Εθνικο Μετσοβιο Πολυτεχνειο

Σχολη Εφαρμοσμενων Μαθηματικων και Φυσικων Επιστημων

Μιγαδικά Μέτρα και Εφαρμογές

Ονοματεπώνυμο: Αντωνία Γιαννοπούλου
Αριθμός Μητρώου: 09110001

Επιβλέπων καθηγητής: Ιωάννης Σαραντόπουλος

Φεβρουάριος 2016

Περίληψη

Το πρώτο κεφάλαιο αναφέρεται στα μιγαδικά μέτρα. Αρχικά, δίνεται ο ορισμός των προσημασμένων μέτρων, τα οποία γενικεύουν την έννοια του μέτρου επιτρέποντας αρνητικές τιμές. Αποδεικνύεται το θεώρημα του Jordan, σύμφωνα με το οποίο, κάθε προσημασμένο μέτρο γράφεται σαν διαφορά δύο θετικών μέτρων, κάθετων μεταξύ τους, από τα οποία τουλάχιστον το ένα είναι πεπερασμένο. Στη συνέχεια, ορίζονται τα μιγαδικά μέτρα και η κύμανση ενός μιγαδικού μέτρου.

Στο δεύτερο κεφάλαιο αποδεικνύονται δύο σημαντικά θεωρήματα. Το βασικό αποτέλεσμα είναι το Θεώρημα των Radon-Nikodym που αποτελεί την γενίκευση του Θεμελιώδους Θεωρήματος της Ανάλυσης σε πιο γενικούς χώρους.

Τέλος, στο τρίτο κεφάλαιο, παραθέτουμε μία εφαρμογή του Θεωρήματος των Radon-Nikodym στην Θεωρία Πιθανοτήτων. Συγκεκριμένα, αποδεικνύεται η ύπαρξη της δεσμευμένης μέσης τιμής μιας τυχαίας μεταβλητής $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ αναφορικά με μια σ-άλγεβρα $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$.

Ευχαριστίες

Αρχικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή της διπλωματικής εργασίας, κ. Ιωάννη Σαραντόπουλο, για το ενδιαφέρον θέμα που μου ανέθεσε, καθώς και για την καθοδήγηση του καθόλη την διάρκεια του εξαμήνου.

Επίσης, ευχαριστώ τα υπόλοιπα μέλη της τριμελούς επιτροπής, κ. Αρβανιτάκη και κ. Γιαννακάκη, για τον χρόνο που διέθεσαν.

Ευχαριστώ θερμά την φίλη μου Μαριάννα Χατζάκου για την πολύτιμη βοήθεια της και τις συμβουλές της αναφορικά με την δομή της εργασίας.

Τέλος, ευχαριστώ τον αδελφό μου Νικήτα που είναι πάντα δίπλα μου.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Μιγαδικά Μέτρα

1.1 Προσημασμένα μέτρα

Ορισμός 1.1. *Έστω $(X, \mathcal{M})$ μετρήσιμος χώρος. Προσημασμένο μέτρο στον $(X, \mathcal{M})$ θα λέγεται μία συνολοσυνάρτηση $\nu : \mathcal{M} \to [-\infty, +\infty]$ που ικανοποιεί τα παρακάτω:*

- $\nu(\varnothing) = 0$,
- *Το ν παίρνει το πολύ μία από τις τιμές $\pm\infty$,*
- *Εάν $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}$ ακολουθία ξένων ανά δύο συνόλων της $\mathcal{M}$, τότε*
$$\nu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(E_i),$$
όπου το τελευταίο άθροισμα συγκλίνει απόλυτα όταν $\nu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right)$ πεπερασμένο.

Σημείωση 1.1. *Όταν το $\nu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right)$ είναι πεπερασμένο, η σειρά συγκλίνει απόλυτα, επειδή κάθε αναδιάταξη συγκλίνει. (Η ένωση των E_i παραμένει αμετάβλητη κάτω από οποιαδήποτε μετάθεση των δεικτών και γι' αυτό κάθε αναδιάταξη συγκλίνει.)*

Παραδείγματα 1.1. *1. Έστω μ_1, μ_2 θετικά μέτρα στην σ-άλγεβρα $\mathcal{M}$, όπου τουλάχιστον ένα από αυτά είναι πεπερασμένο. Τότε, η απεικόνιση $\nu : \mathcal{M} \to [-\infty, +\infty]$ με*

$$\nu(E) = \mu_1(E) - \mu_2(E), \text{ για κάθε } E \in \mathcal{M}$$

είναι ένα προσημασμένο μέτρο.

2. *Έστω μ θετικό μέτρο στην σ-άλγεβρα $\mathcal{M}$ και $f : X \to [-\infty, +\infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση με τουλάχιστον ένα από τα $\int f^+ d\mu, \int f^- d\mu$ πεπερασμένο. Τότε, ορίζουμε την απεικόνιση $\nu : \mathcal{M} \to [-\infty, +\infty]$ με*
$$\nu(E) = \int_E f d\mu, \text{ για κάθε } E \in \mathcal{M}.$$
Είναι εύκολο να δούμε ότι το ν είναι προσημασμένο μέτρο.

Στην πραγματικότητα, αυτά είναι και τα μόνα παραδείγματα προσημασμένων μέτρων, αφού αποδεικνύεται ότι κάθε προσημασμένο μέτρο μπορεί να αναπαρασταθεί με οποιαδήποτε από τις παραπάνω μορφές.

Πρόταση 1.1. *Έστω ν προσημασμένο μέτρο στον μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{M})$.*

1. *Αν η $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσα ακολουθία συνόλων της $\mathcal{M}$, τότε $\nu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \lim_{i\to\infty} \nu(E_i)$.*

2. *Αν η $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσσα ακολουθία συνόλων της $\mathcal{M}$ και το $\nu(E_1)$ είναι πεπερασμένο, τότε $\nu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \lim_{i\to\infty} \nu(E_i)$.*

Η απόδειξη της Πρότασης 1.1. είναι ίδια με αυτή στην περίπτωση των θετικών μέτρων, και γι' αυτό παραλείπεται.

Ορισμός 1.2. *Έστω ν προσημασμένο μέτρο στον μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{M})$. Το σύνολο $E \in \mathcal{M}$ θα λέγεται θετικό (αντίστοιχα αρνητικό, μηδενικό) για το ν, αν $\nu(F) \geqslant 0$ (αντίστοιχα $\nu(F) \leqslant 0$,$\nu(F) = 0$), για κάθε $F \in \mathcal{M}$ με $F \subseteq E$.*

Παρατηρήσεις 1.1.

1. *Ένα μηδενικό σύνολο για το ν είναι ταυτόχρονα και θετικό και αρνητικό σύνολο για το ν.*

2. *Αν το $A \subset X$ είναι θετικό σύνολο για το προσημασμένο μέτρο ν, τότε ο περιορισμός του ν στα μετρήσιμα υποσύνολα του A είναι ένα θετικό μέτρο. Όμοια, αν το $B \subset X$ είναι αρνητικό σύνολο για το ν, τότε το προσημασμένο μέτρο $-\nu$ περιορισμένο στα μετρήσιμα υποσύνολα του B είναι ένα θετικό μέτρο.*

3. *Υπάρχει διαφορά μεταξύ ενός μηδενικού συνόλου (null set) για κάποιο προσημασμένο μέτρο ν και ενός συνόλου μηδενικού ν-μέτρου. Ένα μηδενικό σύνολο έχει υποχρεωτικά μέτρο 0. Ωστόσο, ένα σύνολο μέτρου μηδέν μπορεί να είναι η ξένη ένωση δύο συνόλων με μη μηδενικά και αντίθετα μέτρα και επομένως, να μην είναι μηδενικό σύνολο.*

Τα προσημασμένα μέτρα επιτρέπουν την «διαίρεση» ενός χώρου X σε δύο ξένα σύνολα, από τα οποία το ένα είναι θετικό σύνολο και το άλλο αρνητικό σύνολο. Αυτό είναι γνωστό ως το Θεώρημα ανάλυσης του Hahn. Πριν δούμε την απόδειξη του, παραθέτουμε ένα σημαντικό Λήμμα.

Λήμμα 1.1. *Κάθε μετρήσιμο υποσύνολο ενός θετικού συνόλου είναι θετικό σύνολο, και η ένωση αριθμήσιμου το πλήθος θετικών συνόλων είναι θετικό σύνολο.*

Απόδειξη. Ο πρώτος ισχυρισμός είναι προφανής από τον ορισμού του θετικού συνόλου.

Για το δεύτερο μέρος του λήμματος, έστω $P_1, P_2, \ldots$ θετικά σύνολα. Θέτω $Q_n = P_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} P_i$. Τότε, το Q_n είναι θετικό ως υποσύνολο του θετικού συνόλου P_n. Επομένως, αν $E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} P_i$, έχουμε ότι:

$$\nu(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(E \cap Q_i) \geqslant 0,$$

όπως απαιτείται. □

Θεώρημα 1.1 (Ανάλυσης Hahn). *Έστω ν προσημασμένο μέτρο στον μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{M})$. Τότε, υπάρχουν δύο ξένα σύνολα P και N στην $\mathcal{M}$, ώστε $X = P \cup N$, το P είναι θετικό σύνολο για το ν και το N είναι αρνητικό σύνολο για το ν. Επιπλέον, τα P και N είναι μοναδικά ν-σχεδόν παντού (δηλαδή αν τα P' και N' έχουν τις παραπάνω ιδιότητες, τότε τα $P \vartriangle P'$ και $N \vartriangle N'$ είναι μηδενικά σύνολα για το ν).*

Το ζεύγος (P, N) λέγεται ανάλυση Hahn του ν.

Απόδειξη. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι το προσημασμένο μέτρο ν δεν παίρνει την τιμή $+\infty$. (Διαφορετικά, θεωρούμε το $-\nu$.)
Έστω

$$m = sup\{\nu(E) : E \in \mathcal{M}, E \text{ θετικό σύνολο}\},$$

όπου το παραπάνω supremum επιτυγχάνεται.

Πράγματι, έστω P_i ακολουθία θετικών συνόλων τέτοια ώστε $\nu(P_i) \to m$. Θέτοντας $P = \bigcup_{i=1}^{\infty} P_i$, από την Πρόταση 1.1. και το Λήμμα 1.1., βλέπουμε ότι το σύνολο P είναι θετικό και $\nu(P) = m$. Μάλιστα, $m < \infty$.

Ισχυρισμός: Το $N = X \setminus P$ είναι αρνητικό σύνολο.

Αρχικά, παρατηρούμε ότι το N δεν μπορεί να περιέχει κανένα μη μηδενικό θετικό σύνολο. Πράγματι, αν $E \subset N$ και $\nu(E) > 0$, τότε το $E \cup P$

είναι θετικό σύνολο με $\nu(E \cup P) = \nu(E) + \nu(P) > m$. Άρα, οδηγούμαστε σε άτοπο από τον ορισμό του m.

Επίσης, παρατηρούμε ότι αν $A \subset N$ και $\nu(A) > 0$, τότε υπάρχει $B \subset A$ με $\nu(B) > \nu(A)$. Πράγματι, αφού το A δεν είναι θετικό, υπάρχει $C \subset A$, με $\nu(C) < 0$. Επομένως, για το σύνολο $B = A \backslash C$, έχουμε ότι $\nu(B) = \nu(A) - \nu(C) > \nu(A)$.(Η τελευταία ισότητα ισχύει επειδή το $\nu(C)$ είναι πεπερασμένο.)

Τώρα, έστω προς απαγωγή σε άτοπο ότι το N δεν είναι αρνητικό σύνολο. Κατασκευάζουμε ακολουθία υποσυνόλων A_i του N και φυσικών αριθμών n_i ως εξής: Έστω n_1 ο μικρότερος φυσικός για τον οποίο υπάρχει σύνολο $A_1 \subset N$ με $\nu(A_1) > n_1^{-1}$. Συνεχίζοντας επαγωγικά, έστω n_i ο μικρότερος ακέραιος για τον οποίο υπάρχει σύνολο $A_i \subset A_{i-1}$ με $\nu(A_i) > \nu(A_{i-1}) + n_i^{-1}$.

Έστω $A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$.

Επειδή $\nu(A_1)$ πεπερασμένο, χρησιμοποιώντας την Πρόταση 1.1, έχουμε ότι $\nu(A) = \lim_{i\to\infty} \nu(A_i) > \sum_{i=1}^{\infty} n_i^{-1}$. Επειδή $\nu(A) < \infty$, συμπεραίνουμε ότι $n_i \to \infty$ καθώς $i \to \infty$. Όπως και πριν, μπορούμε να βρούμε $B \subset A$, με $\nu(B) > \nu(A) + n^{-1}$, για κάποιο φυσικό n. Όμως, για i αρκετά μεγάλο, έχουμε $n < n_i$, και $B \subset A_{i-1}$. Συνεπώς, οδηγούμαστε σε άτοπο από τον ορισμό των n_i και A_i.

Συμπεραίνουμε ότι το N είναι αρνητικό σύνολο και ο ισχυρισμός έχει δειχθεί.

Τελικά, αν (P', N') είναι ένα άλλο ζευγάρι συνόλων που ικανοποιεί τις ιδιότητες του Θεωρήματος, έχουμε ότι:

$$P \backslash P' \subseteq P \text{ και } P \backslash P' \subseteq N'.$$

Επομένως, το $P \backslash P'$ είναι ταυτόχρονα και θετικό και αρνητικό σύνολο για το ν και άρα μηδενικό.

Εργαζόμαστε όμοια για τα $P' \backslash P, N \backslash N'$ και $N' \backslash N$, και η απόδειξη είναι πλήρης. □

Η ανάλυση Hahn ενός προσημασμένου μέτρου ν οδηγεί σε μία κανονική αναπαράσταση του ν ως διαφορά δύο θετικών μέτρων. Για να διατυπώσουμε μαθηματικά το παραπάνω χρειάζεται να εισάγουμε μια καινούρια έννοια.

Ορισμός 1.3. *Θα λέμε ότι δύο προσημασμένα μέτρα ν και μ στον μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{M})$ είναι κάθετα μεταξύ τους, συμβ. $\mu \perp \nu$, αν υπάρχουν μετρήσιμα σύνολα $E, F \in \mathcal{M}$ τέτοια ώστε $E \cap F = \emptyset$ και $E \cup F = X$, όπου το E είναι μηδενικό σύνολο για το μ και το F είναι μηδενικό σύνολο για το ν.*

Διαισθητικά, η σχέση $\mu \perp \nu$ σημαίνει ότι τα ν και μ «ζουν» σε ξένα σύνολα.

Θεώρημα 1.2 (ανάλυσης του Jordan). *Αν το ν είναι προσημασμένο μέτρο στον μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{M})$, τότε υπάρχουν μοναδικά θετικά μέτρα ν^+ και ν^-, τέτοια ώστε $\nu = \nu^+ - \nu^-$ και $\nu^+ \perp \nu^-$.*

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 1.1. υπάρχει ανάλυση Hahn (P, N) του ν. Ορίζουμε τις απεικονίσεις ν^+ και $\nu^- : \mathcal{M} \longrightarrow [0, \infty]$ ως εξής:

$$\nu^+(E) = \nu(E \cap P)$$

και

$$\nu^-(E) = -\nu(E \cap N).$$

Είναι σαφές ότι τα ν^+ και ν^- είναι θετικά μέτρα, κάθετα μεταξύ τους και ότι ισχύει $\nu = \nu^+ - \nu^-$.

Τώρα, έστω ότι υπάρχουν θετικά μέτρα στον μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{M})$, τα μ^+ και μ^-, τέτοια ώστε $\nu = \mu^+ - \mu^-$, όπου $\mu^+ \perp \mu^-$. Θα δείξουμε ότι $\nu^+ \equiv \mu^+$ και ότι $\nu^- \equiv \mu^-$. Πράγματι, η σχέση $\mu^+ \perp \mu^-$ συνεπάγεται την ύπαρξη συνόλων $E, F \in \mathcal{M}$ τέτοιων ώστε $E \cap F = \varnothing$, $E \cup F = X$ και $\mu^+(F) = \mu^-(E) = 0$. Τότε, βλέπουμε ότι το ζεύγος (E, F) είναι μια άλλη ανάλυση Hahn για το προσημασμένο μέτρο ν, και άρα το σύνολο $P \triangle E$ είναι μηδενικό σύνολο για το ν. Επομένως, για κάθε $A \in \mathcal{M}$, έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
\mu^+(A) &= \mu^+(A \cap E) + \mu^+(A \cap F) \\
&= \mu^+(A \cap E) \\
&= \nu(A \cap E) \\
&= \nu(A \cap P) \\
&= \nu^+(A).
\end{aligned}$$

Όμοια, αποδεικνύεται ότι $\nu^- \equiv \mu^-$. □

Παρατηρήσεις 1.2.
1. *Τα μέτρα ν^+ και ν^- λέγονται θετικό και αρνητικό μέρος του ν, αντίστοιχα. Το ζεύγος (ν^+, ν^-) λέγεται ανάλυση Jordan του ν.*

2. *Τα μέτρα ν^+ και ν^- που κατασκευάστηκαν στην απόδειξη του Θεωρήματος 1.2. δεν εξαρτώνται από την συγκεκριμένη ανάλυση Hahn, αφού αυτή είναι μοναδική ν-σχεδόν παντού. Μάλιστα, δίνονται από τις σχέσεις:*

   $$\nu^+(E) = sup\{\nu(A) : A \in \mathcal{M}, A \subseteq E\}$$

   και

   $$\nu^-(E) = sup\{-\nu(A) : A \in \mathcal{M}, A \subseteq E\}$$

Απόδειξη. Για την πρώτη ισότητα παρατηρούμε ότι για κάθε σύνολο $A \in \mathcal{M}$ με $A \subseteq E$, είναι:

$$\nu(A) = \nu^+(A) - \nu^-(A) \leqslant \nu^+(A) \leqslant \nu^+(E),$$

όπου η τελευταία ανισότητα ισχύει επειδή το ν^+ είναι θετικό μέτρο. Παίρνοντας supremum στην παραπάνω σχέση, έχουμε:

$$sup\{\nu(A) : A \in \mathcal{M}, A \subseteq E\} \leqslant \nu^+(E).$$

Αυτό σε συνδυασμό με το γεγονός ότι $\nu^+(E) = \nu(E \cap P)$, όπου $E \cap P \subseteq E$, και $E \cap P \in \mathcal{M}$, αποδεικνύει την πρώτη σχέση.

Ανάλογα, αποδεικνύεται και η δεύτερη. □

3. *Τουλάχιστον ένα από τα ν^+ και ν^- είναι πεπερασμένο. Πράγματι, αν το ν δεν παίρνει την τιμή $+\infty$, είναι $\nu^+(X) = \nu(P) < +\infty$ και άρα, το ν^+ είναι πεπερασμένο. Όμοια, αν το ν δεν παίρνει την τιμή $-\infty$, το ν^- είναι πεπερασμένο. Μάλιστα, αν το πεδίο τιμών του ν είναι στο $\mathbb{R}$, το ν φράσσεται από την τιμή $\max\{\nu^+(X), \nu^-(X)\}$. Σε αυτήν την περίπτωση, θα λέμε ότι το ν είναι πεπερασμένο προσημασμένο μέτρο.*

4. *Η ανάλυση Jordan (ν^+, ν^-) του ν δεν είναι το μοναδικό ζεύγος θετικών μέτρων ώστε $\nu = \nu^+ - \nu^-$. Πράγματι, αν το ν^+ είναι πεπερασμένο μέτρο, μπορώ να γράψω το ν ως*

$$\nu = 2 \cdot \nu^+ - (\nu^+ + \nu^-).$$

Ωστόσο, η ανάλυση Jordan έχει μία σημαντική ιδιότητα. Είναι το «ελάχιστο» τέτοιο ζεύγος, με την έννοια ότι αν ν_1 και ν_2 θετικά μέτρα ώστε $\nu = \nu_1 - \nu_2$, τότε $\nu_1 \geqslant \nu^+$ και $\nu_2 \geqslant \nu^-$.

Απόδειξη. Πράγματι, έστω (P, N) ανάλυση Hahn του ν.
Αφού $\nu \leqslant \nu_1$, έχουμε ότι:

$$\nu^+(A) = \nu(A \cap P) \leqslant \nu_1(A \cap P) \leqslant \nu_1(A),$$

για κάθε $A \in \mathcal{M}$.
Δηλαδή, $\nu^+ \leqslant \nu_1$ και η απόδειξη είναι πλήρης. □

Ορισμός 1.4. *Ορίζουμε την κύμανση του προσημασμένου μέτρου ν να είναι το θετικό μέτρο $|\nu| : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ με*

$$|\nu| = \nu^+ + \nu^-.$$

Παρατηρήσεις 1.3. *1. Εύκολα φαίνεται ότι* $|\nu(E)| \leqslant |\nu|(E)$*, για κάθε* $E \in \mathcal{M}$.

2. Το $|\nu|$ *είναι το «μικρότερο» θετικό μέτρο για το οποίο ισχύει ότι*

$$|\nu(E)| \leqslant |\nu|(E), \quad \text{για κάθε } E \in \mathcal{M}.$$

Πράγματι, έστω μ *θετικό μέτρο τέτοιο ώστε*

$$|\nu(E)| \leqslant \mu(E)(\Leftrightarrow \mu(E) \geqslant \pm\nu(E)), \quad \text{για κάθε } E \in \mathcal{M}.$$

Θα δείξουμε ότι $|\nu|(E) \leqslant \mu(E)$*, για κάθε* $E \in \mathcal{M}$.

Πράγματι, αν (P, N) *ανάλυση Hahn του* ν*, έχουμε:*

$$\begin{aligned} |\nu|(E) &= \nu^+(E) + \nu^-(E) \\ &= \nu(E \cap P) - \nu(E \cap N) \\ &\leqslant \mu(E \cap P) + \mu(E \cap N) \\ &= \mu(E). \end{aligned}$$

3. Κάθε προσημασμένο μέτρο μπορεί να γραφεί στην μορφή

$$\nu(E) = \int_E f \, d\mu,$$

όπου $\mu = |\nu|$ *και* $f = \mathbb{1}_P - \mathbb{1}_N$*, με* (P, N) *μια ανάλυση Hahn του* ν*. Πράγματι, είναι:*

$$\begin{aligned} \int_E f \, d\mu &= \int_E (\mathbb{1}_P - \mathbb{1}_N) \; d|\nu| \\ &= |\nu|(E \cap P) - |\nu|(E \cap N) \\ &= \nu^+(E \cap P) + \nu^-(E \cap P) - \big(\nu^+(E \cap N) + \nu^-(E \cap N)\big) \\ &= \nu^+(E \cap P) - \nu^-(E \cap N) \\ &= \nu(E \cap P) + \nu(E \cap N) \\ &= \nu(E), \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήθηκε το γεγονός ότι $\nu^-(E \cap P) = \nu^+(E \cap N) = 0$*, καθώς και ο ορισμός των* ν^+ *και* ν^-.

Στο σημείο αυτό, ορίζουμε την ολοκλήρωση ως προς ένα προσημασμένο μέτρο ν. Η ολοκλήρωση αυτή, ορίζεται με φυσιολογικό τρόπο ως εξής: Θέτουμε

$$L^1(\nu) = L^1(\nu^+) \cap L^1(\nu-).$$

Για $f \in L^1(\nu)$, το ολοκλήρωμα της f ως προς ν, ορίζεται ως:

$$\int f\, d\nu = \int f\, d\nu^+ - \int f\, d\nu^-.$$

Εύκολα φαίνεται ότι:

(α′) $L^1(\nu) = L^1(|\nu|)$,

(β′) Αν $f \in L^1(\nu), |\int f\, d\nu| \leqslant \int |f|\, d|\nu|$.

Πρόταση 1.2 (Ισοδύναμοι ορισμοί για την κύμανση). *Για $E \in \mathcal{M}$, ισχύουν τα παρακάτω:*

(α′) $|\nu|(E) = \sup\{|\int_E f\, d\nu| : f$ *μετρήσιμη*, $|f| \leqslant 1\}$,

(β′) $|\nu|(E) = \sup\{\sum_{i=1}^n |\nu(E_i)| : \{E_i\}_{i=1}^n$ *πεπερασμένη διαμέριση του* $E\}$.

Σημείωση 1.2. *Στην Πρόταση 1.2., με τον όρο πεπερασμένη διαμέριση του E, εννοούμε μία πεπερασμένη οικογένεια ξένων ανά δύο μετρήσιμων συνόλων $\{E_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{M}$ με $\bigcup_{i=1}^n E_i = E$.*

Απόδειξη. (α′) Θέτουμε $\mathcal{A} = \{f : f$ μετρήσιμη και $|f| \leqslant 1\}$. Επειδή $|\int f\, d\nu| \leqslant \int |f|\, d|\nu|$, έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}\sup\{|\int_E f\, d\nu| : f \in \mathcal{A}\} &\leqslant \sup\{\int_E |f|\, d|\nu| : f \in \mathcal{A}\}\\ &= \int_E 1\, d|\nu|\\ &= |\nu|(E).\end{aligned}$$

Για $f = \mathbb{1}_P - \mathbb{1}_N$, όπου (P, N) ανάλυση Hahn για το ν, βλέπουμε ότι το supremum επιτυγχάνεται. Πράγματι, τα σύνολα P και N ανήκουν στην $\mathcal{M}$, και άρα η f είναι μετρήσιμη. Επίσης, $|f| = 1$, επειδή τα σύνολα P και N είναι ξένα. Τέλος, είναι:

$$\begin{aligned}|\int_E \mathbb{1}_P - \mathbb{1}_N\, d\nu| &= |\int_E \mathbb{1}_P\, d\nu - \int_E \mathbb{1}_N\, d\nu|\\ &= |\nu(P \cap E) - \nu(N \cap E)|\\ &= \nu^+(E) + \nu^-(E)\\ &= |\nu|(E).\end{aligned}$$

Δείξαμε ότι το supremum όντως επιτυγχάνεται και η απόδειξη είναι πλήρης.

(β′) Είναι προφανές ότι

$$\sup\{\sum_{i=1}^{n}|\nu(E_i)| : \{E_i\}_{i=1}^{n} \text{ πεπερασμένη διαμέριση του } E\}$$
$$\begin{aligned} &\geqslant |\nu(E \cap P)| + |\nu(E \cap N)| \\ &= \nu^{+}(E) + \nu^{-}(E) \\ &= |\nu|(E). \qquad (1) \end{aligned}$$

Τώρα, για $\{E_i\}_{i=1}^{n}$ πεπερασμένη διαμέριση του E, έχουμε ότι:

$$\sum_{i=1}^{n}|\nu(E_i)| \leqslant \sum_{i=1}^{n}|\nu|(E_i) = |\nu|(\bigcup_{i=1}^{n} E_i) = |\nu|(E)$$

Παίρνοντας supremum πάνω σε όλες τις πεπερασμένες διαμερίσεις του E, έχουμε ότι:

$$\sup\{\sum_{i=1}^{n}|\nu(E_i)| : \{E_i\}_{i=1}^{n} \text{ πεπερασμένη διαμέριση του } E\} \leqslant |\nu|(E). \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει το ζητούμενο.

□

1.2 Μιγαδικά Μέτρα

Ορισμός 1.5. *Έστω $(X, \mathcal{M})$ μετρήσιμος χώρος. Μιγαδικό μέτρο μ στον $(X, \mathcal{M})$ θα λέγεται μία απεικόνιση $\mu : \mathcal{M} \to \mathbb{C}$ τέτοια ώστε για κάθε $E \in \mathcal{M}$:*

$$\mu(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) \text{ για κάθε αριθμήσιμη διαμέριση } \{E_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M} \text{ του } E,$$

όπου η σειρά συγκλίνει απόλυτα.

Σημείωση 1.3. *Με τον όρο αριθμήσιμη διαμέριση του E, εννοούμε μία αριθμήσιμη οικογένεια ξένων ανά δύο μετρήσιμων συνόλων $\{E_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$ με $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = E$.*

Παρατηρήσεις 1.4. *1. Είναι άμεσο από τον ορισμό ότι $\mu(\varnothing) = 0$.*

2. *Παρατηρούμε ότι η σύγκλιση της παραπάνω σειράς απαιτείται από τον ορισμό, σε αντίθεση με τα προσημασμένα μέτρα όπου η σειρά αυτή θα μπορούσε είτε να συγκλίνει είτε να αποκλίνει στο $+\infty$ ή στο $-\infty$. Συνεπώς, τα προσημασμένα (άρα και τα θετικά) μέτρα δεν είναι υποσύνολο των μιγαδικών μέτρων.*

3. *Τα πεπερασμένα προσημασμένα μέτρα είναι υποσύνολο των μιγαδικών μέτρων.*

4. *Έστω μ μιγαδικό μέτρο στον $(X, \mathcal{M})$, ορίζουμε για κάθε $E \in \mathcal{M}$:*

$$(\Re\mu)(E) = \Re(\mu(E)) \text{ και } (\Im\mu)(E) = \Im(\mu(E)).$$

   Εύκολα διαπιστώνουμε ότι τα $\Re\mu$ και $\Im\mu$ είναι προσημασμένα μέτρα που δεν παίρνουν τις τιμές $\pm\infty$, και άρα είναι πεπερασμένα. Επομένως, το πεδίο τιμών του μ είναι κάποιο φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{C}$.

5. *Μία απεικόνιση $\mu : \mathcal{M} \to \mathbb{C}$ είναι μιγαδικό μέτρο αν και μόνο αν τα $\Re\mu$ και $\Im\mu$ είναι πεπερασμένα προσημασμένα μέτρα.*

6. *Έστω ν θετικό μέτρο και $f : X \to \mathbb{C}$, όπου $f \in L^1(\nu)$. Ορίζουμε*

$$\mu(E) = \int_E f \, d\nu, \quad \text{για κάθε } E \in \mathcal{M}.$$

   Τότε, το μ είναι μιγαδικό μέτρο. Μάλιστα, έχει την ιδιότητα ότι αν $\nu(E) = 0$, για κάποιο $E \in \mathcal{M}$, τότε και $\mu(E) = 0$.

7. *Η ολοκλήρωση ως προς ένα μιγαδικό μέτρο ορίζεται ως εξής: Θέτουμε $L^1(\mu) = L^1(\Re\mu) \cap L^1(\Im\mu)$, και για $f \in L^1(\mu)$, θέτουμε*

$$\int f \, d\mu = \int f \, d(\Re\mu) + i \int f \, d(\Im\mu).$$

Κύμανση μιγαδικού μέτρου

Δοθέντος μιγαδικού μέτρου μ στην σ-άλγεβρα $\mathcal{M}$, πάντα μπορούμε να βρούμε ένα θετικό μέτρο λ που να κυριαρχεί στο μ με την έννοια ότι

$$|\mu(E)| \leqslant \lambda(E), \quad \text{για κάθε } E \in \mathcal{M}.$$

Παραδείγματος χάριν το μέτρο

$$\lambda(E) = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } E \neq \varnothing \\ 0, & \text{αν } E = \varnothing \end{cases}$$

ικανοποιεί το παπραπάνω.

Ας προσπαθήσουμε να κρατήσουμε το λ όσο πιο μικρό γίνεται. Κάθε λ όπως παραπάνω θα πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση:

$$\lambda(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(E_i) \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} |\mu(E_i)|, \tag{$*$}$$

για κάθε αριθμήσιμη διαμέριση $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ οποιουδήποτε $E \in \mathcal{M}$. Επομένως, το $\lambda(E)$ θα είναι τουλάχιστον ίσο με το supremum των αθροισμάτων στο δεξί μέλος της $(*)$, πάνω σε όλες τις αριθμήσιμες διαμερίσεις $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ του E. Αυτό υποδεικνύει τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 1.6. *Έστω μ μιγαδικό μέτρο στον $(X, \mathcal{M})$. Ορίζουμε την συνολοσυνάρτηση $|\mu| : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ ως εξής:*

$$|\mu|(E) = sup\{\sum_{i=1}^{\infty} |\mu(E_i)|\} \qquad (E \in \mathcal{M}),$$

όπου το supremum είναι πάνω σε όλες τις αριθμήσιμες διαμερίσεις $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ του E. Η συνάρτηση $|\mu|$ καλείται κύμασνη του μ.

Παρατηρήσεις 1.5.

1. *Είναι φανερό ότι $|\mu(E)| \leqslant |\mu|(E)$, για κάθε $E \in \mathcal{M}$.*

2. *Εξειδικεύοντας στην περίπτωση που το μ είναι πεπερασμένο, θετικό μέτρο στον $(X, \mathcal{M})$, βλέπουμε ότι το $|\mu|$ όπως ορίστηκε παραπάνω ταυτίζεται με το μ. Συγκεκριμένα, το $|\mu|$ είναι πεπερασμένο, θετικό μέτρο. Στη συνέχεια, θα δούμε ότι αυτό ισχύει για την κύμανση οποιουδήποτε μιγαδικού μέτρου.*

Θεώρημα 1.3. *Η κύμανση $|\mu|$ ενός μιγαδικού μέτρου μ στη σ-άλγεβρα $\mathcal{M}$ είναι θετικό μέτρο στην $\mathcal{M}$.*

Απόδειξη. Είναι τετριμμένο ότι $|\mu|(\varnothing) = 0$.

Έστω $E \in \mathcal{M}$ αυθαίρετο και $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}$ αριθμήσιμη διαμέριση του E. Θα δείξουμε ότι

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\mu|(E_i) \leqslant |\mu|(E) \quad \text{ και } \quad |\mu|(E) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} |\mu|(E_i).$$

Έστω t_i πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $t_i < |\mu|(E_i)$. Τότε, κάθε E_i έχει αριθμήσιμη διαμέριση $\{A_{i,j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ τέτοια ώστε:

$$\sum_j |\mu(A_{i,j})| > t_i \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots) \tag{1}$$

Επειδή $\{A_{i,j}\}_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ αριθμήσιμη διαμέριση του E, έχουμε ότι:

$$\sum_i t_i \leqslant \sum_{i,j} |\mu(A_{i,j})| \leqslant |\mu|(E). \tag{2}$$

Παίρνοντας το supremum στο αριστερό μέλος της (2), πάνω σε όλες τις επιτρεπτές τιμές των $\{t_i\}$, βλέπουμε ότι

$$\sum_i |\mu|(E_i) \leqslant |\mu|(E). \tag{3}$$

Για να αποδείξουμε την αντίστροφη ανισότητα, έστω $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ οποιαδήποτε διαμέριση του E.

Τότε, για j σταθερό, η $\{A_j \cap E_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ είναι αριθμήσιμη διαμέριση του A_j, και για i σταθερό, η $\{A_j \cap E_i\}_{j\in\mathbb{N}}$ είναι αριθμήσιμη διαμέριση του E_i. Επομένως,

$$\begin{aligned} \sum_j |\mu(A_j)| &= \sum_j \Big|\sum_i \mu(A_j \cap E_i)\Big| \\ &\leqslant \sum_j \sum_i |\mu(A_j \cap E_i)| \\ &= \sum_i \sum_j |\mu(A_j \cap E_i)| \dagger \\ &\leqslant \sum_i |\mu|(E_i). \end{aligned} \tag{4}$$

Αφού η (4) ισχύει για κάθε αριθμήσιμη διαμέριση $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ του E, έχουμε ότι

$$|\mu|(E) \leqslant \sum_i |\mu|(E_i). \tag{5}$$

Από τις (3) και (5), συμπεραίνουμε ότι το μ είναι αριθμήσιμα αθροιστικό και η απόδειξη είναι πλήρης. □

† Αν $a_{i,j} > 0, i, j = 1, 2, \ldots,$ τότε $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} a_{i,j}$.

Θα αποδείξουμε ότι η κύμανση $|\mu|$ ενός μιγαδικού μέτρου μ στον $(X, \mathcal{M})$ είναι ,επιπρόσθετα, πεπερασμένο μέτρο στον $(X, \mathcal{M})$. Θα χρειαστούμε μία σημαντική ιδιότητα των μιγαδικών αριθμών:

Λήμμα 1.2. *Αν $z_1, z_2, \ldots, z_N$ μιγαδικοί αριθμοί, τότε υπάρχει υποσύνολο S του $\{1, 2, \ldots, N\}$ τέτοιο ώστε*

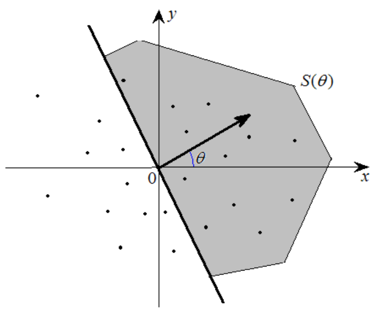
$$|\sum_{k\in S} z_k| \geqslant \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{N} |z_k|.$$

Απόδειξη. Χ.β.τ.γ. μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα $z_1, z_2, \ldots, z_N$ είναι μη μηδενικά.

Έστω $z_1 = |z_1|e^{i\theta_1}, \ldots, z_N = |z_N|e^{i\theta_N}$, για κάποια $\theta_1, \ldots, \theta_N \in \mathbb{R}$. Για $-\pi \leqslant \theta \leqslant +\pi$, ορίζουμε

$$\begin{aligned} \varDelta(\theta) &:= \{k \in \{1, 2, \ldots, N\} : \cos(\theta_k - \theta) > 0\} \\ &= \{k \in \{1, 2, \ldots, N\} : -\frac{\pi}{2} + \theta < \theta_k < +\frac{\pi}{2} + \theta\}. \end{aligned}$$

Το σύνολο $S(\theta) := \{z_k : k \in \varDelta(\theta)\}$ αποτελείται από όλα εκείνα τα z_k που ανήκουν στο ημιεπίπεδο $H(\theta) = \{z : \Re(ze^{-i\theta}) > 0\}$.



Τότε

$$
\begin{aligned}
|\sum_{k\in\Delta(\theta)} z_k| &= |\sum_{k\in\Delta(\theta)} e^{-i\theta} z_k| \\
&\geqslant \Re\left(\sum_{k\in\Delta(\theta)} e^{-i\theta} z_k\right) \\
&= \Re\left(\sum_{k\in\Delta(\theta)} |z_k| e^{i(\theta_k-\theta)}\right) \\
&= \sum_{k\in\Delta(\theta)} |z_k| \Re(e^{i(\theta_k-\theta)}) \\
&= \sum_{k\in\Delta(\theta)} |z_k| \cos(\theta-\theta_k) = \sum_{k=1}^{N} |z_k| \cos^+(\theta-\theta_k),
\end{aligned}
$$

όπου

$$
\cos^+(\theta-\theta_k) = \begin{cases} \cos(\theta-\theta_k), & \text{αν } \cos(\theta-\theta_k) > 0 \\ 0, & \text{αν } \cos(\theta-\theta_k) \leqslant 0 \ . \end{cases}
$$

Η $f(\theta) := \sum_{k=1}^{n} |z_k| \cos^+(\theta-\theta_k)$ είναι συνεχής συνάρτηση στο κλειστό διάστημα $[-\pi,\pi]$ και άρα, παίρνει μέγιστη τιμή στο $[-\pi,\pi]$, έστω για $\theta=\theta_0$. Δηλαδή,

$$
f(\theta_0) = \max_{\theta\in[-\pi,\pi]} f(\theta) = \max_{\theta\in[-\pi,\pi]} \sum_{k=1}^{n} |z_k| \cos^+(\theta-\theta_k).
$$

Η μέγιστη τιμή $f(\theta_0)$ είναι μεγαλύτερη ή ίση από την μέση τιμή της f στο διάστημα $[-\pi,\pi]$, δηλαδή

$$
f(\theta_0) \geqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\,d\theta = \sum_{k=1}^{n} |z_k| \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos^+(\theta-\theta_k)\,d\theta.
$$

Όμως,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos^+(\theta-\theta_k)\,d\theta &= \frac{1}{2\pi}\int_{\theta_k-\pi/2}^{\theta_k+\pi/2} \cos(\theta-\theta_k)\,d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t\,dt \qquad\qquad (t=\theta-\theta_k) \\
&= \frac{1}{\pi}.
\end{aligned}
$$

και επομένως, για $S = \Delta(\theta_0)$ έχουμε το ζητούμενο:

$$\left|\sum_{k\in\Delta(\theta_0)} z_k\right| \geqslant f(\theta_0) \geqslant \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}|z_k|.$$

□

Θεώρημα 1.4. *Αν το μ είναι μιγαδικό μέτρο στον μετρήσιμο χώρο $(X,\mathcal{M})$, τότε*

$$|\mu|(X) < \infty.$$

Απόδειξη. Προς εις άτοπον απαγωγή.

Υποθέτουμε ότι υπάρχει $E \in \mathcal{M}$ με $|\mu|(E) = \infty$. Αρχικά, θα δείξουμε ότι υπάρχουν ξένα σύνολα $A, B \in \mathcal{M}$ τέτοια ώστε

$$E = A \cup B$$

και

$$|\mu(A)| > 1\,, \quad |\mu|(B) = \infty\,.$$

Θέτουμε $c = \pi(1 + |\mu(E)|)$. Αφού $|\mu|(E) > c$, από τον ορισμό του $|\mu|$ υπάρχει αριθμήσιμη διαμέριση $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}$ του E τέτοια ώστε

$$\sum_{i=1}^{N}|\mu(E_i)| > c,$$

για N αρκετά μεγάλο. Εφαρμόζοντας το Λήμμα 1.2. με $z_i = \mu(E_i)$, για $i = 1,\ldots,N$, συμπεραίνουμε ότι υπάρχει υποσύνολο $S \subseteq \{1,2,\ldots,N\}$ τέτοιο ώστε

$$\left|\sum_{i\in S}\mu(E_i)\right| > \frac{c}{\pi}.$$

Αν θέσουμε $A = \bigcup_{i\in S} E_i \subset E$, τότε

$$|\mu(A)| > \frac{c}{\pi} > 1.$$

Θέτοντας $B = E\backslash A$, έχουμε

$$|\mu(B)| = |\mu(E) - \mu(A)| \geqslant |\mu(A)| - |\mu(E)| > \frac{c}{\pi} - |\mu(E)| = 1.$$

Εφόσον, $\infty = |\mu|(E) = |\mu|(A) + |\mu|(B)$, τουλάχιστον ένα από τα $|\mu|(A)$ και $|\mu|(B)$ είναι ∞. Χ.β.τ.γ. έστω ότι $|\mu|(B) = \infty$. Συνεπώς, χωρίσαμε το E σε δύο ξένα υποσύνολα A και B με $|\mu(A)| > 1$ και $|\mu|(B) = \infty$.

Τώρα, έστω ότι $|\mu|(X) = \infty$. Χωρίζουμε τον X σε δύο ξένα υποσύνολα A_1 και B_1, όπως παραπάνω, με $|\mu(A_1)| > 1$ και $|\mu|(B_1) = \infty$. Έπειτα, χωρίζουμε το B_1 σε δύο ξένα υποσύνολα A_2 και B_2 με $|\mu(A_2)| > 1$ και $|\mu|(B_2) = \infty$. Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο, κατασκευάζουμε μία άπειρη ακολουθία ξένων ανά δύο συνόλων $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}$, με $|\mu(A_i)| > 1$, για κάθε $i \in \mathbb{N}$.

Η σ-αθροιστικότητα του μ εγγυάται ότι

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Αλλά αυτή η σειρά δεν μπορεί να συγκλίνει, καθώς $\mu(A_i) \nrightarrow 0$, για $i \to \infty$. Και άρα, από τον ορισμό των μιγαδικών μέτρων καταλήγουμε σε άτοπο. Επομένως, $|\mu|(X) < \infty$.

□

Αν τα μ και λ είναι μιγαδικά μέτρα ορισμένα στην ίδια σ-άλγεβρα $\mathcal{M}$ υποσυνόλων ενός χώρου X, τότε ορίζουμε τις συνολοσυναρτήσεις $\mu + \lambda$, και $c\mu : \mathcal{M} \to \mathbb{C}$ με τον συνήθη τρόπο:

$$\begin{aligned}(\mu + \lambda)(E) &= \mu(E) + \lambda(E)\\ (c\mu)(E) &= c\mu(E),\end{aligned}$$

για οποιοδήποτε βαθμωτό μέγεθος $c \in \mathbb{C}$. Είναι τετριμμένο να διαπιστώσουμε ότι τα $\mu + \lambda$ και $c\mu$ είναι μιγαδικά μέτρα. Επομένως, η συλλογή όλων των μιγαδικών μέτρων στην $\mathcal{M}$ είναι ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{C}$. Επίσης, αν θέσουμε

$$||\mu|| = |\mu|(X),$$

είναι εύκολο να δούμε ότι όλα τα αξιώματα ενός χώρου με νόρμα ικανοποιούνται. Πράγματι,

1. Αρχικά, θα δείξουμε ότι $\|\mu\| = 0 \Rightarrow \mu \equiv 0$. Είναι:

   $$\begin{aligned}\|\mu\| = 0 &\Rightarrow |\mu|(X) = 0\\ &\Rightarrow |\mu(E)| = 0, \text{ για κάθε } E \in \mathcal{M}\\ &\Rightarrow \mu(E) = 0, \text{ για κάθε } E \in \mathcal{M}\\ &\Rightarrow \mu \equiv 0,\end{aligned}$$

   όπου στο δεύτερο επιχείρημα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $|\mu(E)| \leqslant |\mu(E)| + |\mu(E^{\complement})| \leqslant |\mu|(X)$, από τον ορισμό της κύμανσης μιγαδικού μέτρου.

2. Στη συνέχεια, θα δείξουμε ότι $\|c\mu\| = |c| \cdot \|\mu\|$, για κάθε βαθμωτό μέγεθος $c \in \mathbb{C}$. Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
\|c\mu\| &= |c\mu|(X) \\
&= sup\{\sum_{i=1}^{\infty}|(c\mu)(E_i)| : \{E_i\}_{i\in\mathbb{N}} \text{ αριθμήσιμη διαμέριση του } X\} \\
&= sup\{\sum_{i=1}^{\infty}|c \cdot \mu(E_i)| : \{E_i\}_{i\in\mathbb{N}} \text{ αριθμήσιμη διαμέριση του } X\} \\
&= sup\{\sum_{i=1}^{\infty}|c| \cdot |\mu(E_i)| : \{E_i\}_{i\in\mathbb{N}} \text{ αριθμήσιμη διαμέριση του } X\} \\
&= |c| \cdot sup\{\sum_{i=1}^{\infty}|\mu(E_i)| : \{E_i\}_{i\in\mathbb{N}} \text{ αριθμήσιμη διαμέριση του } X\} \\
&= |c| \cdot |\mu|(X) \\
&= |c| \cdot \|\mu\|.
\end{aligned}$$

3. Τέλος, θα δείξουμε ότι $\|\mu + \nu\| \leqslant \|\mu\| + \|\nu\|$. Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
\|\mu + \nu\| &= |\mu + \nu|(X) \\
&= sup\{\sum_{i=1}^{\infty}|(\mu + \nu)(E_i)| : \{E_i\}_{i\in\mathbb{N}} \text{ αριθμήσιμη διαμέριση του } X\} \\
&= sup\{\sum_{i=1}^{\infty}|\mu(E_i) + \nu(E_i)| : \{E_i\}_{i\in\mathbb{N}} \text{ αριθμήσιμη διαμέριση του } X\} \\
&\leqslant sup\{\sum_{i=1}^{\infty} (|\mu(E_i)| + |\nu(E_i)|) : \{E_i\}_{i\in\mathbb{N}} \text{ αριθμήσιμη διαμέριση του } X\} \\
&= sup\{\sum_{i=1}^{\infty}|\mu(E_i)| + \sum_{i=1}^{\infty}|\nu(E_i)| : \{E_i\}_{i\in\mathbb{N}} \text{ αριθμήσιμη διαμέριση του } X\} \\
&\leqslant sup\{\sum_{i=1}^{\infty}|\mu(E_i)| : \{E_i\}_{i\in\mathbb{N}} \text{ αριθμήσιμη διαμέριση του } X\} \\
&\quad + sup\{\sum_{i=1}^{\infty}|\nu(E_i)| : \{E_i\}_{i\in\mathbb{N}} \text{ αριθμήσιμη διαμέριση του } X\} \\
&= |\mu|(X) + |\nu|(X) \\
&= \|\mu\| + \|\nu\|.
\end{aligned}$$

Επομένως, τα αξιώματα του ορισμού της νόρμας ικανοποιούνται και άρα, δείξαμε το ζητούμενο.

Παράδειγμα 1.1. *Αν το μ είναι μιγαδικό μέτρο στην σ-άλγεβρα $\mathcal{M}$, τότε*

$$|\mu|(E) = sup\left\{\sum_{i=1}^{n}|\mu(E_i)| : \{E_i\}_{i=1}^{n} \text{ πεπερασμένη διαμέριση του } E\right\}.$$

Απόδειξη. Είναι εύκολο να δούμε ότι

$$sup\left\{\sum_{i=1}^{n}|\mu(E_i)| : \{E_i\}_{i=1}^{n} \text{ πεπερασμένη διαμέριση του } E\right\} \leqslant |\mu|(E). \quad (1)$$

Για την αντίστροφη ανισότητα, έστω $\varepsilon > 0$. Από τον ορισμό της κύμανσης μιγαδικού μέτρου, υπάρχει αριθμήσιμη διαμέριση $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ του E τέτοια ώστε:

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\mu(E_i)| > |\mu|(E) - \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{(a)}$$

Επειδή η παραπάνω σειρά συγκλίνει, μπορούμε να βρούμε N αρκετα μεγάλο έτσι ώστε:

$$\sum_{i=1}^{N}|\mu(E_i)| > \sum_{i=1}^{\infty}|\mu(E_i)| - \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{(b)}$$

Από (a) και (b),

$$\sum_{i=1}^{N}|\mu(E_i)| > |\mu|(E) - \varepsilon \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{N}|\mu(E_i)| + \left|\mu(\bigcup_{i=N+1}^{\infty} E_i)\right| > |\mu|(E) - \varepsilon.$$

Άρα, για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει πεπερασμένη διαμέριση του E, η $A_1 = E_1$, $A_2 = E_2, \ldots, A_N = E_N, A_{N+1} = \bigcup_{i=N+1}^{\infty} E_i$, τέτοια ώστε να έχουμε:

$$\sum_{i=1}^{N+1}|\mu(A_i)| > |\mu|(E) - \varepsilon.$$

Επομένως,

$$sup\left\{\sum_{i=1}^{n}|\mu(E_i)| : \{E_i\}_{i=1}^{n} \text{ πεπερασμένη διαμέριση του } E\right\} \geqslant |\mu|(E) \quad (2)$$

Από τις (1) και (2), προκύπτει το ζητούμενο. □

Παράδειγμα 1.2. *Αν το μ είναι μιγαδικό μέτρο στην σ-άλγεβρα $\mathcal{M}$ του X και ισχύει ότι $\mu(X) = |\mu|(X)$, τότε $\mu = |\mu|$.*

Απόδειξη. Αρκεί να αποδείξουμε ότι το μ είναι θετικό μέτρο.

Από υπόθεση $\mu(X) > 0$. Για τυχαίο $E \in \mathcal{M}$, έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \mu(X) = |\mu(X)| &= \left|\mu(E) + \mu(E^{\complement})\right| \\ &\leqslant |\mu(E)| + |\mu(E^{\complement})| \\ &\leqslant |\mu|(X) \\ &= \mu(X), \end{aligned}$$

όπου στην δεύτερη ανισότητα χρησιμοποιήθηκε ο ορισμός της κύμανσης. Επομένως, στις παραπάνω ανισότητες ισχύει η ισότητα.

Έστω τυχαίο $E \in \mathcal{M}$. Λόγω του παραπάνω, είναι $|\mu(E) + \mu(E^{\complement})| = |\mu(X)| = |\mu(E)| + |\mu(E^{\complement})|$. Δηλαδή, ισχύει η ισότητα στην τριγωνική ανισότητα και άρα, τα $\mu(E)$ και $\mu(E^{\complement})$ βρίσκονται στην ίδια ημιευθεία με αρχή το O, έστω $\mu(E) = |\mu(E)|e^{i\theta}$ και $\mu(E^{\complement}) = |\mu(E^{\complement})|e^{i\theta}$, για κάποιο $\theta \in [-\pi, \pi]$. Έχουμε ότι:

$$\begin{gathered} \mu(E) + \mu(E^{\complement}) = \mu(X) > 0 \Rightarrow \\ |\mu(E)|e^{i\theta} + |\mu(E^{\complement})|e^{i\theta} = \mu(X) > 0 \Rightarrow \\ \left(|\mu(E)| + |\mu(E^{\complement})|\right) e^{i\theta} = \mu(X) > 0 \Rightarrow \\ \theta = 0. \end{gathered}$$

Επομένως, $\mu(E) \in \mathbb{R}_+$, για τυχαίο $E \in \mathcal{M}$ και η απόδειξη είναι πλήρης. □

Κεφάλαιο 2

Σημαντικά Θεωρήματα

2.1 Θεώρημα Ανάλυσης του Lebesgue

Ορισμός 2.1. *Έστω λ αυθαίρετο μέτρο στον μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{M})$. Αν υπάρχει σύνολο $A \in \mathcal{M}$, τέτοιο ώστε $\lambda(E) = \lambda(E \cap A)$, για κάθε $E \in \mathcal{M}$, θα λέμε ότι το λ είναι συγκεντρωμένο στο A. Ισοδύναμα, $\lambda(E) = 0$, όταν $E \cap A = \varnothing$.*

Στην παράγραφο 1.1 ορίσαμε την έννοια της καθετότητας μεταξύ δύο προσημασμένων μέτρων. Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, ο ορισμός επεκτείνεται στην περίπτωση αυθαίρετων μέτρων. Χρησιμοποιώντας την παραπάνω ορολογία, έχουμε έναν ισοδύναμο ορισμό για την καθετότητα:

Ορισμός 2.2. *Έστω λ_1, λ_2 αυθαίρετα μέτρα στον μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{M})$ και έστω ότι υπάρχει ζεύγος ξένων συνόλων A και B έτσι ώστε το λ_1 να είναι συγκεντρωμένο στο A και το λ_2 να είναι συγκεντρωμένο στο B. Τότε θα λέμε ότι τα λ_1 και λ_2 είναι κάθετα μεταξύ τους, και θα γράφουμε:*

$$\lambda_1 \perp \lambda_2.$$

Ορισμός 2.3. *Έστω μ θετικό μέτρο στον μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{M})$, και έστω λ αυθαίρετο μέτρο στον $(X, \mathcal{M})$. Θα λέμε ότι το λ είναι απολύτως συνεχές ως προς το μ, αν $\lambda(E) = 0$, για κάθε $E \in \mathcal{M}$ για το οποίο $\mu(E) = 0$. Συμβολικά,*

$$\lambda \ll \mu.$$

Παραδείγματα 2.1. *1. Δοθέντος ν θετικού μέτρου και συνάρτησης $f : X \to \mathbb{C}$, με $f \in L^1(\nu)$, βλέπουμε ότι το μιγαδικό μέτρο μ, όπου*

$\mu(E) = \int_E f\, d\nu$, για κάθε $E \in \mathcal{M}$ είναι απολύτως συνεχές ως προς το ν.

Σχόλιο: *Πρώτος ο Lebesgue παρατήρησε ότι η συνολοσυνάρτηση $\mu : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ με $\mu(E) = \int_E f\, d\nu$, για $E \in \mathcal{M}$, όπου ν θετικό μέτρο και $f : X \to \mathbb{R}$ Lebegue ολοκληρώσιμη συνάρτηση, είναι ένα αριθμήσιμα προσθετικό προσημασμένο μέτρο, απολύτως συνεχές ως προς το (αρχικό μέτρο) ν. Ο Lebesgue (1910) προσπάθησε να αποδείξει το αντίστροφο Θεώρημα. Η προσπάθεια του συνεχίστηκε από τον Johann Radon (1913) και ολοκληρώθηκε από τον Otto Martin Nikodym (1930). Το θεώρημα των Radon-Nikodym παρουσιάζεται αναλυτικά στην παράγραφο 2.2.*

2. *Αν λ_1, λ_2 αυθαίρετα μέτρα στον μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{M})$ με $\lambda_1 \perp \lambda_2$, τότε ισχύει ότι $-\lambda_1 \perp \lambda_2$. Αυτό είναι άμεσο από την παρατήρηση ότι αν το μέτρο λ_1 είναι συγκεντρωμένο στο σύνολο A, τότε και το μέτρο $-\lambda_1$ θα είναι επίσης, συγκεντρωμένο στο A.*

3. *Αν το μ είναι θετικό μέτρο στον μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{M})$, και το λ είναι αυθαίρετο μέτρο ορισμένο στον ίδιο μετρήσιμο χώρο με $\lambda \ll \mu$, είναι άμεσο ότι και το μέτρο $-\lambda$ θα είναι απολύτως συνεχές αναφορικά με το μ, δηλαδή $-\lambda \ll \mu$.*

Η Πρόταση που ακολουθεί παρέχει ορισμένες στοιχειώδεις ιδιότητες των παραπάνω εννοιών.

Πρόταση 2.1. *Έστω $\mu, \lambda, \lambda_1, \lambda_2$ μέτρα στον μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{M})$, και μ θετικό.*

1. *Αν το λ είναι συγκεντρωμένο στο A, τότε το ίδιο είναι και το $|\lambda|$.*

2. *Αν $\lambda_1 \perp \lambda_2$, τότε $|\lambda_1| \perp |\lambda_2|$.*

3. *Αν $\lambda_1 \perp \mu$ και $\lambda_2 \perp \mu$, τότε $\lambda_1 + \lambda_2 \perp \mu$.*

4. *Αν $\lambda_1 \ll \mu$ και $\lambda_2 \ll \mu$, τότε $\lambda_1 + \lambda_2 \ll \mu$.*

5. *Αν $\lambda \ll \mu$, τότε $|\lambda| \ll \mu$.*

6. *Αν $\lambda_1 \ll \mu$ και $\lambda_2 \perp \mu$, τότε $\lambda_1 \perp \lambda_2$.*

7. *Αν $\lambda \ll \mu$ και $\lambda \perp \mu$, τότε $\lambda = 0$.*

Απόδειξη. 1. Αν $E \cap A = \varnothing$ και $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ αυθαίρετη αριθμήσιμη διαμέριση του E, τότε $\lambda(E_i) = 0, \forall i \in \mathbb{N}$. Συνεπώς, $|\lambda|(E) = 0$.

2. Είναι άμεση συνέπεια της 1.

3. Υπάρχουν ξένα σύνολα A_1 και B_1 έτσι ώστε το λ_1 να είναι συγκεντρωμένο στο A_1 και το μ στο B_1. Επίσης, υπάρχουν ξένα σύνολα A_2 και B_2 έτσι ώστε το λ_2 να είναι συγκεντρωμένο στο A_2 και το μ στο B_2. Συνεπώς, το $\lambda_1 + \lambda_2$ είναι συγκεντρωμένο στο $A = A_1 \cup A_2$, το μ είναι συγκεντρωμένο στο $B = B_1 \cap B_2$ και $A \cap B = \varnothing$.

4. Προφανές.

5. Έστω $\mu(E) = 0$ και $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ αριθμήσιμη διαμέριση του E. Τότε, $\mu(E_i) = 0, \forall i \in \mathbb{N}$ και αφού $\lambda \ll \mu$, είναι $\lambda(E_i) = 0, \forall i \in \mathbb{N} \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty}|\lambda(E_i)| = 0$. Η τελευταία σχέση ισχύει για αυθαίρετη αριθμήσιμη διαμέριση του E και άρα, $|\lambda|(E) = 0$.

6. Αφού $\lambda_2 \perp \mu$, υπάρχει σύνολο A με $\mu(A) = 0$ στο οποίο το λ_2 είναι συγκεντρωμένο. Αφού $\lambda_1 \ll \mu$, είναι $\lambda_1(E) = 0$, για κάθε μετρήσιμο σύνολο $E \subseteq A$. Επομένως, το λ_1 είναι συγκεντρωμένο στο συμπλήρωμα του A.

7. Από την 6. και την υπόθεση της 7., έχουμε ότι $\lambda \perp \lambda$ και άρα, $\lambda = 0$. $\square$

Το επόμενο αποτέλεσμα μας λέει ότι στην περίπτωση των πεπερασμένων μέτρων τα απολύτως συνεχή μέτρα είναι «συνεχή» υπό κάποια έννοια.

Θεώρημα 2.1. *Έστω μ και λ μέτρα στην σ-άλγεβρα $\mathcal{M}$, όπου το μ είναι θετικό και το λ είναι μιγαδικό. Τότε, οι επόμενες δύο συνθήκες είναι ισοδύναμες:*

(α′) $\lambda \ll \mu$.

(β′) Για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε $|\lambda(E)| < \varepsilon$, για κάθε $E \in \mathcal{M}$ με $\mu(E) < \delta$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι το (β′) ισχύει. Αν $\mu(E) = 0$, τότε $\mu(E) < \delta$, για κάθε $\delta > 0$. Συνεπώς, $|\lambda(E)| < \varepsilon$, για κάθε $\varepsilon > 0$, και άρα $\lambda(E) = 0$. Επομένως, το (β′) συνεπάγεται το (α′).

Υποθέτουμε ότι το (β′) δεν ισχύει. Τότε, υπάρχει $\varepsilon > 0$ και σύνολα $E_n \in \mathcal{M}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ τέτοια ώστε $\mu(E_n) < 2^{-n}$, αλλά $\lambda(E_n) \geqslant \varepsilon$. Συνεπώς, $|\lambda|(E_n) \geqslant \varepsilon$. Θέτουμε

$$A_n = \bigcup_{i=n}^{\infty} E_i, \quad A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Τότε, $\mu(A_n) < 2^{-n+1}, A_n \supseteq A_{n+1}$, και από την Πρόταση 1.1. έχουμε ότι $\mu(A) = 0$ και ότι

$$|\lambda|(A) = \lim_{n\to\infty} |\lambda|(A_n) \geqslant \varepsilon > 0,$$

αφού $|\lambda|(A_n) \geqslant |\lambda|(E_n)$.

Έπεται ότι δεν ισχύει $|\lambda| \ll \mu$, συνεπώς, ούτε $\lambda \ll \mu$, από Πρόταση 2.1. (5). $\square$

Παρατήρηση 2.1. *Πολλές φορές για τον ορισμό της απόλυτης συνέχειας χρησιμοποιείται το (β΄). Ωστόσο, (α΄) $\not\Rightarrow$ (β΄) αν το λ είναι θετικό, μη φραγμένο μέτρο. Για παράδειγμα, αν m το μέτρο Lebesgue στο $(0,1)$, ορίζουμε*

$$\lambda(E) = \int_E \frac{1}{t}\, dt \text{ για κάθε } E \in \mathcal{B}^1, E \subseteq (0,1).$$

Προφανώς το λ δεν είναι φραγμένο και $\lambda \ll m$. Τώρα, για κάθε $\delta > 0$, υπάρχει N, τέτοιο ώστε για κάθε $n > N, m\left((0,\frac{1}{n}]\right) = \frac{1}{n} < \delta$, ενώ $\lambda\left((0,\frac{1}{n}]\right) = \infty$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Το Θεώρημα Ανάλυσης του Lebesgue μας δίνει την πλήρη εικόνα της δομής ενός μιγαδικού μέτρου αναφορικά με ένα θετικό μέτρο.

Θεώρημα 2.2 (Θεώρημα Ανάλυσης του Lebesgue). *Έστω μ θετικό μέτρο στην σ-άλγεβρα $\mathcal{M}$ ενός συνόλου X, και έστω λ μιγαδικό μέτρο ορισμένο στον ίδιο μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{M})$. Τότε υπάρχει μοναδικό ζευγάρι μιγαδικών μέτρων λ_α και λ_s στον $(X, \mathcal{M})$ έτσι ώστε:*

$$\lambda = \lambda_\alpha + \lambda_s, \quad \lambda_\alpha \ll \mu, \quad \lambda_s \perp \mu. \tag{*}$$

Αν το λ είναι θετικό και πεπερασμένο, το ίδιο είναι και τα λ_α και λ_s.

Το ζευγάρι $(\lambda_\alpha, \lambda_s)$ λέγεται ανάλυση Lebesgue του λ αναφορικά με το μ.

Απόδειξη. **Μοναδικότητα**: Έστω $(\lambda'_\alpha, \lambda'_s)$ ένα άλλο ζευγάρι μέτρων που ικανοποιεί την (*). Τότε

$$\lambda'_\alpha - \lambda_\alpha = \lambda_s - \lambda'_s. \tag{1}$$

Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη Πρόταση (τα 3. και 4.) έχουμε ότι: $\lambda'_\alpha - \lambda_\alpha \ll \mu$ και $\lambda_s - \lambda'_s \perp \mu$. Επομένως, πάλι από την προηγούμενη Πρόταση (από το 7.), έχουμε ότι και τα δύο μέλη της (1) είναι 0.

Ύπαρξη: Αρχικά, θα υποθέσουμε ότι το λ είναι θετικό πεπερασμένο μέτρο στην $\mathcal{M}$.

Θα αποδείξουμε το ζητούμενο με εις άτοπον απαγωγή. Υποθέτουμε ότι όποτε υπάρχουν $\lambda_\alpha, \lambda_s$ τέτοια ώστε $\lambda = \lambda_\alpha + \lambda_s$ και $\lambda_s \perp \mu$, τότε υπάρχει $E \in \mathcal{M}$ τέτοιο ώστε $\lambda_\alpha(E) > 0$ και $\mu(E) = 0$.

Τότε, για κάθε $A \in \mathcal{M}$ για το οποίο $\mu(X \backslash A) = 0$, υπάρχει σύνολο $B \subseteq A, B \in \mathcal{M}$ με $\mu(B) = 0$ και $\lambda(B) > 0$. Πράγματι, ας θεωρήσουμε τα θετικά μέτρα λ_A και $\lambda_{X \backslash A}$ που ορίζονται ως εξής:

$$\lambda_A(E) = \lambda(A \cap E)$$
$$\text{και}$$
$$\lambda_{X \backslash A}(E) = \lambda(E \cap X \backslash A), \tag{2}$$

για κάθε $E \in \mathcal{M}$. Από την (2), βλέπουμε ότι $\lambda = \lambda_A + \lambda_{X \backslash A}$ και $\lambda_{X \backslash A} \perp \mu$.

Επομένως, υπάρχει $E \in \mathcal{M}$ τέτοιο ώστε $\lambda_A(E) > 0$ και $\mu(E) = 0$. Θέτοντας $B = A \cap E$, προκύπτει το ζητούμενο αποτέλεσμα.

Τώρα, θέτουμε

$$\mathcal{C} = \{E \in \mathcal{M} : \lambda(E) > 0, \text{ και } \mu(E) = 0\}.$$

Από το προηγούμενο επιχείρημα, για $A = X$, βλέπουμε ότι $\mathcal{C} \neq \emptyset$. Έστω $\mathcal{T} = \{\lambda(E) : E \in \mathcal{C}\}$. Το σύνολο $\mathcal{T}$ είναι μη κενό και άνω φραγμένο από το $\lambda(X)$. Έστω $\{\lambda(E_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{T}$ ακολουθία που συγκλίνει στο $sup\mathcal{T}$, και έστω $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$. Τότε, $\lambda(E) \geqslant \lambda(E_n)$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και άρα, $\lambda(E) \geqslant sup\mathcal{T} > 0$. Όμως, $0 \leqslant \mu(E) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = 0$. Επομένως, έχουμε ότι $E \in \mathcal{C}$ και $\lambda(E) = sup\mathcal{T} > 0$.

Τώρα, είναι $\mu(E) = 0 \Rightarrow \mu(X \backslash (X \backslash E)) = 0$, και άρα υπάρχει $F \in \mathcal{M}$ τέτοιο ώστε $F \subseteq X \backslash E$, $\lambda(F) > 0$ και $\mu(F) = 0$. Θεωρούμε το σύνολο $E \cup F \in \mathcal{M}$. Τα σύνολα E, F είναι ξένα και άρα, $\lambda(E \cup F) = \lambda(E) + \lambda(F) > \lambda(E) = sup\mathcal{T} > 0$, και $\mu(E \cup F) = \mu(E) + \mu(F) = 0$. Αυτό συνεπάγεται ότι $E \cup F \in \mathcal{C}$, το οποίο οδηγεί σε άτοπο λόγω του ορισμού του $sup\mathcal{T}$.

Τώρα, θεωρούμε την κλάση όλων των θετικών πεπερασμένων μέτρων λ_α, για τα οποία υπάρχει θετικό πεπερασμένο μέτρο λ_s με $\lambda_s \perp \mu$ και $\lambda = \lambda_\alpha + \lambda_s$. Δηλαδή,

$$M_\alpha = \{\lambda_\alpha : \text{υπάρχει } \lambda_s \text{ με } \lambda_s \perp \mu \text{ και } \lambda = \lambda_\alpha + \lambda_s\}.$$

Ισχύει ότι $M_\alpha \neq \emptyset$, γιατί αν το μέτρο μ είναι συγκεντρωμένο στο σύνολο A, θέτοντας $\lambda_1 = \lambda|_A$ και $\lambda_2 = \lambda|_{X \backslash A}$, βλέπουμε ότι $\lambda_1 \in M_\alpha$. Επομένως, από το προηγούμενο επιχείρημα, συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $\lambda_a \in M_\alpha$ με $\lambda_\alpha \ll \mu$. Άρα, το Θεώρημα απεδείχθη στην περίπτωση όπου το λ είναι θετικό πεπερασμένο μέτρο.

Αν το λ είναι μιγαδικό μέτρο στην $\mathcal{M}$, τότε $\lambda = \lambda_1 - \lambda_2 + i(\lambda_3 - \lambda_4)$, για κάποια $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ και λ_4 πεπερασμένα θετικά μέτρα, και μπορούμε να εφαρμόσουμε το προηγούμενο αποτέλεσμα σε αυτά τα μέτρα. Έστω $(\lambda_{i,\alpha}, \lambda_{i,s})$, οι αναλύσεις Lebegue για τα λ_i, για $i = 1, 2, 3, 4$. Ορίζουμε τα μιγαδικά μέτρα:

$$\lambda_\alpha := \lambda_{1,\alpha} - \lambda_{2,\alpha} + i\,(\lambda_{3,\alpha} - \lambda_{4,\alpha})$$

και

$$\lambda_s := \lambda_{1,s} - \lambda_{2,s} + i\,(\lambda_{3,s} - \lambda_{4,s})\,.$$

- Παρατηρούμε ότι $\lambda = \lambda_\alpha + \lambda_s$.
- Επίσης, είναι $\lambda_\alpha \ll \mu$. Πράγματι, έστω ότι για τυχόν $E \in \mathcal{M}$, είναι $\mu(E) = 0$. Τότε, $\lambda_{i,\alpha}(E) = 0$, για κάθε $i = 1, 2, 3, 4$, επειδή τα $\lambda_{i,\alpha}$ είναι απολύτως συνεχή αναφορικά με το μ. Συνεπώς, είναι $\lambda_\alpha(E) = \lambda_{1,\alpha}(E) - \lambda_{2,\alpha}(E) + i\,(\lambda_{3,\alpha}(E) - \lambda_{4,\alpha}(E)) = 0$ και άρα, δείξαμε ότι $\lambda_\alpha \ll \mu$.
- Μένει να δείξουμε ότι $\lambda_s \perp \mu$. Πράγματι, έστω ότι το $\lambda_{s,i}$ είναι συγκεντρωμένο στο A_i και ότι το μ είναι συγκεντρωμένο στο B_i με $A_i \cap B_i = \emptyset$, για $i = 1, 2, 3, 4$. (Η καθετότητα του $\lambda_{i,s}$ και του μ εξασφαλίζει την ύπαρξη των A_i και B_i.) Τότε, το λ_s είναι συγκεντρωμένο στο σύνολο $A = \bigcup_{i=1}^4 A_i$, ενώ το μ είναι συγκεντρωμένο στο σύνολο $B = \bigcap_{i=1}^4 B_i$ και προφανώς, $A \cap B = \emptyset$.

Τελικά, το Θεώρημα απεδείχθη και στην περίπτωση που το λ είναι μιγαδικό μέτρο.

□

Σχόλιο: Οι έννοιες της καθετότητας και της απόλυτης συνέχειας μεταξύ δύο μέτρων ν και μ στον μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{M})$, όπου το ν είναι μιγαδικό μέτρο και το μ θετικό μέτρο, εκφράζουν δύο ακραία σενάρια για τις σχέσεις που μπορεί να υπάρχουν ανάμεσα σε δύο μέτρα.

Από την μια μεριά, η έννοια της καθετότητας μας λέει ότι τα μέτρα ν και μ συγκεντρώνονται σε ξένα σύνολα της $\mathcal{M}$. Από την άλλη, η έννοια της απόλυτης συνέχειας, δηλαδή η σχέση $\nu \ll \mu$, μας λέει ότι το σύνολο στο οποίο το ν είναι συγκεντρωμένο, έστω A, είναι «αναγκαίο κομμάτι» του συνόλου στο οποίο το μ είναι συγκεντρωμένο με την έννοια ότι $\mu(A) > 0$.

Το Θεώρημα του Lebesgue μας δείχνει ότι για οποιαδήποτε λ και μ στον μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{M})$, όπου το λ είναι μιγαδικό μέτρο και το μ θετικό μέτρο, το λ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός δύο μέτρων, από τα οποία το ένα είναι κάθετο στο μ και το άλλο είναι απολύτως συνεχές αναφορικά με το μ.

Παρατηρήσεις 2.1. *1. Από την Πρόταση 2.1.(6), εύκολα φαίνεται ότι* $\lambda_\alpha \perp \lambda_s$.

2. *Το θεώρημα 2.2. ισχύει και στην περίπτωση όπου το* λ *είναι θετικό και σ-πεπερασμένο μέτρο. Γράφουμε* $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, *όπου* $\lambda(X_n) < \infty$. *Οι αναλύσεις Lebesgue για τα* $\lambda(E \cap X_n)$, *μας δίνουν μια ανάλυση Lebesgue για το* λ.

3. *Το θεώρημα 2.2. αποτυγχάνει αν το* λ *του Θεωρήματος είναι θετικό και όχι σ-πεπερασμένο μέτρο. Παραδείγματος χάριν, έστω* m *το μέτρο Lebesgue στο* $(0,1)$ *και* λ *το αριθμητικό μέτρο στην σ-άλγεβρα όλων των Lebesgue μετρήσιμων συνόλων στο* $(0,1)$. *Θα δείξουμε ότι δεν υπάρχει ανάλυση Lebesgue του* λ *αναφορικά με το* m. *Πράγματι, έστω προς απαγωγή σε άτοπο ότι υπάρχει ανάλυση Lebegue του* λ *αναφορικά με το* m. *Δηλαδή, έστω ότι υπάρχουν μέτρα* λ_α *και* λ_s *τέτοια ώστε* $\lambda = \lambda_\alpha + \lambda_s$, *με* $\lambda_\alpha \ll m$, *και* $\lambda_s \perp m$. *Για κάθε* $r \in (0,1)$, *είναι*

$$\begin{aligned} \lambda(r) = \lambda_\alpha(r) + \lambda_s(r) \Rightarrow & \qquad (\lambda_\alpha \ll m, \quad m(r) = 0) \\ 1 = \lambda_s(r). & \end{aligned}$$

Επομένως, $\lambda_s \equiv \lambda$ *και οδηγούμαστε σε άτοπο, επειδή* $\lambda \not\perp m$. *(Το «μικρότερο» σύνολο στο οποίο το* λ *είναι συγκεντρωμένο είναι το* $(0,1)$. *Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι το* λ *είναι συγκεντρωμένο στο* $B = (0,1) \backslash \{\alpha\}$ *για κάποιο* $\alpha \in (0,1)$, *έχουμε ότι* $\lambda(\{\alpha\}) = 1 \neq 0 = \lambda(\{\alpha\} \cap B)$.*)*

4. *Για* λ *και* μ *όπως στο Θεώρημα 2.2., τα* λ_α *και* λ_s *παρουσιάζουν αντιδιαμετρικά αντίθετη συμπεριφορά αναφορικά με το* μ. *Ποιοτικά, η τοπική συμπεριφορά του* λ_α *εξαρτάται από την τοπική συμπεριφορά του* μ *(βλ. Θεώρημα 2.1.), ενώ το* λ_s *«δρα» ανεξάρτητα από το* μ. *Μάλιστα, το Θεώρημα των Radon-Nikodym, που θα δούμε παρακάτω, εξασφαλίζει ότι μπορούμε να αναπαραστήσουμε το* λ_α *συναρτήσει του* μ *μέσω του ολοκληρωτικού τελεστή, όταν το* μ *είναι θετικό σ-πεπερασμένο μέτρο.*

2.2 Θεώρημα των Radon-Nikodym

Το Θεώρημα των Radon-Nikodym αποτελεί την φυσική γενίκευση του Θεμελιώδους Θεωρήματος της Ανάλυσης σε πιο γενικούς χώρους. Το Θ.Θ.Α. χαρακτηρίζει τις απολύτως συνεχείς συναρτήσεις ως εκείνες τις συναρτήσεις g για τις οποίες ισχύει ότι:

$$g(x) - g(\alpha) = \int_{\alpha}^{x} g'(t)\, dt,$$

ενώ το Θεώρημα των Radon-Nikodym χαρακτηρίζει τα απολύτως συνεχή μέτρα $\nu \ll \mu$ ως αυτά για τα οποία ισχύει:

$$\nu(E) = \int_E f\, d\mu,$$

για κάποια μ-ολοκληρώσιμη συνάρτηση f.

Λήμμα 2.1. *Έστω ν και μ θετικά και πεπερασμένα μέτρα στον μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{M})$, με $\nu \ll \mu$, και $\nu \not\equiv 0$. Τότε, υπάρχει $\varepsilon > 0$ και σύνολο $A \in \mathcal{M}$ τέτοιο ώστε:*

$$\mu(A) > 0 \text{ και } \nu - \varepsilon\mu|_A \geqslant 0.$$

Απόδειξη. Εφόσον $\nu \not\equiv 0$, υπάρχει $E \in \mathcal{M}$ τέτοιο ώστε $\nu(E) > 0$. Τότε, και $\mu(E) > 0$, λόγω της σχέσης $\nu \ll \mu$. Μπορούμε να βρούμε $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε για το προσημασμένο μέτρο $\kappa := \nu - \varepsilon\mu$ να είναι $\kappa(E) > 0$. Έστω (P, N) μία ανάλυση Hahn για το κ. Ορίζουμε:

$$A = P \cap E.$$

Τότε $\mu(A) > 0$. Πράγματι, αν ήταν $\mu(A) = 0$ θα είχαμε και $\nu(A) = 0$, πάλι λόγω της σχέσης $\nu \ll \mu$. Το γεγονός αυτό έρχεται σε αντίθεση με το παρακάτω:

$$\nu(A) - \varepsilon\mu(A) = \kappa(A) = \kappa(P \cap E) \geqslant \kappa(E) > 0,$$

όπου η προτελευταία ανισότητα ισχύει λόγω της θετικότητας του P (βλ. Παρατηρήσεις 1.2.(2)). Συνεπώς, οδηγούμαστε σε άτοπο και άρα, ο ισχυρισμός ότι $\mu(A) > 0$ είναι αληθής. Το γεγονός ότι το μ είναι πεπερασμένο μας επιτρέπει να γράφουμε ότι: $\nu(F) = \kappa(F) + \varepsilon\mu(F)$, για κάθε $F \in \mathcal{M}$, και συνεπώς,

$$\nu(B) \geqslant \nu(B \cap A) = \kappa(B \cap A) + \varepsilon\mu(B \cap A) \geqslant \varepsilon\mu(B \cap A), \quad B \in \mathcal{M},$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $\kappa(B \cap A) \geqslant 0$, επειδή $B \cap A \subseteq P$. Η παραπάνω ανισότητα αποδεικνύει το ζητούμενο.

□

Θεώρημα 2.3 (Θεώρημα των Radon-Nikodym). *Έστω ότι το μ είναι θετικό σ-πεπερασμένο μέτρο στον μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{M})$ και ότι το ν είναι μιγαδικό μέτρο στον $(X, \mathcal{M})$, με $\nu \ll \mu$. Τότε, υπάρχει μοναδική συνάρτηση $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ τέτοια ώστε:*

$$\nu(E) = \int_E f \, d\mu. \tag{*}$$

Η συνάρτηση f λέγεται Radon-Nikodym παράγωγος του ν αναφορικά με το μ και συμβολίζεται με $f = \dfrac{d\nu}{d\mu}$.

Απόδειξη. Αρχικά, υποθέτουμε ότι τα ν και μ είναι θετικά πεπερασμένα μέτρα στην $\mathcal{M}$.

Θεωρούμε την κλάση $\mathcal{C}$ όλων των συναρτήσεων $f : X \to \mathbb{R}$ για τις οποίες:

(α′) Η f είναι $\mathcal{M}$-μετρήσιμη συνάρτηση και $f \geqslant 0$.

(β′) Για κάθε $A \in \mathcal{M}$,

$$\nu(A) \geqslant \int_A f \, d\mu. \tag{1}$$

Η κλάση $\mathcal{C}$ έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

i. $\mathcal{C} \neq \emptyset$, επειδή η μηδενική συνάρτηση ανήκει στην $\mathcal{C}$.

ii. Η $\mathcal{C}$ είναι κλειστή στο maximum πεπερασμένου πλήθους στοιχείων της. Πράγματι, αν $f, g \in \mathcal{C}$ και $h := max\{f, g\}$, έχουμε ότι για κάθε $A \in \mathcal{M}$:

$$\begin{aligned} \int_A h \, d\mu &= \int_{A \cap \{f \geqslant g\}} f \, d\mu + \int_{A \cap \{f < g\}} g \, d\mu \\ &\leqslant \nu(A \cap \{f \geqslant g\}) + \nu(A \cap \{f < g\}) \\ &= \nu(A). \end{aligned} \tag{2}$$

Επομένως, όντως $h \in \mathcal{C}$.

iii. Η $\mathcal{C}$ είναι κλειστή στο όριο γνησίως αυξουσών συναρτήσεων. Πράγματι, η μετρησιμότητα διατηρείται. Επίσης, αν $f_n \uparrow f$, τότε έχουμε ότι $\int_A f_n \, d\mu \uparrow \int_A f \, d\mu$ από το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης και άρα, $\int_A f \, d\mu = \lim_n \int_A f_n \, d\mu \leqslant \nu(A)$. Επομένως, ο ισχυρισμός είναι αληθής.

Ισχυριζόμαστε ότι η $\mathcal{C}$ έχει μεγιστικό στοιχείο, δηλαδή

$$\text{υπάρχει } f \in \mathcal{C}, \quad \text{τέτοια ώστε } \forall g \in \mathcal{C}: \quad f \geqslant g \quad \mu-\text{σχεδόν παντού}. \tag{3}$$

Από την (1) παρατηρούμε ότι:

$$\alpha := sup\left\{\int f\ d\mu : f \in \mathcal{C}\right\} \leqslant \nu(X) < \infty \tag{4}$$

και συνεπώς, μπορούμε να βρούμε ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n\} \subseteq \mathcal{C}$ με $\int f_n\ d\mu \longrightarrow \alpha$. Από παρατήρηση ii., $f'_n := max\{f_1, \ldots, f_n\} \in \mathcal{C}$ και αφού $\alpha \geqslant \int f'_n\ d\mu \geqslant \int f_n\ d\mu$, για κάθε n, έχουμε επίσης ότι $\int f'_n\ d\mu \longrightarrow \alpha$.

Αλλά, η $\{f'_n\}$ είναι αύξουσα ακολουθία συναρτήσεων και συνεπώς, το όριο $f := \lim_{n\to\infty} f'_n$ υπάρχει. Θα δούμε ότι η συνάρτηση f είναι η ζητούμενη μεγιστική συνάρτηση. Η $f \in \mathcal{C}$ από παρατήρηση iii. και είναι σχεδόν παντού πεπερασμένη από γνωστή Πρόταση. Το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης εγγυάται ότι:

$$\int f\ d\mu = \alpha.$$

Θεωρούμε τυχούσα συνάρτηση $g \in \mathcal{C}$ και παρατηρούμε ότι:

$$\alpha \geqslant \int max\{f, g\}\ d\mu \geqslant \int f\ d\mu = \alpha,$$

και επομένως,

$$\int max\{f, g\}\ d\mu = \int f\ d\mu. \tag{5}$$

Επειδή και τα δύο ολοκληρώματα στην σχέση (5) είναι πεπερασμένα, έχουμε ότι για τυχούσα $g \in \mathcal{C}$, $max\{f, g\} = f$, μ-σ.π. ή ισοδύναμα, για κάθε $g \in \mathcal{C}$ είναι $f \geqslant g$ μ- σ.π. και ο ισχυρισμός έχει δειχθεί.

Τώρα, θεωρούμε το προσημασμένο μέτρο $\nu'(E) := \nu(E) - \int_E f\ d\mu$, για κάθε $E \in \mathcal{M}$. Από την σχέση (1), έχουμε ότι, στην πραγματικότητα, αυτό είναι ένα θετικό μέτρο. Από την υπόθεση $\nu \ll \mu$ και τον ορισμό του ν' φαίνεται άμεσα ότι $\nu' \ll \mu$.

Αν $\nu' \not\equiv 0$, από το Λήμμα 2.1., υπάρχει $\varepsilon > 0$ και $A \in \mathcal{M}$ με $\mu(A) > 0$ και $\nu' - \varepsilon\mu|_A \geqslant 0$. Ακολούθως, η συνάρτηση $g = f + \varepsilon\mathbb{1}_A \in \mathcal{C}$, επειδή η g

είναι μετρήσιμη, θετική και επιπλέον,

$$\begin{aligned}\int_E g\,d\mu &= \int_E f\,d\mu + \int_E \varepsilon \mathbb{1}_A\,d\mu\\ &= \int_E f\,d\mu + \varepsilon\mu(E\cap A)\\ &\leqslant \int_{E\cap A} f\,d\mu + \int_{E\setminus A} f\,d\mu + \nu'(E\cap A)\\ &= \int_{E\cap A} f\,d\mu + \int_{E\setminus A} f\,d\mu + \nu(E\cap A) - \int_{E\cap A} f\,d\mu\\ &= \int_{E\setminus A} f\,d\mu + \nu(E\cap A)\\ &\leqslant \nu(E\setminus A) + \nu(E\cap A)\\ &= \nu(E).\end{aligned}$$

Όμως, η $g = f + \varepsilon\mathbb{1}_A$ είναι μεγαλύτερη από την f στο σύνολο θετικού μ-μέτρου A και αυτό έρχεται σε αντίθεση με την (3). Συνεπώς, $\nu' = \nu - \int f\,d\mu = 0$ και άρα, η (*) είναι αληθής.

Προφανώς, $f \in L^1(\mu)$, αφού η f είναι $\mathcal{M}$-μετρήσιμη και $\nu(X) < \infty$.

Για την μοναδικότητα της f, αν f' μια άλλη συνάρτηση στον $L^1(\mu)$ που ικανοποιεί την (*), τότε

$$\int_{\{f'<f\}} f\,d\mu = \int_{\{f'<f\}} f'\,d\mu,$$

που ισχύει μόνο όταν $\mu(\{f' < f\}) = 0$ από γνωστή Πρόταση. Λόγω συμμετρίας, $\mu(\{f < f'\}) = 0$ και επομένως, $\mu(\{f' \neq f\}) = 0$, ήτοι $f' = f$ μ-σχεδόν παντού.

Αν $\nu = \nu_1 + i\nu_2$, με ν_1, ν_2 πεπερασμένα προσημασμένα μέτρα, μπορούμε να εφαρμόσουμε τα προηγούμενα στο θετικό και αρνητικό μέρος των ν_1 και ν_2.

Τέλος, στην περίπτωση που το μ είναι θετικό σ-πεπερασμένο μέτρο, γράφουμε $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, όπου $\mu(X_n) < \infty$ και εφαρμόζοντας τα παραπάνω για τα μέτρα $\nu(E \cap X_n)$, μπορούμε πάλι να βρούμε f που να ικανοποιεί την (*). □

Παρατηρήσεις 2.2. *1. Πέρα από την υπόθεση του σ-πεπερασμένου για το μέτρο μ, το Θεώρημα 2.3. αποτυγχάνει. Πράγματι, έστω μ το αριθμητικό μέτρο στην σ-άλγεβρα όλων των Lebesgue μετρήσιμων συνόλων στο $(0,1)$ και m το μέτρο Lebesgue στο $(0,1)$. Τότε,* *δεν υπάρχει συνάρτηση f που να ικανοποιεί την $m = \int f\, d\mu$. Έστω προς απαγωγή σε άτοπο, ότι υπήρχε. Παρατηρούμε ότι το m είναι μηδέν στα μεμονωμένα σημεία, ενώ το μ όχι και αυτό συνεπάγεται ότι $f \equiv 0$, το οποίο έρχεται σε αντίθεση με το γεγονός ότι $m \not\equiv 0$.*

2. *Έστω ότι το μ είναι σ-πεπερασμένο θετικό μέτρο στον μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{M})$. Τότε, υπάρχει μία απεικόνιση από τον $L^1(\mu)$ επί του συνόλου όλων των απολύτως συνεχών μέτρων στον $(X, \mathcal{M})$ αναφορικά με το μ, συμβολ. $M_{ac}(\mu)$:*

$$\begin{aligned} L^1(\mu) &\longrightarrow M_{ac}(\mu) \\ f &\longrightarrow \nu_f, \end{aligned}$$

όπου

$$\text{για κάθε } A \in \mathcal{M}, \quad \nu_f = \int_A f\, d\mu.$$

Συνέπειες του Θεωρήματος των Radon-Nikodym

Θεώρημα 2.4. *Έστω ν μιγαδικό μέτρο στην σ-άλγεβρα $\mathcal{M}$ του X. Τότε, υπάρχει μετρήσιμη συνάρτηση h με $|h|= 1$, για κάθε $x \in X$ τέτοια ώστε:*

$$d\nu = hd|\nu|.$$

Κατ΄αντιστοιχία με την πολική αναπαράσταση ενός μιγαδικού αριθμού, η πιο πάνω εξίσωση αναφέρεται, επίσης, ως «πολική αναπαράσταση του ν».

Απόδειξη. Είναι τετριμμένο ότι $\nu \ll |\nu|$ και επομένως, το Θεώρημα των Radon-Nikodym εγγυάται την ύπαρξη συνάρτησης $h \in \mathcal{L}^1(|\nu|)$ με $\nu = \int h\, d|\nu|$.

Πρώτα, θα δείξουμε ότι $|h| \geqslant 1$, $|\nu|$-σχεδόν παντού. Έστω το σύνολο $A_r = \{x : |h(x)| < r\}$, όπου r θετικός πραγματικός αριθμός, και έστω $\{E_j^{(r)}\}_{j\in\mathbb{N}}$ αριθμήσιμη διαμέριση του A_r. Τότε

$$\sum_j |\nu(E_j^{(r)})| = \sum_j \Big|\int_{E_j^{(r)}} h\, d|\nu|\Big| \leqslant \sum_j r|\nu|(E_j^{(r)}) = r|\nu|(A_r),$$

επομένως, $|\nu|(A_r) \leqslant r|\nu|(A_r)$. Αν $r < 1$, η τελευταία σχέση συνεπάγεται ότι $|\nu|(A_r) = 0$. Συνεπώς, από τον ορισμό του A_r, $|h| \geqslant 1$, $|\nu|$-σχεδόν παντού.

Από την άλλη μεριά, αν $|\nu|(E) > 0$, έχουμε ότι

$$\left|\frac{1}{|\nu|(E)}\int_E h\, d|\nu|\right| = \frac{|\nu(E)|}{|\nu|(E)} \leqslant 1.$$

Επομένως, από γνωστό Θεώρημα (βλ. Rudin, Θεώρημα 1.40), έχουμε ότι $|h| \leqslant 1$, $|\nu|$-σχεδόν παντού.

Αν $B = \{x \in X : |h(x)| \neq 1\}$, είναι $|\nu|(B) = 0$. Μπορούμε να ορίσουμε εκ νέου την h στο B έτσι ώστε $|h(x)| = 1$, για κάθε $x \in B$ και να πάρουμε το επιθυμητό αποτέλεσμα.

□

Θεώρημα 2.5. *Έστω μ θετικό σ-πεπερασμένο μέτρο στον μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{M})$, $g \in L^1(\mu)$, και*

$$\lambda(E) = \int_E g\, d\mu \quad (E \in \mathcal{M}).$$

Τότε,

$$|\lambda|(E) = \int_E |g|\, d\mu \quad (E \in \mathcal{M}).$$

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 2.4., υπάρχει συνάρτηση h, με $|h(x)| = 1$, για κάθε $x \in X$, τέτοια ώστε $d\lambda = hd|\lambda|$. Από υπόθεση, $d\lambda = gd\mu$. Συνεπώς,

$$hd|\lambda| = gd\mu.$$

Και άρα, $d|\lambda| = \bar{h}gd\mu$, όπου με $\bar{h}$ συμβολίζουμε την συζυγή μιγαδική συνάρτηση της h. †

Αφού $|\lambda| \geqslant 0$ και $\mu \geqslant 0$, έπεται ότι $\bar{h}g \geqslant 0$, μ-σχεδόν παντού. Έτσι, $\bar{h}g = |g|$, μ-σχεδόν παντού και έχουμε το ζητούμενο.

□

†Η σχέση $\int_E fhd|\lambda| = \int_E fgd\mu$ ισχύει για κάθε συνάρτηση $f = \mathbb{1}_A$, όπου $A \in \mathcal{M}$ και συνεπώς, για κάθε απλή συνάρτηση. Προσεγγίζοντας την μετρήσιμη συνάρτηση $\bar{h}$ από απλές συναρτήσεις έχουμε το ζητούμενο.

Κεφάλαιο 3

Εφαρμογή στην Θεωρία Πιθανοτήτων

3.1 Το παράδοξο των Borel-Kolmogorov

Ας επιλέξουμε ως βασικό σύνολο Ω όλα τα σημεία στην επιφάνεια της μοναδιαίας σφαίρας στον $\mathbb{R}^3$, εκτός του $(0,0,-1)$. Θα ορίσουμε κατάλληλη σ-άλγεβρα $\mathcal{F}$, η οποία θα είναι ένα υποσύνολο όλων των Borel συνόλων της σφαιρικής επιφάνειας και θα ορίσουμε ένα μέτρο πιθανότητας P, έτσι ώστε το $P(A)$ να είναι ανάλογο του εμβαδού του A.

Θα χρησιμοποιήσουμε τις σφαιρικές συντεταγμένες:

$$\begin{aligned} x &= cos\theta \cdot cos\phi \\ y &= cos\theta \cdot sin\phi \\ z &= sin\theta, \end{aligned}$$

όπου $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\phi \in (0, 2\pi]$. Το θ είναι το γεωγραφικό πλάτος και το ϕ το γεωγραφικό μήκος. Ισοδύναμα, μπορούμε να γράψουμε $\overrightarrow{r} = (cos\theta \cdot cos\phi, cos\theta \cdot sin\phi, sin\theta)$, για $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\phi \in (0, 2\pi]$.

Αρχικά, σημειώνουμε ότι οι σχέσεις $\theta_1 < \theta \leqslant \theta_2$, και $\phi_1 < \phi \leqslant \phi_2$, ορίζουν μια επιφάνεια πάνω στην επιφάνεια της μοναδιαίας σφαίρας. Ας συμβολίσουμε με $\mathcal{A}$ την οικογένεια που αποτελείται από όλες τις επιφάνειες της παραπάνω μορφής και το κενό σύνολο. Φαίνεται ότι η $\mathcal{A}$ είναι ***ημι-άλγεβρα***, δηλαδή

- $\varnothing \in \mathcal{A}$,
- Αν $A, B \in \mathcal{A}$, τότε $A \cap B \in \mathcal{A}$,
- Αν $A, B \in \mathcal{A}$, τότε $A \backslash B = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$, όπου $E_i \in \mathcal{A}$ και E_i ξένα ανά δύο,

- $\Omega \in \mathcal{A}$.

Στη συνέχεια, θα ορίσουμε ένα κατάλληλο προ-μέτρο† στην $\mathcal{A}$, το οποίο θα ικανοποιεί όλες τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Επέκατσης μέτρου του Καραθεοδωρή, δηλαδή

- $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$, για κάθε $A \in \mathcal{A}$,
- $P(\Omega) = 1$,
- Αν $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ αριθμήσιμη οικογένεια ξένων ανά δύο συνόλων της $\mathcal{A}$ με $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$, τότε $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$.

Επομένως, μπορούμε να επεκτείνουμε το P στην σ-άλγεβρα $\sigma(\mathcal{A})$ με μοναδικό τρόπο.

Από γνώσεις Διαφορικής Γεωμετρίας, μπορούμε να υπολογίσουμε το στοιχειώδες εμβαδόν που περικλείεται από τις παραμετρικές καμπύλες $\theta = \theta_0$, $\theta = \theta_0 + d\theta$, $\phi = \phi_0$ και $\phi = \phi_0 + d\phi$, χρησιμοποιώντας τον τύπο

$$dA = \|\vec{r}_\theta \times \vec{r}_\phi\| d\theta d\phi,$$

όπου με $\vec{r}_\theta$ και $\vec{r}_\phi$ δηλώνεται η μερική παράγωγος του $\vec{r}$ ως προς θ και ϕ, αντίστοιχα.

Έτσι αποδεικνύεται ότι η εν λόγω στοιχειώδης επιφάνεια έχει εμβαδό

$$\begin{aligned} dA &= \|\vec{r}_\theta \times \vec{r}_\phi\| d\theta d\phi \\ &= \|(-sin\theta cos\phi, -sin\theta sin\phi, cos\theta) \times (-cos\theta sin\phi, cos\theta cos\phi, 0)\| d\theta d\phi \\ &= \|(-cos^2\theta cos\phi, -cos^2\theta sin\phi, -cos\theta sin\theta)\| d\theta d\phi \\ &= \sqrt{(-cos^2\theta cos\phi)^2 + (-cos^2\theta sin\phi)^2 + (-cos\theta sin\theta)^2} d\theta d\phi \\ &= cos\theta d\theta d\phi. \end{aligned}$$

Επομένως, αν το A περιέχει όλα τα σημεία για τα οποία $\theta_1 < \theta \leqslant \theta_2$ και $\phi_1 < \phi \leqslant \phi_2$, τότε το εμβαδόν της επιφάνειας A, θα δίνεται από τον τύπο $\int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} cos\theta d\theta d\phi$. Επομένως, το προ-μέτρο του συνόλου A θα δίνεται από τον τύπο:

$$P[A] = C \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} cos\theta d\theta d\phi,$$

όπου το C είναι μια σταθερά κανονικοποίησης για να εξασφαλίσουμε ότι οι πιθανότητες αθροίζουν στην μονάδα. Για να υπολογίσουμε την

†Χρησιμοποιούμε τον όρο προ-μέτρο και όχι μέτρο, επειδή ορίζουμε το P πάνω σε μία ημι-άλγεβρα και όχι σ-άλγεβρα.

τιμή του C, παρατηρούμε ότι:

$$\begin{aligned}
P(\Omega) = C \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} cos\theta \; d\theta \; d\phi \Rightarrow \\
1 = C \int_0^{2\pi} [sin\theta]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \; d\phi \Rightarrow \\
1 = C \int_0^{2\pi} 2 \; d\phi \Rightarrow \\
1 = C \cdot 4\pi \Rightarrow \\
C = \frac{1}{4\pi}.
\end{aligned}$$

Το προ-μέτρο P που ορίσαμε παραπάνω ικανοποιεί τις ιδιότητες του Θεωρήματος Επέκτασης μέτρου του Καραθεοδωρή και άρα, επεκτείνεται σε μέτρο πιθανότητας στην $\sigma(\mathcal{A})$.

Τώρα, εισάγουμε τις τυχαίες μεταβλητές Θ και Φ, όπου Θ το γεωγραφικό πλάτος και Φ το γεωγραφικό μήκος. Για παράδειγμα, η εξίσωση $\Phi = \phi$ καθορίζει τον μεσημβρινό που αντιστοιχεί σε γεωγραφικό μήκος ϕ. Η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας για τα Θ και Φ είναι $p(\theta, \phi) = \frac{cos\theta}{4\pi}$. Οι περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας της Θ και της Φ υπολογίζονται εύκολα ως εξής:

$$\begin{aligned}
p_\Theta(\theta) &= \int_0^{2\pi} p(\theta, \phi) d\phi = \int_0^{2\pi} \frac{cos\theta}{4\pi} d\phi \\
&= 2\pi \cdot \frac{cos\theta}{4\pi} \\
&= \frac{cos\theta}{2}
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
p_\Phi(\phi) &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} p(\theta, \phi) \; d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos\theta}{4\pi} \; d\theta \\
&= \frac{1}{4\pi} [sin\theta]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{1}{4\pi} \cdot 2 \\
&= \frac{1}{2\pi}.
\end{aligned}$$

Υπολογίζουμε τώρα τις δεσμευμένες συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας $p(\theta|\Phi=\phi)$, και $p(\phi|\Theta=\theta)$ για $\theta \neq \frac{\pi}{2}$:

$$p(\phi|\Theta=\theta) = \frac{p(\theta,\phi)}{p_{\Theta}(\theta)} = \frac{\frac{cos\theta}{4\pi}}{\frac{cos\theta}{2}} = \frac{1}{2\pi}$$

$$p(\theta|\Phi=\phi) = \frac{p(\theta,\phi)}{p_{\Phi}(\phi)} = \frac{\frac{cos\theta}{4\pi}}{\frac{1}{2\pi}} = \frac{cos\theta}{2}.$$

Επομένως,

$$p(\phi|\Theta=0) = \frac{1}{2\pi}$$

και

$$p(\theta|\Phi=2\pi) = \frac{cos\theta}{2}.$$

Η πρώτη σ.π.π. είναι ομοιόμορφη, ενώ η δεύτερη είναι μικρότερη στους πόλους και μεγαλύτερη στον ισημερινό. Μπορούμε εξίσου καλά να περιγράψουμε ένα τόξο C μέσω ενός συστήματος συντεταγμένων που το αντιμετωπίζει σαν «μισό ισημερινό» ή μέσω ενός άλλου συστήματος συντεταγμένων που το αντιμετωπίζει ως μεσημβρινό. Ωστόσο, τα δύο συστήματα συντεταγμένων εξάγουν διαφορετικές δεσμευμένες σ.π.π. πάνω στο ίδιο τόξο C. Η αντίθεση αυτή μεταξύ των δεσμευμένων σ.π.π. φαίνεται παράδοξη.

Οι $p(\theta|\Phi=2\pi)$ και $p(\phi|\Theta=0)$ διαφέρουν τόσο πολύ εξαιτίας του διαφορετικού ρόλου που παίζουν τα θ και ϕ στον τύπο $cos\theta d\theta d\phi$. Ο τύπος αλλάζει με το θ, αλλά όχι με το ϕ. Διαισθητικά, οι στοιχειώδεις επιφάνειες μικραίνουν όλες μαζί καθώς απομακρυνόμαστε από τον ισημερινό. Η αντίθεση μεταξύ των θ και ϕ συνεπάγεται ότι ένα τυχαία επιλεγμένο σημείο είναι πιο πιθανό να είναι κοντά στον ισημερινό απ' ότι κοντά στους πόλους, αλλά είναι εξίσου πιθανό να βρίσκεται σε οποιοδήποτε γεωγραφικό μήκος. Γι' αυτό, η δεσμευμένη πιθανότητα του γεωγραφικού μήκους δεδομένου του γεωγραφικού πλάτους διαφέρει τόσο πολύ από την δεσμευμένη πιθανότητα του γεωγραφικού πλάτους δεδομένου του γεωγραφικού μήκους.

Ο Kolmogorov επισημαίνει ότι η δεσμευμένη πιθανότητα δοθέντος ενός ενδεχόμενου μηδενικής πιθανότητας είναι απροσδιόριστη, αλλά μπορεί να υπολογιστεί μόνο σε σχέση με άλλα πιθανά ενδεχόμενα που μπορεί να έχουν συμβεί.

Για να αναπτύξει την θέση του, ο Kolmogorov χρησιμοποιεί την γλώσσα της θεωρίας μέτρου. Το βασικό αντικείμενο μελέτης είναι ένας χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, όπου Ω τυχαίο σύνολο, $\mathcal{F}$ σ-άλγεβρα στο Ω και P μέτρο πιθανότητας στην $\mathcal{F}$. Το μέτρο πιθανότητας P ορίζεται στα μέλη της $\mathcal{F}$. Η δεσμευμένη πιθανότητα είναι συσχετισμένη με μια σ-άλγεβρα $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$. Διαισθητικά, η $\mathcal{G}$ λειτουργεί σαν ένα «φίλτρο πληροφορίας». Δηλαδή, όταν το αποτέλεσμα $\omega \in \Omega$ συμβεί, δεν γνωρίζουμε τα πάντα γι' αυτό, αλλά γνωρίζουμε αν ανήκει σε κάθε $G \in \mathcal{G}$. Έτσι, μπορούμε να «ενημερώσουμε» την πιθανότητα που έχουμε δώσει στο $A \in \mathcal{F}$. Επομένως, αναζητούμε μια συνάρτηση που θα δίνει πιθανότητα σ' ένα ενδεχόμενο A δοθέντος αποτελέσματος ω όπως αυτό έχει φιλτραριστεί από την $\mathcal{G}$.

Αλλά τι ιδιότητες θα πρέπει να έχει αυτή η συνάρτηση; Ας θεωρήσουμε μια απλή περίπτωση. Ας υποθέσουμε ότι το Ω δέχεται αριθμήσιμη διαμέριση $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ από σύνολα της $\mathcal{F}$ με μη-μηδενική πιθανότητα. Επομένως, $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n, G_n \cap G_m = \varnothing, G_n \in \mathcal{F}$ και $P(G_n) > 0$. Τότε, έχουμε

$$P(A|G_n) = \frac{P(A \cap G_n)}{P(G_n)}.$$

Ορίζουμε μια συνάρτηση

$$\eta(\omega) = P(A|G_n), \quad \text{αν } \omega \in G_n.$$

Διαισθητικά, η συνάρτηση η δίνει στο ενδεχόμενο A μια κατάλληλη νέα πιθανότητα δοθέντος του αποτελέσματος ω, όπως αυτό έχει φιλτραριστεί από τη διαμέριση $G_1, G_2, \ldots, G_n, \ldots$ Έστω $\mathcal{G}$ η ελάχιστη σ-άλγεβρα που παράγεται από τα $G_1, G_2, \ldots, G_n, \ldots$ Κάθε $G \in \mathcal{G}$ είναι ένωση στοιχείων της διαμέρισης και άρα γράφεται ως $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_{n_k}$. Εύκολα κανείς μπορεί να δείξει ότι

$$P(A \cap G) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A|G_{n_k})P(G_{n_k}).$$

Από τον ορισμό της η, έχουμε

$$P(A \cap G) = \int_G \eta(\omega)\, dP(\omega), \quad \text{για κάθε } G \in \mathcal{G}.$$

Η παραπάνω ταυτότητα γενικεύει τον νόμο της ολικής πιθανότητας.

Η βασική ιδέα του Kolmogorov ήταν να χρησιμοποιήσει αυτή τη ταυτότητα όχι σαν θεώρημα, αλλά σαν ορισμό για την δεσμευμένη πιθανότητα.

3.2 Δεσμευμένη Μέση Τιμή

Ας θεωρήσουμε έναν χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, και μια τυχαία μεταβλητή $X : \Omega \to \mathbb{R}$ ορισμένη σε αυτόν. Έστω $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ μια σ-άλγεβρα (διαισθητικά, η $\mathcal{G}$ είναι η επιπλέον πληροφορία που αποκτούμε).

Υπενθυμίζουμε ότι με τον όρο τυχαία μεταβλητή στον $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ονομάζουμε μία απεικόνιση $X : \Omega \to \mathbb{R}$ η οποία είναι $\mathcal{F} - \mathcal{B}^1$ μετρήσιμη. Δηλαδή, για κάθε $B \in \mathcal{B}^1$, ισχύει ότι $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$.

Ορισμός 3.1. *Έστω ότι η $\mathcal{G}$ είναι σ-άλγεβρα με $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ και επίσης, έστω $X : \Omega \to \mathbb{R}$ με $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ τυχαία μεταβλητή. Θα λέμε ότι η τυχαία μεταβλητή ξ είναι μια εκδοχή της δεσμευμένης μέσης τιμής της X αναφορικά με την $\mathcal{G}$ και θα συμβολίζουμε με $E[X|\mathcal{G}]$ αν:*

1. $\xi \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$,
2. *η ξ είναι $\mathcal{G}$-μετρήσιμη,*
3. $E[\xi \mathbb{1}_A] = E[X \mathbb{1}_A]$, *για κάθε $A \in \mathcal{G}$.*

Συγκεκριμένα, όταν $X = \mathbb{1}_A$ για κάποιο $A \in \mathcal{F}$, γράφουμε συνήθως $P(A|\mathcal{G}) = E[X|\mathcal{G}]$. Πριν συζητήσουμε για την ύπαρξη και την μοναδικότητα (μέχρι την σ.π. ισοδυναμία), θα δούμε πώς συνδέεται η έννοια της δεσμευμένης μέσης τιμής με την «πιο συμβατική» έννοια της δεσμευμένης πιθανότητας.

Παράδειγμα 3.1. *Δοθέντων $A, B \in \mathcal{F}$, η συμβατική δεσμευμένη πιθανότητα δίνεται από τον τύπο:*

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},$$

όπου έχουμε υποθέσει ότι $P(B) > 0$. Ο ορισμός μας δίνει την πιθανότητα του A όταν έχει πραγματοποιηθεί το B.

Τώρα, ας ορίσουμε την σ-άλγεβρα $\mathcal{G} = \{\varnothing, B, B^{\complement}, \Omega\} \subseteq \mathcal{F}$. Θέλουμε να υπολογίσουμε την δεσμευμένη πιθανότητα της τ.μ. $X = \mathbb{1}_A$ αναφορικά με την $\mathcal{G}$, δηλ. την $\xi = E[\mathbb{1}_A|\mathcal{G}]$. Από τον ορισμό, η ξ είναι $\mathcal{G}$-μετρήσιμη και άρα, μπορούμε να γράψουμε $\xi = a\mathbb{1}_B + b\mathbb{1}_{B^{\complement}}$, για κάποια $a, b \in \mathbb{R}$. Όμως, για $E \in \mathcal{G} = \{\varnothing, B, B^{\complement}, \Omega\}$, έχουμε

$$\int_E \xi \, dP = \int_E \mathbb{1}_A \, dP \Rightarrow aP(E \cap B) + bP(E \cap B^{\complement}) = P(A \cap E).$$

Για $E = B$ και $E = B^{\complement}$, παίρνουμε

$$a = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \textit{και} \quad b = \frac{P(A \cap B^{\complement})}{P(B^{\complement})}.$$

Επιπλέον, επιλέγοντας τα a και b όπως παραπάνω, άμεσα φαίνεται ότι

$$aP(E \cap B) + bP(E \cap B^{\complement}) = P(A \cap E), \quad \forall E \in \mathcal{G}.$$

Έπεται ότι

$$\xi(\omega) = P(A|\mathcal{G})(\omega) = \begin{cases} P(A|B) & \text{αν } \omega \in B, \\ P(A|B^{\complement}) & \text{αν } \omega \in B^{\complement}. \end{cases}$$

Επομένως, ο ορισμός της $P(A|\mathcal{G})$ δεν έρχεται σε αντίθεση με την συμβατική δεσμευμένη πιθανότητα. Δηλαδή η δεσμευμένη πιθανότητα είναι απλά μία ειδική περίπτωση της δεσμευμένης μέσης τιμής.

Παράδειγμα 3.2. *Έστω ότι ο $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ είναι χώρος πιθανότητας, όπου $\Omega = \{a, b, c, d, e, f\}$, $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$ και P ομοιόμορφο. Έστω X, Y και Z τυχαίες μεταβλητές που δίνονται από τις σχέσεις:*

$$X \sim \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ 1 & 3 & 3 & 5 & 5 & 7 \end{pmatrix},$$

$$Y \sim \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 7 & 7 \end{pmatrix} \text{ και } Z \sim \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Θα θέλαμε να σκεφτόμαστε την $E[X|\mathcal{G}]$ σαν την μέση τιμή των $X(\omega)$ πάνω σε όλα τα ω που είναι συνεπή με την τρέχουσα πληροφορία (δηλαδή την $\mathcal{G}$). Για παράδειγμα, αν $\mathcal{G} = \sigma(Y)$, τότε η πληροφορία που περιέχεται στην $\mathcal{G}$ είναι ακριβώς η πληροφορία για την τιμή της Y. Η γνώση ότι $Y = y$ δεν αποκαλύπτει απαραίτητα το «πραγματικό» ω, αλλά σίγουρα αποκλείει όλα εκείνα τα ω για τα οποιά $Y(\omega) \neq y$.

Σε αυτό το συγκεκριμένο παράδειγμα, αν ξέρουμε ότι $Y = 2$, τότε $\omega = a$ ή $\omega = b$, και η μέση τιμή της X δοθέντος ότι $Y = 2$ είναι $\frac{1}{2}X(a) + \frac{1}{2}X(b) = 2$. Όμοια, αυτός ο μέσος όρος ισούται με 4, αν $Y = 1$ και 6, αν $Y = 7$. Θα δείξουμε ότι η τ.μ. ξ που ορίζεται ως

$$\xi \sim \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ 2 & 2 & 4 & 4 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

ικανοποιεί τον ορισμό της $E[X|\sigma(Y)]$. Η ολοκληρωσιμότητα της ξ δεν αποτελεί πρόβλημα αφού είμαστε σε πεπερασμένο χώρο πιθανότητας, και επίσης είναι φανερό ότι η ξ είναι μετρήσιμη αναφορικά με την $\sigma(Y)$. Πράγματι, τα άτομα της $\sigma(Y)$ είναι τα $\{a, b\}, \{c, d\}$ και $\{e, f\}$, και η ξ είναι σταθερή πάνω σε κάθε ένα από αυτά. Τελικά, μας μένει να ελέγξουμε ότι

$$E[\xi \mathbb{1}_A] = E[X \mathbb{1}_A], \quad \forall A \in \sigma(Y),$$

το οποίο για ένα άτομο A μεταφράζεται στο εξής:

$$\xi(\omega) = \frac{1}{P(A)} E[X\mathbb{1}_A] = \sum_{\omega' \in A} X(\omega') P[\{\omega'\}|A], \quad \forall \omega \in A.$$

Το ηθικό δίδαγμα του παραδείγματος είναι ότι όταν το A είναι άτομο, το τρίτο κομμάτι του ορισμού μεταφράζεται σε μία απαίτηση για το ξ να είναι σταθερό στο A με τιμή ίση με την μέση τιμή του X πάνω στο A αναφορικά με την δεσμευμένη πιθανότητα $P[\cdot|A]$. Στην γενική περίπτωση όπου δεν υπάρχουν άτομα, η 3. συνεχίζει να έχει νόημα και μεταφέρει το ίδιο μήνυμα.

Επιπρόσθετα, αφού τα άτομα της $\sigma(Z)$ είναι τα $\{a, b, c, d\}$ και $\{e, f\}$, είναι φανερό ότι

$$E[X|\sigma(Z)](\omega) = \begin{cases} 3, & \omega \in \{a, b, c, d\}, \\ 6, & \omega \in \{e, f\}. \end{cases}$$

Στόχος μας είναι να αποδείξουμε ότι η δεσμευμένη μέση τιμή υπάρχει πάντα. Όταν το Ω είναι πεπερασμένο ή αριθμήσιμο, μπορούμε πάντα να κατασκευάσουμε την δεσμευμένη μέση τιμή υπολογίζοντας τον μέσο όρο πάνω στα άτομα.

Από την άλλη μεριά, όταν θέλουμε να υπολογίσουμε την δεσμευμένη πιθανότητα αναφορικά με ένα ενδεχόμενο H πιθανότητας 0 (π.χ. αν Y συνεχής τ.μ. και H το ενδεχόμενο $Y = y$), το παράδοξο των Borel-Kolmogorov μας δείχνει την αμφισημία της προσπάθειας να υπολογίσουμε την δεσμευμένη πιθανότητα γνωρίζοντας το γεγονός H. Για τον υπολογισμό αυτής της δεσμευμένης πιθανότητας, πρέπει κανείς να προσδιορίσει ποια οριακή διαδικασία παράγει το σύνολο $Y = y$. Η Radon-Nikodym παράγωγος αντικαθιστά αυτήν την οριακή διαδικασία και δίνει ένα αποτέλεσμα με πιο γενική ισχύ.

Πρόταση 3.1. *Έστω $\mathcal{G}$ μία σ-άλγεβρα με $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$. Τότε:*

1. *υπάρχει η δεσμευμένη μέση τιμή $E[X|\mathcal{G}]$ για κάθε $X \in L^1$, και*

2. *οποιεσδήποτε δύο δεσμευμένες μέσες τιμές της $X \in L^1$ είναι ίσες P-σ.π.*

Απόδειξη. **(Μοναδικότητα)** Έστω ότι τα ξ και ξ' ικανοποιούν τα 1.,2. και 3. του ορισμού 3.1. Τότε

$$E[\xi\mathbb{1}_A] = E[\xi'\mathbb{1}_A], \quad \forall A \in \mathcal{G}.$$

Για $A_n = \{\xi' - \xi \geqslant \frac{1}{n}\}$, είναι $A_n \in \mathcal{G}$. Πράγματι, το A_n γράφεται ως $A_n = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \left(\{\xi' \geqslant \frac{1}{n} + q\} \cup \{\xi \leqslant q\}\right)$, δηλαδή ως αριθμήσιμη ένωση συνόλων που ανήκουν στην $\mathcal{G}$. Επομένως,

$$E[\xi \mathbb{1}_{A_n}] = E[\xi' \mathbb{1}_{A_n}] \geqslant E[(\xi + \frac{1}{n})\mathbb{1}_{A_n}] = E[\xi \mathbb{1}_{A_n}] + \frac{1}{n} P[A_n].$$

Συνεπώς, $P[A_n] = 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και άρα, $P[\xi' > \xi] = P[\bigcup_n A_n] = \lim_{n\to\infty} P[A_n] = 0$. Από ένα συμμετρικό επιχείρημα, έχουμε επίσης ότι $P[\xi' < \xi] = 0$.

(Ύπαρξη) Η σχέση

$$Q[A] = E[X \mathbb{1}_A] = \int_A X \, dP$$

ορίζει ένα πεπερασμένο προσημασμένο μέτρο στον $(\Omega, \mathcal{F})$ το οποίο είναι απολύτως συνεχές αναφορικά με το P. Ο περιορισμός $Q|_{\mathcal{G}}$ του Q στην $\mathcal{G}$ είναι ένα απολύτως συνεχές μέτρο ως προς τον περιορισμό $P|_{\mathcal{G}}$ του P στην $\mathcal{G}$. Το θεώρημα Radon-Nikodym εφαρμοσμένο στον χώρο μέτρου $(\Omega, \mathcal{G}, P|_{\mathcal{G}})$ και στα μέτρα $Q|_{\mathcal{G}} \ll P|_{\mathcal{G}}$ εγγυάται την ύπαρξη της Radon-Nikodym παραγώγου

$$\xi = \frac{dQ|_{\mathcal{G}}}{dP|_{\mathcal{G}}} \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{G}, P|_{\mathcal{G}}).$$

Για κάθε $A \in \mathcal{G}$, έχουμε

$$E[X \mathbb{1}_A] = Q[A] = Q|_{\mathbb{G}}[A] = E^{P|_{\mathcal{G}}}[\xi \mathbb{1}_A] = E[\xi \mathbb{1}_A].$$

Άρα, η ξ είναι μία εκδοχή της δεσμευμένης μέσης τιμής $E[X|\mathcal{G}]$.

$\square$

Παρατήρηση 3.1. *Αν χρησιμοποιήσουμε το σύμβολο $\mathcal{L}^1$ για να δηλώσουμε το σύνολο όλων των σ.π.-κλάσεων ισοδυναμίας τυχαίων μεταβλητών στον L^1, μπορούμε να γράψουμε:*

$$E[\cdot|\mathcal{G}] : L^1(\mathcal{F}) \to \mathcal{L}^1(\mathcal{G}),$$

αλλά ο $\mathcal{L}^1(\mathcal{G})$ δεν μπορεί να αντικατασταθεί από τον $L^1(\mathcal{G})$ με έναν φυσικό τρόπο. Επίσης, επειδή $X = X'$ σ.π. συνεπάγεται ότι $E[X|\mathcal{G}] = E[X'|\mathcal{G}]$ σ.π., θεωρούμε την δεσμευμένη μέση τιμή σαν μια απεικόνιση από τον $\mathcal{L}^1(\mathcal{F})$ στον $\mathcal{L}^1(\mathcal{G})$,

$$E[\cdot|\mathcal{G}] : \mathcal{L}^1(\mathcal{F}) \to \mathcal{L}^1(\mathcal{G}).$$

Ιδιότητες

Η δεσμευμένη μέση τιμή κληρονομεί πολλές από τις ιδιότητες της «συνηθισμένης» μέσης τιμής.

Πρόταση 3.2. *Έστω $X, Y, \{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ τυχαίες μεταβλητές στον L^1, και έστω $\mathcal{G}$ και $\mathcal{H}$ σ-άλγεβρες με $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ και $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}$. Τότε*

1. *(γραμμικότητα) $E[\alpha X + \beta Y|\mathcal{G}] = \alpha E[X|\mathcal{G}] + \beta E[Y|\mathcal{G}]$, σ.π.*

2. *(μονοτονία) Αν $X \leqslant Y$ σ.π., τότε $E[X|\mathcal{G}] \leqslant E[Y|\mathcal{G}]$, σ.π.*

3. *(ταυτοτική στον $\mathcal{L}^1(\mathcal{G})$) Αν η X είναι $\mathcal{G}$-μετρήσιμη, τότε $X = E[X|\mathcal{G}]$, σ.π. Συγκεκριμένα, $c = E[c|\mathcal{G}]$, για κάθε σταθερά $c \in \mathbb{R}$.*

4. *Αν Y $\mathcal{G}$-μετρήσιμη συνάρτηση και $XY \in \mathcal{L}^1$, τότε*
$$E[XY|\mathcal{G}] = YE[X|\mathcal{G}], \text{ σ.π.}$$

5. *($\mathcal{L}^2$-προβολή) Αν $X \in \mathcal{L}^2$, τότε η συνάρτηση $\xi^* = E[X|\mathcal{G}]$ ελαχιστοποιεί την μέση τιμή $E[(X-\xi)^2]$ πάνω σε όλες τις $\mathcal{G}$-μετρήσιμες τυχαίες μεταβλητές $\xi \in \mathcal{L}^2$.*

6. *(tower property) Αν $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$, τότε*
$$E[E[X|\mathcal{G}]|\mathcal{H}] = E[X|\mathcal{H}], \text{ σ.π.}$$

Απόδειξη.

1. Το δεξί μέλος της ισότητας στο 1. είναι προφανώς $\mathcal{G}$-μετρήσιμη συνάρτηση και ανήκει στον $\mathcal{L}^1$. Για $A \in \mathcal{G}$, έχουμε
$$\begin{aligned} E[(\alpha E[X|\mathcal{G}] + \beta E[Y|\mathcal{G}])\mathbb{1}_A] &= \alpha E[E[X|\mathcal{G}]\mathbb{1}_A] + \beta E[E[Y|\mathcal{G}]\mathbb{1}_A] \\ &= \alpha E[X\mathbb{1}_A] + \beta E[Y\mathbb{1}_A] \\ &= E[(\alpha X + \beta Y)\mathbb{1}_A] \end{aligned}$$
και άρα, έχουμε το ζητούμενο αφού οι τρεις απαιτήσεις του ορισμού ικανοποιούνται.

2. Έστω $A = \{\omega : E[X|\mathcal{G}](\omega) > E[Y|\mathcal{G}](\omega)\} \in \mathcal{G}$. Τότε, ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή $Z = (Y - X)\mathbb{1}_A$. Ισχύει ότι $Z \geqslant 0$ σ.π. και άρα $E[Z] \geqslant 0$. Παρατηρούμε ότι
$$\begin{aligned} E[Z] &= E[Y\mathbb{1}_A] - E[X\mathbb{1}_A] \\ &= E[E[Y|\mathcal{G}]\mathbb{1}_A] - E[E[X|\mathcal{G}]\mathbb{1}_A] \\ &= E[E[Y|\mathcal{G}]\mathbb{1}_A - E[X|\mathcal{G}]\mathbb{1}_A] \leqslant 0. \end{aligned}$$
Συνεπώς, $E[Z] = 0$ και άρα αφού $Z \geqslant 0$, $Z = 0$, σ.π. το οποίο όμως συνεπάγεται ότι $P(A) = 0$.

3. Προφανές από τον ορισμό της δεσμευμένης μέσης τιμής.

4. Για Y $\mathcal{G}$-μετρήσιμη συνάρτηση και $XY \in \mathcal{L}^1$, θέλουμε να δείξουμε ότι

$$E[XY\mathbb{1}_A] = E[YE[X|\mathcal{G}]\mathbb{1}_A], \quad \forall A \in \mathcal{G}. \tag{$\star$}$$

Θα αποδείξουμε μία φαινομενικά λιγότερο γενική πρόταση:

$$E[XZ] = E[ZE[X|\mathcal{G}]], \forall \mathcal{G} - \text{μετρήσιμη } Z \text{ με } ZX \in \mathcal{L}^1. \tag{$\star\star$}$$

Η ισότητα ($\star$) θα προκύψει παίρνοντας $Z = Y\mathbb{1}_A$. Για Z απλή συνάρτηση, η ($\star\star$) είναι άμεση συνέπεια του ορισμού της δεσμευμένης μέσης τιμής και της γραμμικότητας.

Τώρα, ας υποθέσουμε ότι τα Z και X είναι μη αρνητικά και ότι $ZX \in \mathcal{L}^1$. Σε αυτήν την περίπτωση, υπάρχει αύξουσα ακολουθία $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ μη αρνητικών απλών τυχαίων μεταβλητών με $Z_n \nearrow Z$. Τότε, $Z_nX \in \mathcal{L}^1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και από το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης έχουμε ότι

$$E[ZX] = \lim_n E[Z_nX] = \lim_n E[Z_nE[X|\mathcal{G}]] = E[ZE[X|\mathcal{G}]].$$

Ο επόμενος στόχος είναι να χαλαρώσουμε την απαίτηση $X \in \mathcal{L}^1_+$ στην αρχική υπόθεση $X \in \mathcal{L}^1$. Σε αυτήν την περίπτωση, αφού είναι $\pm X \leqslant |X|$, εφαρμόζοντας το 2. και χρησιμοποιώντας την γραμμικότητα έχουμε:

$$|E[X|\mathcal{G}]| \leqslant E[|X||\mathcal{G}] \text{ σ.π.}$$

και επίσης,

$$|Z_nE[X|\mathcal{G}]| \leqslant Z_n|E[X|\mathcal{G}]| \leqslant ZE[|X||\mathcal{G}].$$

Από την προηγούμενη περίπτωση, γνωρίζουμε ότι

$$E[ZE[|X||\mathcal{G}]] = E[Z|X|], \text{ έτσι ώστε το } ZE[|X||\mathcal{G}] \in \mathcal{L}^1.$$

Επομένως, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης για να συμπεράνουμε ότι:

$$E[ZE[X|\mathcal{G}]] = \lim_n E[Z_nE[X|\mathcal{G}]] = \lim_n E[Z_nX] = E[ZX].$$

Τέλος, η περίπτωση για γενικό Z προκύπτει από γραμμικότητα.

5. Είναι γνωστό ότι ο $\mathcal{L}^2$ είναι χώρος Hilbert (βλ. Folland, Κεφάλαιο 6). Επίσης, εφόσον $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, είναι $\mathcal{L}^2(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{L}^2(\mathcal{F})$. Επομένως, αρκεί να δείξουμε ότι η συνάρτηση $X - E[X|\mathcal{G}]$ είναι ορθογώνια σε όλες τις $\mathcal{G}$-μετρήσιμες συναρτήσεις $\xi \in \mathcal{L}^2$. Για $\xi \in \mathcal{L}^2$, έχουμε

$$\begin{aligned} E[(X - E[X|\mathcal{G}])\xi] &= E[\xi X] - E[\xi E[X|\mathcal{G}]] \\ &= E[\xi X] - E[E[\xi X|\mathcal{G}]] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\begin{aligned} E[(X-\xi)^2] &= \|X - \xi^* + \xi^* - \xi\|^2 \\ &= \|X - \xi^*\|^2 + \|\xi^* - \xi\|^2 + 2 < X - \xi^*, \xi^* - \xi > \\ &= \|X - \xi^*\|^2 + \|\xi^* - \xi\|^2 \\ &\geqslant \|X - \xi^*\|^2 \\ &= E[(X - \xi^*)^2]. \end{aligned}$$

Άρα, γράφουμε

$$X = E[X|\mathcal{G}] + (X - E[X|\mathcal{G}]) := \xi^* + Z,$$

όπου ξ^* η «προβολή του X στην $\mathcal{G}$» και $Z \perp \mathcal{L}^2(\mathcal{G})$ «το ορθογώνιο συμπλήρωμα».

6. Προκύπτει εύκολα από τον ορισμό.

$\square$

Βιβλιογραφία

[1] Γ. Κουμουλής - Σ. Νεγρεπόντης, Θεωρία Μέτρου, Εκδόσεις Συμμετρία, 1991

[2] Ι. Σαραντόπουλος, Μια Εισαγωγή στην Μιγαδική Ανάλυση με ασκήσεις και παραδείγματα, 2004

[3] Patrick Billingsley, Probability and Measure, John Wiley & Sons, Inc, 1986

[4] Marianna Chatzakou, Differentiation, Derivatives of Measures and Applications in Fractal Geometry and Harmonic Analysis

[5] Rick Durrett, Probability, Theory and Examples, Duxbury Press, 2004

[6] Gerald B. Folland, Real Analysis - Modern Techniques and their Applications, 2nd edition, John Wiley & Sons, Inc, 1999

[7] Garling D. J. H., A Course In Mathematical Analysis, Cambridge University Press

[8] Michael Rescorla, Some Eepistemological Ramifications of the Borel-kolmogorov Paradox

[9] H. L. Royden, Real Analysis, The Macmillan Company

[10] W. Rudin, Real and Complex Analysis, McGraw-Hill Book Company, 1986

[11] Anton R. Schep, And still one more proof of the Radon-Nikodym Theorem, The Mathematical Association of America [Monthly 110]

[12] Gordan Zitkovic, Lecture notes on Theory of Probability I