ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΕΙΔΙΚΕΣ ΟΜΑΔΕΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΚΑΣΣΗΣ ΠΕΤΡΟΣ

Επιβλέπων:

Ανάργυρος Φελλούρης, Αναπληρωτής Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Μέλη Επιτροπής:

Παναγιώτης Ψαρράκος, Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Πέτρος Στεφανέας, Λέκτορας Ε.Μ.Π.

ΑΘΗΝΑ 2016

***

Πρωτίστως, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κύριο **Ανάργυρο Φελλούρη**, Αναπληρωτή Καθηγητή της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών & Φυσικών Επιστημών του Ε.Μ.Π., για την ευκαιρία που μου έδωσε να μελετήσω το σημαντικό αυτό θέμα των Μαθηματικών και να διευρύνω έτσι τις μαθηματικές μου γνώσεις.

Θέμα, που έχει τόσες πολλές σημαντικές εφαρμογές σε κρίσιμους επιστημονικούς τομείς, όπως η Άλγεβρα, η Θεωρία Ομάδων, η Θεωρία Πινάκων κλπ.,

Τον ευχαριστώ, ιδιαιτέρως, για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε και την καθοδήγηση, την οποία μου πρόσφερε, κατά την εκπόνηση της διπλωματικής μου εργασίας.

Παράλληλα, οφείλω ευχαριστίες στους κ.κ. **Παναγιώτη Ψαρράκο**, Καθηγητή Ε.Μ.Π. και **Πέτρο Στεφανέα**, Λέκτορα Ε.Μ.Π. που δέχτηκαν να συμμετάσχουν στην τριμελή επιτροπή εξέτασης της συγκεκριμένης διπλωματικής εργασίας.

Αθήνα 3/3/2016

Περιεχόμενα

Πρόλογος

Στην παρούσα διπλωματική εργασία θα ασχοληθούμε με την παρουσίαση διαφόρων **Ειδικών Ομάδων Πινάκων** όπως, ειδικότερα, αποτελούν **οι Γενικές Γραμμικές Ομάδες, οι Ορθογώνιες Ομάδες** καθώς, επίσης, και **οι Ομάδες Πινάκων Lie**.

Είναι, βεβαίως, απαραίτητη η αναφορά και η επεξήγηση κάποιων σημείων από τη **Γραμμική Άλγεβρα** αλλά και την **Αναλυτική Γεωμετρία**, αφού στις παραπάνω ομάδες πινάκων γίνεται χρήση και επέκταση γνωστών θεωρημάτων και ορισμών της Γραμμικής Άλγεβρας και Αναλυτικής Γεωμετρίας.

Ειδικότερα, η παρούσα διπλωματική εργασία διαρθρώνεται, μετά την **εισαγωγή -** που επέχει θέση σύντομης ιστορικής αναφοράς στα θέματα, τα οποία σχετίζονται με την εξέλιξη των ιδεών σχετικά με τις Ειδικές Ομάδες Πινάκων που αναφέρονται στην διπλωματική εργασία αυτή – σε τρία (3) κεφάλαια.

Στο **πρώτο (1ο) κεφάλαιο** ορίζεται η έννοια της ομάδας και δίνονται παραδείγματα. Ορίζονται, επίσης, οι έννοιες του ομομορφισμού και του ισομορφισμού, καθώς και του σώματος και της ομάδας των τετραδικών αριθμών (quaternions). Μελετώνται, επίσης, οι γραμμικές απεικονίσεις, τόσο για διανύσματα όσο και για πίνακες. Επιπροσθέτως, περιγράφεται αναλυτικά η άλγεβρα πινάκων $\mathrm{M_n(K)}$. Τέλος, ορίζεται η Γενική Γραμμική Ομάδα $\mathrm{GL(n,K)}$ και αποδεικνύονται διάφορες ιδιότητες αυτής.

Στο **δεύτερο (2ο) κεφάλαιο** παρουσιάζεται το εσωτερικό γινόμενο και δίνονται οι σημαντικότερες ιδιότητες αυτού. Υπενθυμίζονται έννοιες όπως αυτές του μήκους ενός διανύσματος αλλά και του αναστρόφου και συζυγή πίνακα. Ορίζονται επίσης η ορθογώνια ομάδα O(n), η ορθομοναδιαία ομάδα U(n) και η συμπλεκτική ομάδα Sp(n), καθώς, επίσης, και η ειδική ορθογώνια ομάδα SO(n) και η ειδική ορθομοναδιαία ομάδα SU(n). Έπειτα γίνεται λόγος, για το ποιες εκ των παραπάνω ομάδων είναι ισομορφικές, ενώ το κεφάλαιο κλείνει με αναφορά στην συμμετρία (ή κατοπτρισμός) που ορίζεται στον $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$.

Στο **τρίτο (3ο) κεφάλαιο** γίνεται η παρουσίαση των ομάδων πινάκων Lie. Αρχικά, δίνεται ο ορισμός των ομάδων πινάκων Lie, καθώς, επίσης, και διάφορα παραδείγματα ομάδων πινάκων Lie, όπως οι γενικές γραμμικές ομάδες $\mathrm{GL(n,\mathbb{R})}$ και $\mathrm{GL(n,\mathbb{C})}$, οι ειδικές γραμμικές ομάδες $\mathrm{SL(n,\mathbb{R})}$ και $\mathrm{SL(n,\mathbb{C})}$, οι γενικευμένες ορθογώνιες ομάδες και οι ομάδες Lorentz κ.α. Τέλος, ορίζονται η συμπάγεια και η συνεκτικότητα και δίνονται παραδείγματα, γίνεται αναφορά για ομομορφισμό και ισομορφισμό ομάδων πινάκων Lie, ενώ αναφέρεται και η πολική παραγοντοποίηση για τις $\mathrm{SL(n,\mathbb{R})}$ και $\mathrm{SL(n,\mathbb{C})}$.

Summary

This thesis is a presentation of Special Groups of Matrices such as General Linear Groups, Orthogonal Groups and Matrix Lie Groups.

Some elements of the theory of linear algebra and analytic geometry are also mentioned and explained, in order to make easier the understanding of special groups of matrices above, because many of these elements of the theory of linear algebra and analytic geometry will be used here.

Specifically, this thesis after the introduction, which is a brief historical report to these subjects, which concern the evolution of these mathematical ideas from special groups of matrices, which we discuss in this thesis, consists of three chapters.

At the first chapter, the meaning of 'group' is defined and examples are given. Also, homomorphism and isomorphism as well as fields and quaternions are defined. Linear maps, both for vectors and matrices are presented. Furthermore, the algebra of matrices $M_n(K)$ is presented analytically. In conclusion, the General Linear Group $GL(n, K)$ is defined and many definitions and propositions of this group are referred and proven.

At the second chapter, the inner product is presented and its most important properties are mentioned. Furthermore, some elements of linear algebra such as the length of a vector or the conjugate matrix, the transpose matrix etc are reminded. The orthogonal group O(n), the unitary group U(n) and the symplectic group Sp(n) as well as the special orthogonal group SO(n) and the special unitary group SU(n) are also defined. Then, it is discussed which of the groups above are isomorphic and, in conclusion, reflections in $\mathbb{R}^n$ are presented.

At the third chapter, Matrix Lie Groups are presented. A definition of a Matrix Lie Group is given as well as some examples of Matrix Lie Groups, such as the general linear groups $GL(n, \mathbb{R})$ and $GL(n, \mathbb{C})$, the special linear groups $SL(n, \mathbb{R})$ and $SL(n, \mathbb{C})$, the generalized orthogonal and Lorentz groups etc. In conclusion, compactness and connectedness are defined, homomorphisms and isomorphisms of Matrix Lie Groups are mentioned and the polar decomposition for $SL(n, \mathbb{R})$ and $SL(n, \mathbb{C})$ is referred.

Εισαγωγή

Η Γραμμική Άλγεβρα αποτελεί το απαραίτητο υπόβαθρο για την μελέτη πλήθους προβλημάτων από τα Μαθηματικά, την Φυσική, τη Μηχανική αλλά και τις Κοινωνικές επιστήμες. Το θέμα που πραγματεύεται η συγκεκριμένη διπλωματική, οι Ειδικές Ομάδες Πινάκων έχει πολλές σημαντικές εφαρμογές σε κρίσιμους επιστημονικούς τομείς, όπως η Άλγεβρα, η Θεωρία Ομάδων, η Θεωρία Πινάκων κλπ

Στην συγκεκριμένη διπλωματική εργασία αναφερόμαστε σε τρείς σημαντικές ομάδες πινάκων. Στις Γενικές Γραμμικές Ομάδες, στις Ορθογώνιες Ομάδες και στις Ομάδες Πινάκων Lie. Και αν οι δύο πρώτες προήλθαν από μελέτη και εξελικτική πορεία της Μαθηματικής επιστήμης, η τρίτη είναι κατεξοχήν δουλειά και αποτέλεσμα του Νορβηγού μαθηματικού **Sophus Lie** (1842-1899), λίγα λόγια για τον οποίο αναφέρονται παρακάτω.

Αρχικός σκοπός για την ανάπτυξη της θεωρίας του ήταν η μελέτη των απειροελάχιστων δράσεων μιας ομάδας σε μια πολλαπλότητα. Η μελέτη του αυτή τον οδήγησε στην ανάπτυξη της έννοιας της ομάδας Lie, η οποία είχε ως φυσικό επακόλουθο τον ορισμό των Αλγεβρών Lie.

Πρέπει να σημειωθεί ότι κινητήρια δύναμη για την έρευνα του Sophus Lie αποτέλεσε η θεωρία του **Evariste Galois** (1811-1832) και η ενδεχόμενη επέκτασή της.

Σύμφωνα με αξιόπιστες πηγές, ο Sophus Lie θεωρούσε το χειμώνα του 1873-74 ως την εποχή που γεννήθηκε η θεωρία του. Όμως, αρκετοί ερευνητές της Ιστορίας των Μαθηματικών πιστεύουν ότι η θεωρία είχε ήδη ουσιαστικά αναπτυχθεί τα προηγούμενα τέσσερα χρόνια σε διάφορες εργασίες του Lie. Κάποιες από τις αρχικές ιδέες του Lie προήλθαν μέσω της στενής συνεργασίας του με τον μεγάλο Γερμανό μαθηματικό **Felix Klein** (1849-1925).

Ο Lie συναντιόταν σε καθημερινή βάση με τον Klein από τον Οκτώβρη του 1869 μέχρι το 1872. Παρόλα αυτά όμως ο ίδιος ο Lie αναφέρει ότι τα κύρια αποτελέσματα της θεωρίας εμφανίστηκαν σχεδόν δεκαπέντε χρόνια αργότερα, το 1884. Το 1884 ένας νεαρός Γερμανός μαθηματικός, ο **Friedrich Engel** (1861-1941) βοήθησε τον Lie να επεκτείνει και να εκδόσει, σε τρεις τόμους, την εργασία του. Ένας άλλος μαθηματικός που συμμετείχε στη συγγραφή και έκδοση των βιβλίων του Lie ήταν ο **Georg Scheffers**.

Η αρχική ιδέα του Lie ήταν να αναπτύξει μια θεωρία για τη συμμετρία των διαφορικών εξισώσεων σε αναλογία με τη θεωρία του Galois για τις αλγεβρικές εξισώσεις. Η θεώρηση των συνεχών ομάδων από τον **Riemann**, οι ιδέες του Galois για τη συμμετρία, το έργο του Jacobi και του **Poisson** στη Μηχανική και η κατανόηση της Γεωμετρίας από τη σκοπιά των έργων των **Mobius** , **Grassmann** και **Plucker** επενέργησαν στη δημιουργία της θεωρίας του Lie.

Πρέπει να σημειωθεί ότι η θεωρία του Lie αποτελεί ακόμη ενεργό κομμάτι της μαθηματικής έρευνας. Ακόμη, πρέπει να αναφερθεί ότι ο **Claude Chevalley** (1904 - 1984) είναι αυτός που έφερε τη θεωρία του Lie σε σύγχρονη μαθηματική γλώσσα.

Κεφάλαιο 1
Γενικές Γραμμικές Ομάδες

1.1.Ομάδες

Πριν ξεκινήσουμε να ασχολούμαστε με ομάδες πινάκων θα σχολιάσουμε λίγο το ζήτημα των ομάδων σε ένα γενικότερο πλαίσιο. Εάν, λοιπόν, υποθέσουμε ότι τα X και Y αποτελούν σύνολα, τότε το ***καρτεσιανό τους γινόμενο*** X x Y ορίζεται ως το σύνολο όλων των διατεταγμένων ζευγών (x, y) με $x \in X$ και $y \in Y$. Ένας βολικός τρόπος για να περιγραφεί αυτό το σύνολο των διατεταγμένων ζευγαριών είναι

$$X \times Y = \{(x, y) |\ x \in X \text{ και } y \in Y\}$$

και διαβάζεται «Το Καρτεσιανό γινόμενο X x Y ισούται με το σύνολο όλων των διατεταγμένων ζευγών (x, y) έτσι ώστε το x να ανήκει στο X και το y να ανήκει στο Y».

Ως ***διμελή πράξη*** ρ σε ένα σύνολο S, ορίζουμε μια συνάρτηση

$$\rho: S \times S \to S$$

Για παράδειγμα, για ένα διατεταγμένο ζεύγος (s_1, s_2) στοιχείων του S, η ρ δίνει ένα άλλο στοιχείο του S, το οποίο γράφεται ως $\rho(s_1, s_2)$. Ένα άλλο παράδειγμα αποτελεί το σύνολο $\mathbb{N} = \{1,2,3,\cdots\}$ των φυσικών αριθμών, που έχει δύο πολύ γνωστές διμελείς πράξεις μέσα του. Την πρόσθεση, που οδηγεί το διατεταγμένο ζεύγος (a, b) όλων των φυσικών αριθμών στον φυσικό αριθμό a+b, και τον πολλαπλασιασμό που οδηγεί το διατεταγμένο ζεύγος (a, b) όλων των φυσικών αριθμών στον φυσικό αριθμό ab.

<u>Ορισμός 1.1.1.</u>

Μια ***ομάδα*** G είναι ένα σύνολο G εφοδιασμένο με μια διμελή πράξη

$$\varphi\colon \mathrm{G} \times \mathrm{G} \to \mathrm{G},$$

ικανοποιώντας συγκεκριμένες ιδιότητες. Για να τονιστούν αυτές οι ιδιότητες, είναι βολικό να υιοθετηθεί μια απλή παραδοχή. Αντί του $\varphi(\mathrm{a}, \mathrm{b})$, θα γράφουμε απλώς ab.

Συγκεκριμένες ιδιότητες της παραπάνω διμελούς πράξης:

i. Η διμελής πράξη είναι ***προσεταιριστική***, δηλαδή, για κάθε $\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c} \in \mathrm{G}$, ισχύει

$$(\mathrm{ab})\mathrm{c} = \mathrm{a}(\mathrm{bc})$$

(Εάν είχαμε διατηρήσει την παραδοχή $\varphi(\mathrm{a}, \mathrm{b})$, το παραπάνω θα γράφονταν ως του $\varphi(\varphi(\mathrm{a}, \mathrm{b}),\mathrm{c})=\varphi(\mathrm{a}, \varphi(\mathrm{b}, \mathrm{c}))$.)

ii. Υπάρχει ένα ***ουδέτερο*** στοιχείο e της G. Αυτό σημαίνει πως για κάθε $\mathrm{a} \in \mathrm{G}$, έχουμε $\mathrm{ea} = \mathrm{ae} = \mathrm{a}$.

iii. Υπάρχει η ιδιότητα της ***αντιστροφής*** (αντιστροφή έχουμε όταν ως πράξη παίρνουμε τον πολλαπλασιασμό. Γενικότερα, λέμε πως το a θα έχει ***συμμετρικό*** στοιχείο ως προς την παραπάνω διμελή πράξη). Αυτό σημαίνει πως για κάθε $\mathrm{a} \in \mathrm{G}$, υπάρχει ένα στοιχείο $\mathrm{a}' \in \mathrm{G}$, έτσι ώστε $\mathrm{aa}' = \mathrm{a}'\mathrm{a} = \mathrm{e}$. (Για κάθε $\mathrm{a} \in \mathrm{G}$ το συμμετρικό στοιχείο ως προς τον πολλαπλασιασμό είναι το $\mathrm{a}' = \mathrm{a}^{-1} \in \mathrm{G}$ και λέγεται αντίστροφος του a).

iv. Μια ομάδα G είναι ***αβελιανή,*** εάν για κάθε $\mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathrm{G}$, έχουμε $\mathrm{ab} = \mathrm{ba}$.

Σημειώνεται ότι αν και οι ιδιότητες (ii) και (iii) αφήνουν ανοικτό το ενδεχόμενο να υπάρχουν περισσότερα του ενός ουδέτερα στοιχεία και πως ένα στοιχείο μπορεί να χει παραπάνω του ενός συμμετρικά στοιχεία, ωστόσο, κανένα εκ των ενδεχομένων που μόλις αναφέρθηκαν δεν μπορεί να συμβεί.

<u>Πρόταση 1.1.1</u>

Μία ομάδα G έχει ένα ακριβώς ουδέτερο στοιχείο και κάθε $a \in G$ έχει ένα ακριβώς συμμετρικό στοιχείο.

<u>Απόδειξη</u>

Υποθέτουμε ότι τα e και f είναι ουδέτερα στοιχεία του G. Τότε

$ef = fe = e$ μιας και το f είναι ουδέτερο στοιχείο και
$ef = fe = f$ μιας και το e είναι ουδέτερο στοιχείο

Επομένως, $e = ef = f$.

Υποθέτουμε ότι τα b και c είναι συμμετρικά στοιχεία του a. Τότε

$ab = ba = e$ και $ac = ca = e$

Επομένως, $b = eb = (ca)b = c(ab) = ce = c$.

<u>Παραδείγματα</u>

1. Το σύνολο $\mathbb{Z} = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$ των ακεραίων, αποτελεί μία ομάδα ως προς τη διμελή πράξη της πρόσθεσης (το μηδέν αποτελεί ουδέτερο στοιχείο του συνόλου και το συμμετρικό του a είναι το –a).

2. Το σύνολο $\mathbb{Z}$ δεν αποτελεί μία ομάδα ως προς τη διμελή πράξη του πολλαπλασιασμού (η διμελής πράξη είναι προσεταιριστική και το 1 αποτελεί ουδέτερο στοιχείο) αφού, επί παραδείγματι, δεν υπάρχει συμμετρικό στοιχείο για το 2.

3. Το σύνολο των ρητών αριθμών $\mathbb{Q}$ αποτελεί μία ομάδα ως προς τη διμελή πράξη της πρόσθεσης.

4. Το σύνολο $\mathbb{Q} - \{0\}$ (όλοι οι μη μηδενικοί αριθμοί) αποτελεί μία ομάδα ως προς τη διμελή πράξη του πολλαπλασιασμού.

5. $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$ είναι το σύνολο όλων των θετικών πραγματικών αριθμών. Αποτελεί μια ομάδα ως προς τη διμελή πράξη του πολλαπλασιασμού.

6. $\mathbb{R}^n =$ το σύνολο όλων των διατεταγμένων n-άδων πραγματικών αριθμών ως προς την παρακάτω πράξη:

$$\text{Αν } x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \text{ και}$$

$$y = (y_1, y_2, \cdots, y_n), \text{ τότε}$$
$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n)$$

Το ουδέτερο στοιχείο είναι το $\sigma = (0,0,\cdots,0)$ και ο αντίθετος του x είναι το $(-x_1, -x_2, \cdots, -x_n)$

7. Έστω το σύνολο των μεταθέσεων των τριών στοιχείων $S = \{a, b, c\}$. Το S είναι ένα σύνολο με τρία στοιχεία τα οποία συμβολίζονται με a, b, c. Έστω G το σύνολο όλων των αμφιμονοσήμαντων απεικονίσεων (συναρτήσεων) που πάνε από το S στο S. Για παράδειγμα, η $f: S \to S$ που ορίζεται ως $f(a) = b$, $f(b) = c$, $f(c) = a$, αποτελεί στοιχείο της G. Ορίζουμε μια ***διμελή πράξη*** στο G με τον ακόλουθο τρόπο: Εάν $f, g \in G$, τότε η

$$f \circ g: S \to S$$

ορίζεται ως $(f \circ g)(a) = f\big(g(a)\big), (f \circ g)(b) = f\big(g(b)\big), (f \circ g)(c) = f(g(c))$. Η $f \circ g$ μεταφράζεται ως η εφαρμογή της συνάρτησης g στο S και, έπειτα, ως η εφαρμογή της f στο g(S). Έστω $i: S \to S$, αποτελεί το ουδέτερο στοιχείο $(i(a) = a, i(b) = b, i(c) = c)$. Αυτό αποτελεί το ουδέτερο στοιχείο για την συγκεκριμένη διμελή πράξη. Επομένως, η συνηθισμένη αντιστροφή της $f \in G$ είναι η αντιστροφή για την f που σχετίζεται με την συγκεκριμένη διμελή πράξη. Άρα, το G αποτελεί ομάδα. Ονομάζεται ***συμμετρική ομάδα*** πάνω στα $\{a, b, c\}$ (ή απλά συμμετρική ομάδα πάνω σε τρία στοιχεία).

8. Η συμμετρική ομάδα n-τάξης, συμβολικά S_n είναι το σύνολο των 1-1 και επί απεικονίσεων του συνόλου $T_n = \{1,2,\cdots,n\}$ με πράξη την σύνθεση απεικονίσεων.

<u>Παρατήρηση</u>

Στα παραδείγματα παραπάνω, τα (1), (3), (4), (5) και (6) αποτελούν αβελιανές ομάδες, αλλά η συμμετρική ομάδα πάνω σε τρία στοιχεία δεν αποτελεί αβελιανή ομάδα.

Ορισμός 1.1.3

Έστω οι $(G, \circ)$ και $(H, *)$ αποτελούν ομάδες. Μια συνάρτηση $\sigma: G \to H$ αποτελεί ***ομομορφισμό***, εάν για κάθε a, b του G έχουμε

$$\sigma(a \circ b) = \sigma(a) * \sigma(b)$$

Απλουστεύοντας τον παραπάνω ορισμό, μπορούμε πρώτα να πολλαπλασιάσουμε τα a και b (χρησιμοποιώντας την διμελή πράξη στο G) και μετά να απεικονίσουμε το παραπάνω αποτέλεσμα μέσω της συναρτήσεως σ ή μπορούμε να απεικονίσουμε τα a και b στο H μέσω της σ και έπειτα να πολλαπλασιάσουμε με την πράξη του H. Το αποτέλεσμα είναι το ίδιο και με τους δύο τρόπους.

Πρόταση 1.1.2

Ένας ομομορφισμός $\sigma: G \to H$ πάντα στέλνει το ουδέτερο στοιχείο του ενός συνόλου στο ουδέτερο στοιχείο του έτερου συνόλου και το συμμετρικό στοιχείο του ενός συνόλου στο συμμετρικό στοιχείο του έτερου συνόλου.

Απόδειξη

Έστω e, e΄ αποτελούν τα ουδέτερα στοιχεία των G και H αντίστοιχα. Έχουμε $\sigma(e) = \sigma(ee) = \sigma(e)\sigma(e)$ και η $\sigma(e)$ έχει ένα συμμετρικό στοιχείο, έστω h, στο H. Άρα,

$$e' = h\sigma(e) = h\sigma(e)\sigma(e) = \sigma(e).$$

Για $a \in G$, εχουμε

$$\sigma(a)\sigma(a') = \sigma(aa') = \sigma(e) = e',$$

δείχνοντας έτσι ότι $\sigma(a') = (\sigma(a))'$.

Ένας ομομορφισμός ονομάζεται ***επί,*** εάν $\sigma(G) = H$. Εάν ορίσουμε $\sigma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}$ = προσθετική ομάδα πραγματικών αριθμών, $\mathbb{R}^2$ όπως στο παράδειγμα (6) παραπάνω) έτσι ώστε $\sigma(x) = (x, x)$, τότε η σ αποτελεί ομομορφισμό αλλά δεν είναι επί διότι η σ($\mathbb{R}$) αποτελεί απλώς την διαγώνιο γραμμή στο $\mathbb{R}^2$. Αλλά η $\rho: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ που ορίζεται ως $\rho(x, y) = x$, αποτελει έναν επί ομομορφισμό.

Ένας ομομορφισμός $\sigma: G \to H$ ονομάζεται ***μονομορφισμός*** εάν $\sigma(a) = \sigma(b)$ συνεπάγεται πάντα a = b. (ποτέ δυο διαφορετικά στοιχεία δεν απεικονίζονται στο ίδιο σημείο) Μερικές φορές, αυτό ονομάζεται ένα προς ένα (1-1).

Για παράδειγμα, η απεικόνιση $\sigma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ (\sigma(x) = (x, x))$ αποτελεί μονομορφισμό, ενώ η απεικόνιση $\rho: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\ (\rho(x, y) = x)$ δεν αποτελεί μονομορφισμό.

Ο ομομορφισμός που είναι ταυτόχρονα μονομορφισμός και επί ονομάζεται ***ισομορφισμός***. Αν το θέσουμε κάτω από μια διαφορετική οπτική γωνία, δύο ισομορφικές ομάδες αποτελούν στην πραγματικότητα την ίδια ομάδα, ακόμα και αν ορίζονται κάτω από χτυπητά διαφορετικές συνθήκες. Το παρακάτω αποτελεί ένα κλασσικό παράδειγμα αυτού που μόλις λέχθηκε.

Παράδειγμα

Έστω ότι η $\mathbb{R}$ είναι η προσθετική ομάδα όλων των πραγματικών αριθμών και ότι η $\mathbb{R}^+$ (βλέπε παράδειγμα (5) παραπάνω) είναι η πολλαπλασιαστική ομάδα όλων των θετικών πραγματικών αριθμών. Έστω, επίσης, a ένας οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός μεγαλύτερος του 1. Ορίζω

$$\sigma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$$

έτσι ώστε,

$$\sigma(x) = a^x$$

Επομένως, η συνάρτηση σ αποτελεί ομομορφισμό της μορφής

$$\sigma(x + y) = a^{x+y} = a^x a^y = \sigma(x)\sigma(y)$$

Επίσης η σ αποτελεί μονομορφισμό. Ισχύει, δηλαδή, $\sigma(x) = \sigma(y)$. Αυτό σημαίνει ότι $a^x = a^y$ και άρα $a^{-y}a^x = a^{-y}a^y = 1$ και $a^{x-y} = 1$ το οποίο συνεπάγεται $x - y = 0$ ή $x = y$. Επιπροσθέτως, η συνάρτηση σ είναι επί. Επί τούτου, εάν y είναι ένας οποιοσδήποτε θετικός πραγματικός αριθμός έτσι ώστε $x = \log_a y$, τότε αυτός έχει την ιδιότητα $a^x = y$. Άρα οι δύο αυτές ομάδες είναι ισομορφικές.

1.2. Σώματα, Τετραδικοί αριθμοί (quaternions)

Ορισμός 1.2.1

Σώμα Κ ονομάζεται ένα σύνολο στο οποίο ορίζονται οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού ικανοποιώντας τα αξιώματα:

i. Η ομάδα Κ αποτελεί αβελιανή ομάδα ως προς τη διμελή πράξη της πρόσθεσης και με ουδέτερο στοιχείο το 0.

ii. Η $\mathrm{K}-\{0\}$ αποτελεί αβελιανή ομάδα ως προς τη διμελή πράξη του πολλαπλασιασμού.

iii. Ο πολλαπλασιασμός είναι επιμεριστικός ως προς την πρόσθεση, αφού

$$a(b+c)=ab+ac.$$

Παραδείγματα

Οι ρητοί αριθμοί $\mathbb{Q}$ και οι πραγματικοί αριθμοί $\mathbb{R}$ αποτελούν σώματα, με τις γνωστές πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού. Μπορούμε να ορίσουμε το σύνολο $\mathbb{R}^2$ έτσι ώστε να γίνει σώμα $\mathbb{C}$ (μιγαδικοί αριθμοί) με βάση τον ακόλουθο τρόπο. Έστω (x_1,x_2) και (y_1,y_2) δύο διατεταγμένα ζεύγη πραγματικών αριθμών. Ορίζουμε $(x_1,x_2)+(y_1,y_2)=(x_1+y_1,x_2+y_2)$ και βλέπουμε ότι αυτή η πράξη μετατρέπει την $\mathbb{R}^2$ σε αβελιανή ομάδα. Υποθέτοντας ότι για τον πολλαπλασιασμό δοκιμάζουμε

$$(x_1,x_2)(y_1,y_2)=(x_1y_1,x_2y_2).$$

Έπειτα, θα έχουμε

$$(1,0)(0,1)=(0,0)$$

Τώρα, το $(0,0)$ είναι το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης και θα έχουμε δύο μη μηδενικά στοιχεία στον $\mathbb{R}^2$ με μηδενικό γινόμενο. Το αποτέλεσμα δεν αποτελεί, όμως, σώμα, σύμφωνα και με την παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 1.2.1

Σε σώμα Κ, εάν $a\neq 0$ και $b\neq 0$, τότε $ab\neq 0$

<u>Απόδειξη</u>

Εάν $a \neq 0$, τότε $a \in K - \{0\}$ το οποίο, με βάση την ιδιότητα (ii) παραπάνω, θεωρείται ότι αποτελεί ομάδα ως προς τη διμελή πράξη του πολλαπλασιασμού. Άρα υπάρχει ένα a^{-1} που ανήκει στο $K - \{0\}$, τέτοιο ώστε $a^{-1}a = 1$ (πολλαπλασιαστική ταυτότητα). Άρα εάν $ab = 0$, έχουμε

$$a^{-1}(ab) = a^{-1}(0) = 0$$

αλλά $a^{-1}(ab) = (a^{-1}a)b = 1b = 0$ άρα $b = 0$.

Η παραδοχή της πρότασης 1.2.1 είναι ισοδύναμη με την παραδοχή ότι ***ένα σώμα δεν έχει διαιρέτες του 0 (μηδενοδιαιρέτες).***

Άρα το ερώτημα που άμεσα προκύπτει έχει να κάνει με το πως μπορούμε να μετατρέψουμε το $\mathbb{R}^2$ σε σώμα. Για να απαντήσουμε σε αυτό πρέπει να ξεκινήσουμε να δουλεύουμε με την σχέση

$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Πρέπει πρώτα να επιβεβαιώσουμε ότι αυτή είναι επιμεριστική ως προς την πρόσθεση

$$\begin{gathered}(a, b)\big((c, d) + (e, f)\big) = (a, b)\big((c + e, d + f)\big) \\ = \big(a(c + e) - b(d + f), a(d + f) + b(c + e)\big).\end{gathered}$$

Αυτό πρέπει να είναι ίσο με $(a, b)(c, d) + (a, b)(e, f)$. Η τελευταία σχέση ισούται με $(ac - bd, ad + bc) + (ae - bf, af + be)$ και άρα εύκολα αποδεικνύεται ότι είναι ίσα. Επομένως, πρέπει να δειχθεί ότι εάν $(a, b) \neq (0,0)$, τότε θα υπάρχει πολλαπλασιαστικός αντίστροφος. Έστω $(a, b) \neq (0,0) \Leftrightarrow a^2 + b^2 \neq 0$. Σε αυτήν την περίπτωση χρειάζεται να βρούμε πολλαπλασιαστικό αντίστροφο για τα (a, b). Προφανώς καταλαβαίνουμε ότι το ουδέτερο στοιχείο είναι το $(1,0)$ και

$$(a, b)\left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right) = (1,0)$$

όπως μπορούμε να επιβεβαιώσουμε. Άρα μετατρέψαμε το $\mathbb{R}^2$ σε σώμα, το οποίο και συμβολίζουμε με $\mathbb{C}$ και ονομάζεται ***μιγαδικοί αριθμοί***.

Ένας απλός μνημονικός κανόνας, έτσι ώστε να θυμόμαστε τον πολλαπλασιασμό στο $\mathbb{C}$, είναι ο παρακάτω. Γράφουμε $(a, b) = a + ib$ ή $a + bi$

και θεωρούμε ότι αυτά είναι πολυώνυμα του i, ενώ γνωρίζουμε και ότι ισχύει $i^2 = -1$. Άρα,

$$\begin{aligned}(a+ib)(c+id) &= ac + aid + ibc + ibid \\ &= ac + iad + ibc + i^2bd \\ &= (ac - bd) + i(ad + bc).\end{aligned}$$

Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το $\mathbb{R}$ αποτελεί υπόσωμα του $\mathbb{C}$ υποθέτοντας ότι

$$\text{Το } x \in \mathbb{R} \text{ είναι της μορφής } x + i0$$

Έπειτα εάν $x, y \in \mathbb{R}$, έχουμε

$$\begin{aligned}x + y &= x + i0 + y + i0 = (x + y) + i0 \\ xy &= (x + i0)(y + i0) = (xy) + i0.\end{aligned}$$

Άρα έχουμε πάρει το σώμα $\mathbb{R}$ σαν όλα εκείνα τα $(x, 0)$ που ανήκουν στο $\mathbb{R}^2$ και επεκτείναμε τις πράξεις του $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}^2$ για να πάρουμε το σώμα που ζητούσαμε.
Παρακάτω θα προσπαθήσουμε να επεκτείνουμε το σώμα του $\mathbb{R}^2$ σε σώμα στον $\mathbb{R}^3$.

Πρόταση 1.2.2

Οι πράξεις στο $\mathbb{C}$ δεν μπορούν να επεκταθούν έτσι ώστε το $\mathbb{R}^3$ να μετατραπεί σε σώμα.

Απόδειξη

Παίρνουμε τα διανύσματα βάσης 1, i, j έτσι ώστε κάθε στοιχείο του $\mathbb{R}^3$ να μπορεί να γραφεί κατά μοναδικό τρόπο ως $a + ib + jc$ με $a, b, c \in \mathbb{R}$.
Άρα εάν προσπαθήσουμε να κάνουμε μια επέκταση της πράξης του πολλαπλασιασμού απ'το $\mathbb{C}$, πρέπει να έχουμε $ij = a + ib + jc$ για τρείς πραγματικούς αριθμούς a, b, c. Αλλά τότε $i(ij) = ia + i^2b + ijc$ άρα

$$\begin{aligned}-j &= ia - b + ijc \\ -j &= ia - b + (a + ib + jc)c \\ -j &= (ac - b) + i(a + b) + jc^2.\end{aligned}$$

Αυτό συνεπάγεται όμως ότι $c^2 = -1$ διαψεύδοντας έτσι την υπόθεση ότι $c \in \mathbb{R}$.

Το κυριότερο συμπέρασμα της παραπάνω απόδειξης είναι ότι αν ισχυριστούμε πως το γινόμενο ij ανήκει στον $\mathbb{R}^3$, θα αντιμετωπίσουμε προβλήματα. Αυτό βέβαια είναι ***σχεδόν*** αληθές. Μπορούμε να ορίσουμε πολλαπλασιασμό στον $\mathbb{R}^4$ που να ικανοποιεί τις παραπάνω συνθήκες (i) και (iii) για ένα σώμα αλλά θα πρέπει να αντικαταστήσουμε την (ii) από μία (ii)΄ που να λέει ότι η $K-\{0\}$ αποτελεί ομάδα ως προς την πράξη του πολλαπλασιασμού, ***χωρίς παράλληλα να αποτελεί αβελιανή ομάδα***. Παρακάτω περιγράφουμε το πώς μπορεί να γίνει αυτό.

Παίρνουμε τα διανύσματα βάσης 1, i, j, k που ανήκουν στον $\mathbb{R}^4$ και ορίζουμε

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	-j
j	j	-k	-1	i
k	k	j	-i	-1

Άρα το 1 λειτουργεί ως ουδέτερο στοιχείο, $ij = k, ji = -k$, κτλ.

Αυτό μας δείχνει πώς να πολλαπλασιάζουμε τετράδες πραγματικών αριθμών:

$$(a + ib + jc + kd)(x + iy + jz + kw) = (ax - by - cz - dw)$$

$$+i(ay + bx + cw - dz) + j(az + cx + dy - bw)$$

$$+k(aw + dx + bz - cy).$$

Το $\mathbb{R}^4$ με αυτούς τους πολλαπλασιασμούς ονομάζεται ***ομάδα τετραδικών αριθμών (quaternions).*** Επίσης, το σύνολο $\mathbb{R}^4$, ως διανυσματικός χώρος με τον παραπάνω πολλαπλασιασμό, γίνεται άλγεβρα μη μεταθετική**.** Είναι εύκολο να αποδείξουμε ότι όντως επεκτείνεται η πράξη του πολλαπλασιασμού στο $\mathbb{C}$, παίρνοντας c = 0 = d και z = 0 = w στον παραπάνω τύπο. Τα τροποποιημένα αξιώματα για τα πεδία (i), (iii), (ii)΄ αποδεικνύονται εύκολα, εκτός μόνο από την περίπτωση του να δείξουμε ότι κάθε μη μηδενικός τετραδικός αριθμός έχει αντίστροφο. Ωστόσο, εάν

$$q = a + ib + jc + bd$$

δεν είναι το μηδέν $(0 + i0 + j0 + k0)$ τότε $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \neq 0$ και θέτουμε

$$q^{-1} = \frac{a - ib - jc - kd}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

και έτσι αποδείξαμε ότι $qq^{-1} = 1 = q^{-1}q$

Υπάρχουν συγκεκριμένες «κατασκευές» που θέλουμε να κάνουμε για τα $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ και τους τετραδικούς αριθμούς (τους οποίους και συμβολίζουμε με $\mathbb{H}$), οπότε για να αναφερθούμε σε αυτές θα γράφουμε

$$K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}.$$

1.3.Διανύσματα και Πίνακες

Για $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$ έστω K^n είναι το σύνολο όλων των διατεταγμένων νιοστών στοιχείων του K. Ορίζουμε την πρόσθεση στο K^n ως

$$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \qquad y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$$

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n).$$

Από τα παραπάνω, η K^n μπορεί να μετατραπεί σε αβελιανή ομάδα με ουδέτερο στοιχείο το $o = (0,0, \cdots, 0)$.

Για $c \in K$, ορίζουμε

$$cx = (cx_1, cx_2, \cdots, cx_n)$$

και έτσι η K^n μετατρέπεται σε διανυσματικό χώρο πάνω στο K (για $K = \mathbb{H}$ πρέπει να τροποποιήσουμε τον συνήθη ορισμό που υποστηρίζει ότι το K αποτελεί σώμα)

<u>Ορισμός 1.3.1</u>

Η απεικόνιση $K^n \xrightarrow{\varphi} K^n$ ονομάζεται ***γραμμική***, αν για κάθε $c, d \in K$ και $x, y \in K^n$, ισχύει:

$$\varphi(cx + dy) = c\varphi(x) + d\varphi(y)$$

Ισοδύναμα, αν ισχύουν:

$$\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y), \text{ για κάθε } x, y \in K^n$$

$$\varphi(cx) = c\varphi(x), \text{ για κάθε } c \in K \text{ και } x \in K^n$$

<u>Πρόταση 1.3.1</u>

Εάν $K^n \xrightarrow{\varphi} K^n \xrightarrow{\psi} K^n$ αποτελούν και οι δύο γραμμικές απεικονίσεις, τότε και $\psi \circ \varphi$ αποτελεί γραμμική απεικόνιση.

<u>Απόδειξη</u>

$(\psi \circ \varphi)(cx + dy) = \psi(c\varphi(x) + d\varphi(y)) = c(\psi \circ \varphi)(x) + d(\psi \circ \varphi)(y).$

<u>Ορισμός</u>

Το $M_n(K)$ είναι το σύνολο όλων των $n \times n$ πινάκων με στοιχεία που ανήκουν στο K.

Εάν $M \in M_n(K)$, $M = (m_{ij})$, $(m_{ij} \in K)$ μπορούμε να ορίσουμε μια γραμμική απεικόνιση της μορφής $\varphi(M)$ έτσι ώστε να ισχύει

$$\varphi(M)(x_1, \cdots, x_n) = (x_1 \ \cdots \ x_n)(m_{ij})$$

όπου ο πολλαπλασιασμός πινάκων εντοπίζεται στα δεξιά. Πολλαπλασιάζουμε έναν $1 \times n$ πίνακα με έναν $n \times n$ πίνακα έτσι ώστε να δοθεί ένας $1 \times n$ πίνακας. Προφανώς, ο πίνακας που προκύπτει είναι γραμμικός.

$$\begin{aligned} \varphi(M)(cx + dy) &= (cx + dy)(m_{ij}) \\ &= c(x_1 \cdots x_n)(m_{ij}) + d(y_1 \ \cdots \ y_n)(m_{ij}) . \end{aligned}$$

Χρησιμοποιούμε, τώρα, διανύσματα γραμμών αντί διανυσμάτων στηλών ***διότι δεν έχουμε πια την δυνατότητα επιλογής*** όταν $K = \mathbb{H}$. Μετατρέψαμε, λοιπόν, το $\mathbb{H}^n$ σε διανυσματικό χώρο, ορίζοντας κλιμακωτό πολλαπλασιασμό από τα αριστερά

$$c(x_1 \cdots x_n) = (cx_1 \cdots cx_n)$$

Και αυτό δεν είναι το ίδιο με το $(x_1c \cdots x_nc)$ που ισχύει γενικά. Εάν χρησιμοποιήσουμε διανύσματα στηλών και πολλαπλασιάσουμε πίνακες από τα αριστερά, ***δεν παίρνουμε πάντα γραμμικές σχέσεις***. Για $q, c, d \in \mathbb{H}$ και $x, y \in \mathbb{H}^n$ θεωρείστε

$$\begin{pmatrix} q & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & q & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cx_1 + dy_1 \\ \vdots \\ cx_n + dy_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} qcx_1 + qdy_1 \\ \vdots \\ qcx_n + qdy_n \end{pmatrix}$$

που σίγουρα δεν μπορούμε να αναμένουμε η παραπάνω σχέση να ισούται με

$$c\begin{pmatrix} qx_1 \\ \vdots \\ qx_n \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} qy_1 \\ \vdots \\ qy_n \end{pmatrix}$$

(Θέστε $n = 1$, $x = 1$, $y = 1$, $d = 0$, $c = i$, $q = j$)

Αντιστρόφως, δοθείσης γραμμικής απεικονίσεως $\varphi\colon K^n \to K^n$, είναι εύκολο να βρεθεί ένας $n \times n$ πίνακας M έτσι ώστε $\varphi = \varphi(M)$ (και προφανώς είναι μοναδική). Η πρώτη γραμμή του M είναι η νιοστή $\varphi(1,0,\cdots,0)$, η δεύτερη γραμμή του M είναι η $\varphi(0,1,0,\cdots,0)$, κτλ.

Να σημειωθεί ότι εάν ένας πίνακας A δίνει την γραμμική απεικόνιση φ και ένας πίνακας B δίνει την γραμμική απεικόνιση ψ, τότε ο AB δίνει την γραμμική απεικόνιση $\psi \circ \varphi$. Μία γραμμική σχέση φ αποτελεί ***ισομορφισμό*** εάν είναι μονομορφισμός και επί. Επίσης, η φ^{-1} αποτελεί γραμμικό ισομορφισμό και $\varphi \circ \varphi^{-1} = \varphi^{-1} \circ \varphi$. Για τους πίνακες, αυτό σημαίνει ότι $M(\varphi^{-1})M(\varphi) = I = M(\varphi)M(\varphi^{-1})$, έτσι ώστε ο $M(\varphi^{-1})$ να αποτελεί έναν δύο διαστάσεων αντίστροφο του $M(\varphi)$. Άρα, ***εάν A^{-1} είναι ένας αριστερός αντίστροφος για τον A, τότε είναι επίσης και δεξιός αντίστροφος για τον A.***

Ορίζουμε το σύνολο $M_n(K)$ ως έναν διανυσματικό χώρο με τον παρακάτω προφανή τρόπο:

i. Εάν $A = (a_{ij})$ και $B = (b_{ij})$ τότε

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})$$

ii. Εάν $A = (a_{ij})$ και $c \in K$, τότε

$$cA = (ca_{ij})$$

Ο παραπάνω τρόπος δεν έχει στην πράξη καμία διαφορά από τον τρόπο με τον οποίο μετατρέπαμε το K^n σε διανυσματικό χώρο, απλά τώρα δουλεύουμε με n^2 τιμές. Ωστόσο, δεν θα κερδίζαμε τίποτα εάν γράφαμε n^2 στοιχεία σε σειρά παρά σε ένα $n \times n$ διάνυσμα.

Αλλά ο $M_n(K)$ δεν αποτελεί απλά ένα διανυσματικό χώρο. Ο πολλαπλασιασμός στον χώρο αυτόν είναι και επιμεριστικός ως προς την πρόσθεση αφού,

$$A(B + C) = AB + AC$$

$$(B + C)A = BA + CA$$

Το σύνολο $M_n(K)$ ονομάζεται ***άλγεβρα*** και αναλύεται στην αμέσως επόμενη παράγραφο.

1.4. Η άλγεβρα πινάκων $M_n(K)$

Θεωρούμε τους διανυσματικούς χώρους X, Y και Z με διαστάσεις m, n και r, αντίστοιχα, και τις γραμμικές απεικονίσεις

$$f: X \to Y, \quad g: Y \to Z.$$

Με βάση την Πρόταση 1.3.1 η σύνθεση $g \circ f: X \to Z$ αποτελεί γραμμική απεικόνιση. Υποθέτουμε ότι ως προς τις βάσεις

$$u = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}, v = \{v_1, v_2, \cdots, v_m\} \text{ και } w = \{w_1, w_2, \cdots, w_r\}$$

των X, Y και Z αντίστοιχα, οι απεικονίσεις f, g έχουν πίνακες $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(K)$, $B = (b_{jk}) \in M_{r\times m}(K)$ αντίστοιχα.

Τότε θα ισχύουν οι ισότητες

$$f(u_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} v_j \, , i = 1,2, \dots, n$$
$$g(v_j) = \sum_{k=1}^{r} b_{kj} w_k \, , j = 1,2, \dots, m,$$

οπότε θα έχουμε

$$(g \circ f)(u_i) = g(f(u_i)) = g(\sum_{j=1}^{m} a_{ji} v_j) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} g(v_j)$$
$$= \sum_{j=1}^{m} a_{ji} (\sum_{k=1}^{r} b_{kj} w_k) = \sum_{k=1}^{r} (\sum_{j=1}^{m} b_{kj} a_{ji}) \, w_k$$

Επειδή έχουμε την ισότητα

$$\sum_{j=1}^{m} b_{kj} a_{ji} = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} b_{kj} = \sum_{j=1}^{m} (A^T)_{ji} (B^T)_{kj} = (A^T B^T)_{ik} = ((BA)^T)_{ik}$$

συμπεραίνουμε ότι ο πίνακας της σύνθεσης $g \circ f$ είναι ο $r \times n$ πίνακας

$$BA = \sum_{j=1}^{m} b_{kj}a_{ji} \in M_{r\times n}(K)$$

δηλαδή είναι

$$M(g \circ f) = M(g)M(f).$$

<u>Παρατηρήσεις</u>

1. Η τελευταία ισότητα είναι αυτή ακριβώς που μας οδηγεί στον ορισμό του πολλαπλασιασμού πινάκων.

2. Ειδικά για το σύνολο $M_n(K)$ η πράξη του πολλαπλασιασμού είναι εσωτερική και σε συνδυασμό με την πράξη της πρόσθεσης το εφοδιάζει με την αλγεβρική δομή του ***δακτυλίου με μονάδα***. Γενικότερα, το $M_n(K)$ εφοδιασμένο με τις πράξεις της πρόσθεσης, του βαθμωτού πολλαπλασιασμού και του πολλαπλασιασμού έχει δομή: (i) ***διανυσματικού χώρου πάνω στο σώμα K διάστασης $\boldsymbol{n^2}$,*** (ii) ***δακτυλίου με μονάδα*** και επιπλέον ικανοποιεί την ιδιότητα (iii) $\boldsymbol{\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)}$, ***για κάθε*** $\boldsymbol{\lambda \in K, A, B \in M_n(K)}$**.** Έτσι το σύνολο $M_n(K)$ είναι ***προσεταιριστική άλγεβρα με μονάδα*** πάνω στο σώμα K διάστασης n^2. Η μονάδα της άλγεβρας είναι αυτή του αντίστοιχου δακτυλίου δηλαδή ο μοναδιαίος $n \times n$ πίνακας I_n.

3. Σημειώνουμε, ότι δεν έχουν όλα τα στοιχεία της άλγεβρας $M_n(K)$ το αντίστροφο στοιχείο τους ως προς τον πολλαπλασιασμό. Το υποσύνολο της άλγεβρας $M_n(K)$ που αποτελείται από όλους τους αντιστρέψιμους αποτελεί μη αβελιανή ομάδα ως προς τον πολλαπλασιασμό, η οποία συμβολίζεται με $GL(n, K)$ και λέγεται ***Γενική Γραμμική Ομάδα***, δηλαδή

$$GL(n, K) = \{A: A \in M_n(K) \text{ και } \det A \neq 0\}$$

αναλυτική προσέγγιση της οποίας γίνεται στην αμέσως επόμενη παράγραφο.

1.5.Γενικές Γραμμικές Ομάδες

Ορισμός 1.4.1

Εάν το G είναι μια άλγεβρα, το $x \in G$ ονομάζεται αντιστρέψιμο στοιχείο εάν υπάρχει κάποιο $y \in G$ τέτοιο ώστε $xy = 1 = yx$ (εάν έχει πολλαπλασιαστικό αντίστροφο)

Πρόταση 1.4.1

Εάν η G είναι μία άλγεβρα εφοδιασμένη με την πράξη του πολλαπλασιασμού για τον οποίο ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα και $U \subset G$ είναι το σύνολο των αντιστρέψιμων στοιχείων στο G, τότε η U αποτελεί ομάδα ως προς την πράξη του πολλαπλασιασμού.

Απόδειξη

Η πράξη είναι προσεταιριστική. Επίσης, υπάρχει ως ουδέτερο στοιχείο το 1 και κάθε στοιχείο έχει συμμετρικό στοιχείο.

Ορισμός 1.4.2

Η ομάδα των αντιστρέψιμων στοιχείων στην άλγεβρα $M_n(\mathbb{R})$ συμβολίζεται με $GL(n, \mathbb{R})$, στην $M_n(\mathbb{C})$ με $GL(n, \mathbb{C})$ και στην $M_n(\mathbb{H})$ με $GL(n, \mathbb{H})$. Οι παραπάνω ονομάζονται ***γενικές γραμμικές ομάδες***.

Να σημειωθεί ότι αν ο $A \in M_n(K)$ είναι αντιστρέψιμος πίνακας, τότε ο A αντιπροσωπεύει έναν ισομορφισμό του K^n.

Ορισμός 1.4.3

Εάν η G είναι ομάδα και η H υποσύνολο του G, τότε η H αποτελεί μια ***υποομάδα*** του G εάν οι πράξεις στο G μετατρέπουν το H σε ομάδα.

Πρόταση 1.4.2

Η H είναι μια υποομάδα της ομάδας G εάν $H \subset G$ μη κενό και

i. $x, y \in H \Rightarrow xy \in H$ (κλειστότητα του H ως προς τον πολλαπλασιασμό)

ii. Το ουδέτερο στοιχείο e της G ανήκει στην H

iii. $x \in H \Rightarrow x^{-1} \in H$.

Απόδειξη

Το γεγονός ότι αν $H \leq G$ τότε οι συνθήκες (i), (ii) και (iii) πρέπει να ισχύουν, έπεται αμέσως από τον ορισμό της υποομάδας.

Αντιστρόφως, αν υποθέσουμε ότι H είναι το υποσύνολο μιας ομάδας G τέτοιο, ώστε οι συνθήκες (i), (ii) και (iii) να ισχύουν. Από την (ii), συνεπάγεται ότι υπάρχει ουδέτερο στοιχείο e της G. Επίσης, από την (iii) ικανοποιείται η ύπαρξη συμμετρικού στοιχείου. Μένει να ελεγχθεί το προσεταιριστικό αξίωμα. Όμως είναι σαφές ότι για κάθε $\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c} \in$ H, ισχύει $(\mathrm{ab})\mathrm{c} = \mathrm{a}(\mathrm{bc})$ στην H, διότι στην πραγματικότητα μπορούμε να θεωρήσουμε αυτήν την ισότητα ως ισότητα στην G, στην οποία ο προσεταιριστικός νόμος ισχύει. Επομένως, $H \leq G$.

Ένας 1×1 πίνακας στο K αποτελεί απλώς στοιχείο του K και ο πολλαπλασιασμός πινάκων διάστασης δύο αποτελεί απλά πολλαπλασιασμό στο K. Άρα βλέπουμε ότι

$$\mathrm{GL}(1, \mathbb{R}) = \mathbb{R} - \{0\}$$
$$\mathrm{GL}(1, \mathbb{C}) = \mathbb{C} - \{0\}$$
$$\mathrm{GL}(1, \mathbb{H}) = \mathbb{H} - \{0\}$$

διότι όλα τα μη μηδενικά στοιχεία είναι αντιστρέψιμα. Η $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ είναι το σύνολο των αντιστρόφων στο διανυσματικό χώρο $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ διάστασης 4. Άρα

$$\mathrm{GL}(2, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \mathrm{a} & \mathrm{b} \\ \mathrm{c} & \mathrm{d} \end{pmatrix} \middle| \begin{matrix} \mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \mathrm{d} \in \mathbb{R} \\ \mathrm{ad} - \mathrm{bc} \neq 0 \end{matrix} \right\}$$

Για τα $\mathbb{R}$ και $\mathbb{C}$ έχουμε ορίζουσες που ορίζονται στα $\mathrm{M}_\mathrm{n}(\mathbb{R})$ και $\mathrm{M}_\mathrm{n}(\mathbb{C})$ και από γραμμική άλγεβρα ξέρουμε ότι

$$\mathrm{GL}(\mathrm{n}, \mathbb{R}) = \{\mathrm{A} \in \mathrm{M}_\mathrm{n}(\mathbb{R}) | \det \mathrm{A} \neq 0\}$$

$$\mathrm{GL}(\mathrm{n}, \mathbb{C}) = \{\mathrm{A} \in \mathrm{M}_\mathrm{n}(\mathbb{C}) | \det \mathrm{A} \neq 0\}$$

Έστω ότι ορίζουμε μία ορίζουσα στο $\mathrm{M}_2(\mathbb{H})$ της μορφής

$$\det \begin{pmatrix} \mathrm{a} & \mathrm{b} \\ \mathrm{c} & \mathrm{d} \end{pmatrix} = \mathrm{ad} - \mathrm{bc}.$$

Επομένως, $\det \begin{pmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} \\ \mathrm{i} & \mathrm{j} \end{pmatrix} = \mathrm{k} - (-\mathrm{k}) = 2\mathrm{k} \neq 0$, αλλά αυτός ο πίνακας δεν μπορεί να είναι αντιστρέψιμος ή, με άλλα λόγια, η συγκεκριμένη γραμμική απεικόνιση θα αποτελούσε ισομορφισμό, όπου

$$(\mathrm{j}\ \ -\mathrm{j})\begin{pmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} \\ \mathrm{i} & \mathrm{j} \end{pmatrix} = (0\ 0)$$

και η απεικόνιση δεν θα είναι 1-1. Μπορούμε τώρα να ορίσουμε μία ***ορίζουσα μιγαδικών τιμών*** με την επιθυμητή ιδιότητα: Ο $\mathrm{A} \in \mathrm{M_n}(\mathbb{H})$ έχει αντίστροφο αν και μόνον αν αυτή η ορίζουσα είναι μη μηδενική.

Πρόταση 1.4.3

Έστω $\varphi\colon \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ αποτελεί ομομορφισμό ομάδων. Επομένως, η $\varphi(\mathrm{G})$ αποτελεί υποομάδα της Η.

Απόδειξη

Το $\varphi(\text{ουδ.}) = \text{ουδ.}$ έτσι ώστε η $\varphi(\mathrm{G})$ να περιέχει το ουδέτερο στοιχείο του Η. Εάν $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \varphi(\mathrm{G})$, τότε υπάρχουν $\mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathrm{G}$ έτσι ώστε $\varphi(\mathrm{a}) = \mathrm{x}$, $\varphi(\mathrm{b}) = \mathrm{y}$. Επομένως

$$\mathrm{xy} = \varphi(\mathrm{a})\varphi(\mathrm{b}) = \varphi(\mathrm{ab}) \in \varphi(\mathrm{G})$$

Τέλος, έστω $\mathrm{x} \in \varphi(\mathrm{G})$. Άρα, $\mathrm{x} = \varphi(\mathrm{a})$ και $\mathrm{x}^{-1} = \varphi(\mathrm{a}^{-1}) \in \varphi(\mathrm{G})$. Επομένως, η $\varphi(\mathrm{G})$ αποτελεί υποομάδα της Η.

Εάν η $\varphi\colon \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ αποτελεί 1-1 ομομορφισμό, τότε η φ αποτελεί ισομορφισμό του G επί της υποομάδας $\varphi(\mathrm{G})$ της Η, άρα μπορούμε να θεωρήσουμε την G ως υποομάδα της Η. Κατασκευάζουμε έναν 1-1 ομομορφισμό της μορφής

$$\psi\colon \mathrm{GL}(\mathrm{n}, \mathbb{H}) \to \mathrm{GL}(2\mathrm{n}, \mathbb{C})$$

και άρα για $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}(\mathrm{n}, \mathbb{H})$, θα θεωρήσουμε ως την ορίζουσα του Α, την ορίζουσα του $\psi(\mathrm{A})$.

Ξεκινάμε με

$$\psi\colon \mathbb{H} \to \mathrm{M_2}(\mathbb{C})$$

που ορίζεται ως

$$\psi(\mathrm{x} + \mathrm{iy} + \mathrm{jz} + \mathrm{kd}) = \begin{pmatrix} \mathrm{x} + \mathrm{iy} & -\mathrm{z} - \mathrm{iw} \\ \mathrm{z} - \mathrm{iw} & \mathrm{x} - \mathrm{iy} \end{pmatrix}.$$

<u>Λήμμα 1.4.1</u>

i. $\psi(a+b) = \psi(a) + \psi(b)$

ii. $\psi(ab) = \psi(a)\psi(b)$

iii. Το ψ αποτελεί ***μονομορφισμό***.

Έπειτα, για $A \in M_n(\mathbb{H})$, θέτουμε

$$\psi(A) = (\psi(a_{ij})),$$

όπου $\psi(A)$ είναι ένας $2n \times 2n$ πίνακας μιγαδικών αριθμών, του οποίου το 2×2 κομμάτι στην ij-θέση είναι το $\psi(a_{ij})$.

<u>Λήμμα 1.4.2</u>

$$\Psi(AB) = \Psi(A)\Psi(B)$$

<u>Απόδειξη</u>

Θέτω $A = (a_{ij})$ και $B = (b_{ij})$. Έπειτα

$(AB)_{ij} = a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$. Με βάση το Λήμμα 1.4.1

$$(\psi(AB)_{ij}) = \psi(a_{i1})\psi(b_{1j}) + \cdots + \psi(a_{in})\psi(b_{nj})$$

Και αυτή είναι μόνο η ij είσοδος στον $\Psi(A)\Psi(B)$.

Τώρα, θέτω $A \in GL(n,\mathbb{H})$ έτσι ώστε να υπάρχει ο $A^{-1} \in GL(n,\mathbb{H})$ και να ισχύει $AA^{-1} = I = A^{-1}A$. Επομένως, ο $\Psi(A)$ έχει $\Psi(A^{-1}) = (\Psi(A))^{-1}$ ώστε ο $\Psi(A)$ να είναι αντιστρέψιμος και άρα $\det\Psi(A) \neq 0$.

Αντίστροφα, υποθέτω ότι $\det\Psi(A) \neq 0$. Επομένως, θα υπάρχει ο $(\Psi(A))^{-1}$ και αφού ο $\Psi(GL(n,\mathbb{H}))$ αποτελεί υποομάδα της $GL(2n,\mathbb{C})$, έχουμε ότι $(\Psi(A))^{-1} \in \Psi(GL(n,\mathbb{H}))$. Άρα υπάρχει $A^{-1} \in GL(n,\mathbb{H})$ τέτοιος ώστε $\Psi(A^{-1}) = (\Psi(A))^{-1}$. Επομένως,

$$\Psi(AA^{-1}) = I$$

Και ο Ψ είναι 1-1, άρα $AA^{-1} = I$. Επομένως ο A είναι αντιστρέψιμος.

Κεφάλαιο 2

Ορθογώνιες Ομάδες

2.1. Εσωτερικό Γινόμενο

Ισχύουν κάποιες σταθερές παραδοχές για όλες τις συζυγείς παραστάσεις για κάθε $\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{H}$. Συγκεκριμένα, ορίζουμε

$$\text{Για } x \in \mathbb{R},\ \ \bar{x} = x.$$

$$\text{Για } a = x + iy \in \mathbb{C},\ \ \bar{a} = x - yi.$$

$$\text{Για } q = x + iy + jz + kw \in \mathbb{H},\ \ \bar{q} = x - iy - jz - kw.$$

Προφανώς έχουμε $\bar{\bar{a}} = a$ σε όλες τις περιπτώσεις και

$$\overline{a + b} = \bar{a} + \bar{b}\ .$$

Ισχύει

$$\overline{ab} = \overline{ba},$$

όπου φυσικά για το $\mathbb{R}$ ή το $\mathbb{C}$, το παραπάνω είναι ίδιο με

$$\overline{ab} = \overline{ab}.$$

.

Ορισμός 2.1.1

Ένας διανυσματικός χώρος πάνω στο σώμα K= $\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$ λέγεται ***χώρος εσωτερικού γινομένου***, αν είναι εφοδιασμένος με μία απεικόνιση

$$\langle\, ,\rangle : V \times V \to K, \qquad (x, y) \to \langle x, y\rangle,$$

η οποία για κάθε $x, y, z \in V$ και $\lambda, \mu \in K$ ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) $\langle \lambda x + \mu y, z\rangle = \lambda\langle x, z\rangle + \mu\langle y, z\rangle$,

(ii) $\langle y, x\rangle = \overline{\langle x, y\rangle}$, όπου $\overline{\langle x, y\rangle}$ είναι ο συζυγής μιγαδικός του $\langle x, y\rangle$,

(iii) $\langle x, x\rangle \geq 0$ και ($\langle x, x\rangle = 0 \Rightarrow x = 0$).

Για K= $\mathbb{R}$ η (ii) γίνεται $\langle y, x\rangle = \langle x, y\rangle$.

Η απεικόνιση $\langle\, ,\rangle$ ονομάζεται ***εσωτερικό γινόμενο.***

Αν είναι K= $\mathbb{R}$ και $\dim V < +\infty$, τότε ο χώρος εσωτερικού γινομένου V ονομάζεται ***Ευκλείδειος***, ενώ αν είναι K= $\mathbb{C}$ και $\dim V < +\infty$, τότε ο χώρος εσωτερικού γινομένου V λέγεται ***ορθομοναδιαίος (unitary).***

Η πρόταση που ακολουθεί είναι άμεση συνέπεια του ορισμού.

Πρόταση 2.1.1

Αν ο V είναι χώρος εσωτερικού γινομένου $\langle\, ,\rangle$ τότε:

(i) $\langle x, \lambda y + \mu z\rangle = \bar{\lambda}\langle x, y\rangle + \bar{\mu}\langle x, z\rangle$, για κάθε $x, y, z \in V$ και $\lambda, \mu \in K$,

(ii) $\langle x, 0\rangle = \langle 0, x\rangle = 0$, για κάθε $x \in V$,

(iii) $\langle x, x\rangle \in \mathbb{R}$, για κάθε $x \in V$.

Απόδειξη

(i) $\langle x, \lambda y + \mu z\rangle = \overline{\langle \lambda y + \mu z, x\rangle} = \overline{\lambda\langle y, x\rangle + \mu\langle z, x\rangle} = \overline{\lambda\langle y, x\rangle} + \overline{\mu\langle z, x\rangle} = \bar{\lambda}\langle x, y\rangle + \bar{\mu}\langle x, z\rangle$.

(ii) $\langle x, 0\rangle = \langle x, 0x\rangle = 0\langle x, x\rangle = 0$ και $\langle 0, x\rangle = \overline{\langle x, 0\rangle} = 0$.

(iii) Από την ισότητα $\langle x, x\rangle = \overline{\langle x, x\rangle}$, έπεται ότι $\langle x, x\rangle \in \mathbb{R}$.

Παραδείγματα

1. Στο διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^n$, αν $x = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ και $y = \{y_{1,} y_2, \cdots, y_n\}$ ως προς την κανονική βάση $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$, τότε η απεικόνιση

$$\langle\ ,\ \rangle: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, (x, y) \to \langle x, y\rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο, που λέγεται ***κανονικό εσωτερικό γινόμενο*** ή ***Ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο*** επί του $\mathbb{R}^n$. Έτσι ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{R}^n$ γίνεται Ευκλείδειος χώρος.

Η επαλήθευση των ιδιοτήτων (i)-(iii) του ορισμού 2.1.1 είναι εύκολη, αφού για κάθε $x = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$, $y = \{y_{1,} y_2, \cdots, y_n\}$ και $z = \{z_{1,} z_2, \cdots, z_n\} \in \mathbb{R}^n$ έχουμε:

(i) $\langle \lambda x + \mu y, z\rangle = \sum_{i=1}^{n}(\lambda x_i + \mu y_i, z_i) = \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \mu \sum_{i=1}^{n} y_i z_i = \lambda\langle x, z\rangle + \mu\langle y, z\rangle$,

(ii) $\langle y, x\rangle = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \overline{\langle x, y\rangle}$,

(iii) $\langle x, x\rangle = \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 \geq 0$ και $(\langle x, x\rangle = \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0 \Rightarrow x = 0)$.

2. Ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{C}^n$ γίνεται ορθομοναδιαίος, αν εφοδιαστεί με την απεικόνιση

$$\langle\ ,\ \rangle: \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}, (x, y) \to \langle x, y\rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i} = x_1 \overline{y_1} + x_2 \overline{y_2} + \cdots + x_n \overline{y_n}$$

για κάθε $x=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$, $y=\{y_{1,}y_2,\cdots,y_n\}$ ως προς την κανονική βάση του $\mathbb{C}^n$. Η απεικόνιση αυτή λέγεται ***κανονικό εσωτερικό γινόμενο*** επί του $\mathbb{C}^n$. Για την επαλήθευση των ιδιοτήτων (i)-(iii), εργαζόμαστε όπως στο παράδειγμα 1.

Ορισμός 2.1.2

Με βάση τα παραπάνω, έστω $K \in \{\mathbb{R},\mathbb{C},\mathbb{H}\}$ και ορίζουμε το εσωτερικό γινόμενο $\langle\, ,\rangle$ στον K^n ως

$$\langle x,y\rangle = x_1\overline{y_1}+\cdots+x_n\overline{y_n}.$$

Πρόταση 2.1.2

Το $\langle\, ,\rangle$ του ορισμού 2.1.2 έχει τις παρακάτω ιδιότητες

i. $\langle x,y+z\rangle=\langle x,y\rangle+\langle x,z\rangle$

ii. $\langle x+y,z\rangle=\langle x,z\rangle+\langle y,z\rangle$

iii. $a\langle x,y\rangle=\langle ax,y\rangle$, $\langle x,ay\rangle=\langle x,y\rangle\bar{a}$

iv. $\langle\overline{x,y}\rangle=\langle y,x\rangle$

v. Το $\langle x,x\rangle$ είναι πάντα πραγματικός αριθμός ≥ 0 και $\langle x,x\rangle=0 \Leftrightarrow x=(0,\dots,0)$.

vi. Εάν το $e_1,\dots,e_n$ αποτελεί διάνυσμα βάσης για το K^n ($e_i=(0,\dots,0,1,0,\dots,0)$) τότε,

$$\langle e_i,e_j\rangle=\delta_{ij}=\begin{cases}1 \text{ εάν } i=j\\ 0 \text{ εάν } i\neq j\end{cases}$$

vii. Το εσωτερικό γινόμενο είναι μη εκφυλισμένο. Συγκεκριμένα

Εάν $\langle x,y\rangle=0$ για όλα τα y, τότε $x=(0,\dots,0)$.

Εάν $\langle x,y\rangle=0$ για όλα τα x, τότε $y=(0,\dots,0)$.

Ορισμός 2.1.3

Το ***μήκος*** $|x|$ του $x \in K^n$ είναι

$$|x| = \sqrt{\langle x, x\rangle}.$$

Θυμόμαστε ότι εάν $A \in M_n(K)$, ο ***συζυγής*** $\overline{A}$ ορίζεται αντικαθιστώντας κάθε στοιχείο a_{ij} με το $\overline{a_{ij}}$. Ο ***ανάστροφος*** A^T ορίζεται αντικαθιστώντας κάθε στοιχείο a_{ij} με το a_{ji}. Οι δύο παραπάνω ενέργειες συμβολίζονται ταυτόχρονα ως

$$A^* = (\overline{A})^T = \overline{A^T}$$

και τον πίνακα που προκύπτει τον ονομάζουμε ***αναστροφοσυζυγή*** του A.

Ορισμός 2.1.4

Ο πίνακας με στοιχεία της μορφής $A_{ji}=(A_{ij})^T$ λέγεται ***συμπληρωματικός*** του πίνακα A και συμβολίζεται με adjA (adjoint).

Συγκεκριμένα είναι:

$$\mathrm{adj}A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

με $A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$, όπου D_{ij} είναι η ορίζουσα του πίνακα που απομένει αν, από τον πίνακα που προκύπτει από τον A μετά τις εναλλαγές, διαγράψουμε την πρώτη γραμμή και την πρώτη στήλη. Η D_{ij} είναι ίδια με την ορίζουσα του πίνακα που προκύπτει αν από τον A διαγράψουμε την i-γραμμή και την j-στήλη. Η ορίζουσα D_{ij} λέγεται ***ελάσσονα*** ορίζουσα την D ή του στοιχείου a_{ij}.

Πρόταση 2.1.3

Για κάθε $x, y \in K^n$ και $A \in M_n(K)$, έχουμε

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^* y\rangle.$$

Απόδειξη

Έστω $A = (a_{ij})$.

$$Ax = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n \end{pmatrix}$$

$$A^*y = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11}y_1 + \cdots + \bar{a}_{n1}y_n \\ \vdots \\ \bar{a}_{1n}y_1 + \cdots + \bar{a}_{nn}y_n \end{pmatrix}$$

Άρα, το αριστερό μέλος $\langle Ax, y \rangle$ ισούται με

$$(a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n)\bar{y}_1 + \cdots + (a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n)\bar{y}_n\ ,$$

και το δεξιό μέλος $\langle x, A^*y \rangle$ ισούται με

$$x_1(a_{11}\bar{y}_1 + \cdots + a_{n1}\bar{y}_n) + \cdots + x_n(a_{1n}\bar{y}_1 + \cdots + a_{nn}\bar{y}_n).$$

Παρατηρούμε, προφανώς, ότι οι δύο τελευταίες σχέσεις περιλαμβάνουν ακριβώς τους ίδιους όρους.

2.2.<u>Ορθογώνιες Ομάδες</u>

Έστω $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$.

<u>Ορισμός 2.2.1</u>

$O(n, K) = \{A \in M_n(K) | \langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle$ για όλα τα $x, y \in K^n\}$.

<u>Πρόταση 2.2.1</u>

Η $O(n, K)$ αποτελεί ομάδα.

<u>Απόδειξη</u>

Εάν $A, B \in O(n, K)$, τότε

$$\langle ABx, ABy \rangle = \langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle$$

έτσι ώστε

$$AB \in O(n, K)$$

Προφανώς, ο ταυτοτικός πίνακας I βρίσκεται μέσα στην $O(n, K)$.
Εάν $A \in O(n, K)$ έχουμε

$$\langle Ae_i, Ae_j \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ εάν } i = j \\ 0 \text{ εάν } i \neq j \end{cases}$$

Τώρα, το $\mathrm{Ae_i}$ είναι απλώς η i-οστη στήλη του A και βλέπουμε ότι το $\langle \mathrm{Ae_i}, \mathrm{Ae_j} \rangle$ είναι απλώς το ij-στοιχείο του γινομένου

$$\mathrm{AA^*}.$$

Άρα $\mathrm{AA^*} = \mathrm{I}$. Αλλά όμως ο $\mathrm{A^*A}$ είναι επίσης ταυτοτικός πίνακας, αφού $(\mathrm{A^*A})^* = (\overline{\mathrm{A}}\mathrm{A^T})^\mathrm{T} = (\mathrm{A^T})^\mathrm{T}(\overline{\mathrm{A}})^\mathrm{T} = \mathrm{AA^*} = \mathrm{I}$. Άρα ο $\mathrm{A^*} = \mathrm{A^{-1}}$ αποτελεί έναν από τα δεξιά αντίστροφο του A.

Κλείνοντας,

$$\langle \mathrm{A^{-1}x}, \mathrm{A^{-1}y} \rangle = \langle \mathrm{A^{-1}Ax}, \mathrm{A^{-1}Ay} \rangle = \langle \mathrm{x}, \mathrm{y} \rangle,$$

δείχνοντας ότι $\mathrm{A^{-1}} \in \mathrm{O(n, K)}$.

<u>Ορισμός 2.2.2</u>

Για $\mathrm{K} = \mathbb{R}$ γράφουμε την $\mathrm{O(n, K)}$ ως $\mathrm{O(n)}$ και την ονομάζουμε ***ορθογώνια ομάδα***. Για $\mathrm{K} = \mathbb{C}$, την γράφουμε ως $\mathrm{U(n)}$ και την ονομάζουμε ***ορθομοναδιαία ομάδα***. Για $\mathrm{K} = \mathbb{H}$ την γράφουμε ως $\mathrm{Sp(n)}$ και την ονομάζουμε ***συμπλεκτική ομάδα***.

<u>Πρόταση 2.2.2</u>

Έστω $\mathrm{A} \in \mathrm{M_n(K)}$. Τότε οι επόμενες συνθήκες είναι ισοδύναμες

i. $\mathrm{A} \in \mathrm{O(n, K)}$

ii. $\langle \mathrm{Ae_i}, \mathrm{Ae_j} \rangle = \delta_{\mathrm{ij}}$

iii. O A στέλνει ορθοκανονικές βάσεις σε ορθοκανονικές βάσεις.

iv. Οι γραμμές του A αποτελούν ορθοκανονική βάση

v. Οι στήλες του A αποτελούν ορθοκανονική βάση

vi. $\mathrm{A^*} = \mathrm{A^{-1}}$

Πρόταση 2.2.3

Έστω $A \in M_n(\mathbb{R})$. Τότε ο $A \in O(n) \Leftrightarrow$ ο A διατηρεί το μήκος όπως το ορίσαμε στο εσωτερικό γινόμενο.

Απόδειξη

Ο A διατηρεί το μήκος όπως το ορίσαμε στο εσωτερικό γινόμενο $\Leftrightarrow$ $\langle Ax, Ax\rangle = \langle x, x\rangle$ για όλα τα $x \in \mathbb{R}^n$. Άρα η $\Rightarrow$ είναι προφανής. Αντίστροφα, έχουμε

$$\langle A(x+y), A(x+y)\rangle = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle$$

$$= \langle Ax,Ax\rangle + \langle Ax,Ay\rangle + \langle Ay,Ax\rangle + \langle Ay,Ay\rangle.$$

Η παραπάνω σχέση δίνει $\langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle = \langle Ax,Ay\rangle + \langle Ay,Ax\rangle$ και μιας και η $\langle\, ,\rangle$ πάνω στο $\mathbb{R}$ είναι συμμετρική, αυτό αποδεικνύει ότι

$$\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle \text{ με } A \in O(n).$$

Πρόταση 2.2.4

Η Πρόταση 2.2.3 ισχύει επίσης και στα $\mathbb{H}$ και $\mathbb{C}$.

Απόδειξη

Υπολογίζω την σχέση $\langle A(e_i + e_j), A(e_i + e_j)\rangle$ όπως πριν, έτσι ώστε να πάρω

$\langle Ae_i, Ae_j\rangle + \langle Ae_j, Ae_i\rangle = 0.$

Έπειτα θεωρώ $x = x_i e_i + x_j e_j$ και υπολογίζω την $\langle Ax, Ax\rangle$. Παίρνουμε $x_i\overline{x_j}\langle Ae_i, Ae_j\rangle + x_j\overline{x_i}\langle Ae_j, Ae_i\rangle = 0$ και άρα

$$\langle Ae_i, Ae_j\rangle(x_i\overline{x_j} - \overline{x_j}x_i) = 0$$

και αυτό οδηγεί στην σχέση $\langle Ae_i, Ae_j\rangle = 0$.

Ας διερευνήσουμε λίγο στις $O(n)$, $U(n)$ και $Sp(n)$, τις πιθανές τιμές του n. Η $O(1)$ είναι το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών με μήκος 1, έτσι ώστε $O(1) = \{1, -1\}$. Η $U(1)$ είναι απλά το σύνολο όλων των μιγαδικών αριθμών με μήκος 1. Αυτή είναι η κυκλική ομάδα S^1. Η $Sp(1)$ είναι η ομάδα όλων των τετραδικών αριθμών με μοναδιαίο μήκος. Εάν ορίσουμε

$$S^{k-1} = \{x \in \mathbb{R}^k \mid |x| = 1\}$$

να είναι η μοναδιαίου μήκους (k-1)-σφαίρα, βλέπουμε ότι

$$O(1) = S^0,\ U(1) = S^1,\ Sp(1) = S^3.$$

Ένα πολύ ενδιαφέρον γεγονός αποτελεί το ότι αυτές είναι οι ***μόνες*** σφαίρες που μπορεί να αποτελέσουν ομάδες.

Πρόταση 2.2.5

Εάν $\mathrm{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ και $\mathrm{A} \in \mathrm{O}(\mathrm{n}, \mathrm{K})$, τότε

$$(\mathrm{detA})(\overline{\mathrm{detA}}) = 1$$

Απόδειξη

$\mathrm{AA}^* = \mathrm{I} = (\det \mathrm{A})(\mathrm{detA}^*) = 1$ και προφανώς

$$\mathrm{detA}^* = \mathrm{det}\overline{\mathrm{A}} = \overline{\mathrm{detA}}$$

Άρα εάν $\mathrm{A} \in \mathrm{O}(\mathrm{n})\ (= \mathrm{O}(\mathrm{n}, \mathbb{R}))$, τότε $\mathrm{detA} = \{1, -1\}$. Ορίζουμε

$$\mathrm{SO}(\mathrm{n}) = \{\mathrm{A} \in \mathrm{O}(\mathrm{n}) | \mathrm{detA} = 1\}$$

και το ονομάζουμε ***ειδική ορθογώνια ομάδα*** (επίσης ονομάζεται και ***ομάδα περιστροφής***). Ομοίως, ορίζουμε

$$\mathrm{SU}(\mathrm{n}) = \{\mathrm{A} \in \mathrm{U}(\mathrm{n}) | \mathrm{detA} = 1\}$$

και την ονομάζουμε ***ειδική ορθομοναδιαία ομάδα***.

Για παράδειγμα, ένα στοιχείο του $\mathrm{O}(2) \neq \mathrm{SO}(2)$ είναι το $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Αυτό στέλνει το $\mathrm{e}_1 = (1,0)$ στο e_1 και στέλνει, επίσης, το $\mathrm{e}_2 = (0,1)$ στο $-\mathrm{e}_2$. Τέλος, έχει ορίζουσα ίση με -1.

2.3. Μια απορία περί ισομορφισμού

Στο τέλος του κεφαλαίου 1 είδαμε ότι δύο ομάδες που ορίζονταν με διαφορετικό τρόπο ήταν ισομορφικές. Έχουμε πλέον ορίσει διάφορες κατηγορίες ομάδων ($\mathrm{GL}(\mathrm{n}, \mathrm{K})$ για $\mathrm{n} = 1,2, \ldots$ και $\mathrm{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$ και την $\mathrm{O}(\mathrm{n}, \mathrm{K})$ για $\mathrm{n} = 1,2, \ldots$ και $\mathrm{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$) και ο κύριος στόχος μας είναι να βρούμε ποιες από αυτές είναι ισομορφικές. Η βασική ιδέα είναι να αναπτύξουμε αναλλοίωτες των ομάδων πινάκων (διάσταση, βαθμός κτλ), πχ δύο ισομορφικές ομάδες πρέπει να έχουν τις ίδιες αναλλοίωτες. Με αυτόν τον τρόπο, πιθανώς θα οδηγηθούμε στο να δείξουμε ότι μερικές ομάδες δεν είναι ισομορφικές. Αλλά όταν δύο διαφορετικώς ορισμένες ομάδες είναι πράγματι ισομορφικές, ο ισομορφισμός θα είναι δύσκολο να βρεθεί. Για αυτόν τον λόγο θα είναι δύσκολο να αναπτύξουμε αναλλοίωτες. Για να μειώσουμε, δηλαδή, όσο το δυνατόν γίνεται περισσότερο τις περιπτώσεις που πρέπει να κοιτάξουμε για ισομορφισμούς. Σε αυτήν την ενότητα θα δώσουμε έναν ισομορφισμό.

Έστω ότι υποψιαζόμαστε ότι οι $\mathrm{Sp}(1)$ και $\mathrm{SU}(2)$ είναι ισομορφικές. Πως θα μπορούσαμε να βρούμε έναν ισομορφισμό; Η $\mathrm{Sp}(1)$ είναι το σύνολο όλων των τετραδικών αριθμών μοναδιαίου μήκους και η $\mathrm{SU}(2)$ είναι το σύνολο όλων των 2×2 μιγαδικών πινάκων A έτσι ώστε $AA^* = I$ και $\det A = 1$. Η πράξη στην $\mathrm{Sp}(1)$ είναι πολλαπλασιασμός τετραδικών αριθμών, ενώ στην $\mathrm{SU}(2)$ είναι πολλαπλασιασμός πινάκων.

Πρόταση 2.3.1

Η σχέση $\varphi: M_n(\mathbb{H}) \to M_{2n}(\mathbb{C})$ που ορίζεται στην παράγραφο 1.5 του Κεφαλαίου 1 εισάγει έναν ισομορφισμό της μορφής

$$\varphi: \mathrm{Sp}(1) \to \mathrm{SU}(2).$$

Απόδειξη

Έχουμε δει ότι η φ αποτελεί έναν 1-1 ομομορφισμό της $\mathrm{GL}(n, \mathbb{H})$ μέσα στην $\mathrm{GL}(2n, \mathbb{C})$, άρα η εφαρμογή της φ στην $\mathrm{Sp}(1)$ αποτελεί ακόμα έναν 1-1 ομομορφισμό. Άρα χρειάζεται απλώς να δείξουμε ότι

A. $A \in \mathrm{Sp}(1) \Rightarrow \varphi(A) \in \mathrm{SU}(2)$ και

B. κάθε $B \in \mathrm{SU}(2)$ είναι ίσο με $\varphi(A)$ με $A \in \mathrm{Sp}(1)$.

Εάν $A = a + ib + jc + kd$, τότε $\varphi(A) = \begin{pmatrix} a+ib & -c-id \\ c-id & a+ib \end{pmatrix}$ έτσι ώστε

$$\varphi(A)(\varphi(A))^* = \begin{pmatrix} a+ib & -c-id \\ c-id & a-ib \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a-ib & c+id \\ -c+id & a+ib \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

μιας και $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$. Επίσης, $\det\varphi(A) = 1$ άρα $\varphi(A) \in \mathrm{SU}(2)$.

Έστω $B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathrm{SU}(2)$. Χρησιμοποιώντας ότι $\det B = 1$ και το γεγονός ότι οι γραμμές είναι ορθογώνια μοναδιαία διανύσματα, βρίσκουμε ότι

$$\delta = \overline{\alpha} \text{ και } \gamma = \overline{\beta}$$

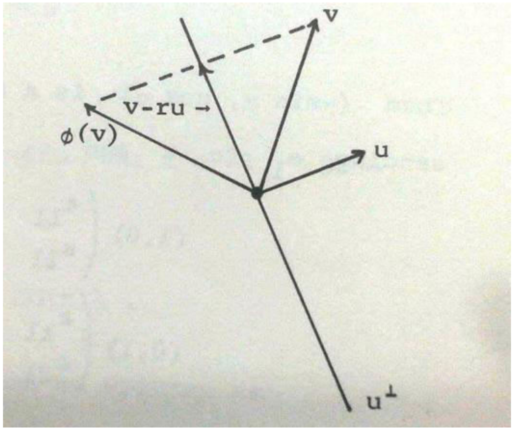
Άρα, εάν $\alpha = a + ib$ και $\beta = c - id$, τότε μπορούμε να πάρουμε $A = a + ib + jc + kd$ και έτσι να έχουμε $\varphi(A) = B$ (και $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$).

2.4.Κατοπτρισμός στον $\mathbb{R}^n$

Έστω u το μοναδιαίο διάνυσμα του $\mathbb{R}^n$ και έστω

$$\mathrm{u}^{\perp} = \{\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n | \langle \mathrm{x}, \mathrm{u} \rangle = 0\}$$

είναι το ορθογώνιο του συμπλήρωμα.



Η ***προβολή*** του διανύσματος v στο $\mathrm{u}^{\perp}$ είναι το $\mathrm{v} - \mathrm{ru}$, όπου $\mathrm{r} \in \mathbb{R}$ και επιλέγεται έτσι ώστε το $\mathrm{v} - \mathrm{ru}$ να ανήκει στον $\mathrm{u}^{\perp}$. Άρα $0 = \langle \mathrm{v} - \mathrm{ru}, \mathrm{u} \rangle = \langle \mathrm{v}, \mathrm{u} \rangle - \mathrm{r}\langle \mathrm{u}, \mathrm{u} \rangle$ και άρα

$$\mathrm{r} = \langle \mathrm{v}, \mathrm{u} \rangle.$$

Προφανώς το συμμετρικό διάνυσμα του v ως προς το $\mathrm{u}^{\perp}$ είναι της μορφής

$$\varphi(\mathrm{v}) = \mathrm{v} - 2\mathrm{ru} = \mathrm{v} - 2\langle \mathrm{v}, \mathrm{u} \rangle \mathrm{u}.$$

Διαλέγουμε μία ορθοκανονική βάση $\mathrm{u}_1, \dots, \mathrm{u}_\mathrm{n}$ με $\mathrm{u}_1 = \mathrm{u}$. Επομένως, κάνοντας χρήση αυτής της βάσης, ο κατοπτρισμός φ δίνεται από τον πίνακα $\begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$. Έστω A μία γραμμική σχέση στον $\mathbb{R}^n$ που ορίζεται στέλνοντας το $\mathrm{e}_1, \dots, \mathrm{e}_\mathrm{n}$ στο $\mathrm{u}_1, \dots, \mathrm{u}_\mathrm{n}$. Κάνοντας χρήση της Πρότασης 2.2.2, ο A είναι ορθογώνιος. Άρα, και με βάση την ορθοκανονική βάση $\mathrm{e}_1, \dots, \mathrm{e}_\mathrm{n}$, ο κατοπτρισμός δίνεται από την σχέση

$$\mathrm{A}\begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}\mathrm{A}^{-1} = \mathrm{A}\begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}\mathrm{A}^{\mathrm{T}}.$$

Αντίστροφα, βλέπουμε ότι ένας τέτοιος πίνακας αντιπροσωπεύει το συμμετρικό διάνυσμα ενός ορθογώνιου συμπληρώματος του διανύσματος $e_1 A$.

Στον $\mathbb{R}^2$, έστω ότι το μοναδιαίο διάνυσμα u γράφεται ως

$$u = (\cos a, \sin a).$$

Επομένως, το $(-\sin a, \cos a)$ αποτελεί μοναδιαίο διάνυσμα στον $u^\perp$. Ο πίνακας A, που στέλνει το e_1 στο u και το e_2 στο $(-\sin a, \cos a)$, πρέπει να ικανοποιεί τις

$$(1\ 0)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = (\cos a\ \sin a)$$

$$(0\ 1)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = (-\sin a\ \cos a)$$

άρα

$$A = \begin{pmatrix} \cos a & \sin a \\ -\sin a & \cos a \end{pmatrix}.$$

Άρα, ο πίνακας που δίνει το συμμετρικό διάνυσμα ως προς το $u^\perp$ είναι ο

$$\Phi = \begin{pmatrix} \cos a & \sin a \\ -\sin a & \cos a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix}$$

$$\Phi = \begin{pmatrix} -\cos 2a & \sin 2a \\ \sin 2a & \cos 2a \end{pmatrix}.$$

Ο πίνακας A προφανώς αποτελεί πίνακα περιστροφής του $\mathbb{R}^2$.

Κεφάλαιο 3

Ομάδες Πινάκων Lie

3.1. Ορισμός των ομάδων πινάκων Lie

Οι ομάδες πινάκων που θα μελετήσουμε σε αυτό το κεφάλαιο, αποτελούν υποομάδες μιας συγκεκριμένης κατηγορίας της γενικής γραμμικής ομάδας, στην οποία αναφερθήκαμε στα προηγούμενα κεφάλαια. Αυτό το κεφάλαιο κάνει χρήση διαφόρων κανόνων της γραμμικής άλγεβρας, όπως επίσης συνοψίζονται γεγονότα και ορισμοί από της θεωρία των αφηρημένων ομάδων.

Υπενθυμίζεται ότι:

Η γενική γραμμική ομάδα πάνω σε πραγματικούς αριθμούς, συμβολίζεται ως $\mathrm{GL}(\mathrm{n}, \mathbb{R})$ και είναι η ομάδα όλων των $\mathrm{n} \times \mathrm{n}$ αντιστρέψιμων πινάκων με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς. Η γενική γραμμική ομάδα πάνω σε μιγαδικούς αριθμούς συμβολίζεται ως $\mathrm{GL}(\mathrm{n}, \mathbb{C})$ και είναι η ομάδα όλων των $\mathrm{n} \times \mathrm{n}$ αντιστρέψιμων πινάκων με στοιχεία μιγαδικούς αριθμούς.

Οι γενικές γραμμικές ομάδες είναι στην πράξη ομάδες που υπόκειται στην πράξη του πολλαπλασιασμού πινάκων. Το γινόμενο δύο αντιστρέψιμων πινάκων έχει, εξ ορισμού, έναν αντίστροφο και ο πολλαπλασιασμός πινάκων είναι προσεταιριστικός.

Η $\mathrm{M}_{\mathrm{n}}(\mathbb{C})$ συμβολίζει το χώρο όλων των $\mathrm{n} \times \mathrm{n}$ πινάκων με στοιχεία μιγαδικούς αριθμούς.

Ορισμός 3.1.1

Έστω A_m μια ακολουθία πινάκων με στοιχεία μιγαδικούς αριθμούς της $M_n(\mathbb{C})$. Λέμε ότι η A_m συγκλίνει σε έναν πίνακα A, εάν κάθε στοιχείο της A_m συγκλίνει (καθώς το $m \to \infty$) στο αντίστοιχο στοιχείο του A. (π.χ. εάν το $(A_m)_{kl}$ συγκλίνει στο A_{kl} για όλα τα $1 \leq k, l \leq n$)

Ορισμός 3.1.2

Μια ***ομάδα πινάκων Lie*** είναι κάθε υποομάδα G της $GL(n, \mathbb{C})$ με την ακόλουθη ιδιότητα: Εάν A_m είναι κάθε ακολουθία πινάκων που ανήκει στην G, και η A_m συγκλίνει σε πίνακα A, τότε είτε ο $A \in G$, είτε ο A δεν αντιστρέφεται.

Η συνθήκη στον G ισοδυναμεί με το να πούμε ότι η G είναι ένα κλειστό (ως προς την πράξη της $(G, \circ)$,δηλαδή για κάθε a ,b ∈ G, $a \circ b \in G$),υποσύνολο της $GL(n, \mathbb{C})$. (Αυτό δεν σημαίνει απαραίτητα ότι η G είναι κλειστή ως προς την $M_n(\mathbb{C})$). Άρα ο παραπάνω ορισμός είναι ισοδύναμος με το να πούμε ότι μια ομάδα πινάκων Lie αποτελεί κλειστό υποσύνολο της $GL(n, \mathbb{C})$.

Η συνθήκη ότι η G αποτελεί κλειστή υποομάδα, σε αντίθεση με τις απλές υποομάδες, θα πρέπει να θεωρείται ως κάτι ξεχωριστό, μιας και μόνο οι πιο σημαντικές υποομάδες της $GL(n, \mathbb{C})$ έχουν αυτήν την ιδιότητα. (Οι περισσότεροι εκ των G ομάδων πινάκων Lie, θα θεωρήσουμε ότι έχουν την παραπάνω ιδιότητα έτσι ώστε εάν A_m είναι κάθε ακολουθία πινάκων που ανήκει στην G και η A_m συγκλίνει σε έναν πίνακα A, τότε $A \in G$ (ότι, δηλαδή, η G είναι κλειστή ως προς την $M_n(\mathbb{C})$).)

3.1.1. Αντιπαραδείγματα ομάδων πινάκων Lie

Ένα παράδειγμα υποομάδας της $GL(n, \mathbb{C})$, η οποία δεν είναι κλειστή (και άρα δεν αποτελεί ομάδα πινάκων Lie) είναι το σύνολο όλων των $n \times n$ αντιστρέψιμων πινάκων των οποίων τα στοιχεία είναι πραγματικοί και ρητοί αριθμοί. Στην πραγματικότητα αυτή αποτελεί υποομάδα της $GL(n, \mathbb{C})$, η οποία όμως δεν είναι κλειστή. Έτσι, θα μπορούσαμε να έχουμε μια ακολουθία αντιστρέψιμων πινάκων με στοιχεία ρητούς αριθμούς που να συγκλίνει σε έναν αντιστρέψιμο πίνακα με μερικά εκ των στοιχείων του να είναι άρρητοι αριθμοί. (Στην πράξη, κάθε πραγματικός αντιστρέψιμος πίνακας, είναι το όριο μερικών ακολουθιών αντιστρέψιμων πινάκων με στοιχεία ρητούς αριθμούς).

Για παράδειγμα, έστω $G = GL(2, \mathbb{Q})$ η ομάδα των αντιστρέψιμων 2×2 πινάκων με ρητά στοιχεία.

Η υποομάδα

$$\mathrm{GL}(2,\mathbb{Q}) = \left\{A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{Q}, ad - bc \neq 0\right\}$$

της $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ (άρα και της $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$) δεν είναι ομάδα πινάκων Lie διότι, π.χ., η ακολουθία

$$A_n = \left\{\begin{pmatrix} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{Q})\right\}.$$

συγκλίνει στον αντιστρέψιμο πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \notin \mathrm{GL}(2,\mathbb{Q})$$

Ένα άλλο παράδειγμα ομάδων πινάκων που δεν είναι ομάδες πινάκων Lie είναι η ακόλουθη υποομάδα της $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$. Έστω a είναι ένας άρρητος πραγματικός αριθμός και έστω

$$G = \left\{\begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{ita} \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R}\right\}$$

Προφανώς, η G αποτελεί υποομάδα της $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$. Επειδή ο a είναι άρρητος, ο πίνακας -I δεν ανήκει στην G, άρα για να κάνουμε το e^{it} ίσο με -1, πρέπει να θεωρήσουμε ότι ο t είναι ένας περιττός ακέραιος που ταυτόχρονα αποτελεί πολλαπλάσιο του π και σε αυτήν την περίπτωση το ta δεν μπορεί να είναι περιττός ακέραιος και πολλαπλάσιο του π. Από την άλλη, αν θεωρήσουμε $t = (2n+1)\pi$ για έναν κατάλληλα επιλεγμένο ακέραιο n, μπορούμε να κάνουμε το ta να είναι αυθαιρέτως κοντά σε έναν περιττό ακέραιο και ταυτόχρονα πολλαπλάσιο του π. Άρα μπορούμε να βρούμε μια ακολουθία πινάκων στο G, οι οποίοι να συγκλίνουν στο -I και άρα ο G να μην αποτελεί ομάδα πινάκων Lie.

3.2. Παραδείγματα ομάδων πινάκων Lie

3.2.1. Οι γενικές γραμμικές ομάδες $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ και $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$

Οι γενικές γραμμικές ομάδες (πάνω στα $\mathbb{R}$ και $\mathbb{C}$) αποτελούν από μόνες τους ομάδες πινάκων Lie. Φυσικά, η $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ αποτελεί υποομάδα του εαυτού της. Επιπλέον, εάν η A_m αποτελεί μια ακολουθία πινάκων της $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ και η A_m συγκλίνει στον A, τότε, από τον ορισμό της $GL(n,\mathbb{C})$, είτε ο Α ανήκει στην $GL(n,\mathbb{C})$, είτε ο Α δεν αντιστρέφεται.

Επιπλέον, η $GL(n,\mathbb{R})$ είναι υποομάδα της $GL(n,\mathbb{C})$ και εάν $A_m \in GL(n,\mathbb{R})$ και η A_m συγκλίνει στον Α, τότε τα στοιχεία του Α είναι πραγματικοί αριθμοί. Άρα είτε ο Α δεν αντιστρέφεται, είτε $A \in GL(n,\mathbb{R})$.

3.2.2. Οι ειδικές γραμμικές ομάδες $SL(n,\mathbb{R})$ και $SL(n,\mathbb{C})$

Οι ειδικές γραμμικές ομάδες (πάνω στα $\mathbb{R}$ και $\mathbb{C}$) είναι η ομάδα των $n \times n$ αντιστρέψιμων πινάκων (με στοιχεία πραγματικούς ή μιγαδικούς αριθμούς) που έχει ορίζουσα ίση με 1. Και οι δύο αυτές ομάδες είναι υποομάδες της $GL(n,\mathbb{C})$. Επίσης, εάν A_n είναι μια ακολουθία πινάκων με ορίζουσα ίση με 1 και η A_n συγκλίνει στον Α, τότε ο Α έχει επίσης ορίζουσα ίση με 1, διότι η ορίζουσα είναι συνεχής συνάρτηση. Άρα οι $SL(n,\mathbb{R})$ και $SL(n,\mathbb{C})$ αποτελούν ομάδες πινάκων Lie.

3.2.3. Ορθογώνιες και ειδικές ορθογώνιες ομάδες O(n) και SO(n)

Υπενθυμίζουμε εν συντομία ότι ένας $n \times n$ πίνακας πραγματικών αριθμών Α λέγεται **ορθογώνιος** εάν οι στήλες του Α αποτελούν ορθοκανονικά διανύσματα στηλών, δηλαδή εάν

$$\sum_{l=1}^{n} A_{lj}A_{lk} = \delta_{jk}, \qquad 1 \leq j,k \leq n.$$

(Εδώ το δ_{jk} είναι το δέλτα του Kronecker, το οποίο ισούται με 1 εάν $j = k$ και ισούται με 0 εάν $j \neq k$) Ισοδύναμα, ο Α είναι ορθογώνιος εάν διατηρεί το εσωτερικό γινόμενο, δηλαδή εάν $\langle x,y\rangle = \langle Ax,Ay\rangle$ για όλα τα διανύσματα x,y στον $\mathbb{R}^n$. (Οι αγκύλες της μορφής $\langle\ ,\ \rangle$ συμβολίζουν το εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^n$, με $\sum_k x_k y_k$.) Ένας ακόμα ισοδύναμος ορισμός είναι πως ο Α είναι ορθογώνιος εάν $A^T A = I$, ή με άλλα λόγια εάν $A^T = A^{-1}$ (Ο A^T αποτελεί τον ανάστροφο πίνακα του Α και $(A^T)_{kl} = A_{lk}$)

Μιας και $\det A^T = \det A$, βλέπουμε ότι εάν ο Α είναι ορθογώνιος, τότε η $\det(A^T A) = (\det A)^2 = \det I = 1$. Άρα, $\det A = \pm 1$, για όλους τους ορθογώνιους πίνακες Α.

Ο παραπάνω τρόπος μας δείχνει συγκεκριμένα ότι κάθε ορθογώνιος πίνακας πρέπει να είναι αντιστρέψιμος. Όμως εάν ο A είναι ορθογώνιος πίνακας, τότε

$$\langle A^{-1}x, A^{-1}y\rangle = \langle A(A^{-1}x), A(A^{-1}y)\rangle = \langle x, y\rangle.$$

Άρα, ο αντίστροφος ενός ορθογώνιου πίνακα παραμένει ορθογώνιος πίνακας. Επιπλέον, το γινόμενο δύο ορθογωνίων πινάκων είναι ορθογώνιος πίνακας, μιας και εάν οι A και B διατηρούν εσωτερικά γινόμενα, τότε το ίδιο ισχύει και με τον AB. Άρα το σύνολο όλων των ορθογωνίων πινάκων αποτελεί ομάδα.

Το σύνολο όλων των $n \times n$ πραγματικών ορθογωνίων πινάκων αποτελεί την ορθογώνια ομάδα O(n), η οποία είναι υποομάδα της $GL(n, \mathbb{C})$. Το όριο μιας ακολουθίας ορθογωνίων πινάκων αποτελεί ορθογώνιο πίνακα, μιας και η σχέση $A^T A = I$ διατηρείται παίρνοντας όρια. Άρα, η O(n) αποτελεί ομάδα πινάκων Lie.

Το σύνολο των $n \times n$ ορθογωνίων πινάκων με ορίζουσα 1 είναι οι ειδικοί ορθογώνιοι πίνακες SO(n). Προφανώς, αυτοί αποτελούν υποομάδα της O(n) και άρα και της $GL(n, \mathbb{C})$. Επιπλέον, τόσο η ορθογωνιότητα όσο και η ιδιότητα να έχουν ορίζουσα ίση με 1 διατηρούνται παίρνοντας όρια και άρα η SO(n) αποτελεί ομάδα πινάκων Lie.

Γεωμετρικά, τα στοιχεία της O(n) απεικονίζονται είτε περιστροφικά είτε σε συνδυασμό περιστροφών και συμμετριών. Τα στοιχεία της SO(n) απεικονίζονται απλώς περιστροφικά.

3.2.4. Ορθομοναδιαίες - ειδικές ορθομοναδιαίες ομάδες U(n) και SU(n)

Υπενθυμίζουμε εν συντομία ότι ένας $n \times n$ πίνακας μιγαδικών A ονομάζεται ***ορθομοναδιαίος (unitary)*** εάν τα διανύσματα στήλες του πίνακα A είναι ορθοκανονικά έτσι ώστε εάν

$$\sum_{l=1}^{n} \overline{A_{lj}} A_{lk} = \delta_{jk}$$

Ισοδύναμα, ο A είναι ορθομοναδιαίος εάν διατηρεί το εσωτερικό γινόμενο, αν $\langle x, y\rangle = \langle Ax, Ay\rangle$ για όλα τα διανύσματα x, y στον $\mathbb{C}^n$. (Οι αγκύλες της μορφής $\langle\ ,\ \rangle$ συμβολίζουν το εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{C}^n$, με $\sum_k \bar{x}_k y_k$.Υιοθετούμε επίσης τη σύμβαση της τοποθέτησης του συζυγή μιγαδικού στα αριστερά). Ένας ακόμα ισοδύναμος ορισμός είναι πως ο A είναι ορθομοναδιαίος εάν $A^*A = I$, ή με άλλα λόγια εάν $A^* = A^{-1}$ (O A^* αποτελεί τον αναστροφοσυζυγή πίνακα του A και $(A^*)_{jk} = \overline{A_{kj}}$)

Μιας και $\det A^* = \overline{\det A}$, βλέπουμε ότι εάν ο A είναι ορθομοναδιαίος, τότε η $\det(A^*A) = |\det A|^2 = \det I = 1$. Άρα, $\det A = e^{i\theta}$, για κάθε $\theta \in [0,2\pi]$ και $|\det A| = 1$, για όλους τους ορθομοναδιαίους πίνακες A.

Ο παραπάνω τρόπος μας δείχνει συγκεκριμένα ότι κάθε ορθομοναδιαίος πίνακας πρέπει να είναι αντιστρέψιμος. Με βάση το ίδιο επιχείρημα που χρησιμοποιήσαμε για τους ορθογώνιους πίνακες βλέπουμε ότι και το σύνολο όλων των ορθομοναδιαίων πινάκων αποτελεί ομάδα.

Το σύνολο όλων των $n \times n$ ορθομοναδιαίων πινάκων αποτελεί την ***ορθομοναδιαία ομάδα*** U(n), η οποία με την σειρά της αποτελεί υποομάδα της GL(n,ℂ). Το όριο των ορθομοναδιαίων πινάκων είναι επίσης ορθομοναδιαίο, άρα η U(n) αποτελεί ομάδα πινάκων Lie. Το σύνολο όλων των ορθομοναδιαίων πινάκων με ορίζουσα ίση με 1 αποτελεί την ***ειδική ορθομοναδιαία ομάδα*** SU(n). Εύκολα αποδεικνύεται ότι και η SU(n), αποτελεί ομάδα πινάκων Lie. Να σημειωθεί ότι ένας ορθομοναδιαίος πίνακας μπορεί να έχει ορίζουσα $e^{i\theta}$ για κάθε $\theta \in [0,2\pi]$ και άρα η SU(n) να αποτελεί ένα μικρότερο υποσύνολο της U(n).

3.2.5. Οι μιγαδικές ορθογώνιες ομάδες O(n,ℂ) και SO(n,ℂ)

Θεωρείστε ότι η διγραμμική μορφή $(\cdot,\cdot)$ στον $\mathbb{C}^n$ ορίζεται από την σχέση $(x, y) = \sum_k x_k y_k$. Αυτή η μορφή δεν αποτελεί εσωτερικό γινόμενο γιατί, για παράδειγμα, είναι συμμετρική και όχι συζυγής και συμμετρική. Το σύνολο όλων των $n \times n$ μιγαδικών πινάκων A που διατηρούν την ίδια μορφή (η οποία είναι η $(Ax, Ay) = (x, y)$ για όλα τα $x, y \in \mathbb{C}^n$) αποτελεί την μιγαδική ορθογώνια ομάδα O(n,ℂ), η οποία και αποτελεί μια υποομάδα της GL(n,ℂ). Χρησιμοποιώντας τα ίδια επιχειρήματα που χρησιμοποιήσαμε και για τις SO(n) και O(n) (αλλά απαιτώντας αυτήν την φορά για στοιχεία μιγαδικούς αριθμούς) βλέπουμε ότι ένας $n \times n$ πίνακας μιγαδικών αριθμών A ανήκει στην O(n,ℂ) αν και μόνον αν $A^T A = I$, έτσι ώστε η O(n,ℂ) να αποτελεί ομάδα πινάκων Lie και άρα $\det A = \pm 1$ για όλους τους A που ανήκουν στην O(n,ℂ). Να σημειωθεί επίσης ότι η O(n,ℂ) δεν είναι ίδια με την ορθομοναδιαία ομάδα U(n).

Η ομάδα $SO(n,\mathbb{C})$ ορίζεται ως το σύνολο όλων των A που ανήκουν στην $O(n,\mathbb{C})$ με $\det A = 1$ και αποτελεί επίσης ομάδα πινάκων Lie.

3.2.6. Οι γενικευμένες ορθογώνιες ομάδες και οι ομάδες Lorentz

Έστω n και k θετικοί ακέραιοι. Ας θεωρήσουμε μια συμμετρική διγραμμική μορφή στο $\mathbb{R}^{n+k}$ από τον τύπο

$$\langle x, y\rangle_{n,k} = x_1y_1 + x_ny_n - x_{n+1}y_{n+1} - x_{n+k}y_{n+k}\,,$$

Έστω το σύνολο των $(n+k)\times(n+k)$ πραγματικών πινάκων A για το οποίο ισχύει: $\langle Ax, Ay\rangle_{n,k} = \langle x, y\rangle_{n,k}$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^{n+k}$. Το σύνολο αυτό αποτελεί την ***γενικευμένη ορθογώνια ομάδα*** που συμβολίζεται με $O(n, k)$. Η ομάδα αυτή αποτελεί υποομάδα του $GL(n+k, \mathbb{R})$ και αποδεικνύεται ότι είναι ομάδα πινάκων Lie.

Εάν A είναι ένας $(n+k)\times(n+k)$ πραγματικός πίνακας ορίζουμε ως $A^{(i)}$ την i-οστή στήλη-διάνυσμα του A:

$$A^{(i)} = \begin{pmatrix} A_{1,i} \\ \vdots \\ A_{n+k,i} \end{pmatrix}$$

Θα λέμε ότι ο A ανήκει στην ομάδα $O(n, k)$ εάν ισχύουν τα παρακάτω:

$$\langle A^{(l)}, A^{(j)}\rangle_{n,k} = 0, \qquad l \neq j$$

$$\langle A^{(l)}, A^{(l)}\rangle_{n,k} = 1, \qquad 1 \leq l \leq n$$

$$\langle A^{(l)}, A^{(l)}\rangle_{n,k} = -1, \qquad n+1 \leq l \leq n+k$$

Έστω g ένας $(n+k)\times(n+k)$ διαγώνιος πίνακας με μονάδες στις πρώτες n διαγώνιες θέσεις και -1 στις τελευταίες k διαγώνιες θέσεις. Τότε ο A ανήκει στην $O(n, k)$ αν και μόνον εάν $A^TgA = g$. Παίρνοντας ορίζουσες στην προηγούμενη σχέση προκύπτει ότι $(\det A)^2 \det g = \det g$ άρα $(\det A)^2 = 1$. Άρα, για $A \in O(n,k), \det A = \pm 1$.

Μεγάλο ενδιαφέρον στη Φυσική έχει η ***ομάδα Lorentz*** $O(3,1)$.

3.2.7. Οι συμπλεκτικές ομάδες $Sp(2n,\mathbb{R}), Sp(2n,\mathbb{C})$ και $Sp(2n)$

Οι ειδικές και γενικές γραμμικές ομάδες, οι ορθογώνιες και οι ορθομοναδιαίες ομάδες και οι συμπλεκτικές ομάδες αποτελούν τις ***κλασσικές ομάδες***. Από τις κλασσικές ομάδες, οι συμπλεκτικές ομάδες έχουν τον πιο περίπλοκο ορισμό διότι υπάρχουν τρία σύνολα από αυτές ($Sp(2n,\mathbb{R}), Sp(2n,\mathbb{C})$ και $Sp(2n)$) και επειδή έχουν να κάνουν με αντισυμμετρικές διγραμμικές μορφές παρά με τις περισσότερο γνωστές συμμετρικές διγραμμικές μορφές.

Πριν προχωρήσουμε, θα αναφερθούμε σε ορισμένες έννοιες από την γραμμική άλγεβρα.

Θεωρούμε έναν διανυσματικό χώρο V επί του σώματος F ($F = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$). Μια απεικόνιση της μορφής:

$$\langle\, , \rangle : V \times V \ \rightarrow \ F$$

με την ιδιότητα

$$\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha\langle x, z\rangle + \beta\langle y, z\rangle \text{ και}$$

$$\langle x, \alpha y + \beta z\rangle = \overline{\alpha}\langle x, y\rangle + \overline{\beta}\langle x, z\rangle$$

$$\forall x, y, z \in V \ \textit{και} \ \forall \alpha, \beta \in F,$$

ονομάζεται ***διγραμμική μορφή (bilinear form)***. Εάν $B = \{\dots, e_i, \dots\}$ είναι μια βάση του διανυσματικού χώρου V και $g_{ij} = \langle e_i, e_j\rangle$, τότε:

$$\langle x, y\rangle = \langle \sum_i x_i\, e_i, \sum_j y_j e_j\rangle = \sum_i \sum_j x_i\, \overline{y_j}\langle e_i, e_j\rangle = \sum_i \sum_j x_i\, \overline{y_j} g_{ij}$$
$$= x^T g \overline{y}$$

δηλαδή η διγραμμική μορφή ορίζεται πλήρως αν δοθούν τα στοιχεία g_{ij}, που αποτελούν τον πίνακα g της διγραμμικής μορφής.

<u>Για $F = \mathbb{R}$</u>

Μια διγραμμική μορφή λέγεται **συμμετρική** και θα την συμβολίζουμε με $\langle\, , \rangle_\sigma$ και g_σ τον αντίστοιχο πίνακα εάν

$$\forall x, y \in V,\ \langle x, y\rangle_\sigma = \langle y, x\rangle_\sigma \ \text{ ή ισοδύναμα } g_\sigma = {g_\sigma}^T$$

και **αντισυμμετρική** που θα την συμβολίζουμε με $\langle\, , \rangle_\alpha$ και g_α τον αντίστοιχο πίνακα εάν

$$\forall x, y \in V,\ \langle x, y\rangle_\alpha = -\langle y, x\rangle_\alpha \text{ ή ισοδύναμα } g_\alpha = -{g_\alpha}^T$$

στην τελευταία περίπτωση η διάσταση του διανυσματικού χώρου V πρέπει να είναι άρτιος αριθμός.

Παράδειγμα αντισυμμετρικής διγραμμικής μορφής είναι αυτή που αντιστοιχεί στον πίνακα:

$$g = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$$

όπου I_n ο ταυτοτικός $n \times n$ πίνακας με

$$\langle x, y\rangle_\alpha = (x^1 y^{n+1} - x^{n+1} y^1) + (x^2 y^{n+2} - x^{n+2} y^2) + \cdots +$$

$$+(x^2 y^{2n} - x^{2n} y^2) = x^T g y$$

Ένας τελεστής T, που επιδρά πάνω σ' έναν διανυσματικό χώρο V εφοδιασμένο με μια διγραμμική μορφή $\langle \, , \rangle$, θα λέγεται:

1) **ορθογώνιος** αν η διγραμμική μορφή είναι συμμετρική και ο τελεστής T ικανοποιεί την σχέση:

$$\langle Tx, Ty\rangle_\sigma = \langle x, y\rangle_\sigma \ \forall x, y \in V$$

δηλ. αφήνει αναλλοίωτη την διγραμμική μορφή.

2) **συμπλεκτικός** αν η διγραμμική μορφή είναι αντισυμμετρική και ο τελεστής T ικανοποιεί την σχέση:

$$\langle Tx, Ty\rangle_\alpha = \langle x, y\rangle_\alpha \ \forall x, y \in V$$

Σ' ένα χώρο, στον οποίο έχουμε ορίσει μια αντισυμμετρική μορφή, μπορούμε να βρούμε μια βάση $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n, e_{-1}, e_{-2}, \ldots, e_{-n}\}$, η οποία ονομάζεται **υπερβολική**, τέτοια ώστε:

$$\langle e_i, e_j\rangle_\alpha = \langle e_{-i}, e_{-j}\rangle = 0 \, , \langle e_i, e_j\rangle_\alpha = \delta_{ij}$$

Χρησιμοποιώντας μια υπερβολική βάση, μια αντισυμμετρική διγραμμική μορφή μπορεί να παρασταθεί από τον πίνακα:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$$

όπου J ο ταυτοτικός n πίνακας και θα έχουμε $\langle x, y\rangle_\alpha = x^T J y$. Τότε ένας τελεστής T είναι συμπλεκτικός εάν ισχύει $T^T J T = J$, όπου J ο 2n ταυτοτικός τελεστής. Πράγματι, έστω x,y δυο τυχαία διανύσματα, $\langle x, y\rangle_\alpha$ μια αντισυμμετρική διγραμμική μορφή και T ένας συμπλεκτικός τελεστής, τότε θα έχουμε $\langle Tx, Ty\rangle_\alpha = \langle x, y\rangle_\alpha \Rightarrow (Tx)^T J (Ty) = x^T J y \Rightarrow x^T (T^T J T) y = x^T J y \Rightarrow T^T J T = J$. Επειδή σε κάθε τελεστή T αντιστοιχεί ως προς μια βάση B ένας πίνακας, οι παραπάνω τελεστές χαρακτηρίζουν και τους αντίστοιχους πίνακες. Έτσι έχουμε την εξής ομάδα πινάκων:

Συμπλεκτική ομάδα: Αποτελείται από τους πίνακες που αφήνουν αναλλοίωτη μια αντισυμμετρική διγραμμική μορφή. Εάν για μια αντισυμμετρική μορφή χρησιμοποιήσουμε την αντίστοιχη υπερβολική βάση, τότε ένας πίνακας M είναι συμπλεκτικός εάν έχουμε:

$$\langle Mx, My\rangle_\alpha = \langle x, y\rangle_\alpha = xJy$$

Οι πίνακες αυτές επιδρούν μόνο σε χώρους άρτιας διάστασης και χωρίζονται σε δυο υποομάδες $\mathbf{Sp(2n}, \mathbb{R})$ και $\mathbf{Sp(2n}, \mathbb{C})$ (για την $\mathrm{Sp}(2\mathrm{n}, \mathbb{C})$ στις παραπάνω σχέσεις θεωρείται $\mathrm{F} = \mathbb{C}$ και γίνονται μικροτροποποιήσεις σε αυτές με βάση τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου όπως δόθηκε στο Κεφάλαιο 2) για πραγματικούς και μιγαδικούς χώρους αντίστοιχα. Ο αριθμός των ανεξαρτήτων παραμέτρων είναι:

$$(2\mathrm{n})^2 - \binom{2\mathrm{n}}{2} = \mathrm{n}(2\mathrm{n}+1), \text{ για την } \mathrm{Sp}(2\mathrm{n}, \mathbb{R})$$

$$2(2\mathrm{n})^2 - 2\binom{2\mathrm{n}}{2} = 2\mathrm{n}(2\mathrm{n}+1), \text{ για την } \mathrm{Sp}(2\mathrm{n}, \mathbb{C})$$

Οι πίνακες M της συμπλεκτικής ομάδας $\mathrm{Sp}(2\mathrm{n})$ ικανοποιούν την σχέση $T^T M T = I$ με T οποιοδήποτε πίνακα και I ο ταυτοτικός πίνακας.

Οι συμπλεκτικές ομάδες $\mathrm{Sp}(2\mathrm{n}, \mathbb{R})$ και $\mathrm{Sp}(2\mathrm{n}, \mathbb{C})$ αποτελούν ομάδες πινάκων Lie και χρησιμοποιούνται κατά κόρον στην κλασσική μηχανική. Επομένως δεν θα επεκταθούμε περαιτέρω για τις ομάδες αυτές, μιας και πρέπει να γίνει χρήση θεωρημάτων και ορισμών κλασσικής μηχανικής που ξεφεύγουν από τα πλαίσια αυτής της διπλωματικής.

Κλείνοντας, έχουμε την ***συμπαγή συμπλεκτική ομάδα*** Sp(2n) που ορίζεται ως

$$\mathrm{Sp}(2\mathrm{n}) = \mathrm{Sp}(2\mathrm{n}, \mathbb{C}) \cap \mathrm{U}(2\mathrm{n}).$$

3.2.8. Η ομάδα Heisenberg H

Το σύνολο όλων των 3×3 πραγματικών πινάκων A της μορφής :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{a} & \mathrm{b} \\ 0 & 1 & \mathrm{c} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (*)$$

με $\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c} \in \mathbb{R}$ ονομάζεται ***ομάδα Heisenberg***. Εύκολα μπορεί να ελεγχθεί ότι το γινόμενο δυο πινάκων της μορφής $(*)$ δίνει πίνακα της ίδιας μορφής. Ακόμη ο αντίστροφος A^{-1} ενός τέτοιου πίνακα A είναι της μορφής

$$\mathrm{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{a} & \mathrm{ac}-\mathrm{b} \\ 0 & 1 & -\mathrm{c} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Άρα η H αποτελεί υποομάδα του GL(3, ℝ). Ακόμη αποδεικνύεται ότι το όριο πινάκων της μορφής $(*)$ δίνει πίνακα ίδιας μορφής άρα η H αποτελεί ομάδα πινάκων Lie.

3.2.9. Οι ομάδες $\mathbb{R}^*, \mathbb{C}^*, \mathbf{S^1}, \mathbb{R}$ και $\mathbb{R}^n$

Πολλές σημαντικές ομάδες που δεν είναι εκ φυσικού τους ομάδες πινάκων μπορούν να θεωρηθούν σαν τέτοιες.

Η ομάδα $\mathbb{R}^*$ των μη μηδενικών πραγματικών αριθμών ως προς την πράξη του πολλαπλασιασμού είναι ισομορφική με την $GL(1, \mathbb{R})$. Άρα θα θεωρήσουμε την $\mathbb{R}^*$ σαν ομάδα πινάκων Lie. Ομοίως, η ομάδα $\mathbb{C}^*$ των μη μηδενικών μιγαδικών αριθμών ως προς την πράξη του πολλαπλασιασμού είναι ισομορφική με την $GL(1, \mathbb{C})$ και η ομάδα S^1 των μιγαδικών αριθμών με απόλυτη τιμή ίση με 1 είναι ισομορφική με την $U(1)$.

Η ομάδα $\mathbb{R}$ ως προς την πράξη της πρόσθεσης είναι ισομορφική με την $GL(1, \mathbb{R})^+$ (1×1 πραγματικοί πίνακες με θετική ορίζουσα) μέσω της απεικόνισης $x \to [e^x]$. Η ομάδα $\mathbb{R}^n$ (με διανυσματική πρόσθεση) είναι ισομορφική με την ομάδα των διαγώνιων πραγματικών πινάκων με θετικά διαγώνια στοιχεία μέσω της απεικόνισης

$$(x_1, \dots, x_n) \to \begin{pmatrix} e^{x_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{x_n} \end{pmatrix}.$$

3.2.10. Ευκλείδειες Ομάδες και ομάδες Poincare

Μια άλλη σημαντική κατηγορία ομάδων πινάκων Lie είναι οι ***Ευκλείδειες ομάδες E(n)*** και οι ***ομάδες Poincare P(n,1)***. Η Ευκλείδεια ομάδα $E(n)$ είναι εξ ορισμού η ομάδα όλων των ένα προς ένα απεικονίσεων $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ που διατηρούν την απόσταση δηλαδή $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$, όπου με d εννοείται η συνήθης μετρική στον $\mathbb{R}^n$. Μέχρι στιγμής δεν έχουμε θεωρήσει καμία ιδιότητα της f εκτός από την παραπάνω. Μπορεί η f να μην είναι καν γραμμική. Η ορθογώνια ομάδα, επειδή διατηρεί το εσωτερικό γινόμενο (αφού $\langle x, y\rangle = \langle Ax, Ay\rangle$), αποτελεί υποομάδα του $E(n)$ και είναι η ομάδα όλων των γραμμικών μετασχηματισμών από το $\mathbb{R}^n$ στον εαυτό του, που διατηρούν την απόσταση. Έστω $x \in \mathbb{R}^n$, τότε ορίζεται η μεταφορά κατά x, ως

$$T_x(y) = x + y.$$

Το σύνολο των μεταφορών κατά x αποτελεί επίσης υποομάδα του $E(n)$. Αποδεικνύεται ότι κάθε στοιχείο T της $E(n)$ μπορεί να γραφεί κατά μοναδικό τρόπο στην μορφή

$$T = T_x R$$

με $x \in \mathbb{R}^n$ και $R \in O(n)$.

Θα γράφουμε κάθε στοιχείο $T = T_x R$ του $E(n)$ στη μορφή $\{x, R\}$.

Έτσι, αν $y \in \mathbb{R}^n$

$$\{x, R\}y = Ry + x.$$

Ακόμη,

$$\{x_1, R_1\}\{x_2, R_2\}y = R_1(R_2y + x_2) + x_1 =$$

$$= R_1R_2y + (x_1 + R_1 x_2).$$

Έτσι, ορίζουμε ως πράξη της E(n) την

$$\{x_1, R_1\}\{x_2, R_2\} = \{x_1 + R_1 x_2, R_1R_2\}$$

Το αντίστροφο ενός στοιχείου δίνεται από

$$\{x, R\}^{-1} = \{-R^{-1}x, R^{-1}\}$$

Όπως αναφέρθηκε η E(n) δεν είναι υποομάδα του $GL(n, \mathbb{R})$ ούτε ομάδα πινάκων Lie με την κλασσική έννοια. Όμως η E(n) είναι ισομορφική με μια υποομάδα του $GL(n+1, \mathbb{R})$ δια μέσου της απεικόνισης που αντιστοιχίζει το $\{x, R\} \in E(n)$ στον παρακάτω πίνακα

$$\begin{pmatrix} & R & & x_1 \\ & & & \vdots \\ & & & x_n \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Αποδεικνύεται ότι τα στοιχεία της παραπάνω μορφής αποτελούν ομάδα πινάκων Lie.

Με παρόμοιο τρόπο ορίζεται και η ομάδα Poincare P(n,1). Η P(n,1) είναι η ομάδα όλων των μετασχηματισμών του $\mathbb{R}^{n+1}$ της μορφής

$$T_xA$$

με $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ και $A \in O(n, 1)$.Τα στοιχεία της ομάδας αυτής είναι ουσιαστικά οι αφφινικοί (ή ομοπαραλληλικοί) μετασχηματισμοί (δηλαδή οι απεικονίσεις της μορφής $x \rightarrow Ax+b$ όπου ο A αποτελεί πίνακα $n \times n$ γραμμικής απεικόνισης και το b σταθερά) του $\mathbb{R}^{n+1}$, που διατηρούν την μετρική Lorentz $d_L(x, y) = (x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2 - (x_{n+1} - y_{n+1})^2$. Η πράξη της ομάδας Poincare ορίζεται κατά αναλογία με την πράξη της Ευκλείδειας ομάδας. Η ομάδα Poincare P(n,1) είναι ισομορφική με την ομάδα των πινάκων διάστασης $(n + 2) \times (n + 2)$ της μορφής

$$\begin{pmatrix} & A & & x_1 \\ & & & \vdots \\ & & & x_{n+1} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

με $A \in O(n, 1)$. Το σύνολο των πινάκων της παραπάνω μορφής αποτελούν ομάδες πινάκων Lie.

3.3. <u>Συμπάγεια</u>

<u>Ορισμός 3.3.1</u>

Μια ομάδα πινάκων Lie *G* λέμε ότι είναι **συμπαγής**, εάν ικανοποιούνται οι παρακάτω δυο συνθήκες

1) Εάν A_m είναι μια ακολουθία πινάκων G και η A_m συγκλίνει σε ένα πίνακα A, τότε ο A ανήκει στην G.

2) Υπάρχει σταθερά C έτσι ώστε για κάθε $A \in G$, $| A_{ij} | \leq C$ για κάθε $1 \leq i , j \leq n$.

Πρέπει να σημειωθεί ότι ο παραπάνω ορισμός δεν συμπίπτει με τον κλασσικό τοπολογικό ορισμό της συμπάγειας. Όμως το σύνολο $M_n(\mathbb{C})$ όλων των $n \times n$ μιγαδικών πινάκων μπορεί να θεωρηθεί ως ισομορφικό με το $\mathbb{C}^{n^2}$. Ένα επακόλουθο του παραπάνω ορισμού είναι ότι η G είναι συμπαγής αν και μόνο αν είναι ένα κλειστό, φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{C}^{n^2}$.

Όλα τα παραδείγματα ομάδων πινάκων Lie υπακούν στην ιδιότητα (1) εκτός των GL(n, ℝ) και GL(n, ℂ).

3.3.1. <u>Παραδείγματα συμπαγών ομάδων</u>

Κάποια παραδείγματα συμπαγών ομάδων πινάκων Lie αποτελούν οι ομάδες O(n) και SO(n). Η πρώτη ιδιότητα του ορισμού ικανοποιείται, διότι το όριο ακολουθιών ορθογωνίων πινάκων είναι ορθογώνιος πίνακας και το όριο ακολουθιών πινάκων μοναδιαίας ορίζουσας είναι πίνακας μοναδιαίας ορίζουσας. Η δεύτερη ιδιότητα ικανοποιείται, διότι εάν ο A είναι ορθογώνιος, τότε τα διανύσματα στήλης του A έχουν νόρμα 1 και άρα $| A_{kl} | \leq 1$ για όλα τα $1 \leq k , l \leq n$. Με παρόμοιο επιχείρημα αποδεικνύεται ότι και οι U(n), SU(n) και Sp(n) είναι συμπαγείς. (Συμπεριλαμβανομένου και του μοναδιαίου κύκλου $S^1 \cong U(1)$.)

3.3.2. <u>Παραδείγματα μη συμπαγών ομάδων</u>

Κάποιες ομάδες πινάκων Lie, που δεν είναι συμπαγείς είναι οι ομάδες GL(n, ℝ) και GL(n, ℂ) διότι παραβιάζεται η πρώτη απαίτηση του ορισμού, αφού όριο αντιστρέψιμων πινάκων μπορεί να είναι μη αντιστρέψιμος πίνακας. Στις ομάδες SL(n, ℝ) και SL(n, ℂ) παραβιάζεται η δεύτερη απαίτηση του ορισμού (εκτός της ιδιάζουσας περίπτωσης που το n=1) μιας και ο

$$A_m = \begin{pmatrix} m & & & & \\ & \frac{1}{m} & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

έχει ορίζουσα ίση με 1, ανεξαρτήτως της τιμής του m. Οι ομάδες $O(n, \mathbb{C})$, $SO(n, \mathbb{C})$, $O(n, k)$, $SO(n, k)$ (με $n \geq 1, k \geq 1$), η ομάδα Heisenberg H, $Sp(n, \mathbb{R})$, $Sp(n, \mathbb{C})$, $E(n)$, $P(n, 1)$, $\mathbb{R}^*, \mathbb{C}^*, \mathbb{R}$ και $\mathbb{R}^n$ επίσης παραβιάζουν την ιδιότητα (2) και άρα είναι μη συμπαγείς.

3.4. <u>Συνεκτικότητα</u>

<u>Ορισμός 3.4.1</u>

Μια ομάδα πινάκων Lie λέγεται συνεκτική, εάν για κάθε δυο πίνακες A και B, που ανήκουν στην G υπάρχει μια συνεχής συνάρτηση-δρόμος $A(t)$ $a \leq t \leq b$, η οποία έχει τιμές στην G και $A(a) = A$ και $A(b) = B$.

Μια ομάδα πινάκων Lie, που είναι μη συνεκτική, μπορεί να διαμερισθεί σε μια ένωση πολλών συνεκτικών συνόλων του, έτσι ώστε κάθε δυο στοιχεία διαφορετικών συνόλων να μην μπορούν να ενωθούν κατά αυτόν τον τρόπο.

<u>Πρόταση 3.4.1</u>

Η ομάδα $GL(n, \mathbb{C})$ είναι συνεκτική για κάθε $n \geq 1$.

<u>Απόδειξη</u>

Έστω $n = 1$. Ένας 1×1 πίνακας αντιστρέψιμος και μιγαδικός είναι της μορφής $A = [\lambda]$ με $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Για κάθε δυο τέτοιους αριθμούς μπορούμε να βρούμε εύκολα μονοπάτι, που να τους ενώνει και να μην διέρχεται από το 0.

Για $n \geq 2$, θα δειχτεί ότι κάθε στοιχείο το $GL(n, \mathbb{C})$ μπορεί να ενωθεί μέσω ενός μονοπατιού με την μονάδα. Έτσι κάθε δυο στοιχεία θα ενώνονται μεταξύ τους λόγω της ένωσής τους με τη μονάδα.

Θα χρησιμοποιηθεί η πρόταση της Γραμμικής Άλγεβρας, ότι κάθε πίνακας είναι όμοιος με έναν άνω τριγωνικό πίνακα. Έτσι, για κάθε $n \times n$ μιγαδικό πίνακα A υπάρχει ένας αντιστρέψιμος $n \times n$ πίνακας C, έτσι ώστε $A = CBC^{-1}$ με τον B άνω τριγωνικό

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Εάν υποθέσουμε ότι ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε όλα τα λ_i πρέπει να είναι μη μηδενικά, αφού $\det A = \det B = \lambda_1 \cdots \lambda_n$. Έστω ο $B(t)$ η συνάρτηση, που προκύπτει εάν πολλαπλασιάσουμε το άνω τριγωνικό μέρος του B με

$(1-\mathrm{t})$ με $0 \leq \mathrm{t} \leq 1$ (εκτός της διαγωνίου). Έστω $\mathrm{A(t)} = \mathrm{CB(t)C}^{-1}$. Τότε η A(t) είναι μια συνεχής συνάρτηση μονοπάτι, που αρχίζει από το A και καταλήγει στο CDC^{-1} με

$$\mathrm{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Η συνάρτηση A(t) ανήκει στο GL(n, ℂ), αφού $\det\mathrm{A(t)} = \lambda_1 \cdots \lambda_n = \det(\mathrm{A})$ για όλα τα t.

Τώρα, όπως στην περίπτωση για $\mathrm{n} = 1$ ορίζουμε λ_i (t) τη συνάρτηση, που ενώνει κάθε λ_i με το 1 στο $\mathbb{C}^*$ καθώς το t πηγαίνει από το 1 στο 2. Έτσι η A(t) ορίζεται στο διάστημα $1 \leq \mathrm{t} \leq 2$ με :

$$\mathrm{A(t)} = \mathrm{C} \begin{pmatrix} \lambda_1(\mathrm{t}) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n(\mathrm{t}) \end{pmatrix} \mathrm{C}^{-1}.$$

Αυτή είναι μια συνεχής συνάρτηση δρόμος, που ξεκινά από το CDC^{-1} για κάθε $\mathrm{t} = 1$ και καταλήγει στο $\mathrm{I} = \mathrm{CIC}^{-1}$ για $\mathrm{t} = 2$. Αφού το $\lambda_k(\mathrm{t})$ είναι μη μηδενικό, η A(t) ανήκει στο GL(n, ℂ) και άρα το ζητούμενο αποδείχτηκε.

Πρόταση 3.4.2

Η ομάδα SL(n, ℂ) είναι συνεκτική για $\mathrm{n} \geq 1$.

Απόδειξη

Η απόδειξη είναι παρόμοια με την προηγούμενη. Αρκεί όμως να διατηρηθεί η συνθήκη $\det\mathrm{A} = 1$. Έστω A τυχαίο στοιχείο του SL(n, ℂ). Για $\mathrm{n} = 1$ είναι προφανής. Για $\mathrm{n} \geq 2$ ορίζουμε A(t), όπως πριν $0 \leq \mathrm{t} \leq 1$ με $\mathrm{A}(0) = \mathrm{A}$ και $\mathrm{A}(1) = \mathrm{CDC}^{-1}$αφού $\det\mathrm{A(t)} = \det\mathrm{A} = 1$. Τώρα ορίζουμε $\lambda_k(\mathrm{t})$ όπως πριν με $1 \leq \mathrm{k} \leq \mathrm{n}-1$ και $\lambda_n(\mathrm{t})$ να είναι ο αριθμός $[\lambda_1(\mathrm{t}) \cdots \lambda_{n-1}(\mathrm{t})]^{-1}$ αφού $\lambda_1 \cdots \lambda_n = 1$ και $\lambda_n(1) = \lambda_n$. Αυτό επιτρέπει τη σύνδεση με την μονάδα παραμένοντας στο SL(n, ℂ).

Πρόταση 3.4.3

Η ομάδα U(n) είναι συνεκτική για $\mathrm{n} \geq 1$.

Απόδειξη

Από πρόταση της Γραμμικής Άλγεβρας, κάθε ορθομοναδιαίος πίνακας έχει μια ορθοκανονική βάση ιδιοδιανυσμάτων με ιδιοτιμές της μορφής $e^{i\theta}$. Άρα, κάθε ορθομοναδιαίος πίνακας U γράφεται ως

$$U = U_1 \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{i\theta_n} \end{pmatrix} U_1^{-1}$$

με U_1 ορθομοναδιαίο και $\theta_i \in \mathbb{R}$. Αντίστροφα κάθε πίνακας της παραπάνω μορφής είναι ορθομοναδιαίος. Ορίζουμε

$$U(t) = U_1 \begin{pmatrix} e^{i(1-t)\theta_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{i(1-t)\theta_n} \end{pmatrix} U_1^{-1}$$

Με το t να κινείται από το 0 στο 1 ορίζεται συνεχής συνάρτηση δρόμος στο U(n) που ενώνει το U με το I. Άρα, κάθε δυο στοιχεία του U(n) μπορούν να ενωθούν μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης-δρόμου, η οποία θα πηγαίνει από το U στο I και, έπειτα, από το I στο V.

Πρόταση 3.4.5

Η ομάδα $GL(n, \mathbb{R})$ είναι μη συνεκτική, αλλά αναλύεται σε δυο συνιστώσες, το $GL(n,\mathbb{R})^+$ δηλαδή το σύνολο των $n \times n$ πραγματικών πινάκων με θετική ορίζουσα, και το $GL(n,\mathbb{R})^-$, δηλαδή το σύνολο των $n \times n$ πραγματικών πινάκων με αρνητική ορίζουσα.

Απόδειξη

Το $GL(n, \mathbb{R})$ δεν μπορεί να είναι συνεκτικό, διότι εάν $\det(A) > 0$ και $\det(B) < 0$, τότε κάθε συνεχής συνάρτηση που ενώνει το A με το B , θα περιλαμβάνει στοιχείο με ορίζουσα μηδέν. Με παρόμοια επιχειρήματα με πριν βλέπουμε ότι το $GL(n,\mathbb{R})^+$ είναι συνεκτικό. Εφόσον το $GL(n,\mathbb{R})^+$ είναι συνεκτικό, τότε το ίδιο ισχύει και με το $GL(n,\mathbb{R})^-$. Πράγματι, έστω C πίνακας με αρνητική ορίζουσα και έστω A, B ανήκουν στο $GL(n,\mathbb{R})^-$. Τότε $C^{-1}A$ και $C^{-1}B$ ανήκουν στο $GL(n,\mathbb{R})^+$ και ενώνονται από μια συνεχή συνάρτηση D(t) στο $GL(n,\mathbb{R})^+$. Άρα το CD(t) είναι συνεχής συνάρτηση στο $GL(n,\mathbb{R})^-$ που ενώνει το A και B.

Παρακάτω δίνεται ένας πίνακας από ομάδες πινάκων Lie που αναφέρει το αν είναι συνεκτικές και το πόσες συνεκτικές συνιστώσες έχουν

ΟΜΑΔΑ	ΣΥΝΕΚΤΙΚΗ;	ΣΥΝΙΣΤΩΣΕΣ
GL(n,ℂ)	ΝΑΙ	1
SL(n,ℂ)	ΝΑΙ	1
GL(n,ℝ)	ΟΧΙ	2
SL(n,ℝ)	ΝΑΙ	1
O(n)	ΟΧΙ	2
SO(n)	ΝΑΙ	1
U(n)	ΝΑΙ	1
SU(n)	ΝΑΙ	1
O(n,1)	ΟΧΙ	4
SO(n,1)	ΟΧΙ	2

Heisenberg H	NAI	1
E(n)	OXI	2
P(n,1)	OXI	4

3.5.Ομομορφισμός και Ισομορφισμός

Ορισμός 3.5.1

Έστω G και H ομάδες πινάκων Lie. Η συνάρτηση Φ που απεικονίζει τον A από το G στο H ονομάζεται ***ομομορφισμός ομάδας Lie***, εάν (1) η Φ αποτελεί ομομορφισμό ομάδας και (2) η Φ είναι συνεχής. Εάν, επιπλέον, η Φ είναι 1-1 και επί και η αντίστροφη απεικόνιση Φ^{-1} είναι συνεχής, τότε η Φ ονομάζεται ***ισομορφισμός ομάδας Lie***.

Η συνθήκη ότι η Φ είναι συνεχής θα πρέπει να θεωρηθεί κάτι ξεχωριστό και δύστροπο, για αυτό και θεωρείται πολύ δύσκολο να μπορέσουμε να δώσουμε παράδειγμα ομομορφισμού ομάδας μεταξύ δύο ομάδων πινάκων Lie που να μην είναι συνεχής. Στην πράξη, εάν $\mathrm{G} = \mathbb{R}$ και $\mathrm{H} = \mathbb{C}^*$, τότε κάθε ομομορφισμός ομάδας από την G στην H πρέπει να είναι συνεχής.

Εάν τώρα G και H αποτελούν ομάδες πινάκων Lie και υπάρχει ένας ισομορφισμός ομάδων Lie από την G στην H, τότε οι G και H αποτελούν ισομορφικές ομάδες και γράφουμε $\mathrm{G} \cong \mathrm{H}$. Δύο ομάδες πινάκων Lie που είναι ισομορφικές θα έπρεπε να θεωρούνται αναγκαία σαν μία και ίδια ομάδα.

Το πιο απλό και παράλληλα ενδιαφέρον παράδειγμα ομομορφισμού ομάδας Lie είναι η ορίζουσα, η οποία αποτελεί ομομορφισμό της $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ στη $\mathbb{C}^*$. Ένα άλλο απλό παράδειγμα είναι η απεικόνιση $\Phi: \mathbb{R} \to \mathrm{SO}(2)$, η οποία δίνεται ως

$$\Phi(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Αυτή η απεικόνιση είναι προφανώς συνεχής και ο υπολογισμός της, χρησιμοποιώντας συγκεκριμένες τριγωνομετρικές ταυτότητες, μας δείχνει ότι αποτελεί ομομορφισμό. Πράγματι, έχουμε

$$\Phi(\theta_1)\Phi(\theta_2) = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 & -(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2) \\ \sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2 & \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & -\sin(\theta_1 + \theta_2) \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{pmatrix} = \Phi(\theta_1 + \theta_2).$$

3.5.1. Παραδείγματα SU(2) και SO(3)

Ένα πολύ σημαντικό θέμα για εμάς είναι η σχέση μεταξύ των ομάδων SU(2) και SO(3). Αυτό το παράδειγμα σκοπεύει να δείξει ότι οι SU(2) και SO(3) είναι σχεδόν ισομορφικές. Συγκεκριμένα, υπάρχει ένας ομομορφισμός ομάδας Lie της μορφής Φ, ο οποίος απεικονίζει την SU(2) στην SO(3) και ο οποίος είναι 2-1. Τώρα θα περιγράψουμε αυτήν την απεικόνιση.

Θεωρούμε τον χώρο V όλων των 2×2 μιγαδικών πινάκων, οι οποίοι είναι αυτοσυζυγείς ($A^* = A$) και έχουν ίχνος μηδέν. Αυτός αποτελεί έναν τρισδιάστατο πραγματικό διανυσματικό χώρο με την ακόλουθη βάση

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Μπορούμε να ορίσουμε εσωτερικό γινόμενο στον V, ως

$$\langle A, B \rangle = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(AB).$$

Απευθείας υπολογισμός της παραπάνω σχέσης δείχνει ότι η $\{A_1, A_2, A_3\}$ αποτελεί ορθοκανονική βάση του V. Έχοντας, τώρα, διαλέξει μια ορθοκανονική βάση του V, μπορούμε να ταυτοποιήσουμε τον V με τον $\mathbb{R}^3$.

Τώρα υποθέτουμε ότι ο U είναι ένα στοιχείο της SU(2) και ο A είναι ένα στοιχείο του V και θεωρούμε UAU^{-1}. Τότε $\operatorname{tr}(UAU^{-1}) = \operatorname{tr}(A) = 0$ και

$$(UAU^{-1})^* = (U^{-1})^* A U^* = UAU^{-1},$$

και άρα ο UAU^{-1} ανήκει και αυτός στον V. Επιπλέον για έναν συγκεκριμένο U, η απεικόνιση $A \to UAU^{-1}$ είναι γραμμική στον A. Άρα, για κάθε $U \in SU(2)$, μπορούμε να ορίσουμε μια γραμμική απεικόνιση Φ_U του V στον εαυτό του με βάση τον τύπο

$$\Phi_U(A) = UAU^{-1}.$$

Να σημειωθεί ότι $U_1U_2AU_2^{-1}U_1^{-1} = (U_1U_2)A(U_1U_2)^{-1}$ και άρα $\Phi_{U_1U_2} = \Phi_{U_1}\Phi_{U_2}$. Επιπλέον, για δοθέν $U \in SU(2)$ και $A, B \in V$, έχουμε

$$\langle \Phi_U(A), \Phi_U(B) \rangle = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(UAU^{-1}UBU^{-1}) =$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{tr}(AB) = \langle A, B \rangle.$$

Άρα, η Φ_U αποτελεί ορθογώνιο μετασχηματισμό του V.

Μόλις ταυτοποιήσουμε τον V με τον $\mathbb{R}^3$ (χρησιμοποιώντας την παραπάνω ορθοκανονική βάση), τότε μπορούμε να θεωρήσουμε και την Φ_U σαν ένα στοιχείο της O(3). Μιας και $\Phi_{U_1U_2} = \Phi_{U_1}\Phi_{U_2}$, βλέπουμε ότι η Φ (βασικά η απεικόνιση $U \to \Phi_U$) αποτελεί ομομορφισμό της SU(2) στην O(3). Εύκολα παρατηρούμε ότι η Φ είναι συνεχής και άρα αποτελεί ομομορφισμό ομάδων Lie. Υπενθυμίζεται, τώρα, ότι κάθε στοιχείο της O(3) έχει ορίζουσα ίση με ± 1. Ξέροντας ότι η SU(2) είναι συνεκτική, η Φ είναι συνεχής και η Φ_I είναι ίση με I και η οποία έχει ορίζουσα ίση με 1, έπεται ότι η Φ πρέπει να απεικονίζει την SU(2) στο ταυτοτικό στοιχείο της O(3), το οποίο και συμβολίζεται ως SO(3).

Η απεικόνιση $U \to \Phi_U$ δεν είναι 1-1, μιας και για κάθε $U \in SU(2)$, ισχύει ότι $\Phi_U = \Phi_{-U}$ (να παρατηρηθεί ότι εάν ο U ανήκει στη SU(2), τότε το ίδιο ισχύει και για τον -U). Είναι πλέον εφικτό να δείξουμε ότι η Φ_U αποτελεί μία 2-1 απεικόνιση της SU(2) στην SO(3), κάτι όμως που δεν θα κάνουμε εδώ, μιας και χρειάζεται χρήση ορισμών και υποθέσεων που ξεφεύγουν από τα πλαίσια αυτής της διπλωματικής εργασίας.

3.6. Η πολική παραγοντοποίηση για τα $SL(n, \mathbb{R})$ και $SL(n, \mathbb{C})$

Σε αυτό το κομμάτι, ασχολούμαστε με τις πολικές παραγοντοποιήσεις για τις $SL(n, \mathbb{R})$ και $SL(n, \mathbb{C})$. Αυτές οι παραγοντοποιήσεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να αποδειχθεί η συνεκτικότητα των $SL(n, \mathbb{R})$ και $SL(n, \mathbb{C})$ αλλά και για να δειχθεί ότι οι θεμελιώδεις ομάδες (fundamental groups) των $SL(n, \mathbb{R})$ και $SL(n, \mathbb{C})$ είναι ίδιες με αυτές των SO(n) και SU(n) αντίστοιχα (Τα περί θεμελιωδών ομάδων δεν θα συζητηθούν στο παρόν κεφάλαιο και, γενικότερα, στην παρούσα διπλωματική, διότι αποτελούν προχωρημένη γνώση που ξεφεύγει από τον σκοπό της διπλωματικής αυτής. Για όποιον επιθυμεί περισσότερες πληροφορίες περί αυτού, μπορεί να ανατρέξει στο βιβλίο [2] της βιβλιογραφίας). Αυτές οι παραγοντοποήσεις, επίσης, θεωρούνται ότι είναι ανάλογες με την μοναδική παραγοντοποίηση ενός μη μηδενικού μιγαδικού αριθμού z μιας και $z = up$, με $|u| = 1$ και p πραγματικό και θετικό αριθμό (τριγωνομετρική μορφή μιγαδικού).

Ένας πραγματικός συμμετρικός πίνακας P θεωρείται θετικά ορισμένος, εάν $\langle x, Px \rangle > 0$ για όλα τα μη μηδενικά διανύσματα $x \in \mathbb{R}^n$. (Συμμετρικός σημαίνει $P^T = P$). Ισοδύναμα, ένας συμμετρικός πίνακας είναι θετικά ορισμένος εάν όλες οι ιδιοτιμές του είναι θετικές. Δοθέντος ενός συμμετρικού θετικά ορισμένου πίνακα P, υπάρχει ένας ορθογώνιος πίνακας R έτσι ώστε

$$P = RDR^{-1}$$

όπου ο D είναι διαγώνιος με θετικά στοιχεία $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$. (Εάν επιλέξουμε μια ορθοκανονική βάση $u_1, \cdots, u_n$ ιδιοδιανυσμάτων για τον P, τότε ο R είναι ο πίνακας του οποίου οι στήλες είναι οι $u_1, \cdots, u_n$). Μπορούμε, έπειτα, να κατασκευάσουμε μια τετραγωνική ρίζα του P ως

$$P^{1/2} = RD^{1/2}R^{-1}$$

όπου ο $D^{1/2}$ είναι ο διαγώνιος πίνακας, του οποίου τα θετικά στοιχεία της διαγωνίου είναι τα $\lambda_1^{1/2}, \cdots, \lambda_n^{1/2}$. Έπειτα, ο $P^{1/2}$ είναι επίσης συμμετρικός και θετικά ορισμένος. Μπορεί να δειχθεί ότι ο $P^{1/2}$ είναι ο μοναδικός θετικά ορισμένος συμμετρικός πίνακας του οποίου το τετράγωνο ισούται με P.

Πρόταση 3.6.1

Έστω ο A που ανήκει στην $SL(n, \mathbb{R})$. Τότε, υπάρχει ένα μοναδικό ζεύγος (R, P) έτσι ώστε ο $R \in SO(n)$, ο P να είναι πραγματικός, συμμετρικός και θετικά ορισμένος και να ισχύει A = RP. Ο πίνακας P ικανοποιεί την σχέση $\det P = 1$.

Απόδειξη

Εάν υπήρχε τέτοιο ζεύγος, τότε θα είχαμε $A^TA = PR^{-1}RP = P^2$. Θεωρούμε τον A^TA συμμετρικό και θετικά ορισμένο, μιας και $\langle x, A^TAx\rangle = \langle Ax, Ax\rangle > 0$, όπου $Ax \neq 0$ μιας και ο A είναι αντιστρέψιμος. Έπειτα, ορίζουμε τον P ως

$$P = (A^TA)^{1/2}$$

έτσι ώστε ο P να είναι πραγματικός, θετικά ορισμένος και συμμετρικός. Μιας και θέλουμε A = RP, πρέπει να θέσουμε $R = AP^{-1} = ((A^TA)^{1/2})^{-1}$. Αποδεικνύουμε ότι ο R είναι ορθογώνιος

$$RR^T = A((A^TA)^{1/2})^{-1}((A^TA)^{1/2})^{-1}A^T$$

$$= A(A^TA)^{-1}A^T = I$$

Αυτό μας δείχνει ότι ο R ανήκει στην O(n). Για να αποδείξουμε ότι ο R ανήκει στην SO(n), σημειώνουμε ότι I = detA = detRdetP. Μιας και ο P είναι θετικά ορισμένος, έχουμε $\det P > 0$. Αυτό σημαίνει ότι δεν μπορούμε να έχουμε $\det P = -1$, άρα πρέπει να έχουμε $\det P = 1$.

Έχουμε τώρα αναφερθεί στην ύπαρξη του ζεύγους (R, P) με τις επιθυμητές ιδιότητες. Για να δείξουμε την μοναδικότητα του ζεύγους, θυμόμαστε ότι εάν ένα τέτοιο ζεύγος υπάρχει, τότε πρέπει να ισχύει $P^2 = A^TA$. Όμως έχουμε αναφέρει νωρίτερα πως ένας θετικά ορισμένος, πραγματικός και συμμετρικός πίνακας έχει μία μοναδική, πραγματική, θετική και συμμετρική τετραγωνική ρίζα, άρα ο P είναι μοναδικός.

Εάν ο P είναι αυτοσυζυγής πίνακας μιγαδικών αριθμών (δηλαδή, $P^* = P$), τότε λέμε ότι ο P είναι ***θετικά ορισμένος*** εάν $\langle x, Px\rangle > 0$ για όλα τα μη μηδενικά διανύσματα x του $\mathbb{C}^n$.

Πρόταση 3.6.2

Έστω ο A που ανήκει στην $SL(n, \mathbb{C})$. Τότε, υπάρχει ένα μοναδικό ζεύγος (U, P) με $U \in SU(n)$, και ο P είναι αυτοσυζυγής και θετικά ορισμένος και ισχύει $A = UP$. Ο πίνακας P ικανοποιεί την σχέση $\det P = 1$.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. *“Γραμμική Άλγεβρα και Αναλυτική Γεωμετρία”*, Ανάργυρου Φελλούρη, Αθήνα 2009.

2. *“Graduate Texts in Mathematics: Lie Groups, Lie Algebras, and Representations, An Elementary Introduction”*, Brian C. Hall, Springer, USA, 2004.

3. *“Matrix Groups”*, Morton L. Curtis, Springer-Verlag, New York, Heidelberg Berlin, 1979.

4. *“Lie algebras”*, Shlomo Sternberg, 2004.

5. *“Notes on Group Actions Manifolds, Lie Groups and Lie Algebras”,* Jean Gallier, University of Pennsylvania, Philadelphia USA 2005.

6. *“Introduction to Lie groups”*, Joseph Hundley, Southern Illinois University, 2009.

7. *“Introduction to Lie groups and Lie algebras”*, Arthur A.Sagle & Ralph E.Walde, Academic Press, N.Y, San Francisco, London, 1973.

8. *"Γραμμική Άλγεβρα Αναλυτική Γεωμετρία και Εφαρμογές"*, Ν. Καδιανάκης, Σ. Καρανάσιος, Αθήνα, 2008.

9. *"Αναλυτική Γεωμετρία"*, Σ. Α. Ανδρεαδάκης, Συμμετρία, 1993.

10. "*Γραμμική Άλγεβρα 5η Έκδοση*", Lipschutz Seymour, Lipson Marc Lars, ΕΚΔΟΣΕΙΣ Α. ΤΖΙΟΛΑ & ΥΙΟΙ Α.Ε., 2014.

11. "*Σύγχρονη Άλγεβρα Ι*", Στρατηγόπουλος Δημήτριος Γ., Συμμετρία, 1997.

12. *"Γραμμική Άλγεβρα"*, Ι. Β. Μαρουλάς, Αθήνα, 2015

13. "*Εισαγωγή στην Άλγεβρα”*, John B. Fraleigh, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 2010.

14. *"Γραμμική Άλγεβρα"*, Σ.Α. Ανδρεαδάκη , Αθήνα.

15. *" Εφηρμοσμένη Γραμμική Άλγεβρα "*, Δ.Γ. Δασκαλόπουλου , Αθήνα.

16. *" Matrices Methods and Applications "*, S. Barnett , Clarendon Press, Oxford, 1990.

17. *" Matrix Methods "*, R. Bronson , Academic Press, 1991.

18. *" A first course in Numerical Linear Algebra "*, B.N. Datta , Brooks Cole, 1995.

19. *" Matrix Theory with Applications "*, J.L. Goldberg , McGraw Hill, 1991.

20. *"Linear Algebra Problem Book"*, P. Halmos , Amer. Math. Soc., 1995.

21. *"Matrix Analysis"*, P. Horn and C. Johnson, Cambridge, 1985.

22. *"Linear Algebra"*, H.D. Ikramov, Mir Publ., 1983.

23. *"Introductory Linear Algebra with Applications"*, C. Kolman, Prentice Hall, 1997.

24. *"The Theory of Matrices"*, P. Lancaster and M. Tismenetsky, Academic Press, 1985.

25. *"Linear Algebra and its Applications"*, D.C. Lay, Addison-Wesley P. Co., 1994.

26. *"Linear Algebra with Applications"*, S.J. Leon, MacMillan, 1990.

27. *"Linear Algebra with Applications"*, W.K. Nicholson , *Linear Algebra with Applications ,* 3rd Ed. , PWS , 1995.

28. *"Problems and Theorems in Linear Algebra"*, V.V. Prasolov, *Problems and Theorems in Linear Algebra,* Amer. Math. Soc., 1994.

29. *"Linear Algebra"*, V.V. Voyevodin, Mir Publ., 1983.