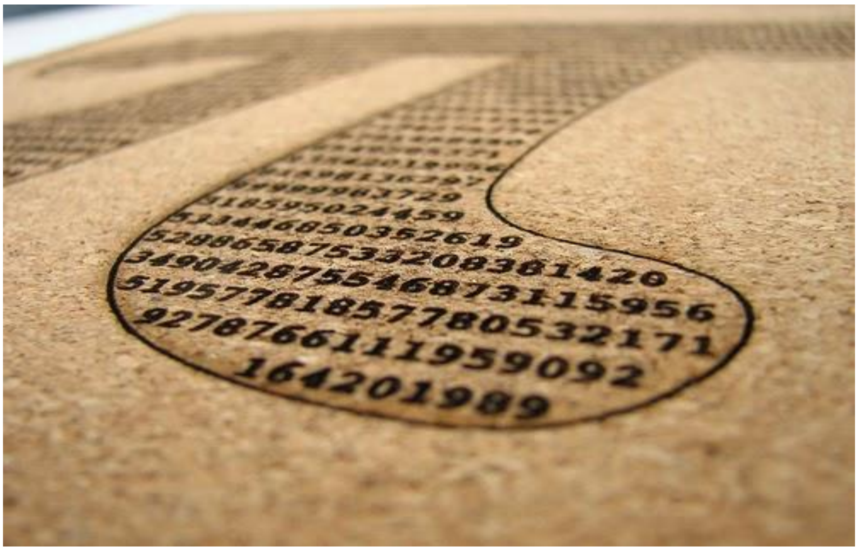
ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Η ΓΕΝΝΗΣΗ ΤΗΣ ΑΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ ΚΑΙ Η ΕΞΕΛΙΞΗ ΤΗΣ



ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

της

Αντωνοπούλου Ελεονώρας

Α.Μ. 09108008

Επιβλέπων Καθηγητής: Βασίλης Καρασμάνης

Αθήνα,2015

Στον αδερφό μου,Ματθαίο…

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω από καρδιάς:

Τον καθηγητή κ. Βασίλη Καρασμάνη, επιβλέποντα καθηγητή της παρούσας πτυχιακής εργασίας, ο οποίος με την υπομονή του και την κατανόησή του με εμπιστεύτηκε, με καθοδήγησε και με έφερε σε επαφή με άγνωστα μέχρι τώρα σε εμένα μονοπάτια.

Τον επίκουρο καθηγητή κ. Αριστείδη Αραγεώργη και τον λέκτορα κ. Πέτρο Στεφανέα οι οποίοι με τίμησαν με την παρουσία τους στην τριμελή επιτροπή εξέτασης.

Τους καθηγητές του τμήματος ΕΜΦΕ του ΕΜΠ για την ειλικρινή προσφορά γνώσεων σε όλη τη διάρκεια της φοίτησής μου.

Επίσης την καθηγήτρια μαθηματικό δευτερόβαθμιας εκπαίδευσης κα. Μυρσίνη Σφαιρίδου για την αγάπη που μου ενέπνευσε για το αντικείμενό της.

Τέλος, τον αδερφό μου Ματθαίο Αντωνόπουλο, απόφοιτο επίσης της σχολής ΕΜΦΕ και καθηγητή μαθηματικό δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, ο οποίος υπήρξε πραγματική έμπνευση και πρότυπο για μένα.

Περίληψη

Σκοπός της παρούσας πτυχιακής εργασίας είναι να εξετάσουμε το θέμα της ασυμμετρίας, το οποίο έχει απασχολήσει και συνεχίζει να απασχολεί τους μαθηματικούς κάθε εποχής. Ξεκινάμε με αναφορά στον Πυθαγόρα, του οποίου το όνομα συνδέεται συχνότερα με τα άρρητα μεγέθη και εν συνεχεία παρουσιάζουμε τα μαθηματικά που είχαν αναπτύξει οι Πυθαγόρειοι γενικότερα ,καθώς και τη φιλοσοφία που πρέσβευαν.

Προχωρώντας, ερευνούμε βάσει αρχαίων αλλά και μεταγενέστερων πηγών σε ποιον ή και ποιους θα μπορούσαμε να αποδώσουμε την ανακάλυψη της ασυμμετρίας. Τίθενται ερωτήματα όπως ποια είναι η πηγή της (τετράγωνο ή πεντάγωνο), πότε μπορεί να χρονολογηθεί και ποιες συνέπειες την ακολούθησαν. Σε αυτά τα ερωτήματα προσπαθούμε να δώσουμε λογικές απαντήσεις που να προσεγγίζουν όσο γίνεται πιο καλά τις σχετικές πηγές μας.

Στην τελευταία ενότητα αναπτύσσουμε την όποια σχέση φαίνεται να είχε ο Πλάτωνας με το θέμα της ασυμμετρίας, αφού προηγηθεί η σχέση του με τα μαθηματικά γενικότερα .Για τον σκοπό αυτό επιμένουμε ειδικότερα σε δύο έργα του Πλάτωνα: τον *Θεαίτητο* και τον *Μένωνα*. Έργα που μας δείχνουν σε συγκεκριμένα χωρία τους ότι ο Πλάτωνας γνώριζε περί της συγκεκριμένης ανακάλυψης και σχετίζουν με αυτήν ονόματα όπως οι μαθηματικοί Θεόδωρος και Θεαίτητος.

Abstract

The purpose of this final work is to look at the issue of incommensurability, which has occupied and continues to occupy mathematicians of each period . We begin by referring to Pythagoras , whose name is often associated with the incommensurable magnitudes and then we present the mathematics that had been developed by the Pythagoreans in general and the philosophy they professed.

Moving on, we investigate , depending on the ancient and later sources, to whom we could attribute the discovery of incommensurability. We raise questions such as what is the source of the discovery (square or pentagon) ,when it can be dated and what consequences followed it . These are the questions, we try to give reasonable answers to, that are as close as we can to our relevant sources .

In the last section we develop the relationship between Plato and the issue of incommensurability, after talking about the relationship between Plato and mathematics in general. To this purpose we insist particularly on two works of Plato : *Theaetetus* and *Menon* .Works that show us via specific passages that Plato knew of this discovery and associate it with names of mathematicians such as Theodore and Theaetetus .

Εισαγωγή

Η παρακάτω εισαγωγή διαθέτει απλούστατα παραδείγματα και είναι απαλλαγμένη από αυστηρούς μαθηματικούς όρους και δύσκολες έννοιες, προκειμένου να είναι δυνατή η κατανόησή της από όλους…

Οι πρώτοι αριθμοί οι οποίοι μας φέρνουν σε επαφή με τον κόσμο των μαθηματικών από την παιδική μας ακόμα ηλικία είναι οι φυσικοί αριθμοί δηλαδή 1,2,…Οι αριθμοί αυτοί είναι εύκολο να γίνουν κατανοητοί και στην πράξη. Για παράδειγμα λέμε σε ένα μικρό παιδί με τη νοημοσύνη που μπορεί να διαθέτει να μετρήσει κάποια αντικείμενα. Δεν είναι δύσκολο να το καταφέρει, αρκεί φυσικά να γνωρίζει την αντιστοιχία αριθμού και πλήθους αντικειμένων (λ.χ. πρέπει να έχει συνδέσει το σύμβολο και αριθμό 2,με τα δύο αντικείμενα που έχει μπροστά του.

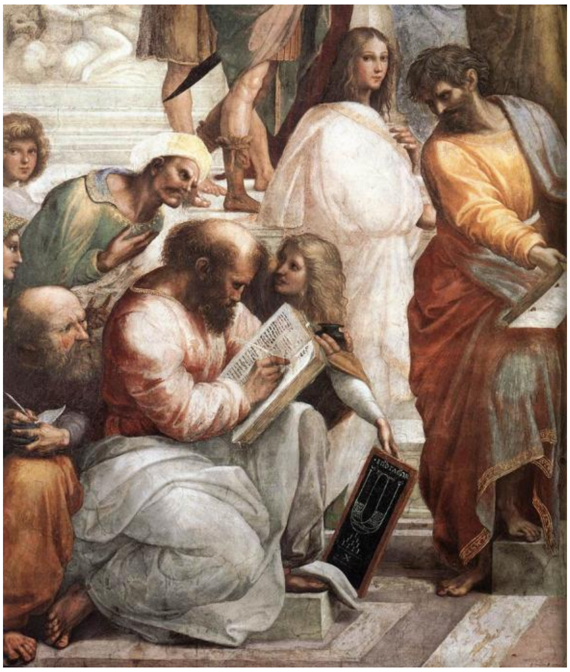
Θα λέγαμε καλά ως εδώ. Δυσκολία εμφανίζεται όταν σε μεγαλύτερες ηλικίες καλούμαστε να εισάγουμε τους ακέραιους αριθμούς ή αλλιώς τους φυσικούς μαζί με τα αρνητικά τους «ζευγαράκια» δηλαδή ±1,±2,… Ένας τρόπος να εξηγήσουμε αυτές τις έννοιες είναι και πάλι να τις ανάγουμε σε κάτι το απτό και εύκολα αντιληπτό ακόμα και από έναν άνθρωπο που δε γνωρίζει και πολλά μαθηματικά π.χ. να αντιστοιχίσουμε τον ακέραιο -2 με την ένδειξη ενός θερμομέτρου μια πολύ κρύα μέρα. Παρόμοιες λύσεις μπορούμε να «σκαρφιστούμε» και στην περίπτωση των ρητών αριθμών δηλαδή με απλά λόγια εκείνων που δύνανται να γραφούν με τη μορφή κλάσματος. Όταν λες σε ένα μικρό παιδί ότι επιτρέπεται να φάει το 1/3 της σοκολάτας που έχει μπροστά του, τον εισάγεις άθελά σου σε μια έννοια ρητού αριθμού!

Τι γίνεται όμως όταν έχεις να αντιμετωπίσεις την έννοια του άρρητου αριθμού; Εκεί προκύπτει δυσκολία ακόμα και σύγχυση, μιας και είναι αριθμοί οι οποίοι δεν μπορούν να γίνουν κατανοητοί σε βάθος από τον οποιοδήποτε. Διαθέτοντας άπειρα, μη περιοδικά δεκαδικά ψηφία (δηλαδή που δεν επαναλαμβάνονται) και μη μπορώντας να γραφούν σαν κλάσματα, αποτελούν συνήθως αιτία θαυμασμού. Όταν μιλάς για παράδειγμα σε έναν μαθητή για την έννοια του κύκλου και ξαφνικά αναφέρεις τον αριθμό π, διακρίνεις περίεργες εκφράσεις. Το ίδιο όταν στην έννοια της τετραγωνικής ρίζας, συναντάς μπροστά σου την $\sqrt{2}$.Εκεί οι μαθητές αναρωτιούνται σε ποιο ψηφίο θα πρέπει να σταματήσουν έχοντας φυσικά καταφύγει στο αγαπημένο τους κομπιουτεράκι.

Υπάρχει αναμφίβολα μια γοητεία σε όλη αυτή τη δυσκολία που βλέπουμε γύρω μας. Ίσως αυτή να μας οδήγησε και στην επιλογή του συγκεκριμένου θέματος. Είναι όμορφο να διερευνάς και εν συνεχεία να ανακαλύπτεις στοιχεία για κάτι το οποίο μοιάζει δυσνόητο. Ειδικά όταν αυτή η αναζήτηση σε πηγαίνει πολύ πίσω, εκεί από όπου πολλές σπουδαίες ανακαλύψεις συνέβησαν.

Ας ταξιδέψουμε λοιπόν…

Κεφάλαιο 1



Pythagoras, the man in the center with the book, teaching music, in Raphael's "The School of Athens"(1959)

1.1 Αναφορές στον Πυθαγόρα από πρώιμες και μεταγενέστερες πηγές

Ο Πυθαγόρας είναι ένα από τα πιο διάσημα ονόματα στην ιστορία της φιλοσοφίας και συγχρόνως μία γοητευτική και μυστηριώδη μορφή. Σύμφωνα με τα λόγια του Ιάμβλιχου στο έργο του *Περί τοῦ πυθαγορικοῦ βίου* κάποιοι αρχαίοι θαυμαστές του Πυθαγόρα τον θεωρούσαν άρχοντα και πατέρα της θείας φιλοσοφίας *(Περί τοῦ Πυθαγορικοῦ Βίου Β,8): «τό μέντοι τήν Πυθαγόρου ψυχήν ἀπό τῆς Ἀπόλλωνος ἡγεμονίας οὖσαν εἴτε συνοπαδόν εἴτε καί ἄλλως οἰκειότερον ἔτι πρός τόν θεόν τοῦτον συντεταγμένην καταπεπέμφθαι εἶς ανθρώπους, οὐδείς ἄν αμφισβητήσειε τεκμαιρόμενος αὐτή τη γενέσει ταύτη καί τήν σοφία τῆς ψυχής αὐτοῦ τῇ παντοδαπὴ…»*[1]

Φαίνεται ότι υπάρχουν συγγραφείς οι οποίοι υποστηρίζουν ότι ο Πυθαγόρας δεν άφησε πίσω του κάποιο σύγγραμμα. α) Ιώσηπος, *Κατ΄ Απίωνος Ι 163: «αὑτοῦ μὲν οὐδὲν ὁμολογεῖται σύγραμμα, πολλοὶ δὲ τὰ περὶ αὐτὸν ἱστορήκασι, καὶ τούτων ἐπισημὸτατὸς ἐστιν Ἕρμιππος».*[2] β) Πλούταρχος, *Περὶ τῆς Ἀλεξάνδρου τύχης Ι4,σ.328: «οὐδὲ Πυθαγόρας ἔγραψεν οὐδὲν οὐδὲ Σωκράτης οὐδὲ Ἀρκεσίλαος οὔτε Καρνεάδης».*[3]Συνεπώς οι πληροφορίες που αντλούμε για τον Πυθαγόρα μπορούν να αναζητηθούν σε δύο ειδών πηγές: τις πρώιμες και τις μεταγενέστερες. Οφείλουμε, όμως, να είμαστε προσεκτικοί στη μελέτη τους, λαμβάνοντας υπόψη πως η πρώτη κατηγορία πηγών είναι και η πιο ουσιαστική.

Σχετικά με τις πρώιμες πηγές, στο έργο *Καθαρμοί* του Εμπεδοκλή, διακρίνουμε ένα απόσπασμα, στο οποίο ο φιλόσοφος αναφέρεται, σύμφωνα με τον Πλούταρχο, στον Πυθαγόρα και γίνεται λόγος για έναν άντρα με εξαιρετικές γνώσεις και δεξιότητες. Ο άνθρωπος αυτός είχε την ικανότητα να βλέπει σε βάθος δέκα και είκοσι ζωών, όχι μόνο τον εαυτό του αλλά και όλα τα όντα*: « ἦν δέ τις ἐν κείνοισιν ἀνὴρ περιώσια εἰδώς, ὃς δὴ μήκιστον πραπίδων ἐκτήσατο πλοῦτον παντοίων τε μάλιστα σοφῶν ἐπιήρανος ἔργων·ὁππότε γὰρ πάσῃσιν ὀρέξαιτο πραπίδεσσιν,ῥεῖ' ὅ γε τῶν ὄντων πάντων λεύσσεσκεν ἕκαστον καί τε δέκ' ἀνθρώπων καί τ' εἴκοσιν αἰώνεσσιν.» (Καθαρμοί Β129).*Επιπλέον, στον Διογένη Λαέρτιο *,VIII 56* διαβάζουμε τα εξής: *«Ἀλκιδάμας δ' ἐν τῷ Φυσικῷ (πβ. Ἐμπεδοκλῆς Α1,56) φησι…τὸν δὲ Ἀναξαγόρου διακοῦσαι καὶ Πυθαγόρου καὶ τοῦ μὲν τὴν σεμνότητα ζηλῶσαι τοῦ τε βίου και τοῦ σχήματος,τοῦ δὲ τὴν φυσιολογίαν».*[4]

Υπήρξαν όμως και πρώιμες αναφορές στο όνομά του Πυθαγόρα, οι οποίες συνθέτουν μία αμφίβολη φήμη του ως σοφού. Εν πρώτοις, ο Ηράκλειτος στο *απόσπασμα 129(*Διογένης Λαέρτιος *VIII,6)* αναφέρει: *«Πυθαγόρης Μνησάρχου, ἱστορίην ἤσκησεν ἄνθρώπων μάλιστα πάντων καί ἐκλεξάμενος ταύτας τάς συγγραφάς*

[1] *ότι όμως η ψυχή του Πυθαγόρα έχει σταλεί στους ανθρώπους από την ανωτάτη αρχή του Απόλλωνος και είναι συνακόλουθος ή κατ' άλλον τρόπον φιλική στο θεό αυτό, ουδείς μπορεί να αμφισβητήσει, όταν μάλιστα έχει σαν παράδειγμα την ίδια του την γέννηση και την σοφία της ψυχής του, την ποικίλη*

[2] *Του ίδιου (του Πυθαγόρα) λέγεται πως δεν υπάρχει κανένα σύγγραμμα, πολλοί όμως έχουν διηγηθεί τις σχετικές μ΄ αυτόν ιστορίες, και ανάμεσά τους ο σπουδαιότερος είναι ο Έρμιππος*

[3] Ούτε *ο Πυθαγόρας έγραψε κάτι ούτε ο Σωκράτης ούτε ο Αρκεσίλαος ούτε ο Καρνεάδης*

[4] *Ο Αλκιδάμας στο έργο του ΄΄Φυσικός΄΄ λέει…ότι (και ο Εμπεδοκλής) παρακολούθησε τα μαθήματα του Αναξαγόρα και του Πυθαγόρα· και (τον Πυθαγόρα) θαύμαζε για την σοβαρότητα του τρόπου της ζωής και της εμφάνισής του, ενώ (τον Αναξαγόρα) για την έρευνα της φύσεως*

ἐποιήσατο ἑαυτοῦ σοφίην, πολυμαθίην, κακοτεχνίην» [5]. Επιπλέον, στο *απόσπασμα 40 (*Διογένης Λαέρτιος *IX,1)* διαβάζουμε τα εξής: *«πολυμαθίην νόον ἒχειν οὐ διδάσκει' Ἡσίοδον γὰρ ἂν ἐδίδαξε καὶ Πυθαγόρην αὖτίς τε Ξενοφάνέα τε καὶ Ἑκαταῖον»* [6].Στο απόσπασμα 129 ο Πυθαγόρας περιγράφεται ειρωνικά ως εκφραστής της ακόρεστης φιλομάθειας και του ερευνητικού πνεύματος που διέκρινε τους Ίωνες διανοούμενους. Κατά τη γνώμη του Ηράκλειτου, ο Πυθαγόρας επέλεγε και οικειοποιούταν με τον δικό του τρόπο αρετές που ανακάλυπτε σε άλλους. Μάλιστα το τελευταίο χαρακτηριστικό, αυτό της κακοτεχνίας, υπονοεί πιθανότατα πως η σοφία του ήταν αναληθής και δεν συνοδευόταν από ορθή κρίση, γεγονός που ενισχύεται και από το απόσπασμα 40.

Προχωρώντας στις αναφορές, εντοπίζουμε στον Ηρόδοτο δύο σημεία αναφοράς στον Πυθαγόρα. Το πρώτο βρίσκεται στο έργο *Ἱστορίαι (Βιβλίο Δ Μελπομένη- 95), «τόν Σάλμοξιν τοῦτον ἐόντα ἄνθρωπον δουλεῦσαι ἐν Σάμῳ,δουλεῦσαι δὲ Πυθαγόρῃ τῷ Μνησάρχου' ...ἅτε δὲ κακοβίων τε ἐόντων τῶν Θρηἰκων καὶ ὑπαφρονεστέρων, τόν Σάλμοξιν τοῦτον ἐπιστάμενον δίαιτάν τε Ἰάδα καὶ ἤθεα βαθύτερα ἢ κατά Θρήικας,οἷα Ἕλλησί τε ὁμιλήσαντα καί Ἑλλήνων οὐ τῷ ἀσθενεστάτῳ σοφιστῇ Πυθαγόρῃ, κατασκευάσασθαι ἀνδρεῶνα,ἐς τόν πανδοκεύοντα τῶν ἀστῶν τούς πρώτους καί εὐωχέοντα ἀναδιδάσκειν ὡς οὔτε αὐτός οὔτε οἱ συμπόται αὐτοῦ οὔτε οἱ ἐκ τούτων αἰεί γινόμενοι ἀποθανεονται,ἀλλ΄ ἥξουσι ἐς χῶρον τοῦτον ἵνα αἰεί περιεόντες ἕξουσι τά πάντα ἀγαθά.»*[7] . Μπορούμε να πούμε πως εδώ ο Ηρόδοτος θίγει με αμφίσημο τρόπο το ζήτημα του αν ο Πυθαγόρας ήταν αγύρτης, καθώς από τη μία η φράση *οὐ τῷ ἀσθενεστάτῳ σοφιστῇ Πυθαγόρῃ* δείχνει πως δεν τον κατέτασσε στους κατώτερους σοφούς, αλλά από την άλλη το χωρίο περιγράφει τον Σάλμοξη (που ήρθε σε επαφή με τον Πυθαγόρα) ως απατεώνα. Το δεύτερο σημείο βρίσκεται πάλι στο *Ιστορίαι (Βιβλίο Β Ευτέρπη -123.2),* όπου ο Ηρόδοτος αναφέρει χαρακτηριστικά πως την πίστη των αρχαίων Αιγυπτίων για τη μετενσάρκωση την ενστερνίστηκαν και κάποιοι Έλληνες τους οποίους όμως δεν θέλει να κατονομάσει. Γνωρίζοντας τη θέση της μετενσάρκωσης στη φιλοσοφία του Πυθαγόρα, είναι απόλυτα εύλογο να θεωρήσουμε ότι υπονοεί ανάμεσα σε άλλους και τον τελευταίο: *« πρῶτοι δὲ καὶ τόνδε τὸν λόγον Αἰγύπτιοί εἰσι οἱ εἰπόντες, ὡς ἀνθρώπου ψυχὴ ἀθάνατός ἐστι, τοῦ σώματος δὲ καταφθίνοντος ἐς ἄλλο ζῷον αἰεὶ γινόμενον ἐσδύεται· ἐπεὰν δὲ πάντα περιέλθῃ τὰ χερσαῖα καὶ τὰ θαλάσσια καὶ τὰ πετεινά, αὖτις ἐς ἀνθρώπου σῶμα γινόμενον ἐσδύνειν, τὴν περιήλυσιν δὲ αὐτῇ γίνεσθαι ἐν τρισχιλίοισι ἔτεσι. Τούτῳ τῷ*

[5] *ο Πυθαγόρας, γιος του Μνησάρχου, άσκησε την έρευνα περισσότερο από όλους τους ανθρώπους, και αφού έκανε μια επιλογή από τούτες τις γραφές, οικειοποιήθηκε τη σοφία, που δεν ήταν άλλο από την πολυμάθεια και την κακοτεχνία*

[6] *η πολυμάθεια δεν διδάσκει την ευθυκρισία, αλλιώς θα την είχε διδάξει στον Ησίοδο και τον Πυθαγόρα, καθώς και στον Ξενοφάνη και τον Εκαταίο*

[7] *Αυτός ο Σάλμοξης ήταν ένας άνθρωπος που έκανε δούλος στη Σάμο, και συγκεκριμένα δούλος του Πυθαγόρα, γιου του Μνησάρχου΄...Οι Θράκες ζούσαν άθλια ζωή και δεν ήταν πολύ έξυπνοι, ενώ αυτός ο Σάλμοξης ήξερε τον ιωνικό τρόπο ζωής και τα ιωνικά ήθη βαθύτερα από όσο τα αντίστοιχα των Θρακών, γιατί είχε συναναστραφεί με Έλληνες και ανάμεσά τους με τον Πυθαγόρα, που δεν ήταν ο κατώτερος από τους σοφούς. Έφτιαξε λοιπόν μια μεγάλη αίθουσα στην οποία δεξιώθηκε τους πιο ονομαστούς πολίτες και ενώ τους παρέθετε γεύμα, τους δίδασκε πως ούτε αυτός ούτε οι καλεσμένοι του ούτε οι απόγονοι τους θα πέθαιναν, αλλά θα πήγαιναν σε κάποιο μέρος που θα ζούσαν αιώνια και θα είχαν ό,τι ποθούσε η ψυχή τους*

λόγῳ εἰσὶ οἳ Ἑλλήνων ἐχρήσαντο, οἱ μὲν πρότερον, οἱ δὲ ὕστερον, ὡς ἰδίῳ ἑωυτῶν ἐόντι· τῶν ἐγὼ εἰδὼς τὰ οὐνόματα οὐ γράφω». Στον Ξενοφάνη *(απόσπασμα 7* Διογένης Λαέρτιος *VIII,36)* συναντάμε και πάλι την ιδέα της μετεμψύχωσης του Πυθαγόρα με κάποιο ειρωνικό ύφος : *« καί ποτέ μιν στυφελιζομένου σκύλακος παριόντα φασίν ἐποικτῖραι καί τόδε φάσθαι ἔπος· παῦσαι μηδέ ῥάπιζ' ,ἐπεί ἦ φίλου ἀνέρος ἐστίν ψυχή, τήν ἔγνων φθεγξαμένης ἀίων»*[8].

Σχετικά με τον Πλάτωνα ,ονομαστική αναφορά στον Πυθαγόρα ή τους Πυθαγόρειους εντοπίζουμε στα κάτωθι αποσπάσματα της *Πολιτείας: 1)(Βιβλίο Ι 600 a-b)*: «*Ἀλλά δὴ εἰ μὴ δημοσίᾳ ,ἰδίᾳ τισίν ἡγεμὼν παιδείας αὐτός ζῶν λέγεται Ὅμηρος γενέσθαι,οἵ ἐκεῖνον ἠγάπων ἐπί συνουσίᾳ καὶ τοῖς ὑστέροις ὁδόν τινα παρέδοσαν βίου Ὁμηρικήν,ὥσπερ Πυθαγόρας αὐτός τέ διαφερόντως ἐπί τούτου ἠγαπήθη, καί οἱ ὕστεροι ἔτι καί νῦν Πυθαγόρειον τρόπον ἐπονομάζοντες τοῦ βίου διαφανεῖς πὴ δοκοῦσιν εἶναι ἐν τοῖς ἄλλοις»*[9]. 2)*(Βιβλίο Ζ 530d)* όπου ο Πλάτωνας γράφει ότι οι μαθηματικές επιστήμες και κυρίως η αστρονομία και η μουσική είναι αδερφές επιστήμες όπως βεβαιώνουν οι Πυθαγόρειοι : *«Ὡς πρός ἀστρονομίαν ὄμματα πέπηγεν,ὡς πρός ἐναρμόνιον φοράν ὦτα παγῆναι,καί αὗται ἀλλήλων ἀδερφαί τίνες αἱ ἐπιστῆμαι εἶναι ὡς οἵ τέ Πυθαγόρειοι φασί και ἡμεῖς συγχωροῦμεν »*[10] . Στη συνέχεια του ίδιου χωρίου βρίσκουμε τον Πλάτωνα να κατηγορεί τους Πυθαγορείους ότι κάνουν τη μουσική εμπειρικά (*531 a-b*) : *«καὶ περὶ ἁρμονίας ἕτερον τοιοῦτον ποιοῦσι; τὰς γὰρ ἀκουομένας αὖ συμφωνίας καὶ φθόγγους ἀλλήλοις ἀναμετροῦντες ἀνήνυτα, ὥσπερ οἱ ἀστρονόμοι, πονοῦσιν. νὴ τοὺς θεούς, ἔφη, καὶ γελοίως γε, πυκνώματ' ἄττα ὀνομάζοντες καὶ παραβάλλοντες τὰ ὦτα, οἷον ἐκ γειτόνων φωνὴν θηρευόμενοι, οἱ μέν φασιν ἔτι κατακούειν ἐν μέσῳ τινὰ ἠχὴν καὶ σμικρότατον εἶναι τοῦτο διάστημα, ᾧ μετρητέον, οἱ δὲ ἀμφισβητοῦντες ὡς ὅμοιον ἤδη φθεγγομένων, ἀμφότεροι ὦτα τοῦ νοῦ προστησάμενοι. σὺ μέν, ἦν δ' ἐγώ, τοὺς χρηστοὺς λέγεις τοὺς ταῖς χορδαῖς πράγματα παρέχοντας καὶ βασανίζοντας, ἐπὶ τῶν κολλόπων στρεβλοῦντας: ἵνα δὲ μὴ μακροτέρα ἡ εἰκὼν γίγνηται πλήκτρῳ τε πληγῶν γιγνομένων καὶ κατηγορίας πέρι καὶ ἐξαρνήσεως καὶ ἀλαζονείας χορδῶν, παύομαι τῆς εἰκόνος καὶ οὔ φημι τούτους λέγειν, ἀλλ' ἐκείνους οὓς ἔφαμεν νυνδὴ περὶ ἁρμονίας ἐρήσεσθαι.ταὐτὸν γὰρ ποιοῦσι τοῖς ἐν τῇ ἀστρονομίᾳ: τοὺς γὰρ ἐν ταύταις ταῖς συμφωνίαις ταῖς ἀκουομέναις ἀριθμοὺς ζητοῦσιν, ἀλλ' οὐκ εἰς προβλήματα ἀνίασιν, ἐπισκοπεῖν τίνες σύμφωνοι ἀριθμοὶ καὶ τίνες οὔ, καὶ διὰ τί ἑκάτεροι.».*[11].Αυτά τα δύο χωρία, καταδεικνύουν τις δύο πλευρές του πυθαγορισμού, δηλαδή την ηθική και την φιλοσοφική-επιστημονική.

---

[8] *Λένε ότι όταν κάποτε είδε να βασανίζουν ένα σκυλάκι, το συμπόνεσε και είπε: «Σταμάτα, μην το χτυπάς, γιατί είναι η ψυχή κάποιου φίλου· την αναγνώρισα όταν άκουσα τη φωνή του»*

[9] *Αν όμως δεν απέκτησε φήμη για τις υπηρεσίες του προς το δημόσιο, μήπως άραγε ακούμε ότι ο Όμηρος ήταν, όσο ζούσε, προσωπικός παιδαγωγός κάποιων ιδιωτών; Υπήρχαν τάχα άνθρωποι που τον αγαπούσαν για τη συντροφιά του και παρέδωσαν στις επόμενες γενιές έναν ομηρικό τρόπο ζωής; Όλα αυτά όμως ισχύουν για τον ίδιο τον Πυθαγόρα που αγαπήθηκε ξεχωριστά για αυτόν τον λόγο (συνουσίᾳ δηλαδή διδασκαλία των πολιτών) και οι μεταγενέστεροί του ζουν ακόμα και σήμερα σύμφωνα με έναν τρόπο ζωής που τον ονόμασαν Πυθαγόρειο και φαίνεται να υπερέχουν ανάμεσα στους άλλους ανθρώπους*

[10] *Όπως τα μάτια έχουν πλαστεί για την αστρονομία ,έτσι και για την αρμονική κίνηση τ' αυτιά, και αυτές οι επιστήμες είναι σαν αδερφές όπως ισχυρίζονται οι Πυθαγόρειοι και εμείς συμφωνούμε*

[11] *Γιατί στην επιστήμη της αρμονίας, συμβαίνει το ίδιο πράγμα: οι δάσκαλοι της αρμονίας συγκρίνουν τους ήχους με τις συμφωνίες που ακούνε και ο κόπος τους, όπως και αυτός των αστρονόμων, είναι*

Επιπλέον, σύμφωνα με τον καθηγητή φιλοσοφίας Τσαρλς Καν (Charles Kahn) μπορούμε να παρατηρήσουμε τη απήχηση κάποιων ιδεών του Πυθαγόρα στο κείμενο του Πλάτωνα. Στο σχετικό έργο του *(2001,σ.21)* διαβάζουμε πως στην πυθαγόρεια σκέψη, η αθανασία κατανοείται τόσο σε όρους μετενσάρκωσης των ψυχών όσο και στη δυνατότητα κάθαρσης και διαφυγής από τον κύκλο της επαναγέννησης. Αυτή, λοιπόν, η πυθαγόρεια άποψη για την ψυχή αναπτύχθηκε πιο συστηματικά στον *Φαίδωνα* του Πλάτωνα, αλλά επίσης εμφανίζεται στο δόγμα της ανάμνησης και σε άλλους διαλόγους, όπως και στους πλατωνικούς μύθους περί κρίσης και ύπαρξης στον *Φαίδωνα*, την *Πολιτεία* και στον *Φαίδρο*. Από την άλλη, η μαθηματική-μουσική αντίληψη του κόσμου λαμβάνει την οριστική της έκφραση στον *Τίμαιο* του Πλάτωνα όπου η κοσμική ψυχή δομείται από τις μουσικές αναλογίες. Η περίπλοκη αριθμητική του *Τίμαιου* είναι σίγουρα επινόηση του Πλάτωνα, όπως δική του είναι και η παρερμηνεία της αθανασίας σε όρους γνωστικής κατανόησης των αιώνιων Ιδεών. Όμως και στις δυο περιπτώσεις ,όπως έντονα τονίζει ο Καν, ο Πλάτωνας δουλεύει με θέματα που είναι στην προέλευσή τους, αναμφισβήτητα, πυθαγόρεια.

Τελειώνοντας με τον Πλάτωνα, μπορούμε να παραθέσουμε την άποψη του Καν (διατυπωμένη στο ίδιο έργο) σχετικά με την επίδραση που άσκησε ο Αρχύτας, ίσως ο πιο διακεκριμένος από τους Πυθαγορείους, στο έργο του Πλάτωνα *(σ.71)*. Στην *Πολιτεία (Βιβλίο Ζ 528 b-d)* διαβάζουμε το εξής: *« Μετά ἐπίπεδον ἐν περιφορᾷ ὄν ἤδη στερεόν λαβόντες ,πρίν αὐτό καθ΄ αὐτό λαβεῖν ὀρθῶς δέ ἔχει ἑξῆς μετά δευτέραν αὔξην τρίτην λαμβάνει.»*[12] . Ο Καν υποστηρίζει πως αυτή η, ομολογουμένως, εμμονή του Πλάτωνα στη μελέτη της στερεάς γεωμετρίας ,θα πρέπει εν μέρει να αντανακλά το έργο του Αρχύτα. Μάλιστα, ο ίδιος διατυπώνει την υπόθεση ότι η γενική σύλληψη των μαθηματικών στον Πλάτωνα οφείλεται σημαντικά στον Αρχύτα. Τέλος, ο ίδιος ο Αριστοτέλης σε ένα απόσπασμα από τα *Μεταφυσικά* ισχυρίζεται ότι η φιλοσοφία του Πλάτωνα είχε επηρεαστεί βαθιά από την πυθαγόρεια διδασκαλία : *«μετὰ δὲ τὰς εἰρημένας φιλοσοφίας ἡ Πλάτωνος ἐπεγένετο πραγματεία, τὰ μὲν πολλὰ τούτοις ἀκολουθοῦσα, τὰ δὲ καὶ ἴδια παρὰ τὴν τῶν Ἰταλικῶν ἔχουσα φιλοσοφίαν.»(Μεταφυσικά,Α6)*

Έχοντας κάνει λόγο για την αναφορά του ονόματος του Πυθαγόρα στο έργο του Πλάτωνα, καθώς και την όποια επίδραση ενδεχομένως να άσκησε σε εκείνον, δεν μπορούμε να μην αναζητήσουμε κάτι αντίστοιχο στον Αριστοτέλη. Ο τελευταίος

ανώφελος. ναι, από τους ουρανούς, είπε, και είναι γελοίο να τους ακούς να μιλάνε για τις πυκνές τους νότες, όπως τις ονομάζουν και τοποθετούν τα αυτιά τους κατά μήκος των χορδών, όπως οι άνθρωποι πιάνουν έναν ήχο από τον τοίχο των γειτόνων τους, κάποιοι από αυτούς λένε πως διακρίνουν έναν ενδιάμεσο ήχο και έχουν βρει το ελάχιστο διάστημα που πρέπει να είναι η μονάδα του μέτρου, και κάποιοι άλλοι διαφωνούν λέγοντας πως οι δύο ήχοι έχουν γίνει ένα, και οι δύο βάζουν τα αυτιά τους να προηγούνται του μυαλού. Εσύ εννοείς, είπα, αυτούς που πειράζουν και βασανίζουν τις χορδές και τις στρεβλώνουν πάνω στους πασσάλους των οργάνων. Μιλούν για τον τρόπο του φυσήματος που δίνει το πλήκτρο και κατηγορούν τις χορδές για οπισθοδρομικότητα και αυθάδεια στον ήχο, αλλά αυτό θα ήταν ανιαρό και ως εκ τούτου θα λέω μόνο ότι αυτοί δεν είναι οι άντρες, και ότι αναφέρομαι στους Πυθαγορείους τους οποίους σχεδίαζα να εξετάσω σχετικά με την αρμονία. Γιατί και αυτοί κάνουν το ίδιο λάθος με τους αστρονόμους: ερευνούν τους αριθμούς των αρμονιών που ακούγονται, αλλά δεν λύνουν ποτέ προβλήματα, δεν φτάνουν ποτέ στις φυσικές αρμονίες του αριθμού και δεν συλλογίζονται γιατί κάποιοι αριθμοί είναι αρμονικοί και κάποιοι όχι.

[12] *μετά το επίπεδο πήραμε το στερεό που βρισκόταν ήδη σε κυκλική τροχιά, προτού να το εξετάσουμε καθαυτό, γιατί το σωστό είναι έτσι. Μετά τη δεύτερη διάσταση να εξετάσουμε την τρίτη.*

σπάνια αναφέρει ονομαστικά τον Πυθαγόρα αλλά κάνει λόγο συχνότερα για τους οπαδούς του πυθαγόρειου δόγματος, χρησιμοποιώντας κάποιες φορές εισαγωγικά. Φαίνεται μάλιστα σα να διστάζει να αποδώσει επακριβώς τον τίτλο Πυθαγόρειοι σε αυτούς. Αυτό μπορεί να προέρχεται από τις αμφιβολίες του για το πόσες θεωρίες προέρχονταν όντως από τον Πυθαγόρα *(G.S.Kirk-J.E.Raven-M.Schofield, σ.340).* Στα *Μεταφυσικά (Α5,985b 23)* διαβάζουμε :*« ἐν δὲ τούτοις καὶ πρὸ τούτων (Λευκίππου καὶ Δημοκρίτου) οἱ καλούμενοι Πυθαγόρειοι τῶν μαθημάτων ἁψάμενοι πρῶτοι ταῦτά τε προήγαγον, καὶ ἐντραφέντες ἐν αὐτοῖς τὰς τούτων ἀρχὰς τῶν ὄντων ἀρχὰς ᾠήθησαν εἶναι πάντων.»*[13] . Άλλη αναφορά στους Πυθαγορείους συναντάμε πάλι στα *Μεταφυσικά (Μ 6 1080b16)*:*«οἱ Πυθαγόρειοι δ' ἕνα, τὸν μαθηματικόν, πλὴν οὐ κεχωρισμένον ἀλλ' ἐκ τούτου τὰς αἰσθητὰς οὐσίας συνεστάναι φασίν: τὸν γὰρ ὅλον οὐρανὸν κατασκευάζουσιν ἐξ ἀριθμῶν, πλὴν οὐ μοναδικῶν, ἀλλὰ τὰς μονάδας ὑπολαμβάνουσιν ἔχειν μέγεθος˙ὅπως δὲ τὸ πρῶτον ἕν συνέστη ἔχον μέγεθος,ἀπορεῖν ἐοίκασιν.»*[14] .Εδώ ο Αριστοτέλης κάνει κριτική στην κοσμογονία του Φιλόλαου (θα την δούμε παρακάτω). Όλες οι άλλες πληροφορίες που υπάρχουν στον Αριστοτέλη έχουν κυρίως να κάνουν με τον Πυθαγορισμό του ύστερου πέμπτου αιώνα.

Η αλήθεια είναι πως στις αρχαίες πηγές δε μπορούμε να διακρίνουμε ταύτιση ιδεών σχετικά με την προσωπικότητα και την προσφορά του Πυθαγόρα. Υπάρχουν από την μία, εκείνοι που τον αναγνώριζαν ως άνθρωπο με εξαιρετικές ικανότητες και γνώσεις και από την άλλη, εκείνοι που του απέδιδαν αρνητικά χαρακτηριστικά όπως απουσία ορθής σκέψης. Ακόμα και ο ίδιος ο Πλάτωνας στα αποσπάσματα που παραθέσαμε μιλάει για τον Πυθαγόρα, αφενός σαν τον πρεσβευτή ενός ενάρετου τρόπου ζωής και αφετέρου σαν ένα οπαδό του εμπειρισμού. Εμείς δε μπορούμε παρά να πιστέψουμε πως η αλήθεια είναι κάπου στη μέση, δηλαδή πως ο Πυθαγόρας είχε πιθανότατα μία θαυμαστή προσωπικότητα αλλά όπως όλοι οι μεγάλοι διανοητές, ίσως να διακρινόταν από σαφή ελαττώματα.

Έχοντας, λοιπόν, ελάχιστα στοιχεία για τον Πυθαγόρα μέσα στα έργα των Πλάτωνα και Αριστοτέλη, οι βασικές μας γνώσεις για εκείνον και τους πρώτους μαθητές του, αντλούνται από έργα μεταγενέστερων συγγραφέων όπως ο Νικόμαχος ο Γερασηνός, ο Θέων ο Σμυρναίος, ο Πορφύριος και ο Ιάμβλιχος ,οι οποίοι είχαν την τάση να αποδίδουν στον Πυθαγόρα κάθε είδους επιστημονική γνώση. Οι σύγχρονοί του όμως, φαίνεται ότι θεωρούσαν τον Πυθαγόρα περισσότερο ως θρησκευτικό προφήτη ,παρά ως μαθηματικό *(Γιάννης Χριστιανίδης ,σ. 65)*.Μάλιστα, η τελευταία άποψη βρίσκει σύμφωνο τον μελετητή και συγγραφέα της εποχής μας Walter Burkert, για τον οποίο ο Πυθαγόρας υπήρξε περισσότερο ένας θρησκευτικός ηγέτης ,ένας γκουρού μάλλον, παρά φιλόσοφος *(C.Kahn,σ.19).* Η πιο εκτεταμένη αναφορά στο όνομα του Πυθαγόρα, ανήκει στον 3^{ο} αιώνα μ.Χ., δηλαδή περίπου 800 χρόνια μετά

[13] *Την ίδια εποχή με τον Λεύκιππο και τον Δημόκριτο, και πριν από αυτούς, οι λεγόμενοι «Πυθαγόρειοι» ασχολήθηκαν με τα μαθηματικά και ήταν οι πρώτοι που τα προήγαγαν. Έχοντας εντρυφήσει στο πνεύμα των μαθηματικών νόμισαν ότι οι αρχές αυτής της επιστήμης είναι οι αρχές όλων των όντων.*

[14] *Και οι Πυθαγόρειοι επίσης πιστεύουν σ' ένα είδος αριθμού, τον μαθηματικό˙ μόνο που λένε πως δεν είναι ξεχωριστός, αλλά ότι από αυτόν δημιουργούνται αισθητές ουσίες. Γιατί κατασκευάζουν το σύμπαν ολόκληρο από αριθμούς, όχι όμως αριθμούς που αποτελούνται από αφηρημένες μονάδες, αλλά πιστεύουν πως οι μονάδες έχουν υλικές διαστάσεις. Φαίνεται όμως ότι δυσκολεύονται να εξηγήσουν πώς δημιουργήθηκε η πρώτη μονάδα με υλικό μέγεθος.*

τον θάνατό του. Ο Διογένης ο Λαέρτιος (*Βίοι Φιλοσόφων –Βιβλίο Η*) και ο Πορφύριος (*Πυθαγόρειος Βίος*) έγραψαν σχετικά με τη ζωή του Πυθαγόρα, ενώ ο Ιάμβλιχος *(Περί τοῦ πυθαγορικοῦ βίου*) σχετικά με τη ζωή των Πυθαγορείων, έργο το οποίο περιείχε βιογραφικά στοιχεία και επικεντρωνόταν στον τρόπο ζωής που καθιέρωσε ο Πυθαγόρας στη σχολή του.

Παρά τις αντικρουόμενες απόψεις, ο Πυθαγόρας αποτελεί ,ομολογουμένως, ένα ενδιαφέρον πρόσωπο με σημαντική συμβολή στην ιστορία των μαθηματικών. Τα στοιχεία που έχουμε είναι λιγοστά όμως μπορούμε να αναγνωρίσουμε πως η προσφορά του στην αρχαία ελληνική σκέψη ήταν πρωτότυπη και ανθεκτική στον χρόνο. Η παραπάνω εισαγωγή αναφορικά με τον Πυθαγόρα, ήταν απαραίτητη ώστε να ασχοληθούμε, εν συνεχεία, με τα μαθηματικά των Πυθαγορείων, την φιλοσοφία-κοσμολογία που πρέσβευαν ,και να οδηγηθούμε στη γέννηση της ασυμμετρίας και σε μία προσπάθεια για χρονολογική της τοποθέτηση.

1.2 Τα μαθηματικά των Πυθαγορείων

Στοβαῖος Ι 1,Προοίμιο 6,ἐκ τῶν Ἀριστοξένου Περὶ ἀριθμητικῆς: «τὴν δὲ περὶ τοὺς ἀριθμοὺς πραγματείαν μάλιστα πάντων τιμῆσαι δοκεῖ Πυθαγόρας καὶ προαγαγεῖν εἰς τὸ πρόσθεν ἀπαγαγὼν ἀπὸ τῆς τῶν ἐμπόρων χρείας,πάντα τὰ πράγματα ἀπεικάζων τοῖς ἀριθμοῖς».[Από το βιβλίο του Αριστοξένου ΄΄Περί Ἀριθμητικῆς΄΄: Φαίνεται ότι ο Πυθαγόρας περισσότερο από όλους εκτιμούσε την επιστήμη της αριθμητικής, την οποία ανέπτυξε πολύ, παίρνοντας την από τη χρήση των εμπόρων, και παριστάνοντας όλα τα πράγματα με τους αριθμούς].

Ο Πρόκλος στη σύνοψη των γεωμετρών -η οποία και αποδίδεται στον Εύδημο - (*Εἰς Εὐκλείδη 65)* μας λέει χαρακτηριστικά ότι ο Πυθαγόρας : «*μετέτρεψε τη μαθηματική φιλοσοφία σε ένα σχήμα ελευθέριας παιδείας, εξετάζοντας τις αρχές της από τα άνω και ερευνώντας τα θεωρήματα με τρόπο νοητικό και χωρίς να κάνει αναφορά στην ύλη. Είναι εκείνος που ανακάλυψε τη θεωρία των αναλογιών και τη σύσταση των κοσμικών σχημάτων*». Βλέπουμε δηλαδή ότι οι Πυθαγόρας προσέγγισε τα μαθηματικά θεωρήματα σε θεωρητικό επίπεδο, ανεξάρτητα από την ύλη, και ότι σε εκείνον αποδίδονται η θεωρία αναλογιών και ο καθορισμός της ουσίας των κοσμικών σχημάτων. Επιπλέον, έχουμε άλλα δύο χωρία παρόμοιας σημασίας από τον Αριστοτέλη και τον Αριστόξενο. α) Αριστοτέλης *Μεταφυσικά (985b 23)* : «*οι λεγόμενοι πυθαγόρειοι ήταν οι πρώτοι που καταπιάστηκαν με τα μαθηματικά, προώθησαν αυτά και αφού έζησαν και μεγάλωσαν μέσα σ' αυτά, θεώρησαν ότι οι αρχές των μαθηματικών ήταν αρχές των πάντων*». β)Αριστόξενος *(απόσπασμα 23,Diels σ.58 b2)* : «*ο Πυθαγόρας φαίνεται ότι εξύψωσε πάνω απ' όλους τη σπουδή των αριθμών και ότι την προήγαγε, αποσπώντας την από τη χρήση των εμπόρων, εξομοιώνοντας όλα τα πράγματα με αριθμούς*».

Τα παραπάνω δύο αποσπάσματα έχουν ωθήσει πολλούς μελετητές να συμπεράνουν πως ο Πυθαγόρας ή οι πρώιμοι Πυθαγόρειοι εφάρμοσαν ένα είδος θεωρητικής παραγωγικής απόδειξης και απάλλαξαν τα μαθηματικά από οποιαδήποτε εμπειρική μέθοδο (*Β.Καρασμάνης 1998*). Δεν είναι όμως απόλυτα ορθό να οδηγηθούμε σε τέτοια συμπεράσματα μόνο από τη μελέτη των δύο αυτών χωρίων. Ο Burkert *(σ. 409-11)* έχει διατυπώσει επιχειρήματα υποστηρίζοντας πως το χωρίο του Πρόκλου, δε μπορεί να αποδοθεί στον Εύδημο αλλά στον Ιάμβλιχο. Και αυτό γιατί υπάρχει ομοιότητα ανάμεσα στο χωρίο αυτό και σε μερικά άλλα χωρία από το *Περί της κοινής μαθηματικής επιστήμης* του Ιάμβλιχου *(σ. 67-8,70).*Το χωρίο από τα *Μεταφυσικά* μας πληροφορεί ότι οι Πυθαγόρειοι εξέλιξαν τα μαθηματικά και ανήγαγαν τις αρχές τους σε γενικά αποδεκτές αρχές και όχι σε σχέση με την αξιωματικοποίηση των μαθηματικών. Το απόσπασμα από τον Αριστόξενο μας λέει ότι ο Πυθαγόρας προήγαγε τη σπουδή των μαθηματικών και παράλληλα την απέσπασε από το εμπόριο. Όλα τα παραπάνω δε μπορούν να αμφισβητηθούν ως πηγές όμως δε μας δίνουν καμιά ισχυρή πληροφορία για αντιεμπειρισμό ή αυστηρούς τρόπους απόδειξης. Η αλήθεια είναι πως μπορούμε να έχουμε εμπειρικά μαθηματικά που όμως δεν αποσκοπούν σε πρακτικές μεθόδους αλλά και το αντίστροφο δηλαδή θεωρητικά μαθηματικά που να στοχεύουν σε πρακτική χρήση(όπως τα ιωνικά μαθηματικά).Για παράδειγμα η πυθαγόρεια αριθμητική με τη χρήση των ψήφων (που θα δούμε παρακάτω) αν και εμπειρική, δεν αποσκοπεί απαραίτητα σε κάτι πρακτικό. Επιπλέον βλέπουμε εδώ πως ο Πρόκλος και ο Αριστοτέλης αναφέρονται γενικά στα μαθηματικά των Πυθαγορείων ενώ ο Αριστόξενος κάνει λόγο ειδικά για την αριθμητική. Κανένα από τα χωρία αυτά δεν κάνει αναφορά στη γεωμετρία.

Επιστρέφοντας στα *Μεταφυσικά* του Αριστοτέλη διαβάζουμε σ΄ ένα απόσπασμα τα παρακάτω: *(Μεταφυσικά Α5 986 a 15): «οἱ καλούμενοι Πυθαγόρειοι …φαίνονται δὴ καὶ οὗτοι τὸν ἀριθμὸν νομίζοντες ἀρχὴν εἶναι καὶ ὡς ὕλην τοῖς οὖσι καὶ ὡς πάθη τε καὶ ἕξεις,τοῦ δὲ ἀριθμοῦ στοιχεῖα τὸ τε ἄρτιον καὶ τὸ περιττόν,τούτων δὲ τὸ μὲν ἄπειρον,τὸ δὲ πεπερασμένον,τὸ δ΄ ἕν ἐξ ἀμφοτέρων εἶναι τούτων(καὶ γὰρ ἄρτιον εἶναι καὶ περιττὸν),τὸν δ΄ ἀριθμόν ἐκ τοῦ ἑνός,ἀριθμοὺς δὲ,καθάπερ εἴρηται,τὸν ὅλον οὐρανὸν».*[15].Το παραπάνω απόσπασμα μέσα σε μια μικρή έκταση, εμπεριέχει ενδιαφέροντα στοιχεία για την στάση των Πυθαγορείων απέναντι στους αριθμούς. Σύμφωνα με τη μαρτυρία του Αριστοτέλη, θεωρούσαν πως οι αριθμοί ήταν αρχή των πάντων και συστατικό των διαφόρων μεταβολών που πραγματοποιούνται στη φύση. Μάλιστα διακρίνονται σε άρτιοι και περιττοί, έννοιες που είναι σε άμεση σχέση με αυτές του άπειρου-πεπερασμένου. Όμως το 1 (δεν είναι αριθμός) ανήκει και στις δύο κατηγορίες και παράγει όλους τους αριθμούς, όπως και τον ίδιο τον ουρανό. Επιπλέον, ο Συμπλίκιος μας πληροφορεί σχετικά *(Εἰς Φυσικά Α 2,8 455,20): «οὗτοι τὸ ἄπειρον τὸν ἄρτιον ἀριθμὸν ἔλεγον διὰ τὸ πᾶν μὲν ἄρτιον,ὥς φασιν οἱ ἐξηγηταί,εἰς ἴσα διαιρεῖσθαι,τὸ δὲ εἰς ἴσα διαιρούμενον ἄπειρον κατὰ τὴν διχοτομίαν· ἡ γὰρ εἰς ἴσα καὶ ἡμίση διαίρεσις ἐπ΄ ἄπειρον·τὸ δὲ περιττὸν προστεθὲν περαίνει αὐτό·κωλύει γὰρ αὐτοῦ τὴν εἰς τὰ ἴσα διαίρεσιν…δῆλον ὅτι οὐκ ἐπ΄ ἀριθμῶν ἀλλ΄ ἐπὶ μεγεθῶν λαμβάνουσι τὴν ἐπ΄ ἄπειρον τομήν».*[16]

Στο *VII βιβλίο* των *Στοιχείων* του Ευκλείδη βρίσκουμε τους παρακάτω δύο ορισμούς: *Ορισμός 6*: *«Ἄρτιος ἀριθμός ἐστιν ὁ δίχα διαιρούμενος»* – *Ορισμός 7*: «*Περισσός δέ ὁ μή διαιρούμενος δίχα ἢ ὁ μονάδι διαφέρων ἀρτίου ἀριθμοῦ».* Δηλαδή άρτιος αριθμός είναι ο διαιρούμενος σε δύο ίσα μέρη ενώ περιττός είναι ο μη διαιρούμενος σε δύο ίσα μέρη ή ο διαφέρων κατά μία μονάδα από τον άρτιο αριθμό. Οι ορισμοί αυτοί έχουν άμεση εφαρμογή (και παραπέμπουν) στο πλαίσιο μιας αριθμητικής όπου οι αριθμοί παρίστανται με ψήφους, πετραδάκια ή τελίτσες. (ψηφοφορία). Στον Επίχαρμο διαβάζουμε τα εξής: *(H.Diels-W.Kranz,σ. 23 B2) «αἰ πὸτ΄ ἀριθμὸν τις περισσόν,αἰ δὲ λῇς πὸτ΄ ἄρτιον,ποτθέμειν λῇ ψᾶφον ἤ καὶ τᾶν*

[15] *Οι καλούμενοι Πυθαγόρειοι… προφανώς λοιπόν και αυτοί θεωρούν ότι ο αριθμός είναι η πρώτη αρχή, τόσο ως ύλη για τα πράγματα όσο και ως αυτό που συνιστά τις αλλαγές τους και τις σταθερές καταστάσεις τους, και υποστηρίζουν ότι τα στοιχεία του αριθμού είναι το άρτιο και το περιττό, από τα οποία το πρώτο είναι άπειρο και το δεύτερο πεπερασμένο· όσο για το 1,προκύπτει και από τα δύο(γιατί είναι και άρτιο και περιττό),και ο αριθμός προκύπτει από το 1·και ολόκληρος ο ουρανός καθώς είπαμε είναι αριθμοί.*

[16] *Αυτοί (οι Πυθαγόρειοι)θεωρούσαν τον άρτιο αριθμό ως άπειρο, διότι, όπως λένε οι σχολιαστές κάθε τι άρτιο διαιρείται σε ίσα μέρη, και αυτό που διαιρείται σε ίσα μέρη είναι άπειρο, σύμφωνα με την αρχή της διχοτομίας· γιατί η διαίρεση σε ίσα μέρη και σε μισά γίνεται επ΄ άπειρον· αν όμως προστεθεί σε αυτά ένα περιττό, τότε αυτά αποκτούν πέρας, αφού αυτό εμποδίζει τη διαίρεσή του σε ίσα μέρη… είναι φανερό ότι τη διαίρεση επ΄ άπειρον δεν τη θεωρούν εφαρμοζόμενη σε αριθμούς, αλλά σε μεγέθη.*

ὑπαρχουσᾶν λαβεῖν,ἦ δοκεῖ κά τοί γ΄ ἔθ΄ ωὑτὸς εἶμεν;Οὐκ ἐμίν γά κα».[17] Στον Αριστοτέλη μαθαίνουμε πως οι Πυθαγόρειοι ανήγαγαν τους αριθμούς σε τρίγωνα και τετράγωνα μέσω των ψήφων *(Μεταφυσικά 1092b 10-12): «οἱ τοὺς ἀριθμοὺς ἄγοντες εἰς τὰ σχήματα τρίγωνον καὶ τετράγωνον, οὕτως ἀφομοιῶν ταῖς ψήφοις τὰς μορφὰς τῶν φυτῶν».* Οι Πυθαγόρειοι, λοιπόν, θα μπορούσαν να παριστάνουν έναν άρτιο αριθμό με σειρά ψήφων η οποία να χωρίζεται σε δύο ίσα μέρη, αλλά έναν περιττό με σειρά όπου πάντα θα περισσεύει μία ψήφος. Για παράδειγμα:

o-o-o/o-o-o = *Ο άρτιος αριθμός 6* **o-o/o/o-o**= *Ο περιττός αριθμός 5*

Μάλιστα στο έργο *Ευθύφρων* του Πλάτωνα *(12-D)* ο άρτιος αριθμός ορίζεται ως αυτός που δεν είναι σκαληνός αλλά ισοσκελής. Η θεωρία της ασυμμετρίας του $\sqrt{2}$ που θα δούμε παρακάτω ,σχετίζεται πλήρως με την διάκριση άρτιος-περιττός.

Η διάκριση άρτιος –περιττός πηγαίνει λίγο παραπέρα αν κοιτάξουμε στη δράση του Φιλόλαου του Κροτωνιάτη, ενός κορυφαίου Νεοπυθαγόρειου φιλοσόφου με δράση που τοποθετείται στο δεύτερο μισό του 5^{ου} αι. π.Χ. : *(απόσπασμα 5,Στοβαίος,Ανθολ. I 21,7 c)* : *«ὅ γα μὰν ἀριθμὸς ἔχει δύο μὲν ἴδια εἴδη, περισσὸν καὶ ἄρτιον, τρίτον δὲ ἀπ' ἀμφοτέρων μειχθέντων ἀρτιοπέριττον».*[18]

Όμως ποιος είναι ο αριθμός με αυτή τη σύνθετη ονομασία; Πρόκειται για εκείνον ο οποίος διαιρούμενος με το 2 αφήνει υπόλοιπο έναν περιττό αριθμό. Ή αλλιώς θα μπορούσαμε να πούμε πως είναι ένας αριθμός της μορφής 2(2ν + 1),όπου φυσικά η παρένθεση συμβολίζει περιττό αριθμό *(S.T.Heath,σ.72).* Για παράδειγμα οι αριθμοί 10(2·5) ή 34(2·17) μπορούν να καταταχθούν στην κατηγορία των αρτιοπέριττων.

Ας κάνουμε στο σημείο αυτό λόγο και για άλλη μια διάκριση των αριθμών: σε «τέλειους» και «φίλους». Ο Ευκλείδης μας παρουσιάζει έναν ορισμό για την πρώτη κατηγορία: *(Στοιχεία Βιβλίο VII ορισμός 22)* : «*Τέλειος ἀριθμός ἐστιν ὁ τοῖς εαὐτοῦ μέρεσιν ἴσος ὤν».* [19] Δηλαδή ο Ευκλείδης ορίζει τον τέλειο αριθμό σαν εκείνον που ισούται με το άθροισμα των διαιρετών του (συμπεριλαμβανομένης και της μονάδας αλλά εξαιρουμένου του ίδιου του αριθμού) π.χ. 6=1+2+3 , 28=1+2+4+7+14 κ.τ.λ. Ο Νικόμαχος ο Γερασηνός (ανήκει στους Νεοπυθαγόρειους) αναφέρει μόνο τέσσερα παραδείγματα τέλειων αριθμών, τους 6,28,496 και 8.128. *(Nicomachus, Introduction to Arithmetic ,σ.16).* Δίνει επίσης έναν γενικό κανόνα ώστε να διαπιστώνουμε αν ένας αριθμός ανήκει στην κατηγορία αυτή (ο κανόνας αυτός αποδεικνύεται από τον Ευκλείδη στα *Στοιχεία- IX 36*): Αν το άθροισμα $1+2+2^2+\ldots+2^\nu=$ α είναι πρώτος αριθμός, τότε ο αριθμός 2^ν ·α είναι τέλειος. Για παράδειγμα ο 1+2+4=7 είναι πρώτος άρα ο 4·7=28 είναι τέλειος. Στην απόδειξη γίνεται χρήση του γνωστού τύπου αθροίσματος της γεωμετρικής προόδου $1+2+2^2+\ldots+2^\nu=2^\nu-1$ ο οποίος εντοπίζεται σε πυθαγόρεια κείμενα και άρα είναι πιθανό να ήταν γνωστός και στον Πυθαγόρα *(Van der Waerden,σ.106).*

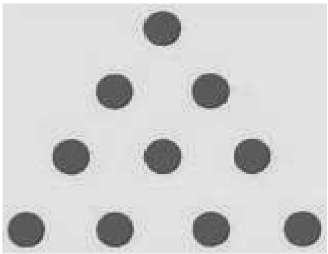
---

[17] *Αν κάποιος σ' έναν περιττό αριθμό ,ή αν θέλεις σ΄ έναν άρτιο, προσθέσει ένα ψηφίο ή αν αφαιρέσει ένα από τα υπάρχοντα ψηφία, μήπως νομίζεις ότι ο αριθμός αυτός θα παραμένει ακόμη ο ίδιος; Όχι βέβαια.*

[18] *ο αριθμός ,μάλιστα, έχει δύο χαρακτηριστικά είδη, τον περιττό και τον άρτιο, ενώ υπάρχει και ένα τρίτο είδος, ο αρτιοπέριττος, που προκύπτει από την ανάμειξη των δύο άλλων.*

[19] *Τέλειος αριθμός είναι αυτός που είναι ίσος με τον άθροισμα των μερών του*

Ποιά σχέση, όμως, μπορεί να έχουν οι τέλειοι αριθμοί με τους Πυθαγόρειους; Αν για τον Ευκλείδη και τους Νεοπυθαγόρειους ο τέλειος αριθμός σήμαινε ό,τι αναφέραμε παραπάνω, για τους Πυθαγόρειους η ονομασία «τέλειος» ταυτιζόταν με τον αριθμό 10. Στον Αριστοτέλη διαβάζουμε πως (*Μετά τα Φυσικά Μ 8 -1084a-32-4): «πειρῶνται δ' ὡς τοῦ μέχρι τῆς δεκάδος τελείου ὄντος ἀριθμοῦ. γεννῶσι γοῦν τὰ ἑπόμενα, οἷον τὸ κενόν, ἀναλογίαν, τὸ περιττόν, τὰ ἄλλα τὰ τοιαῦτα, ἐντὸς τῆς δεκάδος».* Δηλαδή οι Πυθαγόρειοι θεωρούσαν τον αριθμό 10 τέλειο, γιατί μέσα σ΄ αυτόν έβρισκαν έννοιες όπως το κενό, την αναλογία, το περιττό κ.τ.λ. Ο αριθμός αυτός προκύπτει από το άθροισμα των τεσσάρων πρώτων αριθμών και τον ονόμασαν «τετρακτύς» όπως φαίνεται και στο παρακάτω απόσπασμα : (*Σέξτος ο Εμπειρικός-Προς μαθηματικούς VII,94-95) «οἱ Πυθαγορικοί… τετρακτὺν δὲ ἀριθμόν τινα,ὅς ἐκ τεσσάρων τῶν πρῶτων ἀριθμῶν συγκείμενος τὸν τελειότατον ἀπήρτιζεν,ὥσπερ τὸν δέκα· ἕν γὰρ καὶ δύο καὶ τρία καὶ τέσσερα δέκα γίνεται.ἔστι τε οὗτος ὁ ἀριθμὸς πρώτη τετρακτύς,πηγὴ δὲ ἀενάου φύσεως λέλεκται παρόσον κατ'αὐτοὺς ὁ σύμπας κόσμος κατά ἁρμονίαν διοικεῖται»*[20] . Παράλληλα στον Αέτιο βρίσκουμε το εξής *(Ι 3,8): «Εἶναι δὲ τὴν φύσιν τοῦ ἀριθμοῦ δέκα.μέχρι γὰρ τῶν δέκα πάντες Ἕλληνες,πάντες βάρβαροι ἀριθμοῦσιν,ἐφ΄ ἅ ἐλθόντες πάλιν ἀναποδοῦσιν ἐπὶ τὴν μονάδα.καὶ τῶν δέκα πάλιν,φησὶν,ἡ δύναμις ἐστιν ἐν τοῖς τέσσαρσι καὶ τῇ τετράδι…διό και ἐπεφθέγγοντο οἱ Πυθαγόρειοι ὡς μεγίστου ὅρκου ὄντος τῆς τετράδος:*
«Οὐ,μά τόν ἁμετέρᾳ κεφαλᾶ παραδόντα τετρακτύν,
Παγάν ἀενάου φύσεως ῥίζωματ' ἒχουσαν»[21]



τετρακτύς

Με τους «τέλειους» αριθμούς πρέπει να συγκριθούν οι καλούμενοι ως «φίλοι». Όταν ο Πυθαγόρας ρωτήθηκε *«τί ἐστί φίλος»*, απάντησε *«ἕτερος ἐγώ»* και ανέφερε τους φίλους αριθμούς 220 και 284.*(Ιάμβλιχος,Περί της Νικομάχου Γερασηνού Αριθμητικής Εισαγωγής,σ.35).*Όπως φαίνεται οι φίλοι αριθμοί είναι εκείνοι

[20] *οι Πυθαγορικοί λέγοντας τετρακτύς εννοούν έναν αριθμό που, συνθεμένος από τους τέσσερις πρώτους αριθμούς, παράγει τον τελειότερο αριθμό, όπως για παράδειγμα το δέκα· γιατί ένα συν δύο συν τρία συν τέσσερα μας κάνει δέκα. Αυτός ο αριθμός είναι η πρώτη τετρακτύς και αποκαλείται πηγή της αέναης φύσης επειδή όπως αυτοί πιστεύουν ολόκληρος ο κόσμος είναι ρυθμισμένος σύμφωνα με την αρμονία*

[21] *Η ουσία του αριθμού είναι το δέκα. Γιατί ως το δέκα μετρούν όλοι οι Έλληνες και όλοι οι βάρβαροι, και όταν φτάσουν σε αυτό ξαναγυρνούν προς τη μονάδα. Λέει επίσης ότι η δύναμη του δέκα βρίσκεται στο τέσσερα και την τετράδα… Γι΄ αυτό και ύστερα από αυτά έλεγαν οι Πυθαγόρειοι ότι ο μεγαλύτερος όρκος ήταν της τετράδας: «Ορκίζομαι σε αυτόν που παρέδωσε στη σκέψη μας την τετρακτύ, την πηγή και τη ρίζα της αέναης φύσης»*

όπου ο ένας ισούται με το άθροισμα των γνήσιων διαιρετών του άλλου. Για παράδειγμα για τους αριθμούς 220 και 284 έχουμε:

284=1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110

220=1+2+4+71+142

Σε τέτοιου είδους τεχνάσματα που βασίζονται στην εναλλαγή αριθμών αρέσκονταν και οι Βαβυλώνιοι.*(Van der Waerden, σ.107).*

Στο σημείο αυτό θα ασχοληθούμε με έναν πολύ ενδιαφέροντα τρόπο αναπαράστασης αριθμών που είχαν αναπτύξει οι Πυθαγόρειοι. Ο ρήτορας Λουκιανός ο Σαμοσατεύς στον διάλογο του *Βίων πρᾶσις* τοποθετεί τον Πυθαγόρα να συνομιλεί με κάποιον αγοραστή. Η στιχομυθία είναι η εξής: (*Λουκιανός,Βίων πρᾶσις, απόσπασμα 4*) *« Πυθαγόρας: Εἶτ' ἐπὶ τουτέοισιν ἀριθμέειν.*

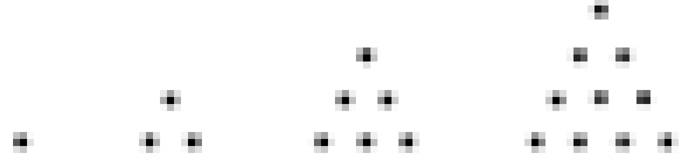
Αγοραστής:Οἶδα καὶ νῦν ἀριθμεῖν.

Πυθαγόρας:Πῶς ἀριθμέεις;

Αγοραστής:Ἕν,δύο,τρία,τέτταρα.

Πυθαγόρας:Ὁρᾷς;ἃ σὺ δοκέεις τέσσαρα,ταῦτα δέκα ἐστί, καὶ τρίγωνον ἐντελὲς καὶ ἡμέτερον ὅρκιον.»

Ο Πυθαγόρας, λοιπόν, ζήτησε από κάποιον να μετρήσει. Όταν εκείνος ξεκίνησε και έφτασε ως το τέσσερα, τον διέκοψε και του είπε: «Βλέπεις; Αυτό που εσύ θεωρείς τέσσερα, είναι ο αριθμός δέκα, ένα τέλειο τρίγωνο και ο όρκος μας.» Πώς θα μπορούσε ο Πυθαγόρας να ταυτίσει τον αριθμό 4 με τον αριθμό 10; Η απάντηση σ΄ αυτό σχετίζεται με τη λεγόμενη τετρακτύς που αναφέραμε παραπάνω (εξ΄ ου και η λέξη όρκος) και γενικότερα με τους «τρίγωνους» αριθμούς. Ας δούμε, όμως, πως θα μπορούσε να παρασταθεί ένας αριθμός με ένα τρίγωνο. Πιθανότατα, ο Πυθαγόρας ήταν εκείνος που ανακάλυψε πως το άθροισμα των αριθμών από 1 έως ν, όπου ν οποιοσδήποτε φυσικός αριθμός, δύναται να παρασταθεί με ένα ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς ν *(S.T.Heath,σ.76).*Από ότι φαίνεται, οι Πυθαγόρειοι βάζοντας σε κατάλληλες θέσεις πετραδάκια ή τελίτσες, σχημάτιζαν διαφορετικά τρίγωνα κάθε φορά. Για παράδειγμα: 1+2=3 που σημαίνει πως ο αριθμός 3 (το αποτέλεσμα της πράξης) αναπαρίσταται από ένα ισόπλευρο τρίγωνο με πλευρά 2 κουκίδες (ίση με τον τελευταίο αριθμό που προστίθεται).Επίσης 1+2+3+4=10 που σημαίνει πως ο αριθμός 10 παρίσταται με ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς 4 (έτσι εξηγείται η ταύτιση του 4 με το 10 που είδαμε στον διάλογο). Σήμερα θα μπορούσαμε να πούμε πως μία γενική φόρμουλα για την εύρεση ενός τρίγωνου αριθμού είναι η σχέση $1+2+3+\ldots+\nu=\frac{1}{2}\nu(\nu+1)$, η οποία μας δίνει ένα τρίγωνο αριθμό πλευράς ν σαν άθροισμα σειράς *(Ivor Thomas,σ. 91).*



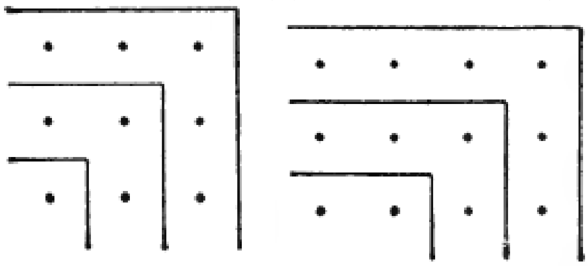
Στο παραπάνω σχήμα φαίνονται διαδοχικά οι τρίγωνοι αριθμοί 1,3,6 και 10.

Η επόμενη ερώτηση που θα μπορούσε να κάνει κανείς, είναι εάν οι Πυθαγόρειοι είχαν κάποιο τρόπο να ταυτίζουν αριθμούς και με τα υπόλοιπα βασικά σχήματα όπως τετράγωνο και ορθογώνιο. Η απάντηση είναι καταφατική. Στον

Ιάμβλιχο πληροφορούμαστε πως οι περιττοί αριθμοί χρησιμοποιούνταν ως «γνώμονες» τετραγώνων *(Iambichus,In Nicomachi Arithmeticam Introductionem Liber,σ.72,15): «καὶ μὴν καὶ ὅτι τῶν περισσῶν εἰδοποιὸς ἐφάνη οὖσα ἡ μονὰς ἰδίως,γνώμονες δὲ τετραγώνων ἐφάνησαν ὄντες οἱ περισσοί».* Στη συνέχεια του ίδιου συγγράμματος βλέπουμε (πιο λεπτομερώς) πως ξεκινώντας από τη μονάδα και προσθέτοντας περιττούς γνώμονες καταλήγουμε σε τετράγωνο, ενώ αν ξεκινήσουμε από τη δυάδα και προσθέσουμε άρτιους γνώμονες προκύπτει ορθογώνιο *(σ.75,10): «τετράγωνοι καὶ ἑτερομήκεις...ἡγουμένης καὶ ἀρχούσης τῶν μὲν περισσῶν μονάδος,δυάδος δὲ τῶν ἀρτίων».* Τα παραπάνω συμπεράσματα, τα επιβεβαιώνει και ο Πλούταρχος *(Στοβαίου, Ἐκλογαί Ι, προοίμιον 10): «τῇ μονάδι τῶν ἐφεξῆς περισσῶν γνωμόνων περιτιθεμένων ὁ γινόμενος ἀεὶ τετράγωνός ἐστι˙τῶν δὲ ἀρτίων ὁμοίως περιτιθεμένων ἑτερομήκεις καὶ ἄνισοι πάντες ἀποβαίνουσιν,ἴσος δὲ ἰσάκις οὐδείς».*[22]

Επίσης, ανατρέχοντας στον Αριστοτέλη ανακαλύπτουμε και πάλι την έννοια του «γνώμονα», σαν ένα εργαλείο για την αναπαράσταση άρτιων και περιττών αριθμών.*(Αριστοτέλης, Φυσικά Γ4,203 a 10): «καὶ οἱ μὲν (ενν. φασὶ) τὸ ἄπειρον εἶναι τὸ ἄρτιον τοῦτο γὰρ ἐναπολαμβανόμενον καὶ ὑπὸ τοῦ περιττοῦ περαινόμενον παρέχειν τοῖς οὖσι τὴν ἀπειρίαν˙σημεῖον δ᾽ εἶναι τούτου τὸ συμβαῖνον ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν˙περιτιθεμένων γὰρ τῶν γνωμόνων περὶ τὸ ἕν καὶ χωρὶς ὅτε μὲν ἄλλο ἀεὶ γίγνεσθαι τὸ εἶδος,ὅτε δὲ ἕν.»*[23]

Εδώ εντοπίζουμε κατ᾽ αρχάς μία προσπάθεια των Πυθαγορείων να συνδέσουν το ζεύγος άρτιο-περιττό με το αντίστοιχο άπειρο-πεπερασμένο. Η σύνδεση αυτή γίνεται μέσα από τους αριθμούς με κατάλληλη τοποθέτηση ενός γνώμονα. Ο Αριστοτέλης (όπως και ο Ιάμβλιχος και ο Πλούταρχος) διακρίνει δύο διαφορετικές περιπτώσεις, οι οποίες σχηματικά φαίνεται πως είναι οι εξής: *(I.Thomas,σ.95)*

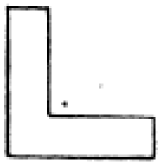


Σχήμα 1 *Σχήμα 2*

Τι ήταν όμως ο γνώμονας; Αρχικά ήταν ένα αστρονομικό όργανο μέτρησης του χρόνου ,αποτελούμενο από ένα όρθιο ραβδί που έριχνε σκιές σε επίπεδες ή ημισφαιρικές επιφάνειες (το όργανο αυτό λέγεται πως το έφερε στην Ελλάδα από την Βαβυλώνα ο Αναξίμανδρος). Αργότερα, η χρήση του γνώμονα εντοπίζεται στην κατασκευή ορθών γωνιών, με μορφή όπως η παρακάτω *(S.T.Heath,σ. 78).*

[22] *Αν προσθέσουμε στη μονάδα διαδοχικά τους περιττούς γνώμονες, τότε ο αριθμός που θα προκύψει θα είναι πάντοτε τετράγωνος˙ αν όμως προσθέσουμε άρτιους, τότε όλοι καταλήγουν διαφορετικοί ως προς το μήκος και άνισοι, και κανένας ίσος προς άλλους ίσους.*

[23] *οι Πυθαγόρειοι λένε ότι το άπειρο είναι το άρτιο. Γιατί όταν περικλείεται και περιορίζεται από το περιττό στοιχείο, δίνει το στοιχείο του άπειρου σε όλα τα πράγματα. Μια ένδειξη για αυτό είναι ό,τι συμβαίνει με τους αριθμούς. Αν δηλαδή οι γνώμονες τοποθετηθούν γύρω από το ένα και χωρίς το ένα, τότε στη μία περίπτωση το σχήμα που προκύπτει αλλάζει συνεχώς, ενώ στην άλλη μένει πάντα το ίδιο.*



Ας επιστρέψουμε στα σχήματα 1 και 2. Και στα δύο ας υποθέσουμε ότι χρησιμοποιούμε πετραδάκια όπως έκαναν άλλωστε και οι Πυθαγόρειοι. Στο πρώτο σχήμα ξεκινάμε με 1 πετραδάκι. Προσθέτουμε έναν γνώμονα με 3 πετραδάκια και προκύπτει ένα τετράγωνο με πλευρά 2 .Στη συνέχεια προσθέτουμε έναν γνώμονα με 5 πετραδάκια (ο αμέσως επόμενος περιττός μετά το 3) και προκύπτει και πάλι τετράγωνο, με πλευρά 3 αυτή τη φορά. Η διαδικασία μπορεί να συνεχιστεί αν προσθέτουμε γνώμονες με περιττό αριθμό από πετραδάκια, τους λεγόμενους «περιττούς γνώμονες». Αυτό δείχνει πως αν προσθέσουμε στον αριθμό 1 τους διαδοχικούς περιττούς 3,5,7 κ.τ.λ. ή γενικά το $2\cdot\nu+1$,τότε προκύπτει πάντα τετράγωνο. Πιο συγκεκριμένα:

$1+3=1+2\cdot\mathbf{1}+1=(\mathbf{1+1})^2=2^2$

$1+3+5=1+3+2\cdot\mathbf{2}+1=(\mathbf{2+1})^2=3^2$ κ.τ.λ.

Αν γράψουμε τον τελευταίο περιττό (γνώμονα) που προσθέτουμε στη μορφή $2\cdot\boldsymbol{\nu}+1$,παρατηρούμε πως το τελικό τετράγωνο είναι της μορφής $(\boldsymbol{\nu}+1)^2$.Γενικά η εξίσωση που δίνει έναν τετράγωνο αριθμό ν^2 είναι *: (S.T.Heath,σ.77)*

$1+3+5+7+\ldots..+2\cdot\nu+1=(\nu+1)^2$

Στο δεύτερο σχήμα, ξεκινάμε με 2 πετραδάκια. Προσθέτουμε έναν γνώμονα με 4 πετραδάκια και προκύπτει ορθογώνιο με πλευρές 2 και 3. Στη συνέχεια προσθέτουμε γνώμονα με 6 πετραδάκια (ο αμέσως επόμενος άρτιος μετά το 4) και παίρνουμε και πάλι ορθογώνιο, με πλευρές 3 και 4 αυτή τη φορά. Η διαδικασία μπορεί να συνεχιστεί με το να προσθέτουμε γνώμονες με άρτιο αριθμό από πετραδάκια, τους λεγόμενους «άρτιους γνώμονες». Αυτό δείχνει πως αν προσθέσουμε στον αριθμό 2 τους διαδοχικούς άρτιους 4,6 κ.τ.λ. ή γενικά το $2\cdot\nu$, τότε προκύπτει πάντα ένα ορθογώνιο με πλευρές που διαφέρουν κατά 1.Πιο συγκεκριμένα:

$2+4=2+2\cdot\mathbf{2}=6=\mathbf{2}(\mathbf{2}+1)$

$2+4+6=2+4+2\cdot\mathbf{3}=12=\mathbf{3}(\mathbf{3}+1)$ κ.τ.λ.

Αν γράψουμε τον τελευταίο άρτιο (γνώμονα) που προσθέτουμε στη μορφή $2\cdot\boldsymbol{\nu}$ βλέπουμε πως το τελικό ορθογώνιο που προκύπτει έχει πλευρές που διαφέρουν κατά μία μονάδα δηλαδή $\boldsymbol{\nu}\cdot(\boldsymbol{\nu}+1)$. Γενικότερα, η εξίσωση που δίνει έναν ορθογώνιο αριθμό είναι*:(Heath, page 82).*

$2+4+6+\ldots..+2\cdot\nu=\nu\cdot(\nu+1)$.

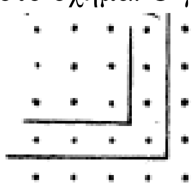
Μάλιστα δεν είναι παράξενο το πώς οι Πυθαγόρειοι οδηγήθηκαν στον τύπο αυτό, καθώς όπως είδαμε τους τρίγωνους αριθμούς τους αποκτάμε προσθέτοντας διαδοχικούς φυσικούς ενώ τους τετράγωνους προσθέτοντας διαδοχικούς περιττούς. Έτσι στους ορθογώνιους έχουμε διαδοχικούς άρτιους. Και μια ακόμα παρατήρηση: Όταν προσθέτουμε περιττούς γνώμονες καταλήγουμε πάντα σε τετράγωνα δηλαδή σε όμοια σχήματα. Αντίθετα, με άρτιους γνώμονες καταλήγουμε σε ορθογώνια διαφορετικά μεταξύ τους. Ενδεχομένως αυτό να εξηγεί το προηγούμενο χωρίο στο οποίο ο Αριστοτέλης λέει ότι οι Πυθαγόρειοι αντιστοιχούσαν το άρτιο με το άπειρο (και κατά επέκταση το περιττό με το πεπερασμένο). Με τους περιττούς γνώμονες οδηγούμαστε σε μία μοναδική μορφή, το τετράγωνο ,ενώ με τους άρτιους παίρνουμε μία απειρία μορφών. Απλά ο Αριστοτέλης δεν διευκρινίζει ότι στη μία περίπτωση ξεκινάμε με 1 πετραδάκι και στην άλλη με 2.Αυτό όμως μπορεί να κατανοηθεί από τα σχήματα.

Κλείνοντας την αναπαράσταση των αριθμών από τους Πυθαγορείους, αξίζει να σημειώσουμε τι συνέβαινε με τις λεγόμενες πυθαγόρειες τριάδες. Πώς ο Πυθαγόρας θα μπορούσε να οδηγηθεί σε μία «φόρμουλα» η οποία να παράγει τριάδα αριθμών που να αποτελούν πλευρές ορθογωνίου τριγώνου. Αν σκεφτούμε πως η προσθήκη διαδοχικών περιττών 1+3+5+…. μας δίνει τετράγωνους αριθμούς, μια ιδέα είναι να συλλέξουμε από αυτή την σειρά εκείνους τους περιττούς που είναι από μόνοι τους τέλεια τετράγωνα. Για παράδειγμα:

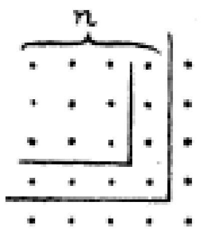
Έστω η σειρά 1+3+5+7+9.Το 9 είναι τέλειο τετράγωνο. Αν προσθέσουμε τους αριθμούς που είναι πριν το 9 δηλαδή 1+3+5+7 παίρνουμε 16 που είναι και αυτό τέλειο τετράγωνο. Το 16+9=25 μας οδηγεί σ' ένα ακόμα τέλειο τετράγωνο και τελικά έχουμε την πυθαγόρεια τριάδα 3,4,5.Ας δούμε και άλλο ένα παράδειγμα: Έστω τώρα η σειρά 1+3+5+7+9+11+13+15+17+19+21+23+25.Το 25 είναι τέλειο τετράγωνο. Αν προσθέσουμε τους αριθμούς που είναι πριν το 25 δηλαδή 1+3+..+23 θα πάρουμε 144 δηλαδή πάλι τέλειο τετράγωνο. Το 25+144=169 μας δίνει την πυθαγόρεια τριάδα 5,12,13.Όσο όμως και αν κάτι τέτοιο μοιάζει με ένα ευχάριστο παιχνίδι, είναι δύσκολο να εφαρμοστεί για μεγάλους αριθμούς. Χρειάζεται μία γενίκευση της παραπάνω διαδικασίας. Υπάρχει μία «φόρμουλα» που αποδίδεται στον Πυθαγόρα *(Proclus's Commentary on Euclid,Book I,σ.487)* βάσει της οποίας αν ο ν είναι οποιοσδήποτε περιττός αριθμός, τότε

$\nu^2 + (\frac{\nu^2-1}{2})^2 = (\frac{\nu^2+1}{2})^2$ δηλαδή έχουμε μία πυθαγόρεια τριάδα.

Για παράδειγμα αν ν =3 τότε προσθέτουμε στο 9 τον αριθμό $(\frac{3^2-1}{2})^2=4^2=16$ και παίρνουμε τον αριθμό $(\frac{3^2+1}{2})^2=5^2=25$.Έχουμε δηλαδή την τριάδα 3,4,5 όπως και στο σχήμα. Ο γνώμονάς μας είναι 2·ν + 1 κάθε φορά.



Ένας παρόμοιος τύπος αποδίδεται στον Πλάτωνα *(Proclus,σ.428)* ο οποίος όμως δεν απαιτεί να ξεκινήσουμε από περιττό αριθμό. Μας δίνει μια πυθαγόρεια τριάδα ως $(2\nu)^2+(\nu^2-1)^2=(\nu^2+1)^2$.Μοιάζει σα να έχουμε τον τύπο του Πυθαγόρα με διπλάσιες τώρα πλευρές. Αν υποθέσουμε πως ο Πλάτωνας δούλεψε και εκείνος με γνώμονες θα μπορούσαμε να δούμε τα παρακάτω *(S.T.Heath,σ. 81)*:



Θεωρούμε το τετράγωνο με πλευρά n σε σχέση με το αμέσως μικρότερο πλευράς n-1 και το αμέσως μεγαλύτερο πλευράς n+1.Το n^2 υπερβαίνει το $(n-1)^2$ κατά τον γνώμονα $2\cdot n-1$,όμως υπολείπεται του $(n+1)^2$ κατά τον γνώμονα $2\cdot n+1$.Ως εκ τούτου, το $(n+1)^2$ υπερβαίνει το $(n-1)^2$ κατά το άθροισμα των δύο γνωμόνων $2\cdot n+1$ και $2\cdot n-1$ δηλαδή κατά $4\cdot n$.Ή αλλιώς, $4\cdot n+(n-1)^2=(n+1)^2$.Αν αντικαταστήσουμε το $4\cdot n$ με m^2 ώστε να παριστάνει τετράγωνο προκύπτει ο τύπος του Πλάτωνα.

Συνοψίζοντας, οι πυθαγόρειες τριάδες μπορούν να προκύψουν με δύο γενικούς τρόπους. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε τρία τετράγωνα, το 1ο ,το 2ο που προκύπτει αν προστεθεί ένας γνώμονας και το 3ο που προκύπτει αν προσθέσουμε δύο γνώμονες. Ο πρώτος τρόπος είναι να προσθέσουμε στο δεύτερο τετράγωνο τον γνώμονα και να προκύψει το μεγάλο τετράγωνο δηλαδή 2ο τετράγωνο + γνώμων = μεγάλο τετράγωνο π.χ. $4^2+9(=3^2)=5^2$.[24] Ο δεύτερος τρόπος είναι να προσθέσουμε στο 1ο τετράγωνο και τους δύο γνώμονες και να πάρουμε το μεγάλο τετράγωνο δηλαδή 1ο τετράγωνο + 2 γνώμονες = μεγάλο τετράγωνο π.χ. $3^2+(7+9) = 5^2$.[25]Γενικά, αν ο εξωτερικός γνώμονας (περιττός) είναι τετράγωνο αριθμού τότε θα έχουμε πυθαγόρεια τριάδα. Επίσης αν το άθροισμα του εσωτερικού και του εξωτερικού γνώμονα είναι τετράγωνο, πάλι προκύπτει τέτοια τριάδα. Στο προηγούμενο σχήμα ο εξωτερικός γνώμονας ισούται με 9 ενώ αν του προσθέσουμε και τον αμέσως προηγούμενο γνώμονα παίρνουμε 9+7=16.

Στο σημείο αυτό, έχοντας κάνει λόγο για την πυθαγόρεια αριθμητική, ας αναφερθούμε συνοπτικά στη γεωμετρία με την οποία ασχολήθηκαν οι Πυθαγόρειοι. Στον Πρόκλο πληροφορούμαστε τα εξής: *(Είς Εὐκλείδη,65,11)«μετὰ δὲ τοῦτον Μάμερκος ὁ Στησιχόρου τοῦ ποιητοῦ ἀδελφὸς ὡς ἐφαψάμενος τῆς περὶ γεωμετρίαν σπουδῆς μνημονεύεται…ἐπί δὲ τούτοις Πυθαγόρας τὴν περὶ αὐτὴν φιλοσοφίαν είς σχῆμα παιδείας ἐλευθέρου μετέστησεν ἄνωθεν τὰς ἀρχὰς αὐτῆς ἐπισκοπούμενος καὶ ἀύλως καὶ νοερῶς τὰ θεωρήματα διερευνώμενος».*[26] Δηλαδή ο Πυθαγόρας ασχολήθηκε με τη γεωμετρία και μάλιστα κυρίως σε επίπεδο θεωρίας, ανεξάρτητα από πρακτικές εφαρμογές.

Οι πηγές συνδέουν τους Πυθαγορείους κυρίως με την μουσική και την αριθμούς. Σίγουρα, όμως, η χρήση όπως είπαμε των ψήφων, προσέδιδε μία γεωμετρική φύση στην αριθμητική τους. Τα γεωμετρικά θεωρήματα που αποδίδονται στους πρώτους Πυθαγόρειους ή συγκεκριμένα στον Πυθαγόρα είναι τα εξής

[24] Ο τρόπος αυτός γενικεύεται με τον τύπο $\nu^2 +(\frac{\nu^2-1}{2})^2=(\frac{\nu^2+1}{2})^2$ που είδαμε παραπάνω και λέγεται «από περιττών».

[25] Ο τρόπος αυτός γενικεύεται με τον τύπο $(2\nu)^2+(\nu^2-1)^2=(\nu^2+1)^2$ που είδαμε παραπάνω και λέγεται «από αρτίων».

[26] *έπειτα απ΄ αυτόν(δηλ. τον Θαλή)ο Μάμερκος, ο αδελφός του ποιητή Στησιχόρου, αναφέρεται ότι καταπιάστηκε με τη σπουδή της γεωμετρίας… μετά από αυτούς ο Πυθαγόρας στη γνώση τη σχετική με τη γεωμετρία προσέδωσε τη μορφή ελεύθερων σπουδών, ερευνώντας τις αρχές της θεωρητικά και εξετάζοντας ακριβώς τα θεωρήματά της, χωρίς να χρησιμοποιεί υλικά μέσα, αλλά μόνο διανοητικά*

(Β.Καρασμάνης 1998) :1) το γνωστό σε όλους πυθαγόρειο, 2) τα θεωρήματα που σχετίζονται με την εφαρμογή χωρίων (*Εύδημος -σύμφωνα με τον Πρόκλο-,σ. 419-20*) και 3) το θεώρημα πως το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου ισούται με δύο ορθές γωνίες.

(Διογένης Λαέρτιος VIII,12): *«φησὶ δ' Απολλόδωρος ὁ λογιστικὸς ἑκατόμβην θῦσαι αὐτὸν,εὑρόντα ὅτι τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ἡ ὑποτείνουσα πλευρὰ ἴσον δὺναται ταῖς περιεχούσαις»*[27].Το πυθαγόρειο θεώρημα ήταν γνωστό εμπειρικά στους Βαβυλωνίους, οι οποίοι είχαν αναπτύξει μεθόδους για τον υπολογισμό πλευρών σε ορθογώνια τρίγωνα. Αυτές οι μέθοδοι, θα ήταν φυσικά γνωστές και στους Πυθαγορείους και πιθανόν να χρησιμοποιούσαν το εν λόγω θεώρημα σε συγκεκριμένες περιπτώσεις. Παρ' όλ' αυτά ,η απόδειξη που παρέχει ο Ευκλείδης στο βιβλίο *Ι* των *Στοιχείων* (*47η πρόταση*: *«'Εν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνοις»*), μπορεί δύσκολα να αποδοθεί στον Πυθαγόρα ή τους πρώτους Πυθαγόρειους. (Το θεώρημα σήμερα κατέχει μεγάλο αριθμό αποδείξεων. Οι αποδείξεις είναι ευθείες, τόσο γεωμετρικές όσο και αλγεβρικές, κάποιες από τις οποίες χρονολογούνται αρκετές χιλιετίες πριν. Το θεώρημα μπορεί να γενικευτεί με πολλούς τρόπους, σε χώρους μεγαλύτερης διάστασης, σε μη Ευκλείδειους χώρους, σε μη ορθογώνια τρίγωνα ή ακόμα και σε ν-διάστατα στερεά.).

Όσον αφορά την εφαρμογή χωρίων, τα διάφορα θεωρήματα μπορούν να αντιμετωπιστούν με τη χρήση ψήφων. Στον Πρόκλο διαβάζουμε: (*Πρόκλος,είς Εὐκλείδην Ι,44)«ἔστι μὲν ἀρχαῖα, φασὶν οἱ περὶ τὸν Εὔδημον, καὶ τῆς τῶν Πυθαγορείων μούσης εὑρήματα ταῦτα ἥ τε παραβολὴ τῶν χωρίων καὶ ἡ ὑπερβολὴ καὶ ἡ ἔλλειψις»*.[28] Στο βιβλίο *ΙΙ* των *Στοιχείων* του Ευκλείδη υπάρχει η πρόταση 4: *«'Εὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν τμημάτων τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.»*. Δηλαδή αν χωρίσουμε μία ευθεία γραμμή στην τύχη, τότε το τετράγωνο του όλου είναι ίσο με τα τετράγωνα των δύο τμημάτων συν δύο φορές το ορθογώνιο που σχηματίζεται μεταξύ τους. Πρόκειται όπως είναι φανερό για την γνωστή ταυτότητα $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta$.Έστω ότι έχουμε μία γραμμή με 5 ψήφους. Αν τη χωρίσουμε σε δύο μέρη των δύο και τριών ψήφων και πάρουμε το τετράγωνο πλευράς πέντε ψήφων ως άθροισμα μικρότερων σχημάτων, θα έχουμε δύο νέα τετράγωνα και δύο ορθογώνια (βλ. σχήμα στο τέλος).

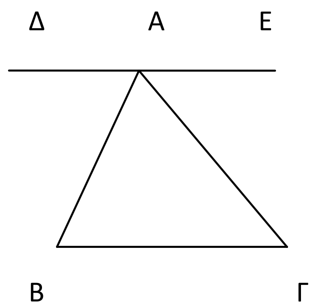
Παράλληλα, από τον Πρόκλο αντλούμε στοιχεία σχετικά με το τρίτο θεώρημα *(Πρόκλος ,είς Εὐκλείδην Ι,32)*: *«Εὔδημος δὲ ὁ Περιπατητικὸς εἰς τοὺς Πυθαγορείους ἀναπέμπει τὴν τοῦδε τοῦ θεωρήματος εὕρεσιν,ὅτι τρίγωνον ἅπαν δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ἔχει τὰς ἐντὸς γωνίας»*[29] . Σύμφωνα, λοιπόν, με τον Εύδημο, οι Πυθαγόρειοι ανακάλυψαν την πρόταση ότι σε οποιοδήποτε τρίγωνο το άθροισμα γωνιών ισούται με δύο ορθές. Ας παραθέσουμε την σχετική απόδειξη όπως υπάρχει στη συνέχεια του σχετικού χωρίου:

---

[27] *ο Απολλόδωρος ο λογιστικός λέει ότι εκείνος (ο Πυθαγόρας) θυσίασε εκατό βόδια όταν ανακάλυψε ότι το τετράγωνο της υποτείνουσας ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο πλευρών που περιέχουν την ορθή γωνία*

[28] *σύμφωνα με τον Εύδημο και τους οπαδούς του, αυτά τα πράγματα είναι αρχαία και ανακαλύφθηκαν από τη μούσα των πυθαγορείων δηλαδή η παραβολή των χωρίων και η υπερβολή και η έλλειψη*

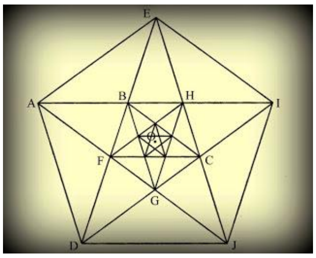
[29] *Ο περιπατητικός φιλόσοφος Εύδημος αποδίδει στους πυθαγόρειους την ανακάλυψη του θεωρήματος ότι οι εσωτερικές γωνίες κάθε τριγώνου είναι ίσες με δύο ορθές*



Έστω το τρίγωνο ΑΒΓ και ας φέρουμε από το Α   ευθεία ΔΕ παράλληλη στη ΒΓ. Επειδή οι ΒΓ,ΔΕ είναι παράλληλες, οι εντός εναλλάξ γωνίες θα είναι ίσες, άρα $\widehat{\Delta AB}$=$\widehat{AB\Gamma}$ και $\widehat{EA\Gamma}$=$\widehat{A\Gamma B}$.Ας προσθέσουμε την $\widehat{BA\Gamma}$ και στα δύο μέλη.Τότε $\widehat{\Delta AB}$+$\widehat{BA\Gamma}$+$\widehat{\Gamma AE}$ δηλαδή δύο ορθές γωνίες είναι ίσες προς το άθροισμα των τριών γωνιών του τριγώνου. Άρα το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου είναι 180°.

Αν επανέλθουμε στο ίδιο άρθρο του Βασίλη Καρασμάνη, θα δούμε ότι ο προβληματισμός που τίθεται εδώ, είναι πως είναι μάλλον απίθανο να αποδώσουμε την παραπάνω απόδειξη στους πρώτους Πυθαγόρειους. Το αίτημα των παραλλήλων που χρησιμοποιείται, είναι πιθανόν να είχε διατυπωθεί περισσότερο πρακτικά παρά ρητά από τους πυθαγόρειους. Ο Ευτόκιος, στα σχόλιά του στα *Κωνικά* του *Απολλώνιου*, λέει ότι *«οι αρχαίοι θεωρούσαν τις δύο ορθές γωνίες σε κάθε είδος τριγώνου, πρώτα στο ισόπλευρο, μετά στο ισοσκελές και τέλος στο σκαληνό. Οι μεταγενέστεροι απέδειξαν το εξής γενικότερο θεώρημα: κάθε τριγώνου το άθροισμα των γωνιών ισούται με δύο ορθές». (Apollonii Pergaei, vol. II, ed. I. L. Heiberg, Lipsiae 1893,σ.170.)*.Η μαρτυρία αυτή μας δείχνει ότι πριν τη γενική απόδειξη του Ευκλείδη υπήρξε κάποια άλλη με επιμέρους περιπτώσεις. Με την λέξη «αρχαίοι», ίσως, να εννοούσε τους πρώτους Πυθαγόρειους. Από τη στιγμή μάλιστα που το θεώρημα αποδεικνύεται με εύκολο τρόπο, θα μπορούσε να τους είναι γνωστό.

Πέρα από αυτά τα τρία θεωρήματα, ο Van der Waerden *(σ.131)* υποστηρίζει (πιθανότατα ακολουθώντας και άλλες απόψεις) ότι οι Πυθαγόρειοι είχαν μία θεωρία κανονικών πολυγώνων. Γνώριζαν το αστεροειδές πεντάγωνο και το δωδεκάεδρο. Αν πάρουμε ένα κανονικό δωδεκάεδρο, οι έδρες που θα έχουμε είναι κανονικά πεντάγωνα. Το αστεροειδές πεντάγωνο σχηματίζεται από τις διαγωνίους ενός τέτοιου πενταγώνου. Πρόκειται για ένα σχήμα που συμβόλιζε την υγεία και ήταν χαρακτηριστικό των Πυθαγορείων.



αστεροειδές πεντάγωνο

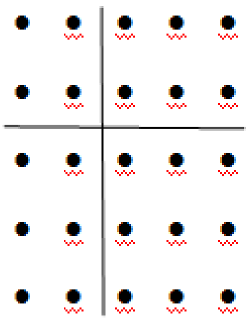
Μία παράδοση μας λέει τα παρακάτω *(Ἰάμβλιχος,Περὶ τοῦ Πυθαγορικοῦ βίου,238): «καταχθῆναι γοῦν φασι τῶν Πυθαγορικῶν τινα μακρὰν καὶ ἐρήμην ὁδὸν βαδίζοντα εἴς τι πανδοχεῖον,ὑπὸ κόπου δὲ καὶ ἄλλης παντοδαπῆς αἰτίας εἰς νόσον* *μακράν τε καὶ βαρεῖαν ἐμπεσεῖν,ὥστ΄ ἐπιλιπεῖν αὐτὸν τὰ ἐπιτήδεια.τὸν μέντοι πανδοχέα,εἴτε οἴκτῳ τοῦ ἀνθρώπου εἴτε καὶ ἀποδοχῇ,πάντα παρασχέσθαι,μήτε ὑπουργίας τινὸς φεισάμενον μήτε δαπάνης μηδεμιᾶς.ἐπειδὴ δὲ κρείττων ἦν ἡ νόσος,τὸν μὲν ἀποθνὴσκειν ἑλόμενον γράψαιτι σύμβολον ἐν πίνακι καὶ ἐπιστεῖλαι,ὅπως,ἄν τι πάθῃ,κριμνὰς τὴν δέλτον παρὰ τὴν ὁδὸν ἐπισκοπῇ,εἴ τις τῶν παριόντων ἀναγνωριεῖ τὸ σύμβολον˙τοῦτον γὰρ ἔφη αὐτῷ ἀποδώσειν τὰ ἀναλώματα,ἅπερ εἰς αὐτὸν ἐποιήσατο,καὶ χάριν ἐκτείσειν ὑπὲρ ἑαυτοῦ.τὸν δὲ πανδοχέα μετὰ τὴν τελευτήν θάψαι τε καὶ ἐπιμεληθῆναι τοῦ σώματος αὐτοῦ,μὴ μέντοι γε ἐλπίδας ἔχειν τοῦ κομίσασθαι τὰ δαπανήματα,μήτι γε καὶ πρὸς εὖ παθεῖν προς τινος τῶν ἀναγνωριούντων τὴν δέλτον.ὅμως μέντοι διαπειρᾶσθαι ἐκπεπληγμένον τὰς ἐντολάς,ἐκτιθέναι τε ἑκάστοτε εἰς τὸ μέσον τὸν πίνακα.χρόνῳ δὲ πολλῷ ὕστερον τῶν Πυθαγορικῶν τινα παριόντα ἐπῖστῆναί τε καὶ μαθεῖν τὸν θέντα τὸ σύμβολον,ἐξετάσαι τε τὸ συμβὰν καὶ τῷ πανδοχεῖ πολλῷ πλέον ἀργύριον ἐκτεῖσαι τῶν δεδαπανημένων».[30]*

Επιπλέον, ο Van der Waerden *(σ.141-2)* καταλήγει στο συμπέρασμα πως τα Μαθηματικά των Βαβυλωνίων είχαν αφήσει πολύ σημαντικά ίχνη στην αριθμητική και στη γεωμετρία των Πυθαγορείων. Έπειτα, τίθεται το ερώτημα γιατί οι Έλληνες έθεσαν τη βαβυλωνιακή «άλγεβρα» σε γεωμετρική μορφή. Η ώθηση για την γεωμετρικοποίηση της «άλγεβρας», δόθηκε από την ανακάλυψη της ασυμμετρίας. Όπως θα δούμε και παρακάτω, η διαγώνιος του μοναδιαίου τετραγώνου δεν είναι σύμμετρη προς την πλευρά. Δηλαδή, όταν η πλευρά επιλεγεί ως μονάδα μήκους, η διαγώνιος δε μπορεί να εκφραστεί ούτε με ακέραιο αριθμό ούτε με κλάσμα. Η διαγώνιος είναι ο άρρητος αριθμός $\sqrt{2}$.Η εξίσωση $x^2=2$ δεν μπορεί να επιλυθεί στο πεδίο των αριθμών αλλά επιδέχεται λύση στο πλαίσιο των ευθυγράμμων τμημάτων. Επομένως, ήταν η λογική αναγκαιότητα και η επιθυμία για ακριβή γνώση, εκείνη που ανάγκασε τους Πυθαγορείους να προχωρήσουν πέρα από Βαβυλωνίους και να περάσουν στη λεγόμενη «γεωμετρική άλγεβρα».[31]

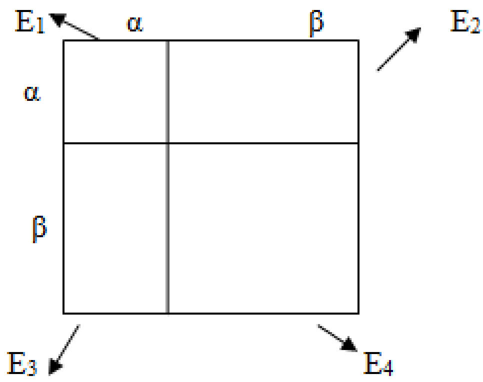
---

[30] *Λένε, λοιπόν, πως κάποιος από τους Πυθαγορείους, περπατώντας σ΄ ένα δρόμο μακρύ και έρημο, έφθασε σ' ένα πανδοχείο. Εκεί από την κούραση και διάφορες άλλες αιτίες έπεσε σε μακροχρόνια και βαριά ασθένεια, ώστε να του λείψουν τα απαραίτητα για την συντήρησή του. Ο ξενοδόχος όμως, είτε από συμπόνια για τον άνθρωπο είτε και από ανθρωπιά, του προσέφερε τα πάντα χωρίς να λογαριάσει ούτε κάποια υπηρεσία του ούτε καμιά δαπάνη. Επειδή, όμως, η ασθένεια παρουσίαζε επιδείνωση και εκείνος προτίμησε να πεθάνει, σχεδίασε ένα σύμβολο σε μια πλάκα και παρακάλεσε τον ξενοδόχο, αν ο ίδιος πάθει κάτι, να κρεμάσει την πλάκα στην άκρη του δρόμου και να παρακολουθεί αν κάποιος από τους διερχόμενους θα αναγνωρίσει το σύμβολο. Αυτός, είπε, θα πληρώσει τα έξοδα, όσα έκαμε για αυτόν και θα τον ευχαριστήσει εκ μέρους του. Ο ξενοδόχος, πράγματι, μετά τον θάνατο του αρρώστου τον έθαψε χωρίς όμως να έχει ελπίδες ότι θα εισπράξει τα έξοδά του ούτε ότι θα λάβαινε ανταμοιβή από κάποιον που θα αναγνώριζε το σύμβολο στην πλάκα. Εν τούτοις, επειδή είχε εκπλαγεί πολύ από την παραγγελία αποφάσισε να βάζει συνέχεια την πλάκα στη μέση του δρόμου. Ύστερα όμως από πολύ καιρό κάποιος Πυθαγόρειος καθώς περνούσε, σταμάτησε και πληροφορήθηκε για εκείνον που έβαλε εκεί το σύμβολο. Ζήτησε πληροφορίες για τα συμβάντα και πλήρωσε στον ξενοδόχο πολύ περισσότερα χρήματα από όσα είχαν δαπανηθεί*

[31] *Στο σημείο αυτό αξίζει να σημειώσουμε πως ο όρος «γεωμετρική άλγεβρα» έτσι όπως παρουσιάζεται από τον Van der Waerden ίσως προκαλεί τη λανθασμένη εντύπωση πως οι Βαβυλώνιοι κατείχαν γνώσεις άλγεβρας αντίστοιχες με τις σημερινές. Παρά το γεγονός πως οι Αιγύπτιοι και οι Βαβυλώνιοι εργάζονταν πάνω σε μαθηματικά προβλήματα, οι τρόποι επίλυσής τους δε μπορούν να θεωρηθούν αλγεβρικοί. Κάθε γνωστή μέθοδος των δύο λαών αποτελούνταν από απλούς χειρισμούς αριθμών, κάτι που δεν έχει καμία σχέση με τη σύγχρονη άλγεβρα. Εκείνος που έκανε το μεγάλο βήμα για την εξέλιξη της αλγεβρικής σκέψης ήταν ο Διόφαντος, τον 3ο αιώνα π.Χ. Στο βιβλίο του με όνομα «Αριθμητικά», ένα από τα*



$\alpha=2,\ \beta=3$



$E_1=\alpha^2 \quad E_2=\beta\cdot\alpha$

(σχήμα)

$E_3=\beta\cdot\alpha \quad E_4=\beta^2$

γνωστότερα επιστημονικά συγγράμματα, ο Διόφαντος παρουσιάζει μια σειρά προβλημάτων τα οποία και λύνει, με έναν τρόπο που παραπέμπει σε άλγεβρα. Δίνει όνομα στην ποσότητα που ψάχνει να βρει, δημιουργεί για πρώτη φορά τον «άγνωστο x» και χτίζει μαθηματικές εξισώσεις. Ωστόσο, η ανακάλυψη του «αγνώστου x» και η δημιουργία της εξίσωσης δεν είναι παρά ένα ελάχιστο κομμάτι της σημερινής άλγεβρας, που αποτελείται από ομάδες, δακτυλίους και σώματα τα οποία με την σειρά τους πλαισιώνονται από μια τεράστια ποικιλία θεωρημάτων.

1.3 Η φιλοσοφία-κοσμολογία των Πυθαγορείων

Όσον αφορά τη φιλοσοφία των Πυθαγορείων, μπορούμε να ξεκινήσουμε δίνοντας πρώτα κάποια βασικά χαρακτηριστικά που τους διέκριναν. Ο Πυθαγόρας υποστήριζε και κήρυττε την αθανασία της ψυχής και επέβαλλε σκληρές δοκιμασίες επιλογής σε όσους ήθελαν να ενταχθούν στη Σχολή του (*Πορφύριος,Πυθαγόρειος Βίος 19): «ἅ μὲν οὖν ἔλεγε τοῖς συνοῦσιν,οὐδὲ εἷς ἔχει φράσαι βεβαίως˙καὶ γὰρ οὐδ' ἡ τυχοῦσα ἦν παρ' αὐτοῖς σιωπή.Μάλιστα μέντοι γνώριμα παρὰ πᾶσιν ἐγένετο πρῶτον μὲν ὡς ἀθάνατον εἶναί φησι τὴν ψυχήν,εἶτα μεταβάλλουσαν εἰς ἄλλα γένη ζῴων,πρὸς δὲ τούτοις ὅτι κατὰ περιόδους τινὰς τὰ γενομένα ποτε πάλιν γίνεται ,νέον δ' οὐδὲν ἁπλῶς ἔστι καὶ ὅτι πάντα τὰ γινόμενα ἔμψυχα ὁμογενῆ δεῖ νομίζειν,φαίνεται γὰρ εἰς τὴν Ἑλλάδα τὰ δόγματα πρῶτος κομίσαι ταῦτα Πυθαγόρας.*[32] Έπρεπε να περάσει πολύς καιρός ώστε να λάβει κάποιος μαθητής το δικαίωμα να ακούσει τη φωνή του Πυθαγόρα και ακόμη περισσότερος για να καταφέρει να τον αντικρίσει. Η οδός διά της οποίας πίστευαν οι Πυθαγόρειοι ότι μπορούσαν να οδηγηθούν σε ένα είδος εξαγνισμού και αγνότητας ψυχής, ήταν τα μαθηματικά.(*Van den Waerden, σ.101*).

Επίσης από τον Αριστοτέλη και τον Στοβαίο μαθαίνουμε ότι η κοσμογονία των Πυθαγορείων περιείχε την αντίληψη πως ο χρόνος και τα φυσικά σώματα είναι μετρήσιμα και αυτό αποτελεί ένα βασικό γνώρισμά τους.

Α)*(Φυσικά,Βιβλίο Δ 213 b22)*: *«Εἶναι δ' ἔφασαν καὶ οἱ Πυθαγόρειοι κενόν καὶ ἐπεισιέναι αὐτό τῷ οὐρανῷ ἐκ τοῦ ἀπείρου πνεύματος ὡς ἀναπνέοντι καὶ τό κενόν,ὅ διορίζειν τὰς φύσεις,ὡς ὄντος τοῦ κενοῦ χωρισμοῦ τινός τῶν ἐφεξῆς καὶ τῆς διορίσεως˙καὶ τοῦτ' εἶναι πρῶτον ἐν τοῖς ἀριθμοῖς˙τὸ γὰρ κενὸν διορίζειν τὴν φύσιν αὐτῶν.ἐξ ὧν μὲν οὖν οἱ μέν φασιν εἶναι οἱ δ' οὔ φασι,σχεδὸν τοιαῦτα καῖ τοσαῦτά ἐστιν».*[33] Βλέπουμε, λοιπόν, εδώ πως σύμφωνα με τους Πυθαγορείους, ο κόσμος ξεπηδάει από το Ένα με την αναπνοή και ο ουρανός διαμορφώνεται όταν το άπειρο έλκει το πνεύμα και το κενό. Έτσι, το Ένα δεν είναι κάτι αφηρημένο, αλλά κάτι άκρως δυναμικό.

Β)*(Μεταφυσικά Ν 3,1091 a12): «ἄτοπον δὲ καὶ γένεσιν ποιεῖν ἀιδίων ὄντων,μᾶλλον δ' ἕν τι τῶν ἀδυνάτων.οἱ μὲν οὖν Πυθαγόρειοι πότερον οὐ ποιοῦσιν ἤ ποιοῦσι γένεσιν οὐδέν δεῖ διστάζειν˙φανερῶς γὰρ λέγουσιν ὡς τοῦ ἑνός συσταθέντος,εἴτ'*

---

[32] *Κανένας δε μπορεί να αποφανθεί με βεβαιότητα τι έλεγε στους μαθητές του˙ γιατί η σιωπή που τηρούσαν ήταν ασυνήθιστα αυστηρή. Όμως μερικά από αυτά έγιναν πασίγνωστα: πρώτον έλεγε ότι η ψυχή είναι αθάνατη, έπειτα ότι μεταμορφώνεται σε άλλα είδη ζώων, επίσης ότι όλα όσα συμβαίνουν επαναλαμβάνονται περιοδικά και ότι τίποτα δεν είναι εντελώς καινούργιο, και τέλος ότι όλα τα έμψυχα πλάσματα πρέπει να θεωρούνται συγγενικά. Είναι φανερό ότι ο Πυθαγόρας ήταν ο πρώτος που εισήγαγε στην Ελλάδα αυτές τις αντιλήψεις*

[33] *Είπαν και οι Πυθαγόρειοι ότι υπάρχει κενό και ότι ο ουρανός εισήλθε από το άπειρο πνεύμα, με τη σκέψη ότι και αυτός αναπνέει. Και ότι το κενό ξεχωρίζει τις φύσεις και τις ορίζει ,αφού αυτό είναι ένας ορισμός των όσων έρχονται και ένας καθορισμός τους. Και αυτό συμβαίνει πρώτα στους αριθμούς γιατί το κενό καθορίζει τη φύση τους. Αυτά λέγονται σχετικά με το κενό, και άλλοι λένε ότι υπάρχει ενώ άλλοι ότι δεν υπάρχει. και αυτές πάνω κάτω είναι οι θέσεις τους*

ἐξ ἐπιπέδων εἴτ᾽ ἐκ χροιᾶς εἴτ ἐκ σπέρματος εἴτ ἐξ ὧν ἀποροῦσιν εἰπεῖν,εὐθὺς τὸ ἔγγιστα τοῦ ἀπείρου ὅτι εἵλκετο καὶ ἐπεραίνετο ὑπὸ τοῦ πέρατος»[34] .

Γ)*(Στοβαίος,Ἀνθολόγιον Ι 18,1c): (μιλώντας για τον Αριστοτέλη) «ἐν δὲ τῷ περὶ τῆς Πυθαγόρου φιλοσοφίας πρώτω γράφει τὸν μὲν οὐρανόν εἶναι ἕνα,ἐπεισάγεσθαι δὲ ἐκ τοῦ ἀπείρου χρόνον τε καὶ πνοήν καὶ τὸ κενὸν,ὅ διορίζει ἑκάστων τὰς χώρας ἀεί».*[35] Μάλιστα, ο ρόλος της «πνοής» στην κοσμογονία όπως παρουσιάζεται στα αποσπάσματα Β και Γ, θυμίζει τη θέση της στη βιολογία του Φιλολάου, όπου αναπτύσσει τη θεωρία της αναπνοής *(Kirk-Raven-Schofield,σ.350).*

Παράλληλα, την εποχή του Πλάτωνα, αυτός που διακρίθηκε από τους Πυθαγορείους, ήταν ο Αρχύτας ο Ταραντίνος. Υπήρξε σπουδαίο δημόσιο πρόσωπο, με επιτεύγματα στην επιστήμη και στα μαθηματικά ειδικότερα. Ήταν καινοτόμος στη γεωμετρία των στερεών και στη μαθηματική μηχανική, και φερόμενος δάσκαλος του μεγάλου Ευδόξου. *(C.Kahn, σ. 69)* .Αν εστιάσουμε στη φιλοσοφία του Αρχύτα, θα δούμε πως είχε ασχοληθεί κι εκείνος με την κοσμολογία και το άπειρο. Στα έργα του Αριστοτέλη εντάσσονται τρία βιβλία καλούμενα ως *Περί της Αρχυτείου φιλοσοφίας.* Από αυτά έχουν σωθεί μόνο μερικές αναφορές ,όμως μας είναι γνωστό ένα επιχείρημά του με το οποίο προσπάθησε να αντικρούσει την έννοια του πεπερασμένου σύμπαντος *(H.Diels-W.Kranz,D47.24)*: *«Αν πάω στα όρια του ουρανού, μπορώ να απλώσω το χέρι ή το ραβδί μου έξω απ᾽ αυτό, ή όχι;».* Και στις δύο περιπτώσεις δε μπορώ να πω ότι είμαι στο όριο, καθώς ακόμη κι αν δε μπορώ να απλώσω το ραβδί μου, θα πρέπει να υπάρχει κάτι παραπέρα που να με περιορίζει.

Επιπλέον, ο Βασίλης Καρασμάνης(*1998*) ,τονίζει πως από ότι φαίνεται, ο Πυθαγόρας και οι Πυθαγόρειοι εξεπλάγησαν από τη μεγάλη σημασία που διαδραμάτιζαν οι αναλογίες στην ερμηνεία των διαφόρων φαινομένων. Υπάρχει μία αλληλεξάρτηση μεταξύ των φυσικών μεγεθών: η μεταβολή του ενός ,επηρεάζει και τα υπόλοιπα. Για παράδειγμα η μεταβολή της πλευράς ενός τετραγώνου, επηρεάζει αυτομάτως και το εμβαδόν του. Γενικά, η τάξη εκφράζεται μέσα από αναλογίες, οι οποίες με τη σειρά τους εκφράζονται με αριθμούς. Συνεπώς, ο αριθμός ανάγεται σε αρχή των πάντων. Έτσι, όσοι γεωμετρικοί κανόνες δεν μπορούν να αξιοποιηθούν αριθμητικά, παραγκωνίζονται. Γι΄ αυτό και οι Πυθαγόρειοι έδιναν ιδιαίτερη βάση σε ορθογώνια, μετατροπές σχημάτων και ισότητες. Επειδή τα σχήματα αναπαρίστανται με ψήφους, τα ίσα σχήματα θεωρούνται ισεμβαδικά, όχι εφαρμόσιμα (όπως π.χ. ίσχυε κατά την Ιωνική παράδοση).

Παρακάτω θα κάνουμε λόγο για την αστρονομία που ανέπτυξαν οι Πυθαγόρειοι. Θα στηριχτούμε σε δύο αξιόπιστα χωρία. Το ένα (εκτενές) ανήκει στον Αριστοτέλη και το άλλο στον Αέτιο. Και τα δύο εμπεριέχουν πολλά στοιχεία για το

[34] *είναι επίσης παράξενο να μιλάει κανείς για γένεση αιώνιων πραγμάτων, ή μάλλον είναι κάτι αδύνατο. Δεν χρειάζεται να αμφιβάλλουμε για το αν οι Πυθαγόρειοι αποδίδουν σ΄ αυτά τα πράγματα γένεση ή όχι˙ γιατί λένε καθαρά ότι όταν δημιουργήθηκε το ένα, είτε από επίπεδα ,είτε από μια επιφάνεια, είτε από ένα σπέρμα είτε από στοιχεία που δε μπορούν να τα κατονομάσουν, αμέσως το κοντινότερο μέρος του απείρου άρχισε να έλκεται και να περιορίζεται από το όριο.*

[35] *στο πρώτο βιβλίο του έργου του για τη φιλοσοφία του Πυθαγόρα γράφει ότι το σύμπαν είναι ένα και ότι από το άπειρο μπαίνουν σε αυτό ο χρόνος, η πνοή και το κενό, που πάντα καθορίζει τη θέση κάθε πράγματος.*

πλανητικό σύστημα στο οποίο πίστευαν οι Πυθαγόρειοι και του οποίου, όπως φαίνεται παρακάτω, εμπνευστής υπήρξε ο Φιλόλαος.

Α)*(Αριστοτέλης,Περὶ οὐρανοῦ Β 13,293 a 18) : «τῶν πλείστων ἐπὶ τοῦ μέσου κεῖσθαι λεγόντων(ενν. τὴν γῆν)…ἐναντίως οἱ περί τὴν Ἰταλίαν,καλούμενοι δὲ Πυθαγόρειοι ,λέγουσιν,ἐπὶ μὲν γὰρ τοῦ μέσου πῦρ εἶναί φασι,τὴν δὲ γῆν ἕν τῶν ἄστρων οὖσαν κύκλῳ φερομένην περὶ τὸ μέσον νύκτα τε καὶ ἡμέραν ποιεῖν.ἔτι δ' ἐναντίαν ἄλλην ταύτῃ κατασκευάζουσι γῆν,ἥν αντίχθονα ὄνομα καλοῦσιν,οὐ πρὸς τὰ φαινόμενα τοὺς λόγους καὶ δὸξας αὐτῶν τὰ φαινόμενα προσέλκοντες καὶ πειρώμενοι συγκοσμεῖν.πολλοῖς δ' ἄν καὶ ἑτέροις συνδόξειε μὴ δεῖν τῇ γῇ τὴν τοῦ μέσου χώραν ἀποδιδόναι, τὸ πιστὸν οὐκ ἐκ τῶν φαινομένων ἀθροῦσιν ἀλλά μᾶλλον ἐκ τῶν λόγων.τῷ γὰρ τιμιωτάτῳ οἴονται προσὴκειν τὴν τιμιωτάτην ὑπάρχειν χώραν,εἶναι δὲ πῦρρ μὲν γῆς τιμιώτερον,τὸ δὲ πέρας τοῦ μεταξύ,τὸ δ' ἔσχατον καὶ τὸ μέσον πέρας·ὥστ' ἐκ τούτων ἀναλογιζόμενοι οὐκ οἴονται ἐπὶ τοῦ μέσου τῆς σφαίρας κεῖσθαι αὐτήν,ἀλλὰ μᾶλλον τὸ πῦρ.(b 1) ἔτι δ' οἵ γε Πυθαγόρειοι καὶ διά τὸ μάλιστα προσήκειν φυλάττεσθαι τὸ κυριώτατον τοῦ παντός·τὸ δὲ μέσον εἶναι τοιοῦτον·ὅ Διός φυλακήν ὀνομάζουσι,τὸ ταύτην ἔχον τῆν χώραν πῦρ,ὥσπερ τὸ μέσον ἁπλῶς λεγόμενον καὶ τὸ τοῦ μεγέθους μέσον καὶ τοῦ πράγματος ὅν μέσον καὶ τῆς φύσεως,καίτοι καθάπερ ἐν τοῖς ζῴοις οὐ ταὐτὸν τὸ τοῦ ζῴου καὶ τοῦ σώματος μέσον,οὕτως ὑποληπτέον μᾶλλον καὶ περὶ τὸν ὅλον οὐρανόν».*[36]

Β)(Ἀέτιος ΙΙ,7,7): «Φιλόλαος πῦρ ἐν μέσῳ περὶ τὸ κέντρον ὅπερ ἑστίαν τοῦ παντός καλεῖ καὶ Διὸς οἶκον καὶ μητὲρα θεῶν βωμόν τε καὶ συνοχήν καὶ μέτρον φύσεως.καὶ πάλιν πῦρ ἕτερον ἀνωτάτω τὸ περιέχον.πρῶτον δ' εἶναι φύσει τὸ μέσον,περὶ δὲ τοῦτο δὲκα σώματα θεῖα χορεύειν,οὐρανὸν μετὰ τὴν τῶν ἀπλανῶν σφαῖραν,τοὺς πλανήτας,μεθ' οὕς ἥλιον,ὑφ' ᾧ σελήνην,ὑφ'ῇ τὴν γῆν,ὑφ'ῇ τῆν ἀντίχθονα,μεθ' ἅ σύμπαντα τὸ πῦρ ἑστίας περὶ τᾶ κέντρα τάξιν ἐπέχον».[37]

---

[36] *οι περισσότεροι άνθρωποι λένε ότι η γη είναι στο κέντρο του σύμπαντος… αλλά οι Ιταλιώτες φιλόσοφοι που είναι γνωστοί ως Πυθαγόρειοι πρεσβεύουν το αντίθετο. Στο κέντρο, λένε, υπάρχει φωτιά, και η γη είναι ένα από τα άστρα ,που με την κυκλική κίνηση της γύρω από το κέντρο προκαλεί τη μέρα και τη νύχτα. Επιπλέον, πιστεύουν ότι υπάρχει και μια άλλη γη, αντίθετη με τη δική μας, στην οποία δίνουν το όνομα «αντιγή». Δεν ψάχνουν δηλαδή για θεωρίες και αιτίες που να εξηγούν τα παρατηρούμενα φαινόμενα, αλλά μάλλον βιάζουν τα φαινόμενα προσπαθώντας να τα συμβιβάσουν με ορισμένες δικές τους θεωρίες και δοξασίες. Υπάρχουν όμως πολλοί άλλοι που θα συμφωνούσαν ότι είναι λάθος να τοποθετείται η γη στο κέντρο του σύμπαντος, ζητώντας επιβεβαίωση μάλλον στη θεωρία παρά στην παρατήρηση. Η άποψή τους είναι ότι η πιο τιμητική θέση αρμόζει στο πιο πολύτιμο πράγμα· η φωτιά, λένε, είναι πολυτιμότερη από τη γη, το όριο είναι πολυτιμότερο από το ενδιάμεσο, και η περιφέρεια και το κέντρο είναι όρια. Με βάση αυτόν τον συλλογισμό θεωρούν ότι στο κέντρο της σφαίρας δεν είναι η γη ,αλλά η φωτιά. Οι Πυθαγόρειοι μάλιστα έχουν και έναν ακόμη λόγο. Υποστηρίζουν ότι το σημαντικότερο μέρος του κόσμου, που είναι το κέντρο του, πρέπει να φυλάγεται καλύτερα· και ονομάζουν τη φωτιά που κατέχει αυτή τη θέση «σκοπιά του Δία» ,λες και η λέξη «κέντρο» έχει μόνο μια σημασία και το κέντρο (μέσο) του μαθηματικού σχήματος είναι πάντα το ίδιο με το κέντρο του πράγματος και με το φυσικό κέντρο. Όπως όμως στα ζώα το κέντρο του ζώου δε συμπίπτει με το κέντρο του σώματος, έτσι πρέπει μάλλον να θεωρήσουμε ότι συμβαίνει και με ολόκληρο το σύμπαν*

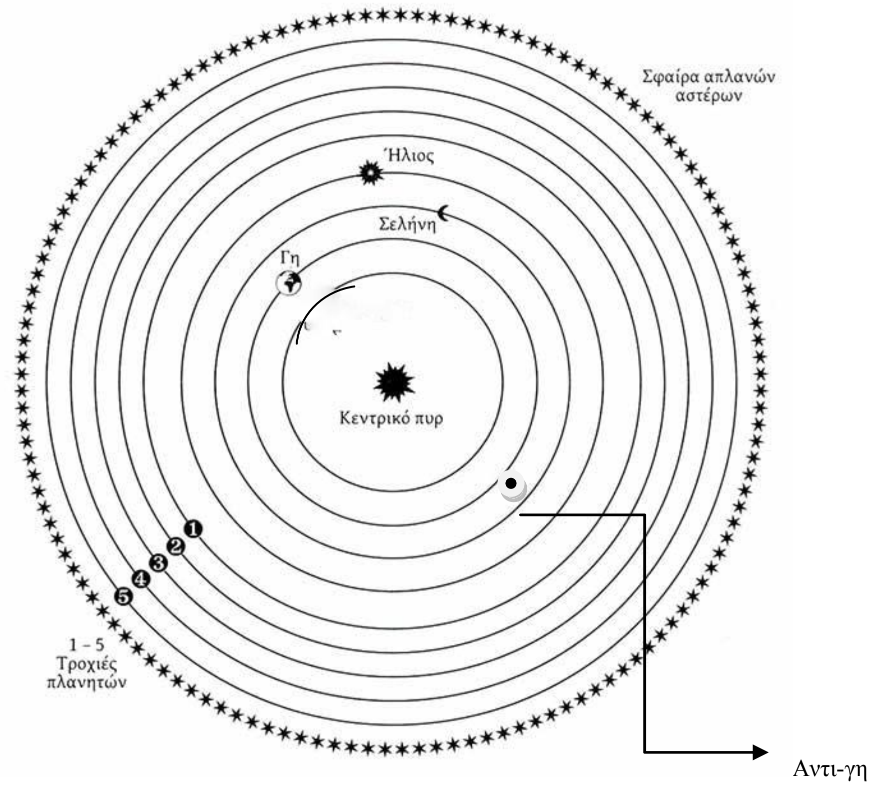
[37] *Ο Φιλόλαος δέχεται ότι υπάρχει φωτιά γύρω από το κέντρο του σύμπαντος και την αποκαλεί «εστία του παντός», «σπίτι του Δία», «μητέρα των θεών», «βωμό, δεσμό και μέτρο της φύσης». Έπειτα πάλι υπάρχει μια άλλη φωτιά που βρίσκεται στην περιφέρεια και τυλίγει ολόκληρο το σύμπαν. Ο Φιλόλαος όμως λέει ότι το κέντρο είναι από τη φύση του πρώτο και γύρω από το κέντρο χορεύουν δέκα θεία σώματα: πρώτα η σφαίρα των απλανών αστέρων, έπειτα οι πέντε πλανήτες, μετά ο ήλιος, ύστερα η σελήνη, κατόπιν η γη, έπειτα η αντιγή και τέλος η φωτιά της «εστίας», που εδρεύει γύρω από το κέντρο*

Σύμφωνα λοιπόν με την κοσμογονία των Πυθαγορείων, αφού ο αριθμός 10 είναι τέλειος και ιερός, έπρεπε να υπάρχουν 10 ουράνια σώματα. Ο Ήλιος, η Σελήνη και οι πλανήτες Ερμής, Αφροδίτη, Γη, Άρης, Ζευς και Κρόνος, κινούνταν γύρω από ένα κεντρικό σημείο φωτιάς (μιας και η φωτιά για εκείνους ήταν πολύτιμη) το οποίο ονόμαζαν Εστία ή Φυλάκιο του Διός και ήταν αόρατο. Για να συμπληρώσουν, όμως, αυτές τις εννιά κινήσεις των σωμάτων, πρόσθεσαν και ένα δέκατο πλανήτη, όμοιο με τη Γη. Τον ονόμασαν Αντίχθονα (Αντι-γη) και θεωρούσαν πως λόγω της θέσης του, δεν ήταν ορατός σε εμάς (βλ. σχήμα στο τέλος).Η Αντι-γη συντρόφευε τη Γη ,περιστρεφόταν σε μικρότερη τροχιά και δεν ήταν ορατή λόγω της κίνησης της Γης γύρω από το κεντρικό πυρ *(S.T.Heath,σ.164).* Αυτό το ιδιαίτερο πλανητικό σύστημα του Φιλολάου (και των Πυθαγορείων) ήρθε σε ρήξη με την μέχρι τότε διαδεδομένη αντίληψη περί ενός γεωκεντρικού συστήματος. Για άλλους αποτέλεσε αφορμή για να θαυμάσουν την επιστημονική ευφυΐα των πρώτων Πυθαγορείων ,και για άλλους αίτιο αμφισβήτησης του κατά πόσο μια τέτοια εικόνα του κόσμου ήταν εφικτό να συλληφθεί τον $5^{ο}$ αι. π.Χ. Το θαυμαστό είναι όμως ,ότι ο ίδιος ο Κοπέρνικος αναφέρει τον Φιλόλαο (καθώς και τον Ηρακλείδη Ποντικό και τον Έκφαντο τον Πυθαγόρειο) ως πρόδρομό του*(T.S.Kuhn,σ.53).*Μάλιστα το σύστημα του Κοπέρνικου έγινε αρχικά γνωστό με την ονομασία *Astronomia Pythagorica ή Philolaica*.

Θα μπορούσαμε επίσης να πούμε πως το μόνο αστρονομικό φαινόμενο που παραθέτει ο Αριστοτέλης είναι η εναλλαγή ημέρας και νύχτας λόγω της περιστροφής της γης. Δεν ήταν αναγκαίο, λοιπόν, ο Φιλόλαος να βάλει τους απλανείς αστέρες να κινούνται, εκείνος όμως τους έβαλε να χορεύουν. Φαίνεται πως προσπάθησε να εξηγήσει φαινόμενα όπως οι εκλείψεις και μάλιστα με προσωκρατικό στυλ, όχι όμως και φαινόμενα που απασχόλησαν αργότερα την αστρονομία π.χ. οι τροχιές των ουράνιων σωμάτων. Ο Αριστοτέλης θεώρησε πως το κίνητρο του Φιλόλαου ήταν η πίστη του στη φωτιά και τον αριθμό δέκα αλλά και η πεποίθησή του ότι η γη δεν είναι τόσο σημαντική για να βρίσκεται στο κέντρο του κόσμου *(Kirk-Raven-Schofield, σ.352).*

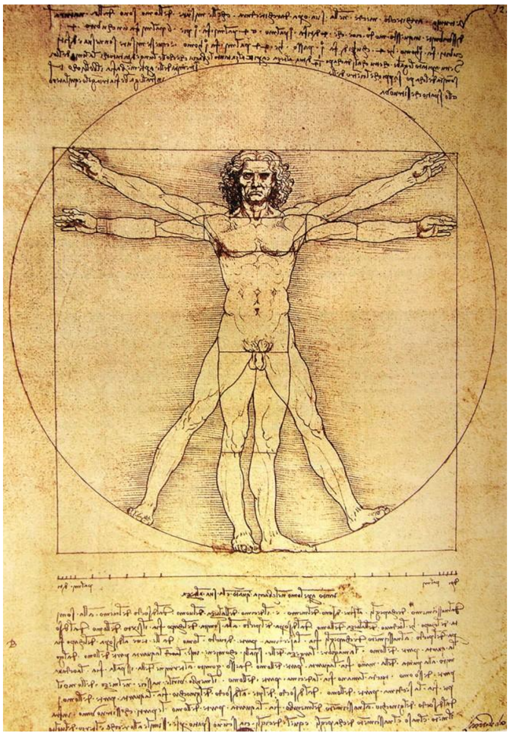
Τέλος παραθέτουμε ένα απόσπασμα στο οποίο φαίνεται η άποψη του (Πυθαγόρειου) Ίππασου του Μεταπόντιου για τη φωτιά: *(Συμπλίκιος,Είς Φυσικά 23,33)«Ἵππασος δὲ ὁ Μεταποντῖνος καὶ Ἡράκλειτος ὁ Ἐφέσιος ἕν καὶ οὗτοι και κινούμενον καὶ πεπερασμένον,ἀλλὰ πῦρ ἐποίησαν τὴν ἀρχὴν καὶ ἐκ πυρός ποιοῦσι τὰ ὄντα πυκνώσει καὶ μανώσει καὶ διαλύουσι πάλιν εἰς πῦρ ὡς ταύτης μιᾶς οὔσης φύσεως τῆς ὑποκειμένης».* [38]

[38] *Ο Ίππασος από τον Μεταπόντιο και ο Ηράκλειτος ο Εφέσιος πιστεύουν και αυτοί ότι υπάρχει ένα υλικό πράγμα, που κινείται και είναι πεπερασμένο, το πυρ, και αυτό το θεώρησαν ως πρώτη αρχή του κόσμου και ότι από το πυρ ερμηνεύουν τη γένεση των όντων με πύκνωση και αραίωση, και ότι τα όντα διαλύονται ξανά και καταλήγουν σε πυρ, γιατί αυτή η ουσία αποτελεί την ενιαία βάση σ΄ όλα τα πράγματα*



(σχήμα-Το πλανητικό σύστημα του Φιλόλαου)

Κεφάλαιο 2



«Ο άνθρωπος του Βιτρούβιου» του Λεονάρντο ντα Βίντσι (1490), έργο που αποτυπώνει τον άρρητο αριθμό φ

2.1 Η ασυμμετρία και σε ποιον ή ποιους μπορεί να αποδοθεί η ανακάλυψή της

Οι πρώτοι αριθμοί με τους οποίους ερχόμαστε σε επαφή τα πρώτα μας παιδικά χρόνια είναι οι φυσικοί ή οι θετικοί ακέραιοι 1,2,3… οι οποίοι προκύπτουν από τη διαδικασία αρίθμησης πεπερασμένων συνόλων αντικειμένων. Αργότερα συνειδητοποιούμε πως οι ανάγκες μας απαιτούν τη μέτρηση ποσοτήτων όπως το μήκος και ο χρόνος, που καθιστούν απαραίτητη τη χρήση κλασμάτων. Έτσι, αν ορίσουμε έναν ρητό αριθμό ως το πηλίκο δύο ακεραίων p/q ,$q\neq0$ το αριθμητικό μας σύστημα διευρύνεται. Κάθε ρητός αριθμός παριστάνεται μοναδικά από ένα σημείο της ευθείας των αριθμών αλλά όχι και το αντίστροφο. Όσοι δεν έχουν εμβαθύνει στο «μυστήριο» των μαθηματικών ίσως να πιστεύουν ακόμη και σήμερα πως μ' αυτόν τον τρόπο εξαντλούνται όλα τα σημεία. Για τους αρχαίους Έλληνες οι έννοιες αριθμός και ασυμμετρία ήταν αμοιβαίως αποκλειόμενες *(Burkert,σ.455· Knorr, σ.9).*Στον Αριστοτέλη διαβάζουμε *(Μεταφυσικά 1021a 5): «ὁ γὰρ ἀριθμὸς σύμμετρος»*. Πρέπει να αποτέλεσε πραγματικό σοκ για τον άνθρωπο η διαπίστωση πως υπάρχουν σημεία της γραμμής των αριθμών τα οποία δεν αντιστοιχούν σε κανέναν ρητό αριθμό. Η ανακάλυψη των αρρήτων ή αλλιώς της ασυμμετρίας αποτελεί ένα πολύ σημαντικό κεφάλαιο στην ιστορία των μαθηματικών και πιθανότατα ανήκει στον Πυθαγόρα ή τους Πυθαγορείους.

Παρακάτω θα παραθέσουμε κάποιες πηγές από αρχαίους και μεταγενέστερους σχολιαστές-συγγραφείς ταξινομημένες σε χρονολογική σειρά. Αρχικά οι πηγές αναφέρονται γενικά στο θέμα της ασυμμετρίας ενώ στη συνέχεια μας δίνουν στοιχεία ειδικότερα για το θέμα της γέννησής της.

Το θέμα της ασυμμετρίας εμφανίζεται στα *Στοιχεία* του Ευκλείδη στα βιβλία X και XIII. Ο πρώτος ορισμός με τον οποίο ξεκινάει το βιβλίο X είναι ο εξής: *«Σύμμετρα μεγέθη λέγεται τά τῷ αὐτῷ μέτρῳ μετρούμενα, ἀσύμμετρα δέ, ὧν μηδέν ἐνδέχεται κοινόν μέτρον γενέσθαι»*, δηλαδή σύμμετρα μεγέθη ονομάζονται αυτά τα οποία μετριούνται με το αυτό μέτρο, ασύμμετρα δε, αυτά για τα οποία ενδεχομένως κανένα μέτρο δεν μπορεί να γίνει κοινό *(όρος 1. Βιβλίο X Ευκλείδη)*. Παρ΄ όλα αυτά στο ίδιο βιβλίο δεν προηγείται κάποια αναφορά του Ευκλείδη στη γένεση της ασυμμετρίας ή στη χρονολογική της τοποθέτηση. Το βιβλίο XIII πραγματεύεται τα Πλατωνικά Στερεά, δηλαδή τα πέντε κανονικά στερεά (κύβος, πυραμίδα, οκτάεδρο, δωδεκάεδρο και εικοσάεδρο) τα οποία πιθανόν να ανακαλύφθηκαν στη σχολή του Πυθαγόρα. Ονομάζονται Πλατωνικά επειδή τα συναντάμε στον διάσημο διάλογο του Πλάτωνα ,*Τίμαιο*. Μάλιστα πολλά από τα θεωρήματα του βιβλίου αποδίδονται στον Θεαίτητο (*Heiberg,2008,σ.505*).

Ο Αθηναγόρας ο Αθηναίος (δεύτερο μισό του δεύτερου αι. μΧ.) μας παραθέτει έναν αφορισμό (απόφθεγμα) που αποδίδεται στον Λύσι, έναν Πυθαγόρειο του 425 π.Χ. : *«ἀριθμόν ἄρρητον ὁρίζεται τόν θεόν»*. Το μεταφρασμένο χωρίο είναι το παρακάτω (*Diels-Kranz I 46.4 σ.421*): «*Ο Λύσις και ο Όψιμος ορίζουν σαν Θεό, ο πρώτος τον ασύμμετρο αριθμό ,ο δεύτερος την υπεροχή του μεγαλύτερου αριθμού πάνω* *στον πλησιέστερό του αριθμό. Και αν για τους Πυθαγορείους ο μεγαλύτερος αριθμός είναι το δέκα, δηλαδή η τετρακτύς, και περιέχει όλες τις αρμονικές αναλογίες, και το εννιά υπάρχει ακριβώς πίσω του, τότε ο Θεός είναι η μονάδα˙ γιατί ο μεγαλύτερος διαφέρει από τον αμέσως μικρότερο κατά ένα»* .Εδώ βλέπουμε ταύτιση αριθμού-Θεού καθώς και οι δύο όροι δεν ορίζονται απόλυτα, είναι υπερβατικοί. Μάλιστα από ετυμολογικής άποψης, «άρρητος» είναι αυτός που δε μπορεί να λεχθεί (α + ρητός, το ρήμα λέγω σχηματίζει μέλλοντα στη μορφή ἐρῶ). Είναι λοιπόν πιθανόν το απόσπασμα να συνδέεται με την έννοια της ασυμμετρίας; Σύμφωνα με τον Burkert (*σ.461*) το συγκεκριμένο χωρίο από τον Αθηναγόρα είναι πλαστό όπως και τα άλλα Πυθαγόρεια του ίδιου φιλοσόφου, αλλά αποτελεί προφανώς την αρχαιότερη σωζόμενη αναφορά για την έκφραση «άρρητος αριθμός».

Ο Δημόκριτος έγραψε μία πραγματεία σε δύο βιβλία με τίτλο *«Περί ἀλόγων γραμμῶν καὶ ναστῶν α' β'»*. Για αυτό μας πληροφορεί σχετικά ο Διογένης ο Λαέρτιος, (*Άπαντα,τόμος 4,σελ.132*).Ο τελευταίος είναι ένας μη κριτικός συλλέκτης ανεκδότων, πιθανότατα του 3ου αι. μ.Χ. αλλά δε γνωρίζουμε τίποτα με ακρίβεια για τις ημερομηνίες και τις πηγές του. Μας παρέχει μάλιστα έναν κατάλογο από έργα του Δημόκριτου, όμως καμία από τις ενενήντα πραγματείες που αναφέρονται δεν έχουν σωθεί. .(*Fowler,σ. 89*). Συνεπώς δε μπορούμε να είμαστε απόλυτα βέβαιοι ότι το περιεχόμενο του παραπάνω έργου σχετιζόταν με την ασυμμετρία ,αν και η λέξη «άλογος» παραπέμπει σε κάτι σχετικό με αυτήν.

Επιπλέον, στον *Ιππία Μείζονα* του Πλάτωνα όπου αναπτύσσεται διάλογος μεταξύ του σοφιστή Ιππία και του Σωκράτη σχετικά με το πώς μπορούμε να ορίσουμε το ωραίο, διακρίνουμε την έννοια του άρρητου αριθμού.*(Ιππίας Μείζων,330b,c)*: *«ΣΩ. Ποτέρων οὖν, ὦ Ἱππία, δοκεῖ σοι τὸ καλὸν εἶναι; πότερον ὧν σὺ ἔλεγες· εἴπερ ἐγὼ ἰσχυρὸς καὶ σύ, καὶ ἀμφότεροι, καὶ εἴπερ ἐγὼ δίκαιος καὶ σύ, καὶ ἀμφότεροι, καὶ εἴπερ ἀμφότεροι, καὶ ἑκάτερος· οὕτω δὴ καὶ εἴπερ ἐγὼ καλὸς καὶ σύ, καὶ ἀμφότεροι, καὶ εἴπερ ἀμφότεροι, καὶ ἑκάτερος; ἢ οὐδὲν κωλύει, ὥσπερ ἀρτίων ὄντων τινῶν ἀμφοτέρων τάχα μὲν ἑκάτερα περιττὰ εἶναι, τάχα δ' ἄρτια, καὶ αὖ ἀρρήτων ἑκατέρων ὄντων τάχα μὲν ῥητὰ τὰ συναμφότερα εἶναι, τάχα δ' ἄρρητα, καὶ ἄλλα μυρία τοιαῦτα, ἃ δὴ καὶ ἐγὼ ἔφην ἐμοὶ προφαίνεσθαι; ποτέρων δὴ τιθεῖς τὸ καλόν; ἢ ὥσπερ ἐμοὶ περὶ αὐτοῦ καταφαίνεται, καὶ σοί; πολλὴ γὰρ ἀλογία ἔμοιγε δοκεῖ εἶναι ἀμφοτέρους μὲν ἡμᾶς εἶναι καλούς, ἑκάτερον δὲ μή, ἢ ἑκάτερον μέν, ἀμφοτέρους δὲ μή, ἢ ἄλλο ὁτιοῦν τῶν τοιούτων. οὕτως αἱρῇ, ὥσπερ ἐγώ, ἢ 'κείνως;»*[39] .Μάλιστα αυτή η τελευταία

[39] *ΣΩ. Σε ποιο από τα δύο πιστεύεις, Ιππία, πως ανήκει το όμορφο; Σ' αυτά που εσύ έλεγες; Αν εγώ είμαι δυνατός και είσαι και εσύ, τότε και οι δύο μαζί είμαστε δυνατοί· και αν εγώ είμαι δίκαιος και είσαι και εσύ, τότε και οι δύο μαζί είμαστε δίκαιοι· και αν και οι δύο είμαστε δίκαιοι, τότε και ο καθένας μας χωριστά είναι δίκαιος. Έτσι και αν εγώ είμαι όμορφος και είσαι και εσύ, τότε και οι δύο μαζί είμαστε όμορφοι και αν και οι δύο μαζί είμαστε όμορφοι, τότε και ο καθένας μας χωριστά είναι όμορφος. Έτσι; Ή μήπως τίποτε δεν μας εμποδίζει να πούμε — όπως για μερικά πράγματα, που και τα δύο μαζί είναι άρτια, χωριστά όμως το καθένα μπορεί να είναι άλλοτε περιττό και άλλοτε άρτιο· ακόμα, κάθε αριθμός χωριστά να είναι άρρητος, και οι δύο όμως μαζί άλλοτε να είναι ρητοί και άλλοτε άρρητοι, και άλλα αμέτρητα παρόμοια, αυτά που και εγώ είπα πως ξεπροβάλλουν μέσα μου. Σε ποιο από τα δύο βάζεις το όμορφο; Ή μήπως ό,τι πιστεύω εγώ γι' αυτό, το πιστεύεις και εσύ; Γιατί μου φαίνεται πως είναι μεγάλος παραλογισμός και οι δύο να είμαστε όμορφοι, όχι όμως και καθένας μας χωριστά· ή καθένας μας χωριστά να είναι όμορφος, όχι όμως και οι δύο μαζί — ή οτιδήποτε άλλο παρόμοιο. Αυτό προτιμάς, όπως εγώ, ή το άλλο;*

παρατήρηση του Σωκράτη για το μερικό και το ολόκληρο, θυμίζει τους χειρισμούς που εφαρμόζει ο Ευκλείδης στο βιβλίο X (*Fowler,σ.360*). Πέρα από αυτό ,ο Πλάτωνας πραγματεύεται το θέμα της ασυμμετρίας και στον διάλογο *Θεαίτητο (147 D)* όπου ο μαθηματικός Θεόδωρος δίνει πληροφορίες σχετικά με την απόδειξη της ασυμμετρίας των τετραγωνικών ριζών των αριθμών 3 έως 17. Σε αυτόν τον διάλογο θα αναφερθούμε αναλυτικά στη συνέχεια (Η αναφορά της ασυμμετρίας από τον Πλάτωνα θα αναλυθεί σε επόμενο κεφάλαιο).

Ο Πλούταρχος συνήθως εισήγαγε μαθηματικά χωρία στα έργα του (*Fowler,σ.293*).Για παράδειγμα στο *Συμποσιακῶν viii 2.1* γράφει: *«Πλάτων αὐτὸς ἐμέμψατο τοὺς περὶ Εὔδοξον καὶ Ἀρχύταν καὶ Μέναιχμον εἰς ὀργανικὰς καὶ μηχανικὰς κατασκευὰς τὸν τοῦ στερεοῦ διπλασιασμὸν ἀπάγειν ἐπιχειροῦντας,ὥσπερ πειρομένους δι᾽ ἀλόγου δύο μέσας ανάλογον ,ᾗ παροίκει λαβεῖν».*[40]Η σύνταξη του παραπάνω αποσπάσματος που είναι σχετικά κατακερματισμένη ,οδήγησε τους μελετητές στο να προσθέσουν κάποιες διορθώσεις: στη θέση του όρου *δι᾽ ἀλόγου* έθεσαν τους εναλλακτικούς όρους *διαλόγου* ή *ἀνάλογον* ή *δίχα λόγου*. Το απόσπασμα μοιάζει με κάποιο είδος σχολίου το οποίο επηρέασε την σύνταξη του κειμένου, όταν κάποιος αργότερα πιθανόν προσπάθησε να το εντάξει στο πρωτότυπο(*Fowler,σ.294*).

Ο νεο-Πυθαγόρειος σχολιαστής Ιάμβλιχος (250-325 μ.Χ) μας διασώζει τις πρώτες ιστορίες σχετικά με την συνθήκες ανακάλυψης της ασυμμετρίας και την επίδραση της. Παραθέτει κάποιες αντιφατικές μαρτυρίες που αφορούν την ανακάλυψη, την κατασκευή του δωδεκάεδρου, τον ρόλο του Ίππασου και τον θάνατο στη θάλασσα ενός Πυθαγορείου. Για αυτά θα γίνει εκτενής αναφορά στη συνέχεια.

Το ερώτημα που τίθεται εδώ, είναι σε ποιόν ή ποιούς μπορούμε να αποδώσουμε την ανακάλυψη της ασυμμετρίας. Η αλήθεια είναι πως αυτή αποδίδεται κοινή συναινέσει στον Πυθαγόρα ή τους Πυθαγόρειους γενικότερα. Οφείλουμε, όμως, να συγκεντρώσουμε στο σημείο αυτό κάποιες σχετικές πηγές για να στηρίξουμε όσο γίνεται κάτι ,το οποίο οι περισσότεροι λαμβάνουμε ως δεδομένο. Κατ᾽ αρχάς, υπάρχουν μαρτυρίες που συσχετίζουν το θέμα της ασυμμετρίας με το όνομα του Ίππασου του Μεταπόντιου. Το πρόβλημα που προκύπτει είναι πως αυτές οι μαρτυρίες-ιστορίες είναι κατά βάση αντιφατικές και θα μπορούσαμε να πούμε αμοιβαία αποκλειόμενες (*Burkert,σ.457*).Το αξιοπρόσεκτο είναι πως ενώ χρονολογούνται περίπου εννιά ολόκληρους αιώνες μετά τη δράση του Πυθαγόρα, και αν και φαίνονται αμφίβολες, αποτελούν την κύρια πηγή για πολλά από όσα έχουν γραφτεί για την ανακάλυψη της ασυμμετρίας (*Fowler,σ. 362*).

Κατ᾽αρχάς, ο Πάππος ο Αλεξανδρινός (4^{ος} αι. μ.Χ.) ξεκινάει το σχολιασμό του στο βιβλίο X του Ευκλείδη με μια προσέγγιση του θέματος της ασυμμετρίας.

---

[40] *Ο ίδιος ο Πλάτωνας επέκρινε τον Εύδοξο και τον Αρχύτα και τον Μέναιχμο οι οποίοι αποπειράθηκαν μέσα από όργανα και μηχανικές κατασκευές και μέσα από ασυμμέτρους να αναγάγουν τον διπλασιασμό του στερεού σε δύο μέσους ανάλογους, που ήταν ως τώρα επιτρεπτό.*
(Σχετικά με τους μέσους ανάλογους ,αν Α είναι το στερεό και 2Α το διπλάσιο του, αυτοί θα ορίζονται από τη σχέση $\frac{A}{\chi}=\frac{\chi}{y}=\frac{y}{2A}$.Λύνοντας την παραπάνω προκύπτει ότι $\chi^2=Ay$,$y^2=2A\chi$ και $\chi y=2A^2$.συνδυάζοντας την πρώτη με την τελευταία παίρνουμε $\chi\cdot(\chi^2/A)=2\cdot A^2$το οποίο λυμένο ως προς χ μας δίνει $\chi^3=2\cdot A^3$ (σύνδεση με διπλασιασμό του κύβου) ή αλλιώς $\chi=\sqrt[3]{2}\cdot A$ (σύνδεση με κυβικές ρίζες και ασυμμετρία)

Σχετίζεται με τα άρρητα μεγέθη, συνεπώς αξίζει να το αναφέρουμε αν και είναι εκτενές (*Junge* and *Thomson,σ.63-4*).Το απόσπασμα έχει ως εξής: « *Ο σκοπός του βιβλίου X των Στοιχείων του Ευκλείδη είναι να ερευνήσει τα σύμμετρα και ασύμμετρα, τις άρρητες και ρητές συνεχείς ποσότητες. Αυτή η επιστήμη είχε την καταγωγή της στη σχολή του Πυθαγόρα ,αλλά έλαβε μια σημαντική ανάπτυξη στα χέρια του Αθηναίου Θεαίτητου ,ο οποίος είχε μια φυσική δεξιότητα γι΄ αυτήν όπως και για άλλες πτυχές των μαθηματικών άξιες θαυμασμού. Όντας ένας από τους πιο προικισμένους άντρες, επεδίωξε υπομονετικά την έρευνα της αλήθειας που περιέχεται σε αυτή την επιστήμη (ή γνώση) ,όπως μαρτυρά και ο Πλάτωνας στο έργο του που έδωσε το όνομά του και φαίνονται κατά τη γνώμη μου τα πρωτεύοντα μέσα καθιέρωσης ακριβών διακρίσεων και αποδείξεων ,με σεβασμό στις παραπάνω (εννοείται ρητές και άρρητες) ποσότητες. Αν και αργότερα ο μεγάλος Απολλώνιος, του οποίου η ιδιοφυία στα μαθηματικά ήταν μία από τις μεγαλύτερες δυνατές, πρόσθεσε κάποιες αξιοσημείωτες κατηγορίες αυτών των ποσοτήτων μετά από επίπονη προσπάθεια, ήταν ωστόσο ο Θεαίτητος εκείνος που διέκρινε τα τετράγωνα που είναι σύμμετρα σε μήκος από αυτά που είναι ασύμμετρα, και που διαίρεσε τις ασύμμετρες γραμμές σύμφωνα με διαφορετικούς μέσους, αναθέτοντας τη μέση γραμμή στη γεωμετρία ,τη διωνυμική στην αριθμητική και την αποτομή στην αρμονία ,όπως επισημαίνει ο Εύδημος ο Περιπατητικός. Το αντικείμενο του Ευκλείδη από την άλλη, ήταν η επίτευξη των αδιαμφισβήτητων αξιωμάτων ,τα οποία καθιέρωσε για τη συμμετρία και την ασυμμετρία γενικά. Για τους ρητούς και τους άρρητους διατύπωσε ορισμούς και διαφορές, καθιέρωσε επίσης πολλές τάξεις αρρήτων και έφερε τελικά στο φως οτιδήποτε έχει να κάνει με τη σαφήνειά τους.*

Καθώς αυτή η πραγματεία(εννοείται το βιβλίο X του Ευκλείδη) έχει το προαναφερθέντα σκοπό, θα ήταν χρήσιμο για εμάς να συγκεντρώσουμε τα καλά που περιέχει. Πράγματι η σχολή του Πυθαγόρα επηρεάστηκε τόσο από την πίστη της σε αυτά τα πράγματα, που λέγεται πως αυτός που αποκάλυψε πρώτος τη γνώση των άρρητων ή ασύμμετρων αριθμών και την διέδωσε στο ευρύ κοινό ,χάθηκε από πνιγμό. Αυτό είναι περισσότερο μια παραβολή με την οποία ήθελαν να εκφράσουν την πεποίθησή τους πως ,πρώτον είναι καλύτερο να αποκρύψουμε κάθε άρρητο, ασύμμετρο ή κάτι αδιανόητο στο σύμπαν και δεύτερον ότι κάθε ψυχή που από λάθος ή απροσεξία ανακαλύπτει ή αποκαλύπτει οτιδήποτε με ασύμμετρα χαρακτηριστικά, περιπλανιέται βαθιά στη θάλασσα της ανυπαρξίας και στο ρεύμα του θανάτου, όπου δεν υπάρχει κανένα κοινό μέτρο. Αυτή ήταν η θεώρηση που οι Πυθαγόρειοι και ο Αθηναίος ξένος δημιούργησαν σαν κίνητρο ανησυχίας και προσοχής σε αντίστοιχες περιπτώσεις».

Αρχικά, λοιπόν, βλέπουμε τον Πάππο να παρουσιάζει μια εκδοχή της ανακάλυψης της ασυμμετρίας συνδέοντας την με τη σχολή του Πυθαγόρα. Μιλάει εν συνεχεία για το πώς η αρχική γνώση εξελίχθηκε με τους Θεαίτητο, Απολλώνιο και Ευκλείδη και τέλος περιγράφει μια ιστορία κοινή στους Πυθαγορείους σχετικά με την τιμωρία εκείνου που τόλμησε να αποκαλύψει το μυστικό της ασυμμετρίας. Εδώ προκύπτουν δύο βασικά θέματα: Το ένα είναι ότι προσδίδει στην ιστορία αυτή μεταφορική σημασία και θεωρεί πως ήταν περισσότερο ένα μέσο προειδοποίησης για κάποια σχετική παρέκκλιση στο μέλλον, παρά ένα πραγματικό γεγονός. Το δεύτερο είναι πως εκείνος που έκανε τη σχετική αποκάλυψη αναφέρεται ως Αθηναίος ξένος, χωρίς να γίνεται λόγος στο όνομα του Ίππασου .Αυτός ο Αθηναίος μπορούμε να σκεφτούμε πως είναι εκείνος που εμφανίζεται στους *Νόμους* του Πλάτωνα. Μάλιστα ο Fowler *(σ.296)* σχολιάζει πως ο Πάππος ,ο οποίος μάλιστα είχε κάποια πρόσβαση και στο έργο του Εύδημου, φαίνεται αβέβαιος για τις συνθήκες της ανακάλυψης και τις συνέπειες της στη μαθηματική κοινότητα.

Μία πιο σύντομη μορφή των όσων γράφει ο Πάππος, εντοπίζουμε σε σχόλιο στο βιβλίο X του Ευκλείδη (*Heiberg,σ.417*) : «*«Τῶν γὰρ Πυθαγορείων λόγος τὸν πρῶτον τὴν περὶ τούτων (δηλαδή τῶν ἀλόγων) θεωρίαν »* και ο σχολιαστής προσθέτει τον μύθο : *« είς τοὐμφανές ἐξαγαγόντα ναυαγίω περιπεσεῖν, καὶ ἴσως ἠνίττοντο, ὅτι πᾶν τὸ ἄλογον έν τῷ παντὶ καὶ ἄλογον καὶ ἀνείδεον κρύπτεσθαι φιλεῖ καὶ εἴ τις ἄν ψυχή τύχη ἐπιδράμοι τῷ τοιούτω εἴδει τῆς ζωῆς καὶ πρόχειρον καὶ φανερὸν τοῦτο ποιήσηται εἰς τὸν τῆς γενέσεως ὑποφέρεται ποντον καὶ τοῖς ἀστάτοις ταύτης κλύζεται ρεύμασιν. τοιοῦτον σέβας καὶ οὗτοι εἶχον οι ἄνδρες περὶ τὴν τῶν ἀλόγων θεωρίαν»*. Ο μύθος δηλαδή μας λέει πως εκείνος που αποκάλυψε πρώτος την ασυμμετρία χάθηκε σε ναυάγιο. Η εξήγηση σε αυτό είναι πως ό,τι δεν υποτάσσεται στον λόγο συνηθίζει να αποκρύπτεται, ενώ αν κάποιος επιχειρήσει να φέρει στο φως το άλογο, πρέπει να τιμωρηθεί για αυτήν την πράξη ασέβειας από την ίδια την φύση. Έχει μάλιστα πάρα πολλά κοινά με τη δομή του Πάππου.

Παρακάτω λαμβάνουμε κάποια στοιχεία από τον Πλούταρχο, σχετικά με τη μυστικότητα και τις απαγορεύσεις που συνήθιζαν να διέπουν τη σχολή του Πυθαγόρα. Στους *Βίους Παράλληλους* και συγκεκριμένα στην αναφορά του στον Νουμά Πομπίλιο, βασιλιά της Ρώμης που διαδέχθηκε τον Ρωμύλο, βλέπουμε πως η ζωή και φιλοσοφία του Πυθαγόρα έβρισκε σε πολλά σημεία σύμφωνο τον Νουμά (*Νουμάς,Η*): «*Καὶ τὰ περὶ θείων δὲ παραστάσεων νομοθετήματά του εἰσίν ἐντελῶς σύμφωνα προς τοῦ Πυθαγόρου τὰ δόγματα»*. Μάλιστα λίγο πιο κάτω διαβάζουμε τα εξής (*Νουμάς,ΚΒ*) : *«οί Πυθαγόριοι…καὶ ὅταν ἡ περί τῶν ἀπόρων καὶ ἀποῤῥὴτων λεγομένων γεωμετρικῶν μεθόδων πραγματεία ἐδόθη ποτέ εἶς τῶν ἀναξίων τινά,διά σημείων ἔδειξεν ὁ Θεός,ὡς ἔλεγον οὗτοι,ὅτι ἔμελλε νὰ τιμωρήσῃ ὡς μέγα καὶ κοινόν κακόν τὴν ἀσέβειαν καὶ τὴν παρανομίαν».*[41]Στο απόσπασμα γίνεται λόγος για μυστηριώδεις μεθόδους και τιμωρία, όμως δεν είναι εύκολο να συνδέσουμε το γεγονός με τον Ίππασο. Όντας Πυθαγόρειος η μύηση του σε δύσκολες διαδικασίες δεν ήταν κάποιο είδος αποκάλυψης ενώ ο θάνατος του δε θα μπορούσε να θεωρηθεί κοινό κακό(*Burkert,σ.457*).

Επιπλέον, έχουμε δύο μαρτυρίες οι οποίες προέρχονται από τους λεγόμενους «μαθηματικούς» και «ακουσματικούς» Πυθαγορείους αντίστοιχα. Όπως πληροφορούμαστε (*Καν,σ.36*) οι «μαθηματικοί» Πυθαγόρειοι επικεντρώθηκαν στο μαθηματικό και επιστημονικό έργο του Πυθαγόρα, ενώ οι «ακουσματικοί» σε θρησκευτικά και τελετουργικά θέματα. Η πρώτη μαρτυρία (των «μαθηματικών» Πυθαγορείων) μας λέει πως ο Ίππασος ήταν ο πρώτος που κατασκεύασε και δημοσίευσε τη σφαίρα των δώδεκα πενταγώνων δηλαδή το δωδεκάεδρο. Πνίγηκε στη θάλασσα σαν τιμωρία για αυτό του αδίκημα αλλά του αποδόθηκε μια σχετική φήμη (*Burkert ,σ.457, Iamvlichus De vita Pythagorica,σ.88*): *«περὶ δ᾽ Ἱππάσου λέγουσιν,ὡς*

---

[41] *Και όταν η πραγματεία των δυσνόητων και μυστηριωδών γεωμετρικών μεθόδων αποκαλύφθηκε σε ένα συγκεκριμένο ανάξιο πρόσωπο ,είπαν ότι ο Θεός απείλησε να τιμωρήσει τέτοιου είδους παρανομία και ασέβεια ,με μεγάλη και κοινή συμφορά*

ἦν μὲν τῶν Πυθαγορείων,διὰ δὲ τὸ ἐξενεγκεῖν καὶ γράψασθαι πρώτως σφαῖραν τὴν ἐκ τῶν δώδεκα πενταγώνων ἀπώλετο κατὰ θάλατταν ὡς ἀσεβήσας,δόξαν δὲ λάβοι ὡς εὑρών, εἶναι δὲ πάντα ἐκείνου τοῦ ἀνδρός…». Η δεύτερη μαρτυρία (των «ακουσματικών») παρουσιάζει τον Ίππασο σαν τον άντρα, ο οποίος με μία ανακάλυψή του εγκαινίασε μία νέα τάση του Πυθαγορισμού, διαφορετική από την μέχρι τότε υπάρχουσα. Εδώ όμως δε δίνονται λεπτομέρειες του τι ακριβώς ήταν αυτό που προκάλεσε επανάσταση, ούτε γίνεται λόγος για ασυμμετρία (*Burkert,σ.457*).

Παράλληλα ο Ιάμβλιχος, από ότι φαίνεται, γνωρίζει τα όσα υποστηρίζει ο Πάππος αλλά προσθέτει και κάτι παραπάνω στην έννοια του συμβολικού θανάτου, γράφοντας ότι στήθηκε ένας τάφος με το όνομα του «προδότη» (*Iamvichus VP 246 κ.ε*) : *«τὸν γοῦν πρῶτον ἐκφάναντα τὴν τῆς συμμετρίας καὶ ἀσυμμετρίας φύσιν τοῖς ἀναξίοις μετέχειν τῶν λόγων οὕτως φασὶν ἀποστυγηθῆναι ,ὡς…καὶ τάφον αὐτοῦ κατασκευασθῆναι…(247) οἱ δὲ φασι καὶ τὸ δαιμόνιον νεμεσῆναι τοῖς ἐξώφορα τὰ Πυθαγόρου ποιησαμένοις˙φθαρῆναι γὰρ ὡς ἀσεβήσαντα ἐν θαλάσσῃ τὸν δηλώσαντα τὴν τοῦ εἰκοσαγώνου σύστασιν…»* (εδώ ο όρος *εικοσάγωνο* όπως βλέπουμε σε σχόλιο του Fowler *(σ.362)* ήταν ένας άτυπος όρος για το δωδεκάεδρο που πιθανότατα υπάρχει μόνο στον Ιάμβλιχο). Στα αποσπάσματα αυτά ο Ιάμβλιχος τοποθετεί τη μία μετά την άλλη τρεις εκδοχές για την ανακάλυψη της ασυμμετρίας (σε συμφωνία και με το απόσπασμα *VP 88* που είδαμε παραπάνω).Η πρώτη σχετίζεται με τον συμβολικό θάνατο του «προδότη» που αποκάλυψε τους άρρητους αριθμούς, η δεύτερη με τον πνιγμό του άντρα που αποκάλυψε το δωδεκάεδρο και η τρίτη με τον πνιγμό κάποιου που κοινοποίησε το γεγονός της ασυμμετρίας γενικά. Τέλος, ο Ιάμβλιχος προσθέτει και μία ιστορία σχετικά με το πώς η Πυθαγόρεια γεωμετρία έγινε γνωστή (και πιθανόν κατά επέκταση και το μυστικό της ασυμμετρίας) χωρίς την εμπλοκή κάποιας συμφοράς ή τιμωρίας (*Iamvlichus VP 89*): *«λέγουσι δὲ οἱ Πυθαγόρειοι ἐξενεχθῆναι γεωμετρίαν οὕτως˙ἀποβαλεῖν τινα τὴν οὐσίαν τῶν Πυθαγορείων,ὡς δὲ τουτ΄ ἠτυχησε,δοθῆναι αὐτῷ χρηματίσασθαι ἀπό γεωμετρίας»*. Δηλαδή δόθηκαν χρήματα σε κάποιο Πυθαγόρειο που είχε ανάγκη, με σκοπό να διδάξει γεωμετρία. Αντί για τη λέξη «ἐξενεγκεῖν» που είδαμε πρωτύτερα στο σημείο που γίνεται λόγος για τον Ίππασο και το δωδεκάεδρο συγκεκριμένα, έχουμε εδώ τη λέξη «ἐξενεχθῆναι» για τη γεωμετρία γενικά και χωρίς να γίνεται καμία αναφορά στο όνομα του Ίππασου. Η πρώτη λέξη είναι απαρέμφατο αορίστου β΄ του ρήματος ἐκφέρω και δίνει έμφαση στο υποκείμενο (ο Ίππασος εξέφερε, διατύπωσε) ενώ η δεύτερη λέξη είναι απαρέμφατο παθητικού αορίστου του ίδιου ρήματος και δίνει έμφαση στο αντικείμενο (η γεωμετρία διατυπώθηκε, χωρίς να αναφέρεται από ποιόν έγινε αυτό). Αυτή η μαρτυρία εικάζεται πως συνδέεται με τον Ιπποκράτη τον Χίο ***(Burkert,σ.458).***[42]

[42] Αν ανατρέξουμε λίγο πιο πίσω συναντάμε την εξής φράση (*Iamblichus,De communi mathematica scientia,σ.77*): *«ἐπέδωκε δὲ τά μαθήματα, ἐπεὶ ἐξηνέχθησαν, δισσοὶ προάγονται μάλιστα, Θεόδωρός τε ὁ Κυρηναῖος καὶ Ἱπποκράτης ὁ Χῖος»* δηλαδή όταν βγήκαν τα αποτελέσματα των μαθημάτων, δύο αντίθετοι μεταξύ τους άνθρωποι είχαν γράψει τα καλύτερα αποτελέσματα, ο Θεόδωρος από την Κυρήνη και ο Ιπποκράτης από τη Χίο. Με αυτό μπορούμε να συνδέσουμε τη μαρτυρία του Αριστοτέλη ότι ο Ιπποκράτης ο Χίος έχασε την περιουσία του*(DK 42.2).*Μάλιστα ο Ιάμβλιχος εντάσσει στους Πυθαγόρειους τον Ιπποκράτη τον Χίο, αν και δεν ανήκε σε αυτούς.

Τέλος ,στη *Σύνοψη των γεωμετρών* του Πρόκλου (***Proclus on Euclid's Elements****,σ.65.19*) πληροφορούμαστε πως ο Πυθαγόρας ανακάλυψε την θεωρία των ασυμμέτρων (*τήν τῶν ἀλόγων πραγματείαν*) και τη δομή των κοσμικών σωμάτων (τα πέντε κανονικά στερεά).Όμως, στο σημείο αυτό, ο όρος *ἀλόγων* τίθεται υπό αμφισβήτηση από πολλούς μελετητές (*S.T.Heath,σ.90-91,154-157).* Ο E.F.August στο έργο του ***Euclidis Elementa (vol 1 p.290)*** σημειώνει στηριζόμενος στα σχόλια του Πρόκλου: *«Ἐπί δέ τούτοις Πυθαγόρας τά θεωρήματα διερευνώμενος….ὅς δή καί τήν ἀλόγων (ή ἀναλόγων)πραγματείαν». Ἀναλόγων* δεν είναι ο σωστός τύπος της λέξης αλλά η σημασία θα μπορούσε να είναι *αναλογίες* ή *αναλογικά*, που σημαίνει ότι η σωστή ανάγνωση ενδεχομένως να είναι είτε *των ἀναλογιών* είτε (πιο πιθανά) *τῶν ἀνά λόγων*. Αν τώρα υποθέσουμε ότι αποδεχόμαστε την προσέγγιση *τῶν ἀνά λόγων*, θα πρέπει να απορρίψουμε τον όρο *ἀλόγων*, κάτι το οποίο με τη σειρά του σημαίνει πως η θεωρία ,την οποία σκόπευε να αποδώσει ο Πρόκλος στον Πυθαγόρα είναι η θεωρία των αναλογιών και όχι των ασυμμέτρων. Βεβαίως, η παραπάνω είναι άποψη, την οποία και οφείλουμε να καταγράψουμε χωρίς αυτό να σημαίνει ότι η εγκυρότητά της είναι δυνατόν να αποδειχθεί.

Συνεπώς υπάρχουν διάφορες εκδοχές για την ανακάλυψη της ασυμμετρίας οι οποίες θα μπορούσαν να διαχωριστούν σε τρεις βασικές κατηγορίες.1) ο Ίππασος, το δωδεκάεδρο και ο πνιγμός στη θάλασσα ,2) η ανακάλυψη της ασυμμετρίας γενικά χωρίς να αποδίδεται σε κάποιο συγκεκριμένο πρόσωπο και διάφορες ιστορίες για τη φύση της τιμωρίας (πραγματική ή μεταφορική) και 3) η ανακάλυψη της ασυμμετρίας από τον Πυθαγόρα ή γενικά τους Πυθαγορείους. Στη συνέχεια θα αναλύσουμε το κάτα πόσο είναι δυνατόν η ασυμμετρία να προήλθε μέσω του δωδεκάεδρου (ή μέσω του τετραγώνου).Αν θέλαμε όμως να καταλήξουμε από τώρα σε ένα επισφαλές συμπέρασμα για το ποιος ή ποιοι την ανακάλυψαν ,θα μπορούσαμε να πούμε πως είναι πιθανόν να ανακαλύφθηκε μια ειδική περίπτωση της ασυμμετρίας μέσα στη σχολή του Πυθαγόρα και αυτή η γνώση στη συνέχεια να εξελίχθηκε και να γενικεύτηκε. Είναι εύλογο να υποθέσουμε κάτι τέτοιο, καθώς οι Πυθαγόρειοι όπως είδαμε πίστευαν πως τα πάντα είναι αριθμοί και γνώριζαν την έννοια άρτιο και περιττό, κάτι που όπως θα δούμε παρακάτω υπεισέρχεται στην απόδειξη της ασυμμετρίας της τετραγωνικής ρίζας του 2. Εξάλλου οι μαρτυρίες συνδέουν το όνομα της ασυμμετρίας με αυτό των Πυθαγορείων και ειδικότερα η μαρτυρία του Λύσι και του Πάππου μπορούν να θεωρηθούν ως πιο ισχυρές, δεδομένου πως η πρώτη είναι η πιο πρώιμη που γνωρίζουμε και η δεύτερη ανήκει σε έναν μαθηματικό που μπορεί να είχε έγκυρες πληροφορίες.

Επιπλέον, η αποκάλυψη της ασυμμετρίας ενδεχομένως να συνδέθηκε με τον Ίππασο ,χωρίς αυτό να σημαίνει απαραίτητα πως έφτασε ο ίδιος σε αυτήν, εξαιτίας του ότι εκείνος μελέτησε το δωδεκάεδρο, σχήμα που σχετίζεται με την ανθυφαίρεση όπως θα δούμε και παρακάτω. Όσο για το θέμα του πνιγμού ,αυτό θα λέγαμε πως φαντάζει περισσότερο σαν έναν μύθο που έρχεται να διανθίσει την όλη υπόθεση και να δώσει έμφαση στους αυστηρούς κανόνες που χαρακτήριζαν τη ζωή των Πυθαγορείων.

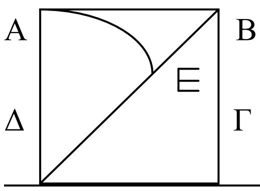
2.2 Πηγή της ασυμμετρίας: τετράγωνο ή πεντάγωνο;

Νε Σω:Ἀλλὰ τίνι δὴ τὼ δύο διαιροῦμεν;
Ξε:Ὧιπερ καὶ δίκαιόν γε Θεαίτητον τε καὶ διανέμειν,ἐπειδή καὶ γεωμετρίας ἅπτεσθον.
Νε Σω:Τῷ;
Ξε:Τῇ διαμέτρῳ δήπου και πάλιν τῇ τῆς διαμέτρου διαμέτρῳ.
Νε Σω:Πῶς εἶπες;
Ξε:Ἡ φύσις,ἥν το γένος ἡμῶν τῶν ἀνθρώπων κέκτηται,μῶν ἄλλως πως είς την πορείαν πέφυκεν ἤ καθάπερ ἡ διάμετρος ἡ δυνάμει δίπους;
Νε Σω:Οὐκ ἄλλως.[43]

Το παραπάνω απόσπασμα προέρχεται από τον *Πολιτικό* του Πλάτωνα(*266 ab*) όπου ο νεαρός Σωκράτης συνομιλεί με έναν Ελεάτη ξένο και χτίζει σιγά σιγά τον ορισμό του πολιτικού άντρα. Βλέπουμε να γίνεται λόγος για τη διαίρεση με τη διάμετρο (που παραπέμπει στη διαδικασία της ανθυφαίρεσης- βλ. σχήμα στο τέλος της ενότητας) και για τη τετραγωνική ρίζα δύο ποδιών. Πιθανότατα να μπορούσαμε να βρούμε κάποια συσχέτιση αυτού του διαλόγου με τις έννοιες του τετραγώνου αλλά και του πενταγώνου στις διαδικασίες που θα δούμε παρακάτω.

Η ακριβής μέθοδος με την οποία οι Πυθαγόρειοι απέδειξαν την ασυμμετρία του $\sqrt{2}$ προς το 1,είναι απόλυτα σχετική με την εις άτοπον απαγωγή που αναφέρει ο Αριστοτέλης συνοπτικά στα *Αναλυτικά Πρότερα* ,βάσει της οποίας αν η διαγώνιος είναι συμμετρική προς την πλευρά του τετραγώνου ,προκύπτει η αντίφαση πως ο αριθμός αυτός θα είναι παράλληλα και άρτιος και περιττός: *«ἀσύμμετρος ἡ διάμετρος διὰ τὸ γίνεσθαι τὰ περιττὰ ἴσα τοῖς ἀρτίοις συμμέτρου τεθείσης, τὸ μὲν οὖν ἴσα γίνεσθαι τὰ περιττὰ τοῖς ἀρτίοις συλλογίζεται, τὸ δ' ἀσύμμετρον εἶναι τὴν διάμετρον ἐξ ὑποθέσεως δείκνυσιν, ἐπεὶ ψεῦδος συμβαίνει διὰ τὴν ἀντίφασιν. τοῦτο γὰρ ἦν τὸ διὰ τοῦ ἀδυνάτου συλλογίσασθαι, τὸ δεῖξαί τι ἀδύνατον διὰ τὴν ἐξ ἀρχῆς ὑπόθεσιν.»* (*Αριστοτέλης,Αναλυτικά Πρότερα 41α26*).(η διαγώνιος αναφέρεται και ως διάμετρος).

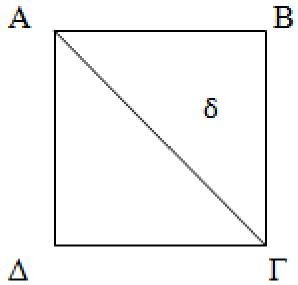
Γεγονός είναι πως το άθροισμα δύο ασύμμετρων είναι άλλοτε σύμμετρο και άλλοτε ασύμμετρο. Για παράδειγμα ας κοιτάξουμε στο παρακάτω σχήμα:



Θεωρούμε το τετράγωνο ΑΒΓΔ με πλευρά ΑΒ= $\sqrt{2}$. Η διαγώνιος ΔΒ είναι 2.Αν φέρουμε την ΔΕ με μήκος $\sqrt{2}$ θα πάρουμε : ΔΕ + ΕΒ (ασύμμετρο) = ΔΒ (σύμμετρο).

[43] -Αλλά με τι θα διαιρέσουμε τα δύο είδη;
-Με εκείνο που ο Θεαίτητος και εσύ έχετε δικαίωμα να διαιρέσετε, αφού ασχολείστε με τη γεωμετρία.
-Με ποιο;
-Με τη διάμετρο, φυσικά, και πάλι με τη διάμετρο της διαμέτρου.
-Τι θέλεις να πεις;
-Η φύση που έχει το γένος μας των ανθρώπων, μήπως κάνει τίποτε άλλο στο βάδισμα από αυτό που εκφράζει η διάμετρος, που είναι η τετραγωνική ρίζα δύο ποδιών;
-Όχι.

Η παρακάτω απόδειξη παρεμβάλλεται στο *βιβλίο X* του Ευκλείδη σαν πρόταση-σχόλιο *(Heath,σ.168*) και επί της ουσίας μας λέει:



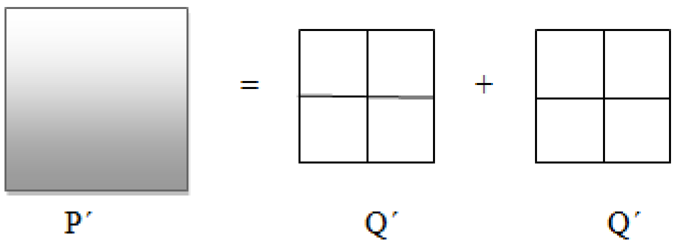
Έστω α η πλευρά του τετραγώνου και δ η διαγώνιός του. Ας υποθέσουμε ότι αυτά τα δύο μεγέθη είναι σύμμετρα. Αυτό σημαίνει πως θα υπάρχει ένα μοναδιαίο μήκος, με βάση το οποίο η δ θα είναι n μονάδες και η α θα είναι m μονάδες, όπου n,m ακέραιοι και μάλιστα πρώτοι προς αλλήλους. Δηλαδή οι n,m δεν έχουν κοινούς διαιρέτες διαφορετικούς από τη μονάδα. Επιπλέον, αφού αν φανταστούμε ένα τετράγωνο με πλευρά την δ ,θα είναι διπλάσιο από το τετράγωνο με πλευρά την α, θα έχουμε πως $n^2=2m^2$.Από τη σχέση αυτή προκύπτει πως ο αριθμός n^2 είναι άρτιος, άρα και ο n θα είναι άρτιος. Τότε όμως ο m θα πρέπει να είναι περιττός αφού όπως είπαμε οι n,m δεν έχουν άλλο κοινό διαιρέτη πέραν της μονάδας. Αφού ο n είναι άρτιος, μπορούμε να θέσουμε n=2k,οπότε $(2k)^2=2m^2$.Δηλαδή $4k^2=2m^2$ ή αλλιώς $2k^2=m^2$.Από εδώ προκύπτει πως ο m^2 ,και κατά συνέπεια και ο m,είναι άρτιος αριθμός. Το παραπάνω έρχεται σε αντίφαση με το γεγονός ότι ο m πρέπει να είναι περιττός. Δεν είναι δηλαδή δυνατόν ο m να είναι ταυτόχρονα άρτιος και περιττός, άρα τα μεγέθη α και δ δεν μπορεί να είναι σύμμετρα.

Αναφορικά με την παλαιότητα της παραπάνω απόδειξης, ο Χριστιανίδης *(σ.76)* αναφέρει δύο λόγους βάσει των οποίων η απόδειξη αυτή, δε μπορεί να αποτελεί την αρχαιότερη σχετικά με την ασυμμετρία. Πρώτον ,η απόδειξη αυτή έχοντας αυστηρή δομή και ακολουθώντας τη μορφή των ευκλείδιων αποδείξεων, προϋποθέτει ένα αρκετά αναπτυγμένο επίπεδο μαθηματικής γνώσης. Δεύτερον, χρησιμοποιεί τη μέθοδο της εις άτοπον απαγωγής. Ξεκινάει με την υπόθεση πως η πλευρά και η διαγώνιος τετραγώνου είναι σύμμετρες μεταξύ τους και οδηγείται σε άτοπο. Συνήθως, όμως, αυτός ο τρόπος απόδειξης κατασκευάζεται από κάποιον που γνωρίζει εκ των προτέρων το αποτέλεσμα (εδώ ότι η διαγώνιος και η πλευρά είναι ασύμμετρες).Αυτές οι παρατηρήσεις μας οδηγούν στην υπόθεση ότι πρέπει να υπήρχε κάποια γνωστή απόδειξη που να προηγήθηκε της παραπάνω. Οι ιστορικοί των μαθηματικών έχουν δώσει διάφορες πιθανές μορφές που θα μπορούσε να είχε η απόδειξη στο συγκεκριμένο χρονολογικό και γνωστικό πλαίσιο. Μία από αυτές τις μορφές(ανακατασκευές) και συγκεκριμένα από τον Oscar Becker (*Χριστιανίδης,σ. 76)* θα αναφέρουμε παρακάτω, η οποία αποτελεί κάτι σαν παραλλαγή της ευκλείδιας απόδειξης.

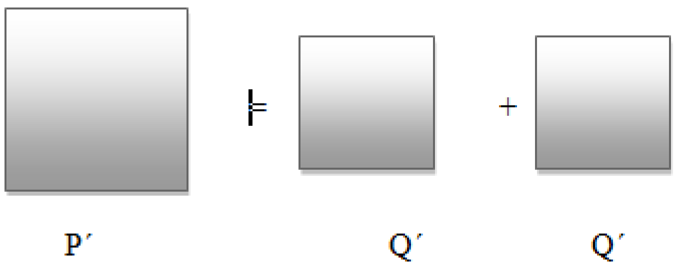
Οι Πυθαγόρειοι ασχολήθηκαν με το ζήτημα εύρεσης ορθογώνιων τριγώνων με πλευρές ακεραίους. Πιθανότατα να αναρωτήθηκαν αν υπάρχουν ισοσκελή τρίγωνα με την ιδιότητα αυτή. Έστω α η υποτείνουσα και β η μία από τις ίσες κάθετες πλευρές ενός ορθογωνίου και ισοσκελούς τριγώνου. Τότε από το πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε ότι $α^2=2β^2$.Τώρα παριστάνουμε το $α^2$ με ένα τετράγωνο (P) και το $2β^2$ με δύο ίσα τετράγωνα (Q).Επειδή ένα τετράγωνο με πλευρά άρτιο αριθμό είναι δυνατόν να χωριστεί σε 4 μικρότερα και ίσα, χωρίζουμε εάν είναι εφικτό το P και τα Q σε 4 ίσα μικρότερα τετράγωνα. Συνεχίζουμε τη διαδικασία διαίρεσης μέχρις ότου φτάσουμε σε ένα τουλάχιστον τετράγωνο με πλευρά περιττό αριθμό(που δε διαιρείται με το 4).Έχουμε δύο δυνατές περιπτώσεις:

Περίπτωση 1 (περιττό τετράγωνο)

A)

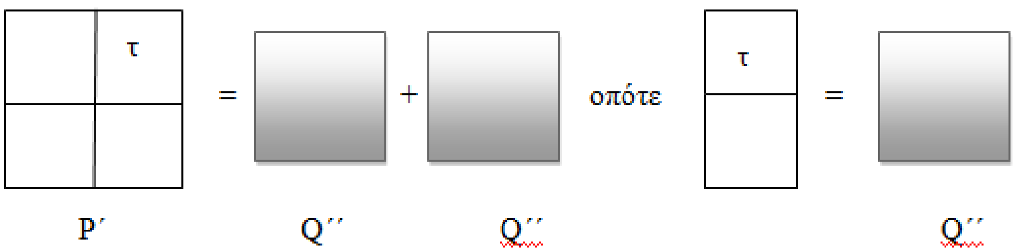


B)



1)Στην πρώτη περίπτωση, μετά από ένα πλήθος διαιρέσεων του τετραγώνου P καταλήγουμε σε ένα περιττό τετράγωνο P΄ (δηλαδή με πλευρά περιττό αριθμό-το έχουμε γραμμοσκιάσει στα σχήματα),ενώ από το κάθε Q καταλήγουμε μετά από τον ίδιο αριθμό διαιρέσεων, σε ένα τετράγωνο Q΄, είτε άρτιο(περίπτωση 1A),είτε περιττό(περίπτωση 1B).Και στις δύο περιπτώσεις, το συμπέρασμα που προκύπτει είναι ότι ένας περιττός αριθμός ισούται είτε με το άθροισμα δύο άρτιων είτε με το άθροισμα δύο περιττών δηλαδή άρτιο αριθμό, το οποίο είναι άτοπο.

Περίπτωση II (άρτιο τετράγωνο)



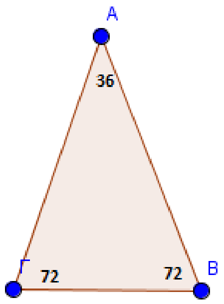
2)Στη δεύτερη περίπτωση καταλήγουμε σε ένα άρτιο τετράγωνο P΄΄ το οποίο είναι ίσο με το διπλάσιο ενός περιττού τετραγώνου Q΄΄. Επειδή, όμως, το P΄΄ είναι άρτιο μπορεί να χωριστεί όπως είπαμε σε 4 μικρότερα ίσα, έστω τ. Συνεπώς, 2τ = Q΄΄, πάλι άτοπο αφού ένας περιττός δε μπορεί να γραφεί ως διπλάσιο γινόμενο.

Σαν συμπέρασμα ,βλέπουμε πως δεν υπάρχουν ορθογώνια και ισοσκελή τρίγωνα με πλευρές ακεραίους αριθμούς. Ή διαφορετικά, πως η εξίσωση $\alpha^2=2\beta^2$ δε διαθέτει ακέραιες λύσεις. Αυτό σημαίνει βέβαια ότι ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος.

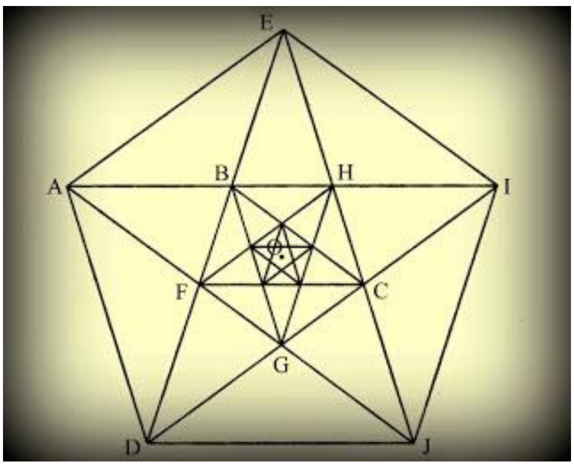
Η απόδειξη που μόλις είδαμε, είναι υποθετική, όμως περιέχει κοινά στοιχεία με την αντίστοιχη από τα Στοιχεία του Ευκλείδη. Και οι δύο, ασχολούνται με την αρρητότητα του $\sqrt{2}$ και αξιοποιούν ιδιότητες των άρτιων και περιττών αριθμών. Εντούτοις, η απόδειξη του Becker,μπορεί να καταταχθεί σε ένα πιο αρχικό στάδιο της μαθηματικής σκέψης απ' ότι η απόδειξη των Στοιχείων, η οποία φαίνεται να είναι μεταγενέστερη αυτής.

Υπάρχουν, όμως κι εκείνοι που υποστηρίζουν ότι η ασυμμετρία ξεπήδησε από μία απόδειξη η οποία σχετίζεται με το κανονικό πεντάγωνο. Όπως είδαμε και παραπάνω (*Iamvichus VP 246 κ.ε)* ο Ίππασος αναφέρεται ότι ήταν ο πρώτος που σχεδίασε ή κατασκεύασε (*γράψασθαι*) μία σφαίρα που αποτελείται από 12 κανονικά πεντάγωνα. Μάλιστα, η δημοσίευση αυτής της κατασκευής θεωρήθηκε ως «εγκληματική» αποκάλυψη της πυθαγόρειας μυστικής σκέψης. Είναι πολύ πιθανό ο Ίππασος να ενδιαφερόταν για το κανονικό δωδεκάεδρο ,ένα ενδιαφέρον που θα μπορούσε να προέρχεται από την ύπαρξη κρυστάλλων πυριτίου στην Ιταλία (*Burkert,σ.460*).Αν σκεφτούμε την ενασχόληση των Πυθαγορείων με τις διάφορες γεωμετρικές μορφές, είναι εύλογο να θεωρήσουμε ότι αυτού του είδους οι κρύσταλλοι προσέλκυσαν την προσοχή τους και θέλησαν να τους μελετήσουν από μαθηματική σκοπιά. Όπως είδαμε, οι Πυθαγόρειοι είχαν ως σύμβολο αναγνώρισης το αστεροειδές πεντάγωνο. Είναι σύμπτωση το ότι ο ίδιος ο Ίππασος πιστώνεται με την ανακάλυψη της ασυμμετρίας και με ενδιαφέρον για τη σφαίρα που αποτελείται από 12 κανονικά πεντάγωνα, και το ότι το κανονικό πεντάγωνο είναι ένα σχήμα στο οποίο μπορεί να αποδειχθεί η ασυμμετρία;

Οι αρχαίοι Έλληνες είχαν κατασκευάσει, κανονικά πολύγωνα τριών και τεσσάρων πλευρών, δηλαδή ισόπλευρο τρίγωνο και τετράγωνο και η κατασκευή κανονικού εξαγώνου δεν παρουσίαζε δυσκολία. Αλλά η κατασκευή κανονικού πολυγώνου με πέντε πλευρές ήταν κάτι διαφορετικό. Το ζήτημα ήταν να κατασκευαστεί γωνία 36° , αφού το διπλάσιο της η γωνία 72°, είναι η κεντρική γωνία που βρίσκεται απέναντι από κάθε πλευρά του κανονικού και εγγεγραμμένου σε κύκλο πενταγώνου. Σ' ένα ισοσκελές τρίγωνο όταν καθεμιά από τις δύο γωνίες της βάσης του είναι το διπλάσιο της γωνίας της κορυφής του τότε οι γωνίες της βάσης είναι 72° και η γωνία της κορυφής είναι 36° . Συνεπώς το πρόβλημα ανάγεται στην κατασκευή ενός τέτοιου ισοσκελούς τριγώνου (*Kurt von Fritz,σ.400 κ.ε.*).



Πώς οι Πυθαγόρειοι γνώριζαν τον λόγο ανάμεσα στα μήκη δύο ευθειών γραμμών; Υπήρχε μία παλιά μέθοδος, γνωστή στους τεχνίτες σαν κανόνας του αντίχειρα (εμπειρικά) ,πολλούς αιώνες πριν την αφετηρία της ελληνικής φιλοσοφίας και επιστήμης (*Kurt Von Fritz,σ.400κ.ε.).*Την αποκαλούσαν μέθοδο αμοιβαίας αφαίρεσης και βάσει αυτής έβρισκαν το μέγιστο κοινό μέτρο. Αυτό μας θυμίζει τη διαδικασία της ανθυφαίρεσης, με την οποία βρίσκουμε το μέγιστο κοινό διαιρέτη δύο αριθμών ή γενικότερα το μέγιστο κοινό μέτρο δύο μεγεθών. Ενδεικτικά, στο *Βιβλίο X* των *Στοιχείων*, η *πρόταση 2* μας λέει το εξής: «*Ἐάν δύο μεγεθῶν ἀνίσων ἀνθυφαιρουμένου ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος τὸ καταλειπόμενον μηδέποτε καταμετρῇ τὸ πρὸ ἑαυτοῦ,ἀσύμμετρα ἔσται τὰ μεγέθη»* δηλαδή δοθέντων δύο άνισων μεγεθών ,αν ανθυφαιρείται πάντα το μικρότερο από το μεγαλύτερο ώστε το υπόλοιπο που απομένει κάθε φορά να μη μετρά το προηγούμενο του ,τότε τα μεγέθη είναι ασύμμετρα. Είναι βέβαια αδύνατο να ανακάλυψε κάποιος την ασυμμετρία απλά εφαρμόζοντας τον εμπειρικό τρόπο, μετρώντας π.χ σχοινιά. Αν όμως κοιτάξουμε σε ένα κανονικό πεντάγωνο και τις διαμέτρους του, θα δούμε πως η διαδικασία της ανθυφαίρεσης δεν τερματίζει ποτέ μιας και δεν υπάρχει μέγιστο κοινό μέτρο. Επιπλέον, η αναλογία μεταξύ διαμέτρου και πλευράς δε μπορεί να εκφραστεί με ακέραιο αριθμό. Οι διάμετροι ενός κανονικού πενταγώνου σχηματίζουν ένα νέο κανονικό πεντάγωνο στο κέντρο του πρώτου, οι διάμετροι του μικρότερου πενταγώνου σχηματίζουν κι αυτές πεντάγωνο και ούτω καθεξής με τη διαδικασία αυτή να μην τελειώνει ποτέ.



Στο σχήμα βλέπουμε ότι EA=EF και FD=FC.Έτσι θα έχουμε ότι ED-EA=ED-EF=FD=FC.Ομοίως, EA=AH=AG και FC=FD=FA άρα EA-FC=AG-FA=FG.

Για να γίνουν πιο κατανοητά τα παραπάνω ας συμβολίσουμε με α_1,δ_1 την πλευρά και τη διαγώνιο αντίστοιχα του πενταγώνου ADJIE,με α_2,δ_2 την πλευρά και τη διαγώνιο του BFGCH,με α_3,δ_3 τα στοιχεία του αμέσως μικρότερου πενταγώνου κ.τ.λ. Παρατηρούμε πως

δ_1-α_1=δ_2

α_1-δ_2=α_2 και ομοίως

δ_2-α_2=δ_3

α_2-δ_3=α_3.........

Με άλλα λόγια, παρατηρούμε πως η διαφορά ανάμεσα στη διάμετρο και την πλευρά του μεγαλύτερου πενταγώνου είναι ίση με τη διάμετρο του μικρότερου πενταγώνου, και η διαφορά ανάμεσα στην πλευρά του μεγαλύτερου πενταγώνου και τη διάμετρο του μικρότερου ισούται με την πλευρά του μικρότερου κ.τ.λ. Αφού όλα τα μικρότερα κανονικά πεντάγωνα προκύπτουν από τις διαμέτρους, είναι φανερό ότι η διαδικασία αυτή της ανθυφαίρεσης δεν σταματά ποτέ και ότι κανένα μέγιστο κοινό μέτρο μεταξύ διαμέτρου και πλευράς δεν είναι δυνατόν να βρεθεί. Θα μπορούσε κάποιος λογικά να αναρωτηθεί πώς οι Πυθαγόρειοι απέδειξαν ότι π.χ. EA=EF και FD=FC.Η απάντηση δίνεται από τον Πρόκλο, ο οποίος επισημαίνει ότι ο Θαλής είχε γράψει το θεώρημα πως σε ένα ισοσκελές τρίγωνο οι γωνίες της βάσης είναι ίσες (*Proclus on the first book of Euclid's Elements,σ.250.22-251.2*): *«Λέγεται γὰρ δὴ πρῶτος ἐκεῖνος ἐπιστῆσαι εἰπεῖν ,ὡς ἄρα παντὸς ἰσοσκελοῦς αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ἴσαι εἰσίν ,ἀρχαϊκώτερον δὲ τὰς ἴσας ὁμοίας προσειρηκέναι».*[44]

Δηλαδή η ισότητα EA=EF θα μπορούσε να προκύψει από την ισότητα των γωνιών $\widehat{EAF}$ και $\widehat{EFA}$.Είδαμε πως ο Εύδημος αποδίδει στους πρώιμους Πυθαγόρειους την απόδειξη ότι το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών ενός τριγώνου ισούται με δύο ορθές. Από αυτό το θεώρημα, μπορεί να προκύψει το γενικότερο που αφορά ένα οποιοδήποτε πολύγωνο και βάσει του οποίου το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών σε ένα τυχαίο ν-γωνο είναι ίσο με 2ν-4 ορθές. Μία τέτοια επέκταση μπορεί να προκύψει διαιρώντας το πολύγωνο σε τρίγωνα, κάτι με το οποίο από όσο ξέρουμε συνήθιζαν οι Πυθαγόρειοι να πειραματίζονται. Επιπρόσθετα, η πρόταση πως σε κάθε πολύγωνο το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών είναι τέσσερις ορθές γωνίες, είναι μία σχετικά απλή συνέπεια των παραπάνω.

Είναι σαφές ότι ο Ίππασος θα μπορούσε να αποδείξει την ασυμμετρία έχοντας σαν αφετηρία τη διάμετρο ενός κανονικού πενταγώνου και γνωρίζοντας δύο βασικά θεωρήματα (αυτό της ισότητας των γωνιών της βάσης ενός ισοσκελούς τριγώνου και αυτό που αφορά το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου) μαζί με τη μέθοδο της ανθυφαίρεσης. Μάλιστα, η απόδειξη μοιάζει αρκετά πειστική και δεν προϋποθέτει

[44] *Λέγεται ότι πρώτος εκείνος επισήμανε και είπε ότι οι γωνίες της βάσης κάθε ισοσκελούς (τριγώνου) είναι ίσες. Μάλιστα τις ίσες γωνίες τις αποκαλούσε, κατά το αρχαϊκότερον, όμοιες.*(σε σχόλιο του ο Heath(*σ.131*) αναφέρει πως η επιλογή της λέξης *όμοιος* δείχνει πιθανότατα πως ο Θαλής δεν είχε ακόμα συλλάβει την έννοια της γωνίας ως μέγεθος, αλλά ως μιας μορφής με συγκεκριμένο σχήμα.

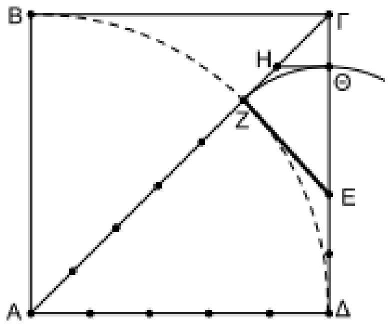
αυστηρή γεωμετρική κατασκευή. Ο λόγος ανάμεσα στη διάμετρο και την πλευρά του πενταγώνου αποτελεί τη λεγόμενη χρυσή τομή φ.[45]

Αν θέλαμε να καταλήξουμε σε ένα λογικό συμπέρασμα θα μπορούσαμε να πούμε πως η ασυμμετρία φαίνεται πιο πιθανό (και εφικτό) να ξεπήδησε μέσα από τη διαγώνιο του τετραγώνου, καθώς μια τέτοια εφαρμογή είναι φανερά απλούστερη από την αντίστοιχη στο κανονικό πεντάγωνο και απαιτεί πιο απλή μαθηματική σκέψη. Επιπλέον, η υπόθεση του πενταγώνου του Ιάμβλιχου είναι μεταγενέστερη σε σχέση με αυτή του τετραγώνου, η οποία μάλιστα συνδέεται με αρχαιότερες πηγές (Πλάτωνα και Αριστοτέλη) που είναι σαφώς πιο έμπιστες.

Πριν προχωρήσουμε παρακάτω ας δούμε εάν μπορούμε να ακολουθήσουμε μια αντίστοιχη διαδικασία με αυτήν του πενταγώνου, στο τετράγωνο αυτήν τη φορά.

Ας θεωρήσουμε ένα τετράγωνο ΑΒΓΔ και ας υποθέσουμε ότι η πλευρά ΑΓ και η διαγώνιος ΑΔ έχουν κοινό μέτρο δ, δηλαδή ότι υπάρχουν φυσικοί αριθμοί p,q και ευθύγραμμο τμήμα δ ώστε ΑΓ=δp και ΑΔ=δq.Στη συνέχεια ας πάρουμε p-1 ισαπέχοντα σημεία πάνω στην ΑΓ και q-1 ισαπέχοντα σημεία πάνω στην ΑΔ. Τώρα ας γράψουμε τον κύκλο με κέντρο Α και ακτίνα ΑΔ. Το σημείο τομής Ζ του κύκλου με την ΑΓ θα είναι ένα από τα p-1 σημεία γιατί έχουμε υποθέσει πως οι ΑΓ και ΑΔ έχουν κοινό μέτρο. Ας φέρουμε την εφαπτομένη ΖΕ. Τότε ΕΖ=ΕΔ ως εφαπτόμενα τμήματα που άγονται από σημείο εκτός κύκλου(ΕΔ κάθετη στην ΑΔ).Από τις ΓΖ=ΕΖ=ΕΔ συμπεραίνουμε ότι ΓΖ=(p-q)δ και ΓΕ=qδ-(p-q)δ=(2q-p)δ. Θα είναι επομένως και το Ε ένα από τα q-1 ισαπέχοντα σημεία με τα οποία «τεμαχίζεται» η ΓΔ σε τμήματα μήκους δ. Τα ΓΖ και ΓΕ έχουν κοινό μέτρο το δ, αλλά τώρα 2q-p<p και p-q<q.Βλέπουμε ότι το τρίγωνο ΓΖΕ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές όπως και το ΑΔΓ και από ομοιότητα τριγώνων έχουμε $\frac{p}{q} = \frac{ΑΓ}{ΑΔ} = \frac{ΓΕ}{ΓΖ} = \frac{2q-p}{p-q}$.Μπορούμε να εφαρμόσουμε ξανά την ίδια διαδικασία γράφοντας τον κύκλο με κέντρο Ε και ακτίνα ΕΖ οπότε προκύπτει το τρίγωνο ΘΗΓ με ακόμα μικρότερες πλευρές. Για τα Η,Θ θα έχω ομοίως ότι $\frac{ΑΓ}{ΑΔ} = \frac{ΓΕ}{ΓΖ} = \frac{ΓΗ}{ΓΘ}$.Τα Η,Θ λέγονται διαιρετικά σημεία. Αν συνεχίσουμε με τον ίδιο τρόπο θα δούμε ότι τα διαιρετικά σημεία έχουν πεπερασμένο πλήθος, σε αντίθεση με τα τρίγωνα που έχουν άπειρο πλήθος (η διαγώνιος είναι μεγαλύτερη από την πλευρά του τετραγώνου ως υποτείνουσα).Μάλιστα αυτή η αντίφαση πεπερασμένου-άπειρου μας δείχνει πως δε μπορεί να υπάρχει κοινό μέτρο πλευράς και διαγωνίου σε ένα τυχαίο τετράγωνο.

[45] Δύο ποσότητες έχουν αναλογία χρυσής τομής αν ο λόγος του αθροίσματος τους προς τη μεγαλύτερη ποσότητα είναι ίσος με το λόγο της μεγαλύτερης ποσότητας προς τη μικρότερη. Ο Ευκλείδης στα *Στοιχεία (VI ορισμός 3),* έδωσε τον πρώτο γραπτό ορισμό της χρυσής τομής, την οποία ονόμασε *"ἄκρος καὶ μέσος λόγος": «Ἄκρον καὶ μέσον λόγον εὐθεῖα τετμῆσθαι λέγεται, ὅταν ᾖ ὡς ἡ ὅλη πρὸς τὸ μεῖζον τμῆμα, οὕτως τὸ μεῖζον πρὸς τὸ ἔλαττον».* Δηλαδή ένα ευθύγραμμο τμήμα λέγεται ότι κόβεται σε μέσο και άκρο λόγο όταν όλο το ευθύγραμμο τμήμα είναι ανάλογο προς το μεγαλύτερο τμήμα όσο και το μεγαλύτερο τμήμα προς το μικρότερο.



(σχήμα)

2.3 Χρονολόγηση της ασυμμετρίας

Το ερώτημα που αφορά τη χρονολογική τοποθέτηση της ασυμμετρίας δεν είναι εύκολο να απαντηθεί με ακρίβεια και απαιτεί το συνδυασμό διαφόρων πηγών, πρώιμων ή και σύγχρονων.

Κατ' αρχάς, διακρίνουμε ένα απόσπασμα από τους *Νόμους* του Πλάτωνα, όπου ένας Αθηναίος ξένος μιλάει για την ντροπιαστική άγνοια των Ελλήνων, οι οποίοι και δεν γνωρίζουν την δυνατή ύπαρξη γεωμετρικών μεγεθών που είναι ασύμμετρα μεταξύ τους: ο ομιλητής προσθέτει ότι ο ίδιος έμαθε αργά την αλήθεια (*όψέ ποτε*): «*μήκη καὶ πλάτη καὶ βάθη, περὶ ἅπαντα ταῦτα ἐνοῦσάν τινα φύσει γελοίαν τε καὶ αἰσχρὰν ἄγνοιαν ἐν τοῖς ἀνθρώποις πᾶσιν, ταύτης ἀπαλλάττουσιν… ὦ φίλε Κλεινία, παντάπασί γε μὴν καὶ αὐτὸς ἀκούσας ὀψέ ποτε τὸ περὶ ταῦτα ἡμῶν πάθος ἐθαύμασα » (Νόμοι 819d).*Ακόμη όμως και αν μπορούσαμε να καθορίσουμε ,κατά πόσο το *όψέ ποτε* σημαίνει αργά μέσα στη διάρκεια της μέρας ή αργά μέσα στη διάρκεια της ζωής, δεν θα μας βοηθούσε ιδιαίτερα να αποφανθούμε πού τοποθετείται χρονολογικά η ανακάλυψη του $\sqrt{2}$.Κι αυτό διότι το απόσπασμα είναι γραμμένο με μια ρητορική υπερβολή.

Παράλληλα, υπάρχει ο τίτλος ενός έργου του Δημόκριτου *Περί ἀλόγων γραμμῶν και ναστῶν α'β'* .Πάνω σε αυτό, ο Heath (*σ.169*) κάνει λόγο για την άποψη του H.Vogt στο έργο ***Bibliotheca Mathematica***. Ο τελευταίος, υποστηρίζει πως η λέξη *ἄλογος* δεν σχετίζεται με την ασυμμετρία και πως ο Δημόκριτος προσπάθησε απλά να συνδέσει την ατομική θεωρία με συνεχή μεγέθη μέσα από «αδιαίρετες» γραμμές. Ο Heath αναφέρει στο ίδιο σημείο πως είναι αδύνατον να υποθέσουμε ότι ένας μαθηματικός του βεληνεκούς του Δημόκριτου, θα μπορούσε να αρνηθεί ότι δύο οποιεσδήποτε γραμμές θα ήταν δυνατόν να έχουν μία αναλογία μεταξύ τους. Μάλιστα, τονίζει πως το επιχείρημα βάσει του οποίου η απόδοση της έννοιας της ασυμμετρίας στη λέξη *ἄλογος* δεν εμφανίζεται πουθενά πριν τον Αριστοτέλη, δεν τον βρίσκει καθόλου σύμφωνο μιας και ο Πλάτωνας σε ένα απόσπασμα της *Πολιτείας* (*534 D*) λέει πως οι άμυαλοι νέοι είναι *ἄλογοι ὥσπερ γραμμαί*, πράγμα που δείχνει ότι οι *ἄλογοι γραμμαί* ήταν μία γνωστή έννοια, πιθανότατα και από την πραγματεία του Δημόκριτου. Ο Heath φαίνεται σίγουρος πως το βιβλίο του Δημόκριτου γράφτηκε για τα ασύμμετρα μεγέθη και συνεπώς συμπεραίνει ότι η ασυμμετρία του $\sqrt{2}$ τοποθετείται χρονολογικά πριν από τον Δημόκριτο ο οποίος και γεννήθηκε το 470 περίπου π.Χ[46]. Ο Χριστιανίδης από την άλλη *(σ.78)* υποθέτει ότι η ασυμμετρία δεν απέχει πολύ από το 450-430 π.Χ.

Επιπρόσθετα, ο Kurt von Fritz (σ.411 κ.ε.) τοποθετεί χρονολογικά την ανακάλυψη της ασυμμετρίας, βασισμένος στον διάλογο του Πλάτωνα *Θεαίτητο*. Λέει πως ο διάλογος γράφτηκε το έτος 368/67 π.Χ., λίγο μετά τον θάνατο του μαθηματικού Θεαίτητου σε μάχη. Η ημερομηνία του διαλόγου είναι το έτος 399 π.Χ, όπου τοποθετείται και ο θάνατος του Σωκράτη. Στο πρώτο μέρος του διαλόγου, ο

[46] Αν υποθέσουμε ότι ο Δημόκριτος έγραψε το έργο του σε μια ώριμη ηλικία περίπου 30 ή 40 ετών, τότε αυτό θα χρονολογείται γύρω στο 440-430 π.Χ. Άρα αν η ασυμμετρία προηγείται του Δημόκριτου θα πρέπει να την τοποθετήσουμε πριν το 440 π.Χ.

μεγάλος σε ηλικία μαθηματικός Θεόδωρος ο Κυρηναίος ,απευθυνόμενος σε μια ομάδα νέων ανθρώπων (μεταξύ των οποίων και ο Θεαίτητος) ,πραγματεύεται το ζήτημα της ασυμμετρίας, φτάνοντας έως τον αριθμό 17. Ο διάλογος φαίνεται να είναι αφιερωμένος στη μνήμη του Θεαίτητου που χάθηκε πρόωρα.(εκτενής αναφορά στο περιεχόμενο του διαλόγου, ακολουθεί στο αμέσως επόμενο κεφάλαιο).Σύμφωνα με ένα απόσπασμα του Εύδημου (στον σχολιασμό του Πρόκλου πάνω στα *Στοιχεία* του Ευκλείδη), ο Θεόδωρος θεωρείται ως σύγχρονος του Ιπποκράτη του Χίου ακολουθώντας τη γενιά του Αναξαγόρα και πριν από τη γενιά του Πλάτωνα. Αφού ο Αναξαγόρας γεννήθηκε γύρω στο 500 π.Χ. και ο Πλάτωνας το 428 π.Χ., φαίνεται πως ο Θεόδωρος γεννήθηκε μεταξύ 470 και 460.Είναι φυσικό, επομένως, ο Πλάτωνας να τον εντάσσει στην τρίτη ηλικία, την εποχή που γράφει τον σχετικό διάλογο. Ο Πλάτωνας δεν αναφέρει κάπου ότι όσα συζητάει ο Θεόδωρος με το νεαρό ακροατήριο ήταν την τρέχουσα χρονική στιγμή μία νέα ανακάλυψη, αν και το γεγονός πως παρουσιάζει όλες τις περιπτώσεις των αριθμών ξεχωριστά, ίσως αποτελεί ένδειξη πως η συγκεκριμένη θεωρία δεν είχε φτάσει ακόμη σε πιο εξελιγμένο στάδιο. Βάσει αυτού θα μπορούσαμε να εντοπίσουμε την γέννηση της ασυμμετρίας ,το αργότερο στο τελευταίο τέταρτο του 5^{ου} αι. π.Χ (425 π.Χ.) ,ίσως και νωρίτερα, δεδομένου πως η μαθηματική γνώση εκείνης της εποχής ταξίδευε αργά.

Ο Burkert για να προσεγγίσει τη χρονολόγηση της ασυμμετρίας θέτει τέσσερα βασικά επιχειρήματα που σχετίζονται με όσα είπαμε ήδη (*σ.456*).Πρώτον επικαλείται μια άποψη που καταγράφεται στο *L' Ecole eleate* των Hasse-Scholz (*1950,σ.178 κ.ε.*) βάσει της οποίας ο Ζήνωνας ο Ελεάτης (γνωστός για τα παράδοξα) άσκησε κριτική ενάντια σε κάποια «βρώμικα» μαθηματικά μέσω των οποίων οι Πυθαγόρειοι προσπάθησαν να ξεφύγουν από τις συνέπειες της ασυμμετρίας. Αν το δεχτούμε αυτό θα πρέπει να τοποθετήσουμε την ασυμμετρία πριν το 460 π.Χ.[47] Δεύτερον, ξέρουμε ότι ο Θεόδωρος ο Κυρηναίος απέδειξε την ασυμμετρία τετραγωνικών ριζών από τον αριθμό 3 ως τον αριθμό 17.Άρα το λογικό είναι πως η περίπτωση για το $\sqrt{2}$ θα έπρεπε να είχε προηγηθεί. Τρίτον. γνωρίζουμε πως ο Δημόκριτος ασχολήθηκε με το θέμα της ασυμμετρίας αλλά το πόσο βαθιά μέσα στον πέμπτο αιώνα μπορούμε να τοποθετήσουμε την ανακάλυψή της, είναι ένα ανοικτό ζήτημα. Και τέλος, ο Ιπποκράτης ο Χίος μπορούσε να κατασκευάσει μια γραμμή με μήκος $\sqrt{\frac{3}{2}}$,ενώ η εύρεση του $\sqrt[3]{2}$ ήταν επίσης ένα γεωμετρικό πρόβλημα για τον ίδιο. [48]Από την άλλη όμως, χρησιμοποιεί έναν ορισμό της ισότητας λόγων που δεν εφαρμόζεται σε ασύμμετρα μεγέθη.[49]

[47] Στον *Παρμενίδη* του Πλάτωνα συναντάμε τον Σωκράτη(470 π.Χ),τον Ζήνωνα και τον Παρμενίδη με σειρά αύξουσας ηλικίας. Ο Σωκράτης εμφανίζεται σε νεαρή ηλικία, ο Ζήνωνας (μαθητής) σε μέση ηλικία και ο Παρμενίδης (δάσκαλος) σε πιο ώριμη ηλικία. Έτσι μπορούμε να υποθέσουμε πως ο Ζήνωνας ο Ελεάτης θα πρέπει να γεννήθηκε γύρω στο 490 π.Χ. και έτσι να τοποθετήσουμε τη δράση του μετά το 460 π.Χ.

[48] *γραμμὴ ἡμιολία δυνάμει*,Εύδημος *I40*

[49] Ο Ιπποκράτης ξεκινάει με την πρόταση ότι όμοια τμήματα σχετίζονται όπως τα τετράγωνα των βάσεών τους, Η απόδειξη είναι πως οι κύκλοι σχετίζονται όπως τα τετράγωνα των διαμέτρων τους.*ὡς γὰρ οἱ κύκλοι πρὸς ἀλλήλους ἔχουσιν,οὕτως καὶ τά ὅμοια τμήματα,ὅμοια γὰρ τμήματά ἐστι ταᾶ τὸ αὐτό μέρος ὄντα τοῦ κύκλου*(Συμπλίκιος ,*Εις Φυσικά 6I,II.*)

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε πως η ασυμμετρία θα πρέπει να τοποθετηθεί τον 5^{ο} αι. π.Χ. και πιθανότατα μεταξύ 420 και 450 π.Χ.

2.4 Συνέπειες της ασυμμετρίας

Πέρα από τις παραπάνω, επιστημονικά εμπεριστατωμένες μεν, υποθετικά διατυπωμένες δε, απόψεις, το σίγουρο είναι πως η ανακάλυψη της ασυμμετρίας αποτέλεσε κάτι εντελώς καινοτόμο και ρηξικέλευθο για την εποχή. Θα πρέπει να είχε τεράστιο αντίκτυπο στον κόσμο των Πυθαγορείων, μιας και κατέστρεψε με ένα χτύπημα την πίστη τους ότι τα πάντα στη φύση είναι δυνατόν να εκφραστούν με ακεραίους, πίστη στην οποία είχε δομηθεί όλη τους η φιλοσοφία. Αυτή η έκρηξη αντανακλάται σε μύθους, σύμφωνα με τους οποίου ο Ίππασος τιμωρήθηκε από τους θεούς για την ασέβεια του και την τρομερή του αποκάλυψη. Ο Βασίλης Καρασμάνης *(1998)* αναφέρει χαρακτηριστικά ότι η ανακάλυψη της ασυμμετρίας κατέστησε πλέον αδύνατη τη μελέτη γεωμετρικών σχημάτων με τη χρήση ψήφων. Οι ψήφοι αυτές αντικαταστάθηκαν από ευθύγραμμα τμήματα, ενώ η γεωμετρίζουσα αριθμητική πήρε τη μορφή της γεωμετρίας που βλέπουμε στο *βιβλίο ΙΙ* των *Στοιχείων* του Ευκλείδη, και αφορά κυρίως εφαρμογές χωρίων. Βέβαια, αυτό το είδος της γεωμετρίας διατήρησε πολλά στοιχεία από την αριθμητική των ψήφων όπως τη σημασία της ορθής γωνίας ,τη χρήση του γνώμονα, την εμφάνιση ισοτήτων και όχι ανισοτήτων, τη σύγκριση χωρίων, την επιμονή στα ορθογώνια και την απουσία κύκλων.

Παράλληλα, ο Kurt von Fritz κάνει λόγο για τις συνέπειες της ασυμμετρίας στην περαιτέρω ανάπτυξη της θεωρίας αναλογιών (*σ.407 κ.ε.).* Μέχρι τότε, η λέξη *λόγος* σήμαινε την έκφραση της ουσίας ενός πράγματος μέσα από ακεραίους. Υπέθεταν για παράδειγμα πως δύο τρίγωνα που ήταν όμοια είχαν τον ίδιο *λόγο*. Με την ασυμμετρία ανακαλύφθηκε πως υπήρχαν πράγματα που δεν είχαν *λόγο*, τα λεγόμενα *άλογα*. Λόγου χάρη, δύο ορθογώνια και ισοσκελή τρίγωνα, αν και οι πλευρές τους μπορεί να είχαν την ίδια ποσοτική συσχέτιση με τα προηγούμενα τρίγωνα, θεωρούνται πως δεν έχουν κοινό *λόγο.* Για να το ξεπεράσουν αυτό, οι Έλληνες όχι μόνο επέκτειναν τη θεωρία των αναλογιών σε ασύμμετρα μεγέθη, αλλά επίσης καθιέρωσαν ένα κριτήριο το οποίο σε συγκεκριμένες περιπτώσεις μας δείχνει αν ένα ζεύγος ασυμμέτρων (οι οποίοι μέχρι πρότινος δεν είχαν *λόγο*) έχουν τον ίδιο *λόγο.* Αυτό το πρόβλημα της ορολογίας που προέκυψε από αυτή την αντίφαση, οδήγησε στη χρήση του όρου *άρρητος* ,ο οποίος αντικατέστησε για κάποιο διάστημα τον όρο *άλογος*, ο τελευταίος όμως επανήλθε στη συνέχεια. Κατ' αρχάς, ο όρος *ρητός* δημιουργήθηκε σε αντίθεση με τον *άρρητος*. Μετά, ο όρος *άρρητος* εξαφανίστηκε, έπαψε να χρησιμοποιείται. Και στη συνέχεια. ο Θεαίτητος ο οποίος εξέλιξε τη θεωρία της ασυμμετρίας, ξαναεισήγαγε τη λέξη *άλογος* για χρήση όμως σε συγκεκριμένες ασυμμετρίες, όπως για παράδειγμα για αυτές της μορφής $\sqrt{\alpha\sqrt{\beta}}$ (Για τις απλές περιπτώσεις της μορφής $\sqrt{\alpha}$ είχε τον όρο *δυνάμει μόνον ρητοί*). Τελικά, όταν ο *λόγος* είχε γίνει ένας τεχνικός όρος και το γεγονός πως δύο ζεύγη *άλογων* μπορεί να έχουν τον ίδιο *λόγο* έπαψε να μοιάζει ασυνάρτητο, οι Έλληνες μαθηματικοί επέστρεψαν στην παλιά ορολογία και αποκάλεσαν όλους τους ασυμμέτρους, *άλογους*. Το γεγονός μάλιστα, πως ο Θεαίτητος που πέθανε το 369 π.Χ. είχε ήδη αρχίσει να επιστρέφει στην ίδια ορολογία επιβεβαιώνει κατά κάποιον τρόπο ότι η ανακάλυψη της ασυμμετρίας πρέπει να προηγήθηκε πολύ πριν και ότι ο όρος *λόγος* χρησιμοποιούταν από τους Πυθαγορείους πριν τα μέσα του 5^{ου} αι.

Η επέκταση της θεωρίας των αναλογιών στα ασύμμετρα μεγέθη έγινε με ευφυή τρόπο. Αντί να θέσουν ως κριτήριο της αναλογικότητας το αποτέλεσμα της διαδικασίας της ανθυφαίρεσης, έθεσαν τον ίδιο τον χαρακτήρα αυτής. Δόθηκε ένας νέος ορισμός της αναλογικότητας, εφαρμόσιμος και σε σύμμετρα και σε ασύμμετρα μεγέθη. Αυτός ο ορισμός είναι ως εξής: *«Μεγέθη έχουν τον ίδιο λόγο αν έχουν την ίδια ανθυφαίρεση» (Αριστοτέλης, Τοπικά 158b 29 κ.ε.*[50]*)*.Είναι ενδιαφέρον ότι ο όρος *λόγος* έχει χάσει την αρχική του σημασία. Η αίσθηση του ορισμού είναι πως δύο ζεύγη μεγεθών είναι σε αναλογία αν σε κάθε περίπτωση η διαδικασία της ανθυφαίρεσης (έστω και επ΄ άπειρον) μπορεί να αποδειχθεί ότι πηγαίνει στην ίδια κατεύθυνση. [51]Κάτι τέτοιο μπορεί να αποδειχθεί εύκολα στις διαμέτρους και τις πλευρές κανονικών πενταγώνων, μιας και αφού η διάμετρος κόβεται χωρίς σταματημό στη λεγόμενη χρυσή τομή, είναι βέβαιο πως η διαδικασία θα προχωράει ακριβώς ένα βήμα σε κάθε κατεύθυνση. Η πιο σημαντική περίπτωση όπου γίνεται χρήση του νέου αυτού ορισμού είναι η πρόταση ότι ορθογώνια παραλληλόγραμμα του ίδιου ύψους είναι ανάλογα προς τις βάσεις τους (πρόταση που αποτέλεσε θεμέλιο των θεωρημάτων του Ιπποκράτη του Χίου). Μέσα από αυτόν το νέο ορισμό, οδηγηθήκαμε σε ένα ακόμη πιο ιδιοφυή, από τον Εύδοξο: *«Ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ μεγέθη λέγεται εἶναι πρῶτον πρὸς δεύτερον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ὅταν τὰ τοῦ πρώτου καί τρίτου ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου ἰσάκις πολλαπλασίων καθ' ὁποιονοῦν πολλαπλασιασμὸν ἑκάτερον ἑκατέρου ἢ ἅμα ὑπερέχῃ ἢ ἅμα ἴσα ᾖ ἢ ἅμα ἐλλείπῃ ληφθέντα κατάλληλα.» (Στοιχεία Βιβλίο V ορισμός 5).* Δηλαδή, μεγέθη λέγεται ότι έχουν τον ίδιο λόγο, το πρώτο προς το δεύτερο και το τρίτο προς το τέταρτο όταν, υπάρχουν ισοπολλαπλάσια του πρώτου και του τρίτου τα οποία να υπερβαίνουν, να είναι ίσα ή να υπολείπονται ένα προς ένα των ισοπολλαπλασίων του δεύτερου και του τρίτου, κατά οποιονδήποτε πολλαπλασιασμό αν ληφθούν κατάλληλα. Μάλιστα αυτό μας δίνει επιπλέον στοιχεία για το χρονολογικό εντοπισμό της ασυμμετρίας. Ο Εύδοξος γεννήθηκε το 400 και πέθανε το 347 π.Χ. Ήταν ο εισηγητής πολλών θεωρημάτων όπως της εξάντλησης, της σχέσης μεταξύ του όγκου κώνου και κυλίνδρου με την ίδια βάση και ύψος και άλλων στερεομετρικών. Σίγουρα, τα διάφορα θεωρήματα θα ήταν πολύ δύσκολο να ολοκληρωθούν χωρίς το τελευταίο ορισμό των αναλογιών. Θα πρέπει μάλιστα να είχε δημιουργήσει τον ορισμό όχι αργότερα από το 370 δηλαδή σε μια λογική ηλικία δράσης. Είναι πιο εύκολο να πιστέψουμε ότι η ανακάλυψη έγινε στα μέσα του πέμπτου αιώνα όπως αναφέρθηκε και πρωτύτερα.

Από την άλλη, η αλήθεια είναι πως συγγραφείς όπως ο Knorr (*σ.306-12*) φαίνονται αρκετά πειστικοί όταν υποστηρίζουν ότι ο πρώιμος τέταρτος αιώνας υπήρξε περίοδος ασυνήθιστα έντονης δημιουργικότητας. Μάλιστα (προβληματισμός εγείρεται όταν αναλογιστούμε πως) δεν υπάρχει καμία ιστορική απόδειξη που να

---

[50] *Τοῦ δὲ ὁρισμοῦ ῥηθέντος εὐθέως φανερὸν τὸ λεγόμενον τὴν γὰρ αὐτὴν ἀνταναίρεσιν ἔχει τὰ χωρία καὶ αἱ γραμμαί ἔστι δ΄ ¨ορισμὸς τοῦ αὐτοῦ λόγου οὗτος.* Στον Fowler (*σ.31*) συναντάμε έναν σχολιασμό του σχετικού παραθέματος από τον Αλέξανδρο τον Αφροδισιέα: «*Το θέμα που εκφράζεται εδώ δεν είναι αρχικά οικείο, αλλά γίνεται οικείο όταν δίνεται ο ορισμός της αναλογίας, ότι δηλαδή η γραμμή και το χωρίο διαιρούνται ανάλογα από τη σχεδιασμένη παράλληλη ευθεία. Τώρα αυτός είναι ο ορισμός των αναλογιών που χρησιμοποιούσαν οι αρχαίοι: Αυτά τα μεγέθη είναι σε αναλογία μεταξύ τους όταν έχουν την ίδια ανθυφαίρεση. Αλλά ο Αριστοτέλης το έχει ονομάσει ανταναίρεση.»*

[51] Με άλλα λόγια αν οι λόγοι $\frac{\alpha}{\beta}$ και $\frac{\gamma}{\delta}$ έχουν ίδια ανθυφαίρεση, βρίσκονται σε αναλογία.

επιβεβαιώνει την ύπαρξη μιας «κρίσης θεμελίων» όπως θα μπορούσαμε να πούμε και επιπλέον κανένα ελληνικό κείμενο δε μας μιλάει ξεκάθαρα για τις μαθηματικές δυσκολίες που προέκυψαν από την ανακάλυψη της ασυμμετρίας (*Fowler,σ.362-3*). Στον Αριστοτέλη διαβάζουμε τα εξής (*Μεταφυσικά,983a 12-20*): *«ἄρχονται μὲν γάρ, ὥσπερ εἴπομεν, ἀπὸ τοῦ θαυμάζειν πάντες εἰ οὕτως ἔχει, καθάπερ <περὶ> τῶν θαυμάτων ταὐτόματα [τοῖς μήπω τεθεωρηκόσι τὴν αἰτίαν] ἢ περὶ τὰς τοῦ ἡλίου τροπὰς ἢ τὴν τῆς διαμέτρου ἀσυμμετρίαν (θαυμαστὸν γὰρ εἶναι δοκεῖ πᾶσι <τοῖς μήπω τεθεωρηκόσι τὴν αἰτίαν> εἴ τι τῷ ἐλαχίστῳ μὴ μετρεῖται)· δεῖ δὲ εἰς τοὐναντίον καὶ τὸ ἄμεινον κατὰ τὴν παροιμίαν ἀποτελευτῆσαι, καθάπερ καὶ ἐν τούτοις ὅταν μάθωσιν· οὐθὲν γὰρ ἂν οὕτως θαυμάσειεν ἀνὴρ γεωμετρικὸς ὡς εἰ γένοιτο ἡ διάμετρος μετρητή».*[52] Φαίνεται, επομένως, πως σύμφωνα με τον Αριστοτέλη, η ύπαρξη μιας ασύμμετρης διαγωνίου δεν είναι σε θέση να εκπλήξει έναν γεωμέτρη. Το αντίθετο μάλιστα.

Ο Πάππος έγραψε πολύ αργότερα (*Commentary on Book X of Euclid's Elements I.2)* για το πώς : *«η ψυχή… περιπλανιέται προς τα εδώ και προς τα εκεί στη θάλασσα της μη-ταυτότητας… βυθισμένη στην καταιγίδα του επερχόμενου όπου δεν υπάρχει καμιά βεβαιότητα του μέτρου»*. Διακρίνουμε δηλαδή μια κάποια εξοικείωση με την έννοια του μη μετρήσιμου και της ασυμμετρίας, έστω και σε αν σε αυτή δίνεται μια κάπως φιλοσοφική προέκταση. Και ο Πρόκλος έγραψε *(Commentary on the First Book of Euclid's Elements,σ.60):«Η δήλωση ότι κάθε αναλογία μπορεί να εκφραστεί (ρητή) ανήκει μόνο στην αριθμητική, και όχι στην γεωμετρία, γιατί η γεωμετρία περιέχει αναλογίες που δε μπορούν να εκφραστούν(άρρητος λόγος)».* Σήμερα ξέρουμε πως τα ασύμμετρα μεγέθη τα εκφράζουμε με αριθμούς (άρρητους) και μάλιστα αυτό ενδεχομένως να ήταν γνωστό και στους πρώιμους Έλληνες μαθηματικούς αν και δεν υπάρχει κάποια απόδειξη για τον εάν το έκαναν και με ποιόν τρόπο (*Fowler, σ.363-4*).

Με μια πρώτη προσέγγιση, μπορεί κανείς να σκεφτεί ότι η ανακάλυψη της ασυμμετρίας έδειξε την ανακρίβεια του Πυθαγόρειου δόγματος ότι «όλα είναι αριθμοί» και έθεσε υπό αμφισβήτηση την ισχύ του. Ο Αριστοτέλης όμως, ο οποίος είναι και ο πιο πρώιμος μάρτυρας αυτού του δόγματος, (το απόσπασμα όπου κάνει λόγο για αυτό, αναφέρθηκε παραπάνω) δεν προάγει αυτή την επίκριση των Πυθαγορείων. Μάλιστα παρά το γεγονός πως στα *Μεταφυσικά* γίνεται λόγος για την ασυμμετρία (σε αποσπάσματα όπως το προαναφερθέν) και βλέπουμε περιλήψεις από την Πυθαγόρεια φιλοσοφία, ο Αριστοτέλης δεν εκφράζει ξεκάθαρα την αντίρρηση των Πυθαγορείων σχετικά με αυτήν την ανακάλυψη (*Fowler,σ.364*).Με άλλα λόγια, εκεί που ο Αριστοτέλης πραγματεύεται θέματα σχετικά με τους Πυθαγορείους, δεν φαίνεται να παρουσιάζει την ασυμμετρία σαν ένα τρομερό «σοκ» για εκείνους. Βέβαια, γενικότερα οι Έλληνες μαθηματικοί στόχευαν στην ακρίβεια (*Fowler,σ.364)*

[52] *Όλοι οι άντρες ξεκινούν… αναρωτώμενοι ότι το ζήτημα είναι έτσι(όπως στην περίπτωση των αυτόματων μαριονεττών ή του ηλιοστασίου ή της ασυμμετρίας της διαγωνίου, γιατί φαίνεται θαυμαστό σε όλους τους άντρες που δεν έχουν ακόμα αντιληφθεί την εξήγηση ότι υπάρχει ένα πράγμα το οποίο δεν μπορεί να μετρηθεί ακόμα και από την πιο μικρή μονάδα). Αλλά πρέπει να καταλήξουμε στην ενάντια και, σύμφωνα με το παροιμιώδες, καλύτερη κατάσταση, όπως είναι η περίπτωση σε αυτά τα παραδείγματα όπου οι άντρες μαθαίνουν την αιτία. Γιατί δεν υπάρχει τίποτα που θα μπορούσε να εκπλήξει τόσο έναν γεωμέτρη, όσο το γεγονός μιας μετρήσιμης διαγωνίου.*

συνεπώς η ασυμμετρία με τις προσεγγίσεις της, ήταν ίσως αναμενόμενο να τους ταρακουνήσει και να τους εισάγει σε νέα μονοπάτια.

Κεφάλαιο 3

Plato - From Raphael's "School of Athens" (1509)

3.1 Πλάτωνας και Μαθηματικά

Ο Πλάτωνας πέρα από φιλόσοφος, παρουσιάζεται πολλές φορές και σαν κάποιος του οποίου η σκέψη ήταν βαθύτατα επηρεασμένη από τα μαθηματικά και τις μεθόδους που αυτά χρησιμοποιούν. Μάλιστα, η σημασία που είχαν τα μαθηματικά για εκείνον, αναδεικνύεται και πιστοποιείται όχι μόνο μέσα από τα έργα του, αλλά και από κάποια γεγονότα της βιογραφίας και της δράσης του (*J.A Novak, part iii*).

Ας ξεκινήσουμε κάνοντας αναφορά σε ορισμένα στοιχεία της ζωής του Πλάτωνα. Υπάρχουν έξι αρχαίες βιογραφίες οι οποίες καταγράφονται στο έργο της Alice Swift Riginos, *Platonica:the Anecdotes Concerning the Life and Writings of Plato(Leiden,1976,σ.1).* Πιο ολοκληρωμένη φαίνεται να είναι εκείνη από τον Διογένη Λαέρτιο.(*III,1-47*).Ο Διογένης αναφέρει ότι αφότου ο Πλάτωνας μελέτησε λογική στα Μέγαρα, πήγε στην Κυρήνη όπου ήρθε σε επαφή με τον Θεόδωρο τον μαθηματικό και στη συνέχεια μετέβη στην Ιταλία όπου γνωρίστηκε με τους Πυθαγόρειους, Φιλόλαο και Εύρυτο (*III,6*).Μάλιστα, η σχέση του Πλάτωνα με τους Πυθαγόρειους υπονοείται και στο έργο του, *Φαίδωνα,* [53] όπου η ομάδα ανθρώπων που περιστοιχίζουν τον υπόλογο Σωκράτη, αποτελείται από Πυθαγόρειους. Συγκεκριμένα, οι δύο βασικοί συνομιλητές του διαλόγου, ο Σιμμίας και ο Κέβης, είναι Πυθαγόρειοι ενώ και ο αφηγητής του διαλόγου Εχεκράτης, είναι επίσης Πυθαγόρειος με δράση που εντοπίζεται στον Φλειούντα *(J Burnet,σ.9-10).*

Επιπλέον, κάτι που αντανακλά την επίδραση των μαθηματικών στη ζωή του Πλάτωνα, είναι πέρα από την προσωπικότητά του και η ίδια η Ακαδημία. Μεταξύ άλλων, ο Λεοδάμας, ο Αρχύτας, ο Θεόδωρος, ο Μέναιχμος, ο Λέων και φυσικά ο Θεαίτητος και ο Εύδοξος, ήταν γνωστοί στον Πλάτωνα και οι περισσότεροι συνδέονταν και με την Ακαδημία.[54] Σημαντική μαρτυρία για τη σχέση της Ακαδημίας με τα μαθηματικά αποτελεί η *Σύνοψη των γεωμετρών* στα σχόλια του Πρόκλου στο βιβλίο I των *Στοιχείων* του Ευκλείδη(*ed. Frienlein,σ.65-68*).Μελετητές υποστηρίζουν ότι αυτό το χωρίο είναι απόσπασμα από τη χαμένη *Ιστορία της γεωμετρίας* του Εύδημου *(S.T.Heath,σ.118-120· Van der Waerden ,σ.91· Knorr, σ.15-16*). Ο συγγραφέας της *Σύνοψης* είναι ο Εύδημος, μαρτυρία που προέρχεται από τον ίδιο τον Πρόκλο, ο οποίος αφού αναφέρει όλους τους μαθηματικούς από τον Θαλή έως τον Φίλιππο τον Μενδαίο[55] μας λέει: «Αυτοί που έγραψαν ιστορία φτάνουν ως αυτό το σημείο την έκθεσή τους για την εξέλιξη αυτής της επιστήμης. Όχι πολύ μετά από αυτούς έρχεται ο Ευκλείδης…» Φυσικά είναι γνωστό ότι ο μόνος που έγραψε ιστορία της γεωμετρίας πριν τον Ευκλείδη είναι ο Εύδημος, ο οποίος υπήρξε μαθητής του Αριστοτέλη (*Β.Καρασμάνης,1990, εν. 1.Γ*).Στη *Σύνοψη*, λοιπόν, ο Πλάτωνας κατέχει

[53] Ο διάλογος *Φαίδων* αναφέρεται στη δίκη και εκτέλεση του Σωκράτη.

[54] Ο Πρόκλος επισημαίνει αυτή τη σύνδεση: *«διῆγον οὖν οὗτοι μετ΄ ἀλλήλων ἐν΄ Ἀκαδημίᾳ κοινὰς ποιούμενοι τὰς ζητήσεις» (In Primum Euclidis Elementorum Librum Comentarii,ed by G.Friedlein-Leipzig,1873,σ.67).*

[55] Πρόκειται πιθανότατα για το ίδιο πρόσωπο με τον Φίλιππο τον Οπούντιο, μαθητή του Πλάτωνα, ο οποίος εξέδωσε τους *Νόμους* μετά τον θάνατό του τελευταίου και συνέγραψε πιθανότατα την *Επινομίδα* (Βασίλης Καρασμάνης ???*Εν.1.Γ*).

σημαντική θέση και επιπλέον όλοι οι μεγάλοι μαθηματικοί του τέταρτου αιώνα φαίνονται να συνδέονται στενά με εκείνον και με την Ακαδημία. Ο συγγραφέας της *Σύνοψης* έχοντας μιλήσει για τον Πλάτωνα, αναφέρει στη συνέχεια ότι (*66.14-18*): «την ίδια εποχή έζησαν επίσης ο Λεωδάμας ο Θάσιος,ο Αρχύτας ο Ταραντίνος και ο Θεαίτητος ο Αθηναίος οι οποίοι αύξησαν τα θεωρήματα και οργάνωσαν επιστημονικότερα την επιστήμη τους». Φυσικά ο συγγραφέας δεν αναφέρει ξεκάθαρα ότι αυτοί οι μαθηματικοί συνδέονταν με τον Πλάτωνα, αλλά ότι έζησαν την ίδια εποχή. Εντούτοις, η σχέση του Πλάτωνα με τον Θεαίτητο επιβεβαιώνεται από τον ίδιο στον ομώνυμο διάλογό του και η γνωριμία με τον Αρχύτα προκύπτει από πηγές (*Πλάτων Εβδόμη επιστολή 338c,339d,360a· Διογένης Λαέρτιος ΙΙΙ 21,VIII 79-81· Πλούταρχος Δίων 18.5,20.1*). Όσο για τη γνωριμία με τον Λεωδάμαντα πιστοποιείται από τον Πρόκλο(*Εις Ευκλ. 211.18-23*) και τον Διογένη Λαέρτιο(*ΙΙΙ 21*).

Η *Σύνοψη* προχωράει με τον Νεοκλείδη ,νεότερο του Λεωδάμαντα, και τον μαθητή του, Λέοντα, που έγραψε *Στοιχεία* και ανακάλυψε τους «διορισμούς» *(Β.Καρασμάνης,1990,ενότητα 1.Γ)*.Νεότερος από τον Λέοντας ήταν ο Εύδοξος ο Κνίδιος ,περίφημος μαθηματικός ο οποίος σύμφωνα με την *Σύνοψη* έγινε «εταίρος των μαθητών του Πλάτωνα». Εν συνεχεία αναφέρονται και άλλοι μαθηματικοί (ο Αμύκλας ο Ηρακλεώτης, ο Μέναιχμος, ο Δεινόστρατος) οι οποίοι «τελειοποίησαν όλη τη γεωμετρία» (*67.2-12*) και αμέσως μετά ακολουθούν ο Θεύδιος ο Μάγνης που «διέπρεψε στα μαθηματικά και την άλλη φιλοσοφία» και ο Αθήναιος ο Κυζικηνός που ξεχώρισε σε πολλούς κλάδους των μαθηματικών. Στο *67.19-20* ο συγγραφέας της *Σύνοψης* λέει ότι «όλοι αυτοί ζούσαν μαζί στην Ακαδημία και πραγματοποιούσαν κοινές έρευνες». Μετά όμως ακολουθεί το εύλογο ερώτημα: Ποιοι ήταν οι μαθηματικοί που ζούσαν στην Ακαδημία; Ο Βασίλης Καρασμάνης στο σχετικό του άρθρο(*εν. 1.Γ*)μέσα από μια σειρά συλλογισμών, αναφέρει ως πιθανότερη εκδοχή ότι στην Ακαδημία ζούσαν όλοι οι μαθηματικοί από τον Νεοκλείδη ως τον Αθήναιο, μιας και ο Λεωδάμας, ο Αρχύτας και ο Θεαίτητος είναι δύσκολο να θεωρηθούν μαθητές του Πλάτωνα, δεδομένου ότι ήταν περίπου στην ίδια ηλικία με τον τελευταίο. Από την *Σύνοψη*, λοιπόν, καταλαβαίνουμε ότι ο Πλάτωνας σχετιζόταν με τους σημαντικότερους μαθηματικούς της εποχής του και πολλοί από αυτούς υπήρξαν μέλη της Ακαδημίας ,στην οποία και συντελέστηκε τεράστια μαθηματική πρόοδος.[56]

Μάλιστα, όταν ο Πλάτωνας ξεκίνησε για το δεύτερο ταξίδι του στη Σικελία (τη στιγμή μάλιστα που ο Αριστοτέλης εισήχθη στην Ακαδημία), όρισε επικεφαλή της Σχολής τον Εύδοξο από την Κνίδο, [57]ο οποίος είχε αναπτύξει θεωρία αναλογιών σχετιζόμενη με το θέμα της ασυμμετρίας *(G.Huxley, Studies in the Greek Astronomers :Greek,Roman and Byzantine Studies, 4, 1963, σ.85.Επίσης I.During, Aristotle in the Ancient Biographical Tradition, Goteborg, 1957, σ. 99,109,152,160).*

[56] Μεταγενέστεροι συγγραφείς αναφέρουν ότι ο Πλάτωνας είχε αναγράψει στην είσοδο της Ακαδημίας την φράση «Ἀγεωμέτρητος μηδεὶς εἰσίτω» δηλαδή να μην εισέρχεται κάποιος αν δε γνωρίζει γεωμετρία (*Φιλόπονος,Εις Αριστ.Αναλ.Υστ. 36.9,Εις Αριστ. Περί Γεν. Και Φθ. 210.12· Ολυμπιόδωρος, Προλεγόμενα 9.1· Θεμίστιος Εις Αριστ. Αναλ. Υστ. 26.2*).Αν και η ιστορία αυτή δεν φαίνεται να είναι αληθής, (μιας και η Ακαδημία δε στεγαζόταν σε κάποιο κτίριο με τη σημερινή έννοια) αποδίδει εντούτοις τη σύνδεση της Ακαδημίας με τα μαθηματικά.

[57] Λέγεται πως ο Εύδοξος είχε ιδρύσει πρωτύτερα δική του Σχολή, την οποία μετέφερε στην Αθήνα και την ενσωμάτωσε στην Ακαδημία.

Το γεγονός ότι ο Πλάτωνας όρισε υπεύθυνο της Ακαδημίας έναν Μαθηματικό, ίσως να μην είναι τυχαίο της σημασίας που απέδιδε στην επιστήμη αυτή. Από τις προαναφερθείσες προσωπικότητες, αυτοί που άσκησαν μεγαλύτερη επίδραση στον Πλάτωνα, φαίνεται πως ήταν ο Εύδοξος, ο Θεαίτητος και ο Θεόδωρος (*Novak, part iii).*

Πέρα από αυτά τα στοιχεία της ζωής του Πλάτωνα, το ενδιαφέρον του προς τα μαθηματικά εκδηλώνεται κυρίως μέσα από τα ίδια τα έργα του. Ο Πρόκλος αναφέρει πως ο Πλάτωνας έχει διανθίσει τα έργα του με μαθηματικές έννοιες και έχει εμπνεύσει θαυμασμό για την επιστήμη αυτή μέσα από την φιλοσοφία του.(*Proclus, σ.66*).Αν και οι πρώιμοι διάλογοι κάνουν περιστασιακά λόγο για τους άρτιους και περιττούς αριθμούς (για παράδειγμα *Χαρμίδης 166B, Ἴων 537E),*στους μέσους διαλόγους εντοπίζουμε πολλά σημεία όπου γίνεται αναφορά στα μαθηματικά.[58]

Στον *Μένωνα* διακρίνουμε δύο σημεία όπου έχουμε «εικόνες» παρμένες από τα μαθηματικά και μάλιστα και τα δύο αυτά παραδείγματα συνδέονται στενά με το περιεχόμενο του διαλόγου (*Novak,part iii,σ.15).*Το πρώτο χωρίο αφορά τη συζήτηση με ένα σκλάβο στον οποίο ζητείται να κατασκευάσει ένα σχήμα διπλασιάζοντας το δοσμένο εμβαδόν (*Μένων,82A–85E*) και από ότι φαίνεται σκοπός του αποσπάσματος είναι να εξηγήσει μέσω παραδείγματος την θεωρία πως η μάθηση είναι ανάμνηση (εκτενής αναφορά σε αυτό το χωρίο γίνεται σε επόμενη ενότητα). Το δεύτερο χωρίο εντοπίζεται σε σημείο του διαλόγου όπου στοχεύει να απαντήσει στο ερώτημα, εάν η αρετή είναι κάτι που δύναται να διδαχθεί (*Μένων,86D-87C).*Σε αυτό ο Σωκράτης επιθυμεί να στηρίξει τη διαδικασία του διαλόγου σε μια γεωμετρική διαδικασία και να παρουσιάσει μια υπόθεση στο φως της οποίας μπορούμε να συνάγουμε συμπεράσματα.

Σχετικά με τον *Φαίδωνα*, αν και το θέμα του διαλόγου (η αθανασία της ψυχής) δεν είναι μαθηματικό ζήτημα, αποτελεί αντικείμενο του ενδιαφέροντος των Πυθαγορείων. Υπάρχουν σαφείς μαθηματικές αναφορές, εντούτοις, στα παρακάτω: στη συζήτηση της αρμονίας (*Φαίδων,91C-94E*), στην αναφορά στους άρτιους και περιττούς αριθμούς (*104A-105C*) και στη χρήση της μεθόδου της υπόθεσης *(100A,101D).*[59]

Συνεχίζοντας στα έργα του Πλάτωνα, στον *Γοργία* συναντάμε τον Σωκράτη να επιπλήττει τον Καλλικλή που παραμελεί τη μελέτη της γεωμετρίας, η οποία θα έδειχνε μια γεωμετρική ισότητα (ἰσότης γεωμετρική) εφαρμόσιμη στη «χώρα» της δικαιοσύνης (*Γοργίας 508A 6-8*).Ο *Κρατύλος* κάνει αναφορά στη γεωμετρική μέθοδο (*Κρατύλος 436C-D*) και συζητάει μια πιθανή ομοιότητα ανάμεσα στους αριθμούς και τα ονόματα (*432B*).Βέβαια, στα έργα *Φαίδρος* και *Συμπόσιον*, δεν διακρίνουμε τίποτα το μαθηματικό, όμως αυτό δικαιολογείται από το αντικείμενο των διαλόγων (Αγάπη και Ομορφιά).

[58] Στους πρώιμους διαλόγους του Πλάτωνα εντάσσονται οι: Λύσις, Λάχης, Χαρμίδης, Ἴων, Ευθύδημος, Ιππίας Μείζον, Ευθύφρων, Μένων. Στους μέσους διαλόγους ανήκουν οι: Φαίδων, Συμπόσιον, Πολιτεία, Κρατύλος και Φαίδρος. Στους ύστερους διαλόγους περιλαμβάνονται οι : Παρμενίδης, Θεαίτητος, Σοφιστής, Φίληβος, Νόμοι και Πολιτικός(*Novak, part iii*).

[59] Ο K.Sayre στο έργο του *Plato's Analytic Method,pp. 20* παρουσιάζει μια εκτίμηση σχετικά με την αναφορά του Πλάτωνα στην ελληνική μέθοδο της ανάλυσης και σύνθεσης.

Στους ύστερους διαλόγους του Πλάτωνα, η αναφορά του στα μαθηματικά όχι μόνο δεν ατονεί αλλά και στρέφεται πιο συγκεκριμένα στη θεωρία των ασυμμέτρων *(Novak,part iii,σ.15)*.Ας ξεκινήσουμε από τον *Θεαίτητο*. Οι βασικοί συνομιλητές του διαλόγου είναι και οι δύο διάσημοι μαθηματικοί. Από τη μία ο Θεαίτητος που έκανε σημαντική συνεισφορά στη θεωρία των ασύμμετρων μεγεθών (*Euclid's Elements,Book III,σ.3)* και κατασκεύασε τα 5 κανονικά στερεά (*EE ,Book III,σ. 438-439*).[60]Από την άλλη ο Θεόδωρος που υπήρξε δάσκαλος του Πλάτωνα και λέγεται πως ανέλυσε τις περιπτώσεις ασυμμετρίας από την τετραγωνική ρίζα του 3 μέχρι την τετραγωνική ρίζα του 17 (*Θεαίτητος, 147D*).(στο θέμα αυτό θα γίνει εκτενής αναφορά παρακάτω).

Ο *Παρμενίδης* φαίνεται να είναι επίσης επηρεασμένος από μαθηματικά ενδιαφέροντα. Αν υποθέσουμε πως ο διάλογος γράφτηκε μετά το δεύτερο ταξίδι του Πλάτωνα στην Σικελία στη διάρκεια του οποίου υπεύθυνος της Ακαδημίας ετέθη ο Εύδοξος (*Novak,part iii*), καταλαβαίνουμε ότι οι αντιρρήσεις για τη θεωρία των Ιδεών που εντοπίζονται στο πρώτο μέρος του διαλόγου ίσως έπρεπε να εκφραστούν για να συμφωνούν με τη θέση του Ευδόξου.[61]Ο Παρμενίδης και ο Ζήνων ο Ελεάτης είναι τα κύρια πρόσωπα που συνδιαλέγονται με τον Σωκράτη. Ο Ζήνων είχε προβάλει τα διάσημα παράδοξα κάνοντας έμφαση σε εκείνο που σχετίζεται με τη μονάδα (το Ένα) και τη διαιρετότητα της [62], ενώ ο Παρμενίδης είχε προηγηθεί κάνοντας λόγο για τη φιλοσοφία της πραγματικότητας του Ένα. Το δεύτερο μέρος του διαλόγου το οποίο φανερώνει το ενδιαφέρον του Πλάτωνα για την έννοια της ενότητας όπως αυτή παρουσιάζεται από τους δύο παραπάνω φιλοσόφους, γίνεται πιο ξεκάθαρο όταν γίνεται κατανοητό πως η έρευνα του Εύδοξου επικεντρώθηκε στα ασύμμετρα μεγέθη που δεν μπορούσαν να βρουν έκφραση σαν μονάδες.

Τα υπόλοιπα έργα του Πλάτωνα περιέχουν επίσης αναφορές που βασίζονται στην επίδραση του προβλήματος της ασυμμετρίας. Στον *Πολιτικό* συναντάμε τον Θεόδωρο, τον Θεαίτητο και τον Ελεάτη ξένο που συνομιλούν. Το θέμα των ασυμμέτρων τίθεται ρητά από τις πρώτες γραμμές του διαλόγου. Ο Σωκράτης ευχαριστεί τον Θεόδωρο που τον σύστησε στον Θεαίτητο και τον Ελεάτη ξένο. Ακολουθεί η απάντηση του Θεόδωρου (*257A-B7*)

---

[60] Τα 5 στερεά χρησιμοποιήθηκαν από τον Πλάτωνα στη δομή του σύμπαντος στον *Τίμαιο (53C-55C).*

[61] Ο Εύδοξος φαίνεται πως ήταν αντίθετος στη θεωρία των υπερβατικών Ιδεών. (*Μεταφυσικά, Α, 991α 14-19).*

[62] Το παράδοξο είναι το εξής: Η πολλαπλότητα είναι ανέφικτη· τα πάντα είναι Ένα. Αν υπήρχε πολλαπλότητα, τα πάντα θα διαχωρίζονταν από άλλα αντικείμενα που θα βρίσκονταν ανάμεσά τους. Εκεί γεννιέται το παράδοξο, καθώς από τη μία τα πράγματα είναι πεπερασμένα και αριθμούνται, αφού μπορούμε να μετρήσουμε μια συγκεκριμένη ποσότητα από αυτά, και από την άλλη, όταν πάντα υπάρχουν ενδιάμεσα αντικείμενα για οποιοδήποτε πράγμα, τα πράγματα απειρίζονται. Επειδή λοιπόν είναι αδύνατο να είναι ταυτόχρονα πεπερασμένη και άπειρη μια ποσότητα, τα πράγματα δεν είναι πολλαπλά αλλά συμπίπτουν και οι αισθήσεις μας απλώς μας εξαπατούν. Τα πάντα είναι Ένα και ο αληθινός κόσμος έχει τη μορφή του Σφαίρου του Παρμενίδη, που είναι τέλειος από κάθε άποψη και αδιαίρετος (*Nicola Ubaldo, Παράδοξα του Ζήνωνα, Εικονογραφημένη Ανθολογία της Φιλοσοφίας 2007, σ. 74-75).*

«Θεο: Τάχα δε,ὦ Σώκρατες, ὀφειλήσεις ταύτης τριπλασίαν· ἐπειδὰν τόν τε πολιτικόν ἀπεργάσωνταί σοι καὶ τὸν φιλόσοφον. Σω: Εἶεν· οὕτο τοῦτο, ὦ φίλε Θεόδωρε,φήσομεν ἀκηκοότες εἶναι τοῦ περί λογισμοὺς καὶ τὰ γεωμετρικὰ κρατίστου; Θεο:Πῶς,ὦΣώκρατες; Σω:Τῶν ἀνδρῶν ἕκαστον θέντος τῆς ἴσης ἀξίας, οἵ τῇ τιμῇ πλέον ἀλλήλων ἀφεστᾶσιν ἤ κατὰ τήν ἀναλογίαν τὴν τῆς ὑμετέραςτέχνης. Θεο:Εὖ γε νὴ τὸν ἡμέτερον θεόν, ὦ Σώκρατες, τὸν Ἄμμωνα, καὶ δικαίως, καὶ πάνυ μὲν οὖν μνημονικῶς ἐπέπληξάς μοι τὸ περί τους λογισμοὺς ἁμάρτημα.»	*ΘΕΟ. Και γρήγορα, Σωκράτη, θα μου οφείλεις τριπλάσια όταν θα σου μιλήσουν με λεπτομέρειες για τον πολιτικό και το φιλόσοφο. ΣΩ. Ας είναι. Κι έτσι, αγαπητέ Θεόδωρε, αυτό θα πούμε πως ακούσαμε από τον επικρατέστερο στους υπολογισμούς και στη γεωμετρία; ΘΕΟ. Πώς το λες αυτό, Σωκράτη; ΣΩ. Είναι που έδωσες στον κάθε άνδρα την ίδια αξία, τη στιγμή που, στην αξιοσύνη, απέχουν μεταξύ τους περισσότερο, απ' όσο μπορεί να εκφράσει η αναλογία της δικής σας της τέχνης. ΘΕΟ. Μα τω θεώ μας τον Άμμωνα, Σωκράτη, ωραία και δίκαια, και με μεγάλη ευχέρεια με μάλωσες για το σφάλμα μου στους υπολογισμούς*

Τέλος, στους *Νόμους* ο Πλάτωνας κάνει μια παρατήρηση που τονίζει τη σημασία της ασυμμετρίας. Στο παρακάτω απόσπασμα (*819D-820B*) ο Πλάτωνας φαίνεται να ομολογεί πως για πολύ καιρό του διέφευγε η σημασία των ασύμμετρων μεγεθών και ότι μόνο πρόσφατα εντυπωσιάστηκε από τη σπουδαιότητά τους. Αυτό βέβαια δε σημαίνει πως ο Πλάτωνας αγνοούσε και την ύπαρξή τους:

«Ἀθηναῖος: ὦ φίλε Κλεινία, παντάπασί γε μὴν καὶ αὐτὸς ἀκούσας ὀψέ ποτε τὸ περὶ ταῦτα ἡμῶν πάθος ἐθαύμασα, καὶ ἔδοξέ μοι τοῦτο οὐκ ἀνθρώπινον ἀλλὰ ὑηνῶν τινων εἶναι μᾶλλον θρεμμάτων, ᾐσχύνθην τε οὐχ ὑπὲρ ἐμαυτοῦ μόνον, ἀλλὰ καὶ ὑπὲρ ἁπάντων τῶν Ἑλλήνων. Κλεινίας: τοῦ πέρι; λέγ’ ὅτι καὶ φῄς, ὦ ξένε. Ἀθηναῖος: λέγω δή: μᾶλλον δὲ ἐρωτῶν σοι δείξω. καί μοι σμικρὸν ἀπόκριναι: γιγνώσκεις που μῆκος; Κλεινίας: τί μήν; Ἀθηναῖος: τί δέ; πλάτος; Κλεινίας: πάντως. Ἀθηναῖος: ἦ καὶ ταῦτα ὅτι δύ’ ἐστόν, καὶ τρίτον τούτων βάθος; Κλεινίας: πῶς γὰρ οὔ; Ἀθηναῖος: ἆρ’ οὖν οὐ δοκεῖ σοι ταῦτα εἶναι πάντα μετρητὰ πρὸς ἄλληλα; Κλεινίας: ναί. Ἀθηναῖος: μῆκός τε οἶμαι πρὸς μῆκος, καὶ	*Αθηναίος: Αγαπημένε μου Κλεινία, πολύ αργά ανακάλυψα και εγώ ο ίδιος την κατωτερότητά μας σε αυτά τα ζητήματα. Ένιωσα μεγάλη έκπληξη και νομίζοντας πως κάτι τέτοιο δε μπορεί να ανήκει στους ανθρώπους αλλά μάλλον σε γουρούνια που θρέφουμε, ντράπηκα όχι μόνο για τον εαυτό μου αλλά και για όλους τους Έλληνες. Κλεινίας: Για ποιο πράγμα ένιωσες ντροπή; Εξήγησε αυτό που θες να πεις, φίλε μου. Αθ: Εξηγούμαι. Ή μάλλον θα σε διαφωτίσω ρωτώντας σε. Απάντησέ μου, λοιπόν, σε αυτό το μικρό ερώτημα: γνωρίζεις άραγε τι είναι το μήκος; Κ: Βεβαίως. Αθ: Και τι είναι το πλάτος; Κ:Οπωσδήποτε. Αθ: Και αν αυτά είναι δυο, το τρίτο από αυτά είναι το βάθος; Κ: Πώς να μην το ξέρω;*

πλάτος πρὸς πλάτος, καὶ βάθος ὡσαύτως δυνατὸν εἶναι μετρεῖν φύσει. *Κλεινίας: σφόδρα γε.* *Ἀθηναῖος: εἰ δ' ἔστι μήτε σφόδρα μήτε ἠρέμα δυνατὰ ἔνια, ἀλλὰ τὰ μέν, τὰ δὲ μή, σὺ δὲ πάντα ἡγῇ, πῶς οἴει πρὸς ταῦτα διακεῖσθαι;* *Κλεινίας: δῆλον ὅτι φαύλως.* *Ἀθηναῖος: τί δ' αὖ μῆκός τε καὶ πλάτος πρὸς βάθος, ἢ πλάτος τε καὶ μῆκος πρὸς ἄλληλα; ἆρ' οὐ διανοούμεθα περὶ ταῦτα οὕτως Ἕλληνες πάντες, ὡς δυνατά ἐστι μετρεῖσθαι πρὸς ἄλληλα ἁμῶς γέ πως;* *Κλεινίας: παντάπασι μὲν οὖν.* *Ἀθηναῖος: εἰ δ' ἔστιν αὖ μηδαμῶς μηδαμῇ δυνατά, πάντες δ', ὅπερ εἶπον, Ἕλληνες διανοούμεθα ὡς δυνατά, μῶν οὐκ ἄξιον ὑπὲρ πάντων αἰσχυνθέντα εἰπεῖν πρὸς αὐτούς: ὦ βέλτιστοι τῶν Ἑλλήνων, ἓν ἐκείνων τοῦτ' ἐστὶν ὧν ἔφαμεν αἰσχρὸν μὲν γεγονέναι τὸ μὴ ἐπίστασθαι, τὸ δ' ἐπίστασθαι τἀναγκαῖα οὐδὲν πάνυ καλόν;»*	*Αθ: Άραγε δε νομίζεις, λοιπόν, ότι αυτά τα τρία μπορούν να μετρηθούν το ένα σχετικά με το άλλο;* *Κ: Μάλιστα.* *Αθ: Έτσι, κατά την γνώμη μου, θα μπορούσε φυσικά να μετρηθεί το μήκος με το μήκος, το πλάτος με το πλάτος και το βάθος με τον ίδιο επίσης τρόπο.* *Κ: Βεβαιότατα.* *Αθ: Αν όμως αυτές οι τρεις διαστάσεις δεν είναι δυνατό να μετρηθούν είτε εν μέρει είτε στο σύνολό τους, αλλά άλλες είναι δυνατό και άλλες όχι· εσύ όμως έχεις τη γνώμη ότι όλες μπορούν να μετρηθούν, πώς νομί ζεις ότι πρέπει να διάκεισαι απέναντι σε αυτά τα ζητήματα;* *Κ: Προφανώς με τρόπο αξιοθρήνητο.* *Αθ: Και αν πρόκειται τώρα για τη σχέση του μήκους και του πλάτους προς το βάθος ή για την αμοιβαία σχέση του πλάτους και του μήκους; Μήπως άραγε όλοι εμείς οι Έλληνες δεν έχουμε τη γνώμη ότι μπορεί να μετρηθούν, κατά κάποιο τρόπο, το ένα σε σχέση με το άλλο;* *Κ: Απολύτως.* *Αθ: Αν όμως άλλη μια φορά ακόμη δεν είναι δυνατό να μετρηθούν, με κανένα τρόπο, όλοι δε, όπως είπαμε οι Έλληνες τα θεωρούμε ως δυνατά να μετρηθούν, μήπως δεν αξίζει νιώθοντας ντροπή για λογαριασμό όλων να τους πούμε: Ε, εσείς που είσαστε οι πιο ξεχωριστοί από τους Έλληνες, δεν υπάρχει εδώ κάτι, για το οποίο είπαμε πάλι δεν είναι τιμητικό για εσάς, δηλαδή η άγνοια, και μάλιστα η γνώση των στοιχειωδών πραγμάτων δεν είναι καθόλου σπουδαίο πράγμα;*

Στο σημείο αυτό, αξίζει να αναφερθούμε σε ορισμένες ομοιότητες που παρατηρούνται ανάμεσα σε μαθηματικούς ορισμούς που δίνει ο Πλάτωνας σε κάποια έργα του και σε ορισμούς που υπάρχουν στα *Στοιχεία* του Ευκλείδη (*Β.Καρασμάνης,1990,Εν.3.Β*). Στον *Μένωνα (76a)* ο Πλάτωνας μας δίνει τον ορισμό του «σχήματος» ως «το όριο (πέρας) ενός στερεού» και στον *Παρμενίδη (145a)* υπάρχει μία ερμηνεία του όρου «πέρας» (ό,τι περιέχει είναι πέρας). Στον Ευκλείδη το «σχήμα» ορίζεται ως «αυτό το οποίο περικλείεται από οποιοδήποτε όριο (ὅρος) ή όρια» (*ορισμός I,14*) και «όριο» ορίζεται ως «αυτό το οποίο είναι το πέρας οποιουδήποτε πράγματος» (*ορισμός I,13*).Από ότι παρατηρούμε υπάρχουν τρομερές ομοιότητες μεταξύ των ορισμών του Ευκλείδη και του Πλάτωνα. Ας δούμε τώρα κάποιους άλλους ορισμούς του Ευκλείδη:

1.Σημείο είναι αυτό το οποίο δεν έχει μέρη (*ορισμός I, 1*).
2.Γραμμή είναι μήκος χωρίς πλάτος (*ορισμός I, 2*).
3.Τα *πέρατα* μίας γραμμής είναι σημεία *(ορισμός I, 3*).
4.Επιφάνεια είναι αυτό το οποίο έχει μόνο μήκος και πλάτος (*ορισμός I, 5*).
5.Τα *πέρατα* μίας επιφάνειας είναι γραμμές (*ορισμός I, 6*).
6.Στερεό είναι αυτό που έχει μήκος, πλάτος και βάθος (*ορισμός XI, 1*).
7.Το *πέρας* ενός στερεού είναι επιφάνεια (*ορισμός XI, 2*).

Βλέπουμε ότι οι ορισμοί της γραμμής, της επιφάνειας και του στερεού ακολουθούνται από δηλώσεις σχετικά με τα πέρατά τους (*ορισμοί 3,5,7*).Ο Αριστοτέλης (*Μετά τα Φυσικά* 1060b14-17, *Τοπικά* 141b5, *Κατηγορίαι* 5a2-6) μας πληροφορεί ότι αυτοί οι ορισμοί (3,5,7) υπήρξαν οι αρχαιότεροι. Αν ανατρέξουμε στον ορισμό του «σχήματος» στον Μένωνα, θα δούμε ότι οι ορισμοί σχετίζονται άμεσα με τον Πλάτωνα. Ο Αριστοτέλης στα παραπάνω χωρία, ασκεί επίθεση στους ορισμούς αυτούς. Αν υποθέσουμε ότι ανάλογη στάση τηρήθηκε και από άλλους, πιθανότατα για αυτό ο Ευκλείδης να τους αντικατέστησε με τους ορισμούς 1,2,4 και να τους διατήρησε ως δευτερεύοντες.

Παράλληλα, στον Παρμενίδη[63] ο Πλάτωνας μας δίνει ορισμό της ευθείας ως «αυτή της οποίας το κέντρο καλύπτει τα άκρα» (*εὐθύ γε οὗ ἄν τὸ μέσον τοῖς ἐσχάτοιν ἐπίπροσθεν ᾖ*). Ο Αριστοτέλης τον αναφέρει στο χωρίο *148b27* των *Τοπικών* (*οὗ τὸ μέσον ἐπιπρόσθει τοῖς πέρασιν*). Ο Πρόκλος (*Σχόλια στον Ευκλείδη, 109*) αναφέρει επίσης αυτόν τον ορισμό (*ἧς τὰ μέσα τοῖς ἄκροις ἐπιπροσθεῖ*) λέγοντας ότι προέρχεται από τον ίδιο τον Πλάτωνα. Ο Αριστοτέλης δεν κάνει λόγο για το όνομα του Πλάτωνα, αλλά τον παραθέτει μαζί με τον πλατωνικό ορισμό της γραμμής ως το πέρας της επιφάνειας. Ο τρόπος με τον οποίο ο Αριστοτέλης μιλά για τον ορισμό δείχνει ότι πρόκειται για έναν διαδεδομένο ορισμό εκείνη την εποχή (*Heath,σ. 166*). Ο ορισμός της ευθείας γραμμής από τον Ευκλείδη δεν είναι ίδιος (*εὐθεῖα γραμμή ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις κεῖται. Στοιχεία, ορισμός I, 4*). Αλλά στην πρώτη πρόταση των *Κατοπτρικών* του ορίζει την οπτική ακτίνα (ὄψις) με τον ίδιο τρόπο που ο Πλάτωνας ορίζει την ευθεία (*ὄψιν εἶναι εὐθεῖαν, ἧς τὰ μέσα πάντα τοῖς ἄκροις ἐπιπροσθεῖ*). Πιθανότατα ο Ευκλείδης να θεώρησε ότι ο πλατωνικός ορισμός της ευθείας ταιριάζει περισσότερο στην οπτική ακτίνα, γιατί παραπέμπει στην όραση, και έτσι έδωσε άλλον ορισμό για την ευθεία *(Β.Καρασμάνης,1990,Εν. 3.Β).*

Τέλος, ο Πλάτωνας δεν εμφανίζεται ως ενεργός μαθηματικός από καμία μαρτυρία με εξαίρεση δύο περιπτώσεις. Η πρώτη αφορά τη λύση του δηλίου προβλήματος (διπλασιασμός του κύβου) που του αποδίδει ο Ευτόκιος (στα σχόλια του στο έργο του Αρχιμήδη:*Περί σφαίρας και κυλίνδρου-Archimedes,εκδ. Heiberg,vol. iii σ.56-58*). Όμως, όχι μόνο καμία άλλη πηγή δεν την επιβεβαιώνει (*Β.Καρασμάνης,1990,εν. 2*), αλλά επιπλέον αντιφάσκει με τα όσα λέει ο Ευτόκιος στη

[63] Στον *Παρμενίδη (137e)* συναντάμε έναν ορισμό του «στρογγυλού» (ή του κύκλου) ως «αυτό του οποίου τα άκρα απέχουν εξ ίσου σε όλα τα μέρη από το κέντρο». Στον *Τίμαιο (33b,34b)* ,η «σφαίρα» ορίζεται με τον ίδιο τρόπο ως αυτό του οποίου «τα άκρα απέχουν ίσο από το κέντρο προς όλες τις κατευθύνσεις».

συνέχεια (*σ.88-90*).Εκεί αναφέρεται σε ένα γράμμα του Ερατοσθένη στον βασιλιά Πτολεμαίο σύμφωνα με το οποίο η λύση στο πρόβλημα των Δηλίων δόθηκε από τους γεωμέτρες που ήταν στην Ακαδημία και όχι από τον ίδιο τον Πλάτωνα. Ποιοί ήταν αυτοί οι γεωμέτρες; Ο Πλούταρχος (*Συμποσιακών viii,2.1*) μας λέει ότι ο Πλάτωνας επέκρινε τον Αρχύτα, τον Εύδοξο και τον Εύδημο γιατί χρησιμοποίησαν μηχανικά μέσα στην προσπάθειά τους να διπλασιάσουν τον κύβο! Επομένως, φαίνεται αδύνατον να αποδώσουμε στον Πλάτωνα τη λύση αυτού του προβλήματος.

Η δεύτερη περίπτωση αφορά δύο αρχαίες μαρτυρίες που συνδέουν το όνομα του Πλάτωνα με την ανακάλυψη της γεωμετρικής μεθόδου της ανάλυσης και σύνθεσης. Συγκεκριμένα, ο Διογένης ο Λαέρτιος (*ΙΙΙ,24*) μας λέει ότι ο Πλάτωνας ήταν ο πρώτος που υπέδειξε στον Λεωδάμαντα τον Θάσιο τη μέθοδο να λύνουμε προβλήματα μέσω ανάλυσης. Επιπλέον, ο Πρόκλος (*Εις Ευκλ. 211.21-23*) αναφέρει: «λέγεται ότι ο Πλάτων δίδαξε αυτή τη μέθοδο στον Λεωδάμαντα, ο οποίος αναφέρεται ότι έκανε πολλές ανακαλύψεις στη γεωμετρία με τη βοήθειά της». Παράλληλα, ο Φιλόδημος στην *Ιστορία της Ακαδημίας* (*Dorandi, La Storia Dei Filosofi,1991,σ.125-127*) κάνει λόγο για την ανακάλυψη της μεθόδου της ανάλυσης ,χωρίς όμως να συνδέει τον Πλάτωνα μαζί της.Ο Βασίλης Καρασμάνης (*εν. 3.Γ*) υπογραμμίζει ότι αν και οι μελετητές δεν αποδίδουν καμία εγκυρότητα στις παραπάνω μαρτυρίες[64] ,εντούτοις ο ίδιος τους προσδίδει κάποια αξιοπιστία βασισμένος σε μελέτες του. Πιο συγκεκριμένα, υποστηρίζει ότι η μέθοδος των γεωμετρών στην οποία αναφέρεται ο Πλάτωνας στον *Μένωνα*, είναι η μέθοδος της «απαγωγής» την οποία εφάρμοζε συστηματικά ο Ιπποκράτης ο Χίος για να επιλύσει δύσκολα προβλήματα (*Πρόκλος, Εις Ευκλ. ,σ.213*).Όμως η μέθοδος αυτή είναι το πρώτο στάδιο της μεθόδου της ανάλυσης και σύνθεσης. Αν αναλογιστούμε ότι ο Ιπποκράτης ο Χίος έζησε στην Αθήνα περίπου το τελευταίο τρίτο του 3^{ου} αι. π.Χ και ότι ο Μένωνας θεωρείται από πολλούς μελετητές ότι γράφτηκε μεταξύ 389 και 380,είναι πιθανό ο Πλάτωνας να γνώριζε τη μέθοδό του Ιπποκράτη και να την υπέδειξε στον Λεωδάμαντα. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο τελευταίος την εξέλιξε και έφτασε στη μέθοδο της ανάλυσης και της σύνθεσης.

Συμπερασματικά, ο Πλάτωνας φαίνεται πως έπαιξε σημαντικό ρόλο στην ανάπτυξη των μαθηματικών της εποχής του. Μπορεί να μην έλυνε ο ίδιος προβλήματα , αλλά μπορούμε να πούμε να πούμε πως κατά κάποιον τρόπο λειτούργησε ως θεμελιωτής βασικών εννοιών, οι οποίες αργότερα ενέπνευσαν μαθηματικούς να τις εξελίξουν. Εξάλλου, στην Ακαδημία του συναντήθηκαν οι σπουδαιότεροι μαθηματικοί της εποχής και πολλές ανακαλύψεις έλαβαν χώρα.

[64] Για παράδειγμα ο Heath (*σ.213*) λέει ότι «αυτά τα χωρία έδωσαν λαβή για την αντίληψη ότι ο Πλάτων ανακάλυψε τη μέθοδο της γεωμετρικής ανάλυσης και σύνθεσης, μια ιδέα η οποία... βασίζεται σε παρανοήσεις».

3.2 *Θεαίτητος*

Υπάρχει ένα γνωστό απόσπασμα από τον *Θεαίτητο* του Πλάτωνα (*147d-148b*) στο οποίο ο νεαρός Θεαίτητος αφηγείται μια «μαθηματική» ιστορία. Η ιστορία κάνει λόγο για ένα γεωμετρικό μάθημα στο οποίο ο μαθηματικός Θεόδωρος ο Κυρηναίος έδωσε ξεχωριστές αποδείξεις ανά περίπτωση ότι η πλευρά ενός τετραγώνου με εμβαδόν 3 τετραγωνικά πόδια,5 τετραγωνικά πόδια κ.τ.λ. μέχρι και 17 τετραγωνικά πόδια είναι ασύμμετρη με την πλευρά ενός τετραγώνου με εμβαδόν 1 τετραγωνικό πόδι. Αμέσως μετά οι μαθητές του Θεόδωρου που εμπλέκονται στον διάλογο – ο Θεαίτητος και ο νεαρός Σωκράτης –διατύπωσαν ένα γενικό ορισμό σχετικά με την έννοια της ασυμμετρίας.

Τα γεγονότα λοιπόν όπως τα παρουσιάζει ο Θεαίτητος είναι τα εξής: Εκείνος και ένας συνοδός, ο πιο νεαρός Σωκράτης[65], παρακινήθηκαν από μια σειρά αποδείξεων για ασυμμέτρους που παρουσιάστηκε από τον Θεόδωρο. Ο Θεόδωρος τους έδειξε πως δοσμένων τετραγώνων εμβαδού 1 τετραγωνικού ποδιού και 3 τετραγωνικών ποδιών αντίστοιχα, η πλευρά του δεύτερου είναι ασύμμετρη (δεν έχει κοινό μέτρο) με την πλευρά του πρώτου, δηλαδή με το μήκος 1 ποδιού. Δεν μαθαίνουμε πώς έκανε την απόδειξη, μόνο το ότι συνέχισε τη διαδικασία για το τετράγωνο 5 ποδιών και ακολούθησαν και οι άλλες περιπτώσεις μέχρι το τετράγωνο 17 ποδιών, όπου και σταμάτησε. Με άλλα λόγια μιας και οι πλευρές αυτών των τετραγώνων έχουν μήκος $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \ldots \sqrt{17}$ πόδια, απέδειξε την ασυμμετρία των τετραγωνικών ριζών των ακεραίων μεταξύ 3 και 17 αν και από ότι φαίνεται δεν το εξέφρασε ακριβώς έτσι (Φυσικά με εξαίρεση τους αριθμούς 4,9 και 16 που είναι, όπως λέμε, τέλεια τετράγωνα).Μέχρι τότε (όπως έχουμε αναφέρει και πριν) οι Έλληνες μαθηματικοί αναγνώριζαν μόνο τους φυσικούς (θετικούς ακέραιους αριθμούς) και κατέτασσαν τους άρρητους αριθμούς σε γεωμετρικές οντότητες. Εδώ για παράδειγμα το $\sqrt{3}$ το αντιστοίχιζαν με την πλευρά τετραγώνου εμβαδού 3 ποδιών και όχι με κάποιον αριθμό.

Ας παραθέσουμε στις επόμενες σελίδες το σχετικό απόσπασμα:

Θεαίτητος: ῥᾳδιον, ὦ Σώκρατες, νῦν γε οὕτω φαίνεται: ἀτὰρ κινδυνεύεις ἐρωτᾶν οἷον καὶ αὐτοῖς ἡμῖν ἔναγχος εἰσῆλθε διαλεγομένοις, ἐμοί τε καὶ τῷ σῷ ὁμωνύμῳ τούτῳ Σωκράτει. *Σωκράτης: τὸ ποῖον δή, ὦ Θεαίτητε;* *Θεαι: περὶ δυνάμεών τι ἡμῖν Θεόδωρος ὅδε ἔγραφε, τῆς τε τρίποδος πέρι καὶ πεντέποδος [ἀποφαίνων] ὅτι μήκει οὐ σύμμετροι τῇ ποδιαίᾳ, καὶ οὕτω κατὰ μίαν ἑκάστην προαιρούμενος μέχρι τῆς*	*Θεαίτητος: Φαίνεται εύκολο τώρα(ενν. το να πεις τι είναι η γνώση), Σωκράτη, όταν το θέτεις με αυτόν τον τρόπο. Υπάρχει ένα ζήτημα το οποίο βγήκε στην επιφάνεια σε μια συζήτηση που είχα πρόσφατα με τον συνονόματό σου Σωκράτη εδώ: μάλλον φαίνεται ότι αυτό για το οποίο ρωτάς είναι κάτι του ίδιου είδους.* *Σωκράτης: Τι είδους ζήτημα ήταν αυτό, Θεαίτητε;* *Θεαι: Ο Θεόδωρος εδώ σχεδίαζε διαγράμματα για να μας δείξει κάτι σχετικά με δυνάμεις-συγκεκριμένα ότι το τετράγωνο με 3 τετραγωνικά πόδια και αυτό με 5 τετραγωνικά πόδια δεν είναι σύμμετρα, ως προς το μήκος της πλευράς, με ένα*

[65] Αυτός ο Σωκράτης για τον οποίο γίνεται λόγος, πρέπει να ήταν ένας από τους φίλους με τους οποίους ο Θεαίτητος εμφανίζεται στην αρχή του διαλόγου*(144c).*Γνωρίζουμε λίγα γι' αυτόν. Στον *Σοφιστή (216a,218b)* το ίδιο πρόσωπο επιστρέφει με τον Θεόδωρο και τον Θεαίτητο για τη συνέχεια της συζήτησης η οποία εξελίσσεται και στον *Πολιτικό(257c-258a).(M.F.Burnyeat,σ.494)*

ἑπτακαιδεκάποδος: ἐν δὲ ταύτη πως ἐνέσχετο. ἡμῖν οὖν εἰσῆλθέ τι τοιοῦτον, ἐπειδὴ ἄπειροι τὸ πλῆθος αἱ δυνάμεις ἐφαίνοντο, πειραθῆναι συλλαβεῖν εἰς ἕν, ὅτῳ πάσας ταύτας προσαγορεύσομεν τὰς δυνάμεις. *Σω: ἦ καὶ ηὕρετέ τι τοιοῦτον;* *Θεαι: ἔμοιγε δοκοῦμεν: σκόπει δὲ καὶ σύ.* *Σω: λέγε.* *Θεαι: τὸν ἀριθμὸν πάντα δίχα διελάβομεν: τὸν μὲν δυνάμενον ἴσον ἰσάκις γίγνεσθαι τῷ τετραγώνῳ τὸ σχῆμα ἀπεικάσαντες τετράγωνόν τε καὶ ἰσόπλευρον προσείπομεν.* *Σω: καὶ εὖ γε.* *Θεαι: τὸν τοίνυν μεταξὺ τούτου, ὧν καὶ τὰ τρία καὶ τὰ πέντε καὶ πᾶς ὃς ἀδύνατος ἴσος ἰσάκις γενέσθαι, ἀλλ' ἢ πλείων ἐλαττονάκις ἢ ἐλάττων πλεονάκις γίγνεται, μείζων δὲ καὶ ἐλάττων ἀεὶ πλευρὰ αὐτὸν περιλαμβάνει, τῷ προμήκει αὖ σχήματι ἀπεικάσαντες προμήκη ἀριθμὸν ἐκαλέσαμεν.* *Σω: κάλλιστα. ἀλλὰ τί τὸ μετὰ τοῦτο;* *Θεαι: ὅσαι μὲν γραμμαὶ τὸν ἰσόπλευρον καὶ ἐπίπεδον ἀριθμὸν τετραγωνίζουσι, μῆκος ὡρισάμεθα, ὅσαι δὲ τὸν ἑτερομήκη, δυνάμεις, ὡς μήκει μὲν οὐ συμμέτρους ἐκείναις, τοῖς δ' ἐπιπέδοις ἃ δύνανται. καὶ περὶ τὰ στερεὰ ἄλλο τοιοῦτον.* *Σω: ἄριστά γ' ἀνθρώπων, ὦ παῖδες: ὥστε μοι δοκεῖ ὁ Θεόδωρος οὐκ ἔνοχος τοῖς ψευδομαρτυρίοις ἔσεσθαι.* *Θεαι: καὶ μήν, ὦ Σώκρατες, ὅ γε ἐρωτᾷς περὶ ἐπιστήμης οὐκ ἂν δυναίμην ἀποκρίνασθαι ὥσπερ περὶ τοῦ μήκους τε καὶ τῆς δυνάμεως. καίτοι σύ γέ μοι δοκεῖς τοιοῦτόν τι ζητεῖν: ὥστε πάλιν αὖ φαίνεται ψευδὴς ὁ Θεόδωρος* *Σω: τί δέ; εἴ σε πρὸς δρόμον ἐπαινῶν μηδενὶ οὕτω δρομικῷ ἔφη τῶν νέων ἐντετυχηκέναι, εἶτα διαθέων τοῦ ἀκμάζοντος καὶ ταχίστου ἡττήθης, ἧττόν τι ἂν οἴει ἀληθῆ τόνδ' ἐπαινέσαι;* *Θεαι: οὐκ ἔγωγε.* *Σω: ἀλλὰ τὴν ἐπιστήμην, ὥσπερ νυνδὴ ἐγὼ ἔλεγον, σμικρόν τι οἴει εἶναι ἐξευρεῖν καὶ οὐ τῶν πάντη ἄκρων;* *Θεαι: νὴ τὸν Δί' ἔγωγε καὶ μάλα γε τῶν ἀκροτάτων.*	*τετράγωνο με ένα τετραγωνικό πόδι. Και πάει λέγοντας, επιλέγοντας κάθε περίπτωση ξεχωριστά μέχρι τα 17 τετραγωνικά πόδια. Σε αυτό το σημείο για κάποιο λόγο σταμάτησε. Λοιπόν, επειδή οι δυνάμεις φαίνονταν να είναι άπειρες σε αριθμό, μας ήρθε η σκέψη να κάνουμε κάτι : να προσπαθήσουμε να συγκεντρώσουμε τις δυνάμεις κάτω από έναν όρο με τον οποίο θα μπορούσαμε να αναφερθούμε σε όλες.* *Σω: Και βρήκατε κάτι σαν αυτό;* *Θεαι: Έτσι πιστεύω, αλλά πρέπει να το κοιτάξεις και εσύ.* *Σω: Πες μου γι΄ αυτό.* *Θεαι: Διαιρέσαμε όλους τους αριθμούς σε δύο κατηγορίες. Εάν ένας αριθμός μπορεί να προκύψει πολλαπλασιάζοντας κάποιον αριθμό με τον εαυτό του, τον συγκρίναμε με το τι είναι τετράγωνο σε σχήμα και τον ονομάσαμε «τετράγωνο» και «ισόπλευρο».* *Σω: Καλά.* *Θεαι: Αλλά εάν ένας αριθμός βρίσκεται ανάμεσα-αυτοί περιλαμβάνουν το 3 και το 5,και στην πραγματικότητα οποιοδήποτε αριθμό που δε μπορεί να προκύψει πολλαπλασιάζοντας έναν αριθμό με τον εαυτό του, αλλά προκύπτει πολλαπλασιάζοντας έναν μεγαλύτερο αριθμό με έναν μικρότερο ή έναν μικρότερο με έναν μεγαλύτερο, ώστε η πλευρά που τον περιέχει να είναι πάντα μεγαλύτερη και μικρότερη-τον συγκρίναμε με ένα ορθογώνιο σχήμα και τον ονομάσαμε «ορθογώνιο» αριθμό.* *Σω: Έξοχα. Αλλά μετά;* *Θεαι: Ορίσαμε όλες τις γραμμές που τετραγωνίζουν «ισόπλευρους» αριθμούς σε επίπεδες επιφάνειες ως «μήκος» και όλες τις γραμμές που τετραγωνίζουν «ορθογώνιους» αριθμούς ως «δυνάμεις», αφού δεν είναι σύμμετρες με το πρώτο είδος σε μήκος, αλλά μόνο με τους επίπεδους αριθμούς τους οποίους σχηματίζουν. Και υπάρχει και ένα άλλο σημείο σαν αυτό στην περίπτωση των στερεών.* *Σω: Αυτό είναι άριστο, παιδιά. Δεν πιστεύω πως ο Θεόδωρος πρόκειται να βρεθεί με μια κατηγορία ψευδορκίας.* *Θεαι: Ακόμα, Σωκράτη, δε θα μπορούσα να απαντήσω την ερώτηση σου για τη γνώση με τον τρόπο που το καταφέραμε με το «μήκος» και την «δύναμη». Αλλά νομίζω πως ψάχνεις κάτι σχετικό. Έτσι ο Θεόδωρος, μετά από αυτά, φαίνεται να έχει πει κάτι ψευδές.* *Σω: Αλλά κοίτα, εάν σε είχε επαινέσει για έναν αγώνα δρόμου και είχε πει πως δεν έχει συναντήσει ποτέ έναν νεαρό άντρα τόσο καλό σε αυτό, και μετά έτρεχες έναν αγώνα και έχανες από τον πιο εξαίρετο και γρήγορο, πιστεύεις ότι ο έπαινός του θα ήταν λιγότερο αληθής;* *Θεαι: Όχι.* *Σω: Και τι συμβαίνει με τη γνώση; Πιστεύεις ότι είναι ένα μικρό ζήτημα για να το*

Σω: θάῤῥει τοίνυν περὶ σαυτῷ καὶ τὶ οἴου Θεόδωρον λέγειν, προθυμήθητι δὲ παντὶ τρόπῳ τῶν τε ἄλλων πέρι καὶ ἐπιστήμης λαβεῖν λόγον τί ποτε τυγχάνει ὄν. *Θεαι: προθυμίας μὲν ἕνεκα, ὦ Σώκρατες, φανεῖται.* *Σω: ἴθι δή--καλῶς γὰρ ἄρτι ὑφηγήσω--πειρῶ μιμούμενος τὴν περὶ τῶν δυνάμεων ἀπόκρισιν, ὥσπερ ταύτας πολλὰς οὔσας ἑνὶ εἴδει περιέλαβες, οὕτω καὶ τὰς πολλὰς ἐπιστήμας ἑνὶ λόγῳ προσειπεῖν.*	*αναζητήσεις όπως είπα μόλις τώρα-όχι ένα από αυτά τα έργα που είναι επίπονα με οποιοδήποτε τρόπο;* *Θεαι: Μα τω Δία, όχι, πιστεύω ότι είναι πραγματικά ένα από τα πιο επίπονα θέματα.* *Σω: Τότε λοιπόν, μην αποθαρρύνεσαι και δέξου πως υπήρχε κάτι σε αυτό που έλεγε ο Θεόδωρος. Πάντα να κάνεις το καλύτερο με κάθε τρόπο και όσον αφορά τη γνώση, κάνε το καλύτερο για να κατακτήσεις σε έναν βαθμό το τι πραγματικά είναι ακριβώς.* *Θεαι: Εάν το να είμαι πρόθυμος μπορεί να το κάνει να συμβεί, Σωκράτη, θα φανεί.* *Σω: Συνέχισε τότε-επειδή έχεις περιγράψει τον τρόπο όμορφα-προσπάθησε να μιμηθείς την απάντησή σου για τις «δυνάμεις». Όπως ακριβώς τις συγκέντρωσες, αν και πολλές, σε μια κατηγορία, προσπάθησε με τον ίδιο τρόπο να βρεις έναν λόγο με τον οποίο να μιλήσεις για τα πολλά είδη της γνώσης.*

Σε αυτό το χωρίο του Θεαίτητου, βλέπουμε τον Πλάτωνα να εξετάζει δύο θέματα. Το πρώτο αφορά τον Θεόδωρο τον Κυρηναίο ο οποίος απέδειξε την ασυμμετρία πλευράς τετραγώνου προς την ποδιαία, με το εμβαδόν του τετραγώνου να είναι 3,5,…,17 τετραγωνικά πόδια. Το δεύτερο αφορά τον μαθητή του Θεόδωρου, Θεαίτητο, ο οποίος φαίνεται πως προχώρησε και γενίκευσε την εργασία του πρώτου και υπέδειξε πως οι ρίζες μη τετράγωνων φυσικών αριθμών είναι άρρητες. Εδώ ,λοιπόν, ο Πλάτωνας μας παρουσιάζει δύο αντίθετες ,θα λέγαμε, προσωπικότητες. Από τη μία ο Θεόδωρος, αυστηρός μαθηματικός, σε μεγάλη ηλικία ,κυρίως γεωμέτρης και από την άλλη ο Θεαίτητος, πιο φιλοσοφικό μυαλό, νεότερος, προσπαθεί να ταξινομήσει, να θεμελιώσει, να γενικεύσει και πιθανότατα στηρίζεται στη φιλοσοφία που αντιπροσωπεύει ο Πλάτωνας. Μπορούμε να πούμε ότι εδώ οι στόχοι του Πλάτωνα εντοπίζονται σε δύο κυρίως σημεία: Να αναγάγει τα μαθηματικά από επιμέρους έννοιες σε πιο γενικές και θεμελιώδεις και να αντιπαραβάλει δύο διαφορετικές γενιές μαθηματικών, δύο διαφορετικούς χαρακτήρες.

3.2.1 Η μαθηματική σημασία του *Θεαίτητου*

Αναφορικά με τη μαθηματική σημασία του χωρίου, ο Πλάτωνας κατατάσσει τους αριθμούς σε δύο κατηγορίες. Τους αριθμούς που είναι γινόμενο δύο ίσων αριθμών και αναπαρίστανται με ένα τετράγωνο τους ονομάζει τετράγωνους και ισόπλευρους. (π.χ. 2x2=4). Τους αριθμούς που εντοπίζονται ενδιάμεσά τους, είναι γινόμενο δύο άνισων αριθμών και αναπαρίστανται με ένα προμήκες (ορθογώνιο παραλληλόγραμμο) τους ονομάζει προμήκεις.(π.χ. 3x5=15). Με τον ίδιο τρόπο, ο Πλάτωνας κάνει λόγο για δύο κατηγορίες ευθυγράμμων τμημάτων. Το ευθύγραμμο τμήμα που είναι πλευρά τετραγώνου με εμβαδόν τετράγωνο αριθμό λέγεται *μῆκος* ενώ το ευθύγραμμο τμήμα που είναι πλευρά τετραγώνου με εμβαδό προμήκη αριθμό λέγεται *δύναμις.*[66] Ο Θεαίτητος μάλιστα αναφέρει πως ανάλογη διάκριση μπορούμε να κάνουμε και στα στερεά υπονοώντας ενδεχομένως τις ρητές και άρρητες κυβικές ρίζες.

Ας προσπαθήσουμε να αναλύσουμε το χωρίο λαμβάνοντας στοιχεία και από γνωστούς μελετητές. Αρχικά, κάποιος που διαβάζει το χωρίο παρατηρεί ότι δε γίνεται πουθενά λόγος για την $\sqrt{2}$.Μια απλή υπόθεση για αυτό θα ήταν ότι αυτή η περίπτωση, δηλαδή η ασυμμετρία της $\sqrt{2}$ θεωρούνταν ήδη γνωστή την εποχή που γράφτηκε το κείμενο. Με αυτήν την προσέγγιση συμφωνεί και ο *Heath* (*σ.204*) ο οποίος μάλιστα μας υπενθυμίζει επιγραμματικά ότι η απόδειξη σχετικά με την ασυμμετρία της $\sqrt{2}$ εμπλέκει τις έννοιες άρτιος και περιττός αριθμός φτάνοντας σε αντίφαση (το άτοπο είναι πως ο αριθμός 2 προκύπτει να είναι και άρτιος και περιττός όπως είδαμε και σε προηγούμενο κεφάλαιο).Επιπλέον είναι λογικό να αναλογιστούμε με ποιο τρόπο ο Θεόδωρος απέδειξε την ασυμμετρία των $\sqrt{3}$,$\sqrt{5}$ κ.τ.λ. Θα μπορούσε κάποιος να υποθέσει ότι η απόδειξη για αυτές τις περιπτώσεις περιείχε μια παρόμοια διαδικασία με αυτήν για την περίπτωση του $\sqrt{2}$.Κάτι τέτοιο μας παρουσιάζει και ο *Heath* (*σ.205*).Ας θεωρήσουμε ότι ο Ν είναι ένας μη τετράγωνος αριθμός π.χ 3 ή 5 και ακόμη ότι $\sqrt{N}=\frac{\alpha}{\beta}$ όπου α, β είναι ακέραιοι αριθμοί και πρώτοι προς αλλήλους. Τότε θα έχουμε ότι $\alpha^2=N\cdot\beta^2$ που σημαίνει ότι το α^2 και κατ΄ επέκταση και το α, είναι πολλαπλάσια του Ν. Έστω το α να είναι ίσο με $\alpha=\kappa\cdot N$ (1) και συνεπώς $\beta^2=N\cdot\kappa^2$.Τότε με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι το β είναι πολλαπλάσιο του Ν. Έστω το β να είναι ίσο με $\beta=\lambda\cdot N$(2). Από τις σχέσεις (1),(2) βλέπουμε ότι $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\kappa}{\lambda}$ όπου $\kappa<\alpha$ και $\lambda<\beta$. Συνεπώς το κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ δεν έχει τους μικρότερους δυνατούς όρους και αυτό έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεση.

Το ερώτημα είναι αν ο Θεόδωρος θα είχε λόγο να χρησιμοποιήσει μια σχετική απόδειξη για τις περιπτώσεις $\sqrt{3}$ μέχρι $\sqrt{17}$.Ο Heath υποστηρίζει πως αυτή η εικασία, δηλαδή ότι ο Θεόδωρος δεν προέβη σε ανθυφαίρεση αλλά σε κάτι απλούστερο, προκαλεί δυο προβληματισμούς (*Heath,σ.205*).Ο πρώτος είναι πως εάν ο Θεόδωρος είχε πράγματι ακολουθήσει μια απλή διαδικασία σαν αυτή που περιγράφουμε παραπάνω και αν είχε απλά βασιστεί στην απόδειξη ασυμμετρίας του $\sqrt{2}$ για να πάει παραπέρα, ο Πλάτωνας δε θα είχε κάποιο σοβαρό λόγο να το αναφέρει όλο αυτό σα μια νέα σημαντική ανακάλυψη. Βέβαια το ίδιο το επιχείρημα που χρησιμοποιεί ο Heath στη συνέχεια εξασθενεί, καθώς ο ίδιος δε φαίνεται και απόλυτα σίγουρος αν ο Πλάτωνας σκόπευε να αποδώσει στον Θεόδωρο μια αξιοσημείωτη ανακάλυψη. Κατά τον Heath ο σκοπός του χωρίου είναι να δείξει πως ένας ορισμός μέσω απαρίθμησης, δε μπορεί να είναι σωστός ορισμός. Για παράδειγμα, δε μπορώ να ορίσω την *ἐπιστήμη* απαριθμώντας κάποιες *ἐπιστῆμαι.* Είναι σα να χάνει ο ορισμός την δύναμή του και να έπεται των παραδειγμάτων. Άρα, ήταν

[66] Κλειδί εδώ αποτελεί μια λέξη στην οποία δε φαίνεται όπως θα δούμε να επιμένουν οι μελετητές: η λέξη «ὡρισάμεθα» η οποία μας δείχνει ότι ο Θεαίτητος ταξινόμησε τις γραμμές σε «μήκος» και σε «δυνάμεις».

η γενίκευση της διαδικασίας του Θεόδωρου από τον Θεαίτητο, αυτό που πιθανότατα εντυπωσίασε τον Πλάτωνα και όχι οι ίδιες οι αποδείξεις του Θεόδωρου. Ο δεύτερος προβληματισμός είναι ότι εάν ο Θεόδωρος είχε συλλογιστεί με τον τρόπο που υποδείξαμε παραπάνω, είναι ανεξήγητο το γιατί επεξεργάστηκε τις περιπτώσεις $\sqrt{3}$,$\sqrt{5}$ κ.τ.λ. όπως ξεκάθαρα λέει ο Πλάτωνας, και κατόπιν σταμάτησε στην $\sqrt{17}$,μιας και η απόδειξη αυτή μπορεί εύκολα να εφαρμοστεί και στη γενική περίπτωση. Αυτόν ακριβώς τον προβληματισμό, θέτει και ο *Van der Waerden* (*σ.164*) και οδηγείται στην υπόθεση ότι ο Θεόδωρος ακολούθησε ανθυφαιρετική διαδικασία, αφού σε μια τέτοια περίπτωση θα ήταν απαραίτητο να ασχοληθεί ξεχωριστά με τον κάθε αριθμό, δεδομένου πως η διαδικασία της ανθυφαίρεσης εκτυλίσσεται διαφορετικά για τον καθέναν.

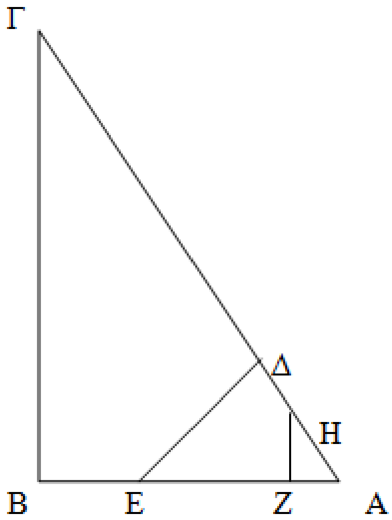
Ενδιαφέρον παρουσιάζει η προσέγγιση του Zeuthen (*Zeuthen, ' Sur la constitution des livres arithmetiques des Elements d'Euclide et leur rapport it la question de l'irrationalite' in Oversigt over det kgl. Danske videnskabernes Selskabs ForhandUnger,1915,σ.422*) την οποία και αναπαραγάγει ο Heath (*σ.206*) σύμφωνα με την οποία ο Θεόδωρος βασίστηκε στην πρόταση *X.2* των *Στοιχείων* του Ευκλείδη: «*Ἐὰν δύο μεγεθῶν [ἐκκειμένων] ἀνίσων ἀνθυφαιρουμένου ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος τὸ καταλειπόμενον μηδέποτε καταμετρῇ τὸ πρὸ ἑαυτοῦ, ἀσύμμετρα ἔσται τὰ μεγέθη*». Δηλαδή αν δοθούν δύο άνισα μεγέθη και ανθυφαιρείται πάντοτε το μικρότερο από το μεγαλύτερο και το υπόλοιπο που κάθε φορά απομένει δε μετρά το προηγούμενό του, τότε τα δύο μεγέθη είναι ασύμμετρα. Η φράση *μηδέποτε καταμετρῇ* παραπέμπει σε άπειρη ανθυφαίρεση οπότε άπειρη ανθυφαίρεση σημαίνει ασύμμετρα μεγέθη. Βέβαια κάποιος θα ήταν δυνατόν να υποστηρίξει ότι ο Θεόδωρος δεν θα μπορούσε εύκολα να στηριχτεί στην πρόταση αυτή ,μιας και απαιτεί γνώση της πρότασης *X.1*[67] η οποία είναι μεταγενέστερη της εποχής του.[68] Όμως ο Zeuthen επισημαίνει ότι ενδεχομένως η αναγκαιότητα της πρότασης *X.1* να μην είχε γίνει αντιληπτή τότε ή ο Θεόδωρος να είχε προχωρήσει από διαίσθηση (*Heath,σ.206*). Μάλιστα, ο Heath ορμώμενος από τον Zeuthen παρουσιάζει μια πιθανή γεωμετρική απόδειξη που θα μπορούσε να είχε ακολουθήσει ο Θεόδωρος για την ασυμμετρία της $\sqrt{5}$ (*σ.207*).Η απόδειξη έχει ως εξής:

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B}$=90°.Παίρνουμε ΑΒ=1,ΒΓ=2 και συνεπώς από Πυθαγόρειο θεώρημα ΑΓ=$\sqrt{5}$.Θεωρούμε σημείο Δ πάνω στην ΑΓ ώστε ΓΔ=ΓΒ=2 και φέρνουμε ΔΕ κάθετη στην ΑΓ. Τότε ΔΕ=ΕΒ από ισότητα των τριγώνων ΓΔΕ και ΓΕΒ. Βλέπουμε ότι ΑΔ=$\sqrt{5}-2$ και από όμοια τρίγωνα ΔΕ=2·ΑΔ=2·($\sqrt{5}-2$).Τώρα παίρνουμε στην ΕΑ σημείο Ζ ώστε ΕΔ=ΕΖ και

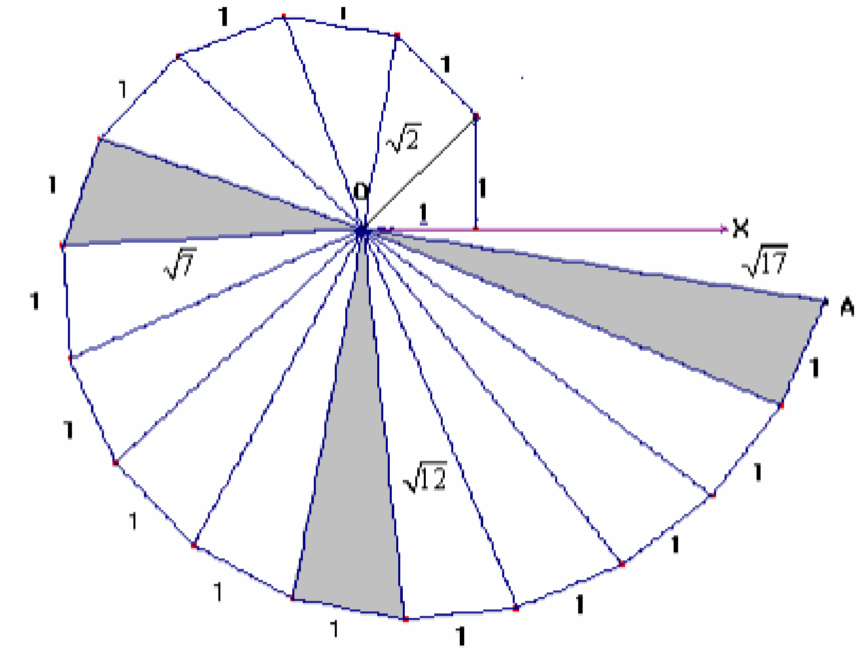
[67] *X.1: «Δύο μεγεθῶν ἀνίσων ἐκκειμένων, ἐὰν ἀπὸ τοῦ μείζονος ἀφαιρεθῇ μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ καὶ τοῦ καταλειπομένου μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ, καὶ τοῦτο ἀεὶ γίγνηται, λειφθήσεταί τι μέγεθος,ὃ ἔσται ἔλασσον τοῦ ἐκκειμένου ἐλάσσονος μεγέθους».* Δηλαδή έστω δύο άνισα μεγέθη. Αν από το μεγαλύτερο αφαιρεθεί μέγεθος μεγαλύτερο από το μισό του και από το υπόλοιπο αφαιρεθεί ξανά μέγεθος μεγαλύτερο από το μισό του και η διαδικασία αυτή επαναληφθεί συνεχώς, θα απομείνει μέγεθος μικρότερο του μικροτέρου από τα αρχικά δεδομένα μεγέθη.

[68] Η πρόταση *X.1* φαίνεται πως βασίστηκε στην περίφημη θεωρία αναλογιών του Ευδόξου (*ορισμός V4* των *Στοιχείων*). Αν αναλογιστούμε πως ο Εύδοξος έδρασε γύρω στα 380 π.Χ σε μια κατάλληλη ηλικία (γεννήθηκε το 407 π.Χ) ενώ ο Θεόδωρος έδρασε γύρω στα 440 π.Χ (γεννήθηκε περίπου το 465 π.Χ και πέθανε το 398 π.Χ) είναι βέβαιο ότι οι ανακαλύψεις του Ευδόξου ήταν άγνωστες σε εκείνον.

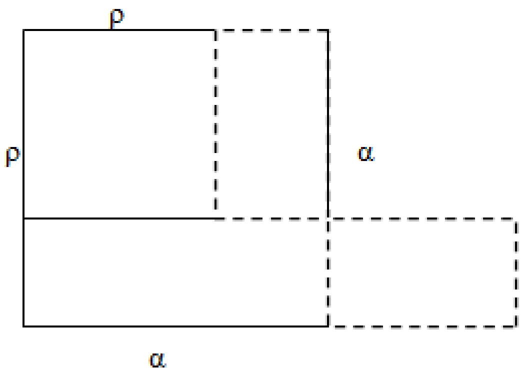
φέρνουμε ΖΗ κάθετη στην ΑΕ. Τότε θα έχουμε ότι ΑΖ=ΑΒ−ΒΖ=ΑΒ−2ΔΕ=1−4($\sqrt{5}-2$)= $(\sqrt{5}-2)^2$.Επιπλέον παρατηρούμε ότι τα ΑΒΓ,ΑΔΕ και ΑΖΗ είναι όμοια τρίγωνα που σημαίνει ότι ΑΒ:ΑΔ:ΑΖ=1: $(\sqrt{5}-2)$: $(\sqrt{5}-2)^2$ και ούτω καθεξής. Η διαδικασία αυτή δεν τελειώνει ποτέ μιας και ο λόγος της νέας πλευράς προς την προηγούμενη είναι πάντα $\sqrt{5}-2$. Επίσης αφού ΑΒ>ΖΒ(ή 2ΔΕ ή 4ΑΔ) η πλευρά του κάθε τριγώνου στη σειρά είναι μικρότερη από το $\frac{1}{4}$ της αντίστοιχης πλευράς του ακόλουθου τριγώνου. Το αντίστοιχο σχήμα δίνεται παρακάτω:



Αυτή η διαδικασία της ανθυφαίρεσης με λόγους ευθυγράμμων τμημάτων υποστηρίζεται και από τον Van der Waerden (*σ.166-7*). Συγκεκριμένα αρχικά αναφέρει (*σ.163*) ότι ο Θεόδωρος ίσως να ακολούθησε την πρόταση *I.14* των Στοιχείων μετασχηματίζοντας ορθογώνια με εμβαδά 3,5,…17 σε τετράγωνα ή να χρησιμοποίησε το Πυθαγόρειο θεώρημα και να κατέληξε στο σχήμα που βρίσκουμε στη μονογραφία του J.H.Anderhub(*Joco-Seria,Aus den Papieren eines reisenden Kaufmannes,Ausgabe der Kalle-Werke,Wiesbaden,1941*),σχήμα το οποίο κατά κάποιο τρόπο δείχνει γιατί ο Θεόδωρος να σταμάτησε στο 17.



Όμως, ο Van der Waerden στηριζόμενος στον Zeuthen ,υπογραμμίζει ότι εάν κάποιος μπορεί να δείξει ότι μετά από έναν ορισμένο αριθμό βημάτων, η ανθυφαίρεση οδηγεί σε ένα ζεύγος ευθυγράμμων τμημάτων ο λόγος των οποίων είναι ο ίδιος με τον λόγο του ζεύγους από το οποίο ξεκίνησε, τότε μπορεί να συμπεράνει ότι η διαδικασία δε θα τελειώσει ποτέ (*σ.166*). Για παράδειγμα έστω α η πλευρά ενός τετραγώνου 3 τετραγωνικών ποδών και ρ η μονάδα μήκους. Τότε έχουμε $α^2=3ρ^2$.Αφαιρούμε το ρ από το α. Το υπόλοιπο είναι α-ρ. Έχουμε τώρα δύο τμήματα, ρ και α-ρ. Συνεχίζοντας τη διαδικασία μπορούμε να αντικαταστήσουμε τα ρ και α-ρ με δύο οποιαδήποτε άλλα τμήματα που έχουν τον ίδιο λόγο. Τώρα έχουμε ρ: (α-ρ)=(α+ρ): 2ρ (1) αφού το γινόμενο των μέσων ισούται με το γινόμενο των άκρων δηλαδή $(α-ρ)(α+ρ)=α^2-ρ^2=2ρ^2$ (2).Ο ίδιος τρόπος εφαρμόζεται και στα τμήματα α+ρ και 2ρ.Αφαιρούμε το 2ρ από το α+ρ ,παίρνοντας έτσι α-ρ. Τώρα τα 2ρ και α-ρ αντικαθίστανται από δύο τμήματα με τον ίδιο λόγο δηλαδή 2ρ: (α-ρ)=(α+ρ) :ρ. Η τελευταία σχέση είναι δυνατόν να αποδειχθεί όπως και η σχέση (1). Αν πάρουμε τώρα τα α+ρ και ρ και αφαιρέσουμε το τελευταίο από το πρώτο βρίσκουμε α και ρ. Όμως αυτά είναι τα τμήματα με τα οποία ξεκινήσαμε. Επομένως ο λόγος επαναλαμβάνεται, οπότε η διαδικασία είναι περιοδική και δε θα τερματιστεί ποτέ. Μάλιστα η ισότητα (2) μπορεί να αποδειχθεί με τη χρήση εμβαδών ως ακολούθως:



Η διαφορά $α^2-ρ^2$ είναι ένας «γνώμονας» όπως φαίνεται στο σχήμα αριστερά. Αν το διακεκομμένο μέρος αφαιρεθεί και ύστερα προστεθεί στα δεξιά, θα προκύψει ένα ορθογώνιο με πλευρές α-ρ και α+ρ. Άρα, $(α+ρ)(α-ρ)=α^2-ρ^2$. Ανάλογες αποδείξεις μπορούν να δοθούν στις περιπτώσεις για πλευρά τετραγώνου 5,7,…17 τετραγωνικών ποδών. Ο Van der

Waerden (*σ. 167*) παρατηρεί πως η περίπτωση για το 19 είναι εξαιρετικά περίπλοκη σε σχέση με τις προηγούμενες γιατί απαιτεί πολλές αναλογίες στη σειρά. Για αυτό και ο Θεόδωρος θα ήταν λογικό να σταματήσει στο 17 αν υποθέσουμε ότι ακολούθησε παρόμοια μέθοδο απόδειξης. Μάλιστα, οVan der Waerden για να ενισχύσει τη θέση του, υπογραμμίζει ότι αυτή η απόδειξη είναι ανάλογη με εκείνη που χρησιμοποιούσαν οι Πυθαγόρειοι στην παραβολή των χωρίων με έλλειψη ή υπερβολή, άρα δεν είναι απίθανο ένας παρόμοιος τρόπος απόδειξης να υιοθετήθηκε και από τον Θεόδωρο.

Συμπερασματικά, θα μπορούσαμε να υποθέσουμε ότι ο Θεόδωρος χρησιμοποίησε κάποιο τρόπο απόδειξης που περιείχε ανθυφαίρεση με λόγους ευθυγράμμων τμημάτων, καθώς η γενίκευση της απόδειξης ασυμμετρίας της $\sqrt{2}$ δε θα αποτελούσε κάτι άξιο λόγου. Βέβαια μια πιο απλή σκέψη θα ήταν ότι ο Θεόδωρος σταμάτησε στο 17 χωρίς κανένα ιδιαίτερο λόγο αλλά ως τυχαίο γεγονός. Φυσικά όλα αυτά μόνο υποθέσεις αποτελούν, χωρίς να είμαστε σε θέση να δώσουμε μια βέβαια απάντηση.

3.2.2 Ερμηνεία λέξεων από τον *Θεαίτητο*

Από το χωρίο αυτό του Πλάτωνα προκύπτουν κάποια θέματα που πρέπει να μελετήσουμε. Συγκεκριμένα θα πρέπει να εξετάσουμε με ποια έννοια χρησιμοποιούνται οι όροι «δύναμις», «ἔγραφε», «ἀποφαίνων» και τι υπονοεί η φράση «έν δὲ ταύτῃ πως ένέσχετο».

Ο Knorr θεωρεί ότι ο Πλάτωνας μας αναφέρει αυτό που ανακάλυψε ο Θεόδωρος, αλλά δε μας δίνει καθόλου στοιχεία για τον τρόπο ή τη μέθοδο εργασίας με την οποία έφτασε στα συμπεράσματά του (*σ.65 κ.ε*). Εν συνεχεία παρατηρεί ότι ο Paul Tannery πρότεινε να διορθωθεί ο όρος «δύναμις» και να αντικατασταθεί από τον όρο «δυναμένη». Αφού όμως στοχεύουμε σε όσο το δυνατό πιο προσεκτική μελέτη των κειμένων του Πλάτωνα προκειμένου να κατανοήσουμε γιατί ο συγγραφέας εκφράζεται με τον έναν τρόπο και όχι με άλλον, την παραπάνω προσέγγιση θα την απορρίψουμε σχεδόν άμεσα. Ειδικά στη δική μας περίπτωση, όπου ο όρος «δύναμις» συναντάται τρεις φορές σε όλο το χωρίο και φαίνεται να είναι πρωταρχικής σημασίας, δεν είναι δυνατόν ο Πλάτωνας να είχε λανθασμένη διατύπωση.

Ο Ευκλείδης στο Χ Βιβλίο των *Στοιχείων* χρησιμοποιεί τους όρους «δυνάμει σύμμετρο» και «μήκη σύμμετρο»:[69]

Χ.ὅρος 2: «εὐθεῖαι δυνάμει σύμμετροί εἰσιν, ὅταν τὰ ἀπ΄αὐτῶν τετράγωνα τῷ αὐτῷ χωρίῳ μετρῆται,ἀσύμμετροι δε,ὅταν τοῖς ἀπ΄ αὐτῶν τετραγώνοις μηδὲν ἐνδέχηται χωρίον κοινὸν μέτρον γενέσθαι»

Χ9: Τὰ ἀπὸ τῶν μήκει συμμέτρων εὐθειῶν τετράγωνα πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ τὰ τετράγωνα τὰ πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχοντα, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, καὶ τὰς πλευρὰς ἕξει μήκει συμμέτρους. τὰ δὲ ἀπὸ τῶν μήκει ἀσυμμέτρων εὐθειῶν τετράγωνα πρὸς ἄλληλα

[69] Μάλιστα ο Ευκλείδης δεν χρησιμοποιεί ποτέ τον όρο «δύναμις» αλλά τον όρο «δυνάμει» ο οποίος σημαίνει στο τετράγωνο και δεν προκαλεί σύγχυση (δυνάμει<δύναμαι=μπορώ να κάνω κάτι).

λόγον οὐκ ἔχει, ὅνπερ τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ τὰ τετράγωνα τὰ πρὸς ἄλληλα λόγον μὴ ἔχοντα, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδὲ τὰς πλευρὰς ἕξει μήκει συμμέτρους.

X.10: Τῇ προτεθείσῃ εὐθείᾳ προσευρεῖν δύο εὐθείας ἀσυμμέτρους, τὴν μὲν μήκει μόνον, τὴν δὲ καὶ δυνάμει.

Ο Ιπποκράτης ο Χίος που είναι σύγχρονος του Θεόδωρου , κατά των τετραγωνισμό των μηνίσκων χρησιμοποιεί την ίδια ορολογία, για παράδειγμα:
(Σιμπλίκιος, Εις Αριστοτέλους Φυσικά, 9,61,6-7):ὅτι τὸν αὐτόν λόγον ἔχει τά τε ὅμοια τῶν κύκλων τμήματα πρὸς ἄλληλα καὶ αἱ βάσεις αὐτῶν δυνάμει (δηλαδή βάσεις στο τετράγωνο)

Ο Πλάτωνας χρησιμοποιεί τον όρο αυτό (δύναμις) και σε άλλα συγγράμματά του:
(Πολιτικός 266b): ΞΕ. Ἡ φύσις, ἣν τὸ γένος ἡμῶν τῶν ἀνθρώπων κέκτηται, μῶν ἄλλως πως εἰς τὴν πορείαν πέφυκεν ἢ καθάπερ ἡ διάμετρος ἡ δυνάμει δίπους;
ΝΕ. ΣΩ. Οὐκ ἄλλως.
ΞΕ. Καὶ μὴν ἥ γε τοῦ λοιποῦ γένους πάλιν ἐστὶ κατὰ δύναμιν αὖ τῆς ἡμετέρας δυνάμεως διάμετρος, εἴπερ δυοῖν γέ ἐστι ποδοῖν δὶς πεφυκυῖα.

(Τίμαιος 54b): ἀλλὰ τῷ τοῦτο ἐλέγξαντι καὶ ἀνευρόντι δὴ οὕτως ἔχον κεῖται φίλια τὰ ἆθλα. προῃρήσθω δὴ δύο τρίγωνα ἐξ ὧν τό τε τοῦ πυρὸς καὶ τὰ τῶν ἄλλων
σώματα μεμηχάνηται, τὸ μὲν ἰσοσκελές, τὸ δὲ τριπλῆν κατὰ δύναμιν ἔχον τῆς ἐλάττονος τὴν μείζω πλευρὰν ἀεί. τὸ δὴ πρόσθεν ἀσαφῶς ῥηθὲν νῦν μᾶλλον διοριστέον. τὰ γὰρ τέτταρα γένη δι' ἀλλήλων εἰς ἄλληλα ἐφαίνετο πάντα γέ-
νεσιν ἔχειν, οὐκ ὀρθῶς φανταζόμενα·

(Πολιτεία 587d): Τριπλασίου ἄρα, ἦν δ' ἐγώ, τριπλάσιον ἀριθμῷ ἀληθοῦς
ἡδονῆς ἀφέστηκεν τύραννος.
Φαίνεται.
Ἐπίπεδον ἄρ', ἔφην, ὡς ἔοικεν, τὸ εἴδωλον κατὰ τὸν τοῦ
μήκους ἀριθμὸν ἡδονῆς τυραννικῆς ἂν εἴη.
Κομιδῇ γε.
Κατὰ δὲ δύναμιν καὶ τρίτην αὔξην δῆλον δὴ ἀπόστασιν
ὅσην ἀφεστηκὼς γίγνεται.
(εδώ το «δύναμιν» σημαίνει αύξηση στο τετράγωνο μιας και μετά ακολουθεί το «τρίτην αὔξην»)

Ο Knorr μελετώντας τον όρο αυτό σε έργα του Πλάτωνα ή συγχρόνων του, καταλήγει στο συμπέρασμα ότι ο Πλάτωνας κάνει «τηλεγραφική» χρήση των όρων. Δηλαδή αναφέρει «μήκος» και εννοεί «γραμμή μήκει σύμμετρος με την ποδιαία», αναφέρει «δύναμις» και εννοεί «γραμμή ου σύμμετρος, αλλά δυνάμει μόνο σύμμετρος με την ποδιαία» *(Knorr,σ. 67).*

Σχετικά με τον όρο «γράφειν», εντοπίζουμε δύο διαφορετικές ερμηνείες στη σημασία του από τους μελετητές. Κάποιοι μελετητές μεταξύ των οποίων και οι H.Schmidt,H.Vogt και J.H.Anderhub υποστηρίζουν ότι ο Θεόδωρος ο Κυρηναίος απλά κατασκεύασε τις ρίζες 3,5,…17.Δε συμβαίνει όμως το ίδιο με τον T.L.Heath και μια ομάδα μελετητών που υποστηρίζουν ότι ο όρος «γράφειν» δε σημαίνει απλά κατασκεύασε αλλά απέδειξε την ασυμμετρία των ριζών αυτών (*Knorr,σ.69 κ.ε.*). Μάλιστα, ο Heath υπογραμμίζει ότι και συγγραφείς όπως ο Αρχιμήδης και ο Αριστοτέλης αποδίδουν την έννοια «για να αποδείξει…» στο απαρέμφατο «γράφειν». Όμως ο Knorr σημειώνει ότι ο ισχυρισμός αυτός δεν επαρκεί για να είμαστε βέβαιοι ότι το ίδιο ισχύει και στα συγγράμματα του Πλάτωνα. Για να το εξετάσουμε οφείλουμε να μελετήσουμε σε εύρος το έργο του ίδιου του συγγραφέα.

Ο Zeuthen εισάγει μια δική του υπόθεση: αυτή της «κατασκευαστικής» απόδειξης. Υποστηρίζει ότι ο Θεόδωρος απέδειξε την ύπαρξη των ριζών μόνο κατασκευάζοντάς τες. Ο Knorr αντιπαρατίθεται σε αυτό, υποστηρίζοντας ότι σε μια τέτοια περίπτωση ο Πλάτωνας θα έκανε αναφορά σε αυτό μόνο εισαγωγικά και εντελώς χωριστά από τη συζήτηση σχετικά με τη θεωρία ασυμμετρίας (*Knorr,σ.69*). Εξάλλου αν στην εποχή του Θεόδωρου το επίπεδο απόδειξης ήταν τέτοιο ώστε να δέχονται τις κατασκευές ως αποδείξεις, τότε ο Θεαίτητος δε θα ήταν σε θέση να επιτύχει τέτοιο άλμα και να φτάσει στα συμπεράσματα που στοιχειοθετούν τη θεωρία λόγων του *X* βιβλίου των *Στοιχείων.*

Ο Αριστοτέλης αναφέρει ότι τα διαγράμματα βοηθούν όποιον εξετάζει κάποιο θεώρημα *(Μετεωρολογικά 375b18)*: «*ἐκ τοῦ διαγράμματος ἔσται θεωροῦσι δῆλον*». Στο σημείο που ο Αμμώνιος σχολιάζει την αναφορά του Αριστοτέλη στις *Κατηγορίες(14a39*), εκφράζει την άποψη ότι «διαγράμματα και θεωρήματα είναι το ίδιο». Ο Ασκληπιός σε σχόλιο στα *Μεταφυσικά (998a26*) παρατηρεί ότι «τα διαγράμματα είναι συνώνυμα με τα θεωρήματα στη γεωμετρία». Επίσης άλλοι συγγραφείς όπως για παράδειγμα ο Σιμπλίκιος που αναφέρει ότι «ο τετραγωνισμός των μηνίσκων για πρώτη φορά «εγράφησαν» (απεδείχθη) από τον Ιπποκράτη το Χίο» εναλλάσσουν τα «γράφειν – αποδεικνύειν» ή «διαγράμματα – θεωρήματα», θέλοντας να τονίσουν ότι τα διαγράμματα για παράδειγμα δεν είναι απλώς το κατασκευαστικό κομμάτι κάποιας απόδειξης. Αποτελούνται φυσικά από την κατασκευή κάποιου σχήματος, η οποία όμως διαδραματίζει καίριο και σημαντικότατο ρόλο στην απόδειξη του κάθε θεωρήματος. Με τη θέση αυτή ταυτίζεται και ο Πλάτωνας αφού στον *Μένωνα (82b-85e),* μέσω διαγραμμάτων ο Σωκράτης οδηγεί τον σκλάβο στο σωστό θεώρημα για τη σχέση διαμέτρου – πλευράς τετραγώνου.

Οι απόψεις των μελετητών διίστανται στην ερμηνεία του «ἀποφαίνων» καθώς μια ομάδα μελετητών και συγκεκριμένα οι A.Szabo, S.Heller, J.H.Anderhub, F.Hultsch και E.Sachs προσανατολίζεται στο ότι ο Θεόδωρος «έδειξε ευρηματικά» την ασυμμετρία των μεγεθών, ενώ μια άλλη ομάδα αποτελούμενη από τους Heath, H.Vogt, H.Zeuthen, B.L. vd Waerden και W.Knorr υποστηρίζει ότι ο Θεόδωρος «απέδειξε» τις συγκεκριμένες ασυμμετρίες (*Knorr,σ.75 κ.ε.*). Τα επιχειρήματα που παρουσιάζονται από τους μεν πρώτους πιστεύοντας ότι το ρήμα δεν σημαίνει «αποδεικνύω» είναι ασθενή. Ο Anderhub υιοθετεί αυτή τη στάση μιας και το λεξικό στο οποίο βασίστηκε δεν δίνει την ερμηνεία «αποδεικνύω=prove, demonstrate formally».Ομοίως ο Szabo ισχυρίζεται ότι ο Θεόδωρος δεν προχώρησε σε αποδείξεις αφού δεν υπάρχει στο χωρίο το ρήμα «δεικνύναι». Μία κάπως πιο προσεκτική μελέτη,η οποία όμως αποδεικνύεται λανθασμένη, πραγματοποιείται από τους Heller και Sachs οι οποίοι αναζητούν άλλες ερμηνείες-χρήσεις του όρου αυτού. Σε χωρίο από το κείμενο *Μέθοδος* ο Αρχιμήδης αναφέρει ότι «ο Εύδοξος απέδειξε (εξηύρηκεν πρώτος την απόδειξιν) αυτό που πρώτος είχε δηλώσει ο Δημόκριτος χωρίς απόδειξη(την απόφασιν την περί του ειρημένου σχήματος χωρίς αποδείξεως αποφηναμένω)». Το θέμα είναι πως η χρήση αυτού του παραδείγματος προκειμένου να δοθεί μοναδική και σωστή ερμηνεία στο «ἀποφαίνων» φαίνεται να είναι προβληματική καθώς ο Knorr σωστά παρατηρεί, ότι αν δεχτούμε πως ο Αρχιμήδης χρησιμοποιούσε τη λέξη «αποφηναμένω» εννοώντας «ισχυρίζομαι-δηλώνω» τότε θα παρατηρήσουμε ότι η χρήση της έκφρασης «χωρίς απόδειξεως» φαντάζει πλεονασμός. Παράλληλα, το ρήμα «αποφαίνω» στο παραπάνω παράδειγμα βρίσκεται στη μέση φωνή και όχι στην ενεργητική όπως συμβαίνει με το χωρίο που εξετάζουμε. Ένα ακόμα πολύ σημαντικό παράδειγμα που αντικρούει αυτό των Heller και Sachs αποτελεί η χρονική περίοδος του παραδείγματος που επικαλούνται. Όπως ξέρουμε, ο Αρχιμήδης είναι μεταγενέστερος του Πλάτωνα. Μάλιστα, γνωρίζοντας τη χρήση του «δεικνύναι» από τον Ευκλείδη και αντίστοιχα τη χρήση του «αποδεικνύναι» από τον Αριστοτέλη, είναι εύλογο το γιατί χρησιμοποιεί αυτά τα ρήματα για να περιγράψει αποδείξεις.

Ο Knorr αναζητώντας τη σωστή ερμηνεία του «αποφαίνων» μελετά τα κείμενα του ίδιου του Πλάτωνα.

(Παρμενίδης 129b-130a):τί θαυμαστόν; εἰ μὲν γὰρ αὐτὰ τὰ ὅμοιά τις ἀπέφαινεν
ἀνόμοια γιγνόμενα ἢ τὰ ἀνόμοια ὅμοια, τέρας ἂν
οἶμαι ἦν· εἰ δὲ τὰ τούτων μετέχοντα ἀμφοτέρων ἀμφότερα
ἀποφαίνει πεπονθότα, οὐδὲν ἔμοιγε, ὦ Ζήνων, ἄτοπον δοκεῖ,
οὐδέ γε εἰ ἓν ἅπαντα ἀποφαίνει τις τῷ μετέχειν τοῦ ἑνὸς
καὶ ταὐτὰ ταῦτα πολλὰ τῷ πλήθους αὖ μετέχειν. ἀλλ᾽ εἰ
ὃ ἔστιν ἕν, αὐτὸ τοῦτο πολλὰ ἀποδείξει καὶ αὖ τὰ πολλὰ δὴ
ἕν, τοῦτο ἤδη θαυμάσομαι. καὶ περὶ τῶν ἄλλων ἁπάντων
ὡσαύτως· εἰ μὲν αὐτὰ τὰ γένη τε καὶ εἴδη ἐν αὑτοῖς ἀπο-
φαίνοι τἀναντία ταῦτα πάθη πάσχοντα, ἄξιον θαυμάζειν·
εἰ δ᾽ ἐμὲ ἕν τις ἀποδείξει ὄντα καὶ πολλά, τί θαυμαστόν,
λέγων, ὅταν μὲν βούληται πολλὰ ἀποφῆναι, ὡς ἕτερα μὲν
τὰ ἐπὶ δεξιά μού ἐστιν, ἕτερα δὲ τὰ ἐπ᾽ ἀριστερά, καὶ ἕτερα
μὲν τὰ πρόσθεν, ἕτερα δὲ τὰ ὄπισθεν, καὶ ἄνω καὶ κάτω
ὡσαύτως—πλήθους γὰρ οἶμαι μετέχω—ὅταν δὲ ἕν, ἐρεῖ ὡς
ἑπτὰ ἡμῶν ὄντων εἷς ἐγώ εἰμι ἄνθρωπος μετέχων καὶ τοῦ
ἑνός· ὥστε ἀληθῆ ἀποφαίνει ἀμφότερα. ἐὰν οὖν τις τοιαῦτα
ἐπιχειρῇ πολλὰ καὶ ἓν ταὐτὸν ἀποφαίνειν, λίθους καὶ ξύλα
καὶ τὰ τοιαῦτα, τὶ φήσομεν αὐτὸν πολλὰ καὶ ἓν ἀποδεικνύναι,
οὐ τὸ ἓν πολλὰ οὐδὲ τὰ πολλὰ ἕν, οὐδέ τι θαυμαστὸν
λέγειν, ἀλλ᾽ ἅπερ ἂν πάντες ὁμολογοῖμεν· ἐὰν δέ τις ὧν
νυνδὴ ἐγὼ ἔλεγον πρῶτον μὲν διαιρῆται χωρὶς αὐτὰ καθ᾽
αὑτὰ τὰ εἴδη, οἷον ὁμοιότητά τε καὶ ἀνομοιότητα καὶ πλῆθος
καὶ τὸ ἓν καὶ στάσιν καὶ κίνησιν καὶ πάντα τὰ τοιαῦτα,
εἶτα ἐν ἑαυτοῖς ταῦτα δυνάμενα συγκεράννυσθαι καὶ δια-
κρίνεσθαι ἀποφαίνῃ, ἀγαίμην ἂν ἔγωγ᾽, ἔφη, θαυμαστῶς, ὦ
Ζήνων. ταῦτα δὲ ἀνδρείως μὲν πάνυ ἡγοῦμαι πεπραγμα-
τεῦσθαι· πολὺ μεντἂν ὧδε μᾶλλον, ὡς λέγω, ἀγασθείην εἴ
τις ἔχοι τὴν αὐτὴν ταύτην ἀπορίαν ἐν αὐτοῖς τοῖς εἴδεσι
παντοδαπῶς πλεκομένην, ὥσπερ ἐν τοῖς ὁρωμένοις διήλθετε,
οὕτως καὶ ἐν τοῖς λογισμῷ λαμβανομένοις ἐπιδεῖξαι.

Στο εκτενές αυτό χωρίο ο Πλάτωνας χρησιμοποιεί δώδεκα φορές λέξεις που ενδεχομένως να σημαίνουν «αποδεικνύω». Εντοπίζουμε ισοδύναμα οκτώ φορές το «ἀποφαίνειν», τρεις φορές το «ἀποδεικνύναι» και μία φορά το «ἐπιδεικνύναι». Βέβαια το «ἀπέφαινεν» του πρώτου στίχου παραπέμπει περισσότερο στην έννοια του «δείχνω-λέγω» μιας και πώς μπορεί κανείς να αποδείξει ότι τα όμοια γίνονται ανόμοια ή τα ανόμοια, όμοια ; Αν θεωρήσουμε ότι στους παρακάτω στίχους του *Παρμενίδη* η έννοια του «αποδεικνύω» είναι πιο πιθανή, τότε και στο χωρίο του διαλόγου *Θεαίτητος* που εξετάζουμε, είναι πιθανό ο Πλάτωνας να γράφει «ἀποφαίνων» εννοώντας «απέδειξε» και όχι απλώς «υπέδειξε ή βρήκε ευρηματικά ή δήλωσε». Κατά κάποιο τρόπο, λοιπόν, ο ίδιος ο Πλάτωνας μας δίνει κάποια απάντηση στο ερώτημα σχετικά με την ερμηνεία του όρου που εξετάζουμε.Η αλήθεια είναι πως θα ήταν απίθανο να κάνει ειδική αναφορά στο κατόρθωμα του Θεόδωρου, εάν ο τελευταίος δεν είχε προβεί σε αυστηρές και ακριβές αποδείξεις, αλλά είχε βρει μόνο κάποιες πρωτότυπες μεθόδους με τις οποίες έδειχνε ότι μάλλον είναι ασύμμετρα τα προαναφερθέντα μεγέθη.

Σχετικά με την έκφραση «ἐν δὲ ταύτῃ πως ἐνέσχετο» (*Knorr,σ. 81 κ.ε*), ο Knorr υποστηρίζει την εξής άποψη: ο Θεόδωρος ο Κυρηναίος αντιμετώπισε «ανυπέρβλητη δυσκολία» (encountered difficulty) στην περίπτωση του 17, πράγμα που σημαίνει ότι δεν κατάφερε να μελετήσει την αντίστοιχη περίπτωση. Αυτή τη θέση την αποδίδει κυρίως σε παρατήρηση του R.Hackforth σύμφωνα με τον οποίο η συνήθης ερμηνεία του Λεξικού Lidell-Scott-Jones για την λέξη αυτή είναι «encountered difficulty».Επίσης ο ισχυρισμός μερικών μελετητών , βάσει του οποίου ο Θεόδωρος απέδειξε με επιτυχία τις περιπτώσεις 3 μέχρι 17 και αντιμετώπισε δυσκολία στο 19, θεωρείται λάθος από τον Knorr (*Knorr,σ.82*).Η θέση αυτή είναι κατά τον Knorr λανθασμένη μιας και στο χωρίο εντοπίζεται η φράση «ἐν δὲ ταύτῃ» η οποία δε μπορεί παρά να σημαίνει «σε αυτήν την περίπτωση» και όχι «μετά από αυτήν την περίπτωση». Ο Knorr δικαίως παρατηρεί και τονίζει την πρόθεση «ἐν», όμως παρ' όλ' αυτά η οπτική γωνία υπό την οποία δίνει την ερμηνεία του είναι πιθανώς εσφαλμένη αφού στην περίπτωση που ο Θεόδωρος απέδειξε επιτυχώς την περίπτωση του 17 και σταμάτησε στο 19 λόγω δυσκολίας, τότε θα έγραφε «απέδειξε τις ασυμμετρίες των 3,5,…17 και σε αυτή την περίπτωση βρήκε δυσκολία και σταμάτησε» και όχι στην αντίθετη περίπτωση.

Επιπλέον, ο Van der Waerden επισημαίνει ότι το σχετικό χωρίο του Πλάτωνα αποτελεί απόλυτα έγκυρη πηγή για τα όσα αποκαλύπτει και για τον Θεόδωρο και για τον Θεαίτητο, επειδή το χωρίο έχει εισαχθεί με σκοπό να περιγράψει με λεπτομέρειες τι είχε βρεθεί προηγουμένως από τον Θεόδωρο και τι πρόσθεσε σε αυτό στη συνέχεια ο Θεαίτητος. Μάλιστα, ο Πλάτωνας δε μπορεί να είχε πρόθεση να αποδώσει στον Θεόδωρο αυτά που οφείλονται στον Θεαίτητο και αντίστροφα, μιας και ο διαχωρισμός της συνεισφοράς του Θεαίτητου από εκείνη του Θεόδωρου είναι ιστορικώς ακριβή *(VdW,σ.160-162).*Ο Van der Waerden μελετάει το σχετικό χωρίο και καταλήγει σε κάποια ενδιαφέροντα συμπεράσματα-ενδιαφέρουσες ερμηνείες. Κατ' αρχάς, υπογραμμίζει ότι ο όρος «δύναμις» υπονοεί πλευρά τετραγώνου και όχι εμβαδόν τετραγώνου. Στο *X Βιβλίο* των *Στοιχείων* του Ευκλείδη οι εκφράσεις «μήκη-δυνάμει σύμμετρος» αναφέρονται στην ύπαρξη κοινού μέτρου και όχι σε τετράγωνα.

Μάλιστα, ο όρος «δύναμις» μπορεί από φιλολογική άποψη να σημαίνει την πλευρά που παράγει ένα τετράγωνο και δε χρειάζεται, σε αντίθεση με όσα πιστεύει ο Tannery,να αντικατασταθεί η λέξη «δύναμις» με τη λέξη «δυναμένη». Εν συνεχεία ο Van der Waerden αναφέρει, αντίθετα με όσα υποστηρίζει ο Knorr, ότι λίγη σημασία έχει το πώς ο Θεόδωρος κατασκεύασε τις πλευρές τετραγώνων εμβαδού 3,5,7,…17 τετραγωνικών πόδων. Πιο σημαντικό είναι το πώς έδειξε ότι οι πλευρές αυτές είναι ασύμμετρες προς την ποδιαία. Επισημαίνει ότι το «ἀποφαίνειν» ερμηνεύεται ως «απέδειξε» και όχι απλώς «υπέδειξε ή έκανε φανερό». Άλλωστε, στην εποχή που έδρασε ο Θεόδωρος δηλαδή προς τα τέλη του 5^{ου} αι., όχι μόνο οι απαιτήσεις για αυστηρές αποδείξεις είχαν φτάσει σε ένα υψηλό επίπεδο, αλλά και στο χωρίο γίνεται ξεκάθαρος διαχωρισμός ανάμεσα στο επίτευγμα του Θεόδωρου, που ήταν η απόδειξη της ασυμμετρίας συγκεκριμένων μη τετράγωνων αρρήτων και στο επίτευγμα του Θεαίτητου, που ήταν η σύσταση θεωρίας αλόγων μεγεθών.

Ο Van der Waerden εξηγεί ότι η περίπτωση του 19 είναι εξαιρετικά περίπλοκη, καθώς αποτελεί αλληλουχία έξι αναλογιών οι οποίες πρέπει να αποδειχθούν η καθεμία ξεχωριστά με τη βοήθεια του λογισμού εμβαδών, με αποτέλεσμα να καταλαβαίνουμε γιατί ο Θεόδωρος σταμάτησε στο 17 (*VdW,σ.167).* Βέβαια, ο Knorr θεωρεί δικαίως ότι ο Van der Waerden υπερβάλλει στη δυσκολία της περίπτωσης του 19 με αυτή τη μέθοδο, μιας και διαφέρει μόνο κατά μία αναλογία από την περίπτωση του 13 και κατά δύο αναλογίες από τις περιπτώσεις των 7,14 *(Knorr,σ.121).*

Ένας άλλος μελετητής που μελετά σε βάθος το χωρίο του Θεαίτητου προκειμένου να μελετήσει τη μαθηματική ανακάλυψη που αναφέρεται και μάλιστα μέσα από φιλοσοφικό-φιλολογικό πρίσμα είναι ο M.F.Burnyeat. Κατ' αρχάς υπογραμμίζει ότι η άποψη του συγκλίνει με όλων σχεδόν των μελετητών – H.Vogt, E.Sachs, S.T.Heath, K. v Fritz B.L.v d Waerden- στο ότι τα όσα αναφέρονται στο χωρίο αυτό αποτελούν ιστορική πηγή τόσο για το επίτευγμα του Θεοδώρου όσο και του Θεαίτητου *(σχετικό άρθρο,σ.490*). Κύρια διαφωνούσα άποψη είναι αυτή του A.Szabo, σύμφωνα με την οποία ο Θεαίτητος δεν προέβη σε κάποια ανακάλυψη που είναι άξια αναφοράς αφού τα όσα περιγράφονται σε αυτό το χωρίο είναι ήδη γνωστά από παλαιότερους.

Για να ερμηνεύσει τις λέξεις που χρησιμοποιεί ο Πλάτωνας, ο Burnyeat στηρίζεται στη μετάφραση του J.McDowell (*σ.491*).Εξετάζει την έννοια των όρων ξεχωριστά για το έργο του Θεόδωρου από του Θεαίτητου και υποστηρίζει ότι ο Πλάτωνας, παρά το γεγονός ότι θέλει να παρουσιάσει στο χωρίο αυτό τις σημαντικές ανακαλύψεις των δύο αντρών, δεν αναφέρει τίποτα σχετικά με τον τρόπο με τον οποίο εργάστηκαν.

Ο όρος «δύναμις» εντοπίζεται δύο φορές στο σχετικό χωρίο και σύμφωνα με τον Burnyeat έχει δύο διαφορετικές ερμηνείες. Στην πρώτη αναφορά του, ο όρος περιγράφει τις αποδείξεις του Θεόδωρου και στη δεύτερη αναφορά του αποτελεί τον ορισμό που διατύπωσε τελικά ο Θεαίτητος. Τα επιχειρήματά του Burnyeat έχουν ως εξής:

Ο Θεόδωρος απέδειξε ότι οι πλευρές συγκεκριμένων τετράγωνων εμβαδού 1 και 3 είναι ασύμμετρες. Το ίδιο έκανε και για τις πλευρές τετραγώνων εμβαδού 5,7 μέχρι 17 συγκρίνοντάς τες με την πλευρά τετραγώνου εμβαδού 1.Στο σημείο αυτό υπάρχει αντίθεση απόψεων μεταξύ των Sachs, Vogt, Szabo οι οποίοι υποστηρίζουν ότι η σωστή ερμηνεία είναι «δύναμις = τετράγωνο» και των Heath, von Fritz, vd Waerden και πολλών άλλων σχολιαστών οι οποίοι υποστηρίζουν ότι «δύναμις = πλευρά τετραγώνου». Ο Burnyeat λέει πως ο όρος «δύναμις» δε θα μπορούσε να ταυτίζεται με την πλευρά τετραγώνου αλλά με το ίδιο το τετράγωνο, καθώς σε αντίθετη περίπτωση θα ερμηνεύαμε το χωρίο ως: «περί δυνάμεων(πλευρών τετραγώνου)…3 πόδων,5 πόδων στο μήκος» το οποίο είναι λανθασμένο αφού οι πλευρές 3,5 πόδων κ.τ.λ. είναι σύμμετρες με την πλευρά μήκους 1.Μάλιστα, ο Burnyeat επικαλείται δύο άλλες χρήσεις του όρου «δύναμις» σε έργα του Πλάτωνα όπου ερμηνεύεται ως «τετράγωνο», στον *Πολιτικό* και στον *Τίμαιο.*

(Πολιτικός 266ab): ΞΕ. Καὶ μὴν τό γε ζῷον, ὅσον ἥμερον καὶ ἀγελαῖον,
σχεδὸν πλὴν γενοῖν δυοῖν πᾶν ἤδη κατακεκερμάτισται. τὸ
γὰρ τῶν κυνῶν οὐκ ἐπάξιον καταριθμεῖν γένος ὡς ἐν ἀγελαίοις
θρέμμασιν.
ΝΕ. ΣΩ. Οὐ γὰρ οὖν. ἀλλὰ τίνι δὴ τὼ δύο διαιροῦμεν;
ΞΕ. Ὧιπερ καὶ δίκαιόν γε Θεαίτητόν τε καὶ σὲ διανέμειν,
ἐπειδὴ καὶ γεωμετρίας ἅπτεσθον.
ΝΕ. ΣΩ. Τῷ;
ΞΕ. Τῇ διαμέτρῳ δήπου καὶ πάλιν τῇ τῆς διαμέτρου
διαμέτρῳ.
ΝΕ. ΣΩ. Πῶς εἶπες;
ΞΕ.Ἡ φύσις, ἣν τὸ γένος ἡμῶν τῶν ἀνθρώπων κέκτη-
ται, μῶν ἄλλως πως εἰς τὴν πορείαν πέφυκεν ἢ καθάπερ ἡ
διάμετρος ἡ δυνάμει δίπους;
ΝΕ. ΣΩ. Οὐκ ἄλλως.
ΞΕ. Καὶ μὴν ἥ γε τοῦ λοιποῦ γένους πάλιν ἐστὶ κατὰ
δύναμιν αὖ τῆς ἡμετέρας δυνάμεως διάμετρος, εἴπερ δυοῖν γέ
ἐστι ποδοῖν δὶς πεφυκυῖα.
ΝΕ. ΣΩ. Πῶς δ’ οὐκ ἔστι; καὶ δὴ καὶ σχεδὸν ὃ βούλει
δηλοῦν μανθάνω.

(Τίμαιος 31c-32a): ὁπόταν γὰρ ἀριθμῶν τριῶν εἴτε ὄγκων
εἴτε δυνάμεων ὡντινωνοῦν ᾖ τὸ μέσον, ὅτιπερ τὸ πρῶτον πρὸς
αὐτό, τοῦτο αὐτὸ πρὸς τὸ ἔσχατον, καὶ πάλιν αὖθις, ὅτι τὸ
ἔσχατον πρὸς τὸ μέσον, τὸ μέσον πρὸς τὸ πρῶτον, τότε τὸ
μέσον μὲν πρῶτον καὶ ἔσχατον γιγνόμενον, τὸ δ’ ἔσχατον
καὶ τὸ πρῶτον αὖ μέσα ἀμφότερα, πάνθ’ οὕτως ἐξ ἀνάγκης
τὰ αὐτὰ εἶναι συμβήσεται, τὰ αὐτὰ δὲ γενόμενα ἀλλήλοις ἓν
πάντα ἔσται.

Αξιοπρόσεκτο είναι το γεγονός ότι ο Burnyeat φαίνεται να επιμένει στη χρήση του όρου στα παραπάνω χωρία ,αλλά από αυτά δε βγαίνουν πολύ ξεκάθαρα συμπεράσματα. Εν συνεχεία αναφέρεται στις δυνάμεις «square lines»» διακρίνοντάς τες από τα μήκη «length lines», τονίζοντας έτσι την υπόσταση από την οποία χαρακτηρίζονται. Με άλλα λόγια τα τετράγωνα εμπεριέχονται στον ορισμό των δυνάμεων, όπως τον αποδίδει ο Θεαίτητος. Ο Burnyeat καταλήγει στο συμπέρασμα ότι οι δύο χρήσεις του όρου «δύναμις» επιδέχονται διαφορετικές ερμηνείες. Η εργασία του Θεόδωρου αναφέρεται σε «τετράγωνα» εμβαδού 3, 5…ενώ ο ορισμός που διατυπώνει ο Θεαίτητος στην ουσία είναι ο ορισμός των «Δυνάμει μόνο σύμμετρων» ευθειών. Δηλαδή κατά τον Burnyeat στο 147d3 δύναμις = τετράγωνο, ενώ στο 148b1 δύναμις = δυνάμει σύμμετρα *(σ.498-9)*.

Αξίζει να αναφερθούμε σε μια ιδιαίτερη ερμηνεία, αλλά ίσως κάπως αυθαίρετη που μας δίνει ο Szabo σχετικά με το πώς ο όρος «δύναμις» μπορεί να ερμηνευθεί γλωσσικά ως «τετράγωνο» (*σ. 498-9*). Σύμφωνα, λοιπόν, με τον Szabo αφού κάθε ευθύγραμμο τμήμα μπορεί, δύναται να τετραγωνιστεί *(II.14, VI.13)* μπορούμε να συμπεράνουμε ότι δύναμις = ικανότητα τετραγωνισμού (square value – όσο δύναται, τετραγωνίζειν = τετράγωνο!). Επιπλέον, αφού υπογραμμίσει την άποψη ότι οι όροι «δύναμις» και «μήκος» έχουν προκύψει ως συντομεύσεις των όρων «δυνάμει σύμμετρο» και «μήκει σύμμετρο» αντίστοιχα, διατυπώνει τη θέση του ότι οι ορισμοί αυτοί δε μπορούν να αποδοθούν στον Θεαίτητο. Όμως, ένας τέτοιος ισχυρισμός δεν είναι δυνατόν να είναι αληθής αφού οι ορισμοί αυτοί εντοπίζονται στο *Χ Βιβλίο* των *Στοιχείων* και εναρμονίζονται πλήρως με τα όσα περιγράφει ο Πλάτωνας στο χωρίο του Θεαίτητου.

Η χρήση του όρου «δύναμις» είναι από ότι καταλαβαίνουμε δυσνόητη στο χωρίο αυτό και από ότι φαίνεται έχει προβληματίσει πολύ τους σχολιαστές από την αρχαιότητα μέχρι σήμερα. Ο Burnyeat κάνει εύλογες και προσεχτικές παρατηρήσεις και υιοθετεί δύο ξεχωριστές ερμηνείες μίας σημαντικής λέξης που χρησιμοποιεί ο Πλάτωνας δύο φορές στο σχετικό χωρίο που εξετάζουμε. Μία τέτοια λύση δεν φαίνεται οπωσδήποτε να είναι σωστή, παρόλα αυτά συμφωνεί σε μεγάλο βαθμό με τη λογική μας. Ο Burnyeat όχι μόνο την προτείνει αλλά με αυτό το κριτήριο σχολιάζει και διορθώνει τις απόψεις των άλλων σχολιαστών. Υποστηρίζει ότι τόσο οι αρχαίοι όσο και σύγχρονοι σχολιαστές στην προσπάθειά τους να δώσουν μία ενιαία ερμηνεία στη λέξη πέφτουν σε σφάλματα *(σ.500 κ.ε.)*. Οι μεν αρχαίοι σωστά ερμηνεύουν το «δύναμις» στο στίχο 147d3 ως «τετράγωνο» αλλά στη συνέχεια προσπαθούν να βγάλουν συμπεράσματα από τον διαχωρισμό που κάνει ο Θεαίτητος σε «μήκη» και «δυνάμεις» ως δύο είδη τετραγώνων.Οι δε σύγχρονοι σχολιαστές σωστά ερμηνεύουν το «δύναμις» στο στίχο 148b1 ως είδος γραμμής αλλά εσφαλμένα – κατά τον Burnyeat για το λόγο που αναφέρθηκε παραπάνω- ερμηνεύουν τις «δυνάμεις» με τις οποίες ασχολήθηκε ο Θεόδωρος ως «πλευρές τετραγώνων».

Ο Burnyeat ενισχύει τον παραπάνω ισχυρισμό του με την ερμηνεία της φράσεως: «*ἐπειδὴ ἄπειροι τὸ πλῆθος αἱ δυνάμεις ἐφαίνοντο, πειραθῆναι συλλαβεῖν εἰς ἕν*», ως εξής: «*since the δυνάμεις were turning out to be unlimited in number*».Με άλλα λόγια, καθώς ο Θεαίτητος επεξεργαζόταν τα όσα ανακάλυψε ο Θεόδωρος (ο οποίος όπως είδαμε δούλεψε κατά περίπτωση με πλευρές συγκεκριμένων τετραγώνων) σκέφτηκε ότι θα υπάρχουν άπειρες πλευρές τετραγώνων οι οποίες να είναι δυνάμει μόνο σύμμετρες με την ποδιαία και κάπως έτσι κατέληξε στο συλλογισμό «δουλεύοντας πιθανώς με μία μέθοδο η οποία να λειτουργεί επ’ άπειρο». Ο Burnyeat προσπαθεί πιθανότατα σωστά να ερμηνεύσει το «δύναμις» σε συνδυασμό με την έκφραση «*ἄπειροι τὸ πλῆθος*», η ερμηνεία της οποίας δεν είναι «*επ'άπειρο-άπειρος αριθμός*».

Αναφορικά με τον όρο «ἐν δὲ ταύτῃ πως ἐνέσχετο» θα μπορούσαμε να πούμε ότι υπάρχουν τρεις πιθανές ερμηνείες που επιδέχονται εξέταση: α) στο σημείο αυτό για κάποιον (όχι ιδιαίτερο) λόγο σταμάτησε, β)στο σημείο αυτό για κάποιον (ιδιαίτερο) λόγο σταμάτησε και γ) στο σημείο αυτό βρήκε ανυπέρβλητη δυσκολία. Ο Vogt θεωρεί ότι σωστή ερμηνεία είναι η (α) και μάλιστα πιστεύει ότι αφού ο Θεόδωρος δεν σταμάτησε για κάποιο συγκεκριμένο λόγο, αυτό σημαίνει πως η μέθοδός του λειτουργεί για όλες τις περιπτώσεις και θα μπορούσε να είναι η απόδειξη που αναφέρεται στο χωρίο *Αριστοτέλους, Αναλυτικά Υστερα* .Άρα στον Θεόδωρο πρέπει να αποδοθεί και η στοιχειοθέτηση θεωρίας ασυμμετρίας, όχι στον Θεαίτητο *(σελ.504)*.

Σε Ανώνυμα Σχόλια αλλά και σε χωρίο του Ιάμβλιχου (*βλ.Burnyeat,σ.504*) υποστηρίζεται η ερμηνεία (α), ενώ το 1957 ο Hackforth υποστήριξε ότι το ρήμα στη συγκεκριμένη περίπτωση έχει τη συνηθισμένη του ερμηνεία που είναι «be held up, entangled, βρήκε ανυπέρβλητη δυσκολία». Την προσέγγιση του Hackforth δέχεται και ο Knorr όπως αναφέρθηκε προηγούμενα. Ο Burnyeat σε σχετική παρατήρηση που παρουσιάζει στο άρθρο του αναφέρεται διεξοδικά στην ανακατασκευή του Knorr λέγοντας ότι ενώ γενικά συμφωνούν στην ανάλυση του χωρίου, διαφωνούν στην μελέτη – ερμηνεία αυτής της έκφρασης. Ο Knorr ερμηνεύει την πρόταση αυτή ως «σε αυτή την περίπτωση (17) για κάποιο λόγο αντιμετώπισε ανυπέρβλητη δυσκολία», το «ἐν ταύτῃ» ισχυρίζεται ότι σημαίνει «σε αυτή την περίπτωση», δηλαδή πιστεύει ότι ο Θεόδωρος σταμάτησε γιατί βρήκε δυσκολία στο 17 και όχι ότι απέδειξε και το 17 και βρήκε δυσκολία μετά το 17 (στο 19 δηλαδή). Ο Burnyeat ισχυρίζεται ότι αν ο Knorr ήθελε να ερμηνεύσει το αρχαίο αυτό χωρίο με βάση το λεξικό, θα ήταν πιο ορθό να ερμηνεύσει την πρόθεση «ἐν» σε συνδυασμό με το «ἐνέσχετο» που σημαίνει «εξαιτίας του, από αυτό», το «εν» δηλαδή είναι επεξηγηματικό. Μία τέτοια ερμηνεία όμως δε θα σήμαινε πως στο 17 βρήκε δυσκολία.

Ο Knorr προς απάντηση σε αυτή την παρατήρηση του Burnyeat, επισημαίνει ότι οι σχολιαστές στους οποίους αναφέρεται ο Burnyeat (ανώνυμος σχολιαστής στον Θεαίτητο και Ιάμβλιχος) έζησαν 500-700 χρόνια μετά τον Πλάτωνα και έτσι δεν αποτελούν καλύτερες πηγές από τα ίδια τα έργα του Πλάτωνα ή συγχρόνων του όπως είναι ο Ηρόδοτος, τους οποίους και μελετά το Λεξικό Liddell-Scott-Jones το οποίο χρησιμοποιεί ο Hackforth.

Ο Burnyeat επιπλέον τονίζει ότι η σωστή ερμηνεία πρέπει να προκύψει από τη σφαιρική μελέτη όλου του κειμένου και όχι μεμονωμένα από μία λέξη. Δηλαδή πρέπει το ίδιο το κείμενο να μας δώσει κάποια ένδειξη ότι η δυσκολία προέκυψε στο 17 ανεξάρτητα από την ερμηνεία του «ἐνέσχετο». Ο Burnyeat μάλιστα ισχυρίζεται ότι το κείμενο δεν έχει καμία ένδειξη ότι ο Θεόδωρος δυσκολεύτηκε στο 17 καθώς τη συνέχεια της πρότασης «ἄπειροι τὸ πλῆθος αἱ δυνάμεις ἐφαίνοντο» την ερμηνεύει ως «επειδή οι δυνάμεις φαίνονταν να είναι άπειρες στο πλήθος….», δηλαδή σύμφωνα με εκείνον ο Θεόδωρος δεν βρήκε δυσκολία στο 17 γιατί αν συνέβαινε κάτι τέτοιο, πώς ο Θεαίτητος θα μπορούσε να βγάλει συμπεράσματα από τη μέθοδο του Θεόδωρου αν αυτή σταματούσε στο 12ο παράδειγμα; Πιστεύει ακόμη ότι η φράση είναι ασαφής και ότι υπάρχουν προβλήματα στην ερμηνεία της. Αφού δεχόμαστε ότι ο Θεαίτητος κατηγοριοποίησε και ομαδοποίησε τα αποτελέσματα του Θεοδώρου στοιχειοθετώντας μία θεωρία ασύμμετρων μεγεθών, αυτό έρχεται σε αντίθεση με το «ἐνέσχετο = αντιμετώπισε ανυπέρβλητη δυσκολία» στη περίπτωση του 17 του Θεοδώρου. Από την άλλη πλευρά εάν η μέθοδος του Θεοδώρου λειτουργεί γενικά και δε βρίσκει πρόβλημα στο 17 ή στο 19 τότε οι ορισμοί που ακολουθούν στο κείμενο δεν ανήκουν τόσο στον Θεαίτητο όσο στον Θεόδωρο. Ο Burnyeat είναι αντίθετος με την ερμηνεία που δίνει ο Knorr λέγοντας χαρακτηριστικά ότι «δεν είναι δυνατό να θεωρεί κάποιος το χωρίο αυτό ως βέβαιη ιστορική πηγή αλλά παράλληλα να μη λαμβάνει υπόψη του κάποια κρίσιμα στοιχεία και πληροφορίες».

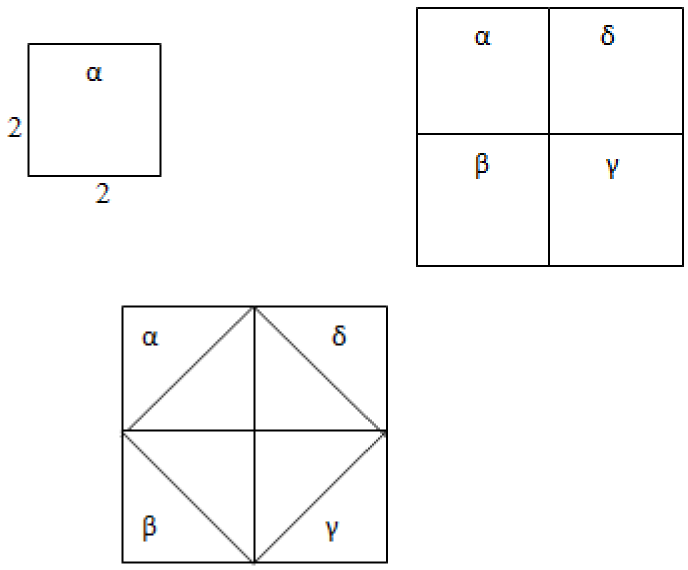
Ο Knorr εκφράζει τη δική του θέση και σε αυτή την παρατήρηση λέγοντας πως αν πάρουμε σαν δεδομένο ότι το χωρίο αποτελεί ιστορική πηγή – και ο Burnyeat συμφωνεί σε αυτό- τότε δεν έχουμε παρά να δεχτούμε ότι ο Θεόδωρος απέδειξε τις ασυμμετρίες από το 3 μέχρι το 17 και ο Θεαίτητος είναι αυτός που ομαδοποίησε τους αριθμούς και τις γραμμές στοιχειοθετώντας θεωρία λόγου. Σύμφωνα με αυτό και αφού δεχτούμε ότι το χωρίο αποτελεί ιστορική πηγή και ότι ο Θεόδωρος δεν αντιμετώπισε δυσκολία στην τελευταία περίπτωση με την οποία ασχολήθηκε (κατά τον Knorr το 17) αλλά ότι απλώς σταμάτησε -σύμφωνα με τον Burnyeat- ενώ η μέθοδός του εφαρμόζεται για όλες τις περιπτώσεις τότε θα πέσουμε στο ατόπημα να ισχυριστούμε ότι στον Θεόδωρο πρέπει να αποδοθεί η στοιχειοθέτηση θεωρίας ασύμμετρων μεγεθών (*X Βιβλίο*).

3.3 *Μένων*

Ο πλατωνικός διάλογος *Μένων* θα λέγαμε ότι αποτελεί άλλη μια απόδειξη της γνώσης της ασσυμετρίας από τους Πυθαγόρειους. Ο διάλογος εκτυλίσσεται ανάμεσα στον Σωκράτη και τον Μένωνα, έναν Θεσσαλό αριστοκράτη και στο χωρίο που θα μελετήσουμε εμφανίζεται στον διάλογο ένας δούλος του τελευταίου. Πιο αναλυτικά, ο Σωκράτης απευθύνει στον δούλο της εξής ερώτηση: «Αν έχουμε τετράγωνο με πλευρά ίση με 2 πόδες, ποιο θα είναι το μήκος της πλευράς ενός τετραγώνου με εμβαδόν διπλάσιο από το εμβαδόν του πρώτου;». Με άλλα λόγια ο Σωκράτης ζητάει το μήκος πλευράς τετραγώνου που να έχει εμβαδόν $2{\cdot}2^2=2{\cdot}4=8$ πόδες. Η πρώτη απάντηση του δούλου είναι λανθασμένη, μιας και λέει στον Σωκράτη ότι θα πρέπει να πάρουμε μήκος ίσο με 4 πόδες. Σε αυτό το σημείο ο Σωκράτης σχολιάζει ότι ο δούλος αν και δε γνωρίζει την απάντηση, πιστεύει πως την γνωρίζει και σε λίγο θα αρχίσει να θυμάται. Εν συνεχεία ο δούλος μέσα από τις ερωτήσεις που του θέτει ο Σωκράτης καταλαβαίνει το αρχικό του λάθος. Αν πάρουμε πλευρά ίση με 4 πόδες, το αρχικό εμβαδόν θα τετραπλασιαστεί, δε θα διπλασιαστεί όπως είναι το ζητούμενο.

Η νέα απάντηση του δούλου είναι πως θα πρέπει να πάρουμε πλευρά με μήκος ίσο με μιάμιση φορά το αρχικό δηλαδή $1{,}5{\cdot}2=3$ πόδες. Βέβαια και αυτό οδηγεί σε σφάλμα, αφού $3^2=9$ και όχι 8.Μετά και από αυτό το λάθος, ο δούλος λέει στον Σωκράτη ότι αδυνατεί να βρει τη σωστή απάντηση. Ο Σωκράτης σχολιάζει ότι στην αρχή ο δούλος νομίζοντας πως γνωρίζει τη σωστή απάντηση απαντούσε με θάρρος ενώ τώρα γνωρίζει ότι αγνοεί την απάντηση, πράγμα που τον κινητοποιεί να ψάξει και να μάθει.

Ο διάλογος εξελίσσεται και μας οδηγεί στην κατασκευή του παρακάτω σχήματος:



Το κάθε τετράγωνο χωρίζεται από τις διαγωνίους σε 2 ίσα μέρη. Αυτές οι τέσσερις γραμμές είναι ίσες. Συνεπώς έχουμε 4 μισά και άρα το εμβαδόν του εσωτερικού τετραγώνου είναι : $4{\cdot}2=8$ πόδες. Αυτό σημαίνει ότι το μήκος πλευράς τετραγώνου με εμβαδόν 8 είναι η διαγώνιος του αρχικού τετραγώνου, δηλαδή του τετραγώνου με εμβαδόν 4.Αν τώρα συμβολίσουμε με δ τη διαγώνιο, με α την πλευρά του αρχικού τετραγώνου, με E_1 το εμβαδόν του αρχικού τετραγώνου και με E_2 το εμβαδόν του ζητούμενου τετραγώνου, θα έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} E_1=\alpha^2 \\ E_2=\delta^2 \\ E_2=2\cdot E_1 \end{array}\right\} \quad \delta^2=2\cdot\alpha^2$$

Στο τέλος του διαλόγου με τον δούλο, ο Σωκράτης επισημαίνει ότι αφού ο δούλος δεν είχε διδαχθεί ποτέ του γεωμετρία , η γνώση που «αποκάλυψε» πρέπει να είναι ανάμνηση από μία προγενέστερη ζωή. Για τον Πλάτωνα αυτό φαίνεται να σημαίνει ότι υπάρχει η αληθινή γνώση, η αιώνια γεύση.

Ο ακριβής διάλογος δίνεται παρακάτω (*Μένων 82b-85b*).Λόγω της σχετικά μεγάλης του έκτασης, παραθέτουμε αριστερά το πρωτότυπο κείμενο και δεξιά τη μετάφραση, (και όχι σε υποσημείωση) προκειμένου να διευκολυνθεί ο αναγνώστης στη σύγκριση και αντιστοίχιση των δύο κειμένων. Έχουμε, λοιπόν, τον εξής διάλογο ανάμεσα στον Σωκράτη και τον δούλο, σε κάποια σημεία του οποίου συμμετέχει κι ο Μένωνας:

ΣΩ. Πρόσεχε δὴ τὸν νοῦν ὁπότερ’ ἄν σοι φαίνηται, ἢ ἀναμιμνῃσκόμενος ἢ μανθάνων παρ’ ἐμοῦ. *ΜΕΝ. Ἀλλὰ προσέξω.* *ΣΩ. Εἰπὲ δή μοι, ὦ παῖ, γιγνώσκεις τετράγωνον χωρίον ὅτι τοιοῦτόν ἐστιν;* *ΠΑΙ. Ἔγωγε.* *ΣΩ. Ἔστιν οὖν τετράγωνον χωρίον ἴσας ἔχον τὰς γραμμὰς ταύτας πάσας, τέτταρας οὔσας;* *ΠΑΙ.Πάνυ γε.* *ΣΩ.Οὐ καὶ ταυτασὶ τὰς διὰ μέσου ἐστὶν ἴσας ἔχον;* *ΠΑΙ. Ναί.* *ΣΩ. Οὐκοῦν εἴη ἂν τοιοῦτον χωρίον καὶ μεῖζον καὶ ἔλαττον;* *ΠΑΙ. Πάνυ γε.* *ΣΩ.Εἰ οὖν εἴη αὕτη ἡ πλευρὰ δυοῖν ποδοῖν καὶ αὕτη δυοῖν, πόσων ἂν εἴη ποδῶν τὸ ὅλον; ὧδε δὲ σκόπει· εἰ ἦν ταύτῃ δυοῖν ποδοῖν, ταύτῃ δὲ ἑνὸς ποδὸς μόνον, ἄλλο τι ἅπαξ ἂν ἦν δυοῖν ποδοῖν τὸ χωρίον;* *ΠΑΙ. Ναί.* *ΣΩ.**Ἐπειδὴ δὲ** δυοῖν ποδοῖν καὶ ταύτῃ, ἄλλο τι ἢ δὶς δυοῖν γίγνεται;* *ΠΑΙ.Γίγνεται.* *ΣΩ. Δυοῖν ἄρα δὶς γίγνεται ποδῶν;* *ΠΑΙ. Ναί.* *ΣΩ. Πόσοι οὖν εἰσιν οἱ δύο δὶς πόδες;*	Σω: Πρόσεχε λοιπόν καλά, ποιο από τα δύο σου φαίνεται να συμβαίνει, ότι ξαναθυμάται ή ότι μαθαίνει από μένα; Μένωνας: Θα προσέξω. Σω: Πες μου λοιπόν νεαρέ, γνωρίζεις ότι αυτό είναι ένα τετράγωνο σχήμα; Δούλος: Ναι. Σω: Τετράγωνο δεν είναι εκείνο που έχει τέσσερις γραμμές οι οποίες είναι ίσες; Δου: Βεβαιότατα. Σω: Δεν έχει επίσης και τις άλλες γραμμές που φέρνουμε στο μέσο ίσες; Δου Ναι. Σω: Δε μπορεί λοιπόν ο χώρος αυτός να είναι και μεγαλύτερος και μικρότερος; Δου: Βεβαίως. Σω: Λοιπόν αν αυτή η πλευρά ήταν δύο πόδες όπως επίσης και η άλλη, πόσες πόδες θα ήταν όλο το σχήμα; Σκέψου με αυτόν τον τρόπο ότι αν αυτή η πλευρά ήταν δύο πόδες και εκείνη εκεί μόνο ένας, δεν είναι αλήθεια ότι ο χώρος θα ήταν χωριστά δύο πόδες; Δου: Ναι. Σω: Επειδή όμως και αυτή η πλευρά είναι δύο πόδες, μπορεί το σχήμα να είναι άλλο από δύο φορές οι δύο πόδες; Δου: Όχι. Σω: Άρα είναι δύο φορές οι δυο πόδες. Δου: Ναι. Σω: Πόσο λοιπόν κάνει δυο φορές οι δυο πόδες; Υπολόγισε και πες μου. Σω: Τέσσερα Σωκράτη. Δου: Θα μπορούσε λοιπόν να υπάρξει σχήμα διπλάσιο από τούτο εδώ, τέτοιο που να έχει όλες τις πλευρές ίσες, όπως αυτό;

λογισάμενος εἰπέ. *ΠΑΙ. Τέτταρες, ὦ Σώκρατες.* *ΣΩ. Οὐκοῦν γένοιτ᾽ ἂν τούτου τοῦ χωρίου ἕτερον διπλάσιον, τοιοῦτον δέ, ἴσας ἔχον πάσας τὰς γραμμὰς ὥσπερ τοῦτο;* *ΠΑΙ. Ναί.* *ΣΩ. Πόσων οὖν ἔσται ποδῶν;* *ΠΑΙ.Ὀκτώ.* *ΣΩ. Φέρε δή, πειρῶ μοι εἰπεῖν πηλίκη τις ἔσται ἐκείνου ἡ γραμμὴ ἑκάστη. ἡ μὲν γὰρ τοῦδε δυοῖν ποδοῖν· τί δὲ ἡ ἐκείνου τοῦ διπλασίου;* *ΠΑΙ. Δῆλον δή, ὦ Σώκρατες, ὅτι διπλασία.* *ΣΩ. Ὁρᾷς, ὦ Μένων, ὡς ἐγὼ τοῦτον οὐδὲν διδάσκω, ἀλλ᾽ ἐρωτῶ πάντα; καὶ νῦν οὗτος οἴεται εἰδέναι ὁποία ἐστὶν ἀφ᾽ ἧς τὸ ὀκτώπουν χωρίον γενήσεται· ἢ οὐ δοκεῖ σοι;* *ΜΕΝ. Ἔμοιγε.* *ΣΩ.Οἶδεν οὖν;* *ΜΕΝ. Οὐ δῆτα.* *ΣΩ. Οἴεται δέ γε ἀπὸ τῆς διπλασίας;* *ΜΕΝ. Ναί.*	Δου: Ναι. Σω: Πόσα πόδια θα είναι λοιπόν; Δου: Οχτώ. Σω: Εμπρός λοιπόν, προσπάθησε να μου πεις πόσο θα είναι κάθε πλευρά εκείνου. Του ενός είναι δύο πόδες, πόσο θα είναι του άλλου, του διπλασίου; Δου : Φανερό είναι, Σωκράτη, πως θα είναι διπλάσια. Σω: Βλέπεις, Μένων, πως εγώ δε διδάσκω τίποτα αλλά συνεχώς τον ρωτώ; Και εκείνος νομίζει ότι γνωρίζει ποια είναι η πλευρά από την οποία θα δημιουργηθεί το σχήμα των οχτώ ποδών ή δε σου φαίνεται πως είναι έτσι; Μέν: Βέβαια. Σω: Γνωρίζει όμως; Μέν: Όχι βέβαια. Σω: Νομίζει πως το σχήμα προκύπτει από τη διπλάσια γραμμή. Μέν: Ναι.
ΣΩ. Θεῶ δὴ αὐτὸν ἀναμιμνῃσκόμενον ἐφεξῆς, ὡς δεῖ ἀναμιμνῄσκεσθαι. *Σὺ δέ μοι λέγε· ἀπὸ τῆς διπλασίας γραμμῆς φῂς τὸ διπλάσιον χωρίον γίγνεσθαι; τοιόνδε λέγω, μὴ ταύτῃ μὲν μακρόν, τῇ δὲ βραχύ, ἀλλὰ ἴσον πανταχῇ ἔστω ὥσπερ τουτί,διπλάσιον δὲ τούτου, ὀκτώπουν· ἀλλ᾽ ὅρα εἰ ἔτι σοι ἀπὸ τῆς διπλασίας δοκεῖ ἔσεσθαι.* *ΠΑΙ. Ἔμοιγε.* *ΣΩ. Οὐκοῦν διπλασία αὕτη ταύτης γίγνεται, ἂν ἑτέραν τοσαύτην προσθῶμεν ἐνθένδε;* *ΠΑΙ. Πάνυ γε.* *ΣΩ. Ἀπὸ ταύτης δή,φῄς, ἔσται τὸ ὀκτώπουν χωρίον, ἂν τέτταρες τοσαῦται γένωνται;* *ΠΑΙ. Ναί.* *ΣΩ. Ἀναγραψώμεθα δὴ ἀπ᾽ αὐτῆς ἴσας τέτταρας. ἄλλο τι ἢ τουτὶ ἂν εἴη ὃ φῂς τὸ ὀκτώπουν εἶναι;* *ΠΑΙ. Πάνυ γε.* *ΣΩ. Οὐκοῦν ἐν αὐτῷ ἐστιν ταυτὶ τέτταρα, ὧν ἕκαστον ἴσον τούτῳ ἐστὶν τῷ τετράποδι;*	Σω: Παρατήρησε λοιπόν τούτο, πως θα αρχίσει στο εξής να θυμάται, όπως πρέπει να θυμάται. Εσύ πες μου, από τη διπλάσια πλευρά υποστηρίζεις πως προκύπτει διπλάσιο σχήμα; Και εννοώ βέβαια τέτοιο σχήμα που να μην έχει τη μια πλευρά μεγάλη και την άλλη μικρή, αλλά να τις έχει όλες ίσες, όπως τούτο εδώ, αλλά να είναι διπλάσιο, δηλαδή οκτώ πόδες. Πρόσεξε λοιπόν, σου φαίνεται πως τούτο θα προκύψει από τη διπλάσια πλευρά; Δου : Ναι βέβαια. Σω: Λοιπόν η μια πλευρά γίνεται διπλάσια απ᾽ όσο ήταν, αν προσθέσουμε εδώ άλλη μία του ίδιου μεγέθους. Δου :Βέβαια. Σω: Από τούτη την άποψη, άρα, υποστηρίζεις ότι θα προκύψει το σχήμα των οκτώ πόδων, αν γίνουν τέσσερις ίσες πλευρές; Δου :Ναι. Σω: Ας χαράξουμε λοιπόν από αυτήν τέσσερις ίσες πλευρές. Κάποιο άλλο ή τούτο εδώ υποστηρίζεις πως είναι το σχήμα των οκτώ πόδων; Δου :Αυτό βέβαια. Σω: Σε τούτο όμως περιλαμβάνονται τέσσερα σχήματα, καθένα από τα οποία είναι ίσο με το σχήμα των τεσσάρων ποδών, έτσι δεν είναι; Δου :Ναι.

ΠΑΙ. Ναί. *ΣΩ. Πόσον οὖν γίγνεται; οὐ τετράκις τοσοῦτον;* *ΠΑΙ. Πῶς δ’ οὔ;* *ΣΩ. Διπλάσιον οὖν ἐστιν τὸ τετράκις τοσοῦτον;* *ΠΑΙ. Οὐ μὰ Δία.* *ΣΩ. Ἀλλὰ ποσαπλάσιον;* *ΠΑΙ. Τετραπλάσιον.* *ΣΩ. Ἀπὸ τῆς διπλασίας ἄρα, ὦ παῖ, οὐ διπλάσιον ἀλλὰ τετραπλάσιον γίγνεται χωρίον.* *ΠΑΙ. Ἀληθῆ λέγεις.* *ΣΩ. Τεττάρων γὰρ τετράκις ἐστὶν ἑκκαίδεκα. οὐχί;* *ΠΑΙ. Ναί.* *ΣΩ. Ὀκτώπουν δ’ ἀπὸ ποίας γραμμῆς; οὐχὶ ἀπὸ μὲν ταύτης τετραπλάσιον;* *ΠΑΙ. Φημί.* *ΣΩ. Τετράπουν δὲ ἀπὸ τῆς ἡμισέας ταυτησὶ τουτί;* *ΠΑΙ. Ναί.* *ΣΩ. Εἶεν· τὸ δὲ ὀκτώπουν οὐ τοῦδε μὲν διπλάσιόν ἐστιν, τούτου δὲ ἥμισυ;* *ΠΑΙ.Ναί.* *ΣΩ. Οὐκ ἀπὸ μὲν μείζονος ἔσται ἢ τοσαύτης γραμμῆς, ἀπὸ ἐλάττονος δὲ ἢ τοσησδί; ἢ οὔ;* *ΠΑΙ. Ἔμοιγε δοκεῖ οὕτω.* *ΣΩ.Καλῶς· τὸ γάρ σοι δοκοῦν τοῦτο ἀποκρίνου. καί μοι λέγε· οὐχ ἥδε μὲν δυοῖν ποδοῖν ἦν, ἡ δὲ τεττάρων;* *ΠΑΙ. Ναί.* *ΣΩ. Δεῖ ἄρα τὴν τοῦ ὀκτώποδος χωρίου γραμμὴν μείζω μὲν εἶναι τῆσδε τῆς δίποδος, ἐλάττω δὲ τῆς τετράποδος.* *ΠΑΙ. Δεῖ.*	Σω: Πόσο λοιπόν γίνεται; Δεν είναι τέσσερις φορές μεγαλύτερο από εκείνο; Δου :Πώς όχι; Σω: Άρα το κατά τέσσερις φορές μεγαλύτερο είναι διπλάσιο; Δου :Όχι μα τω Δία. Σω: Τότε πόσο μεγαλύτερο είναι; Δου :Τετραπλάσιο. Σω: Επομένως από τη διπλάσια πλευρά, παιδί μου, δεν προκύπτει σχήμα διπλάσιο αλλά τετραπλάσιο. Δου :Σωστά μιλάς. Σω: Τέσσερις φορές λοιπόν οι τέσσερις πόδες κάνει δεκαέξι, ή όχι; Δου: Ναι. Σω: Το σχήμα λοιπόν των οκτώ ποδών από ποια πλευρά προκύπτει; Δεν είναι τετραπλάσιο με βάση την πλευρά αυτή; Δου :Έτσι λέω. Σω: Αυτό λοιπόν το τετράγωνο των τεσσάρων ποδών δεν προέκυψε από τη μισή από αυτή γραμμή; Δου: Ναι. Σω: Ας είναι. Το τετράγωνο των οκτώ ποδών δεν είναι διπλάσιο από το ένα(των τεσσάρων ποδών) και μισό από το άλλο(των δεκαέξι ποδών); Δου: Ναι. Σω: Καλά. Απάντησε μου τώρα ό,τι σου φαίνεται και πες μου. Αυτή η γραμμή δεν είναι δύο ποδών και η άλλη τεσσάρων; Δου: Ναι. Σω: Επομένως και η γραμμή χώρου οκτώ ποδών πρέπει να είναι μεγαλύτερη από τη γραμμή χώρου δύο ποδών και μικρότερη από τη γραμμή χώρου τεσσάρων ποδών. Δου: Πρέπει.
ΣΩ. Πειρῶ δὴ λέγειν πηλίκην τινὰ φῂς αὐτὴν εἶναι. *ΠΑΙ.Τρίποδα.* *ΣΩ.Οὐκοῦν ἄνπερ τρίπους ᾖ, τὸ ἥμισυ ταύτης προσληψόμεθα καὶ ἔσται τρίπους; δύο μὲν γὰρ οἵδε, ὁ δὲ εἷς· καὶ ἐνθένδε ὡσαύτως δύο μὲν οἵδε, ὁ δὲ εἷς· καὶ γίγνεται τοῦτο τὸ χωρίον ὃ φῄς.* *ΠΑΙ. Ναί.* *ΣΩ. Οὐκοῦν ἂν ᾖ τῇδε τριῶν καὶ τῇδε τριῶν, τὸ ὅλον χωρίον τριῶν τρὶς ποδῶν*	Σω: Προσπάθησε τώρα να μου πεις πόσο μεγάλη πρέπει να είναι αυτή. Δου: Τρεις πόδες. Σω: Αν λοιπόν είναι τρεις πόδες θα πάρουμε το μισό αυτής, θα το προσθέσουμε και θα γίνει τρεις πόδες. Γιατί αυτά εδώ είναι δύο πόδες κι αυτό ένας και από την άλλη πλευρά επίσης είναι δύο πόδες κι αυτό ένας κι έτσι προκύπτει το σχήμα που λες. Δου: Ναι. Σω: Επομένως, αν η μια πλευρά είναι τρεις πόδες και η άλλη είναι επίσης τρεις, το σχήμα συνολικά

γίγνεται; *ΠΑΙ. Φαίνεται.* *ΣΩ. Τρεῖς δὲ τρὶς πόσοι εἰσὶ πόδες;* *ΠΑΙ. Ἐννέα.* *ΣΩ. Ἔδει δὲ τὸ διπλάσιον πόσων εἶναι ποδῶν;* *ΠΑΙ. Ὀκτώ.* *ΣΩ. Οὐδ᾽ ἄρ᾽ ἀπὸ τῆς τρίποδός πω τὸ ὀκτώπουν χωρίον γίγνεται.* *ΠΑΙ. Οὐ δῆτα.* *ΣΩ. Ἀλλ᾽ ἀπὸ ποίας; πειρῶ ἡμῖν εἰπεῖν ἀκριβῶς· καὶ εἰ μὴ βούλει ἀριθμεῖν, ἀλλὰ δεῖξον ἀπὸ ποίας.* *ΠΑΙ.Ἀλλὰ μὰ τὸν Δία, ὦ Σώκρατες, ἔγωγε οὐκ οἶδα.* *ΣΩ.Ἐννοεῖς αὖ, ὦ Μένων, οὗ ἐστιν ἤδη βαδίζων ὅδε* *τοῦ ἀναμιμνῄσκεσθαι; ὅτι τὸ μὲν πρῶτον ᾔδει μὲν οὔ, ἥτις* *ἐστὶν ἡ τοῦ ὀκτώποδος χωρίου γραμμή, ὥσπερ οὐδὲ νῦν πω οἶδεν, ἀλλ᾽ οὖν ᾤετό γ᾽ αὐτὴν τότε εἰδέναι, καὶ θαρραλέως ἀπεκρίνετο ὡς εἰδώς, καὶ οὐχ ἡγεῖτο ἀπορεῖν· νῦν δὲ ἡγεῖται ἀπορεῖν ἤδη, καὶ ὥσπερ οὐκ οἶδεν, οὐδ᾽ οἴεται εἰδέναι.* *ΜΕΝ. Ἀληθῆ λέγεις.* *ΣΩ. Οὐκοῦν νῦν βέλτιον ἔχει περὶ τὸ πρᾶγμα ὃ οὐκ* *ᾔδει;* *ΜΕΝ. Καὶ τοῦτό μοι δοκεῖ.* *ΣΩ.Ἀπορεῖν οὖν αὐτὸν ποιήσαντες καὶ ναρκᾶν ὥσπερ ἡ νάρκη, μῶν τι ἐβλάψαμεν;* *ΜΕΝ.Οὐκ ἔμοιγε δοκεῖ.* *ΣΩ .Προὔργου γοῦν τι πεποιήκαμεν, ὡς ἔοικε, πρὸς τὸ* *ἐξευρεῖν ὅπῃ ἔχει· νῦν μὲν γὰρ καὶ ζητήσειεν ἂν ἡδέως οὐκ εἰδώς, τότε δὲ ῥᾳδίως ἂν καὶ πρὸς πολλοὺς καὶ πολλάκις ᾤετ᾽ ἂν εὖ λέγειν περὶ τοῦ διπλασίου χωρίου, ὡς δεῖ διπλασίαν τὴν γραμμὴν ἔχειν μήκει.* *ΜΕΝ.Ἔοικεν.* *ΣΩ.Οἴει οὖν ἂν αὐτὸν πρότερον ἐπιχειρῆσαι ζητεῖν ἢ* *μανθάνειν τοῦτο ὃ ᾤετο εἰδέναι οὐκ εἰδώς, πρὶν εἰς ἀπορίαν κατέπεσεν ἡγησάμενος μὴ εἰδέναι, καὶ ἐπόθησεν τὸ εἰδέναι;* *ΜΕΝ.Οὔ μοι δοκεῖ, ὦ Σώκρατες.*	δεν είναι τρεις φορές οι τρεις πόδες; Δου: Έτσι φαίνεται. Σω: Τρεις φορές το τρία πόσους πόδες κάνει; Δου: Εννιά. Σω: Και το διπλάσιο πόσοι πόδες έπρεπε να είναι; Δου: Οκτώ. Σω: Άρα, το τετράγωνο των οκτώ ποδών δεν προκύπτει ούτε από την πλευρά των τριών ποδών. Δου: Όχι βέβαια. Σω: Τότε από ποια πλευρά σχηματίζεται; Προσπάθησε να μας πεις με ακρίβεια. Κι αν δε θέλεις να το εκφράσεις με αριθμό δείξε την πλευρά. Δου: Μα τω Δία, Σωκράτη, δε γνωρίζω. Σω: Καταλαβαίνεις, πάλι, Μένωνα, ποιο δρόμο έχει κάνει μέσα στην ανάμνησή του; Στην αρχή δεν γνώριζε καθόλου ποια είναι η γραμμή που σχηματίζει το εμβαδόν οκτώ ποδών, όπως και τώρα δεν γνωρίζει· αλλά κατόπιν νόμιζε ότι το βρήκε, και απάντησε με πεποίθηση σαν να γνώριζε και δεν πίστευε ότι δε γνώριζε (ούτε καν απορούσε). Τώρα πάλι απορεί (αναγνωρίζει την σύγχυσή του) σα να μη γνωρίζει καθόλου. Και νομίζει ότι το βρήκε. Μέν: Αληθινά μιλάς. Σω: Δεν είναι, λοιπόν, πράγματι σε καλύτερη θέση τώρα για το πράγμα που δε γνώριζε; Μέν: Και αυτό μου φαίνεται σωστό. Σω: Με να τον γεμίσουμε, λοιπόν, αμφιβολία και να τον ναρκώσουμε σα νάρκη, τον βλάψαμε; Μέν: Δεν μου φαίνεται. Σω: Αντίθετα, τον καταστήσαμε, όπως φαίνεται, ικανότερο να ανακαλύπτει την αλήθεια (ό,τι έχει). Διότι τώρα οτιδήποτε αγνοεί θα το αναζητήσει με ευχαρίστηση και εύκολα τότε, πιστεύοντας ότι μιλάει καλά, και προς πολλούς θα μιλήσει (φανερά) ότι για διπλάσιο εμβαδόν πρέπει να έχουμε γραμμή διπλάσια σε μήκος. Μέν: Είναι προφανές. Σω: Νομίζεις λοιπόν ότι αυτός θα επιχειρούσε να ζητήσει ή να μάθει αυτό, που νόμιζε ότι γνωρίζει χωρίς να γνωρίζει, πριν η πεποίθηση της άγνοιας του δεν τον έκανε ν' αμφιβάλλει και τον έκανε να ποθήσει να μάθει; Μέν: Δεν μου φαίνεται, Σωκράτη. Σω: Ωφελήθηκε λοιπόν με τη νάρκωση; Μέν: Έτσι μου φαίνεται. Σω: Σκέψου τώρα πώς από αυτή την απορία (αμφιβολία) θ' ανακαλύψεις το πράγμα που ζητάς με μένα, παρόλο που εγώ δεν θα κάνω τίποτα άλλο παρά να ρωτάω και όχι να διδάσκω. Και πρόσεξε να με «τσακώσεις» αν πουθενά πράγματι τον διδάσκω ή εξηγώ εκείνα τα οποία γνωρίζεις, και τελικά αν κάνω τίποτε άλλο από το να τον ρωτάω τι πιστεύει. Εσύ, λοιπόν, παιδί, πες

ΣΩ.Ὤνητο ἄρα ναρκήσας; *ΜΕΝ. Δοκεῖ μοι.* *ΣΩ. Σκέψαι δὴ ἐκ ταύτης τῆς ἀπορίας ὅτι καὶ ἀνευρήσει ζητῶν μετ' ἐμοῦ, οὐδὲν ἀλλ' ἢ ἐρωτῶντος ἐμοῦ καὶ οὐ διδάσκοντος· φύλαττε δὲ ἄν που εὕρῃς με διδάσκοντα καὶ διεξιόντα αὐτῷ, ἀλλὰ μὴ τὰς τούτου δόξας ἀνερωτῶντα. Λέγε γάρ μοι σύ· οὐ τὸ μὲν τετράπουν τοῦτο ἡμῖν ἐστι χωρίον; μανθάνεις;* *ΠΑΙ.Ἔγωγε.* *ΣΩ.Ἕτερον δὲ αὐτῷ προσθεῖμεν ἂν τουτὶ ἴσον;* *ΠΑΙ. Ναί.* *ΣΩ. Καὶ τρίτον τόδε ἴσον ἑκατέρῳ τούτων;* *ΠΑΙ.Ναί.* *ΣΩ. Οὐκοῦν προσαναπληρωσαίμεθ' ἂν τὸ ἐν τῇ γωνίᾳ τόδε;* *ΠΑΙ.Πάνυ γε.* *ΣΩ. Ἄλλο τι οὖν γένοιτ' ἂν τέτταρα ἴσα χωρία τάδε;* *ΠΑΙ. Ναί.* *ΣΩ. Τί οὖν; τὸ ὅλον τόδε ποσαπλάσιον τοῦδε γίγνεται;* *ΠΑΙ. Τετραπλάσιον.* *ΣΩ. Ἔδει δέ γε διπλάσιον ἡμῖν γενέσθαι· ἢ οὐ μέμνησαι;* *ΠΑΙ. Πάνυ γε.* *ΣΩ. Οὐκοῦν ἐστιν αὕτη γραμμὴ ἐκ γωνίας εἰς γωνίαν [τινὰ] τέμνουσα δίχα ἕκαστον τούτων τῶν χωρίων;* *ΠΑΙ. Ναί.* *ΣΩ.Οὐκοῦν τέτταρες αὗται γίγνονται γραμμαὶ ἴσαι,* *περιέχουσαι τουτὶ τὸ χωρίον;* *ΠΑΙ.Γίγνονται γάρ.* *ΣΩ.Σκόπει δή· πηλίκον τί ἐστιν τοῦτο τὸ χωρίον;* *ΠΑΙ. Οὐ μανθάνω.* *ΣΩ. Οὐχὶ τεττάρων ὄντων τούτων ἥμισυ ἑκάστου* *ἑκάστη ἡ γραμμὴ ἀποτέτμηκεν ἐντός; ἢ οὔ;* *ΠΑΙ.Ναί.* *ΣΩ.Πόσα οὖν τηλικαῦτα ἐν τούτῳ ἔνεστιν;* *ΠΑΙ.Τέτταρα.* *ΣΩ. Πόσα δὲ ἐν τῷδε;* *ΠΑΙ. Δύο.*	μου· αυτό το εμβαδόν δεν είναι τεσσάρων ποδών; Συμφωνείς; Δου: Βεβαίως. Σω: Δεν μπορούμε να του προσθέσουμε και αυτό το άλλο εμβαδόν, το οποίο είναι ίσο μ' αυτό; Δου: Ναι. Σω: Και το τρίτο αυτό το εμβαδόν, ίσα με τα άλλα δύο; Δου: Ναι. Σω: Δεν μπορούμε, τέλος, να θέσουμε αυτό το άλλο μέσα σε αυτή τη γωνία; Δου: Αναμφίβολα. Σω: Αλλά τότε δεν προκύπτουν τέσσερα εμβαδά ίσα μεταξύ τους; Δου: Βεβαιότατα. Σω: Λοιπόν πόσο γίνεται όλο το εμβαδόν από τούτο εδώ; Δου: Τετραπλάσιο. Σω: Έπρεπε όμως να γίνει διπλάσιο· ή μήπως δεν το θυμάσαι; Δου :Πολύ καλά. Σω: Αυτή η γραμμή που εκτείνεται από τη μία γωνία μέχρι την άλλη, δεν χωρίζει καθένα από αυτά τα δύο εμβαδά σε δύο ίσα; Δου: Ναι. Σω: Δεν προκύπτουν έτσι τέσσερις ίσες γραμμές που περιέχουν αυτό εδώ το εμβαδόν; Δου: Ναι· προκύπτουν. Σω: Σκέψου· ποιό είναι το μέγεθος αυτού του εμβαδού; Δου: Δεν γνωρίζω. Σω: Από τα τέσσερα αυτά εμβαδά κάθε γραμμή δεν έχει σχηματιστεί ανάμεσα στο μισό του καθενός; Δεν είναι αλήθεια; Δου: Ναι. Σω: Πόσα λοιπόν εμβαδά είναι όμοια μέσα στο μεγάλο εμβαδόν; Δου: Τέσσερα. Σω: Και μέσα σε αυτό εδώ, πόσα; Δου: Δύο. Σω: Τα τέσσερα σε σχέση με τα δύο τι αποτέλεσμα δίνουν; Δου: Διπλάσιο. Σω: Πόσους λοιπόν πόδες έχει αυτός ο χώρος; Δου: Οκτώ. Σω: Και από ποιά γραμμή σχηματίσθηκε; Δου: Από αυτήν. Σω: Από τη γραμμή που εκτείνεται από τη μια

ΣΩ.Τὰ δὲ τέτταρα τοῖν δυοῖν τί ἐστιν; *ΠΑΙ. Διπλάσια.* *ΣΩ. Τόδε οὖν ποσάπουν γίγνεται;* *ΠΑΙ.Ὀκτώπουν.* *ΣΩ.Ἀπὸ ποίας γραμμῆς;* *ΠΑΙ.Ἀπὸ ταύτης.* *ΣΩ.Ἀπὸ τῆς ἐκ γωνίας εἰς γωνίαν τεινούσης τοῦ τετράποδος;* *ΠΑΙ. Ναί.* *ΣΩ. Καλοῦσιν δέ γε ταύτην διάμετρον οἱ σοφισταί· ὥστ' εἰ ταύτῃ διάμετρος ὄνομα, ἀπὸ τῆς διαμέτρου ἄν, ὡς σὺ φῄς, ὦ παῖ Μένωνος, γίγνοιτ' ἂν τὸ διπλάσιον χωρίον.* *ΠΑΙ. Πάνυ μὲν οὖν, ὦ Σώκρατες.*	γωνία ως την άλλη και από εμβαδόν τεσσάρων ποδών; Δου: Ναι. Σω: Οι σοφιστές ονομάζουν αυτήν την γραμμή διάμετρο· ώστε, εάν πράγματι τ' όνομα αυτής είναι διάμετρος, χώρος διπλάσιος, παιδί (δούλε) του Μένωνα, θα σχηματισθεί, όπως εσύ λες, από τη διάμετρο; Δου: Βέβαια, Σωκράτη.

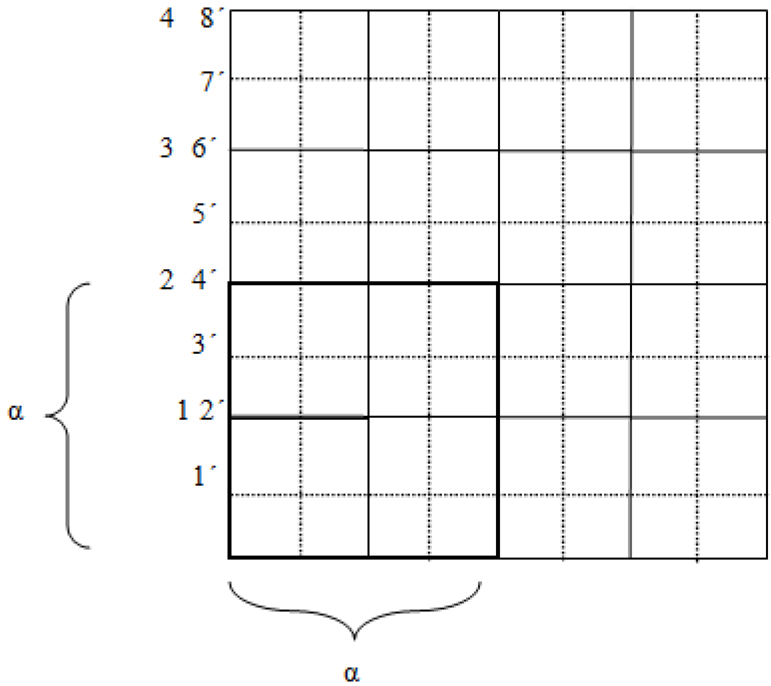
Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι το χωρίο αυτό μας παραπέμπει στο κλασικό πρόβλημα με το οποίο, όπως είχαμε σχολιάσει και σε προηγούμενο κεφάλαιο, γεννήθηκε η ασυμμετρία, μιας και ο δούλος αναζητάει κατάλληλες πλευρές τετραγώνων. Παρ' όλ' αυτά ο Πλάτωνας δεν αναφέρει πουθενά τη λέξη «ασυμμετρία», πιθανότατα για να μη μπερδέψει τον δούλο με άγνωστες σε εκείνον έννοιες. Ο Σωκράτης προσπαθεί να χειριστεί το πρόβλημα με πιο απλό τρόπο, αποφεύγοντας τη χρήση αυστηρών μαθηματικών. Βέβαια, ο Μένωνας (άνθρωπος με κάποια μόρφωση) φαίνεται από τις αντιδράσεις του στον διάλογο να είναι εξοικειωμένος με το όλο ζήτημα, κάτι το οποίο μας οδηγεί να πιστέψουμε ότι το θέμα της ασυμμετρίας ήταν γνωστό στο μορφωμένο κοινό εκείνης της εποχής.

Το βασικό ερώτημα που τίθεται μετά τη μελέτη του χωρίου είναι γιατί ο Σωκράτης ξεκίνησε τον διάλογο με τον δούλο, ρωτώντας τον για διπλασιασμό εμβαδού σε τετράγωνο πλευράς μήκους 2 ποδών; Δε θα μπορούσε να επιτύχει το ίδιο αποτέλεσμα, παίρνοντας σαν αφετηρία ένα τετράγωνο με πλευρά μήκους 1 ποδός, που είναι και απλούστερο σχήμα; Μπορούμε να προβάλουμε δύο πιθανά επιχειρήματα για την επιλογή αυτή.

Πρώτον, ξεκινώντας με πλευρά μήκους 2 ποδών, διευκολύνεται η πορεία και εξέλιξη του Σωκρατικού ελέγχου. Ο Σωκράτης ζητάει από τον δούλο να βρει ποια πλευρά μας οδηγεί σε διπλασιασμό του εμβαδού. Δεδομένου πως ο δούλος δεν έχει γνώσεις γεωμετρίας , είναι φυσικό να ταυτίζει την έννοια του «διπλάσιου» εμβαδού με την έννοια της «διπλάσιας» πλευράς και επομένως καταλήγει σε σφάλμα. Μετά αντιλαμβάνεται με χρήση της κοινής λογικής ότι αφού η διπλάσια πλευρά τον οδήγησε σε τετραπλασιασμό του εμβαδού, θα πρέπει να πάρει κάτι ενδιάμεσο ώστε να μικρύνει το αποτέλεσμα. Παίρνει λοιπόν πλευρά μήκους 3 ποδών και οδηγείται πάλι σε λάθος. Το σίγουρο είναι πως αν ο Σωκράτης ξεκινούσε με πλευρά μήκους 1 ποδός και ζητούσε τον διπλασιασμό του εμβαδού, ο δούλος θα απαντούσε εντελώς πρακτικά ότι πρέπει να πάρουμε πλευρά μήκους 2 ποδών, που είναι και το σωστό! Έτσι, το πρόβλημα θα έφτανε απευθείας σε λύση, χωρίς να μας δείξει ο Σωκράτης αυτό που επιθυμούσε περί γνώσης και ανάμνησης.

Δεύτερον, ξεκινώντας από τετράγωνο πλευράς 2, πηγαίνοντας σε τετράγωνο πλευράς 4,συγκρίνοτας τα εμβαδά και ξανακάνοντας την ίδια διαδικασία με μικρότερη υποδιαίρεση παρατηρούμε ότι προσεγγίζουμε κατά κάποιον τρόπο το $\sqrt{2}$ (Θέλουμε να πλησιάσουμε όσο γίνεται πιο κοντά σε εμβαδόν ίσο με $2{\cdot}\alpha^2$ ώστε η πλευρά του να είναι $\sqrt{2}\,\alpha$). Μάλιστα όσο δουλεύουμε σε πιο μικρά τετράγωνα, με μικρότερες υποδιαιρέσεις, τόσο η προσέγγισή μας γίνεται καλύτερη. Ας δούμε το σχετικό σχήμα:

Έστω α η αρχική μας πλευρά. Ξεκινάμε με τετράγωνο πλευράς 2 και μετά πηγαίνουμε σε τετράγωνο πλευράς 4.Επειδή παρατηρούμε ότι αυτό δεν είναι κοντά στο επιθυμητό αποτέλεσμα, σκεφτόμαστε (σα να ακολουθούμε τον απλό συλλογισμό του δούλου)να δοκιμάσουμε με λίγο μικρότερη πλευρά και συγκεκριμένα με πλευρά 3.Έτσι θα έχουμε:



Παρατηρούμε ότι όταν πάρουμε το τετράγωνο πλευράς 4 έχουμε 16= 4·$α^2$. Παίρνοντας τετράγωνο πλευράς 3 έχουμε 9=(2+1/4)$α^2$ ή αλλιώς 9= (9/4)$α^2$.Ακόμα καλύτερη προσέγγιση. Συνεχίζοντας με πλευρά 2,5 θα έχουμε ότι 6,25=(1+9/16) $α^2$ ή αλλιώς 6,25=25/16 $α^2$ δηλαδή προσέγγιση που είναι λίγο πιο μικρή από την επιθυμητή.

Ας δοκιμάσουμε τώρα να πάρουμε μικρότερη υποδιαίρεση στο αρχικό μας τετράγωνο. Το σχήμα θα είναι το διακεκομμένο και οι υποδιαιρέσεις είναι τονούμενες. Παίρνοντας με τη νέα αρίθμηση τετράγωνο πλευράς 7 θα έχουμε 49=(2+1/16)$α^2$ (πολύ κοντά στο 2).Με πλευρά 6 έχουμε 36=(2+1/4)$α^2$ (όπως η περίπτωση πλευράς 3 της προηγούμενης αρίθμησης).Με πλευρά 5 έχουμε 25=(1+9/16)$α^2$)όπως στην περίπτωση πλευράς 2,5 της προηγούμενης αρίθμησης).

Αν συνεχίσουμε τη διαδικασία παίρνοντας ακόμα πιο μικρές υποδιαιρέσεις αναμένεται να φτάσουμε σε ακόμα πιο κοντινές προσεγγίσεις του $\sqrt{2}$.

Επίλογος

Είδαμε λοιπόν ότι το ζήτημα της ασυμμετρίας διαθέτει πολλές και ενδιαφέρουσες πτυχές προς μελέτη. Δεν είναι εύκολο να προβούμε σε σίγουρες απαντήσεις για όλα τα ερωτήματα που θέσαμε, όχι μόνο επειδή οι πηγές μπορεί να αφήνουν αναπάντητα μερικά από αυτά αλλά και επειδή οι σύγχρονοι μελετητές δε δείχνουν να συμφωνούν πάντα μεταξύ τους. Σίγουρα είναι μια ανακάλυψη που χωρίς αυτήν δε γνωρίζουμε πως θα μπορούσε να ήταν ο κόσμος γύρω μας. Πάντως, είτε μπορεί να αποδοθεί στον ίδιο τον Πυθαγόρα είτε σε κάποιον Πυθαγόρειο και είτε ξεπήδησε από το τετράγωνο ή το πεντάγωνο, η ασυμμετρία θα αποτελεί πάντα αντικείμενο θαυμασμού. Άλλωστε, όταν συναντάς μια ιστορική μορφή όπως του Πλάτωνα να εμπλέκει αυτό το θέμα στα έργα του, νομίζω πως αποδίδεται αυτόματα η σημασία του.

Ας αναλογιστούμε για το τέλος, ότι παράδειγμα άρρητου αριθμού αποτελεί και ο φ (ονομασία προς τιμήν του γλύπτη Φειδία) που αντιπροσωπεύει τη λεγόμενη χρυσή τομή όπως είδαμε και νωρίτερα. Ο αριθμός αυτός εντοπίζεται παντού στη φύση. Οι κερήθρες των μελισσών, η δομή της κατασκευής ενός κοχυλιού, η σχέση ανάμεσα στο πλήθος των δεξιόστροφων και αριστερόστροφων σπειρών του ηλίανθου και του κουκουναριού, είναι όλα θαυμαστά δημιουργήματα της φύσης και έγιναν απ' αυτήν με τρόπο σοφό. Πίσω από όλη αυτή τη δημιουργία κρύβονται νόμοι που, όπως έλεγε ο Γαλιλαίος, είναι γραμμένοι στο μεγάλο βιβλίο της φύσης και που τα γράμματα στις σελίδες του είναι σχήματα και αριθμοί…

Βιβλιογραφία

Burkert Walter (1972) *Lore and Science in Ancient Pyhagoreanism,* Harvard University Press,Cambridge,Massachusetts

Burnet J. (1925) *Plato's Phaedo,* Oxford University Press

Burnyeat M.F. (1978) "The Philosophical Sense of Theaetetus' Mathematics", *ISIS*, 69 (No.249)

Diels.H-Kranz W. (2011) *Οι Προσωκρατικοί-Οι μαρτυρίες και τα αποσπάσματα,* ΔΗΜ.Ν.ΠΑΠΑΔΗΜΑ,ΑΘΗΝΑ

Fowler David (1999) *The Mathematics of Plato's Academy-A new reconstruction,* Oxford University Press Inc.,New York

Friedlein G. (ed) by Proclus (1883) *Proclus's Summary,* B.G.Teubneri

Fritz von Kurt (1970) "The discovery of incommensurability by Hippasus of Metapontum", D.Furley-R.E.Allen(ed), *Studies in Presocratic Philosophy,* London

Heath Thomas S. (1921) *A History of Greek Mathematics vol. I,* OXFORD AT THE CLARENDON PRESS

Heiberg J.L. (2008) *Euclid's Elements of Geometry,* B.G.Teubneri

Junge Gustav and Thomson William (1931) "The commentary of Pappus on Book X of Euclid's Elements", *ISIS*, vol. 16 (No.1)

Kahn,Charles (2001) *Ο Πυθαγόρας και οι Πυθαγόρειοι,* (μετ. Μ.Σταυροπούλου) ΕΝΑΛΙΟΣ,ΑΘΗΝΑ

Καρασμάνης Βασίλης (1990) "The Hypotheses of Mathematics in Plato's *Republic* and his Contribution to the Axiomatization of Geometry", P. Nicolacopoulos (ed.), *Greek Studies in the Philosophy and History of Science*, Kluwer Academic Publishers, σ.121-136.

Καρασμάνης Βασίλης (1998) "Πυθαγόρεια και Ιωνικά Μαθηματικά-Δύο ανεξάρτητα ρεύματα στην προπλατωνική διανόηση" , *Revue de Federation des Professeurs de Grec et Latin*

Kirk G.S.-Raven J.E.-Schofield.M (2006) *Οι προσωκρατικοί φιλόσοφοι,* (μετ. Δ.Κούτροβικ) ΜΟΡΦΩΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΕΘΝΙΚΗΣ ΤΡΑΠΕΖΗΣ,ΑΘΗΝΑ

Knorr Wilbur Richard (1945) *The evolution of the Euclidean elements,* D.Reidel Publishing Company,Dordrecht,Holland

Kuhn T.S. (1957) *The Copernican Revolution:Planetary Astronomy in the Development of Western Thought*, Cambridge,Mass.

Novak J.A. (1983) “Plato and the irrationals”, *Apeiron*, vol.XVII (No.1)

Thomas Ivor (1939) *Greek Mathematical Works vol. I,* Loeb Classical Library

Van der Waerden B.L. (2000) *Η Αφύπνιση της Επιστήμης,* (μετ.Γ.Χριστιανίδης) ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ,ΑΘΗΝΑ

Χριστιανίδης Γιάννης (2003) *Θέματα από την ιστορία των μαθηματικών*, ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ,ΑΘΗΝΑ