



# ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ  
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

## Σχεδόν-Αντισυμμετρικοί Πίνακες και Μετασχηματισμός Levinger

---

**Διπλωματική Εργασία**

Γεωργία Στυλιανή Φανουργιάκη

Επιβλέπων καθηγητής: Παναγιώτης Ψαρράκος  
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα  
Φεβρουάριος 2016



# ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ  
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

## Σχεδόν-Αντισυμμετρικοί Πίνακες και Μετασχηματισμός Levinger

---

**Διπλωματική Εργασία**

Γεωργία Στυλιανή Φανουργιάκη

Τριμελής εξεταστική Επιτροπή:

Παναγιώτης Ψαρράκος  
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αρβανιτάκης Αλέξανδρος  
Επικ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Κανελλόπουλος Βασίλειος  
Αναπλ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα  
Φεβρουάριος 2016

*Στην οικογένειά μου*

# Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τον καθηγητή Ε.Μ.Π. κύριο Παναγιώτη Ψαρράκο για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε αναθέτοντάς μου την εν λόγω διπλωματική εργασία. Τον ευχαριστώ τόσο για την επιστημονική βοήθεια που πολύ πρόθυμα μου προσέφερε όσο και για τη στήριξή του σε όλα τα στάδια της εκπόνησης της εργασίας, καθώς με τη διδακτική του εμπειρία και την εν γένει κατάρτισή του με καθοδήγησε λαμβάνοντας υπόψη τα ενδιαφέροντά μου έτσι ώστε να εκπληρώσω το στόχο μου. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επίκουρο καθηγητή Ε.Μ.Π. κύριο Αλέξανδρο Αρβανιτάκη και τον αναπληρωτή καθηγητή Ε.Μ.Π. κύριο Βασίλειο Κανελλόπουλο, που ως μέλη της τριμελούς εξεταστικής επιτροπής αξιολόγησαν την εργασία αυτή.

# Αντί Προλόγου

Η παρούσα διπλωματική εργασία ξεκίνησε με κίνητρο την εικασία των Brualdi-Li (1983) ως προς το ποιοι πίνακες πρωταθλήματος (tournament matrices) παρουσιάζουν τη μεγαλύτερη δυνατή ρίζα Perron. Η εικασία αυτή ουσιαστικά στόχευε στην απόδειξη ή μη της αίσθησης ότι όσο η ρίζα Perron ενός πίνακα πρωταθλήματος αυξάνει, τόσο το αντίστοιχο πρωτάθλημα (του οποίου η βαθμολογία δίνεται από το συγκεκριμένο πίνακα) γίνεται πιο αμφίρροπο με “τάση” προς την απόλυτη ισοπαλία.

Οι πίνακες πρωταθλήματος που έχουν υποστεί παράλληλη μετατόπιση κατά  $\frac{1}{2}$  ανήκουν στην κατηγορία των σχεδόν-αντισυμμετρικών πινάκων, δηλαδή των πραγματικών, μη αρνητικών πινάκων που έχουν συμμετρικό μέρος βαθμού 1. Αρχικά, ο Friedland ήταν εκείνος που γενίκευσε τους πίνακες πρωταθλήματος στην κατηγορία των μη αρνητικών, σχεδόν-αντισυμμετρικών πινάκων, χρησιμοποιώντας αναλυτικές τεχνικές και μεθόδους.

Αργότερα, οι Psarrakos και Tsatsomeros συνέχισαν την προσπάθεια αυτή με μία σειρά από 3 δημοσιεύσεις, οι οποίες έχουν ως αντικείμενο τη συμπεριφορά της ρίζας Perron, τους ιδιοχώρους Perron και το μετασχηματισμό Levinger των μη αρνητικών, σχεδόν-αντισυμμετρικών πινάκων. Η ανάλυση επί των συγκεκριμένων πινάκων που πραγματοποιήθηκε, έδειξε τη στενή σχέση της ρίζας Perron με την ποσότητα που ορίστηκε ως διασπορά (variance) πίνακα. Η ποσότητα αυτή αποτελεί ουσιαστικά μέτρο για την απόσταση της “δεξιότερης” ιδιοτιμής ενός πίνακα από την κανονικότητα.

Κατά την εν λόγω μελέτη της ρίζας Perron, οι Friedland και Kirkland και έπειτα οι Psarrakos και Tsatsomeros κατασκεύασαν φράγματα με χρήση του μετασχηματισμού Levinger. Πιο συγκεκριμένα, μέσω του μετασχηματισμού αυτού, μελέτησαν τη συμπεριφορά της συνάρτησης Levinger (δηλαδή, της ρίζας Perron του μετασχηματισμένου πίνακα) και της παραγώγου της, καθώς και το φάσμα, τη φασματική ακτίνα και το αριθμητικό πεδίο των σχεδόν-αντισυμμετρικών πινάκων. Παράλληλα, εξετάστηκε η σχετική γεωμετρία του δεξιού και αριστερού ιδιοχώρου Perron.

Στα πλαίσια της εργασίας, μελετάμε αναλυτικά οι σχεδόν-αντισυμμετρικοί πίνακες και ο μετασχηματισμός Levinger μέσω του οποίου επιτυγχάνονται “βελτιωμένα” φράγματα για τη ρίζα Perron, για να καταλήξουμε στην κατηγορία των πινάκων πρωταθλήματος. Πιο συγκεκριμένα, σε πρώτη φάση, εξετάζουμε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα των σχεδόν-αντισυμμετρικών πινάκων, και μελετάμε τη συμπεριφορά του φάσματος και του αριθμητικού πεδίου που έχουν υποστεί μετασχηματισμό Levinger. Κατασκευάζουμε φράγματα -μέσω του  $q$ -αριθμητικού πεδίου αυτή τη φορά- τόσο για τη συνάρτηση Levinger όσο και για την παράγωγό της. Τέλος, εφαρμόζουμε τα αποτελέσματα που έχουν προκύψει, στους πίνακες πρωταθλήματος. Αναλύουμε πώς αυτοί διακρίνονται σε πίνακες ισοπαλίας και πίνακες σχεδόν ισοπαλίας, σε ποιες περιπτώσεις επιτυγχάνεται η μέγιστη δυνατή ρίζα Perron και τότε παρατηρείται η μικρότερη δυνατή απόσταση από την κανονικότητα.

*Λέξεις κλειδιά:* Σχεδόν-αντισυμμετρικός πίνακας, Ρίζα Perron, Διάνυσμα Perron, Μετασχηματισμός Levinger, Συνάρτηση Levinger, Αριθμητικό πεδίο, Πίνακας πρωταθλήματος.

# Abstract

This dissertation began motivated by the conjecture of Brualdi-Li (1983) as to which tournament matrices present the utmost Perron root. This conjecture essentially aimed to prove whether or not the sense that as the Perron root increases, the corresponding tournament (whose rating is given by this matrix) is more ambiguous with “tendency” towards the ultimate tie.

The tournament matrices that have undergone parallel displacement by  $\frac{1}{2}$  belong to the category of almost skew symmetric matrices, that is the real ones, nonnegative matrices that have symmetric part of grade 1. Initially, Friedland was the one who generalized the tournament matrices in the nonnegative category, almost skew-symmetric matrices, by using analytical techniques and methods.

Later, Psarrakos and Tsatsomeros continued this effort with a series of 3 publications, whose subject is the conduct of the Perron root, the Perron eigenspace and the Levinger’s transformation of nonnegative, almost skew-symmetric matrices. The analysis of the specific matrices that has been held, showed the close relationship of the Perron root with the quantity that was defined as variance. This quantity is essentially a measure for the distance of the “rightmost” eigenvalue of a matrix from normality.

In this Perron root study, Friedland and Kirkland and then Psarrakos and Tsatsomeros built bounds using the Levinger’s transformation. More specifically, through this transformation, they studied the conduct of the Levinger’s function, (which is, the Perron root of the transformed matrix) and its derivative, as well as the spectrum, the spectral radius and the numerical range of the almost skew-symmetric matrices. At the same time, the relative geometry of the right and left Perron eigenspace was examined.

In this thesis, we study analytically the almost skew-symmetric matrices and the Levinger’s transformation through which “improved” bounds for the Perron root are achieved, so as to end up to the tournament matrices category. To be more specific, at first, we examine the eigenvalues and the eigenvectors of the almost skew-symmetric matrices and we study the behaviour of the spectrum and the numerical range that have undergone the Levinger’s transformation. We construct bounds – through the q-numerical range this time – both for the Levinger’s function and for its derivative. Lastly, we apply the results that have come of, to the tournament matrices. We analyze the way they are distinguished in draw matrices and in almost draw matrices, in which cases the utmost Perron root is achieved and when the least possible distance from the normality is observed.

*Keywords:* Almost skew-symmetric matrix, Perron root, Perron vector, Levinger’s transformation, Levinger’s function, Numerical range, Tournament matrix.



# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1</b> .....	<b>- 1 -</b>
<b>ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΝΑΚΩΝ ΚΑΙ ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ</b> .....	<b>- 1 -</b>
1.1 Χαρακτηριστικά Ποσά Πίνακα .....	- 2 -
1.2 Είδη Πινάκων.....	- 4 -
1.3 Συμπλήρωμα Schur (Schur Complement) .....	- 5 -
1.4 Αριθμητικό Πεδίο Πίνακα .....	- 5 -
1.5 Σχεδόν-Αντισυμμετρικοί Πίνακες.....	- 6 -
1.6 Μετασχηματισμός Levinger .....	- 7 -
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2</b> .....	<b>- 9 -</b>
<b>ΣΧΕΔΟΝ-ΑΝΤΙΣΥΜΜΕΤΡΙΚΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ</b> .....	<b>- 9 -</b>
2.1 Ιδιαιτητές και Ιδιάζουσες Τιμές .....	- 10 -
2.2 Μετασχηματισμός Levinger και Αριθμητικό Πεδίο .....	- 18 -
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3</b> .....	<b>- 24 -</b>
<b>ΙΔΙΟΧΩΡΟΙ PERRON ΜΗ ΑΡΝΗΤΙΚΩΝ ΣΧΕΔΟΝ-ΑΝΤΙΣΥΜΜΕΤΡΙΚΩΝ ΠΙΝΑΚΩΝ</b> .....	<b>- 24 -</b>
3.1 Δεξιό και Αριστερό Διάνυσμα Perron του Μετασχηματισμού Levinger .....	- 25 -
3.2 Συνάρτηση Levinger: Παράγωγος και Άνω Φράγματα .....	- 31 -
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4</b> .....	<b>- 39 -</b>
<b>ΦΡΑΓΜΑΤΑ ΓΙΑ ΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ LEVINGER ΜΗ ΑΡΝΗΤΙΚΩΝ ΣΧΕΔΟΝ-ΑΝΤΙΣΥΜΜΕΤΡΙΚΩΝ ΠΙΝΑΚΩΝ</b> .....	<b>- 39 -</b>
4.1 Ρίζες και Διανύσματα Perron .....	- 40 -
4.2 Συνάρτηση Levinger: Παράγωγος και Άνω Φράγματα .....	- 48 -
4.3 Πίνακες Tournament .....	- 56 -
<b>ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ</b> .....	<b>- 60 -</b>



# **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1**

## **ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΝΑΚΩΝ ΚΑΙ ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ**

Το πρώτο κεφάλαιο της διπλωματικής αυτής εργασίας αποσκοπεί στην υπενθύμιση ορισμένων βασικών στοιχείων της Θεωρίας Πινάκων και της Γραμμικής Άλγεβρας, οι οποίες κρίνονται απαραίτητες για την ευκολότερη κατανόηση του αντικειμένου που θα μελετηθεί στη συνέχεια. Πιο συγκεκριμένα, παρουσιάζονται συνοπτικά βασικά είδη πινάκων με τους ορισμούς και τις ιδιότητές τους καθώς και βασικές έννοιες των οποίων η ανάλυση γίνεται στα κεφάλαια που ακολουθούν. Για περαιτέρω εμβάθυνση, μπορεί κανείς να ανατρέξει στη βιβλιογραφία.

## 1.1 Χαρακτηριστικά Ποσά Πίνακα

Έστω ένας πίνακας  $A \in M_n$ . Το **πρόβλημα ιδιοποσών** του  $A$  είναι το γραμμικό σύστημα

$$Ax = \lambda x, \text{ όπου } x \in \mathbb{C}^n \text{ και } \lambda \in \mathbb{C},$$

το οποίο είναι ισοδύναμο με το ομογενές σύστημα

$$(I\lambda - A)x = 0.$$

Το τελευταίο έχει μη μηδενικές λύσεις αν και μόνο αν το  $\lambda$  επιλεγεί έτσι ώστε να ικανοποιεί τη **χαρακτηριστική εξίσωση**

$$|I\lambda - A| = 0.$$

Αναπτύσσοντας την ορίζουσα αυτή προκύπτει το **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** του πίνακα  $A$

$$p_A(\lambda) = \lambda^n + k_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + k_1 \lambda + k_0.$$

Οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του πίνακα  $A$ ,  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ ,  $m \leq n$ , καλούνται **ιδιοτιμές** του  $A$ , ενώ το σύνολο των ιδιοτιμών του πίνακα  $A$  ονομάζεται **φάσμα** του  $A$  και συμβολίζεται με  $\sigma(A)$ , δηλαδή

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{R} : p_A(\lambda) = 0\}.$$

Η **φασματική ακτίνα** του  $A$  ορίζεται ως

$$\rho(A) = \max \{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Πρόκειται, δηλαδή, για το μεγαλύτερο μέτρο ιδιοτιμής του πίνακα  $A$ .

Αντικαθιστώντας, τώρα, τις ιδιοτιμές  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  του πίνακα  $A$  στο ομογενές σύστημα, προκύπτουν  $\mu_i = n - \text{rank}(\lambda_i I - A)$  γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις του συστήματος,  $x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ik_i} \in \mathbb{R}^n$ , όπου  $\text{rank}(\cdot)$  ο βαθμός του πίνακα. Οι λύσεις αυτές αποτελούν τα **ιδιοδιανύσματα** του πίνακα  $A$  αντίστοιχα της ιδιοτιμής  $\lambda_i$ .

Το πλήθος των ιδιοδιανυσμάτων που αντιστοιχούν στη  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , ονομάζεται **γεωμετρική πολλαπλότητα** της  $\lambda_i$ . Τα συγκεκριμένα ιδιοδιανύσματα αποτελούν

βάση του διανυσματικού υπόχωρου  $\text{span}\{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{k_i}}\}$ , ο οποίος καλείται **ιδιόχωρος** του πίνακα  $A$ , αντίστοιχος της ιδιοτιμής  $\lambda_i$ .

Η πολλαπλότητα της  $\lambda_i$  ως ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου  $p_A(\lambda)$  λέγεται **αλγεβρική πολλαπλότητα** της  $\lambda_i$  και είναι πάντα μεγαλύτερη ή ίση της γεωμετρικής πολλαπλότητας.

Έστω πίνακας  $A \in M_n(\mathbb{C})$  και έστω  $\lambda \in \sigma(A)$ . Η  $\lambda$  καλείται **κανονική ιδιοτιμή** για τον πίνακα  $A$  αν:

(α) Η γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής  $\lambda$  είναι ίση με την αλγεβρική πολλαπλότητα της  $\lambda$ .

(β) Κάθε ιδιοδιάνυσμα του  $A$ , που αντιστοιχεί στη  $\lambda$ , είναι ορθογώνιο (κάθετο) σε κάθε άλλο ιδιοδιάνυσμα του  $A$  που αντιστοιχεί σε κάθε ιδιοτιμή διαφορετική της  $\lambda$ .

Σημείωση: Παρατηρεί κανείς ότι όταν ένας πίνακας έχει όλες τις ιδιοτιμές του κανονικές, τότε διαγωνοποιείται με ορθομοναδιαίο μετασχηματισμό.

Επιπλέον, ισχύουν οι ακόλουθες δύο προτάσεις που χρειαζόμαστε στη συνέχεια.

**Πρόταση 1.1** Έστω  $h + is$  ( $h, s \in \mathbb{R}$ ) μία απλή ιδιοτιμή του  $n \times n$  πραγματικού πίνακα  $A$  με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα  $u$ . Τότε, η ιδιοτιμή  $h + is \in \sigma(A)$  είναι κανονική, αν και μόνο αν οι πραγματικοί αριθμοί  $h$  και  $s$  είναι ιδιοτιμές των  $S(A)$  και  $K(A)$  αντίστοιχα, με τομή των ιδιοχώρων τους το  $\text{span}\{u\}$ .

**Πρόταση 1.2** Αν  $\lambda_0$  μία κανονική ιδιοτιμή ενός πίνακα  $A$ , πολλαπλότητας  $k$ , τότε υπάρχει ορθομοναδιαίος πίνακας  $V$  τέτοιος ώστε

$$V^*AV = \begin{bmatrix} \lambda_0 I_k & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix},$$

όπου  $B$  ένας  $(n - k) \times (n - k)$  πίνακας που δεν έχει ιδιοτιμή το  $\lambda_0$ .

**Πρόταση 1.3** Έστω  $A$  ένας  $n \times m$  μιγαδικός πίνακας. Τότε υπάρχουν ορθομοναδιαίοι πίνακες  $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$  και  $V \in \mathbb{C}^{m \times m}$  τέτοιοι ώστε

$$A = U \text{diag}\{s_1, s_2, \dots, s_{\min\{n,m\}}\} V^*$$

όπου  $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_{\min\{n,m\}} \geq 0$ .

Ο διαγώνιος πίνακας  $\text{diag}\{s_1, s_2, \dots, s_{\min\{n,m\}}\}$  συμβολίζεται με  $S$  και οι τιμές  $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_{\min\{n,m\}} \geq 0$  καλούνται **ιδιάζουσες τιμές** του πίνακα  $A$ .

Η ορθομοναδιαία αναλλοίωτη νόρμα Frobenius του  $A$ ,  $\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}^2|}$ , γράφεται

$$\|A\|_F = \sqrt{s_1 + s_2 + \dots + s_{\min\{n,m\}}}.$$

Επίσης, ισχύουν οι σχέσεις:

$$i) s_1(A) = \|A\|_2 = \max\{\sqrt{\lambda} : \lambda \in \sigma(A^*A)\},$$

$$(ii) \sum_{j=1}^n s_j^2(A) = \text{trace}(A^t A) = s_1 + s_2 + \dots + s_{\min\{n,m\}} = \|A\|_F^2 = -\text{trace}(A^2).$$

Επιπλέον, από τις σχέσεις

$$AA^* = U \text{diag}\{s_1^2, s_2^2, \dots, s_{\min\{n,m\}}^2\} U^*,$$

$$A^*A = U \text{diag}\{s_1^2, s_2^2, \dots, s_{\min\{n,m\}}^2\} V^*$$

συμπεραίνουμε ότι οι μη μηδενικές ιδιάζουσες τιμές του  $A$  είναι οι τετραγωνικές ρίζες των μη μηδενικών ιδιοτιμών των (θετικά ημιορισμένων) ερμιτιανών πινάκων  $AA^*$  και  $A^*A$ .

## 1.2 Είδη Πινάκων

Έστω τετραγωνικός πίνακας  $A \in M_n(\mathbb{C})$ .

- Ο  $A$  καλείται **ορθομοναδιαίος** ή **ορθοκανονικός**, όταν ισχύει μία από τις ισοδύναμες συνθήκες  $AA^* = I$ ,  $A^*A = I$ , όπου  $A^*$  ο αναστροφοσυζυγής του πίνακα  $A$ .
- Ο  $A$  καλείται **συμμετρικός** αν  $A = A^t$ , αν, δηλαδή, ταυτίζεται με τον ανάστροφό του.
- Ο  $A$  καλείται **αντισυμμετρικός** αν  $A = -A^t$ . Με άλλα λόγια, ο  $A$  είναι αντισυμμετρικός αν ταυτίζεται με τον αντίθετο του αναστρόφου του.
- Ο  $A$  ονομάζεται **ερμιτιανός** αν  $A = A^*$ , δηλαδή αν ο  $A$  ισούται με το συζυγή ανάστροφό του.
- Ο  $A$  ονομάζεται **αντιερμιτιανός** αν  $A = -A^*$ , δηλαδή, αν ο  $A$  ισούται με τον αντίθετο του συζυγή αναστρόφου του.

**Πρόταση 1.4** Αν ένας πίνακας  $A \in M_n(\mathbb{C})$  είναι ερμιτιανός, τότε οι ιδιοτιμές του είναι πραγματικές. Το ίδιο ισχύει αν ο  $A$  είναι πραγματικός, συμμετρικός πίνακας.

**Πρόταση 1.5** Οι αντierreμιανοί πίνακες έχουν φανταστικές ιδιοτιμές.

**Πρόταση 1.6** Έστω  $A$  ένας  $n \times n$  μιγαδικός πίνακας με ιδιοτιμές  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ . Τότε:

- Αν ο  $A$  είναι ερμιτιανός, υπάρχει ορθομοναδιαίος πίνακας  $U$  τέτοιος ώστε

$$U^*AU = \text{diag}\{\lambda_i\}.$$

- Αν ο  $A$  είναι συμμετρικός, υπάρχει πραγματικός ορθομοναδιαίος πίνακας  $U$  τέτοιος ώστε

$$U^tAU = \text{diag}\{\lambda_i\}.$$

### 1.3 Συμπλήρωμα Schur (Schur Complement)

Έστω  $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$  διάστασης  $(n+m) \times (n+m)$  μπλοκ πίνακας, όπου  $A, B, C, D$  είναι  $n \times n$ ,  $n \times m$ ,  $m \times n$  και  $m \times m$  πίνακες αντίστοιχα και ο  $D$  είναι αντιστρέψιμος. Τότε για τον πίνακα  $M$ , το **συμπλήρωμα Schur ως προς  $D$**  είναι ο  $n \times n$  πίνακας  $A - BD^{-1}C$ , ενώ το **συμπλήρωμα Schur ως προς  $A$**  είναι ο  $m \times m$  πίνακας  $D - CA^{-1}B$ .

Όσον αφορά στην ορίζουσα του πίνακα  $M$ , ισχύει το εξής:

$$\begin{aligned} \det M &= \det D \cdot \det (A - BD^{-1}C) \\ &= \det A \cdot \det (D - CA^{-1}B). \end{aligned}$$

### 1.4 Αριθμητικό Πεδίο Πίνακα

Έστω ένας τετραγωνικός πίνακας  $A \in M_n(\mathbb{C})$ . Το **αριθμητικό πεδίο** του  $A$  ορίζεται ως το σύνολο

$$F(A) = \{x^*Ax \in \mathbb{C}^n : x^*x = 1\},$$

ενώ η **αριθμητική ακτίνα** του  $A$  ορίζεται ως

$$r(A) = \max\{|z| : z \in F(A)\}.$$

Το αριθμητικό πεδίο  $F(A)$  είναι ένα συμπαγές και κυρτό υποσύνολο του  $\mathbb{C}$  το οποίο περιέχει το φάσμα του  $A$ ,  $\sigma(A)$ .

Για τον ίδιο πίνακα  $A$  ορίζουμε τον

$$S(A) = \frac{A + A^t}{2}$$

να είναι το **συμμετρικό μέρος** του πίνακα  $A$  και τον

$$K(A) = \frac{A - A^t}{2}$$

να είναι το **αντισυμμετρικό μέρος** του  $A$ .

Επειδή, στη συνέχεια θα μελετήσουμε αποκλειστικά πραγματικούς πίνακες, περιοριζόμαστε στους παραπάνω ορισμούς των  $S(A)$  και  $K(A)$  χωρίς να αναφερόμαστε σε ερμιτιανό και αντιερμιτιανό μέρος.

Προφανώς, για πραγματικό πίνακα  $A$  είναι  $A = S(A) + K(A)$ .

Επίσης, ισχύει ότι

$$\operatorname{Re}F(A) = F\left(\frac{A+A^t}{2}\right) = F(S(A)) \quad \text{και} \quad \operatorname{Im}F(A) = F\left(\frac{A-A^t}{2}\right) = F(K(A)).$$

Επομένως, το αριθμητικό πεδίο ενός πραγματικού συμμετρικού (αντίστοιχα, αντισυμμετρικού) πίνακα είναι ένα πραγματικό (αντίστοιχα, φανταστικό) διάστημα που ταυτίζεται με την κυρτή θήκη των ιδιοτιμών του πίνακα. Σημειώνεται, επίσης, ότι το αριθμητικό πεδίο ενός τυχαίου, πραγματικού, τετραγωνικού πίνακα είναι πάντα συμμετρικό ως προς τον πραγματικό άξονα.

## 1.5 Σχεδόν-Αντισυμμετρικοί Πίνακες

Ένας  $A$   $n \times n$  πραγματικός πίνακας καλείται **σχεδόν-αντισυμμετρικός** όταν το συμμετρικό μέρος του είναι βαθμού 1. Κάθε κύριος υποπίνακας ενός σχεδόν-αντισυμμετρικού πίνακα είναι ή αντισυμμετρικός ή σχεδόν-αντισυμμετρικός.

Για ένα σχεδόν-αντισυμμετρικό πίνακα  $A \in M_n(\mathfrak{R})$ , συμβολίζουμε με  $\delta(A)$  τη μοναδική μη μηδενική ιδιοτιμή του  $S(A)$  και θεωρούμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι  $\delta(A) = \rho(S(A)) > 0$ . Τότε, για κάποιο μη μηδενικό διάνυσμα  $w \in \mathfrak{R}^n$ , ισχύει  $S(A) = ww^t$  και  $\delta(A) = w^t w$ .

Για δοσμένο σχεδόν-αντισυμμετρικό πίνακα  $A \in M_n(\mathfrak{R})$  με συμμετρικό μέρος  $S(A) = ww^t$ , ορίζεται η διασπορά του  $A$  ως

$$v(A) = \frac{\|K(A)w\|_2^2}{\|w\|_2^2} = \frac{w^t(K(A)^t K(A))w}{w^t w}.$$

Παρατηρούμε ότι το  $\frac{w}{\|w\|_2}$  είναι το μοναδιαίο ιδιοδιάνυσμα του  $S(A)$  που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή  $\delta(A) = w^t w$ . Αν  $v(A) = 0$ , τότε το ζεύγος  $(\delta(A), w)$  αποτελεί το ιδιοζεύγος (δηλαδή ιδιοτιμή και ιδιοδιάνυσμα) για τους πίνακες  $A, A^t$ . Καταλήγουμε, έτσι, στο συμπέρασμα ότι η διασπορά  $v(A)$  συνιστά ένα “μέτρο” του πόσο κοντά είναι το  $\delta(A)$  σε μία κανονική ιδιοτιμή του  $A$ .

## 1.6 Μετασχηματισμός Levinger

Έστω  $A \in M_n(\mathbb{R})$  ένας σχεδόν-αντισυμμετρικός πίνακας με συμμετρικό μέρος  $S(A) = ww^t$ , όπου  $w \in \mathbb{R}^n$ . Τότε, ο **μετασχηματισμός Levinger** για τον πίνακα  $A$  είναι ο εξής:

$$L(A, \alpha) = (1 - \alpha)A + \alpha A^t, \quad \alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right].$$

Αντίστοιχα, η **συνάρτηση Levinger** ορίζεται ως η φασματική ακτίνα του μετασχηματισμού Levinger,

$$\varphi(A, \alpha) = \rho(L(A, \alpha)) = \rho((1 - \alpha)A + \alpha A^t), \quad \alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right].$$

Σημειώνεται ότι ο μετασχηματισμός και η συνάρτηση Levinger ορίζονται για κάθε πραγματική τιμή του  $\alpha$ , αλλά εμείς θα περιοριστούμε στο διάστημα  $\left[0, \frac{1}{2}\right]$  που ουσιαστικά συνδέει τον πίνακα  $A$  με το συμμετρικό του μέρος.

Γνωρίζοντας ότι  $A = S(A) + K(A)$  με  $S(A) = \frac{A+A^t}{2}$  και  $K(A) = \frac{A-A^t}{2}$ , από το μετασχηματισμό Levinger προκύπτει:

$$\begin{aligned} (1.1) \quad L(A, \alpha) &= A - \alpha A + \alpha A^t = A - \alpha(A - A^t) = A - 2\alpha K(A) \\ &= S(A) + K(A) - 2\alpha K(A) = S(A) + (1 - 2\alpha)K(A). \end{aligned}$$

Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι ο μετασχηματισμός Levinger  $L(A, \alpha)$  είναι, επίσης, σχεδόν-αντισυμμετρικός πίνακας.

Ισχύουν τα εξής:

i)  $L(A, 0) = S(A) + K(A) = A$ .

ii)  $L(A, 1) = S(A) - K(A) = \frac{A+A^t}{2} - \frac{A-A^t}{2} = \frac{A+A^t-A+A^t}{2} = A^t$ .

$$\text{iii) } L\left(A, \frac{1}{2}\right) = S(A) + \left(1 - 2 \cdot \frac{1}{2}\right)K(A) = S(A).$$

$$\text{iv) } \varphi(A, 0) = \rho(L(A, 0)) = \rho(A).$$

$$\text{v) } \varphi\left(A, \frac{1}{2}\right) = \rho\left(L\left(A, \frac{1}{2}\right)\right) = \rho(S(A)) = \delta(A).$$

Ακόμα,

$$(1.2) \quad L\left(A, \frac{1}{2} + a\right) = L\left(A^t, \frac{1}{2} - a\right).$$

Για τη διασπορά του  $L(A, a)$  έχουμε από την (1.1) ότι  $S(L(A, a)) = S(A) = ww^t$ , ενώ από τον ορισμό της διασποράς ισχύει ότι

$$v(L(A, a)) = \frac{\|K(L(A, a))w\|_2^2}{\|w\|_2^2} = (1 - 2a)^2 v(A).$$



## **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2**

### **ΣΧΕΔΟΝ-ΑΝΤΙΣΥΜΜΕΤΡΙΚΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ**

Το κεφάλαιο αυτό έχει ως αντικείμενο τους σχεδόν-αντισυμμετρικούς πίνακες. Πρόκειται για μία κατηγορία πραγματικών πινάκων των οποίων, όπως αναφέρθηκε νωρίτερα, το συμμετρικό μέρος είναι βαθμού ένα. Με χρήση της καινούριας έννοιας του αριθμητικού πεδίου μελετάμε σε τι τιμές κυμαίνονται οι ιδιοτιμές και πώς το φάσμα των σχεδόν-αντισυμμετρικών πινάκων “τοποθετείται” στο μιγαδικό επίπεδο. Παρουσιάζεται, επίσης, η συμπεριφορά του φάσματος  $\sigma(\cdot)$  αλλά και του αριθμητικού πεδίου  $F(\cdot)$  ύστερα από μετασχηματισμό Levinger.

## 2.1 Ιδιοτιμές και Ιδιάζουσες Τιμές

Αρχικά, στο Κεφάλαιο 1 θεωρήσαμε ότι  $\delta(A) > 0$ , γεγονός που συνεπάγεται ότι ένας σχεδόν-αντισυμμετρικός πίνακας  $A$  είναι ασθενώς θετικά σταθερός. Με άλλα λόγια, για κάθε  $\lambda \in \sigma(A)$  ισχύει ότι  $Re\lambda \geq 0$ . Στο παρακάτω θεώρημα, το οποίο αποτελεί ένα από τα βασικότερα θεωρήματα που θα εξετάσουμε, δίνεται μία άλλη σημαντική ανισότητα που ισχύει επίσης για κάθε ιδιοτιμή του πίνακα  $A$ . Η ανισότητα αυτή θα μας δώσει στη συνέχεια τη θέση του φάσματος  $\sigma(A)$ , μέσω μιας καμπύλης στο μιγαδικό επίπεδο.

**Θεώρημα 2.1** Έστω  $A \in M_n(\mathbb{R})$ , σχεδόν-αντισυμμετρικός πίνακας και έστω  $\lambda$  μια ιδιοτιμή του  $A$ . Τότε:

$$(2.1) \quad (Im\lambda)^2 Re\lambda \leq (\delta(A) - Re\lambda)[v(A) + Re\lambda(Re\lambda - \delta(A))].$$

### Απόδειξη

Εάν  $\lambda = \delta(A)$ , τότε η (2.1) ισχύει τετριμμένα.

Εάν  $Re\lambda = 0$ , τότε  $\delta(A) v(A) \geq 0$  που ισχύει. Άρα ισχύει και η (2.1).

Έστω τώρα ότι  $\lambda \neq \delta(A)$  και  $Re\lambda \neq 0$ . Θέτουμε  $y = \frac{w}{\|w\|_2} \in \mathbb{R}^n$  να είναι το μοναδιαίο ιδιοδιάνυσμα του  $S(A) = ww^t$  που αντιστοιχεί στην απλή ιδιοτιμή  $\delta(A)$ . Τότε, από Πρόταση 1.6, υπάρχει ορθομοναδιαίος πίνακας  $U \in M_n(\mathbb{R})$  με την ιδιότητα ότι η πρώτη του στήλη είναι το ιδιοδιάνυσμα  $y$ . Δηλαδή, ισχύει ότι

$$U^t S(A) U = \text{diag}\{\delta(A), 0, \dots, 0\} = \begin{bmatrix} \delta(A) & 0 \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Επίσης, καθώς ο πίνακας  $U^t K(A) U$  είναι πραγματικός, αντισυμμετρικός, έχουμε ότι

$$(2.2) \quad U^t K(A) U = \begin{bmatrix} 0 & -u^t \\ u & K_1 \end{bmatrix},$$

όπου ο  $K_1 \in M_{n-1}(\mathfrak{R})$  αντισυμμετρικός πίνακας και  $u \in \mathfrak{R}^{n-1}$  διάνυσμα.

Επομένως, προκύπτει ότι

$$U^t A U = \begin{bmatrix} \delta(A) & -u^t \\ u & K_1 \end{bmatrix}$$

και ο πίνακας

$$U^t (A - \lambda I) U = \begin{bmatrix} \delta(A) - \lambda & -u^t \\ u & K_1 - \lambda I \end{bmatrix}$$

είναι μη αντιστρέψιμος.

Το Schur complement ως προς τον υποπίνακα  $K_1 - \lambda I$  [βλέπε R. Horn and S.J. Johnson, 1990] είναι

$$E = K_1 - \lambda I + \frac{1}{\delta(A) - \lambda} u u^t.$$

Η ορίζουσα του  $U^t (A - \lambda I) U$  είναι ίση με 0, άρα και η ορίζουσα του  $E$  είναι 0, άρα  $0 \in \sigma(E)$ . Πιο αναλυτικά για τον  $E$  έχουμε:

$$\begin{aligned} E &= K_1 - \lambda I + \frac{1}{\delta(A) - \lambda} u u^t \\ &= K_1 - (\operatorname{Re} \lambda - i \operatorname{Im} \lambda) I + \frac{1}{\delta(A) - \operatorname{Re} \lambda - i \operatorname{Im} \lambda} u u^t \\ &= K_1 - (\operatorname{Re} \lambda) I - (i \operatorname{Im} \lambda) I + \frac{\delta(A) - \operatorname{Re} \lambda + i \operatorname{Im} \lambda}{|\delta(A) - \operatorname{Re} \lambda|^2 + |\operatorname{Im} \lambda|^2} u u^t \\ &= (-\operatorname{Re} \lambda) I + \frac{\delta(A) - \operatorname{Re} \lambda}{|\delta(A) - \operatorname{Re} \lambda|^2 + |\operatorname{Im} \lambda|^2} u u^t + K_1 - (i \operatorname{Im} \lambda) I \\ &\quad + \frac{i \operatorname{Im} \lambda}{|\delta(A) - \operatorname{Re} \lambda|^2 + |\operatorname{Im} \lambda|^2} u u^t \end{aligned}$$

με

$$M = (-\operatorname{Re} \lambda) I + \frac{\delta(A) - \operatorname{Re} \lambda}{|\delta(A) - \operatorname{Re} \lambda|^2 + |\operatorname{Im} \lambda|^2} u u^t$$

να είναι το συμμετρικό μέρος του  $E$  και

$$N = K_1 - (i \operatorname{Im} \lambda) I + \frac{i \operatorname{Im} \lambda}{|\delta(A) - \operatorname{Re} \lambda|^2 + |\operatorname{Im} \lambda|^2} u u^t$$

να είναι το αντισυμμετρικό μέρος του  $E$ .

Ακόμη, όπως γνωρίζουμε, (βλέπε [Horn-Johnson, 1991])  $\sigma(E) \subseteq F(E)$  και  $F(M) = ReF(E)$ . Οπότε,

$$0 \in \sigma(E) \Rightarrow 0 \in F(E) \Rightarrow 0 \in ReF(E) \Rightarrow 0 \in F(M),$$

γεγονός που συνεπάγεται ότι

$$Re\lambda \in \frac{\delta(A) - Re\lambda}{(\delta(A) - Re\lambda)^2 + (Im\lambda)^2} F(uu^t) = \frac{\delta(A) - Re\lambda}{(\delta(A) - Re\lambda)^2 + (Im\lambda)^2} \cdot [0, uu^t].$$

Καθώς το  $F(uu^t)$  συμπίπτει με το διάστημα  $[0, u^t u]$  (βλέπε [Ψαρράκος, 2014]) και αφού  $\delta(A) > 0$ , έχουμε ότι

$$\begin{aligned} Re\lambda &\leq \frac{\delta(A) - Re\lambda}{(\delta(A) - Re\lambda)^2 + (Im\lambda)^2} (u^t u) \\ \Leftrightarrow Re\lambda [(\delta(A) - Re\lambda)^2 + (Im\lambda)^2] &\leq (\delta(A) - Re\lambda)(u^t u) \\ \Leftrightarrow Re\lambda (Im\lambda)^2 &\leq -Re\lambda (\delta(A) - Re\lambda)^2 + (\delta(A) - Re\lambda)(u^t u) \\ \Leftrightarrow Re\lambda (Im\lambda)^2 &\leq (\delta(A) - Re\lambda) \left[ \frac{u^t u}{Re\lambda} - (\delta(A) - Re\lambda) \right]. \end{aligned}$$

Μένει να δείξουμε ότι

$$(2.3) \quad u^t u = v(A).$$

Θεωρώντας το πρώτο διάνυσμα της κανονικής βάσης  $e_1$  στον  $\mathfrak{R}^n$ , έχουμε ότι

$$u^t u = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix} \right\|_2^2 = \left\| U \begin{bmatrix} 0 & -u^t \\ u & K_1 \end{bmatrix} e_1 \right\|_2^2 = \left\| U \begin{bmatrix} 0 & -u^t \\ u & K_1 \end{bmatrix} U^t U e_1 \right\|_2^2 = \|K(A)y\|_2^2 = v(A)$$

διότι

$$U e_1 = [y \mid u_2 \cdots u_n] \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = y.$$

Η απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

**Πόρισμα 2.2** Έστω  $A \in M_n(\mathfrak{R})$  σχεδόν-αντισυμμετρικός πίνακας και έστω ότι  $v(A) < \frac{\delta^2(A)}{4}$ . Τότε για κάθε ιδιοτιμή  $\lambda$  του πίνακα  $A$  ισχύει:

$$Re\lambda \notin \left( \frac{\delta(A) - \sqrt{\delta^2(A) - 4v(A)}}{2}, \frac{\delta(A) + \sqrt{\delta^2(A) - 4v(A)}}{2} \right).$$

Απόδειξη

Έστω  $\lambda$  μια ιδιοτιμή του πίνακα  $A$ . Είναι προφανές ότι ισχύει

$$\frac{\delta(A) - \sqrt{\delta^2(A) - 4v(A)}}{2} \geq 0 \quad \text{και} \quad \delta(A) \geq \frac{\delta(A) + \sqrt{\delta^2(A) - 4v(A)}}{2}.$$

Εξετάζουμε την περίπτωση όπου  $Re\lambda \neq 0$  και  $\lambda \neq \delta(A)$ . Τότε, από τη σχέση (2.1), έχουμε ότι:

$$(Im\lambda)^2 \leq \frac{(\delta(A) - Re\lambda)}{Re\lambda} [v(A) + Re\lambda(Re\lambda - \delta(A))]$$

$$\Rightarrow \frac{(\delta(A) - Re\lambda)}{Re\lambda} [v(A) + Re\lambda(Re\lambda - \delta(A))] \geq 0$$

$$(2.4) \quad \Rightarrow (\delta(A) - Re\lambda) \left( \frac{v(A)}{Re\lambda} + Re\lambda - \delta(A) \right) \geq 0.$$

Επίσης,  $0 \leq Re\lambda \leq \delta(A) \Rightarrow \delta(A) - Re\lambda \geq 0$  και, άρα, από σχέση (2.4),

$$\frac{v(A)}{Re\lambda} + Re\lambda - \delta(A) \geq 0$$

$$\Rightarrow v(A) + (Re\lambda)^2 - \delta(A)Re\lambda \geq 0$$

$$\Rightarrow (Re\lambda)^2 - \delta(A)Re\lambda + v(A) \geq 0.$$

Καταλήξαμε σε ένα τριώνυμο ως προς  $Re\lambda$  με διακρίνουσα  $\Delta = \delta^2(A) - 4v(A) > 0$ , καθώς από υπόθεση  $v(A) < \frac{\delta^2(A)}{4} \Rightarrow \delta^2(A) > 4v(A)$ . Άρα, οι ρίζες  $\rho_1, \rho_2$  του τριωνύμου είναι:

$$\rho_{1,2} = \frac{\delta(A) \pm \sqrt{\delta^2(A) - 4v(A)}}{2}.$$

Επομένως,

$$Re\lambda \in \left( -\infty, \frac{\delta(A) - \sqrt{\delta^2(A) - 4v(A)}}{2} \right) \cup \left( \frac{\delta(A) + \sqrt{\delta^2(A) - 4v(A)}}{2}, +\infty \right).$$

Και, έτσι, η απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

Πριν ολοκληρωθεί η πρώτη παράγραφος αυτού του κεφαλαίου, θα αναφερθούμε στο κέλφος, δηλαδή στην καμπύλη  $\Gamma(A)$  του μιγαδικού επιπέδου και θα δούμε σχηματικά πώς αυτή καθορίζεται από τη διασπορά  $v(A)$  και τη μη μηδενική ιδιοτιμή  $\delta(A)$  του πίνακα  $S(A)$ .

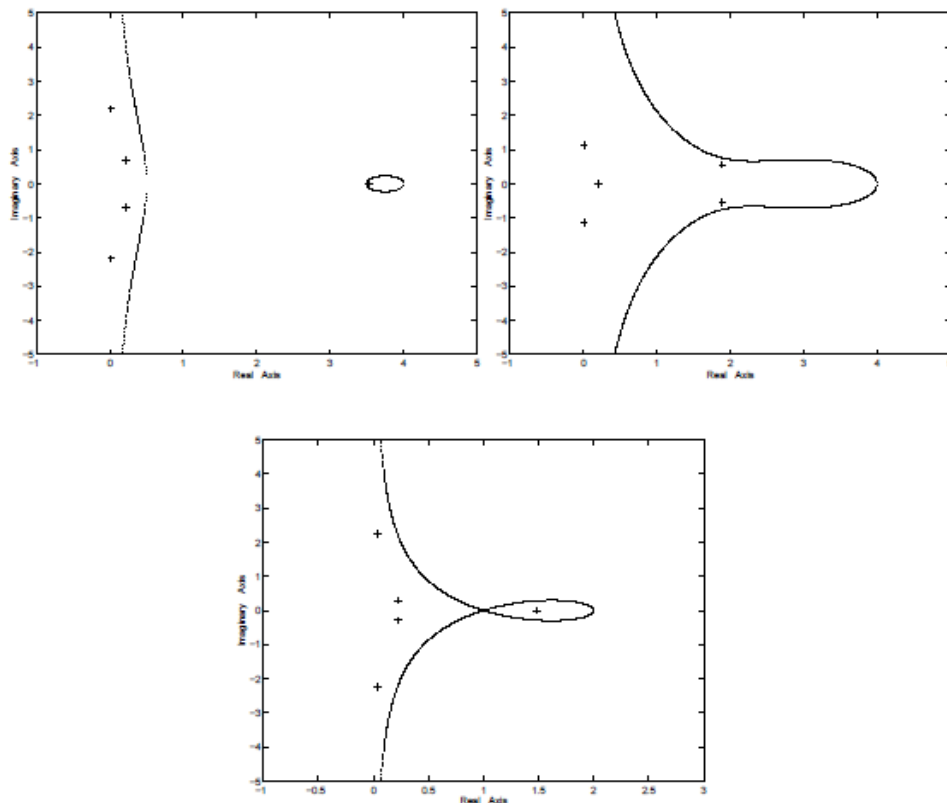
**Ορισμός 2.3** Έστω  $A$  ένας  $n \times n$  πραγματικός, σχεδόν-αντισυμμετρικός πίνακας. Ορίζουμε **κέλυφος** να είναι η καμπύλη στο μιγαδικό επίπεδο που δίνεται ως

$$\Gamma(A) = \{x + iy \in \mathbb{C} : x, y \in \mathbb{R} \text{ και } y^2 = (\delta(A) - x) \left( \frac{v(A)}{x} + x - \delta(A) \right)\}.$$

Η καμπύλη  $\Gamma(A)$  εξαρτάται μόνο από τη διασπορά  $v(A)$  και από τη μη μηδενική ιδιοτιμή του  $S(A)$ . Επίσης, είναι συμμετρική ως προς τον πραγματικό άξονα, τον οποίο και τέμνει στο σημείο  $\delta(A)$ . Εάν  $v(A) \geq \frac{\delta^2(A)}{4}$ , τότε η  $\Gamma(A)$  αποτελείται από ένα μη φραγμένο κλάδο. Σε άλλη περίπτωση, δηλαδή αν  $v(A) < \frac{\delta^2(A)}{4}$ , η  $\Gamma(A)$  αποτελείται από ένα μη φραγμένο και ένα φραγμένο κλάδο, ενώ ταυτόχρονα τέμνει τον άξονα των πραγματικών στα σημεία  $\frac{\delta(A) \pm \sqrt{\delta^2(A) - 4v(A)}}{2}$ .

### Παράδειγμα – Σχηματική Αποτύπωση

Έστω οι  $5 \times 5$  σχεδόν-αντισυμμετρικοί πίνακες  $A$ ,  $B$  και  $C$  με διασπορές  $v(A) = 1.75$ ,  $v(B) = 4.5$  και  $v(C) = 1$  και  $\delta(A) = 4$ ,  $\delta(B) = 4$  και  $\delta(C) = 2$ . Οι ιδιοτιμές καθενός από αυτούς τους πίνακες συμβολίζεται στα σχήματα που ακολουθούν με “+”.



Κελύφη  $\Gamma(A)$ ,  $\Gamma(B)$  και  $\Gamma(C)$ .

Στα παραπάνω διαγράμματα μπορεί κανείς να διακρίνει όσα αναφέραμε νωρίτερα σχετικά με τους κλάδους του κελύφους  $\Gamma(\cdot)$ . Συγκεκριμένα, στο πρώτο σχήμα, που αντιστοιχεί στον πίνακα  $A$ , το κέλυφος  $\Gamma(A)$  αποτελείται από ένα φραγμένο και ένα μη φραγμένο κλάδο. Το γεγονός αυτό δικαιολογείται με βάση τη θεωρία που έχουμε περιγράψει, καθώς ισχύει ότι  $v(A) = 1.75 < \frac{\delta^2(A)}{4} = \frac{16}{4} = 4$ . Παρατηρούμε ότι ο φραγμένος κλάδος περιβάλλει την πραγματική ιδιοτιμή του πίνακα  $A$ , ενώ ο μη φραγμένος κλάδος “απομονώνει” τις υπόλοιπες ιδιοτιμές του φάσματος του  $A$ . Επίσης, το κέλυφος  $\Gamma(B)$  είναι μία συνεκτική καμπύλη, ενώ όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα  $B$  περικλείονται ανάμεσα στην καμπύλη αυτή και στο φανταστικό άξονα, γεγονός που έρχεται σε συμφωνία με τη θεωρία, καθώς ισχύει ότι  $v(B) = 4.5 > \frac{\delta^2(B)}{4} = \frac{16}{4} = 4$ . Τέλος, παρατηρούμε ότι η καμπύλη  $\Gamma(C)$  αποτελείται από ένα μη φραγμένο συνεκτικό τμήμα, καθώς ισχύει ότι  $v(C) = 1 = \frac{\delta^2(C)}{4} = \frac{4}{4}$ .

**Θεώρημα 2.4** Έστω  $A \in M_n(\mathbb{R})$  σχεδόν-αντισυμμετρικός πίνακας και έστω  $\lambda$  μια ιδιοτιμή του, με  $\lambda \in \sigma(A) \cap \Gamma(A)$ . Τότε θα ισχύει μόνο ένα από τα παρακάτω:

$$(\alpha) \quad \lambda = \delta(A)$$

ή

$$(\beta) \quad \lambda = \frac{\delta(A) \pm \sqrt{\delta^2(A) - 4v(A)}}{2} \quad \text{και} \quad v(A) \leq \frac{\delta^2(A)}{4}.$$

#### Απόδειξη

Αν  $\lambda = \delta(A)$ , τότε προφανώς η ιδιοτιμή  $\lambda$  είναι το δεξιότερο σημείο του κελύφους  $\Gamma(A)$ .

Έστω  $\lambda \neq \delta(A)$  μια ιδιοτιμή του  $A$  με  $Re\lambda \neq 0$ . Θεωρούμε τους πίνακες  $E, M$  και  $N$  όπως ορίστηκαν στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.1. Από τη σχέση (2.1) έχουμε ότι

$$(Im\lambda)^2 = (\delta(A) - Re\lambda) \left[ \frac{v(A)}{Re\lambda} + Re\lambda - \delta(A) \right].$$

Η ισότητα αυτή ισχύει αν και μόνο αν

$$Re\lambda = \frac{\delta(A) - Re\lambda}{(\delta(A) - Re\lambda)^2 + (Im\lambda)^2} (u^t u),$$

ή, ισοδύναμα, αν και μόνο αν η μεγαλύτερη ιδιοτιμή του  $M$  είναι

$$\frac{\delta(A) - Re\lambda}{(\delta(A) - Re\lambda)^2 + (Im\lambda)^2} (u^t u) - Re\lambda = 0,$$

ή, πάλι ισοδύναμα, αν και μόνο αν ο πίνακας  $M$  έχει το  $0$  ως μέγιστη ιδιοτιμή, δηλαδή είναι (μη αντιστρέψιμος) αρνητικά ημιορισμένος. Σε αυτήν την περίπτωση, η ιδιοτιμή  $0 \in \sigma(M)$  είναι απλή και αντιστοιχεί στο ιδιοδιάνυσμα  $u \in \mathbb{R}^{n-1}$  που συναντήσαμε νωρίτερα.

Επίσης, ο πίνακας  $E$  είναι μη αντιστρέψιμος και το  $0$  ανήκει στο σύνορο του αριθμητικού πεδίου του  $E$  (ως το δεξιότερό του σημείο), καθώς  $ReF(E) = F(M)$ . Επομένως, το  $0$  θα είναι κανονική (απλή) ιδιοτιμή του  $E$  (βλέπε Θεώρημα 1.6.6 του [Horn-Johnson, 1991]) και κάθε αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα της -που φυσικά θα ανήκει στο  $span(u)$ - θα ανήκει στην τομή  $null(M) \cap null(N)$ . Άρα, το  $u$  είναι ιδιοδιάνυσμα και του πίνακα  $N$  που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή  $0$ .

Επιπλέον, παρατηρούμε ότι το  $u$  είναι ιδιοδιάνυσμα του πίνακα (βαθμού 1)

$$\frac{Im\lambda}{(\delta(A) - Re\lambda)^2 + (Im\lambda)^2} uu^t,$$

που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή

$$\frac{Im\lambda (u^t u)}{(\delta(A) - Re\lambda)^2 + (Im\lambda)^2}.$$

Επομένως, ο αριθμός

$$iIm\lambda - \frac{iIm\lambda (u^t u)}{(\delta(A) - Re\lambda)^2 + (Im\lambda)^2} = iIm\lambda \left( 1 - \frac{u^t u}{(\delta(A) - Re\lambda)^2 + (Im\lambda)^2} \right)$$

είναι ιδιοτιμή του πίνακα

$$K_1 = N + (iIm\lambda)I - \frac{iIm\lambda}{(\delta(A) - Re\lambda)^2 + (Im\lambda)^2} uu^t$$

με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το  $u$ , αφού  $N = K_1 - (iIm\lambda)I + \frac{iIm\lambda}{|\delta(A) - Re\lambda|^2 + |Im\lambda|^2} uu^t$ , όπως είδαμε στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.1.

Για το λόγο αυτό,

$$\frac{u^t K_1 u}{u^t u} = iIm\lambda - \frac{iIm\lambda (u^t u)}{(\delta(A) - Re\lambda)^2 + (Im\lambda)^2} = (iIm\lambda) \left( 1 - \frac{u^t u}{(\delta(A) - Re\lambda)^2 + (Im\lambda)^2} \right).$$

Με την ίδια διαδικασία για το  $\bar{\lambda} \in \sigma(A)$ , αποδεικνύεται ότι

$$\frac{u^t K_1 u}{u^t u} = (iIm\bar{\lambda}) \left( 1 - \frac{u^t u}{(\delta(A) - Re\lambda)^2 + (Im\bar{\lambda})^2} \right)$$

και τελικά (αφού  $Im\bar{\lambda} = -Im\lambda$ ), προκύπτει ότι  $Im\lambda = 0$ .



Έχουμε, λοιπόν, συμπεράνει ότι η παρουσία ιδιοτιμών του  $A$  πάνω στο κέλυφος συνεπάγεται ότι η εξίσωση

$$(\delta(A) - \lambda)[v(A)/\lambda + (\lambda - \delta(A))] = 0$$

έχει μόνο πραγματικές ρίζες. Επομένως η διακρίνουσα είναι μη αρνητική, απ' όπου προκύπτει ότι  $v(A) \leq \frac{\delta^2(A)}{4}$ , και οι πραγματικές ρίζες είναι  $\lambda = \frac{\delta(A) \pm \sqrt{\delta^2(A) - 4v(A)}}{2}$ .

□

Υπενθύμιση: Αν  $A$  ένας  $n \times m$  μιγαδικός πίνακας, τότε υπάρχουν ορθομοναδιαίοι πίνακες  $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$  και  $V \in \mathbb{C}^{m \times m}$  τέτοιοι ώστε

$$A = U \text{diag}\{s_1, s_2, \dots, s_{\min\{n,m\}}\} V^*,$$

όπου τα  $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_{\min\{n,m\}} \geq 0$  καλούνται **ιδιάζουσες τιμές** του πίνακα  $A$ .

Επίσης, ισχύουν οι ιδιότητες:

(i)  $s_1(A) = \|A\|_2 = \max\{\sqrt{\lambda} : \lambda \in \sigma(A^*A)\}$ ,

(ii)  $\sum_{j=1}^n s_j^2(A) = \text{trace}(A^t A) = s_1 + s_2 + \dots + s_{\min\{n,m\}} = \|A\|_F^2 = -\text{trace}(A^2)$ .

Το θεώρημα που ακολουθεί είναι μία γενίκευση της Πρότασης 2.4 του άρθρου [Gregory-Kirkland, 1999].

**Θεώρημα 2.5** Έστω  $A$  ένας  $n \times n$  πραγματικός, σχεδόν-αντισυμμετρικός πίνακας. Θεωρούμε  $K_1$  τον πίνακα όπως αυτός ορίστηκε στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.1 (σχέση 2.2) και  $\|K_1\|_F$  τη Frobenius νόρμα. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

(i)  $\sigma_1(A) \geq \delta(A)$ .

(ii)  $\|A\|_F^2 = \sum_{j=1}^n \sigma_j^2(A) = \delta^2(A) + 2v(A) + \|K_1\|_F^2$ .

(iii)  $\sigma_n^2(A) \leq \frac{\|K_1\|_F^2 + 2v(A)}{n-1}$ .

### Απόδειξη

(i) Γνωρίζουμε ότι είναι  $\delta(A) = w^t w = \sigma_1(S(A))$ . Όμως,  $\sigma_1(S(A)) \leq \sigma_1(A)$ . Επομένως,  $\sigma_1(A) \geq \delta(A)$ .

(ii) Επειδή οι ιδιάζουσες τιμές των πινάκων  $A$  και  $U^t A U$  ( $U^t A U$  όπως έχει οριστεί στο Θεώρημα 2.1) συμπίπτουν, έχουμε:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^n \sigma_j^2(A) &= \text{trace}(A^t A) = \text{trace}((U^t A U)^t (U^t A U)) \\
&= \text{trace} \left( \begin{bmatrix} \delta(A) & u^t \\ -u & -K_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta(A) & -u^t \\ u & K_1 \end{bmatrix} \right) \\
&= \text{trace} \left( \begin{bmatrix} \delta^2(A) + u^t u & -\delta(A)u^t + u^t K_1 \\ -\delta(A)u - K_1 u & uu^t - K_1^2 \end{bmatrix} \right) \\
&= \delta^2(A) + u^t u + \text{trace}(uu^t) - \text{trace}(K_1^2) \\
&= \delta^2(A) + v(A) + v(A) - \text{trace}(K_1^2) \\
&= \delta^2(A) + 2v(A) + \|K_1\|_F^2
\end{aligned}$$

(iii) Είναι:

$$\begin{aligned}
(n-1)\sigma_n^2(A) + \delta^2(A) &\leq (n-1)\sigma_n^2(A) + \sigma_1^2(A) \\
&\leq \sum_{j=1}^n \sigma_j^2(A) \\
&= \delta^2(A) + 2v(A) + \|K_1\|_F^2 \\
\Rightarrow (n-1)\sigma_n^2(A) + \delta^2(A) &\leq \delta^2(A) + 2v(A) + \|K_1\|_F^2 \\
\Rightarrow (n-1)\sigma_n^2(A) &\leq 2v(A) + \|K_1\|_F^2 \\
\Rightarrow \sigma_n^2(A) &\leq \frac{2v(A) + \|K_1\|_F^2}{n-1}.
\end{aligned}$$

□

## 2.2 Μετασχηματισμός Levinger και Αριθμητικό Πεδίο

Σε αυτό το σημείο υπενθυμίζουμε ότι για έναν σχεδόν-αντισυμμετρικό πίνακα  $A \in M_n(\mathfrak{R})$  με  $S(A) = ww^t$ , όπου  $w \in \mathfrak{R}^n$ , ο **μετασχηματισμός Levinger** είναι ο εξής:

$$L(A, \alpha) = (1 - \alpha)A + \alpha A^t, \quad \alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right],$$

ενώ για τη διασπορά έχουμε

$$v(L(A, a)) = \frac{\|K(L(A, a))w\|_2^2}{\|w\|_2^2} = (1 - 2a)^2 v(A).$$

Το θεώρημα και η πρόταση που ακολουθούν δίνουν πληροφορίες για το πού κυμαίνονται οι τιμές του φάσματος  $\sigma(A)$  ενός πραγματικού, σχεδόν-αντισυμμετρικού πίνακα  $A$  έπειτα από μετασχηματισμό Levinger, δίνοντας δύο διαφορετικά φράγματα.

**Θεώρημα 2.6** Έστω  $A$  ένας  $n \times n$  πραγματικός, σχεδόν-αντισυμμετρικός πίνακας. Αν  $\lambda_\alpha$  είναι μια ιδιοτιμή του  $L(A, a)$ , όπου  $a \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ , τότε ισχύει:

$$(Im\lambda_\alpha)^2 Re\lambda_\alpha \leq (\delta(A) - Re\lambda_\alpha) [(1 - 2a)^2 v(A) + Re\lambda_\alpha (Re\lambda_\alpha - \delta(A))].$$

Επίσης, για κάθε  $a \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$  με  $(1 - 2a)^2 v(A) < \frac{\delta^2(A)}{4}$ ,

$$Re\lambda_\alpha \notin \left( \frac{\delta(A) - \sqrt{\delta^2(A) - 4(1 - 2a)^2 v(A)}}{2}, \frac{\delta(A) + \sqrt{\delta^2(A) - 4(1 - 2a)^2 v(A)}}{2} \right).$$

**Σημείωση-Παρατήρηση:** Η συνθήκη  $(1 - 2a)^2 v(A) < \frac{\delta^2(A)}{4}$  στο προηγούμενο θεώρημα ισχύει πάντα, όταν το  $a$  είναι “αρκετά κοντά” στο  $\frac{1}{2}$ . Πιο συγκεκριμένα, καθώς το  $a \rightarrow \frac{1}{2}$ , το παραπάνω διάστημα του θεωρήματος συγκλίνει στο  $(0, \delta(A))$ .

**Πρόταση 2.7** Έστω  $A \in M_n(\mathbb{R})$  σχεδόν-αντισυμμετρικός πίνακας με διασπορά  $v(A)$ . Τότε για κάθε  $a \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$  τέτοιο ώστε  $(1 - 2a)^2 v(A) < \frac{\delta^2(A)}{4}$ , ο πίνακας  $L(A, a)$  έχει:

(α) μία πραγματική ιδιοτιμή  $\lambda_1(a, A)$  για την οποία ισχύει ότι

$$\lambda_1(A, a) \geq \frac{\delta(A) + \sqrt{\delta^2(A) - 4(1 - 2a)^2 v(A)}}{2}$$

και

(β)  $n-1$  μιγαδικές ιδιοτιμές  $\lambda_i(A, a)$ ,  $i = 2, \dots, n-1$ , για τις οποίες ισχύει ότι

$$Re\lambda_i(a, A) \leq \left( \frac{\delta(A) - \sqrt{\delta^2(A) - 4(1 - 2a)^2 v(A)}}{2} \right).$$

### Απόδειξη

Καταρχήν το συμπέρασμα της πρότασης ισχύει και για  $\alpha = \frac{1}{2}$  καθώς είναι  $L\left(A, \frac{1}{2}\right) = S(A)$  και  $v\left(L\left(A, \frac{1}{2}\right)\right) = 0$ . Επίσης, το σύνολο

$$\left\{ \alpha \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right] : (1 - 2\alpha)^2 v(A) < \frac{\delta^2(A)}{4} \right\}$$

συμπίπτει με το διάστημα  $\left(\alpha_0, \frac{1}{2}\right]$ , όπου  $\alpha_0 = \frac{2 - \sqrt{\frac{\delta^2(A)}{v(A)}}}{4}$ . Καθώς η ιδιοτιμή  $\delta(A) \in \sigma\left(L\left(A, \frac{1}{2}\right)\right)$  είναι απλή (η ιδιοτιμή του  $L(A, \alpha)$  που βρίσκεται στο φραγμένο κλάδο της καμπύλης  $\Gamma(A)$  είναι πάντα απλή), τότε από το Θεώρημα 2.6 και τη συνέχεια των ιδιοτιμών του  $L(A, \alpha)$  ως προς το  $\alpha$  προκύπτει το συμπέρασμα.  $\square$

**Πόρισμα 2.8** Έστω  $A$  ένας  $n \times n$  πραγματικός, σχεδόν-αντισυμμετρικός πίνακας με διασπορά  $v(A) < \frac{\delta^2(A)}{4}$ . Τότε ο  $A$  έχει ακριβώς μία πραγματική ιδιοτιμή στο διάστημα  $\left[\frac{\delta(A) + \sqrt{\delta^2(A) - 4v(A)}}{2}, \delta(A)\right]$  και  $n-1$  το πλήθος μιγαδικές ιδιοτιμές των οποίων τα πραγματικά μέρη βρίσκονται στο διάστημα  $\left[0, \frac{\delta(A) - \sqrt{\delta^2(A) - 4v(A)}}{2}\right]$ .

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε τη συμπεριφορά, μετά από μετασχηματισμό Levinger, των κανονικών ιδιοτιμών αρχικά για πραγματικούς και έπειτα για σχεδόν-αντισυμμετρικούς πίνακες.

**Θεώρημα 2.9** Έστω  $A \in M_n(\mathfrak{R})$  πίνακας με κανονικές ιδιοτιμές  $\lambda_j = \mu_j + i\nu_j$ , όπου  $\mu_j, \nu_j \in \mathfrak{R}$  αλγεβρικής πολλαπλότητας  $m_j$ ,  $j = 1, \dots, k$ . Τότε, για κάθε  $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$  οι ποσότητες  $\lambda_j(\alpha) = \mu_j + i(1 - 2\alpha)\nu_j$  είναι κανονικές ιδιοτιμές του  $L(A, \alpha)$  με αλγεβρική πολλαπλότητα το λιγότερο  $m_j$ ,  $j = 1, \dots, k$ .

### Απόδειξη

Από τον ορισμό των κανονικών ιδιοτιμών, υπάρχει ορθομοναδιαίος πίνακας  $V \in M_n(\mathbb{C})$  για τον οποίο ισχύει ότι

$$\begin{aligned} V^*AV &= V^*(S(A) + K(A))V \\ &= V^*S(A)V + V^*K(A)V \\ &= (\lambda_1 I_{m_1} \oplus \dots \oplus \lambda_k I_{m_k}) \oplus B, \end{aligned}$$

Για κάποιο πίνακα  $B$  τάξης  $n - (m_1 + \dots + m_k)$ .

Επομένως,

$$\begin{aligned}
 V^*L(A, a)V &= V^*(S(A) + (1 - 2a)K(A))V \\
 &= V^*S(A)V + (1 - 2a)V^*K(A)V \\
 &= (\lambda_1(\alpha)I_{m_1} \oplus \cdots \oplus \lambda_k(\alpha)I_{m_k}) \oplus L(B, a).
 \end{aligned}$$

□

Από όσα έχουμε μέχρι στιγμής δει στην παράγραφο αυτή, παρατηρούμε ότι μετά από μετασχηματισμό Levinger, οι κανονικές ιδιοτιμές ενός πραγματικού πίνακα  $A$  μετακινούνται προς τα αριστερά. Επιπλέον, γνωρίζουμε ότι για κάθε  $\alpha \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$ , είναι  $\sigma(L(A, \alpha)) \subset F(L(A, \alpha))$  με  $ReF(L(A, \alpha)) = F(S(A)) = [0, \delta(A)]$ . Έχουμε δείξει, επομένως, το παρακάτω αποτέλεσμα, το οποίο είναι σύμφωνο με το Θεώρημα 3.2 [Fiedler, 1981].

**Πόρισμα 2.10** Έστω  $A$  ένας  $n \times n$  πραγματικός, σχεδόν-αντισυμμετρικός πίνακας και  $\lambda_0$  μια κανονική ιδιοτιμή του. Τότε θα συμβαίνει ένα από τα ακόλουθα:

(α)  $\lambda_0 = \delta(A)$  και η  $\lambda_0$  αποτελεί κανονική ιδιοτιμή και για το  $L(A, \alpha) \forall \alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ .

(β)  $Re\lambda = 0$ .

**Πρόταση 2.11** Έστω  $A \in M_n(\mathfrak{R})$  ένας σχεδόν-αντισυμμετρικός πίνακας με αριθμητικό πεδίο  $F(A)$ . Τότε η τομή  $\partial F(A) \cap \{z \in \mathbb{C} : Rez = 0\}$  συνιστά ένα ευθύγραμμο τμήμα.

Απόδειξη

Όπως είδαμε και στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.1, υπάρχει ορθομοναδιαίος πίνακας  $U \in M_n(\mathfrak{R})$  τέτοιος ώστε

$$U^tAU = \begin{bmatrix} \delta(A) & 0 \\ 0 & 0_{n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -u^t \\ u & K_1 \end{bmatrix}, \quad \text{όπου } K_1 \text{ αντισυμμετρικός πίνακας.}$$

Επίσης, γνωρίζουμε ότι για κάθε μοναδιαίο διάνυσμα  $x \in \mathbb{C}^n$  ισχύει  $Re(x^*U^tAUx) = 0$  αν και μόνο αν  $x = [0, x_1^t]^t$ , για κάποιο  $x_1 \in \mathbb{C}^{n-1}$ . Επομένως,  $\partial F(A) \cap \{z \in \mathbb{C} : Rez = 0\} = F(K_1)$  και η τομή  $\partial F(A) \cap \{z \in \mathbb{C} : Rez = 0\}$  αποτελεί ευθύγραμμο τμήμα, καθώς το αριθμητικό πεδίο ενός αντισυμμετρικού πίνακα είναι (κατακόρυφο) ευθύγραμμο τμήμα.

□

Από το Πρόρισμα 2.10 και την Πρόταση 2.11 μπορούμε να κάνουμε τις εξής παρατηρήσεις:

Η ευθεία  $Re z = 0$  τέμνει μη τετριμμένα (δηλαδή, κατά ένα ευθύγραμμο τμήμα) το σύνορο του αριθμητικού πεδίου ενός σχεδόν-αντισυμμετρικού πίνακα.

Ακόμη, ισχύει  $\partial F(A) \cap \{z \in \mathbb{C} : Re z = 0\} = F(K_1) = \{0\}$  αν και μόνο αν  $K_1 = 0$  ή, ισοδύναμα, αν και μόνο αν  $U^t A U = \begin{bmatrix} \delta(A) & -u^t \\ u & 0 \end{bmatrix}$ . Στην περίπτωση αυτή, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο για τον πίνακα  $A$  είναι  $\lambda^{n-2}(\lambda^2 - \delta(A)\lambda + u^t u)$ .

Όσα περιγράφηκαν στην τελευταία πρόταση για το αριθμητικό πεδίο μπορεί κανείς να δει σχηματικά στο παρακάτω παράδειγμα.

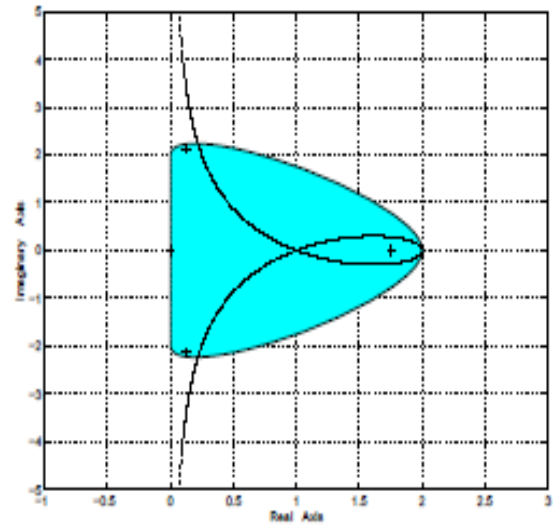
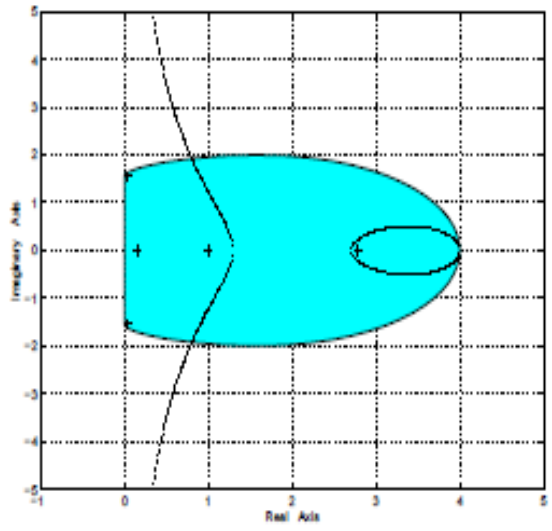
### Παράδειγμα – Σχηματική Αποτύπωση

Θεωρούμε τους πίνακες

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

για τους οποίους ισχύει  $v(A_1) = 3.5$ ,  $\delta(A_1) = 4$  και  $v(A_2) = 1$ ,  $\delta(A_2) = 2$ .

Στα παρακάτω σχήματα δίνονται τα αριθμητικά πεδία και τα κελύφη των  $A_1$  (αριστερά) και  $A_2$  (δεξιά). Οι ιδιοτιμές συμβολίζονται με “+” και (όπως αναμενόταν) βρίσκονται εντός των αριθμητικών πεδίων και των χωρίων που ορίζουν τα κελύφη με τον φανταστικό άξονα..



Αριθμητικά Πεδία των Κελύφων  $A_1$  και  $A_2$ .

## **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3**

### **ΙΔΙΟΧΩΡΟΙ PERRON ΜΗ ΑΡΝΗΤΙΚΩΝ ΣΧΕΔΟΝ-ΑΝΤΙΣΥΜΜΕΤΡΙΚΩΝ ΠΙΝΑΚΩΝ**



Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο θα μελετηθούν το δεξιό και το αριστερό διάνυσμα Perron του μετασχηματισμού Levinger  $L(A, a)$  ως συναρτήσεις του  $a \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ , στην περίπτωση που ο πίνακας  $A$  είναι μη αρνητικός, σχεδόν-αντισυμμετρικός με μη υποβιβάσιμο συμμετρικό μέρος. Δίνονται, ακόμη, άνω φράγματα για την παράγωγο της συνάρτησης Levinger  $\varphi'(A, a)$  καθώς και για την ίδια τη συνάρτηση Levinger  $\varphi(A, a)$ , μέσω της έννοιας του  $q$ -αριθμητικού πεδίου  $F_q(\cdot)$ .

### 3.1 Δεξιό και Αριστερό Διάνυσμα Perron του Μετασχηματισμού Levinger

Νωρίτερα, στο πρώτο κεφάλαιο, ορίσαμε τη φασματική ακτίνα  $\rho(A)$  ενός πίνακα  $A \in M_n(\mathbb{R})$  ως το μεγαλύτερο μέτρο ιδιοτιμής του  $A$ . Σύμφωνα με τη θεωρία Perron-Frobenius, αν ο πίνακας  $A$  είναι (κατά στοιχείο) μη αρνητικός, τότε η  $\rho(A)$  αποτελεί ιδιοτιμή για τον πίνακα  $A$  (δηλαδή,  $\rho(A) \in \sigma(A)$ ), την οποία στο εξής θα αναφέρουμε ως **ρίζα Perron** του  $A$ . Όταν ο  $A$  είναι **μη υποβιβάσιμος** (irreducible), δηλαδή όταν ο  $A$  δεν μπορεί, μετά από ίδιες μεταθέσεις γραμμών και στηλών, να μετασχηματιστεί σε ένα μπλοκ άνω τριγωνικό πίνακα, με τετραγωνικά τα μπλοκ της διαγωνίου, τότε η ιδιοτιμή  $\rho(A)$  είναι απλή.

Στην περίπτωση που η ιδιοτιμή  $\rho(A)$  είναι απλή, θεωρούμε το αριστερό και το δεξιό ιδιοδιάνυσμα του  $A$ , τα οποία λαμβάνουμε μοναδιαία και μη αρνητικά και τα ονομάζουμε **δεξιό  $x_r(a)$**  και **αριστερό  $x_l(a)$**  **διάνυσμα Perron** του πίνακα  $A$ . Επίσης, αν ο πίνακας  $A$  είναι μη αρνητικός (κατά στοιχείο), σχεδόν-αντισυμμετρικός, τότε και το συμμετρικό μέρος  $S(A)$  είναι μη αρνητικό (κατά στοιχείο). Επομένως, θα υπάρχει διάνυσμα  $w \in \mathbb{R}^n$  θετικό, τέτοιο ώστε  $S(A) = ww^t$  και, άρα, ο  $S(A)$  θα είναι θετικός πίνακας. Ακόμη, προκύπτει ότι όλοι οι πίνακες  $L(A, a)$ ,  $a \in (0, 1)$  (δηλαδή όλοι οι πίνακες που προκύπτουν από το μετασχηματισμό Levinger) είναι και αυτοί μη αρνητικοί, σχεδόν-αντισυμμετρικοί. Συνεπώς, η  $\varphi(A, a)$  αποτελεί απλή ιδιοτιμή, ενώ για τα διανύσματα Perron του  $L(A, a)$  έχουμε:

$$x_r\left(L\left(A, \frac{1}{2}\right)\right) = x_l\left(L\left(A, \frac{1}{2}\right)\right) = x_r(S(A)) = x_l(S(A)) = \frac{w}{\|w\|_2}.$$

Στην πρώτη παράγραφο του κεφαλαίου αυτού θα μελετήσουμε φράγματα που αφορούν στις γωνίες μεταξύ του διανύσματος  $w$  και των διανυσμάτων Perron  $x_r(a)$  και  $x_l(a)$  για κατάλληλες τιμές του  $a \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ .

Έστω  $A \in M_n(\mathbb{R})$  ένας μη υποβιβάσιμος, μη αρνητικός (κατά στοιχείο), σχεδόν-αντισυμμετρικός πίνακας με συμμετρικό μέρος  $S(A) = ww^t$ . Τότε, υπάρχει ορθοκανονική βάση στο  $C^n$ ,  $\left\{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, \frac{w}{\|w\|_2}\right\}$ , όπου  $v_1, v_2, \dots, v_{n-1} \in \text{Ker}S(A)$  και  $\frac{w}{\|w\|_2}$  το μοναδιαίο ιδιοδιάνυσμα του  $S(A)$  που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή  $\delta(A) =$

$w^t w$ . Για κάθε  $\alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ , θεωρούμε το δεξιό και το αριστερό διάνυσμα Perron του  $L(A, a)$  ως εξής:

$$x_r(a) = y_r(a) + z_r(a) \text{ και } x_l(a) = y_l(a) + z_l(a),$$

όπου  $y_r(a), y_l(a) \in \text{span}\{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$  και  $z_r(a), z_l(a) \in \text{span}\{w\}$ .

**Πρόταση 3.1** Έστω  $A \in M_n(\mathfrak{R})$  ένας μη αρνητικός (κατά στοιχείο), μη υποβιβάσιμος, σχεδόν-αντισυμμετρικός πίνακας. Τότε, για κάθε  $\alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ , η συνάρτηση Levinger γράφεται

$$\varphi(A, \alpha) = \delta(A) \|z_r(a)\|_2^2 = \delta(A) \|z_l(a)\|_2^2.$$

### Απόδειξη

Αρκεί να δείξουμε ότι  $\varphi(A, \alpha) = \delta(A) \|z_r(a)\|_2^2$ . Η απόδειξη για το τρίτο μέλος της ισότητας είναι ανάλογη.

Καταρχήν, γνωρίζουμε ότι

$$\begin{aligned} L(A, \alpha) &= (1 - \alpha)A + \alpha A^t = A - \alpha A + \alpha A^t \\ &= A - \alpha(A - A^t) = A - 2\alpha K(A) \\ &= S(A) + K(A) - 2\alpha K(A) \\ &= S(A) + (1 - 2\alpha)K(A). \end{aligned}$$

Επίσης, αφού το ιδιοδιάνυσμα  $x_r(a)$  του  $L(A, a)$  είναι μοναδιαίο, θα είναι

$$\varphi(A, \alpha) = x_r(a)^t L(A, a) x_r(a).$$

Επομένως, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \varphi(A, \alpha) &= x_r(a)^t (S(A) + (1 - 2\alpha)K(A)) x_r(a) \\ &= x_r(a)^t S(A) x_r(a) + (1 - 2\alpha) x_r(a)^t K(A) x_r(a) \\ &= (y_r(a)^t + z_r(a)^t) S(A) (y_r(a) + z_r(a)) \\ &\quad + (1 - 2\alpha) x_r(a)^t K(A) x_r(a) \\ &= z_r(a)^t S(A) z_r(a) + (1 - 2\alpha) x_r(a)^t K(A) x_r(a) \\ &= \delta(A) \|z_r(a)\|_2^2 + (1 - 2\alpha) x_r(a)^t K(A) x_r(a). \end{aligned}$$

(Αφού  $y \in \text{Ker} S(A) \Rightarrow y_r(a)^t S(A) y_r(a) = 0$ .)

Από το γεγονός ότι  $\varphi(A, \alpha) \in \mathfrak{R}$  και ο  $K(A)$  είναι αντισυμμετρικός πίνακας, προκύπτει ότι  $(1 - 2\alpha)x_r(a)^t K(A)x_r(a) = 0$ . Άρα,  $\varphi(A, \alpha) = \delta(A)\|z_r(a)\|_2^2$ .

□

Σε αυτό το σημείο και πριν προχωρήσουμε στο επόμενο πόρισμα, θυμίζουμε ότι η **γωνία** μεταξύ δύο μη μηδενικών διανυσμάτων  $x, y \in \mathfrak{R}^n$  ορίζεται ως εξής:

$$(\widehat{x}, \widehat{y}) = \cos^{-1} \frac{x^t y}{\|x\|_2 \|y\|_2} \Leftrightarrow \cos(\widehat{x}, \widehat{y}) = \frac{x^t y}{\|x\|_2 \|y\|_2}.$$

**Πόρισμα 3.2** Έστω  $A$  ένας  $n \times n$  πραγματικός, μη αρνητικός (κατά στοιχείο), μη υποβιβάσιμος, σχεδόν-αντισυμμετρικός πίνακας. Τότε, για κάθε  $\alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ , το δεξιό και το αριστερό διάνυσμα Perron του  $L(A, \alpha)$  έχουν την ίδια ορθογώνια προβολή πάνω στο διάνυσμα  $w$ , δηλαδή,  $z_r(a) = z_l(a)$ . Επίσης, ο μετασχηματισμός Levinger ικανοποιεί τη σχέση

$$\varphi(A, \alpha) = \delta(A) \left( \frac{w^t x_r(a)}{\|w\|_2} \right)^2 = \delta(A) \left( \frac{w^t x_l(a)}{\|w\|_2} \right)^2.$$

### Απόδειξη

Θέλουμε να δείξουμε ότι  $z_r(a) = z_l(a)$ .

Καταρχήν, από την Πρόταση 3.1 προκύπτει ότι τα διανύσματα  $z_r(a)$  και  $z_l(a)$  έχουν το ίδιο μέτρο, δηλαδή  $\|z_r(a)\|_2^2 = \|z_l(a)\|_2^2$  (1).

Από το γεγονός ότι το δεξιό  $x_r(a)$  και το αριστερό  $x_l(a)$  διάνυσμα Perron είναι μη αρνητικά και από το ότι το  $z_r(a)$  (αντίστοιχα το  $z_l(a)$ ) αποτελεί την ορθή προβολή του  $x_r(a)$  (αντίστοιχα το  $x_l(a)$ ) στο διάνυσμα  $w$ , προκύπτει πως

$$\frac{w^t x_r(a)}{\|w\|_2} = \frac{w^t x_l(a)}{\|w\|_2} \Leftrightarrow \cos(w, \widehat{x_r(a)}) = \cos(w, \widehat{x_l(a)}) \Leftrightarrow (w, \widehat{x_r(a)}) = (w, \widehat{x_l(a)}). \quad (2)$$

Άρα, από (1) και (2) καταλήγουμε ότι  $z_r(a) = z_l(a)$  και, κατά συνέπεια, ικανοποιείται η σχέση

$$\varphi(A, \alpha) = \delta(A) \left( \frac{w^t x_r(a)}{\|w\|_2} \right)^2 = \delta(A) \left( \frac{w^t x_l(a)}{\|w\|_2} \right)^2.$$

□

Σημείωση: Σε αυτό το σημείο είναι χρήσιμο να ορίσουμε το διάστημα

$$\mathbb{X}_A = \left( \max \left\{ 0, \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{\delta^2(A)}{16\nu(A)}} \right\}, \frac{1}{2} \right].$$

Παρατηρούμε ότι το  $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$  βρίσκεται μέσα στο  $\mathbb{X}_A$  αν και μόνο αν  $\delta^2(A) > 4(1 - 2\alpha)^2\nu(A)$ . Ακόμη, αφού  $0 \notin \mathbb{X}_A$ , αν το συμμετρικό μέρος του  $A$  είναι μη υποβιβάσιμο, τότε για κάθε  $\alpha \in \mathbb{X}_A$ , ο μετασχηματισμός Levinger  $L(A, \alpha)$  είναι μη υποβιβάσιμος.

**Θεώρημα 3.3** Θεωρούμε έναν πίνακα  $A \in M_n(\mathfrak{R})$  μη αρνητικό (κατά στοιχείο), σχεδόν-αντισυμμετρικό με μη υποβιβάσιμο συμμετρικό μέρος. Τότε για κάθε  $\alpha \in \mathbb{X}_A$ , ισχύει ότι

$$\begin{aligned} \cos(w, \widehat{x_r}(a)) &= \cos(w, \widehat{x_l}(a)) \\ &\geq R_A = \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{\delta^2(A) - 4(1 - 2\alpha)^2\nu(A)}{4\delta^2(A)}}}. \end{aligned}$$

Απόδειξη

Θα δείξουμε ότι  $\cos(w, \widehat{x_r}(a)) \geq R_A$ .

Από την Πρόταση 2.7, έχουμε ότι

$$\varphi(A, \alpha) \geq \frac{\delta(A) + \sqrt{\delta^2(A) - 4(1 - 2\alpha)^2\nu(A)}}{2}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{X}_A$$

Όμως, από το Πόρισμα 3.2 είναι  $\varphi(A, \alpha) = \delta(A) \left( \frac{w^t x_r(a)}{\|w\|_2} \right)^2$ , άρα

$$\begin{aligned} \delta(A) \left( \frac{w^t x_r(a)}{\|w\|_2} \right)^2 &\geq \frac{\delta(A) + \sqrt{\delta^2(A) - 4(1 - 2\alpha)^2\nu(A)}}{2} \\ \Rightarrow \delta(A) \left( \frac{w^t x_r(a)}{\|w\|_2} \right)^2 &\geq \frac{\delta(A)}{2} + \delta(A) \sqrt{\frac{\delta^2(A) - 4(1 - 2\alpha)^2\nu(A)}{4\delta^2(A)}} \\ \Rightarrow \frac{w^t x_r(a)}{\|w\|_2} &\geq \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{\delta^2(A) - 4(1 - 2\alpha)^2\nu(A)}{4\delta^2(A)}}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \cos(\widehat{w, x_r}(a)) \geq \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{\delta^2(A) - 4(1-2\alpha)^2 v(A)}{4\delta^2(A)}}}.$$

Η τελευταία ισοδυναμία προκύπτει από τον ορισμό του *cosine* που δόθηκε νωρίτερα όπου  $\|x_r(a)\|_2 = 1$ , καθώς το διάνυσμα  $x_r(a)$  είναι μοναδιαίο.

□

Σημείωση: Για διευκόλυνσή μας στο θεώρημα που ακολουθεί ορίζουμε τη γωνία  $\theta_A(\alpha) \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$  ως εξής:

$$\cos \theta_A(\alpha) = R_A = \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{\delta^2(A) - 4(1-2\alpha)^2 v(A)}{4\delta^2(A)}}}.$$

**Θεώρημα 3.4** Έστω  $A \in M_n(\mathfrak{R})$  ένας μη αρνητικός (κατά στοιχείο), σχεδόν-αντισυμμετρικός πίνακας με μη υποβιβάζσιμο συμμετρικό μέρος. Τότε, για κάθε  $\alpha \in X_A$ ,

$$\cos(\widehat{x_r(a), x_l(a)}) \geq \sqrt{\frac{\delta^2(A) - 4(1-2\alpha)^2 v(A)}{\delta^2(A)}}.$$

Απόδειξη

Για τη γωνία  $(\widehat{x_r(a), x_l(a)})$  έχουμε ότι

$$(\widehat{x_r(a), x_l(a)}) \leq (\widehat{w, x_r}(a)) + (\widehat{w, x_l}(a)) \leq 2\theta_A(\alpha) \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \cos(\widehat{x_r(a), x_l(a)}) \geq \cos(2\theta_A(\alpha)) \geq 0.$$

Και επειδή

$$\cos(2\theta_A(\alpha)) = 2\cos^2\theta_A(\alpha) - 1 = 2 \left( \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{\delta^2(A) - 4(1-2\alpha)^2 v(A)}{\delta^2(A)}} \right) - 1$$

$$\Rightarrow \cos(2\theta_A(\alpha)) = \sqrt{\frac{\delta^2(A) - 4(1-2\alpha)^2 v(A)}{\delta^2(A)}},$$

προκύπτει ότι

$$\cos(x_r(\overline{a}), x_l(a)) \geq \sqrt{\frac{\delta^2(A) - 4(1-2\alpha)^2 v(A)}{\delta^2(A)}}.$$

□

**Πόρισμα 3.5** Θεωρούμε έναν πίνακα  $A \in M_n(\mathfrak{R})$  μη αρνητικό (κατά στοιχείο), σχεδόν-αντισυμμετρικό με μη υποβιβασίμο συμμετρικό μέρος. Τότε για κάθε  $\alpha \in \mathbb{X}_A$ , τα διανύσματα  $\text{Re}l_\alpha x_r(a)$ ,  $x_l(a)$  ικανοποιούν τη σχέση:

$$\|x_r(a) - x_l(a)\|_2^2 \leq 2 \left( 1 - \sqrt{\frac{\delta^2(A) - 4(1-2\alpha)^2 v(A)}{\delta^2(A)}} \right).$$

Απόδειξη

Έχουμε

$$\begin{aligned} \|x_r(a) - x_l(a)\|_2^2 &= (x_r(a)^t - x_l(a)^t)(x_r(a) - x_l(a)) \\ &= x_r(a)^t x_r(a) - x_r(a)^t x_l(a) - x_l(a)^t x_r(a) + x_l(a)^t x_l(a) \\ &= \|x_r(a)\|_2^2 + \|x_l(a)\|_2^2 - (x_r(a)^t x_l(a) + x_l(a)^t x_r(a)) \\ &= 2 - 2\cos(x_r(a), x_l(a)) \end{aligned}$$

καθώς τα  $x_r(a)$ ,  $x_l(a)$  είναι μοναδιαία.

Επομένως, αφού σύμφωνα με το Θεώρημα 3.4  $\cos(x_r(\overline{a}), x_l(a)) \geq \sqrt{\frac{\delta^2(A) - 4(1-2\alpha)^2 v(A)}{\delta^2(A)}}$ , καταλήγουμε ότι

$$\|x_r(a) - x_l(a)\|_2^2 \leq 2 \left( 1 - \sqrt{\frac{\delta^2(A) - 4(1-2\alpha)^2 v(A)}{\delta^2(A)}} \right).$$

□

Υπενθυμίζουμε ότι από το Θεώρημα 2.6, αν  $A \in M_n(\mathfrak{R})$  είναι ένας σχεδόν-αντισυμμετρικός πίνακας και  $\lambda_\alpha$  είναι μια τυχαία ιδιοτιμή του  $L(A, a)$  με  $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ , τότε

$$(\text{Im}\lambda_\alpha)^2 \text{Re}\lambda_\alpha \leq (\delta(A) - \text{Re}\lambda_\alpha) [(1-2\alpha)^2 v(A) + \text{Re}\lambda_\alpha (\text{Re}\lambda_\alpha - \delta(A))],$$

ενώ για κάθε  $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$  με  $(1 - 2\alpha)^2 v(A) < \frac{\delta^2(A)}{4}$ ,

$$\operatorname{Re} \lambda_\alpha \notin \left( \frac{\delta(A) - \sqrt{\delta^2(A) - 4(1 - 2\alpha)^2 v(A)}}{2}, \frac{\delta(A) + \sqrt{\delta^2(A) - 4(1 - 2\alpha)^2 v(A)}}{2} \right).$$

### 3.2 Συνάρτηση Levinger: Παράγωγος και Άνω Φράγματα

Από γνωστό θεώρημα της Αριθμητικής Γραμμικής Άλγεβρας επί του αναπτύγματος Taylor των απλών ιδιοτιμών πίνακα (βλέπε [Fiedler, 1995]), γνωρίζουμε ότι η παράγωγος της συνάρτησης Levinger  $\varphi(A, \alpha)$  έχει ως εξής:

$$\begin{aligned} (3.1) \quad 0 \leq \varphi'(A, \alpha) &= \frac{1}{1-2\alpha} \frac{x_l(a)^t (L(A,a)^t - L(A,a)) x_r(a)}{x_l(a)^t x_r(a)} \\ &= -2 \frac{x_l(a)^t K(A) x_r(a)}{\cos(x_r(a), x_l(a))}. \end{aligned}$$

Η συγκεκριμένη έκφραση για την παράγωγο  $\varphi'(A, \alpha)$  θα μας οδηγήσει σε ένα άνω φράγμα της, το οποίο εξαρτάται από τη διασπορά  $v(A)$  και την ιδιοτιμή  $\delta(A)$ . Κατά συνέπεια, μέσω του φράγματος αυτού, θα προσπαθήσουμε να καταλήξουμε σε ένα άνω φράγμα και για τη συνάρτηση Levinger  $\varphi(A, \alpha)$ .

Στο Θεώρημα 3.4 είδαμε ότι

$$\cos(x_r(a), x_l(a)) \geq \sqrt{\frac{\delta^2(A) - 4(1 - 2\alpha)^2 v(A)}{\delta^2(A)}}.$$

Συνεπώς, θέτοντας

$$q(a) = \sqrt{\frac{\delta^2(A) - 4(1 - 2\alpha)^2 v(A)}{\delta^2(A)}}$$

για την παράγωγο προκύπτει ότι

$$(3.2) \quad 0 \leq \varphi'(A, \alpha) \leq \frac{2}{q(a)} (-x_l(a)^t K(A) x_r(a)).$$

Σε αυτό το σημείο είναι απαραίτητο να αναφερθούμε σε μια νέα έννοια, αυτή του  $q$ -αριθμητικού πεδίου. Για έναν  $n \times n$  μιγαδικό πίνακα  $N$ , λοιπόν, το  **$q$ -αριθμητικό πεδίο** για  $q \in [0,1]$  ορίζεται ως εξής:

$$F_q(N) = \{x^*Ny \in \mathbb{C} : x, y \in \mathbb{C}^n, \quad x^*x = y^*y = 1 \text{ και } x^*y = q\}$$

$$= \left\{ \frac{x^*}{\|x\|_2} N \frac{y}{\|y\|_2} \in \mathbb{C} : x, y \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}, \quad \cos(\widehat{x, y}) = q \right\}.$$

Για  $q = 1$ , το  $F_q(N)$  ταυτίζεται με το κλασικό αριθμητικό πεδίο

$$F(N) = F_1(N) = \{x^*Nx \in \mathbb{C} : x \in \mathbb{C}^n, \quad x^*x = 1\}.$$

Το  $q$ -αριθμητικό πεδίο  $F_q(N)$  ( $q \in [0,1]$ ) είναι πάντα ένα συμπαγές και κυρτό υποσύνολο του μιγαδικού επιπέδου. Για  $0 \leq q < 1$ , το  $F_q(N)$  έχει μη κενό εσωτερικό και για  $q = 1$  το  $F(N)$  αποτελεί ευθύγραμμο τμήμα αν και μόνο αν ο  $N$  είναι ένας κανονικός πίνακας του οποίου οι ιδιοτιμές είναι συνευθειακές (στο μιγαδικό επίπεδο). Αν ο  $N$  είναι μιγαδικός πίνακας, τότε ο  $N$  είναι ερμιτιανός αν και μόνο αν  $F(N) \subset \mathfrak{R}$ .

Είναι εμφανές, ότι για τον πίνακα  $A$ , η ποσότητα  $-x_l(a)^t K(A) x_r(a)$  στη σχέση (3.1) είναι θετική και βρίσκεται (για  $q = \cos(\widehat{x_r(a), x_l(a)})$ ) μέσα στο διάστημα

$$[0, +\infty) \cap F_{\cos(\widehat{x_r(a), x_l(a)})}(K(A)).$$

Κατά συνέπεια κρίνεται σημαντικό να διερευνήσουμε την τομή του θετικού ημιάξονα  $[0, +\infty)$  με το  $\cos(\widehat{x_r(a), x_l(a)})$ -αριθμητικό πεδίο του πραγματικού, σχεδόν-αντισυμμετρικού πίνακα  $K(A)$ .

Καταρχήν, παρατηρούμε ότι γενικά, για κάθε ζευγάρι  $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \frac{1}{2}$ , ισχύει ότι  $q(\alpha_1) < q(\alpha_2)$ , όπου  $q(\alpha)$  όπως ορίστηκε στην (3.2). Από το Θεώρημα 2.5 του [Li-Metha-Rodman, 1998], γνωρίζουμε ότι για τυχαίο τετραγωνικό πίνακα  $A$  και  $0 \leq q_1 \leq q_2 \leq 1$ , ισχύει

$$F_{q_2}(A) \subseteq \frac{q_2}{q_1} F_{q_1}(A).$$

Επομένως, για  $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \frac{1}{2}$ , έχουμε

$$F_{q(\alpha_2)}(K(A)) \subseteq \frac{q(\alpha_2)}{q(\alpha_1)} F_{q(\alpha_1)}(K(A))$$

και άρα, αφού μας ενδιαφέρουν μόνο οι θετικές ποσότητες, είναι φανερό ότι

$$[0, +\infty) \cap F_{q(\alpha_2)}(K(A)) \subseteq \frac{q(\alpha_2)}{q(\alpha_1)} \{[0, +\infty) \cap F_{q(\alpha_1)}(K(A))\}.$$



Συνεπώς, για κάθε τυχαίο  $\alpha \in \mathbb{X}_A \setminus \{\frac{1}{2}\}$ , ισχύει  $0 < q(\alpha) < \cos(x_r(\widehat{a}), x_l(\widehat{a})) < \frac{1}{2}$  (βλέπε τον ορισμό του  $q(\alpha)$ ) και

$$[0, +\infty) \cap F_{\cos(x_r(\widehat{a}), x_l(\widehat{a}))}(K(A)) \subseteq \frac{\cos(x_r(\widehat{a}), x_l(\widehat{a}))}{q(\alpha)} \{[0, +\infty) \cap F_{q(\alpha)}(K(A))\}.$$

Έτσι, από την ανίσωση (3.2) και από το Θεώρημα 3.4, καταλήγουμε ότι

$$\begin{aligned} 0 \leq \varphi'(A, \alpha) &\leq \frac{2 \cos(x_r(\widehat{a}), x_l(\widehat{a}))}{q^2(\alpha)} \max\{[0, +\infty) \cap F_{q(\alpha)}(K(A))\} \\ &\leq \frac{2}{q^2(\alpha)} \max\{[0, +\infty) \cap F_{q(\alpha)}(K(A))\}. \end{aligned}$$

**Θεώρημα 3.6** Έστω  $A$  ένας  $n \times n$  πραγματικός, μη αρνητικός (κατά στοιχείο), σχεδόν-αντισυμμετρικός πίνακας με μη υποβιβάζσιμο συμμετρικό μέρος και έστω  $s_1$  η μεγαλύτερη ιδιάζουσα τιμή του σχεδόν-αντισυμμετρικού πίνακα  $K(A)$ . Τότε, για κάθε  $\alpha \in \mathbb{X}_A \setminus \{\frac{1}{2}\}$ ,

$$0 \leq \varphi'(A, \alpha) \leq \frac{4s_1(1-2\alpha)\delta(A)\sqrt{v(A)}}{\delta^2(A) - 4(1-2\alpha)^2v(A)}.$$

#### Απόδειξη

Το αριθμητικό πεδίο του πραγματικού αντισυμμετρικού  $K(A)$  είναι το  $F(K(A)) = [-i\beta, i\beta]$ , όπου ο πραγματικός αριθμός  $\beta$  είναι μη αρνητικός. Επίσης, συμβολίζουμε με  $D(\lambda, r)$  τον κλειστό δίσκο με κέντρο το  $\lambda$  και ακτίνα  $r$ . Γνωρίζουμε από το άρθρο [Li-Nakazato, 1998], ότι για κάθε  $q \in [0, 1]$ , ισχύει

$$\begin{aligned} F_q(K(A)) &= \{y^*Ax \in \mathbb{C} : \|x\|_2 = \|y\|_2 = 1, y^*x = q\} \\ &= \bigcup_{\substack{(i\gamma, h) \\ \gamma, h \in \mathbb{R}}} D(iq\gamma, \sqrt{(1-q^2)(h-\gamma^2)}), \end{aligned}$$

όπου η ένωση συγκαταλέγει όλα τα ζευγάρια της μορφής

$$(i\gamma, h) = (x^*K(A)x, x^*(K(A)^*K(A))x), \quad x^*x = 1.$$

Καθώς το  $K(A)$  είναι αντισυμμετρικός πίνακας, υπάρχει μοναδιαίος πίνακας  $U$  τέτοιος ώστε

$$K(A) = iU^* \text{diag}\{\pm s_1, \pm s_2, \dots, \pm s_m\} U$$

και

$$K(A)^*K(A) = U^*diag = \{s_1^2, s_1^2, s_2^2, s_2^2, \dots, s_m^2\} U,$$

όπου  $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_m \geq 0$  είναι οι ιδιάζουσες τιμές του  $K(A)$ . (Σημειώνουμε ότι κάθε μη μηδενική ιδιάζουσα τιμή εμφανίζεται άρτιες φορές.)

Ακόμη, μπορεί κανείς να παρατηρήσει ότι για το ζευγάρι  $(i\gamma, h) = (0, s_1^2)$ , η ακτίνα του δίσκου

$$D(iq\gamma, \sqrt{(1-q^2)(h-\gamma^2)})$$

παίρνει τη μέγιστη τιμή της, η οποία (αφού  $\gamma = 0$  και  $h = s_1^2$ ) γράφεται

$$r_{max}(A, q) = s_1\sqrt{1-q^2}.$$

Πράγματι, αν θεωρήσουμε ότι  $y_1$  και  $\hat{y}_1$  είναι δύο ορθοκανονικά ιδιοδιανύσματα του  $K(A)$  που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές  $is_1$  και  $-is_1$  αντίστοιχα, τότε το διάνυσμα  $y_0 = \frac{(y_1 + \hat{y}_1)}{\sqrt{2}}$  είναι ένα μοναδιαίο ιδιοδιάνυσμα του πίνακα  $K(A)^*K(A)$  που αντιστοιχεί στην  $s_1^2$  και

$$\begin{aligned} (y_0^*K(A)y_0, y_0^*(K(A)^*K(A))y_0) &= \left( \frac{y_1^*K(A)y_1}{\sqrt{2}} + \frac{\hat{y}_1^*K(A)\hat{y}_1}{\sqrt{2}}, y_0^*(K(A)^*K(A))y_0 \right) \\ &= (0, s_1^2). \end{aligned}$$

Άρα το ζευγάρι  $(i\gamma, h) = (0, s_1^2)$  είναι αποδεκτό για την ένωση που δίνει το  $F_q(K(A))$ . Επομένως, για κάθε  $\alpha \in \mathbb{X}_A \setminus \{\frac{1}{2}\}$ , το σύνολο  $[0, +\infty) \cap F_{q(\alpha)}(K(A))$  συμπίπτει με το διάστημα

$$\left[ 0, s_1\sqrt{1-q^2(\alpha)} \right] = \left[ 0, \frac{2s_1(1-2\alpha)\sqrt{v(A)}}{\delta(A)} \right].$$

Κατά συνέπεια, για κάθε  $\alpha \in \mathbb{X}_A \setminus \{\frac{1}{2}\}$ , από την (3.2) έχουμε

$$0 \leq \varphi'(A, \alpha) \leq \frac{2}{q^2(\alpha)} \frac{2s_1(1-2\alpha)}{\delta(A)} \sqrt{v(A)},$$

όπου αντικαθιστώντας το  $q(\alpha)$ , παίρνουμε ισοδύναμα ότι

$$0 \leq \varphi'(A, \alpha) \leq \frac{4s_1(1-2\alpha)\delta(A)\sqrt{v(A)}}{\delta^2(A) - 4(1-2\alpha)^2v(A)}.$$

□

Στη συνέχεια της εργασίας, θα εστιάσουμε την προσοχή μας στην αναζήτηση ενός άνω φράγματος για τη συνάρτηση Levinger  $\varphi(A, \alpha)$ . Μέχρι στιγμής, σχετικά με αυτό γνωρίζουμε μόνο ότι  $\varphi(A, \alpha) \leq \delta(A)$ . Εντούτοις, το φράγμα για την παράγωγο  $\varphi'(A, \alpha)$ , που είδαμε στο μόλις προηγούμενο θεώρημα, μπορεί να μας οδηγήσει σε ένα καλύτερο υπολογισμό για τη  $\varphi(A, \alpha)$ .

**Θεώρημα 3.7** Έστω  $A$  ένας  $n \times n$  πραγματικός, μη αρνητικός (κατά στοιχείο), σχεδόν-αντισυμμετρικός πίνακας με μη υποβιβάσιμο συμμετρικό μέρος και έστω  $s_1$  η μεγαλύτερη ιδιάζουσα τιμή του σχεδόν-αντισυμμετρικού πίνακα  $K(A)$ . Τότε, για κάθε  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{X}_A \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$ , τέτοια ώστε  $\alpha_1 < \alpha_2$ ,

$$0 \leq \varphi(A, \alpha_2) - \varphi(A, \alpha_1) \leq \frac{s_1 \delta(A)}{4\sqrt{v(A)}} \ln \left( \frac{\delta^2(A) - 4(1 - 2\alpha_2)^2 v(A)}{\delta^2(A) - 4(1 - 2\alpha_1)^2 v(A)} \right).$$

Απόδειξη

Από το Θεώρημα 3.6 είδαμε ότι για κάθε  $\alpha \in \mathbb{X}_A \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$ ,

$$0 \leq \varphi'(A, \alpha) \leq \frac{4s_1(1 - 2\alpha)\delta(A)\sqrt{v(A)}}{\delta^2(A) - 4(1 - 2\alpha)^2 v(A)}.$$

Ενσωματώνοντας την παραπάνω ανισότητα στο διάστημα  $(\alpha_1, \alpha_2) \subseteq \mathbb{X}_A \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$  σε σχέση με το  $\alpha$  και λαμβάνοντας υπόψη ότι η  $\varphi(A, \alpha)$  είναι μη φθίνουσα συνάρτηση στο  $\left[0, \frac{1}{2}\right]$  οδηγούμαστε στο ζητούμενο. □

**Πόρισμα 3.8** Έστω  $A \in M_n(\mathbb{R})$  ένας μη αρνητικός (κατά στοιχείο), σχεδόν-αντισυμμετρικός πίνακας με μη υποβιβάσιμο συμμετρικό μέρος και έστω  $s_1$  η μεγαλύτερη ιδιάζουσα τιμή του σχεδόν-αντισυμμετρικού πίνακα  $K(A)$ . Αν  $\delta^2(A) > 4v(A)$ , τότε για κάθε  $\alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$  έχουμε

$$\varphi(A, \alpha) \leq \rho(A) + \frac{s_1 \delta(A)}{4\sqrt{v(A)}} \ln \left( \frac{\delta^2(A) - 4(1 - 2\alpha)^2 v(A)}{\delta^2(A) - 4v(A)} \right).$$

Επίσης, για  $\alpha = \frac{1}{2}$  ισχύει η παρακάτω ανισότητα:

$$\delta(A) - \rho(A) \leq \frac{s_1 \delta(A)}{4\sqrt{v(A)}} \ln \left( \frac{\delta^2(A)}{\delta^2(A) - 4v(A)} \right).$$

Σημειώνουμε, εδώ ότι για τιμές αρκετά κοντά στο 0, το άνω φράγμα για το  $\varphi(A, \alpha)$  στο παραπάνω πόρισμα είναι μικρότερο από  $\delta(A)$ , ενώ για  $\alpha = 0$  συμπίπτει με τη φασματική ακτίνα  $\rho(A)$ .

### Παράδειγμα

Θεωρούμε το μη αρνητικό, μη υποβιβάσιμο πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.4 & 0.7 & 0.7 & 1.0 \\ 0.7 & 0.5 & 1.0 & 0.8 & 0.9 & 0.3 \\ 0.6 & 0.0 & 0.5 & 0.5 & 0.6 & 0.2 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 & 0.5 & 0.3 & 0.5 \\ 0.3 & 0.1 & 0.4 & 0.7 & 0.5 & 0.3 \\ 0.0 & 0.7 & 0.8 & 0.5 & 0.7 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Ο πίνακας  $A$  έχει μη υποβιβάσιμο συμμετρικό μέρος

$$S(A) = ww^t, \text{ όπου } w = \frac{\sqrt{2}}{2} [1,1,1,1,1,1]^t.$$

Επομένως, ο  $A$  είναι σχεδόν-αντισυμμετρικός, αφού, όπως βλέπουμε, το συμμετρικό μέρος του είναι βαθμού 1. Η φασματική του ακτίνα είναι  $\rho(A) \cong 2.8128$ , η διασπορά του  $v(A) = 0.53$  και το  $\delta(A) = 3$ .

Το συμμετρικό μέρος του πίνακα  $A$  είναι

$$K(A) = \begin{pmatrix} 0.0 & -0.2 & -0.1 & 0.2 & 0.2 & 0.5 \\ 0.2 & 0.0 & 0.5 & 0.3 & 0.4 & -0.2 \\ 0.1 & -0.5 & 0.0 & 0.0 & 0.1 & -0.3 \\ -0.2 & -0.3 & 0.0 & 0.0 & -0.2 & 0.0 \\ -0.2 & -0.4 & -0.1 & 0.2 & 0.0 & -0.2 \\ -0.5 & 0.2 & 0.3 & 0.0 & 0.2 & 0.0 \end{pmatrix}$$

Η μέγιστη ιδιάζουσα τιμή του  $K(A)$  είναι  $s_1 \cong 0.8247$ . Επιπλέον, γνωρίζουμε ότι  $X_A = \left(0, \frac{1}{2}\right]$  και ότι για κάθε  $\alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$

$$9 = \delta^2(A) > 2.12 \geq 4(1 - 2\alpha)^2 v(A).$$

Εάν επιλέξουμε  $\alpha = \frac{1}{3}$ , τότε η ρίζα Perron του μετασχηματισμού Levinger  $L\left(A, \frac{1}{3}\right)$  είναι  $\varphi\left(A, \frac{1}{3}\right) \cong 2.980254$  με αντίστοιχα διανύσματα Perron τα

$$x_r\left(\frac{1}{3}\right) = [0.435139, 0.460558, 0.378913, 0.376042, 0.374113, 0.416649]^t$$

και

$$x_l\left(\frac{1}{3}\right) = [0.380385, 0.351427, 0.433478, 0.439692, 0.437761, 0.398672]^t.$$

Από τη σχέση (3.1) έχουμε

$$\varphi'\left(A, \frac{1}{3}\right) = -2 \frac{x_l\left(\frac{1}{3}\right)^t K(A) x_r\left(\frac{1}{3}\right)}{\cos\left(x_r\left(\frac{1}{3}\right), x_l\left(\frac{1}{3}\right)\right)} \cong 0.238368.$$

Παρατηρούμε, επίσης, πως

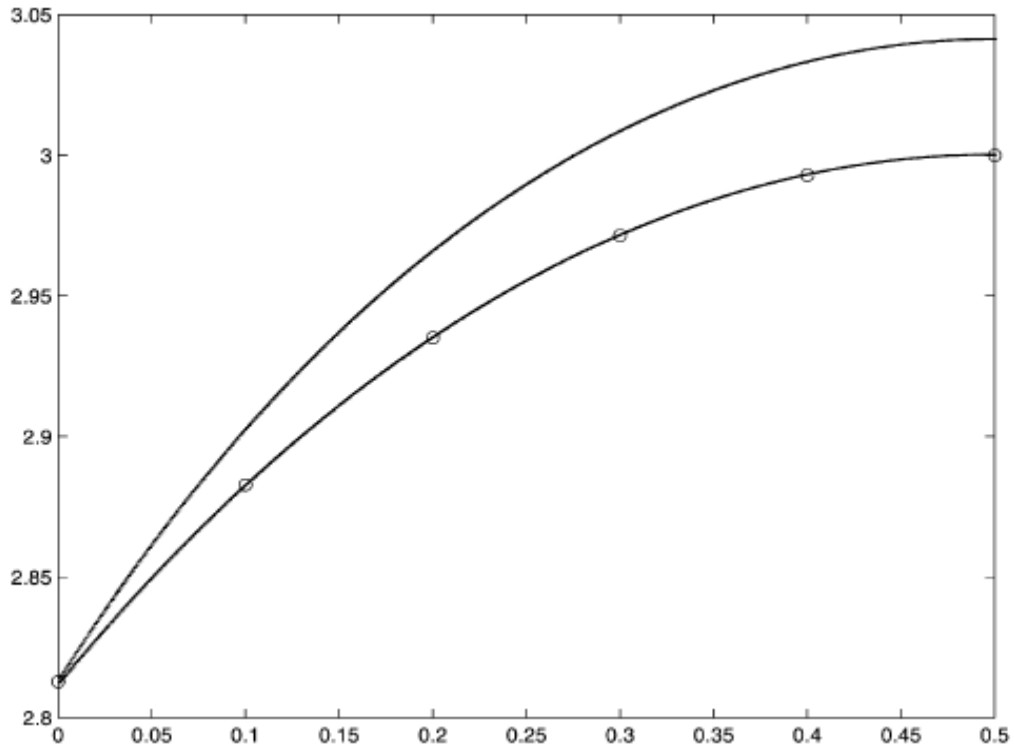
$$q\left(\frac{1}{3}\right) \cong 0.986827 < 0.986845 \cong \cos\left(x_r\left(\frac{1}{3}\right), x_l\left(\frac{1}{3}\right)\right),$$

το οποίο επιβεβαιώνει το Θεώρημα 3.4.

Το άνω φράγμα της παραγώγου της συνάρτησης Levinger στο Θεώρημα 3.6 είναι

$$\frac{4s_1\left(1 - \frac{2}{3}\right) \delta(A) \sqrt{v(A)}}{\delta^2(A) - 4\left(1 - \frac{2}{3}\right)^2 v(A)} \cong 0.274012 > 0.238368 \cong \varphi'\left(A, \frac{1}{3}\right).$$

Στο γράφημα που έπεται, δίνεται το άνω φράγμα του Πορίσματος 3.8 και το κάτω φράγμα της Πρότασης 2.7 για τη συνάρτηση Levinger  $\varphi(A, a)$ . Οι ρίζες Perron για  $a = 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$  συμβολίζονται με “ο”.



Το άνω φράγμα του Πορίσματος 3.10 και το κάτω φράγμα της Πρότασης 2.7.

Παρατηρούμε ότι καθώς η διασπορά του πίνακα  $A$  είναι  $v(A) = 0.53$ , δηλαδή αρκετά μικρή, το κάτω φράγμα της Πρότασης 2.7 είναι κοντά στην πραγματική τιμή της  $\varphi(A, a)$ . Επισημαίνουμε ότι η συνάρτηση Levinger και τα φράγματα που βρήκαμε για αυτή, έχουν την ίδια ποιοτική συμπεριφορά στο  $X_A$ . Είναι, δηλαδή αύξουσες και κοίλες συναρτήσεις και οι παράγωγοί τους είναι 0 για  $a = \frac{1}{2}$ .

## **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4**

### **ΦΡΑΓΜΑΤΑ ΓΙΑ ΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ LEVINGER ΜΗ ΑΡΝΗΤΙΚΩΝ ΣΧΕΔΟΝ- ΑΝΤΙΣΥΜΜΕΤΡΙΚΩΝ ΠΙΝΑΚΩΝ**

Στο τελευταίο κεφάλαιο, συνεχίζουμε την ανάλυση του ιδιοχώρου Perron για μη αρνητικούς, σχεδόν-αντισυμμετρικούς πίνακες. Ταυτόχρονα, εμβαθύνουμε περισσότερο, μελετώντας τη συμπεριφορά της συνάρτησης Levinger  $\varphi(A, a)$  ( $a \in [0,1]$ ) και της παραγώγου της, καταλήγοντας σε βελτιωμένα φράγματα για τη ρίζα Perron. Περαιτέρω μελέτη πραγματοποιείται και ως προς τα διανύσματα Perron. Επιπρόσθετα, εξετάζεται η κανονικότητα των μη αρνητικών, σχεδόν-αντισυμμετρικών πινάκων. Τέλος, η Παράγραφος 4.3 αναφέρεται στους πίνακες πρωταθλήματος (tournament matrices), οι οποίοι έχουν άμεση σχέση με την κατηγορία πινάκων που μελετάμε. Πιο συγκεκριμένα, χρησιμοποιούμε τα αποτελέσματα στα οποία έχουμε καταλήξει μέχρι τη στιγμή εκείνη, ώστε να μελετήσουμε την κανονικότητα και τη συμπεριφορά των φασματικών ακτινών των πινάκων πρωταθλήματος.

## 4.1 Ρίζες και Διανύσματα Perron

Για την ανάλυση που θα ακολουθήσει, χρειαζόμαστε το επόμενο αποτέλεσμα της εργασίας [Rojo-Soto-Rojo, 1993].

**Θεώρημα 4.1** Έστω  $A$  ένας  $n \times n$  πραγματικός πίνακας. Τότε, για κάθε ιδιοτιμή  $\lambda$  του  $A$ , ισχύει:

$$\left| \operatorname{Re} \lambda - \frac{\operatorname{trace}(A)}{n} \right| \leq \sqrt{\frac{n-1}{n} \left( \|S(A)\|_2^2 - \frac{\|AA^t - A^tA\|_F^2}{12\|A\|_F^2} - \frac{\operatorname{trace}(A)^2}{n} \right)},$$

όπου  $\|\cdot\|_F$  η νόρμα Frobenius.

Πριν προχωρήσουμε στην Πρόταση 4.2, θα δώσουμε έναν ακόμη ορισμό. Έστω  $A$  ένας  $n \times n$  μη αρνητικός (κατά στοιχείο), σχεδόν-αντισυμμετρικός πίνακας με συμμετρικό μέρος  $S(A) = ww^t$ , αντισυμμετρικό μέρος  $K(A)$  και διασπορά  $v(A)$ . Η ποσότητα  $\|AA^t - A^tA\|_F$  καλείται **(Frobenius) απόσταση από την κανονικότητα του  $A$** . Η συγκεκριμένη απόσταση αποδεικνύεται ότι έχει στενή σχέση με τη διασπορά.

**Πρόταση 4.2** Η απόσταση από την κανονικότητα ενός  $n \times n$  πραγματικού, μη αρνητικού, σχεδόν-αντισυμμετρικού πίνακα  $A$  έχει ως εξής:

$$\|AA^t - A^tA\|_F = 2\delta(A)\sqrt{2v(A)}.$$



### Απόδειξη

Η απόδειξη είναι παρεμφερής με την απόδειξη του Θεωρήματος 2.1.

Έστω, λοιπόν,  $y = \frac{w}{\|w\|_2} \in \mathfrak{R}^n$  το μοναδιαίο ιδιοδιάνυσμα του  $S(A) = ww^t$  που αντιστοιχεί στην απλή ιδιοτιμή  $\delta(A)$ . Τότε, υπάρχει  $n \times n$  πραγματικός, ορθομοναδιαίος, πίνακας  $U \in M_n(\mathfrak{R})$  του οποίου η πρώτη του στήλη είναι το ιδιοδιάνυσμα  $y$ . Δηλαδή

$$U^t S(A) U = \text{diag}\{\delta(A), 0, \dots, 0\} = \begin{bmatrix} \delta(A) & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Επίσης, καθώς ο πίνακας  $U^t K(A) U$  είναι πραγματικός και αντισυμμετρικός, προκύπτει ότι

$$U^t K(A) U = \begin{bmatrix} 0 & -u^t \\ u & K_1 \end{bmatrix},$$

όπου ο  $K_1 \in M_{n-1}(\mathfrak{R})$  πραγματικός και αντισυμμετρικός πίνακας και  $u \in \mathfrak{R}^{n-1}$  διάνυσμα.

Υπολογίζουμε, τώρα, την παράσταση εντός της νόρμας:

$$\begin{aligned} AA^t - A^t A &= (S(A) + K(A))(S(A) - K(A)) - (S(A) - K(A))(S(A) + K(A)) \\ &= (S(A))^2 - S(A)K(A) + K(A)S(A) - (K(A))^2 - (S(A))^2 \\ &\quad - S(A)K(A) + K(A)S(A) + (K(A))^2 \\ &= 2(K(A)S(A) - S(A)K(A)). \end{aligned}$$

Καθώς η νόρμα Frobenius είναι αναλλοίωτη σε ορθομοναδιαίους μετασχηματισμούς ομοιότητας, έχουμε

$$\begin{aligned} \|AA^t - A^t A\|_F^2 &= 4\|U^t K(A) U U^t S(A) U - U^t S(A) U U^t K(A) U\|_F^2 \\ &= 4\left\| \begin{bmatrix} 0 & -u^t \\ u & K_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta(A) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \delta(A) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -u^t \\ u & K_1 \end{bmatrix} \right\|_F^2 \\ &= 4\left\| \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \delta(A)u & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \delta(A)u^t \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\|_F^2 \\ &= 4\left\| \begin{bmatrix} 0 & \delta(A)u^t \\ \delta(A)u & 0 \end{bmatrix} \right\|_F^2 \\ &= 4\delta^2(A)\left\| \begin{bmatrix} 0 & u^t \\ u & 0 \end{bmatrix} \right\|_F^2 \\ &= 8\delta^2(A)\|u\|_2^2, \end{aligned}$$

καθώς  $U^t K(A) U = \begin{bmatrix} 0 & -u^t \\ u & K_1 \end{bmatrix}$  και  $U e_1 = [y \mid u_2 \cdots u_n] \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = y$ .

Θεωρώντας το πρώτο διάνυσμα της κανονικής βάσης  $e_1$  στον  $\mathfrak{R}^n$ , έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \|u\|_2^2 &= \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix} \right\|_2^2 = \left\| U \begin{bmatrix} 0 & -u^t \\ u & K_1 \end{bmatrix} e_1 \right\|_2^2 \\ &= \left\| U \begin{bmatrix} 0 & -u^t \\ u & K_1 \end{bmatrix} U^t U e_1 \right\|_2^2 \\ &= \|K(A)y\|_2^2 = v(A). \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\|AA^t - A^t A\|_F^2 = 8\delta^2(A)\|u\|_2^2 = 8\delta^2(A)v(A)$$

και άρα,

$$\|AA^t - A^t A\|_F = 2\delta(A)\sqrt{2v(A)}.$$

□

**Πόρισμα 4.3** Ένας  $n \times n$  πραγματικός, μη αρνητικός (κατά στοιχείο), σχεδόν-αντισυμμετρικός πίνακας  $A$  είναι κανονικός αν και μόνο αν  $v(A) = 0$ .

**Θεώρημα 4.4** Έστω  $A \in M_n(\mathfrak{R})$  ένας μη αρνητικός (κατά στοιχείο), σχεδόν-αντισυμμετρικός πίνακας. Η φασματική ακτίνα του  $A$  ικανοποιεί τη σχέση

$$(4.1) \quad \rho(A) \leq \delta(A) \left( \frac{1}{n} + \sqrt{\frac{n-1}{n} \left( \frac{n-1}{n} - \frac{2v(A)}{3(\delta^2(A) + \|K(A)\|_F^2)} \right)} \right).$$

Απόδειξη

Από την Πρόταση 4.2 έχουμε ότι

$$\|AA^t - A^t A\|_F^2 = 8\delta^2(A)v(A).$$

Επίσης, για τη νόρμα Frobenius γνωρίζουμε ότι (αφού η νόρμα Frobenius είναι αναλλοίωτη σε ορθομοναδιαίους μετασχηματισμούς ομοιότητας και η διαγώνιος οποιουδήποτε πραγματικού αντισυμμετρικού πίνακα είναι μηδενική)

$$\begin{aligned}\|A\|_F^2 &= \|S(A) + K(A)\|_F^2 = \left\| \begin{bmatrix} \delta(A) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -u^t \\ u^t & K_1 \end{bmatrix} \right\|_F^2 \\ &= \left\| \begin{bmatrix} \delta(A) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\|_F^2 + \left\| \begin{bmatrix} 0 & -u^t \\ u^t & K_1 \end{bmatrix} \right\|_F^2 = \delta^2(A) + \|K(A)\|_F^2,\end{aligned}$$

όπου οι ενδιάμεσοι πίνακες είναι αυτοί που ορίζονται στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.1.

Ακόμη,

$$\text{trace}(A) = \text{trace}(S(A)) = \delta(A) = \|S(A)\|_2 = \|w\|_2^2.$$

Επίσης, από το Θεώρημα 4.1 (εφαρμοσμένο για τη ρίζα Perron), έχουμε

$$\left| \text{Re} \lambda - \frac{\text{trace}(A)}{n} \right| \leq \sqrt{\frac{n-1}{n} \left( \|S(A)\|_2^2 - \frac{\|AA^t - A^tA\|_F^2}{12\|A\|_F^2} - \frac{\text{trace}(A)^2}{n} \right)}.$$

Η τελευταία σχέση με βάση τα παραπάνω έχει ως εξής:

$$\begin{aligned}\left| \text{Re} \lambda - \frac{\text{trace}(A)}{n} \right| &\leq \sqrt{\frac{n-1}{n} \left( \delta^2(A) - \frac{8\delta^2(A)v(A)}{12(\delta^2(A) + \|K(A)\|_F^2)} - \frac{\delta^2(A)}{n} \right)} \\ &= \sqrt{\frac{n-1}{n} \left( \delta^2(A) - \frac{2\delta^2(A)v(A)}{3(\delta^2(A) + \|K(A)\|_F^2)} - \frac{\delta^2(A)}{n} \right)} \\ &= \delta(A) \sqrt{\frac{n-1}{n} \left( 1 - \frac{2v(A)}{3(\delta^2(A) + \|K(A)\|_F^2)} - \frac{1}{n} \right)} \\ &= \delta(A) \sqrt{\frac{n-1}{n} \left( \frac{n-1}{n} - \frac{2v(A)}{3(\delta^2(A) + \|K(A)\|_F^2)} \right)}.\end{aligned}$$

Όμως, επειδή η σχέση ισχύει για κάθε  $\lambda$ , θα ισχύει και για τη ρίζα Perron και, άρα, θα είναι  $\text{Re} \lambda = \rho(A)$ , αφού η  $\lambda$  είναι πραγματική.

Συνεπώς,

$$\left| \text{Re} \lambda - \frac{\text{trace}(A)}{n} \right| = \rho(A) - \frac{\delta(A)}{n}.$$

Επομένως, έχουμε

$$\begin{aligned} \left| \operatorname{Re} \lambda - \frac{\operatorname{trace}(A)}{n} \right| &\leq \delta(A) \sqrt{\frac{n-1}{n} \left( \frac{n-1}{n} - \frac{2\nu(A)}{3(\delta^2(A) + \|K(A)\|_F^2)} \right)} \\ \Rightarrow \rho(A) - \frac{\delta(A)}{n} &\leq \delta(A) \sqrt{\frac{n-1}{n} \left( \frac{n-1}{n} - \frac{2\nu(A)}{3(\delta^2(A) + \|K(A)\|_F^2)} \right)} \\ \Rightarrow \rho(A) &\leq \delta(A) + \left( \frac{1}{n} + \sqrt{\frac{n-1}{n} \left( \frac{n-1}{n} - \frac{2\nu(A)}{3(\delta^2(A) + \|K(A)\|_F^2)} \right)} \right) \end{aligned}$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

Σημείωση: Παρατηρούμε ότι καθώς  $\nu(A) \rightarrow 0$ , το άνω φράγμα της φασματικής ακτίνας  $\rho(A)$  στη σχέση (4.1) πλησιάζει το  $\delta(A)$ , το οποίο είναι η μεγαλύτερη δυνατή τιμή για το  $\rho(A)$ . Επιπρόσθετα, για κάθε  $\alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ , ισχύει ότι

$$\|L(A, \alpha)\|_F^2 = \delta^2(A) + (1 - 2\alpha)^2 + \|K(A)\|_F^2.$$

Ακολουθεί ένα συγκριτικό αποτέλεσμα μεταξύ των φασματικών ακτίνων δύο σχεδόν-αντισυμμετρικών πινάκων.

**Πόρισμα 4.5** Έστω  $A$  ένας  $n \times n$  πραγματικός, μη αρνητικός (κατά στοιχείο), σχεδόν-αντισυμμετρικός πίνακας. Τότε, για κάθε  $\alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$  ισχύει

$$\varphi(A, \alpha) \leq \delta(A) \left( \frac{1}{n} + \sqrt{\frac{n-1}{n} \left( \frac{n-1}{n} - \frac{2(1-2\alpha)^2\nu(A)}{3(\delta^2(A) + (1-2\alpha)^2\|K(A)\|_F^2)} \right)} \right).$$

Η ισότητα ισχύει για  $\alpha = \frac{1}{2}$ .

Υπενθύμιση: Πριν προχωρήσουμε στην Πρόταση 4.6, κρίνεται χρήσιμο να επισημάνουμε το εξής: Στο Κεφάλαιο 2 και συγκεκριμένα στην Πρόταση 2.7, είδαμε ότι αν  $A$  ένας  $n \times n$  σχεδόν-αντισυμμετρικός πίνακας με διασπορά  $v(A)$ , τότε για κάθε  $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$  τέτοιο ώστε  $(1 - 2\alpha)^2 v(A) < \frac{\delta^2(A)}{4}$ , ο πίνακας  $L(A, \alpha)$  έχει:

(α) μία πραγματική ιδιοτιμή  $\lambda_1(A, \alpha)$  για την οποία ισχύει ότι

$$\lambda_1(A, \alpha) \geq \frac{\delta(A) + \sqrt{\delta^2(A) - 4(1 - 2\alpha)^2 v(A)}}{2}$$

και

(β)  $n-1$  μιγαδικές ιδιοτιμές  $\lambda_i(A, \alpha)$ ,  $i = 2, \dots, n-1$ , για τις οποίες ισχύει ότι

$$\operatorname{Re} \lambda_i(A, \alpha) \leq \frac{\delta(A) - \sqrt{\delta^2(A) - 4(1 - 2\alpha)^2 v(A)}}{2}.$$

Στην περίπτωση που ο  $A$  είναι μη αρνητικός τότε οι παραπάνω σχέσεις στις περιπτώσεις (α) και (β) γράφονται ως

$$(α) \quad \varphi(A, \alpha) \geq \frac{\delta(A) + \sqrt{\delta^2(A) - 4(1 - 2\alpha)^2 v(A)}}{2}$$

και

$$(β) \quad \varphi(A, \alpha) \leq \frac{\delta(A) - \sqrt{\delta^2(A) - 4(1 - 2\alpha)^2 v(A)}}{2}.$$

**Πρόταση 4.6** Έστω  $A, B$  δύο  $n \times n$  πραγματικοί, μη αρνητικοί, σχεδόν-αντισυμμετρικοί πίνακες με διασπορές  $v(A)$  και  $v(B)$  και έστω ότι  $\delta(A) = \delta(B)$ . Τότε,

εάν  $\delta^2(B) > 4v(B)$  και εάν

$$(4.2) \quad \frac{1}{n} + \sqrt{\frac{n-1}{n} \left( \frac{n-1}{n} - \frac{2v(A)}{3\|A\|_F^2} \right)} < \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{4v(B)}{\delta^2(B)}}}{2},$$

τότε θα ισχύει  $\rho(A) < \rho(B)$ .

#### Απόδειξη

Αρχικά, στην παρατήρηση που προηγήθηκε, είδαμε ότι

$$\varphi(A, \alpha) \geq \frac{\delta(A) + \sqrt{\delta^2(A) - 4(1 - 2\alpha)^2 v(A)}}{2} \quad \forall \alpha \in \mathbb{X}_A.$$

Γνωρίζουμε, ακόμη, ότι για  $\alpha = 0$  ισχύει ότι  $\varphi(A, 0) = \rho(A)$ .

Άρα, έχουμε ότι

$$\rho(A) \geq \frac{\delta(A) + \sqrt{\delta^2(A) - 4v(A)}}{2} \quad \forall \alpha \in X_A$$

$$\Rightarrow \rho(A) \geq \delta(A) \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{4v(A)}{\delta^2(A)}}}{2} \quad \forall \alpha \in X_A$$

Επίσης, από το Θεώρημα 4.5 για  $\alpha = 0$  παίρνουμε ότι

$$\rho(A) \leq \delta(A) \left( \frac{1}{n} + \sqrt{\frac{n-1}{n} \left( \frac{n-1}{n} - \frac{2v(A)}{3(\delta^2(A) + \|K(A)\|_F^2)} \right)} \right).$$

Επομένως, έχουμε ότι

$$\delta(A) \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{4v(A)}{\delta^2(A)}}}{2} \leq \rho(A) \leq \delta(A) \left( \frac{1}{n} + \sqrt{\frac{n-1}{n} \left( \frac{n-1}{n} - \frac{2v(A)}{3(\delta^2(A) + \|K(A)\|_F^2)} \right)} \right).$$

Ομοίως, για τον πίνακα  $B$  ισχύει

$$\delta(B) \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{4v(B)}{\delta^2(B)}}}{2} \leq \rho(B) \leq \delta(B) \left( \frac{1}{n} + \sqrt{\frac{n-1}{n} \left( \frac{n-1}{n} - \frac{2v(B)}{3(\delta^2(B) + \|K(B)\|_F^2)} \right)} \right).$$

Όμως, από υπόθεση είναι  $\delta(A) = \delta(B)$  και  $\frac{1}{n} + \sqrt{\frac{n-1}{n} \left( \frac{n-1}{n} - \frac{2v(A)}{3\|K(A)\|_F^2} \right)} < \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{4v(B)}{\delta^2(B)}}}{2}$ .

Άρα, από τις δύο αυτές σχέσεις και τις παραπάνω δύο ανισότητες προκύπτει:

$$\begin{aligned} \rho(A) &\leq \delta(B) \left( \frac{1}{n} + \sqrt{\frac{n-1}{n} \left( \frac{n-1}{n} - \frac{2v(A)}{3(\delta^2(A) + \|K(A)\|_F^2)} \right)} \right) \\ &\leq \delta(B) \left( \frac{1}{n} + \sqrt{\frac{n-1}{n} \left( \frac{n-1}{n} - \frac{2v(A)}{3\|A\|_F^2} \right)} \right) \\ &< \delta(B) \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{4v(B)}{\delta^2(B)}}}{2} \\ &\leq \rho(B). \end{aligned}$$

Συνεπώς, καταλήξαμε ότι  $\rho(A) < \rho(B)$ .

□

Υπενθύμιση: Νωρίτερα, στο Κεφάλαιο 3, Πόρισμα 3.2, είχαμε δει ότι αν το συμμετρικό μέρος ενός πίνακα  $A \in M_n(\mathfrak{R})$  είναι μη υποβιβάσιμος πίνακας, τότε για κάθε  $\alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ , το δεξιό και το αριστερό διάνυσμα Perron του  $L(A, \alpha)$  έχουν την ορθογώνια προβολή τους πάνω στο διάνυσμα  $w$ . Με άλλα λόγια, ισχύει ότι

$$(4.3) \quad \varphi(A, \alpha) = \delta(A) \left( \frac{w^t x_r(a)}{\|w\|_2} \right)^2 = \delta(A) \left( \frac{w^t x_l(a)}{\|w\|_2} \right)^2.$$

**Πρόταση 4.7** Έστω  $A$  ένας  $n \times n$  πραγματικός, μη αρνητικός (κατά στοιχείο), σχεδόν-αντισυμμετρικός πίνακας. Εάν, το  $S(A)$  είναι μη υποβιβάσιμος πίνακας, τότε για κάθε  $\alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$  ισχύει:

$$\begin{aligned} \cos(\widehat{w, x_r(a)}) &= \cos(\widehat{w, x_l(a)}) \\ &\leq \sqrt{\frac{1}{n} + \sqrt{\frac{n-1}{n} \left( \frac{n-1}{n} - \frac{2(1-2\alpha)^2 v(A)}{3(\delta^2(A) + (1-2\alpha)^2 \|K(A)\|_F^2)} \right)}}. \end{aligned}$$

Απόδειξη

Από το Πόρισμα 4.5 έχουμε ότι για κάθε  $\alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$  ισχύει

$$\varphi(A, \alpha) \leq \delta(A) \left( \frac{1}{n} + \sqrt{\frac{n-1}{n} \left( \frac{n-1}{n} - \frac{2(1-2\alpha)^2 v(A)}{3(\delta^2(A) + (1-2\alpha)^2 \|K(A)\|_F^2)} \right)} \right).$$

Επομένως, από την (4.3) συνεπάγεται ότι

$$\frac{w^t x_r(a)}{\|w\|_2} \leq \sqrt{\frac{1}{n} + \sqrt{\frac{n-1}{n} \left( \frac{n-1}{n} - \frac{2(1-2\alpha)^2 v(A)}{3(\delta^2(A) + (1-2\alpha)^2 \|K(A)\|_F^2)} \right)}}$$

και η απόδειξη είναι πλήρης, αφού το διάνυσμα Perron  $x_r(a)$  είναι μοναδιαίο.

□

**Πόρισμα 4.8** Έστω  $A \in M_n(\mathbb{R})$  ένας μη αρνητικός (κατά στοιχείο), σχεδόν-αντισυμμετρικός πίνακας. Εάν, το  $S(A)$  είναι μη υποβιβάσιμος πίνακας, τότε για κάθε  $\alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$  ισχύει:

$$\cos(\widehat{w, x_r}(a)) = \cos(\widehat{w, x_l}(a)) \leq \sqrt{\frac{1}{n} + \sqrt{\frac{n-1}{n} \left( \frac{n-1}{n} - \frac{(1-2\alpha)^4 v(A)}{6n\delta^2(A)} \right)}}.$$

**Πόρισμα 4.9** Έστω  $A \in M_n(\mathbb{R})$  ένας μη αρνητικός (κατά στοιχείο), σχεδόν-αντισυμμετρικός πίνακας. Εάν, το  $S(A)$  είναι μη υποβιβάσιμος πίνακας, τότε για κάθε  $\alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$  με  $\delta^2(A) > 4(1-2\alpha)^2 v(A)$ , το συνημίτιο  $\cos(\widehat{w, x_r}(a)) = \cos(\widehat{w, x_l}(a))$  ανήκει στο κλειστό διάστημα

$$\left[ \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{(1-2\alpha)^2 v(A)}{\delta^2(A)}}}, \sqrt{\frac{1}{n} + \sqrt{\left(\frac{n-1}{n}\right)^2 - \frac{(n-1)(1-2\alpha)^4 v(A)}{6n^2\delta^2(A)}}} \right].$$

## 4.2 Συνάρτηση Levinger: Παράγωγος και Άνω Φράγματα

*Υπενθύμιση:* Στο Κεφάλαιο 3 θεωρήσαμε για τη συνάρτηση Levinger  $\varphi(A, \alpha) = \rho(L(A, \alpha)) = \rho((1-\alpha)A + \alpha A^t)$ ,  $\alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ , το ανοιχτό διάστημα

$$\mathbb{X}_A \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\} = \left( \max \left\{ 0, \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{\delta^2(A)}{16v(A)}} \right\}, \frac{1}{2} \right)$$

και παρατηρήσαμε ότι το  $\alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$  ανήκει στο  $\mathbb{X}_A \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$  αν και μόνο αν  $\delta^2(A) > 4(1-2\alpha)^2 v(A)$ . Επιπρόσθετα, για τον ορισμό της παραγώγου της συνάρτησης Levinger είδαμε ότι για  $\alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ , ισχύει:

$$\begin{aligned} 0 \leq \varphi'(A, \alpha) &= \frac{1}{1-2\alpha} \frac{x_l(a)^t (L(A, a)^t - L(A, a)) x_r(a)}{x_l(a)^t x_r(a)} \\ &= -2 \frac{x_l(a)^t K(A) x_r(a)}{\cos(\widehat{x_r(a), x_l(a)})}. \end{aligned}$$



**Πόρισμα 4.10** Έστω  $A \in M_n(\mathfrak{R})$  ένας  $n \times n$  μη αρνητικός (κατά στοιχείο), σχεδόν-αντισυμμετρικός πίνακας με μη υποβιβάζσιμο συμμετρικό μέρος. Τότε, για κάθε  $\alpha \in \mathfrak{X}_A$ ,

$$(4.4) \quad \begin{aligned} \varphi'(A, \alpha) &= \frac{2\varphi(A, \alpha)}{1-2\alpha} \left( \frac{1}{\cos(x_r(\bar{a}), \widehat{x_l(a)})} - 1 \right) \\ &\leq \frac{2\delta(A) \left( \delta(A) - \sqrt{\delta^2(A) - 4(1-2\alpha)^2 v(A)} \right)}{(1-2\alpha) \sqrt{\delta^2(A) - 4(1-2\alpha)^2 v(A)}}. \end{aligned}$$

Απόδειξη

Είναι

$$\begin{aligned} \varphi'(A, \alpha) &= -2 \frac{x_l(a)^t K(A) x_r(a)}{\cos(x_r(\bar{a}), \widehat{x_l(a)})} \\ &= -\frac{2}{1-2\alpha} \frac{x_l(a)^t (L(A, a) - S(A)) x_r(a)}{\cos(x_r(\bar{a}), \widehat{x_l(a)})} \\ &= -\frac{2}{1-2\alpha} \left( \varphi(A, \alpha) - \frac{x_l(a)^t S(A) x_r(a)}{\cos(x_r(\bar{a}), \widehat{x_l(a)})} \right), \end{aligned}$$

αφού ισχύει ότι

$$L(A, a) = (1-2\alpha)K(A) + S(A) \Rightarrow K(A) = \frac{L(A, a) - S(A)}{1-2\alpha}$$

και

$$\begin{aligned} \frac{x_l(a)^t L(A, a) x_r(a)}{\cos(x_r(\bar{a}), \widehat{x_l(a)})} &= \frac{x_l(a)^t \varphi(A, \alpha) x_r(a)}{\cos(x_r(\bar{a}), \widehat{x_l(a)})} \\ &= \varphi(A, \alpha) \frac{x_l(a)^t x_r(a)}{\cos(x_r(\bar{a}), \widehat{x_l(a)})} \\ &= \varphi(A, \alpha). \end{aligned}$$

Ακόμη, θεωρώντας  $z(a)$  την ορθογώνια προβολή των  $x_r(a)$ ,  $x_l(a)$  στο  $w$ , έχουμε

$$\begin{aligned} x_l(a)^t S(A) x_r(a) &= z(a)^t S(A) z(a) \\ &= z(a)^t \delta(A) z(a) \\ &= \delta(A) (z(a)^t z(a)) \\ &= \delta(A) \|z(a)^t\|_2^2 \\ &= \varphi(A, \alpha). \end{aligned}$$

Επομένως, η παράγωγος είναι

$$\begin{aligned}\varphi'(A, \alpha) &= -\frac{2}{1-2\alpha} \left( \varphi(A, \alpha) - \frac{\varphi(A, \alpha)}{\cos(x_r(a), x_l(a))} \right) \\ &= \frac{2\varphi(A, \alpha)}{1-2\alpha} \left( \frac{1}{\cos(x_r(a), x_l(a))} - 1 \right).\end{aligned}$$

Από την ισότητα αυτή, το γεγονός ότι  $\varphi(A, \alpha) \leq \delta(A)$  και από το άνω φράγμα της Πρότασης 2.7 ολοκληρώνεται η απόδειξη. □

Αξίζει να σημειώσουμε ότι το άνω φράγμα της συνάρτησης Levinger στη σχέση (4.4) είναι ανεξάρτητο από το  $s_1 = \|K(A)\|_2$ . Επίσης, καθώς

$$s_1 \geq \frac{\|K(A)w\|_2}{\|w\|_2} = \sqrt{v(A)},$$

μετά από απλούς υπολογισμούς μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι για κάθε  $\alpha \in \mathbb{X}_A$

$$s_1 \geq \sqrt{v(A)} > \frac{(\delta(A) - \sqrt{\delta^2(A) - 4(1-2\alpha)^2 v(A)}) \sqrt{\delta^2(A) - 4(1-2\alpha)^2 v(A)}}{2(1-2\alpha)^2 \sqrt{v(A)}}.$$

όπου  $s_1$  η μεγαλύτερη ιδιάζουσα τιμή του πίνακα  $A$ .

Κατά συνέπεια, το άνω φράγμα στο προηγούμενο θεώρημα είναι μια βελτίωση του άνω φράγματος που αναφέρεται στο Θεώρημα 3.6 του Κεφαλαίου 3 για κάθε  $\alpha \in \mathbb{X}_A$ .

**Θεώρημα 4.11** Έστω  $A$  ένας  $n \times n$  πραγματικός, μη αρνητικός (κατά στοιχείο), σχεδόν-αντισυμμετρικός πίνακας με μη υποβιβάσιμο συμμετρικό μέρος. Τότε, για κάθε  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{X}_A$ , με  $\alpha_1 < \alpha_2$  ισχύει

$$\varphi(A, \alpha_2) - \varphi(A, \alpha_1) \leq \delta(A) \ln \left( \frac{(1-2\alpha_2)^2 (\delta(A) - \sqrt{\delta^2(A) - 4(1-2\alpha_1)^2 v(A)})}{(1-2\alpha_1)^2 (\delta(A) - \sqrt{\delta^2(A) - 4(1-2\alpha_2)^2 v(A)})} \right).$$

Επίσης,

$$\varphi(A, \alpha) \leq \rho(A) + \delta(A) \ln \left( \frac{(1-2\alpha)^2 (\delta(A) - \sqrt{\delta^2(A) - 4v(A)})}{\delta(A) - \sqrt{\delta^2(A) - 4(1-2\alpha)^2 v(A)}} \right).$$

**Θεώρημα 4.12** Έστω  $A \in M_n(\mathbb{R})$  ένας  $n \times n$  μη αρνητικός (κατά στοιχείο), σχεδόν-αντισυμμετρικός πίνακας με μη υποβιβάζσιμο συμμετρικό μέρος. Τότε, για κάθε  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{X}_A$ , με  $\alpha_1 < \alpha_2$  ισχύει

$$\frac{\varphi(A, \alpha_2)}{\varphi(A, \alpha_1)} \leq \frac{(1 - 2\alpha_2)^2 \left( \delta(A) - \sqrt{\delta^2(A) - 4(1 - 2\alpha_1)^2 v(A)} \right)}{(1 - 2\alpha_1)^2 \left( \delta(A) - \sqrt{\delta^2(A) - 4(1 - 2\alpha_2)^2 v(A)} \right)}.$$

Απόδειξη

Στο Πρόγραμμα 4.10 είδαμε ότι

$$\begin{aligned} \varphi'(A, \alpha) &= \frac{2\varphi(A, \alpha)}{1 - 2\alpha} \left( \frac{1}{\cos(x_r(\bar{a}), x_l(a))} - 1 \right) \\ \Rightarrow \frac{(1 - 2\alpha)\varphi'(A, \alpha)}{2\varphi(A, \alpha)} &= \frac{1}{\cos(x_r(\bar{a}), x_l(a))} - 1 \\ \Rightarrow \frac{1}{\cos(x_r(\bar{a}), x_l(a))} &= \frac{2\varphi(A, \alpha) + (1 - 2\alpha)2\varphi'(A, \alpha)}{2\varphi(A, \alpha)}. \end{aligned}$$

Ακόμη, από Θεώρημα 3.6 [P. Psarrakos, M. Tsatsomeros, 360, 2003]

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\delta^2(A) - 4(1 - 2\alpha)^2 v(A)}{\delta^2(A)}} &\leq \cos(x_r(\bar{a}), x_l(a)) \\ &= \frac{2\varphi(A, \alpha)}{2\varphi(A, \alpha) + (1 - 2\alpha)2\varphi'(A, \alpha)} \\ \Rightarrow \frac{\sqrt{\delta^2(A) - 4(1 - 2\alpha)^2 v(A)}}{\delta(A)} &\leq \frac{2\varphi(A, \alpha)}{2\varphi(A, \alpha) + (1 - 2\alpha)2\varphi'(A, \alpha)} \\ \Rightarrow \frac{2\varphi(A, \alpha) + (1 - 2\alpha)2\varphi'(A, \alpha)}{\varphi(A, \alpha)} &\leq \frac{2\delta(A)}{\sqrt{\delta^2(A) - 4(1 - 2\alpha)^2 v(A)}} \\ \Rightarrow 2 + (1 - 2\alpha) \frac{\varphi'(A, \alpha)}{\varphi(A, \alpha)} &\leq \frac{2\delta(A)}{\sqrt{\delta^2(A) - 4(1 - 2\alpha)^2 v(A)}}. \end{aligned}$$

Επομένως για κάθε  $\alpha \in \mathbb{X}_A$ ,

$$0 \leq \frac{\varphi'(A, \alpha)}{\varphi(A, \alpha)} \leq -\frac{2}{1 - 2\alpha} + \frac{2\delta(A)}{(1 - 2\alpha)\sqrt{\delta^2(A) - 4(1 - 2\alpha)^2 v(A)}}.$$

Ολοκληρώνοντας την παραπάνω ανισότητα ως προς  $\alpha$  στο διάστημα  $(\alpha_1, \alpha_2) \subseteq \mathbb{X}_A$  παίρνουμε

$$\ln \frac{\varphi(A, \alpha_2)}{\varphi(A, \alpha_1)} \leq \ln \left( \frac{(1 - 2\alpha_2)^2 (\delta(A) - \sqrt{\delta^2(A) - 4(1 - 2\alpha_1)^2 v(A)})}{(1 - 2\alpha_1)^2 (\delta(A) - \sqrt{\delta^2(A) - 4(1 - 2\alpha_2)^2 v(A)})} \right)$$

και, συνεπώς,

$$\frac{\varphi(A, \alpha_2)}{\varphi(A, \alpha_1)} \leq \frac{(1 - 2\alpha_2)^2 (\delta(A) - \sqrt{\delta^2(A) - 4(1 - 2\alpha_1)^2 v(A)})}{(1 - 2\alpha_1)^2 (\delta(A) - \sqrt{\delta^2(A) - 4(1 - 2\alpha_2)^2 v(A)})}.$$

Η απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

Σημείωση: Εάν  $\delta^2(A) > 4v(A)$ , τότε για  $\alpha_2 = \alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$  και  $\alpha_1 \rightarrow 0$ ,

$$(4.5) \quad \varphi(A, \alpha) \leq \rho(A) \frac{(1-2\alpha)^2 (\delta(A) - \sqrt{\delta^2(A) - 4v(A)})}{\delta(A) - \sqrt{\delta^2(A) - 4(1-2\alpha)^2 v(A)}}$$

Επιπρόσθετα, από τη σχέση (4.3)

$$(4.6) \quad \cos(x_r(\overline{a}), w) = \cos(x_l(\overline{a}), w) \leq \sqrt{\frac{\rho(A)(1-2\alpha)^2 (\delta(A) - \sqrt{\delta^2(A) - 4v(A)})}{\delta(A) (\delta(A) - \sqrt{\delta^2(A) - 4(1-2\alpha)^2 v(A)})}}.$$

Ακόμη, καθώς  $\alpha_2 \rightarrow \frac{1}{2}$  και  $\alpha_1 = \alpha \in \mathbb{X}_A$ , προκύπτει

$$\varphi(A, \alpha) \geq \frac{2v(A)}{\delta(A) - \sqrt{\delta^2(A) - 4(1 - 2\alpha)^2 v(A)}}$$

Είναι πραγματικά αξιοσημείωτο ότι με απλές πράξεις (συζυγή παράσταση) επαληθεύεται ότι το παραπάνω κάτω φράγμα ταυτίζεται με το κάτω φράγμα της Πρότασης 2.7.

### Παράδειγμα

Έστω ο  $6 \times 6$  μη υποβιβάσιμος, μη αρνητικός πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1.0 & 0.2 & 0.4 & 1.8 & 1.4 & 1.0 \\ 1.8 & 1.0 & 0.0 & 2.0 & 0.6 & 0.6 \\ 1.6 & 2.0 & 1.0 & 2.0 & 2.0 & 0.2 \\ 0.2 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 1.6 & 1.8 \\ 0.6 & 1.4 & 0.0 & 0.4 & 1.0 & 1.6 \\ 1.0 & 1.4 & 1.8 & 0.2 & 0.4 & 1.0 \end{pmatrix}.$$

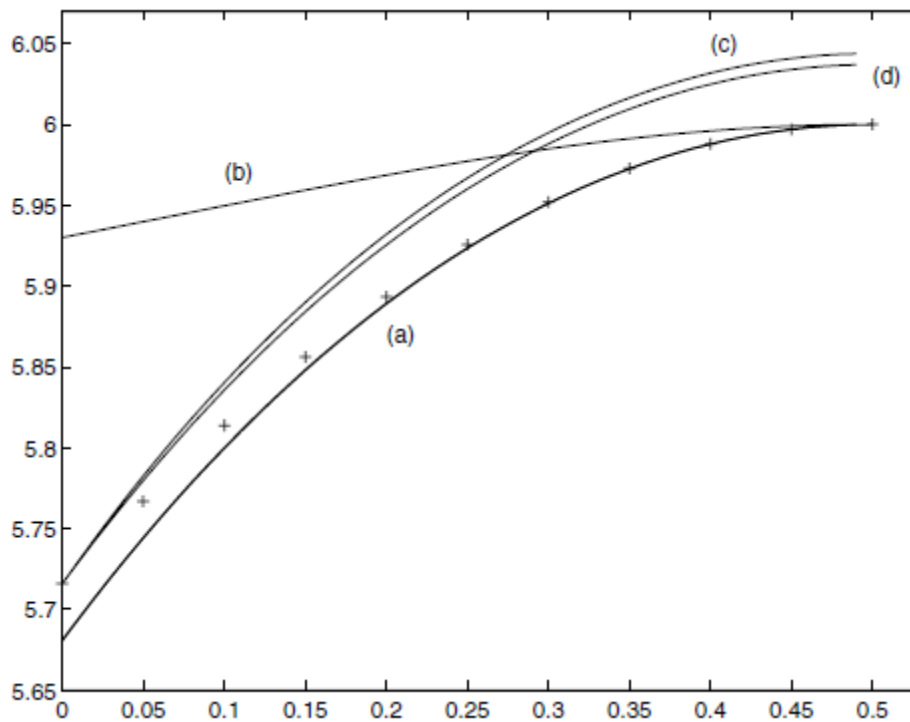
Ο  $A$  είναι σχεδόν-αντισυμμετρικός και έχει μη υποβιβάσιμο συμμετρικό μέρος  $S(A) = \mathbf{1} \mathbf{1}^t$ , όπου με  $\mathbf{1} \in \mathfrak{R}^n$  συμβολίζουμε το διάνυσμα που όλα του τα στοιχεία είναι ίσα με τη μονάδα. Η ρίζα Perron του πίνακα  $A$  είναι  $\rho(A) = 5.7159$ , η διασπορά του  $\nu(A) = 1.8133$  και  $\delta(A) = 6$ .

Το αντι-συμμετρικό μέρος του  $A$  είναι

$$K(A) = \begin{pmatrix} 0.0 & -0.8 & -0.6 & 0.8 & 0.4 & 0.0 \\ 0.8 & 0.0 & -1.0 & 1.0 & -0.4 & -0.4 \\ 0.6 & 1.0 & 0.0 & 1.0 & 1.0 & -0.8 \\ -0.8 & -1.0 & -1.0 & 0.0 & 0.6 & 0.8 \\ -0.4 & 0.4 & -1.0 & -0.6 & 0.0 & 0.6 \\ 0.0 & 0.4 & 0.8 & -0.8 & -0.6 & 0.0 \end{pmatrix}$$

και οι νόρμες Frobenius των πινάκων  $A$ ,  $S(A)$  και  $K(A)$  είναι  $\|A\|_F = 7.2277$ ,  $\|S(A)\|_F = 6$  και  $\|K(A)\|_F = 4.0299$ . Όπως βλέπουμε, η συνθήκη  $\delta^2(A) > 4\nu(A)$  ικανοποιείται.

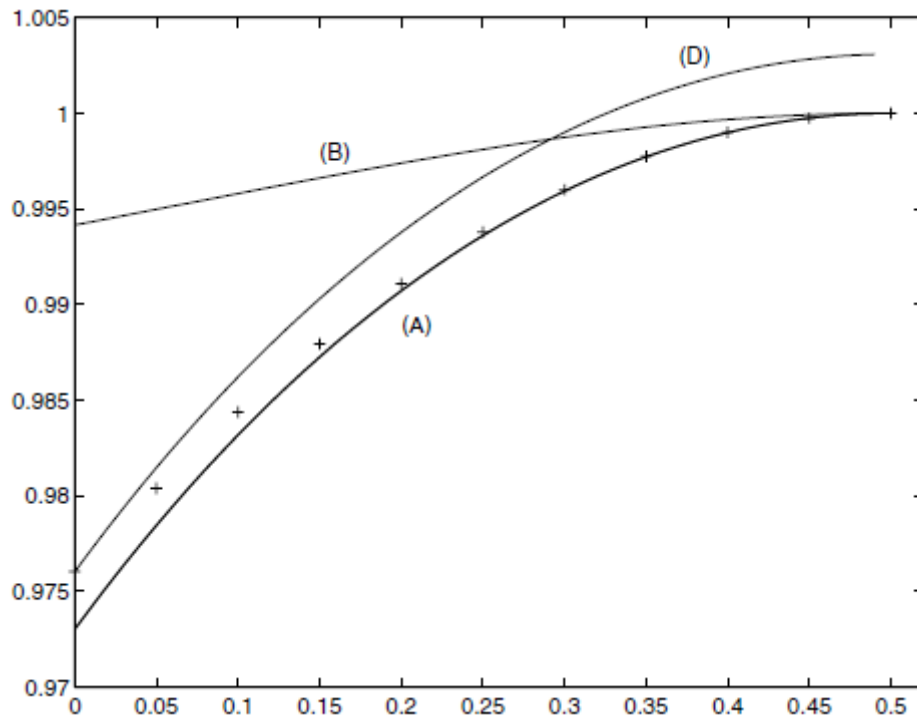
Στο πρώτο γράφημα που παρατίθεται μπορούμε να διακρίνουμε τα φράγματα της συνάρτησης Levinger  $\varphi(A, \alpha)$ . Οι ρίζες Perron  $\varphi(A, \alpha) = \rho(L(A, \alpha))$  για  $\alpha = 0, 0.05, 0.1, \dots, 0.5$  συμβολίζονται με “+”. Η καμπύλη (a) συνιστά το κάτω φράγμα της Πρότασης 2.7 (βλέπε και Υπενθύμιση νωρίτερα), η καμπύλη (b) είναι το άνω φράγμα του Πορίσματος 4.5, η καμπύλη (c) είναι το άνω φράγμα στο δεύτερο μέρος του Θεωρήματος 4.11 και η καμπύλη (d) είναι το άνω φράγμα στη σχέση (4.5).



-Φράγματα της  $\varphi(A, \alpha)$

Το δεύτερο γράφημα αναπαριστά τα φράγματα για το συνημίτονο της γωνίας

$(x_r(\overline{a}), w) = (x_l(\overline{a}), w)$ . Για  $\alpha = 0, 0.05, 0.1, \dots, 0.5$  οι τιμές του συνημιτόνου συμβολίζονται με "+". Η καμπύλη (A) αποτελεί το κάτω φράγμα που περιγράφεται στο Θεώρημα 3.3, η καμπύλη (B) είναι το άνω φράγμα στην Πρόταση 4.7 και η καμπύλη (D) είναι το άνω φράγμα της σχέσης (4.6).



Φράγματα για το  $\cos(\widehat{x_r(a)}, w) = \cos(\widehat{x_l(a)}, w)$

Όπως μπορεί κανείς να διακρίνει, τα τρία αυτά φράγματα παρουσιάζουν ακριβώς την ίδια συμπεριφορά με τα φράγματα (a), (b), (c) και (d) αντίστοιχα, του πρώτου διαγράμματος.

## 4.3 Πίνακες Tournament

Θα ξεκινήσουμε δίνοντας τον ορισμό του πίνακα Tournament.

**Ορισμός 4.13** Ένας  $n \times n$  πίνακας πρωταθλήματος (tournament)  $T$  είναι ένας  $(0,1)$ -πίνακας για τον οποίο ισχύει ότι  $T + T^t = J - I_n$ , όπου  $J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{1}\mathbf{1}^t$ . (Θυμίζουμε ότι με  $\mathbf{1}$  συμβολίζουμε το διάνυσμα που όλα του τα στοιχεία είναι ίσα με τη μονάδα.)

Για  $n$  περιττό, ο πίνακας πρωταθλήματος  $T$  καλείται **πίνακας ισοπαλίας (regular)** αν το άθροισμα κάθε γραμμής του ισούται με  $\frac{n-1}{2}$ , δηλαδή όταν το **διάνυσμα νικών (score vector)**  $T\mathbf{1}$  είναι  $T\mathbf{1} = \left[\frac{n-1}{2}\right] \mathbf{1}$  (δηλαδή όταν έχουμε την απόλυτη ισοπαλία). Αν το  $n$  είναι άρτιο, τα αθροίσματα όλων των γραμμών του πίνακα  $T$  δεν μπορεί να είναι ίσα με  $\frac{n-1}{2}$ . Στην περίπτωση αυτή, ο πίνακας  $T$  καλείται **πίνακας σχεδόν ισοπαλίας (almost regular)**, αν τα μισά από αυτά τα αθροίσματα ισούνται με  $\frac{n}{2}$  και τα άλλα μισά με  $\frac{n-2}{2}$ .

Η κατηγορία των πινάκων πρωταθλήματος συνδέεται άμεσα με όσα έχουμε ήδη μελετήσει και συγκεκριμένα με τους σχεδόν-αντισυμμετρικούς πίνακες, καθώς εάν ένας πίνακας  $T$  είναι  $n \times n$  πίνακας πρωταθλήματος, τότε ο πίνακας  $A = T + \frac{1}{2}I_n$  είναι μη αρνητικός, σχεδόν-αντισυμμετρικός με  $S(A) = \frac{1}{2}J$ . Επειδή οι ιδιοτιμές του πίνακα  $J$  είναι το 0 (αλγεβρικής πολλαπλότητας  $n-1$ ) και το  $n$  (απλή), τα πραγματικά μέρη των ιδιοτιμών του  $A$  βρίσκονται στο διάστημα  $\left[0, \frac{n}{2}\right]$  και τα πραγματικά μέρη των ιδιοτιμών του  $T$  βρίσκονται στο διάστημα  $\left[-\frac{1}{2}, \frac{n-1}{2}\right]$ .

Επίσης, η γνωστή μας διασπορά για τον πίνακα  $A = T + \frac{1}{2}I_n$  καλείται **διασπορά αποτελεσμάτων** του πίνακα πρωταθλήματος  $T$  και δίνεται από τον τύπο

$$sv(T) = \frac{1}{n} \left\| T\mathbf{1} - \left(\frac{n-1}{2}\right) \mathbf{1} \right\|_2^2 = \frac{1}{n} \|T\mathbf{1} - S(T)\mathbf{1}\|_2^2 = \frac{1}{n} \|K(T)\mathbf{1}\|_2^2,$$

όπου, προφανώς,

$$sv(T) = \frac{1}{n} \|K(T)\mathbf{1}\|_2^2 = \frac{1}{n} \|K(A)\mathbf{1}\|_2^2 = v(A).$$



Επιπρόσθετα,  $\delta(A) = \delta(T) + \frac{1}{2} = \frac{n-1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{n}{2}$ ,  $\rho(A) = \rho(T) + \frac{1}{2}$  (απλές μετατοπίσεις ιδιοτιμών) και

$$\|A\|_F^2 = \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n}{4} = \frac{2n^2 - n}{4}.$$

Προφανώς, η διασπορά αποτελεσμάτων ενός πίνακα ισοπαλίας είναι ίση με 0. Επομένως, από το Πρόρισμα 4.3, όλοι οι πίνακες ισοπαλίας είναι κανονικοί πίνακες. Επιπλέον, η διασπορά αποτελεσμάτων ενός πίνακα σχεδόν ισοπαλίας είναι ίση με  $\frac{1}{4}$ . Γενικά, από την εργασία [Kirkland, 1991] γνωρίζουμε ότι  $sv(T) \leq \frac{n^2-1}{12}$ , με την ισότητα να προκύπτει όταν ο  $T$  είναι τριγωνικός.

Έχει αποδειχτεί [Kirkland, 1997] ότι για αρκούντως μεγάλο άρτιο  $n$  -χωρίς όμως να προσδιορίζεται το μέγεθός του- ο πίνακας πρωταθλήματος με τη μέγιστη δυνατή ρίζα Perron, ανάμεσα σε όλους τους  $n \times n$  πίνακες πρωταθλήματος, υποχρεωτικά είναι πίνακας σχεδόν ισοπαλίας.

Θέλοντας να εφαρμόσουμε τα αποτελέσματα των προηγούμενων κεφαλαίων στους πίνακες πρωταθλήματος, θεωρούμε δύο  $n \times n$  πίνακες πρωταθλήματος  $T_1$  και  $T_2$  και τους αντίστοιχους “μετατοπισμένους” πίνακες  $A_1 = T_1 + \frac{1}{2}I_n$  και  $A_2 = T_2 + \frac{1}{2}I_n$ . Σύμφωνα με όσα διατυπώθηκαν παραπάνω, η σχέση (4.2) στην Πρόταση 4.6 μπορεί να γραφεί (με απλή αντικατάσταση των  $\|A\|_F^2 = \frac{2n^2-n}{4}$  και  $\delta(A) = \frac{n}{2}$ ) στη μορφή

$$2\sqrt{(n-1)\left(n-1-\frac{8v(A_1)}{6n-3}\right)} < n-2 + \sqrt{n^2-16v(A_2)},$$

ή, ισοδύναμα,

$$v(A_1) > \frac{6n-3}{16(n-1)}\left(n^2-2n+8v(A_2)-(n-2)\sqrt{n^2-16v(A_2)}\right).$$

Σαν αποτέλεσμα όσων προηγήθηκαν έχουμε το ακόλουθο θεώρημα.

**Θεώρημα 4.14** Έστω δύο  $n \times n$  πίνακες πρωταθλήματος  $T_1$  και  $T_2$  με διασπορές αποτελεσμάτων  $sv(T_1)$  και  $sv(T_2)$  αντίστοιχα, ώστε  $n^2 > 16sv(T_2)$ . Εάν ισχύει

$$(4.7) \quad sv(T_1) > \frac{6n-3}{16(n-1)}\left(n^2-2n+8sv(T_2)-(n-2)\sqrt{n^2-16sv(T_2)}\right),$$

τότε

$$\rho(T_1) < \rho(T_2).$$

Επίσης, παρατηρούμε ότι η συνάρτηση

$$h(v) = \frac{6n-3}{16(n-1)} \left( n^2 - 2n + 8v - (n-2)\sqrt{n^2 - 16v} \right), \quad 0 \leq v \leq \frac{n^2}{16}$$

η οποία εμφανίζεται στο δεξιό μέλος της (4.7), είναι αύξουσα συνάρτηση του  $v$ .

Πράγματι, η παράγωγός της είναι

$$h'(v) = \frac{6n-3}{2(n-1)} \left( 1 + \frac{n-2}{\sqrt{n^2 - 16v}} \right) > 4, \quad 0 < v < \frac{n^2}{16}.$$

Επιπλέον, η  $h(v)$  ικανοποιεί τις σχέσεις

$$h(0) = 0 \quad \text{και} \quad h\left(\frac{n^2}{16}\right) = \frac{3n(2n-1)(3n-4)}{32(n-1)}.$$

Για άρτιο  $n$ , η μικρότερη δυνατή τιμή για τη διασπορά αποτελεσμάτων ενός  $n \times n$  πίνακα πρωταθλήματος είναι  $\frac{1}{4}$  την οποία και εμφανίζουν οι πίνακες σχεδόν ισοπαλίας. Έτσι, η Πρόταση 4.2 συνεπάγεται ότι οι πίνακες σχεδόν ισοπαλίας έχουν τη μικρότερη δυνατή απόσταση από την κανονικότητα, δηλαδή είναι “πολύ κοντά” σε κανονικούς πίνακες. Ακόμη, η μικρότερη τιμή για την διασπορά αποτελεσμάτων, όσον αφορά στους υπόλοιπους  $n \times n$  πίνακες πρωταθλήματος -δηλαδή, εκτός των πινάκων σχεδόν ισοπαλίας- ισούται με  $\frac{1}{4} + \frac{2}{n}$ . Κατά συνέπεια, θεωρώντας αποκλειστικά πίνακες σχεδόν ισοπαλίας, μπορεί κανείς να επαληθεύσει με απλές πράξεις ότι η ακολουθία (ως προς  $n$ )

$$\frac{6n-3}{16(n-1)} \left( n^2 - 2n + 2 - (n-2)\sqrt{n^2 - 4} \right), \quad n = 2, 3, \dots$$

είναι αύξουσα και συγκλίνει στο  $\frac{3}{2}$ .

**Πόρισμα 4.15** Έστω  $n \geq 4$  άρτιο και έστω  $T_0$  ένας  $n \times n$  πίνακας σχεδόν ισοπαλίας. Τότε για κάθε  $n \times n$  πίνακα πρωταθλήματος  $T$  με

$$sv(T) > \frac{6n-3}{16(n-1)} \left( n^2 - 2n + 2 - (n-2)\sqrt{n^2 - 4} \right),$$

ισχύει ότι  $\rho(T) < \rho(T_0)$ .

Επίσης, αν  $sv(T) > \frac{3}{2}$ , τότε  $\rho(T) < \rho(T_0)$ .

**Πόρισμα 4.16** Έστω  $n$  άρτιος και  $T_0$  ένας  $n \times n$  πίνακας σχεδόν ισοπαλίας. Τότε

$$\rho(T_0) \geq \frac{n - 2 + \sqrt{n^2 - 4}}{4}$$

και

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \rho(T_0) - \frac{n - 1}{2} \right) = 0,$$

το οποίο σημαίνει ότι καθώς το  $n$  αυξάνει, η φασματική ακτίνα ενός  $n \times n$  πίνακα σχεδόν ισοπαλίας τείνει να πάρει τη μέγιστη δυνατή τιμή μεταξύ των φασματικών ακτινών όλων των  $n \times n$  πινάκων πρωταθλήματος.

Απόδειξη:

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, το πραγματικό μέρος κάθε ιδιοτιμής ενός  $n \times n$  πίνακα πρωταθλήματος – άρα και η φασματική του ακτίνα – έχει σαν άνω φράγμα (μέγιστη δυνατή τιμή) το  $\frac{n-1}{2}$ . Έτσι, εφαρμόζοντας το κάτω φράγμα της Πρότασης 2.7 (για  $\alpha = 0$ ) για τον σχεδόν-αντισυμμετρικό πίνακα  $T_0 + \frac{1}{2}I_n$ , παίρνουμε

$$\frac{n - 2 + \sqrt{n^2 - 4}}{4} \leq \rho(T_0) \leq \frac{n - 1}{2}.$$

Επίσης, εύκολα διαπιστώνουμε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n - 2 + \sqrt{n^2 - 4}}{4} - \frac{n - 1}{2} \right) = 0$$

και συνεπώς,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \rho(T_0) - \frac{n - 1}{2} \right) = 0.$$

□

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

A. Berman, R.J. Plemmons, *Nonnegative Matrices in Mathematical Sciences*, SIAM, Philadelphia, PA, 1994.

R. Bhatia, *Matrix Analysis*, Springer, New York, 1997.

A. Brauer, I.C. Gentry, *On the characteristic roots of tournament matrices*, Bull. Amer. Math. Soc. 74 (1968) 1133-1135.

C. Eschenbach, F. Hall, R. Hemasinha, S.J. Kirkland, Z. Li, B.L. Shader, J.L. Stuart, J.R. Weaver, *On almost regular tournament matrices*, Linear Algebra Appl. 306 (2000) 103-121.

M. Fiedler, *Numerical range of matrices and Levinger's theorem*, Linear Algebra Appl. 220 (1995) 171-180.

M. Fiedler, *Geometry of the numerical range of matrices*, Linear Algebra Appl. 37 (1981) 81-96.

S.Friedland, *Eigenvalues of almost skew-symmetric matrices and tournament matrices*, in: R.A. Brualdi, S. Friedland, V. Klee (Eds.), *Combinatorial and graph-theoretical problems in linear algebra*, IMA vol. Math. Appl., vol. 50, Springer, new York, (1993) 189-206.

S.Friedland, M. Katz, *On the maximal spectral radius of even tournament matrices and the spectrum of almost skew-symmetric compact operators*, Linear Algebra Appl. 208/209 (1994) 455-469.

D.A. Gregory and S.J. Kirkland, *Singular values of tournament matrices*, Electron. J. Linear Algebra 5 (1999) 39-52.

R.A. Horn, C.R. Johnson, *Topics in Matrix Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.

R.A. Horn, C.R. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

S. Kirkland, *Perron vector bounds for a tournament matrix with applications to a conjecture of Brualdi and Li*, Linear Algebra Appl. 262 (1997) 209-227.

S. Kirkland, *Hypertournament matrices, score vectors and eigenvalues*, Linear and Multilinear Algebra 30 (1991), 261-274.

S. Kirkland, P. Psarrakos and M. Tsatsomeros, *On the location of the spectrum of hypertournament matrices*, Linear Algebra Appl. 323 (2001) 37-49.

B.W. Levinger, *An inequality for nonnegative matrices*, Notices Amer. Math. Soc. 17 (1970) 260.

C.-K. Li, P. Metha, L. Rodman, *A generalized numerical range: the range of a constrained sesquilinear form*, Linear Multilinear Algebra 37 (1998) 25-49.

C.-K. Li, H. Nakazato, *Some results on the  $q$ -numerical range*, Linear Multilinear Algebra 43 (1998) 385-409.

J. Maroulas, P.J. Psarrakos, M.J. Tsatsomeros, *Perron-Frobenius type results on the numerical range*, Linear Algebra Appl. 348 (2002) 49-62.

J.S. Maybee and N.J. Pullman, *Tournament matrices and their generalizations*, Linear Multilinear Algebra 28 (1990) 57-70.

J. McDonald, P. Psarrakos, M. Tsatsomeros, *Almost skew-symmetric matrices*, Rocky Mountain Journal of Mathematics 34 (2004) 269-288.

P. Psarrakos, M. Tsatsomeros, *The Perron eigenspace of nonnegative almost skew-symmetric matrices and Levinger's transformation*, Linear Algebra Appl. 360 (2003) 43-57.

O. Rojo, R. Soto, H. Rojo, *New eigenvalues estimates for complex matrices*, Comput. Math. Appl. 25 (1993) 91-97.

N. Καδιανάκης, Σ. Καρανάσιος, *Γραμμική Άλγεβρα, Αναλυτική Γεωμετρία και Εφαρμογές*, Αθήνα (2003).

I. Β. Μαρουλάς, *Σημειώσεις Γραμμικής Άλγεβρας II*, Αθήνα (2007).

Π. Ι. Ψαρράκος, *Θέματα Ανάλυσης Πινάκων (Σημειώσεις)*, Αθήνα (2012).