpm , η απόκριση του F_0 είναι :



Σχήμα 4.24 Απόκριση f_0 για $\beta=5^\circ$ και $\omega_{\max}=600\text{rpm}$

Δηλαδή εκτελεί ταλάντωση σταθερού πλάτους γύρω από την τιμή της ταχύτητας διέγερσης του συστήματος. Αυτή φαίνεται καλύτερα στο ακόλουθο διάγραμμα :



Σχήμα 4.25 Μεγέθυνση απόκρισης f_0 για $\beta=0^\circ$ και $\omega_{\max}=600\text{rpm}$

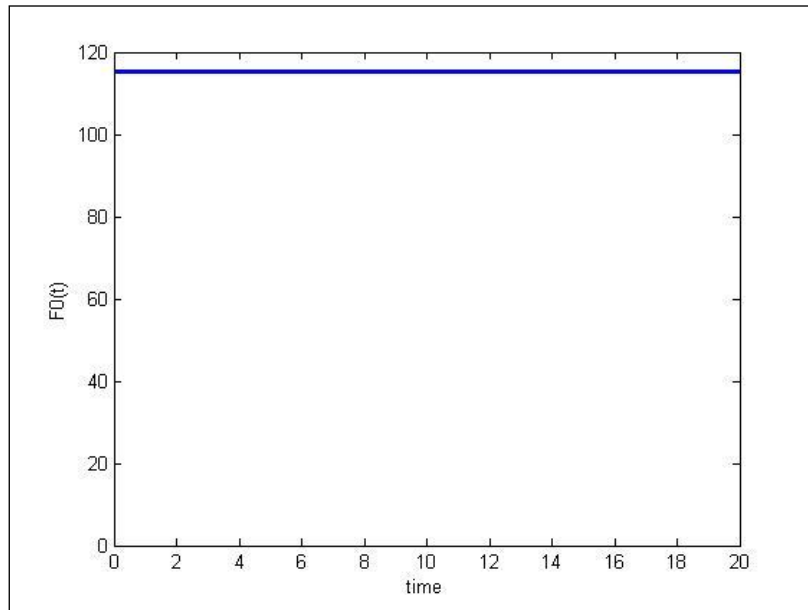
Μπορούμε να πούμε πως το πλάτος αυτής της ταλάντωσης είναι περίπου 0,24, ενώ αντίστοιχη συμπεριφορά θα πρέπει να δούμε τόσο στο λόγο μετάδοσης ταχυτήτων n όσο και στην παράγωγο της γωνίας φ_0 .

Ακόμη, την απόκριση του F_0 μπορούμε να επιβεβαιώσουμε κι από τις αρχικές εφαρμογές που έγιναν με τη βοήθεια φύλλων excel. Παρακάτω παραθέτουμε ενδεικτικά ένα τμήμα αυτών των υπολογισμών που επιβεβαιώνει την απόκριση που λάβαμε.

$\Omega_{in} (rpm)$	$\Omega_{out} (rpm)$	$\Omega_{out} (rad / sec)$
600	597,7168189	62,5927589
600	599,2895921	62,75745933
600	601,8519984	63,02579389
600	601,8519984	63,02579389
600	599,2895921	62,75745933
600	597,7168189	62,5927589
600	599,2895921	62,75745933
600	601,8519984	63,02579389
600	601,8519984	63,02579389
600	599,2895921	62,75745933
600	597,7168189	62,5927589

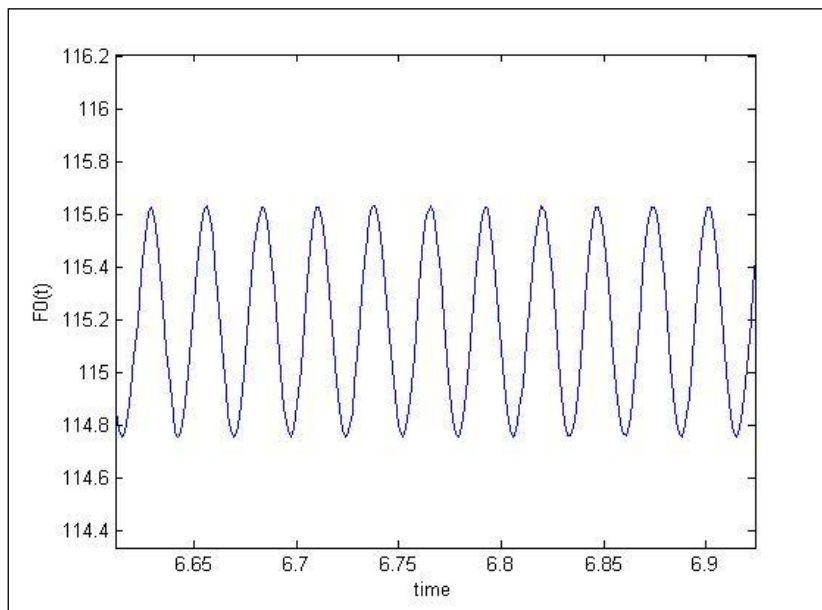
Πίνακας 4.1 Σύνοψη αποτελεσμάτων υπολογιστικών φύλλων excel για $\beta=5^\circ$ και $\Omega_{in} = 600 \text{ rpm}$

Ας δούμε τώρα την απόκριση για ταχύτητα διέγερσης 1100 rpm :



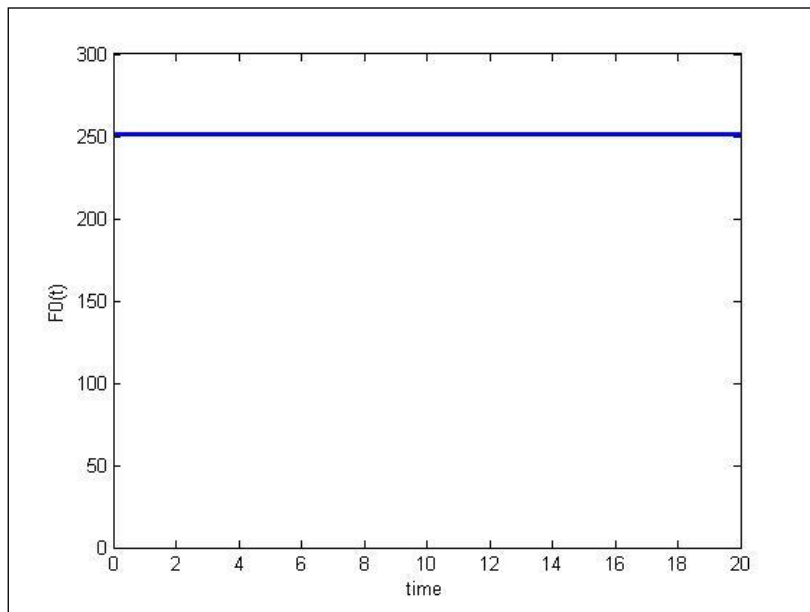
Σχήμα 4.26 Απόκριση f_0 για $\beta=5^\circ$ και $\omega_{\max}=1100\text{rpm}$

Η τιμή του F_0 είναι ίση με την ταχύτητα διέγερσης (1100 rpm = 115,1917 rad/sec) κάνοντας μια μικρή ταλάντωση γύρω από αυτό, πλάτους περίπου 0,4, όπως φαίνεται παρακάτω :



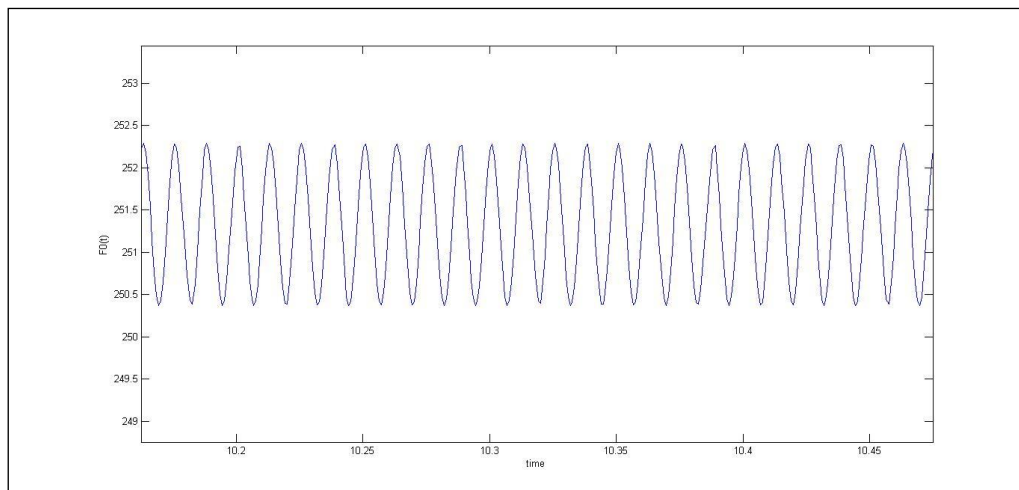
Σχήμα 4.27 Μεγέθυνση απόκρισης f_0 για $\beta=0^\circ$ και $\omega_{\max}=600\text{rpm}$

Τέλος, για ταχύτητα διέγερσης 2400 rpm έχουμε :



Σχήμα 4.28 Απόκριση f_0 για $\beta=5^\circ$ και $\omega_{\max}=2400\text{rpm}$

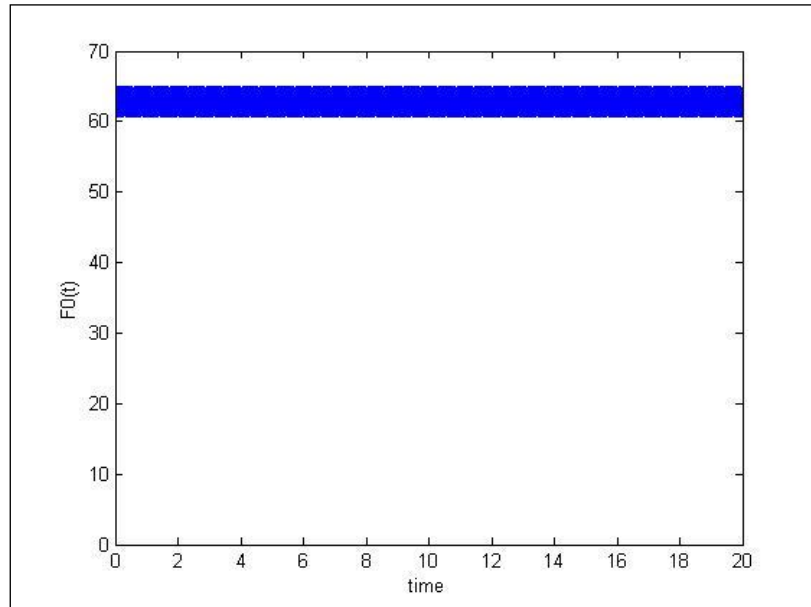
Παρατηρούμε πως το F_0 εκτελεί μια ταλάντωση σταθερού πλάτους γύρω από την τιμή ταχύτητας διέγερσης με πλάτος περίπου 0,8, όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα :



Σχήμα 4.29 Μεγέθυνση απόκρισης f_0 για $\beta=5^\circ$ και $\omega_{\max}=1100\text{rpm}$

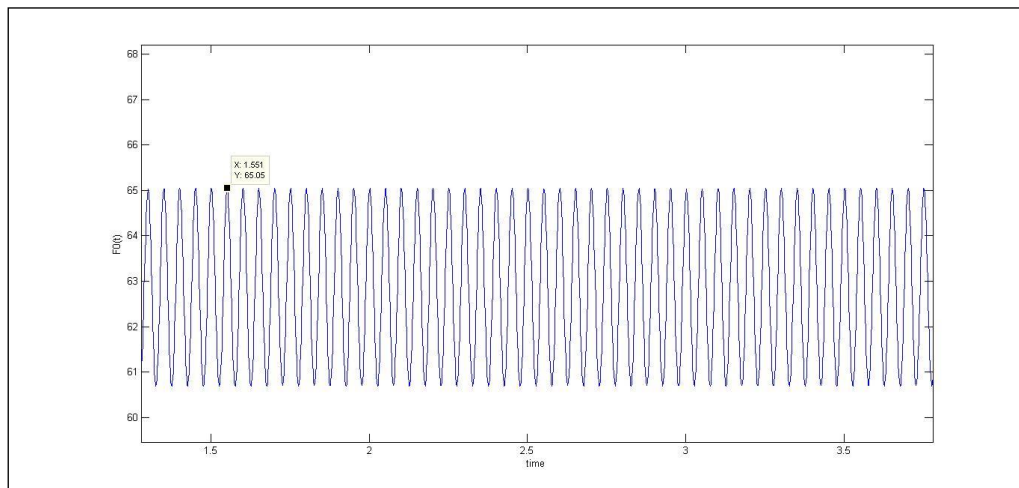
- Γωνία $\beta = 15^\circ$

Θεωρούμε εξωτερική διέγερση 600 rpm και λαμβάνουμε την εξής απόκριση για το F_0 :



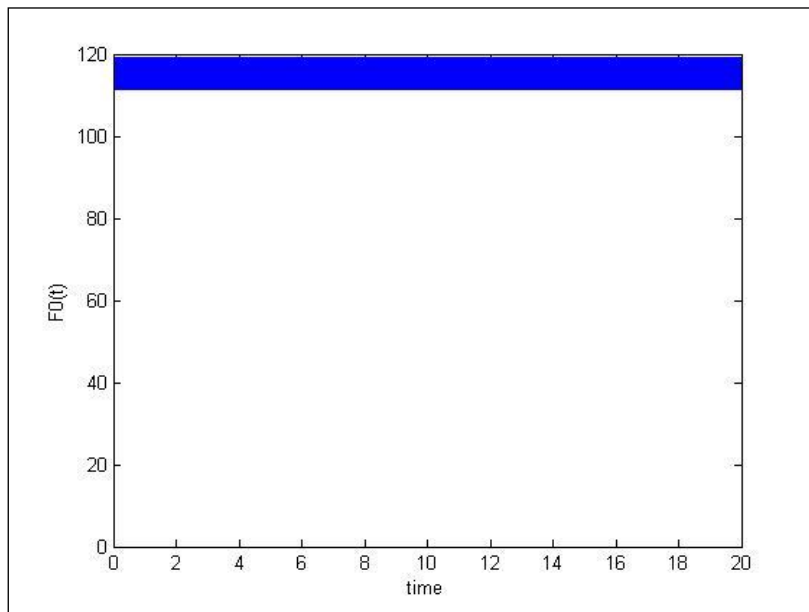
Σχήμα 4.30 Απόκριση f_0 για $\beta=15^\circ$ και $\omega_{\max}=600\text{rpm}$

Παρατηρείται ταλάντωση σταθερού πλάτους με μέση τιμή αυτή της ταχύτητας διέγερσης, ενώ το πλάτος της ταλάντωσης είναι 2,25 περίπου, όπως φαίνεται καλύτερα στο παρακάτω διάγραμμα :



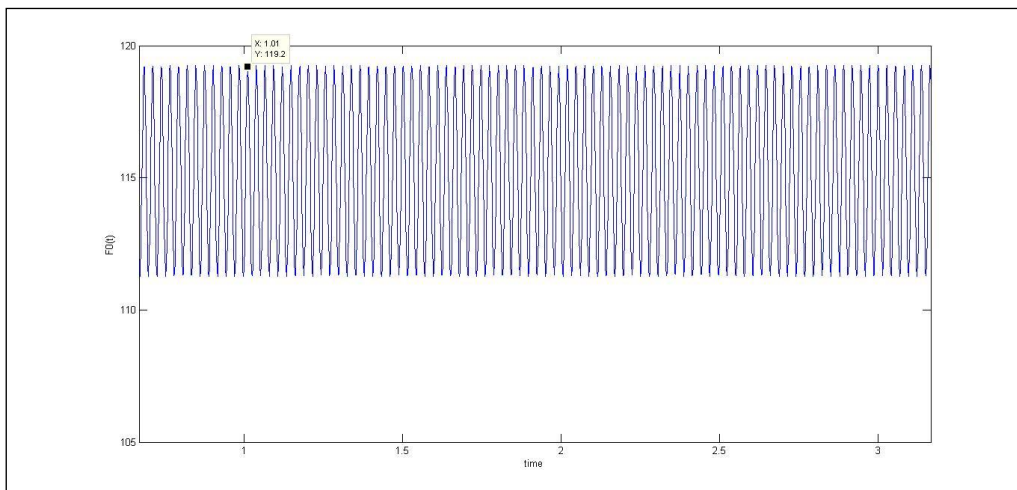
Σχήμα 4.31 Μεγέθυνση απόκρισης f_0 για $\beta=15^\circ$ και $\omega_{\max}=600\text{rpm}$

Αν η εξωτερική διέγερση είναι 1100 grm, απόκριση προκύπτει :



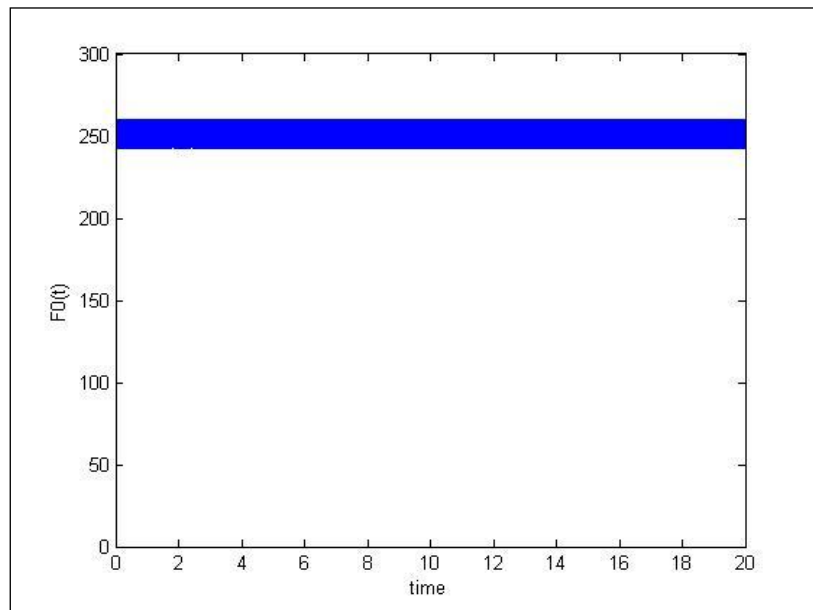
Σχήμα 4.32 Απόκριση f_0 για $\beta=15^\circ$ και $\omega_{\max}=1100\text{rpm}$

Βλέπουμε και πάλι μια ταλάντωση σταθερού πλάτους 4 γύρω από την τιμή της ταχύτητας διέγερσης. Σε μεγέθυνση φαίνεται παρακάτω :



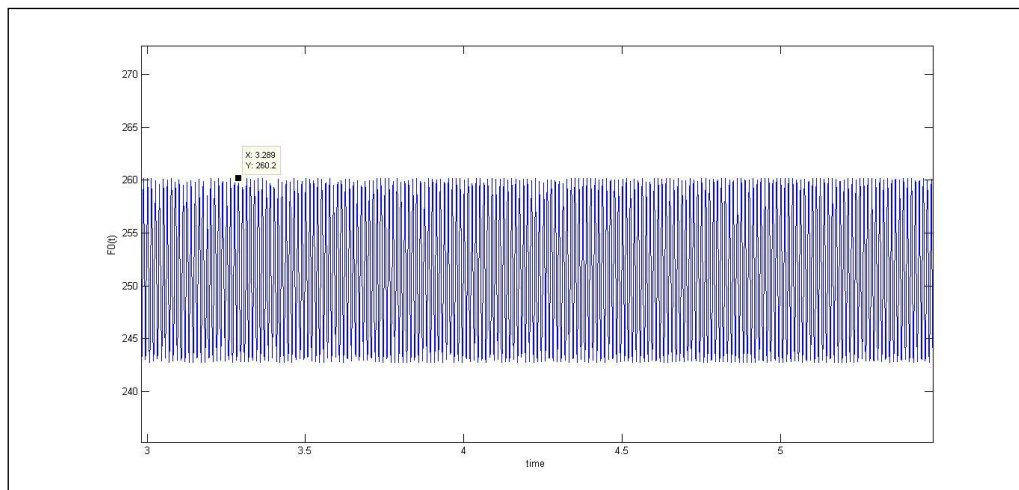
Σχήμα 4.33 Μεγέθυνση απόκρισης f_0 για $\beta=15^\circ$ και $\omega_{\max}=1100\text{rpm}$

Τέλος, για ταχύτητα διέγερσης 2400 rpm έχουμε :



Σχήμα 4.34 Απόκριση f_0 για $\beta=15^\circ$ και $\omega_{\max}=2400\text{rpm}$

Λαμβάνουμε δηλαδή αντίστοιχα αποτελέσματα με τις προηγούμενες εφαρμογές ενώ το πλάτος της ταλάντωσης είναι περίπου 9 .



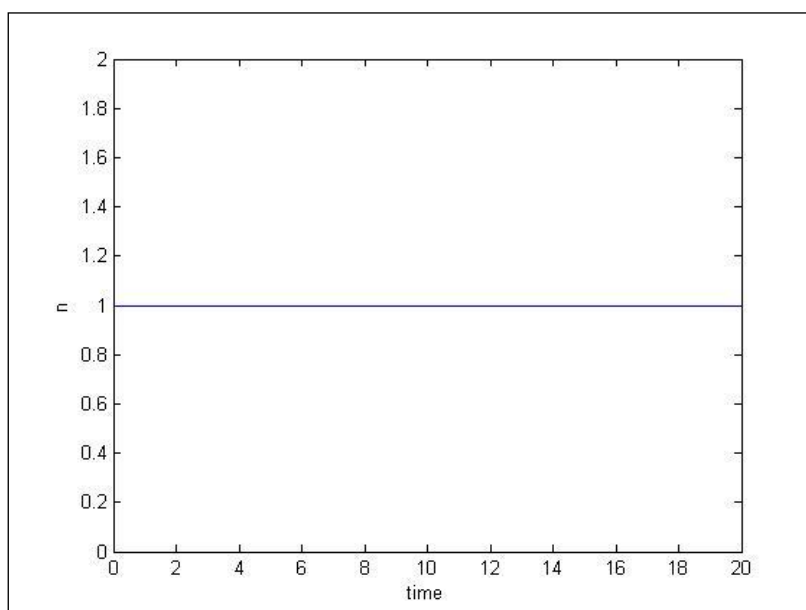
Σχήμα 4.35 Μεγέθυνση απόκρισης f_0 για $\beta=15^\circ$ και $\omega_{\max}=2400\text{rpm}$

4.2.2.3 Απόκριση η

Στα διαγράμματα που ακολουθούν θα δούμε τις τιμές που λαμβάνει ο λόγος μεταβολής ταχυτήτων εισόδου – εξόδου η του συνδέσμου. Ιδιαίτερη σημασία θα πρέπει να δώσουμε και στη μεταβολή της τιμής του λόγω της γωνίας λειτουργίας αλλά και το κατά πόσο αυτή μένει σταθερή στη διάρκεια της διέγερσης.

- Γωνία $\beta = 0^\circ$

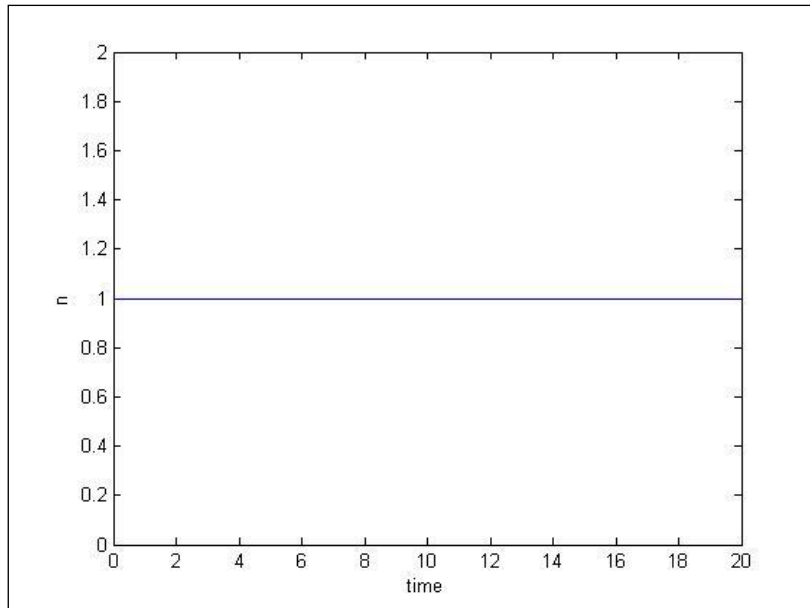
Στο ακόλουθο διάγραμμα θα δούμε την τιμή του λόγου μετάδοσης ταχυτήτων η , για γωνία λειτουργίας $\beta = 0^\circ$ και ταχύτητα διέγερσης 600 rpm.



Σχήμα 4.36 Απόκριση λόγου η για γωνία $\beta=0^\circ$ και $\omega_{\max}=600\text{rpm}$

Όπως βλέπουμε, όταν ο λόγος είναι πάντοτε ίσος με τη μονάδα, όπως γνωρίζουμε ότι συμβαίνει όταν οι άξονες που συνδέονται με τον σύνδεσμο *Cardan* δεν είναι υπό γωνία. Συμπληρωματικά αναφέρουμε πως σε αυτή την περίπτωση η υπόκριση F_0 θα πρέπει να ταυτίζεται με την απόκριση $\dot{\psi}_0$.

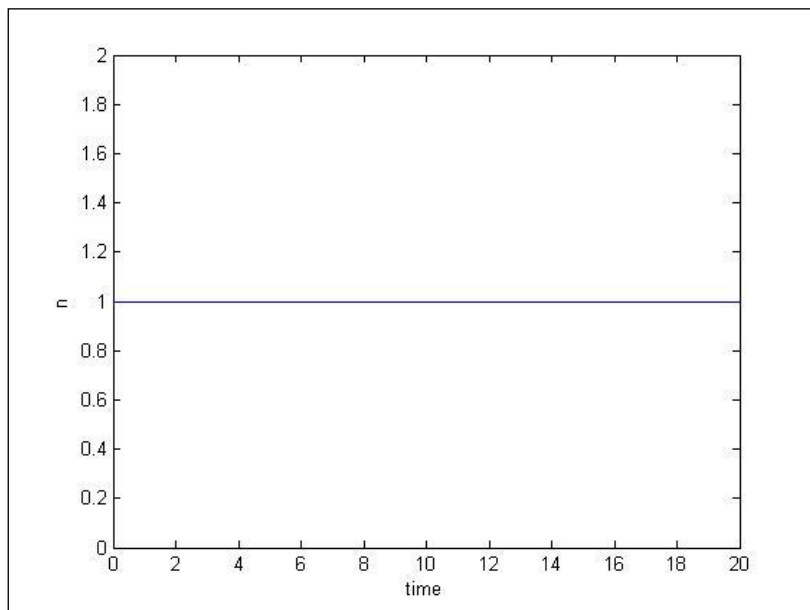
Θα δούμε τώρα το λόγο μετάδοσης ταχυτήτων για ταχύτητα διέγερσης 1100 rpm.



Σχήμα 4.37 Απόκριση λόγου η για γωνία $\beta=0^\circ$ και $\omega_{\max}=1100\text{rpm}$

Δεν παρατηρείται καμία αλλαγή, γεγονός που μας δείχνει την μεγάλη του εξάρτηση από τη γωνία β .

Τέλος, για ταχύτητα διέγερσης 2400 rpm έχουμε :

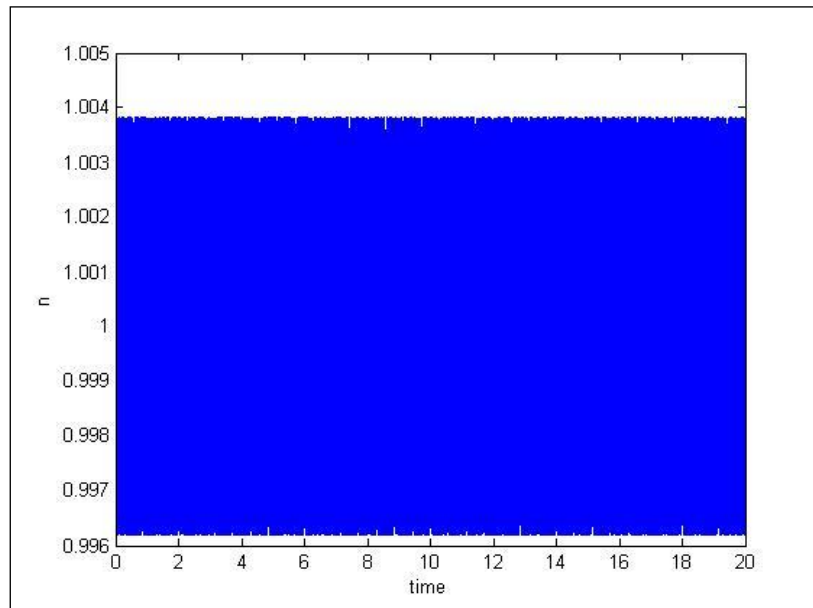


Σχήμα 4.38 Απόκριση λόγου η για γωνία $\beta=0^\circ$ και $\omega_{\max}=2400\text{rpm}$

Δηλαδή δεν υπάρχει κάποια μεταβολή.

- Γωνία $\beta = 5^\circ$

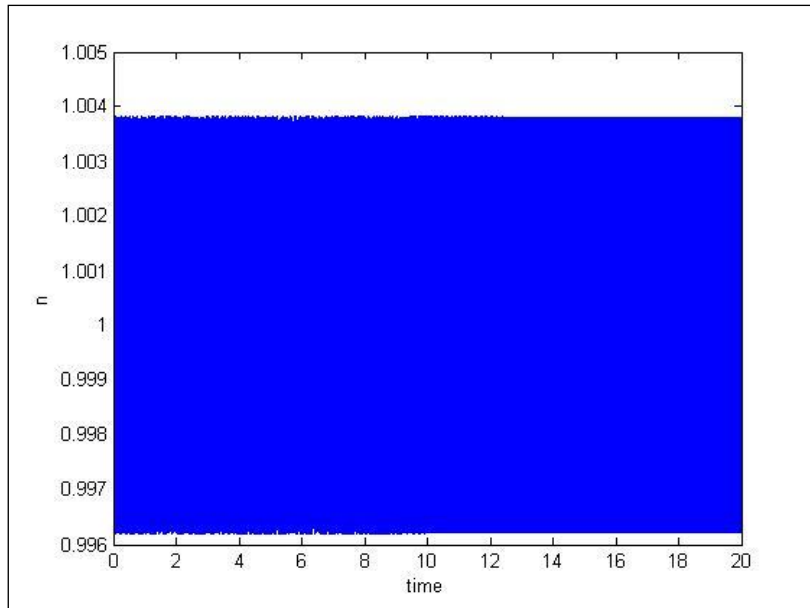
Για γωνία λειτουργίας $\beta = 5^\circ$ και ταχύτητα διέγερσης 600 rpm, ο λόγος μετάδοσης ταχυτήτων προκύπτει :



Σχήμα 4.39 Απόκριση λόγου η για γωνία $\beta=5^\circ$ και $\omega_{\max}=600\text{rpm}$

Βλέπουμε ότι ο λόγος μετάδοσης ταχυτήτων δεν είναι σταθερός πλέον αλλά εκτελεί μια ταλάντωση σταθερού πλάτους (0,004) γύρω από τη μονάδα. Έτσι, μπορούμε να εξηγήσουμε αρχικώς και τη νέα μορφή της απόκρισης του F_0 αφού δούμε βέβαια παρακάτω και την απόκριση της παραγώγου της γωνίας φ_0 .

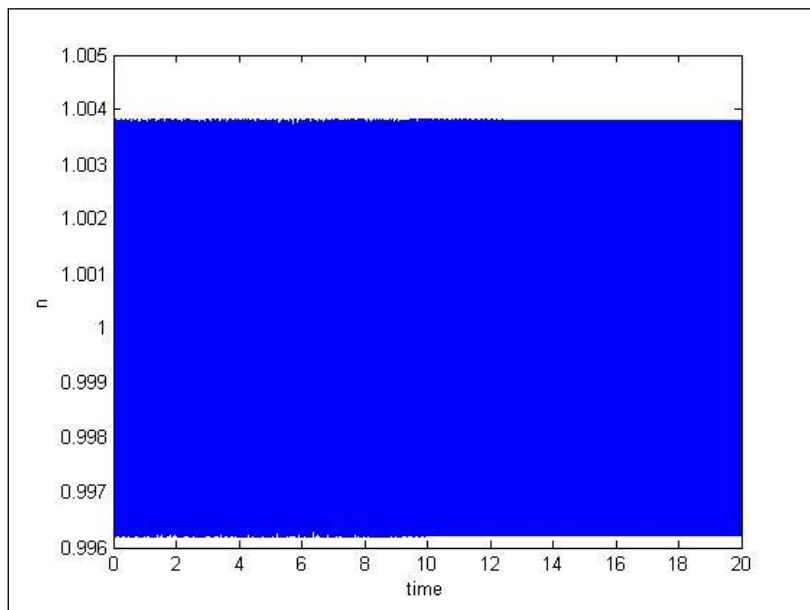
Ακολούθως, βλέπουμε την απόκριση του λόγου μετάδοσης ταχυτήτων με διέγερση 1100 rpm, έχουμε :



Σχήμα 4.40 Απόκριση λόγου η για γωνία $\beta=5^\circ$ και $\omega_{\max}=1100\text{rpm}$

Και πάλι εκτελεί ταλάντωση σταθερού πλάτους γύρω από τη μονάδα το πλάτος της οποίας είναι περίπου 0,004.

Τέλος, για ταχύτητα διέγερσης 2400 rpm :



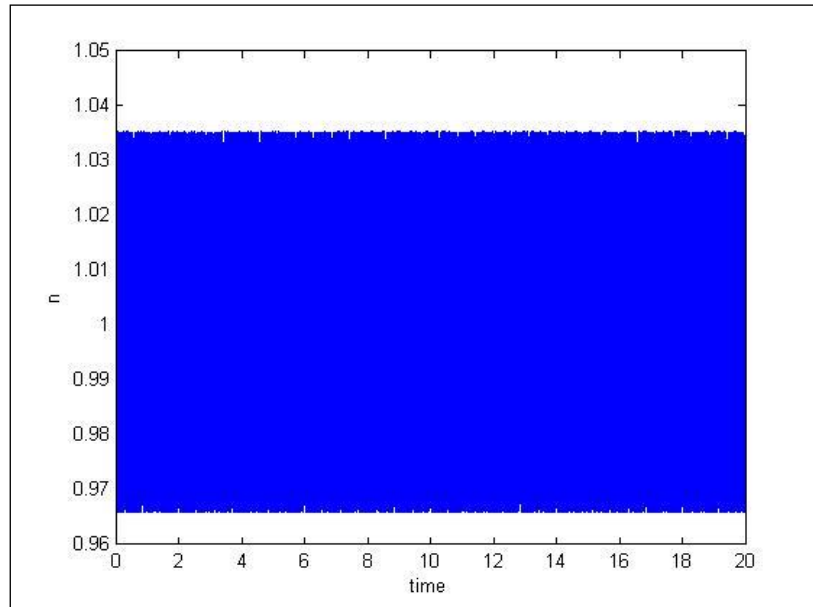
Σχήμα 4.41 Απόκριση λόγου η για γωνία $\beta=0^\circ$ και $\omega_{\max}=2400\text{rpm}$

Και σε αυτή την εφαρμογή ο λόγος μετάδοσης ταχυτήτων εκτελεί μια ταλάντωση σταθερού πλάτους γύρω από τη μονάδα, το πλάτος της οποίας είναι περίπου 0,004 και πάλι.

- Γωνία $\beta = 15^\circ$

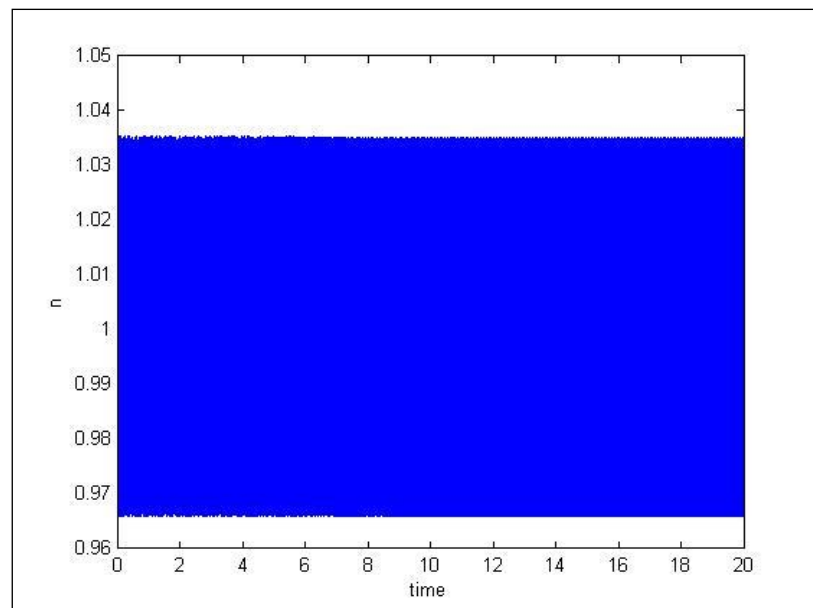
Αυξάνοντας την γωνία β στις 15° βλέπουμε πως ο λόγος μετάδοσης ταχυτήτων του συνδέσμου εξακολουθεί να εκτελεί ταλάντωση σταθερού πλάτους γύρω από τη μονάδα, για κάθε ταχύτητα διέγερσης που δοκιμάσαμε.

Αν η ταχύτητα διέγερσης είναι 600 rpm, το πλάτος της ταλάντωσης είναι 0,035 , δηλαδή :



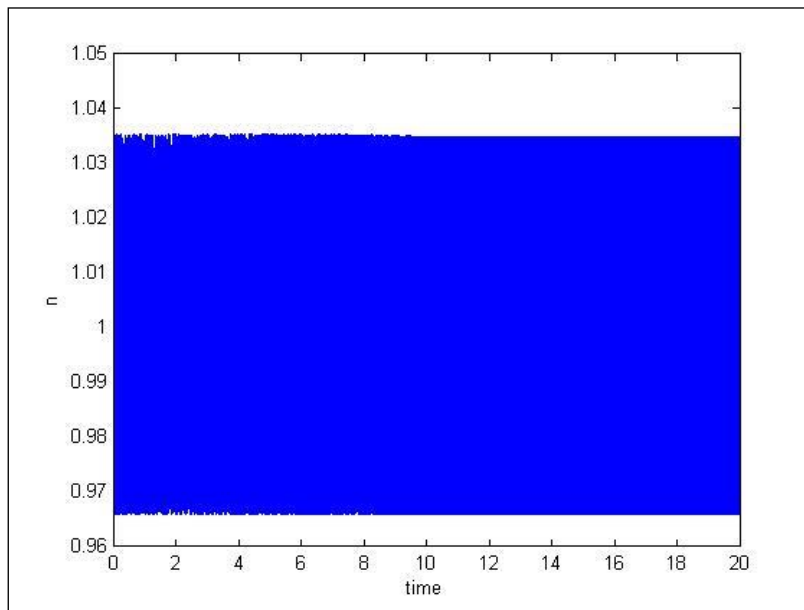
Σχήμα 4.42 Απόκριση λόγου η για γωνία $\beta=15^\circ$ και $\omega_{\max}=600\text{rpm}$

Αν η ταχύτητα διέγερσης είναι 1100 rpm, το πλάτος της ταλάντωσης είναι 0,035 , δηλαδή :



Σχήμα 4.43 Απόκριση λόγου η για γωνία $\beta=15^\circ$ και $\omega_{\max}=1100\text{rpm}$

Αν η ταχύτητα διέγερσης είναι 2400 rpm, το πλάτος της ταλάντωσης είναι 0,035 , δηλαδή :



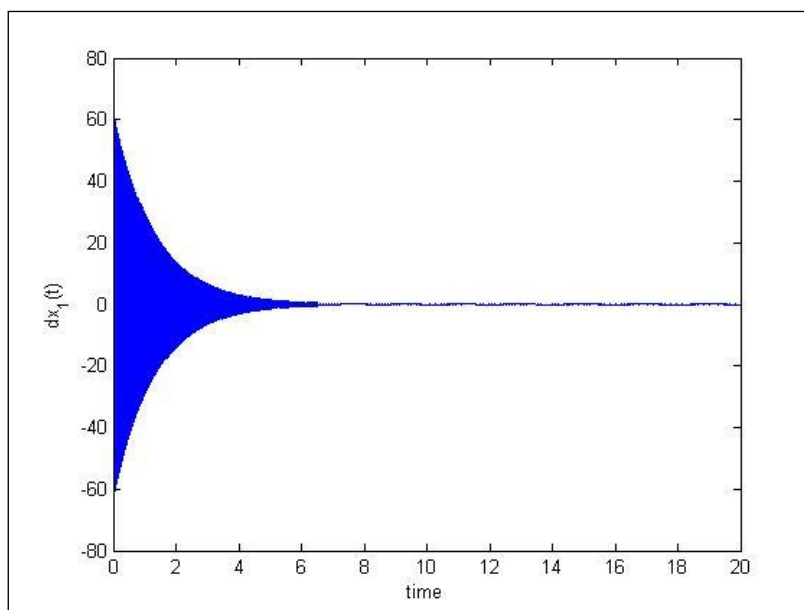
Σχήμα 4.44 Απόκριση λόγου η για γωνία $\beta=15^\circ$ και $\omega_{\max}=2400\text{rpm}$

4.2.2.4 Απόκριση $\dot{\theta}$

Η απόκριση του μεγέθους αυτή, μας δείχνει την γωνιακή ταχύτητα την οποία τελικά λαμβάνει ο άξονας (2).

- Γωνία $\beta = 0^\circ$

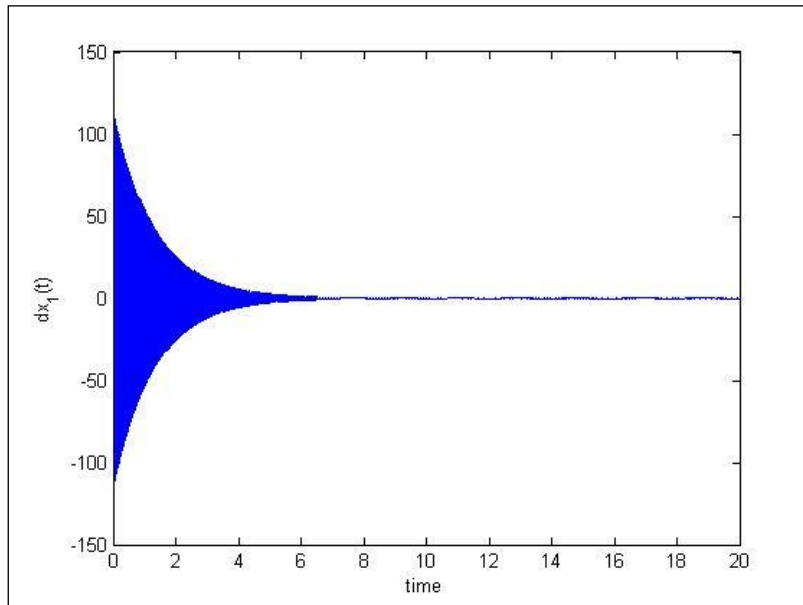
Ακολουθώς θα δούμε την απόκριση της παραγώγου της γωνίας θ για ταχύτητα διέγερσης 600 rpm.



Σχήμα 4.45 Απόκριση $\dot{\theta}$ για $\beta=0^\circ$ και $\omega_{\max}=600\text{rpm}$

Εκτελεί αποσβενύμενη ταλάντωση γύρω από το μηδέν. Το μέγιστο πλάτος είναι περίπου 61,5 και τα σύστημα ηρεμεί μετά από χρόνο 9 sec. Από τη χρονική στιγμή αυτή και μετά εξακολουθεί να εκτελεί μια ταλάντωση ελάχιστου (αμελητέου) πλάτους. Μάλιστα, ο ρυθμός μείωσης του πλάτους ταυτίζεται, όπως θα έπρεπε, με $e^{\zeta\omega} = 2,1$.

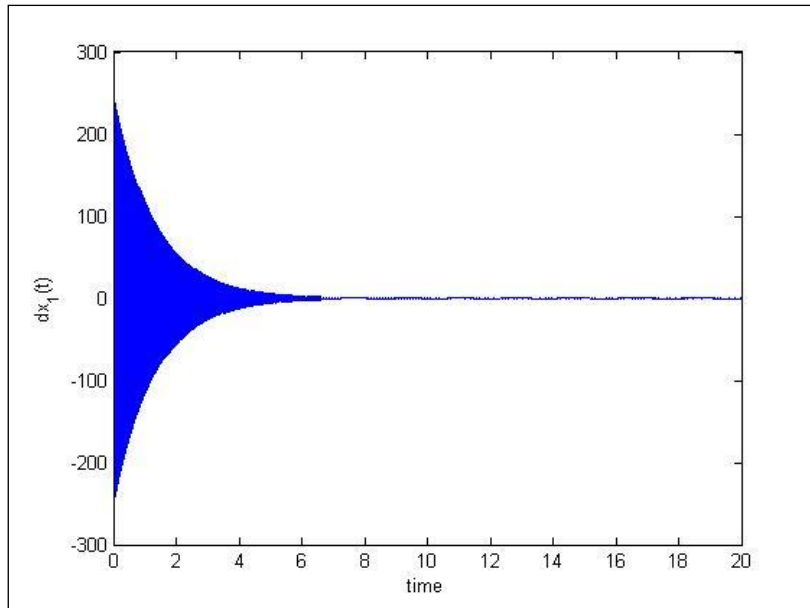
Ας δούμε τώρα την απόκριση της παραγώγου της γωνίας θ για ταχύτητα διέγερσης 1100 rpm.



Σχήμα 4.46 Απόκριση $\dot{\theta}$ για $\beta=0^\circ$ και $\omega_{\max}=1100\text{rpm}$

Βλέπουμε πως με την αλλαγή της ταχύτητας, εκτελεί αποσβενύμενη ταλάντωση γύρω από το μηδέν. Το μέγιστο πλάτος ταλάντωσης είναι περίπου 112, σχεδόν διπλάσιο του προηγούμενου, επομένως μπορούμε να θεωρήσουμε και πάλι ανάλογη σχέση μεταξύ του πλάτους ταλάντωσης και της ταχύτητας διέγερσης. Η ηρεμία επέρχεται μετά από χρόνο περίπου 9 sec και διατηρεί μια αμελητέου πλάτους ταλάντωση.

Τέλος, για ταχύτητα διέγερσης 2400 rpm έχουμε :

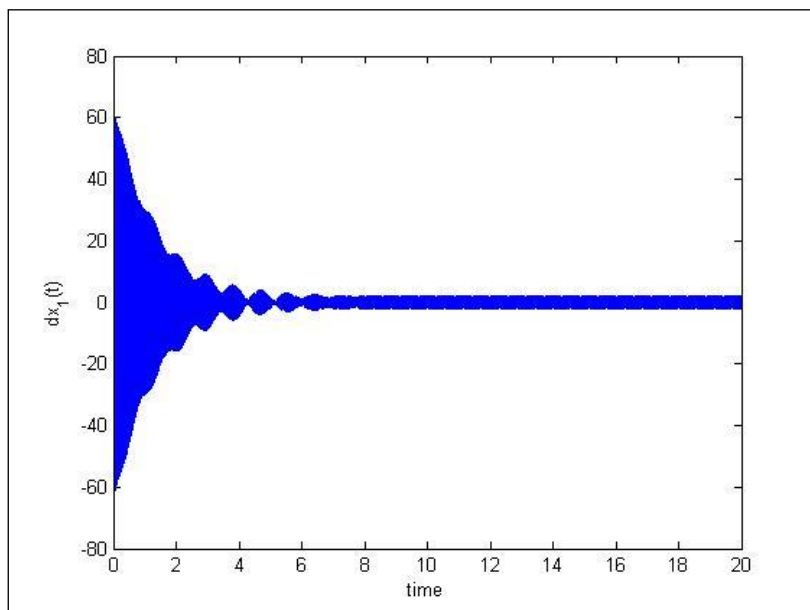


Σχήμα 4.47 Απόκριση θ για $\beta=0^\circ$ και $\omega_{\max}=2400\text{rpm}$

Αποσβενύμενη ταλάντωση γύρω από το μηδέν με μέγιστο πλάτος 246 περίπου, ηρεμία στα 9 sec και διατήρηση μιας ταλάντωσης αμελητέου πλάτους. Εξακολουθεί να υπάρχει ανάλογη εξάρτηση πλάτους και ταχύτητας διέγερσης .

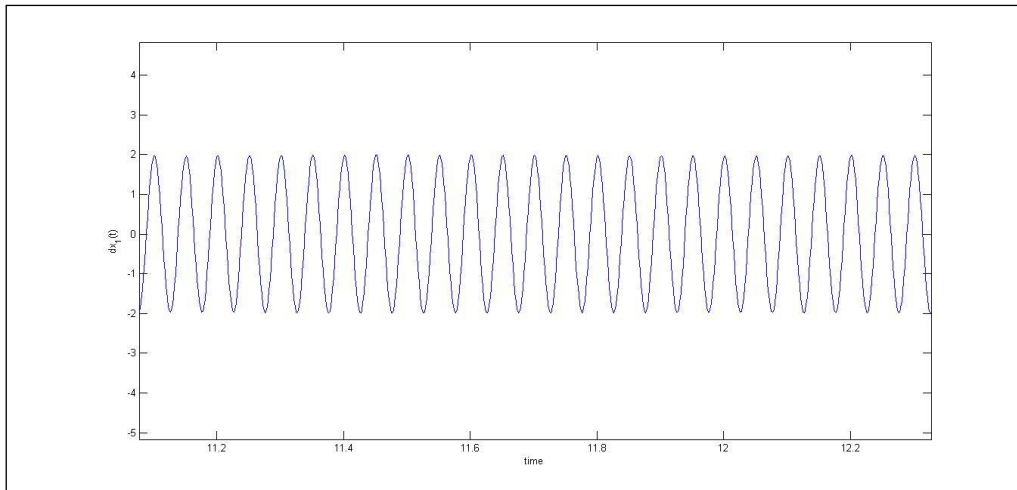
- Γωνία $\beta = 5^\circ$

Ας δούμε τώρα την απόκριση της παραγώγου της γωνίας θ για γωνία λειτουργίας $\beta = 5^\circ$ και ταχύτητα διέγερσης 600 rpm.



Σχήμα 4.48 Απόκριση θ για $\beta=5^\circ$ και $\omega_{\max}=600\text{rpm}$

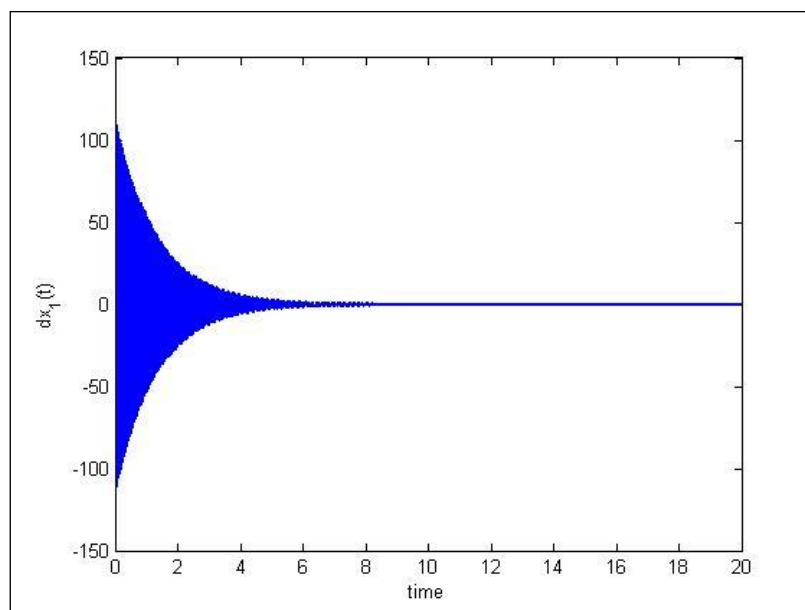
Παρατηρούμε πως και σε αυτό το μέγεθος εκτελείται αποσβενύμενη ταλάντωση γύρω από το μηδέν. Το μέγιστο πλάτος της δεν έχει μεταβληθεί σε σχέση με την τιμή που είχε για γωνία $\beta = 0^\circ$ και διέγερση 600 rpm. Όμως, σε αυτή την περίπτωση η μείωση είναι πιο απότομη ενώ μετά την ηρεμία διατηρείται ταλάντωση σταθερού πλάτους, όπως φαίνεται στο ακόλουθο διάγραμμα :



Σχήμα 4.49 Μεγέθυνση απόκρισης $\dot{\theta}$ για $\beta = 5^\circ$ και $\omega_{\max} = 600 \text{rpm}$

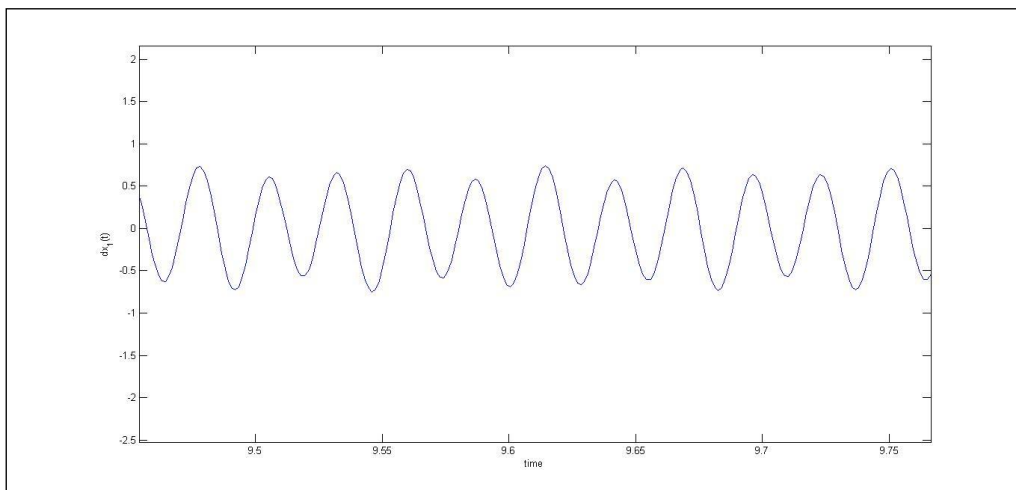
Το πλάτος της είναι περίπου 2.

Για ταχύτητα διέγερσης 1100 rpm, η παράγωγος της γωνίας θ προκύπτει :



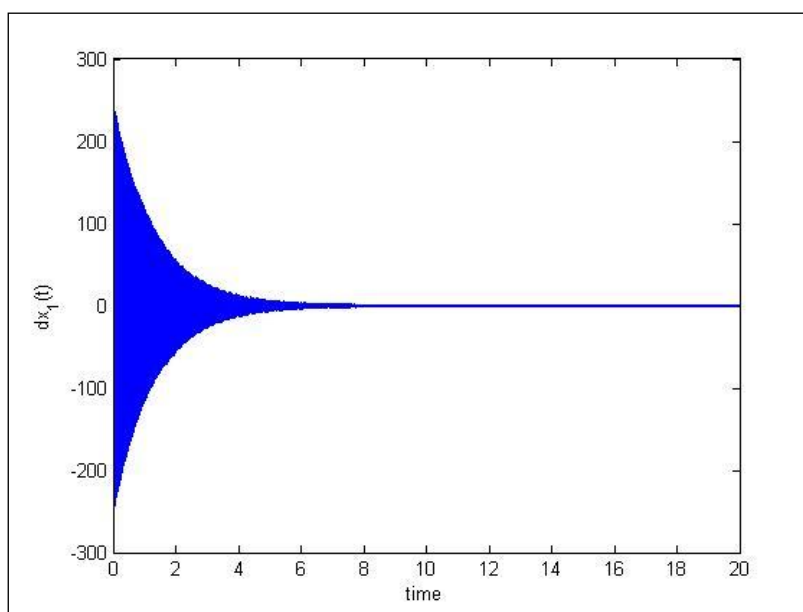
Σχήμα 4.50 Απόκριση $\dot{\theta}$ για $\beta = 5^\circ$ και $\omega_{\max} = 1100 \text{rpm}$

Για γωνία $\beta = 5^\circ$ βλέπουμε ότι διατηρείται η μορφή της αποσβενύμενης ταλάντωσης γύρω από το μηδέν ενώ το μέγιστο πλάτος είναι ίσο με αυτό για γωνίας $\beta=0$ και την ίδια ταχύτητα διέγερσης. Ο χρόνος ηρεμίας δεν αλλάζει ενώ, όπως θα δούμε καλύτερα στο παρακάτω διάγραμμα, δεν διατηρείται ταλάντωση.



Σχήμα 4.51 Μεγέθυνση απόκρισης θ για $\beta=0^\circ$ και $\omega_{\max}=600\text{rpm}$

Τέλος, για ταχύτητα διέγερσης 2400 rpm :

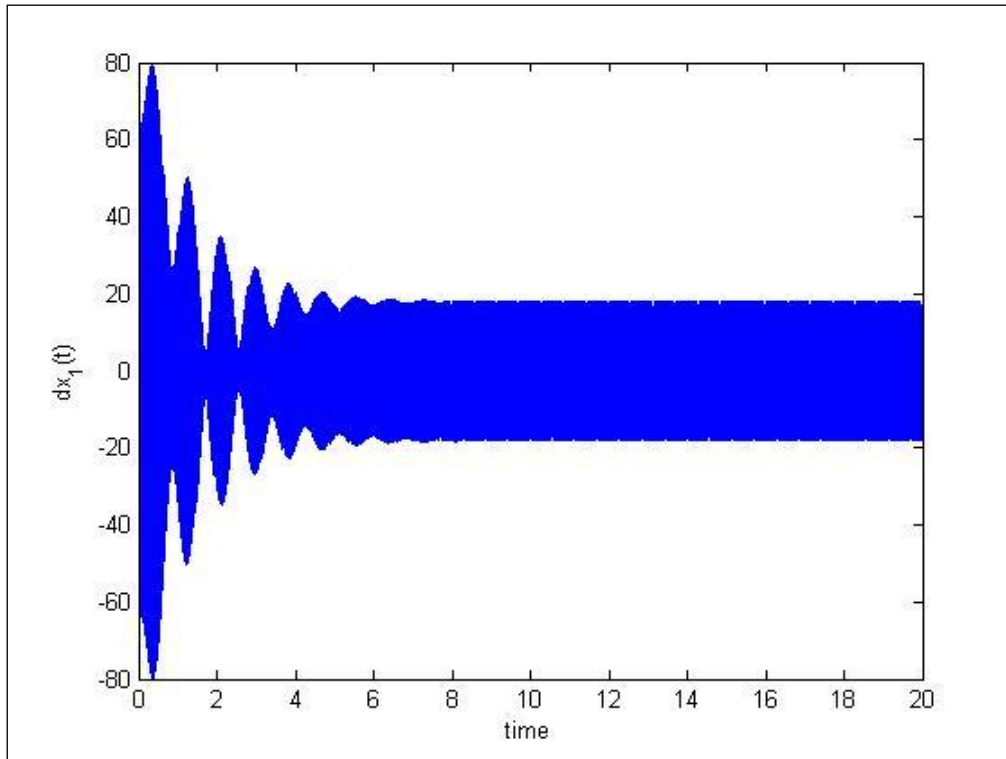


Σχήμα 4.52 Απόκριση θ για $\beta=5^\circ$ και $\omega_{\max}=2400\text{rpm}$

Και σε αυτή την περίπτωση, βλέπουμε το σύστημα να εκτελεί αποσβενύμενη ταλάντωση γύρω από το μηδέν με ίδιο μέγιστο πλάτος και χρόνο ηρεμίας, όπως και στην προηγούμενη εφαρμογή για την ίδια ταχύτητα διέγερσης. Επίσης, μετά την ηρεμία δεν βλέπουμε διατήρηση των ταλαντώσεων.

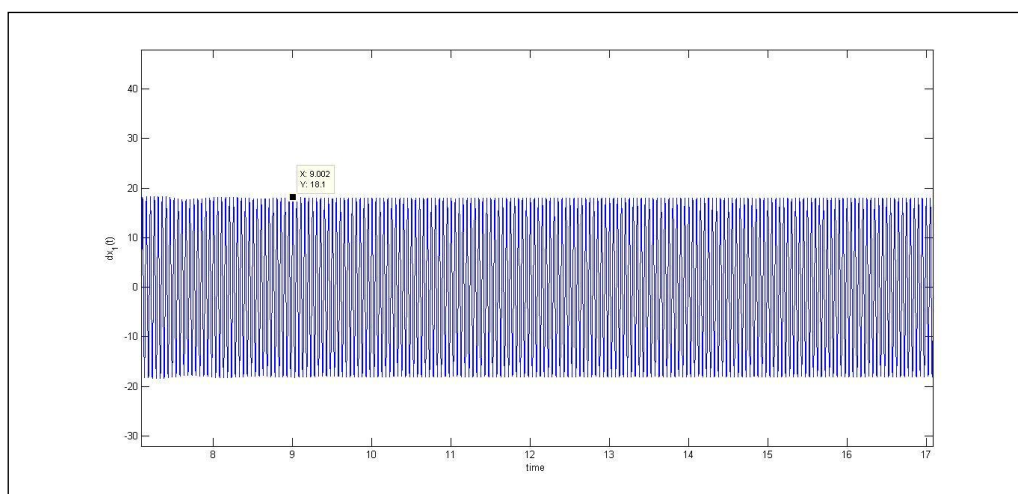
- Γωνία $\beta = 15^\circ$

Μετά την αύξηση της γωνίας λειτουργίας και για ταχύτητα διέγερσης 600 rpm, η παράγωγος της γωνίας θ προκύπτει :



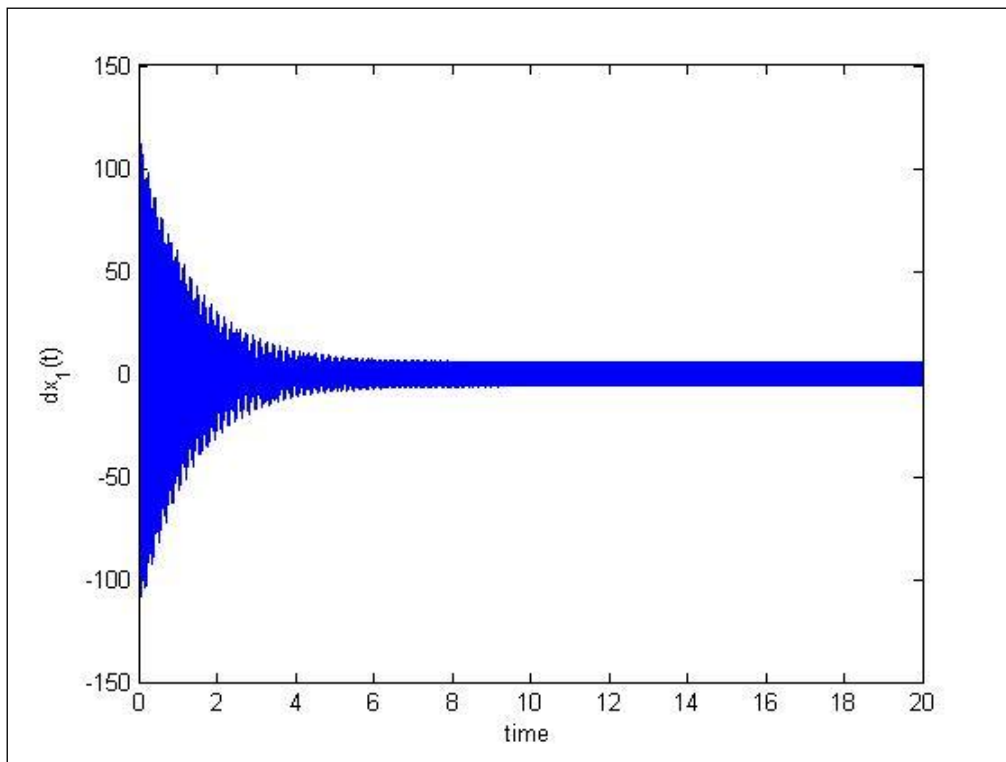
Σχήμα 4.53 Απόκριση $\dot{\theta}$ για $\beta=15^\circ$ και $\omega_{\max}=600\text{rpm}$

Η αποσβενύμενη ταλάντωση παρουσιάζει μια αύξηση της τιμής του μεγίστου πλάτους σε 80 σε σχέση με τα προηγούμενα παραδείγματα. Ο χρόνος ηρεμίας παραμένει ίδιος όμως η παραμένουσα ταλάντωση είναι πλέον πλάτους 18, όπως φαίνεται παρακάτω :



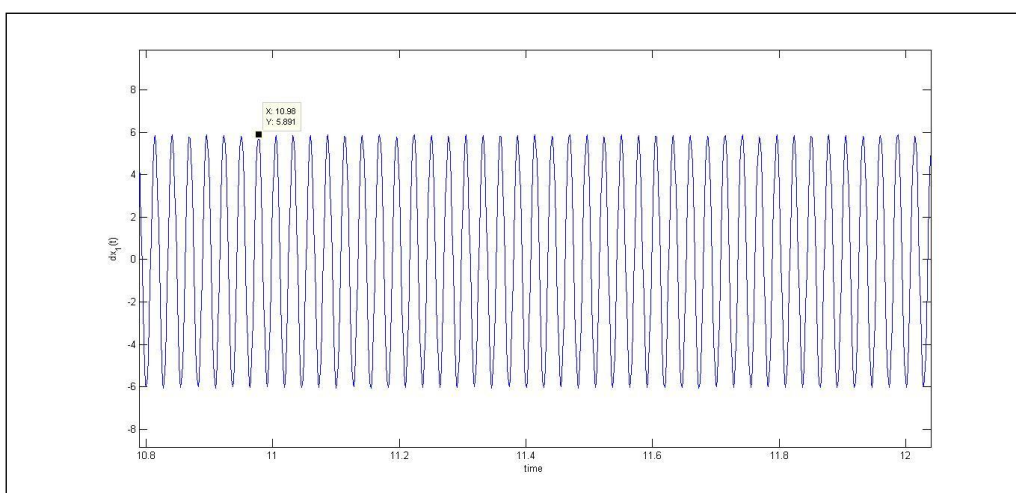
Σχήμα 4.54 Μεγέθυνση απόκρισης θ για $\beta=15^\circ$ και $\omega_{\max}=600\text{rpm}$

Για ταχύτητα διέγερσης 1100 rpm, βλέπουμε στο ακόλουθο διάγραμμα πως η τιμή του μεγίστου πλάτους της αποσβενύμενης ταλάντωσης δεν μεταβλήθηκε σε σχέση με τις προηγούμενες εφαρμογές για την ίδια διέγερση. Ομοίως και για το χρόνο ηρεμίας.



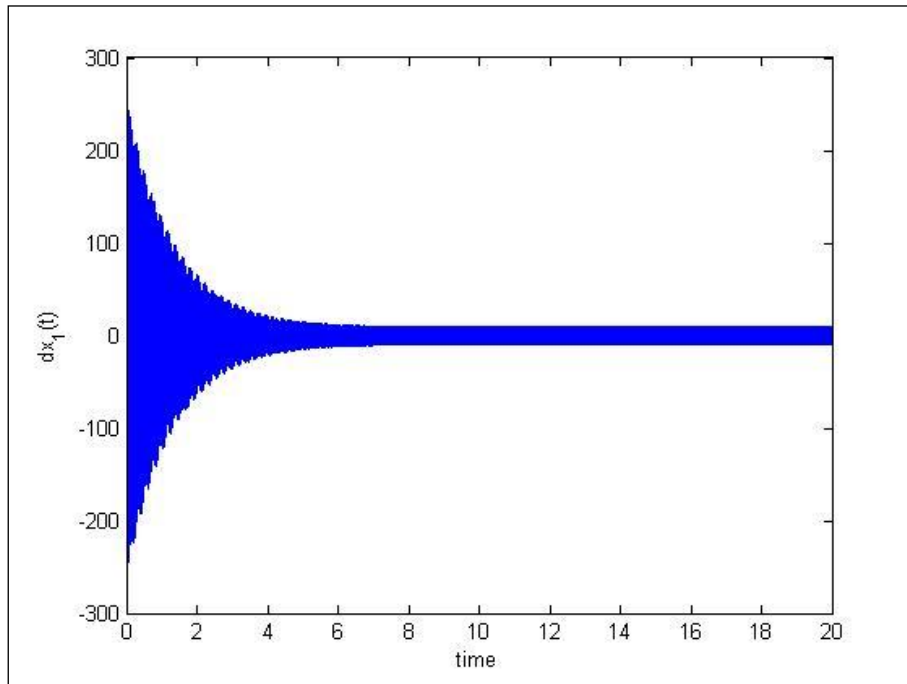
Σχήμα 4.55 Απόκριση θ για $\beta=15^\circ$ και $\omega_{\max}=1100\text{rpm}$

Παρακάτω θα δούμε πως το πλάτος της παραμένουσας ταλάντωσης αυξήθηκε σε 6 :



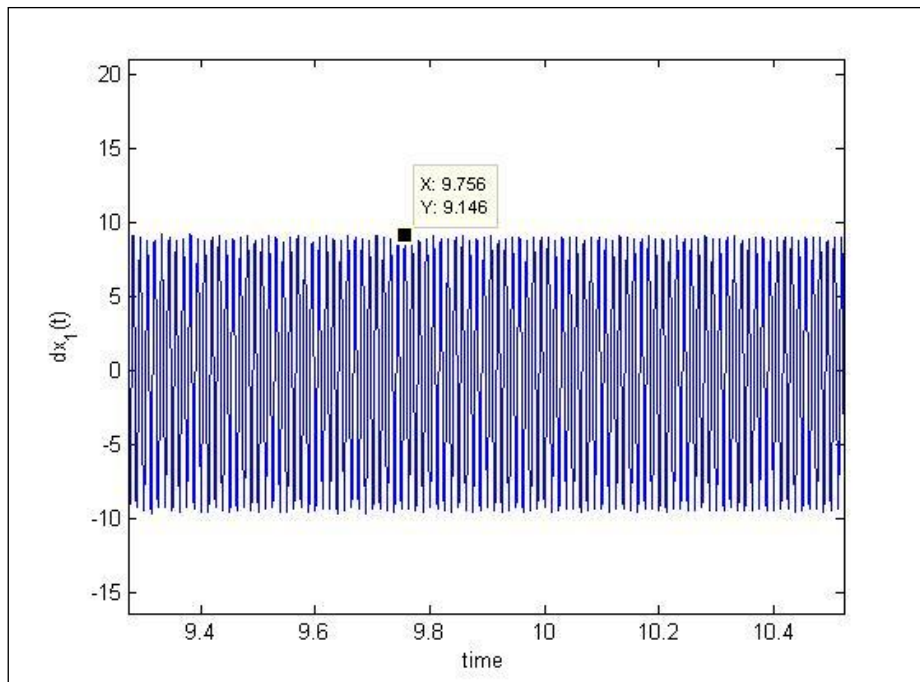
Σχήμα 4.56 Μεγέθυνση απόκρισης θ για $\beta=15^\circ$ και $\omega_{\max}=1100\text{rpm}$

Τέλος, για διέγερση 2400 rpm παίρνουμε την παρακάτω απόκριση.



Σχήμα 4.57 Απόκριση $\dot{\theta}$ για $\beta=15^\circ$ και $\omega_{\max}=2400\text{rpm}$

Το μόνο σημείο που παρουσιάζει αλλαγή και πρέπει να αναφέρουμε είναι το πλάτος της παραμένουσας ταλάντωσης, το οποίο σε αυτή την περίπτωση είναι περίπου 9:



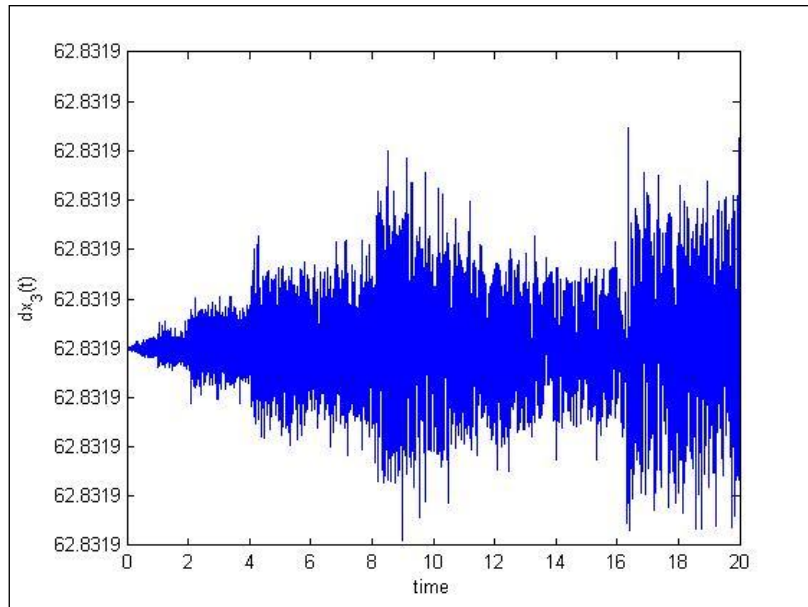
Σχήμα 4.58 Μεγέθυνση απόκρισης $\dot{\theta}$ για $\beta=15^\circ$ και $\omega_{\max}=2400\text{rpm}$

4.2.2.5 Απόκριση $\dot{\varphi}_0$

Η παράγωγος της γωνίας φ_0 δηλώνει την ταχύτητα εισόδου στο σύνδεσμο. Στα παρακάτω διαγράμματα βλέπουμε τις τιμές που λαμβάνει κατά την διέγερση.

- Γωνία $\beta = 0^\circ$

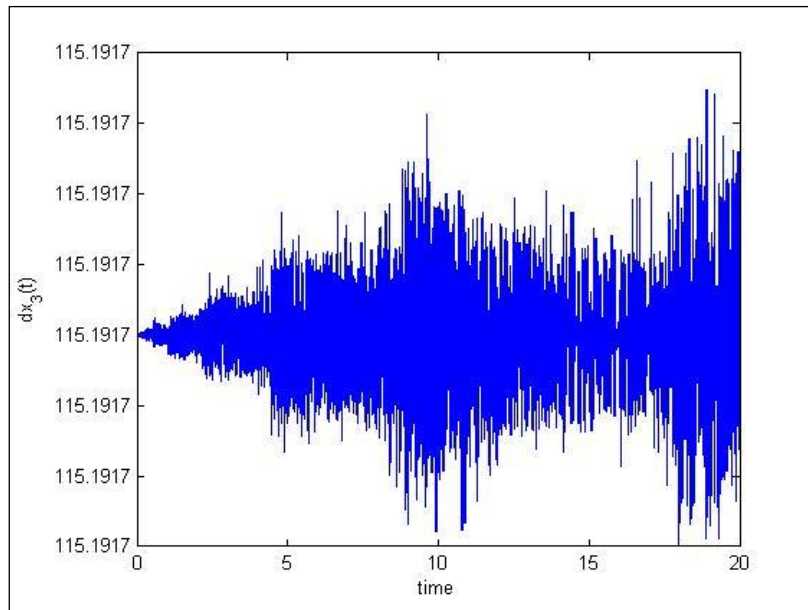
Στη συνέχεια βλέπουμε την τιμή του λόγου $\frac{F_0}{n}$, ο οποίος με βάση τον ορισμό του F_0 είναι ίσος με $\dot{\varphi}_0$.



Σχήμα 4.59 Απόκριση $\dot{\varphi}_0$ για $\beta=0^\circ$ και $\omega_{\max}=600\text{rpm}$

Όπως αναμενόταν, για μηδενική γωνία λειτουργίας, το $\dot{\varphi}_0$ έχει την τιμή της ταχύτητας διέγερσης. Έτσι, επιβεβαιώνεται και η τιμή του F_0 , όπως εξηγήθηκε προηγουμένως. Βέβαια, στο διάγραμμα φαίνεται πως ουσιαστικά εκτελεί μια ταλάντωση γύρω από αυτή την τιμή η οποία όμως μπορεί να αμεληθεί, αφού το πλάτος της είναι μικρότερο από 0,00001.

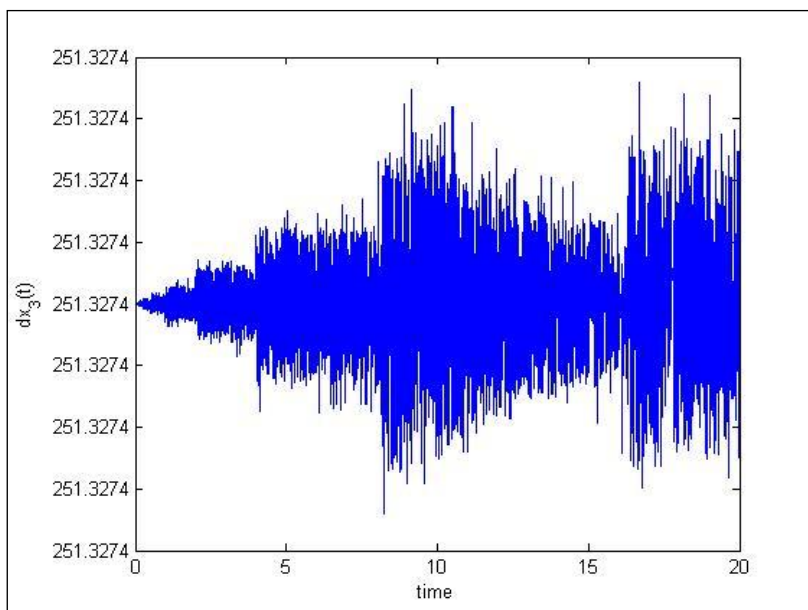
Για ταχύτητα διέγερσης 1100 rpm έχουμε :



Σχήμα 4.60 Απόκριση ϕ_0 για $\beta=0^\circ$ και $\omega_{\max}=1100\text{rpm}$

Βλέπουμε ότι εκτελεί και σε αυτή την εφαρμογή ταλαντώσεις ελάχιστου πλάτους με αποτέλεσμα η τιμή του να μπορεί να θεωρηθεί σταθερή και ίση με την ταχύτητα διέγερσης.

Τέλος, για ταχύτητας διέγερσης 2400 rpm :

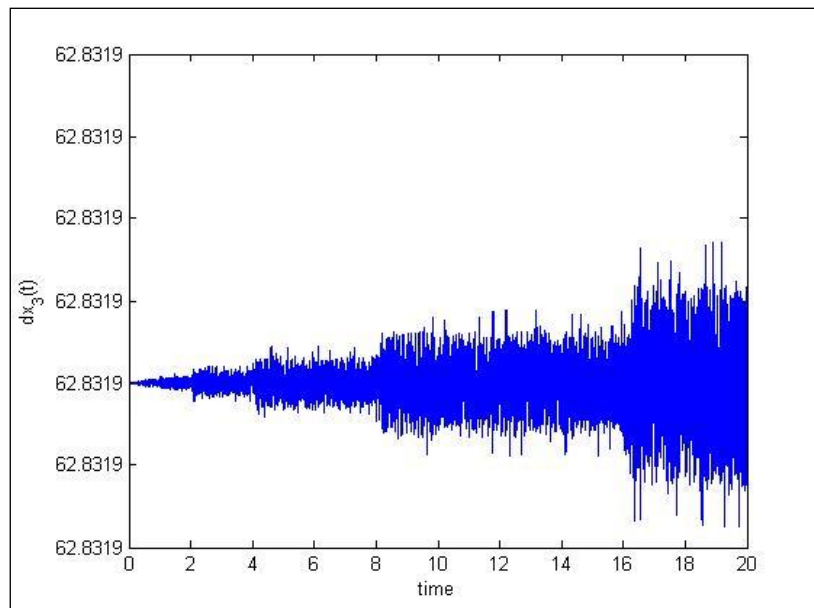


Σχήμα 4.61 Απόκριση ϕ_0 για $\beta=0^\circ$ και $\omega_{\max}=2400\text{rpm}$

Και σε αυτήν την εφαρμογή βλέπουμε πως υπάρχει μία μικρή ταλάντωση ελάχιστου πλάτους ενώ η τιμή μπορεί να θεωρηθεί και πάλι σταθερή και ίση με την ταχύτητας διέγερσης.

- Γωνία $\beta = 5^\circ$

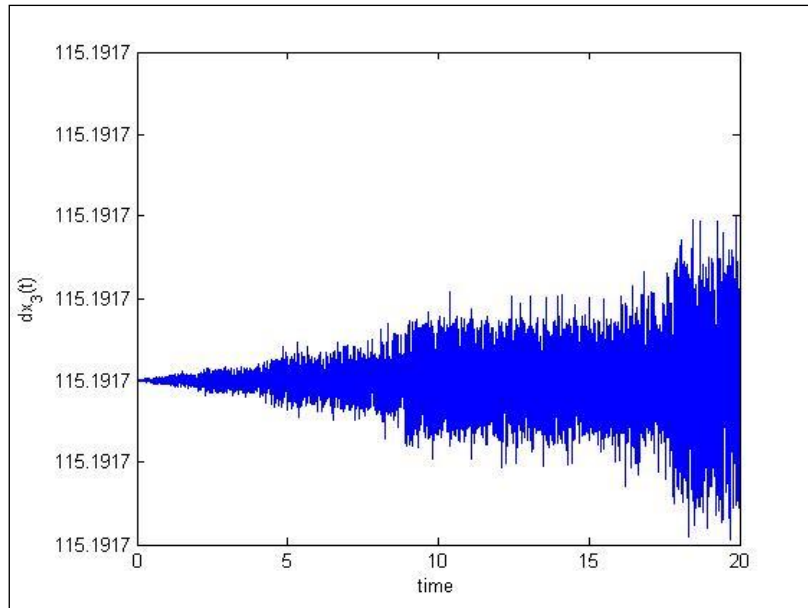
Για γωνία λειτουργίας $\beta = 5^\circ$ και ταχύτητα διέγερσης 600 rpm, η απόκριση της $\dot{\varphi}_0$ προκύπτει :



Σχήμα 4.62 Απόκριση $\dot{\varphi}_0$ για $\beta=5^\circ$ και $\omega_{\max}=600\text{rpm}$

Όπως αναμενόταν, η απόκριση της παραγώγου της γωνίας φ_0 είναι και πάλι ίση με την ταχύτητα εισόδου. Εξακολουθούν να υφίστανται ταλαντώσεις ελάχιστου πλάτους, οι οποίες σε σχέση με τις προηγούμενες εφαρμογές είναι ομαλότερες.

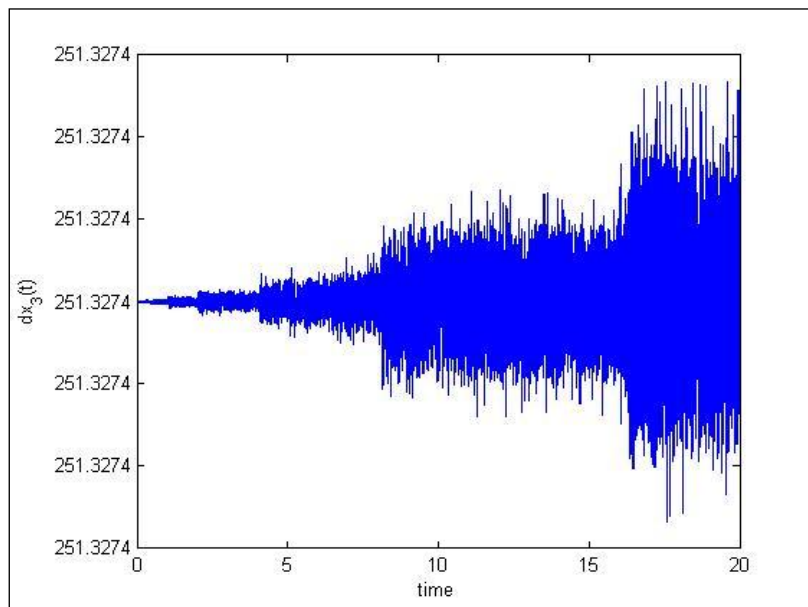
Ας δούμε τώρα την απόκριση για ταχύτητα διέγερσης 1100 rpm :



Σχήμα 4.63 Απόκριση ϕ_0 για $\beta=5^\circ$ και $\omega_{\max}=1100\text{rpm}$

Όπως, βλέπουμε διατηρεί την τιμή της ταχύτητας διέγερσης ενώ οι ελάχιστου πλάτους ταλαντώσεις είναι και πάλι ομαλότερες σε σχέση με αυτές που λάβαμε για γωνία λειτουργίας $\beta=0^\circ$.

Τέλος, για ταχύτητα διέγερσης 2400 rpm :

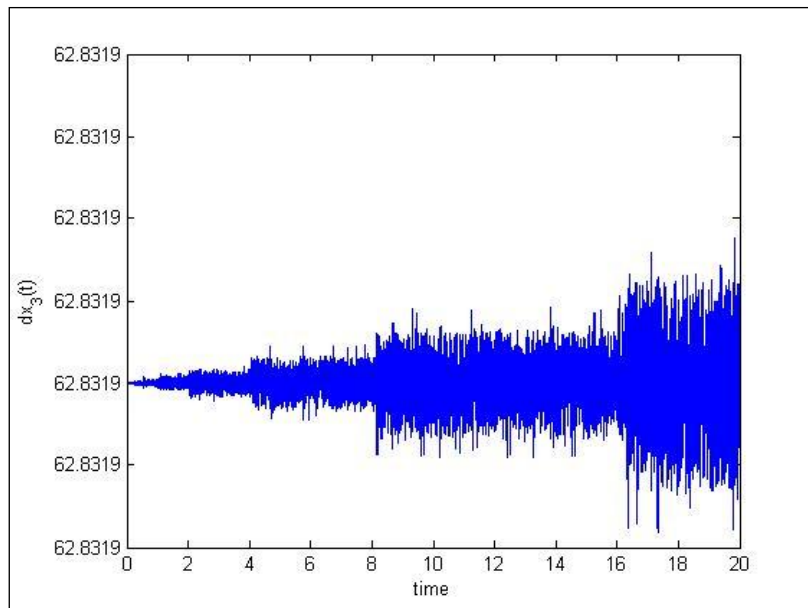


Σχήμα 4.64 Απόκριση ϕ_0 για $\beta=5^\circ$ και $\omega_{\max}=2400\text{rpm}$

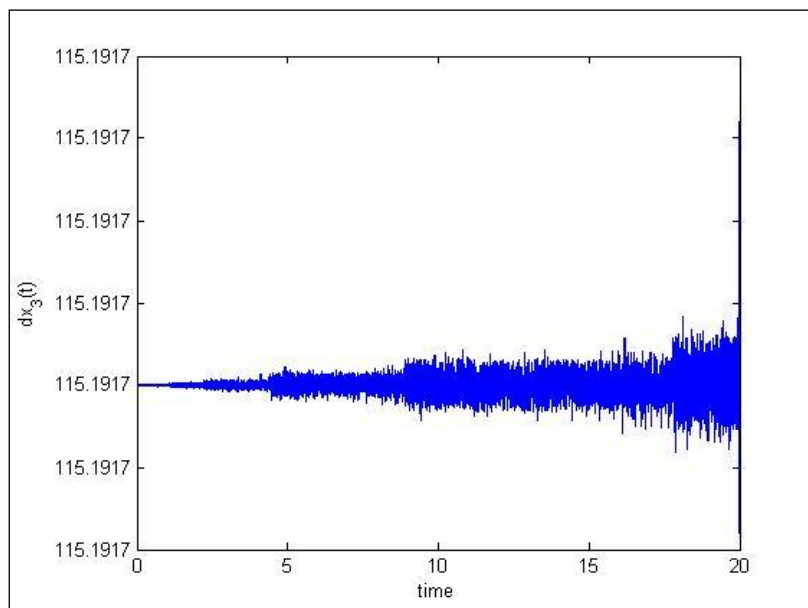
Παρατηρούμε και πάλι στην απόκριση πως αυτή έχει σταθερή τιμή ίση με την ταχύτητα διέγερσης ενώ οι ταλαντώσεις είναι ελαφρώς εντονότερες.

- Γωνία $\beta = 15^\circ$

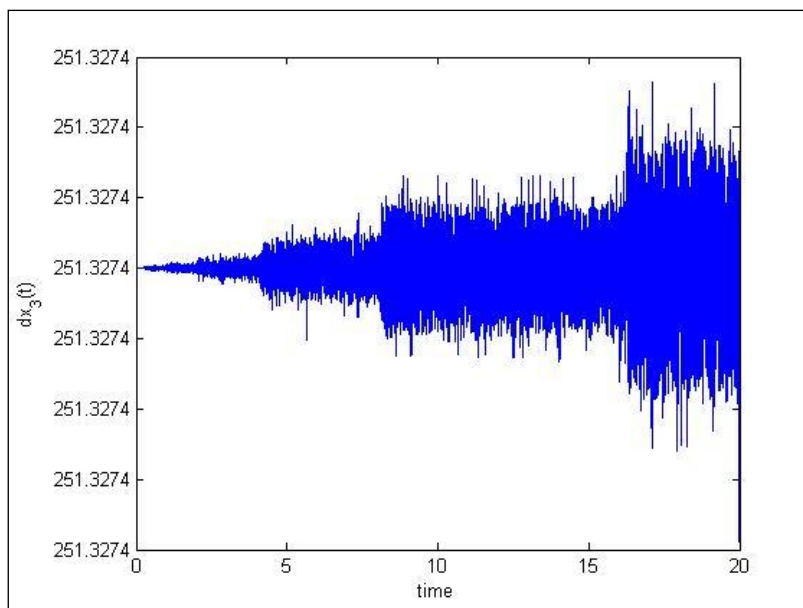
Για λόγους πληρότητας κυρίως παρατίθενται παρακάτω τα διαγράμματα της απόκρισης της παραγώγου της γωνίας ϕ_0 , αν αυξήσουμε τη γωνία λειτουργίας β στις 15° , για ταχύτητες διέγερσης 600, 1100 και 2400 rpm αντίστοιχα.



Σχήμα 4.65 Απόκριση ϕ_0 για $\beta=15^\circ$ και $\omega_{\max}=600\text{rpm}$



Σχήμα 4.66 Απόκριση ϕ_0 για $\beta=15^\circ$ και $\omega_{\max}=1100\text{rpm}$



Σχήμα 4.67 Απόκριση $\dot{\phi}_0$ για $\beta=15^\circ$ και $\omega_{\max}=2400\text{rpm}$

Παρατηρούμε ότι και σε αυτή την περίπτωση, η απόκριση της παραγώγου της ϕ_0 διατηρείται σταθερή και για αυτή τη γωνία λειτουργίας και για κάθε ταχύτητα διέγερσης. Βέβαια, η ταλαντώσεις ελάχιστου πλάτους διατηρούνται αλλά φυσικά θεωρούνται αμελητέες.

4.2.3 Συμπέρασμα

Σε αυτή την παράγραφο, θα συγκεντρώσουμε τα συμπεράσματα που προέκυψαν από τις παραπάνω εφαρμογές καθώς και της προεκτάσεις τους στα πραγματικά προβλήματα.

- Γωνία $\beta = 0^\circ$

Θα προσπαθήσουμε να περιγράψουμε τα αποτελέσματα που λάβαμε με κύριο κριτήριο τη γωνία λειτουργίας των αξόνων. Όπως βλέπουμε, στον πίνακα 4.2, παρουσιάζονται συγκεντρωμένα τα αποτελέσματα των προηγούμενων διαγραμμάτων.

ω	f_0		η	$\dot{\psi}_0$		$\dot{\theta}$	
	μέγιστο	ηρεμία		μέγιστο	ηρεμία	μέγιστο	ηρεμία
600 rpm	62,8319	± 0	1	62,8319	± 0	61,5	± 0
1100 rpm	115,1917	± 0	1	115,1917	± 0	112	± 0
2400 rpm	251,3274	± 0	1	251,3274	± 0	246	± 0

Πίνακας 4.2 Αποτελέσματα για γωνία λειτουργίας $\beta=0^\circ$

Με βάση τα παραπάνω συγκεντρωμένα στοιχεία, μπορούμε να καταλάβουμε πως όταν οι άξονες είναι παράλληλοι τότε η μετάδοση ταχύτητας γίνεται ομαλά με σταθερό λόγο. Ακόμη, τα παρατηρούμε ότι δεν διατηρούνται ταλαντώσεις στις ταχύτητες που εμφανίζονται, ούτε μετά το σύνδεσμο ούτε λόγω τις ελαστικότητας του άξονα.

- Γωνία $\beta = 5^\circ$

Στη συνέχεια, βλέπουμε τον πίνακα 4.3, στον οποίο παρουσιάζονται και πάλι συνοπτικά τα αποτελέσματα αυτή τη φορά για γωνία λειτουργίας 5° .

ω	f_0		η	$\dot{\psi}_0$		$\dot{\theta}$		
	μέγιστο	ηρεμία		μέγιστο	ηρεμία	μέγιστο	ηρεμία	
600 rpm	62,8319	$\pm 0,24$	1	$\pm 0,004$	62,8319	± 0	61,5	± 2
1100 rpm	115,1917	$\pm 0,4$	1	$\pm 0,004$	115,1917	± 0	112	± 0
2400 rpm	251,3274	$\pm 0,8$	1	$\pm 0,004$	251,3274	± 0	246	± 0

Πίνακας 4.3 Αποτελέσματα για γωνία λειτουργίας $\beta=5^\circ$

Αυξάνοντας τη γωνία λειτουργίας βλέπουμε την εμφάνιση ταλαντώσεων σε όλα τα μεγέθη που εξετάζουμε. Αναλυτικότερα, στην έξοδο του *Cardan* παρατηρούνται ταλαντώσεις μικρού και σταθερού πλάτους ενώ λόγω ελαστικότητας του άξονα εμφανίζεται ταλάντωση μόνο για ταχύτητα 600rpm.

- Γωνία $\beta = 15^\circ$

Τέλος, παρουσιάζονται συνοπτικά τα αποτελέσματα για γωνία λειτουργίας $\beta=15^\circ$, στον πίνακα 4.4.

ω	f_0		η		Φ_0		θ	
	μέγιστο	ηρεμία	μέγιστο	ηρεμία	μέγιστο	ηρεμία	μέγιστο	ηρεμία
600 rpm	62,8319	$\pm 2,25$	1	$\pm 0,0035$	62,8319	± 0	61,5	± 18
1100 rpm	115,1917	± 4	1	$\pm 0,0035$	115,1917	± 0	112	± 6
2400 rpm	251,3274	± 9	1	$\pm 0,0035$	251,3274	± 0	246	± 9

Πίνακας 4.4 Αποτελέσματα για γωνία λειτουργίας $\beta = 15^\circ$

Παρατηρείται λοιπόν ότι παρόλο που απέχουμε πολύ από οριακές γωνίες λειτουργίας Cardan οι ταλαντώσεις στα σημαντικά μεγέθη είναι ιδιαίτερα έντονες και διατηρούνται σε όλη τη διέγερση. Ιδιαίτερα, οι ταλαντώσεις που δημιουργούνται λόγω της ελαστικότητας του άξονα έχουν μεγάλο πλάτος που το διατηρούν ακόμη και μετά την ηρεμία, ενώ η αποσβενύμενη μορφή της ταλάντωσης του μεγέθους την κάνει ακόμη πιο επικίνδυνη για τη λειτουργία του συστήματος.

- Αξιολόγηση

Τα μεγέθη που κυρίως μας απασχολούν είναι το F_0 και το θ , καθώς το πρώτο δείχνει την επίδραση του συνδέσμου ενώ το δεύτερο την επίδραση της ευκαμψίας του άξονα.

Με βάση τα παραπάνω πινακοποιημένα αποτελέσματα μπορούμε να δούμε ότι όσο αυξάνεται η γωνία β τόσο αποκλίνει η έξοδος του συνδέσμου, που εκφράζεται από το F_0 . Προφανώς, υπάρχει εξάρτηση και από την ταχύτητα διέγερσης. Φυσικά, αν και τα πλάτη των ταλαντώσεων αυτών σε καμία περίπτωση δεν μπορούν να θεωρηθούν μικρά, δεν είναι τόσο σημαντικά σε απόλυτη τιμή σε σχέση με την τιμή της εξόδου που λαμβάνουμε. Επίσης, το σταθερό πλάτος των ταλαντώσεων, αν και δεν αποτελεί την ιδανική απόκριση, μπορεί να θεωρηθεί ως μια ομαλή καταπόνηση του συνδέσμου και σχετικά προβλεπόμενη, ώστε να μπορεί να αντιμετωπιστεί.

Από την άλλη, η ευκαμψία του άξονα οδηγεί, με αύξηση της γωνίας αλλά και της ταχύτητας διέγερσης, σε ταλαντώσεις πολύ μεγαλύτερου πλάτους αλλά και διακύμανσης σε σχέση με αυτές που δημιουργεί ο σύνδεσμος. Οι ταλαντώσεις αυτές αποτελούν πολύ μεγαλύτερο κίνδυνο για το σύνδεσμο για πολλούς λόγους. Από τη μια, η διακύμανση του πλάτους οδηγεί σε διακύμανση καταπόνησης, που ως γνωστόν θεωρείται περισσότερο επικίνδυνη. Από την άλλη, το μέγιστο πλάτος, δεν μπορεί σε καμία περίπτωση να θεωρηθεί μικρό ή ανεκτό. Ακόμη, δεν είναι δυνατή η ακριβής πρόβλεψη της διακύμανσης αυτής καθώς η εξάρτηση από τους διάφορους παράγοντες που μελετήθηκαν δεν είναι πάντοτε σταθερή, ειδικά όσον αφορά την ταλάντωση που διατηρείται στο σύστημα μετά την ηρεμία.

5

Επίλογος

Στην παρούσα διπλωματική εργασία έγινε προσπάθεια να μελετηθεί πλήρως η δυναμική λειτουργία ενός συνδέσμου Cardan με σκοπό τον εντοπισμό των αιτιών που οδηγούν σε φθορά και αστοχία. Έχοντας ως δεδομένα από τη βιβλιογραφία ότι οι παράμετροι που επηρεάζουν εντονότερα τη λειτουργία του είναι η ταχύτητα εισόδου και οι γωνία λειτουργίας, καθώς αυξάνουν τις καμπτικές καταπονήσεις, η μελέτη επικεντρώθηκε σε αυτές ώστε να διαπιστωθεί τόσο ο τρόπος όσο και ο βαθμός στον οποίο επηρεάζουν τη λειτουργία του.

Σε μια πρώτη προσέγγιση έγινε μελέτη της δυναμικής συμπεριφοράς του συνδέσμου μαθηματικά. Με βάση τα δεδομένα που προέκυψαν, επιβεβαιώθηκε η γενική γνώση πως, ακόμη και με σταθερή είσοδο, η έξοδος του συνδέσμου θα είναι πάντοτε μια ταλάντωση ημιτονοειδούς μορφής και μάλιστα με δύο πλήρη κύκλους σε κάθε περιστροφή. Βέβαια, αυτό δεν οδήγησε σε αποτελέσματα ακραίων τιμών πολύ μακριά από την αρχική διέγερση.

Όσον αφορά τη γωνία λειτουργίας, και με βάση την πρώτη παραπάνω προσέγγιση, οδηγηθήκαμε στο συμπέρασμα πως αυτή επηρεάζει σε μεγάλο βαθμό την απόκριση, αφού όσο αυξάνεται τόσο μεγαλύτερες αποκλίσεις έχουμε από την είσοδο, και κατ' επέκταση φυσικά απώλειες. Παρόλα αυτά δεν βρέθηκε κάποια συσχέτιση της μορφής της απόκρισης με τη γωνία λειτουργίας στο στάδιο αυτό. Από την άλλη, η ταχύτητα περιστροφής σε αυτή την απλοϊκή προσέγγιση έδειξε να μην επηρεάζει αισθητά τη λειτουργία του συνδέσμου, εφόσον για σταθερές γωνίες μεταβολή της ταχύτητας εισόδου δεν οδήγησε σε μεταβολές της εξόδου.

Βέβαια, αυτή η μαθηματική προσέγγιση δεν ήταν αρκετή για να δώσει πλήρη εποπτεία της δυναμικής συμπεριφοράς του συνδέσμου Cardan. Για το λόγο αυτό, έπρεπε να στραφούμε σε υπολογιστικά μέσα και συγκεκριμένα στη συνάρτηση ode45 της Matlab. Η συνάρτηση αυτή μας επιτρέπει την επίλυση με χρήση της αριθμητικής επαναληπτικής μεθόδου Runge – Kutta και μας παρέχει πλήρη εικόνα της απόκρισης για πολλούς κύκλους περιστροφής. Φυσικά, η αποτελεσματικότητα της συνάρτησης επιβεβαιώθηκε επιλύοντας με αυτή γνωστά δυναμικά συστήματα. Τα αποτελέσματα έδειξαν πως η συνάρτηση μπορεί να θεωρηθεί εξαιρετικά ακριβής για τα προβλήματα που μελετούμε αφού δίνει αποτελέσματα ταυτόσημα της μαθηματικής επίλυσης σε κάθε περίπτωση.

Με τη βεβαιότητα της χρήσης του κατάλληλου εργαλείου προχωρήσαμε στην πλήρη επίλυση ενός δυναμικού συστήματος μεταφοράς ταχύτητας με σύνδεσμο Cardan ενώ μελετήσαμε, εκτός από την απόκριση της εξόδου, την απόκριση της περιστροφής τόσο λόγω της παρουσίας του συνδέσμου όσο και λόγω της ελαστικότητας του άξονα του συστήματος. Φυσικά, η μελέτη έγινε για διάφορες ταχύτητες διέγερσης και γωνίες λειτουργίας ώστε να μπορέσουμε να δούμε ποιο από τα μεγέθη αυτά έχει τελικά μεγαλύτερο αντίκτυπο στην λειτουργία.

Τα αποτελέσματα αυτής της προσέγγισης μας οδηγούν σε αρκετά διαφορετικά συμπεράσματα. Από τη μία βλέπουμε και πάλι πως η έξοδος αμέσως μετά το σύνδεσμο είναι όντως μια ταλάντωση σταθερού πλάτους το οποίο αυξάνεται έντονα με αύξηση της γωνίας λειτουργίας ενώ παρουσιάζει μικρότερη αύξηση αυξάνοντας την ταχύτητα εισόδου. Το επικίνδυνο μέγεθος όμως, όπως προέκυψε από τη μελέτη, είναι η ελαστικότητα του άξονα περιστροφής. Παρατηρήσαμε πως η ταχύτητα που αυτός αναπτύσσει λόγω της ελαστικότητάς του εκτελεί αποσβενύμενες και όχι σταθερού πλάτους ταλαντώσεις. Ακόμη, εντοπίσαμε πως ακόμη και μετά την ηρεμία αυτός εξακολουθεί να ταλαντώνεται, με σταθερό βέβαια πλάτος. Αυξάνοντας δε τη γωνία λειτουργίας το πλάτος των ταλαντώσεων αυτών, και των αρχικών αλλά και των διατηρούμενων μετά την ηρεμία, είναι αρκετά μεγάλο για να αγνοηθεί. Τέλος, σημαντικότερος παράγοντας που μας οδήγησε στο συμπέρασμα πως αυτό τελικά είναι το πιο επικίνδυνο μέγεθος για την ομαλή λειτουργία του συστήματος με σύνδεσμο Cardan είναι ότι δεν βρέθηκε καμία συσχέτιση των ταλαντώσεων αυτών ώστε να μπορούν να προβλεφτούν από τον μηχανικό που μελετά τη λειτουργία ενός τέτοιου συστήματος.

6

Βιβλιογραφία

- [1] Ρ.Γραϊκούση, " Στοιχεία Μηχανών ΙΙ : Στοιχεία περιστροφικής κινήσεως, Κεφ. Ξ", Εκδόσεις Γιαχούδη
- [2] Dario Governatori, "The Inertia Torque of the Hooke Joint", University of Rome Tor Vergata.
- [3] Spider, "off-Highway Driveshaft Standard Product Catalogue".
- [4] KLEIN Gelegenheit, , "Dimensions of Cardan Shafts – Technical Directions".
- [5] AJAX, "Universal Joint High Shock and Overload Capacity".

- [6] H. Krause, C. Hammel, "The wear behaviour of copper alloy steel and polyamide steel sliding pairs for heavily loaded Cardan Joints", 1983.

- [7] what-when-how, "Universal Joints (Automobile)".

- [8] Gökhan Bulut, Zeynep Parlar, "Dynamic stability of a shaft system connected through a Hooke's joint", 2011. [9] Arnaldo J. Mazzei, Jr., Richard A. Scott, "Accelerating through resonance of a universal joint drive line".

- [10] Arnaldo J. Mazzei, Jr., Richard A. Scott, "Variable speed effects on stability of drivelines with universal joints".

- [11] CAFFE, Center for Alternative Fuels, Engines & Emissions West Virginia University, "Heavy-Duty Vehicle Diesel Engine Efficiency Evaluation and Energy Audit", October 2014.
- [12] Erica McEvoy, "Using Matlab to integrate Ordinary Differential Equations", June 2009.
- [13] Α.Κανάραχος, Ι.Αντωνιάδης, "Δυναμική Μηχανών", Εκδόσεις Παπασωτηρίου, 1998.

Παράρτημα Κωδίκων

```
function dx= cardan_model_heaviside(t,x)
% βοηθητική συνάρτηση για ορισμό δεδομένων

dx = zeros(3,1) ;

k = 7142.86 ; % δεδομένα προβλήματος
c = 0.602 ;
J =0.404 ;
vita = 0.0873;
A = cos(vita) ;
B = sin(vita) ;
C = B^2 ;
n = A/(1- ((cos(x(3)))^2)*C) ;
velmax=62.8319 ; %se rad/sec
ta = 0;

if t<ta ; % περιγραφή εξωτερικής διέγερσης

vel0 = 0;
else
vel0=velmax ;

end

dx(3) = vel0 ; % εισαγωγή εξισώσεων κίνησης συστήματος
F0 = n*dx(3) ;
dx(1) = x(2) - F0 ;
dx(2) = (-k*x(1) - c*(x(2) - F0))/J ;

end
```

```

[t,x] = ode45( 'cardan_model_heaviside',[0 20], [0 0 0]) ;
% κύριο πρόγραμμα - συνάρτηση ode45

dx1=diff(x(:,1))./diff(t);
dx2=diff(x(:,2))./diff(t);
dx3=diff(x(:,3))./diff(t);

vita = 0.0873;           % υπολογισμός λόγου μετάδοσης ταχυτήτων
A = cos(vita) ;
B = sin(vita) ;
C = B^2 ;

for i=1:11949;
n(i) = A/(1- ((cos(x(i,3))).^2)*C) ;
end
nn = n' ;
for j=2:11948;
F0(j,1) = nn(j,1).*dx3(j-1,1) ;
end

figure(1) ;                %διαγράμματα
plot(t,x(:,1)) ;
xlabel('time');
ylabel('x_{1}(t)' ) ;

figure(4) ;
plot(t(2:end),dx1) ;
xlabel('time');
ylabel('dx_{1}(t)' ) ;

figure(2);
plot(t,x(:,2));
xlabel('time');
ylabel('x_{2}(t)');

figure(5) ;
plot(t(2:end),dx2) ;
xlabel('time');
ylabel('dx_{2}(t)' ) ;

figure(3);
plot(t,x(:,3));
xlabel('time');
ylabel('x_{3}(t)');

```

```
figure(6) ;  
plot(t(2:end),dx3) ;  
xlabel('time') ;  
ylabel('dx_{3}(t)') ;
```

```
figure (7) ;  
plot(t(2:end),F0) ;  
xlabel('time') ;  
ylabel('F0(t)') ;
```

```
figure (8) ;  
plot(t,nn) ;  
xlabel('time') ;  
ylabel('n') ;
```