ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η εργασία αυτή αποσκοπεί στην μελέτη των διαδικασιών επίλυσης προβλημάτων λήψης απόφασης. Σκοπός είναι, καθένας που κατέχει τις βασικές γνώσεις στα μαθηματικά να μπορεί να χρησιμοποιήσει την εργασία ως εργαλείο εισαγωγής στην επιστήμη της επιχειρησιακής έρευνας. Για το λόγο αυτό έχει προσεκτικά επιλεγεί το υλικό που θα μας οδηγήσει βήμα-βήμα στην εκμάθηση των σημαντικότερων κανόνων που διέπουν την επιστήμη αυτή. Με τη χρήση παραδειγμάτων και ιστορικών αναδρομών παρουσιάζεται ολοκληρωμένα και σφαιρικά η ανάπτυξη αυτής της σχετικά νέας επιστήμης που δημιουργήθηκε από την ανάγκη του ανθρώπου να είναι όσο το δυνατόν αποτελεσματικότερος και ακριβής σε θέματα που κυρίως αφορούν επιχειρηματικές κινήσεις. Η εργασία αποτελείται από έξι βασικά κεφάλαια, το καθένα απ'τα αποία παρουσιάζει ένα συγκεκριμένο περιβάλλον ανταγωνιστικότητας μέσα στο οποίο ο υπεύθυνος λήψης της απόφασης καλείται να αξιοποιήσει όλους τους διαθέσιμους πόρους για να φτάσει στο επιθυμητό για εκείνον αποτέλεσμα. Γνωρίζουμε αρχικά την έννοια της επιχειρησιακής έρευνας και ερχόμαστε σε επαφή με τις θεμελιώδεις αρχές που την συγκροτούν. Ύστερα από προσεκτική μελέτη των παραπάνω εργαλείων βρισκόμαστε σε θέση να μελετήσουμε τα παραδείγματα-ασκήσεις που ίσως κληθούμε να αντιμετοπίσουμε μελλοντικά. Τα εργαλεία αυτά σε συνδυασμό με τις αρχές του γραμμικού προγραμματισμού και τον έλεγχο αποφάσεων μας δίνουν μια γερή βάση να ανταποκριθούμε σε προβλήματα λήψης απόφασης σε μια κατάσταση όπου δεν υπάρχει ανταγωνισμός με αντίπαλα συμφέροντα. Το ίδιο ισχύει και στον πιο πολύπλοκο δυναμικό προγραμματισμό. Αντίθετα, στη θεωρία παιγνίων η ανταγωνιστικότητα παίζει κυρίαρχο ρόλο καθως η απόφαση που παίρνεις επηρεάζει και επηρεάζεται από τον "αντίπαλο" και έτσι συναντάμε καινούργιους όρους και κανόνες που μας βοηθούν να ανταπεξέλθουμε σε αυτήν την πιο σύνθετη μορφή προβλημάτων.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Κεφάλαιο 5 : Δυναμικός προγραμματισμός

Κεφάλαιο 6 : Θεωρία παιγνίων

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 : Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή έρευνα

1.1 Ιστορική αναδρομή

Επιχειρησιακή έρευνα είναι η επιστήμη που δημιουργήθηκε από την ανάγκη των ανθρώπων να επιλύουν προβλήματα που αφορούν στην ανάλυση αποφάσεων. Ο τομέας της επιχειρησιακής έρευνας (Ε.Ε) πρωτοεμφανίστηκε την περίοδο του Δεύτερου Παγκοσμίου Πολέμου καθώς οι στρατιωτικές μονάδες, αρχικά της Βρετανίας, χρειάστηκαν αυτό που λέμε σήμερα Ε.Ε για να λάβουν σοβαρές αποφάσεις όσον αφορά τη λειτουργία τους. Πιο συγκεκριμένα οι δυνάμεις του πεζικού χρησιμοποίησαν την Ε.Ε για την καλύτερη διεξαγωγή της άμυνάς τους καθώς επίσης και στη διαχείριση των radar. Στο ναυτικό επικεντρώθηκαν στην προστασία των πλοίων από εναέριες επιθέσεις και τέλος στην αεροπορία για την βέλτιστη οργάνωση των βομβιστικών τους επιθέσεων. Την ίδια στιγμή αντίστοιχες τακτικές βασισμένες στην Ε.Ε ξεκινούσαν και στην Αμερική.

Αξίζει να σημειωθεί ότι μέχρι και σήμερα ο στρατός σε όλες σχεδόν τις χώρες του κόσμου βασίζει τις αποφάσεις του στις αρχές της Ε.Ε. Χρησιμοποιώντας τα εργαλεία και τις φόρμουλες που θα αναλύσουμε αργότερα στην εργασία αποφασίζει για την ώρα, τον τόπο και τον τρόπο εφαρμογής ενός σχεδίου ενώ είναι σε θέση να προβλέψει και το αποτέλεσμα της εκάστοτε ενέργειας. Και ενώ όλες οι πηγές αποκαλύπτουν ότι έτσι “γεννήθηκε” ο τομέας της επιχειρησιακής έρευνας, τις επόμενες δεκαετίες μέχρι και σήμερα η Ε.Ε εφαρμόζεται στην πλειοψηφία των διοικητικών επιστημών.

1.2 Ορισμός και χρήση της Ε.Ε

Η επιτυχία της Ε.Ε στις στρατιωτικές διαδικασίες οδήγησε άλλους κυβερνητικούς φορείς και βιομηχανικές επιχειρήσεις να στηρίξουν τις αποφάσεις τους στην Ε.Ε. Η σημασία και η ανάγκη ύπαρξής της είχαν πλέον εδραιωθεί στην Αμερική. Το 1951 εκδόθηκε το πρώτο βιβλίο με τίτλο ‘’Methods of Operations research'' ενώ το 1952 ιδρύθηκε και ο πρώτος οργανισμός με όνομα ''Operations Research Society of America''.

Σήμερα οι περισσότερες επιχειρήσεις χρησιμοποιούν τις αρχές της Ε.Ε για τη λήψη αποφάσεων, καθώς έχει διαπιστωθεί ότι ο καλύτερος τρόπος να προσεγγίσουν ένα πρόβλημα είναι από την επιστημονική σκοπιά.

Στόχος της Ε.Ε είναι να βοηθάει στελέχη επιχειρήσεων να πάρουν μια απόφαση όταν οι πληροφορίες και τα δεδομένα τους είναι ανεπαρκή. Επίσης βοηθάει στην περιγραφή, κατανόηση και πρόβλεψη διαφόρων συστημάτων και μηχανών που χρησιμοποιεί ο άνθρωπος. Όσο κατανοητός είναι ο στόχος της ως επιστήμη, τόσο δύσκολο είναι να δοθεί σαφής ορισμός για την Ε.Ε.

Παρακάτω παραθέτουμε κάποιους ορισμούς που έχουν δοθεί κατά καιρούς:

- Η Ε.Ε ασχολείται με την επιλογή του βέλτιστου σχεδιασμού και της βέλτιστης λειτουργίας μηχανικών συστημάτων που απαιτεί την κατανομή αναλώσιμων πηγών.

-Operations Research Society, America-

- Ε.Ε είναι η συλλογή των κατάλληλων μαθηματικών τεχνικών και εργαλείων που εφαρμόζονται για την επίλυση προβλημάτων απόφασης σε ένα μηχανολογικό ή οικονομικό περιβάλλον.

-Daellenbach and George-

- Ε.Ε είναι η επιστημονική προσέγγιση που απαιτείται για να λυθεί ένα πρόβλημα από την εκτελεστική διαχείριση μιας εταιρείας.

-H.M Wagner-

1.3 Στάδια της μελέτης της Ε.Ε

I. Εντοπισμός και Ανάλυση του προβλήματος :

Για να συγκεκριμενοποιήσουμε το στόχο, να εντοπίσουμε δηλαδή το πρόβλημα ώστε να βρούμε τελικά λύση σε αυτό, πρέπει να συλλέξουμε πληροφορίες και δεδομένα, να καταγράψουμε τους περιορισμούς για να έχουμε εν τέλει μια καθαρή εικόνα για το πώς πρέπει να συνεχίσουμε τη μελέτη μας.

II. Μοντελοποίηση :

Φτιάχνουμε μαθηματικά μοντέλα στα οποία παρουσιάζονται ταυτόχρονα ο στόχος του προβλήματος (π.χ ελαχιστοποίηση του κόστους) και οι περιορισμοί σε μορφή εξισώσεων και μαθηματικών σχέσεων. Σ'αυτό το στάδιο πρέπει να συνδυάσουμε λοιπόν τα δεδομένα του προβλήματος για να φτιάξουμε εξισώσεις που θα συνδέουν τις μεταβλητές του προβλήματος με τους αντίστοιχους περιορισμούς.

III. Πιθανή λύση και έλεγχος :

Βάσει των εξισώσεων που έχουμε ήδη καταγράψει καταλήγουμε σε μια λύση. Πριν όμως θεωρήσουμε ότι η διαδικασία έχει τελειώσει, πρέπει να ελέγξουμε αν η λύση αυτή ικανοποιεί όλους τους περιορισμούς και αν τελικά την εφαρμόσουμε στο πρόβλημα δίνει λογικά αποτελέσματα. Αν έχουμε βεβαιωθεί ότι αυτή η λύση είναι και η βέλτιστη τότε η δουλειά μας έχει τελιώσει.

1.4 Εφαρμογές της Ε.Ε :

Όπως εξηγήσαμε παραπάνω, ενώ η επιχειρησιακή έρευνα εφαρμόστηκε αρχικά για να διευκολύνει στρατιωτικές αποφάσεις την περίοδο του πολέμου, σήμερα χρησιμοποιείται σε όλους τους τομείς που απαιτούν τη λήψη αποφάσεων. Ακολουθεί μια επιγραμματική αναφορά στους διάφορους χώρους που οι άνθρωποι εφαρμόζουν την Ε.Ε.

I) Εθνικοί προϋπολογισμοί

Χρησιμοποιώντας τις αρχές της Ε.Ε οι κυβερνήσεις ετοιμάζουν μακροπρόθεσμα σχέδια, προϋπολογισμούς και προβλέπουν την πορεία των εσόδων και εξόδων τους.

II) Αμυντικοί εξοπλισμοί

Ξεκινώντας από τον αμερικανικό στρατό, η επιχειρησιακή έρευνα είναι πλέον μέρος του σχεδιασμού άμυνας πολλών χωρών. Ανάπτυξη νέων τεχνολογιών, αξιολόγηση κόστους και χρόνου, αμυντικά προγράμματα, στρατηγικές μάχης και συντήρηση εξοπλισμού είναι μερικοί τομείς του στρατού που απαιτούν τη λήψη αποφάσεων και στηρίζονται στην Ε.Ε.

III) Βιομηχανικές μονάδες και ιδιωτικές επιχειρήσεις

Για το στήσιμο μιας επιχείρησης χρησιμοποιείται η Ε.Ε στο πλαίσιο εύρεσης του κατάλληλου χώρου που θα λειτουργήσει η επιχείρηση, του σχεδιασμού του πλάνου λειτουργίας, της συντήρησης εξοπλισμών και αποθεμάτων και της διαχείρισης του προσωπικού.

IV) Έρευνα και Ανάπτυξη στην μηχανολογία

Κάθε τεχνολογικό επίτευγμα και κάθε απόφαση που αφορά ένα μηχανολογικό σχέδιο προαπαιτεί ένα μεγάλο κομμάτι έρευνας. Η Ε.Ε μπορεί να αξιολογήσει ένα προτεινόμενο προϊόν όχι μόνο για τη λειτουργικότητά του αλλά και για το κατά πόσο το προϊόν αυτό θα πουλήσει στην αγορά. Εφαρμόζεται ακόμα για τη σύσταση του προϋπολογισμού της έρευνας και την αξιολόγηση και πρόβλεψη ενός μηχανολογικού σχεδίου.

V) Διοίκηση και Ανταγωνιστικότητα

Μια επιχείρηση συχνά είναι στη θέση να πάρει αποφάσεις υπό ρίσκο και αβεβαιότητα. Για το λόγο αυτό πρέπει να καταστρώνει στρατηγικές που αφορούν στις πωλήσεις, στην κατανομή των διαθέσιμων πόρων της κ.α, ενέργειες που απαιτούν βαθιά γνώση της επιχ. έρευνας.

VI) Γεωργία

Στην περίπτωση της γεωργίας και της καλλιέργειας η Ε.Ε βοηθάει και πάλι στο βέλτιστο σχεδιασμό του πλάνου της γεωργίας αλλά και στην οικονομικότερη λύση σε θέματα άρδευσης, μοιράσματος της σοδειάς και επιλογής των κατάλληλων προϊόντων που θα φυτευτούν. Με στόχο την ελαχιστοποίηση του κόστους οδηγεί τους αγρότες και κτηματίες στην επιλογή του πλέον κατάλληλου χώρου και των πιο αποδοτικών πόρων (όπως π.χ το λίπασμα) που θα χρησιμοποιηθούν.

VII) Εκπαίδευση

Στο χώρο της εκπαίδευσης η Ε.Ε μπορεί να ορίσει τον κατάλληλο αριθμό σχολείων που είναι απαραίτητα για την περιοχή που μελετάμε, την σωστή αναλογία δασκάλων/μαθητών για μια αποδοτική συνεργασία και επίσης τον απαιτούμενο προϋπολογισμό του κάθε εκπαιδευτικού ιδρύματος ώστε να εξυπηρετεί καλύτερα τους σκοπούς του.

VIII) Μεταφορές

Στη καθημερινότητά μας οι δημόσιες μεταφορές αντικατοπτρίζουν την γενικότερη εικόνα μιας πόλης. Στηριζόμενοι στην Ε.Ε οι αρμόδιοι φορείς μπορούν να εκτιμήσουν με ακρίβεια τον αριθμό των απαιτούμενων μεταφορικών μέσων, τον σωστό καταμερισμό τους μέσα στη μέρα αλλά και τις τιμές των αντίστοιχων εισιτηρίων. Ακόμα βοηθάει στο να γνωρίζουμε ποια δημόσια έργα πρέπει να τεθούν σε εφαρμογή για τη διευκόλυνση των μεταφορών και κοστολογεί τα αντίστοιχα έξοδα.

IX) Οικιακή οικονομία

Όσο κι αν φαίνεται ότι ανήκει αποκλειστικά στους χώρους των επιχειρήσεων, η Ε.Ε εφαρμόζεται καθημερινά και στα νοικοκυριά. Όταν υπολογίζουμε τα έσοδα και έξοδα του νοικοκυριού μας, σε ποιους τομείς πρέπει να κάνουμε οικονομία και πως πρέπει να κατανεμηθούν τα διαθέσιμα χρήματα μας στηριζόμαστε, χωρίς να το καταλαβαίνουμε, τις αρχές της επιχειρησιακής έρευνας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 : Γραμμικός Προγραμματισμός

2.1 Εισαγωγή

Η ανάπτυξη του γραμμικού προγραμματισμού (Γ.Π) συμπεριλαμβάνεται στα μεγαλύτερα και πιο σημαντικά επιτεύγματα του 20^{ου} αιώνα και δικαίως αφού δίνει λύσεις σε προβλήματα και οδηγεί στην λήψη αποφάσεων σε κολοσσιαίες εταιρείες δισεκατομμυρίων και κρατικούς μηχανισμούς μέχρι μικρές επιχειρήσεις και απλά καθημερινά προβλήματα. Η σημασία του Γ.Π και γενικότερα της επιχειρησιακής έρευνας αποτυπώνεται στα χιλιάδες βιβλία που έχουν γραφτεί κατά καιρούς στην προσπάθεια των ανθρώπων να καταγράψουν τις τεχνικές με τις οποίες λαμβάνουμε αποφάσεις. Τα βιβλία αυτά διδάσκονται σε Πανεπηστήμια παγκοσμίως ενώ οι σπουδαιότεροι στον τομέα αυτό έχουν τιμηθεί και με βραβείο Νόμπελ. Μια απ'τις σημαντικότερες προσωπικότητες στο χώρο αυτό ήταν ο Charles Babbage (1791 - 1871) ο οποίος χαρακτηρίστηκε ο πατέρας της επιχειρησιακής έρευνας καθώς ήταν εκείνος που με την έρευνά του για το κόστος μεταφοράς και ταξινόμισης της αλληλογραφίας οδήγησε στην ίδρυση του γενικού αγγλικού “ Ταχυδρομείου της πένας” το 1840.

Ο Charles Babbage κατάφερε να βρει την πιο κερδοφόρα φόρμουλα για το πρόβλημα που περιγράψαμε, έτσι το βρετανικό ταχυδρομείο είχε στα χέρια του την βέλτιστη λύση για το πρόβλημα κόστους της αλληλογραφίας. Αντικειμενικός στόχος του Γ.Π είναι να εντοπίζει αυτή τη βέλτιστη λύση σε προβλήματα λήψης απόφασης, αρκετά τέτοια προβλήματα θα αποτελέσουν παραδείγματα αυτής της εργασίας. Η βέλτιστη λύση τους προσδιορίζεται ως προς κάποια προκαθορισμένα κριτήρια όπως η ελαχιστοποίηση του κόστους, η μέγιστη ευστάθεια, ο ελάχιστος χρόνος αναμονής, συνδυασμός κέρδους ρίσκου κ.α.

Η χαρακτηριστική διαδικασία επίλυσης ενός προβλήματος Γ.Π περιλαμβάνει τα παρακάτω βήματα:

Βήμα 1^{o} : Η μαθηματική μοντελοποίηση του προβλήματος

Βήμα 2^{o} : Η αξιοποίηση μαθηματικών μοντέλων, αλγορίθμων και μεθόδων βελτιστοποίησης

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε αναλυτικά το πρώτο στάδιο της μελέτης που είναι η μαθηματική μοντελοποίηση καθώς και τις βασικότερες μεθόδους που έχουμε σήμερα στη διάθεσή μας που επιλύουν τα προβλήματα αυτά βάσει της μοντελοποίησης που προηγήθηκε. Για το σκοπό αυτό θα γίνει η παρουσίαση υπαρκτών ή και μη προβλημάτων που θα συνοδεύονται από την αναλυτική τους περιγραφή και λύση.

2.2 Μοντελοποίηση των προβλημάτων

Ας γυρίσουμε το χρόνο πίσω στο Γυμνάσιο. Εκεί συχνά έπρεπε να μετατρέψουμε τα δεδομένα ενός προβλήματος σε μαθηματικές εξισώσεις και οι άγνωστοι του προβλήματος έπαιρναν την μορφή μεταβλητών που έμπαιναν στις εξισώσεις αυτές. Βλέπουμε δηλαδή ότι η μοντελοποίηση δεν είναι μια καινούργια έννοια αποκλειστικά ταυτισμένη με τον Γ.Π αλλά υπάρχει στο μυαλό μας συνειδητά ή ασυνείδητα και την χρησιμοποιούμε όταν χρειάζεται να υπολογίσουμε ποσοτικά ένα μέγεθος.
Παρόμοια τακτική ακολουθούμε και τώρα. Η μεθοδολογία αλλά και η χρησιμότητα της μοντελοποίησης γίνεται πιο κατανοητή μέσω παραδειγμάτων.

2.3 Το πρόβλημα του ταξιδιωτικού γραφείου

Το ταξιδιωτικό γραφείο Holiday Experts έχει καταλάβει ότι τα έσοδα που έχει κλείνοντας μεμονομένα εισητήρια πελατών συνεχώς φθήνουν. Για το λόγο αυτό η εταιρεία δημιουργεί πακέτα προσφορών τα οποία διαθέτει στους πελάτες της. Τα πακέτα αυτά περιλαμβάνουν αεροπορικά εισητήρια, ξεναγήσεις και διανυκτερεύσεις στους αντίστοιχους προορισμούς. Προφανώς η Holiday Experts θα ξοδέψει κάποια χρήματα για να κλείσει τα πακέτα αυτά αλλά η συνεργασία με τους αντίστοιχους επιχειρηματίες θα της αποφέρει κάποια έκπτωση στις τιμές την οποία θα προσπαθήσει να αξιοποιήσει μέσω της προώθησης των πακέτων στην αγορά. Η πρώτη κατηγορία πακέτων αφορά ταξίδι στο εξωτερικό και κοστίζει στην εταιρεία 2.000$ και η άλλη κατηγορία πακέτων προσφέρει μεγαλύτερη παραμονή σε κάποιο ελληνικό νησί για τον ίδιο αριθμό ατόμων και συνολικού κόστους 1.200$.(Η Holiday Experts θα έχει κέρδος περίπου 20% από κάθε πακέτο που καταφέρνει να πουλήσει αλλά το νούμερο αυτό δεν θα παίξει κάποιο ρόλο στην λύση της άσκησης.) Η πελατεία της είναι 500 άτομα στην Αθήνα και 350 στην Θεσαλλονίκη. Εσωτερική έρευνα της εταιρείας έχει δείξει ότι τα ταξίδια στο εξωτερικό τα προτιμούν οι Αθηναίοι σε σχέση με τους Θεσαλλονικείς σε αναλογία 2:1 ,αντίθετα τα ταξίδια στην Ελλάδα τα προτιμούν οι Θεσαλλονικείς σε αναλογία 3:1 με τους Αθηναίους. Το μειονέκτημα αυτού του project είναι πως η εταιρεία πρέπει να προαγοράσει έναν αριθμό πακέτων για να είναι απ'ευθείας έτοιμα προς πώληση. Το τμήμα πωλήσεων έχει δώσει εντολή να αγοραστούν τουλάχιστον 50 πακέτα του εξωτερικού και όχι πάνω από 80 πακέτα για το εσωτερικό. Για τις αγορες αυτές η Holiday Experts έχει να διαθέσει εως 100.00$. Στόχος της είναι να μεγιστοποίησει τα κέρδη της βρίσκοντας τον κατάλληλο αριθμό πακέτων που πρέπει να αγοράσει.

Αυτό που πρέπει να κάνει δηλαδή ο υπέυθυνος λήψης της απόφασης είναι να συνδυάσει τα δεδομένα ώστε να βρεί τον σωστό αριθμό πακέτων, να μην είναι περισσότερα από όσα πουληθούν ώστε να μην ζημειωθεί η εταιρεία αλλά και να μην είναι πολύ λιγότερα απ'όσα θα μπορούσε να πουλήσει γιατί αυτό δεν συνεπάγεται μεγιστοποίηση του κέρδους.

Με μια πρώτη ματιά το πρόβλημα φαίνεται δύσκολο αλλά η έκταση της εκφώνησης δεν συνδέεται άμεσα την δυσκολία της λύσης του. Το σημαντικότερο στο στάδιο που βρισκόμαστε να εντοπίσουμε τα σημεία κλειδιά. Τα σημεία κλειδιά αυτά θα μεταφραστούν σε εξισώσεις και ανισώσεις.

<u>Ορισμός μεταβλητών</u>

Τα μεγέθη τα οποία πρέπει να προσδιορίσουμε το μέγεθος τους είναι τα πακέτα για το εξωτερικό, έστω x1 και τα πακέτα για το εσωτερικό, έστω x2.

<u>Αντικειμενική συνάρτηση</u>

Ορίσαμε ως στόχο την μεγιστοποίηση του κέρδους η οποία θα προκύψει από το πόσα πακέτα διακοπών θα πουλήσει η εταιρεία. Θέτουμε **z** τα συνολικά κέρδη. Άρα επιθυμούμε το εξής :

$$\max \mathbf{z} = (500\cdot 2 + 350)\cdot x1 + (500 + 350\cdot 3)\cdot x2$$

<u>Περιορισμοί</u>

$x1 \geq 50$ Περιορισμοί που έθεσε το τμήμα πωλήσεων.

$x2 \leq 100$

$2.000\cdot x1 + 1.200\cdot x2 \leq 100.000$ Περιορισμός λόγω budget

<u>ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ</u>

1. Το πρόβλημα του ταξιδιωτικού γραφείου ήταν ένα μη υπαρκτό πρόβλημα που βοηθάει στην εισαγωγή των νέων εννοιών καθώς και στην κατανόηση της μεθόδου της μοντελοποίησης. Τα νούμερα και οι περιορισμοί είναι φανταστικά.

2. Το πρόβλημα του ταξιδιωτικού γραφείου ήταν μεγάλο σε έκταση καθότι στο εισαγωγικό παράδειγμα αυτό στόχος ήταν να μπορεί ο ενδιαφερόμενος να εντοπίσει τα σημεία κλειδιά από ένα μεγάλο εύρος δεδομένων.
3. Ο ορισμός μεταβλητών, η αντικειμενική συνάρτηση και οι περιορισμοί πρέπει πάντα να παρουσιάζονται στην λύση του προβλήματος χωρις να είναι αναγκαία τα βοηθητικά σχόλια και οι επεξηγήσεις.

2.4 Το πρόβλημα των δημητριακών

Μια βιομηχανία δημητριακών αναζητά καινούργια συνταγή για το νέο της πακέτο δημητριακών. Στην προσπάθειά της να φτιάξει τα δημητριακά νόστιμα αλλά και θρεπτικά πρέπει να χρησιμοποιήσει τη σωστή αναλογία από τις επόμενες πρώτες ύλες: ζάχαρη, κριθάρι, βρώμη και κακάο. Για να γίνει η συνταγή αποδεκτή πρέπει η περιεκτικότητα της να μην ξεπερνάει το 15% σε λιπαρά και να είναι τουλάχιστον 20% σε πρωτεϊνες. Στον παρακάτω πίνακα δίνονται οι περιεκτικότητες τις κάθε πρώτης ύλης σε πρωτεϊνες και λιπαρά καθώς και τα αντίστοιχα κόστη της κάθε ύλης ανα τόνο. Στόχος της βιομηχανίας είναι να δημιουργήσει την λιγότερο ακριβή συνταγή που θα πληρεί ωστόσο τις παραπάνω προυποθέσεις.

	Περιεκτικότητες (%) σε θρεπτικά συστατικά			
	Ζάχαρη	Κριθάρι	Βρώμη	Κακάο
Πρωτεϊνες	5	15	12	3
Λιπαρά	12	4	8	7
Κόστος (€/τόνο)	600	800	950	1500

Ορισμός μεταβλητών

Θέτουμε x_1, x_2, x_3 και x_4 τις ποσότητες σε μέρη του τόνου της ζάχαρης, του κριθαριού,της βρώμης και του κακάο αντίστοιχα.

Αντικειμενική συνάρτηση

Στόχος είναι η ελαχιστοποίηση του κόστους για την παραγωγή ενός τόνου δημητριακών.

$$\min C = 600 \cdot \mathbf{x_1} + 800 \cdot \mathbf{x_2} + 950 \cdot \mathbf{x_3} + 1500 \cdot \mathbf{x_4}$$

Περιορισμοί

- Το άθροισμα των ποσοτήτων πρέπει να δίνει 1 τόνο ΑΡΑ :

$$\mathbf{x_1} + \mathbf{x_2} + \mathbf{x_3} + \mathbf{x_4} = 1$$

- Η περιεκτικότητα σε πρωτείνη πρέπει να είναι τουλάχιστον 20% της συνολικής ποσότητας ΑΡΑ :

$$\frac{5\% \cdot x1 + 15\% \cdot x2 + 12\% \cdot x3 + 3\% \cdot x4}{x1 + x2 + x3 + x4} \geq 20\% \Rightarrow 5 \cdot x1 + 15 \cdot x2 + 12 \cdot x3 + 3 \cdot x4 \geq 20$$

- Η περιεκτικότητα σε λιπαρά δεν μπορεί να ξεπερνά το 15% ΑΡΑ :

$$\frac{12\% \cdot x1 + 4\% \cdot x2 + 8\% \cdot x3 + 7\% \cdot x4}{x1 + x2 + x3 + x4} \leq 15\% \Rightarrow 12 \cdot x1 + 4 \cdot x2 + 8 \cdot x3 + 7 \cdot x4 \leq 15$$

- Τέλος, οφείλουμε να βάλουμε τον περιορισμό μη αρνητικότητας καθώς δεν μπορουν οι παράμετροι μας να λάβουν αρνητικές τιμές :

$$\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \mathbf{x_3}, \mathbf{x_4} \geq 0$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 : Γραφικές μέθοδοι για την επίλυση προβλημάτων

3.1 Γραφική λύση

Στα περισσότερα προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού είναι εφικτό εκτός από την μαθηματική επίλυση τους να βρούμε και την γραφική απεικόνιση που παρουσιάζει όπως θα δείξουμε στη συνέχεια μια ανάλυση για την λύση τους. Αυτό γιατί πολλές φορές είναι σημαντικότερη η βαθιά κατανόηση ενός προβλήματος από την λύση του καθώς μας επιτρέπει να είμαστε πιο ευέλικτοι και έτοιμοι να δράσουμε σε πιθανές μικροαλλαγές που ίσως προκύψουν.

Το πρόβλημα της παραγωγής

Μια εταιρεία έχει την δυνατότητα να παράγει δυο προιόντα, το Α και το Β, τα οποία έχουν το καθένα το δικό τους χρόνο παραγωγής. Το κάθε προιόν για να φτιαχτεί απαιτεί το χρόνο λειτουργίας δυο μηχανημάτων.

ΔΕΔΟΜΕΝΑ

Για το προιόν Α απαιτούνται : 2 ώρες λειτουργίας του πρώτου μηχανήματος.
1 ώρα λειτουργίας του δεύτερου μηχανήματος.

Για το προιόν Β απαιτούνται : 4 ώρες λειτουργίας του πρώτου μηχανήματος
3 ώρες λειτουργίας του δεύτερου μηχανήματος.

Διαθεσιμότητα : Το πρώτο μηχάνημα είναι διαθέσιμο 20 ώρες την ημέρα.
Το δεύτερο μηχάνημα είναι διαθέσιμο 12 ώρες την ημέρα.

Κέρδος : Κάθε μονάδα του προιόντος Α δίνει κέρδος 40 ευρώ.
Κάθε μονάδα του προιόντος Β δίνει κέρδος 100 ευρώ.

ΣΤΟΧΟΣ

Στόχος της εταιρείας είναι να μεγιστοποιήσει τα κέρδη της. Πρέπει να βρεθεί ο ιδανικός αριθμός μονάδων παραγωγής ημερησίως για το κάθε προιόν.

ΛΥΣΗ

Ορισμός μεταβλητών

X_1: αριθμός μονάδων προιόντος Α ανα ημέρα.

X_2: αριθμός μονάδων προιόντος Β ανα ημέρα.

Αντικειμενική συνάρτηση

Θέτουμε z το ημερήσιο κέρδος. Προφανώς λοιπόν σκοπός της εταιρείας είναι να μεγιστοποιήσει το ημερήσιο κέρδος της.

$$\max z = 40\, x_1 + 100\, x_2$$

Περιορισμοί

$$2\, x_1 + 4\, x_2 \leq 20$$

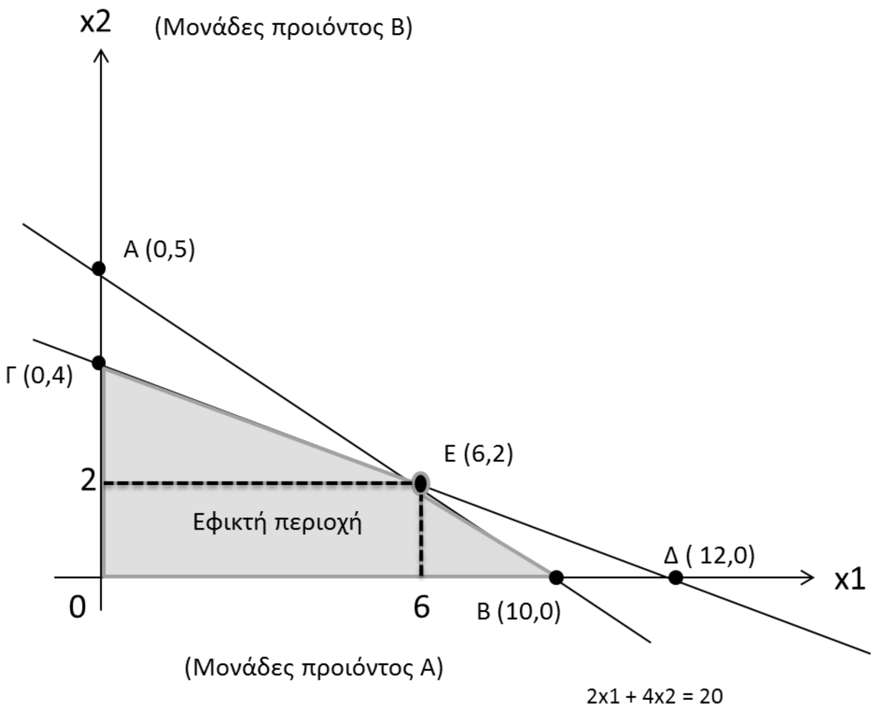
$$x_1 + 3x_2 \leq 12$$

$$x_1,\, x_2 \geq 0$$

Οι δύο πρώτοι περιορισμοί αφορούν στην διαθεσιμότητα των ωρών λειτουργίας των δύο μηχανημάτων και ο τρίτος στον προφανή περιορισμό ότι οι μονάδες προιόντος δεν μπορούν να πάρουν αρνητικές τιμές.

Ακόμα αξίζει να σημειωθεί ότι έχουμε να λύσουμε ένα πρόβλημα ακέραιου προγραμματισμού καθώς δεν μπορούν οι μεταβλητές του συγκεκριμένου προβλήματος να είναι μη ακέραιοι.

Για να λάβουμε την γραφική αναπαράσταση του προβλήματος μετατρέπουμε τις ανισότητες των περιορισμών σε ισότητες και να τις παραστήσουμε στους δύο άξονες που ο καθένας να αντιπροσωπεύει τις μονάδες των προιόντων Α και Β αντίστοιχα.



Στο παραπάνω διάγραμμα που αποτελεί τη γραφική λύση του προβλήματος της παραγωγής το γραμμοσκιασμένο κομμάτι περιλαμβάνει το σύνολο των εφικτών λύσεων.

Ας δούμε μια υποθετική λύση για να καταλάβουμε καλύτερα το νόημα της γραφικής παράστασης.
Ένα σημείο εντός της γραμμοσκιασμένης επιφάνειας είναι το σημείο Κ (3,2).
Ο συγκεκριμένος συνδυασμός σημαίνει ότι έγινε επιλογή παραγωγής 3 μονάδων του Α προιόντος και 2 μονάδων του Β προιόντος. Η επιλογή αυτή απαιτεί τη λειτουργία $2 \times 3 + 4 \times 2 = 14$ ωρών του πρώτου μηχαχνήματος και αντίστοιχα $1 \times 3 + 3 \times 2 = 9$ ωρών του Β μηχανήματος. Από τη στιγμή που η επιλογή αυτή ικανοποιεί τους περιορισμούς λέμε ότι το σημείο Κ είναι **εφικτό σημείο** και η γραμμοσκιασμένη περιοχή με το σύνολο των εφικτών σημείων καλείται **εφικτή περιοχή**.

Ο σκοπός μας είναι όμως να εντοπίσουμε το σημείο εκείνο ή τα σημεία εκείνα της εφικτής περιοχής τα οποία μεγιστοποιούν την αντικειμενική μας συνάρτηση. Γνωρίζουμε ότι σημεία που επιτυγχάνουν το σκοπό αυτό είναι πάντα γωνιακά σημεία,οπότε δεν αποτελεί πρόβλημα η εύρεση τους καθώς η μέθοδος αυτή δίνει λύσεις σε προβλήματα με τρείς ή λιγότερους αγνώστους. Στην περίπτωση που είναι τρείς οι άγνωστοι παριστάνουμε την γραφική λύση σε ένα τρισορθογώνιο σύστημα και οι περιορισμοί δεν αναπαριστούνται πλέον με ευθείες αλλά με ολόκληρα επίπεδα.
Η εφικτή περιοχή όπως φαίνεται στο σχήμα είναι το πολύγωνο με άκρα τα σημεία Ο, Γ, Ε και Β. Βάζοντας το κάθε έναν από αυτούς τους συνδυασμούς στην αντικειμενική συνάρτηση λαμβάνουμε ως βέλτιστη λύση τον συνδυασμό που αντιστοιχεί στο σημείο Β. Δηλαδή πιο κερδοφόρα ενέργεια για την εταιρεία είναι να παράγει ημερησίως 6 μονάδες προιόντος Α και 2 από το Β. Αυτό θα τις δίνει έσοδα $6 \times 40 + 2 \times 100 = 440$ ευρώ.

3.1.1 Ανάλυση ευαισθησίας

Όπως αναφέραμε και νωρίτερα η σημαντικότερη χρησιμότητα της γραφικής λύσης δεν είναι η εύρεση της βέλτιστης λύσης του προβλήματος με το οποίο ασχολούμαστε αφού ο γραμμικός προγραμματισμός τα καταφέρνει μέσω της μοντελοποίησης και με το παραπάνω. Η γραφική αναπαράσταση ενός τέτοιου προβλήματος μας εξασφαλίζει μια βαθύτερη κατανόηση αυτού και μας βοηθάει στο να είμαστε ευέλικτοι για τυχόν αλλαγές στους περιορισμούς η λόγω άλλων εξωγενών παραγόντων.

Το πρόβλημα της παραγωγής με περεταίρω περιορισμό

Ας επεκτείνουμε το παραπάνω πρόβλημα. Η εταιρεία λαμβάνει αναφορά πωλήσεων όπου αναφέρεται ότι δεν είναι δυνατή η απορρόφηση παραπάνω από 8 μονάδων του προιόντος Α. Αυτό σημαίνει ότι όποια παραπάνω παραγωγή αυτού του προιόντος είναι περριτή, άλλες φορές και ζημιοφόρα. Στο πρόβλημα παραγωγής λοιπόν προσθέτουμε και τον περιορισμό που ζητάει η μέγιστη παραγωγή του Α να είναι 8.

Αντικειμενική συνάρτηση

$$\max z = 40\, x_1 + 100\, x_2$$

Περιορισμοί

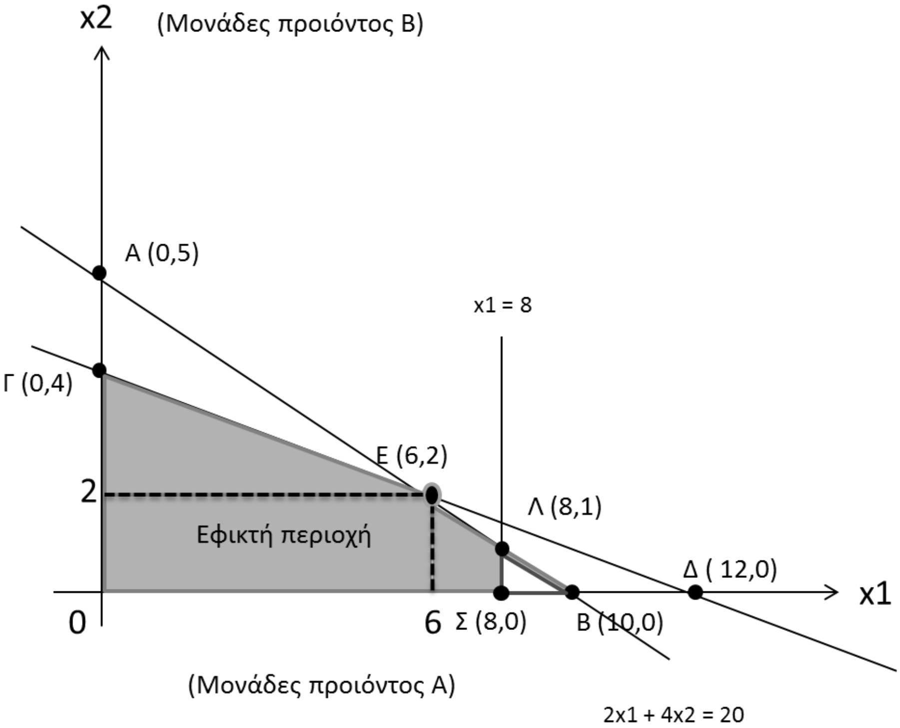
$$2\, x_1 + 4\, x_2 \leq 20$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 12$$

$$x_1 \leq 8$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Ας δούμε τώρα πως αλλάζει η γραφική παράσταση του προβλήματος με το νέο περιορισμό:



Παρατηρούμε ότι το πολύγωνο της εφικτής περιοχής έχει διαμορφωθεί από τα γωνιακά σημεία 0, Γ ,Ε ,Λ και Σ. Άρα ένα από αυτά αποτελεί και τη βέλτιστη λύση για την παραγωγή. Εφαρμόζωντας στην αντικειμενική συνάρτηση διαδοχικά αυτά τα αποτελέσματα παίρνουμε σαν βέλτιστη λύση και πάλι τον συνδυασμό λύσεων του σημείου Ε. Επομένως ο τελευταίος περιορισμός δεν επηρεάζει τη λύση του προβλήματος. Ένας τέτοιος περιορισμός ονομάζεται **μη δεσμευτικός.**

3.1.2 Σκιώδεις τιμές

Αυτή τη φορά δεν θα προσθέσουμε καινούργιο περιορισμό αλλά θα κάνουμε κάτι ακόμη πιο ρεαλιστικό,θα διαφοροποιήσουμε τον ήδη υπάρχοντα περιορισμό και θα δούμε πώς η αλλαγή αυτή επηρεάζει τη λύση του προβλήματος.

Ας υποθέσουμε πως η εταιρεία μαθαίνει ότι το πρώτο μηχάνημα είναι διαθέσιμο για την παραγωγή των προιόντων τους μια ώρα παραπάνω κάποιες μέρες της εβδομάδας. Σκοπός μας είναι να δείξουμε κατά πόσο η αύξηση της διαθέσιμότητας της μηχανής είναι σε θέση να επηρεάσει τη βέλτιστη παραγωγή. Αντίστοιχα, θα κάνουμε το ίδιο αν αντί για αύξηση είχαμε μείωση της διαθεσιμότηατς της πρώτης μηχανής κατά μια ώρα.

<u>Αντικειμενική συνάρτηση</u>

$$\max z = 40\, x_1 + 100\, x_2$$

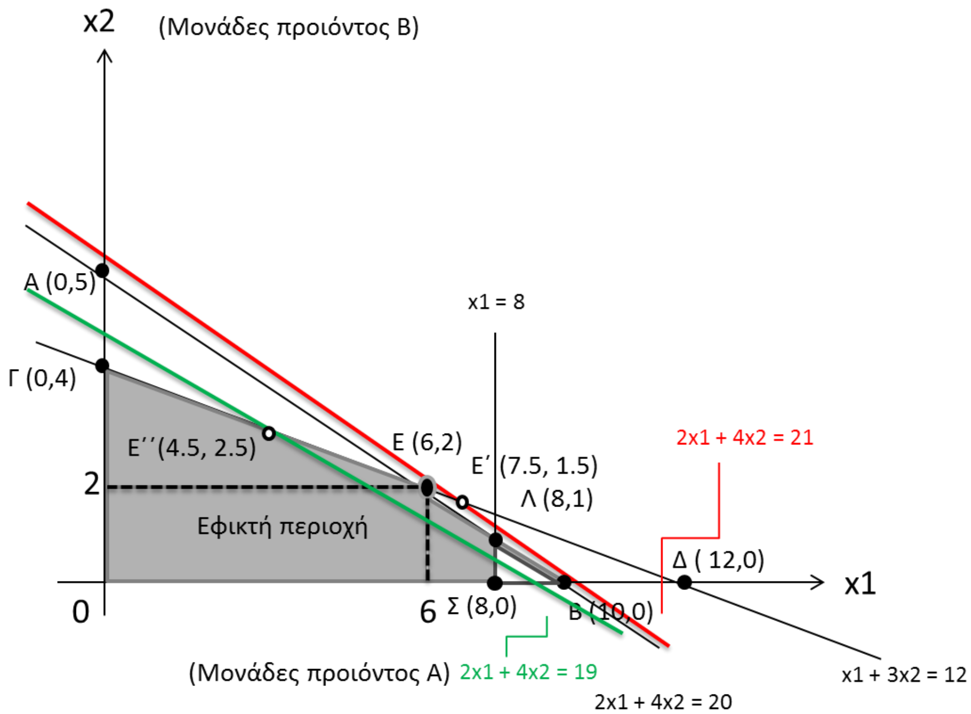
<u>Περιορισμοί</u>

$$2\, x_1 + 4\, x_2 \leq 21 \text{ ή } 2\, x_1 + 4\, x_2 \leq 19$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 12$$

$$x_1 \leq 8$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



Παρατηρούμε πως με την αύξηση μιας ώρας της λειτουργίας του πρώτου μηχανήματος η ευθεία του πρώτου περιορισμού μετατοπίζεται παράλληλα προς τα πάνω με αποτέλεσμα το βέλτιστο αποτέλεσμα να επιτυγχάνεται στο σημείο Ε΄. Αυτό σημαίνει ότι η εταιρεία θα μεγιστοποιήσει τα κέρδη της αν παραχθούν 7.5 μονάδες από το πρώτο προιόν και 1.5 μονάδα από το δεύτερο. Το καινούργιο αυτό αποτέλεσμα θα προσφέρει κέρδος που υπολογίζεται ως εξής:

$1.5 \times 40 + (-0.5) \times 100 = 60 - 50 = 10$ ευρώ.

Όπου 1.5 είναι η αύξηση στις μονάδες του πρώτου προιόντος από την αρχική βέλτιστη λύση και αντίστοιχα 0.5 είναι η ελάττωση στην παραγωγή του δεύτερου.

Η παραπάνω ποσότητα καλείται **σκιώδης τιμή** για το πρόβλημα με το οποίο ασχολούμαστε και αφορά στον πρώτο περιορισμό. Αποτελεί την μεταβολή στην τιμή της αντικειμενικής βέλτιστης λύσης που επιφέρει η αύξηση μιας μονάδας κάποιου περιορισμού.

Αντίστοιχα αν δούμε στην δεύτερη περίπτωση που η εταιρεία αναγκάζεται να μειώσει μια ώρα από τη λειτουργία του ίδιου μηχανήματος η ευθεία του περιορισμού μετατοπίζεται παράλληλα προς τα κάτω και λαμβάνουμε ως ακραίο σημείο το Ε’’. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα η εταιρεία να έχει ως βέλτιστη επιλογή την παραγωγή 4.5 μονάδων του πρώτου προιόντος και 2.5 του δεύτερου. Με την ίδια λογική η αλλαγή στα ημερήσια έσοδα θα είναι:

(-1.5) × 40 + 0.5 × 100 = -60 + 50 = -10 ευρώ.

<u>Παρατήρηση</u>

Στο συγκεκριμένο πρόβλημα (που όπως αναφέραμε είναι πρόβλημα ακέραιου γραμμικού προγραμματισμού) μια μη ακέραια λύση δεν είναι εφικτή, αλλά τα περισσότερα προβλήματα στο χώρο των επιχειρήσεων δεν είναι τέτοιας φύσεως.

<u>Συμπέρασμα</u>

Από την παραπάνω ανάλυση είναι ξεκάθαρη η σημασία του να εμβαθύνει ο υπέυθυνος απόφασης στη ρίζα του προβλήματος στο οποίο καλείται να βρει λύση. Διότι ναι μεν ο αρχικός του σκοπός είναι να βρεί απάντηση στην πρωταρχική μορφή του προβλήματος αλλά σε οποιαδήποτε μεταβολή προκύψει θα ήταν αναγκασμένος να ξεκινήσει τη λύση από την αρχή. Με τη γραφική μέθοδο και την ανάλυση ευαισθησίας μπορεί κανείς να διαχειριστεί οποιοδήποτε εμπόδιο τέτοιας φύσεως βρεθεί στο δρόμο του.

3.2 Δέντρα αποφάσεων

Πολλές φορές για να λύσουμε ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης θα μας δίνεται ένα μεγάλο πλήθος δεδομένων και επιλογών το οποίο αρχικά θα μοιάζει με ένα μπερδεμένο κουβάρι στοιχείων αλλά με τον κατάλληλο σχεδιασμό μπορούμε να βάλουμε σε τάξη τα στοιχεία αυτά και εν τέλει να αποφανθούμε για το τελικό αποτέλεσμα. Τα δέντρα αποφάσεων είναι μια γραφική λύση μιας τέτοιας κατάστασης και επιτρέπουν τη σωστή τοποθέτηση και καταγραφή των διαθέσιμων πληροφοριών.

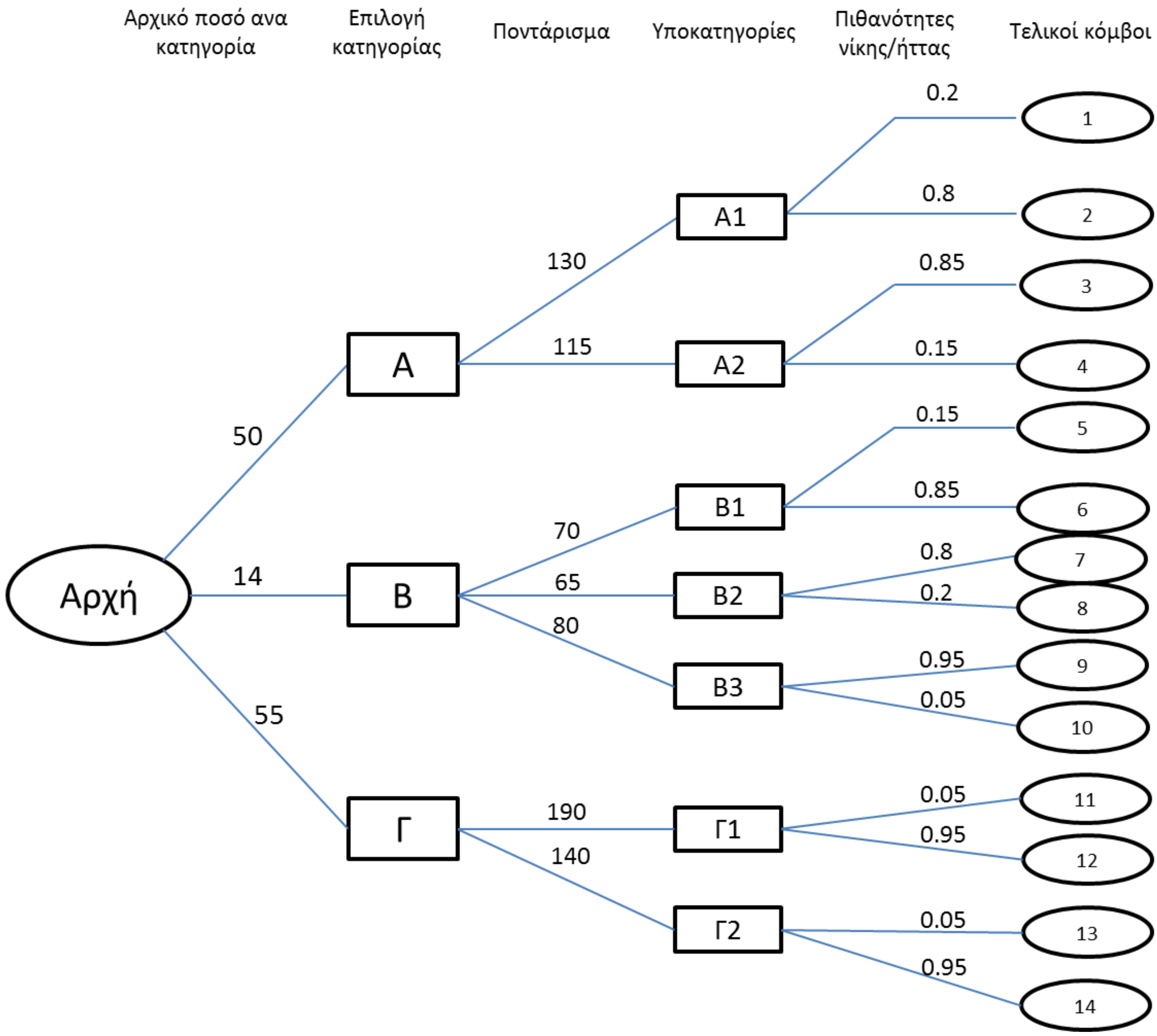
Παράδειγμα : Το πρόβλημα του τυχερού παιχνιδιού

Σ'ένα από τα καζίνο της πόλης εκτος από τα κλασσικά παιχνίδια τύχης προσφέρεται ένα νέο παιχνίδι στο οποίο ο παίκτης το μόνο που κάνει είναι να επιλέξει μια από τις τρεις κατηγορίες του παιχνιδιού γνωρίζοντας εκ των προτέρων τι προσφέρει η καθεμία. Οι κανόνες του παιχνιδιού είναι οι εξης :
Ο παίκτης επιλέγει μια από τις διαθέσιμες κατηγορίες Α, Β και Γ πληρώνοντας ένα ποσό εξ αρχής αναλόγως την κατηγορία. Για την κατηγορία Α πληρώνει 50 € , για την Β 14 € και για την Γ 55 €. Στη συνέχεια έχει τη δυνατότητα να επιλέξει το ποσό που θα ποντάρει μεταξύ προεπιλεγμένων επιλογών. Οι πιθανότητες επιτυχίας για κάθε επιλογή δίνονται παρακάτω. Στην περίπτωση νίκης του πονταρίσματος ο παίκτης θα επιστρέψει ένα ποσό πίσω το οποίο είναι επίσης προεπιλεγμένο για κάθε κατηγορία. Τα επιστρεφούμενα ποσά στη περίπτωση νίκης είναι 18, 12 και 24 € αντίστοιχα για τις τρεις κατηγορίες. Σε περίπτωση ήττας ο παίκτης χάνει μόνο το αρχικό ποσό που επένδυσε στην επιλογή κατηγορίας.

Οι πιθανότητες επιτυχίας αλλά και τα επιτρεπούμενα ποσά πονταρίσματος φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

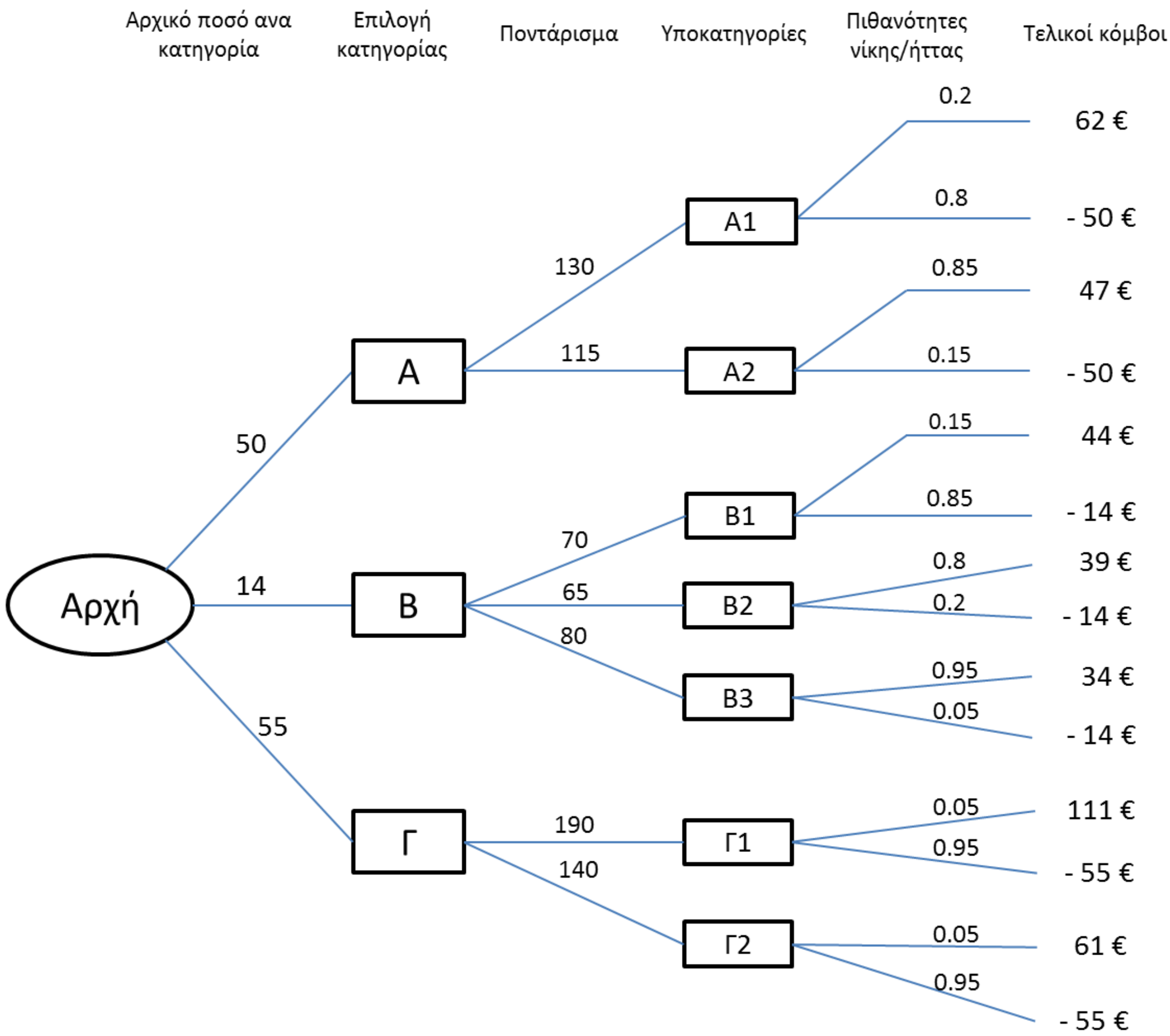
	Ποντάρισμα (€)	Πιθανότητες επιτυχίας
A1	130	0.2
A2	115	0.85
B1	70	0.15
B2	65	0.8
B3	80	0.95
Γ1	190	0.5
Γ2	140	0.05

Παρακάτω δίνεται η γραφική αναπαράσταση (δέντρο) των επιλογών του παίκτη.



Παρατηρούμε ότι ο παίκτης έχει 14 εναλλακτικές για τις οποίες τώρα θα υπολογίσουμε για τη καθεμία το ποσό που κερδίζεται ή χάνεται από τον παίκτη.
Ο τρόπος με τον οποίο υπολογίζουμε το κέρδος σύμφωνα με τα δεδομένα του παιχνιδιού είναι ο εξής :

Στην περίπτωση νίκης στην κατηγορία A_1 το κέρδος είναι το ποντάρισμα (130) μειον την επιστροφή (18) μειον το αρχικό ποσό για τη συμμετοχή στην κατηγορία Α (50). Το κέρδος λοιπόν είναι 62 €. Αντίστοιχα για την ήττα στην κατηγορία Α ο παίκτης θα χάσει μόνο το αρχικό ποσό, το κέρδος λοιπόν θα είναι -50 €.
Με την ίδια λογική υπολογίζουμε για όλες τις επιλογές το κέρδος και έτσι το δέντρο απόφασης διαμορφώνεται όπως παρακάτω :



Η έρευνα όμως δεν τελειώνει εδώ. Έχουμε μεν τα προσδοκώμενα κέρδη αλλά δεν έχουμε λάβει υπ’όψιν ακόμα τον σημαντικότερο παράγοντα που είναι οι πιθανότητες επιτυχίας ή όχι της κάθε επιλογής. Επομένως , πρέπει βάσει των πιθανοτήτων να αποφανθούμε αρχικά για το σε ποια κατηγορία συμφέρει να ποντάρουμε χρήματα και επέιτα για το ποσό πονταρίσματος.

Ο τρόπος με τον οποίον καταλίγουμε στην πιο συμφέρουσα επιλογή είναι απλός, πολ/ζουμε την πιθανότητα επιτυχίας της ενέργειας με το ποσό που ενδέχεται να κερδίσουμε ώστε να βγάλουμε το *αναμενόμενο κέρδος* (ΑΚ).

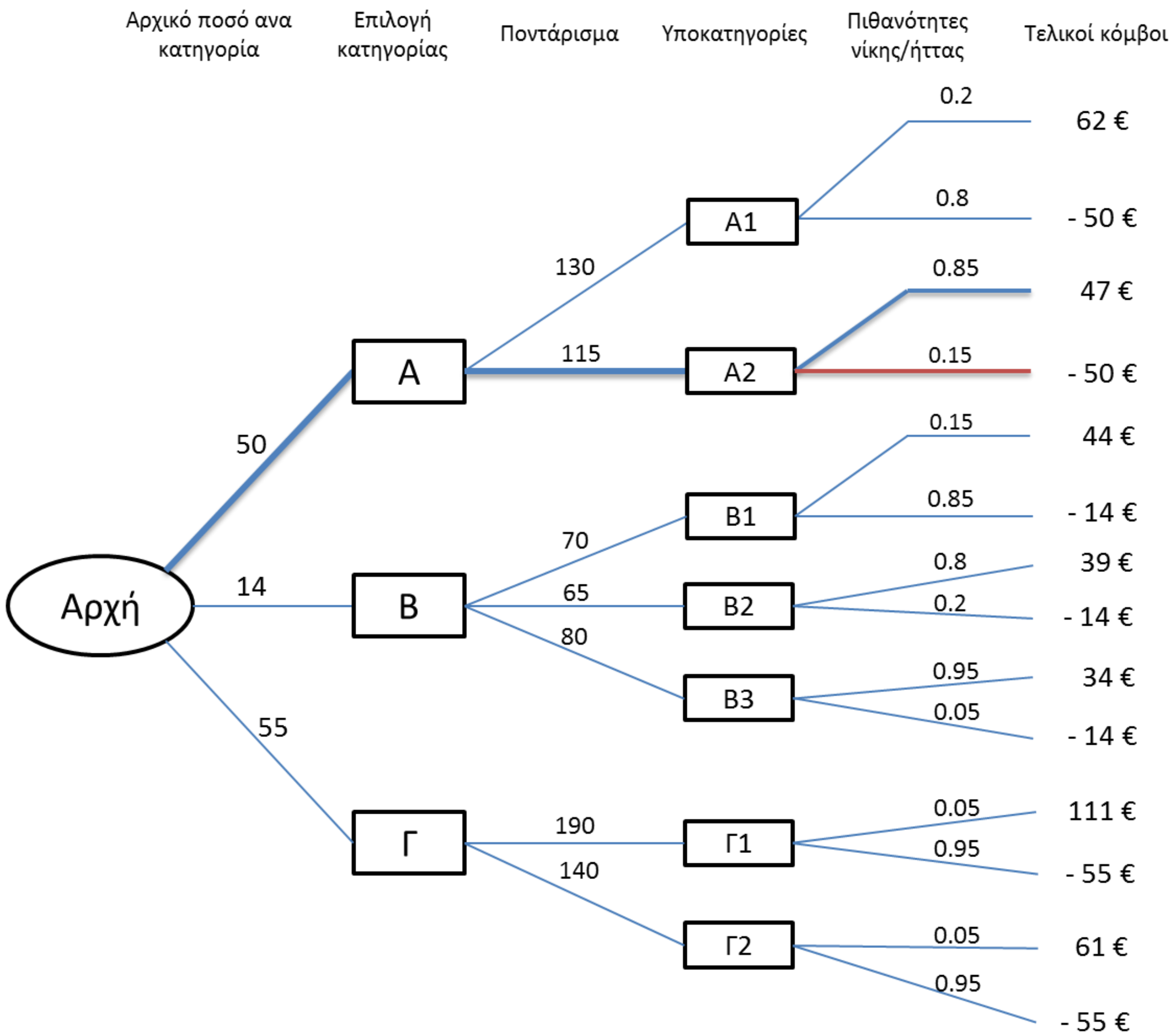
Συγκεκριμένα,

- Για την επιλογή A_1 : ΑΚ = 0.2 × 62 + 0.8 × (- 50) = - 27.6 €
- Για την επιλογή A_2 : ΑΚ = 0.85 × 47 + 0.15 × (- 50) = 32.45 €

- Για την επιλογή B_1 : ΑΚ = 0.15 ×44 + 0.85 × (-14) = - 5.3 €
- Για την επιλογή B_2 : ΑΚ = 0.8 × 39 + 0.2 × (- 14) = 28.4 €
- Για την επιλογή B_3 : ΑΚ = 0.95 × 34 + 0.05 × (-14) = 31.6 €

- Για την επιλογή Γ_1 : ΑΚ = 0.05 × 111 + 0.95 × (- 55) = - 46.7 €
- Για την επιλογή Γ_2 : ΑΚ = 0.05 × 61 + 0.95 × (-55) = - 49.2 €

Παρατηρούμε μεγαλύτερο αναμενόμενο κέρδος από την επιλογή A_2 .



Αρχικό ποσό ανα κατηγορία
Επιλογή κατηγορίας
Ποντάρισμα
Υποκατηγορίες
Πιθανότητες νίκης/ήττας
Τελικοί κόμβοι
Αρχή
50
14
55
A
B
Γ
130
115
70
65
80
190
140
A1
A2
B1
B2
B3
Γ1
Γ2
0.2
0.8
0.85
0.15
0.15
0.85
0.8
0.2
0.95
0.05
0.05
0.95
0.05
0.95
62 €
- 50 €
47 €
- 50 €
44 €
- 14 €
39 €
- 14 €
34 €
- 14 €
111 €
- 55 €
61 €
- 55 €

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 : Ανάλυση αποφάσεων

4.1 Εισαγωγή

Όλοι οι άνθρωποι έρχονται καθημερινά στη θέση να λάβουν κάποια απόφαση. Κάποιες αποφάσεις είναι εύκολες και γίνονται συνήθως αυτόματα, ενώ άλλες είναι πιο δύσκολες. Ανάλογα με την απόφαση που πρέπει να πάρει κανείς χρειάζονται και οι αντίστοιχες πληροφορίες που θα τον βοηθήσουν, άλλες αποφάσεις απαιτούν μεγάλο αριθμό πληροφοριών και άλλες μικρότερο. Πολλοί άνθρωποι δεν αξιολογούν καλά την κατάσταση στην οποία βρίσκονται και γι'αυτό το λόγο παίρνουν αποφάσεις βασιζόμενοι στο ένστικτο τους ή ακόμα και στην τύχη. Αυτό γιατί δεν έχουν αναλύσει σωστά τις επιλογές τους και δεν γνωρίζουν όλες τις εναλλακτικές λύσεις στο πρόβλημα που αντιμετωπίζουν. Υπάρχει σαφώς μια υποκειμενικότητα στον τρόπο που κάποιος θα σταθεί απέναντι στο πρόβλημά του αλλά υπάρχει και μια πιο συστηματική προσέγγιση του προβλήματος που καθιστά την απόφαση του πιο εύκολη.

Ο σκοπός της ανάλυσης αποφάσεων είναι αυτός ακριβώς, να αναπτύσσει τεχνικές που θα βοηθήσουν κάποιον (έναν άνθρωπο, μια επιχείρηση, μια κυβέρνηση) να πάρει μια απόφαση. Μπορούμε λοιπόν να πούμε πως η ανάλυση αποφάσεων είναι η διαδικασία που πρέπει να ακολουθήσει κάποιος ώστε να εντοπίσει, να εκτιμήσει και να αποφασίσει ποιά είναι η καλύτερη ενέργεια για το πρόβλημά απόφασης που έχει να λύσει. Η διαδικασία αυτή συχνά περιέχει τη μέθοδο ''Διαίρει και βασίλευε'' , δηλαδή να σπάσουμε το πρόβλημα σε μικρά, κατανοητά και πιο απλοποιημένα υποπροβλήματα και με τη χρήση εργαλείων και τεχνικών που θα αναλύσουμε στη συνέχεια να τα λύσουμε ώστε να προκύψει τελικά λύση στο αρχικό πρόβλημα.

Το περιβάλλον του προβλήματος σε συνδυασμό με τις πληροφορίες που μας δίνονται μας επιτρέπουν να τα κατηγοριοποιήσουμε σε προβλήματα λήψης αποφάσεων υπό βεβαιότητα και σε προβλήματα λήψης αποφάσεων υπό αβεβαιότητα. Υπάρχει και μια περαιτέρω διαφοροποίηση στα προβλήματα υπό αβεβαιότητα, ανάλογα με το αν αυτά μπορούν να αντιμετοπιστούν εφαρμόζοντας την θεωρία των πιθανοτήτων (ρίσκο) ή όχι (αβεβαιότητα).

- Λήψη αποφάσεων υπό βεβαιότητα σημαίνει πως ο υπεύθυνος της απόφασης (decision maker) γνωρίζει οτι τα δεδομένα που έχει στη διάθεσή του ορίζουν απόλυτα, ή σε μεγάλο βαθμό, όλες τις εναλλακτικές λύσεις του προβλήματος. Έτσι οι λύσεις αυτές μπορούν να προσδιοριστούν και να δομηθούν. Οι τεχνικές που ακολουθεί κανείς για ένα τέτοιο πρόβλημα είναι ο γραμμικός προγραμματισμός, ο μη-γραμμικός προγραμματισμός, ο ακέραιος προγραμματισμός κ.α
- Λήψη αποφάσεων υπό ρίσκο σημαίνει οτι τα δεδομένα αυτή τη φορά δεν είναι όπως στην προηγούμενη περίπτωση δομημένα και δεν μας βοηθούν στο να αναγνωρίσουμε εύκολα τις εναλλακτικές. Χρησιμοποιώντας όμως τη γενικότερη θεωρία των πιθανοτήτων μπορούμε να μοντελοποιήσουμε και αυτά τα προβλήματα.
- Λήψη αποφάσεων υπό αβεβαιότητα σημαίνει οτι ούτε τα δεδομένα του προβλήματος είναι καλά ορισμένα ούτε η χρήση των πιθανοτήτων είναι σε θέση να μοντελοποιήσει το πρόβλημα, έτσι τα δεδομένα παραμένουν αόριστα και ασαφή.

Είναι σημαντικό να επισημάνουμε εδώ πως δεν δέχονται όλοι τον διαχωρισμό της λήψης αποφάσεων υπό ρίσκο και υπό αβεβαιότητα καθώς θεωρούν οτι υπάρχει μια υποκειμενικότητα σε κάθε χρήση πιθανοτήτων από τους ανθρώπους και έτσι ισχυρίζονται πως όσα προβλήματα δεν λύνονται υπό βεβαιότητα πολύ απλά αντιμετοπίζονται με αβεβαιότητα.

Ας εφαρμόσουμε όμως τώρα μέρος αυτών που αναλύσαμε μέχρι στιγμής σε ένα θεωρητικά απλό πρόβλημα.

4.1.1 Το πρόβλημα των μετοχών

Στο πρώτο πρόβλημα/παράδειγμα θα παρουσιάσουμε τη διαδικασία που πρέπει να ακολουθηθεί για να αποφασίσουμε πού θα ήταν καλύτερο να επενδύσουμε χρήματα ανάλογα με τις επιλογές που έχουμε.

Ας υποθέσουμε οτι έχουμε στη διάθεσή μας το ποσό των 100,000 $ και πρέπει να αποφασίσουμε αν θα τα επενδύσουμε σε "κερδοσκοπικές μετοχές" (speculative stock) (SS) , μετοχές δηλαδή που έχουν μεγάλο ρίσκο αλλά αν αποδόσουν το κέρδος θα είναι μεγάλο, σε "συντηρητικές μετοχές" (conservative stock) (CS) , που δίνουν κέρδος σε κάθε περίπτωση αλλά ποτέ αρκετά μεγάλο σε σχέση πάντα με το ποσό που επενδύουμε, σε ομόλογα (bonds) (B) ή σε "πιστοποιητικά κατάθεσης" (certificates of deposit) (CD).

Σύμφωνα με τα δεδομένα από προηγούμενα χρόνια που έχουν συγκεντρωθεί μπορεί να δει κανείς τα προσδοκώμενα ποσοστά στα επιτόκια που θα δώσει κάθε είδος μετοχής. Πρέπει να τονίσουμε στο σημείο αυτό οτι τα ποσοστά αυτά δεν είναι απόλυτα, εξαρτόνται από τη ροή της οικονομίας στην χωρα Χ που κάνουμε την έρευνα. Μια οικονομία μπορεί να είναι ***δυνατή*** , αν αναπτύσσεται σε ποσοστό μεγαλύτερο του 5% , ***σταθερή*** , αν αναπτύσσεται σε ποσοστό 3% - 4% και ***αδύναμη*** αν αναπτύσσεται σε ποσοστό μικρότερο του 2%.

Δίνεται ο παρακάτω πίνακας που παρουσιάζει την επιστροφή των τόκων κάθε μετοχής ανάλογα με την κατάσταση της οικονομίας της χώρας Χ.

Πίνακας 1 : Πίνακας επιστροφής τόκων			
	Κατάσταση οικονομίας		
Εναλλακτικές	ΔΥΝΑΤΗ	ΣΤΑΘΕΡΗ	ΑΔΥΝΑΜΗ
SS	18%	10%	-5%
CS	13%	8%	1%
B	4%	5%	6%
CP	7%	3%	2%
καμία κίνηση	0%	0%	0%

Η ανάλυση του παραπάνω πίνακα όπως επίσης και ολόκληρη η διαδικασία που θα ακολουθήσουμε για να βρούμε την καλύτερη επιλογή στην επένδυση του ποσού των 100.000$ που έχουμε παρουσιάζεται στο επόμενο κεφάλαιο που αποτελεί και την αρχή του κυρίως μέρους της εργασίας.

4.2 Λήψη αποφάσεων υπό ρίσκο

Ένας τρόπος να λύσουμε προβλήματα υπό αβεβαιότητα είναι να προσπαθήσουμε στο βαθμό που γίνεται κάθε φορά να μετατρέψουμε την αβεβαιότητα σε βεβαιότητα βρίσκοντας περισσότερα δεδομένα και πληροφορίες απ΄όσα μας δίνονται αρχικά. Όταν αυτό όμως δεν είναι εφικτό (στις περισσότερες περιπτώσεις δεν θα είναι) πρέπει να έχουμε στο μυαλό μας ότι η αβεβαιότητα συχνά μπορεί να αντικατασταθεί μέσω πιθανοτήτων. Έτσι το πρόβλημα μπορεί να επαναπροσδιοριστεί και να λυθεί με μεγαλύτερη ευκολία. Αυτός είναι ο σκοπός αλλά και ο τρόπος αντιμετόπισης προβλημάτων λήψης αποφάσεων υπό ρίσκο. Πρέπει όμως να τονίσουμε ότι η χρήση των μοντέλων των πιθανοτήτων δεν είναι ένας τυφλοσούρτης που οδηγεί σε μια ξεκάθαρη απάντηση αλλά μια σειρά από εργαλεία που βοηθούν τον υπέυθυνο λήψης της απόφασης να κατανοήσει καλύτερα το ρίσκο που περιέχει καθεμιά από τις εναλλακτικές ενέργειες που έχει στη διάθεσή του για να επιλέξει. Με άλλα λόγια κάθε τέτοιο πρόβλημα είναι και υποκειμενικό καθώς ο υπεύθυνος της απόφασης θα έχει τον τελευταίο λόγο.

4.2.1 Εκ των προτέρων πιθανότητες – prior probabilities

Ένα εργαλείο των πιθανοτήτων που βοηθάει στην βαθύτερη κατανόηση ενός προβλήματος είναι οι “εκ των προτέρων πιθανότητες” (prior probabilities). Οι πιθανότητες αυτές δεν είναι τίποτα παραπάνω από πληροφορίες βασισμένες σε παλιότερα αντίστοιχα προβλήματα. Στο πρόβλημα επενδύσεων που μελετάμε οι εκ των προτέρων πιθανότητες παρουσιάζουν την πιθανότητα που αντιστοιχεί ώστε να βρεθεί η χώρα Χ στην κάθε κατάσταση οικονομίας. Οι πιθανότητες αυτές έχουν προκύψει από την μελέτη της οικονομίας της χώρας Χ τα τελευταία χρόνια, και παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα.

	Κατάσταση οικονομίας		
Εναλλακτικές	ΔΥΝΑΤΗ	ΣΤΑΘΕΡΗ	ΑΔΥΝΑΜΗ
SS	18%	10%	-5%
CS	13%	8%	1%
B	4%	5%	6%
CD	7%	3%	2%
καμία κίνηση	0%	0%	0%
prior propabilities	0,1	0,6	0,3

Στο σημείο αυτό μπορούμε να εφαρμόσουμε και μια φιλοσοφία που ξεφεύγει απ’τα μαθηματικά πλαίσια της μοντελοποίησης και στηρίζεται στην απλή λογική, την “φιλοσοφία της υπεροχής” (concept of dominance). Δηλαδή, αν μια από τις εναλλακτικές λύσεις του προβλήματος είναι ξεκάθαρο ότι δεν είναι η καλύτερη δυνατή μπορούμε πολύ απλά να την ‘’διαγράψουμε’’. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα βλέπουμε ότι η εναλλακτική ‘’καμία κίνηση ’’ είναι χειρότερη από το να επενδύσουμε σε CS , B ή CD ανεξάρτητα από την κατάσταση της οικονομίας που επικρατεί, οπότε δεν υπάρχει λογική να την επιλέξουμε. Η διαδικασία της υπεροχής σπάνια θα μας υποδείξει αμέσως τη βέλτιστη λύση, θα αποκλίσει όμως έναν αριθμό λύσεων κάνοντας το έργο μας πιο εύκολο.

4.2.2 Αναμενόμενη μεταμέλεια – expected regret

Ο υπεύθυνος της απόφασης στην προσπάθειά του να λάβει την καλύτερη απόφαση μπορεί μερικές φορές να διαλέξει την πιο σίγουρη οδό, να επιλέξει δηλαδή μια λύση που θα γνώριζει ότι δεν θα του κοστίσει χρήματα αλλά το κέρδος του δεν θα είναι τόσο μεγάλο όσο θα ήταν αν επέλεγε μια άλλη λύση. Για το λόγο αυτό υπάρχει η έννοια της ‘’αναμενόμενης μεταμέλειας’’ (expected regret) ή αλλιώς expected opportunity loss (EOL) και προσδιορίζει για κάθε εναλλακτική το πόσο ενδέχεται να μετανιώσουμε την επιλογή μας. Με την διαδικασία που θα παρουσιάσουμε παρακάτω βρίσκουμε, λαμβάνοντας υπ΄όψην και την κατάσταση της οικονομίας, το EOL για κάθε εναλλακτική και η βέλτιστη λύση θα είναι εκείνη που θα έχει το μικρότερο EOL.

Πως βρίσκω EOL

Όταν διαλέξω τη λύση που θεωρώ βέλτιστη για το πρόβλημα απόφασης που έχω να λύσω αυτό σημαίνει αυτόματα πως δεν μπορώ να επιλέξω κάποια από τις υπόλοιπες λύσεις που έχω στην διαθεσή μου. Για το παράδειγμα των επενδύσεων, πιο συγκεκριμένα, μετά τη λήψη μιας απόφασης και αφού γίνει γνωστή η φύση της οικονομίας μπορώ να προσδιορίσω αν έκανα την καλύτερη επιλογή και αν όχι πόσο θα μετανιώσω αυτή την επιλογή σε σχέση με την καλύτερη επιλογή που πλέον θα είναι γνωστή.

Αν λοιπόν είχαμε επενδύσει σε ομόλογα (B) και η κατάσταση της οικονομίας είναι σταθερή τότε θα είχαμε κέρδος 5% , ενώ αν είχαμε επενδύσει σε κερδοσκοπικές μετοχές (SS) θα είχαμε κέρδος 10% οπότε το EOL θα ήταν 10 – 5 = 5%. Επειδή όμως δεν θα γνωρίζουμε από πριν την κατάσταση της οικονομίας ακολουθούμε την εξής απλή διαδικασία για να υπολογίσουμε το EOL για κάθε εναλλακτική.

- Για κάθε κατάσταση οικονομίας εντοπίζω το βέλτιστο κέρδος που αποδίδει κάθε επιλογή

Παράδειγμα Για την επιλογή SS σε δυνατή οικονομία έχω 18%, σε σταθερή έχω 10% και σε αδύνατη έχω 6%

- Αφαιρώ σε κάθε στήλη (δηλαδή σε κάθε κατάσταση οικονομίας) από τη μέγιστη απόδοση τις υπόλοιπες.

  Παράδειγμα Για την SS εχω 18 – 18 = 0% σε δυνατή οικονομία, 10 – 10 = 0% σε σταθερή οικονομία και 6 – (- 5) =11% σε αδύνατη.

- Πολ/ζω με την εκ των προτέρων πιθανότητα κάθε εναλλακτικής τα υπόλοιπα που προέκυψαν σε κάθε στήλη για την εκάστοτε εναλλακτική και δημιουργώ το άθροισμα

  Παράδειγμα Για την SS έχω EOL = 0.1 * 0 + 0.6 *0 + 0.3 * 11% = 3,3 %

Έτσι προκύπτει ο πίνακας 3 από τον οποίο μπορώ πλέον να επιλέξω ποια από τις επιλογές μου με συμφέρει περισσότερο.

Πίνακας 3 : Αναμενόμενη μεταμέλεια για κάθε εναλλακτική

	Κατάσταση οικονομίας			
Εναλλακτικές	ΔΥΝΑΤΗ	ΣΤΑΘΕΡΗ	ΑΔΥΝΑΤΗ	EOL
SS	18 - 18 = 0%	10 - 10 = 0%	6 - (- 5) = 11%	3,3%
CS	18 - 13 = 5%	10 - 8 = 2%	6 - 1 = 5%	3,2%
B	18 - 4 = 14%	10 - 5 = 5%	6 - 6 = 0%	4,4%
CD	18 - 7 = 11%	10 - 3 = 7%	6 - 2 = 4%	6,5%
DN	18 - 0 = 18%	10 -0 =10%	6 - 0 = 6%	9,6%
Prior propabilities	0,1	0,6	0,3	

Το κριτήριο για την επιλογή της βέλτιστης λύσης είναι όπως αναφέραμε και παραπάνω η ελαχιστοποίηση του EOL. Άρα, στο συγκεκριμένο παράδειγμα επενδύσεων βέλτιστη λύση αποτελεί η επένδυση του ποσού σε ‘’συντηριτικές μετοχές’’ (CS).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 : Δυναμικός προγραμματισμός

5.1 Εισαγωγή

Ο δυναμικός προγραμματισμός είναι ένα χρήσιμο εργαλείο που μας βοηθάει να πάρουμε μια σειρά από αποφάσεις. Αποτελεί μια συστηματική διαδικασία που ακολουθώντας την μπορούμε να φτάσουμε στη λύση προβλημάτων που από τη φύση τους απαιτούν επαναλαμβανόμενες αποφάσεις. Σε αντίθεση με τον γραμμικό προγραμματισμό δεν υπάρχει μια τυπική μοντελοποίηση των δεδομένων που θα μας οδηγήσει στη βέλτιστη λύση των προβλήματων που αναφέραμε. Ο δυναμικός προγραμματισμός είναι ουσιαστικά η προσέγγιση με την οποία ο υπεύθυνος λήψης της απόφασης, χρησιμοποιώντας σε μεγάλο βαθμό την προσωπική του κρίση και ένστικτο, θα καταλίξει στη βέλτιστη λύση.

5.2 Το πρόβλημα της περιοδείας

Ένας ερασιτεχνικός θίασος αποφασίζει ότι η περιοδεία του για το καλοκαίρι θα ξεκινάει από την Αθήνα και θα τερματίζει στην Αλεξανδρούπολη. Στο πλαίσιο της περιοδείας αυτής ο θίασος θα πραγματοποιήσει άλλες 3 ενδιάμεσες παραστάσεις σε κάποιες επαρχιακές πόλεις. Θεωρούμε την κάθε πόλη με ένα γράμμα, έστω Α η Αθήνα, Κ η Αλεξανδρούπολη και Β,Γ,Δ,Ε,Ζ,Η,Θ και Ι οι ενδιάμεσες πόλεις από τις οποίες θα επιλέξουν 3 για να συμπεριλάβουν στην περιοδεία τους.

Ο θίασος θα επιλέξει τρεις από αυτές τις πόλεις ανάλογα με τον κίνδυνο που διατρέχουν τα σκηνικά και τα κοστούμια των συντελεστών να χαθούν ή να καταστραφούν λόγω μη επαρκούς ασφάλειας κατά την μεταφορά τους από μια πόλη στην άλλη και την παραμονή τους στην εκάστοτε πόλη. Σημειώνεται ότι η δεύτερη παράσταση θα λάβει χώρα σε μια εκ των πόλεων Β,Γ ή Δ , η τρίτη σε μια εκ των Ε,Ζ ή Η , η τέταρτη στην Ι ή Θ και όπως είναι ήδη κατανοητό η πρώτη στην Αθήνα και η τελευταία στην Αλεξανδρούπολη.

Ο κίνδυνος που διατρέχουν τα υπάρχοντα του θιάσου κατά την μεταφορά τους έχει αποτιμηθεί και παρουσιάζεται στους παρακάτω πίνακες.

	Β	Γ	Δ
Α	2	4	3

	Ε	Ζ	Η
Β	7	4	6
Γ	3	2	4
Δ	4	1	5

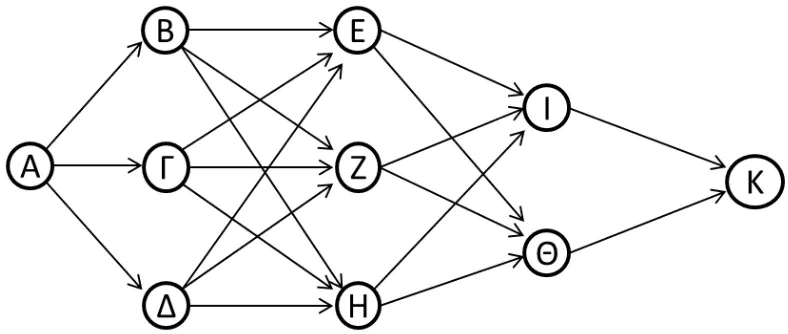
	Ι	Θ
Ε	1	4
Ζ	6	3
Η	3	3

	Κ
Ι	3
Θ	4

Στόχος του θιάσου είναι να εκτελέσει τις 5 παραστάσεις ελαχιστοποιώντας τον κίνδυνο ζημιάς που διατρέχουν τα υπάρχοντά του. Ψάχνουμε λοιπόν την διαδρομή εκείνη που είναι πιο συμφέρουσα (ακίνδυνη) για το θίασο.

Πρέπει να σημειωθεί ότι ο αριθμός των διαφορετικών λύσεων του προβλήματος είναι 18, θα μπορούσε δηλαδή κάποιος να υπολογίσει τον αθροιστικό κίνδυνο για κάθε διαδρομή και να επιλέξει εκείνη με το μικρότερο άθροισμα. Για παράδειγμα η διαδρομή Α → Β → Ζ → Θ → Κ δίνει άθροισμα 13. Η λύση που θα παρουσιάσουμε όμως είναι μια γενική λύση σε παρόμοια προβλήματα δυναμικού προγραμματισμού που δεν θα είναι εφικτή η παραπάνω διερεύνηση καθώς τα προβλήματα μπορεί να έχουν μεγάλο αριθμό λύσεων και η βέλτιστη λύση δεν θα μπορεί να βγεί από δοκιμές.

Παρακάτω δίνεται το διάγραμμα με τις πιθανές διαδρομές του θιάσου.



Μοντελοποίηση του προβλήματος

Ας θέσουμε x_n (n=1,2,3,4) τον επόμενο προορισμό του τσίρκου όταν ήδη βρίσκεται στην n στάση του. Επομένως η διαδρομή του θα είναι της μορφής :

$A \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_4$ όπου x_4 = Κ (Αλεξανδρούπολη)

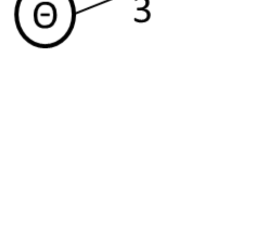
Λύση του προβλήματος

n = 4

Όπως είπαμε και προηγουμένως ξεκινάμε από το τέλος και φτάνουμε σταδιακά στην αρχή (δηλαδή τον υπολογισμό του f_1*(Α)). Όταν ο θίασος βρίσκεται στην προτελευταία πόλη s (Θ ή Ι) με σκοπό να πάει στην Αλεξανδρούπολη (Κ) θα έχει ακόμη μια διαδρομή να ακολουθήσει , την Θ → Κ ή την Ι → Κ οι οποίες δίνουν f_4(Θ,Κ) = 3 και f_4(Ι,Κ) = 4 αντίστοιχα. h

S	**f4*(s)**	**x4**
Θ	3	Κ
Ι	4	Κ

↔



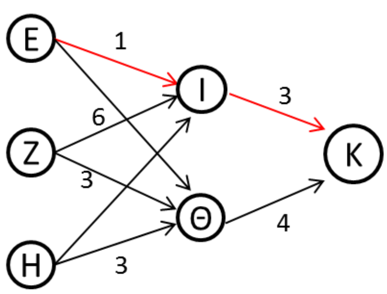
n = 3

Ένα στάδιο πιο πίσω τώρα και ο θίασος βρίσκεται στην τρίτη πόλη της περιοδείας του, οπότε s = Ε, Ζ ή Η και θα διαλέξει να πάει είτε στην πόλη Θ είτε στην πόλη Ι. Ας υποθέσουμε ότι είναι στην πόλη Ζ , έτσι οι αντίστοιχες τιμές του κινδύνου για τα υπάρχοντά τους θα είναι f_3(Ζ,Ι) = 6 και f_3(Ζ,Θ) = 3. Αν επιλέξει την πόλη Ι το ελάχιστο ρίσκο που καλείται να πάρει μετά , δηλαδή Ι → Κ, είναι 3 που στον παραπάνω πίνακα απικονίζεται ως f_4*(Ι) = 3. Αν επιλέξει λοιπόν τη διαδρομή Ζ → Ι → Κ το συνολικό αποτιμόμενο ρίσκο θα είναι 6 + 3 = 9 , αλλιώς αν επιλέξει τη διαδρομή Ζ → Θ → Κ θα είναι 3 + 4 = 7

	f3(s,x3)			
	X3			
s	**Ι**	**Θ**	**f3*(s)**	**x3***
Ε	4	8	4	Ι
Ζ	9	7	7	Θ
Η	6	7	6	Ι

Υπενθυμίζουμε πως f3*(s) είναι η ελάχιστη ποσότητα από την πόλη x3 μέχρι το Κ.

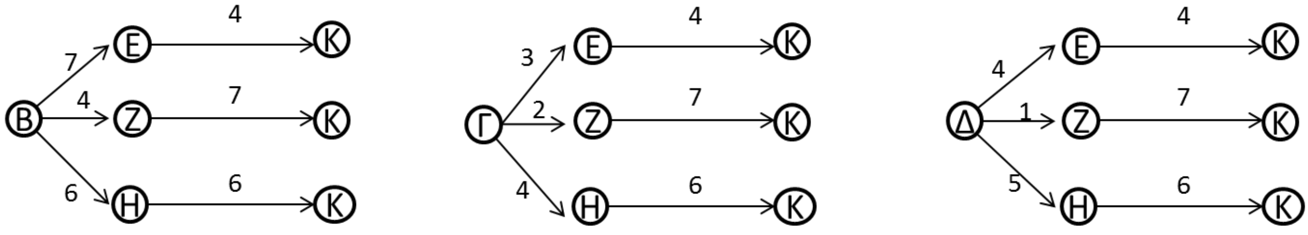
Το παραπάνω διάγραμμα φανερώνει πως για τα πρώτα δύο βήματα της επίλυσης του προβλήματος (n=4 και n=3) το μικρότερο ρίσκο για το θίασο αποτελεί η διαδρομή Ε → Ι → Κ που δίνει αθροισμα 4. Θα μπορούσε λοιπόν κάποιος να σκεφτεί ότι θεωρούμε δεδομένο το γεγονός ότι ο θίασος θα συμπεριλάβει την πόλη Ε στη περιοδεία του και θα συνεχίσουμε ψάχνοντας τον ελάχιστο κίνδυνο μέχρι την πόλη αυτή. Παρ΄όλα αυτά κανείς δεν μας εγγυάται ότι μέχρι να φτάσουμε στην Ε ο κίνδυνος θα είναι μικρότερος απ’ότι να πάμε στην Ζ ή Η πόλη, για το λόγο αυτό συνεχίζουμε την προσέγγιση μας για τα βήματα n=2 και n=1.



n = 2

Αν ανατρέξουμε στην αρχή του προβλήματος θα δούμε ότι ισχύουν τα εξής :

Β → Ε = 7	Γ → Ε = 3	Δ → Ε = 4
Β → Ζ = 4	Γ → Ζ = 2	Δ → Ζ = 1
Β → Η = 6	Γ → Η = 6	Δ → Η = 5



min Β → Κ = 11 min Γ → Κ = 7 min Δ → Κ = 8

Η παραπάνω ανάλυση παρουσιάστηκε για να γίνει πιο κατανοητός ο τρόπος με τον οποίο καταλίγουμε στους αντίστοιχους πίνακες σε κάθε στάδιο επίλυσης του προβλήματος. Δηλαδή η στήλη με τα f_2*(s) περιέχει τις μικρότερες τιμές της γραμμής που δίνει τα $f_2(s,x_2)$ που προκύπτουν για κάθε συνδυασμό από τα γραφήματα παραπάνω.

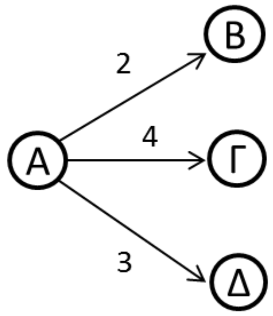
	f2(s,x2)				
	X2				
s	**E**	**Z**	**H**	**f2*(s)**	**x2***
B	11	11	12	11	Ε ή Ζ
Γ	7	9	10	7	Ε
Δ	8	8	11	8	Ε ή Ζ

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Στη στήλη x_2* όταν λέμε Ε ή Ζ σημαίνει πως από την πόλη s που βρίσκονται το f_2*(s) για να πάνε στην πόλη Ε και στην πόλη Ζ είναι το ίδιο. Δηλαδή αν επιλεγεί η πόλη Β τότε θα υπάρχουν δυο διαδρομές που θα δίνουν ίδιο συνολικό ρίσκο.

n = 1

Συνεχίζοντας στο τελικό στάδιο της μελέτης μας θα ακολουθήσουμε την ίδια τακτική μόνο που τώρα είναι δεδομένο ότι ο θίασος θα ξεκινήσει από την πόλη Α. Πραγματοποιώντας τους ‘ιδιους υπολογισμούς τα αποτελέσματα που παίρνουμε είναι πολύ ενδιαφέροντα.



Σύμφωνα με τον πίνακα του βήματος n=2 το ελάχιστο ρίσκο του θιάσου για καθεμία από τις πόλεις Β,Γ και Δ μέχρι τον τελικό προορισμό είναι :

Β → Κ = 11

Γ → Κ = 7

Δ → Κ = 8

Άρα ο τελευταίος πίνακας θα είναι ο παρακάτω :

	f1(A,x1)				
	x1				
s	**B**	**Γ**	**Δ**	**f1*(A,x1)**	**x1***
A	13	11	11	11	Γ ή Δ

Ας δούμε λοιπόν τα αποτελέσματα και ας παρουσιάσουμε την λύση στο πρόβλημα της περιοδείας.

Σύμφωνα με τον πίνακα παραπάνω το μικρότερο συνολικό ρίσκο που έχει αποτιμηθεί σε αριθμούς και καλείται να πάρει ο θίασος είναι 11 , το πρώτο λοιπόν ερώτημα έχει απαντηθεί. Ποιά είναι όμως η διαδρομή που αντιστοιχεί στο νούμερο αυτό;

Παρατηρούμε πως το ρίσκο θα είναι 11 είτε ο θίασος διαλέξει να πάει στην πόλη Γ είτε διαλέξει την πόλη Δ.

- <u>Αν διαλέξει την πόλη Γ</u>

  Ανατρέχουμε στον πίνακα του βήματος n=2 και βλέπουμε ότι μετά την πόλη Γ μικρότερο ρίσκο είναι να πάει στην πόλη Ε , έπειτα στην πόλη Ι για να καταλίξει στην Κ.

- <u>Αν διαλέξει την πόλη Δ</u>

  Κάνοντας το ίδιο πράγμα βλέπουμε ότι μετά την πόλη Δ μπορεί να πάει είτε στην Ε είτε στην Ζ (βλ. παρατήρηση βήματος n=2). Δημιουργούνται λοιπόν δύο διαδρομές με τον ίδιο κίνδυνο.

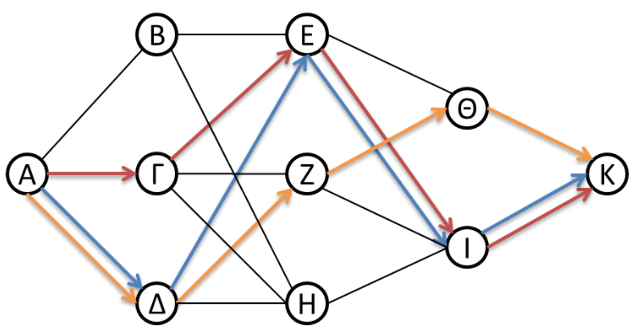
Τελικά έχουμε ότι οι πιο συμφέρουσες διαδρομές είναι τρείς και είναι οι εξής :

Α → Γ → Ε → Ι → Κ

Α → Δ → Ε → Ι → Κ

Α → Δ → Ζ → Θ → Κ

Γραφική λύση του προβλήματος της περιοδείας



5.3 Χαρακτηριστικά των προβλημάτων δυναμικού προγραμματισμού

Το πρόβλημα της περιοδείας αποτελεί ένα πρότυπο παράδειγμα προβλήματος δυναμικού προγραμματισμού. Ένας τρόπος για να κατανοήσουμε σε βάθος την έννοια του δυναμικού προγραμματισμού είναι να γνωρίζουμε τα στάδια μελέτης αλλά και τα χαρακτηριστικά προβλημάτων αντίστοιχων του προβλήματος που αναλύσαμε.

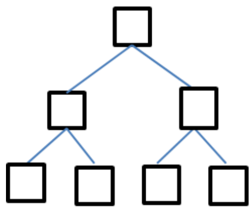
Αυτά τα χαρακτηριστικά παρουσιάζονται συνοπτικά παρακάτω :

1. Τα προβλήματα Δ.Π (δυναμικού προγραμματισμού) χωρίζονται σε στάδια στα οποία απαραίτητος είναι ο σχεδιασμός μιας πολιτικής ή αλλιώς μιας διαδικασίας λήψης απόφασης ώστε να προχωρήσουμε στο επόμενο στάδιο της επίλυσης. Το πρόβλημα της περιοδείας χωρίζεται σε τέσσερα στάδια σε καθένα απ'τα οποία ο θίασος έπρεπε να επιλέξει τον επόμενο του προορισμό.

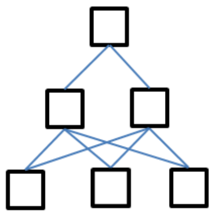
2. Κάθε στάδιο ενός προβλήματος περιλαμβάνει ένα πλήθος πιθανών καταστάσεων στις οποιές ενδέχεται να βρεθούμε. Η επιλογή της κάθε κατάστασης επηρεάζει και την μετέπειτα ροή της επίλυσης. Στο πρόβλημα της περιοδείας το ρόλο αυτώ των πιθανών καταστάσεων παίζουν οι διάφορες πόλεις στις οποίες ο θίασος έχει τη δυνατότητα να δώσει παράσταση. Η επιλογή μιας εξ αυτών σηματοδοτεί τη λήξη της συγκεκριμένης φάσης και επηρεάζει την αντίστοιχη απόφαση για το επόμενο στάδιο.

3. Η διαδικασία λήψης απόφασης που αναφέραμε παραπάνω (η τακτική που ακολουθούμε σε κάθε βήμα) στοχεύει στο να συνδέει την απόφαση της τορινής φάσης με την αρχή της αμέσως επόμενης. Σε κάποια προβλήματα η επιλογή μιας κατάστασης (Α) έναντι μιας κατάστασης (Β) μπορεί σημαίνει τον αυτόματο αποκλεισμό μιας σειράς από καταστάσεις

για το μέλλον (γράφημα α.1) , στο πρόβλημα της περιοδείας αντίθετα δεν υπάρχει αυτός ο περιορισμός καθώς η επιλογή μιας πόλης δεν αποκλείει την επιλογή άλλων πόλεων στις επόμενες φάσεις (γράφημα α.2)



γράφημα α.1



γράφημα α.2

4. Η διαδικασία επίλυσης του προβλήματος στηρίζεται στην αρχή της βέλτιστης επιλογής (principle of optimality) του Δ.Π. Δηλαδή δεν μας ενδιαφέρει και συνεπώς δεν επηρεάζει την ροή της επίλυσης ο τρόπος και ο λόγος που βρεθήμε στην κατάσταση που βρισκόμαστε αρκεί από κει πέρα να εργαστούμε για να εντοπίσουμε την βέλτιστη επόμενη επιλογή.

5. Όπως έχουμε αναφέρει ο Δ.Π απαιτεί την προσέγγιση του προβλήματος από το τέλος προς την αρχή. Στο παράδειγμα της περιοδείας στόχος μας ήταν να ελαχιστοποιήσουμε το ρίσκο του θιάσου κατά την περιοδεία του, αυτό που κάναμε ήταν να ορίσουμε την ποσότητα αυτή σαν μια μεταβλητή και να παρακολουθούμε την εξέλιξη στην τιμή της. Η τιμή της αυξανόταν όσο πηγαίναμε σταδιακά ένα βήμα πίσω.

6. Τέλος βασική προυπόθεση για τη λύση προβλημάτων Δ.Π (όπως και σε όλο το φάσμα της επιχειρησιακής έρευνας) είναι η σωστή μοντελοποίηση των μεγεθών που θα αναφέρονται στο πρόβλημα και η κατά βήμα παρουσίασή τους σε πίνακες και γραφήματα που μας επιτρέπουν την ευκολότερη ερμηνεία τους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6 : Θεωρία Παιγνίων

6.1 Εισαγωγή

Στην προηγούμενη ενότητα είχαμε την ευκαιρία να εξετάσουμε τις διαδικασίες που ακολουθεί ο άνθρωπος που χαρακτηρίσαμε υπεύθυνο λήψης της απόφασης με στόχο να μεγιστοποιήσει το όφελος του. Η μεγάλη διαφορά στην ενότητα αυτή έγγειται στο γεγονός ότι σε μια ρεαλιστική κατάσταση λήψης απόφασης οι πλευρές που θα αναζητούν τη βέλτιστη λύση θα είναι παραπάνω από μια. Δεν πρόκειται δηλαδή για την αντιμετόπιση ενός προβλήματος που απαιτεί βελτιστοποίηση ενός προκαθορισμένου κριτηρίου επιλογής κάποιου ανθρώπου ή κάποιας επιχείρησης αλλά για μια κατάσταση ανταγωνιστικής αλληλεξάρτησης. Το αντικείμενο της θεωρίας παιγνίων περιγράφει αυτόν τον ανταγωνισμό που προκύπτει απ'τα αντικρουόμενα ενδιαφέροντα δύο ή περισσοτέρων ¨αντίπαλων¨ ομάδων. Για την κατανόηση της θεωρίας παιγνίων πρέπει να γνωρίσουμε τα βασικά στοιχεία που συνθέτουν ένα τέτοιο παίγνιο.

- <u>Παίκτης</u> : Ο παίκτης δεν ελέγχει όλους τους παράγοντες που επηρεάζουν το αποτέλεσμα του παίγνιου αλλά παίρνει αποφάσεις σύμφωνα με το δικό του συμφέρον. Ο παίκτης μπορεί να είναι ένα άτομο,μια ομάδα ατόμων, μια επιχείρηση ή ακόμα και το κράτος που έχει αντικειμενικό στόχο να αριστοποιήσει το σκοπό του.

- <u>Στρατηγική</u> : Είναι το σύνολο των κανόνων που ορίζουν τις εφικτές και θεμιτές επιλογές που μπορεί να ακολουθήσει ο κάθε παίκτης για να φτάσει στο στόχο του. Ο παίκτης καταστρώνει τη στρατηγική του γνωρίζοντας όλες τις πληροφορίες που αφορούν τις κινήσεις των αντιπάλων του ώστε να πραγματοποιήσει την μεγιστοποίηση ή ελαχιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης που έχει δημιουργήσει για να ¨κερδίσει¨ το παιχνίδι.

    - <u>Αμιγής στρατηγική</u> : Ο κάθε παίκτης επιστρατεύει μια από τις δυνατές στρατηγικές του επιλογές.

    - <u>Μεικτή στρατηγική</u> : Περιλαμβάνει συνδυασμό στρατηγικών.

- Λύση του παιγνίου : Όταν καταφέρουμε να προσδιορίσουμε την άριστη στρατηγική καθεμιάς πλευράς που συμμετέχει τότε έχουμε βρεί τη λύση του παιγνίου.

Το επόμενο παράδειγμα αποτελεί την απλούστερη μορφή παιγνίου, αποτελείται από δύο παίκτες οι οποίοι χρησιμοποιούν αμιγή στρατηγική σε ένα παίγνιο μηδενικού αθροίσματος (δηλαδή σε ένα παιχνίδι που το κέρδος του ενός παίκτη ισούται με τη ζημιά του αντιπάλου).

		Στρατηγικές του Β	
		B1	**B2**
Στρατηγικές του Α	**A1**	8	-2
	A2	4	3

Ο πίνακας διαβάζεται ως εξής:

Αν ο παίκτης Α διαλέξει την στρατηγική A_1 και ο Β παίκτης την στρατηγική B_1 το κέρδος του Α θα είναι 8,όση και η ζημιά του Β. Συμπεραίνουμε ότι ο Β θα βγεί κερδισμένος μόνο στην περίπτωση A_1-B_2.

Όπως είπαμε και νωρίτερα ο κάθε παίκτης γνωρίζει τη στρατηγική του αντιπάλου του, έτσι στην προσπάθειά του ο καθένας να μεγιστοποιήσει το κέρδος ή να ελαχιστοποιήσει τη ζημιά του θα προκύψουν οι επόμενες σκέψεις για τη ροή του παιχνιδιού.

Παίκτης Α

Ο παίκτης Α θέλοντας να έχει το μέγιστο δυνατό κέρδος θα ήταν λογικό να επιλέξει την A_1. Στην περίπτωση αυτή όμως με B_2 θα έβγαινε χαμένος, κάτι που δεν θα επιλέξει. Συνεπώς, καταλίγει πως γι'αυτόν η συμφέρουσα πορεία είναι η A_2 στην οποία το κέρδος του είναι εγγυημένο.

Παίκτης Β

Ο παίκτης Β, φανερά σε μειονεκτική θέση, θα προσπαθήσει να ελαχιστοποιήσει τη ζημιά του. Δεδομένου ότι ο Α δεν θα ρισκάρει και θα επιλέξει A_2 ο Β θα αναγκαστεί να παίξει με B_2 διότι έτσι έχει την μικρότερη ζημιά.

Οι δύο αυτές στρατηγικές συνθέτουν την λύση του παιγνίου και η τιμή 3 είναι η λύση του παιγνίου.

6.2 Στρατηγικές minimax και maximin

Μένουμε στο ίδιο παράδειγμα για να γνωρίσουμε τις στρατηγικές minimax και maximin. Οι στρατηγικές αυτές υπάρχουν για να προσδιορίζουν σύμφωνα με τον πίνακα του παιχνιδιού πώς οι παίκτες βρίσκουν που μεγιστοποιείται το κέρδος και αντίστοιχα που ελαχιστοποιείται η ζημιά τους.

Ο παίκτης Α που κάνει το επιθετικό παιχνίδι και έχει σίγουρο το κέρδος γνωρίζει ότι ο Β θα του επιτρέψει να πάρει όσο το δυνατόν λιγότερα όποια και να ναι η επιλογή του πρώτου. Το ελάχιστο κέρδος για τον Α θα είναι :

Επιλογή Α1 : ελάχιστο κέρδος = -2 (ζημιά)

Επιλογή Α2 : ελάχιστο κέρδος = 3

Άρα το maximin ποσό, το μέγιστο απ΄τα ελάχιστα δηλαδή είναι η τιμή 3. Αντίστοιχα για τον Β που η ήττα είναι δεδομένη, στόχος πλέον αποτελεί η ελάχιστη ζημιά.

Επιλογή Β1 : μέγιστη ζημιά = 8

Επιλογή Β2 : μέγιστη ζημία = 3

Άρα το minimax ποσό, η ελάχιστη από τις μέγιστες ζημιές που θα προσπαθήσει να του προσπαθήσει να του προκαλέσει ο Α είναι το 3.

		Στρατηγικές του Β		
		B1	**B2**	Ελάχιστο σειράς
Στρατηγικές του Α	**A1**	8	-2	-2
	A2	4	3	3
Μέγιστο στήλης		8	3	**V=3**

Προφανώς επειδή το παιχνίδι είναι μηδενικού αθροίσματος maximin(A)=minimax(B)=3.

6.3 Σημείο ισορροπίας

Αν σε ένα παίγνιο το στοιχείο πληρωμών της minimax στρατηγικής ισούται με το στοιχείο της maximin στρατηγικής του αντίπαλου παίκτη τότε το σημείο αυτό καλείται σημείο ισορροπίας και δείχνει ποιά είναι η τιμή του παιγνίου. Από το σημείο ισορροπίας δηλαδή μπορούν να προσδιοριστούν οι στρατηγικές που ακολούθησε ο κάθε παίκτης. Σε ένα τέτοιο παιχνίδι η ύπαρξη σημείου ισορροπίας υποδηλώνει πως κάθε παίκτης έχει κάνει τη σοφότερη γι'αυτόν επιλογή αφού δεν υπάρχει τρόπος να επωφεληθεί περισσότερο αλλάζοντας στρατηγική.

Οι επόμενοι δύο πίνακες πληρωμών αποτελούν παραδείγματα παιγνίων χωρίς σημείο ισορροπίας και με παραπάνω από ένα σημεία ισορροπίας αντίστοιχα.

Στρατηγικές του Α	**Στρατηγικές του Β**			Ελάχιστο σειράς
	B1	**B2**	**B3**	
A1	7	1	3	1
A2	4	10	8	4
Μέγιστο στήλης	7	10	8	4≠7

Το παιχνίδι που αναπαριστά ο παραπάνω πίνακας είναι και πάλι ευνοηκό για τον παίκτη Α καθώς δεν υπάρχει γι'αυτόν πιθανότητα ζημιάς, ενώ ο Β θα προσπαθήσει για ακόμη μια φορά να ελαχιστοποιήσει τη ζημιά του. Λόγω της μη ύπαρξης σημείου ισορροπίας το παιχνίδι αποκτά μεγαλύτερο ενδιαφέρον καθώς δεν είναι εμφανές ποιές στρατηγικές θα επιλεγούν και ποιές όχι από τους δύο παίκτες. Είναι μια κατάσταση η οποία αν αποτελούσε αληθινό επιχειρηματικό ανταγωνισμό σημαντικό ρόλο θα έπαιζαν η ψυχολογία των παικτών και τα διάφορα παιχνίδια μυαλού που θα υπέβαλε ο κάθε παίκτης τον αντίπαλό του για να τον αποπροσανατολίσει.

Αντίθετα, στον παρακάτω πίνακα πληρωμών εύκολα διακρίνουμε δύο σημεία ισορροπίας πράγμα που σημαίνει και δύο βέλτιστες στρατηγικές με το ίδιο αποτέλεσμα. Παρατηρούμε δηλαδή ότι για A_1 - B_1 και A_1 - B_3 παίρνουμε το ίδιο αποτέλεσμα.

Στρατηγικές του Α	**Στρατηγικές του Β**			Ελάχιστο σειράς
	B1	**B2**	**B3**	
A1	3	5	3	3
A2	-2	0	1	-2
A3	1	4	-3	-3
Μέγιστο στήλης	3	5	3	V = 3

6.3.1 Παίγνια δύο παικτών με σταθερό άθροισμα

Μέχρι στιγμής συναντήσαμε παιχνίδια δύο παικτών μηδενικού αθροίσματος, παιχνίδια στα οποία το κέρδος του ενός παίκτη ισούται με τη ζημιά του άλλου. Δεν είναι όμως πάντα έτσι. Θα υπάρχουν περιπτώσεις όπου για οποιονδήποτε συνδυασμό κινήσεων οι ομάδες θα μοιράζονται το κέρδος και τη ζημιά αναλόγως. Αυτά είναι τα παιχνίδια μηδενικού αθροίσματος. Αν η σταθερά του παιγνίου είναι θετικός αριθμός τότε βρισκόμαστε στη περίπτωση που οι αντίπαλες ομάδες μοιράζονται (όχι αναγκαστικά εξίσου) το κέρδος, ενώ αν η σταθερά πάρει αρνητική τιμή και οι δύο ομάδες θα έχουν απώλειες. Ένα τέτοιο παιχνίδι σταθερού αθροίσματος παρουσιάζεται στο παρακάτω παράδειγμα.

Παράδειγμα

Δύο ανταγωνιστικές επιχειρήσεις Α και Β βρίσκονται σε μια κατάσταση δυοπωλίου, δηλαδή μοιράζονται τις πωλήσεις ίδιου προιόντος σε μια συγκεκριμένη περιοχή. Οι πωλήσεις αμφότερων την τελευταία τριετία ανέρχονται στο ποσό των 200 εκατομμυρίων ετησίως. Κάθε επιχείρηση στην προσπάθειά της να αποσπάσει πωλήσεις από την αντίπαλη επιχείρηση έχει στη διάθεσή της από τρεις κινήσεις.

α) Την βελτίωση του προιόντος.

β) Την αλλαγή της συσκευασίας.

γ) Την αύξηση των διαφημιστικών δαπανών.

Τα κόστη των τριων εναλλακτικών δεν διαφέρουν σημαντικά, είναι όμως αρκετά υψηλά ώστε να είναι επικερδής η εφαρμογή μιας μόνο από τις παραπάνω στρατηγικές. Στον παρακάτω πίνακα δίνονται οι προβλεπόμενες πωλήσεις για το επόμενο έτος της επιχείρησης Α (απ΄όπου μπορούμε να συμπεράνουμε και τις πωλήσεις της επιχείρησης Β αφού το πρόβλημα ανάγεται σε ένα παίγνιο σταθερού αθροίσματος με σταθερά c = 200).

Στρατηγικές	**Στρατηγικές του Β**			Ελάχιστο
του Α	**Β1**	**Β2**	**Β3**	σειράς
Α1	80	100	115	80
Α2	130	90	120	90
Α3	120	110	115	110
Μέγιστο στήλης	130	110	120	V = 110

Παίγνιο σταθερού αθροίσματος με c = 200 στη συγκεκριμένη περίπτωση συνεπάγεται ότι οι πωλήσεις του Α και του Β συνολικά θα είναι 200 εκατομμύρια. Στον πίνακα βλέπουμε τους τρόπους με τους οποίους ο καθένας θα προσπαθήσει να μεγιστοποιήσει το κέρδος του καθώς περίπτωση ζημιάς δεν μπορεί να προκύψει για κανέναν.

Στην περίπτωση $A_1 - B_1$ η επιχείρηση Α θα έχει πωλήσεις που ισοδυναμούν με κέρδος 80 εκατ. άρα ο αντίπαλος θα είχε αντίστοιχα πωλήσεις 120 εκατ. Χρησιμοποιώντας τις στρατηγικές minimax και maximin καταλίγουμε πως λύση του παιχνιδιού αποτελεί η στρατηγική $A_3 - B_2$ με τιμή για τον Α 110 εκατομμύρια.

6.3.2 Nash equilibrium – σημείο ισορροπίας κατά Nash

Το παράδειγμα που θα αναλύσουμε παρακάτω είναι ευρέως αποδεκτό ως ένα από τα πιο κατατοπιστικά και εύστοχα παραδείγματα για να εξηγήσει κάποιος την σημασία της ισορροπίας κατά Nash.

Το δίλημμα του φυλακισμένου

Η αστυνομία συλλαμβάνει δύο δράστες τον Al και τον Bill με την κατηγορία του εμπορείου ναρκωτικών. Όταν οι δράστες φτάνουν στο αστυνομικό τμήμα ο αστυνόμος παρατηρεί ότι τα προσωπά τους θυμίζουν τους δράστες μιας ένοπλης ληστείας που είχε λάβει χώρα λίγο καιρό πριν. Οι δύο δράστες ανακρίνονται ξεχωριστά και ο καθένας μαθαίνει τις επιλογές που έχει:

<u>Αστυνόμος στον Al</u>: Η ελάχιστη ποινή για το εμπόρειο ναρκωτικών ανέρχεται σε 2 χρόνια φυλάκιση. Αν ομολογήσεις την διπλή κατηγορία για το εμπόρειο και την ληστεία και ο Bill αρνηθεί να ομολογήσει τότε θα κάνεις 1 χρόνο φυλακή και ο Bill 10. Αν δεν ομολογήσεις και ομολογήσει ο Bill τότε θα κάνει αυτός 1 χρόνο και εσύ 10. Αν και οι δύο ομολογήσετε τότε θα περάσετε από 3 χρόνια ο καθένας στη φυλακή. Και τέλος αν αρνηθείτε τις κατηγορίες τότε θα πάτε από 2 χρόνια ο καθένας στη φυλακή.

‘Ιδια συζήτηση έκανε ο αστυνιμικός με τον Bill. Επομένως καταλαβαίνουμε ότι οι δύο κατηγορούμενοι γνωρίζοντας τις συνέπειες που θα έχει η κατάθεση τους πρέπει να επιλέξουν πως θα δράσουν στην συνέχεια. Παρακάτω παρουσιάζεται το σε έναν πίνακα τιμών το δίλημμα τους.

BILL

AL

	Ομολογεί	Αρνείται
Ομολογεί	(3,3)	(1,10)
Αρνείται	(10,1)	(2,2)

<u>Στρατηγική του Al :</u>

Ο Al δεν γνωρίζει από πριν τι πρόκειται να κάνει ο Bill. Αν ο Bill ομολογήσει τότε τον συμφέρει να ομολογήσει για να κάνει αντί 10 χρόνια 3. Αν ο Bill αρνηθεί τις κατηγορίες τότε ο Al πάλι θα διαλέξει να ομολογήσει καθώς θα κάνει 1 χρόνο. Επομένως ανεξάρτητα από το τι θα κάνει ο Bill συμφέρουσα κίνηση για τον Al είναι να ομολογήσει.

<u>Στρατηγική του Bill :</u>

Ακριβώς με το ίδιο σκεπτικό θα δράσει και ο Bill. Και προφανώς βλέπουμε ότι για τους ίδιους λόγους τον συμφέρει κι αυτόν να ομολογήσει.

<u>ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ</u>

Καταλίγουμε στο συμπέρασμα ότι στο δίλημμα του φυλακισμένου υπάρχει σωστή απόφαση που μπορούν να λάβουν οι δύο πλευρές και θα είναι η πιο συμφέρουσα ανεξάρτητα με το τι επιλογή θα κάνει ο αντίπαλος παίκτης. Άρα μπορούμε να πούμε πως στο παραπάνω πρόβλημα υπάρχει **ισορροπία κατά Nash**. Για την ισορροπία κατά Nash **(Nash equilibrium)** έχει δωθεί ο κάτοθι ορισμός.

<u>Ορισμός :</u> Ισορροπία Nash ονομάζεται το στρατηγικό προφίλ τέτοιο ώστε η στρατηγική κάθε παίκτη να είναι η βέλτιστη απόφαση του σε σχέση με το σύνολο των στρατηγικών που ακολουθούν οι υπόλοιποι παίκτες. Σε ισορροπία Nash κανένας παίκτης δεν έχει λόγο να αποκλίνει από την αρχική του στρατηγική επιλογή.

6.4 Μεικτές στρατηγικές

Θα μελετήσουμε τώρα και την περίπτωση εκείνη όπου σε ένα παίγνιο δεν είναι εφικτή η επιλογή μιας αρχικής αμιγούς στρατηγικής, ένα παιχνίδι στο οποίο δεν υφίσταται ισορροπία κατά Nash. Στην περίπτωση αυτή οι παίκτες επιλέγουν μια στρατηγική κίνηση με πιθανότητα μικρότερη της μονάδας.

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ</u>

		Στρατηγικές του B		
		B1	**B2**	Ελάχιστο σειράς
Στρατηγικές του A	**A1**	-2	6	-2
	A2	5	1	1
Μέγιστο στήλης		5	6	**1 ≠ 5**

Από τον πίνακα τιμών είναι εμφανές ότι το παραπάνω παίγνιο που αναπαρίσταται δεν έχει σημείο ισορροπίας, αφού το μέγιστο των στηλών και το ελάχιστο των σειρών δεν ταυτίζονται. Άρα δεν είναι προφανής ο τρόπος με τον οποίο θα δράσει ο κάθε παίκτης. Δείτε γιατί :

Έστω ότι οι παίκτες ξεκινούν το παίγνιο με τις στρατηγικές A_1 και B_1 αντίστοιχα. Αυτό συνεπάγεται ότι ο παίκτης Α θα έχει ζημιά ίση με 2. Γνωρίζοντας ότι αυτή είναι η λιγότερο συμφέρουσα επιλογή θα αλλάξει στρατηγική και θα επιλέξει A_2 όπου θα έχει κέρδος 5. Με την ίδια λογική ο παίκτης Β όταν δει την αλλαγή του αντιπάλου του από A_1 σε A_2 θα αλλάξει κι αυτός στρατηγική διαλέγοντας Β2 ώστε να μειώσει τη ζημιά του από 5 σε 1. Βλέποντας την κίνηση αυτή ο Α θα αποφασίσει να αλλάξει και πάλι στρατηγική και να ακολουθήσει την A_1 για να κάνει το κέρδος του 6. Αυτές οι εναλλαγές δεν θα σταματήσουν γι’αυτό και η αρχική λύση του παιγνίου με στρατηγικές A_1 και B_1 ονομάζεται **ασταθής λύση**.

Στα παίγνια χωρίς σημείο ισορροπίας ο κάθε παίκτης θα ακολουθήσει μεικτή στρατηγική, θα προσδιορίσει δηλαδή την πιθανότητα με την οποία θα ακολουθήσει καθεμία από τις διαθέσιμες στρατηγικές του, ανεξάρτητα με το τι θα κάνει ο αντίπαλος του.

Ας θεωρήσουμε λοιπόν ότι ο Α επιλέγει αρχικά την στρατηγική A_1 με πιθανότητα $\chi < 1$ και άρα την A_2 με πιθανότητα (1- χ).

Αντίστοιχα ο Β επιλέγει την στρατηγική B_1 με πιθανότητα $y < 1$ και την B_2 με πιθανότητα (1- y).

Στρατηγικές του Α		Στρατηγικές του Β	
		B1	**B2**
		y	1-y
A1	x	-2	6
A2	1-x	5	1

Άριστη λύση για τον Α

Ορίζουμε τα προσδοκώμενα κέρδη των δύο παικτών. Ορίζουμε V (A , B_1) το προσδοκώμενο κέρδος του Α αν ο Β επιλέξει B_1, και θα είναι :

$$V(A, B_1) = -2\cdot x + 5\cdot(1-x) = -7\cdot x + 5$$

Αντίθετα αν ο Β επιλέξει B_2 τότε το προσδοκώμενο κέρδος για τον Α θα είναι :

$$V(A, B_2) = 6\cdot x + 1\cdot(1-x) = 5\cdot x + 1$$

Για να βρεθεί η βέλτιστη μεικτή στρατηγική για τον παίκτη Α θα πρέπει τα προσδοκώμενα κέρδη για τις παραπάνω δύο περιπτώσεις να είναι ίσα.

Θέλουμε,

$$V(A, B_1) = V(A, B_2) \Rightarrow$$

$$-7\cdot x + 5 = 5\cdot x + 1 \Rightarrow$$

$$12\cdot x = 4 \Rightarrow$$

$$\boxed{x = 1/3} \text{ ή } \boxed{(1-x) = 2/3}$$

Αυτό ερμηνεύεται ως εξής :

Ανεξάρτητα με τον τρόπο που θα δράσει ο Β , ο παίκτης Α θα πρέπει να ακολουθήσει τη στρατηγική A_1 με πιθανότητα 1/3 και την A_2 με πιθανότητα 2/3 που σημαίνει πως αν το παίγνιο παιχτεί κάποιο αόριστο αριθμό φορών σε βάθος χρόνου ο Α θα επιλέξει δύο στις τρεις φορές την επιλογή A_2 και μια την A_1.

Το προσδοκώμενο κέρδος του Α θα είναι λοιπόν :

$$V(A) = -2\cdot(1/3) + 5\cdot(2/3) = 8/3$$

Άριστη λύση για τον Β

Έχουμε,

$$V (B , A_1) = -2\cdot y + 6\cdot(1-y)$$

και

$$V (B , A_2) = 5\cdot y + 1\cdot(1-y)$$

Θέλουμε,

$$V (B , A_1) = V (B , A_2) \Rightarrow$$

$$-2\cdot y + 6\cdot(1-y) = 5\cdot y + 1\cdot(1-y) \Rightarrow$$

$$12\cdot y = 5 \Rightarrow$$

$$\boxed{y = 5/12} \text{ ή } \boxed{(1-y) = 7/12}$$

Με άλλα λόγια σε βάθος χρόνου ο παίκτης Β θα πρέπει στις δώδεκα φορές που θα παιχτεί το παιχνίδι τις επτά να επιλέξει τη στρατηγική B_2 και πέντε την στρατηγική B_1.

Το προσδοκώμενο κέρδος του Β θα είναι στην πραγματικότητα προσδοκώμενη ζημιά και θα ισούται με :

$$V (B) = -2\cdot(5/12) + 6\cdot(7/12) = 8/3$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Το προσδοκώμενο κέρδος του Α που ισούται με την προσδοκώμενη ζημιά του Β είναι 8.

6.5 Θεωρία παιγνίων στις διεθνείς σχέσεις – στρατηγικές

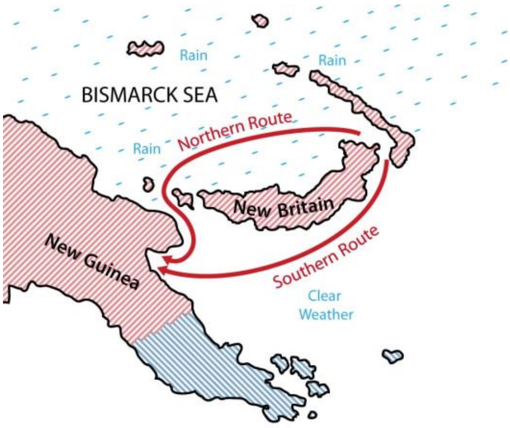
Η μάχη στη θάλασσα Bismarck

Η μάχη στη θάλασσα Bismarck έλαβε χώρα στις 2 Μαρτίου 1943 εν όψει του Β'Παγκοσμίου πολέμου. Η μάχη έληξε στις 4 Μαρτίου με τη νίκη της συμμαχίας Ηνωμένων Πολιτειών – Αυστραλίας εναντίον της Ιαπωνίας. Η συμμαχία κατάφερε να αποτρέψει την περεταίτω στελέχωση του στρατού της Ιαπωνίας στο Λάε της Νέας Γουινέας.

Θα εξηγήσουμε παρακάτω τη συμβολή της θεωρίας παιγνίων στη στρατηγική των δυο αντίπαλων ομάδων, θα αναπαραστήσουμε δηλαδή τη μάχη αυτή σαν ένα παιχνίδι όπου παίκτες θα είναι από τη μια η Ιαπωνία κι από την άλλη η συμμαχία Ην. Πολιτειών – Αυστραλίας.

Στόχος του στρατηγού Kenney (συμμάχων) είναι να αποτρέψει τον Ιαπωνικό στρατό να φτάσει στην Νέα Γουινέα , ενώ στόχος του Ιαπωνικού στρατού είναι να αποφύγει την επίθεση των αντιπάλων.

Δεδομένα : Υπάρχουν 2 τρόποι για να φτάσει ο στρατός από το Rabaul στο Λάε, βόρεια της Ν.Βρετανίας και νότια της Ν.Βρετανίας. Ο στρατηγός Kenney γνώριζε πως ο καιρός στην πρώτη διαδρομή από Rabaul στο Λάε θα ήταν βροχερός με μικρή ορατότητα ενώ για την νότια διαδρομή το δελτίο καιρού δεν έδειχνε τέτοια σημάδια. Από την πλευρά της Ιαπωνίας, ο χρόνος για να πάει από τη μια βάση στην άλλη ήταν ο ίδιος και είχε υπολογιστεί σε 3 ημέρες. Επομένως ο Kenney είχε 2 επιλογές, να στείλει το μεγαλύερο μέρος των βομβαρδιστικών αεροπλάνων από τη βόρεια πλευρά ή το αντίθετο.



Από τη στιγμή που υπάρχουν δύο διαδρομές για τον κάθε στρατό υπάρχουν συνολικά 4 διαφορετικά σενάρια για το αποτέλεσμα της μάχης.

Σενάριο 1

Το Ιαπωνικό κομβόι να πλεύσει βόρεια απ΄την Ν.Βρετανία και τα βομβαρδιστικά αεροπλάνα των συμμάχων να κινηθούν επίσης στη βόρεια διαδρομή. Αν συμβεί αυτό λόγω της χαμηλής ορατότητας ο Αμερικανοαυστραλικός στρατός θα καθυστερήσει να εντοπίσει το κομβόι και θα έχει στη διάθεσή του 2 μέρες για επίθεση.

Σενάριο 2

Το Ιαπωνικό κομβόι να επιλέξει την νότια διαδρομή ενώ τα βομβαρδιστικά αεροπλάνα του Kenney να πάνε βόρεια. Λόγω της καθυστέρησης που θα προκύψει από την λανθασμένη εκτίμιση του Kenney η πρώτη από τις τρεις διαθέσιμες μέρες για επίθεση θα πάει χαμένη και άρα ο χρόνος που θα του απομείνει να επιτεθεί είναι 2 ημέρες.

Σενάριο 3

Το Ιαπωνικό κομβόι να ταξιδέψει βόρεια και ο Kenney να στείλει τα αεροπλάνα του από τη νότια πλευρά της Ν.Βρετανίας. Τότε ο συνδυασμός της λανθασμένης εκτίμησης και της χαμηλής ορατότητας που θα συναντήσουν τα αεροπλάνα στη βόρεια πλευρά θα περιορίσει την δράση των συμμάχων σε 1 ημέρα.

Σενάριο 4

Το Ιαπωνικό κομβόι αλλά και ο στρατός του Kenney να κινηθούν νότια. Έτσι, οι σύμμαχοι θα έχουν και τις 3 ημέρες για να σταματήσουν την επάνδρωση του ιαπωνικού στρατού.

Θα αναλύσουμε στη συνέχεια σύμφωνα με την παρακάτω αναπαράσταση με ποιό τρόπο πήρε την τελική απόφαση κάθε παίκτης αυτού του παιγνίου.

		ΙΑΠΩΝΕΣ	
		Βόρεια	Νότια
KENNEY	Βόρεια	(2,-2)	(2,-2)
	Νότια	(1,-1)	(3,-3)

Το συγκεκριμένο πρόβλημα αντιμετοπίζεται ως ένα παιχνίδι σταθερού αθροίσματος δύο παικτών. Η βέλτιστη επιλογή για τον κάθε παίκτη θα προκύψει με τον αποκλεισμό της επιλογής που θα έχει για εκείνον λιγότερο νόημα.

Όπως και στο δίλημμα του φυλακισμένου που αναλύσαμε παραπάνω, η κάθε πλευρά δεν δίναται να γνωρίζει εξ αρχής την απόφαση της άλλης, για το λόγο αυτό θα προσπαθήσει να εντοπίσει τη λύση που για την ίδια να θεωρείται η πιο συμφέρουσα.

<u>Στρατηγική για τους Ιάπωνες</u>

Όπως έχουμε ήδη δείξει ο τρόπος για να βρούμε την καλύτερη επιλογή είναι να συγκρίνουμε τις επιλογές μεταξύ τους. Ο Ιαπωνικός στρατός αν επίλέξει την νότια διαδρομή δίνει στον αντίπαλο 2 ή 3 μέρες για επίθεση (συνολο στήλης 5) . Αν επιλέξει τη βόρεια διαδρομή δίνει 1 ή 2 μέρες για επίθεση (σύνολο στήλης 3).

Επομένως η αμιγής στρατηγική για εκείνους είναι η βόρεια διαδρομή.

<u>Στρατηγική του Kenney</u>

Ο Kenney αν επιλέξει τη βόρεια διαδρομή θα έχει στη διάθεσή του σε κάθε περίπτωση 2 ημέρες για επίθεση (σύνολο σειράς 4) και αν επιλέξει την νότια διαδρομή θα έχει 1 ή 3 μέρες για επίθεση (σύνολο σειράς 4). Παρατηρούμε ότι για τον Kenney δεν υπάρχει σαφής επιλογή, έτσι θα επιλέξει την κατεύθυνση σύμφωνα με την ανάλυση της απόφασης του αντιπάλου του.

Συνδυάζοντας τις δύο αυτές αναλύσεις συμφέρουσα επιλογή για τον Kenney είναι να στείλει τα αεροπλάνα του βόρεια.

Έχουμε λοιπόν την λύση του παιγνίου.

		ΙΑΠΩΝΕΣ	
		Βόρεια	Νότια
KENNEY	Βόρεια	(2,-2)	(2,-2)
	Νότια	(1,-1)	(3,-3)

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Κολέτσος Ιωάννης – Στόγιαννης Δημήτρης, «Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα» , Εκδόσεις Συμεών (2012)

2. Hillier – Lieberman, «Introduction to Operations Research», McGraw – Hill, 7th edition (2001)

3. Winston W.L., «Operations Research, Applications and Algorithms», Prentice Hall, 4th edition (2004)

4. Dennis Blumenfeld, «Operations Research Calculations Handbook», Crc Press, 2nd edition (2009)

5. A. Ravi Ravindran, «Operations Research and Science Handbook», Pennsylvania State University (2006)

6.Zhigeng Feng, Sifeng Liu, Hongxing Shi, Yi Lin, «Grey game theory and its applications in economic decision-making», Crc Press (2010)

7.Eric Rasmusen, «Games and Information», Basil Blackwell, 4th edition (2005)