ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΔΟΜΟΣΤΑΤΙΚΟΣ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΜΕΤΑΛΛΙΚΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Γιώργου Ἐλμέζογλου
Πολιτικοῦ Μηχανικοῦ ΕΜΠ

ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ ΠΤΕΡΥΓΙΣΜΟΥ ΚΑΤΑΣΤΡΩΜΑΤΩΝ ΓΕΦΥΡΩΝ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΒΗΜΑ ΠΡΟΣ ΒΗΜΑ

ΕΜΚ ΜΕ 2015/08

Ἐπιβλέπων Καθηγητὴς
Ἰωάννης Ῥαυτογιάννης

Ἀθήνα
Ὀκτώβριος 2015

Στὴ μνήμη
τοῦ πατέρα μου
Γιάννη Ἐλμέζογλου
Πολιτικοῦ Μηχανικοῦ ΕΜΠ

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

1. ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

1.1. ΙΣΤΟΡΙΚΑ

Τὸ **1854**, ἡ κρεμαστὴ γέφυρα τοῦ ***Wheeling*** στὴν δυτικὴ *Virginia*, ποὺ εἶχε σχεδιαστεῖ ἀπὸ τὸν ***Charles Ellet Jr*** κατέπεσε, σύμφωνα μὲ τὶς ἐφημερίδες τῆς ἐποχῆς, λόγῳ σφοδρῆς ἀνεμοθύελλας. Τὴν ἐποχὴ τῆς ἀποπεράτωσής της, ἡ γέφυρα αὐτὴ ἦταν ἡ μεγαλύτερη στὸν κόσμο μὲ ἀπόσταση πυλώνων περὶ τὰ 303 *m*, ποὺ γιὰ τὰ σημερινὰ δεδομένα εἶναι μικρό. Ἡ καταστροφὴ ἐκείνη (κατέρρευσε τὸ κατάστρωμα, ἀλλὰ καὶ τὸ σύστημα ἀνάρτησης), θορύβησε τοὺς μηχανικοὺς τῆς ἐποχῆς, ποὺ θεώρησαν ὅτι ἀπαιτείτο κάποιο εἶδος συστήματος προσαύξησης τῆς δυσκαμψίας, ποὺ θὰ ἔπρεπε πιθανῶς νὰ ἐνσωματωθεῖ - προστεθεῖ σὲ ὅλες σχεδὸν τὶς ὑπάρχουσες τότε κρεμαστὲς γέφυρες [α]7.1.

Φωτογραφία 1.1 Γέφυρα Wheeling, Virginia

Ὁ περίφημος μηχανικὸς - μαθηματικὸς *George Airy* (γνωστὸς ἀπὸ τὴν τασικὴ συνάρτηση *Airy*), ἀσχολήθηκε μὲ τὸ πρόβλημα καὶ δημοσίευσε μία μελέτη ὑπὸ τὸν τίτλο «Περὶ τῆς χρήσης τῆς κρεμαστῆς γέφυρας μὲ ἐνισχυμένο κατάστρωμα γιὰ σιδηρόδρομο καὶ ἄλλες γέφυρες μεγάλου ἀνοίγματος» [1.1].

Ἂν καὶ ἡ ἐργασία αὐτὴ ἀπέφερε στὸν *Airy* τὸ 1867 τὸ βραβεῖο *Telford* τοῦ *Institution of Civil Engineers* τῆς Μεγάλης Βρετανίας, δὲν προσέφερε στὴν λύση τοῦ προβλήματος πρὸς τὴ σωστὴ κατεύθυνση. Ὁ *Airy* κατέληγε καὶ πρότεινε τὴν ἀπαραίτητη χρήση ἄκαμπτων στοιχείων, ἡ δὲ αἰτιολόγηση τῆς πρότασης αὐτῆς ἦταν ὅτι αὐτὰ θὰ μποροῦσαν νὰ χρησιμοποιηθοῦν στὴν ὀρθότερη κατανομὴ βαρέων συγκεντρωμένων φορτίων. Στὴ μελέτη του, δὲν ὑπήρχε οὔτε κὰν ἡ ἀναφορὰ τῶν δυνάμεων τοῦ ἀνέμου.

Καθῶς ὁ σχεδισμὸς διένυε μία ἐξαιρετικὰ συντηρητικὴ περίοδο, ἐνῶ οἱ ἀπαιτήσεις γιὰ μεγαλύτερα φορτία καὶ ἀνοίγματα γεφυρῶν αὔξαναν, ἡ χρήση τῶν ζευκτῶν εὐστάθειας γενικεύτηκε καὶ αὐτὰ ἀπὸ γέφυρας σὲ γέφυρα γίνονταν βαρύτερα, φθάνοντας τὸ **1903** στὸ ἀπόγειο μὲ τὴ γέφυρα ***Williamsburg***, ἐπὶ τοῦ ποταμοῦ *East River*, τῆς ὁποίας ἡ διατομὴ τοῦ καταστρώματος εἶχε ὕψος 12 *m*. Ἡ γέφυρα αὐτὴ, ἔμοιαζε περισσότερο μὲ βαρὺ δικτύωμα, παρὰ μὲ κρεμαστὴ γέφυρα. Τὸ παράδοξο ὀπτικὸ ἀποτέλεσμα καὶ οἱ ἀφύσικες ἀναλογίες της, ποὺ τὴν ἐκαναν ἀρχιτεκτονικὰ ἄσχημη, ἦταν ἀναμφισβήτητα οἱ αἰτίες ποὺ

εὐαισθητοποίησαν τοὺς μελετητὲς καὶ τοὺς παρακίνησαν στὴν προσπάθεια βαθμιαίας σμίκρυνσης τοῦ ὕψους τοῦ φορέα τοῦ καταστρώματος, ὥστε νὰ προκύπτουν αἰσθητικὰ ἀποδεκτὲς μορφές. Στὰ παραπάνω βοήθησαν τόσο ἡ συνεχὴς πειραματικὴ ἔρευνα, ὅσο καὶ ἡ πρόοδος τῶν ὑπολογιστικῶν μεθόδων.

Φωτογραφία 1.2 Γέφυρα Williamsburg, East River

Μὲ τὴ γέφυρα ***George Washington***, ποὺ δόθηκε στὴν κυκλοφορία το **1931** καὶ δὲν εἶχε καθόλου ἐνισχύσεις (*stiffeners*), εἶχε ἐπιτευχθεῖ ἡ πλέον λυγηρὴ κατασκευή. Ὅμως, τὸ **1940**, ἡ περίφημη γέφυρα τῆς ***Tacoma Narrows***, ὄχι ἰδιαίτερα μεγάλου ἀνοίγματος, μὲ ἐνισχύσεις καὶ ὕψος καταστρώματος 2.4 *m*, κατέρρευσε ὑπὸ τὴ δράση ἀνέμου. Τὸ γεγονὸς αὐτὸ ἀνέτρεψε καὶ πάλι τὰ ἕως τώρα κρατοῦντα καὶ προβλημάτισε ἰδιαίτερα τοὺς μελετητές. Τὸ ἐρώτημα ἦταν σὲ ποιοῦς λόγους ὀφείλονταν οἱ ἀστοχίες, ἀφοῦ τόσο ἡ *Ellets Willing*, ποὺ δὲ διέθετε, ὅσο καὶ ἡ *Tacoma* ποὺ διέθετε σύστημα ἐνίσχυσης, κατέρρευσαν.

Ἀντίθετα, ἡ γέφυρα *George Washington*, ποὺ ὄχι μόνο δὲ διέθετε ἐνισχύσεις, ἀλλὰ καὶ ὁ φορέας της ἦταν ἐξαιρετικὰ λυγηρός, εἶχε μετὰ 34 χρόνια χρήσης ἀποδείξει ὅτι τὸ δόγμα ἀναγκαίας χρήσης ἐνισχύσεων ἦταν λάθος (τὴ δεκαετία τοῦ ’60 ἡ ὑπ’ ὄψιν γέφυρα ἀπέκτησε καὶ δεύτερο κατάστρωμα γιὰ τὴν κυκλοφορία ὀχημάτων).

Σήμερα εἶναι εὐρέως γνωστὸ ὅτι ἡ καταστροφὴ τῆς γέφυρας *Tacoma*, σὲ πεῖσμα τῆς ὕπαρξης ἐνισχύσεων, ὠφείλετο στὴν ἀεροδυναμικὴ μορφὴ τοῦ ἰδίου τοῦ συστήματος ἐνίσχυσης [1.2].

Φωτογραφία 1.3 Γέφυρα George Washington

Μὲ τὰ παραπάνω δεδομένα, οἱ ἐρευνητὲς ἄρχισαν νὰ ἐρευνοῦν τὴν συμπεριφορὰ μιὰς γέφυρας ὑπὸ τὴ δράση ἀνέμου καὶ νὰ ὑποψιάζονται ὅτι πλέον κρίσιμος ἀπὸ τὴν ἀντοχὴ τοῦ φορέα τοῦ καταστρώματος της γέφυρας εἶναι ὁ συνδυασμὸς ὡρισμένων χαρακτηριστικῶν τῆς γέφυρας μὲ τὰ χαρακτηριστικὰ τῆς ῥοῆς τοῦ ἀνέμου περὶ αὐτήν.

Φωτογραφία 1.4 Γέφυρα Tacoma Narrows

1.2. ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

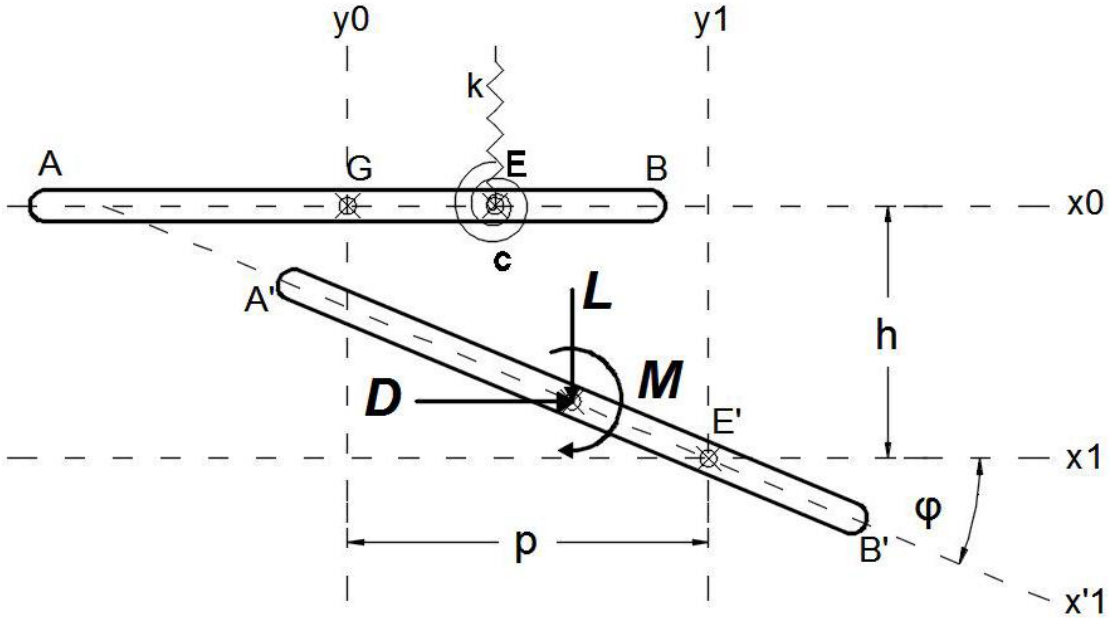
Ὁ μηχανισμὸς ποὺ συντελεῖ στὴν ἀνάπτυξη ὡρισμένων δυνάμεων περὶ τὸν φορέα τοῦ καταστρώματος μιᾶς γέφυρας, εὑρισκόμενης ἐντὸς ῥεύματος ἀέρος, μελετᾶται μὲ τὴ βοήθεια τῆς **Ἀεροδυναμικῆς** καὶ τῆς **Ῥευστομηχανικῆς:** [α]2.3.2, [1.3], [1.4], [1.5], [1.6].

Γύρω ἀπὸ τὴ διατομὴ καταστρώματος τοῦ σχήματος 1.1, ἀναπτύσσονται **στροβιλισμοὶ *(vortexes)*** καὶ λόγῳ αὐτῶν ὑποπιέσεις στὸ ἄνω καὶ στὸ κάτω μέρος της. Ἡ ὁλοκλήρωση αὐτῶν τῶν πιέσεων ἐπὶ τοῦ περιγράμματος τῆς διατομῆς, ἀποδίδει **τρεῖς δράσεις** στὸ κέντρο βάρους της:

- ***L*** **: *Lift*** — αἴρουσα
- ***M*** **: *Moment*** — ῥοπὴ
- ***D*** **: *Drag*** ἢ ***back-drag*** — ἕλκουσα ἢ ὀπισθέλκουσα

προκαλώντας σύνθετη κίνηση τῆς διατομῆς, μὲ ἄξονα περιστροφῆς τὸ ἐλαστικό της κέντρο, ποὺ ἀναλύεται σὲ τρεῖς συνιστώσες:

- ***h*** **: *heaving*** ἢ ***vertical*** — αἴρουσα ἢ κατακόρυφη
- ***a*** **: *angular*** ἢ ***torsional*** — γωνιακὴ ἢ στρεπτικὴ
- ***p*** **: *pitching*** ἢ ***horizontal*** — ῥίπτουσα ἢ ὁριζόντια



Σχῆμα 1.1 Διατομὴ καταστρώματος καὶ ἀναπτυσσόμενες δράσεις - μετακινήσεις

Εἶναι φανερὸ ὅτι αὐτὲς οἱ ἀεροδυναμικὲς δράσεις δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἰσορροποῦν ἀνὰ πάσα στιγμή, ἀκόμη κὶ ἂν ἡ διατομὴ εἶναι διπλῆς συμμετρίας, λόγῳ τῆς φύσης τῶν φορτίων αὐτῶν. Αὐτὴ ἡ ἀνισότητα τῶν πιέσεων - ὑποπιέσεων στὸ ἄνω καὶ στὸ κάτω μέρος τῆς γέφυρας θὰ ἔχει σὰν ἀποτέλεσμα τὴν ἐμφάνιση τῶν δράσεων ***L , D, M*** ἐγκάρσια πρὸς τὸν διαμήκη ἄξονα τῆς γέφυρας, ποὺ θὰ κινήσουν σὲ ταλάντωση τὸν φορέα.

Ἡ ἀεροελαστικὴ ἀνάλυση τῶν γεφυρῶν, βασίζεται σὲ ἐξισώσεις τῆς κλασσικῆς θεωρίας τῆς ἀεροελαστικότητας. Οἱ ἐξισώσεις αὐτὲς χρησιμοποιοῦνται κυρίως γιὰ τὴν ἀνάλυση καὶ τὸ σχεδιασμὸ ἀεροσκαφῶν καὶ σχετικὰ πρόσφατα ἄρχισαν νὰ χρησιμοποιοῦνται καὶ σὲ ἄλλους τομεῖς, ὅπως αὐτὸν τοῦ Πολιτικοῦ Μηχανικοῦ.

Στὸ σημεῖο αὐτό, θὰ πρέπει νὰ γίνει ἡ ἑξῆς παρατήρηση: Τὰ ἀεροσκάφη σχεδιάζονται μὲ ἀεροδυναμικὴ μορφὴ (ἀεροδυναμικῶς ἀποδοτικά) καὶ ἑπομένως ἡ ἀεροελαστικὴ θεωρία στὴν ἀεροναυπηγικὴ βασίζεται στὴν ἐφαρμογὴ τῆς θεωρίας δυναμικῆς ῥοῆς, δεδομένου ὅτι ἡ περὶ τὸ ἀεροσκάφος ῥοὴ συνήθως δὲν εἶναι διαταραγμένη.

Ἀντιθέτως, ἡ μορφὴ μίας γέφυρας δὲν εἶναι ἀεροδυναμικὴ καὶ τὰ καταστρώματα τῶν γεφυρῶν ἀνήκουν στὴν κατηγορία τῶν **ἀεροδυναμικῶς τραχέων σωμάτων *(bluff bodies)***, μὲ ἀνάλογη ἀεροδυναμικὴ συμπεριφορά.

Δὲν εἶναι σαφὲς πῶς μπορεῖ νὰ ἐφαρμοσθεῖ ἡ **θεωρία δυναμικῆς ῥοῆς *(potential flow theory)*** στὴν ἀεροδυναμικὴ μελέτη τῶν γεφυρῶν, μὲ ἀποτέλεσμα νὰ ὑπάρχουν ἀρκετὰ ἀναλυτικὰ προσομοιώματα γιὰ τὸν προσδιορισμὸ τῶν δράσεων ***L, D, M***. Κατὰ χρονολογικὴ σειρᾶ, παρουσίασαν τέτοια προσομοιώματα οἱ ἑξῆς ἐρευνητές: *Wagner* (1925), *Theodorsen* (1935), *Karman* (1938), *Farquharson* (1949), *Bleigh* (1951), *Kloppel* (1967), *Scanlan and Tomco* (1971), *Scanlan* (1988), *Agar* (1989), *Matsumoto* (1995, 2010, 2014), κ.α. Στὶς ἑπόμενες ὑποενότητες, περιγράφονται ἀναλυτικὰ οἱ ἀκόλουθες θεωρίες - προσομοιώματα:

- Θεωρία τοῦ *Theodorsen*
- Θεωρία τοῦ *Scanlan*

1.2.1. Ἡ θεωρία τοῦ *Theodorsen*

Ὁ *Theodore Theodorsen*, τὸ 1935 παρουσίασε τὴν ἐργασία «Γενικὴ Θεωρία τῆς Ἀεροδυναμικῆς Ἀστάθειας καὶ ὁ Μηχανισμὸς τοῦ Πτερυγισμοῦ» *(General Theory of Aerodynamic Instability and the Mechanism of Flutter)* [β]. Σὲ αὐτὴν ἀποδίδει τὶς ἀεροδυναμικὲς δράσεις ***L*** καὶ ***M*** (ὄχι την ***D*** ἀκόμη), **γιὰ λεπτὲς πλάκες** πλάτους *B* ὡς ἑξῆς [1.7], [1.8]:

$$L(k)=\frac{k}{\pi}\left(\frac{V}{b}\right)^2 C_L(k) \tag{1.2.1}$$

$$M(k)=2\frac{k}{\pi}\left(\frac{V}{b}\right)^2 C_M(k) \tag{1.2.2}$$

ὅπου $b=\frac{B}{2}$ τὸ ἡμιπλάτος ἢ **ἡμιχορδὴ *(semicord)*** , $k=\frac{B\omega}{V}$ ἡ **μειωμένη** (ἀνηγμένη) **συχνότητα *(reduced frequency)*** ὡς πρὸς τὴν ταχύτητα τοῦ ἀνέμου *V* καὶ οἱ ἀεροδυναμικοὶ συντελεστὲς C_L καὶ C_M :

$$\mathrm{C}_L(k)=\frac{\pi b}{V^2}\left(V\dot{\alpha}+\ddot{h}-b\alpha\ddot{\alpha}\right)+2\pi C(k)\alpha_{qs} \tag{1.2.3}$$

$$\mathrm{C}_M(k)=-\frac{\pi}{2V^2}\left[\left(\frac{1}{8}+\alpha^2\right)\ddot{\alpha}-\alpha b\ddot{h}\right]+\pi\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)C(k)\alpha_{qs} \tag{1.2.4}$$

ὅπου $\boldsymbol{\alpha_{qs}}$ **ἡ οἰωνεῖ εὐσταθὴς *(quasi-steady)* γωνία πρόνευσης** ἢ προσβολῆς τῆς ῥοῆς τοῦ ἀνέμου ***(aerofoil angle of attack)*** :

$$a_{qs}=\frac{\dot{h}}{V}+a+b\left(\frac{1}{2}-a\right)\frac{\dot{a}}{V} \tag{1.2.5}$$

Παρατηροῦμε ὅτι ὅλες οἱ παραπάνω συναρτήσεις, ἔχουν ὡς ἀνεξάρτητη μεταβλητὴ μόνο το ***k*** καὶ ὄχι τὸ χρόνο ***t***. Ὁ χρόνος ὑπεισέρχεται ἔμμεσα, μέσῳ τῶν ἐξαρτημένων μεταβλητῶν, ποὺ εἶναι τὰ κινηματικὰ μεγέθη ***a*** καὶ ***h*** καὶ οἱ παράγωγοί των.

Ἡ συνάρτηση ***C(k)*** ποὺ ἐμφανίζεται στὴ σχέση (1.2.3) καλεῖται **συνάρτηση τοῦ *Theodorsen*** καὶ περιγράφεται στὴν ὑποενότητα 1.2.1.4. Γιὰ τὴν κατανόηση τῆς συνάρτησης τοῦ *Theodorsen*, ἀπαιτεῖται κατ' ἐλάχιστον τὸ παρακάτω μαθηματικὸ ὑπόβαθρο, τὸ ὁποῖο ὑπενθυμίζεται πολὺ συνοπτικὰ καὶ ἐπιγραμματικὰ στὶς ἀκόλουθες ὑποενότητες:

- 1.2.1.1 Συνάρτηση *Γάμμα*
- 1.2.1.2 Συναρτήσεις *Bessel*
- 1.2.1.3 Συναρτήσεις *Hankel*

Ἐπίσης, ἡ κατανόηση τῆς συνάρτησης τοῦ *Theodorsen*, ἀποτελεῖ προϋπόθεση γιὰ τὴν ἀναφορὰ στὴ θεωρία τοῦ *Scanlan*.

1.2.1.1. Συνάρτηση *Γάμμα*

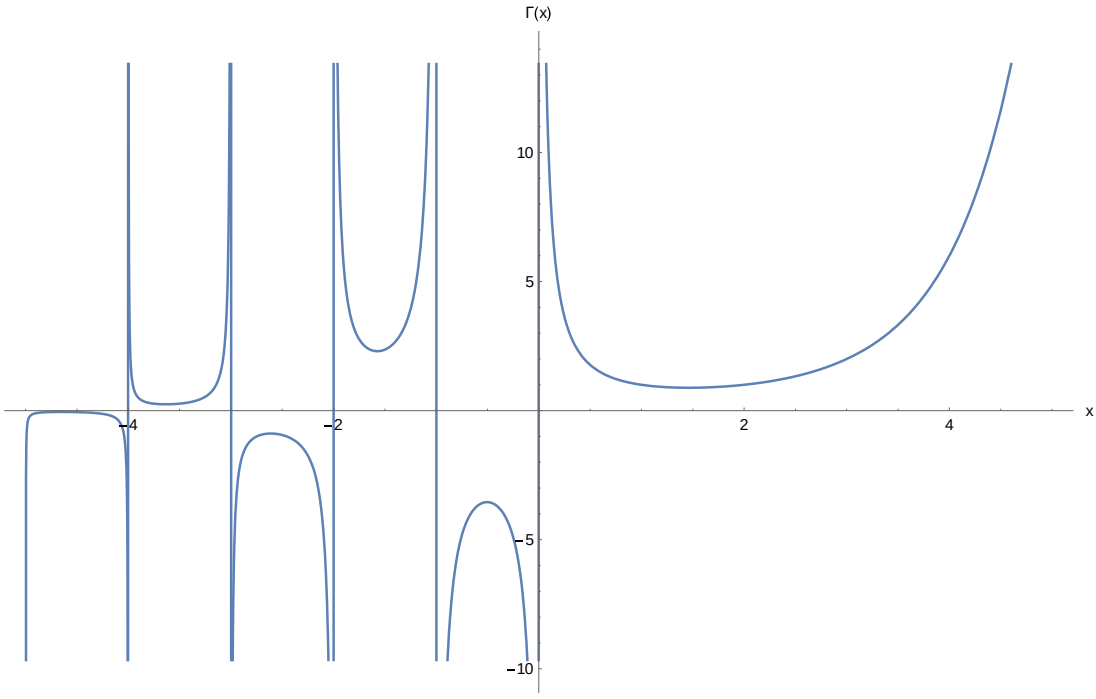
Ἡ **συνάρτηση *Γάμμα*** εἶναι μία ἐπέκταση τῆς παραγοντικῆς συνάρτησης *n!* ἀπὸ τὸν φυσικὸ χῶρο $\mathbb{N}$ στὸν πραγματικὸ $\mathbb{R}$ καὶ ἐν γένει μιγαδικὸ $\mathbb{C}$. Ἡ συνάρτηση *Γάμμα* ἀνήκει στὶς γενικὰ λεγόμενες εἰδικὲς συναρτήσεις. Ἕνας ἐκ τῶν ὁρισμῶν τῆς συνάρτησης *Γ(x)* εἶναι ὁ ἑξῆς ὁλοκληρωτικὸς τύπος:

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt \ , \ \forall\, x>0 \qquad (1.2.6)$$

Ὑπάρχουν κὶ ἄλλοι ὁρισμοί, ὅπως μέσῳ ὁρίου ἢ ἀπείρου γινομένου [1.9].Ἡ συνάρτηση ἔχει μερικὲς ἀξιοσημείωτες ἰδιότητες:

$$\Gamma(n+1)=n! \ , \ \Gamma(x+1)=x\Gamma(x) \ , \ \Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin \pi x} \ , \ \sin \pi x \neq 0 \qquad (1.2.7)$$

Ἡ πρώτη ἐξ αὐτῶν (1.2.7.α) συνδέει ἄμεσα τὴ συνάρτηση *Γ(x)* μὲ τὸ παραγοντικὸ *n!* γιὰ ἀκέραιες τιμὲς τοῦ *x: x = n + 1* . Ἡ δεύτερη ἰδιότητα (1.2.7.β) θυμίζει τὴ γνωστὴ ἰδιότητα τοῦ παραγοντικοῦ *n! = n(n - 1)!* . Στὸ διάγραμμα ποὺ ἀκολουθεῖ, ἀπεικονίζονται οἱ πραγματικὲς τιμὲς τῆς *Γ(x)* γιὰ πραγματικὰ ***x*** :



Διάγραμμα 1.1 Συνάρτηση Γάμμα

1.2.1.2. Συναρτήσεις *Bessel*

Οἱ **συναρτήσεις *Bessel*** ἀνήκουν καὶ αὐτὲς στὴν κατηγορία τῶν εἰδικῶν συναρτήσεων. Ἐντελῶς ἀδόκιμα, θα μποροῦσαμε νὰ τὶς χαρακτηρίσουμε σὰν συγγενεὶς τῶν τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων. Προκύπτουν ἀπὸ τὴ γενικὴ λύση τῆς διαφορικῆς ἐξίσωσης τοῦ *Bessel*. Αὐτή, στὴν ἁπλούστερη μορφή, μὲ μία παράμετρο σὲ μόνο ἕναν ὅρο, εἶναι:

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + \left(x^2 - \nu^2\right) y(x) = 0 \tag{1.2.8}$$

Πρόκειται γιὰ μία ὁμογενὴ γραμμικὴ διαφορικὴ ἐξίσωση δεύτερης τάξης καὶ μὲ μὴ σταθεροὺς συντελεστές, ακριβῶς ὅπως στὴν ἐξίσωση *Legendre* στὴν Ἐνότητα [γ]A15.1. Ἐδὼ στὴν ἐξίσωση *Bessel* (1.2.8), παράμετρος εἶναι ἡ ποσότητα *ν*. Τὴν καλοῦμε κὶ αὐτὴ τάξη τὴς ἐξίσωσης *Bessel*. Διαιρώντας μὲ x^2 (με $x > 0$), γράφουμε τὴν ἐξίσωση *Bessel* (1.2.8) καὶ στὴν ἰσοδύναμη μορφή της:

$$y''(x) + \frac{1}{x} y'(x) + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y(x) = 0 \tag{1.2.9}$$

Στὴν Ἐνότητα [γ]A14.4 τοῦ Κεφαλαίου [γ]A14 ἐπιλύσαμε τὴ διαφορικὴ ἐξίσωση [γ](14.4.1), τὴν ἐπαναλαμβάνουμε

$$f''(r) + \frac{1}{r} f'(r) - \lambda^2 f(r) = 0 \tag{1.2.10}$$

μὲ τὴ μέθοδο τῶν δυναμοσειρῶν καὶ καταλήξαμε στὴ λύση [γ](14.4.18). Δὲν εἶναι ἀκριβῶς ἡ ἐξίσωση *Bessel* (1.2.8): εἶναι μία τροποποιημένη μορφή της. Ἐντούτοις καὶ ἡ ἴδια ἡ ἐξίσωση *Bessel* (1.2.8) ἢ (1.2.9) μπορεῖ κὶ αὐτὴ νὰ λυθεῖ μὲ τὴ μέθοδο τῶν δυναμοσειρῶν τοῦ Κεφαλαίου [γ]A14 σὲ μιὰ γενικευμένη μορφὴ καὶ χρήση της. Ἐδὼ θὰ παραλείψουμε τὴ σχετικὴ διαδικασία (μέθοδος τοῦ ***Frobenius***), γράφοντας κατευθείαν τὸ ἀποτέλεσμα τῆς λύσης αὐτῆς. Αὐτὸ εἶναι (μὲ τὴ μέθοδο τῶν δυναμοσειρῶν ἐπαναλαμβάνουμε):

$$y_g(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 J_{-\nu}(x) \tag{1.2.11}$$

μὲ τὴν προϋπόθεση ὅτι ἡ τάξη ***ν*** τῆς ἐξίσωσης *Bessel* (1.2.8) ἢ (1.2.9) δὲν εἶναι ἀκέραιος ἀριθμός. Στὴ λύση αὐτή, ποὺ εἶναι ἡ γενικὴ λύση τῆς ἐξίσωσης *Bessel*, οἱ ποσότητες C_1 καὶ C_2 εἶναι ἁπλὰ δύο αὐθαίρετες σταθερὲς πραγματικὲς γιὰ πραγματικὲς λύσεις *y(x)*.

Οἱ δύο συναρτήσεις $J_\nu(x)$ καὶ $J_{-\nu}(x)$ στὴ γενικὴ αὐτὴ λύση $y_g(x)$ εἶναι **συναρτήσεις *Bessel* πρώτου εἴδους** καὶ **τάξεων *ν* καὶ *-ν*** ἀντίστοιχα. (Οἱ τάξεις αὐτὲς δείχνονται στοὺς δείκτες: J_ν καὶ $J_{-\nu}$ ἀντίστοιχα). Ἡ συνάρτηση *Bessel* $J_\nu(x)$ πρώτου εἴδους καὶ τάξης *ν* ὁρίζεται μέσω τῆς δυναμοσειρᾶς:

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+1+\nu)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} \quad , \quad x > 0 \tag{1.2.12}$$

ἐὰν ἡ τάξη ***ν*** τῆς συνάρτησης *Bessel* $J_\nu(x)$ εἶναι μὴ ἀρνητικὸς ἀκέραιος ἀριθμὸς *n*, τότε:

$$\Gamma(k+1+\nu) = \Gamma(k+1+n) = (k+n)! \tag{1.2.13}$$

καὶ ἡ δυναμοσειρὰ (1.2.12) ἁπλοποιείται στὸν παρονομαστὴ παίρνοντας τώρα τὴ μορφή:

$$J_\nu(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(k+\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} \quad , \; n\in\mathbb{N} \; , \; x\geq 0 \tag{1.2.14}$$

(Ἀνάλογα καὶ ἡ συνάρτηση *Bessel* $J_{-\nu}(x)$ ἁπλὰ μὲ $-\nu$ ἀντὶ γιὰ ν.) Ὁ ὁρισμὸς αὐτὸς μὲ δυναμοσειρᾶ δὲν εἶναι βέβαια αὐθαίρετος. Προέκυψε ἀπὸ τὴν ἐπίλυση τῆς ἐξίσωσης *Bessel* (1.2.8) ἢ (1.2.9) μὲ τὴ μέθοδο τῶν δυναμοσειρῶν (σὲ κάπως γενικευμένη μορφή της: μέθοδος τοῦ *Frobenius*).

Μέχρι τώρα ἀναφερθήκαμε στὶς συναρτήσεις *Bessel* πρώτου εἴδους $J_\nu(x)$ (τάξης ν). Μὲ τὴ χρήση τους ἐκφράσαμε στὴ σχέση (1.2.14) τὴ γενικὴ λύση $y_g(x)=C_1J_\nu(x)+C_2J_{-\nu}(x)$ τῆς ἐξίσωσης *Bessel* (1.2.8) στὴν περίπτωση ποὺ ἡ τάξη της ***ν*** δὲν εἶναι ἀκέραιος ἀριθμός ***n***. Ἐὰν ὅμως εἶναι, ἀποδεικνύεται ὅτι οἱ δύο συναρτήσεις $J_\nu(x)$ καὶ $J_{-\nu}(x)$ **δὲν** εἶναι γραμμικὰ ἀνεξάρτητες μεταξὺ τους. Ἐπομένως καὶ ἡ λύση μας αὐτὴ δὲν εἶναι ἡ γενικὴ λύση $y_g(x)$ τῆς ἐξίσωσης *Bessel* (1.2.8) ποὺ ἀναζητάμε. Τότε χρησιμοποιοῦμε τὶς καλούμενες **συναρτήσεις *Bessel* δευτέρου εἴδους $Y_\nu(x)$** (πάλι τάξης ν). Αὐτὲς ὁρίζονται ὡς ἑξῆς:

$$Y_\nu(x)=\frac{1}{\sin\nu\pi}\left[J_\nu(x)\cos\nu\pi-J_{-\nu}(x)\right] \; , \; \mathrm{v}\notin\mathbb{Z}:\mathrm{v}\neq\mathrm{n} \tag{1.2.15}$$

καί:

$$Y_n(x)=\lim_{\nu\to n}Y_\nu(x) \; , \; \mathrm{v}\in\mathbb{Z}:\mathrm{v}=\mathrm{n} \tag{1.2.16}$$

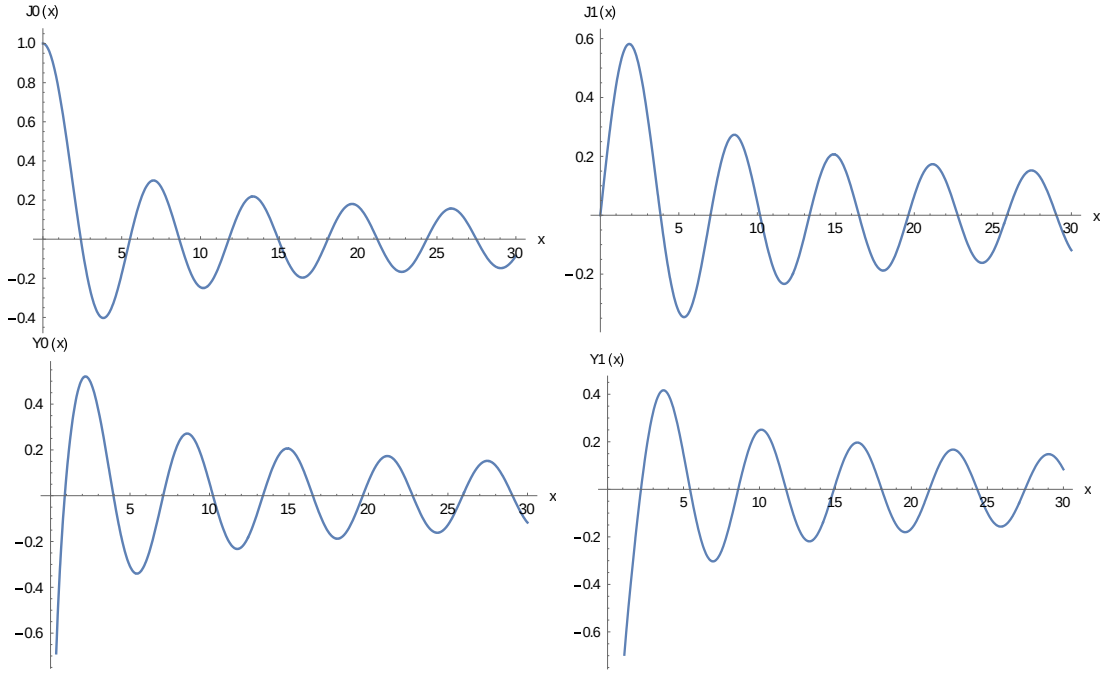
Δὲ θὰ δώσουμε τὴν τελικὴ ἐκφραση αὐτοῦ τοῦ ὁρίου, ἐπειδὴ δὲν εἶναι ἰδιαίτερα ἁπλή. Σημειώνουμε ἐπίσης ὅτι:

$$\lim_{x\to 0}Y_\nu(x)=-\infty \quad \vee \quad \lim_{x\to\infty}Y_\nu(x)=0 \tag{1.2.17}$$

Ἀπὸ τοὺς ὁρισμοὺς αὐτοὺς (1.2.15) καὶ (1.2.16) τῶν συναρτήσεων *Bessel* δευτέρου εἴδους μὴ ἀκέραιης καὶ ἀκέραιης τάξης ν ἀντίστοιχα μπορεῖ νὰ ἀποδειχθεῖ ὅτι ἡ γενικὴ λύση τῆς ἐξίσωσης *Bessel* τάξης ν (1.2.8) εἶναι δυνατὸν νὰ γραφεῖ στὴ μορφή:

$$y_g(x)=C_1J_\nu(x)+C_2Y_\nu(x) \tag{1.2.18}$$

Ἀκολουθοῦν οἱ γραφικὲς παραστάσεις τῶν προλεχθεισῶν συναρτήσεων:



Διάγραμμα 1.2 Συναρτήσεις Bessel πρώτου εἴδους (J) καὶ δεύτερου εἴδους (Y),

μηδενικῆς τάξης (0) καὶ πρώτης τάξης (1)

1.2.1.3. Συναρτήσεις *Hankel*

Ἄλλο ἕνα σημαντικὸ ζεῦγος γραμμικὰ ἀνεξάρτητων, συζυγῶν μιγαδικῶν λύσεων τῆς ἐξίσωσης *Bessel* (1.2.8) ἀποτελοῦν οἱ **συναρτήσεις *Hankel* ἢ ἀλλιῶς συναρτήσεις *Bessel* τρίτου εἴδους**. Οἱ λεγόμενες συναρτήσεις *Hankel* πρώτου καὶ δεύτερου εἴδους, $H_\nu^{(1)}(x)$ καὶ $H_\nu^{(2)}(x)$ ἀντίστοιχα καὶ τάξης ν , εἶναι γραμμικοὶ συνδυασμοὶ τῶν συναρτήσεων *Bessel* πρώτου καὶ δεύτερου εἴδους καὶ τάξης ν :

$$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + iY_\nu(x) \tag{1.2.19}$$

καὶ

$$H_\nu^{(2)}(x) = \overline{H_\nu^{(1)}}(x) = J_\nu(x) - iY_\nu(x) \tag{1.2.20}$$

ὅπου ***i*** ἡ φανταστικὴ μονάδα.

Οἱ γραφικές τους παραστάσεις παραλείπονται γιὰ τὸν ἁπλὸ λόγο ὅτι ἔχουν ἤδη παρατεθεῖ: Τὸ πραγματικό τους μέρος $\mathrm{Re}\left[H_\nu^{(1,2)}(x)\right] = J_\nu(x)$ καὶ τὸ φανταστικό τους μέρος $\mathrm{Im}\left[H_\nu^{(1,2)}(x)\right] = Y_\nu(x)$ φαίνονται στὸ διάγραμμα 1.2 γιὰ μηδενικὴ καὶ πρώτη τάξη. Αὐτὲς οἱ τάξεις θὰ χρειασθοῦν καὶ γιὰ τὴ διατύπωση τῆς συνάρτησης τοῦ *Theodorsen*.

1.2.1.4. Συνάρτηση τοῦ *Theodorsen*

Ἡ πλήρης ἔκφραση τῆς μιγαδικῆς συνάρτησης ***C(k)*** τοῦ *Theodorsen*, διατυπώνεται ἀπὸ τὸν ἴδιο στὴν ἐργασία του [β]. Ἐδώ θὰ ἐπικεντρωθοῦμε περισσότερο στὸν διαχωρισμό της σὲ πραγματικὸ καὶ φανταστικὸ μέρος [1.10]. Ὁρίζεται εἴτε μὲ τὴ βοήθεια τῶν συναρτήσεων *Hankel*:

$$C(k)=\frac{H_1^{(2)}(k)}{H_1^{(2)}(k)+iH_0^{(2)}(k)} \tag{1.2.21}$$

εἴτε ἀπ' εὐθείας μέσῳ τῶν συναρτήσεων *Bessel*, μὲ τὴν λίγο πιὸ σύνθετη ἀλλὰ ἐντελῶς ἰσοδύναμη μορφή:

$$C(k)=\frac{-J_1(k)+iY_1(k)}{-\left(J_1(k)+Y_0(k)\right)+i\left(Y_1(k)+J_0(k)\right)} \tag{1.2.22}$$

ὅπου $k=\frac{B\omega}{V}$ ἡ **μειωμένη** (ἀνηγμένη) **συχνότητα *(reduced frequency)*** ὡς πρὸς τὴν ταχύτητα τοῦ ἀνέμου ***V***.

Σὲ κάθε περίπτωση, μπορεῖ να ἐκφραστεῖ διαχωρισμένη ὡς πρὸς τὸ πραγματικὸ καὶ τὸ φανταστικό της μέρος ὡς ἑξῆς:

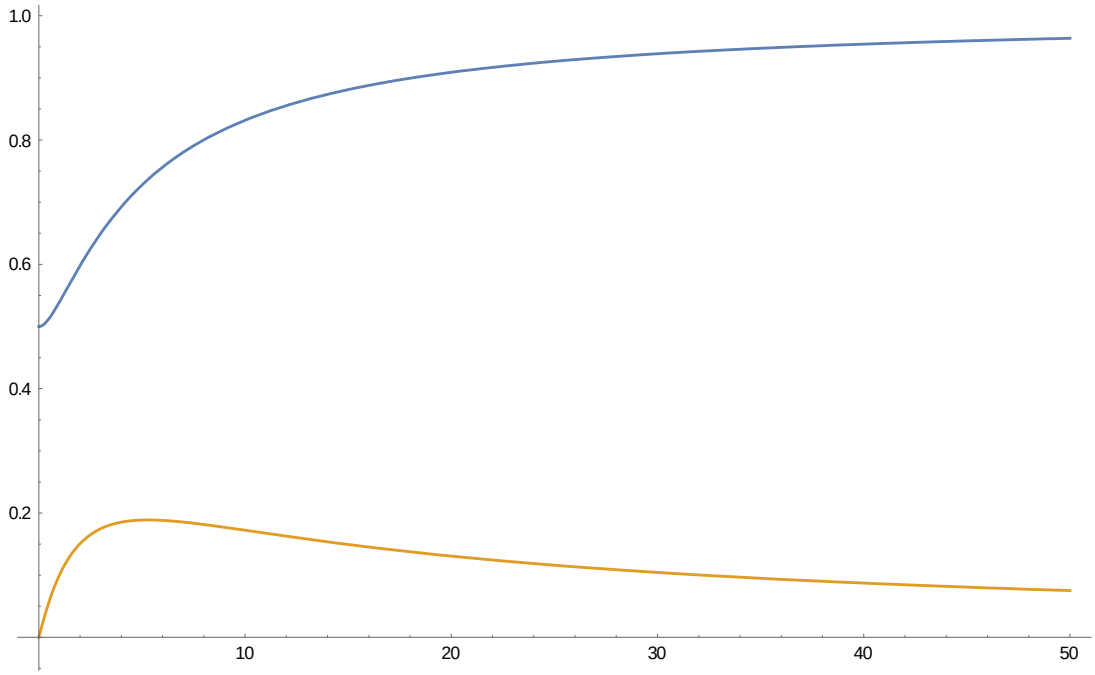
$$C(k)=F(k)+iG(k) \tag{1.2.23}$$

μὲ $$F(k)\equiv \mathrm{Re}\left[C(k)\right]=\frac{J_1(k)\left(J_1(k)+Y_0(k)\right)+Y_1(k)\left(Y_1(k)-J_0(k)\right)}{\left(J_1(k)+Y_0(k)\right)^2+\left(Y_1(k)-J_0(k)\right)^2} \tag{1.2.24}$$

καὶ $$G(k)\equiv \mathrm{Im}\left[C(k)\right]=-\frac{Y_1(k)Y_0(k)+J_1(k)J_0(k)}{\left(J_1(k)+Y_0(k)\right)^2+\left(Y_1(k)-J_0(k)\right)^2} \tag{1.2.25}$$

Ἡ φυσικὴ σημασία τοῦ πραγματικοῦ μέρους ***F(k)*** εἶναι ἡ ἐπίδραση στὴν ἀλλαγὴ τοῦ εὔρους τῆς ταλάντωσης κατὰ τὸν κατακόρυφο ἄξονα, καὶ τοῦ φανταστικοῦ μέρους ***G(k)*** εἶναι ἡ ἐπίδραση στὴν ἀλλαγὴ τῆς κυκλικῆς συχνότητας. Ἔτσι, παρατηρεῖται κάποια ὁμοιότητα μὲ τὴ φυσικὴ σημασία τῶν μιγαδικῶν ἰδιοτιμῶν τοῦ γενικευμένου ἰδιοπροβλήματος τῆς Δυναμικῆς τῶν Κατασκευῶν (βλ. ὑποενότητα 2.1.3).

Παρακάτω (διάγραμμα 1.3) δίδονται οἱ γραφικὲς παραστάσεις τοῦ πραγματικοῦ μέρους ***F*** καὶ τοῦ ἀντίθετου τοῦ φανταστικοῦ ***G***, ὡς πρὸς τὸ ἀντίστροφο τῆς μειωμένης συχνότητας. Τὴ μειωμένη συχνότητα τὴν ἀντιστρέφουμε, προκειμένου οἱ τιμὲς τῶν ταχυτήτων νὰ αὐξάνουν καὶ ὄχι νὰ μειώνουν.



Διάγραμμα 1.3 πραγματικὸ μέρος καὶ φανταστικὸ τῆς συνάρτησης τοῦ Theodorsen, ὡς πρὸς τὸ ἀντίστροφο τῆς μειωμένης συχνότητας 1/k

1.2.2. Ἡ θεωρία τοῦ *Scanlan*

Ὁ *Robert Scanlan*, μαζὶ μὲ τὸν *Tomco*, τὸ 1971 παρουσίασαν τὴ θεωρία τους, μέσῳ τῆς ἐργασίας «*Airfoil and Bridge Deck Flutter Derivatives*» [1.11]. Ἡ ἰδέα ἦταν νὰ προσδιοριστοῦν ἀφ' ἑνός:

- ἡ ἐπιρροὴ τῶν γεωμετρικῶν χαρακτηριστικῶν τῆς διατομῆς στὶς ἀεροδυναμικὲς δράσεις ***L, M, D***

ἀλλὰ καὶ ἡ ἀλληλεπιρροὴ - σύζευξη τῶν τριῶν βαθμῶν ἐλευθερίας:

- καὶ στὴ συνολικὴ σύνθετη κίνηση
- καὶ στὸ εἶδος τῆς ἀστάθειας

Οἱ ἐπιρροὲς αὐτές, ἐκφράστηκαν μὲ τὴ βοήθεια ὡρισμένων συντελεστῶν ἢ παραγόντων, τοὺς ὁποίους ὀνόμασαν καὶ καθιερώθηκε νὰ καλοῦνται **παράγωγοι πτερυγισμοῦ** (***flutter derivatives***). Οἱ παράγωγοι πτερυγισμοῦ εἶναι δεκοκτὼ στὸν ἀριθμὸ στὴ γενικὴ περίπτωση σύνθετης κίνησης τριῶν βαθμῶν ἐλευθερίας τῆς διατομῆς, ἕξι γιὰ κάθε βαθμό:

- Κατακόρυφος: $H_i^* = H_i^*(k)$
- Στρεπτικός: $A_i^* = A_i^*(k)$
- Ὁριζόντιος: $P_i^* = P_i^*(k)$

ὅπου $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Ὁ ἀστερίσκος (*****) δηλοῖ τὴ μεταβολὴ τῶν παραγώγων πτερυγισμοῦ συναρτήσει τῆς μειωμένης συχνότητας $k = B\omega/V$.

Οἱ ἀεροδυναμικὲς δράσεις ***L, M, D***, μποροῦν νὰ ἐκφραστοῦν σὰν ἀθροίσματα ὅρων ποὺ περιλαμβάνουν τὶς ἀντίστοιχες μετακινήσεις ***h, p, φ*** :

$$
\begin{aligned}
L &= \frac{1}{2}\rho(2b)V^2\left(kH_1^*\frac{\dot{h}}{V} + kH_2^*\frac{B\dot{\varphi}}{V} + k^2H_3^*\varphi + k^2H_4^*\frac{h}{B} + kH_5^*\frac{\dot{p}}{V} + k^2H_6^*\frac{p}{B}\right)\\
D &= \frac{1}{2}\rho(2b)V^2\left(kP_1^*\frac{\dot{p}}{V} + kP_2^*\frac{B\dot{\varphi}}{V} + k^2P_3^*\varphi + k^2P_4^*\frac{p}{B} + kP_5^*\frac{\dot{h}}{V} + k^2P_6^*\frac{h}{B}\right) \qquad (1.2.26)\\
M &= \frac{1}{2}\rho(2b)^2V^2\left(kA_1^*\frac{\dot{h}}{V} + kA_2^*\frac{B\dot{\varphi}}{V} + k^2A_3^*\varphi + k^2A_4^*\frac{h}{B} + kA_5^*\frac{\dot{p}}{V} + k^2A_6^*\frac{p}{B}\right)
\end{aligned}
$$

Οἱ παραπάνω παράγωγοι πτερυγισμοῦ μποροῦν νὰ χωριστοῦν σὲ κατηγορίες, ἀνάλογα μὲ τὴν ἐπιρροὴ ποὺ προκαλοῦν καὶ σὲ ποιὰ μεγέθη:

Ἀνάλογα μὲ τὸ ἂν προκαλοῦν σύζευξη τῶν κινήσεων ἢ ὄχι, χωρίζονται σέ:

- Δέκα συζευκτικὲς (*coupled*) : $H_2^*, H_3^*, P_2^*, P_3^*, P_5^*, P_6^*, A_1^*, A_4^*, A_5^*, A_6^*$
- Ὀκτὼ μὴ συζευκτικὲς (*uncoupled*) : $H_1^*, H_4^*, H_5^*, H_6^*, P_1^*, P_4^*, A_2^*, A_3^*$

Πιὸ συγκεκριμένα, οἱ κινήσεις εἶναι ἀνὰ δύο συζευγμένες:

- Οἱ $H_2^*, H_3^*, A_1^*, A_4^*$ συζευγνύουν τὴν κατακόρυφη *h* μὲ τὴν στρεπτικὴ κίνηση *φ*
- Οἱ $P_2^*, P_3^*, A_5^*, A_6^*$ συζευγνύουν τὴν ὁριζόντια *p* μὲ τὴν στρεπτικὴ κίνηση *φ*
- Οἱ P_5^*, P_6^* συζευγνύουν τὴν ὁριζόντια *p* μὲ τὴν κατακόρυφη *h*

Οἱ τελευταίοι ὅροι H_6^*, P_6^*, A_6^* ἔχουν μικρὴ ἐπιρροὴ καὶ συνήθως παραλείπονται.

Ὅταν τὸ πρόβλημα ἁπλοποιεῖται σὲ διβάθμιο, μὲ κυριάρχες κινήσεις τὴν κατακόρυφη καὶ τὴν στρεπτική, ὁ συνολικὸς αριθμὸς τῶν παραγώγων πτερυγισμοῦ μειώνεται σὲ ὀκτώ. Σὲ αὐτὴ τὴ συνήθη περίπτωση γιὰ καταστρώματα τουλάχιστον μονῆς συμμετρίας, οἱ ἐκφράσεις τῶν δύο ἀεροδυναμικῶν δράσεων ***L, M***, ἁπλοποιοῦνται σέ:

$$
\begin{aligned}
L &= \frac{1}{2}\rho(2b)V^2\left(kH_1^*\frac{\dot{h}}{V}+kH_2^*\frac{B\dot{\varphi}}{V}+k^2H_3^*\varphi+k^2H_4^*\frac{h}{B}\right)\\
M &= \frac{1}{2}\rho(2b)^2V^2\left(kA_1^*\frac{\dot{h}}{V}+kA_2^*\frac{B\dot{\varphi}}{V}+k^2A_3^*\varphi+k^2A_4^*\frac{h}{B}\right)
\end{aligned}
\tag{1.2.27}
$$

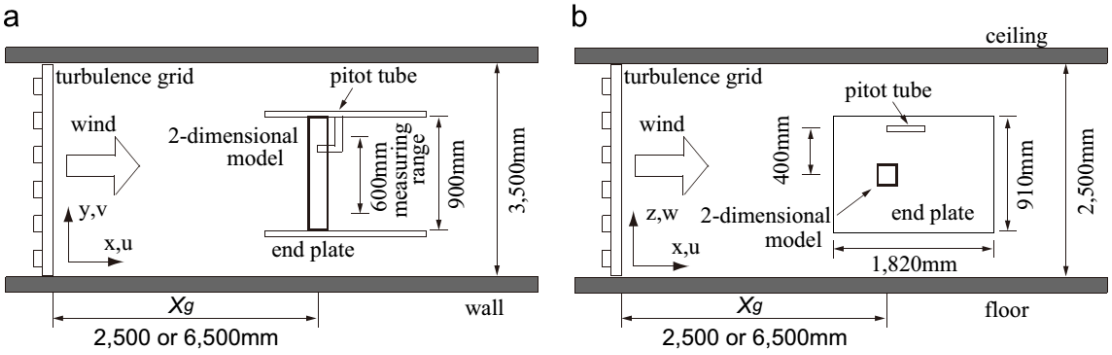
Οἱ παράγωγοι πτερυγισμοῦ ὁρίζονται, ὅπως εἴπαμε στὸ τέλος τῆς ὑποενότητας 1.2.1, μὲ τὴ βοήθεια τῆς συνάρτησης τοῦ *Theodorsen*, **γιὰ λεπτὲς ορθογωνικές πλάκες** (χονδρικὰ *B/D* > 12.5) **μὲ λεία ἄκρα** (ἀπουσία γωνιῶν) ὡς ἑξῆς:

$$
\begin{aligned}
H_1^*(k) &= -\frac{2\pi}{k}F(k)\\
H_2^*(k) &= \frac{2\pi}{k}\left(-\frac{1}{2}+\frac{F(k)}{2}-\frac{G(k)}{k}\right)\\
H_3^*(k) &= -\frac{2\pi}{k}\left(\frac{F(k)}{k}+\frac{G(k)}{2}\right)\\
H_4^*(k) &= 2\pi\left(\frac{1}{2}+\frac{G(k)}{k}\right)-2
\end{aligned}
\tag{1.2.28}
$$

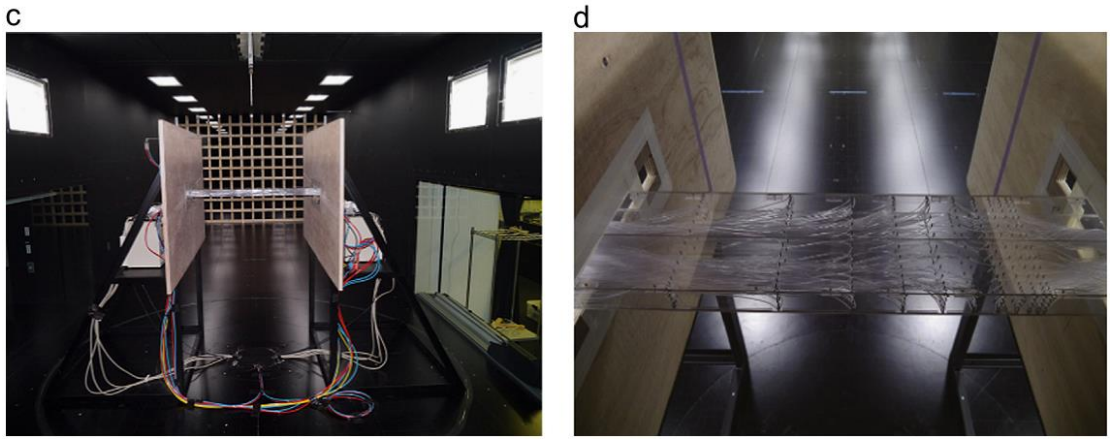
$$
\begin{aligned}
A_1^*(k) &= \frac{\pi}{k}F(k)\\
A_2^*(k) &= -\frac{\pi}{k}\left(-\frac{1}{2}+\frac{F(k)}{2}-\frac{G(k)}{k}\right)\\
A_3^*(k) &= \frac{\pi}{k}\left(\frac{F(k)}{k}+\frac{G(k)}{2}\right)\\
A_4^*(k) &= -\frac{\pi}{k}G(k)
\end{aligned}
\tag{1.2.29}
$$

Γιὰ χονδρώτερες πλάκες ἢ μὲ τραχέα ἄκρα (ἀεροδυναμικῶς τραχέα σώματα, *bluff bodies*), ποῦ εἶναι καὶ ἡ συντριπτικὴ πλειονότητα τῶν καταστρωμάτων γεφυρῶν καὶ πλείστων τῶν κατασκευῶν τοῦ Πολιτικοῦ Μηχανικοῦ, καταφεύγουμε σὲ πειράματα γιὰ τὸν προσδιορισμό των. Αὐτὰ γίνονται μὲ προσομοιώματα τῶν καταστρωμάτων ὑπὸ κλίμακα, ὑποκείμενα σὲ τεχνητὴ ῥοὴ ἀνεμοσύραγγας. Τὰ προκύπτοντα ἀποτελέσματα ἀπὸ τὰ προσομοιώματα ἀνάγονται στὴν κλίμακα τῆς κατασκευῆς μὲ χρήση τῆς θεωρίας προσομοιωμάτων. Συνήθως, ἡ μορφὴ τῶν γραφημάτων τῶν παραγώγων πτερυγισμοῦ εἶναι ἴδια μὲ αὐτὴ τῶν λείων λεπτῶν πλακῶν, πολλαπλασιασμένη ἐπὶ κάποιους αὐξητικοὺς συντελεστές, χωρὶς αὐτὸ νὰ εἶναι κανόνας καὶ νὰ ἀποκλείεται διαφορετικὴ μορφή, εἰδικὰ σὲ πιὸ πολύπλοκες γεωμετρίες - ἀρχιτεκτονικές.

Παραδείγματα τῶν χρησιμοποιούμενων πειραματικῶν διατάξεων ἀπεικονίζονται παρακάτω. Οἱ γραφικές παραστάσεις τῶν παραγώγων πτερυγισμοῦ θὰ δοθοῦν στὴν ἐνότητα 1.2.4 μὲ συγκεκριμένα ἀριθμητικὰ παραδείγματα, ἀφοῦ εἶναι συναρτήσεις τῆς ἀριθμητικῆς μεταβλητῆς ***k*** καὶ ὄχι συμβολικὲς συναρτήσεις.



Σχῆμα 1.2 Κάτοψη (a) καὶ ὄψη (b) τῆς πειραματικῆς διάταξης



Φωτογραφία 1.5 Προοπτικὴ τῆς πειραματικῆς διάταξης

1.3. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Στὴν Δυναμικὴ Ἀνάλυση τῶν Κατασκευῶν, ἡ ἐξίσωση ἰσορροπίας, ἡ ὁποία περιγράφει τὴν **καμπτικὴ** ταλάντωση, εἶναι στὴ γενικὴ περίπτωση μία μερικὴ γραμμικὴ διαφορικὴ ἐξίσωση (ὅταν ἔχουμε μικρὲς παραμορφώσεις), τέταρτης τάξης, μὴ ὁμογενής, μὲ μὴ σταθεροὺς συντελεστές:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI(x)\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}\right)+c(x,t)\frac{\partial w(x,t)}{\partial t}+m(x)\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}=g(x,t) \qquad (1.3.1)$$

Ὁ πρῶτος ὅρος εἶναι ὁ καμπτικός, ὁ δεύτερος ὁ ἀδρανειακός, ὁ τρίτος ὁ ἀποσβεστικὸς καὶ τὸ δεύτερο μέλος παριστὰ τὴν **ἐγκάρσια δυναμικὴ** φόρτιση. Σὲ περίπτωση ποὺ ὑπάρχει καὶ **ἀξονικὴ στατικὴ** φόρτιση στὴ δοκὸ καὶ λάβουμε ὑπ' ὄψιν τὰ φαινόμενα δευτέρας τάξεως, προστίθεται ἕνας ἀκόμα ὅρος καὶ ἡ ἐξίσωση παίρνει τὴ μορφή:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI(x)\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}\right)+P(x)\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}+m(x)\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}+c(x,t)\frac{\partial w(x,t)}{\partial t}=g(x,t) \qquad (1.3.2)$$

Στὴν προκείμενη περίπτωση, συνυπάρχει τὸ **δυναμικὸ** πρόβλημα τῆς **καμπτικῆς ταλάντωσης** μὲ τὸ πρόβλημα τῆς **στατικῆς εὐστάθειας**. Ἂν ἡ ἀξονικὴ φόρτιση εἶναι δυναμικὴ, ἡ ἐξίσωση γίνεται:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI(x)\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}\right)+P(x,t)\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}+m(x)\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}+c(x,t)\frac{\partial w(x,t)}{\partial t}=g(x,t) \qquad (1.3.3)$$

Τώρα συνυπάρχει τὸ **δυναμικὸ** πρόβλημα τῆς **καμπτικῆς ταλάντωσης** μὲ τὸ πρόβλημα τῆς **δυναμικῆς εὐστάθειας**.

Ὅπως ἡ στατικὴ ἀξονικὴ φόρτιση προξενεῖ ἀπώλεια τῆς στατικῆς εὐστάθειας, ἡ δυναμικὴ ἀξονικὴ φόρτιση προξενεῖ ἀπώλεια τῆς δυναμικῆς εὐστάθειας.

Ὅπως τὰ ἐγκάρσια δυναμικὰ φορτία ἀστοχίας εἶναι μικρότερα αὐτῶν τῆς στατικὴς ἀνάλυσης, ἔτσι καὶ μικρότερα ἀξονικὰ δυναμικὰ φορτία ἀπὸ τὰ ἀντίστοιχα στατικὰ, προκαλοῦν ἀστάθεια.

Ἡ φόρτιση ***P(t)*** χαρακτηρίζεται ἀπὸ τὸ γεγονὸς ὅτι περιέχεται σὰν μία παράμετρος στὴν ἐξίσωση κίνησης. Μία τέτοια φόρτιση ὀνομάζεται **παραμετρικὴ** καὶ μία τέτοια ὀνομασία εἶναι περισσότερο ἁρμόζουσα, διότι δείχνει τὴ σχέση της πρὸς τὸ φαινόμενο τοῦ **παραμετρικοῦ συντονισμοῦ** (ἢ παραμετρικῆς διέγερσης).

Ἐξετάζουμε τώρα τὴν περίπτωση ὅπου ὅλοι οἱ συντελεστὲς εἶναι σταθεροὶ κατὰ μήκος τῆς δοκοῦ. Ἂν ἡ δυναμικὴ ἀξονικὴ φόρτιση, ἡ ἀπόσβεση καὶ ἡ ἐγκάρσια φόρτιση εἶναι διαχωρίσιμες σὲ χωρικοὺς καὶ χρονικοὺς παράγοντες, δηλαδὴ:

$$P(x,t)=P(x)P(t)\ ,\ c(x,t)=c(x)c(t)\ ,\ g(x,t)=g(x)g(t) \qquad (1.3.4)$$

ἡ ἐξίσωση κίνησης ἁπλοποιείται σέ:

$$EI\frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4}+P(x)P(t)\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}+m\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}+c(x)c(t)\frac{\partial w(x,t)}{\partial t}=g(x)g(t) \tag{1.3.5}$$

ἡ ὁποία ἐπιδέχεται ἐπίλυσης μὲ τὴ μέθοδο τῶν χωριζομένων μεταβλητῶν. Σύμφωνα μὲ αὐτήν, ἡ λύση ***w(x,t)*** μπορεῖ καὶ ἐκείνη νὰ διαχωριστεῖ ὡς ἑξῆς:

$$w(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}X_n(x)T_n(t) \tag{1.3.6}$$

ὅπου $\boldsymbol{X_n}$ οἱ προσδιοριστέες ὀρθογωνικὲς ἰδιομορφὲς ἢ ἰδιοσυναρτήσεις ἢ **συναρτήσεις σχήματος**. Στὴν παρούσα ἐργασία δὲν ἀσχολούμαστε μὲ τὸν προσδιορισμὸ τῶν συναρτήσεων σχήματος. Αὐτὸ εἶναι καθαρὰ χωρικό ἰδιοπρόβλημα, δὲν ἐπηρεάζεται καθόλου ἀπὸ τὴ χρονικὴ μελέτη τοῦ φαινομένου τῆς δυναμικῆς ἀστάθειας καὶ ἐπιλύεται ὡς συνήθως, ἱκανοποιώντας τὶς συνοριακὲς συνθήκες τῆς δοκοῦ. Ὁ σκοπὸς τῆς ἐργασίας εἶναι ἡ μελέτη μόνο τοῦ χρονικοῦ προβλήματος.

Ἀντικαθιστώντας τὴ σχέση (1.3.6) στὴν ἐξίσωση (1.3.5) καὶ ὁμογενοποιώντας την, ἔχουμε:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(EIX_n''''T_n+P(x)P(t)X_n''T_n+mX_n\ddot{T}_n+c(x)c(t)X_n\dot{T}_n\right)=0 \tag{1.3.7}$$

Ἐκμεταλλευόμενοι τὴ συνθήκη ὀρθογωνικότητας, πολλαπλασιάζουμε με $X_m(x)\neq X_n(x)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(EIX_n''''X_mT_n+X_n''P(x)X_mP(t)T_n+mX_nX_m\ddot{T}_n+X_nc(x)X_mc(t)\dot{T}_n\right)=0 \tag{1.3.8}$$

Ὁλοκληρώνοντας κατὰ ***x***, καὶ γιὰ ὅλο τὸ μήκος ***L*** τῆς δοκοῦ:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\begin{array}{c}EI\left(\int_0^L X_n''''X_m\,dx\right)T_n+\left(\int_0^L X_n''P(x)X_m\,dx\right)P(t)T_n+\\+m\left(\int_0^L X_nX_m\,dx\right)\ddot{T}_n+\left(\int_0^L X_nc(x)X_m\,dx\right)c(t)\dot{T}_n\end{array}\right]=0 \tag{1.3.9}$$

Λόγῳ τῆς συνθήκης ὀρθογωνικότητας, τὰ μοναδικὰ μὴ μηδενικὰ ὁλοκληρώματα ἐκ τῶν ἀπείρων, θὰ εἶναι αὐτὰ γιὰ τὰ ὁποία $n = m$:

$$\begin{array}{c}EI\left(\int_0^L X_n''''X_n\,dx\right)T_n+\left(\int_0^L X_n''P(x)X_n\,dx\right)P(t)T_n+\\+m\left(\int_0^L X_n^2\,dx\right)\ddot{T}_n+\left(\int_0^L X_nc(x)X_n\,dx\right)c(t)\dot{T}_n=0\end{array} \tag{1.3.10}$$

Πλέον, δὲν ἔχουμε μία μερικὴ διαφορικὴ ἐξίσωση, ἀλλὰ μία συνήθη διαφορικὴ ἐξίσωση δεύτερης τάξης, γραμμικὴ, ὁμογενὴ καὶ μὲ συντελεστὲς ἀνεξάρτητους τοῦ ***x***, καθῶς τὰ

ἐμφανιζόμενα ὁλοκληρώματα εἶναι ὡρισμένα καὶ πεπερασμένης τιμῆς. Παραγοντοποιώντας καὶ ταξινομώντας τοὺς ὅρους κατὰ φθίνουσα σειρᾶ τάξης παραγώγισης:

$$m\left(\int_0^L X_n^{\,2}\,dx\right)\ddot{T}_n+\left(\int_0^L X_n c(x)\,X_n\,dx\right)c(t)\dot{T}_n+$$
$$+\left[EI\left(\int_0^L X_n''''\,X_n\,dx\right)+\left(\int_0^L X_n''\,P(x)\,X_n\,dx\right)P(t)\right]T_n=0 \qquad (1.3.11)$$

Ἡ παραπάνω ἐξίσωση, μπορεῖ νὰ γραφεῖ ἐπὶ τὸ κομψώτερον ὡς ἑξῆς:

$$\bar{m}\ddot{T}_n+\bar{c}(t)\dot{T}_n+\bar{P}(t)T_n=0 \qquad (1.3.12)$$

μὲ τοὺς συντελεστὲς τῶν παραγώγων νὰ εἶναι:

$$\bar{m}=m\left(\int_0^L X_n^{\,2}\,dx\right)$$
$$\bar{c}(t)=\left(\int_0^L c(x)\,X_n^2\,dx\right)c(t) \qquad (1.3.13)$$
$$\bar{P}(t)=EI\left(\int_0^L X_n''''\,X_n\,dx\right)+\left(\int_0^L X_n''\,P(x)\,X_n\,dx\right)P(t)$$

Τὸ ἐρώτημα εἶναι πῶς προσδιορίζονται οἱ χρονικὲς συναρτήσεις $\bar{c}(t)$ καὶ $\bar{P}(t)$ στὴν περίπτωση ποὺ μελετάμε, δηλαδὴ γιὰ ἀεροδυναμικὰ φορτία. Τὸ ἐρώτημα ἀπαντάται ἀπὸ τὶς θεωρίες ποὺ περιγράφησαν στὶς προηγούμενες ὑποενότητες. Στὰ πλαίσια αὐτῆς τῆς ἐργασίας χρησιμοποιείται ἡ θεωρία τοὺ *Scanlan* γιὰ τὸ διβάθμιο συζευγμένο πρόβλημα στρεπτικῆς - καμπτικῆς κίνησης. Σύμφωνα μὲ αὐτήν, οἱ ἀντίστοιχες **χρονικὲς** ἐξισώσεις κίνησης (προκύπτουσες ἀπὸ τὸν χωρισμὸ τῶν μεταβλητῶν), οἱ ὁποίες ἀναφέρονται σὲ **ἐπίπεδο διατομῆς** καὶ ὄχι φορέα, εἶναι (βλ. Σχῆμα 1.1):

$$m\ddot{h}(t)+C_\eta\,\dot{h}(t)+K_\eta\,h(t)=L(t)$$
$$I\,\ddot{\varphi}(t)+C_\varphi\,\dot{\varphi}(t)+K_\varphi\,\varphi(t)=M(t) \qquad (1.3.14)$$

ὅπου:

h	κατακόρυφη / καμπτική κίνηση διατομῆς (*m*)
φ	στρεπτική κίνηση διατομῆς (*rad*)
m	μάζα διατομῆς ἀνὰ μονάδα μήκους δοκοῦ (*kg/m*)
C_η	συντελεστὴς ἀπόσβεσης διατομῆς τοῦ καμπτικοῦ β.ε. κατὰ μῆκος δοκοῦ
K_η	συντελεστὴς δυσκαμψίας διατομῆς κατὰ μῆκος δοκοῦ
I	στροφικὴ μάζα διατομῆς ἀνὰ μονάδα μήκους δοκοῦ (*kgm²/m*)
C_φ	συντελεστὴς ἀπόσβεσης διατομῆς τοῦ στρεπτικοῦ β.ε. κατὰ μῆκος δοκοῦ
K_φ	συντελεστὴς δυστρεψίας διατομῆς κατὰ μῆκος δοκοῦ
L	ἀεροδυναμικὴ δράση (σχέση 1.2.27.α)
M	ἀεροδυναμικὴ δράση (σχέση 1.2.27.β)

Βέβαια, οἱ ἐξισώσεις (1.3.14) δὲν εἶναι ἀκόμη τῆς μορφῆς (1.3.12). Πρὸς τοῦτο, ἀντικαθιστοῦμε τὶς σχέσεις (1.2.27) στὴν (1.3.14):

$$m\ddot{h}+C_\eta\,\dot{h}+K_\eta\,h=\rho bVkH_1^*\dot{h}+2\rho b^2VkH_2^*\dot{\varphi}+\rho bV^2k^2H_3^*\varphi+0.5\rho V^2k^2H_4^*h$$

$$I\,\ddot{\varphi}+C_\varphi\,\dot{\varphi}+K_\varphi\,\varphi=2\rho b^2VkA_1^*\dot{h}+4\rho b^3VkA_2^*\dot{\varphi}+2\rho b^2V^2k^2A_3^*\varphi+\rho bV^2k^2A_4^*h$$

(1.3.15)

Ὁμαδοποιώντας στὶς ἐξισώσεις (1.3.15) τοὺς ὅρους ἴδιας τάξης παραγώγου, φαίνεται καλύτερα πὼς ἔχουμε ἕνα πεπλεγμένο σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους (***h***, ***φ***):

$$m\ddot{h}+\left(C_\eta-\rho bVkH_1^*\right)\dot{h}+\left(-2\rho b^2VkH_2^*\right)\dot{\varphi}+\left(K_\eta-0.5\rho V^2k^2H_4^*\right)h+\left(-\rho bV^2k^2H_3^*\right)\varphi=0$$

$$I\,\ddot{\varphi}+\left(-2\rho b^2VkA_1^*\right)\dot{h}+\left(C_\varphi-4\rho b^3VkA_2^*\right)\dot{\varphi}+\left(-\rho bV^2k^2A_4^*\right)h+\left(K_\varphi-2\rho b^2V^2k^2A_3^*\right)\varphi=0$$

(1.3.16)

Παρατηρώντας τὸ σύστημα (1.3.16), καθίσταται ἐμφανὲς ὅτι ἡ σύμπλεξη τῶν δύο ἀγνώστων ἔγκειται στὶς συζευκτικὲς παραγώγους πτερυγισμοῦ (βλ. Ἐνότητα 1.2.2).

Τὸ σύστημα (1.3.16) μπορεῖ κάλλιστα νὰ φραφεῖ σὲ μητρωϊκὴ μορφὴ ὡς ἑξῆς:

$$[M]\{\ddot{u}\}+[C](t)\{\dot{u}\}+[K](t)\{u\}=\{0\} \qquad (1.3.17)$$

ὅπου:

$$\{u\}=\begin{Bmatrix}h\\ \varphi\end{Bmatrix}\ \text{τὸ διάνυσμα τῶν μετακινήσεων} \qquad (1.3.18)$$

$$[M]=\begin{bmatrix}m & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}\ \text{τὸ μητρῶο μάζας} \qquad (1.3.19)$$

$$[C](t)=\begin{bmatrix}C_\eta-\rho bVkH_1^* & -2\rho b^2VkH_2^*\\ -2\rho b^2VkA_1^* & C_\varphi-4\rho b^3VkA_2^*\end{bmatrix}\ \text{τὸ μητρῶο ἀπόσβεσης} \qquad (1.3.20)$$

$$[K](t)=\begin{bmatrix}K_\eta-0.5\rho V^2k^2H_4^* & -\rho bV^2k^2H_3^*\\ -\rho bV^2k^2A_4^* & K_\varphi-2\rho b^2V^2k^2A_3^*\end{bmatrix}\ \text{τὸ μητρῶο στοιβαρότητας} \qquad (1.3.21)$$

Ἡ σχέση (1.3.17) τώρα, δὲν εἶναι τίποτε ἄλλο παρὰ ἕνα σύστημα ἐξισώσεων ἴδιας μορφῆς μὲ τὴν (1.3.12).

Τὰ δὲ μητρῶα ἀπόσβεσης καὶ στοιβαρότητας εἶναι συναρτήσεις τοῦ χρόνου ***t***, διότι τόσο οἱ παράγωγοι πτερυγισμοῦ H_i^*, A_i^*, ἡ μειωμένη συχνότητα ***k***, ἀλλὰ καὶ ἡ ταχύτητα ***V***, εἶναι συναρτήσεις τοῦ χρόνου. Μόνο οἱ φυσικοὶ συντελεστές C_η, C_φ, K_η, K_φ εἶναι σταθεροί, ἀφοῦ εἶναι ἰδιότητες τῆς διατομῆς καὶ δὲν ἀλλάζουν μὲ τὸν χρόνο. Ὁμοίως προφανῶς καὶ οἱ μάζες ***m*** καὶ ***I***.

Σὲ αὐτὸ ἀκριβῶς τὸ σημεῖο, πρέπει νὰ σταθοῦμε γιὰ μία **καθοριστικὴ διευκρίνιση**: Ὁ χρόνος ***t***, ποὺ ὑπεισέρχεται στὰ προαναφερθέντα μεγέθη (H_i^*, A_i^*, ***k***, ***V***), δὲν ἔχει τὴν αὐστηρὰ φυσικὴ σημασία τοῦ τρέχοντος χρόνου. Ἔχει περισσότερο τὴ σημασία τοῦ **ψευδοχρόνου**, ὑπὸ τὴν ἔννοια ὅτι εἶναι μία παράμετρος καὶ ὄχι ἡ ἀνεξάρτητη μεταβλητὴ τῶν συναρτήσεων H_i^*, A_i^*, ***k***, ***V***. Ἡ ἀνεξάρτητη μεταβλητὴ αὐτῶν τῶν συναρτήσεων, εἶναι ἐκ τῶν ὁρισμῶν τους ἡ ταχύτητα ***V***. Προφανῶς ἡ ταχύτητα σὰν φυσικὸ μέγεθος, μεταβάλλεται μὲ τὸν χρόνο. Ὅμως πουθενὰ στὶς παραπάνω θεωρίες δὲν ἀναφέρθηκε ἢ ζητήθηκε ἡ ταχύτητα σὰν συνάρτηση τοῦ χρόνου ***t***. Πουθενὰ δὲν χρησιμοποιήθηκε κάποιο διάγραμμα ταχύτητας ***V*** ὡς πρὸς χρόνο ***t***. Καὶ αὐτὸ γιατὶ ἡ ταχύτητα ***V*** δέν ἐξετάζεται σὰν χρονοϊστορία ἀπὸ αὐτὲς τὶς θεωρίες. Ἁπλῶς, γιὰ κάθε τιμὴ τῆς ταχύτητας V_n, ἀντιστοιχεῖ μία τιμὴ $H_{i,n}^*$, $A_{i,n}^*$, k_n. Καὶ ἐπειδὴ μία διαφορικὴ ἐξίσωση τῆς μορφῆς (1.3.17), μὲ μὴ σταθεροὺς συντελεστές, λύνεται μόνο ἀριθμητικά, ἡ ταχύτητα ***V*** λαμβάνει **διακριτὲς** τιμὲς V_n, οἱ ὁποίες ἀντιστοιχοῦν σὲ διακριτὰ βήματα ***n*** τῆς ἀριθμητικῆς μεθόδου.

Ἔτσι, ὅπως θὰ δοῦμε καὶ στὸ Κεφάλαιο 2, γιὰ κάθε ἕνα βῆμα ***n*** (ποὺ ἀντιστοιχεῖ σὲ μία τιμὴ V_n), ἔχουμε πλέον μιὰ διαφορικὴ ἐξίσωση μὲ **σταθεροὺς συντελεστές**, ἡ ὁποία λύνεται κατὰ τὰ γνωστά. Συνοψίζουμε μὲ τὶς παρακάτω σχέσεις (βλ. καὶ §1.2.1, §1.2.2):

$$\begin{aligned} k &= k(V) \\ H_i^* &= H_i^*(k) = H_i^*\left[k(V)\right] = H_i^*(V) \\ A_i^* &= A_i^*(k) = A_i^*\left[k(V)\right] = A_i^*(V) \end{aligned} \tag{1.3.22}$$

καὶ

$$V \equiv V : \text{ἀνεξάρτητη μεταβλητὴ}$$

καὶ ἡ ***n***-οστὴ διαφορικὴ ἐξίσωση μὲ **σταθεροὺς συντελεστές**, στὸ βῆμα ***n*** γιὰ ταχύτητα V_n :

$$[M]\{\ddot{u}_n\} + [C](V_n)\{\dot{u}_n\} + [K](V_n)\{u_n\} = \{0\} \tag{1.3.23}$$

Βεβαίως, ἡ ἀπόκριση $\{u_n\}$ ποὺ θὰ προκύψει ἀπὸ τὴν ἐπίλυση τῆς (1.3.23), εἶναι κανονικὰ συνάρτηση τοῦ χρόνου ***t***, γιὰ σταθερὴ καὶ συγκεκριμένη ὅμως ταχύτητα V_n. Ἂν καὶ ὅταν ἀλλάξει ἡ ταχύτητα ***V***, ἀλλάζει αὐτομάτως καὶ ἡ διαφορικὴ ἐξίσωση (1.3.23) καθῶς καὶ η λύση της $\{u\}$. Γι' αὐτὸ χαρακτηρίσαμε παραπάνω τὸν χρόνο ὡς ψευδοχρόνο: διότι, ἐνῶ σὲ ἐπίπεδο λύσης $\{u\}$ ἔχει φυσικὴ σημασία, σὲ ἐπίπεδο συναρτήσεων - συντελεστῶν H_i^*, A_i^*, ***k***, εἶναι ἁπλὰ μία παράμετρος ποὺ ἀντιστοιχεῖ μὲν σὲ κάποια ταχύτητα ***V***, δὲν ἐνδιαφέρει ἡ τιμὴ της δέ.

Ἐπίσης, ὅλοι οἱ ὑπόλοιποι ὅροι στὰ μητρῶα ἀπόσβεσης καὶ στοιβαρότητας, ποὺ ἀλλάζουν μὲ τὸν χρόνο, δὲν εἶναι ἀπόλυτα δόκιμο νὰ χαρακτηριστοῦν ἀπόσβεσης καὶ στοιβαρότητας ἀντίστοιχα. Καὶ αὐτὸ γιατὶ δέν ἔχουν κάποια φυσικὴ σημασία ἀπόσβεσης ἢ στοιβαρότητας. Εἶναι ἁπλῶς ὅροι πρώτης καὶ μηδενικῆς τάξης παραγώγισης ἀντίστοιχα, οἱ ὁποίοι ὑπεισέρχονται στὶς ἐξισώσεις λόγω φορτίων ἀνέμου. Ἡ φυσική τους σημασία εἶναι ἡ ἀλλαγὴ τῆς δυναμικῆς συμπεριφορᾶς τοῦ φορέα. Ὁπότε οἱ ὀνομασίες «ἀπόσβεση» καὶ «στοιβαρότητα», στὴν περίπτωσή τους εἶναι ἐλαφρῶς καταχρηστικές. Ἐνδεχομένως μία ὀρθώτερη ὀνομασία νὰ ἦταν «μητρῶο ὅρων πρώτης τάξης» καὶ «μητρῶο ὅρων μηδενικῆς τάξης».

Ἔτσι, ἀπὸ μαθηματικῆς ἄποψης, τὸ πρόβλημα ἀνάγεται στὴν ἐπίλυση ἑνὸς συστήματος δύο διαφορικῶν ἐξισώσεων (1.3.15) ἢ (1.3.16). Ὅπως θὰ δοῦμε στὸ Κεφάλαιο 2, ἡ ἐπίλυση αὐτὴ καταδεικνύει ἕνα **φαινόμενο δυναμικῆς ἀστάθειας**, τὸ ὁποίο **δὲν** διακρίνεται μὲ ἐμπειρικὸ τρόπο καὶ ἔγινε ἀντιληπτό, μόνο κατόπιν μαθηματικῆς ἀνάλυσης. **Τὸ φαινόμενο αὐτό, εἶναι ἡ ἀλλαγὴ τῆς δυναμικῆς συμπεριφορὰς τοῦ φορέα, ἀπὸ εὐσταθὴ κίνηση (φραγμένη - φθίνουσα - συγκλίνουσα - ἀποσβεννύμενη ταλάντωση) σὲ ἀσταθὴ κίνηση (μὴ φραγμένη - αὔξουσα - ἀποκλίνουσα - ἀρνητικὰ «ἀποσβεννύμενη» ταλάντωση). Τὸ εἴδος αὐτὸ τῆς ἀπώλειας τῆς δυναμικῆς εὐστάθειας, ὀνομάζεται πτερυγισμὸς** καὶ οἱ στόχοι τῆς ἐργασίας εἶναι κατ' ἀρχὴν ἡ σύλληψη - κατανόησή του, ἡ περιγραφή, ἡ μελέτη, ἡ ἀνάλυση καὶ ἐν τέλει οἱ προτάσεις σχεδιασμοῦ γιὰ ἀποφυγή του στὶς νεόδμητες γέφυρες, γιὰ τὴν ἐνδεχόμενη ἀντιμετώπισή του στὶς ὑφιστάμενες καὶ ἑρμηνεία του στὶς πληγεῖσες. **Τὸ κρίσιμο σημεῖο**, τὸ σημεῖο δηλαδὴ ποὺ γίνεται ἡ ἀλλαγή τῆς συμπεριφοράς, εἶναι μία συγκεκριμένη ταχύτητα καὶ εἶναι χαρακτηριστικὸ τῆς ἑκάστοτε διατομῆς καταστρώματος. Τὸ ἐνδιαφέρον εἶναι ὅτι αὐτὴ ἡ κρίσιμη ταχύτητα εἶναι σχετικὰ μικρή: τῆς τάξης τῶν λίγων *m/s* συνήθως. Παρατηρεῖται δηλαδὴ ἡ ἐξῆς ὁμοιότητα μὲ τὰ φαινόμενα τῆς στατικῆς ἀστάθειας: **δὲν** ἀπαιτοῦνται ἰδιαίτερα μεγάλα φορτία γιά νὰ ἀπολεσθεῖ ἡ εὐστάθεια. Συνήθως τὰ φορτία ἀστάθειας (ἐδὼ ἀεροδυναμικά) εἶναι κλάσματα τῆς ἀντοχῆς τῶν φορέων. Ἡ εὕρεση τῆς **κρίσιμης ταχύτητας ἢ ταχύτητας πτερυσμοῦ**, εἶναι ἀντικείμενο τοῦ 2ου Κεφαλαίου.

2. ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΠΙΛΥΣΗΣ

2.1. Ἡ Μέθοδος τῶν Μιγαδικῶν Ἰδιοτιμῶν

δ[12.10] Ξαναγράφουμε τὴν ἐξίσωση κίνησης (1.3.23), αυτὴ τὴ φορὰ μὲ δείκτη *k* νὰ δηλώνει τὸν ἀριθμὸ ἐπανάληψης τῆς μειωμένης συχνότητας ἢ τῆς ταχύτητας:

$$[M]\{\ddot{u}_k\}+[C](V_k)\{\dot{u}_k\}+[K](V_k)\{u_k\}=\{0\} \tag{2.1.1}$$

Αναζητοῦμε λύση τῆς μορφῆς

$$\{u_k\}=\{\beta_k\}e^{\lambda_k t} \tag{2.1.2}$$

ἡ ὁποία ἀντικαθίσταται στὴν (2.1.1) καὶ δίνει

$$\left(\lambda_k^2[M]+\lambda_k[C]+[K]\right)\{\beta_k\}=\{0\} \tag{2.1.3}$$

Ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωση ἀποτελεῖ ὁμογενὲς σύστημα ***N*** γραμμικῶν ἀλγεβρικῶν ἐξισώσεων γιὰ κάθε βῆμα ***k*** ταχύτητας ἀνέμου $\boldsymbol{V_k}$. Συνολικὰ ἔχουμε ***k·N*** συστήματα πρὸς ἐπίλυση. Τὸ *k*-οστὸ σύστημα, ὅπως καὶ ὅλα, δίνει μὴ τετριμμένη λύση $\{\boldsymbol{\beta_k}\}$ ἂν καὶ μόνο ἂν ἡ ὁρίζουσα τοῦ μητρώου

$$\{S\}(\lambda_k)=\lambda_k^2[M]+\lambda_k[C]+[K] \tag{2.1.4}$$

νὰ εἶναι μηδενική, ὡς ὀφείλει στὰ ὁμογενὴ συστήματα. Ἤτοι:

$$\det\left(\lambda_k^2[M]+\lambda_k[C]+[K]\right)=0 \tag{2.1.5}$$

Στὸ ἑξῆς, παραλείπεται ἡ χρήση τοῦ δείκτη *k*, πρὸς ἀποφυγὴ σύγχισης μὲ ἄλλους δείκτες, ἀλλὰ θεωρεῖται δεδομένο. Τὸ ἀνάπτυγμα τῆς ὁρίζουσας (2.1.5) εἶναι πολυώνυμο 2*N* βαθμοῦ ὡς πρὸς *λ* καὶ ὁ μηδενισμός του δίνει τὴ χαρακτηριστικὴ ἐξίσωση τῆς διαφορικῆς ἐξίσωσης κίνησης (2.1.1):

$$\Pi(\lambda)=\alpha_0\lambda^{2N}+\alpha_1\lambda^{2N-1}+\cdots+\alpha_{2N}=0 \tag{2.1.6}$$

τὸ ὁποίο ἔχει 2*N* ρίζες $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{2N}$. Οἱ συντελεστὲς τοῦ πολυωνύμου εἶναι πραγματικοί, ἑπομένως οἱ ρίζες του θὰ εἶναι εἴτε πραγματικὲς εἴτε κατὰ ζεῦγη μιγαδικές. Γιὰ κάθε τιμὴ τοῦ λ_n προκύπτει ἕνα διάνυσμα $\{\beta_n\}$, τὸ ὁποίο εἶναι πραγματικὸ ἢ μιγαδικό, ἐφόσον ἡ λ_n εἶναι ἀντίστοιχα πραγματικὴ ἢ μιγαδική. Μὲ τὴν παραδοχὴ διακεκριμένων (μὴ πολλαπλῶν) ῥιζῶν ἡ γενικὴ λύση τῆς (2.1.1) λαμβάνεται ὡς ἐπαλληλία:

$$\{u_n\}=\sum_{n=1}^{2N}a_n\{\beta_n\}e^{\lambda_n t} \tag{2.1.7}$$

ὅπου a_n εἶναι 2*N* αὐθαίρετες (βαθμωτές) σταθερὲς ποὺ προσδιορίζονται ἀπὸ τὶς ἀρχικὲς συνθήκες.

Ἡ ἀπόκριση τοῦ συστήματος ἐξαρτάται ἀπὸ τὸ εἶδος τῶν ῥιζῶν λ_n. Διακρίνουμε τὶς ἑξῆς δύο περιπτώσεις:

(i) Πραγματικὲς ῥίζες

Ἔστω ὅτι ἡ λ_n εἶναι πραγματική, τότε ἡ ἀντίστοιχη λύση (2.1.2) θὰ εἶναι:

$$\{u_n\} = \{\beta_n\} e^{\lambda_n t} \tag{2.1.8}$$

Εἶναι φανερὸ ὅτι ἂν $\lambda_n > 0$ ἡ λύση ἀποκλίνει ἐκθετικά, ἐνὼ ἂν $\lambda_n < 0$ συγκλίνει ἐκθετικά. Καὶ στὶς δύο περιπτώσεις, τὸ σύστημα δὲν ἐκτελεῖ ταλαντώσεις.

Ἂν ἡ ῥίζα λ_n παρουσιάζει πολλαπλότητα βαθμοῦ k ἡ λύση (2.1.2) εἶναι:

$$\{u_n\} = \{\beta_n\}\left(a_0 + a_1 t + \cdots + t^{k-1}\right) e^{\lambda_n t} \tag{2.1.9}$$

ἡ ὁποία πάλι ἀποκλίνει ἢ συγκλίνει ἐκθετικὰ ἂν $\lambda_n > 0$ ἢ $\lambda_n < 0$, ἀντίστοιχα καὶ τὸ σύστημα δὲν ἐκτελεῖ ταλαντώσεις.

(i) Μιγαδικὲς ῥίζες

Ἔστω ὅτι ἡ λ_n εἶναι μιγαδική, τότε θὰ εἶναι ῥίζα καὶ ἡ συζυγής της $\overline{\lambda}_n$. Θέτουμε:

$$\lambda_n = \mu_n + i\omega_n \ , \ \overline{\lambda}_n = \mu_n - i\omega_n \tag{2.1.10}$$

Τὰ ἀντίστοιχα διανύσματα $\{\beta_n\}$ καὶ $\{\overline{\beta}_n\}$ εἶναι ἐπίσης συζυγὴ μιγαδικὰ καὶ ἡ συμβολὴ καὶ τῶν δύο μαζὶ στὴ γενικὴ λύση θὰ εἶναι:

$$\begin{aligned}
\{u_m\} &= a_n \{\beta_n\} e^{\lambda_n t} + a_n^* \{\overline{\beta}_n\} e^{\overline{\lambda}_n t} \\
&= e^{\mu_n t}\left(a_n \{\beta_n\} e^{i\omega_n t} + a_n^* \{\overline{\beta}_n\} e^{-i\omega_n t}\right) \\
&= e^{\mu_n t}\left[\left(a_n \{\beta_n\} + a_n^* \{\overline{\beta}_n\}\right)\cos\omega_n t + i\left(a_n \{\beta_n\} - a_n^* \{\overline{\beta}_n\}\right)\sin\omega_n t\right]
\end{aligned} \tag{2.1.11}$$

Οἱ a_n, a_n^* εἶναι αὐθαίρετες σταθερές, ἑπομένως μποροῦν νὰ ἐπιλεγοῦν ὥστε νὰ εἶναι συζυγεὶς μιγαδικές, ἤτοι:

$$a_n = c_n + id_n \ , \ a_n^* = c_n - id_n \tag{2.1.12}$$

ὅπου c_n καὶ d_n εἶναι ἐπίσης αὐθαίρετες σταθερές. Ἐπίσης θέτουμε:

$$\{\beta_n\} = \{p_n\} + i\{q_n\} \ , \ \{\overline{\beta}_n^*\} = \{p_n\} - i\{q_n\} \tag{2.1.13}$$

Ἡ ἀντικατάσταση τῶν (2.1.12) καὶ (2.1.13) στὴ (2.1.11) δίνει:

$$\{u_m\} = 2e^{\mu_n t}\left[\left(c_n \{p_n\} - d_n \{q_n\}\right)\cos\omega_n t - \left(c_n \{p_n\} + d_n \{q_n\}\right)\sin\omega_n t\right] \tag{2.1.14}$$

Ὁ παράγοντας μέσα στὴν ἀγκύλη ἐκφράζει ἁρμονικὴ ταλάντωση, τῆς ὁποίας τὸ εὖρος ἀποκλίνει ἐκθετικὰ ἂν $\mu_n > 0$, ἐνὼ φθίνει ἐκθετικὰ ἂν $\mu_n < 0$. Τέλος, ἂν $\mu_n = 0$, οἱ ῥίζες εἶναι φανταστικὲς καὶ τὸ εὖρος τῆς ταλάντωσης παραμένει σταθερό. Στὰ συστήματα ποὺ ἀντιμετωπίζουμε στὴ δυναμικὴ τῶν κατασκευῶν, ἡ ἀπόσβεση εἶναι μικρὴ καὶ ἡ περίπτωση $\mu_n < 0$ εἶναι ἡ συνήθης. Ἡ ταλάντωση μὲ $\mu_n > 0$ εἶναι γνωστὴ ὡς **πτερυγισμός**. Ἡ λύση λαμβάνεται ὡς ἐπαλληλία τῶν (2.1.14). Δηλαδή:

$$\{u\} = \sum_{m=1}^{N} \{u_m\} \tag{2.1.15}$$

2.2. Ἡ Μέθοδος Βῆμα Πρὸς Βῆμα

Ἡ **Μέθοδος Βῆμα Πρὸς Βῆμα (ΒΠΒ)** ἢ ***Step By Step* (*SBS*)**, εἶναι ἡ μέθοδος ποὺ ἐπιλέχθηκε γιὰ τὴν ἐπίλυση τοῦ προβλήματος **πτερυγισμοῦ καταστρωμάτων γεφυρῶν** στὴν παροῦσα ἐργασία. Εἶναι μία σχετικὰ σύγχρονη ἀριθμητικὴ μέθοδος, μὲ κύρια προτερήματα:

- καλύτερη διάκριση τοῦ ρόλου τῆς κάθε μίας παραγώγου πτερυγισμοῦ
- δυνατότητα διαχωρισμοῦ τῆς σύνθετης κίνησης σὲ δύο κλάδους
- ταχύτητα σύγκλισης

Ὡς **Στρεπτικὸς Κλάδος (ΣΚ)** ἢ ***Torsional Branch* (*TB*)** ὁρίζεται ἡ γραφικὴ παράσταση τῆς συχνότητας $\boldsymbol{\omega_\varphi}$ (*rad*/sec) ἢ $\boldsymbol{f_\varphi}$ (*Hz*) τῆς στρεπτικῆς ταλάντωσης συναρτήσει τῆς ταχύτητας ἀνέμου $\boldsymbol{V}$ (*m*/*sec*)

Ὡς **Καμπτικὸς Κλάδος (ΚΚ)** ἢ ***Heaving Branch* (*HB*)** ὁρίζεται ἡ γραφικὴ παράσταση τῆς συχνότητας $\boldsymbol{\omega_\eta}$ (*rad*/sec) ἢ $\boldsymbol{f_\eta}$ (*Hz*) τῆς καμπτικῆς ταλάντωσης συναρτήσει τῆς ταχύτητας ἀνέμου $\boldsymbol{V}$ (*m*/*sec*)

Ἐξετάζοντας τὶς γραφικὲς παραστάσεις, μποροῦμε νὰ ἀναγνωρίσουμε σὲ ποιὸν κλάδο τῆς κίνησης ἐμφανίζεται ἡ ἀστάθεια τοῦ συζευγμένου πτερυγισμοῦ.

Ἡ μέθοδος περιγράφεται στὰ ἄρθρα: [2.1], [2.2], [2.3], [2.4], [2.5], [2.6], [2.7], [2.8], [2.9], [2.10], [2.11]. Ἐδώ, προκειμένου νὰ ἀποφευχθεῖ μία ἄσκοπη ἀντιγραφὴ - ἐπικόλληση, ἀνασκοπεῖται ἡ μέθοδος, ἐνδεχομένως λίγο πιὸ διευκρινιστικὰ σὲ κάποια σημεία, κυρίως σὲ ὡρισμένες τυπογραφικῆς φύσεως ἀντιφάσεις μεταξὺ ἐξισώσεων, προσήμων, συμβόλων καὶ μεταβλητῶν.

Προσδιορισμὸς Στρεπτικοῦ Κλάδου

Βῆμα 1

Στὴν περίπτωση ποὺ ξεκινά πρώτη ἡ στρεπτικῆ κίνηση, **ὑποθέτουμε** ἕνα εὔρος ταλάντωσης $\boldsymbol{\varphi_{0i}}$ (*rad*) καὶ μία κυκλικῆ συχνότητα ταλάντωσης $\boldsymbol{\omega_{\varphi i}}$ (*rad/s*). Ὁ δείκτης «**0**» ὑποδηλώνει ἀρχικὴ κίνηση καὶ ὁ δείκτης «***i***» τὸν ἀριθμὸ τῆς ἐπανάληψης. Ἡ ὑποτιθέμενη συχνότητα ταλάντωσης $\boldsymbol{\omega_{\varphi i}}$ δὲν εἶναι καὶ τόσο αὐθαίρετη, ἀφοῦ συνδέεται μὲ τὴν ταχύτητα ἀνέμου ***V***, μέσῳ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς μειωμένης συχνότητας:

$$k = \frac{B\omega}{V} \tag{2.2.1}$$

ὁπότε, γιὰ μία συγκεκριμένη τιμὴ $\boldsymbol{V_i}$, ἰσχὺει :

$$\omega_{\varphi i} = \frac{k_i}{2b} V_i \quad \text{ἢ} \quad k_i = \frac{2b\omega_{\varphi i}}{V_i} \quad \text{ἢ} \quad V_i = \frac{2b\omega_{\varphi i}}{k_i} \tag{2.2.2}$$

Ἡ ἀρχικὴ αὐτὴ στρεπτικὴ κίνηση, περιγράφεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωση:

$$\varphi = \varphi_{0i} \sin\left(\omega_{\varphi i} t\right) \tag{2.2.3}$$

Βῆμα 2

Ἡ στρεπτικὴ κίνηση (2.2.3) τοῦ 1ου βήματος προκαλεῖ ἐξαναγκασμένη ταλάντωση στὸν καμπτικὸ βαθμό ἐλευθερίας, λόγῳ τῶν ἐξωτερικῶν δράσεων ποῦ γεννᾶ (ἐξωτερικὲς γιὰ τὸν καμπτικὸ β.ε., δηλαδὴ συναρτήσεις τοῦ $\boldsymbol{\varphi}$, ὄχι τοῦ ***h***). Ἡ (1.3.16.α) γιὰ τὴν ἐπανάληψη ***i***, θέτοντας μηδενικὴ τὴν φυσικὴ ἀπόσβεση τῆς διατομῆς $\boldsymbol{C_\eta}$, γίνεται:

$$m\ddot{h}_i + \left(-\rho b V_i k_i H_{1i}^*\right)\dot{h}_i + \left(K_\eta - 0.5\rho V_i^2 k_i^2 H_{4i}^*\right)h_i = \left(2\rho b^2 V_i k_i H_{2i}^*\right)\dot{\varphi}_i + \left(\rho b V_i^2 k_i^2 H_{3i}^*\right)\varphi_i \tag{2.2.4}$$

Ἀπὸ τὸν ὁρισμό της ὅμως, ἡ καμπτικὴ φυσικὴ συχνότητα (ἰδιοσυχνότητα) $\boldsymbol{\omega_{\eta 0}}$, εἶναι:

$$\omega_{\eta 0}^2 = \frac{K_\eta}{m} \quad \text{, ὁπότε} \quad K_\eta = m\omega_{\eta 0}^2 \tag{2.2.5}$$

Ἀντικαθιστώντας τὶς (2.2.3) καὶ (2.2.5) στὴν (2.2.4) καὶ διαιρῶντας ἀμφότερα τὰ μέλη μὲ *m* :

$$\ddot{h}_i + \left(-\frac{2\rho b^2}{m}\omega_{\varphi i} H_{1i}^*\right)\dot{h}_i + \left(\omega_{\eta 0}^2 - \frac{2\rho b^2}{m}\omega_{\varphi i}^2 H_{4i}^*\right)h_i = \left(\frac{4\rho b^3}{m}\omega_{\varphi i} H_{2i}^*\right)\dot{\varphi}_i + \left(\frac{4\rho b^3}{m}\omega_{\varphi i}^2 H_{3i}^*\right)\varphi_i \tag{2.2.6}$$

Βῆμα 3

Μὲ τὴ σειρά της τώρα, ἡ καμπτικὴ κίνηση τοῦ 2ου βήματος προκαλεῖ ἐλεύθερη ταλάντωση στὸν στρεπτικὸ βαθμὸ ἐλευθερίας, λόγῳ ἀρχικῶν συνθηκῶν. Οἱ ἀρχικὲς συνθήκες $\dot{h}_i, h_i$ ἀναπτύσσονται ἀπὸ τὶς $\dot{\varphi}_i, \varphi_i$ λόγῳ σύζευξης τῶν δύο ἀγνώστων (συμβιβαστὸ τῶν παραμορφώσεων). Ἔτσι, οἱ δράσεις ποῦ προκαλοῦνται ἀπὸ τὶς $\dot{h}_i, h_i$ εἶναι συναρτήσεις τῶν $\dot{\varphi}_i, \varphi_i$ καὶ ἡ διαφορικὴ ἐξίσωση στρεπτικῆς κίνησης εἶναι ὁμογενής. Ἄρα ἡ ταλάντωση εἶναι ἐλεύθερη. Ἡ (1.3.16.β) γιὰ τὴν ἐπανάληψη ***i***, θέτοντας μηδενικὴ τὴν φυσικὴ ἀπόσβεση τῆς διατομῆς $\boldsymbol{C_\varphi}$, γίνεται:

$$I\,\ddot{\varphi}_i + K_\varphi\,\varphi_i = \left(2\rho b^2 V_i k_i A_{2i}^*\right)\dot{h}_i + \left(4\rho b^3 V_i k_i A_{3i}^*\right)\dot{\varphi}_i + \left(\rho b V_i^2 k_i^2 A_{1i}^*\right)h_i + \left(2\rho b^2 V_i^2 k_i^2 A_{4i}^*\right)\varphi_i$$

(2.2.7)

Ἀπὸ τὸν ὁρισμό της ὅμως, ἡ στρεπτικὴ φυσικὴ συχνότητα (ἰδιοσυχνότητα) $\boldsymbol{\omega_{\varphi i}}$, εἶναι:

$$\omega_{\varphi i}^2 = \frac{K_\varphi}{I} \quad \text{, ὁπότε} \quad K_\varphi = I\,\omega_{\varphi i}^2 \qquad (2.2.8)$$

Ἀντικαθιστώντας τὶς (2.2.3) καὶ (2.2.8) στὴν (2.2.7) καὶ διαιρῶντας ἀμφότερα τὰ μέλη μὲ *I* :

$$\ddot{\varphi}_i + \omega_{\varphi i}^2\,\varphi_i = \left(4\frac{\rho b^3}{I}\,\omega_{\varphi i} A_{2i}^*\right)\dot{h}_i + \left(8\frac{\rho b^4}{I}\,\omega_{\varphi i} A_{3i}^*\right)\dot{\varphi}_i + \left(4\frac{\rho b^3}{I}\,\omega_{\varphi i}^2 A_{1i}^*\right)h_i + \left(8\frac{\rho b^4}{I}\,\omega_{\varphi i}^2 A_{4i}^*\right)\varphi_i$$

(2.2.9)

Ἡ λύση τῆς (2.2.9) εἶναι τῆς μορφῆς:

$$\varphi_i = e^{-2\pi\delta'_{\varphi i} t}\,\sin\left(\omega'_{\varphi i}\,t + \theta_i\right) \qquad (2.2.10)$$

ὅπου $\delta'_{\varphi i}$ ἡ λεγόμενη λογαριθμικὴ ἀπόσβεση:

$$\delta'_{\varphi i} = O_1 A_{2i}^* - O_1 O_{2i}\left(A_{1i}^*\left|H_{2i}^*\right|\cos\theta_{1i} + A_{1i}^*\left|H_{3i}^*\right|\cos\theta_{2i} - A_{4i}^*\left|H_{2i}^*\right|\sin\theta_{1i} - A_{4i}^*\left|H_{3i}^*\right|\sin\theta_{2i}\right)$$

(2.2.11)

καὶ $\omega'_{\varphi i}$ ἡ κυκλικὴ συχνότητα τῆς ἀποσβεννύμενης στρεπτικῆς ταλάντωσης:

$$\omega'_{\varphi i} = \sqrt{\omega_{\varphi 0}^2 - O_1\,\omega_{\varphi i}^2 A_{3i}^* - O_1 O_{2i}\,\omega_{\varphi i}^2\left(A_{1i}^*\left|H_{2i}^*\right|\sin\theta_{1i} + A_{1i}^*\left|H_{3i}^*\right|\sin\theta_{2i} + A_{4i}^*\left|H_{2i}^*\right|\cos\theta_{1i} + A_{4i}^*\left|H_{3i}^*\right|\cos\theta_{2i}\right)}$$

(2.2.12)

μέ:

$$O_1 = \pi \frac{\rho b^4}{I} \ , \ O_{2i} = \frac{\frac{\rho b^2}{m}\left(\frac{\omega_{\varphi i}}{\omega_{\eta i}}\right)^2}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega_{\varphi i}}{\omega_{\eta i}}\right)^2\right]^2 + 4\zeta_{\eta i}^2\left(\frac{\omega_{\varphi i}}{\omega_{\eta i}}\right)^2}} \qquad (2.2.13)$$

ὅπου:

$$\zeta_{\eta i} = -\frac{\rho b^2}{m}\frac{\omega_{\varphi i}}{2\omega_{\eta i}} H_{1i}^* \ , \ \omega_{\eta i} = \sqrt{\omega_{\eta 0}^2 - \frac{\rho b^2}{m}\omega_{\varphi i}^2 H_{4i}^*} \qquad (2.2.14)$$

καί:

$$\theta_{1i} = \begin{Bmatrix} \theta_i - \pi/2 & H_{2i}^* \geq 0 \\ \theta_i + \pi/2 & H_{2i}^* < 0 \end{Bmatrix} , \ \theta_{2i} = \begin{Bmatrix} \theta_i & H_{3i}^* \geq 0 \\ \theta_i + \pi/2 & H_{3i}^* < 0 \end{Bmatrix} \qquad (2.2.15)$$

ὅπου θ_i ἡ διαφορὰ φάσης τῆς στρεπτικῆς κίνησης ὡς πρὸς τὴν καμπτική στὸν καμπτικὸ κλάδο, γιὰ ταχύτητα V_i :

$$\theta_i = -\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\left(\frac{2\zeta_{\eta i}\omega_{\eta i}\omega_{\varphi 0}}{\omega_{\eta i}^2 - \omega_{\varphi 0}^2}\right) \qquad (2.2.16)$$

Ἔλεγχος:

Ἂν $\omega'_{\varphi i} = \omega_{\varphi i}$

τέλος ἐπαναλήψεων, τὸ $\omega'_{\varphi i}$ εἶναι ἡ συχνότητα τῆς στρεπτικῆς ταλάντωσης γιὰ ταχύτητα ἀνέμου V_i

Ἀλλιῶς

πηγαίνουμε πάλι στὸ βῆμα 1

Βῆμα 4

Ὑπολογίζουμε τὴν τιμὴ τοῦ $\delta'_{\varphi i}$, ἀντικαθιστώντας τὸ $\omega'_{\varphi i}$ τοῦ 3ου βήματος στὴ σχέση (2.2.11). Τὸ $\delta'_{\varphi i}$ εἶναι συνάρτηση τοῦ $\omega'_{\varphi i}$, διότι ἡ (2.2.11) περιέχει τὸν ὅρο O_{2i} ποὺ συναρτάται μὲ τὸ $\omega_{\varphi i}$ μέσῳ τῆς σχέσης (2.2.13.β). Ἀκόμα, λύνοντας τὴν (2.2.6), ποὺ εἶναι μία συνήθης γραμμικὴ διαφορικὴ ἐξίσωση μὲ σταθεροὺς συντελεστὲς καὶ μοναδικὴ ἄγνωστο τὴν κατακόρυφη μετατόπιση h_i, λαμβάνουμε τὴν ἀπόκριση $h_i = h_i(t)$.

Τὸ ἀκριβῶς ἀντίστροφο σκεπτικὸ τῶν τεσσάρων βημάτων χρησιμοποιοῦμε καὶ γιὰ τὸν προσδιορισμὸ τοῦ καμπτικοῦ κλάδου:

Προσδιορισμὸς Καμπτικοῦ Κλάδου

Βῆμα 1

Στὴν περίπτωση ποὺ ξεκινά πρώτη ἡ καμπτικῆ κίνηση, **ὑποθέτουμε** ἕνα εὔρος ταλάντωσης h_{0i} (*rad*) καὶ μία κυκλικῆ συχνότητα ταλάντωσης $\omega_{\eta i}$ (*rad/s*). Γιὰ μία συγκεκριμένη τιμὴ V_i , ἰσχὺει :

$$\omega_{\eta i} = \frac{k_i}{2b} V_i \quad \text{ἢ} \quad k_i = \frac{2b\omega_{\eta i}}{V_i} \quad \text{ἢ} \quad V_i = \frac{2b\omega_{\eta i}}{k_i} \tag{2.2.17}$$

Ἡ ἀρχικὴ αὐτὴ καμπτικὴ κίνηση, περιγράφεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωση:

$$h = h_{0i} \sin\left(\omega_{\eta i} t\right) \tag{2.2.18}$$

Βῆμα 2

Ἡ καμπτικὴ κίνηση (2.2.17) τοῦ 1ου βήματος προκαλεῖ ἐξαναγκασμένη ταλάντωση στὸν στρεπτικὸ βαθμό ἐλευθερίας, λόγῳ τῶν ἐξωτερικῶν δράσεων ποῦ γεννᾶ (ἐξωτερικὲς γιὰ τὸν στρεπτικὸ β.ε., δηλαδὴ συναρτήσεις τοῦ h, ὄχι τοῦ φ). Ἡ (1.3.16.β) γιὰ τὴν ἐπανάληψη i, θέτοντας μηδενικὴ τὴν φυσικὴ ἀπόσβεση τῆς διατομῆς C_φ , γίνεται:

$$I\,\ddot{\varphi}_i + \left(-4\rho b^3 V_i k_i A_{2i}^*\right)\dot{\varphi}_i + \left(K_\varphi - 2\rho b^2 V_i^2 k_i^2 A_{3i}^*\right)\varphi_i = \left(2\rho b^2 V_i k_i A_{1i}^*\right)\dot{h}_i + \left(\rho b V_i^2 k_i^2 A_{4i}^*\right) h_i \tag{2.2.19}$$

Ἀπὸ τὸν ὁρισμό της ὅμως, ἡ στρεπτικὴ φυσικὴ συχνότητα (ἰδιοσυχνότητα) $\omega_{\varphi 0}$, εἶναι:

$$\omega_{\varphi 0}^2 = \frac{K_\varphi}{I} \quad \text{, ὁπότε} \quad K_\varphi = I\,\omega_{\varphi 0}^2 \tag{2.2.20}$$

Ἀντικαθιστώντας τὶς (2.2.17) , (2.2.20) στὴν (2.2.19) καὶ διαιρῶντας ἀμφότερα τὰ μέλη μὲ I :

$$\ddot{\varphi}_i + \left(-8\frac{\rho b^4}{I}\omega_{\eta i} A_{2i}^*\right)\dot{\varphi}_i + \left(\omega_{\varphi 0}^2 - 8\frac{\rho b^4}{I}\omega_{\eta i}^2 A_{3i}^*\right)\varphi_i = \left(4\frac{\rho b^3}{I}\omega_{\eta i} A_{1i}^*\right)\dot{h}_i + \left(4\frac{\rho b^3}{I}\omega_{\eta i}^2 A_{4i}^*\right) h_i \tag{2.2.21}$$

Βῆμα 3

Μὲ τὴ σειρά της τώρα, ἡ στρεπτικὴ κίνηση τοῦ 2ου βήματος προκαλεῖ ἐλεύθερη ταλάντωση στὸν καμπτικὸ βαθμὸ ἐλευθερίας, λόγῳ ἀρχικῶν συνθηκῶν. Οἱ ἀρχικὲς συνθήκες $\dot{\varphi}_i, \varphi_i$ ἀναπτύσσονται ἀπὸ τὶς $\dot{h}_i, h_i$ λόγῳ σύζευξης τῶν δύο ἀγνώστων (συμβιβαστὸ τῶν παραμορφώσεων). Ἔτσι, οἱ δράσεις ποῦ προκαλοῦνται ἀπὸ τὶς $\dot{\varphi}_i, \varphi_i$ εἶναι συναρτήσεις τῶν $\dot{h}_i, h_i$ καὶ ἡ διαφορικὴ ἐξίσωση καμπτικῆς κίνησης εἶναι ὁμογενής. Ἄρα ἡ ταλάντωση εἶναι ἐλεύθερη. Ἡ (1.3.16.α) γιὰ τὴν ἐπανάληψη i, θέτοντας μηδενικὴ τὴν φυσικὴ ἀπόσβεση τῆς διατομῆς C_η , γίνεται:

$$m\ddot{h}_i + K_\eta h_i = \left(\rho b^2 \omega_{\eta i} H_{1i}^*\right)\dot{h}_i + \left(2\rho b^2 \omega_{\eta i}^2 H_{4i}^*\right) h_i + \left(2\rho b^3 \omega_{\eta i} H_{2i}^*\right)\dot{\varphi}_i + \left(\rho b^3 \omega_{\eta i}^2 H_{3i}^*\right)\varphi_i$$

(2.2.22)

Ἀπὸ τὸν ὁρισμό της ὅμως, ἡ καμπτικὴ φυσικὴ συχνότητα (ἰδιοσυχνότητα) $\boldsymbol{\omega_{\eta i}}$, εἶναι:

$$\omega_{\eta i}^2 = \frac{K_\eta}{m} \text{ , ὁπότε } K_\eta = I\,\omega_{\eta i}^2 \qquad (2.2.23)$$

Ἀντικαθιστώντας τὶς (2.2.17) , (2.2.23) στὴν (2.2.22) καὶ διαιρῶντας καὶ τὰ δύο μέλη μὲ *m* :

$$\ddot{h}_i + \omega_{\eta i}^2 h_i = \left(\frac{\rho b^2}{m}\omega_{\eta i} H_{1i}^*\right)\dot{h}_i + \left(2\frac{\rho b^2}{m}\omega_{\eta i}^2 H_{4i}^*\right) h_i + \left(2\frac{\rho b^3}{m}\omega_{\eta i} H_{2i}^*\right)\dot{\varphi}_i + \left(\frac{\rho b^3}{m}\omega_{\eta i}^2 H_{3i}^*\right)\varphi_i$$

(2.2.24)

Ἡ λύση τῆς (2.2.24) εἶναι τῆς μορφῆς:

$$h_i = e^{-2\pi\delta'_{\eta i}} \sin\left(\omega'_{\eta i}\, t + \theta_i\right) \qquad (2.2.24)$$

ὅπου $\delta'_{\varphi i}$ ἡ λεγόμενη λογαριθμικὴ ἀπόσβεση:

$$\delta'_{hi} = -O_1 H_{1i}^* - O_1 O_{2i}\left(H_{2i}^*\left|A_{1i}^*\right|\cos\theta_{1i} + H_{2i}^*\left|A_{4i}^*\right|\cos\theta_{2i} - H_{3i}^*\left|A_{1i}^*\right|\sin\theta_{1i} - H_{3i}^*\left|A_{4i}^*\right|\sin\theta_{2i}\right)$$

(2.2.25)

καὶ $\omega'_{\varphi i}$ ἡ κυκλικὴ συχνότητα τῆς ἀποσβεννύμενης στρεπτικῆς ταλάντωσης:

$$\omega'_{\eta i} = \sqrt{\omega_{\eta 0}^2 - O_1\,\omega_{\eta i}^2 H_{4i}^* - O_1 O_{2i}\,\omega_{\eta i}^2\left(H_{2i}^*\left|A_{1i}^*\right|\sin\theta_{1i} + H_{2i}^*\left|A_{4i}^*\right|\sin\theta_{2i} + H_{3i}^*\left|A_{1i}^*\right|\cos\theta_{1i} + H_{3i}^*\left|A_{4i}^*\right|\cos\theta_{2i}\right)}$$

(2.2.26)

μέ:

$$O_1 = \pi\frac{\rho b^2}{m} \text{ , } O_{2i} = \frac{\dfrac{\rho b^4}{I}\left(\dfrac{\omega_{\eta i}}{\omega_{\varphi i}}\right)^2}{\sqrt{\left[1-\left(\dfrac{\omega_{\eta i}}{\omega_{\varphi i}}\right)^2\right]^2 + 4\zeta_{\varphi i}^2\left(\dfrac{\omega_{\eta i}}{\omega_{\varphi i}}\right)^2}} \qquad (2.2.27)$$

ὅπου:

$$\zeta_{\varphi i} = -\frac{\rho b^4}{I}\frac{\omega_{\eta i}}{2\omega_{\varphi i}} A_{2i}^* \text{ , } \omega_{\varphi i} = \sqrt{\omega_{\varphi 0}^2 - \frac{\rho b^4}{I}\omega_{\eta i}^2 A_{3i}^*} \qquad (2.2.28)$$

καί:

$$\theta_{1i} = \begin{Bmatrix} \theta_i - \pi/2 & A_{1i}^* \geq 0 \\ \theta_i + \pi/2 & A_{1i}^* < 0 \end{Bmatrix}, \; \theta_{2i} = \begin{Bmatrix} \theta_i & A_{4i}^* \geq 0 \\ \theta_i + \pi/2 & A_{4i}^* < 0 \end{Bmatrix} \tag{2.2.29}$$

ὅπου θ_i ἡ διαφορὰ φάσης τῆς στρεπτικῆς κίνησης ὡς πρὸς τὴν καμπτική στὸν καμπτικὸ κλάδο, γιὰ ταχύτητα V_i :

$$\theta_i = \frac{\pi}{2} + \tan^{-1}\left(\frac{2\zeta_{\varphi i}\omega_{\varphi i}\omega_{\eta 0}}{\omega_{\varphi i}^2 - \omega_{\eta 0}^2} \right) \tag{2.2.30}$$

Ἔλεγχος:

Ἂν $\omega'_{\eta i} = \omega_{\eta i}$

τέλος ἐπαναλήψεων, τὸ $\omega'_{\eta i}$ εἶναι ἡ συχνότητα τῆς στρεπτικῆς ταλάντωσης γιὰ ταχύτητα ἀνέμου V_i

Ἀλλιῶς

πηγαίνουμε πάλι στὸ βῆμα 1

Βῆμα 4

Ὑπολογίζουμε τὴν τιμὴ τοῦ $\delta'_{\eta i}$, ἀντικαθιστώντας τὸ $\omega'_{\eta i}$ τοῦ 3ου βήματος στὴ σχέση (2.2.25). Τὸ $\delta'_{\eta i}$ εἶναι συνάρτηση τοῦ $\omega'_{\eta i}$, διότι ἡ (2.2.25) περιέχει τὸν ὅρο O_{2i} ποὺ συναρτάται μὲ τὸ $\omega_{\eta i}$ μέσῳ τῆς σχέσης (2.2.27.β). Ἀκόμα, λύνοντας τὴν (2.2.21), ποὺ εἶναι μία συνήθης γραμμικὴ διαφορικὴ ἐξίσωση μὲ σταθεροὺς συντελεστὲς καὶ μοναδικὴ ἄγνωστο τὴ στρεπτικὴ γωνία φ_i, λαμβάνουμε τὴν ἀπόκριση $\varphi_i = \varphi_i(t)$.

Παρατηρεῖται μία ἀντιστοιχία ρόλων τῶν παραγώγων πτερυγισμοῦ H_i^* καὶ A_i^* μεταξὺ τοῦ Στρεπτικοῦ Κλάδου καὶ τοῦ Καμπτικοῦ Κλάδου.

Στρεπτικὸς Κλάδος	Καμπτικὸς Κλάδος
H_1^*	A_2^*
H_2^*	A_1^*
H_3^*	A_4^*
H_4^*	A_3^*

3. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ - ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Γιὰ τὴν ἐκπόνηση τῆς παρούσας Μεταπτυχιακῆς Ἐργασίας, συνετάχθη πρόγραμμα Η/Υ σὲ περιβάλλον MATLAB® R2015a (βλ. Παράρτημα). Τὸ ἀριθμητικὸ παράδειγμα ποὺ ἐπιλύθηκε εἶναι μία διατομὴ καταστρώματος γέφυρας μὲ τὰ παρακάτω γεωμετρικὰ χαρακτηριστικά (βλ. Σχῆμα 1.1):

- Ὀρθογωνικὴ διατομὴ
- Λεία ἄκρα
- Λόγος πλάτους πρὸς πάχος ἴσος με 20

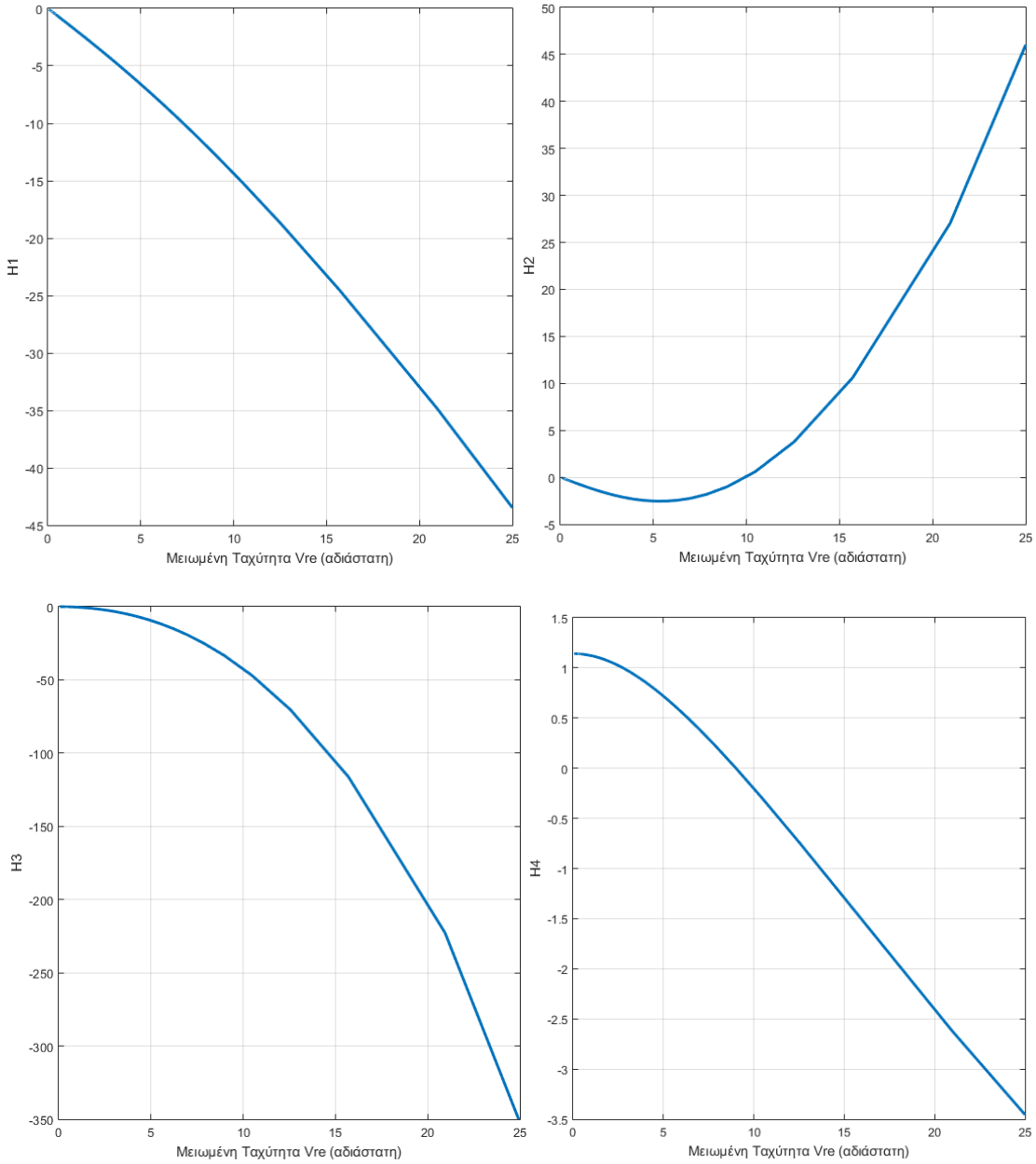
Τὰ παραπάνω χαρακτηριστικά, πληροῦν τὶς συνθήκες γιὰ νὰ χρησιμοποιηθεῖ ἡ θεωρία τοῦ *Scanlan*. Τὰ ἀριθμητικὰ δεδομένα εἶναι:

Μεταβλητὴ	Τιμὴ	Μονάδες	Περιγραφὴ
$\boldsymbol{m}$	2.42	(kg/m)	Μάζα ἀνὰ μονάδα μήκους
$\boldsymbol{I}$	0.0181	(kgm/m)	Πολικὴ ῥοπὴ ἀδράνειας ἀνὰ μ. μήκους
$\boldsymbol{B}$	0.3	(m)	Πλάτος Καταστρώματος
$\boldsymbol{f_\eta}$	4.0	(Hz)	Ἰδιοσυχνότητα καμπτικῆς ταλάντωσης
$\boldsymbol{f_\varphi}$	5.2	(Hz)	Ἰδιοσυχνότητα στρεπτικῆς ταλάντωσης
$\boldsymbol{\rho}$	1.2922	(kg/m^3)	Πυκνότητα του ἀέρα στοὺς 0° C

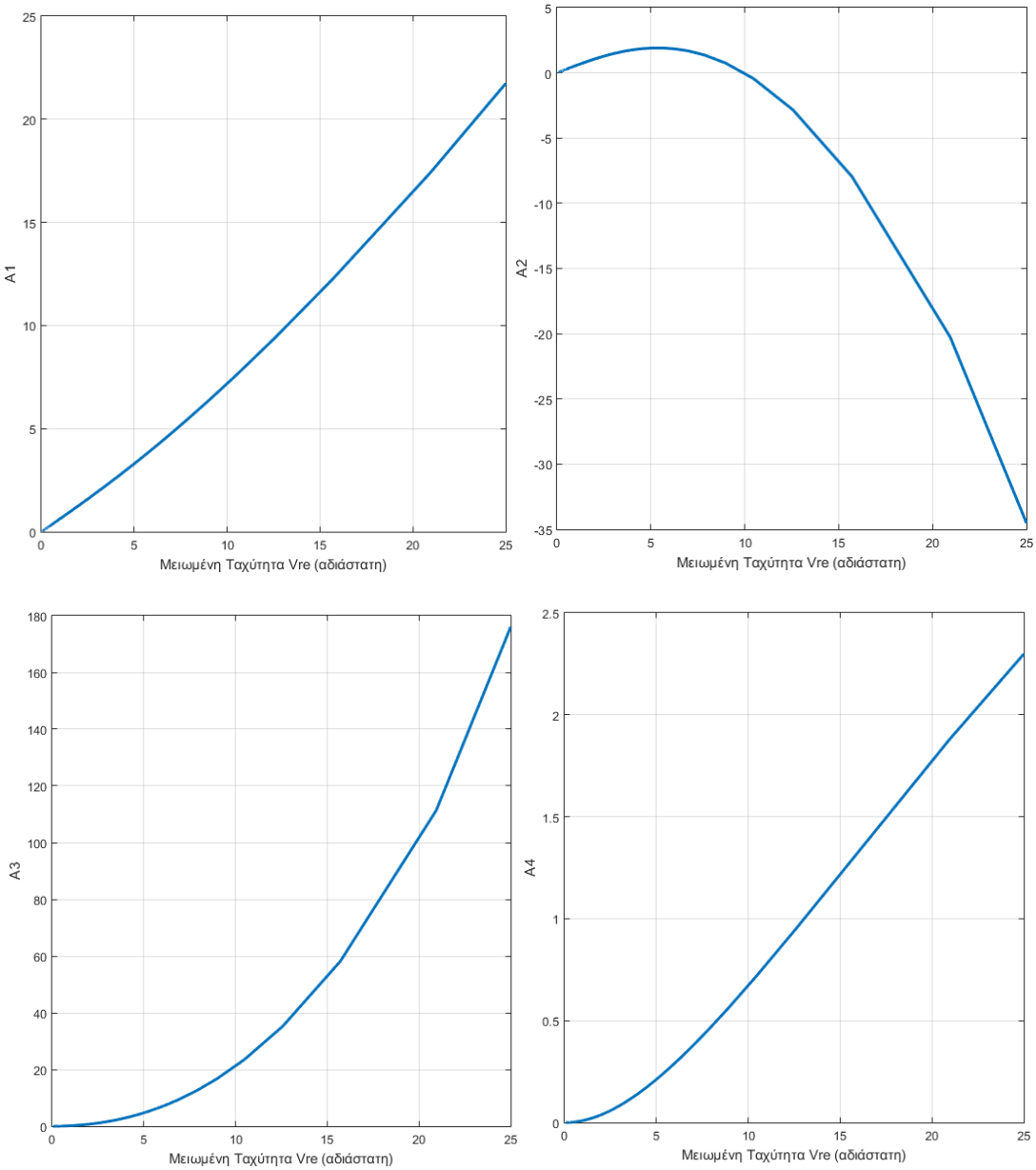
3.1. Παράγωγοι Πτερυγισμοῦ

Κατ’ ἀρχάς, ἔπρεπε νὰ προσδιοριστοῦν οἱ παράγωγοι πτερυγισμοῦ. Χρησιμοποιήθηκαν γιὰ τὸ συγκεκριμένο ἀριθμητικὸ παράδειγμα, μὲ τὰ συγκεκριμένα χαρακτηριστικά, οἱ τύποι τοῦ *Scanlan* (1.2.28) καὶ (1.2.29), ποὺ περιέχουν τὶς ἀναλυτικὲς συναρτήσεις τοῦ *Theodorsen*.

Σκόπιμα δὲν τοποθετήθηκαν ὅλες οἱ παράγωγοι στὸ ἴδιο διάγραμμα ἀφοῦ οἱ κλίμακές των διέφεραν τάξεις μεγέθους: ἀπὸ λίγες μονάδες ἕως πολλὲς ἑκατοντάδες.

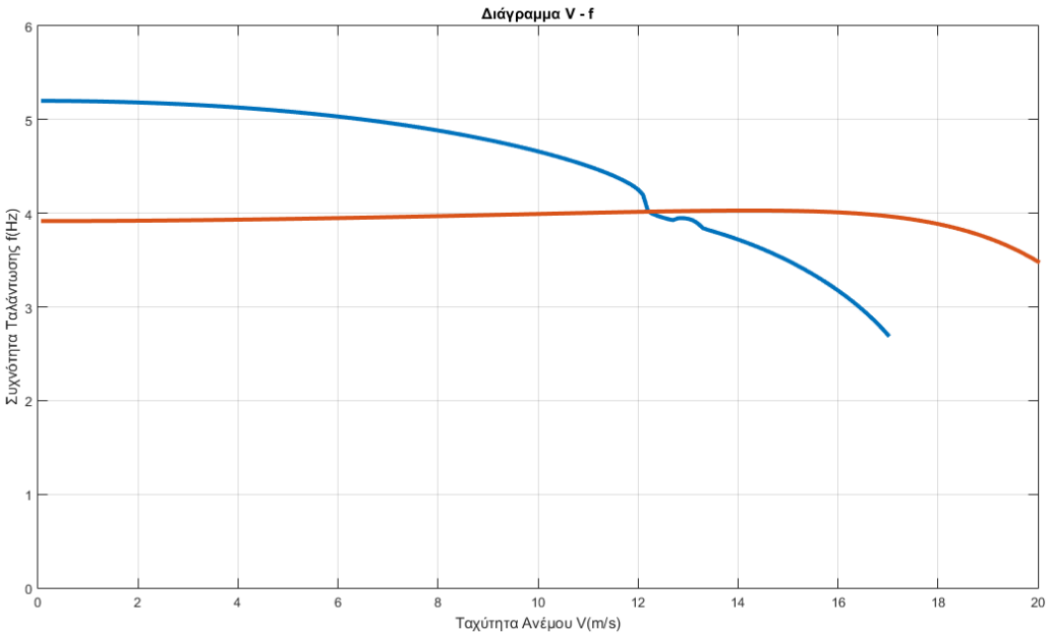


*Διάγραμμα 3.1 Παράγωγοι πτερυγισμοῦ Hi**



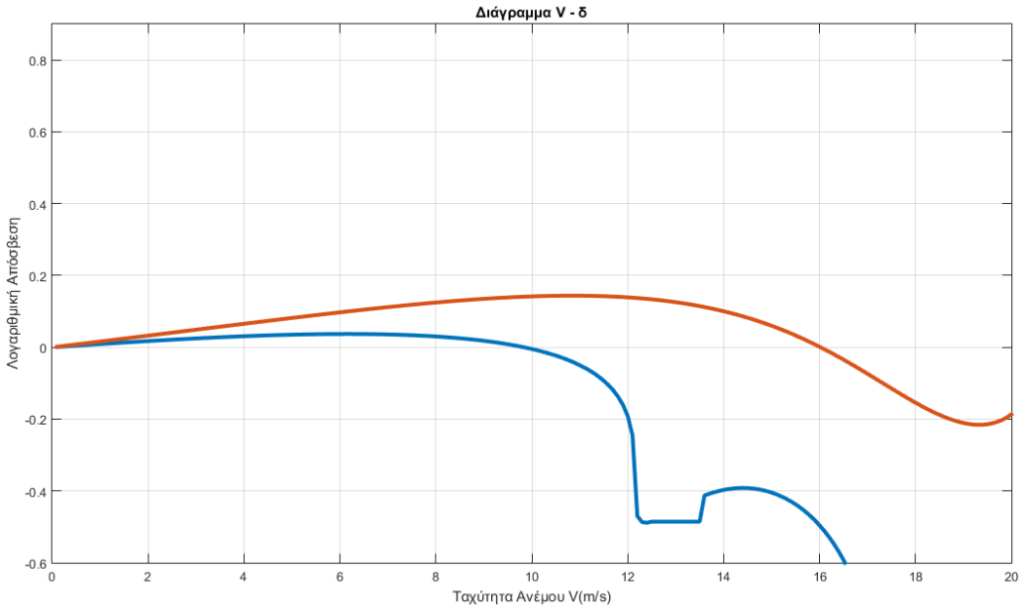
*Διάγραμμα 3.2 Παράγωγοι πτερυγισμοῦ Ai**

3.2. Συχνότητες - Ἀποσβέσεις - Φάσεις - Ῥυθμοὶ Σύγκλισης



Διάγραμμα 3.3

Γιὰ ταχύτητες ἀνέμου μεταξὺ 12 καὶ 13.5 περίπου *m/s*, οἱ τιμὲς τῶν συχνοτήτων τῆς στρεπτικῆς ταλάντωσης στὸ διάγραμμα 3.3 δὲν ἔχουν οὔτε φυσικὴ οὔτε μαθηματικὴ σημασία: δὲν εἶναι κὰν λύσεις τῆς ἐξίσωσης κίνησης (1.3.16). Σὲ αὐτὸ τὸ διάστημα ταχυτήτων ἡ μέθοδος ΒΠΒ δίνει μιγαδικὲς τιμές, πράγμα ἀπαράδεκτο, καθῶς ὀφείλουν νὰ εἶναι πραγματικές, διότι ἔχει γίνει ἤδη ὁ διαχωρισμὸς τῆς συνάρτησης τοῦ *Theodorsen* σὲ πραγματικὸ καὶ φανταστικὸ μέρος (βλ. σχέσεις (1.2.24), (1.2.25) καὶ ἰσοδύναμα τὴν (2.1.10)). Δηλαδὴ, ἡ συχνότητες $\boldsymbol{f}$ δὲν εἶναι οἱ μιγαδικὲς ἰδιοτιμὲς τῆς ἐξίσωσης (1.3.16). Εἶναι τὸ φανταστικὸ μέρος τῶν ἰδιοτιμῶν. Αὐτὸ θὰ γίνει ἀκόμα πιὸ κατανοητό, στὸ διάγραμμα 3.6.



Διάγραμμα 3.4

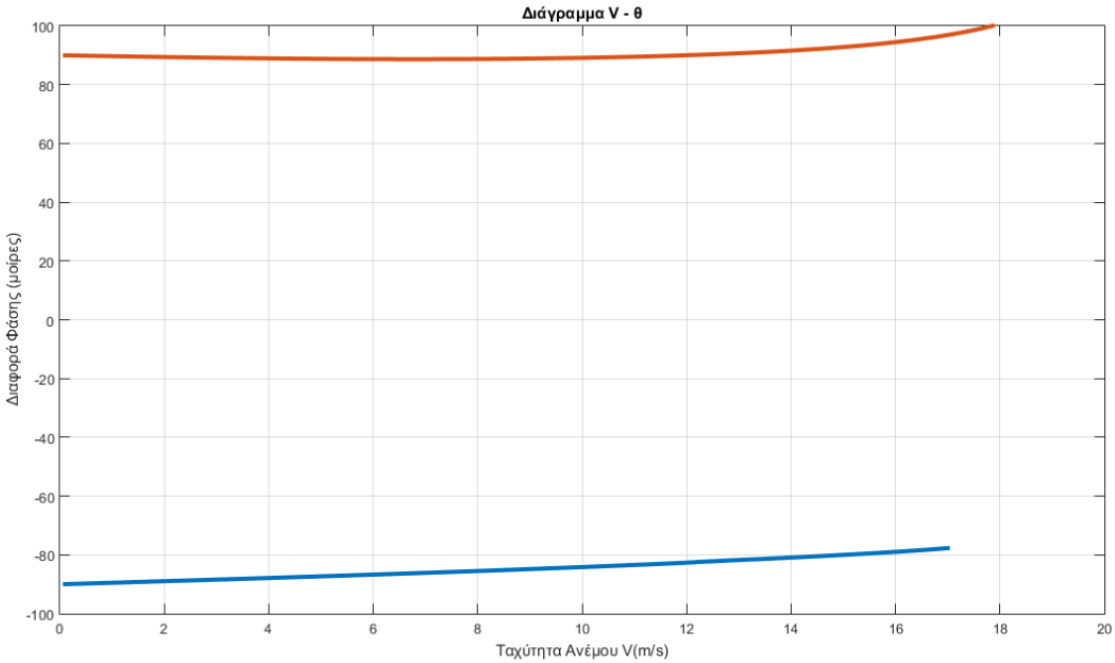
Στὸ διάγραμμα 3.4 βλέπουμε ὅτι ἡ ἀπόσβεση στὸν στρεπτικὸ βαθμὸ ἐλευθερίας, ἀρχίζει νὰ λαμβάνει ἀρνητικὲς τιμὲς γιὰ ταχύτητες ἀνέμου $V \geq 10\ m/s$. Ἑπομένως, ἡ **κρίσιμη ταχύτητα πτερυγισμοῦ** γιὰ τὸ συγκεκριμένο ἀριθμητικὸ παράδειγμα, εἶναι $V_{cr} = 10\ m/s$. Ἡ δὲ ἀπόσβεση στὸν καμπτικὸ βαθμὸ ἐλευθερίας, ἀρχίζει νὰ λαμβάνει ἀρνητικὲς τιμὲς γιὰ ταχύτητες ἀνέμου $V \geq 16\ m/s$. Προφανῶς καὶ αὐτὴ συνεπάγεται πτερυγισμό, ἀλλὰ κρίσιμη εἶναι τοῦ στρεπτικοῦ γιατὶ προηγεῖται. Πιὸ ἀναλυτικά, σὲ κάθε διάστημα ταχυτήτων, ἔχουμε τὶς παρακάτω κινήσεις:

Στάδιο	Στρεπτικὴ Ταλάντωση	Καμπτικὴ Ταλάντωση
$0 < V \leq 10$	Ἐξαναγκασμένη, φθίνουσα	Ἐξαναγκασμένη, φθίνουσα
$10 < V \leq 12$	Ἐξαναγκασμένη, **πτερυγισμὸς**	Ἐξαναγκασμένη, φθίνουσα
$12 < V \leq 13.5$	Ἐλεύθερη*1, φθίνουσα	Ἐξαναγκασμένη, φθίνουσα
$13.5 < V \leq 16$	Ἐξαναγκασμένη, **πτερυγισμὸς**	Ἐξαναγκασμένη, φθίνουσα
$V < 16$	Ἐλεύθερη*2, φθίνουσα	Ἐξαναγκασμένη, **πτερυγισμὸς**

*1 : λόγῳ ἀρχικῶν συνθηκῶν ἀπὸ τὸ πέρας τοῦ 2ου σταδίου $(V = 12)$

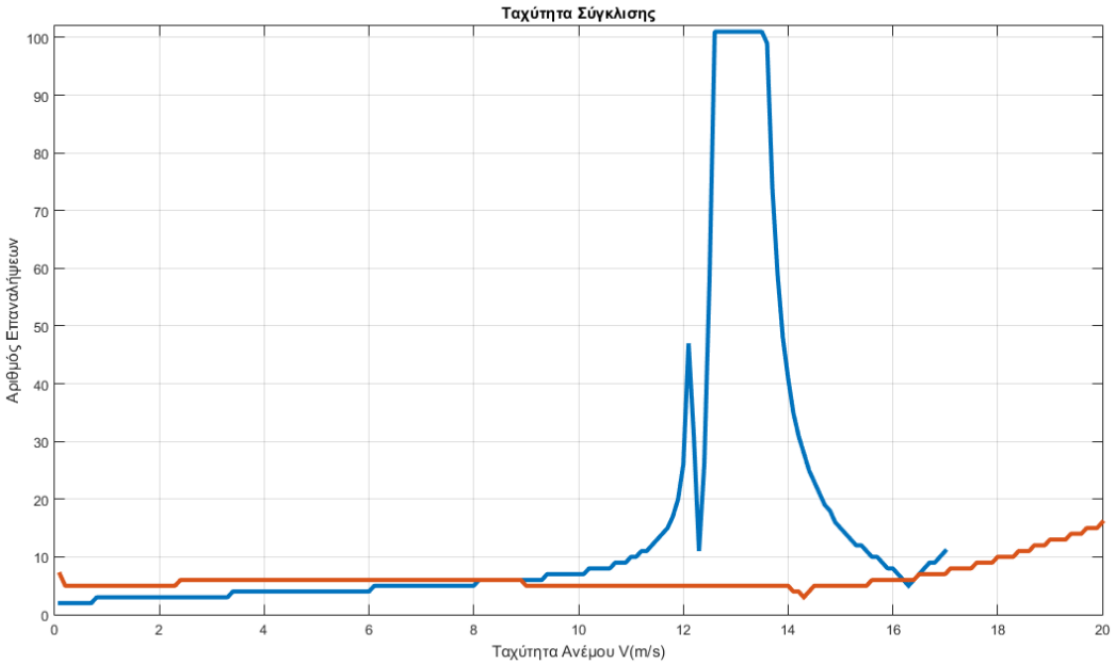
*2 : λόγῳ ἀρχικῶν συνθηκῶν ἀπὸ τὸ πέρας τοῦ 4ου σταδίου $(V = 16)$

Ἀκολουθεῖ τὸ διάγραμμα τῆς διαφορᾶς φάσης, ἡ ὁποία **δὲν** εἶναι σταθερή:



Διάγραμμα 3.5

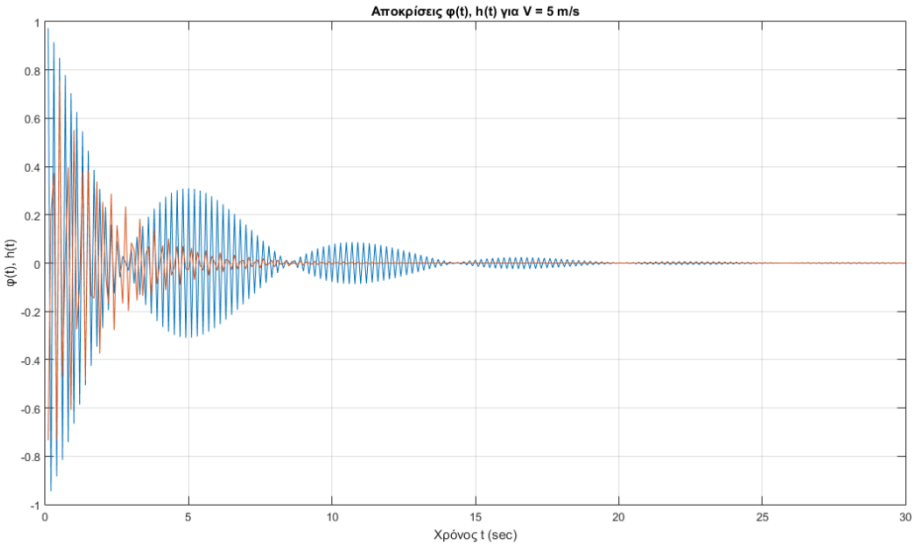
Ἴσως τὸ πλέον διαφωτιστικὸ διάγραμμα, νὰ εἶναι αὐτὸ τοῦ ρυθμοῦ σύγκλισης (διάγραμμα 3.4). Δοκιμάστηκαν πολλὲς τιμὲς περιορισμοῦ - τερματισμοῦ ἐπαναλήψεων. Γιὰ ιδιαίτερα ὑψηλὲς τιμές, τῆς τάξης τῶν χιλιάδων, οἱ λύσεις στὸ διάστημα $12 < V \leq 13.5$ δὲν συνέκλιναν. Ἀπεναντίας, πραγματοποιοῦσαν ἀτέρμονες βρόχους, καὶ μάλιστα στὸν μιγαδικὸ χῶρο, ποὺ ὅπως προαναφέραμε, δὲν μπορεῖ νὰ εἶναι ἀποδεκτό. Ὁδηγούμαστε ἔτσι, στὸ συμπέρασμα τῆς ἀνυπαρξίας λύσεων σὲ αὐτὸ τὸ διάστημα ταχυτήτων. Βεβαίως, αὐτὸ δὲν σημαίνει ἀκινησία. Ἁπλῶς ἔχουμε ἐλεύθερη ταλάντωση, μὲ ἀρχικὲς συνθήκες.



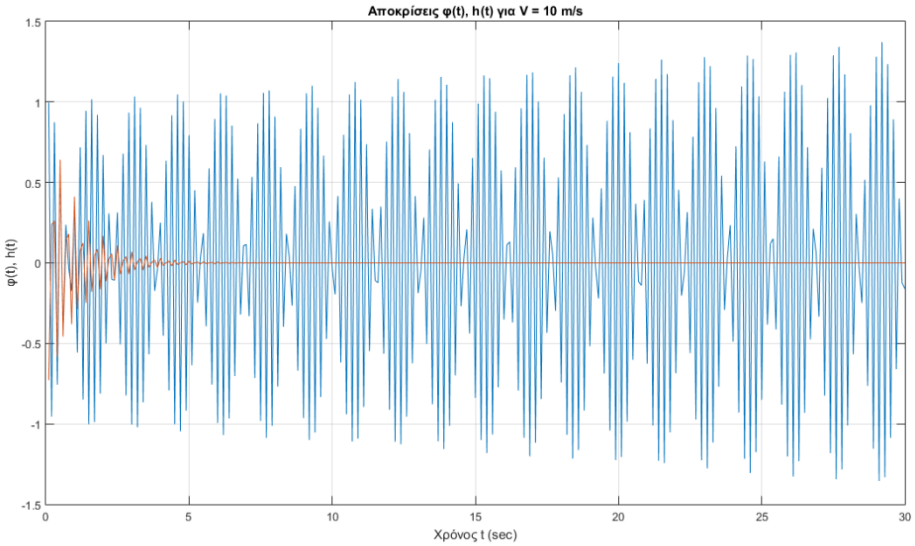
Διάγραμμα 3.6

Παρατηρούμε ἐπίσης, ὅτι ἀκόμα καὶ στὴ βραδύτερη σύγκλιση, γιὰ V = 12, ἀπαιτοῦνται λιγότερες ἀπὸ πενήντα ἐπαναλήψεις. Στὸ μεγαλύτερο διάστημα, ἀπαιτοῦνται κατὰ μέγιστο ἑπτὰ ἐπαναλήψεις. Πρόκειται, λοιπόν, γιὰ μία **ἐξαιρετικὰ ταχεῖα μέθοδο**: τῆς τάξεως τῶν μονάδων ἐπαναλήψεων.

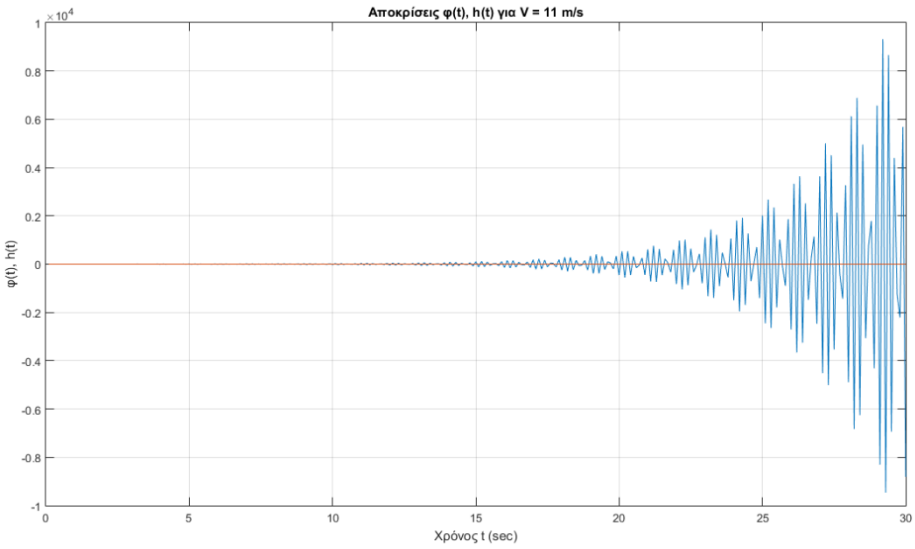
3.3. ᾽Αποκρίσεις



Διάγραμμα 3.7



Διάγραμμα 3.8



Διάγραμμα 3.9

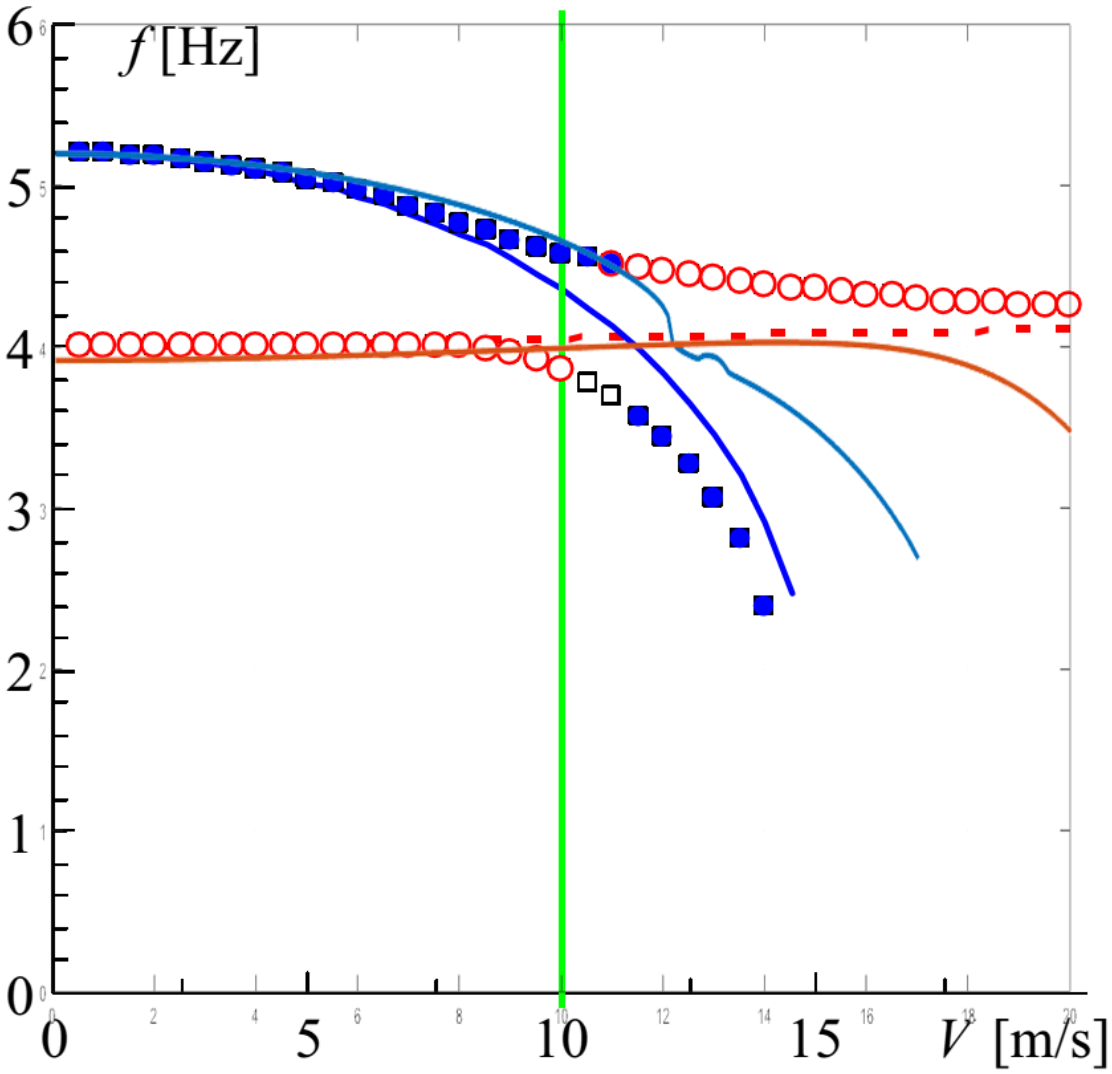
Παρατηροῦνται τὰ ἀναμενόμενα:

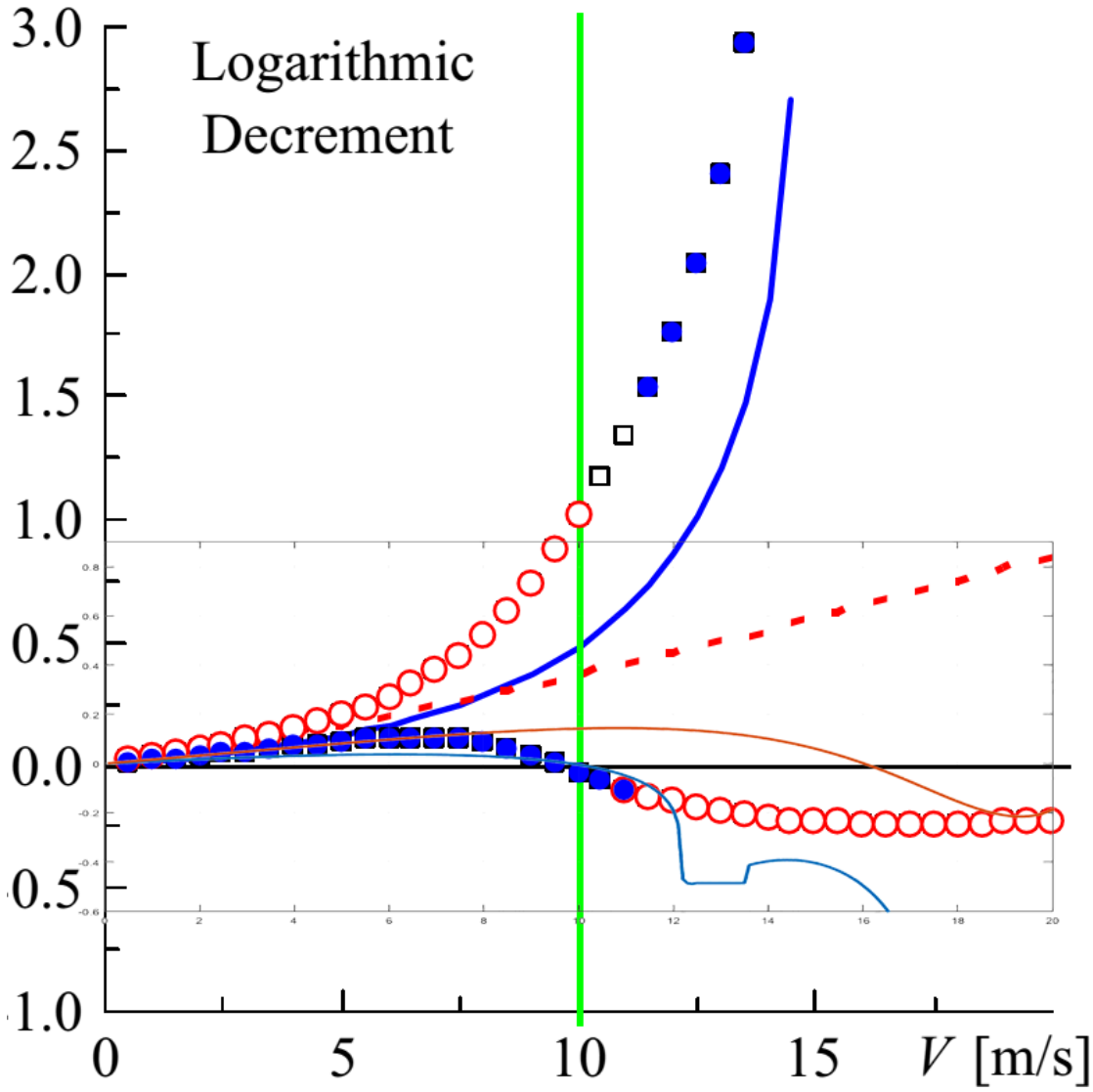
- Γιὰ $V < 10\ m/s$ ἀμφότερες οἱ ταλαντώσεις εἶναι φθίνουσες
- Γιὰ $V \simeq 10\ m/s$ μόλις ποὺ ξεκινὰ ὁ στρεπτικὸς πτερυγισμὸς
- Γιὰ $V > 10\ m/s$ τὸ φαινόμενο τοῦ πτερυγισμοῦ ἐντείνεται ἰδιαίτερα

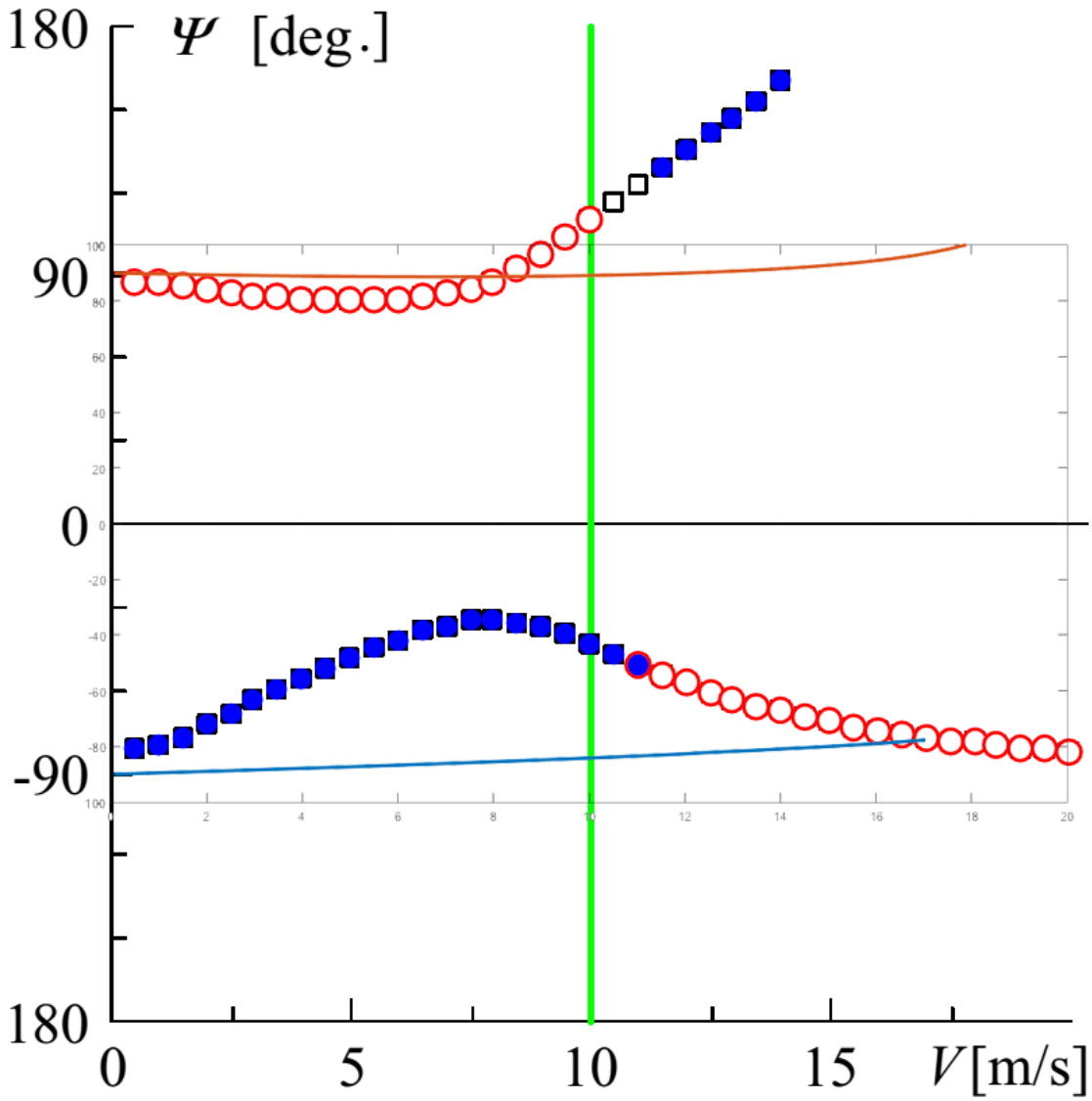
Παρουσιάζεται ἐπίσης καὶ τὸ φαινόμενο τοῦ διακροτήματος.

3.4. Συγκρίσεις μὲ ἄρθρα

Τὰ διαγράμματα τοῦ γράφοντος, ὑπερτίθενται τῶν διαγραμμάτων τοῦ ἄρθρου «*Flutter and its application - Flutter mode and ship navigation*» [2.10], ὡς μέτρο σύγκρισης. Παρατηροῦνται σημαντικὲς ἀποκλίσεις, τόσο ποσοτικῆς φύσεως, ἀλλὰ καὶ ποιοτικῆς:




Logarithmic
Decrement
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
0.5
1.0
0
5
10
15
V [m/s]


180
Ψ [deg.]
90
0
-90
180
0
5
10
15
V [m/s]

4. ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ: ΚΩΔΙΚΑΣ ΣΕ ΓΛΩΣΣΑ *MATLAB®*


```
clear, clc

% Εισαγωγή Δεδομένων

m         = 2.42;        % Μάζα ανά μονάδα μήκους          (kg/m)
I         = 0.0181;      % Στροφική Μάζα ανά μονάδα μήκους (kgm/m)
B         = 0.3;         % Πλάτος Καταστρώματος             (m)
rho       = 1.2922;      % Πυκνότητα του Αέρα               (kg/m^3)

fEta0     = 4.0;         % fη (Hz = rad/s)
fPhi0     = 5.2;         % fφ

omegaEta0 = 2*pi*fEta0;  % ωη (1/s)
omegaPhi0 = 2*pi*fPhi0;  % ωφ

zetaEta0  = 0;           % ζη (αδιάστατο)
zetaPhi0  = 0;           % ζφ

Error     = 10^(-8);     % Μέγιστο ανεκτό σφάλμα
VmaxTB    = 17.0;        % Μέγιστη ταχύτητα ανέμου  (m/s)
VmaxHB    = 20.0;
Vstep     = 0.1;         % Βήμα ταχύτητας           (m/s)

nTBmax    = 100;         % Μέγιστος αριθμός επαναλήψεων στον Στρεπτικό Κλάδο
nHBmax    = 20;          % Μέγιστος αριθμός επαναλήψεων στον Καμπτικό Κλάδο

% Στρεπτικός Κλάδος - Torsional Branch
% ____________________________________________________________________________________

% Προδέσμευση μνήμης

VTB           = Vstep:Vstep:VmaxTB;             % Ταχύτητα ανέμου          (m/s)
omegaPhiTB    = zeros(1,length(VTB));           % ωφ*                      (1/s)
omegaPhiTBNew = zeros(1,length(VTB));
nTB           = zeros(1,length(VTB));           % Αριθμός επαναλήψεων      (αδιάστατος)
omegaEtaTB    = zeros(1,length(VTB));           % ωη*                      (1/s)
zetaEtaTB     = zeros(1,length(VTB));           % ζη*                      (αδιάστατο)
Oros1TB       = pi*rho*(B/2)^4/I;               % Όρος 1                   (αδιάστατος)
Oros2TB       = zeros(1,length(VTB));           % Όρος 2                   (αδιάστατος)
thetaTB       = zeros(1,length(VTB));           % θ: Διαφορά Φάσης         (rad)
theta1TB      = zeros(1,length(VTB));           % θ1
theta2TB      = zeros(1,length(VTB));           % θ2
deltaPhiTB    = zeros(1,length(VTB));           % δφ*: Λογαριθμική Απόσβεση (αδιάστατη)
deltaPhiTBNew = zeros(1,length(VTB));
k             = zeros(1,10*VmaxTB);             % Μειωμένη συχνότητα       (αδιάστατη)
Hankel0       = complex(zeros(1,length(VTB)));  % Μιγαδική Συνάρτηση Hankel 2ου είδους 0ης τάξης
Hankel1       = complex(zeros(1,length(VTB)));  % Μιγαδική Συνάρτηση Hankel 2ου είδους 1ης τάξης
TheodorsenC   = complex(zeros(1,length(VTB)));  % Μιγαδική Συνάρτηση Theodorsen C
TheodorsenF   = zeros(1,length(VTB));           % Πραγματικό Μέρος C
TheodorsenG   = zeros(1,length(VTB));           % Φανταστικό Μέρος C

% Αρχικοποίηση τιμών

omegaPhiTB(1)    = omegaPhi0 + 2*Error;
omegaPhiTBNew(1) = omegaPhi0;
deltaPhiTBNew(1) = deltaPhiTB(1) + 2*Error;

% Βρόχος ταχυτήτων

for i = 1 : length(VTB)

    % Βρόχος συχνοτήτων
```

```
    while abs(omegaPhiTBNew(i) - omegaPhiTB(i)) > Error && ...
          abs(deltaPhiTBNew(i) - deltaPhiTB(i)) > Error

        omegaPhiTB(i) = omegaPhiTBNew(i); % ωφ*
        deltaPhiTB(i) = deltaPhiTBNew(i); % δφ*
        k(i) = B*omegaPhiTB(i)/VTB(i);    % Μειωμένη συχνότητα
        nTB(i) = nTB(i) + 1;              % Αριθμός επαναλήψεων

        if nTB(i) > nTBmax
            break
        end

        % Μιγαδικές Συναρτήσεις Bessel-Hankel - Theodorsen

        Hankel0(i) = besselh(0,2,k(i));
        Hankel1(i) = besselh(1,2,k(i));

        TheodorsenC(i) = Hankel1(i)./(Hankel1(i) + 1i*Hankel0(i));

        TheodorsenF(i) = real(TheodorsenC(i));
        TheodorsenG(i) = imag(TheodorsenC(i));

        % ωη* (1/s)

        omegaEtaTB(i) = sqrt(omegaEta0^2 - rho*(B/2)^2/m*omegaPhiTB(i)^2*H4(k(i),TheodorsenG(i)));

        % ζη* (αδιάστατο)

        zetaEtaTB(i) = ...
       (2*zetaEta0*omegaEta0 -
rho*(B/2)^2/m*omegaPhiTB(i)*H1(k(i),TheodorsenF(i)))/2/omegaEtaTB(i);

        % Όρος 2 (αδιάστατος)

        Oros2TB(i) = ...
        rho*(B/2)^2/m*omegaPhiTB(i)^2/omegaEtaTB(i)^2/ ...
        sqrt((1 - omegaPhiTB(i)^2/omegaEtaTB(i)^2)^2 +
4*zetaEtaTB(i)^2*omegaPhiTB(i)^2/omegaEtaTB(i)^2);

        % Διαφορά Φάσης θ (rad) μεταξύ Καμπτικής - Στρεπτικής ταλάντωσης

        thetaTB(i) = - pi/2 - atan(2*zetaEtaTB(i)*omegaEtaTB(i)*omegaPhi0/(omegaEtaTB(i)^2 -
omegaPhi0^2));

        if H2(k(i),TheodorsenF(i),TheodorsenG(i)) >= 0
           theta1TB(i) = thetaTB(i) - pi/2;
        else
           theta1TB(i) = thetaTB(i) + pi/2;
        end

        if H3(k(i),TheodorsenF(i),TheodorsenG(i)) >= 0
           theta2TB(i) = thetaTB(i);
        else
           theta2TB(i) = thetaTB(i) + pi/2;
        end

        % Νέο ωφ*

        omegaPhiTBNew(i) = ...
        sqrt((omegaPhi0^2 - Oros1TB*omegaPhiTB(i)^2*A3(k(i),TheodorsenF(i),TheodorsenG(i)) - ...
        Oros1TB*Oros2TB(i)*omegaPhiTB(i)^2* ...
       (A1(k(i),TheodorsenF(i))*abs(H2(k(i),TheodorsenF(i),TheodorsenG(i)))*sin(theta1TB(i)) + ...
        A1(k(i),TheodorsenF(i))*abs(H3(k(i),TheodorsenF(i),TheodorsenG(i)))*sin(theta2TB(i)) + ...
        A4(k(i),TheodorsenG(i))*abs(H2(k(i),TheodorsenF(i),TheodorsenG(i)))*cos(theta2TB(i)) + ...
        A4(k(i),TheodorsenG(i))*abs(H3(k(i),TheodorsenF(i),TheodorsenG(i)))*cos(theta2TB(i)))));

        % Νέο δφ*

        deltaPhiTB(i) = zetaPhi0 + Oros1TB*A2(k(i),TheodorsenF(i),TheodorsenG(i)) - ...
        Oros1TB*Oros2TB(i)* ...
       (A1(k(i),TheodorsenF(i))*abs(H2(k(i),TheodorsenF(i),TheodorsenG(i)))*cos(theta1TB(i)) + ...
        A1(k(i),TheodorsenF(i))*abs(H3(k(i),TheodorsenF(i),TheodorsenG(i)))*cos(theta2TB(i)) - ...
        A4(k(i),TheodorsenG(i))*abs(H2(k(i),TheodorsenF(i),TheodorsenG(i)))*sin(theta2TB(i)) - ...
        A4(k(i),TheodorsenG(i))*abs(H3(k(i),TheodorsenF(i),TheodorsenG(i)))*sin(theta2TB(i)));

    end % Τέλος βρόχου συχνοτήτων

    omegaPhiTBNew(i+1) = omegaPhiTB(i);
    deltaPhiTBNew(i+1) = deltaPhiTB(i);
```

```
end % Τέλος βρόχου ταχυτήτων

fPhi = omegaPhiTB./2/pi;

% Καμπτικός Κλάδος - Heaving Branch
% ____________________________________________________________________________________________

% Προδέσμευση μνήμης

VHB           = Vstep:Vstep:VmaxHB;             % Ταχύτητα ανέμου          (m/s)
omegaEtaHB    = zeros(1,length(VHB));           % ωη*                      (1/s)
omegaEtaHBNew = zeros(1,length(VHB));
nHB           = zeros(1,length(VHB));           % Αριθμός επαναλήψεων      (αδιάστατος)
omegaPhiHB    = zeros(1,length(VHB));           % ωφ*                      (1/s)
zetaPhiHB     = zeros(1,length(VHB));           % ζφ*                      (αδιάστατο)
Oros1HB       = pi*rho*(B/2)^2/m;               % Όρος 1                   (αδιάστατος)
Oros2HB       = zeros(1,length(VHB));           % Όρος 2                   (αδιάστατος)
thetaHB       = zeros(1,length(VHB));           % θ: Διαφορά Φάσης         (rad)
theta1HB      = zeros(1,length(VHB));           % θ1
theta2HB      = zeros(1,length(VHB));           % θ2
deltaEtaHB    = zeros(1,length(VHB));           % δφ*: Λογαριθμική Απόσβεση (αδιάστατη)
deltaEtaHBNew = zeros(1,length(VHB));
k             = zeros(1,10*VmaxHB);             % Μειωμένη συχνότητα       (αδιάστατη)
Hankel0       = complex(zeros(1,length(VHB)));  % Μιγαδική Συνάρτηση Hankel 2ου είδους 0ης τάξης
Hankel1       = complex(zeros(1,length(VHB)));  % Μιγαδική Συνάρτηση Hankel 2ου είδους 1ης τάξης
TheodorsenC   = complex(zeros(1,length(VHB)));  % Μιγαδική Συνάρτηση Theodorsen C
TheodorsenF   = zeros(1,length(VHB));           % Πραγματικό Μέρος C
TheodorsenG   = zeros(1,length(VHB));           % Φανταστικό Μέρος C

% Αρχικοποίηση τιμών

omegaEtaHB(1)    = omegaEta0 + 2*Error;
omegaEtaHBNew(1) = omegaEta0;
deltaEtaHBNew(1) = deltaEtaHB(1) + 2*Error;

% Βρόχος ταχυτήτων

for i = 1 : length(VHB)

    % Βρόχος συχνοτήτων

    while abs(omegaEtaHBNew(i) - omegaEtaHB(i)) > Error && ...
          abs(deltaEtaHBNew(i) - deltaEtaHB(i)) > Error        % Συνθήκη τερματισμού

        omegaEtaHB(i) = omegaEtaHBNew(i); % ωη*
        deltaEtaHB(i) = deltaEtaHBNew(i); % δη*
        k(i) = B*omegaEtaHB(i)/VHB(i);      % Μειωμένη συχνότητα
        nHB(i) = nHB(i) + 1;              % Αριθμός επαναλήψεων

        if nHB(i) > nHBmax
            break
        end

        % Μιγαδικές Συναρτήσεις Bessel-Hankel - Theodorsen

        Hankel0(i) = besselh(0,2,k(i));
        Hankel1(i) = besselh(1,2,k(i));

        TheodorsenC(i) = Hankel1(i)./(Hankel1(i) + 1i*Hankel0(i));

        TheodorsenF(i) = real(TheodorsenC(i));
        TheodorsenG(i) = imag(TheodorsenC(i));

        % ωφ* (1/s)

        omegaPhiHB(i) = ...
        sqrt(omegaPhi0^2 - rho*(B/2)^4/I*omegaEtaHB(i)^2*A3(k(i),TheodorsenF(i),TheodorsenG(i)));

        % ζφ* (αδιάστατο)

        zetaPhiHB(i) = ...
       (2*zetaPhi0*omegaPhi0 - rho*(B/2)^4/I*omegaEtaHB(i)*A2(k(i),TheodorsenF(i),TheodorsenG(i)))
...
       /2/omegaPhiHB(i);

        % Όρος 2 (αδιάστατος)

        Oros2HB(i) = ...
        rho*(B/2)^4/I*omegaEtaHB(i)^2/omegaPhiHB(i)^2 ...
       /sqrt((1 - omegaEtaHB(i)^2/omegaPhiHB(i)^2)^2 +
4*zetaPhiHB(i)^2*omegaEtaHB(i)^2/omegaPhiHB(i)^2);
```

```
        % Διαφορά Φάσης θ (rad) μεταξύ Καμπτικής - Στρεπτικής ταλάντωσης

        thetaHB(i) = pi/2 + atan(2*zetaPhiHB(i)*omegaPhiHB(i)*omegaEta0/(omegaPhiHB(i)^2 -
omegaEta0^2));

        if A1(k(i),TheodorsenF(i)) >= 0
           theta1HB(i) = thetaHB(i) - pi/2;
        else
           theta1HB(i) = thetaHB(i) + pi/2;
        end

        if A4(k(i),TheodorsenG(i)) >= 0
           theta2HB(i) = thetaHB(i);
        else
           theta2HB(i) = thetaHB(i) + pi/2;
        end

        % Νέο ωη*

        omegaEtaHBNew(i) = ...
        sqrt((omegaEta0^2 - Oros1HB*omegaEtaHB(i)^2*H4(k(i),TheodorsenG(i)) - ...
        Oros1HB*Oros2HB(i)*omegaEtaHB(i)^2* ...
       (H2(k(i),TheodorsenF(i),TheodorsenG(i))*abs(A1(k(i),TheodorsenF(i)))*sin(theta1HB(i)) + ...
        H2(k(i),TheodorsenF(i),TheodorsenG(i))*abs(A4(k(i),TheodorsenG(i)))*sin(theta2HB(i)) + ...
        H3(k(i),TheodorsenF(i),TheodorsenG(i))*abs(A1(k(i),TheodorsenF(i)))*cos(theta2HB(i)) + ...
        H3(k(i),TheodorsenF(i),TheodorsenG(i))*abs(A4(k(i),TheodorsenG(i)))*cos(theta2HB(i)))));

        % Νέο δη*

        deltaEtaHB(i) = zetaEta0 - Oros1HB*H1(k(i),TheodorsenF(i)) - ...
        Oros1HB*Oros2HB(i)* ...
       (H2(k(i),TheodorsenF(i),TheodorsenG(i))*abs(A1(k(i),TheodorsenF(i)))*cos(theta1HB(i)) + ...
        H2(k(i),TheodorsenF(i),TheodorsenG(i))*abs(A4(k(i),TheodorsenG(i)))*cos(theta2HB(i)) - ...
        H3(k(i),TheodorsenF(i),TheodorsenG(i))*abs(A1(k(i),TheodorsenF(i)))*sin(theta2HB(i)) - ...
        H3(k(i),TheodorsenF(i),TheodorsenG(i))*abs(A4(k(i),TheodorsenG(i)))*sin(theta2HB(i)));

    end % Τέλος βρόχου συχνοτήτων

    omegaEtaHBNew(i+1) = omegaEtaHB(i);
    deltaEtaHBNew(i+1) = deltaEtaHB(i);

end % Τέλος βρόχου ταχυτήτων

fEta = omegaEtaHB./2/pi;
```

Υπορουτίνες

```
function y = H1(k,F)

y = -(2*pi/k)*F;

function y = H2(k,F,G)

y = (2*pi/k)*(-(1/2) + F/2 - G/k);

function y = H3(k,F,G)

y = -(2*pi/k)*(F/k + G/2);

function y = H4(k,G)

y = (2*pi)*(1/2 + G/k) - 2;

function y = A1(k,F)

y = (pi/k)*F;

function y = A2(k,F,G)

y = -(pi/k)*(-(1/2) + F/2 - G/k);

function y = A3(k,F,G)

y = (pi/k)*(F/k + G/2);

function y = A4(k,G)

y = -(pi/k)*G;
```

5. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

α Μιχάλτσος Θ. Γεώργιος, Προβλήματα Δυναμικῆς τῶν Σιδηρῶν Γεφυρῶν, Ἐκδόσεις Συμεῶν, Ἀθήνα, 2005

2 Καταπονήσεις - Φορτίσεις

2.3 Κινητὰ φορτία

2.3.2 Ἀνεμοπίεση

7 Ἀεροελαστικότητα

7.1 Γενικὰ

β Theodorsen Theodore, General Theory of Aerodynamic Instability and the Mechanism of Flutter, Report No. 496, 1935

γ Ἰωακειμίδης Ἰ. Νικόλαος, Ἐφαρμοσμένα Μαθηματικὰ ΙΙ γιὰ Πολιτικοὺς Μηχανικούς, Τεῦχος 1, Ἐκδόσεις Γκότσης, Πάτρα, 2008

Α14 Ἡ Μέθοδος τῶν Δυναμοσειρῶν

Α14.4 Ἐφαρμογὴ στὴ Συμμετρικὴ Παραμόρφωση Ἐλαστικοῦ Κυλίνδρου

Α15 Πολυώνυμα Legendre καὶ Συναρτήσεις Bessel

Α15.2 Συναρτήσεις Bessel

δ Κατσικαδέλης Θ. Ἰωάννης, Δυναμικὴ Ἀνάλυση τῶν Κατασκευῶν, Θεωρία καὶ Ἐφαρμογές, Ἐκδόσεις Συμμετρία, Ἀθήνα, 2012

12 Ἐλεύθερες Ταλαντώσεις Πολυβάθμιων Συστημάτων

12.10 Ἐλεύθερες Ταλαντώσεις μὲ Ἀπόσβεση

1.1 Airy G., On the use of the suspension bridge with stiffened roadway for railway and other bridges of great span, Vol. 26, 1867

1.2 Dicker D., Aerodynamic stability of H sections, Journal of the Engineering, Mechanics Division, A.S.C.E., Vol. 92, No EM2, Proc. Paper 4764, 1966

1.3 Frerris L. L., Wind energy - Conversion Systems, Prentice Hill, New York, 1990

1.4 Petersen C., Abgespante Maste und Schornsteine - Statik und Dynamik, Bauingenieur - Praxis, Heft 76, 1970

1.5 Schlaich J., Beitrag zur Frage der Wirkung von Windstossen auf Bauwerke, Bauingenieur 41, 1966

1.6 Donaldson B. K., Analysis of Aircraft Structures - An Introduction, Mc Graw-Hill, N. York, 1993

1.7 Steven L. Brunton, Clarence W. Rowley, Empirical State-Space Representations for Theodorsen's Lift Model, Princeton University, Princeton, NJ 08544, 2012

1.8 Kurniawan R., Numerical Study of Flutter of a Two-Dimensional Aeroelastic System, Proceedings of the World Congress on Engineering, London, 2013

1.9 Spigel M. R., Liu J., Μαθηματικὸ Ἐγχειρίδιο, μετάφραση Μπαγιάτη Κ. Β., Ἐκδόσεις Τζιόλα, Θεσσαλονίκη, 2002

1.10 Walker William P., Unsteady Aerodynamics of Deformable Thin Airfoils, Virginia Polytechnic Institute and State University, 2009

1.11 Scanlan R. H. and Tomko J. J., Airfoil and Bridge Deck Flutter Derivatives, Jnl. EMD, ASCE Vol. 97, No. EM6, pp. 1717-1737, 1971

2.1 Aerodynamic damping of prisms, Matsumoto, 1996

2.2 Torsional flutter of bluff bodies, Matsumoto, 1997

2.3 Aerodynamic Coupling Effects on Flutter and Buffeting of Bridges, Xinzhong Chen, Masaru Matsumoto, and Ahsan Kareem, Member, ASCE, 2000

2.4 Frequency characteristics in various flutter instabilities of bridge girders, Masaru Matsumotoa, Yoshinori Taniwaki, Rikuma Shijo, Masaru Matsumotoa, Hiromichi Shirato, Tomomi Yagi, Rikuma Shijo, Akitoshi Eguchi, Hitoshi Tamaki, 2002

2.5 Effects of aerodynamic interferences between heaving and torsional vibration of bridge decks, the case of Tacoma Narrows Bridge, Masaru Matsumoto, Hiromichi Shirato, Tomomi Yagi,Rikuma Shijo, Akitoshi Eguchi, Hitoshi Tamaki, 2003

2.6 Torsional flutter and branch characteristics for 2-D rectangular cylinders, M. Matsumoto, K. Mizuno, K. Okubo, Y. Ito, 2005

2.7 Flutter characteristics of H-shaped cylinders with various side-ratios and comparisons with characteristics of rectangular cylinders, Masaru Matsumoto, Hiromichi Shirato, Keisuke Mizuno,Rikuma Shijo, Tetsuya Hikida, 2008

2.8 The complex branch characteristics of coupled flutter, Masaru Matsumoto, Kazumasa Okubo, Yasuaki Ito, Hisato Matsumiya, Ginam Kim, 2008

2.9 New consideration on flutter properties based on step-by-step analysis, Matsumoto Masaru, Matsumiya Hisato, Fujiwara Shinya, Ito Yasuaki, 2010

2.10 Flutter and its application - Flutter mode and ship navigation, Matsumoto, 2013

2.11 Coherence characteristics of fluctuating lift forces for rectangular shape with various fairing decks, Yasuaki It, Hiromichi Shirato, Masaru Matsumoto, 2014