



**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**  
**ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ**  
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΜΗΧΑΝΩΝ

*Τρισδιάστατη μοντελοποίηση και ανάλυση κοντραμπάσου σε  
περιβάλλον CAD-CAE*

Διπλωματική Εργασία

ΙΩΑΝΝΗΣ ΒΑΓΙΑΝΟΣ

Επιβλέπων : Καθηγητής Χριστόφορος Προβατίδης

ΑΘΗΝΑ 2016



## Περίληψη

Στην παρούσα διπλωματική εργασία γίνεται περιγραφή της ανάπτυξης και ανάλυσης του μοντέλου πεπερασμένων στοιχείων κοντραμπάσου. Για την ανάπτυξη του μοντέλου χρησιμοποιήθηκε ο εξοπλισμός του Εργαστηρίου Ταχείας Κατασκευής Πρωτοτύπων και Εργαλείων – Αντίστροφου Σχεδιασμού και του Εργαστηρίου Στοιχείων Μηχανών της Σχολής Μηχανολόγων Μηχανικών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου. Στόχος της εργασίας ήταν η συμβολή στη σύγχρονη μελέτη των μουσικών οργάνων της οικογένειας των εγχόρδων. Για την επίτευξη αυτού του στόχου πάρθηκαν δύο βασικές αποφάσεις. Η πρώτη ήταν η μελέτη να αφορά ένα όργανο το οποίο έχει, μέχρι στιγμής, μελετηθεί πολύ λιγότερο σε σχέση με τα υπόλοιπα της οικογένειας. Αυτό είναι το κοντραμπάσο. Η δεύτερη ήταν να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων για τη δημιουργία του μοντέλου, η οποία παίζει, πλέον, ενεργό ρόλο στην τεχνολογία μουσικών οργάνων. Στο κείμενο παρουσιάζεται η διαδικασία της σάρωσης του οργάνου και της επεξεργασίας των δεδομένων που λήφθηκαν σε CAD. Στη συνέχεια, τα μοντέλα CAD χρησιμοποιούνται για τη δημιουργία τριών διακριτών μοντέλων πεπερασμένων στοιχείων. Ενώσ στερεού μοντέλου και δύο μοντέλων της κοιλότητας αέρα, τα οποία διαφέρουν μεταξύ τους στις οριακές συνθήκες. Γίνεται ανάλυση ιδιομορφών και των τριών μοντέλων και αρμονική ανάλυση του στερεού. Τα αποτελέσματα συγκρίνονται αρχικά μεταξύ τους και στη συνέχεια με πειραματικά δεδομένα που υπάρχουν διαθέσιμα από παλαιότερες μελέτες. Βγαίνουν συμπεράσματα που αφορούν την αλληλεπίδραση μεταξύ στερεού και κοιλότητας αέρα. Τέλος, προτείνεται μία βελτίωση στην υπάρχουσα ονοματολογία των ιδιομορφών του κοντραμπάσου και παρουσιάζονται κάποιες από τις δυνατότητες περαιτέρω μελέτης που υπάρχουν.



## Abstract

In the present thesis the development and analysis of a Double Bass model is described. For the development of the model the equipment of Rapid Prototyping and Tooling – Reverse Engineering Laboratory and of Machine Elements and Dynamics Laboratory (School of Mechanical Engineering of NTUA) was used. The objective of the thesis was to contribute to the modern study of string instruments technology. The Finite Element Method (FEM) was selected for the creation of the model. This decision was made because FEM has henceforth a major role in acoustics and musical instrument study. In the text, the process of the body scan is presented, as is the way that the obtained data is processed in CAD environment. Afterwards, the CAD model was used for the creation of three different finite element models. A model of the solid body and two models of the air cavity, each with different boundary conditions, were created and analyzed. Modal analysis of all the models was executed. Harmonic analysis of the solid model was used in order to obtain additional data. All the results were compared to one another and to experimental data. Conclusions, regarding the interaction of the solid body and the air cavity were drawn. Finally, an improvement in the naming of the Eigen modes was proposed and some of the possible future studies are proposed.



## Ευχαριστίες

Φτάνοντας στο πέρας των σπουδών μου στη σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών, συνειδητοποιώ ότι τα άτομα που έχουν παίξει ρόλο σε αυτές είναι, επί της ουσίας, αμέτρητα. Δε θα μπορούσε άλλωστε να συμβαίνει κάτι διαφορετικό, αφού η γνώση παράγεται με συλλογικό τρόπο και αφομοιώνεται με συλλογικό τρόπο. Ο τρόπος δε που αφομοιώνεται, που είναι και καθοριστικός για την πορεία του καθενός, καθορίζεται κυρίως από παράγοντες και ανθρώπους που λίγη σχέση με τον ακαδημαϊκό κόσμο έχουν.

Κατά τη διάρκεια, όμως, της εκπόνησης της συγκεκριμένης εργασίας, η οποία σηματοδοτεί την ολοκλήρωση αυτού του κύκλου σπουδών, υπάρχουν συγκεκριμένα άτομα που έπαιξαν καθοριστικό ρόλο. Αρχικά θα ήθελα να ευχαριστήσω για τη συμβολή του τον καθηγητή και επιβλέποντα της εργασίας μου Δρ. Χ. Προβατιδή. Οι συμβουλές του υπήρξαν καθοριστικής σημασίας σε στιγμές που η ολοκλήρωσή της εργασίας έμοιαζε ακατόρθωτη. Αντίστοιχης σημασίας υπήρξε και η βοήθεια του καθηγητή Δρ. Β. Σπιτά. Η ενασχόλησή του με την εργασία μου, και η ενθάρρυνση του να ασχοληθώ με ένα θέμα δικής μου επιλογής ήταν αποφασιστικά για την πορεία της διπλωματικής εργασίας.

Εν συνεχεία, οφείλω να ευχαριστήσω τον υποψήφιο Διδάκτορα, αλλά κυρίως σημαντικότερο φίλο, Στράτο Τσολάκη. Αφιέρωσε στην εργασία μου, για ένα σημαντικό χρονικό διάστημα, ένα μεγάλο ποσοστό από τον ήδη εξαιρετικά περιορισμένο χρόνο του. Οι γνώσεις του σε λογισμικό και το επιστημονικό του υπόβαθρο έπαιξαν ουσιαστικό ρόλο στις μεθόδους ανάπτυξης της γεωμετρίας του μοντέλου και στον τρόπο ανάλυσής του.

Για την αμέριστη στήριξή τους σε κάθε μου βήμα ένα ευχαριστώ δεν είναι αρκετό για τους γονείς μου Άλκη και Μαρία αλλά και για τις αδερφές μου Κατερίνα και Φωτεινή. Οι σπουδές μου, επιστημονικές και καλλιτεχνικές, και προφανώς η παρούσα εργασία, είναι, υπό μία έννοια, βάρη ισοκατανεμημένα σε μένα και στην οικογένειά μου και γι αυτό είμαι ευγνώμων.

Τέλος θέλω να ευχαριστήσω τους φίλους μου, τους συντρόφους μου, και την κοπέλα μου Νεφέλη. Για την καθημερινή στήριξη και υπομονή τους, για τη συλλογική σκέψη και για τις εμπειρίες ζωής.









# Περιεχόμενα

<b>1.</b>	<b>Εισαγωγή</b>	<b>σελ.15</b>
<b>2.</b>	<b>Βασικές Αρχές Απόκρισης Εγκόρδων και Σύγχρονη Μελέτη</b>	<b>σελ.17</b>
2.1.	Επισκόπηση της Κατασκευής των Εγκόρδων	
2.2.	Διέγερση Χορδής με Δοξάρι	
2.2.1.	Κινηματική της Χορδής	
2.2.2.	Δυναμική της Χορδής	
2.3.	Απόκριση του Σώματος	
2.4.	Σύγχρονη μελέτη των εγκόρδων	
2.5.	Εφαρμογή της Μεθόδου Πεπερασμένων Στοιχείων στην Μοντελοποίηση Μουσικών Οργάνων	
<b>3.</b>	<b>Ανάπτυξη Γεωμετρίας 3D Μοντέλου</b>	<b>σελ.33</b>
3.1.	Αρχικές Αποφάσεις για τον Τρόπο Ανάπτυξης του Μοντέλου	
3.2.	Εξοπλισμός που χρησιμοποιήθηκε στο 3D Scan'	
3.3.	Σύντομη Επισκόπηση της Ροής Εργασιών κατά το Scanning και της Επεξεργασίας σε Λογισμικό Geomagic	
3.3.1.	Νέφος Σημείων	
3.3.2.	Τριγωνικά Στοιχεία Επιφάνειας	
3.3.3.	Παραμετροποίηση των επιφανειών	
3.4.	Αποφάσεις για τη Μορφή του Αριθμητικού Μοντέλου	
3.5.	Επεξεργασία της Γεωμετρίας στο Λογισμικό Solidworks	
<b>4.</b>	<b>Ανάπτυξη και Ανάλυση Στερεού Αριθμητικού Μοντέλου</b>	<b>σελ.49</b>
4.1.	Υλικά που Χρησιμοποιήθηκαν	

4.2.	Στηρίξεις και Επαφές	
4.3.	Δημιουργία Πλέγματος	
4.4.	Ανάλυση Ιδιομορφών	
4.5.	Αρμονική Ανάλυση	
<b>5.</b>	<b>Ανάπτυξη και Ανάλυση Αριθμητικού Μοντέλου Ακουστικής Κοιλότητας</b>	<b>σελ.61</b>
5.1.	Ανάπτυξη Γεωμετρίας	
5.2.	Ανάπτυξη Αριθμητικού Μοντέλου χωρίς τις Οπές του Καπακιού	
5.3.	Ανάλυση Αριθμητικού Μοντέλου χωρίς τις Οπές του Καπακιού	
5.4.	Ανάπτυξη Αριθμητικού Μοντέλου με τις Οπές του Καπακιού	
5.5.	Ανάλυση Αριθμητικού Μοντέλου με τις Οπές του Καπακιού	
5.6.	Σύγκριση Αποτελεσμάτων των Δύο Μοντέλων	
<b>6.</b>	<b>Σύγκριση Αποτελεσμάτων με Πειραματικά Δεδομένα και Τελικά Συμπεράσματα</b>	<b>σελ.73</b>
<b>7.</b>	<b>Δυνατότητες Περαιτέρω Μελέτης</b>	<b>σελ.77</b>
	<b>Παράρτημα I: Κάθετο Κύμα σε Χορδή</b>	<b>σελ.79</b>
I.I.	Εξίσωση Κύματος	
I.II.	Ανάκλαση σε Πακτωμένο και Ελεύθερο Άκρο	
I.III.	Απλή Αρμονική Λύση της Εξίσωσης Κύματος	
I.IV.	Στάσιμα Κύματα	
I.V.	Ενέργεια Ταλαντούμενης Χορδής	
I.VI.	Διέγερση Χορδής και Σύνθετη Εμπέδηση	
I.VII.	Κίνηση των στηρίξεων	
I.VIII.	Απόσβεση	
I.IX.	Χορδή με Δυσκαμψία	
	<b>Παράρτημα II: Κύματα σε Λεπτή Πλάκα</b>	<b>σελ.91</b>
	<b>Βιβλιογραφία</b>	<b>σελ.95</b>





# 1.Εισαγωγή

Η μελέτη των μουσικών οργάνων γενικά, και ειδικότερα των εγχόρδων είναι ηλικίας περίπου ενάμιση αιώνα. Σημαντικές ανακαλύψεις στα τέλη του 19<sup>ου</sup> και στις αρχές του 20<sup>ου</sup> αι. άνοιξαν τον δρόμο για την κατανόηση μιας κατασκευής που είχε ήδη φτάσει σε εντυπωσιακά επίπεδα ποιότητας μόνο μέσω της εμπειρίας που αποκτήθηκε από αιώνες κατασκευών και παιξίματος. Η μελέτη αυτή, τα τελευταία χρόνια, φαίνεται να φτάνει σε σημείο να μπορεί να προσφέρει στην βελτίωση της κατασκευής των οργάνων και την αντιμετώπιση σύγχρονων προβλημάτων όπως είναι η έλλειψη ξυλείας. Για την περίπτωση των εγχόρδων, το συντριπτικά μεγαλύτερο κομμάτι της πίτας στην έρευνα κατέχει το βιολί, καθώς είναι το όργανο με το μεγαλύτερο ρεπερτόριο και το πιο ευρέως παιγμένο.

Όσον αφορά στο κοντραμπάσο, η μελέτη είναι σε πιο πρώιμο στάδιο. Αφορά κυρίως αποτελέσματα πειραμάτων που είχαν ως κύριο στόχο την καταγραφή της απόκρισης υπαρκτών οργάνων. Τα συμπεράσματα, όμως, που έχουν προκύψει από αυτές τις μελέτες είναι πολύ χρήσιμα. Το βασικότερο αυτών είναι ότι το κοντραμπάσο διαφέρει σημαντικά από τα άλλα όργανα της οικογένειας. Η απόκρισή του δείχνει ότι δεν είναι απλά ένα μεγαλύτερο βιολί ή ένα μεγαλύτερο τσέλο. Αυτό το συμπέρασμα ήταν σε γενικές γραμμές αναμενόμενο διότι, για πρακτικούς λόγους, το μπάσο ποτέ δεν είχε τα ίδια γεωμετρικά χαρακτηριστικά με το βιολί σε κλίμακα. Είναι, βέβαια, σαφώς ομοιότερο με το τσέλο παρά με το βιολί. Η ομοιότητα αυτή, όμως, δεν είναι αρκετή για να αρκεστούμε στις μελέτες για το τσέλο (που είναι ούτως ή άλλως ελάχιστες) για να βγάλουμε ικανοποιητικά συμπεράσματα για τη συμπεριφορά του μπάσου.

Με βάση, λοιπόν, αυτά τα λίγα συμπεράσματα για το μπάσο, αλλά κυρίως με βάση την τεράστια εμπειρία και συσσωρευμένη γνώση που έχει αποκτηθεί από τον ενάμιση αιώνα μελέτης των εγχόρδων γενικά, και του βιολιού ειδικότερα, πραγματοποιήθηκε η παρούσα εργασία. Σκοπός της εργασίας αυτής είναι να ανοίξει τον δρόμο για την δημιουργία διαφορετικών μοντέλων στο κοντραμπάσο, τα οποία θα είναι σε θέση να προσομοιώνουν κατασκευαστικές πρωτοτυπίες και νέες επιλογές υλικών και να βγάζουν ασφαλή συμπεράσματα για την βελτίωση της ηχητικής απόδοσης του οργάνου. Στα κεφάλαια που ακολουθούν παρουσιάζεται η διαδικασία ανάπτυξης του μοντέλου, οι αποφάσεις που πάρθηκαν για την ικανοποιητική του ακρίβεια και την κατά το δυνατόν απλότητά του και τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την ανάλυσή του.



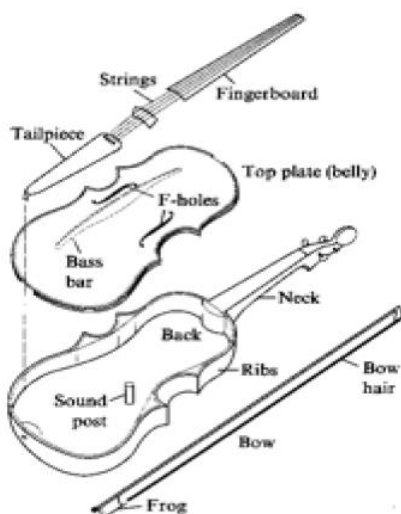


## 2.Βασικές αρχές απόκρισης εγχόρδων και σύγχρονη μελέτη

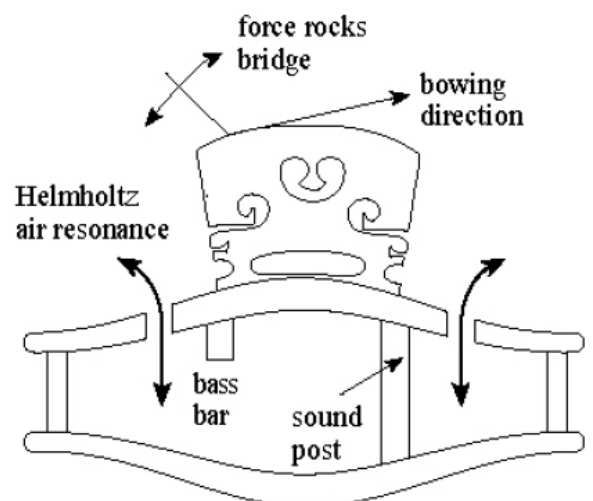
Η μελέτη της συμπεριφοράς των εγχόρδων έχει ξεκινήσει από τον 19ο αιώνα. Μέχρι σήμερα πληθώρα δημοσιεύσεων και συγγραμμάτων έχει βοηθήσει στην εμπάθυνση των γνώσεών μας γι αυτή. Έχουν παρουσιαστεί δεκάδες μοντέλα τόσο μαθηματικά όσο και αριθμητικά τα οποία πλέον έχουν άμεσο αντίκρισμα στους κατασκευαστές και τους μουσικούς.

### 2.1. Επισκόπηση της κατασκευής των εγχόρδων

Τα βασικά μέρη των εγχόρδων φαίνονται στο σχήμα 1.1. Για να παράγει ήχο ο μουσικός, σέρνει το δοξάρι πάνω στις χορδές έτσι ώστε να αυτές να ταλαντωθούν υπό την επίδραση της τριβής. Μέρος της ενέργειας της ταλαντευόμενης χορδής μεταφέρεται στο σώμα του οργάνου μέσω της γέφυρας (bridge) η οποία είναι, επί της ουσίας, ένας



Σχήμα2.1: Βασικά μέρη των εγχόρδων  
(Fletcher, et al., 1998)



Σχήμα2.2: Τομή εγχόρδου (Centrih, 2011)

μηχανικός μετασχηματιστής. Το σώμα του οργάνου αποτελείται από το καπάκι (top plate), την πλάτη (back) και τα πλευρά (ribs).

Η ψυχή (sound post) συζευγνύει το καπάκι με την πλάτη, δημιουργώντας τελικά το σύστημα καπάκι – πλάτη – κοιλότητα αέρα. Στο σχήμα 2.2 φαίνεται το σώμα σε τομή. Η μπάρα των μπάσων (bass bar) αυξάνει τη στιβαρότητα του καπακιού και συμβάλει στατικά και δυναμικά. Στατικά, διανέμει την κάθετη δύναμη που ασκεί η γέφυρα πάνω στο καπάκι σε μεγαλύτερη επιφάνεια. Δυναμικά, αυξάνει την τιμή των ιδιοσυχνοτήτων του συστήματος.

## 2.2. Διέγερση χορδής με δοξάρι

### 2.2.1. Κινηματική της χορδής

Για την κατανόηση των νόμων που διέπουν τα έγχορδα απαιτείται, αρχικά, μία επισκόπηση της συμπεριφοράς των χορδών που διεγείρονται μέσω της τριβής του δοξαριού.

Καθώς το δοξάρι σύρεται κάθετα στη χορδή του εκάστοτε εγχόρδου, η χορδή φαίνεται να ταλαντώνεται μεταξύ δύο καμπύλων ορίων, όπως θα έκανε αν ταλαντωνόταν στην ιδιοσυχνότητά της. Στην πραγματικότητα όμως, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.3, η χορδή χωρίζεται κάθε στιγμή σε 2 ευθείες γραμμές οι οποίες στο σημείο συνάντησης τους σχηματίζουν γωνία.

Η γωνία αυτή μετακινείται πάνω στο, ορατό στον παρατηρητή, καμπύλο όριο με ταχύτητα  $c$ . Όπως φαίνεται στην αριστερή στήλη στιγμιότυπων του σχήματος 2.3 έχει ολοκληρώσει έναν κύκλο σε μία περίοδο ταλάντωσης.

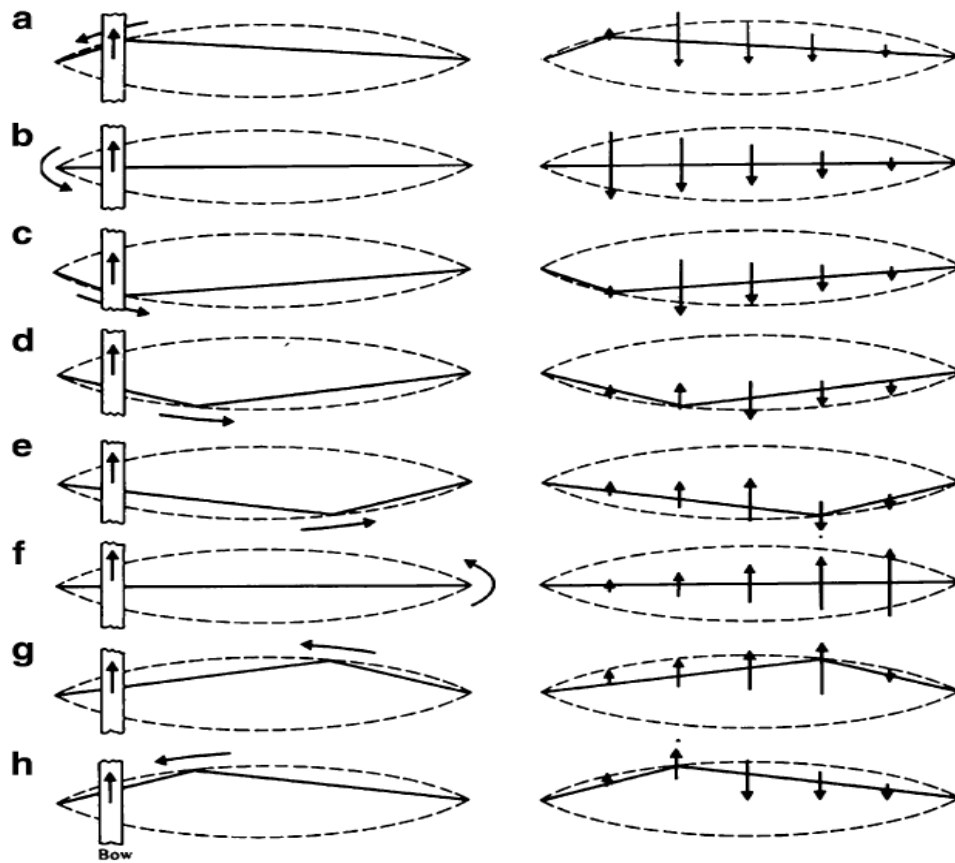
Σε αυτή τη στήλη φαίνεται το δοξάρι με τη φορά κίνησής του. Κατά τη διάρκεια του μεγαλύτερου μέρους της περιόδου, η χορδή, στο σημείο επαφής της με το δοξάρι, μετατοπίζεται με την ταχύτητα αυτού (στιγμιότυπα  $c$  έως  $i$ ). Στη συνέχεια χάνει την επαφή με αυτό και, ολισθαίνοντας στην τρίχα του δοξαριού, επαναφέρεται στην αρχική ακραία θέση της (στιγμιότυπα  $a$  έως  $c$ ). Άρα δημιουργείται ένα stick – slip μοτίβο. Στη δεξιά στήλη του σχήματος 2.3 φαίνεται η κατά μήκος κατανομή της ταχύτητας ταλάντωσης της χορδής για κάθε στιγμιότυπο

Για την ταχύτητα  $c$  ισχύει:

$$c = \sqrt{T / \mu} \quad [2.1]$$

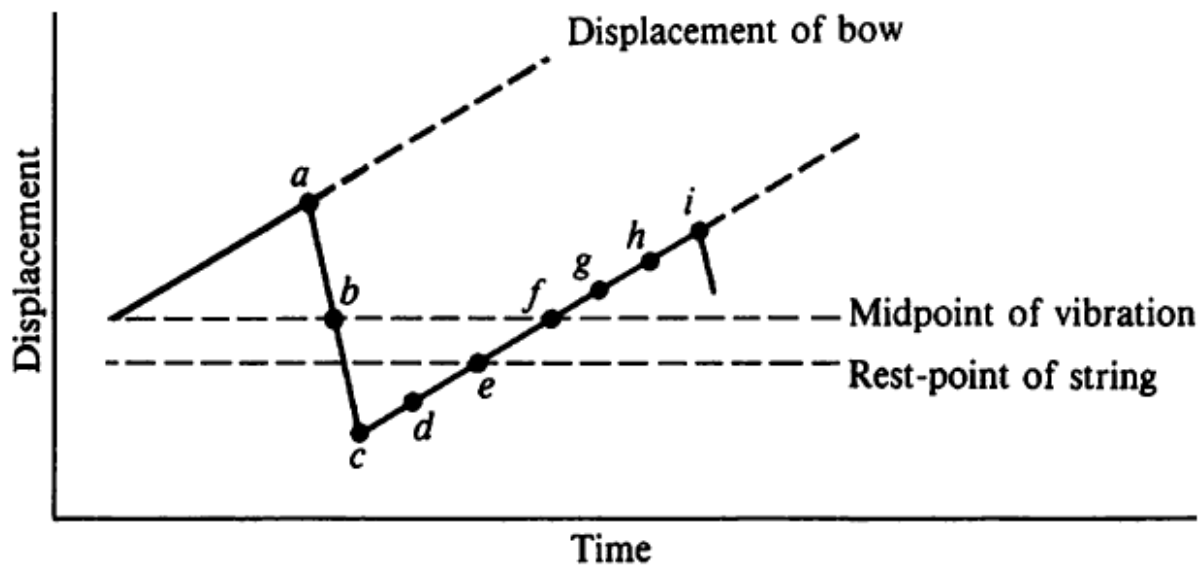
Όπου T: η τάση της χορδής  
 και μ: η γραμμική πυκνότητα της χορδής

Η παραπάνω προκύπτει επειδή η φαινόμενη ταχύτητα κίνησης της γωνίας πάνω στη χορδή ταυτίζεται με την ταχύτητα του κύματος πάνω σε αυτήν (βλ. [Παράρτημα Ι](#)).



**Σχήμα 2.3: Στιγμιότυπα μίας περιόδου ταλάντωσης της χορδής (Rossing, 2010)**

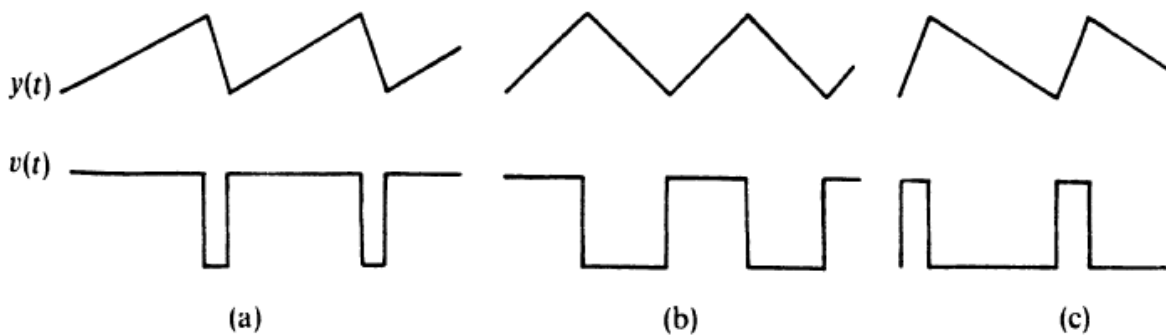
Στο σχήμα 2.4 φαίνεται η μετατόπιση της χορδής στο σημείο επαφής με το δοξάρι όπως περιγράφηκε παραπάνω. Οι λατινικοί χαρακτήρες που αφορούν το κάθε στιγμιότυπο αντιστοιχούν στα στιγμιότυπα του σχήματος 2.3 στο οποίο φαίνεται όλη η χορδή. Η μετατόπιση στις στιγμές a και i είναι ταυτόσημη.



Σχήμα 2.4: Μετατόπιση της χορδής στο σημείο επαφής με το δοξάρι (Rossing, 2010)

Αυτός ο τρόπος ταλάντωσης της χορδής ονομάζεται κίνηση Helmholtz προς τιμήν του ερευνητή που πρώτος το 1877 τον ανακάλυψε, ανοίγοντας επί της ουσίας τον δρόμο για την μελέτη των εγχόρδων.

Στο σχήμα 2.5 φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις της μετατόπισης και της ταχύτητας συναρτήσει του χρόνου σε 3 διαφορετικά σημεία της χορδής μήκους  $L$ .



Σχήμα 2.5: Γραφικές παραστάσεις μετατόπισης  $\psi(t)$  και ταχύτητας  $v(t)$  της χορδής μήκους  $L$  στο σημείο επαφής με το δοξάρι για  $a: x= L/4$ ,  $b: x=L/2$ ,  $c: x=3L/4$  (το  $x$  μετράται ως απόσταση από το σημείο επαφής δοξαριού – χορδής) (Rossing, 2010)

Από αυτό το σχήμα συμπεραίνονται δύο πράγματα. Πρώτον ότι σε όλα τα σημεία της χορδής η γραφική παράσταση της μετατόπισης προς το χρόνο έχει παρόμοια μορφή. Δεύτερον ότι η ταχύτητα κάθε σημείου της χορδής παίρνει μόνο, διακριτές και αντίρροπες δύο τιμές, όχι ίδιες κατ' απόλυτη τιμή.

Αξίζει να σημειωθεί ότι στα στιγμιότυπα b και f όπου η χορδή είναι στο σημείο ισορροπίας της ταλάντωσης, είναι τα στιγμιότυπα που η κύρτωση της χορδής αντανakλάται στη γέφυρα και το άνω σταθερό σημείο (δάχτυλο παίχτη ή nut οργάνου) αντίστοιχα. Σε αυτά τα σημεία υπάρχει η μέγιστη απώλεια ενέργειας από την ταλάντωση της χορδής, κάτι που θα αναλυθεί στην επόμενη παράγραφο του κεφαλαίου.

Σημειώνεται επίσης ότι τα παραπάνω ισχύουν για ιδανική χορδή που δεν δέχεται καμπτικές δυνάμεις. Οι πραγματικές χορδές δέχονται κάμψη και άρα δε δημιουργείται γωνία μεταξύ των δύο ευθύγραμμων τμημάτων, αλλά καμπύλη με πολύ μικρή ακτίνα.

### 2.2.2. Δυναμική της χορδής

Είναι απαραίτητο, εκτός από την κινηματική της χορδής, να εξεταστεί και η δυναμική της, δηλαδή οι δυνάμεις που ασκούνται και η ενέργεια που δαπανάται και μεταφέρεται από τη χορδή στο σώμα του οργάνου.

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, η διεγείρουσα δύναμη της ταλάντωσης είναι η τριβή μεταξύ δοξαριού και χορδής. Είναι σαφές ότι η τριβή αυτή πρέπει να μεταφέρει ενέργεια αρκετή έτσι ώστε να ταλαντώνει την χορδή ξεπερνώντας τις απώλειες λόγω των εσωτερικών τριβών, των τριβών με τον αέρα και, κυρίως, τις απώλειες στα μη άκαμπτα στηρίγματα. Η ενέργεια που μεταφέρεται ανά περίοδο ταλάντωσης εκφράζεται ως:

$$E = \int_t^{t+T} (f(t) \times x(t)) dt \quad [2.2]$$

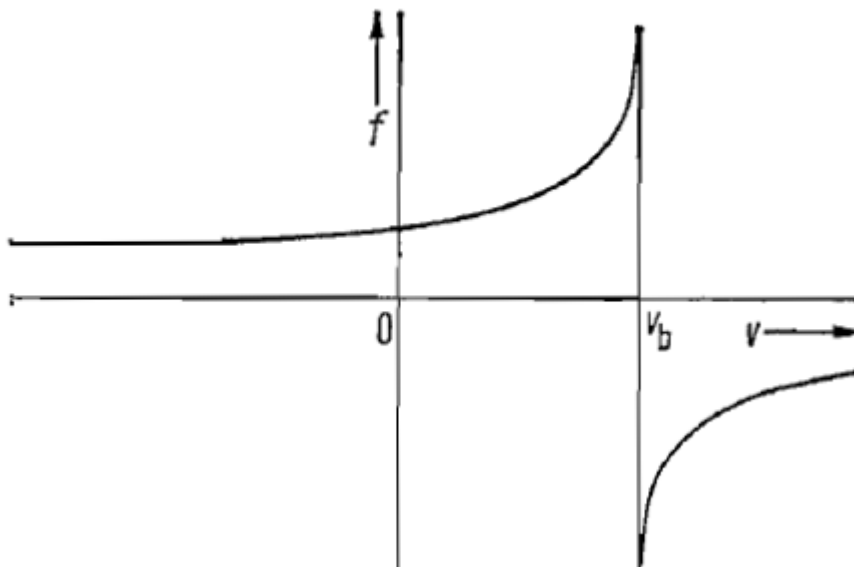
Όπου  $f(t)$ : η δύναμη τριβής που ασκεί το δοξάρι στη χορδή συναρτήσει του χρόνου

και  $x(t)$ : η μετατόπιση της χορδής συναρτήσει του χρόνου

Αφού η χορδή επιστρέφει στην αρχική της θέση μετά από μία περίοδο ταλάντωσης, η ενέργεια που μεταφέρεται σε αυτήν θα ήταν μηδενική αν η δύναμη της τριβής δεν

άλλαζε συναρτήσει της ταχύτητας της χορδής. Το stick – slip μοτίβο, όμως, που αναλύθηκε στην προηγούμενη παράγραφο έχει ως αποτέλεσμα η φύση της διεγείρουσας δύναμης να εναλλάσσεται συνεχώς μεταξύ στατικής τριβής και τριβής ολίσθησης.

Έτσι τελικά η δύναμη τριβής που ασκείται, συναρτήσει της ταχύτητας της χορδής στο σημείο επαφής, φαίνεται στο σχήμα 2.6. Όταν η ταχύτητα της χορδής  $v$  ταυτίζεται με την ταχύτητα του δοξαριού  $v_b$  βρισκόμαστε στο stick κομμάτι της κίνησης, η τριβή είναι στατική και μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή μεταξύ των δύο ακραίων τιμών. Περνώντας στο slip κομμάτι της κίνησης, η δύναμη τριβής μειώνεται μέχρι να φτάσει στο επίπεδο της τριβής ολίσθησης.



**Σχήμα 2.6: Δύναμη τριβής συναρτήσει της ταχύτητας της χορδής στο σημείο επαφής με το δοξάρι. Άξονας x: Σχετική ταχύτητα. Άξονας y: Δύναμη τριβής.  $v_b$ : σταθερή ταχύτητα δοξαριού (Fletcher, et al., 1998)**

Το παραπάνω διάγραμμα υποθέτει σταθερή ταχύτητα δοξαριού  $v_b$ , σταθερή κάθετη δύναμη δοξαριού στη χορδή  $F_b$  και ήδη υπάρχουσα κίνηση Helmholtz. Εδώ, λοιπόν, εγείρεται το ερώτημα πως εξασφαλίζονται αυτές τις συνθήκες.

Είναι γνωστό ότι για να υπάρξουν συνθήκες κίνησης Helmholtz στη χορδή υπάρχουν προϋποθέσεις στην κάθετη δύναμη που ασκεί ο παίκτης στη χορδή μέσω του δοξαριού

και στο σημείο της χορδής που τοποθετεί το δοξάρι. Η μέγιστη μετατόπιση της χορδής  $y_m$  και η μέγιστη εγκάρσια δύναμη  $F_m$  στη γέφυρα είναι μεγέθη ανάλογα προς τον λόγο  $v_b/x_b$  όπου το  $x_b$  είναι η απόσταση του σημείου επαφής δοξαριού – χορδής από το σημείο επαφής χορδής – γέφυρας. Συγκεκριμένα ισχύουν οι σχέσεις (Cremer, 1984):

$$y_m = \frac{1}{8f} \frac{v_b}{x_b} \quad [2.3]$$

$$F_m = \mu c \frac{v_b}{x_b} \quad [2.4]$$

Όπου  $f$ : συχνότητα ταλάντωσης

$\mu$ : η γραμμική πυκνότητα της χορδής

$c$ : η ταχύτητα διάδοσης του κύματος στη χορδή

Η ποσότητα  $\mu \times c$  αποτελεί την κυματική αντίσταση της χορδής ( $Z$ )

Όσον αφορά την ελάχιστη απαιτούμενη δύναμη για την έναρξη του stick – slip μοτίβου, θεωρείτο ότι έχει τιμή ανάλογη του λόγου  $v_b/x_b$  (Cremer, et al., 1968). Στη συνέχεια όμως αμφισβητείται αυτό το συμπέρασμα και προτείνονται πιο πολύπλοκες σχέσεις όπως η αναλογία με το λόγο  $v_b/x_b^2$  (Cremer, 1984)

Μετά από πειραματικές μετρήσεις που έγιναν (Askenfelt, 1986) προέκυψε το διάγραμμα του σχήματος 2.7. Σε αυτό βλέπουμε την ελάχιστη απαιτούμενη και τη μέγιστη δυνατή κάθετη δύναμη έτσι ώστε να υπάρχει κίνηση Helmholtz.

Νεότερες μελέτες (Woodhouse, et al., 2004) έχουν δείξει ότι είναι δυνατή η εύρεση της τιμής της δύναμης τριβής και της ταχύτητας της χορδής σε κάθε χρονική στιγμή μέσω της αντιπαράβολής της γραφικής παράστασης του σχήματος 2.6 και της γραφικής παράστασης της γραμμικής σχέσης

$$v(t) = \frac{f}{2Z} + v_h \quad [2.5]$$

όπου  $Z$ : είναι η εμπέδηση της χορδής

και  $v_h$ : είναι η συνιστώσα της ταχύτητας η οποία οφείλεται σε

ανακλάσεις του κύματος στις στηρίξεις της χορδής

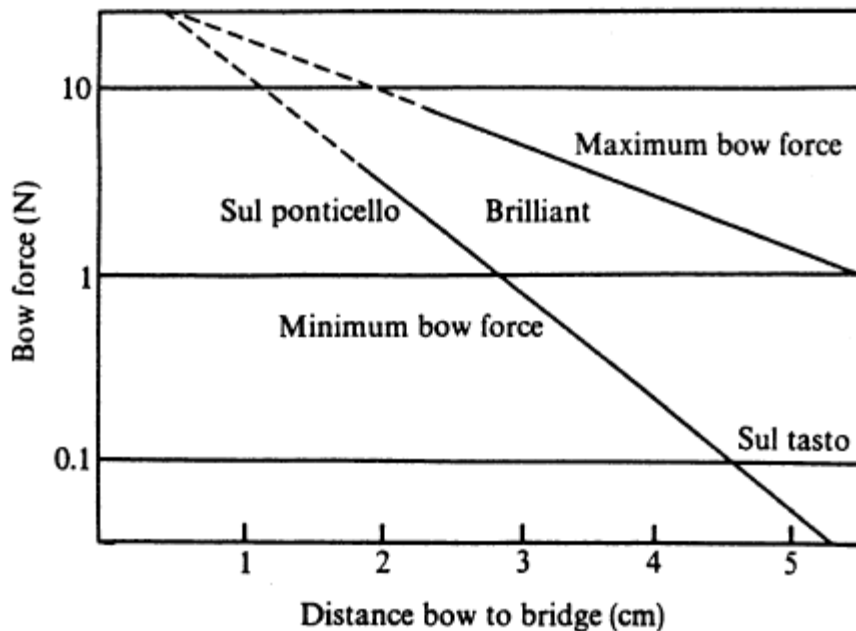
Ισχύει:

$$Z = \sqrt{T\mu} \quad [2.6]$$

Όπου  $T$ : η τάση της χορδής  
 και  $\mu$ : η γραμμική πυκνότητα της χορδής

Άρα η εύρεση της δύναμης  $f$  κάθε στιγμή ανάγεται σε ένα πρόβλημα εύρεσης της συνιστώσας  $v_h$  σε κάθε στιγμή. Έχουν προταθεί διάφοροι τρόποι για αυτό, η ανάλυση των οποίων ξεπερνάει τον σκοπό αυτής της εργασίας.

Σημειώνεται εδώ ότι έχει θεωρηθεί ότι η επαφή της χορδής με το δοξάρι είναι σημειακή, συνεπώς αγνοείται την επίδραση του ορισμένου πλάτους του δοξαριού στην ταλάντωση της χορδής.



Σχήμα 2.7: Ελάχιστη απαιτούμενη και μέγιστη δυνατή κάθετη δύναμη από το δοξάρι στη χορδή συναρτήσει της απόστασης του σημείου επαφής από την γέφυρα (Askenfelt, 1986)

### 2.3. Απόκριση του σώματος

Οι ιδιοσυχνότητες ταλάντωσης του εγχόρδου καθορίζονται κυρίως από το συζευγμένο σύστημα καπακιού – πλάτης – κοιλότητας αέρα. Η μοντελοποίηση αυτού του συστήματος, που είναι και το αντικείμενο αυτής της εργασίας, είναι σε γενικές



γραμμές δύσκολη εν μέρει λόγω της ύπαρξης της ψυχής. Το μεγαλύτερο μέρος των γνώσεών μας πάνω στις ιδιοσυχνότητες του βασίζεται σε πειραματικές μελέτες.

Στο σχήμα 2.8 φαίνονται τα πειραματικά φάσματα τεσσάρων κοντραμπάσων. Όπως φαίνεται, οι αποκρίσεις διαφέρουν σημαντικά από όργανο σε όργανο. Και στα τέσσερα φάσματα φαίνονται δύο από τις ιδιοσυχνότητες που ποικίλουν μεταξύ 58 – 68 Hz (για την ιδιομορφή  $A_0$ ) και μεταξύ 82 – 110 Hz (για την ιδιομορφή  $T_1$ ). Η ισχύς αυτής της αντιστοίχιση των ιδιοσυχνοτήτων με την ονοματολογία είναι κάτι που θα απασχολήσει αυτήν την εργασία στην πορεία της. Φαίνεται ότι παρά το γεγονός ότι οι διάφορες κορυφές και κοιλάδες διαφέρουν αρκετά σε συχνότητα από όργανο σε όργανο, η μορφή του φάσματος είναι αρκετά παρόμοια. Αυτή η ομοιότητα είναι αυτό που τελικά καθορίζει το ηχόχρωμα του κοντραμπάσου.

Η ονοματολογία που χρησιμοποιείται για τις διαφορετικές ιδιομορφές των εγχόρδων ποικίλει στη βιβλιογραφία. Για τον σκοπό αυτής της εργασίας θα χρησιμοποιηθεί η ονοματολογία που χρησιμοποιείται από τον Erik Jackson και το Royal Institute of Technology (KTH) στη Στοκχόλμη. Σε αυτήν την ονοματολογία οι ιδιομορφές κατηγοριοποιούνται ανάλογα με το πιο μέρος του οργάνου συμμετέχει κυρίως στην ταλάντωση σε κάθε συχνότητα (Fletcher, et al., 1998):

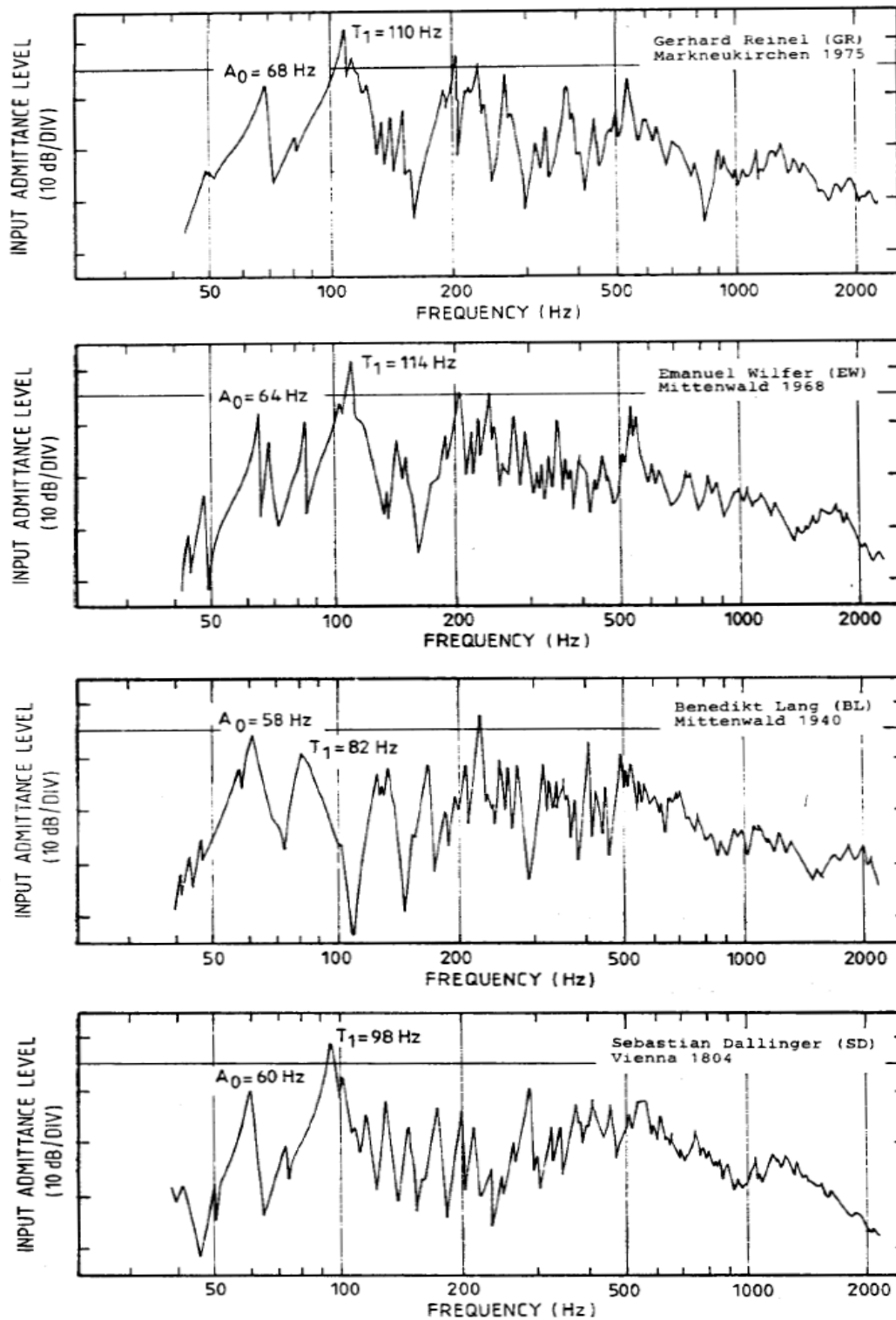
Ιδιομορφές αέρα (Air modes) -  $A_0, A_1, A_2, \dots$  :Κίνηση της κοιλότητας αέρα στο εσωτερικό του σώματος

Ιδιομορφές καπακιού (Top plate modes) -  $T_1, T_2, T_3, \dots$  :Κίνηση κυρίως του καπακιού

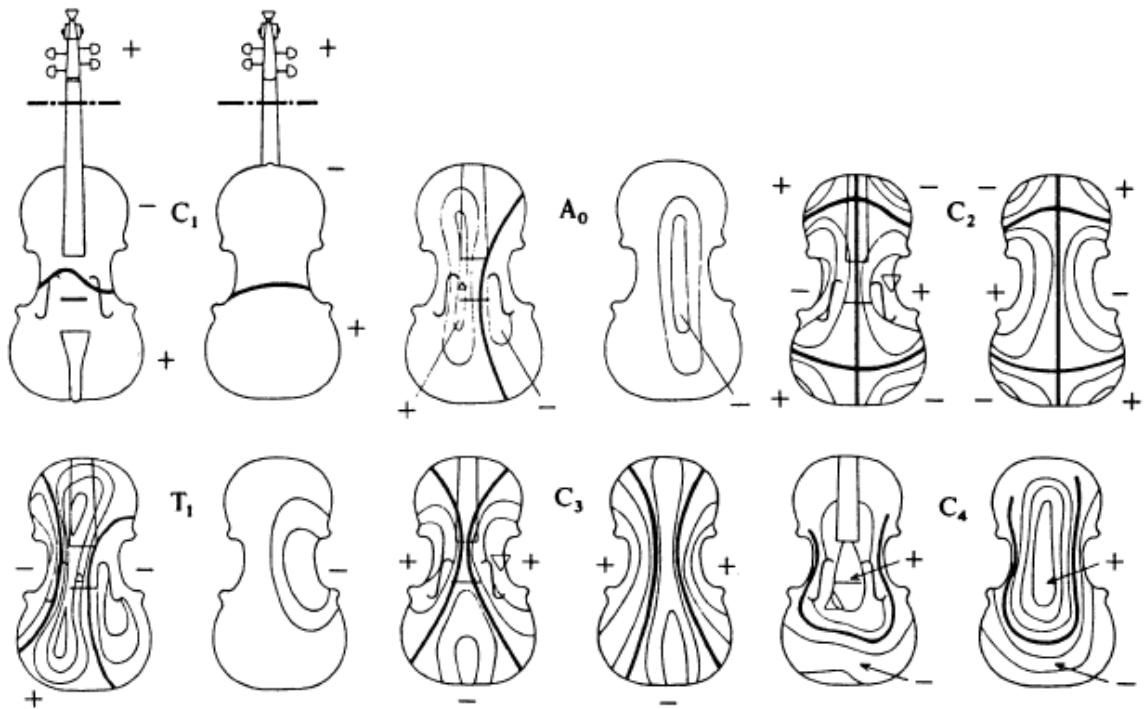
Ιδιομορφές σώματος (Body modes) -  $C_1, N, C_2, C_3, \dots$  :Κίνηση εξίσου του καπακιού και της πλάτης

Η πρώτη ιδιοσυχνότητα κάμψης  $C_1$  όπως και η δεύτερη  $N$  δεν έχουν αντίκρισμα στην ακουστική απόκριση του οργάνου. Η πιο χαμηλή ιδιοσυχνότητα που είναι ακουστικά σημαντική είναι η  $A_0$  (f-hole resonance).

Ελλείπει υπάρχουσας μελέτης πάνω στην απόκριση του κοντραμπάσου, βλέπουμε στο σχήμα 2.9, τη μορφή τις πρώτες ιδιομορφές ενός βιολιού.



Σχήμα 2.8: Φάσματα Κινητικότητας 4 διαφορετικών μπάσων. Από πάνω προς τα κάτω: Reinel (1973), Wilfer (1968), Lang (1940), Dalinger (1804) (Askenfelt, 1982)



Σχήμα 2.9: Μορφές 6 ιδιοσυχνοτήτων σε βιολί:  $C_1$  (185 Hz): Μονοδιάστατη κάμψη.  $A_0$  (275 Hz): Ταλάντωση αέρα στα f-holes του καπακιού.  $C_2$  (405 Hz): Δυσδιάστατη παραμόρφωση.  $T_1$  (460 Hz) Κίνηση κυρίως του καπακιού (μερικές φορές και της πλάτης).  $C_3$  (530 Hz) Κίνηση και του καπακιού και της πλάτης.  $C_4$  (700 Hz) Κίνηση και του καπακιού και της πλάτης. (Fletcher, et al., 1998)

## 2.4.Σύγχρονη μελέτη των εγχόρδων

Το κύριο σώμα της μελέτης της συμπεριφοράς των εγχόρδων κατά των 20<sup>ο</sup> αιώνα είχε ως άμεσο σκοπό την κατανόηση των διαφόρων φαινομένων που λαμβάνουν χώρα όταν ένας μουσικός δημιουργεί ή εκτελεί. Το μεγαλύτερο κομμάτι αυτής της έρευνας αφορούσε το βιολί (ένα μικρό κομμάτι το βιολοντσέλο), αλλά έχουν δοθεί απαντήσεις σε ερωτήματα που αφορούν όλη την οικογένεια των εγχόρδων. Τα πιο σημαντικά από αυτά αναλύθηκαν στις προηγούμενες παραγράφους ή αναλύονται στα παραρτήματα. Η σύγχρονη θεωρητική μελέτη κινείται κυρίως γύρω από την κατανόηση της συμβολής του ρετσινιού στην κίνηση μεταξύ χορδής και δοξαριού.

Ενώ λοιπόν συνεχίζονται οι πειραματικές έρευνες που έχουν ως άμεσο σκοπό την κατανόηση των φαινομένων, η γνώση που έχει συσσωρευτεί τον τελευταίο αιώνα επιτρέπει την άμεση εφαρμογή των πειραματικών ευρημάτων και των συμπερασμάτων τους στην βελτίωση της ποιότητας των οργάνων.

Βήμα για αυτή την εφαρμογή είναι η αναδυόμενη τάση για δημιουργία μοντέλων ικανοποιητικής ακρίβειας, τα οποία θα μπορούν να προβλέψουν το αποτέλεσμα κατασκευαστικών αλλαγών ή μικρών επεμβάσεων σε ήδη υπάρχοντα όργανα στην ποιότητα τους. Τα μοντέλα αυτά αφορούν μέχρι στιγμής:

- 1) Τη μοντελοποίηση της χορδής που διεγείρεται με δοξάρι
- 2) Τη μοντελοποίηση της απόκρισης του σώματος
- 3) Τη μοντελοποίηση της σύζευξης των αποκρίσεων χορδή – σώμα και τέλος
- 4) Τη μοντελοποίηση και την αντιμετώπιση του φαινομένου του λύκου

**Σημείωση:** Ο όρος «ποιότητα του οργάνου» δεν είναι σαφώς ορισμένος. Για έναν παίκτη η «ποιότητα του οργάνου» του είναι άμεσα συνυφασμένη με την ευκολία στο παίξιμο, με τη δυνατότητα του οργάνου να αποδίδει διαφορετικά «χρώματα» και με το πόσο πλούσιος σε αρμονικούς, αλλά και ομοιόμορφος σε ένταση, είναι ο ήχος του. Για τον ακροατή η «ποιότητα» αφορά κυρίως τον πλούτο του ήχου και την ομοιομορφία της έντασης, αλλά ακόμα και αυτές οι παράμετροι διαφέρουν από τις αντίστοιχες του παίχτη. Ο ακροατής είναι σε μία απόσταση από το όργανο που απαιτεί ο ήχος να έχει δυνατότητα προβολής (projection) τέτοια ώστε να κρατάει αυτά τα χαρακτηριστικά σε μεγάλη απόσταση και σε ένα μεγάλο εύρος διευθύνσεων. Ο κατασκευαστής έχει τον δύσκολο ρόλο να συνταιριάξει όλες αυτές τις απαιτήσεις με βέλτιστο τρόπο. Σε αυτήν την πολυπαραγοντικότητα έρχεται να προστεθεί η δυσκολία του γεγονότος ότι η αξιολόγηση του οργάνου από έναν ακροατή επηρεάζεται άμεσα από την αρέσκειά του στον ερμηνευτή και στο ίδιο το έργο που ερμηνεύει. Στην ουσία, ο σαφής ορισμός της «ποιότητας του ήχου του οργάνου» είναι αντικείμενο με το οποίο οφείλει να ασχοληθεί επισταμένα η επιστήμη της ψυχοακουστικής.

Αν και ολοκληρωμένα συμπεράσματα από τα υπάρχοντα φάσματα για κοντραμπάσο δεν μπορούν να βγουν όσον αφορά την εξάρτηση της «ποιότητας του οργάνου» από την μορφή τους, έχουμε αρκετές ενδείξεις ώστε να ισχυριστούμε ότι ένα καλό μπάσο έχει:

- 1) Υψηλές αποκρίσεις στις ιδιοσυχνότητες A0 και T1, οι οποίες προτιμότερο είναι να εμφανίζονται όσο το δυνατόν χαμηλότερα στο φάσμα
- 2) Λίγο χαμηλότερες αποκρίσεις πάνω από την ιδιοσυχνότητα C2 και για το μεγαλύτερο κομμάτι του μεσαίου ρεζίστρου του μπάσου
- 3) Ελαφρώς ενισχυμένες υψηλές ιδιοσυχνότητες από τα 500 Hz και πάνω, έτσι ώστε να είναι πιο πλούσιος ο ήχος στο σύνολο του ρεζίστρου αλλά να διευκολύνει και το σόλο παίξιμο

## 2.5.Εφαρμογή της Μεθόδου Πεπερασμένων Στοιχείων στην μοντελοποίηση μουσικών οργάνων

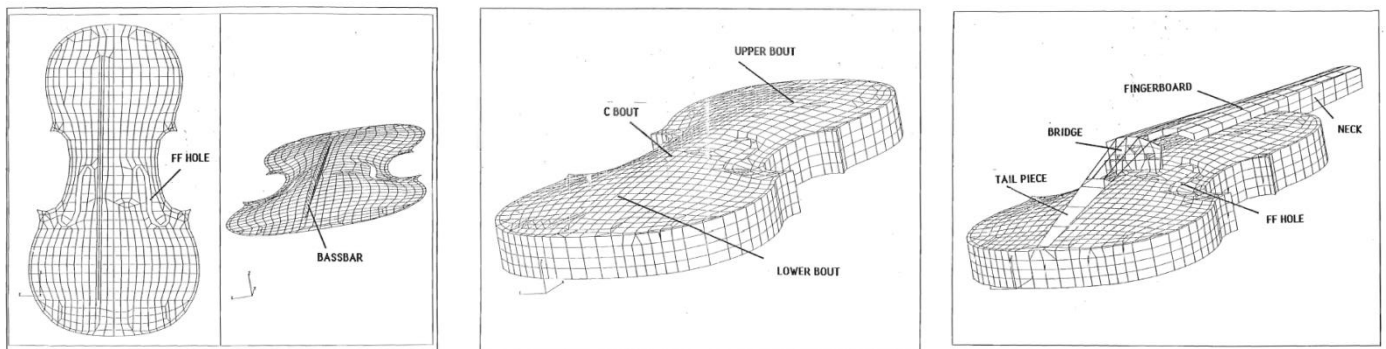
Η πολυπλοκότητα των φαινομένων που λαμβάνουν χώρα κατά την διέγερση ενός εγχόρδου, αλλά και η πολυπλοκότητα της γεωμετρίας τους, δίνουν εύφορο έδαφος για την εφαρμογή της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων (Finite Element Method, εφεξής FEM) στον τομέα της τεχνολογίας των μουσικών οργάνων. Η μέθοδος αυτή προσφέρει σημαντικά πλεονεκτήματα τόσο έναντι των συνεχών πειραματικών διαδικασιών και έναντι της αριθμητικής μοντελοποίησης μαθηματικών τύπων.

Μέχρι στιγμής η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων έχει εφαρμοστεί σε πληθώρα μουσικών οργάνων (π.χ. κλασική κιθάρα, ηχείο πιάνου, άρπα, χάλκινα και ξύλινα πνευστά). Σε έγχορδα έχει εφαρμοστεί κυρίως στο βιολί. Υπάρχει επίσης και ένα ολοκληρωμένο μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων για βιόλα ντα γκάμπα.

Παρακάτω βλέπουμε μερικά από αυτά τα μοντέλα:

1) Μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων βιολιού με το λογισμικό MSC/NASTRAN (Knott, 1987):

Σε αυτό το μοντέλο, το βιολί σχεδιάστηκε και αναλύθηκε σε τρεις διαφορετικές φάσεις. Πρώτα μόνο το καπάκι και η πλάτη, στη συνέχεια όλο το ηχείο του οργάνου και τέλος όλο το όργανο μαζί με τις χορδές, τη γέφυρα και το μπράτσο. Τέλος τα αποτελέσματα συγκρίθηκαν με πειραματικά αποτελέσματα άλλων δημοσιεύσεων.

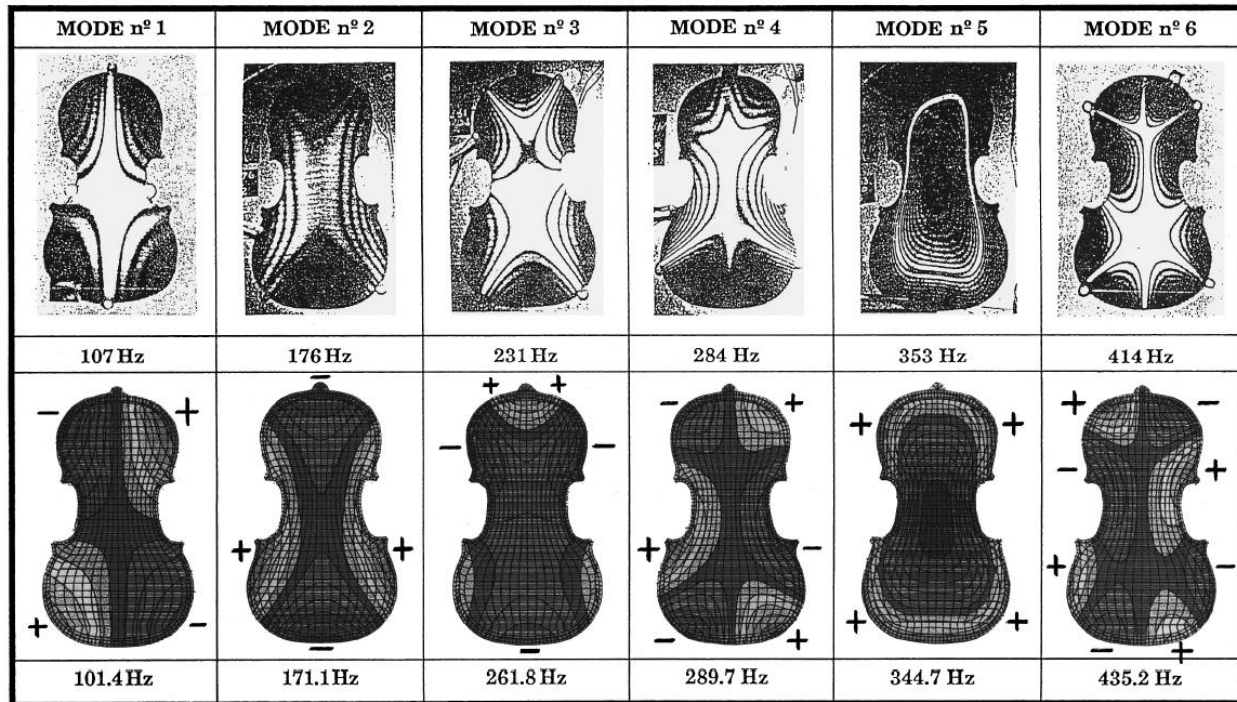


**Σχήμα 2.10: Οι τρεις φάσεις της ανάλυσης του βιολιού με FEM (Knott, 1987)**

Το συγκεκριμένο μοντέλο έχει ως πλεονέκτημα την εξαιρετική ακρίβεια με την οποία επιλέχθηκαν τα διάφορα πάχη σε κάθε σημείο του οργάνου, και οι ιδιότητες των ξύλων.

2) Μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων βιολιού με το λογισμικό ABAQUS (Bretos, et al., 1998):

Σε αυτό το μοντέλο το βιολί σχεδιάστηκε και μελετήθηκε σε δύο φάσεις, οι οποίες συμπίπτουν με τις δύο πρώτες φάσεις της μελέτης του προηγούμενου μοντέλου που αναφέραμε.



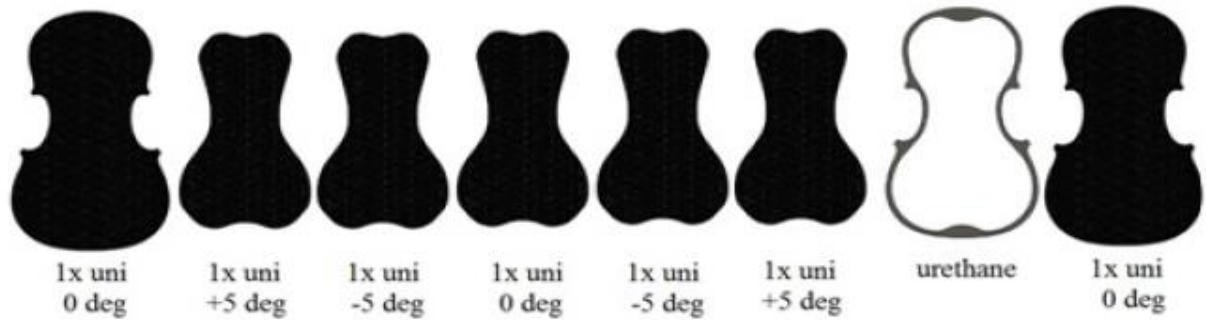
**Σχήμα 2.11: Σύγκριση αποτελεσμάτων προσομοίωσης της πλάτης του βιολιού με πεπερασμένα στοιχεία, με πειραματικά αποτελέσματα παλαιότερων μελετών (Bretos, και συν., 1998)**

Το βασικό πλεονέκτημα του μοντέλου αυτού είναι ότι είναι μεταγενέστερο και τα περισσότερα πειραματικά αποτελέσματα του έδωσαν τη δυνατότητα να είναι πιο ακριβές.

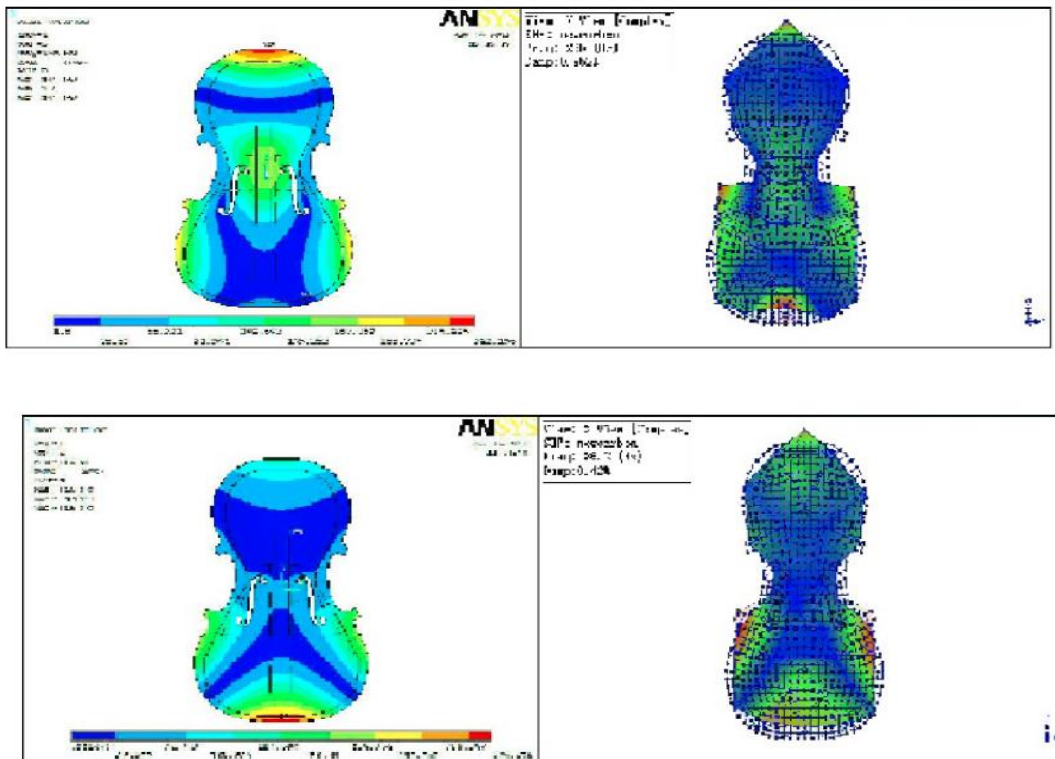
3) Μοντελοποίηση πεπερασμένων στοιχείων του καπακιού του βιολιού με το λογισμικό ANSYS (Lu, 2013):

Σε αυτό το μοντέλο η μελέτη επικεντρώθηκε αποκλειστικά στο καπάκι του οργάνου. Παρ' όλα αυτά είναι, ίσως, το πιο ενδιαφέρον μοντέλο από αυτά που συζητήσαμε διότι είναι το μοναδικό που χρησιμοποιείται άμεσα για την μελέτη της δυνατότητας της χρήσης σύνθετων υλικών στην κατασκευή εγχόρδων.

Δοκιμάστηκαν πειραματικά και αριθμητικά δύο πρωτότυπα μοντέλα καπακιών εκ των οποίων το δεύτερο (σχ. 2.12) θεωρείται ότι έχει ικανοποιητική απόκριση.



Σχήμα 2.12: Υλικά κατασκευής πρωτότυπου καπακιού βιολιού. Αποτελείται από επτά στρώσεις μονοκατευθυντήριου ανθρακονήματος και ένα δακτυλίδι πολυουρεθάνης. (Lu, 2013)



Σχήμα 2.13: Ενδεικτικά δύο ιδιοσυχνότητες του πρωτότυπου καπακιού, αριστερά από μοντελοποίηση με FEM και δεξιά από πειραματικές μετρήσεις (Lu, 2013)

## ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΣΗ ΜΠΑΣΟΥ

Αυτή η μελέτη μπορεί να αποδειχτεί εξαιρετικά χρήσιμη όσο σπανίζουν όλο και περισσότερο τα ξύλα που χρησιμοποιούνται για την κατασκευή οργάνων λόγω της καταστροφής όλο και περισσότερων δασών που μας τα προσφέρουν. Ήδη υπάρχουν πολλοί κατασκευαστές που προσπαθούν να στραφούν σε όσο το δυνατόν πιο κοινά δέντρα, αλλά κατά κοινή ομολογία η ποιότητα των ξύλων πέφτει λόγω της μόλυνσης και η τιμή τους ανεβαίνει λόγω του κόστους εύρεσης.



## 3.Ανάπτυξη γεωμετρίας 3D μοντέλου

### 3.1.Αρχικές αποφάσεις για τον τρόπο ανάπτυξης του μοντέλου

Από τις μέχρι τώρα μελέτες είναι εύκολο να εξαχθεί το συμπέρασμα ότι ο βέλτιστος τρόπος να δημιουργηθεί ένα ολοκληρωμένο μοντέλο που να ανταποκρίνεται στον σκοπό της εργασίας και να δίνει ευρείες δυνατότητες συνέχισης της μελέτης, είναι η FEM. Τα πλεονεκτήματα που προσφέρει αυτή η μέθοδος είναι, εν πολλοίς, γνωστά. Στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι κυρίως τα εξής:

- Μοντελοποίηση πολύπλοκων συστημάτων, και της μεταξύ τους σύζευξης, που η αναλυτική μαθηματική τους μοντελοποίηση είναι ακόμα και σήμερα αντικείμενο έρευνας
- Μεγάλη ευκολία στην μετέπειτα βελτίωση του μοντέλου
- Δυνατότητα μελέτης πρωτότυπων αλλαγών στα υλικά και στη γεωμετρία

Για την ακριβή απόδοση της γεωμετρίας υπήρχαν, επί της ουσίας, δύο επιλογές. Η πρώτη ήταν ο σχεδιασμός σε CAD από την αρχή με διαστάσεις υποδεικνυόμενες από κατασκευαστές. Το μειονέκτημα αυτής της επιλογής, πέραν της προφανούς δυσκολίας να εξασφαλιστεί η καλή συνεργασία με κάποιον κατασκευαστή, είναι η τεράστια πολυπλοκότητα της γεωμετρίας του οργάνου, κυρίως η μεταβλητότητα στις καμπυλότητες του καπακιού και της πλάτης και το σχήμα της γέφυρας.

Η δεύτερη είναι να εφαρμόσουμε την τεχνική του 3D Scanning. Αυτή έχει το πλεονέκτημα ότι μπορούμε να έχουμε μία σίγουρη και ικανοποιητική απόδοση της εξωτερικής γεωμετρίας, συμπεριλαμβανομένων και των μεταβολών των καμπυλοτήτων. Με αυτήν την πληροφορία ψηφιοποιημένη θα είναι ευκολότερο να σχεδιάσουμε το εσωτερικό του ηχείου. Έτσι επιλέχτηκε η δεύτερη επιλογή.

### 3.2.Εξοπλισμός που χρησιμοποιήθηκε στο 3D Scan

Για τη μοντελοποίηση χρησιμοποιήθηκε το κοντραμπάσο της φωτογραφίας 3.1. Το μπάσο είναι το μοντέλο 1950<sup>A</sup>, μάρκας Stentor Music Co. Ltd.

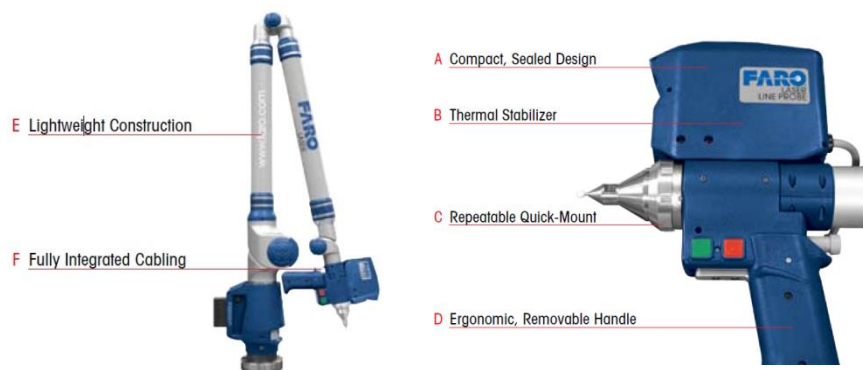


**Σχήμα 3.1: Κόντραμπάσο 1950<sup>A</sup>, μάρκας Stentor Music Co. Ltd.**

Η σάρωση έγινε με τη Μηχανή Μέτρησης Συντεταγμένων τύπου Αρθρωτού Βραχίονα (ΜΜΣ-ΑΒ) FARO PLATINUM ARM Model P083D του Εργαστηρίου Ταχείας Κατασκευής Πρωτοτύπων και Εργαλείων – Αντίστροφου Σχεδιασμού. Το scanner του εργαστηρίου το μοντέλο ScanArm της μάρκας FARO. Πρόκειται για έναν χειροκίνητο φορητό μετρητικό βραχίονα τελευταίας τεχνολογίας κατασκευασμένο από την εταιρία FARO Technologies Inc (έτος κατασκευής 2007) που διαθέτει 7 βαθμούς ελευθερίας και διάμετρο εργόσφαιρας 2,4 μέτρα.

Με βάση τις τεχνικές προδιαγραφές επίδοσης του κατασκευαστή, η ακρίβεια του συστήματος είναι πιστοποιημένη σύμφωνα με το πρότυπο ANSI B89 (2 Sigma Single Point Accuracy)  $\pm 0.030\text{mm}$ .

Παρά το μικρότερο μέγεθος του μπάσου σε σχέση με αυτό της εργόσφαιρας (ύψος=1,90m), η πολυπλοκότητα του σχήματός του δημιούργησε σημαντικές δυσκολίες κατά τη διάρκεια της σάρωσης. Αυτές οι δυσκολίες ξεπεράστηκαν με πολλά scans και πολλές επικολλήσεις μεταξύ τους κατά την επεξεργασία του νέφους σημείων. Αυτό είχε, προφανώς, κάποιο αντίκτυπο στην ακρίβεια του μοντέλου, αλλά όχι καθοριστικό για το τελικό αποτέλεσμα.

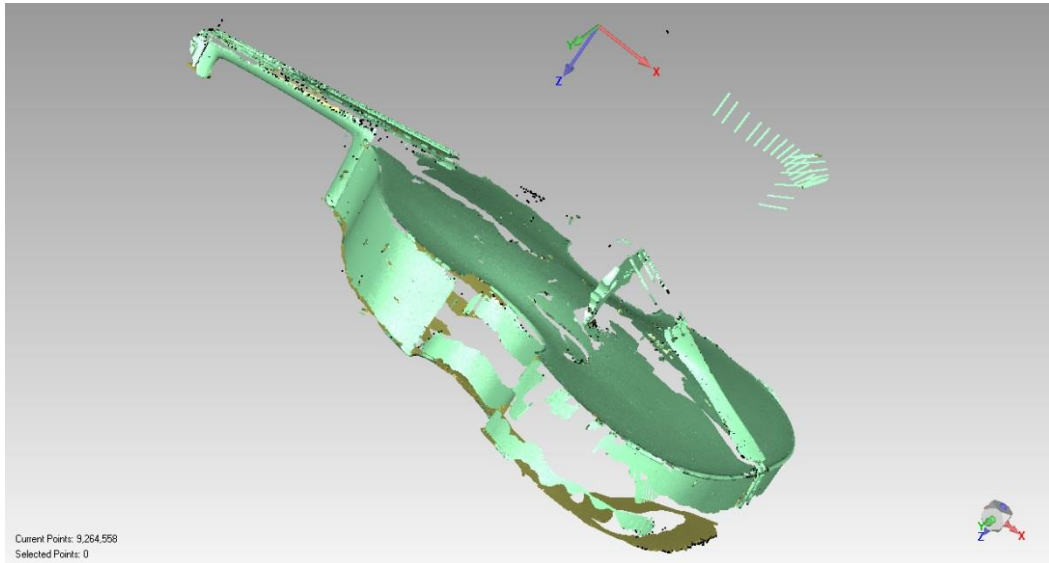


**Σχήμα 3.2: FARO PLATINUM ARM Model P083D**

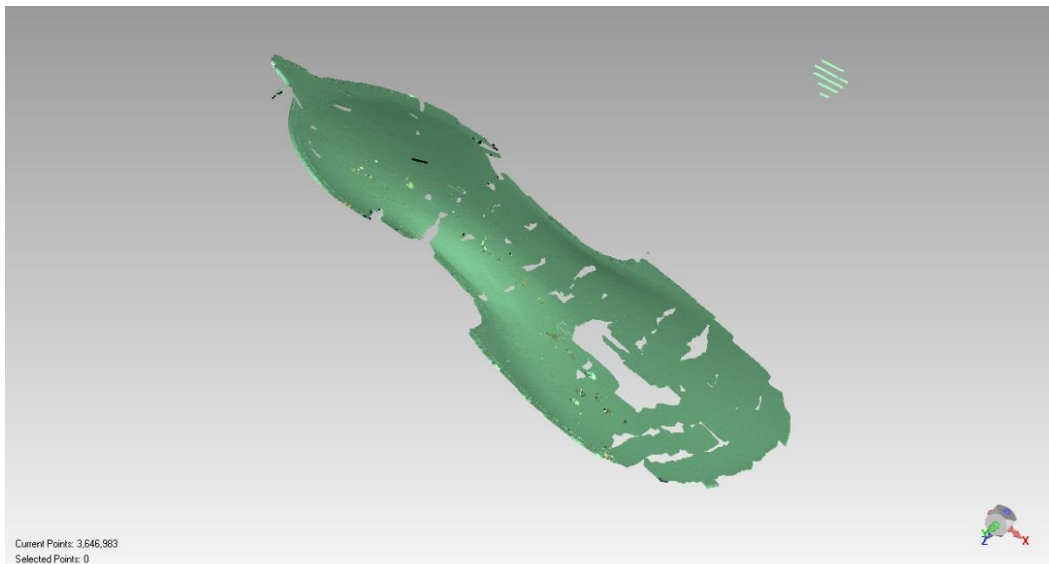
### 3.3.Σύντομη επισκόπηση της ροής εργασιών κατά το scanning και της επεξεργασίας στο λογισμικό Geomagic

#### 3.3.1.Νέφος σημείων

Στα σχήματα 3.3 και 3.4 φαίνεται το αποτέλεσμα της πρώτης σάρωσης που πραγματοποιήθηκε.



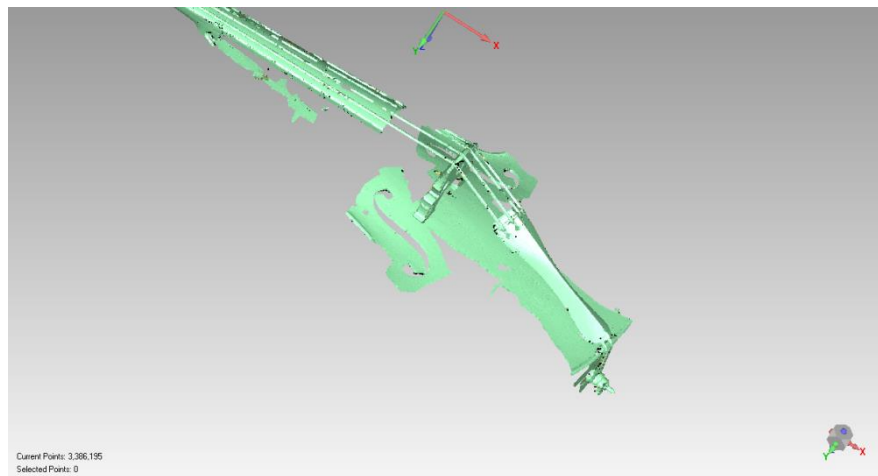
**Σχήμα 3.3: Πρώτη σάρωση του μπάσου (μπροστινό μέρος)**



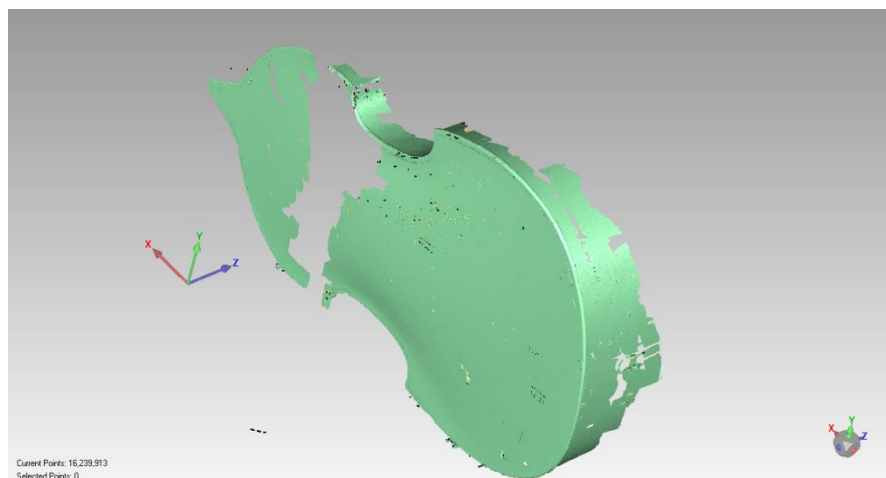
**Σχήμα 3.4: Πρώτη σάρωση του μπάσου (πίσω μέρος)**

Στα παραπάνω σχήματα είναι εμφανείς οι δυσκολίες που αντιμετωπίστηκαν καθ' όλη τη διάρκεια του scanning. Η πρώτη έχει αναφερθεί ήδη και είναι η ανάγκη για διαφορετικές σαρώσεις και πολλά patch. Η δεύτερη είναι ο πολύ έντονος θόρυβος. Αυτό οφείλεται στο λούστρο του οργάνου που εμποδίζει το λέιζερ να πάρει σαφείς πληροφορίες. Τρίτον, η ίδια η γεωμετρία του οργάνου εμποδίζει τη σαφή λήψη πληροφοριών σε σημεία όπως η γέφυρα ή κάτω από την ταστιέρα και τη χορδιέρα. Τέλος, η δέσμη του λέιζερ έχει πολύ μικρό μέγεθος σε σχέση με το υπό μελέτη αντικείμενο, κάτι που αυξάνει σημαντικά το χρόνο ολοκλήρωσης αυτής της φάσης.

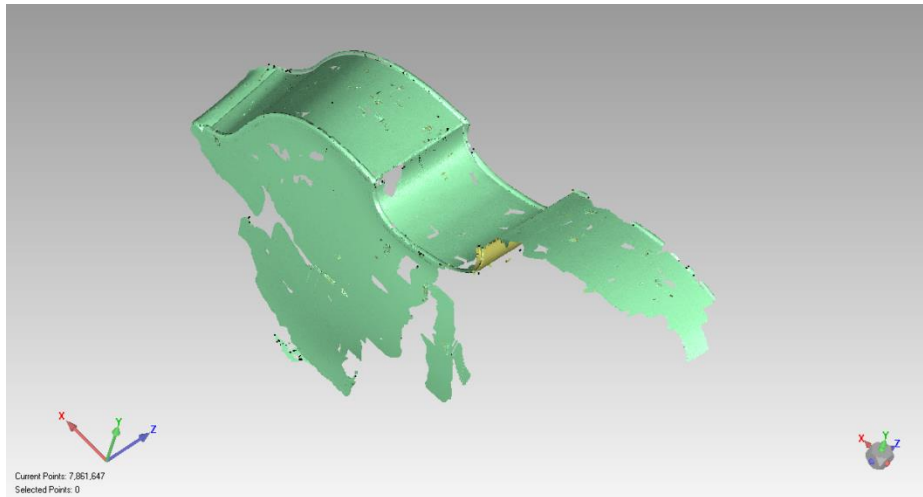
Τα σχήματα που ακολουθούν είναι κάποιες από τις επιπλέον σαρώσεις σε λεπτομέρειες που χρειάστηκε να γίνουν έτσι ώστε να συγκεντρωθεί η απαιτούμενη πληροφορία.



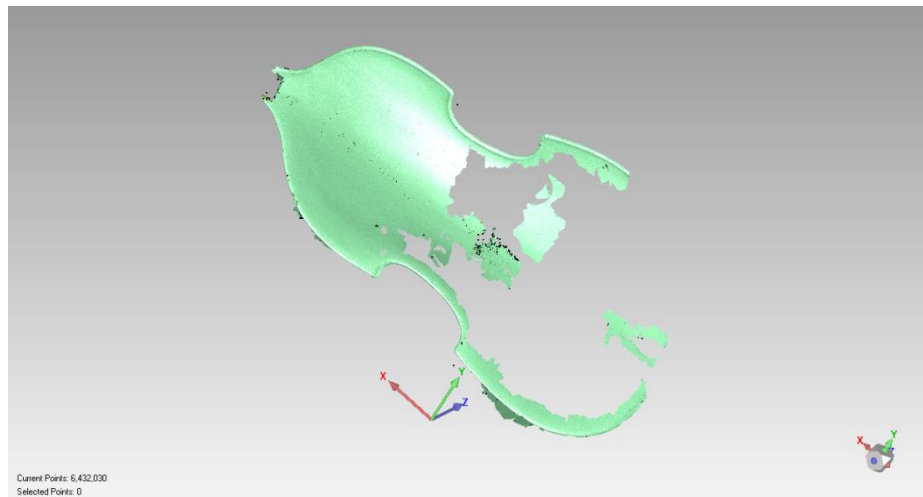
**Σχήμα 3.5: Λεπτομέρεια 1: Τρύπες καπακιού, γέφυρα και καπάκι κάτω από χορδιέρα**



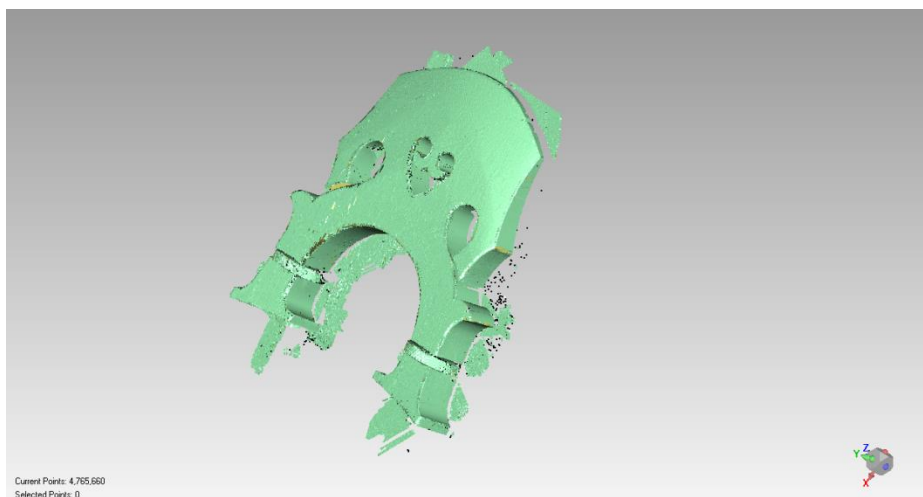
**Σχήμα 3.6: Λεπτομέρεια 2: Πλάτη**



**Σχήμα 3.7: Λεπτομέρεια 3: Πλάτη (πάνω μέρος) και πλευρά**

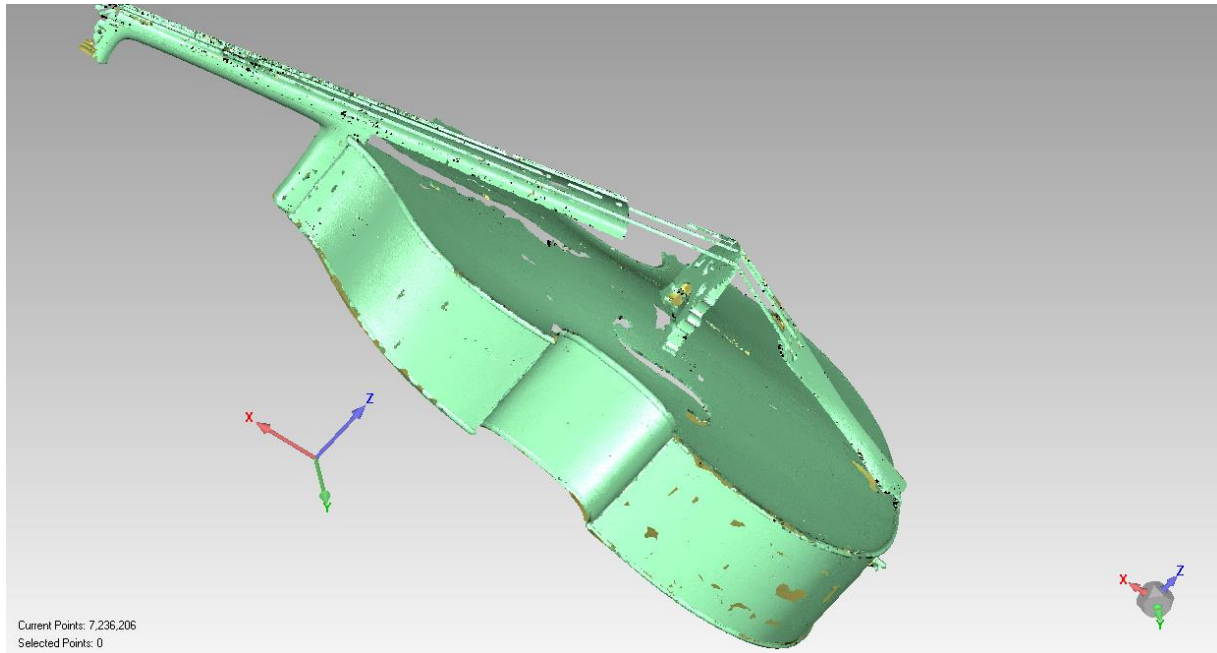


**Σχήμα 3.8: Λεπτομέρεια 4: Καπάκι (πάνω μέρος)**



**Σχήμα 3.9: Λεπτομέρεια 5: Γέφυρα**

Στην συνέχεια, αφού καθαριστούν από το θόρυβο οι σαρώσεις, γίνεται η μεταξύ τους επικόλληση έτσι ώστε να είναι έτοιμο το μοντέλο για την επόμενη φάση.

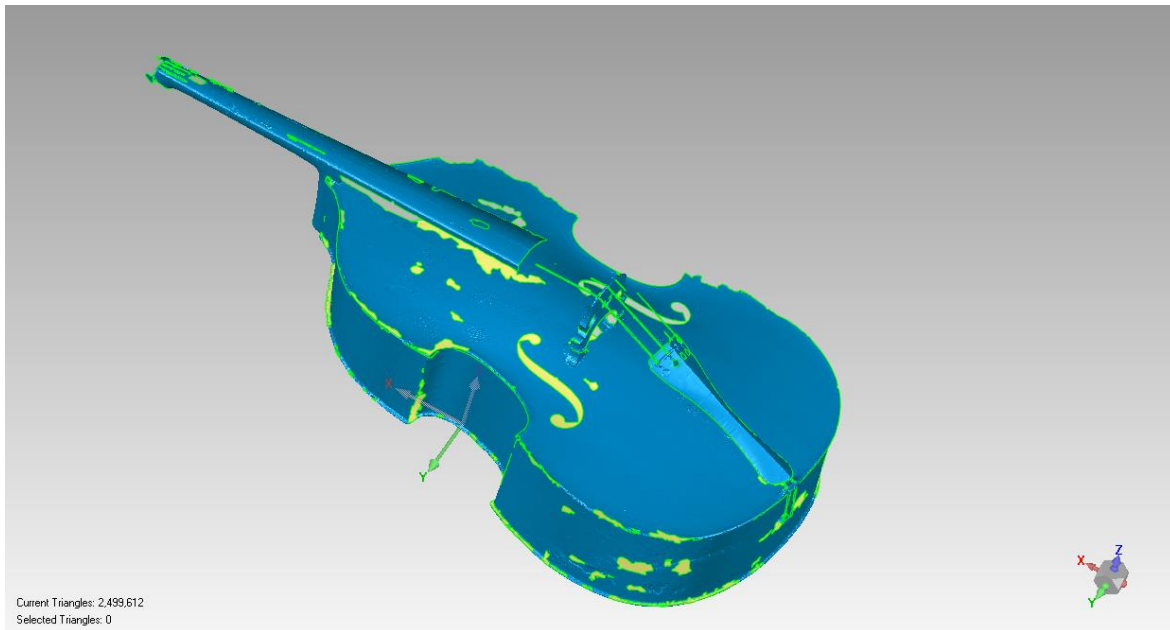


**Σχήμα 3.9: Τελική φάση νέφους σημείων**

Πέρα από το ολόκληρο σώμα, αποθηκεύονται και ξεχωριστά αρχεία με την πλάτη, το καπάκι και τη γέφυρα για πιο λεπτομερή επεξεργασία.

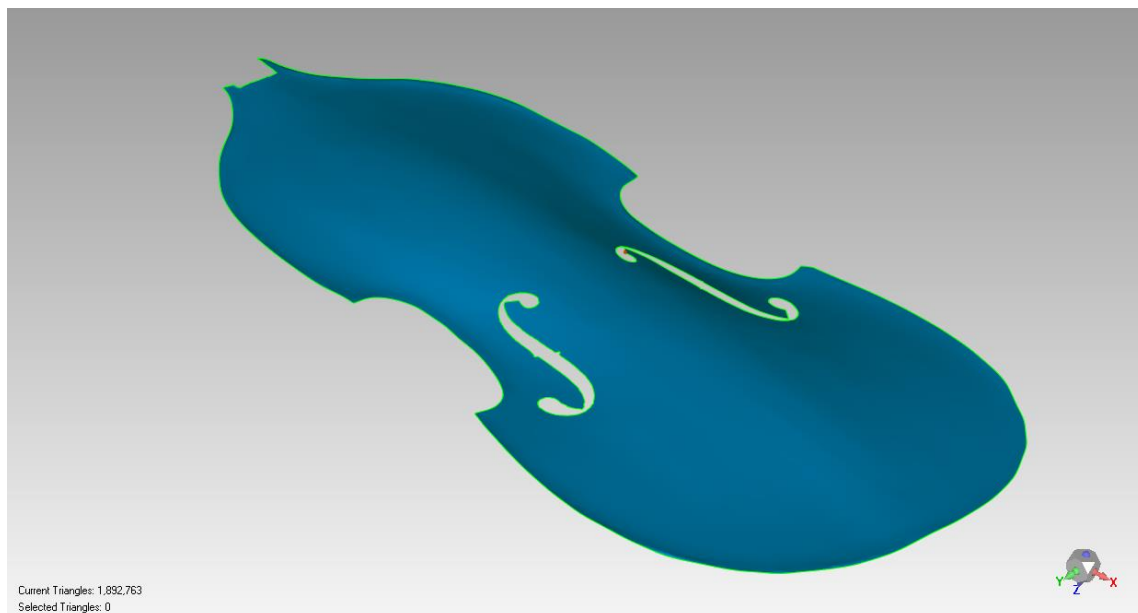
### 3.3.2. Τριγωνικά στοιχεία επιφάνειας

Στο σχήμα 3.10 φαίνεται η μετατροπή του σχήματος 3.9 σε τριγωνικά στοιχεία. Σε αυτό το σημείο πάρθηκε η απόφαση να αντιμετωπισθούν τα ξεχωριστά μέρη του μπάσου αυτόνομα, διότι η πολυπλοκότητα της γεωμετρίας στο σύνολο του οργάνου εμπόδιζε την εξαγωγή καλού αποτελέσματος από τις εντολές του Geomagic. Πάρθηκε επίσης η απόφαση, η γέφυρα και το υπόλοιπο όργανο να αντιμετωπιστούν ως ξεχωριστά σώματα (κάτι που ισχύει και στην πραγματικότητα) για το σύνολο της επεξεργασίας της γεωμετρίας (δηλαδή και στην επεξεργασία στο Solidworks). Αυτό, επί της ουσίας, επέτρεψε την εύκολη πρόσβαση στη γεωμετρία του καπακιού και τη σωστή απόδοση της καμπυλότητάς του.



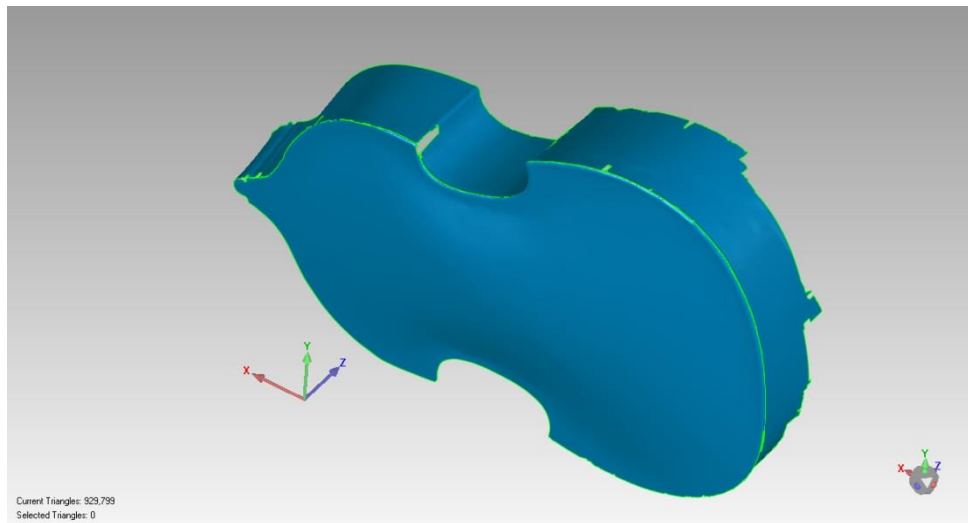
**Σχήμα 3.10: Σώμα σε τριγωνικά στοιχεία**

Στα παρακάτω σχήματα βλέπουμε την αυτόνομη αντιμετώπιση του κάθε συστατικού μέρους του οργάνου.



**Σχήμα 3.11: Καπάκι σε τριγωνικά στοιχεία**

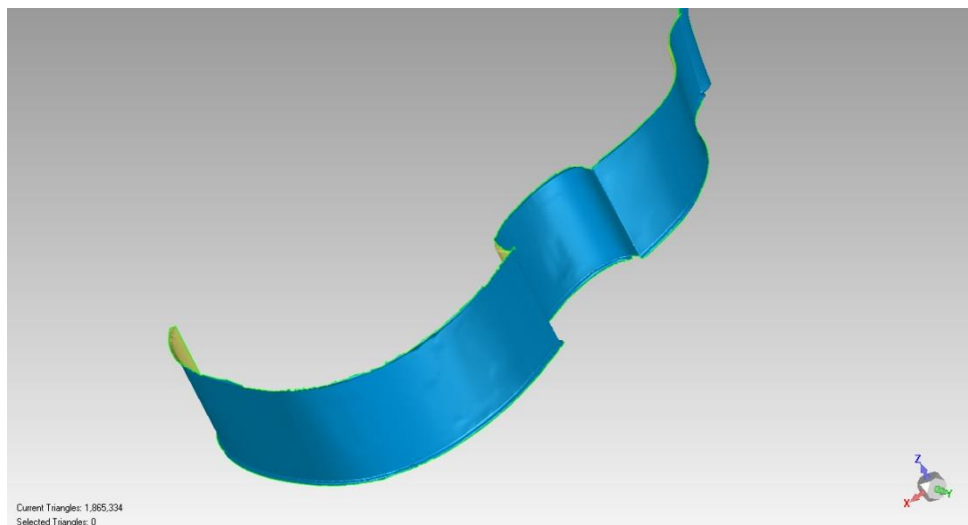




**Σχήμα 3.12: Πλάτη και Πλευρά (αριστερά) σε τριγωνικά στοιχεία**



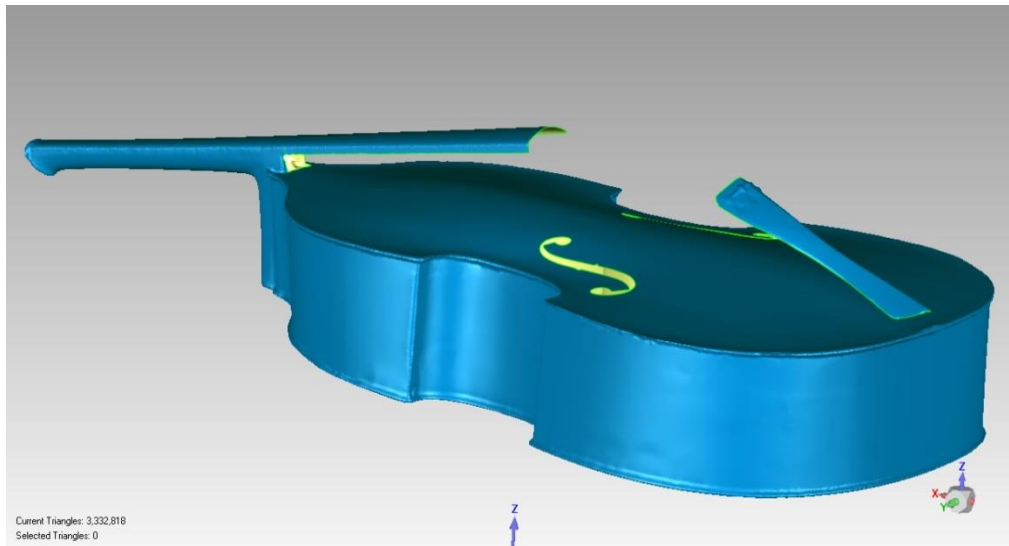
**Σχήμα 3.13: Γέφυρα σε τριγωνικά στοιχεία**



**Σχήμα 3.14: Πλευρά (δεξιά) σε τριγωνικά στοιχεία**



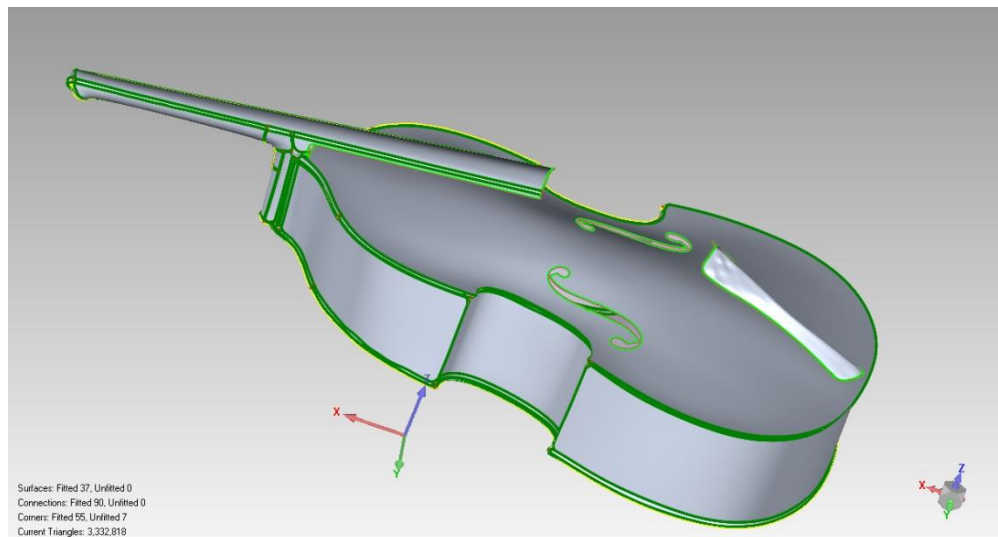
Στο σχήμα 3.15 φαίνεται η τελική μορφή ολόκληρου του σώματος στην φάση των τριγωνικών στοιχείων. Παρατηρείται ότι η γέφυρα λείπει. Ο λόγος, όπως ήδη αναφέρθηκε, είναι ότι πλέον αντιμετωπίζεται ως ξεχωριστό σώμα. Η τελική της μορφή, στην παρούσα φάση, φαίνεται στο σχήμα 3.13



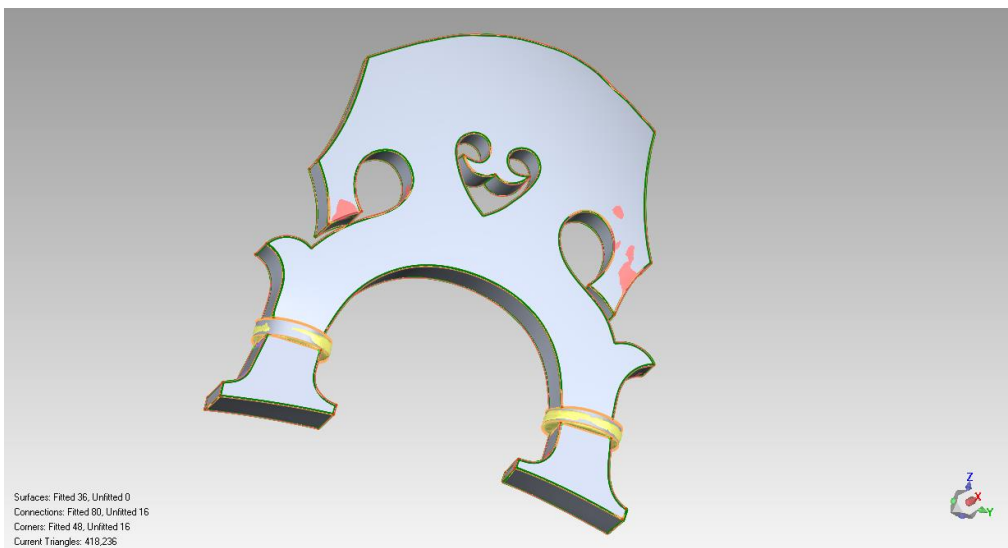
**Σχήμα 3.15: Τελική μορφή στην φάση των τριγωνικών στοιχείων**

### 3.3.3.Παραμετροποίηση των επιφανειών

Στο σχήμα 3.16 φαίνεται το αποτέλεσμα της παραμετροποίησης των επιφανειών του μπάσου. Στο σχήμα 3.17 φαίνεται η ίδια διαδικασία στην γέφυρα.



**Σχήμα 3.16: Παραμετροποιημένες επιφάνειες σώματος**



**Σχήμα 3.17: Παραμετροποιημένες επιφάνειες γέφυρας**

### 3.4.Αποφάσεις για τη μορφή του αριθμητικού μοντέλου

Σε αυτό το σημείο της εργασίας έπρεπε να παρθούν αποφάσεις για το μοντέλο, έτσι ώστε η τελική του μορφή να έχει την επιθυμητή ακρίβεια στα αποτελέσματα, αλλά να μην έχει περιττές λεπτομέρειες που απλά θα επιβραδύνουν την επεξεργασία του.

- Δυνατότητα αφαίρεσης της γεωμετρίας του μπράτσου και της χορδieras:

Όπως έχει ήδη αναφερθεί (βλ. §2.3) η απόκριση του οργάνου εξαρτάται κυρίως από το καπάκι (η μπάρα των μπάσων θεωρείται κομμάτι του), την πλάτη, τη σύζευξη μεταξύ τους (ψυχή) και τη σύζευξη όλων των παραπάνω με το σύστημα των χορδών (γέφυρα) (Rossing, 2010). Άρα, τα στοιχεία του μπράτσου και της χορδieras θα μπορούσαν σε ένα πρώτο μοντέλο να αγνοηθούν. Η περίπτωση των πλευρών θα εξεταστεί οσονούπω.

Στην παραπάνω άποψη συνηγορούν τα αποτελέσματα του μοντέλου πεπερασμένων στοιχείων βιολιού σε λογισμικό MSC/NASTRAN (βλ. §2.5) (Knott, 1987) . Η δεύτερη φάση της μοντελοποίησης (ηχείο του οργάνου) έδωσε αποτελέσματα τα οποία συγκρίθηκαν με πειραματικά αποτελέσματα πραγματικών βιολιών για τις πρώτες 9 ιδιοσυχνότητες. Βρέθηκε ότι, με εξαίρεση μία ιδιοσυχνότητα που η μορφή της βασίζεται στη διέγερση της γέφυρας, οι άλλες 8 έχουν ικανοποιητική ομοιότητα.

Το επόμενο πρόβλημα που πρέπει να λυθεί είναι ότι στην περίπτωση που αφαιρεθούν οι γεωμετρικές της χορδιέρας και του μπράτσου, δεν θα είναι εύκολο στη συνέχεια να μοντελοποιηθούν οι χορδές.

- Μοντελοποίηση των χορδών:

Τα πειραματικά αποτελέσματα με βάση τα οποία θα ελεγχθεί η ισχύς του μοντέλου αφορούν κοντραμπάσα τα οποία κατά την διάρκεια των μετρήσεων είχαν τις χορδές τους ακινητοποιημένες. Επομένως οι ιδιοσυχνότητες των χορδών δεν είναι κάτι που μας απασχολεί για την πρώτη αξιολόγηση ενός μοντέλου. Η μάζα που προσθέτουν οι χορδές μπορεί να υπολογιστεί από τον πίνακα του σχήματος 3.18.

Instrument	Tuning pitch	Frequency (Hz)	String length (cm)	Mass per unit length (g/m)	Propagation speed (m/s)	Transverse impedance (g/s)	Tension (N)
Violin	E5	659.3	32.8	0.38–0.48	432.50	165–210	71.4–90.7
	A4	440.0		0.58–0.75	288.64	167–217	48.3–62.7
	D4	293.7		0.92–1.63	192.67	178–193	34.3–60.6
	G3	196.0		2.12–3.09	128.58	272–397	35.0–51.1
							Sum: 189.0–265.1
Viola	A4	440.0	37.5	0.56–0.92	330.00	184–304	60.6–100.2
	D4	293.7		0.98–1.25	220.27	220–276	47.6–60.7
	G3	196.0		2.20–2.81	147.00	324–413	47.6–60.7
	C3	130.8		4.95–6.31	98.10	485–619	47.6–60.7
							Sum: 203.4–282.3
Cello	A3	220.0	69.0	1.50–1.92	303.6	456–584	138.3–177.2
	D3	146.9		2.94–3.57	202.7	597–725	121.0–146.9
	G2	98.0		6.38–7.56	135.2	863–1,023	116.7–138.3
	C2	65.4		14.33–16.98	90.3	1,293–1,532	116.7–138.3
							Sum: 492.7–600.7
Double bass; solo tuning	A2	110.0	106.0	4.95–6.00	233.2	1,154–1,398	269.1–326.1
	E2	82.4		9.18–9.78	174.7	1,604–1,708	280.2–298.3
	B1	61.7		16.59–17.78	130.8	2,170–2,326	283.9–304.2
	F#1	46.2		29.59–34.04	97.9	2,899–3,335	283.9–326.5
							Sum: 1151.1–1255.1
Double bass; orchestra tuning	G2	98.0	106.0	5.98–7.25	207.8	1,242–1,506	258.0–312.8
	D2	73.4		10.96–13.12	155.6	1,705–2,041	265.3–317.6
	A1	55.0		20.45–23.88	116.6	2,384–2,785	278.0–324.7
	E1	41.2		37.32–44.12	87.3	3,260–3,854	284.7–336.6
	B0	30.9		68.81–81.35	65.5	4,507–5,329	295.3–349.1
							Sum: 1381.3–1640.8

Note: 1 N  $\approx$  0.098 kg force  $\approx$  0.216 pound force.

<sup>†</sup>The author is indebted to Fan Tao of D'Addario & Company and Michel Simane of Corelli/Savarez for their insightful comments on strings and contribution of values to this table.

**Σχήμα 3.18: Χαρακτηριστικά των χορδών των εγχόρδων μουσικών οργάνων**

Από την 3<sup>η</sup> και την 4<sup>η</sup> στήλη του παραπάνω πίνακα βρίσκουμε τη συνολική μάζα των χορδών.

$$m_{\chi} = 1,06 \times (6,6 + 12,04 + 22,17 + 36,72)[gr] = 84,31 \times 10^{-3} kg \quad [3.1]$$

Από το Solidworks παίρνεται μία εκτίμηση για τον όγκο του στερεού του μπάσου.

$$V_{\mu} = 915,03 \times 10^{-4} m^3 \quad [3.2]$$

Τα συνηθέστερα ξύλα που χρησιμοποιούνται στην κατασκευή κοντραμπάσων είναι ο το έλατο (spruce) και ο σφένδαμος (maple). Μία συνηθισμένη πυκνότητα των δύο αυτών ξύλων είναι τα  $500kg / m^3$  (Meier). Άρα:

$$m_{\mu} = V_{\mu} \times 500 = 45kg \quad [3.3]$$

Προφανώς  $m_{\mu} \gg m_{\chi}$ , άρα η μάζα των χορδών μπορεί να μην ληφθεί υπ' όψιν στο μοντέλο, κάτι το οποίο ήταν, προφανώς, αναμενόμενο.

Η επίδραση, τέλος, της κάθετης δύναμης – που ασκούν οι χορδές στη γέφυρα – στις ιδιοσυχνότητες του συστήματος είναι ακόμα αντικείμενο μελέτης. Θα αγνοηθεί προς το παρόν. Σε δεύτερο χρόνο θα είναι δυνατόν να προηγηθεί στατική ανάλυση στο μοντέλο πριν την εύρεση των ιδιοσυχνοτήτων.

Συμπερασματικά, αγνοούνται, στο παρόν μοντέλο, τις χορδές, το μπράτσο και την χορδιέρα.

- Δυνατότητα αφαίρεσης της γεωμετρίας των πλευρών:

Από άποψη ανάλυσης ιδιοσυχνοτήτων θα μπορούσαν να αγνοηθούν και τα πλευρά του οργάνου. Θυμίζουμε εδώ (βλ. §2.3) ότι οι ιδιοσυχνότητες των πλευρών παίζουν μικρό ρόλο στην τελική απόκριση και ότι (βλ §2.1) το ρόλο της σύζευξης του καπακιού και της πλάτης τον επιτελεί η ψυχή. Παρ' όλα αυτά, αν αγνοηθεί η γεωμετρία των πλευρών είναι πιθανόν να μην εμφανιστούν ιδιοσυχνότητες που προέρχονται από το σύνολο του σώματος (C). Θυμίζουμε ότι η γνώση μας για την αντιστοίχιση των ιδιοσυχνοτήτων του μπάσου με τα μέρη του σώματος που τις διεγείρουν είναι πολύ περιορισμένη. Άρα η αφαίρεση των πλευρών μπορεί να οδηγήσει σε αποκλίσεις του φάσματος, σε σχέση με τα πειραματικά δεδομένα, τις οποίες δεν θα μπορούμε να αξιολογήσουμε. Συμπερασματικά, δε είναι ασφαλές να αγνοηθούν τα πλευρά του οργάνου.

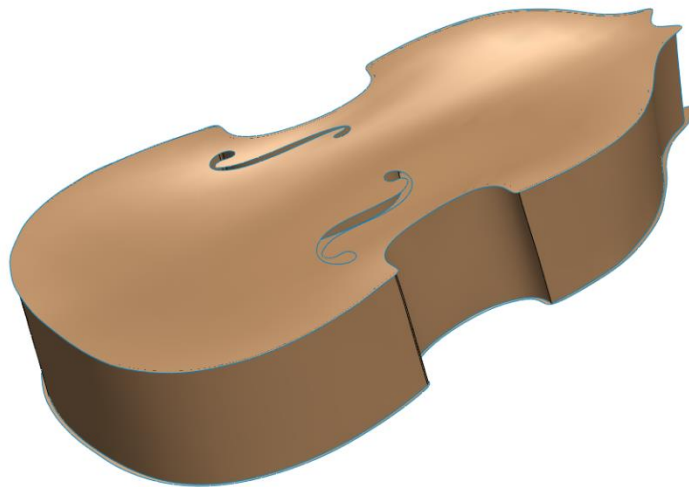
- 3D ανάλυση ή ανάλυση με στοιχεία κελύφους (shell):

Εδώ η απόφαση δεν ήταν τόσο εύκολη όσο στα προηγούμενα, καθώς υπάρχουν επιτυχημένα παραδείγματα και των δύο τρόπων ανάλυσης με πεπερασμένα στοιχεία στην μελέτη του βιολιού (Knott, 1987) (Lu, 2013). Στοιχεία κελύφους είναι στοιχεία που συνδυάζουν τα χαρακτηριστικά των στοιχείων μεμβράνης και των στοιχείων κάμψης (Προβατίδης, 2016). Το πλεονέκτημά τους έναντι των 3D στερεών στοιχείων είναι ότι κάθε κόμβος τους έχει 6 βαθμούς ελευθερίας (3 μετατόπισης, 3 στροφής), ενώ τα 3D έχουν 3 β.ε. ανά κόμβο. Παρ' όλα αυτά, η αντιμετώπιση όλου του ηχείου με στοιχεία κελύφους θα ήταν άστοχη καθώς θα αγνοούσε την επίδραση της ψυχής και της μπάρας των μπάσων. Επιλέγουμε, λοιπόν τα στερεά στοιχεία.

Σε δεύτερο χρόνο, το πλέγμα μπορεί να βελτιωθεί με συνδυασμό στερεών στοιχείων και στοιχείων κελύφους.

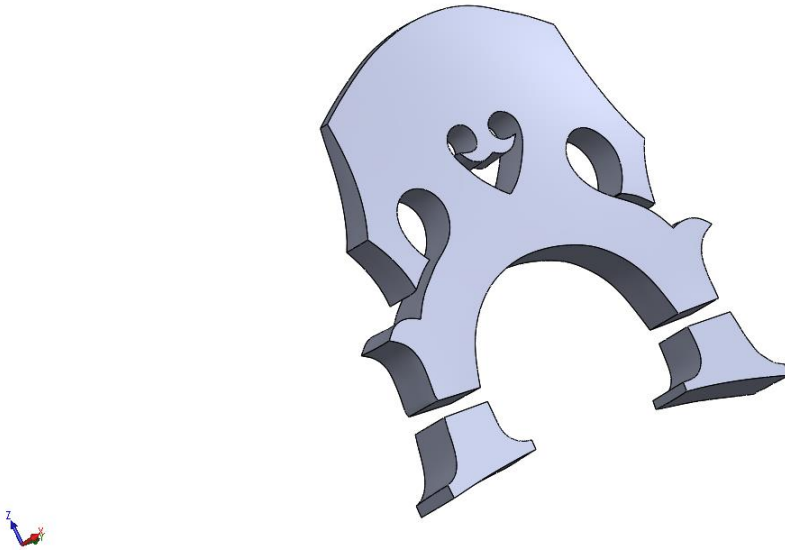
### 3.5.Επεξεργασία της γεωμετρίας στο λογισμικό του Solidworks

Με βάση τα παραπάνω, ξεκινάει η ανάπτυξη του 3D μοντέλου στο Solidworks. Στο σχήμα 3.17 φαίνονται οι επιφάνειες του σώματος που μεταφέρθηκαν στο Solidworks



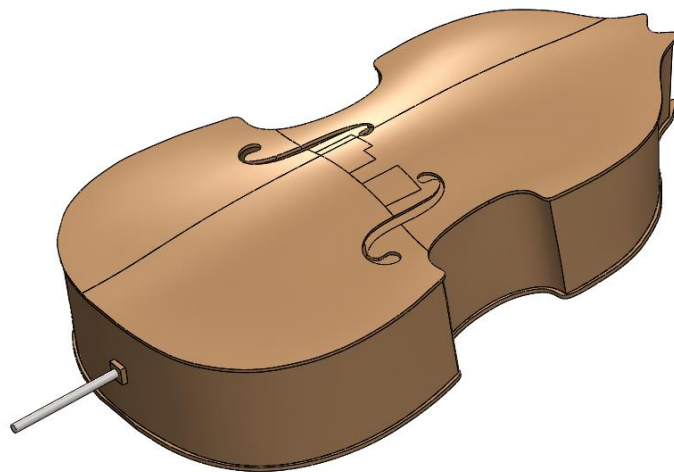
Σχήμα 3.17: Αρχική μορφή σώματος στο Solidworks

Στο σχήμα 3.18 φαίνονται οι αντίστοιχες επιφάνειες τις γέφυρας.



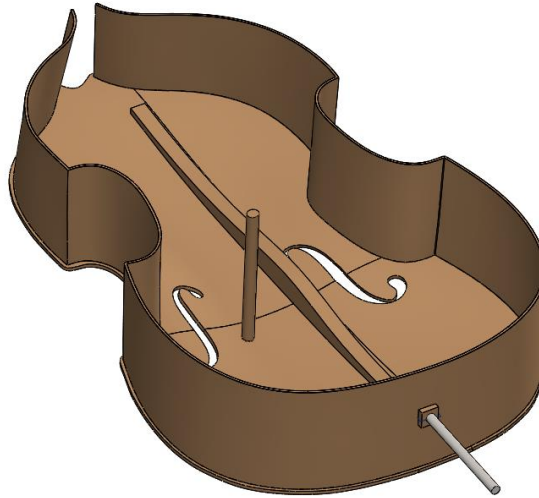
**Σχήμα 3.18: Αρχική μορφή γέφυρας στο Solidworks**

Το σώμα του μπάσου ήταν πολύ δύσκολο να σχεδιαστεί σωστά διότι δεν υπήρχε σαφές σημείο αναφοράς. Για τον σκοπό αυτό σχεδιάστηκαν διάφορα planes και επίσης κάναμε δύο κάθετες τομές στο καπάκι. Σχεδιάσαμε επίσης λεπτά ψευδοσώματα στις επαφές τριβής (καπάκι – γέφυρα, καπάκι – ψυχή, πλάτη – ψυχή). Οι διαστάσεις του σώματος είναι βασισμένες σε αναρτήσεις κατασκευαστών στις ιστοσελίδες τους (Goldblatt) (Blodgett). Η τελική μορφή του σώματος φαίνεται στα παρακάτω σχήματα.

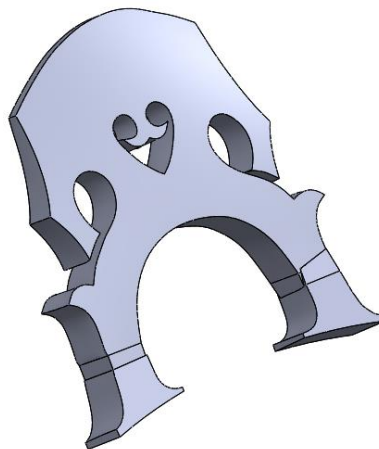


**Σχήμα 3.19: Τελική μορφή σώματος στο Solidworks**

Το πόδι στήριξης προστέθηκε έτσι ώστε οι στηρίξεις του αριθμητικού μοντέλου να προσομοιάζουν την πραγματικότητα.



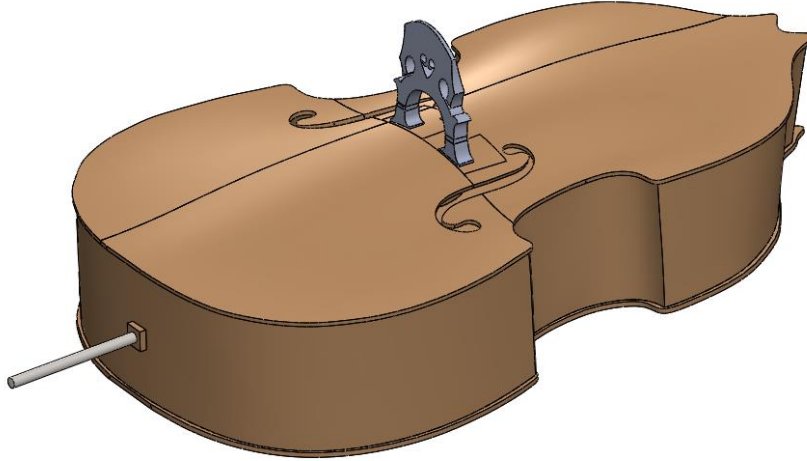
**Σχήμα 3.20: Το εσωτερικό του σώματος. Φαίνεται ο σχεδιασμός της ψυχής και της μπάρας των μπάσων**



**Σχήμα 3.21: Τελική μορφή γέφυρας**

## ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΣΗ ΜΠΑΣΟΥ

Στο σχήμα 3.21 φαίνεται η τελική μορφή της γέφυρας, δηλαδή με σχεδιασμένες τις βίδες προσαρμογής του ύψους. Στο σχήμα 3.22 φαίνεται το τελικό assembly.



**Σχήμα 3.22: Τελική μορφή assembly**



Equation Chapter (Next) Section 1

## 4. Ανάπτυξη και ανάλυση στερεού αριθμητικού μοντέλου

Η ανάπτυξη και ανάλυση του στερεού μοντέλου θα γίνει με το λογισμικό Ansys. Στις παρακάτω παραγράφους αναλύονται τα βήματα που ακολουθήθηκαν για την προετοιμασία του αριθμητικού στερεού μοντέλου.

### 4.1. Υλικά που χρησιμοποιήθηκαν

Τα υλικά που χρησιμοποιούνται για την κατασκευή των μπάσων είναι έλατο (spruce) για το καπάκι, την ψυχή και τη μπάρα των μπάσων και σφένδαμος (maple) για την πλάτη, τα πλευρά και τη γέφυρα (Blodgett). Για το πόδι στήριξης θα χρησιμοποιηθεί χάλυβας. Επίσης, στις συνδέσεις των πλευρών με το καπάκι και την πλάτη, χρησιμοποιήθηκαν 0,5mm ρητίνης έτσι ώστε να προσομοιωθεί ο τρόπος που κολλιούνται τα όργανα στην πραγματικότητα.

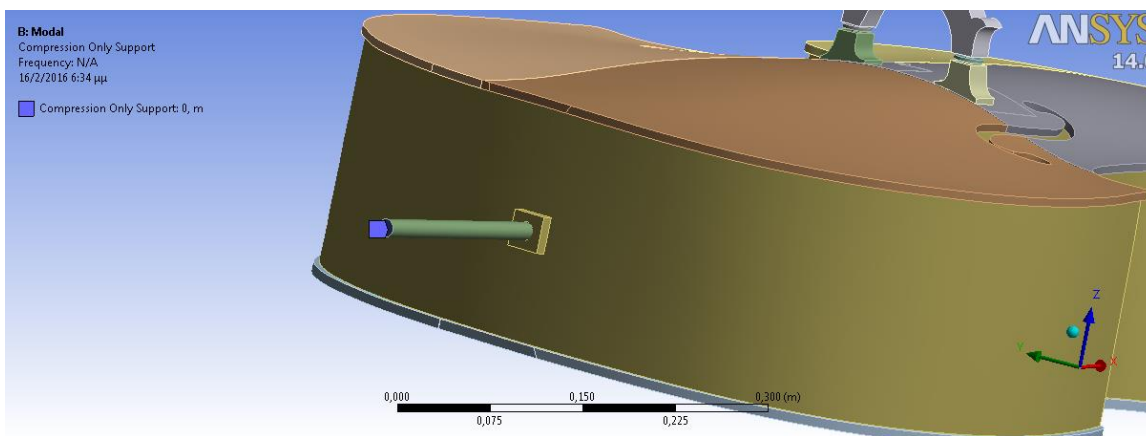
Η ποικιλία του ξύλου που χρησιμοποιείται διαφέρει από κατασκευαστή σε κατασκευαστή και από μπάσο σε μπάσο. Επιλέχθηκαν 2 συνδυασμοί ποικιλιών για να χρησιμοποιηθούν για την ανάλυσή του μπάσου. Ο πρώτος συνδυασμός είναι White Spruce και Silver Maple (εφεξής M1). Ο δεύτερος συνδυασμός είναι Norway Spruce και Big Leaf Maple (εφεξής M2). Τα ξύλα της ποικιλίας 2 είναι ελαφρώς βαρύτερα και στιβαρότερα από αυτά της ποικιλίας 1. Επιλέχθηκαν έτσι ώστε να εξαχθούν συμπεράσματα από τη μικρή αυξομείωση της στιβαρότητας στα υλικά του συστήματός μας. Προφανώς αναμένεται ότι με τη μείωση της στιβαρότητας, οι ιδιοσυχνότητες θα πέσουν. Αυτό που πρέπει να ελεγχθεί είναι το πόσο θα πέσουν, διότι η κατασκευή είναι αρκετά πολύπλοκη. Στο σχήμα 4.1 φαίνονται τα χαρακτηριστικά του κάθε υλικού που εισαγάγαμε στο Ansys (Meier).

	Μέτρο ελαστικότητας (GPa)	Πυκνότητα (kg/m <sup>3</sup> )	Λόγος Poisson	Μέτρο διάτμησης (GPa)
White Spruce	9,07	425	0,25	3,63
Silver Maple	7,86	530	0,25	3,14
Norway Spruce	9,70	405	0,25	3,88
Big Leaf Maple	10,00	545	0,25	4,00
Resin	4,00	1200	0,40	1,43
Structural Steel	200,00	7850	0,30	7,69

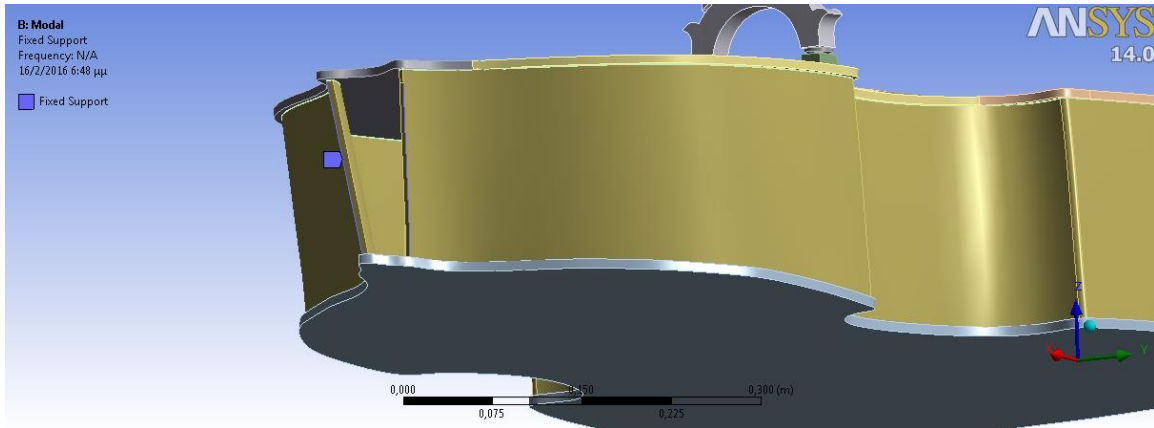
**Σχήμα 4.1: Χαρακτηριστικά υλικών που χρησιμοποιήθηκαν στο μοντέλο**

## 4.2.Στηρίξεις και επαφές

Η επιλογή των στηρίξεων έγινε έτσι ώστε να προσομοιάζει όσο γίνεται τις στηρίξεις του πραγματικού οργάνου όταν παίζεται. Γι αυτόν το λόγο χρησιμοποιείται στήριξη compression only στην κάτω επιφάνεια του ποδιού στήριξης. Εφόσον έχει αφαιρεθεί η ταστιέρα, χρησιμοποιείται στήριξη fixed (πάκτωση) σε δύο ακμές στην κορυφή των πλευρών, έτσι ώστε να προσομοιωθεί. Οι στηρίξεις αυτές φαίνονται στα σχήματα 4.2. και 4.3.



**Σχήμα 4.2: Στήριξη compression only στο πόδι του οργάνου**



**Σχήμα 4.3: Στήριξη fixed στις ακμές των κορυφών των πλευρών**

Όσον αφορά τις συνδέσεις μεταξύ των διαφόρων μερών του μοντέλου χρησιμοποιήθηκαν:

- Τριβή ( $\mu=0,3$ ) για τις συνδέσεις γέφυρα – καπάκι, ψυχή – καπάκι και ψυχή – πλάτη
- Bonded για τις συνδέσεις καπάκι – μπάρα των μπάσων, καπάκι – ρητίνη, πλευρά – ρητίνη, πλάτη – ρητίνη, πλευρά – πόδι στήριξης

### 4.3.Δημιουργία πλέγματος

Η μέθοδος αξιολόγησης του μοντέλου είναι η σύγκριση των φασμάτων που θα εξαχθούν με τα πειραματικά φάσματα που είναι διαθέσιμα (Askenfelt, 1982). Αυτό απαιτεί από το μοντέλο να μπορεί να έχει αξιόπιστα αποτελέσματα ιδιοσυχνοτήτων τουλάχιστον μέχρι τα 2100 Hz. Άρα το ελάχιστο μήκος κύματος που θα χρειαστεί να ανιχνεύσουμε είναι:

$$\lambda_{\min} = \frac{c_T}{f_{\max}} \quad [4.1]$$

Όπου  $f_{\max} = 2100\text{Hz}$

$$\text{και } c_T = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (7.\text{ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ II})$$

G: Μέτρο διατμησης

$\rho$ : Πυκνότητα του υλικού

Από τα υλικά που θα χρησιμοποιηθούν στο μοντέλο, τη μικρότερη ταχύτητα διάδοσης εγκάρσιου κύματος σε πλάκα έχει ο Ασημί Σφένδαμος (Silver Maple).

$$c_{T_{SM}} = \sqrt{\frac{3,14 \times 10^9}{530}} = 2434,04 \text{ m / s} \quad [4.2]$$

Αντικαθιστώντας την στην [4.1] έχουμε:

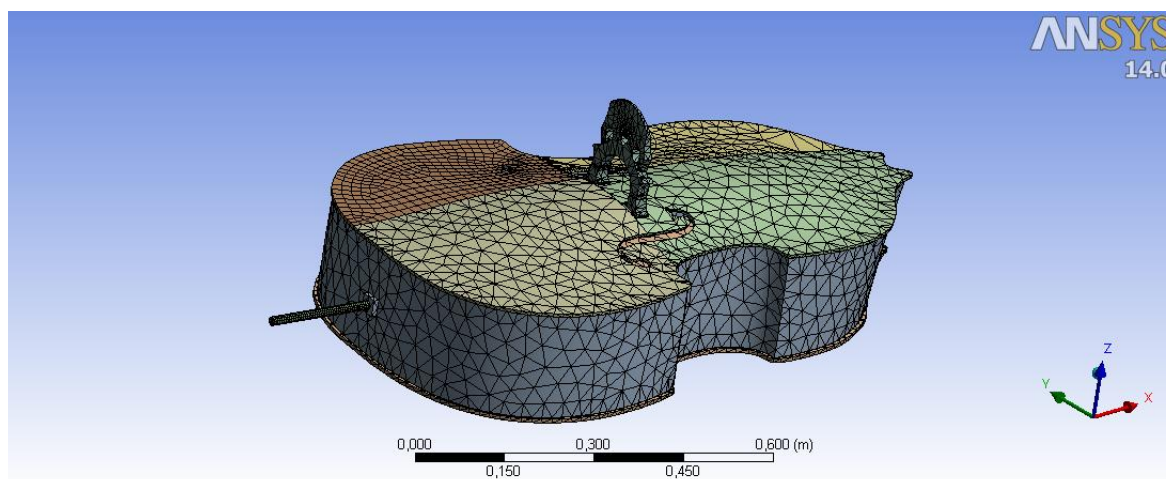
$$\lambda_{\min} = \frac{2434,04}{2100} = 1,15 \text{ m} \quad [4.3]$$

Θεωρούμε ότι για να μπορέσει ένα μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων να αποδώσει με ακρίβεια μία ιδιοσυχνότητα θα πρέπει το μήκος κύματος αυτής της ιδιοσυχνότητας να περιέχει τουλάχιστον 4 πεπερασμένα στοιχεία. Άρα για το μέγιστο μέγεθος των πεπερασμένων στοιχείων του μοντέλου μας θα ισχύει:

$$L_{FE_{Max}} = \frac{\lambda_{\min}}{8} = 145 \text{ mm} \quad [4.4]$$

Στο Ansys, χρησιμοποιώντας Computer Controlled δημιουργία πλέγματος με την ένδειξη Mechanical για το είδος της τεχνολογίας που πραγματευόμαστε, η μέση ποιότητα (medium) πλέγματος έχει μέγιστο μήκος ακμής  $L_{\max} = 74,3 \text{ mm}$

Άρα το πλέγμα αυτό είναι αρκετό για τη συγκεκριμένη εργασία. Στο σχήμα 4.4 φαίνεται το πλέγμα.



Σχήμα 4.6: Πλέγμα στερεού μοντέλου

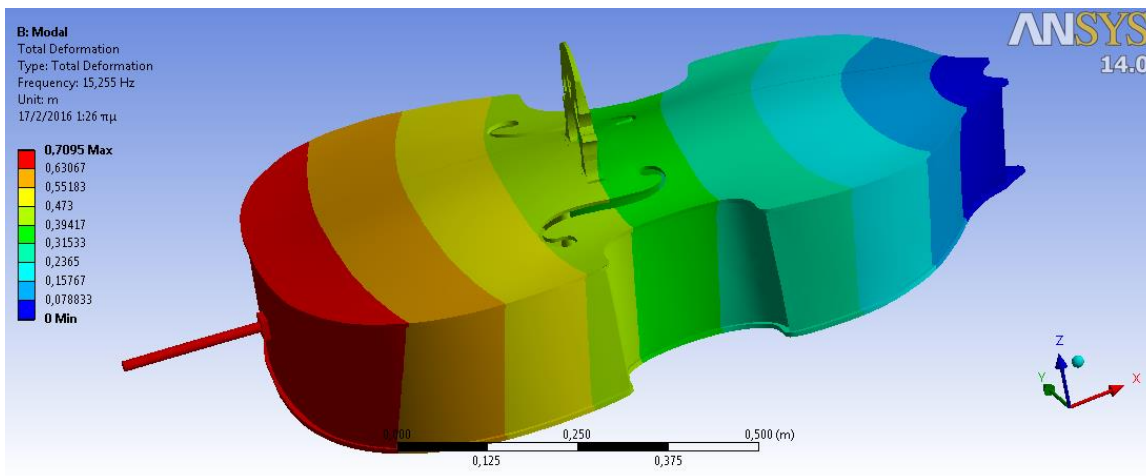
Το πλέγμα αποτελείται από 19254 τετραεδρικά και εξαεδρικά στοιχεία και 56296 κόμβους.

#### 4.4.Ανάλυση Ιδιομορφών

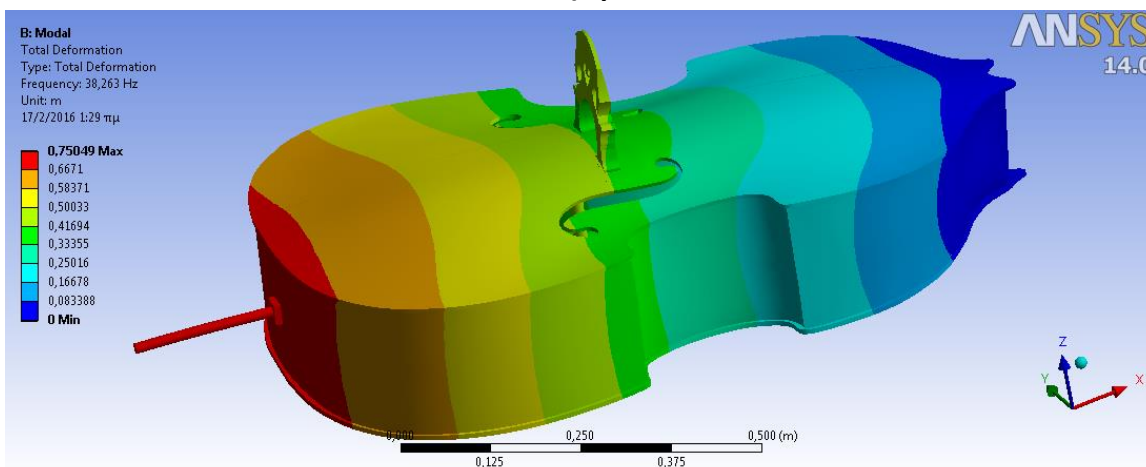
Πραγματοποιείται ανάλυση ιδιομορφών για τα υλικά M1. Στο σχήμα 4.7 παρατίθεται πίνακας με τις 10 πρώτες ιδιοσυχνότητες του μοντέλου μας και στα σχήματα 4.8 – 4.17 βλέπουμε τις αντίστοιχες ιδιομορφές.

A/A	Συχνότητα (Hz)	Σχολιασμός
1	15,25	Κάμψη του σώματος. Χωρίς ακουστικό ενδιαφέρον
2	38,26	Κάμψη του σώματος. Χωρίς ακουστικό ενδιαφέρον
3	82,62	Στρέψη του σώματος. Χωρίς ακουστικό ενδιαφέρον
4	193,78	Διέγερση του καπακιού. Αντιστοιχεί στην T1
5	197,62	Ιδιοσυχνότητα του ποδιού. Κανένα απολύτως ενδιαφέρον
6	207,29	Διέγερση καπακιού και πλάτης
7	234,54	Στρέψη σώματος μαζί με διέγερση καπακιού
8	247,36	Ιδιοσυχνότητα πλάτης και διέγερση καπακιού μέσω ψυχής
9	267,91	Διέγερση καπακιού και πλάτης

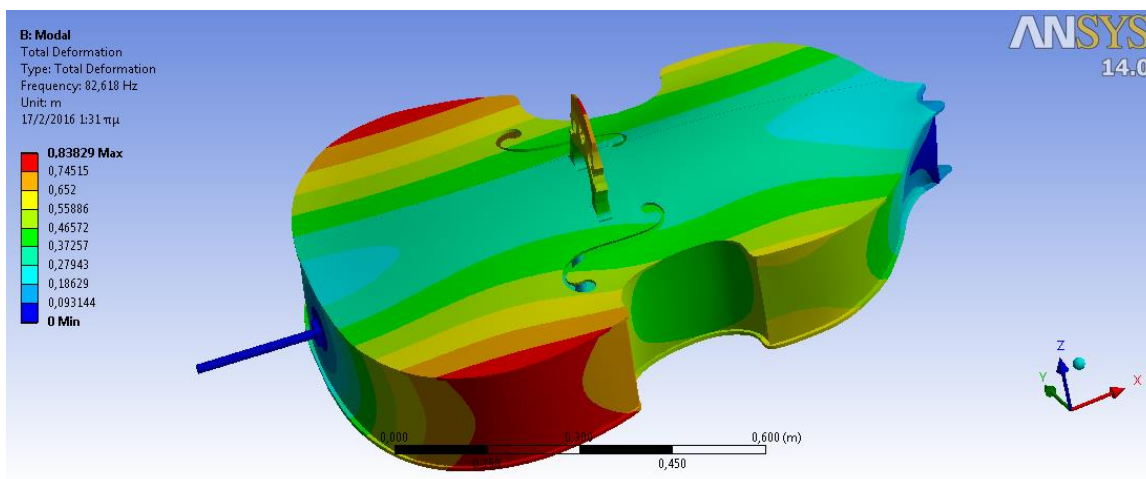
**Σχήμα 4.7: Ιδιοσυχνότητες στερεού μοντέλου**



Σχήμα 4.8: 1η Ιδιοσυχνότητα (15,255Hz). Κάμψη του σώματος. Χωρίς ακουστικό ενδιαφέρον

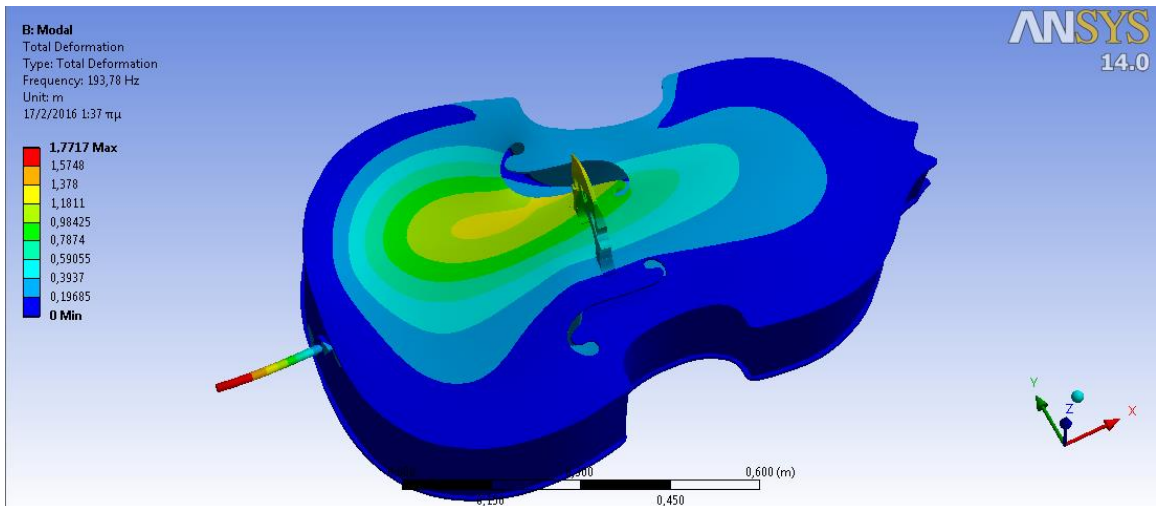


Σχήμα 4.9: 2<sup>η</sup> Ιδιοσυχνότητα (38,263Hz). Κάμψη του σώματος. Χωρίς ακουστικό ενδιαφέρον

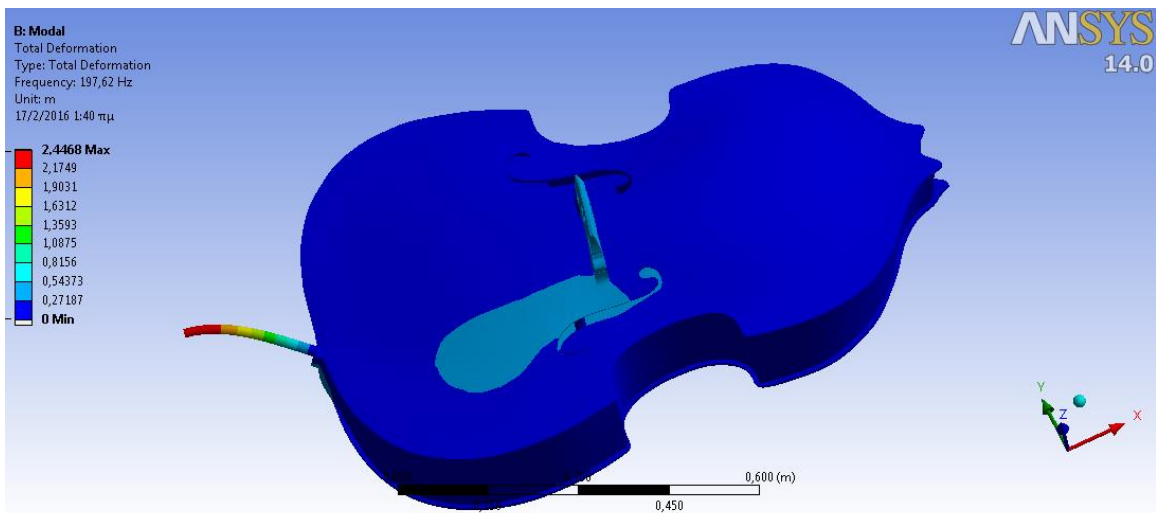


Σχήμα 4.10: 3<sup>η</sup> Ιδιοσυχνότητα (82,618Hz). Στρέψη του σώματος. Χωρίς ακουστικό ενδιαφέρον

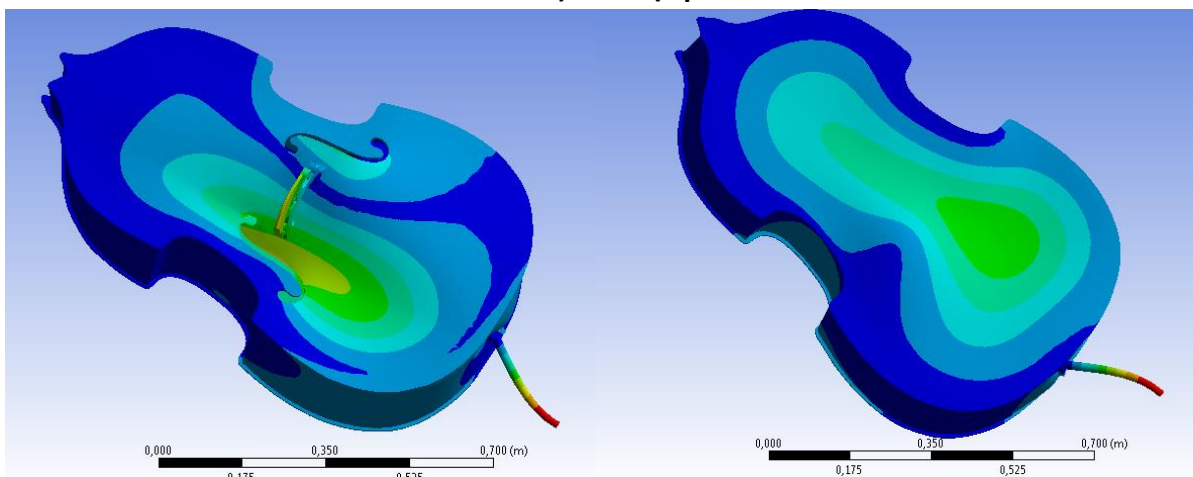




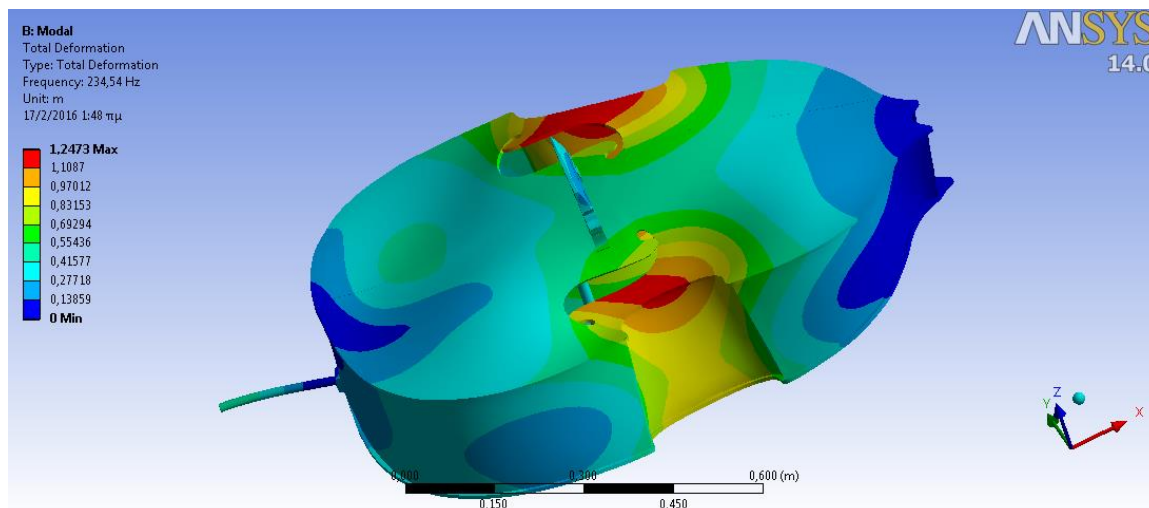
Σχήμα 4.11: 4<sup>η</sup> Ιδιοσυχνότητα (193,78Hz). T1, Διέγερση του καπακιού



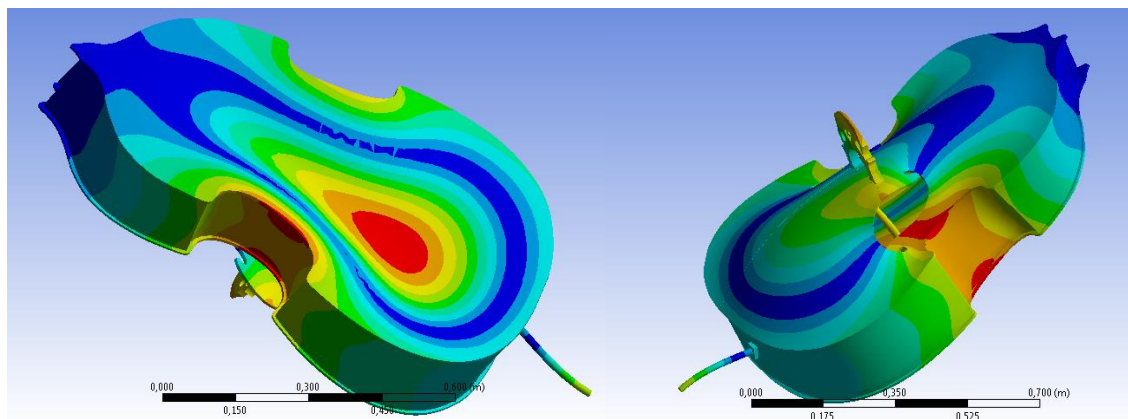
Σχήμα 4.12: 5<sup>η</sup> Ιδιοσυχνότητα (197,62Hz). Ιδιοσυχνότητα του ποδιού. Κανένα απολύτως ενδιαφέρον



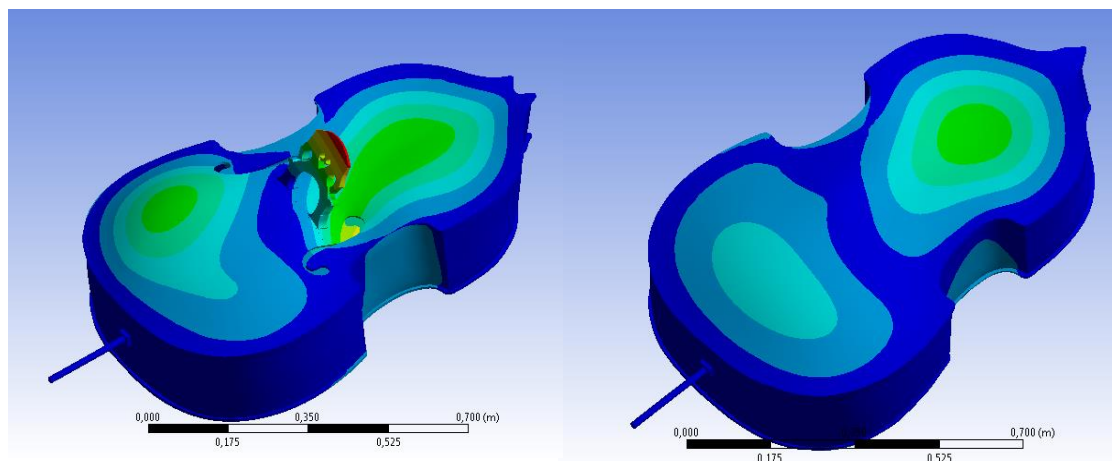
Σχήμα 4.13: 6<sup>η</sup> ιδιοσυχνότητα (207,29Hz). Διέγερση καπακιού και πλάτης



Σχήμα 4.14: 7<sup>η</sup> Ιδιοσυχνότητα (234,54Hz). Στρέψη σώματος μαζί με διέγερση καπακιού



Σχήμα 4.15: 8<sup>η</sup> Ιδιοσυχνότητα (247,36Hz). Ιδιοσυχνότητα πλάτης και διέγερση καπακιού μέσω ψυχής



Σχήμα 4.16: 9<sup>η</sup> Ιδιοσυχνότητα (267,91Hz). Διέγερση καπακιού και πλάτης



## 4.5.Αρμονική Ανάλυση

Η μέθοδος που θα ακολουθηθεί στην αρμονική ανάλυση του μοντέλου υπαγορεύεται από την αντίστοιχη μέθοδο που ακολουθήθηκε για τη δημιουργία των φασμάτων του σχήματος 2.8, με τα οποία θα συγκρίνουμε τα αποτελέσματά μας στο 6<sup>ο</sup> κεφάλαιο (Askenfelt, 1982). Στα διαγράμματα αυτά, στον οριζόντιο άξονα υπάρχει η συχνότητα της αρμονικής διέγερσης σε κλίμακα λογαριθμική του 2. Στον κάθετο άξονα τοποθετείται το πλάτος της μηχανικής αγωγιμότητας εισόδου (mechanical input admittance) σε κλίμακα λογαριθμική του 10. Η ποσότητα αυτή είναι η αντίστροφη της μηχανικής εμπέδησης εισόδου (§7.I.VI),[I.24]. Άρα έχουμε:

$$Y(t) = \frac{u(t)}{F(t)} \quad [4.5]$$

Όπου  $F(t)$ : Η δύναμη διέγερσης (αρμονική στην περίπτωσή μας)

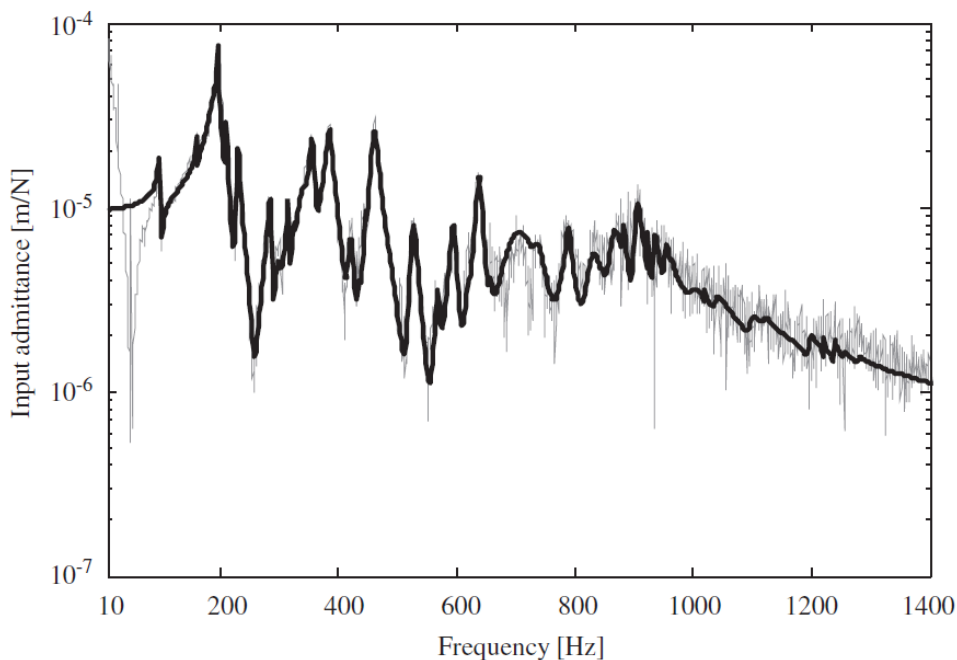
$u(t)$ : Η ταχύτητα του σημείου που διεγείρεται

Επί της ουσίας η [4.5] αποτελεί τη «συνάρτηση μεταφοράς» του κοντραμπάσου, το οποίο αποτελεί ένα σύστημα με ανθρώπινο έλεγχο. Για τη δημιουργία, βέβαια, ενός ολοκληρωμένου μοντέλου που η έξοδος του να είναι η είσοδος του ελέγχου, πρέπει να συμπεριλάβουμε και τον αέρα και η έξοδος στον αριθμητή να είναι ο ήχος που φτάνει στο αυτί του παίκτη.

Για τη σύνθεση των διαγραμμάτων του σχήματος 2.8 χρησιμοποιήθηκε αρμονική διέγερση στη γέφυρα με μοναδιαία δύναμη, εφαπτόμενη στο καπάκι του μπάσου που ασκείτο από την πλευρά της μπάρας των μπάσων. Συμπληρωματικές μετρήσεις έγιναν και με δύναμη που ασκείτο στο σώμα, σε σημείο κοντά στο πόδι της γέφυρας της πλευράς της μπάρας των μπάσων και με διεύθυνση κάθετη στο καπάκι. Το εύρος της συχνότητας της διεγείρουσας δύναμης που χρησιμοποιήθηκε ήταν 40-3000 Hz. Επειδή στο διάγραμμα φαίνεται ότι σημαντικές αποκρίσεις έχουμε μέχρι περίπου τα 2000 Hz, θα περιορίσουμε, για λόγους οικονομίας υπολογιστικού χρόνου, το εύρος μελέτης μας στα 40-2100 Hz.

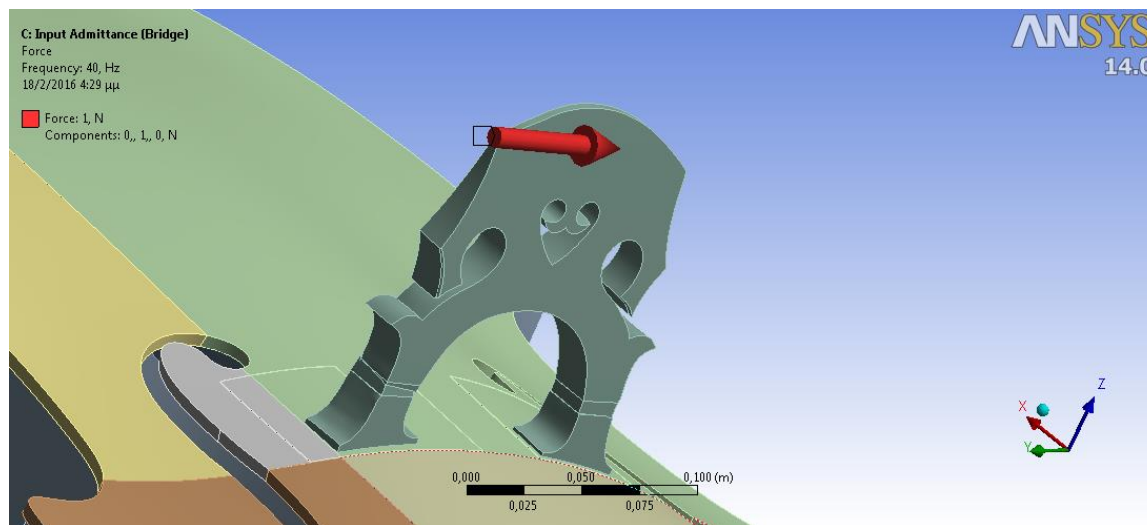
Τέλος, στα διαγράμματα που προέκυψαν έγινε ένα φιλτράρισμα των ακραίων πλατών. Αυτό το φιλτράρισμα έχει αντίκτυπο κυρίως στις υψηλές συχνότητες και έγινε με βάση τις γνώσεις που έχουμε στη δυνατότητα εκπομπής του ήχου σε κάθε

συχνότητα. Ένα παράδειγμα αυτής της ομαλοποίησης, σε καμπύλη αρμονικής απόκρισης τσέλου, φαίνεται στο σχήμα 4.15. Σημειώνεται ότι στη συγκεκριμένη περίπτωση στον οριζόντιο άξονα έχουμε το πλάτος της έκφρασης:  $x(t) / F(t)$

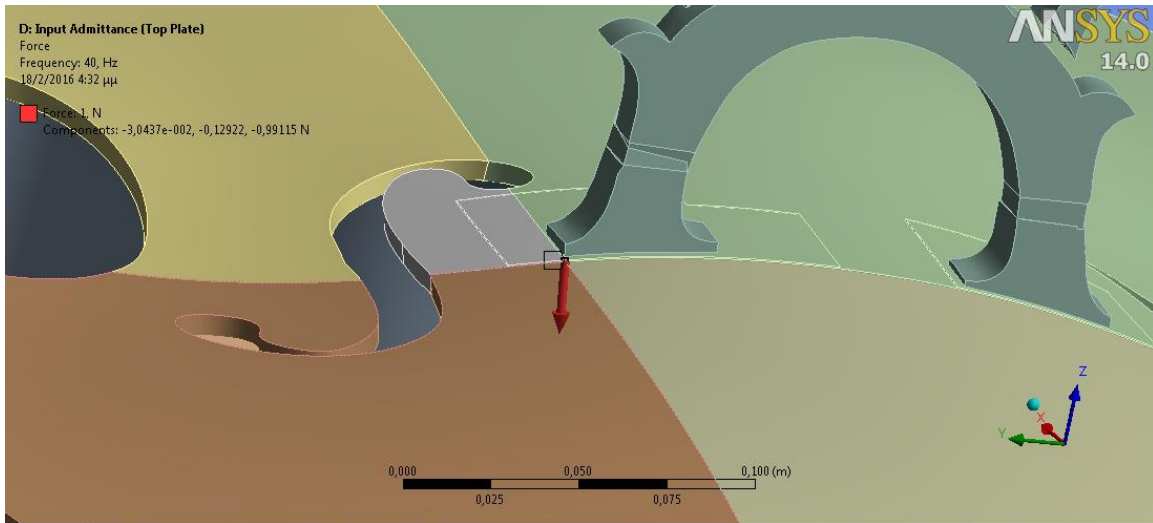


**Σχήμα 4.15: Μετρημένη (Λεπτή γραμμή) και συνθεμένη (παχιά γραμμή) μηχανική αγωγιμότητα του βιολοντσέλου. (Inacio, et al., 2008)**

Παρακάτω βλέπουμε τις αρμονικές δυνάμεις μοναδιαίου πλάτους που εφαρμόστηκαν στο μοντέλο.

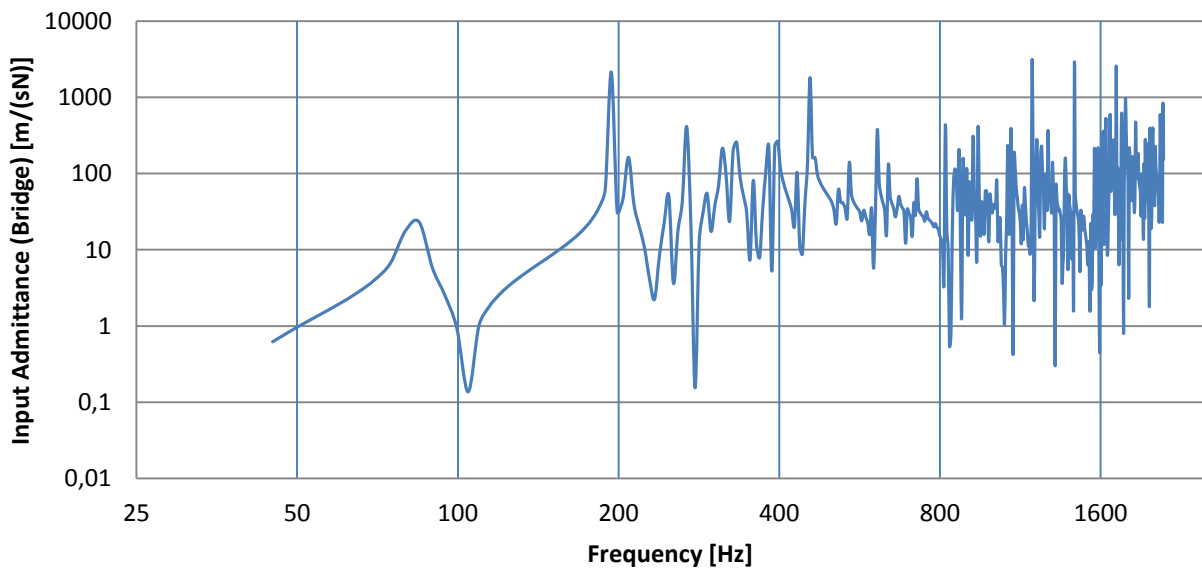


**Σχήμα 4.16: Αρμονική, μοναδιαία διεγείρουσα δύναμη στη γέφυρα. Η διεύθυνση είναι εφαπτόμενη στο καπάκι στο σημείο της γραμμής συμμετρίας του και κάθετη σε αυτήν**

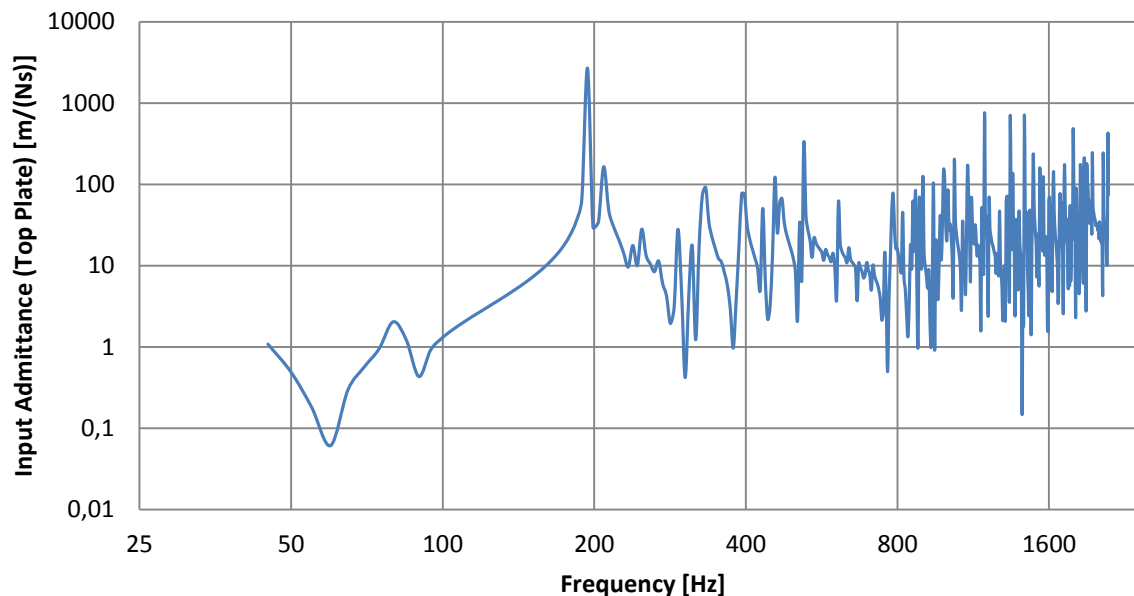


**Σχήμα 4.17: Αρμονική, μοναδιαίου πλάτους, διεγείρουσα δύναμη στο καπάκι. Η διεύθυνση είναι κάθετη στην επαφτόμενη του καπακιού στο σημείο διέγερσης**

Στα παρακάτω διαγράμματα φαίνονται οι καμπύλες αγωγιμότητας εισόδου που προέκυψαν από τα ξεχωριστά τρεξίματα για κάθε διέγερση. Το Ansys μπορεί να μας δώσει μόνο μετατόπιση και επιτάχυνση ως έξοδο. Μέσω θεωρήματος Taylor βρίσκουμε, για κάθε διακριτή συχνότητα, και την ταχύτητα στο σημείο διέγερσης. Η αναγωγή του πλάτους της ταχύτητας στο μοναδιαίο πλάτος της δύναμης διέγερσης, προφανώς, δεν επηρεάζει το διάγραμμα.



**Σχήμα 4.18: Καμπύλη αγωγιμότητας εισόδου με διέγερση στη γέφυρα**



**Σχήμα 4.19: Καμπύλη αγωγιμότητας εισόδου με διέγερση στο καπάκι**

Παρατηρούμε ότι:

- Στην διέγερση στη γέφυρα είναι σαφώς ενισχυμένη η στρεπτική ιδιοσυχνότητα, που αντιστοιχεί σε ιδιοσυχνότητα δοκού.
- Φαίνονται εξίσου ενισχυμένες οι δύο πρώτες ιδιοσυχνότητες με ακουστικό ενδιαφέρον (193,78 Hz, 207,29 Hz). Η πρώτη από αυτές θα πρέπει να αντιστοιχεί στην T1.
- Στο εύρος 200 – 400 Hz, στο φάσμα που προκύπτει από διέγερση στο καπάκι, φαίνονται κάποιες ιδιοσυχνότητες που δεν ήταν σαφείς στο πρώτο φάσμα.
- Από 800 Hz και πάνω απαιτείται ομαλοποίηση για σύγκριση με τα πειραματικά αποτελέσματα.

Σημειώνεται ότι, επειδή δεν ελήφθη υπ' όψιν η επίδραση της ακουστικής κοιλότητας, δεν εμφανίζονται στην απόκρισή οι ιδιοσυχνότητες του αέρα, η πιο σημαντική εκ των οποίων είναι η A0. Σε αυτήν, ο αέρας ταλαντεύεται μέσα και έξω από τις τρύπες του καπακιού.

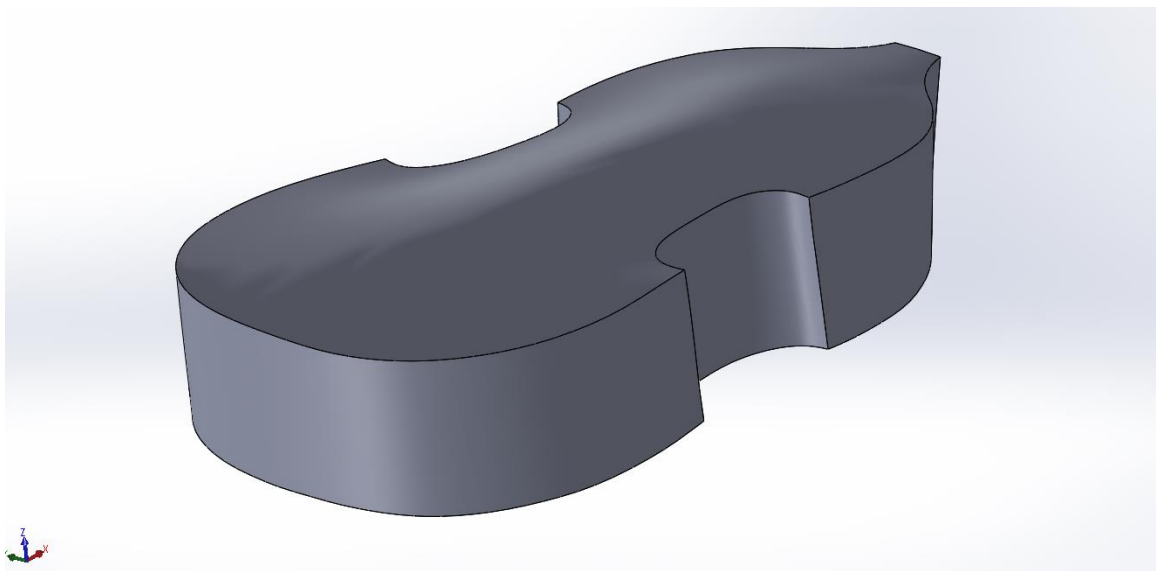
## 5. Ανάπτυξη και ανάλυση αριθμητικού μοντέλου ακουστικής κοιλότητας

Η ανάπτυξη του μοντέλου της ακουστικής κοιλότητας θα γίνει με το λογισμικό COMSOL, του οποίου το περιβάλλον εργασίας της ακουστικής μελέτης είναι πολύ φιλικότερο στο χρήστη από αυτό του ANSYS.

### 5.1. Ανάπτυξη γεωμετρίας

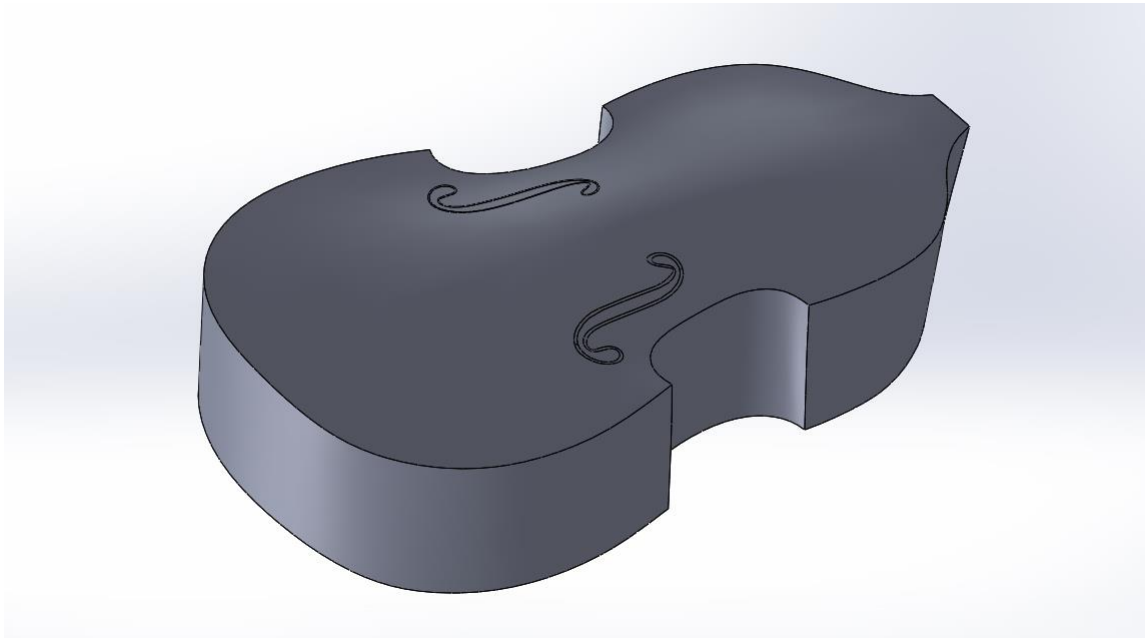
Η ανάπτυξη της γεωμετρίας της ακουστικής κοιλότητας έγινε στο Solidworks. Αναπτύχθηκαν δύο διαφορετικές γεωμετρίες. Η πρώτη έχει το σχήμα του ηχείου του μπάσου, αλλά χωρίς τις τρύπες του καπακιού, δηλαδή είναι αεροστεγής. Η δεύτερη γεωμετρία είναι η πρώτη με την πρόσθεση των τρυπών του καπακιού.

Από ακουστικής άποψης, δηλαδή, κάνουμε μελέτη στην ίδια κοιλότητα, με λίγο διαφορετικές οριακές συνθήκες. Στην πρώτη έχουμε συνθήκη rigid wall σε όλη την επιφάνεια της κοιλότητας, ενώ στη δεύτερη έχουμε επιπλέον συνθήκη μηδενικής πίεσης



Σχήμα 5.1: Γεωμετρία ακουστικής κοιλότητας χωρίς τις τρύπες του καπακιού

στα πεπερασμένα στοιχεία που αντιστοιχούν στις τρύπες του καπακιού. Και στις δύο περιπτώσεις χρησιμοποιήθηκε η εσωτερική επιφάνεια του ηχείου του μπάσου για τον ορισμό των ορίων της κοιλότητας.



**Σχήμα 5.2: Γεωμετρία ακουστικής κοιλότητας μαζί με τις τρύπες του καπακιού**

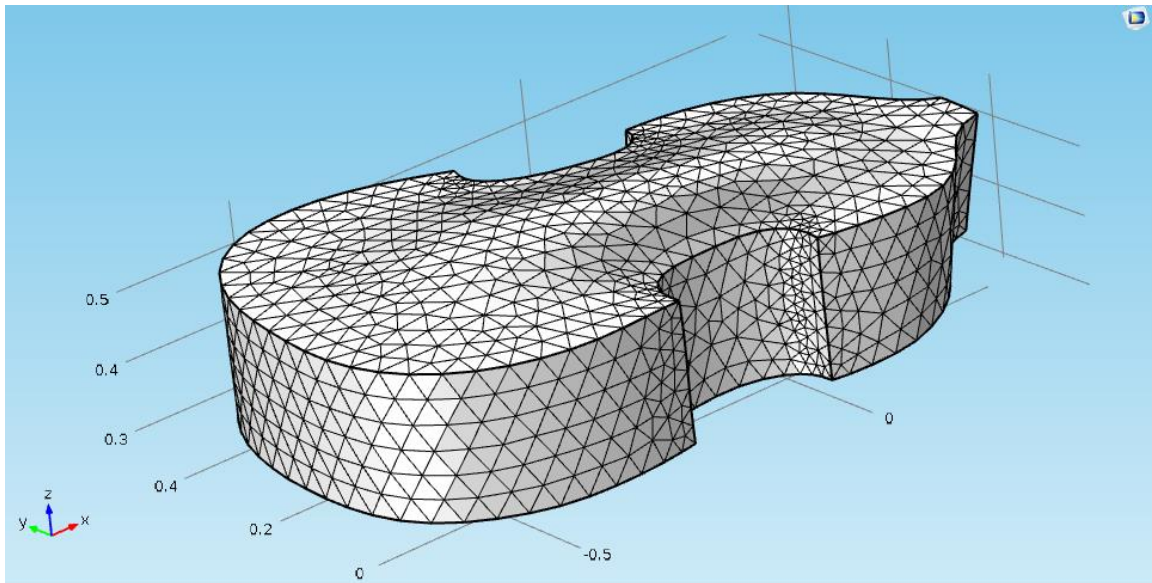
### **5.2.Ανάπτυξη αριθμητικού μοντέλου χωρίς τις οπές του καπακιού**

Οι ιδιότητες του αέρα που εισάγονται στο λογισμικό είναι τιμές αναφοράς για θερμοκρασία δωματίου (293,15K). Συγκεκριμένα:

$$\text{Πυκνότητα: } \rho = 1,225 \text{ kg} / \text{m}^3$$

$$\text{Ταχύτητα του ήχου: } c = 342,2 \text{ m} / \text{s}^2$$

Το πλέγμα αναπτύχθηκε, όπως και στο ANSYS, με Program Controlled τρόπο, αφού ορίστηκε το πρόβλημα ως ακουστικό. Για να οριστεί η ποιότητα του πλέγματος, ακολουθήθηκε η ίδια διαδικασία με το πλέγμα του στερεού μοντέλου. Ορίστηκε η μέγιστη πλευρά του πεπερασμένου στοιχείου για να είναι ασφαλώς αναγνωρίσιμες οι ιδιοσυχνότητες του συστήματος μέχρι και 2100 Hz. Το πλέγμα που προέκυψε φαίνεται στο σχήμα 5.3. Το πλέγμα αποτελείται από 25404 τετραεδρικά στοιχεία.



**Σχήμα 5.3:** Πλέγμα μοντέλου ακουστικής κοιλότητας χωρίς τις τρύπες του καπακιού

Το πακέτο του COMSOL που χρησιμοποιήθηκε είναι το Pressure Acoustics, Frequency Domain.

### 5.3.Ανάλυση αριθμητικού μοντέλου χωρίς οπές καπακιού

Όπως είναι γνωστό, σε περίπτωση ακουστικής κοιλότητας με άκαμπτα τοιχώματα, η πρώτη ιδιοσυχνότητα είναι 0, καθώς η ακουστική εμπέδηση είναι άπειρη (Προβατίδης, 2016). Σημειώνεται η εξίσωση Helmholtz, από την οποία προκύπτουν οι ιδιοσυχνότητες για ορισμένες οριακές συνθήκες.

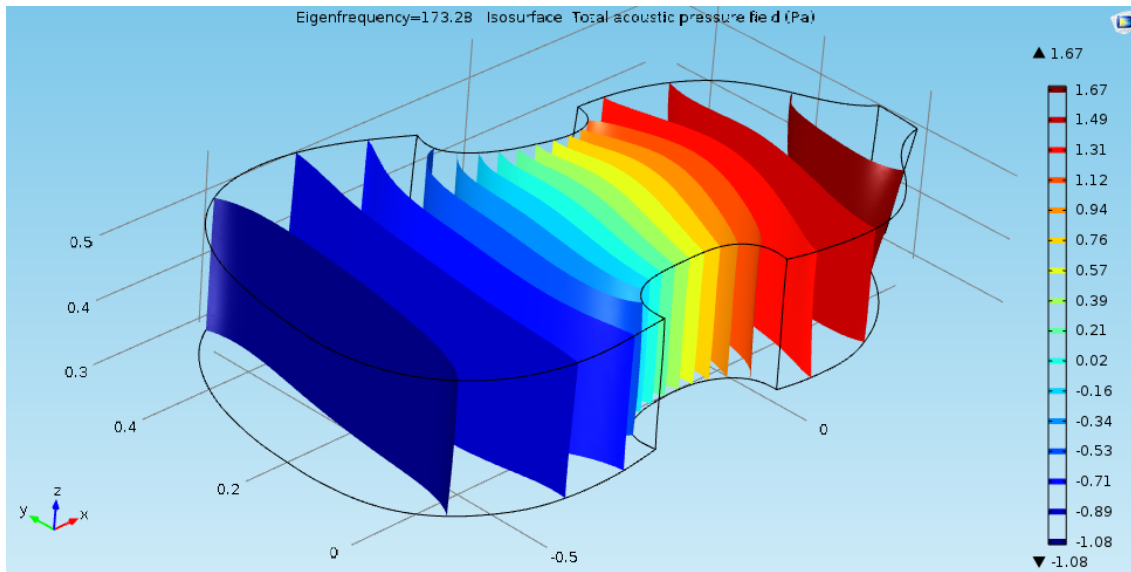
$$\nabla^2 p_0 + k^2 p_0 = 0 \quad [5.1]$$

$$\text{Όπου: } k = \frac{\omega}{c}$$

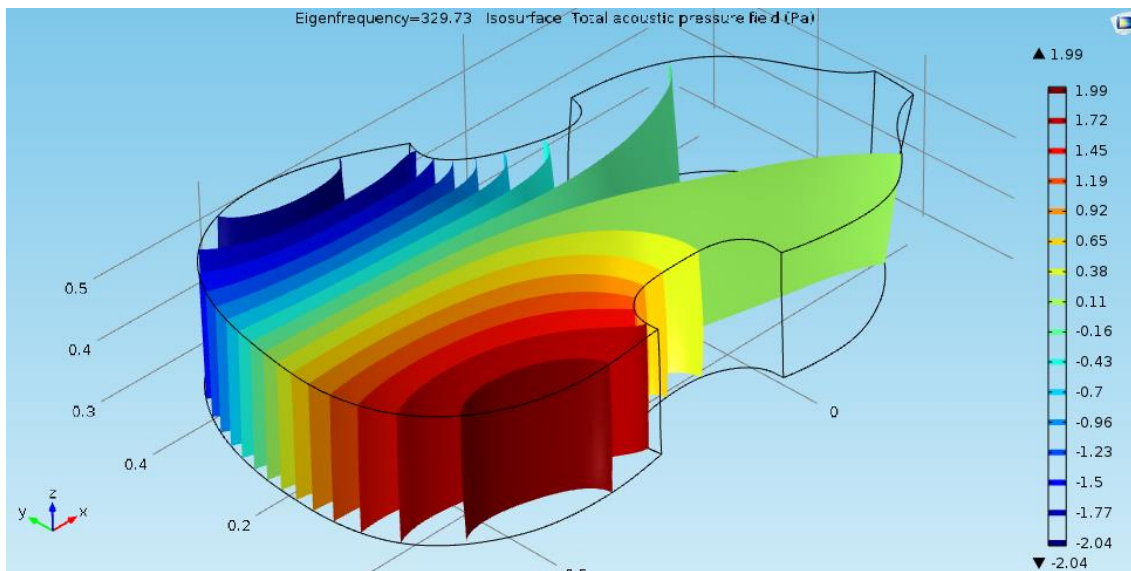
Αγνοώντας την πρώτη ιδιοσυχνότητα που προκύπτει από την αριθμητική λύση του μοντέλου, η οποία είναι σχεδόν 0, οι 6 πρώτες ιδιοσυχνότητες που προκύπτουν, και κάποιες χαρακτηριστικές από τις ψηλότερες, είναι οι παρακάτω. Σημειώνεται ότι με τα πιο ανοιχτά χρώματα φαίνονται οι περιοχές γύρω από τους δεσμούς, ενώ με έντονο μπλε και έντονο κόκκινο φαίνονται οι περιοχές κοντά σε ακραίες μεταβολές πίεσης. Στις παρενθέσεις σημειώνεται, όπου είναι δυνατό, ο αριθμός των δεσμών ανά επίπεδο (xz,yz,xy).



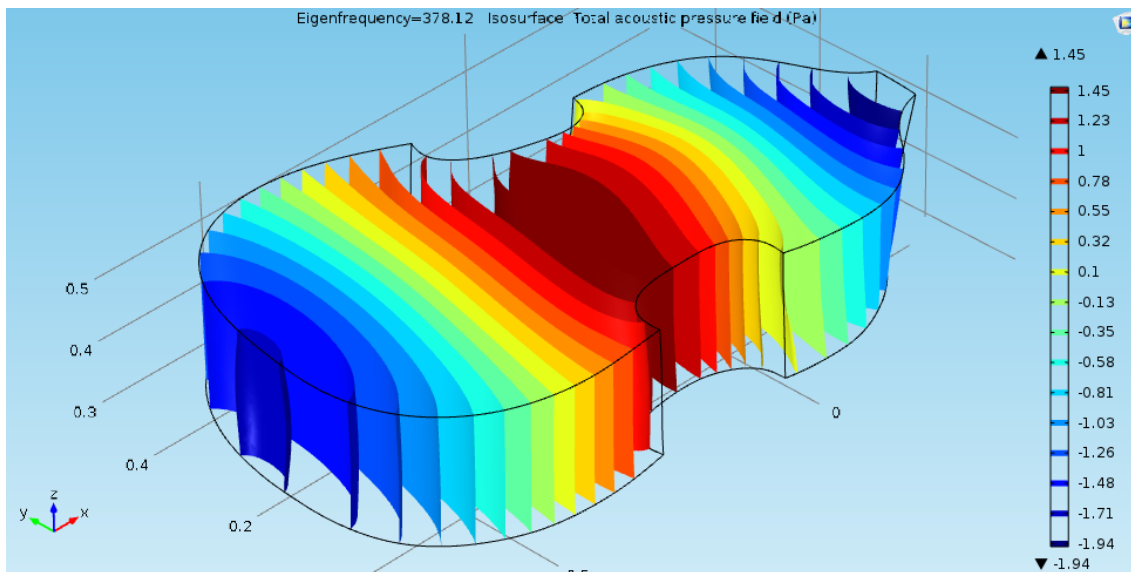
# ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΣΗ ΜΠΑΣΟΥ



Σχήμα 5.4: 2<sup>η</sup> Ιδιοσυχνότητα (173,28 Hz)(0,1,0)

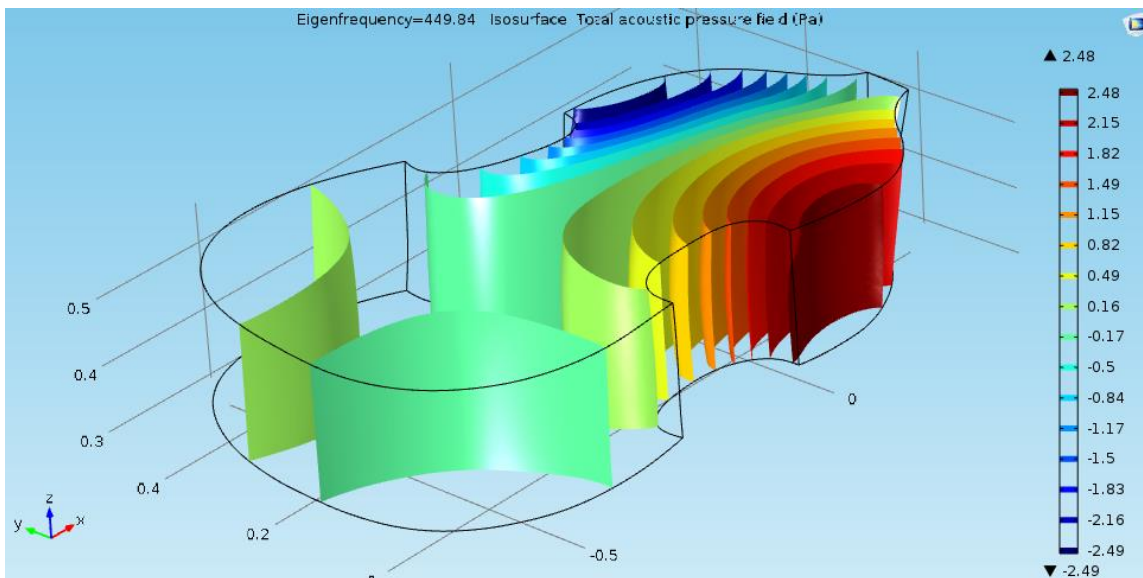


Σχήμα 5.5: 3<sup>η</sup> Ιδιοσυχνότητα (329,73 Hz)(1,0,0)

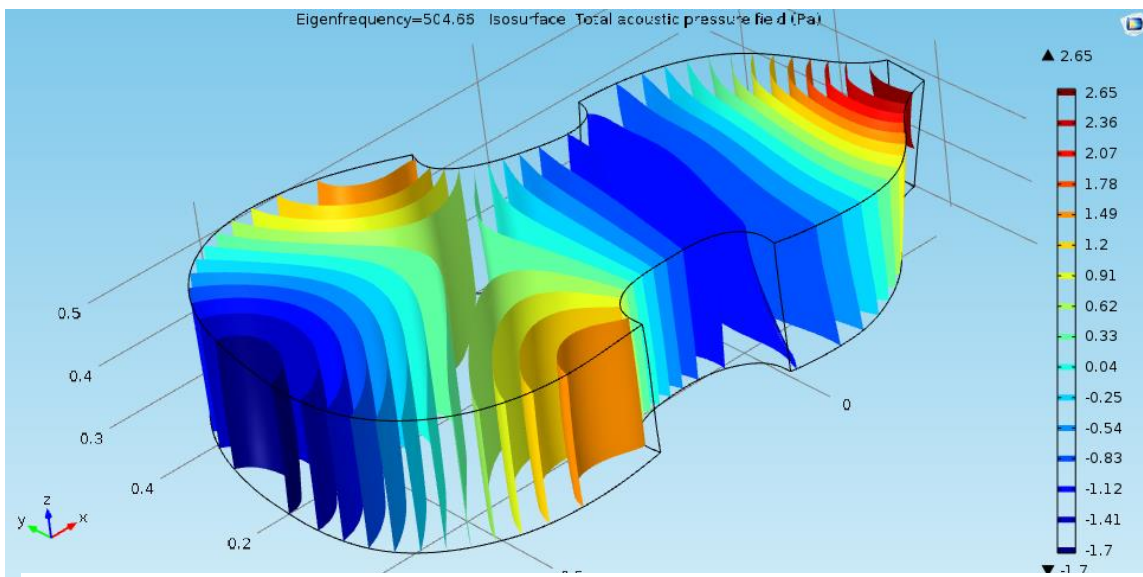


Σχήμα 5.6: 4<sup>η</sup> Ιδιοσυχνότητα (378,12 Hz)(0,2,0)

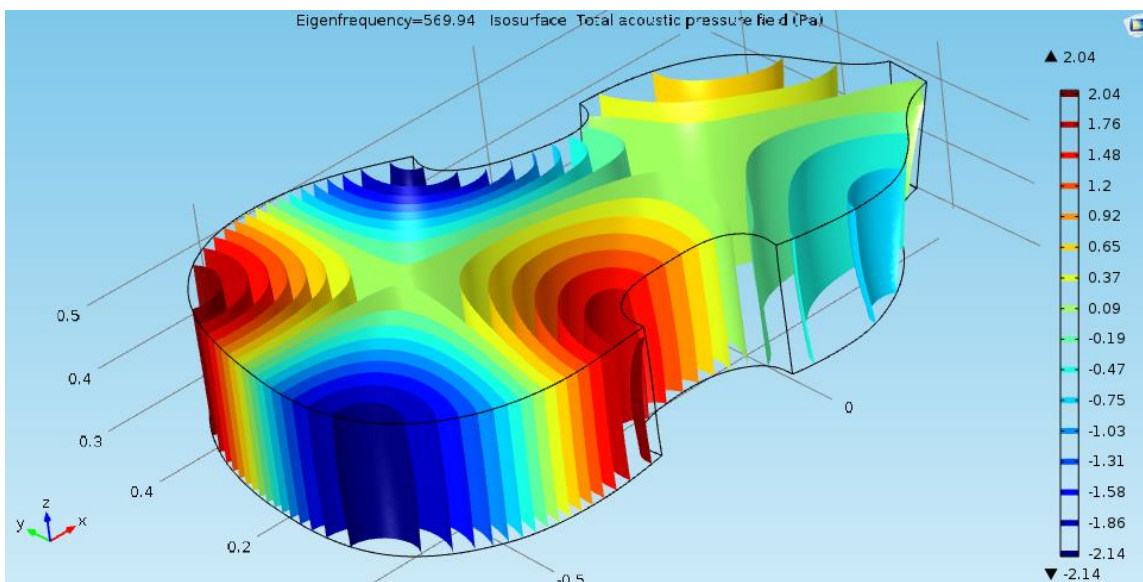




Σχήμα 5.7: 5<sup>η</sup> Ιδιοσυχνότητα (449,84 Hz)(1,1,0)

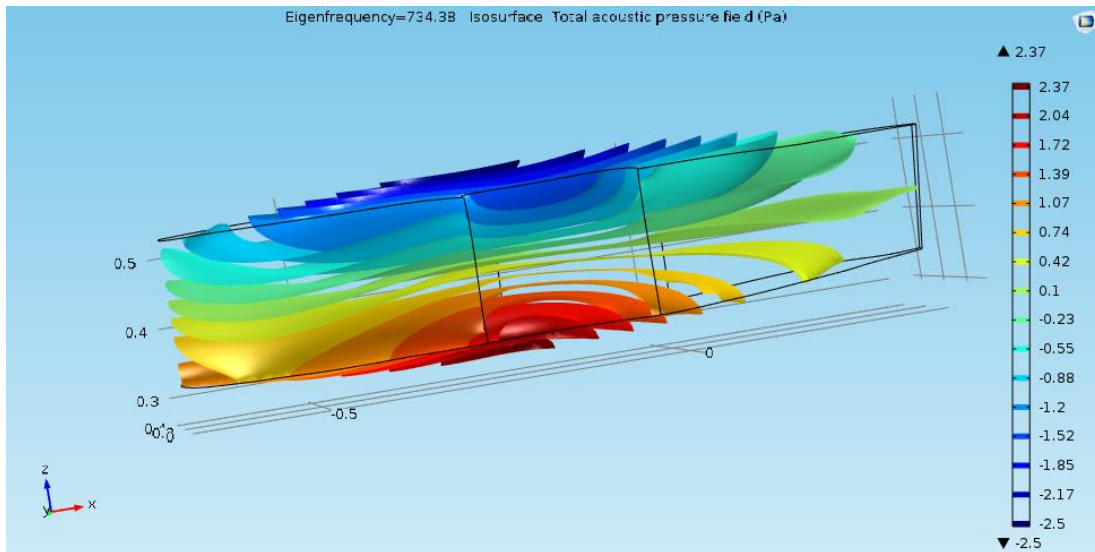


Σχήμα 5.8: 6<sup>η</sup> Ιδιοσυχνότητα (504,65 Hz)(0,3,0)

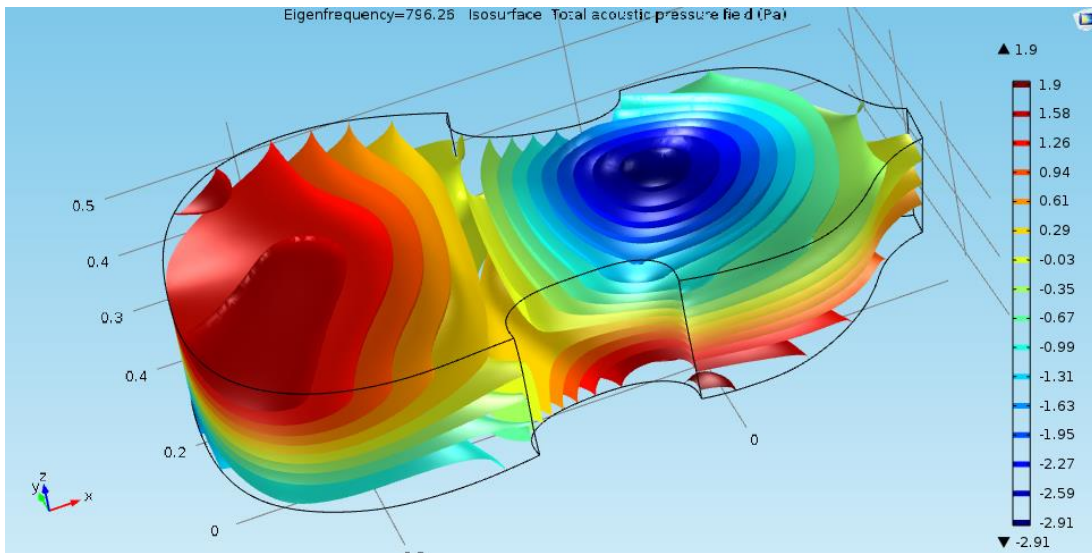


Σχήμα 5.9: 7<sup>η</sup> Ιδιοσυχνότητα (569,94 Hz)(1,2,0)

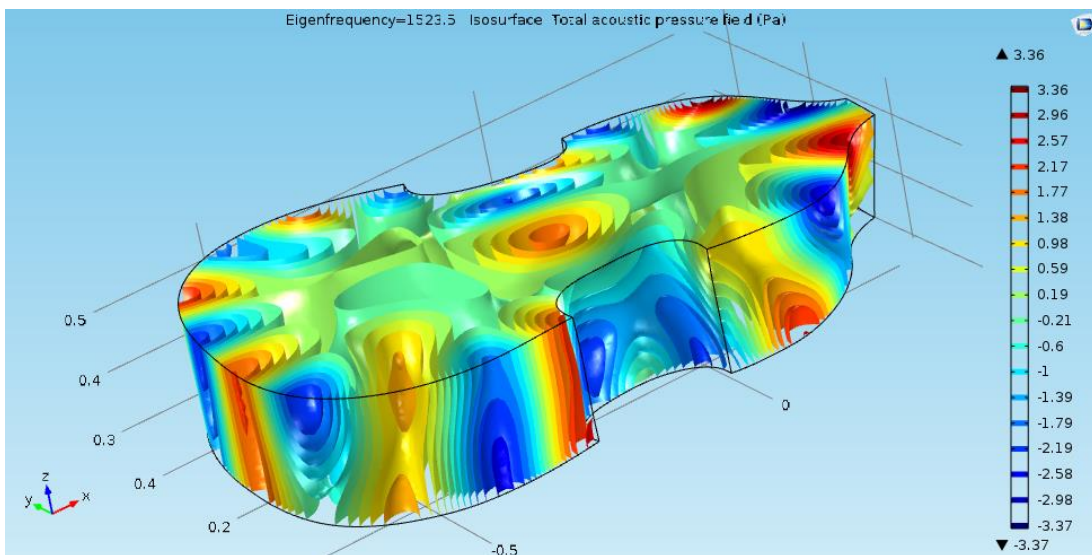
# ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΣΗ ΜΠΑΣΟΥ



**Σχήμα 5.10: 11<sup>η</sup> Ιδιοσυχνότητα (734,38 Hz)(0,0,1). Η 1<sup>η</sup> ιδιοσυχνότητα με δεσμούς στο επίπεδο  $xy$**



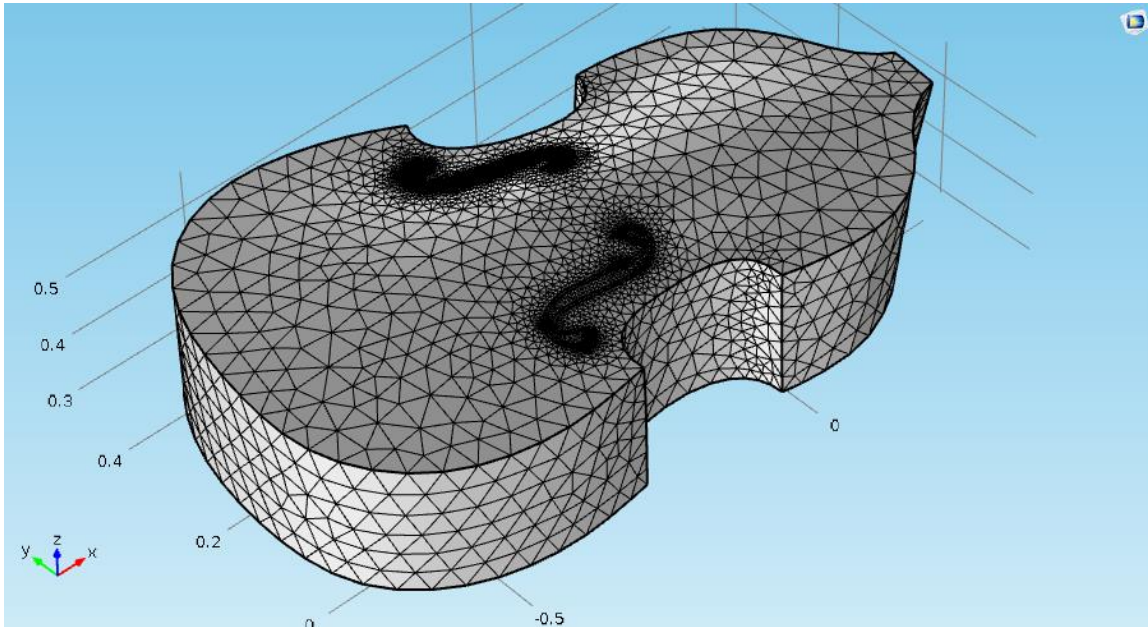
**Σχήμα 5.11: 13<sup>η</sup> Ιδιοσυχνότητα (796,25 Hz)(0,1,1)**



**Σχήμα 5.12: 66<sup>η</sup> Ιδιοσυχνότητα (1523,5 Hz).**

### 5.4.Ανάπτυξη αριθμητικού μοντέλου με οπές καπακιού

Ακολουθήθηκε η ίδια διαδικασία με αυτήν του μοντέλου χωρίς οπές, στη νέα γεωμετρία. Το αποτέλεσμα, μαζί με το πλέγμα, φαίνεται στο σχήμα 5.13. Το πλέγμα αποτελείται από 88408 τετραεδρικά στοιχεία.



Σχήμα 5.13: Πλέγμα μοντέλου ακουστικής κοιλότητας με τις τρύπες του καπακιού

### 5.5.Ανάλυση αριθμητικού μοντέλου με οπές καπακιού

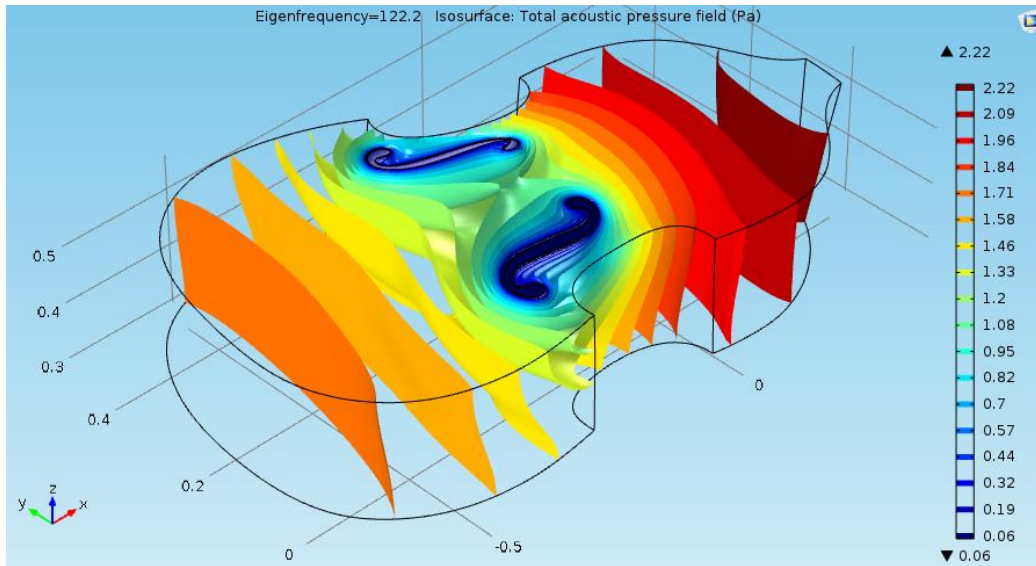
Η ανάλυση γίνεται με τον ίδιο τρόπο, όπως στην περίπτωση του 1<sup>ου</sup> μοντέλου. Προσθέτουμε ως οριακές συνθήκες στα στοιχεία που αντιστοιχούν στις τρύπες:

$$P_t = P_0 \quad [5.2]$$

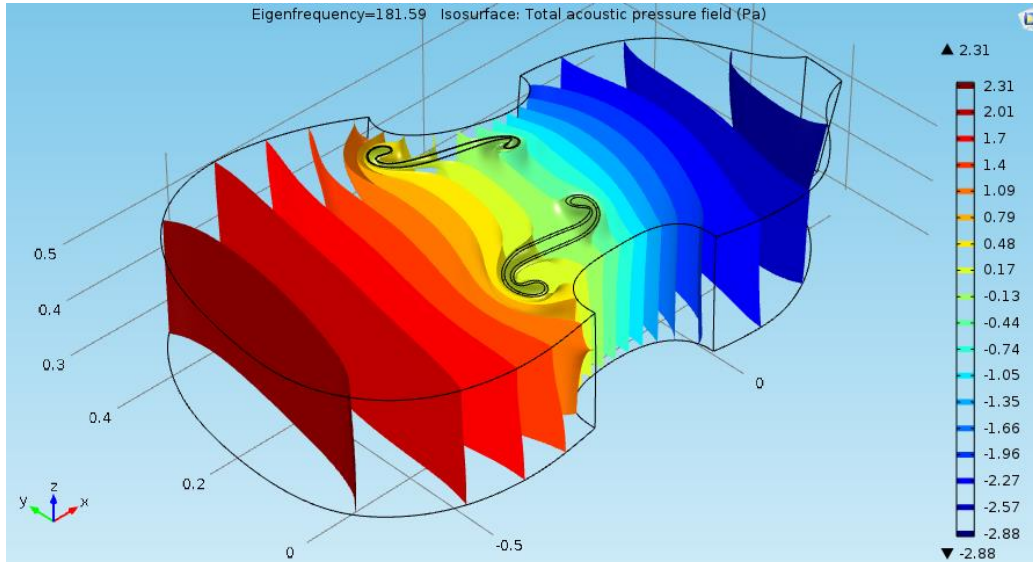
Με τις νέες οριακές συνθήκες δεν υπάρχει ιδιοσυχνότητα 0, αφού υπάρχει κομμάτι των ορίων που δεν έχουν άπειρη αντίσταση. Έτσι, προστίθεται στην ανάλυσή μας μία νέα ιδιοσυχνότητα, της οποίας η μορφή δεν είναι αντίστοιχη με κάποια από αυτές του μοντέλου χωρίς τις οπές. Η ιδιοσυχνότητα αυτή, φαίνεται ότι, χαρακτηρίζεται από ταλάντωση του αέρα στην περιοχή των οπών του καπακιού. Άρα αντιστοιχεί στην ιδιομορφή A0 του βιολιού (Fletcher, και συν., 1998). Στα σχήματα που ακολουθούν, βλέπουμε ιδιομορφές αντίστοιχες με του μοντέλου χωρίς τις οπές. Επιπλέον βλέπουμε τη νέα ιδιοσυχνότητα που αντικαθιστά τη μηδενική του μοντέλου χωρίς τις οπές.



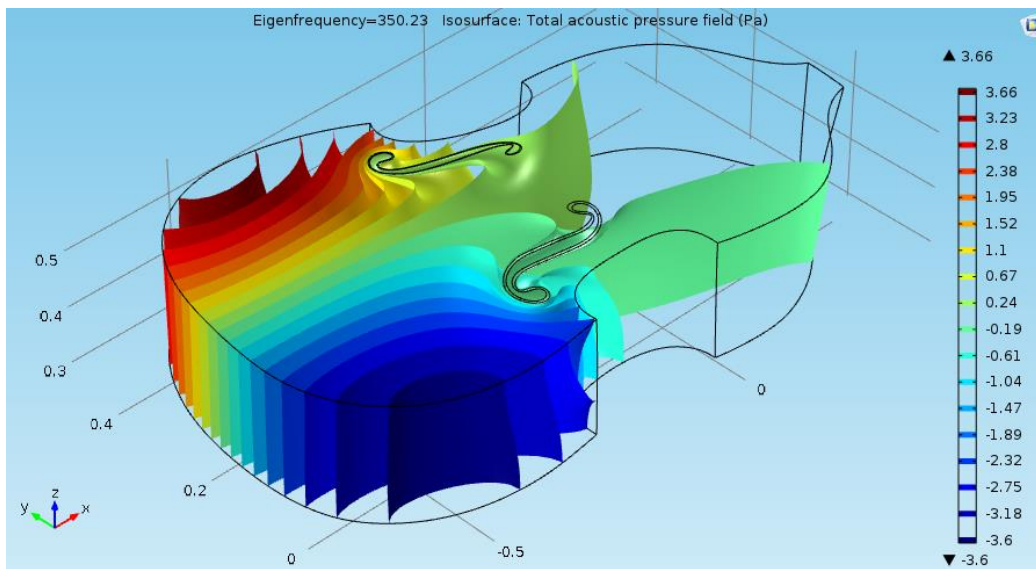
# ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΣΗ ΜΠΑΣΟΥ



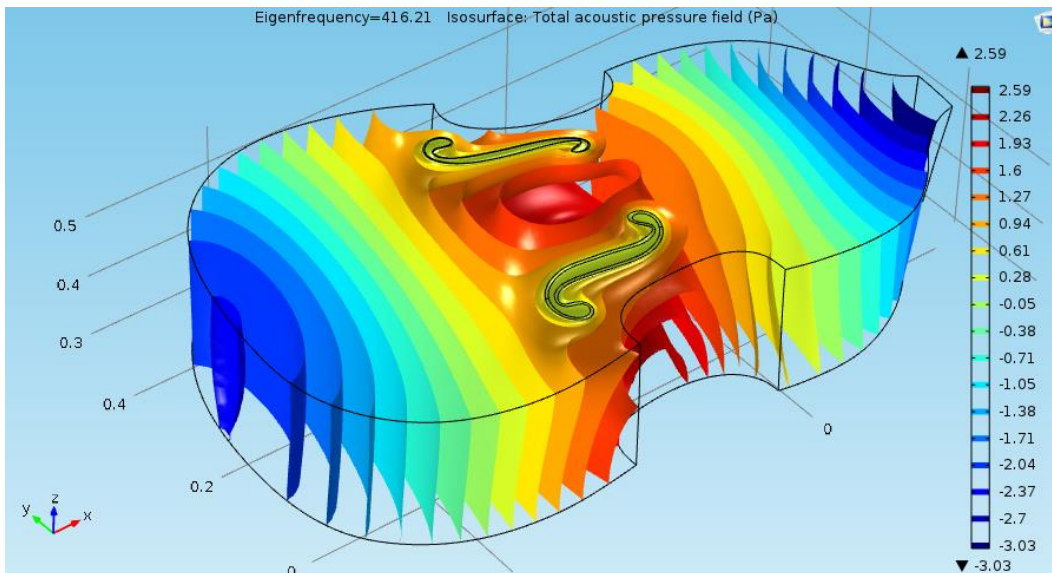
**Σχήμα 5.14: 1<sup>η</sup> Ιδιοσυχνότητα (122,2 Hz), A0**



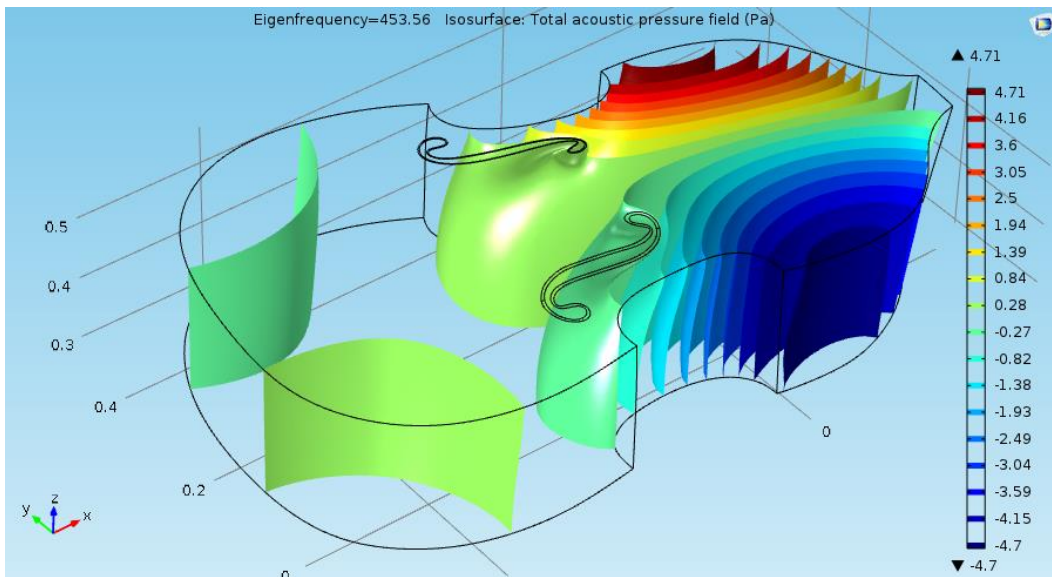
**Σχήμα 5.15: 2<sup>η</sup> Ιδιοσυχνότητα (181,59 Hz)**



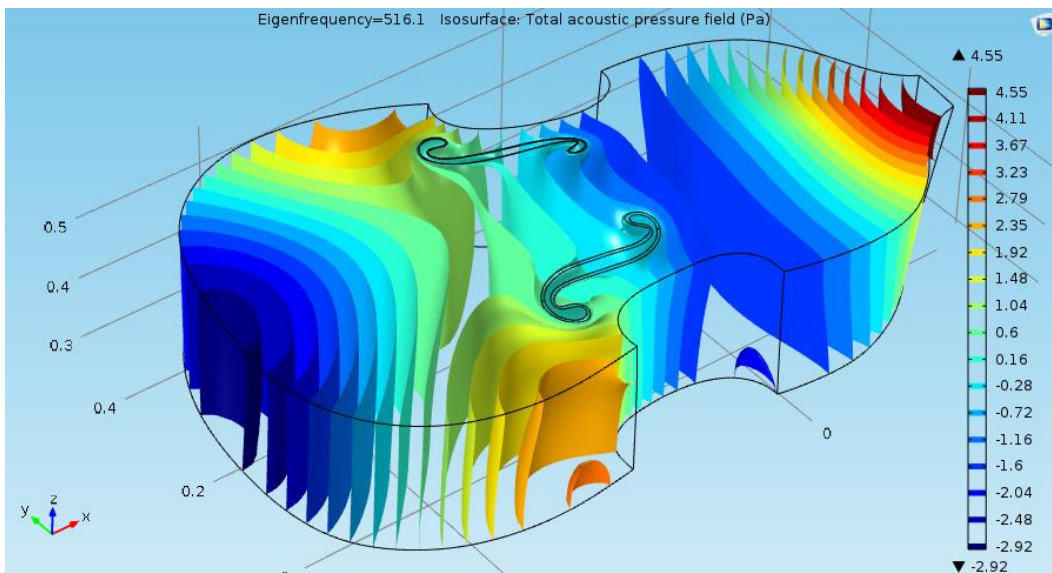
**Σχήμα 5.16: 3<sup>η</sup> Ιδιοσυχνότητα (350,23 Hz)**



Σχήμα 5.17: 4<sup>η</sup> Ιδιοσυχνότητα (416,21 Hz)

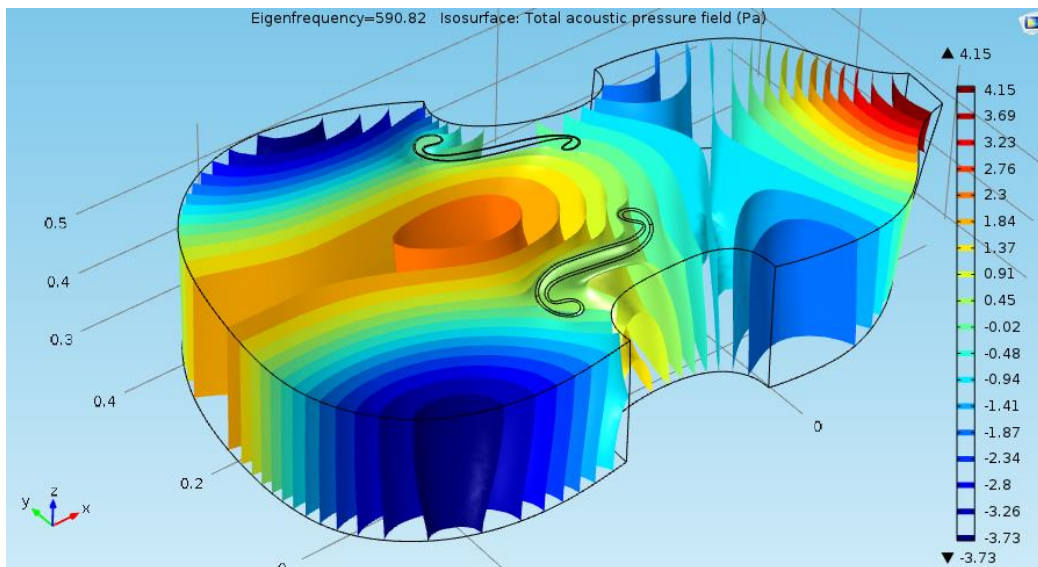


Σχήμα 5.18: 5<sup>η</sup> Ιδιοσυχνότητα (453,56 Hz)

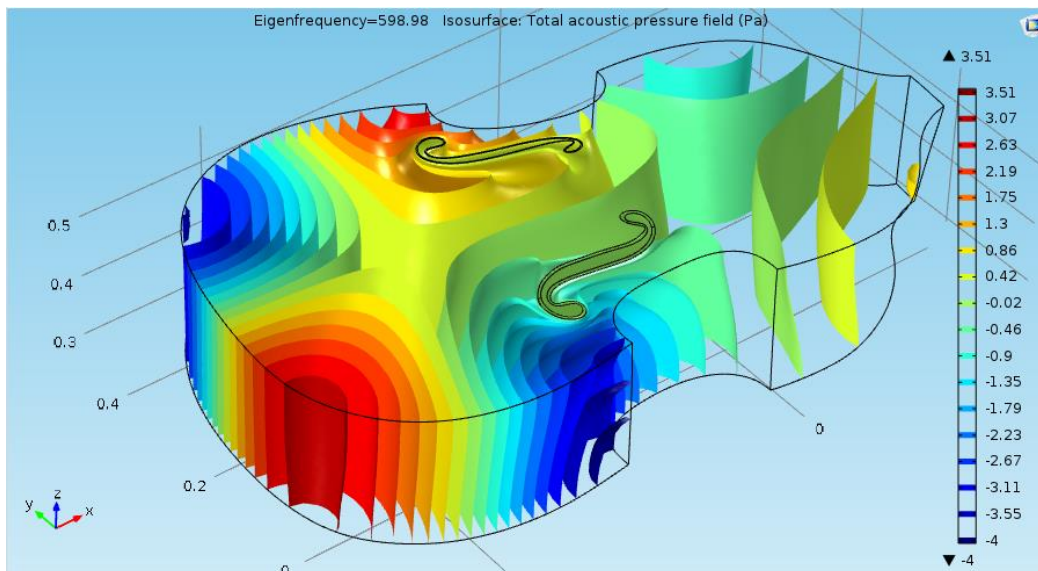


Σχήμα 5.19: 6<sup>η</sup> Ιδιοσυχνότητα (516,6 Hz)





Σχήμα 5.20: 7<sup>η</sup> Ιδιοσυχνότητα (590,82 Hz)



Σχήμα 5.21: 8<sup>η</sup> Ιδιοσυχνότητα (598,98 Hz)

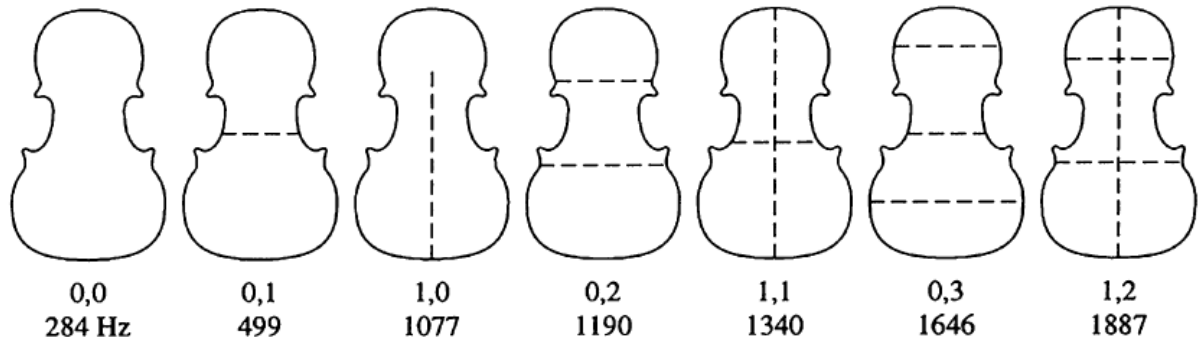
## 5.6. Σύγκριση αποτελεσμάτων των 2 μοντέλων

Στον παρακάτω πίνακα αντιστοιχίζονται οι επτά πρώτες ιδιοσυχνότητες του πρώτου μοντέλου με ιδιοσυχνότητες του μοντέλου με τις σπές. Τα κενά κελιά είναι εκεί που δεν υπάρχει αντιστοίχιση της μορφής, καθώς στο δεύτερο μοντέλο προστίθενται νέες ιδιοσυχνότητες που δημιουργούνται λόγω των νέων οριακών συνθηκών.

1 <sup>ο</sup> Μοντέλο (Hz)	0		173,28	329,73	378,12	449,84	504,65		569,94
2 <sup>ο</sup> Μοντέλο (Hz)		122,20	181,59	350,23	416,21	453,56	516,60	590,82	598,98
Διαφορά (Hz)			8,31	20,5	38,09	3,72	11,95		29,04

**Σχήμα 5.22: Συγκριτικός πίνακας των πρώτων ιδιοσυχνοτήτων των μοντέλων κοιλότητας αέρα**

Από τον πίνακα φαίνεται ότι οι ιδιοσυχνότητες του μοντέλου με τις οπές είναι ανεβασμένες σε σχέση με αυτές του μοντέλου χωρίς τις οπές. Η διαφορά τους όμως δε φαίνεται να ακολουθεί κάποια κανονικότητα. Οι ιδιοσυχνότητες του μοντέλου με τις οπές (εκτός της 7<sup>ης</sup> – 590,82 Hz) έχουν αντίστοιχες μορφές στο βιολί και το τσέλο, οι οποίες έχουν προσδιοριστεί πειραματικά. Στο σχήμα 5.23 φαίνονται οι ιδιοσυχνότητες της κοιλότητας αέρα του βιολιού.



**Σχήμα 5.23: Ιδιοσυχνότητες κοιλότητας αέρα βιολιού με άκαμπτα τοιχώματα προσδιορισμένα πειραματικά.**

Η αναντιστοιχία του μπάσου με το βιολί και το τσέλο στη μορφή της 7<sup>ης</sup> ιδιοσυχνότητας επιβεβαιώνει το συμπέρασμα ότι το μπάσο δεν είναι απλά ένα «μεγαλύτερο βιολί» αλλά έχει ιδιαιτερότητες που δεν απαντώνται στα υπόλοιπα όργανα της οικογένειας.

### 5.7. Σύγκριση των αποτελεσμάτων της ακουστικής κοιλότητας με το στερεό μοντέλο

Παρατηρείται ότι οι πρώτες ακουστικές ιδιοσυχνότητες είναι στο διάστημα 100 – 200 Hz. Στο ίδιο διάστημα, το φάσμα του στερεού μοντέλου δεν παρουσιάζει κάποια

κορυφή. Άρα σε αυτήν την περιοχή, η ενίσχυση του ήχου λαμβάνει χώρα λόγω της ακουστικής κοιλότητας.

Στο σχήμα 5.24 φαίνονται οι πιο χαμηλές ιδιοσυχνότητες του στερεού μοντέλου σε αντιστοιχία με τις κοντινότερές τους του μοντέλου του ρευστού με τις τρύπες στο καπάκι.

Στερεό μοντέλο (Hz)	Ακουστικό μοντέλο (Hz)	Διαφορά (Hz)
82,62 (3 <sup>η</sup> Ιδ.)	122,20	39,58
193,78 (4 <sup>η</sup> Ιδ.)	181,59	-12,19
355,27 (13 <sup>η</sup> Ιδ.)	350,23	- 5,04
431,78 (17 <sup>η</sup> Ιδ.)	416,21	-15,57
456,52 (18 <sup>η</sup> Ιδ.)	453,56	-2,96
512,78 (21 <sup>η</sup> Ιδ.)	516,60	3,82
595,07 (25 <sup>η</sup> Ιδ.)	590,82	-4,25
595,07 (25 <sup>η</sup> Ιδ.)	598,98	3,91

**Σχήμα 5.24: Σύγκριση ιδιοσυχνοτήτων στερεού με ιδιοσυχνότητες ακουστικού μοντέλου**

Παρατηρείται ότι από την 4<sup>η</sup> ιδιοσυχνότητα και πάνω, η διαφορά είναι σχετικά μικρή. Άρα η 1<sup>η</sup>, η 2<sup>η</sup> και η 4<sup>η</sup> ιδιοσυχνότητα του αέρα, θα δημιουργήσουν νέες, διακριτές κορυφές στην απόκριση του οργάνου. Οι υπόλοιπες, πιθανά εκτός από τη δικιά τους εμφάνιση, θα λειτουργήσουν ενισχυτικά και σε κάποιες από τις ιδιοσυχνότητες του στερεού.

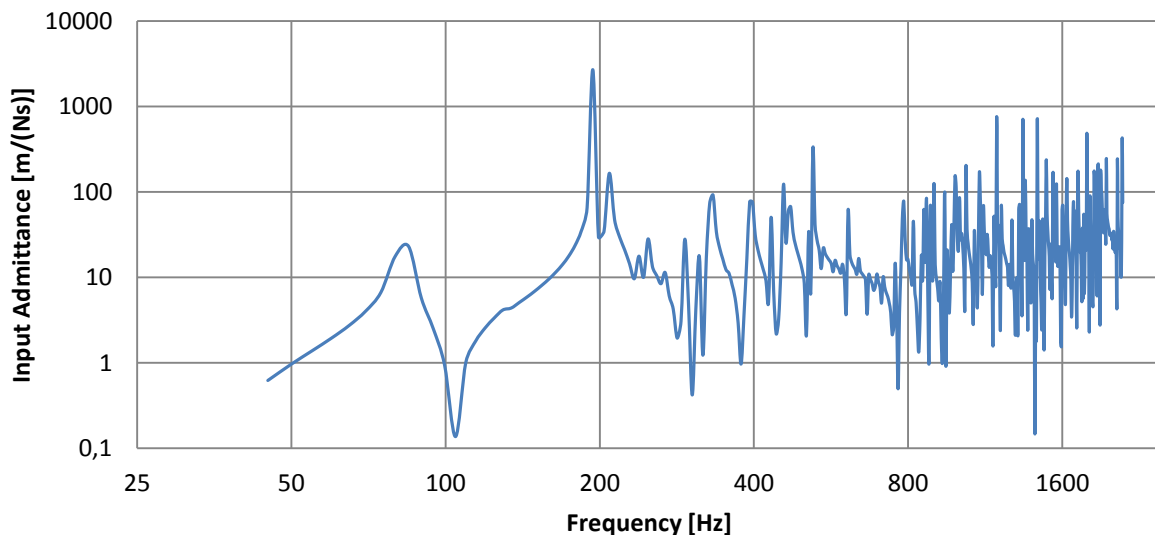
Προφανώς κατά τη συμβολή των δύο μοντέλων, αναμένεται ότι οι τιμές των ιδιοσυχνοτήτων των δύο ξεχωριστών μοντέλων θα μεταβληθούν. Η ποιότητα αυτής της μεταβολής θα είναι διαφορετική στο κάθε μοντέλο. Οι ιδιοσυχνότητες του στερεού μοντέλου θα πέσουν λίγο επειδή ο αέρας προσθέτει μία πολύ μικρή μάζα. Η πιο απλή μοντελοποίηση της απόκρισης του σώματος μπορεί να γίνει με ένα γραμμικό σύστημα μάζας ελατηρίου με μία ιδιοσυχνότητα. Αυτό το σύστημα, αν συμβληθεί με το σύστημα του αέρα θα έχει την τάση να χωρίσει την κάθε του ιδιοσυχνότητα σε μία λίγο μικρότερη και μία λίγο μεγαλύτερη (Centrih, 2011).



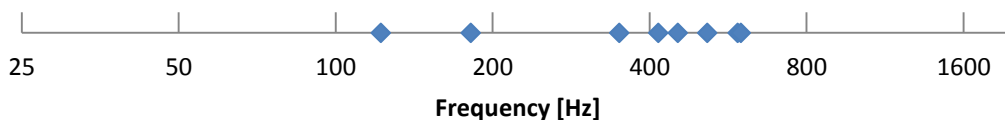
## 6. Σύγκριση αποτελεσμάτων με πειραματικά δεδομένα και τελικά συμπεράσματα

Θα χρησιμοποιηθεί το διάγραμμα απόκρισης που προέκυψε από τη διέγερση στο καπάκι, συνθέτοντάς το με την απόκριση διέγερσης στη γέφυρα στα σημεία που αυτή παρουσιάζει ενισχυμένες ιδιοσυχνότητες. Προκύπτει το σχήμα 6.1.

Για να είναι δυνατή η σύγκριση με τα υπάρχοντα φάσματα, είναι απαραίτητες και οι ιδιοσυχνότητες της κοιλότητας του αέρα. Στο σχήμα 6.2 σημειώνονται πάνω στον οριζόντιο άξονα οι 8 πρώτες.

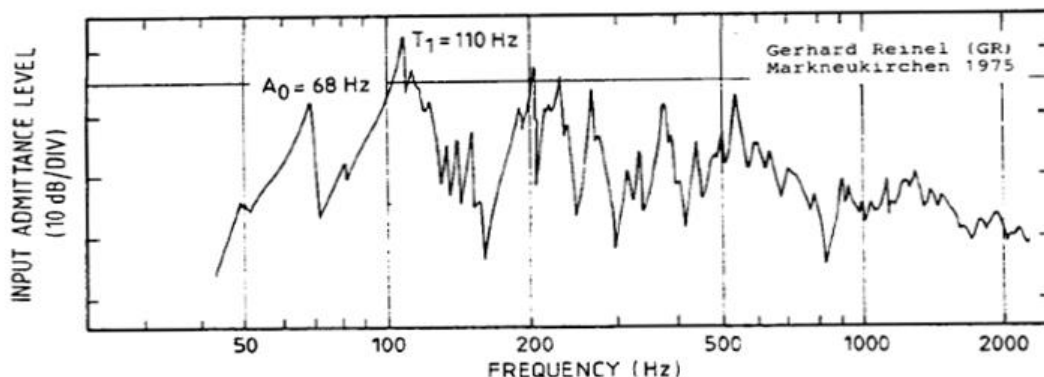


Σχήμα 6.1: Αγωγιμότητα εισόδου στερεού μοντέλου



Σχήμα 6.2: 8 πρώτες ιδιοσυχνότητες μοντέλου κοιλότητας αέρα

Το παραπάνω θα συγκριθεί με το πρώτο από τα φάσματα απόκρισης μπάσων που παρουσιάστηκε στο κεφάλαιο 2.

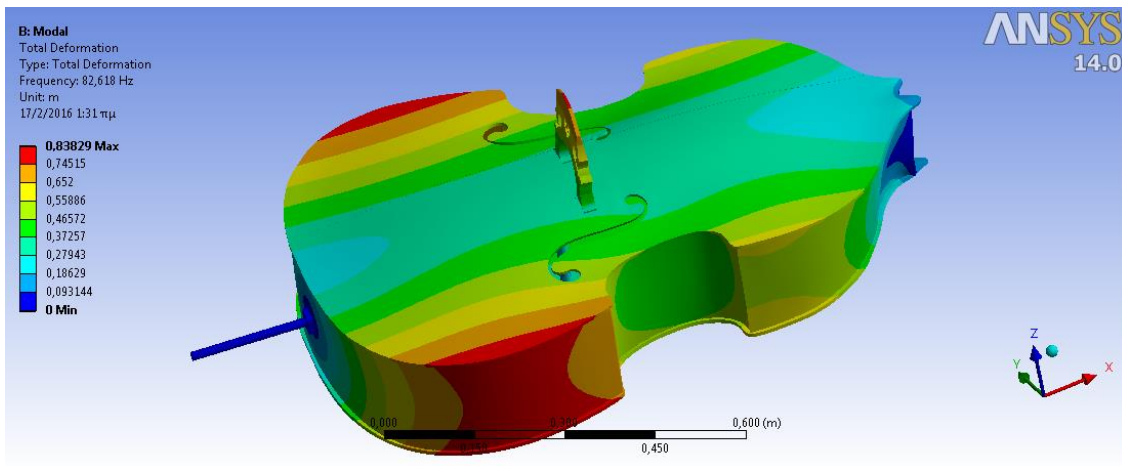


**Σχήμα 6.3: Αγωγιμότητα εισόδου κοντραμπάσου**

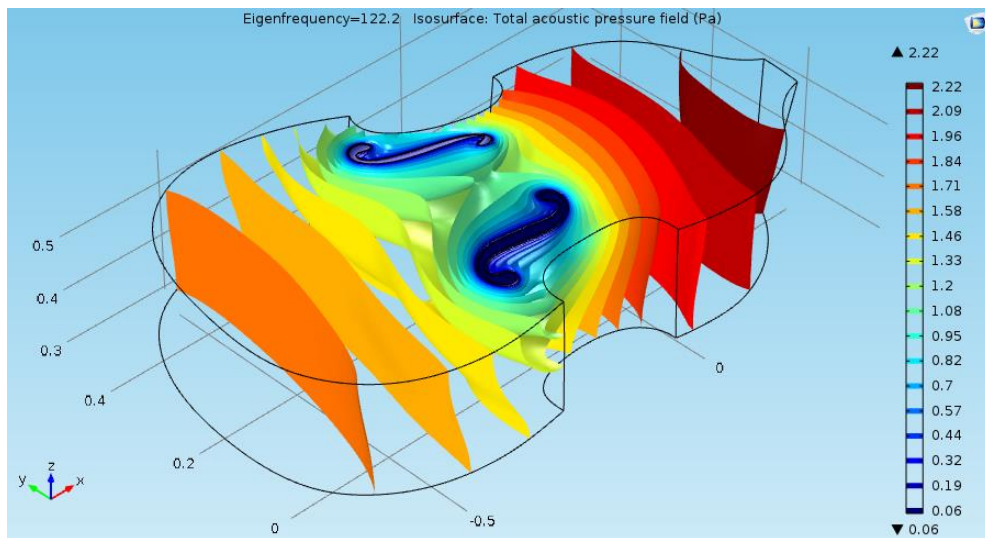
Ξεκινώντας από τις χαμηλές ιδιοσυχνότητες παρατηρούνται τα εξής:

- Η 1<sup>η</sup> ιδιοσυχνότητα που εμφανίζεται στο μοντέλο είναι 82 Hz. Αυτή αντιστοιχεί σε στρέψη δοκού. Η πρώτη ιδιοσυχνότητα που εμφανίζεται στα πειραματικά αποτελέσματα είναι 68 Hz. Αυτή η διαφορά μπορεί να δικαιολογηθεί από το γεγονός ότι το μπάσο το οποίο χρησιμοποιήθηκε για τη μοντελοποίηση έχει σχετικά μικρό μέγεθος ηχείου για την κατηγορία του (3/4).
- Η 2<sup>η</sup> σημαντική ιδιοσυχνότητα που εμφανίζεται στα πειραματικά αποτελέσματα είναι 110 Hz. Στην απόκριση του στερεού μοντέλου δεν εμφανίζεται ιδιομορφή κοντινής συχνότητας. Παρ' όλα αυτά, η πρώτη ιδιοσυχνότητα του μοντέλου του ρευστού είναι στα 122 Hz, η οποία όπως έχουμε ήδη εξηγήσει, αντιστοιχεί στην A0.
- Στο μοντέλο εμφανίζεται στη συνέχεια ιδιοσυχνότητα του ρευστού στα 182 Hz και ιδιοσυχνότητα του στερεού στα 194 Hz. Αυτή αντιστοιχεί στην μορφή T1, αφού είναι η πρώτη στην οποία ταλαντώνεται το καπάκι του οργάνου. Στα πειραματικά μας αποτελέσματα παρατηρείται ιδιοσυχνότητα στα 200 Hz.
- Στο εύρος 300 – 400 Hz βλέπουμε μία παρόμοια μορφή στην διακύμανση των ιδιοσυχνότητων

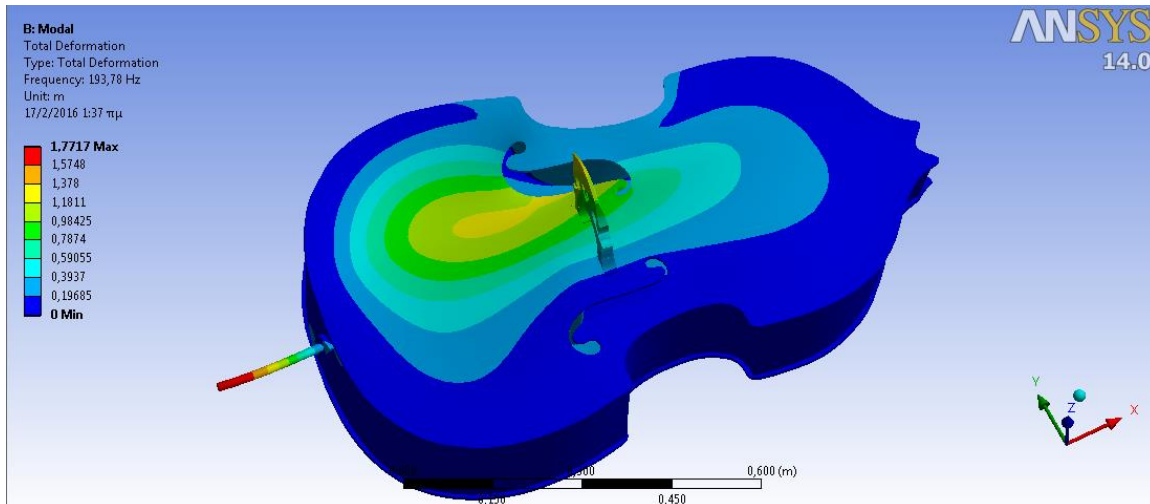
Με βάση τις παραπάνω παρατηρήσεις, υπάρχει συμφωνία στις χαμηλές ιδιοσυχνότητες του μοντέλου με αυτές των πειραματικών αποτελεσμάτων. Παρ' όλα αυτά η ονοματολογία που έχει χρησιμοποιηθεί στην περίπτωση των πειραμάτων δεν αντιστοιχεί στα συμπεράσματά μας. Έχει χρησιμοποιηθεί η ονομασία A0 (1<sup>η</sup> ιδιομορφή αέρα) στην ιδιοσυχνότητα 68 Hz και η ονομασία T1 (1<sup>η</sup> ιδιομορφή καπακιού) στην ιδιοσυχνότητα 110 Hz. Παρακάτω ξαναπαρουσιάζονται τις ιδιομορφές των πρώτων ιδιοσυχνοτήτων των μοντέλων αέρα και στερεού.



**Σχήμα 4.10: 3<sup>η</sup> Ιδιοσυχνότητα (82,618Hz). Στρέψη του σώματος. Χωρίς ακουστικό ενδιαφέρον**



**Σχήμα 5.14: 1<sup>η</sup> Ιδιοσυχνότητα αέρα (122,2 Hz), A0**



Σχήμα 4.11: 4<sup>η</sup> Ιδιοσυχνότητα (193,78Hz). T1, Διέγερση του καπακιού



Σχήμα 4.12: Ιδιομορφή T1 βιολιού (Rossing, 2010)

Είναι εμφανές ότι, με βάση τα αριθμητικά αποτελέσματα, η αντιστοίχιση των ιδιομορφών με την ονοματολογία επιδέχεται βελτίωση. Μία εξαγωγή φάσματος από ενιαίο μοντέλο στερεού – ρευστού μπορεί να δώσει την τελική επιβεβαίωση και να δικαιολογήσει πλήρως μία πρόταση για μία βελτιωμένη ονοματολογία των ιδιομορφών του μπάσου.

## 7. Δυνατότητες περαιτέρω μελέτης

Οι δυνατότητες περαιτέρω μελέτης αρχικά αφορούν τη βελτίωση του ίδιου του μοντέλου. Προτείνονται:

- Βελτίωση της γεωμετρίας του στερεού μοντέλου λαμβάνοντας υπ' όψιν τη διακύμανση του πάχους του καπακιού και της πλάτης. Η διακύμανση αυτή, έχει αποδειχθεί, ότι έχει άμεσο αντίκτυπο στην απόκριση του οργάνου, κυρίως στις ψηλές ιδιοσυχνότητες.
- Συμβολή των δύο μοντέλων (στερεού και ακουστικού) σε ένα και μελέτη της επιρροής της συμβολής στις ιδιοσυχνότητες. Η εξαγωγή του φάσματος του ενιαίου μοντέλου μπορεί να συγκριθεί πολύ πιο αποτελεσματικά με τα πειραματικά αποτελέσματα
- Προσθήκη των χορδών στο μοντέλο για μελέτη των δυναμικών φαινομένων που προκύπτουν από τη συμβολή χορδών – σώματος.

Ο πραγματικός σκοπός, όμως, αυτής της εργασίας είναι να μελετηθούν νέες δυνατότητες στην κατασκευή των εγχόρδων. Ενδεικτικά προτείνονται:

- Εφαρμογή στο κοντραμπάσο της μελέτης που αφορά πρωτότυπο συνθετικό καπάκι (Lu, 2013)
- Μοντελοποίηση της διέγερσης με το δοξάρι και μελέτη της δυναμικής της χορδής με διέγερση τριβής
- Μοντελοποίηση του wolf killing device και μελέτη της απόκρισής του



Equation Chapter 1 Section 1

**ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ι****Κάθετο κύμα σε χορδή****I.I.Εξίσωση Κύματος**

Η εξίσωση κίνησης κάθετου κύματος σε ταλαντευόμενη χορδή απείρου μήκους είναι:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T}{\mu} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad [I.1]$$

Όπου  $c$ : η ταχύτητα διάδοσης του κύματος στη χορδή

$T$ : η τάση της χορδής

και  $\mu$ : η γραμμική της πυκνότητα

Ισχύει :

$$c = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad [I.2]$$

Η γενική λύση της παραπάνω εξίσωσης γράφεται κατά d' Alembert:

$$y = f_1(ct - x) + f_2(ct + x) \quad [I.3]$$

Το πρώτο μέρος της λύσης περιγράφει ένα κύμα που ταξιδεύει προς τα δεξιά και το δεξί ένα κύμα που ταξιδεύει προς τα αριστερά. Οι  $f_1$  και  $f_2$  είναι τυχαίες συναρτήσεις. Για παράδειγμα μπορούν να έχουν μορφή ημιτονοειδή ή και βηματική. Η παραπάνω εξίσωση μας επιτρέπει να μελετήσουμε τη συμβολή κύματος με την ανάκλασή του στο άκρο της χορδής.

**I.II.Ανάκλαση σε Πακτωμένο και Ελεύθερο Άκρο**

## ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΣΗ ΜΠΑΣΟΥ

Μελετάμε 2 περιπτώσεις ακραίων συνθηκών της χορδής:

1) Πακτωμένο άκρο χορδής στο  $x=0$ :

Η συνθήκη είναι  $y=0$  για  $x=0$ . Άρα η εξίσωση [I.3] γίνεται:

$$f_1(ct) = -f_2(ct) \quad [I.4]$$

2) Ελεύθερο άκρο κατά  $\psi$  στο  $x=0$ :

Η συνθήκη είναι  $\partial\psi/\partial x = 0$  εφόσον είναι αδύνατον να ασκηθεί κάθετη δύναμη.

Η μερική παράγωγος της [I.3] κατά  $x$  είναι:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -f_1' + f_2' \quad [I.5]$$

Άρα από την εξίσωση κύματος παίρνουμε:

$$f_1'(ct) = f_2'(ct) \quad [I.6]$$

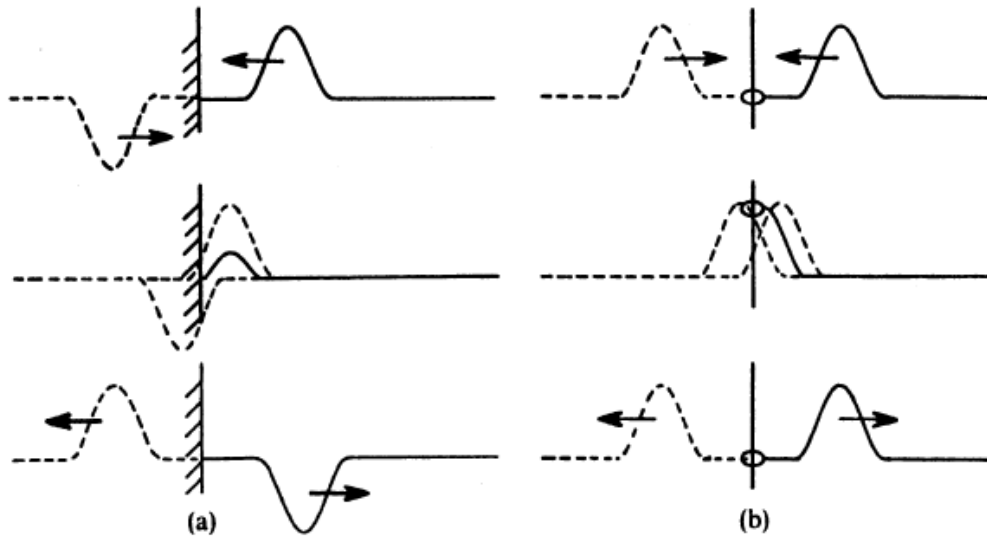
Και ολοκληρώνοντάς την :

$$f_1(ct) = f_2(ct) \quad [I.7]$$

Συνεπώς, στην περίπτωση πακτωμένου άκρου μία κορυφή κύματος ανακλάται ως κοιλάδα ενώ στην περίπτωση ελεύθερου κατά  $y$  άκρου μία κορυφή κύματος ανακλάται ως κορυφή.

Στο σχήμα I.1 φαίνονται τα παραπάνω αποτελέσματα:





Σχήμα 1.1: Ανάκλαση κύματος σε (a) πακτωμένο και (b) ελεύθερο κατά  $y$  άκρο (Fletcher, et al., 1998)

### I.III. Απλή Αρμονική Λύση της Εξίσωσης Κύματος

Με ένα απλό παράδειγμα θεωρούμε ότι κάθε μία από τις δύο συναρτήσεις της εξίσωσης κύματος [I.3] αποτελείται από ένα ημιτονοειδές και ένα συνημιτονοειδές μέρος με συχνότητα  $\omega$ . Προκύπτει η εξίσωση:

$$y(x,t) = A\sin(\omega t - kx) + B\cos(\omega t - kx) + C\sin(\omega t + kx) + D\cos(\omega t + kx) \quad [I.8]$$

$$\text{Όπου } k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Είναι πρακτικό η παραπάνω να γραφεί σε μιγαδική μορφή:

$$y(x,t) = Ae^{i(\omega t - kx)} + Be^{i(\omega t + kx)} \quad [I.9]$$

### I.IV. Στάσιμα Κύματα

## ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΣΗ ΜΠΑΣΟΥ

Για χορδή ορισμένου μήκους  $L$  πακτωμένη στα  $x=0$  και  $x=L$  έχουμε:

$$1^{\text{η}} \text{ συνθήκη: } y(0, t) = 0 \rightarrow A = -C \text{ και } B = -D \text{ (από εξ. [I.8])}$$

Άρα η [I.8] γράφεται

$$y = A(\sin(\omega t - kx) - \sin(\omega t + kx)) + B(\cos(\omega t - kx) - \cos(\omega t + kx)) \quad [\text{I.10}]$$

Λύνοντας χρησιμοποιώντας τριγωνομετρικές ταυτότητες έχουμε:

$$y = 2(A \cos \omega t - B \sin \omega t) \sin kx \quad [\text{I.11}]$$

$$2^{\text{η}} \text{ συνθήκη: } y(L, t) = 0 \rightarrow \sin kL = 0 \rightarrow \frac{\omega L}{c} = n\pi \text{ (από εξ. [I.8])}$$

$$\text{Άρα το } \omega \text{ παίρνει τιμές: } \omega_n = \frac{n\pi c}{L} \text{ ή } f_n = n\left(\frac{c}{2L}\right) \quad [\text{I.12}]$$

Άρα η χορδή έχει ιδιοσυχνότητες  $\omega_n$  και εξίσωση ταλάντωσης σε αυτές:

$$y_n(x, t) = (A_n \sin \omega_n t + B_n \cos \omega_n t) \sin\left(\frac{\omega_n x}{c}\right) \quad [\text{I.13}]$$

Αυτές είναι αρμονικές μεταξύ τους αφού κάθε  $f_n$  είναι  $n$  φορές μεγαλύτερο από την  $f_1 = c / 2L$ . Η γενική λύση της ταλαντευόμενης χορδής με πακτωμένα άκρα μπορεί να γραφεί ως το άθροισμα των ιδιοσυχνοτήτων της:

$$y = \sum_n (A_n \sin \omega_n t + B_n \cos \omega_n t) \sin k_n x \quad [\text{I.14}]$$

Το πλάτος ταλάντωσης της  $n$ -οστής ιδιοσυχνότητας είναι:  $C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$

Εναλλακτικά η γενική λύση μπορεί να γραφεί ως:

$$y = \sum_n C_n \sin(\omega_n t + \varphi_n) \sin k_n x \quad [\text{I.15}]$$

## I.V. Ενέργεια Ταλαντευόμενης Χορδής

Όταν μία χορδή ταλαντώνεται με συχνότητα μία από τις ιδιοσυχνότητές της, η κινητική και η δυναμική της ενέργεια παίρνουν διαδοχικά τις μέγιστες τιμές τους, όπως συμβαίνει και με το σύστημα μάζα – ελατήριο. Το άθροισμα αυτών των 2 ενεργειών κάθε στιγμή μας δίνει το σύνολο της ενέργειας της ταλαντευόμενης χορδής.

Η μέγιστη κινητική ενέργεια του στοιχειώδους μήκους της χορδής που ταλαντεύεται στη  $n$ -οστή ιδιοσυχνότητά της είναι:

$$dE_n = \frac{\omega_n^2 \mu}{2} (A_n^2 + B_n^2) \sin^2 \frac{n\pi x}{L} dx \quad [I.16]$$

Ολοκληρώνοντάς την στο μήκος της χορδής παίρνουμε:

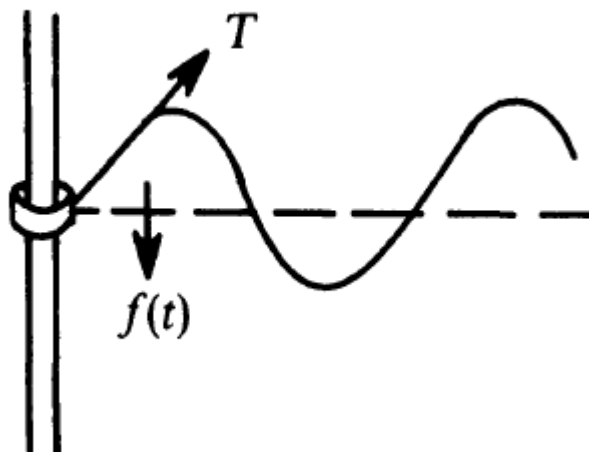
$$E_n = \frac{\omega_n^2 \mu L}{4} (A_n^2 + B_n^2) = \frac{\omega_n^2 \mu L}{4} C_n^2 \quad [I.17]$$

Η συνολική ενέργεια της ταλαντευόμενης χορδής βρίσκεται αθροίζοντας την ενέργεια της κάθε επί μέρους ιδιοσυχνότητας:

$$E = \sum_n E_n \quad [I.18]$$

## I.VI. Διέγερση χορδής και σύνθετη εμπέδηση

Θεωρούμε χορδή απείρου μήκους, τάσης  $T$ , την οποία διεγείρουμε στο αριστερό της άκρο με κάθετη δύναμη  $f(t) = Fe^{j\omega t}$  όπως φαίνεται στο σχήμα I.I



Σχήμα 1.11: Χορδή άπειρου μήκους που διεγείρεται από κάθετη δύναμη  
(Fletcher, et al., 1998)

Εφόσον το μήκος είναι άπειρο, η λύση αποτελείται μόνο από κύματα που κινούνται προς τα δεξιά (εξ. [I.9]).

$$y(x,t) = Ae^{j(\omega t - kx)} \quad [I.19]$$

Εφόσον στο σημείο  $x=0$  δεν υπάρχει συγκεντρωμένη μάζα, η ισορροπία δυνάμεων μας δίνει για  $x=0$ :

$$F = -T \sin \theta \cong -T(\partial y / \partial x) \quad [I.20]$$

Με αντικατάσταση  $f(t)$  και  $y(x,t)$  παίρνουμε:

$$A = \frac{F}{jkT} \quad [I.21]$$

Άρα:

$$y(x,t) = \frac{-jF}{kT} e^{j(\omega t - kx)} \quad [I.22]$$

Και η ταχύτητα:

$$u(x,t) = \frac{Fc}{T} e^{j(\omega t - kx)} \quad [I.23]$$

Ορίζεται η μηχανική εμπέδηση εισόδου (mechanical input impedance) ως:

$$Z_{in} = \frac{f(t)}{u(0,t)} \quad [I.24]$$

Σε μια χορδή απείρου μήκους (η στηριγμένη με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε να μην δημιουργούνται ανακλάσεις) ισχύει ότι  $Z_{in} = Z_0$ , όπου  $Z_0$  η χαρακτηριστική εμπέδηση της χορδής:

$$Z_0 = \frac{T}{c} = \sqrt{T\mu} = \mu c \quad [I.25]$$

Για την περίπτωση χορδής ορισμένου μήκους  $L$  πακτωμένη στο  $x=0$  και  $x=L$  έχουμε (εξ. [I.20] και [I.9]):

$$Fe^{j\omega t} = T(jkA - jkB)e^{j\omega t} \quad [I.26]$$

Λύνοντας με βάση τις οριακές συνθήκες βρίσκουμε ότι:

$$A = \frac{Fe^{jkL}}{2jkT \cos(kL)} \quad [I.27]$$

και

$$B = \frac{Fe^{-jkL}}{-2jkT \cos(kL)} \quad [I.28]$$

Άρα η [I.26] γίνεται:

$$y(x,t) = \frac{F}{kT} \frac{\sin(k(L-x))}{\cos(kL)} e^{j\omega t} \quad [I.29]$$

και

$$u(x,t) = \frac{j\omega t}{kT} \frac{\sin(k(L-x))}{\cos(kL)} e^{j\omega t} \quad [I.30]$$

Άρα τελικά η εμπέδηση εισόδου (input impedance) στο  $x=0$  είναι:

$$Z_{in} = \frac{f(t)}{u(x,t)} = \frac{-jkT}{\omega} \cot(kL) = -jZ_0 \cot(kL) \quad [I.31]$$

Συμπέρασμα: Η αντίσταση εξαρτάται από την είσοδο και ποικίλει από 0 ( $kL = \pi/2, 3\pi/2, \dots$ ) μέχρι  $\pm j\infty$  ( $kL = 0, \pi, \dots$ ). Αυτές είναι και οι συχνότητες διέγερσης για τις οποίες η χορδή έχει η μέγιστη και ελάχιστη απόκριση αντίστοιχα.

## I.VII.Κίνηση των στήριξεων

Τώρα θα δούμε την περίπτωση χορδής με στήριξεις που δεν είναι πακτώσεις. Μπορούμε να περιγράψουμε τη συμπεριφορά μιας στήριξης μόνο από την σύνθετη αντίστασή της. Αν το φανταστικό της μέρος μπορεί να προσομοιωθεί από μία μάζα τότε οι ιδιοσυχνότητες της χορδής ανεβαίνουν λίγο σε σχέση με αυτές της εξ.[I.12]. Αν το φανταστικό της μέρος μπορεί να προσομοιωθεί από ένα ελατήριο τότε οι ίδιες ιδιοσυχνότητες είναι λίγο πιο χαμηλές. Το πραγματικό μέρος της αντίστασης της στήριξης δείχνει το ρυθμό μεταφοράς ενέργειας από τη χορδή στη στήριξη.

Θεωρούμε χορδή πακτωμένη στο  $x=0$  και με στήριξη μάζας  $m$  στο  $x=L$ . Η κάθετη δύναμη που ασκεί η χορδή στη μάζα είναι:  $-T(\partial y / \partial x)_{x=L}$ . Από τον 2<sup>ο</sup> Νόμο του Νεύτωνα παίρνουμε:

$$-T\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_L = m\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)_L \quad [I.32]$$

$$1^{\text{η}} \text{ συνθήκη } y(0,t) = 0 \rightarrow A = -B \quad (\text{από εξ.}[I.9])$$

Και αντικαθιστώντας το παραπάνω στην εξ.[I.9] παίρνω:

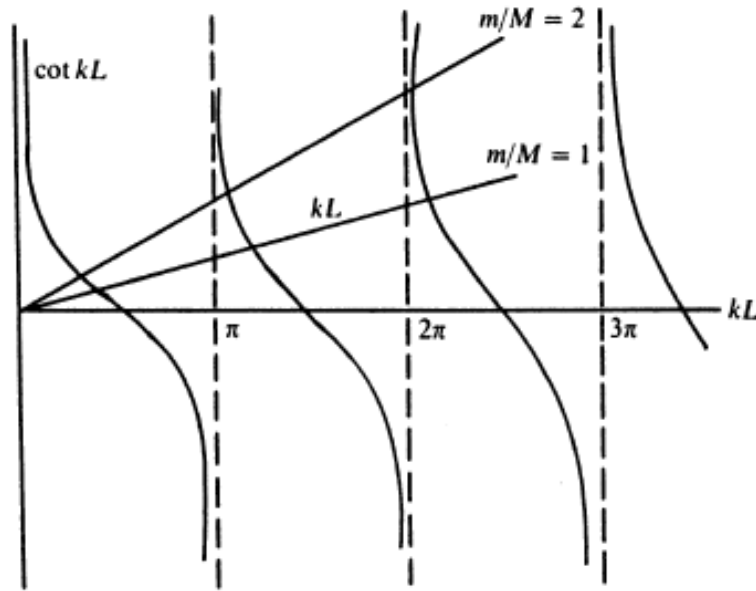
$$y(x,t) = A \sin(kx) e^{j\omega t} \quad [I.33]$$

Αντικαθιστώντας την [I.33] στην [I.32] παίρνω:

$$\cot(kL) = \frac{\omega^2 m}{kT} = \frac{km}{\mu} = \frac{m}{M} kL \quad [I.34]$$

Όπου  $M = \mu L$  είναι η συνολική μάζα της χορδής. Η λύση της μη γραμμικής εξ.[I.34] φαίνεται γραφικά για δύο τιμές του  $m/M$  στο σχήμα I.II. Καθώς ο λόγος  $m/M$  αυξάνεται, οι ρίζες πλησιάζουν τη λύση για χορδή πακτωμένη στα  $x=0$  και  $x=L$ . Οι

ιδιοσυχνότητες που προκύπτουν από την εξίσωση [I.34]. Σημειώνεται ότι, σε αντίθεση με την περίπτωση της πακτωμένης χορδής και στα δύο άκρα, οι ιδιοσυχνότητες δεν έχουν απόλυτα αρμονική σχέση μεταξύ τους. Αυτό φαίνεται και στο σχήμα I.III, καθώς η χαμηλότερη ιδιοσυχνότητα ανεβαίνει λίγο περισσότερο από την δεύτερη, η δεύτερη λίγο περισσότερο από την Τρίτη κ.ο.κ.



Σχήμα I.III: Γραφική λύση της  $\cot(kL) = (m / M)kL$  (εξ.[I.34])  
(Fletcher, et al., 1998)

### I.VIII. Απόσβεση (Damping)

Η απόσβεση ενέργειας ταλάντωσης της χορδής γίνεται με τρεις τρόπους (εξαιρώντας το slip μέρος του μοτίβου σχετικής κίνησης δοξαριού – χορδής):

- Ενεργειακές απώλειες λόγω της τριβής με τον αέρα

Η δύναμη που ασκείται από τον αέρα στην ταλαντευόμενη χορδή έχει δύο συνιστώσες. Η πρώτη είναι μία επιπρόσθετη φόρτιση μάζας και η δεύτερη προκαλεί εκθετική απόσβεση του πλάτους ταλάντωσης:

$$F_r = 2\pi^2 \rho_a f v r^2 L \left( \frac{\sqrt{2}}{M} + \frac{1}{2M^2} \right) \quad [I.35]$$

Όπου:  $\rho_\alpha = 1,2 \text{ kg} / \text{m}^3$  η πυκνότητα του αέρα

$$M = (r / 2) \sqrt{2\pi f / \eta_a}$$

$\eta_a = 1.5 \times 10^{-5} \text{ m}^2 / \text{s}$  το κινηματικό ιξώδες

Εφόσον το  $F_r$  είναι ανάλογο του  $v$ , ο ρυθμός απωλειών ποικίλλει ανάλογα με το  $v^2$  (ανάλογο της κινητικής ενέργειας). Η χρονική σταθερά της απόσβεσης είναι:

$$\tau_1 = \frac{\rho}{2\pi\rho_\alpha f} \left( \frac{2M^2}{2\sqrt{2M+1}} \right) \quad [\text{I.36}]$$

Ο ρυθμός απόσβεσης είναι ανάλογος με την πυκνότητα της χορδής. Όσον αφορά τη σχέση του με την ακτίνα και τη συχνότητα, για χαμηλές συχνότητες το  $\tau_1$  είναι ανάλογο του  $\rho r^2$  και σε υψηλές συχνότητες το  $\tau_1$  είναι ανάλογο του  $\rho r / \sqrt{f}$ .

- Εσωτερικές απώλειες της χορδής

Αυτό είναι ένα πολύ πολύπλοκο θέμα το οποίο για περιπτώσεις εντέρινων και νάιλον χορδών μπορεί να αποκτήσει πρωταγωνιστικό χαρακτήρα στην απόσβεση της ταλάντωσης. Απλοποιώντας εξαιρετικά το πρόβλημα μπορούμε να θεωρήσουμε το μέτρο ελαστικότητας εκφρασμένο σε μιγαδική μορφή:

$$E = E_1 + jE_2 \quad [\text{I.37}]$$

Σε αυτήν την περίπτωση, ο χρονικός συντελεστής απόσβεσης είναι:

$$\tau_2 = \frac{1}{\pi f} \frac{E_1}{E_2} \quad [\text{I.38}]$$

Στις μεταλλικές χορδές και στις χορδές με πυρήνα και τυλίγματα διαφορετικού υλικού ο παραπάνω συντελεστής είναι αμελητέας σημασίας. Υπάρχουν, όμως, άλλες εσωτερικές απώλειες οι οποίες οφείλονται στις τριβές μεταξύ των τυλιγμάτων ή μεταξύ



των τυλιγμάτων και του πυρήνα, και παίζουν υπολογίσιμο ρόλο στην απόσβεση της ταλάντωσης.

- Ενεργειακές απώλειες στις στηρίξεις της χορδής

Σε αυτήν την περίπτωση είναι πιο εύκολο να χρησιμοποιήσουμε την έννοια της μηχανικής κινητικότητας (mechanical admittance) παρά αυτήν της αντίστασης. Μηχανική κινητικότητα (το αντίστροφο της σύνθετης αντίστασης) είναι ο λόγος της ταχύτητας προς τη δύναμη και το πραγματικό του μέρος  $G$  λέγεται αγωγιμότητα.

Για τη  $n$ -οστή ιδιοσυχνότητα χορδής, η ταχύτητα που μεταδίδεται στη στήριξη μπορεί να γραφεί:

$$v_n = aGF_n \quad [I.39]$$

Όπου  $F_n$  είναι η κάθετη συνιστώσα της δύναμης και  $a$  είναι μία σταθερά. Η απώλεια ενέργειας στις στηρίξεις έχει εκθετική μορφή συναρτήσει του χρόνου με τη χρονική σταθερά απόσβεσης να είναι:

$$\tau_3 = (\delta\mu Lf^2 G)^{-1} \quad [I.40]$$

Όταν όλοι οι παραπάνω παράγοντες συμβάλλουν, ο συνολικός συντελεστής απόσβεσης της χορδής θα βρίσκεται από τη σχέση:

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} + \frac{1}{\tau_3} \quad [I.41]$$

## I.IX. Χορδή με δυσκαμψία

Στις πραγματικές χορδές, η δύναμη επαναφοράς της χορδής στην αρχική της θέση βασίζεται στην τάση της χορδής και στην δυσκαμψία της (αν και, συνήθως, η πρώτη είναι η κυρίαρχη). Άρα η εξίσωση [I.1], λαμβάνοντας υπ' όψιν τη δυσκαμψία, γίνεται:

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - ESK^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \quad [I.42]$$

Όπου:  $\mu$ : Γραμμική πυκνότητα

$T$ : Τάση χορδής

$E$ : Μέτρο ελαστικότητας χορδής

$S$ : Η διατομή της χορδής

$K = \sqrt{I / S}$  και  $I$  η ροπή αδράνειας της χορδής

Για χορδή αρθρωμένη και στα δύο άκρα της η εξίσωση [I.42] λύνεται εύκολα και δίνει ιδιοσυχνότητες:

$$f_n = n f_0^1 (1 + B n^2)^{1/2} \quad [I.43]$$

Όπου  $f_0^1$ : η πρώτη ιδιοσυχνότητα της ίδιας χορδής χωρίς δυσκαμψία

και  $B = \pi^2 ESK^2 / (TL^2)$

Για την περίπτωση των πακτωμένων άκρων υπάρχει η προσεγγιστική λύση:

$$f_n = n f_1^0 (1 + B n^2)^{1/2} (1 + (2 / \pi) B^{1/2} + (4 / \pi^2) B) \quad [I.44]$$

Άρα πακτώνοντας τα άκρα ανεβαίνουν λίγο οι ιδιοσυχνότητες.

## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΙΙ

## Κύματα σε λεπτή πλάκα

Η ταχύτητα μετάδοσης οριζόντιου κύματος σε λεπτή πλάκα απείρων διαστάσεων (χωρίς ανακλάσεις) είναι:

$$c_L = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}} \quad [\text{II.1}]$$

Όπου E: Το μέτρο ελαστικότητας του υλικού

$\rho$ : Η πυκνότητά του

$\nu$ : Ο λόγος Poisson του υλικού (0,3 για τα περισσότερα υλικά)

Το εγκάρσιο κύμα σε πλάκα έχει ταχύτητα μετάδοσης:

$$c_T = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad [\text{II.2}]$$

Όπου G: Το μέτρο ελαστικότητας σε διάτμηση (μικρότερο του E)

Στην περίπτωση των μουσικών οργάνων, που μας ενδιαφέρει η δυνατότητα του κύματος να μεταφέρει ενέργεια στον αέρα και άρα να παράγει ήχο, μελετάμε τα κύματα σε κάμψη των πλακών. Η εξίσωση του καμπτικού κύματος σε πλάκα είναι:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \frac{Eh^2}{12\rho(1-\nu^2)} \nabla^4 z = 0 \quad [\text{II.3}]$$

Όπου:  $\rho$ : Η πυκνότητα

$\nu$ : Ο λόγος Poisson

E: Το μέτρο ελαστικότητας

h: Το πάχος της πλάκας

Η αρμονική λύση της παραπάνω ( $z = Z(x, y)e^{j\omega t}$ ):

$$\nabla^4 Z - \frac{12\rho(1-\nu^2)\omega^2}{Eh^2} Z = \nabla^4 - k^4 Z = 0 \quad [\text{II.4}]$$





## 8.Βιβλιογραφία

**Askenfelt A.** Eigenmodes and Tone Quality of the Double Bass [Άρθρο] // Quarterly Progress and Status Report. - 1982. - 23. - σσ. 149-174.

**Askenfelt A.** Measurement of the bow force in violin playing [Άρθρο] // The Journal of the Acoustical Society of America. - 1986. - 80. - σσ. 1007-1015.

**Blodgett John** WoodSound Studio Acoustic Music Store [Ηλεκτρονικό]. - <http://woodsoundstudio.com/index.htm>.

**Bretos J. και Santamaria C.** Vibrational patterns and frequency responses of the free plates and box of a violin obtained by finite element analysis [Άρθρο] // Acoustical Society of America. - 1998. - 3 : Τόμ. 105. - σσ. 1942-1950.

**Centrih Vasilij** Violin and the Wolf [Συνέδριο] // Seminar II (The wolf tone on violin family instruments). - [s.l.] : University of Ljubljana, Faculty of Mathematics and Physics, Physics Department, 2011. - σ. 18.

**Cremer L.** The Physics of the Violin [Άρθρο] // MIT Press. - 1984.

**Cremer L. και Lazarus H.** Der Einfluss des Bogendruckes beim Anstreichen einer Saite [Άρθρο] // Proc. ICA. - Tokyo : [s.n.], 1968.

**Fletcher Neville H. και Rossing Thomas D.** The Physics of Musical Instruments [Βιβλίο]. - [s.l.] : Springer, 1998.

**Goldblatt Alan** Goldblatt's Sculptwright Shop [Ηλεκτρονικό] // <http://www.alangoldblatt.com/>. - <http://www.alangoldblatt.com/specs/Bass.pdf>.

**Inacio O., Antunes J. και Wright M.C.M.** Computational modelling of string - body interaction for the violin family and simulation of wolf notes [Άρθρο] // Journal of Sound and Vibration. - 2008. - 310. - σσ. 260-286.

**Knott George A.** A MODAL ANALYSIS OF THE VIOLIN USING MSC/NASTRAN AND PATRAN [Έκθεση]. - California : [s.n.], 1987.

**Lu Ye** Comparison of Finite Element Method and Modal Analysis of Violin Top Plate [Έκθεση] : Thesis / Department of Music Research ; McGill University. - Montreal : [s.n.], 2013.

**Meier Eric** The Wood Database [Ηλεκτρονικό] // Eric Meier. - <http://www.wood-database.com/>.

**Rossing Thomas D.** The Science of String Instruments [Βιβλίο]. - [s.l.] : Springer, 2010.

**Woodhouse J. και Galluzzo P.M.** The Bowed String As We Know It Today [Άρθρο] // Acta Acoustica united with Acoustica. - 2004. - Τόμ. 90. - σσ. 579-589.

**Προβατίδης Χριστόφορος Γ.** Πεπερασμένα Στοιχεία στην Ανάλυση Κατασκευών [Βιβλίο]. - Αθήνα : Εκδόσεις Τζιόλα, 2016.



