



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ ΣΤΗΝ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗ ΕΡΕΥΝΑ

ΜΕ ΘΕΜΑ:

ΕΛΕΓΧΟΣ ΑΠΟΘΕΜΑΤΩΝ

ΜΕ ΣΤΑΘΕΡΗ Ή ΑΒΕΒΑΙΗ ΖΗΤΗΣΗ



Της φοιτήτριας:

ΡΑΠΤΟΔΗΜΟΥ ΔΙΚΑΤΕΡΙΝΗΣ,

A.M. 09107104

Επιβλέπων καθηγητής: Κολέτσος Ιωάννης, Επίκουρος Καθηγητής

Τριμελής επιτροπή: Κοκκίνης Βασίλειος, Επίκουρος Καθηγητής
Κολέτσος Ιωάννης, Επίκουρος Καθηγητής
Τυχόπουλος Ευάγγελος, Επίκουρος Καθηγητής

Αθήνα, Μάρτιος 2016

Ευχαριστίες

Η εργασία αυτή αποτελεί μέρος των τυπικών απαιτήσεων για την απόκτηση του πτυχίου από τη Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών (Σ.Ε.Μ.Φ.Ε.) του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου (Ε.Μ.Π.). Για την ακρίβεια, πρόκειται για την πιο πλήρη εργασία που έχω κληθεί να κάνω στα πλαίσια της σχολής αλλά και για την εργασία που έρχεται να επισφραγίσει την πορεία μου σε αυτή. Για την ολοκλήρωσή της, ήταν απαραίτητη και πολύτιμη η συμβολή ορισμένων ανθρώπων, τους οποίους οφείλω και επιθυμώ να ευχαριστήσω.

Θα ήθελα λοιπόν, να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή της διπλωματικής αυτής εργασίας, κύριο Ιωάννη Κολέτσο, Επίκουρο Καθηγητή Ε.Μ.Π., για την ευκαιρία που μου έδωσε να ασχοληθώ με ένα τόσο ενδιαφέρον αντικείμενο και για την ουσιαστική καθοδήγησή του καθ'όλη τη διάρκεια της εκπόνησης της εργασίας αυτής. Επιπλέον, θα ήθελα να ευχαριστήσω και τα υπόλοιπα μέλη της τριμελούς επιτροπής, τον κύριο Βασίλειο Κοκκίνη, Επίκουρο Καθηγητή Ε.Μ.Π. και τον κύριο Ευάγγελο Τυχόπουλο, Επίκουρο Καθηγητή Ε.Μ.Π., για την ουσιαστική συμβολή τους στην τυπική ολοκλήρωση της εργασίας. Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους φίλους μου, συμφοιτητές και μη, που με ενθάρρυναν σε αυτή την προσπάθεια. Κυρίως όμως, θέλω ολόψυχα να ευχαριστήσω τους γονείς μου, Νικόλαο και Βασιλική, που με στήριξαν με αγάπη, ουσιαστικά και διαχρονικά, καθ'όλη τη διάρκεια των σπουδών μου, καθώς επίσης και το Δημήτρη για κάθε εύστοχο σχόλιό του κατά τη διάρκεια της ενασχόλησής μου με την εργασία αυτή, αλλά κυρίως για τη συνεχή εμπύχωση και τη δύναμη που μου προσφέρει απλόχερα.

Αθήνα, Μάρτιος 2016,

Κατερίνα Ραπποδήμου

Πρόλογος

Ο Έλεγχος Αποθεμάτων αποτελεί μια πολύ σημαντική λειτουργία για τις σύγχρονες επιχειρήσεις, καθοριστική για την επιτυχία τους. Ο συγκεκριμένος κλάδος ασχολείται με την διαχείριση αποθεμάτων ενός ή περισσότερων ειδών, με στόχο τη συνεχή και ομαλή ικανοποίηση της ζήτησης και την ταυτόχρονη κάλυψη του χαμηλότερου δυνατού κόστους. Το βασικότερο πρόβλημα της Θεωρίας Αποθεμάτων είναι ο ακριβής καθορισμός του ύψους των παραγγελιών και ο έγκαιρος χρονοπρογραμματισμός τους. Δηλαδή ο εντοπισμός της ποσότητας και του χρόνου που πρέπει να παραγγελθούν τα διάφορα προϊόντα, έτσι ώστε να επιτυγχάνονται υψηλά επίπεδα εξυπηρέτησης των πελατών και ταυτόχρονη μείωση των δαπανών της επιχείρησης. Επιπροσθέτως, οι διάφορες ελλείψεις και τα σημεία στα οποία τοποθετείται μία νέα παραγγελία για την ομαλή αντικατάσταση των ελλείψεων εντοπίζονται τις περισσότερες φορές με τρόπο επιστημονικό.

Για να γίνει αυτό, κρίνεται απαραίτητη η συμβολή της επιστήμης των Μαθηματικών γενικά και της Επιχειρησιακής Έρευνας ειδικότερα, καθώς, χωρίς τη χρήση μαθηματικών μοντέλων βελτιστοποίησης, μαθηματικού προγραμματισμού, μαθηματικών αλγορίθμων, στατιστικών προβλέψεων της ζήτησης κλπ, θα ήταν αδύνατη η διαδικασία διαχείρισης των αποθεμάτων. Τεράστια συμβολή στη συγκεκριμένη προβληματική προσφέρει επίσης και η επιστήμη της Πληροφορικής, μέσω πληροφοριακών συστημάτων και διάφορων λογισμικών, που συντελούν στην απλοποίηση των πολύπλοκων συνθηκών λειτουργίας ενός πραγματικού συστήματος.

Στη βιβλιογραφία, υπάρχουν πολλές εφαρμογές για τη μελέτη προβλημάτων διαχείρισης αποθεμάτων που διαφέρουν ανάλογα με τη δομή και τα χαρακτηριστικά του εκάστοτε συστήματος αποθεμάτων. Η συγκεκριμένη διπλωματική εργασία αποσκοπεί στην επισκόπηση της περιοχής αυτής, τη μελέτη, περιγραφή και ανάλυση των μαθηματικών τεχνικών και μοντέλων που χρησιμοποιούνται.

Συγκεκριμένα, στο πρώτο κεφάλαιο της εργασίας, παρουσιάζεται η επιστήμη της Επιχειρησιακής Έρευνας μέσα από μια σύντομη ιστορική αναδρομή και περιγράφεται η μεθοδολογία στην οποία βασίζεται. Στο δεύτερο κεφάλαιο, εισάγεται η έννοια του Ελέγχου Αποθεμάτων που είναι ένα από τα κέντρικά θέματα με τα οποία ασχολείται η Επιχειρησιακή Έρευνα. Δίνονται βασικοί ορισμοί, και παρουσιάζονται οι βασικές κατηγορίες αποθεμάτων. Ακόμα, καταδεικνύεται η σημασία του, δεδομένων των πλεονεκτημάτων της σωστής διαχείρισης των αποθεμάτων από τη μεριά της κάθε επιχείρησης, αλλά και των μειονεκτημάτων που προκύπτουν όταν δεν υπάρχει οργανωμένη στρατηγική σε αυτό το κομμάτι.

Στο τρίτο κεφάλαιο, παρουσιάζονται τα βασικά μοντέλα αποθεμάτων που υπάρχουν στη βιβλιογραφία. Περιγράφεται η μέθοδος Βέλτιστης Ποσότητας Παραγγελίας (EOQ). Ξεκινώντας με απλές, μη ρεαλιστικές υποθέσεις, παρουσιάζεται πληθώρα ντετερμινιστικών μοντέλων, που προσεγγίζουν όλο και περισσότερο την πραγματικότητα. Στη συνέχεια, παρουσιάζονται στοχαστικά μοντέλα Ελέγχου Αποθεμάτων που αφορούν συστήματα με αβεβαιότητα ως προς τη ζήτηση. Για κάθε μοντέλο που εξετάζεται, ακολουθούν αναλυτικά παραδείγματα. Τέλος, παρουσιάζεται η μελέτη περίπτωσης (case study), στην οποία αναπτύσσεται σε βάθος η εφαρμογή, για μία μικρή επιχείρηση, πληθώρας μοντέλων ελέγχου αποθεμάτων που εξετάζονται στο τρίτο κεφάλαιο.

Αθήνα, Μάρτιος 2016

Κατερίνα Ραπποδήμου

Πίνακας Περιεχομένων

Ευχαριστίες.....	1
Πρόλογος	3
Πίνακας Περιεχομένων	5
Επιχειρησιακή Έρευνα.....	7
Εισαγωγή	7
1.1. Τί είναι η Επιχειρησιακή Έρευνα.....	7
1.2. Ιστορική αναδρομή.....	8
1.3. Μεθοδολογία της Επιχειρησιακής Έρευνας	9
Έλεγχος Αποθεμάτων	13
2.1. Ορισμός αποθέματος.....	13
2.2. Κατηγορίες αποθεμάτων	14
2.2.1. Χαρακτηριστικά ενός συστήματος αποθεμάτων	16
2.3. Οφέλη σωστής διαχείρισης αποθεμάτων	20
2.4. Μειονεκτήματα διατήρησης αποθεμάτων	21
Μοντέλα Ελέγχου Αποθεμάτων	23
Μοντέλα σταθερής ζήτησης	23
3.1. Εισαγωγή	23
3.2. Βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας (EOQ)	26
3.3. Βασικό μοντέλο EOQ	26
3.4. Μοντέλο EOQ με καθυστέρηση στην παράδοση παραγγελίας	31
3.5. Μοντέλο EOQ με σταδιακή παράδοση παραγγελίας	33
3.6. Μοντέλο EOQ με προγραμματισμένες ελλείψεις.....	37
3.7. Μοντέλο EOQ με εκπτώσεις στην ποσότητα παραγγελίας	43

3.8. Ντετερμινιστικό μοντέλο περιοδικής επιθεώρησης.....	46
Μοντέλα στοχαστικής ζήτησης.....	52
3.9. Στοχαστικό μοντέλο συνεχούς επιθεώρησης	52
3.9.1. Εισαγωγή	52
3.9.2. Η πολιτική (Q, R)	54
3.10. Στοχαστικό μοντέλο μιας περιόδου για εφήμερα προϊόντα	60
3.10.1. Οι υποθέσεις του μοντέλου	64
3.10.2. Ανάλυση του μοντέλου	65
3.10.3. Με αρχικό απόθεμα.....	69
3.10.4. Μοντέλο με μη γραμμικά κόστη.....	71
3.10.5. Μοντέλο μιας περιόδου με κόστος αποθήκευσης (setup cost).....	72
3.11. Μοντέλα πολλών προϊόντων – ABC ανάλυση.....	74
Μελέτη περίπτωσης.....	77
Επίλογος.....	89
Παράρτημα.....	91
Τυποποιημένη Κανονική Κατανομή	91
Βιβλιογραφία	93
Ξένη βιβλιογραφία	93
Ελληνική βιβλιογραφία	94

Επιχειρησιακή Έρευνα

Εισαγωγή

1.1. Τί είναι η Επιχειρησιακή Έρευνα

Ο όρος «Επιχειρησιακή Έρευνα» προέρχεται από την απόδοση του αγγλικού όρου «Operational Research» ή, όπως συνηθίζεται στην Αμερική, «Operations Research».

Επιχειρησιακή Έρευνα (E.E.) είναι ο κλάδος της επιστήμης που ασχολείται με την εύρεση βέλτιστων, ως προς κάποια μετρήσιμα κριτήρια, λύσεων για τη λήψη αποφάσεων πάνω σε πολύπλοκα προβλήματα που ανακύπτουν στη διεύθυνση και διοίκηση μεγάλων συστημάτων, αποτελούμενων από ανθρώπους, μηχανές, υλικά και κεφάλαια, στις επιχειρήσεις. Αποτελεί βασικό εργαλείο για την άσκηση της διοίκησης και την επίλυση επιτελικών και επιχειρησιακών προβλημάτων απόφασης σε όλο το φάσμα λειτουργίας των επιχειρήσεων και των οργανισμών, μιας και, μέσα από ένα σύνολο τεχνικών οι οποίες βασίζονται σε μαθηματικά μοντέλα, δημιουργείται μια ορθολογιστική βάση για την επίλυση προβλημάτων.

Πολλοί ορισμοί έχουν δοθεί στο παρελθόν, σε διάφορα επιστημονικά βιβλία. Ιδιαίτερος κατατοπιστικός, απλός και περιεκτικός είναι ο ορισμός της, όπως διατυπώνεται από την Εταιρία Επιχειρησιακής Έρευνας της Μεγάλης Βρετανίας, και έχει ως εξής:

“Επιχειρησιακή Έρευνα είναι η εφαρμογή της σύγχρονης επιστήμης πάνω σε πολύπλοκα προβλήματα τα οποία ανακύπτουν στη διεύθυνση και τη διοίκηση μεγάλων συστημάτων, αποτελούμενων από ανθρώπους, μηχανές, υλικά και κεφάλαια, στη Βιομηχανία, τις Επιχειρήσεις, τις Κυβερνητικές Υπηρεσίες και την Άμυνα.

Η χαρακτηριστική της μεθοδολογία συνίσταται στην ανάπτυξη επιστημονικού μοντέλου του υπό μελέτη συστήματος που περιλαμβάνει μετρήσεις τυχαίων παραγόντων και με το οποίο προβλέπει και συγκρίνει τα αποτελέσματα εναλλακτικών αποφάσεων, στρατηγικών και ελέγχων.

Σκοπός της είναι να βοηθήσει τη διοίκηση να καθορίσει την πολιτική και τις ενέργειές της επιστημονικά (κατά τον καλύτερο δυνατό τρόπο)”.

1.2. Ιστορική αναδρομή

Διάφορες αναφορές υπάρχουν στην ιστορία ήδη από τον 20^ο αιώνα σε τρόπους εύρεσης βέλτιστων λύσεων σε προβλήματα της καθημερινότητας. Τέτοια παραδείγματα είναι η μελέτη προβλημάτων σχετικών με το χρόνο απασχόλησης των τηλεφώνων σε τηλεφωνικές εταιρίες που πραγματοποιήθηκε από τον Erlang το 1917, ή μελέτες προβλημάτων πωλήσεων και εμπορίου, από τον Horace Levenson το 1920.

Ωστόσο, θεωρείται πως η Επιχειρησιακή Έρευνα γεννήθηκε και εδραιώθηκε κατά το Β' Παγκόσμιο Πόλεμο, κατά τη διάρκεια του οποίου, συνέβαλε ακόμη και στη χάραξη στρατηγικών πολέμου. Εκείνη την εποχή υπήρχε μία ολοένα και αυξανόμενη ανάγκη κατανομής σπάνιων πόρων στις διάφορες στρατιωτικές επιχειρήσεις που βρίσκονταν σε εξέλιξη, με τον πιο αποδοτικό τρόπο. Για το λόγο αυτό, τόσο ο Βρετανικός όσο και ο Αμερικάνικος στρατός χρησιμοποίησαν ένα μεγάλο αριθμό επιστημόνων, προκειμένου να μοντελοποιήσουν μαθηματικά τα διάφορα προβλήματα που προέκυπταν. Οι ομάδες αυτές εργάστηκαν πάνω σε προβλήματα όπως η ανακάλυψη του ραντάρ, η οποία είχε σημαντικό ρόλο στην νίκη των συμμαχικών δυνάμεων.

Η χρησιμότητά της όμως, δεν περιορίζεται μόνο σε στρατιωτικά θέματα. Ακόμα και μετά το τέλος του πολέμου, λόγω της αυξανόμενης πολυπλοκότητας των οργανισμών και της ταυτόχρονα αυξανόμενης εξειδίκευσης του προσωπικού, ήταν ολοφάνερη η ανάγκη της ώστε να γίνεται η καλύτερη δυνατή αξιοποίηση των διαθέσιμων πόρων και του διαθέσιμου ανθρώπινου δυναμικού. Έτσι, ξεκίνησε το ενδιαφέρον της Βιομηχανίας για τις τεχνικές της Επιχειρησιακής Έρευνας.

Δύο ήταν οι παράγοντες που έπαιξαν μεγάλο ρόλο στην ανάπτυξη της Επιχειρησιακής Έρευνας. Ο ένας ήταν η γρήγορη πρόοδος που γνώρισαν οι

τεχνικές της: Μετά τον πόλεμο, οι επιστήμονες που είχαν απασχοληθεί από το στρατό ή ακόμα και ομάδες επιστημόνων που είχαν ακούσει για τα επιτεύγματα του συγκεκριμένου επιστημονικού πεδίου κινητροποιήθηκαν να ασχοληθούν με το συγκεκριμένο πεδίο έρευνας. Αποτέλεσμα, ήταν να πραγματοποιηθούν μεγάλες ανακαλύψεις σε πολύ σύντομο χρονικό διάστημα. Μία από αυτές ήταν ο αλγόριθμος Simplex για την επίλυση προβλημάτων Γραμμικού Προγραμματισμού από τον George Dantzig το 1947.

Ένας δεύτερος παράγοντας που έδωσε ώθηση στο συγκεκριμένο πεδίο ήταν η ραγδαία εξέλιξη των υπολογιστών. Στα περισσότερα προβλήματα της Επιχειρησιακής Έρευνας, απαιτείται ένας τεράστιος αριθμός από υπολογισμούς για την επιτυχή αντιμετώπιση των διαφόρων σύνθετων προβλημάτων που συναντώνται στο συγκεκριμένο πεδίο. Αυτές οι πράξεις είναι συνήθως αδύνατο να γίνουν χειροκίνητα με τη χρήση απλών υπολογισμών. Έτσι, η άνθηση της επιστήμης των υπολογιστών και η κατασκευή ηλεκτρονικών υπολογιστών, οι οποίοι έχουν την ικανότητα να κάνουν χιλιάδες αριθμητικές πράξεις το δευτερόλεπτο, έδωσαν ώθηση στην ανάπτυξη της Επιχειρησιακής Έρευνας.

Το 1957, ιδρύθηκε η Διεθνής Συνομοσπονδία Εταιριών Επιχειρησιακών Ερευνών (“International Federation of Operations Research Societies” – “IFORS”), ενώ το 1963 ιδρύθηκε και η “Ελληνική Εταιρία Επιχειρησιακών Ερευνών”.

Μέχρι και τις μέρες μας, και ενώ πλέον έχουν αναπτυχθεί νέες μεθοδολογίες, όπως π.χ. ο γραμμικός, ο ακέραιος και ο δυναμικός προγραμματισμός, η θεωρία ουρών, η θεωρία παιγνίων, η θεωρία αποθεμάτων, κλπ, συμβαδίζοντας με την εξέλιξη των ηλεκτρονικών υπολογιστών, παρατηρείται έντονο ενδιαφέρον των εταιριών και των οργανισμών για τη χρήση των διαφόρων τεχνικών της Επιχειρησιακής Έρευνας προς όφελός τους.

1.3. Μεθοδολογία της Επιχειρησιακής Έρευνας

Τα βασικά στάδια της μεθοδολογίας που ακολουθείται συνήθως κατά την επίλυση ενός προβλήματος Επιχειρησιακής Έρευνας δίνονται παρακάτω και είναι σχεδόν πάντα τα ίδια, ανεξάρτητα του προβλήματος που εξετάζεται.

Ανάλυση του συστήματος

Με τον όρο “**σύστημα**”, εννοούμε “μια ομάδα αντικειμένων που αποτελούν μια ολότητα και συχνά αλληλεπιδρούν ή αλληλεξαρτώνται” όπως διατυπώνεται και στην ηλεκτρονική έκδοση του λεξικού “Merriam-Webster”. Στην περίπτωση μας, το σύστημα μπορεί να είναι μια επιχείρηση, ένας οργανισμός, κλπ.

Καλούμαστε λοιπόν, να προσδιορίσουμε τη δομή του υπό μελέτη συστήματος, να το αναλύσουμε σε υποσυστήματα και να εντοπίσουμε τα σημεία και τους τρόπους με τους οποίους θα μπορούσαμε να το επηρεάσουμε. Συγκεντρώνουμε λοιπόν ικανοποιητική πληροφορία για παραπέρα διερεύνηση. Με αυτόν τον τρόπο, αποκτούμε μια πιο ξεκάθαρη εικόνα για τις μεταβλητές και τους περιορισμούς του προς λύση προβλήματος.

Διατύπωση των στόχων

Στο σημείο αυτό, θέτουμε τους στόχους. Εδώ πραγματοποιείται η διασαφήνιση της ανάγκης για τη λύση του προβλήματος και τη φύση του προβλήματος. Πολύ σημαντικό σημείο και καθοριστικό για τη συνέχεια. Πρέπει να διατυπωθούν σαφώς και να ιεραρχηθούν οι στόχοι μας βάσει των προτεραιοτήτων τη δεδομένη χρονική στιγμή, μιας και μπορεί να είναι πολλοί.

Διατύπωση του Μοντέλου

Αποτελεί ίσως το πιο σημαντικό βήμα. Είναι το στάδιο κατά το οποίο, αντικαθιστούμε ουσιαστικά το πραγματικό πρόβλημα με μαθηματικές σχέσεις, οι οποίες εκφράζουν τους στόχους και τους περιορισμούς του προβλήματος.

Καλό θα είναι, το πρόβλημά να περιέχει όσο το δυνατόν λιγότερες σχέσεις ώστε να ελαχιστοποιηθεί το συνολικό κόστος της επίλυσής του και επιπλέον, μετά την κατασκευή του μοντέλου, να κάνουμε μια επαλήθευσή του δοκιμάζοντάς το σε ένα “απλό” πρόβλημα, προς αποφυγή μελλοντικών λαθών εξ’ αιτίας κάποιου λάθους που έγινε στο στάδιο της διατύπωσης.

Επίλυση του μοντέλου

Στο στάδιο αυτό, χρησιμοποιούνται μέθοδοι από τα Ανώτερα Μαθηματικά, τη θεωρία Πιθανοτήτων, τη Στατιστική ή -συνηθέστερα- μέθοδοι της

Επιχειρησιακής Έρευνας για τον εντοπισμό της βέλτιστης λύσης του προβλήματος.

Ανάλυση Ευαισθησίας

Η λύση του μοντέλου, καλό είναι να συνοδεύεται και από μια ανάλυση ευαισθησίας. Η Ανάλυση Ευαισθησίας μελετά τις επιπτώσεις και τις συνέπειες που υφίσταται η βέλτιστη λύση του υπό μελέτη προβλήματος, ως συνέπεια πιθανών αλλαγών στις τιμές των παραμέτρων του στη λύση που προτείνουμε στο προηγούμενο βήμα.

Εφαρμογή της λύσης στην πράξη

Αφού λοιπόν, μελετήσαμε το πρόβλημα και βρήκαμε τη βέλτιστη λύση του, δε μένει παρά να την υλοποιήσουμε. Με άλλα λόγια, ήρθε η ώρα της αποκωδικοποίησης των μαθηματικών σχέσεων και της μετατροπής τους σε οδηγίες προς τους ενδιαφερόμενους. Δηλαδή έφτασε η ώρα της λειτουργίας του σχεδιασμένου μοντέλου με σκοπό να παράγουμε τα διάφορα αποτελέσματα.

Παρατηρούμε λοιπόν, πως η Επιχειρησιακή Έρευνα ασχολείται με προβλήματα που προκύπτουν σε διάφορους τομείς των επιχειρήσεων και των οργανισμών, καλύπτοντας ένα ευρύ φάσμα, από την παραγωγή, τη διακίνηση και τη διαφήμιση των προϊόντων έως τα οικονομικά της επιχείρησης, αλλά και τη διαχείριση του ανθρώπινου δυναμικού.

Στη συνέχεια της εργασίας θα μελετήσουμε ένα πολύ συγκεκριμένο πρόβλημα της Επιχειρησιακής Έρευνας, το οποίο αφορά μία πολύ σημαντική λειτουργία κάθε σύγχρονης επιχείρησης. Το πρόβλημα αυτό είναι: **ο έλεγχος και η διαχείριση** των αποθεμάτων της επιχείρησης και αποτελεί σημαντική ευθύνη στη διοίκηση του παραγωγικού συστήματος.

Έλεγχος Αποθεμάτων

2.1. Ορισμός αποθέματος

Ένα βασικό κομμάτι στο οποίο υπεισέρχεται η Επιχειρησιακή Έρευνα και το οποίο είναι συνδεδετικός κρίκος ανάμεσα στη διαδικασία της παραγωγής και στη διακίνηση των προϊόντων μιας επιχείρησης, είναι ο **Έλεγχος των Αποθεμάτων (Inventory Control)**.

Ας διευκρινίσουμε όμως τί θεωρείται απόθεμα. Σύμφωνα με το Φ.Ε.Κ. της Ελληνικής Κυβέρνησης (παρ. 2.2.2/2.2.200/2 του ΠΔ 1123/1980, ΦΕΚ 283Α'), ως αποθέματα νοούνται "τα υλικά αγαθά που ανήκουν στην οικονομική μονάδα, τα οποία:

1. προορίζονται να πωληθούν κατά τη συνήθη πορεία των εργασιών της,
2. βρίσκονται στη διαδικασία της παραγωγής και προορίζονται να πωληθούν όταν πάρουν τη μορφή των έτοιμων προϊόντων,
3. προορίζονται να αναλωθούν για την παραγωγή έτοιμων αγαθών ή την παροχή υπηρεσιών,
4. προορίζονται να αναλωθούν για την καλή λειτουργία, τη συντήρηση ή επισκευή, καθώς και την ιδιοπαραγωγή πάγιων στοιχείων,
5. προορίζονται να χρησιμοποιηθούν για τη συσκευασία των παραγόμενων έτοιμων προϊόντων ή των εμπορευμάτων που προορίζονται για πώληση".

Ο χαρακτηρισμός ενός αγαθού ως εμπορεύσιμου αποθέματος ή ως παγίου περιουσιακού στοιχείου, κρίνεται κατά κανόνα, κατά το χρόνο απόκτησης ή ολοκλήρωσης της παραγωγής του, ανάλογα με τη φύση της δραστηριότητας της επιχείρησης. Για παράδειγμα, ένας Η/Υ αποτελεί εμπορεύσιμο αγαθό για μία επιχείρηση εμπορίας Η/Υ, ενώ ο ίδιος υπολογιστής θεωρείται πάγιο περιουσιακό στοιχείο, όταν χρησιμοποιείται για τις λειτουργικές της ανάγκες.

2.2. Κατηγορίες αποθεμάτων

Μπορούμε να κατηγοριοποιήσουμε τα διάφορα αποθέματα ανάλογα με τον τρόπο δημιουργίας τους και να τα διαχωρίσουμε σε τέσσερις διακριτές κατηγορίες όπως φαίνεται παρακάτω:

Απόθεμα ασφαλείας

Το απόθεμα αυτό δημιουργείται όταν η επιχείρηση παραγγέλλει είτε νωρίτερα είτε μεγαλύτερη ποσότητα απ' ό, τι χρειάζεται. Η διατήρηση αποθεμάτων ασφαλείας εξασφαλίζει την ομαλή λειτουργία της παραγωγικής διαδικασίας σε περίπτωση εμφάνισης προβλημάτων κατά τη διαδικασία της παράδοσης των εμπορευμάτων. Παραδείγματα εμφάνισης προβλημάτων έχουμε όταν οι προμηθευτές δεν παραδίδουν την απαιτούμενη ποσότητα στην προκαθορισμένη ημερομηνία σε αποδεκτή ποιότητα ή όταν τα παρασκευασμένα αντικείμενα έχουν υποστεί ζημιές ή απαιτούν περαιτέρω διορθώσεις. Τα αποθέματα ασφαλείας διευκολύνουν την αποφυγή προβλημάτων εξυπηρέτησης των πελατών και μη διαθεσιμότητας εξαρτημάτων.

Απόθεμα αναμονής

Χρησιμοποιείται για να απορροφήσει ανόμοια ζήτηση κατά τη διάρκεια μιας περιόδου ή όταν υπάρχει αβεβαιότητα για την προμήθεια, για παράδειγμα λόγω επικείμενης απεργίας ή περιορισμένης δυναμικότητας. Δε δημιουργεί σημαντικές αυξομειώσεις της παραγωγής για μία επιχείρηση και άρα δε δημιουργεί πρόσθετο κόστος. Τα αποθέματα αναμονής χρησιμοποιούνται ακόμα και σε περιπτώσεις αβεβαιότητας σχετικά με την πρόσφορα ενός προϊόντος. Παραδείγματος χάρη μία ελληνική φαρμακοβιομηχανία που κατασκευάζει γενόσημα φάρμακα, προκειμένου να προλάβει ελλείψεις στην εισαγωγή πρώτων υλών εξαιτίας του capital control, θα προχωρήσει σε δημιουργία μεγάλου αποθέματος αναμονής από το εξωτερικό για να συνεχίσει την παραγωγή των φαρμάκων της ανεπηρέαστη, χωρίς να αντιμετωπίσει προβλήματα στις εισαγωγές.

Κυκλικό απόθεμα

Είναι το τμήμα του συνολικού αποθέματος που καθορίζεται άμεσα από το μέγεθος της παραγγελίας. Το ύψος του κυκλικού αποθέματος εξαρτάται από τον χρόνο ανάμεσα σε δυο παραγγελίες. Όσο μεγαλύτερη είναι η χρονική περίοδος ανάμεσα σε δυο παραγγελίες τόσο μεγαλύτερο θα είναι το κυκλικό απόθεμα. Για παράδειγμα, αν γίνεται μια παραγγελία το μήνα, το ύψος του αποθέματος θα πρέπει να είναι ίσο με τη μηνιαία ζήτηση.

Απόθεμα σε κίνηση

Είναι τα αποθέματα που κινούνται από το ένα σημείο του συστήματος ροής υλικών στο άλλο. Αποτελούνται και από παραγγελίες που έχουν γίνει αλλά δεν έχουν παραληφθεί ακόμα.

Λόγω των διαφορετικών αναγκών που προκύπτουν αλλά και εκείνων που εξυπηρετούνται συνήθως σε μια επιχείρηση, εργαζόμαστε με διαφορετικό τρόπο κάθε φορά για τη μείωση των ποσοτήτων των αποθεμάτων σε καθεμιά από τις κατηγορίες αποθεμάτων που παρουσιάστηκαν προηγουμένως. Για παράδειγμα, για το κυκλικό απόθεμα, η εταιρία μπορεί να μειώσει το μέγεθος της παραγγελίας. Για το απόθεμα ασφαλείας, να προχωρήσει σε μικρότερες παραγγελίες, με την τοποθέτησή τους να γίνεται κοντά στην παραλαβή. Ακόμα, για το απόθεμα σε κίνηση, μπορεί να μειώσει τη διάρκεια της αναμονής των αποθεμάτων, παραδείγματος χάριν με αλλαγή μεταφορικής εταιρίας.

Γενικά, το πρόβλημα που προκύπτει και καλούμαστε να αντιμετωπίσουμε είναι το πώς θα βρεθεί μια χρυσή τομή ανάμεσα στην **προσφορά** και τη **ζήτηση** των διαφόρων προϊόντων έτσι ώστε να ελαχιστοποιηθεί το συνολικό κόστος λειτουργίας της επιχείρησης, μειώνοντας τα διάφορα ενδιάμεσα κόστη που συμμετέχουν στις διαδικασίες και προέρχονται από την αποθήκευση, την έλλειψη σε ενδεχόμενη ζήτηση, τη μεταφορά, κλπ. των προϊόντων, αλλά και να είναι τα προϊόντα διαθέσιμα ανά πάσα στιγμή που θα ζητηθούν.

Την ίδια στιγμή, υπάρχουν παράγοντες που πιέζουν και προς τις δύο κατευθύνσεις, δηλαδή και για υψηλά αλλά και για χαμηλά επίπεδα αποθεμάτων. Ενδεικτικά, μπορούμε να αναφέρουμε κάποιους από αυτούς, όπως τα κόστη μεταφοράς και παραγγελίας, οι εκπτώσεις σε περιπτώσεις

μεγάλων παραγγελιών και οι μηχανισμοί εξυπηρέτησης πελατών που πιέζουν για υψηλά επίπεδα αποθεμάτων. Προς την αντίθετη κατεύθυνση, δρουν ως παράγοντες πίεσης για χαμηλά επίπεδα αποθεμάτων το κόστος ευκαιρίας, το κόστος αποθήκευσης και διαχείρισης αποθεμάτων, οι φόροι, η ασφάλιση αλλά και οι κίνδυνοι μείωσης των αποθεμάτων εξ' αιτίας εξωτερικών παραγόντων (π.χ. κλοπή, φυσικές καταστροφές, κλπ.).

2.2.1. Χαρακτηριστικά ενός συστήματος αποθεμάτων

Οι σημαντικότερες έννοιες που συναντώνται σε ένα σύστημα αποθεμάτων είναι οι ακόλουθες:

Το είδος των αποθεμάτων

- Οι πρώτες ύλες, θα χρησιμοποιηθούν ως βασικές εισροές στην παραγωγική διαδικασία.
- Τα εφόδια, δηλαδή τα είδη που θα καταναλωθούν κατά την καθημερινή λειτουργία του συστήματος, χωρίς να αποτελέσουν μέρος του τελικού προϊόντος (καύσιμα, κοπτικά εργαλεία, κλπ.).
- Τα ενδιάμεσα (υπό επεξεργασία) προϊόντα, αποτελούν εκροές ενδιάμεσων φάσεων της παραγωγικής διαδικασίας που θα αποτελέσουν εισροές σε επόμενες φάσεις της.
- Τα τελικά προϊόντα προορίζονται για τον τελικό καταναλωτή χωρίς περαιτέρω επεξεργασία. Τελικά προϊόντα μιας επιχείρησης μπορούν να αποτελούν ενδιάμεσα προϊόντα μιας άλλης επιχείρησης.

Ζήτηση

Η ζήτηση για ένα αγαθό εκφράζει την ποσότητά από το συγκεκριμένο αγαθό που επιθυμούν να αγοράσουν οι καταναλωτές.

Η ζήτηση για ένα προϊόν μπορεί να είναι **ντετερμινιστική (deterministic)** ή **στοχαστική (stochastic)**. Στην πρώτη περίπτωση, η ζήτηση του προϊόντος που μας ενδιαφέρει είναι γνωστή εκ των προτέρων και είναι είτε **στατική**, δηλαδή σταθερή για ίσες χρονικές περιόδους, είτε **δυναμική**, δηλαδή

μεταβάλλεται, αλλά γνωρίζουμε τον τρόπο με τον οποίο προκύπτει αυτή η μεταβολή.

Στη δεύτερη περίπτωση, όπου η ζήτηση είναι στοχαστική, δηλαδή θεωρείται τυχαία μεταβλητή, δεν μπορούμε να προβλέψουμε εκ των προτέρων το μέγεθος της ζήτησης του προϊόντος, αλλά μπορούμε μόνο να γνωρίζουμε την κατανομή των πιθανοτήτων της, η οποία μπορεί να είναι είτε συνεχής είτε ασυνεχής.

Ένας άλλος διαχωρισμός για τη ζήτηση γίνεται ανάλογα με το είδος των αγαθών που αφορά. Έτσι, η ζήτηση μπορεί να είναι **ανεξάρτητη (independent demand)** όταν πρόκειται για τα τελικά προϊόντα μιας επιχείρησης. Δηλαδή, μια παραγωγική μονάδα μπορεί να παράγει διάφορα αντικείμενα που δεν σχετίζονται μεταξύ τους αλλά αντιμετωπίζουν κάποια εξωτερική ζήτηση.

Εξαρτημένη (dependent demand) είναι η ζήτηση που αφορά εξαρτήματα και πρώτες ύλες που εμπλέκονται στην παραγωγική διαδικασία άλλων (τελικών) προϊόντων. Στην περίπτωση της εξαρτημένης ζήτησης, η ανάγκη για ένα αντικείμενο είναι αποτέλεσμα της ανάγκης για κάποιο άλλο, συνήθως σε υψηλότερο επίπεδο της παραγωγικής διαδικασίας. Η εξαρτημένη ζήτηση είναι σχετικά εύκολο να προσδιοριστεί με βάση τη ζητούμενη ποσότητα του αντικειμένου από το οποίο εξαρτάται. Για παράδειγμα, αν μια βιομηχανία παραγωγής αγροτικών οχημάτων σχεδιάζει να παράγει 100 τρακτερ την ημέρα, είναι φανερό ότι θα χρειαστεί 100 τιμόνια. Συνεπώς, η ζήτηση για τα τιμόνια δεν είναι ανεξάρτητη αλλά προσδιορίζεται και ετεροκαθορίζεται από το συνολικό ύψος της ημερήσιας παραγωγής τρακτερ. Η ζήτηση όμως για τα τρακτέρ είναι ανεξάρτητη και δε σχετίζεται με τη ζήτηση κάποιου άλλου αγροτικού προϊόντος.

Αναπλήρωση ή Εφοδιασμός

Πρόκειται για την ποσότητα του προϊόντος που προκύπτει είτε από την παραγωγή είτε από την αγορά του και προστίθεται στο απόθεμα. Η ποσότητα αυτή μπορεί να έχει σταθερό ή μεταβαλλόμενο μέγεθος και αφορά μία παραγγελία [που τοποθετείται μια φορά (**μεμονωμένη**) ή επαναλαμβάνεται τακτικά (**επαναλαμβανόμενη**)].

Πηγή προμήθειας

Η παραγγελία του εκάστοτε είδους προϊόντος τοποθετείται σε εξωτερικό προμηθευτή (δηλαδή πρώτες ύλες ή εφόδια) ή παράγεται από την ίδια την επιχείρηση (ενδιάμεσα ή τελικά προϊόντα).

Χρόνος Αναπλήρωσης ή Εφοδιασμού

Το χρονικό διάστημα που μεσολαβεί ανάμεσα στην τοποθέτηση της παραγγελίας (για την αναπλήρωση του αποθέματος) και την εκτέλεση της παραγγελίας, δηλαδή την είσοδο του προϊόντος στην αποθήκη, καλείται χρόνος αναπλήρωσης ή εφοδιασμού. Ο χρόνος αυτός μπορεί να είναι **σταθερός** (η αναπλήρωση του αποθέματος γίνεται πάντα εντός σταθερού χρονικού διαστήματος) ή να **μεταβάλλεται** (ο χρόνος μεταξύ τοποθέτησης της παραγγελίας και παραλαβής του αποθέματος μεταβάλλεται) και συμβολίζεται με L . Για παράδειγμα, κάνουμε μια παραγγελία σήμερα και την παραλαμβάνουμε την επόμενη ημέρα την ίδια ώρα. Τότε, $L = 24$ ώρες = 1 ημέρα.

Κύκλος παραγγελίας

Ο κύκλος παραγγελίας (ordering cycle) είναι ο χρόνος που μεσολαβεί ανάμεσα σε δύο διαδοχικές παραγγελίες.

Οικονομικές παράμετροι

Πολύ σημαντικό ρόλο στην εύρυθμη λειτουργία μιας επιχείρησης, παίζει η μελέτη διαφόρων οικονομικών παραμέτρων που σχετίζονται με τον Έλεγχο Αποθεμάτων και είναι οι ακόλουθες:

A. Κόστος παραγωγής ή παραγγελίας

1. Κόστος παραγωγής ή παραγγελίας, p , για κάθε μονάδα προϊόντος που παραγγέλλει η επιχείρηση.
2. Κόστος παραγγελίας. Συμβολίζεται με K και είναι το συνολικό κόστος για την τοποθέτηση μιας παραγγελίας. Μπορεί να περιλαμβάνει διοικητικά έξοδα (υπογραφή εγγράφων, χρόνος υπαλλήλων που θα ασχοληθούν με την παραγγελία), το κόστος των προκαταρκτικών εργασιών (χρόνος

σύνταξης της παραγγελίας, προετοιμασία της αποθήκης για την παραλαβή), έξοδα που αφορούν την επικοινωνία μεταξύ της επιχείρησης και των προμηθευτών (χρόνος γραμματέα, κόστος τηλεφωνημάτων, κόστος αποστολής φαξ) κλπ.

B. Κόστος διατήρησης αποθεμάτων

Είναι το κόστος για τη διατήρηση του προϊόντος ως απόθεμα και αποτελείται από τα ακόλουθα επί μέρους κόστη:

1. Κόστος επενδυμένου κεφαλαίου, ανάλογο του χρόνου του οποίου το προϊόν παραμένει ως απόθεμα. Το κεφάλαιο το οποίο έχει επενδυθεί για τη δημιουργία αποθέματος είναι ουσιαστικά δεσμευμένο και δε μπορεί να αξιοποιηθεί για κάποια άλλη διαδικασία της επιχείρησης.
2. Κόστος αποθήκευσης K_c (ενοίκιο αποθήκης, έξοδα συντήρησης, κόστος φύλακα, αποθηκάρου, κλπ.).
3. Κόστος απόσβεσης, εξ' αιτίας της παλαίωσης ή της αλλοίωσης του αποθηκευμένου προϊόντος.
4. Κόστος ασφάλισης των αποθεμάτων από διάφορες μορφές καταστροφών (πυρκαγιά, κλοπή, αλλοίωση, κτλ).

Γ. Κόστος έλλειψης

Είναι το κόστος e που προκύπτει σε μια επιχείρηση όταν η ζήτηση για ένα προϊόν υπερτερεί του αποθέματος της επιχείρησης για το συγκεκριμένο προϊόν και έχει ως συνέπεια την απώλεια κερδών αλλά και της ίδιας της αξιοπιστίας της επιχείρησης. Πιο αναλυτικά, αφορά:

1. Διαφυγόντα κέρδη σε περίπτωση εξαντλήσεως των αποθεμάτων και αδυναμίας ικανοποίησης της ζήτησης (λόγω της μη-πώλησης του προϊόντος αν αυτό υπήρχε στην αποθήκη της επιχείρησης)
2. Κόστος από την απώλεια εμπιστοσύνης των πελατών σε περίπτωση μη ικανοποίησής της ζήτησής τους, η οποία μεταφράζεται βραχυπρόθεσμα σε

χαμένη πώληση, που μπορεί όμως να έχει ως συνέπεια τη δημιουργία ενός (δυσανεστημένου και άρα) χαμένου μελλοντικού πελάτη.

Δ. Τιμή αγοράς προϊόντος.

Η τιμή στην οποία η επιχείρηση αγοράζει τη μια μονάδα του προϊόντος.

Ε. Τιμή πώλησης προϊόντος.

Η τιμή στην οποία η επιχείρηση πουλάει τη μια μονάδα του προϊόντος.

2.3. Οφέλη σωστής διαχείρισης αποθεμάτων

Η ύπαρξη αλλά και η ορθολογική διαχείριση των αποθεμάτων προσφέρει σε μία επιχείρηση:

- ομαλή παραγωγική διαδικασία,
- δυνατότητα πώλησης ποιοτικών προϊόντων,
- ανάπτυξη καλύτερης σχέσης μεταξύ επιχειρηματία και πελάτη,
- τη δυνατότητα να ανταπεξέλθει στη ζήτηση της αγοράς ή του αγοραστικού κοινού,
- συνεχή βελτίωση στη διαδικασία παραλαβής και τοποθέτησης επόμενης παραγγελίας του προϊόντος
- απαιτεί την κατάλληλη πρόσληψη εργατικού δυναμικού.

Τα σημαντικότερα **οφέλη** από την ορθολογική διαχείριση των αποθεμάτων είναι:

- ✓ Αποσύνδεση της παραγωγής από τη διακύμανση της ζήτησης, είτε αυτή είναι εξωτερική είτε εσωτερική.
- ✓ Μείωση αριθμού εκκρεμών παραγγελιών.
- ✓ Μείωση κόστους μέσω αξιοποίησης εκπτώσεων από τη διαδικασία δημιουργίας αποθεμάτων.

- ✓ Μείωση αριθμού παραγγελιών που ακυρώνονται.
- ✓ Βελτίωση των σχέσεων με τους διάφορους μεσάζοντες που προκύπτουν από πιθανές ακυρώσεις συνεργασιών.
- ✓ Μη έλλειψη επαρκούς αποθηκευτικού χώρου.
- ✓ Μείωση των ποσοτήτων των απολεσθέντων αντικειμένων.

2.4. Μειονεκτήματα διατήρησης αποθεμάτων

Εκτός από τα διάφορα οφέλη που προκύπτουν από τη διατήρηση αποθεμάτων σε μία επιχείρηση, παράλληλα, υπάρχουν και διάφορα μειονεκτήματα, τα οποία σχετίζονται κυρίως με τα κόστη που εμφανίζονται στη διαδικασία από την τοποθέτηση, την τελική παραλαβή μίας παραγγελίας και την δημιουργία του αποθέματος στην αποθήκη. Σε αυτά, αναφερθήκαμε επιγραμματικά και προηγουμένως:

- Υψηλά κόστη που επωμίζεται η επιχείρηση:
 - Κόστος αγοράς προϊόντος.
 - Κόστος παραγγελίας ή προετοιμασίας μιας διαδικασίας (δαπάνες παραγγελίας, αμοιβές υπαλλήλων, μεταφοράς, παραλαβής, στήσιμο εξοπλισμού, κ.τ.λ.).
 - Κόστος διατήρησης κεφαλαίου (δέσμευση ποσοστού του κεφαλαίου κίνησης, αποθήκευσης, ασφάλειας, κ.α.).
- Δυσκολία ελέγχου της διαδικασίας παραγγελιοληψίας και αποθήκευσης.
- Άλλα προβλήματα, όπως χωροταξικά (μεγάλοι αποθηκευτικοί χώροι) ή προβλήματα συντήρησης.

Η διαχείριση των αποθεμάτων σε μία επιχείρηση αφορά λοιπόν ένα πρόβλημα εξισορρόπησης μεταξύ των μειονεκτημάτων και των διαφόρων ωφελειών που προκύπτουν από την ύπαρξη τους, μεταξύ δηλαδή του κόστους έλλειψης και του κόστους δημιουργίας μεγάλων ποσοτήτων αποθεμάτων υπό αβέβαιη ζήτηση, με στόχο την:

- ✓ εξοικονόμηση πόρων για την επιχείρηση.
- ✓ καλύτερη διανομή των προϊόντων.
- ✓ ταχύτερη εξυπηρέτηση του πελάτη.

Στο πλαίσιο της Επιχειρησιακής Έρευνας έχει αναπτυχθεί η **Θεωρία των Αποθεμάτων**, η οποία εξετάζει συστηματικά τα προβλήματα δημιουργίας και διαχείρισης αποθεμάτων με τη βοήθεια ειδικού λογισμικού για την παρακολούθηση και τον έλεγχό τους.

Στο επόμενο κεφάλαιο, θα περιγράψουμε αναλυτικά τα διάφορα μοντέλα που χρησιμοποιούνται στα προβλήματα που αφορούν τον **Έλεγχο Αποθεμάτων**, εξετάζοντας κάθε πιθανή διαφοροποίηση στους παράγοντες που επηρεάζουν την απόφασή μας.

Μοντέλα Ελέγχου Αποθεμάτων

Μοντέλα σταθερής ζήτησης

3.1. Εισαγωγή

Μια επιχείρηση, κατά τη διάρκεια του ελέγχου των αποθεμάτων της, καλείται να απαντήσει σε δύο θεμελιώδη, απλά και συνάμα βασικά ερωτήματα:

- Τι ποσότητα προϊόντος πρέπει να παραγγείλω;
- Κάθε πότε πρέπει να τοποθετώ μία παραγγελία;

Ταυτόχρονα, θα πρέπει να βρεθεί η χρυσή τομή ώστε να μπορεί να ανταποκριθεί έγκαιρα σε πιθανή ζήτηση, αλλά και να είναι όσο το δυνατόν μικρότερο το κόστος διατήρησης των αποθεμάτων της. Το άγχος για την ικανοποίηση της ζήτησης ωθεί σε μεγάλες ποσότητες αποθεμάτων, οι οποίες όμως, οδηγούν με τη σειρά τους και σε μεγάλα κόστη αποθήκευσης κλπ ενώ στις περιπτώσεις των αγαθών που λήγουν ή φθείρονται με την πάροδο του χρόνου (π.χ. τρόφιμα, χαρτικά, κλπ), ελλοχεύει ο κίνδυνος να χαθεί το επενδυμένο κεφάλαιο της επιχείρησης. Από την άλλη μεριά, προσπαθώντας να διατηρήσουμε σε χαμηλά επίπεδα τα κόστη που προκύπτουν από τα αποθέματα, κινδυνεύουμε να σταθούμε ανεπαρκείς στη ζήτηση των καταναλωτών.

Τα μοντέλα που χρησιμοποιούνται στα προβλήματα Ελέγχου Αποθεμάτων, όπως είδαμε προηγουμένως, αρχικά διαχωρίζονται βάσει της ζήτησης, η οποία μπορεί να είναι ντετερμινιστική ή στοχαστική. Περαιτέρω διαχωρισμός της ζήτησης γίνεται σε στατική ή δυναμική στην περίπτωση της ντετερμινιστικής ζήτησης.

Στη συνέχεια, ένα δεύτερο φιλτράρισμα των μοντέλων έχει να κάνει με το αν είναι συνεχούς ή περιοδικής επιθεώρησης. Με άλλα λόγια, εξετάζουμε αν το απόθεμα ελέγχεται και ανανεώνεται συνεχώς, με την αφορμή κάθε νέας κίνησης στην αποθήκη ή αν ελέγχεται και ανανεώνεται αναλόγως σε συγκεκριμένες, προκαθορισμένες χρονικές στιγμές. Τέλος, τα μοντέλα επηρεάζονται από το αν η ζήτηση παραμένει σταθερή καθ' όλη τη διάρκεια του χρόνου ή αν παρουσιάζει διαφοροποιήσεις.

Στη συνέχεια του κεφαλαίου θα μελετήσουμε πολλά διαφορετικά μοντέλα ελέγχου αποθεμάτων που υπάρχουν στη διεθνή βιβλιογραφία. Θα ξεκινήσουμε με θεωρητικές και απλές παραδοχές που αφορούν μη-ρεαλιστικές περιπτώσεις και θα προχωρήσουμε σε πιο σύνθετες παραδοχές και υποθέσεις, οι οποίες θα μας βοηθήσουν να προσεγγίσουμε όσο το δυνατόν πιο ικανοποιητικά, ρεαλιστικές περιπτώσεις ελέγχου αποθεμάτων της καθημερινότητας. Στη συνέχεια, παρουσιάζουμε ένα απλό αλλά αντιπροσωπευτικό παράδειγμα, στο οποίο απαιτείται η δημιουργία πολιτικής διαχείρισης και ελέγχου αποθεμάτων σε μία επιχείρηση.

Παράδειγμα: Κατασκευή ηχείων για ολοκληρωμένα συστήματα ήχου

Μία εταιρία εμπορεύεται ολοκληρωμένα συστήματα ήχου. Η κατασκευή των ηχείων γίνεται αποκλειστικά μέσα στο εργοστάσιο της εταιρίας. Στη συνέχεια, τα ηχεία ενσωματώνονται στα διάφορα συστήματα ήχου που κατασκευάζει και πουλάει. Τα συστήματα ήχου συναρμολογούνται σε μία γραμμή παραγωγής στο εργοστάσιο της εταιρίας. Η γραμμή παραγωγής είναι συνεχής και το εργοστάσιο δουλεύει σε 3 ημερήσιες βάρδιες των 8 ωρών η καθεμία. Ο μηνιαίος ρυθμός παραγωγής είναι 3,500 συστήματα ήχου, ενώ το κάθε σύστημα αποτελείται από 2 ηχεία.

Τα ηχεία κατασκευάζονται σε μεγάλες παρτίδες, καθώς ο χρόνος παραγωγής τους είναι πολύ μικρός. Για το λόγο αυτό, τοποθετούνται αρκετές παρτίδες σε μία αποθήκη του εργοστασίου, έως να προκύψει η ανάγκη χρησιμοποίησής τους στη γραμμή παραγωγής. Η εταιρία ενδιαφέρεται να καθορίσει κάθε πότε θα πρέπει να παράγει μία παρτίδα ηχείων και πόσα ηχεία θα πρέπει να έχει η κάθε παρτίδα, έτσι ώστε να μη σταματήσει η παραγωγή των συστημάτων λόγω έλλειψης ηχείων, αλλά παράλληλα να μην παραμένουν

τεράστιες ποσότητες ηχείων στην αποθήκη για μεγάλα χρονικά διαστήματα. Στη συνολική διαδικασία υπάρχουν διάφορα κόστη:

1. Κάθε φορά που παράγεται μία παρτίδα δημιουργείται ένα συνολικό κόστος παραγωγής ίσο με 5,000€. Το κόστος αυτό αφορά την ίδια τη διαδικασία παραγωγής, διαχειριστικά κόστη, δημιουργία αρχείου, δέσμευση ανθρώπινου δυναμικού και άλλων πόρων της εταιρίας για την παραγωγή των ηχείων, κτλ.
2. Το κόστος ανά μονάδα, που αφορά το κάθε ξεχωριστό ηχείο της παρτίδας, ανέρχεται σε 4€ και είναι ανεξάρτητο από το συνολικό μέγεθος της παρτίδας.
3. Η παραγωγή μεγάλου μεγέθους παρτίδας δημιουργεί την ανάγκη για μεγάλο μεγεθος αποθέματος. Εκτιμάται πως κοστίζει 0.4€ η μηνιαία διατήρηση του κάθε ηχείου στην αποθήκη. Τα χρήματα που επενδύονται στη δημιουργία αποθέματος ηχείων, δε γίνεται να τοποθετηθούν ταυτόχρονα από την εταιρία για κάποια άλλη επένδυση. Είναι δηλαδή δεσμευμένα στη διαδικασία δημιουργίας αποθέματος. Άλλο ένα τμήμα του κόστους διατήρησης του αποθέματος αφορά τη δέσμευση συγκεκριμένου αποθηκευτικού χώρου μόνο για τα ηχεία, με αποτέλεσμα ο συγκεκριμένος χώρος να μην μπορεί να χρησιμοποιηθεί για κάποιο άλλο ενδιάμεσο εξάρτημα ή ακόμα και τελικό προϊόν της εταιρίας. Ακόμα, οι παρτίδες με τα ηχεία ασφαλίζονται για κλοπή και πυρκαγιά πριν μπουν στην αποθήκη, ενώ η εταιρία πληρώνει προσωπικό, όπως φύλακες και αποθηκάρους, για τον έλεγχο και τη διαχείριση της αποθήκης.
4. Εκτιμάται πως πιθανή έλλειψη σε ηχεία τη στιγμή που είναι απαραίτητα για να χρησιμοποιηθούν στη γραμμή παραγωγής κοστίζει 2€ το μήνα ανά ηχείο. Το συγκεκριμένο κόστος είναι μεγάλο, γιατί θα πρέπει η εγκατάσταση των ηχείων στα συστήματα ήχου να γίνει μεταχρονολογημένα, αφού έχει ολοκληρωθεί η διαδικασία παραγωγής. Η συγκεκριμένη διαδικασία είναι πολύ πιο χρονοβόρα από τη συνηθισμένη ομαλή διαδικασία της γραμμής παραγωγής και γίνεται μόνο από εξειδικευμένο προσωπικό. Ακόμα στο κόστος αυτό έχει υπολογιστεί και η πτώση στις πωλήσεις λόγω έλλειψης των συστημάτων ήχου στην αγορά, λόγω της μη-έγκαιρης ολοκλήρωσης τους.

3.2. Βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας (EOQ)

Ένα καλό σημείο έναρξης των υπολογισμών αποτελεί η μέθοδος της **Βέλτιστης Ποσότητας Παραγγελίας** (EOQ - Economic Order Quantity). Είναι μια μέθοδος που προσπαθεί να βοηθήσει στην εύρεση της χρυσής τομής μεταξύ της κάλυψης πιθανής ζήτησης και του όσο το δυνατόν μικρότερου κόστους διατήρησης αποθεμάτων. Η μέθοδος αυτή προϋποθέτει τα ακόλουθα:

1. Υπάρχει η δυνατότητα για περισσότερες από μία παραγγελίες όποτε χρειάζεται, δηλαδή κάθε φορά που μειώνεται σημαντικά το απόθεμα.
2. Ο ρυθμός ζήτησης του προϊόντος είναι σταθερός.
3. Ο χρόνος παράδοσης L μια παραγγελίας είναι γνωστή σταθερά.
4. Μια παραγγελία μπορεί να γίνει οποιαδήποτε στιγμή.

Ξεκινώντας από το βασικό μοντέλο EOQ, θα γίνει στη συνέχεια, μια προσπάθεια να προσεγγίσουμε όλο και πιο ρεαλιστικά την πραγματικότητα. Κι αυτό, γιατί το βασικό μοντέλο πολύ σπάνια ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα και συνήθως, δεν οδηγεί σε υλοποιήσιμες λύσεις. Προς αυτή την κατεύθυνση λοιπόν, θα κινηθούμε κάνοντας κλιμακωτές αλλαγές στις αρχικές υποθέσεις του μοντέλου και προσθέτοντας νέα δεδομένα κάθε φορά, μιας και στην καθημερινότητα, πολλές είναι οι παράμετροι που πρέπει να λαμβάνονται υπ' όψιν κατά τη λήψη αποφάσεων και την κατάστρωση στρατηγικού σχεδιασμού από τη μεριά της επιχείρησης.

3.3. Βασικό μοντέλο EOQ

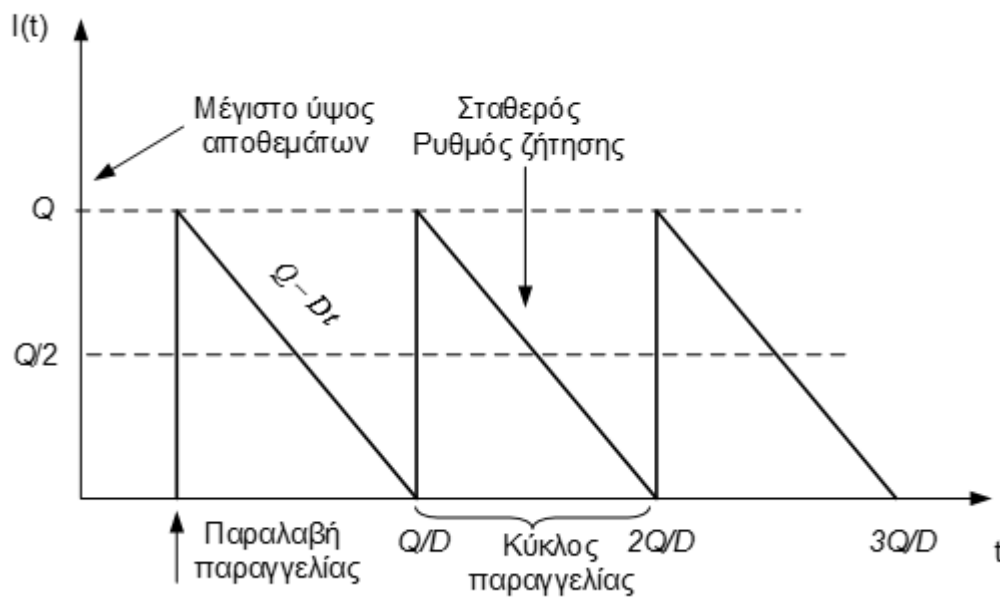
Το Βασικό EOQ μοντέλο προϋποθέτει τα εξής:

1. Η ζήτηση είναι μία γνωστή σταθερά και πραγματοποιείται με σταθερό ρυθμό.
2. Για κάθε παραγγελία, η επιχείρηση επιβαρύνεται με ένα σταθερό κόστος παραγγελίας της παρτίδας K (set-up cost),
3. Για κάθε παραγγελία, υπάρχει ένα σταθερό κόστος αγοράς ή παραγωγής της κάθε μονάδας προϊόντος. Αξίζει να σημειωθεί πως αυτό δεν εξαρτάται από το μέγεθος της παραγγελίας.

4. Κάθε παραγγελία παραδίδεται αμέσως (ακαριαία), δηλαδή δε μεσολαβεί καθόλου χρόνος από την τοποθέτησή της μέχρι την παραλαβή της παρτίδας στην αποθήκη.
5. Δεν επιτρέπονται ελλείψεις στην αποθήκη.
6. Η παραγγελία παραλαμβάνεται ολόκληρη σε μία παράδοση.

Παρατήρηση

Οι παραγγελίες θα πρέπει να γίνονται όταν το απόθεμα, το οποίο συμβολίζεται με I , είναι ίσο με μηδέν για να μην υπάρξει έλλειψη στην αποθήκη, αλλά όχι νωρίτερα, προκειμένου να μην επιβαρυνθεί η επιχείρηση με επιπλέον κόστη αποθήκευσης.



Σχήμα 1: Διαδικασία παραγγελιοληψίας

Στην απλή υποθετική περίπτωση που εξετάζουμε, μόλις τοποθετηθεί μία παραγγελία, τότε ακαριαία θα παραδοθεί στην αποθήκη η μέγιστη δυνατή ποσότητα. Ο χρόνος μεταξύ δύο διαδοχικών ανανεώσεων της ποσότητας που βρίσκεται στην αποθήκη καλείται **κύκλος παραγγελίας**. Στο σχήμα 1, περιγράφεται ολόκληρη η διαδικασία από τη στιγμή της τοποθέτησης (και της ακαριαίας παραλαβής) της πρώτης παραγγελίας και φαίνεται το επίπεδο του αποθέματος στην επιχείρηση κατά τη διάρκεια του χρόνου, στο μοντέλο μας.

Στη διαδικασία συμμετέχουν και κάποια κόστη τα οποία θα πρέπει να λάβουμε υπόψη στη διαδικασία της τοποθέτησης και παραλαβής της παραγγελίας.

Έτσι, υπάρχει το **κόστος παραγγελιών (Ordering Cost)** για την επιχείρηση για μία χρονική περίοδο, το οποίο συμβολίζεται με OC . Ακόμα, το **κόστος αποθήκευσης (Carrying Cost)** των αποθεμάτων της περιόδου, συμβολίζεται με CC . Τέλος, το **συνολικό κόστος (Total Cost)** για την επιχείρηση για μια περίοδο συμβολίζεται με TC .

Το συνολικό κόστος (TC) για την επιχείρηση για μια περίοδο είναι ίσο με το άθροισμα του κόστους παραγγελιών της περιόδου (OC) συν το κόστος αποθήκευσης των αποθεμάτων της περιόδου (CC), δηλαδή ισχύει:

$$TC = OC + CC .$$

Η περίοδος στην οποία αναφερόμαστε, συνήθως είναι το ένα ημερολογιακό έτος. Για τα επόμενα, θέτουμε:

K = κόστος για να τοποθετηθεί μια επιπλέον παραγγελία

K_c = ετήσιο κόστος αποθήκευσης μιας μονάδας προϊόντος

D = συνολική ετήσια ζήτηση σε μονάδες

Q = βέλτιστο μέγεθος παραγγελίας

Η συνολική ετήσια ζήτηση διαιρεμένη με το βέλτιστο μέγεθος της κάθε παραγγελίας, μας δίνει το συνολικό ετήσιο αριθμό παραγγελιών που θα πρέπει να τοποθετήσει η επιχείρηση. Συνεπώς, ο ετήσιος αριθμός παραγγελιών ισούται με $\frac{D}{Q}$.

Ακόμα, το μέσο απόθεμα (μονάδες προϊόντος κατά μεσο όρο) που βρίσκεται στην αποθήκη της επιχείρησης ισούται με $\frac{Q+0}{2} = \frac{Q}{2}$. Θεωρούμε πως η επιχείρηση πληρώνει αποθηκευτικά κόστη για αυτήν την ποσότητα.

Για τα ετήσια κόστη έχουμε:

$$OC = \left(\begin{array}{c} \text{ετήσιος αριθμός} \\ \text{παραγγελιών} \end{array} \right) \times \left(\begin{array}{c} \text{κόστος για μια} \\ \text{επιπλέον παραγγελία} \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$OC = \frac{D}{Q}K$$

$$CC = (\text{μέσο απόθεμα}) \times \left(\begin{array}{l} \text{ετήσιο κόστος αποθήκευσης} \\ \text{μιας μονάδας προϊόντος} \end{array} \right) \Rightarrow$$

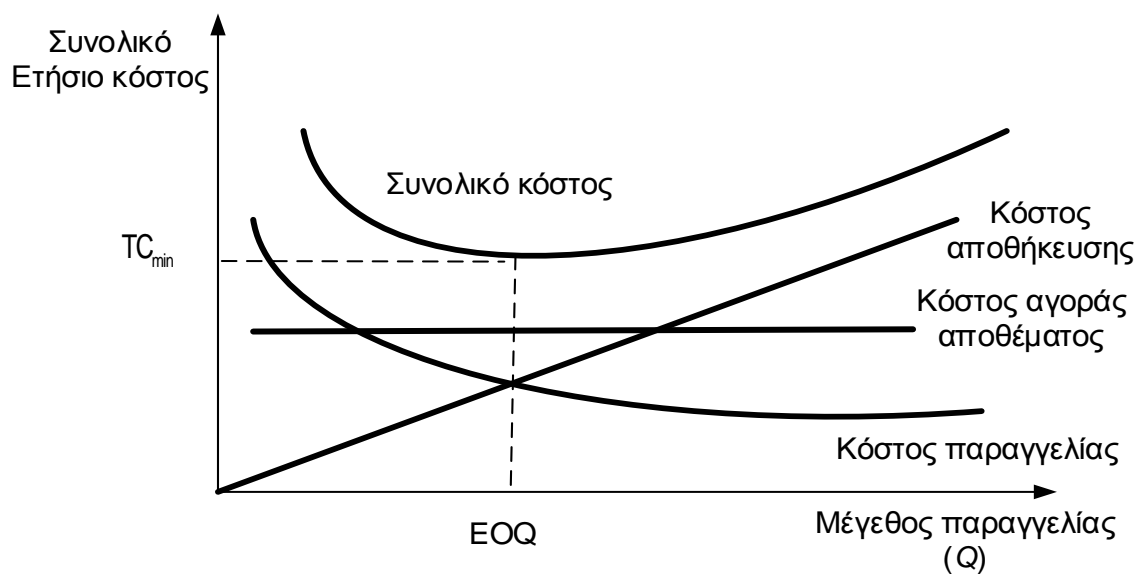
$$CC = \frac{Q}{2}K_c$$

Συνεπώς, για το τελικό ετήσιο κόστος έχουμε:

$$TC = OC + CC \Rightarrow$$

$$TC = \frac{D}{Q}K + \frac{Q}{2}K_c$$

Στο παρακάτω σχήμα, φαίνεται η σχέση του ετήσιου κόστους με την ποσότητα παραγγελίας.



Σχήμα 2: Σχέση του ετήσιου συνολικού κόστους με την ποσότητα παραγγελίας

Παρατηρούμε λοιπόν, ότι το ελάχιστο συνολικό κόστος για την επιχείρηση πραγματοποιείται στο σημείο όπου τέμνονται οι καμπύλες που περιγράφουν τα κόστη αποθήκευσης και παραγγελίας.

Έτσι, το **βέλτιστο μέγεθος παραγγελίας (Economic Order Quantity)** μπορεί να υπολογιστεί αλγεβρικά αν εξισώσουμε τις ποσότητες OC και CC ,

$$OC = CC \Rightarrow \frac{D}{Q}K = \frac{Q}{2}K_c \Rightarrow Q^2 = \frac{2KD}{K_c} \Rightarrow$$

$$Q = \sqrt{\frac{2KD}{K_c}} = \text{EOQ} \quad (1.1)$$

Επιπλέον, παρατηρούμε πως το κόστος αποθήκευσης αυξάνεται γραμμικά σε σχέση με την ποσότητα της παραγγελίας που πραγματοποιούμε, ενώ το κόστος παραγγελίας μειώνεται εκθετικά όσο αυξάνεται η παραγγελία.

Παρατήρηση

Για ποσότητες παραγγελίας κοντά στο βέλτιστο μέγεθος αυτής, η καμπύλη συνολικού κόστους δεν παρουσιάζει μεγάλη μεταβολή, άρα υπάρχει ένα περιθώριο ευελιξίας σχετικά με το μέγεθος της παραγγελίας χωρίς να επηρεαστεί το συνολικό κόστος.

Ο χρόνος του κύκλου παραγγελίας που αντιστοιχεί στη βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας EOQ, δίνεται από τη σχέση:

$$t^* = \frac{\text{EOQ}}{D} = \frac{\sqrt{2KD/K_c}}{D} = \sqrt{\frac{2K}{K_c D}}$$

Παρατηρούμε πως τα μεγέθη t^* και Q (EOQ) είναι ανάλογα κάθε φορά που παρατηρείται μία αλλαγή στις ποσότητες K_c, K, D . Καθώς το κόστος παραγγελίας K αυξάνεται και οι δύο ποσότητες t^* και Q αυξάνονται (πραγματοποιούνται λιγότερες τοποθετήσεις παραγγελίας). Όταν το κόστος αποθήκευσης αυξάνεται, αντίστοιχα μειώνονται και οι δύο ποσότητες t^* και Q , καθώς δημιουργούνται μικρότερα επίπεδα αποθέματος.

Τέλος, καθώς η ετήσια ζήτηση αυξάνεται, η βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας αντίστοιχα αυξάνεται καθώς απαιτούνται μεγαλύτερες παρτίδες, αλλά ο χρόνος t^* του κύκλου παραγγελίας για την ποσότητα Q μειώνεται, καθώς απαιτούνται πιο συχνές τοποθετήσεις παραγγελίας προκειμένου να καλυφθεί η μεγαλύτερη ετήσια ζήτηση.

Παράδειγμα 1

Η “e-Cosmetics A.E.” έχει παρατηρήσει πως κάθε χρόνο υπάρχει ζήτηση για 90,000 αντηλιακά προσώπου από τους πελάτες της. Αν το κόστος αποθήκευσης είναι $K_c = 3 \text{ €} / \text{μονάδα}$ και έτος και το κόστος για την τοποθέτηση μιας παραγγελίας είναι $K = 1.5 \text{ €}$, τότε, η βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας είναι:

$$EOQ = Q = \sqrt{\frac{2KD}{K_c}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1.5 \cdot 90,000}{3}} = 300 \text{ μονάδες,}$$

με αντίστοιχο συνολικό κόστος για την επιχείρηση:

$$TC = \frac{D}{Q}K + \frac{Q}{2}K_c = \frac{90,000}{300} \cdot 1.5 + \frac{300}{2} \cdot 3 = 450 + 450 = 900 \text{ €}$$

Συνολικά, χρειάζονται $\frac{D}{Q} = \frac{90,000}{300} = 300$ παραγγελίες των 300 μονάδων για να καλυφθεί η ζήτηση.

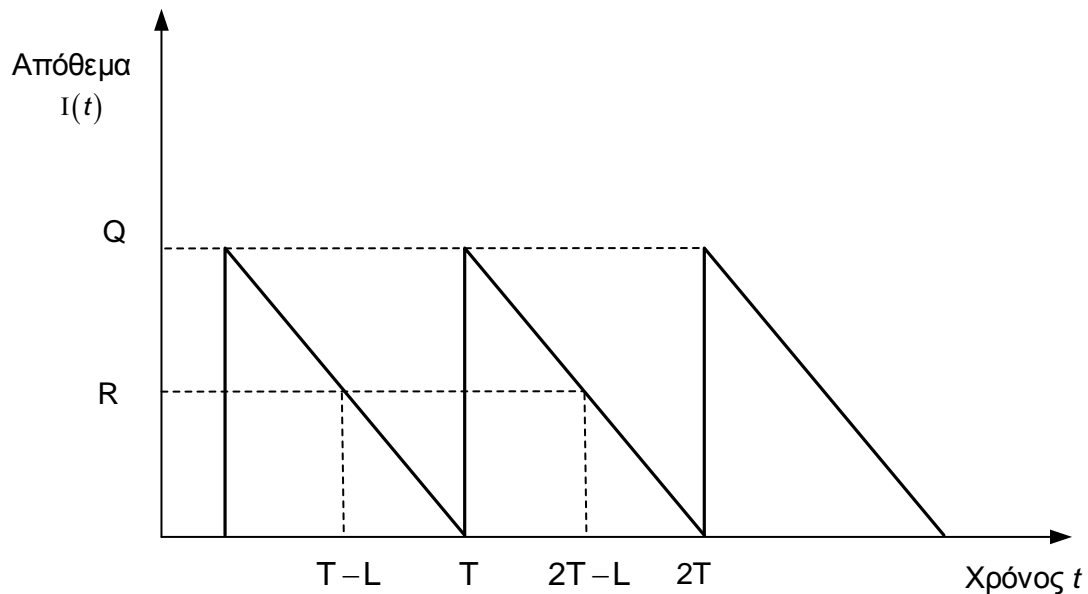
Τέλος, δεδομένου ότι η συγκεκριμένη επιχείρηση λειτουργεί διαδικτυακά 365 ημέρες το χρόνο, μια παραγγελία τοποθετείται κάθε $\frac{\text{ημέρες έτους}}{\text{παραγγελίες έτους}} = \frac{365}{300} = 1.22$ ημέρες περίπου.

3.4. Μοντέλο EOQ με καθυστέρηση στην παράδοση παραγγελίας

Σε αυτό το μοντέλο, κάνουμε τις ίδιες υποθέσεις με το Βασικό μοντέλο EOQ πλην της υπόθεσης του μηδενικού χρόνου αναμονής από τη στιγμή της παραγγελίας μέχρι τη στιγμή της παράδοσης. Δηλαδή, σε αυτό το μοντέλο υποθέτουμε μη-μηδενικό και σταθερό χρόνο αναπλήρωσης (ή εφοδιασμού). Δηλαδή υποθέτουμε την ύπαρξη **καθυστέρησης (lead time) L ημερών στην παράδοση** της παραγγελίας. Συνεπώς, η παραγγελία θα πρέπει να τοποθετηθεί L ημέρες νωρίτερα προκειμένου το υπάρχον απόθεμα να είναι επαρκές και η παραγγελία να παραδοθεί τη στιγμή του μηδενισμού του.

Κάτι τέτοιο, περιγράφει ένα πιο ρεαλιστικό σενάριο από πριν, μιας και δε γίνεται αμέσως μόλις ζητάμε κάποια προϊόντα, αυτά να βρίσκονται ακαριαία στην αποθήκη μας. Χρειάζεται κάποιος χρόνος για να μεταφερθούν, αλλά και

για να παραχθούν σε κάποιες περιπτώσεις. Το μοντέλο αυτό σχηματικά, παριστάνεται ως εξής:



Σχήμα 3: Μοντέλο ΕΟQ με καθυστέρηση στην παράδοση παραγγελίας

Με T συμβολίζεται ο **κύκλος παραγγελίας (ordering cycle)**, R είναι το **βέλτιστο σημείο παραγγελίας**, το σημείο δηλαδή στο οποίο όταν βρίσκεται το απόθεμα, πρέπει να τοποθετηθεί νέα παραγγελία ώστε η άφιξη της παραγγελίας αυτής να συμπίσει με το μηδενισμό του αποθέματος. Το βέλτιστο σημείο παραγγελίας υπολογίζεται από τον τύπο:

$$R = d \cdot L,$$

όπου d ο ρυθμός ζήτησης των προϊόντων από τους καταναλωτές, δηλαδή η ζήτηση D διά τις ημέρες λειτουργίας.

Όπως φαίνεται και στο σχήμα λοιπόν, οι παραγγελίες τοποθετούνται στις χρονικές στιγμές $T - L$, $2T - L$, κ.ο.κ., με το L να είναι μικρότερο του T .

Η βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας υπολογίζεται και πάλι από τον τύπο (1.1) που χρησιμοποιούμε και στο Βασικό Μοντέλο ΕΟQ, δηλαδή:

$$Q = \sqrt{\frac{2KD}{K_c}}$$

Στα κόστη παραγγελιών και αποθήκευσης της περιόδου δεν αλλάζει κάτι.

Παράδειγμα 2

Συνεχίζοντας στο Παράδειγμα 1 και κρατώντας τα δεδομένα του παραδείγματος σταθερά, δηλαδή $D = 90,000$ αντηλιακά προσώπου, $K_c = 3 \text{ €}$ / μονάδα και έτος και $K = 1.5$, κάνουμε την εξής επιπλέον υπόθεση:

Υποθέτουμε ότι η “e-Cosmetics A.E.” έχει καθυστέρηση στην παραλαβή της παραγγελίας από τη στιγμή της τοποθέτησής της, μισή ημέρα περίπου, δηλαδή ισχύει ότι $L = 0.5$ ημέρες.

Σε αυτήν την περίπτωση, θα πρέπει να παραγγέλνει $EOQ = Q = 300$ μονάδες κάθε $1.22 - 0.5 = 0.72$ ημέρες μετά την παραλαβή της κάθε παραγγελίας, όπου 1.22 είναι ο απαιτούμενος αριθμός ημερών ανάμεσα σε δύο παραγγελίες, όπως είχαμε υπολογίσει στο Παράδειγμα 1.

Εναλλακτικά, μια νέα παραγγελία μπορεί να τοποθετείται όταν το απόθεμα της επιχείρησης φτάνει τις $R = dL = \frac{90,000 \text{ μονάδες}}{365 \text{ ημέρες}} \cdot 0.5 \text{ ημέρες} = 123.3$ μονάδες, για να μην υπάρξει έλλειψη στην αποθήκη.

3.5. Μοντέλο EOQ με σταδιακή παράδοση παραγγελίας

Κάποιες φορές, είτε η παράδοση της παραγγελίας από τον προμηθευτή γίνεται σταδιακά είτε κάποια αγαθά παράγονται από την ίδια την επιχείρηση αντί να τα αγοράζει από εξωτερικό προμηθευτή. Μπορεί όμως, να μην είναι δυνατόν να παραχθούν όλα τα αγαθά την ίδια στιγμή, όπως αν πρόκειται, για παράδειγμα, για κατασκευή 1,000 αυτοκινήτων, 800 χαλιών ή άλλων προϊόντων που απαιτούν πολύ χρόνο για την κατασκευή τους λόγω πληθώρας επιμέρους εξαρτημάτων, μεγάλου όγκου, κλπ.

Σε αυτή την περίπτωση λοιπόν, θεωρούμε πως, από τη στιγμή της τοποθέτησης της παραγγελίας, το εμπόρευμα παραδίδεται με ρυθμό b , ενώ παράλληλα, αφαιρείται με ρυθμό d προς ικανοποίηση της ζήτησης.

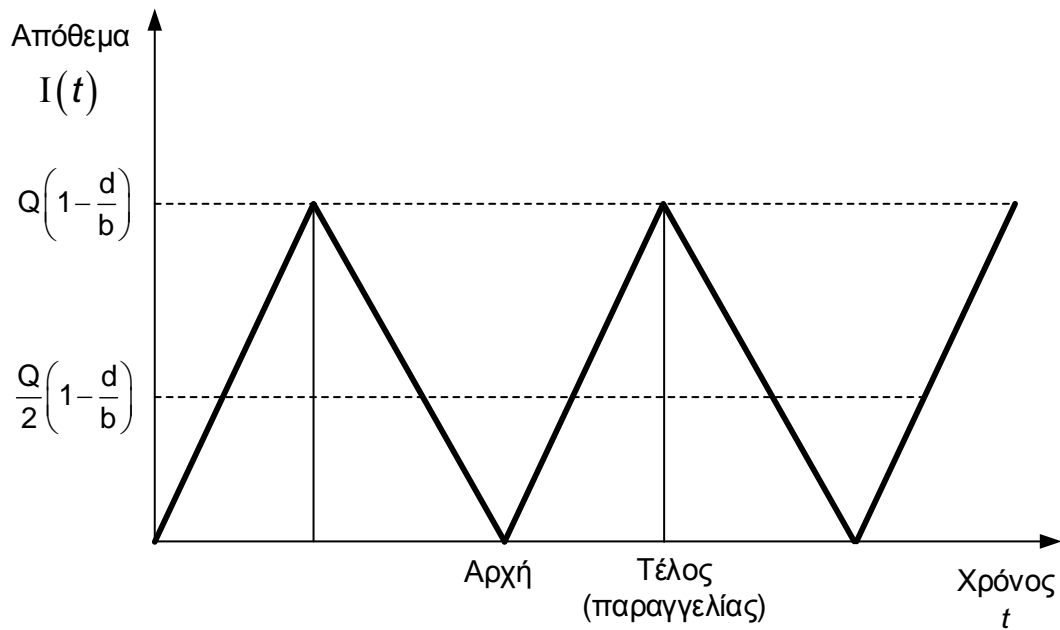
Έτσι, η παραλαβή ολόκληρης της παραγγελίας γίνεται σε χρόνο $\frac{Q}{b}$ και η ποσότητα του εμπορεύματος που πωλήθηκε όσο διήρκεσε η παραλαβή είναι ίση με $\frac{Q}{b}d$.

Από τα παραπάνω, συμπεραίνουμε ότι:

- Η μέγιστη ποσότητα αποθέματος που μπορεί να υπάρξει στην αποθήκη είναι $Q\left(1-\frac{d}{b}\right)$.
- Η μέση ποσότητα αποθέματος είναι $\frac{Q}{2}\left(1-\frac{d}{b}\right)$.

Γενικά, για το χρονικό διάστημα παραλαβής της παραγγελίας $\frac{Q}{b}$, έχουμε ταυτόχρονα **προσθήκη** αλλά και **αφαίρεση** εμπορεύματος από την αποθήκη. Ενώ, από το χρονικό σημείο που επιτυγχάνουμε τη μέγιστη ποσότητα αποθέματος στην αποθήκη, δηλαδή την ποσότητα $Q\left(1-\frac{d}{b}\right)$ και μέχρι να μηδενιστεί το απόθεμα οπότε και ξεκινάει ο νέος κύκλος παραγγελιών, έχουμε μόνο χρησιμοποίηση του αποθέματος για ικανοποίηση της ζήτησης.

Σχηματικά, έχουμε:



Σχήμα 4: ΕΟQ με σταδιακή παράδοση παραγγελίας

Στο συγκεκριμένο μοντέλο, το κόστος αποθήκευσης διαφοροποιείται ελαφρώς από τα μοντέλα που παρουσιάσαμε στις προηγούμενες παραγράφους, μιας και έξοδα αποθήκευσης υπάρχουν μόνο για τις $\frac{Q}{2}\left(1-\frac{d}{b}\right)$ μονάδες προϊόντος.

Έχουμε λοιπόν ότι:

$$CC = \frac{Q}{2}\left(1-\frac{d}{b}\right)K_c.$$

Άρα και για το συνολικό κόστος έχουμε:

$$TC = OC + CC = \frac{D}{Q}K + K_c \frac{Q}{2}\left(1-\frac{d}{b}\right)$$

Για να υπολογίσουμε τη Βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας, εξισώνουμε τα δύο κόστη, όπως και στο Βασικό μοντέλο ΕΟQ. Οπότε:

$$OC = CC \Rightarrow \frac{D}{Q}K = \frac{Q}{2}\left(1-\frac{d}{b}\right)K_c \Rightarrow$$

$$Q = \sqrt{\frac{2DK}{K_c\left(1-\frac{d}{b}\right)}}.$$

Παράδειγμα 3

Το κατάστημα ανταλλακτικών αυτοκινήτων “Voiture” χρειάζεται 10,000 δεξιούς καθρέφτες το χρόνο. Η τοποθέτηση μιας παραγγελίας κοστίζει $K = 50 \text{ €}$ και το κόστος αποθήκευσης είναι $K_c = 2.5 \text{ € / καθρέφτη}$. Η παραλαβή μιας παραγγελίας γίνεται με ρυθμό $b = 200$ καθρέφτες / ημέρα, ενώ το κατάστημα λειτουργεί 311 ημέρες το χρόνο. Ο υπεύθυνος της αποθήκης της εταιρίας επιθυμεί να υπολογίσει τη βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας καθώς και το συνολικό της κόστος.

Λύση

Αρχικά, υπολογίζουμε το ρυθμό ζήτησης d , για να δούμε πόσοι καθρέφτες χρειάζονται για να ικανοποιήσουν την ημερήσια ζήτηση:

$$d = \frac{10,000 \text{ καθρέφτες}}{311 \text{ ημέρες}} = 32.2 \text{ καθρέφτες / ημέρα.}$$

Κατά συνέπεια, για τη βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας, έχουμε:

$$Q = \sqrt{\frac{2DK}{K_c \left(1 - \frac{d}{b}\right)}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10,000 \cdot 50}{2.5 \cdot \left(1 - \frac{32.2}{200}\right)}} = 690.48 \text{ καθρέφτες}$$

και για το συνολικό κόστος :

$$\begin{aligned} TC = OC + CC &= \frac{D}{Q} K + \frac{Q}{2} \left(1 - \frac{d}{b}\right) K_c = \frac{10,000}{690.48} \cdot 50 + \frac{690.48}{2} \cdot \left(1 - \frac{32.2}{200}\right) \cdot 2.5 = \\ &= 724.13 + 1,810.35 = 2534.48 \text{ € .} \end{aligned}$$

Για την παραλαβή ολόκληρης της παραγγελίας χρειάζονται $\frac{690.48}{200} = 3.45$ ημέρες.

Τέλος, για το μέγιστο απόθεμα στην αποθήκη, έχουμε:

$$Q \left(1 - \frac{d}{b}\right) = 690.48 \left(1 - \frac{32.2}{200}\right) = 579.31 \text{ μονάδες,}$$

ποσότητα μικρότερη από τη βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας Q , πράγμα αναμενόμενο μιας και το απόθεμα στην αποθήκη δεν μπορεί να ξεπερνάει τη συνολική παραγγελία δεδομένης της ζήτησης.

3.6. Μοντέλο EOQ με προγραμματισμένες ελλείψεις

Πολύ συχνά, σε μία επιχείρηση, παρατηρείται το φαινόμενο να παρουσιαστούν ελλείψεις σε κάποια προϊόντα της. Αυτή η έλλειψη προϊόντων μπορεί να οδηγήσει σε μη ικανοποίηση ενδεχόμενης ζήτησης. Το γεγονός αυτό μπορεί να προκαλέσει δυσαρέσκεια στους πελάτες της επιχείρησης, που με τη σειρά του, μπορεί να δημιουργήσει μεγάλη ζημία στην επιχείρηση, όπως αναφέρθηκε και σε προηγούμενη ενότητα.

Υπάρχουν όμως και περιπτώσεις στις οποίες σκοπίμως προγραμματίζονται ελλείψεις σε ορισμένα προϊόντα από τον υπεύθυνο της επιχείρησης. Αυτό, συνήθως συμβαίνει όταν τα διάφορα κόστη αποθήκευσης έχει υπολογιστεί ότι είναι σχεδόν ισοδύναμα με τα κόστη που θα προκύψουν από ενδεχόμενη μη ικανοποίηση της ζήτησης. Η ζήτηση των πελατών ικανοποιείται αμέσως μόλις γίνει παραλαβή προϊόντων από την επιχείρηση.

Βασική προϋπόθεση σε αυτό το μοντέλο είναι οι πελάτες να αποδέχονται την ικανοποίηση της ζήτησής τους με κάποια καθυστέρηση. Παράδειγμα τέτοιου προϊόντος μπορεί να είναι ένα καλλυντικό ή ένα κόμικ, ή γενικότερα κάποιο προϊόν το οποίο δεν καλύπτει πρώτες ανάγκες του αγοραστικού κοινού, ενώ τέτοιο παράδειγμα δε θα μπορούσε να αποτελέσει ένα φάρμακο που ικανοποιεί κάποια ζωτική ανάγκη.

Σε αυτή την παράγραφο, ασχολούμενοι με την περίπτωση όπου υπάρχουν ελλείψεις, θα απαντήσουμε στα εξής τρία ερωτήματα:

- Ποιο είναι το βέλτιστο μέγεθος παραγγελίας;
- Ποιο είναι το βέλτιστο μέγεθος αποθέματος;
- Ποια είναι η βέλτιστη διάρκεια ενός κύκλου παραγγελίας;

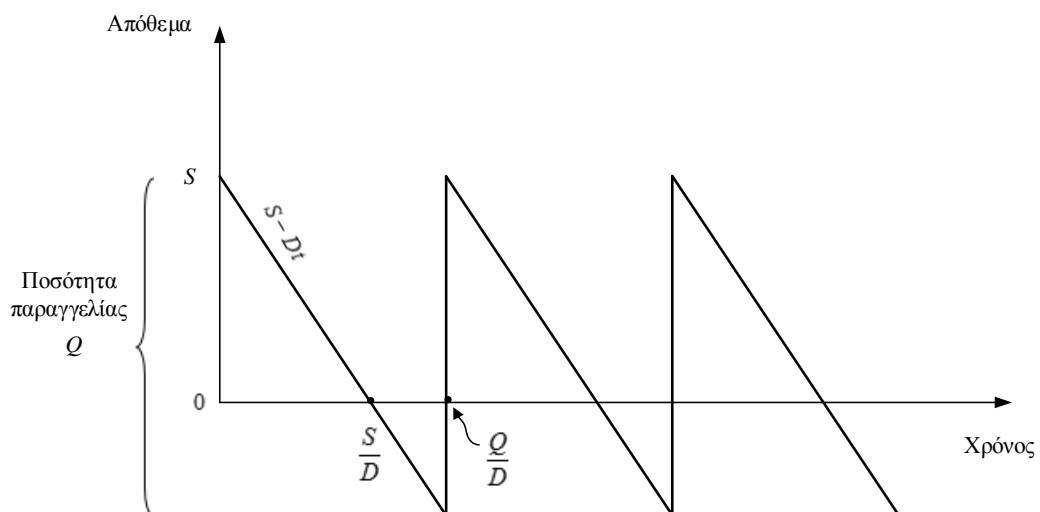
Για τις ανάγκες της επεξήγησης του παραπάνω προβλήματος, θέτουμε τα εξής:

- ✓ e = κόστος έλλειψης μίας μονάδας προϊόντος.
- ✓ S = επίπεδο αποθέματος μετά την παραλαβή Q μονάδων από την αποθήκη.
- ✓ $Q - S$ = έλλειψη αποθέματος ακριβώς πριν την παραλαβή Q μονάδων από την αποθήκη

Τα προαναφερθέντα μεγέθη, αλλά και ολόκληρη η πορεία του συστήματος στην πορεία του χρόνου, παρουσιάζονται αναλυτικά στο σχήμα που ακολουθεί.

Σε έναν ολοκληρωμένο κύκλο παραγγελίας συμμετέχουν τα ακόλουθα κόστη:

- κόστος παραγγελίας νέων προϊόντων.
- κόστος αποθήκευσης των νέων προϊόντων που έρχονται στην αποθήκη.
- κόστος έλλειψης προϊόντων που ζητούνται από τους πελάτες και δεν υπάρχουν στην αποθήκη.



Σχήμα 5: ΕΟQ με προγραμματισμένες ελλείψεις

Το κόστος ανά κύκλο παραγωγής ή παραγγελίας δίνεται από τον τύπο:

$$OC = K + cQ \quad (1.2)$$

όπου c το κόστος αγοράς της κάθε μονάδας προϊόντος.

Όπως και στις προηγούμενες παραγράφους, το μέσο απόθεμα είναι $\frac{S}{2}$ με αντίστοιχο κόστος αποθήκευσης του μέσου αποθέματος ίσο με $K_c \frac{S}{2}$.

Στην αποθήκη, υπάρχουν συνολικά S μονάδες προϊόντος. Αυτές καταναλώνονται με ρυθμό D . Συνεπώς, ο χρόνος για τον οποίο υπάρχει απόθεμα στην αποθήκη και άρα απαιτείται από την επιχείρηση να πληρώνει για την αποθήκευσή του, είναι $\frac{S}{D}$.

Επομένως, το κόστος αποθήκευσης σε κάθε κύκλο είναι:

$$CC = K_c \frac{S}{2} \frac{S}{D} = \frac{K_c S^2}{2D} \quad (1.3)$$

Οι ελλείψεις εμφανίζονται στην αποθήκη για χρόνο $\frac{Q-S}{D}$, με μέση ποσότητα ελλείψεων αποθέματος $\frac{Q-S}{2}$ και αντίστοιχου κόστους ελλείψεων $e \frac{Q-S}{2}$.

Άρα, το κόστος που δημιουργείται από τις ελλείψεις σε κάθε κύκλο παραγγελίας, συμβολίζεται με CU και ισούται με:

$$CU = e \frac{Q-S}{2} \frac{Q-S}{D} = \frac{e(Q-S)^2}{2D} \quad (1.4)$$

Τελικά, το συνολικό κόστος ενός κύκλου παραγγελίας ισούται με το άθροισμα των τριών επιμέρους κοστών, δηλαδή:

$$TC = \left(\begin{array}{c} \text{κόστος ενός κύκλου} \\ \text{παραγγελίας} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{κόστος αποθήκευσης} \\ \text{προϊόντων} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{κόστος έλλειψης} \\ \text{προϊόντων} \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$TC = OC + CC + CU \Rightarrow$$

$$TC = (K + cQ) + \left(K_c \frac{S^2}{2D} \right) + \left(e \frac{(Q-S)^2}{2D} \right) \quad (1.5)$$

Συνεπώς, το συνολικό ετήσιο κόστος ισούται με:

$$TC = \left(\begin{array}{c} \text{συνολικό κόστος} \\ \text{ενός κύκλου παραγγελίας} \end{array} \right) \times \left(\begin{array}{c} \text{ετήσιος αριθμός} \\ \text{παραγγελιών} \end{array} \right) =$$

$$\left(K + cQ + K_c \frac{S^2}{2D} + e \frac{(Q-S)^2}{2D} \right) \times \frac{D}{Q} = \frac{K + cQ + K_c \frac{S^2}{2D} + e \frac{(Q-S)^2}{2D}}{\frac{Q}{D}} \Rightarrow$$

$$TC = \frac{DK}{Q} + cD + \frac{K_c S^2}{2Q} + \frac{e(Q-S)^2}{2Q}.$$

Οι βέλτιστες τιμές για τα μεγέθη S και Q υπολογίζονται αλγεβρικά, αν εξισώσουμε τις πρώτες μερικές παραγώγους $\frac{\partial TC}{\partial S}$, $\frac{\partial TC}{\partial Q}$ με το μηδέν,

δηλαδή:

$$\frac{\partial TC}{\partial S} = \frac{\partial \left(\frac{DK}{Q} + cD + \frac{K_c S^2}{2Q} + \frac{e(Q-S)^2}{2Q} \right)}{\partial S} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{2K_c S}{2Q} + \frac{2e(Q-S)(-1)}{2Q} = 0 \Rightarrow \frac{K_c S}{Q} + \frac{e(S-Q)}{Q} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{K_c S + e(S-Q)}{Q} = 0 \Rightarrow K_c S + e(S-Q) = 0 \Rightarrow$$

$$S = \frac{eQ}{K_c + e} \quad (1.6)$$

και

$$\frac{\partial TC}{\partial Q} = \frac{\partial \left(\frac{DK}{Q} + cD + \frac{K_c S^2}{2Q} + \frac{e(Q-S)^2}{2Q} \right)}{\partial Q} = 0 \Rightarrow$$

$$-\frac{DK}{Q^2} - \frac{K_c S^2}{2Q^2} + \frac{2e(Q-S)2Q + 2e(Q-S)^2}{4Q^2} = 0 \Rightarrow$$

$$-\frac{4DK}{4Q^2} - \frac{2K_c S^2}{4Q^2} + \frac{4eQ^2 - 4eQS - 2eQ^2 + 4eQS - 2eS^2}{4Q^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{-4DK - 2K_c S^2 + 2eQ^2 - 2eS^2}{4Q^2} = 0 \Rightarrow$$

$$-4DK - 2K_c S^2 + 2eQ^2 - 2eS^2 = 0 \Rightarrow$$

$$-4DK - 2K_c S^2 + 2eQ^2 - 2eS^2 = 0 \Rightarrow$$

$$Q^2 = \frac{2eS^2 + 2K_c S^2 + 4DK}{2e} = \frac{(e + K_c)S^2 + 2DK}{e} \Rightarrow$$

$$Q = \sqrt{\frac{(e + K_c)S^2 + 2DK}{e}} \quad (1.7)$$

Από τους τύπους (1.6) και (1.7) τελικά έχουμε:

$$S^* = \sqrt{\frac{2DK}{K_c}} \sqrt{\frac{e}{(e + K_c)}} \quad (1.8)$$

και

$$Q^* = \sqrt{\frac{2DK}{K_c}} \sqrt{\frac{(e + K_c)}{e}} \quad (1.9)$$

Ανάλογα διαμορφώνεται και η βέλτιστη διάρκεια ενός κύκλου παραγγελίας:

$$t^* = \frac{Q^*}{D} = \frac{\sqrt{\frac{2DK}{K_c}} \sqrt{\frac{(e + K_c)}{e}}}{D} \Rightarrow$$

$$t^* = \sqrt{\frac{2K}{DK_c}} \sqrt{\frac{(e + K_c)}{e}} \quad (1.10)$$

Η μέγιστη ποσότητα έλλειψης που θα μπορούσε να εμφανιστεί είναι:

$$Q^* - S^* = \sqrt{\frac{2DK}{K_c}} \sqrt{\frac{(e + K_c)}{e}} - \sqrt{\frac{2DK}{K_c}} \sqrt{\frac{e}{(e + K_c)}} \Rightarrow$$

$$Q^* - S^* = \sqrt{\frac{2DK}{K_c}} \left(\frac{K_c}{\sqrt{e(e + K_c)}} \right) \quad (1.11)$$

Παράδειγμα 4

Σε συνέχεια του Παραδείγματος 1, ο υπεύθυνος αποθήκης της “e-Cosmetics A.E.”, γνωρίζοντας ότι το κόστος έλλειψης e σε περίπτωση πιθανής ζήτησης ανέρχεται στα 2€ / μονάδα, θέλει να αποφασίσει τα βέλτιστα μεγέθη

παραγγελίας και αποθέματος, καθώς και τη βέλτιστη διάρκεια ενός κύκλου παραγγελίας. Έχουμε:

$$D = 90,000, K_c = 3\text{€} / \text{μονάδα και έτος και } K = 1.5\text{€}.$$

Αντικαθιστώντας λοιπόν τις παραπάνω τιμές στους τύπους (1.8), (1.9) και (1.10), ο υπεύθυνος αποθήκης διαπιστώνει ότι:

A.

$$Q^* = \sqrt{\frac{2DK}{K_c}} \sqrt{\frac{(e + K_c)}{e}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 90,000 \cdot 1,5}{3}} \sqrt{\frac{(2+3)}{2}} = \sqrt{\frac{270,000}{3}} \sqrt{\frac{5}{2}} \Rightarrow$$

$Q^* = \sqrt{90,000} \sqrt{2.5} = 300 \cdot 1.58 = 474$ μονάδες είναι η βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας,

B.

$$S^* = \sqrt{\frac{2DK}{K_c}} \sqrt{\frac{e}{(e + K_c)}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 90,000 \cdot 1,5}{3}} \sqrt{\frac{2}{(2+3)}} = \sqrt{\frac{270,000}{3}} \sqrt{\frac{2}{5}} \Rightarrow$$

$$S^* = \sqrt{90,000} \sqrt{0.4} = 300 \cdot 0.63 = 189 \text{ μονάδες,}$$

είναι η βέλτιστη ποσότητα προϊόντων που υπάρχουν στην αποθήκη.

Γ.

$Q^* - S^* = 474 - 189 = 285$ μονάδες είναι η μέγιστη ποσότητα έλλειψης που θα μπορούσε να εμφανιστεί.

Δ.

Τέλος, ο κάθε κύκλος παραγγελίας θα πρέπει να διαρκεί:

$$t^* = \sqrt{\frac{2K}{DK_c}} \sqrt{\frac{(e + K_c)}{e}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,5}{90,000 \cdot 3}} \sqrt{\frac{(2+3)}{2}} = \sqrt{\frac{1}{90,000}} \sqrt{\frac{5}{2}} \Rightarrow$$

$$t^* = 0.017 \text{ έτη} \cdot \frac{365 \text{ ημέρες}}{\text{έτος}} = 6.21 \text{ ημέρες.}$$

Τελικά λοιπόν, η βέλτιστη πολιτική παραγγελίας που πρέπει να ακολουθηθεί από τον υπεύθυνο αποθήκης της “e-Cosmetics A.E.” προβλέπει να γίνεται μία παραγγελία 474 μονάδων προϊόντος κάθε 6 περίπου ημέρες. Η βέλτιστη

ποσότητα προϊόντων που θα υπάρχει στην αποθήκη μετά την παραλαβή υπολογίζεται στις 189 μονάδες. Τέλος, με αυτήν την πολιτική, η μέγιστη ποσότητα έλλειψης θα φτάσει τις 285 μονάδες προϊόντος. Παρατηρούμε ότι η ποσότητα Q^* είναι αρκετά μεγαλύτερη από αυτήν που είχαμε υπολογίσει στο παράδειγμα 1. Αυτό, δικαιολογείται από το γεγονός ότι $K_c > e$.

3.7. Μοντέλο EOQ με εκπτώσεις στην ποσότητα παραγγελίας

Στα μοντέλα που προηγήθηκαν, δεν υπήρχε κάποια διαφοροποίηση στο κόστος της μιας μονάδας του προϊόντος ανάλογα με το μέγεθος της παραγγελίας. Έτσι, οι βέλτιστες λύσεις που υπολογίσαμε ήταν ανεξάρτητες από το κόστος της κάθε μονάδας του προϊόντος.

Σύμφωνα με τα προηγούμενα δηλαδή, το ίδιο κοστίζει στο συνοικιακό super market ανά κιλό μία παραγγελία 50 κιλών λεμονιών και το ίδιο μία παραγγελία 1,000 κιλών. Κάτι τέτοιο όμως, είναι προφανές πως δεν είναι ρεαλιστικό. Κι αυτό, γιατί οι εταιρίες που προμηθεύουν τις διάφορες επιχειρήσεις προσφέρουν κίνητρα ώστε να γίνονται όσο το δυνατόν μεγαλύτερες παραγγελίες.

Σε αυτή την παράγραφο λοιπόν, θα ασχοληθούμε με την υπόθεση πως το κόστος της κάθε μονάδας εξαρτάται από την ποσότητα της παραγγελίας. Τα ποσά «κόστος μονάδας προϊόντος» και «μέγεθος παραγγελίας» θα είναι λοιπόν αντιστρόφως ανάλογα και όσο θα μεγαλώνει η παραγγελία, τόσο θα μικραίνει το κόστος της κάθε μονάδας. Επιπλέον, θα θεωρήσουμε πως το κόστος αποθήκευσης K_c είναι ανεξάρτητο του κόστους της κάθε μονάδας.

Έστω Q η ποσότητα παραγγελίας και w_i τα σημεία όπου αλλάζει το κόστος της μονάδας. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Αν $Q < w_1$, τότε κάθε μονάδα κοστίζει c_1 €.
- Αν $w_1 \leq Q < w_2$, τότε κάθε μονάδα κοστίζει c_2 €.
-
- Αν $w_{i-1} \leq Q < w_i$, τότε κάθε μονάδα κοστίζει c_i €.

Έτσι, το σκεπτικό που ακολουθούμε για την εύρεση της βέλτιστης ποσότητας παραγγελίας είναι το εξής:

- Αρχικά, χρησιμοποιούμε τη μέθοδο EOQ για να υπολογίσουμε τη βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας Q_j^* , δηλαδή $EOQ_j = Q_j^* = \sqrt{\frac{2KD}{K_c}}$.

- Υπολογίζουμε σε όλες τις περιπτώσεις το συνολικό κόστος TC_j ,

όπου:

$$TC_j = \left(\begin{array}{l} \text{ετήσιο κόστος} \\ \text{παραγγελίας} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{l} \text{ετήσιο κόστος} \\ \text{αποθήκευσης} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{l} \text{συνολικό κόστος μονάδων} \\ \text{ζήτησης επί το αντίστοιχο} \\ \text{μοναδιαίο κόστος} \end{array} \right) =$$

$$= OC + CC + D \cdot c_j = \frac{DK}{Q} + \frac{K_c Q}{2} + D \cdot c_j,$$

για $j = 1, \dots, n$, όπου n το σύνολο των διαφορετικών διαθέσιμων επιλογών μεγέθους παραγγελίας.

- Συγκρίνουμε τα TC_j όλων των περιπτώσεων των c_j και διαλέγουμε το μικρότερο. Έπειτα, επιλέγουμε την ποσότητα παραγγελίας που δίνει αυτό το ελάχιστο TC_j .

Τα παραπάνω παρουσιάζονται αναλυτικά στο ακόλουθο παράδειγμα.

Παράδειγμα 5

Βασιζόμενοι πάλι στο Παράδειγμα 1, για τις ίδιες τιμές των παραμέτρων, δηλαδή $D = 90,000$, $K_c = 3\text{€/μονάδα}$ και έτος και $K = 1.5 \text{ €}$, υποθέτουμε τώρα τα εξής:

Ο προμηθευτής της “e-Cosmetics A.E.” κάνει την εξής προσφορά:

- ✓ Για 1 - 199 κρέμες, το κόστος θα είναι 5€ / κρέμα.
- ✓ Για 200 - 399 κρέμες, το κόστος θα είναι 4.85€ / κρέμα.
- ✓ Για παραγγελία από 400 κρέμες και πάνω, το κόστος θα είναι 4.7€ / κρέμα.

Έχουμε λοιπόν:

$$EOQ = Q^* = \sqrt{\frac{2KD}{K_c}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1.5 \cdot 90,000}{3}} = 300 \text{ αντηλιακές κρέμες,}$$

αριθμός μονάδων προϊόντος που ανήκει στη 2^η κατηγορία της προσφοράς του προμηθευτή (200 -399 κρέμες).

Το κόστος για μια παραγγελία με μέγεθος ίσο με το EOQ θα είναι:

$$TC_2(Q = 300) = TC_2(Q = EOQ) = CC + OC + D \cdot c_j =$$

$$= \frac{Q \cdot K_c}{2} + \frac{D \cdot K}{Q} + D \cdot c_j = \frac{300 \cdot 3}{2} + \frac{90,000 \cdot 1.5}{300} + 90,000 \cdot 4.85 = 437,400€$$

Αντίστοιχα, το κόστος για μια παραγγελία με μέγεθος ίσο με 400 μονάδες θα είναι:

$$TC_3(Q = 400) = CC + OC + D \cdot c_j = \frac{Q \cdot K_c}{2} + \frac{D \cdot K}{Q} + D \cdot c_j =$$

$$= \frac{400 \cdot 3}{2} + \frac{90,000 \cdot 1.5}{400} + 90,000 \cdot 4.7 = 423,938€$$

Παρατηρούμε ότι:

$$TC_2(Q = EOQ) = TC_2(Q = 300) = 437,400 > 423,938 = TC_3(Q = 400)$$

Δηλαδή, παραγγέλνοντας 100 μονάδες προϊόντος παραπάνω από την ποσότητα EOQ, η εταιρία θα πληρώσει 13,462€ λιγότερα. Συνεπώς, κρίνεται ορθολογικό η επιχείρηση να κάνει μία παραγγελία μεγαλύτερη ή ίση από 400 μονάδες, ώστε να κερδίσει και την έκπτωση του προμηθευτή, αλλά και να μην απομακρυνθεί πολύ από τη βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας.

Τέλος, να παρατηρήσουμε πως το TC_1 δε μας ενδιαφέρει να το εξετάσουμε μιας και σίγουρα η 1^η περίπτωση δε θα περιέχει την ιδανική λύση αφού ούτε προσεγγίζει το μέγεθος της EOQ ούτε έχει δελεαστικό κόστος ανά μονάδα προϊόντος συγκριτικά με τα υπόλοιπα.

Παρατήρηση – Just-in-time systems

Πολλές φορές, τα μοντέλα EOQ, και ειδικά το βασικό μοντέλο EOQ, δημιουργούν μεγάλες ποσότητες αποθεμάτων και συνεπώς, μεγάλα αντίστοιχα

κόστη. Το **just-in-time (JIT) σύστημα ελέγχου αποθεμάτων** δίνει έμφαση στο να προσφέρονται τα προϊόντα ακριβώς τη στιγμή που ζητούνται έτσι ώστε τα επίπεδα αποθεμάτων να διατηρούνται χαμηλά.

Το σύστημα αυτό χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά στα τέλη της δεκαετίας του '50, από την εταιρία αυτοκινήτων *Toyota*, με μεγάλη επιτυχία. Γενικά, το JIT σύστημα εστιάζει στο να μειωθούν κάθε είδους σπατάλες και μπορεί να λειτουργήσει συνδυαστικά με ένα μοντέλο EOQ και να δώσει ως βέλτιστη μια μικρή ποσότητα παραγγελίας.

Εταιρίες που κυρίως το προτιμούν είναι οι εταιρίες που εμπορεύονται πλοία, αυτοκίνητα και λοιπά είδη των οποίων είναι δύσκολο να διατηρείται μεγάλο απόθεμα. Τέλος, δεδομένου ότι βασίζεται στο ελάχιστο απόθεμα, το συγκεκριμένο σύστημα δίνει μεγάλη έμφαση στην καλή οργάνωση της γραμμής παραγωγής και στους προμηθευτές, οι οποίοι θα πρέπει να πληρούν πολύ συγκεκριμένες προϋποθέσεις. Ενδεικτικά, θα πρέπει να βρίσκονται σε απόσταση που θα μειώνει την πιθανότητα καθυστερήσεων κατά τη μεταφορά, να δεσμεύονται ότι κανένα από τα αγαθά που θα παραδίδουν δε θα είναι ελαττωματικό και να έχουν εναλλακτικό πλάνο σε περιπτώσεις εκτάκτου ανάγκης, όπως μια απεργία που θα αποκλείει δρόμους ή λιμάνια, έντονα καιρικά φαινόμενα, κλπ.

3.8. Ντετερμινιστικό μοντέλο περιοδικής επιθεώρησης

Μέχρι τώρα, στο βασικό μοντέλο EOQ και τις διαφοροποιήσεις του που εξετάσαμε, υποθέταμε πως υπήρχε συγκεκριμένη και συνεχής ζήτηση. Τι γίνεται όμως, όταν η ζήτηση διαφέρει από περίοδο σε περίοδο; Παράδειγμα τέτοιων προϊόντων μπορεί να είναι κάποια εποχικά είδη, όπως οι αντηλιακές κρέμες ή τα μαγιώ, τα οποία ενώ έχουν όλο το χρόνο μη-μηδενική ζήτηση, ωστόσο, στους καλοκαιρινούς μήνες εμφανίζουν αυξημένη ζήτηση. Σε αυτήν την περίπτωση, τα μοντέλα EOQ παύουν να εξασφαλίζουν τη βέλτιστη λύση με το χαμηλότερο κόστος.

Στο μοντέλο που ακολουθεί, ο προγραμματισμός θα γίνει για τις επόμενες n περιόδους βάσει της ποσότητας αποθέματος που πρέπει να παραχθεί ή να αγοραστεί ώστε να αναπληρωθεί πιθανό κενό στην αποθήκη, εάν όντως παρίσταται τέτοια ανάγκη. Η ζήτηση για κάθε περίοδο είναι διαφορετική, αλλά

γνωστή εκ των προτέρων, ενώ υπάρχει διαθέσιμος χρόνος στο ξεκίνημα της περιόδου 1, ώστε αυτή να καλυφθεί εγκαίρως, δεδομένου ότι δεν υπάρχει απόθεμα αρχικά.

Η ζήτηση της i -περιόδου συμβολίζεται με D_i , για $i = 1, \dots, n$.

Όσον αφορά τα κόστη, έχουμε τα ακόλουθα, τα οποία είναι παρόμοια με το βασικό μοντέλο ΕΟQ.

- K : κόστος για να γίνει η παραγωγή ή αγορά μονάδων προϊόντος στην αρχή της περιόδου
- K_c : κόστος αποθήκευσης κάθε μονάδας προϊόντος στο τέλος της περιόδου

Οποιοδήποτε άλλο κόστος είναι συγκεκριμένο και δεν επηρεάζεται από την πολιτική ελέγχου αποθεμάτων που θα ακολουθηθεί, με αποτέλεσμα να μην το λαμβάνουμε υπ'όψιν.

Συνεπώς, σημείο-κλειδί κατά τη σχεδίαση της ιδανικής πολιτικής αποτελεί το γεγονός ότι στην ιδανική στρατηγική για τον προγραμματισμό παραγωγής, παράγονται ή αγοράζονται μονάδες του προϊόντος μόνο όταν το επίπεδο του αποθέματος μηδενίζεται. Ο αλγόριθμος που θα μας βοηθήσει να υπολογίσουμε τη βέλτιστη πολιτική που πρέπει να ακολουθηθεί σχετικά με τον έλεγχο των αποθεμάτων διαμορφώνεται ως εξής:

Ορίζουμε ως C_i το ολικό κόστος της ιδανικής πολιτικής για τις περιόδους $i, i+1, \dots, n$, όταν η περίοδος i ξεκινάει με μηδενικό απόθεμα, για $i = 1, 2, \dots, n$. Χρησιμοποιώντας μεθόδους δυναμικού προγραμματισμού, υπολογίζουμε την αναδρομική σχέση για το C_i :

$$C_i = \min_{j=i, i+1, \dots, n} \{C_{j+1} + K + K_c [D_{i+1} + 2D_{i+2} + \dots + (j-1)D_j]\} \quad (1.12),$$

Στο μεσοδιάστημα των περιόδων i και j , ο όρος με συντελεστή K_c δείχνει το συνολικό κόστος αποθήκευσης αυτού του διαστήματος.

Το j είναι ο δείκτης του τέλους της περιόδου, όταν το απόθεμα μηδενίζεται για πρώτη φορά μετά την παραγωγή στην αρχή της περιόδου i ,

ενώ για $j = n$, έχουμε $C_{n+1} = 0$.

Από τον παραπάνω τύπο, είναι επίσης σαφές πως αν το επίπεδο του αποθέματος μηδενιστεί μόλις εισέλθουμε στην περίοδο i , τότε η παραγωγή αυτής της περιόδου θα πρέπει να καλύψει όλη τη ζήτηση μέχρι την περίοδο j .

Ουσιαστικά δηλαδή, ο αλγόριθμος βασίζεται στην εύρεση των ολικών κοστών των διαφόρων περιόδων, C_n, C_{n-1}, \dots, C_1 . Για παράδειγμα, για $i = 1$, η παραγωγή στην περίοδο 1 θα πρέπει να καλύψει τη ζήτηση μέχρι την περίοδο j , ώστε η επόμενη, δηλαδή η 2^η παραγωγή να γίνει κατά την περίοδο $j+1$.

Το ακόλουθο παράδειγμα θα μας βοηθήσει να κατανοήσουμε καλύτερα τα παραπάνω.

Παράδειγμα 6

Μια εταιρία κατασκευής βιολιών δέχεται από ένα μουσικό σχολείο μια παραγγελία για 20 τεμάχια με χρονικό ορίζοντα παράδοσης ίσο με ένα τετράμηνο. Τα πρώτα 6 βιολιά έχουν ζητηθεί για παράδοση σε ένα μήνα από την τοποθέτηση της παραγγελίας (περίοδος 1), τα επόμενα 4 σε δύο μήνες (περίοδος 2), ένα μήνα μετά (περίοδος 3), άλλα 4 και τα τελευταία 6, στο τέλος του τετραμήνου (περίοδος 4).

Το κόστος K για να τοποθετηθεί η παραγγελία και να φτιαχτούν τα βιολιά έτσι ώστε να ικανοποιηθούν πλήρως τις απαιτήσεις του πελάτη ανέρχεται στα 10,000€. Η κατασκευαστική εταιρία θα μπορούσε, μέσα στον πρώτο μήνα, να κατασκευάσει και τα 20 βιολιά. Κάτι τέτοιο όμως, θα την ανάγκαζε να τα αποθηκεύσει και να τα παραδίδει σιγά σιγά στον πελάτη, βάσει της παραγγελίας. Το κόστος αποθήκευσης ανά περίοδο για κάθε βιολί K_c ανέρχεται στα 800 €. Οπότε, ίσως είναι πιο συμφέρον να κατασκευαστούν σταδιακά τα βιολιά (πάντα με $K = 10,000$ €), μερικά τώρα (σίγουρα τα 6 πρώτα που θα πρέπει να παραδοθούν στην πρώτη περίοδο) και τα υπόλοιπα κατά τις επόμενες περιόδους.

Καλούμαστε λοιπόν, να βρούμε τη βέλτιστη λύση για την κατανομή της παραγωγής. Θέλουμε δηλαδή, να δούμε στο ξεκίνημα ποιων περιόδων έχει νόημα να παραχθούν βιολιά και πόσα θα πρέπει να είναι αυτά ώστε να μειωθεί το συνολικό κόστος για την εταιρία.

Προσπαθούμε να ισορροπήσουμε υπό την πίεση δύο αντίρροπων δυνάμεων, μιας και το μεγάλο κόστος παραγωγής μας ωθεί να σκεφτούμε πως το καλύτερο θα ήταν να γίνει λίγες φορές η παραγωγή, ει δυνατόν και μία φορά, ενώ ταυτόχρονα, η υψηλή τιμή του K_c μας κάνει να θέλουμε τη μικρότερη δυνατή ποσότητα αποθέματος σε κάθε περίοδο. Συμπεραίνουμε λοιπόν, πως η βέλτιστη λύση θα είναι, πιθανότατα, κάπου στο ενδιάμεσο, δηλαδή θα αφορά περισσότερες από μία διαδικασίες παραγωγής αλλά και λιγότερες από τέσσερις.

Εφαρμόζουμε αναδρομικά τον αλγόριθμο που διατυπώσαμε προηγουμένως και παίρνουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα.

Πρώτα, θα υπολογίσουμε το κόστος της τελευταίας περιόδου, C_4 , από τη σχέση (1.8).

$$C_4 = C_5 + 10,000 = 0 + 10,000 \text{ €}$$

Το C_5 ισούται με μηδέν μιας και βρισκόμαστε στο παράδειγμα που αναφέραμε προηγουμένως όπου έχουμε $j = n$.

Έπειτα, θα προχωρήσουμε στον υπολογισμό του C_3 . Θα πρέπει να εξετάσουμε τα εξής δύο ενδεχόμενα:

Το απόθεμα να μηδενίζεται για πρώτη φορά

α) στο τέλος της τρίτης περιόδου ($j = 3$ με αντίστοιχο κόστος $C_3^{(3)}$) ή

β) στο τέλος της τέταρτης περιόδου ($j = 4$ με αντίστοιχο κόστος $C_3^{(4)}$). Ο δείκτης εντός της παρενθέσεως μας δείχνει το j .

Στην πρώτη περίπτωση, έχουμε παραγωγή μόνο για την περίοδο 3 και μετά ακολουθείται η βέλτιστη πολιτική για την περίοδο 4, ενώ στη δεύτερη περίπτωση, ζητείται να υπάρξει παραγωγή και για την τρίτη αλλά και για την τέταρτη περίοδο. Το κόστος C_3 είναι το μικρότερο εκ των $C_3^{(3)}$ και $C_3^{(4)}$.

$$C_3^{(3)} = C_4 + 10,000 = 10,000 + 10,000 = 20,000 \text{ €}$$

$$C_3^{(4)} = C_5 + 10,000 + 800 \cdot 6 = 14,800 \text{ €}$$

Οπότε,

$$C_3 = \min\{C_3^{(3)}, C_3^{(4)}\} = \min\{20,000, 14,800\} = 14,800 \text{ €}$$

Επομένως, αν το επίπεδο του αποθέματος μηδενιστεί μπαίνοντας στην τρίτη περίοδο αναγκάζοντας σε παραγωγή προϊόντων, η παραγωγή στην περίοδο 3 θα πρέπει να καλύπτει τη ζήτηση για τις περιόδους 3 και 4.

Προχωρώντας στον υπολογισμό του C_2 , θα εξετάσουμε τις αντίστοιχες περιπτώσεις μηδενισμού του αποθέματος. Θα δούμε λοιπόν τι γίνεται όταν το επίπεδο του αποθέματος μηδενίζεται για πρώτη φορά:

A) μετά την περίοδο 2,

B) στο τέλος της δεύτερης περιόδου ($j = 2$, με αντίστοιχο κόστος $C_2^{(2)}$),

Γ) στο τέλος της τρίτης περιόδου ($j = 3$, $C_2^{(3)}$) ή

Δ) στο τέλος της τέταρτης περιόδου ($j = 4$, $C_2^{(4)}$).

$$C_2^{(2)} = C_3 + 10,000 = 14,800 + 10,000 = 24,800 \text{ €}$$

$$C_2^{(3)} = C_4 + 10,000 + 800 \cdot 4 = 10,000 + 10,000 + 3,200 = 23,200 \text{ €}$$

$$C_2^{(4)} = C_5 + 10,000 + 800(4 + 2 \cdot 6) = 0 + 10,000 + 12,800 = 22,800 \text{ €}$$

Οπότε,

$$C_2 = \min\{C_2^{(2)}, C_2^{(3)}, C_2^{(4)}\} = \min\{24,800, 23,200, 22,800\} = 22,800 \text{ €}$$

Συνεχίζοντας λοιπόν, στο ίδιο μοτίβο έχουμε τα ακόλουθα για το C_1 .

$$C_1^{(1)} = C_2 + 10,000 = 22,800 + 10,000 = 32,800 \text{ €}$$

$$C_1^{(2)} = C_3 + 10,000 + 800 \cdot 4 = 14,800 + 10,000 + 3,200 = 28,000 \text{ €}$$

$$C_1^{(3)} = C_4 + 10,000 + 800(4 + 2 \cdot 4) = 10,000 + 10,000 + 9,600 = 29,600 \text{ €}$$

$$C_1^{(4)} = C_5 + 10,000 + 800(4 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 6) = 0 + 10,000 + 800 \cdot 30 \Rightarrow$$

$$C_1^{(4)} = 10,000 + 24,000 = 34,000 \text{ €}$$

$$C_1 = \min\{C_1^{(1)}, C_1^{(2)}, C_1^{(3)}, C_1^{(4)}\} = \min\{32,800, 28,000, 29,600, 34,000\} = 28,000 \text{ €}$$

Συμπερασματικά λοιπόν, η καλύτερη πολιτική είναι αυτή που αντιστοιχεί στο $C_1^{(2)}$. Σύμφωνα με αυτή, καλύπτεται πρώτα η ζήτηση μέχρι και την περίοδο 2. Έχουμε δηλαδή παραγωγή βιολιών δύο φορές για να καλυφθεί η ζήτηση, μία

φορά στην αρχή της περιόδου 1, όπου κατασκευάζονται βιολιά ικανά να καλύψουν τη ζήτηση των περιόδων 1 και 2, δηλαδή 6 και 4, σύνολο 10 βιολιά, και ακόμα μία φορά παράγονται $4 + 6 = 10$ βιολιά στην αρχή της περιόδου 3 για να καλυφθεί η ζήτηση των επόμενων δύο περιόδων, 3 και 4.

Μοντέλα στοχαστικής ζήτησης

Τα στοχαστικά μοντέλα που αφορούν τον έλεγχο αποθεμάτων χρησιμοποιούνται για να περιγράψουν συστήματα κατά τα οποία δεν υπάρχει σταθερή ζήτηση, αλλά υπάρχει μάλιστα, σημαντική αβεβαιότητα για το πώς θα εξελιχθεί αυτή μελλοντικά. Αυτού του είδους τη ζήτηση, που θεωρείται τυχαία μεταβλητή, προσπαθούμε να την προσεγγίσουμε μέσα από την κατανομή της πιθανότητάς της.

3.9. Στοχαστικό μοντέλο συνεχούς επιθεώρησης

3.9.1. Εισαγωγή

Στο πρώτο στοχαστικό μοντέλο που θα εξετάσουμε, παρακολουθείται αδιαλλείπτως το επίπεδο του αποθέματος, ώστε να τοποθετείται μία νέα παραγγελία αμέσως μόλις το απόθεμα πέσει στο επίπεδο που έχει προκαθοριστεί ως σημείο κατά το οποίο πρέπει να γίνει νέα παραγγελία (reorder point).

Πιο παλιά, σε ένα μοντέλο συνεχούς επιθεώρησης, συνηθιζόταν να χρησιμοποιείται η λεγόμενη μέθοδος «**των 2 καλάθιων**» (**two bin method**). Όπως φαίνεται και από το όνομά της, σκεφτόμαστε σαν να είναι όλο το απόθεμα μοιρασμένο σε δύο καλάθια - μέρη.

Αρχικά, χρησιμοποιούμε προϊόντα μόνο από το ένα καλάθι για να ικανοποιήσουμε τη ζήτηση. Μόλις το καλάθι αυτό αδειάσει, καταλαβαίνουμε πως έχει έρθει η ώρα να τοποθετήσουμε νέα παραγγελία. Τα προϊόντα όμως, είναι από πριν μοιρασμένα με τέτοιο τρόπο, ώστε το περιεχόμενο του δεύτερου καλάθιού να επαρκεί ώσπου να φτάσει στα χέρια μας η νέα παραγγελία.

Πλέον, τα συστήματα αυτά έχουν αντικατασταθεί από πιο σύγχρονα συστήματα μηχανοργάνωσης με χρήση υπολογιστών, τα οποία ενημερώνονται αυτόματα για τις μεταβολές στο απόθεμα και οι παραγγελίες τοποθετούνται αυτόματα όταν το απόθεμα πέσει στο επίπεδο που έχουμε προεπιλέξει. Καταλαβαίνουμε ήδη λοιπόν, πως σε ένα σύστημα συνεχούς επιθεώρησης, δύο είναι οι πιο σημαντικοί παράγοντες:

- το σημείο κατά το οποίο πρέπει να τοποθετήσουμε μία νέα παραγγελία, το οποίο συμβολίζουμε με R και
- το μέγεθος της παραγγελίας, την οποία συμβολίζουμε με Q .

Βασιζόμενοι λοιπόν, σε αυτούς τους δύο παράγοντες, η πολιτική που καλούμαστε να ακολουθήσουμε ονομάζεται (R, Q) – πολιτική, είναι απλή και συνοψίζεται στο εξής:

*“Όποτεδήποτε το επίπεδο του αποθέματος γίνεται R ,
θα πρέπει να τοποθετούμε μια παραγγελία ύψους Q .”*

Σε ένα τέτοιο μοντέλο, έχουμε κάνει τις εξής υποθέσεις:

- ✓ Αναφερόμαστε πάντα σε ένα και μόνο προϊόν.
- ✓ Γνωρίζουμε ανά πάσα στιγμή το επίπεδο του αποθέματος (συνεχής επιθεώρηση της αποθήκης).
- ✓ Αφού χρησιμοποιούμε μια (R, Q) - πολιτική, οι μόνες παράμετροι που καλούμαστε να επιλέξουμε είναι το σημείο επανατοποθέτησης παραγγελίας R και το μέγεθος Q που θα πρέπει αυτή η παραγγελία να έχει.
- ✓ Ο χρόνος L (lead time) που μεσολαβεί ανάμεσα στην τοποθέτηση της παραγγελίας και την παραλαβή της μπορεί να είναι συγκεκριμένος ή να διαφέρει.
- ✓ Κατά το χρόνο L , η ζήτηση προϊόντων από το απόθεμα είναι αβέβαιη, ενώ η κατανομή της πιθανότητας είναι γνωστή ή μπορεί να εκτιμηθεί.
- ✓ Αν τελειώσουν τα προϊόντα πριν φτάσει η παραγγελία, η παραπάνω ζήτηση μπαίνει σε σειρά προτεραιότητας ώστε να καλυφθεί αμέσως μόλις φτάσει η παραγγελία.
- ✓ Στην παραπάνω περίπτωση, υπάρχει και ένα επιπλέον κόστος έλλειψης e , με το οποίο επιβαρυνόμαστε και αφορά κάθε μονάδα προϊόντος για την οποία υπάρχει ζήτηση ενώ είναι σε έλλειψη μέχρι να ικανοποιηθεί η ζήτηση αυτή.

- ✓ Υπάρχει ένα προκαθορισμένο κόστος K που αφορά την τοποθέτηση της παραγγελίας και το οποίο χρεωνόμαστε κάθε φορά που παραγγέλνουμε.
- ✓ Πέρα όμως, από το προαναφερθέν κόστος, το κόστος της κάθε παραγγελίας είναι ανάλογο και του μεγέθους της, δηλαδή της ποσότητας Q που έχουμε ορίσει.
- ✓ Υπάρχει και ένα προκαθορισμένο κόστος αποθήκευσης K_c για κάθε μονάδα προϊόντος που αποθηκεύουμε, στη μονάδα του χρόνου.

Παρατηρώντας τις παραπάνω υποθέσεις του μοντέλου αυτού, διαπιστώνουμε τη μεγάλη του ομοιότητα με το μοντέλο EOQ με προγραμματισμένες ελλείψεις (παράγραφος 3.6). Η βασική τους διαφορά έγκειται στο γεγονός ότι ενώ στο τωρινό μας παράδειγμα υποθέτουμε αβέβαιη ζήτηση, στο μοντέλο EOQ με προγραμματισμένες ελλείψεις, είχαμε υποθέσει γνωστή και σταθερή ζήτηση.

Λόγω λοιπόν, αυτής της αβεβαιότητας της ζήτησης, στο μοντέλο που μελετάμε τώρα, χρειάζεται να υπολογίσουμε και κάποιο απόθεμα ασφαλείας καθώς θα επιλέγουμε το σημείο R , για να μπορέσουμε να αντιμετωπίσουμε την περίπτωση να υπάρξει έντονη ζήτηση κατά το χρόνο L . Κατά τα λοιπά όμως, πρόκειται για δύο πολύ παρόμοια μοντέλα τα οποία και αναμένουμε να μας δώσουν πολύ παρόμοια αποτελέσματα.

3.9.2. Η πολιτική (Q, R)

Πώς επιλέγουμε την ποσότητα παραγγελίας Q

Δεν υπάρχει κάποιος καινούργιος τύπος που να υπολογίζει την ακριβή τιμή του Q . Για να υπολογίσουμε μια καλή προσέγγισή του, θα χρησιμοποιήσουμε τον αντίστοιχο τύπο που παρουσιάσαμε στο μοντέλο EOQ με προγραμματισμένες ελλείψεις. Έχουμε λοιπόν:

$$Q = \sqrt{\frac{2AK}{K_c}} \sqrt{\frac{(e + K_c)}{e}}, \quad (1.13)$$

τον ίδιο τύπο δηλαδή με μόνη διαφοροποίηση ότι έχουμε αντικαταστήσει τη ζήτηση D , με την ποσότητα A , που αφορά τη μέση ζήτηση ανά μονάδα χρόνου.

Πώς επιλέγουμε το σημείο επανατοποθέτησης παραγγελίας R

Το σημείο επανατοποθέτησης παραγγελίας R, εξαρτάται άμεσα από το επιθυμητό επίπεδο εξυπηρέτησης των πελατών της εταιρίας, το οποίο πρέπει και να προσδιορισθεί πρώτο.

Τρόποι μέτρησης του επιπέδου εξυπηρέτησης

Το επίπεδο εξυπηρέτησης των πελατών μιας εταιρίας μπορεί να ποσοτικοποιηθεί με διάφορους τρόπους. Ενδεικτικοί τέτοιοι τρόποι μέτρησής του είναι οι παρακάτω:

1. Η πιθανότητα να μην υπάρξει εξάντληση του αποθέματος στο μεσοδιάστημα μεταξύ της τοποθέτησης και της παραλαβής της παραγγελίας.
2. Ο μέσος όρος των φαινομένων εξάντλησης του αποθέματος.
3. Το μέσο ποσοστό ετήσιας ζήτησης που μπορεί να ικανοποιηθεί αμέσως, χωρίς να υπάρξει εξάντληση αποθέματος.
4. Η μέση καθυστέρηση ικανοποίησης παραγγελιών σε αναμονή όταν προκύπτει εξάντληση αποθέματος.
5. Η συνολική μέση καθυστέρηση κάλυψης των παραγγελιών υπολογίζοντας ως μηδενική την καθυστέρηση χωρίς εξάντληση αποθέματος.

Με μια προσεκτική ανάγνωση των παραπάνω μέτρων, διαπιστώνουμε τις ομοιότητες που εμφανίζουν μεταξύ τους. Ενδεικτικά, μεγάλη συνάφεια παρουσιάζουν τα μέτρα 2 και 3. Ας υποθέσουμε για παράδειγμα πως 3 φορές το χρόνο έχουμε φαινόμενο εξάντλησης αποθέματος με μέση διάρκεια 5 ημερών. Δηλαδή, η αποθήκη παραμένει άδεια για $3 \cdot 5 = 15$ ημέρες το χρόνο

που ισοδυναμεί με το $\frac{15}{365} = 0.041095 \approx 4.1\%$ του χρόνου. Συνεπώς, το μέσο

ποσοστό της ετήσιας ζήτησης που μπορεί να ικανοποιηθεί χωρίς καθυστέρηση είναι περίπου ίσο με 96%. Άρα, αρκεί να αποφασίσουμε σε ποια επίπεδα θέλουμε να κινηθεί έστω ένα από τα προαναφερθέντα μέτρα.

Ο πρώτος τρόπος μέτρησης, η πιθανότητα να μην εξαντληθεί το απόθεμα κατά το χρόνο L , δηλαδή από την ώρα που θα τοποθετήσουμε μια παραγγελία

μέχρι την ώρα που θα την παραλάβουμε, είναι ο πιο βολικός να χρησιμοποιήσουμε αρχικά και για το λόγο αυτό, θα εστιάσουμε σε αυτόν, συμβολίζοντας την πιθανότητα αυτή με ℓ .

Έστω P η ιδανική -σύμφωνα με την πολιτική της εταιρίας- πιθανότητα, σύμφωνα με την οποία δε θα έχουμε εξάντληση αποθέματος στο διάστημα ανάμεσα στην τοποθέτηση και τη λήψη της παραγγελίας.

Καλούμαστε λοιπόν, να εργαστούμε με την εκτιμώμενη κατανομή πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής D , που εκφράζει τη ζήτηση κατά το διάστημα που περιμένουμε να ικανοποιηθεί μια παραγγελία. Σύμφωνα με την ιδανική πολιτική, κατά την οποία δε θα έχουμε εξάντληση αποθέματος στο διάστημα ανάμεσα στην τοποθέτηση και τη λήψη της παραγγελίας, ισχύει ότι η ζήτηση θα παραμένει σε επίπεδο μικρότερο του σημείου R της παραγγελίας, δηλαδή θα ισχύει ότι:

$$P(D \leq R) = F(R) = \int_{-\infty}^R f(u) du.$$

Έστω ότι η κατανομή της ζήτησης D περιγράφεται από την Ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα (a, b) , δηλαδή έστω ότι $D \sim U(a, b)$. Τότε ο υπολογισμός του βέλτιστου επιπέδου παραγγελίας R , προκύπτει ως εξής:

$$P(D \leq R) = F(R) = \frac{R - a}{b - a}.$$

Τότε, για συγκεκριμένο επιθυμητό μέγεθος πιθανότητας μη-εξάντλησης του αποθέματος ℓ , ισχύει ότι $P(D \leq R) = \ell$. Συνεπώς, το βέλτιστο επίπεδο αποθέματος R , δίνεται από τον τύπο:

$$R = a + \ell (b - a), \quad (1.14)$$

Η μέση τιμή της ζήτησης υπολογίζεται από τον τύπο της μέσης τιμής της Ομοιόμορφης κατανομής, δηλαδή:

$$E(D) = \frac{a + b}{2}.$$

Έτσι, για το απόθεμα ασφαλείας ισχύει:

$$\text{Απόθεμα ασφαλείας} = R - E(D) = a + \ell(b - a) - \frac{a + b}{2} \Rightarrow$$

$$\text{Απόθεμα ασφαλείας} = \left(\ell - \frac{1}{2} \right) (b - a).$$

Με παρόμοιο τρόπο, εργαζόμαστε και στην περίπτωση κάθε άλλης κατανομής που ενδεχομένως ακολουθεί η ζήτηση D , στη διαδικασία επιλογής του βέλτιστου επιπέδου αποθέματος R .

Γενική διαδικασία επιλογής του R βάσει της πιθανότητας μη εξάντλησης του αποθέματος μέχρι την ικανοποίηση της παραγγελίας

Αρχικά, επιλέγουμε την τιμή του ℓ . Έπειτα, λύνουμε ως προς R , όπως και πριν, ώστε να ικανοποιείται η σχέση:

$$P(D \leq R) = \ell.$$

Για παράδειγμα, ας εξετάσουμε το ενδεχόμενο η ζήτηση D να ακολουθεί την Κανονική κατανομή με μέση τιμή μ και διασπορά σ^2 , δηλαδή $D \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Υπενθυμίζουμε το γνωστό θεώρημα της Θεωρίας Πιθανοτήτων, σύμφωνα με το οποίο αν η τυχαία μεταβλητή $D \sim N(\mu, \sigma^2)$, τότε η νέα τυχαία μεταβλητή

$Z = \frac{D - \mu}{\sigma}$ ακολουθεί την τυποποιημένη Κανονική κατανομή, δηλαδή:

$$Z = \frac{D - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

Συνεπώς, κάνοντας τη μετατροπή, έχουμε:

$$P\left(\frac{D - \mu}{\sigma} \leq \frac{R - \mu}{\sigma}\right) = \ell$$

Και εάν συμβολίσουμε με $K_{1-\ell} = \frac{R - \mu}{\sigma}$ το ποσοστιαίο σημείο της τυποποιημένης Κανονικής κατανομής, έχουμε ότι:

$$P\left(\frac{D - \mu}{\sigma} \leq K_{1-\ell}\right) = \ell$$

Δηλαδή, έχουμε ότι:

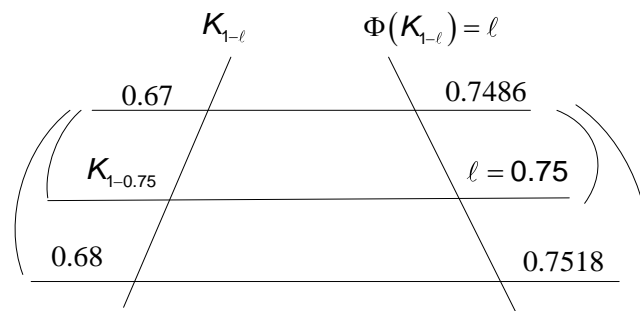
$$P(Z \leq K_{1-\ell}) = \Phi(K_{1-\ell}) = \ell$$

Σύμφωνα λοιπόν με την παραπάνω ανάλυση, η ζητούμενη τιμή για το επίπεδο του αποθέματος R , προκύπτει από τον τύπο:

$$R = \mu + K_{1-\ell}\sigma \quad (1.15)$$

Επιλέγοντας λοιπόν μία τιμή για την πιθανότητα ℓ , έστω $\ell = 0.75$, χρησιμοποιώντας τον πίνακα της τυποποιημένης Κανονικής κατανομής του Παραρτήματος, θα βρούμε την αντίστοιχη τιμή για το ποσοστιαίο σημείο $K_{1-\ell} = K_{1-0.75} = K_{0.25}$.

Στην περίπτωση που η τιμή της πιθανότητας ℓ δεν περιέχεται στον πίνακα της τυποποιημένης Κανονικής κατανομής, κάνουμε παρεμβολή, χρησιμοποιώντας δύο τιμές εκατέρωθεν της ζητούμενης πιθανότητας που έχουμε στη διάθεσή μας. Έτσι, στο παρακάτω σχήμα φαίνεται ο τρόπος υπολογισμού της ποσότητας $K_{1-\ell}$ χρησιμοποιώντας παρεμβολή, προκειμένου να προσεγγίσουμε την ακριβή τιμή της. Συγκεκριμένα, για το παράδειγμά μας:



$$\frac{K_{1-0.75} - 0.67}{0.68 - 0.67} = \frac{0.75 - 0.7486}{0.7518 - 0.7486} \Rightarrow$$

$$K_{1-0.75} = 0.67 + \frac{0.75 - 0.7486}{0.7518 - 0.7486} \cdot 0.01 \Rightarrow$$

$$K_{1-0.75} = 0.67 + \frac{1.4 \cdot 10^{-3}}{3.2 \cdot 10^{-3}} \cdot 0.01 = 0.67 + 0.4375 \cdot 0.01 = 0.674375$$

Τελικά, το απόθεμα ασφαλείας ισούται με:

$$R - \mu = K_{1-\ell}\sigma \Rightarrow$$

$$R - \mu = 0.675\sigma .$$

Παράδειγμα 7

Σε συνέχεια του παραδείγματος 1, ο υπεύθυνος παραγγελιών της “e-Cosmetics A.E.”, είχε παρατηρήσει πως στο παρελθόν υπήρχε ετήσια σταθερή ζήτηση για 90,000 αντηλιακά προσώπου από τους πελάτες της, των οποίων το κόστος αποθήκευσης είναι $K_c = 1.5 \text{ €} / \text{μονάδα}$, έτος και το κόστος για την τοποθέτηση μιας παραγγελίας είναι $K = 90 \text{ €}$.

Πλέον όμως, λόγω και της αλλαγής του κλίματος αλλά και της μεγαλύτερης ευαισθητοποίησης των πολιτών γύρω από την αντηλιακή προστασία, η ζήτηση από χρονιά σε χρονιά διαφέρει.

Έτσι, για να μειώσει το κόστος αποθήκευσης η εταιρία, αποφάσισε να εξετάζει σε μηνιαία βάση, κι όχι σε ετήσια όπως έκανε μέχρι τώρα, το πόσα αντηλιακά χρειάζεται να κατασκευάσει.

Ο χρόνος L ισούται με ένα μήνα, κατά τη διάρκεια του οποίου, η ζήτηση D είναι τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την Κανονική κατανομή με μέση τιμή 7,500 και τυπική απόκλιση 300. Επιπλέον, η εταιρία, για να περιορίσει την πιθανότητα να ξεμείνει από απόθεμα, έχει αποφασίσει, κατά το 95% του χρόνου L , το απόθεμα ασφαλείας να είναι αρκετό. Τέλος, το κόστος έλλειψης για κάθε μονάδα προϊόντος είναι 2 €.

Εφαρμόζοντας το μοντέλο που διατυπώθηκε προηγουμένως, το ιδανικό μέγεθος κάθε παραγγελίας είναι, βάσει της σχέσης (1.13):

$$Q = \sqrt{\frac{2AK}{K_c}} \sqrt{\frac{(e+K_c)}{e}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 7,500 \cdot 90}{1.5}} \sqrt{\frac{2+1.5}{2}} = 1,254.99004 \text{ μονάδες}$$

Στο παράδειγμά μας όμως, ασχολούμαστε με προϊόντα (αντηλιακές κρέμες) τα οποία μπορούν να εκφραστούν μόνο με ακέραιο αριθμό. Συνεπώς, εδώ, καλούμαστε να αποφασίσουμε αν θα τοποθετήσουμε παραγγελία μεγέθους 1,254 προϊόντων παίρνοντας το ρίσκο να βρεθούμε σε έλλειψη προϊόντων ή αν θα τοποθετήσουμε παραγγελία 1,255 προϊόντων με το αντίστοιχο επιπλέον κόστος αποθήκευσης. Σε τέτοια προβλήματα, δίνεται λύση με τη χρήση του Ακέραιου Προγραμματισμού, ο οποίος ασχολείται με εκείνα τα προβλήματα του Γραμμικού Προγραμματισμού, στα οποία μερικές ή όλες οι μεταβλητές είναι ακέραιες.

Συνεχίζοντας στο παράδειγμά μας, δεδομένου ότι ο υπεύθυνος αποθήκης της εταιρίας “e-Cosmetics A.E.” έχει αποφασίσει εκ των προτέρων επίπεδο εξυπηρέτησης $\ell = 0.95$, από τον πίνακα της τυποποιημένης Κανονικής κατανομής του Παραρτήματος, παίρνουμε $K_{1-\ell} = K_{1-0.95} = K_{0.05} = 1.645$.

Συνεπώς, έχουμε:

$$R - \mu = K_{1-\ell} \sigma \Rightarrow R - \mu = 1.645 \sigma \Rightarrow$$

$$R = 7,500 + 1.645 \cdot 300 \Rightarrow$$

$$R = 7,993.5 \text{ μονάδες προϊόντος.}$$

Άρα, ο υπεύθυνος αποθήκης της εταιρίας τοποθετεί μία νέα παραγγελία μόλις το απόθεμα φτάσει τα 7,993.5 τεμάχια, δηλαδή, το απόθεμα ασφαλείας ισούται με:

$$R - \mu = 7,993.5 - 7,500 = 493.5 \approx 494 \text{ τεμάχια.}$$

3.10. Στοχαστικό μοντέλο μιας περιόδου για εφήμερα προϊόντα

Ένας τρόπος διαχωρισμού των προϊόντων σε δύο κατηγορίες είναι η διαλογή τους βάσει του χρονικού διαστήματος κατά το οποίο μπορούν να βρίσκονται διαθέσιμα προς πώληση στην αποθήκη. Έτσι λοιπόν, έχουμε τα λεγόμενα σταθερά προϊόντα τα οποία έχουν απεριόριστο χρόνο διάρκειας ζωής και στα οποία έχουμε αναφερθεί μέχρι στιγμής. Για παράδειγμα, ένα βιολί, προϊόν με το οποίο ασχοληθήκαμε σε προηγούμενο παράδειγμα, μπορεί να παραμείνει στην αποθήκη διαθέσιμο προς πώληση για πολλά χρόνια χωρίς να αλλοιωθεί.

Αντιθέτως, υπάρχουν αρκετά ευπαθή προϊόντα τα οποία αλλοιώνονται γρήγορα, όπως τα φρούτα και τα λαχανικά, και δεν είναι εφικτό να παραμείνουν σε κάποιο αποθηκευτικό χώρο επί μακρόν, αλλά πρέπει να καταναλωθούν άμεσα. Επιπλέον, ένα χριστουγεννιάτικο δέντρο το οποίο μόλις περάσουν τα Χριστούγεννα και για καιρό μετά, θα πάψει να τραβά το ενδιαφέρον του αγοραστικού κοινού αποτελεί επίσης ενδεικτικό παράδειγμα εφήμερου αγαθού. Τα προϊόντα αυτά καλούνται εφήμερα.

Ένα άλλο πολύ χαρακτηριστικό παράδειγμα εφήμερου προϊόντος είναι η ημερήσια εφημερίδα η οποία έχει διάρκεια ζωής μία μόλις ημέρα. Κάθε ημερήσια εφημερίδα έχει νόημα να υπάρχει σε απόθεμα για την ημέρα που αφορά και μόνο δίνοντας τη σειρά της στην επόμενη ημερήσια εφημερίδα. Ο εφημεριδοπώλης καλείται να αποφασίσει ποιο είναι το βέλτιστο επίπεδο παραγγελίας που θα ικανοποιεί την ημερήσια ζήτηση, η οποία αποτελεί τυχαία μεταβλητή, χωρίς να του περισσεύουν εφημερίδες αλλά και χωρίς να έχει ανικανοποίητους πελάτες. Μάλιστα, λόγω του ότι το συγκεκριμένο παράδειγμα προβλήματος είναι ιδιαίτερα χαρακτηριστικό και αντιπροσωπευτικό των προβλημάτων της κατηγορίας των εφήμερων αγαθών, τα προβλήματα αυτά, πέρα από τα ονόματα «στοχαστικό μοντέλο μιας περιόδου» και «πιθανο μοντέλο μιας περιόδου», είναι ευρέως γνωστά και ως «πρόβλημα του εφημεριδοπώλη».

Στην ίδια κατηγορία, εμπίπτουν και οι κρατήσεις των αεροπορικών εταιριών για μια συγκεκριμένη πτήση. Οι θέσεις αποτελούν εφήμερα αγαθά μιας και έχουν πολύ συγκεκριμένη «ημερομηνία λήξης», αφού δεν μπορούν να πουληθούν αφού γίνει η πτήση. Επιπλέον, λαμβάνοντας υπ'όψιν οι εταιρίες ότι κάποιοι επιβάτες δε θα εμφανισθούν, κάνουν περισσότερες κρατήσεις από το διαθέσιμο αριθμό θέσεων. Πρέπει όμως, να βρίσκεται η χρυσή τομή γιατί αν τελικά, μείνουν κενές θέσεις, η εταιρία θα έχει χάσει έσοδα, ενώ αν έχουν κλειστεί πολύ περισσότερες από τις διαθέσιμες, θα υπάρξουν πιθανότατα πολλοί δυσαρεστημένοι πελάτες των οποίων το κόστος αποζημίωσης θα επωμιστεί η εταιρία. Έστω για τα επόμενα, ότι δεν υπάρχουν αρχικά καθόλου προϊόντα στην αποθήκη, δηλαδή υπάρχει **μηδενικό απόθεμα**.

Παράδειγμα

Ο υπεύθυνος πωλήσεων μιας εταιρίας που κατασκευάζει τζην παντελόνια ενόψει της καλοκαιρινής περιόδου και της αντίστοιχης κολεξιόν, σκέφτεται ότι δε συμφέρει να καταλαμβάνουν το χώρο στις αποθήκες της τα τζην παντελόνια της χειμερινής περιόδου για τα οποία δε θα υπάρχει πλέον αγοραστικό ενδιαφέρον. Έτσι, με το τέλος της χειμερινής περιόδου, η εταιρία που τα παράγει, τα προσφέρει στο κατάστημα που τα διαθέτει στην αγορά στην πολύ

προνομιακή τιμή των 10 € ανά τεμάχιο (δεδομένου ότι προηγουμένως κόστιζαν 22€), ενώ χαρίζει τα έξοδα τοποθέτησης της παραγγελίας.

Ο ιδιοκτήτης του καταστήματος δράπτεται της ευκαιρίας και οργανώνει δεκαήμερο εκπτώσεων για τους πελάτες του, κατά τη διάρκεια του οποίου, πουλάει το κάθε παντελόνι 25€, έχοντας έτσι 15€ κέρδος ανά τεμάχιο. Ιδανικά, ο καταστηματάρχης επιθυμεί να πωληθούν όλα τα παντελόνια πριν παραλάβει τα καλοκαιρινά. Σε περίπτωση που του περισσέψουν κάποια κομμάτια μετά το δεκαήμερο της προσφοράς, σχεδιάζει να τα διαθέσει στο μισό της τιμής στην οποία τα αγόρασε από τον κατασκευαστή, δηλαδή προς 5€ ανα παντελόνι. Αυτή είναι η λεγόμενη **υπολειμματική αξία (salvage value)**, η μειωμένη δηλαδή αξία του προϊόντος λόγω της παρέλευσης του χρονικού διαστήματος για το οποίο προοριζόταν.

Συνεπώς, η παραγγελία του εμπόρου πρέπει να γίνει πολύ προσεκτικά ώστε να έχει το μεγαλύτερο δυνατό κέρδος από την πώληση των παντελονιών εκμεταλλευόμενος την προσφορά της εταιρίας, αλλά και τη μικρότερη δυνατή ζημία σε περίπτωση που περισσέψουν κάποια κομμάτια και αναγκαστεί να τα πουλήσει σε τιμή μικρότερη από αυτήν που τα αγόρασε. Αν τελικά, περισσέψουν παντελόνια ακόμη και μετά τη διάθεσή τους προς 5€, το κόστος αποθήκευσης ανέρχεται στα 2€ για το καθένα.

Ταυτόχρονα, αμελητέο θεωρείται το κόστος της πιθανής δυσαρέσκειας πελατών σε περίπτωση που η ζήτηση είναι τόσο μεγάλη και δεν προλάβουν κάποιοι να αγοράσουν ενώ θα το επιθυμούσαν. Θα προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε λοιπόν, ποιο θα είναι τελικά το κέρδος για τον έμπορο.

Έστω x ο αριθμός των παντελονιών που αγόρασε από τον κατασκευαστή και D η ζήτηση των πελατών γι'αυτά. Τότε,

$$\min\{x, D\} = \text{αριθμός παντελονιών που πουλήθηκαν και}$$

$$\max\{0, x - D\} = \text{αριθμός παντελονιών που έμειναν στην αποθήκη .}$$

Πιο αναλυτικά, εάν η ζήτηση ξεπεράσει τον αριθμό των διαθέσιμων παντελονιών (όταν δηλ. $D > x$), σημαίνει ότι θα πουληθούν όλα όσα είχαν αγοραστεί και δε θα έχουμε υπόλοιπο στην αποθήκη. Ενώ, όταν τα διαθέσιμα παντελόνια είναι περισσότερα από τα ζητούμενα από τους πελάτες

(όταν δηλ. $x > D$) θα πουληθούν μόνο όσα ζητηθούν (δηλ. $x - D$) και τα υπόλοιπα θα παραμείνουν στην αποθήκη.

Οπότε, το κέρδος του εμπόρου δίνεται από τη σχέση:

$$\text{Κέρδος} = 25 \min\{x, D\} - 10x + 3 \max\{0, x - D\}$$

Τις εισπράξεις από τα παντελόνια που πωλήθηκαν προς 25€, δηλαδή τον όρο $25 \min\{x, D\}$, μπορούμε να τον γράψουμε και ως εξής:

$$25 \min\{x, D\} = 25D - 25 \max\{0, D - x\}$$

Σε αυτή τη μορφή, ο όρος $25 \max\{0, D - x\}$ ουσιαστικά αναπαριστά τα χαμένα έσοδα λόγω ανικανοποίητης ζήτησης (κόστος έλλειψης), σε περίπτωση που η ζήτηση ξεπεράσει το προσδοκώμενο κι έχουμε δυσαρεστημένους πελάτες. Στο παράδειγμά μας βέβαια, έχουμε υποθέσει ότι το κόστος έλλειψης είναι αμελητέο.

Επιπλέον, παρατηρούμε ότι ο όρος $25D$ είναι ανεξάρτητος της πολιτικής που θα ακολουθηθεί σχετικά με τον έλεγχο αποθεμάτων κι ως εκ τούτου, μπορεί να απαλειφθεί από την αντικειμενική συνάρτηση.

Έτσι, κρατώντας μόνο τους όρους που επηρεάζονται από την πολιτική που ακολουθούμε, έχουμε την ακόλουθη σχέση για το σχετικό κέρδος του εμπόρου:

$$\text{Σχετικό κέρδος} = -25 \max\{0, D - x\} - 10x + 3 \max\{0, x - D\},$$

το οποίο και επιθυμούμε να μεγιστοποιήσουμε. Οι παραπάνω όροι είναι οι αρνητικές τιμές των επιμέρους κοστών που εμπλέκονται στη διαδικασία, δηλαδή του κόστους έλλειψης, του κόστους παραγγελίας και του κόστους αποθήκευσης αντίστοιχα. Μάλιστα, στο συγκεκριμένο παράδειγμα, το κόστος αποθήκευσης είναι αρνητικό.

Ισοδύναμα λοιπόν, αντί να μεγιστοποιήσουμε τη συνάρτηση του κέρδους, μπορούμε να ελαχιστοποιήσουμε τη συνάρτηση για το ολικό κόστος:

$$\text{Ολικό κόστος} = 25 \max\{0, D - x\} + 10x - 3 \max\{0, x - D\}$$

Το ολικό κόστος είναι μια τυχαία μεταβλητή, αφού εξαρτάται από την τιμή της ζήτησης D , η οποία είναι τυχαία μεταβλητή. Συνεπώς, η παραπάνω συνάρτηση

αφορά το **αναμενόμενο** συνολικό κόστος και ο έμπορος επιθυμεί να την ελαχιστοποιήσει.

Επιπλέον, μια ιδανική πολιτική ελέγχου αποθεμάτων μπορεί να χαρακτηθεί εφόσον είναι διαθέσιμη η πληροφορία για την κατανομή πιθανότητας της ζήτησης D , η οποία έστω ότι συμβολίζεται με $P_D(d) = P[D = d] = f(d)$, δηλαδή η $P_D(d)$ αποτελεί τη συνάρτηση μάζας ή πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής D . Για τα επόμενα, υποθέτουμε ότι η πιθανότητα $P_D(d)$ είναι γνωστή για κάθε τιμή του d .

3.10.1. Οι υποθέσεις του μοντέλου

Συνοπτικά λοιπόν, στη μελέτη του δεδομένου προβλήματος, κάνουμε κάποιες υποθέσεις:

- (I) Αρχικά, κάθε φορά, εξετάζουμε ένα συγκεκριμένο εφήμερο αγαθό το οποίο αφορά μια δεδομένη χρονική περίοδο και δεν μπορεί να πουληθεί αργότερα.
- (II) Δεν έχουμε αρχικό απόθεμα του συγκεκριμένου προϊόντος, αλλά μπορεί να περισσέψουν μερικά τεμάχια στο τέλος της περιόδου τα οποία μάλιστα μπορεί να έχουν και κάποια υπολειμματική αξία. Το μόνο που καλούμαστε να αποφασίσουμε είναι το μέγεθος του ποσότητας που θα παραγγείλουμε για να αποθηκεύσουμε από την αρχή της περιόδου, την οποία ας συμβολίσουμε με x .
- (III) Η ζήτηση D είναι τυχαία μεταβλητή, με γνωστή (ή εύκολα εκτιμώμενη) κατανομή πιθανότητας.
- (IV) Τέλος, αγνοώντας τα έσοδα σε περίπτωση που ικανοποιηθεί η ζήτηση, ο στόχος είναι να ελαχιστοποιηθεί το συνολικό κόστος το οποίο χωρίζεται στα ακόλουθα επί μέρους κόστη:
 - k : κόστος αγοράς ή παραγωγής κάθε μονάδας προϊόντος.
 - K_c : κόστος αποθήκευσης κάθε μονάδας προϊόντος που περισσεύει στο τέλος της περιόδου και αφορά το κόστος της παραμονής της μονάδας αυτής στην αποθήκη μείον την υπολειμματική της αξία.

- e : κόστος έλλειψης ανά μονάδα προϊόντος (λόγω μη ικανοποιημένης ζήτησης), συμπεριλαμβανομένων:
 - α) των χαμένων εσόδων σε περίπτωση που είχε πωληθεί και
 - β) του κόστους λόγω της δυσαρέσκειας των πελατών που ήθελαν να αγοράσουν και δεν κατέστη εφικτό.
- K_{under} : κόστος που δημιουργείται σε περίπτωση που παραγγείλουμε **λιγότερα** τεμάχια από αυτά που θα χρειαστούμε.
- K_{over} : κόστος που δημιουργείται σε περίπτωση που παραγγείλουμε **περισσότερα** τεμάχια από αυτά που τελικά θα ζητηθούν.

3.10.2. Ανάλυση του μοντέλου

Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, το ζητούμενο είναι να αποφασίσουμε το μέγεθος της παραγγελίας x που θα τοποθετήσουμε. Η απόφασή μας αυτή εξαρτάται άμεσα από την κατανομή πιθανότητας της ζήτησης D , ενώ, όπως κάθε φορά, καλούμαστε να βρούμε τη χρυσή τομή ανάμεσα στο ενδεχόμενο να παραγγείλουμε περισσότερες μονάδες προϊόντος από όσες θα χρειαστούμε και να μας περισσέψει απόθεμα αλλά και στο ενδεχόμενο να παραγγείλουμε λιγότερες μονάδες προϊόντος από όσες θα ζητηθούν, με τα αντίστοιχα διαφυγόντα για την εταιρία κέρδη. Η ποσότητα που θα πωληθεί δίνεται από τη σχέση:

$$\min\{D, x\} = \begin{cases} D, & \text{αν } D < x \\ x, & \text{αν } D \geq x \end{cases}$$

Έτσι, το αναμενόμενο κόστος για μία υποθετική τιμή ζήτησης $D = d$, υπολογίζεται από τη σχέση:

$$K_{αναμ}(D = d, x) = kx + e \max\{0, D - x\} + K_c \max\{0, x - D\}$$

Δεδομένου ότι η ζήτηση είναι τυχαία μεταβλητή, συνεπάγεται ότι και το αναμενόμενο κόστος είναι επίσης τυχαία μεταβλητή, η οποία ακολουθεί κάποια κατανομή πιθανότητας. Το αναμενόμενο κόστος δίνεται από τον τύπο:

$$\begin{aligned}
K_{\text{αναμ}}(x) &= E[K_{\text{αναμ}}(D=d, x)] = \sum_{d=0}^{\infty} [K_{\text{αναμ}}(d, x) \cdot P_D(d)] = \\
&= \sum_{d=0}^{\infty} (kx + e \max\{0, d-x\} + K_c \max\{0, x-d\}) P_D(d) \Rightarrow \\
K_{\text{αναμ}}(x) &= kx + \sum_{d=x}^{\infty} e(d-x) P_D(d) + \sum_{d=0}^{x-1} K_c(x-d) P_D(d) \quad (1.16)
\end{aligned}$$

Η συνάρτηση $K_{\text{αναμ}}(x)$ εξαρτάται από την κατανομή πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής D και πολλές φορές είναι δύσκολο να υπολογιστεί. Τότε, συχνά, προσεγγίζουμε αυτή τη διακριτή τυχαία μεταβλητή με μια συνεχή τυχαία μεταβλητή.

Επιπλέον, όταν η ζήτηση παρουσιάζει ευρεία γκάμα πιθανών τιμών, μπορεί να γίνει μια αρκετά ακριβής προσέγγιση της βέλτιστης ποσότητας προϊόντων στην αποθήκη.

Αντίστοιχα, σε περίπτωση που η τυχαία μεταβλητή D είναι συνεχής, έχουμε:

$f_D(\xi)$ = συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της D στη θέση ξ

$F_D(\alpha)$ = αθροιστική συνάρτηση κατανομής της D στη θέση α

και ισχύει:

$$F_D(\alpha) = P(D \leq \alpha) = \int_{-\infty}^{\alpha} f_D(\xi) d\xi = \int_0^{\alpha} f_D(\xi) d\xi .$$

Για κάθε ποσότητα παραγγελίας x που επιλέγουμε, η ποσότητα $F_D(x)$, δηλαδή η πιθανότητα $P(D \leq x)$ εκφράζει την πιθανότητα **να μην υπάρξει έλλειψη πριν το τέλος της περιόδου** (δηλαδή η ζήτηση να παραμείνει μικρότερη ή ίση της ποσότητας παραγγελίας x). Το αντίστοιχο αναμενόμενο κόστος είναι:

$$\begin{aligned}
K_{\text{αναμ}}(x) &= E[K_{\text{αναμ}}(D, x)] = \\
&= \int_0^{\infty} K_{\text{αναμ}}(\xi, x) f_D(\xi) d\xi = \\
&= \int_0^{\infty} (kx + e \max\{0, \xi - x\} + K_c \max\{0, x - \xi\}) f_D(\xi) d\xi =
\end{aligned}$$

$$= kx + \int_x^{\infty} e^{(\xi - x)} f_D(\xi) d\xi + \int_0^x K_c(x - \xi) f_D(\xi) d\xi \Rightarrow$$

$$K_{\text{αναμ}}(x) = kx + N(x),$$

όπου $N(x)$ συνάρτηση που μετράει την αναμενόμενη έλλειψη (μετρημένη σε μονάδες προϊόντος) συν το κόστος αποθήκευσης,.

Σε αυτό το σημείο, πρέπει να υπολογίσουμε εκείνη την τιμή του x (την οποία συμβολίζουμε με x^0) για την οποία ελαχιστοποιείται το κόστος $K_{\text{αναμ}}(x)$, δηλαδή:

$$K_{\text{αναμ}}(x^0) = \min_x \{K_{\text{αναμ}}(x)\}.$$

Την τιμή αυτή μπορούμε να την υπολογίσουμε με δύο τρόπους:

- A. Γραφικά, μέσα από την αθροιστική συνάρτηση κατανομής, ή
- B. αλγεβρικά, μέσα από τον τύπο:

$$F_D(x^0) = \frac{e - k}{e + K_c} \quad (1.17)$$

Αναλυτικά λοιπόν, ο αριθμητής ($e - k$) εκφράζει το μοναδιαίο κόστος K_{under} , δηλαδή το κατά πόσο θα είναι μειωμένο το κέρδος μας για κάθε μονάδα προϊόντος που θα μας ζητείται και δε θα την έχουμε να τη διαθέσουμε.

Αντίστοιχα, για το ανά μονάδα προϊόντος κόστος K_{over} ισχύει:

$$K_{\text{over}} = k + K_c,$$

δηλαδή η ζημία που θα έχουμε από κάθε προϊόν που θα μείνει απούλητο μέχρι και το τέλος της περιόδου ισούται με τα χρήματα που δαπανήσαμε κατά την αγορά συν το κόστος αποθήκευσης.

Συνεπώς, ο παρανομαστής ισούται με την ποσότητα:

$$K_{\text{under}} + K_{\text{over}} = (e - k) + (k + K_c) = e + K_c$$

και τελικά το ιδανικό επίπεδο εξυπηρέτησης ισοδυναμεί με το λόγο:

$$F_D(x^0) = \frac{K_{under}}{K_{under} + K_{over}}.$$

Εάν η ζήτηση D είναι διακριτή τυχαία μεταβλητή με αθροιστική συνάρτηση κατανομής $F_D(m) = \sum_{d=0}^m P_D(d)$, η ιδανική ποσότητα παραγγελίας x^0 είναι ο μικρότερος ακέραιος αριθμός που ικανοποιεί τη σχέση:

$$F_D(x^0) \geq \frac{e-k}{e+K_c}.$$

Για να δούμε στην πράξη τα παραπάνω, θα χρησιμοποιήσουμε το προηγούμενο παράδειγμα, με τα παντελόνια.

Υποθέτουμε λοιπόν, ότι η ζήτηση ακολουθεί την Εκθετική κατανομή με μέση τιμή 50, δηλαδή $D \sim e(50)$ και αντίστοιχη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f_D(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{50} e^{-\xi/50}, & \text{αν } \xi \geq 0 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases},$$

με αθροιστική συνάρτηση κατανομής:

$$F_D(\alpha) = \int_0^{\alpha} \frac{1}{50} e^{-\xi/50} d\xi = 1 - e^{-\alpha/50}.$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (1.13), έχουμε:

$$F_D(x^0) = 1 - e^{-x^0/50} = \frac{e-k}{e+K_c} = \frac{25-10}{25-3} = \frac{15}{22} = 0.681818 \Rightarrow$$

$$e^{-x^0/50} = 1 - 0.681818 = 0.3182 \Rightarrow$$

$$\ln(e^{-x^0/50}) = \ln(0.3182) \Rightarrow$$

$$-\frac{x^0}{50} = -1.1451 \Rightarrow$$

$$x^0 = 57.255 \approx 57 \text{ παντελόνια}$$

Άρα, ο έμπορος θα πρέπει να προμηθευτεί από την κατασκευάστρια εταιρία και να έχει διαθέσιμα κατά τη διάρκεια της προσφοράς, 57 παντελόνια, αριθμό πολύ κοντινό στη μέση τιμή, που είναι 50 παντελόνια.

3.10.3. Με αρχικό απόθεμα

Στο προηγούμενο μοντέλο, υποθέσαμε ότι δεν υπήρχαν αρχικά καθόλου προϊόντα στην αποθήκη. Ας αλλάξουμε λίγο τώρα αυτή την παραδοχή, υποθέτοντας ότι ο έμπορος ξεκινά με 5 παντελόνια στην αποθήκη, προκειμένου να ελέγξουμε πώς θα επηρεάσει αυτή η αλλαγή το πλάνο του εμπόρου για τη βέλτιστη πολιτική ελέγχου των αποθεμάτων της αποθήκης.

Έστω a το αρχικό στοκ και x (όπως και προηγουμένως) το επιπέδο αποθέματος μετά τον ανεφοδιασμό, την παραγγελία δηλαδή, επιπλέον μονάδων. Θα παραγγείλουμε λοιπόν, $x - a$ μονάδες, έτσι ώστε:

$$\left(\begin{array}{c} \text{Διαθέσιμη} \\ \text{ποσότητα} \end{array} \right) (x) = \left(\begin{array}{c} \text{Αρχικό} \\ \text{απόθεμα} \end{array} \right) (a) + \left(\begin{array}{c} \text{Ποσότητα} \\ \text{παραγγελίας} \end{array} \right) (x - a)$$

Σε αντιστοιχία με τα προηγούμενα και βάσει της σχέσης (1.16), έχουμε για το αναμενόμενο κόστος:

$$K_{αναμ}(x) = k(x - a) + \int_x^{\infty} e^{-(\xi - x)} f_D(\xi) d\xi + \int_0^x K_c(x - \xi) f_D(\xi) d\xi \quad (1.18),$$

ενώ το ζητούμενό μας είναι να ελαχιστοποιηθεί η παραπάνω συνάρτηση για $y \geq a$, το οποίο αποτελεί αυτονόητο περιορισμό, μιας και μετά τον ανεφοδιασμό, το απόθεμα δεν μπορεί να είναι μικρότερο από το αρχικό.

Σχετικά με τη βέλτιστη πολιτική για το απόθεμα, έχουμε:

- Αν $a < x^o$, θα παραγγείλουμε $(x^o - a)$ μονάδες ώστε το απόθεμα να γίνει x^o μονάδες.
- Αν $a \geq x^o$, δε θα παραγγείλουμε .

Όπως και πριν, η ποσότητα x^o πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση:

$$F_D(x^o) = \frac{e - k}{e + K_c}.$$

Έτσι λοιπόν, στο παράδειγμα με τα τζην, εάν υπήρχαν στην αποθήκη του εμπόρου ήδη 5 παντελόνια, η βέλτιστη πολιτική θα ήταν να φέρουμε το επίπεδο του αποθέματος στα 57 παντελόνια, δηλαδή να παραγγείλουμε ακόμα 52 παντελόνια. Από την άλλη αν είχαμε 100 παντελόνια ($100 > 57$) η βέλτιστη στρατηγική παραγγελίας θα ήταν να επιλέξουμε να μην τοποθετήσουμε παραγγελία.

Απόδειξη του τύπου (1.17) για τη βέλτιστη πολιτική

Ξεκινάμε υποθέτοντας μηδενικό αρχικό απόθεμα. Για τυχαίες θετικές σταθερές ποσότητες k_1, k_2 έχουμε:

$$h(\xi, x) = \begin{cases} k_1(x - \xi), & \text{αν } x > \xi \\ k_2(\xi - x), & \text{αν } x \leq \xi \end{cases}$$

Έστω:

$$H(x) = \int_0^{\infty} h(\xi, x) f_D(\xi) d\xi + kx, \text{ για } k > 0.$$

Σε αυτήν την περίπτωση, η συνάρτηση $H(y)$ μηδενίζεται για την τιμή $x = x^0$, όπου:

$$F(x^0) = \frac{k_2 - k}{k_2 + k_1}.$$

Αυτό συμβαίνει επειδή, εξ'ορισμού ισχύει ότι:

$$H(x) = k_1 \int_0^x (x - \xi) f_D(\xi) d\xi + k_2 \int_x^{\infty} (\xi - x) f_D(\xi) d\xi + kx$$

Για να υπολογίσουμε την ελάχιστη τιμή, παραγωγίζουμε την παραπάνω σχέση και την εξισώνουμε με το μηδέν:

$$\frac{dH(x)}{dx} = k_1 \int_0^x f_D(\xi) d\xi - k_2 \int_x^{\infty} f_D(\xi) d\xi + k = 0 \Rightarrow .$$

$$k_1 F_D(\xi) - k_2 (1 - F_D(\xi)) + k = 0 \Rightarrow k_1 F_D(\xi) - k_2 + k_2 F_D(\xi) + k = 0 \Rightarrow$$

$$(k_1 + k_2) F_D(\xi) = k_2 - k \Rightarrow$$

$$F_D(\xi) = \frac{k_2 - k}{k_1 + k_2}.$$

Η λύση της παραπάνω εξίσωσης ελαχιστοποιεί και τη συνάρτηση $H(x)$, καθώς

$$\frac{d^2 H(x)}{dx^2} = (k_1 + k_2) f_D(\xi) \geq 0, \text{ για κάθε } x.$$

Η συνάρτηση $K_{\text{αναμ}}(x)$ έχει ακριβώς την ίδια δομή με τη συνάρτηση $H(x)$. Με όμοιο τρόπο αποδεικνύεται και η αντίστοιχη σχέση για την περίπτωση όπου υπάρχει αρχικό απόθεμα στην αποθήκη.

3.10.4. Μοντέλο με μη γραμμικά κόστη

Αν υποθέσουμε ότι το κόστος αποθήκευσης και το κόστος έλλειψης δεν είναι απαραίτητα γραμμικά, θεωρώντας τις -όχι απαραίτητα γραμμικές- συναρτήσεις $K_c[\cdot]$ και $e[\cdot]$ αντίστοιχα, τα αποτελέσματα που θα πάρουμε, κατά τη μελέτη του μοντέλου, θα είναι πολύ παρόμοια με τα προηγούμενα.

Έχουμε λοιπόν, για το κόστος αποθήκευσης:

$$K_c = \begin{cases} K_c[x - D], & \text{αν } x \geq D \\ 0, & \text{αν } x < D \end{cases}.$$

Αντίστοιχα, για το κόστος έλλειψης:

$$e[x] = \begin{cases} e[D - x], & \text{αν } D \geq x \\ 0, & \text{αν } D < x \end{cases}.$$

Για το αναμενόμενο κόστος $K_{\text{αναμ}}$ ισχύει:

$$K_{\text{αναμ}}(x) = k(x - a) + \int_x^{\infty} e[\xi - x] f_D(\xi) d\xi + \int_0^x K_c[x - \xi] f_D(\xi) d\xi.$$

Αν συμβολίσουμε με $N(x)$ το άθροισμα του αναμενόμενου κόστους έλλειψης συν το κόστος αποθήκευσης, έχουμε:

$$N(x) = \int_x^{\infty} e[\xi - x] f_D(\xi) d\xi + \int_0^x K_c[x - \xi] f_D(\xi) d\xi$$

και το συνολικό αναμενόμενο κόστος είναι:

$$K_{αναμ}(x) = k(x - a) + N(x).$$

Σκοπός μας είναι να ελαχιστοποιήσουμε το παραπάνω κόστος υπό τον περιορισμό $x \geq a$.

Αν το $N(x)$ είναι αυστηρά κυρτή συνάρτηση, δηλαδή αν τα κόστη έλλειψης και αποθήκευσης είναι κυρτές συναρτήσεις και $\varphi_D(\xi) > 0$, η βέλτιστη πολιτική που θα πρέπει να ακολουθήσουμε είναι:

- Αν $a < x^o$, θα παραγγείλουμε $(x^o - a)$ μονάδες ώστε το απόθεμα να γίνει x^o μονάδες.
- Αν $a \geq x^o$, δε θα παραγγείλουμε.

Το x^o ικανοποιεί την εξίσωση $\frac{dN(x)}{dx} + k = 0$.

3.10.5. Μοντέλο μιας περιόδου με κόστος αποθήκευσης (setup cost)

Τα παραπάνω μπορούν εύκολα να ανατραπούν, αν προβούμε στην υπόθεση ότι υπάρχει ένα επιπλέον κόστος K για την τοποθέτηση αυτής της ειδικής παραγγελίας. Μία τέτοια περίπτωση συναντάται συχνά στη βιομηχανία. Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε την πολιτική (s, S) για τον έλεγχο των αποθεμάτων που ακολουθείται σε παρόμοιες περιπτώσεις.

Έστω λοιπόν, ότι, για να τοποθετηθεί αυτή η παραγγελία, ο έμπορος πρέπει να πληρώσει 50€. Τώρα λοιπόν, το κόστος αυτό θα πρέπει να συνυπολογιστεί κατά τη μελέτη του μοντέλου.

Τα κόστη έλλειψης και αποθήκευσης τα θεωρούμε γραμμικά και ίσα με:

$$N(x) = e \int_x^{\infty} (\xi - x) f_D(\xi) d\xi + K_c \int_0^x (x - \xi) f_D(\xi) d\xi.$$

Συνεπώς, το συνολικό αναμενόμενο κόστος μέχρι να φτάσουμε να έχουμε απόθεμα ίσο με x είναι:

$$K_{αναμ}(x) = \begin{cases} K + k(x - a) + N(x), & \text{αν } x > a \\ N(x), & \text{αν } x = a \end{cases}$$

Συμβολίζουμε με S την τιμή του x που ελαχιστοποιεί την ποσότητα $kx + N(x)$

$$kS + N(S) = \min_x \{kx + N(x)\}$$

Ακόμα, συμβολίζουμε με s την ελάχιστη τιμή του x ώστε:

$$ks + N(s) = K + ks + N(S).$$

Τότε, θα ισχύει το ακόλουθο:

Αν $a > S$, τότε:

$$K + kx + N(x) > kx + N(a), \text{ για κάθε } x > a ,$$

και συνεπώς,

$$K + k(x - a) + N(x) > N(a).$$

Το αριστερό μέλος της τελευταίας ανισότητας εκφράζει το συνολικό αναμενόμενο κόστος παραγγελίας $x - a$ μονάδων προϊόντος ώστε το ύψος του αποθέματος να γίνει x , ενώ το δεξί μέλος ισοδυναμεί με το συνολικό αναμενόμενο κόστος, αν δε χρειάζεται να παραγγείλουμε τίποτα.

Συνεπώς, η ιδανική πολιτική επιτάσσει να μην παραγγείλουμε αν $a > S$.

Αν $s \leq a \leq S$,

$$K + kx + N(x) \geq ka + N(a) , \text{ για κάθε } x > a ,$$

ώστε

$$K + k(x - a) + N(x) \geq N(a) .$$

Και πάλι, το να μην παραγγείλουμε καθόλου είναι φθηνότερο από το να παραγγείλουμε.

Τέλος, αν $a < s$,

τότε:

$$\min_{x \geq a} \{K + kx + N(x)\} = K + kS + L(S) < ka + N(a).$$

Ισοδύναμα:

$$\min_{x \geq a} \{K + k(x - a) + N(x)\} = K + k(S - a) + N(S) < N(a) .$$

Το ελάχιστο κόστος προκύπτει για επίπεδο αποθέματος ίσο με S και η βέλτιστη πολιτική που μπορούμε να ακολουθήσουμε είναι:

- Αν $a < s$, θα παραγγείλουμε $(s - a)$ μονάδες ώστε το απόθεμα να γίνει x^0 μονάδες.
- Αν $a \geq s$, δε θα παραγγείλουμε.

Ενώ για το S , όπως και προηγουμένως, ισχύει:

$$F(S) = \frac{e - k}{e + K_c},$$

με το s να είναι η ελάχιστη τιμή που ικανοποιεί τη σχέση:

$$ks + N(s) = K + kS + N(S).$$

3.11. Μοντέλα πολλών προϊόντων – ABC ανάλυση

Όλα τα μοντέλα που περιγράψαμε στις προηγούμενες παραγράφους αφορούσαν ένα συγκεκριμένο προϊόν και ένα συγκεκριμένο σημείο παραγωγής ή/και πώλησής τους. Αυτά τα μοντέλα λοιπόν, αποτελούν τους θεμέλιους λίθους του Ελέγχου Αποθεμάτων και πάνω σε αυτά, χτίζεται η μοντελοποίηση συστημάτων που αφορούν ταυτόχρονα πολλά – ακόμη και χιλιάδες – προϊόντα μίας εταιρίας που πιθανότατα είναι και διασκορπισμένα γεωγραφικά.

Σε τέτοιες περιπτώσεις, προτιμάται να εξετάζεται κάθε προϊόν ξεχωριστά, αλλά για να γίνει κάτι τέτοιο πιο εύκολο, μιας και όπως είπαμε, μπορεί να εξετάζουμε ακόμη και χιλιάδες προϊόντα ταυτόχρονα, οι εταιρίες χωρίζουν τα προϊόντα σε κατηγορίες, χρησιμοποιούν δηλαδή, τη **μέθοδο ελέγχου ABC**.

Πιο συγκεκριμένα, χωρίζουν τα προϊόντα σε τρεις ομάδες (A, B και C) ανάλογα με τη σημαντικότητά τους κι αφού έχουν αξιολογήσει κατά πόσο αξίζει να εφαρμόσουν γι'αυτά ένα από τα μοντέλα που παρουσιάστηκαν στις προηγούμενες παραγράφους. Η σημαντικότητα κάποιου προϊόντος θα μπορούσε να σχετίζεται για παράδειγμα, με τα έσοδα που φέρνει στην εταιρία ή με τη συνεισφορά του σε κάποιο τελικό προϊόν, αν πρόκειται για εξάρτημα.

Συνεπώς, είναι πολύ πιθανό, αν το προϊόν είναι ευτελούς αξίας ή για κάποιον άλλο λόγο, αξιολογηθεί ως μη σημαντικό, να μη συμφέρει την εταιρία να στήσει ένα ολόκληρο σύστημα ελέγχου αποθέματος μόνο γι' αυτό.

Έτσι λοιπόν, στην κατηγορία Α βρισκονται τα πιο σημαντικά προϊόντα, για τα οποία πρέπει να γίνει σχολαστική μελέτη και να ακολουθηθεί συγκεκριμένο πρωτόκολλο ελέγχου αποθεμάτων. Στην κατηγορία Β, εντάσσονται τα προϊόντα για τα οποία πρέπει να υπάρχει παρακολούθηση, αλλά παρουσιάζουν μέτριο ενδιαφέρον για την εταιρία. Τέλος, στην κατηγορία C, συναντάμε τα προϊόντα που παρουσιάζουν το λιγότερο ενδιαφέρον και τα οποία ελέγχουμε περιστασιακά, χωρίς να επενδύουμε ιδιαίτερο κόπο, χρόνο και χρήμα στο στήσιμο εξειδικευμένου για αυτά μοντέλου.

Μια άλλη δυσκολία που εμφανίζεται κατά τη μελέτη πολλών προϊόντων ταυτόχρονα, κατάσταση που είναι και η συνηθέστερη στην πραγματικότητα, αποτελεί και το γεγονός των αλληλοεπικαλύψεων κάποιων προϊόντων και γενικότερα της αλληλεπίδρασής τους με άλλους παράγοντες.

Πιο συγκεκριμένα, είναι πολύ πιθανό να μην μπορούμε να εφαρμόσουμε για κάθε προϊόν ένα ξεχωριστό μοντέλο ελέγχου αποθεμάτων, γιατί μπορεί, κάποια εξ' αυτών που είναι παρόμοια μεταξύ τους, να δύνανται να υποκαταστήσουν το ένα το άλλο αν παραστεί ανάγκη ή για άλλα προϊόντα, μπορεί να είναι πιο συμφέρον για κάποιον έμπορο να κάνει μεγαλύτερες παραγγελίες λόγω διευκολύνσεων στο κόστος τοποθέτησης της παραγγελίας. Μπορεί ακόμα, στη ζήτηση ή στην παραγωγή κάποιου προϊόντος, να παίζει ρόλο το μέγεθός του σε περιπτώσεις περιορισμένου αποθηκευτικού χώρου από τη μεριά του εμπόρου ή του κατασκευαστή, αντίστοιχα.

Γενικά, σε μία τέτοια περίπτωση θα πρέπει να εκτιμηθεί πόσο σημαντικές είναι οι διάφορες αλληλεπιδράσεις των προϊόντων με άλλα είδη ή και με το γενικότερο περιβάλλον. Αν αυτές είναι σημαντικές, θα πρέπει να υπάρχει επιπρόσθετη ανάλυση, ενώ αν είναι ελάχιστος σημασίας, πιθανότατα, όπως συνηθίζεται κιόλας να γίνεται, μπορούμε να προχωρήσουμε στην κατά περίπτωση μελέτη του κάθε προϊόντος, χρησιμοποιώντας κάποιο από τα προαναφερθέντα μοντέλα.

Στον αιώνα που διανύουμε όμως, τα πράγματα στον έλεγχο των αποθεμάτων, έχουν εξελιχθεί τόσο πολύ που βλέπουμε ακόμη και συστήματα που ακολουθούν μεγάλη γεωγραφική διαβάθμιση, ξεκινώντας από την πρώτη

βαθμίδα που είναι το σημείο παραγωγής, περνώντας στην επόμενη που είναι η τοπική αποθήκη, συνεχίζοντας στο κέντρο διανομής και προχωρώντας όσο χρειάζεται. Είναι προφανές βέβαια, ότι τα συστήματα ελέγχου αποθεμάτων των διάφορων βαθμίδων πρέπει να επικοινωνούν για να ρυθμίζεται και ο ανεφοδιασμός κάθε βαθμίδας όσο προχωράει η διαδικασία.

Στο σημείο αυτό, σημείο κλειδί αποτελεί ο έλεγχος της εφοδιαστικής αλυσίδας ώστε να φτάσει το προϊόν στον καταναλωτή το συντομότερο δυνατό και να ανταποκριθεί η εταιρία που μας ενδιαφέρει καλύτερα στη ζήτηση από τις ανταγωνίστριες. Σύμφωνα με την Ελληνική Εταιρία Logistics:

«Η Διαχείριση Εφοδιαστικής Αλυσίδας αναφέρεται στο σχεδιασμό και τη διαχείριση όλων των ενεργειών-δραστηριοτήτων που σχετίζονται με τις διαδικασίες προμήθειας, την παραγωγή-μεταποίηση και όλες τις δραστηριότητες της διανομής.

Επιπλέον, συμπεριλαμβάνει το συντονισμό και τη συνεργασία με όλους τους εταίρους του καναλιού εφοδιασμού, που μπορεί να είναι προμηθευτές, μεσάζοντες, εταιρείες παροχής υπηρεσιών Third Party Logistics (3PL) και πελάτες.

Κατ' ουσία, η Διαχείριση Εφοδιαστικής Αλυσίδας ενοποιεί και ολοκληρώνει το σχεδιασμό, τις προμήθειες, την παραγωγή, την αποθήκευση, τη μεταφορά και τις πωλήσεις τόσο μέσα στις επιχειρήσεις όσο και μεταξύ αυτών».

Συνειδητοποιούμε δηλαδή, ότι πρόκειται για μια εξαιρετικά σημαντική διαδικασία μιας εταιρίας στην οποία είναι πολύ χρήσιμο το κομμάτι του ελέγχου αποθεμάτων και η οποία καθορίζει σε μεγάλο βαθμό την επιτυχία της.

Μελέτη περίπτωσης

Η Ελένη, ιδιοκτήτρια του φούρνου «Θεία Λένα», ανέθεσε στην ανηψιά της, απόφοιτο Σ.Ε.Μ.Φ.Ε. και ειδική στον Έλεγχο Αποθεμάτων, να τη βοηθήσει σε μια σειρά ερωτημάτων σχετικά με την επιχείρησή της. Η Ελένη προμηθεύεται αλεύρι για τα διάφορα προϊόντα που παρασκευάζει, από την εταιρία «Μύλοι ΑΑ», μια τοπική επιχείρηση της περιοχής της. Με κάθε κιλό αλεύρι που αγοράζει, μπορεί να φτιάξει ένα κιλό ψωμί ή ένα κιλό μπισκότων.

Η ανηψιά της υπολόγισε πως η μέση μηνιαία ζήτηση για ψωμί ή μπισκότα από τους πελάτες του φούρνου αγγίζει τα 4,000 κιλά και το μηνιαίο κόστος αποθήκευσης K_c ανά κιλό αλεύρι, υπολογίζεται στα 0.02€. Σε περίπτωση που προκύψει έλλειψη σε αλεύρι, η Ελένη αγοράζει την απαιτούμενη ποσότητα από το συνοικιακό σούπερ μάρκετ, γεγονός που την επιβαρύνει συνολικά με 1.2€ ανά κιλό, ανά κύκλο παραγγελίας. Για να αποφύγει το φαινόμενο δημιουργίας έλλειψης αλευριού πριν την παραλαβή κάποιας παραγγελίας, αποφάσισε να διατηρεί απόθεμα ασφαλείας, το οποίο να την εξασφαλίζει στο 95% του κύκλου παραγγελίας.

Το συμβόλαιο που διατηρεί η Ελένη με την εταιρία «Μύλοι ΑΑ» περιλαμβάνει τα εξής:

Η αγορά του κάθε κιλού της κοστίζει 0.80€ και η τοποθέτηση της παραγγελίας κοστίζει συνολικά 2€. Επιπλέον, δεν υπάρχει κάποιο κόστος για τα μεταφορικά και η εταιρία δεσμεύεται πως η παραγγελία θα παραδίδεται σε 3 ημέρες από τη στιγμή της τοποθέτησής της. Η ζήτηση για ψωμί κατά το διάστημα που μεσολαβεί από την τοποθέτηση της παραγγελίας ως την παραλαβή της θεωρείται τυχαία (δηλαδή η ζήτηση είναι τυχαία μεταβλητή). Η ανηψιά της Ελένης, από την εμπειρία της, θεωρεί ότι ακολουθεί την Ομοιόμορφη κατανομή και κυμαίνεται ανάμεσα στα 120 έως και 360 κιλά.

Τελευταία όμως, η Ελένη σκέφτεται να αλλάξει προμηθευτή και να εμπιστευτεί τη μεγαλύτερης εμβέλειας εταιρία «Ελληνικοί Μύλοι», η οποία φαίνεται οικονομικότερη. Για το λόγο αυτό, έχει ζητήσει μία προσφορά από τον

υπεύθυνο πωλήσεων της εταιρίας «Ελληνικοί Μύλοι», την οποία θα αξιολογήσει με τη βοήθεια της ανηψιάς της. Η προσφορά που έλαβε περιλαμβάνει τα ακόλουθα:

Το κάθε κιλό αλεύρι κοστίζει 0.70€ και η τοποθέτηση της παραγγελίας, που θα πρέπει να γίνεται μέσω ταχυδρομείου, κοστίζει συνολικά 3.5€, ενώ δεν υπάρχει κάποιο κόστος για τη μεταφορά των προϊόντων. Επιπλέον, η εταιρία υπόσχεται ότι η συνολική διάρκεια παράδοσης κάθε παραγγελίας θα είναι μία εβδομάδα από τη στιγμή της τοποθέτησής της. Η ανηψιά της Ελένης εκτιμά πως σε αυτήν την περίπτωση, η κατανομή της πιθανότητας της εβδομαδιαίας ζήτησης, από την τοποθέτηση της παραγγελίας ως την παραλαβή της, ακολουθεί Κανονική κατανομή με μέση τιμή 1,000 κιλά και τυπική απόκλιση 300 κιλά.

Επίσης, ο φούρνος «Θεία Λένα» είναι γνωστός για το καλύτερο και μεγαλύτερο χειροποίητο κουλούρι Θεσσαλονίκης, προϊόν που τον έκανε διάσημο στις γύρω περιοχές. Η ανηψιά της Ελένης θεωρεί πως η ημερήσια ζήτηση κουλουριών στο φούρνο ακολουθεί την Ομοιόμορφη κατανομή ανάμεσα στα 100 και 200 κουλούρια.

Η Ελένη παρασκευάζει κουλούρια καθημερινά. Το κάθε κουλούρι φτιάχνεται νωρίς το πρωί, πριν ανοίξει ο φούρνος για τους πελάτες, και η παραγωγή του κοστίζει 0.90€, ενώ στη συνέχεια, πωλείται προς 1.2€. Αν κάποιο κουλούρι δεν πουληθεί τη μέρα της παρασκευής του, πωλείται την επόμενη μέρα σε προσφορά και η τιμή του είναι 0.50€, ενώ το κόστος αποθήκευσής του είναι 0.03€.

Η Ελένη επιθυμεί να πάρει δύο σημαντικές αποφάσεις για την επιχείρησή της:

- Να καταλήξει στην πιο οικονομικά συμφέρουσα προσφορά μεταξύ των προμηθευτών, η οποία θα τη βοηθήσει να βελτιστοποιήσει τα κέρδη της.
- Να αποφασίσει ποια πρέπει να είναι η ιδανική ποσότητα κουλουριών που πρέπει να παράγει καθημερινά, αλλά και το βέλτιστο επίπεδο εξυπηρέτησης.

Για να το κάνει αυτό, η Ελένη κατέγραψε μια σειρά ερωτημάτων που θα την βοηθήσουν να πάρει τη βέλτιστη απόφαση για την επιχείρησή της και ανέθεσε στην ανηψιά της να τα λύσει:

1. Με βάση ποιο μοντέλο ελέγχου αποθεμάτων θα αποφασίσει η ανηψιά της Ελένης τη μεθοδολογία που θα πρέπει να ακολουθήσει για την επιλογή του καταλληλότερου προμηθευτή και ποια είναι αυτή η μεθοδολογία;
2. Ποιο είναι το βέλτιστο σημείο επανατοποθέτησης παραγγελίας και ποιο το βέλτιστο μέγεθος αυτής στις δύο διαφορετικές περιπτώσεις προμηθευτών;
3. Ποια η ποσότητα αποθέματος ασφαλείας σε κάθε περίπτωση; Να συγκριθούν.
4. Ποιος ο βέλτιστος χρόνος μεταξύ των παραγγελιών σε κάθε περίπτωση;
5. Ποιο είναι το μηνιαίο κόστος αγοράς αλευριού σε κάθε περίπτωση;
6. Ποιο είναι το μηνιαίο κόστος αποθήκευσης αλευριού σε κάθε περίπτωση;
7. Δεδομένου ότι ελλείψεις συμβαίνουν εξαιρετικά σπάνια, τα μόνα σημαντικά κόστη κατά τη σύγκριση των δύο προμηθευτών είναι αυτά που υπολογίστηκαν στα ερωτήματα 4 και 5. Ποιο είναι το μηνιαίο συνολικό κόστος στην κάθε περίπτωση; Ποιο το αντίστοιχο συνολικό κόστος ανά κύκλο παραγγελίας; Να εκτιμηθεί ποιός προμηθευτής πρέπει να επιλεγεί από την Ελένη.
8. Ποιο το μέγιστο έλλειμμα της εταιρίας;
9. Να υπολογιστούν τα κόστη K_{over} και K_{under} που σχετίζονται με τα κουλούρια.
10. Να υπολογιστεί το βέλτιστο επίπεδο εξυπηρέτησης.
11. Να βρεθεί η ιδανική ποσότητα κουλουριών που πρέπει να παράγονται κάθε μέρα.
12. Βάσει των αποτελεσμάτων του προηγούμενου ερωτήματος, ποια είναι η πιθανότητα να προκύψει έλλειψη κουλουριών μια τυχαία ημέρα;
13. Δεδομένου ότι το κουλούρι του συγκεκριμένου φούρνου είναι τόσο γνωστό και νόστιμο, οι πελάτες δυσανεστούνται ιδιαίτερα όταν το ζητούν αλλά υπάρχει έλλειψη. Η Ελένη όμως, η ιδιοκτήτρια του φούρνου, έχει ψηλά στις προτεραιότητές της να μη δυσανεστεί τους πελάτες της και συνεπώς, αποφεύγει τη δημιουργία ελλείψεων. Θέλοντας όμως, να εξετάσει κάθε παράμετρο κατά την οργάνωση της επιχείρησής της, εκτιμά ότι κάθε φορά

που κάποιος πελάτης δεν αγοράζει κουλούρι λόγω έλλειψης και δυσαρεστείται, υπάρχει επιπλέον αρνητική συνέπεια στις μελλοντικές πωλήσεις με κόστος για την επιχείρησή της 0.50€ ανά κουλούρι. Να υπολογιστεί και με τη νέα αυτή παράμετρο, ο βέλτιστος αριθμός κουλουριών που πρέπει να παράγονται κάθε μέρα.

14. Ποια είναι η νέα πιθανότητα να υπάρχει έλλειψη σε κουλούρι μια τυχαία μέρα;
15. Η Ελένη σκέφτεται να ξεκινήσει να φουρνίζει δύο φορές τη μέρα, μία νωρίς το πρωί όπως κάνει μέχρι τώρα με στόχο να καλύψει την ελάχιστη ζήτηση της ημέρας σε κουλούρια και ακόμα μία φορά, κατά το μεσημέρι με ποσότητα ανάλογη της εκτίμησης που θα κάνει για τη ζήτηση της ημέρας. Λαμβάνοντας υπ' όψιν μόνο τα κόστη K_{under} και K_{over} , δηλαδή τα κόστη της δημιουργίας λιγότερων ή περισσότερων κουλουριών αντίστοιχα, απ' αυτά που τελικά θα ζητηθούν, πώς συγκρίνονται αυτά τα κόστη με τα αντίστοιχα πριν τη σκέψη της Ελένης να φουρνίζει δύο φορές τη μέρα;
16. Μια ακόμη σκέψη της Ελένης, σχετικά με την επιχείρησή της, έχει να κάνει με τη δημιουργία ενός περιπτέρου μέσα στο μαγαζί με βιολογικά προϊόντα της αδερφής της, όπου θα πωλούνται μόνο τα φημισμένα κουλούρια της. Η ανηψιά της εκτιμά πως η ημερήσια ζήτηση για κουλούρια στο συγκεκριμένο σημείο θα ακολουθεί την Εκθετική κατανομή με μέση τιμή 90. Ποιος ο βέλτιστος αριθμός κουλουριών που θα πρέπει να φτιάχνει κάθε μέρα; Λαμβάνεται ακόμη υπ' όψιν το κόστος δυσαρέσκειας των πελατών, ενώ είναι αυξημένο το κόστος αποθήκευσης, μιας και θα χρησιμοποιεί τις αποθήκες του κτιρίου όπου στεγάζεται το κατάστημα της αδερφής της, και φτάνει τα 0.04€ ανά κουλούρι, ενώ στο κόστος παραγωγής έρχεται να προστεθεί και 0.01€ ακόμη ανά κουλούρι, για τη μεταφορά από το φούρνο στο κατάστημα με τα βιολογικά προϊόντα.

Απαντήσεις

1. Σε αυτή τη μελέτη περίπτωσης, η επιχειρηματίας καλείται να επιλέξει ανάμεσα σε δύο διαφορετικές προσφορές. Δεδομένου ότι εξετάζουμε ένα και μόνο προϊόν (αλεύρι), ότι μπορούμε να γνωρίζουμε ανά πάσα στιγμή το επίπεδο του αποθέματος και ότι έχουμε στοιχεία για το χρόνο που μεσολαβεί από την τοποθέτηση της παραγγελίας ως την παραλαβή της από την Ελένη, καθώς και για τη ζήτηση κατά το διάστημα αυτό, θα ακολουθήσουμε το στοχαστικό μοντέλο συνεχούς επιθεώρησης της παραγράφου 3.9.

Συνεπώς, η ανηψιά της Ελένης θα χαράξει μία (R, Q) - πολιτική για κάθε περίπτωση προμηθευτή, όπου R είναι το σημείο στο οποίο όταν φτάνει το απόθεμα, θα πρέπει να επανατοποθετείται μια νέα παραγγελία και Q το μέγεθος που η παραγγελία αυτή θα πρέπει να έχει.

2. Αρχικά, αξίζει να παρατηρήσουμε πως, και στις δύο περιπτώσεις, θέλουμε να είμαστε καλυμμένοι για το 95% του κύκλου παραγγελίας, έχουμε δηλαδή $\ell = 0.95$. Στην περίπτωση του πρώτου προμηθευτή, από την τοποθέτηση της παραγγελίας ως την παραλαβή της, η ζήτηση ακολουθεί την Ομοιόμορφη κατανομή και κυμαίνεται ανάμεσα σε 120 έως και 360 κιλά. Συνεπώς, για το R_1 , έχουμε:

$$R_1 = a + \ell(b - a) = 120 + 0.95(360 - 120) = 120 + 0.95 \cdot 240 = 120 + 228 \Rightarrow$$

$$R_1 = 348 \text{ κιλά}$$

θα πρέπει δηλαδή, να επανατοποθετείται παραγγελία κάθε φορά που το απόθεμα πέφτει στα 348 κιλά.

Σε αυτήν την περίπτωση, το αντίστοιχο μέγεθος παραγγελίας είναι:

$$Q_1 = \sqrt{\frac{2AK_1}{K_c}} \sqrt{\frac{(e + K_c)}{e}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 4,000 \cdot 2}{0.02}} \sqrt{\frac{1.2 + 0.02}{1.2}} \Rightarrow$$

$$Q_1 = \sqrt{\frac{16,000}{0.02}} \sqrt{\frac{1.22}{1.2}} \Rightarrow$$

$$Q_1 = 901.85 \text{ κιλά}$$

Αντίστοιχα, για το δεύτερο προμηθευτή, όπου η Ελένη έχει εκτιμήσει πως η κατανομή της πιθανότητας της ζήτησης, από την τοποθέτηση της παραγγελίας ως την παραλαβή της, ακολουθεί την Κανονική κατανομή με μέση τιμή 1,000 κιλά και τυπική απόκλιση 300 κιλά, έχουμε:

$$R_2 - \mu = K_{1-\alpha} \sigma \Rightarrow R_2 - \mu = 1.645 \sigma \Rightarrow$$

$$R_2 = \mu + 1.645 \sigma = 1,000 + 1.645 \cdot 300 = 1,000 + 493.5 \Rightarrow$$

$$R_2 = 1493.5 \text{ κιλά}$$

Με αντίστοιχο μέγεθος παραγγελίας:

$$Q_2 = \sqrt{\frac{2AK_2}{K_c}} \sqrt{\frac{(e+K_c)}{e}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 4,000 \cdot 3.5}{0.02}} \sqrt{\frac{1.2+0.02}{1.2}} \Rightarrow$$

$$Q_2 = \sqrt{\frac{28,000}{0.02}} \sqrt{\frac{1.22}{1.2}} = 1,183.22 \cdot 1.01 \Rightarrow$$

$$Q_2 = 1195.05 \text{ κιλά}$$

3. Το απόθεμα ασφαλείας εξασφαλίζει την ομαλή λειτουργία της παραγωγικής διαδικασίας και ισούται με τη διαφορά της ποσότητας του αποθέματος κατά την οποία επανατοποθετείται παραγγελία μείον τη μέση τιμή της ζήτησης. Έτσι λοιπόν, έχουμε για τις δύο περιπτώσεις:

$$(\text{απόθεμα ασφαλείας})_1 = R_1 - E(D) = R_1 - \frac{a+b}{2} \Rightarrow$$

$$(\text{απόθεμα ασφαλείας})_1 = 348 - \frac{120+360}{2} = 348 - 240 \Rightarrow$$

$$(\text{απόθεμα ασφαλείας})_1 = 108 \text{ κιλά}$$

$$(\text{απόθεμα ασφαλείας})_2 : R_2 - \mu = 1,493.5 - 1,000 = 493.5 \text{ κιλά}$$

Σε αυτό το σημείο, παρατηρούμε ότι το απόθεμα ασφαλείας στη δεύτερη περίπτωση είναι παραπάνω από τετραπλάσιο από αυτό της πρώτης περίπτωσης.

Για να απαντηθούν τα επόμενα ερωτήματα, θα χρειαστεί να ανατρέξουμε στο Μοντέλο EOQ με προγραμματισμένες ελλείψεις της παραγράφου 3.6, με το

οποίο, όπως έχει αναφερθεί και στο θεωρητικό κομμάτι της εργασίας αυτής, το στοχαστικό μοντέλο συνεχούς επιθεώρησης έχει πολλά κοινά στοιχεία.

4. Έστω t^* ο βέλτιστος χρόνος μεταξύ των παραγγελιών. Θα ισχύει:

$$t_1^* = \frac{Q_1}{A} = \frac{901.85}{4,000} = 0.23 \text{ μήνες} \approx 7 \text{ ημέρες}$$

και

$$t_2^* = \frac{Q_2}{A} = \frac{1,195.05}{4,000} = 0.3 \text{ μήνες} = 10 \text{ ημέρες}$$

Ο βέλτιστος χρόνος εξαρτάται δηλαδή, από την ποσότητα της παραγγελίας και τη ζήτηση που υπάρχει.

5. Το κόστος αγοράς αλευριού, ανά κύκλο παραγγελίας, δίνεται από τον τύπο (1.2) της παραγράφου 3.6:

$$OC = K + cQ,$$

Για τον υπολογισμό του κόστους αγοράς ανά κύκλο παραγγελίας, έχουμε για κάθε περίπτωση:

$$OC_1 = K_1 + c_1 Q_1 = 2 + 0.8 \cdot 901.85 = 2 + 721.48 = 723.48 \text{ ευρώ},$$

αν αγοράσει η Ελένη από την εταιρία «Μύλοι ΑΑ» και

$$OC_2 = K_2 + c_2 Q_2 = 3.5 + 0.7 \cdot 1,195.05 = 840.04 \text{ ευρώ}$$

αν αγοράσει η Ελένη από την εταιρία «Ελληνικοί Μύλοι».

Για τον υπολογισμό του μηνιαίου κόστους αγοράς και θεωρώντας ότι ο μήνας έχει 30 ημέρες, έχουμε:

$$OC_{1, \text{μηνιαίο}} = OC_1 \times \frac{30}{t_1^*} = 723.48 \times \frac{30}{7} = 3,103.73 \text{ €}$$

$$OC_{2, \text{μηνιαίο}} = OC_2 \times \frac{30}{t_2^*} = 840.04 \times \frac{30}{10} = 2,520.12 \text{ €}$$

6. Στο σημείο αυτό, θα πρέπει να υπολογίσουμε το S^* , δηλαδή τη βέλτιστη τιμή για το επίπεδο του αποθέματος μετά την παραλαβή της παραγγελίας. Έχουμε λοιπόν:

$$S_1^* = \sqrt{\frac{2AK_1}{K_c}} \sqrt{\frac{e}{(e+K_c)}} = \sqrt{\frac{16,000}{0.02}} \sqrt{\frac{1.2}{1.22}} = 887.07 \text{ κιλά}$$

$$S_2^* = \sqrt{\frac{2AK_2}{K_c}} \sqrt{\frac{e}{(e+K_c)}} = 1,183.22 \cdot 0.99 = 1,171.39 \text{ κιλά}$$

Το κόστος αποθήκευσης, ανά μονάδα χρόνου, δίνεται από τον τύπο (1.3) της παραγράφου 3.6:

$$CC = \frac{K_c S^2}{2A}.$$

Καθώς το K_c είναι 0.02€ ανά μήνα και έχοντας υπολογίσει το S^* , τα αντίστοιχα μηνιαία κόστη αποθήκευσης για τις δύο περιπτώσεις υπολογίζονται ως εξής:

$$CC_1 = CC_{1,\text{μηνιαίο}} = \frac{K_c S_1^{*2}}{2A} = \frac{0.02 \cdot 887.07^2}{2 \cdot 4,000} = 1.92\text{€}$$

$$CC_2 = CC_{2,\text{μηνιαίο}} = \frac{K_c S_2^{*2}}{2A} = \frac{0.02 \cdot 1,171.39^2}{2 \cdot 4,000} = 3.43\text{€}$$

7. Χρησιμοποιώντας τον τύπο (1.5) της παραγράφου 3.6 και δεδομένου ότι στις δύο περιπτώσεις οι ελλείψεις συμβαίνουν εξαιρετικά σπάνια (άρα $CU_1 = CU_2 = 0$), το μηνιαίο συνολικό κόστος για κάθε έναν από τους προμηθευτές είναι:

$$TC_1 = 887.07 + 1.92 = 888.99 \text{ €}$$

για την «Μύλοι ΑΑ» και

$$TC_2 = 1,171.39 + 3.43 = 1,174.82 \text{ €}$$

για την «Ελληνικοί Μύλοι» αντίστοιχα.

Παρατηρούμε ότι $TC_1 < TC_2$.

Τα αντίστοιχα συνολικά κόστη ανά κύκλο παραγγελίας προκύπτουν

$$TC_{1,\text{κύκλου}} = \frac{TC_1}{\text{αριθμός κύκλων το μήνα}} = \frac{TC_1}{\frac{30}{t_1^*}} = \frac{TC_1 \cdot t_1^*}{30} = \frac{888.99 \cdot 7}{30} \Rightarrow$$

$$TC_{1, \text{κύκλου}} = 207.43 \text{ €},$$

για την εταιρία «Μύλοι ΑΑ» και

$$TC_{2, \text{κύκλου}} = \frac{TC_2}{\text{αριθμός κύκλων το μήνα}} = \frac{TC_2}{\frac{30}{t_2^*}} = \frac{TC_2 \cdot t_2^*}{30} = \frac{1,174.82 \cdot 10}{30} \Rightarrow$$

$$TC_{2, \text{κύκλου}} = 391.61 \text{ €},$$

για την εταιρία «Ελληνικοί Μύλοι». Συνεπώς $TC_{1, \text{κύκλου}} < TC_{2, \text{κύκλου}}$.

Συνεπώς, και στις δύο διαφορετικές περιπτώσεις πληρωμής του συνολικού κόστους (μηνιαία ή ανά παραγγελία), την Ελένη τη συμφέρει να παραμείνει στον αρχικό της προμηθευτή, η προσφορά του οποίου αποδεικνύεται οικονομικά καλύτερη.

8. Το μέγιστο έλλειμμα που μπορεί να προκύψει σε κάθε περίπτωση είναι:

Για τον πρώτο προμηθευτή:

$$Q_1 - S_1^* = 901.85 - 887.07 = 14.78 \text{ κιλά}$$

Για το δεύτερο προμηθευτή:

$$Q_2 - S_2^* = 1,195.05 - 1,171.39 = 23.66 \text{ κιλά}$$

Για να απαντήσει η ανηψιά της Ελένης στα επόμενα ερωτήματα, θα πρέπει να λάβει υπόψη ότι το κουλούρι Θεσσαλονίκης αποτελεί ένα από τα κλασικά παραδείγματα ευπαθών, εφήμερων προϊόντων, μιας και έχει διάρκεια ζωής λίγες μόλις ημέρες. Για την ακρίβεια, σε πολλές περιπτώσεις, όπως και στο παράδειγμά μας, ή παύει να πωλείται τη δεύτερη μέρα από την παραγωγή του ή πωλείται σε χαμηλότερη τιμή. Για το λόγο αυτό, για να απαντήσουμε στα παρακάτω ερωτήματα, θα ανατρέξουμε στο στοχαστικό μοντέλο μιας περιόδου, της παραγράφου 3.10:

9. Το κόστος K_{under} είναι το κόστος που προκύπτει για κάθε κουλούρι που ζητείται και δεν υπάρχει, σε περίπτωση που παραχθούν λιγότερα

κουλούρια από αυτά που θα ζητηθούν, και αντίστοιχα, K_{over} είναι το κόστος που προκύπτει για κάθε κουλούρι που περισσεύει, σε περίπτωση που παραχθούν περισσότερα.

$$K_{under} = e - k = 1.2 - 0.9 = 0.3 \text{ €}$$

$$K_{over} = k + K_c = 0.9 + 0.03 = 0.93 \text{ €}$$

όπου e το κόστος σε περίπτωση έλλειψης, δηλαδή εδώ, τα «χαμένα» χρήματα από κάθε πώληση που δεν έγινε και k το κόστος για την παραγωγή κάθε κουλουριού.

10. Το ιδανικό επίπεδο εξυπηρέτησης που αναζητούμε, βάσει των όσων έχουμε αναφέρει στο στοχαστικό μοντέλο μιας περιόδου για εφήμερα προϊόντα, δίνεται από το λόγο:

$$F_D(x^0) = \frac{K_{under}}{K_{under} + K_{over}}$$

Έχουμε λοιπόν:

$$F_D(x^0) = \frac{K_{under}}{K_{under} + K_{over}} = \frac{e - k}{e - k + k + K_c} = \frac{e - k}{e + K_c} = \frac{1.2 - 0.9}{1.2 + 0.03} = \frac{0.3}{1.23} = 0.24$$

11. Η ημερήσια ζήτηση ακολουθεί την Ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $(100, 200)$, δηλαδή $D \sim U(100, 200)$. Συνεπώς, έχουμε:

$$F_D(x^0) = 0.24 \Rightarrow \frac{x^0 - 100}{200 - 100} = 0.24 \Rightarrow$$

$$\frac{x^0 - 100}{100} = 0.24 \Rightarrow x^0 - 100 = 24 \Rightarrow$$

$$x^0 = 124 \text{ κουλούρια}$$

Δηλαδή, η Ελένη πρέπει να έχει κάθε μέρα διαθέσιμα 124 κουλούρια.

12. Ισχύει ότι η πιθανότητα να ικανοποιείται η ζήτηση ορίζεται ως εξής:

$$F_D(x^0) = P(D \leq x^0) .$$

Συνεπώς, για να προκύψει έλλειψη, θα πρέπει:

$$1 - F_D(x^0) = P(D > x^0) ,$$

δηλαδή, στο παράδειγμά μας, θα πρέπει:

$$P(D > x^0) = 1 - 0.24 = 0.76 .$$

Με άλλα λόγια, υπάρχει 76% πιθανότητα να προκύψει έλλειψη.

- 13.** Το κόστος έλλειψης τώρα, με τη νέα αυτή παράμετρο, αυξάνεται και προκύπτει:

$$e' = 1.2 + 0.5 = 1.7 \text{ €} .$$

Το ιδανικό επίπεδο εξυπηρέτησης διαμορφώνεται τώρα ως εξής:

$$F_D(y^0) = \frac{K_{under}}{K_{under} + K_{over}} = \frac{e' - k}{e' + K_c} = \frac{1.7 - 0.9}{1.7 + 0.03} = \frac{0.8}{1.73} = 0.46$$

Από αυτό, προκύπτει και ότι ο νέος ιδανικός αριθμός κουλουριών που πρέπει να παράγονται ανά ημέρα είναι:

$$F_D(y^0) = 0.46 \Rightarrow \frac{y^0 - 100}{200 - 100} = 0.46 \Rightarrow$$

$$\frac{y^0 - 100}{100} = 0.46 \Rightarrow y^0 - 100 = 46 \Rightarrow$$

$$y^0 = 146 \text{ κουλούρια}$$

- 14.** Σε αυτό το ερώτημα μας ζητείται η νέα πιθανότητα να υπάρξει έλλειψη. Συνεπώς:

$$P(D > y^0) = 1 - F_D(y^0) = 1 - 0.46 = 0.54$$

Παρατηρούμε λοιπόν, πως η πιθανότητα να υπάρξει έλλειψη έχει ελαττωθεί σημαντικά και είναι πλέον 54%.

15. Τα κόστη K_{under} και K_{over} , όπως φαίνεται και στους τύπους που έχουν δοθεί στα προηγούμενα ερωτήματα, δε θα επηρεαστούν σε περίπτωση που η Ελένη υλοποιήσει τη σκέψη που κάνει για δύο φουρνίσματα τη μέρα αντί για ένα, μιας και εξαρτώνται μόνο από τα κόστη e , k και K_c που θα παραμείνουν σταθερά.
16. Υποθέτουμε λοιπόν, ότι η ζήτηση ακολουθεί την Εκθετική κατανομή με μέση τιμή 90, δηλαδή $D \sim e(90)$ και αντίστοιχη συνάρτηση κατανομής:

$$F_D(\alpha) = \int_0^{\alpha} \frac{1}{90} e^{-\xi/90} d\xi = 1 - e^{-\alpha/90}.$$

Συνεπώς, έχουμε:

$$F_D(z^o) = 1 - e^{-z^o/90} = \frac{e - k}{e + K_c} = \frac{1.70 - 0.91}{1.70 + 0.04} = \frac{0.79}{1.74} = 0.45 \Rightarrow$$

$$e^{-z^o/90} = 1 - 0.45 = 0.55 \Rightarrow$$

$$\ln(e^{-z^o/90}) = \ln(0.55) \Rightarrow$$

$$-\frac{z^o}{90} = -0.60 \Rightarrow$$

$$z^o = 54 \text{ κουλούρια}$$

Άρα, η Ελένη, θα πρέπει να παράγει καθημερινά 54 κουλούρια για το περίπτερο στο μαγαζί με τα βιολογικά προϊόντα.

Επίλογος

Σε μία επιχείρηση, η δημιουργία αποθεμάτων συμβάλλει στην ομαλή λειτουργία της, εξασφαλίζοντας την έγκαιρη παράδοση των προϊόντων με αποτέλεσμα την ικανοποίηση των πελατών. Ακόμα, η ύπαρξη αποθεμάτων πρώτων υλών εξασφαλίζει την συνεχή τροφοδοσία της παραγωγικής διαδικασίας.

Η ορθολογική διαχείριση των αποθεμάτων συμβάλλει στη μείωση διαφόρων επιμέρους κοστών και μπορεί να προφυλάξει από άσκοπες επενδύσεις. Με τη βοήθεια της Θεωρίας του Ελέγχου Αποθεμάτων, η επιχείρηση μπορεί να προσεγγίσει ικανοποιητικά ζητήματα που αφορούν τη σωστή διαχείριση των αποθεμάτων της, όπως είναι το απόθεμα ασφαλείας, το μέγιστο επίπεδο αποθέματος που δικαιολογεί η ζήτηση, η βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας και ο χρόνος τοποθέτησης αυτής.

Με τον Έλεγχο Αποθεμάτων, εξασφαλίζεται η επιλογή και η εφαρμογή της βέλτιστης πολιτικής, καθώς και η μέτρηση και ο έλεγχος των παραμέτρων εκείνων με τις οποίες εξασφαλίζεται η λειτουργία των παραγωγικών σταδίων, η αύξηση του ρυθμού παραγωγής και η μείωση του κόστους παραγωγής.

Στις προηγούμενες παραγράφους, παρουσιάστηκαν τα πιο βασικά είδη μοντέλων ελέγχου αποθεμάτων. Τα περισσότερα απ'αυτά χρησιμοποιούνται με μεγάλη συχνότητα σε προβλήματα ρεαλιστικών συνθηκών και αποδεικνύονται ιδιαίτερα χρήσιμα. Τα μοντέλα που παρουσιάσαμε αποτελούν συνολικά μια εξαιρετική εισαγωγή στη Θεωρία Ελέγχου Αποθεμάτων και ήταν σε ορισμένες περιπτώσεις αρκετά πολύπλοκα στην κατανόηση και την εφαρμογή, καθώς απαιτούν γνώσεις ανώτερων Μαθηματικών και στοχαστικών διαδικασιών.

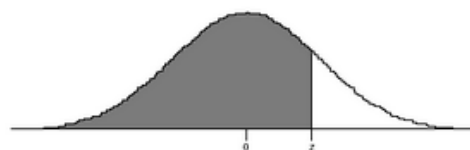
Για την αντιμετώπιση των επιπρόσθετων ρεαλιστικών καθημερινών αναγκών και απαιτήσεων που δημιουργούνται στις σύγχρονες επιχειρήσεις λόγω της πολυπλοκότητάς τους, έχουμε και την αντίστοιχη ανάπτυξη του επιστημονικού υποβάθρου που χρησιμοποιείται για την περιγραφή και τη

μηχανοργάνωση των δεδομένων των επιχειρήσεων με απώτερο στόχο τη δημιουργία ολοένα και πιο εξειδικευμένων μοντέλων που θα ανταποκρίνονται επακριβώς στο εκάστοτε πρόβλημα.

Παράρτημα

Τυποποιημένη Κανονική Κατανομή

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} e^{-t^2/2} dt$$



z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5190	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7969	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8513	.8554	.8577	.8529	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9215	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9492	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990

Βιβλιογραφία

Ξένη βιβλιογραφία

1. Hadley, G. (1962). Linear Programming, Addison-Wesley.
2. Hadley, G. and Whitin, T. M. (1963). Analysis of Inventory Systems. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
3. Hanssmann, F. (1962). Operations Research in Production and Inventory Control. Wiley, New York.
4. Hax, C. and Candea, D. (1984). Production and Inventory Management. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
5. Healy P., “Project Management: Getting the job done on time and in budget”, Butterworth – Heinemann (1997)
6. Hillier, F. S. and Lieberman, G. J. (2005). Introduction to Operations Research (9th edition). Holden-Day, San Francisco, CA.
7. Hillier, F. S., M. S. Hillier, and G. J. Lieberman (2000). Introduction to Management Science: A Modeling and Case Studies Approach with Spreadsheets, McGraw-Hill/Irwin.
8. Levin, R., Rubin, D.S., Stinson, J.P., Garder, E.S. (1989). Quantitative approaches to management, McGraw-Hill,US; 7th edition.
9. Silver, E. A., Pyke, D. F., and Peterson, R. (1998). Inventory Management and Production Planning and Scheduling (3rd edition). Wiley, New York.
10. Taha, H., A. (2010). Operations Research, an introduction, Ninth edition, Prentice Hall.

Ελληνική βιβλιογραφία

11. Γεωργίου, Α., Οικονόμου, Γ. (2002). Ποσοτικές Μέθοδοι, Τόμος Γ, Επιχειρησιακή Έρευνα, ΕΑΠ, Πάτρα.
12. Ζάχος, Σ. (2005). Αλγόριθμοι και πολυπλοκότητα, Εκδόσεις Ε.Μ.Π, Αθήνα.
13. Ιωάννου, Γ. (2005), Διοίκηση Παραγωγής και υπηρεσιών, Εκδόσεις: Αθ. Σταμούλης.
14. Κιόχος, Π., Θάνος, Γ., Σαλαμούρης, Δ., Κιόχος, Α. (2002), Επιχειρησιακή Έρευνα, Μέθοδοι και τεχνικές λήψης επιχειρηματικών αποφάσεων, Σύγχρονη Εκδοτική.
15. Κοκολάκης, Γ., Σπηλιώτης, Ι. (2002). Εισαγωγή στις Πιθανότητες, Εκδόσεις Συμεών.
16. Κολέτσος, Ι., Στογιάννης, Δ. (2015). Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα, 2^η έκδοση.
17. Μηλιώτης, Π., Α. (1994). Επιχειρησιακή Έρευνα, Μέθοδοι και προβλήματα, Εκδόσεις Αθ. Σταμούλης, Αθήνα – Πειραιάς.
18. Μηλιώτης, Π., Α. (1994). Εισαγωγή στο Μαθηματικό Προγραμματισμό, Εκδόσεις Αθ. Σταμούλης, Αθήνα – Πειραιάς.
19. Παπαγεωργίου, Γ. (2004). Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα - Γραμμικός Προγραμματισμός και Εφαρμογές, Ε.Μ.Π, Αθήνα.
20. Πραστάκος, Γ. (2005). Διοικητική επιστήμη στη πράξη, Εφαρμογές στη σύγχρονη επιχείρηση, Εκδόσεις Αθ. Σταμούλης.
21. Πραστάκος, Γ. (2005). Διοικητική επιστήμη, Λήψη επιχειρησιακών αποφάσεων στην κοινωνία της πληροφορίας, (Β΄ έκδοση), Εκδόσεις Αθ. Σταμούλης.
22. Σαπουντζής Κ. (1993). Τεχνικές Επιχειρησιακής Έρευνας, (Τόμος Β), Εκδόσεις Αθ. Σταμούλης.
23. Υψηλάντης, Π. (2006). Επιχειρησιακή Έρευνα, Εφαρμογές στη σημερινή επιχείρηση, Εκδόσεις Προπομπός.
24. Χαλάτσης, Κ. (2000). Εισαγωγή στη σύγχρονη επιστήμη των υπολογιστών, εκδόσεις Δίαυλος, Αθήνα.