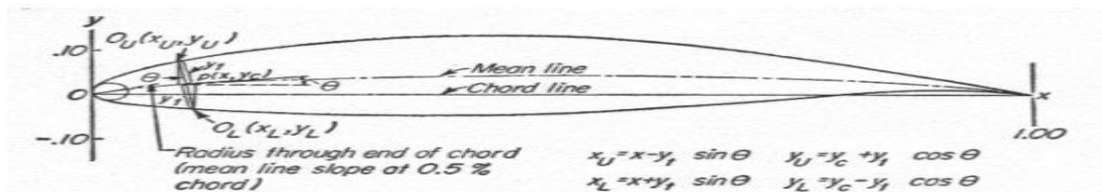




ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ
ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΝΑΥΠΗΓΩΝ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΔΙΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΟ – ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
«ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ»

Μαθηματικές Μέθοδοι Υπολογισμού Αεροδυναμικών Μεγεθών Λεπτών Αεροτομών



NACA airfoil geometrical construction

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Δημήτριος Α. Τάταρης

Διπλωματούχος Μηχανολόγος Μηχανικός Ε.Μ.Π. (2004)

Επιβλέπων: Δημήτριος Γ. Τουζόπουλος
Λέκτορας Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Οκτώβριος 2006

Αυτή η σελίδα είναι σκόπιμα λευκή.



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ

ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΣΧΟΛΗ ΝΑΥΠΗΓΩΝ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΔΙΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΟ – ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
«ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ»

**Μαθηματικές Μέθοδοι Υπολογισμού Αεροδυναμικών Μεγεθών
Λεπτών Αεροτομών**

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Δημήτριος Α. Τάταρης

Διπλωματούχος Μηχανολόγος Μηχανικός Ε.Μ.Π. (2004)

Επιβλέπων: Δημήτριος Γ. Τουζόπουλος
Λέκτορας Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 24^η Οκτωβρίου 2006.

.....
Δημήτριος Τουζόπουλος
Λέκτορας Ε.Μ.Π.

.....
Σωκράτης Τσαγγάρης
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....
Ιωάννης Σαραντόπουλος
Αν. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Οκτώβριος 2006

.....
Δημήτριος Α. Τάταρης

Κάτοχος Διεπιστημονικού – Διατμηματικού Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης
στην Επιστημονική Περιοχή: «Εφαρμοσμένες Μαθηματικές Επιστήμες»

Copyright © Δημήτριος Α. Τάταρης 2006.

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

*Αφιερώνω αυτή την εργασία στους γονείς μου Αντώνιο, Λαμπρινή
και στον αδερφό μου Ευστάθιο.*

Αυτή η σελίδα είναι σκόπιμα λευκή.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στο πλαίσιο της Θεωρητικής Αεροδυναμικής διερευνάται το εκάστοτε πρόβλημα και εντοπίζονται οι συνθήκες και οι προϋποθέσεις που πρέπει να ισχύουν στον πραγματικό κόσμο. Ακολουθεί η μαθηματοποίηση του προβλήματος, δηλαδή το πέρασμα από τον πραγματικό κόσμο στο συμβολικό κόσμο των μαθηματικών, και κατόπιν η επίλυση αυτού του μαθηματικού προβλήματος.

Η Θεωρία των Λεπτών Αεροτομών αποτελεί μία κατεύθυνση της Θεωρητικής Αεροδυναμικής. Η θεωρία αυτή, περιλαμβάνει τη μέθοδο Theodorsen και τη μέθοδο των ιδιόμορφων σημείων, για υποηχητικές ροές, οι οποίες δίνουν την κατανομή ταχύτητας και πίεσης επί μίας λεπτής αεροτομής, καθώς και τους συντελεστές άνωσης και ροπής. Σκοπός της παρούσας Διπλωματικής Εργασίας είναι η συγκέντρωση και η παρουσίαση των μεθόδων αυτών, που ήδη έχουν αναπτυχθεί στην εγχώρια και διεθνή βιβλιογραφία, την ανάδειξη αποδείξεων μαθηματικών σχέσεων όπως προκύπτουν από σύμμορφους μετασχηματισμούς ή από μαθηματικές εξισώσεις που περιγράφουν το εκάστοτε πρόβλημα, καθώς και την περαιτέρω ανάλυση αυτών, όπου κρίνεται απαραίτητο.

Στη μέθοδο Theodorsen, το περίγραμμα μιας αυθαίρετης αεροτομής μετατρέπεται μέσω διπλού σύμμορφου μετασχηματισμού σε κύκλο, οπότε το πρόβλημα ανάγεται σε μελέτη ροής γύρω από κύλινδρο. Μετά την επίλυση του συγκεκριμένου προβλήματος ακολουθεί η αντίστροφη διαδικασία. Η μέθοδος των ιδιόμορφων σημείων επικεντρώνεται στην απλοποίηση της συνθήκης μη εισχώρησης στο περίγραμμα της αεροτομής, καθώς και στη διάσπαση του προβλήματος μελέτης της αεροτομής σε τρία επιμέρους προβλήματα, τα οποία περιλαμβάνουν ισοδύναμες διανομές πηγών ή δινών. Λόγω της ύπαρξης γραμμικότητας, είναι δυνατή η άθροιση των αποτελεσμάτων αυτών των επιμέρους προβλημάτων, ώστε να δώσει τα ζητούμενα αεροδυναμικά μεγέθη της αεροτομής του αρχικού προβλήματος.

Η Διπλωματική ολοκληρώνεται με την ποιοτική σύγκριση των μεθόδων Theodorsen και ιδιόμορφων σημείων και καταγραφή των συμπερασμάτων.

Λέξεις κλειδιά:

πτέρυγα, ακμή φυγής, μέτωπο προσβολής, αεροτομή, γωνία πρόσπτωσης, ασυμπίεστο ρευστό, μη συνεκτικό ρευστό, ροϊκή συνάρτηση, δυναμικό ταχύτητας, μιγαδικό δυναμικό, κυκλοφορία, στροβιλότητα, υποηχητικές ροές, πεδίο ροής, διδιάστατο, μόνιμο, αστρόβιλο, πηγή, δίνη, αναλυτική συνάρτηση, σύμμορφη απεικόνιση, ανώμαλο σημείο, συνεκτικό χωρίο, μετασχηματισμός, δίπολο, γεωμετρικός τόπος, εστία, αεροδυναμικό κέντρο, ψευδόκυκλος, ταχύτητα διαταραχής, οριακή συνθήκη, υπέρθεση

Αυτή η σελίδα είναι σκόπιμα λευκή.

MATHEMATICAL METHODS FOR CALCULATING THIN-AIRFOIL AERODYNAMIC QUANTITIES

ABSTRACT

Within the context of Theoretical Aerodynamics, each problem is investigated and the conditions and prerequisites which have to be valid in the real world are located. A mathematization of the problem follows, namely passing from the real to the symbolic world of mathematics, and subsequently resolving this mathematical problem.

The Thin Airfoil Theory constitutes a course in Theoretical Aerodynamics. This theory includes the Theodorsen's method and the method of singularities, for subsonic flows, which give the velocity and pressure distribution on a thin airfoil as well as lift and moment coefficients. The aim of the present Dissertation is to gather and present these methods which have already been developed in domestic and international publication references, bringing out into notice proofs of mathematical relations resulting from conformal transformations or mathematical equations which designate each problem, as well as further analysis of them where needed.

In Theodorsen's method, the contour of an arbitrary airfoil is converted into a circle via a double conformal transformation, thus reducing the problem to a study of flow around a cylinder. A reverse procedure is followed after the solution of this particular problem. The method of singularities focuses on the simplification of the no-penetration boundary condition on airfoil contour as well as decomposition of the study problem into three simpler problems which include equivalent distributions of sources or vortices. Due to the existence of linearity, it is possible to sum the results of individual problems so as to receive the requested aerodynamic quantities of the initial problem.

The Dissertation is completed with a qualitative comparison between Theodorsen's and singularity methods, and registering the conclusions.

Key words:

wing, trailing edge, leading edge, airfoil, angle of attack, incompressible fluid, non-viscous fluid, stream function, velocity potential, complex potential, circulation, vorticity, subsonic flows, flow field, two-dimensional, steady, irrotational, source, vortex, analytic function, conformal mapping, singularity, connected domain, transformation, doublet, locus, focus, aerodynamic center, quasicircle, perturbation velocity, boundary condition, superposition

Αυτή η σελίδα είναι σκόπιμα λευκή.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Πρόλογος.....	13
---------------	----

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΡΕΥΣΤΩΝ – ΜΙΓΑΔΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

1.1	Εισαγωγή.....	15
1.2	Η αεροτομή.....	15
1.3	Στοιχεία Μηχανικής Ρευστών.....	17
1.4	Στοιχεία Μιγαδικής Ανάλυσης.....	21
1.5	Θεώρημα του Blasius.....	25
1.6	Βιβλιογραφία.....	27

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^ο

ΡΟΗ ΓΥΡΩ ΑΠΟ ΚΥΛΙΝΔΡΟ – ΑΕΡΟΤΟΜΕΣ JOUKOWSKI

2.1	Εισαγωγή.....	29
2.2	Πηγές εκροής και εισροής ίσης έντασης σε παράλληλη ροή – κύλινδρος σε παράλληλη ροή.....	29
2.3	Κυκλοφορία γύρω από κύλινδρο κυκλικής διατομής.....	32
2.4	Κύλινδρος κυκλικής διατομής σε παράλληλη ροή με κυκλοφορία.....	33
2.5	Αεροτομές Joukowski.....	37
2.6	Γεωμετρική κατασκευή του μετασχηματισμού Joukowski.....	39
2.7	Η μορφή της ακμής φυγής.....	41
2.8	Υπόθεση Joukowski.....	43
2.9	Θεώρημα των Kutta-Joukowski.....	44
2.10	Η άνωση σε αεροτομή βρισκόμενη σε ομοιόμορφο ρεύμα αέρα.....	45
2.11	Οι άξονες της αεροτομής.....	47
2.12	Η εστία της αεροτομής.....	48
2.13	Η μετακεντρική παραβολή της αεροτομής.....	49
2.14	Βιβλιογραφία.....	50

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^ο

Η ΜΕΘΟΔΟΣ THEODORSEN

3.1	Εισαγωγή.....	51
3.2	Περιγραφή της μεθόδου Theodorsen.....	51
3.3	Κατανομή ταχύτητας και πίεσης.....	59
3.4	Υπολογισμός συντελεστών άνωσης και ροπής.....	63
3.5	Προτεινόμενη προγραμματιστική μέθοδος επίλυσης.....	65
3.6	Βιβλιογραφία.....	67

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^ο

Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΙΔΙΟΜΟΡΦΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ

4.1	Εισαγωγή.....	69
4.2	Διατύπωση του προβλήματος σε όρους του πεδίου διαταραχής.....	69
4.3	Απλοποίηση της οριακής συνθήκης.....	71
4.4	Μεταφορά της οριακής συνθήκης από το περίγραμμα στη χορδή της αεροτομής.....	72
4.5	Μεθοδολογία στη Θεωρία των Λεπτών Αεροτομών	73
4.6	Σχέση της πίεσης στη Θεωρία των Λεπτών Αεροτομών.....	77
4.7	Συμμετρική αεροτομή σε μηδενική γωνία πρόσπτωσης: Λύση από διανομή πηγών.....	78
4.8	Αεροτομή μηδενικού πάχους με καμπυλότητα σε μηδενική γωνία πρόσπτωσης: Λύση από διανομή δινών.....	88
4.9	Επίπεδη πλάκα σε γωνία πρόσπτωσης: Λύση από διανομή δινών.....	97
4.10	Αεροδυναμικά χαρακτηριστικά μιας απείρως λεπτής αεροτομής.....	99
4.11	Αεροδυναμικά χαρακτηριστικά μιας λεπτής αεροτομής.....	101
4.12	Ποιοτική σύγκριση των μεθόδων Theodorsen και ιδιόμορφων σημείων...	103
4.13	Βιβλιογραφία.....	104

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία σκοπό έχει την παρουσίαση δύο μαθηματικών μεθόδων της Αεροδυναμικής, για υποηχητικές ροές, οι οποίες δίνουν την κατανομή ταχύτητας και πίεσης επί μίας λεπτής αεροτομής, καθώς και τους συντελεστές άνωσης και ροπής. Συγκεκριμένα, οι μέθοδοι αυτοί είναι η μέθοδος Theodorsen και η μέθοδος των ιδιόμορφων σημείων, οι οποίες διατυπώνονται με την κατά το δυνατό μεγαλύτερη μαθηματική αυστηρότητα και ακρίβεια, κάτι που χαρακτηρίζει ολόκληρη τη Διπλωματική Εργασία. Στη συνέχεια ακολουθεί ποιοτική σύγκριση των δύο μεθόδων και καταγραφή των συμπερασμάτων.

Τα δύο πρώτα κεφάλαια αφορούν προαπαιτούμενες γνώσεις για την κατανόηση των δύο μεθόδων. Συγκεκριμένα, το **1^ο κεφάλαιο** δίνει ορισμούς και στοιχεία θεωρίας της Μηχανικής των Ρευστών, καθώς και ορισμούς και βασικά θεωρήματα της Μιγαδικής Ανάλυσης. Το **2^ο κεφάλαιο** παρουσιάζει το πεδίο ροής γύρω από κύλινδρο, καθώς και το μετασχηματισμό και την αεροτομή Joukowski, τα οποία αποτελούν βασικές γνώσεις για την κατανόηση της μεθόδου Theodorsen του **3^{ου} κεφαλαίου**, αφού ο πρώτος μετασχηματισμός αυτής, είναι ο μετασχηματισμός Joukowski και η κατάληξη αυτής της μεθόδου είναι στη μελέτη της ροής γύρω από κύλινδρο κυκλικής διατομής.

Το **4^ο κεφάλαιο** είναι σχεδόν αυτόνομο σε σχέση με το 2^ο και το 3^ο και αφορά τη μέθοδο ιδιόμορφων σημείων. Συγκεκριμένα, η θεωρία που αναπτύσσεται επικεντρώνεται στην απλοποίηση της συνθήκης μη εισχώρησης στο περίγραμμα της αεροτομής, καθώς και στη διάσπαση του προβλήματος μελέτης της αεροτομής σε τρία επιμέρους προβλήματα. Λόγω της ύπαρξης γραμμικότητας είναι δυνατή η άθροιση των αποτελεσμάτων αυτών των επιμέρους προβλημάτων, ώστε να δώσουν τα ζητούμενα αεροδυναμικά μεγέθη της αεροτομής του αρχικού προβλήματος.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τον κύριο Δ. Μαθιουλάκη, Αναπληρωτή Καθηγητή του Ε.Μ.Π., για τις πολύτιμες υποδείξεις του κατά τη συγγραφή αυτής της εργασίας.

Αυτή η σελίδα είναι σκόπιμα λευκή.

**ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ
ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΡΕΥΣΤΩΝ – ΜΙΓΑΔΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ****1.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ**

Στο ευρύτερο πλαίσιο της Μηχανικής των Ρευστών μπορεί να θεωρηθεί ότι ανήκει και η Αεροδυναμική. Ως *Αεροδυναμική (Aerodynamics)* θεωρείται ο κλάδος της επιστήμης που ασχολείται με τη σχετική κίνηση στερεού μέσα στον ατμοσφαιρικό αέρα (ή μέσα σε άλλο αέριο), καθώς και με την αλληλεπίδραση του στερεού με αυτόν (ή με αυτό). Βασικά προβλήματα της Αεροδυναμικής είναι ο καθορισμός των δυνάμεων (άνωση - αντίσταση) και ροπών στο σώμα, καθώς και ο σχεδιασμός σωμάτων με βέλτιστη αεροδυναμική μορφή (π.χ. ελαχιστοποίηση αντίστασης, μεγιστοποίηση άνωσης).

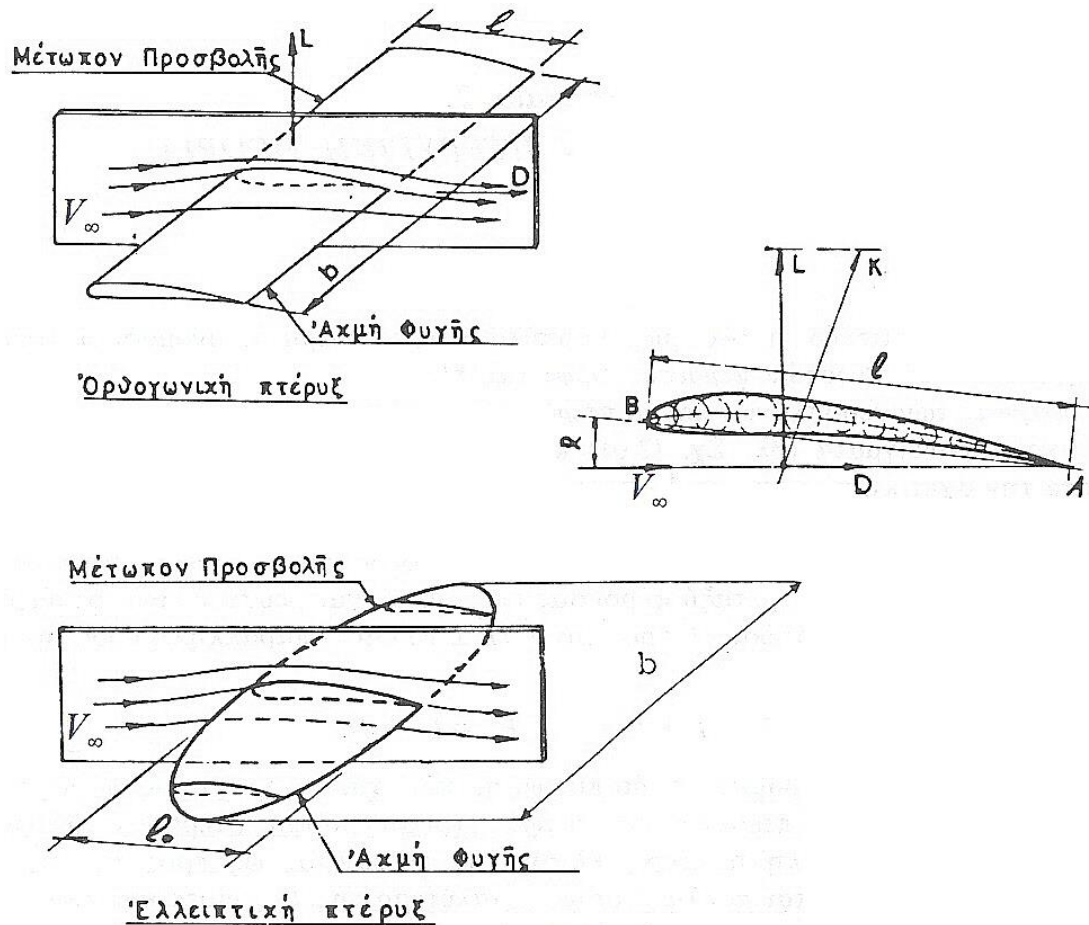
Τα λεπτά επίπεδα ή ελαφρώς καμπύλα στερεά σώματα, ονομάζονται *φέρουσες επιφάνειες (bearing surfaces)*. Οι πτέρυγες των αεροπλάνων και τα πτερύγια των αεροπορικών ελίκων αποτελούν παραδείγματα φερουσών επιφανειών. Θεμελιώδης πειραματική διαπίστωση, που χαρακτηρίζει τις φέρουσες επιφάνειες έναντι των τυχούσης μορφής στερεών σωμάτων, είναι ότι υπό κατάλληλη μικρή κλίση της επιφάνειας ως προς τη σχετική ταχύτητα \vec{V}_∞ , κλίση επιφάνειας - αέρα, η άνωση \vec{L} (lift, δύναμη κάθετη στη \vec{V}_∞) γίνεται πολλαπλασίως μεγαλύτερη από την αντίσταση \vec{D} (drag, δύναμη παράλληλη στη \vec{V}_∞). Ιδεατά για μη συνεκτικό ρευστό είναι $D=0$.

Για υποηχητικές ροές (subsonic flows) το θεμελιώδες χαρακτηριστικό των φερουσών επιφανειών (πτέρυγες) είναι ότι καταλήγουν όπισθεν σε οξεία ή μικρής καμπυλότητας ακμή, τη λεγόμενη *ακμή φυγής (trailing edge)*. Το μπροστινό στρογγυλεμένο τμήμα καλείται *μέτωπο προσβολής (leading edge)*. Ανάλογα με τη μορφή του περιγράμματος, η πτέρυγα (wing) λέγεται ορθογώνια, τραπεζοειδής, ελλειπτική κλπ. (βλέπε Σχήμα 1.1).

1.2 Η ΑΕΡΟΤΟΜΗ

Η τομή σε κάποια θέση με επίπεδο παράλληλο προς τη σχετική ταχύτητα \vec{V}_∞ και κάθετο προς τη φέρουσα επιφάνεια αποτελεί την *αεροδυναμική τομή* ή μονολεκτικώς *αεροτομή (airfoil)*, βλέπε Σχήμα 1.1), το δε πάνω σε αυτή ίχνος A της ακμής φυγής ονομάζεται σημείο φυγής, το οποίο καθορίζεται εύκολα αν η ακμή φυγής είναι οξεία. Στην παρούσα Διπλωματική Εργασία, αλλά και γενικότερα όταν

αναφερόμαστε στην ακμή φυγής θα εννοούμε τις περισσότερες φορές και τη στενή περιοχή γύρω από αυτή την ακμή. Στη συνέχεια θα ορίσουμε τα εξής τέσσερα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της αεροτομής:



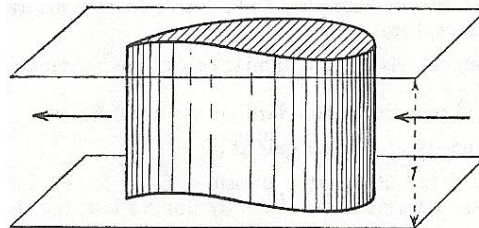
Σχήμα 1.1: Η γεωμετρική εικόνα της τριδιάστατης πτέρυγας και της αεροτομής [1.3].

1. *Χορδή* (c) καλείται το μακρύτερο ευθύγραμμο τμήμα που ορίζουν δύο σημεία που ανήκουν στην αεροτομή. Συνήθως ενώνει ένα σημείο της ακμής φυγής με ένα άλλο του μετώπου προσβολής. Στο Σχήμα 1.1 η γωνία κλίσης α , μεταξύ της V_∞ και της χορδής AB της αεροτομής, λέγεται *γωνία πρόσπτωσης* ή *γωνία προσβολής* (*angle of incidence* ή *angle of attack*).
2. *Μέση γραμμή καμπυλότητας* (*mean camper line*) ορίζεται ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που βρίσκονται στο ενδιάμεσο, μεταξύ των σημείων της εκάστοτε καθέτου στη χορδή και του περιγράμματος που αυτή τέμνει. Με πάρα πολύ καλή προσέγγιση μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων, των εγγεγραμμένων στο περίγραμμα της αεροτομής κύκλων (βλέπε Σχήμα 1.1).
3. *Βέλος καμπυλότητας* (f) στο εκάστοτε σημείο της μέσης γραμμής καμπυλότητας, καλείται η κάθετη στη χορδή απόσταση, της μέσης γραμμής καμπυλότητας στο συγκεκριμένο σημείο από το αντίστοιχο της χορδής.

4. Πάχος (s) στο εκάστοτε σημείο της χορδής καλείται η αντίστοιχη κάθετη στη χορδή απόσταση, μεταξύ των δύο σημείων του περιγράμματος της αεροτομής. Βέβαια τα δύο τελευταία χαρακτηριστικά αναφέρονται συνήθως στη βιβλιογραφία με μορφή συντελεστών καμπυλότητας και πάχους αντιστοίχως, ως ποσοστά του μήκους της χορδής.

Στην παρούσα Διπλωματική Εργασία η θεωρία σχετικά με τη ροή γύρω από την αεροτομή έχει τις ακόλουθες υποθέσεις:

1. Ο αέρας συμπεριφέρεται ως ασυμπίεστο (incompressible), μη συνεκτικό (non-viscous) ρευστό. Σημειώνουμε ότι το μη συνεκτικό ρευστό αντιστοιχεί σε ελαστικό ισότροπο στερεό που στα στοιχεία του δρουν μόνο ίσες ορθές τάσεις.
2. Η αεροτομή αποτελεί τη διατομή κυλινδρικής επιφάνειας. Αυτή η κυλινδρική επιφάνεια βρίσκεται μεταξύ δύο παράλληλων επιπέδων σε μοναδιαία απόσταση μεταξύ τους (βλέπε Σχήμα 1.2). Αυτή η θεώρηση εξασφαλίζει το διάνυσμα της ταχύτητας, σε κάθε σημείο του πεδίου ροής να είναι παράλληλο προς τα δύο επίπεδα, δηλαδή μας εξασφαλίζει την ύπαρξη διδιάστατης κίνησης στο επίπεδο αναφοράς (διδιάστατο πεδίο ροής).



Σχήμα 1.2: Διδιάστατο πεδίο ροής διερχόμενο περί την κυλινδρική επιφάνεια [1.4].

3. Το πεδίο ροής περί την αεροτομή θεωρείται μόνιμο και αστρόβιλο με κυκλοφορία ή χωρίς (βλέπε ενότητα 1.3).

1.3 ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΡΕΥΣΤΩΝ

Σε αυτή την ενότητα παραθέτουμε βασικές στοιχειώδεις έννοιες που περιγράφονται στα πλαίσια της Μηχανικής των Ρευστών.

Γραμμή ροής (stream line) είναι η ολοκληρωτική γραμμή του πεδίου ταχυτήτων κάποια χρονική στιγμή t . Από τον ορισμό φαίνεται, ότι οι γραμμές ροής του πεδίου έχουν σε κάθε σημείο τους εφαπτομενικό το διάνυσμα της ταχύτητας την εν λόγω χρονική στιγμή t .

Μόνιμο (steady) λέγεται ένα πεδίο ροής, όταν η μορφή του σε χωρική περιγραφή είναι ανεξάρτητη του χρόνου. Στην αντίθετη περίπτωση λέγεται *μη μόνιμο (unsteady)*. Στο μόνιμο πεδίο ροής η μορφή των γραμμών ροής παραμένει αναλλοίωτη στο χρόνο. Προφανώς, το αντίθετο συμβαίνει στο μη μόνιμο.

Αν δοθεί διδιάστατο πεδίο ροής ασυμπίεστου (συνεκτικού ή μη συνεκτικού) ρευστού υπάρχει πάντοτε σε αυτό η αντίστοιχη βαθμωτή ροϊκή συνάρτηση (*stream function*) $\Psi = \Psi(x, y, t)$, που χαρακτηρίζει τις γραμμές ροής σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων. Και αντίστροφα, κάθε βαθμωτή συνάρτηση $\Psi = \Psi(x, y, t)$ συνεχής και παραγωγίσιμη μέχρι και 2^{ης} τάξης ορίζει πάντοτε διδιάστατο πεδίο ροής ασυμπίεστου ρευστού. Σε πολικές συντεταγμένες η ροϊκή συνάρτηση γράφεται ως $\Psi = \Psi(r, \theta, t)$. Οι γραμμές $\Psi = \text{const.}$ είναι οι γραμμές ροής του πεδίου. Για μόνιμο πεδίο ροής είναι $\Psi = \Psi(x, y)$ ή $\Psi = \Psi(r, \theta)$, ενώ οι συνιστώσες της ταχύτητας u, v σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, παράλληλες στους άξονες των x και y αντιστοίχως, είναι

$$u(x, y) = -\frac{\partial \Psi}{\partial y} \text{ και } v(x, y) = \frac{\partial \Psi}{\partial x}. \quad (1.1)$$

Δυναμικό ταχύτητας (velocity potential) διδιάστατου πεδίου ροής μη συνεκτικού ρευστού είναι η βαθμωτή συνάρτηση $\Phi = \Phi(x, y, t)$, της οποίας η αντίθετη κλίση της (*gradient*) είναι η ταχύτητα του πεδίου. Σε πολικές συντεταγμένες το δυναμικό ταχύτητας γράφεται ως $\Phi = \Phi(r, \theta, t)$. Για μόνιμο πεδίο ροής είναι $\Phi = \Phi(x, y)$ ή $\Phi = \Phi(r, \theta)$, ενώ οι συνιστώσες της ταχύτητας u, v σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, παράλληλες στους άξονες των x και y αντιστοίχως, είναι

$$u(x, y) = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \text{ και } v(x, y) = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}. \quad (1.2)$$

Αν $z = x + iy$ και $\Phi = \Phi(x, y)$, $\Psi = \Psi(x, y)$ το δυναμικό και η ροϊκή συνάρτηση αντιστοίχως, διδιάστατου, αστροβίλου πεδίου ροής, ασυμπίεστου, μη συνεκτικού ρευστού, τότε ορίζουμε την αναλυτική συνάρτηση

$$W(z) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y), \quad (1.3)$$

η οποία ονομάζεται *μιγαδικό δυναμικό (complex potential)*. Παραγωγίζοντας τώρα τη συνάρτηση $W = W(z)$ προς κάποια κατεύθυνση, αδιάφορα ποια, καταλήγουμε στη σχέση

$$-\frac{dW}{dz} = u - iv. \quad (1.4)$$

Κυκλοφορία της ταχύτητας \vec{c} ή απλώς *κυκλοφορία (circulation)* στο διδιάστατο πεδίο ροής, ονομάζεται το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της \vec{c} πάνω σε μία τυχαία κλειστή καμπύλη S μέσα στο πεδίο, δηλαδή

$$\Gamma = \oint_S \vec{c} d\vec{s}. \quad (1.5)$$

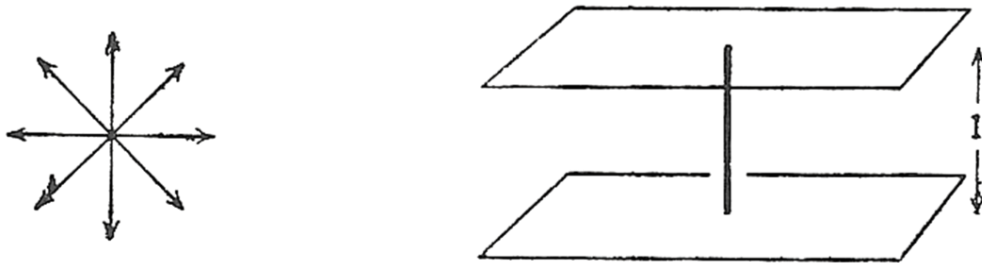
Το διάνυσμα περιστροφής $rot \vec{c}$ της $\vec{c} = (u, v)$ είναι $rot \vec{c} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \vec{k}$, όπου

\vec{k} μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο της ροής. Όπως γίνεται φανερό, το $rot \vec{c}$ είναι μηδέν σε ολόκληρο το πεδίο ορισμού του δυναμικού Φ , όταν η συνάρτηση αυτού είναι συνεχής και παραγωγίσιμη. Ορίζουμε ως *διάνυσμα περιστροφής (rotation vector)* ή *στροβιλότητα (vorticity)* $\vec{\omega}$ του πεδίου ροής το μισό του $rot \vec{c}$,

$$\bar{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot} \vec{c}. \quad (1.6)$$

Στη συνέχεια ονομάζουμε ένα πεδίο ροής *αστρόβιλο* (*irrotational*) ή *δυναμικό* (*potential*) όταν σε κάθε σημείο του ισχύει η συνθήκη $\text{rot} \vec{c} = 0$, δηλαδή $\omega = 0$. Τα στοιχεία του ρευστού σε αυτό το πεδίο εκτελούν μόνο μεταφορική κίνηση με ταχύτητα \vec{c} , δηλαδή κατά την κίνηση τους αυτή δεν περιστρέφονται περί τον εαυτό τους. Ακόμη, αποδεικνύεται ότι το πεδίο ροής συνεκτικού ρευστού δεν μπορεί να είναι αστρόβιλο. Αντίθετα, είναι πεδίο στροβιλό.

Εάν η διδιάστατη κίνηση ενός ρευστού αποτελείται από εξωτερική ακτινική ροή από ή προς ένα σημείο, συμμετρική προς όλες τις κατευθύνσεις στο επίπεδο αναφοράς, το σημείο αυτό καλείται *σημειακή πηγή* (*point source*) ή απλώς *πηγή* (*source*). Μία *διδιάστατη* (*two-dimensional*) ή *ευθύγραμμη πηγή* (*rectilinear source*) μπορεί να θεωρηθεί ένας άξονας (μοναδιαίου μήκους μεταξύ δύο επιπέδων) όπου από αυτόν εκρέει ή σε αυτόν εισρέει ρευστό (βλέπε Σχήμα 1.3).



Σχήμα 1.3: Πηγή σημειακή και ευθύγραμμη [1.5].

Αν $2\pi e$ είναι ο ρυθμός εκροής (>0) ή εισροής (<0) όγκου ρευστού στη μονάδα του χρόνου, το e καλείται *ένταση της πηγής* (*strength of the source*). Η πηγή είναι καθαρά θεωρητική έννοια η οποία χρησιμοποιείται στην περιγραφή του πεδίου ροής γύρω από στερεά όρια.

Έστω u_r είναι η ακτινική ταχύτητα του ρευστού (η ταχύτητα στην πηγή είναι άπειρη) σε απόσταση r από την πηγή, τότε η παροχή είναι

$$2\pi r u_r = 2\pi e. \quad (1.7)$$

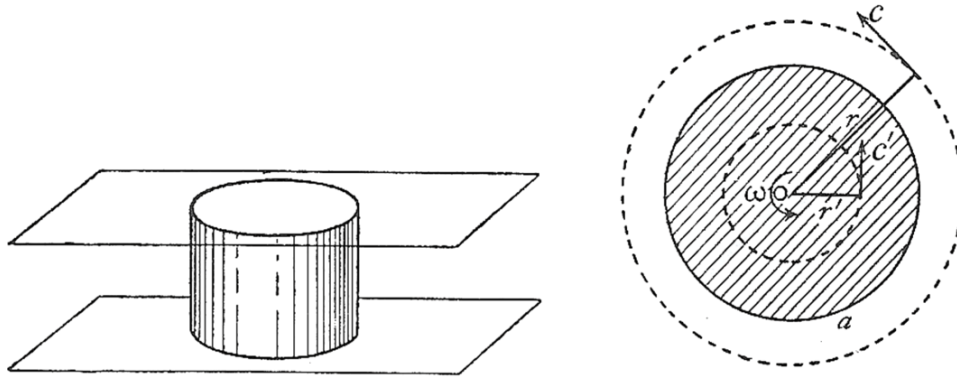
Έτσι, η ακτινική ταχύτητα είναι $u_r = \frac{e}{r}$, η οποία αποτελεί και την ολική ταχύτητα του ρευστού για απομονωμένη πηγή. Σύμφωνα με αυτή την τελευταία τιμή και με τη σημειακή πηγή τοποθετημένη στην αρχή των αξόνων, το μιγαδικό δυναμικό

δίνεται από τη σχέση $-\frac{dW}{dz} = u - iv = \frac{e}{r} (\cos \theta - i \sin \theta) = \frac{e}{z}$, ή με ολοκλήρωση

(βλέπε ενότητα 1.4) παραλείποντας τη σταθερά ολοκλήρωσης παίρνουμε

$$W(z) = -e \log z. \quad (1.8)$$

Κυκλική δίνη (*circular vortex*) ονομάζεται ένας κυλινδρικός σωλήνας δίνης του οποίου η τομή είναι κύκλος ακτίνας a , που περιβάλλεται από ρευστό και προκαλεί περί τον εαυτό του κυκλοφορία Γ (βλέπε Σχήμα 1.4).



Σχήμα 1.4: Κυκλική δίνη [1.5].

Υποθέτουμε ότι η στροβιλότητα στην περιοχή μέσα στον κύκλο έχει σταθερή τιμή ω , ενώ έξω από αυτόν είναι μηδέν. Έστω ομόκεντροι κύκλοι του κύκλου της δίνης με ακτίνες r' και r , όπου $r' < a < r$ και έστω c' και c οι αντίστοιχες σε αυτούς ταχύτητες. Λόγω συμμετρίας, η ταχύτητα σε όλα τα σημεία του κάθε κύκλου θα είναι εφαπτομενική, ίσου μέτρου, ενώ αποκλείεται η ύπαρξη ακτινικής ταχύτητας γιατί θα είχαμε ρεύμα ρευστού από ή προς το κέντρο του κύκλου O (κέντρο του συστήματος συντεταγμένων) καθιστώντας το, σημειακή πηγή. Εφαρμόζοντας το θεώρημα Stokes σε αυτούς τους κύκλους παίρνουμε:

$$\oint c' ds = 2\omega\pi r'^2, r' < a \text{ και } \Gamma = \oint cds = 2\omega\pi a^2, r > a$$

ή

$$2\pi r' c' = 2\omega\pi r'^2, r' < a \text{ και } 2\pi r c = 2\omega\pi a^2, r > a$$

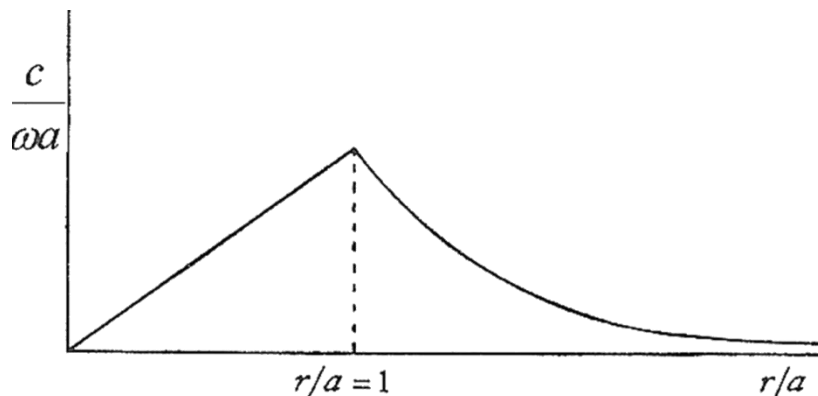
ή

$$c' = \omega r', r' < a \text{ και } c = \omega a^2 / r, r > a. \quad (1.9)$$

Όταν $r' = r = a$, τότε οι δύο ταχύτητες γίνονται ίσες με $c' = c = \omega a$, ενώ στο κέντρο η ταχύτητα γίνεται μηδέν. Οι σχέσεις (1.9) επίσης, γράφονται ως

$$\frac{c'}{\omega a} = \frac{r'}{a}, r' < a \text{ και } \frac{c}{\omega a} = \frac{a}{r}, r > a, \quad (1.10)$$

από όπου προκύπτει ότι η μέγιστη τιμή της ταχύτητας βρίσκεται στην περιφέρεια της δίνης, ενώ η ίδια η κυκλική δίνη συμπεριφέρεται ως στερεό σώμα (βλέπε Σχήμα 1.5).



Σχήμα 1.5: Διάγραμμα ταχύτητας κυκλικής δίνης [1.5].

Εκτός κυκλικής δίνης, το πεδίο είναι αστρόβιλο και η ταχύτητα είναι $ce^{i\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}$,
 ώστε το μιγαδικό δυναμικό να δίνεται από την σχέση $-\frac{dW}{dz} = \frac{a^2 \omega e^{-i\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}}{r} = -\frac{ia^2 \omega}{z}$,
 ή με ολοκλήρωση (βλέπε ενότητα 1.4) παραλείποντας τη σταθερά ολοκλήρωσης
 παίρνουμε $W(z) = i\omega a^2 \log z$. Η τιμή $\gamma = \omega a^2$ ονομάζεται *ένταση της δίνης (strength of the vortex)*. Έτσι, το μιγαδικό δυναμικό δίνεται τελικώς από τη σχέση

$$W(z) = i\gamma \log z. \quad (1.11)$$

Η κυκλική δίνη για $a \rightarrow 0$ ονομάζεται *σημειακή δίνη (point vortex)* ή απλώς *δίνη (vortex)*.

Σημείωση. Στην παρούσα Διπλωματική Εργασία οι σχέσεις (1.1), (1.2), (1.4), (1.8) και (1.11) αφορούν ροή ρευστού σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων από τα θετικά προς τα αρνητικά x του οριζόντιου άξονα. Για ροή από τα αρνητικά προς τα θετικά x του οριζόντιου άξονα ισχύουν οι ίδιες σχέσεις με αντίθετο πρόσημο στο δεξιό μέλος.

1.4 ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΜΙΓΑΔΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

Σε αυτή την ενότητα παραθέτουμε βασικές στοιχειώδεις έννοιες που περιγράφονται στα πλαίσια της Μιγαδικής Ανάλυσης.

Μια συνάρτηση f μιγαδικής μεταβλητής z καλείται *αναλυτική (analytic)* ή *ολόμορφη (holomorphic)* σε ένα ανοικτό σύνολο, αν έχει παράγωγο σε κάθε σημείο του συνόλου αυτού. Εάν πρέπει να μιλήσουμε για μία αναλυτική συνάρτηση σε σύνολο D που δεν είναι ανοικτό, τότε εννοούμε ότι η f είναι αναλυτική σε ένα ανοικτό σύνολο που περιέχει το D . Ειδικότερα, η f είναι αναλυτική στο σημείο z_0 , αν είναι αναλυτική σε μια γειτονιά γύρω από το z_0 .

Μια αναγκαία αλλά όχι ικανή συνθήκη για να είναι η f αναλυτική στο χωρίο D είναι η συνέχεια (continuity) της f στο D . Άλλη αναγκαία συνθήκη, αλλά όχι ικανή, είναι το να ισχύουν οι εξισώσεις Cauchy-Riemann, όπως άλλωστε φαίνεται στο παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα

Έστω μία συνάρτηση $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ορισμένη σε μία ε -γειτονιά του σημείου $z_0 = x_0 + iy_0$. Εάν οι πρώτες μερικές παράγωγοι των u και v υπάρχουν παντού στη γειτονιά αυτή και είναι συνεχείς στο (x_0, y_0) , ώστε να ισχύουν οι εξισώσεις Cauchy-Riemann στο (x_0, y_0) , δηλαδή $u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0)$ και $u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0)$, θα υπάρξει και η παράγωγος του $f(z_0)$.

Απόδειξη:

Ξεκινώντας την απόδειξη του θεωρήματος, γράφουμε $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$, όπου $0 < |\Delta z| < \varepsilon$ και

$$\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0).$$

Έτσι,

$$\Delta w = \Delta u + i\Delta v,$$

όπου:

$$\begin{aligned} \Delta u &= u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0) \\ \Delta v &= v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0). \end{aligned} \quad (1.12)$$

Τώρα, αφού οι πρώτες μερικές παράγωγοι των u και v είναι συνεχείς στο (x_0, y_0) , έχουμε:

$$\begin{aligned} \Delta u &= u_x(x_0, y_0)\Delta x + u_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_1\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \\ \Delta v &= v_x(x_0, y_0)\Delta x + v_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_2\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}, \end{aligned} \quad (1.13)$$

όπου τα ε_1 και ε_2 τείνουν στο 0 όταν το $(\Delta x, \Delta y)$ τείνει στο $(0,0)$. Επομένως,

$$\Delta w = u_x(x_0, y_0)\Delta x + u_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_1\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} + i[v_x(x_0, y_0)\Delta x + v_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_2\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}]. \quad (1.14)$$

Η ύπαρξη εκφράσεων τύπου (1.13) για συναρτήσεις δύο μεταβλητών που έχουν συνεχείς πρώτες μερικές παραγώγους, εξασφαλίζεται από τη θεωρία των διαφορικών στο Διανυσματικό Λογισμό συναρτήσεων πραγματικών μεταβλητών.

Με την υπόθεση ότι ισχύουν οι εξισώσεις Cauchy-Riemann στο σημείο (x_0, y_0) , μπορούμε να αντικαταστήσουμε τις $u_y(x_0, y_0)$ και $v_y(x_0, y_0)$ στη σχέση (1.14) με τις $-v_x(x_0, y_0)$ και $u_x(x_0, y_0)$ αντιστοίχως. Στη συνέχεια, διαιρώντας και τα δύο μέλη με Δz παίρνουμε

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) + (\varepsilon_1 + i\varepsilon_2) \frac{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}{\Delta z}. \quad (1.15)$$

Αλλά, $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = |\Delta z|$ και επομένως $\left| \frac{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}{\Delta z} \right| = 1$.

Επίσης, όταν $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)$, τότε και $\varepsilon_1 + i\varepsilon_2 \rightarrow 0$, άρα ο τελευταίος όρος της (1.15) τείνει στο μηδέν καθώς το $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ τείνει στο μηδέν. Αυτό όμως σημαίνει ότι το όριο του αριστερού μέλους της (1.15) υπάρχει και είναι ίσο με

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0). \quad (1.16)$$

□

Εφόσον οι παράγωγοι του αθροίσματος και του γινομένου δύο συναρτήσεων υπάρχουν εκεί όπου οι ίδιες οι συναρτήσεις έχουν και οι δύο παραγώγους, καταλήγουμε στα ακόλουθα συμπεράσματα. Αν δύο συναρτήσεις είναι αναλυτικές σε χωρίο D , το άθροισμα και το γινόμενό τους είναι αναλυτικές συναρτήσεις στο D . Ομοίως, το πηλίκο των είναι αναλυτική συνάρτηση στο D , αρκεί ο παρανομαστής να μη μηδενίζεται σε κανένα σημείο του D . Ειδικότερα, το πηλίκο δύο πολυωνύμων

$P(z)/Q(z)$ είναι αναλυτική συνάρτηση σε οποιοδήποτε χωρίο στο οποίο $Q(z) \neq 0$.
Ακόμη, από τον κανόνα της αλυσίδας για σύνθετες συναρτήσεις, συμπεραίνουμε ότι η σύνθεση δύο αναλυτικών συναρτήσεων είναι αναλυτική.

Παραδείγματα αναλυτικών συναρτήσεων αποτελούν οι πολυωνυμικές, οι ρητές, οι εκθετικές, οι τριγωνομετρικές, οι υπερβατικές και οι λογαριθμικές. Για όλα τα μη μηδενικά σημεία $z = re^{i\theta}$ ($-\pi < \theta \leq \pi$) του μιγαδικού επιπέδου z , ορίζουμε τη λογαριθμική συνάρτηση (*logarithmic function*) ως εξής:

$$\log z = \ln r + i(\theta + 2n\pi) \quad (n \text{ ακέραιος})$$

ή ισοδύναμα γράφουμε

$$\log z = \ln |z| + i \arg z \quad (z \neq 0). \quad (1.17)$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $\log z$ είναι πλειότιμη (multiple-valued) συνάρτηση. Η πρωτεύουσα ή κύρια τιμή του $\log z$, για $\text{Arg} z = \theta$ είναι η

$$\text{Log} z = \ln |z| + i \text{Arg} z \quad (z \neq 0). \quad (1.18)$$

Παρατηρούμε ότι η $\text{Log} z$ είναι μονότιμη (single-valued) συνάρτηση. Η παράγωγος του $\log z$ είναι

$$\frac{d}{dz} (\log z) = \frac{1}{z} \quad (|z| > 0, \alpha < \arg z < \alpha + 2\pi, \alpha \text{ τυχαίος πραγματικός αριθμός}). \quad (1.19)$$

Ειδικότερα, ισχύει η εξής σχέση για την κύρια τιμή του λογαρίθμου:

$$\frac{d}{dz} (\text{Log} z) = \frac{1}{z} \quad (|z| > 0, -\pi < \text{Arg} z < \pi). \quad (1.20)$$

Έστω G και \mathcal{L} δύο φραγμένα χωρία, και έστω $w = f(z)$ μία ένα προς ένα αναλυτική συνάρτηση που απεικονίζει το G στο \mathcal{L} . Η $w = f(z)$, τότε καλείται *σύμμορφη απεικόνιση* του G (σύμμορφος μετασχηματισμός σε κάθε σημείο του G) στο \mathcal{L} , και λέγεται ότι απεικονίζει σύμμορφα το G στο \mathcal{L} . Ακόμη, το \mathcal{L} λέγεται *σύμμορφη εικόνα* (*conformal image*) του G . Βασική ιδιότητα της σύμμορφης απεικόνισης (*conformal mapping*) είναι η διατήρηση της γωνίας που σχηματίζουν δύο τεμνόμενες καμπύλες στο G με τις αντίστοιχές τους στο \mathcal{L} . Προφανώς, στη σύμμορφη απεικόνιση η κυκλοφορία και στα δύο χωρία διατηρείται.

Όταν το z_0 είναι μεμονωμένο ανώμαλο σημείο (ιδιόμορφο σημείο) μιας συνάρτησης f , υπάρχει θετικός αριθμός R τέτοιος, ώστε η f να είναι αναλυτική στο δακτυλιοειδές χωρίο $0 < |z - z_0| < R$. Συνεπώς, για την $f(z)$ έχουμε το εξής ανάπτυγμα σε σειρά Laurent στο εν λόγω χωρίο:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}, \quad (1.21)$$

όπου: $a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \quad (n \geq 0)$, $b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{-n+1}} \quad (n \geq 1)$ και C είναι

οποιοσδήποτε ορθά προσανατολισμένος απλός και κλειστός βρόχος, γύρω από το z_0 , που περιέχεται στον πιο πάνω δακτύλιο. Για $n = 1$ μάλιστα, έχουμε ότι

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i b_1. \quad (1.22)$$

Ο μιγαδικός αριθμός b_1 , που είναι ο συντελεστής του $1/(z - z_0)$ στο ανάπτυγμα (1.21), καλείται το ολοκληρωτικό υπόλοιπο της f στο (μεμονωμένο ανώμαλο σημείο) z_0 . Συνήθως, για την υποδήλωσή του χρησιμοποιείται ο συμβολισμός $b_1 = \text{Res}_{z=z_0} f(z)$.

Τα παραπάνω γενικεύονται για συνάρτηση f με πεπερασμένο πλήθος μεμονωμένων ανώμαλων σημείων (singular points ή singularities) στο εσωτερικό ενός απλού, κλειστού βρόχου C με το παρακάτω Θεώρημα των Ολοκληρωτικών Υπολοίπων κατά Cauchy (Cauchy's Residue Theorem).

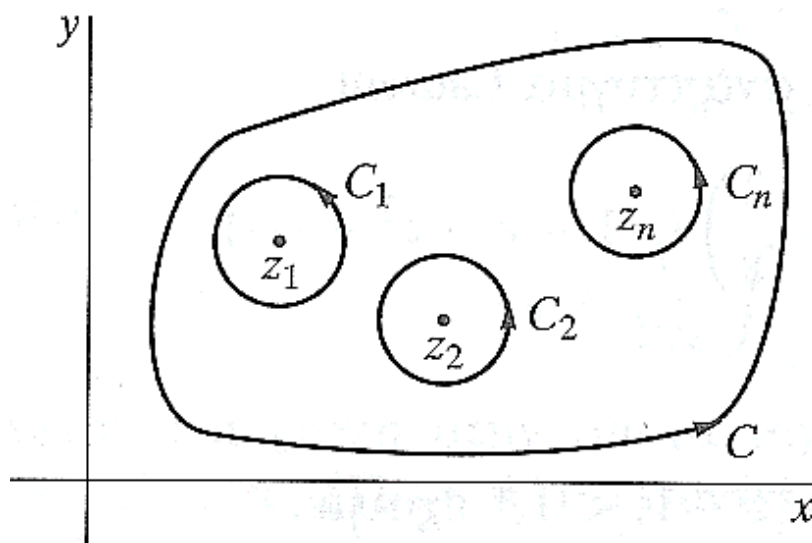
Θεώρημα

Έστω C ένας θετικά προσανατολισμένος απλός και κλειστός βρόχος μέσα και πάνω στον οποίο μια συνάρτηση f είναι αναλυτική εκτός από το πεπερασμένο πλήθος ανώμαλων σημείων z_k ($1 \leq k \leq n$) στο εσωτερικό του C , τότε ισχύει η σχέση

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}_{z=z_k} f(z). \quad (1.23)$$

Απόδειξη:

Για την απόδειξη του θεωρήματος, ορίζουμε με κέντρα τα σημεία z_k ($1 \leq k \leq n$) θετικά προσανατολισμένους κύκλους C_k , που να περιέχονται εξ ολοκλήρου στο εσωτερικό του C και ταυτόχρονα να μην τέμνονται μεταξύ τους ανά δύο (βλέπε Σχήμα 1.6). Ο C μαζί με τους C_k σχηματίζουν το σύνορο μιας κλειστής περιοχής στην οποία η f είναι αναλυτική, και της οποίας το εσωτερικό είναι ένα πολλαπλά συνεκτικό χωρίο (multiply connected domain).



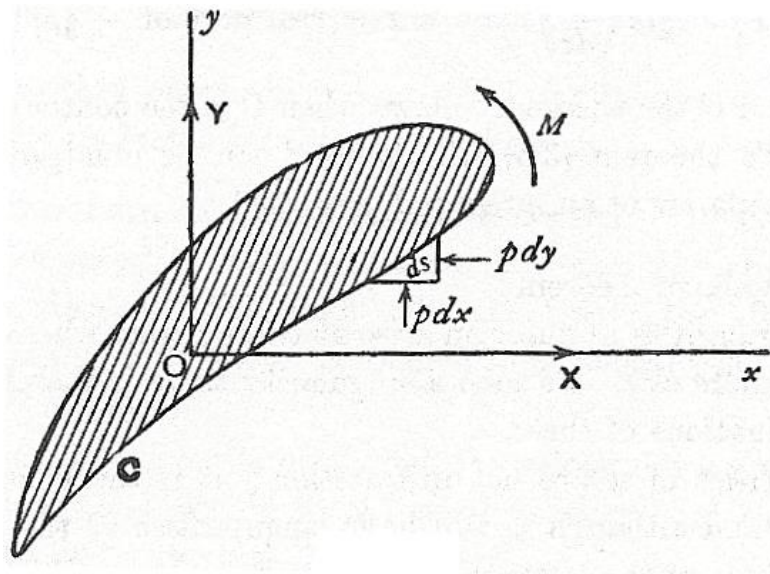
Σχήμα 1.6: Πολλαπλά συνεκτικό χωρίο [1.6].

Σύμφωνα λοιπόν με την επέκταση του Θεωρήματος των Cauchy-Goursat για αυτού του τύπου τις περιοχές, έχουμε ότι $\oint_C f(z)dz - \sum_{k=1}^n \oint_{C_k} f(z)dz = 0$.

Αλλά ισχύει επίσης ότι $\oint_{C_k} f(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z)$ ($1 \leq k \leq n$) και το θεώρημα αποδείχθη. □

1.5 ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ BLASIUS

Θεωρήστε έναν κύλινδρο τυχαίας διατομής τοποθετημένο σε παράλληλη, μόνιμη, αστρόβιλη ροή. Έστω, η αρχή των αξόνων O είναι το σημείο εφαρμογής της (συνισταμένης) αεροδυναμικής δύναμης ανά μονάδα μήκους του κυλίνδρου (P_x, P_y) και M , η ροπή στρέψης γύρω από το O (βλέπε Σχήμα 1.7). Αν W είναι το μιγαδικό δυναμικό, το Θεώρημα του Blasius είναι το ακόλουθο.



Σχήμα 1.7: Διατομή κυλίνδρου [1.4].

Θεώρημα

Σύμφωνα με τα παραπάνω, η συνισταμένη αεροδυναμική δύναμη ανά μονάδα πλάτους (P_x, P_y) και η ροπή στρέψης M δίνονται από τις εξισώσεις:

$$P_x - iP_y = \frac{1}{2} i \rho \oint_C \left(\frac{dW}{dz} \right)^2 dz, \quad M = \text{πραγματικό μέρος του} - \frac{1}{2} \oint_C z \left(\frac{dW}{dz} \right)^2 dz, \quad (1.24)$$

όπου C το περίγραμμα της διατομής ή ένας οποιοσδήποτε θετικά προσανατολισμένος απλός και κλειστός βρόχος γύρω από τη διατομή τέτοιος, ώστε να μη διέρχεται από τα ανώμαλα σημεία (ιδιόμορφα σημεία) της ολοκληρωτέας ποσότητας.

Απόδειξη:

Οι ωθήσεις πίεσης σε ένα στοιχείο ds του περιγράμματος της διατομής μεταφέρονται στο O ως μία δύναμη (dP_x, dP_y) και μία ροπή dM , ώστε

$$dP_x = -pdy, \quad dP_y = pdx, \quad dM = p(xdx + ydy).$$

Τώρα, η εξίσωση Bernoulli δίνει $p = p_0 - \frac{1}{2}\rho c^2$, όπου p_0 είναι η πίεση στο άπειρο και λόγω του ότι είναι σταθερή, το συνολικό αποτέλεσμα της είναι μηδενικό στον κύλινδρο. Έτσι, μπορούμε να αγνοήσουμε την p_0 και να γράψουμε:

$$d(P_x - iP_y) = \frac{1}{2}\rho c^2(dy + idx), \quad dM = -\frac{1}{2}\rho c^2(xdx + ydy).$$

Αφού ισχύει $dy + idx = id\bar{z}$, $x dx + y dy = \text{πραγματικόμέροστου} d\bar{z}$, και $c^2 = \frac{dW}{dz} \cdot \frac{d\bar{W}}{d\bar{z}}$ παίρνουμε:

$$d(P_x - iP_y) = \frac{1}{2}\rho i \frac{dW}{dz} d\bar{W}, \quad dM = \text{πραγματικόμέροστου} - \frac{1}{2}\rho z \frac{dW}{dz} d\bar{W}.$$

Επειδή το περίγραμμα της διατομής της αεροτομής είναι μία γραμμή ροής, η ροϊκή συνάρτηση Ψ είναι σταθερή και για αυτό $d\Psi = 0$. Άρα,

$$d\bar{W} = d(\Phi - i\Psi) = d(\Phi + i\Psi) = dW = \frac{dW}{dz} d\bar{W}.$$

Επομένως,

$$d(P_x - iP_y) = \frac{1}{2}\rho i \left(\frac{dW}{dz}\right)^2 dz, \quad dM = \text{πραγματικόμέροστου} - \frac{1}{2}\rho z \left(\frac{dW}{dz}\right)^2 dz.$$

Ολοκληρώνοντας και τις δύο ισότητες κατά μήκος της C προκύπτουν οι εξισώσεις (1.24). □

Παρατηρήσεις:

1. Τα ανώμαλα ή ιδιόμορφα σημεία είναι τα σημεία όπου η dW/dz γίνεται άπειρη και μόνο αυτά. Σε αυτά τα σημεία, η ανωμαλία οφείλεται στην ύπαρξη σημειακής πηγής ή σημειακής δίνης ή συνδυασμού και των δύο.
2. Ακόμη και εάν η W έχει τα ίδια ανώμαλα σημεία, διαφορετικής ίσως πολλαπλότητας από την dW/dz , η μορφή της τελευταίας καθορίζει την αεροδυναμική δύναμη και ροπή.
3. Είναι συχνά συμφέρων να επιλέξουμε ως βρόχο ολοκλήρωσης C , έναν κύκλο μεγάλης ακτίνας που να περιλαμβάνει το O . Αυτό μπορεί πάντα να γίνει όταν δεν υπάρχουν σημειακές πηγές ή σημειακές δίνες.
4. Ο υπολογισμός της αεροδυναμικής δύναμης και ροπής καταλήγει στη χρήση του Θεωρήματος των Ολοκληρωτικών Υπολοίπων.

1.6 ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1.1] Ν. Α. Αθανασιάδης, *Μηχανική Ρευστών*, Αθήνα: Εκδόσεις Συμεών, 1989.
- [1.2] Σ. Γ. Τσαγγάρης, *Μηχανική των Ρευστών*, Αθήνα: Εκδόσεις Συμεών, 1995.
- [1.3] Ν. Α. Αθανασιάδης, *Αεροδυναμική-Αεριοδυναμική*, Αθήνα: Εκδόσεις Συμεών, 1992.
- [1.4] L. M. Milne-Thomson, *Theoretical Aerodynamics*, New York: Dover Publications, Inc., 1966.
- [1.5] L. M. Milne-Thomson, *Theoretical Hydrodynamics*, London: Macmillan & Co LTD, 1962.
- [1.6] R. V. Churchill, J. W. Brown, *Μιγαδικές συναρτήσεις και εφαρμογές*, Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 1998.
- [1.7] R. A. Silverman, *Introductory Complex Analysis*, New York: Dover Publications, Inc., 1972.

Αυτή η σελίδα είναι σκόπιμα λευκή.

ΡΟΗ ΓΥΡΩ ΑΠΟ ΚΥΛΙΝΔΡΟ – ΑΕΡΟΤΟΜΕΣ JOUKOWSKI

2.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Σκοπός αυτού του κεφαλαίου είναι η περιγραφή του πεδίου ροής γύρω από κύλινδρο, αλλά και γύρω από αεροτομή, η οποία προκύπτει από κύλινδρο κυκλικής διατομής με κατάλληλο μετασχηματισμό (transformation). Ακόμη, παρουσιάζεται ο υπολογισμός διαφορών αεροδυναμικών μεγεθών που αφορούν τον κύλινδρο και πολύ περισσότερο την αεροτομή. Σε όλες τις περιπτώσεις το διδιάστατο πεδίο ροής θεωρείται αστρόβιλο και μόνιμο, ενώ το ρευστό είναι ασυμπίεστο και μη συνεκτικό. Τέτοιο ρευστό μπορεί να θεωρηθεί ο αέρας χαμηλών ταχυτήτων (υποηχητικές ροές).

2.2 ΠΗΓΕΣ ΕΚΡΟΗΣ ΚΑΙ ΕΙΣΡΟΗΣ ΙΣΗΣ ΕΝΤΑΣΗΣ ΣΕ ΠΑΡΑΛΛΗΛΗ ΡΟΗ – ΚΥΛΙΝΔΡΟΣ ΣΕ ΠΑΡΑΛΛΗΛΗ ΡΟΗ

Έστω πηγή εκροής έντασης e στο σημείο $A(c,0)$, πηγή εισροής (καταβόθρα, sink) έντασης e στο σημείο $B(-c,0)$ και ομοιόμορφο ρεύμα αέρα ταχύτητας V_∞ παράλληλο με τον πραγματικό άξονα. Ενδιαφέρουσα περίπτωση εμφανίζεται όταν το ρεύμα έχει κατεύθυνση από την πηγή εκροής στην πηγή εισροής, όπου σύμφωνα με το σύστημα αναφοράς που επιλέξαμε έχει κατεύθυνση από τα θετικά προς τα αρνητικά x .

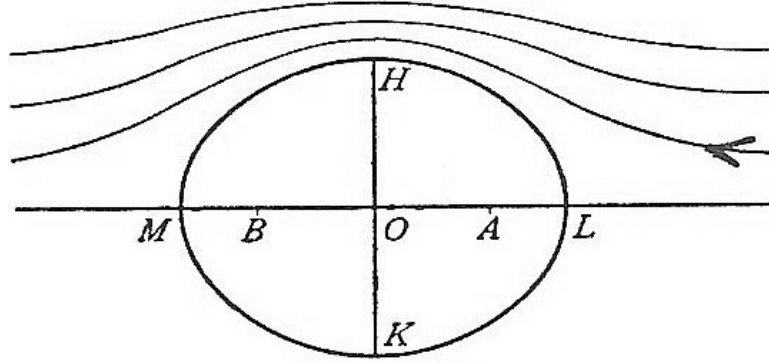
Το μιγαδικό δυναμικό του πεδίου ροής, το οποίο προκύπτει από την επαλληλία των πεδίων ροής της παράλληλης ροής και των πηγών εκροής και εισροής, γράφεται ως

$$W(z) = V_\infty z - e \log(z - c) + e \log(z + c). \quad (2.1)$$

Τα σημεία ανακοπής δίνονται από την εξίσωση $-\frac{dW}{dz} = 0$ ή $V_\infty - \frac{e}{z - c} + \frac{e}{z + c} = 0$, τα οποία έχουν συντεταγμένες

$$z = \pm \sqrt{c^2 + \frac{2ce}{V_\infty}}. \quad (2.2)$$

Έστω $\frac{2ce}{V_\infty} = a^2 - c^2$ (2.3), τότε $z = \pm a$, οπότε τα σημεία ανακοπής είναι τα σημεία L, M (βλέπε Σχήμα 2.1), όπου $(OL) = (OM) = a$.



Σχήμα 2.1: Πεδίο πηγών εκροής και εισροής σε παράλληλη ροή [2.3].

Η ροϊκή συνάρτηση είναι

$$\Psi(x, y) = V_{\infty}y - e \tan^{-1} \frac{y}{x-c} + e \tan^{-1} \frac{y}{x+c} = V_{\infty}y - e \tan^{-1} \frac{2cy}{x^2 + y^2 - c^2}. \quad (2.4)$$

Η γραμμή ροής $\Psi = 0$ περιλαμβάνει τον πραγματικό άξονα $y = 0$, και όλα τα σημεία που ικανοποιούν την εξίσωση

$$\frac{2cy}{x^2 + y^2 - c^2} = \tan \frac{V_{\infty}y}{e}. \quad (2.5)$$

Σύμφωνα με την ισότητα (2.3), η εξίσωση (2.5) γράφεται

$$x^2 + y^2 - c^2 = 2cy \cot \frac{V_{\infty}y}{e} = 2cy \cot \frac{2cy}{a^2 - c^2}. \quad (2.6)$$

Αυτή η εξίσωση αντιπροσωπεύει μία καμπύλη η οποία είναι συμμετρική και ως προς τους δύο άξονες, δηλαδή για κάθε σημείο (x, y) που ανήκει σε αυτή ανήκουν και τα σημεία $(\pm x, \pm y)$. Η τιμή του y στην καμπύλη δεν μπορεί να γίνει άπειρη, γιατί καθώς απομακρυνόμαστε από το AB η ροή γίνεται παράλληλη στον άξονα x . Έτσι, η καμπύλη αυτή είναι κλειστή, σχηματίζοντας ένα οβάλ σχήμα (βλέπε Σχήμα 2.1).

Έστω $(OH) = b$, τότε $y = b$ για $x = 0$, οπότε η εξίσωση (2.6) γράφεται

$$b^2 - c^2 = 2cb \cot \frac{2cb}{a^2 - c^2}, \quad (2.7)$$

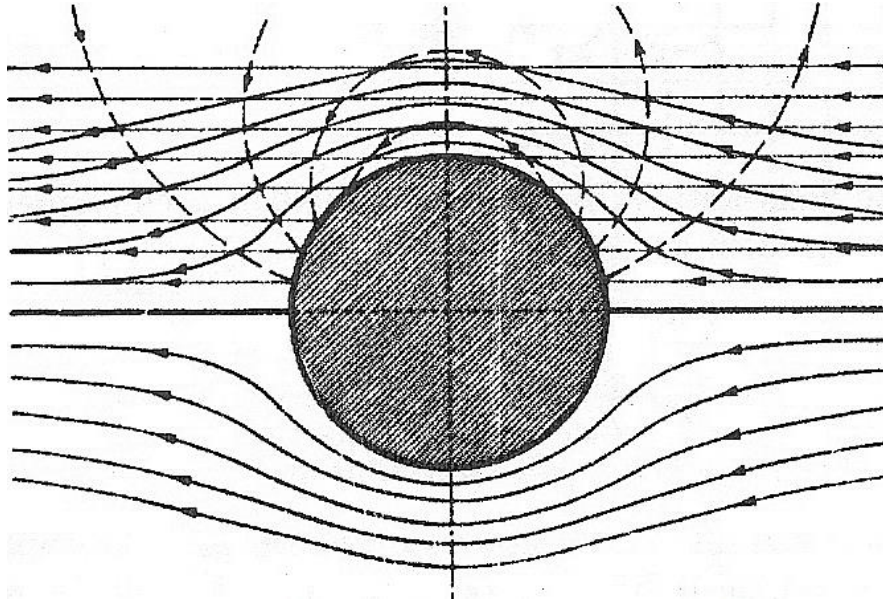
από την οποία βρίσκουμε και γραφικά την τιμή της b .

Αν θεωρήσουμε την καμπύλη της εξίσωσης (2.6) σαν ενιαίο σύνορο και στερεοποιήσουμε το εσωτερικό της, παίρνουμε το ισοδύναμο πρόβλημα: παράλληλη ροή διερχόμενη από κύλινδρο, του οποίου το περίγραμμα της διατομής του είναι αυτή η καμπύλη.

Όταν το c είναι μικρό, προσεγγιστικά έχουμε

$$\cot \frac{2cb}{a^2 - c^2} \cong \frac{a^2 - c^2}{2cb}, \quad (2.8)$$

από την οποία προκύπτει $b^2 = a^2$. Έτσι, σύμφωνα με αυτή την παρατήρηση καθώς $c \rightarrow 0$, $b \rightarrow a$, το οβάλ σχήμα της καμπύλης της εξίσωσης (2.6) γίνεται κύκλος. Σε αυτή την περίπτωση οι πηγές εκροής και εισροής μορφώνουν ένα δίπολο (*doublet*), που ισοδυναμεί με κύλινδρο κυκλικής διατομής ακτίνας a (βλέπε Σχήμα 2.2).



Σχήμα 2.2: Πεδίο παράλληλης ροής γύρω από κύλινδρο ως επαλληλία πεδίου παράλληλης ροής και δίπολου [2.5].

Η ένταση του δίπολου είναι $2ce = \mu$, καθώς $c \rightarrow 0$, $e \rightarrow \infty$, ενώ η ροϊκή συνάρτηση λόγω των (2.3), (2.4) γράφεται

$$\Psi = V_{\infty}y - \frac{a^2 V_{\infty} y}{x^2 + y^2}. \quad (2.9)$$

Το μιγαδικό δυναμικό για παράλληλη ροή διερχόμενη από κύλινδρο κυκλικής διατομής δίνεται από τη σχέση

$$-\frac{dW}{dz} = u - iv, \quad (2.10)$$

όπου:

$$u = -\frac{\partial \Psi}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y} \left(V_{\infty}y - \frac{a^2 V_{\infty} y}{x^2 + y^2} \right) = -\frac{\partial}{\partial y} (V_{\infty}y) - \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{a^2 V_{\infty} y}{x^2 + y^2} \right) = -V_{\infty} + a^2 V_{\infty} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$v = \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(V_{\infty}y - \frac{a^2 V_{\infty} y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{2a^2 V_{\infty} xy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Έτσι, η σχέση (2.10) γράφεται

$$-\frac{dW}{dz} = -V_{\infty} + a^2 V_{\infty} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} - i \frac{2a^2 V_{\infty} xy}{(x^2 + y^2)^2} = -V_{\infty} + a^2 V_{\infty} \frac{x^2 - y^2 - i2xy}{(x^2 + y^2)^2} = -V_{\infty} + a^2 V_{\infty} \frac{(x - iy)^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

ή

$$\frac{dW}{dz} = V_{\infty} - V_{\infty} a^2 \frac{\bar{z}^{-2}}{(z \cdot \bar{z})^2} = V_{\infty} - \frac{V_{\infty} a^2}{z^2},$$

όπου $z = x + iy$. Ολοκληρώνοντας την τελευταία σχέση και παραλείποντας τη σταθερά ολοκλήρωσης παίρνουμε

$$W = V_{\infty} z + \frac{V_{\infty} a^2}{z}. \quad (2.11)$$

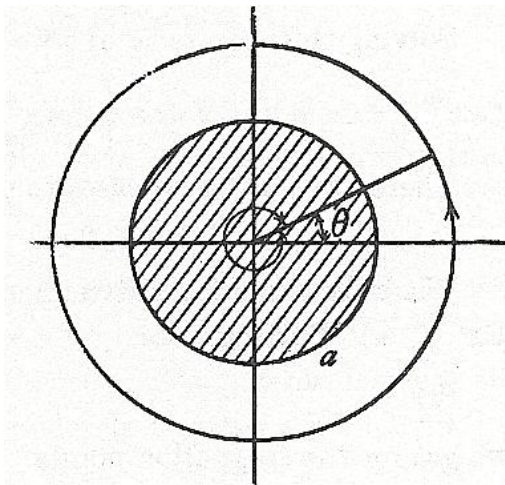
Ο πρώτος όρος της σχέσης (2.11) αντιπροσωπεύει την παράλληλη ροή, ενώ ο δεύτερος τη διαταραχή εξαιτίας της παρουσίας του κυλίνδρου. Έτσι, ο κύλινδρος ακτίνας a σε παράλληλη ροή V_∞ συμπεριφέρεται όπως ένα δίπολο έντασης $V_\infty a^2$ στον άξονα του κυλίνδρου (εδώ είναι ο άξονας x , βλέπε Σχήμα 2.2).

2.3 ΚΥΚΛΟΦΟΡΙΑ ΓΥΡΩ ΑΠΟ ΚΥΛΙΝΔΡΟ ΚΥΚΛΙΚΗΣ ΔΙΑΤΟΜΗΣ

Θεωρήστε το μιγαδικό δυναμικό

$$W(z) = i\gamma \log \frac{z}{a}, \quad (2.12)$$

όπου γ πραγματικός. Στην επιφάνεια του κυλίνδρου $|z| = a$ (βλέπε Σχήμα 2.3) έχουμε $z = ae^{i\theta}$, οπότε η σχέση (2.12) δίνει $W = -\gamma\theta$, δηλαδή ροϊκή συνάρτηση $\Psi = 0$ και δυναμικό $\Phi = -\gamma\theta$. Έτσι, η περιφέρεια του κυλίνδρου αποτελεί γραμμή ροής με $\Psi = 0$. Ακόμη, αν διαγράψουμε μία φορά την περιφέρεια γύρω από τον κύλινδρο κατά τη θετική φορά, η γωνία θ μεταβάλλεται σε $\theta + 2\pi$ και για αυτό το Φ μειώνεται κατά $2\pi\gamma$. Η ποσότητα $2\pi\gamma$ αποτελεί την κυκλοφορία γύρω από τον κύλινδρο.



Σχήμα 2.3: Πεδίο ροής κυκλοφορίας γύρω από κύλινδρο [2.4].

Γενικεύοντας, το δυναμικό και η ροϊκή συνάρτηση του πεδίου ροής γύρω από τον κύλινδρο δίνονται από τις σχέσεις

$$\Phi = -\gamma\theta, \quad \Psi = \gamma \log \frac{r}{a}, \quad (2.13)$$

έτσι ώστε η κυκλοφορία να είναι $2\pi\gamma$ για κάθε κλειστή καμπύλη που περιλαμβάνει τον κύλινδρο διαγραφόμενη μία μόνο φορά, ενώ οι γραμμές ροής είναι ομόκεντροι κύκλοι με κέντρο τον άξονα του κυλίνδρου. Όπως γίνεται φανερό, ο κύλινδρος δεν έχει σημεία ανακοπής.

Στην παρούσα περίπτωση η ακτινική και γωνιακή ταχύτητα σε πολικές συντεταγμένες είναι

$$-\frac{\partial\Phi}{\partial r} = 0, \quad -\frac{\partial\Phi}{r\partial\theta} = \frac{\gamma}{r}, \quad (2.14)$$

όπου γ είναι η ταχύτητα σε μοναδιαία απόσταση από την αρχή των αξόνων.

Ορισμός. Όταν η κυκλοφορία σε μία κλειστή καμπύλη είναι $2\pi\gamma$, θα καλούμε ως γ την ένταση της κυκλοφορίας (*strength of the circulation*).

Στη συνέχεια συμβολίζουμε την κυκλοφορία με Γ , οπότε όταν η κυκλοφορία είναι $2\pi\gamma$ η ένταση της είναι $\gamma = \frac{\Gamma}{2\pi}$. Έτσι, η σχέση (2.12) γράφεται

$$W = i \frac{\Gamma}{2\pi} \log \frac{z}{a}$$

ή

$$W = i \frac{\Gamma}{2\pi} \log z - i \frac{\Gamma}{2\pi} \log a, \quad (2.15)$$

και εφόσον η πρόσθεση της σταθεράς στο μιγαδικό δυναμικό δεν έχει φυσική σημασία, μπορούμε να εργαστούμε με το μιγαδικό δυναμικό $i \frac{\Gamma}{2\pi} \log z$, όπου παρόλο ότι παραλείψαμε τη σταθερά, η ταχύτητα σε μοναδιαία απόσταση από την αρχή παραμένει ίση με $\frac{\Gamma}{2\pi}$. Η περίπτωση που έχει η παράλειψη της σταθεράς, είναι το όριο του κυλίνδρου να ανήκει στη γραμμή ροής με $\Psi = \frac{\Gamma}{2\pi} \log a$, αντί αυτής με $\Psi = 0$.

2.4 ΚΥΛΙΝΔΡΟΣ ΚΥΚΛΙΚΗΣ ΔΙΑΤΟΜΗΣ ΣΕ ΠΑΡΑΛΛΗΛΗ ΡΟΗ ΜΕ ΚΥΚΛΟΦΟΡΙΑ

Η παράλληλη ροή διερχόμενη από κύλινδρο ακτίνας a έχει μιγαδικό δυναμικό $V_\infty \left(z + \frac{a^2}{z} \right)$, ενώ το μιγαδικό δυναμικό κυλίνδρου ακτίνας a με κυκλοφορία Γ είναι $i \frac{\Gamma}{2\pi} \log \frac{z}{a}$. Έτσι, σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας, το μιγαδικό δυναμικό κυλίνδρου σε παράλληλη ροή με κυκλοφορία είναι

$$W = V_\infty \left(z + \frac{a^2}{z} \right) + i \frac{\Gamma}{2\pi} \log \frac{z}{a}. \quad (2.16)$$

Σύμφωνα με τη σχέση (2.16), η περιφέρεια του κυλίνδρου σε αυτή την περίπτωση είναι η γραμμή ροής $\Psi = 0$, αφού θέτοντας $z = ae^{i\theta}$ βρίσκουμε ότι το W είναι πραγματικό και για αυτό $\Psi = 0$.

Για να βρούμε τη γενική μορφή των γραμμών ροής, πρώτα διερευνούμε τα σημεία ανακοπής τα οποία δίνονται από την εξίσωση

$$\frac{dW}{dz} = V_{\infty} \left(1 - \frac{a^2}{z^2} \right) + \frac{i\Gamma}{2\pi z} = 0 \quad \text{ή} \quad \frac{z^2}{a^2} + \frac{z}{a} \frac{i\Gamma}{2\pi a V_{\infty}} - 1 = 0,$$

όθεν

$$z = a \left(-\frac{i\Gamma}{4\pi a V_{\infty}} \pm \sqrt{\left(1 - \frac{\Gamma^2}{16\pi^2 a^2 V_{\infty}^2} \right)} \right). \quad (2.17)$$

Στη συνέχεια διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

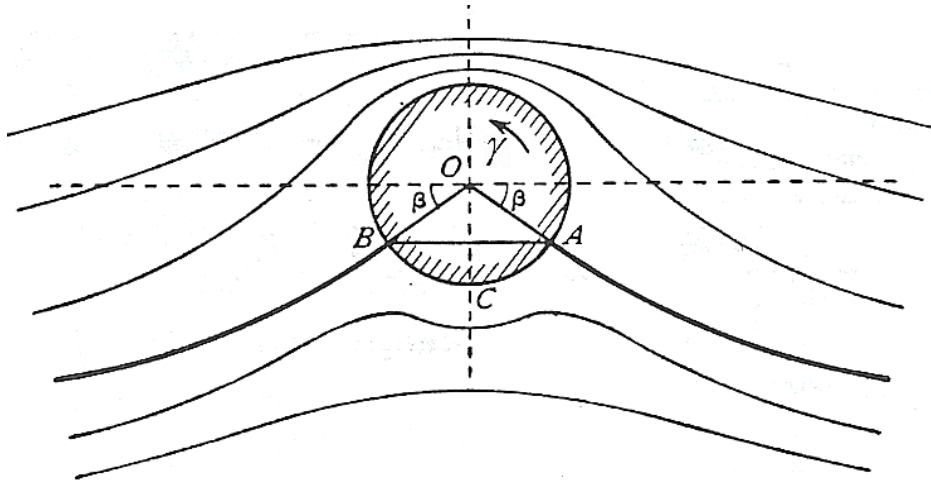
$$\Gamma < 4\pi a V_{\infty}, \quad \Gamma = 4\pi a V_{\infty}, \quad \Gamma > 4\pi a V_{\infty}.$$

Περίπτωση Ι

Εάν $\Gamma < 4\pi a V_{\infty}$, θέτουμε $\frac{\Gamma}{4\pi a V_{\infty}} = \sin \beta$, τότε

$$z = a(-i \sin \beta \pm \cos \beta), \quad (2.18)$$

οπότε τα σημεία ανακοπής κείτονται στην περιφέρεια του κυλίνδρου, ορίζοντας ευθεία κάτω από το κέντρο του κυλίνδρου, παράλληλη με τον πραγματικό άξονα. Το Σχήμα 2.4 δείχνει τα σημεία ανακοπής A , B που ορίζονται από τη γωνία β , αλλά και την παραμόρφωση των γραμμών της παράλληλης ροής λόγω της παρουσίας του κυλίνδρου.



Σχήμα 2.4: Κύλινδρος σε παράλληλη ροή με κυκλοφορία $\Gamma < 4\pi a V_{\infty}$ [2.3].

Το γενικό αποτέλεσμα της κυκλοφορίας είναι η αύξηση της ταχύτητας του ρευστού σε σημεία του άνω μέρους του κυλίνδρου, και η μείωση της ταχύτητας σε σημεία του κάτω μέρους του κυλίνδρου. Έτσι, η πίεση μειώνεται στο άνω μέρος του κυλίνδρου και αυξάνεται στο κάτω μέρος του. Αυτό δικαιολογεί την ύπαρξη συνισταμένης προς τα άνω δύναμης με κατεύθυνση τον άξονα y .

Η ροϊκή συνάρτηση είναι

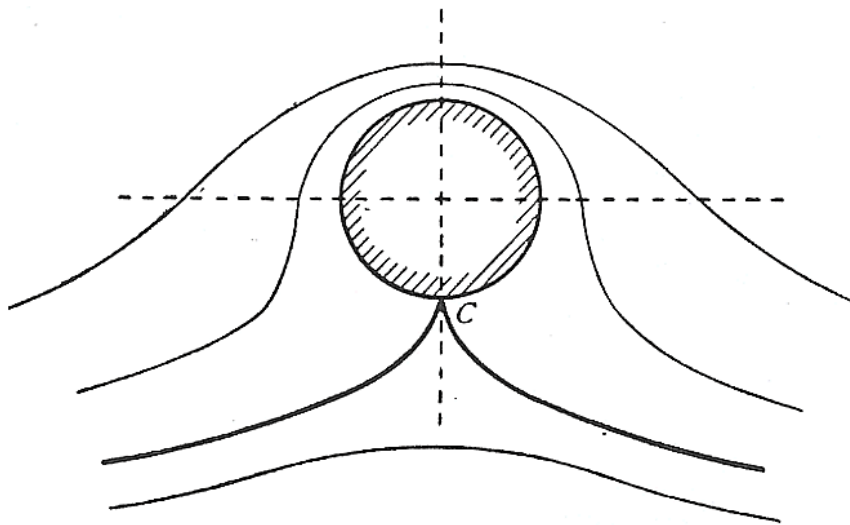
$$\Psi = V_{\infty} y \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi} \log \frac{r}{a}, \quad (2.19)$$

της οποίας η τιμή δεν μεταβάλλεται για κάθε ζεύγος σημείων (x, y) , $(-x, y)$ και για αυτό οι γραμμές ροής είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα y , κάτι που δικαιολογεί τη μη ύπαρξη συνισταμένης δύναμης κατά την κατεύθυνση του άξονα x .

Όταν η κυκλοφορία είναι μηδέν, είδαμε ότι τα σημεία ανακοπής κείτονται στον άξονα x , οπότε ένα άλλο αποτέλεσμα της κυκλοφορίας είναι η μετακίνηση των σημείων αυτών προς τα κάτω.

Περίπτωση II

Εάν $\Gamma = 4\pi aV_\infty$ είναι $\beta = \frac{\pi}{2}$ και τα σημεία ανακοπής του κυλίνδρου συμπίπτουν στο κατώτατό του σημείο C (βλέπε Σχήμα 2.5).



Σχήμα 2.5: Κύλινδρος σε παράλληλη ροή με κυκλοφορία $\Gamma = 4\pi aV_\infty$ [2.3].

Περίπτωση III

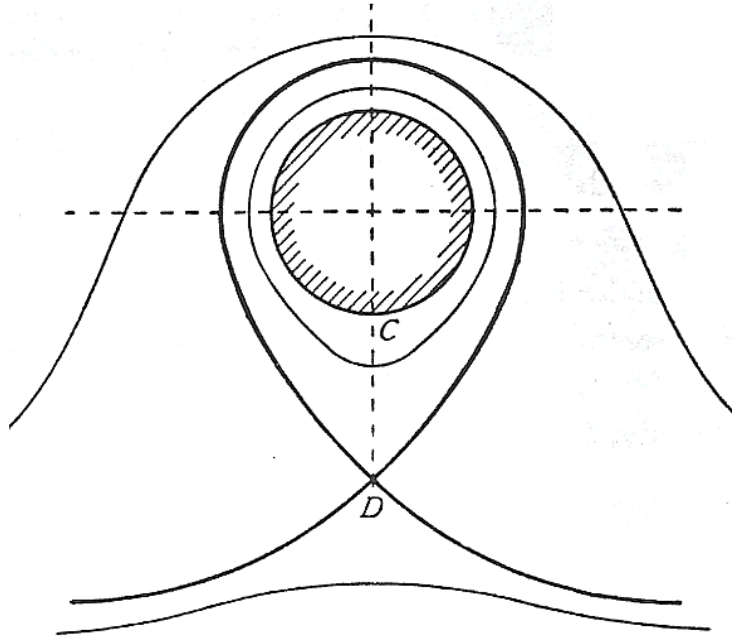
Εάν $\Gamma > 4\pi aV_\infty$, θέτουμε $\frac{\Gamma}{4\pi aV_\infty} = \cosh \beta$, τότε

$$z = ai(-\cosh \beta \pm \sinh \beta) = -aie^\beta \text{ ή } -aie^{-\beta}. \quad (2.20)$$

Καλώντας αυτές τις τιμές ως z_1, z_2 έχουμε

$$|z_1 z_2| = a^2. \quad (2.21)$$

Έτσι, τώρα τα σημεία ανακοπής είναι αντίστροφα σημεία του φανταστικού άξονα, εκ των οποίων το ένα ανήκει στο εσωτερικό του κυλίνδρου, οπότε είναι εκτός πεδίου ροής και το άλλο είναι σημείο του πεδίου ροής, και αποτελεί σημείο τομής μίας γραμμής ροής η οποία τέμνει τον εαυτό της και περιλαμβάνει τον κύλινδρο, σχηματίζοντας ένα βρόχο γύρω από αυτόν. Εντός αυτού του σχηματιζόμενου βρόχου, οι γραμμές ροής αποτελούν κλειστές καμπύλες που περιλαμβάνουν τον κύλινδρο, αλλά δεν περιέχουν σημεία εκτός βρόχου και φυσικά δεν τέμνονται μεταξύ τους (βλέπε Σχήμα 2.6).



Σχήμα 2.6: Κύλινδρος σε παράλληλη ροή με κυκλοφορία $\Gamma > 4\pi a V_\infty$ [2.3].

Για να βρούμε την πίεση p στην περιφέρεια του κυλίνδρου, αρκεί να βρούμε την ταχύτητα c_z του ρευστού στα αντίστοιχα σημεία και ύστερα να εφαρμόσουμε την εξίσωση Bernoulli για ασυμπίεστο ρευστό, πυκνότητας ρ . Έτσι, έχουμε διαδοχικά:

$$\frac{dW}{dz} = V_\infty (1 - e^{-2i\theta}) + \frac{i\Gamma}{2\pi a} e^{-i\theta} = e^{-i\theta} \left(2iV_\infty \sin \theta + \frac{i\Gamma}{2\pi a} \right)$$

$$c_z^2 = \left| \frac{dW}{dz} \right|^2 = \left(2V_\infty \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi a} \right)^2$$

$$\frac{p}{\rho} = \frac{p_\infty}{\rho} + \frac{1}{2} V_\infty^2 - \frac{1}{2} c_z^2 = \frac{p_\infty}{\rho} + \frac{1}{2} V_\infty^2 - \frac{1}{2} \left(4V_\infty^2 \sin^2 \theta + \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 a^2} + \frac{2\Gamma V_\infty}{\pi a} \sin \theta \right), \quad (2.22)$$

όπου p_∞ είναι η πίεση της αδιατάρακτης ροής. Οι συνιστώσες της ώσης με διευθύνσεις τους άξονες x και y στον κύλινδρο, ανά μονάδα βάθους πεδίου, εξαιτίας της πίεσης είναι

$$P_x = - \int_0^{2\pi} p \cos \theta a d\theta, \quad P_y = - \int_0^{2\pi} p \sin \theta a d\theta. \quad (2.23)$$

Όταν η θ αντικατασταθεί από $\theta + \pi$, ο μόνος διαφορετικός όρος στην έκφραση της p στην εξίσωση (2.22) είναι ο τελευταίος. Έτσι, οι πιέσεις σε αντιδιαμετρικά σημεία στην περιφέρεια του κυλίνδρου είναι

$$p_1 - \frac{\Gamma V_\infty}{\pi a} \rho \sin \theta, \quad p_1 + \frac{\Gamma V_\infty}{\pi a} \rho \sin \theta,$$

$$\text{όπου } \frac{p_1}{\rho} = \frac{p_\infty}{\rho} + \frac{1}{2} V_\infty^2 - 2V_\infty^2 \sin^2 \theta - \frac{\Gamma^2}{8\pi^2 a^2}.$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω, οι πιέσεις p_1 δεν επιφέρουν κανένα αποτέλεσμα αφού αλληλοαναιρούνται. Έτσι, ισοδύναμα οι σχέσεις (2.23) γράφονται

$$P_x = \frac{\Gamma V_\infty \rho}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin \theta \cos \theta d\theta, \quad P_y = \frac{\Gamma V_\infty \rho}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta, \quad (2.24)$$

οι οποίες μετά από πράξεις γράφονται

$$P_x = 0, \quad P_y = \Gamma \rho V_\infty, \quad (2.25)$$

που σημαίνει ότι στον κύλινδρο ασκείται ανυψωτική δύναμη, η λεγόμενη (δυναμική) άνωση.

Ο υπολογισμός της άνωσης ακόμη και σε αυτή την απλή περίπτωση, απλοποιείται περισσότερο χρησιμοποιώντας το Θεώρημα του Blasius. Έτσι, έχουμε

$$P_x - iP_y = \frac{1}{2} i \rho \oint_C \left(V_\infty + \frac{i\Gamma}{2\pi z} - \frac{V_\infty a^2}{z^2} \right)^2 dz, \quad (2.26)$$

όπου C η περιφέρεια του κυλίνδρου. Ο μοναδικός πόλος εντός του C είναι το $z=0$ και το ολοκληρωτικό υπόλοιπο είναι ο συντελεστής του $1/z$ της ολοκληρωτέας ποσότητας, από την οποία φαίνεται αμέσως ότι είναι $iV_\infty \Gamma / \pi$.

Έτσι, από το Θεώρημα των Ολοκληρωτικών Υπολοίπων κατά Cauchy η εξίσωση (2.26) γράφεται

$$P_x - iP_y = \frac{1}{2} i \rho \times 2\pi i \times \frac{iV_\infty \Gamma}{\pi} = -i\rho V_\infty \Gamma, \quad (2.27)$$

από όπου προκύπτουν οι σχέσεις (2.25). Το πλεονέκτημα του θεωρήματος του Blasius έγκειται στο γεγονός ότι εργαζόμαστε με μία μόνο μεταβλητή, τη z και στην ελαχιστοποίηση υπολογισμού άσχετων όρων με το Θεώρημα των Ολοκληρωτικών Υπολοίπων.

2.5 ΑΕΡΟΤΟΜΕΣ JOUKOWSKI

Αποδεικνύεται ότι τα προφίλ, από τη σύμμορφη απεικόνιση ενός κύκλου από τον απλό μετασχηματισμό Joukowski, παριστάνουν καλά αεροδυναμικά σχήματα, και η (δυναμική) άνωσή τους μπορεί να υπολογιστεί από τη γνωστή θεωρία κυλίνδρου κυκλικής διατομής με κυκλοφορία ή χωρίς σε παράλληλη ροή. Υπάρχουν δύο τρόποι προσέγγισης αυτού του τύπου σχεδιασμού αεροτομής, οι οποίοι είναι οι εξής:

1. Μετασχηματίζοντας ένα δοθέντα κύκλο (κύλινδρο).
2. Ερευνώντας ποιος κύκλος προκύπτει από ένα δεδομένο περίγραμμα αεροτομής.

Φυσικά, το αντίστροφο (2) είναι δυσκολότερο. Στη συνέχεια θα περιορίσουμε τη μελέτη μας στη διαδικασία (1).

Ο μετασχηματισμός Joukowski είναι

$$z = \zeta + \frac{l^2}{\zeta}, \quad (2.28)$$

ο οποίος παριστάνει απεικόνιση του επιπέδου ζ στο επίπεδο z , και είναι ισοδύναμος με τους ακόλουθους διαδοχικούς μετασχηματισμούς:

$$\zeta_1 = \frac{l^2}{\zeta}, \quad z = \zeta + \zeta_1. \quad (2.29)$$

Για δοθέν ζ θα εξετάσουμε πώς θα εξάγουμε το ζ_1 . Έστω

$$\zeta = re^{i\theta}, \quad (2.30)$$

τότε έχουμε

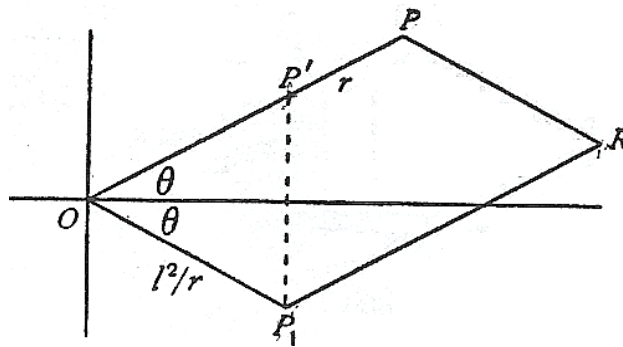
$$\zeta_1 = \frac{l^2}{r} e^{-i\theta}. \quad (2.31)$$

Τα σημεία $P(\zeta)$, $P_1(\zeta_1)$ φαίνονται στο Σχήμα 2.7. Αν φέρουμε P_1P' κάθετο στον πραγματικό άξονα ώστε να συναντήσει το OP στο P' , το σχηματιζόμενο τρίγωνο OP_1P' είναι ισοσκελές, οπότε

$$(OP') = (OP_1) = l^2/r, \quad (2.32)$$

και για αυτό

$$(OP) \cdot (OP') = l^2. \quad (2.33)$$



Σχήμα 2.7: Κατασκευή παραλληλογράμμου απεικόνισης [2.3].

Έτσι, τα P και P' είναι αντίστροφα σημεία σε σχέση με το O , και για να πάρουμε το P_1 , πρώτα βρίσκουμε το αντίστροφο σημείο P' από την ισότητα (2.33) και ύστερα το κατοπτρικό (είδωλο) του P_1 ως προς τον πραγματικό άξονα. Τελικά, για να πάρουμε το σημείο z , προσθέτουμε τους μιγαδικούς αριθμούς που παριστάνονται από τα σημεία P , P_1 σχηματίζοντας το παραλληλόγραμμο OP_1RP . Η τέταρτη κορυφή R αντιπροσωπεύει το μιγαδικό αριθμό z και ο μετασχηματισμός ολοκληρώθηκε.

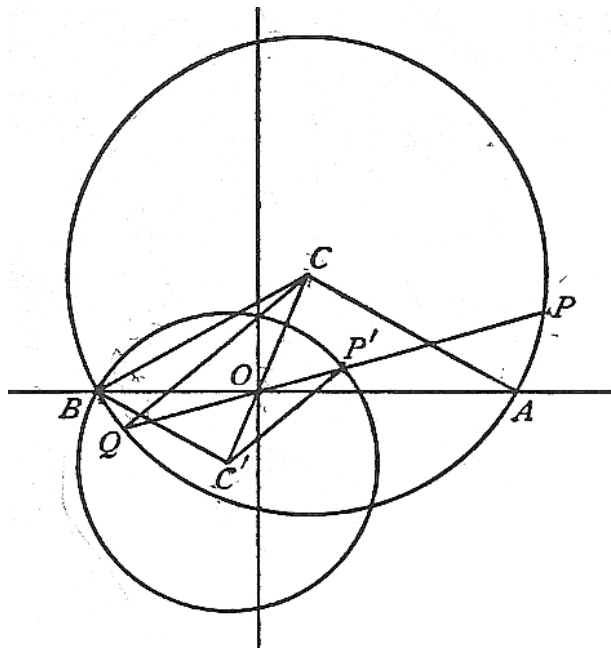
Τώρα, στο πρόβλημα που αντιμετωπίζεται εδώ, το P θα διαγράφει έναν κύκλο, ενώ το P' θα διαγράφει μία αντίστροφη καμπύλη αυτού του κύκλου, που όπως θα δείχθει, παριστάνει έναν άλλο κύκλο, και για αυτό το λόγο το P_1 διαγράφει κύκλο ο οποίος αποτελεί γεωμετρικό τόπο (locus), κατοπτρικό του κύκλου που διαγράφει το P' ως προς τον πραγματικό άξονα. Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε μία γεωμετρική κατασκευή για την εύρεση του γεωμετρικού τόπου του P_1 .

2.6 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΤΟΥ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ JOUKOWSKI

Έστω C το κέντρο δοθέντος κύκλου, ο οποίος τέμνει τον πραγματικό άξονα στα A και B , όπου $(OB) = l$. Έστω P ένα σημείο του συγκεκριμένου κύκλου σε απόσταση l από την αρχή των αξόνων O και P' το αντίστροφο του σε σχέση πάλι με το O , ώστε να ισχύει

$$(OP) \cdot (OP') = l^2 = (OB)^2. \quad (2.34)$$

Η ευθεία του PO τέμνει τον κύκλο και στο σημείο Q . Φέρουμε τμήμα $P'C'$ παράλληλο στο CQ , ώστε να τμήσει το CO στο C' (βλέπε Σχήμα 2.8).



Σχήμα 2.8: Κατασκευή γεωμετρικού τόπου των σημείων P' [2.3].

Στη συνέχεια πρώτα θα δείξουμε το εξής:

Ο γεωμετρικός τόπος των P' είναι κύκλος με κέντρο το C' .

Απόδειξη:

Αφού AOB , POQ είναι χορδές του δοθέντος κύκλου ισχύει

$$(OP) \cdot (OQ) = (OA) \cdot (OB) \quad (2.35)$$

(τα τρίγωνα AOP , BOQ είναι όμοια). Διαιρώντας τις ισότητες (2.34), (2.35) προκύπτει

$$\frac{(OP')}{(OQ)} = \frac{(OB)}{(OA)}. \quad (2.36)$$

Τώρα, τα τρίγωνα $OP'C'$, OQC' είναι όμοια, αφού το $P'C'$ είναι παράλληλο στο QC εκ κατασκευής. Για αυτό

$$\frac{(OC')}{(OC)} = \frac{(C'P')}{(CQ)} = \frac{(OP')}{(OQ)} = \frac{(OB)}{(OA)}. \quad (2.37)$$

Σύμφωνα με την ισότητα (2.37), αφού υπάρχει το τμήμα OC' και το OC είναι σταθερό, το C' θα είναι σταθερό σημείο. Αν $(CQ) = a$, η ακτίνα του δοθέντος κύκλου, η οποία είναι σταθερή, και εφόσον υπάρχει το $C'P'$ συμπεραίνουμε ότι είναι σταθερού μήκους. Έτσι, το P' διαγράφει κύκλο κέντρου C' . □

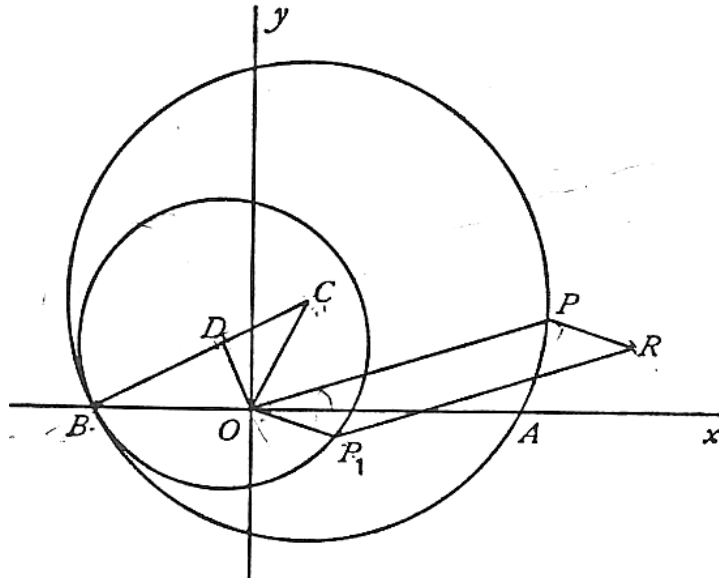
Αφού $(OB) = l$, το σημείο B είναι από μόνο του αντίστροφο, και για αυτό ο γεωμετρικός τόπος των P' περνάει και μέσω του B . Επειδή

$$\frac{(OC')}{(OC)} = \frac{(OB)}{(OA)}, \quad (2.38)$$

τα τρίγωνα OAC , OBC' είναι όμοια και όμοια σχετιζόμενα. Έτσι, προκύπτει ότι τα BC' , CA είναι παράλληλα και για αυτό

$$\angle ABC' = \angle BAC = \angle CBA \quad (2.39)$$

(ACB ισοσκελές τρίγωνο), οπότε τα BC' και BC κλίνουν το ίδιο στον πραγματικό άξονα. Αν τώρα αντικατοπτρίσουμε τον κύκλο, που είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων P' ως προς τον πραγματικό άξονα, θα πάρουμε έναν ισοδύναμο κύκλο που το κέντρο του D ανήκει στο BC και διέρχεται από το σημείο B (βλέπε Σχήμα 2.9). Αυτός είναι ο ζητούμενος κύκλος, ο γεωμετρικός τόπος των P_1 , το είδωλο των P' .

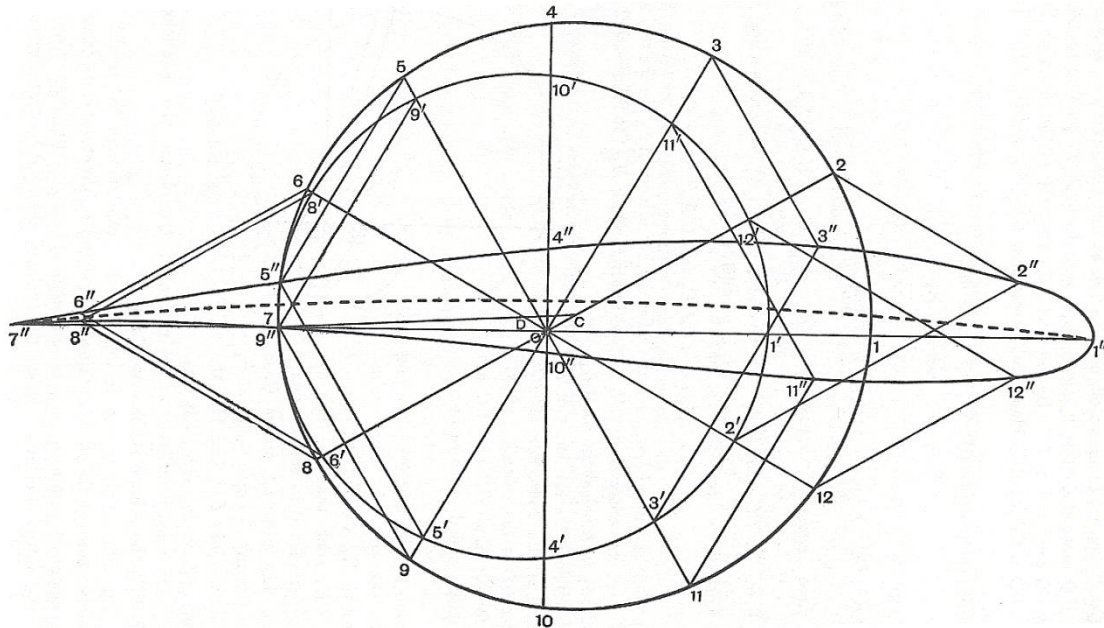


Σχήμα 2.9: Κατασκευή γεωμετρικού τόπου των σημείων P_1 και έπειτα του παραλληλογράμμου απεικόνισης [2.3].

Αφού το B ανήκει στην ευθεία που ενώνει τα κέντρα C , D οι δύο κύκλοι πρέπει να εφάπτονται στο B . Ακόμη, λόγω του ότι OC' και OC κλίνουν το ίδιο στην Oy , και αφού το OD είναι το είδωλο του OC' , προκύπτει ότι OD και OC κλίνουν το ίδιο στον άξονα Oy . Αυτή η διαπίστωση μας δίνει τη δυνατότητα να

βρούμε το D και να χαράξουμε τον κύκλο χωρίς καμία δυσκολία. Στη συνέχεια κατασκευάζουμε το σημείο R , που αντιπροσωπεύει το $z = \zeta + \frac{l^2}{\zeta}$ σύμφωνα με την ενότητα 2.5.

Το Σχήμα 2.10 δείχνει μία αεροτομή σχεδιασμένη από σημεία που προκύπτουν από ακτινικά διανύσματα ανά διάστημα 30° . Τα αντίστοιχα σημεία στην αεροτομή και στον κύκλο φέρουν τον ίδιο αριθμό.



Σχήμα 2.10: Σχεδιασμός-γραφική κατασκευή αεροτομής Joukowski [2.4].

Αεροτομές, που σχεδιάζονται όπως παραπάνω, είναι γνωστές ως αεροτομές Joukowski. Οι αεροτομές αυτές έχουν ένα καμπύλο μπροστινό μέρος και μία μυτερή ακμή φυγής, η οποία αντιστοιχεί στο σημείο B του κύκλου.

2.7 Η ΜΟΡΦΗ ΤΗΣ ΑΚΜΗΣ ΦΥΓΗΣ

Ο μετασχηματισμός $z = \zeta + \frac{l^2}{\zeta}$ δίνει

$$\frac{dz}{d\zeta} = 1 - \frac{l^2}{\zeta^2}, \quad (2.40)$$

όπου η $dz/d\zeta$ μηδενίζεται στα σημεία $\zeta = -l$, $\zeta = l$ και επομένως, η απεικόνιση παύει να είναι σύμμορφη στην άμεση γειτονιά αυτών των σημείων. Το σημείο $\zeta = l$, που ανήκει στο εσωτερικό του κύκλου, μετασχηματίζεται σε σημείο εντός της αεροτομής και δεν χρειάζεται να εξεταστεί περαιτέρω. Το σημείο $\zeta = -l$ μετασχηματίζεται στο $z = -2l$ στην ακμή φυγής. Ο μετασχηματισμός μπορεί να γραφεί ως

$$\frac{z+2l}{z-2l} = \left(\frac{\zeta+l}{\zeta-l} \right)^2. \quad (2.41)$$

Στη γειτονιά των $\zeta = -l$ και $z = -2l$ θέτουμε

$$\zeta = -l + re^{i\theta}, \quad z = -2l + se^{ix}, \quad (2.42)$$

όπου r και s είναι απειροστά. Τότε, προσεγγιστικά έχουμε $\frac{se^{ix}}{-4l} = \frac{r^2 e^{2i\theta}}{4l^2}$, και για αυτό

$$\chi + \pi = 2\theta. \quad (2.43)$$

Όταν κινηθούμε γύρω από το σημείο B , η γωνία θ αυξάνεται κατά π , και για αυτό η χ αυξάνεται κατά 2π . Προκύπτει έτσι, ότι οι δύο κλάδοι της αεροτομής εφάπτονται ο ένας στον άλλο στην ακμή φυγής.

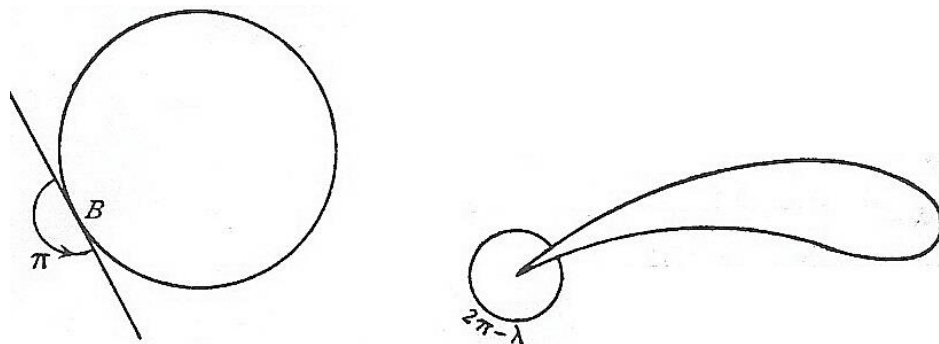
Ο μετασχηματισμός (2.41) γενικεύεται στην ακόλουθη μορφή

$$\frac{z+nl}{z-nl} = \left(\frac{\zeta+l}{\zeta-l} \right)^n, \quad (2.44)$$

η οποία χρησιμοποιείται επίσης στο σχεδιασμό και αποτελεί μια κατηγορία καμπυλών που αντιστοιχούν σε προφίλ γνωστών ως *προφίλ Kármán-Trefftz*. Οι αεροτομές που σχεδιάζονται σύμφωνα με το μετασχηματισμό (2.44), ονομάζονται *αεροτομές Kármán-Trefftz*. Χρησιμοποιώντας τις ίδιες θεωρήσεις, βρίσκουμε

$$\chi + \pi = n\theta, \quad (2.45)$$

έτσι ώστε αν $n = 2 - \frac{\lambda}{\pi}$, η αύξηση κατά π της θ στο B δίνει για το χ αύξηση $2\pi - \lambda$ και τώρα, στην ακμή φυγής καταλήγουν δύο ευδιάκριτοι κλάδοι σχηματίζοντας γωνία λ (βλέπε Σχήμα 2.11).



Σχήμα 2.11: Η γωνία ακμής φυγής της αεροτομής Kármán-Trefftz [2.3].

Ο μετασχηματισμός (2.44) δεν επιτρέπει την απλή γεωμετρική περιγραφή, η οποία αναπτύχθηκε προηγουμένως για $n = 2$.

2.8 ΥΠΟΘΕΣΗ JOUKOWSKI

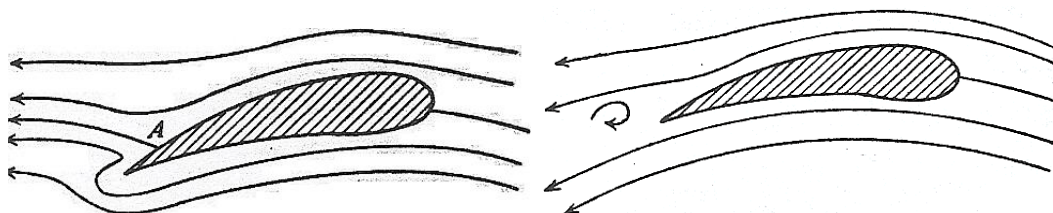
Αν c_z είναι η ταχύτητα στο σημείο B του κυλίνδρου, το οποίο μετασχηματίζεται σε ακμή φυγής στην αεροτομή, και c_ζ η αντίστοιχη ταχύτητα στην ακμή φυγής, έχουμε

$$c_z = \left| \frac{dW}{dz} \right| = \left| \frac{dW}{d\zeta} \right| \times \left| \frac{d\zeta}{dz} \right| = c_\zeta \left| \frac{d\zeta}{dz} \right|. \quad (2.46)$$

Είδαμε ότι στην ακμή φυγής ισχύει $dz/d\zeta = 0$, οπότε σύμφωνα με τη σχέση (2.46) η c_z θα είναι άπειρη. Αυτό μπορεί να αποφευχθεί εάν το B ήταν σημείο ανακοπής, έτσι ώστε $c_\zeta = 0$. Μια επιθεώρηση της θέσης των σημείων ανακοπής, όπως εξετάστηκε στην ενότητα 2.4, δείχνει ότι με κατάλληλη επιλογή της έντασης της κυκλοφορίας γ , τα σημεία ανακοπής μπορούν να τοποθετηθούν οπουδήποτε στο χαμηλότερο μισό του κυλίνδρου, έτσι ώστε το σημείο B να μπορεί πάντα να είναι ένα σημείο ανακοπής.

Η υπόθεση Joukowski αναφέρει ότι η κυκλοφορία στην περίπτωση μιας κατάλληλα σχεδιασμένης αεροτομής, ρυθμίζεται πάντα έτσι ώστε το B να είναι ένα σημείο ανακοπής και η ταχύτητα στην ακμή φυγής να είναι πεπερασμένη. Αυτό σημαίνει ότι στην πλειοψηφία των περιπτώσεων, όπου η κυκλοφορία είναι τέτοια, ώστε ο κύλινδρος να έχει δύο σημεία ανακοπής, η αντίστοιχη αεροτομή Joukowski έχει μόνο ένα. Η υπόθεση Joukowski (συνθήκη) εμφανίζεται να έχει ικανοποιητική ακρίβεια μέσα στα όρια λειτουργίας καλά σχεδιασμένων αεροτομών.

Η φυσική εξήγηση προέλευσης της κυκλοφορίας είναι πιθανώς κάπως έτσι. Καθώς η κίνηση αρχίζει, δηλαδή για τις χαμηλές ταχύτητες του ρεύματος αέρα, η ροή είναι συνηθισμένη με καθορισμένες γραμμές ροής (δεν υπάρχει αποκόλληση), με το σημείο ανακοπής μπροστά από την ακμή φυγής, στην άνω επιφάνεια της αεροτομής. Καθώς αυξάνεται η ταχύτητα, ακόμη και με μικρή συνεκτικότητα, οι συνεκτικές δυνάμεις αυξάνονται, ώστε το ρεύμα του αέρα να μην μπορεί να γυρίσει γύρω από την αιχμηρή ακμή (ακμή φυγής) και έτσι μια δίνη διαμορφώνεται (βλέπε Σχήμα 2.12).



Σχήμα 2.12: Η ανάπτυξη της κυκλοφορίας περί την αεροτομή καθώς αυξάνεται η ταχύτητα του ρεύματος αέρα [2.3].

Δεδομένου ότι η κυκλοφορία σε οποιαδήποτε κλειστή καμπύλη αρκετά μεγάλη, ώστε να εσωκλείει την αεροτομή και τη δίνη, ήταν μηδέν στην αρχή, θα πρέπει να παραμείνει μηδέν, θεωρητικά επ' άπειρον, κάτι που δικαιολογεί την ύπαρξη

κυκλοφορίας γύρω από την αεροτομή, ίσης και αντίθετης με αυτή της δίνης. Η δίνη παρασύρεται κατάντη μακριά από την αεροτομή, και όταν επιτυγχάνεται η μόνιμη κατάσταση, η κυκλοφορία γύρω από την αεροτομή παραμένει σταθερή.

2.9 ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΩΝ ΚΥΤΤΑ-JOUKOWSKI

Θεώρημα

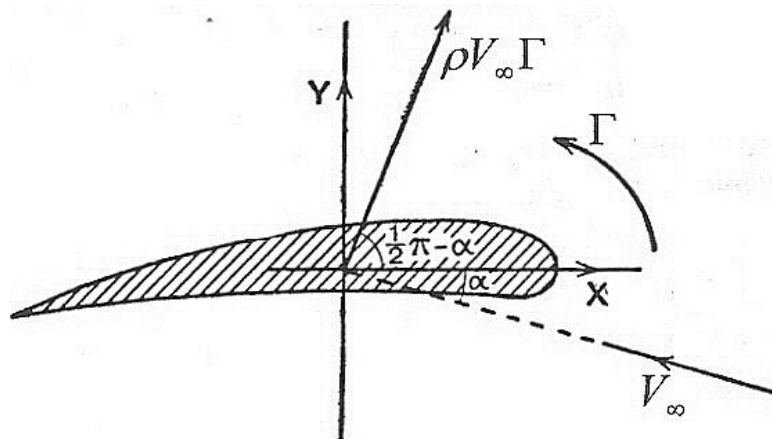
Η αεροτομή σε ηρεμία, σε ομοιόμορφη ροή αέρα ταχύτητας V_∞ , με κυκλοφορία Γ γύρω από αυτή, δέχεται άνωση $\rho\Gamma V_\infty$ κάθετη στη V_∞ . Η κατεύθυνση του διανύσματος άνωσης προκύπτει από την περιστροφή του διανύσματος της ταχύτητας του αέρα κατά γωνία αντίθετης φοράς από την κυκλοφορία.

Απόδειξη:

Δεδομένου ότι υπάρχει μία ομοιόμορφη ροή αέρα, η ταχύτητα σε μεγάλη απόσταση από την αεροτομή πρέπει να τείνει απλά, στην ταχύτητα του αέρα στο άπειρο (αδιατάρακτη ροή), και για αυτό αν το $|z|$ είναι ικανοποιητικά μεγάλο, ώστε να υπάρχει σύγκλιση της παρακάτω απειροσειράς γράφουμε

$$-\frac{dW}{dz} = -V_\infty e^{i\alpha} + \frac{A}{z} + \frac{B}{z^2} + \dots, \quad (2.47)$$

όπου α είναι η γωνία πρόσπτωσης της αεροτομής του Σχήματος 2.13.



Σχήμα 2.13: Η άνωση σε σχέση με την ταχύτητα του ρεύματος αέρα και την κυκλοφορία [2.3].

Έτσι,

$$W = V_\infty e^{i\alpha} - A \log z + \frac{B}{z} + \dots, \quad (2.48)$$

και αφού υπάρχει η κυκλοφορία Γ , πρέπει να ισχύει

$$-A = \frac{i\Gamma}{2\pi}, \quad (2.49)$$

όπου η $\log z$ αυξάνεται κατά $2\pi i$ όταν διαγράψουμε περιφέρεια γύρω από την αεροτομή κατά τη θετική φορά. Από τις σχέσεις (2.49) και (2.51) παίρνουμε

$$\left(\frac{dW}{dz}\right)^2 = V_\infty^2 e^{2ia} + \frac{i\Gamma V_\infty e^{ia}}{\pi z} - \frac{\Gamma^2 + 8\pi^2 B V_\infty e^{ia}}{4\pi^2 z^2} - \dots \quad (2.50)$$

Αν τώρα ολοκληρώσουμε κατά μήκος του κύκλου του οποίου η ακτίνα είναι ικανοποιητικά μεγάλη, ώστε να συγκλίνει το ανάπτυγμα της σχέσης (2.50), το Θεώρημα του Blasius και το Θεώρημα των Ολοκληρωτικών Υπολοίπων δίνουν

$$P_x - iP_y = \frac{1}{2} i\rho \times 2\pi i \left(\frac{i\Gamma V_\infty e^{ia}}{\pi} \right) = -i\Gamma \rho V_\infty e^{ia},$$

ή παίρνοντας τη συζυγή εξίσωση

$$P_x + iP_y = i\Gamma \rho V_\infty e^{-ia} = \Gamma \rho V_\infty e^{i\left(\frac{1}{2}\pi - a\right)}. \quad (2.51)$$

Η εξίσωση (2.51) δείχνει ότι αυτή η δύναμη ικανοποιεί όλες τις ιδιότητες στη διατύπωση του θεωρήματος (βλέπε Σχήμα 2.13). □

Παρατηρήσεις:

1. Αυτό το θεώρημα ανακαλύφθηκε από τον Kutta (1902), και ανεξαρτήτως από το Joukowski (1906).
2. Η άνοση είναι ανεξάρτητη της μορφής της αεροτομής.
3. Αυτή η θεωρία δεν δίνει καμία οπισθέλκουσα, δεδομένου ότι έχουμε παραλείψει τη συνεκτικότητα του ρευστού.
4. Εάν η αεροτομή θεωρηθεί κινούμενη μέσα στον αέρα, ο οποίος βρίσκεται σε ηρεμία, η διεύθυνση της άνοσης προκύπτει από την περιστροφή του διανύσματος της ταχύτητας της αεροτομής κατά γωνία ίδιας φοράς με την κυκλοφορία.

5. Το Θεώρημα του Blasius $\left(M = \text{πραγματικό μέρος του } -\frac{1}{2} \rho \oint_C z \left(\frac{dW}{dz} \right)^2 dz \right)$

και το Θεώρημα των Ολοκληρωτικών Υπολοίπων εφαρμοζόμενα στη σχέση (2.50) δίνουν τη ροπή ως προς την αρχή των αξόνων

$$M = \text{πραγματικό μέρος του } 2\pi i \rho B V_\infty e^{ia}. \quad (2.52)$$

2.10 Η ΑΝΩΣΗ ΣΕ ΑΕΡΟΤΟΜΗ ΒΡΙΣΚΟΜΕΝΗ ΣΕ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΟ ΡΕΥΜΑ ΑΕΡΑ

Ο μετασχηματισμός Joukowski $\left(z = \zeta + \frac{l^2}{\zeta} \right)$ είναι μια ειδική περίπτωση ενός γενικότερου τύπου μετασχηματισμού

$$z = \zeta + \frac{a_1}{\zeta} + \frac{a_2}{\zeta^2} + \dots, \quad (2.53)$$

ο οποίος καθώς εφαρμόζεται σε κύκλο ακτίνας a , με κέντρο C στο σημείο $\zeta = s$, δίνει ένα περίγραμμα αεροτομής.

Η αεροδυναμική δύναμη στην αεροτομή οφείλεται στις αεροδυναμικές ωθήσεις πίεσης στα στοιχεία της επιφάνειάς της. Είναι γνωστό ότι ένα σύστημα δυνάμεων, που ενεργούν σε ένα άκαμπτο σώμα (και θα υποθέσουμε ότι η αεροτομή μας είναι άκαμπτη), μπορεί να αντικατασταθεί σε οποιοδήποτε επιλεγμένο σημείο βάσης (base point) από μια δύναμη, ενεργώντας σε αυτό το σημείο βάσης και από μία ροπή. Επιπλέον, το μέτρο και η κατεύθυνση της δύναμης είναι τα ίδια για όλα τα σημεία βάσης, ενώ η ροπή εξαρτάται από το ίδιο το σημείο βάσης που επιλέγεται.

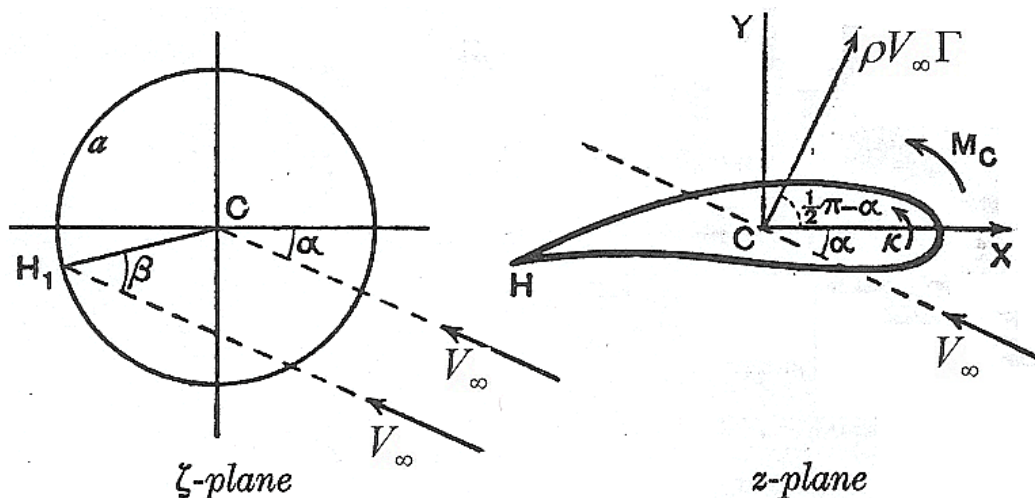
Στην παρούσα μελέτη θα πάρουμε ως σημείο βάσης το κέντρο C του κύκλου. Αυτό το σημείο καλείται *κέντρο του προφίλ* (*center of the profile*) της αεροτομής. Η πραγματική θέση που καταλαμβάνει, όσον αφορά το περίγραμμα της αεροτομής, καθορίζεται από τα σημεία του κύκλου και τα αντίστοιχα σημεία του περιγράμματος στο ίδιο διάγραμμα, όπως είδαμε στο Σχήμα 2.10. Στην παρούσα περίπτωση θα πάρουμε το C ως αρχή των αξόνων. Αυτό συνεπάγεται αντικατάσταση στη σχέση (2.53) $z+s$ αντί z και $\zeta+s$ αντί ζ , που για ικανοποιητικά μεγάλες τιμές του $|\zeta|$ οδηγεί στο ακόλουθο συγκλίνων ανάπτυγμα

$$z = \zeta + \frac{a_1}{\zeta} + \frac{a_2 - a_1 s}{\zeta^2} + \dots \quad (2.54)$$

Αντιστρέφοντας τη σχέση (2.54) παίρνουμε

$$\zeta = z - \frac{a_1}{z} - \dots = z \left(1 - \frac{a_1}{z^2} - \dots \right). \quad (2.55)$$

Το Σχήμα 2.14 δείχνει αυτή τη μετάθεση, ώστε το C να αποτελεί την αρχή και στα δύο επίπεδα.



Σχήμα 2.14: Γενικευμένος μετασχηματισμός διατήρησης ίδιας αρχής στα δύο επίπεδα [2.3].

Εάν α είναι η γωνία πρόσπτωσης, τότε με βάση τη θεωρία της ενότητας 2.4 το μιγαδικό δυναμικό παράλληλης ροής γύρω από κύλινδρο με κυκλοφορία Γ γράφεται

$$W = V_{\infty} e^{i\alpha} \zeta + \frac{a^2 V_{\infty} e^{-i\alpha}}{\zeta} + \frac{i\Gamma}{2\pi} \log \zeta. \quad (2.56)$$

Εάν θεωρήσουμε το ζ ως συνάρτηση του z , όπως ορίζεται από τον παραπάνω μετασχηματισμό, παίρνουμε το μιγαδικό δυναμικό για ροή διερχόμενη από την αεροτομή. Στην παρούσα περίπτωση για ικανοποιητικά μεγάλες τιμές του $|z|$, αυτό ορίζεται από τις σχέσεις (2.55), (2.56), όπου δίνουν για το επίπεδο z

$$W = V_{\infty} e^{i\alpha} \left(z - \frac{a_1}{z} - \dots \right) + \frac{V_{\infty} e^{-i\alpha} a^2}{z} \left(1 - \frac{a_1}{z^2} - \dots \right)^{-1} + \frac{i\Gamma}{2\pi} \left[\log z + \log \left(1 - \frac{a_1}{z^2} - \dots \right) \right]$$

ή

$$W = V_{\infty} e^{i\alpha} z + \frac{i\Gamma}{2\pi} \log z + \frac{V_{\infty} e^{-i\alpha} a^2 - V_{\infty} e^{i\alpha} a_1}{z} + \dots \quad (2.57)$$

Συγκρίνοντας τη σχέση (2.57) με τη (2.48) έχουμε

$$A = -\frac{i\Gamma}{2\pi}, \quad B = V_{\infty} e^{-i\alpha} a^2 - V_{\infty} e^{i\alpha} a_1 \quad (2.58)$$

και για αυτό από τις εξισώσεις (2.51), (2.52) προκύπτει:

$$P_x + iP_y = i\Gamma \rho V_{\infty} e^{-i\alpha} = \Gamma \rho V_{\infty} e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} \quad (2.59)$$

$$M_C = \text{πραγματικό μέρος του } (-2\pi \rho V_{\infty}^2 i a_1 e^{2i\alpha}), \quad (2.60)$$

όπου M_C είναι η ροπή ως προς το κέντρο C .

Εάν L είναι η άνωση, M η ροπή και c η χορδή, οι αδιάστατοι αριθμοί

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho V_{\infty}^2 c}, \quad C_M = \frac{M}{\frac{1}{2} \rho V_{\infty}^2 c^2}, \quad (2.61)$$

καλούνται *συντελεστής άνωσης* και *συντελεστής ροπής* αντιστοίχως. Ο συντελεστής ροπής εξαρτάται από την επιλογή του σημείου όπου παίρνουμε τις ροπές.

Τέλος, παρατηρείστε ότι εφόσον ισχύει

$$\text{Άνωση} = (\text{ταχύτητα αέρα}) \times (\text{πυκνότητα αέρα}) \times (\text{κυκλοφορία}),$$

η άνωση είναι ανεξάρτητη από το σχήμα της αεροτομής.

2.11 ΟΙ ΑΞΟΝΕΣ ΤΗΣ ΑΕΡΟΤΟΜΗΣ

Εάν σχεδιάσουμε τον κύκλο και το περίγραμμα της αεροτομής προερχόμενο από αυτόν σε ένα κοινό διάγραμμα, η γραμμή που ενώνει το κέντρο C με το κοντινότερο σημείο ανακοπής του κύκλου καλείται *πρώτος άξονας της αεροτομής* (*Άξονας I*). Σύμφωνα με το Σχήμα 2.14, είναι $\Gamma = 4\pi a V_{\infty} \sin \beta$, οπότε η άνωση L είναι ανάλογη του $\sin \beta$ και μηδενίζεται όταν $\beta = 0$, δηλαδή όταν το ρεύμα αέρα είναι παράλληλο του Άξονα I. Ο πρώτος άξονας είναι ακόμη γνωστός και ως *άξονας μηδενικής άνωσης*.

Ακόμη, αν θέσουμε $a_1 = l^2 e^{i\mu}$, παίρνουμε από την εξίσωση (2.60)

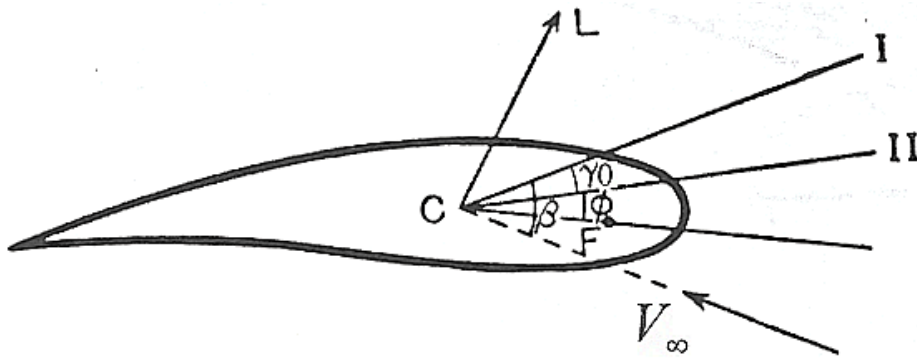
$$M_C = 2\pi\rho^2 V_\infty^2 \sin(2\alpha + \mu), \quad (2.62)$$

ώστε η ροπή στρέψης M_C να μηδενίζεται όταν η γωνία πρόσπτωσης γίνει ίση με $-\frac{1}{2}\mu$. Η αντίστοιχη κατεύθυνση του αέρα μέσω του C , καλείται *δεύτερος άξονας της αεροτομής (Άξονας II)* ή *άξονας μηδενικής ροπής στρέψης*. Αν καλέσουμε γ_0 τη γωνία μεταξύ των αξόνων I και II, παίρνουμε

$$M_C = 2\pi\rho^2 V_\infty^2 \sin(2\beta - 2\gamma_0). \quad (2.63)$$

2.12 Η ΕΣΤΙΑ ΤΗΣ ΑΕΡΟΤΟΜΗΣ

Εστία (αεροδυναμικό κέντρο) είναι το σημείο, όπου η ροπή ως προς αυτό, της αεροδυναμικής δύναμης είναι ανεξάρτητη από τη γωνία πρόσπτωσης.



Σχήμα 2.15: Η εστία F και οι άξονες I και II της αεροτομής [2.3].

Για να καθορίσουμε την ύπαρξη της εστίας (focus) θεωρούμε τυχαίο σημείο F επί της αεροτομής τέτοιο, ώστε

$$M_F = M_C - (CF) \cos(\beta - \gamma_0 - \phi) \cdot L, \quad (2.64)$$

όπου ϕ είναι η γωνία μεταξύ του CF και του Άξονα II, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.15, και L είναι η άνωση. Χρησιμοποιώντας τις τιμές

$$M_C = 2\pi\rho V_\infty^2 l^2 \sin 2(\beta - \gamma_0), \quad L = 4\pi\rho a V_\infty^2 \sin \beta,$$

έχουμε

$$M_F = 2\pi\rho V_\infty^2 \{l^2 \sin(2\beta - 2\gamma) - 2a(CF) \cdot \sin \beta \cos(\beta - \gamma_0 - \phi)\}$$

ή

$$M_F = 2\pi\rho V_\infty^2 \{l^2 \sin(2\beta - 2\gamma_0) - a \cdot (CF) \cdot \sin(2\beta - \gamma_0 - \phi) - a \cdot (CF) \cdot \sin(\gamma_0 + \phi)\}. \quad (2.65)$$

Αυτή η ροπή γίνεται ανεξάρτητη της β την ονομαζόμενη *απόλυτη γωνία πρόσπτωσης (absolute incidence)*, αν πάρουμε

$$l^2 = a \cdot (CF), \quad \phi = \gamma_0. \quad (2.66)$$

Οι ισότητες (2.66) αποδεικνύουν την ύπαρξη της εστίας F , και δίνουν τη θέση της ως απόσταση l^2/a από το κέντρο C σε άξονα που αποτελεί είδωλο του Άξονα I ως προς τον Άξονα II. Η ροπή γύρω από την εστία είναι

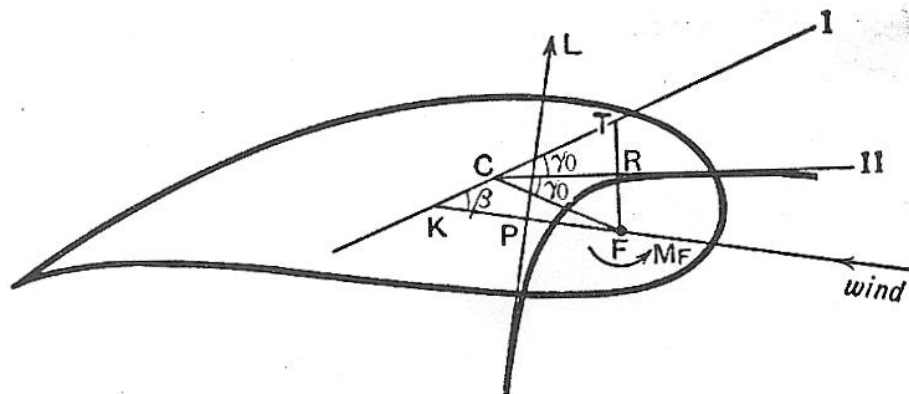
$$M_F = -2\pi\rho V_\infty^2 l^2 \sin 2\gamma_0. \quad (2.67)$$

Το διάγραμμα του Σχήματος 2.15 έχει σχεδιαστεί με την υπόθεση ότι ο Άξονας I είναι άνω του Άξονα II. Σε αυτή την περίπτωση η σημειακή ροπή γύρω από την εστία είναι αρνητική. Αν ωστόσο, ο Άξονας II είναι άνω του Άξονα I, η γ_0 αλλάζει πρόσημο και η ροπή γίνεται θετική. Οι σχετικές θέσεις των Αξόνων I και II αντιστοιχούν σε διαφορετικές δυναμικές ιδιότητες της αεροτομής.

Ακόμη περισσότερο, αν $\gamma_0 = 0$ έχουμε $M_F = 0$ για όλες τις γωνίες πρόσπτωσης, που σημαίνει ότι η άνωση διέρχεται από την εστία. Σε αυτή την περίπτωση λέγεται ότι η αεροτομή έχει κέντρο άνωσης (*center of lift*). Για επίπεδες αεροτομές, η εστία είναι στο ένα τέταρτο του τμήματος μεταξύ του κέντρου και της ακμής φυγής.

2.13 Η ΜΕΤΑΚΕΝΤΡΙΚΗ ΠΑΡΑΒΟΛΗ ΤΗΣ ΑΕΡΟΤΟΜΗΣ

Έστω L η ευθεία που αποτελεί τη διεύθυνση της άνωσης $4\pi\rho a V_\infty^2 \sin \beta$. Αυτή η διεύθυνση L είναι κάθετη στην ταχύτητα του ρεύματος του αέρα. Έστω ότι η ευθεία L συναντά την ευθεία KF –η οποία διέρχεται από την εστία F και είναι παράλληλη στην ταχύτητα του ρεύματος του αέρα, ενώ τέμνει τον Άξονα I στο K – στο σημείο P (βλέπε Σχήμα 2.16).



Σχήμα 2.16: Παραβολή με εστία F και διευθετούσα τον Άξονα I της αεροτομής [2.3].

Παίρνοντας ροπές γύρω από την εστία F , έχουμε διαδοχικά:

$$M_F + (FP) \cdot L = 0$$

$$(FP) = -\frac{M_F}{L} = \frac{1}{2} \frac{l^2 \sin 2\gamma_0}{a \sin \beta} = \frac{1}{2} (CF) \cdot \frac{(FK)}{(FC)} = \frac{1}{2} (FK), \quad (2.68)$$

όπως προκύπτει από το νόμο των ημίτονων για το τρίγωνο FKC .

Έτσι, ο γεωμετρικός τόπος των P είναι μία ευθεία παράλληλη στον Άξονα I, ευρισκόμενη στη μέση μεταξύ του F και του Άξονα I. Από γνωστή ιδιότητα της παραβολής το ίχνος της καθέτου από την εστία σε μια εφαπτομένη της, ανήκει στην εφαπτομένη από την κορυφή της παραβολής, προκύπτει έτσι, ότι η ευθεία της άνωσης εφάπτεται σε παραβολή της οποίας η εστία είναι το F και η διευθετούσα (*directrix*) είναι ο Άξονας I. Αυτή η παραβολή καλείται *μετακεντρική (metacentric)*.

Για να βρούμε τη διεύθυνση της άνωσης, σχεδιάζουμε εκείνη την εφαπτομένη σε αυτή την παραβολή, που να είναι κάθετη στην κατεύθυνση του αέρα. Ο Άξονας II εφάπτεται στη μετακεντρική παραβολή, γιατί αν η FRT είναι κάθετη στον Άξονα II, ώστε $(FR) = (RT)$, το R βρίσκεται στην εφαπτομένη από την κορυφή. Δεδομένου ότι οι κάθετες μεταξύ τους εφαπτόμενες της παραβολής τέμνονται στη διευθετούσα της, η αντίστοιχη άνωση περνά από το C όταν η κατεύθυνση του αέρα είναι κατά μήκος του Άξονα II.

2.14 ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [2.1] N. A. Αθανασιάδης, *Μηχανική Ρευστών*, Αθήνα: Εκδόσεις Συμεών, 1989.
- [2.2] Σ. Γ. Τσαγγάρης, *Μηχανική των Ρευστών*, Αθήνα: Εκδόσεις Συμεών, 1995.
- [2.3] L. M. Milne-Thomson, *Theoretical Hydrodynamics*, London: Macmillan & Co LTD, 1962.
- [2.4] L. M. Milne-Thomson, *Theoretical Aerodynamics*, New York: Dover Publications, Inc., 1966.
- [2.5] T. Theodorsen, and I.E. Garrick, “*General Potential Theory of Arbitrary Wing Sections*,” National Advisory Committee for Aeronautics, California Institute of Technology, Rep. No 452, 1933.
- [2.6] R. V. Churchill, J. W. Brown, *Μιγαδικές συναρτήσεις και εφαρμογές*, Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 1998.
- [2.7] R. A. Silverman, *Introductory Complex Analysis*, New York: Dover Publications, Inc., 1972.

Η ΜΕΘΟΔΟΣ THEODORSEN

3.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η μέθοδος Theodorsen (Theodorsen's method) έχει σκοπό τη διερεύνηση της αεροδυναμικής συμπεριφοράς μιας εμπειρικά σχεδιασμένης αεροτομής σε παράλληλη ροή μέσω διπλού σύμμορφου μετασχηματισμού. Το πεδίο ροής γύρω από την αεροτομή θεωρείται διδιάστατο, μόνιμο, αστρόβιλο με κυκλοφορία ή χωρίς ($\Gamma = 0$). Ειδικότερα, ο Theodorsen χρησιμοποίησε ένα διπλό μετασχηματισμό, ώστε να μετατρέψει την αυθαίρετη αεροτομή σε κύκλο (κύλινδρος κυκλικής διατομής) με κυκλοφορία ή χωρίς για τον οποίο είναι γνωστή η κατανομή της ταχύτητας και στη συνέχεια να υπολογίσει την κατανομή της ταχύτητας γύρω από την αεροτομή, ακολουθώντας τον αντίστροφο δρόμο. Από αυτή τη διαδικασία είναι εύκολο να υπολογισθούν τα υπόλοιπα αεροδυναμικά μεγέθη. Ένεκα του γεγονότος ότι ο μετασχηματισμός είναι σύμμορφος, η κυκλοφορία διατηρείται σταθερή με αυτή του επιπέδου της αεροτομής και για τα δύο μετασχηματισμένα επίπεδα.

Η μέθοδος Theodorsen συνήθως αναφέρεται σε υποηχητικές ροές γύρω από λεπτές αεροτομές, οπότε το ρευστό, που είναι ο αέρας, μπορεί να θεωρηθεί ασυμπίεστο, μη συνεκτικό. Ακόμη, με τον όρο λεπτή αεροτομή σε παράλληλη ροή εννοούμε ότι πρόκειται για αεροτομή μήκους l :

1. μικρού πάχους (s), κατά κανόνα $\max s < (0.10 - 0.12)l$,
2. μέσης γραμμής με μεγάλη ακτίνα καμπυλότητας, κατά κανόνα με μέγιστο βέλος καμπυλότητας $\max f < (0.05 - 0.06)l$,
3. γωνία πρόσπτωσης μικρή, κατά κανόνα όχι πάνω από $8^\circ - 12^\circ$.

3.2 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ THEODORSEN

Για τον πρώτο μετασχηματισμό, ο Theodorsen χρησιμοποίησε τον μετασχηματισμό Joukowski, δηλαδή αυτή ακριβώς τη σχέση

$$\zeta = \omega + \frac{a^2}{\omega} \quad (3.1)$$

μεταξύ του επιπέδου $\zeta = x + iy$ στο οποίο ανήκει η αεροτομή και ενός βοηθητικού $\omega(\eta, \theta)$, ώστε

$$\omega = ae^{\eta + i\theta} \quad (3.2)$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (3.2) στη σχέση (3.1) παίρνουμε

$$\zeta = 2a \cosh(\eta + i\theta)$$

ή

$$\zeta = 2a \cosh \eta \cdot \cos \theta + 2ia \sinh \eta \cdot \sin \theta .$$

Εισάγοντας λοιπόν τα x και y του επιπέδου ζ , $\zeta = x + iy$, έχουμε:

$$\left. \begin{aligned} x &= 2a \cosh \eta \cos \theta \\ y &= 2a \sinh \eta \sin \theta \end{aligned} \right\} . \quad (3.3)$$

Αν $\eta = 0$, τότε $\omega = ae^{i\theta}$ και $\zeta = x = 2a \cos \theta$. Δηλαδή, αν P και P' είναι αντίστοιχα σημεία των επιπέδων ζ και ω , τότε καθώς το P διαγράφει τον άξονα των x από το $+2a$ προς το $-2a$, το P' διαγράφει στο ω τον κύκλο $ae^{i\theta}$ από $\theta = 0$ έως $\theta = \pi$. Και όταν το P επανέρχεται από το $-2a$ στο $+2a$ το P' διαγράφει το υπόλοιπο ημικύκλιο από π προς 2π . Συνεπώς, με τις σχέσεις (3.1), (3.2) μπορούμε να μετασχηματίσουμε ολόκληρο το επίπεδο ζ εξωτερικά της γραμμής $4a$ επί του άξονα x και να το αντιστοιχίσουμε μονοσήμαντα στο επίπεδο ω εξωτερικά (ή και εσωτερικά) του κύκλου με ακτίνα a και κέντρο στην αρχή των αξόνων στο επίπεδο ω .

Αντιστρέφοντας τώρα τις εξισώσεις (3.3), γράφουμε:

$$\cosh \eta = \frac{x}{2a \cos \theta}, \quad \sinh \eta = \frac{y}{2a \sin \theta}. \quad (3.4)$$

Είναι όμως $\cosh^2 \eta - \sinh^2 \eta = 1$, συνεπώς

$$\left(\frac{x}{2a \cos \theta} \right)^2 - \left(\frac{y}{2a \sin \theta} \right)^2 = 1,$$

ή λύνοντας ως προς $\sin^2 \theta$ (θετική ποσότητα) έχουμε

$$2 \sin^2 \theta = p + \sqrt{p^2 + \left(\frac{y}{a} \right)^2}, \quad (3.5)$$

όπου

$$p = 1 - \left(\frac{x}{2a} \right)^2 - \left(\frac{y}{2a} \right)^2. \quad (3.6)$$

Παρόμοια από την ταυτότητα $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ παίρνουμε

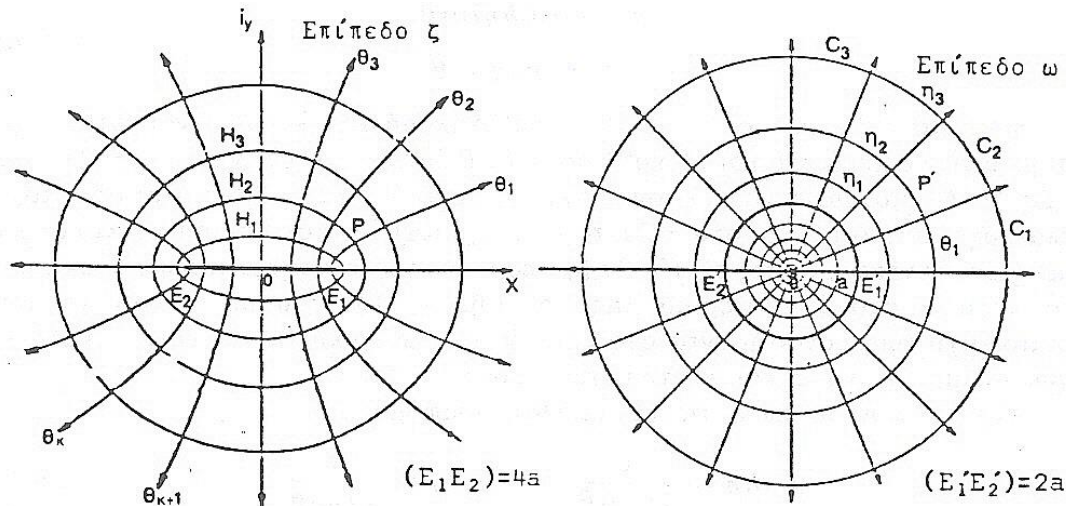
$$\left(\frac{x}{2a \cosh \eta} \right)^2 + \left(\frac{y}{2a \sinh \eta} \right)^2 = 1,$$

ή λύνοντας ως προς $\sinh^2 \eta$ έχουμε

$$2 \sinh^2 \eta = -p + \sqrt{p^2 + \left(\frac{y}{a} \right)^2}. \quad (3.7)$$

Οι εξισώσεις (3.5), (3.7) δίνουν τη γεωμετρική αντιστοιχία μεταξύ των επιπέδων ζ και ω , όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.1. Έτσι, οι ακτινικές ημιευθείες C ($\theta = \text{const}$) στο ω παριστάνουν ομοεστιακές υπερβολές $\Theta = \text{const}$ στο ζ και οι ομόκεντροι κύκλοι με κέντρο 0 και ακτίνες ae^η στο ω , παριστάνουν ελλείψεις $H = \text{const}$ στο

ζ με εστίες τα σημεία $E_1(+2a)$ και $E_2(-2a)$ του άξονα x , όπως και στις υπερβολές. Ο κύκλος με ακτίνα a ($\eta = 0$) στο ω αντιστοιχεί στο ευθύγραμμο τμήμα $(E_1E_2) = 4a$ του άξονα x στο ζ , που αποτελεί εστιακή απόσταση (μεταξύ των σημείων E_1 και E_2) όλων των ελλείψεων $H = const$, αλλά και αυτό το ίδιο αποτελεί εκφυλισμένη έλλειψη του επιπέδου αυτού.



Σχήμα 3.1: Τα επίπεδα σύμμορφου μετασχηματισμού της μεθόδου Theodorsen, επίπεδο ζ για την αεροτομή και βοηθητικό επίπεδο ω για τον ψευδόκυκλο [3.1].

Το ευθύγραμμο τμήμα (E_1E_2) επίσης, αποτελεί γραμμή ασυνέχειας για τις υπερβολές Θ , γιατί στο άνω ημιεπίπεδο αντιστοιχούν σε $0 \leq \theta \leq \pi$ και στο κάτω σε $\pi \leq \theta \leq 2\pi$ ή το αυτό, σε θ από 0 έως $-\pi$. Οι ημιάξονες των ελλείψεων $H = const$ είναι ο μεγάλος $2a \cosh \eta$ και ο μικρός $2a \sinh \eta$, οι δε ακτίνες καμπυλότητας των ελλείψεων στα άκρα του μεγάλου άξονα είναι

$$\rho = 2a \frac{\sinh^2 \eta}{\cosh \eta}, \tag{3.8}$$

ή για η αρκετά μικρό ($\eta < 1$) είναι

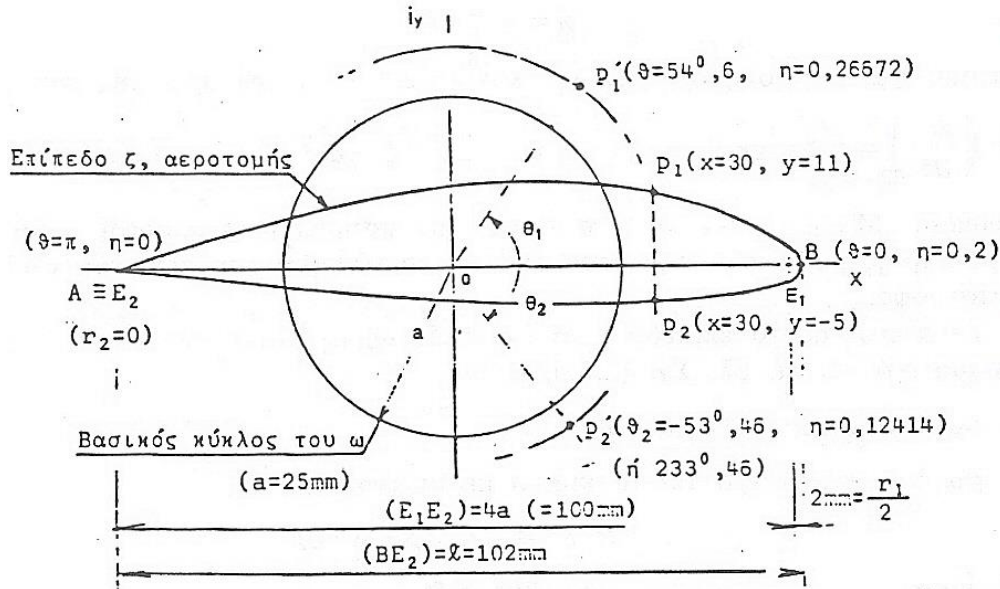
$$\rho \approx 2a\eta^2. \tag{3.9}$$

Η έλλειψη τέμνει τον άξονα x στο $2a \cosh \eta \approx 2a \left(1 + \frac{\eta^2}{2}\right) \approx 2a + \frac{\rho}{2}$.

Γνωρίζοντας τη γεωμετρική μορφή της αεροτομής, η οποία μπορεί να θεωρηθεί επιμηκυμένη έλλειψη, καθορίζουμε τη γεωμετρική της κλίμακα έτσι ώστε, το μήκος l της χορδής και οι ακτίνες καμπυλότητας r_1 και r_2 του μετώπου προσβολής και της ακμής φυγής αντιστοίχως, σε συνδυασμό με το μήκος $4a$, να πληρούν κατά προσέγγιση τη σχέση

$$l - \frac{1}{2}(r_1 + r_2) \approx 4a, \tag{3.10}$$

οπότε μπορούμε να απεικονίσουμε την αεροτομή στο επίπεδο ζ , τοποθετώντας την έτσι ώστε η χορδή της να ανήκει στον άξονα x και οι εστίες E_1 και E_2 σε θέσεις που να αντιστοιχούν στα μέσα περίπου των ακτινών r_1 και r_2 (βλέπε Σχήμα 3.2).



Σχήμα 3.2: Η προς μετασχηματισμό σε κύκλο, αεροτομή στο επίπεδο ζ και ο βασικός κύκλος στο επίπεδο ω [3.1].

Για αεροτομή με οξεία ακμή, $r_2 = 0$ οπότε $l = 4a + \frac{r_1}{2}$ η σχέση (3.9) δίνει

$$r_1 \approx 2\rho \approx 4a\eta^2, \text{ δηλαδή } 2\eta \approx \sqrt{\frac{r_1}{a}}.$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω, χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (3.5), (3.6) και (3.7) μπορούμε να χαράξουμε σημείο προς σημείο στο μετασχηματισμένο επίπεδο ω την απεικόνιση του περιγράμματος της αεροτομής του επιπέδου ζ . Η απεικόνιση του περιγράμματος της αεροτομής, δεδομένου ότι αυτή είναι λεπτή και περιβάλλει αρκετά στενά την ευθεία E_1E_2 των εστιών, είναι παραμορφωμένος κύκλος K περί το βασικό κύκλο ακτίνας a , ο λεγόμενος *ψευδόκυκλος* (*quasicircle*) του Theodorsen.

Ο δεύτερος μετασχηματισμός που χρησιμοποίησε ο Theodorsen συσχετίζει τον ψευδόκυκλο K του επιπέδου ω με έναν τέλειο κύκλο ακτίνας R στο επίπεδο z . Η συνάρτηση μετασχηματισμού είναι η εξής:

$$\omega = ze^{f(z)}, \quad (3.11)$$

όπου $f(z) = \sum_0^{\infty} \frac{c_n}{z^n}$. Κάθε εκθετικός όρος $e^{\frac{c_n}{z^n}}$ αντιπροσωπεύει την ομοιόμορφα συγκλίνουσα σειρά

$$1 + \frac{c_n}{z^n} + \frac{1}{2!} \left(\frac{c_n}{z^n} \right)^2 + \dots + \frac{1}{m!} \left(\frac{c_n}{z^n} \right)^m + \dots,$$

όπου οι συντελεστές $c_n = A_n + iB_n$ είναι μιγαδικοί αριθμοί. Για την $f(z)$, η οποία συγκλίνει σε όλα τα σημεία εξωτερικής περιοχής κύκλου συγκεκριμένης ακτίνας σύγκλισης, η ω έχει μοναδικό μέτρο $|z|e^{|f(z)|}$ σε αυτή την περιοχή, και το φανταστικό του μέρος είναι βεβαίως καθορισμένο εκτός του αριθμού των ολοκληρωτικών πολλαπλασίων $2\pi i$. Όταν $z = \infty$, $\omega = ze^{c_0}$. Η σταθερά $c_0 = A_0 + iB_0$ είναι ο καθοριστικός συντελεστής στο άπειρο, το πεδίο στο άπειρο μεγεθύνεται από το e^{A_0} και περιστρέφεται κατά γωνία B_0 . Γίνεται έτσι φανερό ότι για να είναι οι περιοχές στο άπειρο πανομοιότυπες των δύο επιπέδων ω και z , δηλαδή $\omega = z$ στο άπειρο, η σταθερά c_0 πρέπει να είναι μηδέν. Σε αυτή την περίπτωση ακόμη ισχύει

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \left(\frac{d\omega}{dz} \right) = 1.$$

Θα μετασχηματίσουμε την κλειστή καμπύλη $\omega = ae^{\eta+i\theta}$ (ψευδόκυκλος) σε τέλειο κύκλο $z = ae^{\eta_0+i\varphi}$ (ακτίνα $R = ae^{\eta_0}$, κέντρο στην αρχή των αξόνων) με βάση το γενικό τύπο μετασχηματισμού

$$\omega = ze^{\sum_1^{\infty} \frac{c_n}{z^n}}, \tag{3.12}$$

που αφήνει το πεδία ροής στο άπειρο αναλλοίωτα και θα πάρουμε εκφράσεις για τις σταθερές A_n , B_n και η_0 . Η επαλήθευση της λύσης θα επιβεβαιωθεί από την πραγματική σύγκλιση της σειράς $\sum_1^{\infty} \frac{c_n}{z^n}$, αφού εάν η λύση υπάρχει είναι και μοναδική.

Από τον ορισμό, για την αντιστοιχία των οριακών σημείων έχουμε

$$\left. \begin{aligned} \omega &= ae^{\eta+i\theta} \\ z &= ae^{\eta_0+i\varphi} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \omega = ze^{\eta-\eta_0+i(\theta-\varphi)} \tag{3.13}$$

Επίσης, ισχύει από την (3.12)

$$\omega = ze^{\sum_1^{\infty} \frac{A_n+iB_n}{z^n}}.$$

Επομένως,

$$\eta - \eta_0 + i(\theta - \varphi) = \sum_1^{\infty} \frac{A_n + iB_n}{z^n}.$$

Γράφοντας $z = R(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, όπου $R = ae^{\eta_0}$,

$$\eta - \eta_0 + i(\theta - \varphi) = \sum_1^{\infty} \frac{(A_n + iB_n)}{R^n} (\cos n\varphi - i \sin n\varphi).$$

Εξισώνοντας το πραγματικό και φανταστικό μέρος αυτής της εξίσωσης, παίρνουμε τα δύο συζυγή αναπτύγματα Fourier:

$$\eta - \eta_0 = \sum_1^{\infty} \left[\frac{A_n}{R^n} \cos n\varphi + \frac{B_n}{R^n} \sin n\varphi \right], \tag{3.14}$$

$$\theta - \varphi = \sum_1^{\infty} \left[\frac{B_n}{R^n} \cos n\varphi - \frac{A_n}{R^n} \sin n\varphi \right]. \tag{3.15}$$

Από την εξίσωση (3.14) παίρνουμε τις τιμές των συντελεστών $\frac{A_n}{R^n}$, $\frac{B_n}{R^n}$ και της σταθεράς η_0 :

$$\frac{A_n}{R^n} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \eta \cos n\varphi d\varphi \quad (3.16)$$

$$\frac{B_n}{R^n} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \eta \sin n\varphi d\varphi \quad (3.17)$$

$$\eta_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \eta d\varphi. \quad (3.18)$$

Ο υπολογισμός του απείρου αριθμού σταθερών καθώς παρουσιάζεται από τις σχέσεις (3.16) και (3.17) μπορεί να εξαρτάται από μία μοναδική εξίσωση, την οποία παίρνουμε ελαχιστοποιώντας αυτές τις σταθερές στην εξίσωση (3.15). Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (3.16) και (3.17) στην εξίσωση (3.15) παίρνουμε

$$\theta_\kappa - \varphi_\kappa = \frac{1}{\pi} \sum_1^\infty \left[\cos n\varphi_\kappa \int_0^{2\pi} \eta(\varphi) \sin n\varphi d\varphi - \sin n\varphi_\kappa \int_0^{2\pi} \eta(\varphi) \cos n\varphi d\varphi \right],$$

όπου $\eta(\varphi) = \eta$ και η $\theta_\kappa - \varphi_\kappa$ αντιπροσωπεύει την $\theta - \varphi$ ως συνάρτηση της φ_κ , όπου φ_κ χρησιμοποιείται για τη διάκριση της γωνίας που διατηρείται σταθερή καθώς εκτελούνται οι ολοκληρώσεις. Η έκφραση εύκολα ξαναγράφεται ως

$$\theta_\kappa - \varphi_\kappa = \frac{1}{\pi} \sum_1^\infty \int_0^{2\pi} \eta(\varphi) (\sin n\varphi \cos n\varphi_\kappa - \cos n\varphi \sin n\varphi_\kappa) d\varphi$$

ή

$$\theta_\kappa - \varphi_\kappa = \frac{1}{\pi} \sum_1^\infty \int_0^{2\pi} \eta(\varphi) \sin n(\varphi - \varphi_\kappa) d\varphi. \quad (3.19)$$

Αλλά,

$$\sum_1^\infty \sin n(\varphi - \varphi_\kappa) = \frac{1}{2} \cot \frac{\varphi - \varphi_\kappa}{2} - \frac{\cos(2n+1) \frac{(\varphi - \varphi_\kappa)}{2}}{2 \sin \frac{\varphi - \varphi_\kappa}{2}}.$$

Έτσι,

$$\theta_\kappa - \varphi_\kappa = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \eta(\varphi) \cot \frac{\varphi - \varphi_\kappa}{2} d\varphi - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \eta(\varphi) \frac{\cos(2n+1) \frac{(\varphi - \varphi_\kappa)}{2}}{\sin \frac{\varphi - \varphi_\kappa}{2}} d\varphi \right\}.$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα είναι ανεξάρτητο του n , ενώ το δεύτερο γίνεται ταυτοτικά μηδέν για $n \rightarrow \infty$. Έτσι, καταλήγουμε

$$\theta_\kappa - \varphi_\kappa = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \eta(\varphi) \cot \frac{\varphi - \varphi_\kappa}{2} d\varphi. \quad (3.20)$$

Εφόσον η αεροτομή είναι λεπτή και μικρής καμπυλότητας, ο ψευδόκυκλος του επιπέδου ω δεν διαφέρει πολύ από τέλειο κύκλο στο επίπεδο z και συνεπώς, τα η , R και θ , φ αντίστοιχων σημείων λίγο διαφέρουν μεταξύ τους. Ειδικότερα, η διαφορά των γωνιών

$$\varphi - \theta \equiv \varepsilon \equiv \varepsilon(\varphi) \quad (3.21)$$

δεν υπερβαίνει τις λίγες μοίρες $-6^\circ < \varepsilon < 6^\circ$. Στην περίπτωση αυτών των αεροτομών σε αντίστοιχα σημεία, έχουμε

$$\eta(\theta) \approx \eta(\varphi), \quad \varepsilon(\theta) \approx \varepsilon(\varphi)$$

και συνεπώς μπορούμε να παρακάμψουμε τη δυσκολία ολοκλήρωσης της σχέσης (3.19) αντικαθιστώντας το $\eta(\varphi)$, που δεν γνωρίζουμε, με το $\eta(\theta)$ του αντίστοιχου σημείου του ω , που άμεσα υπολογίζουμε από την αεροτομή στο ζ . Αντικαθιστώντας λοιπόν στη σχέση αυτή, τις γωνίες φ με τις γωνίες θ γράφουμε

$$\varepsilon_\kappa = \varepsilon(\varphi_\kappa) \equiv \varphi_\kappa - \theta_\kappa \approx -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \eta(\theta) \cot \frac{\theta - \theta_\kappa}{2} d\theta. \quad (3.22)$$

Με παραγοντική ολοκλήρωση και λόγω του ότι η $\eta(\theta)$ είναι περιοδική συνάρτηση με περίοδο 2π , η σχέση (3.22) δίνει την έκφραση

$$\varepsilon_\kappa \approx \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\eta(\theta)}{d\theta} \ln \sin \left| \frac{\theta - \theta_\kappa}{2} \right| d\theta. \quad (3.23)$$

Η επίλυση του ολοκληρώματος της σχέσης (3.22), που αποτελεί και το κλειδί της επίλυσης του όλου μετασχηματισμού, γίνεται με χωρισμό του πεδίου ολοκλήρωσης 0 έως 2π σε τμήματα και κατόπιν υπολογισμό και πρόσθεση των τμηματικών αυτών ολοκληρωμάτων. Για τον προσδιορισμό της ε_κ , η γωνία θ_κ θα κατέχει το μέσον του πρώτου τμήματος της αντίστοιχης σειράς για τις τμηματικές αυτές ολοκληρώσεις.

Στη βιβλιογραφία αναφέρεται ο χωρισμός του πεδίου ολοκλήρωσης 2π της γωνίας θ σε είκοσι ίσα τμήματα, δηλαδή ανά $\pi/10$, ως επαρκής για την ακρίβεια του μετασχηματισμού και τον υπολογισμό της κατανομής της ταχύτητας περί την αεροτομή για την περίπτωση των τεχνικών εφαρμογών. Εκφράζουμε λοιπόν την ε_κ , για το κ -τμήμα, ως άθροισμα 20 όρων

$$\varepsilon_\kappa \approx -\frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{2} \sum_{\nu_1}^{20} \int_{\theta_{\nu_1}}^{\theta_{\nu_2}} \eta(\theta) \cot \frac{\theta - \theta_\kappa}{2} d\theta \right]_\kappa,$$

όπου για την κάθε γωνία $\theta_\kappa = \frac{\kappa\pi}{10}$, $\kappa = 1, 2, \dots, 20$, έχουμε να προσθέσουμε τα είκοσι ορισμένα ολοκληρώματα με άκρα ολοκλήρωσης

$$\theta_{\nu_1} = \frac{2\nu - 1}{20} \pi \quad \text{και} \quad \theta_{\nu_2} = \frac{2\nu + 1}{20} \pi, \quad \text{με } \nu = 1, 2, \dots, 20.$$

Χάριν ευκολίας στους υπολογισμούς ισοδύναμα γράφουμε

$$\varepsilon_\kappa \approx -\frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{2} \sum_{\nu_1}^{19} \int_{\theta_{\nu_1}}^{\theta_{\nu_2}} \eta(\theta) \cot \frac{\theta - \theta_\kappa}{2} d\theta \right]_\kappa,$$

όπου: $\theta_\kappa = \frac{\kappa\pi}{10}$, με $\kappa = 0,1,\dots,19$, $\theta_{\nu_1} = \frac{2\nu-1}{20}\pi$, $\theta_{\nu_2} = \frac{2\nu+1}{20}\pi$, με $\nu = 0,1,\dots,19$.

Γίνεται φανερό ότι για το κ -τμήμα, με μέσο τη θ_κ , τα όρια της τμηματικής ολοκλήρωσης –όπου μέσα σε αυτό εμφανίζεται η συνεφαπτομένη να έχει ασυνέχεια από $-\infty$ προς $+\infty$ – είναι από $\theta_\kappa - \frac{\pi}{20}$ έως $\theta_\kappa + \frac{\pi}{20}$ και συνεπώς, η αντίστοιχη γωνία

$$\left(\frac{\theta - \theta_\kappa}{2}\right) \text{ της συνεφαπτομένης κυμαίνεται από } -\frac{\pi}{40} \text{ έως } +\frac{\pi}{40}.$$

Αναλύουμε για αυτό, την παραπάνω σχέση ως

$$\varepsilon_\kappa \approx -\frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{2} \int_{-s_o}^{+s_o} \eta(\theta) \cot \frac{(\theta - \theta_\kappa)}{2} d(\theta - \theta_\kappa) + \frac{1}{2} \sum_0^{19} \int_{\theta_{\nu_1}}^{\theta_{\nu_2}} \eta(\theta) \cot \frac{\theta - \theta_\kappa}{2} d\theta \right]_\kappa, \quad (3.24)$$

όπου $s_o = \pi/20$, και αίρουμε την αοριστία μορφώνοντας το πρώτο ολοκλήρωμα (το άθροισμα περιέχει τώρα 19 όρους) με τη μέθοδο που μορφώσαμε τη σχέση (3.23) από τη σχέση (3.22). Έτσι, γράφουμε:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\kappa i} &= \frac{1}{2} \int_{-s_o}^{+s_o} \eta(\theta) \cot \frac{(\theta - \theta_\kappa)}{2} d(\theta - \theta_\kappa) = - \int_{-s_o}^{+s_o} \frac{d\eta}{d\theta} \ln \sin \left| \frac{\theta - \theta_\kappa}{2} \right| d(\theta - \theta_\kappa) \cong - \int_{-s_o}^{+s_o} \frac{d\eta}{d\theta} \ln \left| \frac{\theta - \theta_\kappa}{2} \right| d(\theta - \theta_\kappa) \approx \\ &\approx - \left(\frac{d\eta}{d\theta} \right)_{\kappa - s_o}^{+s_o} \int (\ln |\theta - \theta_\kappa| - \ln 2) d(\theta - \theta_\kappa) \approx 2s_o \left(\frac{d\eta}{d\theta} \right)_\kappa = \frac{\pi}{10} \left(\frac{d\eta}{d\theta} \right)_\kappa, \end{aligned} \quad (3.25)$$

όπου $\left(\frac{d\eta}{d\theta} \right)_\kappa$ η τιμή της $\frac{d\eta}{d\theta}$ στο θ_κ , που με πολύ καλή ακρίβεια, είναι η μέση τιμή της παραγώγου αυτής στο διάστημα $\theta_\kappa - s_o$ έως $\theta_\kappa + s_o$ και επειδή s_o αρκετά μικρό, $\sin s_o \approx s_o$.

Για το δεύτερο όρο τώρα (δηλαδή το άθροισμα των τμηματικών ολοκληρωμάτων), γράφουμε για το ν° όρο του αθροίσματος:

$$\frac{1}{2} \int_{\theta_{\nu_1}}^{\theta_{\nu_2}} \eta(\theta) \cot \frac{\theta - \theta_\kappa}{2} d\theta \approx \frac{1}{2} \eta_\nu \int_{\theta_{\nu_1}}^{\theta_{\nu_2}} \cot \frac{\theta - \theta_\kappa}{2} d\theta = -\eta_\nu \ln \frac{\left| \sin \frac{\theta_{\nu_2} - \theta_\kappa}{2} \right|}{\left| \sin \frac{\theta_{\nu_1} - \theta_\kappa}{2} \right|}, \quad (3.26a)$$

όπου $\eta_\nu = \eta(\theta_\nu)$, που με πολύ καλή ακρίβεια, είναι η μέση τιμή του η στο ν° τμήμα από θ_{ν_1} έως θ_{ν_2} , εύρους $\pi/10$. Εύκολα φαίνεται ότι, για το κ -σημείο ως αφετηρία, $\theta_\kappa = \kappa\pi/10$, το ν° τμήμα $(\theta_{\nu_1}, \theta_{\nu_2})$ με μέσο το $\theta_\nu = \nu\pi/10$ για $\nu = 0,1,2,\dots,19$ (οι τιμές του ν είναι 19) αντιστοιχεί στο διάστημα

$$\theta_{\nu_1} = \frac{2\nu-1}{20}\pi \text{ έως } \theta_{\nu_2} = \frac{2\nu+1}{20}\pi.$$

Συνεπώς,

$$\frac{\theta_{\nu_1} - \theta_{\kappa}}{2} = \frac{2(\nu - \kappa) - 1}{40} \pi, \quad \frac{\theta_{\nu_2} - \theta_{\nu_1}}{2} = \frac{2(\nu - \kappa) + 1}{40} \pi.$$

Παρατηρούμε ότι λόγω της κυκλικής εναλλαγής των τμηματικών ολοκληρώσεων σε περίοδο 2π , για τα ισαπέχοντα εκατέρωθεν του κ τμήματα οι λογάριθμοι του λόγου των ημίτονων είναι αντίθετοι. Αυτό σημαίνει ότι, στο ν° τμήμα, για το οποίο έστω $\nu - \kappa = m > 0$, $\eta_{\nu} = \eta_{\kappa+m}$ και στο $(\kappa - \nu) + \kappa$ τμήμα, για το οποίο $(\kappa - \nu) + \kappa - \kappa = \nu - \kappa = -m$, αντιστοιχούν αντίστροφοι λόγοι ημίτονων, δηλαδή λογάριθμοι αλγεβρικά αντίθετοι. Για την τιμή $m = 0$ ο λογάριθμος γίνεται μηδέν. Στη συνέχεια εισάγουμε την παράμετρο

$$a_m = \ln \left| \frac{\sin \frac{2m+1}{40} \pi}{\sin \frac{2m-1}{40} \pi} \right| \text{ για } m = 1, \dots, 9, \quad (3.26b)$$

τότε το άθροισμα των ολοκληρωμάτων για το κ -σημείο γράφεται

$$\sum_{m=1}^{m=9} a_m (\eta_{\kappa+m} - \eta_{\kappa-m}),$$

οπότε η σχέση (3.24) για τη γωνία $\varepsilon(\varphi_{\kappa})$, παίρνει τη μορφή

$$\varepsilon_{\kappa} \approx -\frac{1}{\pi} \left[a_0 \left(\frac{d\eta}{d\theta} \right)_{\kappa} + \sum_{m=1}^{m=9} a_m (\eta_{\kappa+m} - \eta_{\kappa-m}) \right]. \quad (3.27)$$

Από τις σχέσεις (3.25) και (3.26b) προκύπτει:

$$\begin{aligned} a_0 &= \pi/10 = 0.3141\dots & a_5 &= 0.158 \\ a_1 &= 1.091 & a_6 &= 0.115 \\ a_2 &= 0.494 & a_7 &= 0.0884 \\ a_3 &= 0.313 & a_8 &= 0.0515 \\ a_4 &= 0.217 & a_9 &= 0.0251 \end{aligned} \quad (3.28)$$

Η σχέση (3.27) δίνει τις τιμές των γωνιών ε_{κ} , για τα είκοσι κ -σημεία, που αντιστοιχούν στις γωνίες θ_{κ} του ψευδόκυκλου με βήμα $\pi/10$. Με τις ε_{κ} προσδιορίζονται οι αντίστοιχες στις θ_{κ} γωνίες $\varphi_{\kappa} = \theta_{\kappa} + \varepsilon_{\kappa}$ στον τέλειο κύκλο του επιπέδου z . Μπορούμε έτσι να υπολογίσουμε τις ταχύτητες $c_{z\kappa}$, που παράλληλη ροή επάγεται στο καθένα από τα είκοσι φ_{κ} -σημεία του κύκλου z , και με την χρήση των προηγούμενων σχέσεων μετασχηματισμού από το επίπεδο z στο επίπεδο ω και από το ω στο επίπεδο ζ να υπολογίσουμε τις αντίστοιχες ταχύτητες $c_{\zeta\kappa}$, που η αντίστοιχη παράλληλη ροή στο ζ επάγεται επί των σημείων (x_{κ}, y_{κ}) της αεροτομής.

3.3 ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΤΑΧΥΤΗΤΑΣ ΚΑΙ ΠΙΕΣΗΣ

Με την ανάπτυξη που προηγήθηκε, προσδιορίσαμε τη σύμμορφη γεωμετρική συσχέτιση μεταξύ μιας τυχαίας αεροτομής στο επίπεδο ζ και του αντίστοιχου

κύκλου της στο επίπεδο z . Ο διπλός μετασχηματισμός $\zeta \rightarrow \omega \rightarrow z$ ή αντίστροφα είναι τέτοιος, ώστε η ροή που αναφέρεται σε αυτόν παραμένει αναλλοίωτη σε άπειρη απόσταση. Αυτό σημαίνει ότι η ταχύτητα της παράλληλης ροής U_z για $z \rightarrow \infty$ και αυτή της παράλληλης ροής U_ζ για $\zeta \rightarrow \infty$ είναι ίσες, δηλαδή $U_z = U_\zeta = V_\infty$.

Το μέτρο $c_\zeta = c$ της ταχύτητας στο επίπεδο ζ , συσχετίζεται με το μέτρο c_z της αντίστοιχης ταχύτητας στο επίπεδο z σύμφωνα με το διπλό μετασχηματισμό

$$c \equiv c_\zeta = c_z \left| \frac{dz}{d\omega} \right| \cdot \left| \frac{d\omega}{d\zeta} \right|. \quad (3.29)$$

Αν ο κύκλος στο επίπεδο z θεωρηθεί στερεοποιημένος μέσα σε παράλληλη ροή ως προς τον πραγματικό άξονα x , τότε ισοδυναμεί με επαλληλία δίπολου πηγών διεύθυνσης παράλληλης προς τον άξονα x και δίνης ακτίνας R , που έχουν ως κέντρο το κέντρο του κύκλου που βρίσκεται στην αρχή των αξόνων. Το μιγαδικό δυναμικό σε αυτή την περίπτωση είναι

$$W(z) = V_\infty \left(z + \frac{R^2}{z} \right) + \frac{i\Gamma}{2\pi} \log z. \quad (3.30)$$

Αν η παράλληλη ροή σχηματίζει γωνία α ως προς τον άξονα x , τότε το μιγαδικό δυναμικό γράφεται

$$W(z) = V_\infty \left(ze^{i\alpha} + \frac{R^2}{ze^{i\alpha}} \right) + \frac{i\Gamma}{2\pi} \log z. \quad (3.31)$$

Παραγωγίζοντας την τελευταία σχέση παίρνουμε

$$\frac{dW}{dz} = V_\infty e^{i\alpha} \left(1 - \frac{R^2}{z^2} e^{-2i\alpha} \right) + \frac{i\Gamma}{2\pi z}. \quad (3.32)$$

Το μέτρο της ταχύτητας σε οποιοδήποτε σημείο του πεδίου ροής είναι ίσο με το μέτρο της πρώτης παραγώγου του μιγαδικού δυναμικού. Έτσι, το μέτρο c_z της ταχύτητας σε σημεία του κύκλου $z = Re^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq \pi$ ή $-\pi \leq \varphi \leq 0$ είναι

$$\begin{aligned} c_z &= \left| -\frac{dW}{dz} \right|_{z=Re^{i\varphi}} = \left| -V_\infty e^{i\alpha} (1 - e^{-2i(\alpha+\varphi)}) - i \frac{\Gamma}{2\pi R} e^{-i\varphi} \right| = \left| -V_\infty e^{-i\varphi} (e^{i(\alpha+\varphi)} - e^{-i(\alpha+\varphi)}) - i \frac{\Gamma}{2\pi R} e^{-i\varphi} \right| \\ &= \left| -ie^{-i\varphi} \left(2V_\infty \sin(\alpha + \varphi) + \frac{\Gamma}{2\pi R} \right) \right|, \text{ δηλαδή} \\ c_z &= 2V_\infty \sin(\alpha + \varphi) + \frac{\Gamma}{2\pi R}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Σύμφωνα με τις σχέσεις (3.13) και (3.21), γράφουμε

$$\omega = ze^{\eta - \eta_0 - i\varepsilon}.$$

Παραγωγίζοντας την τελευταία σχέση ως προς z παίρνουμε:

$$\frac{d\omega}{dz} = e^{\eta - \eta_0 - i\varepsilon} + ze^{\eta - \eta_0 - i\varepsilon} \frac{d(\eta - i\varepsilon)}{dz} = \frac{ze^{\eta - \eta_0 - i\varepsilon}}{z} \left(1 + z \frac{d(\eta - i\varepsilon)}{dz} \right) = \frac{\omega}{z} \left(1 + z \frac{d(\eta - i\varepsilon)}{dz} \right) =$$

$$= \frac{\omega}{z} \left(1 + \frac{d(\eta - i\varepsilon)}{id\varphi} \right) = \frac{\omega}{z} \left(\frac{\frac{d\varphi}{d\theta} - \frac{d\varepsilon}{d\theta} - i \frac{d\eta}{d\theta}}{\frac{d\varphi}{d\theta}} \right) = \frac{\omega}{z} \left(\frac{1 - i \frac{d\eta}{d\theta}}{1 + \frac{d\eta}{d\theta}} \right),$$

οπότε το αντίστοιχο μέτρο είναι $\left| \frac{d\omega}{dz} \right| = e^{\eta - \eta_0} \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{d\eta}{d\theta} \right)^2}}{1 + \frac{d\varepsilon}{d\theta}}$. (3.34)

Από τις σχέσεις (3.1) και (3.2) βρήκαμε $\zeta = 2a \cosh(\eta + i\theta)$. Παραγωγίζοντας την τελευταία σχέση ως προς ω παίρνουμε

$$\frac{d\zeta}{d\omega} = 2a \sinh(\eta + i\theta) \frac{d(\eta + i\theta)}{d\omega} = 2 \sinh(\eta + i\theta) e^{-(\eta + i\theta)},$$

τότε $\left| \frac{d\zeta}{d\omega} \right|^2 = 4e^{-2\eta} (\sinh^2 \eta \cdot \cos^2 \theta + \cosh^2 \eta \cdot \sin^2 \theta) = 4e^{-2\eta} (\sinh^2 \eta + \sin^2 \theta)$, οπότε

$$\left| \frac{d\zeta}{d\omega} \right| = 2e^{-\eta} \sqrt{\sinh^2 \eta + \sin^2 \theta}. \quad (3.35)$$

Επομένως, σύμφωνα με τις σχέσεις (3.33), (3.34) και (3.35), η σχέση (3.29) γράφεται

$$c = \frac{\left[2V_\infty \sin(\alpha + \varphi) + \frac{\Gamma}{2\pi R} \right] \cdot \left(1 + \frac{d\varepsilon}{d\theta} \right)}{2 \sqrt{\left[1 + \left(\frac{d\eta}{d\theta} \right)^2 \right] (\sinh^2 \eta + \sin^2 \theta)}} e^{\eta_0}, \quad (3.36)$$

η οποία δίνει την κατανομή της ταχύτητας πάνω στην αεροτομή.

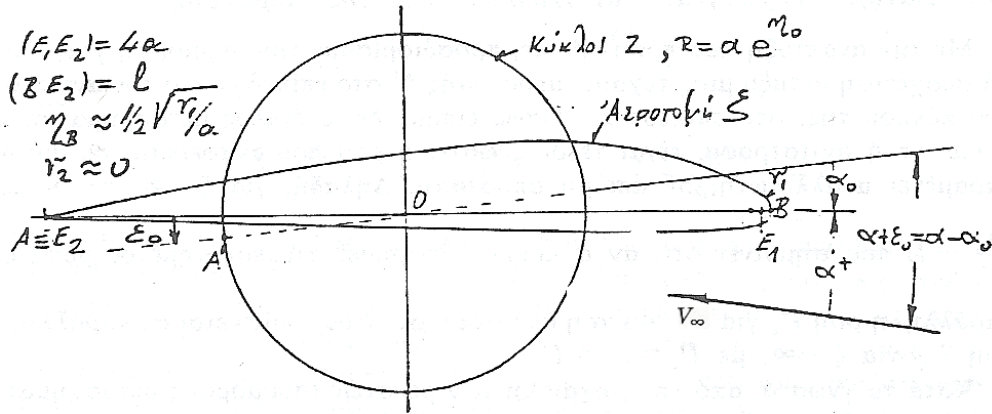
Για να έχει φυσική έννοια ο μετασχηματισμός, θα πρέπει στην ακμή φυγής της αεροτομής να ισχύει η υπόθεση Joukowski. Σύμφωνα με το Σχήμα 3.3, το σημείο A' στο z αντιστοιχεί στην ακμή φυγής A της αεροτομής του ζ (με μηδενική ακτίνα καμπυλότητας), δηλαδή σε γωνία $\theta = \pi$ για το επίπεδο ω . Οι γωνίες φ και θ του μετασχηματισμού $z \rightarrow \omega$ πληρούν τη σχέση

$$\varphi = \theta + \varepsilon.$$

Έτσι, η γωνία φ_{10} που αντιστοιχεί στην ακμή φυγής της αεροτομής είναι

$$\varphi_{\theta=\pi} = \varphi_{10} = \pi + \varepsilon_{10},$$

όπου ε_{10} η διαφορά των γωνιών φ και θ στη θέση $\theta = \pi$.



Σχήμα 3.3: Η αεροτομή σε επίπεδο ζ και η μετασχηματισμένη τελική μορφή της σε κύκλο στο επίπεδο z .

Σύμφωνα με την υπόθεση Joukowski, στο σημείο A' του κύκλου z θα είναι $(c_z)_{A'} = 0$, δηλαδή

$$(c_z)_{A'} = 2V_\infty \sin(\alpha + \pi + \varepsilon_{10}) + \frac{\Gamma}{2\pi R} = 0.$$

Επομένως,

$$\Gamma = 4\pi R V_\infty \sin(\alpha + \varepsilon_{10}). \quad (3.37)$$

Αν $\alpha = -\varepsilon_{10}$ η κυκλοφορία $\Gamma = 0$, που σημαίνει ότι η δυναμική άνωση μηδενίζεται.

Η $-\varepsilon_{10}$ ονομάζεται για αυτό, γωνία μηδενικής άνωσης. Είναι λοιπόν,

$$c_z = 2V_\infty [\sin(\alpha + \varepsilon + \theta) + \sin(\alpha + \varepsilon_{10})]$$

οπότε η σχέση (3.36) γράφεται

$$c = \frac{V_\infty [\sin(\alpha + \varepsilon + \theta) + \sin(\alpha + \varepsilon_{10})] \cdot \left(1 + \frac{d\varepsilon}{d\theta}\right)}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{d\eta}{d\theta}\right)^2\right]} (\sinh^2 \eta + \sin^2 \theta)} e^{\eta_0}. \quad (3.38)$$

Η c υπολογίζεται προσεγγιστικά μέσω του χωρισμού της όλης περιμέτρου της αεροτομής σε 20 τμήματα.

Για το αντίστοιχο σημείο A της ακμής φυγής της αεροτομής με το σημείο A' του κύκλου, $(c_z)_{A'} = 0$, διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

1. Ακμή φυγής με μηδενική ακτίνα καμπυλότητας (αεροτομή Joukowski) είναι

$$\left. \frac{d\zeta}{d\omega} \right|_A = 0, \text{ οπότε η } (c_z)_A \text{ είναι πεπερασμένη. Η αεροτομή έχει ένα σημείο}$$

ανακοπής κοντά στο μέτωπο προσβολής. Για αυτή την περίπτωση ισχύουν οι σχέσεις (3.37) και (3.38).

2. Ακμή φυγής με μη μηδενική ακτίνα καμπυλότητας. Το σημείο ανακοπής A , $(c_z)_A = 0$, στην ακμή φυγής λαμβάνεται υποκειμενικά, σύμφωνα με το οποίο ρυθμίζεται κατάλληλα η κυκλοφορία. Από την επιλογή αυτού του σημείου

εξαρτάται η ακρίβεια της όλης μεθόδου. Η αεροτομή σε αυτή την περίπτωση έχει δύο σημεία ανακοπής.

Η αδιάστατη μορφή της ταχύτητας c περί την αεροτομή, υψωμένη στο τετράγωνο, προκύπτει από τη σχέση (3.38) ως

$$\left(\frac{c}{V_\infty}\right)^2 = \frac{[\sin(\alpha + \varepsilon + \theta) + \sin(\alpha + \varepsilon_{10})]^2}{\left[1 + \left(\frac{d\eta}{d\theta}\right)^2\right] \cdot (\sinh^2 \eta + \sin^2 \theta)} \cdot \left(1 + \frac{d\varepsilon}{d\theta}\right)^2 \cdot e^{2\eta_0}. \quad (3.39)$$

Η κατανομή της στατικής πίεσης p επί της αεροτομής πληροί για ασυμπίεστο ρευστό, πυκνότητας ρ –όπως αυτό θεωρείται για υποηχητικές ροές– την παρακάτω εξίσωση Bernoulli

$$p + \frac{\rho}{2}c^2 = p_\infty + \frac{\rho}{2}V_\infty^2,$$

όπου p_∞ η στατική πίεση της παράλληλης ροής στο άπειρο, ο δε αδιάστατος συντελεστής πίεσης C_p δίνεται από την έκφραση

$$C_p \equiv \frac{p - p_\infty}{\frac{\rho}{2}V_\infty^2} = 1 - \left(\frac{c}{V_\infty}\right)^2$$

ή

$$C_p = 1 - \frac{[\sin(\alpha + \varepsilon + \theta) + \sin(\alpha + \varepsilon_{10})]^2}{\left[1 + \left(\frac{d\eta}{d\theta}\right)^2\right] \cdot (\sinh^2 \eta + \sin^2 \theta)} \cdot \left(1 + \frac{d\varepsilon}{d\theta}\right)^2 \cdot e^{2\eta_0}. \quad (3.40)$$

3.4 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ ΑΝΩΣΗΣ ΚΑΙ ΡΟΠΗΣ

Από τις σχέσεις (3.1), (3.12) προκύπτει η ακόλουθη σχέση

$$\zeta = 2a \cosh\left(\log z + \sum_1^\infty \frac{c_n}{z^n}\right),$$

ή αναπτύσσοντας αυτή τη σχέση σε απειροσειρά ως προς z προκύπτει

$$\zeta = c_1 + z + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \frac{a_3}{z^3} + \dots, \quad (3.41)$$

όπου $a_n = k_{n+1} + a^2 h_{n-1}$, $n = 1, 2, 3, \dots$

Οι σταθερές k_n δίνονται από την ακόλουθη αναδρομική μορφή ως:

$$\begin{aligned} k_1 &= c_1 \\ 2k_2 &= k_1 c_1 + 2c_2 \\ 3k_3 &= k_2 c_1 + 2k_1 c_2 + 3c_3 \\ 4k_4 &= k_3 c_1 + 2k_2 c_2 + 3k_1 c_3 + 4c_4 \\ &\dots \end{aligned}$$

Οι σταθερές h_n έχουν την ίδια μορφή όπως οι k_n , με αντικατάσταση του c_i με $-c_i$ και $h_0 = 1$. Οι ίδιοι συντελεστές $c_i = A_i + iB_i$ δίνονται από τις σχέσεις (3.16) και (3.17).

Θεωρώντας κλειστή καμπύλη A γύρω από την αεροτομή και έστω C η εικόνα της γύρω από τον κύκλο στο επίπεδο z εφαρμόζουμε το Θεώρημα του Blasius. Οι συνολικές δυνάμεις P_x και P_y που ασκούνται στις διευθύνσεις x και y δίνονται από την εξίσωση

$$P_x - iP_y = \frac{i\rho}{2} \oint_A \left(\frac{dW}{d\zeta} \right)^2 d\zeta = \frac{i\rho}{2} \oint_C \left(\frac{dW}{d\zeta} \right)^2 \frac{d\zeta}{dz} dz.$$

Από τη σχέση (3.41) προκύπτει με παραγωγή ως προς z

$$\frac{d\zeta}{dz} = 1 - \frac{a_1}{z^2} - \frac{a_2}{z^3} - \dots,$$

η οποία μαζί με τη σχέση (3.32) δίνει

$$\frac{dW}{d\zeta} = \frac{dW}{dz} \cdot \frac{dz}{d\zeta} = -V_\infty e^{i\alpha} - \frac{i\Gamma}{2\pi} \frac{1}{z} + (R^2 V_\infty e^{-i\alpha} - a_1 V_\infty e^{i\alpha}) \frac{1}{z^2} + \dots$$

Υψώνοντας στο τετράγωνο παίρνουμε

$$\left(\frac{dW}{d\zeta} \right)^2 = A_0 + \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \dots,$$

$$A_0 = V_\infty^2 e^{2i\alpha}$$

$$\text{όπου: } A_1 = iV_\infty e^{i\alpha} \frac{\Gamma}{\pi}, \quad \text{τότε } P_x - iP_y = \frac{i\rho}{2} (2\pi i A_1) = -ie^{i\alpha} \rho V_\infty \Gamma,$$

$$A_2 = -2R^2 V_\infty^2 + 2a_1 V_\infty^2 e^{2i\alpha} - \frac{\Gamma^2}{4\pi^2}$$

οπότε

$$\left. \begin{aligned} P_x &= \rho V_\infty \Gamma \sin \alpha \\ P_y &= \rho V_\infty \Gamma \cos \alpha \end{aligned} \right\}$$

Επομένως, η συνολική δύναμη της άνωσης ανά μονάδα βάθους πεδίου είναι $L = \rho V_\infty \Gamma$, η οποία είναι κάθετη στη διεύθυνση της ταχύτητας στο άπειρο.

Ο συντελεστής άνωσης είναι $C_L = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2 l}$. Με αντικατάσταση της L

παίρνουμε

$$C_L = 8\pi \frac{R}{l} \sin(\alpha + \varepsilon_{10}). \quad (3.42)$$

Στην περίπτωση αεροτομής, όπου η ακτίνα καμπυλότητας r_1 στο μέτωπο προσβολής είναι πολύ μικρή σε σχέση με το μήκος l της χορδής, σύμφωνα με την προσεγγιστική έκφραση (3.10) είναι

$$l \approx 4a = 4R e^{-\eta_0}.$$

Επειδή η αεροτομή είναι αρκετά λεπτό σώμα, η τιμή του η_0 είναι αρκετά μικρή, περίπου ίση με το μηδέν. Συνεπώς, $l \approx 4R$, οπότε η προσεγγιστική έκφραση του C_L γράφεται

$$C_L \approx 2\pi \sin(\alpha + \varepsilon_{10}).$$

Από τη σχέση (3.42) προκύπτει ότι η γωνία μηδενικής άνωσης είναι $\alpha_0 = -\varepsilon_{10}$, οπότε καταλήγουμε στην ακόλουθη έκφραση για το C_L ,

$$C_L \approx 2\pi \sin(\alpha - \alpha_0). \quad (3.43)$$

Τέλος, αν η γωνία $\alpha - \alpha_0 = \alpha + \varepsilon_{10}$ είναι αρκετά μικρή, ο συντελεστής C_L γράφεται

$$C_L \approx 2\pi(\alpha - \alpha_0). \quad (3.44)$$

Η ροπή της συνολικής δύναμης της άνωσης ως προς την αρχή $\zeta = 0$ δίνεται από το Θεώρημα του Blasius:

$$\begin{aligned} M &= \text{πραγματικό μέρος του} -\frac{\rho}{2} \oint_A \left(\frac{dW}{d\zeta} \right)^2 \zeta d\zeta = \pi \cdot \mu \cdot \text{του} -\frac{\rho}{2} \oint_C \left(\frac{dW}{d\zeta} \right)^2 \zeta \frac{d\zeta}{dz} dz = \\ &= \pi \cdot \mu \cdot \text{του} -\frac{\rho}{2} \oint_C \left(A_0 + \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \dots \right) \cdot \left(c_1 + z + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots \right) \cdot \left(1 - \frac{a_1}{z^2} + \dots \right) dz = \\ &= \pi \cdot \mu \cdot \text{του} -\frac{\rho}{2} 2\pi i (\text{συντελεστής του } z^{-1}) = \pi \cdot \mu \cdot \text{του} -\frac{\rho}{2} 2\pi i (A_2 + A_1 c_1), \end{aligned}$$

η ροπή M είναι το φανταστικό μέρος του $\pi \rho (A_2 + A_1 c_1)$. Θέτοντας $c_1 = m e^{i\delta_1}$ και $a_1 = b^2 e^{2i\gamma_1}$ παίρνουμε

$$M = 2\pi \rho V_\infty^2 b^2 \sin 2(\alpha + \gamma_1) + \rho V_\infty \Gamma m \cos(\alpha + \delta_1)$$

ή

$$M = 2\pi \rho V_\infty^2 b^2 \sin 2(\alpha + \gamma_1) + 4\pi \rho V_\infty^2 R m \sin(\alpha + \varepsilon_0) \cos(\alpha + \delta_1).$$

Ο συντελεστής ροπής είναι $C_M = \frac{M}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2 l^2}$. Με αντικατάσταση παίρνουμε

$$C_M = \frac{4\pi}{l^2} [b^2 \sin 2(\alpha + \gamma_1) + 2Rm \sin(\alpha + \varepsilon_0) \cos(\alpha + \delta_1)]. \quad (3.45)$$

3.5 ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ

Δίνεται αεροτομή μήκους l με γνωστό περίγραμμα και γνωστές ακτίνες καμπυλότητας r_1 για το μέτωπο προσβολής και r_2 για την ακμή φυγής. Στη συνέχεια θεωρούμε ότι $r_2 = 0$. Εφόσον είναι γνωστό το περίγραμμα της αεροτομής, θεωρούμε δίκλαδη συνάρτηση $y = y(x)$ που να περιγράφει το άνω και κάτω σκέλος του περιγράμματος σε σύστημα συντεταγμένων, ώστε το πεδίο ορισμού της να είναι

$\left[-2a, 2a + \frac{r_1}{2}\right]$, όπου $a = \frac{1}{4}\left(l - \frac{r_1}{2}\right)$. Στόχος είναι ο υπολογισμός του μέτρου της ταχύτητας επί της αεροτομής με βάση τη σχέση (3.38) σε σημεία που να αντιστοιχούν σε γωνίες $\theta_\kappa = \frac{\kappa\pi}{10}$, $\kappa = 0, 1, \dots, 19$ του αντίστοιχου επιπέδου του ψευδόκυκλου. Η σχέση (3.38) γράφεται

$$c_\kappa = \frac{V_\infty [\sin(\alpha + \varepsilon_\kappa + \theta_\kappa) + \sin(\alpha + \varepsilon_{10})] \cdot \left(1 + \frac{\varepsilon_{\kappa+1} - \varepsilon_\kappa}{\theta_{\kappa+1} - \theta_\kappa}\right)}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{\eta_{\kappa+1} - \eta_\kappa}{\theta_{\kappa+1} - \theta_\kappa}\right)^2\right]} (\sinh^2 \eta_\kappa + \sin^2 \theta_\kappa)} e^{H_0}. \quad (3.46)$$

Υπολογισμός $(\eta_\kappa, \theta_\kappa)$

Η αντίστοιχη τιμή του η_κ , των ζευγών $(\eta_\kappa, \theta_\kappa)$, προκύπτει από τις σχέσεις (3.5), (3.7), καθορίζοντας αρχικά σφάλμα E και σαρώνοντας με βήμα $\Delta x < E$ το διάστημα $\left[-2a, 2a + \frac{r_1}{2}\right]$ αναζητώντας ζεύγος τιμών (x_κ, y_κ) με $y_\kappa = y(x_\kappa)$, ώστε να ικανοποιείται η ανίσωση

$$\left|2\sin^2 \theta_\kappa - p_\kappa - \sqrt{p_\kappa^2 + \left(\frac{y_\kappa}{a}\right)^2}\right| < E. \quad (3.47)$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε το η_κ από την εξίσωση

$$2\sinh^2 \eta_\kappa = -p_\kappa + \sqrt{p_\kappa^2 + \left(\frac{y_\kappa}{a}\right)^2}, \quad (3.48)$$

αλλά και το άθροισμα $\sinh^2 \eta_\kappa + \sin^2 \theta_\kappa$.

Σε αυτή την ενότητα με η_0 συμβολίζουμε την τιμή του η_κ που προκύπτει από την τελευταία εξίσωση για $\kappa = 0$. Επίσης, ισχύει $\eta_0 = \eta_{20}$. Σε όλη την ενότητα οι δείκτες του η έχουν άμεση αντιστοιχία με τη γωνία που αυτό αναφέρεται.

Υπολογισμός ε_κ

Οι τιμές των ε_κ προκύπτουν από τη σχέση (3.27). Η τιμή της παραγώγου $\left(\frac{d\eta}{d\theta}\right)_\kappa$ θεωρείται ίση με $\frac{\eta_{i_2} - \eta_{i_1}}{\theta_{i_2} - \theta_{i_1}}$, όπου: $\theta_{i_2} = \theta_\kappa + \frac{\pi}{20}$, $\theta_{i_1} = \theta_\kappa - \frac{\pi}{20}$ και η_{i_2} , η_{i_1} οι αντίστοιχες τιμές αυτών των γωνιών. Οι τιμές του αθροίσματος, $\eta_{\kappa+m}$, $\eta_{\kappa-m}$, αλλά και οι τιμές η_{i_2} , η_{i_1} υπολογίζονται με όμοιο τρόπο με αυτό του παραπάνω βήματος.

Υπολογισμός H_0

Η τιμή του H_0 αντιστοιχεί στην τιμή η_0 της σχέσης (3.18) με μετατροπή του ολοκληρώματος σε άθροισμα. Έτσι, γράφουμε

$$H_0 = \frac{1}{2\pi} \sum_0^{19} \left(\frac{\eta_{\kappa+1} + \eta_\kappa}{2}\right) (\varphi_{\kappa+1} - \varphi_\kappa), \quad (3.49)$$

όπου $\varphi_{\kappa} = \varepsilon_{\kappa} + \theta_{\kappa}$.

Από τον κατά προσέγγιση προσδιορισμό της κατανομής της ταχύτητας επί της αεροτομής με τα κ -σημεία (εδώ 20, αλλά θα μπορούσαν να είναι και 40 ή περισσότερα) προκύπτει και η κατανομή της πίεσης επί της αεροτομής από τη σχέση (3.40). Είναι προφανές ότι η αύξηση των κ -σημείων δίνει μεγαλύτερη ακρίβεια στη μέθοδο. Τέλος, από τον υπολογισμό της τιμής ε_{10} , προκύπτει η τιμή του συντελεστή άνωσης από τη σχέση (3.42) με $R = ae^{H_0}$.

3.6 ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [3.1] N. A. Αθανασιάδης, *Αεροδυναμική-Αεριοδυναμική*, Αθήνα: Εκδόσεις Συμμεών, 1992.
- [3.2] T. Theodorsen, and I.E. Garrick, “*General Potential Theory of Arbitrary Wing Sections*,” National Advisory Committee for Aeronautics, California Institute of Technology, Rep. No 452, 1933.
- [3.3] R. V. Churchill, J. W. Brown, *Μιγαδικές συναρτήσεις και εφαρμογές*, Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 1998.
- [3.4] R. A. Silverman, *Introductory Complex Analysis*, New York: Dover Publications, Inc., 1972.

Αυτή η σελίδα είναι σκόπιμα λευκή.

Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΙΔΙΟΜΟΡΦΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ

4.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η Θεωρία των Λεπτών Αεροτομών με τη μέθοδο των ιδιόμορφων σημείων (method of singularities) αναπτύχθηκε από τις αρχές κιάλας της Αεροδυναμικής. Μερικές από τις αρχικές μελέτες έγιναν από τους Munk (1922), Birnbaum (1923) και κυρίως από τον Glauert (1926). Σύμφωνα με αυτή τη μέθοδο, το περίγραμμα της αεροτομής μορφώνεται με επαλληλία της παράλληλης ροής και κατάλληλης διανομής σημειακών πηγών εκροής (+) και εισροής (−) και σημειακών δινών, κατά τρόπο ώστε το περίγραμμα αυτό να αποτελεί τη διαχωριστική γραμμή του πεδίου. Το προφίλ που αντιστοιχεί στο περίγραμμα αυτό, είναι αρκετά λεπτό (λεπτή αεροτομή) και για μικρές γωνίες πρόσπτωσης είναι δυνατή μια προσέγγιση που θα απλοποιήσει με κάποιο τρόπο τους μαθηματικούς όρους του προβλήματος και θα επιτρέψει την κατασκευή μιας κλειστής μορφής λύσης (φυσική προσέγγιση) για το πρόβλημα.

Το πεδίο ροής γύρω από την αεροτομή θεωρείται διδιάστατο, μόνιμο, αστρόβιλο με κυκλοφορία ή χωρίς ($\Gamma = 0$). Ακόμη, η μέθοδος των ιδιόμορφων σημείων αναφέρεται σε υποηχητικές ροές γύρω από λεπτές αεροτομές, οπότε το ρευστό, που είναι ο αέρας, μπορεί να θεωρηθεί ασυμπίεστο, μη συνεκτικό.

4.2 ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΣΕ ΟΡΟΥΣ ΤΟΥ ΠΕΔΙΟΥ ΔΙΑΤΑΡΑΧΗΣ

Θεωρούμε μόνιμη ροή ρευστού διερχόμενο από ακίνητη αεροτομή αυθαίρετου σχήματος (βλέπε Σχήμα 4.1). Το πεδίο ροής είναι η λύση του ακόλουθου μαθηματικού προβλήματος:

Διαφορική εξίσωση (εξίσωση της συνέχειας)

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \quad (4.1)$$

Οριακή συνθήκη (συνθήκη μη εισχώρησης)

$$\text{grad}\Phi \cdot \text{grad}F = 0 \quad (4.2)$$

Συνθήκη στο άπειρο

$$\text{grad}\Phi = V_\infty \text{ στο άπειρο} \quad (4.3)$$

Συνθήκη Kutta

Η κυκλοφορία γύρω από την αεροτομή είναι τέτοια, ώστε η ταχύτητα να είναι πεπερασμένη και συνεχής στην ακμή φυγής. (4.4)

Σε αυτές τις σχέσεις η $\Phi = \Phi(x, y)$ είναι το δυναμικό της ταχύτητας και η $F(x, y) = 0$ περιγράφει το περίγραμμα της αεροτομής.

Υποδηλώνοντας με $\vec{q} = \vec{q}(x, y)$ την ταχύτητα διαταραχής (*perturbation ή disturbance velocity*) εξαιτίας της αεροτομής, γράφουμε:

$$\vec{V}(x, y) = \vec{V}_\infty + \vec{q}(x, y), \quad (4.5)$$

όπου \vec{V}_∞ είναι η ταχύτητα του ρευστού του ελεύθερου ρεύματος. Υποδηλώνοντας τις συνιστώσες του \vec{q} με u και v , και τις συνιστώσες του \vec{V} με u_t και v_t , έχουμε

$$u_t(x, y) = V_\infty \cos \alpha + u(x, y) \quad (4.6)$$

$$v_t(x, y) = V_\infty \sin \alpha + v(x, y), \quad (4.7)$$

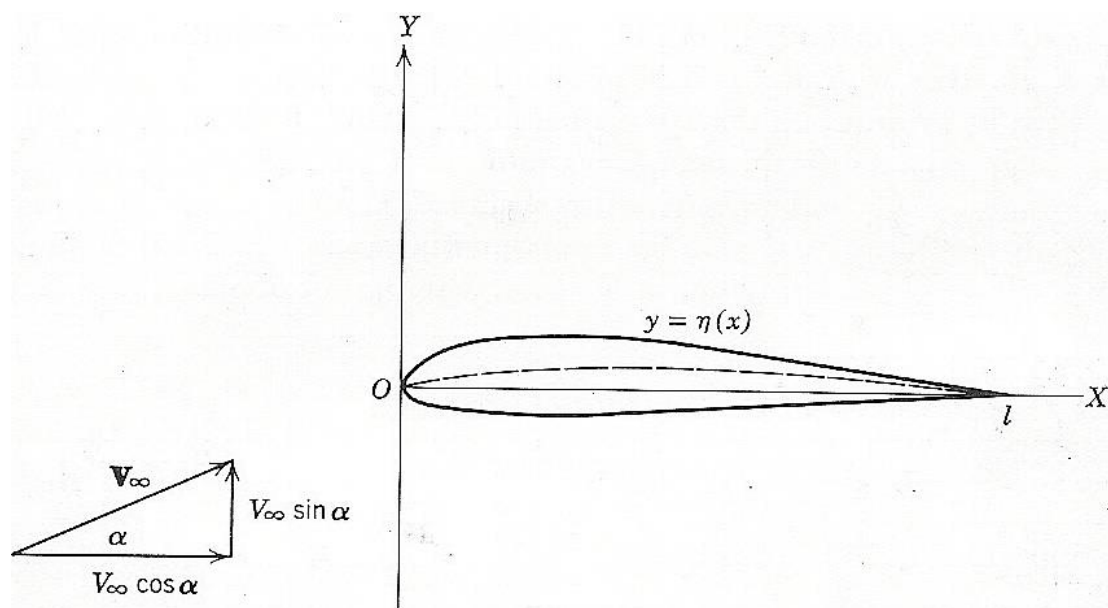
όπου α είναι η γωνία πρόσπτωσης (βλέπε Σχήμα 4.1). Εισάγοντας τη $\phi = \phi(x, y)$ ως το δυναμικό της ταχύτητας διαταραχής έχουμε:

$$u(x, y) = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (4.8)$$

$$v(x, y) = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (4.9)$$

$$\text{grad} \Phi = V_\infty + \text{grad} \phi$$

$$\Phi(x, y) = (xV_\infty \cos \alpha + yV_\infty \sin \alpha) + \phi. \quad (4.10)$$



Σχήμα 4.1: Συντεταγμένες και σύμβολα για ροή περί την αεροτομή [4.1].

Σε όρους που αφορούν το πεδίο διαταραχής, το ανωτέρω μαθηματικό πρόβλημα παίρνει την ακόλουθη μορφή:

Διαφορική εξίσωση

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (4.11)$$

Οριακή συνθήκη

$$(\vec{V}_\infty + \text{grad}\phi) \cdot \text{grad}F = 0 \quad (4.12)$$

Συνθήκη στο άπειρο

$$\text{το } \text{grad}\phi \rightarrow 0 \text{ στο άπειρο} \quad (4.13)$$

Συνθήκη Kutta

Η κυκλοφορία γύρω από την αεροτομή πρέπει να είναι τέτοια, ώστε η ταχύτητα της διαταραχής $\vec{q} = \text{grad}\phi$ να είναι πεπερασμένη και συνεχής στην ακμή φυγής. (4.14)

Όπως παρατηρούμε, είναι μάλλον δύσκολο να λυθεί το ευθύ πρόβλημα.

Για να σημειώσουμε κάποια πρόοδο στην επίλυση, απλοποιούμε το πρόβλημα με την εισαγωγή της προσέγγισης των μικρών διαταραχών (λόγω της ύπαρξης της αεροτομής στο πεδίο ροής). Με μια τέτοια προσέγγιση, η οριακή συνθήκη (boundary condition) μπορεί να περιοριστεί σε μια απλούστερη μορφή από την εξίσωση (4.12) και να μεταφερθεί στον άξονα (χορδή) της αεροτομής. Κατόπιν, το ίδιο το πρόβλημα μπορεί να αντιπροσωπευθεί ως υπέρθεση (superposition) τριών άλλων απλούστερων προβλημάτων. Στη συνέχεια παρουσιάζουμε ένα τέτοιο μαθηματικό μοντέλο.

4.3 ΑΠΛΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΟΡΙΑΚΗΣ ΣΥΝΘΗΚΗΣ

Εξετάζουμε την οριακή συνθήκη όπως εκφράζεται από την εξίσωση (4.12) σε όρους u και v αντί για ϕ , οπότε η εξίσωση (4.12) γράφεται

$$(V_\infty \cos a + u) \frac{\partial F}{\partial x} + (V_\infty \sin a + v) \frac{\partial F}{\partial y} = 0. \quad (4.15)$$

Υποθέτουμε ότι το περίγραμμα της αεροτομής περιγράφεται ως

$$\begin{aligned} y = n(x) = n_u(x) & \text{ για το άνω σύνορο} \\ & = n_l(x) \text{ για το κάτω σύνορο.} \end{aligned} \quad (4.16)$$

Τότε, έχουμε:

$$F(x, y) = n(x) - y = 0 \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{dn}{dx} \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -1 \quad (4.19)$$

και αντικαθιστώντας τις σχέσεις (4.18) και (4.19) στην εξίσωση (4.15), παίρνουμε

$$v = (V_\infty \cos a + u) \frac{dn}{dx} - V_\infty \sin a \text{ στο } y = n(x), \quad 0 \leq x \leq l. \quad (4.20)$$

Παρατηρούμε ότι η v θα ήταν μια γνωστή γραμμική συνάρτηση ως προς dy/dx χωρίς την παρουσία της u στον πρώτο όρο του δεξιού μέλους της σχέσης (4.20). Όμως λόγω της παρουσίας της u η σχέση της οριακής συνθήκης είναι μη γραμμική.

Για να απλοποιήσουμε τη σχέση (4.20), εισάγουμε ορισμένες υποθέσεις. Υποθέτουμε ότι η αεροτομή είναι αρκετά λεπτή και επιμηκυμένη, που σημαίνει ότι το περίγραμμά της είναι μόνο μια μικρή απόκλιση από τη χορδή της και ότι η γωνία πρόσπτωσης είναι αρκετά μικρή, έτσι ώστε οι ταχύτητες διαταραχής u και v να είναι μικρές έναντι της V_∞ .

$$u \ll V_\infty, v \ll V_\infty.$$

Η μορφή της αεροτομής είναι τέτοια, ώστε

$$\frac{\partial F}{\partial x} < \frac{\partial F}{\partial y}.$$

Με άλλα λόγια, η καθετότητα στο περίγραμμα της αεροτομής πρακτικά ταυτίζεται με την καθετότητα στη χορδή της. Σύμφωνα με αυτές τις υποθέσεις θέτουμε

$$V_\infty \cos \alpha = V_\infty$$

$$V_\infty \sin \alpha = V_\infty \alpha,$$

και απαλείφοντας την $u \partial F / \partial x = u dn / dx$ συγκρίνοντας την με τους άλλους όρους της οριακής συνθήκης στη σχέση (4.20) γράφουμε

$$v[x, n(x)] = V_\infty \frac{dn}{dx} - V_\infty \alpha, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (4.21)$$

Αυτή η απλουστευμένη σχέση είναι μερικές φορές γνωστή ως η *γραμμικοποιημένη μορφή (linearized form) της οριακής συνθήκης*.

Αμέσως παρατηρούμε ότι η υπόθεση των μικρών διαταραχών δεν ισχύει κοντά και επί των σημείων ανακοπής που εμφανίζονται στην αεροτομή, γιατί σε αυτές τις περιοχές η ταχύτητα διαταραχής είναι της ίδιας τάξης μεγέθους με την ταχύτητα στο άπειρο. Περαιτέρω σημειώνουμε ότι εάν η αεροτομή έχει μια στρογγυλεμένη ακμή φυγής η υπόθεση ότι η $\partial F / \partial x$ είναι πολύ μικρότερη από την $\partial F / \partial y$, παραβιάζεται κοντά και επί της ακμής. Βάσει αυτών των εκτιμήσεων, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η απλοποίηση που κάναμε έχει ως εγγενές μειονέκτημα ότι σε ορισμένες περιοχές η λύση του προκύπτοντος προβλήματος δεν ισχύει. Ευτυχώς για τις εφαρμογές, τέτοιες περιοχές είναι αρκετά μικρές σε σχέση με ολόκληρο το περίγραμμα της αεροτομής και η λύση του απλουστευμένου προβλήματος είναι ικανοποιητική.

4.4 ΜΕΤΑΦΟΡΑ ΤΗΣ ΟΡΙΑΚΗΣ ΣΥΝΘΗΚΗΣ ΑΠΟ ΤΟ ΠΕΡΙΓΡΑΜΜΑ ΣΤΗ ΧΟΡΔΗ ΤΗΣ ΑΕΡΟΤΟΜΗΣ

Παρόλο ότι η σχέση (4.21) είναι γραμμική, η εφαρμογή της είναι μάλλον δυσχερής για τον υπολογισμό της τιμής της ταχύτητας σε σημεία επί της αεροτομής. Λαμβάνοντας υπόψη τις υποθέσεις που έχουμε κάνει ήδη, αυτή η δυσχέρεια μπορεί

να αρθεί ως ακολούθως. Υποθέτοντας ότι η $v(x, y)$ μπορεί να αναπτυχθεί σε σειρά Taylor γύρω από σημεία της χορδής, η οποία κείται στον άξονα X , $0 \leq x \leq l$ γράφουμε

$$v[x, n(x)] = v(x, 0) + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_{x,0} n(x) + \dots, \quad 0 \leq x \leq l.$$

Σύμφωνα με τις προηγούμενες προσεγγίσεις μας, μπορούμε να απαλείψουμε τον $(\partial v / \partial y)_{x,0} n(x)$ και τους υψηλότερης τάξης όρους. Μπορούμε συνεπώς να θέσουμε

$$v[x, n(x)] = v(x, 0), \quad 0 \leq x \leq l. \quad (4.22)$$

Κάνοντας αυτή την προσέγγιση, η σχέση (4.21) γίνεται

$$v(x, 0) = V_\infty \frac{dn}{dx} - V_\infty \alpha, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (4.23)$$

Λαμβάνοντας υπόψη την εξίσωση (4.16), αναλύουμε την σχέση (4.23) με το να γράψουμε

$$\left. \begin{aligned} v(x, 0_+) &= V_\infty \frac{dn_u}{dx} - V_\infty \alpha \\ v(x, 0_-) &= V_\infty \frac{dn_l}{dx} - V_\infty \alpha \end{aligned} \right\} \quad 0 \leq x \leq l, \quad (4.24)$$

όπου 0_+ και 0_- δείχνουν την άνω και κάτω πλευρά του άξονα X , αντιστοίχως, στο τμήμα $0 \leq x \leq l$. Αυτή η μεταφορά της οριακής συνθήκης όπως εκτίθεται στις σχέσεις (4.24) είναι δυνατή μόνο εάν η $v(x, y)$ μπορεί να αναπτυχθεί σε σειρά Taylor (αναλυτική συνάρτηση) γύρω από τη χορδή. Έχουμε υποθέσει ότι αυτό είναι δυνατό, αλλά η υπόθεσή μας μπορεί να ελεγχθεί μόνο εκ των υστέρων.

4.5 ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΛΕΠΤΩΝ ΑΕΡΟΤΟΜΩΝ

Εισάγοντας την απλουστευμένη οριακή συνθήκη και τη μεταφορά της στη χορδή (άξονας X) της αεροτομής, εκφράζουμε το μαθηματικό πρόβλημα που διέπει το πεδίο διαταραχής ως:

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (4.25)$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_{x,0} = v(x, 0) = V_\infty \frac{dn}{dx} - V_\infty a, \quad 0 \leq x \leq l \quad (4.26)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \text{ και } \frac{\partial \phi}{\partial y} \rightarrow 0 \text{ στο άπειρο} \quad (4.27)$$

Η κυκλοφορία είναι τέτοια, ώστε οι όροι $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ και $\frac{\partial \phi}{\partial y}$ να είναι πεπερασμένοι και συνεχείς στην ακμή φυγής. (4.28)

Έστω $\phi_1(x, y)$ και $\phi_2(x, y)$, αντιστοίχως, είναι οι λύσεις των ακόλουθων δύο προβλημάτων:

$$1. \nabla^2 \phi_1 = 0$$

$$\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial y} \right)_{x,0} = V_\infty \frac{dn}{dx}, \quad 0 \leq x \leq l$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial x}, \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \rightarrow 0 \text{ στο άπειρο}$$

Η κυκλοφορία είναι τέτοια, ώστε οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial \phi_1}{\partial x}, \frac{\partial \phi_1}{\partial y}$ να είναι

πεπερασμένες και συνεχείς στην ακμή φυγής.

$$2. \nabla^2 \phi_2 = 0$$

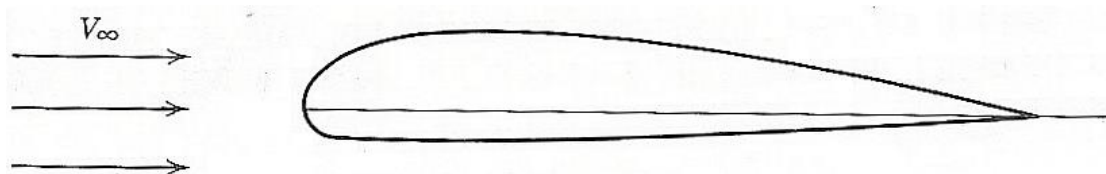
$$\left(\frac{\partial \phi_2}{\partial y} \right)_{x,0} = -V_\infty a, \quad 0 \leq x \leq l$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial x}, \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \rightarrow 0 \text{ στο άπειρο}$$

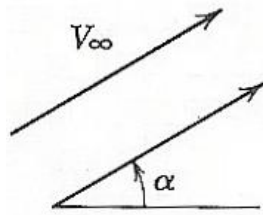
Η κυκλοφορία είναι τέτοια, ώστε οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial \phi_2}{\partial x}, \frac{\partial \phi_2}{\partial y}$ να είναι

πεπερασμένες και συνεχείς στην ακμή φυγής.

Κατόπιν, λόγω της γραμμικότητας της εξίσωσης Laplace, η $\phi_1 + \phi_2$ είναι η λύση του προβλήματος για το ϕ . Έτσι, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η λύση για το ϕ μπορεί να ληφθεί ως υπέρθεση των λύσεων ϕ_1 και ϕ_2 των αντίστοιχων προβλημάτων (1) και (2). Το Πρόβλημα 1 αντιπροσωπεύει, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.2, τη μόνιμη ροή περί την αεροτομή σε μηδενική γωνία πρόσπτωσης. Η ταχύτητα του ελεύθερου ρεύματος είναι V_∞ . Το Πρόβλημα 2 αντιπροσωπεύει, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.3, τη μόνιμη ροή περί την επίπεδη πλάκα σε γωνία πρόσπτωσης ίσης με α .



Σχήμα 4.2: Αεροτομή σε παράλληλη ροή υπό μηδενική γωνία πρόσπτωσης [4.1].



Σχήμα 4.3: Επίπεδη πλάκα σε παράλληλη ροή υπό μη μηδενική γωνία πρόσπτωσης [4.1].

Το Πρόβλημα 1 μπορεί περαιτέρω να αντιπροσωπευθεί ως υπέρθεση δύο άλλων προβλημάτων. Για να δειχθεί αυτό, εισάγουμε την αποκαλούμενη *συνάρτηση καμπυλότητας (camber function)* που ορίζεται ως

$$n_c = \frac{1}{2}(n_u + n_l) \quad (4.29)$$

και τη *συνάρτηση πάχους (thickness function)* που ορίζεται ως

$$n_t = \frac{1}{2}(n_u - n_l). \quad (4.30)$$

Έτσι, έχουμε

$$\begin{aligned} n_u &= n_c + n_t \\ n_l &= n_c - n_t. \end{aligned} \quad (4.31)$$

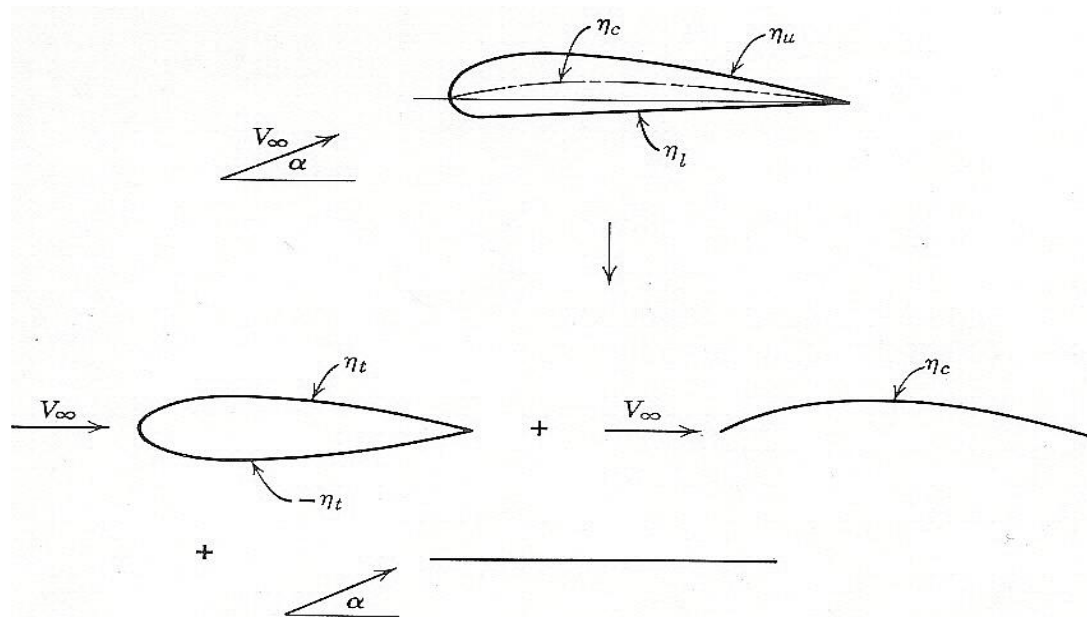
Η οριακή συνθήκη για τη ϕ_1 παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial y} \right)_{x,0} &= V_\infty \left(\frac{dn_c}{dx} + \frac{dn_t}{dx} \right) \text{ για } y = 0_+ \\ &= V_\infty \left(\frac{dn_c}{dx} - \frac{dn_t}{dx} \right) \text{ για } y = 0_-. \end{aligned}$$

Αυτό μπορεί να εκφρασθεί εναλλακτικά ως

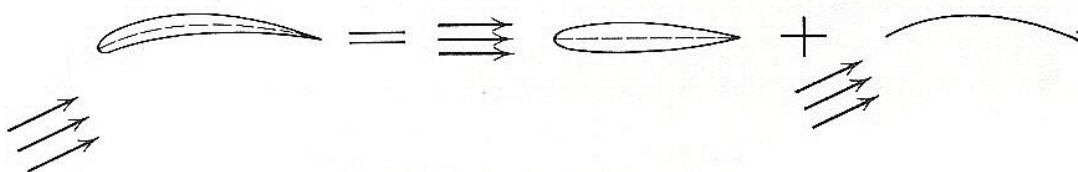
$$\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial y} \right)_{x,0^\pm} = V_\infty \frac{dn_c}{dx} \pm V_\infty \frac{dn_t}{dx}, \quad (4.32)$$

το πρόσημο (+) αντιστοιχεί στο $y = 0_+$ και το πρόσημο (-) αντιστοιχεί στο $y = 0_-$. Ο όρος $V_\infty (dn_c/dx)$ αντιπροσωπεύει την οριακή συνθήκη περί την αεροτομή, η οποία έχει μόνο καμπυλότητα και όχι πάχος σε μηδενική γωνία πρόσπτωσης. Ο όρος $\pm V_\infty (dn_t/dx)$ αντιπροσωπεύει την οριακή συνθήκη για ροή περί την αεροτομή που έχει μόνο πάχος και όχι καμπυλότητα (συμμετρική αεροτομή), η αεροτομή αυτή είναι σε μηδενική γωνία πρόσπτωσης.



Σχήμα 4.4: Παρουσίαση της διάσπασης του προβλήματος μιας αυθαίρετης λεπτής αεροτομής σε τρία απλούστερα προβλήματα [4.1].

Έτσι, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η λύση για ροή περί την αυθαίρετη λεπτή αεροτομή σε μηδενική γωνία πρόσπτωσης μπορεί να ληφθεί ως υπέρθεση δύο λύσεων, μιας για συμμετρική αεροτομή σε μηδενική γωνία πρόσπτωσης και μίας άλλης για αεροτομή μόνο με καμπυλότητα σε μηδενική πάλι γωνία πρόσπτωσης. Τα περιγράμματα αυτών των τελευταίων αεροτομών συσχετίζονται με αυτό της δοθείσας αεροτομής από τις σχέσεις (4.29), (4.30). Συνεπάγεται έτσι ότι η λύση για ροή περί την αυθαίρετη λεπτή αεροτομή σε μη μηδενική γωνία πρόσπτωσης μπορεί να ληφθεί ως υπέρθεση των λύσεων από τρία απλούστερα προβλήματα που αντιπροσωπεύονται σχηματικά στο Σχήμα 4.4. Εναλλακτικά, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.5, μπορούμε να αντιπροσωπεύσουμε το πρόβλημα ως υπέρθεση μιας συμμετρικής αεροτομής σε μηδενική γωνία πρόσπτωσης και αεροτομής με καμπυλότητα με μηδενικό πάχος σε κάποια γωνία πρόσπτωσης. Στη συνέχεια θα κατασκευάσουμε τη λύση των τριών προβλημάτων με τη μέθοδο της υπέρθεσης των ιδιόμορφων λύσεων ή ιδιόμορφων σημείων.



Σχήμα 4.5: Παρουσίαση εναλλακτικής διάσπασης του προβλήματος μιας αυθαίρετης λεπτής αεροτομής [4.1].

Πριν προχωρήσουμε σε αυτή την κατασκευή, χρησιμοποιώντας τις προσεγγίσεις της παρούσας απλής θεωρίας, θα καταλήξουμε σε μια σχέση για την πίεση.

4.6 ΣΧΕΣΗ ΤΗΣ ΠΙΕΣΗΣ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΛΕΠΤΩΝ ΑΕΡΟΤΟΜΩΝ

Η πίεση σε οποιοδήποτε σημείο δίνεται από την εξίσωση Bernoulli

$$p(x, y) = p_{\infty} + \frac{\rho}{2} V_{\infty}^2 \left(1 - \frac{V^2}{V_{\infty}^2} \right).$$

Σε όρους της ταχύτητας διαταραχής \vec{q} έχουμε

$$\begin{aligned} V^2 &= (\vec{V}_{\infty} + \vec{q}) \cdot (\vec{V}_{\infty} + \vec{q}) = V_{\infty}^2 + 2\vec{V}_{\infty} \cdot \vec{q} + q^2 \\ &= V_{\infty}^2 + 2(V_{\infty}u \cos a + V_{\infty}v \sin a) + u^2 + v^2. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Η εξίσωση Bernoulli παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned} p &= p_{\infty} - \frac{1}{2} \rho V_{\infty}^2 \left(2 \frac{\vec{V}_{\infty} \cdot \vec{q}}{V_{\infty}^2} - \frac{q^2}{V_{\infty}^2} \right) \\ &= p_{\infty} - \frac{\rho}{2} V_{\infty}^2 \left(2 \frac{u}{V_{\infty}} \cos a + 2 \frac{v}{V_{\infty}} \sin a + \frac{u^2 + v^2}{V_{\infty}^2} \right). \end{aligned}$$

Σύμφωνα με τις προσεγγίσεις που έγιναν για την απλοποίηση της οριακής συνθήκης, θέτουμε $\cos a = 1$, $\sin a = a$ και αμελούμε εκείνους τους όρους στην παρένθεση που είναι μικρότεροι από u/V_{∞} . Έτσι, παίρνουμε

$$p = p_{\infty} - \rho V_{\infty} u = p_{\infty} - \rho V_{\infty} \frac{\partial \phi}{\partial x}. \quad (4.34)$$

Ο αντίστοιχος συντελεστής πίεσης δίνεται από

$$C_p \equiv \frac{p - p_{\infty}}{\rho V_{\infty}^2 / 2} = -2 \frac{u}{V_{\infty}} = -\frac{2}{V_{\infty}} \frac{\partial \phi}{\partial x}. \quad (4.35)$$

Η σχέση (4.34) ή (4.35) εκφράζει την πίεση ως γραμμική συνάρτηση της συνιστώσας u της ταχύτητας. Αυτό σημαίνει ότι εφόσον λαμβάνουμε τη u ως υπέρθεση μερικών λύσεων, μπορούμε να λάβουμε την πίεση ως υπέρθεση των πιέσεων που αντιστοιχούν σε αυτές τις μερικές λύσεις. Ομοίως, οι δυνάμεις και οι ροπές στην αεροτομή μπορούν να ληφθούν πάλι από υπέρθεση.

4.7 ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΗ ΑΕΡΟΤΟΜΗ ΣΕ ΜΗΔΕΝΙΚΗ ΓΩΝΙΑ ΠΡΟΣΠΤΩΣΗΣ: ΛΥΣΗ ΑΠΟ ΔΙΑΝΟΜΗ ΠΗΓΩΝ

Εξετάζουμε αρχικά το πρόβλημα μιας λεπτής συμμετρικής αεροτομής σε μηδενική γωνία πρόσπτωσης (βλέπε Σχήμα 4.6). Το μαθηματικό πρόβλημα για το δυναμικό της διαταραχής ϕ είναι το ακόλουθο:

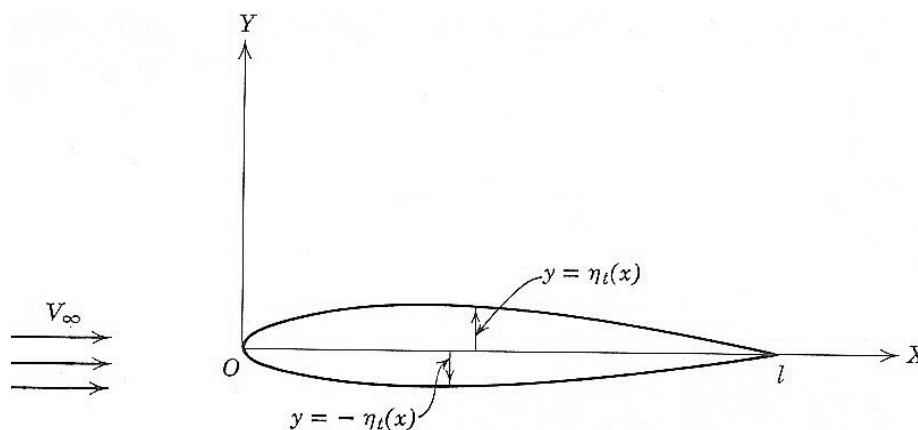
$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (4.36)$$

$$v(x, 0_{\pm}) = \frac{\partial \phi}{\partial y}(x, 0_{\pm}) = \pm V_{\infty} \frac{dn_t}{dx}, \quad 0 \leq x \leq l \quad (4.37)$$

$$\nabla \phi = 0 \text{ στο } \acute{\alpha}\pi\epsilon\iota\rho\omicron. \quad (4.38)$$

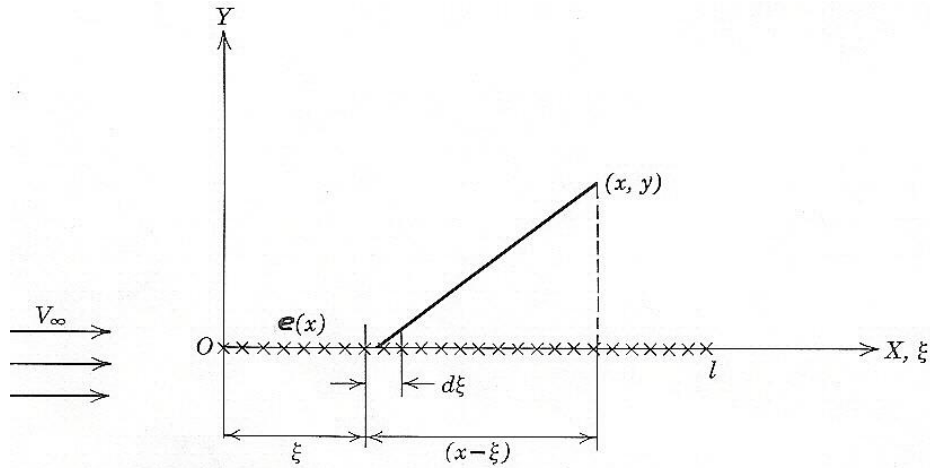
Δεδομένου ότι το πεδίο ροής είναι συμμετρικό γύρω από την αεροτομή, δεν υπάρχει καμία κυκλοφορία γύρω από αυτή. Η συνθήκη επιφάνειας (4.37) απαιτεί ότι πάνω στη λωρίδα $0 \leq x \leq l$ η συνιστώσα της ταχύτητας v να είναι περιττή συνάρτηση του y

$$v(x, 0_{+}) = -v(x, 0_{-}).$$



Σχήμα 4.6: Συντεταγμένες για το πρόβλημα της συμμετρικής αεροτομής σε παράλληλη ροή με μηδενική γωνία πρόσπτωσης [4.1].

Αυτές οι υποθέσεις αποδεικνύουν ότι το πεδίο διαταραχής μπορεί να αντιπροσωπευθεί ισοδύναμα σαν αυτό μιας κατάλληλης διανομής πηγών κατά μήκος του άξονα X με εύρος $0 \leq x \leq l$. Το πεδίο ταχύτητας λόγω μιας τέτοιας διανομής ικανοποιεί την εξίσωση Laplace (4.36) και τη συνθήκη στο άπειρο (4.38). Έτσι, το πρόβλημα της συμμετρικής αεροτομής σε παράλληλη ροή με μηδενική γωνία πρόσπτωσης, ισοδυναμεί με αυτό της υπέρθεσης του ομοιόμορφου ρεύματος και μιας ορισμένης διανομής πηγών, όπως παρουσιάζεται στο Σχήμα 4.7. Μόλις καθοριστεί η διανομή πηγών, όλες οι επιθυμητές πληροφορίες για το πεδίο ροής λαμβάνονται εύκολα. Έστω ότι με $e = e(x)$ υποδηλώνεται η πυκνότητα της διανομής των πηγών, δηλαδή e είναι η ένταση των πηγών ανά μονάδα μήκους.



Σχήμα 4.7: Διανομή πηγών για συμμετρική αεροτομή [4.1].

Η συνθήκη, ώστε να υπάρχει κλειστή διαχωριστική επιφάνεια γύρω από τη διανομή των πηγών είναι $\int_0^l e(\xi) d\xi = 0$, ενώ το περίγραμμα της αεροτομής πρέπει να έχει τέτοια μορφή, ώστε σε πραγματικές συνθήκες (ασυμπίεστο, συνεκτικό ρευστό) να είναι δυνατή η αποφυγή τυρβώδους οριακού στρώματος. Αυτό σημαίνει ότι η κατανομή του πάχους πρέπει να είναι τέτοια, ώστε επί του μετώπου προσβολής να υπάρχει στρογγύλευση –όχι ακμή– από κει δε, το πάχος s να αυξάνει ομαλά μέχρι του μεγίστου, $\max s$, από όπου ομαλά επίσης μειούμενο να μηδενίζεται υπό μορφή οξείας ακμής ή να καταλήγει σε μικρή στρογγύλευση. Ακόμη, το μέγιστο πάχος να είναι μικρό σε σχέση με το μήκος l της αεροτομής.

Στη συνέχεια το πεδίο διαταραχής και οι συνιστώσες ταχύτητας διαταραχής σε σημείο (x, y) του πεδίου διαταραχής δίνονται από

$$\phi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^l e(\xi) \log[(x - \xi)^2 + y^2]^{1/2} d\xi \quad (4.39)$$

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^l e(\xi) \frac{x - \xi}{(x - \xi)^2 + y^2} d\xi \quad (4.40)$$

$$v(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^l e(\xi) \frac{y}{(x - \xi)^2 + y^2} d\xi. \quad (4.41)$$

Για να καθορίσουμε τη διανομή πηγών $e(x)$ χρησιμοποιούμε την οριακή συνθήκη (4.37). Συνεπώς, απαιτούμε

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 0^\pm} \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^l e(\xi) \frac{y}{(x - \xi)^2 + y^2} d\xi \right] &= v(x, 0_\pm) \\ &= \pm V_\infty \frac{dn_t}{dx}, \quad 0 \leq x \leq l. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Προσοχή χρειάζεται για την αξιολόγηση της αριστερής πλευράς της εξίσωσης (4.42). Παρατηρούμε ότι για $\xi \neq x$ το ολοκλήρωμα τείνει στο μηδέν καθώς το y τείνει στο μηδέν, ενώ για $\xi = x$ η ολοκληρωτέα ποσότητα γίνεται απροσδιόριστη.

Το ολοκλήρωμα του αριστερού μέλους της εξίσωσης (4.42) είναι ίσο με $\pm e(x)/2$, δηλαδή

$$\lim_{y \rightarrow 0^\pm} \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^l e(\xi) \frac{y}{(x-\xi)^2 + y^2} d\xi \right] = \pm \frac{e(x)}{2}. \quad (4.43)$$

Απόδειξη:

Πράγματι θεωρώντας $I(x, 0_\pm) = \lim_{y \rightarrow 0^\pm} \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^l e(\xi) \frac{y}{(x-\xi)^2 + y^2} d\xi \right]$ έχουμε για $\varepsilon > 0$

$$I(x, 0_\pm) = \lim_{\substack{y \rightarrow 0^\pm \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \left(\int_0^{x-\varepsilon} + \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} + \int_{x+\varepsilon}^l \right).$$

Θεωρώντας $\xi \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ για $y \rightarrow 0$ τα ολοκληρώματα από 0 έως $x-\varepsilon$ και από $x+\varepsilon$ έως l μηδενίζονται, οπότε καταλήγουμε

$$I(x, 0_\pm) = \lim_{\substack{y \rightarrow 0^\pm \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \frac{e(\xi)}{y[1 + (x-\xi)^2/y^2]} d\xi.$$

Καθώς $\varepsilon \rightarrow 0$ μπορούμε να θεωρήσουμε ότι στο διάστημα από $x-\varepsilon$ έως $x+\varepsilon$, η $e(\xi)$ γίνεται ίση με $e(x)$. Κάνοντας την αντικατάσταση

$$\frac{x-\xi}{y} = \lambda$$

το τελευταίο ολοκλήρωμα γράφεται

$$I(x, 0_\pm) = e(x) \lim_{\substack{y \rightarrow 0^\pm \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \frac{d\lambda}{1 + \lambda^2} = 2e(x) \lim_{\substack{y \rightarrow 0^\pm \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \tan^{-1} \frac{\varepsilon}{y}.$$

Θεωρώντας

$$\{y \rightarrow 0_+, \varepsilon \rightarrow 0\} \Rightarrow \frac{\varepsilon}{y} \rightarrow +\infty \Rightarrow \tan^{-1} \frac{\varepsilon}{y} \rightarrow \pi/2$$

$$\{y \rightarrow 0_-, \varepsilon \rightarrow 0\} \Rightarrow \frac{\varepsilon}{y} \rightarrow -\infty \Rightarrow \tan^{-1} \frac{\varepsilon}{y} \rightarrow -\pi/2,$$

δηλαδή το y να κινείται πιο γρήγορα από ό,τι το ε προς το 0, καταλήγουμε

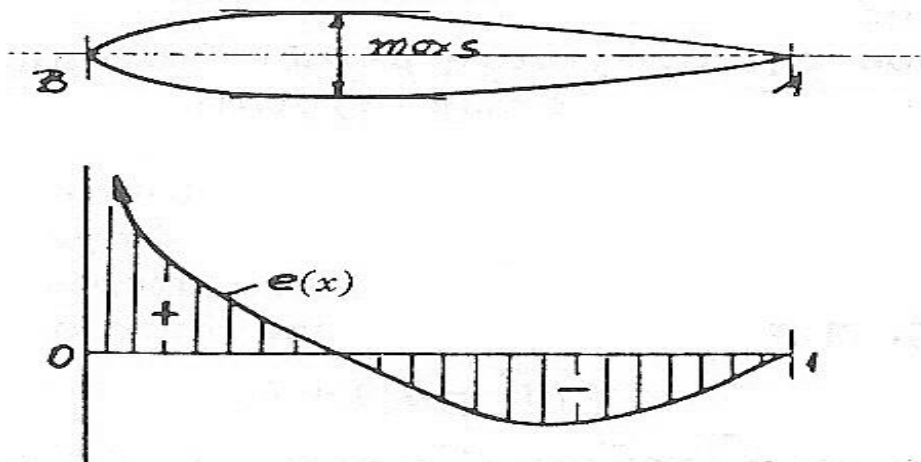
$$I(x, 0_\pm) = \pm \pi e(x).$$

Από όπου προκύπτει η ισότητα (4.43). □

Λόγω της ισότητας (4.43), η εξίσωση (4.42) γράφεται

$$e(x) = \pm 2v(x, 0_{\pm}) = V_{\infty} \frac{dn_t}{dx}. \quad (4.44)$$

Αυτή η σχέση καθορίζει τη διανομή πηγών και δείχνει ότι η ένταση της πηγής στο σημείο x είναι ανάλογη προς την κλίση της αεροτομής σε εκείνο το σημείο. Παρατηρούμε από την τελευταία σχέση ότι επί του B (μετώπου προσβολής), όπου η στρογγύλευση προϋποθέτει $\frac{dn_t}{dx} \rightarrow \infty$, θα είναι $e \rightarrow \infty$. Με αύξηση του πάχους που σημαίνει $\frac{dn_t}{dx} > 0$, έχουμε $e > 0$, δηλαδή πηγές εκροής. Στη θέση του $\max s$, όπου $\frac{dn_t}{dx} = 0$, είναι $e = 0$. Με μείωση του πάχους, πέραν της θέσεως $\max s$, έχουμε $\frac{dn_t}{dx} < 0$, δηλαδή πηγές εισροής (καταβόθρες). Τέλος, στην ακμή φυγής A , όπου $\frac{dn_t}{dx} \rightarrow 0$, είναι $e \rightarrow 0$. Το Σχήμα 4.8 δίνει μία εικόνα της πορείας της συνάρτησης $e(x)$ για $0 \leq x \leq l$.

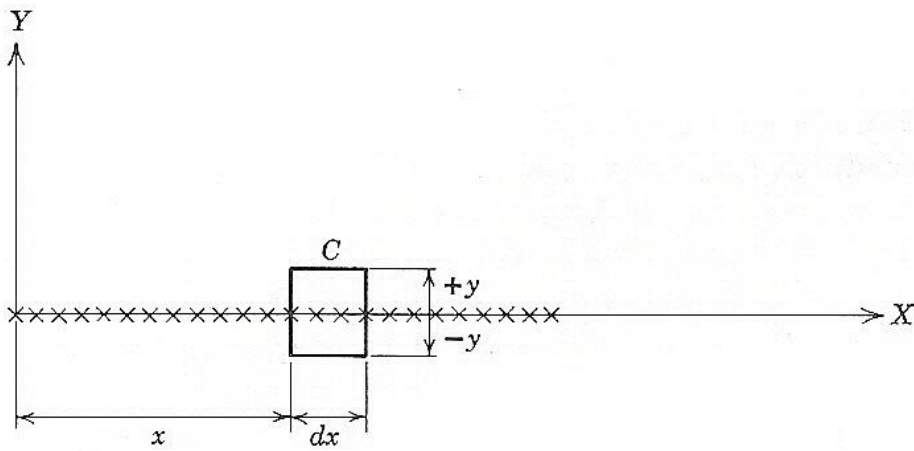


Σχήμα 4.8: Τυπική εικόνα διανομής πηγών για τη μόρφωση αεροτομής με στρογγυλεμένο το μέτωπο προσβολής και την όπισθεν ακμή φυγής (μικρή διέδρη γωνία) [4.2].

Το αποτέλεσμα που εκφράστηκε από τη σχέση (4.44) θα μπορούσε να είχε επιτευχθεί από ένα στοιχειώδες επιχειρήμα. Εξετάζοντας ένα στοιχειώδες στοιχείο $e(x)dx$ της διανομής των πηγών και θεωρώντας οποιαδήποτε κλειστή καμπύλη C (Σχήμα 4.9) που εσωκλείει αυτό το στοιχείο, τότε με βάση την αρχή της συνέχειας παίρνουμε

$$e(x)dx = \oint_C \vec{V} \cdot \vec{n} ds = \lim_{\substack{+y \rightarrow 0+ \\ \text{και} \\ -y \rightarrow 0-}} \oint_C \vec{V} \cdot \vec{n} ds = v(x, 0_+) dx - v(x, 0_-) dx, \quad (4.45)$$

όπου \vec{n} είναι το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στη C με φορά προς τα έξω από το οριζόμενο από αυτή χωρίο. Αφού ισχύει $v(x, 0_-) = -v(x, 0_+)$, από την εξίσωση (4.45) προκύπτει η σχέση (4.44).



Σχήμα 4.9: Εκροή ρευστού μέσω μιας κλειστής καμπύλης που εσωκλείει ένα στοιχείο της διανομής πηγών [4.1].

Οι σχέσεις (4.39) έως (4.41) που δίνουν το δυναμικό και τις συνιστώσες της ταχύτητας της διαταραχής τώρα γίνονται

$$\phi(x, y) = \frac{V_\infty}{\pi} \int_0^l \frac{dn_t}{dx}(\xi) \log[(x - \xi)^2 + y^2]^{1/2} d\xi \quad (4.46)$$

$$u(x, y) = \frac{V_\infty}{\pi} \int_0^l \frac{dn_t}{dx}(\xi) \frac{x - \xi}{(x - \xi)^2 + y^2} d\xi \quad (4.47)$$

$$v(x, y) = \frac{V_\infty}{\pi} \int_0^l \frac{dn_t}{dx}(\xi) \frac{y}{(x - \xi)^2 + y^2} d\xi. \quad (4.48)$$

Η κατανομή του συντελεστή πίεσης δίνεται από τη σχέση $C_p(x, y) = -2 \frac{u(x, y)}{V_\infty}$.

Στην επιφάνεια της αεροτομής, η συνιστώσα u της ταχύτητας διαταραχής και ο συντελεστής πίεσης δίνονται από

$$u(x, 0) = \frac{V_\infty}{\pi} \int_0^l \frac{dn_t}{dx}(\xi) \frac{1}{x - \xi} d\xi, \quad 0 \leq x \leq l \quad (4.49)$$

$$C_p(x, 0_{\pm}) = -2 \frac{u(x, 0)}{V_{\infty}}, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (4.50)$$

Η y -συνιστώσα της ταχύτητας, βεβαίως, δίνεται από την επιφανειακή συνθήκη

$$v(x, 0_{\pm}) = \pm V_{\infty} \frac{dn_t}{dx}.$$

Εύκολα προκύπτει ότι δεν υπάρχει ούτε συνισταμένη δύναμη ή ροπή στη συμμετρική αεροτομή. Έτσι, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το πάχος μιας λεπτής αεροτομής συμβάλλει μόνο στη διανομή πίεσης πάνω στην αεροτομή.

Για να πάρουμε τη συνιστώσα της ταχύτητας u και την κατανομή της πίεσης πάνω στην αεροτομή πρέπει να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα στο δεξί μέλος της σχέσης (4.49). Παρατηρούμε ότι αυτό το ολοκλήρωμα είναι ένα γενικευμένο ολοκλήρωμα υπό την έννοια ότι η ολοκληρωτέα συνάρτηση γίνεται άπειρη στο σημείο $\xi = x$, όπου το x ανήκει στο διάστημα της ολοκλήρωσης. Η τιμή του ολοκληρώματος δίνεται από την αποκαλούμενη κύρια τιμή ή κύρια τιμή κατά Cauchy.

Γενικά, η κύρια τιμή ενός γενικευμένου ολοκληρώματος

$$\int_a^b f(\xi) d\xi,$$

όπου η $f(\xi)$, γίνεται άπειρη στο σημείο $\xi = c$ στο διάστημα (a, b) , ορίζεται από το όριο

$$\int_a^b f(\xi) d\xi = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_a^{c-\varepsilon} f(\xi) d\xi + \int_{c+\varepsilon}^b f(\xi) d\xi \right].$$

Για τον αριθμητικό υπολογισμό του $u(x, 0)$, από τη σχέση (4.49), είναι κατάλληλο να εκφραστούν οι συναρτήσεις $u(x, 0)$ και $(dn_t/dx)(\xi)$ ως συζυγείς σειρές Fourier. Για αυτόν το λόγο εισάγουμε τη μεταβλητή θ τέτοια, ώστε

$$x = \frac{l}{2}(1 + \cos \theta), \quad -\pi \leq \theta \leq \pi \quad (4.51)$$

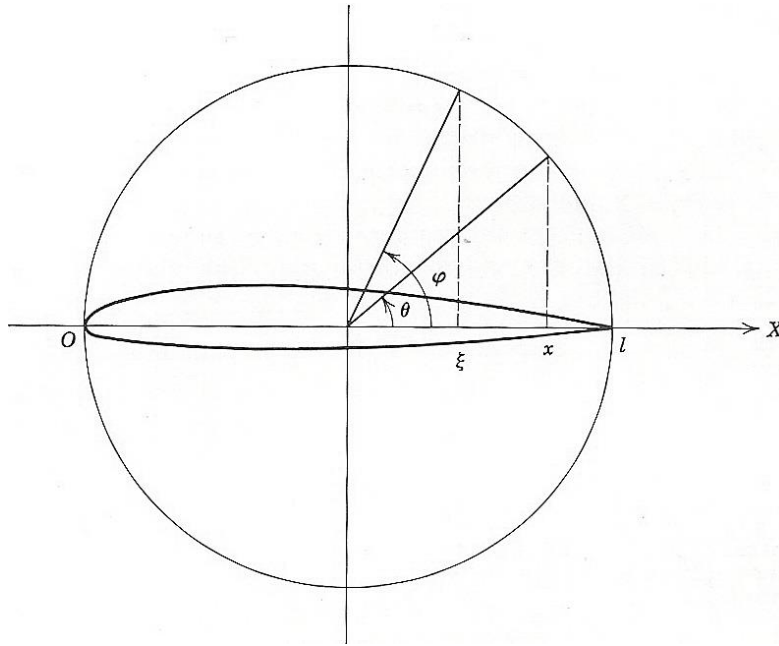
(βλέπε Σχήμα 4.10). Οι θετικές τιμές θ περιγράφουν την άνω επιφάνεια της αεροτομής, ενώ οι αρνητικές τιμές θ περιγράφουν την κάτω επιφάνειά της. Η μεταβλητή ξ μπορεί να εκφραστεί ως

$$\xi = \frac{l}{2}(1 + \cos \varphi). \quad (4.52)$$

Συνοψίζοντας, οι οριακές συνθήκες του προβλήματος είναι

$$u(\theta) = u[x(\theta), 0]$$

$$\frac{dn_t}{dx}(\theta) = \frac{dn_t}{dx}[x(\theta)].$$



Σχήμα 4.10: Εισάγοντας τη μεταβλητή θ σε σχέση με τη μεταβλητή x [4.1].

Η σχέση (4.49) με όρους μεταβλητών θ και φ παίρνει τη μορφή

$$u(\theta) = -\frac{V_\infty}{\pi} \int_0^\pi \frac{dn_t}{dx}(\varphi) \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi - \cos \theta} d\varphi. \quad (4.53)$$

Αυτός είναι γνωστός ως *ολοκληρωτικός τύπος του Poisson*. Η ολοκληρωτέα συνάρτηση στο ολοκλήρωμα του δεξιού μέλους της σχέσης γίνεται άπειρη στο $\varphi = \theta$.

Με βάση τη θεωρία των συζυγών σειρών Fourier έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{dn_t}{dx}(\theta) &= \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \sin n\theta + B_n \cos n\theta) \\ -\frac{u(\theta)}{V_\infty} &= \left(-\frac{u}{V_\infty} \right)_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (-A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta), \end{aligned}$$

$$\text{όπου: } A_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dn_t}{dx}(\varphi) d\varphi = 0, \quad A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dn_t}{dx}(\varphi) \sin n\varphi d\varphi = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{dn_t}{dx}(\varphi) \sin n\varphi d\varphi$$

$$(4.54), \quad B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dn_t}{dx}(\varphi) \cos n\varphi d\varphi = 0, \quad \text{εφόσον η } (dn_t/dx)(\theta) \text{ είναι περιττή}$$

συνάρτηση. Ακόμη, προκύπτει από τη σχέση (4.53) ότι

$$\left(-\frac{u}{V_\infty} \right)_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(-\frac{u}{V_\infty} \right)(\varphi) d\varphi = 0.$$

Επομένως,

$$\frac{dn_t}{dx}(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta \quad (4.55)$$

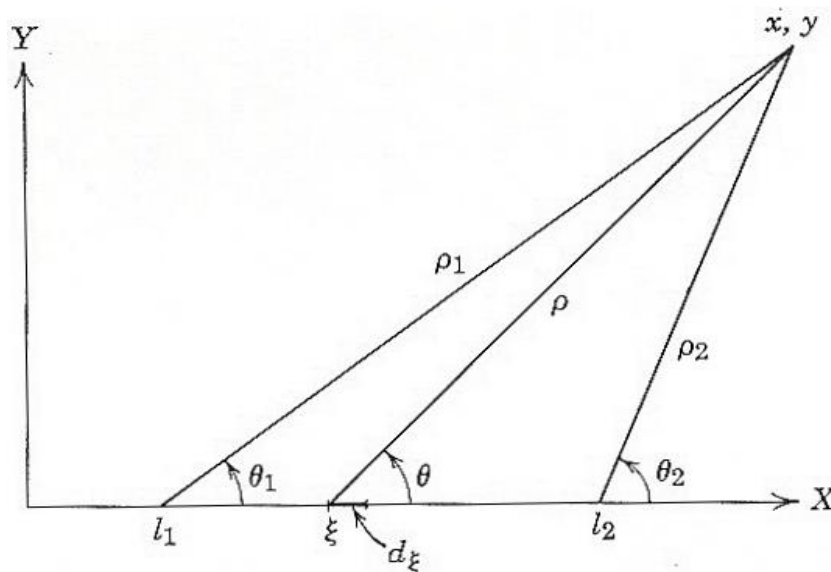
$$\frac{u(\theta)}{V_\infty} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\theta, \quad (4.56)$$

όπου η $u(\theta)$ είναι άρτια συνάρτηση του θ . Υπολογιστικές τεχνικές για τις συζυγείς σειρές Fourier, και επίσης για τις παραγώγους και τα ολοκληρώματά τους, έχουν αναπτυχθεί, με στόχο την καλύτερη εφαρμογή της Θεωρίας των Λεπτών Αεροτομών. Προκειμένου να καταλήξουμε σε κάποια χρήσιμα συμπεράσματα για το πεδίο της ταχύτητας διαταραχής, θεωρούμε την απλή περίπτωση όπου η ένταση των πηγών ανά μονάδα μήκους e είναι σταθερή (ομοιόμορφη διανομή πηγών), οπότε οι σχέσεις (4.40) και (4.41) για διανομή πηγών από $x=l_1$ έως $x=l_2$ (βλέπε Σχήμα 4.11) δίνουν

$$u(x, y) = \frac{e}{2\pi} \int_{l_1}^{l_2} \frac{x-\xi}{(x-\xi)^2 + y^2} dl = \frac{e}{2} \int_{l_1}^{l_2} \frac{\cos \theta}{\rho} d\xi \quad (4.57)$$

$$v(x, y) = \frac{e}{2\pi} \int_{l_1}^{l_2} \frac{y}{(x-\xi)^2 + y^2} dl = \frac{e}{2\pi} \int_{l_1}^{l_2} \frac{\sin \theta}{\rho} d\xi, \quad (4.58)$$

όπου ρ και θ είναι οι τοπικές πολικές συντεταγμένες με αρχή ένα στοιχείο της διανομής πηγών.



Σχήμα 4.11: Τοπικές πολικές συντεταγμένες με αρχή ένα στοιχείο της διανομής πηγών [4.1].

Όπως μπορούμε εύκολα να επαληθεύσουμε, έχουμε:

$$(x-\xi)^2 + y^2 = \rho^2$$

$$d\xi = -\frac{d\rho}{\cos \theta}$$

$$\frac{\cos \theta}{\rho} d\xi = -\frac{d\rho}{\rho}$$

$$\frac{\sin \theta}{\rho} d\xi = d\theta.$$

Ως εκ τούτου, οι σχέσεις (4.57) και (4.58) δίνουν

$$u(x, y) = -\frac{e}{2\pi} \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{d\rho}{\rho} = \frac{e}{2\pi} \log \frac{\rho_1}{\rho_2} \quad (4.59)$$

$$v(x, y) = \frac{e}{2\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta = \frac{e}{2\pi} (\theta_2 - \theta_1), \quad (4.60)$$

όπου $\rho_1, \rho_2, \theta_1, \theta_2$ φαίνονται στο Σχήμα 4.11. Παρατηρούμε ότι και οι δύο συνιστώσες ταχύτητας μηδενίζονται στο άπειρο. Η u -συνιστώσα είναι πεπερασμένη παντού εκτός από τις άκρες της διανομής, όπου η ρ_1 ή η ρ_2 μηδενίζεται, οπότε αυτή απειρίζεται. Η v -συνιστώσα είναι πεπερασμένη παντού.

Αν θεωρήσετε την περίπτωση κατά μήκος του άξονα X εκτός διανομής, δηλαδή για $x < l_1$ και για $x > l_2$ με $y = 0$, η u -συνιστώσα έχει μη μηδενική τιμή, ενώ η v -συνιστώσα είναι μηδέν, αφού

$$\theta_1 = \theta_2 = \pi, \text{ αν } x < l_1$$

και

$$\theta_1 = \theta_2 = 0, \text{ αν } x > l_2.$$

Τώρα, αν θεωρήσουμε ένα σημείο του πεδίου, όπως το P στο Σχήμα 4.12, που είναι ακριβώς επάνω από τον άξονα X με το x μεταξύ l_1 και l_2 . Σε ένα τέτοιο σημείο έχουμε

$$u(x, 0_+) = \frac{e}{2\pi} \log \frac{\rho_1}{\rho_2}$$

και

$$v(x, 0_+) = \frac{e}{2\pi} (\pi - 0) = \frac{e}{2}.$$

Για ένα αντίστοιχο σημείο Q ακριβώς κάτω από τον άξονα X , έχουμε

$$u(x, 0_-) = \frac{e}{2\pi} \log \frac{\rho_1}{\rho_2}$$

$$v(x, 0_-) = \frac{e}{2\pi} (-\pi - 0) = -\frac{e}{2}.$$

Ως εκ τούτου, προκύπτει ότι

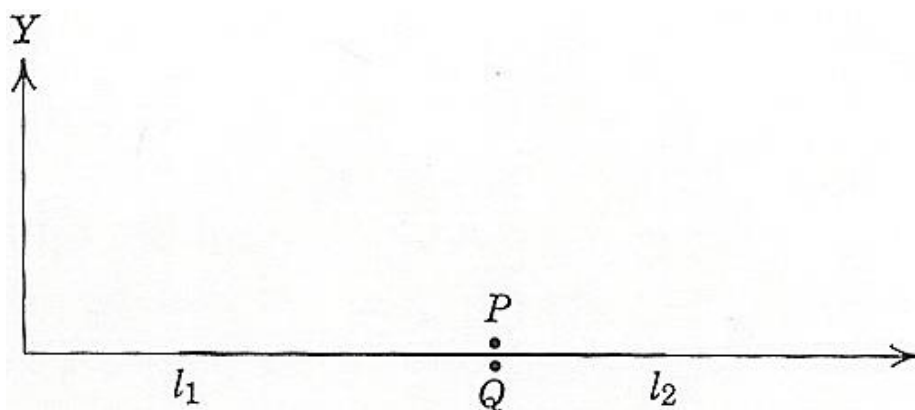
$$u(x, 0_+) = u(x, 0_-) \quad (4.61)$$

$$v(x, 0_+) = -v(x, 0_-) = \frac{e}{2} \quad (4.62)$$

(όπως άλλωστε προέκυψε για οποιαδήποτε διανομή πηγών κατά μήκος του άξονα X από την εξίσωση (4.42) και την ισότητα (4.43)) και

$$v(x, 0_+) - v(x, 0_-) = e. \quad (4.63)$$

Καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι κατά μήκος της διανομής πηγών η εφαπτομενική συνιστώσα ταχύτητας u είναι συνεχής, ενώ η κάθετη συνιστώσα v είναι ασυνεχής. Το μέγεθος της ασυνέχειας είναι απλά ίσο με τη ένταση των πηγών ανά μονάδα μήκους.



Σχήμα 4.12: Γειτνιάζοντα σημεία εκατέρωθεν του άξονα X [4.1].

Γενικεύοντας, για την περίπτωση στην οποία η διανομή πηγών δεν είναι ομοιόμορφης έντασης, δηλαδή $e = e(x)$ καταλήγουμε στα ίδια συμπεράσματα με τα παραπάνω, αφού το πεδίο λόγω της ανομοιόμορφης διανομής πηγών μπορεί να θεωρηθεί ως υπέρθεση πεδίων στοιχειωδών τμημάτων διανομής πηγών, κάθε ένα από τα οποία είναι διαφορετικής ομοιόμορφης έντασης. Οι ίδιες εκτιμήσεις ισχύουν ακόμη κι αν η διανομή πηγών βρίσκεται κατά μήκος μιας κυρτής καμπύλης.

Συνοψίζοντας, παραθέτουμε τα ακόλουθα συμπεράσματα:

1. Οι συνιστώσες της ταχύτητας διαταραχής είναι πεπερασμένες παντού εκτός λωρίδας $y = 0$, $0 \leq x \leq l$ και μηδενίζονται καθώς το $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ τείνει στο άπειρο.
2. Στον άξονα X , για $x < 0$ και $x > l$, η συνιστώσα u είναι πεπερασμένη, ενώ η v είναι μηδέν.
3. Κατά μήκος της λωρίδας, εκτός των άκρων της, η συνιστώσα u είναι πεπερασμένη και συνεχής. Στις άκρες της λωρίδας, για οποιαδήποτε διαφορετική από το μηδέν τιμή της έντασης της πηγής (ακόμη και άπειρη), η u γίνεται άπειρη.
4. Κατά μήκος της λωρίδας η v -συνιστώσα είναι πεπερασμένη σε όλα τα σημεία όπου η ένταση της πηγής είναι πεπερασμένη. Σε οποιοδήποτε σημείο στη λωρίδα το άλμα της v κατά μήκος της λωρίδας είναι απλά ίσο με την ένταση της πηγής σε αυτό το σημείο. Δεδομένου ότι σε μια στρογγυλεμένη άκρη της αεροτομής η ένταση της πηγής γίνεται άπειρη, η v -συνιστώσα γίνεται άπειρη σε αυτή τη στρογγυλεμένη άκρη, δηλαδή στο μέτωπο προσβολής και στην ακμή φυγής της αεροτομής, εφόσον αυτή καταλήγει σε μικρή στρογγύλευση (μη μηδενική ακτίνα καμπυλότητας) και όχι σε οξεία ακμή.

Όπως αναμενόταν, παρατηρούμε ότι η λύση του γραμμικοποιημένου προβλήματος δεν ισχύει κοντά και επί του μετώπου προσβολής και της ακμής φυγής της αεροτομής, εφόσον αυτή δεν καταλήγει σε οξεία ακμή.

4.8 ΑΕΡΟΤΟΜΗ ΜΗΔΕΝΙΚΟΥ ΠΑΧΟΥΣ ΜΕ ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΑ ΣΕ ΜΗΔΕΝΙΚΗ ΓΩΝΙΑ ΠΡΟΣΠΤΩΣΗΣ: ΛΥΣΗ ΑΠΟ ΔΙΑΝΟΜΗ ΠΗΓΩΝ

Στην ενότητα αυτή το μαθηματικό πρόβλημα για το δυναμικό της διαταραχής ϕ είναι το ακόλουθο (βλέπε Σχήμα 4.13):

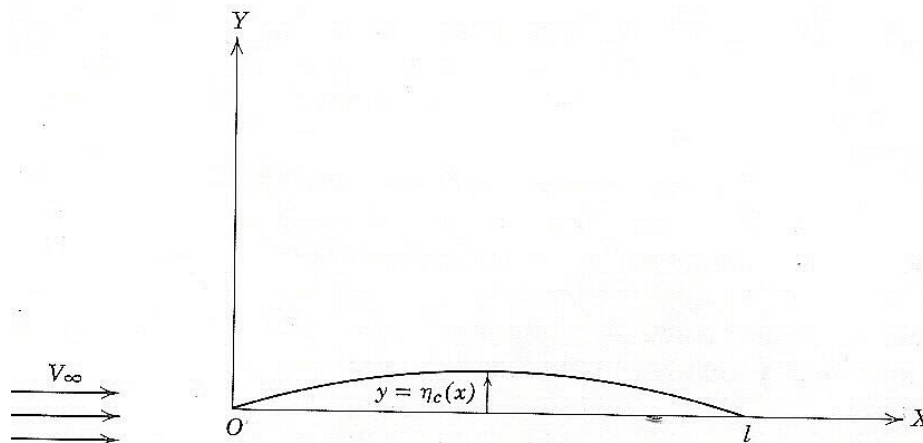
$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (4.64)$$

$$v(x, 0_{\pm}) = \frac{\partial \phi}{\partial y}(x, 0_{\pm}) = V_{\infty} \frac{dn_c}{dx}, \quad 0 \leq x \leq l \quad (4.65)$$

$$\nabla \phi = 0 \text{ στο άπειρο} \quad (4.66)$$

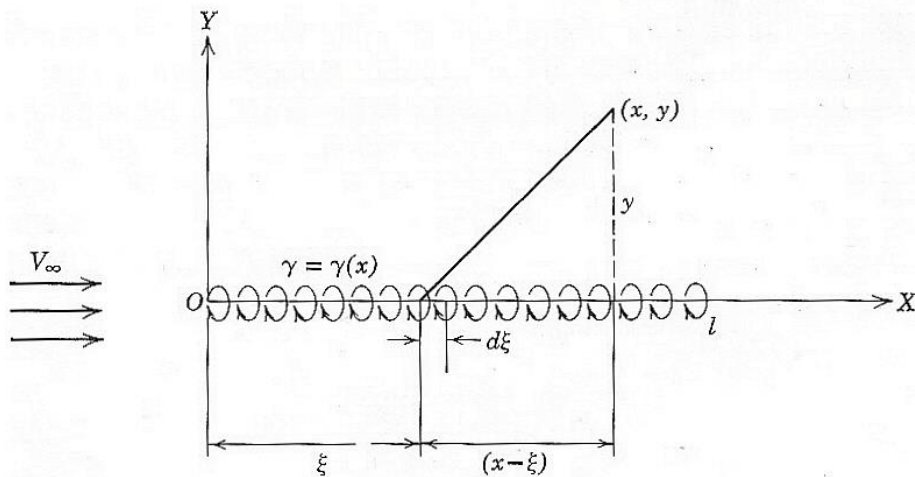
Συνθήκη Kutta: Εδώ, η κυκλοφορία γύρω από την αεροτομή δεν είναι μηδέν. Η τιμή της πρέπει να είναι τέτοια, ώστε οι συνιστώσες της ταχύτητας διαταραχής $u = \frac{\partial \phi}{\partial x}$ και

$v = \frac{\partial \phi}{\partial y}$ να είναι πεπερασμένες και συνεχείς στην ακμή φυγής.



Σχήμα 4.13: Συντεταγμένες για το πρόβλημα της αεροτομής μόνο με καμπυλότητα [4.1].

Αυτές οι προϋποθέσεις, ιδιαίτερα η συνθήκη επιφάνειας (4.65), υποδηλώνουν ότι το πεδίο διαταραχής της αεροτομής μόνο με καμπυλότητα ισοδυναμεί με αυτό, λόγω μιας κατάλληλης διανομής δινών κατά μήκος του άξονα X στο διάστημα $0 \leq x \leq l$. Διανέμουμε έτσι τις στοιχειώδεις δίνες, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.14, με την κυκλοφορία να ορίζεται γύρω από κάθε δίνη κατά τη δεξιόστροφη φορά. Το πεδίο ταχύτητας λόγω μιας τέτοιας διανομής δινών, οποιασδήποτε πεπερασμένης έντασης ανά μονάδα μήκους, ικανοποιεί αυτόματα την εξίσωση Laplace (4.64) και τη συνθήκη στο άπειρο, εξίσωση (4.66). Η ένταση των δινών πρέπει εντούτοις, να διανεμηθεί κατά τέτοιο τρόπο, ώστε να ικανοποιούνται η συνθήκη επιφάνειας (4.65) και η συνθήκη Kutta. Στη συνέχεια θα εξετάσουμε το πρόβλημα της αεροτομής μηδενικού πάχους με καμπυλότητα.



Σχήμα 4.14: Η διανομή δινών για αεροτομή μόνο με καμπυλότητα [4.1].

Μόλις καθοριστεί η διανομή δινών, όλες οι επιθυμητές πληροφορίες για το πεδίο ροής λαμβάνονται εύκολα. Έστω ότι η $\gamma = \gamma(x)$ υποδηλώνει την πυκνότητα της κατανομής, δηλαδή η γ είναι η ένταση της διανομής δινών ανά μονάδα μήκους (βλέπε Σχήμα 4.14). Σημειώνουμε ότι το γdx είναι η κυκλοφορία γύρω από τις στοιχειώδεις δίνες που διανέμονται στο στοιχειώδες τμήμα μήκους dx . Το δυναμικό διαταραχής και οι συνιστώσες της ταχύτητας διαταραχής στο σημείο του πεδίου (x, y) , δίνονται από

$$\phi(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^l \gamma(\xi) \tan^{-1} \frac{y}{x-\xi} d\xi \quad (4.67)$$

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^l \gamma(\xi) \frac{y}{(x-\xi)^2 + y^2} d\xi \quad (4.68)$$

$$v(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^l \gamma(\xi) \frac{x-\xi}{(x-\xi)^2 + y^2} d\xi. \quad (4.69)$$

Ο συντελεστής πίεσης σε οποιοδήποτε σημείο δίνεται από τη σχέση

$$C_p(x, y) = -2 \frac{u(x, y)}{V_\infty},$$

όπου η $u(x, y)$ λαμβάνεται από τη σχέση (4.68).

Παρατηρούμε ότι οι σχέσεις (4.68) και (4.69) είναι αντιστοίχως, παρόμοιες με τις σχέσεις (4.41) και (4.40), οι οποίες αναφέρονται σε μια διανομή πηγών κατά μήκος της λωρίδας $y = 0, 0 \leq x \leq l$. Μπορούμε επομένως, να καταλήξουμε στο συμπέρασμα ότι η u -συνιστώσα της ταχύτητας λόγω της διανομής δινών εκθέτει τα ίδια χαρακτηριστικά με τη v -συνιστώσα της ταχύτητας λόγω της διανομής πηγών, και ότι η v -συνιστώσα λόγω της διανομής δινών εκθέτει τα ίδια χαρακτηριστικά (εκτός του αρνητικού πρόσημου) με τη u -συνιστώσα λόγω της διανομής πηγών. Ειδικότερα, σημειώνουμε ότι η κυκλοφορία σε οποιοδήποτε σημείο της διανομής

δινών είναι απλά ίση με το άλμα σε εκείνο το σημείο της u -συνιστώσας της ταχύτητας κατά μήκος του φύλλου δίνης. Έτσι, προκύπτει το αποτέλεσμα

$$\begin{aligned} u(x, 0_{\pm}) &= \lim_{y \rightarrow 0_{\pm}} \frac{1}{2\pi} \int_0^l \gamma(\xi) \frac{y}{(x-\xi)^2 + y^2} d\xi \\ &= \pm \frac{\gamma(x)}{2}, \quad 0 \leq x \leq l, \end{aligned}$$

συγκρινόμενο με αυτό της ισότητας (4.43). Επομένως, έχουμε

$$\gamma(x) = 2u(x, 0_{+}) = u(x, 0_{+}) - u(x, 0_{-}), \quad (4.70)$$

αφού $u(x, 0_{-}) = -u(x, 0_{+})$.

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (4.70) μπορούμε αμέσως να εκφράσουμε την κατανομή πίεσης πάνω στην αεροτομή, την άνωση και τη ροπή της αεροτομής σε σχέση με την ένταση της διανομής δινών ανά μονάδα μήκους $\gamma(x)$. Για την κατανομή πίεσης πάνω στην αεροτομή έχουμε

$$C_p(x, 0_{\pm}) = -2 \frac{u(x, 0_{\pm})}{V_{\infty}} = \mp \frac{\gamma(x)}{V_{\infty}}. \quad (4.71)$$

Η άνωση στην αεροτομή ανά μονάδα βάθους πεδίου δίνεται από

$$\begin{aligned} L &= \int_0^l [p(x, 0_{-}) - p(x, 0_{+})] dx \\ &= \frac{\rho}{2} V_{\infty}^2 \int_0^l [C_p(x, 0_{-}) - C_p(x, 0_{+})] dx \\ &= \rho V_{\infty} \int_0^l \gamma(x) dx \\ &= \rho V_{\infty} \Gamma, \end{aligned} \quad (4.72)$$

όπου $\Gamma = \int_0^l \gamma(x) dx$ είναι η κυκλοφορία γύρω από την αεροτομή. Η ροπή στην αεροτομή ως προς την αρχή των αξόνων (που εδώ είναι στο μέτωπο προσβολής) δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} M &= \int_0^l [p(x, 0_{+}) - p(x, 0_{-})] x dx \\ &= -\rho V_{\infty} \int_0^l \gamma(x) x dx, \end{aligned} \quad (4.73)$$

όπου ρ η πυκνότητα του ρευστού. Για τους συντελεστές άνωσης $\left(C_L = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho V_{\infty}^2 l} \right)$

και ροπής $\left(C_M = \frac{M}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2 l^2} \right)$ παίρνουμε

$$C_L = \frac{2}{V_\infty} \frac{1}{l} \int_0^l \gamma(x) dx \quad (4.74)$$

$$C_M = -\frac{2}{V_\infty} \frac{1}{l^2} \int_0^l \gamma(x) x dx. \quad (4.75)$$

Εξετάζουμε τώρα το θέμα καθορισμού της $\gamma(x)$. Σύμφωνα με τη συνθήκη επιφανείας (4.65), απαιτούμε

$$\lim_{y \rightarrow 0^\pm} \left[-\frac{1}{2\pi} \int_0^l \gamma(\xi) \frac{x-\xi}{(x-\xi)^2 + y^2} d\xi \right] = v(x, 0_\pm) = V_\infty \frac{dn_c}{dx}, \quad 0 \leq x \leq l$$

ή

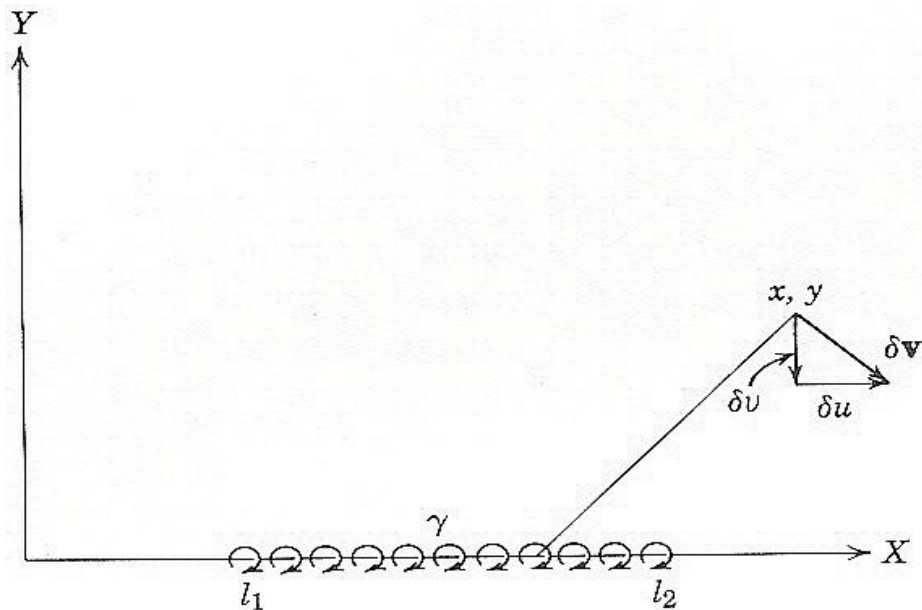
$$-\frac{1}{2\pi} \int_0^l \gamma(\xi) \frac{1}{x-\xi} d\xi = v(x, 0_\pm) = V_\infty \frac{dn_c}{dx}, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (4.76)$$

Στην αξιολόγηση της αριστερής πλευράς αυτής της σχέσης, επιδιώκουμε την κύρια τιμή κατά Cauchy του ολοκληρώματος. Η εξίσωση (4.76) πρέπει φυσικά να συμπληρωθεί από τη συνθήκη Kutta.

Έτσι, πριν προχωρήσουμε στον υπολογισμό του ολοκληρώματος, χρήσιμο είναι η εξαγωγή συμπερασμάτων για το πεδίο της ταχύτητας διαταραχής θεωρώντας την απλή περίπτωση όπου η ένταση των δινών ανά μονάδα μήκους γ είναι σταθερή (ομοιόμορφη διανομή δινών), οπότε οι σχέσεις (4.68) και (4.69) για διανομή δινών από $x=l_1$ έως $x=l_2$ (βλέπε Σχήμα 4.15) δίνουν

$$u(x, y) = \frac{\gamma}{2\pi} \int_{l_1}^{l_2} \frac{y}{(x-\xi)^2 + y^2} d\xi = \frac{\gamma}{2\pi} \int_{l_1}^{l_2} \frac{\sin \theta}{\rho} d\xi \quad (4.77)$$

$$v(x, y) = -\frac{\gamma}{2\pi} \int_{l_1}^{l_2} \frac{x-\xi}{(x-\xi)^2 + y^2} d\xi = -\frac{\gamma}{2\pi} \int_{l_1}^{l_2} \frac{\cos \theta}{\rho} d\xi. \quad (4.78)$$



Σχήμα 4.15: Τρίγωνο ταχυτήτων διαταραχής εξαιτίας ενός στοιχείου σταθερής διανομής δινών [4.1].

Συγκρίνοντας τις σχέσεις (4.77) και (4.78) με τις σχέσεις (4.57) και (4.58), συμπεραίνουμε ότι εάν τα μεγέθη των εντάσεων πηγών και δινών είναι ίσα, τότε

$$u_\gamma = v_e \quad (4.79)$$

$$v_\gamma = -u_e,$$

όπου οι δείκτες γ και e δείχνουν την αναφορά στη διανομή δινών και πηγών αντιστοίχως. Βάσει αυτής της αντιστοιχίας, μπορούμε να περιγράψουμε τα χαρακτηριστικά του πεδίου μιας ανομοιόμορφης διανομής δινών κατά μήκος του άξονα X .

Συγκεκριμένα, τα χαρακτηριστικά γνωρίσματα είναι τα ακόλουθα:

1. Και οι δύο συνιστώσες ταχύτητας μηδενίζονται στο άπειρο και είναι πεπερασμένες παντού εκτός διανομής.
2. Η v -συνιστώσα είναι πεπερασμένη παντού εκτός από τις άκρες της διανομής, όπου απειρίζεται εάν σε εκείνες τις άκρες η ένταση της δίνης έχει τιμή μη μηδενική. Η u -συνιστώσα είναι πεπερασμένη παντού.
3. Κατά μήκος του άξονα X , εκτός διανομής, η v -συνιστώσα έχει μη μηδενική τιμή, ενώ η u -συνιστώσα είναι μηδέν.
4. Από τη μία πλευρά της διανομής στην άλλη η u -συνιστώσα είναι ασυνεχής, ενώ η v -συνιστώσα είναι συνεχής.
5. Το μέγεθος της ασυνέχειας της u είναι ίσο με την τοπική ένταση της διανομής. Αφού ισχύει

$$u(x, 0_+) = -u(x, 0_-) = \frac{\gamma(x)}{2}, \quad (4.80)$$

προκύπτει

$$u(x, 0_+) - u(x, 0_-) = \gamma(x). \quad (4.81)$$

Λόγω του συμπεράσματος (2), προκύπτει ότι για να ικανοποιηθεί η συνθήκη Kutta πρέπει να απαιτήσουμε η ένταση της δίνης στην ακμή φυγής να είναι μηδέν. Έχουμε έτσι

$$\gamma(x=l) = 0. \quad (4.82)$$

Καταλήγοντας, το μαθηματικό πρόβλημα για τον καθορισμό του $\gamma(x)$ αποτελείται από την επίλυση της ολοκληρωτικής εξίσωσης (4.76) με τη συνθήκη (4.82). Στη συνέχεια εξετάζουμε το ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^l \gamma(\xi) \frac{d\xi}{x-\xi}. \quad (4.83)$$

Εισάγοντας τις μεταβλητές θ και φ τέτοιες, ώστε

$$x = \frac{l}{2}(1 + \cos \theta)$$

$$\xi = \frac{l}{2}(1 + \cos \varphi),$$

οπότε σύμφωνα με αυτές το ολοκλήρωμα γράφεται ως

$$I = -\int_0^\pi \gamma(\varphi) \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi - \cos \theta} d\varphi. \quad (4.84)$$

Τώρα, με βάση τη σχέση

$$\int_0^\pi \frac{\cos n\varphi}{\cos \varphi - \cos \theta} d\varphi = \pi \frac{\sin n\theta}{\sin \theta}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.85)$$

Απόδειξη:

Θεωρούμε το ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^\pi \frac{\cos n\varphi}{\cos \varphi - \cos \theta} \sin \theta d\varphi.$$

Σύμφωνα με την ταυτότητα $\frac{2 \sin \theta}{\cos \varphi - \cos \theta} = \cot \frac{\theta - \varphi}{2} + \cot \frac{\theta + \varphi}{2}$, το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int_0^\pi \left(\cot \frac{\theta - \varphi}{2} + \cot \frac{\theta + \varphi}{2} \right) \cos n\varphi d\varphi = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^\pi \cot \frac{\theta + \varphi}{2} \cos n\varphi d\varphi \\ &= \frac{\cos n\theta}{2} \int_{\theta-\pi}^{\theta+\pi} \cos nx \cot \frac{x}{2} dx + \frac{\sin n\theta}{2} \int_{\theta-\pi}^{\theta+\pi} \sin nx \cot \frac{x}{2} dx. \end{aligned}$$

Αφού $\int_{\theta-\pi}^{\theta+\pi} \cos nx \cot \frac{x}{2} dx = 0$, για $n = 1, 2, \dots$ (σημειώστε ότι η ολοκληρωτέα ποσότητα είναι περιττή συνάρτηση), το ολοκλήρωμα I γίνεται

$$I = \frac{\sin n\theta}{2} \int_{\theta-\pi}^{\theta+\pi} \sin nx \cot \frac{x}{2} dx = \frac{\sin n\theta}{2} J_n, \text{ όπου με } J_n \text{ δηλώνουμε το ολοκλήρωμα στο}$$

δεξί μέλος. Για τον υπολογισμό του J_n για $n > 1$ γράφουμε:

$$J_n - J_{n-1} = \int_{\theta-\pi}^{\theta+\pi} [\sin nx - \sin(n-1)x] \cot \frac{x}{2} dx = \int_{\theta-\pi}^{\theta+\pi} \cos nx dx + \int_{\theta-\pi}^{\theta+\pi} \cos(n-1)x dx = 0 + 0 = 0$$

Έτσι, προκύπτει ότι $J_n = J_{n-1} = \dots = J_1$ για $n > 1$ όπου:

$$J_1 = \int_{\theta-\pi}^{\theta+\pi} \sin x \cot \frac{x}{2} dx = 2 \int_{\theta-\pi}^{\theta+\pi} (1 + \cos x) dx = 2\pi.$$

Τελικά, παίρνουμε $I = \pi \sin n\theta$, οπότε:

$$\int_0^\pi \frac{\cos n\varphi}{\cos\varphi - \cos\theta} d\varphi = \frac{I}{\sin\theta} = \pi \frac{\sin n\theta}{\sin\theta}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

□

έχουμε το αποτέλεσμα

$$\int_0^\pi \frac{d\varphi}{\cos\varphi - \cos\theta} = 0. \quad (4.86)$$

Λαμβάνοντας υπόψη το αποτέλεσμα (4.86) καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι εάν επιλέξουμε

$$\gamma(\theta) = \frac{K}{\sin\theta}, \quad (4.87)$$

όπου αν το K είναι μια σταθερά, το ολοκλήρωμα I γίνεται μηδέν. Σε όρους της αρχικής μεταβλητής x , η σχέση (4.87) γίνεται

$$\gamma(x) = \frac{K}{2\sqrt{\frac{x}{l}\left(1 - \frac{x}{l}\right)}}. \quad (4.88)$$

Η σχέση (4.88) ή ισοδύναμα η σχέση (4.87) αποτελεί λύση της εξίσωσης (4.76) με μηδενιζόμενο δεύτερο μέλος.

Για να προχωρήσουμε στη λύση της εξίσωσης (4.76) εισάγουμε, όπως πριν, τις μεταβλητές θ και φ και ξαναγράφουμε την εξίσωση ως

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\gamma(\varphi) \sin\varphi}{2V_\infty \cos\varphi - \cos\theta} d\varphi = \frac{dn_c}{dx}(\theta), \quad (4.89)$$

όπου

$$\frac{dn_c}{dx}(\theta) = \frac{dn_c}{dx}[x(\theta)].$$

Η εξίσωση (4.89) είναι πάλι ο ολοκληρωτικός τύπος του Poisson (συγκρίνετε την με τη σχέση (4.53)). Με βάση τη θεωρία των συζυγών σειρών Fourier μπορούμε να γράψουμε

$$\frac{dn_c}{dx}(\theta) = \frac{B_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \sin n\theta + B_n \cos n\theta),$$

όπου:
$$B_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dn_c}{dx}(\varphi) d\varphi, \quad A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dn_c}{dx}(\varphi) \sin n\varphi d\varphi = 0,$$

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dn_c}{dx}(\varphi) \cos n\varphi d\varphi = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{dn_c}{dx}(\varphi) \cos n\varphi d\varphi \quad (4.90),$$

εφόσον η $(dn_c/dx)(\theta)$

είναι άρτια συνάρτηση του θ . Επομένως,

$$\frac{dn_c}{dx}(\theta) = \frac{B_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos n\theta. \quad (4.91)$$

Με τη χρήση της έκφρασης της (4.91), η εξίσωση (4.89) γίνεται

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\gamma(\varphi)}{2V_{\infty}} \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi - \cos \theta} d\varphi = \frac{B_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos n\theta. \quad (4.92)$$

Η γενική λύση αυτής είναι

$$\gamma(\theta) = \gamma_1(\theta) + \gamma_2(\theta) + \frac{K}{\sin \theta}, \quad (4.93)$$

όπου γ_1 και γ_2 είναι αντιστοίχως, οι μερικές λύσεις των εξισώσεων:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\gamma_1(\varphi)}{2V_{\infty}} \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi - \cos \theta} d\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos n\theta \quad (4.94)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\gamma_2(\varphi)}{2V_{\infty}} \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi - \cos \theta} d\varphi = \frac{B_0}{2}. \quad (4.95)$$

Η λύση της εξίσωσης (4.94) δίνεται από τις συζυγείς σειρές Fourier

$$\frac{\gamma_1(\theta)}{2V_{\infty}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-B_n \sin n\theta + A_n \cos n\theta)$$

ή

$$\frac{\gamma_1(\theta)}{2V_{\infty}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-B_n \sin n\theta)$$

ή

$$\gamma_1(\theta) = -2V_{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin n\theta. \quad (4.96)$$

Για να πάρουμε τη λύση της εξίσωσης (4.95), αρχικά παρατηρούμε ότι βάσει της σχέσης (4.85) έχουμε το αποτέλεσμα

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos \varphi}{\cos \varphi - \cos \theta} d\varphi = 1. \quad (4.97)$$

Από αυτό προκύπτει ότι εάν θέσουμε

$$\gamma_2(\theta) = V_{\infty} B_0 \frac{\cos \theta}{\sin \theta}, \quad (4.98)$$

η εξίσωση (4.95) ικανοποιείται ταυτοτικά. Κατά συνέπεια, η συνάρτηση (4.98) είναι η απαιτούμενη μερική λύση για τη γ_2 . Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (4.96) και (4.98) στη σχέση (4.93), παίρνουμε

$$\gamma(\theta) = -2V_\infty \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin n\theta + \frac{V_\infty B_0}{\sin \theta} \left(\frac{K}{V_\infty B_0} + \cos \theta \right). \quad (4.99)$$

Για να καθορίσουμε τη σταθερά K χρησιμοποιούμε τη συνθήκη Kutta (4.82). Συνεπώς, απαιτούμε ότι

$$\gamma(\theta = 0) = 0. \quad (4.100)$$

Αυτή οδηγεί στη συνθήκη

$$\left. \frac{1}{\sin \theta} \left(\frac{K}{V_\infty B_0} + \cos \theta \right) \right|_{\theta=0} = 0. \quad (4.101)$$

Αυτή ικανοποιείται θέτοντας

$$K = -V_\infty B_0. \quad (4.102)$$

Για αυτό έχουμε

$$\frac{\cos \theta - 1}{\sin \theta} = \frac{-2 \sin^2 \theta/2}{2 \sin \theta/2 \cos \theta/2} = -\tan \frac{\theta}{2}, \quad (4.103)$$

η οποία μηδενίζεται για $\theta = 0$. Στη σχέση (4.98) αντικαθιστούμε το K από τη σχέση (4.102) και παίρνουμε

$$\gamma(\theta) = -2V_\infty \left(\frac{B_0}{2} \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin n\theta \right). \quad (4.104)$$

Χρησιμοποιώντας αυτή τη σχέση μπορούμε να εκφράσουμε όλα τα επιθυμητά αεροδυναμικά μεγέθη της αεροτομής με όρους των B , που είναι οι συντελεστές του αναπτύγματος Fourier για (dn_c/dx) . Η κατανομή πίεσης πάνω στην αεροτομή δίνεται από τη σχέση

$$C_p(\theta) = C_p[x(\theta), 0_\pm] = -\frac{\gamma(\theta)}{V_\infty} = 2 \left[\frac{B_0}{2} \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin n\theta \right]. \quad (4.105)$$

Για να λάβουμε τους συντελεστές άνωσης και ροπής ξαναγράφουμε αρχικά τις σχέσεις (4.74) και (4.75) σε όρους της μεταβλητής θ

$$C_L = \frac{1}{V_\infty} \int_0^\pi \gamma(\theta) \sin \theta d\theta \quad (4.106)$$

$$C_M = -\frac{1}{2V_\infty} \int_0^\pi \gamma(\theta) (1 + \cos \theta) \sin \theta d\theta. \quad (4.107)$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (4.102) στις σχέσεις (4.104) και (4.105), και πραγματοποιώντας τις ολοκληρώσεις, παίρνουμε

$$C_L = -(B_0 + B_1)\pi \quad (4.108)$$

$$\begin{aligned} C_M &= B_0 \frac{\pi}{4} + B_1 \frac{\pi}{2} + B_2 \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\pi}{4} (B_0 + B_1) + \frac{\pi}{4} (B_1 + B_2) \\ &= -\frac{C_L}{4} + \frac{\pi}{4} (B_1 + B_2), \end{aligned} \quad (4.109)$$

όπου $B_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{dn_c}{dx}(\theta) \cos n\theta d\theta$, $n = 0,1,2,\dots$. Οι σχέσεις (4.108) και (4.109) δείχνουν

ότι η συνισταμένη δύναμη που ενεργεί στην αεροτομή μπορεί να αντιπροσωπευθεί, από την άνωση που ενεργεί στο σημείο του ενός τετάρτου της χορδής από το μέτωπο προσβολής και μιας ροπής σε εκείνο το σημείο.

Έχουμε ολοκληρώσει έτσι, –σχετικά με αεροτομή μηδενικού πάχους σε μηδενική γωνία πρόσπτωσης– το στόχο να εκφράσουμε σε μαθηματικούς όρους τη μορφή της αεροτομής και όλα τα επιθυμητά αεροδυναμικά μεγέθη. Περνάμε τώρα να εξετάσουμε το πρόβλημα της επιπέδου πλάκας σε μη μηδενική γωνία πρόσπτωσης.

4.9 ΕΠΙΠΕΔΗ ΠΛΑΚΑ ΣΕ ΓΩΝΙΑ ΠΡΟΣΠΤΩΣΗΣ: ΛΥΣΗ ΑΠΟ ΔΙΑΝΟΜΗ ΔΙΝΩΝ

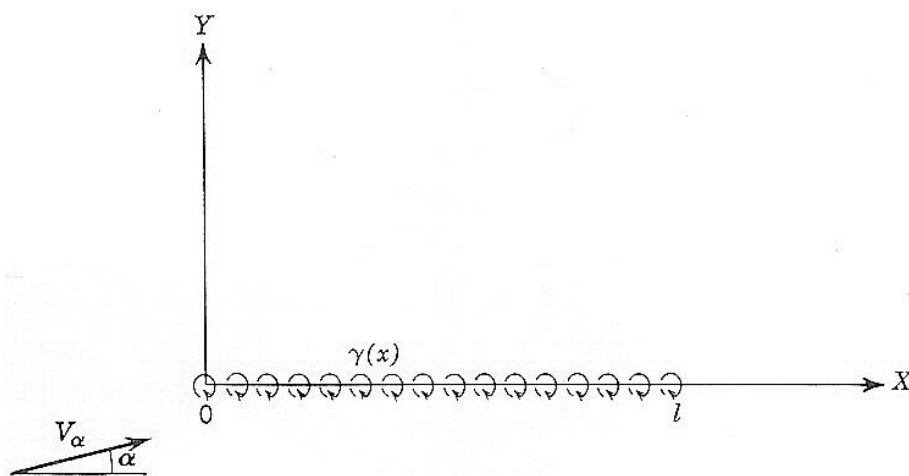
Το μαθηματικό πρόβλημα για το δυναμικό διαταραχής εκφράζεται ως εξής (βλέπε Σχήμα 4.16):

$$\nabla^2 \phi = 0 \tag{4.110}$$

$$v(x,0_\pm) = \frac{\partial \phi}{\partial y}(x,0_\pm) = -V_\infty \alpha, \quad 0 \leq x \leq l \tag{4.111}$$

$$\nabla \phi = 0 \text{ στο άπειρο} \tag{4.112}$$

Συνθήκη Kutta: Η κυκλοφορία είναι τέτοια, ώστε οι $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ και $\frac{\partial \phi}{\partial y}$ να είναι πεπερασμένες στην ακμή φυγής.



Σχήμα 4.16: Συντεταγμένες και διανομή δινών για το πρόβλημα της επιπέδου πλάκας [4.1].

Ακολουθώντας παρόμοιες θεωρήσεις όπως εκείνες που δόθηκαν στην προηγούμενη ενότητα, αμέσως καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το πεδίο διαταραχής λόγω της επιπέδου πλάκας μπορεί να αντιπροσωπευθεί όπως αυτό μιας

κατάλληλης διανομής δινών $\gamma(x)$ κατά μήκος του άξονα X στο διάστημα $0 \leq x \leq l$, δηλαδή εκείνου του $\gamma(x)$ που δίνεται ως λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^l \gamma(\xi) \frac{d\xi}{x-\xi} = v(x, 0_{\pm}) = V_{\infty} a, \quad 0 \leq x \leq l \quad (4.113)$$

με τη **συνθήκη Kutta**:

$$\gamma(x=l) = 0. \quad (4.114)$$

Εισάγοντας, όπως πριν, τις μεταβλητές θ και φ μέσω των σχέσεων

$$x = \frac{l}{2}(1 + \cos \theta)$$

$$\xi = \frac{l}{2}(1 + \cos \varphi).$$

Κατόπιν, η εξίσωση (4.113) παίρνει τη μορφή

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \gamma(\varphi) \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi - \cos \theta} d\varphi = -2V_{\infty} a. \quad (4.115)$$

Η λύση της εξίσωσης για μηδενισμένο δεύτερο μέλος είναι της μορφής $K/\sin \theta$ (βλέπε σχέση (4.87)) και λόγω του αποτελέσματος που εκφράζεται από τον τύπο (4.97), η λύση της εξίσωσης (4.115) μπορεί να γραφτεί ως

$$\begin{aligned} \gamma(\theta) &= \frac{K}{\sin \theta} - 2V_{\infty} a \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \\ &= -2V_{\infty} a \frac{1}{\sin \theta} \left(\frac{-K}{2V_{\infty} a} + \cos \theta \right). \end{aligned} \quad (4.116)$$

Για να ικανοποιείται η συνθήκη (4.114), η σταθερά K πρέπει να τεθεί ίση με $2V_{\infty} a$. Έτσι, παίρνουμε

$$\gamma(\theta) = 2V_{\infty} a \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta}. \quad (4.117)$$

Αυτή είναι η απαιτούμενη λύση.

Η κατανομή της πίεσης πάνω στην επίπεδη πλάκα δίνεται από το συντελεστή πίεσης

$$\begin{aligned} C_p(\theta) &= C_p[x(\theta), 0_{\pm}] = -\frac{\gamma(\theta)}{V_{\infty}} \\ &= -2a \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \\ &= -2\alpha \tan \frac{\theta}{2}. \end{aligned} \quad (4.118)$$

Οι συντελεστές άνωσης και ροπής δίνονται από

$$C_L = \frac{1}{V_{\infty}} \int_0^{\pi} \gamma(\theta) \sin \theta d\theta = 2\pi\alpha \quad (4.119)$$

$$C_M = -\frac{1}{2V_{\infty}} \int_0^{\pi} \gamma(\theta)(1 + \cos \theta) \sin \theta d\theta$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\pi}{2} \alpha \\
&= -\frac{C_L}{4}.
\end{aligned} \tag{4.120}$$

Αυτές οι σχέσεις (4.119) και (4.120) δείχνουν ότι το σύστημα δυνάμεων στην επίπεδη πλάκα μπορεί να αντιπροσωπευθεί όπως αποτελούμενο από μόνο μια δύναμη την άνωση που ενεργεί στο ένα τέταρτο της χορδής. Αυτό το σημείο είναι το αεροδυναμικό κέντρο (εστία, βλέπε ενότητα 2.12). Επιπλέον, είναι το κέντρο της πίεσης για όλες τις γωνίες πρόσπτωσης.

4.10 ΑΕΡΟΔΥΝΑΜΙΚΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΜΙΑΣ ΑΠΕΙΡΩΣ ΛΕΠΤΗΣ ΑΕΡΟΤΟΜΗΣ

Λαμβάνοντας υπόψη τα αποτελέσματα των δύο τελευταίων ενοτήτων, παίρνουμε τα χαρακτηριστικά μιας αυθαίρετης απείρως λεπτής αεροτομής σε γωνία πρόσπτωσης ως προς την αδιατάρακτη ροή. Έχουμε

$$\frac{dn}{dx} = \frac{dn_c}{dx}, \tag{4.121}$$

την οποία γράφουμε σε όρους της μεταβλητής θ [που καθορίζεται από τη $x = (l/2)(1 + \cos \theta)$]

$$\frac{dn}{dx}(\theta) = \frac{dn_c}{dx}(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq \pi. \tag{4.122}$$

Εισάγοντας το ανάπτυγμα Fourier έχουμε

$$\frac{dn}{dx}(\theta) = \frac{B_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos n\theta, \tag{4.123}$$

όπου $B_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{dn_c}{dx}(\theta) \cos n\theta d\theta$.

Η κατανομή των δινών δίνεται από τις σχέσεις (4.104) και (4.117)

$$\gamma(\theta) = 2V_{\infty} \alpha \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} - 2V_{\infty} \left(\frac{B_0}{2} \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin n\theta \right)$$

ή

$$\frac{\gamma(\theta)}{V_{\infty}} = 2\alpha \tan \frac{\theta}{2} - 2 \frac{B_0}{2} \tan \frac{\theta}{2} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin n\theta$$

ή

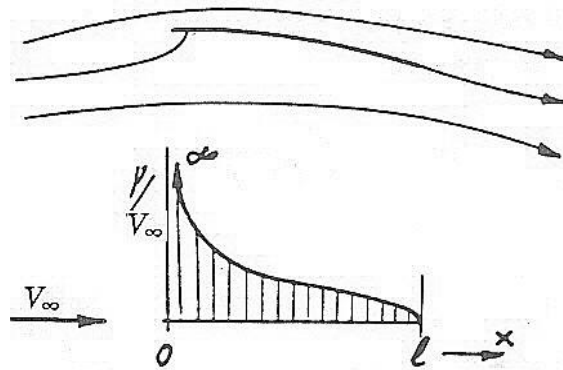
$$\frac{\gamma(\theta)}{V_{\infty}} = 2 \left[\left(\alpha - \frac{B_0}{2} \right) \tan \frac{\theta}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin n\theta \right]. \tag{4.124}$$

Παρατηρούμε από την τελευταία σχέση ότι αν $\alpha \neq \frac{B_0}{2}$, τότε για $\theta = \pi$ είναι

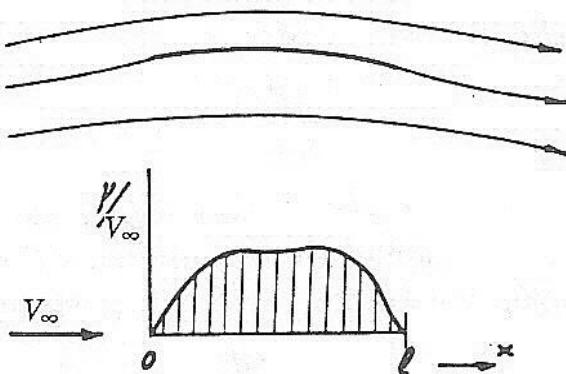
$$\frac{\gamma(\theta)}{V_\infty} \rightarrow \infty, \text{ ενώ για } \alpha = \frac{B_0}{2} \text{ και } \theta = \pi \text{ είναι } \frac{\gamma(\theta)}{V_\infty} = 0.$$

Στη συνέχεια διακρίνουμε δύο περιπτώσεις σχετικά με την εμφάνιση ή όχι σημείου ανακοπής στην απείρως λεπτή αεροτομή κοντά στο μέτωπο προσβολής (βλέπε Σχήμα 4.17):

1. Η εμφάνιση σημείου ανακοπής στην περιοχή του μετώπου προσβολής σημαίνει την κατά 180° στροφή της διεύθυνσης της ταχύτητας δια του μετώπου προσβολής, δηλαδή την εμφάνιση άπειρης ταχύτητας και βέβαια άπειρης κυκλοφορίας $\frac{\gamma(\pi)}{V_\infty} \rightarrow \infty$. Σε ροή με σημείο ανακοπής συνεπώς, η περί το μέτωπο προσβολής περιοχή είναι ιδιόμορφη.



*Ροή μετά σημείου ανακοπής
(Ροή μετά κρούσεως).
Γωνία πρόσπτωσης $\alpha \neq \alpha_i$*



*Ροή άνευ σημείου ανακοπής
(Ροή άνευ κρούσεως)
Γωνία πρόσπτωσης $\alpha = \alpha_i$*

Σχήμα 4.17: Η μορφή της διανομής στοιχειωδών δινών κατά μήκος απείρως λεπτής αεροτομής ορισμένης μορφής, για ροή άνευ κρούσης υπό γωνία πρόσπτωσης α_i και ροή μετά κρούσης στο μέτωπο προσβολής, για γωνία $\alpha \neq \alpha_i$ [4.2].

2. Στη ροή χωρίς σημείο ανακοπής, η από το άπειρο οδεύουσα γραμμή ροής διέρχεται από την αεροτομή (η αεροτομή αποτελεί τμήμα της), δεν εμφανίζει ιδιόμορφα σημεία ανακοπής ή άπειρης ταχύτητας, αλλά έχει επί του μετώπου προσβολής την κατεύθυνση της εκεί εφαπτομένης της καμπύλης. Η ροή περί την αεροτομή είναι ομαλή, οπότε $\frac{\gamma(\pi)}{V_\infty} = 0$. Είναι φανερό ότι η ροή χωρίς σημείο ανακοπής γύρω από απείρως λεπτή αεροτομή είναι δυνατή μόνο υπό κατάλληλη γωνία πρόσπτωσης. Αυτή συμβολίζεται με α_i , ονομάζεται βέλτιστη (optimum) γωνία πρόσπτωσης και η τιμή της εξαρτάται από την καμπυλότητα της αεροτομής.

Η κατανομή πίεσης επί της απείρως λεπτής αεροτομής δίνεται από

$$\begin{aligned} C_p(\theta) &= -2 \frac{u(\theta)}{V_\infty} \\ &= -2a \tan \frac{\theta}{2} + 2 \left[\frac{B_0}{2} \tan \frac{\theta}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin n\theta \right] \\ &= -2 \left[\left(\alpha - \frac{B_0}{2} \right) \tan \frac{\theta}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin n\theta \right]. \end{aligned} \quad (4.125)$$

Οι συντελεστές άνωσης και ροπής είναι ίδιοι με αυτούς της αεροτομής με πάχος.

4.11 ΑΕΡΟΔΥΝΑΜΙΚΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΜΙΑΣ ΛΕΠΤΗΣ ΑΕΡΟΤΟΜΗΣ

Στη συνέχεια λαμβάνοντας υπόψη τα αποτελέσματα των προηγούμενων τριών ενοτήτων, παίρνουμε τα χαρακτηριστικά μιας αυθαίρετης λεπτής αεροτομής, που έχει αμφοτέρα πάχος και καμπυλότητα σε μη μηδενική γωνία πρόσπτωσης ως προς την αδιατάρακτη ροή. Υπενθύμιση αυτού

$$\frac{dn_\pm}{dx} = \frac{dn_c}{dx} \pm \frac{dn_t}{dx}$$

γράφουμε σε όρους της μεταβλητής θ [που καθορίζεται από $x = (l/2)(1 + \cos\theta)$]

$$\frac{dn}{dx}(\theta) = \frac{dn_c}{dx}(\theta) + \frac{dn_t}{dx}(\theta), \quad -\pi \leq \theta \leq \pi. \quad (4.126)$$

Το άνω μέρος της αεροτομής αντιστοιχεί στις θετικές τιμές του θ , ενώ το κάτω μέρος της αεροτομής αντιστοιχεί στις αρνητικές τιμές θ . Εισάγοντας τα αναπτύγματα Fourier που ήδη υιοθετήθηκαν έχουμε

$$\frac{dn}{dx}(\theta) = \frac{B_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta, \quad (4.127)$$

όπου:

$$B_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{dn_c}{dx}(\theta) \cos n\theta d\theta, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{dn_t}{dx}(\theta) \sin n\theta d\theta, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Η κατανομή πίεσης επί της αεροτομής δίνεται από το συντελεστή πίεσης

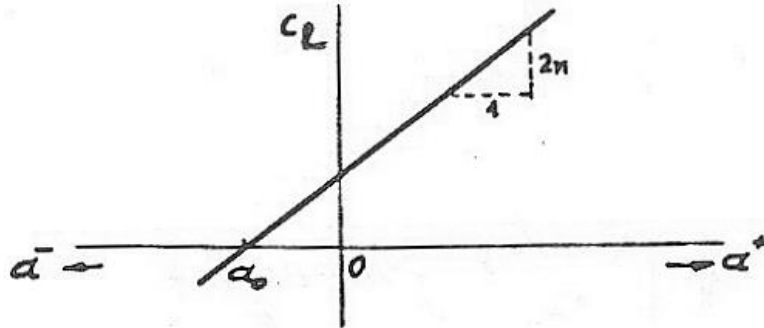
$$\begin{aligned} C_p(\theta) &= -2 \frac{u(\theta)}{V_\infty} \\ &= -2a \tan \frac{\theta}{2} + 2 \left[\frac{B_0}{2} \tan \frac{\theta}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin n\theta \right] - 2 \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\theta \\ &= -2 \left[\left(\alpha - \frac{B_0}{2} \right) \tan \frac{\theta}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\theta \right]. \end{aligned} \quad (4.128)$$

Ο συντελεστής άνωσης για την αεροτομή δίνεται από

$$C_L = 2\pi\alpha - (B_0 + B_1)\pi = 2\pi \left(\alpha - \frac{B_0 + B_1}{2} \right). \quad (4.129)$$

Η κλίση της καμπύλης της άνωσης όσον αφορά τη γωνία πρόσπτωσης είναι σταθερά και ίση με 2π (βλέπε Σχήμα 4.18)

$$\frac{dC_L}{d\alpha} = 2\pi. \quad (4.130)$$



Σχήμα 4.18: Συντελεστής άνωσης C_L λεπτής αεροτομής ως προς γωνία πρόσπτωσης α , $C_L = 2\pi(\alpha - \alpha_0)$ [4.2].

Όπως ξέρουμε, το πάχος δεν συμβάλλει στην άνωση. Η καμπυλότητα καθορίζει την άνωση σε μηδενική γωνία πρόσπτωσης και η μηδενική άνωση καθορίζει συγκεκριμένη γωνία πρόσπτωσης. Από τη σχέση (4.129), η γωνία μηδενικής άνωσης λαμβάνεται ως

$$\alpha_0 = \frac{B_0 + B_1}{2}$$

ή

$$\alpha_0 - \alpha_i = \frac{B_1}{2}. \quad (4.131)$$

Ο συντελεστής ροπής ως προς την αρχή των αξόνων δίνεται από

$$\begin{aligned}
C_M &= -\frac{\pi}{2}\alpha + (B_0 + B_1)\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}(B_1 + B_2) \\
&= -[2\pi\alpha - (B_0 + B_1)\pi]\frac{1}{4} + \frac{\pi}{4}(B_1 + B_2) \\
&= -\frac{C_L}{4} + \frac{\pi}{4}(B_1 + B_2). \tag{4.132}
\end{aligned}$$

Όπως ξέρουμε, το πάχος δεν συμβάλλει καθόλου στη ροπή της αεροτομής. Από τη σχέση (4.132) προκύπτει ότι το σύστημα δυνάμεων που ενεργεί στην αεροτομή, μπορεί να αντιπροσωπευθεί ως αποτελούμενο από μια δύναμη άνωσης που ενεργεί στο σημείο του ενός τετάρτου της χορδής και μιας ροπής ίσης με $(\pi/4)(B_1 + B_2)$ σε αυτό το σημείο. Αυτή η ροπή είναι ανεξάρτητη από τη γωνία πρόσπτωσης και καθορίζεται απλώς από την καμπυλότητα της αεροτομής. Προκύπτει ότι το σημείο ενός τετάρτου-χορδής είναι το *αεροδυναμικό κέντρο* (*aerodynamic center*). Κατά συνέπεια η ροπή ως προς το αεροδυναμικό κέντρο δίνεται από

$$\begin{aligned}
C_{m/4} &= \frac{\pi}{4}(B_1 + B_2) \\
&= \text{o συντελεστής ροπής λόγω καμπυλότητας.} \tag{4.133}
\end{aligned}$$

Όπως γνωρίζουμε, είναι επίσης ο συντελεστής ροπής μηδενικής άνωσης (βλέπε σχέση (4.132) για $C_L = 0$).

4.12 ΠΟΙΟΤΙΚΗ ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΤΩΝ ΜΕΘΟΔΩΝ THEODORSEN ΚΑΙ ΙΔΙΟΜΟΡΦΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ

Συγκρίνοντας τις μεθόδους Theodorsen και των ιδιόμορφων σημείων καταλήγουμε στα εξής συμπεράσματα:

1. Στη μέθοδο των ιδιόμορφων σημείων εξαιρούνται τα αποτελέσματα για το πεδίο της ταχύτητας (θεωρία διαταραχών) και κατ' επέκταση για το συντελεστή πίεσης για μικρές περιοχές γύρω από τα σημεία ανακοπής (το πολύ δύο), στο μέτωπο προσβολής και στην ακμή φυγής –εφόσον η τελευταία έχει μη μηδενική ακτίνα καμπυλότητας– της αεροτομής. Στην πλειοψηφία των περιπτώσεων αεροτομών υπάρχει ένα σημείο ανακοπής στο μέτωπο προσβολής. Αντίθετα, η μέθοδος Theodorsen μπορεί να δώσει αποτελέσματα για οποιοδήποτε σημείο του περιγράμματος της αεροτομής.
2. Η μέθοδος των ιδιόμορφων σημείων έχει αναπτυχθεί μόνο για λεπτές αεροτομές σε μικρές γωνίες πρόσπτωσης, ενώ η μέθοδος Theodorsen μπορεί να γενικευτεί για οποιοδήποτε τύπο αεροτομής υπό οποιαδήποτε γωνία πρόσπτωσης, άσχετα αν θα μας δώσει ή όχι ρεαλιστικά αποτελέσματα (αποκόλληση της ροής).
3. Ο υπολογισμός των συντελεστών πίεσης, άνωσης και ροπής είναι πιο γρήγορος και πιο άμεσος στη μέθοδο των ιδιόμορφων σημείων από ό,τι στη μέθοδο Theodorsen.

4. Η ακρίβεια της μεθόδου Theodorsen εξαρτάται από τον αριθμό των σημείων στο περίγραμμα της αεροτομής, τα οποία επιλέγουμε να υπολογίσουμε, αλλά και της επιλογής του σημείου ανακοπής στην ακμή φυγής, όταν αυτή έχει μη μηδενική ακτίνα καμπυλότητας. Στη μέθοδο των ιδιόμορφων σημείων η ακρίβεια εξαρτάται και από τον αριθμό των όρων που θα επιλέξουμε να υπολογίσουμε στη σχέση του συντελεστή πίεσης (κατανομή ταχύτητας). Τέλος, η ακρίβεια και για τις δύο μεθόδους εξαρτάται ακόμη και από την αριθμητική μέθοδο που θα επιλέξουμε για να υπολογίσουμε τα διάφορα ολοκληρώματα που υπεισέρχονται.

4.13 ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [4.1] K. Karamcheti, *Principles of Ideal-Fluid Aerodynamics*, New York, London, Sydney: John Wiley & Sons, Inc., 1966.
- [4.2] N. A. Αθανασιάδης, *Αεροδυναμική-Αεριοδυναμική*, Αθήνα: Εκδόσεις Συμμεών, 1992.